可靠性数学引论

曹晋华 程侃 著

修订版

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

【可靠性数学引论】

ISBN 7-04-019162-8

9 787040 191622 >

定价 58.00元

可靠性数学引论

曹晋华　程　侃　著

修订版

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容摘要

本书简要介绍可靠性数学理论的基本概念和方法，是学习可靠性理论的一本理想入门书。内容包括常见寿命分布、不可修系统、可修系统、维修策略和可靠性寿命数据的统计分析。修订版增加了关于“寿命分布类研究”和“马尔可夫型可修系统剩余生命的极限分布”两个附录。

本书可作为高等院校理工科高年级学生和研究生的教学参考书，也可供有关研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

可靠性数学引论 / 曹晋华，程侃著. —2 版（修订本）
—北京：高等教育出版社，2006.7
ISBN 7-04-019162-8

Ⅰ.可… Ⅱ.①曹… ②程… Ⅲ.可靠性理论 - 应用数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.0213.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 068339 号

策划编辑 郭 伟 **责任编辑** 郭 伟 **封面设计** 张申申 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京奥鑫印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1986 年 1 月第 1 版
开 本	787×960 1/16		2006 年 7 月第 2 版
印 张	31.5	印 次	2006 年 7 月第 1 次印刷
字 数	550 000	定 价	58.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19162－00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号
高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

再版序言

本书的第一版 1986 年在科学出版社出版. 这次再版除了在个别地方做了少量的修正外, 主要是增加了两个附录即"寿命类分布研究"和"马尔可夫型可修系统剩余寿命的极限分布". 寿命类分布是近年来一个十分活跃的理论研究方向, 在第一版只介绍了一些最基本寿命分布类的定义及其相互包含关系, 本版在附录 A 中进一步讨论引入不同寿命分布类时的经验背景和理论上的依据, 以及不同寿命分布类的性质; 寿命分布类中的可靠度的界; 寿命分布间的贴近性研究. 本版增加附录B"马尔可夫型可修系统剩余寿命的极限分布", 则是因为这个极限分布是指数分布这一个结论在实际可靠性工程中具有重要的应用价值.

在此我们特别要感谢朱广田教授, 由于他的热心推荐, 才使本书得以在高等教育出版社再版. 我们也要感谢高等教育出版社的郭伟博士和其他同事, 他们为本书的再版做了大量的工作.

作　者

2005年12月

序

可靠性理论是以产品的寿命特征作为主要研究对象的一门综合性和边缘性学科，它涉及基础科学、技术科学和管理科学的许多领域．可靠性数学是可靠性理论的最重要的基础理论之一，近年来已发展成为应用概率、应用数理统计和运筹学的一个边缘分支学科．

在我国四个现代化的建设中，各行各业对产品可靠性问题愈来愈重视，迅速地推动了可靠性事业的发展．然而，由于过去可靠性的基础教育和理论研究十分薄弱，致使许多科技人员和管理人员对可靠性的基础知识了解较少，不能完全适应可靠性工作的需要．为此，我们编著了这本《可靠性数学引论》．

本书试图简要介绍可靠性数学的基础理论．在取材时，尽可能包括可靠性数学理论的基本内容、基本模型和方法．除了把文献中的结果加以统一整理外，还包含了一些新的尚未发表的结果．由于篇幅的限制，同时考虑读者的广泛性，不得不舍弃许多更深入的理论问题和某些虽然重要但较特殊的系统的讨论．

本书对可靠性的各种基本概念给出了严格的数学定义，对一些基本的结论和公式尽量给出数学证明．阅读本书只需具备微积分和初等概率论的基本知识．

本书大体上分为两部分，除第一章是基础性的以外，第二章至第八章主要讨论可靠性的概率模型，第九章至第十一章讨论可靠性的统计模型．具体安排如下：第一章介绍可靠性理论中常见的寿命分布．第二章至第五章讨论不可修系统，其中第二章讨论基本的不可修系统，并介绍了简单的最优分配问题，第三、

四、五章分别介绍分析大型系统的三种工具：网络、故障树和结构函数. 第六、七章讨论马尔可夫型和非马尔可夫型的基本的可修系统. 第八章介绍基本的维修策略模型. 最后三章初步介绍寿命数据的统计分析方法, 其中第九章讨论指数模型, 第十章讨论韦布尔分布等其它分布类型和非参数方法, 第十一章介绍可修系统故障数据的处理. 书末列出了主要参考文献.

对于有志于从事可靠性理论研究的读者, 这是一本较为合适的基础性的入门书. 本书可作为理工科高年级学生和研究生的教学参考书. 对数学专业(概率统计和运筹学等专门化)的学生, 本书可以作为可靠性数学的教材. 对非数学专业的学生, 可以选择一些章节作为选修课教材. 本书也可作为工程技术人员和数学工作者学习和了解可靠性基础理论的参考书.

本书的初稿曾以讲义的形式, 多次为理工科学生和研究生开过课, 也曾多次为高等院校教师和工程技术人员办过讲习班. 本书是在讲义的基础上, 广泛吸取许多读者的意见和建议, 经过全面修改和补充而成的. 在此, 我们谨向广大读者表示深切的谢意.

作者衷心感谢徐光辉同志的鼓励和支持, 他对本书的原稿提出过很多宝贵意见.

由于作者水平所限, 错误在所难免, 欢迎广大读者批评指正, 以求改进.

作　者

1984 年 6 月

于中国科学院应用数学研究所

目　录

引　言 1

§0.1 可靠性数学理论的背景和研究方法 1

§0.2 评定产品可靠性的数量指标 2

第一章　常见的寿命分布 7

§1.1 寿命分布和失效率函数 7

§1.1.1 剩余寿命分布 7

§1.1.2 失效率函数 8

§1.2 连续型寿命分布 11

§1.2.1 指数分布 11

§1.2.2 Γ 分布 13

§1.2.3 韦布尔分布 15

§1.2.4 极值分布 16

§1.2.5 对数正态分布 18

§1.2.6 截尾正态分布 20

§1.3 离散型寿命分布 22

§1.3.1 二点分布 22

§1.3.2 二项分布 22
§1.3.3 几何分布 23
§1.3.4 负二项分布 24
§1.3.5 泊松分布 24
§1.3.6 离散韦布尔分布 25
§1.4 多维寿命分布 25
§1.4.1 冲击模型 25
§1.4.2 二维指数分布 26
§1.5 寿命分布类 33

第二章 典型不可修系统 38
§2.1 串联系统和并联系统 38
§2.1.1 串联系统 38
§2.1.2 并联系统 40
§2.1.3 表决系统 42
§2.1.4 串-并联系统 43
§2.1.5 并-串联系统 44
§2.2 冷贮备系统 45
§2.2.1 转换开关完全可靠的情形 45
§2.2.2 转换开关不完全可靠的情形：开关寿命 0-1 型 48
§2.2.3 转换开关不完全可靠的情形：开关寿命指数型 50
§2.3 温贮备系统 52
§2.3.1 转换开关完全可靠的情形 52
§2.3.2 转换开关不完全可靠的情形：开关寿命 0-1 型 54
§2.3.3 转换开关不完全可靠的情形：开关寿命指数型 54
§2.4 两个特殊系统 56
§2.4.1 两个相依部件的并联系统 56
§2.4.2 有冷贮备部件的串联系统 57
§2.5 可靠度最优分配 57
§2.6 备件最优分配 63
§2.6.1 最少部件数的并联备份 64
§2.6.2 最小费用的备件最优分配 66
§2.6.3 动态规划方法 71

§2.7 两类失效部件组成的系统 77
§2.7.1 n 个部件并联排列的系统 78
§2.7.2 n 个部件串联排列的系统 79
§2.7.3 表决系统 ($k/n(G)$ 系统) 80
§2.7.4 串–并连接系统 81
§2.7.5 并–串连接系统 82

第三章 网络系统 84
§3.1 问题与基本假定 84
§3.1.1 基本定义 84
§3.1.2 问题及解的基本步骤 86
§3.1.3 对问题所作的基本假定 88
§3.1.4 等价问题 88
§3.2 直接法 89
§3.2.1 真值表法 90
§3.2.2 概率图法 91
§3.3 化简网络的方法 93
§3.3.1 串、并联简化 93
§3.3.2 无向网络的分解法 94
§3.3.3 有向网络的分解法 96
§3.3.4 Δ–Y 型简化 99
§3.4 求最小路的方法 103
§3.4.1 邻接矩阵法 104
§3.4.2 大型网络最小路的计算机算法 107
§3.4.3 最小路与最小割的互化 111
§3.5 可靠度的求法 113
§3.5.1 不交和算法 1 113
§3.5.2 不交和算法 2 117
§3.6 推广和进展 119

第四章 故障树分析 122
§4.1 引言 122

§4.2 建立故障树 123
§4.2.1 顶端事件 T 的选取 123
§4.2.2 故障树的建立 123
§4.3 故障树的数学描述 126
§4.3.1 一般讨论 127
§4.3.2 最小割表示 127
§4.3.3 最小路表示 128
§4.4 故障树的评定 129
§4.4.1 下行法 129
§4.4.2 上行法 131
§4.4.3 定量评定 132

第五章 单调关联系统理论 135

§5.1 单调关联系统的定义及性质 135
§5.1.1 单调关联系统定义 135
§5.1.2 对偶 137
§5.1.3 单调关联系统的基本性质 138
§5.1.4 故障树 141
§5.2 单调关联系统的数学描述 142
§5.2.1 最小路与最小割 143
§5.2.2 单调关联系统的最小路与最小割表示 144
§5.3 单调关联系统可靠度计算 147
§5.3.1 问题及一般讨论 147
§5.3.2 $h(\boldsymbol{p})$ 的性质 148
§5.3.3 单调关联系统可靠度 $h(\boldsymbol{p})$ 的求法 151
§5.3.4 可靠度的界 152
§5.4 部件相依时可靠度的界 154
§5.4.1 部件间的相协 154
§5.4.2 系统可靠度的界 158
§5.5 部件重要度 162
§5.5.1 结构重要度 163
§5.5.2 概率重要度 164
§5.5.3 B-P 重要度 165

§5.5.4 C 重要度和 P 重要度 165
§5.6 封闭性定理 166
§5.7 多状态单调关联系统 169
§5.7.1 定义及基本性质 169
§5.7.2 系统的随机性状 176
§5.7.3 系统可靠度的界 179

第六章 马尔可夫型可修系统 182
§6.1 马尔可夫型可修系统的一般模型 183
§6.1.1 马尔可夫过程的定义 183
§6.1.2 马尔可夫型可修系统的一般模型 185
§6.1.3 系统的瞬时可用度 186
§6.1.4 系统的稳态可用度 188
§6.1.5 系统的可靠度 191
§6.1.6 系统首次故障前平均时间 192
§6.1.7 系统的故障频度 193
§6.1.8 系统平均开工时间、平均停工时间和平均周期 197
§6.1.9 分析马尔可夫型可修系统的步骤 198
§6.2 单部件可修系统 201
§6.3 串联系统 205
§6.4 并联系统 212
§6.4.1 n 个同型部件一个修理设备的情形 212
§6.4.2 n 个同型部件 K 个修理设备的情形 219
§6.4.3 两个不同型部件的情形 222
§6.5 表决系统 224
§6.6 冷贮备系统 228
§6.6.1 n 个同型部件的情形 228
§6.6.2 两个不同型部件的情形 232
§6.7 温贮备系统 235
§6.7.1 n 个同型部件的情形 235
§6.7.2 两个同型部件的情形 239
§6.7.3 两个不同型部件的情形 240

§6.8 两个特殊系统 243
§6.8.1 有优先权的两部件冷贮备系统 243
§6.8.2 两个相依部件的并联系统 244

第七章 非马尔可夫型可修系统 250
§7.1 更新过程和马尔可夫更新过程 250
§7.1.1 更新过程 250
§7.1.2 马尔可夫更新过程 255
§7.2 单部件系统 258
§7.2.1 系统可靠度 259
§7.2.2 系统可用度 259
§7.2.3 $(0,t]$ 时间中系统平均故障次数 261
§7.3 n 个部件的串联系统 263
§7.3.1 系统可靠度 264
§7.3.2 系统可用度 265
§7.3.3 $(0,t]$ 时间中系统平均故障次数 266
§7.4 两个同型部件的冷贮备系统 266
§7.4.1 系统首次故障前时间分布 268
§7.4.2 系统可用度 270
§7.4.3 $(0,t]$ 时间内系统平均故障次数 271
§7.5 两个不同型部件的冷贮备系统 273
§7.5.1 系统首次故障前时间分布 276
§7.5.2 系统可用度 277
§7.5.3 $(0,t]$ 时间内系统平均故障次数 278
§7.6 两个不同型部件的并联系统 (I) 279
§7.6.1 系统首次故障前时间分布 281
§7.6.2 系统可用度 282
§7.6.3 $(0,t]$ 时间内系统平均故障次数 284
§7.7 两个不同型部件的并联系统 (II) 285
§7.7.1 系统首次故障前时间分布 289
§7.7.2 系统可用度 290
§7.7.3 $(0,t]$ 时间内系统平均故障次数 292

§7.8 两个三状态部件组成的串 (并) 联系统 293
§7.8.1 系统首次故障前时间分布 295
§7.8.2 系统可用度 297
§7.8.3 (0,t] 时间内系统平均故障次数 298
§7.9 一个基本模型: 补充变量方法介绍 301
§7.9.1 基本模型 301
§7.9.2 系统可用度 302
§7.9.3 系统可靠度 307
§7.10 可修单调关联系统 309
§7.10.1 系统可用度 309
§7.10.2 系统故障频度 310

第八章 维修策略研究 322
§8.1 连续时间的基本维修策略 322
§8.1.1 年龄更换策略 322
§8.1.2 成批更换策略 325
§8.1.3 故障小修的周期更换策略 328
§8.2 离散时间的基本维修策略 330
§8.2.1 年龄更换策略 331
§8.2.2 成批更换策略 333
§8.2.3 故障小修的周期更换策略 334
§8.3 考虑折扣率的年龄更换策略 336
§8.3.1 连续时间情形 336
§8.3.2 离散时间的情形 338
§8.4 考虑可用度的维修策略 340
§8.4.1 年龄维修策略 340
§8.4.2 备用部件的预防维修策略 342
§8.4.3 故障小修的周期维修策略 343
§8.5 两部件冷贮备系统的预防维修策略 345
§8.6 时间检测策略 350
§8.6.1 指数寿命分布的情形 351
§8.6.2 备用部件的检测策略: 一般寿命分布的情形 352

§8.7 备件定购策略 356
§8.7.1 与部件年龄有关的定购策略 356
§8.7.2 修理时间有限制的定购策略 359
§8.7.3 修理费用有限制的定购策略 360
§8.8 状态监视维修策略 361
§8.8.1 单部件系统: 离散时间情形 361
§8.8.2 两个部件的并联系统: 离散时间情形 362

第九章 寿命数据分析 —— 指数分布情形 365
§9.1 寿命数据分析的步骤和特点 366
§9.1.1 寿命数据分析的步骤 366
§9.1.2 寿命数据分析的特点 366
§9.2 预备知识 367
§9.2.1 有关分布的一些结果 368
§9.2.2 顺序统计量 369
§9.2.3 指数随机变量的顺序量 370
§9.2.4 参数估计问题 372
§9.3 指数模型参数估计问题的提法 373
§9.3.1 问题及记号 374
§9.3.2 推广到双参数指数模型 374
§9.4 (n,r) 试验方案 375
§9.4.1 单参数 $(n,r,$无$)$ 方案 375
§9.4.2 双参数 $(n,r,$无$)$ 方案 384
§9.4.3 单参数 $(n,r,$有$)$ 方案 388
§9.5 (n,t_0) 试验方案 390
§9.5.1 单参数 $(n,t_0,$无$)$ 方案 390
§9.5.2 单参数 $(n,t_0,$有$)$ 立案 394
§9.6 随机截尾时的估计 397
§9.6.1 一般讨论 398
§9.6.2 指数模型的情形 399
§9.7 指数模型的检验 400
§9.7.1 图检验法 401
§9.7.2 F 检验 401

§9.7.3 K-S 检验 403
§9.7.4 A-D 检验 404
§9.7.5 基于泊松过程的检验 405

第十章 寿命数据分析 —— 其它分布类型 406
§10.1 韦布尔分布的参数估计 406
§10.1.1 截尾数据下韦布尔模型参数的 MLE 407
§10.1.2 概率纸法 409
§10.2 极值分布的参数估计 413
§10.2.1 极值分布的参数估计 413
§10.2.2 极值分布的分布类型检验 415
§10.3 Γ 分布的参数估计 417
§10.4 对数正态及正态分布的参数估计 419
§10.4.1 完全样本情形 419
§10.4.2 截尾数据下参数的 MLE 420
§10.5 可靠度的非参数估计 423

第十一章 可修系统故障数据分析 430
§11.1 可修系统故障数据的特点 431
§11.2 描述可修系统的随机过程模型 431
§11.2.1 时齐泊松过程模型 432
§11.2.2 非时齐泊松过程模型 433
§11.2.3 更新过程模型 438
§11.2.4 可修系统故障数据分析步骤 438
§11.3 HP 模型的判别 438
§11.3.1 观察定时结束的情形 439
§11.3.2 观察定数结束的情形 440
§11.3.3 基于 HP 上的指数模型检验 441
§11.4 RP 模型的判别 442
§11.4.1 图示法 442
§11.4.2 趋势检验 442
§11.4.3 RP 的检验 444

§11.5 两类特殊 NHP 模型的统计分析 445
§11.5.1 韦布尔过程 445
§11.5.2 第二类特殊的 NHP 448
§11.5.3 例 449
§11.6 推广及某些应用 451
§11.6.1 k 个独立系统的情形 451
§11.6.2 β 的条件 MLE 452
§11.6.3 应用 1: 可靠性增长模型 454
§11.6.4 应用 2: 工业事故的统计分析 454

附录 A 寿命分布类研究 455
§A.1 寿命分布类的引进 455
§A.2 寿命分布类中的可靠度界 461
§A.2.1 已知均值时的可靠度界 463
§A.2.2 已知头二阶矩时的可靠度界 464
§A.3 寿命分布间贴近性研究 464

附录 B 马尔可夫型可修系统剩余寿命的极限分布 466
§B.1 引言 466
§B.2 主要结果 467
§B.3 特例 469

参考文献 473

人名对照表 479

缩写语表 480

索 引 482

引　言

§0.1 可靠性数学理论的背景和研究方法

现代技术的不断进步, 推动了可靠性理论迅速发展, 也促成可靠性数学理论日趋完备.

可靠性数学理论大约起源于 20 世纪 30 年代. 最早被研究的领域之一是机器维修问题 [82],[66]. 另一个重要的研究工作是将更新论应用于更换问题 [55],[30]. 此外, 在 30 年代韦布尔 (Weibull)[80]、龚贝尔 (Gumbel) [44] 和爱泼斯坦 (Epstein)[37] 等研究了材料的疲劳寿命问题和有关的极值理论.

可靠性问题只是在第二次世界大战前后, 才真正开始受到重视. 其基本原因之一是军事技术装备越来越复杂. 复杂化的目的在于使技术装备具有更高的性能. 但是装备越复杂, 往往就越容易发生故障. 到了复杂化的程度严重影响设备可靠性时, 设备复杂化也就失去了意义. 因此, 复杂化和可靠性之间存在着尖锐的矛盾. 另一个基本原因, 新的军事技术装备的研制过程是一场争时间争速度的竞赛. 但是研制周期又很长, 经不起研制过程的重大反复. 这就需要有一整套科学的方法, 将可靠性的考虑贯穿于研制、生产和使用维修的全过程. 因此复杂设备的可靠性成了相当严重而又迫切需要解决的问题. 从 50 年代至今, 可靠性理论这门新兴学科以惊人的速度发展着, 各方面都已积累了丰富的经验. 可靠性理论的应用已从军事技术扩展到国民经济的许多领域. 随着可靠性理论的日

趋完善, 用到的数学工具也越来越深刻. 可靠性数学已成为可靠性理论的最重要的基础理论之一.

要提高产品的可靠性, 需要在材料、设计、工艺、使用维修等多方面去努力. 因此可以说可靠性的改善主要是一个工程问题和管理问题. 可靠性数学在其中所占的分量并不是很大的. 然而, 作为一个必不可少的工具, 可靠性数学在可靠性理论中有着特殊的地位. 可靠性理论是以产品的寿命特征作为其主要研究对象, 这就离不开对产品寿命的定量分析和比较, 从这种意义上来看, 可以说, 可靠性理论是一门定量的科学. 可靠性的许多基本概念的定义是用数学术语给出的, 不理解这些基本概念的严格数学定义, 往往会在实际工作中产生概念混乱. 同时, 一个可靠性工作者只有熟悉可靠性理论中最基本的数学模型和数学方法, 才有可能在工作中根据具体问题, 提出既不脱离实际, 又在数学上可能解决的合理的数学模型. 因此, 可靠性数学与可靠性工程、可靠性管理等其它手段紧密配合, 就能发挥其应有的作用.

一般来说, 产品的寿命是一个非负随机变量. 研究产品寿命特征的主要数学工具是概率论. 也许有人会说, 可靠性数学只是概率论的一个简单应用, 不值得去特别地发展它. 美国的可靠性数学专家巴罗 (Barlow) 和普劳斯钦 (Proschan) 指出 [19]: 这种目光是短浅的, 就像有人说, 概率论本身只是标准的数学理论的一个简单应用, 而不值得去特别地发展它的情形一样. 可靠性问题有它本身的结构, 且反过来刺激了概率论中一些新领域的发展. 因此, 可靠性数学成了应用概率和应用数理统计的一个重要分支. 同时, 在可靠性的研究中, 又与决策问题和各种最优化问题有紧密的关系, 这就决定了可靠性数学又是运筹学的一个重要分支.

在解决可靠性问题中所用到的数学模型大体可分为两类: 概率模型和统计模型. 概率模型是指, 从系统的结构及部件的寿命分布、修理时间分布等等有关的信息出发, 来推断出与系统寿命有关的可靠性数量指标, 进一步可讨论系统的的最优设计、使用维修策略等等. 统计模型是指, 从观察数据出发, 对部件或系统的寿命等进行估计、检验等. 本书第九、十、十一章讨论的是统计模型, 其它各章的绝大部分是讨论概率模型的.

§0.2 评定产品可靠性的数量指标

粗糙地讲, 由一些基本部件 (其中也可以包括人) 组成的完成某种指定功能的整体, 称之为**系统**. 系统的概念是相对的. 例如一个核电站可以看成一个系统,

其中的安全保护装置可以看成是它的一个部件. 但是, 如果我们单独地研究安全保护装置, 则可以把它看成是一个系统, 它也是由某些部件组成的完成某种指定功能的整体. 在可修系统中, 组成系统的部件不仅包括物, 也可以包括人 —— 修理工.

产品 (部件或系统) 丧失规定功能称为**失效**或**故障**.通常, 对不可修产品称失效, 对可修产品则称故障. 在讨论具体问题时, 往往难以明确加以区分. 因此, 我们把 "失效" 和 "故障" 看成是同义词.

产品的寿命是与许多因素有关的. 例如, 该产品所用的材料, 设计和制造工艺过程中的各种情形, 以及产品在贮存和使用时的环境条件等. 寿命也与产品需要完成的功能有关. 当产品丧失了规定的功能, 即当产品失效, 它的寿命也就终止. 显然对同一产品, 在同样的环境条件下使用, 由于规定的功能不同, 产品的寿命将会不同.

我们通常用一个非负随机变量 X 来描述产品的寿命, X 相应的分布函数为

$$F(t) = P\{X \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

有了寿命分布 $F(t)$, 我们就知道产品在时刻 t 以前都正常 (不失效) 的概率, 即产品在时刻 t 的生存概率

$$R(t) = P\{X > t\} = 1 - F(t) = \bar{F}(t) \tag{2}$$

其中 $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ 是本书中多次要用到的简写记号. (2) 式的 $R(t)$ 称为该产品的**可靠度函数**或**可靠度**. 由公式 (2) 可知, $R(t)$ 是产品在时间 $[0, t]$ 内不失效的概率. 因此, 可靠度也可定义为: 产品在规定的条件下, 在规定的时间内, 完成规定功能的概率. 对于一个给定的产品, 规定的条件和规定的功能确定了产品寿命 X 这个随机变量, 规定的时间就是公式 (2) 中的时间 $[0, t]$. 公式 (2) 是这里可靠度定义的数学表达形式. 产品的**平均寿命**是

$$EX = \int_0^\infty t dF(t) \tag{3}$$

不可修产品的主要可靠性数量指标是可靠度及平均寿命 (记为 MTTF). 假定时刻 $t = 0$ 产品开始正常工作, 若 X 是它的寿命, 则产品的运行随时间的进程如图 0.1 所示. 由于没有修理的因素, 产品一旦失效便永远停留在失效状态. 此时, 可靠度公式 (2) 及平均寿命公式 (3) 描述了不可修产品的可靠性特征.

可修产品的情形要复杂些. 由于有修理的因素, 产品故障后可以予以修复. 此时产品的运行随时间的进程是正常与故障交替出现的. 如图 0.2 所示, 其中

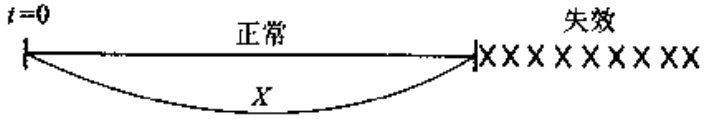


图 0.1 不可修产品

X_i 和 Y_i 分别表示第 i 个周期的开工时间 (up-time) 和停工时间 (down-time), $i = 1, 2, \cdots$. 在开工时间内产品处于正常状态, 在停工时间内产品处于故障状态. 一般, $X_1, X_2, \cdots$ 或 $Y_1, Y_2, \cdots$ 不一定是同分布的. 描述可修产品的可靠性数量指标主要有:

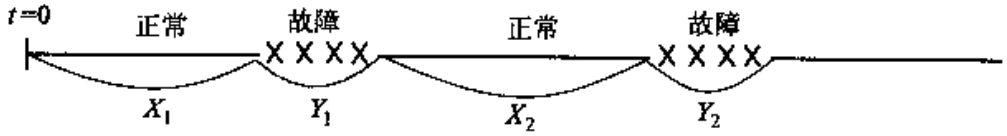


图 0.2 可修产品

1) 首次故障前时间分布

产品**首次故障前时间** X_1 **的分布为**

$$F_1(t) = P\{X_1 \leqslant t\} \tag{4}$$

首次故障前平均时间(记为 MTTFF) 是

$$\text{MTTFF} = EX_1 = \int_0^\infty t dF_1(t) \tag{5}$$

对可修产品, 我们也常常用可靠度的概念, 它定义为

$$R(t) = P\{X_1 > t\} = \bar{F}_1(t) \tag{6}$$

它表示可修产品在 $[0, t]$ 时间内都正常的概率, 与前面可靠度的一般定义一致.

如果一个可修产品一旦发生故障将要产生灾难性后果的情形, 首次故障前时间分布及其均值是该产品最重要的可靠性数量指标.

2) 可用度

对于一个只有正常和故障两种可能状态的可修产品, 我们可以用一个二值函数来描述它. 对 $t \geqslant 0$, 令

$$X(t) = \begin{cases} 1, \text{若时刻 } t \text{ 产品正常} \\ 0, \text{若时刻 } t \text{ 产品故障} \end{cases}$$

产品在时刻 t 的**瞬时可用度**定义为

$$A(t) = P\{X(t) = 1\} \tag{7}$$

即时刻 t 产品处于正常状态的概率. 瞬时可用度 $A(t)$ 只涉及时刻 t 产品是否正常, 对 t 以前产品是否发生过故障并不关心.

在瞬时可用度 $A(t)$ 的基础上, 进一步定义 $[0,t]$ 时间内**平均可用度**为

$$\tilde{A}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t A(u)du \tag{8}$$

若极限

$$\tilde{A} = \lim_{t\to\infty} \tilde{A}(t) \tag{9}$$

存在, 则称 $\tilde{A}$ 为**极限平均可用度**.而若极限

$$A = \lim_{t\to\infty} A(t) \tag{10}$$

存在, 则称其为**稳态可用度**.显然, 若稳态可用度 A 存在, 则极限平均可用度必存在, 且有 $\tilde{A} = A$.

可用度是可修产品重要的可靠性指标之一. 在工程应用中特别感兴趣的是稳态可用度. 它表示产品经长期运行, 大约有 A 的时间比例处在正常状态.

3) $(0,t]$ 时间内产品故障次数的分布

可修产品随时间的进程是一串正常和故障交替出现的过程. 因此, 对 $t>0$, 产品在 $(0,t]$ 时间内故障次数 $N(t)$ 是一个取非负整数值的随机变量. 产品在 $(0,t]$ 时间内**故障次数的分布**为

$$P_k(t) = P\{N(t) = k\}, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{11}$$

产品在 $(0,t]$ 时间内**平均故障次数**为

$$M(t) = EN(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(t) \tag{12}$$

当 $M(t)$ 导数存在时, 称

$$m(t) = \frac{d}{dt}M(t) \tag{13}$$

为产品的**瞬时故障频度**.在工程应用中, 更感兴趣的是产品的**稳态故障频度**.

$$M = \lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \tag{14}$$

如果极限存在的话.

$M(t)$ 和 M 也是重要的可靠性数量指标. 例如, 在更换问题的研究中, 它告诉我们大约需要准备多少个备件.

可修产品的可靠性数量指标还有很多. 例如, **平均开工时间** (MUT 或 MTBF) 是

$$\mathrm{MUT} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} EX_i \tag{15}$$

平均停工时间为

$$\mathrm{MDT} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} EY_i \tag{16}$$

平均周期是

$$\mathrm{MCT} = \mathrm{MUT} + \mathrm{MDT} \tag{17}$$

除了反映可修产品自身的可靠性数量指标外, 有时, 我们还需要反映修理设备 (修理工) 忙闲程度的有关指标: 修理设备忙的**瞬时概率**

$$B(t) = P\{\text{时刻 } t \text{ 修理设备忙}\} \tag{18}$$

和修理设备忙的稳态概率

$$B = \lim_{t\to\infty} B(t) \ ,$$

若此极限存在. B 表示产品经长期运行大约有多长的时间比例修理设备是忙的. $B(t)$ 或 B 是反映修理能力的配备是否合理的一个数量指标. 这些指标在形式上与瞬时可用度和稳态可用度一样, 在求法上也类似.

对一个较为复杂的系统, 瞬时可靠性数量指标往往不容易求到. 在多数的场合, 只能求出其相应的拉普拉斯变换 (Laplace 变换, 简记为 L 变换) 或拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换 (Laplace-Stieltjes 变换, 简记为 LS 变换), 它们一般不容易反演出来. 但是有关的平均值或稳态指标通常比较容易得到.

第一章　常见的寿命分布

本章讨论常见的寿命分布,其中包括连续型的指数分布、Γ 分布、韦布尔分布、极值分布、对数正态分布和截尾正态分布, 离散型的二项分布、几何分布、负二项分布、泊松分布和离散韦布尔分布. 此外, 还介绍了二维指数分布, 及寿命分布类的概念.

§1.1 寿命分布和失效率函数

§1.1.1 剩余寿命分布

在引言中, 我们已经引进了产品的寿命和寿命分布的概念. 在那里公式 (3) 给出的平均寿命可以进一步写为

$$EX = \int_0^\infty \bar{F}(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt \tag{1}$$

这是因为

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty tdF(t) = \int_0^\infty \int_0^t dudF(t) \\ &= \int_0^\infty \int_u^\infty dF(t)du = \int_0^\infty [1 - F(u)]du \end{aligned}$$

假定产品工作到时刻 t 仍然正常的条件下, 用 $F_t(x)$ 表示产品的**剩余寿命分布**.于是有

$$F_t(x)=P\{X-t\leqslant x|X>t\}=\begin{cases}\dfrac{F(x+t)-F(t)}{1-F(t)}, & \text{当 } x\geqslant 0\\ 0, & \text{当 } x<0\end{cases} \tag{2}$$

或

$$\bar{F}_t(x)=\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}, \quad \text{当 } x\geqslant 0 \tag{3}$$

易验证, 对固定的 $t\geqslant 0$, $F_t(x)$ 是关于 x 的一个通常的分布函数. 用公式 (1), 产品的**平均剩余寿命**为

$$\begin{aligned}m(t)&=E\{X-t|X>t\}=\int_0^\infty x dF_t(x)=\int_0^\infty \bar{F}_t(x)dx\\&=\int_0^\infty \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}dx=\int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}dx\\&=\frac{1}{\bar{F}(t)}\{\mu-\int_0^t \bar{F}(x)dx\}\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\mu=EX$ 为产品的平均寿命.

§1.1.2 失效率函数

为了讨论简单起见, 在这里我们只对连续型的随机变量和离散型的随机变量, 分别来定义失效率函数.

设产品的寿命为非负连续型随机变量 X, 其分布函数为 $F(t)$. 密度函数为 $f(t)$. 定义

$$r(t)=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad \text{对 } t\in\{t:F(t)<1\} \tag{5}$$

为随机变量 X 的**失效率函数**, 简称**失效率**(或**故障率**).

$r(t)$ 有如下的概率解释. 若产品工作到时刻 t 仍然正常, 则它在 $(t,t+\Delta t]$ 中失效的概率为

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant t+\Delta t|X>t\}&=\tfrac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}\\&\sim\tfrac{f(t)\Delta t}{\bar{F}(t)}=r(t)\Delta t\end{aligned} \tag{6}$$

因此, 当 Δt 很小时, $r(t)\Delta t$ 表示该产品在 t 以前正常工作的条件下, 在 $(t, t+\Delta t]$ 中失效的概率.

$r(t)$ 还有另一个概率解释. 让一批 N 个同型产品同时独立地工作. 记 $n(t)$ 为产品在 $(0, t]$ 时间内的失效个数, 显然它是一个非负整值随机变量. 先令 $N \to \infty$, 再令 $\Delta t \to 0$, 以概率 1 有

$$\frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{N-n(t)} \cdot \frac{1}{\Delta t} \to r(t) \tag{7}$$

这是由于

$$\frac{n(t)}{N} \to F(t), \quad \text{当} N \to \infty$$

因此, 当 $N \to \infty$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{N-n(t)} \cdot \frac{1}{\Delta t} \\ =\ &\frac{\dfrac{n(t+\Delta t)}{N}-\dfrac{n(t)}{N}}{1-\dfrac{n(t)}{N}} \cdot \frac{1}{\Delta t} \\ \to\ &\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)} \cdot \frac{1}{\Delta t} \end{aligned}$$

当 $\Delta t \to 0$, 上式右端又趋于 $r(t)$.

在工程应用中, 将失效率定义为: "产品工作到某一时刻, 单位时间内发生失效的比例". 公式 (6) 或 (7) 的表示, 有助于我们对此失效率定义的正确理解.

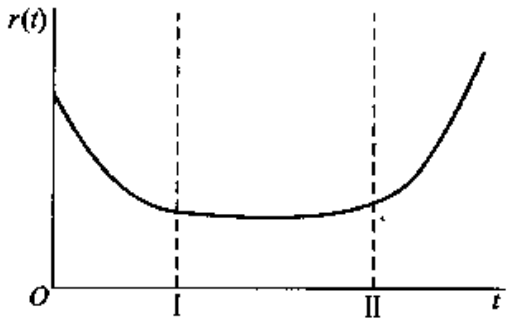


图 1.1 典型的失效率函数

典型的失效率函数见图 1.1, 它呈现出浴盆形状, 所以常称作浴盆曲线. 从图可见, 在 I 以前, $r(t)$ 呈下降的趋势; 这是早期失效期, 主要是由于设计错误、

工艺缺陷、装配上的问题, 或由于质量检验不严等原因引起的. 由于在这段时间中产品的失效率很高, 所以工厂中实际采用筛选的办法剔除一批不合格品, 以减少出厂产品的早期失效. 在 I 和 II 之间一段, $r(t)$ 基本上保持常数, 这是偶然失效期. 这段时间是产品最佳的工作阶段. 在 II 以后, $r(t)$ 又有上升趋势, 这是磨损失效期. 由于老化、疲劳和磨损等, 产品性能逐渐变劣. 此时应采取维修或更换等手段来维持产品正常运行.

根据 (5) 式, 有

$$r(t) = -\frac{d}{dt}\ln \bar{F}(t)$$

解之得

$$\bar{F}(t) = C\ \exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\}$$

如果 $F(0) = 0$, 则 $C = 1$, 得到

$$\bar{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(u)du\right\} \tag{8}$$

因此, 当密度函数存在, 且 $F(0) = 0$, 则 $r(t)$ 与 $F(t)$ 由公式 (5) 和 (8) 互相唯一确定.

在许多失效现象的研究中, 产品的寿命是离散型的. 如周期地检查产品性能我们才能发现失效的情形. 此时产品的寿命可以认为是周期长度的非负整数倍, 因此寿命是离散型的随机变量. 对此同样可研究失效率函数.

设产品的寿命 X 遵从概率分布

$$p_k = P\{X = k\},\quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

此时失效率函数定义为

$$r(k) = P\{X = k | X \geqslant k\} = \frac{p_k}{q_k},\quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{10}$$

其中

$$q_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$$

由定义, 显然 $r(k) \leqslant 1$.

我们经常对单调失效率函数的情形特别感兴趣. 若非负随机变量的失效率函数 $r(t)$ 是 t 的增函数 (即非减函数), 则称分布函数 $F(t)$ 属于**递增失效率类**,

记作 $F \in \{\text{IFR}\}$. 若 $r(t)$ 是 t 的减函数 (即非增函数), 则称 $F(t)$ 属于**递减失效率类**, 记作 $F \in \{\text{DFR}\}$.

对于离散型寿命分布的随机变量, 根据 $r(k)$ 的单调性, 类似可定义 IFR 类和 DFR 类. 在 §1.5 我们还将 IFR 和 DFR 的概念推广到更一般的情形.

§1.2 连续型寿命分布

本节讨论可靠性中经常遇到的连续型寿命分布. 它们有: 指数分布, Γ 分布, 韦布尔分布, 极值分布, 对数正态分布和截尾正态分布.

§1.2.1 指数分布

非负随机变量 X 有密度函数

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, t \geqslant 0 \tag{1}$$

则称 X 遵从参数 λ 的指数分布. 显然 X 的分布函数是

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0$$

均值和方差分别为

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}X = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2}$$

指数分布可以很好地用来描述某些电子元器件的寿命. 它的一个最重要的性质是所谓 "无记忆性".即若一个产品的寿命遵从指数分布, 当它使用了时间 t 以后如果仍正常, 则它在 t 以后的剩余寿命与新的寿命一样遵从原来的指数分布. 用严格的数学形式表示为

定理 1.2.1 *若 $F(t)$ 是非负非退化的随机变量 X 的分布函数, 则*

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, t \geqslant 0$$

的充分必要条件是

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}, \text{ 对所有} s, t \geqslant 0 \tag{3}$$

证明 必要性. 因为 $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$, 显然有

$$\frac{\bar{F}(s+t)}{\bar{F}(t)} = \bar{F}(s), \quad \text{对所有} s, t \geqslant 0$$

此即 (3) 式.

充分性. 记 $\varphi(t)=P\{X>t\}$. 故公式 (3) 可写为

$$\varphi(s+t)=\varphi(s)\varphi(t),\quad \text{对所有}s,t\geqslant 0 \tag{4}$$

下面我们来解这函数方程. 由 (4), 对任意正整数 m,n 及 $t>0$, 有

$$\varphi(mt)=\varphi^m(t),\quad \varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\varphi^m\left(\frac{1}{n}\right),\quad \varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\varphi^{1/n}(1)$$

故对任意有理数 $t>0$, 有

$$\varphi(t)=\varphi^t(1) \tag{5}$$

进一步, 对任意实数 $t>0$, 存在 $t_n\to t-0,\tilde{t}_n\to t+0$, 其中 $t_n,\tilde{t}_n$ 均为有理数, 且当 $n\to\infty$, 有

$$\varphi(t_n)=\varphi^{t_n}(1)\to\varphi^t(1)$$
$$\varphi(\tilde{t}_n)=\varphi^{\tilde{t}_n}(1)\to\varphi^t(1)$$

由于 $\varphi(t)$ 的非增性, $\varphi(\tilde{t}_n)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(t_n)$. 令 $n\to\infty$, 即知 (5) 式对任意实数 $t>0$ 成立. 由于 X 非退化, 知 $\varphi(t)$ 不恒为 0, 也不恒为 1. 又由 (5) 式, 显然 $0<\varphi(1)<1$. 故存在实数 $\lambda>0$, 使 $\varphi(1)=e^{-\lambda}$. 于是 $\varphi(t)=e^{-\lambda t}$. 证毕.

定理 1.2.1 中函数方程 (4) 可在更广的条件下求解 [4].

容易证明以下的定理

定理 1.2.2 *若 $F(t)$ 是连续型寿命分布, $F(0)=0$, 则*

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad \lambda>0,t\geqslant 0$$

的充分必要条件是

$$r(t)=\lambda>0,\quad \text{对所有}\ t\geqslant 0$$

与指数分布有密切联系的一类随机过程是泊松 (Poisson) 过程. 为以后有关章节的需要, 我们简单介绍一下泊松过程的定义.

定义 1.2.1 假设某一事件随时间相继地出现. 若相邻两个事件之间的时间区间都相互独立, 并且遵从相同的指数分布 $1-e^{-\lambda t}$. 令 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 中该事件出现的次数. 则 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 称为强度或参数为 λ 的**泊松过程**.

泊松过程的第二个定义 令 $N(t)$ 表示时间区间 $(0,t]$ 中出现的事件个数. $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 称作强度为 λ 的泊松过程, 如果它满足

1) $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 具有平稳独立增量;

2) 对时刻点 s 和 $t(s < t)$, 在时间区间 $(s, t]$ 中出现事件个数 $N(t) - N(s)$ 遵从均值为 $\lambda(t-s)$ 的泊松分布

$$P\{N(t) - N(s) = k\} = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6}$$

泊松过程的第三个定义. 令 $N(t)$ 表示时间区间 $(0, t]$ 中出现的事件数目假设

1) $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 具有独立增量;

2) $(t, t+\Delta t]$ 中出现一个事件的概率是 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$;

3) $(t, t+\Delta t]$ 中出现两个或两个以上事件的概率是 $o(\Delta t)$,

则随机过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程.

泊松过程的以上三个定义是完全等价的 [20]. 由泊松过程的定义, 容易得如下性质:

设 $N_i(t)$ 为强度 λ_i 的泊松过程 $(i = 1, 2)$, 且 $N_1(t)$, $N_2(t)$ 互相独立, 则 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程.

§1.2.2 Γ 分布

当非负随机变量 X 有密度函数 (见图 1.2(a))

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0; \lambda, \alpha > 0 \tag{7}$$

其中 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, 则称 X 遵从参数为 (α, λ) 的 Γ 分布, 其中 α 称作形状参数, λ 为尺度参数. 简记为 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda; t)$. 显然

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}X = \frac{\alpha}{\lambda^2} \tag{8}$$

易见 $\Gamma(1, \lambda; t)$ 分布就是参数 λ 的指数分布. 而由如下定理知 $\Gamma(n, \lambda; t)$ 可以看成是 n 个相互独立遵从指数分布的随机变量之和的分布.

定理 1.2.3 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $\Gamma(1, \lambda; t)$, 则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 遵从 $\Gamma(n, \lambda; t)$ 分布, 其分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad t \geqslant 0$$

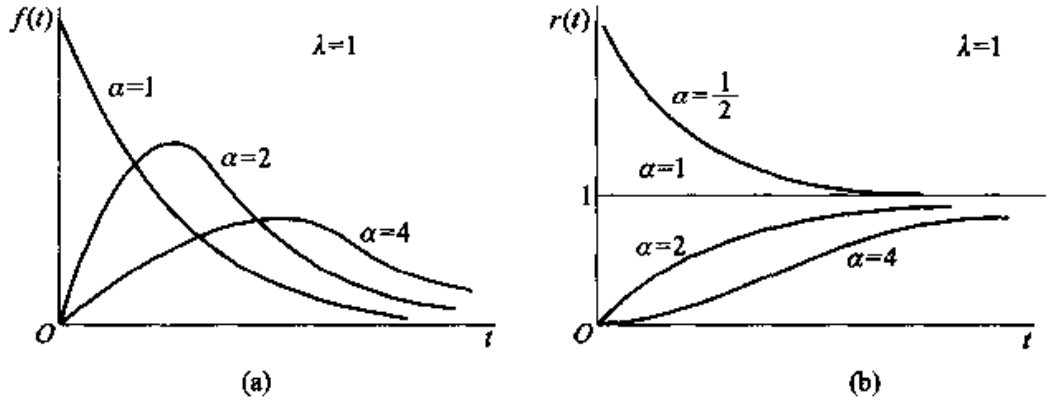


图 1.2

证明 我们用归纳法来证明 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的密度函数是

$$f_n(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t},\quad n=1,2,\cdots$$

当 $n=1$ 时, X_1 的密度函数为 $f_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, 以上结论自然成立. 假设 $n=k$ 时, $X_1+X_2+\cdots+X_k$ 的密度为

$$f_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$$

则当 $n=k+1$ 时, $X_1+X_2+\cdots+X_k+X_{k+1}=(X_1+X_2+\cdots+X_k)+X_{k+1}$ 的密度为

$$\begin{aligned}f_k(t)*f_1(t)&=\int_0^t f_1(t-u)f_k(u)du\\&=\int_0^t\lambda e^{-\lambda(t-u)}\frac{\lambda(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda u}du=f_{k+1}(t)\end{aligned}$$

其中符号

$$f(t)*g(t)=\int_0^t g(t-u)f(u)du$$

表示密度函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积.由密度函数 $f_n(t)$, 立即可求出其分布函数. 证毕.

定理 1.2.4 对 $\Gamma(\alpha,\lambda;t)$, 有

$$\frac{1}{r(t)}=\int_0^\infty(1+\frac{u}{t})^{\alpha-1}e^{-\lambda u}du$$

当 $0<\alpha\leqslant 1$, $\Gamma(\alpha,\lambda;t)\in\{\mathrm{DFR}\}$; 当 $\alpha\geqslant 1$, $\Gamma(\alpha,\lambda;t)\in\{\mathrm{IFR}\}$.

证明 由失效率 $r(t)$ 的定义

$$\frac{1}{r(t)}=\frac{\bar{F}(t)}{f(t)}=\int_t^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda(x-t)}dx$$
$$=\int_0^{\infty}(1+\frac{u}{t})^{\alpha-1}e^{-\lambda u}du$$

由上式右端被积函数知, 当 $t\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{r(t)}\nearrow\frac{1}{\lambda},\ (0<\alpha\leqslant 1);\qquad \frac{1}{r(t)}\searrow\frac{1}{\lambda},\ (\alpha\geqslant 1)$$

故当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, $r(t)\searrow$; 当 $\alpha\geqslant 1$ 时, $r(t)\nearrow$. 证毕.

$\Gamma(\alpha,\lambda;t)$ 的失效率见图 1.2(b).

§1.2.3 韦布尔分布

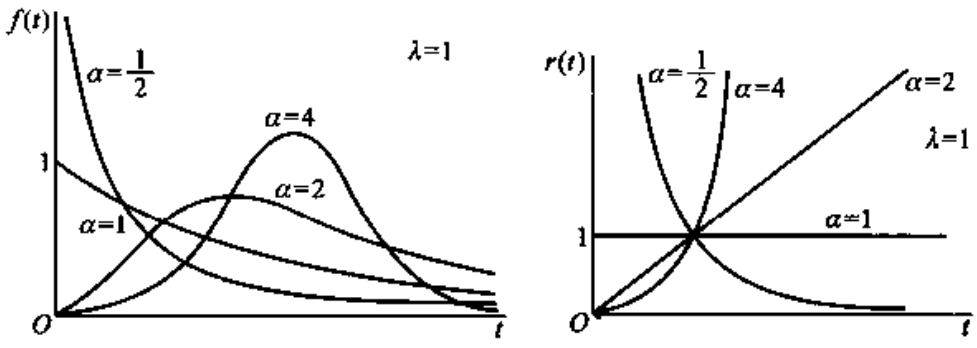
当非负随机变量 X 有密度函数 (见图 1.3(a))

$$f(t)=\lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\alpha}},\quad t\geqslant 0;\alpha,\lambda>0 \tag{9}$$

和分布函数

$$F(t)=1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}},\quad t\geqslant 0 \tag{10}$$

则称 X 遵从参数 (α,λ) 的韦布尔分布, 记为 $W(\alpha,\lambda;t)$. 其中 α 称为形状参数, λ 称为尺度参数. 当 $\alpha=1$ 时, $W(1,\lambda;t)$ 就是参数为 λ 的指数分布.



(a) (b)

图 1.3

韦布尔分布是可靠性中广泛使用的连续型分布, 它可以用来描述疲劳失效, 真空管失效和轴承失效等寿命分布. 它是 1939 年由韦布尔首次引进的. 易算得

$$\begin{cases} EX = \dfrac{1}{\lambda}\Gamma(\dfrac{1}{\alpha}+1) \\ \mathrm{Var}X = \dfrac{1}{\lambda^2}\left\{\Gamma(\dfrac{2}{\alpha}+1) - \Gamma^2(\dfrac{1}{\alpha}+1)\right\} \end{cases} \tag{11}$$

其失效率为

$$r(t) = \lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1}, \quad t \geqslant 0 \tag{12}$$

易见, 当 $\alpha > 1$ 时, $r(t)$ ↗; 当 $\alpha < 1$ 时, $r(t)$ ↘; 当 $\alpha = 1$ 时, $r(t) = \lambda$. 韦布尔分布的失效率 $r(t)$ 见图 1.3(b).

韦布尔分布可以作为如下的极限分布而引进.

定理 1.2.5 设非负随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $F(t)$, 且

$$\frac{F(t)}{ct^\alpha} = 1 + o(1), \text{ 当} t \to 0\text{时}, c, \alpha > 0$$

令 $Y_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$, 则对任意 $t \geqslant 0$, 有

$$P\{(nc)^{\frac{1}{\alpha}}Y_n > t\} \to e^{-t^\alpha}, \quad \text{当} n \to \infty$$

证明 易见

$$\begin{aligned} P\{(nc)^{\frac{1}{\alpha}}Y_n > t\} &= \prod_{i=1}^{n} P\left\{X_i > \frac{t}{(nc)^{1/\alpha}}\right\} \\ &= \left\{1 - F\left(\frac{t}{(nc)^{1/\alpha}}\right)\right\}^n \\ &= \left\{1 - \frac{t^\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n \to e^{-t^\alpha}, \quad \text{当} n \to \infty \end{aligned}$$

§1.2.4 极值分布

极值分布是与韦布尔分布有密切关系的一类分布函数.

设随机变量 Z 有分布函数

$$G(t) = 1 - \exp\{-e^t\}, \quad -\infty < t < \infty \tag{13}$$

则称 Z 有第 I 型标准极小值分布. 若令 $Z^*=-Z$, 则 Z^* 有分布函数

$$H(t)=\exp\{-e^{-t}\}=1-G(-t),\quad -\infty<t<\infty \tag{14}$$

称 Z^* 有第 I 型标准极大值分布. 所谓极值分布, 泛指 (13) 或 (14).

容易算出

$$EZ=-\gamma,\quad \mathrm{Var}Z=\frac{\pi^2}{6}$$

$$EZ^*=\gamma,\quad \mathrm{Var}Z^*=\frac{\pi^2}{6}$$

其中 γ 是欧拉 (Euler) 常数, $\gamma=0.577215\cdots$.

韦布尔分布与极值分布之间的关系可以由如下表达式看出.

设随机变量 W 有 $W(\alpha,\lambda;t)$ 分布. 令

$$X=\ln W \tag{15}$$

则 X 有分布函数

$$G\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right),\quad -\infty<t<\infty$$

其中

$$\frac{1}{\alpha}=\sigma,\quad -\ln\lambda=\mu \tag{16}$$

若令

$$Y=-\ln W=-X \tag{17}$$

则 Y 有分布函数 $H\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right)$, $-\infty<t<\infty$, 其中 σ,μ 由 (16) 给出.

这是因为对任意实数 t,

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant t\}&=P\{W\leqslant e^t\}\\&=1-\exp\{-(\lambda e^t)^\alpha\}\\&=1-\exp\{-e^{\frac{t+\ln\lambda}{\frac{1}{\alpha}}}\}\\&=G(\frac{t-\mu}{\sigma})\end{aligned}$$

而 Y 的分布函数可相仿求得.

由 (15), (17) 知, X 与 $\mu+\sigma Z$ 有相同的分布. Y 与

$$-\mu+\sigma Z^*=-(\mu+\sigma Z)$$

有相同的分布. 因此易得

$$EX=\mu-\sigma\gamma,\quad \mathrm{Var}X=\sigma^2\frac{\pi^2}{6}$$
$$EY=-\mu+\sigma\gamma,\quad \mathrm{Var}Y=\sigma^2\frac{\pi^2}{6}$$

虽然极值分布 (13), (14) 相应的随机变量 Z, Z^* 并不是非负的, 因而不能用来表示寿命. 但是, 由于与韦布尔分布间的简单关系, 使得它们亦是寿命数据分析中经常用到的一个分布类型. 我们将在第十章中用它们来作韦布尔分布的拟合优度检验.

§1.2.5 对数正态分布

若随机变量 Y 遵从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $X=e^Y$ 遵从对数正态分布. 易算出 X 的密度函数为 (见图 1.4(a))

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln t-\mu)^2\},$$
$$t>0,\ \sigma>0,\ -\infty<\mu<\infty \tag{18}$$

按定义可求得

$$EX=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},\quad \mathrm{Var}X=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1) \tag{19}$$

定理 1.2.6 *存在 $t_0\in(0,\infty)$, 对数正态分布的失效率函数 $r(t)$ 在 $(0,t_0)$ 单调递增, 在 (t_0,∞) 单调递减.*

证明 由定义

$$r(t)=\frac{f(t)}{\bar F(t)}=\frac{\frac{1}{\sigma t}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln t-\mu}{\sigma})^2}}{\int_{\frac{\ln t-\mu}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du},\quad t>0$$

易验证: 对所有 $t>0$, $r(t)$ 连续, 且 $r(t)>0$, $\lim\limits_{t\to0}r(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)=0$. 故欲证定理的结论, 只需证 $r(t)$ 在 $(0,\infty)$ 内仅有唯一的极值 (即最大值).

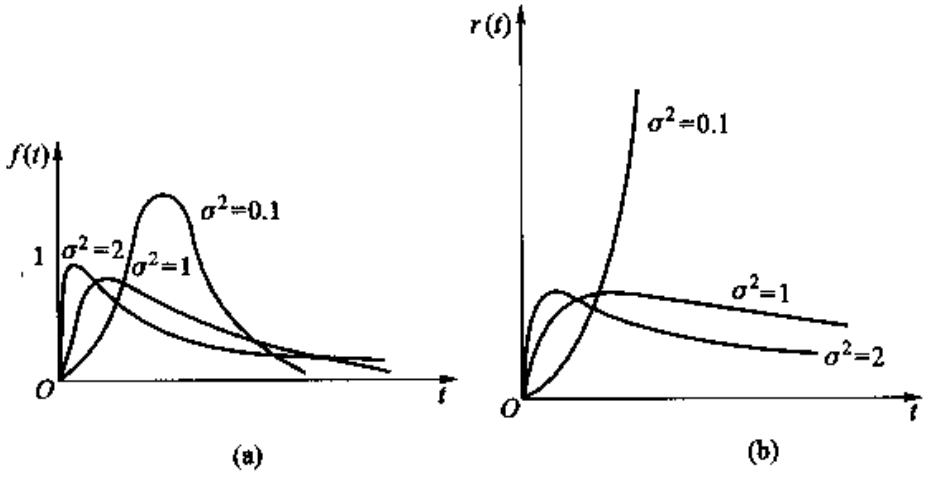


图 1.4

令 $y=\dfrac{1}{\sigma}(\ln t-\mu)$, 因此有

$$r(t)=\frac{\dfrac{1}{\sigma}e^{-\sigma y-\mu}e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\displaystyle\int_y^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du}=\frac{\dfrac{1}{\sigma}e^{-\mu}}{e^{\sigma y+\frac{1}{2}y^2}\displaystyle\int_y^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du},$$

$$-\infty<y<\infty$$

令

$$R(y)=e^{\sigma y+\frac{1}{2}y^2}\int_y^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du,\quad -\infty<y<\infty$$

欲证 $r(t)$ 在 $0<t<\infty$ 内有唯一的极值, 仅需证 $R(y)$ 在 $-\infty<y<\infty$ 内有唯一的极值. 亦即需证

$$R'(y)=(\sigma+y)e^{\sigma y+\frac{1}{2}y^2}\left[\int_y^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du-\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sigma+y}\right]$$

在 $-\infty<y<\infty$ 内有唯一的零点. 由于 $R'(-\sigma)\neq 0$, 只需证

$$g(y)=\int_y^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du-\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sigma+y}$$

在 $-\infty<y<\infty$ 内只有唯一的零点.

由于

$$g'(y)=\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sigma(\sigma+y)^2}\left(\frac{1}{\sigma}-\sigma-y\right)$$

$$\begin{cases} \geqslant 0 & \text{当} y \leqslant \dfrac{1}{\sigma} - \sigma, \quad y \neq -\sigma \\ \leqslant 0 & \text{当} y \geqslant \dfrac{1}{\sigma} - \sigma \end{cases}$$

即 $g(y)$ 在 $(-\infty, -\sigma)$ 和 $(-\sigma, -\sigma + \dfrac{1}{\sigma})$ 均单调递增, 在 $(\dfrac{1}{\sigma} - \sigma, \infty)$ 内单调递减, $y = \dfrac{1}{\sigma} - \sigma$ 是其唯一的极值. 此外, 除了 $y = -\sigma$ 之外, $g(y)$ 处处连续, 且

$$g(-\infty) = \sqrt{2\pi} > 0, \quad g(-\sigma - 0) = \infty,$$
$$g(-\sigma + 0) = -\infty, \quad g(\infty) = 0$$

总之, 在 $(-\infty, -\sigma)$ 内, $g(y)$ 从 $\sqrt{2\pi}$ 单调递减到正无穷; 在 $(\dfrac{1}{\sigma} - \sigma, \infty)$ 内, $g(y)$ 从 $g(\dfrac{1}{\sigma} - \sigma) > 0$ 单调递减到零; 在 $(-\sigma, \dfrac{1}{\sigma} - \sigma)$ 中, $g(y)$ 从负无穷单调递增到 $g(\dfrac{1}{\sigma} - \sigma) > 0$. 故 $g(y)$ 在 $(-\infty, -\sigma)$ 和 $(\dfrac{1}{\sigma} - \sigma, \infty)$ 内无零点, 在 $(-\sigma, \dfrac{1}{\sigma} - \sigma)$ 内有唯一的零点. 证毕.

对数正态分布失效率函数见图 1.4(b).

§1.2.6 截尾正态分布

非负随机变量 X 有密度函数 (见图 1.5(a))

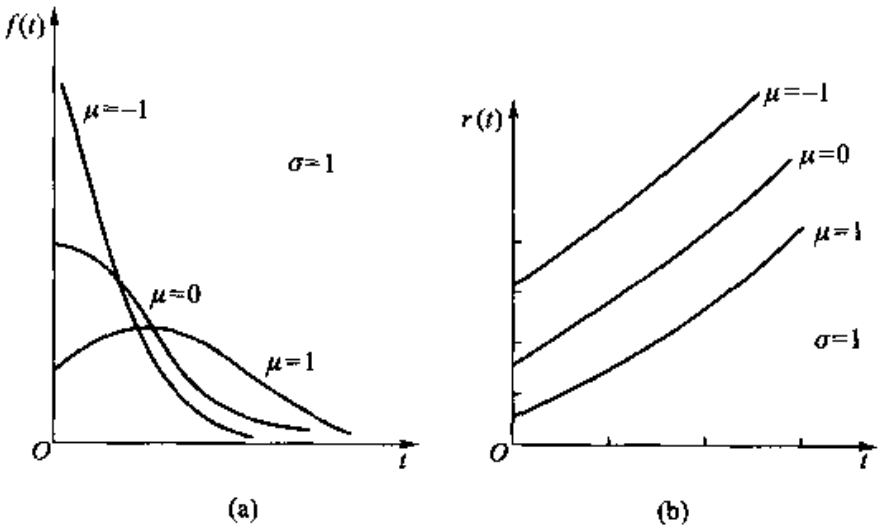


图 1.5

$$f(t) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2}, \quad t \geqslant 0, \sigma > 0, -\infty < \mu < \infty \tag{20}$$

则称 X 遵从截尾正态分布, 其中 $a>0$ 是常数, 它保证

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = 1$$

因此,

$$a = 1-\Phi(-\frac{\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\mu}{\sigma}) \tag{21}$$

其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \tag{22}$$

可算出

$$\begin{cases} EX = \mu + \dfrac{\sigma}{a}\varphi(\dfrac{\mu}{\sigma}) \\ \text{Var } X = \sigma^2\left\{1-\dfrac{\mu}{a\sigma}\varphi(\dfrac{\mu}{\sigma}) - \dfrac{1}{a^2}\varphi^2(\dfrac{\mu}{\sigma})\right\} \end{cases} \tag{23}$$

其中

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{24}$$

定理 1.2.7 *截尾正态分布的失效率函数 $r(t)$ 单调递增.*

证明 记 $x = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(t)} =& \frac{\bar{F}(t)}{f(t)} = \sqrt{2\pi}\sigma[1-\Phi(x)]e^{\frac{1}{2}x^2} \\ =& \sigma\int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2-x^2)}du \\ =& \sigma\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2+2xy)}dy \end{aligned}$$

显然右端是 x 的递减函数, 亦即是 t 的递减函数, 故 $r(t)$ 是 t 的单调递增函数. 证毕.

截尾正态分布的失效率函数见图 1.5(b).

§1.3 离散型寿命分布

本节讨论离散型寿命分布, 其中包括二点分布, 二项分布, 几何分布, 负二项分布, 泊松分布和离散韦布尔分布. 在讨论具体分布之前, 先叙述一个判断失效率函数单调性的定理.

定理 1.3.1 设非负随机变量 X 有分布

$$p_k = P\{X = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

若对任意 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 和 $i = 1, 2, \cdots$ 有

$$\frac{p_{k+i}}{p_k} - \frac{p_{k+i+1}}{p_{k+1}} \begin{cases} \geqslant 0, \text{则} X \text{有递增失效率} \\ = 0, \text{则} X \text{有常数失效率} \\ \leqslant 0, \text{则} X \text{有递减失效率} \end{cases} \tag{1}$$

证明 由定义

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(k)} &= 1 + \frac{p_{k+1}}{p_k} + \cdots + \frac{p_{k+i}}{p_k} + \cdots, \\ \frac{1}{r(k+1)} &= 1 + \frac{p_{k+2}}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{p_{k+i+1}}{p_{k+1}} + \cdots, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

若 $\frac{p_{k+i}}{p_k} - \frac{p_{k+i+1}}{p_{k+1}} \geqslant 0$, 对任意 $i = 1, 2, \cdots$, 则必有

$$\frac{1}{r(k)} \geqslant \frac{1}{r(k+1)}$$

则 $r(k)$ 单调递增, 类似证明其余结果.

§1.3.1 二点分布

称随机变量 X 遵从二点分布, 如果

$$P\{X = 1\} = p, \quad P\{X = 0\} = q, \quad (p + q = 1) \tag{2}$$

显然 $r(0) = q, r(1) = 1$. 因此 X 有IFR.

§1.3.2 二项分布

称随机变量 X 遵从二项分布, 如果

$$p_k = P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n \tag{3}$$

其中 $p,q>0,p+q=1$. 显然 $EX=np,\mathrm{Var}X=npq$. 由定理 1.3.1 易证 $r(k)$ 单调递增. 故 X 有IFR.

§1.3.3 几何分布

称随机变量 X 遵从几何分布, 如果

$$p_k=P\{X=k\}=pq^k,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{4}$$

其中 $p,q>0,p+q=1$. 显然,

$$EX=\frac{q}{p},\quad \mathrm{Var}X=\frac{q}{p^2}$$

以及

$$r(k)=p=\text{常数, 对所有}k=0,1,2,\cdots$$

事实上, 几何分布是离散分布中具有 "无记忆性" 的唯一分布, 它与连续型的指数分布相似.

定理 1.3.2 取非负整数值的随机变量 X 有几何分布 (4) 的充分必要条件是

$$P\{X\geqslant i+k|X\geqslant k\}=P\{X\geqslant i\},\quad \text{对所有}i,k=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

证明 必要性是显然的. 以下证明充分性. 记

$$q_i=\sum_{j=i}^{\infty}p_j,\quad i=0,1,2,\cdots$$

显然 $q_0=1$. 由 (5) 知

$$q_{i+k}=q_iq_k,\quad \text{对所有}i,k=0,1,2,\cdots$$

故

$$q_{i+1}=q_iq_1=q_0q_1^{i+1}=q_1^{i+1}$$
$$p_i=q_i-q_{i+1}=(1-q_1)q_1^i,\quad i=0,1,2,\cdots$$

因此, X 是几何分布的随机变量.

§1.3.4 负二项分布

非负整值的随机变量 X 有分布

$$p_k = P\{X=k\} = \binom{-\alpha}{k} p^{\alpha}(-q)^k, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{6}$$

其中 $\alpha, p, q > 0, p+q=1$, 则称 X 服从参数为 (α, p) 的负二项分布. 这里

$$\begin{aligned}\binom{-\alpha}{k} &= \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k}, \quad k=0,1,\cdots\end{aligned}$$

易见, $\alpha=1$ 时即为几何分布. 由 (6) 可求得

$$EX = \alpha\frac{q}{p}, \quad \mathrm{Var}X = \alpha\frac{q}{p^2}$$

定理 1.3.3 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 独立同分布, 有几何分布 (4), 则 $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$ 有参数 (r,p) 的负二项分布.

定理 1.3.4 设 X 遵从参数为 (α, p) 的负二项分布, 则

$$X\text{有}\begin{cases}\text{IFR}, & \text{当}\alpha>1\\ \text{常数失效率}, & \text{当}\alpha=1\\ \text{DFR}, & \text{当}\alpha<1\end{cases}$$

易证以上两个定理, 由这两个定理可知, 负二项分布与连续型的 Γ 分布相似.

§1.3.5 泊松分布

取非负整数值的随机变量 X 有分布

$$p_k = P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0 \tag{7}$$

则称 X 遵从参数为 λ 的泊松分布. 显然

$$EX=\lambda, \quad \mathrm{Var}X=\lambda$$

因为

$$\frac{p_{k+1}p_{k+i}}{p_k p_{k+i+1}} = 1+\frac{i}{k+1} > 1, \quad k=0,1,\cdots,i=1,2,\cdots$$

故由定理 1.3.1, $r(k)$ 单调递增. 因此 X 有 IFR.

§1.3.6 离散韦布尔分布

取非负整值的随机变量 X 有分布

$$p_k = P\{X = k\} = q^{k^\beta} - q^{(k+1)^\beta}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0 < q < 1, \quad \beta > 0 \tag{8}$$

则称 X 遵从尺度参数为 q, 形状参数为 β 的离散韦布尔分布. 其失效率

$$r(k) = 1 - q^{(k+1)^\beta - k^\beta}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

当 $\beta \geqslant 1$, $r(k)$ 单调递增; 当 $\beta \leqslant 1$, $r(k)$ 单调递减. 当 $\beta = 1, p_k = q^k - q^{k+1} = (1-q)q^k$, 此时离散韦布尔分布归结为几何分布.

§1.4 多维寿命分布

寿命分布可以推广到多维. 为简单起见, 我们只讨论二维指数分布. 它可以由冲击模型导出.

§1.4.1 冲击模型

假定系统由两个部件组成, 这些部件在受到外界冲击后可能会失效. 有三个相互独立的泊松过程 P_1, P_2 和 P_3 控制着冲击源的发生, 其强度分别为 λ_1, λ_2 和 λ_{12}. P_1 中冲击出现时, 仅以概率 p_1 引起部件 1 失效, P_2 中冲击出现时, 仅以概率 p_2 引起部件 2 失效, P_3 中冲击出现时, 对两个部件都有影响, 它分别以概率 p_{01} 和 p_{10} 引起部件 1 和部件 2 失效, 以概率 p_{00} 引起两个部件同时失效, 以概率 p_{11} 使两个部件都不失效. 显然, $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{1i} = 1$.

现记 X 和 Y 分别为部件 1 和部件 2 的寿命. 令

$$\bar{F}(x, y) = P\{X > x, Y > y\}, \quad x, y \geqslant 0 \tag{1}$$

下面利用泊松过程的性质来导出 $\bar{F}(x, y)$ 的表达式. 记 $N_i(s, t)$ 为泊松过程 P_i 在 $(s, t]$ 中出现的冲击数目. 先讨论 $0 \leqslant x \leqslant y$ 的情形, 此时有

$$\begin{aligned}\bar{F}(x,y)=&P\{N_1(0,x)=i,\ i\text{次冲击不使部件 1 失效},i=0,1,\cdots;\\&N_2(0,y)=j,\ j\text{次冲击不使部件 2 失效},j=0,1,\cdots;\\&N_3(0,x)=k,\ k\text{次冲击不使部件 1,2 失效},k=0,1,\cdots;\\&N_3(x,y)=l,\ l\text{次冲击不使部件 2 失效},l=0,1,\cdots\}\\=&\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 x)^i}{i!}e^{-\lambda_1 x}(1-p_1)^i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2 y)^j}{j!}e^{-\lambda_2 y}(1-p_2)^j\\&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_{12}x)^k}{k!}e^{-\lambda_{12}x}p_{11}^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{[\lambda_{12}(y-x)]^l}{l!}e^{-\lambda_{12}(y-x)}\times(p_{01}+p_{11})^l\\=&\exp\{-\lambda_1 p_1 x-\lambda_2 p_2 y-\lambda_{12}(1-p_{11})x-\lambda_{12}(p_{00}+p_{10})(y-x)\}\\=&\exp\{-(\lambda_1 p_1+\lambda_{12}p_{01})x-[\lambda_2 p_2+\lambda_{12}(p_{00}+p_{10})]y\}\end{aligned}\tag{2}$$

对 $0\leqslant y\leqslant x$ 的情形, 同理可得

$$\bar{F}(x,y)=\exp\{-[\lambda_1 p_1+\lambda_{12}(p_{00}+p_{01})]x-(\lambda_2 p_2+\lambda_{12}p_{10})y\}\tag{3}$$

把公式 (2) 和 (3) 统一记成

$$\bar{F}(x,y)=P\{X>x,Y>y\}=\exp\{-\delta_1 x-\delta_2 y-\delta_{12}\max(x,y)\}\tag{4}$$

其中

$$\delta_1=\lambda_1 p_1+\lambda_{12}p_{01},\quad \delta_2=\lambda_2 p_2+\lambda_{12}p_{10},\quad \delta_{12}=\lambda_{12}p_{00}\tag{5}$$

特别, 当 $p_1=p_2=p_{00}=1$ 时, 即每一个冲击的出现都引起相应的部件失效时, 有

$$\bar{F}(x,y)=\exp\{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max(x,y)\}\tag{6}$$

上述公式 (6) 的情形称为**致命冲击模型**, 而公式 (4) 的情形称为**非致命冲击模型**. 下面就利用致命冲击模型引入的分布来定义二维指数分布.

§1.4.2 二维指数分布

定义 1.4.1 若随机变量 (X,Y) 有联合生存概率

$$\begin{aligned}\bar{F}(x,y)&=P\{X>x,Y>y\}\\&=\exp\{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max(x,y)\},\quad x,y\geqslant 0\end{aligned}\tag{7}$$

则称 (X,Y) 遵从参数为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}$ 的二维指数分布. 记作

$$(X,Y)\sim BVE(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$$

利用致命冲击模型, 可以给予 (X,Y) 更清楚的直观意义. 考虑两个部件组成的一个系统, 受三个相互独立的冲击源的影响. 第一个冲击源的冲击只损坏部件 1, 它出现在随机时间 U_1,

$$P\{U_1>t\}=e^{-\lambda_1 t}$$

第二个冲击源的冲击只损坏部件 2, 它出现在 U_2,

$$P\{U_2>t\}=e^{-\lambda_2 t}$$

第三个冲击源的冲击同时损坏部件 1 和 2, 它出现在 U_{12},

$$P\{U_{12}>t\}=e^{-\lambda_{12} t}$$

因此部件 1 和 2 的寿命分别为

$$X=\min(U_1,U_{12}),\quad Y=\min(U_2,U_{12}) \tag{8}$$

易见, (X,Y) 的联合生存概率 $\bar{F}(x,y)$ 即为 (7) 式.

由定义 1.4.1 容易看出 X,Y 的边缘生存概率为

$$\begin{cases}\bar{F}_1(x)=P\{X>x\}=e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x}, & x\geqslant 0\\ \bar{F}_2(y)=P\{Y>y\}=e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})y}, & y\geqslant 0\end{cases} \tag{9}$$

即 X 和 Y 的边缘分布都是指数分布, 又由 (7) 式知, (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$ 为

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=1-\bar{F}_1(x)-\bar{F}_2(y)+\bar{F}(x,y) \tag{10}$$

由此容易得到关于矩的公式

$$EX=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_{12}},\quad \mathrm{Var}X=\frac{1}{(\lambda_1+\lambda_{12})^2}$$

$$EY=\frac{1}{\lambda_2+\lambda_{12}},\quad \mathrm{Var}Y=\frac{1}{(\lambda_2+\lambda_{12})^2}$$

$$E(XY)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_{12}}+\frac{1}{\lambda_2+\lambda_{12}}\right)$$

其中

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$$

因而 X, Y 的相关系数为

$$\rho = \mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda}$$

更进一步, (X, Y) 的矩母函数为

$$Ee^{-(sX+tY)} = \frac{(\lambda + s + t)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}) + \lambda_{12}st}{(\lambda + s + t)(\lambda_1 + \lambda_{12} + s)(\lambda_2 + \lambda_{12} + t)}$$

对于一维指数分布, 最显著的一个性质是 "无记忆性". 下面将看到, 由二维指数分布的定义 (7) 式, 立即可得

引理 1.4.1 由 (7) 式定义的二维指数分布具有 "无记忆性", 即对任意 x, y, $t \geqslant 0$, 有

$$P\{X > x + t, Y > y + t | X > t, Y > t\} = P\{X > x, Y > y\} \tag{11}$$

或

$$\bar{F}(x + t, y + t) = \bar{F}(x, y)\bar{F}(t, t) \tag{12}$$

我们可以进一步证明, 满足 (12) 式, 且有指数边缘分布的 $\bar{F}(x, y)$ 必有 (7) 这种形式. 为此先证明一个引理.

引理 1.4.2 若 (12) 式成立, 则对某个 $\theta > 0$,

$$\bar{F}(x, y) = \begin{cases} e^{-\theta y}\bar{F}_1(x - y), & \text{当 } x \geqslant y \\ e^{-\theta x}\bar{F}_2(y - x), & \text{当 } x \leqslant y \end{cases} \tag{13}$$

这里 $F_1(x) = F(x, \infty), F_2(y) = F(\infty, y)$ 分别是 X, Y 的边缘分布.

证明 在 (12) 式中令 $x = y = s$, 则有

$$\bar{F}(s + t, s + t) = \bar{F}(s, s)\bar{F}(t, t)$$

由定理 1.2.1, 可推得 $\bar{F}(s, s) = e^{-\theta s}$, 对某个 $\theta > 0$. 再在 (12) 式中令 $y = 0$, 则有

$$\bar{F}(x + t, t) = \bar{F}(x, 0)\bar{F}(t, t) = \bar{F}_1(x)e^{-\theta t}$$

即

$$\bar{F}(x,y)=e^{-\theta y}\bar{F}_1(x-y),\quad x\geqslant y$$

另一式同理证明. 证毕.

定理 1.4.1 二维指数分布是唯一满足 (12) 式, 且有指数边缘分布的二维分布.

证明 必要性在引理 1.4.1 中已经证明. 下面证明充分性. 记二维非负随机变量 (X,Y) 有分布函数 $F(x,y)$, 边缘分布分别为 $F_1(x),F_2(y)$, 且满足 (12) 式. 又由假设

$$\bar{F}_1(x)=e^{-\delta_1 x},\quad \bar{F}_2(y)=e^{-\delta_2 y},\quad x,y\geqslant 0,\quad \delta_1,\delta_2>0$$

由引理 1.4.2, $\bar{F}(x,y)$ 可写成

$$\bar{F}(x,y)=\begin{cases}e^{-\theta y-\delta_1(x-y)}, & x\geqslant y,\\ e^{-\theta x-\delta_2(y-x)}, & x\leqslant y,\end{cases}\quad \theta>0 \tag{14}$$

令 $\lambda_1=\theta-\delta_2,\lambda_2=\theta-\delta_1$. 由于 $\bar{F}(x,y)$ 分别对 x,y 单调递减, 故由 (14) 的第一式知 $\lambda_2\geqslant 0$, 由第二式知 $\lambda_1\geqslant 0$. 进一步, 若记 $\lambda_{12}=\delta_1+\delta_2-\theta$, 下面证 $\lambda_{12}\geqslant 0$. 我们考虑

$$G(x)=F(x,x)$$

显然

$$\begin{aligned}G(x)=F(x,x)&=1-\bar{F}_1(x)-\bar{F}_2(x)+\bar{F}(x,x)\\&=1-e^{-\delta_1 x}-e^{-\delta_2 x}+e^{-\theta x},\quad x\geqslant 0\end{aligned}$$

它是一个分布函数, 其密度函数为

$$g(x)=\delta_1 e^{-\delta_1 x}+\delta_2 e^{-\delta_2 x}-\theta e^{-\theta x}\geqslant 0,\quad x\geqslant 0$$

令 $x\to 0^+$, 即得 $\delta_1+\delta_2-\theta\geqslant 0$. 由于 $\lambda_1=\theta-\delta_2,\lambda_2=\theta-\delta_1,\lambda_{12}=\delta_1+\delta_2-\theta$, 得

$$\theta=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12},\quad \delta_1=\lambda_1+\lambda_{12},\quad \delta_2=\lambda_2+\lambda_{12}$$

把上式代回 (14) 即得 (7) 式. 证毕.

由于 (12) 可改写成

$$\frac{\bar{F}(x+t,y+t)}{\bar{F}(x,y)}=\bar{F}(t,t) \tag{15}$$

因此, 二维指数分布的 "无记忆性" 可解释为: 年龄为 x, y 的两部件串联系统的生存概率与一个新的系统的生存概率一样. 所以, 有指数边缘分布的两个用过的部件组成串联系统的寿命分布与部件的年龄无关, 当且仅当两部件的联合分布是二维指数分布.

二维指数分布还有其它一些性质.

定理 1.4.2 若 (X,Y) 有 $BVE(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$, 则

1) $P\{\min(X,Y)\leqslant t\}=1-e^{-\lambda t}, \quad t\geqslant 0,\ \lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$

2) $\min(X,Y)$ 与下列事件独立:

$$\{X<Y\},\ \{X>Y\},\ \{X=Y\}$$

3) $\min(X,Y)$ 与 $|X-Y|$ 独立.

证明 1) 由 (8) 式, $\min(X,Y)=\min(U_1,U_2,U_{12})$, 即得证.

2) 要证 $min(X,Y)$ 与 $\{X<Y\}$ 独立, 只要证, 对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$P\{\min(X,Y)>t|X<Y\}=P\{\min(X,Y)>t\}=e^{-\lambda t} \tag{16}$$

但是

$$\begin{aligned}
P\{\min(X,Y)>t, X<Y\}&=P\{t<X<Y\}\\
&=P\{t<U_1<U_2, t<U_1<U_{12}\}\\
&=\int_t^\infty P\{t<U_1<U_2, t<U_1<U_{12}|U_1=u\}dP\{U_1\leqslant u\}\\
&=\int_t^\infty P\{u<U_2, u<U_{12}\}dP\{U_1\leqslant u\}\\
&=\int_t^\infty e^{-\lambda_2 u}e^{-\lambda_{12}u}\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}du=\frac{\lambda_1}{\lambda}e^{-\lambda t}\\
P\{X<Y\}&=P\{U_1<\min(U_2,U_{12})\}\\
&=\int_0^\infty P\{u<\min(U_2,U_{12})\}dP\{U_1\leqslant u\}=\frac{\lambda_1}{\lambda}
\end{aligned}$$

故 (16) 式成立. 其它结果同理可证.

3) 只要证, 对任意 $t_1,t_2\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}
&P\{\min(X,Y)>t_1, |X-Y|>t_2\}\\
&=P\{\min(X,Y)>t_1\}P\{|X-Y|>t_2\}
\end{aligned} \tag{17}$$

但是

$$\begin{aligned}\text{左端}=&P\{\min(X,Y)>t_1,X-Y>t_2\}\\&+P\{\min(X,Y)>t_1,Y-X>t_2\}\\=&P\{Y>t_1,X>Y+t_2\}+P\{X>t_1,Y>X+t_2\}\\=&P\{U_2>t_1,\min(U_1,U_{12})>U_2+t_2\}\\&+P\{U_1>t_1,\min(U_2,U_{12})>U_1+t_2\}\\=&\text{Ⅰ}+\text{Ⅱ}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\text{Ⅰ}=&\int_{t_1}^{\infty}P\{\min(U_1,U_{12})>U_2+t_2|U_2=u\}dP\{U_2\leqslant u\}\\=&\int_{t_1}^{\infty}P\{\min(U_1,U_{12})>u+t_2\}\lambda_2e^{-\lambda_2u}du\\=&\frac{\lambda_2}{\lambda}e^{-\lambda t_1}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_2}\\\text{Ⅱ}=&\frac{\lambda_1}{\lambda}e^{-\lambda t_1}e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}\end{aligned}$$

故 (17) 式的

$$\text{左端}=e^{-\lambda t_1}\left\{\frac{\lambda_2}{\lambda}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda}e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}\right\}$$

在上式中分别令 t_1,t_2 等于 0, 即得

$$\begin{aligned}&P\{|X-Y|>t_2\}\\&\quad=\frac{\lambda_2}{\lambda}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda}e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}\\&P\{\min(X,Y)>t_1\}=e^{-\lambda t_1}\end{aligned}$$

因此 (17) 成立. 证毕.

下面, 讨论二维指数分布 $F(x,y)$ 的分解. 由勒贝格 (Lebesgue) 分解定理 (见 [3], 第 139 页), F 可以分解成绝对连续部分 F_a 及奇异部分 F_s. 记

$$\bar{F}(x,y)=\alpha\bar{F}_a(x,y)+(1-\alpha)\bar{F}_s(x,y),\quad \text{对所有}x,y\geqslant 0$$

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. F_a 绝对连续, 而

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_s(x,y)=0$$

关于二维勒贝格测度几乎处处成立. 下面定理确定了 F_a 和 F_s.

定理 1.4.3 若 $F(x,y)$ 是 $BVE(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})$, 则

$$\begin{aligned}\bar{F}(x,y)=&\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda}\bar{F}_a(x,y)\\&+\frac{\lambda_{12}}{\lambda}\bar{F}_s(x,y),\quad \text{对所有}x,y\geqslant 0\end{aligned}\tag{18}$$

其中

$$\bar{F}_s(x,y)=e^{-\lambda\max(x,y)}\tag{19}$$

是奇异部分, 而绝对连续部分是

$$\begin{aligned}\bar{F}_a(x,y)=&\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-[\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_{12}\max(x,y)]}\\&-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda\max(x,y)},\quad \text{对所有}x,y\geqslant 0\end{aligned}\tag{20}$$

证明 由全概率公式

$$\begin{aligned}\bar{F}(x,y)=&P\{X>x,Y>y;U_{12}>\min(U_1,U_2)\}\\&+P\{X>x,Y>y,U_{12}\leqslant\min(U_1,U_2)\}\\=&\ \mathrm{I}+\mathrm{II}\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{II}=&P\{U_{12}>x,U_{12}>y,U_{12}\leqslant\min(U_1,U_2)\}\\=&P\{U_{12}>\max(x,y),U_{12}\leqslant\min(U_1,U_2)\}\\=&\int_{\max(x,y)}^{\infty}P\{u\leqslant\min(U_1,U_2)\}dP\{U_{12}\leqslant u\}\\=&\frac{\lambda_{12}}{\lambda}e^{-\lambda\max(x,y)}=\frac{\lambda_{12}}{\lambda}\bar{F}_s(x,y)\end{aligned}$$

将此式代入 (21) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}=&\bar{F}(x,y)-\mathrm{II}=e^{-\lambda_1x-\lambda_2y-\lambda_{12}\max(x,y)}-\frac{\lambda_{12}}{\lambda}e^{-\lambda\max(x,y)}\\=&\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda}\left\{\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1x-\lambda_2y-\lambda_{12}\max(x,y)}\right.\\&\left.-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda\max(x,y)}\right\}\\=&\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda}\bar{F}_a(x,y)\end{aligned}$$

进一步, $\bar{F}_a(x,y)$ 可表示成不定积分形式

$$F_a(x,y)=\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}f_a(u,v)dvdu$$

其中

$$f_a(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\lambda_1(\lambda_2+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}e^{\ \lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_{12})y}, & 0\leqslant x<y\\ \dfrac{\lambda\lambda_2(\lambda_1+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})x-\lambda_2 y}, & 0\leqslant y<x\end{cases}$$

因此 $\bar{F}_a(x,y)$ 是绝对连续的. 由于

$$\bar{F}_s(x,y)=\begin{cases}e^{-\lambda x}, x>y\\ e^{-\lambda y}, x<y\end{cases}$$

故除了二维勒贝格零测集 $\{(x,y):x=y\}$ 外, 显然有

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\bar{F}_s(x,y)=0$$

因此 $\bar{F}_s(x,y)$ 是奇异的. 证毕.

§1.5 寿命分布类

在 §1.1 中, 对连续型和离散型的寿命分布情形, 分别介绍了递增失效率和递减失效率的概念. 本节将上述概念推广到更一般的情形. 此外, 还定义一些更广泛的寿命分布类.

设 $F(t)$ 是寿命 X 的分布函数.

定义 1.5.1 如果对每个 $x\geqslant 0$,

$$\bar{F}(x|t)=\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \tag{1}$$

是 $t\geqslant 0$ 的递减函数 (递增函数), 则称 $F(t)$ 属于**递增失效率类** (**递减失效率类**). 记为 $F\in\{\mathrm{IFR}\}(F\in\{\mathrm{DFR}\})$.

特别, 当 $F(t)$ 的密度函数 $f(t)$ 存在时, 由 $F\in\{\mathrm{IFR}\}(F\in\{\mathrm{DFR}\})$, 可得

$$r(t)=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1-\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}\right]$$

是 $t \geqslant 0$ 的递增函数 (递减函数). 反之, 若 $r(t)$ 是 $t \geqslant 0$ 的递增函数 (递减函数), 立即可得, 对每个 $x \geqslant 0$,

$$\bar{F}(x|t) = \exp\left[-\int_t^{t+x} r(u)du\right]$$

是 $t \geqslant 0$ 的递减函数 (递增函数), 即定义 1.5.1 的条件成立, 故 $F \in \{\text{IFR}\}(F \in \{\text{DFR}\})$.

定义 1.5.1′ 如果 $\ln \bar{F}(t)$ 是 $t \geqslant 0$ 的凹函数 (凸函数), 则称 $F(t)$ 属于递增失效率类 (递减失效率类).

定理 1.5.1 *定义 1.5.1 和定义 1.5.1′ 是等价的.*

证明 对每个 $x \geqslant 0$, $\bar{F}(t+x)/\bar{F}(t)$ 是 $t \geqslant 0$ 的递减函数 (递增函数), 等价于

$$\ln \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} = \ln \bar{F}(t+x) - \ln \bar{F}(t)$$

是 $t \geqslant 0$ 的递减函数 (递增函数), 等价于 $\ln \bar{F}(t)$ 是凹函数 (凸函数). 证毕.

定义 1.5.2 如果 $-\dfrac{1}{t}\ln \bar{F}(t)$ 是 $t \geqslant 0$ 的递增函数 (递减函数), 则称 $F(t)$ 属于**递增平均失效率类**(**递减平均失效率类**). 记 $F \in \{\text{IFRA}\}(F \in \{\text{DFRA}\})$.

由定义, 容易得如下定理:

定理 1.5.2 *$F \in \{\text{IFRA}\}$ 当且仅当对任意的 $0 < \alpha < 1, t \geqslant 0$, 有*

$$\bar{F}(\alpha t) \geqslant \bar{F}^{\alpha}(t) \tag{2}$$

特别当 $F(t)$ 的密度函数 $f(t)$ 存在, $F(0) = 0$ 时, 由于

$$\bar{F}(t) = \exp\left[-\int_0^t r(u)du\right]$$

因而

$$-\frac{1}{t}\ln \bar{F}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(u)du$$

因此 $F \in \{\text{IFRA}\}(F \in \{\text{DFRA}\})$ 的充分必要条件为

$$\frac{1}{t}\int_0^t r(u)du$$

是 $t \geqslant 0$ 的递增函数 (递减函数).

定义 1.5.3 如果对任意 $x,t\geqslant 0$, 有

$$\bar{F}(x|t)\leqslant \bar{F}(x),\quad (\bar{F}(x|t)\geqslant \bar{F}(x)) \tag{3}$$

则称 $F(t)$ 属于**新的比用过的好的类(差的类)**. 记为 $F\in\{\mathrm{NBU}\}(F\in\{\mathrm{NWU}\})$.

公式 (3) 等价于, 对任意 $x,t\geqslant 0$, 有

$$\bar{F}(t+x)\leqslant \bar{F}(t)\bar{F}(x),\quad (\bar{F}(t+x)\geqslant \bar{F}(t)\bar{F}(x)) \tag{4}$$

因此 $F\in\{\mathrm{NBU}\}(F\in\{\mathrm{NWU}\})$ 的充分必要条件是 (4) 成立.

定义 1.5.4 如果对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \bar{F}(x|t)dx\leqslant \int_0^\infty \bar{F}(x)dx\\ \left(\int_0^\infty \bar{F}(x|t)dx\geqslant \int_0^\infty \bar{F}(x)dx\right)\end{gathered} \tag{5}$$

则称 $F(t)$ 属于**新的平均比用过的好的类(差的类)**. 记为 $F\in\{\mathrm{NBUE}\}(F\in\{\mathrm{NWUE}\})$.

显然, (5) 的右端表示新产品的平均寿命, 左端表示产品已经用了 t 时间后的平均剩余寿命.

定理 1.5.3 上述各分布类有如下包含关系

$$\begin{gathered}\{\mathrm{IFR}\}\subset\{\mathrm{IFRA}\}\subset\{\mathrm{NBU}\}\subset\{\mathrm{NBUE}\}\\ \{\mathrm{DFR}\}\subset\{\mathrm{DFRA}\}\subset\{\mathrm{NWU}\}\subset\{\mathrm{NWUE}\}\end{gathered} \tag{6}$$

证明 1) $\{\mathrm{IFR}\}\subset\{\mathrm{IFRA}\}$. 若 $F\in\{\mathrm{IFR}\}$, 由定义 1.5.1′, $-\ln\bar{F}(t)$ 是凸函数. 由于 $-\ln\bar{F}(0)=0$, 因此当 $0\leqslant x_1\leqslant x_2$ 时, 必有 (见图 1.6)

$$\frac{-\ln\bar{F}(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{-\ln\bar{F}(x_2)}{x_2}$$

即 $-\dfrac{1}{t}\ln\bar{F}(t)$ 是增函数. 故 $F\in\{\mathrm{IFRA}\}$.

2) $\{\mathrm{IFRA}\}\subset\{\mathrm{NBU}\}$. 若 $F\in\{\mathrm{IFRA}\}$, 即 $-\dfrac{1}{t}\ln\bar{F}(t)$ 是递增函数, 因而对

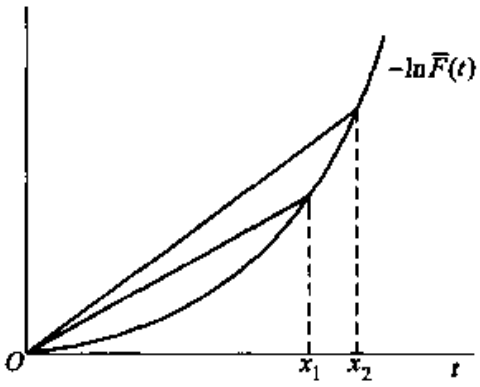


图 1.6

$s,t\geqslant 0$ 有

$$\frac{1}{t}\ln\bar{F}(t)\geqslant\frac{1}{t+s}\ln\bar{F}(t+s),$$
$$\frac{1}{s}\ln\bar{F}(s)\geqslant\frac{1}{t+s}\ln\bar{F}(t+s)$$

因此

$$\begin{aligned}\bar{F}(t)\bar{F}(s)&=\exp\{\ln\bar{F}(t)+\ln\bar{F}(s)\}\\&=\exp\left\{t\left[\frac{1}{t}\ln\bar{F}(t)\right]+s\left[\frac{1}{s}\ln\bar{F}(s)\right]\right\}\\&\geqslant\exp\left\{t\left[\frac{1}{t+s}\ln\bar{F}(t+s)\right]+s\left[\frac{1}{t+s}\ln\bar{F}(t+s)\right]\right\}\\&=\exp\{\ln\bar{F}(t+s)\}=\bar{F}(t+s)\end{aligned}$$

根据 (4) 式, 故 $F\in\{\mathrm{NBU}\}$.

3) $\{\mathrm{NBU}\}\subset\{\mathrm{NBUE}\}$. 若 $F\in\{\mathrm{NBU}\}$, 即 (3) 式成立. 将 (3) 式两端关于 x 从 0 到 ∞ 积分, 就得 (5) 式. 故 $F\in\{\mathrm{NBUE}\}$.

定理 1.5.3 的另一部分可完全类似证明. 证毕.

定义 1.5.5 如果

$$m(t)=\frac{1}{\bar{F}(t)}\int_0^\infty\bar{F}(t+s)ds$$

是 $t\geqslant 0$ 的递减函数 (递增函数), 则称 $F(t)$ 属于**平均剩余寿命递减类(递增类)** 记为 $F\in\{\mathrm{DMRL}\}(F\in\{\mathrm{IMRL}\})$.

定理 1.5.4 有以下包含关系

$$\{\text{IFR}\} \subset \{\text{DMRL}\} \subset \{\text{NBUE}\}$$
$$\{\text{DFR}\} \subset \{\text{IMRL}\} \subset \{\text{NWUE}\}$$

证明 1)$\{\text{IFR}\} \subset \{\text{DMRL}\}$. 若 $F \in \{\text{IFR}\}$, 由定义, 对每个 $x \geqslant 0$, $\bar{F}(t+x)/\bar{F}(t)$ 是 $t \geqslant 0$ 的递减函数. 因此

$$\int_0^\infty \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}dx$$

是 $t \geqslant 0$ 的递减函数. 由定义 1.5.5, 即 $F \in \{\text{DMRL}\}$.

2) $\{\text{DMRL}\} \subset \{\text{NBUE}\}$. 若 $F \in \{\text{DMRL}\}$, 由定义 1.5.5,

$$\int_0^\infty \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}dx$$

是 $t \geqslant 0$ 的递减函数. 因此对任 $t \geqslant 0$, 都有

$$\int_0^\infty \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}dx \leqslant \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$$

因而由定义 1.5.4, $F \in \{\text{NBUE}\}$.

同理证明定理 1.5.4 的其余部分. 证毕.

显然, 指数分布属于所有这些分布类. 可以举出反例来说明定理 1.5.3 和定理 1.5.4 中相反的包含关系不成立.

第二章　典型不可修系统

本章讨论不可修系统. 所谓不可修系统是指, 组成系统的各部件失效后, 不对失效的部件进行任何的维修. 不进行任何维修的原因多种多样. 有的是技术上的原因, 不可能进行维修; 有的是经济上的原因, 不值得进行维修; 有的系统本身是可修的, 但为了分析方便, 作为第一步, 先近似地当作不可修系统进行研究, 等等. 因此, 研究不可修系统是很有现实意义的.

本章将对一些典型系统进行分析, 其中包括串联系统, 并联系统, 表决系统, 冷贮备系统, 温贮备系统, 以及其它一些特殊系统. 对上述这些系统分别求得系统的可靠度函数 $R(t)$ 和系统平均寿命 (MTTF). 此外, 在 §2.5 和 §2.6 介绍可靠度最优分配和备件最优分配问题. 在 §2.7 介绍由两类失效部件组成的系统, 讨论了这类系统的可靠度计算和最优化问题.

§2.1 串联系统和并联系统

§2.1.1 串联系统

系统由 n 个部件串联而成, 即任一部件失效就引起系统失效. 图 2.1 表示 n 个部件串联系统的可靠性框图. 令第 i 个部件的寿命为 X_i, 可靠度为 $R_i(t) = P\{X_i > t\}, i = 1, 2, \cdots, n$. 假定 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立. 若初始时刻 $t = 0$, 所有部件部是新的, 且同时开始工作.

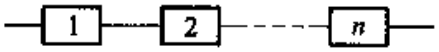


图 2.1 串联系统

显然, 上述串联系统的寿命是

$$X = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

故系统的可靠度为

$$\begin{aligned} R(t) =& P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} > t\} \\ =& P\{X_1 > t, X_2 > t, \cdots, X_n > t\} \\ =& \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > t\} = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \end{aligned} \tag{1}$$

当第 i 个部件的失效率为 $\lambda_i(t)$ 时, 则系统的可靠度为

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-\int_0^t \lambda_i(u)du\right\} = \exp\left\{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u)du\right\} \tag{2}$$

系统的失效率为

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \tag{3}$$

因此, 一个由独立部件组成的串联系统的失效率是所有部件的失效率之和. 系统的平均寿命

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t \lambda(u)du\right\} dt \tag{4}$$

当 $R_i(t) = \exp\{-\lambda_i t\}, i = 1, 2, \cdots, n$, 即当第 i 个部件的寿命遵从参数 λ_i 的指数分布时, 系统的可靠度和平均寿命为

$$\begin{cases} R(t) = \exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i t\right\} \\ \mathrm{MTTF} = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} \end{cases} \tag{5}$$

特别, 当 $R_i(t)=e^{-\lambda t}, i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\begin{cases} R(t)=e^{-n\lambda t} \\ \mathrm{MTTF}=\dfrac{1}{n\lambda} \end{cases} \tag{6}$$

§2.1.2 并联系统

系统由 n 个部件并联而成, 即只当这 n 个部件都失效时系统才失效. 图 2.2 表示 n 个部件并联系统的可靠性框图. 令第 i 个部件的寿命为 X_i, 可靠度为 $R_i(t), i=1,2,\cdots,n$. 假定 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

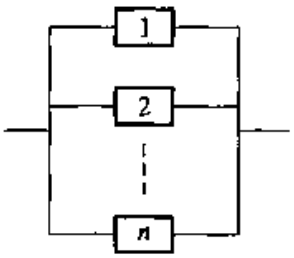


图 2.2 并联系统

若初始时刻 $t=0$, 所有部件都是新的, 且同时开始工作, 则易知并联系统的寿命为

$$X=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

于是系统的可靠度是

$$\begin{aligned} R(t) =& P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)>t\} \\ =& 1-P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant t\} \\ =& 1-P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,\cdots,X_n\leqslant t\} \\ =& 1-\prod_{i=1}^{n}[1-R_i(t)] \end{aligned} \tag{7}$$

当 $R_i(t)=e^{-\lambda_i t}, i=1,2,\cdots,n$, 则

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-e^{-\lambda_i t}] \tag{8}$$

上式可改写为

$$R(t)=\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i t}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}+\cdots$$
$$+(-1)^{i-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant n}e^{-(\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+\cdots+\lambda_{j_i})t}$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}$$

因而系统的平均寿命

$$\mathrm{MTTF}=\int_0^\infty R(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\tag{9}$$

特别当 $n=2$ 时, 有

$$\begin{cases}R(t)=e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\\ \mathrm{MTTF}=\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}-\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\\ \lambda(t)=\dfrac{\lambda_1e^{-\lambda_1t}+\lambda_2e^{-\lambda_2t}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1t}+e^{-\lambda_2t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}\end{cases}\tag{10}$$

当 $R_i(t)=e^{-\lambda t},i=1,2,\cdots,n$, 则

$$\begin{cases}R(t)=1-(1-e^{-\lambda t})^n\\ \mathrm{MTTF}=\displaystyle\int_0^\infty[1-(1-e^{-\lambda t})^n]dt=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\lambda}\end{cases}\tag{11}$$

只要作变量代换 $y=1-e^{-\lambda t}$, 就可得上述最后一个等号关系. 系统的失效率是

$$\lambda(t)=\frac{n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}}{1-(1-e^{-\lambda t})^n}\tag{12}$$

需要特别注意的是, 可靠性框图表示部件好坏与系统好坏之间的关系, 即它表示部件和系统之间的可靠性关系. 可靠性框图与工程结构图并不完全等价. 举例来说, 最简单的振荡电路由一个电感 L 和一个电容 C 组成, 在工程结构图中, 电感 L 和电容 C 是并联连接, 但在可靠性框图中, 它们却是串联关系. 这是因为电感 L 和电容 C 中任何一个失效都引起振荡电路失效, 这符合 §§2.1.1 中串联系统的定义 (图 2.3). 在以下讨论的所有可靠性基本模型中, 都必须注意不要将可靠性框图与工程结构图互相混淆, 以免在实际应用中出大错误,

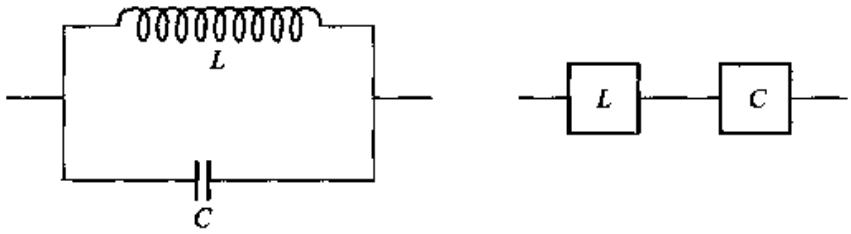


图 2.3

§2.1.3 表决系统

n 中取 k 的表决系统由 n 个部件组成, 当 n 个部件中有 k 个或 k 个以上部件正常工作时, 系统才正常工作 $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 即当失效的部件数大于或等于 $n-k+1$ 时, 系统失效. 简记为 $k/n(G)$ 系统. 图 2.4 表示该系统的可靠性框图. 假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是这 n 个部件的寿命, 它们相互独立, 且每个部件的可靠度均为 $R_0(t)$.

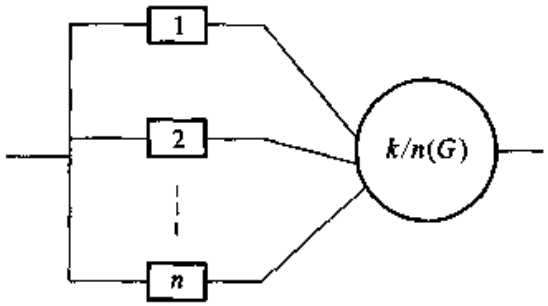


图 2.4 表决系统

若初始时刻所有部件都是新的, 且同时开始工作, 则系统的可靠度为

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} P\{X_{j+1}, \cdots, X_n \leqslant t < X_1, \cdots, X_j\} \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} R_0^j(t)[1-R_0(t)]^{n-j} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \int_0^{R_0(t)} x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx \end{aligned} \tag{13}$$

若部件寿命存在密度函数 $f_0(t)$, 则系统的失效率是

$$\lambda(t) = \frac{f_0(t)R_0^{k-1}(t)[1-R_0(t)]^{n-k}}{\int_0^{R_0(t)} x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx} \tag{14}$$

当 $R_0(t)=e^{-\lambda t}$, 则有

$$\begin{cases} R(t)=\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{n}{i}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-i} \\ \text{MTTF}=\int_0^{\infty}\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{n}{i}e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-i}dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &=\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{\lambda}\binom{n}{i}\int_0^1(1-y)^{i-1}y^{n-i}dy \\ &=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)} \\ &=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} \end{aligned} \tag{15}$$

当部件的可靠度不相同时, 可类似求得表决系统的各种可靠性指标. 例如, 一个 $2/3(G)$ 系统, 部件的可靠度为 $R_i(t), i=1,2,3$, 则

$$\begin{aligned} R(t)=&R_1(t)R_2(t)R_3(t)+R_1(t)R_2(t)\bar{R}_3(t) \\ &+R_1(t)\bar{R}_2(t)R_3(t)+\bar{R}_1(t)R_2(t)R_3(t) \\ =&R_1(t)R_2(t)+R_1(t)R_3(t)+R_2(t)R_3(t) \\ &-2R_1(t)R_2(t)R_3(t) \end{aligned} \tag{16}$$

表决系统的另一种形式是 $k/n(F)$ 系统, 它表示 n 个部件组成的系统中, 有 k 个或 k 个以上部件失效时, 系统就失效. 易见 $k/n(F)$ 系统等价于 $n-k+1/n(G)$ 系统.

表决系统有以下的特殊情形:

1) $n/n(G)$ 系统或 $1/n(F)$ 系统等价于 n 个部件的串联系统.

2) $1/n(G)$ 系统或 $n/n(F)$ 系统等价于 n 个部件的并联系统.

3) $(n+1)/(2n+1)(G)$ 系统或 $(n+1)/(2n+1)(F)$ 系统是多数表决系统.

§2.1.4 串-并联系统

图 2.5 所表示的系统称为串-并联系统. 若各部件的可靠度分别为 $R_{ij}(t), i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m_i$, 且所有部件的寿命都相互独立. 则用 §§2.1.1 和

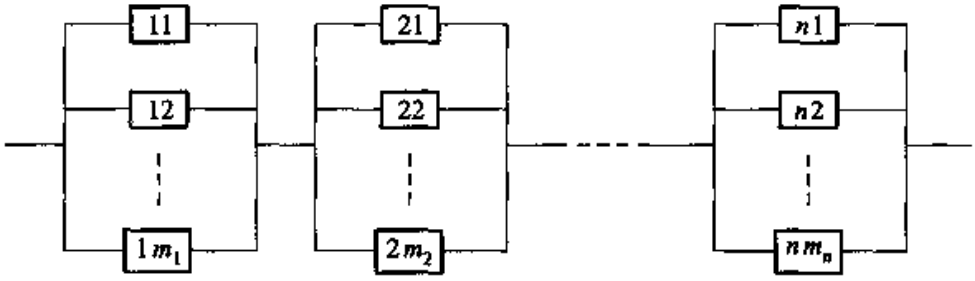


图 2.5　串–并联系统

§§2.1.2 的串联系统和并联系统的公式, 立即得

$$R(t)=\prod_{i=1}^{n}\left\{1-\prod_{j=1}^{m_i}[1-R_{ij}(t)]\right\} \tag{17}$$

当所有 $R_{ij}(t)=R_0(t)$, 所有 $m_i=m$ 时, 有

$$R(t)=\{1-[1-R_0(t)]^m\}^n \tag{18}$$

特别当 $R_0(t)=e^{-\lambda t}$ 时,

$$\begin{cases} R(t)=\{1-[1-e^{-\lambda t}]^m\}^n \\ \mathrm{MTTF}=\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k\binom{m_j}{k}\frac{1}{k} \end{cases} \tag{19}$$

§2.1.5 并–串联系统

图 2.6 所表示的系统称为并–串联系统. 若各部件的可靠度分别为 $R_{ij}(t), i=$

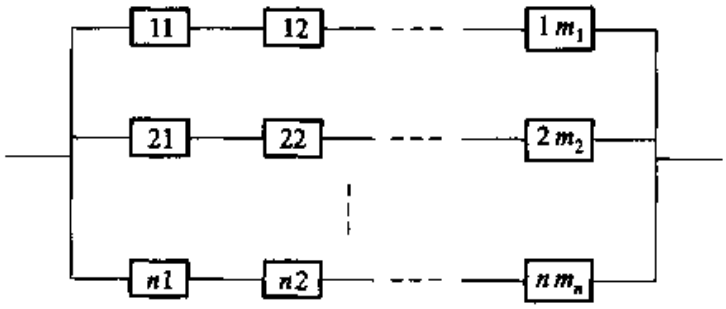


图 2.6　并–串联系统

$1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m_i$, 且所有部件相互独立. 此时系统的可靠度是

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-\prod_{j=1}^{m_j}R_{ij}(t)\right] \tag{20}$$

当所有 $R_{ij}(t)=R_0(t)$, 所有 $m_i=m$ 时, 有

$$R(t)=1-[1-R_0^m(t)]^n \tag{21}$$

特别当 $R_0(t)=e^{-\lambda t}$ 时,

$$\begin{cases} R(t)=1-[1-e^{-m\lambda t}]^n \\ \text{MTTF}=\dfrac{1}{m\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i} \end{cases} \tag{22}$$

§2.2 冷贮备系统

§2.2.1 转换开关完全可靠的情形

设系统由 n 个部件组成. 在初始时刻, 一个部件开始工作, 其余 $n-1$ 个部件作冷贮备. 当工作部件失效时, 贮备部件逐个地去替换, 直到所有部件都失效时, 系统就失效.

所谓冷贮备是指贮备的部件不失效也不劣化, 贮备期的长短对以后使用时的工作寿命没有影响. 此系统可以用图 2.7 来表示. 这里, 我们假定, 贮备部件替换失效部件时, 转换开关 K 是完全可靠的, 而且转换是瞬时完成的.

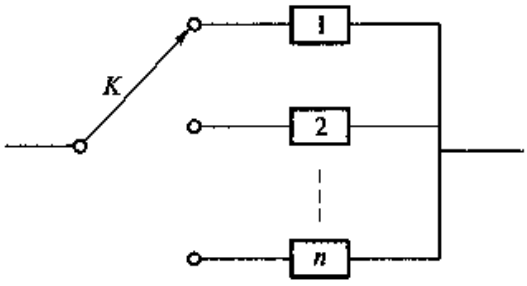


图 2.7 冷贮备系统

假设这 n 个部件的寿命分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 且它们相互独立. 易见, 冷贮备系统的寿命是

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

因此, 系统的寿命分布是

$$F(t)=P\{X_1+\cdots+X_n\leqslant t\}=F_1(t)*F_2(t)*\cdots*F_n(t)$$

其中 $F_i(t)$ 是第 i 个部件的寿命分布, $*$ 表示卷积

$$A(t)*B(t)=\int_0^t B(t-u)dA(u)$$

因而, 系统的可靠度是

$$R(t)=1-F_1(t)*F_2(t)*\cdots*F_n(t) \tag{1}$$

系统的平均寿命是

$$\mathrm{MTTF}=E\{X_1+X_2+\cdots+X_n\}=\sum_{i=1}^{n}EX_i=\sum_{i=1}^{n}T_i \tag{2}$$

其中 T_i 是第 i 个部件的平均寿命.

当 $F_i(t)=1-e^{-\lambda t}, i=1,2,\cdots,n$ 时, 系统的寿命是 n 个独立同指数分布的随机变量之和. 由定理 1.2.3, 系统的可靠度和平均寿命是

$$\begin{cases} R(t)=e^{-\lambda t}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ \mathrm{MTTF}=\dfrac{n}{\lambda} \end{cases} \tag{3}$$

当 $F_i(t)=1-e^{-\lambda_i t}, i=1,2,\cdots,n$, 且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都两两不相等时, 若记系统寿命分布 $F(t)$ 的 LS 变换为

$$\hat{F}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dF(t),\quad s\geqslant 0$$

则有

$$\begin{aligned}\hat{F}(s)=&E\{e^{-sX}\}=E\left\{e^{-s(X_1+\cdots+X_n)}\right\}\\ =&\prod_{i=1}^{n}E\left\{e^{-sX_i}\right\}=\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}e^{-st}dF_i(t)\\ =&\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i},\quad s\geqslant 0\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$c_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

要证明 (4) 式的最后一个等号关系, 只需在等号两端同乘 $s+\lambda_j$, 得到

$$\lambda_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i} = (s+\lambda_j) \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i \lambda_i}{s+\lambda_i}$$

将 $s=-\lambda_j$ 代入上式两端, 可得

$$\lambda_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j} = c_j \lambda_j$$

上式对所有 $j=1,2,\cdots,n$ 都成立. 故得 (4) 的最后等式及 (5) 式. 对 (4) 的两端作 LS 变换的反演, 得

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i (1 - e^{-\lambda_i t}) = \sum_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t}$$

由于当 $t \to \infty$, 有 $F(t) \to 1$, 因此 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$. 故最后得系统可靠度和平均寿命是

$$\begin{cases} R(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_i} \right] e^{-\lambda_i t} \\ \mathrm{MTTF} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \end{cases} \tag{6}$$

特别当系统由两个部件组成时

$$\begin{cases} R(t) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \\ \mathrm{MTTF} = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} \end{cases} \tag{7}$$

§2.2.2 转换开关不完全可靠的情形：开关寿命 0-1 型

在实际问题中，冷贮备系统的转换开关也可能失效，因而转换开关的好坏是影响系统可靠度的一个重要因素．在实践中，转换开关的好坏，及其对系统的影响可能有各种不同的类型．下面将讨论两种不同的类型：开关寿命 0-1 型和开关寿命指数型．

假设系统由 n 个部件和一个转换开关组成．在初始时刻，一个部件开始工作，其余部件作冷贮备．当工作部件失效时，转换开关立即从刚失效的部件转向下一个贮备部件．这里转换开关不完全可靠，其寿命是 0-1 型的，即每次使用开关时，开关正常的概率为 p，开关失效的概率为 $q=1-p$．在以下两种情形之一，系统就失效：

1) 当正在工作的部件失效，使用转换开关时开关失效，此时系统失效．

2) 所有 $n-1$ 次使用开关时，开关都正常，在这种情形，n 个部件都失效时系统失效．

我们进一步假设，n 个部件的寿命 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同指数分布 $1-e^{-\lambda t}$，且与开关的好坏也是独立的．

为求得系统的可靠度，我们引进一个随机变量

$$\nu=\begin{cases} j, & \text{若第 } j \text{ 次使用开关时，开关首次失效，} \\ & j=1,2,\cdots,n-1 \\ n, & \text{若} n-1 \text{次使用开关，开关都正常} \end{cases}$$

由 ν 的定义，易见

$$P\{\nu=j\}=p^{j-1}q, \quad j=1,2,\cdots,n-1$$
$$P\{\nu=n\}=p^{n-1}$$

由于

$$\sum_{j=1}^{n} P\{\nu=j\}=1$$

可知 ν 是一个通常的随机变量．并有

$$\begin{aligned} E\{\nu\} &= \sum_{j=1}^{n} jP\{\nu=j\}=\sum_{j=1}^{n-1} jp^{j-1}q+np^{n-1} \\ &= \frac{1}{q}(1-p^n) \end{aligned} \tag{8}$$

用随机变量 X 来表示我们研究的系统寿命, 就有

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与开关好坏相互独立, 因此, 它们与 ν 相互独立. 故系统的可靠度是

$$\begin{aligned} R(t) =& P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu > t\} \\ =& \sum_{j=1}^{n} P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu > t | \nu = j\} P\{\nu = j\} \\ =& \sum_{j=1}^{n-1} P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j > t\} p^{j-1} q \\ &+ P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n > t\} p^{n-1} \end{aligned}$$

由公式 (3), 有

$$P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j > t\} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t},$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

代入上式得

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{j=1}^{n-1} p^{j-1} q \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} + p^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} p^j q \sum_{i=0}^{j} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} + p^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} q \sum_{j=i}^{n-2} p^j + p^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda p t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{9}$$

利用 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 ν 的独立性, 以及公式 (8) 的结果, 系统的平均寿命是

$$\begin{aligned}\text{MTTF} =& E\{X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu\} \\ =& \sum_{j=1}^{n} E\{X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu | \nu = j\} P\{\nu = j\} \\ =& \sum_{j=1}^{n} jE\{X_1\} P\{\nu = j\} = \frac{1}{\lambda} E\{\nu\} \\ =& \frac{1}{\lambda q}(1 - p^n) \end{aligned} \tag{10}$$

当每个部件的失效率都两两不相同时, 可类似地求得 $R(t)$ 和 MTTF, 但是表达式比较复杂, 我们仅对两个部件的情形列出结果如下:

$$P\{\nu = j\} = \begin{cases} q, & \text{当} \quad j = 1 \\ p, & \text{当} \quad j = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R(t) =& P\left\{\sum_{j=1}^{\nu} X_j > t\right\} \\ =& qP\{X_1 > t\} + pP\{X_1 + X_2 > t\} \\ =& qe^{-\lambda_1 t} + p\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}\right) \\ =& e^{-\lambda_1 t} + \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{MTTF} = \frac{1}{\lambda_1} + p\frac{1}{\lambda_2} \tag{12}$$

当 $p = 1$, 即当转换开关完全可靠时, 这里所有的结果与 §2.2.1 的结果完全一致.

§2.2.3 转换开关不完全可靠的情形: 开关寿命指数型

这里假定开关的寿命 X_K 遵从参数 λ_K 的指数分布, 并与各部件的寿命相互独立. 其余假定与 §2.2.2 相同. 此时, 开关对系统的影响还可能有两种不同的形式.

1) 当开关失效时, 系统立即失效. 显然, 该系统的寿命是

$$X = \min[X_1 + X_2 + \cdots + X_n, X_K]$$

因而, 系统可靠度和平均寿命是

$$\begin{aligned} R(t) =& P\{\min[X_1 + X_2 + \cdots + X_n, X_K] > t\} \\ =& P\{X_k > t\} P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n > t\} \\ =& e^{-\lambda_K t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ =& e^{-(\lambda+\lambda_K)t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{MTTF} =& \int_0^\infty R(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda+\lambda_K)t} dt \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{(\lambda+\lambda_K)^{k+1}} \cdot \frac{1}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx \\ =& \frac{1}{\lambda+\lambda_K} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_K}\right)^k \\ =& \frac{1}{\lambda_K} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_K}\right)^n\right] \end{aligned} \tag{14}$$

2) 开关失效时, 系统并不立即失效, 当工作部件失效需要开关转换时, 由于开关失效而使系统失效.

为简单起见, 我们只考虑两个部件的情形. 假设两个部件的寿命 X_1, X_2 和开关寿命 X_K 分别遵从参数 λ_1, λ_2 和 λ_K 的指数分布, 且它们都相互独立. 在初始时刻部件 1 进入工作状态, 部件 2 作冷贮备. 当部件 1 失效时, 需要使用转换开关, 若此时开关已经失效 ($X_K < X_1$), 则系统就失效. 因此系统的寿命就是部件 1 的寿命 X_1; 当部件 1 失效时, 若转换开关正常 ($X_K > X_1$), 则部件 2 替换部件 1 进入工作状态, 直到部件 2 失效, 系统就失效, 这时系统的寿命是 $X_1 + X_2$. 根据以上系统的描述, 易见系统寿命 X 为

$$X = X_1 + X_2 I_{\{X_K > X_1\}} \tag{15}$$

其中 $I_{\{X_K>X_1\}}$ 是随机事件 $\{X_K > X_1\}$ 的示性函数

$$I_{\{X_K>X_1\}} = \begin{cases} 1, & 当X_K > X_1 \\ 0, & 当X_K \leqslant X_1 \end{cases}$$

因而

$$\begin{aligned} 1 - R(t) =& P\{X \leqslant t\} \\ =& P\{X_1 \leqslant t, X_K \leqslant X_1\} + P\{X_1 + X_2 \leqslant t, X_K > X_1\} \\ =& \int_0^t P\{X_K \leqslant u\} dP\{X_1 \leqslant u\} \\ &+ \int_0^t P\{X_2 \leqslant t-u, X_K > u\} dP\{X_1 \leqslant u\} \\ =& \int_0^t (1 - e^{-\lambda_K u})\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ &+ \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2(t-u)}) e^{-\lambda_K u} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ =& 1 - e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_K + \lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_K)t} \right] \end{aligned}$$

系统的可靠度和平均寿命是

$$\begin{cases} R(t) = e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_K + \lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_K)t} \right] \\ \mathrm{MTTF} = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_K)} \end{cases} \tag{16}$$

特别当 $\lambda_K = 0$ 时, 公式 (13), (14) 和 (16) 与 §2.2.1 的结果一致.

§2.3 温贮备系统

§2.3.1 转换开关完全可靠的情形

温贮备系统与冷贮备系统的不同在于, 温贮备系统中贮备部件在贮备期内也可能失效, 部件的贮备寿命分布和工作寿命分布一般不相同.

假设系统由 n 个同型部件组成, 部件的工作寿命和贮备寿命分别遵从参数 λ 和 μ 的指数分布. 在初始时刻, 一个部件工作, 其余部件作温贮备. 所有部件均可能失效. 当工作部件失效时, 由尚未失效的贮备部件去替换. 直到所有部件都失效, 则系统失效. 这里, 我们假定

1) 转换开关是完全可靠的, 且转换是瞬时的.

2) 部件的工作寿命与其曾经贮备了多长时间无关, 都遵从分布 $1-e^{-\lambda t}$, $t\geqslant 0$.

3) 所有部件的寿命均相互独立.

为求系统的可靠度和平均寿命, 我们用 S_i 表示第 i 个失效部件的失效时刻, $i=1,2,\cdots,n$, 且令 $S_0=0$. 显然

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(S_i-S_{i-1})$$

是系统的失效时刻. 在时间区间 (S_{i-1},S_i) 中, 系统已有 $i-1$ 个部件失效, 还有 $n-i+1$ 个部件是正常的, 其中一个部件工作, $n-i$ 个部件作温贮备. 由于指数分布的无记忆性, S_i-S_{i-1} 遵从参数 $\lambda+(n-i)\mu$ 的指数分布, $i=1,2,\cdots,n$, 且它们都相互独立. 故该系统等价于 n 个独立部件组成的冷贮备系统, 其中第 i 个部件的寿命遵从参数 $\lambda_i=\lambda+(n-i)\mu$ 的指数分布. 当 $\mu>0$ 时, 由 §2.2 公式 (6) 得

$$\begin{cases} R(t)=P\{S_n>t\} \\ \quad =\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{\lambda+(n-k)\mu}{(i-k)\mu}\right]e^{-[\lambda+(n-i)\mu]t} \\ \quad =\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left[\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1}\frac{\lambda+k\mu}{(k-i)\mu}\right]e^{-(\lambda+i\mu)t} \\ \mathrm{MTTF}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda+(n-i)\mu} \\ \quad =\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda+i\mu} \end{cases} \tag{17}$$

当 $\mu=0$ 时, 可直接用 §2.2 中的公式 (3). 当 $\mu=\lambda$ 时, 此系统归结为 n 个同型部件的并联系统. 此时, (17) 式可化为 §2.1 中的 (11) 式.

当部件寿命分布的参数不相同时, 求温贮备系统可靠度相当繁琐. 在这里, 我们仅讨论两个部件的情形. 在初始时刻, 部件 1 工作, 部件 2 作温贮备. 部件 1, 2 的工作寿命 X_1,X_2, 部件 2 的贮备寿命 Y_2 分别遵从参数 λ_1,λ_2 和 μ 的指数分布. 此时系统的寿命是

$$X = X_1 + X_2 I_{\{Y_2 > X_1\}}$$

其形式与 §2.2 中的 (15) 式一样. 因此

$$\begin{cases} R(t) = e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2 + \mu}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\mu)t}\right] \\ \mathrm{MTTF} = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu}\right) \end{cases} \tag{18}$$

§2.3.2 转换开关不完全可靠的情形：开关寿命 0-1 型

与 §2.2.2 类似, 假定使用开关时, 开关正常的概率是 p. 为简单起见, 我们只考虑两个不同型部件的情形. 其余假设同 §2.3.1.

令

$$X_K = \begin{cases} 1, & \text{使用开关时开关正常} \\ 0, & \text{使用开关时开关失效} \end{cases}$$

于是系统的寿命可表示为

$$X = X_1 + X_2 \cdot I_{\{Y_2 > X_1\}} \cdot I_{\{X_K = 1\}}$$

故由全概率公式和独立性,

$$\begin{aligned} R(t) =& P\{X > t\} = P\{X_1 > t, X_K = 0\} \\ &+ P\{X_1 + X_2 \cdot I_{\{Y_2 > X_1\}} > t, X_K = 1\} \\ =& qP\{X_1 > t\} + pP\{X_1 + X_2 \cdot I_{\{Y_2 > X_1\}} > t\} \\ =& e^{-\lambda_1 t} + p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2 + \mu}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\mu)t}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

上式最后一个等号利用了 (18) 式. 系统平均寿命为

$$\mathrm{MTTF} = \frac{1}{\lambda_1} + p\frac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 + \mu)}$$

§2.3.3 转换开关不完全可靠的情形：开关寿命指数型

这里假定开关的寿命 X_K 遵从参数 λ_K 的指数分布, 并与部件的寿命相互独立. 其余假设同 §2.3.2. 类似于 §2.2.3, 此时, 开关对系统的影响有两种不同的形式.

1) 当开关失效时, 系统立即失效. 此时, 系统的寿命是

$$X = \min\{X_1 + I_{\{Y_2>X_1\}} \cdot X_2, X_K\}$$

用 (18) 式, 立即可得

$$\begin{cases} R(t) = P\{X_K > t\}P\{X_1 + X_2 \cdot I_{\{Y_2>X_1\}} > t\} \\ \quad\quad = e^{-\lambda_K t}\left\{e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2 + \mu}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\mu)t}\right]\right\} \\ \text{MTTF} = \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_K} + \dfrac{\lambda_1}{(\lambda_2 + \lambda_K)(\lambda_1 + \mu + \lambda_K)} \end{cases} \tag{20}$$

2) 当开关失效时, 系统并不立即失效, 当工作部件失效需要开关转换时, 由于开关失效而使系统失效. 若记开关寿命为 X_K, 则系统寿命是

$$X = X_1 + X_2 \cdot I_{\{Y_2>X_1\}} \cdot I_{\{X_K>X_1\}}$$

故

$$\begin{aligned} 1 - R(t) =& P\{X \leqslant t\} = P\{X \leqslant t, Y_2 < X_1\} \\ &+ P\{X \leqslant t, Y_2 > X_1, X_K < X_1\} + P\{X \leqslant t, \\ &Y_2 > X_1, X_K > X_1\} \\ =& P\{X_1 \leqslant t, Y_2 < X_1\} + P\{X_1 \leqslant t, Y_2 > X_1, X_K < X_1\} \\ &+ P\{X_1 + X_2 \leqslant t, Y_2 > X_1, X_K > X_1\} \\ =& \int_0^t (1 - e^{-\mu u})\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du + \int_0^t e^{-\mu u}(1 - e^{-\lambda_K u})\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ &+ \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2(t-u)})e^{-\mu u} e^{-\lambda_K u}\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ =& 1 - e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_K + \mu - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_K+\mu)t}\right] \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} R(t) = e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_K + \mu - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_K+\mu)t}\right] \\ \text{MTTF} = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_K + \mu)} \end{cases} \tag{21}$$

§2.4 两个特殊系统

§2.4.1 两个相依部件的并联系统

系统由两个部件并联而成. 这两个部件的寿命 X_1 和 X_2 遵从二维指数分布, 其联合生存概率为

$$P\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\} = \exp[-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_{12}\max(x_1, x_2)],$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$. 因此边缘生存概率为

$$P\{X_1 > x_1\} = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1],\ x_1 \geqslant 0$$
$$P\{X_2 > x_2\} = \exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12})x_2],\ x_2 \geqslant 0$$

此时系统的寿命为 $X = \max(X_1, X_2)$, 因此系统可靠度为

$$\begin{aligned} R(t) =& P\{\max(X_1, X_2) > t\} \\ =& P\{X_1 > t\} + P\{X_2 > t\} - P\{X_1 > t, X_2 > t\} \\ =& e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})t} \\ =& e^{-\lambda_{12}t}[e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}] \end{aligned} \tag{1}$$

平均寿命为

$$\mathrm{MTTF} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12}} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}} \tag{2}$$

这个系统可以理解为, 引起这两个部件失效的有其各自的、相互独立的原因, 它们出现时间分别遵从参数 λ_1 和 λ_2 的指数分布. 此外还有一个共同的原因, 其出现时间遵从参数 λ_{12} 的指数分布. 在实际问题中要从两个相依部件中分离出共同原因, 且确定参数值 λ_{12} 是比较困难的.

由公式 (1) 右端的表达式表明, 这里讨论的系统等价于图 2.8 的系统, 部件 1 和部件 2 并联, 然后与部件 3 串联, 它们的寿命分别遵从参数 λ_1, λ_2 和 λ_{12} 的指数分布, 且相互独立地工作.

这个系统也可理解为, 系统由两个并联的部件组成, 受三个相互独立的冲击源的影响, 冲击发生的时间, 及其对两个部件的影响参见第一章的 §1.4.2.

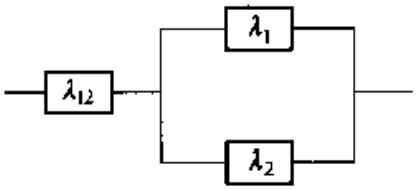


图 2.8

§2.4.2 有冷贮备部件的串联系统

系统由 $n+l$ 个同型部件组成, 其中系统需有 l 个部件串联工作, 其它部件作冷贮备. 当 l 个工作部件中有一个失效时, 若还有贮备部件, 则贮备部件之一立即去替换, 系统继续工作; 当 l 个工作部件中有一个失效时, 若贮备部件已用完, 则系统失效. 假定所有部件的工作寿命均遵从参数 λ 的指数分布, 且相互独立. 我们要求这个系统的可靠度和平均寿命.

在一个 l 个部件的串联系统中, 直到有一个部件失效的时间 (即串联系统的寿命) 分布是 $1-e^{-l\lambda t}$. 当其中一个部件失效后, 贮备部件之一去替换, 替换后仍是 l 个部件串联工作. 由于指数分布的无记忆性, 可认为这 l 个部件都是新的条件下同时开始工作. 因此, 直到有一个部件失效的时间分布仍为 $1-e^{-l\lambda t}$. 由于有 n 个贮备部件, 可作 n 次替换, 因此系统的寿命是 $n+1$ 个独立的随机变量之和, 每个随机变量的分布均为 $1-e^{-l\lambda t}$. 所以, 这系统等价于 $n+1$ 个独立部件的冷贮备系统, 其中每个部件的失效率是 $l\lambda$. 因而, 系统的可靠度和平均寿命是

$$\begin{cases} R(t)=e^{-l\lambda t}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(l\lambda t)^k}{k!} \\ \mathrm{MTTF}=\dfrac{n+1}{l\lambda} \end{cases} \tag{3}$$

§2.5 可靠度最优分配

可靠度分配是系统研制过程中需解决的一个重要问题, 其目的是从整体考虑, 将有限资源加以最有效地利用. 要进行最优分配, 必须首先明确目标函数和约束条件. 如果系统由 n 个子系统组成, 第 j 个子系统的可靠度用 R_j 表示,

$j=1,2,\cdots,n$. 可靠度最优分配问题的一般形式有两类.

问题 I 在约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(R_j) \leqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,r$$
$$0 \leqslant R_j \leqslant 1, \quad j=1,2,\cdots,n$$

之下, 求 $R_1,R_2,\cdots,R_n$, 使系统可靠度 $h(R_1,R_2,\cdots,R_n)$ 达到最大. 其中 $h(R_1,R_2,\cdots,R_n)$ 表示子系统的可靠度为 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 时系统的可靠度, $g_{ij}(R_j)$ 表示第 j 个子系统的可靠度为 R_j 时需花费的第 i 种资源的数量, b_i 则表示第 i 种资源的总限制 ($i=1,2,\cdots,r$, 例如它们分别表示费用、重量、体积、功耗等). g_{ij} 和 h 通常是 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的单调递增函数.

问题 II 在约束条件

$$h(R_1,R_2,\cdots,R_n) \geqslant R_0$$
$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(R_j) \leqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,r$$
$$0 \leqslant R_j \leqslant 1, \quad j=1,2,\cdots,n$$

之下, 求 $R_1,R_2,\cdots,R_n$, 使总费用 (或其它某个特别关心的资源总消耗)$\sum_{j=1}^{n} f_j(R_j)$ 达到最小, 其中 R_0 是预定要求系统达到的可靠度, $f_j(R_j)$ 表示第 j 个子系统可靠度为 R_j 时所花的费用, 它也是 R_j 的单调递增函数.

通常, $h(R_1,R_2,\cdots,R_n), g_{ij}(R_j), f_j(R_j)$ 可能是非线性函数, 因此解问题I和问题II一般需用非线性规划的工具. 对于具体问题和特定的函数形式, 有许多文章讨论这类数学规划问题的求解. 然而在实际工程应用中常常考虑以下两类简单得多的最优分配问题.

问题 I′ 在约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(R_j) = b,$$
$$0 \leqslant R_j \leqslant 1, \quad j=1,2,\cdots,n$$

之下, 求 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 使系统可靠度

$$h(R_1,R_2,\cdots,R_n)$$

达到最大.

问题 II′ 在约束条件

$$h(R_1, R_2, \cdots, R_n) = R_0$$
$$0 \leqslant R_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

之下, 求 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 使总费用

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(R_j)$$

达到最小.

对于问题 I′ 和问题 II′, 通常可用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求解. 下面通过几个简单例子来说明具体求解法. 这种解法在数学上并不是严格的, 但在大多数有实际意义的工程问题中, 确可求得最优解.

例 2.5.1 考虑 n 个独立子系统组成的串联系统. 假定每个子系统的研制费与其可靠度的关系为

$$f_j(R_j) = \frac{-a_j}{\ln R_j}, \quad (a_j > 0), \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

在给定总研制费为 b 的条件下 $(b > 0)$, 求各子系统的可靠度, 使系统可靠度最大. 该最优分配问题归结为求 $R_1, R_2, \cdots, R_n$, 满足

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{-a_j}{\ln R_j} = b \\ 0 \leqslant R_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{n} R_j = \max \end{cases}$$

为方便, 将上述问题改为

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{-a_j}{\ln R_j} = b \\ 0 \leqslant R_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \ln R_j = \max \end{cases}$$

我们引进拉格朗日乘子, 令

$$L(R_1, R_2, \cdots, R_n; \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \ln R_j + \lambda \left[b + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\ln R_j} \right]$$

由于 $\dfrac{\partial}{\partial R_j} L = 0$, 即

$$\frac{1}{R_j} - \lambda \frac{a_j}{R_j (\ln R_j)^2} = 0$$

由于 $0 \leqslant R_j \leqslant 1$, 解得

$$R_j = e^{-\sqrt{\lambda a_j}}, \quad \lambda > 0$$

代入等约束条件, 可解出

$$\lambda = \left[\frac{1}{b} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j} \right]^2$$

因而子系统的可靠度应为

$$R_j^* = \exp\left\{ -\frac{\sqrt{a_j}}{b} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \right\}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

此时, 系统的可靠度是

$$R^* = \prod_{j=1}^{n} R_j^* = \exp\left\{ -\frac{1}{b} \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j} \right)^2 \right\}$$

例 2.5.2 考虑 n 个独立子系统组成的串联系统, 子系统的寿命均遵从指数分布. 我们要求对每个子系统分配一个失效率 λ_i, 使系统工作 T 小时后达到预定的可靠度 R_0, 并使某个损失函数达到最小. 假定每个子系统的损失函数 $f_j(\lambda_j)$ 依赖于该子系统的失效率 λ_j. 我们的问题归结为, 求 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 满足

$$\begin{cases} \exp\left\{ -\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j T \right\} = R_0 \\ \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(\lambda_j) = \min \end{cases}$$

此问题可改写为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = P, \quad \text{其中} P = -\dfrac{1}{T} \ln R_0 \\ \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda_j) = \min \end{cases}$$

一般 $f_j(\lambda_j)$ 是 λ_j 的非线性函数, 可用拉格朗日乘子法来解此最优分配问题.

当 $f_j(\lambda_j) = \dfrac{a_j}{\lambda_j}, a_j > 0, j = 1, 2, \cdots, n$. 令

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n; \alpha) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j} + \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j - P \right)$$

$\dfrac{\partial}{\partial \lambda_j} L = 0$ 等价于

$$-\frac{a_j}{\lambda_j^2} + \alpha = 0$$

因 $\lambda_j \geqslant 0$, 解得

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{a_j}{\alpha}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

代入约束条件, 得

$$\sqrt{\alpha} = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j}$$

因此

$$\lambda_j^* = \frac{P\sqrt{a_j}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

此时, 总最小损失为

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j^*} = \frac{1}{P} \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j} \right)^2$$

例 2.5.3 考虑由 n 个独立子系统组成的串联系统. 已知第 i 个子系统的可靠度 R_i 与制造费 x_i 的关系是

$$R_i = 1 - e^{-\alpha_i (x_i - \beta_i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$. 现给定系统可靠度的要求 R_0, 将它分配给各子系统, 使总制造费最小. 该问题归结为

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{n} R_i = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - e^{-\alpha_i(x_i-\beta_i)}\right] = R_0 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \min \end{cases}$$

引进拉格朗日乘子, 令

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \lambda \left\{ R_0 - \prod_{i=1}^{n} [1 - e^{-\alpha_i(x_i-\beta_i)}] \right\}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x_j} L = 0$ 等价于

$$1 - \lambda \alpha_j e^{-\alpha_j(x_j-\beta_j)} \prod_{i \neq j} [1 - e^{-\alpha_i(x_i-\beta_i)}] = 0$$

解得

$$\lambda = \left\{ \alpha_j e^{-\alpha_j(x_j-\beta_j)} \prod_{i \neq j} \left[1 - e^{-\alpha_i(x_i-\beta_i)}\right] \right\}^{-1}$$

即

$$\lambda = \frac{R_j}{\alpha_j(1 - R_j)R_0}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

一般需解 n 个方程式才能求出 $R_1, R_2, \cdots, R_n$.

如果只有二个子系统, $R_0 = 0.72$, $\alpha_1 = 0.9, \beta_1 = 4.0$, $\alpha_2 = 0.4$, $\beta_2 = 0.01$, 则由

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{R_1}{\alpha_1(1 - R_1)R_0} = \dfrac{R_2}{\alpha_2(1 - R_2)R_0} \\ R_1 R_2 = R_0 \end{cases}$$

可解得

$$R_1 = 0.9, \ R_2 = 0.8$$

由 $x_i = \beta_i - \dfrac{\ln(1 - R_i)}{\alpha_i}$, 求出

$$x_1 = 6.56, \quad x_2 = 4.03$$

从严格的数学观点来看, 由上述三个例子得到的解出发, 我们还需继续讨论它们是否是极大值 (例 2.5.1) 或极小值 (例 2.5.2 和例 2.5.3), 进而证明它们是最优值. 但对大多数有意义的实际工程问题, 拉格朗日乘子法得到的解通常就是最优解. 至于严格的数学探讨, 则属于非线性规划中专门研究的范围, 我们不在此讨论了.

§2.6 备件最优分配

假设系统由 n 个相互独立的子系统串联组成, 在每个子系统中只使用同一种部件. 对 $j=1,2,\cdots,n$, 我们令

c_j—— 一个第 j 种部件的费用 (或重量、体积和功耗等等).

k_j—— 第 j 个子系统使用第 j 种部件的个数.

$R_j(k_j)$—— 当第 j 个子系统使用 k_j 个部件时, 第 j 个子系统的可靠度.

我们称 $\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_n)$ 为系统的状态. 显然, 系统的可靠度为

$$R(\boldsymbol{k})=R(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\prod_{j=1}^{n}R_j(k_j)$$

最基本的部件最优分配问题是:

问题 I 求 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 满足

$$\begin{cases}\displaystyle\prod_{j=1}^{n}R_j(k_j)\geqslant R_0\\ k_j=1,2,\cdots,\quad j=1,2,\cdots,n\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}c_jk_j=\min\end{cases}$$

即要求一组部件数 $\boldsymbol{k}$, 使系统可靠度达到预定的要求 R_0, 且总费用 (或总重量等) 最小.

问题 II 求 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 满足

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}c_jk_j\leqslant c\\ k_j=1,2,\cdots,\quad j=1,2,\cdots,n\\ \displaystyle\prod_{j=1}^{n}R_j(k_j)=\max\end{cases}$$

即求一组部件数 $\boldsymbol{k}$, 满足总费用 (或总重量等) 不超过给定值 c 的条件下, 使系统可靠度达到最大.

在第 j 个子系统中,k_j 个部件可以是并联备份、冷贮备或其它备份形式. 所以, 一般 $R_j(k_j)$ 是 k_j 的非线性函数. 问题 I 和问题 II 是非线性整数规划问题. 以下我们介绍几个典型问题的求解方法.

§2.6.1 最少部件数的并联备份

系统由 n 个相互独立的子系统串联而成. 若第 j 个子系统由 k_j 个相互独立的第 j 种部件并联而成, 第 j 种部件的可靠度为 p_j, $j=1,2,\cdots,n$, 则第 j 个子系统的可靠度为

$$R_j(k_j)=1-(1-p_j)^{k_j} \tag{1}$$

系统的可靠度为

$$R(\boldsymbol{k})=\prod_{j=1}^{n}R_j(k_j)=\prod_{j=1}^{n}[1-(1-p_j)^{k_j}] \tag{2}$$

我们的问题是: 求 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 满足

$$\begin{cases} R(\boldsymbol{k})\geqslant R_0 \\ k_j=1,2,\cdots, \quad j=1,2,\cdots,n \\ \sum\limits_{j=1}^{n}k_j=\min \end{cases}$$

即要使系统可靠度达到给定的要求 R_0, 且系统中总部件数最少.

我们从 n 个部件的串联系统出发, 此时

$$R(1,1,\cdots,1)=p_1p_2\cdots p_n$$

每次在某一个子系统上增加一个部件, 使系统可靠度上升得最快, 直到系统可靠度达到或超过 R_0 为止. 例如, 从 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(1,1,\cdots,1)$ 出发, 在第 l 个子系统上加一个部件, 此时系统可靠度上升到

$$\begin{aligned}[1-(1-p_l)^2]\prod_{j\neq l}p_j&=(2-p_l)\prod_{j=1}^{n}p_j \\ &=(2-p_l)R(1,1,\cdots,1)\end{aligned}$$

显然, 要使系统可靠度增加最快, 只要在部件可靠度 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 最小的位置上并联一个部件. 一般, 我们要问: 如果从 $(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (k, k, \cdots, k)$ 出发, 在哪个位置上加一个并联部件, 可使系统可靠度增加最快?

定理 2.6.1 如果从系统状态 $(k, k, \cdots, k)$ 出发, 在部件可靠度 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中最小的位置上并联一个部件, 将使系统可靠度增加最快.

证明 令 $q_i = 1 - p_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 由于

$$R(k, k, \cdots, k) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - q_i^k\right]$$

若在第 l 个位置上并联一个部件, 系统的可靠度上升为

$$\begin{aligned} R_l =& (1 - q_l^{k+1}) \prod_{i \neq l} (1 - q_i^k) \\ =& \frac{1 - q_l^{k+1}}{1 - q_l^k} \cdot R(k, k, \cdots, k), \quad l = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{3}$$

欲证定理结论, 只需证明: 若 $q_j > q_l$, 则 $R_j > R_l$. 而由 (3), 这等价于只要证

$$\frac{1 - q_l^{k+1}}{1 - q_l^k} < \frac{1 - q_j^{k+1}}{1 - q_j^k}$$

即只要证, 对 $k \geqslant 1$,

$$F_k(x) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x^k}$$

是 $0 < x < 1$ 的严格增函数. 事实上

$$F_k'(x) = \frac{1}{(1 - x^k)^2} \{x^{k-1}[k - (k+1)x + x^{k+1}]\}$$

记方括号中的函数为 $G_k(x)$, 则

$$G_k'(x) = -(k+1)(1 - x^k) < 0, \quad 0 < x < 1$$

表明 $G_k(x)$ 是严格递减. 但 $G_k(1) = 0$, 故 $G_k(x) > 0, 0 < x < 1$. 因此 $F_k'(x) > 0$. 证毕.

有了这个定理, 我们可得到一个解决最少部件数的并联贮备问题的简单算法. 我们通过以下例子来说明.

例 2.6.1 已知五种部件的可靠度分别为

$$p_1 = 0.96,\ p_2 = 0.93,\ p_3 = 0.85,\ p_4 = 0.80,\ p_5 = 0.75$$

第 i 个子系统由 k_i 个第 i 种部件并联而成 $(i = 1, 2, \cdots, 5)$. 求最优的 $k_1, k_2, \cdots, k_5$, 使五个子系统组成的串联系统的可靠度不小于 0.98, 且使总部件数 $k_1 + k_2 + \cdots + k_5$ 最少.

我们将此问题的算法列成表 2.1.

在步骤 0, 我们令 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1$. 填上每个子系统的可靠度 (此时即为每个部件的可靠度), 将它们相乘求得系统可靠度为 0.455. 然后, 从步骤 0 出发. 由定理 §2.6.1, 下一个部件应加在部件可靠度最小的位置上. 由于 p_5 最小, 在步骤 1 写下 $k_5 = 2$, 并求出子系统可靠度 $R_5(2) = 1 - (1 - p_5)^2 = 0.937$, 其余是 k_i 和 $R_i(k_i), i = 1, 2, 3, 4$ 不变, 计算出系统可靠度 0.569. 接着从步骤 1 出发, 下一个部件或加在第 5 个位置上 (步骤 2), 或由定理 §2.6.1, 加在 p_1, p_2, p_3, p_4 中最小的位置上 (步骤 2′). 比较步骤 2 和步骤 2′ 所得到的系统可靠度, 步骤 2′ 得到的系统可靠度大, 因此将 k_4 加 1. 下一步从步骤 2′ 出发. 照此做法直到步骤 10, 10′, 10″, 计算出对应的系统可靠度, 其中步骤 10′ 得到的值最大, 为 0.984. 系统可靠度已大于预先给定的值 0.98. 因此, 最优部件数为 $(k_1^*, k_2^*, k_3^*, k_4^*, k_5^*) = (2, 3, 3, 3, 4)$.

在 §§2.6.2 中将证明, 上述介绍的搜索法在定理 §2.6.2 的意义下是最优的.

§2.6.2 最小费用的备件最优分配

考虑由 n 个独立子系统组成的串联系统. 下面讨论的备件最优分配问题是: 求 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 满足

$$\begin{cases} R(\boldsymbol{k}) = \prod\limits_{j=1}^{n} R_j(k_j) \geqslant R_0 \\ k_j = 1, 2, \cdots, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j k_j = \min \end{cases} \tag{4}$$

这里 $R_j(k_j)$ 可以是并联备份、冷贮备或其它备份形式的可靠度. 显然, 若每个子系统是并联备份, 且所有的 $c_j = 1$, 则以上问题归结为 §§2.6.1 中讨论过的情形.

与 §§2.6.1 中求解法类似, 我们从 n 个部件的串联系统 $R(1, 1, \cdots, 1)$ 出发, 然后每一步在某一个位置上加一个同种部件, 直到系统可靠度大于或等于预定

表 2.1

步骤	k_1 $R_1(k_1)$	k_2 $R_2(k_2)$	k_3 $R_3(k_3)$	k_4 $R_4(k_4)$	k_5 $R_5(k_5)$	系统 可靠度
0	1	1	1	1	1	
	0.96	0.93	0.85	0.80	0.75	0.455
1	1	1	1	1	2	
	0.96	0.93	0.85	0.80	0.937	0.569
2	1	1	1	1	3	
	0.96	0.93	0.85	0.80	0.984	0.597
2′	1	1	1	2	2	
最优	0.96	0.93	0.85	0.96	0.937	0.683
3	1	1	1	2	3	
	0.96	0.93	0.85	0.96	0.984	0.717
3′	1	1	2	2	2	
最优	0.96	0.93	0.977	0.96	0.937	0.785
4	1	1	2	2	3	
	0.96	0.93	0.977	0.96	0.984	0.824
4′	1	2	2	2	2	
最优	0.96	0.995	0.977	0.96	0.937	0.839
5	1	2	2	2	3	
最优	0.96	0.995	0.977	0.96	0.984	0.882
5′	2	2	2	2	2	
	0.998	0.995	0.977	0.96	0.937	0.873
6	2	2	2	2	3	
最优	0.998	0.995	0.977	0.96	0.984	0.916
7	2	2	2	2	4	
	0.998	0.995	0.977	0.96	0.996	0.928
7′	2	2	2	3	3	
最优	0.998	0.995	0.977	0.992	0.984	0.947
8	2	2	2	3	4	
	0.998	0.995	0.977	0.992	0.996	0.959
8′	2	2	2	3	3	
最优	0.998	0.995	0.997	0.992	0.984	0.966
9	2	2	3	3	4	
最优	0.998	0.995	0.997	0.992	0.996	0.978
9′	2	3	3	3	3	
	0.998	0.999	0.997	0.992	0.984	0.971
10	2	2	3	3	5	
	0.998	0.995	0.997	0.992	0.999	0.981
10′	2	2	3	4	4	
最优	0.998	0.995	0.997	0.998	0.996	0.984
10″	2	3	3	3	4	
	0.998	0.999	0.997	0.992	0.996	0.982

的可靠度 R_0 为止. 那么, 在每一步究竟在哪个位置上加一个部件, 可以保证上述算法得到的结果是最优的? 我们的原则是: 若在某一步, 我们得到的部件数是 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$. 令

$$\mu_i(k_i)=\frac{1}{c_i}[\ln R_i(k_i+1)-\ln R_i(k_i)],\quad i=1,2,\cdots,n$$

如果其中最大者为 $\mu_{i_0}(k_{i_0})$, 则下一步我们将在第 i_0 个子系统的位置上加一个第 i_0 种部件. 下面的定理 §2.6.2 可以保证以上算法的最优性.

引理 2.6.1 $\ln R(n)=\ln[1-(1-p)^n], 0\leqslant p\leqslant 1$, 是关于 n 的凹函数.

证明 若令 $q=1-p$, 有

$$\Delta^2\ln R(n)=\Delta^2\ln(1-q^n)=\ln\frac{(1-q^{n+2})(1-q^n)}{(1-q^{n+1})^2}$$

其中 Δ 表示差分 $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$. 因为

$$(1-q^{n+1})^2-(1-q^{n+2})(1-q^n)=q^n(1-q)^2\geqslant 0$$

故 $\Delta^2\ln R(n)\leqslant 0$. 即 $\ln R(n)$ 是 n 的凹函数. 证毕.

显然, $\ln R(n)$ 是 n 的凹函数等价于

$$\ln R(n+1)-\ln R(n)$$

是 n 的单调下降函数.

引理 2.6.2 若寿命分布 $F(t)\in\{\mathrm{IFR}\}$, $R(n)=1-F^{(n)}(t)$, 则对给定的 $t\geqslant 0$, $\ln R(n)$ 是关于 n 的凹函数.

证明可见巴罗和普劳斯钦的书 [19], 第 175 页.

定理 2.6.2 假设 $\ln R_j(k)$ 是关于 k 的凹函数, $j=1,2,\cdots,n$. 如果 $\boldsymbol{k}^*=(k_1^*,k_2^*,\cdots,k_n^*)$ 是按上述算法得到的解, 对任何不同于 $\boldsymbol{k}^*$ 的 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, 如果 $R(\boldsymbol{k})>R(\boldsymbol{k}^*)$, 则有

$$\sum_{j=1}^{n}c_jk_j>\sum_{j=1}^{n}c_jk_j^*$$

证明 如果按上述算法最后一个部件是加在第 s 个子系统中, 从而得到解 $\boldsymbol{k}^*$, 使系统可靠度 $R(\boldsymbol{k}^*)$ 大于或等于预定的可靠度 R_0. 那么我们有

$$\mu_i(k_i^*) \leqslant \mu_s(k_s^* - 1) \leqslant \mu_i(k_i^* - 1), \quad i = 1, 2, \cdots n \tag{5}$$

事实上, 由于最后一个部件加在第 s 个子系统中, 因此

$$\mu_i(k_i^*) \leqslant \mu_s(k_s^* - 1), \quad \text{所有} i \neq s$$

又由于 $\ln R_s(k_s)$ 的凹性, 得

$$\mu_s(k_s^*) \leqslant \mu_s(k_s^* - 1)$$

因此, (5) 的左端不等式对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立. (5) 的右端不等式对 $i = s$ 显然成立. 为证明 (5) 右端的不等式对其它 $i \neq s$ 也成立, 我们用反证法. 若存在某个 $i_0 \neq s$, 使

$$\mu_s(k_s^* - 1) > \mu_{i_0}(k_{i_0}^* - 1)$$

由此不等式, 按我们的算法, 为达到 $\boldsymbol{k}^* = (k_1^*, k_2^*, \cdots, k_n^*)$, 从 $k_s^* - 1$ 加 1 变成 k_s^*, 必定先于从 $k_{i_0}^* - 1$ 加 1 变成 $k_{i_0}^*$. 这与最后一个部件是加在第 s 个子系统的条件相矛盾. 因此 (5) 右端不等式对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立.

令 $I_1 = \{i : k_i > k_i^*\}$ 和 $I_2 = \{i : k_i < k_i^*\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\ln R(\boldsymbol{k}) - \ln R(\boldsymbol{k}^*) &= \sum_{i=1}^{n} [\ln R_i(k_i) - \ln R_i(k_i^*)] \\
&= \sum_{i \in I_1} [\ln R_i(k_i) - \ln R_i(k_i^*)] - \sum_{i \in I_2} [\ln R_i(k_i^*) - \ln R_i(k_i)] \\
&\leqslant \sum_{i \in I_1} (k_i - k_i^*)[\ln R_i(k_i^* + 1) - \ln R_i(k_i^*)] \\
&\quad - \sum_{i \in I_2} (k_i^* - k_i)[\ln R_i(k_i^*) - \ln R_i(k_i^* - 1)] \\
&= \sum_{i \in I_1} (k_i - k_i^*) c_i \mu_i(k_i^*) - \sum_{i \in I_2} (k_i^* - k_i) c_i \mu_i(k_i^* - 1)
\end{aligned}$$

以上的不等号用到了 $\ln R_i(k_i)$ 的凹性. 由于不等式 (5), 立即得

$$\begin{aligned}&\ln R(\boldsymbol{k}) - \ln R(\boldsymbol{k}^*)\\&\leqslant \sum_{i\in I_1}(k_i - k_i^*)c_i\mu_s(k_s^* - 1) - \sum_{i\in I_2}(k_i^* - k_i)c_i\mu_s(k_s^* - 1)\\&= \sum_{i=1}^{n}(k_i - k_i^*)c_i\mu_s(k_s^* - 1)\end{aligned}$$

因此, 若 $R(\boldsymbol{k}) > R(\boldsymbol{k}^*)$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} c_i k_i > \sum_{i=1}^{n} c_i k_i^*$$

证毕.

由引理 2.6.1、引理 2.6.2 和定理 2.6.2 可知, 上述提供的算法, 对部件并联备份是有效的, 对部件寿命分布属于 IFR 类的冷贮备也是有效的. 下面, 我们以部件并联备份为例来说明这个算法.

例 2.6.2 已知五种部件的可靠度和费用分别为

$$\begin{aligned}&p_1 = 0.96, p_2 = 0.93, p_3 = 0.85, p_4 = 0.80, p_5 = 0.75\\&c_1 = 300,\ c_2 = 1200, c_3 = 800,\ c_4 = 500,\ c_5 = 1000\end{aligned}$$

第 i 个子系统由 k_i 个第 i 种部件并联而成 $(i = 1, 2, \cdots, 5)$. 求最优的 $k_1, k_2, \cdots, k_5$, 使五个子系统组成的串联系统的可靠度大于或等于 0.9, 且使总费用支出最小.

我们将此问题的算法列成表 2.2.

在表 2.2 中从 $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$ 出发, 在步骤 1 计算出 $\mu_i \cdot 10^5, i = 1, 2, \cdots, 5$, 其中 36.46 为最大, 因此在第 4 个子系统中加一个部件变成二部件并联, 并计算出子系统的可靠度 $R_4(2) = 0.96$. 进一步算出此时的系统可靠度 0.546 和总费用 4300. 然后从 $\boldsymbol{k} = (1, 1, 1, 2, 1)$ 出发, 在步骤 2 计算出各 $\mu_i \cdot 10^5, i = 1, 2, \cdots, 5$, 重复上述做法. 直到步骤 6, 系统可靠度为 0.902, 已经超过预定的可靠度 0.9. 因此, 得到一组解

$$\boldsymbol{k}^* = (2, 2, 2, 3, 2)$$

总费用支出为 8100.

表 2.2

步骤	部件	1	2	3	4	5	系统可靠度	总费用
	可靠度p_i	0.96	0.93	0.85	0.80	0.75		3800
	费用c_i	300	1200	800	500	1000	0.455	
1	$\mu_i \cdot 10^5$	13.07	5.64	17.47	36.46*	22.31		
	k_i^*	1	1	1	2	1		
	$R_i(k_i^*)$	0.96	0.93	0.85	0.96	0.75	0.546	4300
2	$\mu_i \cdot 10^5$	13.07	5.64	17.47	6.56	22.31*		
	k_i^*	1	1	1	2	2		
	$R_i(k_i^*)$	0.96	0.93	0.85	0.96	0.937	0.683	5300
3	$\mu_i \cdot 10^5$	13.07	5.64	17.47*	6.56	4.88		
	k_i^*	1	1	2	2	2		
	$R_i(k_i^*)$	0.96	0.93	0.977	0.96	0.937	0.785	6100
4	$\mu_i \cdot 10^5$	13.07*	5.64	2.42	6.56	4.88		
	k_i^*	2	1	2	2	2		
	$R_i(k_i^*)$	0.998	0.93	0.977	0.96	0.937	0.816	6400
5	$\mu_i \cdot 10^5$	0.512	5.64	2.42	6.56*	4.88		
	k_i^*	2	1	2	3	2		
	$R_i(k_i^*)$	0.998	0.93	0.977	0.992	0.937	0.843	6900
6	$\mu_i \cdot 10^5$	0.512	5.64*	2.42	1.29	4.88		
	k_i^*	2	2	2	3	2		
	$R_i(k_i^*)$	0.998	0.995	0.977	0.992	0.937	0.902	8100

以上算法得到的解只是原问题 (4) 式的近似解. 因为定理 §2.6.2 只是说: 凡是使系统可靠度大于 $R(\boldsymbol{k}^*)$ 的一组部件数, 其费用一定比 $\sum_{i=1}^{n} c_i k_i^*$ 大. 然而, 可能存在一组部件数 $\boldsymbol{k}^\circ$, 使

$$R(\boldsymbol{k}^*) > R(\boldsymbol{k}^\circ) > R_0$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} c_i k_i^\circ < \sum_{i=1}^{n} c_i k_i^*$$

在巴罗和普劳斯钦的书 [19] 中举出了这样的例子. 但是这里提供的搜索法可以得到很好的近似解.

§2.6.3 动态规划方法

用动态规划方法来求最优备件分配问题可以得到严格的最优解. 我们以最

优分配问题 II 为例来介绍这种方法. 问题是: 求 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 满足

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j k_j \leqslant c \\ k_j = 1, 2, \cdots, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ \prod\limits_{j=1}^{n} R_j(k_j) = \max \end{cases} \tag{6}$$

由于 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j k_j$ 和 $\prod\limits_{j=1}^{n} R_j(k_j)$ 中, 未知数都是分离的, 此时可以将此最优化问题归结为一个 n 阶段的最优决策过程.

在动态规划理论中 [24], 别尔曼 (Bellman) 的最优化原则指出: 一个过程的最优策略具有这样的性质, 即无论其初始状态和初始决策如何, 其今后诸决策, 对以第一个决策所形成的初始状态的过程而言, 必须构成最优策略.

最优分配问题 (6) 式可改写为

$$\max_{\substack{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j k_j \leqslant c \\ k_j = 1, 2, \cdots}} \prod_{j=1}^{n} R_j(k_j)$$

若令

$$F_l(x) = \max_{\substack{\sum\limits_{j=1}^{l} c_j k_j \leqslant x \\ k_j = 1, 2, \cdots}} \prod_{j=1}^{l} R_j(k_j), \quad l = 1, 2, \cdots, n, \quad 0 \leqslant x \leqslant c$$

按最优化原则, 可得递推关系

$$\begin{cases} F_l(x) = \max\limits_{\substack{c_l k_l \leqslant x \\ \sum\limits_{j=1}^{l-1} c_j k_j \leqslant x - c_l k_l \\ k_j = 1, 2, \cdots}} R_l(k_l) \prod\limits_{j=1}^{l-1} R_j(k_j) \\ \qquad = \max\limits_{\substack{c_l k_l \leqslant x \\ k_l = 1, 2, \cdots}} \left\{ R_l(k_l) \max\limits_{\substack{\sum\limits_{j=1}^{l-1} c_j k_j \leqslant x - c_l k_l \\ k_j = 1, 2, \cdots}} \prod\limits_{j=1}^{l-1} R_j(k_j) \right\} \\ \qquad = \max\limits_{\substack{c_l k_l \leqslant x \\ k_l = 1, 2, \cdots}} \{ R_l(k_l) F_{l-1}(x - c_l k_l) \}, \quad l = 2, 3, \cdots, n, \quad 0 \leqslant x \leqslant c \\ F_1(x) = \max\limits_{\substack{c_1 k_1 \leqslant x \\ k_1 = 1, 2, \cdots}} R_1(k_1) = R_1\left(\left[\dfrac{x}{c_1} \right] \right) \end{cases} \tag{7}$$

其中 $[a]$ 表示 a 的整数部分. 用此递推关系求出 $F_n(x)$. 最优化问题 (6) 的最优值就是 $F_n(c)$.

例如, 在问题 (6) 中, 若部件都是并联备份的形式, 此时有递推关系

$$\begin{cases} F_l(x) = \max\limits_{k_l \leqslant \frac{x}{c_l}} \{[1-(1-p_l)^{k_l}] F_{l-1}(x - c_l k_l)\}, \\ \qquad\qquad l = 2,3,\cdots,n, \quad 0 \leqslant x \leqslant c \\ F_1(x) = 1-(1-p_1)^{\left[\frac{x}{c_1}\right]} \end{cases} \tag{8}$$

同理, 对问题 I, 若令

$$G_l(x) = \min_{\substack{\prod\limits_{j=1}^{l} R_j(k_j) \geqslant x \\ k_j = 1,2,\cdots}} \left[\sum_{j=1}^{l} c_j k_j\right], \quad \begin{array}{l} l = 1,2,\cdots,n \\ 0 \leqslant x \leqslant R_0 \end{array}$$

按最优化原则

$$\begin{cases} G_l(x) = \min\limits_{\substack{R_l(k_l) \geqslant x \\ k_l = 1,2,\cdots}} \left[c_l k_l + G_{l-1}\left(\frac{x}{R_l(k_l)}\right)\right], \\ \qquad\qquad l = 2,3,\cdots,n \quad 0 \leqslant x \leqslant R_0 \\ G_1(x) = \min\limits_{\substack{R_1(k_1) \geqslant x \\ k_1 = 1,2,\cdots}} c_1 k_1, \end{cases}$$

用此递推关系求得 $G_n(R_0)$, 即为问题 I 的最优值.

下面, 我们举一个简单例子来说明用动态规划法解这类备件最优分配问题的具体做法.

例 2.6.3 考虑由三个子系统组成的串联系统. 每个子系统由若干个同种部件并联. 已知部件的可靠度和重量如表 2.3.

表 2.3

部件 j	重量 c_j(kg)	可靠度 p_j
1	10	0.7
2	15	0.8
3	20	0.85

我们要求得每个子系统的并联部件数 k_1, k_2, k_3, 满足系统总重量不超过 100 kg 的条件下, 使系统可靠度达到最大.

这问题就是 (6) 的最优分配问题. 公式 (8) 是其递推关系式. 具体做法如下: 由约束条件

$$k_i \leqslant \left[c - \sum_{j\neq i} c_j k_j\right] \Big/ c_i \leqslant \left[c - \sum_{j\neq i} c_j\right] \Big/ c_i,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

立即可得 $k_1 \leqslant 6, k_2 \leqslant 4, k_3 \leqslant 3$. 第一个子系统的结果列于表 2.4.

表 2.4 第 1 个子系统

k_1	1	2	3	4	5	6
c_1k_1	10	20	30	40	50	60
$R_1(k_1)$	0.7	0.910	0.973	0.992	0.998	0.999

表 2.4 等价于给出递代公式的初始条件 $F_1(x)$, 列于表 2.4′ (注意 $F_l(x)$ 是右连续的跳跃函数, $l = 1, 2, 3$).

表 2.4′ 函数 $F_1(x)$

x	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60	60~70
$F_1(x)$	0.7	0.910	0.973	0.992	0.998	0.999

然后, 列出第 1, 2 子系统的所有结果于表 2.5.

表 2.5 中打叉的空格中的 (k_1, k_2) 不是我们所求的可行解, 因为再加第 3 个子系统的一个部件 (重 20 kg), 系统重量就超过 100 kg. 在表 2.5 中, 我们在一些格之间画出一系列的箭头. 它们表示随重量增加, 可靠度增加的序列. 它们构成最优序列. 没有画上箭头的任何格都不可能组成最优解, 因为在最优序列中一定能找到一格, 重量小于或等于它, 而可靠度更大. 表 2.5 中的最优序列等价于递代公式中的 $F_2(x)$, 列于表 2.5′. 注意 $F_2(x)$ 是右连续函数.

下一步将表 2.5 中的最优序列与第 3 个子系统的各种结果组合起来, 列于下页表 2.6. 在表 2.6 中用箭头表示出 (k_1,k_2,k_3) 的最优序列, 它们等价于递代公式中的 $F_3(x)$, 列于表 2.6′. 注意 $F_3(x)$ 是右连续函数. 最后得最大可靠度和最优解为

$$F_3(100) = 0.913$$

$$(k_1^*, k_2^*, k_3^*) = (3, 2, 2)$$

表 2.5 第 1,2 个子系统的各种组合

第1个子系统	第2个子系统				
	k_j $C_j\,k_j$ $R_j(k_j)$	1 15 0.8	2 30 0.96	3 45 0.992	4 60 0.998
	1 10 0.7	25 0.56	40 0.672	55 0.694	70 0.699
	2 20 0.91	35 0.728	50 0.874	65 0.903	80 0.908
	3 30 0.973	45 0.778	60 0.934	75 0.965	90
	4 40 0.992	55 0.794	70 0.952	85	100
	5 50 0.998	65 0.798	80 0.958	95	110
	6 60 0.999	75 0.799	90	105	120

表 2.5′ 函数 $F_2(x)$

x	25~35	35~45	45~50	50~60	60~70	70~75	75~80
$F_2(x)$	0.56	0.728	0.778	0.874	0.934	0.952	0.965

表 2.6　第 1,2,3 个子系统的各种组合

第1、第2个子系统	第3个子系统			
	k_3 C_3k_3 (k_1,k_2) $R_3(k_3)$ 重量 可靠度	1 20 0.85	2 40 0.978	3 60 0.997
	(1,1) 25 0.56	45 0.476	65 0.548	85 0.558
	(2,1) 35 0.728	55 0.619	75 0.712	95 0.726
	(3,1) 45 0.778	65 0.661	85 0.761	105
	(2,2) 50 0.874	70 0.743	90 0.855	110
	(3,2) 60 0.934	80 0.794	100 0.913	120
	(4,2) 70 0.952	90 0.809	110	130
	(3,3) 75 0.965	95 0.820	115	135

表 2.6′　函数 $F_3(x)$

x	45~55	55~65	65~70	70~80	80~90	90~100	100~
$F_3(x)$	0.476	0.619	0.661	0.743	0.794	0.855	0.913

在这个例子中, 如果要比较所有可能方案, 需计算格子数为

$$6 \times 4 \times 3 = 72$$

用动态规划法, 计算格子数为 (表 2.5 和表 2.6)

$$6 \times 4 + 7 \times 3 = 45$$

当子系统数目比较多时, 动态规划方法将显示出更大的优越性.

以上处理的只是一个约束条件的最优分配问题. 当有两个约束条件的情形, 别尔曼[25] 提出一个动态规划方法与拉格朗日乘子相结合的方法. 对三个以上约束条件的情形, 动态规划方法也难以求解了.

§2.7 两类失效部件组成的系统

许多系统是由具有两类失效的部件组成的. 例如, 继电器、二极管等就是具有两类失效模式的部件. 它们有三种互斥的状态: 开路失效状态、短路失效状态和正常状态. 由 n 个继电器串联排列组成的系统, 也有两类失效模式: 任何一个继电器开路, 引起系统开路; 所有继电器短路, 引起系统短路. 由 n 个继电器并联排列的系统, 任一个继电器短路, 引起系统短路; 所有继电器开路, 引起系统开路.

又如弹头的引信装置, 我们希望它能够按时起到引爆作用. 但是它可能提前作用或延迟作用, 甚至完全不起作用 (称为哑弹). 完全不起作用的引信可以被认为是无限期延迟作用, 因此, 我们可以认为引信具有三个互斥的状态: 正常、提前和延迟. 引信提前作用或延迟作用都将导致拦截敌方目标的失败. 因此它们是引信的两个失效状态. 引信提前作用类似于继电器短路失效, 引信延迟作用类似于继电器开路失效. 若 n 个引信串联连接, 任何一个引信延迟作用, 将导致弹头延迟爆炸; 所有引信提前作用, 导致弹头提前爆炸. 若 n 个引信并联连接, 任何一个引信提前作用, 将导致弹头提前爆炸; 所有引信延迟作用, 导致弹头延迟爆炸.

再如, 某些自动控制设备可能有两类失效: 一类失效是自动控制设备完全不起作用, 不能发出任何命令; 另一类失效是自动控制设备发出错误的、极端有害的命令. 这两类失效都将导致该设备不能完成预定的功能. 这样的自动控制设备与弹头引信装置的情况一样, 其完全不起作用类似于开路失效, 发出错误命令类似于短路失效.

在以上这些例子中, 增加部件数可减少其中一类失效的可能性, 但却增加另一类失效的可能性. 因此, 我们希望对各种形式的结构, 求最优的部件数, 使构成的系统可靠度最高.

当时刻 0 部件是新的. 假设在时刻 $t>0$, 部件开路失效的概率为 $F_0(t)$, 短路失效的概率为 $F_s(t)$, 这两类失效是互斥的. 因此部件的寿命分布是 $F(t)=F_0(t)+F_s(t)$, 部件的可靠度是

$$1-F(t)=1-F_0(t)-F_s(t)$$

一种特殊的情形是

$$F_0(t)=pF(t), \quad F_s(t)=qF(t) \tag{1}$$

其中 p 表示在部件失效的条件下, 部件是开路失效的概率; q 表示在部件失效的条件下, 部件是短路失效的概率 $(p+q=1)$.

下面讨论由若干个这样的相互独立的部件组成的系统, 以及最优化的问题.

§2.7.1 n 个部件并联排列的系统

由 n 个具有两类失效的部件并联排列, 这里"并联排列"是指这 n 个部件的实际连接方式, 并不是指它们的可靠性框图. 若时刻 0 所有部件都是新的, 则系统在时刻 t 短路失效的概率是 $1-[1-F_s(t)]^n$, 系统在时刻 t 开路失效的概率是 $[F_0(t)]^n$. 由于两类失效是互斥的, 因此系统的可靠度 (即时刻 t 系统正常的概率) 是

$$R_n(t)=[1-F_s(t)]^n-[F_0(t)]^n \tag{2}$$

我们的问题是, 给定部件的 $F_0(t)$ 和 $F_s(t)$, 求最优的并联排列部件个数 n, 使系统的可靠度达到最大. 亦即求最优的 n, 使公式 (2) 的 $R_n(t)$ 达到最大.

定理 2.7.1 若令

$$n_1=\frac{\ln F_s(t)-\ln[1-F_0(t)]}{\ln F_0(t)-\ln[1-F_s(t)]} \tag{3}$$

则使 (2) 式的 $R_n(t)$ 达最大的 n 是

$$n_1^*=\begin{cases}[n_1]+1, & \text{若}n_1\text{不是整数}\\ n_1 \text{ 或 } n_1+1, & \text{若}n_1\text{是整数}\end{cases} \tag{4}$$

其中 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分.

证明 对 $n \geqslant 0$, 不等式

$$R_n(t) - R_{n+1}(t) \geqslant 0$$

等价于

$$n \geqslant \frac{\ln F_s(t) - \ln[1 - F_0(t)]}{\ln F_0(t) - \ln[1 - F_s(t)]}$$

对 $n \geqslant 1$, 不等式

$$R_{n-1}(t) - R_n(t) \leqslant 0$$

等价于

$$n \leqslant \frac{\ln F_s(t) - \ln[1 - F_0(t)]}{\ln F_0(t) - \ln[1 - F_s(t)]} + 1$$

用 (3) 式的记号表示为: 对 $n \geqslant n_1$, $R_n(t)$ 是 n 的单调递减序列; 对 $n \leqslant n_1 + 1$, $R_n(t)$ 是 n 的单调递增序列. 因此使 $R_n(t)$ 达最大的 n 由 (4) 式给出. 证毕.

特别, 当部件的失效概率由 (1) 式给出时, 若 $p \leqslant \frac{1}{2}$, 可证 $n_1 \leqslant 1$, 因此 $n_1^* = 1$. 即

$$R_1(t) \geqslant R_n(t), \quad \text{对所有} n = 1, 2, \cdots$$

此时, 单个部件的情形可靠度最大.

§2.7.2 n 个部件串联排列的系统

若时刻 0 所有部件是新的, 则系统在时刻 t 开路失效的概率是 $1-[1-F_0(t)]^n$, 系统在时刻 t 短路失效的概率是 $[F_s(t)]^n$. 因此系统的可靠度是

$$R_n(t) = [1 - F_0(t)]^n - [F_s(t)]^n \tag{5}$$

我们的问题是, 给定部件的 $F_0(t)$ 和 $F_s(t)$, 求最优的串联排列的部件个数, 使系统可靠度达到最大. 比较 (5) 式和 (2) 式, 由对称性立即可得

定理 2.7.2 若令

$$n_2 = \frac{\ln F_0(t) - \ln[1 - F_s(t)]}{\ln F_s(t) - \ln[1 - F_0(t)]} \tag{6}$$

则使 (5) 式的 $R_n(t)$ 达最大的 n 是

$$n_2^* = \begin{cases} [n_2] + 1, & \text{若} n_2 \text{不是整数} \\ n_2 \text{ 或 } n_2 + 1, & \text{若} n_2 \text{是整数} \end{cases} \tag{7}$$

特别, 当部件的失效概率由 (1) 式给出时, 若 $q \leqslant \dfrac{1}{2}$, 可证 $n_2 \leqslant 1$, 因此 $n_2^* = 1$. 即

$$R_1(t) \geqslant R_n(t), \quad \text{对所有} n = 1, 2, \cdots$$

此时单个部件的情形可靠度最大.

§2.7.3 表决系统 ($k/n(G)$ 系统)

由 n 个两类失效部件组成的 $k/n(G)$ 系统是下列的系统: 当 k 个或 k 个以上部件短路失效将导致系统短路失效; 当大于或等于 $n-k+1$ 个部件开路失效将导致系统开路失效. 显然 $1/n(G)$ 系统和 $n/n(G)$ 系统分别是 §§2.7.1 中讨论的并联排列系统和 §§2.7.2 中讨论的串联排列系统. 由这个系统的定义可知, 系统短路失效的概率是

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} [F_s(t)]^j [1 - F_s(t)]^{n-j}$$

系统开路失效的概率是

$$\sum_{j=n-k+1}^{n} \binom{n}{j} [F_0(t)]^j [1 - F_0(t)]^{n-j}$$

因此, 系统的可靠度是

$$\begin{aligned} R_{n,k}(t) =& 1 - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} [F_s(t)]^j [1 - F_s(t)]^{n-j} \\ & - \sum_{j=n-k+1}^{n} \binom{n}{j} [F_0(t)]^j [1 - F_0(t)]^{n-j} \end{aligned} \tag{8}$$

我们的问题是, 给定部件的失效概率 $F_s(t)$ 和 $F_0(t)$, 对给定的部件数 n, 求最优的 k, 使 (8) 式的 $R_{n,k}(t)$ 达到最大.

定理 2.7.3 令

$$k_0 = n \cdot \frac{\ln[1 - F_s(t)] - \ln F_0(t)}{\ln\{[1 - F_s(t)][1 - F_0(t)]\} - \ln[F_0(t)F_s(t)]} \tag{9}$$

则使 (8) 式的 $R_{n,k}(t)$ 达最大的 k 是

$$k^* = \begin{cases} [k_0] + 1, & \text{若} k_0 \text{不是整数} \\ k_0 \text{或} k_0 + 1, & \text{若} k_0 \text{是整数} \end{cases} \tag{10}$$

证明 对 $n \geqslant 0$, 不等式

$$R_{n,k}(t) - R_{n,k+1}(t) \geqslant 0$$

等价于

$$k \geqslant k_0$$

对 $n \geqslant 1$, 不等式

$$R_{n,k-1}(t) - R_{n,k}(t) \leqslant 0$$

等价于

$$k \leqslant k_0 + 1$$

因此, 当 $k \geqslant k_0$, $R_{n,k}(t)$ 是 k 的单调递减序列; 当 $k \leqslant k_0 + 1$, $R_{n,k}(t)$ 是 k 的单调递增序列. 因而, 使 $R_{n,k}(t)$ 达最大的 k 由 (10) 式给出. 证毕.

§2.7.4 串–并连接系统

对一个如图 2.9 方式连接的同型部件组成的串–并连接系统, 其中每个部件有两类失效(注意图 2.9 不是可靠性框图). 若时刻 0 所有部件是新的, 用 §§2.7.1 和 §§2.7.2 的结果立即可得, 时刻 t 系统开路失效的概率是 $1 - [1 - F_0^n(t)]^m$, 时刻 t 系统短路失效的概率是 $[1 - (1 - F_s(t))^n]^m$. 因此系统可靠度是

$$R_{n,m}(t) = [1 - F_0^n(t)]^m - [1 - (1 - F_s(t))^n]^m \tag{11}$$

我们的问题是, 给定部件失效率 $F_s(t)$ 和 $F_0(t)$, 对给定的 n, 求最优的 m, 使 (11) 式的 $R_{n,m}(t)$ 达最大.

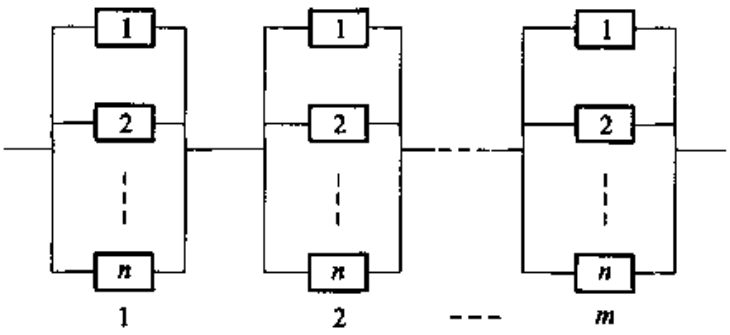


图 2.9

定理 2.7.4 令

$$m_1 = n\frac{\ln[1-F_s(t)] - \ln F_0(t)}{\ln[1-F_0^n(t)] - \ln[1-(1-F_s(t))^n]} \tag{12}$$

则使 (11) 式的 $R_{n,m}(t)$ 达最大的 m 是

$$m_1^* = \begin{cases} [m_1]+1, & \text{若}m_1\text{不是整数} \\ m_1\text{或}m_1+1, & \text{若}m_1\text{是整数} \end{cases} \tag{13}$$

证明 对 $m \geqslant 0$, 不等式

$$R_{n,m}(t) - R_{n,m+1}(t) \geqslant 0$$

等价于 $m \geqslant m_1$. 对 $m \geqslant 1$, 不等式

$$R_{n,m-1}(t) - R_{n,m}(t) \leqslant 0$$

等价于 $m \leqslant m_1 + 1$. 故立即可得定理结果. 证毕.

§2.7.5 并–串连接系统

对一个如图 2.10 方式连接的同型部件组成的并–串连接系统, 其中每个部件有两类失效. 若时刻 0 所有部件是新的, 用 §§2.7.1 和 §§2.7.2 的结果立即可得, 时刻 t 系统开路失效的概率是 $[1-(1-F_0(t))^n]^m$, 系统短路失效的概率是 $1-[1-F_s^n(t)]^m$. 因此系统的可靠度是

$$R_{n,m}(t) = [1-F_s^n(t)]^m - [1-(1-F_0(t))^n]^m \tag{14}$$

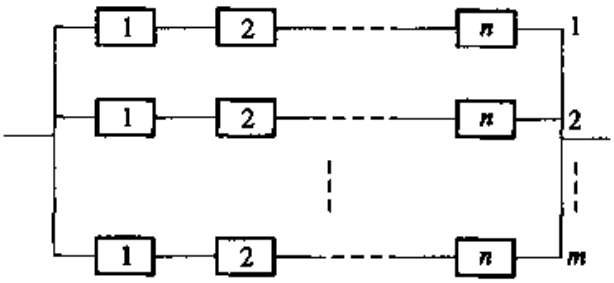


图 2.10

我们的问题是, 给定部件的失效概率 $F_0(t)$ 和 $F_s(t)$, 对给定的 n, 求最优的 m, 使 (14) 式的 $R_{n,m}(t)$ 达最大. 比较 (14) 式和 (11) 式, 由对称性, 立即得

定理 2.7.5 令

$$m_2 = n\frac{\ln[1-F_0(t)] - \ln F_s(t)}{\ln[1-F_s^n(t)] - \ln[1-(1-F_0(t))^n]} \tag{15}$$

则使 (14) 式的 $R_{n,m}(t)$ 达最大的 m 是

$$m_2^* = \begin{cases} [m_2]+1, & \text{若}m_2\text{不是整数} \\ m_2\text{或}m_2+1, & \text{若}m_2\text{是整数} \end{cases} \tag{16}$$

第三章　网络系统

网络系统在实际问题中经常遇到. 例如通讯网络、计算机网络、电路网络等. 除了串、并联系统这种最简单的情形外, 一般都是大型复杂的非串并联系统. 如何来定量评定网络系统的可靠性就成了一个重要的问题. 在把每个部件看成不可修时, 即失效后不去修复, 则评定网络系统可靠性的一个定量指标是可靠度; 若考虑部件失效后可修复的情形, 则其可靠性指标是可用度. 由于这两个量求法的相似性, 本章主要介绍不可修网络系统可靠度的计算方法. §3.1 叙述问题和基本假定. §3.2 直接法, 介绍真值表法和概率图法. §3.3 简化网络的方法, 有串、并联简化, 分解法, Δ–Y 型简化等. §3.4 求路的算法. 有邻接矩阵法及一个计算机算法. §3.5 为求可靠度的算法, 介绍化不交和的方法. §3.6 简单介绍新近的进展.

§3.1 问题与基本假定

本节叙述我们讨论的问题, 以及一些基本假定.

§3.1.1 基本定义

所谓一个网络, 它是由一些节点以及连接某些节点对之间的弧组成的一个图形. 从抽象的数学观点看, 网络就是一个图. 为此, 我们给出图的形式定义.

定义 3.1.1 设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 及 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_l\}$ 是任意的两个有限集合, 并且满足

(a) V 非空;

(b) 对每一个 $e_i\in E$, 它是 V 的一个无序 (或有序) 元素对 $\{v_s,v_t\}$, 并且 $v_s\neq v_t$. 则称 (V,E) 组成一个无向 (或有向) 图 G. V 中的元素称作 G 的节点, E 中的元素称作 G 的弧.

为形象起见, 有向弧 e_i 可以看成从其起始节点 v_s 流入到终止节点 v_t 的弧, 或者说, 节点 v_s 经过弧 e_i 可以到达 v_t; 而无向弧可以看成是双向的. 若有向弧、无向弧同时在图 G 中出现, 则称 G 为混合图. 以后无特别声明时, 图即泛指有向、无向或混合型图.

由定义知, 图中的节点是不带圈的, 即不存在从该节点流出又流入的弧; 图中的弧不重复出现, 即不存在同一条弧连接两个以上的节点.

下面, 我们把网络即理解为图. 自然, 也有有向、无向和混合网络之分.

例 3.1.1 桥形网络 G(图 3.1). 节点集为 $V=\{1,2,3,4\}$, 弧的集合 $E=\{a,b,c,d,e\}$. 弧的方向性由箭头在图中标出. 注意, 由于弧 c 的方向性, 节点 4 不能经过弧 c 到达节点 1.

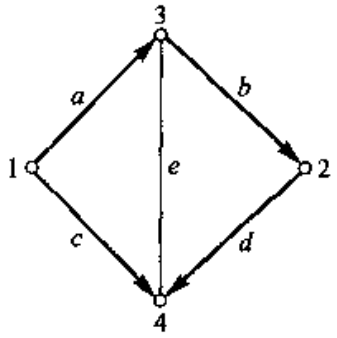


图 3.1 桥型网络 G

定义 3.1.2 从指定的节点 v_1, 经过一串弧序列 (或其中的一部分弧) 可以到达节点 v_2, 则称这个弧序列为从 v_1 到 v_2 的一条**路**.

定义 3.1.3 从节点 v_1 到 v_2 的弧序列称作一条**最小路**, 若满足

(a) 它是一条路;

(b) 最小性. 即从这个弧序列中除去任意一条弧后它即不是从 v_1 到 v_2 的路. 最小路中包含的弧数称为它的**长度**.

例如, 图 3.1 中 $\{c,e,d\}$ 是节点 1 到 2 的一条路, 而 $\{c,d\}$ 则是一条节点 1, 2 间的最小路, 其长度为 2.

§3.1.2 问题及解的基本步骤

在对一个实际的系统进行定量的可靠性分析以前, 首先要把系统化为其等价的网络图, 为此, 要分析清楚系统各个部件之间的结构关系及可靠性功能关系. 再把这种可靠性功能关系用框图表示出来, 其中每一框表示组成系统的一个部件. 由可靠性框图出发, 只要把每框用弧表示, 在各框的连接处标上节点, 就可变成相应的网络.

例如, 对图 3.2, 在其交叉点上分别标以节点 $1,2,3,4$, 而图中的方块由不同的弧来表示, 并且保留方向性, 于是即得图 3.1 的桥形网络.

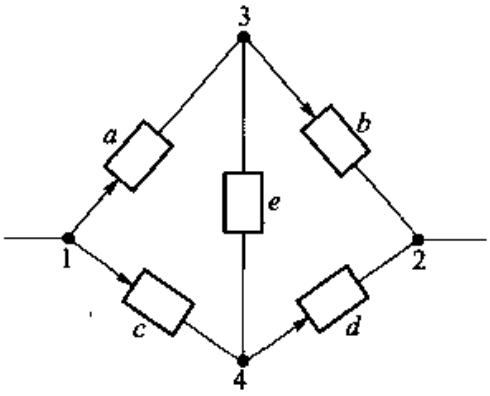


图 3.2 可靠性框图

在把一个系统化为其等价的网络时, 有两点需特别注意. 首先要注意, 系统的结构图与可靠性框图是不等价的. 例如第二章 §2.1 中讲到的振荡电路, 从结构上讲电容器与电感器是并联的, 但是从可靠性功能上讲, 它们是串联的. 因此, 可靠性框图不能照搬结构图. 其次, 把一个实际系统用其等价的网络来表示时, 可能会在网络中出现重复弧. 例如, $2/3(G)$ 系统的可靠性框图为图 3.3(a), 其相应的网络为图 3.3(b), 其中弧 $1,2,3$ 都重复出现.

有重复弧出现的网络在可靠性中是经常遇到的. 为了区分起见, 有重复弧出现的网络特别称为广义网络. 本章研究这种广义网络的可靠度问题. 但是, 为了叙述简洁, 我们先对网络进行讨论, 然后指出那些只对网络成立, 而对广义网络不成立的结果, 或者指出使广义网络相应结果成立的附加条件.

以下假定一个实际系统已经获得了它的网络 (或广义网络) 表示. 显而易见, 由于网络可以反映系统部件之间复杂的可靠性关系, 因此网络系统是串联、

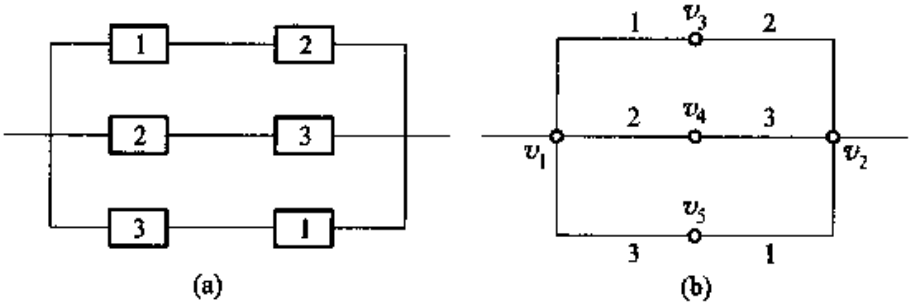


图 3.3
(a) 2/3(G)框图; (b) 2/3(G) 网络

并联或串–并联等简单系统的一种推广

下面给出讨论的问题.

设 G 是一个给定的网络, v_1, v_2 是指定的两个节点. 形象地说, 我们的基本问题是求

$$R = P\{v_1\text{可以到达}v_2\} \tag{1}$$

即求从 v_1 可以到达 v_2 的概率. 问题 (1) 称作**二终端问题**.

为了叙述方便, 称节点 v_1, v_2 分别为输入、输出节点, 而称事件 $\{v_1$ 可以到达 $v_2\}$ 为系统 (网络) 正常, 用 S 记之.

由于网络 G 是由弧 (即部件) 组成的, 每条弧有其寿命, 因而某些弧的失效会使系统失效. 所以, 基本问题更确切的提法为:

给定网络 G, 以及每条弧在时刻 T(取定的常数) 正常工作的概率, 求时刻 T 由输入节点 v_1 可以到达输出节点 v_2 的概率. 亦即求时刻 T 系统正常的概率 R.

若网络中的弧在失效后不进行修复, 则每条弧在时刻 T 正常工作的概率即是其可靠度, 因此 R 即是网络系统在时刻 T 的可靠度. 若网络中的弧在失效后可修复时, 每条弧在时刻 T 正常工作的概率即为其可用度, 此时所求之 R 为网络系统在时刻 T 的可用度, 由于在网络系统中可靠度与可用度求法是一致的, 因此在给定 T 及每条弧正常工作概率的条件下, 问题就简单地提成 (1) 的形式. 本章下面都用不可修网络系统可靠度求法为例来叙述.

由于 (1) 中系统正常 S 这一事件可表为

$$\begin{aligned} S &= \{v_1\text{可以到达}v_2\} \\ &= \{\text{由}v_1\text{至少有一条最小路通到}v_2\} \end{aligned}$$

这里最小路通是指组成这条最小路的弧都正常这一事件. 因此, 若记 $A_1, \cdots, A_m$ 为网络 (即输入到输出间) 的所有最小路, 则

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \tag{2}$$

于是, 问题 (1) 的解法原则上归为两步:

(a) 求网络 G 的所有最小路 $A_1, \cdots, A_m$;

(b) 计算概率

$$R = P\left\{\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right\} \tag{3}$$

§3.1.3 对问题所作的基本假定

在定量计算网络系统 G 的可靠度时, 还需作如下假定:

(a) 弧或系统只有两种可能的状态: 正常或失效 (好或坏);

(b) 节点不失效;

(c) 弧之间是相互独立的, 即一条弧的失效不影响别的弧.

我们来分析一下上述假定. (a) 作为系统性能的第一步近似是可以接受的. 而 (b) 的限制事实上是可以除去的. 若网络中的节点也可以失效, 先仍按节点完全可靠的情形求出所有最小路 $A_1, \cdots, A_m$. 然后对每个最小路 A_i 添上从 v_1 到 v_2 它所经过的所有节点, 仍记作 A_i. 此时, 最小路 A_i 通是指组成 A_i 的所有弧及其经过的所有节点都正常这一事件. 于是 (2), (3) 两式仍适用. 例如, 图 3.1 中 $\{c, e, b\}$ 是一条最小路, 若节点不可靠, 则 $\{1, 4, 3, 2, c, e, b\}$ 为一条最小路. 假定 (c) 亦有一定的实际背景, 它反映了组成系统的各个部件之间的相互关系不那么密切, 因此可以把它们看成独立的情形. 此外, 独立性的假定给数学解析方法的处理带来了方便. 系统部件间密切相依的情形, 在解析方法不容易处理时, 一般需利用计算机进行模拟.

§3.1.4 等价问题

最后我们指出, 求可靠度 R 的问题可以从其反面来考虑, 即求系统失效这个事件 (记作 $\bar{S}$) 的概率 $\bar{R}$

$$\bar{R} = P\{\bar{S}\} = P\{v_1\text{不能到达}v_2\}$$

于是 $R=1-\bar{R}$.

为表示出事件 $\bar{S}$, 我们引入割与最小割的概念.

定义 3.1.4 设 $K\subset E$ 是一些弧组成的集合. 若 K 中所有元素 (即弧) 都失效就使得 v_1 不能到达 v_2, 则称 K 为 v_1,v_2 间(或网络 G) 的一个割, 简称为一个**割**.

定义 3.1.5 若 K 是一个割, 并且满足最小性, 即 K 中任意除去一个元素后即不是割, 则称 K 是一个**最小割**.

下面用最小割出现或发生这样的叙述来形象地表示最小割中所有元素都失效这一事件. 因此, 若已知 v_1,v_2 间的所有最小割 $K_1,K_2,\cdots,K_l$, 则

$$\bar{S}=\{v_1,v_2\text{间至少存在一个最小割}\}=\bigcup_{j=1}^{l}K_j \tag{4}$$

$$\bar{R}=P\{\bar{S}\}=P\left\{\bigcup_{j=1}^{l}K_j\right\} \tag{5}$$

$$R=1-\bar{R} \tag{6}$$

于是, 问题 (1) 的解法归结为与求路算法相似的两步:

(a) 求网络 G 的所有最小割 $K_1,K_2,\cdots,K_l$;

(b) 计算 $\bar{R}=P\{\bar{S}\}$.

§3.2 直接法

给定 n 条弧组成的网络 G, 以及每条弧正常的概率. 在 §3.1 假定 $(a)\sim(c)$ 下求系统 G 的可靠度 R.

本节介绍真值表法和概率图法. 基本思想是列举使系统正常这一事件 S 发生的所有可能的互斥情形 $B_i,i=1,2,\cdots,l$. 于是 S 可表为

$$S=\sum_{i=1}^{l}B_i \tag{1}$$

这里 $\sum$ 表示事件的不交和 (即互斥和). 因此系统的可靠度为

$$R=\sum_{i=1}^{l}P\{B_i\} \tag{2}$$

§3.2.1 真值表法

真值表法, 或称状态枚举法, 实质上是穷举法. 这是一个最原始的计算系统可靠度的方法. 因为每条弧只有正常和失效两种状态, 故可分别用 1,0 表示之. 系统正常这一事件就用 $S=1$ 来表示, $S=0$ 表系统失效. 于是, 一个由 n 条弧组成的网络, 总共有 2^n 种不同的弧向量 (状态), 它们可用 n 位的二进制数表示. 真值表法列出所有 2^n 个弧向量, 并从中找出使 S 为 1 的所有弧向量 $B_1,\cdots,B_l$. 于是 R 按 (1), (2) 算得.

例 3.2.1 以图 3.1 的桥形网络为例来说明. 分别用 $x,\bar{x},p_x,q_x$ 表示弧 x 正常或失效, 以及它们的概率 $(p_x+q_x=1)$. 列表如下.

表 3.1 桥形网络的真值表

	a	b	c	d	e	S		a	b	c	d	e	S
0	0	0	0	0	0	0	16	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	17	1	1	0	0	1	1
2	0	0	0	1	1	0	18	1	1	0	1	1	1
3	0	0	0	1	0	0	19	1	1	0	1	0	1
4	0	0	1	1	0	1	20	1	1	1	1	0	1
5	0	0	1	1	1	1	21	1	1	1	1	1	1
6	0	0	1	0	1	0	22	1	1	1	0	1	1
7	0	0	1	0	0	0	23	1	1	1	0	0	1
8	0	1	1	0	0	0	24	1	0	1	0	0	0
9	0	1	1	0	1	1	25	1	0	1	0	1	0
10	0	1	1	1	1	1	26	1	0	1	1	1	1
11	0	1	1	1	0	1	27	1	0	1	1	0	1
12	0	1	0	1	0	0	28	1	0	0	1	0	0
13	0	1	0	1	1	0	29	1	0	0	1	1	1
14	0	1	0	0	1	0	30	1	0	0	0	1	0
15	0	1	0	0	0	0	31	1	0	0	0	0	0

由表 3.1, 系统正常这一事件 S 可以表为下列事件的不交和:

$$\begin{aligned} S=&\bar{a}\bar{b}cd\bar{e}+\bar{a}\bar{b}cde+\bar{a}bcd\bar{e}+\bar{a}bcde\\ &+\bar{a}bcd\bar{e}+ab\bar{c}d\bar{e}+ab\bar{c}\bar{d}e+ab\bar{c}de\\ &+ab\bar{c}d\bar{e}+abcd\bar{e}+abcde+abc\bar{d}e\\ &+abc\bar{d}\bar{e}+a\bar{b}cde+a\bar{b}cd\bar{e}+a\bar{b}\bar{c}de \end{aligned} \tag{3}$$

由独立性假定, 可靠度为

$$\begin{aligned}R = {} & q_aq_bp_cp_dq_e + q_aq_bp_cp_dp_e + q_ap_bp_cq_dp_e + q_ap_bp_cp_dp_e \\ & + q_ap_bp_cp_dq_e + p_ap_bq_cq_dq_e + p_ap_bq_cq_dp_e + p_ap_bq_cp_dp_e \\ & + p_ap_bq_cp_dq_e + p_ap_bp_cp_dq_e + p_ap_bp_cp_dp_e + p_ap_bp_cq_dp_e \\ & + p_ap_bp_cq_dq_e + p_aq_bp_cp_dp_e + p_aq_bp_cp_dq_e + p_aq_bq_cp_dp_e \end{aligned} \tag{4}$$

由上述讨论知, 当网络中弧数 n 大时, 真值表法实际上是不可行的.

§3.2.2 概率图法

概率图法是利用真值表, 把由 n 位二进制数表示的 2^n 个弧向量用图形上的一个小方格来代表 (图 3.4). 例如, $n=5$ 中, $*$ 的小方格为 01110, 即表示事件 $\bar{a}bcd\bar{e}$. 为了使得事件的不交和表达式 (1) 中的项数少, 要求表头相邻两格的二进制数仅在一位有差别. 因此, 图中相邻小方格的二进制表示亦只在一位上不同. 为此, 表头采用二进制的格雷码 (Gray code) 编排[①]. 如 $n=5$ 中, 小方格 $*, **$ 的二进制表示分别为 01110, 11110, 它们只在首位上不同.

有了上述概率图, 把所有表示系统正常的小方格都用 1 标出, 然后把这些 1 划分成许多不重迭的长方块, 写出这些长方块所代表的事件, 最后系统的可靠度就可按这些事件的不交和写出.

例 3.2.2 仍以图 3.1 为例. 此时由表 3.1 可以画出概率图 (图 3.5).

由图 3.5(a) 可见, 系统正常这一事件 S 可表为下列事件的不交和:

$$S = cd + ab\bar{c} + abc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d}e + a\bar{b}\bar{c}de \tag{5}$$

于是可靠度为

$$\begin{aligned} R = P\{S\} &= p_cp_d + p_ap_bq_c + p_ap_bp_cq_d + q_ap_bp_cq_dp_e \\ &\quad + p_aq_bq_cp_dp_e \\ &= p_cp_d + p_ap_c(p_b + q_bp_dp_e) + p_bp_cq_d(p_a + q_ap_e) \end{aligned} \tag{6}$$

显然, (6) 比 (4) 简单得多.

[①] n 位格雷码 $c_1c_2\cdots c_n$ 可由 n 位二进制数 $b_1b_2\cdots b_n$ 按如下规则构成:

$$c_1 = b_1, \quad c_i = \begin{cases} 1, & b_i \neq b_{i-1} \\ 0, & b_i = b_{i-1} \end{cases}, \quad i = 2, \cdots, n$$

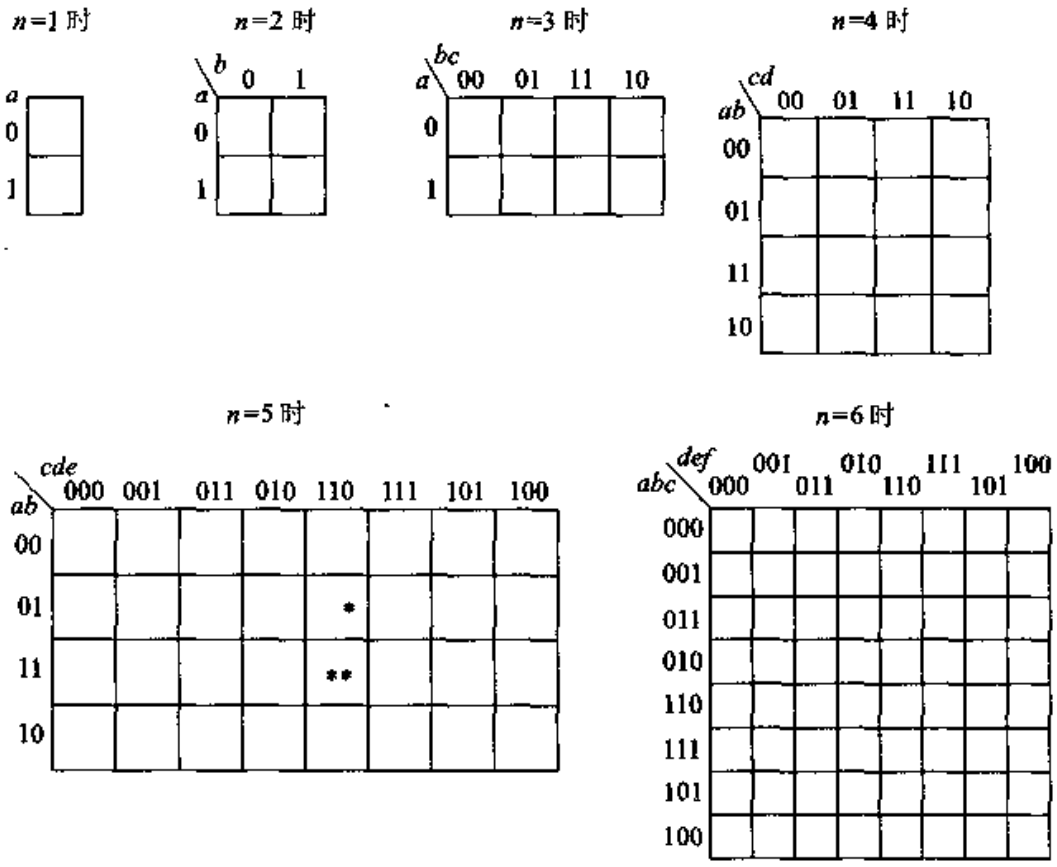


图 3.4　概率图

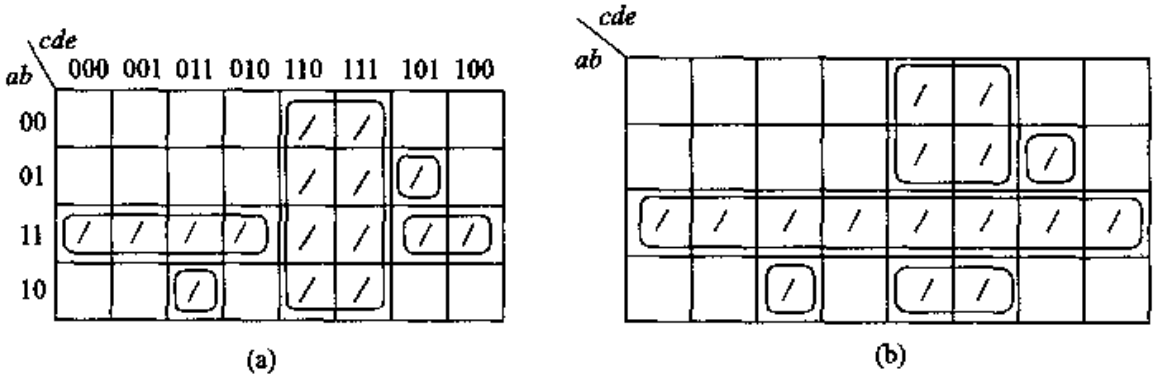


图 3.5　桥形网络的概率图

顺便提出，由于概率图中划分长方块的方式可能不同，故 S 可有不同的表达形式. 如由图 3.5(b) 得

$$S = ab + \bar{a}cd + a\bar{b}cd + \bar{a}bc\bar{d}e + a\bar{b}\bar{c}de \tag{7}$$

因而 R 有表达式

$$R = P\{S\} = p_a p_b + q_a p_c (p_d + p_b q_d p_e) + p_a q_b p_d (p_c + q_c p_e) \tag{8}$$

容易判明, (8) 与 (6) 是一致的.

从上可知, 概率图法把系统正常这一事件形象地表成简单的不交事件和, 计算量也较小. 但随弧数 n 的增加, 方法也不可行了.

最后指出, 上述方法对广义网络也适用.

§3.3 化简网络的方法

本节讨论把一个复杂网络逐步加以简化的方法, 从而使计算可靠度的方法使用起来更为有效.

简化网络的方法包括串、并联简化, 无向、有向网络的分解法, 以及 Δ–Y 型简化.

§3.3.1 串、并联简化

若网络 G 中有一个 n 条弧组成的串联结构 (图 3.6(a)). 用 d_i 代表其中的第 i 条弧, 同时仍用 d_i 表示该弧正常这一事件. 记 $p_i = P(d_i), i = 1, \cdots, n$. 则这个 n 条弧的串联结构可用一条弧 d 来代替

$$d = \bigcap_{i=1}^{n} d_i \tag{1}$$

上式右端可简记为 $d_1, \cdots, d_n$. 此时

$$P(d) = \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{2}$$

同理, 对于网络中 n 条弧的并联结构 (图 3.6(b)), 亦可用一条弧来代替. 沿用上面的记号, 此时

$$d = \bigcup_{i=1}^{n} d_i \tag{3}$$

$$P(d) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} d_i\right\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i \tag{4}$$

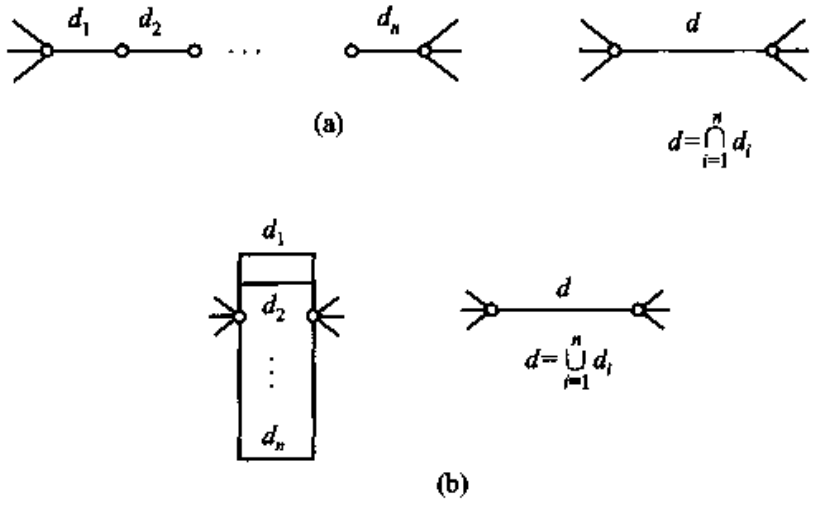


图 3.6
(a) 串联结构与其等价形式; (b) 并联结构与其等价形式

这里 $q_i = 1 - p_i, i = 1, \cdots, n$.

由于网络中串、并联结构可以由一条等价的弧来代替, 所以不妨假定在分析网络系统时已把串、并联结构进行了简化.

对广义网络, 若串联或并联结构中的 n 条弧都不是重复弧, 则上述简化仍能使用.

§3.3.2 无向网络的分解法

给定无向网络 G, 讨论二终端问题 §3.1, (1). 设 x 是任一弧, 仍用 x 或 $\bar{x}$ 表示 x 正常或失效. 按全概公式

$$R = P\{S\} = P(x)P\{S|x\} + P(\bar{x})P\{S|\bar{x}\} \tag{5}$$

这里 $S|x$ 表示在弧 x 正常的条件下网络 G 正常这一事件, $S|\bar{x}$ 表示 x 失效的条件下 G 正常这一事件.

若用 $G(x)$ 记 G 中把 x 弧两端的节点合而为一后所得的子网络, 用 $G(\bar{x})$ 记 G 中把弧 x 删去后所得的子网络. 用同样的记号记这些子网络正常这一事件. 由于 G 无向, 故可得

$$P\{S|x\} = P\{G(x)\} \tag{6}$$

$$P\{S|\bar{x}\} = P\{G(\bar{x})\} \tag{7}$$

因此 (5) 可改写成

$$R = P\{S\} = p_x P\{G(x)\} + q_x P\{G(\bar{x})\} \tag{8}$$

这里 $p_x = P(x), p_x + q_x = 1$.

若任一网络 (有向、无向或混合型) 中的弧 x 使 (8) 成立, 则称 x 可以用来进行分解.

显然, 无向网络中任一弧都可用来进行分解. 在进行这种分解后, 子网络 $G(x), G(\bar{x})$ 的可靠度要比 G 的容易求. 逐次分解下去, 最终可求得 G 的可靠度. 因此, 分解法本身亦可看作求系统可靠度的一种方法.

例 3.3.1 给定无向网络 G(图 3.7). 这里节点 1,2 分别为输入、输出节点, 弧由 $a, b, \cdots, h$ 来表示.

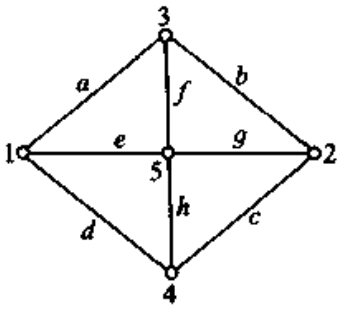


图 3.7 无向网络 G

若第一步选 e 进行分解, 此时相应的子网络 $G(e), G(\bar{e})$ 见图 3.8. 而可靠度

$$R = p_e P\{G(e)\} + q_e P\{G(\bar{e})\}$$

此时 $G(e)$ 可进行串、并联简化, 最终化为

$$G(e) = \{(a \cup f)b\} \cup g \cup \{(d \cup h)c\}$$

而子网络 $G(\bar{e})$ 可进一步分解.

第二步对 $G(\bar{e})$ 选 g 分解, 有

$$P\{G(\bar{e})\} = p_g P\{G(\bar{e}g)\} + q_g P\{G(\bar{e}\bar{g})\}$$

$G(\bar{e}g), G(\bar{e}\bar{g})$ 见图 3.9.

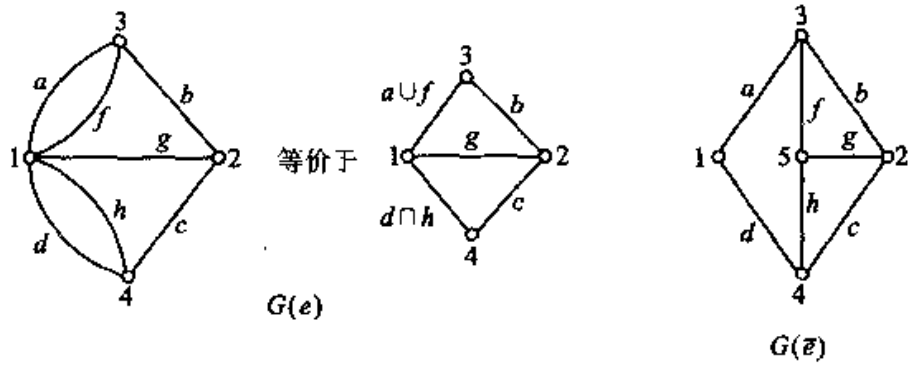


图 3.8　$G(e)$ 和 $G(\bar{e})$

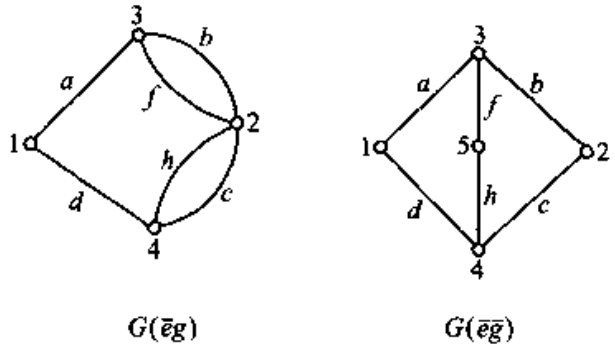


图 3.9　$G(\bar{e}g)$ 和 $G(\bar{e}\bar{g})$

进一步简化 $G(\bar{e}g)$ 得

$$G(\bar{e}g) = \{a(b \cup f)\} \cup \{d(c \cup h)\}$$

而 $G(\bar{e}\bar{g})$ 即为例 3.2.1 中的桥形网络, 只要在节点 3,4 间换上等价弧 fh 即可.

于是最终可求得 G 的可靠度 R.

从上面的讨论可见, 分解法是一个逐次简化的方法. 虽然, 要据此写出系统可靠度 R 解析公式仍然比较麻烦, 但在求数值解时, 使用还是很方便的.

对广义无向网络 G, 上述分解法亦成立. 具体做时若选取的 x 是 G 中的一条重复弧, 则在构成 $G(x)$ 时, 只需把弧 x 连接的节点都合而为一, 而在构成 $G(\bar{x})$ 时, 把弧 x 都从 G 中删去即可. 此时 (8) 仍适用.

§3.3.3 有向网络的分解法

对无向网络, 我们知道任选一弧都可进行分解. 但是在有向网络时, 对任意 x, (8) 一般不成立. 用一个简单的例子来说明 (图 3.10), 其中 1, 2 是输入、输出节点.

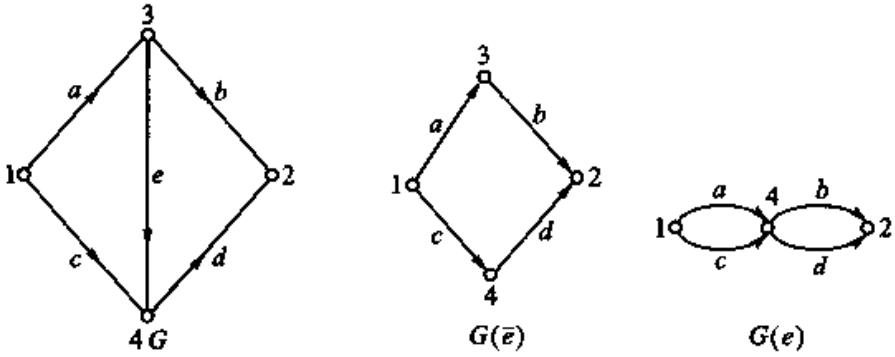


图 3.10 有向网络 G

若选 e 来分解, 易见

$$S = ab \cup aed \cup cd$$

$$S|e = ab \cup ad \cup cd$$

$$S|\bar{e} = ab \cup cd$$

而

$$G(e) = ab \cup ad \cup cb \cup cd$$

$$G(\bar{e}) = ab \cup cd$$

但注意到 $G(e) \neq S|e$, 故此时 (8) 不成立, 即弧 e 不能选来进行分解. 仔细分析, 发现造成不等的原因是构成 $G(e)$ 这个子网络时, 只是简单地把 e 的两个节点合并, 此时无形中增加了一条路 cb.

因此, 若仍想以 (8) 来计算 R, 则先得研究什么样的弧才可以选来进行分解.

显然, 对任一弧 x 总有 $S|\bar{x} = G(\bar{x})$, 因而只需考虑

$$S|x = G(x) \tag{9}$$

成立的条件. 易见, 此式成立的充分必要条件是构成 $G(x)$ 时, 与 $S|x$ 比较, 不产生新的路. 因此, 任意使 (9) 成立的弧 x 都可用来进行分解.

我们先列出网络 G 中弧的所有可能的类型, 然后来判明哪些类型的弧可以选来分解, 哪些则不行.

1) 与输入、输出节点 1,2 相连的弧 (图 3.11).

此时可以看出, 弧 x 能用来进行分解.

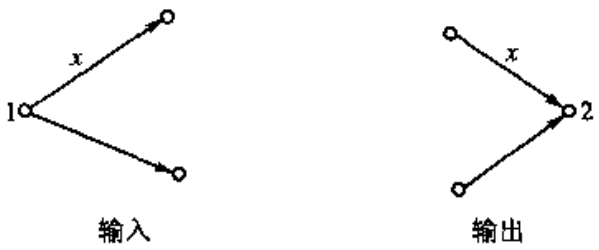


图 3.11　与输入、输出节点相连的弧

2) 中间弧 (即不与输入、输出节点相连的弧) 的情形.

设 x 是所考虑的中间弧, 其两端节点记为 1,2. 在比较 $G(x)$ 是否比 $S|x$ 增加了路时, 只需考虑弧 x 及 1,2 两节点处的流入、流出弧即可. 记这样一个子网络为 S_x, 又记 S_x 中把 1,2 两节点合并成节点 0 后所成之子网络为 $G_0(x)$. 若把所有流入节点 1,2 的弧归并成一条流入弧, 所有流出弧归并成一条流出弧 (不管 x 的方向), 则中间弧总共只有三种可能的形式 (图 3.12).

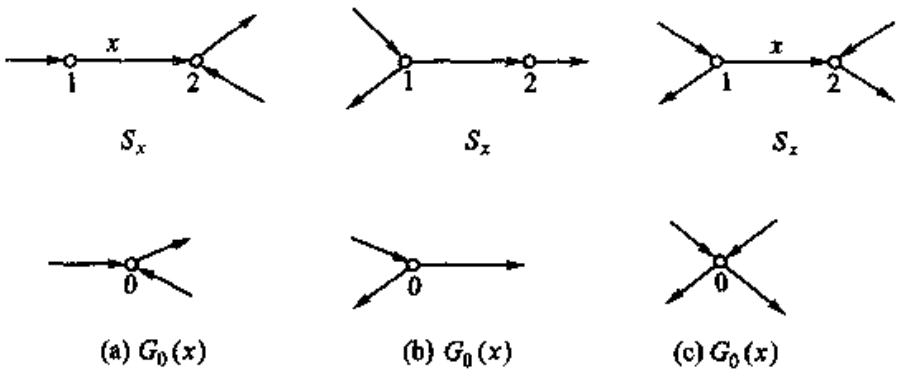


图 3.12　中间弧的情形
(a),(b) 中 x 可选来分解;　(c) 中 x 不能选来分解

显然, 在 (a), (b) 两种情形, 不考虑弧 x 的方向, 在两个节点中的一个只有流入或流出弧时, $G_0(x)$ 中没有新增加的路出现, 故 $S_x|x = G_0(x)$, 即弧 x 可以用来进行分解. 而在情形 (c), $G_0(x)$ 比 $S_x|x$ 新增加了一条路, 使得 $S_x|x \neq G_0(x)$, 故弧 x 不能用来分解.

总结 1), 2) 两点所述, 有如下结论:

定理 3.3.1　对有向网络 G 中的弧 x, 不管弧 x 本身的方向, 若其两个端点中有一个只有流入或流出的弧, 则弧 x 可以选来进行分解. 否则, 若弧 x 的两个端点处都有流入、流出弧, 则 x 不能选来分解.

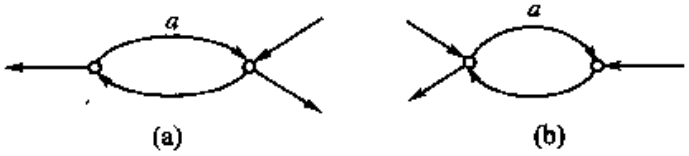


图 3.13 环形网络中弧 a 是多余的

顺便指出, 在混合型网络中任一无向弧都可选来分解, 而任一有向弧只要满足定理条件都可选来分解.

我们还可发现, 在有向网络 G 中用弧 x 进行分解后, 子网络 $G(x)$ 中可能会出现新的串、并联结构, 因而可用等价弧来代替; 而在子网络 $G(\bar{x})$ 中可能会有许多弧或节点是无用的, 因而可以去掉. 这样就进一步地简化了网络. 例如, 从 $G(\bar{x})$ 中把无用弧去掉的情形可能有:

(a) 一个中间节点只有流入弧, 此时可把所有流入该节点的弧及这个节点都除去;

(b) 或者, 一个中间节点只有流出弧, 则可把所有流出弧及该节点除去;

(c) 在环形网络 (图 3.13) 中, 弧 a 是多余的, 可除去.

这里, 如果我们没有察觉可以除去的弧, 而仍被保留在网络中, 自然对结果没有影响, 只是后面的分解或计算麻烦些而已.

对广义有向网络 G, 上面的定理 3.3.1 亦成立.

§3.3.4 Δ–Y 型简化[69]

考虑一个无向网络 G, G_0 是 G 中 Δ 型的一个子网络 (图 3.14). 假定节点都是完全可靠的. 我们来寻找一个使系统可靠度 R 保持不变的变换, 它把 Δ 型化为等价的 Y 型子网络. 我们感兴趣的是这个 Δ–Y 型变换的公式.

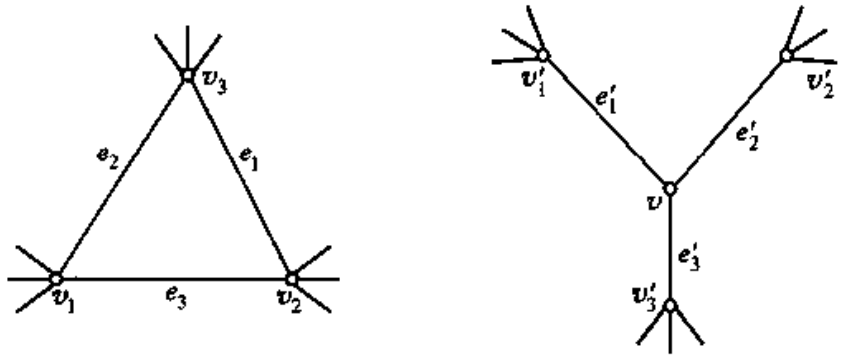


图 3.14 Δ–Y 型简化

下面先给出公式.

记弧 e_i 的可靠度为 p_i, 而 $q_i = 1 - p_i$. Δ–Y 型变换使得 $e_i \to e_i', v_i \to v_i', i = 1,2,3$, 并且新增加一个节点 $v(G$ 中其余部分不改变). 变换后的节点 v_1', v_2', v_3' 仍是完全可靠的, 而弧 e_1', e_2', e_3' 及新添节点 v 的可靠度分别为

$$\begin{cases} p_i' = \dfrac{\alpha}{\gamma_i}, \quad i = 1,2,3 \\ p_v = \dfrac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\alpha^2} \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 - 2p_1p_2p_3 \\ \gamma_i = \alpha + \alpha_i, \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_1 = p_1q_2q_3,\ \alpha_2 = q_1p_2q_3,\ \alpha_3 = q_1q_2p_3 \end{cases}$$

定理 3.3.2 设 G_0 是网络 G 中的 Δ 型子网络, 通过上述 Δ–Y 型变换, 变换后的网络与 G 有相同的可靠度.

通过 Δ–Y 型变换, 把一个原来可靠度计算比较复杂的网络, 化为一个比较简单的、在可靠性不变的意义下等价的网络, 所花出的代价只是增加了一个不可靠的节点. 我们把定理 3.3.2 的证明放在稍后一些.

典型的 Δ–Y 型简化的例子为图 3.15.

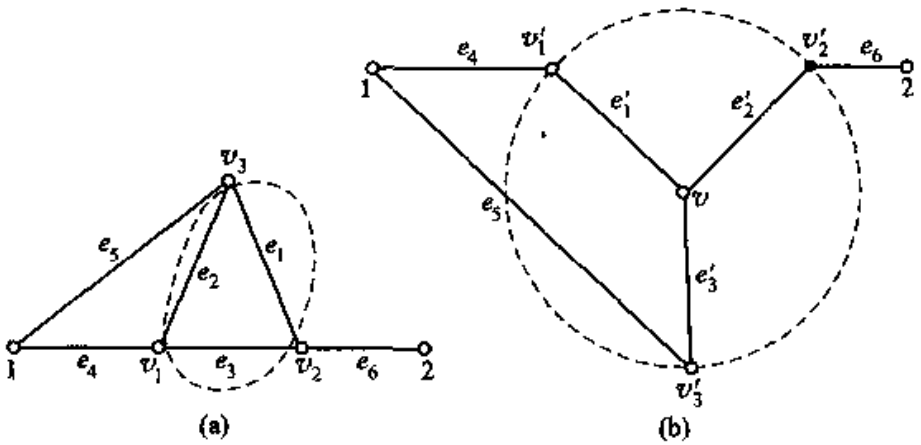


图 3.15 典型的 Δ–Y 型简化

例 3.3.2 以桥形网络 (图 3.16) 为例.

取 $\{v_1, v_2, v_3\} = \{1,3,4\}, \{e_1, e_2, e_3\} = \{e, c, a\}$, 变换后为 $\{v_1', v_2', v_3'\} =$

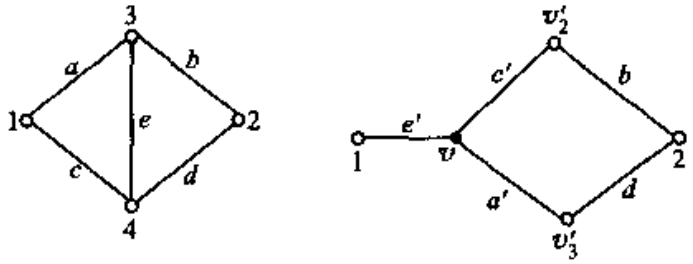


图 3.16 桥形网络的 Δ–Y 型简化 (• 为不可靠节点)

$\{1, v_2', v_3'\}$, $\{e_1', e_2', e_3'\} = \{e', c', a'\}$, 按变换公式 (10) 有

$$\alpha = p_e p_c + p_c p_a + p_a p_e - 2p_e p_c p_a$$

$$\alpha_1 = p_e q_c q_a,\ \alpha_2 = q_e p_c q_a,\ \alpha_3 = q_e q_c p_a$$

$$\gamma_i = \alpha + \alpha_i,\ i = 1, 2, 3$$

$$p_e' = \frac{\alpha}{\gamma_1}, \quad p_c' = \frac{\alpha}{\gamma_2}, \quad p_a' = \frac{\alpha}{\gamma_3}$$

$$p_v = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{\alpha^2}$$

经过 Δ–Y 型简化, 新的网络可进一步简化为 (图 3.17)

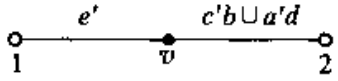


图 3.17 桥形网络的等价网络

利用弧的独立性及事件和的概率公式, 不难写出其可靠度

$$R = p_e' p_v (p_c' p_b + p_a' p_d - p_c' p_a' p_b p_d)$$

代入 p_e' 等的数值, 化简得

$$R = (p_b + p_d - p_b p_d)\alpha + p_d \alpha_2 + p_b \alpha_3 \tag{11}$$

若代回 α 等的数值, 经过一番整理, 读者会发现结果与 §3.2(6) 或 §3.2(8) 一致.

下面证明定理 3.3.2.

用 G' 表示 Δ 型子网络 G_0 用 Y 型子网络 G_0' 代替后所得之网络 (图 3.14), 用 R, R' 分别记变换前后的系统可靠度.

我们用三位的二进制数表示弧 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的状态 (1 表示正常, 0 表示失效). 用四位的二进制数表示 $\{e_1', e_2', e_3', v\}$ 的状态.

若 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 取所有可能的值, 则变换前的子网络 G_0 共有 8 种情形, 归纳成如下 5 类: (a)(111), (011), (101), (110); (b) (100); (c)(010); (d)(001); (e)(000). 相应于这些类, G 及 G_0 变为 (图 3.18).

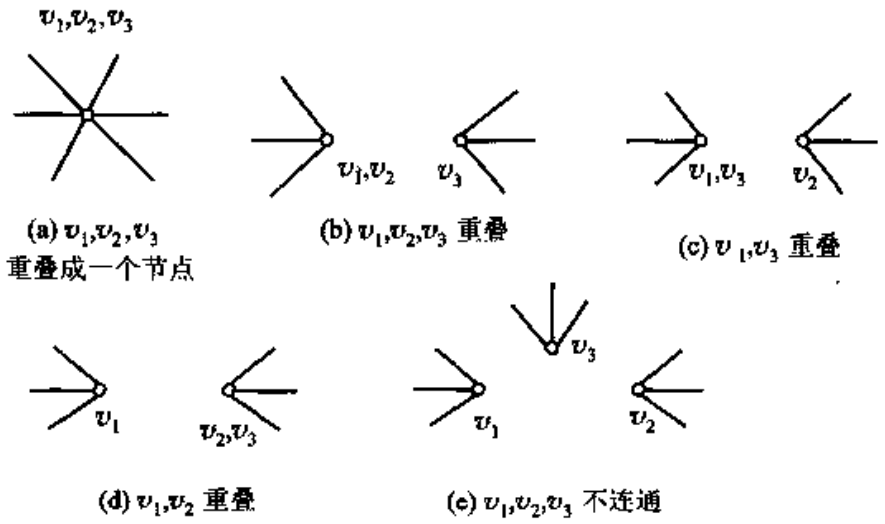


图 3.18 G_0 的可能类型

用 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别记第 (a), (b), (c), (d), (e) 类出现的概率, 则易见

$$\begin{cases} \alpha = p_1p_2p_3(1 + \dfrac{q_1}{p_1} + \dfrac{q_2}{p_2} + \dfrac{q_3}{p_3}) = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 - 2p_1p_2p_3 \\ \alpha_1 = p_1q_2q_3,\ \alpha_2 = q_1p_2q_3,\ \alpha_3 = q_1q_2p_3,\ \alpha_4 = q_1q_2q_3 \end{cases} \tag{12}$$

显然

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \tag{13}$$

变换后的 Y 型子网络 G_0' 对于 (e_1', e_2', e_3', v) 的 16 种不同的取值亦可归结为 5 类. (a')(1111); (b')(0111); (c')(1011); (d')(1101); (e') 所有其它 12 种情形. 相应于这些类, G' 和 G_0' 变成图 3.19.

注意到变换前后的类完全相同, 即有

$$G|a = G'|a', \cdots, G|e = G'|e'$$

这里 $G|a$ 表示在 a 类出现条件下的 G 网络. 因此, 若令变换后的类 (a'), $\cdots$, (e') 出现的概率 $P\{a'\}, \cdots, P\{e'\}$ 就等于变换前相应的类 (a), $\cdots$, (e) 出现的概

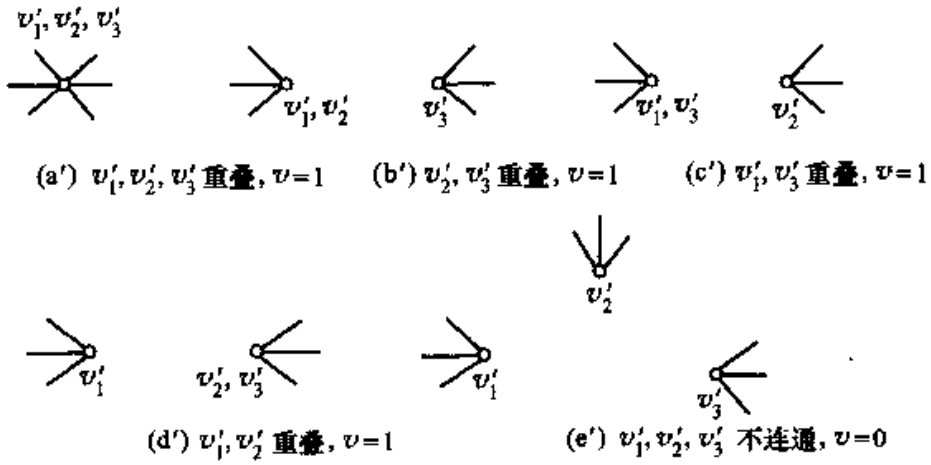


图 3.19 G_0' 的可能类型

率 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_4$, 则由分解公式

$$\begin{aligned} R &= \alpha P\{G|a\} + \alpha_1 P\{G|b\} + \cdots + \alpha_4 P\{G|e\} \\ &= \alpha P\{G'|a'\} + \alpha_1 P\{G'|b'\} + \cdots + \alpha_4 P\{G'|e'\} \\ &= R' \end{aligned}$$

表明 Δ–Y 型变换保持系统的可靠度不变. 而由

$$\begin{cases} P\{a'\} = p_1' p_2' p_3' p_v = \alpha \\ P\{b'\} = q_1' p_2' p_3' p_v = \alpha_1 \\ P\{c'\} = p_1' q_2' p_3' p_v = \alpha_2 \\ P\{d'\} = p_1' p_2' q_3' p_v = \alpha_3 \\ P\{e'\} = \alpha_4 \end{cases} \tag{14}$$

再注意到 (13) 式成立, 故只要从 (14) 式的前 4 个方程解出变换后弧 e_1', e_2', e_3' 及节点 v 的可靠度 p_1', p_2', p_3', p_v, 此即 (10) 式. 证毕.

对广义无向网络 G, 若 Δ 中的弧 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 不是 G 中重复出现的弧时, 则 Δ–Y 型简化的公式 (10) 仍成立.

§3.4 求最小路的方法

本节介绍用邻接矩阵求输入、输出节点间所有最小路的方法, 以及一个求最小路的计算机算法, 最后讨论最小路与割的互化.

§3.4.1 邻接矩阵法

给定 n 个节点的网络 G, 定义相应的 n 阶矩阵 $C=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=\begin{cases}0, & \text{若节点 } i,j \text{ 间无弧直接相通}\\ x, & \text{若节点 } i \text{ 经过弧 } x \text{ 可直接到达节点} j\end{cases} \tag{1}$$

称 C 为网络 G 的**邻接矩阵**.

由 C 的定义知, 节点 i 可以通过一条弧 c_{ij} 到达 j.

对邻接矩阵 C, 定义"乘法"运算 $C^2=(c_{ij}^{(2)})$, 其中

$$c_{ij}^{(2)}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj}, & i\neq j\\ 0, & i=j\end{cases} \tag{2}$$

这里 $c_{ik}c_{kj}$ 表示事件 c_{ik},c_{kj} 的交 (即表示弧 c_{ik},c_{kj} 都正常), $\sum$ 号表示事件的并 (和). 注意, 这里 $\sum$ 不表示不交和.

为了使 $c_{ij}^{(2)}$ 表示从节点 i 到 j 的长度为 2 的最小路全体, 不必考虑从节点 i 出发, 经过一条弧 x 一步到达某个 k, 又从 k 经 x 一步返回 i 的情形, 所以 (2) 中规定 $c_{ii}^{(2)}=0$. 同时, 若 $c_{ij}^{(2)}$ 中某一项中的弧出现不止一次, 则该项应取为 0(不可能事件). 由上述规定, (2) 式定义的 $c_{ij}^{(2)}$ 表示从节点 i 到 j 的长度为 2 的最小路全体.

相仿定义 $C^r=(c_{ij}^{(r)})$, 其中约定 $c_{ij}^{(1)}=c_{ij}$.

$$c_{ij}^{(r)}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj}^{(r-1)}, & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases},\quad r=2,3,\cdots \tag{3}$$

同样, 为使 $c_{ij}^{(r)}$ 表示从节点 i 到 j 的长度为 r 的最小路全体, 规定: 按 (3) 算得之 $c_{ij}^{(r)}$ 的表达式中, 若某一项 x 中有的弧出现不止一次, 则该项 x 应取为 0; 或者, $c_{ij}^{(r)}$ 中的某一项 x 已被包含在 $c_{ij}^{(1)},\cdots,c_{ij}^{(r-1)}$ 中的某一项中, 则也应把 x 取作 0. 因为出现第一种情形时, x 就不是长度为 r 的从 i 到 j 的最小路; 第二种情形下, 从 x 中除去一些弧后它仍是 i 到 j 的路, 因此 x 不是一条最小路. 所以这两种情形都应排除.

由于在一个有 n 个节点的网络 G 中, 任意两节点间最小路的最大长度 $\leqslant n-1$. 故对邻接矩阵 C 而言, 必有 $C^n=0$. 因此, 如果求出 $C,C^2,\cdots,C^{n-1}$, 则可以得到任意两个节点间的最小路全体 $\sum\limits_{r=1}^{n-1} c_{ij}^{(r)}$. 这只要做多次矩阵"乘法"即

可. 但是, 对一个具体网络而言, 只需求出输入到输出节点的所有最小路. 为了明确起见, 设节点 1,2 为输入、输出节点, 因而只需求出 $C^2,\cdots,C^{n-1}$ 中的第二列元素. 于是只要先写出 C, 然后挑出 C 的第二列 $(C)_2$, 用 C 去左乘 $(C)_2$, 即得 C^2 的第二列 $(C^2)_2$, , 逐次下去可得 C^{n-1} 的第二列 $(c^{n-1})_2$. 当然, 也可只求 $C^2,\cdots,C^{n-1}$ 中的第一行元素. 这只要写出 C 的第一行 $(C)_{(1)}$, 右乘 C 得 C^2 的第一行 $(C^2)_{(1)}$, 逐次下去得 $(C^{n-1})_{(1)}$. 只求相应的一列或一行的算法使计算量减少.

最后顺便指出, 若在求 $c_{ij}^{(r)}$ 的每一步中不除去那些长度小于 r 的最小路, 则在求得 $\sum\limits_{r=1}^{n-1} c_{ij}^{(r)}$ 之后仍需剔除重复出现的项或者不是最小路的项. 最终所得结果是一样的, 只是每步的运算可能要麻烦一些.

例 3.4.1 桥形网络 G(图 3.1)

$$C=\begin{pmatrix}0&0&a&c\\0&0&0&0\\0&b&0&e\\0&d&e&0\end{pmatrix},\quad (C^2)_2=\begin{pmatrix}ab+cd\\0\\ed\\eb\end{pmatrix},$$

$$(C^3)_2=\begin{pmatrix}aed+ceb***\end{pmatrix}$$

这里 C 为邻接矩阵, $(C^2)_2,(C^3)_2$ 为 C^2,C^3 中第 2 列元素, 而 $*$ 不必算出. 于是节点 1 到 2 的所有最小路为

$$ab,\ cd,\ aed,\ ceb$$

例 3.4.2 设给定如下星形网络 (图 3.20) 输入、输出节点为 1, 2.

邻接矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix}0&x_1&0&0&x_5&x_6\\0&0&0&0&0&0\\0&x_2&0&x_3&0&x_8\\0&0&x_3&0&x_4&x_9\\0&0&0&x_4&0&x_{10}\\0&x_7&x_8&x_9&x_{10}&0\end{pmatrix}$$

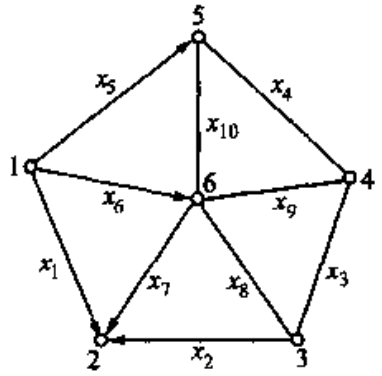


图 3.20 星形网络

为求所有最小路, 只要算 $(C)_{(1)}, \cdots (C^5)_{(1)}$.

$$(C^2)_{(1)} = (0, x_6x_7, x_6x_8, x_4x_5 + x_6x_9, x_6x_{10}, x_5x_{10})$$

$$(C^3)_{(1)} = (0, x_2x_6x_8 + x_5x_7x_{10}, x_3x_4x_5 + x_3x_6x_9 + x_5x_8x_{10},$$
$$x_3x_6x_8 + x_4x_6x_{10} + x_5x_9x_{10}, x_4x_6x_9, x_4x_5x_9)$$

这里 $(C^3)_{(1)}$ 中的项已除去了长度小于 3 的最小路. 例如, 在算 $(C^3)_{(1)}$ 的最后一个元素时, 按 (3) 应有

$$x_6x_8 + x_4x_5x_9 + x_6x_9 + x_6x_{10}$$

这时除第二项以外, 其它项中的弧都有重复出现的, 因此它们都应取作 0. 故从节点 1 到 6 的长度为 3 的最小路只有 $x_4x_5x_9$.

$$(C^4)_{(1)} = (0, x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3x_6x_9 + x_2x_5x_8x_{10} + x_4x_5x_7x_9,$$
$$x_3x_4x_6x_{10} + x_3x_5x_9x_{10} + x_4x_5x_8x_{10}, x_3x_5x_8x_{10},$$
$$x_3x_4x_6x_8 + x_4x_5x_9x_{10}, x_3x_4x_5x_8 + x_3x_6x_8x_9 + x_4x_6x_9x_{10})$$

注意到 $(C^4)_{(1)}$ 中第 5 个元素为

$$x_3x_4x_6x_8 + x_4x_5x_9x_{10}$$

其中第二项 $x_4x_5x_9x_{10} \subset x_5((C)_{(1)}$ 中第 5 个元素), 故 $x_4x_5x_9x_{10}$ 不是从节点 1 到 5 的长度为 4 的最小路 (因为它不是节点 1 到 5 的最小路). 因此该项应取成

0. 对 $(C^4)_{(1)}$ 中的第 6 个元素相仿处理, 于是可得

$$(C^4)_{(1)} = (0, x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3x_6x_9 + x_2x_5x_8x_{10} + x_4x_5x_7x_9,$$
$$x_3x_4x_6x_{10} + x_3x_5x_9x_{10} + x_4x_5x_8x_{10},$$
$$x_3x_5x_8x_{10}, x_3x_4x_6x_8, x_3x_4x_5x_8)$$

最后,

$$(C^5)_{(1)} = (0, x_2x_3x_4x_6x_{10} + x_2x_3x_5x_9x_{10} + x_2x_4x_5x_8x_9$$
$$+x_3x_4x_5x_7x_8, *, *, *, *)$$

这里 $*$ 为不必计算之元素.

归纳上述计算, 可得节点 1, 2 间的所有最小路, 共 12 条:

$$x_1, x_6x_7, x_2x_6x_8, x_5x_7x_{10}, x_2x_3x_4x_5, x_2x_3x_6x_9,$$
$$x_2x_5x_8x_{10}, x_4x_5x_7x_9, x_2x_3x_4x_6x_{10}, x_2x_3x_5x_9x_{10},$$
$$x_2x_4x_5x_8x_9, x_3x_4x_5x_7x_8$$

邻接矩阵法对广义网络亦适用.

在节点数不太多的情形下, 通过邻接矩阵可用手算求得所有最小路.

§3.4.2 大型网络最小路的计算机算法[53]

当网络中节点数 n 很大时, 邻接矩阵往往是稀疏阵, 因此用邻接矩阵法求最小路时要大容量去存贮及进行运算. 所以, 仍然需要有效的计算机算法来求所有最小路.

设 G 是有 n 个节点的有向网络. 因为无向弧可以看成双向的, 故无向网络亦可化为有向网络. 假定节点之间无并联弧. 问题是要找出输入节点 I 到输出节点 L 的所有最小路.

整个算法的基本思想可描述如下:

1) 输入节点 I 作为起始节点.

2) 由起始节点出发, 依次选下一步可达的节点 i.

3) 判断节点 i 是否已走过. 若是, 退回起始节点, 转 2).

4) 判断是否已达输出节点 L. 若否, 则把 i 作为起始节点, 转 2).

5) 判断是否已找到了所有最小路. 若否, 则后退一步, 把上个节点作为起始节点, 转 2).

6) 结束.

由上可见, 算法的关键是需要进行几个判断. 一要判断节点是否与前面走过的节点重复; 二要判断是否已找到了一条最小路; 三要判断是否找到了所有最小路. 为此引人一些必要的记号.

对标号 i 的节点, 下一步可以到达的节点有 E_i 个, 标号为 $\{T_1,\cdots,T_{E_i}\}, i=1,\cdots,n$. 记

$$E=(E_1,\cdots,E_n)$$

为离开节点 $1,\cdots,n$ 的弧数. 引进**路线矩阵**(routing matrix) $R=(r(i,k))$, 其中

$$r(i,k)=T_k,\quad i=1,\cdots,n,\ k=1,\cdots,E_i \tag{4}$$

即 R 的第 i 行记录了节点 i 可以一步到达的节点标号. 注意, R 不一定是长方阵, 即对不同的行, 列数未必相同. 为了表示 i 的下一步的节点已经完全走遍, 同时区分出输入节点 I, 在 R 的每行再增加一个元素

$$r(i,E_i+1)=\begin{cases}-1, i=I\\ 0,\quad i\neq I\end{cases} \tag{5}$$

此时仍称 R 为 G 的路线矩阵. 显然, E 及 R 完全由网络所确定.

再定义节点 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个函数 F, 初值为

$$F(i)=\begin{cases}1,\quad i=I\\ -1, i=L\\ 0,\quad \text{其它}\end{cases} \tag{6}$$

函数 F 的作用为, 当某个节点 j 已走过时, 其值就变为 1. 在寻找一条最小路的过程中, 这可用来判断后面的节点是否与已走过的有重复. 而一旦 $F=-1$, 表明已达输出节点 L, 即找到了一条最小路.

若某一步走到节点 j, $r(j,C_j)$ 是其后要走的节点标号. 若 $r(j,C_j)=0$, 则表明节点 j 以后的所有分支都已走遍. 此时应由 j 倒退一个节点, 即由 j 前面的一个节点再往下探索. 而若 $r(j,C_j)>0, F(r(j,C_j))=0$, 表明节点无重复, 且未到输出节点 L; $r(j,C_j)>0, F(r(j,C_j))=-1$, 表明一条最小路已找到.

一旦 $r(I,C_I)<0$, 表明由输入节点 I 出发, 所有 I 下一步能到达的节点都已走遍, 即意味着已求得所有最小路. 此时算法终止.

算法要求输人的原始数据为:

n: 网络中节点数;

I: 输入节点标号;

L: 输出节点标号;

$E=(E_i), i=1,\cdots,n$. 离开节点的弧数;

$R=(r(i,k)), i=1,\cdots,n, k=1,\cdots,E_i$, 路线矩阵.

输出结果:

P: 所有最小路组成的矩阵, 其中每一列为由输入节点 I 到输出节点 L 的一条最小路. P 的元素 $p(v,w)$ 记录了第 w 条最小路中第 v 个节点的标号. 由于最小路的条数和长度事先都未知, 故 P 的阶数只能估计.

算法框图如图 3.21.

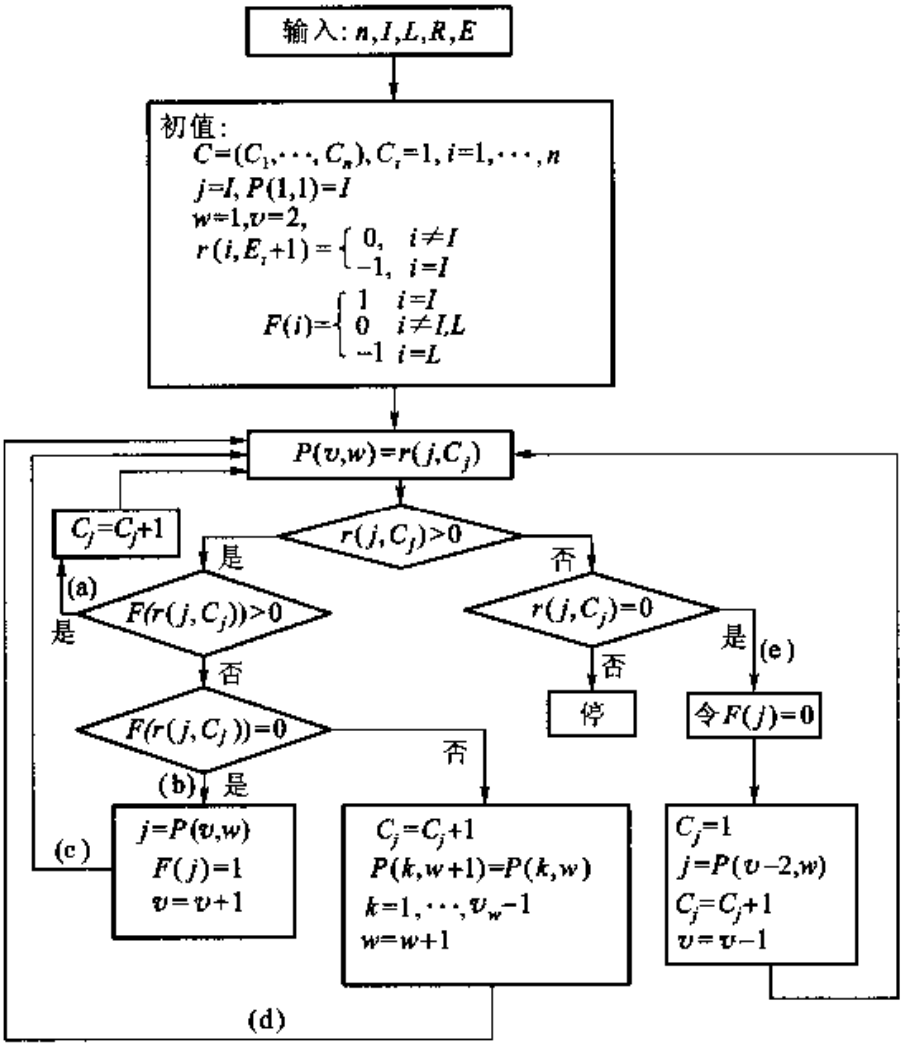


图 3.21 求最小路算法框图

记号: $C=(C_1,\cdots,C_n)$, C_j 记录节点 j 在 R 中的列号; $r(j,C_j)$ 记录 j 下一步到达的节点标号; U_w 记第 w 条最小路中的节点数, 它在事先未知.

说明: (a) 节点无重复. (b) 未到输出节点 L. (c) 节点 j 做下次出发的起点. (d) 一条最小路结束, 准备下一条最小路的起点. (e) 节点 $p(v-1,w)$ 以下都走遍, 从这个节点倒退两个节点, 准备走另一支.

例 3.4.3 有向网络 G(图 3.22), 其中 4 是输入节点, 6 是输出节点.

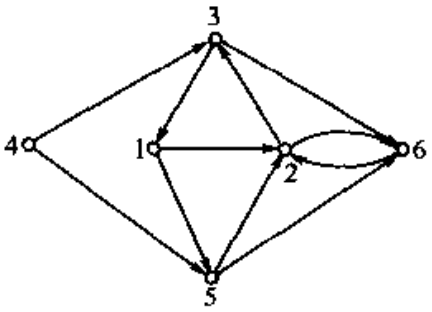


图 3.22 有向网络 G

此时输入信息为

$$n=6,\quad I=4,\quad L=6$$

$$R=\begin{pmatrix}5&2\\6&3\\6&1\\5&3\\6&2\\2&\end{pmatrix},\quad E=(2,2,2,2,2,1)$$

初值为

$$c=(1,1,1,1,1,1),\quad w=1,\quad v=2,$$

$$j=4,\quad p(1,1)=4$$

$$R=\begin{pmatrix}5&2&0\\6&3&0\\6&1&0\\5&3&-1\\6&2&0\\2&0&\end{pmatrix},\quad F=(0,0,0,1,0,-1)$$

利用上述算法可以依次求出从节点 4 到节点 6 的所有最小路, 共 7 条, 按列排出为

$$P=\begin{pmatrix}4&4&4&4&4&4&4\\5&5&5&3&3&3&3\\6&2&2&6&1&1&1\\&6&3&&5&5&2\\&&6&&6&2&6\\&&&&&6&\end{pmatrix}$$

由于上述计算机算法只记录最小路经过的节点, 因此对广义有向网络可先当作无重复弧的情形处理, 求出所有最小路分别经过的节点. 因为弧有重复, 所以对广义有向网络而言, 求出的只是包含它的所有最小路的一些路. 因此, 与邻接矩阵法中相同, 再从中挑出广义网络的所有最小路.

例如, 上例中若节点 3, 6 与 5, 6 之间是一条相同的弧, 则连接节点 4, 5, 2, 3, 6 所成之路就不是最小路, 因此应除去.

§3.4.3 最小路与最小割的互化

本节已介绍了两种求最小路的方法. 根据 §3.1 中的讨论, 网络可靠度也可以由所有最小割来求得. 下面给出最小路和最小割互化的方法.

设网络 G 的所有最小路为 $A_1,\cdots,A_m$. 记

$$A_i=x_{i1}x_{i2}\cdots x_{ik_i},\quad i=1,2,\cdots,m$$

表示当弧 $x_{i1},\cdots,x_{ik_i}$ 都正常时, 第 i 条最小路 A_i 就正常 (相通). 于是系统正常这一事件 S 可表为

$$S=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$$

利用摩根 (Morgan) 律

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B},\quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B} \tag{7}$$

系统失效 $\bar{S}$ 为

$$\bar{S}=\bigcap_{i=1}^{m}\bar{A}_i=\bigcap_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{k_i}\bar{x}_{ij} \tag{8}$$

由集合运算的法则以及简化公式

$$AB \cup A = A \tag{9}$$

可把 (8) 化为

$$\bar{S} = \bigcup_{j=1}^{l} C_j \tag{10}$$

其中 $C_j = \bar{x}_{j1}\bar{x}_{j2}\cdots\bar{x}_{jt_j}$, 并且所有的 $C_1, \cdots, C_l$ 互相不包含.

容易看出, 通过上述运算, $C_1, \cdots, C_l$ 是 G 的所有最小割. 因为由 (8), 其右端的一般项为

$$\bar{x}_{1j_1}\bar{x}_{2j_2}\cdots\bar{x}_{mj_m}, \quad 1 \leqslant j_1 \leqslant k_1, \cdots, 1 \leqslant j_m \leqslant k_m \tag{11}$$

$x_{1j_1}, x_{2j_2}, \cdots, x_{mj_m}$ 的失效使 $A_1, \cdots, A_m$ 都不能相通, 因而系统失效, 故 (11) 是一个割. 而所有可能的割都包含在 (8) 式右端的项中, 于是经过 (9) 简化得到的互相不包含的 $C_1, \cdots, C_l$ 必为所有最小割.

由所有最小割求所有最小路的方法相似.

最后指出, 上述方法对广义网络都适用.

例 3.4.4 桥形网络 G (图 3.1)

$$S = ab + aed + cd + bec$$

这里为书写方便, 用 $+$ 代替 $\cup$. 在利用 (8) 时, 省去 $\bar{x}$ 上面的"—", 仍用 x 表示. 于是

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= (a+b)(a+e+d)(c+d)(b+e+c) \\
&= (a+be+bd)(c+de+bd) \\
&= bd + (a+be)(c+de) \\
&= bd + ac + ade + bce + bde \\
&= bd + ac + ade + bce
\end{aligned}$$

最终得所有最小割

$$\{b,d\}, \{a,c\}, \{a,d,e\}, \{b,c,e\}$$

由上可见, 在进行最小路与割互化的运算时, 只要把 S(或 $\bar{S}$) 中的"·"换成"+", "+"换成"·"再行简化即可.

§3.5 可靠度的求法

假定网络 G 的所有最小路 $A_1,\cdots,A_m$ 已求得. 讨论

$$R=P\left\{\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right\} \tag{1}$$

的计算.

从理论上讲, 由初等概率论知

$$R=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}P\{S_i\} \tag{2}$$

其中

$$P\{S_i\}=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}P\{A_{j_1}\cdots A_{j_i}\},\quad i=1,\cdots,m \tag{3}$$

但是, 当 m 大时, 每个 $P\{S_i\}$ 就得由 $\binom{m}{i}$ 项概率的和来求得, 因此由 (2) 求数值结果时共 2^m-1 项求和 (或差), 总的运算量就非常大. 所以, 从数值计算的角度来讲, 需要寻求有效的算法.

若能把系统正常这一事件表成不交 (即互斥) 事件之和

$$S=\bigcup_{i=1}^{m}A_i=\sum_{j=1}^{t}B_j \tag{4}$$

则易得可靠度

$$R=\sum_{j=1}^{t}P\{B_j\} \tag{5}$$

下面介绍用集合论的方法来化不交和.

设网络 G 由 n 个节点, l 条弧组成. 假定已进行过串 (并) 联的简化.

§3.5.1 不交和算法 1

下面的定理把无向网络中每一长度为 $n-1$ 的最小路与所有其它最小路不交化.

定理 3.5.1 设 $A_1,\cdots,A_m$ 为无向网络 G 的所有最小路, A_m 的长度为 $n-1$. 不妨记 $A_m=x_1\cdots x_{n-1}$. 则有

$$\bigcup_{i=1}^{m}A_i=\bigcup_{i=1}^{m-1}A_i+x_1\cdots x_{n-1}\bar{x}_n\cdots\bar{x}_l \tag{6}$$

上式右端两项是不交的.

证明

$$\bigcup_{i=1}^{m}A_i=\bigcup_{i=1}^{m-1}A_i+\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{m-1}A_i\right)}A_m$$

因此只要证

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m-1}\bar{A}_i\right)A_m=x_1\cdots x_{n-1}\bar{x}_n\cdots\bar{x}_l$$

显然, 当弧 $x_n,\cdots,x_l$ 都不通 (失效) 时, $A_1,\cdots,A_{m-1}$ 都不通. 否则, 若 A_1 通, 由 $A_1\neq A_m$ 表明 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 中只要有一些 (不必所有的) 弧相通即可使 A_1 通, 因而与 A_m 是最小路矛盾. 故左 $\supset$ 右.

下面证明当 $A_1,\cdots,A_{m-1}$ 不通, A_m 通时,$x_n,\cdots,x_l$ 必都不通. 否则不妨设 x_n 通. 此时 $x_1,\cdots,x_n$ 通. 因 A_m 长度为 $n-1$, 它经过所有节点. 再加进一条弧 x_n 通以后, 由于 G 无向, 必然在 $x_1,\cdots,x_n$ 中有一条包括弧 x_n 在内的最小路相通. 因为它不能是 A_m, 故此时必使 $A_1,\cdots,A_{m-1}$ 中的一条最小路相通, 这就得出矛盾. 因此左 $\subset$ 右. 证毕.

由上述定理, 对于一条长度为 $n-1$ 的最小路, 只要在其中添上 $l-n+1$ 条不出现的弧的逆, 这样所得之事件与其它 $m-1$ 条最小路相通这一事件不交.

推论 设 $A_1,\cdots,A_m$ 为无向网络 G 的所有最小路. $A_1,\cdots,A_r$ 的长度都小于 $n-1$, $A_{r+1},\cdots,A_m$ 的长度为 $n-1$, 且 $r<m$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{m}A_i=\bigcup_{i=1}^{r}A_i+B_{r+1}+\cdots+B_m$$

其中右端 $\bigcup_{i=1}^{r}A_i,B_{r+1},\cdots,B_m$ 之间不交, 而 $B_{r+1},\cdots,B_m$ 为 $A_{r+1},\cdots,A_m$ 中分别添上在其中不出现的 $l-n+1$ 条弧的逆而成之事件.

由定理 3.5.1, 对无向网络只要对长度小于 $n-1$ 的最小路不交化.

任意有限个集合的并 $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$ 化不交和的算法其思想很简单, 只要每做一步从和 (并) 集中分出一块. 第一步

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_i = A_1 + \bar{A}_1 \bigcup_{i=2}^{r} A_i \tag{7}$$

把上式第二项按如下的集合运算规则整理简化.

$$\begin{aligned} &AB \subset A,\ A\bar{A} = \varnothing(\text{空集}) \\ &A \cup AB = A,\ \overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B},\ \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned} \tag{8}$$

这里 A, B 是任意集合. 经过整理简化, $\bar{A}_1 \bigcup_{i=2}^{r} A_i$ 仍可写成 (7) 式左边那种形式. 再重复第一步的做法. 逐次下去, 有限步终能把 $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$ 化为不交和.

现将 (1) 中求 R 的算法归纳如下: 对无向网络

1) 挑出长度为 $n-1$ 的最小路全体 $A_{r+1}, \cdots, A_m$, 利用定理 3.5.1 化为不交和

$$\bigcup_{i=r+1}^{m} A_i = \sum_{i=r+1}^{m} B_i$$

2) 把 $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$ 化为不交和

a) 初值:

$$R = \sum_{i=r+1}^{m} P\{B_i\}, \quad r_0 = r,\ k = 0$$

$$A_i^{(0)} = A_i, \quad i = 1, \cdots, r_0, \qquad F = \bigcup_{i=1}^{r} A_i^{(0)}$$

b) F 中取一项 $A_1^{(k)}$, 使

$$R \Leftarrow R + P\{A_1^{(k)}\}$$

c) $F = \overline{A_1^{(k)}} \bigcup_{i=2}^{r_k} A_i^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{r_{k+1}} A_i^{(k+1)}$, 这一步利用 (8) 式进行简化.

d) F 中还有项 (即 $r_{k+1} \geqslant 1$) 吗? 若有, 则 $k \Leftarrow k+1$, 转 b); 否则, R 即为所求.

对有向网络, 则从步 2) 开始, 只需把初值 R 改为 0.

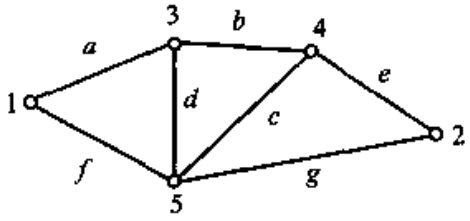


图 3.23 无向网络 G

例 3.5.1 无向网络 G(图 3.23)

首先可求得输入、输出节点 1,2 间的所有最小路

$$fg, abc, adg, fec$$

$$abeg, adec, fdbc$$

因为下面是手算,所以不繁琐地写出上述的每个步骤,而且为了书写方便,用"+"代替"∪".

1) 长度为 $n-1=4$ 的最小路有 $abeg, adec, fdbc$, 相应的不交和为

$$ab\bar{c}d\bar{e}\bar{f}g + a\bar{b}cde\bar{f}\bar{g} + \bar{a}bcd\bar{e}f\bar{g}$$

2) 化 $fg+abc+adg+fec$ 为不交和.

a) 选 fg

$$\begin{aligned} F &= \overline{fg}(abc+adg+fec) \\ &= (\bar{f}+\bar{g})(abc+adg+fec) \\ &= abc\bar{f} + ad\bar{f}g + abc\bar{g} + cef\bar{g} \end{aligned}$$

b) 选 $abc\bar{f}$

$$\begin{aligned} F &= \overline{abc\bar{f}}(ad\bar{f}g + abc\bar{g} + cef\bar{g}) \\ &= \bar{a}cef\bar{g} + a\bar{b}d\bar{f}g + \bar{b}cef\bar{g} + a\bar{c}d\bar{f}g \\ &\quad + abcf\bar{g} + cef\bar{g} \\ &= cef\bar{g} + a\bar{b}d\bar{f}g + a\bar{c}d\bar{f}g + abcf\bar{g} \end{aligned}$$

c) 选 $cef\bar{g}$

$$\begin{aligned} F &= \overline{cef\bar{g}}(a\bar{b}d\bar{f}g + a\bar{c}d\bar{f}g + abcf\bar{g}) \\ &= a\bar{c}d\bar{f}g + abc\bar{e}f\bar{g} + a\bar{b}d\bar{f}g \end{aligned}$$

d) 选 $a\bar{c}d\bar{f}g$

$$F = \overline{a\bar{c}d\bar{f}g}(abc\bar{e}f\bar{g} + a\bar{b}d\bar{f}g)$$
$$= abc\bar{e}f\bar{g} + a\bar{b}cd\bar{f}g$$

e) 选 $abc\bar{e}f\bar{g}$

$$F = \overline{abc\bar{e}f\bar{g}}a\bar{b}cd\bar{f}g$$
$$= a\bar{b}cd\bar{f}g$$

f) 选 $a\bar{b}cd\bar{f}g$, 结束.

3) 网络 G 的最小路的不交和为

$$S = fg + abc\bar{f} + cef\bar{g} + a\bar{c}d\bar{f}g + abc\bar{e}f\bar{g}$$
$$+a\bar{b}cd\bar{f}g + ab\bar{c}d\bar{e}f\bar{g} + a\bar{b}cde\bar{f}\bar{g} + \bar{a}bcd\bar{e}f\bar{g}$$

4) 相应之可靠度 R 为由上式中把字母 x 换成 p_x, $\bar{x}$ 换成 q_x 得到.

§3.5.2 不交和算法 2

下面介绍另一个化集合 (事件) 并为不交和的算法.

设无向网络 G 中有 n 个节点, l 条弧. 用 x_i 表示弧 i 通, 其逆 $\bar{x}_i$ 表示弧 i 不通. 下面为方便起见, 泛称 $x_1, \cdots, x_l, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_l$ 为事件. 由定理 3.5.1, 只需对长度小于 $n-1$ 的最小路 $A_1, \cdots, A_r$ 的并进行不交化. 设 A 为一些弧同时相通这一事件, 记作

$$A = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

事件 B 为 $x_1, \cdots, x_l, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_l$ 中任意的一些事件同时发生这一集合. 在讨论 $A \cup B$ 的不交化时, 容易发现如下的简单事实.

1) 若 A 中有某一个事件, 而 B 中有其逆, 则 $AB = \varnothing$(空集), 即 A, B 已不交.

2) 若 $AB \neq \varnothing$, 记 $C = x_a x_b \cdots x_c$ 为出现在 A 中但不在 B 中出现的弧同时正常这一事件.

a) 若 $C = \varnothing$, 则 $B \subset A$, 故 $A \cup B = A$.

b) 若 $C \neq \varnothing$, 则

$$A \cup B = A + \bar{x}_a B + x_a \bar{x}_b B + \cdots + x_a x_b \cdots \bar{x}_c B$$

且上式右端所有项都不交.

因此, $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$ 不交化手续的基本思想是: 第一步取 A_1, 其后每一步使 A_j 与 $A_1, \cdots, A_{j-1}$ 不交, $j = 2, \cdots, r$.

算法的简单框图如图 3.24.

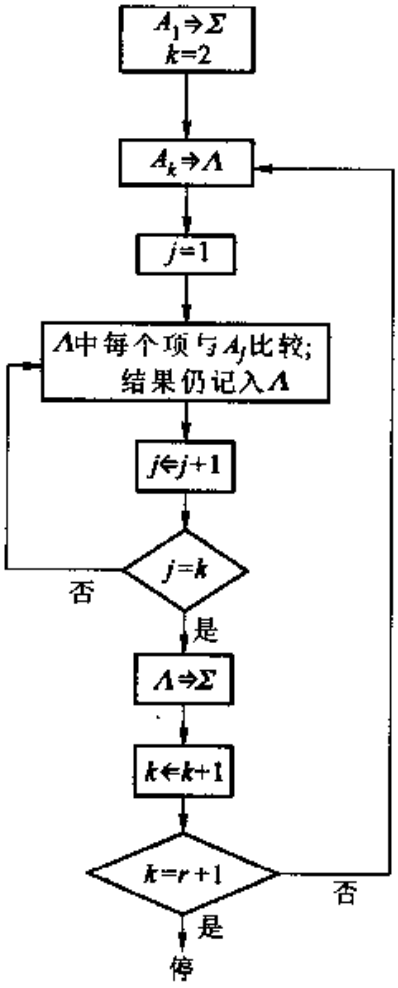


图 3.24 不交化算法 2 框图

记号说明: Σ 中记录所有不交项, Λ 中存放与 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 进行比较的项.

例 3.5.2 续例 3.5.1(图 3.23).

由定理 3.5.1, 只要对 $fg + abc + adg + fec$ 进行不交化, 列表 3.2. 其中弧正常用 1 表示, 失效用 0 表示, 不出现的变量用 $*$ 表示.

通过上面三步, 不交和为

$$fg + abc(\bar{f} + f\bar{g}) + ad\bar{f}g(\bar{b} + b\bar{c}) + cef\bar{g}(\bar{a} + a\bar{b})$$

表 3.2

	取出的项 B	与之比较的项 A	C	$abcdefg$	结果 Σ
0	$A_1=fg$	/	/	$*****11$	存
1	$A_2=abc$	$A_1=fg$	f,g	$111**0*$ $111**10$	存
2	$A_3=adg$	$A_1=fg$ $A_2=abc$	f b,c	$\Lambda:1**1*01$ $10*1*01$ $1101*01$	存
3	$A_4=fec$	$A_1=fg$ $A_2=abc$ $A_3=adg$	g a,b	$\Lambda:**1*110$ $0*1*110$ $101*110$ 上两项保留	存

说明: 例如步 3 中 A_4 与 A_1 不交化, 结果为其中第一行, 记入 Λ 中. 然后 Λ 中的项与 A_2 作比较, 结果仍记入 Λ. 但由于都已与 A_3 不交, 故表中注明保留, 并送入 Σ 保留. 最终的不交和为 Σ 中诸项之和.

不难看出, 不交和算法 2 比 1 要简单, 而且也适用于计算机.

最后指出, 本节的算法对相应的广义网络亦成立.

§3.6 推广和进展

网络系统可靠度的计算最初只限于二终端问题 (§3.1, (1)). 20 世纪 70 年代起, 随着许多大型复杂的通讯网络、计算机网络和输电、输油网络等的发展, 使得问题的提法更为一般, 同时也出现了不少新的算法及理论上的进展. 这里我们只能作一个简单的介绍.

设给定一个网络 G, 其中节点集合 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$, 弧的集合 $E=\{e_1,\cdots,e_l\}$.

二终端问题 (§3.1, (1)) 的推广:

(a) 有源问题

记 s,t 为两个特定的节点, 称作输入、输出节点. $K\subset V$, 为特定的 k 个节点所成的集合.

从 s 出发的 k 终端问题为求

$$R_{sK}(G)=P\{s\text{可以到达 }K\text{ 中所有节点}\} \tag{1}$$

特别, 当 $K=\{t\}$ 时,

$$R_{st}(G)=P\{s\text{可以到达}t\} \tag{2}$$

此即为二终端的输入输出问题.

(b) 无源问题

k 终端问题为求

$$R_K(G) = P\{K\text{中所有节点对之间相通}\} \tag{3}$$

特别, $K = \{s,t\}$ 时为二终端问题

$$R_{\{s,t\}}(G) = P\{s,t\text{相通}\} \tag{4}$$

容易看出, 对无向网络有源问题 (1) 与对 $K \cup \{s\}$ 的无源问题 (3) 是相同的.

方法与理论上的进展:

对于二终端的输入输出问题 (2), 简记为

$$R(G) = R_{st}(G)$$

若已求得所有最小路 $A_1, \cdots, A_m$, 则由初等概率论可得

$$\begin{aligned} R(G) = \sum_{i=1}^{m} P\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} P\{A_i A_j\} \\ + \cdots + (-1)^{m-1} P\{A_1 \cdots A_m\} \end{aligned} \tag{5}$$

(5) 式右边共有 $2^m - 1$ 项, 所以, 当 m 大时用它作实际计算就不可行. 分析其原因, 主要是 (5) 右边出现许多符号相反的相等项.

文献 [74] 研究了这个问题. 由于 (5) 式可改写为

$$R(G) = \sum_i \varepsilon_i P\{U_i\} \tag{6}$$

其中 $\varepsilon_i = \pm 1, U_i$ 为 s 到 t 的一些最小路同时通这一事件. 若记 G_a, G_c 为 G 的包含 s 及 t 的非循环或循环子图 (所谓包含 s 及 t 的循环子图是指从 s 出发到达 t 的路仍旧回到 s), 则 U_i 必为 G 的一个循环或非循环子图. 反之, 包含 s 及 t 的循环或非循环子图必有 U_i 这种形式 (一些最小路同时通). 因此 (6) 可写成

$$R(G) = \sum_i d_i P\{G_{a,i}\} + \sum_k d_k P\{G_{c,k}\} \tag{7}$$

$d_i, d_k = \pm 1$.

[74] 中证明了

$$\sum_k d_k P\{G_{c,k}\} = 0$$
$$d_i = (-1)^{n_i - b_i + 1}$$

其中 n_i, b_i 为第 i 个非循环子图 $G_{a,i}$ 中的节点和弧的数目.

因此可得

$$R(G) = \sum_i d_i P\{G_{a,i}\} \tag{8}$$

与 (6) 相比较, 大大地减少了计算的项数. 在这些理论结果的基础上, [74] 开发了一个只产生所有非循环子图的算法.

沿此方向的发展有 k 终端问题, 即求 $R_{sK}(G)$ 或 $R_K(G)$. 此外, 利用分解公式进行网络可靠度计算时, 如何适当地选择进行分解的弧, 以便每步利用串、并联的简化后使计算量最小. 顺这个方向, 展开了网络系统可靠度的计算复杂性问题的深入探讨, 以及计算复杂性与图的制约数理论 (domination theory) 之间关系的研究.

总之, 网络系统可靠度的计算从解决实际问题的角度来讲有研究的必要性, 从理论角度来看也有许多深入的问题需要进一步探讨. 因此, 至今它仍是可靠性数学中一个非常活跃的课题. 读者可以在 [17] 中找到进一步深入的文献.

第四章　故障树分析

故障树分析 (简称 FTA) 是用于大型复杂系统可靠性和安全性分析的一个有力工具. 本章将简单介绍故障树的建立及其评定方法.

§4.1 引言

20 世纪 60 年代初, 贝尔实验室的科学家首先提出了 FTA 方法. 其后, 波音公司又对方法加以改进, 使之适用于计算机处理. 目前已有多种 FTA 的计算机软件可供使用.

FTA 方法最初成功地用于民兵式导弹发射控制系统安全性研究, 外层空间探索, 超音速飞机运输安全性分析等. 20 世纪 70 年代, 应用范围扩展到核电站安全性和风险评定. 如今, FTA 方法已进入到化工、轻工、电子、机械制造等产业部门.

利用 FTA 来分析一个系统时, 我们关心的是找出造成某个不希望的事件 (下称顶端事件) 发生的各种可能的原因. 通常, 顶端事件是系统的失效或某种失效模式. 例如, 在核电站安全性和风险评定中, "放射性物质外泄"是一个非常危险的事故, 因此可以作为顶端事件来研究. 当然也可以根据需要只考虑其中小一些的事件, 如"安全控制棒失控".

FTA 使用演绎的方法找出使顶端事件发生的可能的事件组合. 它反映了由

于元、部件失效或人为失误等等事件引起顶端事件发生的逻辑关系. 这种关系用图形表示出来就像一棵以顶端事件为根的倒长着的树. 故障树就因此而得名.

通常进行 FTA 的程序是：选择顶端事件, 建立故障树, 以及定性或定量地评定故障树.

§4.2 建立故障树

建立故障树以前首先应选择顶端事件, 然后再进行分析, 具体画出故障树.

§4.2.1 顶端事件 T 的选取

顶端事件 T 可以根据我们的研究对象来选取. 但是, 为了能够进行分析, 一般遵循两条共同的原则.

T 的发生与否必须有明确的定义, 而且为了能够定量评定其发生的可能程度 (用概率表示), 事件 T 应该是能够度量的.

其次, 事件 T 必须能进一步分解, 即可以找出使 T 发生的直接原因.

§4.2.2 故障树的建立

选好顶端事件 T 后, 我们可以着手进行建立故障树的工作.

显然, 建好故障树的先决条件是必须对系统有透彻的了解. 为此, 工程设计人员、现场工作者、可靠性工作者需要密切合作, 共同分析, 以便找出所有造成事件 T 发生的各种直接原因 (称作次级事件). 当然, 在分析中也应该包括人为失误造成顶端事件发生的可能性.

一般而言, 次级事件的发生与顶端事件发生之间是有一定的逻辑关系相联系的. 例如, 当两个次级事件 A_1, A_2 中有一个发生就造成 T 出现, 则 T 与 A_1, A_2 之间是逻辑或的关系. 因此, 若仍用同一字母表示该事件发生, 则 T 可表成 $T = A_1 \cup A_2$. 相仿, 当 A_1, A_2 同时出现才使 T 出现, 则是逻辑与关系. 此时 $T = A_1 A_2$. 在对顶端事件 T 进行第一步分解后, 下面再对每个次级事件进行类似的分析, 即找出其发生的直接原因. 逐次下去, 最终一直到不能进行分解的基本事件为止. 在引进一些适当的记号表示后, 就可以具体地把故障树画出.

不难想象, 要对一个大型复杂系统进行故障树分析, 工作量是相当大的. 而且在故障树构造中, 有时难免会遗漏一些造成顶端事件 T 出现的失效模式. 因此, 系统中各方面人员的密切合作, 集思广益, 将会减少建树中的差错和疏漏.

由于故障树建立需要浩大的工作量, 因此利用计算机来协助人建立故障树就具有很大实用意义. 目前这方面的研究是一个很活跃的课题.

下面, 先引进 FTA 中所用的基本符号 (图 4.1).

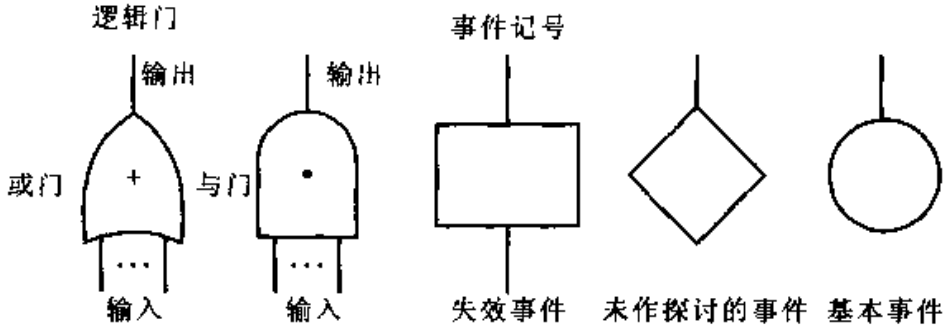


图 4.1 FTA 基本符号

或门表示若一个或几个输入事件发生时输出事件就发生; 与门表示所有输入事件都发生时输出事件才发生. 有时为了醒目起见, 在或门记号中标上"+"号, 在与门记号中标上"·"号.

失效事件 (其定义在相应的矩形方框中标明) 表示逻辑门的输出, 它依赖于逻辑门的类型及输入. 未作探讨的事件表示一个不准备进一步分析下去的失效. 基本失效事件是最基本的, 不能再分解的失效事件.

我们用两个简单的例来说明建立故障树的步骤.

例 4.2.1 假定研究割草机内燃引擎的使用可靠性. 为了能够包括因人为的疏忽而造成的故障, 我们选择 "马达不能发动" 作为顶端事件. 显然, 不能发动并不一定意味着机械的失效, 也可能是由于人为的原因造成的.

"马达不能发动"由下列三个失效事件之一引起: "缺油", "活塞不能压缩", "火花塞不发火". 对于每一个这种次级事件还可以进一步分解. 如"缺油"由下面三个事件之一引起: "油箱空", "汽化器失效", "油管堵". 这里"油箱空"并不是部件的一个失效状态, 而是人为的疏忽所造成的, 它是一个基本事件. 而"汽化器失效" 是我们不准备进一步分析下去的一个事件. 根据同样的方式, 把各个次级事件逐一分解, 最终得故障树 (图 4.2).

例 4.2.2 考察一个自动充气系统 (图 4.3). 其工作过程为: 当泵启动后 10 分钟使容器注满, 预先设定好的定时器便打开触点, 使泵停止. 经过 50 分钟, 容器内气体用尽, 定时器使触点闭合, 泵重新启动. 过程循环下去. 灌注过程中若定时器不能把触点打开, 则报警器在 10 分钟时发出警报, 操作者就过来打开开

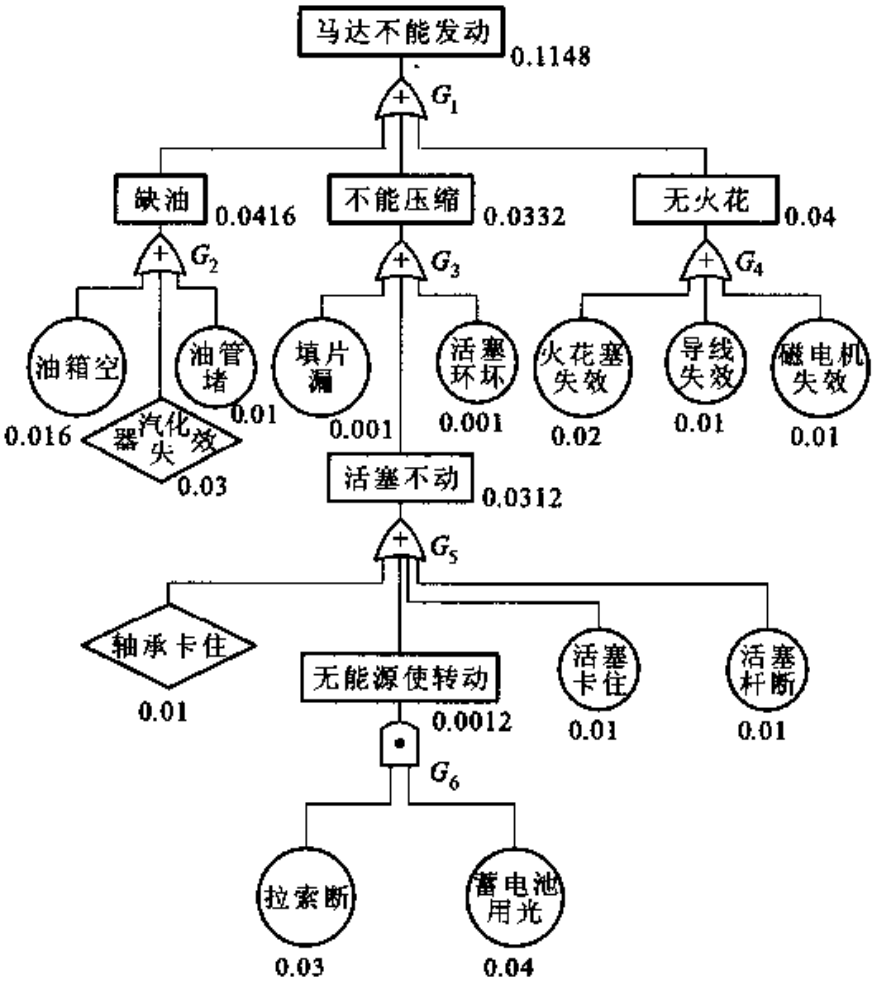


图 4.2 马达不能发动的故障树

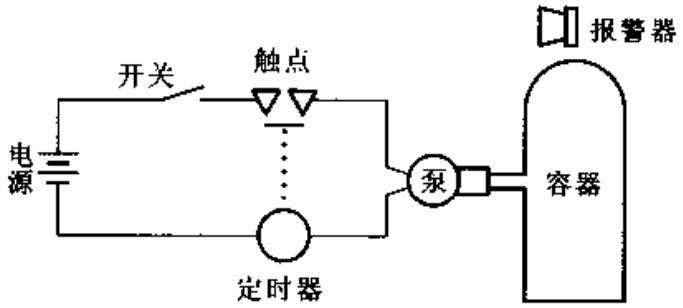


图 4.3 自动充气系统示意图

关, 使泵停止, 从而避免因加注过量而引起容量破裂.

我们选取容器破裂作为顶端事件. 它的发生是由下面两个原因之一造成: 一是容器本身由于设计制造等缺陷造成的破裂; 二是由于灌注过量引起过压造

成的破裂. 这两个事件由或门与顶端事件相联系. 过压这个事件是由于泵工作时间过长, 亦即线路闭合时间太长造成的. 线路闭合时间过长则由如下两个事件同时发生引起的: 一是开关闭合时间过长; 二是触点闭合时间过长. 它们与上一级由与门相联系. 循此下去可得图 4.4 的故障树.

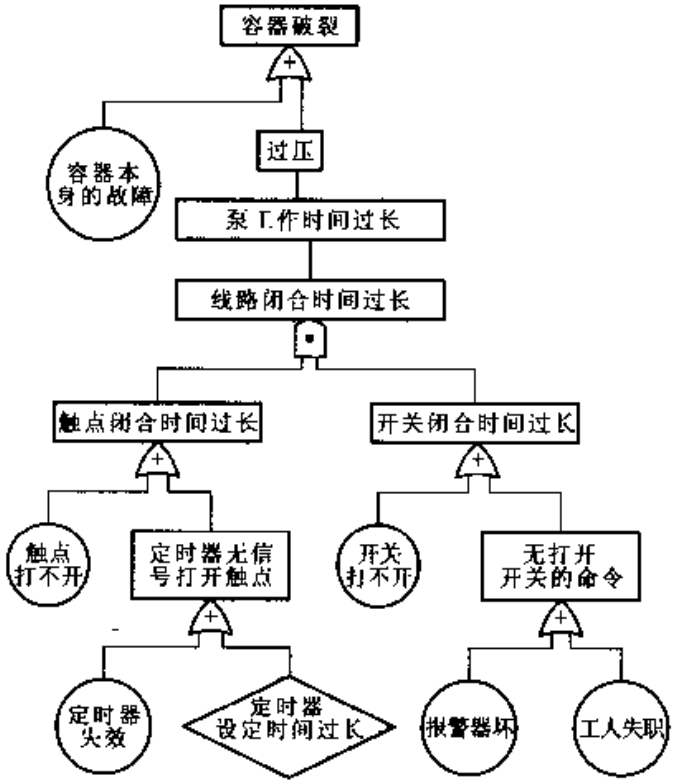


图 4.4 充气系统的故障树

一旦故障树建立之后, 它提供了造成顶端事件出现的一种形象表示. 在设计阶段, 它可以帮助人们发现设计中的薄弱环节, 以及事前未曾考虑到的潜在的失效模式. 在用作安全分析时, 故障树可以用来确定引起事故发生的可能原因. 进一步如果还知道每个基本事件发生的概率, 则可以借助于故障树的结构进行定量的评定, 计算出顶端事件发生的概率. 这种定性及定量的信息为管理和故障诊断提供了有效的帮助.

§4.3 故障树的数学描述

在讨论故障树的评定以前, 本节先介绍故障树的最小割和最小路表示.

§4.3.1 一般讨论

设给定故障树, 它由 n 个基本失效事件 $x_1,\cdots,x_n$ 构成. 仍用字母 x_i 表示第 i 个基本失效事件出现. 且假定每个基本事件 x_i 与顶端事件 T 只有出现或不出现两种可能的状态.

再假定故障树的事件之间只有与、或逻辑门相互联系, 则顶端事件 T 可以表成一些基本失效事件的并及交的形式. 例如, 对于图 4.5 这两种最简单的形式分别有 (a) $T=x_1\cup\cdots\cup x_n$, (b) $T=x_1\cdots x_n$.

故障树中对顶端事件 T 的描述是通过失效事件来进行的, 自然也可从 T 不发生 (即成功) 的角度来看. 如果用 $\bar{T},\bar{x}_i$ 分别记 T 及 x_i 不发生, 则由摩根律

$$\overline{x\cup y}=\bar{x}\bar{y},\ \overline{xy}=\bar{x}\cup\bar{y} \tag{1}$$

图 4.5 相应的情形变为 (a) $\bar{T}=\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n$, (b) $\bar{T}=\bar{x}_1\cup\cdots\cup\bar{x}_n$.

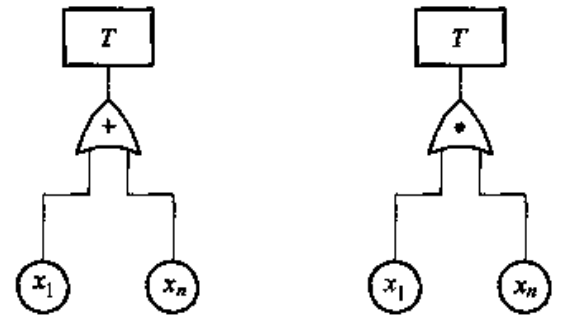


图 4.5 故障树的事件表示

它们可以分别用等价的网络表出. (a) 可由弧 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n$ 的串联系统表示, (b) 由弧 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n$ 的并联系统表示. 因此不难看出, 在一只有与、或门及一些基本失效事件组成的故障树, 都可表示成等价的广义网络形式 (注意, 基本失效事件可以在故障树中多次出现, 因而所得之网络表示形式中有些弧是重复出现的). 一般说来当故障树的规模较大时, 其等价的广义网络往往非常繁杂. 此外, 在故障树分析中增加其它类型的逻辑门后, 网络也就不能等价地表示故障树了. 虽然如此, 网络中的一些基本概念在故障树分析中同样是基本的.

§4.3.2 最小割表示

定义 4.3.1 设 C 是一些基本失效事件组成的集合. 若 C 中每个事件都发

生 (失效), 即引起顶端事件 T 亦发生, 则 C 称作**故障树的一个割**. C 中基本事件的下标组成的集合叫做**割集**.

定义 4.3.2 若 C 是一个割, 而从中任意去掉一个事件后就不是割, 则称 C 是一个**最小割**. 若用 D 表示最小割 C 中基本事件的下标集, D 称作相应于 C 的**最小割集**, 最小割集中元素的个数称作它的**阶**.

下面仍用 x_i 表示第 i 个基本失效事件发生, 用 C 表示最小割 C 中的基本事件都发生, 则 C 可表为

$$C = \bigcap_{i \in D} x_i \tag{2}$$

从工程的角度看, 每个最小割即是一种失效模式. 因为只要最小割中相应的基本失效事件发生, 则顶端事件 (失效) 必发生.

显然, 若能求得故障树的所有最小割 $C_1, \cdots, C_l$, 则顶端事件 T 可表为

$$T = \bigcup_{j=1}^{l} C_j = \bigcup_{j=1}^{l} \bigcap_{i \in D_j} x_i \tag{3}$$

上式称作故障树顶端事件 T 的最小割表示.

§4.3.3 最小路表示

相仿, 可以定义故障树的路与最小路.

定义 4.3.3 记 A 是一些基本失效事件组成的集合. 若 A 中每个事件都不发生 (即正常), 则顶端事件 T 亦不发生, 此时称 A 为一条**路**. 若 A 是一条路, 而 A 中除去一个事件后就不再是路, 则 A 称作**最小路**.

记最小路 A 的下标集为 P, P 称作相应于 A 的最小路集. 仍用字母 A 表示 A 中所有基本事件都不发生这一事件, 则 A 可表为

$$A = \bigcap_{i \in P} \bar{x}_i$$

从工程上讲, 每条最小路的出现, 即该最小路中事件都不发生, 就保证顶端事件不出现. 因此, 若顶端事件为系统失效, 则最小路中所有事件正常即保证系统正常.

若 $A_1,\cdots,A_m$ 为故障树的所有最小路, 则顶端事件 T 可表为

$$\bar{T}=\bigcup_{i=1}^{m}A_i \tag{4}$$

等价地

$$T=\bigcup_{j=1}^{m}\bar{A}_j=\bigcap_{j=1}^{m}\bigcup_{i\in P_j}x_i \tag{5}$$

上式为 T 的最小路表示. 顺便指出, 利用结构函数来描述故障树的方法见第五章.

从上面的讨论可见, 在故障树的定性分析中, 首要的任务是找出使顶端事件 T 发生的所有可能的失效事件的组合, 即求出所有最小割.

§4.4 故障树的评定

故障树的评定包括定性和定量两个方面. 定性评定即求所有最小割, 或等价地, 求所有最小割集. 本节介绍两种算法. 定量评定即根据基本事件发生的概率求出顶端事件发生的概率.

先介绍求所有最小割的算法.

§4.4.1 下行法

这是一个从顶端事件往下计算的方法. 用一个简单的例子来说明.

例 4.4.1 假定已给故障树 (图 4.6).

算法的步骤可以描述如下. 从顶端事件 T 往下列表逐级进行. 若 T 下面一级是与门, 则把该门下面的所有输入都排在同一行中; 若 T 下面是或门, 则把每个输入事件单独排在一行. 然后, 依次做下面的一级, 一直到不能分解的基本失效事件为止.

由算法的安排可以看出, 每一行的事件出现使得顶端事件出现. 因此, 任一行上的事件组成一个割. 为了得到所有最小割, 算法还得消除那些不是最小割的割.

例子的具体做法如下:

步骤	1	2	3	4	5
	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2
	G_1	G_2	G_4, G_5	4, G_5	4, 6, 7
		G_3	3	5, G_5	5, 6, 7
			G_6	3	3
				5, 6	5, 6

这里从步骤 1 到 2 时因 G_1 门下面是或门, 故在步骤 2 中 G_1 的地位换之以 G_2, G_3, 且写在不同行上. 从步骤 2 到 3 时, G_2 下面是与门, 故 G_4, G_5 写在同一行上. 最后一步得 6 个割集

$$\{1\},\ \{2\},\ \{4,6,7\},\ \{5,6,7\},\ \{3\},\ \{5,6\}$$

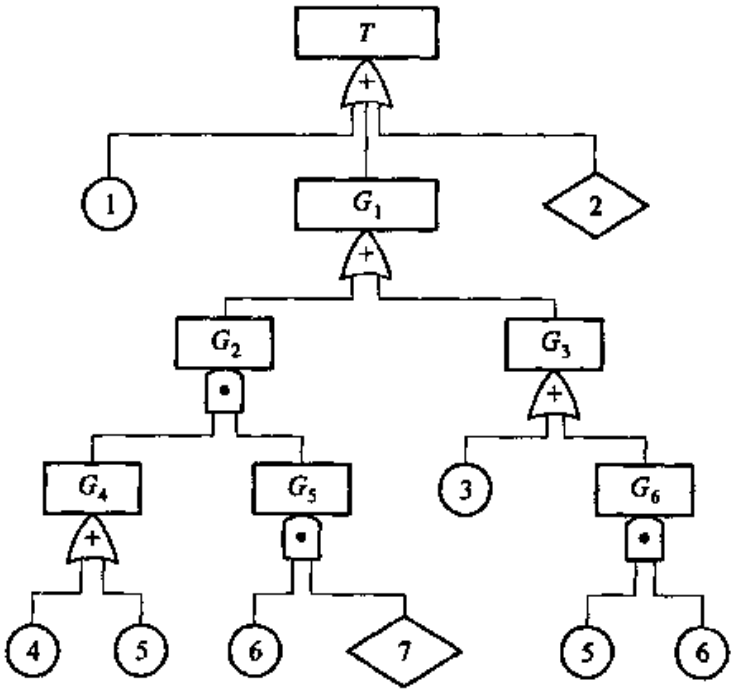


图 4.6　故障树例

为了挑出所有最小割集, 注意下面的事实. 设 C_i, C_j 是任意的两个割集, 若有普通的集合包含关系

$$C_i \subset C_j$$

则 C_j 不是最小割集, 故可舍去. 因此, 可以通过两两比较, 保留那些互不包含的割集, 这样所得即最小割集全体.

在上例中, 先可按割集的阶排起来, 阶小的在前面 (相同阶的割集次序任意排).

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{5,6\},\ \{4,6,7\},\ \{5,6,7\}$$

然后两两比较, 显然

$$\{5,6\} \subset \{5,6,7\}$$

故 $\{5,6,7\}$ 不是最小割集. 而其它的无互相包含关系. 最后得所有最小割集

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{5,6\},\ \{4,6,7\}$$

§4.4.2 上行法

算法自下面上进行. 把最底一层的逻辑门用其输入事件来表示: 与门是事件的交, 或门是事件的并. 面上一级的逻辑门再由其输入表示, 一步步往上推, 一直把顶端事件表出. 其中在每做一步时利用集合运算规则进行简化. 这些规则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_2 + x_1,\ x_1x_2 = x_2x_1 \\ x_1 + x_1 = x_1,\ x_1x_1 = x_1 \\ x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 \\ x_1 + x_1x_2 = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

这里为书写简便起见, 用"+"代替"∪", 且省去 ∩ 的符号.

仍用例 4.4.1 说明. 故障树的最后一级为

$$G_4 = x_4 + x_5,\quad G_5 = x_6x_7,\quad G_6 = x_5x_6$$

往上一级得

$$\begin{cases} G_2 = G_4G_5 = x_6x_7(x_4 + x_5) \\ G_3 = x_3 + G_6 = x_3 + x_5x_6 \end{cases} \tag{2}$$

再往上

$$G_1 = G_2 + G_3 = x_6x_7(x_4 + x_5) + x_3 + x_5x_6 \tag{3}$$

此时利用 (1) 对上式简化后得

$$G_1 = x_3 + x_5x_6 + x_4x_6x_7$$

最后为

$$T = x_1 + x_2 + G_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_5x_6 + x_4x_6x_7 \tag{4}$$

得 5 个最小割

$$\{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_5, x_6\},\ \{x_4, x_6, x_7\} \tag{5}$$

所得结果与下行法一致.

注意, 在上行法中, 每步可利用集合运算规则及两两比较的方法进行简化, 使之留下的是互不包含的项. 这样做的好处是使后面的计算方便些.

有时从实用上讲, 当故障树的规模不太大以及基本事件发生的概率很小时 (10^{-3}—10^{-2}), 往往求出三阶以下的最小割即可获得足够精度的定量评定结果. 为此, 只要对下行法或上行法适当修改, 使之能求出故障树的 r 阶以下的所有最小割, 而舍去高阶的.

下行法时, 若行中元素个数 (不包括门的记号) 大于 r, 则舍去该行. 因为再继续分解下去所得割集的阶数必大于 r.

上行法时, 在每一步对逻辑门的表达式中, 舍去元素个数超过 r 的加项.

例如, 在例 4.4.1 中要求所有二阶以下的最小割. 这时在上行法中公式 (2) 的 G_2 为

$$G_2 = x_4x_6x_7 + x_5x_6x_7$$

其加项的元素个数大于 2, 故全舍去. 使得 $\tilde{G}_2 = 0$. 于是 (3) 变为

$$\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 + G_3 = G_3 = x_3 + x_5x_6$$

(4) 变为

$$\tilde{T} = x_1 + x_2 + \tilde{G}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_5x_6$$

于是二阶以下的所有最小割为

$$\{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_5, x_6\}$$

§4.4.3 定量评定

假定已求得故障树的所有最小割 $C_1, \cdots, C_l$, 并且已知基本事件 $x_1, \cdots, x_n$ 发生的概率, 要求顶端事件 T 发生的概率 $P\{T\}$.

显然

$$P\{T\} = P\left\{\bigcup_{i=1}^{l} C_i\right\} \tag{6}$$

因此, 在假定基本事件 $x_1, \cdots, x_n$ 互相独立的条件下, 可利用第三章网络系统求可靠度的算法来求 (6), 这里不再重复.

实际中常见的系统其基本事件的失效概率都比较小, 故可以用下面粗糙的近似方法, 即直接由基本事件的概率来求顶端事件 T 发生的概率. 假定 x_1, x_2 是任意两个基本事件, $P\{x_1\}, P\{x_2\}$ 大约在 10^{-2} 的数量级. 故可近似地有

$$P\{x_1 \cup x_2\} \approx P\{x_1\} + P\{x_2\}$$

而假定基本事件互相独立时

$$P\{x_1 x_2\} = P\{x_1\}P\{x_2\}$$

以例 4.2.1 割草机马达不能发动为例来说明. 图 4.2 中每个基本事件旁边注的数字为它发生的概率. 由下往上算可得

$$P\{\text{马达不能发动}\} \approx 0.11$$

当然, 这种近似的前提是故障树规模不太大时才适用.

最后指出, 定量评定时的实际困难在于基本事件发生的概率很难精确获得. 其次, 若故障树太复杂时, 则会遇到与求网络可靠度时一样的困难. 即求所有最小割及顶端事件发生概率的计算量都相当大.

在结束本章之前, 我们简单介绍故障树分析的发展. 在前面的讨论中, 都作了基本事件之间只有通过与、或逻辑门来联系上、下两级的假定. 但是, 由于实际问题的复杂性 (如有反馈回路的情形), 需要引进更多的表示事件之间关系的逻辑门, 例如, 非门, 异或门等. 非门是当输入事件不发生时才有输出, 异或门是当所有输入事件中有且仅有一个发生时才有输出. 此类逻辑门的引入, 使得基本事件和其逆事件有可能同时在树中出现. 这种更广泛的结构通常叫做事件树 (event tree) 或非单调关联故障树 (non-coherent fault tree). 与前述的故障树相比较, 其共同点在于构造事件树的方法与故障树相同, 也是由顶端事件通过自上而下的分析获得的. 而其最大的差别在于事件树的结构函数不具有单调性. 并且事件树的数学描述是由布尔 (Boole) 积和表达式表示的, 定性评定时需要求出所有的质蕴含项 (相当于故障树的全体最小割).

由于故障树有着广泛应用的前景, 广大工程技术界有着很大的兴趣. 目前关于计算机辅助故障树的建立, 新的定性、定量评定的算法, 以及对一般事件树的研究都非常活跃. 读者可以在 [35], [81] 中找到进一步的材料.

第五章　单调关联系统理论

在前面讨论过的网络和故障树的基础上, 本章将考察更一般的所谓单调关联系统 (coherent system). 从 20 世纪 50 年代末, 许多作者对两状态单调关联系统作过详细研究, 这方面的重要结果总结在巴罗和普劳斯钦的两本书 [19],[20] 中.

本章 §5.1 将给出单调关联系统的定义及性质. §5.2 讨论它的数学描述. §5.3 介绍可靠度的计算和估计. §5.4 讨论部件相依时可靠度的界. §5.5 介绍部件重要度概念. §5.6 封闭性定理, 讨论在单调关联系统结构下, 系统寿命与部件寿命是否属于同一寿命分布类的问题. 最后, §5.7 对多状态单调关联系统作初步介绍.

§5.1 单调关联系统的定义及性质

§5.1.1 单调关联系统定义

在实用中常见的系统有串联、并联、$k/n(G)$ 系统等等, 它们都有如下的共同点: 部件或系统都只有正常或失效两种可能的状态; 系统正常与否, 完全由其结构以及部件的状态所决定. 此外, 普通的经验告诉我们: 系统中任意一个部件的失效不会使系统可靠性得到改善. 而且, 从可靠性研究的角度讲, 系统中不存在对其可靠性不起作用的部件. 把上述几点抽象出来将给出单调关联系统的定义.

假定系统由 n 个部件组成. 用 x_i 表示部件 i 的状态, $x_i = 1$ 表示部件 i 正常, $x_i = 0$ 为失效. 记部件的下标集为 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 再记所有分量都只取 $0, 1$ 值的向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 为部件的状态向量, 以及

$$(1_i, \boldsymbol{x}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$
$$(0_i, \boldsymbol{x}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$
$$(\cdot_i, \boldsymbol{x}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

假定系统亦只有正常、失效两状态, 分别用 $1, 0$ 表示. 下面用二值变量 (函数) 来指只取 $0, 1$ 二值的变量 (函数). 再设系统状态完全由部件的状态决定. 对给定的状态向量 $\boldsymbol{x}$, 用 $\phi(\boldsymbol{x})$ 记系统的状态, 它是 $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 上的一个函数, 称作系统的**结构函数**.

对任意两个 n 维向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ 表示 $x_i \leqslant y_i, i = 1, \cdots, n$. 而 $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ 表示 $x_i \leqslant y_i, i = 1, \cdots, n$, 且存在下标 j, 使 $x_j < y_j$.

定义 5.1.1 设 ϕ 是系统的结构函数, 若对任意的 $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ 有

$$\phi(\boldsymbol{x}) \leqslant \phi(\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

则称 ϕ 是**单调结构函数**, 或**单调系统**. 记作 $\phi \in \{\mathrm{MS}\}$.

显然, 在单调结构函数的定义中, (1) 反映了部件可靠性的改善不会使系统性能变坏.

定义 5.1.2 若对任意 $i \in N$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \phi(1_i, \boldsymbol{x}) = 1 \tag{2}$$

则称部件 i 与系统有关.

上述性质称作部件与系统的关联性. 它反映了任一部件都是系统的一个不可少的有机部分, 其正常或失效是对系统的状态有影响的. 因为若对某个 $i \in N$, (2) 不成立, 此时表明对任意的 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) = \phi(1_i, \boldsymbol{x})$$

即不管部件 i 取什么状态 (0 或 1), 都不影响系统的状态, 即在系统中部件 i 的性能对其可靠性而言是没有影响的. 为了简单起见, 我们研究的系统中不包括与系统状态无关的部件.

定义 5.1.3 若系统具有单调结构函数 ϕ, 且任一部件 i 都与系统有关, 则称系统为**单调关联系统**. 记作 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$.

例如, n 个部件的串联系统是单调关联系统, 有结构函数

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \min_i x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

相仿, 并联系统有结构函数

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_i x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \tag{4}$$

为方便起见, 引进记号: 对任意的 $0 \leqslant p_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, n$,

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) \tag{5}$$

则并联系统的结构函数亦可表为

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{6}$$

对 $k/n(G)$ 系统有

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{若} \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant k \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7}$$

显然, 由 n 条弧组成的两状态网络亦是一个单调关联系统 (自然假定每条弧是与系统有关的). 其结构函数 ϕ 可以通过真值表法或者最小路来表示, 我们将在 §5.2 进一步讨论.

§5.1.2 对偶

定义 5.1.4 设 $\phi \in \{\mathrm{MS}\}$, 称

$$\phi^D(\boldsymbol{x}) = 1 - \phi(1 - \boldsymbol{x}) \tag{8}$$

为它的**对偶结构函数**, 相应于 ϕ^D 的系统为**对偶系统**. 这里 $\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x} = (1 - x_1, \cdots, 1 - x_n)$.

定理 5.1.1 设 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$, 则 $\phi^D \in \{\mathrm{CS}\}$.

证明 $\phi^D \in \{\mathrm{MS}\}$ 是显然的. 现设 $i \in N$, 由于 i 与系统有关, 故存在 $(\cdot_i, \boldsymbol{x})$ 使

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \phi(1_i, \boldsymbol{x}) = 1$$

故对 $(\cdot_i, \mathbf{1} - \boldsymbol{x})$ 有

$$\phi^D(0_i, \mathbf{1} - \boldsymbol{x}) = 1 - \phi(1_i, \boldsymbol{x}) = 0$$
$$\phi^D(1_i, \mathbf{1} - \boldsymbol{x}) = 1 - \phi(0_i, \boldsymbol{x}) = 1$$

因此部件 i 与对偶系统亦是有关的. 故 $\phi^D \in \{\mathrm{CS}\}$. 证毕.

定理 5.1.2

$$[\phi^D(\boldsymbol{x})]^D = \phi(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

上式由定义即得.

例如, 对结构函数 ϕ 由 (3) 给出的串联系统, 其对偶为

$$\phi^D(\boldsymbol{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = \coprod_{i=1}^{n} x_i$$

因此, 串联的对偶即并联. 反之亦对.

对 $k/n(G)$ 系统, ϕ 由 (7) 给出, 而

$$\phi^D(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geqslant n - k + 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

因此, 其对偶即为 $(n-k+1)/n(G)$ 系统, 亦即是 $k/n(F)$ 系统.

§5.1.3 单调关联系统的基本性质

先注意如下简单事实.

设 $\boldsymbol{x}$ 是只取 0, 1 值的状态向量, 则

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i = \max_i x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \tag{10}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \min_i x_i \tag{11}$$

定理 5.1.3 若 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$, 则

(a) $\phi(\mathbf{0})=0, \phi(\mathbf{1})=1$. 并且对任意状态向量 $\boldsymbol{x}$

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant \coprod_{i=1}^{n} x_i \tag{12}$$

(b) 对任意状态向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$

$$\phi(\boldsymbol{x} \amalg \boldsymbol{y}) \geqslant \phi(\boldsymbol{x}) \amalg \phi(\boldsymbol{y}) \tag{13}$$

$$\phi(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \phi(\boldsymbol{y}) \tag{14}$$

这里 $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ 分别表示分量全为 0 或 1 的状态向量,

$$\boldsymbol{x} \amalg \boldsymbol{y}=\left(x_1 \amalg y_1, \cdots, x_n \amalg y_n\right)$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}=\left(x_1 y_1, \cdots, x_n y_n\right)$$

证明 (a) 若 $\phi(\mathbf{0})=1$, 则对任意的 $(\cdot_i, \boldsymbol{x})$, 由单调性必有

$$1=\phi\left(0_i, \boldsymbol{x}\right)=\phi\left(1_i, \boldsymbol{x}\right)$$

这与任一部件 i 与系统有关矛盾. 因此必有 $\phi(\mathbf{0})=0$. 同理证 $\phi(\mathbf{1})=\mathbf{1}$.

对任意状态向量 $\boldsymbol{x}$, 记

$$\beta=\coprod_{i=1}^{n} x_i, \ \alpha=\prod_{i=1}^{n} x_i$$

则有 $\alpha \mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \beta \mathbf{1}$. 由于 α, β 只可能取 $0,1$ 值, 故必有

$$\phi(\alpha \mathbf{1})=\alpha, \quad \phi(\beta \mathbf{1})=\beta$$

再由 ϕ 的单调性

$$\alpha=\phi(\alpha \mathbf{1}) \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant \phi(\beta \mathbf{1})=\beta$$

此即 (12) 式.

(b) 为证 (13) 式, 只要注意到 $\boldsymbol{x} \amalg \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \amalg \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{y}$, 并由 ϕ 的单调性得

$$\phi(\boldsymbol{x} \amalg \boldsymbol{y}) \geqslant \max\{\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\}=\phi(\boldsymbol{x}) \amalg \phi(\boldsymbol{y})$$

(14) 式可相仿证明. 证毕.

表达式 (13) 的含意是, 在部件一级上的并联备份比系统一级的并联备份更为有效. 这个原则在工程中为设计师所共知.

定理 5.1.4 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$, 则对任意状态向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$

$$\phi(\boldsymbol{x} \amalg \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) \amalg \phi(\boldsymbol{y}) \quad \text{当且仅当} \quad \phi(\boldsymbol{x}) = \coprod_{i=1}^{n} x_i \tag{15}$$

$$\phi(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{y}) \quad \text{当且仅当} \quad \phi(\boldsymbol{x}) = \coprod_{i=1}^{n} x_i \tag{16}$$

证明 充分性显然. 下面只证 (15) 的必要性, 而 (16) 的必要性由对偶得. 由 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$, 故对任意 $i \in N$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$0 = \phi(0_i, \boldsymbol{x}) < \phi(1_i, \boldsymbol{x}) = 1 \tag{17}$$

由必要性的条件

$$\phi(1_i, \boldsymbol{x}) = \max\{\phi(1_i, \boldsymbol{0}), \phi(0_i, \boldsymbol{x})\}$$
$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) = \max\{\phi(0_i, \boldsymbol{0}), \phi(0_i, \boldsymbol{x})\}$$

故由 (17) 必有 $\phi(0_i, \boldsymbol{0}) < \phi(1_i, \boldsymbol{0}), i \in N$. 即得 $\phi(1_i, \boldsymbol{0}) = 1$. 因此对任意的 $i \in N$ 有 $\phi((x_i)_i, \boldsymbol{0}) = x_i$. 于是对任意状态向量 $\boldsymbol{x}$,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \coprod_{i=1}^{n} \phi((x_i)_i, \boldsymbol{0}) = \coprod_{i=1}^{n} x_i$$

证毕.

定理 5.1.5 设 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$, 则对任意的 $i \in N$ 及 $\boldsymbol{x}$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = x_i\phi(1_i, \boldsymbol{x}) + (1 - x_i)\phi(0_i, \boldsymbol{x}) \tag{18}$$

上式称作 ϕ 的分解公式.

证明 因为

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \phi(1_i, \boldsymbol{x}), \text{若 } x_i = 1 \\ \phi(0_i, \boldsymbol{x}), \text{若 } x_i = 0 \end{cases}$$

上式右端即 (18) 式右端. 证毕.

事实上 (18) 式对 $\phi \in \{\mathrm{MS}\}$ 即成立.

(18) 表明, "n 阶的"结构函数可以用"$n-1$ 阶的"来表示. 重复应用 (18), 可得

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{y}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j}(1-x_j)^{1-y_j}\phi(\boldsymbol{y}) \tag{19}$$

这里 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ 求过所有 n 维的二值向量.

例 5.1.1 对两部件并联系统, 由 (4)

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1x_2$$

按 (19) 可表为

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2) = {} & x_1(1-x_1)^0x_2(1-x_2)^0 \cdot \mathbf{1} \\ & + x_1(1-x_1)^0x_2^0(1-x_2) \cdot \mathbf{1} \\ & + x_1^0(1-x_1)x_2(1-x_2)^0 \cdot \mathbf{1} \\ & + x_1^0(1-x_1)x_2^0(1-x_2) \cdot \mathbf{0}\end{aligned}$$

§5.1.4 故障树

由 n 个基本事件通过与、或逻辑门组合而成的故障树亦是一个单调关联系统. 为此只要令

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{若第 } i \text{ 个基本事件发生} \\ 0, \text{其它} \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, n \tag{20}$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{若顶端事件 } T \text{ 发生} \\ 0, \text{其它} \end{cases} \tag{21}$$

显然, 这样定义的 ϕ 满足单调性, 因为基本事件发生 (即失效) 得越多, 则顶端事件 T 越容易发生.

这里需要强调指出的一点是, 故障树是从失效的角度来描述系统的. 而通常的网络系统则是从正常的角度来描述系统的. 但是从其数学描述上看, 则可用单调关联系统来统一处理.

故障树亦有对偶的概念. 若用 T^D 表示对偶树的顶端事件, 则对偶树可以如下构成: 原故障树的基本事件不变, 逻辑与门变成或门, 或门变成与门.

为此, 只要看两种简单的情形. 设故障树顶端事件 T 由逻辑与门同基本事件 x_1, x_2 相联系, 则 $\phi(x_1, x_2) = x_1 x_2$. 于是

$$\phi^D(x_1, x_2) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) = x_1 \amalg x_2$$

故 ϕ^D 相应的顶端事件 T^D 与基本事件 x_1, x_2 的关系应该是由或门相联系. 对于 T 由或门同基本事件相联系的情形可同上处理. 这两种情形归纳起来即得对偶树的构造方法.

例 5.1.2 第四章例 4.3.1 的故障树 (图 4.6), 其对偶树为图 5.1.

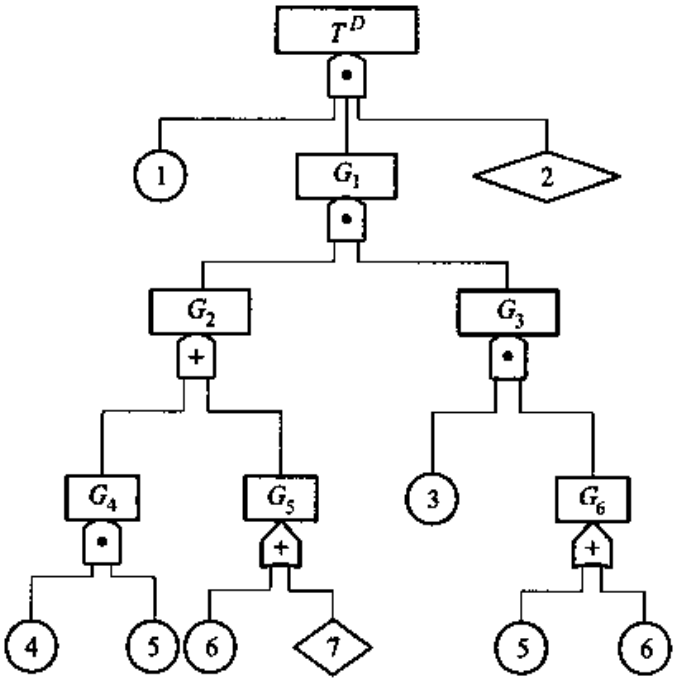


图 5.1 图 4.6 的对偶故障树

§5.2 单调关联系统的数学描述

在描述网络或故障树时, 最小路和最小割的概念是基本的. 本节把它们推广到单调关联系统, 给出单调关联系统的最小路和最小割表示.

本节中都假定 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$.

§5.2.1 最小路与最小割

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 为状态向量, 记

$$c_0(\boldsymbol{x})=\{i:x_i=0\},\quad c_1(\boldsymbol{x})=\{i:x_i=1\} \tag{1}$$

定义 5.2.1 若 $\phi(\boldsymbol{x})=1$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 ϕ 的一个**路向量**, $c_1(\boldsymbol{x})$ 叫做 $\boldsymbol{x}$ 的**路集**. 若 $\boldsymbol{x}$ 是路向量, 又对任意的 $\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x}$ 有 $\phi(\boldsymbol{y})=0$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是一个**最小路向量**, 相应的 $c_1(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**最小路集**. $c_1(\boldsymbol{x})$ 中元素的个数称作**最小路的阶或长度**.

从工程上讲, 一个最小路集是部件的最小集合, 这些部件正常时系统就正常.

相仿, 可以定义割向量与割集, 最小割向量与最小割集.

定义 5.2.2 若 $\phi(\boldsymbol{x})=0$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 ϕ 的一个**割向量**, $c_0(\boldsymbol{x})$ 叫做 $\boldsymbol{x}$ 的**割集**. 若 $\boldsymbol{x}$ 是割向量, 又对任意的 $\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x}$ 有 $\phi(\boldsymbol{y})=1$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是**最小割向量**, 相应的 $c_0(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**最小割集**, $c_0(\boldsymbol{x})$ 中元素个数称作最小割的**阶**.

显然, 从工程上讲, 一个最小割集是部件的最小集合, 这些部件失效时系统就失效.

下面为叙述简便起见, 最小路就指最小路向量, 其余相仿理解.

对最小路与割之间的关系, 有如下命题.

定理 5.2.1 (a) $\boldsymbol{x}$ 是 ϕ 的路, 当且仅当 $\mathbf{1}-\boldsymbol{x}$ 是 ϕ^D 的割. 即 $c_1(\boldsymbol{x})$ 是 ϕ 的路集, 当且仅当 $c_1(\boldsymbol{x})$ 是 ϕ^D 的割集.

(b) $\boldsymbol{x}$ 是 ϕ 的最小路, 当且仅当 $\mathbf{1}-\boldsymbol{x}$ 是 ϕ^D 的最小割. 即 $c_1(\boldsymbol{x})$ 是 ϕ 的最小路集, 当且仅当 $c_1(\boldsymbol{x})$ 是 ϕ^D 的最小割集.

证明由定义易得.

对于网络系统, 在第三章中已介绍了求所有最小路的方法, 同时给出了由所有最小路求所有最小割的方法.

对于故障树来讲, 第四章 §4.3 中给出的最小割定义, 按本节定义 5.2.1 的说法应称作"最小路". 但是, 由于故障树是从失效角度去研究系统性质的, 以及故障树中的最小割概念已被广泛接受, 因此我们仍用第四章 §4.3 中的定义. 这一点务请读者注意, 不要引起混淆.

对故障树而言, 第四章 §4.4 的上行或下行法可以求出所有最小割, 而通过求对偶树的所有最小割, 可获得原故障树的所有最小路.

§5.2.2 单调关联系统的最小路与最小割表示

假定单调关联系统的所有最小路集为 $P_1,\cdots,P_m$, 所有最小割集为 $K_1,\cdots,K_l$. 对任意状态向量 $\boldsymbol{x}$, 记

$$\rho_j(\boldsymbol{x})=\min_{i\in P_j}x_i=\coprod_{i\in P_j}x_i,\quad j=1,\cdots,m \tag{2}$$

显然, 当第 j 个最小路集中的部件都正常时有 $\rho_j(\boldsymbol{x})=1$. 而 $\phi(\boldsymbol{x})=1$ 当且仅当至少有一个最小路集中的部件都正常. 因此 $\phi(\boldsymbol{x})$ 可表为

$$\phi(\boldsymbol{x})=\max_j\rho_j(\boldsymbol{x})=\coprod_{j=1}^{m}\rho_j(\boldsymbol{x})=1-\coprod_{j=1}^{m}\{1-\rho_j(\boldsymbol{x})\} \tag{3}$$

相仿, 记

$$\kappa_j(\boldsymbol{x})=\max_{i\in K_j}x_i=\coprod_{i\in K_j}x_i \tag{4}$$

因此, 当第 j 个最小割集中的部件都失效时, $\kappa_j(\boldsymbol{x})=0$. 因为 $\phi(\boldsymbol{x})=0$ 当且仅当至少一个最小割集失效 (即其中元素都失效), 故

$$\phi(\boldsymbol{x})=\min_j\kappa_j(\boldsymbol{x})=\coprod_{j=1}^{l}\kappa_j(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

因此, 若把 ϕ 的最小路、最小割中的部件看成一个"组件"的话, 则结构 ϕ 是 m 个最小路 $\rho_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\rho_m(\boldsymbol{x})$ 的广义并联结构, 或是 l 个最小割 $\kappa_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\kappa_l(\boldsymbol{x})$ 的广义串联结构 (图 5.2). 注意, 这些"组件"中的元素可能在不至一个最小路或割中出现.

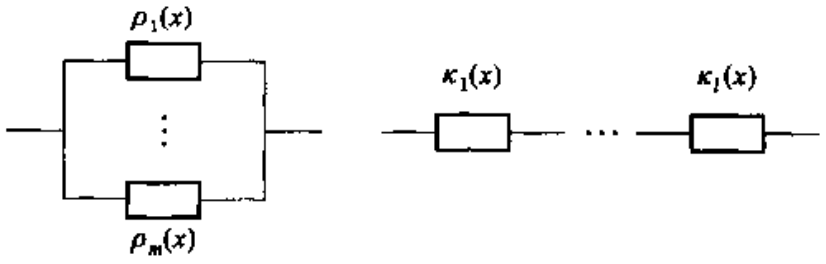


图 5.2 单调关联系统的最小路和割表示

对于顶端事件为 T 的故障树, 若其所有最小割为 $C_1,\cdots,C_l$, 所有最小路为 $P_1,\cdots,P_m$. 仍用相同的字母表示最小割集或最小路集. 则故障树的结构函

数 $\phi(\boldsymbol{x})$ 可表为

$$\phi(\boldsymbol{x})=\coprod_{j=1}^{l}\coprod_{i\in C_j}x_i \tag{6}$$

或

$$\phi(\boldsymbol{x})=\prod_{j=1}^{m}\coprod_{i\in P_j}x_i \tag{7}$$

这两式分别与第四章 §4.3(3), (5) 相对应.

例 5.2.1 桥形网络系统 (图 5.3)

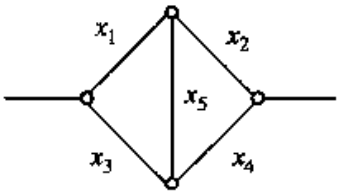


图 5.3 桥形网络

由第三章例 3.4.1, 例 3.4.4 知, 其最小路集为

$$P_1=\{1,2\},\quad P_2=\{3,4\}$$
$$P_3=\{1,4,5\},\quad P_4=\{2,3,5\}$$

故

$$\rho_1(\boldsymbol{x})=x_1x_2,\quad \rho_2(\boldsymbol{x})=x_3x_4$$
$$\rho_3(\boldsymbol{x})=x_1x_4x_5,\quad \rho_4(\boldsymbol{x})=x_2x_3x_5$$

于是

$$\phi(\boldsymbol{x})=1-(1-x_1x_2)(1-x_3x_4)(1-x_1x_4x_5)(1-x_2x_3x_5) \tag{8}$$

其最小割集为

$$K_1=\{1,3\},\quad K_2=\{2,4\},\quad K_3=\{1,4,5\},$$
$$K_4=\{2,3,5\}$$

故 ϕ 亦可表为

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{4} \kappa_i(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}
\kappa_1(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_3) \\
\kappa_2(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_2)(1 - x_4) \\
\kappa_3(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_4)(1 - x_5) \\
\kappa_4(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_5)
\end{aligned}$$

下面考虑桥形网络的对偶. 按定理 5.2.1, ϕ^D 的最小割集为 $P_1, \cdots, P_4$, 最小路集为 $K_1, \cdots, K_4$. 于是 ϕ^D 可表为

$$\phi^D(\boldsymbol{x}) = 1 - (1 - x_1x_3)(1 - x_2x_4)(1 - x_1x_4x_5)(1 - x_2x_3x_5) \tag{10}$$

或

$$\phi^D(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{4} \rho_j^D(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}
\rho_1^D(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \\
\rho_2^D(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_3)(1 - x_4) \\
\rho_3^D(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_4)(1 - x_5) \\
\rho_4^D(\boldsymbol{x}) &= 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_5)
\end{aligned}$$

$\phi^D(\boldsymbol{x})$ 相应的图形仍是桥形网络, 只是部件的配置发生了变化 (图 5.4).

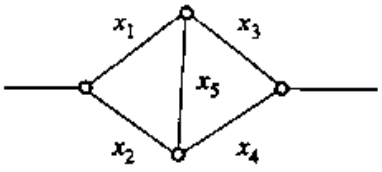


图 5.4 桥形网络的对偶

§5.3 单调关联系统可靠度计算

本节讨论由 n 个独立部件组成的单调关联系统的可靠度计算.

§5.3.1 问题及一般讨论

设部件 i 的状态 x_i 是二值随机变量 X_i,

$$P\{X_i = 1\} = p_i,\ (p_i + q_i = 1) \tag{1}$$

即 p_i 为部件 i 正常的概率 (可靠度). 记

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$$

于是系统正常的概率 (可靠度) 为

$$P\{\phi(\boldsymbol{X}) = 1\} = E_\phi(\boldsymbol{X}) \tag{2}$$

这里 E 为数学期望.

我们的问题为: 给定部件可靠度向量 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)$, 求系统的可靠度 $E_\phi(\boldsymbol{X})$.

显然, 由于 n 个部件互相独立

$$\begin{aligned} E_\phi(\boldsymbol{X}) &= \sum_{\boldsymbol{x}} \phi(\boldsymbol{x}) P\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\} \\ &= \sum_{\boldsymbol{x}} \phi(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\} \\ &= \sum_{\boldsymbol{x}} \phi(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i} q_i^{1-x_i} \end{aligned} \tag{3}$$

这里 Σ 求过状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的所有 2^n 个可能情形. 因此, 系统可靠度只是部件可靠度的函数. 故 (2) 可表为

$$E_\phi(\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{p}) = h(p_1, \cdots, p_n) \tag{4}$$

$h(\boldsymbol{p})$ 称作结构 ϕ 的可靠度函数. 特别, 当部件同型时, 即 $p_i = p$, $i = 1, \cdots, n$, 此时 $h(\boldsymbol{p})$ 简记为 $h(p)$.

因此, 从理论上讲, 求系统可靠度的问题即求 $h(\boldsymbol{p})$. 这对简单的系统容易做到.

例 5.3.1 n 部件系统. $EX_i = p_i,\ p_i + q_i = 1,\ i = 1, \cdots, n$.

(a) 串联系统有

$$h(\boldsymbol{p}) = \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{5}$$

(b) 并联系统有

$$h(\boldsymbol{p}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i \tag{6}$$

(c) $k/n(G)$ 系统, 若 $p_i = p, i = 1, \cdots, n, p + q = 1$, 则有

$$h(p) = P\{\phi(\boldsymbol{X}) = 1\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant k\right\}$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \tag{7}$$

但是, 对结构复杂的系统, $h(\boldsymbol{p})$ 的表达式就不显然了. 下面先讨论 $h(\boldsymbol{p})$ 的性质.

§5.3.2 $h(\boldsymbol{p})$ 的性质

定理 5.3.1 *$h(\boldsymbol{p})$ 有分解公式*

$$h(\boldsymbol{p}) = p_i h(1_i, \boldsymbol{p}) + q_i h(0_i, \boldsymbol{p}), \quad i = 1, \cdots, n \tag{8}$$

证明 由 §5.1 分解公式 (18)

$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_i \phi(1_i, \boldsymbol{X}) + (1 - X_i)\phi(0_i, \boldsymbol{X})$$

再由部件的独立性即得. 证毕.

事实上, 在网络系统的场合, 定理 5.3.1 即为全概率分解公式 (见第三章 §3.3, (5) 式).

定理 5.3.2 *$h(\boldsymbol{p})$ 作为 $\boldsymbol{p}$ 的函数是一个增函数, 且在*

$$\hat{\mathcal{P}} = \{\boldsymbol{p} : 0 < p_i < 1, i = 1, \cdots, n\}$$

上严格增.

证明 由 (8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} &= h(1_i,\boldsymbol{p}) - h(0_i,\boldsymbol{p}) \\ &= E\{\phi(1_i,\boldsymbol{X}) - \phi(0_i,\boldsymbol{X})\} \geqslant 0\end{aligned}$$

故对每个分量 p_i, h 是其增函数.

又因部件 i 与系统有关, 故总存在 $\boldsymbol{x}^0$ 使

$$\phi(1_i,\boldsymbol{x}^0) - \phi(0_i,\boldsymbol{x}^0) = 1$$

由假设 $\boldsymbol{p} \in \hat{\mathcal{P}}$, 故必有 $P\{(\cdot_i,\boldsymbol{X}) = (\cdot_i,\boldsymbol{x}^0)\} > 0$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} &= E\{\phi(1_i,\boldsymbol{X}) - \phi(0_i,\boldsymbol{X})\} \\ &\geqslant P\{(\cdot_i,\boldsymbol{X}) = (\cdot_i,\boldsymbol{x}^0)\} > 0\end{aligned}$$

即 h 在 $\hat{\mathcal{P}}$ 上严格增. 证毕.

定理 5.3.3 *h 是单调关联系统的可靠度函数, 则对所有 $\boldsymbol{p},\tilde{\boldsymbol{p}} \in \hat{\mathcal{P}}$ 有*

(a) $h(\boldsymbol{p} \amalg \tilde{\boldsymbol{p}}) \geqslant h(\boldsymbol{p}) \amalg h(\tilde{\boldsymbol{p}})$. *等号成立当且仅当是并联系统.*

(b) $h(\boldsymbol{p} \cdot \tilde{\boldsymbol{p}}) \leqslant h(\boldsymbol{p})h(\tilde{\boldsymbol{p}})$. *等号成立当且仅当是串联系统.*

证明 只证 (a). 令 $\boldsymbol{X} = (X_1,\cdots,X_n), \tilde{\boldsymbol{X}} = (\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_n)$ 是彼此独立, 且分量亦互相独立的随机向量,

$$P\{X_i = 1\} = p_i,\ P\{\tilde{X}_i = 1\} = \tilde{p}_i,\ i = 1,\cdots,n$$

则由 h 的定义

$$\begin{aligned}&h(\boldsymbol{p} \amalg \tilde{\boldsymbol{p}}) - h(\boldsymbol{p}) \amalg h(\tilde{\boldsymbol{p}}) \\ =& \sum_{\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}} \{\phi(\boldsymbol{x} \amalg \tilde{\boldsymbol{x}}) - \phi(\boldsymbol{x}) \amalg \phi(\tilde{\boldsymbol{x}})\} P\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\} P\{\tilde{\boldsymbol{X}} = \tilde{\boldsymbol{x}}\}\end{aligned}$$

这里 Σ 求过 $\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的所有可能值. 由定理 5.1.3,

$$h(\boldsymbol{p} \amalg \tilde{\boldsymbol{p}}) \geqslant h(\boldsymbol{p}) \amalg h(\tilde{\boldsymbol{p}})$$

成立. 下证等号成立的充分必要条件.

充分性由定理 5.1.3(b) 得.

必要性. 因 $\boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{p}} \in \hat{P}$, 故对任意的 $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}$,

$$P\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\}>0, \quad P\{\tilde{\boldsymbol{X}}=\tilde{\boldsymbol{x}}\}>0$$

故 $h(\boldsymbol{p} \amalg \tilde{\boldsymbol{p}})=h(\boldsymbol{p}) \amalg h(\tilde{\boldsymbol{p}})$ 等价于对任意的 $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}$,

$$\phi(\boldsymbol{x} \amalg \tilde{\boldsymbol{x}})=\phi(\boldsymbol{x}) \amalg \phi(\tilde{\boldsymbol{x}})$$

于是必要性由定理 5.1.4 得. 证毕.

上述结果相应于定理 5.1.3. 它表明在部件一级并联备份的系统, 其可靠度函数比在系统一级并联备份的要大.

例 5.3.2 给定一个同型独立部件组成的系统, 以及在系统一级与部件一级并联备份的系统 (图 5.5).

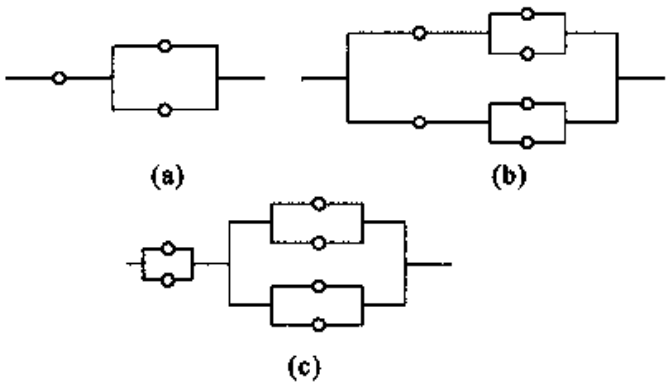


图 5.5 (a) 原系统 (b) 系统一级并联备份 (c) 部件一级并联备份

(a) 相应的可靠度函数为

$$h(p)=p(1-q^2), \quad (p+q=1)$$

(b) 系统一级并联备份

$$h(p) \amalg h(q)=1-[1-p(1-q^2)]^2$$

(c) 部件一级并联备份

$$h(p \amalg q)=(1-q^2)(1-q^4)$$

由定理 5.3.3 知

$$(1-q^2)(1-q^4) \geqslant 1-[1-p(1-q^2)]^2$$

§5.3.3 单调关联系统可靠度 $h(p)$ 的求法

设单调关联系统的所有最小路集与割集分别为 $p_1,\cdots,p_m$ 及 $K_1,\cdots,K_l$. 则结构函数 ϕ 可表为

$$\phi(\boldsymbol{x})=\coprod_{j=1}^{m}\coprod_{i\in P_j}x_i=1-\coprod_{j=1}^{m}\left\{1-\prod_{i\in P_j}x_i\right\} \tag{9}$$

$$\phi(\boldsymbol{x})=\prod_{j=1}^{l}\coprod_{i\in K_j}x_i=\prod_{j=1}^{l}\left\{1-\prod_{i\in K_j}(1-x_i)\right\} \tag{10}$$

因此

$$h(\boldsymbol{p})=E\left\{\coprod_{j=1}^{n}\coprod_{i\in P_i}X_i\right\} \tag{11}$$

或

$$h(\boldsymbol{p})=E\left\{\prod_{j=1}^{l}\coprod_{i\in K_j}X_i\right\} \tag{12}$$

由于一个部件可以同时出现在不同的最小路或最小割中, 因此最小路之间或最小割之间一般不独立, 故数学期望 E 不能与乘积号交换. 所以 (11), (12) 并不实用.

但是若能把 (9) 或 (10) 的右端展开, 注意到

$$x^2=x \tag{13}$$

(只对 0,1 二值变量成立) 并进行简化, 这样容易求出 $h(\boldsymbol{p})$.

例 5.3.3 桥形网络 (图 5.3)

由 §5.2, (8) 式,

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x})&=1-(1-x_1x_2)(1-x_3x_4)(1-x_1x_4x_5)(1-x_2x_3x_5)\\&=x_1x_2+x_3x_4+x_1x_4x_5+x_2x_3x_5-x_1x_2x_3(x_4+x_5)\\&\quad-(x_1+x_2)x_3x_4x_5-x_1x_2(1-2x_3)x_4x_5\end{aligned} \tag{14}$$

于是由独立性, 只要在上式中用 p_i 代替 x_i, 即可得 $h(\boldsymbol{p})$.

若已知结构函数 $\phi(\boldsymbol{x})$, 则由 (3) 得

$$h(\boldsymbol{p})=\sum_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})\prod_{i=1}^{n}p_i^{x_i}q_i^{1-x_i} \tag{15}$$

上式求 $h(\boldsymbol{p})$ 亦很不便, 因为随 n 增大项数急剧增加. 事实上 (15) 相当于网络系统求可靠度的穷举法.

如果仍用 P_j 表示第 j 个最小路中的部件都正常这一事件, K_j 表示第 j 个最小割中的部件都失效这个事件, 则

$$h(\boldsymbol{p})=P\left\{\bigcup_{j=1}^{m}P_j\right\} \tag{16}$$

或

$$1-h(\boldsymbol{p})=P\left\{\bigcup_{j=1}^{l}K_j\right\} \tag{17}$$

因此, 从计算的角度来讲, 问题归结为求一些事件并的概率. 故可使用第三章中介绍的方法, 这里不再重复.

§5.3.4 可靠度的界

一般说来, 精确地获得 $h(\boldsymbol{p})$ 是很困难的, 不过可以求得一些简单的界.

由 (16),

$$h=h(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}S_i \tag{18}$$

其中

$$S_i=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}P\{P_{j_1}\cdots P_{j_i}\} \tag{19}$$

因此有

$$h\leqslant S_1=\sum_{j=1}^{m}\prod_{i\in P_j}p_i$$

$$h\geqslant S_1-S_2$$

一般

$$S_1 - S_2 + \cdots - S_{2i} \leqslant h \leqslant S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + S_{2i+1} \tag{20}$$

实用时只要算前面几个 S_i 即可得 h 的界.

还有一种办法是舍去一些高阶的最小路与割, 由 (16), (17) 可得

$$P\left\{\bigcup_{j=1}^{m'} P_j\right\} \leqslant h \leqslant 1 - P\left\{\bigcup_{j=1}^{l'} K_j\right\} \tag{21}$$

这里 $m' < m, l' < l$.

例 5.3.4 桥形网络 (图 5.3)

假定 $p_i = p, i = 1, \cdots, 5$. 由例 5.3.3, 精确的可靠度为

$$h = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

而按 (19),

$$S_1 = 2p^2(1 + p^2), \quad S_2 = 5p^4 + p^5$$

按 (21), 只取二阶的最小路及最小割, 有

$$h_* = 2p^2 - p^4 \leqslant h \leqslant 1 - 2q^2 + q^4 = h^*$$

这里 $q = 1 - p$. 对于 p 的一组不同值, 列表计算如下.

表 5.1

p	h	$S_1 - S_2$	S_1	h_*	h^*
0.1	0.0215	0.0215	0.0220	0.0199	0.0361
0.3	0.1984	0.1911	0.2340	0.1719	0.2601
0.5	0.5000	0.4062	0.7500	0.4375	0.5625
0.7	0.8016	0.1958	> 1	0.7399	0.8281
0.9	0.9785	< 0	> 1	0.9639	0.9801
0.99	0.9998	< 0	> 1	0.9996	0.9998

从上述结果表明, 若把 (20), (21) 结合使用可能效果更好.

§5.4 部件相依时可靠度的界

组成系统的部件之间互相独立的假定在实际中很难完全满足. 例如, 系统中一些部件的失效势必造成未失效部件的负荷加大, 从而使它们更易失效; 系统的最小路 (割) 表示中, 所有最小路 (割) 也不是独立的; 等等. 所以有必要考虑系统的部件之间有某种相依关系的情形, 以及这种系统的可靠度的界.

§5.4.1 部件间的相协

设 $T_1,\cdots,T_n$ 是 n 个随机变量, 记

$$\boldsymbol{T}=(T_1,\cdots,T_n) \tag{1}$$

通常由相关系数或协差来描述两个随机变量之间的相依性. 对于一组随机变量之间的相依关系, 我们需要下面的定义.

定义 5.4.1 若对任意递增的 n 元函数 f,g 有协差 (假定存在)

$$\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{T}),g(\boldsymbol{T}))\geqslant 0 \tag{2}$$

则称随机变量 $T_1,\cdots,T_n$ 间 (或 $\boldsymbol{T}$) 是**相协的**(associated).

注意, 定义中没有要求 $T_1,\cdots,T_n$ 是二值的随机变量.

由定义 5.4.1 知, 若随机变量 X,Y 是相协的, 则 X,Y 必正相关, 即 Cov $(X,Y)\geqslant 0$.

引理 5.4.1 设 X,Y 是两个随机变量, $EX,EY,E(XY)$ 都存在. 记

$$Z_X(x)=\begin{cases}1, X>x\\ 0, \text{其它}\end{cases} \tag{3}$$

则

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Cov}(Z_X(x),Z_Y(y))dxdy \tag{4}$$

作为引理 5.4.1 的一个推论, 我们先给出定义 5.4.1 的等价定义.

定义 5.4.2 若对任意的 n 元二值增函数 f,g 有

$$\mathrm{Cov}(f(\boldsymbol{T}),g(\boldsymbol{T}))\geqslant 0$$

则称 $\boldsymbol{T}$ 是相协的.

这里因为对任意的 n 元递增函数 h, l, 由 (4) 有

$$\mathrm{Cov}(h(\boldsymbol{T}), l(\boldsymbol{T})) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(Z_{h(\boldsymbol{T})}(x), Z_{l(\boldsymbol{T})}(y))dxdy \geqslant 0$$

下面来证引理 5.4.1.

先对非负随机变量 X, Y 来证 (4), 即证

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xydP(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P(X > x, Y > y)dxdy \tag{5}$$

由 $E(XY) < \infty$, 故考虑 $A, B > 0$ 充分大, $A = nh, B = mh$. 记 Δ_{ij} 为以 $(ih, jh), ((i+1)h, jh), (ih, (j+1)h), ((i+1)h, (j+1)h)$ 为顶点的正方形. 记 $F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$. 于是

$$\begin{aligned}
(5)\text{式左端} &\approx \int_0^{A}\int_0^{B} xydF(x, y) \\
&\approx h^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ijP\{(X, Y) \in \Delta_{ij}\} \\
&= h^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=l}^{m} P\{(X, Y) \in \Delta_{ij}\} \\
&\approx h^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} P\{X > kh, Y > lh\} \\
&\approx \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P\{X > x, Y > y\}dxdy \\
&= (5)\text{式右端}
\end{aligned}$$

当 X, Y 是一般随机变量时, 令

$$X = X^+ - X^-, \quad Y = Y^+ - Y^-$$

其中 $X^+ = \max(X, 0)$, $X^- = \max(-X, 0)$. 于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) = &\mathrm{Cov}(X^+, Y^+) - \mathrm{Cov}(X^+, Y^-) - \mathrm{Cov}(X^-, Y^+) \\
&+\mathrm{Cov}(X^-, Y^-)
\end{aligned}$$

注意到

$$\mathrm{Cov}(Z_X(x), Z_Y(y)) = P(X > x, Y > y) - P(X > x)P(Y > y)$$

(把上式右端记作 $g(x,y)$) 以及当 $x \geqslant 0$ 时

$$(X^+ > x) = (X > x), \quad (X^- > x) = (X < -x)$$

经过一些简单的推算可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X^+, Y^+) &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(x,y)dxdy \\
-\mathrm{Cov}(X^+, Y^-) &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^0 g(x,y)dy \\
-\mathrm{Cov}(X^-, Y^+) &= \int_{-\infty}^0 dx \int_0^\infty g(x,y)dy \\
\mathrm{Cov}(X^-, Y^-) &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 g(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

上述四式归并即得 (4). 证毕.

相协的随机变量有许多较好的性质.

定理 5.4.1 单个随机变量 X 是相协的.

证明 设 f, g 是任意的取 0, 1 值的一元递增函数. 记

$$a = \sup\{x : f(x) = 0\}, \quad b = \sup\{x : g(x) = 0\}$$

不妨设 $a \leqslant b$ 及 f, g 左连续, 于是有

$$f(x) = \begin{cases} 1, x > a \\ 0, x \leqslant a, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, x > b \\ 0, x \leqslant b, \end{cases}$$

故 $f(x)g(x) = g(x)$, 因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) &= Ef(X)g(X) - Ef(X)Eg(X) \\
&= Eg(X)[1 - Ef(X)] \geqslant 0
\end{aligned}$$

证毕.

定理 5.4.2 相协随机变量的任一子集仍是相协的.

这是显然的.

定理 5.4.3 相协随机变量的增函数仍相协.

证明 设 $T_1,\cdots,T_n$ 相协, h_i 为增函数. 记

$$S_i = h_i(\boldsymbol{T}),\quad i=1,\cdots,m$$
$$\boldsymbol{S} = h(\boldsymbol{T}) = (h_1(\boldsymbol{T}),\cdots,h_m(\boldsymbol{T}))$$

若 f,g 是任意的 m 元二值增函数, 由相协的定义

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{S}}(f(\boldsymbol{S}),g(\boldsymbol{S})) = \mathrm{Cov}_{\boldsymbol{T}}\{f(h(\boldsymbol{T})),g(h(\boldsymbol{T}))\} \geqslant 0$$

证毕.

定理 5.4.4 若两组相协的随机变量互相独立, 则其并亦是一组相协的随机变量.

证明 设 $\boldsymbol{X}$ 相协, $\boldsymbol{Y}$ 相协, 且 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 独立. f,g 是任意的二值增函数, 简记 $f=f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, $g=g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. 于是由 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 独立

$$\mathrm{Cov}(f,g) = E_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(f,g) - E_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}fE_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}g$$

右边插入 $-E_{\boldsymbol{X}}(E_{\boldsymbol{Y}}fE_{\boldsymbol{Y}}g)+E_{\boldsymbol{X}}(E_{\boldsymbol{Y}}fE_{\boldsymbol{Y}}g)$, 并注意到

$$E_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(fg) = E_{\boldsymbol{X}}(E_{\boldsymbol{Y}}fg)$$

于是

$$\mathrm{Cov}(f,g) = E_{\boldsymbol{X}}(\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{Y}}(f,g)) + \mathrm{Cov}_{\boldsymbol{X}}(E_{\boldsymbol{Y}}f,E_{\boldsymbol{Y}}g)$$

对固定的 $\boldsymbol{x}$, 由 $\boldsymbol{Y}$ 相协

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{Y}}(f,g) = \mathrm{Cov}_{\boldsymbol{Y}}(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}),g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})) \geqslant 0$$

因此

$$E_{\boldsymbol{X}}(\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{Y}}(f,g)) \geqslant 0$$

又因 $E_{\boldsymbol{Y}}f = E_{\boldsymbol{Y}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})$ 及 $E_{\boldsymbol{Y}}g = E_{\boldsymbol{Y}}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的增函数, 由定义 5.4.2

$$\mathrm{Cov}_{\boldsymbol{X}}(E_{\boldsymbol{Y}}f,E_{\boldsymbol{y}}g) \geqslant 0$$

证毕.

定理 5.4.5 一组独立随机变量是相协的.

这是定理 5.4.1, 定理 5.4.4 的直接推论.

定理 5.4.6 若 $X_1,\cdots,X_n$ 是相协的二值随机变量, 则 $1-X_1,\cdots,1-X_n$ 亦是相协的二值随机变量.

证明 令 f,g 是二值增函数, 则其对偶函数

$$f^D(\boldsymbol{x})=1-f(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}),\quad g^D(\boldsymbol{x})=1-g(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})$$

亦是二值增函数. 而

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[f(\mathbf{1}-\boldsymbol{X}),g(\mathbf{1}-\boldsymbol{X})]&=\mathrm{Cov}[1-f^D(\boldsymbol{X}),1-g^D(\boldsymbol{X})]\\&=\mathrm{Cov}[f^D(\boldsymbol{X}),g^D(\boldsymbol{X})]\geqslant 0\end{aligned}$$

最后一个不等号由定理 5.4.3 得. 证毕.

§5.4.2 系统可靠度的界

设单调关联系统是由相协的部件组成, 其结构函数为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\phi(X_1,\cdots,X_n),$$

最小路集、割集分别为 $P_1,\cdots,P_m;K_1,\cdots,K_l$. 称

$$\rho_j(\boldsymbol{X})=\coprod_{i\in P_j}X_i,\quad j=1,\cdots,m \tag{6}$$

为最小路串联结构. 称

$$\kappa_j(\boldsymbol{X})=\coprod_{i\in K_j}X_i,\quad j=1,\cdots,l \tag{7}$$

为最小割并联结构. 则因 $\rho_1(\boldsymbol{X}),\cdots,\rho_m(\boldsymbol{X})$ 及 $\kappa_1(\boldsymbol{X}),\cdots,\kappa_l(\boldsymbol{X})$ 是增函数, 由定理 5.4.3, 随机变量 $\rho_1(\boldsymbol{X}),\cdots,\rho_m(\boldsymbol{X})$ 及 $\kappa_1(\boldsymbol{X}),\cdots,\kappa_l(\boldsymbol{X})$ 分别是相协的.

当部件相依且系统复杂时, 往往难以求出其精确的可靠度. 下面利用相协的概念给出可靠度的界.

定理 5.4.7 若 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是相协的二值随机变量, 则

$$P\left\{\coprod_{i=1}^n X_i=1\right\}\geqslant\coprod_{i=1}^n P\{X_i=1\} \tag{8}$$

$$P\left\{\coprod_{i=1}^n X_i=1\right\}\leqslant\coprod_{i=1}^n P\{X_i=1\} \tag{9}$$

证明 因 $X_1, \prod_{i=2}^{n} X_i$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的增函数, 故由定理 5.4.3

$$\mathrm{Cov}(X_1, \prod_{i=2}^{n} X_i) = E(\prod_{i=1}^{n} X_i) - EX_1 E(\prod_{i=2}^{n} X_i) \geqslant 0$$

重复上述推理即得

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) \geqslant \prod_{i=1}^{n} EX_i$$

此即 (8) 式. 为证 (9), 注意到定理 5.4.6 及 (8) 得

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)=1\right\} \geqslant \prod_{i=1}^{n} P\{1-X_i=1\}$$

即

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n} X_i = 0\right\} \geqslant \prod_{i=1}^{n} P\{X_i=0\}$$

$$1 - P\left\{\coprod_{i=1}^{n} X_i = 1\right\} \geqslant \coprod_{i=1}^{n}\{1-P(X_i=1)\}$$

故 (9) 成立. 证毕.

推论 若 $T_1, \cdots, T_n$ 相协 (不必二值的), 则

$$P\{T_i > t_i, i=1,\cdots,n\} \geqslant \coprod_{i=1}^{n} P\{T_i > t_i\} \tag{10}$$

$$P\{T_i \leqslant t_i, i=1,\cdots,n\} \geqslant \coprod_{i=1}^{n} P\{T_i \leqslant t_i\} \tag{11}$$

证明 令

$$X_i(t_i) = \begin{cases} 1, \text{若} T_i > t_i \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

则 $X_i(t_i)$ 对 T_i 递增, 由定理 5.4.3, $X_1(t_1), \cdots, X_n(t_n)$ 相协, 再由定理 5.4.7 即可得 (10), (11). 证毕.

定理 5.4.8 *ϕ 是由相协部件 $X_1, \cdots, X_n$ 组成的单调关联系统的结构函数. 若 $EX_i = p_i, i=1,\cdots,n$. 则*

$$\coprod_{i=1}^{n} p_i \leqslant E_\phi(\boldsymbol{X}) \leqslant \coprod_{i=1}^{n} p_i \tag{12}$$

上式由定理 5.1.3 及 5.4.7 即得.

(12) 式给出的可靠度的界是很保守的. 上界即为由独立部件 $X_1,\cdots,X_n$ 组成的并联系统的可靠度, 下界为相应的部件组成的串联系统的可靠度.

定理 5.4.9 ϕ 是由相协部件组成的单调关联系统的结构函数, $\rho_i(\boldsymbol{X})$ 和 $\kappa_j(\boldsymbol{X})$ 分别由 (6) 及 (7) 给出 $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,l)$. 则

$$\prod_{j=1}^{l} P\{\kappa_j(\boldsymbol{X})=1\} \leqslant E_\phi(\boldsymbol{X}) \leqslant \prod_{i=1}^{m} P\{\rho_i(\boldsymbol{X})=1\} \tag{13}$$

证明 因 $\rho_i(\boldsymbol{X}), i=1,\cdots,m$, 相协, 故由定理 5.4.7

$$\begin{aligned} P\{\phi(\boldsymbol{X})=1\} &= P\left\{\coprod_{i=1}^{m}\rho_i(\boldsymbol{X})=1\right\} \\ &\leqslant \coprod_{i=1}^{m} P\{\rho_i(\boldsymbol{X})=1\} \end{aligned}$$

而另一半不等式相仿可得. 证毕.

推论 若 ϕ 是由独立部件组成的单调关联系统, 且 $EX_i=p_i$, $i=1,\cdots,n$. 则

$$h_*(\boldsymbol{p}) \leqslant h(\boldsymbol{p}) \leqslant h^*(\boldsymbol{p}) \tag{14}$$

其中

$$h_*(\boldsymbol{p}) = \prod_{j=1}^{l}\coprod_{i\in K_j} p_i \tag{15}$$

$$h^*(\boldsymbol{p}) = \coprod_{j=1}^{m}\prod_{i\in P_j} p_i \tag{16}$$

定理 5.4.10 对任意的单调关联系统 ϕ, 有

$$\max_r P\left\{\prod_{i\in P_r} X_i=1\right\} \leqslant E\phi(\boldsymbol{X}) \leqslant \min_j P\left\{\prod_{i\in K_j} X_i=1\right\} \tag{17}$$

上式称作可靠度的极小极大界.

证明 由 §5.2 (3), (5)

$$\phi(\boldsymbol{X})=\max_j\prod_{i\in P_j}\boldsymbol{X}_i=\min_j\coprod_{i\in K_j}X_i$$

因此对任意下标 $r,j(1\leqslant r\leqslant m,1\leqslant j\leqslant l)$

$$\prod_{i\in P_r}X_i\leqslant\phi(\boldsymbol{X})\leqslant\coprod_{i\in K_j}X_i$$

取期望即得 (17). 证毕

推论 若部件又是相协的, $EX_i=p_i,i=1,\cdots,n$. 则

$$l_*(\boldsymbol{p})\leqslant E\phi(\boldsymbol{X})\leqslant l^*(\boldsymbol{p}) \tag{18}$$

其中

$$l_*(\boldsymbol{p})=\max_r\prod_{i\in P_r}p_i \tag{19}$$

$$l^*(\boldsymbol{p})=\min_j\coprod_{i\in K_j}p_i \tag{20}$$

显然, 当部件相协时

$$\prod_{i=1}^n p_i\leqslant l_*(\boldsymbol{p})\leqslant l^*(\boldsymbol{p})\leqslant\coprod_{i=1}^n p_i \tag{21}$$

然而, 由独立部件组成的单调关联系统的可靠度界 $h_*(\boldsymbol{p}),h^*(\boldsymbol{p})$ 不一定比 $\prod\limits_{i=1}^n p_i$, $\coprod\limits_{i=1}^n p_i$ 给出的好.

例 5.4.1 独立同型部件组成的 $3/5(G)$ 系统, 部件可靠度为 $p(q=1-p)$, 则由 (15), (16)

$$\begin{cases}h_*(p)=(1-q^3)^{10}\\ h^*(\boldsymbol{p})=1-(1-p^3)^{10}\end{cases} \tag{22}$$

易见, 当 p 靠近 0 时有 $h_*(p)<p^5$; 当 p 靠近 1 时有 $h^*(p)>1-q^5$.

表 5.2

p	h	(h_*, h^*)	(r_*, r^*)
0.01	9.85×10^{-6}	$5.3 \times 10^{-16}, 10^{-5}$	$2 \times 10^{-6}, 0.01039$
0.1	8.56×10^{-3}	$2.1 \times 10^{-6}, 9.96 \times 10^{-3}$	$1.99 \times 10^{-3}, 0.13249$
0.3	0.16308	0.01498, 0.2394	0.05157, 0.48207
0.5	0.50000	0.26308, 0.73692	0.21875, 0.78125
0.7	0.83692	0.7606, 0.98502	0.51793, 0.94843
0.9	0.99144	0.99004, 0.999998	0.86751, 0.99801
0.99	0.99999	0.99999, 1	0.98961, 0.999998

表 5.2 对 p 的不同数值给出精确值与近似界.

表中的计算公式为

$$h = h(p) = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} p^i q^{5-i} = p^3(1 + 3q + 6q^2)$$

h_*, h^* 按 (22) 式计算. 而 r_*, r^* 是按 §5.3(21) 式取 $m' = l' = 2$, $P_1 = \{1,2,3\}$, $P_2 = \{3,4,5\}, K_1 = \{1,2,3\}, K_2 = \{3,4,5\}$ 而得的, 即

$$r_* = p^3(2 - p^2),\ r^* = 1 - q^3(2 - q^2)$$

这里没有计算 l_*, l^*, 因为此时必有

$$l_* \leqslant r_* \leqslant r^* \leqslant l^*$$

从表中计算结果可以看出, 当 p 小时, (r_*, h^*) 给出 h 的较好的界; 而当 p 接近 1 时, (h_*, r^*) 给出较好的界; p 在 0.5 附近时, 近似程度最差.

§5.5 部件重要度

由实际经验知, 系统中的部件并非同等重要的. 如有的部件一失效就引起系统失效, 有的则不然. 因此, 对系统设计人员、使用维修人员和可靠性工作者来讲, 若能对系统中每个部件的重要性程度给予定量的描述, 这对设计和失效分析都是很有价值的. 对由独立部件组成的单调关联系统, 本节将给出几种部件重要度的概念.

以下都假定独立部件组成的单调关联系统的结构函数为 ϕ, 可靠度函数为 $h(\boldsymbol{p})$.

§5.5.1 结构重要度

设 j 是系统中任一部件, 若对某个 $(\cdot_j, \boldsymbol{x})$ 有

$$\phi(1_j, \boldsymbol{x}) - \phi(0_j, \boldsymbol{x}) = 1 \tag{1}$$

则表示 j 在 $(\cdot_j, \boldsymbol{x})$ 这种情形下是一个关键部件. 因为此时 (1) 等价于

$$\phi(0_j, \boldsymbol{x}) = 0,\ \phi(1_j, \boldsymbol{x}) = 1 \tag{2}$$

表明部件 j 正常时系统就正常, j 失效系统也失效. 称 $(1_j, \boldsymbol{x})$ 为 j 的一个**关键路向量**. 记

$$n_\phi(j) = \sum{}'\{\phi(1_j, \boldsymbol{x}) - \phi(0_j, \boldsymbol{x})\} \tag{3}$$

其中 $\sum'$ 对 $\{\boldsymbol{x} : x_j = 1\}$ 来求. 显然, $n_\phi(j)$ 是 j 的关键路向量的总数. 因为当 $x_j = 1$ 时, 状态向量 $(1_j, \boldsymbol{x})$ 总共还有 2^{n-1} 种不同的结果, 因此定义

$$I_\phi(j) = \frac{1}{2^{n-1}} n_\phi(j) \tag{4}$$

为部件 j 的结构重要度, 它表明 j 的关键路向量数目在所有 2^{n-1} 种可能情形中占的比例. 因此, 对任意的结构 ϕ, 部件可按其结构重要度排序.

例 5.5.1 桥形网络 (图 5.3)

$n_\phi(1) = 6$. 这是因为部件 1 的关键路向量有 6 条 (用 5 位的二进制数表示)

$$\{(10011), (11100), (11010), (11011), (11001), (11000)\}$$

同理

$$n_\phi(2) = n_\phi(3) = n_\phi(4) = 6,\ n_\phi(5) = 2$$

因此

$$I_\phi(1) = I_\phi(2) = I_\phi(3) = I_\phi(4) = \frac{3}{8},\ I_\phi(5) = \frac{1}{8} \tag{5}$$

从结构重要度看, 桥形网络中的"桥"(部件 5) 的作用与其它部件比较起来要小得多.

§5.5.2 概率重要度

从可靠性的角度看, 部件在系统中的重要性不仅依赖于其结构, 还依赖于部件本身的可靠度. 下面给出部件的概率重要度.

定义 5.5.1 称

$$I_h(j)=\frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_j},\quad j=1,\cdots,n \tag{6}$$

为部件 j 的**概率重要度**.

由 §5.3(8), (6) 式等价于

$$\begin{aligned} I_h(j)&=h(1_j,\boldsymbol{p})-h(0_j,\boldsymbol{p})\\ &=E\{\phi(1_j,\boldsymbol{X})-\phi(0_j,\boldsymbol{X})\} \end{aligned} \tag{7}$$

部件的概率重要度在系统分析中很有用. 据此可确定哪些部件的改善会对系统的改善带来最大的好处.

与结构重要度的定义 (4) 比较, 易见若 $p_i=\frac{1}{2}(i\neq j)$, 则 $I_\phi(j)=I_h(j)$. 因此当 $p_i=\frac{1}{2}, i=1,\cdots,n$ 时, 所有部件的概率重要度与结构重要度相等.

利用部件的概率重要度, 可计算一个部件可靠度的改善对系统可靠度的影响. 显然

$$\Delta h\approx\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_j}\Delta p_j=\sum_{j=1}^{n}I_h(j)\Delta p_j \tag{8}$$

这里 Δh 为当部件 j 的可靠度改变 Δp_j 时 $(j=1,\cdots,n)$, 系统可靠度的改变. 因此, 仅当部件 j 的可靠度增加 Δp 时, 系统可靠度的增加为

$$\Delta h_j\approx I_h(j)\Delta p^{①} \tag{9}$$

所以, 若部件 k 使 I_h 达最大, 则表明在所有部件中改善 k 的可靠度将会使系统可靠度得到最大改善.

例 5.5.2 n 个独立部件组成的系统, 部件的可靠度已按小到大排好

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n$$

①实际上由 (7) 和 §5.3, (8) 式知, (9) 应为等号.

(a) 串联系统

$$I_h(j)=\prod_{i\neq j}p_i,\quad I_\phi(j)=\frac{1}{2^{n-1}},\quad j=1,\cdots,n$$

因此,$I_h(1)\geqslant I_h(2)\geqslant\cdots\geqslant I_h(n)$.

(b) 并联系统

$$I_h(j)=\prod_{i\neq j}(1-p_i),\quad I_\phi(j)=\frac{1}{2^{n-1}},\quad j=1,\cdots,n$$

故有 $I_h(1)\leqslant I_h(2)\leqslant\cdots\leqslant I_h(n)$.

上述结果表明, 为了提高系统可靠度, 对串联系统要抓"最薄弱的"部件, 对并联系统要抓"最好的"部件的改善.

§5.5.3 *B–P* 重要度

上面引进的结构重要度与概率重要度都是在部件的可靠度 p 已知情形下讨论的. 然而, 在系统设计的早期阶段尚无部件可靠度信息, 为此, 不妨认为所有部件的可靠度都等于 p, 然后再把 p "平均"掉. 由此引入如下的部件重要度概念.

定义 5.5.2 部件 j 的 ***B–P* 重要度**定义为

$$I_{B-P}(j)=\int_0^1[h(1_j,p)-h(0_j,p)]dp \tag{10}$$

这里 $(1_j,p)$ 为第 j 个分量为 1, 其余全为 p 的向量, $(0_j,p)$ 相仿理解.

例 5.5.3 (续例 1) 桥形网络. 按 (10) 不难算得

$$I_{B-P}(1)=I_{B-P}(2)=I_{B-P}(3)=I_{B-P}(4)=\frac{7}{30}$$

$$I_{B-P}(5)=\frac{1}{15}$$

此时, B–P 结构重要度的次序与结构重要度次序一致.

§5.5.4 *C* 重要度和 *P* 重要度

对于部件的重要性, 我们也可以从它在最小割与最小路中的地位来考虑. 自然, 在阶小的最小割 (或路) 中的元件比在阶大的最小割 (或路) 中的元件要重要. 下面引进 C 重要度和 P 重要度的确切定义.

设单调关联系统的所有最小割集为 $K_1,\cdots,K_l$. 用 $|K_j|$ 表示 K_j 的阶 (即其中元素个数).

对任意的 $i=1,\cdots,n$, 记

$$c_i=\min\{|K_j|:i\in K_j\} \tag{11}$$

$$d_i=|\{j:i\in K_j,\text{且}|K_j|=c_i\}| \tag{12}$$

显然, c_i 为所有包含 i 的最小割集中的最小阶数, d_i 为所有包含 i 的最小阶的最小割集的个数.

定义 5.5.3 部件 i 的 C 重要度 $I_c(i)$ 由.c_i 和 d_i 来确定. 对于任意的 i,j, 若 $c_i<c_j$ 或当 $c_i=c_j$ 时, $d_i>d_j$, 则称部件 i 比 j 重要. 当 $c_i=c_j,d_i=d_j$ 时称 i,j 有相同的重要度.

因此, 对系统中的每一个部件可按 C 重要度来排序.

与上述相仿, 可定义部件的 P 重要度. 记所有最小路集为 $P_1,\cdots,P_m$,

$$b_i=\min\{|P_j|:i\in P_j\} \tag{13}$$

$$e_i=|\{j:i\in P_j,|P_j|=b_i\}| \tag{14}$$

定义 5.5.4 部件 i 的 P 重要度 $I_p(i)$ 由 b_i 和 e_i 确定. 对任意的 i,j, 若 $b_i<b_j$, 或当 $b_i=b_j$ 时, $e_i>e_j$ 则称部件 i 比 j 重要. 当 $b_i=b_j,e_i=e_j$ 时, 则 i,j 有相同的 P 重要度.

除了上述部件重要度的概念外, 读者可从 [21] 中找到对这个问题的进一步讨论.

§5.6 封闭性定理

假定单调关联系统由 n 个独立部件组成. 本节讨论: 若 n 个部件的寿命分布都属于同一个寿命分布类, 问系统的寿命分布是否属于相同的类. 这就是所谓的封闭性问题.

直观上看, 每当一个部件失效系统就变得结构上更脆弱. 因此, 似乎单调关联系统的部件都有 IFR 的寿命分布时, 系统寿命亦应有 IFR 分布. 事实上这是不对的. 有如下例子说明.

例 5.6.1 设有两独立部件组成的并联系统, 部件的寿命分别有 $F_1(t) = 1-e^{-\alpha t}, F_2(t) = 1-e^{-\beta t}, t \geqslant 0, \alpha, \beta > 0, \alpha \neq \beta$. 则系统的寿命有分布函数

$$F(t) = F_1(t)F_2(t)$$

而失效率

$$r(t) = \frac{\alpha x + \beta y - (\alpha+\beta)xy}{x+y-xy} \tag{1}$$

其中 $x = e^{-\alpha t}, y = e^{-\beta t}, t \geqslant 0$. 易见

$$r'(t) = \frac{xy}{(x+y-xy)^2}[\beta^2 x + \alpha^2 y - (\alpha-\beta)^2]$$

若记

$$g(t) = \beta^2 x + \alpha^2 y - (\alpha-\beta)^2 \tag{2}$$

则对任意的 $t \geqslant 0$,

$$g'(t) = -\alpha\beta^2 x - \alpha^2\beta y < 0$$

因 $g(0) > 0$, 且当 $\alpha \neq \beta$ 时 $g(\infty) < 0$, 故存在唯一的正的有限的 $t_0 = t_0(\alpha, \beta)$, 使 $g(t_0) = 0$, 而在 $[0, t_0)$ 中 $g(t) > 0$, 在 (t_0, ∞) 中 $g(t) < 0$. 因此 $r(t)$ 在 $[0, t_0)$ 中严格增, 在 (t_0, ∞) 中严格减.

这表明虽然部件的寿命是属于 {IFR} 类的, 但系统的寿命不属于相同的类.

既然 {IFR} 类不具有封闭性, 我们对较大的寿命分布类来讨论. 由第一章定理 1.5.3, 自然先考虑 {IFRA} 分布类. 下面的结果表明, {IFRA} 类对单调关联系统具有封闭性.

先引进记号: 记 $F_i(t)$ 为部件 i 的寿命分布, $i = 1, \cdots, n$. $F(t)$ 为单调关联系统的寿命分布, h 为其可靠度函数. 则对 $t \geqslant 0$,

$$\bar{F}(t) = h(\bar{F}_1(t), \cdots, \bar{F}_n(t)) \tag{3}$$

定理 5.6.1 若独立部件组成之单调关联系统中, $F_i \in \{\text{IFRA}\}, i = 1, \cdots, n$, 则 $F \in \{\text{IFRA}\}$.

证明 由于 $F_i \in \{\text{IFRA}\}$, 故对任意的 $0 < \alpha < 1, t \geqslant 0$ 有 $\bar{F}_i(\alpha t) \geqslant \bar{F}_i^{\alpha}(t), i = 1, \cdots, n$. 为证 $F \in \{\text{IFRA}\}$, 只要证对 $0 < \alpha < 1, t \geqslant 0$ 有

$$\bar{F}(\alpha t) \geqslant \bar{F}^{\alpha}(t)$$

但由 (3) 及 h 的单调性

$$\bar{F}(\alpha t) = h(\bar{F}_1(\alpha t), \cdots, \bar{F}_n(\alpha t)) \geqslant h(\bar{F}_1^{\alpha}(t), \cdots, \bar{F}_n^{\alpha}(t))$$

因此只要证

$$h(\bar{F}_1^{\alpha}(t), \cdots, \bar{F}_n^{\alpha}(t)) \geqslant h^{\alpha}(\bar{F}_1(t), \cdots, \bar{F}_n(t)) \tag{4}$$

这由下面的引理保证.

引理 5.6.1 设 h 是单调结构的可靠度函数 (这里不要求部件都与系统有关), 则

$$h(\boldsymbol{p}^{\alpha}) \geqslant h^{\alpha}(\boldsymbol{p}) \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n), \boldsymbol{p}^{\alpha} = (p_1^{\alpha}, \cdots, p_n^{\alpha})$.

证明 对系统的部件数 n 用归纳法.

$n = 1$ 时, 则或者 $h(p) = p$, 或者 $h(p) = 0$, 或者 $h(p) = 1$(后两种情形表明部件是无关的). 无论哪种情形, (5) 总成立.

设 (5) 对所有 $n-1$ 个部件组成的单调系统成立. 则对 n 个部件的单调系统, 由分解定理 5.3.1,

$$h(\boldsymbol{p}^{\alpha}) = p_n^{\alpha} h(1_n, \boldsymbol{p}^{\alpha}) + (1 - p_n^{\alpha}) h(0_n, \boldsymbol{p}^{\alpha}) \tag{6}$$

因 $h(1_n, \boldsymbol{p}^{\alpha}), h(0_n, \boldsymbol{p}^{\alpha})$ 是由 $n-1$ 个独立部件组成的单调系统的可靠度函数, 由归纳假定

$$h(1_n, \boldsymbol{p}^{\alpha}) \geqslant h^{\alpha}(1_n, \boldsymbol{p})$$
$$h(0_n, \boldsymbol{p}^{\alpha}) \geqslant h^{\alpha}(0_n, \boldsymbol{p})$$

于是 (6) 变为

$$h(\boldsymbol{p}^{\alpha}) \geqslant p_n^{\alpha} h^{\alpha}(1_n, \boldsymbol{p}) + (1 - p_n^{\alpha}) h^{\alpha}(0_n, \boldsymbol{p}) \tag{7}$$

因此, 若能证得

$$\begin{aligned} &p_n^{\alpha} h^{\alpha}(1_n, \boldsymbol{p}) + (1 - p_n^{\alpha}) h^{\alpha}(0_n, \boldsymbol{p}) \\ &\geqslant [p_n h(1_n, \boldsymbol{p}) + (1 - p_n) h(0_n, \boldsymbol{p})]^{\alpha} \end{aligned} \tag{8}$$

则 (8) 式右端即为 $h^{\alpha}(\boldsymbol{p})$, 因而引理成立. 我们有如下更一般的结果保证 (8) 式成立.

引理 5.6.2 对 $0 \leqslant \alpha, \lambda \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant y$ 有

$$\lambda^\alpha y^\alpha + (1-\lambda^\alpha)x^\alpha \geqslant [\lambda y + (1-\lambda)x]^\alpha$$

证明 记

$$g(y) = \lambda^\alpha y^\alpha + (1-\lambda^\alpha)x^\alpha - [\lambda y + (1-\lambda)x]^\alpha,$$
$$y \geqslant x \geqslant 0$$

只要证对 $0 < \alpha, \lambda < 1, y \geqslant x \geqslant 0$ 时有 $g(y) \geqslant 0$ 即可. 但易证 $g'(y) > 0, g(x) = 0$, 即得结论, 引理证毕, 定理 5.6.1 亦证毕.

推论 由独立的指数寿命的部件所组成的单调关联系统有 IFRA 寿命.

§5.7 多状态单调关联系统

系统及其部件只有正常和失效两状态常常不能完全反映实际的情形. 一个原因是在正常与失效之间有许多可以区分的不同阶段; 另一方面从理论上讲也有必要把两状态单调关联系统的结果进行推广. 本节将简单介绍多状态单调关联系统, 许多结果是与两状态时并行的.

§5.7.1 定义及基本性质

假定系统由 n 个部件组成. 用 $S = \{0, 1, \cdots, M\}$ 记部件及系统可能取的状态, 其中 M 表示完好状态, 0 表示完全失效状态. $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为部件的下标集. $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 表示部件的状态向量. 假定系统的状态唯一地由部件的状态向量 $\boldsymbol{x}$ 决定. 因此, 系统的状态 ϕ 是 $S^n \to S$ 上的一个函数, ϕ 称作系统的结构函数.

顺便说明, 若某一部件 i 只能取 $\{0, \cdots, k\}$ 个状态 $(k < M)$, 则形式上仍可把 i 的可能状态考虑为 $\{0, 1, \cdots, M\}$. 此时添加的状态 $k+1, \cdots, M$ 假定出现的概率为 0.

显然, 最容易推广到多状态的系统是串联或并联系统. 串联系统的状态等于部件中最差的状态, 则 n 部件串联系统的结构函数可表为

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$$

其中 $\wedge = \min$. 相仿, 对 n 部件并联系统有

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$$

这里 $\vee = \max$.

下面, 先给出多状态单调系统(简记 MMS) 的定义.

定义 5.7.1 ϕ 称作多状态单调系统, 若满足

(a) $\phi(\boldsymbol{x})$ 对 $\boldsymbol{x} \geqslant 0$ 递增 (1)

(b) $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} x_i$ (2)

此时记作 $\phi \in \{\text{MMS}\}$.

与 §5.1 定义 5.1.1 的 {MS} 相比较, 除了对 ϕ 的单调性要求外, {MMS} 还要求 (2) 式成立. 它表明多状态系统的性能介于由其所有部件组成的串联系统及并联系统之间.

由定义 5.1.1 的分析易得

定理 5.7.1 (a) (1) 式等价于对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^n$

$$\phi(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \geqslant \phi(\boldsymbol{x}) \vee \phi(\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

$$\text{或} \quad \phi(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \leqslant \phi(\boldsymbol{x}) \wedge \phi(\boldsymbol{y}) \tag{4}$$

这里向量间的 $\vee, \wedge$ 运算是指分量间相应运算后所得之向量.

(b) 在 (1) 式成立的条件下, (2) 式等价于对任意的 $j, j \in S$,

$$\phi(\boldsymbol{j}) = j \tag{5}$$

这里 $\boldsymbol{j} = (j, \cdots, j)$.

证略.

在两状态单调关联系统中, 部件 i 与系统有关定义为: 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \phi(1_i, \boldsymbol{x}) = 1 \tag{6}$$

而在多状态时, 部件与系统有关的概念可以有几种不同的推广, 因此有不同的多状态单调关联系统的定义.

定义 5.7.2 设 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, 若

(a) 对任意的 $i \in N, j \in S$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\phi(j_i, \boldsymbol{x}) = j, \quad \phi(l_i, \boldsymbol{x}) \neq j, \quad l \neq j \tag{7}$$

则称 ϕ 是**强关联**, 记作 $\phi \in \{\mathrm{SCS}\}$.

(b) 对任意的 $i \in N, j \geqslant 1$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\phi((j-1)_i, \boldsymbol{x}) < \phi(j_i, \boldsymbol{x}) \tag{8}$$

则称 ϕ 是**关联**的, 记作 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$.

(c) 对任意的 $i \in N, j \in S$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\phi(j_i, \boldsymbol{x}) \neq \phi(l_i, \boldsymbol{x}) \tag{9}$$

对某个 $l \neq j$ 成立, 则称 ϕ 是**弱关联**的, 记作 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}$.

由定义显然有如下包含关系

$$\{\mathrm{SCS}\} \subset \{\mathrm{CS}\} \subset \{\mathrm{WCS}\} \tag{10}$$

而且对两状态的系统有

$$\{\mathrm{SCS}\} = \{\mathrm{CS}\} = \{\mathrm{WCS}\}$$

上述三种单调关联系统的定义都包含了这样一个直观的要求：与系统性状无关的部件不应该包含在系统中. 因为, 若对某个 $i \in N$, (c) 不满足, 则必对任意的 $\boldsymbol{x} \in S^n$ 有

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) = \phi(1_i, \boldsymbol{x}) = \cdots = \phi(M_i, \boldsymbol{x}) \tag{11}$$

这表明部件 i 无论取什么值都不影响系统的状态, 即 i 与系统无关.

对 $\{\mathrm{WCS}\}$ 有如下

定理 5.7.2 (9) 式等价于对任意的 $i \in N$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) < \phi(M_i, \boldsymbol{x}) \tag{12}$$

证明 (9) 推 (12). 对任意的 $i \in N$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) \neq \phi(l_i, \boldsymbol{x})$$

对某个 $l \neq 0$ 成立. 故由 ϕ 的单调性

$$\phi(0_i, \boldsymbol{x}) < \phi(l_i, \boldsymbol{x}) \leqslant \phi(M_i, \boldsymbol{x})$$

(12) 推 (9). 由 (12), 对任意的 $0 < j < M$, $\phi(j_i, \boldsymbol{x})$ 不会同时等于 $\phi(0_i, \boldsymbol{x})$, $\phi(M_i, \boldsymbol{x})$. 此时可取 l 等于 0 或 M 中的一个, 故 (9) 成立. 证毕.

不难看出, 通常的串联或并联系统是强关联系统.

下面用例来说明

$$\{\mathrm{WCS}\} \not\subset \{\mathrm{CS}\} \not\subset \{\mathrm{SCS}\} \tag{13}$$

例 5.7.1 考虑由图 5.6 定义的 ϕ

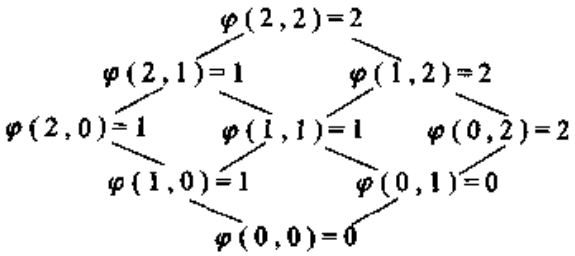


图 5.6 多状态结构函数例

显然, ϕ 单调, 且

$$\phi(0,0) < \phi(0,2), \quad \phi(0,0) < \phi(2,0)$$

故 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}$. 但对 $x_1 = 0, 1, 2$ 都有

$$\phi(x_1, 0) = \phi(x_1, 1)$$

故 ϕ 不满足 (8). 因此 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$.

例 5.7.2 设系统由 n 个部件组成, 每个部件可取 $M+1(>2)$ 个状态. 结构函数

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \tag{14}$$

这里 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 显然, $\phi(\boldsymbol{x})$ 是单调增函数, 且满足

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leqslant \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} x_i$$

故 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, 而且对任意的 $i \in N, j \geqslant 1$ 有

$$\phi((j-1)_i, \boldsymbol{j}) = j-1 < \phi(j_i, \boldsymbol{j}) = j$$

故 $\phi \in \{\text{CS}\}$. 下证 $\phi \bar{\in} \{\text{SCS}\}$.

若 $\phi \in \{\text{SCS}\}$, 则对任意的 $i \in N$ 及 $j \in \{1, \cdots, M-1\}$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\begin{aligned}\phi((j-1)_i, \boldsymbol{x}) \leqslant j-1 < j = \phi(j_i, \boldsymbol{x}) < j+1 \\ \leqslant \phi((j+1)_i, \boldsymbol{x})\end{aligned}$$

若记

$$a = \frac{1}{n}\sum_{k \neq i} x_k$$

则上式即

$$\begin{aligned}\left[\frac{j-1}{n} + a\right] \leqslant j-1 < j = \left[\frac{j}{n} + a\right] < j+1 \\ \leqslant \left[\frac{j+1}{n} + a\right]\end{aligned}$$

因此

$$\frac{j-1}{n} + a < j < j+1 \leqslant \frac{j+1}{n} + a$$

故应有

$$\left(\frac{j+1}{n} + a\right) - \left(\frac{j-1}{n} + a\right) = \frac{2}{n} > 1$$

这对 $n \geqslant 2$ 时是不可能的. 故 $\phi \bar{\in} \{\text{SCS}\}$.

下面引进对偶概念.

定义 5.7.3 对任意的 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, ϕ 的对偶 ϕ^D 定义为

$$\phi^D(\boldsymbol{x}) = M - \phi(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{x}) \tag{15}$$

这里 $\boldsymbol{M}$ 是分量全为 M 的向量.

由定义易得

定理 5.7.3 $\phi \in \{\text{MMS}\}$ 的充分必要条件为 $\phi^D \in \{\text{MMS}\}$. 上述结论对 $\{\text{SCS}\}$, $\{\text{CS}\}$, $\{\text{WCS}\}$ 同样成立.

由对偶定义, 容易看出串联系统与并联系统互为对偶.

若多状态 $k/n(G)(k/n(F))$ 系统定义为：系统由 n 个部件组成, 其状态由 k 个最好 (差) 的部件的状态决定. 更确切地, 用如下的结构函数来表示. 记 $k/n(G), k/n(F)$ 系统的结构函数分别为 ϕ_1, ϕ_2.$x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$ 为状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量 $x_1, \cdots, x_n$ 按小到大排列的一个顺序量, 则

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = x_{(n-k+1)}, \quad \phi_2(\boldsymbol{x}) = x_{(k)}$$

不难看出 $\phi_2(\boldsymbol{x}) = M - \phi_1(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{x}) = \phi_1^D(\boldsymbol{x})$. 因此, $k/n(G)$ 与 $k/n(F)$ 系统互为对偶.

与两状态单调关联系统相仿, 有如下定理

定理 5.7.4 设 $\phi \in \{\mathrm{MMS}\}$, 则对任意的 $i \in N$ 有分解公式

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=0}^{M} \phi(j_i, \boldsymbol{x}) I_{\{\boldsymbol{x}_i = j\}}(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{(x_i - 1)\cdots(x_i - M)}{(-1)\cdots(-M)} \phi(0_i, \boldsymbol{x}) \\ &\quad + \frac{x_i(x_i - 2)\cdots(x_i - M)}{1(-1)\cdots(1 - M)} \phi(1_i, \boldsymbol{x}) + \cdots \\ &\quad + \frac{x_i(x_i - 1)\cdots(x_i - M + 1)}{M(M-1)\cdots 1} \phi(M_i, \boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $I_A(x) = 1$, 若 $x \in A$; $I_A(x) = 0$, 若 $x \bar{\in} A$.

定理 5.7.5 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$, 则对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^n$,

$$\phi(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) \vee \phi(\boldsymbol{y}) \text{当且仅当} \phi(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \tag{17}$$

$$\phi(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) \wedge \phi(\boldsymbol{y}) \text{当且仅当} \phi(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \tag{18}$$

上述两定理的证明与定理 5.1.5, 定理 5.1.4 相仿, 故略. 对定理 5.7.5, 有一点值得说明的是 $\phi \in \{\mathrm{CS}\}$ 的条件不能再减弱, 即若只有 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}$, 则 (17) 可能不成立.

例 5.7.3 同例 5.7.1. 注意到

$$\phi(2, 1) = 1 \neq \max(2, 1)$$

因此, $\phi(x) \neq x_1 \vee x_2$. 表明 ϕ 不是并联系统. 但由图 5.6 容易看出对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 有 $\phi(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) \vee \phi(\boldsymbol{y})$.

在两状态单调关联系统中, 最小路与最小割的概念起着重要的作用. 下面给出多状态情形下的一种推广.

定义 5.7.4 设 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}, \boldsymbol{x} \in S^n, j \in S$, 若

$$\phi(\boldsymbol{x}) \geqslant j$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 是性能水平至少为 j 的一个**路向量**, 简称 j 路向量. 若又有对任意的 $\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{y}) < j$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是最小 j 路向量.

显然, j 路向量与最小 j 路向量都是存在的.

对任意的 $\boldsymbol{x} \in S^n$, 令

$$P^t = P^t(\boldsymbol{x}) = \{i : x_i = t\}, \quad t \in S$$
$$\boldsymbol{P} = \{P^0, P^1, \cdots, P^M\}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 给出了 N 的一个分划 (即 P^i, P^j 不交, $i \neq j$; $\bigcup_{i=0}^{M} P^i = N$). 相仿, 给定了一个分划 $\boldsymbol{P}$, 可以唯一地对应

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}) = (x_1(\boldsymbol{P}), \cdots, x_n(\boldsymbol{P}))$$

其中 $i \in P^{x_i(\boldsymbol{P})}, i = 1, \cdots, n$.

现假定所有的最小 j 路向量为 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$, 其相应的分划为 $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_m$. 对任意的 $\boldsymbol{x} \in S^n$, 令

$$\rho_t(\boldsymbol{x}) = I_{\{\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{x}_t\}} = \prod_{i=1}^{n} I_{\{x_i \geqslant x_i(\boldsymbol{P}_t)\}}, \quad t = 1, \cdots m \tag{19}$$

其中 $I_A(\cdot)$ 为 A 的示性函数, 同定理 5.7.4 中的定义. 称 $\rho_t(\boldsymbol{x})$ 为相应于 $\boldsymbol{x}_t$(或 $\boldsymbol{P}_t$) 的最小 j 路结构函数.

相仿定义 j 割向量, 最小 j 割向量.

定义 5.7.5 设 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}, \boldsymbol{x} \in S^n, j \in S$, 若

$$\phi(\boldsymbol{x}) < j$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为一个 j**割向量**. 若又对任意的 $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{x}$ 有 $\phi(\boldsymbol{y}) \geqslant j$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为**最小 j 割向量**.

设所有的最小 j 割向量为 $z_1,\cdots,z_l$. 相应的分划为 $C_1,\cdots,C_l$. 对任意的 $x\in S^n$, 令

$$\begin{aligned}\kappa_t(x)&=I_{\{x\not\geqslant z_t\}}=1-I_{\{x\leqslant x(C_t)\}}\\&=1-\prod_{i=1}^{n}I_{\{x_i\leqslant x_i(C_t)\}},\quad t=1,\cdots,l\end{aligned}\tag{20}$$

称作相应于 z_t(或 C_t) 的最小 j 割结构函数.

由上述定义易得

定理 5.7.6 $\phi\in\{\mathrm{WCS}\}$, 则

$$\phi(x)=\sum_{j=1}^{M}I_{\{\phi(x)\geqslant j\}}\tag{21}$$

$$I_{\{\phi(x)\geqslant j\}}=\bigvee_{t=1}^{m}\rho_t(x)=\coprod_{t=1}^{m}\rho_t(x)\tag{22}$$

或

$$I_{\{\phi(x)\geqslant j\}}=\bigwedge_{t=1}^{l}\kappa_t(x)=\prod_{t=1}^{l}\kappa_t(x)\tag{23}$$

§5.7.2 系统的随机性状

设部件 i 的状态用随机变量 X_i 表示, 它可以取值 $0,1,\cdots,M$. 假定

$$p_{ij}=P\{X_i=j\},\quad i=1,\cdots,n;j=0,\cdots,M$$

记

$$q_{ij}=\sum_{l=j}^{M}p_{il},\quad j=0,\cdots,M.$$

则

$$0\leqslant q_{iM}\leqslant q_{iM-1}\leqslant\cdots\leqslant q_{i0}=1$$

于是 q_{ij} 或 $p_{ij},j=0,\cdots,M$ 描述了第 i 个部件的随机性状. 记

$$\begin{aligned}&q_i=(q_{i0},q_{i1},\cdots,q_{iM}),\quad i=1,\cdots,n\\&q=(q_1,\cdots,q_n)\end{aligned}$$

称 q 为状态向量概率.

对系统的性状, 由下面引进的平均效用函数来描述. 记 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$

$$h_j(\boldsymbol{q})=P\{\phi(\boldsymbol{X})=j\},\quad j=0,\cdots,M \tag{24}$$

$$H_j(\boldsymbol{q})=P\{\phi(\boldsymbol{X})\geqslant j\} \tag{25}$$

令

$$0\leqslant a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_M \tag{26}$$

表示与系统的各个状态相联系的效用. 平均效用函数 $U(\boldsymbol{q})$ 定义为

$$U(\boldsymbol{q})=\sum_{j-0}^{M}a_jh_j(\boldsymbol{q}) \tag{27}$$

由于

$$U(\boldsymbol{q})=a_0+\sum_{j=1}^{M}(a_j-a_0)h_j(\boldsymbol{q}),$$

$$\{a_j-a_0,j=0,\cdots,M\}$$

仍满足 (26), 故不妨即设 $a_0=0$. 下面就在 $a_0=0$ 下讨论.

注意平均效用函数的两个特例

(a) 若取 $a_j=j,j=0,1,\cdots,M$. 则

$$U(\boldsymbol{q})=\sum_{j=1}^{M}jh_j(\boldsymbol{q})=E_{\boldsymbol{q}}\phi(\boldsymbol{X}) \tag{28}$$

即为系统的平均性状. 这里 $E_{\boldsymbol{q}}$ 是在 $\boldsymbol{q}$ 下计算数学期望.

(b) 若 $b_j=a_j-a_{j-1},j=1,\cdots,M$, 则

$$U(\boldsymbol{q})=\sum_{j=1}^{M}a_jh_j(\boldsymbol{q})=\sum_{l=1}^{M}b_lH_l(\boldsymbol{q}) \tag{29}$$

这里 $H_l(\boldsymbol{q})$ 由 (25) 定义.

在独立部件情形下, 与两状态单调关联系统的结果相仿, 多状态部件性能的改善导致系统可靠性的改善.

为了这种比较, 需引进两个随机变量的随机顺序的概念.

定义 5.7.6 设 X,Y 是同一概率空间上的随机变量, 若对任意的 $t, P\{X > t\} \leqslant P\{Y > t\}$, 则称 X **随机地小于** Y, 记作 $X \overset{st}{\leqslant} Y$. 若有 $P\{X > t\} = P\{Y > t\}$, 则称 X 与 Y **随机地等价**, 记作 $X \overset{st}{=} Y$.

定理 5.7.7 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, 部件间互相独立. 设 $\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n), \boldsymbol{q}^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$ 是两组状态向量概率. 若

$$q_i = q_i^*, \quad i \neq j, \quad q_j \leqslant q_j^* \tag{30}$$

则对任意的 $a = 0, \cdots, M$ 有

$$P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant a\} \leqslant P^*\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant a\} \tag{31}$$

这里 P, P^* 分别在 $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}^*$ 下计算.

证明 考虑有分布 $q(q^*)$ 的独立随机变量

$$X_1, \cdots, X_n \, (X_1^*, \cdots, X_n^*)$$

则由 (30)

$$X_i \overset{st}{=} X_i^*, \quad i \neq j, \quad X_j \overset{st}{\leqslant} X_j^*$$

因 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, 故 $\phi(\boldsymbol{X}) \overset{st}{\leqslant} \phi(\boldsymbol{X}^*)$. 于是对任意的

$$a = 0, 1, \cdots, M,$$

$$P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant a\} \leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X}^*) \geqslant a\} = P^*\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant a\}$$

证毕,

定理 5.7.7 表明, 部件 j 性状的改善, 使系统的性状相应地得到改善.

推论 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, 部件间相互独立, $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}^*$ 是两组状态向量概率, 且 $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{q}^*$, 则 (31) 成立.

定理 5.7.8 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, 部件间相互独立, 有效用

$$0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_M.$$

$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}^*$ 是两组状态向量概率, 且 $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{q}^*$, 则

$$U(\boldsymbol{q}) \leqslant U(\boldsymbol{q}^*) \tag{32}$$

证明 由定理 5.7.7 推论及 (29)

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_{j=0}^{M} b_j P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\}$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{M} b_j P^*\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} = U(\boldsymbol{q}^*)$$

这里 $b_j = a_j - a_{j-1}, j = 1, \cdots, M, b_0 = 0$. 证毕.

§5.7.3 系统可靠度的界

定理 5.7.9 设 $\phi \in \{\text{MMS}\}$, 且部件间相互独立. $\boldsymbol{q}$ 为状态向量概率, $h(\boldsymbol{q}) = E_{\boldsymbol{q}}\phi(\boldsymbol{X})$, 则

$$\prod_{i=1}^{n} q_{ij} \leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} \leqslant \coprod_{i=1}^{n} q_{ij} \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \coprod_{i=1}^{n} q_{ij} \leqslant h(\boldsymbol{q}) \leqslant \sum_{j=1}^{M} \prod_{i=1}^{n} q_{ij} \tag{34}$$

证明 因

$$\bigwedge_{i=1}^{n} X_i \leqslant \phi(\boldsymbol{X}) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} X_i$$

故

$$\left\{\bigwedge_{i=1}^{n} X_i \geqslant j\right\} \subset \{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} \subset \left\{\bigvee_{i=1}^{n} X_i \geqslant j\right\}$$

即有

$$\prod_{i=1}^{n} P\{X_i \geqslant j\} \leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} \leqslant 1 - \coprod_{i=1}^{n} P\{X_i < j\}$$

此式即 (33). 再注意到

$$h(\boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{M} P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\}$$

(34) 得证. 证毕.

定理 5.7.10 设 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}, \boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 相协, 则

$$\prod_{t=1}^{l} P\{\kappa_t(\boldsymbol{X})=1\} \leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} \leqslant \prod_{t=1}^{m} P\{\rho_t(\boldsymbol{X})=1\} \tag{35}$$

这里 $\kappa_t(\boldsymbol{X}), t=1,\cdots,l, \rho_t(\boldsymbol{X}), t=1,\cdots,m$ 由 (20), (19) 式分别定义.

证明 因 $\kappa_1(\boldsymbol{X}),\cdots,\kappa_l(\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的增函数, 故它们亦相协, 再由定理 5.4.7

$$P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} = P\left\{\prod_{t=1}^{l} \kappa_t(\boldsymbol{X})=1\right\} \geqslant \prod_{t=1}^{l} P\{\kappa_t(\boldsymbol{X})=1\}$$

另一半不等式相仿证明. 证毕.

推论 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}$, 又 $X_1,\cdots,X_n$ 独立, 则

$$\prod_{t=1}^{l}\left\{1-\prod_{k=0}^{M}\prod_{i\in C_t^k}(1-q_{ik+1})\right\} \leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} \leqslant \prod_{t=1}^{m}\prod_{k=0}^{M}\prod_{i\in P_t^k} q_{ik} \tag{36}$$

证明 由独立性

$$P\{\rho_t(\boldsymbol{X})=1\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \geqslant x_i(\boldsymbol{P}_t)\} = \prod_{k=0}^{M}\prod_{i\in P_t^k} q_{ik}$$

其余显然. 证毕.

定理 5.7.11 $\phi \in \{\mathrm{WCS}\}$, 则

$$\bigvee_{t=1}^{m} P\{\rho_t(\boldsymbol{X})=1\} \leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} \leqslant \bigwedge_{t=1}^{l} P\{\kappa_t(\boldsymbol{X})=1\} \tag{37}$$

证明 由定理 5.7.5, 对任意的 $t=1,\cdots,m, s=1,\cdots,l$ 有

$$P\{\rho_t(\boldsymbol{X})=1\} \leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X}) \geqslant j\} \leqslant P\{\kappa_s(\boldsymbol{X})=1\}$$

即得 (37). 证毕.

推论 若又有 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 相协, 则

$$\bigvee_{t=1}^{m}\prod_{k=0}^{M}\prod_{i\in P_t^k}q_{ik}\leqslant P\{\phi(\boldsymbol{X})\geqslant j\}$$
$$\leqslant\bigwedge_{t=1}^{l}\left\{1-\prod_{k=0}^{M}\prod_{i\in C_t^k}(1-q_{ik+1})\right\}\tag{38}$$

证明 随机变量 $I_{\{X_i\geqslant x_i(\boldsymbol{P}_t)\}},i=1,\cdots,n$ 是相协的. 由定理 5.4.7, 对任意的 $t=1,\cdots,m$

$$P\{\rho_t(\boldsymbol{X})=1\}\geqslant\prod_{i=1}^{n}P\{X_i\geqslant x_i(\boldsymbol{P}_t)\}=\prod_{k=0}^{M}\prod_{i\in P_t^k}q_{ik}$$

因此 (38) 式左端成立. 右端相仿可证. 证毕.

多状态系统进一步的讨论, 例如部件重要度, 以及利用模块分解给出系统可靠度的界等问题, 读者可查阅有关文献 ([22], [36], [43]).

第六章　马尔可夫型可修系统

在实践中, 为了改善系统的可靠性, 经常采用维修的手段. 可修系统由一些部件和一个或多个修理设备 (修理工) 组成. 修理设备对故障的部件进行修理, 修复后的部件可继续执行其使命. 可修系统的主要可靠性指标有, 系统首次故障前时间分布, 系统的可用度, $(0,t]$ 中系统的平均故障次数, 系统的平均开工时间和平均停工时间等. 对不同的实际问题, 人们感兴趣的可靠性指标不完全相同, 上述这些指标则从各个不同侧面反映了可修系统的可靠性.

可修系统是可靠性理论中讨论的一类重要系统, 也是可靠性数学的主要研究对象之一. 研究可修系统的主要数学工具是随机过程理论. 当构成系统各部件的寿命分布和故障后的修理时间分布, 及其它出现的有关分布均为指数分布时, 只要适当定义系统的状态, 这样的系统总可以用马尔可夫 (Марков) 过程来描述. 这正是本章将要讨论的一类可修系统. 至于更一般的非马尔可夫型可修系统, 我们将在第七章中继续讨论.

本章 §6.1 简单介绍离散状态空间的时齐马尔可夫过程, 并着重讨论马尔可夫型可修系统的一般模型. 以下各节利用 §6.1 的结果进一步讨论各种典型的可修系统, 求出这些系统的各种可靠性数量指标. 马尔可夫型可修系统是实践中应用最多的一类可修系统. 因此, 为了读者引用方便, 在讨论每个典型系统时, 尽可能详细地列出各种可靠性指标的计算公式.

§6.1 马尔可夫型可修系统的一般模型

§6.1.1 马尔可夫过程的定义

设 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是取值在 $E=\{0,1,\cdots\}$ 或 $E=\{0,1,\cdots,N\}$ 上的一个随机过程. 若对任意自然数 n, 及任意 n 个时刻点 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 均有

$$\begin{aligned} &P\{X(t_n)=i_n | X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_{n-1})=i_{n-1}\} \\ &\quad = P\{X(t_n)=i_n | X(t_{n-1})=i_{n-1}\}, \\ &\quad i_1, i_2, \cdots, i_n \in E \end{aligned} \tag{1}$$

则称 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为离散状态空间 E 上的连续时间**马尔可夫过程**. 又如果对任意 $t, u \geqslant 0$, 均有

$$P\{X(t+u)=j | X(u)=i\} = P_{ij}(t), \quad i, j \in E \tag{2}$$

与 u 无关, 则称马尔可夫过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是**时齐的**. 以下我们讨论的马尔可夫过程均假定是时齐的.

对固定的 $i, j \in E$, 函数 $P_{ij}(t)$ 称为**转移概率函数**. $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))$ 称为**转移概率矩阵**.

公式 (1) 可解释为: 当给定时刻 t_{n-1} 过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 处于某个状态的条件下, 过程在 t_{n-1} 以后发展的概率规律与过程在 t_{n-1} 以前的历史无关. 简单地说: 当给定过程现在所处的状态, 则过程将来发展的概率规律与过程的历史无关. 公式 (2) 则表示马尔可夫过程的转移概率仅与时差 t 有关, 而与起始时刻的位置 u 无关.

此外, 我们都假定马尔可夫过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的转移概率函数满足

$$\lim_{t \to 0} P_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

对转移概率函数, 显然有以下性质:

$$\begin{cases} P_{ij} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1 \\ \displaystyle\sum_{k \in E} P_{ik}(u) P_{kj}(v) = P_{ij}(u+v) \end{cases} \tag{4}$$

若令

$$P_j(t) = P\{X(t) = j\}, \quad j \in E$$

它表示时刻 t 系统处于状态 j 的概率, 则有

$$P_j(t) = \sum_{k \in E} P_k(0) P_{kj}(t) \tag{5}$$

时齐马尔可夫过程有如下重要性质 [31][32]:

1) 对有限状态空间 E 的时齐马尔可夫过程, 以下极限

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = q_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j \in E \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1 - P_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = q_i, \quad i \in E \end{cases} \tag{6}$$

存在且有限.

2) 若记 $T_1, T_2, \cdots$ 为过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的状态转移时刻 $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots, X(T_n)$ 表示第 n 次状态转移后过程访问的状态. 若 $X(T_n) = i$, 则 $T_{n+1} - T_n$ 为过程在状态 i 的逗留时间. 我们有

引理 6.1.1 对任何 $i, j \in E, \quad u \geqslant 0$, 有

$$P\{T_{n+1} - T_n > u | X(T_n) = i, X(T_{n+1}) = j\} = e^{-q_i u}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

与 n 和状态 j 无关.

因此, 有限状态空间的时齐马尔可夫过程在任何状态 i 的逗留时间遵从参数 q_i 的指数分布 $(0 \leqslant q_i < \infty)$, 不依赖于下一个将要转入的状态. 若 $q_i > 0$, 称状态 i 为**稳定态**; 若 $q_i = 0$, 称状态 i 为**吸收态**. 过程一旦进入吸收态就将永远停留在该状态.

3) 对有限状态空间 E 的时齐马尔可夫过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$, 记

$$N(t) = (0, t] \text{中} \{X(t), t \geqslant 0\} \text{发生状态转移次数}$$

我们有

引理 6.1.2 对充分小的 $\Delta t > 0$, 有

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) \geqslant 2\} = o(\Delta t)$$

即在 $(t, t + \Delta t]$ 中马尔可夫过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 发生两次或两次以上转移的概率为 $o(\Delta t)$.

证明 只要证: 对任意 $i \in E$, 有

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t) \geqslant 2|X(t)=i\}=o(\Delta t)$$

由时齐性, 只要证

$$P\{N(\Delta t) \geqslant 2|X(0)=i\}=o(\Delta t)$$

由于

$$\begin{aligned}
P\{N(\Delta t) \geqslant 2|X(0)=i\} &= P\{T_2 \leqslant \Delta t|X(0)=i\} \\
&= \sum_{j\in E} P\{(T_2-T_1)+T_1 \leqslant \Delta t, X(T_1)=j|X(0)=i\} \\
&\leqslant \sum_{j\in E} P\{T_2-T_1 \leqslant \Delta t, T_1 \leqslant \Delta t, X(T_1)=j|X(0)=i\} \\
&= \sum_{j\in E} P\{T_2-T_1 \leqslant \Delta t, T_1 \leqslant \Delta t|X(T_1)=j, X(0)=i\} \\
&\quad \cdot P\{X(T_1)=j|X(0)=i\} \\
&= \sum_{j\in E} P\{T_2-T_1 \leqslant \Delta t|T_1 \leqslant \Delta t, X(T_1)=j, X(0)=i\} \\
&\quad \cdot P\{T_1 \leqslant \Delta t|X(T_1)=j, X(0)=i\} \\
&\quad \cdot P\{X(T_1)=j|X(0)=i\}
\end{aligned}$$

根据引理 6.1.1, 上式右端第二个因子等于 $1-e^{-q_i\Delta t}$, 与状态 j 无关. 由马尔可夫过程的定义, 上式右端第一个因子中, 在给定 $X(T_1)=j$ 的条件下, 事件 $\{T_2-T_1 \leqslant \Delta t\}$ 的概率与 T_1 以前的历史无关. 因此, 它等于

$$P\{T_2-T_1 \leqslant \Delta t|X(T_1)=j\}=1-e^{-q_j\Delta t}$$

故

$$P\{N(\Delta t) \geqslant 2|X(0)=i\} \leqslant \sum_{j\in E}(1-e^{-q_j\Delta t})(1-e^{-q_i\Delta t})$$

由于 E 是有限状态集, 因此右端为 $o(\Delta t)$. 证毕.

§6.1.2 马尔可夫型可修系统的一般模型

假定一个可修系统有 $N+1$ 个状态, 其中状态 $0,1,\cdots,K$ 是系统的工作状态;$K+1,\cdots,N$ 是系统的故障状态. 记 $E=\{0,1,\cdots,N\}, W=\{0,1,\cdots,K\}$

和 $F=\{K+1,K+2,\cdots,N\}$. 令 $X(t)$ 表示时刻 t 该系统处的状态. 若已知 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个时齐马尔可夫过程, 即满足条件 (1) 和 (2), 且在充分小的时间 Δt 内的转移概率函数满足

$$P_{ij}(\Delta t)=a_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\quad i,j\in E,\quad i\neq j \tag{7}$$

其中 $\{a_{ij}:i,j\in E,i\neq j\}$ 是给定的, 并且 $a_{ij}\geqslant 0$. 显然

$$P_{ii}(\Delta t)=1-\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}P_{ij}(\Delta t)=1-\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}a_{ij}\Delta t+o(\Delta t) \tag{8}$$

令

$$a_{ii}=-\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in E}}a_{ij} \tag{9}$$

因此

$$P_{ii}(\Delta t)=1+a_{ii}\Delta t+o(\Delta t) \tag{10}$$

由 (6) 式立即可知

$$a_{ij}=\begin{cases}q_{ij}, & \text{当 } i\neq j,\\ -q_i, & \text{当 } i=j,\end{cases}\quad i,j\in E$$

对上述描述的一般模型, 我们来求系统的各种可靠性数量指标.

§6.1.3 系统的瞬时可用度

我们仍用 §§6.1.1 的记号 $P_j(t)=P\{X(t)=j\},\quad j\in E.$

定理 6.1.1 *当给定初始状态分布 $P_0(0),P_1(0),\cdots,P_N(0)$, 则系统的瞬时可用度为*

$$A(t)=\sum_{j\in W}P_j(t) \tag{11}$$

其中 $P_j(t),j\in W$ 是下列微分方程组的解

$$\begin{cases}P_i'(t)=\displaystyle\sum_{k\in E}P_k(t)a_{ki}, & i\in E\\ \text{初始条件 } P_0(0),P_1(0),\cdots,P_N(0)\end{cases} \tag{12}$$

证明 由瞬时可用度的定义, 立即可得

$$A(t) = P\{X(t) = j, \quad j \in W\}$$

即公式 (11). 用全概率公式和式 (7), (10), 得

$$\begin{aligned} P_i(t+\Delta t) &= \sum_{k\in E} P_k(t)P_{ki}(\Delta t) \\ &= P_i(t)P_{ii}(\Delta t) + \sum_{\substack{k\in E \\ k\neq i}} P_k(t)P_{ki}(\Delta t) \\ &= P_i(t) + \sum_{k\in E} P_k(t)a_{ki}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \in E \end{aligned}$$

即

$$\frac{P_i(t+\Delta t) - P_i(t)}{\Delta t} = \sum_{k\in E} P_k(t)a_{ki} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad i \in E$$

当 $\Delta t \to 0$, 右端极限存在, 因而左端极限也存在. 故 $P_i(t)$ 可微, 并导得公式 (12). 证毕.

公式 (12) 可写成矩阵的形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} \\ \text{初始条件}\, \boldsymbol{P}(0) \end{cases} \tag{12'}$$

其中 $\boldsymbol{P}(t) = (P_0(t), P_1(t), \cdots, P_N(t)), \boldsymbol{P}'(t)$ 表示对每个分量分别求导数, 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**转移率矩阵**. 由公式 (9) 易见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和都等于零.

(12) 式也可写成分块矩阵的形式

$$\begin{cases} (\boldsymbol{P}'_W(t), \boldsymbol{P}'_F(t)) = (\boldsymbol{P}_W(t), \boldsymbol{P}_F(t)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \\ \text{初始条件}\boldsymbol{P}_W(0), \boldsymbol{P}_F(0) \end{cases} \tag{12''}$$

其中 $\boldsymbol{P}_W(t) = (P_0(t), P_1(t), \cdots, P_K(t)), \boldsymbol{P}_F(t) = (P_{K+1}(t), \cdots, P_N(t)), \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ 为相应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块形式.

微分方程组 (12′) 的解是

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0)e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P}(0)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\boldsymbol{A}^n$$

一般讲, 由此式来求 $\boldsymbol{P}(t)$ 是不方便的, 它需要将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为若尔当 (Jordan) 标准型, 解此微分方程组的另一方法是用 L 变换的工具. 记 $P_i(t)$ 的 L 变换为

$$\boldsymbol{P}_i^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}P_i(t)dt,\quad s>0,\quad i=1,2,\cdots,N$$

将 (12′) 的两端作 L 变换, 得

$$\int_0^\infty e^{-st}\boldsymbol{P}'(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}\boldsymbol{P}(t)dt\cdot\boldsymbol{A},\quad s>0$$

这里对向量的 L 变换是指对每个分量作相应的变换. 上式左端

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\boldsymbol{P}'(t)dt&=e^{-st}\boldsymbol{P}(t)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty se^{-st}\boldsymbol{P}(t)dt\\&=-\boldsymbol{P}(0)+s\int_0^\infty e^{-st}\boldsymbol{P}(t)dt\end{aligned}$$

代入前一式, 解得

$$\boldsymbol{P}^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}\boldsymbol{P}(t)dt=\boldsymbol{P}(0)(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1},\quad s>0 \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵, $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 显然是可逆矩阵.

对 (11) 的两端作 L 变换, 得

$$A^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A(t)dt=\sum_{i\in W}P_i^*(s)$$

将 (13) 代入上式, 经反演可求出系统瞬时可用度.

§6.1.4 系统的稳态可用度

在求系统稳态可用度时, 要用到 $\boldsymbol{P}(t)$ 的极限分布. 我们不加证明地引用以下结果 [31]:

引理 6.1.3 对所有 $i,j\in E$, 若 $\lim\limits_{t\to0}P_{ij}(t)=\delta_{ij}$, 则

$$\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\pi_j$$

存在.

由公式 (7) 和 (10), 可知引理 6.1.3 的条件满足. 由于

$$P_j(t)=\sum_{k\in E}P_k(0)P_{kj}(t),\quad j\in E$$

当 $t\to\infty$, 根据引理 6.1.3, 上式右端极限存在, 因而左端的极限也存在, 且

$$\lim_{t\to\infty}P_j(t)=\sum_{k\in E}P_k(0)\lim_{t\to\infty}P_{kj}(t)=\sum_{k\in E}P_k(0)\pi_j=\pi_j \tag{14}$$

定理 6.1.2 *系统的稳态可用度为*

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0}sA^*(s) \tag{15}$$

证明 将 (11) 式的两端, $t\to\infty$, 由 (14) 可知极限存在, 因而

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\sum_{j\in W}\pi_j$$

进而有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A(u)du=\lim_{t\to\infty}A(t)$$

又由托贝尔 (Tauber) 定理,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A(u)du=\lim_{s\to\infty}sA^*(s)$$

因此得定理结果. 证毕.

当系统的瞬时可用度 $A(t)$ 或 $A^*(s)$ 已经求得, 我们可用 (15) 来进一步求系统稳态可用度 A. 然而, 在许多情形, 求 $A(t)$ 或 $A^*(s)$ 的表达式比较困难, 下面, 我们提供一个直接求 A 的方法.

引理 6.1.4 *对任一 $j\in E$, 有 $\lim_{t\to\infty}P_j'(t)=0$.*

证明 将公式 (12) 的两端 $t\to\infty$, 由于 (14) 知, 右端的极限存在, 因而 $\lim_{t\to\infty}P_i'(t)$ 的极限也存在. 下面来证明该极限为零. 否则, 若 $\lim_{t\to\infty}P_j'(t)=c_j\neq 0$, 不妨设 $c_j>0$(当 $c_j<0$ 可类似证明). 取 a_j, 使 $c_j>a_j>0$, 则存在 t_0, 当 $t>t_0$ 时, $P_j'(t)\geqslant a_j$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}P_j(t)&=\lim_{t\to\infty}\left[P_j(t_0)+\int_{t_0}^t P_j'(u)du\right]\\&\geqslant P_j(t_0)+\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t a_j du\\&=P_j(t_0)+\lim_{t\to\infty}a_j(t-t_0)=\infty\end{aligned}$$

这与 $P_j(t) \leqslant 1$ 矛盾. 引理证毕.

定理 6.1.3 系统的稳态可用度为

$$A = \sum_{j \in W} \pi_j \tag{16}$$

其中 $\pi_j, j \in W$ 满足线性方程组

$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N)\boldsymbol{A} = (0, 0, \cdots, 0) \\ \pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_N = 1 \end{cases} \tag{17}$$

证明 将 (12′) 的两端 $t \to \infty$, 使用 (14) 和引理 6.1.4 的结果, 可得 (17) 的前一式. 由公式

$$\sum_{j \in E} P_j(t) = 1$$

令 $t \to \infty$, 即为 (17) 的后一式. (16) 式在定理 6.1.2 中已证. 证毕.

特别, 当 Δt 时间内系统的转移概率函数 (7) 满足

$$\begin{cases} P_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t), & i = 1, 2, \cdots, N \\ P_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), & i = 0, 1, \cdots, N-1 \\ P_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), & \text{其它的 } i \neq j \end{cases} \tag{18}$$

时, 称时齐马尔可夫过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为有限状态空间的**生灭过程**. 由前面的分析, 公式 (12′) 中的矩阵是三对角线的

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{N-1} & -\lambda_{N-1} - \mu_{N-1} & \lambda_{N-1} \\ 0 & & & & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix} \tag{19}$$

此时, 方程组 (17) 的前一式为

$$\begin{cases} \mu_1 \pi_1 - \lambda_0 \pi_0 = 0 \\ \mu_{j+1} \pi_{j+1} - \lambda_j \pi_j = \mu_j \pi_j - \lambda_{j-1} \pi_{j-1}, & j = 1, 2, \cdots, N-1 \\ \mu_N \pi_N - \lambda_{N-1} \pi_{N-1} = 0 \end{cases}$$

即

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{j-1}, \quad j = 1, 2, \cdots, N$$

因此

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\cdots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1}\pi_0, \quad j = 1, 2, \cdots, N$$

由于 $\sum\limits_{j=0}^{N}\pi_j = 1$, 立即得

$$\begin{cases} \pi_0 = \left[1 + \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right]^{-1} \\ \pi_j = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\pi_0, \quad j = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{20}$$

§6.1.5 系统的可靠度

为求系统的可靠度 $R(t)$ 或系统首次故障前时间分布 $F(t) = 1 - R(t)$, 我们令系统的所有故障状态为马尔可夫过程的吸收状态. 只要在 (7) 中令

$$a_{ij} = 0, \quad i \in F, j \in E$$

即在 (12″) 式中, 令 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$. 这就构成了一个新的马尔可夫过程 $\{\tilde{X}(t), t \geqslant 0\}$. 若令 $Q_j(t) = P\{\tilde{X}(t) = j\}$, $j \in E$, 类似于 (12), 可导出 $\{Q_j(t), j \in E\}$ 满足微分方程组

$$(\boldsymbol{Q}'_W(t), \boldsymbol{Q}'_F(t)) = (\boldsymbol{Q}_W(t), \boldsymbol{Q}_F(t))\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_W(t) = (Q_0(t), Q_1(t), \cdots, Q_K(t))$, $\boldsymbol{Q}_F(t) = (Q_{K+1}(t), \cdots, Q_N(t))$.

若在初始时刻 $t = 0$, 系统处于正常工作状态, 且给定初始状态的概率分布 $\boldsymbol{Q}(0)$, 其中

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in W} Q_j(0) = 1 \\ Q_j(0) = 0, \quad j \in F \end{cases} \tag{22}$$

那么, 方程组 (21) 可以如同 (12) 一样求解.

系统的可靠度 $R(t)$ 是从初始时刻起, 直到时刻 t 过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 一直处于工作状态的概率, 亦即时刻 t 过程 $\{\tilde{X}(t), t \geqslant 0\}$ 尚未进入吸收状态的概率.

因此, 系统可靠度 $R(t)$ 为过程 $\{\tilde{X}(t), t \geqslant 0\}$ 从某个初始状态概率 (22) 出发, 在时刻 t 过程仍处于正常状态的概率. 故我们有

定理 6.1.4 *当给定初始状态概率分布 (22) 式, 则系统可靠度为*

$$R(t) = \sum_{j \in W} Q_j(t) \tag{23}$$

其中 $Q_j(t), j \in W$ 满足微分方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}'_W(t) = \boldsymbol{Q}_W(t)\boldsymbol{B} \\ \text{初始条件 } \boldsymbol{Q}_W(0) \end{cases} \tag{24}$$

公式 (23) 写成矩阵形式为

$$R(t) = \boldsymbol{Q}_W(t)\boldsymbol{e}_W \tag{23'}$$

其中 $\boldsymbol{e}_W$ 为分量均为 1 的 $K+1$ 维列向量. 解方程组 (24), 类似于 (13) 式可得

$$\boldsymbol{Q}^*_W(s) = \boldsymbol{Q}_W(0)(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}, \quad s > 0$$

因此, 将 (23') 两端作 L 变换, 就有

$$R^*(s) = \boldsymbol{Q}^*_W(s)\boldsymbol{e}_W = \boldsymbol{Q}_W(0)(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e}_W \tag{25}$$

反演上式可求得系统可靠度.

§6.1.6 系统首次故障前平均时间

对于一个具体系统, 如果已经求得系统可靠度 $R(t)$ 或 $R^*(s)$, 则系统首次故障前平均时间为

$$\text{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = R^*(0) \tag{26}$$

但是, 当系统状态数比较多时, 解方程组 (24) 比较困难. 下面给出一个直接求 MTTFF 的方法.

定理 6.1.5 *当给定系统初始状态分布 $\boldsymbol{Q}_W(0)$, 则*

$$\text{MTTFF} = x_0 + x_1 + \cdots + x_K$$

其中 $x_0, x_1, \cdots, x_K$ 满足线性方程组

$$(x_0, x_1, \cdots, x_K)\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{Q}_W(0)$$

证明 由 (25) 和 (26), 得

$$\mathrm{MTTFF} = R^*(0) = -\boldsymbol{Q}_W(0)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_W \tag{27}$$

令

$$(x_0, x_1, \cdots, x_K) = -\boldsymbol{Q}_W(0)\boldsymbol{B}^{-1}$$

立即推得定理结果. 证毕.

§6.1.7 系统的故障频度

令 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间内系统的故障次数, 且令

$$M_i(t) = E\{N(t)|X(0)=i\}, \quad i \in E \tag{28}$$

$M_i(t)$ 表示时刻 $t=0$ 系统从状态 i 出发的条件下, 在 $(0,t]$ 中系统的平均故障次数.

定理 6.1.6 *$M_i(t), i \in E$ 满足下列的微分方程组*

$$\begin{cases} M_i'(t) = \sum\limits_{j\in E} a_{ij}M_j(t) + \sum\limits_{j\in F} a_{ij}, & i \in W \\ M_i'(t) = \sum\limits_{j\in E} a_{ij}M_j(t), & i \in F \\ \text{初始条件 } M_i(0) = 0, i \in E \end{cases} \tag{29}$$

证明 考虑 $(0, t+\Delta t]$ 内系统的平均故障次数. 将此时间区间分解为 $(0,\Delta t]$ 和 $(\Delta t, t+\Delta t]$ 两段, 利用全概率公式和引理 6.1.2, 可得

$$\begin{cases} M_i(t+\Delta t) = \sum\limits_{j\in W} P_{ij}(\Delta t)M_j(t) \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j\in F} P_{ij}(\Delta t)[M_j(t)+1] + o(\Delta t), & i \in W \\ M_i(t+\Delta t) = \sum\limits_{j\in E} P_{ij}(\Delta t)M_j(t) + o(\Delta t), & i \in F \end{cases}$$

将 (7) 和 (10) 式代入上式, 得到

$$\begin{cases} M_i(t+\Delta t) = M_i(t) + \sum\limits_{j\in E} a_{ij}\Delta t M_j(t) \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j\in F} a_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \in W \\ M_i(t+\Delta t) = M_i(t) + \sum\limits_{j\in E} a_{ij}\Delta t M_j(t) \\ \qquad\qquad + o(\Delta t), \quad i \in F \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{M_i(t+\Delta t) - M_i(t)}{\Delta t} = \sum\limits_{j\in E} a_{ij} M_j(t) \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j\in F} a_{ij} + \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \ i \in W \\ \dfrac{M_i(t+\Delta t) - M_i(t)}{\Delta t} = \sum\limits_{j\in E} a_{ij} M_j(t) \\ \qquad\qquad + \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad i \in F \end{cases}$$

令 $\Delta t \to 0$, 以上各式右端的极限存在, 因此左端的极限也存在, 故 $M_i(t)$ 可微, 且导出 (29) 中的微分方程组. 由 $M_i(t)$ 的定义, 显然有 $M_i(0) = 0, i \in E$. 证毕.

公式 (29) 可以写成矩阵形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}(t) + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{M}(0) = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{29'}$$

其中 $\boldsymbol{M}(t)$ 是一个列向量 $(M_0(t), M_1(t), \cdots, M_N(t))^T$, $\boldsymbol{e}_F$ 是分量均为 1 的 $N-K$ 维列向量, $\boldsymbol{0}$ 表示所有分量为 0 的列向量.

定理 6.1.6 中已证 $\boldsymbol{M}_i(t)$ 是可微的, 令其导数为

$$m_i(t) = M_i'(t), \ i \in E$$

我们称 $m_i(t)$ 为当时刻 0 系统从状态 i 出发, 系统在时刻 t 的瞬时故障频度.

为解方程组 (29), 我们对该式的两端乘以 e^{-st}, 并将 t 从 0 到 ∞ 积分, 且令

$$m_j^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} m_j(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} dM_j(t), \quad s > 0, \ j \in E$$

可得方程组

$$s\boldsymbol{m}^*(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}^*(s) + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{m}^*(s) = (m_0^*(s), m_1^*(s), \cdots, m_N^*(s))^T$. 解出上式

$$\boldsymbol{m}^*(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{30}$$

反演上式可求得 $\boldsymbol{m}(t)$ 或 $\boldsymbol{M}(t)$.

下面的定理提供了一个求系统瞬时故障频度的更方便的方法.

定理 6.1.7 *当时刻 0 系统的初始分布为*

$$\boldsymbol{P}(0) = (P_0(0), P_1(0), \cdots, P_N(0)),$$

则时刻 t 系统的瞬时故障频度为

$$m(t) = \sum_{k\in W} P_k(t) \sum_{j\in F} a_{kj} = \boldsymbol{P}_W(t)\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F \tag{31}$$

其中 $P_k(t), k \in W$ 是方程组 (12) 的解.

证明 当时刻 0 系统处于状态 $i(i \in E)$, 即当初始分布为

$$\boldsymbol{P}_i(0) = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

时 (第 $i+1$ 个分量为 1, 其余分量为 0), 则时刻 t 系统瞬时故障频度 $m_i(t)$ 的 L 变换是 $\boldsymbol{m}^*(s)$ 的第 $i+1$ 个分量. 由 (30) 式

$$m_i^*(s) = \boldsymbol{P}_i(0)\boldsymbol{m}^*(s) = P_i(0)(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

而由 (13) 式, 初始分布为 $\boldsymbol{P}_i(0)$ 时, 时刻 t 系统状态概率分布

$$P\{X(t) = k | X(0) = i\} = P_{ik}(t)$$

的 L 变换为

$$(P_{i0}^*(s), P_{i1}^*(s), \cdots, P_{iN}^*(s)) = \boldsymbol{P}_i(0)(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$$

比较以上两式, 得

$$\begin{aligned} m_i^*(s) &= (P_{i0}^*(s), P_{i1}^*(s), \cdots, P_{iN}^*(s)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{Ce_F} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k\in W} P_{ik}^*(s) \sum_{j\in F} a_{kj}, \qquad i \in E \end{aligned} \tag{32}$$

因此, 当时刻 0 系统从状态 i 出发时, (32) 式给出了时刻 t 系统瞬时故障频度 $m_i(t)$ 和转移概率 $P_{ik}(t), k \in W$ 之间的关系.

在一般情形, 当时刻 0 系统的初始分布为

$$\boldsymbol{P}(0) = (P_0(0), P_1(0), \cdots, P_N(0))$$

时, 由全概率公式, 可得时刻 t 系统瞬时故障频度为

$$m(t) = \sum_{i\in E} P_i(0) m_i(t)$$

将 (32) 式代入上式, 得

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{i\in E} P_i(0) \sum_{k\in W} P_{ik}(t) \sum_{j\in F} a_{kj} \\ &= \sum_{k\in W} \left[\sum_{i\in E} P_i(0) P_{ik}(t)\right] \sum_{j\in F} a_{kj} \\ &= \sum_{k\in W} P_k(t) \sum_{j\in F} a_{kj} \end{aligned}$$

其中 $P_k(t), k \in W$ 是在一般初始条件 $\boldsymbol{P}(0)$ 之下, 方程组 (12) 的解. 证毕.

将 (31) 式的两端 $t \to \infty$, 立即得

定理 6.1.8 *系统稳态故障频度为*

$$M = \lim_{t\to\infty} m(t) = \sum_{k\in W} \pi_k \sum_{j\in F} a_{kj} = \boldsymbol{\pi_W Ce_F} \tag{33}$$

其中 $\pi_W = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_K)$ *是方程组* (17) *的解.*

由定理 6.1.1 和定理 6.1.7 可知, 只要从方程组 (12) 中解出了 $P_j(t), j \in W$, 就可同时求得系统的瞬时可用度 $A(t)$ 和瞬时故障频度 $m(t)$. 进而可由

$$M(t) = \int_0^t m(u)du \tag{34}$$

来求 $(0,t]$ 内系统的平均故障次数. 类似地, 由定理 6.1.3 和定理 6.1.8 可知, 只要从方程组 (17) 中解出了 $\pi_j, j \in W$, 就同时求得系统的稳态可用度 A 和稳态故障频度 M.

§6.1.8 系统平均开工时间、平均停工时间和平均周期

定理 6.1.9 在系统已经处于稳态的条件下, 系统平均开工时间、平均停工时间和平均周期分别为

$$\begin{cases} \mathrm{MUT} = \dfrac{A}{M} \\ \mathrm{MDT} = \dfrac{\bar{A}}{M} \\ \mathrm{MCT} = \dfrac{1}{M} \end{cases} \tag{35}$$

其中 A 和 M 分别由定理 6.1.3 和定理 6.1.8 而得, $\bar{A} = 1 - A$.

证明 系统的一个开工时间区间的开始时刻必是从某个故障状态 i 到正常状态 j 的转移时刻. 因此, 在系统已经处于稳态的条件下, 在正常状态 j 开始一个开工时间区间的概率是

$$P_j^0 = \frac{\sum\limits_{i \in F} \pi_i a_{ij}}{\sum\limits_{k \in W} \sum\limits_{i \in F} \pi_i a_{ij}}, \quad j \in W$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{P}_W^0 = \frac{\boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{D}}{\boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{D} \boldsymbol{e}_W}$$

由于 $\boldsymbol{\pi}_W = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_K), \boldsymbol{\pi}_F = (\pi_{K+1}, \cdots, \pi_N)$ 是方程组 (17) 的解, 即有

$$(\boldsymbol{\pi}_W, \boldsymbol{\pi}_F) \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$$

因此有

$$\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$$

又由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为零, 因而

$$\boldsymbol{B} \boldsymbol{e}_W + \boldsymbol{C} \boldsymbol{e}_F = \boldsymbol{0}$$

故

$$\boldsymbol{P}_W^0 = \frac{-\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_W} = \frac{\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_W} = \frac{-\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F} \tag{36}$$

这个开工时间的结束时刻, 就是在这个开工时间区间内系统首次故障的时刻. 因而只要在公式 (27) 中, 取初始分布 $\boldsymbol{Q}_W(0) = \boldsymbol{P}_W^0$, 即得系统平均开工时间

$$\begin{aligned} \mathrm{MUT} &= -\boldsymbol{P}_W^0 \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{e}_W = \frac{\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{e}_W}{\boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_W} \\ &= \frac{\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{e}_W}{\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F} = \frac{A}{M} \end{aligned} \tag{37}$$

从马尔可夫过程一般观点来看, 故障状态集和正常状态集之间的地位完全是对称的. 因此求系统平均停工时间只需将 (37) 式中 W 和 F 的位置互换, $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的位置互换, 立即可得

$$\mathrm{MDT} = \frac{\boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{e}_F}{\boldsymbol{\pi}_W \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_F} = \frac{\boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{e}_F}{\boldsymbol{\pi}_F \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_W} = \frac{\bar{A}}{M}$$

(35) 的最后一式由 $\mathrm{MCT} = \mathrm{MUT} + \mathrm{MDT}$ 立即可得. 证毕.

反映修理设备忙闲程度的数量指标, 也可在 $\{P_j(t), j \in E\}$ 和 $\{\pi_j, j \in E\}$ 的基础上求得. 若修理设备忙的状态集是 $U \subset E$, 则时刻 t 修理设备忙的概率为

$$B(t) = P\{X(t) \in U\} = \sum_{j \in U} P_j(t) \tag{38}$$

修理设备忙的稳态概率为

$$B = \lim_{t \to \infty} B(t) = \sum_{j \in U} \pi_j \tag{39}$$

它们的求法与 $A(t)$ 和 A 的求法完全类似.

§6.1.9 分析马尔可夫型可修系统的步骤

我们将前面的结果作一个概括. 当给定一个具体的可修系统, 能够用上述马尔可夫过程方法求其各种可靠性数量指标的基本条件和具体步骤如下:

1. 基本条件: 组成该系统各部件的寿命分布和故障后的修理时间分布, 以及其它出现的有关分布均为指数分布, 且所有与这些分布有关的随机变量都相互独立.

2. 步骤:

1) 定义系统的状态. 要保证所定义的状态足以区分系统的各种不同状况. 令 $E=\{0,1,\cdots,N\}$ 为系统的状态集, 其中 $W=\{0,1,\cdots,K\}$ 和 $F=\{K+1,\cdots,N\}$ 分别表示系统正常状态集和故障状态集.

2) 定义随机过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$. 令 $X(t)=j$, 若时刻 t 系统处于状态 $j,j\in E$. 在 1) 的基本条件满足的条件下, 可以证明 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个状态空间 E 上的时齐马尔可夫过程.

3) 求转移率矩阵 $\boldsymbol{A}$. 对已定义的过程, 求出

$$P_{ij}(\Delta t)=a_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\quad i\neq j,\quad i,j\in E$$

进一步写出转移率矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$$

其中

$$a_{ii}=-\sum_{j\neq i}a_{ij}$$

4) 求 $P_j(t)=P\{X(t)=j\},j\in E$. 解微分方程组

$$\begin{cases}(P_0'(t),P_1'(t),\cdots,P_N'(t))=(P_0(t),P_1(t),\cdots,P_N(t))\boldsymbol{A}\\ \text{初始分布 }(P_0(0),P_1(0),\cdots,P_N(0))\end{cases}$$

具体解法可用 L 变换, 将上面的微分方程组化为线性方程组, 解出线性方程组后, 再作反演.

5) 求系统可用度. 系统的瞬时可用度和稳态可用度分别为

$$A(t)=\sum_{j\in W}P_j(t)$$

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0}sA^*(s)$$

6) 求系统可靠度. 解方程组

$$\begin{cases}(Q_0'(t),Q_1'(t),\cdots,Q_K'(t))=(Q_0(t),Q_1(t),\cdots,Q_K(t))\boldsymbol{B}\\ \text{给定 }(Q_0(0),Q_1(0),\cdots,Q_K(0))\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 $K+1$ 行、$K+1$ 列子矩阵. 系统可靠度和首次故障前

平均时间分别为

$$R(t)=\sum_{j\in W}Q_j(t)$$

$$\mathrm{MTTFF}=\int_0^\infty R(t)dt=\lim_{s\to 0}R^*(s)$$

7) 求系统的故障频度. 系统的瞬时故障频度、稳态故障频度和 $(0,t]$ 内系统平均故障次数分别为

$$m(t)=\sum_{i\in W}P_i(t)\sum_{j\in F}a_{ij}$$

$$M=\lim_{t\to\infty}m(t)$$

$$M(t)=\int_0^t m(u)du$$

以上 4)~7) 中, 为求瞬时指标, 都需要解微分方程组. 这在许多情况, 往往是很麻烦的. 如果仅需要求系统可靠性的稳态指标和平均指标, 则要简单得多. 可从步骤 1)~3) 之后, 按以下步骤来做:

4′) 求 $\pi_j, j\in E$. 解线性方程组

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_N)\boldsymbol{A}=(0,0,\cdots,0)\\ \pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_N=1\end{cases}$$

5′) 系统可用度

$$A=\sum_{j\in W}\pi_j$$

6′) $\mathrm{MTTFF}=-(Q_0(0),Q_1(0),\cdots,Q_K(0))\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_W$

7′) 系统稳态故障频度

$$M=\sum_{i\in W}\pi_i\sum_{j\in F}a_{ij}$$

8′) 系统平均开工时间

$$\mathrm{MUT}=\frac{A}{M}$$

系统平均停工时间

$$\mathrm{MDT}=\frac{\bar{A}}{M}$$

系统平均周期

$$\mathrm{MCT}=\frac{1}{M}$$

§6.2 单部件可修系统

单部件组成的可修系统是最简单的可修系统, 为有助于理解 § 6.1 中一般结果的实际背景, 我们在这节中将详细地讨论这个系统, 并求出各种可靠性指标.

假设系统由一个部件构成, 当部件工作时系统工作, 当部件故障时系统故障. 部件的寿命 X 遵从指数分布

$$P\{X \leqslant t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \lambda > 0$$

部件故障后的修理时间 Y 遵从指数分布

$$P\{Y \leqslant t\} = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geqslant 0, \mu > 0$$

假定 X 和 Y 相互独立, 故障部件修复后的寿命分布与新的部件相同 (通常简称为修复如新).

上述系统可由工作和故障两个状态不断交替的过程来描述. 假定用状态 0 表示系统正常, 用状态 1 表示系统故障, 因此

$$E = \{0, 1\}, \quad W = \{0\}, \quad F = \{1\}$$

令

$$X(t) = \begin{cases} 0, \text{若时刻}t\text{系统工作} \\ 1, \text{若时刻}t\text{系统故障} \end{cases}$$

显然, $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个连续时间 $t \geqslant 0$、有限状态空间 $E = \{0, 1\}$ 的随机过程. 由于指数分布的无记忆性, 可以证明, $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个时齐马尔可夫过程. 事实上, 若已知 $X(t) = 0$ (时刻 t 系统工作) 或 $X(t) = 1$(时刻 t 系统故障), 由于部件的寿命分布和修理时间分布是指数分布, 因此时刻 t 以后系统发展的概率规律完全由时刻 t 系统是工作还是故障所完全决定, 而与该部件在时刻 t 已工作了多长时间或已修理了多长时间无关. 即时刻 t 以后系统发展的概率规律由 $X(t) = 0$ 还是 $X(t) = 1$ 所完全决定, 而与时刻 t 以前的历史无关. 还可类似地说明过程的时齐性.

对此马尔可夫过程, 我们有

$$\begin{cases} P_{00}(\Delta t) = P\{X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P_{01}(\Delta t) = P\{X(t + \Delta t) = 1 | X(t) = 0\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P_{10}(\Delta t) = P\{X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = 1\} = \mu \Delta t + o(\Delta t) \\ P_{11}(\Delta t) = P\{X(t + \Delta t) = 1 | X(t) = 1\} = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t) \end{cases} \tag{1}$$

我们先来证明 (1) 的第二式. 由引理 6.1.2, 在 Δt 时间内系统发生两次或两次以上状态变化的概率为 $o(\Delta t)$, 因此

$$\begin{aligned} P_{01}(\Delta t) &= P\{\Delta t\text{内恰发生一次故障}\,|X(0)=0\}+o(\Delta t)\\ &= P\{\Delta t\text{内至少发生一次故障}\,|X(0)=0\}+o(\Delta t)\end{aligned}$$

由于部件寿命分布的无记忆性, 立即得

$$P_{01}(\Delta t)=P\{X\leqslant\Delta t\}+o(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

而

$$P_{00}(\Delta t)=1-P_{01}(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

类似可证明 (1) 的其余各式. 图 6.1 表示 Δt 时间内系统状态转移的可能性. 进而可写出转移率矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

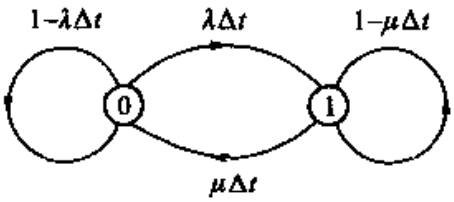


图 6.1

公式 (1) 与 §6.1 中 (7) 和 (10) 式的形式一致. 因此, 若令

$$P_j(t)=P\{X(t)=j\},\quad j=0,1$$

由 §6.1 中 (12) 式, 满足微分方程组

$$(P_0'(t),P_1'(t))=(P_0(t),\quad P_1(t))\boldsymbol{A} \tag{2}$$

或

$$\begin{cases}P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)\\ P_1'(t)=\lambda P_0(t)-\mu P_1(t)\end{cases} \tag{2'}$$

若时刻 $t=0$ 系统处于工作状态, 即初始条件是 $(P_0(0),P_1(0))=(1,0)$. 对 (2′) 的两端作 L 变换, 得线性方程组

$$\begin{cases}sP_0^*(s)-P_0(0)=-\lambda P_0^*(s)+\mu P_1^*(s)\\ sP_1^*(s)-P_1(0)=\lambda P_0^*(s)-\mu P_1^*(s)\end{cases}$$

利用初始条件, 解出

$$P_0^*(s) = \frac{s+\mu}{s(s+\lambda+\mu)} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{s+\lambda+\mu}$$

反演上式, 得到

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ P_1(t) = 1 - P_0(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{cases} \tag{3}$$

用 §6.1 的 (11) 式, 系统的瞬时可用度是

$$A(t) = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{4}$$

若时刻 $t=0$ 系统处于故障状态, 即初始条件是 $(P_0(0), P_1(0)) = (0,1)$, 则类似可得

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ P_1(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{cases} \tag{3'}$$

此时, 系统的瞬时可用度是

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{4'}$$

为求系统状态的稳态分布 π_0, π_1 和稳态可用度 A, 由定理 6.1.3, 只需解方程组

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - \mu\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \tag{5}$$

可解得

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \tag{6}$$

故系统稳态可用度是

$$A = \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \tag{7}$$

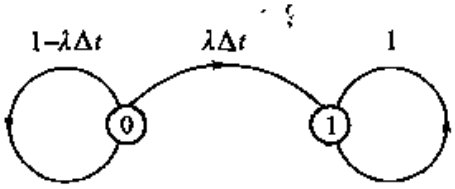


图 6.2

(6) 式和 (7) 式也可直接从 (3) 和 (4)(或 (3′) 和 (4′)) 中, 令 $t \to \infty$ 而得.

以下用 §§6.1.5 的方法来求系统的可靠度 $R(t)$. 我们令系统的故障状态 1 为吸收状态, 即令 $\mu = 0$. 这就构成一个新的马尔可夫过程 $\{\tilde{X}(t), t \geqslant 0\}$. 这个过程的状态转移图是图 6.2. 令 $Q_j(t) = P\{\tilde{X}(t) = j\}, j = 0, 1$, 则有

$$(Q_0'(t), Q_1'(t)) = (Q_0(t), Q_1(t)) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

设在时刻 $t = 0$, 系统处在工作状态. 即已知

$$Q_0(0) = 1, \quad Q_1(0) = 0$$

解 (8) 式, 得

$$Q_0(t) = Q_0(0)e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \tag{9}$$

因而系统的可靠度是

$$R(t) = Q_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{10}$$

系统首次故障前平均时间是

$$\mathrm{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{1}{\lambda} \tag{11}$$

公式 (10) 和 (11) 是十分显然的, 因为系统由一个部件构成, 所以, 系统的首次故障前时间分布也就是部件的寿命分布. 用上述求法只是为了说明 §§6.1.5 中的方法. 对于较复杂的系统, 只能用 §§6.1.5 的方法来求系统可靠度.

用 §6.1 的 (31) 式, 立即可得系统的瞬时故障频度

$$m(t) = P_0(t)a_{01} = \lambda P_0(t)$$

若时刻 0 系统处于状态 0, 则

$$m_0(t) = \lambda\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \tag{12}$$

系统在 $(0,t]$ 中的平均故障次数为

$$M_0(t)=\int_0^t m_0(u)du=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t+\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}] \tag{13}$$

系统稳态故障频度

$$M=\lim_{t\to\infty}m_0(t)=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \tag{14}$$

若时刻 0 系统处于状态 1, 则

$$m_1(t)=\lambda\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \tag{12'}$$

系统在 $(0,t]$ 中的平均故障次数为

$$M_1(t)=\int_0^t m_1(u)du=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t-\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}] \tag{13'}$$

系统稳态故障频度与 (14) 式相同.

用 §6.1 的 (35) 式, 立即得

$$\begin{cases}\mathrm{MUT}=\dfrac{1}{\lambda}\\ \mathrm{MDT}=\dfrac{1}{\mu}\\ \mathrm{MCT}=\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}\end{cases} \tag{15}$$

修理设备忙的状态只有状态 1, 即 $U=\{1\}$. 故时刻 t 修理设备忙的概率及其稳态概率分别为

$$\begin{cases}B(t)=P_1(t)\\ B=\pi_1\end{cases} \tag{16}$$

§6.3 串联系统

系统由 n 个部件串联而成. 第 i 个部件的寿命 X_i 的分布为 $1-e^{-\lambda_i t},t\geqslant 0$, 故障后的修理时间 Y_i 的分布为 $1-e^{-\mu_i t},t\geqslant 0$, 其中 $\lambda_i,\mu_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 若 n 个部件都正常工作, 则系统处于工作状态. 当某个部件发生故障, 则系统处于故障状态, 此时修理工立即对故障的部件进行修理, 其余部件停止工作. 当故

障的部件修复, 所有部件立即进人工作状态, 此时系统进人工作状态. 进一步假定, 所有随机变量是相互独立的, 故障部件修复后其寿命分布像新的一样.

为区别系统的不同情形, 我们定义:

状态 0: n 个部件都正常

状态 i: 第 i 个部件故障, 其余部件都正常,

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

显然,

$$E = \{0, 1, \cdots, n\}, \quad W = \{0\}, \quad F = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

令 $X(t)$ 表示时刻 t 系统所处的状态, 即令

$$X(t) = \begin{cases} 0, \text{若在时刻}t, n\text{个部件都正常} \\ i, \text{若在时刻}t, \text{第 } i\text{个部件故障}, \\ \quad \text{其余部件正常}, i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

可以证明, $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是状态空间为 E 的时齐马尔可夫过程.

类似于 §6.2, (1) 式, 可得 Δt 时间内不同状态之间的转移概率

$$\begin{cases} P_{0i}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \\ P_{i0}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t), & i = 1, 2, \cdots, n \\ P_{jk}(\Delta t) = o(\Delta t), & j,\ k \neq 0,\ j \neq k \end{cases} \tag{1}$$

以上最后一式是因为, 当 $j, k \neq 0, j \neq k$ 时, 从状态 j 出发必须经过状态 0 才能转到状态 k. 由引理 6.1.2, 在 Δt 内发生两次或两次以上状态变化的概率必为 $o(\Delta t)$. 由 (1) 立即可得

$$\begin{cases} P_{00}(\Delta t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \\ P_{jj}(\Delta t) = 1 - \mu_j \Delta t + o(\Delta t), \quad j = 1, 2, \cdots n \end{cases}$$

在 Δt 内系统的状态转移图可见图 6.3. 为了简便, 在图 6.3 中略去了系统停留在原状态的概率.

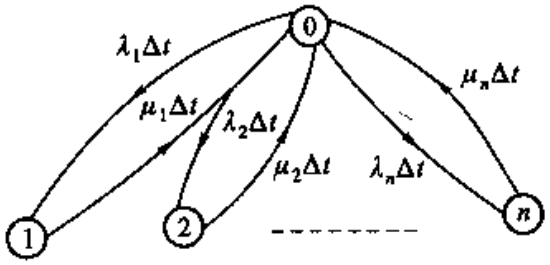


图 6.3

进而可得转移率矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\Lambda & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & 0 & 0 & \cdots & -\mu_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中

$$\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

下面, 从 (2) 式的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 出发, 用 §6.1 中步骤 4′) ~ 8′), 求系统可靠性的稳态指标和平均指标. 解线性方程组

$$\begin{cases} (\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_n)\boldsymbol{A}=(0,0,\cdots,0) \\ \pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_n=1 \end{cases}$$

即解

$$\begin{cases} -\Lambda\pi_0+\mu_1\pi_1+\cdots+\mu_n\pi_n=0 \\ \lambda_i\pi_0-\mu_i\pi_i=0, \quad i=1,2,\cdots,n \\ \pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_n=1 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \pi_0=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{-1} \\ \pi_i=\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}\pi_0, \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

系统稳态可用度是

$$A = \pi_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{-1} \tag{3}$$

直接用 §6.1 的公式, 可求得其它可靠性指标:

$$\begin{cases} \text{MTTFF} = \dfrac{1}{\Lambda} \\ M = \pi_0 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{0j} = \Lambda \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{-1} \\ \text{MUT} = \dfrac{1}{\Lambda} \\ \text{MDT} = \dfrac{1}{\Lambda} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right) \\ \text{MCT} = \dfrac{1}{\Lambda} \left(1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right) \\ B = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1 - \pi_0 = 1 - \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right]^{-1} \end{cases} \tag{4}$$

为求系统瞬时可用度和故障频度, 需解下列微分方程组

$$\begin{cases} (P_0'(t), P_1'(t), \cdots, P_n'(t)) = (P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t))\boldsymbol{A} \\ \text{初始条件 } (P_0(0), P_1(0), \cdots, P_n(0)) \end{cases} \tag{5}$$

假定时刻 0 系统处于正常状态, 即给定初始条件

$$(P_0(0), P_1(0), \cdots, P_n(0)) = (1, 0, \cdots, 0),$$

对 (5) 的两端作 L 变换, 得

$$\begin{cases} sP_0^*(s) - 1 = -\Lambda P_0^*(s) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i^*(s) \\ sP_i^*(s) = \lambda_i P_0^*(s) - \mu_i P_i^*(s), \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

解此线性方程组, 得到

$$\begin{cases} P_0^*(s) = \dfrac{1}{s + s\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s + \mu_i}} \\ P_i^*(s) = \dfrac{\lambda_i}{s + \mu_i} P_0^*(s), \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{6}$$

为了求系统的瞬时可用度和瞬时故障频度,这里,我们来讨论 (6) 式中 $P_0^*(s)$ 的反演问题. 将 $P_0^*(s)$ 改写成

$$P_0^*(s)=\frac{1}{s\left\{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{s+\mu_i}\right\}}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s+\mu_i)}{s\left\{\prod_{i=1}^{n}(s+\mu_i)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j\neq i}(s+\mu_j)\right\}}$$

令

$$H(s)=\prod_{i=1}^{n}(s+\mu_i)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j\neq i}(s+\mu_j)$$

$H(s)$ 是 n 次多项式. 不妨假设

$$0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\infty$$

显然有

$$H(-\mu_1)>0,\ H(-\mu_2)<0,\ H(-\mu_3)>0,\cdots,\ H(-\mu_n),\ H(-\infty)$$

它们是正负交替出现的. 因而 $H(s)$ 有 n 个负实根, 记为

$$s_n<s_{n-1}<\cdots<s_2<s_1<0$$

其中

$$-\mu_{i+1}<s_i<-\mu_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

($\mu_{n+1}=\infty$). 故

$$H(s)=\prod_{i-1}^{n}(s-s_i)$$

因此

$$P_0^*(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}(s+\mu_j)}{s\prod_{j=1}^{n}(s-s_j)}$$

将上式化为部分分式, 令

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\frac{\prod_{j=1}^{n}(s+\mu_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-s_j)} &= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j s+\beta_j}{s-s_j} \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{s_j}\cdot\frac{1}{s}+\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\frac{\beta_j}{s_j})\frac{1}{s-s_j}\end{aligned} \tag{7}$$

其中 α_j,β_j 为待定系数. 在 (7) 式两端同乘 s, 并令 $s\to 0$, 易得

$$\begin{aligned}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{s_j} &= \frac{\prod_{j=1}^{n}\mu_j}{\prod_{j=1}^{n}(-s_j)} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\mu_j}{H(0)} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{n}\mu_j}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j\neq i}\mu_j} = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\mu_j}}\end{aligned}$$

在 (7) 式两端同乘 $s-s_i$, 并令 $s=s_i$, 得

$$\alpha_i+\frac{\beta_i}{s_i} = \frac{1}{s_i}\frac{\prod_{j=1}^{n}(s_i+\mu_j)}{\prod_{j\neq i}(s_i-s_j)}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

将以上两式代入 (7) 的右端, 有

$$P_0^*(s) = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\mu_j}}\cdot\frac{1}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(s_i+\mu_j)}{s_i\prod_{j\neq i}(s_i-s_j)}\cdot\frac{1}{s-s_i}$$

反演得

$$P_0(t)=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\mu_j}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(s_i+\mu_j)}{s_i\prod_{j\neq i}(s_i-s_j)}e^{s_it} \tag{8}$$

系统瞬时可用度和瞬时故障频度分别为

$$\begin{cases}A(t)=P_0(t)\\ m(t)=\Lambda P_0(t)\end{cases} \tag{9}$$

易验证: 当 $t\to\infty$, 它们的极限值分别与 (3) 和 (4) 中的 M 是一致的.

为求系统的可靠度, 仅需解方程

$$\begin{cases}Q_0'(t)=-\Lambda Q_0(t)\\ Q_0(0)=1\end{cases}$$

立即解出

$$Q_0(t)=e^{-\Lambda t}$$

因此

$$\begin{cases}R(t)=e^{-\Lambda t}\\ \mathrm{MTTFF}=\dfrac{1}{\Lambda}\end{cases} \tag{10}$$

时刻 t 修理设备忙的概率及其稳态概率分别为

$$\begin{cases}B(t)=1-P_0(t)=\bar{A}(t)\\ B=\bar{A}\end{cases} \tag{11}$$

特别当 $n=2$ 时,(6) 式中的

$$P_0^*(s)=\frac{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{s[s^2+(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)s+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1+\mu_1\mu_2)]}$$

将其化为部分分式

$$\begin{aligned}P_0^*(s)&=\frac{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{s(s-s_1)(s-s_2)}\\ &=\frac{\mu_1\mu_2}{s_1s_2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{s_1^2+(\mu_1+\mu_2)s_1+\mu_1\mu_2}{s_1(s_1-s_2)}\cdot\frac{1}{s-s_1}\\ &\quad+\frac{s_2^2+(\mu_1+\mu_2)s_2+\mu_1\mu_2}{s_2(s_2-s_1)}\cdot\frac{1}{s-s_2}\end{aligned}$$

其中 s_1, s_2 是方程

$$s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)s + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2) = 0$$

的两个根

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}[-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2}] < 0$$

反演 $P_0^*(s)$, 得系统瞬时可用度和故障频度

$$\begin{cases} A(t) = P_0(t) = \dfrac{\mu_1\mu_2}{s_1 s_2} + \dfrac{s_1^2 + (\mu_1 + \mu_2)s_1 + \mu_1\mu_2}{s_1(s_1 - s_2)}e^{s_1 t} \\ \qquad + \dfrac{s_2^2 + (\mu_1 + \mu_2)s_2 + \mu_1\mu_2}{s_2(s_2 - s_1)}e^{s_2 t} \\ m(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) \end{cases} \tag{12}$$

其对应的稳态指标为

$$\begin{cases} A = \dfrac{\mu_1\mu_2}{s_1 s_2} = \dfrac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2} \\ M = \dfrac{\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2} \end{cases} \tag{13}$$

它们与 (3) 和 (4) 中 $n = 2$ 时的结果一致.

§6.4 并联系统

§6.4.1 n 个同型部件一个修理设备的情形

系统由 n 个同型部件和一个修理设备组成. 每个部件的寿命分布均为 $1 - e^{-\lambda t}, t \geqslant 0$, 故障后的修理时间分布均为

$$1 - e^{-\mu t}, t \geqslant 0, (\lambda, \mu > 0)$$

假定所有随机变量是相互独立的, 故障部件修复后其寿命分布与新部件一样. 由于只有一个修理设备, 它每次只能修理一个故障的部件. 当修理设备正在修理一个故障的部件时, 其它故障的部件必须等待修理. 当正在修的部件修复后, 修理设备立即转去修理其它的故障部件.

此系统共有 $n+1$ 个不同状态. 令

$$X(t)=j,\ \text{若时刻}\ t\ \text{系统中有}\ j\ \text{个故障的部件,}$$
$$\text{(包括正在修理的部件)}\quad j=0,1,\cdots,n$$

根据并联系统的定义, 状态 n 是系统的故障状态, 其余状态都是系统的工作状态. 因此,

$$E=\{0,1,\cdots,n\},\quad W=\{0,1,\cdots,n-1\},\quad F=\{n\}$$

可以证明 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 E 的时齐马尔可夫过程.

类似于前两节, 我们可得 Δt 时间内不同状态之间的转移概率

$$\begin{aligned}
&P_{j,j+1}(\Delta t)=(n-j)\lambda\Delta t+o(\Delta t), && j=0,1,\cdots,n-1\\
&P_{j,j-1}(\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t), && j=1,2,\cdots,n\\
&P_{jk}(\Delta t)=o(\Delta t), && \text{其它}\ j\neq k
\end{aligned}$$

由此立即可得

$$P_{jj}(\Delta t)=1-[(n-j)\lambda+\mu]\Delta t+o(\Delta t),\ j=0,1,\cdots,n$$

在 Δt 时间内系统的状态转移图见图 6.4, 进而可得转移率矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
-n\lambda & n\lambda & & & \\
\mu & -(n-1)\lambda-\mu & (n-1)\lambda & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & \mu & -\lambda-\mu & \lambda\\
& & & \mu & -\mu
\end{pmatrix}\qquad(1)$$

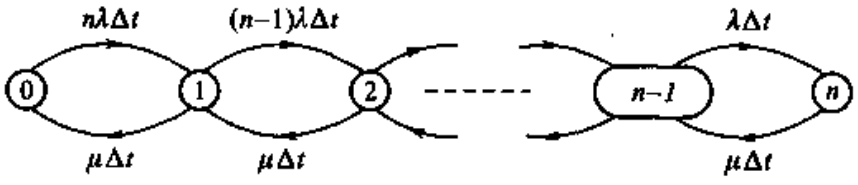


图 6.4

下面, 我们从转移率矩阵 $\boldsymbol{A}$ 出发, 用 §6.1 中步骤 4′) ~ 8′) 的方法求系统可靠性的稳态指标和平均指标.

解线性方程组

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_n)\boldsymbol{A}=(0,0,\cdots,0)\\ \pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_n=1\end{cases}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个三对角线矩阵, 此时 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个生灭过程. 因此直接用 §6.1, (20) 式, 得

$$\begin{aligned}\pi_j&=\frac{1}{(n-j)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}\\&=\frac{1}{(n-j)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-j}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k\right]^{-1},\\&\qquad j=0,1,\cdots,n\end{aligned}\tag{2}$$

由此可得系统的各种可靠性指标

$$\begin{cases}A=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\pi_j=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}\\ M=\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}\pi_j a_{jn}=\pi_{n-1}a_{n-1,n}\\ \qquad=\dfrac{\mu}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}\\ \mathrm{MUT}=\dfrac{A}{M}=\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k\\ \mathrm{MDT}=\dfrac{\bar{A}}{M}=\dfrac{1}{\mu}\\ \mathrm{MCT}=\dfrac{1}{M}=\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k\\ B=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\pi_j=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}\end{cases}\tag{3}$$

下面, 我们求系统首次故障前平均时间 MTTFF. 假定时刻 $t=0, n$ 个部件都是正常的. 即初始条件为

$$\boldsymbol{Q}_W(0)=(Q_0(0),Q_1(0),\cdots,Q_{n-1}(0))=(1,0,\cdots,0)$$

用定理 6.1.5, 我们有

$$\mathrm{MTTFF}=x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}$$

其中 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 满足方程组

$$(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\times\begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda & & & \\ \mu & -(n-1)\lambda-\mu & (n-1)\lambda & & \\ & \mu & -(n-2)\lambda-\mu & (n-1)\lambda & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & -2\lambda-\mu & 2\lambda \\ \boldsymbol{0} & & & \mu & -\lambda-\mu \end{pmatrix}$$

$$=(-1,0,\cdots,0)$$

我们用克拉默 (Cramer) 法则解此方程组, 其系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} -n\lambda & n\lambda & & & \\ \mu & -(n-1)\lambda-\mu & (n-1)\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & -2\lambda-\mu & 2\lambda \\ \boldsymbol{0} & & & \mu & -\lambda-\mu \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n n!\lambda^n$$

用 $(-1,0,\cdots,0)$ 代替 Δ 的第 $i+1$ 行, 得行列式 Δ_i, 并将 Δ_i 关于第 $i+1$ 行的元素展开, 就有

$$\Delta_i=(-1)^{i+1}\frac{n!}{(n-i)!}\lambda^i d_{n-i-1},\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

其中 $d_0=1$,

$$d_k=\begin{vmatrix} -k\lambda-\mu & k\lambda & & \mathbf{0} \\ \mu & -(k-1)\lambda-\mu & (k-1)\lambda & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \mu & -2\lambda-\mu & 2\lambda \\ \mathbf{0} & & \mu & -\lambda-\mu \end{vmatrix}$$

$$k=1,2,\cdots,n-1$$

将 d_k 按第一行展开, 可得递推关系式

$$\begin{cases} d_0=1,\ d_1=-\lambda-\mu \\ d_k=-(k\lambda+\mu)d_{k-1}-k\lambda\mu d_{k-2}, \quad k=2,3,\cdots,n-1 \end{cases}$$

由此递推公式, 用数学归纳法易证

$$d_k=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}j!\lambda^j\mu^{k-j}, \quad k=1,2,\cdots,n-1$$

因此方程组的解为

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=0,1,\cdots,n-1$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{MTTFF}&=\sum_{i=0}^{n-1}x_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_i \\ &=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{n!}{(n-i)!}\lambda^i d_{n-i-1} \\ &=\frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}\frac{j!}{(n-i)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-i-j} \\ &=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j!}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-j} \end{aligned} \tag{4}$$

以下, 我们仅对 $n=2$ 的情形求系统可靠性的瞬时指标. 假定时刻 0 两个

部件都是正常的. 此时, $P_j(t), j=0,1,2$ 满足微分方程组

$$\begin{cases} (P_0'(t),P_1'(t),P_2'(t))=(P_0(t),P_1(t),P_2(t))\begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \\ (P_0(0),P_1(0),P_2(0))=(1,0,0) \end{cases} \tag{5}$$

对以上微分方程组两端作 L 变换, 并利用初始条件, 可解出

$$\begin{cases} P_0^*(s)=\dfrac{1}{s\Delta(s)}[(s+\lambda+\mu)(s+\mu)-\lambda\mu] \\ \qquad\quad =\dfrac{s^2+(\lambda+2\mu)s+\mu^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} \\ P_1^*(s)=\dfrac{1}{s\Delta(s)}[2\lambda(s+\mu)]=\dfrac{2\lambda s+2\lambda\mu}{s(s-s_1)(s-s_2)} \\ P_2^*(s)=\dfrac{2\lambda^2}{s\Delta(s)}=\dfrac{2\lambda^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} \end{cases}$$

其中

$$\Delta(s)=s^2+(3\lambda+2\mu)s+(2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2)$$

s_1,s_2 是 $\Delta(s)=0$ 的两个根

$$s_1,\ s_2=\frac{1}{2}[-(3\lambda+2\mu)\pm\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}]<0$$

对以上三个有理分式分别化为部分分式, 然后反演, 可得

$$\begin{cases} P_0(t)=\dfrac{\mu^2}{s_1s_2}+\dfrac{s_1^2+(\lambda+2\mu)s_1+\mu^2}{s_1(s_1-s_2)}e^{s_1t} \\ \qquad\quad +\dfrac{s_2^2+(\lambda+2\mu)s_2+\mu^2}{s_2(s_2-s_1)}e^{s_2t} \\ P_1(t)=\dfrac{2\lambda\mu}{s_1s_2}+\dfrac{2\lambda s_1+2\lambda\mu}{s_1(s_1-s_2)}e^{s_1t}+\dfrac{2\lambda s_2+2\lambda\mu}{s_2(s_2-s_1)}e^{s_2t} \\ P_2(t)=\dfrac{2\lambda^2}{s_1s_2}+\dfrac{2\lambda^2}{s_1(s_1-s_2)}e^{s_1t}+\dfrac{2\lambda^2}{s_2(s_2-s_1)}e^{s_2t} \end{cases} \tag{6}$$

因此, 系统的瞬时可用度是

$$A(t)=1-P_2(t)=\frac{2\lambda\mu+\mu^2}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}-\frac{2\lambda^2(s_2e^{s_1t}-s_1e^{s_2t})}{s_1s_2(s_1-s_2)} \tag{7}$$

系统稳态可用度是

$$A = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{2\lambda\mu + \mu^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \tag{8}$$

为求系统的可靠度, 只需解微分方程组

$$\begin{cases} (Q_0'(t), Q_1'(t)) = (Q_0(t), Q_1(t)) \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda \\ \mu & -\lambda-\mu \end{pmatrix} \\ (Q_0(0), Q_1(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

对此式两端作 L 变换, 可解出

$$\begin{cases} Q_0^*(s) = \dfrac{s+\lambda+\mu}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2} \\ Q_1^*(s) = \dfrac{2\lambda}{s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2} \end{cases}$$

将以上两式相加, 并化成部分分式, 得

$$Q_0^*(s) + Q_1^*(s) = \frac{s_1'+3\lambda+\mu}{s_1'-s_2'} \cdot \frac{1}{s-s_1'} + \frac{s_2'+3\lambda+\mu}{s_2'-s_1'} \cdot \frac{1}{s-s_2'} \tag{9}$$

其中 s_1', s_2' 是方程 $s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2=0$ 的两个根

$$s_1', s_2' = \frac{1}{2}\left[-(3\lambda+\mu) \pm \sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}\right] < 0$$

将 (9) 式反演, 可得系统可靠度

$$\begin{aligned} R(t) &= Q_0(t) + Q_1(t) \\ &= \frac{s_1'+3\lambda+\mu}{s_1'-s_2'} e^{s_1't} + \frac{s_2'+3\lambda+\mu}{s_2'-s_1'} e^{s_2't} \\ &= \frac{1}{s_1'-s_2'}(s_1'e^{s_2't} - s_2'e^{s_1't}) \end{aligned} \tag{10}$$

因此

$$\mathrm{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{-(s_1'+s_2')}{s_1's_2'} = \frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2} \tag{11}$$

用 §6.1, (31) 式, 系统的瞬时故障频度是

$$\begin{aligned} m(t) &= P_1(t)a_{12} = \lambda P_1(t) \\ &= \frac{2\lambda^2\mu}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2} + \frac{2\lambda^2(s_1+\mu)}{s_1(s_1-s_2)}e^{s_1t} + \frac{2\lambda^2(s_2+\mu)}{s_2(s_2-s_1)}e^{s_2t} \end{aligned} \tag{12}$$

系统稳态故障频度和 $(0,t]$ 时间内系统平均故障次数

$$\begin{cases} M=\lim\limits_{t\to\infty}m(t)=\dfrac{2\lambda^2\mu}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2} \\ M(t)=\displaystyle\int_0^t m(u)du \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &=\frac{2\lambda^2\mu}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}t+\frac{2\lambda^2(s_1+\mu)}{s_1^2(s_2-s_1)}(1-e^{s_1t}) \\ &+\frac{2\lambda^2(s_2+\mu)}{s_2^2(s_1-s_2)}(1-e^{s_2t}) \end{aligned}$$

时刻 t 修理设备忙的概率及其稳态概率为

$$\begin{cases} B(t)=P_1(t)+P_2(t) \\ B=\lim\limits_{t\to\infty}B(t)=\dfrac{2\lambda^2+2\lambda\mu}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2} \end{cases} \tag{14}$$

§6.4.2 n 个同型部件 K 个修理设备的情形

假设有 K 个修理设备 $(1\leqslant K\leqslant n)$, 其余假设完全同 §6.4.1. 此时, 我们有

$$\begin{cases} P_{j,j+1}(\Delta t)=(n-j)\lambda\Delta t+o(\Delta t), \quad j=0,1,\cdots,n-1 \\ P_{j,j-1}(\Delta t)=\begin{cases} j\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=1,2,\cdots,K \\ K\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=K+1,\cdots,n \end{cases} \\ P_{jj}(\Delta t)=\begin{cases} 1-[(n-j)\lambda+j\mu]\Delta t+o(\Delta t), & j=0,1,\cdots,K \\ 1-[(n-j)\lambda+K\mu]\Delta t+o(\Delta t), & j=K+1,\cdots,n \end{cases} \\ P_{jk}(\Delta t)=o(\Delta t), \quad \text{其它} \end{cases}$$

因此, 转移率矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda & & & & \\ \mu & -(n-1)\lambda-\mu & (n-1)\lambda & & & \\ & 2\mu & -(n-2)\lambda-2\mu & (n-2)\lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & K\mu & -(n-K)\lambda-K\mu & (n-K)\lambda & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & K\mu & -\lambda-K\mu & \lambda \\ & & & & K\mu & -K\mu \end{pmatrix} \tag{15}$$

是一个三对角线的矩阵. 用 §6.1 中 (20), 此时

$$\lambda_j = (n-j)\lambda, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1$$
$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1, \cdots, K \\ K\mu, & j = K+1, \cdots, n \end{cases}$$

因此

$$\pi_j = \begin{cases} \left[\sum\limits_{i=0}^{K} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum\limits_{i=K+1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!K!K^{i-K}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right]^{-1}, & j = 0 \\ \binom{n}{j} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, & j = 1, 2, \cdots, K \\ \frac{n!}{(n-j)!K!K^{j-K}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, & j = K+1, \cdots, n \end{cases} \tag{16}$$

用 §6.1 的公式

$$\begin{cases} A = 1 - \pi_n \\ M = \pi_{n-1}\lambda = \pi_n K\mu \\ \mathrm{MUT} = \dfrac{1-\pi_n}{\pi_n K\mu} \\ \mathrm{MDT} = \dfrac{1}{K\mu} \\ \mathrm{MCT} = \dfrac{1}{M} \end{cases} \tag{17}$$

下面, 我们只对 $n = 2$ 的情形求各项瞬时可靠性指标. 当 $K = 1$ 时, 我们在 §§6.4.1 已讨论过. 当 $n = 2, K = 2$, 并假定时刻 0 两个部件都正常, 此时, $P_j(t), j = 0, 1, 2$. 满足方程组

$$\begin{cases} (P_0'(t), P_1'(t), P_2'(t)) = (P_0(t), P_1(t), P_2(t)) \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix} \\ (P_0(0), P_1(0), P_2(0)) = (1, 0, 0) \end{cases}$$

用类似于解方程组 (5) 的方法, 可解得

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{2\mu^2}{s_1 s_2} + \dfrac{s_1^2 + (\lambda+3\mu)s_1 + 2\mu^2}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} \\ \qquad\quad + \dfrac{s_2^2 + (\lambda+3\mu)s_2 + 2\mu^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_1(t) = \dfrac{4\lambda\mu}{s_1 s_2} + \dfrac{2\lambda s_1 + 4\lambda\mu}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \dfrac{2\lambda s_2 + 4\lambda\mu}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_2(t) = \dfrac{2\lambda^2}{s_1 s_2} + \dfrac{2\lambda^2}{s_1(s_1 \quad s_2)} e^{s_1 t} + \dfrac{2\lambda^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \end{cases} \tag{18}$$

其中 s_1, s_2 是方程 $s^2 + 3(\lambda+\mu)s + 2(\lambda+\mu)^2 = 0$ 的两个根

$$s_1 = -2(\lambda+\mu), \quad s_2 = -(\lambda+\mu)$$

因此

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} + \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t} + \dfrac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ P_1(t) = \dfrac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} - \dfrac{2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t} + \dfrac{2\lambda(\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ P_2(t) = \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t} - \dfrac{2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{cases} \tag{18'}$$

系统的瞬时可用度为

$$\begin{aligned} A(t) = 1 - P_2(t) &= \frac{2\lambda\mu + \mu^2}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} \\ &\quad \times \left[e^{-2(\lambda+\mu)t} - 2e^{-(\lambda+\mu)t} \right] \end{aligned} \tag{19}$$

瞬时故障频度为

$$\begin{aligned} m(t) &= \lambda P_1(t) \\ &= \frac{2\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^2} e^{-2(\lambda+\mu)t} + \frac{2\lambda^2(\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned} \tag{20}$$

系统稳态可用度和故障频度是

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \dfrac{2\lambda\mu + \mu^2}{(\lambda+\mu)^2} \\ M = \lim\limits_{t\to\infty} m(t) = \dfrac{2\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^2} \end{cases} \tag{21}$$

显然, 系统可靠度 $R(t)$ 和 MTTFF 与一个修理设备的情形完全一样, 仍分别由 (10) 和 (11) 给出.

在本章以后的各部分所讨论的系统中, 我们均假定只有一个修理设备. 对于多个修理设备的情形, 仅矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的系数稍有变化, 讨论的方法完全相同.

§6.4.3 两个不同型部件的情形

系统由两个不同型部件和一个修理设备组成. 部件 i 的寿命分布是 $1-e^{-\lambda_i t}, t \geqslant 0$, 其故障后的修理时间分布是 $1-e^{-\mu_i t}, t \geqslant 0, \lambda_i, \mu_i > 0, i = 1, 2$. 其余假设同 §§6.4.1. 这个系统共有五个不同的状态:

状态 0: 部件 1 和部件 2 都在工作.

状态 1: 部件 1 在工作, 部件 2 在修理.

状态 2: 部件 2 在工作, 部件 1 在修理.

状态 3: 部件 1 在修理, 部件 2 待修.

状态 4: 部件 2 在修理, 部件 1 待修.

状态 3 和 4 是系统的故障状态. 故 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}, W = \{0, 1, 2\}, F = \{3, 4\}$.

令 $X(t) = j$, 若时刻 t 系统处于状态 $j, j = 0, 1, \cdots, 4$. 可证 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是时齐马尔可夫过程. Δt 时间内系统不同状态之间的转移概率 $P_{ij}(\Delta t), i \neq j$, 表示在系统的状态转移图中 (见图 6.5). 因此, 立即可写出转移率矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\lambda_1 - \mu_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -\lambda_2 - \mu_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

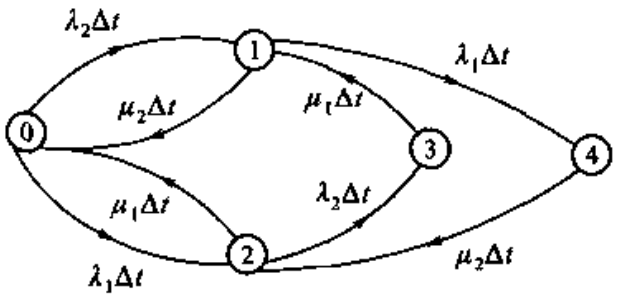


图 6.5

从 (22) 式的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 出发, 我们求系统可靠性的稳态指标和平均指标. 解方程组

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)\boldsymbol{A}=(0,0,0,0,0)\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases}$$

得系统各状态的稳态分布

$$\begin{cases}\pi_1=\dfrac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)}{\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2}\pi_0\\ \pi_2=\dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2}\pi_0\\ \pi_3=\dfrac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)}{\mu_1(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)}\pi_0\\ \pi_4=\dfrac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)}{\mu_2(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)}\pi_0\\ \pi_0=[\mu_1\mu_2(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)]/[\lambda_1\mu_2(\lambda_2+\mu_1)\\ \qquad\times(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)+\lambda_2\mu_1(\lambda_1+\mu_2)(\lambda_1\\ \qquad+\lambda_2+\mu_1)+\mu_1\mu_2(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)]\end{cases}\tag{23}$$

用 §6.1 的公式, 立即可得

$$\begin{cases}A=\pi_0+\pi_1+\pi_2\\ M=\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2\\ \mathrm{MUT}=\dfrac{A}{M}\\ \mathrm{MDT}=\dfrac{\bar{A}}{M}\\ \mathrm{MCT}=\dfrac{1}{M}\\ B=1-\pi_0\end{cases}\tag{24}$$

用定理 6.1.5 来求系统的 MTTFF. 若时刻 0 两个部件都正常, 解方程组

$$\begin{aligned}&(x_0,x_1,x_2)\begin{pmatrix}-\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1\\ \mu_2 & -\lambda_1-\mu_2 & 0\\ \mu_1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1\end{pmatrix}\\ &=(-1,0,0)\end{aligned}$$

用克拉默法则和行列式的性质

$$\mathrm{MTTFF} = x_0 + x_1 + x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 \\ \mu_1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 \end{vmatrix}} \tag{25}$$

$$= \frac{\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)+\lambda_2(\lambda_2+\mu_1)+(\lambda_1+\mu_2)(\lambda_2+\mu_1)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)}$$

特别当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda, \mu_1-\mu_2=\mu$ 时, (25) 与 (11) 式一致.

§6.5 表决系统

我们在这一节讨论 $k/n(G)$ 表决系统. 系统由 n 个同型部件和一个修理设备组成, 每个部件的寿命分布均为 $1-e^{-\lambda t}$, $t\geqslant 0$, 故障后的修理时间均为 $1-e^{-\mu t}, t\geqslant 0, \lambda, \mu>0$. 假定所有这些随机变量相互独立, 故障部件经修复后其寿命分布与新部件一样. 由于只有一个修理设备, 当它正在修理一个故障部件时, 其它故障部件必须等待修理. 由 $k/n(G)$ 表决系统的基本定义, 我们有:

1) k 个或 k 个以上部件正常工作时, 系统正常工作 $(1\leqslant k\leqslant n)$.

2) 当有 $n-k+1$ 个部件故障时, 系统故障. 在系统故障期内, $k-1$ 个正常的部件停止工作, 不再发生故障. 直到正在修理的部件修理完成, k 个正常的部件同时进入工作状态, 此时系统重新进入工作状态.

显然, $1/n(G)$ 系统就是 n 个部件的并联系统, $n/n(G)$ 系统就是 n 个部件的串联系统.

将系统中故障的部件个数定义为系统的状态, 则系统共有 $n-k+2$ 个不同状态. 由于条件 2), 故障的部件个数不能多于 $n-k+1$, 且状态 $n-k+1$ 是系统的故障状态. 因此 $E=\{0,1,\cdots,n-k+1\}, W=\{0,1,\cdots,n-k\}, F=\{n-k+1\}$.

令 $X(t)=j$, 若时刻 t 系统处于状态 j, $j=0,1,\cdots,n-k+1$. $X(t)=j$ 表示时刻 t 系统有 j 个故障的部件 (包括正在修理的部件). 可以证明 $\{X(t), t\geqslant 0\}$

是状态空间为 E 的时齐马尔可夫过程. Δt 内的状态转移概率为

$$\begin{cases} P_{j,j+1}(\Delta t) = (n-j)\lambda\Delta t + o(\Delta t), & j = 0, 1, \cdots, n-k \\ P_{j,j-1}(\Delta t) = \mu\Delta t + o(\Delta t), & j = 1, 2, \cdots, n-k+1 \\ P_{jk}(\Delta t) = o(\Delta t), & \text{其它} j \neq k \end{cases} \tag{1}$$

图 6.6 为系统的状态转移概率图. 转移率矩阵为

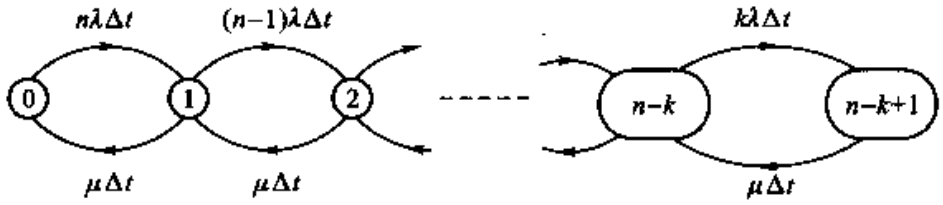


图 6.6

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda & & & \mathbf{0} \\ \mu & -(n-1)\lambda-\mu & (n-1)\lambda & & \\ & \mu & -(n-2)\lambda-\mu & (n-2)\lambda & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & -k\lambda-\mu & k\lambda \\ \mathbf{0} & & \mu & & -\mu \end{pmatrix} \tag{2}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三对角线的, 直接用 §6.1(20), 得

$$\begin{aligned} \pi_j &= \frac{\dfrac{1}{(n-j)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k+1}\frac{1}{(n-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \\ &= \frac{\dfrac{1}{(n-j)!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{n-j}}{\displaystyle\sum_{i=k-1}^{n}\frac{1}{i!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-k+1 \end{aligned} \tag{3}$$

因此系统可靠性的稳态指标和平均指标是

$$\begin{cases} A=\sum\limits_{j=0}^{n-k}\pi_j=\dfrac{\sum\limits_{i=k}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^i}{\sum\limits_{i=k-1}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^i} \\ M=k\lambda\pi_{n-k}=\dfrac{\dfrac{\mu}{(k-1)!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{k-1}}{\sum\limits_{i=k-1}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^i} \\ \mathrm{MUT}=\dfrac{A}{M}=\dfrac{(k-1)!}{\mu}\sum\limits_{i=k}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{i-k+1} \\ \mathrm{MDT}=\dfrac{\bar{A}}{M}=\dfrac{1}{\mu} \\ \mathrm{MCT}=\dfrac{(k-1)!}{\mu}\sum\limits_{i=k-1}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{i-k+1} \\ B=\sum\limits_{j=1}^{n-k+1}\pi_j=\dfrac{\sum\limits_{i=k-1}^{n-1}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^i}{\sum\limits_{i=k-1}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^i} \end{cases} \tag{4}$$

以下我们仅对 $k=n-1$ 的情形求系统的可靠性瞬时指标. 对于 $n-1/n(G)$ 系统, 若假设时刻 0 n 个部件都是正常的. 此时, $P_j(t), j=0,1,2$ 满足方程组

$$\begin{cases} (P_0'(t),P_1'(t),P_2'(t))=(P_0(t),P_1(t),P_2(t)) \begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda & 0 \\ \mu & -(n-1)\lambda-\mu & (n-1)\lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \\ (P_0(0),P_1(0),P_2(0))=(1,0,0) \end{cases} \tag{5}$$

这方程组与 §6.4, (5) 的形式一样, 用类似的解法, 可得到

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu^2}{s_1 s_2} + \dfrac{s_1^2 + [(n-1)\lambda + 2\mu]s_1 + \mu^2}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} \\ \qquad\quad + \dfrac{s_2^2 + [(n-1)\lambda + 2\mu]s_2 + \mu^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_1(t) = \dfrac{n\lambda\mu}{s_1 s_2} + \dfrac{n\lambda(s_1 + \mu)}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \dfrac{n\lambda(s_2 + \mu)}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_2(t) = \dfrac{n(n-1)\lambda^2}{s_1 s_2} + \dfrac{n(n-1)\lambda^2}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \dfrac{n(n-1)\lambda^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \end{cases} \tag{6}$$

其中, s_1, s_2 是方程

$$s^2 + [(2n-1)\lambda + 2\mu]s + [n(n-1)\lambda^2 + n\lambda\mu + \mu^2] = 0$$

的两个根

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}\{-[(2n-1)\lambda + 2\mu] \pm \sqrt{\lambda^2 + 4(n-1)\lambda\mu}\} < 0$$

因此, 系统的瞬时可用度是

$$A(t) = 1 - P_2(t) = \frac{n\lambda\mu + \mu^2}{s_1 s_2} - \frac{n(n-1)\lambda^2(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})}{s_1 s_2(s_1 - s_2)} \tag{7}$$

稳态可用度为

$$A = \frac{n\lambda\mu + \mu^2}{s_1 s_2} = \frac{n\lambda\mu + \mu^2}{n(n-1)\lambda^2 + n\lambda\mu + \mu^2} \tag{8}$$

系统的瞬时故障频度为

$$m(t) = (n-1)\lambda P_1(t) \tag{9}$$

稳态故障频度

$$M = \lim_{t\to\infty} m(t) = \frac{n(n-1)\lambda^2\mu}{n(n-1)\lambda^2 + n\lambda\mu + \mu^2} \tag{10}$$

$(0, t]$ 内系统平均故障次数为

$$\begin{aligned} M(t) = {} & \frac{n(n-1)\lambda^2\mu}{s_1 s_2} t + \frac{n(n-1)\lambda^2(s_1 + \mu)}{s_1^2(s_2 - s_1)}(1 - e^{s_1 t}) \\ & + \frac{n(n-1)\lambda^2(s_2 + \mu)}{s_2^2(s_1 - s_2)}(1 - e^{s_2 t}) \end{aligned} \tag{11}$$

为求系统的可靠度, 只需解方程组

$$\begin{cases} (Q_0'(t), Q_1'(t)) = (Q_0(t), Q_1(t)) \begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda \\ \mu & -(n-1)\lambda - \mu \end{pmatrix} \\ (Q_0(0), Q_1(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

此方程组与 §6.4(9) 的形式一样, 可类似解得

$$R(t) = Q_0(t) + Q_1(t) = \frac{1}{s_1' - s_2'}(s_1' e^{s_2' t} - s_2' e^{s_1' t}) \tag{12}$$

其中, s_1', s_2' 是方程

$$s^2 + [(2n-1)\lambda + \mu]s + n(n-1)\lambda^2 = 0$$

的两个根

$$s_1', s_2' = \frac{1}{2}\{-[(2n-1)\lambda + \mu] \pm \sqrt{\lambda^2 + 2(2n-1)\lambda\mu + \mu^2}\} < 0$$

进一步可得

$$\mathrm{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{(2n-1)\lambda + \mu}{n(n-1)\lambda^2} \tag{13}$$

对于多个修理设备的情形, 可以类似得到相应的各种可靠性指标.

§6.6 冷贮备系统

§6.6.1 n 个同型部件的情形

系统由 n 个同型部件和一个修理设备组成. 当 n 个部件均正常时, 则一个部件工作, 其余 $n-1$ 个部件作冷贮备. 工作部件发生故障时, 贮备部件之一立即去替换而转为工作状态, 修理设备则立即对故障的部件进行修理. 当修理设备正在修理某个故障部件时, 其它故障部件必须等待修理. 修好的部件, 或进入冷贮备状态 (若此时某个部件正在工作), 或立即进入工作状态 (若此时其它所有部件都已故障). 在这一节, 我们都假定转换开关是完全可靠的, 开关转换是瞬时的.

假设这 n 个部件的寿命分布均为 $1-e^{-\lambda t}, t \geqslant 0$, 故障后的修理时间分布均为 $1-e^{-\mu t}, t \geqslant 0, \lambda, \mu > 0$, 所有这些随机变量都相互独立, 且故障的部件修复后的寿命分布与新的部件相同.

系统共有 $n+1$ 个不同的状态. 令

$$x(t) = j, \quad \text{若时刻 } t \text{ 系统中有 } j \text{ 个故障的部件（包括正在修理的部件）}, \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

显然

$$E = \{0, 1, \cdots, n\}, \quad W = \{0, 1, \cdots, n-1\}, \quad F = \{n\}$$

可以证明 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是状态空间 E 的时齐马尔可夫过程.

对这系统, 有

$$\begin{cases} P_{j,j+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), & j = 0, 1, \cdots, n-1 \\ P_{j,j-1}(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t), & j = 1, 2, \cdots, n \\ P_{jk}(\Delta t) = o(\Delta t), & \text{其它 } j \neq k \end{cases} \tag{1}$$

在 Δt 时间内系统的状态转移图见图 6.7, 进而可得转移率矩阵

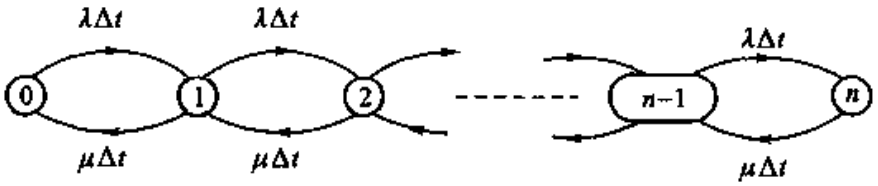


图 6.7

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \mathbf{0} \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & \\ & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ \mathbf{0} & & & & \mu & -\mu \end{pmatrix} \tag{2}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三对角线的, 可用 §6.1, (20) 式得到

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{\mu^{n+1} - \lambda\mu^n}{\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}}, \quad j = 0, 1, \cdots, n \tag{3}$$

因此

$$\begin{cases} A = 1 - \pi_n = \dfrac{\mu^{n+1} - \lambda^n \mu}{\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}} \\ M = \lambda \pi_{n-1} = \dfrac{\lambda^n \mu^2 - \lambda^{n+1} \mu}{\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}} \\ \mathrm{MUT} = \dfrac{\mu^{n+1} - \lambda^n \mu}{\lambda^n \mu^2 - \lambda^{n+1} \mu} = \dfrac{\mu^n - \lambda^n}{\lambda^n \mu - \lambda^{n+1}} \\ \mathrm{MDT} = \dfrac{1}{\mu} \\ \mathrm{MCT} = \dfrac{\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}}{\lambda^n \mu^2 - \lambda^{n+1} \mu} \\ B = 1 - \pi_0 = \dfrac{\lambda \mu^n - \lambda^{n+1}}{\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}} \\ \mathrm{MTTFF} = \dfrac{1}{\mu} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-i-j} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\mu^{n+1} - (n+1)\lambda^n \mu + n\lambda^{n+1}}{\lambda^n (\mu - \lambda)^2} \end{cases} \tag{4}$$

其中 MTTFF 可用 §6.4,(4) 式一样求得. 当 $\lambda = \mu$ 时, 上述诸式右端按 $\mu \to \lambda$ 的极限来理解.

以下, 仅对 $n = 2$ 的情形求系统可靠性的瞬时指标.

系统由两个同型部件和一个修理设备组成, 且假定时刻 0 两个部件都是正常的. 此时, $P_j(t), j = 0, 1, 2$, 满足微分方程组

$$\begin{cases} (P_0'(t), P_1'(t), P_2'(t)) = (P_0(t), P_1(t), P_2(t)) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -\lambda - \mu & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \\ (P_0(0), P_1(0), P_2(0)) = (1, 0, 0) \end{cases} \tag{5}$$

这方程组可与 §6.4, (5) 一样求解, 得到

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu^2}{s_1 s_2} + \dfrac{s_1^2 + (\lambda+2\mu)s_1 + \mu^2}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} \\ \qquad\quad + \dfrac{s_2^2 + (\lambda+2\mu)s_2 + \mu^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_1(t) = \dfrac{\lambda\mu}{s_1 s_2} + \dfrac{\lambda(s_1+\mu)}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \dfrac{\lambda(s_2+\mu)}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_2(t) = \dfrac{\lambda^2}{s_1 s_2} + \dfrac{\lambda^2}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \dfrac{\lambda^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \end{cases} \tag{6}$$

其中 s_1, s_2 是方程

$$s^2 + 2(\lambda+\mu)s + (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) = 0$$

的两个根

$$s_1, s_2 = -(\lambda+\mu) \pm \sqrt{\lambda\mu} < 0$$

因此系统的瞬时可用度和稳态可用度分别为

$$A(t) = 1 - P_2(t) = \frac{\lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} - \frac{\lambda^2(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)} \tag{7}$$

$$A = \frac{\lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} \tag{8}$$

系统的瞬时故障频度和稳态故障频度分别为

$$m(t) = \lambda P_1(t) \tag{9}$$

$$M = \lim_{t\to\infty} m(t) = \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} \tag{10}$$

$(0, t]$ 内系统平均故障次数为

$$\begin{aligned} M(t) = \int_0^t m(u)du &= \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} t \\ &+ \frac{\lambda^2(s_1+\mu)}{s_1^2(s_2 - s_1)}(1 - e^{s_1 t}) + \frac{\lambda^2(s_2+\mu)}{s_2^2(s_1 - s_2)}(1 - e^{s_2 t}) \end{aligned} \tag{11}$$

为了求系统的可靠度, 我们解下列微分方程组

$$\begin{cases} (Q_0'(t), Q_1'(t)) = (Q_0(t), Q_1(t)) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix} \\ (Q_0(0), Q_1(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

类似于 §6.4,(10) 式, 可解得

$$R(t) = Q_0(t) + Q_1(t) = \frac{1}{s_1' - s_2'}(s_1' e^{s_2' t} - s_2' e^{s_1' t}) \tag{12}$$

其中, s_1', s_2' 是方程

$$s^2 + (2\lambda + \mu)s + \lambda^2 = 0$$

的两个根

$$s_1', s_2' = \frac{1}{2}[-(2\lambda + \mu) \pm \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}] < 0$$

因此

$$\mathrm{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2} \tag{13}$$

§6.6.2 两个不同型部件的情形

系统由两个不同型部件和一个修理设备组成. 部件 i 的工作寿命分布为 $1 - e^{-\lambda_i t}, t \geqslant 0$, 故障后的修理时间分布为 $1 - e^{-\mu_i t}, t \geqslant 0, \lambda_i, \mu_i > 0, i = 1, 2$. 其余假设同 §§6.6.1 的情形. 这系统共有六个不同的状态:

状态 0: 部件 1 在工作, 部件 2 贮备.

状态 1: 部件 2 在工作, 部件 1 贮备.

状态 2: 部件 1 在工作, 部件 2 在修理.

状态 3: 部件 2 在工作, 部件 1 在修理.

状态 4: 部件 1 在修理, 部件 2 待修.

状态 5: 部件 2 在修理, 部件 1 待修.

显然, 状态 4 和状态 5 是系统的故障状态, 因此

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad W = \{0, 1, 2, 3\}, \quad F = \{4, 5\}.$$

令

$$X(t) = j, \quad \text{若时刻} t \text{系统处于状态} j, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

可证 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是状态空间为 E 的时齐马尔可夫过程. 我们可求得 Δt 时间内系统不同状态之间的转移概率 $P_{ij}(\Delta t), i \neq j$, 并表示在状态转移图 6.8 中. 进

而可写出转移率矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

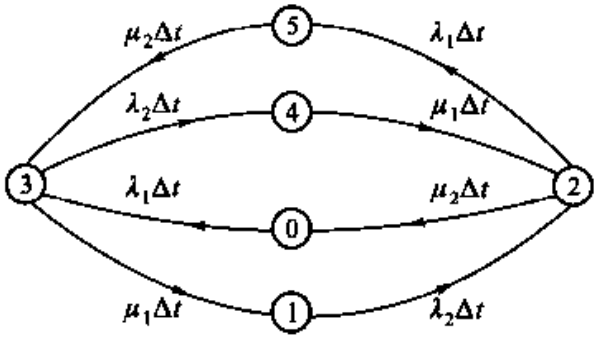


图 6.8

对这个系统, 我们只求系统可靠性的稳态指标和平均指标. 解方程组

$$\begin{cases} (\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5)\boldsymbol{A}=(0,0,\cdots,0) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5=1 \end{cases}$$

得系统各状态的稳态概率分布

$$\begin{cases} \pi_1=\dfrac{\lambda_1\mu_1(\lambda_1+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_2=\dfrac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_0 \\ \pi_3=\dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_4=\dfrac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_5=\dfrac{\lambda_1^2}{\mu_2^2}\pi_0 \\ \pi_0=\left[1+\dfrac{\lambda_1}{\mu_2}+\dfrac{\lambda_1^2}{\mu_2^2}+\dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}+\dfrac{\lambda_1\mu_1(\lambda_1+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}\right]^{-1} \end{cases} \tag{15}$$

因此

$$\begin{cases} A=\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 \\ M=\lambda_1\pi_2+\lambda_2\pi_3 \\ \mathrm{MUT}=\dfrac{A}{M} \\ \mathrm{MDT}=\dfrac{\bar{A}}{M} \\ \mathrm{MCT}=\dfrac{1}{M} \\ B=\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5 \end{cases} \tag{16}$$

若时刻 0 两个部件都是正常的, 下面来求MTTFF. 用定理 6.1.5, 列出线性方程组

$$\begin{aligned}(x_0,x_1,x_2,x_3)&\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -(\lambda_2+\mu_1) \end{pmatrix} \\ &=(-1,0,0,0)\end{aligned}$$

其系数行列式为

$$\Delta=\lambda_1\lambda_2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)$$

用克拉默法则和行列式性质, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{MTTFF}&=x_0+x_1+x_2+x_3 \\ &=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 \\ -1 & \mu_1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 \end{vmatrix} \\ &=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\mu_2)(\lambda_2+\mu_1)+\lambda_1\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)}\end{aligned} \tag{17}$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda,\mu_1=\mu_2=\mu$ 时, 上式与 (13) 式一致.

§6.7 温贮备系统

§6.7.1 n 个同型部件的情形

系统由 n 个同型部件和一个修理设备组成. 假定所有部件工作故障和贮备故障后的修理时间分布相同.

当系统中 n 个部件都正常时, 则一个部件处于工作状态, 其余部件均处于温贮备状态. 当工作部件发生故障时, 贮备部件之一立即去替换而转为工作状态; 当贮备部件之一发生故障时, 工作部件继续工作. 因为只有一个修理设备, 所以当有两个或两个以上的部件故障时, 只能修理其中之一, 其余故障部件处于待修状态, 假定所有部件的工作寿命分布为 $1-e^{-\lambda t}, t\geqslant 0, (\lambda>0)$, 贮备寿命分布为 $1-e^{-\nu t}, t\geqslant 0, (\nu>0)$, 工作故障的部件和贮备故障部件有相同的修理时间分布, 均为 $1-e^{-\mu t}, t\geqslant 0, (\mu>0)$. 进一步假定所有随机变量均相互独立, 工作部件的寿命分布与其曾贮备过多长时间无关, 故障部件修复后的寿命分布与新部件相同, 部件的状态转换开关是完全可靠的, 开关转换是瞬时的.

此系统共有 $n+1$ 个不同的状态. 令

$$X(t)=j,\quad \text{若时刻 } t \text{ 系统中有 } j \text{ 个故障部件}\ (\text{包括正在修理的部件}),\quad j=0,1,\cdots,n$$

根据温贮备系统的定义, 状态 n 是系统的故障状态. 因此

$$E=\{0,1,\cdots,n\},\quad W=\{0,1,\cdots,n-1\},\quad F=\{n\}.$$

可以证明 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 E 的时齐马尔可夫过程. Δt 时间内不同状态之间的转移概率

$$\begin{cases} P_{j,j+1}(\Delta t)=[\lambda+(n-j+1)\nu]\Delta t+o(\Delta t), & \\ & j=0,1,\cdots,n-1 \\ P_{j,j-1}(\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=1,2,\cdots,n \\ P_{jk}(\Delta t)=o(\Delta t) & \text{其它 } j\neq k \end{cases} \tag{1}$$

在 Δt 时间内系统的状态转移图见图 6.9. 进而可得转移率矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\lambda-(n-1)\nu & \lambda+(n-1)\nu & & & \boldsymbol{0} \\ \mu & -\lambda-(n-2)\nu-\mu & \lambda+(n-2)\nu & & \\ & \mu & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ \boldsymbol{0} & & & & \mu & -\mu \end{pmatrix} \tag{2}$$

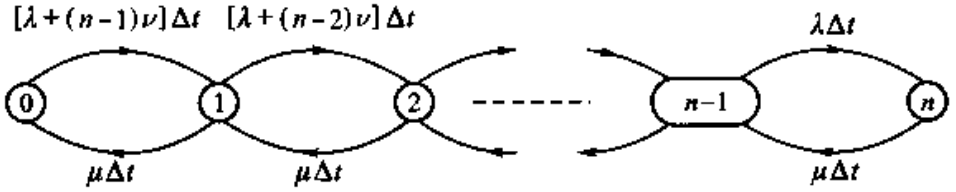


图 6.9

我们从 (2) 式的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 出发, 求系统可靠性的稳态指标和平均指标. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三对角线的, 可用 §6.1,(20) 式, 得

$$\begin{cases} \pi_j=\dfrac{\pi_0}{\mu^j}\displaystyle\prod_{k=0}^{j-1}[\lambda+(n-k-1)\nu], \quad j=1,2,\cdots,n \\ \pi_0=\left\{1+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mu^j}\prod_{k=0}^{j-1}[\lambda+(n-k-1)\nu]\right\}^{-1} \end{cases} \tag{3}$$

因此

$$\begin{cases} A=1-\pi_n \\ M=\lambda\pi_{n-1} \\ \mathrm{MUT}=\dfrac{A}{M} \\ \mathrm{MDT}=\dfrac{\bar{A}}{M}=\dfrac{1}{\mu} \\ \mathrm{MCT}=\dfrac{1}{M} \\ B=1-\pi_0 \end{cases} \tag{4}$$

以下, 我们仅对 $n=2$ 的情形求系统可靠性的瞬时指标.

系统由两个同型部件和一个修理设备组成, 且假定时刻 0 两个部件是正常的. 此时 $P_j(t), j=0,1,2$ 满足方程组

$$\begin{cases} (P_0'(t),P_1'(t),P_2'(t))=(P_0(t),P_1(t),P_2(t))\cdot\begin{pmatrix} -\lambda-\nu & \lambda+\nu & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \\ (P_0(0),P_1(0),P_2(0))=(1,0,0) \end{cases} \tag{5}$$

解此方程组, 得到

$$\begin{cases} P_0(t)=\dfrac{\mu^2}{s_1s_2}+\dfrac{s_1^2+(\lambda+2\mu)s_1+\mu^2}{s_1(s_1-s_2)}e^{s_1t} \\ \qquad\quad +\dfrac{s_2^2+(\lambda+2\mu)s_2+\mu^2}{s_2(s_2-s_1)}e^{s_2t} \\ P_1(t)=\dfrac{(\lambda+\nu)\mu}{s_1s_2}+\dfrac{(\lambda+\nu)(s_1+\mu)}{s_1(s_1-s_2)}e^{s_1t} \\ \qquad\quad +\dfrac{(\lambda+\nu)(s_2+\mu)}{s_2(s_2-s_1)}e^{s_2t} \\ P_2(t)=\dfrac{\lambda(\lambda+\nu)}{s_1s_2}+\dfrac{\lambda(\lambda+\nu)}{s_1(s_1-s_2)}e^{s_1t} \\ \qquad\quad +\dfrac{\lambda(\lambda+\nu)}{s_2(s_2-s_1)}e^{s_2t} \end{cases} \tag{6}$$

其中 s_1,s_2 是方程

$$s^2+(2\lambda+\nu+2\mu)s+(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2=0$$

的两个根

$$s_1,s_2=\frac{1}{2}[-(2\lambda+\nu+2\mu)\pm\sqrt{4\lambda\mu+\nu^2}]<0$$

因此

$$\begin{cases} A(t) = 1 - P_2(t) = \dfrac{(\lambda+\nu+\mu)\mu}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2} \\ \qquad - \dfrac{\lambda(\lambda+\nu)}{s_1 s_2(s_1 - s_2)}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \\ A = \dfrac{(\lambda+\nu+\mu)\mu}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2} \\ m(t) = \lambda P_1(t) \\ M = \lim\limits_{t\to\infty} m(t) = \dfrac{\lambda\mu(\lambda+\nu)}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2} \\ M(t) = \displaystyle\int_0^t m(u)du = \frac{\lambda\mu(\lambda+\nu)}{(\lambda+\nu)(\lambda+\mu)+\mu^2}t \\ \qquad + \dfrac{\lambda(\lambda+\nu)(s_1+\mu)}{s_1^2(s_2-s_1)}(1-e^{s_1 t}) \\ \qquad + \dfrac{\lambda(\lambda+\nu)(s_2+\mu)}{s_2^2(s_1-s_2)}(1-e^{s_2 t}) \end{cases} \tag{7}$$

为求系统可靠度, 只需解方程组

$$\begin{cases} (Q_0'(t), Q_1'(t)) = (Q_0(t), Q_1(t)) \begin{pmatrix} -\lambda-\nu & \lambda+\nu \\ \mu & -\lambda-\mu \end{pmatrix} \\ (Q_0(0), Q_1(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

解此方程组, 可得

$$R(t) = Q_0(t) + Q_1(t) = \frac{1}{s_1' - s_2'}(s_1' e^{s_2' t} - s_2' e^{s_1' t}) \tag{8}$$

其中 s_1', s_2' 是方程

$$s^2 + (2\lambda+\mu+\nu)s + \lambda(\lambda+\nu) = 0$$

的两个根

$$s_1', s_2' = \frac{1}{2}[-(2\lambda+\nu+\mu) \pm \sqrt{(\nu+\mu)^2 + 4\lambda\mu}] < 0$$

因此

$$\mathrm{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{2\lambda+\nu+\mu}{\lambda(\lambda+\nu)} \tag{9}$$

§6.7.2 两个同型部件的情形

系统由两个同型部件和一个修理设备组成, 工作故障部件和贮备故障部件有不同的修理时间分布.

假定工作部件故障后的修理时间分布是 $1-e^{-\mu_1 t}, t \geqslant 0$, 贮备部件故障后的修理时间分布是 $1-e^{-\mu_2 t}, t \geqslant 0, \mu_1, \mu_2 > 0$. 其余假设同 §§6.7.1 的情形. 此时系统共有五个不同的状态:

状态 0: 一个部件在工作, 另一个部件温贮备.

状态 1: 一个部件在工作, 另一个部件因工作故障在修理.

状态 2: 一个部件在工作, 另一个部件因贮备故障在修理.

状态 3: 一个部件因工作故障在修理, 另一个部件待修.

状态 4: 一个部件因贮备故障在修理, 另一个部件待修.

从这系统的运行过程易见, 待修的部件只可能是工作故障的部件. 显然 $E=\{0,1,2,3,4\}, W=\{0,1,2\}, F=\{3,4\}$. 令

$$X(t)=j, \quad \text{若时刻 } t \text{ 系统处于状态} j, \quad j=0,1,2,3,4$$

可证:$\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是时齐马尔可夫过程. Δt 时间内系统不同状态之间的转移概率见图 6.10, 转移率矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\lambda-\nu & \lambda & \nu & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda-\mu_1 & 0 & \lambda & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda-\mu_2 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

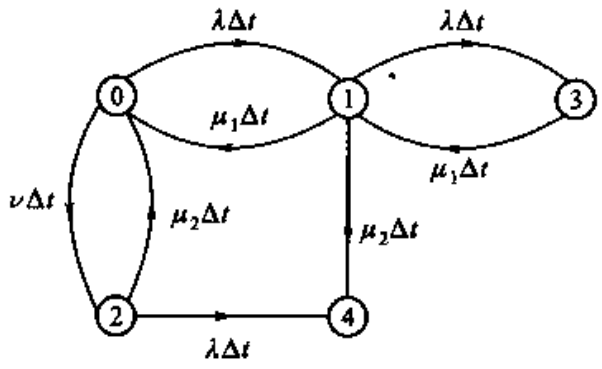


图 6.10

我们只求这个系统的稳态可靠性指标和平均指标. 解线性方程组

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_4)\boldsymbol{A}=(0,0,\cdots,0)\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}\pi_1=\dfrac{\lambda(\lambda+\nu+\mu_2)}{\mu_1(\lambda+\mu_2)}\pi_0\\ \pi_2=\dfrac{\nu}{\lambda+\mu_2}\pi_0\\ \pi_3=\dfrac{\lambda^2(\lambda+\nu+\mu_2)}{\mu_1^2(\lambda+\mu_2)}\pi_0\\ \pi_4=\dfrac{\lambda\nu}{\mu_2(\lambda+\mu_2)}\pi_0\\ \pi_0=\left[1+\dfrac{\lambda(\lambda+\nu+\mu_2)}{\mu_1(\lambda+\mu_2)}+\dfrac{\nu}{\lambda+\mu_2}\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{\lambda^2(\lambda+\nu+\mu_2)}{\mu_1^2(\lambda+\mu_2)}+\dfrac{\lambda\nu}{\mu_2(\lambda+\mu_2)}\right]^{-1}\end{cases}\tag{11}$$

因此

$$\begin{cases}A=\pi_0+\pi_1+\pi_2\\ M=\lambda(\pi_1+\pi_2)\\ \mathrm{MUT}=\dfrac{A}{M}\\ \mathrm{MDT}=\dfrac{\bar{A}}{M}\\ \mathrm{MCT}=\dfrac{1}{M}\\ B=1-\pi_0\end{cases}\tag{12}$$

若时刻 0 两个部件都是正常的, 则可求得

$$\mathrm{MTTFF}=\frac{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\nu+\mu_2)+\lambda(\lambda+\mu_2)}{\lambda(\lambda^2+\lambda\nu+\lambda\mu_2+\nu\mu_1)}\tag{13}$$

§6.7.3 两个不同型部件的情形

假设部件 i 的工作寿命分布、贮备寿命分布和故障后的修理时间分布分别为 $1-e^{-\lambda_i t},1-e^{-\nu_i t}$ 和 $1-e^{-\mu_i t},t\geqslant 0,\lambda_i,\nu_i,\mu_i>0,i=1,2$. 其余假设同 §6.7.1. 系统共有六个不同状态:

状态 0: 部件 1 在工作, 部件 2 贮备.

状态 1: 部件 2 在工作, 部件 1 贮备.

状态 2: 部件 1 在工作, 部件 2 在修理.

状态 3: 部件 2 在工作, 部件 1 在修理.

状态 4: 部件 1 在修理, 部件 2 待修.

状态 5: 部件 2 在修理, 部件 1 待修.

显然 $E=\{0,1,\cdots,5\}, W=\{0,1,2,3\}, F=\{4,5\}$. 令

$$X(t)=j, \quad \text{若时刻 t 系统处于状态} j, \quad j=0,1,\cdots,5$$

可证 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是时齐马尔可夫过程. Δt 时间内系统不同状态之间的转移概率见图 6.11. 转移率矩阵为

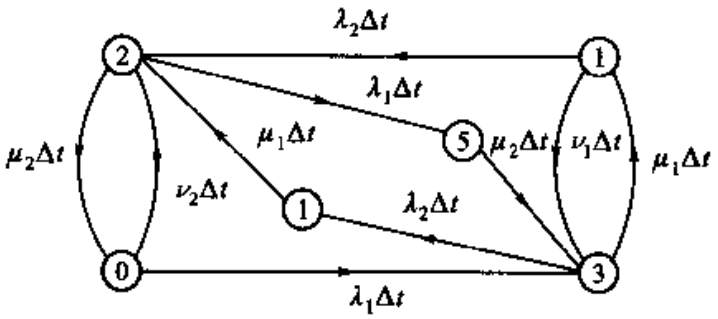


图 6.11

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\lambda_1-\nu_2 & 0 & \nu_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-\nu_1 & \lambda_2 & \nu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

解线性方程组

$$\begin{cases} (\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_5)\boldsymbol{A}=(0,0,\cdots,0) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5=1 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda_1\mu_1(\lambda_1+\nu_2+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda_1+\nu_2}{\mu_2}\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\nu_1)(\lambda_1+\nu_2+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_4 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\nu_1)(\lambda_1+\nu_2+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_5 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\nu_2)}{\mu_2^2}\pi_0 \\ \pi_0 = \Big[1+\dfrac{\lambda_1\mu_1(\lambda_1+\nu_2+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)}+\dfrac{\lambda_1+\nu_2}{\mu_2} \\ \qquad +\dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\nu_1)(\lambda_1+\nu_2+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)} \\ \qquad +\dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\nu_1)(\lambda_1+\nu_2+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)}+\dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\nu_2)}{\mu_2^2}\Big]^{-1} \end{cases} \tag{15}$$

因此, 系统可靠度的稳态指标和平均指标为

$$\begin{cases} A = \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 \\ M = \lambda_1\pi_2+\lambda_2\pi_3 \\ \mathrm{MUT} = \dfrac{A}{M} \\ \mathrm{MDT} = \dfrac{\bar{A}}{M} \\ \mathrm{MCT} = \dfrac{1}{M} \\ B = \pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5 \end{cases} \tag{16}$$

若时刻 0 两个部件都是正常的, 则由定理 6.1.5 可求得

$$\mathrm{MTTFF} = \frac{(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)[(\lambda_1+\mu_2)(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_2\nu_2]+\lambda_1\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\nu_2+\mu_2)(\lambda_2+\nu_1+\mu_1)-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2} \tag{17}$$

§6.8 两个特殊系统

§6.8.1 有优先权的两部件冷贮备系统

系统由两个不同型部件和一个修理设备组成, 其中部件 1 比部件 2 有优先权. 当故障的部件 1 被修好时, 若部件 2 正在工作, 则部件 1 立即进入工作状态, 部件 2 暂停工作而转入贮备状态; 当部件 1 发生故障时, 若部件 2 正在修理, 则部件 2 暂停修理而转入待修状态, 修理设备立即转来修理部件 1. 其余假设与 §§6.6.2 相同.

由于指数分布的无记忆性, 部件 2 从贮备状态进入工作时, 其工作寿命分布总是 $1-e^{-\lambda_2 t}, t \geqslant 0$, 与部件 2 贮备前是否工作过或曾工作过多长时间无关; 同样, 部件 2 从待修状态转入修理状态时, 其修理时间分布总是 $1-e^{-\mu_2 t}, t \geqslant 0$, 与部件 2 待修前是否修理过或曾修理过多长时间无关.

这系统共有四个不同状态:

状态 0: 部件 1 在工作, 部件 2 贮备.

状态 1: 部件 1 在工作, 部件 2 在修理.

状态 2: 部件 2 在工作, 部件 1 在修理.

状态 3: 部件 1 在修理, 部件 2 待修.

显然 $E=\{0,1,2,3\}, W=\{0,1,2\}, F=\{3\}$. 令

$$X(t)=j, \quad \text{若时刻 } t \text{ 系统处于状态 } j, \quad j=0,1,2,3$$

可证 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是时齐马尔可夫过程. Δt 时间内系统不同状态之间的转移概率见图 6.12. 转移率矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -\lambda_2-\mu_1 & \lambda_2 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

解方程组

$$\begin{cases} (\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)\boldsymbol{A}=(0,0,0,0) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

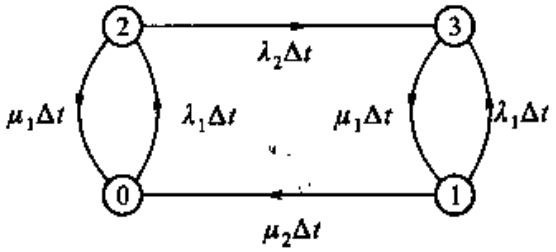


图 6.12

得到

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2+\mu_1}\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}\pi_0 \\ \pi_0 = \dfrac{\mu_1\mu_2(\lambda_2+\mu_1)}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)} \end{cases} \tag{2}$$

因此系统可靠性的稳态指标和平均指标为

$$\begin{cases} A = \pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1-\pi_3 \\ M = \lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2 \\ \mathrm{MUT} = \dfrac{A}{M} = \dfrac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)} \\ \mathrm{MDT} = \dfrac{\bar{A}}{M} = \dfrac{1}{\mu_1} \\ \mathrm{MCT} = \dfrac{1}{M} \\ B = \pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1-\pi_0 \end{cases} \tag{3}$$

若时刻 0 两个部件都是正常的, 由定理 6.1.5 可得

$$\mathrm{MTTFF} = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1\lambda_2} \tag{4}$$

§6.8.2 两个相依部件的并联系统

考虑两个部件和一个修理设备的并联系统, 其中两个部件的寿命 X_1, X_2 遵

从二维指数分布

$$P\{X_1 > t_1, X_2 > t_2\} = \exp[-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12}\max(t_1, t_2)]$$

在 §§2.4.2 中曾提到, 对这两个部件来说, 引起部件故障的有其各自的、相互独立的原因, 它们出现的时间分别遵从参数 λ_1 和 λ_2 的指数分布. 此外还有一个共同的原因, 其出现时间遵从参数 λ_{12} 的指数分布, 这个共同原因引起两个部件同时故障. 即当两个部件都正常时, 在 Δt 时间内以概率 $\lambda_i\Delta t + o(\Delta t)$ 引起部件 i 故障 $(i = 1, 2)$, 以概率 $\lambda_{12}\Delta t + o(\Delta t)$ 引起两个部件同时故障; 当部件 1 已故障, 则在 Δt 内以概率 $(\lambda_2 + \lambda_{12})\Delta t + o(\Delta t)$ 引起部件 2 故障; 当部件 2 已故障, 则在 Δt 内以概率 $(\lambda_1 + \lambda_{12})\Delta t + o(\Delta t)$ 引起部件 1 故障. 假定当两个部件同时发生故障时, 修理设备首先修理部件 1. 其余假设同 §6.4.2.

系统的状态和过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的定义与 §6.4.2 相同. 此时 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 也是时齐马尔可夫过程. 在 Δt 时间内不同状态之间的转移概率表示在图 6.13 中. 因此立即可写出转移率矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}) & \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_{12} & 0 \\ \mu_2 & -(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2) & 0 & 0 & \lambda_1+\lambda_{12} \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_1) & \lambda_2+\lambda_{12} & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

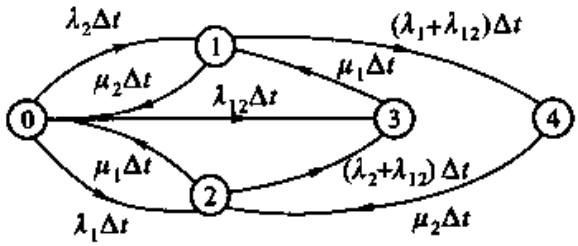


图 6.13

解方程组

$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_4)\boldsymbol{A} = (0, 0, \cdots, 0) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_1)(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2)\mu_1+(\lambda_2+\lambda_{12})\mu_2}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_{12})+\lambda_1\mu_2}{(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2)\mu_1+(\lambda_2+\lambda_{12})\mu_2}\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{\pi_0}{\mu_1}\cdot[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_2)(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12}) \\ \quad +(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2)\lambda_{12}\mu_1]/[(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2)\mu_1 \\ \quad +(\lambda_2+\lambda_{12})\mu_2]\pi_0 \\ \pi_4 = \dfrac{1}{\mu_2}\cdot\dfrac{(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_1)}{(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2)\mu_1+(\lambda_2+\lambda_{12})\mu_2}\pi_0 \\ \pi_0\text{可由}\sum_{j=0}^{4}\pi_j = 1\text{而确定} \end{cases} \tag{6}$$

因此系统可靠度的稳态指标和平均指标为

$$\begin{cases} A = \pi_0+\pi_1+\pi_2 \\ M = \lambda_{12}\pi_0+(\lambda_1+\lambda_{12})\pi_1+(\lambda_2+\lambda_{12})\pi_2 \\ \quad = \mu_1\pi_3+\mu_2\pi_4 \\ \mathrm{MUT} = \dfrac{A}{M} \\ \mathrm{MDT} = \dfrac{\bar{A}}{M} \\ \mathrm{MCT} = \dfrac{1}{M} \\ B = 1-\pi_0 \end{cases} \tag{7}$$

若时刻 0 两个部件都是好的, 则由定理 6.1.5, 得

$$\begin{aligned} \mathrm{MTTFF} = {} & [\lambda_1(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2)+\lambda_2(\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_1)+(\lambda_1 \\ & +\lambda_{12}+\mu_2)(\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_1)]/[\lambda_1(\lambda_2+\lambda_{12})(\lambda_1 \\ & +\lambda_{12}+\mu_2)+\lambda_2(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_1) \\ & +\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_{12}+\mu_2)(\lambda_2+\lambda_{12}+\mu_1)] \end{aligned} \tag{8}$$

最后, 我们对两个同型部件的特殊情形, 求系统可靠性的瞬时指标. 假设 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda, \mu_1=\mu_2=\mu$, 其余条件完全同上. 此时系统由三个不同的状态. 令

$$X(t)=j, \quad \text{若时刻 } t \text{ 系统有 } j \text{ 个故障部件}, \quad j=0,1,2$$

此时 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 仍是时齐马尔可夫过程. Δt 时间内系统不同状态之间的转移概率见图 6.14, 因此, 转移率矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -(2\lambda + \lambda_{12}) & 2\lambda & \lambda_{12} \\ \mu & -(\lambda_1 + \lambda_{12} + \mu) & \lambda + \lambda_{12} \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \tag{9}$$

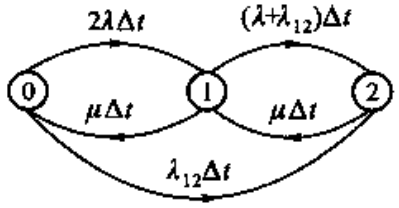


图 6.14

若时刻 0 两个部件都是好的, 此时 $P_j(t)$, $j = 0, 1, 2$, 满足方程组

$$\begin{cases} (P_0'(t), P_1'(t), P_2'(t)) = (P_0(t), P_1(t), P_2(t))\boldsymbol{A} \\ (P_0(0), P_1(0), P_2(0)) = (1, 0, 0) \end{cases}$$

解此方程组, 得

$$\begin{cases} P_0(t) = \dfrac{\mu^2}{s_1 s_2} + \dfrac{s_1^2 + s_1(\lambda + \lambda_{12} + 2\mu) + \mu^2}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} \\ \qquad + \dfrac{s_2^2 + s_2(\lambda + \lambda_{12} + 2\mu) + \mu^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_1(t) = \dfrac{2\lambda\mu + \lambda_{12}\mu}{s_1 s_2} + \dfrac{2\lambda s_1 + 2\lambda\mu + \lambda_{12}\mu}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} \\ \qquad + \dfrac{2\lambda s_2 + 2\lambda\mu + \lambda_{12}\mu}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \\ P_2(t) = \dfrac{2\lambda^2 + (3\lambda + \mu)\lambda_{12} + \lambda_{12}^2}{s_1 s_2} \\ \qquad + \dfrac{\lambda_{12} s_1 + 2\lambda^2 + (3\lambda + \mu)\lambda_{12} + \lambda_{12}^2}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} \\ \qquad + \dfrac{\lambda_{12} s_2 + 2\lambda^2 + (3\lambda + \mu)\lambda_{12} + \lambda_{12}^2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \end{cases} \tag{10}$$

其中 s_1, s_2 是方程

$$s^2 + (3\lambda + 2\lambda_{12} + 2\mu)s + (\lambda + \lambda_{12})(2\lambda + \lambda_{12} + 2\mu) + \mu^2 = 0$$

的两个根

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}[-(3\lambda + 2\lambda_{12} + 2\mu) \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\mu}] < 0$$

因此得下列各可靠性指标:

$$\begin{cases} A(t) = 1 - P_2(t) \\ A = \dfrac{\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda_{12}\mu}{(\lambda + \lambda_{12})(2\lambda + \lambda_{12} + 2\mu) + \mu^2} \\ m(t) = \lambda_{12}P_0(t) + (\lambda + \lambda_{12})P_1(t) \\ M(t) = \displaystyle\int_0^t m(u)du \\ M = \displaystyle\lim_{t\to\infty} m(t) = \frac{\lambda_{12}\mu^2 + (\lambda + \lambda_{12})(2\lambda\mu + \lambda_{12}\mu)}{(\lambda + \lambda_{12})(2\lambda + \lambda_{12} + 2\mu) + \mu^2} \\ \mathrm{MUT} = \dfrac{A}{M} \\ \mathrm{MDT} = \dfrac{\bar{A}}{M} \\ \mathrm{MCT} = \dfrac{1}{M} \\ B(t) = 1 - P_0(t) \\ B = \dfrac{(\lambda + \lambda_{12})(2\lambda + \lambda_{12} + 2\mu)}{(\lambda + \lambda_{12})(2\lambda + \lambda_{12} + 2\mu) + \mu^2} \end{cases} \tag{11}$$

为求系统可靠度, 仅需解方程组

$$\begin{cases} (Q_0'(t), Q_1'(t)) = (Q_0(t), Q_1(t)) \\ \qquad\qquad \times \begin{pmatrix} -(2\lambda + \lambda_{12}) & 2\lambda \\ \mu & -(\lambda + \lambda_{12} + \mu) \end{pmatrix} \\ (Q_0(0), Q_1(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} R(t) &= Q_0(t) + Q_1(t) \\ &= \frac{s_1' + 3\lambda + \lambda_{12} + \mu}{s_1' - s_2'} e^{s_1' t} + \frac{s_2' + 3\lambda + \lambda_{12} + \mu}{s_2' - s_1'} e^{s_2' t} \end{aligned} \tag{12}$$

其中 s_1', s_2' 是方程

$$s^2 + (3\lambda + 2\lambda_{12} + \mu)s + (2\lambda + \lambda_{12})(\lambda + \lambda_{12}) + \lambda_{12}\mu = 0$$

的两个根

$$s_1', s_2' = \frac{1}{2}[-(3\lambda + 2\lambda_{12} + \mu) \pm \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}] < 0$$

因此

$$\mathrm{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{3\lambda + \lambda_{12} + \mu}{(2\lambda + \lambda_{12})(\lambda + \lambda_{12}) + \lambda_{12}\mu} \tag{13}$$

第七章　非马尔可夫型可修系统

在第六章我们讨论的可修系统中, 构成系统的各部件的寿命和故障后的修理时间均为指数分布, 这样的系统可用时齐马尔可夫过程来描述. 但是在实践中经常遇到部件的寿命或修理时间分布不是指数分布的情形, 这时可修系统所构成的随机过程不是马尔可夫过程, 因此需要用其它的数学工具来讨论这类更一般的系统. 讨论非马尔可夫型可修系统, 最通常使用的工具有: 更新过程、马尔可夫更新过程和补充变量方法.

本章我们将通过若干典型系统作为例子, 介绍用更新过程、马尔可夫更新过程和补充变量方法解决可修系统问题的基本思路和技巧. 在 §7.1, 简单介绍更新过程和马尔可夫更新过程的基本概念. 在 §7.2 和 §7.3 用到更新过程工具. 在 §7.4 ~ §7.8 用到马尔可夫更新过程工具. 在 §7.9, 用补充变量方法讨论一个比较一般的两部件系统, 在 §7.10 , 讨论独立部件的单调关联系统. 许多更复杂的系统也可用这些方法讨论, 解决问题的过程可能比较复杂, 但是基本思路和技巧都相仿.

§7.1 更新过程和马尔可夫更新过程

§7.1.1 更新过程

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布的非负随机变量序列, 它们的分布函数为 $F(t)$,

均值为 μ, 且满足 $P\{X_n=0\}<1$. 令

$$S_0=0$$
$$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n,\quad n=1,2,\cdots$$

它们是这些随机变量的部分和. 显然

$$P\{S_n\leqslant t\}=F^{(n)}(t),\quad n=0,1,2,\cdots$$

其中 $F^{(n)}(t)$ 是 $F(t)$ 的 n 重卷积, 并有

$$F^{(0)}(t)=\begin{cases}1, t\geqslant 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

令

$$N(t)=\sup\{n:S_n\leqslant t\} \tag{1}$$

$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是一个取非负整数值的随机过程, 我们称它为由随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots$ 所产生的**更新过程**, 称 X_n 为**更新寿命**, 称 S_n 为**更新时刻 (再生点)**. 显然,$N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间内的更新次数 (见图 7.1) .

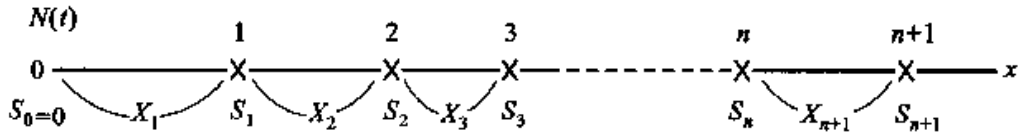


图 7.1

例如, 在一个需要连续照明的地方, 时刻 0 我们安上一个新的灯泡. 当正在使用的灯泡失效时, 立即用一个新的灯泡去替换. 假定所有灯泡寿命 U_n 独立同分布, 灯泡替换时间 V_n 独立同分布. 令 $X_n=U_n+V_n$, 可由 (1) 产生一个更新过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$, 其中 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 中灯泡更新次数,S_n 表示第 n 次灯泡更新时刻.

显然, 随机事件 $\{N(t)\geqslant k\}$ 和 $\{S_k\leqslant t\}$ 是等价的. 因此, 经常将部分和过程 $\{S_n,n\geqslant 0\}$ 也称为更新过程.

由于

$$\{N(t)=k\}=\{S_k\leqslant t<S_{k+1}\},\quad k=0,1,\cdots$$

因而可得

$$\begin{aligned} P\{N(t)=k\} &= P\{S_k \leqslant t\} - P\{S_{k+1} \leqslant t\} \\ &= F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t), \quad k=0,1,\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

用 (2) 式, 得 $(0,t]$ 内平均更新次数为

$$M(t) = E\{N(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{N(t)=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t) \tag{3}$$

我们称 $M(t)$ 为**更新函数**. $M(t)$ 的 LS 变换为

$$\hat{M}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\hat{F}(s)]^k = \frac{\hat{F}(s)}{1-\hat{F}(s)}, \ s>0 \tag{4}$$

可以证明 [32], 在 $P\{X_n=0\}<1$ 的条件下, 必有 $M(t)<\infty$, 对任意 $t \geqslant 0$. 然而, 当 $P\{X_n=0\}=1$ 时, 得到的更新过程没有什么意义. 因而在讨论更新过程时总假定 $P\{X_n=0\}<1$ 的条件成立. 如果 $F(t)$ 存在密度函数 $f(t)$, 则 $M(t)$ 可微, 且

$$m(t) = \frac{d}{dt} M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t) \tag{5}$$

其中 $f^{(k)}(t)$ 是密度函数 $f(t)$ 的 k 重卷积

$$\begin{cases} f^{(2)}(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u)f(u)du \\ f^{(k)}(t) = \displaystyle\int_0^t f^{(k-1)}(t-u)f(u)du, \ k=3,4,\cdots \end{cases}$$

称 $m(t)$ 为**更新密度**.

在许多实际问题中, 经常遇到**更新方程**

$$h(t) = g(t) + \int_0^t h(t-u)dF(u)$$

即

$$h(t) = g(t) + F(t) * h(t) \tag{6}$$

其中 $h(t)$ 和 $g(t)$ 是非负的, 且在任意有限区间内有界. 当 $F(t)$ 和 $g(t)$ 为已知函数, 更新方程 (6) 的解为

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t) + \int_0^t g(t-u)dM(u) \\ &= g(t) + M(t) * g(t) \end{aligned} \tag{7}$$

事实上, 对 (6) 的两端作 L 变换, 得

$$h^*(s) = g^*(s) + \hat{F}(s)h^*(s), \quad s > 0$$

解得

$$\begin{aligned} h^*(s) &= \frac{g^*(s)}{1-\hat{F}(s)} = \left[1 + \frac{\hat{F}(s)}{1-\hat{F}(s)}\right] g^*(s) \\ &= g^*(s) + \hat{M}(s)g^*(s) \end{aligned}$$

最后一个等式是由于 (4). 反演上式即得 (7) 式.

我们称一个非负随机变量 X 的分布函数是**格点分布**,如果存在一个 $\delta > 0$, 使

$$P\{X = n\delta, n = 0, 1, 2, \cdots\} = 1$$

满足上述条件的最大的 δ 称为该格点分布的周期.

我们不加证明地引述以下极限定理 [32]:

定理 7.1.1 $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{M(t)}{t} = \dfrac{1}{\mu}$

定理 7.1.2 *若 $F(t)$ 不是格点分布, 则*

$$\lim_{t\to\infty}[M(t+a) - M(t)] = \frac{a}{\mu}$$

定理 7.1.3 *若 $F(t)$ 不是格点分布, 且 $g(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 上非负非增, 并*

$$\int_0^\infty g(t)dt < \infty$$

则

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(t-u)dM(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)dt$$

当 $\mu=\infty$, 以上三个定理中的极限均为零.

若 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是由非负随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 所产生的更新过程. 假设 Y_n 是第 n 个更新寿命 X_n 中的报酬, $n=1,2,\cdots$, 且 $(X_n,Y_n),n=1,2,\cdots$ 独立同分布. 令

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$$

它是 $(0,t]$ 时间内的总报酬. 我们有 [70]

定理 7.1.4 *若 $E|Y_n|$ 和 EX_n 有限, 则*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{t}=\frac{EY_n}{EX_n},\text{以概率1}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{EY(t)}{t}=\frac{EY_n}{EX_n}$$

令 $X_1,X_2,\cdots$ 相互独立遵从相同的离散概率分布

$$P\{X_k=l\}=P_l,\quad l=1,2,\cdots$$

它们的部分和 $S_k=X_1+X_2+\cdots+X_k,k=1,2,\cdots$ (令 $S_0=0$) 遵从概率分布

$$P\{S_k=l\}=P_l^{(k)},\quad l=k,k+1,\cdots;k=1,2,\cdots$$

其中 $\{P_l^{(k)},l=k,k+1,\cdots\}$ 是 $\{P_l,l=1,2,\cdots\}$ 的 k 重卷积:

$$\begin{cases}P_l^{(1)}=P_l, & l\geqslant 1\\ P_l^{(k)}=\sum\limits_{j=1}^{l-1}P_jP_{l-j}^{(k-1)}, & 2\leqslant k\leqslant l<\infty\\ P_l^{(k)}=0, & k>l\end{cases}$$

若令母函数 $\Phi(z)=\sum\limits_{l=1}^{\infty}P_lz^l$, $|z|\leqslant 1$, 易证 $\{P_l^{(k)},l=k,k+1,\cdots\}$ 的母函数为

$$\sum_{l=k}^{\infty}P_l^{(k)}z^l=[\Phi(z)]^k,\quad k=1,2,\cdots$$

令 $N(n)=\sup\{k:S_k\leqslant n\}$, $N(n)$ 表示 $(0,n]$ 中的更新次数. 称 $\{N(n),n=1,2,\cdots\}$ 为 $X_1,X_2,\cdots$ 所产生的更新过程. 更新函数是

$$\begin{aligned}M(n)=E\{N(n)\}&=\sum_{k=1}^{n}kP\{N(n)=k\}\\&=\sum_{k=1}^{n}kP\{S_k\leqslant n<S_{k+1}\}\\&=\sum_{k=1}^{n}k\left[\sum_{j=k}^{n}P_j^{(k)}-\sum_{j=k+1}^{n}P_j^{(k+1)}\right]\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n}P_j^{(k)}\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{j}P_j^{(k)}\right]\end{aligned}\tag{3'}$$

称其中的

$$m(n)=\sum_{k=1}^{n}P_n^{(k)}\tag{5'}$$

为更新密度, 它表示恰在时刻 n 发生一次更新的概率, 因此 (3') 可改写成

$$M(n)=\sum_{j=1}^{n}m(j)\tag{8}$$

更新密度 $m(j)$ 的母函数是

$$\begin{aligned}\Phi_m(z)=\sum_{j=1}^{\infty}m(j)z^j&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}P_j^{(k)}z^j\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P_j^{(k)}z^j=\sum_{k=1}^{\infty}[\Phi(z)]^k=\frac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)}\end{aligned}\tag{4'}$$

§7.1.2 马尔可夫更新过程

设随机变量 Z_n 取值在 $E=\{0,1,\cdots,K\}$ 中, 而随机变量 T_n 取值在 $[0,\infty)$ 中, $n=0,1,\cdots$, 其中 $0=T_0\leqslant T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots$. 随机过程 $(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{T})=\{Z_n,T_n,n=0,1,\cdots\}$ 称为状态空间 E 上的**马尔可夫更新过程**, 如果对所有 $n=0,1,\cdots,j\in E,t\geqslant 0$, 都有

$$\begin{aligned}&P\{Z_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_0,Z_1,\cdots,Z_n,T_0,T_1,\cdots,T_n\}\\&\quad=P\{Z_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_n\}\end{aligned}\tag{9}$$

又如果对所有 $i,j\in E,t\geqslant 0$,

$$P\{Z_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_n=i\}=Q_{ij}(t) \tag{10}$$

与 n 无关, 则称 $(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{T})$ 是**时齐的**. 称 $\{Q_{ij}(t),i,j\in E\}$ 为**半马尔可夫核**. 它们组成一个矩阵 $\boldsymbol{Q}(t)=(Q_{ij}(t))$. 显然, 除可能

$$\lim_{t\to\infty}Q_{ij}(t)=P\{Z_{n+1}=j|Z_n=i\}=P_{ij} \tag{11}$$

小于 1 以外, $Q_{ij}(t)$ 具有分布函数的所有性质. 易证

$$P_{ij}\geqslant 0,\ \sum_{j\in E}P_{ij}=1$$

记 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 为它们所组成的矩阵.

若 $(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{T})$ 是时齐马尔可夫更新过程, 由定义立即可得

定理 7.1.5 $\{Z_n,n\geqslant 0\}$ 是状态空间 E 上具有转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的马尔可夫链.

引进

$$G_{ij}(t)=\frac{Q_{ij}(t)}{P_{ij}},\quad i,j\in E,t\geqslant 0$$

(当 $P_{ij}=0$, 约定 $G_{ij}(t)=1$). 此时, 对每对 (i,j),$G_{ij}(t)$ 是一个分布函数,

$$G_{ij}(t)=P\{T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_n=i,Z_{n+1}=j\}$$

定理 7.1.6 对任意 $n\geqslant 1,t_1,t_2,\cdots,t_n\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}&P\{T_1-T_0\leqslant t_1,\cdots,T_n-T_{n-1}\leqslant t_n|Z_0,Z_1,\cdots,Z_n\}\\&\quad=G_{Z_0Z_1}(t_1)G_{Z_1Z_2}(t_2)\cdots G_{Z_{n-1}Z_n}(t_n)\end{aligned} \tag{12}$$

即, 给定马尔可夫链 $Z_0,Z_1,\cdots$ 的条件下, 增量 $T_1-T_0,T_2-T_1,\cdots$ 条件独立, 且 $T_{n+1}-T_n$ 的分布只依赖于 Z_n 和 Z_{n+1}.

若令

$$X(t)=Z_n,\quad \text{当}T_n\leqslant t\leqslant T_{n+1}\text{时}$$

我们称 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是与马尔可夫更新过程 $(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{T})$ 相联系的**半马尔可夫过程**. $X(t)$ 可以看成是过程在时刻 t 所处的状态. 过程在时刻 $T_1,T_2,\cdots$ 发生状态转

移. 在时刻 T_n 转入状态 Z_n, 在状态 Z_n 的逗留时间长为 $T_{n+1}-T_n$, 它的分布依赖于正在访问的状态 Z_n 和下一步要访问的状态 Z_{n+1}. 相继访问的状态 $\{Z_n, n \geqslant 0\}$ 组成一个马尔可夫链. 在已知 $Z_n, n=0,1,2,\cdots$ 的条件下, 相继的状态逗留时间是条件独立的.

在马尔可夫过程中, 在每个状态的逗留时间遵从指数分布. 由指数分布的无记忆性, 故任一时刻 t 都是过程的再生点, 也就是说在任一时刻 t 具有马尔可夫性. 所**谓再生点**是指这样的时刻, 在已知这时刻过程所处的状态的条件下, 过程将来发展的概率规律与过去的历史无关. 在半马尔可夫过程的情形, 逗留时间的分布是一般分布. 因此不是所有时刻 t 都是过程的再生点, 而只有状态转移时刻(通常是随机的)是再生点, 在这些时刻点上具有马尔可夫性.

当所有 $G_{ij}(t)$ 是指数分布时, 半马尔可夫过程$\{X(t), t \geqslant 0\}$ 成为马尔可夫过程. 当过程的状态空间只有一个状态时,$E=\{0\}$, 则 $\{T_{n+1}-T_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是独立同分布随机变量序列, 故 $\{T_n, n=0,1,\cdots\}$, 是 §§7.1.1 中讨论的部分和过程. 在这个特殊情形, 马尔可夫更新过程成为更新过程.

在许多实际问题中, 我们常常遇到所谓**马尔可夫更新方程组**

$$h_i(t)=g_i(t)+\sum_{j\in E}\int_0^t h_j(t-u)dQ_{ij}(u), \quad i\in E$$

即

$$h_i(t)=g_i(t)+\sum_{j\in E}Q_{ij}(t)*h_j(t), \quad i\in E \tag{13}$$

这里 $h_i(t)$ 和 $g_i(t)$ 都是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负、在任有限区间上有界的函数.(13) 式可简记为向量的形式

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{Q}(t)*\boldsymbol{h}(t) \tag{13'}$$

其中 $\boldsymbol{h}(t)=(h_0(t),h_1(t),\cdots,h_K(t))^T$, $\boldsymbol{g}(t)=(g_0(t),g_1(t),\cdots,g_K(t))^T$ 是列向量, $\boldsymbol{Q}(t)$ 是半马尔可夫核所组成的矩阵, $\boldsymbol{Q}(t)*\boldsymbol{h}(t)$ 按矩阵乘法的规则, 但是以卷积代替通常乘法, 按照 (13) 右端第二项的运算来理解. 当已知 $\boldsymbol{g}(t)$ 和 $\boldsymbol{Q}(t)$ 的条件下, 通常可用 L 变换和 LS 变换的工具来解方程组 (13) 和 (13').

下面, 我们不加证明地介绍一下 $\boldsymbol{h}(t)$ 的极限性态, 令 ν_i 是 $\{Z_n, n=0,1,\cdots\}$ 的**不变测度**, 即

$$\sum_{i\in E}\nu_i P_{ij}=\nu_j, \quad j\in E \tag{14}$$

以及在状态 i 的平均逗留时间

$$m(i) = E\{T_1|Z_0 = i\} = \int_0^\infty [1 - \sum_{j\in E} Q_{ij}(t)]dt$$
$$= -\sum_{j\in E} \hat{Q}'_{ij}(0), \quad i \in E \tag{15}$$

我们称一个定义在 $[0,\infty)$ 上的非负函数 $Q(t)$ 为**格点的**, 如果存在 $\alpha \geqslant 0$ 和 $\delta > 0$, $Q(t)$ 是集合 $\{\alpha, \alpha+\delta, \alpha+2\delta, \cdots\}$ 中跳跃的阶梯函数.

定理 7.1.7 若 $\{Z_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 的所有状态互通, 且存在一对状态 (i, j), $Q_{ij}(t)$ 不是格点的, $g_j(t)$ 非负非增, 并且 $\int_0^\infty g_j(t)dt < \infty, j \in E$ 则对所有 $k \in E$, 有

$$\lim_{t\to\infty} h_k(t) = \frac{1}{\sum_{j\in E} \nu_j m(j)} \sum_{j\in E} \nu_j \int_0^\infty g_j(t)dt$$

右端极限与状态 k 无关 (见 [32], 第十章, 命题 10.2.27 和命题 10.4.9).

§7.2 单部件系统

假设系统由一个部件组成, 其工作寿命 X 遵从一般分布 $F(t)$, 部件 (即系统) 故障后, 立即由修理设备进行修理, 修理时间 Y 遵从一般分布 $G(t)$. 修复后, 部件立即转为工作状态, 假设

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty tdF(t), \quad \frac{1}{\mu} = \int_0^\infty tdG(t)$$

其中 $\lambda, \mu > 0$. 进一步假设故障部件经修复后, 其工作寿命分布像新部件一样, 且 X 和 Y 相互独立.

为简单起见, 我们假定时刻 0 部件是新的, 即在 $t = 0$ 部件进入工作状态. 那么, 我们考虑的是一个工作和修理交替出现的更新过程. 图 7.2 表示这个过程的发展进程, 其中 $t_1, t_2, \cdots$ 都是再生点. 令 $Z_i = X_i + Y_i$, 其中 X_i 和 Y_i 是第 i 个周期内部件的寿命和修理时间, $i = 1, 2, \cdots$, 则 $\{Z_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 是一串独立同分布的随机变量序列. 它们可构成一个更新过程, 其更新寿命分布是

$$Q(t) = P\{Z_i \leqslant t\} = P\{X_i + Y_i \leqslant t\}$$
$$= \int_0^t G(t-u)dF(u) = F * G(t), \quad i = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

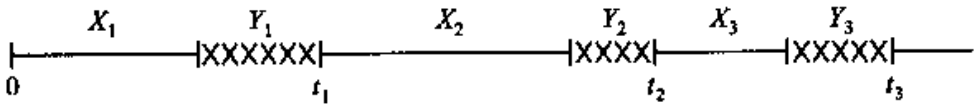


图 7.2

§7.2.1 系统可靠度

易见系统首次故障前时间是 X_1, 因此系统的可靠度是

$$R(t) = P\{X_1 > t\} = 1 - F(t) \tag{2}$$

首次故障前平均时间是

$$\text{MTTFF} = E\{X_1\} = \frac{1}{\lambda}$$

§7.2.2 系统可用度

为求系统的瞬时可用度, 我们引进一个随机过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$, 其中

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{当时刻 } t \text{ 系统处于工作状态} \\ 0, & \text{当时刻 } t \text{ 系统处于修理状态} \end{cases}$$

由定义, 系统的瞬时可用度是

$$A(t) = P\{X(t) = 1 | \text{ 时刻 0 系统是新的}\}$$

用全概率公式

$$\begin{aligned} A(t) = {} & P\{X_1 > t, X(t) = 1 | \text{ 时刻 0 系统是新的}\} \\ & + P\{X_1 \leqslant t < X_1 + Y_1, X(t) = 1 | \text{ 时刻 0 系统是新的}\} \\ & + P\{X_1 + Y_1 \leqslant t, X(t) = 1 | \text{ 时刻 0 系统是新的}\} \end{aligned}$$

右端第一项中, 当 $X_1 > t$, 在时刻 t 系统必处于工作状态, 自然有 $X(t) = 1$, 因此第一项即 $P\{X_1 > t\}$; 第二项中, 当 $X_1 \leqslant t < X_1 + Y_1$, 时刻 t 系统必处于故

障状态, 不可能与 $X(t)=1$ 同时发生, 故第二项等于零; 第三项

$$\begin{aligned}
&P\{X_1+Y_1\leqslant t, X(t)=1|\text{ 时刻}0\text{ 系统是新的}\}\\
&\quad=\int_0^t P\{X(t)=1|\text{ 时刻}0\text{ 系统是新的}, X_1+Y_1=u\}dP\{X_1+Y_1\leqslant u\}\\
&\quad=\int_0^t P\{X(t)=1|\text{ 时刻}u\text{ 系统是新的}\}dP\{X_1+Y_1\leqslant u\}\\
&\quad=\int_0^t P\{X(t-u)=1|\text{ 时刻}0\text{ 系统是新的}\}dQ(u)\\
&\quad=\int_0^t A(t-u)dQ(u)=Q(t)*A(t)
\end{aligned}$$

以上第一个等式是全概率公式, 第二个等式和第三个等式是由于 $X_1+Y_1=u$ 是再生点. 因此 $A(t)$ 满足更新方程

$$A(t)=1-F(t)+Q(t)*A(t) \tag{3}$$

对上式作 L 变换, 得

$$A^*(s)=\frac{1-\hat{F}(s)}{s}+\hat{F}(s)\hat{G}(s)A^*(s)$$

其中

$$\begin{aligned}
&A^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A(t)dt,\quad \hat{F}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t),\\
&\hat{G}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dG(t)
\end{aligned}$$

因此, 解得系统瞬时可用度的 L 变换为

$$A^*(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-\hat{F}(s)}{1-\hat{F}(s)\hat{G}(s)} \tag{4}$$

由 L 变换的托贝尔定理和洛必达 (l'Hospitale) 法则, 系统平均稳态可用度为

$$\begin{aligned}
\tilde{A}&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A(u)du=\lim_{s\to 0}sA^*(s)\\
&=\lim_{s\to 0}\frac{1-\hat{F}(s)}{1-\hat{F}(s)\hat{G}(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{-\hat{F}'(s)}{-\hat{F}'(s)\hat{G}(s)-\hat{F}(s)\hat{G}'(s)}\\
&=\frac{\mu}{\lambda+\mu}
\end{aligned} \tag{5}$$

若直接用 §7.1,(7) 式, 更新方程 (3) 的解为

$$A(t) = \bar{F}(t) + \tilde{M}(t) * \bar{F}(t) \tag{6}$$

其中 $\tilde{M}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t) * G^{(k)}(t)$ 为更新函数. 如果 $F(t)$ 和 $G(t)$ 之中至少有一个是非格点分布, 则更新寿命分布 $Q(t)$ 是非格点分布. 用更新过程的极限定理 7.1.3, 可得系统稳态可用度

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} \tilde{M}(t) * \bar{F}(t) \\ &= \frac{1}{E[X+Y]} \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{aligned} \tag{7}$$

§7.2.3 (0,t] 时间中系统平均故障次数

假定时刻 0 系统是新的, 令 $N(t)$ 为 $(0,t]$ 中系统故障次数, $M(t) = E\{N(t)\}$. 用全概率公式

$$\begin{aligned} M(t) = E\{N(t)\} &= E\{N(t)|X_1 > t\}P\{X_1 > t\} \\ &+E\{N(t)|X_1 \leqslant t < X_1+Y_1\}P\{X_1 \leqslant t < X_1+Y_1\} \\ &+\int_0^t E\{N(t)|X_1+Y_1 = u\}dP\{X_1+Y_1 \leqslant u\} \end{aligned}$$

上式右端第一项中, 在 $X_1 > t$ 的条件下, $(0,t]$ 中系统故障次数为零, 因此 $E\{N(t)|X_1 > t\} = 0$; 第二项中, 在 $X_1 \leqslant t < X_1+Y_1$ 的条件下, $(0,t]$ 中系统恰故障一次, 故 $E\{N(t)|X_1 \leqslant t < X_1+Y_1\} = 1$; 第三项中

$$E\{N(t)|X_1+Y_1 = u\} = E\{N(t-u)\}+1 = M(t-u)+1$$

这是因为在 $X_1+Y_1 = u$ 的条件下,$(0,u]$ 中系统已故障了一次. 因此, $(0,t]$ 中系统平均故障次数等于 $(u,t]$ 中平均故障次数加 1. 又由于 $X_1+Y_1 = u$ 是再生点,$(u,t]$ 中平均故障次数等于 $(0,t-u]$ 中平均故障次数. 因而 $M(t)$ 满足更新方程

$$\begin{aligned} M(t) &= P\{X_1 \leqslant t < X_1+Y_1\} \\ &\quad + \int_0^t [M(t-u)+1]dP\{X_1+Y_1 \leqslant u\} \\ &= F(t) - F(t)*G(t) + Q(t)*[M(t)+1] \end{aligned}$$

即

$$M(t) = F(t) + Q(t) * M(t)$$

对上式作 LS 变换, 解得

$$\hat{M}(s) = \frac{\hat{F}(s)}{1 - \hat{F}(s)\hat{G}(s)} \tag{8}$$

其中 $\hat{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dM(t)$. 系统稳态故障频度为

$$M = \lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\hat{M}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\hat{F}(s)}{\dfrac{1 - \hat{F}(s)\hat{G}(s)}{s}} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \tag{9}$$

其中第二个等号是由于托贝尔定理.

下面考虑一个特殊情形. 当部件的寿命分布和修理时间分布都是指数分布时, 即当

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \qquad G(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geqslant 0$$

此时有

$$\hat{F}(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad \hat{G}(s) = \frac{\mu}{s + \mu}$$

系统可靠度仍由 (2) 式给出, 即

$$R(t) = e^{-\lambda t} \tag{10}$$

公式 (4) 为

$$A^*(s) = \frac{s + \mu}{s(s + \lambda + \mu)} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{s + \lambda + \mu}$$

反演得

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{11}$$

公式 (8) 变为

$$\hat{M}(s) = \frac{\lambda(s + \mu)}{s(s + \lambda + \mu)} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu} \cdot \frac{1}{s + \lambda + \mu}$$

反演得

$$M(t)=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t+\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}] \tag{12}$$

系统瞬时故障频度为

$$m(t)=M'(t)=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{13}$$

用 (11) 和 (12) 直接求 A 和 M, 与公式 (6) 和 (9) 一致. 以上所有结果与第六章 §6.2 的结果完全一致.

§7.3 n 个部件的串联系统

系统由 n 个部件串联而成, 其中第 i 个部件的寿命 X_i 遵从指数分布 $F_i(t)=1-e^{-\lambda_i t}, t\geqslant 0$, 其故障后立即由修理设备进行修理, 修理时间 Y_i 遵从一般分布 $G_i(t)$, 其均值为 $\dfrac{1}{\mu_i}=\displaystyle\int_0^\infty t dG_i(t), (\lambda_i,\mu_i>0), i=1,2,\cdots,n$. 假定部件修复后, 其工作寿命分布与新部件一样, 仍为 $F_i(t)$, 且 n 个部件独立地运行, 部件的工作寿命与修理时间也是相互独立的. 当一个部件故障而进行修理时, 其余部件停止工作, 不再发生故障, 此时系统处于故障状态; 当故障的部件修复的时刻, n 个部件立即同时进入工作状态, 此时系统进入工作状态.

为简单起见, 我们假定 $t=0$ 时, n 个部件都处于工作状态, 即系统处于工作状态. 显然, 串联系统的工作寿命是

$$\zeta=\min_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$$

系统故障后的修理时间 χ 依赖于 ζ. 当 $\zeta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i=X_j$ 时, 即当第 j 个部件先故障, 其后的修理时间 $\chi=Y_j$. 当故障的部件修复, 系统重新进入工作状态, 由于指数分布的无记忆性, 此时系统恢复到 $t=0$ 时的情形. 因此, 故障部件的修复时刻是系统的再生点. 若我们令 ζ_k 和 χ_k 分别表示系统第 k 个工作寿命和第 k 个修理时间, 则这系统的整个发展过程如图 7.3 , 其中 $t_1,t_2,\cdots$ 是再生点. 因而 $\{\zeta_k+\chi_k, k=1,2,\cdots\}$ 是一串独立同分布的随机变量序列. 分布函数为

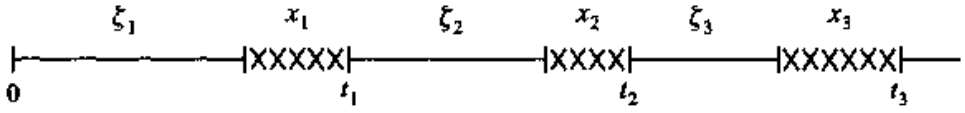


图 7.3

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= P\{\zeta_k + \chi_k \leqslant t\} = P\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i + \chi \leqslant t\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} P\{X_j = \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i, X_j + Y_j \leqslant t\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} P\{X_j \leqslant X_1, X_2, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_n, X_j + Y_j \leqslant t\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_0^t P\{u \leqslant X_1, X_2, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_n, Y_j \leqslant t-u\} dP\{X_j \leqslant u\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_0^t G_j(t-u) e^{-\sum\limits_{i\neq j} \lambda_i u} d(1-e^{-\lambda_j u}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda} \int_0^t G_j(t-u) d(1-e^{-\Lambda u}), k = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{1}
$$

与 k 无关, 其中 $\Lambda = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i$. 因此 $\{\zeta_k + \chi_k, k = 1, 2, \cdots\}$ 可构成一个更新过程, $Q(t)$ 是它的更新寿命分布. 对 (1) 两端作 LS 变换, 得

$$
\hat{Q}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{s+\Lambda} \hat{G}_j(s) \tag{2}
$$

§7.3.1 系统可靠度

串联系统首次故障前时间 $\zeta_1 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$, 因此系统可靠度是

$$
R(t) = P\{\min_{1<i<n} X_i > t\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > t\} = e^{-\Lambda t} \tag{3}
$$

系统首次故障前平均时间为

$$
\mathrm{MTTFF} = \frac{1}{\Lambda}
$$

§7.3.2 系统可用度

令

$$X(t)=\begin{cases}1, \text{当时刻}t\text{系统工作}\\ 0, \text{当时刻}t\text{系统故障}\end{cases}$$

故瞬时可用度是

$$A(t)=P\{X(t)=1|\text{ 时刻 0 系统工作}\}$$

类似于 §7.2, (3) 式的推导, 我们得更新方程

$$A(t)=e^{-\Lambda t}+Q(t)*A(t) \tag{4}$$

对上式作 L 变换, 有

$$A^*(s)=\frac{1}{s+\Lambda}+\hat{Q}(s)A^*(s)$$

解得

$$A^*(s)=\frac{\dfrac{1}{s+\Lambda}}{1-\hat{Q}(s)}=\frac{1}{s+\Lambda-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\hat{G}_j(s)} \tag{5}$$

若直接用 §7.1,(7) 式, 更新方程 (4) 的解为

$$A(t)=e^{-\Lambda t}+\tilde{M}(t)*e^{-\Lambda t} \tag{6}$$

其中 $\tilde{M}(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}Q^{(k)}(t)$ 是更新函数. 由于 (1) 式, 更新寿命分布 $Q(t)$ 是非格点分布. 用定理 7.1.3 , 得系统的稳态可用度

$$\begin{aligned}A&=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{t\to\infty}\{e^{-\Lambda t}+\tilde{M}(t)*e^{-\Lambda t}\}\\&=\frac{1}{E\{\zeta_k+\chi_k\}}\int_0^{\infty}e^{-\Lambda t}dt=\frac{\frac{1}{\Lambda}}{-\hat{Q}'(0)}=\frac{1}{1+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\lambda_j}{\mu_j}}\end{aligned} \tag{7}$$

§7.3.3 (0,t] 时间中系统平均故障次数

类似于 §§7.2.3 的讨论, $M(t)$ 满足更新方程

$$M(t) = 1 - e^{-\Lambda t} + Q(t) * M(t) \tag{8}$$

两端作 LS 变换, 得

$$\hat{M}(s) = \frac{\Lambda}{s+\Lambda} + \hat{Q}(s)\hat{M}(s)$$

解得

$$\hat{M}(s) = \frac{\Lambda}{s + \Lambda - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{G}_j(s)} \tag{9}$$

系统稳态故障频度是

$$M = \lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\hat{M}(s) = \frac{\Lambda}{1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\mu_j}} \tag{10}$$

§7.4 两个同型部件的冷贮备系统

为便于理解马尔可夫更新过程的工具如何应用于可修系统的研究, 我们先举一个较简单的系统.

考虑两个同型部件两个修理设备组成的冷贮备系统 (一个修理设备的情形可完全类似地讨论). 假设每个部件的工作寿命 X 遵从一般分布 $F(t)$, 其中 $\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty t dF(t), (\lambda > 0)$, 部件故障后的修理时间 Y 遵从参数 μ 的指数分布. 进一步假定:

1) 两个部件的工作寿命和修理时间都相互独立;

2) 转换开关是完全可靠的, 状态转移是瞬时的;

3) 部件修复后, 寿命分布像新部件一样;

4) 贮备的部件既不出故障、也不劣化 (即冷贮备).

这系统共有三个状态:

状态 0: 一个部件开始工作, 另一个部件贮备. 部件开始工作的时刻定义为系统进入状态 0 的时刻.

状态 1: 一个部件开始工作, 另一个部件开始修理. 部件开始工作的时刻定义为系统进入状态 1 的时刻.

状态 2: 一个部件发生故障, 另一个部件在修理. 部件发生故障的时刻定义为系统进入状态 2 的时刻.

显然, 状态 2 是系统故障状态. 图 7.4 表示了这个系统的可能发展进程. 图 7.5 描述了系统各状态之间的转移关系. 记 $E=\{0,1,2\}$.

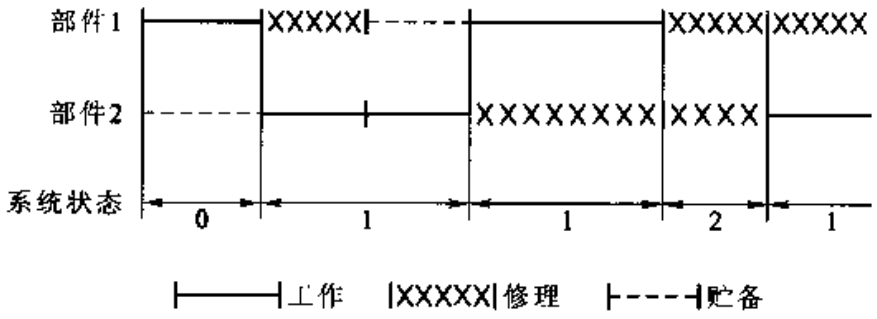


图 7.4

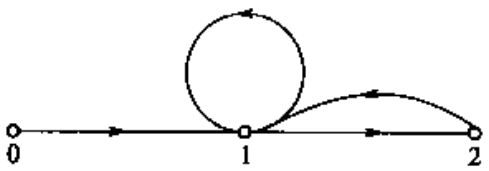


图 7.5

我们用 $X(t)$ 表示时刻 t 系统所处的状态. 用 T_n 表示这系统的第 n 次发生状态转移的时刻 $(T_0=0)$. 令 $Z_n=X(T_n+0)$, 它表示系统在第 n 次发生状态转移的时刻所进入的状态. 由我们所定义的状态及指数分布的无记忆性, 易知所有状态转移时刻 $T_n(n=1,2,\cdots)$ 均是再生点. 即只要知道时刻 T_n 系统进入的状态 Z_n, T_n 以后系统发展的概率规律与 T_n 以前的历史无关. 因此 $\{Z_n,T_n;n=0,1,\cdots\}$ 是一个马尔可夫更新过程. $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个半马尔可夫过程. 由半马尔可夫核的定义:

$$Q_{ij}(t)=P\{Z_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\leqslant t|Z_n=i\},\quad i,j=0,1,2;\quad n=0,1,2,\cdots$$

和图 7.4, 可得

$$\begin{cases} Q_{01}(t) = P\{X \leqslant t\} = F(t) \\ Q_{11}(t) = P\{X \leqslant t, Y < X\} = \int_0^t (1 - e^{-\mu u}) dF(u) \\ Q_{12}(t) = P\{X \leqslant t, X < Y\} = \int_0^t e^{-\mu u} dF(u) \\ Q_{21}(t) = 1 - e^{-2\mu t} \\ Q_{ij}(t) = 0, \qquad \text{其它} i, j \in E \end{cases} \tag{1}$$

对上述各式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{Q}_{01}(s) = \hat{F}(s) \\ \hat{Q}_{11}(s) = \hat{F}(s) - \hat{F}(s+\mu) \\ \hat{Q}_{12}(s) = \hat{F}(s+\mu) \\ \hat{Q}_{21}(s) = \dfrac{2\mu}{s+2\mu} \end{cases} \tag{2}$$

§7.4.1 系统首次故障前时间分布

我们令

$$\Phi_i(t) = P\{\text{系统首次故障前时间} \leqslant t | \text{时刻 } 0 \text{ 系统进入状态 } i\}$$

$i = 0, 1$. 由 $\Phi_i(t)$ 的定义及系统状态转移关系 (图 7.5), $\Phi_i(t)$ 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} \Phi_0(t) = Q_{01}(t) * \Phi_1(t) \\ \Phi_1(t) = Q_{11}(t) * \Phi_1(t) + Q_{12}(t) \end{cases} \tag{3}$$

事实上

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= P\{\text{系统首次故障前时间 } \tau \leqslant t | Z_0 = 0\} \\ &= P\{\tau \leqslant t, T_1 > t | Z_0 = 0\} + P\{\tau \leqslant t, T_1 \leqslant t | Z_0 = 0\} \end{aligned}$$

右端第一项中, 事件 $T_1 > t$ 表示时刻 t 系统仍停留在状态 0, 它与 $\tau \leqslant t$ 不可能同时发生, 故该项为零. 右端第二项用全概率公式

$$\begin{aligned} & P\{\tau \leqslant t, T_1 \leqslant t | Z_0 = 0\} \\ = & \sum_{j \in E} \int_0^t P\{\tau \leqslant t | Z_1 = j, T_1 = u, Z_0 = 0\} dP\{T_1 \leqslant u, Z_1 = j | Z_0 = 0\} \end{aligned}$$

从状态 0 出发下一步只可能转移到状态 1, 故上式右端只有 $j=1$ 一项. 因此

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) &= \int_0^t P\{\tau \leqslant t | Z_1 = 1, T_1 = u, Z_0 = 0\} dQ_{01}(u) \\ &= \int_0^t \Phi_1(t-u) dQ_{01}(u) = Q_{01}(t) * \Phi_1(t)\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= P\{\tau \leqslant t | Z_0 = 1\} \\ &= P\{\tau \leqslant t, T_1 > t | Z_0 = 1\} + P\{\tau \leqslant t, T_1 \leqslant t | Z_0 = 1\} \\ &= P\{\tau \leqslant t, T_1 \leqslant t | Z_0 = 1\} \\ &= \sum_{j \in E} \int_0^t P\{\tau \leqslant t | Z_1 = j, T_1 = u, Z_0 = 1\} dQ_{1j}(u) \\ &= Q_{11}(t) * \Phi_1(t) + Q_{12}(t) * 1\end{aligned}$$

对 (3) 的两端作 LS 变换, 得

$$\begin{cases}\hat{\Phi}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{\Phi}_1(s) \\ \hat{\Phi}_1(s) = \hat{Q}_{11}(s)\hat{\Phi}_1(s) + \hat{Q}_{12}(s)\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\hat{\Phi}_0(s) = \dfrac{\hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{12}(s)}{1-\hat{Q}_{11}(s)} = \dfrac{\hat{F}(s)\hat{F}(s+\mu)}{1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)} \\ \hat{\Phi}_1(s) = \dfrac{\hat{Q}_{12}(s)}{1-\hat{Q}_{11}(s)} = \dfrac{\hat{F}(s+\mu)}{1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)}\end{cases} \tag{4}$$

令 $T_i = \int_0^\infty t d\Phi_i(t)$, 它表示时刻 t 系统从进入状态 i 出发的首次故障前平均时间, $i=0,1$. 则由 (4), 并注意到 $\hat{F}'(0) = -\dfrac{1}{\lambda}$, 得

$$\begin{cases}T_0 = -\dfrac{d}{ds}\hat{\Phi}_0(s)\Big|_{s=0} = \dfrac{1+\hat{F}(\mu)}{\lambda\hat{F}(\mu)} \\ T_1 = -\dfrac{d}{ds}\hat{\Phi}_1(s)\Big|_{s=0} = \dfrac{1}{\lambda\hat{F}(\mu)}\end{cases} \tag{5}$$

§7.4.2 系统可用度

我们令

$$A_i(t)=P\{\text{时刻}t\text{系统处于工作状态}|\text{ 时刻}0\text{系统进入状态}i\},i=0,1,2$$

由 $A_i(t)$ 的定义及状态转移关系, 它们满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases}A_0(t)=Q_{01}(t)*A_1(t)+[1-Q_{01}(t)]\\A_1(t)=Q_{11}(t)*A_1(t)+Q_{12}(t)*A_2(t)+[1-Q_{11}(t)-Q_{12}(t)]\\A_2(t)=Q_{21}(t)*A_1(t)\end{cases}\tag{6}$$

事实上, (6) 的第二式

$$\begin{aligned}A_1(t)&=P\{\text{时刻}t\text{系统正常}|Z_0=1\}\\&=P\{\text{时刻}t\text{系统正常},T_1>t|Z_0=1\}\\&\quad+P\{\text{时刻}t\text{系统正常},T_1\leqslant t|Z_0=1\}\end{aligned}$$

右端第一项中, 时刻 0 系统从进入状态 1 出发, $T_1>t$ 表示到时刻 t 系统没有发生过状态转移, 仍停留在状态 1, 故时刻 t 系统必然处于正常状态, 因此右端第一项等于

$$P\{T_1>t|Z_0=1\}=1-Q_{11}(t)-Q_{12}(t)$$

右端第二项等于

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in E}\int_0^t P\{\text{时刻}t\text{系统正常}|Z_1=j,T_1=u,Z_0=1\}dQ_{1j}(u)\\&=\int_0^t A_1(t-u)dQ_{11}(u)+\int_0^t A_2(t-u)dQ_{12}(u)\end{aligned}$$

(6) 的第一式可类似证明.(6) 的第三式

$$\begin{aligned}A_2(t)&=P\{\text{时刻}t\text{系统正常}|Z_0=2\}\\&=P\{\text{时刻}t\text{系统正常},T_1>t|Z_0=2\}\\&\quad+P\{\text{时刻}t\text{系统正常},T_1\leqslant t|Z_0=2\}\end{aligned}$$

右端第一项中, 时刻 0 系统从进入故障状态 2 出发, 直到时刻 t 系统仍停留在状态 2. 因此, 时刻 t 系统不可能处于正常状态. 故此项为零. 右端第二项则为 $Q_{21}(t)*A_1(t)$.

对 (6) 的两端作 L 变换, 得

$$\begin{cases} A_0^*(s) = \hat{Q}_{01}(s)A_1^*(s) + \dfrac{1}{s}[1-\hat{Q}_{01}(s)] \\ A_1^*(s) = \hat{Q}_{11}(s)A_1^*(s) + \hat{Q}_{12}(s)A_2^*(s) + \dfrac{1}{s}[1-\hat{Q}_{11}(s)-\hat{Q}_{12}(s)] \\ A_2^*(s) = \hat{Q}_{21}(s)A_1^*(s) \end{cases}$$

解此方程组, 并将 (2) 式代入, 得系统可用度的 L 变换为

$$\begin{cases} A_1^*(s) = \dfrac{\dfrac{1}{s}[1-\hat{F}(s)]}{1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)\dfrac{s}{s+2\mu}} \\ A_2^*(s) = \dfrac{\dfrac{1}{s}[1-\hat{F}(s)]\dfrac{2\mu}{s+2\mu}}{1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)\dfrac{s}{s+2\mu}} \\ A_0^*(s) = \dfrac{\dfrac{1}{s}[1-\hat{F}(s)]\left[1+\hat{F}(s+\mu)\dfrac{s}{s+2\mu}\right]}{1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)\dfrac{s}{s+2\mu}} \end{cases} \tag{7}$$

由 L 变换的托贝尔定理, 系统平均稳态可用度为

$$\tilde{A}_i = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A_i(u)du = \lim_{s\to 0} sA_i^*(s) = \frac{2\mu}{2\mu+\lambda\hat{F}(\mu)}, \quad i=0,1,2$$

右端与初始状态 i 无关. 显然 $Q_{21}(t)$ 是非格点的, 用 §§7.1.2 的马尔可夫更新过程极限定理 7.1.7 , 极限

$$\lim_{t\to\infty} A_i(t) = A$$

存在, 且与状态 i 无关. 因此, 系统稳态可用度为

$$A = \lim_{t\to\infty} A_i(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A_i(u)du = \frac{2\mu}{2\mu+\lambda\hat{F}(\mu)} \tag{8}$$

§7.4.3 $(0,t]$ 时间内系统平均故障次数

令 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间内系统的故障次数,

$$M_i(t) = E\{N(t)|Z_0=i\}$$

它表示时刻 0 系统从进入状态 i 出发, 在 $(0,t]$ 内系统的平均故障次数, $i=0,1,2$. 由定义, 它们满足以下马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} M_0(t) = Q_{01}(t) * M_1(t) \\ M_1(t) = Q_{11}(t) * M_1(t) + Q_{12}(t) * [M_2(t)+1] \\ M_2(t) = Q_{21}(t) * M_1(t) \end{cases} \tag{9}$$

事实上

$$\begin{aligned} M_0(t) =& E\{N(t)|Z_0=0\} \\ =& \sum_{j\in E}\int_0^t E\{N(t)|Z_1=j,T_1=u,Z_0=0\}dQ_{0j}(u) \\ &+ E\{N(t)|T_1>t,Z_0=0\}P\{T_1>t|Z_0=0\} \end{aligned}$$

从状态 0 出发, 下一步只能转到状态 1, 故右端前一项的求和中仅有 $j=1$ 一项, 而状态 1 是系统的正常状态. 故右端前一项等于

$$\begin{aligned} &\int_0^t E\{N(t)|Z_1=1,T_1=u,Z_0=0\}dQ_{01}(u) \\ &\qquad = \int_0^t M_1(t-u)dQ_{01}(u) = Q_{01}(t) * M_1(t) \end{aligned}$$

右端第二项中, 在 $Z_0=0$ 和 $T_1>t$ 的条件下,$(0,t]$ 内系统一直停留在正常状态 0, 故

$$E\{N(t)|Z_0=0,T_1>t\}=0$$

(9) 的第三式可类似证明.(9) 的第二式左端

$$\begin{aligned} M_1(t) =& E\{N(t)|Z_0=1\} \\ =& \sum_{j\in E}\int_0^t E\{N(t)|Z_1=j,T_1=u,Z_0=1\}dQ_{1j}(u) \\ &+ E\{N(t)|T_1>t,Z_0=1\}P\{T_1>t|Z_0=1\} \end{aligned}$$

右端第二项为零. 右端第一项求和中有二项 $j=1,2$. 因而

$$\begin{aligned} M_1(t) =& \int_0^t E\{N(t)|Z_1=1,T_1=u,Z_0=1\}dQ_{11}(u) \\ &+ \int_0^t E\{N(t)|Z_1=2,T_1=u,Z_0=1\}dQ_{12}(u) \\ =& \int_0^t M_1(t-u)dQ_{11}(u) + \int_0^t [M_2(t-u)+1]dQ_{12}(u) \end{aligned}$$

后一项是由于在 $Z_0=1,Z_1=2,T_1=u$ 的条件下, 在时刻 u 系统由正常状态 1 进入故障状态 2. 故 $(0,t]$ 内系统的故障次数等于时刻 u 故障一次和时刻 u 从进入状态 2 出发, $(u,t]$ 中故障的次数.

$$E\{N(t)|Z_1=2,T_1=u,Z_0=1\}=M_2(t-u)+1$$

因此得 (9) 的第二式.

对 (9) 的两端作 LS 变换, 得

$$\begin{cases}\hat{M}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{M}_1(s)\\ \hat{M}_1(s) = \hat{Q}_{11}(s)\hat{M}_1(s)+\hat{Q}_{12}(s)\hat{M}_2(s)+\hat{Q}_{12}(s)\\ \hat{M}_2(s) = \hat{Q}_{21}(s)\hat{M}_1(s)\end{cases}$$

解出上述方程组, 并将 (2) 式代入, 得到

$$\begin{cases}\hat{M}_1(s) = \dfrac{\hat{F}(s+\mu)}{1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)\dfrac{s}{s+2\mu}}\\ \hat{M}_2(s) = \dfrac{2\mu}{s+2\mu}\hat{M}_1(s)\\ \hat{M}_0(s) = \hat{F}(s)\hat{M}_1(s)\end{cases}\tag{10}$$

由托贝尔定理和 (10) 式, 系统稳态故障频度为

$$M=\lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t}=\lim_{s\to 0}s\hat{M}_i(s)=\frac{2\lambda\mu\hat{F}(\mu)}{2\mu+\lambda\hat{F}(\mu)}\tag{11}$$

与初始状态 i 无关.

§7.5 两个不同型部件的冷贮备系统

考虑两个不同型部件和一个修理设备组成的冷贮备系统. 假设部件 i 的工作寿命 X_i 和故障后的修理时间 Y_i 分别遵从一般分布 $F_i(t)$ 和 $G_i(t)$, 其均值分别为 $1/\lambda_i$ 和 $1/\mu_i(\lambda_i,\mu_i>0), i=1,2$. 进一步假设:

1) X_1,X_2,Y_1,Y_2 相互独立;

2) 贮备部件既不出故障也不劣化 (冷贮备) ;

3) 转换开关是完全可靠的, 状态转移是瞬时的;

4) 故障的部件经修复后, 寿命分布像新的部件一样.

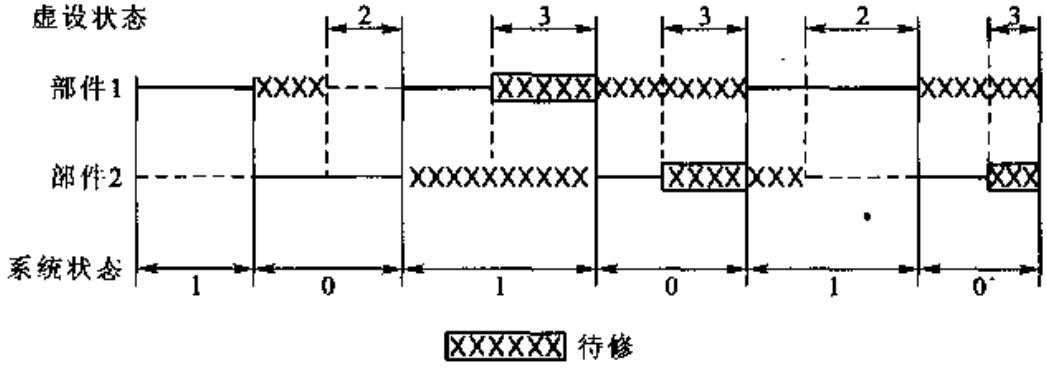


图 7.6

图 7.6 是这个系统随时间的可能发展进程.

我们定义系统的状态:

状态 -1: 进入状态 -1 的时刻部件 1 开始工作, 部件 2 贮备. 其中部件 1 在开始工作时刻是新的.

状态 0: 进入状态 0 的时刻部件 2 开始工作, 部件 1 开始修理.

状态 1: 进入状态 1 的时刻部件 1 开始工作, 部件 2 开始修理.

初始状态 -1 是滑过状态, 即系统走出状态 -1 后, 再也不可能回到状态 -1. 易验证, 进入状态 0 和状态 1 的时刻是系统的再生点. 系统不存在其它再生点. 系统的状态转移关系见图 7.7(a). 我们令

$$X(t)=j,\quad \text{当时刻}t\text{系统处于状态}j, j=-1,0,1$$

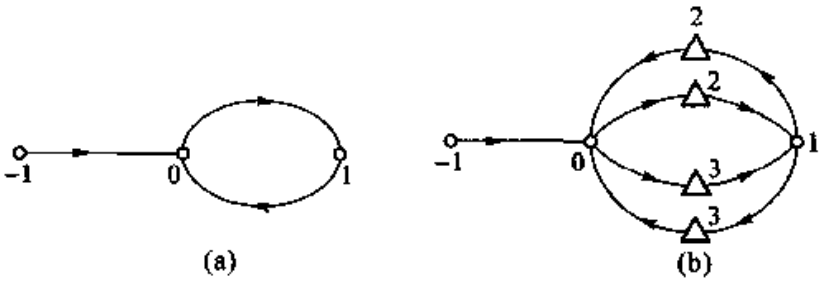


图 7.7

用 T_n 表示系统第 n 次发生状态转移时刻 $(T_0=0)$. 令 $Z_n=X(T_n+0)$, 它表示系统第 n 次状态转移时刻系统进入的状态, 容易验证,$\{Z_n,T_n;n=0,1,\cdots\}$ 是一个状态空间为 $E=\{-1,0,1\}$ 的马尔可夫更新过程, $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个半马尔可夫过程. 用 $Q_{ij}(t)$ 表示其半马尔可夫核, $i=-1,0,1;j=0,1$.

为以下讨论问题方便, 我们引进两个虚设状态:

状态 2: 进入状态 2 的时刻为一个部件正在工作, 另一个部件修理结束时刻.

状态 3: 进入状态 3 的时刻为一个部件正在修理, 另一个部件发生故障时刻.

由于部件的寿命和修理时间都是一般分布, 因而进入状态 2 和状态 3 的时刻不是系统的再生点. 马尔可夫更新过程从进入状态 0 到进入状态 1 的期间内, 可能经过虚设状态 2, 也可能经过虚设状态 3; 同样, 从进入状态 1 到进入状态 0 的期间内, 可能经过虚设状态 2, 也可能经过虚设状态 3. 我们在图 7.6 和图 7.7(b) 中表示出这种转移关系. 令 $Q_{ij}^{(t)}(t)$ 表示系统从状态 i 出发, 经过虚设状态 k, 下一步转到状态 j, 且在状态 i 或 k 的逗留时间小于或等于 t 的概率. 可计算出所有半马尔可夫核:

$$
\begin{aligned}
Q_{10}(t) &= P\{X_1 \leqslant t\} = F_1(t) \\
Q_{01}(t) &= Q_{01}^{(2)}(t) + Q_{01}^{(3)}(t) = P\{X_2 \leqslant t, X_2 > Y_1\} + P\{Y_1 \leqslant t, Y_1 > X_2\} \\
&= \int_0^t G_1(u)dF_2(u) + \int_0^t F_2(u)dG_1(u) = F_2(t)G_1(t) \\
Q_{10}(t) &= Q_{10}^{(2)}(t) + Q_{10}^{(3)}(t) = P\{X_1 \leqslant t, X_1 > Y_2\} + P\{Y_2 \leqslant t, Y_2 > X_1\} \\
&= \int_0^t G_2(u)dF_1(u) + \int_0^t F_1(u)dG_2(u) = F_1(t)G_2(t)
\end{aligned}
$$

为求系统的各种可靠性指标, 我们还需用到

$$
\begin{aligned}
Q_{01}^{(2)}(t) &= \int_0^t G_1(u)dF_2(u) \\
Q_{10}^{(2)}(t) &= \int_0^t G_2(u)dF_1(u) \\
Q_{03}(t) &= P\{X_2 \leqslant t, X_2 < Y_1\} = \int_0^t \bar{G}_1(u)dF_2(u) \\
Q_{13}(t) &= P\{X_1 \leqslant t, X_1 < Y_2\} = \int_0^t \bar{G}_2(u)dF_1(u)
\end{aligned}
$$

后二式的定义类似于半马尔可夫核, 但是状态 3 是虚设状态, 不是系统的再生

点. 易见, 只有虚设状态 3 是系统的故障状态. 对以上各式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{Q}_{-10}(s) = \hat{F}_1(s) \\ \hat{Q}_{01}(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_1(t) dF_2(t) + \int_0^\infty e^{-st} F_2(t) dG_1(t) \\ \hat{Q}_{10}(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_2(t) dF_1(t) + \int_0^\infty e^{-st} F_1(t) dG_2(t) \\ \hat{Q}_{01}^{(2)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_1(t) dF_2(t) \\ \hat{Q}_{10}^{(2)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_2(t) dF_1(t) \\ \hat{Q}_{03}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \bar{G}_1(t) dF_2(t) \\ \hat{Q}_{13}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \bar{G}_2(t) dF_1(t) \end{cases} \tag{1}$$

§7.5.1 系统首次故障前时间分布

令 $\Phi_i(t)$ 表示系统在时刻 0 进入状态 i 的条件下, 系统首次故障前时间分布, 即

$$\Phi_i(t) = P\{\text{系统首次故障前时间} \leqslant t | Z_0 = i\}, \quad i = -1, 0, 1$$

类似于 §§7.4.1 中的 (3) 式, 可证它们满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} \Phi_{-1}(t) = Q_{-10}(t) * \Phi_0(t) \\ \Phi_0(t) = Q_{01}^{(2)}(t) * \Phi_1(t) + Q_{03}(t) \\ \Phi_1(t) = Q_{10}^{(2)}(t) * \Phi_0(t) + Q_{13}(t) \end{cases}$$

对上式作 LS 变换, 解得

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_0(s) = \dfrac{\hat{Q}_{01}^{(2)}(s)\hat{Q}_{13}(s) + \hat{Q}_{03}(s)}{1 - \hat{Q}_{01}^{(2)}(s)\hat{Q}_{10}^{(2)}(s)} \\ \hat{\Phi}_1(s) = \dfrac{\hat{Q}_{10}^{(2)}(s)\hat{Q}_{03}(s) + \hat{Q}_{13}(s)}{1 - \hat{Q}_{10}^{(2)}(s)\hat{Q}_{01}^{(2)}(s)} \\ \hat{\Phi}_{-1}(s) = \hat{F}_1(s)\hat{\Phi}_0(s) \end{cases} \tag{2}$$

令

$$T_i = \int_0^\infty t d\Phi_i(t), i = -1, 0, 1$$

若时刻 0 系统从进入状态 -1 出发, 则系统首次故障前平均时间为

$$T_{-1} = -\hat{\Phi}'_{-1}(0) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{\hat{Q}_{01}^{(2)}(0)}{\lambda_1}}{1 - \hat{Q}_{01}^{(2)}(0)\hat{Q}_{10}^{(2)}(0)} \tag{3}$$

类似可求 T_0 和 T_1 的表达式.

§7.5.2 系统可用度

令

$$A_i(t) = P\{\text{时刻}t\text{系统正常}|Z_0 = i\}, \quad i = -1, 0, 1$$

类似于 §§7.4.2, (6) 式, 易证它们满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} A_{-1}(t) = Q_{-10}(t) * A_0(t) + [1 - Q_{-10}(t)] \\ A_0(t) = Q_{01}(t) * A_1(t) + [1 - Q_{03}(t) - Q_{01}^{(2)}(t)] \\ A_1(t) = Q_{10}(t) * A_0(t) + [1 - Q_{13}(t) - Q_{10}^{(2)}(t)] \end{cases} \tag{4}$$

第二式右端第二项表示, 时刻 0 系统从进入状态 0 出发,$(0, t]$ 内仍逗留在状态 0 或逗留在虚设状态 2, 即 $(0, t]$ 内系统不转入下一个再生点状态 1 和故障状态. 此时, 时刻 t 系统处于工作状态. 第三式右端第二项的情况完全类似. 由于

$$\begin{aligned} 1 - Q_{03}(t) - Q_{01}^{(2)}(t) =& 1 - P\{X_2 \leqslant t, X_2 < Y_1\} - P\{X_2 \leqslant t, X_2 > Y_1\} \\ =& 1 - P\{X_2 \leqslant t\} = 1 - F_2(t) \\ 1 - Q_{13}(t) - Q_{10}^{(2)}(t) =& 1 - F_1(t) \end{aligned}$$

对 (4) 式两端作 L 变换, 用到上两式的结果, 立即可得到

$$\begin{cases} A_{-1}^*(s) = \hat{Q}_{-10}(s)A_0^*(s) + \dfrac{1}{s}[1 - \hat{F}_1(s)] \\ A_0^*(s) = \hat{Q}_{01}(s)A_1^*(s) + \dfrac{1}{s}[1 - \hat{F}_2(s)] \\ A_1^*(s) = \hat{Q}_{10}(s)A_0^*(s) + \dfrac{1}{s}[1 - \hat{F}_1(s)] \end{cases}$$

解出上述方程组

$$\begin{cases} A_0^*(s) = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{[1 - \hat{F}_1(s)]\hat{Q}_{01}(s) + [1 - \hat{F}_2(s)]}{1 - \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{10}(s)} \\ A_1^*(s) = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{[1 - \hat{F}_2(s)]\hat{Q}_{10}(s) + [1 - \hat{F}_1(s)]}{1 - \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{10}(s)} \\ A_{-1}^*(s) = \hat{F}_1(s)A_0^*(s) + \dfrac{1}{s}[1 - \hat{F}_1(s)] \end{cases} \tag{5}$$

由 L 变换的托贝尔定理, 可得系统平均稳态可用度为

$$\tilde{A}_i = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A_i(u)du = \lim_{s\to 0} sA_i^*(s) = \frac{\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}}{l}, \quad i=-1,0,1 \tag{6}$$

与初始状态 i 无关, 其中

$$l = \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}-\int_0^\infty \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t)dt-\int_0^\infty \bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t)dt \tag{7}$$

当 $F_1(t), F_2(t), G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 之中, 至少有一个是非格点分布, 则 $Q_{01}(t)$ 和 $Q_{10}(t)$ 之中至少有一个是非格点的. 用马尔可夫更新过程的极限定理 7.1.7 , 可知极限 $\lim\limits_{t\to\infty} A_i(t) = A$ 存在, 且与初始状态 i 无关. 因此, 系统可用度为

$$A = \lim_{t\to\infty} A_i(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A_i(u)du = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 l} \tag{8}$$

其中 l 由 (7) 给出.

§7.5.3 (0,t] 时间内系统平均故障次数

令 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间内系统故障次数,

$$M_i(t) = E\{N(t)|Z_0=i\}, \quad i=-1,0,1$$

类似于 §7.4.3, (9) 式, 它们满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} M_{-1}(t) = Q_{-10}(t) * M_0(t) \\ M_0(t) \ = Q_{01}^{(2)}(t) * M_1(t) + Q_{01}^{(3)}(t) * [M_1(t)+1] \\ \qquad\quad +[Q_{03}(t) - Q_{01}^{(3)}(t)] \\ M_1(t) \ = Q_{10}^{(2)}(t) * M_0(t) + Q_{10}^{(3)}(t) * [M_0(t)+1] \\ \qquad\quad +[Q_{13}(t) - Q_{10}^{(3)}(t)] \end{cases} \tag{9}$$

对上式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{M}_{-1}(s) = \hat{Q}_{-10}(s)\hat{M}_0(s) \\ \hat{M}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{M}_1(s) + \hat{Q}_{03}(s) \\ \hat{M}_1(s) = \hat{Q}_{10}(s)\hat{M}_0(s) + \hat{Q}_{13}(s) \end{cases}$$

解出此方程组

$$\begin{cases} \hat{M}_0(s) = \dfrac{\hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{13}(s) + \hat{Q}_{03}(s)}{1 - \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{10}(s)} \\ \hat{M}_1(s) = \dfrac{\hat{Q}_{10}(s)\hat{Q}_{03}(s) + \hat{Q}_{13}(s)}{1 - \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{10}(s)} \\ \hat{M}_{-1}(s) = \hat{F}_1(s)\hat{M}_0(s) \end{cases} \tag{10}$$

由托贝尔定理, 稳态故障频度为

$$M = \lim_{t\to\infty} \frac{M_i(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\hat{M}_i(s) = \frac{\hat{Q}_{03}(0) + \hat{Q}_{13}(0)}{l} \tag{11}$$

与初始状态 i 无关, 其中 l 由 (7) 给出.

§7.6 两个不同型部件的并联系统 (I)

考虑由两个不同型部件—个修理设备组成的并联系统. 假设部件 i 的工作寿命 X_i 遵从指数分布 $1 - e^{-\lambda_i t}, t \geqslant 0, (\lambda_i > 0)$, 故障后的修理时间 Y_i 遵从一般分布 $G_i(t)$, 均值为 $1/\mu_i, (\mu_i > 0), i = 1, 2$. 进一步假设, X_1, X_2, Y_1 和 Y_2 都相互独立, 故障的部件经修复后, 工作寿命分布像新的部件一样, 图 7.8 是这系统随时间的可能发展进程.

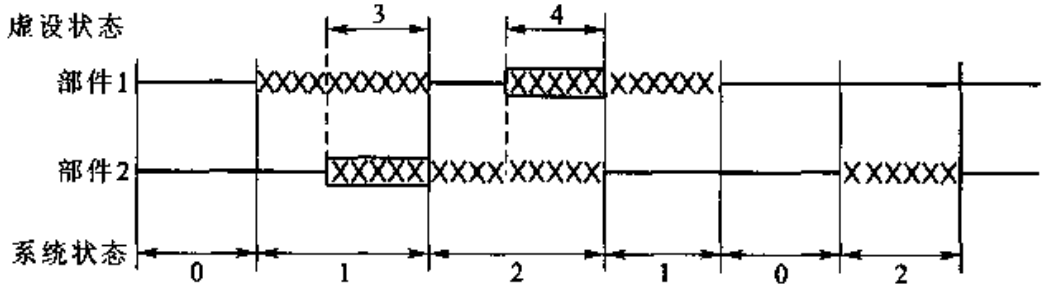


图 7.8

我们定义系统的状态:

状态 0: 两个部件都在工作.

状态 1: 进人状态 1 的时刻为部件 2 在工作, 部件 1 开始修理的时刻.

状态 2: 进人状态 2 的时刻为部件 1 在工作, 部件 2 开始修理的时刻.

由于指数分布的无记忆性, 进人状态 0,1,2 的时刻是系统的再生点. 系统的状态

转移关系见图 7.9(a). 令

$$X(t)=j,\ \text{当时刻}t\text{系统处于状态}j,\quad j=0,1,2$$

用 T_n 表示系统第 n 次发生状态转移的时刻 $(T_0=0)$. 令 $Z_n=X(T_n+0)$, 它表示第 n 次状态转移时刻系统所进入的状态. 易验证 $\{Z_n,T_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个时齐马尔可夫更新过程, $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是半马尔可夫过程.

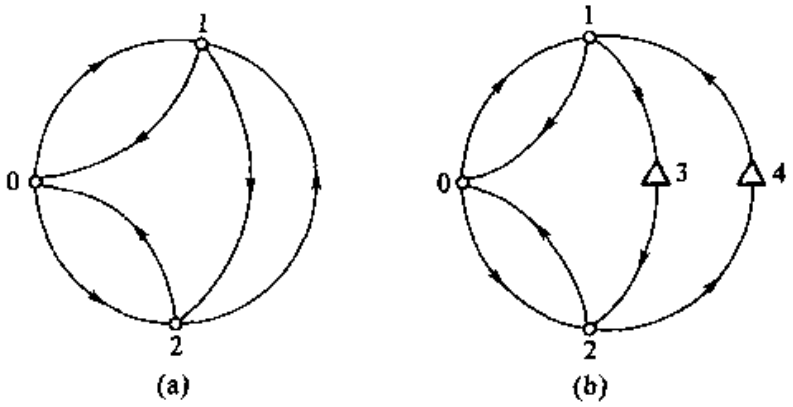


图 7.9

为讨论问题方便, 引进两个虚设状态:

状态 3: 部件 1 在修理, 部件 2 待修.

状态 4: 部件 2 在修理, 部件 1 待修.

我们在图 7.8 和图 7.9(b) 中表示出这两个虚设状态. 由于修理时间都是一般分布, 故进入状态 3 和状态 4 的时刻不是系统的再生点. 显然, 状态 3 和状态 4 是系统的故障状态.

由已知条件可计算出半马尔可夫核:

$$Q_{01}(t)=P\{X_1\leqslant t,X_1<X_2\}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}[1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}]$$

$$Q_{02}(t)=P\{X_2\leqslant t,X_2<X_1\}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}[1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}]$$

$$Q_{10}(t)=P\{Y_1\leqslant t,Y_1<X_2\}=\int_0^t e^{-\lambda_2 u}dG_1(u)$$

$$Q_{20}(t)=P\{Y_2\leqslant t,Y_2<X_1\}=\int_0^t e^{-\lambda_1 u}dG_2(u)$$

$$
\begin{aligned}
Q_{12}(t) =& Q_{12}^{(3)}(t) = P\{Y_1 \leqslant t, X_2 < Y_1\} \\
=& \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2 u}) dG_1(u) \\
=& G_1(t) - \int_0^t e^{-\lambda_2 u} dG_1(u) \\
Q_{21}(t) =& Q_{21}^{(4)}(t) = P\{Y_2 \leqslant t, X_1 < Y_2\} \\
=& G_2(t) - \int_0^t e^{-\lambda_1 u} dG_2(u)
\end{aligned}
$$

为求系统各可靠性指标, 我们还需用到

$$
Q_{13}(t) = P\{X_2 \leqslant t, X_2 < Y_1\} = \int_0^t \bar{G}_1(u) d(1 - e^{-\lambda_2 u})
$$

$$
Q_{24}(t) = P\{X_1 \leqslant t, X_1 < Y_2\} = \int_0^t \bar{G}_2(u) d(1 - e^{-\lambda_1 u})
$$

对以上各式作 LS 变换, 得

$$
\begin{cases}
\hat{Q}_{01}(s) = \dfrac{\lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda_2} \\
\hat{Q}_{02}(s) = \dfrac{\lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2} \\
\hat{Q}_{10}(s) = \hat{G}_1(s + \lambda_2) \\
\hat{Q}_{20}(s) = \hat{G}_2(s + \lambda_1) \\
\hat{Q}_{12}(s) = \hat{G}_1(s) - \hat{G}_1(s + \lambda_2) \\
\hat{Q}_{21}(s) = \hat{G}_2(s) - \hat{G}_2(s + \lambda_1) \\
\hat{Q}_{13}(s) = \dfrac{\lambda_2}{s + \lambda_2}[1 - \hat{G}_1(s + \lambda_2)] \\
\hat{Q}_{24}(s) = \dfrac{\lambda_1}{s + \lambda_1}[1 - \hat{G}_2(s + \lambda_1)]
\end{cases} \tag{1}
$$

§7.6.1 系统首次故障前时间分布

仍使用前面几节的符号,$\Phi_i(t), i = 0, 1, 2$ 满足马尔可夫更新方程组

$$
\begin{cases}
\Phi_0(t) = Q_{01}(t) * \Phi_1(t) + Q_{02}(t) * \Phi_2(t) \\
\Phi_1(t) = Q_{10}(t) * \Phi_0(t) + Q_{13}(t) \\
\Phi_2(t) = Q_{20}(t) * \Phi_0(t) + Q_{24}(t)
\end{cases}
$$

对上式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{\Phi}_1(s) + \hat{Q}_{02}(s)\hat{\Phi}_2(s) \\ \hat{\Phi}_1(s) = \hat{Q}_{10}(s)\hat{\Phi}_0(s) + \hat{Q}_{13}(s) \\ \hat{\Phi}_2(s) = \hat{Q}_{20}(s)\hat{\Phi}_0(s) + \hat{Q}_{24}(s) \end{cases} \tag{2}$$

解得

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_0(s) = \dfrac{\hat{Q}_{01}\hat{Q}_{13} + \hat{Q}_{02}\hat{Q}_{24}}{1 - \hat{Q}_{01}\hat{Q}_{10} - \hat{Q}_{02}\hat{Q}_{20}} \\ \hat{\Phi}_1(s) = \dfrac{\hat{Q}_{10}\hat{Q}_{02}\hat{Q}_{24} + \hat{Q}_{13}(1 - \hat{Q}_{02}\hat{Q}_{20})}{1 - \hat{Q}_{01}\hat{Q}_{10} - \hat{Q}_{02}\hat{Q}_{20}} \\ \hat{\Phi}_2(s) = \dfrac{\hat{Q}_{20}\hat{Q}_{01}\hat{Q}_{13} + \hat{Q}_{24}(1 - \hat{Q}_{01}\hat{Q}_{10})}{1 - \hat{Q}_{01}\hat{Q}_{10} - \hat{Q}_{02}\hat{Q}_{20}} \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ij}(s)$ 由 (1) 式给出.

为求系统首次故障前平均时间 $T_i, i = 0, 1, 2$, 更方便的方法是, 将 (2) 式两端关于 s 求导数, 用 $-\hat{\Phi}_i'(0) = T_i$ 代入, 可得 $T_i, i = 0, 1, 2$, 满足的方程组

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}T_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}T_2 + \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ T_1 = \hat{G}_1(\lambda_2)T_0 + \dfrac{1}{\lambda_2}[1 - \hat{G}_1(\lambda_2)] \\ T_2 = \hat{G}_2(\lambda_1)T_0 + \dfrac{1}{\lambda_1}[1 - \hat{G}_2(\lambda_1)] \end{cases} \tag{4}$$

解得

$$T_0 = \frac{1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}[1 - \hat{G}_1(\lambda_2)] + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}[1 - \hat{G}_2(\lambda_1)]}{\lambda_1[1 - \hat{G}_1(\lambda_2)] + \lambda_2[1 - \hat{G}_2(\lambda_1)]} \tag{5}$$

代入 (4) 可求得 T_1 和 T_2.

§7.6.2 系统可用度

系统的瞬时可用度 $A_i(t), i = 0, 1, 2$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} A_0(t) = Q_{01}(t) * A_1(t) + Q_{02}(t) * A_2(t) + [1 - Q_{01}(t) - Q_{02}(t)] \\ A_1(t) = Q_{10}(t) * A_0(t) + Q_{12}(t) * A_2(t) + [1 - Q_{10}(t) - Q_{13}(t)] \\ A_2(t) = Q_{20}(t) * A_0(t) + Q_{21}(t) * A_1(t) + [1 - Q_{20}(t) - Q_{24}(t)] \end{cases} \tag{6}$$

对上述各式作 L 变换, 得

$$\begin{cases} A_0^*(s) = \hat{Q}_{01}(s)A_1^*(s) + \hat{Q}_{02}(s)A_2^*(s) + \dfrac{1}{s}[1 - \hat{Q}_{01}(s) - \hat{Q}_{02}(s)] \\ A_1^*(s) = \hat{Q}_{10}(s)A_0^*(s) + \hat{Q}_{12}(s)A_2^*(s) + \dfrac{1}{s}[1 - \hat{Q}_{10}(s) - \hat{Q}_{13}(s)] \\ A_2^*(s) = \hat{Q}_{20}(s)A_0^*(s) + \hat{Q}_{21}(s)A_1^*(s) + \dfrac{1}{s}[1 - \hat{Q}_{20}(s) - \hat{Q}_{24}(s)] \end{cases} \tag{7}$$

由于 (1) 式, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}[1 - \hat{Q}_{01}(s) - \hat{Q}_{02}(s)] &= \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2} \\ \frac{1}{s}[1 - \hat{Q}_{10}(s) - \hat{Q}_{13}(s)] &= \frac{1}{s + \lambda_2}[1 - \hat{G}_1(s + \lambda_2)] \\ \frac{1}{s}[1 - \hat{Q}_{20}(s) - \hat{Q}_{24}(s)] &= \frac{1}{s + \lambda_1}[1 - \hat{G}_2(s + \lambda_1)] \end{aligned}$$

解方程组 (7) , 得

$$A_0^*(s) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2} & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s) \\ \dfrac{1 - \hat{G}_1(s + \lambda_2)}{s + \lambda_2} & 1 & -\hat{Q}_{12}(s) \\ \dfrac{1 - \hat{G}_2(s + \lambda_1)}{s + \lambda_1} & -\hat{Q}_{21}(s) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s) \\ -\hat{Q}_{10}(s) & 1 & -\hat{Q}_{12}(s) \\ -\hat{Q}_{20}(s) & -\hat{Q}_{21}(s) & 1 \end{vmatrix}} \tag{8}$$

类似可写出 $A_1^*(s)$ 和 $A_2^*(s)$ 的表达式.

显然, 式 (1) 中的 $Q_{01}(t)$ 是非格点的, 用马尔可夫更新过程的极限定理 7.1.7, 极限 $\lim\limits_{t\to\infty} A_i(t) = A$ 存在, 且与初始状态 i 无关. 因此用托贝尔定理系统稳态可用度为

$$A = \lim_{t\to\infty} A_i(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t A_i(u)du = \lim_{s\to 0} sA_i^*(s)$$

将 (8) 代入上式的右端可得具体的表达式.

我们也可直接用定理 7.1.7 来求系统稳态可用度 A. 由 §7.1, (15) 式, 求出

$$\begin{cases} m(0) = \dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2} \\ m(1) = \dfrac{1}{\mu_1} \\ m(2) = \dfrac{1}{\mu_2} \end{cases} \tag{9}$$

由 (1) 式求出 $P_{ij}=\lim\limits_{t\to\infty}Q_{ij}(t)$. 解方程组 §7.1, (14), 得

$$\begin{cases} \nu_0 = 1-\hat{\bar{G}}_1(\lambda_2)\hat{\bar{G}}_2(\lambda_1) \\ \nu_1 = 1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\hat{G}_2(\lambda_1) \\ \nu_2 = 1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\hat{G}_1(\lambda_2) \end{cases} \tag{10}$$

由 §7.1, (15) 式, 得

$$A=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{2}\nu_j m(j)}\left\{\frac{\nu_0}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\nu_1}{\lambda_2}[1-\hat{G}_1(\lambda_2)]+\frac{\nu_2}{\lambda_1}[1-\hat{G}_2(\lambda_1)]\right\} \tag{11}$$

§7.6.3 $(0,t]$ 时间内系统平均故障次数

$(0,t]$ 时间内系统平均故障次数 $M_j(t), j=0,1,2$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} M_0(t) = Q_{01}(t)*M_1(t)+Q_{02}(t)*M_2(t) \\ M_1(t) = Q_{10}(t)*M_0(t)+Q_{12}(t)*[M_2(t)+1]+[Q_{13}(t)-Q_{12}(t)] \\ M_2(t) = Q_{20}(t)*M_0(t)+Q_{21}(t)*[M_1(t)+1]+[Q_{24}(t)-Q_{21}(t)] \end{cases} \tag{12}$$

对上式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{M}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{M}_1(s)+\hat{Q}_{02}(s)\hat{M}_2(s) \\ \hat{M}_1(s) = \hat{Q}_{10}(s)\hat{M}_0(s)+\hat{Q}_{12}(s)\hat{M}_2(s)+\hat{Q}_{13}(s) \\ \hat{M}_2(s) = \hat{Q}_{20}(s)\hat{M}_0(s)+\hat{Q}_{21}(s)\hat{M}_1(s)+\hat{Q}_{24}(s) \end{cases} \tag{13}$$

解出此方程组, 得到

$$\hat{M}_0(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s)\\ \hat{Q}_{13}(s) & 1 & -\hat{Q}_{12}(s)\\ \hat{Q}_{24}(s) & -\hat{Q}_{21}(s) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s)\\ -\hat{Q}_{10}(s) & 1 & -\hat{Q}_{12}(s)\\ -\hat{Q}_{20}(s) & -\hat{Q}_{21}(s) & 1\end{vmatrix}} \tag{14}$$

类似可写出 $\hat{M}_1(s)$ 与 $\hat{M}_2(s)$ 的表达式.

系统稳态故障频度可由下式来求:

$$M=\lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t}=\lim_{s\to 0}s\hat{M}_i(s),i=0,1,2$$

将 (14) 式代入经计算, 可知上式与初始状态 i 无关.

下面, 我们用另一个方法来求 M . 注意 (13) 式与 (7) 式在形式上完全一样. 而由 (7) 式, 极限 $\lim\limits_{s\to 0}sA_i^*(s)$ 可用 (11) 给出. 因此, 对 (13) 式, 我们有类似的结果

$$M=\lim_{s\to 0}s\hat{M}_i(s)=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{2}m(j)\nu_j}\left\{\nu_1[1-\hat{G}_1(\lambda_2)]+\nu_2[1-\hat{G}_2(\lambda_1)]\right\} \tag{15}$$

与初始状态 i 无关, 其中 $m(j)$ 和 ν_j 分别由 (9) 和 (10) 给出.

在文章 [10] 中, 将本节讨论的系统推广到两个部件的寿命遵从二维指数分布的情形.

§7.7 两个不同型部件的并联系统 (II)

本节考虑另一个两部件并联系统, 系统中有一个修理设备. 部件 1 的寿命 X_1 和修理时间 Y_1 分别遵从指数分布 $1-e^{-\lambda t}$ 和 $1-e^{-\mu t},t\geqslant 0,(\lambda,\mu>0)$, 部件 2 的寿命 X_2 和修理时间 Y_2 分别遵从均值为 $1/\lambda_2$ 和 $1/\mu_2$ 的一般分布 $F_2(t)$ 和 $G_2(t)(\lambda_2,\mu_2>0,F_2(0)=G_2(0)=0)$. 其余假设完全同 §7.6. 求这个系统的各种可靠性数量指标要比前一节稍困难些. 我们用马尔可夫更新过程和交替更新过程的工具来分析这个系统.

图 7.10是这个系统随时间的可能发展进程. 我们定义系统的状态如下:

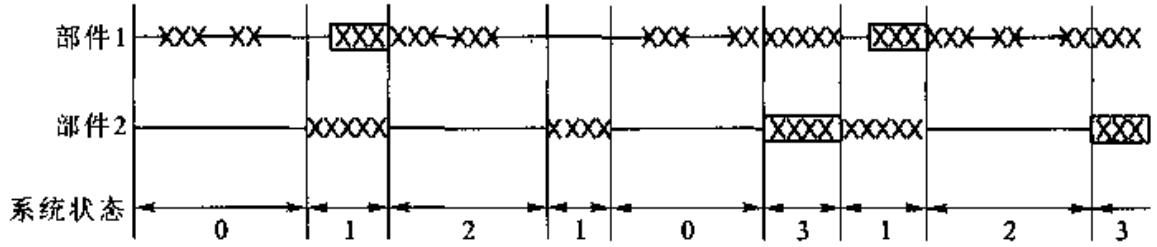


图 7.10

状态 0: 进入状态 0 的时刻为部件 2 开始工作的时刻, 此时部件 1 正在工作.状态 0 持续到部件 2 发生故障的时刻.

状态 1: 进入状态 1 的时刻为部件 2 开始修理的时刻, 此时部件 1 正在工作. 状态 1 持续到部件 2 修复的时刻.

状态 2: 进入状态 2 的时刻为部件 2 开始工作的时刻, 此时部件 1 正在修理. 状态 2 持续到部件 2 发生故障的时刻.

状态 3: 进入状态 3 的时刻为部件 2 发生故障的时刻, 此时部件 1 正在修理. 状态 3 持续到部件 1 修复的时刻.

由于指数分布的无记忆性, 容易看出进入上述诸状态的时刻是系统的再生点. 我们在图 7.10 表示出系统的状态, 用图 7.11 描述此系统状态之间的转移关系. 由图 7.10 可见, 状态 3 是系统的故障状态. 若系统从状态 1 下一步转到状态 2, 则系统在状态 1 的逗留期内也出现故障.

令

$$X(t)=j,\text{若时刻}t\text{系统处于状态}j,\quad j=0,1,2,3$$

可证明 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个半马尔可夫过程, 且可构成一个对应的时齐马尔可夫更新过程.

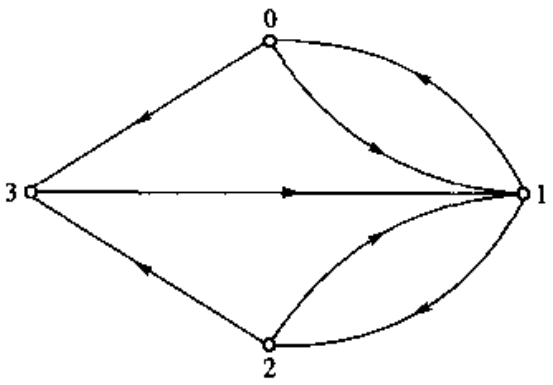


图 7.11

为求这个系统的半马尔可夫核 $Q_{ij}(t), i,j=0,1,2,3$, 我们先引用交替更新过程的一个结果. 考虑一个工作和修理交替出现的部件. 设 $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\cdots$ 是一串独立随机变量. $\xi_i, i=1,2,\cdots$ 具有相同分布 $F(t)$,ξ_i 表示该部件的第 i 次工作寿命. $\eta_i, i=1,2,\cdots$ 具有相同分布 $G(t)$,η_i 表示该部件第 i 次修理时间. 因此构成一个如同 §7.2 中讨论的单部件系统. 令

$$S(t)=\begin{cases}1, \text{若时刻}t\text{部件处于工作状态}\\ 0, \text{若时刻}t\text{部件处于故障状态}\end{cases}$$

则 $\{S(t), t\geqslant 0\}$ 表示了这个部件工作和修理交替出现的过程. 进一步, 当 $F(t)$ 和 $G(t)$ 分别是参数 λ 和 μ 的指数分布时, 则由第六章 §6.2 的结果,$\{S(t), t\geqslant 0\}$ 构成一个马尔可夫过程. 由第六章 §6.2 的 (3) 和 (3′) 式, 有

$$K_{11}(t)=P\{S(t)=1|S(0)=1\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$K_{10}(t)=P\{S(t)=0|S(0)=1\}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$K_{01}(t)=P\{S(t)=1|S(0)=0\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$K_{00}(t)=P\{S(t)=0|S(0)=0\}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

下面我们来计算半马尔可夫核. 用 $X_1^{(i)}$ 和 $Y_1^{(i)}$ 分别表示部件 1 的第 i 次工作寿命和修理时间, 由图 7.10 可见

$$\begin{aligned}Q_{01}(t)&=P\{\text{系统在状态0逗留时间}\leqslant t,\text{下步转到状态1时刻0 从进入状态0出发}\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{X_2\leqslant t,\sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)}+Y_1^{(i)})\leqslant X_2<\sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)}+Y_1^{(i)})+X_1^{(n+1)}\right\}\\&=\int_0^t\left[\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)}+Y_1^{(i)})\leqslant x<\sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)}+Y_1^{(i)})+X_1^{(n+1)}\right\}\right]dF_2(x)\end{aligned}$$

我们约定, 求和号中若上标比下标小时, 规定求和等于零. 易看出上式右端的被积函数即为 $K_{11}(x)$, 故得

$$\begin{aligned}Q_{01}(t)&=\int_0^t K_{11}(x)dF_2(x)\\&=\int_0^t\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)x}\right]dF_2(x)\end{aligned}$$

类似地可证明

$$
\begin{aligned}
Q_{03}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{X_2 \leqslant t, \sum_{i=1}^{n-1}(X_1^{(i)}+Y_1^{(i)})+X_1^{(n)} \leqslant X_2 < \sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)}+Y_1^{(i)})\right\} \\
&= \int_0^t K_{10}(x)dF_2(x) = \int_0^t \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)x}\right] dF_2(x) \\
Q_{10}(t) &= P\{Y_2 \leqslant t, X_1 > Y_2\} = \int_0^t e^{-\lambda y} dG_2(y) \\
Q_{12}(t) &= P\{Y_2 \leqslant t, X_1 \leqslant Y_2\} = \int_0^t (1-e^{-\lambda y}) dG_2(y) \\
Q_{21}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{X_2 \leqslant t, \sum_{i=1}^{n-1}(Y_1^{(i)}+X_1^{(i)})+Y_1^{(n)} \leqslant X_2 < \sum_{i=1}^{n}(Y_1^{(i)}+X_1^{(i)})\right\} \\
&= \int_0^t K_{01}(x)dF_2(x) = \int_0^t \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)x}\right] dF_2(x) \\
Q_{23}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{X_2 \leqslant t, \sum_{i=1}^{n}(Y_1^{(i)}+X_1^{(i)}) \leqslant X_2 < \sum_{i=1}^{n}(Y_1^{(i)}+X_1^{(i)})+Y_1^{(n+1)}\right\} \\
&= \int_0^t K_{00}(x)dF_2(x) = \int_0^t \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)x}\right] dF_2(x) \\
Q_{31}(t) &= P\{Y_1 \leqslant t\} = 1-e^{-\mu t}
\end{aligned}
$$

对以上各式作 LS 变换, 有

$$
\begin{cases}
\hat{Q}_{01}(s) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s) + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s+\lambda+\mu) \\
\hat{Q}_{03}(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s) - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s+\lambda+\mu) \\
\hat{Q}_{10}(s) = \hat{G}_2(s+\lambda) \\
\hat{Q}_{12}(s) = \hat{G}_2(s) - \hat{G}_2(s+\lambda) \\
\hat{Q}_{21}(s) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s) - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s+\lambda+\mu) \\
\hat{Q}_{23}(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s) + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(s+\lambda+\mu) \\
\hat{Q}_{31}(s) = \dfrac{\mu}{s+\mu}
\end{cases} \tag{1}
$$

§7.7.1 系统首次故障前时间分布

易证, 系统首次故障前时间分布 $\Phi_i(t), i=0,1,2$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} \Phi_0(t) = Q_{01}(t) * \Phi_1(t) + Q_{03}(t) \\ \Phi_1(t) = Q_{10}(t) * \Phi_0(t) + P\{X_1 \leqslant t\} \\ \Phi_2(t) = Q_{21}(t) * \Phi_1(t) + Q_{23}(t) \end{cases}$$

对以上各式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{\Phi}_1(s) + \hat{Q}_{03}(s) \\ \hat{\Phi}_1(s) = \hat{Q}_{10}(s)\hat{\Phi}_0(s) + \dfrac{\lambda}{s+\lambda} \\ \hat{\Phi}_2(s) = \hat{Q}_{21}(s)\hat{\Phi}_1(s) + \hat{Q}_{23}(s) \end{cases} \tag{2}$$

可解出

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_0(s) = \dfrac{1}{\Delta(s)}\left\{\hat{Q}_{03}(s) + \hat{Q}_{01}(s)\dfrac{\lambda}{s+\lambda}[1-\hat{G}_2(s+\lambda)]\right\} \\ \hat{\Phi}_1(s) = \dfrac{1}{\Delta(s)}\left\{\hat{Q}_{10}(s)\hat{Q}_{03}(s) + \dfrac{\lambda}{s+\lambda}[1-\hat{G}_2(s+\lambda)]\right\} \\ \hat{\Phi}_2(s) = \hat{Q}_{21}(s)\hat{\Phi}_1(s) + \hat{Q}_{23}(s) \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\Delta(s) = 1 - \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{10}(s) \tag{4}$$

为求系统首次故障前平均时间 $T_i = -\hat{\Phi}_i'(0), i=0,1,2$, 将 (2) 式两端关于 s 求导数, 并令 $s=0$, 可导出线性方程组

$$\begin{cases} T_0 = \hat{Q}_{01}(0)T_1 - \hat{Q}_{01}'(0) - \hat{Q}_{03}'(0) \\ T_1 = \hat{Q}_{10}(0)T_0 - \hat{Q}_{10}'(0) + \dfrac{1}{\lambda}[1-\hat{G}_2(\lambda)] + \hat{G}_2'(\lambda) \\ T_2 = \hat{Q}_{21}(0)T_1 - \hat{Q}_{21}'(0) - \hat{Q}_{23}'(0) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} T_0 = \hat{Q}_{01}(0)T_1 + \dfrac{1}{\lambda_2} \\ T_1 = \hat{Q}_{10}(0)T_0 + \dfrac{1}{\lambda}[1-\hat{G}_2(\lambda)] \\ T_2 = \hat{Q}_{21}(0)T_1 + \dfrac{1}{\lambda_2} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{1}{\Delta(0)}\left\{\dfrac{1}{\lambda_2} + \hat{Q}_{01}(0)\dfrac{1}{\lambda}[1-\hat{G}_2(\lambda)]\right\} \\ T_1 = \dfrac{1}{\Delta(0)}\left\{\dfrac{1}{\lambda_2}\hat{Q}_{10}(0) + \dfrac{1}{\lambda}[1-\hat{G}_2(\lambda)]\right\} \\ T_2 = \hat{Q}_{21}(0)T_1 + \dfrac{1}{\lambda_2} \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\Delta(0)$ 和 $\hat{Q}_{ij}(0)$ 分别由 (4) 和 (1) 给出.

§7.7.2 系统可用度

系统瞬时可用度 $A_i(t), i=0,1,2,3$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} A_0(t) = Q_{01}(t) * A_1(t) + Q_{03}(t) * A_3(t) + P\{X_2 > t\} \\ A_1(t) = Q_{10}(t) * A_0(t) + Q_{12}(t) * A_2(t) + P\{X_1 > t, Y_2 > t\} \\ A_2(t) = Q_{21}(t) * A_1(t) + Q_{23}(t) * A_3(t) + P\{X_2 > t\} \\ A_3(t) = Q_{31}(t) * A_1(t) \end{cases} \tag{6}$$

对上式两端作 L 变换

$$\begin{cases} A_0^*(s) = \hat{Q}_{01}(s)A_1^*(s) + \hat{Q}_{03}(s)A_3^*(s) + \dfrac{1}{s}[1-\hat{F}_2(s)] \\ A_1^*(s) = \hat{Q}_{10}(s)A_0^*(s) + \hat{Q}_{12}(s)A_2^*(s) + \dfrac{1}{s+\lambda}[1-\hat{G}_2(s+\lambda)] \\ A_2^*(s) = \hat{Q}_{21}(s)A_1^*(s) + \hat{Q}_{23}(s)A_3^*(s) + \dfrac{1}{s}[1-\hat{F}_2(s)] \\ A_3^*(s) = \hat{Q}_{31}(s)A_1^*(s) \end{cases}$$

这个方程组的解是

$$\begin{cases} A_0^*(s) = \dfrac{1}{\Delta_1(s)}\left\{B(s)[\hat{Q}_{01}(s)+\hat{Q}_{03}(s)\hat{Q}_{31}(s)] \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{s}[1-\hat{F}_2(s)]\left[1+\dfrac{s}{s+\mu}\hat{Q}_{12}(s)\hat{F}_2(s+\lambda+\mu)\right]\right\} \\ A_1^*(s) = \dfrac{1}{\Delta_1(s)}\left\{B(s)+\dfrac{1}{s}[1-\hat{F}_2(s)]\hat{G}_2(s)\right\} \\ A_2^*(s) = \dfrac{1}{\Delta_1(s)}\left\{B(s)[\hat{Q}_{21}(s)+\hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{31}(s)] \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{s}[1-\hat{F}_2(s)]\left[1+\dfrac{s}{s+\mu}\hat{Q}_{10}(s)\hat{F}_2(s+\lambda+\mu)\right]\right\} \\ A_3^*(s) = \hat{Q}_{31}(s)A_1^*(s) \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) =& 1-\hat{Q}_{10}(s)[\hat{Q}_{01}(s)+\hat{Q}_{03}(s)\hat{Q}_{31}(s)]-\hat{Q}_{12}(s)[\hat{Q}_{21}(s)+\hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{31}(s)] \\ =& 1-\frac{\mu(s+\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)(s+\mu)}\hat{F}_2(s)\hat{G}_2(s) \\ &+\frac{s}{s+\mu}\hat{F}_2(s+\lambda+\mu)\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\hat{G}_2(s)-\hat{G}_2(s+\lambda)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

$$B(s)=\frac{1}{s+\lambda}[1-\hat{G}_2(s+\lambda)] \tag{9}$$

由于 $Q_{31}(t)$ 是非格点的, 用马尔可夫更新过程的极限定理 7.1.7 知, 极限 $\lim\limits_{t\to\infty}A_i(t)$ 存在且与 i 无关. 又由托贝尔定理

$$A=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A_i(u)du=\lim_{s\to 0}sA_i^*(s)$$

由 (7) 式, 可得

$$A=\frac{1}{\Delta_1'(0)}\left\{\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda}[1-\hat{G}_2(\lambda)]\right\} \tag{10}$$

其中

$$\Delta_1'(0)=\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\hat{F}_2(\lambda+\mu)\right]-\frac{1}{\mu}\hat{F}_2(\lambda+\mu)\hat{G}_2(\lambda) \tag{11}$$

§7.7.3 (0,t] 时间内系统平均故障次数

$(0,t]$ 时间内系统平均故障次数 $M_i(t), i=0,1,2,3$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} M_0(t) = Q_{01}(t) * M_1(t) + Q_{03}(t) * [M_3(t)+1] \\ M_1(t) = Q_{10}(t) * M_0(t) + Q_{12}(t) * [M_2(t)+1] + P\{X_1 \leqslant t < Y_2\} \\ M_2(t) = Q_{21}(t) * M_1(t) + Q_{23}(t) * [M_3(t)+1] \\ M_3(t) = Q_{31}(t) * M_1(t) \end{cases} \tag{12}$$

对以上各式作 LS 变换得

$$\begin{cases} \hat{M}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{M}_1(s) + \hat{Q}_{03}(s)\hat{M}_3(s) + \hat{Q}_{03}(s) \\ \hat{M}_1(s) = \hat{Q}_{10}(s)\hat{M}_0(s) + \hat{Q}_{12}(s)\hat{M}_2(s) + \dfrac{\lambda}{s+\lambda}[1-\hat{G}_2(s+\lambda)] \\ \hat{M}_2(s) = \hat{Q}_{21}(s)\hat{M}_1(s) + \hat{Q}_{23}(s)\hat{M}_3(s) + \hat{Q}_{23}(s) \\ \hat{M}_3(s) = \hat{Q}_{31}(s)\hat{M}_1(s) \end{cases} \tag{13}$$

解此方程组, 得

$$\begin{cases} \hat{M}_1(s) = \dfrac{1}{\Delta_1(s)}\left\{\dfrac{\lambda}{s+\lambda}[1-\hat{G}_2(s+\lambda)] + \hat{Q}_{10}(s)\hat{Q}_{03}(s) + \hat{Q}_{12}(s)\hat{Q}_{23}(s)\right\} \\ \hat{M}_0(s) = [\hat{Q}_{01}(s) + \hat{Q}_{03}(s)\hat{Q}_{31}(s)]\hat{M}_1(s) + \hat{Q}_{03}(s) \\ \hat{M}_2(s) = [\hat{Q}_{21}(s) + \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{31}(s)]\hat{M}_1(s) + \hat{Q}_{23}(s) \\ \hat{M}_3(s) = \dfrac{\mu}{s+\mu}\hat{M}_1(s) \end{cases} \tag{14}$$

这里 $\Delta_1(s)$ 由 (8) 给出.

使用托贝尔定理, 经计算可得系统稳态故障频度

$$\begin{aligned} M &= \lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\hat{M}_i(s) \\ &= \frac{1}{\Delta_1'(0)}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda+\mu} + \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} - \hat{G}_2(\lambda)\right][1+\hat{F}_2(\lambda+\mu)]\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

与初始状态 i 无关, 其中 $\Delta_1'(0)$ 由 (11) 式给出.

这一节所介绍的马尔可夫更新过程与交替更新过程相结合的方法不仅适用于某些部件寿命或修理时间有指数分布的系统, 而且可以解决一类部件的寿命和修理时间均为一般分布的系统. 例如:

1) 带有优先权的两不同型部件冷贮备系统, 其中两个部件的寿命和修理时间均为一般分布 [9].

2) 两个不同型部件温贮备系统, 其中部件工作寿命和贮备寿命不同, 它们故障后的修理时间也不同, 且所有这些随机变量的分布均为一般分布 [8].

此外, 在文章 [12] 中, 讨论了一般可修系统, 并以 $k/n(F)$ 系统为例具体求得各可靠性指标.

§7.8 两个三状态部件组成的串 (并) 联系统

在第二章 §2.7 , 我们曾讨论具有两类失效部件组成的不可修系统. 在这一节我们将讨论由这种部件组成的可修系统. 我们仍然假定部件有三个状态: 正常、开路故障和短路故障. 这里我们只讨论最简单的情形: 两个部件的串联系统和两个部件的并联系统. 在第二章 §2.7 中, 我们已经看到, 这种部件组成的串联系统和并联系统之间有很明显的对称性. 因此, 我们只需仔细地讨论串联系统. 利用对称性, 很容易由串联系统的有关结果推出并联系统的对应结果.

设系统由两个部件串联而成. 部件有三个互斥的状态: 正常、开路故障和短路故障. 系统故障仅发生在下列情形: 某一部件开路故障,则系统开路故障; 所有部件短路故障, 则系统短路故障. 再假定系统故障后, 未故障部件不再继续发生故障. 系统中有一个修理工, 对故障部件按故障先后顺序进行修理, 修复后的部件与新的一样, 并立即转入运行.

假设, 第 i 个部件的寿命 X_i 有分布 $1-e^{-\lambda_i t}, t \geqslant 0$. 在发生故障的条件下, 是开路故障的概率为 p_i, 短路故障的概率为 $q_i, p_i, q_i \geqslant 0, p_i+q_i=1$. 部件 i 开路故障后的修理时间 Y_i , 有一般分布 $G_i(t)$, 均值 $\dfrac{1}{\mu_i}$; 短路故障后的修理时间 W_i, 有一般分布 $H_i(t)$, 均值 $\dfrac{1}{\gamma_i}, (\lambda_i, \mu_i, \gamma_i > 0), i=1,2$. 并且假定寿命与修理时间之间都有相互独立.

我们先定义系统的状态:

状态 0: 两个部件皆正常.

状态 1: 部件 1 因开路故障在修理, 部件 2 正常 (因系统处于开路故障状态, 部件 2 暂停工作).

状态 2: 此状态开始的时刻为部件 1 发生短路故障的时刻, 此时部件 2 正常, 状态持续到部件 1 修复.

状态 3, 4: 定义与状态 1, 2 相仿, 只要把部件 1, 2 的地位对调.

状态之间的转移情况见图 7.12. 显然, 状态 1, 状态 3 是开路故障状态; 若从状态 2 下一步转到状态 3(状态 4), 则在状态 2 的某时间段上出现开路故障 (短路故障); 若从状态 4 下一步转到状态 1(状态 2), 则在状态 4 的某时间段上出现开路故障 (短路故障).

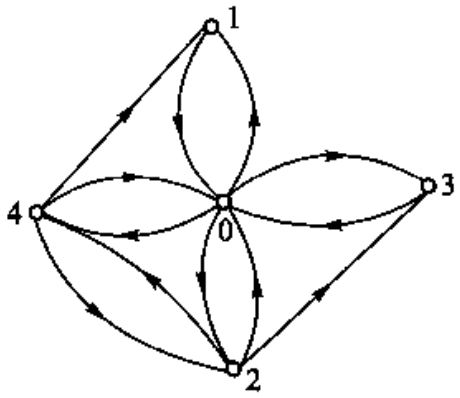


图 7.12

记 $X(t)$ 为时刻 t 系统所处的状态,T_n 表示第 n 次发生状态转移的时刻 $(T_0 = 0)$. 令 $Z_n = X(T_n + 0)$, 它表示系统经过第 n 次状态转移后所处的状态.$T_{n+1} - T_n$ 表示系统在状态 Z_n 的逗留时间. 由于系统所有状态转移时刻都是再生点, 故 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个半马尔可夫过程,$\{Z_n, T_n; n = 0, 1, \cdots\}$ 是一个时齐马尔可夫更新过程. 其半马尔可夫核为

$$
\begin{aligned}
Q_{01}(t) &= P\{X_1 \leqslant t, X_1 < X_2, \text{部件1是开路故障}\} \\
&= p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}[1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}] \\
Q_{02}(t) &= P\{X_1 \leqslant t, X_1 < X_2, \text{部件1是短路故障}\} \\
&= q_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}[1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}] \\
Q_{03}(t) &= p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}[1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}] \\
Q_{04}(t) &= q_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}[1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}] \\
Q_{10}(t) &= P\{Y_1 \leqslant t\} = G_1(t) \\
Q_{20}(t) &= P\{W_1 \leqslant t, W_1 < X_2\} = \int_0^t e^{-\lambda_2 u} dH_1(u)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{23}(t) &= P\{W_1 \leqslant t, W_1 \geqslant X_2, \text{部件2是开路故障}\} \\
&= p_2 \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2 u}) dH_1(u) \\
Q_{24}(t) &= P\{W_1 \leqslant t, W_1 \geqslant X_2, \text{部件2是短路故障}\} \\
&= q_2 \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2 u}) dH_1(u) \\
Q_{30}(t) &= P\{Y_2 \leqslant t\} = G_2(t) \\
Q_{40}(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_1 u} dH_2(u) \\
Q_{41}(t) &= p_1 \int_0^t (1 - e^{-\lambda_1 u}) dH_2(u) \\
Q_{42}(t) &= q_1 \int_0^t (1 - e^{-\lambda_1 u}) dH_2(u)
\end{aligned}
$$

对以上各式作 LS 变换, 得到

$$
\begin{cases}
\hat{Q}_{01}(s) = \dfrac{p_1\lambda_1}{s+\lambda_1+\lambda_2} \\
\hat{Q}_{02}(s) = \dfrac{q_1\lambda_1}{s+\lambda_1+\lambda_2} \\
\hat{Q}_{03}(s) = \dfrac{p_2\lambda_2}{s+\lambda_1+\lambda_2} \\
\hat{Q}_{04}(s) = \dfrac{q_2\lambda_2}{s+\lambda_1+\lambda_2} \\
\hat{Q}_{10}(s) = \hat{G}_1(s) \\
\hat{Q}_{20}(s) = \hat{H}_1(s+\lambda_2) \\
\hat{Q}_{23}(s) = p_2[\hat{H}_1(s) - \hat{H}_1(s+\lambda_2)] \\
\hat{Q}_{24}(s) = q_2[\hat{H}_1(s) - \hat{H}_1(s+\lambda_2)] \\
\hat{Q}_{30}(s) = \hat{G}_2(s) \\
\hat{Q}_{40}(s) = \hat{H}_2(s+\lambda_1) \\
\hat{Q}_{41}(s) = p_1[\hat{H}_2(s) - \hat{H}_2(s+\lambda_1)] \\
\hat{Q}_{42}(s) = q_1[\hat{H}_2(s) - \hat{H}_2(s+\lambda_1)]
\end{cases} \tag{1}
$$

§7.8.1 系统首次故障前时间分布

系统首次故障前时间分布 $\Phi_i(t), i = 0, 2, 4$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} \Phi_0(t) = Q_{02}(t) * \Phi_2(t) + Q_{04}(t) * \Phi_4(t) + Q_{01}(t) + Q_{03}(t) \\ \Phi_2(t) = Q_{20}(t) * \Phi_0(t) + P\{X_2 \leqslant t, X_2 < W_1\} \\ \Phi_4(t) = Q_{40}(t) * \Phi_0(t) + P\{X_1 \leqslant t, X_1 < W_2\} \end{cases} \tag{2}$$

而

$$P\{X_2 \leqslant t, X_2 < W_1\} = \int_0^t \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} H_1(u) du$$

$$P\{X_1 \leqslant t, X_1 < W_2\} = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \bar{H}_2(u) du$$

对 (2) 的两端作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_0(s) = \hat{Q}_{02}(s)\hat{\Phi}_2(s) + \hat{Q}_{04}(s)\hat{\Phi}_4(s) + \dfrac{p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2} \\ \hat{\Phi}_2(s) = \hat{Q}_{20}(s)\hat{\Phi}_0(s) + \dfrac{\lambda_2}{s + \lambda_2}[1 - \hat{H}_1(s + \lambda_2)] \\ \hat{\Phi}_4(s) = \hat{Q}_{40}(s)\hat{\Phi}_0(s) + \dfrac{\lambda_1}{s + \lambda_1}[1 - \hat{H}_2(s + \lambda_1)] \end{cases} \tag{3}$$

解之, 将 (1) 代入, 得

$$\hat{\Phi}_0(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2} \times \frac{\dfrac{q_1}{s + \lambda_2}[1 - \hat{H}_1(s + \lambda_2)] + \dfrac{q_2}{s + \lambda_1}[1 - \hat{H}_2(s + \lambda_1)] + \dfrac{p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}}{1 - \dfrac{q_1\lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda_2}\hat{H}_1(s + \lambda_2) - \dfrac{q_2\lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2}\hat{H}_2(s + \lambda_1)} \tag{4}$$

由于系统首次故障前平均时间为 $T_i = -\dfrac{d}{ds}\Phi_i(s)\Big|_{s=0}$, 故我们可由 (3) 中对 s 求导数, 并令 $s = 0$, 得 $T_i, i = 0, 2, 4$, 满足的一组线性方程

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{q_1\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}T_2 + \dfrac{q_2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}T_4 + \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ T_2 = \hat{H}_1(\lambda_2)T_0 + \dfrac{1}{\lambda_2}[1 - \hat{H}_1(\lambda_2)] \\ T_4 = \hat{H}_2(\lambda_1)T_0 + \dfrac{1}{\lambda_1}[1 - \hat{H}_2(\lambda_1)] \end{cases} \tag{5}$$

解之得

$$T_0 = \frac{1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}q_1[1 - \hat{H}_1(\lambda_2)] + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}q_2[1 - \hat{H}_2(\lambda_1)]}{\lambda_1[1 - q_1\hat{H}_1(\lambda_2)] + \lambda_2[1 - q_2\hat{H}_2(\lambda_1)]} \tag{6}$$

§7.8.2 系统可用度

系统瞬时可用度 $A_i(t), i=0,1,2,3,4$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} A_0(t) = \sum_{j=0}^{4} Q_{0j}(t) * A_j(t) + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \\ A_1(t) = Q_{10}(t) * A_0(t) \\ A_2(t) = Q_{20}(t) * A_0(t) + Q_{23}(t) * A_3(t) + Q_{24}(t) * A_4(t) \\ \qquad + P\{X_2 > t, W_1 > t\} \\ A_3(t) = Q_{30}(t) * A_0(t) \\ A_4(t) = Q_{40}(t) * A_0(t) + Q_{41}(t) * A_1(t) + Q_{42}(t) * A_2(t) \\ \qquad + P\{X_1 > t, W_2 > t\} \end{cases} \tag{7}$$

对上式作 L 变换, 可得

$$\begin{cases} A_0^*(s) = \sum_{j=1}^{4} \hat{Q}_{0j}(s) A_j^*(s) + \dfrac{1}{s+\lambda_1+\lambda_2} \\ A_1^*(s) = \hat{Q}_{10}(s) A_0^*(s) \\ A_2^*(s) = \hat{Q}_{20}(s) A_0^*(s) + \hat{Q}_{23}(s) A_3^*(s) + \hat{Q}_{24}(s) A_4^*(s) \\ \qquad + \dfrac{1}{s+\lambda_2}[1 - \hat{H}_1(s+\lambda_2)] \\ A_3^*(s) = \hat{Q}_{30}(s) A_0^*(s) \\ A_4^*(s) = \hat{Q}_{40}(s) A_0^*(s) + \hat{Q}_{41}(s) A_1^*(s) + \hat{Q}_{42}(s) A_2^*(s) \\ \qquad + \dfrac{1}{s+\lambda_1}[1 - \hat{H}_2(s+\lambda_1)]. \end{cases} \tag{8}$$

于是, 由上式很容易解出 $A_i^*(s), i=0,1,2,3,4$. 系统稳态平均可用度可由

$$\tilde{A} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A_i(u)du = \lim_{t\to 0} sA_i^*(s)$$

求得. 由于 $Q_{01}(t)$ 是非格点的, 用马尔可夫更新过程的极限定理 7.1.7, 可知

$\lim\limits_{t\to\infty} A_i(t)$ 存在, 因此 $A=\tilde{A}$. 也可直接用 §7.1, (16) 式, 有

$$A=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{4}\nu_j m(j)}\left\{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\nu_0+\frac{1}{\lambda_2}[1-\hat{H}_1(\lambda_2)]\nu_2 +\frac{1}{\lambda_1}[1-\hat{H}_2(\lambda_1)]\nu_4\right\} \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases}\nu_0=1-q_1q_2[1-\hat{H}_1(\lambda_2)][1-\hat{H}_2(\lambda_1)]\\ \nu_1=\dfrac{p_1}{\lambda_1+\lambda_2}\{\lambda_1+q_2\lambda_2[1-\hat{H}_2(\lambda_1)]\}\\ \nu_2=\dfrac{q_1}{\lambda_1+\lambda_2}\{\lambda_1+q_2\lambda_2[1-\hat{H}_2(\lambda_1)]\}\\ \nu_3=\dfrac{p_2}{\lambda_1+\lambda_2}\{\lambda_2+q_1\lambda_1[1-\hat{H}_1(\lambda_2)]\}\\ \nu_4=\dfrac{q_2}{\lambda_1+\lambda_2}\{\lambda_2+q_1\lambda_1[1-\hat{H}_1(\lambda_2)]\}\\ m(0)=\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\\ m(1)=\dfrac{1}{\mu_1},\ m(2)=\dfrac{1}{\gamma_1}\\ m(3)=\dfrac{1}{\mu_2},\ m(4)=\dfrac{1}{\gamma_2}\end{cases} \tag{10}$$

分别由 §7.1 中 (11),(14), 以及 (15) 求得.

用类似的方法可求得时刻 t 系统处于开路故障概率和短路故障概率的 L 变换, 以及它们的稳态概率.

§7.8.3 (0,t] 时间内系统平均故障次数

令 $K_i(t), L_i(t), M_i(t)$ 分别为时刻 0 系统从进入状态 i 出发的条件下,$(0,t]$ 时间内系统平均开路故障次数, 平均短路故障次数和平均故障次数,$i=0,1,2,3,4$. 显然

$$M_i(t)=K_i(t)+L_i(t),\quad i=0,1,2,3,4 \tag{11}$$

由定义可推得 $K_i(t), i=0,1,2,3,4$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} K_0(t) = Q_{01}(t) * [K_1(t)+1] + Q_{02}(t) * K_2(t) \\ \qquad + Q_{03}(t) * [K_3(t)+1] + Q_{04}(t) * K_4(t) \\ K_1(t) = Q_{10}(t) * K_0(t) \\ K_2(t) = Q_{20}(t) * K_0(t) + Q_{23}(t) * [K_3(t)+1] + Q_{24}(t) * K_4(t) \\ \qquad + [P\{X_2 \leqslant t, X_2 < W_1, \text{部件2是开路故障}\} - Q_{23}(t)] \\ K_3(t) = Q_{30}(t) * K_0(t) \\ K_4(t) = Q_{40}(t) * K_0(t) + Q_{41}(t) * [K_1(t)+1] + Q_{42}(t) * K_2(t) \\ \qquad + [P\{X_1 \leqslant t, X_1 < W_2, \text{部件1是开路故障}\} - Q_{41}(t)] \end{cases} \tag{12}$$

两端作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{K}_0(s) = \sum_{j=0}^{4} \hat{Q}_{0j}(s)\hat{K}_j(s) + \hat{Q}_{01}(s) + \hat{Q}_{03}(s) \\ \hat{K}_1(s) = \hat{Q}_{10}(s)\hat{K}_0(s) \\ \hat{K}_2(s) = \hat{Q}_{20}(s)\hat{K}_0(s) + \hat{Q}_{23}(s)\hat{K}_3(s) + \hat{Q}_{24}(s)\hat{K}_4(s) \\ \qquad + \dfrac{p_2\lambda_2}{s+\lambda_2}[1-\hat{H}_1(s+\lambda_2)] \\ \hat{K}_3(s) = \hat{Q}_{30}(s)\hat{K}_0(s) \\ \hat{K}_4(s) = \hat{Q}_{40}(s)\hat{K}_0(s) + \hat{Q}_{41}(s)\hat{K}_1(s) + \hat{Q}_{42}(s)\hat{K}_2(s) \\ \qquad + \dfrac{p_1\lambda_1}{s+\lambda_1}[1-\hat{H}_2(s+\lambda_1)] \end{cases} \tag{13}$$

由此式容易解出 $\hat{K}_i(s), i=0,1,2,3,4$. 由于方程组 (13) 和方程组 (8) 在形式上完全相同. 而对 (8) , 已得到极限 $\lim\limits_{s\to 0} sA_i^*(s)$ 存在且由 (9) 式给出. 因此, 对 (13), 我们可得 $\lim\limits_{s\to 0} s\hat{K}_i(s)$ 也存在且有类似的表达式. 因此, 得系统稳态开路故障频度

$$\begin{aligned} K &= \lim_{t\to\infty} \frac{K_i(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\hat{K}_i(s) \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{4} \nu_j m(j)} \left\{ \frac{p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\nu_0 + p_2[1-\hat{H}_1(\lambda_2)]\nu_2 + p_1[1-\hat{H}_2(\lambda_1)]\nu_4 \right\} \end{aligned} \tag{14}$$

与初始状态 i 无关, 其中 ν_j 和 $m(j)$ 由 (10) 给出.

$L_i(t), i=0,1,2,3,4$, 满足马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases} L_0(t) = \sum_{j=1}^{4} Q_{0j}(t) * L_j(t) \\ L_1(t) = Q_{10}(t) * L_0(t) \\ L_2(t) = Q_{20}(t) * L_0(t) + Q_{23}(t) * L_3(t) + Q_{24}(t) * [L_4(t)+1] \\ \qquad + [P\{X_2 \leqslant t, X_2 < W_1, \text{部件2是短路故障}\} - Q_{24}(t)] \\ L_3(t) = Q_{30}(t) * L_0(t) \\ L_4(t) = Q_{40}(t) * L_0(t) + Q_{41}(t) * L_1(t) + Q_{42}(t) * [L_2(t)+1] \\ \qquad + [P\{X_1 \leqslant t, X_1 < W_2, \text{部件1是短路故障}\} - Q_{42}(t)] \end{cases} \tag{15}$$

两端作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{L}_0(s) = \sum_{j=1}^{4} \hat{Q}_{0j}(s)\hat{L}_j(s) \\ \hat{L}_1(s) = \hat{Q}_{10}(s)\hat{L}_0(s) \\ \hat{L}_2(s) = \hat{Q}_{20}(s)\hat{L}_0(s) + \hat{Q}_{23}(s)\hat{L}_3(s) + \hat{Q}_{24}(s)\hat{L}_4(s) \\ \qquad + \dfrac{q_2\lambda_2}{s+\lambda_2}[1-\hat{H}_1(s+\lambda_2)] \\ \hat{L}_3(s) = \hat{Q}_{30}(s)\hat{L}_0(s) \\ \hat{L}_4(s) = \hat{Q}_{40}(s)\hat{L}_0(s) + \hat{Q}_{41}(s)\hat{L}_1(s) + \hat{Q}_{42}(s)\hat{L}_2(s) \\ \qquad + \dfrac{q_1\lambda_1}{s+\lambda_1}[1-\hat{H}_2(s+\lambda_1)] \end{cases} \tag{16}$$

可由上式解出 $\hat{L}_i(s), i=0,1,2,3,4$. 类似于 (14) , 系统稳态短路故障频度为

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t\to\infty}\frac{L_i(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\hat{L}_i(s) \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{4}\nu_j m(j)}\{q_2[1-\hat{H}_1(\lambda_2)]\nu_2 + q_1[1-\hat{H}_2(\lambda_1)]\nu_4\} \end{aligned} \tag{17}$$

与初始状态 i 无关, 其中 ν_j 和 $m(j)$ 由 (10) 给出.

$M_i(t)$ 的 LS 变换为

$$\hat{M}_i(s) = \hat{K}_i(s) + \hat{L}_i(s), \quad i=0,1,2,3,4 \tag{18}$$

系统稳态故障频度为

$$M=\lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t}=K+L$$
$$=\frac{1}{\sum_{j=0}^{4}\nu_j m(j)}\left\{\frac{p_1\lambda_1+p_2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\nu_0+[1-\hat{H}_1(\lambda_2)]\nu_2+[1-\hat{H}_2(\lambda_1)]\nu_4\right\}\quad(19)$$

与初始状态 i 无关, 其中 ν_j 和 $m(j)$ 由 (10) 给出.

对于两个部件组成的并联系统, 我们只需在上述的所有结果中, 将“开路”和“短路”的地位互换, 将 p_i 与 q_i 互换, 将 $G_i(t)$ 与 $H_i(t)$ 互换, 将 μ_i 与 ν_i 互换, 从而立即得到对应的可靠性数量指标.

在文献 [7] 中, 讨论了两个三状态部件组成的冷贮备系统.

§7.9 一个基本模型：补充变量方法介绍

在以上几节, 我们介绍了用更新过程和马尔可夫更新过程的工具研究非马尔可夫型可修系统的方法. 对于非马尔可夫型可修系统, 另一个研究方法是通过引进补充变量, 使讨论的问题变为一个广义的马尔可夫过程. 以下我们将讨论一个基本模型来介绍这个方法.

§7.9.1 基本模型

系统由两个同型部件和一个修理设备组成. 令

$$N(t)=i,\text{若时刻}t\text{有}i\text{个部件故障},\quad i=0,1,2$$

假设系统中部件的故障规律是

$$\begin{aligned}&P\{N(t+\Delta t)=1|N(t)=0\}=\lambda_0\Delta t+o(\Delta t)\\&P\{N(t+\Delta t)=2|N(t)=1\}=\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)\end{aligned}\quad(1)$$

当系统中一个部件故障时, 修理设备立即对其修理. 在对故障部件修理的期间, 若另一部件也故障, 则需要等待修理. 假设每个部件修理时间 Y 均遵从一般分布 $G(t)$, 且存在密度函数 $g(t)$, 均值为 $\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty tg(t)dt,(\mu>0)$. 进一步假定修理时间 Y 与上述部件故障的规律是相互独立的, 故障部件修复后与新部件一样.

我们经常讨论的几个典型系统, 是上述模型的特殊情形:

例 7.9.1 若令 $\lambda_0 = 2\lambda, \lambda_1 = \lambda$，则上述模型中的系统是两同型部件的并联系统, 其中每个部件的寿命遵从参数 λ 的指数分布.

例 7.9.2 若令 $\lambda_0 = \lambda, \lambda_1 = \lambda$，则上述模型中的系统是两同型部件的冷贮备系统, 其中每个部件的寿命遵从参数 λ 的指数分布.

例 7.9.3 若令 $\lambda_0 = \lambda + \lambda', \lambda_1 = \lambda$，则上述模型中的系统是两同型部件的温贮备系统, 其中每个部件的工作寿命和贮备寿命分别遵从参数 λ 和 λ' 的指数分布, 故障后的修理时间都是 Y.

例 7.9.4 若令 $\lambda_0 = n\lambda, \lambda_1 = (n-1)\lambda, (n \geqslant 2)$，则上述模型中的系统是 $n-1/n(G)$ 系统, 它由 n 个同型部件组成, 部件的寿命均为参数 λ 的指数分布.

§7.9.2 系统可用度

下面对基本模型求其系统可用度. 先令

$$\mu(t)\Delta t = P\{t < Y \leqslant t + \Delta t | Y > t\} = \frac{g(t)\Delta t}{1 - G(t)} \tag{2}$$

由上式易证

$$\begin{cases} 1 - G(t) = \exp\left[-\int_0^t \mu(y)dy\right] \\ g(t) = \mu(t)\exp\left[-\int_0^t \mu(y)dy\right] \end{cases} \tag{3}$$

由于部件修理时间 Y 遵从一般分布, $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 不是马尔可夫过程. 例如, 当知道时刻 t 系统中有一个部件故障, 即知道 $N(t) = 1$，时刻 t 以后系统发展的概率规律还不能完全确定下来, 时刻 t 以后系统发展的概率规律不仅依赖于时刻 t 有几个部件故障, 还依赖于正在修理的部件在时刻 t 以前已经修理了多长时间.

我们引进一个补充变量 $X(t)$: 当$N(t) = 1$或 2时,$X(t)$ 表示时刻 t 正在修理的部件已经修理过的时间长; 当 $N(t) = 0$ 时, 没有故障部件的修理,$X(t)$ 可以不考虑. 这样, 过程 $\{N(t), X(t); t \geqslant 0\}$ 是一个连续时间的广义的马尔可夫过程, 即在任意时刻 t, 当给定 $N(t)$ 和 $X(t)$ 的具体值, 则过程 $\{N(t), X(t); t \geqslant 0\}$ 在时刻 t 以后的概率规律与时刻 t 以前该过程的历史无关. 对 $t \geqslant 0, x \geqslant 0$, 令

$$\begin{cases} P_0(t) = P\{N(t) = 0\} \\ P_1(t,x)dx = P\{N(t) = 1, x < X(t) \leqslant x + dx\} \\ P_2(t,x)dx = P\{N(t) = 2, x < X(t) \leqslant x + dx\} \end{cases} \tag{4}$$

假定时刻 $t=0$ 时, 两个部件都是好的, 即初始条件是

$$P_0(0)=1, \quad P_1(0,x)=P_2(0,x)=0 \tag{5}$$

由 (4) 可导出如下方程组

$$\frac{d}{dt}P_0(t)=-\lambda_0 P_0(t)+\int_0^\infty P_1(t,x)\mu(x)dx \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_1(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_1(t,x)=-[\lambda_1+\mu(x)]P_1(t,x), \quad 0<x<\infty \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_2(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_2(t,x)=-\mu(x)P_2(t,x)+\lambda_1 P_1(t,x), \quad 0<x<\infty \tag{8}$$

$$P_1(t,0)=\lambda_0 P_0(t)+\int_0^\infty P_2(t,x)\mu(x)dx \tag{9}$$

$$P_2(t,0)=0 \tag{10}$$

$$P_0(t)+\int_0^\infty P_1(t,x)dx+\int_0^\infty P_2(t,x)dx=1 \tag{11}$$

以下, 具体来推导上述各式:

1) 为使 $N(t+\Delta t)=0$, 必须 $N(t)=0$, 且 $(t,t+\Delta t]$ 内部件不发生故障; 或 $N(t)=1$,$X(t)$ 为某正值 x , 且在 $(t,t+\Delta t]$ 内故障的部件修理完成, 而其中 x 可以是任意正值. 因此

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda_0\Delta t)+\int_0^\infty P_1(t,x)\mu(x)\Delta t dx+o(\Delta t)$$

此即 (6) 式.

2) 为使 $N(t+\Delta t)=1, X(t+\Delta t)=x+\Delta t, x>0$, 必须 $N(t)=1, X(t)=x$, 且 $(t,t+\Delta t]$ 内既不出现部件故障, 又不出现部件修理完成, 因此得

$$P_1(t+\Delta t,x+\Delta t)=P_1(t,x)[1-(\lambda_1+\mu(x))\Delta t]+o(\Delta t)$$

此即 (7) 式.

3) 为使 $N(t+\Delta t)=2, X(t+\Delta t)=x+\Delta t, x>0$，必须 $N(t)=2, X(t)=x$，且在 $(t,t+\Delta t]$ 内部件的修理没有完成; 或者 $N(t)=1, X(t)=x$，且在 $(t,t+\Delta t]$ 内一个部件发生故障, 因此

$$P_2(t+\Delta t,x+\Delta t)=P_2(t,x)[1-\mu(x)\Delta t]+P_1(t,x)\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$$

即 (8) 式.

4) 为使 $N(t+\Delta t)=1, 0\leqslant X(t+\Delta t)\leqslant \Delta t$，必须 $N(t)=0$，且 $(t,t+\Delta t]$ 内一个部件发生故障; 或 $N(t)=2, X(t)$ 为某个正值 x, 且在 $(t,t+\Delta t]$ 内正在修理的部件修理完成. 因此

$$\begin{aligned}P_1(t+\Delta t,0)\Delta t&=\int_0^{\Delta t}P_1(t+\Delta t,y)dy\\&=P_0(t)\lambda_0\Delta t+\int_0^{\infty}P_2(t,x)\mu(x)\Delta t dx+o(\Delta t)\end{aligned}$$

即 (9) 式.

5) (10) 式是由于 $N(t)=2$ 和 $X(t)=0$ 不可能同时发生.

6) (11) 式是由于全概率公式.

为解这个方程组, 对 (6)~(11) 的两端作 L 变换, 用初始条件 (5)，得

$$sP_0^*(s)-1=-\lambda_0P_0^*(s)+\int_0^{\infty}P_1^*(s,x)\mu(x)dx \tag{12}$$

$$sP_1^*(s,x)+\frac{d}{dx}P_1^*(s,x)=-[\lambda_1+\mu(x)]P_1^*(s,x),\quad 0<x<\infty \tag{13}$$

$$sP_2^*(s,x)+\frac{d}{dx}P_2^*(s,x)=-\mu(x)P_2^*(s,x)+\lambda_1P_1^*(s,x),\quad 0<x<\infty \tag{14}$$

$$P_1^*(s,0)=\lambda_0P_0^*(s)+\int_0^{\infty}P_2^*(s,x)\mu(x)dx \tag{15}$$

$$P_2^*(s,0)=0 \tag{16}$$

$$P_0^*(s)+\int_0^{\infty}P_1^*(s,x)dx+\int_0^{\infty}P_2^*(s,x)dx=\frac{1}{s} \tag{17}$$

这是一组关于 x 的微分积分方程. 由 (13) 可解得

$$P_1^*(s,x) = P_1^*(s,0)e^{-(s+\lambda_1)x}[1-G(x)] \tag{18}$$

代入 (12) 得

$$\begin{aligned} sP_0^*(s) - 1 &= -\lambda_0 P_0^*(s) + P_1^*(s,0)\int_0^\infty e^{-(s+\lambda_1)x}[1-G(x)]\mu(x)dx \\ &= -\lambda_0 P_0^*(s) + P_1^*(s,0)g^*(s+\lambda_1) \end{aligned}$$

其中 $g^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dG(x) = \int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx$, 解得

$$P_0^*(s) = P_1^*(s,0)\frac{g^*(s+\lambda_1)}{s+\lambda_0} + \frac{1}{s+\lambda_0} \tag{19}$$

(14) 可改写为

$$\frac{d}{dx}P_2^*(s,x) + [s+\mu(x)]P_2^*(s,x) - \lambda_1 P_1^*(s,x) = 0$$

解得

$$P_2^*(s,x) = e^{-\int_0^x [s+\mu(y)]dy}\left\{P_2^*(s,0) + \int_0^x \lambda_1 P_1^*(s,y)e^{\int_0^y [s+\mu(z)]dz}dy\right\}$$

将 (16) 和 (18) 代入, 得

$$\begin{aligned} P_2^*(s,x) &= e^{-sx}[1-G(x)]\lambda_1\int_0^x P_1^*(s,0)e^{-\lambda_1 y}dy \\ &= P_1^*(s,0)[1-G(x)]e^{-sx}(1-e^{-\lambda_1 x}) \end{aligned} \tag{20}$$

将 (18),(19) 和 (20) 代入 (17), 有

$$P_1^*(s,0)\frac{g^*(s+\lambda_1)}{s+\lambda_0} + \frac{1}{s+\lambda_0} + P_1^*(s,0)\int_0^\infty e^{-sx}[1-G(x)]dx = \frac{1}{s}$$

解得

$$P_1^*(s,0) = \frac{\lambda_0}{sg^*(s+\lambda_1) + (s+\lambda_0)[1-g^*(s)]} \tag{21}$$

(如果将 (18),(19) 和 (20) 代入 (15) 同样可得 (21) 式). 将 (21) 代入 (18),(19) 和

(20), 可得

$$\begin{cases} P_0^*(s) = \dfrac{1-g^*(s)+g^*(s+\lambda_1)}{sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)[1-g^*(s)]} \\ P_1^*(s,x) = \dfrac{\lambda_0[1-G(x)]e^{-(s+\lambda_1)x}}{sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)[1-g^*(s)]} \\ P_2^*(s,x) = \dfrac{\lambda_0[1-G(x)]e^{-sx}(1-e^{-\lambda_1 x})}{sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)[1-g^*(s)]} \end{cases} \tag{22}$$

系统的瞬时可用度是

$$A(t) = P_0(t) + \int_0^\infty P_1(t,x)dx$$

作 L 变换, 并将 (22) 代入, 得

$$A^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}A(t)dt = P_0^*(s) + \int_0^\infty P_1^*(s,x)dx$$

$$= \frac{(s+\lambda_1)[1-g^*(s)+g^*(s+\lambda_1)]+\lambda_0[1-g^*(s+\lambda_1)]}{(s+\lambda_1)[sg^*(s+\lambda_1)+(s+\lambda_0)(1-g^*(s))]} \tag{23}$$

可以证明 $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = A$ 存在. 用托贝尔定理, 得系统稳态可用度

$$A = \lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{s\to 0} sA^*(s) = \frac{\lambda_0\mu+\mu(\lambda_1-\lambda_0)g^*(\lambda_1)}{\lambda_0\lambda_1+\lambda_1\mu g^*(\lambda_1)} \tag{24}$$

类似可得

$$\begin{cases} P_0 = \lim\limits_{t\to\infty} P_0(t) = \lim\limits_{s\to 0} sP_0^*(s) = \dfrac{\mu g^*(\lambda_1)}{\mu g^*(\lambda_1)+\lambda_0} \\ P_1 = \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^\infty P_1(t,x)dx = \lim\limits_{s\to 0} s\int_0^\infty P_1^*(s,x)dx \\ \quad = \dfrac{\lambda_0\mu[1-g^*(\lambda_1)]}{\lambda_1[\mu g^*(\lambda_1)+\lambda_0]} \\ P_2 = \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^\infty P_2(t,x)dx = \lim\limits_{s\to 0} s\int_0^\infty P_2^*(s,x)dx \\ \quad = \dfrac{\lambda_0\lambda_1-\lambda_0\mu[1-g^*(\lambda_1)]}{\lambda_1[\mu g^*(\lambda_1)+\lambda_0]} \end{cases} \tag{25}$$

显然, 可验证 $A = P_0 + P_1$.

§7.9.3 系统可靠度

为了求系统可靠度 $R(t)$，只需在基本模型中令故障状态 2 为过程 $\{N(t), X(t); t \geqslant 0\}$ 的吸收状态. 这样就定义了一个新的随机过程 $\{\tilde{N}(t), \tilde{X}(t); t \geqslant 0\}$:

$$\tilde{N}(t) = i, \text{若时刻 } t \text{ 系统有 } i \text{ 个故障部件}, i = 0, 1, 2$$

系统中部件的失效规律仍是

$$P\{\tilde{N}(t+\Delta t) = 1 \mid \tilde{N}(t) = 0\} = \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{\tilde{N}(t+\Delta t) = 2 \mid \tilde{N}(t) = 1\} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$$

当 $\tilde{N}(t) = 1$ 时, 令 $\tilde{X}(t)$ 表示时刻 t 正在修理的部件已经修理过的时间; 当 $\tilde{N}(t) = 0, 2$ 时,$\tilde{X}(t)$ 可以不考虑. 因为 $\tilde{N}(t) = 0$, 没有故障的部件进行修理; $\tilde{N}(t) = 2$ 是系统的故障状态, 它是过程 $\{\tilde{N}(t); \tilde{X}(t); t \geqslant 0\}$ 的吸收状态, 一旦系统进入 $\tilde{N}(t) = 2$, 过程就中止. 这样定义的过程 $\{\tilde{N}(t); \tilde{X}(t); t \geqslant 0\}$ 是有一个吸收状态的连续时间广义马尔可夫过程. 令

$$Q_0(t) = P\{\tilde{N}(t) = 0\}$$

$$Q_1(t, x)dx = P\{\tilde{N}(t) = 1, x < \tilde{X}(t) \leqslant x + dx\}$$

假定 $t = 0$ 时, 两个部件都是好的, 即

$$Q_0(0) = 1, \quad Q_1(0, x) = 0 \tag{26}$$

易见系统可靠度是

$$R(t) = Q_0(t) + \int_0^{\infty} Q_1(t, x)dx \tag{27}$$

与前面类似, 可导出 $Q_0(t)$ 和 $Q_1(t, x)$ 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}Q_0(t) = -\lambda_0 Q_0(t) + \displaystyle\int_0^{\infty} Q_1(t, x)\mu(x)dx \\ \dfrac{\partial}{\partial t}Q_1(t, x) + \dfrac{\partial}{\partial x}Q_1(t, x) = -[\lambda_1 + \mu(x)]Q_1(t, x), \quad 0 < x < \infty \\ \lambda_0 Q_0(t) = Q_1(t, 0) \end{cases} \tag{28}$$

对上式作 L 变换, 用初始条件 (26), 得

$$\begin{cases} sQ_0^*(s)-1=-\lambda_0 Q_0^*(s)+\int_0^\infty Q_1^*(s,x)\mu(x)dx & (29)\\ sQ_1^*(s,x)+\dfrac{\partial}{\partial x}Q_1^*(s,x)=-[\lambda_1+\mu(x)]Q_1^*(s,x),\quad 0<x<\infty & (30)\\ \lambda_0 Q_0^*(s)=Q_1^*(s,0) & (31)\end{cases}$$

解 (30), 并用 (31) 式, 得

$$\begin{aligned} Q_1^*(s,x)&=Q_1^*(s,0)e^{-(s+\lambda_1)x}e^{-\int_0^x\mu(y)dy}\\ &=Q_0^*(s)[1-G(x)]e^{-(s+\lambda_1)x}\lambda_0 \end{aligned}\tag{32}$$

将 (32) 代入 (29)

$$sQ_0^*(s)-1=-\lambda_0 Q_0^*(s)+\lambda_0 Q_0^*(s)\int_0^\infty e^{-(s+\lambda_1)x}g(x)dx$$

解得

$$Q_0^*(s)=\frac{1}{s+\lambda_0[1-g^*(s+\lambda_1)]}\tag{33}$$

将 (33) 代入 (32), 得

$$Q_1^*(s,x)=\frac{\lambda_0[1-G(x)]e^{-(s+\lambda_1)x}}{s+\lambda_0[1-g^*(s+\lambda_1)]}\tag{34}$$

对 (27) 两端作 L 变换, 并将 (33) 和 (34) 代入, 得

$$\begin{aligned} R^*(s)&=\int_0^\infty e^{-st}R(t)dt=Q_0^*(s)+\int_0^\infty Q_1^*(s,x)dx\\ &=\frac{s+\lambda_1+\lambda_0[1-g^*(s+\lambda_1)]}{(s+\lambda_1)[s+\lambda_0(1-g^*(s+\lambda_1))]} \end{aligned}\tag{35}$$

系统首次故障前平均时间是

$$\mathrm{MTTFF}=\int_0^\infty R(t)dt=\lim_{s\to 0}R^*(s)=\frac{\lambda_1+\lambda_0[1-g^*(\lambda_1)]}{\lambda_0\lambda_1[1-g^*(\lambda_1)]}\tag{36}$$

特别只需在 (23),(24), (35) 和 (36) 中, λ_0 和 λ_1 取一些特殊情形, 可得例 7.9.1~ 例 7.9.4 的相应结果.

§7.10 可修单调关联系统

考虑一个由 n 个部件组成的可修单调关联系统, 其中修理设备的个数足够多, 即每个部件故障后都可立即进行修理, 不存在等待修理的情况. 假定当系统故障时, 正常的部件仍可能发生故障, 其故障规律不受系统故障的干扰. 假设, 第 i 个部件的寿命分布为 $F_i(t)$,

$$\frac{1}{\lambda_i}=\int_0^\infty t\,dF_i(t),\ 0<\lambda_i<\infty$$

其故障后的修理时间分布为 $G_i(t), 1/\mu_i=\int_0^\infty tdG_i(t), 0<\mu_i<\infty, i=1,2,\cdots,n$. 进一步假定, 所有这些随机变量均相互独立, 故障的部件经修复后像新部件一样.

§7.10.1 系统可用度

在第五章曾讨论过, 一个单调关联系统可用结构函数

$$\phi=\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1}$$

和可靠度函数

$$R=h(p_1,p_2,\cdots,p_n) \tag{2}$$

来描述. 由于修理设备足够多, 这 n 个部件各自完全独立地运行. 每一个部件的状态都是随时间正常和故障交替出现的过程. 在本章 §7.2 已讨论过, 可以求得第 i 个部件的可用度 $A_i(t)$ 和 A_i , 故障频度 $m_i(t)$ 和 $M_i, i=1,2,\cdots,n$. 特别, 稳态可用度和故障频度的公式十分简单, 分别是

$$\begin{cases} A_i=\dfrac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}, \\ M_i=\dfrac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}, \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

由以上这些讨论, 我们立即可写出可修单调关联系统的瞬时可用度和稳态可用度为

$$\begin{cases} A(t)=h(A_1(t),A_2(t),\cdots,A_n(t),) \\ A=h(A_1,A_2,\cdots,A_n) \end{cases} \tag{4}$$

例 7.10.1 考虑第三章 §3.2 的桥网络系统, 其中

$$\begin{aligned} F_i(t) &= 1-e^{-\lambda_i t}, \\ G_i(t) &= 1-e^{-\mu_i t}, \end{aligned} \quad i=1,2,\cdots,5$$

由第三章 §3.2 的公式 (6)

$$\begin{aligned} R &= h(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) \\ &= p_3p_4+p_1p_2q_3+p_1p_2p_3q_4+q_1p_2p_3q_4p_5+p_1q_2q_3p_4p_5 \end{aligned}$$

若时刻 $t=0$, 所有部件都是正常的, 则由 §7.2,(10) 式, 可得

$$\begin{cases} A_i(t)=\dfrac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}+\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}, \\ A_i=\dfrac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}, \end{cases} \quad i=1,2,3,4,5$$

因此, 由 (4) 式, 桥网络系统的可用度为

$$\begin{aligned} A(t) &= A_3(t)A_4(t)+A_1(t)A_2(t)\bar{A}_3(t)+A_1(t)A_2(t)A_3(t)\bar{A}_4(t) \\ &\quad +\bar{A}_1(t)A_2(t)A_3(t)\bar{A}_4(t)A_5(t)+A_1(t)\bar{A}_2(t)\bar{A}_3(t)A_4(t)A_5(t) \end{aligned}$$

$$A=A_3A_4+A_1A_2\bar{A}_3+A_1A_2A_3\bar{A}_4+\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4A_5+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4A_5$$

§7.10.2 系统故障频度

在这一小节中, 我们假定系统中每个部件的寿命和修理时间均有有限的密度函数. 在讨论系统故障频度之前, 我们先来证明几个引理.

当一个部件从正常状态转为故障状态或从故障状态转为正常状态, 我们称这个部件发生一个事件. 在一个指定的时间内, 系统中各部件发生所有事件的总数称为系统在这时间内发生的事件个数.

引理 7.10.1 *对任何 $i=1,2,\cdots,n$ 和 $t\geqslant 0$, 以及充分小的 $\Delta t>0$, 存在有限的 $C_i(t)>0$ 和 $A_i(t)>0$, 使*

$$\begin{aligned} &P\{\text{第}i\text{个部件在}(t,t+\Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\} \\ &\leqslant C_i(t)[\Lambda_i(t)\Delta t]^j, j=1,2,\cdots \end{aligned}$$

证明 由于第 i 个部件的寿命和修理时间有有限密度, 因而对任意 $t \geqslant 0$, 存在有限的 $\Lambda_i(t) > 0$, 使

$$\begin{cases} \max\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} [F_i(u + \Delta t)] - F_i(u)] \leqslant \Lambda_i(t)\Delta t \\ \max\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} [G_i(u + \Delta t) - G_i(u)] \leqslant \Lambda_i(t)\Delta t \end{cases} \tag{5}$$

为简单起见, 假设时刻 0 部件 i 是新的. 用 $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \cdots$ 分别表示部件 i 从时刻 0 开始交替出现的寿命和修理时间长, 且令

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_k = \sum\limits_{r=1}^{k} (X_r + Y_r), \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

用这些记号立即可得

$$\begin{aligned} &P\{(t, t + \Delta t]\text{内至少发生一个事件}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k \leqslant t < S_k + X_{k+1} \leqslant t + \Delta t\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\{S_k + X_{k+1} \leqslant t < S_{k+1} \leqslant t + \Delta t\} \\ &P\{(t, t + \Delta t)\text{内至少发生两个事件}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k \leqslant t < S_k + X_{k+1}, S_{k+1} \leqslant t + \Delta t\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k + X_{k+1} \leqslant t < S_{k+1}, S_{k+1} + X_{k+2} \leqslant t + \Delta t\} \end{aligned}$$

一般, 当 j 是奇数时, 即 $j = 2l + 1, l = 0, 1, \cdots$, 有

$$\begin{aligned} &P\{(t, t + \Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k \leqslant t < S_k + X_{k+1}, S_{k+l} + X_{k+l+1} \leqslant t + \Delta t\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k + X_{k+1} \leqslant t < S_{k+1}, S_{k+l+1} \leqslant t + \Delta t\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P\{t-u < X_{k+1}, X_{k+1}+Y_{k+1}+\cdots+X_{k+l+1} \\
&\quad \leqslant t-u+\Delta t\}\, dP\{S_k \leqslant u\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P\{t-u < Y_{k+1}, Y_{k+1}+X_{k+2}+\cdots+Y_{k+l+1} \\
&\quad \leqslant t-u+\Delta t\}\, dP\{S_k + X_{k+1} \leqslant u\} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P\{t-u < X_{k+1} \leqslant t-u+\Delta t, Y_{k+1} \leqslant \Delta t, \cdots, \\
&\quad X_{k+l+1} \leqslant \Delta t\}\, dP\{S_k \leqslant u\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P\{t-u < Y_{k+1} \leqslant t-u+\Delta t, X_{k+2} \leqslant \Delta t, \cdots, \\
&\quad Y_{k+l+1} \leqslant \Delta t\}\, dP\{S_k + X_{k+1} \leqslant u\} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

由于上式右端的被积函数中各事件都相互独立, 并利用 (5) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
&P\{(t, t+\Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\} \\
&\quad \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t [\Lambda_i(t)\Delta t]^j dP\{S_k \leqslant u\} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t [\Lambda_i(t)\Delta t]^j dP\{S_k + X_{k+1} \leqslant u\} \\
&\quad = [\Lambda_i(t)\Delta t]^j \left[\sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k \leqslant t\} + \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_k + X_{k+1} \leqslant t\}\right] \\
&\quad = [\Lambda_i(t)\Delta t]^j \{[1+\tilde{M}(t)] + F(t) * [1+\tilde{M}(t)]\}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{M}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{S_k \leqslant t\} = \sum_{k=1}^{\infty} F_i^{(k)}(t) * G_i^{(k)}(t)
$$

是 $X_k + Y_k, k = 1, 2, \cdots$ 所构成的更新过程的更新函数. 在 §7.1.1 已指出, $\tilde{M}(t) < \infty$. 因此, 存在有限的 $C_i(t) > 0$, 使

$$
P\{(t, t+\Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\} \leqslant C_i(t)[\Lambda_i(t)\Delta t]^j
$$

当 j 是偶数时, 即 $j=2l, l=1,2,\cdots$, 有

$$\begin{aligned}&P\{(t,t+\Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{S_k\leqslant t<S_k+X_{k+1},S_{k+l}\leqslant t+\Delta t\}\\&+\sum_{k=0}^{\infty}P\{S_k+X_{k+1}\leqslant t<S_{k+1},S_{k+l}+X_{k+l+1}\leqslant t+\Delta t\}\end{aligned}\tag{6'}$$

此式与 (6) 式类似, 可用同样方法证明引理的结论.

对于时刻 0 部件 i 不是新的情形, 时刻 0 部件 i 从某个剩余寿命或剩余修理时间出发. 此时, 证明引理的方法是一样的. 证毕.

显然, 对任何部件 $i, i=1,2,\cdots,n$, 有

$$P\{\text{部件}i\text{在}(t,t+\Delta t]\text{内至少发生0个事件}\}=1$$

只要适当取 $C_i(t)\geqslant 1$,

$$P\{\text{部件}i\text{在}(t,t+\Delta t]\text{内至少发生0个事件}\}\leqslant C_i(t)\tag{7}$$

故引理 7.10.1 对 $j=0$ 的情形也成立.

引理 7.10.2 对任何 $t\geqslant 0$, 以及充分小的 $\Delta t>0$, 存在有限的 $C(t)>0$ 和 $\Lambda(t)>0$, 使

$$\begin{aligned}&P\{\text{系统在}(t,t+\Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\}\\&\leqslant C(t)[n\Lambda(t)\Delta t]^j,\quad j=1,2,\cdots\end{aligned}$$

证明 对任何 $t\geqslant 0$, 令

$$\begin{cases}\Lambda(t)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Lambda_i(t)\\C(t)=\prod\limits_{i-1}^{n}C_i(t)\end{cases}\tag{8}$$

显然,$\Lambda(t)>0$ 和 $C(t)>0$, 均为有限. 易见

$$\begin{aligned}&P\{\text{系统在}(t,t+\Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\}\\&=\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_n=j\\0\leqslant j_i\leqslant j}}\prod_{i=1}^{n}P\{\text{第}i\text{个部件在}(t,t+\Delta t]\text{内至少发生}j_i\text{个事件}\}\end{aligned}$$

用引理 7.10.1 的结果和 (7) 式代入上式右端, 并使用 (8) 的符号, 我们有

$$\begin{aligned}
&P\{\text{系统在}(t,t+\Delta t]\text{内至少发生}j\text{个事件}\}\\
&\leqslant \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=j\\0\leqslant j_i\leqslant j}}\prod_{i=1}^{n}C_i(t)[\Lambda_i(t)\Delta t]^{j_i}\\
&\leqslant C(t)\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=j\\0\leqslant j_i\leqslant j}}[\Lambda(t)\Delta t]^{j}\\
&\leqslant C(t)\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=j\\0\leqslant j_i\leqslant j}}\frac{j!}{j_1!j_2!\cdots j_n!}[\Lambda(t)\Delta t]^{j}=C(t)[n\Lambda(t)\Delta t]^{j}
\end{aligned}$$

证毕.

引理 7.10.1 和引理 7.10.2 告诉我们: 对任何 $t\geqslant 0$. 每个部件或整个系统, 在 $(t,t+\Delta t]$ 内至少发生 j 个事件的概率为

$$o((\Delta t)^{j-1}),\quad j=1,2,\cdots$$

令 $N_i(t)$ 为 $(0,t]$ 时间内第 i 个部件的故障次数. 显然,$\{N_i(t),t\geqslant 0\}$ 是更新寿命为 Y_i+X_i 的更新过程, 其中部件故障时刻为过程的再生点. 令更新函数

$$M_i(t)=E\{N_i(t)\}$$

它表示 $(0,t]$ 内第 i 个部件的平均故障次数. 由于更新寿命有密度函数, 故 $M_i(t)$ 可微.

$$m_i(t)=\frac{d}{dt}M_i(t)$$

是部件 i 的瞬时故障频度.

引理 7.10.3 对任 $t\geqslant 0$ 和充分小的 $\Delta t>0$, 有

$$M_i(t+\Delta t)-M_i(t)$$

$=P$ {时刻 t 部件 i 正常, $(t,t+\Delta t]$ 内恰发生一个事件, 且由正常转为故障} $+o(\Delta t)$, $i=1,2,\cdots,n$

证明 由定义

$$M_i(t+\Delta t)-M_i(t)=E\{N_i(t+\Delta t)-N_i(t)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kP\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = k\}$$

但是

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} kP\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = k\} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} P\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = k\} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} P\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = k\} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} P\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = k\} \\
&= P\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) \geqslant 2\} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\infty} P\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) \geqslant j\} \\
&\leqslant P\{(t, t+\Delta t]\text{内部件 } i \text{ 至少发生两个事件}\} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\infty} P\{(t, t+\Delta t]\text{内部件 } i \text{ 至少发生 } j \text{ 个事件}\} \\
&\leqslant C_i(t)[\Lambda_i(t)\Delta t]^2 + \sum_{j=2}^{\infty} C_i(t)[\Lambda_i(t)\Delta t]^j = o(\Delta t)
\end{aligned}$$

以上最后一个不等式是由于引理 7.10.1. 由于第 i 个部件在 $(t, t+\Delta t]$ 内至少发生两个事件的概率为 $o(\Delta t)$, 因此,$(t, t+\Delta t]$ 内第 i 个部件发生一次故障只可能发生一个事件, 且由正常转为故障. 故

$$\begin{aligned}
&P\{N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = 1\} \\
&= P\{\text{时刻}t\text{部件}i\text{正常}, (t, t+\Delta t]\text{内恰发生一个事件, 且} \\
&\quad \text{由正常转为故障}\} + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

证毕.

令 $M(t)$ 为系统在 $(0, t]$ 内的平均故障次数, 与引理 7.10.3 类似, 用引理 7.10.2 的结果可证明:

引理 7.10.4 对任意 $t \geqslant 0$ 和充分小的 $\Delta t > 0$, 有

$$\begin{aligned} & M(t+\Delta t) - M(t) \\ = & P\{\text{时刻}t\text{系统正常, 在}(t, t+\Delta t]\text{内系统恰发生一个事} \\ & \text{件, 且由正常转为故障}\} + o(\Delta t) \end{aligned}$$

下面的定理给出了系统故障频度的有关结果.

定理 7.10.1 对任意 $t \geqslant 0$, 有

$$m(t) = \sum_{j=1}^{n} [h(1_j, \boldsymbol{A}(t)) - h(0_j, \boldsymbol{A}(t))] m_j(t) \tag{9}$$

$$M = \sum_{j=1}^{n} [h(1_j, \boldsymbol{A}) - h(0_j, \boldsymbol{A})] \frac{\lambda_j \mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \tag{10}$$

这里 $h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 为系统的可靠度函数, 及

$$\boldsymbol{A}(t) = (A_1(t), A_2(t), \cdots, A_n(t)), \ \boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

证明 令

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, \text{若时刻}t\text{第}i\text{个部件正常} \\ 0, \text{若时刻}t\text{第}i\text{个部件故障} \end{cases}$$

和

$$\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t))$$

用引理 7.10.4, 我们有

$$\begin{aligned} & M(t+\Delta t) - M(t) \\ = & P\left\{\begin{array}{l}\text{时刻}t\text{系统正常, 在 } (t, t+\Delta t] \text{ 时间内系统} \\ \text{恰发生一个事件, 且由正常转为故障}\end{array}\right\} + o(\Delta t) \\ = & \sum_{j=1}^{n} P\left\{\begin{array}{l}\text{时刻}t\text{系统正常, 在 } (t, t+\Delta t] \text{ 内由于} \\ \text{第 } j \text{ 个部件由正常转为故障而导致系统故障}\end{array}\right\} + o(\Delta t) \\ = & \sum_{j=1}^{n} P\left\{\begin{array}{l}(\cdot_j, \boldsymbol{X}(t)) \text{ 是第 } j \text{ 个部件的关键路向量, } (t, t+\Delta t] \\ \text{内第 } j \text{ 个部件恰发生一个事件, 且由正常转为故障}\end{array}\right\} + o(\Delta t) \end{aligned}$$

由所有部件之间的独立性和引理 7.10.3, 有

$$
\begin{aligned}
& M(t+\Delta t)-M(t) \\
=& \sum_{j=1}^{n} P\{(\cdot_j, \boldsymbol{X}(t))\text{是第}j\text{个部件的关键路向量}\} \\
& \times P\{\text{时刻}t\text{ 部件}j\text{正常}, (t, t+\Delta t]\text{内恰发生一个事件, 且} \\
& \text{由正常转为故障}\} + o(\Delta t) \\
=& \sum_{j=1}^{n} P\{\phi(1_j, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_j, \boldsymbol{X}(t)) = 1\}\,[M_j(t+\Delta t) - M_j(t)] + o(\Delta t) \\
=& \sum_{j=1}^{n} E\{\phi(1_j, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_j, \boldsymbol{X}(t))\} m_j(t)\Delta t + o(\Delta t) \\
=& \sum_{j=1}^{n} [h(1_j, \boldsymbol{A}(t)) - h(0_j, \boldsymbol{A}(t))] m_j(t)\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

将上式两端除以 Δt, 令 $\Delta t \to 0$, 由于右端极限存在, 因此 $M(t)$ 可微, 故得系统瞬间故障频度 $m(t)$, 此即 (9) 式. 将 (9) 的两端 $t \to \infty$, 右端极限存在, 故得系统稳态故障频度 M, 此即 (10) 式. 证毕.

定理 7.10.1 表示, 系统的故障频度等于每个部件的概率重要度与其故障频度之积的和.

系统的状态向量 $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t))$ 的取值空间为

$$\Omega = \{(k_1, k_2, \cdots, k_n) : k_i = 0 \text{ 或 } 1,\ i = 1, 2, \cdots, n\} \tag{11}$$

系统正常状态全体的集合为 Ω 的子集

$$W = \{(k_1, k_2, \cdots, k_n) : \phi(k_1, k_2, \cdots, k_n) = 1\}$$

对任 $\boldsymbol{K} = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \Omega$, 我们令

$$
\begin{aligned}
C_0(\boldsymbol{K}) &= \{i : k_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n\} \\
C_1(\boldsymbol{K}) &= \{i : k_i = 1, i = 1, 2, \cdots, n\}
\end{aligned}
$$

它们分别为状态向量 $\boldsymbol{K}$ 中分量为 0 的下标集和分量为 1 的下标集.

定理 7.10.2 系统稳态故障度为

$$M=\sum_{\boldsymbol{K}\in W}\left[\prod_{i=1}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]\left[\sum_{j\in C_1(\boldsymbol{K})}\lambda_i-\sum_{j\in C_0(\boldsymbol{K})}\mu_i\right] \tag{12}$$

证明 由 (10) 和 $A_j=\dfrac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}$，有

$$\begin{aligned}
M&=\sum_{j=1}^{n}[h(1_j,\boldsymbol{A})-h(0_j,\boldsymbol{A})]\frac{\lambda_j\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{(\cdot_j,\boldsymbol{K})}[\phi(1_j,\boldsymbol{K})-\phi(0_j,\mathbf{K})]\left[\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]\times\frac{\lambda_j\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{(\cdot_j,\boldsymbol{K})}\phi(1_j,\boldsymbol{K})\left[\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]A_j\lambda_j\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{(\cdot_j,\boldsymbol{K})}\phi(0_j,\boldsymbol{K})\left[\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]\bar{A}_j(-\mu_j)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\boldsymbol{K}}\phi(\boldsymbol{K})\left[\prod_{i=1}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right][\lambda_j^{k_j}(-\mu_j)^{1-k_j}]\\
&=\sum_{\boldsymbol{K}}\phi(\boldsymbol{K})\left[\prod_{i=1}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{k_j}(-\mu_j)^{1-k_j}\right]\\
&=\sum_{\boldsymbol{K}\in W}\left[\prod_{i=1}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]\left[\sum_{j\in C_1(\boldsymbol{K})}\lambda_j-\sum_{j\in C_0(\boldsymbol{K})}\mu_j\right]
\end{aligned}$$

证毕.

由状态列举法可得系统可用度公式

$$A=h(\boldsymbol{A})=\sum_{\boldsymbol{K}\in W}\left[\prod_{i=1}^{n}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right] \tag{13}$$

比较 (12) 和 (13) 可知, 求系统故障频度只需在 (13) 中的每项乘一个相应的因子. 但是由于状态列举法计算量太大, 用公式 (13) 和 (12) 计算 A 和 M 是不实

际的. 在第三章, 我们曾介绍过一些更有效的方法求系统可靠度. 例如, 我们可以通过求系统的所有最小路集, 来求系统可靠度. 若 P_k 为系统中第 k 条最小路正常这个事件. $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 为所有最小路正常的事件, 则系统正常事件是

$$S = \bigcup_{k=1}^{m} P_k = \sum_{k=1}^{r} B_k$$

其中 $\sum_{k=1}^{r} B_k$ 为 $\bigcup_{k=1}^{m} P_k$ 的互斥项之和 (不交和). 因而系统可用度为

$$A = \sum_{k=1}^{r} P\{B_k\} \tag{14}$$

通常, (14) 式要比 (13) 式计算量小的多. 与 (14) 式相对应, 下列定理给出了系统故障频度的公式.

定理 7.10.3

$$M = \sum_{k=1}^{r} P\{B_k\} \left[\sum_{j \in C_1(B_k)} \lambda_j - \sum_{j \in C_0(B_k)} \mu_j \right] \tag{15}$$

其中 $C_0(B_k)$ 表示出现在 B_k 中故障部件的下标集, $C_1(B_k)$ 表示出现在 B_k 中正常部件的下标集.

我们先来证明一个引理.

引理 7.10.5 若 I 为集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个真子集, 对任意 $l \in I, (1 \leqslant l \leqslant n)$, $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \Omega$, 有关系式

$$\prod_{i \in I} A_i^{k_i} \bar{A}_i^{1-k_i} = A_l \prod_{i \in I} A_i^{k_i} \bar{A}_i^{1-k_i} + \bar{A}_l \prod_{i \in I} A_i^{k_i} \bar{A}_i^{1-k_i} \tag{16}$$

对应地有

$$\begin{aligned} &\left[\prod_{i \in I} A_i^{k_i} \bar{A}_i^{1-k_i} \right] \left[\sum_{j \in C_1(I)} \lambda_j - \sum_{j \in C_0(I)} \mu_j \right] \\ &= \left[A_l \prod_{i \in I} A_i^{k_i} \bar{A}_i^{1-k_i} \right] \left[\sum_{j \in C_1(I)} \lambda_j + \lambda_l - \sum_{j \in C_0(I)} \mu_j \right] \\ &\quad + \left[\bar{A}_l \prod_{i \in I} A_i^{k_i} \bar{A}_i^{1-k_i} \right] \left[\sum_{j \in C_1(I)} \lambda_j - \sum_{j \in C_0(I)} \mu_j - \mu_l \right] \end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$C_0(I)=\{j:k_j=0,j\in I\}$$
$$C_1(I)=\{j:k_j=1,j\in I\}$$

证明 由于 $A_l+\bar{A}_l=1$, 立即可得 (16) 式.(17) 式的右端等于

$$\left[\prod_{i\in I}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]\left[\sum_{j\in C_1(I)}\lambda_j-\sum_{j\in C_0(I)}\mu_j\right]$$
$$+\left[\prod_{i\in I}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]A_l\lambda_l-\left[\prod_{i\in I}A_i^{k_i}\bar{A}_i^{1-k_i}\right]\bar{A}_l\mu_l$$

由于 $A_l\lambda_l=\bar{A}_l\mu_l$, 上式即为 (17) 的左端. 证毕.

我们用一个最简单的例来解释定理 7.10.3 的证明思想.

例 7.10.2 一个三个部件组成的 2/3(G) 可修系统. 用状态列举法, 得系统可用度为

$$A=A_1A_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3 \tag{13'}$$

通过求所有最小路, 再化不交和的方法, 得

$$A=A_1A_2+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3 \tag{14'}$$

显然, 用引理 7.10.5 的 (16) 式, 可将 (14′) 的每一项都分解成状态列举法所得的公式 (13) 中的若干项. 这里, 将 (14′) 第一项分解成 (13′) 的前两项. 根据定理 7.10.2, 由 (13′) 可得系统故障频度为

$$\begin{aligned}M=&A_1A_2A_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+A_1A_2\bar{A}_3(\lambda_1+\lambda_2-\mu_3)\\&+A_1\bar{A}_2A_3(\lambda_1+\lambda_3-\mu_2)+\bar{A}_1A_2A_3(\lambda_2+\lambda_3-\mu_1)\end{aligned} \tag{12'}$$

用引理 7.10.5 的 (11) 式, 可将 (12′) 的前两项合并成一项, 得到

$$M=A_1A_2(\lambda_1+\lambda_2)+A_1\bar{A}_2A_3(\lambda_1+\lambda_3-\mu_2)+\bar{A}_1A_2A_3(\lambda_2+\lambda_3-\mu_1) \tag{15'}$$

此式正是定理 7.10.3 的结果.

一般, 要证明定理 7.10.3, 只需从可用度公式 (14) 出发, 重复用引理 7.10.5 的 (16) 式进行分解, 最后可得可用度公式 (13). 用定理 7.10.2, 可用度 (13) 式

对应的故障频度为 (12) 式. 然后从 (12) 式出发, 重复用引理 7.10.5 的 (17) 式, 可通过合并一些项, 将 (12) 化成与 (14) 式对应的故障频度公式 (15).

在较复杂的系统中, 可用度公式 (14) 要比 (13) 简单得多. 因此, 故障频度公式 (15) 也要比 (12) 简单得多.

最后, 我们顺便指出引理 7.10.2 的一个推论.

推论 将本节讨论的系统推广到修理设备个数少于部件数的系统或 (和) 贮备系统, 引理 7.10.2 的结果仍成立.

证明 与本节讨论的系统不同之处是, 每个部件在 $(t, t+\Delta t]$ 内还可能有等待修理时间和贮备时间, 它们都是非负的. 此时, 公式 (6) 和 (6′) 中各部分和还可能加上若干非负随机变量, 这两个式子仍成立. 其余的证明完全类似.

我们在第六章讨论的所有系统中, 多次用到一个结论: 在 Δt 时间内发生两次或两次以上状态变化的概率为 $o(\Delta t)$(第六章, 引理 6.1.2). 这个结论只是上述推论 7.10.1 的一个特殊情形.

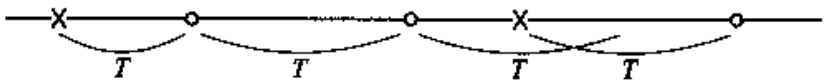
第八章　维修策略研究

许多实际系统在使用过程中, 往往由于维修性问题考虑不周, 而使维修费用大大超过系统本身费用的很多倍. 特别是系统突发性故障, 常常会造成巨大的经济损失, 有时会招致灾难性的后果, 因而在故障前进行预防性维修是一个极为重要的措施. 本章 §8.1 至 §8.5 考虑时间计划预防维修的各种不同的模型及最优策略的求法. 在 §8.6 至 §8.7 考虑两类与维修策略有关的模型: 时间检测策略和备件定购策略. 最后, 在 §8.8 引进了两个简单的状态监视预防维修模型.

§8.1 连续时间的基本维修策略

§8.1.1 年龄更换策略

年龄更换策略是: 当部件在达到指定的年龄 T 仍然正常, 则对部件作预防性更换; 若部件在 T 以前发生故障, 则对部件作事后更换. 见 (图 8.1) 指定的时间 T 称为定时计划更换时间间隔.



×事后更换　○预防更换

图 8.1　年龄更换

假定, 部件寿命 X 的分布函数为 $F(t)$, 均值为 $1/\lambda$. 用 c_f 和 c_p 分别表示一次事后更换和预防更换的损失（它们不仅包含部件本身的费用和更换费, 也包含由于故障而造成的经济损失和其它损失）. 进一步假定更换时间可以忽略不计. 我们的问题是要选择最优的 T, 使经长期运行单位时间的期望损失达最小.

令 $C_1(T)$ 表示, 当计划更换时间间隔为 T 时, 经长期运行单位时间的期望损失, 即

$$C_1(T)=\lim_{t\to\infty}\frac{[0,t]\text{时间内的期望损失}}{t} \tag{1}$$

显然, 部件更换时刻是再生点. 如果令相邻两次更换的时间间隔为一个周期. 易证各周期长独立同分布. 用第七章 §§7.1.1 更新极限定理 7.1.4, 易得

$$C_1(T)=\frac{\text{一个周期内的期望损失}}{\text{平均周期长}} \tag{2}$$

其中周期长的具体表达式是

$$\text{周期长}=XI_{\{X\leqslant T\}}+TI_{\{X>T\}}$$

故

$$\text{平均周期长}=\int_0^T tdF(t)+\int_T^\infty TdF(t)=\int_0^T\bar{F}(t)dt$$
$$\text{一个周期内的期望损失}=c_fF(T)+c_p\bar{F}(T)$$

因此

$$C_1(T)=\frac{c_fF(T)+c_p\bar{F}(T)}{\displaystyle\int_0^T\bar{F}(t)dt} \tag{3}$$

问题归结为求最优的 T^*, 使 $C_1(T)$ 达到最小.

定理 8.1.1 如果 $c_f>c_p$, 且部件的故障率 $r(t)$ 连续严格单调递增, 则有

1) 若 $r(\infty)>\dfrac{\lambda c_f}{c_f-c_p}$, 则存在唯一的有限的 T^*, 它满足方程

$$r(T)\int_0^T\bar{F}(t)dt-F(T)=\frac{c_p}{c_f-c_p} \tag{4}$$

且最小损失为

$$C_1(T^*) = (c_f - c_p)r(T^*) \tag{5}$$

2) 若 $r(\infty) \leqslant \dfrac{\lambda c_f}{c_f - c_p}$, 则 $T^* = \infty$, 且

$$c_1(\infty) = \lambda c_f \tag{6}$$

证明 由 (3) 式, 令 $\dfrac{d}{dT}C_1(T) = 0$, 即 (4) 式. 若令 (4) 式的左端为 $h_1(T)$, 则 $h_1(0) = 0, h_1(\infty) = \dfrac{r(\infty)}{\lambda} - 1$, 此外, $h_1(T)$ 是连续严格单调递增函数. 这是因为, 对任何 $T_2 > T_1$, 有

$$\begin{aligned}
&h_1(T_2) - h_1(T_1)\\
&= [r(T_2) - r(T_1)] \int_0^{T_1} \bar{F}(t)dt + r(T_2) \int_{T_1}^{T_2} \bar{F}(t)dt - [F(T_2) - F(T_1)]\\
&> [r(T_2) - r(T_1)] \int_0^{T_1} \bar{F}(t)dt + \int_{T_1}^{T_2} r(t)\bar{F}(t)dt - \int_{T_1}^{T_2} f(t)dt\\
&= [r(T_2) - r(T_1)] \int_0^{T_1} \bar{F}(t)dt > 0
\end{aligned}$$

其中 $f(t)$ 表示 $F(t)$ 的密度函数.

当 $r(\infty) > \dfrac{\lambda c_f}{c_f - c_p}$, 则 $h_1(\infty) > \dfrac{c_p}{c_f - c_p}$. 因此 (4) 有唯一有限解 T^*, 它使 $C_1(T)$ 取极值. 又由于 $C_1(0) = \infty$, T^* 又是 $C_1(T)$ 唯一的极值, 因此 T^* 是 $C_1(T)$ 最小值. 将公式 (4) 代入 (3) 式立即可得 (5) 式.

当 $r(\infty) \leqslant \dfrac{\lambda c_f}{c_f - c_p}$, 则 $h_1(\infty) \leqslant \dfrac{c_p}{c_f - c_p}$. 因此 $h(T) < \dfrac{c_p}{c_f - c_p}$, 对所有有限的 $T \geqslant 0$. 由此推出 $\dfrac{d}{dT}C_1(T) < 0$, 对所有有限的 $T \geqslant 0$. 因而得 $T^* = \infty$. (6) 式可由 (3) 式直接而得.

例 8.1.1 部件寿命遵从 Γ 分布 $F(t) = 1 - (1 + t)e^{-t}$. 此时 $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $r(t) = \dfrac{t}{1+t}, r(\infty) = 1$, 且

$$C_1(T) = \frac{c_f - (c_f - c_p)(1 + T)e^{-T}}{2 - 2e^{-T} - Te^{-T}} \tag{3'}$$

由于 $r(T)$ 连续严格单调增. 如果 $c_f > c_p$ 有

1) 有限 T^* 存在的条件是

$$1 = r(\infty) > \frac{\lambda c_f}{c_f - c_p} = \frac{c_f}{2(c_f - c_p)}$$

即当 $c_f > 2c_p$ 时, 存在唯一的有限解 T^* , 它满足方程

$$(c_f - c_p)\frac{T - 1 + e^{-T}}{1 + T} = c_p \tag{4'}$$

且最小损失为

$$C_1(T^*) = (c_f - c_p)r(T^*) = (c_f - c_p)\frac{T^*}{1 + T^*} \tag{5'}$$

在工程实践中, 可采用图解法求 T^* 和 $C_1(T^*)$. 在图 8.2 中, 由 c_p 求 T^*, 再由 T^* 求 $C_1(T^*)$.

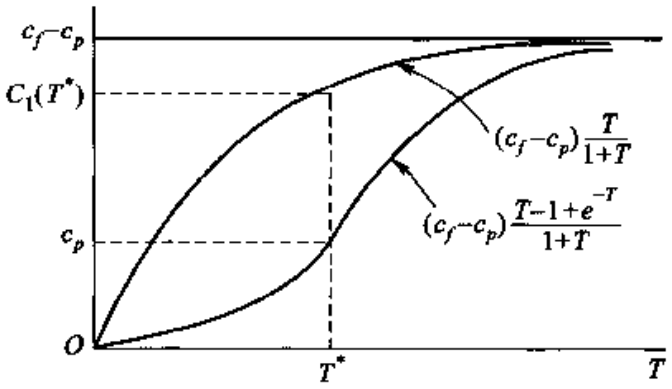


图 8.2

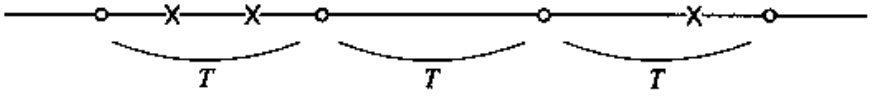
2) 当 $c_f \leqslant 2c_p$ 时, 则 $T^* = \infty$ 且

$$C_1(T^*) = C_1(\infty) = \frac{1}{2}c_f \tag{6'}$$

§8.1.2 成批更换策略

成批更换策略是指, 部件在给定的时刻 $kT(k = 1, 2, \cdots)$ 作预防性更换, 部件在故障时作事后更换 (见图 8.3).

假定部件的寿命分布为 $F(t), c_f$ 和 c_p 分别表示一次事后更换和预防更换的损失. 若更换时间忽略不计. 我们的问题仍然是, 求最优的 T^*, 使长期运行单位时间的期望损失最小.



X事后更换 o预防更换

图 8.3 成批更换

类似于 §8.1.1 的考虑, 易得

$$C_2(T)=\frac{c_f M(T)+c_p}{T} \tag{7}$$

其中 $M(T)$ 表示 $(0,T]$ 时间内部件事后更换的期望次数. 由更新过程的结果 (见第七章 §§7.1.1) $M(t)$ 是更新寿命分布为 $F(t)$ 的更新过程中的更新函数

$$M(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F^{(k)}(t) \tag{8}$$

在具体问题中,$M(t)$ 往往可以用 LS 变换方法来求.

若 $F(t)$ 的密度函数存在, 则 $M(t)$ 可微, 更新密度为 $m(t)=M'(t)$. 令 $\frac{d}{dT}C_2(T)=0$, 等价于

$$T_m(T)-M(T)=\frac{c_p}{c_f} \tag{9}$$

令 (9) 式的左端为 $h_2(T)$, 我们可得如下定理.

定理 8.1.2 若 $m(T)$ 连续严格单调递增, 则 $h_2(t)$ 连续严格单调递增, 且

1) 若 $h_2(\infty)>\frac{c_p}{c_f}$, 则存在唯一的有限解 T^* , 它满足方程 (9) , 且最小损失为

$$C_2(T^*)=c_f m(T^*) \tag{10}$$

2) 若 $h_2(\infty)\leqslant\frac{c_p}{c_f}$, 则 $T^*=\infty$, 且最小损失为

$$C_2(\infty)=\lambda c_f \tag{11}$$

证明 对 $T_2>T_1$ 有

$$\begin{aligned}
&h_2(T_2)-h_2(T_1)\\
&=T_1[m(T_2)-m(T_1)]+(T_2-T_1)m(T_2)-\int_{T_1}^{T_2}m(u)du\\
&=T_1[m(T_2)-m(T_1)]+(T_2-T_1)[m(T_2)-m(\xi)]>0
\end{aligned}$$

最后一个等号是由于中值定理, 其中 $\xi \in [T_1, T_2]$, 因此 $h_2(T)$ 连续严格单调递增.

由于 $h_2(0) = 0$, 当 $h_2(\infty) > c_p/c_f$ 时, (9) 有唯一有限解 T^*, 使 $\frac{d}{dT}C_2(T^*) = 0$. T^* 是 $C_2(T)$ 唯一的极值. 又由 $C_2(0) = \infty$, 所以 T^* 是 $C_2(T)$ 的最小值. 将 (9) 式代入 (7) 式, 即可得 (10) 式.

当 $h_2(\infty) \leqslant \frac{c_p}{c_f}$ 时, 可得 $h_2(T) < \frac{c_p}{c_f}$, 对所有有限 T. 即$\frac{d}{dT}C_2(T) < 0$, 对所有有限 T. 因此得 $T^* = \infty$, 且由第七章的定理 7.1.1 得 (11) 式. 证毕.

例 8.1.2 部件的寿命分布 $F(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$, 用 LS 变换法可求得

$$M(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

$$m(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

此时, 公式 (9) 是

$$\frac{1}{4}[1 - (1+2T)e^{-2T}] = \frac{c_p}{c_f} \tag{9'}$$

由于 $m(t)$ 连续严格单调递增, 因此

1) 当 $4c_p < c_f$ 时, 则存在唯一的有限解 T^* , 它满足方程 (9′) , 最小损失为

$$C_2(T^*) = c_f m(T^*) = \frac{1}{2}c_f(1 - e^{-2T^*}) \tag{10'}$$

在工程应用中往往也可用图解法求 T^* 和 $C_2(T^*)$.

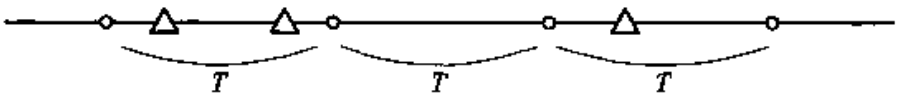
2) 当 $4c_p \geqslant c_f$ 时, 则 $T^* = \infty$, 且最小损失为

$$C_2(\infty) = \frac{1}{2}c_f \tag{11'}$$

在多个部件的情形, 采用成批更换策略, 在时刻 $kT, (k = 1, 2, \cdots)$, 所有部件同时都更换. 这也正是 "成批" 这词的来源. 假设共有 N 个同型部件同时开始工作, 在时刻 $kT, k = 1, 2, \cdots$, 对所有 N 个部件同时作预防更换, 更换的总损失是 c_b; 当任何部件发生故障时, 随时进行事后更换, 每个部件事后更换的损失为 c_f. 类似于单部件情形, 有

$$C(T) = \frac{Nc_f M(T) + c_b}{T} \tag{12}$$

其形式与 (7) 式一样, 可以完全类似讨论.



△故障小修 ○预防更换

图 8.4 故障小修的周期更换

§8.1.3 故障小修的周期更换策略

在 §§8.1.2 讨论的成批更换策略中, 当部件发生故障时, 用新的部件去作事后更换. 这里我们考虑另一种策略. 当部件发生故障时, 我们仅对故障的部件作应急的修理, 称为小修. 所谓小修是指, 使故障的部件恢复工作, 但修理后部件的年龄不变, 亦即部件故障率函数随时间的变化规律不因小修而被干扰. 在指定的时刻 $kT, k-1,2,\cdots$, 仍作预防性更换 (见图 8.4).

假定部件的故障率函数为 $r(t)$, 一次小修和预防更换的损失分别为 c_m 和 c_p, 小修和更换时间忽略不计. 因此, 类似于 §§8.1.1 的考虑, 部件经长期运行单位时间的期望损失为

$$C_3(T)=\frac{c_m\Lambda(T)+c_p}{T} \tag{13}$$

其中部件 $\Lambda(T)$ 表示 $(0,T]$ 中部件小修的平均次数.

引理 8.1.1

$$\Lambda(T)=\int_0^T r(u)du$$

证明 若时刻 0 部件是新的, 令 $P_n(t)$ 表示在 $(0,t]$ 时间内发生 n 次小修的概率. 根据故障率函数的定义, 年龄为 t 的部件在 $(t,t+\Delta t]$ 内发生故障的概率是 $r(t)\Delta t+o(\Delta t)$. 因此

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t)=P_0(t)[1-r(t)\Delta t]+o(\Delta t) \\ P_n(t+\Delta t)=P_n(t)[1-r(t)\Delta t]+P_{n-1}(t)r(t)\Delta t+o(\Delta t),\ n=1,2,\cdots \end{cases}$$

上式经整理, 并令 $\Delta t\to 0$, 得

$$\begin{cases} P_0'(t)=-r(t)P_0(t) \\ P_n'(t)=-r(t)P_n(t)+r(t)P_{n-1}(t), \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

初始条件 $P_0(0)=1, P_n(0)=0, n=1,2,\cdots$. 引进母函数

$$\Psi(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)z^k, |z|\leqslant 1$$

则以上方程组变为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,z) = -(1-z)r(t)\Psi(t,z)$$

初始条件 $\Psi(0,z)=1$, 解得

$$\Psi(t,z) = \exp\{-(1-z)\int_0^t r(u)du\} \tag{14}$$

由定义

$$\Lambda(T) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \frac{\partial}{\partial z}\Psi(t,z)\Big|_{z=1} = \int_0^t r(u)du$$

引理 8.1.1 证毕.

从 (14) 式两端比较 z^n 的系数, 用引理 8.1.1 的结果, 得到

$$P_n(t) = \frac{[\Lambda(t)]^n}{n!}\exp\{-\Lambda(t)\}, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{15}$$

我们的问题是求最优的 T^*, 使 $C_3(T)$ 达到最小值. 注意到公式 (13) 和 (7) 的形式完全一样, 因此可将那里的结论照搬过来. $\dfrac{d}{dT}C_3(T)=0$ 等价于

$$Tr(T) - \Lambda(T) = c_p/c_m \tag{16}$$

令上式左端为 $h_3(T)$.

定理 8.1.3 若 $r(T)$ 连续严格单调递增, 则 $h_3(T)$ 连续严格单调递增, 且有

1) 若 $h_3(\infty) > c_p/c_m$, 则存在唯一的有限的解 T^*, 它满足方程 (16), 且最小损失为

$$C_3(T^*) = c_m r(T^*) \tag{17}$$

2) 若 $h_3(\infty) \leqslant c_p/c_m$, 则 $T^*=\infty$, 且最小损失为

$$C_3(\infty) = c_m r(\infty) \tag{18}$$

例 8.1.3 部件的寿命分布为 $F(t)=1-(1+t)e^{-t}$, 它的故障率 $r(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 连续严格单调递增. 此时公式 (16) 为

$$\ln(1+T) - \frac{T}{1+T} = \frac{c_p}{c_m} \tag{16'}$$

当 $T \to \infty$, 上式左端趋于 ∞. 因此存在唯一的有限解 T^*, 它满足方程 (16′) . 最小损失为

$$C_3(T^*) = c_m \frac{T^*}{1+T^*} \tag{17'}$$

在实际应用中常可用图解法求 T^* 和 $C_3(T^*)$.

例 8.1.4 部件寿命分布为韦布尔分布

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}, \quad t \geqslant 0, \alpha > 1$$

此时

$$r(t) = \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-1}$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t r(u)du = (\lambda t)^\alpha$$

代入方程 (16), 立即可解出

$$T^* = \left[\frac{c_p}{\lambda^\alpha(\alpha-1)c_m}\right]^{1/\alpha}$$

最小损失为

$$C_3(T^*) = c_m r(T^*) = c_m \alpha \lambda (\lambda T^*)^{\alpha-1}$$

§8.2 离散时间的基本维修策略

这一节考虑离散型寿命分布的情形. 若部件寿命 X 遵从概率分布

$$P_n = P\{X = n\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

其均值为 $\dfrac{1}{\lambda} = \displaystyle\sum_{n-1}^{\infty} nP_n, (\lambda > 0)$. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_j$ 独立, 且都遵从以上的离散概率分布, 则

$$P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j = n\} = P_n^{(j)}, \quad n = j, j+1, \cdots$$

表示 $P_n, n = 1, 2, \cdots$, 的第 j 重卷积. 它们有以下递推关系

$$\begin{cases} P_n^{(1)} = P_n, & n \geqslant 1 \\ P_n^{(j)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} P_i P_{n-i}^{(j-1)}, & 2 \leqslant j \leqslant n < \infty \\ P_n^{(j)} = 0, & j > n \end{cases}$$

下面, 就离散寿命分布情形, 来讨论 §8.1 中的三个基本维修策略, 有关费用结构和符号同 §8.1.

§8.2.1 年龄更换策略

当部件的年龄到达指定的时间 N 仍然正常, 则对部件作预防性更换; 若部件在 N 以前发生故障, 则对部件作事后更换. 我们的问题是求最优的 N^*, 使经长期运行单位时间的期望损失 $C_1(N)$ 最小.

类似于 §§8.1.1 的讨论, 此时

$$\text{周期长} = XI_{\{X\leqslant N\}} + NI_{\{X>N\}}$$

故

$$\begin{aligned}\text{平均周期长} &= \sum_{j=1}^{N} jP_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} NP_j \\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j} P_j + \sum_{j=N+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N} P_j \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} P_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{\infty} P_j \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{\infty} P_j\end{aligned}$$

$$\text{一个周期内的期望损失} = c_f\sum_{j=1}^{N} P_j + c_p\sum_{j=N+1}^{\infty} P_j$$

因此

$$C_1(N) = \frac{c_f\sum\limits_{j=1}^{N} P_j + c_p\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} P_j}{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=i}^{\infty} P_j}, \quad N = 1,2,\cdots \tag{1}$$

问题归结为求最优的 N^*, 使 $C_1(N)$ 最小.

定理 8.2.1 若 $c_f > c_p$, 且部件的故障率函数 $r(n) = P_n \Big/ \sum\limits_{j=n}^{\infty} P_j, n = 1,2,\cdots$, 严格单调递增, 则有

1) 若 $r(\infty) > \dfrac{\lambda c_f}{c_f - c_p}$, 则存在唯一的有限解 N^*, 它满足

$$\begin{cases} h_1(N) \geqslant \dfrac{c_p}{c_f - c_p} \\ h_1(N-1) < \dfrac{c_p}{c_f - c_p} \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$h_1(n) = \begin{cases} r(n+1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{\infty} P_j - \sum_{j=1}^{n} P_j, & n = 1, 2, \cdots \\ 0, & n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

最小损失满足

$$(c_f - c_p) r(N^*) < C_1(N^*) \leqslant (c_f - c_p) r(N^* + 1) \tag{4}$$

2) 若 $r(\infty) \leqslant \dfrac{\lambda c_f}{c_f - c_p}$, 则 $N^* = \infty$, 最小损失为

$$C_1(\infty) = \lambda c_f$$

此定理的证明类似于 §§8.1.1, 定理 8.1.1, 区别只是导数 $\dfrac{d}{dT} C_1(T) = 0$ 换成差分

$$C_1(N+1) - C_1(N) \geqslant 0, C_1(N) - C_1(N-1) < 0$$

将式 (1) 代入这两个不等式, 即得不等式 (2).

例 8.2.1 若部件的寿命遵从负二项分布

$$P_n = np^2 q^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

其中 $p, q > 0, p + q = 1$. 我们有

$$\sum_{j=n}^{\infty} P_j = (np + q) q^{n-1}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1+q}{p}$$

$$r(n) = \frac{np^2}{np + q}$$

用定理 8.2.1 的结果, 若 $\dfrac{q}{1+q} > \dfrac{c_p}{c_f}$, 则存在唯一的有限解 N^*, 它是满足下列不等式的最小的 N

$$\frac{(N+1)p - 1 + q^{N+1}}{Np + 1} \geqslant \frac{c_p}{q(c_f - c_p)}$$

若 $\dfrac{q}{1+q} \leqslant \dfrac{c_p}{c_f}$, 特别当 $c_f \leqslant 2c_p$, 则 $N^* = \infty$, 且

$$C_1(\infty) = \frac{pc_f}{1+q}$$

§8.2.2 成批更换策略

部件在指定的时刻 $kN, k = 1, 2, \cdots$ 作预防性更换, 部件在发生故障时作事后更换. 经长期运行单位时间的期望损失为

$$C_2(N) = \frac{c_f M(N) + c_p}{N} \tag{5}$$

其中 $M(N)$ 表示 $(0, N]$ 的平均事后更换次数. 由第七章 § §7.1.1 中离散时间更新过程的公式 (8) 和 (5′), 有

$$M(N) = \sum_{j=1}^{N} m(j), \quad m(N) = \sum_{k=1}^{N} P_N^{(k)}$$

我们的问题是求最优的 N^*, 使 $C_2(N)$ 达最小. 类似于 §§8.1.2, 有

定理 8.2.2 若 $m(N)$ 严格单调递增, 则有

1) 若 $h_2(\infty) > c_p/c_f$, 则存在唯一的有限解 N^*, 它满足

$$\begin{cases} h_2(N) \geqslant c_p/c_f \\ h_2(N-1) < c_p/c_f \end{cases} \tag{6}$$

且最小损失满足

$$c_f m(N^*) < C_2(N^*) \leqslant c_f m(N^*+1) \tag{7}$$

2) 若 $h_2(\infty) \leqslant c_p/c_f$, 则 $N^* = \infty$, 且最小损失为

$$C_2(\infty) = \lambda c_f \tag{8}$$

以上

$$h_2(n) = \begin{cases} nm(n+1) - \sum_{j=1}^{n} m(j), & n = 1, 2, \cdots \\ 0, & n = 0 \end{cases} \tag{9}$$

例 8.2.2 若部件的寿命遵从例 8.2.1 中的负二项分布. 此时

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}P_nz^n=\frac{p^2z}{(1-qz)^2}$$

由第七章, §7.1,(4′) 式,

$$\sum_{j=1}^{\infty}m(j)z^j=\frac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)}=\frac{p^2z}{(1-z)(1-q^2z)}$$

比较系数, 可得

$$m(n)=p^2\sum_{j=1}^{n-1}q^{2j},\quad n=1,2,\cdots$$

用 (9), 经计算得

$$h_2(n)=p^2\sum_{j=1}^{n}jq^{2j},\quad n=1,2,\cdots$$

若 $\dfrac{q}{1+q}>\left(\dfrac{c_p}{c_f}\right)^{1/2}$, 因 $h_2(n)$ 从 0 严格单调递增到 $\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^2$, 因此 (6) 有唯一的有限解 N^*; 若 $\dfrac{q}{1+q}\leqslant\left(\dfrac{c_p}{c_f}\right)^{1/2}$, 特别当 $c_f\leqslant 4c_p$ 时, 则 $N^*=\infty$, 且 $C_2(\infty)=\dfrac{pc_f}{1+q}$.

§8.2.3 故障小修的周期更换策略

在指定的时刻 $kN,k=1,2,\cdots$, 对部件作预防性更换; 当部件故障时, 对部件作应急的小修, 亦即使故障的部件恢复工作, 但修复后部件的年龄不变. 经长期运行单位时间的期望损失为

$$C_3(N)=\frac{c_m\Lambda(N)+c_p}{N}\tag{10}$$

其中 $\Lambda(N)$ 表示 $(0,N]$ 中平均小修次数.

引理 8.2.1

$$\Lambda(N)=\sum_{j=1}^{N}r(j)\tag{11}$$

证明 若时刻 0 部件是新的, 令 $P_k(n)$ 表示 $(0,n]$ 中部件小修 k 次的概率 $(k \leqslant n)$. 由于故障率 $r(n) = P_n \Big/ \sum_{j=n}^{\infty} P_j$ 表示部件寿命大于 $n-1$ 的条件下, 部件寿命等于 n 的概率. 因此

$$\begin{cases} P_0(n+1) = P_0(n)[1-r(n+1)] \\ P_k(n+1) = P_k(n)[1-r(n+1)] + P_{k-2}(n)r(n+1), \\ \qquad\qquad k = 1,2,\cdots,n \\ P_{n+1}(n+1) = P_n(n)r(n+1) \end{cases} \tag{12}$$

初始条件 $P_0(0) = 1, P_k(0) = 0, k = 1,2,\cdots,n+1$. 若引进母函数

$$\Psi(n,z) = \sum_{k=0}^{n} P_k(n) z^k$$

则 (12) 式改写为

$$\Psi(n+1,z) = \Psi(n,z)[1-(1-z)r(n+1)]$$

初始条件 $\Psi(0,z) = 1$. 递推得

$$\Psi(n,z) = \prod_{j=1}^{n}[1-(1-z)r(j)]$$

由定义

$$\Lambda(n) = \sum_{k=1}^{n} kP_k(n) = \frac{\partial}{\partial z}\Psi(n,z)\Big|_{z=1} = \sum_{j=1}^{n} r(j)$$

即为 (11) 式. 证毕.

我们的问题归结为, 求最优的 N^* , 使 $C_3(N)$ 达最小. 由于 $C_3(N)$ 的形式与 (5) 中 $C_2(N)$ 一样. 因此得

定理 8.2.3 *若部件故障率 $r(j)$ 严格单调递增, 则有*

1) 若 $h_3(\infty) > c_p/c_m$, 则存在唯一的有限解 N^*, 它满足

$$\begin{cases} h_3(N) \geqslant c_p/c_m \\ h_3(N-1) < c_p/c_m \end{cases} \tag{13}$$

且最小损失满足

$$c_m r(N^*) < C_3(N^*) \leqslant c_m r(N^*+1) \tag{14}$$

2) 若 $h_3(\infty) \leqslant c_p/c_m$, 则 $N^* = \infty$, 且最小损失为

$$C_3(\infty) = c_m r(\infty) \tag{15}$$

以上

$$h_3(n) = \begin{cases} nr(n+1) - \sum_{j=1}^{n} r(j), & n = 1, 2, \cdots \\ 0, & n = 0 \end{cases} \tag{16}$$

例 8.2.3 若部件的寿命分布遵从形状参数为 2 的离散韦布尔分布

$$P_n = q^{(n-1)^2} - q^{n^2}, n = 1, 2, \cdots, 0 < q < 1$$

此时有 $r(n) = 1 - q^{2n-1}, n = 1, 2, \cdots$, 它从 $1-q$ 严格单调递增到 1. 若 $\dfrac{q}{1-q^2} > \dfrac{c_p}{c_m}$, 则由 (13) 式,$N^*$ 是满足下列不等式的最小的 N

$$\frac{q}{1-q^2}\{1 - [1 + N(1-q^2)]q^{2N}\} \geqslant \frac{c_p}{c_m}$$

若 $\dfrac{q}{1-q^2} \leqslant \dfrac{c_p}{c_m}$, 则 $N^* = \infty$.

§8.3 考虑折扣率的年龄更换策略

当选择长期运行总期望费用作目标函数时, 我们必须对所有费用适当地考虑折扣率问题. 例如, 明年的一元钱, 折算到今年来看不是一元钱, 而要比一元钱少些, 需要打一个折扣. 下面分别就连续时间情形和离散时间情形, 以年龄更换策略为例来说明这类模型的一般处理方法.

§8.3.1 连续时间情形

我们沿用 §§8.1.1 中的全部假设和符号, 但是将目标函数取为长期运行总期望费用. 此时, 我们要考虑连续时间的费用折扣率. 若给定的折扣率为 $\alpha, (\alpha > 0)$, 即时刻 $t+u$ 的价值 C, 折算到时刻 u 来看仅值 $Ce^{-\alpha t}$, 对所有 $u \geqslant 0$.

若时刻 0 部件是新的, 令 $C_1(\alpha, T)$ 表示从时刻 0 出发, 第一个周期内的期望费用. 由于要将各费用折算到时刻 0, 因此

$$\begin{aligned} C_1(\alpha, T) &= \int_0^T c_f e^{-\alpha t} dF(t) + \int_T^\infty c_p e^{-\alpha T} dF(t) \\ &= c_f \int_0^T e^{-\alpha t} dF(t) + c_p e^{-\alpha T} \bar{F}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

上式右端第一项表示, 部件在时刻 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 发生故障, 因此作事后更换的费用折算到时刻 0 为 $c_f e^{-\alpha a}$; 第二项表示, 部件在时刻 $t(t > T)$ 发生故障, 因此在时刻 T 作预防更换费用折算到时刻 0 为 $c_p e^{-\alpha T}$. 令 $T_1(\alpha, T)$ 表示第一个周期结束时刻的费用折算到时刻 0 的折扣, 即第一个周期结束时刻的价值 C, 折算到时刻 0 为 $T_1(\alpha, T)C$. 显然

$$\begin{aligned} T_1(\alpha, T) &= \int_0^T e^{-\alpha t} dF(t) + \int_T^\infty e^{-\alpha T} dF(t) \\ &= \int_0^T e^{-\alpha t} dF(t) + e^{-\alpha T} \bar{F}(T) \end{aligned} \tag{2}$$

上式右端第一项表示, 当部件在时刻 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 发生故障, 则周期在时刻 t 结束, 因此折扣为 $e^{-\alpha t}$; 第二项表示, 当部件在时刻 $t(t > T)$ 发生故障, 则周期在时刻 T 结束, 因此折扣为 $e^{-\alpha T}$. 若令 $C(\alpha, T)$ 为长期运行总期望折扣费用. 由于第一个周期的结束时刻是再生点, 因此有关系式

$$C(\alpha, T) = C_1(\alpha, T) + T_1(\alpha, T) C(\alpha, T)$$

可解得

$$C(\alpha, T) = \frac{C_1(\alpha, T)}{1 - T_1(\alpha, T)} \tag{3}$$

将 (1) 和 (2) 式代入上式, 得

$$C(\alpha, T) = \frac{c_f \int_0^T e^{-\alpha t} dF(t) + c_p e^{-\alpha T} \bar{F}(T)}{\alpha \int_0^T e^{-\alpha t} \bar{F}(T) dt} \tag{4}$$

易验证 $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha C(\alpha, T) = C_1(T)$, 与 §§8.1.1 中不考虑折扣率时的 (3) 式一致.

我们的问题是, 求最优的 T^*, 使 $C(\alpha, T)$ 达到最小. 令

$$K(\alpha) = \frac{c_f \hat{F}(\alpha) + c_p[1 - \hat{F}(\alpha)]}{(c_f - c_p)\dfrac{1 - \hat{F}(\alpha)}{\alpha}}$$

其中 $\hat{F}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dF(t)$. 同定理 8.1.1, 可证

定理 8.3.1 若部件的故障率 $r(t)$ 连续严格单调递增, $c_f > c_p$, 则有

1) 若 $r(\infty) > K(\alpha)$, 则存在唯一的有限最优解 T^* , 它满足

$$r(T)\int_0^T e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt - \int_0^T e^{-\alpha t}dF(t) = \frac{c_p}{c_f - c_p} \tag{5}$$

2) 若 $r(\infty) \leqslant K(\alpha)$, 则 $T^* = \infty$, 且

$$C(\alpha, \infty) = \frac{c_f \hat{F}(\alpha)}{1 - \hat{F}(\alpha)}$$

§8.3.2 离散时间的情形

我们沿用 §§8.2.1 的全部假设和符号, 但是取目标函数为长期运行总期望费用. 此时, 我们要考虑离散时间的费用折扣率. 若给定的折扣率为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 即在时刻 $n+m$ 的价值 C , 折算到时刻 n 仅值 $C\alpha^m$, 对所有 $n \geqslant 0$.

若时刻 0 部件是新的, 用类似于 §§8.3.1 的符号, 我们有

$$C_1(\alpha, N) = \sum_{j=1}^{N} c_f \alpha^j P_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} c_p \alpha^N P_j \tag{6}$$

和

$$T_1(\alpha, N) = \sum_{j=1}^{N} \alpha^j P_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} \alpha^N P_j \tag{7}$$

且有

$$C(\alpha, N) = C_1(\alpha, N) + T_1(\alpha, N)C(\alpha, N)$$

解得

$$C(\alpha, N) = \frac{C_1(\alpha, N)}{1 - T_1(\alpha, N)} \tag{8}$$

但是

$$\begin{aligned}1-T_1(\alpha,N)&=\sum_{j=1}^{\infty}P_j-\sum_{j=1}^{N}\alpha^jP_j-\sum_{j=N+1}^{\infty}\alpha^NP_j\\&=\sum_{j=1}^{N}(1-\alpha^j)P_j+\sum_{j=N+1}^{\infty}(1-\alpha^N)P_j\\&=\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}\alpha^kP_j+\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{j=N+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\alpha^kP_j\\&=\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha^k\sum_{j=k}^{N}P_j+\sum_{k=1}^{N}\alpha^k\sum_{j=N+1}^{\infty}P_j\right)\\&=\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\alpha^k\sum_{j=k}^{\infty}P_j\end{aligned}\tag{9}$$

将 (6) 和 (9) 代入 (8), 得

$$C(\alpha,N)=\frac{c_f\sum_{j=1}^{N}\alpha^jP_j+c_p\alpha^N\sum_{j=N+1}^{\infty}P_j}{\frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\alpha^k\sum_{j=k}^{\infty}P_j}\tag{10}$$

显然 $\lim\limits_{\alpha\to1}(1-\alpha)C(\alpha,N)=C_1(N)$, 归结为 §§8.2.1 的 (1) 式.

我们的问题是, 求最优的 N^*, 使得 $C(\alpha,N)$ 达最小. 令

$$K_1(\alpha)=\frac{\sum_{j=1}^{\infty}[c_f\alpha^j+c_p(1-\alpha^j)]P_j}{(c_f-c_p)\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i\sum_{j=i}^{\infty}P_j}$$

类似于定理 8.2.1, 有

定理 8.3.2 若部件的故障率 $r(n)$ 严格单调递增,$c_f>c_p$, 则有

1) 若 $r(\infty)>K_1(\alpha)$, 则存在唯一的有限解 N^*, 它满足

$$\begin{cases}h(\alpha,N)\geqslant\dfrac{c_p}{c_f-c_p}\\h(\alpha,N-1)<\dfrac{c_p}{c_f-c_p}\end{cases}\tag{11}$$

2) 若 $r(\infty) \leqslant K_1(\alpha)$, 则 $N^* = \infty$, 且

$$C(\alpha, \infty) = \frac{c_f \Phi(\alpha)}{1 - \Phi(\alpha)} \tag{12}$$

其中

$$h(\alpha, n) = r(n+1) \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \sum_{j=i}^{\infty} P_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha^j P_j, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{13}$$

$$\Phi(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j P_j$$

§8.4 考虑可用度的维修策略

在许多实际问题中, 人们常常用各种可靠性数量指标来作目标函数, 例如可靠度, 可用度和故障频度等等. 这一节, 我们以可用度为目标函数, 来讨论三个基本维修策略的最优化问题.

§8.4.1 年龄维修策略

考虑一个工作和修理反复交替出现的部件. 假定部件的寿命 X 遵从一般分布 $F(t)$, 其均值为 $1/\lambda$. 当部件工作到指定的时间 T 仍没有发生故障, 则对部件进行预防性维修, 预防维修时间 Y_p 遵从一般分布 $G_p(t)$, 其均值为 β_p. 若部件在指定的时间 T 之前发生故障, 立即进行事后修理, 修理时间 Y_f 遵从一般分布 $G_f(t)$, 其均值为 β_f. 经事后修理或预防修理后, 部件恢复到像新部件一样. (见图 8.5). 这里假定 $\lambda, \beta_f, \beta_p > 0$. 且 X, Y_p 和 Y_f 相互独立.

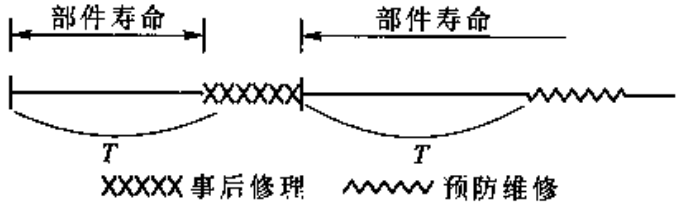


图 8.5

我们的目的是, 先来求系统的稳态可用度, 进一步求最优时间 T^* , 使系统稳态可用度最大.

根据故障部件修复如新的假设, 部件修复时刻是系统的再生点. 我们用更新过程的方法来求系统的可用度. 令

$$\tilde{X}=\begin{cases}X, \text{当} X\leqslant T\\ T, \text{当} X>T\end{cases}$$

$$\tilde{Y}=\begin{cases}Y_f, \text{当} X\leqslant T\\ Y_p, \text{当} X>T\end{cases}$$

用 $A(t)$ 表示, 时刻 0 部件是新的条件下系统的瞬时可用度. 类似于第七章, §7.2.2 的讨论,$A(t)$ 满足下列更新方程

$$A(t)=P\{\tilde{X}>t\}+P\{\tilde{X}+\tilde{Y}\leqslant t\}*A(t) \tag{1}$$

对上式两端作 L 变换可解得

$$A^*(s)=\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}P\{\tilde{X}>t\}dt}{1-\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dP\{\tilde{X}+\tilde{Y}\leqslant t\}} \tag{2}$$

由于

$$P\{\tilde{X}>t\}=\begin{cases}P\{X>t\}, \text{当} t\leqslant T\\ 0, \qquad \text{当} t>T\end{cases}$$

故

$$\int_0^\infty e^{-st}P\{\tilde{X}>t\}dt=\int_0^T e^{-st}\bar{F}(t)dt$$

而

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-st}dP\{\tilde{X}+\tilde{Y}\leqslant t\}=E\{e^{-s(\tilde{X}+\tilde{Y})}\}\\ =&\int_0^\infty E\{e^{-s(\tilde{X}+\tilde{Y})}\Big|X=t\}dP\{X\leqslant t\}\\ =&\int_0^T E\{e^{-s(t+Y_f)}\}dF(t)+\int_T^\infty E\{e^{-s(T+Y_p)}\}dF(t)\\ =&E\{e^{-sY_f}\}\int_0^T e^{-st}dF(t)+E\{e^{-sY_p}\}e^{-sT}\bar{F}(T)\\ =&\hat{G}_f(s)\int_0^T e^{-st}dF(t)+\hat{G}_p(s)e^{-sT}\bar{F}(T)\end{aligned}$$

其中 $\hat{G}_f(s)$ 和 $\hat{G}_p(s)$ 分别表示 $G_f(t)$ 和 $G_p(t)$ 的 LS 变换. 将以上两式代入 (2) 式, 得

$$A^*(s)=\frac{\int_0^T e^{-st}\bar{F}(t)dt}{1-\hat{G}_f(s)\int_0^T e^{-st}dF(t)-\hat{G}_p(s)e^{-sT}\bar{F}(T)} \tag{3}$$

当 $F(t)$ 或 $G_f(t)$ 和 $G_p(t)$ 为非格点分布时, (1) 式中 $P\{\tilde{X}+\tilde{Y}\leqslant t\}$ 必为非格点分布. 由第七章定理 7.1.3, 极限 $A=\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$ 存在, 故系统稳态可用度可用托贝尔定理和洛必达法则求得

$$\begin{aligned}A&=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A(u)du=\lim_{s\to 0}sA^*(s)\\&=\frac{\int_0^T\bar{F}(t)dt}{\int_0^T\bar{F}(t)dt+\beta_f F(T)+\beta_p\bar{F}(T)}\end{aligned} \tag{4}$$

可将 (4) 改写为

$$A=\frac{1}{1+\dfrac{\beta_f F(T)+\beta_p\bar{F}(T)}{\int_0^T\bar{F}(t)dt}} \tag{4'}$$

将 (4′) 与 §§8.1.1 的 (3) 式相比, 易知, 求 T^* 使 A 达最大的问题完全归结为 §§8.1.1 中求 T^* 使 $C_1(T)$ 最小的问题, 不同的只是将 β_f 和 β_p 分别代替那里的 c_f 和 c_p, 我们不在这里重复讨论了.

§8.4.2 备用部件的预防维修策略

我们考虑 §§8.4.1 中所讨论的部件. 假定该部件是一个仅在发生非常事件情况下的备用部件. 例如, 医院和高楼中在停电时使用的备用发电机, 以及对付敌人攻击的导弹和其它武器等. 我们的问题是: 对备用部件采用 §§8.4.1 中的年龄维修策略时, 求最优的时间 T^*, 使非常事件 (如停电) 发生时, 备用部件处于故障状态的概率最小.

假定非常事件在时间上是按指数分布 $1-e^{-\alpha t}, t\geqslant 0, \alpha>0$, 发生的. 这时, 在非常事件发生时, 备用部件恰处于故障状态的概率为

$$P_{\bar{A}}(T)=\int_0^\infty[1-A(t)]\alpha e^{-\alpha t}dt=1-\alpha A^*(\alpha) \tag{5}$$

其中 $A(t)$ 是 §§8.4.1 中讨论的瞬时可用度, $A^*(\alpha)$ 由 (3) 式给出. 将 (3) 式代入 (5) 式, 得

$$P_{\bar{A}}(T)=1-\frac{\alpha\int_0^T e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt}{1-\hat{G}_f(\alpha)\int_0^T e^{-\alpha t}dF(t)-\hat{G}_p(\alpha)e^{-\alpha T}\bar{F}(T)} \tag{6}$$

我们要求最优的 T^*, 使 $P_{\bar{A}}(T)$ 达到最小. 令

$$K=\frac{1-\hat{G}_p(\alpha)+\hat{F}(\alpha)[\hat{G}_p(\alpha)-\hat{G}_f(\alpha)]}{[\hat{G}_p(\alpha)-\hat{G}_f(\alpha)]\dfrac{1-\hat{F}(\alpha)}{\alpha}}$$

定理 8.4.1 若备用部件的故障率 $r(t)$ 连续严格单调递增, $\hat{G}_p(\alpha)>\hat{G}_f(\alpha)$, 则

1) 若 $r(\infty)>K$, 则存在唯一有限解 $T^*(0<T^*<\infty)$, 它满足方程

$$r(T)\int_0^T e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt-\int_0^T e^{-\alpha t}dF(t)=\frac{1-\hat{G}_p(\alpha)}{\hat{G}_p(\alpha)-\hat{G}_f(\alpha)} \tag{7}$$

2) 若 $r(\infty)\leqslant K$, 则 $T^*=\infty$.

证明 令 $\dfrac{d}{dT}P_{\bar{A}}(T)=0$, 即公式 (7). 若记 (7) 式的左端为 $h(T)$. 由假设条件可证 $h(T)$ 是连续严格单调递增函数, 且 $h(0)=0, h(\infty)=r(\infty)\cdot\dfrac{1-\hat{F}(\alpha)}{\alpha}-\hat{F}(\alpha)$. 若 $r(\infty)>K$, 即 $h(\infty)>[1-\hat{G}_p(\alpha)]/[\hat{G}_p(\alpha)-\hat{G}_f(\alpha)]$. 因此, 存在满足 (7) 式的唯一有限解 T^*, 使 $P_{\bar{A}}(T)$ 达极值. 又由于 $P_{\bar{A}}(0)=1$ 达到最大值, 因而 $P_{\bar{A}}(T^*)$ 只可能是唯一的最小值. 另一方面, 若 $r(\infty)\leqslant K$, 即 $h(\infty)\leqslant[1-\hat{G}_p(\alpha)]/[\hat{G}_p(\alpha)-\hat{G}_f(\alpha)]$. 此时 (7) 式无解, 且 $P_{\bar{A}}(\infty)$ 达最小值, $T^*=\infty$. 证毕.

§8.4.3 故障小修的周期维修策略

考虑如同 §§8.1.3 的策略. 假定已知部件的故障率为 $r(t)$, 对故障的部件仅作应急的小修, 小修时间遵从均值为 β_m 的一般分布. 经小修后, 部件恢复工作, 但修复后部件的年龄不变. 此外, 当部件的累计工作时间达到指定年龄 T 时, 对该部件进行预防性维修. 维修时间遵从均值为 β_p 的一般分布. 经预防维修后, 部件恢复如新, 并立即进入工作状态. 假定部件寿命、小修时间和预防维修时间等都相互独立 (见图 8.6). 为简单起见, 我们取稳态平均可用度 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\int_0^t A(u)du=\tilde{A}$

作为目标函数. 我们的问题是, 求部件的最优累计工作时间 T^* , 使稳态平均可用度 $\tilde{A}$ 达到最大.

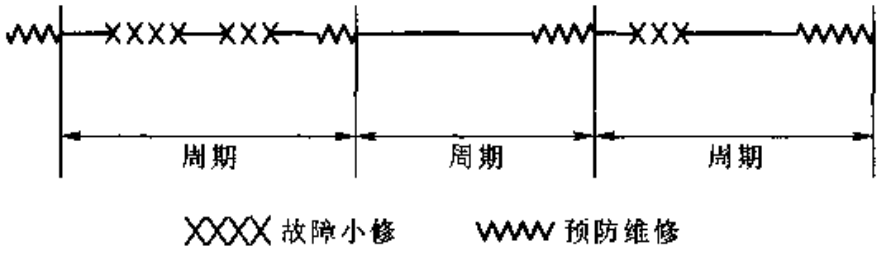


图 8.6

我们先来求稳态平均可用度 $\tilde{A}$. 显然, 部件预防维修结束时刻是再生点. 令相邻两个预防维修结束时刻之间的时间为一个周期. 易证各周期独立同分布, 它们可构成一个更新过程. 一个周期包括工作时间 T 、预防维修时间和若干次故障小修时间. 由 §§8.1.3 中的 (14) 式, 部件工作时间 T 内, 发生故障的平均次数为 $\Lambda(T) = \int_0^T r(t)dt$. 因此

$$\text{平均周期长} = T + \beta_p + \Lambda(T)\beta_m$$
$$\text{一个周期内期望工作时间} = T$$

若我们将部件工作时间长短看成为它所在周期内的报酬大小, 则由第七章, 定理 7.1.4, 有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t\to\infty} \frac{[0,t]\text{中期望工作时间}}{t} \\ &= \frac{\text{一个周期内的期望工作时间}}{\text{平均周期长}} \\ &= \frac{T}{T + \beta_p + \Lambda(T)\beta_m} \end{aligned} \tag{8}$$

上式可改写为

$$\tilde{A} = \frac{1}{1 + \dfrac{\beta_p + \beta_m \Lambda(T)}{T}} \tag{9}$$

将 (9) 式与 §§8.1.3 的 (13) 式相比可知, 求 T^*, 使 $\tilde{A}$ 最大的问题完全归结为 §§8.1.3 中讨论过的问题.

§8.5 两部件冷贮备系统的预防维修策略

考虑两个同型部件一个修理设备组成的冷贮备系统, 部件的寿命遵从均值为 $1/\lambda$ 的一般分布 $F(t)$, 故障后的修理时间遵从均值为 μ_1 的一般分布 $G_1(t)$. 假定时刻 0 一个部件开始工作, 另一个部件作冷贮备. 当工作部件发生故障时, 如果另一个部件处于贮备状态, 则故障的部件立即进入修理, 贮备部件立即转入工作. 当工作部件的工作时间 (年龄) 达到指定时间 T 尚未故障时, 若另一部件处于贮备状态, 则立即对工作部件进行预防维修, 贮备部件转入工作状态. 部件预防维修时间遵从均值为 μ_2 的一般分布 $G_2(t)$. 由于只考虑一个修理设备, 当工作部件的年龄达到指定时间 T 尚未故障时, 若另一个部件正在故障修理或预防维修, 则不对工作部件作预防维修, 而任其继续工作. 但是, 一旦正在修理或预防维修的部件修好, 立即进行工作, 而正在工作的部件 (年龄已超过 T) 则转入预防维修. 当一个部件修理或预防维修完成时, 若另一个部件仍正常工作, 且年龄小于 T, 则修复的部件转入贮备状态. 进一步假定, 部件经修理或预防维修恢复如新; 冷贮备转换开关是完全可靠的, 开关转换是瞬时的, 两部件的寿命、修理时间和预防维修时间等均相互独立. 我们的问题是求最优计划维修时间 T^*, 使系统首次故障前平均时间达最大.

首先, 我们用马尔可夫更新过程的工具来描述上述系统, 求出系统首次故障前平均时间, 然后再讨论最优化问题.

定义系统的状态为:

状态 0: 一个部件工作, 另一个部件贮备, 进入此状态的时刻工作部件是新的.

状态 1: 进入此状态的时刻为一个部件刚开始工作, 另一个部件刚开始修理.

状态 2: 进入此状态的时刻为一个部件刚开始工作, 另一个部件刚开始预防维修.

状态 3: 一个部件在修理或预防修理, 另一个部件故障待修.

由于我们只关心系统首次故障前时间, 因而可将故障状态 3 看成是吸收状态. 系统各状态的转移关系可见图 8.7 和图 8.8. 状态 0 是初始状态, 进入状态 1 和状态 2 的时刻是再生点, 状态 3 是吸收状态.

令 $X(t)=j$, 若时刻 t 系统处于状态 $j, j=0,1,2,3$, 则 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是一个以状态 3 为吸收状态的半马尔可夫过程. 若令 X 表示部件的寿命, Y_1 和 Y_2 分别表示部件修理时间和预防维修时间, 且我们将指定的时间 T 看成定长随机

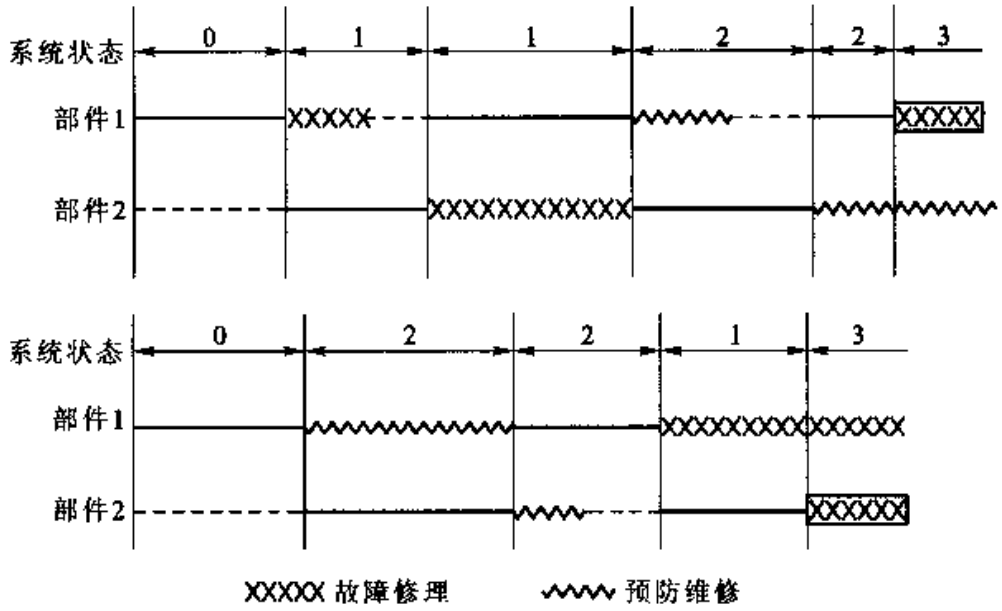


图 8.7

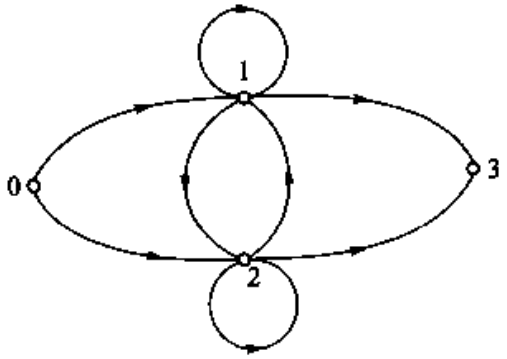


图 8.8

变量 X_T, 其分布为

$$U(t)=P\{X_T\leqslant t\}=\begin{cases}0, \text{当} t<T\\ 1, \text{当} t\geqslant T\end{cases}$$

我们可得系统的半马尔可夫核

$$Q_{01}(t)=P\{X\leqslant t, X<X_T\}=\int_0^t \bar{U}(u)dF(u)$$

$$Q_{02}(t)=P\{X_T\leqslant t, X>X_T\}=\int_0^t \bar{F}(u)dU(u)$$

$$Q_{i1}(t)=P\{X\leqslant t, Y_i<X\leqslant X_T\}=\int_0^t G_i(u)\bar{U}(u)dF(u), i=1,2$$

$$Q_{i2}(t)=P\{Y_i\leqslant t,X>Y_i>X_T\}+P\{X_T\leqslant t,Y_i\leqslant X_T<X\}$$
$$=\int_0^t\bar{F}(u)U(u)dG_i(u)+\int_0^t\bar{F}(u)G_i(u)dU(u),i=1,2$$
$$Q_{i3}(t)=P\{X\leqslant t,Y_i>X\}=\int_0^t\bar{G}_i(u)dF(u),\quad i=1,2$$

对以上各式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases}\hat{Q}_{01}(s)=\int_0^T e^{-st}dF(t)\\ \hat{Q}_{02}(s)=e^{-sT}\bar{F}(T)\\ \hat{Q}_{i1}(s)=\int_0^T e^{-st}G_i(t)dF(t),\quad i=1,2\\ \hat{Q}_{i2}(s)=\int_T^\infty e^{-st}\bar{F}(t)dG_i(t)+e^{-sT}\bar{F}(T)G_i(T),\quad i=1,2\\ \hat{Q}_{i3}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\bar{G}_i(t)dF(t),\quad i=1,2\end{cases}\tag{1}$$

令 $\Phi_j(t)$ 表示时刻 0 系统从进入状态 j 出发, 系统首次故障前的时间分布, γ_j 表示它的均值, $j=0,1,2$. 有下列马尔可夫更新方程组

$$\begin{cases}\Phi_0(t)=Q_{01}(t)*\Phi_1(t)+Q_{02}(t)*\Phi_2(t)\\ \Phi_i(t)=Q_{i3}(t)+Q_{i1}(t)*\Phi_1(t)+Q_{i2}(t)*\Phi_2(t),\quad i=1,2\end{cases}$$

对上式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases}\hat{Q}_0(s)=\hat{Q}_{01}(s)\hat{\Phi}_1(s)+\hat{Q}_{02}(s)\hat{\Phi}_2(s),\\ \hat{\Phi}_i(s)=\hat{Q}_{i3}(s)+\hat{Q}_{i1}(s)\hat{\Phi}_1(s)+\hat{Q}_{i2}(s)\hat{\Phi}_2(s),\ i=1,2\end{cases}\tag{2}$$

由上式可解出 $\Phi_0(s)$. 由于系统首次故障前平均时间为 $\gamma_i=-\dfrac{d}{ds}\hat{\Phi}_i(s)\Big|_{s=0}$, 故将 (2) 式两端关于 s 求导数, 并令 $s=0$, 可得 $\gamma_i,i=0,1,2,$ 的线性方程组:

$$\begin{cases}\gamma_0=\hat{Q}_{01}(0)\gamma_1+\hat{Q}_{02}(0)\gamma_2+\xi_0\\ \gamma_i=\hat{Q}_{i1}(0)\gamma_1+\hat{Q}_{i2}(0)\gamma_2+\xi_i,\quad i=1,2\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$\begin{cases}\xi_0=-[\hat{Q}'_{01}(0)+\hat{Q}'_{02}(0)]\\ \xi_i=-[\hat{Q}'_{i1}(0)+\hat{Q}'_{i2}(0)+\hat{Q}'_{i3}(0)],\quad i=1,2\end{cases}\tag{4}$$

解方程组 (3), 得

$$\gamma_0 = \xi_0 + \frac{[\hat{Q}_{01}(1-\hat{Q}_{22})+\hat{Q}_{02}\hat{Q}_{21}]\xi_1 + [\hat{Q}_{02}(1-\hat{Q}_{11})+\hat{Q}_{02}\hat{Q}_{21}]\xi_2}{(1-\hat{Q}_{22})(1-\hat{Q}_{11})-\hat{Q}_{12}\hat{Q}_{21}} \tag{5}$$

其中

$$\hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ij}(0), \quad i = 0,1,2; j = 1,2$$

将公式 (1) 和 (4) 代入 (5) 式, 经计算得系统首次故障前平均时间 γ_0（作为 T 的函数）为

$$\gamma_0(T) = \frac{\left[\frac{1+\theta_1}{\lambda} - J_1(\infty)\right][1-I_2(\infty)] + \left[\frac{1+\theta_2}{\lambda} - J_2(\infty)\right] I_1(\infty)}{\theta_1[1-I_2(\infty)] + \theta_2 I_1(\infty)} \tag{6}$$

或

$$\gamma_0(T) = \frac{\left[\frac{1}{\eta_1} - J_1(0)\right][-I_2(0)] + \left[\frac{1}{\eta_2} - J_2(0)\right][1+I_1(0)]}{\theta_1[-I_2(0)] + \theta_2[1+I_1(0)]} \tag{6'}$$

其中

$$\begin{cases} \theta_i = \int_0^\infty \bar{G}_i(t)dF(t) \\ \frac{1}{\eta_i} = \int_0^\infty \bar{F}(t)\bar{G}_i(t)dt \\ I_i(t) = \int_T^t [\theta_i + G_i(u)]dF(u) \\ J_i(t) = \int_T^t [\theta_i + G_i(u)]\bar{F}(u)du \end{cases} \quad i = 1,2 \tag{7}$$

我们的问题归结为求最优的 T^*, 使 $\gamma_0(T)$ 达到最大. 假设 $F(t)$ 有密度函数 $f(t)$, 其故障率函数为 $r(t)$. 令

$$L(t) = \frac{\theta_1 G_2(t) - \theta_2 G_1(t)}{\theta_1 - \theta_2}$$

$$k = \frac{\theta_2 \eta_1 \eta_2}{\theta_1 \eta_1 - \theta_2 \eta_2}$$

$$K = \frac{\lambda \theta_1}{\theta_1 - \theta_2}$$

我们有以下定理:

定理 8.5.1 若对所有 $t>0$, 均有 $G_1(t)<G_2(t)$, 且 $\gamma(t)$ 严格单调递增、并有连续导数, 则有

1) 若 $\gamma(\infty)>K, \theta_1\eta_1>\theta_2\eta_2, \gamma(0)<k$, 或者若 $\gamma(\infty)>K, \theta_1\eta_1\leqslant\theta_2\eta_2$, 则存在唯一的有限解 T^*, 它满足

$$\gamma(T)\left[\int_0^T \bar{F}(t)L(t)dt+\int_0^\infty \bar{F}(t)\bar{L}(t)dt\right]-\int_0^T L(t)dF(t)$$
$$=\frac{1}{\theta_1-\theta_2}\left[\theta_1\int_0^\infty \bar{L}_1(t)dF(t)+\theta_2\int_0^\infty L(t)dF(t)\right] \tag{8}$$

此时, 最大值为

$$\gamma_0(T^*)=\frac{1+\theta_1}{\lambda\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\left[\frac{I_1(\infty)}{\gamma(T^*)}-J_1(\infty)\right] \tag{9}$$

2) 若 $\gamma(\infty)\leqslant K$, 则 $T^*=\infty$, 即不进行预防维修. 此时有

$$\gamma_0(\infty)=\frac{1+\theta_1}{\lambda\theta_1} \tag{10}$$

3) 若 $\theta_1\eta_1>\theta_2\eta_2, \gamma(0)\geqslant k$, 则 $T^*=0$, 即结束修理或预防维修的部件立即进入工作, 对另一工作部件进行预防维修. 此时有

$$\gamma_0(0)=\frac{1}{\theta_2\eta_2} \tag{11}$$

证明 首先注意到, 对任意 $t>0$, 有 $L(t)>0$ 和

$$\int_0^\infty \bar{F}(t)\bar{L}(t)dt=\frac{\theta_1\eta_1-\theta_2\eta_2}{\eta_1\eta_2(\theta_1-\theta_2)}$$

又由假设 $G_1(t)<G_2(t)$, 可推得 $\theta_1>\theta_2, \eta_2>\eta_1$.

用 (6) 式和 (6′) 式, 将 $\gamma_0(T)$ 关于 T 求导数, 并令其为 0, 得

$$\theta_1\int_0^\infty \bar{G}_2(t)dF(t)+\theta_2\int_0^\infty G_1(t)dF(t)$$
$$=\gamma(T)\left\{\int_0^T[\theta_1G_2(t)-\theta_2G_1(t)]\bar{F}(t)dt+\left(\frac{\theta_1}{\eta_2}-\frac{\theta_2}{\eta_1}\right)\right\}$$
$$-\int_0^T[\theta_1G_2(t)-\theta_2G_1(t)]dF(t)$$

使用 $L(t)$ 的表达式, 上式即为 (8) 式. 令 (8) 式的左端为 $h(T)$, 有

$$h(0) = r(0)\int_0^\infty \bar{F}(t)\bar{L}(t)dt$$

$$h(\infty) = \frac{r(\infty)}{\lambda} - \int_0^\infty L(t)dF(t)$$

$$h'(T) = r'(T)\left[\int_0^T \bar{F}(t)L(t)dt + \int_0^\infty \bar{F}(t)\bar{L}(t)dt\right]$$

若 $\theta_1\eta_1 > \theta_2\eta_2$, 因为 $r(T)$ 连续严格单调递增, 因此 $h(T)$ 连续、大于零, 且严格单调递增. 定义 (8) 式的右端为 D , 则 $D > 0$.

进一步若 $r(0) < k, r(\infty) > K$, 则 $h(0) < D < h(\infty)$. 由 $h(T)$ 连续严格单调递增, 存在满足 (8) 式的唯一有限解 T^*, 它使 $\gamma_0(T)$ 达最大.

进一步若 $r(0) \geqslant k$, 则 $h(0) \geqslant D$. 因此 $\gamma_0'(T) < 0$, 对任意 $T > 0$. 由于 $\gamma_0(T)$ 是 T 的单调递减函数, 因而 $T^* = 0$.

另一方面, 若 $\theta_1\eta_1 < \theta_2\eta_2$, 则 $h(0) < 0, h'(0) < 0$ 和 $h'(\infty) > 0$. 易见 $h'(T) = 0$ 存在唯一有限解. 因此 $h(T)$ 是一个单峰函数, 且在 $h'(T) = 0$ 的解到无穷大之间的区间中, $h(T)$ 单调递增. 若 $\theta_1\eta_1 = \theta_2\eta_2$, 则 $h(0) = 0$, 且 $h'(T) > 0$, $h(T)$ 也单调递增. 因此, 当 $\theta_1\eta_1 \leqslant \theta_2\eta_2$ 时, 如果 $r(\infty) > K$, 则存在满足 (8) 式的唯一解.

最后, 若 $r(\infty) \leqslant K$, 则 $h(\infty) < D$. 由于 $h(T)$ 单调递增, 故 $h(T) < D$, 对所有 $T \geqslant 0$. 因此 $T^* = \infty$.

公式 (9), (10) 和 (11) 直接计算就得. 证毕.

也可将系统的稳态可用度或稳态故障频度作为目标函数, 用类似方法来讨论系统的最优预防维修策略.

§8.6 时间检测策略

前面讨论的时间计划维修策略中, 部件故障时立即可被发现. 本节讨论部件故障与否需要检测才能知道的情况. 显然, 检测时间间隔过大, 致使设备经常处于故障状态, 造成停工损失或需要使用时不能及时提供的损失; 检测时间间隔过小, 造成不必要的过多的检测费用损失. 问题是寻找最优的检测时间间隔. 下面讨论两个模型.

§8.6.1 指数寿命分布的情形

若部件寿命遵从指数分布 $1-e^{-\lambda t}, t \geqslant 0, \lambda > 0$. 经过给定的时间间隔 T 对部件作检测, 若发现部件已经故障, 则立即作事后更换; 若发现部件仍正常, 则让部件继续工作. 令 c_i 和 c_f 分别表示一次检测和事后更换的损失, c_d 表示部件故障单位时间的损失. 若检测时间和更换时间忽略不计. 我们要求最优的检测时间间隔 T^*, 使经长期运行单位时间的期望损失 $C_1(T)$ 最小 (见图 8.9).

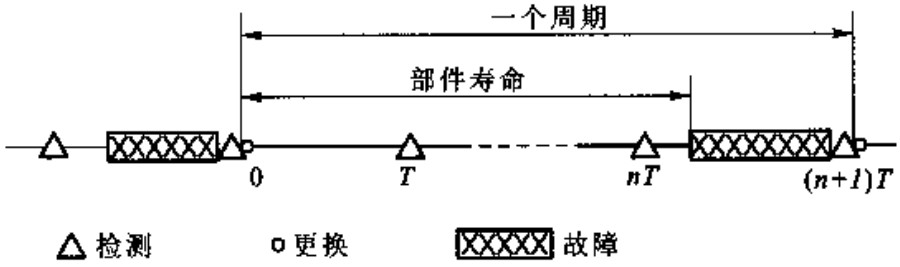


图 8.9

易见, 相邻两次更换的时间间隔是一个周期. 当部件寿命 t 满足关系 $nT < t < (n+1)T$ 时, 周期长为 $(n+1)T$, 一个周期内的损失为

$$c_f + c_i(n+1) + c_d[(n+1)T - t]$$

因此

$$\begin{aligned} \text{平均周期长} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} (n+1)T\lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)T\left[e^{-n\lambda T} - e^{-(n+1)\lambda T}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Te^{-n\lambda T} = \frac{T}{1-e^{-\lambda T}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{一个周期内的期望损失} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} \left\{c_f + c_i(n+1) + c_d[(n+1)T - t]\right\} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= c_f + \frac{c_i}{1-e^{-\lambda T}} + c_d\left(\frac{T}{1-e^{-\lambda T}} - \frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

由第七章, 定理 7.1.4, 得

$$C_1(T)=c_d+\frac{c_i+\left(c_f-\frac{c_d}{\lambda}\right)(1-e^{-\lambda T})}{T}. \tag{1}$$

而 $C_1'(T)=0$ 等价于

$$(c_d-\lambda c_f)(1+\lambda T)e^{-\lambda T}=c_d-\lambda c_f-\lambda c_i \tag{2}$$

由于 $(1+\lambda T)e^{-\lambda T}$ 连续严格单调递减, 立即可得

定理 8.6.1 1) 当 $c_d\leqslant\lambda(c_f-c_i)$, 则 $T^*=\infty$, 且最小损失为

$$C_1(\infty)=c_d$$

2) 当 $c_d>\lambda(c_f-c_i)$, 则有唯一有限解 T^*, 它满足方程 (2), 且最小损失为

$$C_1(T^*)=c_d-\frac{c_d-\lambda c_f-\lambda c_i}{1+\lambda T^*}$$

§8.6.2 备用部件的检测策略: 一般寿命分布的情形

在 §§8.4.2, 我们曾考虑备用部件的预防维修策略. 这里我们考虑类似的备用部件的检测策略. 假定, 备用部件的寿命 X 遵从一般分布 $F(t)$, 它故障与否必须经过检测才能发现. 若经检测发现部件已经故障, 则立即进行修理, 修理时间 Y 遵从一般分布 $G(t)$. 检测时间忽略不计. 经修理或检测的部件恢复如新. 在前一次检测或修理结束后, 经过指定的时间间隔 T 进行下一次检测. 令 c_f 和 c_i 分别表示一次修理费用和检测费用. 在非常事件 (如停电) 发生时, 若备用部件恰处于故障状态, 这将造成重大的损失, 设损失费用为 $c_a(c_a>c_f\geqslant c_i)$. 进一步假定时刻 0 备用部件是新的, 非常事件在时间上按指数分布 $1-e^{-\alpha t}, t\geqslant 0, (\alpha>0)$ 发生, 非常事件及随机变量 X、Y 均相互独立. 我们的问题是求最优的检测时间间隔, 使直到非常事件出现之前的期望费用最小.

下面, 用马尔可夫更新过程的工具来分析这个问题. 先定义系统的状态:

状态 0: 备用部件正常, 进入此状态的时刻是备用部件恢复如新的时刻.

状态 1: 备用部件在修理, 进入此状态的时刻是经检测发现部件故障, 并开始修理故障部件的时刻.

易见, 进入状态 0 和状态 1 的时刻是再生点. 图 8.10 表示系统状态变化的可能发展进程, 图 8.11(a) 表示系统状态转移关系, 我们令

$$X(t)=j,\quad \text{当时刻}\,t\,\text{系统处于状态}j,\quad j=0,1$$

可证 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个半马尔可夫过程.

为讨论方便, 我们引进一个虚设状态:

状态 2: 备用部件故障, 但尚未经检测而发现, 进入此状态的时刻是部件发生故障的时刻.

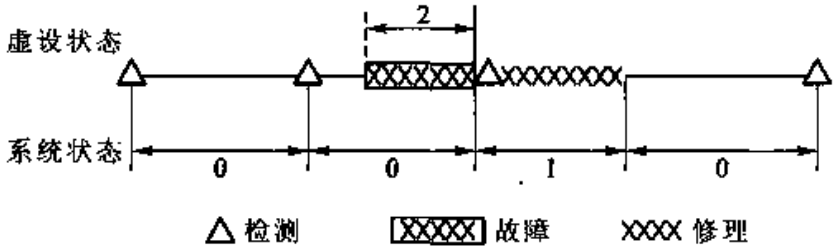


图 8.10



图 8.11

我们在图 8.10 和图 8.11(b) 中表示出这虚设状态. 由于系统在虚设状态 2 的逗留期依赖于上一次检测在何时进行, 因而进入状态 2 的时刻不是再生点. 为方便, 我们将检测时间间隔看成是定长随机变量 X_T, 其分布为

$$U(t) = P\{X_T \leqslant t\} = \begin{cases} 0, \text{当 } t < T \\ 1, \text{当 } t \geqslant T \end{cases}$$

类似于第七章, §7.5 和 §7.6 的处理方法, 可得

$$Q_{00}(t) = P\{X_T \leqslant t, X > X_T\} = \int_0^t \bar{F}(u)dU(u)$$

$$Q_{02}(t) = P\{X \leqslant t, X \leqslant X_T\} = \int_0^t \bar{U}(u)dF(u)$$

$$Q_{10}(t) = P\{Y \leqslant t\} = G(t)$$

$$Q_{01}^{(2)}(t) = P\{X_T \leqslant t, X \leqslant X_T\} = \int_0^t F(u)dU(u)$$

$$Q_{jk}(t) = 0, \quad \text{其它 } j, k$$

对以上各式作 LS 变换, 得

$$\begin{cases} \hat{Q}_{00}(s) = e^{-sT}\bar{F}(T) \\ \hat{Q}_{02}(s) = \int_0^T e^{-st}dF(t) \\ \hat{Q}_{10}(s) = \hat{G}(s) \\ \hat{Q}_{01}^{(2)}(s) = e^{-sT}F(T) \end{cases} \tag{1}$$

令 $P_{kj}(t)$ 表示时刻 0 过程从进入状态 k 出发, 在时刻 t 过程处于状态 j 的概率, $k = 0, 1; j = 0, 1, 2$. 它们满足马尔可夫更新方程组 (我们仅需 $P_{01}(t)$ 和 $P_{02}(t)$)

$$\begin{cases} P_{01}(t) = Q_{00}(t) * P_{01}(t) + Q_{01}^{(2)}(t) * P_{11}(t) \\ P_{02}(t) = [Q_{02}(t) - Q_{01}^{(2)}(t)] + Q_{01}^{(2)}(t) * P_{12}(t) + Q_{00}(t) * P_{02}(t) \\ P_{11}(t) = [1 - Q_{10}(t)] + Q_{10}(t) * P_{01}(t) \\ P_{12}(t) = Q_{10}(t) * P_{02}(t) \end{cases} \tag{2}$$

将上式两端作 L 变换, 可解得

$$\begin{cases} P_{01}^*(s) = \dfrac{\hat{Q}_{01}^{(2)}(s)[1 - \hat{Q}_{10}(s)]}{s[1 - \hat{H}_{00}(s)]} \\ P_{02}^*(s) = \dfrac{\hat{Q}_{02}(s) - \hat{Q}_{01}^{(2)}(s)}{s[1 - \hat{H}_{00}(s)]} \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\hat{H}_{00}(s) = 1 - \hat{Q}_{00}(s) - \hat{Q}_{01}^{(2)}(s)\hat{Q}_{10}(s)$$

令 $M_{0i}(t)$ 表示时刻 0 过程从进入状态 0 出发, 在 $(0, t]$ 时间内对部件进行检测的期望次数. 我们有下列关系式

$$M_{0i}(t) = M_{00}^{(0)}(t) + M_{01}(t) \tag{4}$$

其中 $M_{jk}(t)$ 是通常的马尔可夫更新函数, 即表示时刻 0 过程从进入状态 j 出发, 在 $(0, t]$ 内过程进入状态 k 的期望次数; $M_{00}^{(0)}(t)$ 是表示时刻 0 过程从进入状态 0 出发, 在 $(0, t]$ 内直接从状态 0 转入状态 0 的期望次数. 注意,$M_{00}^{(0)}(t)$ 不同于 $M_{00}(t)$. 进入状态 0 共有两条路径, 一是从状态 0 出发, 经过状态 2 和状态 1 而进入状态 0; 二是从状态 0 出发, 不经过状态 2 和状态 1 而直接进入状态 0

(见图 8.11(b)),$M_{00}(t)$ 中包含以上两种方式进入状态 0 的期望次数. 而 $M_{00}^{(0)}(t)$ 仅包含后一种方式进入状态 0 的期望次数. 关系式 (4) 是因为, 对部件的检测恰发生在进入状态 1 的时刻和从状态 0 直接进入状态 0 的时刻. 从状态 1 进入状态 0 的时刻不是检测时刻.

可导出以下方程组

$$\begin{cases} M_{01}(t) = Q_{00}(t) * M_{01}(t) + Q_{01}^{(2)}(t) * [M_{11}(t) + 1] \\ M_{11}(t) = Q_{10}(t) * M_{01}(t) \end{cases}$$

以及

$$M_{00}^{(0)}(t) = Q_{00}(t) * [M_{00}^{(0)}(t) + 1] + Q_{01}^{(2)}(t) * Q_{10}(t) * M_{00}^{(0)}(t)$$

对以上各式作 LS 变换, 可解得

$$\begin{cases} \hat{M}_{01}(s) = \dfrac{\hat{Q}_{01}^{(2)}(s)}{1 - \hat{H}_{00}(s)} \\ \hat{M}_{00}^{(0)}(s) = \dfrac{\hat{Q}_{00}(s)}{1 - \hat{H}_{00}(s)} \end{cases} \tag{5}$$

由 (4) 式, 立即得

$$\hat{M}_{0i}(s) = \frac{\hat{Q}_{00}(s) + \hat{Q}_{01}^{(2)}(s)}{1 - \hat{H}_{00}(s)} \tag{6}$$

根据问题所提供的各种费用, $(0, t]$ 时间内的期望费用为

$$C(t) = c_f M_{01}(t) + c_i M_{0i}(t) + c_a[P_{02}(t) + P_{01}(t)] \tag{7}$$

直到非常事件发生前的期望费用为

$$\begin{aligned} C_2(T) &= \int_0^\infty C(t)\alpha e^{-\alpha t} dt \\ &= c_f \hat{M}_{01}(\alpha) + c_i \hat{M}_{0i}(\alpha) + c_a \alpha[P_{01}^*(\alpha) + P_{02}^*(\alpha)] \end{aligned} \tag{8}$$

将 (3),(5) 和 (1) 代入上式, 最后得到

$$\begin{aligned} &C_2(T) \\ &= \frac{e^{-\alpha T}[c_i + c_f F(T)] + c_a \left[\int_0^T e^{-\alpha t} dF(t) - e^{-\alpha T} F(T)\hat{G}(\alpha)\right]}{1 - e^{-\alpha T}[\bar{F}(T) + F(T)\hat{G}(\alpha)]} \end{aligned} \tag{9}$$

显然

$$C_2(0) = \lim_{T\to 0} C_2(T) = \infty$$
$$C_2(\infty) = \lim_{T\to\infty} C_2(T) = c_a\hat{F}(\alpha)$$

其中 $C_2(\infty)$ 表示不作任何检测时的期望费用.

对充分大的 T, 我们有

$$\frac{d}{dT}\ln C_2(T) \sim \alpha e^{-\alpha T}\left[\frac{c_a\hat{G}(\alpha) - c_f - c_i}{c_a\hat{F}(\alpha)} - \hat{G}(\alpha)\right]$$

因此, 如果上述右端大于零, 即如果

$$c_a\hat{G}(\alpha)[1-\hat{F}(\alpha)] > c_f + c_i$$

则至少存在某个有限的 $\tilde{T}$, 使 $C_2(\tilde{T}) < C_2(\infty)$, 因此在 $\tilde{T}$ 对备用部件进行检测比不作任何检测有利.

一般, 要求 T^*, 使 $C_2(T)$ 达最小是比较困难的. 然而, 对特定的 $F(t)$ 和 $G(t)$, 可使用计算机用 (9) 式对 $C_2(T)$ 作数值计算.

§8.7 备件定购策略

当工作部件发生故障时, 需要备用部件去更换已故障的部件. 这一节我们讨论备用部件需要事先定购, 且过一段时间以后才能交货的情形. 以下讨论三个不同类型的问题.

§8.7.1 与部件年龄有关的定购策略

假设时刻 0 一个新部件开始工作, 当它工作到指定的时间 T 仍没有发生故障, 则在时刻 T 定购一个备件. 经过一个常数时间 L , 此备件交货. 此时, 如果工作部件已经故障, 则此备件马上更换而进入工作状态; 如果工作部件仍然在工作, 则此备件存储起来, 直到工作部件发生故障, 立即进行更换. 当工作部件在 T 之前发生了故障, 则立即紧急定购备件. 经过时间 L 后, 备件一交货马上进入工作状态. 备件作为一个新部件进入工作, 整个系统就如上重复进行.

假设部件的寿命 X 遵从均值为 $1/\lambda$ 的一般分布. 下面引入费用结构. 当工作部件发生故障, 而没有备件可用时, 造成系统停工, 令 a_1 表示系统停工单位

时间而造成的损失费. 令 a_2 表示备件交货后存储单位时间的存贮费. 令 c_1 和 c_2 分别表示每次紧急定购和通常定购的费用, 它们包括备件本身的费用. 自然可以假设 $c_1 > c_2$.

我们的问题是, 综合考虑系统的停工损失费、存储费和订购费, 求最优的定购时间 T^*, 使系统长期运行单位时间的期望费用最小.

显然, 每次备件进入工作的时刻是再生点. 令相邻两个这样的时刻之间的时间为一个周期. 此时,

$$\text{周期长} = (X+L)I_{\{X\leqslant T\}} + (T+L)I_{\{T<X\leqslant T+L\}} + XI_{\{X>T+L\}}$$

各周期之间独立同分布. 平均周期和一个周期内的期望费用为

$$\begin{aligned}\text{平均周期长} &= \int_0^T (L+t)dF(t) + \int_T^{T+L}(T+L)dF(t)\\ &\quad + \int_{T+L}^{\infty} tdF(t) = \frac{1}{\lambda} + \int_T^{T+L} F(t)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{期望停工损失费} &= a_1\left[\int_0^T LdF(t) + \int_T^{T+L}(T+L-t)dF(t)\right]\\ &= a_1\int_T^{T+L} F(t)dt\end{aligned}$$

$$\text{期望存贮费} = a_2\int_{T+L}^{\infty}(t-T-L)dF(t) = a_2\int_{T+L}^{\infty}\bar{F}(t)dt$$

$$\text{期望定购费} = c_1F(T) + c_2\bar{F}(T)$$

因此, 一个周期内单位时间的期望费用为

$$C_1(T) = \frac{a_1\int_T^{T+L}F(t)dt + a_2\int_{T+L}^{\infty}\bar{F}(t)dt + c_1F(t) + c_2\bar{F}(t)}{\frac{1}{\lambda} + \int_T^{T+L}F(t)dt} \tag{1}$$

由第七章, 定理 7.1.4, $C_1(T)$ 是系统经长期运行单位时间的期望费用. 问题归结为求最优的 T^*, 使 $C_1(T)$ 达最小.

假设 $C_1(\infty) < a_1$, 即 $c_1 < \dfrac{a_1}{\lambda}$. 它表示, 部件故障才进行定购时的单位时间期望费用要比系统永远不工作的单位时间期望费用小.

假设 $F(t)$ 为密度函数, $r(t)$ 为它的故障率函数, 并令

$$H(t) = \frac{F(t+L) - F(t)}{1 - F(t)} = 1 - \exp\left\{ - \int_t^{t+L} r(u)du \right\}$$

显然, 若 $r(t)$ 单调递增 (递减), 则 $H(t)$ 也单调递增 (递减). 再令

$$h_1(t) = H(t)\left\{ \frac{a_1}{\lambda} + a_2 \left[L + \int_0^t \bar{F}(u)du \right] - c_1 F(t) - c_2 \bar{F}(t) \right\}$$
$$+ [(c_1 - c_2)r(t) - a_2] \left[\frac{1}{\lambda} + \int_t^{t+L} F(u)du \right]$$

我们有如下定理

定理 8.7.1 设 $c_1 > c_2, c_1 < \dfrac{a_1}{\lambda}$, 且 $r(t)$ 连续严格单调递增, 则有

1) 若 $h_1(\infty) > 0$ 和 $h_1(0) < 0$, 则存在唯一的有限解 T^*, 它满足 $H_1(T) = 0$, 此时

$$C_1(T^*) = a_1 + a_2 + \frac{r(T^*)(c_1 - c_2) - a_2}{H(T^*)}$$

2) 若 $h_1(\infty) \leqslant 0$, 则 $T^* = \infty$, 此时

$$C_1(\infty) = \frac{a_1 L + c_1}{\dfrac{1}{\lambda} + L}$$

3) 若 $h_1(0) \geqslant 0$, 则 $T^* = 0$, 此时

$$C_1(0) = \frac{a_1 \displaystyle\int_0^L F(u)du + a_2 \int_L^\infty \bar{F}(u)du + c_2}{\dfrac{1}{\lambda} + \displaystyle\int_0^L F(t)dt}$$

证明 $C_1'(T) = 0$ 即 $h_1(T) = 0$. 由假设, $r(t)$ 严格单调递增和 $c_1 < \dfrac{a_1}{\lambda}$, 可得 $h_1(T)$ 是严格单调递增. 若 $h_1(\infty) > 0, h_1(0) < 0$, 则由 $h_1(T)$ 的连续性和单调性, 存在唯一有限解 T^*, 满足 $h_1(T) = 0$, 使 $C_1(T)$ 达最小. 易证其它结论. 证毕.

§8.7.2 修理时间有限制的定购策略

当工作部件发生故障时, 要对它的修理时间作出估计, 如果估计的修理时间小于指定的时间 T, 即在指定的时间 T 内, 修理可完成, 则立即对故障的部件进行修理. 如果估计的修理时间大于 T, 则不对故障的部件进行修理, 而立即定购一个备件. 该备件经过常数时间 L 交货. 假设估计的修理时间 Y 遵从均值为 μ 的一般分布 $G(t)$. 假定部件修复如新, a_0 为修理单位时间的费用. 其余假设与 §§8.7.1 相同.

显然, 部件开始工作的时刻是再生点. 令相邻两个这样的时刻之间的时间为一个周期. 因而

$$\text{周期长} = X + YI_{\{Y\leqslant T\}} + LI_{\{Y>T\}}$$

类似于 (1) 式, 系统经长期运行单位时间的期望费用为

$$C_2(T) = \frac{(a_0+a_1)\displaystyle\int_0^T tdG(t) + (a_1L+c_1)\bar{G}(T)}{\dfrac{1}{\lambda} + \displaystyle\int_0^T tdG(t) + L\bar{G}(T)} \tag{2}$$

问题是求最优的 T^* , 使 $C_2(T)$ 达最小. 令

$$h_2(T) = \frac{a_0+a_1}{\lambda}T + (a_0L-c_1)\int_0^T \bar{G}(T)dt$$

定理 8.7.2 *存在唯一的有限解 T^*, 它满足*

$$h_2(T) = \frac{a_1L+c_1}{\lambda} \tag{3}$$

且

$$C_2(T^*) = \begin{cases} a_1 + \dfrac{a_0T^*-c_1}{T^*-L}, & \text{当 } a_0L \neq c_1 \\ \dfrac{a_0+a_1}{1+\dfrac{1}{\lambda\displaystyle\int_0^L \bar{G}(t)dt}}, & \text{当 } a_0L = c_1 \end{cases} \tag{4}$$

证明 $C_2'(T)=0$, 即方程 (3). 显然 $h_2(T)$ 连续, 且

$$h_2(0)=0, \quad h_2(\infty)=\infty$$

$$h_2'(T) = \frac{a_0+a_1}{\lambda} + (a_0L-c_1)\bar{G}(T) \tag{5}$$

若 $a_0L-c_1\geqslant 0$, 则 $h_2'(T)>0$, 因此 $h_2(T)$ 严格单调递增.

若 $a_0L-c_1<0$, 则 $h_2'(T)$ 单调递增, 因此 $h_2(T)$ 是凸函数. 又由 $h_2(0)=0, h_2(\infty)=\infty$, 可得 $h_2(T)$ 在 $\{T:h_2(T)>0\}$ 内严格单调递增.

在以上两种情形方程 (3) 都存在唯一有限解 T^*, 使 $C_2(T)$ 最小. (4) 式直接计算可得. 证毕.

§8.7.3 修理费用有限制的定购策略

当正在工作的部件故障时, 我们来估计故障部件的修理费用. 如果估计的修理费用小于一个固定费用 c, 则立即对故障部件进行修理. 如果估计的修理费用大于 c, 则不对故障部件进行修理, 而立即定购一个备件. 假设故障部件的估计修理费用具有一般分布 $K(x)$. 其余假设同 §§8.7.2.

我们可类似于前两段的分析, 系统经长期运行单位时间的期望费用为

$$C_3(c)=\frac{\displaystyle\int_0^c xdK(x)+a_1\mu K(c)+(a_1L+c_1)\bar{K}(c)}{\dfrac{1}{\lambda}+\mu K(c)+L\bar{K}(c)} \tag{6}$$

我们的问题是要求最优的 c^* , 使 $C_3(c)$ 达最小. 令

$$h_3(c)=(\frac{1}{\lambda}+\mu)(c-c_1)+(L-\mu)\left[\int_0^c \bar{K}(x)dx-\frac{a_1}{\lambda}\right] \tag{7}$$

定理 8.7.3 1) 设 $L\neq\mu$,

(a) 若 $h_3(0)<0$, 则存在唯一的有限解 c^*, 它满足 $h_3(c)=0$, 此时最小费用为

$$C_3(c^*)=a_1+\frac{c_1-c^*}{L-\mu} \tag{8}$$

(b) 若 $h_3(0)\geqslant 0$, 则最优解 $c^*=0$, 即所有故障的部件都不修理.

2) 设 $L=\mu$, 则 $c^*=c_1$.

证明 由 (6) 式, $C_3'(c)=0$, 即为 $h_3(c)=0$. 直接验证易知 $h_3(c)$ 连续严格单调递增. 当 $L\neq\mu$ 时, 若 $h_3(0)<0$, 则存在唯一的有限解 c^*, 它满足 $h_3(c)=0$. 直接计算可得 (8) 式. 若 $h_3(0)\geqslant 0$, 则 $C_3(c)$ 是单调递增函数, 因此 $c^*=0$.

当 $L=\mu$ 时, 显然 $c^*=c_1$. 证毕.

§8.8 状态监视维修策略

实践已越来越证明, 对有些系统采用时间计划维修并不是好的维修策略. 例如, 一个 n 个部件的并联系统, 当系统的年龄达到预定的计划维修时间 T 时, 很可能 n 个部件仍然都处在正常工作的状态, 事实上没有必要进行任何维修. 因此, 人们引进了一类依赖系统状态的预防维修策略, 即状态监视维修策略. 这种策略能比较好地利用系统的信息, 常常比定时计划维修策略优越. 它的缺点是:1) 观测系统的状态可能要花较大的费用, 2) 观测系统的状态可能不准确, 3) 这类策略的模型比较复杂, 用到的数学理论比较深. 对有些系统, 甚至观测系统状态的测试手段在技术上尚未解决, 这也就失去了采用这类维修策略的基本前提.

这里, 我们只举两个比较简单的例子, 来解释这类维修策略的基本思想.

§8.8.1 单部件系统: 离散时间情形

假设系统有 $s+2$ 个状态:$0,1,\cdots,s+1$, 其中状态 0 表示系统是新的, 状态 $s+1$ 是系统的故障状态, 其余状态 $1,2,\cdots,s$ 是系统的劣化状态. 考虑离散时间的情形. 假设

1) 观测系统状态的时间忽略不计, 而更换系统需要一个单位时间;

2) 当系统处在状态 i 时, 更换系统的费用是 c_i, 维持系统的费用是 l_i;

3) 系统在状态 i 时, 若不更换系统, 则系统在下一单位时间转到状态 j 的概率为 P_{ij}, 其中 $P_{ij}\geqslant 0, \sum\limits_{j=0}^{s+1} P_{ij}=1$, 且 $P_{ij}=0$, 对 $j<i$, 即系统的劣化过程遵从一个转移矩阵为 (P_{ij}) 的马尔可夫链.

当系统处在任何一个状态, 我们均可采用两个行为之一: 更换系统或维持系统. 因此这个系统共有 2^{s+2} 个不同策略. 假定 α 是费用折扣率. 我们的问题是求最优策略, 使系统长期运行总折扣期望费用最小.

这问题可用动态规划方法来解. 令 $V(i)$ 表示初始时刻从状态 i 出发, 每一步都采用最优策略, 长期运行的总折扣期望费用. 系统从状态 i 出发, 若第一步采用维持的行为, 以后均按照最优策略进行, 则总折扣期望费用是

$$l_i+\alpha\sum_{j=i}^{s+1}P_{ij}V(j)$$

若在第一步采用更换的行为, 以后均按照最优策略进行, 则总折扣期望费用是

$$c_i + \alpha V(0)$$

由动态规划的最优化原则, 可得

$$V(i) = \min\left\{ l_i + \alpha \sum_{j=i}^{s+1} P_{ij} V(j), c_i + \alpha V(0) \right\},$$
$$i = 0, 1, \cdots, s+1 \tag{1}$$

即总折扣期望费用满足关系式 (1). 可用逐次逼近法来解 (1) 式. 直观看, 状态高时 (系统劣化程度高) 应采用更换行为; 状态低时 (系统劣化程度低) 应采用维持行为. 这样一种策略称为控制限策略. 即存在一个状态 h^*, 当系统处于状态 i 时, 若 $i < h^*$, 则采用维持行为; 若 $i \geqslant h^*$, 则采用更换行为. 在某些条件下, 可以证明这种最优控制策略的存在性 [15].

§8.8.2 两个部件的并联系统: 离散时间情形

系统由两个部件并联而成. 考虑离散时间的情形. 系统的状态用 (i, j) 表示, 其中 i 表示部件 1 的年龄, j 表示部件 2 的年龄,$i, j = *, 0, 1, 2, \cdots$. 这里记号 $*$ 表示部件处于故障状态. 若系统处于状态 (i, j), 可能采用如下行为之一:

W : 维持两个部件;

R_1 : 仅更换部件 1, 费用为 c_1;

R_2 : 仅更换部件 2, 费用为 c_2;

R_{12} : 部件 1 和部件 2 同时更换, 费用为 c_{12}.

自然有关系式 $\max(c_1, c_2) \leqslant c_{12} \leqslant c_1 + c_2$. 假设

1) 观测状态的时间忽略不计, 更换需一个单位时间.

2) 令 p_i 和 q_i 分别表示部件 1 和部件 2 的年龄为 i 时, 如果不更换, 在下一个单位时间继续正常的概率.$1 - p_i$ 和 $1 - q_i$ 分别表示下一个单位时间部件 1 和部件 2 发生故障的概率 $(i = 0, 1, 2, \cdots)$. 当两个部件同时发生故障, 引起系统故障, 导致相应的附加损失费用 d. 假设两个部件故障或正常相互独立. 初始时刻两个部件都是新的.

3) 对故障部件必须采用更换行为. 问题是对各状态 (i, j) 选用什么策略, 使此系统经过 N 个单位时间的总期望费用最小.

我们可用动态规划方法来解这个问题. 令 $f_n(i,j)$ 表示系统从初始状态 (i,j) 出发, 按最优策略经 n 个单位时间的总期望费用. 由动态规划的最优化原则, 可得以下递推公式:

1) 若初始时刻两个部件都是故障的, 则第一步必须采用行为 R_{12}, 故

$$f_n(*,*) = c_{12} + f_{n-1}(0,0) \tag{2}$$

2) 若初始时刻系统处于状态 $(i,*),(i=0,1,\cdots)$ 则第一步可以采用行为 R_2 或 R_{12} 之一, 故

$$f_n(i,*) = \min\begin{cases} c_2 + p_i f_{n-1}(i+1,0) + (1-p_i) f_{n-1}(*,0) \\ c_{12} + f_{n-1}(0,0) \end{cases} \tag{3}$$

3) 若初始时刻系统处于状态 $(*,j),(j=0,1,\cdots)$ 则第一步可以采用行为 R_1 或 R_{12} 之一, 故

$$f_n(*,j) = \min\begin{cases} c_1 + q_j f_{n-1}(0,j+1) + (1-q_j) f_{n-1}(0,*) \\ c_{12} + f_{n-1}(0,0) \end{cases} \tag{4}$$

4) 若初始时刻系统处于状态 $(i,j),(i,j=0,1,\cdots)$ 则第一步可以采用行为 W, R_1, R_2 或 R_{12} 之一, 故

$$f_n(i,j) = \min\begin{cases} p_i q_j f_{n-1}(i+1,j+1) + (1-p_i) q_j f_{n-1}(*,j+1) \\ \quad + p_i(1-q_j) f_{n-1}(i+1,*) + (1-p_i) \\ \quad \times (1-q_i)[f_{n-1}(*,*) + d] \\ c_1 + q_j f_{n-1}(0,j+1) + (1-q_j) f_{n-1}(0,*) \\ c_2 + p_i f_{n-1}(i+1,0) + (1-p_i) f_{n-1}(*,0) \\ c_{12} + f_{n-1}(0,0) \end{cases} \tag{5}$$

给定初始条件

$$f_0(i,j) = 0, \quad i,j = *,0,1,2,\cdots \tag{6}$$

用关系式 (2)–(6) 进行迭代, $f_N(0,0)$ 即为所求.

本节只介绍了离散时间劣化系统的两个模型. 对于连续时间马尔可夫过程的劣化系统和半马尔可夫过程的劣化系统, 都有一些文章进行讨论, 但数学处理上都比较复杂.

需要说明的是, 在本章涉及的许多模型, 是以费用损失作为目标函数. 在这些模型的实际应用中, 最困难的问题是预计各种费用损失系数. 例如, 由故障而引起的费用中, 修理费和备件本身费用都还比较容易估算, 但是因系统停工而造成的经济损失和社会影响, 则是难以估算的.

本章我们只是介绍一些常见的、基本的维修策略模型, 及其最优策略的求法. 在实际应用中碰到的问题可能要复杂得多. 然而这里介绍的基本概念、基本模型和方法, 可作为进一步深入研究的一个理论基础.

第九章　寿命数据分析——指数分布情形

前几章除了介绍可靠性数学的基本概念外，主要讨论了可靠性中的典型概率模型. 其特点是通过明确定义的系统，用概率方法来研究系统的可靠性指标. 因此，在那里的分析中部件或系统遵从某种分布规律假定是已知的，而并不涉及如何由实际的寿命数据去获得这种信息. 从本章开始，将对获得这种信息的寿命数据统计分析作一简要的介绍，可以看成可靠性中的统计模型.

寿命数据的统计分析是对系统或部件的寿命特性作定量了解的一种重要手段. 粗略地讲，通过寿命数据分析，我们希望确定寿命分布的类型以及获得其参数的估计，或者得到寿命分布本身的估计. 因为只有在对部件的寿命特性有了定量的认识之后，据此建立的系统的概率模型才能比较符合实际.

寿命数据的统计分析内容相当广泛，我们只讨论最基本的模型. 本章将介绍寿命数据分析的步骤和特点，并讨论指数模型下的参数估计问题以及指数模型的检验. 下一章介绍韦布尔分布和其它分布模型，以及非参数方法. 而把可修寿命数据分析放在最后一章加以讨论.

§9.1 寿命数据分析的步骤和特点

§9.1.1 寿命数据分析的步骤

寿命数据分析的目的是定量地把握系统或部件寿命的性状, 并把所获的信息反馈到设计、制造和使用维修中去, 以期改善可靠性、降低成本或合理安排维修和更换, 使之获得更好的使用价值和经济效果.

寿命数据的分析过程大体分成数据收集, 统计分析, 信息反馈和帮助决策. 我们将主要介绍统计分析方法.

数据收集是基础性工作. 因为只有掌握了系统中元器件的寿命数据, 才有可能对整个系统的可靠性作出较确切的评定. 另外, 获得牢靠的寿命数据不是一件容易的事, 它往往要花费大量的人力、物力和时间. 因此, 有必要把这些寿命数据中的有用信息都抽取出来, 避免信息浪费. 通常, 寿命数据来自寿命试验的结果或者现场数据的收集. 前者可以在实验室条件下获得, 结果比较牢靠, 但是需要很大投资; 后者使用的环境往往差异很大, 数据也可能很不完整, 有时甚至有疏漏差错. 但是现场数据仍是一个很宝贵的资料, 因为它们反映了实际使用中的情况.

统计分析大体上有两个方面的问题. 一是建立寿命分布模型并检验其正确性. 二是参数估计. 前者回答寿命数据来自什么总体. 如通常认为某些电子元件有指数寿命分布, 轴承等机械产品有韦布尔寿命分布, 等等. 后者给出分布中一些未知参数的估计. 自然, 这两个问题是相互联系的, 很难截然分开. 此外, 也可采用与分布类型无关的所谓非参数方法来进行统计分析.

最后一步是信息反馈和帮助做决策. 统计分析不是目的, 因此要把获得的信息反馈到各个有关的环节上去, 帮助做出合适的决策, 目的在于改进系统的性能. 例如, 根据系统首次失效数据的分析, 合理地安排预防性维修或更换时间, 这样可以大大减少由于系统突然发生失效而造成的损失.

§9.1.2 寿命数据分析的特点

通常, 从总体中抽取容量为 n 的一个简单随机样本 $X_1, \cdots, X_n$ 是指可以获得这 n 个样本的观察值 $x_1, \cdots, x_n$. 这种样本称作完全样本.

然而, 在工程与生物医学的许多研究中, 由于种种条件的限制不可能获得完全样本. 例如, 受试验时间、费用等的限制, 不可能将寿命试验做到所有元件都失效. 在医学药物试验中, 受试者可能中途失去观察 (如迁往他地而失访), 或

者由于对受试药物不适应而中途停止试验, 也可能是受预定的试验时间的限制不能观察到所有受试者的寿命. 在诸如此类的情况下我们只能得到一组不完全样本.

不完全样本有几种基本类型

(a) 定数截尾

n 个独立同型部件从 $t=0$ 开始进行寿命试验, 试验在第 r 个失效时刻终止 (r 为事先规定的正整数). 此时我们获得的只是前 r 个寿命数据

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(r)} \tag{1}$$

(b) 定时截尾

与上相仿, 试验在固定时刻 t_0 终止. 此时观察到的失效数是一个随机变量. 若在试验终止时观察到 r 个失效, 则得数据

$$x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(r)} \leqslant t_0 \tag{2}$$

(c) 试验中途失去观察 (或随机截尾) 的情形

设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布 $F(t)$, 假定只能观察到

$$Y_i = X_i \wedge L_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

其中 L_i 为常数, $\wedge = \min$. 上式表明若 $X_i > L_i$, 则第 i 个部件在 L_i 后失去观察. 令

$$0 \equiv z_{n0} \leqslant z_{n1} \leqslant \cdots \leqslant z_{nk} \tag{4}$$

为观察到的失效时刻.

除了上述基本类型外, 还可以有种种推广. 例如定数与定时相结合的截尾方式, 即试验做到 $x_{(r)} \wedge t_0$ 终止, 其中 r 与 t_0 是事先规定的失效数与定时截尾时间. 对试验中途失去观察的情形, 可以推广到 $L_1, \cdots, L_n$ 独立, 且 $\{L_i\}$ 与 $\{X_i\}$ 独立的情形.

下面讨论指数型寿命试验. 为了方便起见, 先叙述一些预备知识.

§9.2 预备知识

本节列举和介绍有关分布的一些结果, 指数分布顺序统计量的性质, 以及极大似然估计等. 熟悉这方面内容的读者可以略去这一节.

§9.2.1 有关分布的一些结果

1) χ^2 分布

设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布 $N(0,1)$, 则 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 有密度函数

$$g_n(y)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y},\ y\geqslant 0 \tag{1}$$

称 Y_n 为有自由度 n 的 χ^2 分布. 记作 $Y_n\sim\chi_n^2$.

特别, 若 X 有参数 λ 的指数分布

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,\lambda>0 \tag{2}$$

则

$$2\lambda X\sim\chi_2^2 \tag{3}$$

若 $X\sim\Gamma(n,\lambda;t)$, 即有密度函数

$$f(t)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0 \tag{4}$$

则由第一章定理 1.2.3 及 (3),

$$2\lambda X\sim\chi_{2n}^2 \tag{5}$$

2) F 分布

设 $X\sim\chi_m^2,Y\sim\chi_n^2$, 且 X,Y 独立, 则 $Z=\dfrac{X/m}{Y/n}$ 有密度函数

$$g(z)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-\frac{m+n}{2}},\quad z\geqslant 0 \tag{6}$$

其中 $\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, a,b>0$, 是 B (贝塔) 函数. 称 Z 为自由度 m,n 的 F 分布. 记作 $Z\sim F_{m,n}$.

特别, 若 $X\sim\Gamma(m,\lambda;t),Y\sim\Gamma(n,\lambda;t)$, 且 X,Y 独立, 则

$$\frac{X/m}{Y/n}\sim F_{2m,2n} \tag{7}$$

3) β 分布

设随机变量 X 有密度函数

$$f(t)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1},\quad 0<t<1,a,b>0 \tag{8}$$

则称 X 有参数为 a,b 的 β 分布. 记作 $X\sim\beta(a,b;t)$.

β 分布与 Γ 分布之间的有如下关系.

若 $X\sim\Gamma(a,1;x),Y\sim\Gamma(b,1;y)$, 且 X,Y 独立, 则 $Z=\dfrac{X}{X+Y}\sim\beta(a,b;z)$.

§9.2.2 顺序统计量

设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布 $F(t)$, 为简单起见假定有密度函数 $f(t)$. 本段讨论其从小到大排列的顺序统计量

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)} \tag{9}$$

的分布及有关性质.

引理 9.2.1 $(X_{(1)},\cdots,X_{(n)})$ 有联合密度分布

$$g(x_1,\cdots,x_n)=n!\prod_{i=1}^{n}f(x_i),\quad x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n \tag{10}$$

证明 对 $x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 及充分小的正数 $\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n$ 有

$$\begin{aligned}&P\{x_j<X_{(j)}\leqslant x_j+\Delta x_j,j=1,\cdots,n\}\\&=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}P\{x_j<X_{(i_j)}\leqslant x_j+\Delta x_j,j=1,\cdots,n\}\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $(i_1,\cdots,i_n)$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的一个排列. 由 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, 因此 (11) 式右端为

$$n!\prod_{j=1}^{n}[F(x_j+\Delta x_j)-F(x_j)]$$

按密度函数定义即可得 (10). 证毕.

引理 9.2.2 对固定的 $r,(x_{(1)},\cdots,x_{(r)})$ 有联合密度

$$g(x_1,\cdots,x_r)=\frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r}f(x_i)\right]\bar{F}^{n-r}(x_r),\quad x_1\leqslant\cdots\leqslant x_r \tag{12}$$

证明 记 $S=\{(x_{r+1},\cdots,x_n):x_r\leqslant x_{r+1}\leqslant\cdots\leqslant x_n\}$. 对任意的 $x_1\leqslant\cdots\leqslant x_r$ 有

$$\begin{aligned}g(x_1,\cdots,x_r)&=\int_S n!\prod_{i=1}^{n}f(x_i)dx_{r+1}\cdots dx_n\\&=n!\left[\prod_{i=1}^{r}f(x_i)\right]\frac{1}{(n-r)!}\left[\int_{x_r}^{\infty}f(x)dx\right]^{n-r}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i-1}^{r}f(x_i)\right]\bar{F}^{n-r}(x_r)\end{aligned}$$

证毕.

引理 9.2.3 t_0 固定, 且有

$$X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(r)}\leqslant t_0<X_{(r+1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$$

则 $(X_{(1)},\cdots,X_{(r)})$ 的联合密度为

$$g(x_1,\cdots,x_r,)=\frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r}f(x_i)\right]\bar{F}^{n-r}(t_0),\quad x_1\leqslant\cdots\leqslant x_r\leqslant t_0\tag{13}$$

证明与引理 9.2.2 相仿, 故略.

§9.2.3 指数随机变量的顺序量

设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布 $F(t)=1-e^{-\lambda t},t\geqslant 0$. 记 $0\equiv X_{(0)}\leqslant X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 为其顺序量. 令

$$D_i=(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)}),\quad i=1,\cdots,n\tag{14}$$

定理 9.2.1 $D_1,\cdots,D_n$ 独立同分布 $F(t)=1-e^{-\lambda t},t\geqslant 0$.

证明 对任意 $t_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n$, 只要证

$$P\{(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})>t_i,i=1,\cdots,n\}=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda t_i}\tag{15}$$

由 (10), $X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$ 的联合密度为

$$n!\prod_{i=1}^{n}(\lambda e^{-\lambda x_i}),\quad 0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$$

故 (15) 式左端为

$$n!\int_{s_n}\lambda^n\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}dx_1\cdots dx_n \tag{16}$$

这里 $S_n=\{(x_1,\cdots,x_n):0\equiv x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n,(n-i+1)(x_i-x_{i-1})>t_i,i=1,\cdots,n\}$. 作变量替换

$$y_i=(n-i+1)(x_i-x_{i-1}),\quad i=1,\cdots,n$$

于是积分域 S_n 变为 $T_n=\{(y_1,\cdots,y_n):y_i>t_i,i=1,\cdots,n\}$. 因此 (16) 式右端为

$$\begin{aligned}&n!\int_{T_n}\lambda^n\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i\right\}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{n-i+1}\right)dy_1\cdots dy_n\\&=\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{t_i}^{\infty}\lambda e^{-\lambda y_i}dy_i\right)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda t_i}\end{aligned}$$

证毕.

推论 记

$$Y_i=X_{(i)},\quad i=1,\cdots,n \tag{17}$$

则

$$EY_i=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{n-k+1} \tag{18}$$

$$\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{(n-k+1)^2},\quad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n \tag{19}$$

证明 因 $Y_i=\sum_{k=1}^{i}(X_{(k)}-X_{(k-1)})$, 再由定理 9.2.1,$X_{(k)}-X_{(k-1)}$ 有参数为 $(n-k+1)\lambda$ 的指数分布, 故即得 (18) 式. 由对 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$,

$$Y_j=Y_i+\sum_{k=i+1}^{j}(X_{(k)}-X_{(k-1)})$$

上式右端两项独立, 于是容易算出 (19) . 证毕.

定理 9.2.2

$$2\lambda\sum_{i=1}^{r}D_i\sim\chi^2_{2r} \tag{20}$$

或

$$\sum_{i=1}^{r}D_i\sim\Gamma(r,\lambda;t) \tag{21}$$

这由定理 9.2.1 及 (5) 式即得.

定理 9.2.3

$$\frac{\sum_{i=1}^{r}D_i/r}{\sum_{i=r+1}^{n}D_i/(n-r)}\sim F_{2r,2(n-r)} \tag{22}$$

这由定理 9.2.1, 定理 9.2.2 及 F 分布定义即得.

§9.2.4 参数估计问题

本段给出参数估计中的有关结果. 将介绍极大似然估计及一致最小方差无偏估计的求法.

设总体 X 有密度函数 $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$, 这里 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 是未知参数. $X_1,\cdots,X_n$ 是一组简单随机样本. 估计的问题是: 如何由这组样本 (或样本的函数) 来估计出 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的值. 这里假定总体 X 的分布类型已知, 此时估计问题称作参数估计.

用来估计未知参数的样本的函数通常叫做估计量或统计量. 获得估计量的方法有许多种, 其中最常用的是极大似然估计. 记

$$L_n=L_n(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k) \tag{23}$$

为样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的似然函数. 若 L_n 在 $\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_k$ 达到极大值, 则称 $\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_k$ 分别为 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的**极大似然估计**(简记 MLE). 注意, 这里 $\hat\theta_i=\hat\theta_i(x_1,\cdots,x_n)$ 是样本的一个函数, $i=1,\cdots,k$. 直观上来看, 极大似然的意思就是找一组 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的值, 使得样本观察值 $x_1,\cdots,x_n$ 出现的可能性最大.

由于 L_n 与 $\ln L_n$ 同时达到极大, 因此在偏导数存在时由极值必要条件, $\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_k$ 满足如下似然方程

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L_n = 0, \quad i = 1, \cdots, k \tag{24}$$

在许多场合下, 上述似然方程的唯一解给出 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 的 MLE.

在参数估计问题中, 有许多评定估计量优劣的标准, 例如无偏性, 最小方差性等. 下面给出有关的一些定义.

设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 是一组简单随机样本,$q(\theta)$ 是待估未知参数. 若统计量 $T(\boldsymbol{X}) = T(X_1, \cdots, X_n)$ 满足 $ET(\boldsymbol{X}) = q(\theta)$, 则称 $T(\boldsymbol{X})$ 是 $q(\theta)$ 的一个**无偏估计**. 若存在 $q(\theta)$ 的无偏估计 $T^*(\boldsymbol{X})$ 满足 $\mathrm{Var}T^*(\boldsymbol{X}) \leqslant \mathrm{Var}S(\boldsymbol{X})$, 这里 $S(\boldsymbol{X})$ 是任意的 $q(\theta)$ 的无偏估计, 则称 $T^*(\boldsymbol{X})$ 为 $q(\theta)$ 的**一致最小方差无偏估计**, 简记 UMVUE.

为了给出 UMVUE 的求法, 需要引人充分统计量及完全性概念.

统计量 $T(\boldsymbol{X})$ 称作对参数 θ 是充分的, 若给定 $T(\boldsymbol{X}) = t$ 的条件下,$\boldsymbol{X}$ 的条件分布不依赖于 θ.

统计量 $T = T(\boldsymbol{X})$ 称作是完全的, 若定义在 T 的值域上的实值函数 g 满足

$$E_\theta[g(T)] = 0, \quad \text{对任意} \theta$$

则必有 $g(T) = 0$. 这里 E_θ 是在 θ 下的期望.

下面的定理给出了 UMVUE 的求法.

定理 9.2.4 *若 $T(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的完全充分统计量, $S(\boldsymbol{X})$ 是 $q(\theta)$ 的一个无偏估计, 则*

$$T^*(\boldsymbol{X}) = E[S(\boldsymbol{X})|T(\boldsymbol{X})] \tag{25}$$

是 $q(\theta)$ 的一个 UMVUE . 又若 $\mathrm{Var}_\theta T^*(\boldsymbol{X}) < \infty$, 对任意 θ , 则 $T^*(\boldsymbol{X})$ 是 $q(\theta)$ 的唯一的 UMVUE .

证明参见 [26].

§9.3 指数模型参数估计问题的提法

本节叙述指数模型在各种截尾方式下的参数估计问题.

§9.3.1 问题及记号

假设总体 X 有参数 λ 的指数分布

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-\frac{t}{\theta}},\quad t\geqslant 0,\theta=\frac{1}{\lambda} \tag{1}$$

或密度函数

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}},\quad t\geqslant 0 \tag{2}$$

其中平均寿命 θ 或失效率 λ 是待估的未知参数.

问题: 假定受试元件的寿命是指数型的, 有分布 (1) , 如何由一组实验数据来估 θ (或 λ), 及其函数.

通常获得数据的试验方式为取 n 个同类型的元件从 $t=0$ 同时开始受试, 但终止试验的方式有两种.

一种是定数截尾试验. 试验进行到第 r 个失效出现时终止,r 是事先确定的一个正整数, $1\leqslant r\leqslant n$. 此时试验终止时间是一个随机变量. 在定数截尾时, 还可分为失效元件无替换和有替换两种情况. 无替换是指受试过程中不再用同型的新的元件接替失效元件. 而有替换时, 当一个元件失效后立即用同型的新元件接替受试. 因此, 在无替换定数截尾试验中, 随着失效元件的出现, 受试元件的数目逐渐减少, 试验终止时刻只有 $n-r$ 个元件是好的. 而有替换试验时, 在试验过程中受试元件数目总是 n.

另一种是定时截尾试验, 即试验进行到事前规定的时间 t_0 终止. 此时在试验中观察到的失效个数是一个随机变量. 与定数截尾试验一样, 这里也可以分为有替换或无替换两种情形.

对上述四种试验方式, 分别用如下记号表示: $(n,r,\text{无})$, $(n,r,\text{有})$, $(n,t_0,\text{无})$, $(n,t_0,\text{有})$. 如图 9.1 所示.

§9.3.2 推广到双参数指数模型

假定总体 X 有双参数指数分布

$$F(t)=1-e^{-\lambda(t-\mu)},\quad t\geqslant\mu\geqslant 0,\lambda>0 \tag{3}$$

其中 μ 称作位置参数,λ 为尺度参数.

问题: 如何由不同试验方案获得的数据来给出 μ,λ 的估计.

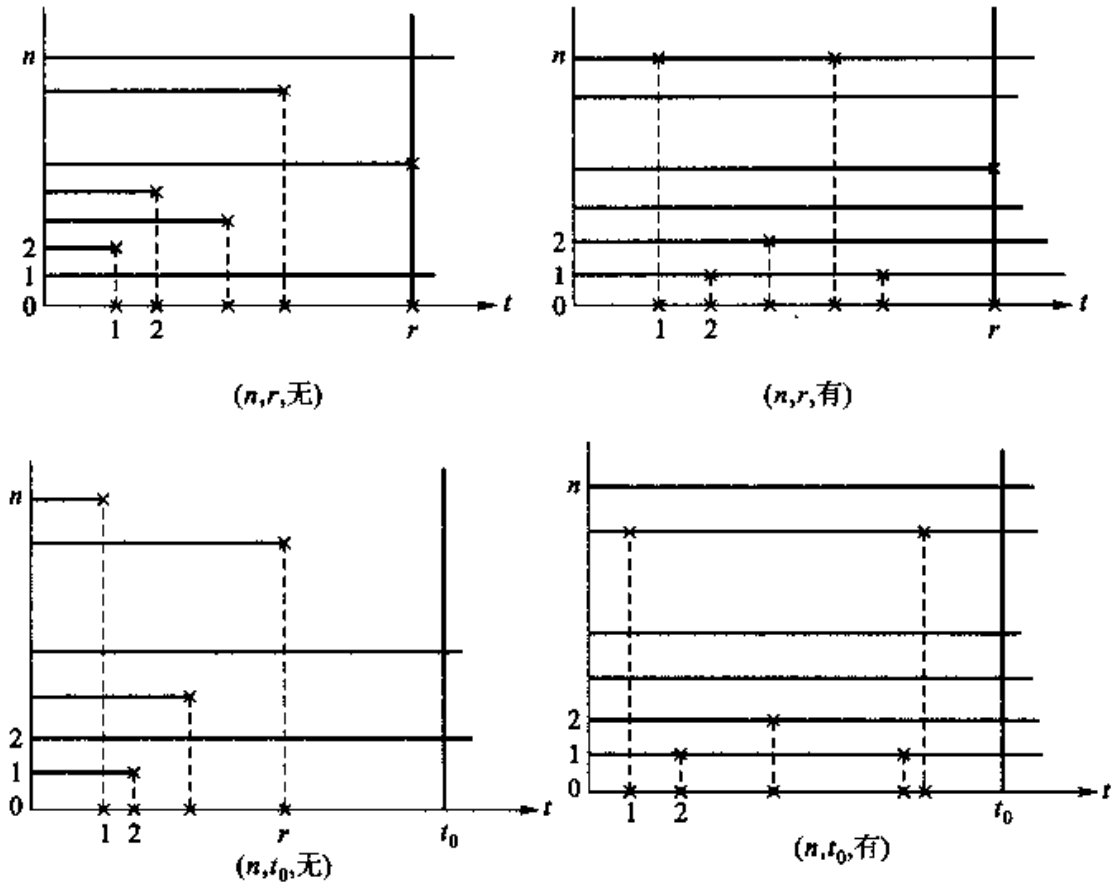


图 9.1 四种不同的试验方式

§9.4 (n,r) 试验方案

在本节讨论定数截尾试验方案下, 指数总体的未知参数的估计问题.

§9.4.1 单参数 $(n,r$,无) 方案

总体 X 有分布

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,\lambda>0 \tag{1}$$

或密度函数

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0 \tag{2}$$

记 $\theta=\dfrac{1}{\lambda}$. 这里 λ 或 θ 是未知参数.

在 $(n,r,$无) 方案下能够获得的失效数据按从小到大排列为

$$x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(r)},\quad 1\leqslant r\leqslant n$$

本段讨论平均寿命 θ, 失效率 λ 和可靠度 $R(t)$ 的估计, 以及试验终止时间 $X_{(r)}$ 的估计.

1) θ 的 MLE

由引理 9.2.2, $(X_{(1)},\cdots,X_{(r)})$ 的联合密度为

$$f(x_1,\cdots,x_r;\theta)=\frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_r\right]\right\},$$

$$0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_r \tag{3}$$

故由 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f=0$ 解出 θ 的 MLE

$$\hat{\theta}_r=\frac{1}{r}T_r \tag{4}$$

其中

$$T_r=\sum_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)} \tag{5}$$

T_r 正是试验终止时 n 个受试元件所接受的总试验时间, 故称 T_r 为试验总时间. 注意, T_r 还可以写成

$$T_r=\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)}) \tag{6}$$

这里约定 $X_{(0)}\equiv 0$.

指数分布平均寿命 θ 的 MLE $\hat{\theta}_r$ 具有一些优良的性质.

无偏性, 即

$$E\hat{\theta}_r=\theta \tag{7}$$

这可由 (4), (6) 及定理 9.2.1 证得. 相仿, $\hat{\theta}_r$ 的方差为

$$\mathrm{Var}\hat{\theta}_r=\frac{\theta^2}{r} \tag{8}$$

更进一步有

定理 9.4.1 $\hat{\theta}_r$ 是 θ 的唯一 UMVUE.

证明 由 (7) ,(8) 及定理 9.2.4, 只要证 $\hat{\theta}_r$ 是 θ 的充分完全统计量. 显然,$\hat{\theta}_r$ 有密度函数

$$h(x;\theta)=\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{r}{\theta}\right)^r x^{r-1}\exp\left\{-\frac{r}{\theta}x\right\},\quad x\geqslant 0$$

为证充分统计量, 只要证在给定 $\hat{\theta}_r=\dfrac{T_r}{r}=x$ 的条件下,$(X_{(1)},\cdots,X_{(r)})$ 的条件分布与 θ 无关. 这是成立的, 因为

$$\left.\frac{f(x_1,\cdots,x_r;\theta)}{h(x;\theta)}\right|_{\sum\limits_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_r=rx}=\frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}e^{-\frac{r}{\theta}x}\Big/\frac{1}{\Gamma(r)}$$

$$\times\left(\frac{r}{\theta}\right)^r x^{r-1}e^{-\frac{r}{\theta}x}=\frac{n!}{(n-r)!}\Gamma(r)\frac{1}{r^r}\frac{1}{x^{r-1}}$$

下面证完全性. 若对任意 $\theta>0$,$E_\theta g(\hat{\theta}_r)=0$, 即

$$\int_0^\infty g(x)\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{r}{\theta}\right)^r x^{r-1}e^{-\frac{r}{\theta}x}dx=0$$

记 $\alpha=\dfrac{r}{\theta}$, 上式化为对任意 $\alpha>0$,

$$\int_0^\infty g(x)x^{r-1}e^{-\alpha x}dx=0$$

表明 $g(x)x^{r-1}$ 的拉普拉斯变换为 0. 因此必有

$$g(x)x^{r-1}=0$$

故 $g(x)=0$. 证毕.

注记 事实上 $g(x)x^{r-1}=0$ 只对勒贝格测度几乎处处成立. 而 $g(x)=0$ 对概率测度 $P_{\hat{\theta}_r}$ 成立, 完全性仍成立.

2) 可靠度的估计

对任一固定的时刻 t , 可靠度

$$R(t)=e^{-\frac{t}{\theta}}\tag{9}$$

的 MLE 为

$$\hat{R}(t)=\exp\{-t/\hat{\theta}_r\}\tag{10}$$

但是 $\hat{R}(t)$ 不是无偏的, 因为

$$E\hat{R}(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{rt}{x}} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty y^{r-1} \exp\left\{-\left(y + \frac{rt}{\theta}\frac{1}{y}\right)\right\} dy \tag{11}$$

若引进第二类 n 阶修正的贝塞尔 (Bessel) 函数 $K_n(\cdot)$, 即

$$\int_0^\infty x^{-n} \exp\left\{-\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right\} dx = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n-1}{2}} K_{n-1}(2\sqrt{ab}) \tag{12}$$

易证 $K_n(\cdot) = K_{-n}(\cdot), n = 0, 1, 2, \cdots$ 于是 (11) 变为

$$E\hat{R}(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} 2\left(\frac{\theta}{rt}\right)^{-\frac{r}{2}} K_{-r}\left(2\sqrt{\frac{rt}{\theta}}\right)$$

即

$$E\hat{R}(t) = \frac{2}{\Gamma(r)}\left(\frac{rt}{\theta}\right)^{\frac{r}{2}} K_r\left(2\sqrt{\frac{rt}{\theta}}\right) \tag{13}$$

相仿可得

$$E\hat{R}^2(t) = \frac{2}{\Gamma(r)}\left(\frac{2rt}{\theta}\right)^{\frac{r}{2}} K_r\left(2\sqrt{\frac{2rt}{\theta}}\right) \tag{14}$$

于是可算出 $\mathrm{Var}\hat{R}(t)$.

下面的定理给出可靠度 $R(t)$ 的 UMVUE.

定理 9.4.2 *$R(t)$ 的唯一的 UMVUE 为*

$$\tilde{R}(t) = \left(1 - \frac{t}{r\hat{\theta}_r}\right)_+^{r-1} \tag{15}$$

这里 $x_+ = x \vee 0, x_+^r = (x_+)^r$.

证明 令 $T = T(X_1, \cdots, X_n) = I_{(nX_{(1)} > t)}, I_A$ 为 A 的示性函数. 即 $I_A(x) = 1$, 若 $x \in A$; $I_A(x) = 0$, 若 $x \bar{\in} A$. 显然,T 是 $R(t)$ 的无偏估计.

记 $(X, Y) = \left(nX_{(1)}, \sum_{i=2}^{r}(n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})\right)$, 则其联合密度为 $\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \frac{1}{\Gamma(r-1)}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{r-1} y^{r-2}e^{-\frac{y}{\theta}}, x, y \geqslant 0$. 因此

$$(X, Z) = \left(nX_{(1)}, \sum_{i=1}^{r}(n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})\right) = (nX_{(1)}, T_r)$$

的联合密度为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\cdot\frac{1}{\Gamma(r-1)}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{r-1}(z-x)^{r-2}e^{-\frac{z-x}{\theta}}\\&=\frac{1}{\Gamma(r-1)}\frac{1}{\theta^r}(z-x)^{r-2}e^{-\frac{z}{\theta}},\quad x\leqslant z\end{aligned}\tag{16}$$

故 $(X,W)=(nX_{(1)},\hat{\theta}_r)=(nX_{(1)},\dfrac{1}{r}T_r)$ 的联合密度为

$$\frac{1}{\Gamma(r-1)}\frac{1}{\theta^r}(rw-x)_+^{r-2}e^{-\frac{r}{\theta}w_r}\tag{17}$$

因此在 $\hat{\theta}_r=w$ 下, $T=nX_{(1)}$ 的条件密度为

$$\frac{\dfrac{1}{\Gamma(r-1)}\dfrac{1}{\theta^r}(rw-x)_+^{r-2}e^{-\frac{r}{\theta}w_r}}{\dfrac{1}{\Gamma(r)}\left(\dfrac{r}{\theta}\right)^r w^{r-1}e^{-\frac{r}{\theta}w}}=\frac{r-1}{r}\frac{1}{w}\left(1-\frac{x}{rw}\right)_+^{r-2}$$

由定理 9.2.4, $R(t)$ 的一个 UMVUE 为

$$\begin{aligned}E(T|\hat{\theta}_r=w)&=\int_t^\infty\frac{r-1}{r}\frac{1}{w}\left(1-\frac{x}{rw}\right)_+^{r-2}dx\\&=\left(1-\frac{t}{rw}\right)_+^{r-1}\end{aligned}$$

此即 (15) 式. 唯一性显然. 证毕.

3) 失效率 λ 的估计

λ 的 MLE 为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\hat{\theta}_r}=\dfrac{r}{T_r}$. 此时 $\hat{\lambda}$ 不是无偏的, 因为 $T_r\sim\Gamma(r,\lambda;t)$, 故易算得

$$E\hat{\lambda}=\frac{r}{r-1}\lambda,(r>1),\quad \mathrm{Var}\hat{\lambda}=\frac{r^2}{(r-1)^2(r-2)}\lambda^2,\quad (r>2)$$

若引进

$$\lambda^*=\frac{r-1}{r}\hat{\lambda}=\frac{r-1}{T_r}\tag{18}$$

则

$$E\lambda^*=\lambda\tag{19}$$

$$\mathrm{Var}\lambda^* = \frac{1}{r-2}\lambda^2 < \mathrm{Var}\hat{\lambda}, \quad r > 2 \tag{20}$$

因此,λ^* 是 λ 的无偏估计, 且方差也小. 因而采用 λ^* 做 λ 的估计比 $\hat{\lambda}$ 要好.

4) 平均寿命的 θ 区间估计

只要注意到 $2\lambda T_r = \dfrac{2T_r}{\theta} \sim \chi^2_{2r}$, 即可得 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间 $\left[\dfrac{2T_r}{\chi^2_{2r}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)}, \dfrac{2T_r}{\chi^2_{2r}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\right]$, 或上侧置信区间 $\left[\dfrac{2T_r}{\chi^2_{2r}(1-\alpha)}, \infty\right)$, 或下侧置信区间 $\left(0, \dfrac{2T_r}{\chi^2_{2r}(\alpha)}\right]$. 其中 $\chi^2_{2r}(\alpha)$ 为 χ^2_{2r} 的 α 分位点, 即

$$P\{\chi^2_{2r} \leqslant \chi^2_{2r}(\alpha)\} = \alpha$$

利用 λ 与 θ 互为倒数的关系, 相仿可得 λ 的区间估计.

5) 试验终止时间 $X_{(r)}$ 的估计

在 $(n, r, 无)$ 方案中, 若试验已进行到第 k 个失效发生的时刻 $X_{(k)}, k < r$. 对试验结束时间 $X_{(r)}$ 给出一个估计具有实用意义. 记

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} X_{(i)} + (n-k)X_{(k)} \tag{21}$$

由 $X_{(r)} = \sum\limits_{i=1}^{r}(X_{(i)} - X_{(i-1)})$ 知, 可用 $\hat{\theta}\sum_{i=1}^{r}\dfrac{1}{n-i+1}$ 作为 $EX_{(r)}$ 的估计, 这里 $\hat{\theta} = \dfrac{T_k}{k}$. 为进一步得到 $X_{(r)}$ 的估计, 考虑随机变量

$$Z = \frac{X_{(r)} - X_{(k)}}{T_k} \tag{22}$$

下面的定理给出了 Z 的分布.

定理 9.4.3 对 $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} P\{Z > t\} = {} & \frac{(n-k)!}{(n-r)!(r-k-1)!}\sum_{i=0}^{r-k-1}(-1)^i \\ & \times \frac{1}{n-r+i+1}\binom{r-k-1}{i} \\ & \times \frac{1}{[1+(n-r+i+1)t]^k} \end{aligned} \tag{23}$$

证明 按 Z 的定义, 记

$$X = X_{(r)} - X_{(k)} = \sum_{i=k+1}^{r} (X_{(i)} - X_{(i-1)})$$

$$Y = T_k = \sum_{i=1}^{k} (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})$$

由定理 9.2.1, X, Y 独立, 且 $Y \sim \Gamma(k, \lambda; t)$, 记其密度函数为 $g(y)$. 而 X 为 $r-k$ 个独立随机变量之和, 其中 $X_{(i)} - X_{(i-1)}$ 有参数为 $(n-i+1)\lambda$ 的指数分布, 故

$$P\left\{\frac{X}{Y} > t\right\} = \frac{(n-k)!}{(n-r)!}\lambda^{r-k} \int_A \exp\left\{-\lambda \sum_{i=k+1}^{r} (n-i+1)x_i\right\} \times g(y)dx_{k+1}\cdots dx_r dy$$

其中积分域

$$A = \left\{(x_{k+1}, \cdots, x_r, y) : \sum_{i=k+1}^{r} x_i > y_t, y \geqslant 0, x_i \geqslant 0, i = k+1, \cdots, r\right\}.$$

作变量替换 $u_j = \sum_{i=k+1}^{j} x_i, j = k+1, \cdots, r$. 于是积分域 A 变成

$$B = \{(u_{k+1}, \cdots, u_r, y) : 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant u_r, u_r > yt, y \geqslant 0\}.$$

因此上述积分变为

$$\frac{(n-k)!}{(n-r)!}\lambda^{r-k} \int_B \exp\left\{-\lambda\left[\sum_{i=k+1}^{r-1} u_i + (n-r+1)u_r\right]\right\} \times g(y)du_{k+1}\cdots du_r dy \tag{24}$$

注意到积分

$$\int_{0\leqslant u_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant u_{r-1}\leqslant u_r} \lambda^{r-k-1} \exp\left\{-\lambda \sum_{i=k+1}^{r-1} u_i\right\} du_{k+1}\cdots du_{r-1}$$
$$= \frac{1}{(r-k-1)!}[1 - e^{-\lambda u_r}]^{r-k-1}$$

故 (24) 式右端为

$$\frac{(n-k)!}{(n-r)!(r-k-1)!}\int_{\substack{\{u>yt\}\\{y>0}\}}\lambda e^{-\lambda(n-r+1)u}[1-e^{-\lambda u}]^{r-k-1}g(y)dudy$$

$$=\frac{(n-k)!}{(n-r)!(r-k-1)!}\sum_{i=0}^{r-k-1}(-1)^i\binom{r-k-1}{i}$$

$$\times\int_{\substack{\{u>yt\}\\{y>0}\}}\lambda e^{-\lambda(n-r+i+1)u}g(y)dudy$$

$$=\frac{(n-k)!}{(n-r)!(r-k-1)!}\sum_{i=0}^{r-k-1}(-1)^i\binom{r-k-1}{i}$$

$$\times\frac{1}{n-r+i+1}\int_0^\infty e^{-\lambda(n-r+i+1)yt}g(y)dy$$

代入 $g(y)=\dfrac{\lambda^k}{\Gamma(k)}y^{k-1}e^{-\lambda y}, y\geqslant 0$, 稍加计算即得结论. 证毕.

由定理 9.4.3, 试验终止时间 $X_{(r)}$ 的 $1-\alpha$ 上预测界为 $X_{(k)}+t_{1-\alpha}T_k$, 即 $P\{X_{(r)}\leqslant X_{(k)}+t_{1-\alpha}T_k\}=1-\alpha$. 其中 $t_{1-\alpha}$ 为 Z 的 $1-\alpha$ 分位点, $P\{Z\leqslant t_{1-\alpha}\}=1-\alpha$.$Z$ 的分位点可由计算机按 (23) 式算出.

两种有意义的特例是

(a) $r=n$. 表示在完全样本试验时, 对试验终止时间 $X_{(n)}$ 的预测. 由 (23) 式得

$$P\{Z\leqslant t\}=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n-k}{i}\frac{1}{(1+it)^k} \tag{25}$$

(b) $k=r-1$. 这表明除最后一个 (第 r 个) 失效时间外, 其余 $r-1$ 个失效数据都已观察到, 此时

$$P\{Z\leqslant t\}=1-\frac{1}{[1+(n-r+1)t]^{r-1}} \tag{26}$$

由 (26) 式, 不难求出 Z 的 $1-\alpha$ 分位点

$$t_{1-\alpha}=\frac{1}{n-r+1}(\alpha^{-\frac{1}{r-1}}-1)$$

于是 $X_{(r)}$ 的 $1-\alpha$ 上预测界为

$$X_{(r-1)}+\frac{1}{n-r+1}(\alpha^{-\frac{1}{r-1}}-1)T_{r-1} \tag{27}$$

事实上, 上式亦可从 F 分布直接获得. 因

$$\frac{(n-r+1)(X_{(r)}-X_{(r-1)})}{T_{r-1}/(r-1)}=(r-1)(n-r+1)Z\sim F_{2,2(r-1)}$$

故 $X_{(r)}$ 的 $1-\alpha$ 上预测界为

$$X_{(r-1)}+\frac{1}{(n-r+1)(r-1)}F_{2,2(r-1)}(1-\alpha)T_{r-1} \tag{28}$$

注意 $F_{2,2(r-1)}$ 分布的表达式, 不难得

$$F_{2,2(r-1)}(1-\alpha)=(r-1)(\alpha^{-\frac{1}{r-1}}-1)$$

因此 (28) 式与 (27) 式是一致的.

例 9.4.1 $(10,3,$无$)$ 观察到的头 3 个失效时间为 $60,80,200$(小时). 求 θ 的 MLE 及置信度为 0.95 的双侧置信区间;$R(10),R(20)$ 的 MLE 及 UMVUE.

解 $T_r=T_3=1740$, 故 θ 的 MLE 为

$$\hat{\theta}_r=\hat{\theta}_3=\frac{T_3}{3}=580(\text{小时})$$

$\alpha=0.05$ 时,θ 的 0.95 双侧置信区间为

$$\left[\frac{2T_r}{\chi^2_{2r}(0.975)},\frac{2T_r}{\chi^2_{2r}(0.025)}\right]=\left[\frac{3480}{14.4},\frac{3480}{1.24}\right]=[241,2806]$$

$R(t)$ 的 MLE 为

$$\hat{R}(10)=\exp\{-10/\hat{\theta}_r\}=0.9829$$
$$\hat{R}(20)=0.9661$$

$R(t)$ 的 UMVUE 为

$$\tilde{R}(10)=\left(1-\frac{t}{r\hat{\theta}_r}\right)_+^{r-1}=\left(1-\frac{10}{1740}\right)^2=0.9885$$
$$\tilde{R}(20)=0.9771$$

例 9.4.2 若在 $(10,4,$无$)$ 方案中已观察到的失效数据同例 9.4.1. 此时按 (27),$X_{(4)}$ 的 0.90 上预测界为

$$200+\frac{1}{10-4+1}\left(0.1^{-\frac{1}{3}}-1\right)1740=487(\text{小时})$$

§9.4.2 双参数 $(n,r,$无$)$ 方案

设总体 X 有分布

$$F(t)=1-e^{-\frac{1}{\theta}(t-\mu)},\quad t\geqslant\mu>0,\theta>0,t\geqslant 0 \tag{29}$$

讨论未知参数 θ,μ 的估计.

此时试验所获的数据为 $x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(r)},r>1$.

1)θ,μ 的 MLE

由引理 9.2.2 $(X_{(1)},\cdots,X_{(r)})$ 的联合密度为

$$f(x_1,\cdots,x_r;\theta,\mu)=\frac{n!}{(n-r)!\theta^r}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{r}(x_i-\mu)\ +(n-r)(x_r-\mu)\right]\right\},$$
$$\mu\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_r$$

注意, 仅当 $\mu=x_1$ 时上式才能达极大, 而 θ 的 MLE 由 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f=0$ 解出. 因此,μ,θ 的 MLE 为

$$\hat{\mu}=X_{(1)} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_r&=\frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}-nX_{(1)}\right]\\&=\frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r}(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})\end{aligned} \tag{31}$$

对于来自双参数指数分布 (29) 的顺序量 $X_{(1)},\cdots,X_{(r)}$ 有如下结果.

定理 9.4.4 $X_{(1)}-\mu$ 与 $\sum_{i=2}^{r}(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})$ 独立. 或者说 $\dfrac{2n}{\theta}(X_{(1)}-\mu)$ 与 $\dfrac{2r}{\theta}\hat{\theta}_r$ 独立, 且分别遵从 $\chi^2_2,\chi^2_{2(r-1)}$.

证明 只要注意到 $X_{(1)}-\mu,\cdots,X_{(r)}-\mu$ 是来自单参数指数分布 (1) 的顺序量. 由定理 9.2.1,$X_{(1)}-\mu$ 与 $\sum_{i=2}^{r}(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})$ 独立. 其余结论显然. 证毕.

由定理 9.4.4 易得

$$E\hat{\mu}=\mu+\frac{1}{n}\theta,\quad \mathrm{Var}\hat{\mu}=\frac{1}{n^2}\theta^2 \tag{32}$$

$$E\hat{\theta}_r=\frac{r-1}{r}\theta,\quad \mathrm{Var}\hat{\theta}_r=\frac{r-1}{r^2}\theta^2 \tag{33}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\mu},\hat{\theta}_r)=0 \tag{34}$$

μ 与 θ 的区间估计可如下得到.

显然,$\mu\leqslant X_{(1)}$ 概率为 1 地成立. 此外, 注意到 $\dfrac{n(X_{(1)}-\mu)}{\dfrac{r}{r-1}\hat{\theta}_r}\sim F_{2,2(r-1)}$, 因此 μ 的置信度 $1-\alpha$ 的下界为

$$\mu\geqslant X_{(1)}-\frac{r}{n(r-1)}\hat{\theta}_rF_{2,2(r-1)}(1-\alpha)=X_{(1)}-\frac{r}{n}(\alpha^{-\frac{1}{r-1}}-1)\hat{\theta}_r$$

由 $\dfrac{2r}{\theta}\hat{\theta}_r\sim\chi^2_{2(r-1)}$ 知 θ 的 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left[\frac{2r\hat{\theta}_r}{\chi^2_{2(r-1)}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)},\frac{2r\hat{\theta}_r}{\chi^2_{2(r-1)}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

相仿可得 θ 的单侧置信区间.

2) μ 与 θ 的 UMVUE

定理 9.4.5 μ 与 θ 的 UMVUE 为

$$\tilde{\mu}=X_{(1)}-\frac{1}{n}\tilde{\theta}_r \tag{35}$$

$$\tilde{\theta}_r=\frac{r}{r-1}\hat{\theta}_r,\quad r>1 \tag{36}$$

其中 $\hat{\theta}_r$ 由 (31) 式给出.

我们给出证明的线索, 先证

$$\left(X_{(1)},\sum_{i=2}^{r}(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})\right)$$

是 (μ,θ) 的充分统计量, 再证其完全性[38]. 结论由定理 9.2.4 得.

由 $\tilde{\mu},\tilde{\theta}_r$ 的表达式, 对 $r>1$ 易得

$$\mathrm{Var}\tilde{\mu}=\frac{r}{n^2(r-1)}\theta^2 \tag{37}$$

$$\mathrm{Var}\tilde{\theta}_r=\frac{1}{r-1}\theta^2 \tag{38}$$

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\mu},\tilde{\theta}_r)=-\frac{1}{n(r-1)}\theta^2 \tag{39}$$

与 (32),(33) 式相比较可以发现

$$\mathrm{Var}\hat{\mu}<\mathrm{Var}\tilde{\mu},\quad \mathrm{Var}\hat{\theta}_r<\mathrm{Var}\tilde{\theta}_r$$

这并不矛盾. 因为 $\tilde{\mu},\tilde{\theta}_r$ 只是无偏估计中方差最小的, 而 $\hat{\mu}$, $\hat{\theta}_r$ 不是 μ,θ 的无偏估计.

3) 可靠度的估计

对固定的 t , 可靠度

$$R(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant\mu\\ \exp\left\{-\dfrac{1}{\theta}(t-\mu)\right\}, & t\geqslant\mu>0\end{cases} \tag{40}$$

其 MLE 为

$$\hat{R}(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant X_{(1)}\\ \exp\left\{-\dfrac{1}{\hat{\theta}_r}(t-X_{(1)})\right\}, & t\geqslant X_{(1)}>0\end{cases} \tag{41}$$

其中 $\hat{\theta}_r$ 由 (31) 式给出.

定理 9.4.6 双参数指数 $(n,r,无)$ 方案中, 可靠度 $R(t)$ 的 UMVUE 为

$$\tilde{R}(t)=\begin{cases}1, & t<X_{(1)}\\ \dfrac{n-1}{n}\left(1-\dfrac{t-X_{(1)}}{r\hat{\theta}_r}\right)_+^{r-2}, & t\geqslant X_{(1)}\end{cases} \tag{42}$$

证明 因 $(X_{(1)},r\hat{\theta}_r)$ 是 (μ,θ) 的充分完全统计量, 故由定理 9.2.4, 只要证 $E\tilde{R}(t)=R(t)$.

由 $X_{(1)},r\hat{\theta}_r$ 独立,$X_{(1)}-\mu\sim\Gamma(1,n\lambda;t),r\hat{\theta}_r=\sum\limits_{i=2}^{r}(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})\sim\Gamma(r-1,\lambda;y)$ 得

$$E\tilde{R}(t)=EI_{(t<X_{(1)})}+E\left\{\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{t-X_{(1)}}{r\hat{\theta}_r}\right)_+^{r-2}I_{(t\geqslant X_{(1)})}\right\}$$

等式右边第一项为 $e^{-n\lambda(t-\mu)}$, 第二项为

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t-\mu} dx \int_0^{\infty} \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{t-\mu-x}{y}\right)_+^{r-2} n\lambda e^{-n\lambda x}\frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r-1)}y^{r-2}e^{-\lambda y}dy \\
&= (n-1)\lambda \int_0^{t-\mu} e^{-n\lambda x}dx \int_{t-\mu-x}^{\infty} [y-(t-\mu-x)]^{r-2}\frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r-1)}e^{-\lambda y}dy \\
&= e^{-\lambda(t-\mu)}\int_0^{t-\mu}(n-1)\lambda e^{-(n-1)\lambda x}dx \\
&= e^{-\lambda(t-\mu)} - e^{-n\lambda(t-\mu)}
\end{aligned}$$

因此, $E\tilde{R}(t) = R(t)$. 证毕.

例 9.4.3 双参数指数模型 $(5,4,$无$)$. 已观察到的 4 个失效数据为 36.0, 57.5, 81.5, 127.2(天).

μ 与 θ 的 MLE 为

$$\hat{\mu} = X_{(1)} = 36.0$$

$$\hat{\theta}_r = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}(X_{(i)} - X_{(1)}) + (n-r)(X_{(r)} - X_{(1)})\right] = 62.4$$

μ 与 θ 的 UMVUE 为

$$\tilde{\theta}_r = \frac{r}{r-1}\hat{\theta}_r = 83.1$$

$$\tilde{\mu} = X_{(1)} - \frac{1}{n}\tilde{\theta}_r = 19.4$$

μ 的 $\alpha = 0.5$ 的置信下限为

$$X_{(1)} - \frac{r-1}{n}(\alpha^{-\frac{1}{r-1}} - 1)\tilde{\theta}_r = 23.0$$

θ 的 $\alpha = 0.5$ 的置信下限为

$$\frac{2(r-1)\tilde{\theta}_r}{\chi^2_{2(r-1)}(0.5)} = \frac{2(4-1)83.1}{5.348} = 93.2$$

$R(50)$ 的 MLE 为 $\hat{R}(50) = 0.79990$, 而其 UMVUE 为 $\hat{R}(50) = 0.7128$.

§9.4.3 单参数 $(n, r, \text{有})$ 方案

总体分布与密度函数表达式为 (1),(2). 试验是有替换的, 结束时得失效数据 $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(r)}$. 问题是估计 $\theta, \lambda, R(t)$, 以及试验终止时刻 $X_{(r)}$.

1) θ 的 MLE

我们可以看成元件在 n 个试验台前受试. 由于失效后有替换, 因此对每个试验台而言, 在该台上失效时刻组成一个参数为 λ 的泊松过程. 即相邻失效间隔有参数 λ 的指数分布. 由于 n 个试验台是独立的, 因此这 n 个过程的叠加是参数 $n\lambda$ 的泊松过程. 故

$$X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \cdots, X_{(r)} - X_{(r-1)} \tag{43}$$

独立同分布, 有参数为 $n\lambda$ 的指数分布. 注意到 $X_{(i)} = \sum_{j=1}^{i} X_{(j)} - X_{(j-1)}$, $i = 1, \cdots, r$, 故可得 $(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(r)})$ 的联合密度为

$$f(x_1, \cdots, x_r; \theta) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp\left\{-\frac{n}{\theta} x_r\right\}, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_r \tag{44}$$

由 $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f = 0$ 解得 θ 的 MLE

$$\hat{\theta}_r = \frac{n}{r} X_{(r)} = \frac{T_r}{r} \tag{45}$$

其中

$$T_r = n X_{(r)} \tag{46}$$

为受试元件接受的总试验时间.

显然, 由 (43)

$$E\hat{\theta}_r = \theta, \quad \mathrm{Var}\hat{\theta}_r = \frac{\theta^2}{r} \tag{47}$$

与定理 9.4.1 中结论一样, $\hat{\theta}_r$ 亦是 θ 的唯一的 UMVUE.

2) 失效率 λ 的估计

λ 的 MLE 为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\theta}_r} = \frac{r}{T_r} \tag{48}$$

由 $X_{(r)} \sim \Gamma(r, n\lambda; t)$ 得

$$E\hat{\lambda} = \frac{r}{r-1}\lambda, \quad r > 1$$

$$\mathrm{Var}\hat{\lambda} = \frac{(r\lambda)^2}{(r-1)^2(r-2)}, \quad r > 2$$

若引进

$$\lambda^* = \frac{r-1}{r}\hat{\lambda} = \frac{r-1}{T_r}, \quad r > 1 \tag{49}$$

则 λ^* 无偏, 且

$$\mathrm{Var}\lambda^* = \frac{\lambda^2}{r-2} < \mathrm{Var}\hat{\lambda}$$

因此,λ^* 比 $\hat{\lambda}$ 做 λ 的估计要好.

3) 可靠度 $R(t)$ 的估计

$R(t) = e^{-t/\theta}$ 的 MLE 为 $\hat{R}(t) = \exp\left\{-\dfrac{t}{\hat{\theta}_r}\right\}$.

定理 9.4.7 单参数指数 $(n,r,$有$)$ 方案中, $R(t)$ 的 UMVUE 为

$$\tilde{R}(t) = \left(1 - \frac{t}{r\hat{\theta}_r}\right)_+^{r-1} \tag{50}$$

证明与定理 4.6 相仿. 略.

4) θ 的区间估计

因 $\dfrac{2n}{\theta}X_{(r)} = \dfrac{2n}{\theta}\sum_{i=1}^{r}(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \sim \chi^2_{2r}$, 故可得 θ 的区间估计. 例如,θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left[\frac{2nX_{(r)}}{\chi^2_{2r}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)}, \frac{2nX_{(r)}}{\chi^2_{2r}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

5) 试验终止时间的估计

设已经观察到前 k 个实验的结果, $x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(k)}, k < r$. 讨论试验终止时间 $X_{(r)}$ 的估计

注意到有替换试验时,

$$\frac{2n}{\theta}(X_{(r)}-X_{(k)})=\frac{2n}{\theta}\sum_{i=k+1}^{r}(X_{(i)}-X_{(i-1)})\sim\chi^2_{2(r-k)}$$

$$\frac{2n}{\theta}X_{(k)}=\frac{2n}{\theta}\sum_{i=1}^{k}(X_{(i)}-X_{(i-1)})\sim\chi^2_{2k}$$

且它们互相独立, 于是

$$\frac{k}{r-k}\frac{X_{(r)}-X_{(k)}}{X_{(k)}}\sim F_{2(r-k),2k}$$

因而给定水平 α , 则 $X_{(r)}$ 的 $1-\alpha$ 上预测界为

$$\left[1+\frac{r-k}{k}F_{2(r-k),2k}(1-\alpha)\right]X_{(k)}$$

例 9.4.4 $(20,10,$有$)$. $x_{(10)}=45$(天)

θ 的 MLE 为

$$\hat{\theta}_r=\frac{T_r}{r}=\frac{20\cdot45}{10}=90(\text{天})$$

θ 的 0.95 双侧置信区间为

$$\left[\frac{2\cdot20\cdot45}{\chi^2_{20}(0.975)},\frac{2\cdot20\cdot45}{\chi^2_{20}(0.025)}\right]=[52.6,209.3]$$

若 $(20,10,$有$)$ 中已知 $x_{(8)}=31$(天), $\alpha=0.05$, 则 $X_{(10)}$ 的 0.95 上预测界为

$$\left[1+\frac{2}{8}F_{4,16}(0.95)\right]\cdot31=54.3(\text{天})$$

§9.5 (n,t_0) 试验方案

本节讨论定时截尾下, 单参数指数总体的未知参数估计问题.

§9.5.1 单参数 $(n,t_0,$无$)$ 方案

试验在 t_0 结束. 记 $(0,t_0]$ 中失效数为 K. 显然,K 是二项分布的随机变量

$$P\{K=r\}=\binom{n}{r}p^rq^{n-r},\quad r=0,1,\cdots,n \tag{1}$$

其中

$$p = 1 - e^{t_0/\theta}, \quad q = 1 - p \tag{2}$$

1) θ 的 MLE

记 $(X_{(1)}, \cdots, X_{(r)}, K = r)$ 的联合密度为 $f(x_1, \cdots, x_r, r; \theta)$. 则由引理 9.2.3, 及 (1)

$$f(x_1, \cdots, x_r, r; \theta) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{nt_0}{\theta}\right), & r = 0 \\ \dfrac{n!}{(n-r)!\theta^r} \exp\left\{-\dfrac{1}{\theta}\left[\sum\limits_{i=1}^{r} x_i + (n-r)\, t_0\right]\right\}, & \\ \qquad 1 \leqslant r \leqslant n, 0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_r \leqslant t_0 \end{cases} \tag{3}$$

于是对 $r \geqslant 1$, 由 (3) 得 θ 的 MLE

$$\hat{\theta} = \frac{T_r}{r}, \quad r \geqslant 1 \tag{4}$$

其中

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r)t_0 \tag{5}$$

表示在试验终止时刻 t_0, n 个受试元件接受的总试验时间. 但对 $r = 0, f$ 是 θ 的严格增函数. 故 $r = 0$ 时 θ 的 MLE 应为 $\hat{\theta} = +\infty$. 这种情况下估计量 $\hat{\theta}$ 不是一个正规的随机变量 (即 $\hat{\theta} = +\infty$ 有正概率). 由于当 nt_0/θ 大时, $P\{\hat{\theta} = +\infty\} = P\{K = 0\} = e^{-nt_0/\theta}$ 可以很小, 因此, 实用时有人建议当 $r = 0$ 时 [23]

$$\hat{\theta} = nt_0, \quad r = 0 \tag{6}$$

而可靠度 $R(t)$ 的 MLE 为

$$\hat{R}(t) = \exp\{-\frac{t}{\hat{\theta}}\}$$

2) θ 的区间估计

因为 $(n, t_0, 无)$ 方案可看作成功概率为 p 的 n 次独立伯努利试验, 其中观察到 $r(\geqslant 1)$ 次成功. 故 θ 的区间估计可归结为如何求 p 的区间估计问题. 由 p 的区间估计, 按 (2) 即可化为 θ 或 $R(t)$ 的区间估计.

引理 9.5.1 给定水平 α, p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限 $\underline{p}=\underline{p}(r)$ 由下式中的解 x 给出

$$\sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}+\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}u=1-\alpha \tag{7}$$

其中 u 为 $(0,1)$ 上的一个均匀随机数. 而 p 的置信至少为 $1-\alpha$ 的置信度下限 p_* 由下式中的解 x 给出

$$B(x)=\sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=1-\alpha \tag{8}$$

此时 p_* 可表为

$$p_*=\left[1+\frac{n-r+1}{r}F_{2(n-r+1),2r}(1-\alpha)\right]^{-1} \tag{9}$$

证明 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的精确置信下限 $\underline{p}$ 可通过随机化方法得到, 见 [1].

由分部积分容易证明

$$B(x)=1-\frac{1}{\mathrm{B}(r,n-r+1)}\int_0^x t^{r-1}(1-t)^{n-r}dt \tag{10}$$

因此由 (7),(8),

$$B(p_*)=1-\alpha=B(\underline{p})+\binom{n}{r}\underline{p}^r(1-\underline{p})^{n-r}u$$

再由 (10) 知 $B(x)$ 是 x 的递降函数, 故必有 $p_*\leqslant\underline{p}$. 因此, $1-\alpha=P\{p\geqslant\underline{p}\}\leqslant P\{\underline{p}\geqslant p_*\}$, 即 (8) 的解 p_* 是 p 的置信度至少为 $1-\alpha$ 的置信下限.

由 (10) 知,p_* 是 β 分布 $\beta(r,n-r+1;x)$ 的 α 分位点. 若引进独立随机变量 X,Y, 分别遵从 $\Gamma(a,1;x),\Gamma(b,1;y)$, 则 $Z=\dfrac{X}{X+Y}\sim\beta(a,b;z)$. 现令 $a=r,b=n-r+1$, 故

$$\alpha=P\left\{\frac{X}{X+Y}\leqslant p_*\right\}=P\left\{\frac{Y/(n-r+1)}{X/r}\geqslant\frac{r}{n-r+1}\left(\frac{1}{p_*}-1\right)\right\}$$

由 F 分布定义, 故 $\dfrac{Y/(n-r+1)}{X/r}\sim F_{2(n-r+1),2r}$, 故

$$\frac{r}{n-r+1}\left(\frac{1}{p_*}-1\right)=F_{2(n-r+1),2r}(1-\alpha)$$

此即 (9) 式. 证毕.

由此, 容易得如下关于 θ 的结果.

θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的上置信限为 $-t_0/\ln(1-\underline{p})$, 置信度至少为 $1-\alpha$ 的上置信限为 $-t_0/\ln(1-p_*)$. 这里 $\underline{p}$ 为 (7) 的解, p_* 由 (9) 给出.

θ 的 $1-\alpha$ 下置信限为 $-t_0/\ln(1-\overline{p})$, 这里 $\overline{p}$ 为

$$B(x)+\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}u=\alpha$$

的解, 其中 $B(x)$ 由 (8) 定义, u 为 $(0,1)$ 上均匀随机数. θ 的置信度至少为 $1-\alpha$ 的下置信限为 $-t_0/\ln(1-p^*)$, 其中 p^* 为

$$B(x)+\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}=\alpha$$

的解, 进一步 p^* 由下式给出

$$p^*=\left[1+\frac{n-r}{r+1}F_{2(n-r),2(r+1)}(\alpha)\right]^{-1}$$

θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$[-t_0/\ln(1-a),-t_0/\ln(1-b)]$$

置信度至少为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$[-t_0/\ln(1-a_*),-t_0/\ln(1-b_*)]$$

其中 a,b 分别为下列方程中的解 x

$$B(x)+\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}u_1=1-\frac{\alpha}{2}$$

$$B(x)+\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}u_2=\frac{\alpha}{2}$$

这里 u_1,u_2 是 $(0,1)$ 上两个独立的均匀随机数. 而 a_*,b_* 分别为

$$B(x)=1-\frac{\alpha}{2}$$

$$B(x)+\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}=\frac{\alpha}{2}$$

的解, 具体表出有

$$a_* = \left[1 + \frac{n-r+1}{r} F_{2(n-r+1),2r}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$$
$$b_* = \left[1 + \frac{n-r}{r+1} F_{2(n-r),2(r+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}$$

例 9.5.1 $(n, t_0, 无)$. $n = 10, t_0 = 250$(小时), $r = 3$. 前 3 个失效时间为 60, 80, 200(小时).

$$T_3 = 60 + 80 + 200 + (10-3)250 = 2090$$

故 θ 的 MLE $\hat{\theta} = \dfrac{T_3}{3} = 696.7$. $\alpha = 0.05$ 时, θ 的置信度至少为 0.95 的置信区间为

$$[-250/\ln(1-p^*), \infty) = [268, \infty)$$

这里 p^* 由 $F_{14,8}$ 表查出, $p^* = 0.6067$.

§9.5.2 单参数 $(n, t_0, 有)$ 立案

试验有替换, 在 t_0 时结束. 记 $(0, t_0]$ 中失效数为 K . 由于试验有替换及泊松过程的性质知, K 是一个有参数 $n\lambda t_0 = \dfrac{nt_0}{\theta}$ 的泊松随机变量, 即

$$P\{K = r\} = \frac{1}{r!}\left(\frac{nt_0}{\theta}\right)^r \exp\left\{-\left(\frac{nt_0}{\theta}\right)\right\}, \quad r = 0, 1, \cdots \tag{11}$$

假设在试验结束时观察到 r 个失效

$$x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(r)} \leqslant t_0$$

1) θ 的 MLE

与 $(n, t_0, 无)$ 方案相似, 可得 θ 的 MLE

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \dfrac{nt_0}{r}, & r \geqslant 1 \\ nt_0, & r = 0 \end{cases} \tag{12}$$

失效率 λ 的 MLE 由 $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\hat{\theta}}$ 给出.

2) θ 的区间估计

由于 $(0, t_0]$ 中失效数 K 有参数 $n\lambda t_0$ 的泊松分布 (11), 故对 θ 的区间估计可由 λ 的区间估计得. 记

$$\phi_{r-1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(n\lambda t_0)^i}{i!} e^{-n\lambda t_0}, \quad r = 1, 2, \cdots$$

由分部积分易得

$$\phi_{r-1}(\lambda) = \int_{2n\lambda t_0}^{\infty} h_{2r}(x)dx \tag{13}$$

这里 $h_{2r}(x)$ 为 χ^2_{2r} 的密度函数.

引理 9.5.2 给定水平 α, 在 $(0, t_0]$ 中观察到的失效数 $K = r$, 则 λ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限 $\underline{\lambda}$ 由下式中的解 λ 给出

$$\phi_{r-1}(\lambda) + \frac{(n\lambda t_0)^r}{r!} e^{-n\lambda t_0} u = 1 - \alpha \tag{14}$$

其中 u 为 $(0, 1)$ 上均匀随机数. 而置信度至少为 $1-\alpha$ 的置信下限 λ_* 由

$$\phi_{r-1}(\lambda) = 1 - \alpha \tag{15}$$

的解 λ 给出, 即

$$\lambda_* = \frac{1}{2nt_0} \chi^2_{2r}(\alpha)$$

这里 $\chi^2_{2r}(\alpha)$ 为 χ^2_{2r} 的 α 分位点.

证明 λ 的精确的 $1-\alpha$ 置信下限 $\underline{\lambda}$ 亦可由随机化方法得到, 见 [1]. 此外, 容易证明 (14),(15) 的解 $\underline{\lambda}, \lambda_*$ 间有 $\lambda_* \leqslant \underline{\lambda}$. 因此, λ_* 是 λ 的置信度至少为 $1-\alpha$ 的置信度下限. 再由 (13), 容易得 λ_* 的表达式. 证毕.

下面列出关于 θ 的置信限的结果.

θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的上置信限为 $1/\underline{\lambda}$, 其中 $\underline{\lambda}$ 为 (14) 的解.θ 的置信度至少为 $1-\alpha$ 的上置信限为 $2nt_0/\chi^2_{2r}(\alpha)$.

θ 的 $1-\alpha$ 置信下限为 $1/\bar{\lambda}$,$\bar{\lambda}$ 为

$$\phi_{r-1}(\lambda) + \frac{(n\lambda t_0)^r}{r!} e^{-n\lambda t_0} u = \alpha$$

的解. 这里 u 为 $(0, 1)$ 上均匀随机数. 而 θ 的置信度至少为 $1-\alpha$ 的置信下限为 $1/\lambda^*$, 其中 λ^* 为 $\phi_r(\lambda) = \alpha$ 的解, 即 $\lambda^* = \chi^2_{2(r+1)}(1-\alpha)/(2nt_0)$.

θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为 $\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$, 其中 a,b 分别为下列方程的解

$$\phi_{r-1}(\lambda)+\frac{(n\lambda t_0)^r}{r!}e^{-n\lambda t_0}u_1=1-\frac{\alpha}{2}$$
$$\phi_{r-1}(\lambda)+\frac{(n\lambda t_0)^r}{r!}e^{-n\lambda t_0}u_2=\frac{\alpha}{2}$$

这里 u_1,u_2 为 $(0,1)$ 上独立的均匀随机数.θ 的置信度至少为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$\left[2nt_0/\chi^2_{2(r+1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),2nt_0/\chi^2_{2r}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

3) θ 的 UMVUE 不存在

因为 $(0,t_0]$ 中失效数 K 是 θ 的充分完全统计量, 故若 $\phi(K)$ 是 θ 的 UMVUE, 则应有 $E\phi(K)=\theta$. 但注意到 K 有分布 (11) , 故等价于下式成立

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{nt_0}{\theta}\right)^r\phi(r)=\theta e^{(nt_0)/\theta}=\theta+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r+1)!}\frac{(nt_0)^{r+1}}{\theta^r}$$

显然, 这种 $\phi(r)$ 是不存在的. 因而 θ 的 UMVUE 不存在.

4) 可靠度 $R(t)$ 的估计

$R(t)=e^{-t/\theta}$ 的 MLE 为

$$\hat{R}(t)=\exp(-t/\hat{\theta})$$

定理 9.5.1 $R(t)$ 的 UMVUE 为

$$\tilde{R}(t)=\left(1-\frac{t}{nt_0}\right)^r \tag{16}$$

证明 记 $\phi(K)$ 是 R(t) 的 UMVUE , 则应有

$$E\phi(K)=e^{-t/\theta}$$

即应有

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{nt_0}{\theta}\right)^r\phi(r)=\exp\left\{\frac{1}{\theta}(nt_0-t)\right\}$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{nt_0-t}{\theta}\right)^r$$

于是可取

$$\phi(r)=\left(1-\frac{t}{nt_0}\right)^r$$

因此, 当 $(0,t_0]$ 中观察到的失效数 $K=r$ 时, $R(t)$ 的 UMVUE 即由 (16) 给出. 证毕.

注记 当 $t>nt_0$ 以及 r 为奇数时, 按 (16) 式 $\tilde{R}(t)<0$. 事实上不应发生这种情形, 因此这是统计量 $\tilde{R}(t)$ 的缺点.

由 (16) 容易算出

$$\mathrm{Var}\tilde{R}(t)=\exp\left(-\frac{2t}{\theta}\right)\left\{\exp\left(\frac{t^2}{nt_0\theta}\right)-1\right\}$$

例 9.5.2 $(n,t_0,\text{有}),n=20,t_0=10(\text{天}),r=4.$

θ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=\dfrac{20\cdot 10}{4}=50.$

θ 的至少为 0.9 的双侧置信区间为

$$[2\cdot 20\cdot 10/\chi^2_{10}(0.95),2\cdot 20\cdot 10/\chi^2_8(0.05)]=[21.8,146.4]$$

而 θ 的至少为 0.9 的上侧置信区间为

$$[2\cdot 20\cdot 10/\chi^2_{10}(0.9),\infty]=[25.0,\infty)$$

$R(10),R(50)$ 的 MLE 为

$$\hat{R}(10)=\exp\left(-\frac{10}{50}\right)=0.8187$$

$$\hat{R}(50)=\exp(-1)=0.3679$$

其 UMVUE 为

$$\tilde{R}(10)=\left(1-\frac{10}{200}\right)^4=0.8145$$

$$\tilde{R}(50)=\left(1-\frac{50}{200}\right)^4=0.3164$$

§9.6 随机截尾时的估计

本节简单介绍在单参数指数模型的假定下, 有随机截尾时未知参数的估计问题.

§9.6.1 一般讨论

设受试样本 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布 $F(t;\theta)$，密度函数 $f(t;\theta)$, θ 为未知参数. 又设截尾时间 $\{L_i\}$ 互相独立有分布 $G_i(t)$，密度函数 $g_i(t)$，且 $\{X_i\}$ 与 $\{L_i\}$ 也相互独立,$i=1,\cdots,n$. 进一步假定截尾时间的分布与未知参数 θ 无关.

假定对受试样本只能观察到

$$Y_i = X_i \wedge L_i, \quad i=1,\cdots,n \tag{1}$$

记

$$\delta_i = \begin{cases} 1, 若 & X_i \leqslant L_i, \\ 0, 若 & X_i > L_i, \end{cases} \quad i=1,\cdots,n \tag{2}$$

因此, 对第 i 个受试样本 X_i 而言, 一对随机变量 (Y_i,δ_i) 就完全描述了试验是否截尾, 以及试验的时间长度. 试验终止时可得 n 组观察值

$$(y_i,\delta_i), \quad i=1,\cdots,n \tag{3}$$

我们欲由 (3) 来估未知参数 θ.

容易看出 (Y_i,δ_i) 的联合密度为

$$L_i(\theta) = L_i(y_i,\delta_i;\theta) = [f(y_i;\theta)\bar{G}_i(y_i)]^{\delta_i}[g_i(y_i)\bar{F}(y_i;\theta)]^{1-\delta_i} \tag{4}$$

这是因为当 $\delta_i=1$ 时

$$\begin{aligned} P\{Y_i \leqslant y_i, \delta_i = 1\} &= P\{X_i \leqslant L_i, X_i \leqslant y_i\} \\ &= \int_0^{y_i} \bar{G}_i(x) f(x;\theta)dx \end{aligned}$$

上式对 y_i 求导即得

$$L_i(y_i,\delta_i=1;\theta) = f(y_i;\theta)\bar{G}_i(y_i)$$

当 $\delta_i=0$ 时同样可证 (4) 成立.

因此, $(Y_1,\delta_1),\cdots,(Y_n,\delta_n)$ 的联合密度为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n L_i(y_i,\delta_i;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n [g_i^{1-\delta_i}(y_i)\bar{G}_i^{\delta_i}(y_i)] \prod_{i=1}^n [f^{\delta_i}(y_i;\theta)\bar{F}^{1-\delta_i}(y_i;\theta)] \end{aligned}$$

但是由于截尾时间分布中不包含未知参数 θ, 故上式可写成

$$L(\theta) = A\prod_{i=1}^{n}[f^{\delta_i}(y_i;\theta)\bar{F}^{1-\delta_i}(y_i;\theta)] \tag{5}$$

其中, A 是与 θ 无关的函数.

§9.6.2 指数模型的情形

若总体分布 $F(t)$ 为参数 λ 的指数分布. 记观察到的失效总数为

$$\delta = \sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{6}$$

则由 (5) , 似然函数为

$$L(\lambda) = A\lambda^{\delta}\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i\right\} \tag{7}$$

其中 A 与 λ 无关. 由此可得 λ 的 MLE

$$\hat{\lambda} = \frac{\delta}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$$

故 θ 的 MLE 为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

注记 $(n, t_0, 无)$ 方案是随机截尾时的一种特例. 这时只要取 $L_i = t_0$, $i = 1, \cdots, n$.

在大样本的情形下, 利用渐近理论可得 λ 或 θ 的渐近区间估计 [58]. 有如下结果:

$$\ln\hat{\lambda} \text{ 渐近 } N\left(\ln\lambda, \frac{1}{\delta}\right)$$

若记 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 是 $N(0,1)$ 的 $1-\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点, 则 λ 的 $1-\alpha$ 近似置信区间为

$$[\hat{\lambda}\exp(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{\delta}), \hat{\lambda}\exp(t_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{\delta})]$$

相仿,θ 的 $1-\alpha$ 近似置信区间为

$$[\hat{\theta}\exp(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{\delta}), \hat{\theta}\exp(t_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{\delta})]$$

例 9.6.1 10 台同型设备在寿命试验中的结果见下表 [23]. 试验终止日期 8 月 31 日.

表 9.1

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
装机日期	6.10.	6.21.	6.22.	7.2.	7.21.	7.31.	7.31.	8.1.	8.2.	8.10.
失效日期	6.13.	–	8.12.	–	8.23.	8.27.	8.14.	8.25.	8.6.	–
寿命 (天)	2	72+	51	60+	33	27	14	24	4	21+

表中 – 表示试验终止时尚未失效. 数字后带 + 号者表示截尾时间.

在指数模型的假定下, 平均寿命 θ 的 MLE 为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n} y_i = 44$$

θ 的 0.95 近似置信区间为

$$[\underline{\theta}, \overline{\theta}] = [21.0, 92.3]$$

$R(10)$ 的 MLE 为

$$\hat{R}(10) = \exp(-10/\hat{\theta}) = 0.7967$$

$R(10)$ 的 0.95 近似置信区间为

$$[\exp(-10/\underline{\theta}), \exp(-10/\overline{\theta})] = [0.6208, 0.8973]$$

§9.7 指数模型的检验

上面给出的参数估计方法是基于指数模型假定下进行的. 所以, 判段一组失效数据来自哪个总体 (即所谓寿命分布模型的选择), 对正确估计参数来说就是一个根本问题. 通常, 寿命分布模型的建立可以通过失效的物理、化学机理分析, 或者由寿命数据的统计分析来获得. 本节介绍几种统计分析方法, 用来检验数据是否来自指数总体.

设总体有分布

$$F(t) = 1 - e^{-t/\theta}, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

θ 为未知参数, 或者有双参数指数分布

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}(t-\mu)}, \quad t \geqslant \mu \geqslant 0 \tag{2}$$

θ, μ 为未知参数.

现有来自同一总体的一组独立样本 $x_1, \cdots, x_n$. 问题是判断样本是否来自总体 (1) 或 (2).

§9.7.1 图检验法

由 (1), $-\ln \bar{F}(t) = \dfrac{1}{\theta}t, t \geqslant 0$. 它表明 $(t, -\ln \bar{F}(t))$ 是一条过原点的斜率为 $1/\theta$ 的直线.

现把样本按从小到大排列成 $0 \leqslant x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$, 记相应的经验分布函数为

$$F_n(t) = \frac{i}{n}, x_{(i)} \leqslant t < x_{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

约定 $x_{(0)} = 0, x_{(n+1)} = \infty$. 由格里文科 (Гливенко) 定理,

$$\sup_t |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

概率为 1 地成立. 因此, 当 n 大时

$$F(x_{(i)}) \approx F_n(x_{(i)}) = \frac{i}{n} \approx \frac{i}{n+1}$$

故若样本来自指数总体 (1) , 则

$$\left(x_{(i)}, -\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right), \quad i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

大体上应呈直线状, 且该直线过原点. 相仿, 若样本来自双参数指数总体 (2) , 则点 (3) 亦大体上应呈直线, 但是过 $(\mu, 0)$ 点, $\mu > 0$. 若与直线形状相差甚远, 则应拒绝样本来自指数总体 (1) 或 (2) 的假定.

图检验法比较粗糙, 适用于大样本情形.

§9.7.2 F 检验

设有一组完全样本 $X_1, \cdots, X_n$, 其顺序量为 $X_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$. 现根据其观察值

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)} \tag{4}$$

检验是否来自指数总体 (1) 或 (2).

约定 $X_{(0)}=0$, 记

$$D_i=(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)}),\quad i=1,\cdots,n \tag{5}$$

先判断 $\mu=0$ 否. 即做检验

H_0 : (2)中 $\mu=0$.

H_1 : (2)中 $\mu>0$.

显然, 在 H_0 成立时由定理 9.2.1, 定理 9.2.2 知, $\dfrac{nX_{(1)}}{\sum\limits_{i=2}^{n}D_i/(n-1)}\sim F_{2,2(n-1)}$. 因此, 给定显著性水平 α, 若按观察值 (4) 算得

$$\begin{aligned}x_{(1)}&>\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=2}^{n}d_i\cdot F_{2,2(n-1)}(1-\alpha)\\&=\frac{1}{n}(\alpha^{-\frac{1}{n-1}}-1)\sum_{i=2}^{n}d_i\end{aligned}$$

则拒绝 H_0. 这里,d_i 为 (5) 中 $X_{(i)}$ 用观察值 $x_{(i)}$ 代入后得.

若接受 $\mu=0$, 即认为第一个失效时间不是异常地长, 再用下法来检验是否服从总体 (1) . 记

$$k=\left[\frac{n}{2}\right] \tag{6}$$

这里 $[x]$ 为 x 的整数部分. 在服从 (1) 的假定下,

$$F=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}D_i/k}{\sum\limits_{i=k+1}^{n}D_i/(n-k)}\sim F_{2k,2(n-k)} \tag{7}$$

因此, 给定水平 α , 若由 (4) 按 (7) 算出之 F 值落在

$$\left[F_{2k,2(n-k)}\left(\frac{\alpha}{2}\right),F_{2k,2(n-k)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \tag{8}$$

中, 则接受样本来自指数总体 (1).

若拒绝 $\mu=0$, 则对 $n-1$ 个数据 $x_{(2)}-x_{(1)}\leqslant x_{(3)}-x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}-x_{(1)}$ 来检验它们是否来自总体 (1) . 若是, 则表明数据 (4) 来自双参数指数总体 (2).

注意,F 检验法亦适用于分析各种寿命试验中得到的不完全数据.

例如, $(n,r,$无$)$ 方案有失效数据 $x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(r)}$. 检验其是否来自指数总体 (1) 时, 只要把 (6),(7),(8) 中的 n 换成 r . 对 $(n,r,$有$)$ 方案, 只要 (6),(7),(8) 中的 n 换成 r , 及 (5) 中 D_i 改为

$$D_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, \quad i = 1, \cdots, r$$

§9.7.3 K–S 检验

通常的 K–S(柯尔莫戈洛夫–斯米尔诺夫) 拟合优度检验是检验总体分布

$$H_0 : \ F(x) = F_0(x)$$

这里 $F_0(x)$ 是一个完全确定的分布函数.

当已知 $F_0(x)$ 的分布类型, 而其中参数由极大似然估计给出时, 需要对 $K-S$ 检验进行修正 [52]. 我们只对完全样本 $x_1, \cdots, x_n$ 列出其是否来自 (1) 的检验方法. 记

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} \tag{9}$$

$$\hat{F}(t) = 1 - e^{-\hat{\lambda}t}, \ t \geqslant 0 \tag{10}$$

计算

$$K = \max_i \left\{ \left| \frac{i}{n} - \hat{F}(x_{(i)}) \right|, \left| \hat{F}(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right| \right\} \tag{11}$$

对于显著性水平 α, 查 K–S 表得 $K_n(\alpha)$. 若由样本 (4) 按 (11) 算出之 $K > K_n(\alpha)$, 则拒绝来自总体 (1) 的假定. 否则, 接受.

表 9.2 检验水平为 α 的 K–S 表

n \ α	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
3	0.451	0.479	0.511	0.551	0.600
4	0.396	0.422	0.449	0.487	0.548
5	0.359	0.382	0.406	0.442	0.504
6	0.331	0.351	0.375	0.408	0.470
7	0.309	0.327	0.350	0.382	0.442
8	0.291	0.308	0.329	0.360	0.419
9	0.277	0.291	0.311	0.341	0.399
10	0.263	0.277	0.295	0.325	0.380
11	0.251	0.264	0.283	0.311	0.365
12	0.241	0.254	0.271	0.298	0.351
13	0.232	0.245	0.261	0.287	0.338
14	0.224	0.237	0.252	0.277	0.326
15	0.217	0.229	0.244	0.269	0.315
16	0.211	0.222	0.236	0.261	0.306
17	0.204	0.215	0.229	0.253	0.297
18	0.199	0.210	0.223	0.246	0.289
19	0.193	0.204	0.218	0.239	0.283
20	0.188	0.199	0.212	0.234	0.278
25	0.170	0.180	0.191	0.210	0.247
30	0.155	0.164	0.174	0.192	0.226
> 30	$\frac{0.86}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.91}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.96}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.06}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.25}{\sqrt{n}}$

§9.7.4 A–D 检验

只对完全样本及参数 λ 由 (9) 估出的情形, 给出 A–D(Anderson-Darling) 检验的步骤.

计算

$$A = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(2i-1)\ln \hat{F}(x_{(i)}) + (2n-2i+1)\ln[1-\hat{F}(x_{(i)})]\right\} \tag{12}$$

其中 $\hat{F}(t)$ 由 (10) 给出.

表 9.3 检验水平为 α 的 A–D 表

n \ α	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
3	0.736	0.812	0.951	1.092	1.63
5	0.766	0.854	0.991	1.224	1.88
7	0.781	0.873	1.024	1.260	1.90
10	0.788	0.889	1.028	1.280	1.91
15	0.801	0.896	1.033	1.302	1.93
$\geqslant 20$	0.806	0.903	1.044	1.305	1.94

在显著水平为 α , 样本量为 n 时, 查 A–D 表得 $A_n(\alpha)$. 若由 (12) 算出的 $A \leqslant A_n(\alpha)$, 则接受总体是 (1) 的假定, 否则拒绝 (1).

§9.7.5 基于泊松过程的检验

利用泊松过程的一个性质, 也可检验一组样本是否来自总体 (1). 为避免重复, 读者请参阅第十一章 §11.3.

第十章　寿命数据分析
——其它分布类型

本章讨论韦布尔分布的参数估计, 介绍参数的 MLE 以及工程上常用的概率纸法. 同时还将简单介绍极值分布、Γ 分布和对数正态分布参数的 MLE. 最后讨论可靠度 (生存函数) 的非参数估计.

§10.1 韦布尔分布的参数估计

韦布尔分布是可靠性中最常用的分布之一. 其一般形式为

$$F(t)=1-\exp\left\{-\frac{1}{t_0}(t-\gamma)^m\right\},\quad t\geqslant\gamma\geqslant 0,\ t_0,m>0 \tag{1}$$

其中 m 称作形状参数, γ 称作位置参数, t_0 称作尺度参数.

若随机变量 X 有分布 (1), 则容易求出

$$EX=\gamma+t_0^{1/m}\Gamma(1+\frac{1}{m}) \tag{2}$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}X}=t_0^{1/m}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}^{1/2} \tag{3}$$

用韦布尔分布来描述寿命时, 往往从 $t=0$ 开始就有失效的可能性, 因此下面着重对 $\gamma=0$ 的情形来讨论. 此时分布函数为

$$F(t)=1-\exp\left\{-\frac{t^m}{t_0}\right\},\quad t\geqslant 0,\ m,t_0>0 \tag{4}$$

密度函数

$$f(t)=\frac{m}{t_0}t^{m-1}e^{-t^m/t_0},\quad t\geqslant 0 \tag{5}$$

相应的失效率函数

$$r(t)=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}=\frac{m}{t_0}t^{m-1},\quad t\geqslant 0 \tag{6}$$

显然, 对 $m>1, r(t)$ 递增; $0<m<1, r(t)$ 递减; 面 $m=1$ 时, 即为指数分布情形. 由于参数 m 及 t_0 的变化范围广, 因此它可以用来代表广泛的寿命分布规律. 例如, 电子元器件、滚珠轴承、电容器、光电单元、马达以及许多生命体的寿命等都可用韦布尔分布来反映. 此外, 它还被应用于纺织品断裂及疲劳强度的研究中.

本节讨论二参数韦布尔分布的参数的 MLE 及概率纸法. 其它的参数估计方法见 [57]. 关于韦布尔分布的检验见下节.

§10.1.1 截尾数据下韦布尔模型参数的 MLE

假定总体有分布 (4), 其中 m, t_0 是未知参数. 讨论由无替换试验时所获的数据来估计 m, t_0.

在 $(n, r,$ 无) 方案中有 r 个数据,

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(r)} \tag{7}$$

在 $(n, T_0,$ 无) 方案中, 试验在 T_0 终止时假定观察到 r 个数据, 亦排列成

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(r)}\leqslant T_0 \tag{8}$$

若记

$$x_s=\begin{cases}x_{(r)}, & \text{在}(n,r,\text{无})\text{方案中}\\ T_0, & \text{在}(n,T_0,\text{无})\text{方案中}\end{cases} \tag{9}$$

则无论在哪种方式下, 由第九章引理 9.2.2, 引理 9.2.3, 来自总体 (4) 的 $(X_{(1)},\cdots,X_{(r)})$ 的联合密度可统一写成

$$f(x_1,\cdots,x_r;m,t_0)=\frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r}f(x_i)\right]\bar{F}^{n-r}(x_s)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\left(\frac{m}{t_0}\right)^r(x_1\cdots x_r)^{m-1}\exp\left\{-\frac{1}{t_0}\left[\sum_{i=1}^{r}x_i^m+(n-r)x_s^m\right]\right\},$$

$$0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_r\leqslant x_s$$

因此, m 及 t_0 的 MLE 由 $\dfrac{\partial}{\partial m}\ln f=0$, $\dfrac{\partial}{\partial t_0}\ln f=0$ 解出. 经过整理即为解

$$\frac{1}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i^m\ln x_i+(n-r)x_s^m\ln x_s}{\sum_{i=1}^{r}x_i^m+(n-r)x_s^m}-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln x_i \tag{10}$$

$$t_0=\frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}x_i^m+(n-r)x_s^m\right] \tag{11}$$

下面的定理保证 m 的 MLE 存在唯一.

定理 10.1.1 *方程 (10) 存在一个唯一解 $\hat{m}$, $0<\hat{m}<\infty$.*

证明 记

$$h(m)=\frac{\sum_{i=1}^{r}x_i^m\ln x_i+(n-r)x_s^m\ln x_s}{\sum_{i=1}^{r}x_i^m+(n-r)x_s^m}=\frac{A}{B} \tag{12}$$

于是 $h'(m)=\dfrac{A'B-AB'}{B^2}$. 对分子省去求和号中的下标

$$\begin{aligned}A'B-AB'&=\left[\sum x_i^m\ln^2x_i+(n-r)x_s^m\ln^2x_s\right]\left[\sum x_i^m+(n-r)x_s^m\right]\\&\quad-\left[\sum x_i^m\ln x_i+(n-r)x_s^m\ln x_s\right]^2\\&=\left(\sum x_i^m\right)\left(\sum x_i^m\ln^2x_i\right)-\left(\sum x_i^m\ln x_i\right)^2\\&\quad+(n-r)x_s^m\left[\ln^2x_s\sum x_i^m+\sum x_i^m\ln^2x_i-2\ln x_s\sum x_i^m\ln x_i\right]\\&=\left(\sum x_i^m\right)\left(\sum x_i^m\ln^2x_i\right)-\left(\sum x_i^m\ln x_i\right)^2\\&\quad+(n-r)x_s^m\sum x_i^m(\ln x_s-\ln x_i)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

上式等号成立仅当所有 x_i, x_s 全相等时. 因为韦布尔分布是连续型的, 因此必有 (概率为 1 地) $h'(m) > 0$. 进一步还有

$$h(0) = \lim_{m\to 0} h(m) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{r} \ln x_i + (n-r)\ln x_s\right\}$$
$$> \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln x_i$$
$$h(\infty) = \lim_{m\to\infty} h(m) = \ln x_s > \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln x_i$$

再由 (10) 得

$$m = \left[h(m) - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln x_i\right]^{-1} \tag{13}$$

上式右端是 m 的严格递减函数, 当 m 从 0 变到 ∞ 时, 其值从 $\left[h(0) - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln x_i\right]^{-1}$ 单调下降趋于 $\left[h(\infty) - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln x_i\right]^{-1}$. 因此 (13) 有唯一正解 $\hat{m}$, 即 (10) 有唯一正解 $\hat{m}$. 证毕.

为从 (10) 求出 $\hat{m}$, 可用迭代法. 选初值 $\hat{m}_0 = 1$,

$$\hat{m}_{k+1} = \left[h(\hat{m}_k) - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \ln x_i\right]^{-1}, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{14}$$

其中 $h(m)$ 由 (12) 给出.

§10.1.2 概率纸法

利用专门设计的韦布尔概率纸, 可以对一组简单随机样本检验其是否来自韦布尔总体 (1) 或 (4), 并且在来自该总体的条件下给出未知参数的粗略估计. 由于概率纸使用方便, 因此方法便于工程应用. 韦布尔分布概率纸见本章末.

1) 韦布尔概率纸的构造

由 (4) 可得

$$\ln\ln\frac{1}{1-F(t)} = m\ln t - \ln t_0 \tag{15}$$

因此, 若把上式中的 $\ln t = x$ 看成自变量, $\ln\ln\dfrac{1}{1-F(t)} = y$ 看成因变量, 则 x, y 间就有一个线性关系

$$y = mx - \ln t_0 \tag{16}$$

韦布尔概率纸的横坐标是采用自然对数坐标 ($\ln t$), 纵坐标是重对数坐标 (即 $\ln\ln\dfrac{1}{1-F(t)}$ 形式). 图 10.1 是其示意图.

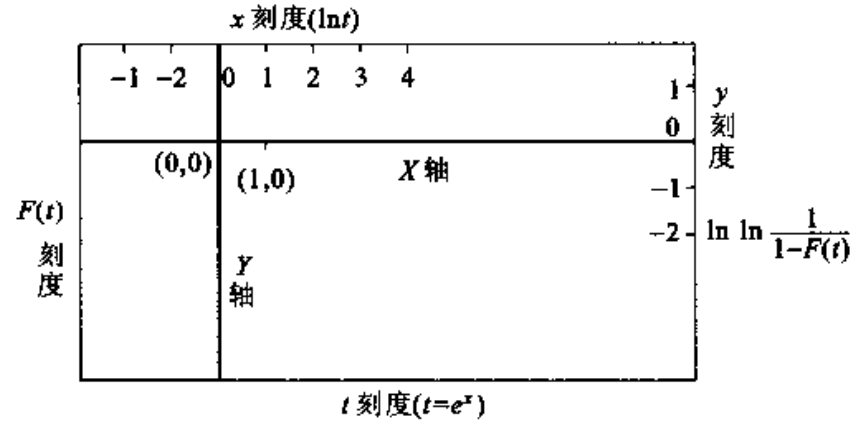


图 10.1 韦布尔概率纸构造

在图中的上横线上是 $x(=\ln t)$ 的等刻度, 相对的下横线上则是时刻 t 的相应刻度 ($t = e^x$). 右侧纵线上是

$$y\left(=\ln\ln\frac{1}{1-F(t)}\right)$$

的等刻度, 左边纵线上是 $F(t)(=1-\exp(-e^y))$ 的相应刻度. 这里添上 $F(t)$ 与 t 的刻度是为了使用方便.

2) 用法

假定一组样本 $x_1, \cdots, x_n$ 来自有某个分布 $F(t)$ 的总体. 样本按从小到大排列为 $x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$. 相应的经验分布 $F_n(t)$ 定义为

$$F_n(t) = \frac{i}{n}, \quad x_{(i)} \leqslant t < x_{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \cdots n$$

这里, 约定 $x_{(0)} = 0, x_{(n+1)} = \infty$. 由格里文科定理, 当 n 很大时

$$F(x_{(i)}) \approx F_n(x_{(i)}) = \frac{i}{n} \approx \frac{i}{n+1}$$

于是, 若点 $\left(\ln x_{(i)}, \ln\ln \dfrac{1}{1-F(x_{(i)})}\right)$, 或点

$$\left(\ln x_{(i)}, \ln\ln \frac{n+1}{n-i+1}\right), i=1,\cdots,n \tag{17}$$

在概率纸上大体呈一直线时, 则表明 $x_1,\cdots,x_n$ 来自韦布尔总体 (4), 即 $F(t)$ 有韦布尔分布 (4).

同时, 可根据这条直线的斜率及截距求得相应的参数 m 及 t_0 的估计.

具体步骤如下:

(a) 把样本 $x_1,\cdots,x_n$ 排列成 $x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$.

(b) 在韦布尔概率纸上用 t , $F(t)$ 坐标 (即下横线及左纵线上的刻度) 作点

$$(x_{(i)}, F(x_{(i)})) = \left(x_{(i)}, \frac{i}{n+1}\right), i=1,\cdots,n \tag{18}$$

注意, 由韦布尔概率纸的构造, 此即 (17) 中的点.

(c) 若这 n 个点基本上成一条直线, 则表明样本来自韦布尔分布 (4). 否则做 (d).

当判定样本来自韦布尔分布时, m, t_0 求法如下.

注意到形状参数 m 是 (X,Y) 坐标系中直线方程 (16) 的斜率. 因此, 在 (X,Y) 坐标系中过 $(1,0)$ 点作所画直线 (16) 的平行线, 它有方程 $y=m(x-1)$. 它与 Y 轴的交点坐标为 $(0,-m)$, 因此, 可由 Y 轴上读出 m 的值 (图 10.2).

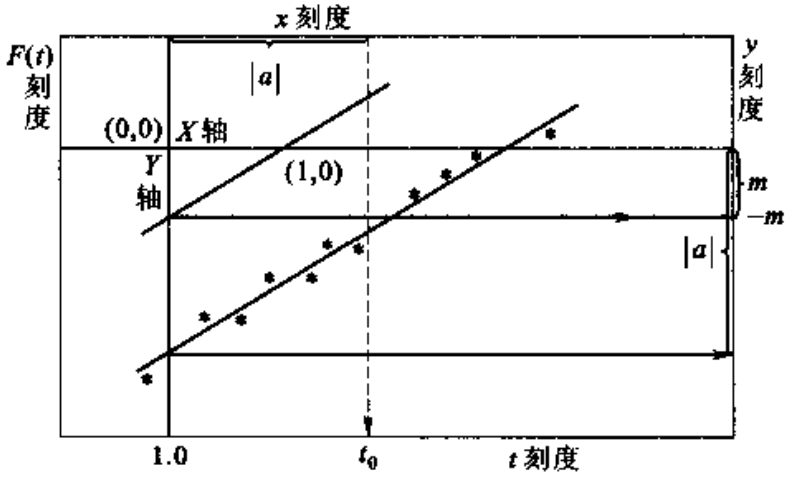


图 10.2 m, t_0 的图解

又因直线 (16) 与 Y 轴的交点坐标为 $(0,-\ln t_0)$, 故在 X 轴上找出 $\ln t_0$ 的坐标, 它在 t 轴上的相应读数即为 t_0 (图 10.2).

(d) 若 n 个点的连线在韦布尔概率纸上呈一条比较光滑的曲线时[①], 该曲线与 t 轴的交点坐标即为三参数韦布尔分布 (1) 中的位置参数 γ(图 10.3). 定出 γ 后, 对

$$\left(x_{(i)}-\gamma, \frac{i}{n+1}\right), i=1,\cdots,n$$

重复 (b), (c) 中步骤, 求出 m 和 t_0 的估计.

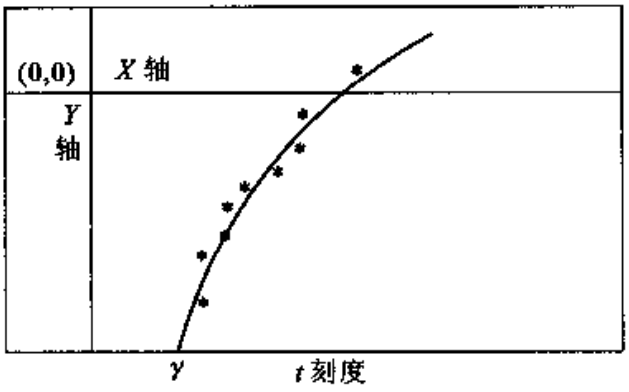


图 10.3 γ 的确定

因为只有当 $t=\gamma$ 时, (1) 中 $F(\gamma)=0$. 此时按 (18) 所作之光滑曲线与 t 轴交点坐标 γ_1(从韦布尔概率纸上读出) 有 $F(\gamma_1)\leqslant 0.1\%=0.001$. 因此从实用上讲可以认为 $\gamma=\gamma_1$.

(e) 若 n 个点的位置比较乱, 无规律, 则样本来自韦布尔总体就有问题. 此时应考虑总体为其它的分布类.

最后顺便说明, 利用韦布尔概率纸估出 γ, m, t_0 后, 可以由图上附的诺模图查出其均值 (2) 和均方差 (3) 中的 Γ 函数值, 进而可以求出均值和均方差的近似值.

[①]因为三参数韦布尔分布 (1) 满足

$$\ln\ln\frac{1}{1-F(t)}=m\ln(t-\gamma)-\ln t_0$$

因此, $\left(\ln(t-\gamma), \ln\ln\dfrac{1}{1-F(t)}\right)$ 成线性关系. 于是在以

$$x=\ln t,\quad y=\ln\ln\frac{1}{1-F(t)}$$

为坐标轴的韦布尔概率纸上 $\left(\ln(t-\gamma), \ln\ln\dfrac{1}{1-F(t)}\right)$ 是一条光滑的曲线.

§10.2 极值分布的参数估计

由于极值分布与韦布尔分布的密切关系, 本节将简单讨论完全样本时极值分布的参数估计及分布类型检验问题.

设随机变量 X 有极值 (极大值) 分布

$$F(x)=\exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\},\quad -\infty<x<\infty \tag{1}$$

其中 μ 是位置参数, σ 是尺度参数, $-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$. 容易算得

$$EX=\mu+\sigma\gamma,\quad \mathrm{Var}X=\frac{\pi^2}{6}\sigma^2 \tag{2}$$

其中 $\gamma=0.577215\cdots$, 为欧拉常数.

又设随机变量 W 有韦布尔分布

$$W(x)=1-\exp\{-(\lambda x)^\alpha\},\quad x\geqslant 0,\ \lambda,\alpha>0 \tag{3}$$

若令 $\sigma=\dfrac{1}{\alpha},\mu=\ln\lambda$, 则 $Y=-\ln W$ 有分布函数 $F(y)$.

上述两个分布之间的密切联系, 使得我们可以把韦布尔分布的参数估计与检验问题通过数据的变换化为极值分布的相应问题.

§10.2.1 极值分布的参数估计

设一组随机样本 $X_1,\cdots,X_n$ 来自总体 (1). μ 和 σ 是两个参数. 由 (1) 易得似然函数的对数

$$\ln L=-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum(x_i-\mu)-\sum\exp\left(-\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$$

省去求和号中的下标 i 从 1 到 n 求和. 分三种情形来讨论 μ,σ 的 MLE.

1) σ 已知时, μ 的 MLE 由 $\dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L=0$ 解得, 即有

$$\hat{\mu}=-\sigma\ln\left\{\frac{1}{n}\sum\exp\left(-\frac{x_i}{\sigma}\right)\right\} \tag{4}$$

2) μ 已知时, σ 的 MLE 由 $\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\ln L=0$ 解得, 即由下式迭代解出

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum y_i\left[1-\exp\left(-\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right)\right] \tag{5}$$

其中 $y_i = x_i - \mu, i = 1, \cdots, n$. 因此, 可用如下迭代算法

$$\hat{\sigma}_{k+1} = \frac{1}{n}\sum y_i \left[1 - \exp\left(-\frac{y_i}{\hat{\sigma}_k}\right)\right], \quad k = 0, 1, \cdots \tag{6}$$

其中初值

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{n}\sum x_i - \mu\right) \tag{7}$$

$\gamma = 0.577215\cdots$, 为欧拉常数. 这里 $\hat{\sigma}_0$ 是根据总体的矩可由相应的样本矩来估计这一原则 (所谓矩法) 选取的.

3) μ, σ 全未知. 则 μ, σ 的 MLE 由 $\dfrac{\partial}{\partial \mu}\ln L = 0, \dfrac{\partial}{\partial \sigma}\ln L = 0$ 联立解出. 即由

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum x_i - \sum x_i \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\sigma}}\right) \Big/ \sum \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\sigma}}\right) \tag{8}$$

解出 $\hat{\sigma}$, 然后代入下式得 $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = -\hat{\sigma}\ln\left[\frac{1}{n}\sum \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\sigma}}\right)\right] \tag{9}$$

(8) 中 $\hat{\sigma}$ 可如下迭代求得

$$\hat{\sigma}_{k+1} = \bar{x} - \sum x_i \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\sigma}_k}\right) \Big/ \sum \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\sigma}_k}\right), \quad k = 0, 1, \cdots \tag{10}$$

初值

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} \tag{11}$$

其中 $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum x_i$.

下面的定理保证参数的 MLE 存在唯一.

定理 10.2.1 在 1), 2), 3) 三种情形下, μ, σ 的 MLE 都唯一存在, 且 $0 < \hat{\sigma} < \infty$.

证明与定理 10.1.1 相仿, 故略.

§10.2.2 极值分布的分布类型检验 [76]

假定有一组随机样本, 不妨设已按序排好

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \tag{12}$$

问题: 检验这组样本 (12) 是否来自总体 (1). 这就是分布类型的检验, 或分布的拟合优度检验.

对这个问题的处理依赖于参数 μ, σ 已知, 还是由极大似然法从样本 (12) 估计出来的. 为此我们增加一种情形

0) μ, σ 均已知. 即分布 $F(x)$ 完全确定.

对于 0), 1), 2), 3) 四种情形, 具体做法如下:

(a) 由 (12) 算出

$$z_i = F(x_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

其中 $F(x)$ 由 (1) 给出, 其中参数 μ, σ 视 0), 1), 2), 3) 四种可能情形分别由其已知值或相应的 MLE 代入.

(b) 计算

$$W = \sum \left(z_i - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} A &= -n - \frac{1}{n} \sum (2i-1)[\ln z_i + \ln(1 - z_{n-i+1})] \\ &= -n - \frac{1}{n} \sum [(2i-1) \ln z_i + (2n-2i+1) \ln(1-z_i)] \end{aligned} \tag{14}$$

(c) 查表. 根据表 10.1 中所列的修正公式, 计算修正的统计量的值 W_n^*, A_n^*. 然后对给定的水平 α, 与临界值表中的 $W_n(\alpha), A_n(\alpha)$ 作比较. 若 $W_n^* > W_n(\alpha)$ (或 $A_n^* > A_n(\alpha)$), 则在 α 的水平上拒绝样本 (12) 来自总体 (1), 否则接受样本 (12) 来自 (1).

注记 1 若要检验一组有序样本 (12) 是否来自韦布尔分布 (3), 如下进行. 令

$$y_{n-i+1} = -\ln x_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

于是有 $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$. 问题化为对一组随机有序样本 $y_1, \cdots, y_n$ 检验其是否来自总体 (1).

具体可如下进行.

表 10.1 W的临界值表

情形	修正公式	α				
		0.25	0.10	0.05	0.025	0.01
0	$\left(W-\frac{0.4}{n}+\frac{0.6}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$	–	0.347	0.461	0.581	0.743
1	$W\left(1+\frac{0.16}{n}\right)$	0.116	0.175	0.222	0.271	0.338
2	W	0.186	0.320	0.431	0.547	0.705
3	$W\left(1+\frac{0.2}{\sqrt{n}}\right)$	0.073	0.102	0.124	0.146	0.175

表 10.2 A 的临界值表

情形	修正公式	α				
		0.25	0.10	0.05	0.025	0.01
0	A	–	1.933	2.492	3.070	3.857
1	$A\left(1+\frac{0.3}{n}\right)$	0.736	1.062	1.321	1.591	1.959
2	A	1.060	1.725	2.277	2.854	3.640
3	$A\left(1+\frac{0.2}{\sqrt{n}}\right)$	0.474	0.637	0.757	0.877	1.038

(a) 计算

$$z_i=\exp\left\{-(\lambda x_{n-i+1})^{\alpha}\right\},\quad i=1,\cdots,n \tag{15}$$

其中参数 λ,α 由如下几种情形获得

情形 0：λ,α 全已知.

情形 1：α 已知, λ 未知. 则在 (4) 中取 $\sigma=\frac{1}{\alpha}$, 算出

$$\hat{\mu}=-\frac{1}{\alpha}\ln\left\{\frac{1}{n}\sum x_i^{\alpha}\right\}$$

(15) 中 λ 由下式代入

$$\hat{\lambda}=e^{\hat{\mu}}=\left[\frac{1}{n}\sum x_i^{\alpha}\right]^{-1/\alpha}$$

情形 2：λ 已知, α 未知. 则在 (5) 中取 $\mu=\ln\lambda$, 算出

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}&=\frac{1}{n}\sum(y_i-\ln\lambda)\left\{1-\exp\left[-\frac{1}{\hat{\sigma}}(y_i-\ln\lambda)\right]\right\}\\&=\frac{1}{n}\sum\ln\tilde{x}_i[\tilde{x}_i^{1/\hat{\sigma}}-1]\end{aligned}$$

其中 $\tilde{x}_i = \lambda x_i, i = 1, \cdots, n$. 而 (15) 中 α 由 $\hat{\alpha} = \dfrac{1}{\hat{\sigma}}$ 代入.

情形 3: λ, α 全未知. 则由 (8), (9) 解出 $\hat{\sigma}, \hat{\mu}$. 但是要注意的是, 这里的 y_i, 相应于 (8), (9) 中的 x_i, (15) 中 λ, α 由 $\hat{\lambda} = e^{\hat{\mu}}, \hat{\alpha} = \dfrac{1}{\hat{\sigma}}$ 代入.

(b), (c) 两步同前. 此时若检验通过, 表示有序样本 (12) 来自韦布尔总体 (3).

注记 2 若要检验样本 (12) 是否来自指数总体, 则相当于检验 (12) 来自形状参数 $\alpha = 1$ 的韦布尔分布. 此时只要按注记 1 中情形 0, 情形 1 去处理.

§10.3 Γ 分布的参数估计

设随机变量 X 有 $\Gamma(\alpha, \lambda; t)$ 分布, 其密度为

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \alpha, \lambda > 0 \tag{1}$$

其中 α 是形状参数, λ 是尺度参数. 易见

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}X = \frac{\alpha}{\lambda^2} \tag{2}$$

本节简单介绍当总体有密度函数 (1) 时, 如何由一组完全样本 $X_1, \cdots, X_n$ 来推断未知参数 α 和 λ.

此时 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的极大似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{\lambda^{\alpha n}}{\Gamma^n(\alpha)} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1} e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^n x_i} \tag{3}$$

α 和 λ 的MLE $\hat{\alpha}, \hat{\lambda}$ 由 $\dfrac{\partial}{\partial \alpha} \ln L = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial \lambda} \ln L = 0$ 解出. 即解

$$\psi(\hat{\alpha}) - \ln \hat{\alpha} = \ln x_g - \ln \bar{x} \tag{4}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\alpha}}{\bar{x}} \tag{5}$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \tag{6}$$

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x), \, x > 0 \tag{7}$$

定理 10.3.1 (4) 式有唯一解 $0 < \hat{\alpha} < \infty$.

证明 因 (见 [14])

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\psi(x) - \ln x] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} - \frac{1}{x} \\ &> \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \frac{1}{x} \\ &= 0, \quad x > 0\end{aligned}$$

表明 $\psi(x) - \ln x$ 是 x 的严格增函数. 但是由[14]

$$\psi(x) = \ln x - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{x+k} - \ln\left(1 + \frac{1}{x+k}\right)\right]$$

知, $\lim\limits_{x\to 0+}[\psi(x) - \ln x] = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[\psi(x) - \ln x] = 0$. 注意到当 $x_1, \cdots, x_n$ 不全相等时, 几何平均小于算术平均, 故 (4) 式右边小于 0. 因此, 方程 (4) 对 $\hat{\alpha}$ 必有唯一的正有限解. 证毕.

由于方程 (4) 的求解并不容易, 实用上有许多近似方法. $\hat{\alpha}$ 的一个很好的经验近似公式为[50]

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{s}(0.5000876 + 0.1648852s - 0.0544274s^2), & 0 < s \leqslant 0.5772 \\ \dfrac{8.898919 + 9.059950s + 0.9775373s^2}{s(17.79728 + 11.968477s + s^2)}, & 0.5772 < s \leqslant 17 \end{cases}$$

其中 $s = \ln \bar{x} - \ln x_g$. 公式的相对误差小于 0.0001.

另一种近似解的方法是利用矩法, 即由

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \bar{x}, \quad \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

解出

$$\tilde{\lambda} = \frac{(n-1)\bar{x}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \tilde{\alpha} = \bar{x}\tilde{\lambda}$$

§10.4 对数正态及正态分布的参数估计

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 即有密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(x-\mu)^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

则非负随机变量 $Y = e^X$ 遵从对数正态 (μ, σ^2) 分布. Y 有密度函数

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - \mu)^2\right\}, \quad y > 0 \tag{2}$$

本节假定一组样本来自对数正态总体 (2), 讨论其未知参数 μ 和 σ^2 的估计问题.

由于对数正态与正态之间的关系, 因此可先把来自总体 (2) 的一组样本 $Y_1, \cdots, Y_n$ 取对数得

$$X_i = \ln Y_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

则 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自总体 (1) 的一组样本. 所以, 下面只对来自正态总体 (1) 的一组样本进行讨论, 先对完全样本, 然后是不完全样本的情形.

§10.4.1 完全样本情形

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自 (1) 的一组样本. 熟知 μ 和 σ^2 的 MLE 为

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{5}$$

σ^2 的另一个常用的估计量为样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{6}$$

注意到 $Z_1 = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S$ 遵从自由度为 $n-1$ 的 t 分布 t_{n-1}, $Z_2 = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, 因此可分别得到 μ 与 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\mu: \left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$\sigma^2: \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

这里 $\bar{x}, s$ 分别为样本观察值按 (4), (6) 算得, 而 $t_{n-1}(\beta), \chi^2_{n-1}(\beta)$ 分别为 t_{n-1}, χ^2_{n-1} 的 β 分位点.

§10.4.2 截尾数据下参数的 MLE

只讨论 $(n, r,$ 无$)$ 及 $(n, T_0,$ 无$)$ 方案下未知参数 μ 和 σ^2 的估计.

假定在 $(n, T_0,$ 无$)$ 方案下, 试验终止时也获得了 r 个失效数据. 把 $(n, r,$ 无$)$, $(n, T_0,$ 无$)$ 方案所得数据排列为

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r$$

与韦布尔模型中的处理相仿, 令

$$x_s = \begin{cases} x_r, \text{ 在}(n, r, \text{无})\text{方案中} \\ T_0, \text{ 在}(n, T_0, \text{无})\text{方案中} \end{cases}$$

则似然函数为

$$L = \left[\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_s}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx\right]^{n-r} \tag{7}$$

若记 $N(0,1)$ 的密度为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty \tag{8}$$

分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt, \quad -\infty < x < \infty \tag{9}$$

失效率函数为

$$V(x) = \frac{\phi(x)}{\bar{\Phi}(x)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \bar{\Phi} = 1 - \Phi \tag{10}$$

则由 (7) 可得

$$\ln L = c - r\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(x_i-\mu)^2 + (n-r)\ln\bar{\Phi}\left(\frac{x_s-\mu}{\sigma}\right) \tag{11}$$

其中 c 是与 μ,σ^2 无关的常数. 于是 μ,σ 的 MLE 由 $\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L=0,\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L=0$ 解出. 显然

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(x_i-\mu)+\frac{1}{\sigma}(n-r)V\left(\frac{x_s-\mu}{\sigma}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L=-\frac{r}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{r}(x_i-\mu)^2+(n-r)\frac{x_s-\mu}{\sigma^2}V\left(\frac{x_s-\mu}{\sigma}\right) \tag{13}$$

若引进

$$z_i=\frac{x_i-\mu}{\sigma},\quad i=1,\cdots,r,s \tag{14}$$

则由 (12), (13), 似然方程为

$$\sum_{i=1}^{r}z_i+(n-r)V(z_s)=0 \tag{15}$$

$$-r+\sum_{i=1}^{r}z_i^2+(n-r)z_sV(z_s)=0 \tag{16}$$

通常可由牛顿–拉夫森 (Newton-Raphson) 方法迭代解出 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$.

我们介绍另一种解极大似然方程 (15), (16) 的迭代方法.

先注意如下一个简单事实.

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$$E(X|X\geqslant x_s)=\mu+\sigma V(z_s) \tag{17}$$

这里 V 由 (10), z_s 由 (14) 给出.

于是令

$$\begin{cases}w_i=x_i,\quad i=1,\cdots,r\\ w_i=\mu+\sigma V(z_s),\quad i=r+1,\cdots,n\end{cases} \tag{18}$$

表示 $w_1,\cdots,w_r$ 是未截尾下的样本, 而 $w_{r+1},\cdots,w_n$ 是在 x_s 截尾下的不完全样本. 此时极大似然方程 (15), (16) 变为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i-\mu}{\sigma}=0 \tag{19}$$

$$-r+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i-\mu}{\sigma}\right)^2-(n-r)U(z_s)=0 \tag{20}$$

其中

$$U(z)=V(z)[V(z)-z] \tag{21}$$

注意, (20) 式的导出利用了 (17).

若 (19), (20) 中的所有 w_i 及 $U(z_s)$ 都已知, 则由它们可直接解出 μ 和 σ

$$\tilde{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i \tag{22}$$

$$\tilde{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}(w_i-\tilde{\mu})^2/[r+(n-r)U(z_s)] \tag{23}$$

当然, 事实上 $w_i(i=r+1,\cdots,n)$ 及 $U(z_s)$ 中都含有未知参数 μ 和 σ, 因此不能由 (22), (23) 解出 μ 和 σ. 但是由此可得如下迭代格式.

给定初值 (μ_0,σ_0), 由 (18) 算出所有 $w_i, i=1,\cdots,n$. 由 (21) 算出 $U(z_s)$, 则由 (22), (23) 可得 (μ_1,σ_1). 重复上述步骤即可得所求之 MLE $\hat{\mu},\hat{\sigma}$.

关于初值 (μ_0,σ_0), 可如下选取

$$\mu_0=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_s\right] \tag{24}$$

$$\sigma_0=\left\{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{r}(x_i-\mu_0)^2+(n-r)(x_s-\mu_0)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

上面的算法一般都需利用计算机. 但也有一些较好的近似公式来计算 $\bar{\Phi}(x)$ 及 $V(x)$. 例如

$$\bar{\Phi}(x)=\phi(x)(a_1t+a_2t^2+a_3t^3)$$

其中

$$t=\frac{1}{1+px},\quad p=0.33267$$

$$a_1=0.4361836,\quad a_2=-0.1201676,\quad a_3=0.9372980$$

对所有 x, 近似的误差 $< 10^{-5}$. 当 $|x| \leqslant 7$ 时, $V(x)$ 可由 $\phi(x)/\bar{\Phi}(x)$ 直接计算, 而当 $|x| > 7$ 时

$$V(x) \approx \frac{x}{1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{15}{x^6}}$$

例 10.4.1 假定 $(n, r, \text{无})$ 方案. $n = 10, r = 8$. 寿命数据按序排列为 (单位: 小时)

$$403.4,\ 620.2,\ 871.3,\ 1176.1,\ 1636.0,\ 2121.8,\ 3294.5,\ 4447.1$$

假定数据来自对数正态分布, 则上述数据的对数值为

$$6.00,\ 6.43,\ 6.77,\ 7.07,\ 7.40,\ 7.66,\ 8.10,\ 8.40$$

对这组数据由 (24), (25) 得初值 $\mu_0 = 7.46, \sigma_0 = 0.88$. 而迭代所得之 MLE 为

$$\hat{\mu} = 7.58, \quad \hat{\sigma} = 1.00$$

因此平均寿命的 MLE 为

$$e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} = e^{8.08} = 3229(\text{小时})$$

§10.5 可靠度的非参数估计

在参数模型中, 模型 (即总体的分布类型) 假定是已知的. 这可以由以往寿命数据分析所积累的经验或失效机理分析来判断总体的分布类型. 因此, 参数模型中核心的问题是如何由一组寿命数据 (通常是不完全的), 来估计未知参数, 以及判断模型是否选择得当.

但是, 在实际中有许多情形使得没有一个现实的基础来选择一个特定的参数模型. 例如, 对一个新试制的产品, 事先可能就没有足够的信息来断言其寿命属于哪个分布类. 因此, 不依赖于分布类型的非参数方法是一个合适的工具.

本节简单介绍估计可靠度函数或生存函数的乘积限估计法 [48]. 这种方法是在对疾病治疗效果评定的研究中提出的.

通常患某种疾病的个体接受一种治疗后的效果可以用生存时间 X 来衡量. 显然, X 是一个非负随机变量, 其概率规律可用它的分布函数 $F(t) = P\{X \leqslant t\}$ 或生存函数 $\bar{F}(t) = R(t) = P\{X > t\}$ 来反映. 我们希望能够通过一组样本来估计 $F(t)$ 或 $R(t)$, 以及其它一些定量指标, 如平均寿命, 或生存 1 年, 2 年, 5 年

以上的概率等等. 这类问题在生物统计, 临床试验结果比较等研究中是典型的. 由此所发展的方法亦适用于寿命试验中对可靠度函数的估计.

为了保留原问题提出的背景, 下面采用医学临床试验中的用语.

假定有 n 个患某种疾病的个体接受一种治疗. 如果能够观察到所有受试者的生存时间 (寿命)$x_1,\cdots,x_n$, 则可用通常的经验分布函数

$$F_n(t)=\frac{1}{n}\{x_1,\cdots,x_n\text{中}\leqslant t\text{的个数}\} \tag{1}$$

来估计总体 (某种疾病接受一种治疗后的生存时间) 的分布函数 $F(t)$. 从而获得上述其它数量指标的非参数估计. 但是, 在许多问题中只能观察到

$$y_i=x_i\wedge t_i,\quad i=1,\cdots,n \tag{2}$$

其中 t_i 为对第 i 个受试者的观察 (截尾) 时间. 引进

$$\delta_i=\begin{cases}1, & \text{若 } x_i\leqslant t_i\\ 0, & \text{若 } x_i>t_i,\end{cases}\quad i=1,\cdots,n \tag{3}$$

用来表明对第 i 个受试者的观察是否截尾. 因此, 对 n 个受试者可得如下数据

$$(y_i,\delta_i),\quad i=1,\cdots,n \tag{4}$$

问题为如何由 (4) 估计生存函数 $R(t)$.

我们需要的一个假定是观察时间 t_i 与生存时间 x_i 独立, $i=1,\cdots,n$.

记 $y_1,\cdots,y_n$ 的顺序量为 $y_{(1)}<y_{(2)}<\cdots<y_{(n)}$. 先假定诸 y_i 中无相等的对. $\delta_{(i)}$ 为相应于 $y_{(i)}$ 的 δ 值. $I_i=(y_{(i-1)},y_{(i)}],i=1,\cdots,n$. 约定 $y_{(0)}=0$.$(y_{(i)},\delta_{(i)})$ 的示意图如下 (图 10.4).

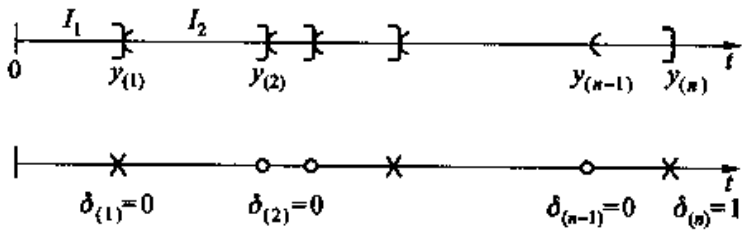


图 10.4 $(y_{(i)},\delta_{(i)})$ 示意图
○ 表示截尾 × 表示不截尾

再记

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t) &= \text{在时刻}t-\text{仍生存的受试者的集合}.\\ n_i &= \mathcal{R}(y_{(i)})\text{中的个数} = n-i+1\\ p_i &= P\{X > y_{(i)} | X > y_{(i-1)}\}\\ q_i &= 1-p_i\\ d_i &= \text{在时刻}\, y_{(i)}\, \text{死亡的人数}\end{aligned}$$

显然, q_i, p_i 可以如下估得

$$\hat{q}_i = \frac{d_i}{n_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{n_i}, & \text{若}\delta_{(i)} = 1 \\ 0, & \text{若}\delta_{(i)} = 0 \end{cases} = \frac{\delta_{(i)}}{n_i} = \frac{\delta_{(i)}}{n-i+1} \tag{5}$$

$$\hat{p}_i = 1 - \hat{q}_i = \left(1 - \frac{1}{n-i+1}\right)^{\delta_{(i)}} \tag{6}$$

对于任意的 $t > 0$, 必存在下标 i 使 $y_{(i)} \leqslant t < y_{(i+1)}$. 因此, 时刻 t 的生存函数 $R(t)$ 近似地为

$$R(t) = P\{X > t\} \approx p_1 p_2 \cdots p_i = \prod_{\{j: y_{(j)} \leqslant t\}} p_j$$

因而生存函数 $R(t)$ 的非参数估计为

$$\hat{R(t)} = \prod_{\{j: y_{(j)} \leqslant t\}} \hat{p}_j = \prod_{\{j: y_{(j)} \leqslant t\}} \left(1 - \frac{1}{n-j+1}\right)^{\delta_{(j)}} \tag{7}$$

上述 $\hat{R}(t)$ 称作 $R(t)$ 的乘积限估计.

对于一般情形, 有如下两点需要注意.

1) 对有相等对的完全观察, 即在同一时刻有一个以上死亡时, 如在 $y_{(i)}$ 以前有 n_i 个受试者生存着, 在时刻 $y_{(i)}$ 有 d_i 个死亡, 此时乘积限估计中的 $\hat{q}_i, \hat{p}_i$ 由下两式代替

$$\hat{q}_i = \frac{d_i}{n_i} \tag{8}$$

$$\hat{p}_i = 1 - \hat{q}_i = 1 - \frac{d_i}{n_i} \tag{9}$$

2) 若完全观察 (即未截尾) 时间与某些不完全观察时间相等时, 则把完全观察时间看成在不完全观察前一点.

做了上述修改后, 对一般情形可归纳如下. 令

$$y'_{(1)} < y'_{(2)} < \cdots < y'_{(r)}$$

表示观察所得的不同数据.

$$\delta'_{(i)} = \begin{cases} 1, \text{若} y'_{(i)} \text{是一个完全观察}, \\ 0, \text{若} y'_{(i)} \text{是一个不完全观察}, \end{cases} \quad i = 1, \cdots, r$$

$$n_j = \mathcal{R}(y'_{(i)}) \text{中的个数} = y'_{(j)} - \text{仍生存的受试个体数}$$

$$d_j = \text{在时刻} y'_{(j)} \text{死亡的数目}$$

于是生存函数 $\hat{R}(t)$ 的乘积限估计为

$$\hat{R}(t) = \prod_{\{j: y'_{(j)} \leqslant t\}} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right)^{\delta'_{(j)}} \tag{10}$$

注意到如下事实可使 $\hat{R}(t)$ 的计算简单些. 若 $y'_{(i)}$ 是一个不完全的观察, 并且没有完全观察的数字与其相等, 则

$$\hat{R}(t) = \hat{R}(y'_{(i-1)}), \quad y'_{(i-1)} \leqslant t < y'_{(i+1)}$$

文献 [48] 还给出了 $\hat{R}(t)$ 估计的方差的估计. 当所得数据无相等对时

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{R}(t)) &= \hat{R}^2(t) \sum_{\{i: y_{(i)} \leqslant t\}} \frac{\hat{q}_i}{n_i \hat{p}_i} \\ &= \hat{R}^2(t) \sum_{\{i: y_{(i)} \leqslant t\}} \frac{\delta_{(i)}}{(n-i)(n-i+1)} \end{aligned} \tag{11}$$

当数据有相等对时

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{R}(t)) &= \hat{R}^2(t) \sum_{\{j: y'_{(j)} \leqslant t\}} \frac{\hat{q}_j}{n_j \hat{p}_j} \\ &= \hat{R}^2(t) \sum_{\{j: y'_{(j)} \leqslant t\}} \frac{d_j \delta'_{(j)}}{n_j (n_j - d_j)} \end{aligned} \tag{12}$$

下面, 举一个医学临床试验的例子.

例 10.5.1 为评定急性骨髓性白血病对维持性化疗的效果, 患者经过化疗达到缓解状态后随机地分成两组, 第 I 组接受维持性化疗, 第 II 组未接受. 试验的目的是研究化疗维持是否延长缓解 (疾病复发前的) 时间. 两组数据为

完全缓解的时间长度 (周)

I 组 $9, 13, 13+, 18, 23, 28+, 31, 34, 45+, 48, 161+ \ (n = 11)$

II 组 $5, 5, 8, 8, 12, 16+, 23, 27, 30, 33, 43, 45 (n = 12)$

其中数字后标以 + 号者为截尾数据.

对第 I 组

$y'_{(j)}$	9,	13,	18,	23,	31,	34,	48
n_j	11	10	8	7	5	4	2
d_j	1	1	1	1	1	1	1

按 (10) 算得

t	$[0,9)$	$[9,13)$	$[13,18)$	$[18,23)$
$\hat{R}(t)$	1	0.91	0.82	0.72
t	$[23,31)$	$[31,34)$	$[34,48)$	$[48,\infty)$
$\hat{R}(t)$	0.61	0.49	0.37	0.18

其中 $\hat{R}(t)$ 可如下算得, 例如

$$\hat{R}(18) = \hat{R}(13)\frac{7}{8} = 0.72$$

由 (12) 也可算出 $\hat{R}(t)$ 的方差的估计量. 例如

$$\mathrm{Var}(\hat{R}(24)) = \hat{R}^2(24)\left(\frac{1}{11\times 10} + \frac{1}{10\times 9} + \frac{1}{8\times 7} + \frac{1}{7\times 6}\right) = 0.0233$$

对第 II 组

$y'_{(j)}$	5,	8,	12,	23,	27,	30,	33,	43,	45
n_j	12	10	8	6	5	4	3	2	1
d_j	2	2	1	1	1	1	1	1	1

按 (10) 有

t	$[0,5)$	$[5,8)$	$[8,12)$	$[12,23)$	$[23,27)$
$\hat{R}(t)$	1	0.83	0.67	0.58	0.49
t	$[27,30)$	$[30,33)$	$[33,43)$	$[43,45)$	$[45,\infty)$
$\hat{R}(t)$	0.39	0.29	0.19	0.10	0

以及

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{R}(24)) = \hat{R}^2(24)\left(\frac{2}{12\times 10}+\frac{2}{10\times 8}+\frac{1}{8\times 7}+\frac{1}{6\times 5}\right) = 0.0219$$

上面的计算表明, 组 II(非维持组) 的生存函数 $R(t)$ 的估计的方差小些. 其原因是组 II 的不完全数据少些.

组 I 及 II 的 $\hat{R}(t)$ 见图 10.5. 显然, 接受维持性化疗的患者, 其缓解期比对照组 II 要长得多.

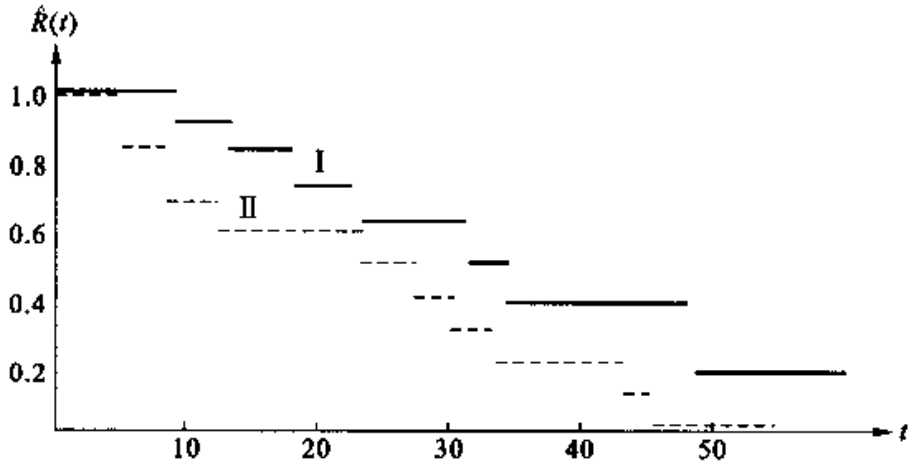
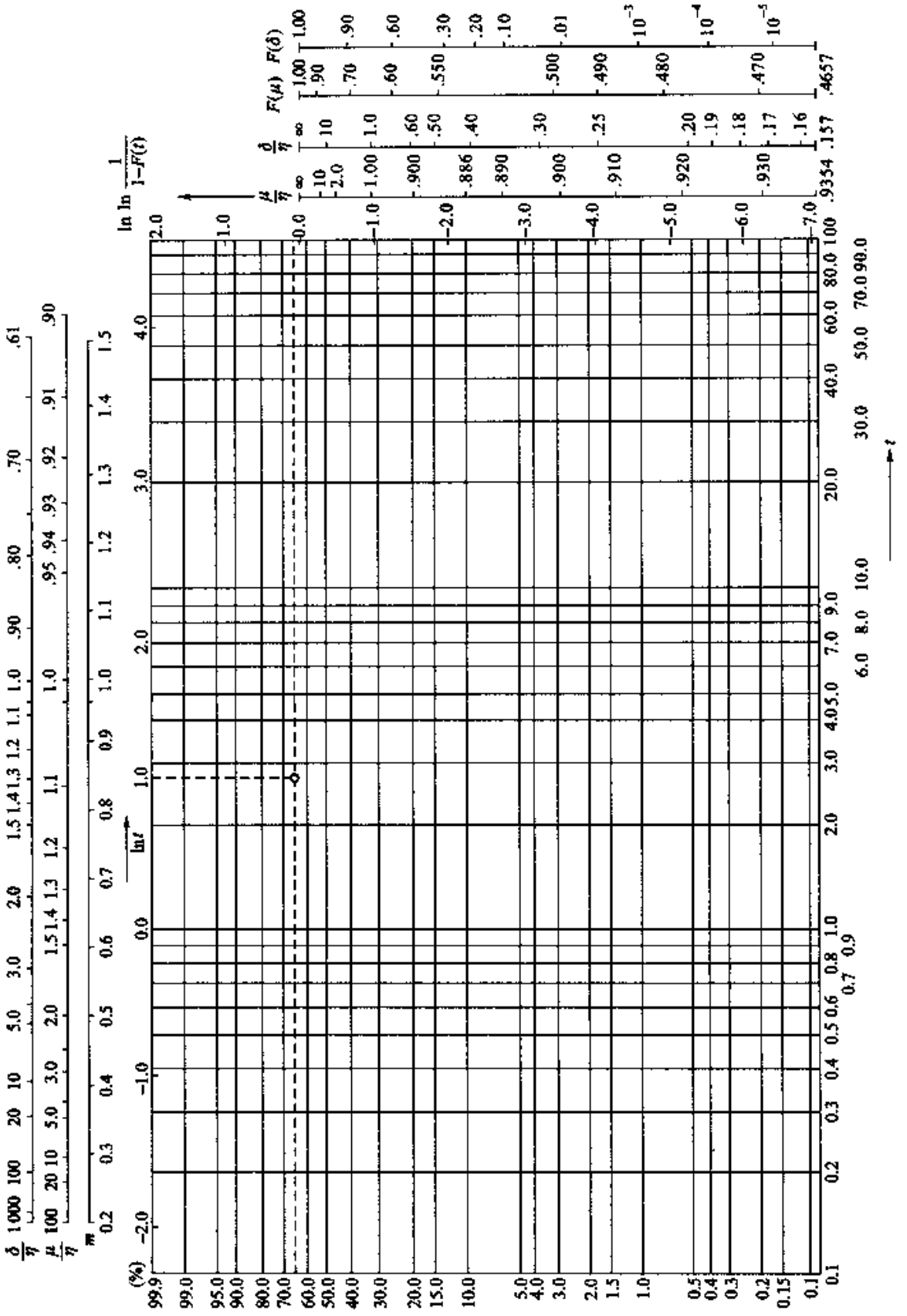


图 10.5 I, II 组 $\hat{R}(t)$



韦布尔分布概率纸

第十一章　可修系统故障数据分析

通常, 一个系统是由许多部件组成的. 因此, 如何由我们所能获得的系统或部件的故障数据来定量评定系统的可靠性性能, 就成了一个非常重要的问题. 其中较典型的统计问题有如下两个.

在系统的研制阶段, 对组成系统的 k 个部件可以做试验. 例如, 对第 i 个部件做了 n_i 次试验 $(i = 1, \cdots, k)$, 可能获得的数据是 (a) n_i 次试验中有 l_i 次成功, 即部件满足其性能要求, $n_i - l_i$ 次失效; 或者是 (b) 部件 i 的 n_i 次试验的寿命长度 $x_{i1}, \cdots, x_{in_i}$. 问题是如何分析 (a), (b) 所得之数据. 上述类型的数据也出现在系统本身无法做试验来获得其寿命数据的情形.

当系统投入运行之后, 作为完成预定功能的一个整体来讲, 我们可以获得依时间顺序的系统相邻故障间隔或相继故障时刻. 问题也是如何分析这些数据.

第一个问题通常称为系统性能的综合, 第二个问题称作可修系统故障数据分析. 统计分析所面临的问题是如何由这些数据来定量评定系统的可靠性. 本章只对第二个问题讨论其统计处理方法.

对可修系统故障数据的分析方法进行讨论, 有两方面的意义. 首先是实际的需要. 因为由于费用、资源等各方面的限制, 大部分系统, 特别是复杂系统都不是一次性使用的, 而是在发生故障时可予修理, 使其恢复预定的功能. 其次, 从方法上讲, 对可修系统故障数据的分析, 不能直接套用来自同一总体的简单随机样本的方法.

我们将说明可修系统故障数据的特点, 然后介绍几个适合于描述可修系统的随机过程模型, 其中包括时齐、非时齐泊松过程及更新过程, 并简要地讲述统计分析方法, 最后是推广及应用.

§11.1 可修系统故障数据的特点

前两章简单地介绍了可靠性中寿命数据的分析方法. 虽然由于有各种不同形式的截尾使得分析起来比完全样本要复杂得多, 但是处理方法总是遵循着这样一个基本出发点: 受试样本是简单随机样本, 即它们是来自同一个总体的独立同分布的随机变量. 因此, 对同型元器件或不可修系统的寿命数据分析, 可用上述介绍的方法.

对于可修复的系统, 研究的对象常常是单个系统随时间运行的性能变化. 由于系统是可修的, 故障后经过修复重新投入运行. 因此, 若不考虑修理所花的时间, 可以获得的数据是依时间顺序记录下来的系统相邻故障的间隔

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{1}$$

实际感到兴趣的问题是由 (1) 来评定系统的运行是否随时间的增大而劣化, 或得到改善. 根据对这个问题的回答, 我们才有可能采取适当的预防性维修或更换策略.

按实际所获数据 (1) 进行统计分析时, 通常在概率模型的理论分析中所作的"修复如新", 即相邻故障间隔独立同分布就不一定成立了. 因为对一个可修复系统来讲, 可能由于老化、磨损、疲劳等原因使得相邻的故障间隔时间缩短; 或者由于磨合, 运行经验的积累, 合理的维护、使用和管理, 使得相邻的故障间隔变大.

因此, 可修系统相邻故障间隔的特点是数据 (1) 不一定是独立的来自同一总体的简单随机样本. 所以需要进一步探讨处理这类数据的方法.

为了能够反映相邻故障间隔之间的某种相依性, 下节介绍几个随机过程的模型.

§11.2 描述可修系统的随机过程模型

我们的目的是研究一个可修系统随时间的运行性能变化, 因此不考虑修理时间, 于是系统故障发生的时刻可以看成时间轴上的一些随机点, 因而能够用随机点过程来描述. 本节将介绍时齐与非时齐泊松过程, 以及更新过程.

先引进记号.

设一个可修系统从 $t=0$ 开始运行, 相继故障时刻为 $T_1, T_2, \cdots$, 约定 $T_0=0$. 假定不计修理时间. 记

$$X_i = T_i - T_{i-1}, \quad i=1,2,\cdots \tag{1}$$

为相邻故障间隔 (图 11.1)

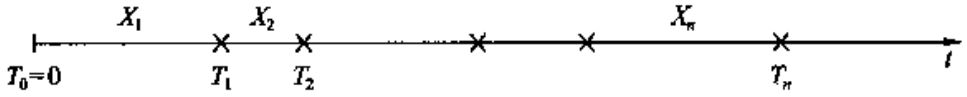


图 11.1 可修系统随时间 t 的进程

§11.2.1 时齐泊松过程模型

在第一章 §1.2 中已给出了时齐泊松过程 (为简单起见, 省略时齐两字, 记作 HP) 的定义, 为了方便简述如下.

记

$$N(t) = (0,t] \text{中系统故障次数} \tag{2}$$

定义 11.2.1 满足如下三条的一个随机过程 $\{N(t);\ t\geqslant 0\}$ 是**HP**

(a) $N(0)=0$.

(b) $N(t)$ 具有独立增量. 即对任意 n 及不相交的区间 $(a_i,b_i]$, $i=1,\cdots,n$, $N(b_i)-N(a_i)$ 互相独立, $i=1,\cdots,n$.

(c) 对任意的 $0\leqslant t<s$, $N(s)-N(t)$ 为参数 $\lambda(s-t)$ 的泊松分布, 即

$$P\{N(s)-N(t)=k\} = \frac{[\lambda(s-t)]^k}{k!}\exp\{-\lambda(s-t)\} \qquad k=0,1,\cdots \tag{3}$$

HP 的基本性质有:

性质 1 相邻故障间隔 $\{X_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 独立同分布, 有参数 λ 的指数分布

$$F(t) = 1-e^{-\lambda t}, \quad t\geqslant 0 \tag{4}$$

事实上这个性质亦可作为 HP 的等价定义.

性质 2 任意一个长度为 t 的区间中的平均故障次数为

$$EN(t) = \lambda t$$

因此, 单位时间中的平均故障数为

$$\frac{1}{t}EN(t) = \lambda = 常数 \tag{5}$$

性质 3 在 $N(t) = n$ 的条件下, 头 n 个故障时刻 $T_1, \cdots, T_n$ 与 $(0, t)$ 上独立均匀分布的随机变量 $U_1, \cdots, U_n$ 的顺序量 $U_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant U_{(n)}$ 有相同分布. 即在 $N(t) = n$ 下, $T_1, \cdots, T_n$ 的联合密度为

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t \tag{6}$$

性质 4 在已知第 n 个故障发生的时刻 $T_n = t$ 的条件下, 头 $n-1$ 个故障发生时刻 $T_1, \cdots, T_{n-1}$ 与 $(0, t)$ 上独立均匀分布的随机变量 $U_1, \cdots, U_{n-1}$ 的顺序量 $U_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant U_{(n-1)}$ 有相同的分布. 即在 $T_n = t$ 下, $T_1, \cdots, T_{n-1}$ 有联合密度

$$f(t_1, \cdots, t_{n-1} | T_n = t) = \frac{(n-1)!}{t^{n-1}}, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n-1} \leqslant t \tag{7}$$

性质 3 和性质 4 分别是下面定理 11.2.3 和定理 11.2.4 的特例.

容易看出, 若一个可修系统的故障相继发生时刻 $T_1, T_2, \cdots$ 可以用 HP 中事件发生时刻来描述, 则由性质 1, 相邻故障间隔 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 必遵从指数分布 (4). 这表明 HP 模型描述的是具有如下特征的可修系统: (a) 系统的寿命有参数 λ 的指数分布; (b) 系统故障后修复如新, 即相继的故障间隔独立同分布.

因此, 若有一串相邻故障间隔的数据 $x_1, \cdots, x_n$, 要想利用 HP 模型, 则必须验证 $x_1, \cdots, x_n$ 是来自总体 (4) 的一组简单样本. 我们将在 §11.3, §11.4 介绍检验的方法.

若 HP 模型不能使用, 则可考虑如下两种推广: 非时齐泊松过程模型或更新过程模型.

§11.2.2 非时齐泊松过程模型

当可修系统的相邻故障间隔呈某种趋势时, 可用非时齐泊松过程 (简记 NHP) 模型来描述, 它是 HP 模型的推广.

定义 11.2.2 $\{N(t);t \geqslant 0\}$ 称作是一个 NHP, 若满足定义 1 中 (a), (b) 及 (c)′ 对任意的 $0 \leqslant t < s$, 在 $(t,s]$ 中的故障数 $N(s)-N(t)$ 有参数 $\Lambda(t,s) = \int_t^s \lambda(u)du$ 的泊松分布

$$P\{N(s)-N(t)=k\} = \frac{[\Lambda(t,s)]^k}{k!}\exp\{-\Lambda(t,s)\}, \quad k=0,1,\cdots \tag{8}$$

这里 $\lambda(u)$ 是一个非负函数, 称作**强度函数**.

由下可见, 一般的 NHP, 相邻故障间隔 $\{X_i, i=1,2,\cdots\}$ 既不独立亦不同分布, 而且在同样长度的区间上, 平均故障不仅依赖于区间的长度, 还依赖于区间的起点. 由于这些特点, 它用来描述不是"修复如新"的可修系统. 记

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du \tag{9}$$

称作**累积强度函数**.

引理 11.2.1 设 $T_1,\cdots,T_n$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHP 的头 n 个事件发生的时刻, 则 $T_1,\cdots,T_n$ 的联合密度为

$$f(t_1,\cdots,t_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i)\exp\{-\Lambda(t_n)\}, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \tag{10}$$

特别, $T_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 的密度为

$$g(t) = \frac{[\Lambda(t)]^{j-1}}{(j-1)!}\lambda(t)\exp\{-\Lambda(t)\}, \quad t \geqslant 0 \tag{11}$$

证明 只证 (10). 对 $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$, 以及充分小的 $\Delta t_1,\cdots,\Delta t_n$,

$$\begin{aligned}
&P\{t_i \leqslant T_i \leqslant t_i+\Delta t_i,\ i=1,\cdots n\}\\
&= P\{N(t_1)-N(0)=0, N(t_1+\Delta t_1)-N(t_1)=1,\\
&\quad N(t_2)-N(t_1+\Delta t_1)=0, N(t_2+\Delta t_2)-N(t_2)=1,\cdots,\\
&\quad N(t_n+\Delta t_n)-N(t_n)=1\}\\
&= \exp\{-\Lambda(t_n+\Delta t_n)\}\prod_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i}\lambda(u)du
\end{aligned}$$

上面最后一个等号利用了定义 11.2.2 的 (b) 及 (c)′. 由此即得结论. 证毕.

引理 11.2.2 在引理 11.2.1 的条件下, 若有 $N(t)=n$, 则 $T_1,\cdots,T_n$ 的联合密度为

$$h(t_1,\cdots,t_n;N(t)=n)=\prod_{i=1}^{n}\lambda(t_i)\exp\{-\Lambda(t)\},$$
$$0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t \tag{12}$$

证明与引理 11.2.1 相仿.

引理 11.2.3 在 $T_j=t$ 的条件下

$$P\{X_{j+1}>x|T_j=t\}=\exp\{-[\Lambda(t+x)-\Lambda(t)]\},\quad x\geqslant 0 \tag{13}$$

证明

$$P\{X_{j+1}>x|T_j=t\}=P\{T_{j+1}-t>x|T_j=t\}$$
$$=P\{N(t+x)-N(t)=0\}=\exp\{-[\Lambda(t+x)-\Lambda(t)]\}$$

证毕.

由引理 11.2.1, 11.2.3 可见, 一般的 NHP 中 (除 HP), 相邻故隔间隔 $\{X_i,i=1,2,\cdots\}$ 既不独立, 亦不同分布.

与 HP 的性质相似, NHP 有性质

定理 11.2.1 记

$$Z_i=\int_{T_{i-1}}^{T_i}\lambda(u)du,\quad i=1,2,\cdots \tag{14}$$

则 $Z_1,\cdots,Z_n$ 独立同分布, 有参数为 1 的指数分布.

证明 记 $T_1,\cdots,T_n$ 的联合密度为 $f(t_1,\cdots,t_n)$. 对任意的 $z_i>0$,

$i=1,\cdots,n$

$$
\begin{aligned}
&P\{Z_i>z_i,i=1,\cdots,n\}\\
&=\int_{0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n} P\{Z_i>z_i,i=1,\cdots,n|T_i=t_i,i=1,\cdots,n\}\\
&\cdot f(t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_n\\
&=\int_{0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n} P\{\Lambda(t_{i-1},t_i)>z_i,i=1,\cdots,n|T_i=t_i,i=1,\cdots,n\}\\
&\cdot\prod_{i=1}^{n}\lambda(t_i)\exp\{-\Lambda(t_n)\}dt_1\cdots dt_n\\
&=\int_{0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n}\prod_{i=1}^{n}\left\{I^{(t_1,\cdots,t_n)}_{[(t_1,\cdots,t_n):\Lambda(t_{i-1},t_i)>z_i]}\lambda(t_i)e^{-\Lambda(t_{i-1},t_i)}\right\}dt_1\cdots dt_n\\
&=\int_{\mathcal{R}^n_+}\prod_{i=1}^{n}\left\{I^{(t_i)}_{[t_i:t_i\geqslant t_{i-1},\Lambda(t_{i-1},t_i)>z_i]}\lambda(t_i)e^{-\Lambda(t_{i-1},t_i)}dt_i\right\}\\
&=\int_{\mathcal{R}^n_+}\prod_{i=1}^{n}\left\{I^{(u_i)}_{(u_i:u_i>z_i)}e^{-u_i}du_i\right\}\\
&=\prod_{i=1}^{n}e^{-z_i}
\end{aligned}
$$

这里 $I_A(\cdot)$ 为 A 的示性函数. $\mathcal{R}^n_+=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\}$. 证毕.

定理 11.2.2 NHP 在 $(0,t]$ 中平均故障数为

$$EN(t)=\Lambda(t) \tag{15}$$

证明显然.

定理 11.2.3 在 $N(t)=n$ 的条件下, NHP 的头 n 个事件发生的时刻 $T_1,\cdots,T_n$ 与 n 个独立同分布随机变量 $U_1,\cdots,U_n$ 的顺序量 $U_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant U_{(n)}$ 同分布. 这里 U_i 有密度

$$p(u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(u)}{\Lambda(t)}, & 0\leqslant u\leqslant t\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{16}$$

证明 对任意的 $0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t$, 记在 $N(t)=n$ 时 $T_1,\cdots,T_n$ 的联合密度为 $f(t_1,\cdots,t_n;N(t)=n)$; 在 $N(t)=n$ 的条件下, $T_1,\cdots,T_n$ 的条件

密度为 $f(t_1,\cdots,t_n|N(t)=n)$. 故 $f(t_1,\cdots,t_n|N(t)=n)=f(t_1,\cdots,t_n;N(t)=n)/P\{N(t)=n\}$, 由引理 11.2.2 及 (8) 即可得

$$f(t_1,\cdots,t_n|N(t)=n)=n!\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda(t_i)}{\Lambda(t)},\quad 0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t$$

上式右端即为 $U_{(1)},\cdots,U_{(n)}$ 的联合密度. 证毕.

定理 11.2.4 在 $T_n=t$ 的条件下, NHP 的头 $n-1$ 个事件发生的时刻 $T_1,\cdots,T_{n-1}$ 与 $n-1$ 个独立同分布随机变量 $U_1,\cdots,U_{n-1}$ 的顺序量 $U_{(1)},\cdots,U_{(n-1)}$ 同分布, 这里 U_i 有密度 (16).

证明与定理 11.2.3 相仿.

下面讨论两类最简单且常用的 NHP.

1) 若 $N(t)$ 有强度函数

$$\lambda(t)=\lambda\beta t^{\beta-1},\quad t\geqslant 0,\quad \lambda,\beta>0 \tag{17}$$

文献中把 $N(t)$ 称作**韦布尔过程**. 此时累积强度函数为

$$\Lambda(t)=\lambda t^{\beta},\quad t\geqslant 0 \tag{18}$$

容易看出, 系统首次故障前的时间 X_1 有

$$P\{X_1>t\}=P\{N(t)=0\}=\exp\{-\Lambda(t)\}=\exp(-\lambda t^{\beta}),\quad t\geqslant 0$$

即 X_1 有韦布尔分布. 但是要特别注意, 系统的第二次、第三次…… 相邻故障间隔 $X_2,X_3,\cdots$ 都不是韦布尔分布.

对韦布尔过程, 当 $0<\beta<1$ 时, 相邻故障间隔呈现变大的趋势; $\beta>1$, 呈变小的趋势; $\beta=1$ 时即为 HP.

2) 另一类特殊的 NHP 有强度函数

$$\lambda(t)=\exp(\alpha+\beta t),\quad t\geqslant 0 \tag{19}$$

α,β 是任意实参数. 此时累积强度函数为

$$\Lambda(t)=\frac{e^{\alpha}}{\beta}(e^{\beta t}-1) \tag{20}$$

易见 $\beta=0$ 即为 HP; $\beta<0$ 时反映相邻故障间隔有变大的趋势; $\beta>0$ 时呈变小的趋势.

§11.2.3 更新过程模型

更新过程 (简记为 RP) 是 HP 的一个直接推广.

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布 $G(t), G(0-) = 0$. 记

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

约定 $T_0 = 0$.

$$N(t) = \sup\{n : T_n \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0 \tag{21}$$

定义 11.2.3 由 (21) 定义的 $\{N(t); t \geqslant 0\}$ 称作是一个**RP**.

显然, 若把 T_n 看成系统第 n 次失效的时刻, 失效后瞬时更换成同型系统, 则对固定的 t, $N(t)$ 是 $(0, t]$ 中系统失效的次数, 它是取非负整数的随机变量. 而且易见, 若 $G(t)$ 为参数 λ 的指数分布时, $N(t)$ 即 HP. 关于 RP 的性质, 读者可参阅第七章 §7.1.

由 RP 的定义知, 若把 X_i 看成相继故障的间隔, 则 RP 模型可用来描述"修复如新"的可修系统的运行特征.

§11.2.4 可修系统故障数据分析步骤

上面简单地介绍了可以用来描述可修系统的三个随机过程模型. 现在把对可修系统故障数据进行分析的步骤归纳如图 11.2.

上述步骤不是绝对的. 也可直接检验是否可用 HP 模型. 若否, 则可采用 NHP 模型. 当然, 从理论上讲仍需要验明 NHP 模型的适用性. 但是, 通常对可修系统故障数据分析的目的之一在于判断系统性能有否趋势性变化, 而在 NHP 模型中强度函数的选择又有很大灵活性, 故对我们的问题而言, NHP 模型在绝大多数情形下已够用. 因此, 这里不去进一步探讨其它更复杂的随机过程模型了. 以上理由也是在图 11.2 中对 NHP 模型不进行判别的原因.

§11.3 HP 模型的判别

由于 HP 模型最简单, 如果能够检验系统按时序出现的失效时刻遵从 HP, 则对指数总体的统计方法即可使用.

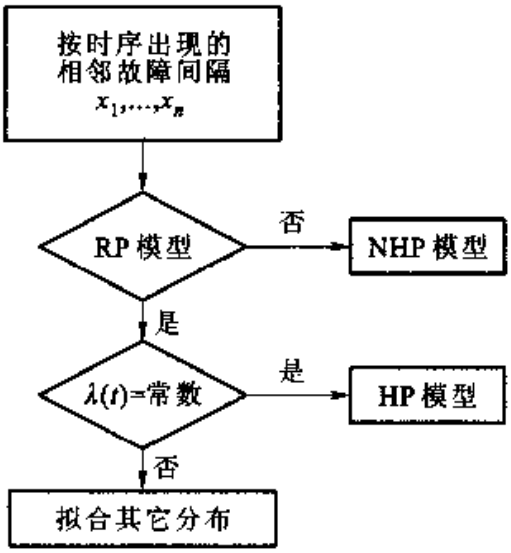


图 11.2 可修系统故障数据分析步骤

§11.3.1 观察定时结束的情形

设 t 固定. 假定在 $(0,t]$ 中观察到 n 个故障. 按时序记录的相邻故障间隔为

$$X_1,\cdots,X_n \tag{1}$$

第 i 次故障的时刻为

$$T_i=\sum_{j=1}^{i}X_j,\quad i=1,\cdots,n \tag{2}$$

检验 $H_0:T_1,\cdots,T_n$ 是 HP 中事件相继发生的时刻 (即 $X_1,\cdots,X_n$ 是 HP 中事件相继发生的间隔).

在 H_0 成立的条件下, 由 HP 的性质 3, $T_1,\cdots,T_n$ 与 $(0,t)$ 上独立均匀分布的随机变量 $U_1,\cdots,U_n$ 的顺序量 $U_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant U_{(n)}$ 同分布. 故由中心极限定理

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_i-\frac{t}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12n}t^2}}&=\sqrt{12n}\left(\frac{1}{nt}\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}-\frac{1}{2}\right)\\&=\sqrt{12n}\left(\frac{1}{nt}\sum_{i=1}^{n}T_i-\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

渐近 $N(0,1)$.

对较大的 n(如 $n \geqslant 6$), 可用 (3) 做显著性检验. 给定水平 α, 记 z_α 为 $N(0,1)$ 的上 α 分位点, 即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha$$

现若由 (1) 的一组观察值 $x_1, \cdots, x_n$, 以及 $t_i = \sum_{j=1}^{i} x_j, i = 1, \cdots, n$, 按 (3) 算出之

$$\left| \sqrt{12n} \left(\frac{1}{nt} \sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2} \right) \right| \geqslant z_{\frac{\alpha}{2}} \tag{4}$$

则在水平 α 上拒绝 H_0, 否则接受 H_0.

§11.3.2 观察定数结束的情形

若观察持续到第 n 个故障出现时结束, n 固定. 则得相邻故障间隔 (1). 由 HP 性质 4,

$$\sqrt{12(n-1)} \left\{ \frac{1}{(n-1)T_n} \sum_{i=1}^{n-1} T_i - \frac{1}{2} \right\} \tag{5}$$

渐近 $N(0,1)$. 因此, 若

$$\left| \sqrt{12(n-1)} \left\{ \frac{1}{(n-1)t_n} \sum_{i=1}^{n-1} t_i - \frac{1}{2} \right\} \right| \geqslant z_{\frac{\alpha}{2}} \tag{6}$$

则在水平 α 上拒绝 H_0, 否则接受 H_0.

例 11.3.1 [67] 给出了 7907 号波音 720 飞机空调器按时序的故障间隔

$$194, 15, 41, 29, 33, 181(\text{小时})$$

检验这组数据是否可看作 HP 中相邻事件发生的间隔.

显著性水平取 $\alpha = 0.05$, 则 $z_{0.025} = 1.96$, 由 (6)

$$\sqrt{12 \cdot 5} \left(\frac{1244}{5 \cdot 493} - \frac{1}{2} \right) = 0.036 < 1.96$$

故接受 H_0. 即认为空调器故障后“修复如新”, 其寿命服从指数分布.

我们用例来说明, 某些基于独立样本基础上的对于指数分布的检验方法, 不能用来检验 HP 模型.

例 11.3.2 仍用例 1 中数据, 但假定其出现顺序为

$$15, 29, 33, 41, 181, 194(\text{小时}) \tag{7}$$

若使用第九章 §9.7.2 中的 F 检验, 不难得到在 $\alpha = 0.02$ 或 $\alpha = 0.10$ 的水平上都接受样本来自指数总体的假定.

但是, 这个推理是错误的. 原因是 F 检验是基于样本独立同分布这一假定上的. 而在数据是按时序出现的相邻故障间隔的情形. 这一点 (独立同分布性, 或所谓"修复如新"的假定) 恰恰是需要检验的.

对这组相邻故障间隔数据 (11), 用 (6) 进行 HP 检验. 取 $\alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96$,

$$\sqrt{12 \cdot 5}\left(\frac{553}{5 \cdot 493} - \frac{1}{2}\right) = -2.14$$

其绝对值大于 1.96, 故在 $\alpha = 0.05$ 水平上拒绝 HP 模型, 而认为数据有增大的趋势.

§11.3.3 基于 HP 上的指数模型检验

根据 HP 的性质, 我们可以对一组随机样本检验其是否来自指数总体. 在完全样本时, 这只要把 $x_1, \cdots, x_n$ 看成相邻故障间隔, 再用 §11.3.1 或 §11.3.2 的方法去检验.

对于寿命试验所得之不完全数据, 则可按如下方法去检验总体是否遵从指数分布.

设无论是定时还是定数试验中, 所得之数据为

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(r)}$$

1) $(n, t_0,$ 有) 方案

在 (4) 中令 $t_i = x_{(i)}, i = 1, \cdots, r; t = t_0$, (4) 中 n 换成 r.

2) $(n, r,$ 有) 方案

在 (6) 中令 $t_i = x_{(i)}, i = 1, \cdots, r$; (6) 中 n 代以 r.

3) $(n, t_0,$ 无) 方案

令 $t_i = \sum_{j=1}^{i}(n - j + 1)(x_{(j)} - x_{(j-1)}), i = 1, \cdots, r, x_{(0)} = 0$

$$t = \sum_{j=1}^{r}(n - j + 1)(x_{(j)} - x_{(j-1)}) + (n - r)(t_0 - x_{(r)})$$

并把 (4) 中 n 代以 r.

4) $(n,r,$ 无$)$ 方案

令 $t_i=\sum_{j=1}^{i}(n-j+1)(x_{(j)}-x_{(j-1)})$, $i=1,\cdots,r, x_{(0)}=0$ 并把 (6) 中 n 换以 r.

做了上述变换后再做显著性检验. 此处方法的根据是 HP 的性质及第九章定理 9.2.1.

§11.4 RP 模型的判别

能否采用 RP 模型, 可以通过趋势检验或对 RP 的检验来判明. 本节简单介绍两种趋势检验的方法和一个检验 RP 的方法.

记号 X_i,T_i 的意思同 §11.3. 问题为

$$\text{检验}\quad H_0: X_1,\cdots,X_n\text{独立同分布} \tag{1}$$

§11.4.1 图示法

这是用目力通过图形来判断 H_0 不成立的最容易的方法. 记

$$N(t)=(0,t]\text{ 中故障次数} \tag{2}$$

从理论上讲, 若 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, 则相邻故障的平均间隔 EX_i 相同. 因此, 观察到的 $x_1,\cdots,x_n$ 应该无显著的趋势变化. 这可以通过 $n+1$ 个点

$$(t_i,N(t_i)),\ i=0,\cdots,n \tag{3}$$

的连线的图形来判断. 这里 $t_i=\sum_{j=1}^{i}x_j$, $i=1,\cdots,n$; $t_0=0$. 若它呈凸形, 则表明随时间的增大, 相邻故障间隔变小; 若呈凹形, 表明有变大的趋势; 若大体上呈直线状, 则可认为无变化的趋势. 因此, 当图形有显著的趋势变化时拒绝 H_0.

图示法适用于故障数据量较大的情形.

§11.4.2 趋势检验[45]

本节列出进行趋势检验的统计方法. 令

$$K=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}c(X_j-X_i) \tag{4}$$

其中

$$c(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

对给定的显著性水平 α 及 n, 由表 11.1 可查得 $x=k(\alpha,n)$. 这里 $\alpha=P_0\{K\geqslant x\}$ (P_0 为 H_0 成立下的概率).

若由一组相邻故障间隔的观察数据 $x_1,\cdots,x_n$ 按 (4) 算得之 $K\geqslant k(\alpha,n)$, 则拒绝 H_0, 表明数据随时间有变大的趋势; 若 $K<k(\alpha,n)$, 则接受 H_0.

相仿, 若 $K\leqslant -k(\alpha,n)$, 则拒绝 H_0, 表明数据随时间有变小的趋势; 反之接受 H_0.

双边检验时, 若 $|K|\geqslant k\left(\frac{\alpha}{2},n\right)$, 则拒绝 H_0; 反之接受 H_0.

$n\geqslant 10$ 时, 可用 K 渐近正态的性质. 即有

$$K^*=\frac{K-E_0K}{\sqrt{\mathrm{Var}_0K}}=\frac{K}{\sqrt{\frac{1}{18}n(n-1)(2n+5)}} \tag{5}$$

渐近 $N(0,1)$. 因此, 若

$$K^*\geqslant z_\alpha,\ \text{拒绝}H_0,\text{认为有变大趋势}$$
$$K^*<z_\alpha,\ \text{接受}H_0$$

其中 z_α 是 $N(0,1)$ 的上 α 分位数. 对于是否有变小趋势的检验或双边检验, 则相仿处理.

利用 (5) 时, 若数据 $x_1,\cdots,x_n$ 中有相同值时, 其中的 Var_0K 应作如下修改

$$\mathrm{Var}_0K=\frac{1}{18}\left\{n(n-1)(2n+5)-\sum_{i=1}^{h}u_j(u_j-1)(2u_j+5)\right\} \tag{6}$$

这里 h 为相等的数据组数, u_j 为其中第 j 组相等数据中的个数. 注意, 无相等数据时 $u_j=1$, (6) 化为 (5) 的情形.

说明: 对给定的 n, 表中数值为 $P_0\{K\geqslant x\}$.P_0 为 H_0 成立下的概率. 若 x 使得 $P_0\{K\geqslant x\}=\alpha$, 则 $k(\alpha,n)=x$.

例 11.4.1 数据同例 11.3.1, 检验 H_0.

表11.1

x \ n	4	5	8	9	x \ n	6	7	10
0	0.625	0.592	0.548	0.540	1	0.500	0.500	0.500
2	0.375	0.408	0.452	0.460	3	0.360	0.386	0.431
4	0.167	0.242	0.360	0.381	5	0.235	0.281	0.364
6	0.042	0.117	0.274	0.306	7	0.136	0.191	0.300
8		0.042	0.199	0.238	9	0.068	0.119	0.242
10		0.008	0.138	0.179	11	0.028	0.068	0.190
12			0.089	0.130	13	0.008	0.035	0.146
14			0.054	0.090	15	0.001	0.015	0.108
16			0.031	0.060	17		0.005	0.078
18			0.016	0.038	19		0.001	0.054
20			0.007	0.022	21			0.036

由 (4), $K=-5+4-1+2+1=1$. 对 $n=6, x=1$ 查表 11.1, $P_0\{K\geqslant 1\}=0.5$, 表明在 H_0 成立的条件下, $K\geqslant 1$ 发生的概率有 0.5, 因而说明数据无变化趋势, 接受 H_0.

若数据同例 11.3.2, 则

$$K=5+4+3+2+1=15$$

查表得 $P_0\{K\geqslant 15\}=0.001$. 这是一个小概率, 故拒绝 H_0, 表明数据有变大的趋势.

§11.4.3 RP 的检验 [51]

记

$$W=\sqrt{12(n-1)}\left\{\frac{1}{(n-1)T_n}\sum_{i=1}^{n-1}T_i-\frac{1}{2}\right\}\Big/\hat{c}(X) \tag{7}$$

其中 $\hat{c}(X)$ 是变异系数的估计, 即

$$\hat{c}(X)=\bar{X}\Big/\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

在 H_0 成立的条件下, W 渐近 $N(0,1)$. 因此可对 H_0 进行显著性检验. 给定水平 α, 若由观察值算得之 $|w| > z_{\frac{\alpha}{2}}$, 则拒绝 H_0; 否则接受 H_0.

例 11.4.2 数据同例 11.3.1. 则有 $\hat{c}(x) = 1.00048$,

$$w = \frac{0.036}{1.00048} = 0.036$$

对 $\alpha = 0.05$ 时, $z_{0.025} = 1.96$, 故接受 H_0.

若数据同例 11.3.2, 则 $\hat{c}(x) = 1.00048, w = -2.14$, 因此在 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0.

§11.5 两类特殊 NHP 模型的统计分析

本节简单讨论 §§11.2.2 中引入的两类特殊的 NHP 模型的参数估计问题.

§11.5.1 韦布尔过程

由 §§11.2.2, 韦布尔过程 $\{N(t); t \geqslant 0\}$ 的强度函数及累积强度函数分别为

$$\lambda(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda, \beta > 0 \tag{1}$$

$$\Lambda(t) = \lambda t^{\beta} \tag{2}$$

1) 定数观察情形

对事先指定的 n, 观察到第 n 个故障发生的时刻 t_n 终止. 可获得数据

$$0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \tag{3}$$

我们想用韦布尔过程来描述这个可修系统的故障时刻, 则必须由 (3) 估出 (1) 中的未知参数 λ 和 β. 下面给出 λ, β 的 MLE.

设 $T_1, \cdots, T_n$ 为韦布尔过程中头 n 个事件发生的时刻, 则由引理 11.2.1, $T_1, \cdots, T_n$ 的联合密度为

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \exp(-\lambda t_n^{\beta}) \prod_{i=1}^{n} (\lambda\beta t_i^{\beta-1}), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \tag{4}$$

则由 $\frac{\partial \ln f}{\partial \lambda}=0, \frac{\partial \ln f}{\partial \beta}=0$ 可解得 λ,β 的 MLE

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{T_n}{T_i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{T_n}{T_i}} \tag{5}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{T_n^{\hat{\beta}}} \tag{6}$$

下面的结果可用来对韦布尔过程的参数 $\beta,\lambda^{\frac{1}{\beta}}$ 作区间估计.

定理 11.5.1 $T_1,\cdots,T_n$ 为韦布尔过程中头 n 个事件发生的时刻, 则当 $T_n=t_n$ 已知时

(a) $2n\beta/\hat{\beta}\sim\chi^2_{2n-2}$

(b) $2\lambda T_n^{\beta}\sim\chi^2_{2n}$

(c) $\hat{\beta}\ln(\lambda^{\frac{1}{\beta}}T_n)$ 与 $2n\ln\frac{Y}{2}\Big/Z$ 同分布, 其中随机变量 Y,Z 独立, 分别有 χ^2_{2n} 及 χ^2_{2n-2}.

证明 (a) 由 (5)

$$\frac{2n\beta}{\hat{\beta}}=-2\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{\beta}$$

由定理 11.2.4, 在 $T_n=t_n$ 已知的条件下, $T_1,\cdots,T_{n-1}$ 与 $(0,t_n)$ 上的 $n-1$ 个独立同分布随机变量 $U_1,\cdots,U_{n-1}$ 的顺序量 $U_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant U_{(n-1)}$ 有相同分布. 其中 U_i 有密度 $p(u)=\frac{\lambda(u)}{\Lambda(t_n)}=\frac{\beta u^{\beta-1}}{t_n^{\beta}}$, $0\leqslant u\leqslant t_n$. 因此, $\left(\frac{T_1}{T_n}\right)^{\beta},\cdots,\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right)^{\beta}$ 与 $(0,1)$ 上独立均匀分布的随机变量 $V_1,\cdots,V_{n-1}$ 的顺序量 $V_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant V_{(n-1)}$ 同分布. 故 $-2\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{T_i}{T_n}\right)^{\beta}$ 与 $-2\sum_{i=1}^{n-1}\ln V_{(i)}=-2\sum_{i=1}^{n-1}\ln V_i$ 同分布. 但 $-2\ln V_i$ 独立同分布 $\chi^2_2, i=1,\cdots,n-1$. 故 $-2\sum_{i=1}^{n-1}\ln V_i\sim\chi^2_{2n-2}$. (a) 证毕.

(b) 由 §11.2, (11), T_n 的密度为

$$\frac{(\lambda t^{\beta})^{n-1}}{(n-1)!}\lambda\beta t^{\beta-1}\exp(-\lambda t^{\beta}),\quad t\geqslant 0$$

由此易得结论.

(c) $\hat{\beta}\ln(\lambda^{\frac{1}{\beta}}T_n)=\dfrac{\hat{\beta}}{\beta}\ln(\lambda T_n^{\beta})=2n\ln\dfrac{Y}{2}/Z$

其中 $Y=2\lambda T_n^{\beta}$, $Z=\dfrac{2n\beta}{\hat{\beta}}$. 下证 Y,Z 独立. 对任意的 $y,z\geqslant 0$,

$$P\{Y\leqslant y,Z\leqslant z\}=EI_AI_B \tag{7}$$

这里 $A=\{\omega:2\lambda T_n^{\beta}\leqslant y\}$, $B=\left\{\omega:-2\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\dfrac{T_i}{T_n}\right)^{\beta}\leqslant z\right\}$. I_A,I_B 是 A,B 的示性函数. 由条件期望性质, (7) 式右边为

$$E\{E(I_AI_B|T_n)\}=E\{I_AE(I_B|T_n)\}$$

但是

$$E(I_B|T_n)=P\left\{-2\sum_{i=1}^{n-1}\ln V_i\leqslant z\right\}=P\{Z\leqslant z\}$$

故

$$E\{I_AE(I_B|T_n)\}=P\{Z\leqslant z\}EI_A=P\{Z\leqslant z\}P\{Y\leqslant y\}$$

证毕.

由定理 11.5.1, 可得 β 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间

$$\left[\frac{\hat{\beta}}{2n}\chi^2_{2n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right),\frac{\hat{\beta}}{2n}\chi^2_{2n-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

相仿得 β 的单侧置信限.

而若记 $2n\ln\dfrac{Y}{2}\Big/Z$ 的 α 分位数为 $h(\alpha)$(可由计算机算出), 则 $\lambda^{\frac{1}{\beta}}$ 的 $1-\alpha$ 双侧置信区间为

$$\left[\frac{1}{T_n}\exp\left(\frac{1}{\hat{\beta}}h\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),\frac{1}{T_n}\exp\left(\frac{1}{\hat{\beta}}h\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$

2) 定时观察情形

观察在指定的时刻 t 终止. 设观察到 n 个故障, 可获数据

$$0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t \tag{8}$$

与 1) 中推导相仿, 可得 λ,β 的 MLE

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\dfrac{t}{T_i}} \tag{9}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{t^{\hat{\beta}}} \tag{10}$$

与定理 11.5.1 相仿, 有

定理 11.5.2 在 $N(t)=n$ 的条件下, $T_1,\cdots,T_n$ 为韦布尔过程中头 n 个事件发生的时刻, 则有

$$\frac{2n\beta}{\hat{\beta}}\sim\chi^2_{2n}$$

证明与定理 11.5.1(a) 相仿, 略.

由此得 β 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间

$$\left[\frac{\hat{\beta}}{2n}\chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right),\frac{\hat{\beta}}{2n}\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

相仿得 β 的单侧置信区间.

§11.5.2 第二类特殊的 NHP

在 §§11.2.2 中引人的另一个特殊的 NHP 有强度函数

$$\lambda(t)=e^{\alpha+\beta t},\quad t\geqslant 0 \tag{11}$$

α,β 任意实数.

1) 定数观察情形

观察结束时得数据 (3). α,β 的 MLE 由下两式解得

$$\sum_{i=1}^{n}t_i+\frac{n}{\beta}-\frac{nt_n}{1-e^{-\beta t_n}}=0 \tag{12}$$

$$e^{\alpha}=\frac{n\beta}{e^{\beta t_n}-1} \tag{13}$$

2) 定时观察情形

观察结束时得数据 (8). α,β 的 MLE 由下面两式解得

$$\sum_{i=1}^{n}t_i+\frac{n}{\beta}-\frac{nt}{1-e^{-\beta t}}=0 \tag{14}$$

$$e^{\alpha}=\frac{n\beta}{e^{\beta t}-1} \tag{15}$$

§11.5.3 例

某水电站的一台变压器自安装后依时序的相邻故障间隔为 (单位: 天)

I. $40, 77, 20, 36, 16, 77, 202, 17, 115, 11, 122, 68, 33, 19,$
$142, 62, 53; **(n = 17)$

II. $22, 309, 20, 138, 26, 87, 165, 88, 23, 27, 50, 10;$
$**(n = 12)$

III. $118, 183, 88, 372, 85, 145+; (n = 5)$

其中 ** 表示经过一次大修. III 中最后一个数据 145+ 表示在统计终止时变压器仍在正常工作.

为了分析三个阶段中变压器运行情况, 分别画出累积故障数 $(t_i, N(t_i))$ 的图形 (图 11.3). 由图可见, I 阶段的数据连线基本上呈直线, 故可用 RP 模型; II 的数据后期呈变小的趋势; 而 III 的数据大体上亦呈一直线, 也可用 RP 模型. 当然上述定性的结论还得进行下面的检验才能接受. 但是从图上亦可得出结论: 变压器的运行情况 III 比 II 好, II 比 I 好.

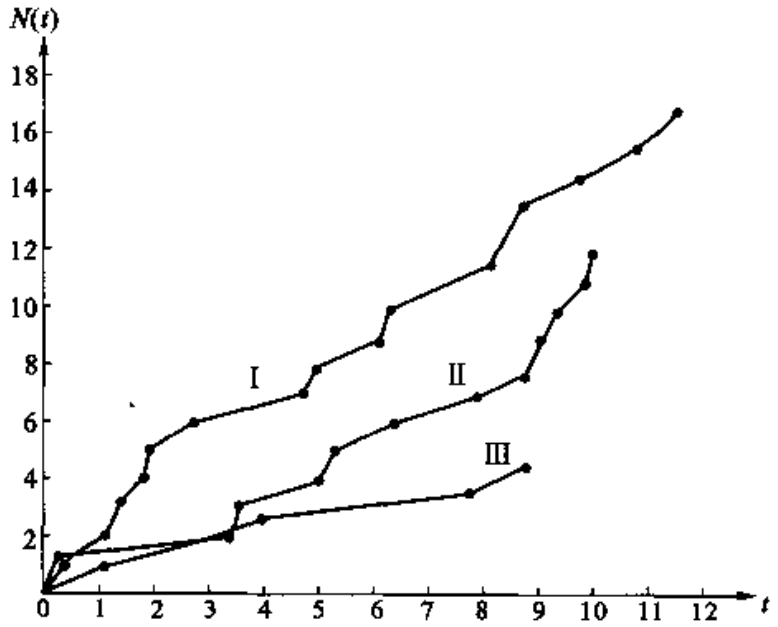


图 11.3 变压器的 $(t, N(t))$ 图

下面, 对 I. 作 HP 检验. 取 $\alpha=0.05$, 则 $z_{0.025}=1.96$. 由 §11.3 (6),

$$\left|\sqrt{12\cdot 16}\left(\frac{8359}{16\cdot 1110}-\frac{1}{2}\right)\right| = |-0.406| < 1.96$$

故接受 HP 假设.

I 阶段失效率 λ_1 的 MLE 为 $\hat{\lambda}_1=\dfrac{17}{1110}=0.0153(1\ /\text{天})$.

平均寿命 θ_1 的 MLE 为 $\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{\hat{\lambda}_1}=65.3(\text{天})$.

对 II 阶段的数据先做趋势检验. 由 §11.4,(4)

$$\begin{aligned} K &= 7-10+7-6+3-2-5-4+1+0-1 \\ &= -10 \end{aligned}$$

用 §11.4,(5) 渐近正态的结果

$$K^*=\frac{-10}{\sqrt{212.7}}=-0.686 < z_{0.05}=1.65$$

故仍接受数据是一组简单样本.

下面检验能否用 HP 模型. 取 $\alpha=0.10, z_{0.05}=1.65$. 由 §11.3, (6)

$$\sqrt{12\cdot 11}\left(\frac{6670}{11\cdot 965}-\frac{1}{2}\right)=1.475<1.65$$

故亦不能拒绝 HP 模型.

再检验 RP 模型. 由 §11.4,(8), $\hat{c}(x)=0.915$.

$$w=\frac{1.475}{0.915}=1.61<1.65$$

故不拒绝 RP 模型. 虽然如此, 但可由上述两个检验看出数据多少与 RP 模型有偏离.

由于仍接受 HP 模型, II 阶段失效率 λ_2 及平均寿命 θ_2 的 MLE 为

$$\hat{\lambda}_2=0.0124(1/\text{天}),\quad \hat{\theta}_2=80.4(\text{天})$$

III 阶段数据中最后一个是截尾数据, 因此可以看成在 $(0,t)=(0,991)$ 中有 $n=5$ 次故障的情形. 用 §11.3, (4) 式检验能否用 HP 模型

$$\sqrt{12\cdot 5}\left(\frac{2415}{5\cdot 991}-\frac{1}{2}\right)=-0.098$$

故接受 HP 模型. 此时

$$\hat{\lambda}_3 = 0.0050(1/\text{天}), \quad \hat{\theta}_3 = 198.2(\text{天})$$

由上述分析可知, 经过每次大修, 变压器的失效率逐次下降. 比较 III 与 I, 则发现 III 的平均寿命大约是 I 中的 3 倍.

若把三组数据总起来考察, 则

$$n = 34, \quad t = 1110 + 965 + 991 = 3066$$
$$\sum_{i=1}^{34} t_i = 43214$$

故

$$\left|\sqrt{12 \cdot 34}\left(\frac{43214}{34 \cdot 3066} - \frac{1}{2}\right)\right| = |-1.73| > 1.65 = z_{0.05}$$

表明在 $\alpha = 0.10$ 下拒绝 HP 模型. 对这组数据用韦布尔过程来描述. 由 (9), (10) 可算出

$$\hat{\beta} = 0.8053, \quad \hat{\lambda} = 0.0529$$

$\hat{\beta} < 1$ 表明数据有变大的趋势.

§11.6 推广及某些应用

本节作为前几节的推广, 讨论 k 个同型可修系统的相邻故障间隔的统计分析. 同时, 简单地介绍两个应用.

§11.6.1 k 个独立系统的情形

假设有 k 个同型可修系统, 对第 i 个系统的观察时间为 $[0, T_i]$, 其中 T_i 为预定的时间长度. 若在 $[0, T_i]$ 中观察到 n_i 个故障, 其依时序的故障时刻为

$$0 \leqslant t_{i1} \leqslant t_{i2} \leqslant \cdots \leqslant t_{in_i} \leqslant T_i, \quad i = 1, \cdots, k \tag{1}$$

假定故障相继发生的时刻可用累积强度函数

$$\Lambda(t) = \lambda t^{\beta}, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda, \beta > 0 \tag{2}$$

的韦布尔过程来描述.

我们的问题是如何由数据 (1) 来给出 λ, β 的估计.

与 §11.5,(4) 式相仿, k 个独立系统的相继故障时刻有联合密度

$$\prod_{i=1}^{k}\left\{e^{-\lambda T_i^{\beta}}\prod_{j=1}^{n_i}(\lambda\beta t_{ij}^{\beta-1})\right\} \tag{3}$$

上式记作 $L(\lambda,\beta)$. 于是 λ,β 的 MLE 由下面两式解出.

$$\frac{1}{\hat{\beta}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}T_i^{\hat{\beta}}\ln T_i}{\sum_{i=1}^{k}T_i^{\beta}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln t_{ij} \tag{4}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{k}T_i^{\beta}} \tag{5}$$

其中 $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$.

由 (4) 迭代解出 $\hat{\beta}$, 代入 (5) 即可得 $\hat{\lambda}$.

相仿, 对第 i 个系统观察到第 n_i 个故障出现的时刻止 (n_i 预定的常数), 则只要在 (4), (5) 中令 $T_i=t_{in_i}$, 即可得 β,λ 的 MLE.

§11.6.2 β 的条件 MLE

假定对第 i 个系统观察时间为 $[0,T_i]$, 故障数为 $n_i, i=1,\cdots,k$. 在 $n_1,\cdots,n_k$ 已知的条件下, 由定理 11.2.3, k 个系统的相继故障时刻的联合密度为

$$\prod_{i=1}^{k}\left\{n_i!\prod_{j=1}^{n_i}(\beta t_{ij}^{\beta-1}/T_i^{\beta})\right\} \tag{6}$$

上式与 λ 无关. 于是, 可得在 $n_1,\cdots,k_k$ 已知的条件下 β 的 MLE 为

$$\tilde{\beta}=\sum_{i=1}^{k}n_i\Big/\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{T_i}{t_{ij}} \tag{7}$$

相仿, 若对第 i 个系统观察到第 n_i 个故障发生的时刻 $t_{in_i}=T_i$ 时为止, $i=1,\cdots,k$. 则在 $T_1,\cdots,T_k$ 已知的条件下, 由定理 11.2.4, 对 $i=1,\cdots,k$, 第 i 个

系统的前 n_i-1 个相继故障时刻有联合密度函数

$$\prod_{i=1}^{k}\left\{(n_i-1)!\prod_{j=1}^{n_i-1}(\beta t_{ij}^{\beta-1}/T_i^{\beta})\right\} \tag{8}$$

因此, β 的条件 MLE 为

$$\tilde{\beta}=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\Big/\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i-1}\ln\frac{T_i}{t_{ij}} \tag{9}$$

于是, 若令

$$m_i=\begin{cases}n_i, & \text{若第 } i \text{ 个系统是定时终止观察的}\\ n_i-1, & \text{若第 } i \text{ 个系统是定故障数终止观察的}\end{cases} \tag{10}$$

则在已知 $n_1,\cdots,n_k$ 或 $T_1,\cdots,T_k$ 的条件下, β 的条件 MLE 可统一写成

$$\tilde{\beta}=\sum_{i=1}^{k}m_i\Big/\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\ln\frac{T_i}{t_{ij}} \tag{11}$$

若记

$$m=\sum_{i=1}^{k}m_i \tag{12}$$

注意到 $\beta\ln\dfrac{T_i}{t_{ij}}, j=1,\cdots,m_i$ 为独立的参数为 1 的指数分布. 因此, $2\beta\sum\limits_{j=1}^{m_i}\ln\dfrac{T_i}{t_{ij}}$ $\sim\chi^2_{2m_i}$. 于是 $2\beta\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\ln\dfrac{T_i}{t_{ij}}\sim\chi^2_{2m}$. 故可得

$$\frac{2m\beta}{\tilde{\beta}}\sim\chi^2_{2m} \tag{13}$$

由 (13), 若令

$$\beta^*=\frac{m-1}{m}\tilde{\beta} \tag{14}$$

则 β^* 是 β 的一个无偏估计. 且由 (13) 可得 β 的条件区间估计. β 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧条件置信区间为

$$\left[\frac{\tilde{\beta}}{2m}\chi^2_{2m}\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ \frac{\tilde{\beta}}{2m}\chi^2_{2m}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

§11.6.3 应用 1: 可靠性增长模型

假定一个系统的开发阶段是如下进行的: 系统在研制成功后进行试验, 直到出现一个故障为止, 此时寻找原因, 并作设计或工程上的修改, 用以消除引起这种故障发生的故障模式, 然后再做试验, 再修改, 一直到试验满足规定的时间长度或者达到预定的可靠性要求时为止. 一般而言, 这是一个使系统的可靠性不断增长的过程. 自然希望能够定量地评定这个过程结束时系统的可靠性.

若用 $N(t)$ 记 $(0,t]$ 中系统的故障次数 (这里把维修改进的时间当作 0 来处理). 对许多大型复杂系统在研制开发阶段的故障数据的分析表明, $(t,N(t))$ 的点在 $\ln-\ln$ 坐标纸上基本上呈一条直线. 其确切的统计模型为 $(t,EN(t))$ 之间有如下关系

$$\ln EN(t)=\beta\ln t+\alpha,\quad \beta>0$$

即

$$EN(t)=\lambda t^{\beta},\quad t\geqslant 0 \tag{15}$$

其中 $\lambda=e^{\alpha}$. 与 §11.5, (2) 对照, $N(t)$ 即为有累积强度函数 (15) 的韦布尔过程. 因此, 韦布尔过程可以很好地用来描述系统的可靠性增长过程.

一旦系统在时刻 t_0 定型或投产, 则可以认为 t_0 以后系统不作任何设计上的改进, 因而进入有常数失效率

$$\lambda(t_0)=\lambda\beta t_0^{\beta-1}$$

的偶然失效阶段, 即 t_0 以后, 系统有参数 $\lambda(t_0)$ 的指数寿命, 其平均寿命为 $\dfrac{t_0^{1-\beta}}{\lambda\beta}$.

对可靠性增长的过程, $\beta<1$. 因此, 平均寿命随开发试验的时间 t_0 而增长, 与 $t_0^{1-\beta}$ 成比例. β 可看成一个增长参数. 参数 λ,β 可由上述介绍的方法估出.

§11.6.4 应用 2: 工业事故的统计分析

在许多重工业中, 时有重大事故发生, 造成生命财产的损失, 对于这些数据的统计分析, 可以提供由于技术或劳动保护的改善, 如何使得事故减少的一种定量刻划. 例如, [56] 中分析了英国从 1875 年 12 月 6 日起到 1951 年 5 月 29 日为止的煤矿中重大事故的记录. 这里, 重大事故是指造成 10 人以上死亡的事件. 在这 170 多年期间共发生了 109 次重大事故. 统计分析表明, 事故发生的时刻可以用韦布尔过程来很好地描述.

附录 A　寿命分布类研究

在这个附录中我们将简单介绍寿命分布类研究中的一些问题. 我们将讨论引入不同寿命分布类时的经验背景和理论上的依据, 以及不同寿命分布类的性质; 寿命分布类中的可靠度界; 寿命分布间的贴近性研究. 详细的讨论可见文献[83].

§A.1 寿命分布类的引进

在 20 世纪 50 年代的可靠性研究, 特别是寿命数据的统计分析中, 通常假定一个特定的寿命分布来描述产品的寿命长度. 最常用的分布函数是指数分布及韦布尔分布. 这些分布由其参数唯一确定. 当时研究的 (可靠性统计) 问题有: 确定一组样本来自什么总体 (分布函数形式), 以及进行参数估计 (点估计、区间估计). 其后, 在 60 年代初, 由于理论及实用上的需要, 具有相同性质的寿命分布函数的研究开始大量出现. 例如, 在研究维修、更换策略等应用问题时, 需要考虑具有共性的一类分布函数. 另一方面从理论上讲, 定性地描述引起失效 (故障) 的老化及磨损现象的研究也逐渐引起了注意. 许多直观的有经验背景支持的思想通过数学形式的表现进入了可靠性领域. 例如, 新的 (产品) 比用过的要好, 平均剩余寿命随年龄递减, 等等. 经验背景加上理论本身的发展, 使得寿命分布类的研究日趋成熟.

寿命分布类是基于对随机变量进行比较的基础上引进的. 为此, 首先引进随机变量之间比较的概念.

设 X,Y 为非负随机变量, 相应的分布函数分别为 F 及 H. 记 $\bar{F}=1-F$, $\bar{H}=1-H$.

定义 A.1.1 若对 $t\geqslant 0$

$$\bar{F}(t)=P(X>t)\leqslant P(Y>t)=\bar{H}(t)$$

则称 X(或 F)**随机地小于**Y(或 H). 记作 $X\leqslant_{st}Y$(或 $F\leqslant_{st}H$).

若 $\{U_t,t\geqslant 0\}$ 是一个随机过程, 对 $0\leqslant s\leqslant t$ 有 $U_s\leqslant_{st}U_t$, 则称 $\{U_t,t\geqslant 0\}$ 对 t 随机递增. 记作 $U_t\uparrow_{st}$ 对 t.

相仿, 可以定义随机大于 $(\geqslant_{st})$, 或随机递减 $(\downarrow_{st})$.

定义 A.1.2 若对 $t\geqslant 0$ 有.

$$E(X-t)_+\leqslant E(Y-t)_+ \tag{1}$$

其中 $(x)_+=\max(0,x)$, 则称在凸序意义下 X**比** Y **小**, 记作 $X\leqslant_c Y$(或 $F\leqslant_c H$).

由于

$$E(X-t)_t=\int_t^\infty \bar{F}(x)dx,\quad t\geqslant 0$$

故由 (1) 式, $X\leqslant_c Y$ 当且仅当

$$\int_t^\infty \bar{F}(x)dx\leqslant\int_t^\infty \bar{H}(x)dx,\quad t\geqslant 0 \tag{2}$$

由定义 A.1.1 及 A.1.2, 易见

$$若X\leqslant_{st}Y,\ 则\ X\leqslant_c Y;\quad 若X\leqslant_c Y,\ 则\ EX\leqslant EY$$

下面我们用非负随机变量表示寿命, 相应的分布函数为 $F(t)$. 假定均值 $\mu<\infty$. 与寿命 X 有紧密联系的有两个随机变量. 一个为在年龄为 t 时 X 的剩余寿命 X_t

$$X_t=X-t|X>t,\quad t>0 \tag{3}$$

容易求得 X_t 相应的分布函数

$$\begin{aligned}F_t(x)&=P(X_t\leqslant x)=P(X-t\leqslant x|X>t)\\&=\frac{F(x+t)-F(t)}{\bar{F}(t)}=1-\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)},\quad x\geqslant 0\end{aligned} \tag{4}$$

平均剩余寿命为

$$\mu(t) = EX_t = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(u)du \tag{5}$$

另一个随机变量对应于 F 的平衡分布 F_e, 其表达式为

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(u)du \tag{6}$$

F_e 实际上是以独立同分布随机变量 X 为相邻间隔的更新过程在时刻 t 的剩余寿命当 $t \to \infty$ 时的极限分布 (见 [88], 第 116 页, 131 页). 下面为讨论方便起见, 设非负随机变量 X_e 有分布函数 F_e. 现在我们可以通过这三个随机变量 X, X_t, X_e 的比较得到一些主要的寿命分布类.

定义 A.1.3 若 $X_t \downarrow_{st}$ 对 $t \geqslant 0$, 则称 X 属于**递增失效率**的类, 记作 $X \in$ IFR(或 $F \in$ IFR).

易见 $X \in$ IFR 等价于对 $0 \leqslant s \leqslant t$,

$$\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} \leqslant \frac{\bar{F}(x+s)}{\bar{F}(s)}, \quad x \geqslant 0 \tag{7}$$

$X \in$ IFR 的直观意义是随着年龄 t 的增加, 剩余寿命 X_t 随机地减小.

若 $F(x)$ 有概率密度函数 $f(x)$, 则由 (7) 可知

$$\frac{F(x+t)-F(t)}{x} \frac{1}{\bar{F}(t)} \geqslant \frac{F(x+s)-F(s)}{x} \frac{1}{\bar{F}(s)}$$

令 $x \to 0+$, 则可得

$$\frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \geqslant \frac{f(s)}{\bar{F}(s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t$$

上式即表示在 IFR 类中失效率函数 $r(t)$

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \geqslant 0$$

是递增的.

定义 A.1.4 若 $X_t \leqslant_{st} X$, 则称 X 属于**新的比用过的好**的类, 记作 $X \in$ NBU (或 $F \in$ NBU).

事实上我们可以把 X 看作 X_t 中 $t=0$ 的情形, 其经验背景是明显的.

$X \in \mathrm{NBU}$ 的等价条件为, 对 $x \geqslant 0$ 及 $t>0$

$$P\{(X-t>x)|X>t\} \leqslant P(X>x)$$

即

$$\bar{F}(x+t) \leqslant \bar{F}(x)\bar{F}(t), \quad x \geqslant 0,\ t>0 \tag{8}$$

顺便指出, 上式对 $t=0$ 时亦成立.

定义 A.1.5 若 $EX_t \leqslant EX$, 则称 X 属于**新的平均比用过的好的类**, 记作 $X \in \mathrm{NBUE}$.

$X \in \mathrm{NBUE}$ 等价于

$$\bar{F}_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du \leqslant \bar{F}(t), \quad t \geqslant 0 \tag{9}$$

即

$$X_e \leqslant_{st} X$$

定义 A.1.6 若 EX_t 对 t 递减, 则称 X 属于**递减平均剩余寿命的类**, 记作 $X \in \mathrm{DMRL}$.

$X \in \mathrm{DMRL}$ 等价于

$$\frac{1}{\bar{F}(t)}\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du \quad \downarrow \quad \text{对} t \geqslant 0 \tag{10}$$

我们亦可用凸序意义下的比较, 于是有

定义 A.1.7 若 $X_t \leqslant_c X$, 对 $t \geqslant 0$, 则称 X 属于**凸序意义下新的比用过的好的类**, 记作 $X \in \mathrm{NBUC}$(见 [85]).

$X \in \mathrm{NBUC}$ 等价于

$$\int_x^{\infty} \bar{F}(t+u)du \leqslant \bar{F}(t)\int_x^{\infty} \bar{F}(u)du, \quad t,x \geqslant 0 \tag{11}$$

由上述诸定义易见包含关系

$$\mathrm{IFR} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \mathrm{NBU} \begin{matrix} \not\Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} \mathrm{DMRL} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \mathrm{NBUC}, \quad \mathrm{NBUE} \Longrightarrow \mathrm{NBUC} \Longrightarrow \mathrm{NBUE}$$

在 [85] 中证明了 $\mathrm{DMRL} \Longrightarrow \mathrm{NBUC}$, 因此诸类之间的包含关系为

$$\text{IFR} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{NBU} \\ \text{DMRL} \end{matrix} \begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix} \text{NBUC} \Longrightarrow \text{NBUE}$$

在对 IFR 分布类性质的研究中, 有两点引起了注意. 一是由两个 IFR 分布组成的并联系统, 其系统的寿命不是 IFR 分布. 即破坏了组成关联系统时的封闭性. 封闭性要求寿命属于同一类的部件组成关联系统时, 系统的寿命分布应在同一类中. 另一点是 $F \in \text{IFR}$ 时, 等价于累积失效率函数

$$\Lambda(t) = -\ln \bar{F}(t), \quad t \geqslant 0$$

是一个凸函数. 从数学上讲, 凸性是较难满足的条件, 但是由 $\Lambda(t)$ 是凸函数可以导出 $\dfrac{1}{t}\Lambda(t)$ 对 t 递增, 反之不真.

由这两点看出, IFR 类有必要扩大. 因此引人

定义 A.1.8 若相应于 F 的 $\dfrac{1}{t}\Lambda(t) = -\dfrac{1}{t}\ln \bar{F}(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 递增, 则称 F 属于**递增平均失效率**的类, 记作 $F \in \text{IFRA}$.

至此, 各寿命分布类之间的关系有

$$\text{IFR} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{IFRA} \Longrightarrow \text{NUB} \\ \text{DMRL} \end{matrix} \begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix} \text{NBUC} \Longrightarrow \text{NBUE}$$

为引人更大的寿命分布类, 考虑 X 与具有相同均值 μ 的指数随机变量进行比较. 记 Y 为均值 μ 的指数随机变量.

定义 A.1.9 若 $X \leqslant_c Y$, 则称 X 属于**新的比用过的调和平均好**的类, 记作 $X \in \text{HNBUE}$.

显然, $X \in$HNBUE 等价于

$$\frac{1}{\mu}\int_t^\infty \bar{F}(u)du \leqslant e^{-\frac{t}{\mu}}, \quad t \geqslant 0$$

即等价于

$$X_e \leqslant_{st} Y$$

"新的比用过的调和平均好"的含义可以从调和平均的定义上反映出来. 数学上讲, 一串正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的调和平均为

$$H_n(a) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^{-1}$$

我们有如下事实

$$H_n(a) \leqslant A_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

作为类比, 考虑 X 的平均剩余寿命 $\mu(t)$, 它在 $[0,t]$ 上的积分调和平均为 $\left(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{\mu(x)}dx\right)^{-1}$. 如果要求在调和平均意义上新的比用过的好, 数学上则可表为

$$\left(\frac{1}{t}\int_t^{\infty} \frac{1}{\mu(x)}dx\right)^{-1} \leqslant \mu, \quad t \geqslant 0 \tag{12}$$

即等价于

$$\frac{1}{t}\int_t^{\infty} \frac{\mu}{\mu(x)}dx \geqslant 1, \quad t \geqslant 0 \tag{13}$$

上式左端为

$$\frac{\mu}{t}\int_0^t d\left[-\ln\int_x^{\infty} \bar{F}(u)du\right] = -\frac{\mu}{t}\ln\left[\frac{1}{\mu}\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du\right]$$

因此 (12) 式等价于

$$\frac{1}{\mu}\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du \leqslant e^{-\frac{t}{\mu}}, \quad t \geqslant 0$$

即 $X_e \leqslant_{st} Y$.

由于 $X \in$ NBUE 时, $\mu(t) \leqslant \mu$, 故 (13) 式对 $X \in$ NBUE 时自然成立, 因此有 NBUE $\Longrightarrow$ HNBUE.

基于拉普拉斯变换, [87] 中引入了 L 类.

定义 A.1.10 若

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\bar{F}(t)dt \geqslant \frac{\mu}{1+\mu s}, \quad s \geqslant 0 \tag{14}$$

则称 F 属于 ***L*类**, 记作 $F \in$ L.

(14) 式等价于

$$Ee^{-sX} \leqslant Ee^{-sY} = \frac{1}{1+\mu s}, \quad s \geqslant 0 \tag{15}$$

利用定义可以直接验证 HNBUE $\Longrightarrow$ L.

至此, 我们得到一串寿命分布类, 它们有如下的真包含关系:

$$\text{IFR} \Rightarrow \text{IFRA} \Longrightarrow \text{NBU} \Rightarrow \text{NBUC} \Longrightarrow \text{NBUE} \Longrightarrow \text{HNBUE} \Longrightarrow \text{L}$$
$$\text{IFR} \Rightarrow \text{DMRL} \Rightarrow \text{NBUC}$$

这里 IFR 性质是最强的描述磨损老化现象的公式, 而 L 性质则是最弱的.

从理论上讲, 改变上述所有的序关系, 我们可以获得相应的对偶类.

$$\text{DFR} \Rightarrow \text{DFRA} \Rightarrow \text{NWU} \Longrightarrow \text{NWUC} \Longrightarrow \text{NWUE} \Longrightarrow \text{HNWUE} \Longrightarrow \text{L}$$
$$\text{DFR} \Rightarrow \text{IMRL} \Rightarrow \text{NWUC}$$

这些寿命分布类中的分布函数也有一些经验背景的支持. 例如, 有些机械产品经过磨合阶段后其失效率呈下降趋势. 因此, 这种寿命分布类的研究亦有其价值.

除了研究寿命分布类的不断扩张, 它们之间的包含关系外, 还研究不同类中的寿命分布的一些分析性质, 例如连续性、矩存在性等. 还讨论寿命分布类在某些可靠性有意义的运算下的封闭性. 这种运算包括: 卷积、混合及组成关联系统. 卷积对应于独立随机变量和的分布, 相应于可靠性中两个独立部件组成的冷备系统的寿命分布; 混合相应于非齐性总体中随机抽样得到的样品的寿命分布. 所谓封闭性是研究属于同一类的寿命分布在进行卷积、混合或组成关联系统后, 其相应的分布是否仍属于同一类. 对于上述引进的寿命分布类, 这些问题都已得到很好的回答.

此外, 还讨论寿命分布类的各种等价刻画, 以及推广到离散的寿命分布类等.

§A.2 寿命分布类中的可靠度界

设 $\mathcal{H}$ 是一个寿命分布类. 显然, 由 $F \in \mathcal{H}$, 我们不可能给出可靠度函数 $\bar{F}(t)$ 的确切的值. 然而在许多实际问题中, 例如通过寿命数据的统计分析, 可以得到诸如平均寿命、方差等信息. 我们设法利用这些信息, 至少希望能给出可靠度函数的上、下界. 这些界虽然不够精确, 但是可以告诉我们产品可靠度的范围, 给工程进一步改进以依据.

给定 $0 < \mu < \infty$, 记

$$\mathcal{H}_\mu = \{F : F \in \mathcal{H},\ \mu_F = \mu\} \tag{1}$$

这里 μ_F 为 F 的均值. 因此, 已知均值时, 可靠度界的问题是: 对 $t \geqslant 0$, 求

$$m(t,\mu) = \inf_{F\in\mathcal{H}_\mu} \bar{F}(t), \quad M(t,\mu) = \sup_{F\in\mathcal{H}_\mu} \bar{F}(t) \tag{2}$$

不失一般性, 我们可以假定 $\mu = 1$. 因为若有 $m_1(t) = \inf\limits_{F\in\mathcal{H}_1} \bar{F}(t)$, 则有

$$m(t,\mu) = m_1(\frac{t}{\mu})$$

因此问题归结为求

$$m(t) = \inf_{F\in\mathcal{H}_1} \bar{F}(t), \quad M(t) = \sup_{F\in\mathcal{H}_1} \bar{F}(t), \quad t \geqslant 0 \tag{3}$$

这里

$$\mathcal{H}_1 = \{F : F \in \mathcal{H},\ \mu_F = 1\} \tag{4}$$

进一步, 若已知 F 的一、二阶矩时, 问题可表述如下.

给定 $0 < \mu, \mu_2 < \infty, \mu^2 < \mu_2$(此条件要求 F 的方差 > 0). 记 $\mu_2(F)$ 为 F 的二阶矩.

$$Q = \{F : F \in \mathcal{H},\ \mu_F = \mu,\ \mu_2(F) = \mu_2\} \tag{5}$$

问题为求

$$m(t,\mu,\mu_2) = \inf_{F\in Q} \bar{F}(t), \quad M(t,\mu,\mu_2) = \sup_{F\in Q} \bar{F}(t), \quad t \geqslant 0 \tag{6}$$

下面把问题略作简化. 记 $\gamma(F)$ 为 F 的变异系数, 即

$$\gamma(F) = \frac{\sigma_F}{\mu_F} \tag{7}$$

再令

$$\rho(F) = \left|\frac{\mu_2(F)}{2\mu_F^2} - 1\right| = \frac{1}{2}|\gamma^2(F) - 1| \tag{8}$$

这里 σ_F 为 F 的标准差. 显然

$$0 \leqslant \gamma(F), \quad \rho(F) < \infty$$

因为 $\gamma(F)$ 及 $\rho(F)$ 在尺度变换下不变 (即对随机变量 X 及 cX, 其对应的 γ 及 ρ 的值不变, c 为正的常数), 我们可假定 $\mu_F = 1$. 因此问题 (6) 可以叙述如下. 记

$$Q_\gamma = \{F : F \in \mathcal{H},\ \mu_F = 1,\ \gamma(F) = \gamma\} \tag{9}$$

$$Q_\rho = \{F : F \in \mathcal{H},\ \mu_F = 1,\ \rho(F) = \rho\} \tag{10}$$

对 $F \in Q_\gamma$ 或 $F \in Q_\rho$, 求

$$m(t,\gamma) = \inf_{F\in Q_\gamma} \bar{F}(t), \quad M(t,\gamma) = \sup_{F\in Q_\gamma} \bar{F}(t) \tag{11}$$

$$m(t,\rho) = \inf_{F\in Q_\rho} \bar{F}(t), \quad M(t,\rho) = \sup_{F\in Q_\rho} \bar{F}(t) \tag{12}$$

从本质上讲, 这是一类泛函的极值问题, 也是一类最优化问题, 因此有一定的难度. 对于问题 (3) 和 (12), 通常的手法是对给定的 t 或 (t,ρ), 设法找到一个特殊的 F 作上、下界. 然后证明其确实是最小的上界或最大的下界.

§A.2.1 已知均值时的可靠度界

对 F 是任意寿命分布时, 有如下的经典结果[83]:

定理 A.2.1 设 F 是一个寿命分布, $\mu_F = 1$, 则

1) $0 \leqslant \bar{F}(t) < \min(1, \frac{1}{t}), \quad t \geqslant 0$

2) 进一步设 $\gamma_F = \gamma$, 则

$$m(t,\gamma) \leqslant \bar{F}(t) \leqslant M(t,\gamma)$$

其中

$$m(t,\gamma) = \frac{(1-t)_+^2}{\gamma^2 + (1-t)_+^2}, \quad t \geqslant 0$$

$$M(t,\gamma) = \begin{cases} \min(1, \dfrac{1}{t}), & 0 \leqslant t \leqslant \gamma^2 + 1 \\ \dfrac{\gamma^2}{\gamma^2 + (t-1)^2}, & t \geqslant \gamma^2 + 1 \end{cases}$$

这里 $x_+ = \max(0, x)$, $x_+^2 = (x_+)^2$.

对 F 属于某一个特定的寿命分布类 $\mathcal{H}$ 时, 有进一步改善的结果. 参见 [90].

§A.2.2 已知头二阶矩时的可靠度界

在 [83] 中, 对 IFR 类的分布函数有过讨论. 这里我们仅对问题的进一步简化予以说明.

注意到当 $F \in \mathrm{HNBUE}$ 及 $\mu_F = 1$ 时有

$$,\rho(F) = 1 - \frac{1}{2}\mu_2(F), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2} \tag{13}$$

且

$$\rho(F) = 0 \Longleftrightarrow F\text{是指数分布} \tag{14}$$

及

$$\rho(F) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow F\text{在 1 退化 (即寿命}X = 1) \tag{15}$$

因此, 已知头二阶矩时, 可靠度界的问题 (12) 可表为, 对 $F \in \mathrm{HNBUE}$ (或它所包含的某个子类), 给定 $(t,\rho) \in \{(t,\rho) : t > 0, 0 < \rho < \frac{1}{2}\}$, 求

$$m(t,\rho) = \inf_{F \in Q_\rho} \bar{F}(t), \quad M(t,\rho) = \sup_{F \in Q_\rho} \bar{F}(t)$$

对于 IFRA, NBUE, HNBUE 类中的寿命分布, [83] 中给出了结果. 相仿, 对于 DFR, DFRA, IMRL, NWUE, HNWUE 类, [83] 中亦给出了结果. 由于这些界的表达式往往很复杂, 这里不再引述.

§A.3 寿命分布间贴近性研究

寿命分布间贴近性研究, 实际上是研究任一寿命分布类中的分布函数与有相同均值的指数分布之间的最大差异. 用指数分布与之比较, 其原因是指数分布具有所谓的“无记忆性”, 数学上容易处理, 同时贴近性研究提供的信息可使我们知道任意的寿命分布若用指数分布来代替, 则会有多大的偏差. 因此结果有一定的应用价值.

贴近性问题可表述如下. 设 $\mathcal{H}$ 是某个寿命分布类, $F \in \mathcal{H}$. 记 $\mu_F = \mu$,

$$d_F = \sup_{t \geqslant 0} \left| \bar{F}(t) - e^{-\frac{t}{\mu}} \right|$$

d_F 反映出 F 与具有相同均值的指数分布之间的最大差异. 我们感兴趣的是, 对 $F \in \mathcal{H}$, 求 d_F 的最小上界, 即求

$$K = \sup_{F \in \mathcal{H}} d_F$$

由于两个分布函数在相同的尺度变换下 d_F 不变, 因此不妨设 $\mu_F = 1$. 此外, 如果我们进一步增加关于 F 的信息. 如已知二阶矩 $\mu_2(F)$, 或者等价地已知 $\rho(F)$, 注意到 (13)~(15) 这几个事实, 问题可进一步提成如下形式.

设 $\mathcal{H}$ 是 HNBUE 类或其某一子类, Q_ρ 由 (10) 式给出. 给定 $0 < \rho < \dfrac{1}{2}$, 求

$$K(\rho) = \sup_{t \geqslant 0, F \in Q_\rho} |\bar{F}(t) - e^{-t}| \tag{16}$$

这里排除 $\rho = 0$ 和 $\rho = \dfrac{1}{2}$ 的情形 (见 (14), (15) 两式).

我们列举几个表达式简单的情形.

1) 对于 $\mathcal{H}$ 是 NBUE 的情形, Brown 及 Ge[84] 得到上界

$$K_\nu(\rho) = c\sqrt{\rho}, \quad c = \frac{4}{\pi}\sqrt{6} = 3.118\cdots$$

Solovyev[89] 得到更好的结果

$$K_\nu(\rho) = \sqrt{2\rho} < 1$$

而最小的上界为[86],[90]

$$K(\rho) = 1 - e^{-\sqrt{2\rho}} < 1$$

2) 对 $\mathcal{H}$ 是 DMRL 情形[90]

$$K(\rho) = 2(1 - e^{-1})\rho$$

3) 对 $\mathcal{H}$ 是 IFR, IFRA, HNBUE 的情形, [90] 都有详细讨论.

4) 对于对偶寿命分布类, 即 HNWUE 类或其子类 NWUE, IMRL 及 DFR, DFRA 类, [90] 中对与指数分布的贴近性都有讨论, 这里不再引述.

附录 B　马尔可夫型可修系统剩余寿命的极限分布

§B.1 引言

在许多可靠性问题中, 一旦系统发生故障将会造成巨大的经济损失, 有时甚至是灾难性的, 例如, 核电站、宇宙飞船、航天飞机、空间站, 等等. 此时研究系统首次故障前时间, 即系统的寿命是十分重要的. 当系统已经正常运行一段时间后, 我们更关心系统还能运行多长时间, 此时研究系统剩余寿命的概率规律将是我们最感兴趣的问题之一. 在本附录中我们将要证明: 任何马尔可夫型可修系统剩余寿命的极限分布均为指数分布.

在本书第六章 §6.1.5 中, 对马尔可夫型可修系统一般模型求得了系统的可靠度 $R(t)$, 或系统首次故障前时间分布 $F(t)=1-R(t)$. 令 X 为系统首次故障前时间, 即为系统的寿命, 此时有

$$F(t)=P\{X\leqslant t\},\quad R(t)=P\{X>t\}$$

我们要证明

$$\lim_{t\to\infty}P\{X-t\leqslant x|X>t\}=1-\exp(\delta t),\quad(\delta<0)$$

因此任何一个可以用马尔可夫过程来描述的可修系统, 不管系统多么复杂, 只要系统正常运行足够长的时间, 该系统的剩余寿命分布都可以用指数分布来近似. 作为一个特殊情形, 何一个可以用马尔可夫过程来描述的不可修系统, 例如当组成系统的所有部件的寿命分布均为指数分布时, 只要系统正常运行足够长的时间, 系统的剩余寿命分布都可以用指数分布来近似. 无疑, 以上结论在实际工程中具有很大的应用价值.

§B.2 主要结果

马尔可夫型可修系统一般模型的描述和有关可靠性指标的求法, 请读者参阅本书第六章 §6.1 马尔可夫型可修系统的一般模型. 我们继续研究这一模型, 仍沿用那里给出的各种概念和数学符号. 第六章 §6.1 定理 6.1.4 得到: 若在初始时刻 $t=0$ 系统处于正常工作状态, 且给定初始状态分布为 $Q_j(0), j\in E$,

$$\begin{cases}\sum\limits_{j\in W} Q_j(0)=1\\ Q_j(0)=0, \quad j\in F\end{cases}$$

其中 $W=\{0,1,\cdots,K\}$ 为系统正常状态集, $F=\{K+1,\cdots,N\}$ 为系统故障状态集. 则系统可靠度为

$$R(t)=\sum_{j\in W} Q_j(t) \tag{1}$$

其中 $Q_j(t), j\in W$ 满足微分方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}'_W(t)=\boldsymbol{Q}_W(t)\boldsymbol{B}\\ \text{初始条件 } \boldsymbol{Q}_W(0)\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_W(t)=(Q_0(t),Q_2(t),\cdots,Q_K(t))$. 公式 (1) 可以写成矩阵的形式

$$R(t)=\boldsymbol{Q}_W(t)\boldsymbol{e}_W \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{e}_W$ 为分量均为 1 的 $K+1$ 维向量. 记

$$Q_j^*(s)=\int_0^\infty Q_j(t)\exp(-st)dt, \quad j\in W$$

对公式 (2) 的两端作 L 变换, 得 $Q_j^*(s), j\in W$ 满足线性方程组

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_W^*(s)=\boldsymbol{Q}_W(0) \tag{4}$$

因此解得

$$\boldsymbol{Q}_W^*(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{Q}_W(0)$$

对公式 (3) 作 L 变换, 得

$$R^*(s) = \sum_{j\in W} Q_j^*(s) = \boldsymbol{Q}_W^*(s)\boldsymbol{e}_W = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{Q}_W(0)\boldsymbol{e}_W$$

反演上式可求得系统可靠度函数.

定理 B.2.1 有限状态空间马尔可夫型可修系统剩余寿命的极限分布为指数分布.

证明 用克拉默法则来表示线性方程组 (4) 的解, 可将每一个 $Q_j^*(s), j \in W$ 表示为 s 的有理函数的形式, 它们的分子和分母都为 s 的多项式, 其中分母的多项式均为方程组 (4) 的系数行列式, 即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式

$$B(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$$

这里 $\det(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, $B(s)$ 是 s 的 $K+1$ 次多项式. 因此

$$R^*(s) = \sum_{j\in W} Q_j^*(s)$$

也是分母为 $B(s)$ 的 s 的有理函数, 记为

$$R^*(s) = \frac{C(s)}{B(s)}$$

令 δ 为 $B(s)$ 在复 s 平面上最靠右侧的零点, 由文献 [84],[87] 可知 δ 为负实数. 用复变函数论的残数定理, 我们有

$$R(t) = \sum_{i\in H} \mathrm{Res}\left\{\frac{C(s)}{B(s)}\exp(st), i\right\}$$

其中 $\mathrm{Res}\{D(s), i\}$ 是函数 $D(s)$ 的残数, $i \in H$, H 为残数集. 由于 H 中元素是有限的, 我们易得

$$\begin{aligned} R(t) =& \frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to\delta}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}(s-\delta)^m\frac{C(s)}{B(s)}\exp(st) \\ &+ \sum_{i\in H-\{\delta\}} \mathrm{Res}\left\{\frac{C(s)}{B(s)}\exp(st), i\right\} \\ =& \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\delta)t^k\exp(\delta t) + o(e^{\delta t}) \end{aligned}$$

其中 m 为有理函数 $C(s)/B(s)$ 极点 δ 的重数, 而 $a_k(\delta)$ 与 t 无关, $o(e^{\delta t})$ 表示满足下式的函数

$$\lim_{t\to\infty}\frac{o(e^{\delta t})}{e^{\delta t}}=0$$

记 X 为该马尔可夫型可修系统的首次故障前时间, 即系统的寿命, 我们有

$$R(t)=P\{X>t\}$$

因此系统剩余寿命的极限分布为

$$\lim_{t\to\infty}P\{X-t\leqslant x|X>t\}=1-\lim_{t\to\infty}\frac{R(t+x)}{R(t)}=1-e^{\delta x}$$

推论 1 *δ 是方程 $\det(sI-B)=0$ 在 s 平面上最靠右侧的根, 它是负实数.*

以上定理表明, 当可修系统中所有部件的寿命分布和故障后的修理时间分布, 以及其中出现的有关分布均为指数分布时, 此时系统为马尔可夫型可修系统, 因此系统剩余寿命的极限分布为指数分布. 如果马尔可夫可修型系统中所有部件的修复率都为零, 此时该系统成为一个不可修系统, 作为马尔可夫型可修系统一个特殊情形, 定理的结论仍成立.

推论 2 *由若干部件组成的不可修系统, 如果所有部件的寿命分布均为指数分布, 则系统剩余寿命的极限分布为指数分布.*

定理成立的条件是可修系统中所有部件的寿命分布和故障后的修理时间分布, 以及其中出现的有关分布均为指数分布. 这一条件可以推广到系统中所有部件的寿命分布和故障后的修理时间分布, 以及其中出现的有关分布均为位相型分布 (PH 分布), 此时可修系统仍然可用马尔可夫过程来描述. 关于 PH 分布的定义和性质请参阅文献 [86].

推论 3 *由若干部件组成的可修系统, 如果所有部件的寿命分布和故障后的修理时间分布, 以及其中出现的有关分布均为 PH 分布, 则系统剩余寿命的极限分布为指数分布.*

§B.3 特例

将定理的结果应用于第六章中讨论过的一些可修系统.

例 B.3.1 两个同型部件和一个修理工组成的并联系统 (见本书第六章 §6.4.1)

假设部件的寿命分布和故障后的修理时间分布分别遵从参数为 λ 和 μ 的指数分布. 由定理, 系统剩余寿命的极限分布为指数分布

$$\lim_{t\to\infty} P\{X-t\leqslant x|X>t\}=1-\exp(\delta t)$$

此时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2\lambda & 2\lambda\\ \mu & -(\lambda+\mu)\end{pmatrix}$$

为求其特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$ 的零点, 需解方程 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=0$, 即

$$s^2+(3\lambda+\mu)s+2\lambda^2=0$$

它的两个根为

$$s_1,s_2=\tfrac{1}{2}[-(3\lambda+\mu)\pm\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}]$$

在 s 平面上最靠右侧的零点为

$$\delta=\tfrac{1}{2}[-(3\lambda+\mu)+\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}]$$

特别, 若 $\lambda=0.04,\mu=0.08,t=1000$, 则

$$P\{X\leqslant 1000+x|X>1000\}\approx 1-e^{\delta x}$$

其中 $\delta=-0.01753788$.

例 B.3.2 n 个同型部件和一个修理工组成的 $(n-1)/n(G)$ 系统 (见本书第六章 §6.5).

假设部件的寿命分布和故障后的修理时间分布分别遵从参数为 λ 和 μ 的指数分布. 由定理, 系统剩余寿命的极限分布为指数分布

$$\lim_{t\to\infty} P\{X-t\leqslant x|X>t\}=1-\exp(\delta t)$$

此时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-n\lambda & n\lambda\\ \mu & -(n-1)\lambda-\mu\end{pmatrix}$$

求其特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$ 的零点, 解方程 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=0$, 得在 s 平面上最靠右侧的根为

$$\delta=\tfrac{1}{2}\{-[(2n-1)\lambda+\mu]+\sqrt{\lambda^2+2(2n-1)\lambda\mu+\mu^2}]$$

特别, 若 $\lambda=0.4,\mu=0.8,n=10,t=1000$, 则

$$P\{X\leqslant 1000+x|X>1000\}\approx 1-e^{\delta x}$$

其中 $\delta=-2.4$.

例 B.3.3 两个同型部件和一个修理工组成的冷贮备系统 (见本书第六章 §6.6.1).

假设部件的寿命分布和故障后的修理时间分布分别遵从参数为 λ 和 μ 的指数分布. 由定理, 系统剩余寿命的极限分布为指数分布

$$\lim_{t\to\infty}P\{X-t\leqslant x|X>t\}=1-\exp(\delta t)$$

此时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -(\lambda+\mu)\end{pmatrix}$$

求其特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$ 的零点, 解方程 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=0$, 得在 s 平面上最靠右侧的根为

$$\delta=\tfrac{1}{2}[-(2\lambda+\mu)+\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}]$$

特别, 若 $\lambda=0.2,\mu=0.4,t=1000$, 则

$$P\{X\leqslant 1000+x|X>1000\}\approx 1-e^{\delta x}$$

其中 $\delta=-0.05358983$.

例 B.3.4 两个同型部件和一个修理工组成的温贮备系统 (见本书第六章 §6.7.1).

假设部件工作时的寿命分布, 温贮备时的寿命分布和故障后的修理时间分布分别遵从参数为 λ,ν 和 μ 的指数分布. 由定理, 系统剩余寿命的极限分布为指数分布

$$\lim_{t\to\infty}P\{X-t\leqslant x|X>t\}=1-\exp(\delta t)$$

此时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-(\lambda+\nu) & \lambda+\nu\\ \mu & -(\lambda+\mu)\end{pmatrix}$$

求其特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$ 的零点, 解方程 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=0$, 得在 s 平面上最靠右侧的根为

$$\delta=\tfrac{1}{2}[-(2\lambda+\nu+\mu)+\sqrt{(\nu+\mu)^2+4\lambda\mu}]$$

特别, 若 $\lambda=0.2,\nu=0.1,\mu=0.4,t=1000$, 则

$$P\{X\leqslant 1000+x|X>1000\}\approx 1-e^{\delta x}$$

其中 $\delta=-0.07250827$.

例 B.3.5 两个同型的相依部件和一个修理工组成的并联系统 (见本书第六章 §6.8.2).

假设部件 i 的寿命 $X_i(i=1,2)$, 遵从二维指数分布

$$P\{X_1>t_1,X_2>t_2\}=\exp\{-\lambda(t_1+t_2)-\lambda_{12}\max(t_1,t_2)\}$$

部件故障后的修理时间分布均遵从参数为 μ 的指数分布. 假设当两个部件同时发生故障时, 首先修理部件 1. 由定理, 系统剩余寿命的极限分布为指数分布

$$\lim_{t\to\infty}P\{X-t\leqslant x|X>t\}=1-\exp(\delta t)$$

此时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-(2\lambda+\lambda_{12}) & 2\lambda\\ \mu & -(\lambda+\lambda_{12}+\mu)\end{pmatrix}$$

求其特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$ 的零点, 解方程 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=0$, 得在 s 平面上最靠右侧的根为

$$\delta=\tfrac{1}{2}[-(3\lambda+2\lambda_{12}+\mu)+\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}]$$

特别, 若 $\lambda=0.04,\mu=0.08,\lambda_{12}=0.1,t=1000$, 则

$$P\{X\leqslant 1000+x|X>1000\}\approx 1-e^{\delta x}$$

其中 $\delta=-0.11753788$.

对于更复杂的系统, 多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$ 的零点无法用显式来表示, 此时只能用近似计算方法来求多项式的零点, 进而求得 δ 的具体数值.

参考文献

[1] 陈希孺, 数理统计引论, 科学出版社, 1982.

[2] B.L.Amstadter, Reliability mathematics, McGraw-Hill Inc., 1971 (中译本: B. L. 阿姆斯塔特, 可靠性数学, 科学出版社, 1978).

[3] P. R. Halmos, Measure theory, van Nostrand, 1950 (中译本: P. R. 哈尔莫斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

[4] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, vol. 1, 2nd ed., John Wiley, 1957(中译本:W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 科学出版社, 上册 1964, 下册 1979).

[5] 高木昇主编, 斎藤嘉博著, 信赖性の基礎数学, 東京電機大学出版局, 1972 (中译本: 可靠性基础数学, 国防工业出版社, 1977).

[6] 盐见弘, 可靠性工程基础, 科学出版社, 1982.

[7] 曹晋华, 两个三状态部件组成的冷贮备可修系统分析, 福建师范大学学报, 1982, 第 2 期, 1 ~ 12.

[8] 曹晋华、程侃, 两部件热贮备系统的可靠性分析, 应用数学学报, **3** (1980), 147 ~ 160.

[9] 曹晋华、程侃, 使用和修理有优先权的两部件冷贮备系统可靠性分析, 上海铁道学院学报, **2**(1981), 31 ~ 45.

[10] 程侃, 两相依部件的系统可靠性分析, 数学进展, **11** (1982), 206 ~ 215.

[11] 程侃、曹晋华, 两部件并行系统的可靠性分析, 应用数学学报, **1** (1978), 341 ~ 352.

[12] 程侃、曹晋华, 一般可修系统可靠性分析——马氏更新模型, 应用数学学报, **4** (1981), 295 ~ 306.

[13] 戴树森等, 可靠性试验及其统计分析, 上册, 国防工业出版社, 1983.

[14] "数学手册编写组" 数学手册, 人民教育出版社, 1979.

[15] 三根久、河合一, 信赖性・保全性の数理, 朝倉書店, 1982.

[16] Adachi, K., and M. Kodama, On some minimal repair model, *Microelectronics and Reliability*, **20** (1980), 265 ~ 271.

[17] Agrawai, A., and R. E. Barlow, A survey of network reliability, ORC 83 ~ 5, Operations Research Center, University of California, Berkeley, 1983.

[18] Barlow, R. E., J. B. Fussell, and N. D. Singpurwalla, (eds.), Reliability and Fault Tree Analysis, SIAM, 1975.

[19] Barlow, R. E., and F. Proschan, Mathematical Theory of Reliability, New York, Wiely, 1965.

[20] Barlow, R. E., and Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing, New York, Holt Rinehart and Winston, 1975.

[21] Barlow, R. E., and Proschan. F., Importance of system components and fault tree events, *Stochastic Precesses and Their Applications*, **3** (1975), 153 ~ 173.

[22] Barlow, R. E., and Wu, A. S., Coherent systems with multistate components, *Math. Oper. Res.*, **3** (1978), 275 ~ 281.

[23] Bartholomew, D. J., A problem in life testing, *J. Amer. Statist.Assoc.*, **65**(1957), 350 ~ 355.

[24] Bellman, R. E., Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New York, 1957.

[25] Bellman, R. E., and Dreyfus, S. E., Applied Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New York, 1962.

[26] Bickel, P. J., and Doksum, K. A., Mathematical statistics, Holden-Day, Inc., 1977.

[27] Birolini, A., Some applications of regenerative stochastic processes to reliability theory——part one: tutorial Introduction,*IEEE trans. Reliability*, **R-23** (1974), 186 ~ 194.

[28] Birolini, A., Some applications of regenerative stochastic processes to reliability theory——part two:reliability and availability of 2-item redundant systems, *IEEE Trans. Reliability*, **R-24** (1975), 336 ~ 339.

[29] Buzacott, J. A., Markov approaches to finding failure time of repairable systems, *IEEE Trans. Reliability*, **R-19** (1970), 128 ~ 134.

[30] Campbell, N, R., The replacement of perishable members of a continually operating system, *J. Roy. Statist. Soc.*, **7** (1941), 110 ~ 130.

[31] Chung, K. L., Markov Chians with Stationary Transition Probabilities, Springer, Berlin, 1960.

[32] Cinlar, E., Introductlon to Stochastic processes, Prentice-Hall, Inc., 1975.

[33] Cox, D. R., Renewal Theory, Methuen and Company, London, 1962.

[34] Crow, L. H., Reliability analysis for complex repairable systems, ADA-020296, 1975.

[35] Dhillon, B. S., and Singh, C., Bibliography of literature on fault trees, *Microelectronics and Reliability*, **17** (1978), 502 ~ 503.

[36] EI-Neweihi, E., Proschan, F., and Sethuraman, J., Multlstate coherent systems, *J. Appl. Prob.*, **15**(1978), 675 ~ 688.

[37] Epstein, B., Application of the theory of extreme values in fracture problems, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **43**(1948), 403 ~ 412.

[38] Epstein, B., and Sobel, M. Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution, *Ann. Math. Statist.*, **25**(1954), 373 ~ 381

[39] Fox, B., Age replacement with discounting, *Oper. Res.*, **14** (1966), 533 ~ 537.

[40] Gaver, D. P., Time to failure and availability of paralleled redundant systems with repair, *IEEE Trans. Reliability*, **R − 12** (1963), 30 ~ 38.

[41] Gertsbakh, I. B., Models of Preventive Maintenance, North-Holland Publishing Company, 1977.

[42] Gnedenko, B. V., Belyaev, Yu. K., and Solovyev, A. D., Mathematical Methods of Reliability Theory, New York, Academic Press, 1969.

[43] Griffith, W. S., Multistate reliability models, *J. Appl. Prob.*, **17** (1980), 735 ~ 744.

[44] Gumbel, E. J., Les valeurs extremes des distributions statistiques, *Annales de L'Institute Henri Poincaré*, **4**(1935), 115.

[45] Hollander, M., and Wolfe, D. A., Nonparametric Statistical Methods, John Wiley, New York, 1973.

[46] Kalbfleisch, J. D., and Prentice, R. L., The Statistical Analysis of Failure Time Data, John Wiley, 1980.

[47] Kao, E. P. C., Optimal replacement rules when changes of state are semi-*Markovian, Oper. Res.*, **21** (1973), 1231 ~ 1249.

[48] Kaplan, E. L., and P. Meier, Nonparametric estimation from incomplete observations, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **53** (1958), 457 ~ 481.

[49] Kaufman, A., D. Grouchko, and R. Cruon, Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems, Academic Press, Inc., 1977.

[50] Lawless, J. F., Statistical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley, 1982.

[51] Lewis, P. A. W., and D. Robinson, Testing for a monotone trend in a modulated renewal analysis, in Reliability and Biometry, F. Proschan and R. J. Serfling, eds., Philadelphia Pennsylvania, SIAM, 1974.

[52] Lilliefors, H. W., On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **64** (1969), 337 ~ 389.

[53] Lin, P. M., and G. E. Alderson, Symbolic network functions by a single path-finding algorithm, in Proceedings 7th Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, 196 ~ 205, eds. Haddad, A. H., G. Metze and T. N. Trick, 1969.

[54] Linton, D. G., Some advancements in the analysis of two-unit parallel redundant systems, *Microelectronics and Reliability*, **15** (1976), 39 ~ 46.

[55] Lotka, A. J., A contribution to the theory of self-renewing aggregates with special reference to industrial replacement, *Ann. Math. Statist.*, **10** (1939), 1 ~ 25.

[56] Maguire, B. A., F. S. Pearson and A. H. A. Wynn, The time intervals between industrial accidents, *Biometrika*, **39** (1952), 168 ~ 180.

[57] Mann, N. R., R. E. Schafer, and N. D. Singpurwalla, Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, John Wiley and Sons. Ine., 1974.

[58] Miller, R. G., Jr., Survival Analysis, John Wiley and Sons, Inc., 1981.

[59] Mine, H., Reliability of physical systems, IEEE Trans. Circuit Theory, **CT-6** (1959), 138 ~ 151.

[60] Moore, E. F., and C. E. Shannon. Reliable circuits using less reliable relays, *J. Franklin Inst.*, **262** (1956), 191 ~ 208.

[61] Nakagawa, T., Studies on optimum maintenance policies for reliable systems, Ph. D. Thesis, Tyoto University, Japan, 1977.

[62] Nakagawa, T., and S. Osaki, A summary of optimum preventive maintenance policies for a two-unit standby redundant system, *Zeit. fur Oper. Res.*, **20** (1976), 171 ~ 187.

[63] Ohashi, M., and T. Nishida, A two-unit paralleled system with general distribution, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **23**, (1980), 313 ~ 325.

[64] Osaki, S., System reliability analysis by Markov renewal processes, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **12** (1970), 127 ~ 188.

[65] Osaki, S., and T. Nakagawa, Bibliography for reliability and availability of stochastic systems, *IEEE Trans. Reliability*, **R − 25** (1976), 284 ~ 287.

[66] Palm, C. Arbetskraftens fordelning vid betjaning av automatckiner, *Industritidningen Norden*, **75** (1947), 75 ~ 80, 90 ~ 94, 119 ~ 123.

[67] Proschan, F., Theoretical explanation of observed decreasing failure rate, *Technometrics*, **5** (1961), 375 ~ 383.

[68] Rsu, J. G., Optimization and Probability in Systems Engineering, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

[69] Rosenthal, A., and D. Frisque, Transformations for simplifying network reliability

computations, *Networks*, **7**(1977), 97 ~ 111.

[70] Ross, S. M., Applied Probability Models With Optimization Applications, Holden-Dav, San Francisco, 1970.

[71] Sandler, G. H., Systen Reliability Engineering, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1963.

[72] Satyanarayana, A., A unified formula for the analysis of some network reliability problems, *IEEE Trans. Reliability*, **R − 31** (1982), 23 ~ 32.

[73] Satyanarayana, A., and M. K. Chang, Network reliability and the factoring theorem, *Network*, **13** (1983), 107 ~ 120.

[74] Satyanarayana, A., and A. Prabhakar, New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks, *IEEE trans. Reliability*, **R − 27** (1978), 82 ~ 100.

[75] Shooman, M. L., Probabilistic Reliability: An Engineering Approach, New York: McGraw-Hill, 1968.

[76] Stephens, M. A., Goodness of fit for the extreme value distribution, *Biometrika*, **64** (1977), 583 ~ 588.

[77] Subramanian, R., and N. Ravichandran, Probabilistic analysis of a two-unit parallel redundant system, *Microelectronics and Reliability*, **19** (1979), 321 ~ 323.

[78] Tillman, F. A., C. L. Hwang, and W. Kuo, Optimization techniques for system reliability with redundancy——a review, *IEEE Trans. Reliability*, **R − 26** (1977), 148 ~ 155.

[79] Tsokos, C.P., and I. N. Shimi, (eds.), The Theory and Applications of Reliability, with Emphasis on Bayesian and Nonparametric Methods, Vol. I, II, Academic Press, Inc., 1977.

[80] Weibull, W., A statistical theory of the strength of materials, *Ing. Vetenskaps Akad. Handl.*, No. **15**l, 1939, 1 ~ 45.

[81] Willie, R. R., Computer-oriented methods for assessing reliability of complex systems, Ph. D, Thesis, University of California, Berkeley, 1979.

[82] Хинчин, А. Я., Математическая теория стационарной очереди, *Мат, Сборн.*, **39** (1932), 73 ~ 84.

[83] Барлощ, Р.Е. анд Маршалл, А.Ш., Боундс фор дистрибутионс щитх монотоне хазард рате, И, Ⅱ, *Annals of Mathematical Statistics*, **36** (1964), 1234~1274.

[84] Брощи, М. анд Ге, Г., Ешпонентиал ашрошиматионс фор тщо цлассес оф агинг дистрибутионс, *Annals of Probability*, **12** (1984), 869~875.

[85] Цао, J.X. анд Щанг, Ы.Д., Тхе НБУЦ анд НЩУЦ цлассес оф лифе дистри-

бутионс, *J. Appl. Prob.*, **28**, 473~479. Цоррецтион, *J. Appl. Prob.*, **29** (1991), 753.

[86] Далеы, Д. Ј., Тигхт боундс он тхе ешпонентиал аппрошиматион оф соме агинг дистрибутионс, *Annals of Probability*, **16** (1988), 414~423.

[87] Клефсjö, Б., А усефул агинг проперты басед он тхе Лаплаце трансформ, *J. Appl. Prob.*, **20** (1983), 615~626.

[88] Росс, С.М. (1995), *Stochastic Processes*, 2нд ед. Јохн Шилеы.

[89] Соловыев, А. (1983), ин *Mathematical Problems in Reliability Theory* (Балзылович, Е. Ы. ет ал. едс.), ин Руссиан.

[90] 程侃 (1999), 寿命分布类与可靠性数学理论, 北京:科学出版社.

[91] Калпакам, С. анд Шахул Хамеед, М.А., Чуаси-статионары дистрибутион оф а тщо-унит щарм-стандбы редундант сыстем, *J. Appl. Prob.*, **20** (1983), 429~435.

[92] Ли, Ш. анд Цао, Ј., Лимитинг дистрибутионс оф тхе ресидуал лифетимес оф севералрепаирабле сыстемс, *Microelectronics and Reliability*, **33** (1993), 1069~1072.

[93] Ли, Ш. анд Цао, Ј., Тхе лимитинг дистрибутион оф тхе ресидуал лифетимес оф а Марков репаирабле сыстемс, *Reliability Engineering and System Safety*, **41** (1993), 103~105.

[94] Нуец, М.Ф., Матриц-Геометриц Солутионс ин Сточастиц Моделс, Јохнс Хопкинс Университы Пресс, Балтиморе, МД, 1981.

[95] Шиддер, Д.В. , Ан Интродуцтион то Трансформ Тхеоры, *Academic Press*, Нещ Ыорк, 1971.

人名对照表

Anderson 安德森
Barlow 巴罗
Bellman 别尔曼
Bessel 贝塞尔
Boole 布尔
Cramer 克拉默
Darling 达林
Epstein 爱泼斯坦
Euler 欧拉
Gray 格雷
Gumbel 龚贝尔
Jordan 若尔当
Lagrange 拉格朗日
Laplace 拉普拉斯
Lebesgue 勒贝格
l'Hospitale 洛必达
Morgan 摩根
Poisson 泊松
Proschan 普劳斯钦
Stieltjes 斯蒂尔切斯
Tauber 托贝尔
Weibull 韦布尔
Гливенко格里文科
Колмогоров柯尔莫戈洛夫
Марков马尔可夫
Смирнов斯米尔诺夫

缩写语表

CS　Coherent system, 单调关联系统
DFR　Decreasing failure rate, 递减失效率 (故障率)
DFRA　Decreasing failure rate average, 递减平均失效率 (故障率)
DMRL　Decreasing mean residual life, 递减平均剩余寿命
FTA　Fault tree analysis, 故障树分析
HP　Homogeneous Poisson process, 时齐泊松过程
IFR　Increasing failure rate, 递增失效率 (故障率)
IFRA　Increasing failure rate average, 递增平均失效率 (故障率)
IMRL　Increasing mean residual life, 递增平均剩余寿命
L 变换　Laplace transform, 拉普拉斯变换
LS 变换　Laplace-Stieltjes transform, 拉普拉斯—斯蒂尔切斯变换
MCT　Mean cycle time, 平均周期
MDT　Mean down-time, 平均停工时间
MLE　Maximum likelihood estimator, 极大似然估计量
MMS　Multi-state monotone system, 多状态单调系统
MS　Monotone system, 单调系统
MTBF　Mean time between failures, 平均故障间隔, 平均开工时间
MTTF　Mean time to failure, 失效前平均时间

MTTFF Mean time to first failure, 首次故障前平均时间

MUT Mean up-time, 平均开工时间

NBU New better than used, 新的比用过的好

NBUE New better than used in expectation, 新的平均比用过的好

NHP Non-homogeneous Poisson process, 非时齐泊松过程

NWU New worse than used, 新的比用过的差

NWUE New worse than used in expectation, 新的平均比用过的差

RP Renewal process, 更新过程

SCS Strongly coherent system, 强单调关联系统

UMVUE Uniformly minimum variance unbiased estimator, 一致最小方差无偏估计

WCS Weakly coherent system, 弱单调关联系统

索 引

B

半马尔可夫过程, 257
半马尔可夫核, 256
泊松过程, 12, 432
不变测度, 257

C

乘积限估计, 423
冲击模型, 25

D

单调系统, 136
顶端事件, 122
动态规划法, 71, 361, 362
短路失效(故障), 77, 294
多状态单调系统, 170

E

二维指数分布, 27, 56, 245
二终端问题, 87

F

非致命冲击模型, 26

G

割, 89
割集, 143
割向量, 143
格点分布, 253, 261
更新方程, 253
更新过程, 251
更新过程极限定理, 271
更新函数, 252
更新密度, 252
更新寿命, 251
故障(失效), 3
故障次数, 5
故障次数的分布, 5
故障率(失效率), 8

故障频度, 6
关键路向量, 163
关联性, 136, 171
广义网络, 86

J

极大似然估计, 372
极限平均可用度, 5
结构函数, 136
卷积, 46

K

开工时间, 4
开路失效(故障), 77, 293
可靠度函数(可靠度), 3
可用度, 4

L

拉格朗日乘子法, 61
累积强度函数, 434
离散时间更新过程, 250
离散时间折扣率, 338
连续时间折扣率, 336
邻接矩阵, 104
路, 85, 128
路集, 163
路线矩阵, 108
路向量, 143

M

马尔可夫更新过程, 255
马尔可夫更新极限定理, 258
马尔可夫过程, 183
密度函数卷积, 14

P

平均故障次数, 5
平均开工时间, 6
平均可用度, 5
平均寿命, 3
平均寿命分布, 7
平均停工时间, 6
平均周期, 6

Q

奇次马尔可夫过程, 183
强度函数, 434

S

生存概率, 3
生灭过程, 190
剩余寿命分布, 8
失效(故障), 3
失效率(故障率), 8
时齐马尔可夫更新方程组, 257
时齐马尔可夫更新过程, 256
首次故障前平均时间, 4
首次故障前时间分布, 4
寿命分布, 7
寿命分布类, 33
瞬时故障频度, 6
瞬时可用度, 5
搜索法, 66, 71

T

停工时间, 4

W

网络, 84
韦布尔过程, 437
稳态故障频度, 6
稳态可用度, 5
无记忆性, 11, 23, 28, 30
无偏估计, 373

X

相协, 154
修理设备忙概率, 6

Y

一致最小方差无偏估计, 373
浴盆曲线, 9

Z

再生点, 251, 257
折扣率, 336, 338
致命冲击模型, 26
转移概率, 183
最小割, 89
最小割集, 143
最小割向量, 143
最小路, 128
最小路集, 163
最小路向量, 143