$e^{\pi i}+1=0$

Panorama of Mathematics

数学概览

12



# 泛函分析史

J. 迪厄多内 著

曲安京 李亚亚 等译

高等教育出版社

ematics

览

12

FANHAN FENXISHI

# 泛函分析史

J. 迪厄多内 著

曲安京 李亚亚 等译

译 者：李亚亚 邹学文 李 威
李 斐 刘 茜 王光鑫

郭大钧 校

高等教育出版社·北京

**图字：01-2013-7872 号**

Translation from English language edition:
*History of Functional Analysis* by J. Dieudonne
© North-Holland Publishing Company, 1981
*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the copyright owner.*

This edition of *History of Functional Analysis* 9780444861481 by J. Dieudonne is published by arrangement with ELSEVIER BV of Radarweg 29, 1043 NX Amsterdam, Netherlands

**图书在版编目（CIP）数据**

泛函分析史 /（法）迪厄多内著；曲安京等译. --
北京：高等教育出版社，2016.7
（数学概览/严加安，季理真主编）
书名原文：History of Functional Analysis
ISBN 978-7-04-045494-9

Ⅰ.①泛… Ⅱ.①迪… ②曲… Ⅲ.①泛函分析
Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 102959 号

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 策划编辑 | 王丽萍 | 责任编辑 | 李 鹏 | 封面设计 | 姜 磊 |
| 版式设计 | 张 杰 | 责任校对 | 殷 然 | 责任印制 | 韩 刚 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街4号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.hepmall.com.cn |
| 印 刷 | 涿州市星河印刷有限公司 | | http://www.hepmall.com |
| 开 本 | 787mm × 1092mm 1/16 | | http://www.hepmall.cn |
| 印 张 | 14.5 | | |
| 字 数 | 190 千字 | 版 次 | 2016 年 7 月第 1 版 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 印 次 | 2016 年 7 月第 1 次印刷 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | 定 价 | 49.00 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 45494-00

# 《数学概览》编委会

---


**主编：** 严加安　季理真

**编委：** 丁　玖　李文林

曲安京　王善平

徐　佩　姚一隽

# 《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: "数学是上帝用来描述宇宙的语言。" 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就

是明证。

现代数学及其未来是那么神秘, 吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话: “有谁不想揭开数学未来的面纱, 探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢? 我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域, 新世纪将会带来什么样的新方法和新成就? ” 中国有句古话: 老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界, 我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下, 如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多, 但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷, 我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如, 希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期; 克莱因的《数学讲座》是他在 19 世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的, 他的报告与当时的数学前沿密切相关, 对美国数学的发展起了巨大的作用; 李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解; 拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献, 而且还是分析概率论的奠基人, 他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新, 写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点, 良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体, 数学的各个领域从来就是不可分割的, 我们要以整体的眼光看待数学的各个分支, 这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外, 我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版, 希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是: 该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论, 具有历史价值, 有趣且易懂, 它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学, 它不仅具有科学性, 并且也具有艺术性。罗素说: “数学, 如果正确地看, 不但拥有真理, 而且也具有至高无上的美。” 数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主

要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性, 数学的美还表现在它内部的和谐和统一。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美, 它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感? 阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真

2012 年秋于北京

# 引　言

“泛函分析” 可以有许多种定义. 它的名字表明它包含了数学中处理函数的所有部分, 实际上指的是所有的数学分析. 在这里我们采用一种狭义的定义: 泛函分析是研究拓扑向量空间以及拓扑向量空间 $E$ 的子集 $\Omega$ 到拓扑向量空间 $F$ 的映射 $u:\Omega\to F$ 的一门学科, 并且假定这些映射满足各种代数和拓扑条件. 因此泛函分析已经涵盖了现代分析中相当大的一部分, 特别是偏微分方程理论.

泛函分析是由代数学和拓扑学相互结合而产生的, 因此代数学和拓扑学这两大数学分支的发展对泛函分析的发展演变产生巨大影响就不足为奇. 事实上, 几乎不能将一般拓扑学的早期历史 (即使集合论语言的早期历史) 与泛函分析的起源分离开来, 因为函数集合和函数空间引起了大多数人的关注 (继 $\mathbb{R}^n$ 的子集出现之后).

在代数学中拓扑向量空间之间的映射是线性的, 所以线性代数自然而然对泛函分析产生了巨大影响. 事实上, 从代数的 “差分演算” 中通过 “极限过程” 得到无穷小微积分的想法由来已久, 19 世纪末当沃尔泰拉 (Volterra) 运用类似的想法处理积分方程时, 这一古老的思想取得了更精确且更有影响的成果. 沃尔泰拉研究了积分方程

$$\int_a^y \varphi(x)H(x,y)dx = f(y), \tag{1}$$

其中 $\varphi$ 为未知函数, 函数 $f$ 和 $H$ 分别在 $[a,b]$ 和 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,

且 $f(a)=0$. 他用点 $y_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 将 $[a,b]$ 分为 $n$ 个子区间, 再用这 $n$ 个值代替 (1) 中的 $y$, 用相应的黎曼和代替积分, 由此他得到一个由 $n$ 个线性方程构成的方程组

$$\begin{cases} h_{11}z_1 & = b_1, \\ h_{21}z_1+h_{22}z_2 & = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ h_{n1}z_1+h_{n2}z_2+\cdots+h_{nn}z_n & = b_n, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $h_{jk}=H(y_j,y_k)$, $z_k=\varphi(y_k)$, $b_k=f(y_k)$. 因此, 积分方程 (1) 可以看成是当未知量的个数增加到无穷多个时, 方程组 (2) 的极限形式.

令人遗憾的是, 正如 19 世纪甚至更晚些时候, 线性代数没能在这个方向上得以很好的发展. 线性代数本身的发展演变过程非常缓慢和艰难, 其历时 130 多年, 包含几个阶段, 以我们现在的观点来看, 这些阶段性的发展与概念的逻辑顺序刚好是相反的, 即

线性方程
↓
行列式
↓
线性和双线性形式
↓
矩阵
↓
向量空间和线性映射

尽管格拉斯曼 (Grassmann) 和皮亚诺 (Peano) 在线性代数中做出的尝试并不成功, 但是在 1900 年以前线性代数中的本质内容和几何观点一直包含在这些尝试之中. 虽然凯莱 (Cayley) (1843 年) 讨论了向量和线性子空间, 但是它们却被看成是某个 $\mathbb{R}^n$ 的部分. 换句话说, 向量空间中的所有元素都依赖于一个固定的基, 通过对应于该基的矩阵才能处理线性映射. 1880 年, 数学家通过复杂的行列式计算, 在没有使用任何几何解释的情况下建立了各种 "约简" 定理. 弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 在构建线性代数一般框架方面的工作有很大的影响. 令人

遗憾的是他选用的是双线性形式 $\sum_{p,q} a_{pq}x_p y_q$ 而不是矩阵 $\{a_{pq}\}$ 来进行系统研究, 这使数学发展后退了一步, 甚至对凯莱而言都是后退的. 1930 年以前, 没有人能正确理解有限维向量空间之间的对偶概念, 甚至在范德瓦尔登 (van der Waerden) 1931 年的书中向量空间和它的对偶都是等同的.

线性代数中所有的发展严重影响了线性泛函分析的发展演变. 特别地, 线性泛函分析同样经历 (只是很短的几年) 了线性代数发展过程中经历的一系列令人遗憾的阶段. 只有在认识到通常将向量看成是 "$n$ 重数组" 的概念不可能推广到无穷维的函数空间上之后, 这个概念最终被取消而几何观点开始真正盛行起来.

通过指出泛函分析中的一些事件以及数学各个部分之间产生的影响, 引言后的示意图详细描绘了泛函分析发展的一系列阶段. 如果想用几个关键词来简述泛函分析复杂的历史发展过程的话, 我认为应该将重点放在两个概念的演变上: 谱理论和对偶. 当然这两个概念都起源于求解未知数是函数的线性方程 (或线性方程组) 中遇到的非常具体的问题. 谱理论的基础概念是特征值、特征函数以及函数关于特征函数的展开式, 早在 19 世纪初傅里叶级数理论中已经出现了特征函数. 这些基本概念为后来的数学发展提供了模板. 数学家用了 60 多年的艰苦努力才将常微分方程上的施图姆 – 刘维尔问题推广到薄膜振动的偏微分方程上. 他们在研究中逐渐认识到问题的关键不在微分方程 (或偏微分方程) 本身上, 而是在于与它们相关的积分方程上. 一开始这些积分方程没有明显地写出来, 从而被称为 "密码积分" 方程, 以积分估值为基础的方法直到后来才作为标准方法出现在积分方程理论中.

泛函分析历史的显著特征是经过一段缓慢的孕育期后, 或者说, 谱理论在短短几年时间里完全发展成熟, 在这一过程中产生了线性对偶的概念. 由于某种抵制效应, 所有数学家后来都熟悉了对偶概念, 但是分析学家们最先开始理解它. 泛函分析包含一系列可以称之为具体的步骤, 这是泛函分析快速发展中最有趣的一点. 先忽略所考虑问题的特殊性, 再确保将它置于一个更加一般的环境中仍然是可行的, 这是每个步骤中取得决定性一步的关键.

1896—1900 年间, 这些 “不连续” 步骤中的第一个出现了, 在此期间拉鲁 (Le Roux)、沃尔泰拉和弗雷德霍姆 (Fredholm) 没有像他们的前辈们 (阿贝尔 (Abel)、刘维尔 (Liouville) 和贝尔 – 诺依曼 (Beer–Neumann)) 那样研究特殊的积分方程, 而是对积分方程的核做出极小的假设, 他们这样做了之后发现积分方程理论比之前所考虑的要简单得多.

希尔伯特 (Hilbert) 在他 1906 年的文章中完成了第二步, 对称核积分方程的特殊理论可以纳入 “有界” 无穷二次型的更一般的概念中, 这一认识对常微分方程和偏微分方程随后的所有发展提供了所需要的框架.

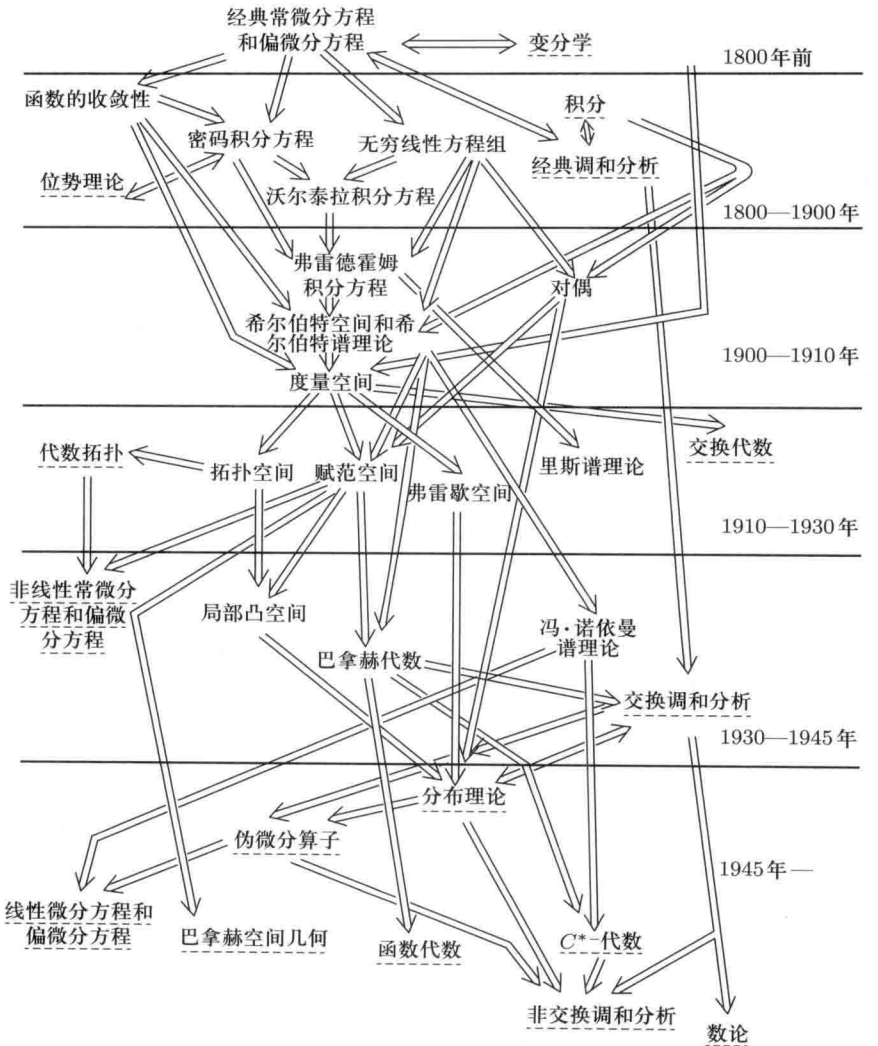
同时期发现的勒贝格积分以及弗雷歇 (Fréchet) 在分析学中引入的几何和拓扑概念, 使得希尔伯特的追随者们将希尔伯特的结果用我们现在所称的希尔伯特空间的语言表述出来, 希尔伯特空间将欧氏几何与积分理论联系起来, 同时在希尔伯特空间中也有可能讨论最一般的线性方程组.

有了这些工作, 里斯 (Riesz) 在 1910—1913 年间对任一指数 $p$ ($1 < p < +\infty$) 引入 $L^p$ 空间和 $l^p$ 空间, 也发现了两个不同的空间 $L^p$ 空间和 $L^q$ 空间之间自然的对偶, 其中 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 希尔伯特空间的自对偶性在这一情形下与不能消除的混乱思想有本质区别.

虽然里斯在 $l^p$ 空间中处理线性方程组时最早得到了一个条件, 这个条件后来在哈恩 – 巴拿赫定理中有特别的应用, 但是里斯没有发现这个条件其实相当于定义在子空间上的连续线性形式的延拓. 1921 年, 黑利 (Helly) 再一次将线性方程组理论从特殊的 $l^p$ 空间推广到 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的任一赋范空间上而完成了泛函分析发展的第四步. 之后, 只需要两步多一点就能使泛函分析取得现在的地位, 其中一步是哈恩 (Hahn) 和巴拿赫 (Banach) 一起运用超穷归纳法将线性方程组理论过渡到一般赋范空间上, 另一步是 1935—1945 年间将对偶理论扩展到局部凸空间上.

不断推广的进程有可能会使得 20 世纪中期数学研究取得的成果慢慢减少. 鉴于此, 我们可能因为相隔时间太短而不能正确评价这些事件. 1950 年后, 拓扑向量空间与线性代数、多重线性代数、一般拓

扑以及测度论一起稳固地成为现代数学的标准工具之一. 20 世纪的后 30 年主要运用泛函分析的基本工具并以全新的富有创造性的方法取得了成果, 即要么将泛函分析这个基础工具应用到以前不能应用的理论中, 如微分几何、微分拓扑 (K 理论、阿蒂亚 – 辛格指标定理和叶状结构), 要么运用它来构造处理泛函方程 (分布、索伯列夫空间和伪微分算子及它们的推广) 的更有力的方法.




这本书稿来自我 1979 年在里约热内卢的一系列演讲, 这些演讲受到里约热内卢联邦大学 Jorge Alberto Barroso 教授的邀请, 在此向

他致以衷心的感谢. 我还要感谢他为本书的顺利出版在指导手稿书写方面所付出的辛劳.

# 《数学概览》(Panorama of Mathematics)

(主编: 严加安　季理真)


1. Klein 数学讲座 (2013)
(F. 克莱因　著/陈光还、徐佩　译)


2. Littlewood数学随笔集 (2014)
(J. E. 李特尔伍德　著, B. 博罗巴斯　编/李培廉　译)


3. 直观几何 (上册) (2013)
(D. 希尔伯特, S. 康福森　著/王联芳　译, 江泽涵　校)


4. 直观几何 (下册)　附亚历山德罗夫的《拓扑学基本概念》(2013)
(D. 希尔伯特, S. 康福森　著/王联芳、齐民友　译)


5. 惠更斯与巴罗, 牛顿与胡克:
数学分析与突变理论的起步, 从渐伸线到准晶体 (2013)
(B. И. 阿诺尔德　著/李培廉　译)


6. 生命· 艺术· 几何 (2014)
(M. 吉卡　著/盛立人　译, 张小萍、刘建元　校)


7. 关于概率的哲学随笔 (2013)
(P.-S. 拉普拉斯　著/龚光鲁、钱敏平　译)


8. 代数基本概念 (2014)
(I. R. 沙法列维奇　著/李福安　译)


9. 圆与球 (2015)
(W. 布拉施克　著/苏步青　译)


10.1. 数学的世界 I (2015)
(J. R. 纽曼　编/王善平、李璐　译)


10.2. 数学的世界 II (2016)
(J. R. 纽曼　编/李文林　等译)


10.3. 数学的世界 III (2015)
(J. R. 纽曼　编/王耀东、李文林、袁向东、冯绪宁　译)


11. 对称的观念在 19 世纪的演变: Klein 和 Lie (2016)
(I. M. 亚格洛姆　著/赵振江　译)


12. 泛函分析史 (2016)
(J. 迪厄多内　著/曲安京、李亚亚　等译)

**郑重声明**

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话** （010）58581999　58582371　58582488
**反盗版举报传真** （010）82086060
**反盗版举报邮箱** dd@hep.com.cn
**通信地址** 北京市西城区德外大街 4 号
高等教育出版社法律事务与版权管理部
**邮政编码** 100120

# 目　录

**第一章　线性微分方程和施图姆－刘维尔问题** ····· **1**

§1　18 世纪的微分方程和偏微分方程 ····· 1

§2　傅里叶展开式 ····· 3

§3　施图姆－刘维尔理论 ····· 6

**第二章　“密码积分”方程** ····· **11**

§1　逐次逼近法 ····· 11

§2　19 世纪的偏微分方程 ····· 14

§3　位势理论的起源 ····· 16

§4　狄利克雷原理 ····· 19

§5　贝尔－诺依曼方法 ····· 21

**第三章　薄膜振动方程** ····· **27**

§1　施瓦茨 1885 年的论文 ····· 27

§2　庞加莱的贡献 ····· 33

**第四章　无穷维思想** ····· **43**

§1　19 世纪的线性代数 ····· 43

§2 无穷行列式 · · ·

§2　卡莱曼算子和广义特征向量 · · ·

# 第一章　线性微分方程和施图姆－刘维尔问题*

## §1　18 世纪的微分方程和偏微分方程

大约 1750 年前, 单变量函数的概念不是很确切. 对函数定义域的描述在多数情况下也不够准确. 假设在每个点 $x_0$ 附近, 函数等于 $x-x_0$ 的幂级数, 那么对这个级数进行逐项求导就可以得到该函数的导数. 为了求解 $n$ 阶微分方程

$$y^{(n)}=F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{1}$$

我们在 (1) 中用幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k$ 和它的导数来代替 $y$ 和 $y$ 的导数, 因为左右两边的级数相等, 所以当 $k\geqslant n$ 时, $c_k$ 是关于 $c_0,c_1,\cdots,c_{k-1}$ 的函数. 因此方程的解是由 $n$ 个任意参数 $c_0,\cdots,c_{n-1}$ 确定的. 早在 17 世纪末, 数学家认识到只有在极少数情况下才能用已知函数的原函数来明确地写出方程的解 (例如一阶线性方程 $y'=a(x)y+b(x)$).

1760 年后, 数学家开始全面研究任意阶的线性方程

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=b(x). \tag{2}$$

*引言及本章由李亚亚翻译, 全书由李亚亚统稿.

达朗贝尔 (d'Alembert) 发现用方程 (2) 的特解加上相应齐次方程 $L(y)=0$ 的解可以得到方程 (2) 的所有解. 不久之后, 拉格朗日 (Lagrange) [135, vol. I, p. 474] 指出 $L(y)=0$ 的一般解可以写成 $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, 其中 $c_k$ 是任意常数, $y_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 是特解 (这里他假设 $y_k$ 是线性无关的). 接下来, 他运用他著名的 "常数变易法" [135, vol. IV, p. 159] 表明在 $y_k$ 已知的情况下如何求解方程 (2): 解被写成 $y=\sum_{k=1}^{n} z_k y_k$, 其中 $z_k$ 是取决于 $n-1$ 个线性关系式

$$\sum_{k=1}^{n} z_k' y_k^{(\nu)} = 0 \quad (0 \leqslant \nu \leqslant n-2) \tag{3}$$

的未知函数. 由这些条件可以推出当 $0 \leqslant \nu \leqslant n-1$ 时, $y^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{n} z_k y_k^{(\nu)}$. 在 (2) 中用 $\sum_{k=1}^{n} z_k y_k$ 代替 $y$, 又因为 $y_k$ 使得 $L(y_k)=0$, 从而可以得到 $z_k'$ 的另一个线性方程

$$\sum_{k=1}^{n} z_k' y_k^{(n-1)} = b(x), \tag{4}$$

用克莱姆公式可以计算出 $z_k'$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 问题也因此被简化为计算它们的原函数.

拉格朗日 [135, vol. I, p. 471] 也对线性微分算子 $L$ 引入伴随的概念, 这在后来的发展中非常重要: 他表明存在一个线性微分算子 $M$, 满足恒等式

$$zL(y) - yM(z) = \frac{d}{dx}(B(y,z)), \tag{5}$$

其中 $B$ 是 $(y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 和 $(z, z', \cdots, z^{(n-1)})$ 的双线性形式, 它可以看成是古典 "分部积分" 的推广. 从这个公式中他可以推出如果 $M(z)=0$ 的解 $z$ 已知, 则可以通过求解 $n-1$ 阶方程 $B(y,z)=\text{Const.}$ 而得到 $L(y)=0$ 的解.

直到 18 世纪中期数学家才开始研究偏微分方程, 它们与机械学问题或物理问题紧密相关, 从而这些偏微分方程至少是二阶的 (见第 2 节). 1770 年后, 只有欧拉 (Euler) 和拉格朗日开始研究一阶偏微分方程. 欧拉只求解了一小部分的特殊方程, 后来拉格朗日得到了求解

一阶偏微分方程的一般方法, 这一方法使得他的追随者沙比 (Charpit) 和蒙日 (Monge) 能将一般的一阶方程

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{6}$$

的求解问题简化为常微分方程组的求解. 后来柯西 (Cauchy) 在他的"特征曲线" 概念中发展了这一思想.

## §2 傅里叶展开式

1747 年, 达朗贝尔第一次用数学方法对弦的微小振动的一般问题进行了处理, 这里弦的长度为 $a$, 且在每个端点处是固定的. 弦在平面上移动, 其中 $Ox$ 轴沿着弦的其他位置, 线段为 $0 \leqslant x \leqslant a$. 如果 $y = u(x,t)$ 是弦在 $t$ 时刻的方程, 达朗贝尔表明当 $u(x,t)$ 很小时, 它满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7}$$

其中 $c$ 是与 $x$ 无关的已知函数, 而且如果弦的密度是常数, 则 $c$ 也是常数. 当 $c$ 是常数时, 取 $X = x - ct$, $Y = x + ct$ 为新的变量, 则方程 (7) 可以化简为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0$. 达朗贝尔给出方程 (7) 的解为

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct), \tag{8}$$

其中 $f$ 和 $g$ 是 "任意" 函数. 一年后, 欧拉解释了达朗贝尔的这个结果, 当规定 $x$ 的两个函数为

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \tag{9}$$

时, $u(x,t)$ 是已知的 (对 $c = 1$ 的情形), 且 $u(x,t)$ 的值可以明确表示为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - t) + \psi(x + t)) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \psi(x - \xi)d\xi \tag{10}$$

(欧拉只是给出了等价于这个公式的几何构造). 数学家由经验得知 $\varphi(x)$ 是完全不同于解析函数的函数, 例如它在某些点处没有导数. 这一点使得欧拉不仅引入他所谓的 "连续" 函数 (也就是现在意义下的解析函数), 还引入了一些更一般的函数, 并且他在没有给出准确定义

的情况下对这些函数赋予了 "力学" 意义 (它们可能就是我们所称的分段二次可微函数).

另一方面, 早在 1715 年, 泰勒 (B. Taylor) 在没有用到方程 (7) 的情况下直接得到, 当 $c$ 是常数时, 对任意整数 $n \geqslant 1$, 函数

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi ct}{a} \tag{11}$$

表示弦的振动, 即当 $n=1$ 时, 它表示 "基音", 当 $n=2,3,\cdots$ 时, 它表示 "和音". 因为振动弦产生的声音通常是几个 "和音" 的混合, 所以丹尼尔 · 伯努利 (Daniel Bernoulli) 于 1750 年提出对 $\alpha_n$ 和 $\beta_n$ 的某些适当值, 一般解 (10) 也可以写成这样一个级数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi c}{a}(t-\beta_n). \tag{12}$$

1753 年, 欧拉观察到由这个式子可以推出定义在区间 $-a \leqslant x \leqslant a$ 上的任意 "力学" 函数都可以写成级数

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{a} + b_1\sin\frac{\pi x}{a} + a_2\cos\frac{2\pi x}{a} + b_2\sin\frac{2\pi x}{a} + \cdots, \tag{13}$$

而且他相信这种解析函数的级数只能表示一个解析函数. 几乎所有与他同时代的数学家都不同程度地赞同他的这一观点, 在傅里叶 (Fourier) 开始研究热理论之前, 在这一问题并没有取得什么进展 (见 [65, (2), t. $\mathrm{XI}_2$, p. 273–300]). 为了在各种边界条件下求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{14}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{15}$$

傅里叶开始系统地寻找形如 $u(x,y) = v(x)w(y)$ 的解, 和丹尼尔 · 伯努利一样, 他想要找到用级数表示的最一般解, 其中级数的项是 (13) 中的特殊项. 这样做了之后, 他研究的问题其实就是把函数 $f$ 表示成级数 (13), 同时他还对丹尼尔 · 伯努利的讨论增加了一些公式, 这些公式给出了系数 $a_n$ 和 $b_n$ 的值

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \tag{16}$$

当 $a=\pi$ 时, 克莱罗 (Clairaut) 和欧拉已经得到了这些公式, 只是他们没有意识到它们的好处. 运用这些公式, 傅里叶用许多例子表明非解析函数对应的傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$. 他断言这对 "任意" 函数也是成立的, 但是他和柯西都没能证明这一点. 1829 年, 狄利克雷 (Dirichlet) 第一次单独对分段单调函数和分段连续函数证明了傅里叶的断言是正确的. 这里也应该提一下, 1799 年帕塞瓦尔 (Parseval) 经过常规计算得到了公式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2dt, \tag{17}$$

不过他没有给出任何收敛性的证明.

这些结果极大地推动了三角级数理论的发展, 三角级数理论是 19 世纪大多数分析学家最主要的关注点之一, 它研究的问题主要是级数的收敛准则以及级数的和式与系数之间的关系, 与这一理论的发展演变密切相关的是人们对实数集、函数以及积分概念的理解的逐渐精确和深入. 但是正如我们所知, 在 1920 年之前, 这一理论与泛函分析的发展之间没有太多联系.

相反, 傅里叶在热理论中的其他结果却使谱理论诞生了. 例如 [67, vol. I, p. 304] 他表明当假设问题中的球面对称时, 半径为 $r$ 的固体表面的 "冷却" 问题可以用带有 "边界条件" 的偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{18}$$

来刻画, 这里的 "边界条件" 是当 $x$ 趋于 0 时, $u(x,t)$ 必须是有限的, 且对 $x=r$ 和所有的 $t$, $u(x,t)$ 满足关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+hu=0, \tag{19}$$

其中 $h$, $k$ 是常数. 傅里叶运用他喜欢的 "分离变量法" 得到微分方程 (18) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{x}\exp(-k\lambda^2 t)\sin\lambda x, \tag{20}$$

其中 $\lambda$ 的值是超越方程

$$\frac{\lambda r}{\tan\lambda r}=1-hr \tag{21}$$

的解. 傅里叶容易地证明了方程 (21) 有无穷多个实根 $\lambda_n$, 并且当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时 $\lambda_n \to +\infty$. 他为了得到方程 (18) 关于边界条件 (19) 的解, 且这个解使得 $u(x,0)$ 是一个给定函数 $f(x)$, 仿照前面的方法, 他将 $xf(x)$ 写成一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n x$. 他表明可以得到 "正交" 关系式 (不过他没有用到这个词)

$$\int_0^r \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx = 0, \quad m \neq n, \tag{22}$$

从这些关系式中可以推出

$$c_n = \frac{\int_0^r xf(x) \sin \lambda_n x dx}{\int_0^r \sin^2 \lambda_n x dx}, \tag{23}$$

当然他没有给出严格的证明, 也没有给出级数收敛于 $xf(x)$ 的任何证明.

## §3 施图姆 – 刘维尔理论

泊松 (Poisson) 继续研究和推广了傅里叶关于热理论的结果. 施图姆 (Sturm) 和刘维尔 (Liouville) 在傅里叶和泊松的工作的基础上做了进一步研究, 施图姆在 1836 年、刘维尔在 1837 年的工作共同建立了一个一般理论, 这个理论包括傅里叶和泊松考虑过的所有情形, 只是没有假设显式积分存在的可能性. 他们考虑了二阶微分方程

$$y'' - q(x)y + \lambda y = 0, \tag{24}$$

其中 $q(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧区间 $[a,b]$ 上的实值函数, $\lambda$ 是复参数. 第一个问题是考虑形如

$$y(a)\cos\alpha - y'(a)\sin\alpha = 0, \quad y(b)\cos\beta - y'(b)\sin\beta = 0 \tag{25}$$

的边界条件, 其中 $\alpha, \beta$ 是两个取值为正数的常数, 他们也考虑当 $\lambda$ 取什么值时, 施图姆 – 刘维尔问题有非平凡解 (用现在的术语描述就是对应于 "特征值" $\lambda$ 的 "特征函数").

由泊松建立的一个重要结果是: 如果 $\lambda, \mu$ 是两个不同的特征值, $u, v$ 是相应的两个特征函数, 则由关系式

$$u'' - qu + \lambda u = 0, \quad v'' - qv + \mu v = 0$$

可以推导出

$$u''v - v''u + (\lambda - \mu)uv = 0.$$

因为 (25) 式, 所以有

$$\int_a^b (u''v - v''u)dx = (u'v - v'u)\Big|_a^b = 0$$

成立, 因此可以得到

$$(\lambda - \mu)\int_a^b u(x)v(x)dx = 0. \tag{26}$$

关系式 (26) 的第一个结果是表明特征值必须是实数. 实际上, 如果 $\lambda$ 不是实数, 则 $\overline{\lambda}$ 也是特征值, $\overline{u}$ 为相应的特征函数, 在 (26) 式中用 $\overline{\lambda}$ 和 $\overline{u}$ 代换 $\mu$ 和 $v$, 可以得到 $\int_a^b |u(x)|^2 dx = 0$, 这与假设是矛盾的.

施图姆的主要贡献是证明存在无穷多个特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, $\lambda_n \to +\infty$. 达朗贝尔在他弦振动的研究中已经考虑了形如 $y'' - \lambda\varphi(x)y = 0$ 的方程, 其中 $\varphi$ 不是常函数, 他也试图证明存在单个的 $\lambda$ 值使得方程在 $[a, b]$ 上有解, 这个解在 $a$ 和 $b$ 处为零, 在其他地方都不等于零. 他的想法是当 $\lambda$ 变化时, 对 $y'/y$ 研究相应的里卡蒂方程 [65, (2), vol. $\mathrm{XI}_2$, p. 311]. 施图姆的方法与达朗贝尔的相似: 他考虑 (24) 的满足 (25) 的第一个条件的解 $u(x, \lambda)$, 且可以用条件 $u(a, \lambda) = 1$ (或当 $\alpha = 0$ 时, $u'(a, \lambda) = 1$) 来确定. 他还研究了 $u(x, \lambda)$ 作为 $\lambda$ 的函数时的变分. 从而 $\lambda_n$ 是方程 $u(b, \lambda)\cos\beta - u'(b, \lambda)\sin\beta = 0$ 的解. 因此当 $q_1(x) \leqslant q_2(x)$ 时, 他对两个方程

$$y'' + q_1(x)y = 0, \quad y'' + q_2(x)y = 0 \tag{27}$$

的解进行比较, 发现了许多重要结果, 如 "比较定理", 这里我们仅引用使得特征值存在的结果. 施图姆的论述非常繁琐、也不清楚 ([209], [S, p. 259–268]), 可以这样来简单陈述他的结果: 引入两个函数 $y_1 = y$,

$y_2 = y'$, 从而方程 $y'' + q(x)y = 0$ 可以写成两个一阶方程构成的方程组, 即 $y_1' = y_2$, $y_2' = -q(x)y_1$, 接着再取两个新的未知函数 $\gamma$ 和 $\theta$, 它们使得 $y_1 = \gamma \sin\theta$, $y_2 = \gamma\cos\theta$, 从而有方程组

$$\gamma' = (1 - q(x))\gamma \sin\theta\cos\theta, \tag{28}$$

$$\theta' = \cos^2\theta + q(x)\sin^2\theta, \tag{29}$$

其中第二个方程是一阶的[①]. 比较定理具有下面的形式: 考虑两个方程

$$\theta' = \cos^2\theta + q_1(x)\sin^2\theta, \quad \theta' = \cos^2\theta + q_2(x)\sin^2\theta \tag{30}$$

在 $[a,b]$ 上的解 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$, 并假设在 $[a,b]$ 上 $q_1(x) < q_2(x)$. 从而如果 $\alpha \in (a,b)$, 则有 $\varphi_1(\alpha) \leqslant \varphi_2(\alpha)$; 如果进一步 $\alpha < x < b$, 则有 $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. 这个定理的证明非常简单, 只要计算出函数 $w(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x)$ 的导数, 说明存在 $[a,b]$ 上的一个连续函数 $f$ 使得 $w''(x) - f(x)w(x) \geqslant 0$. 这样就能推出 $w(x)$ 的符号不变.

如果我们现在把前面的变量变化应用到 (24) 上, 会得到方程

$$\theta' = \cos^2\theta + (\lambda - q(x))\sin^2\theta, \tag{31}$$

我们也考虑使得 $\omega(a,\lambda) = \alpha$ 的解 $\omega(x,\lambda)$, 从而特征值 $\lambda$ 是方程

$$\omega(b,\lambda) = \beta + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{32}$$

的解. 施图姆的比较定理表明对每个 $x \in (a,b]$, 函数 $\lambda \mapsto \omega(x,\lambda)$ 是严格递增的, 另外从 (31) 中可以得出如果对每一个整数 $k$, 有 $\omega(x,\lambda) = k\pi$, 则 $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}(x,\lambda) = 1$. 基于这些事实可以得出, 对每个 $n \geqslant 1$, 方程 (32) 有且仅有一个解 $\lambda_n$, 对每个 $n \leqslant 0$, 它没有解. 另外, 相应的特征函数 $u_n$ 在 $(a,b)$ 上有 $n$ 个零点 [52, p. 435–441].

以施图姆的上述结果为基础, 刘维尔对傅里叶和泊松展开式给出了一般性的表述. 用 $\lambda_n$ 和 $\lambda_m$ 代替 (26) 式中的 $\lambda$ 和 $\mu$, 可以得到

$$\int_a^b u_m(x)u_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \tag{33}$$

[①]这一方法最早好像是由普吕弗 (H. Prüfer) 引入的 [180].

对每个定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f$, 刘维尔给出了它的 "广义傅里叶系数"

$$c_n = \left(\int_a^b f(x)u_n(x)dx\right) \Big/ \left(\int_a^b u_n^2(x)dx\right), \tag{34}$$

也考虑了 "广义傅里叶级数" $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$. 为了研究级数的收敛性, 他需要更加清楚地了解当 $n$ 趋于无穷时, $\lambda_n$ 和 $u_n$ 的变化情况. 他观察到如果 $\lambda = \rho^2 > 0$, 则 (24) 的任意解满足下面关系式

$$y(x) = A\cos\rho x + B\sin\rho x + \frac{1}{\rho}\int_a^x q(t)y(t)\sin\rho(x-t)dt \tag{35}$$

(将 (24) 式写成 $y'' + \rho^2 y = q(x)y$, 运用拉格朗日的 "常数变易法" 可以推导出这个式子, 但这不是刘维尔证明 (35) 式的方法). 将 (35) 式应用到 $y = u_n$ 上, 再用 $\lambda_n^{\frac{1}{2}}$ 替换 $\rho$, 他对 $\rho_n = \dfrac{(n-1)\pi}{b-a} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 和 $u_n = \sqrt{\dfrac{2}{b-a}}\cos\rho_n x + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 给出了一个框架性的证明, 其中 $\cos\alpha \neq 0$, 用条件 $\int_a^b u_n^2(x)dx = 1$ 将 $u_n$ 正规化. 这一点使得他能证明, 如果 $f$ 在通常情况下的傅里叶级数收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ 收敛. 他还需证明如果 $f$ 连续, 则函数 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ 等于 $f(x)$. 在没有证明的情况下, 他假设 $F$ 连续, $c_n = \int_a^b F(x)u_n(x)dx$, 从而将对 $F = f$ 的证明简化为证明对所有的 $n$, 关系式 $\int_a^b (F(x) - f(x))u_n(x)dx = 0$ 成立 (这是规范正交系 "完备" 性的首次出现). 但是他只有在 $F - f$ 在 $[a,b]$ 上仅有有限多个零点的情况下才能做到这一点. 19 世纪末, 数学家才给出了关系式 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x)dx$ 的完整证明, 其中 $f$ 是 $C^2$ 上的分段函数. 刘维尔对所有 $N$, 证明相应的不等式 $c_1^2 + \cdots + c_N^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx$ (它被命名为贝塞尔不等式, 贝塞尔对三角函数系证明了这个不等式成立 ([151], [S. p. 268–281])).

这些显著的结果成为谱理论的重要内容, 分析学家努力把施图姆 – 刘维尔理论推广到一些类型的偏微分方程上. 但是在 19 世纪的前 50 年, 这一理论在偏微分方程上的发展远不如在常微分方程上的发展, 直到 1880 年后才有可能在偏微分方程上取得成果 (见第三章).

# 第二章 “密码积分”方程*

## §1 逐次逼近法

18 世纪用扰动方法研究天体力学中行星运动理论时, 首先忽略行星之间的引力, 得到每个行星绕太阳运行的开普勒轨道, 再通过考虑它与其他行星之间的引力来找到实际轨道和开普勒轨道之间的偏差. 由于行星质量远小于太阳质量, 所以这些偏差很小. 用数学术语来表述的话, 相当于在最简单的情形下寻找微分方程组

$$y_i' = \varepsilon f_{1i}(x, y_1, \cdots, y_n) + \varepsilon^2 f_{2i}(x, y_1, \cdots, y_n) + \cdots \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{1}$$

的好的近似解, 其中右边的参数 $\varepsilon$ 很 “小”. 18 世纪对于函数的一般概念的认识使得数学家很自然地将 $y_i$ 表示为 $\varepsilon$ 的幂级数

$$y_i = a_i + \varepsilon y_{1i} + \varepsilon^2 y_{2i} + \cdots \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{2}$$

将这些表达式代入 (1) 中, 两边 $\varepsilon$ 的各幂次的系数依次相等. 从而可以得到一系列方程

$$\begin{aligned}
&y_{1i}' = f_{1i}(x, a_1, \cdots, a_n),\\
&y_{2i}' = f_{2i}(x, y_{11}, \cdots, y_{1n}),\\
&y_{3i}' = f_{3i}(x, y_{11}, \cdots, y_{1n}, y_{21}, \cdots, y_{2n}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

*本章由邹学文翻译.

所有这些方程的右边都是已知函数, 因此问题归为只需对函数 “求积分”. 人们并没有从数学上证明这些步骤的正确性. 这些计算的目的只是为了得到与观察的情况相一致的令人满意的结果.

众所周知, 柯西 (Cauchy) 是对一般类型的微分方程证明了解的存在性定理的第一个数学家, 这些微分方程找不到它们的显式解. 他的策略是考虑早期为了数值计算而引入的各种方法, 在某些特定条件下表明这些方法实际上给出了方程的解, 该解是一个逼近过程的极限. 特别地, 他在布拉格发表于 1835 年的文章 ([40], (2), vol. XI, p. 399–465) 中用到了上面提到的方法, 该方法不仅用于常微分方程, 而且用于一阶线性偏微分方程 (该偏微分方程等价于一个常微分方程组)

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{i=1}^{p}A_i(t,x_1,\cdots,x_p)\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{3}$$

现在的问题是寻找一个解, 当 $t=0$ 时, 其值为给定的函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 柯西将 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 看成参数, 从而将 (3) 转化为等价的 “积分 – 微分” 方程

$$U(t,x_1,\cdots,x_p)=u(x_1,\cdots,x_p)+\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{p}A_i(s,x_1,\cdots,x_p)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)ds, \tag{4}$$

他用逐次逼近法来求解这个方程, 令 $U_0=u$, 归纳定义

$$U_n(t,x_1,\cdots,x_p)=u(x_1,\cdots,x_p)+\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{p}A_i(s,x_1,\cdots,x_p)\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_i}\right)ds.$$

但是他只能证明当 $A_i$ 是解析函数时, 序列 $\{U_n(x)\}$ 收敛于方程的解.

刘维尔在他 1837 年关于施图姆 – 刘维尔问题的文章中独立地用一个类似的方法处理线性微分方程 $y''=f(x)y$, 他的目的是在 $[a,b]$ 上找到方程满足边值条件 $y'(a)-hy(a)=0$ 的解. 他从满足这个边值条件的函数 $y_0(x)=1+h(x-a)$ 开始, 考虑级数

$$y=y_0+y_1+\cdots+y_n+\cdots, \tag{5}$$

其中当 $n>0$ 时, $y_n$ 由递归方程

$$y_{n+1}(x)=\int_a^x dt\int_a^t f(s)y_n(s)ds$$

来确定. 须注意当时还没有一致收敛的概念, 也没有证明连续函数的级数具有连续性、逐项可微性或逐项可积性. 刘维尔很容易地证明了存在一个常数 $C$, 使得

$$|y_n(x)| \leqslant C^n(x-a)^{2n}/(2n)!,$$

从而他得到对每个 $x$, 由级数 (5) 给出的 $y(x)$ 收敛, 他也理所当然地认为 $y$ 是一个 $C^2$ 函数且是这一问题的解.

另外, 刘维尔的注释很有趣, 函数 $y$ 也可以用关系式

$$y = y_0 + \int_a^x dt \int_a^t f(s)y(s)ds \tag{6}$$

来确定 (它也能写成 $y = y_0 + \displaystyle\int_a^x (x-t)f(t)y(t)dt$). 因而, 这大概是后来称为 "第二型沃尔泰拉积分方程" 的第一个例子 (见第四章). 记 $z_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ , 刘维尔注意到用 $z_0 = y_0$ 和递归方程

$$z_{n+1}(x) = y_0 + \int_a^x dt \int_a^t f(s)z_n(s)ds \tag{7}$$

可以给出 $z_n$, 对这些方程来说, 这是标准的 "逐次逼近" 过程 ([151], [S, p. 268–281]).

我们看到刘维尔在他 1837 年稍后的文章中给出了另一种等价于 $y'' = f(x)y$ (第一章, 第 3 节, 方程 (35)) 的 "积分方程". 这例证了如下的一般思想: 如果线性微分算子 $P$ 使得方程 $P\cdot u = f$ 可以用公式 $u = y_0 + G\cdot f$ 来求解, 其中 $G$ 是一个线性算子, 则方程 $P\cdot u + Q\cdot u = 0$ 就等价于 $u - G\cdot(Q\cdot u) = y_0$, 其中 $Q$ 是一个算子. 在刘维尔的这一情形中, $P\cdot u = u'' + \rho^2 u$, $Q\cdot u = -qu$ 以及 $G$ 是一个积分算子 (参见第九章, 第 5 节).

对常微分方程 $y' = f(x,y)$ 证明柯西的存在唯一性定理是这一思想最简单的应用, 这里的微分方程满足初值条件 $y(x_0) = y_0$, 它等价于 $y = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^x f(t,y)dt$. 皮卡 (E. Picard) 在他 1890 年关于逐次逼近法的文章 [172, vol. II, p. 197–200] 中给出了这个一般形式, 这只是一个补充结果, 文章的主要部分关注这个方法在偏微分方程上的应用. 不过, 皮卡在这些应用中直接受到诺依曼 (C. Neumann) 早期有关拉普拉斯

方程、施瓦茨 (H. A. Schwarz) 有关薄膜振动方程的基础性工作的影响. 诺依曼和施瓦茨是积分方程理论的直接先驱. 我们将在本章第 4 节中详细讨论诺依曼的结果, 在第三章第 1 节中详细讨论施瓦茨的文章.

## §2 19 世纪的偏微分方程

偏微分方程的理论在整个 19 世纪仍处于萌芽阶段 (与常微分方程理论相比). 仿照常微分方程解的局部存在和唯一性的柯西定理建立了仅有的一般性定理, 即柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅 (Cauchy–Kowalewska) 定理: 假设存在一个由 $r$ 个方程构成的方程组, 这些方程包含 $r$ 个未知实函数 $v_1, v_2, \cdots, v_r$, 其形如

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_{p+1}} = H_j\left(x_1, \cdots, x_{p+1}, v_1, \cdots, v_r, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial v_r}{\partial x_{p-1}}, \frac{\partial v_r}{\partial x_p}\right) \quad (1 \leqslant j \leqslant r), \tag{8}$$

其中这里的 $r$ 个未知实函数 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 具有 $p+1$ 个实变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{p+1}$, 方程右边不包含关于 $x_{p+1}$ 的任何导数, 且假设在 $\mathbb{R}^{p+1+r+rp}$ 中 0 的邻域 $V_0$ 中方程右边的函数是含有 $p+1+r+rp$ 个变量的实解析函数. 从而在 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中存在 0 的一个很小的邻域 $V$, 使得 (8) 在 $V$ 中有唯一解 $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$, 这个解是由 $V$ 中的解析函数组成的, 它们在 $V \cap \mathbb{R}^p$ 中满足 $v_j(x_1, \cdots, x_p, 0) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$.

在整个 19 世纪解析函数仍然被看成是最有吸引力的函数 (从 18 世纪延续而来). 因此数学家没有太在意柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理中一开始对解析性的限制. 然而, 某些特殊类型的偏微分方程, 如一阶标量方程和某些类型的二阶方程在不严格限制下是有解的. 人们开始考虑是否存在其他不同于柯西 “强函数方法” (仅用于解析函数) 的方法. 柯西的 “强函数方法” 不能推广柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理, 至少对 $C^\infty$ 函数是不能推广的. 这个问题一直都没有被解决, 直到 1956 年, 卢伊 (H. Lewy) 给出了一个令人惊讶的例子, 即含有 3 个变量的两个线性方程构成的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} - 2x_2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2x_1\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} - f(x_3), \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + 2x_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2x_2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \end{cases}$$

具有 $C^\infty$ 系数, 对适当选取的 $C^\infty$ 实函数 $f$, 它在任何一点附近都没有解 (即使这里的解是分布).

由于对满足柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理的偏微分方程 (不必化简为形式 (8)) 构成的方程组的大量研究对泛函分析的发展没有影响, 所以我们在这里不讨论它.

直到 1890 年, 大部分偏微分方程理论都局限于一些特殊的标量方程 (大多数是线性方程或是二阶的) 上, 这些标量方程通常是由物理问题导出的①, 如弦振动方程以及将它推广到 3 个和 4 个变量上的方程 (波动方程)、2 个和 3 个变量的拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 以及 2 个、3 个和 4 个变量的热方程. 用 "变量分离" 法或傅里叶变换的方法 (见第七章, 第 6 节) 能求出这些方程的特解或与 "任意" 函数有关的解. 但是直到 1825 年, 才开始用边界条件来确定方程的解 (第一章的几个例子中已经见到过). 通常要求这些条件能明确描述并且是特定的.

拉普拉斯 (Laplace) 最早试图对含有两个变量的二阶方程进行分类 [137, vol. IX, p. 21–28]. 他考虑了 "拟线性" 方程, 即形如

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (9)$$

的方程, 它对二阶导数是线性的. 他没有明确区分实变量和复变量, 因此他没有顾虑 $x, y$ 是复数值的情形, 他断言当 $A$, $B$ 和 $C$ 不全为 0 时, 适当变换变量可以把 (9) 中包含二阶导数的项化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 或 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. 对实变量 $x$ 和 $y$, 二阶导数中含有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$ 的方程被称为椭圆型方程, 二阶导数中含有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 或 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 的方程被称为双曲型方程. 随着一元复变函数理论的发展, 人们很快认识到椭圆型方程和双曲型方程之间的显著区别. 1860 年左右, 数学家才开始对双曲型方程的一般边值条件进行研究, 直到 1925 年左右这一研究才与泛函分析的发展有一点关系 (见第九章, 第 5 节). 相反, 1828 年以来, 与 2 个和 3 个变量的拉普拉斯方程有关的各种问题是分析学家的主要关注点之一, 这些问题推动了积分方程理论的产生, 进而推动了现代泛函分析的建立.

①可以参看庞加莱 1890 年关于数学物理方程的文章的引言中对这些问题的有趣的描述 ([177], vol. IX, p. 28–32).

## §3 位势理论的起源

1748 年, 丹尼尔 · 伯努利在牛顿引力理论中引入函数 $\Omega(M)=\sum_i(m_i\mu/r_i)$, 它表示质量为 $\mu$ 的质点 $M$ 与有限多个质量为 $m_i$ 的质点之间的引力, 其中 $r_i$ 是 $M$ 到质点 $m_i$ 之间的距离. 1773 年, 拉格朗日注意到对 $\Omega$ 关于 $M$ 的坐标 $x,y,z$ 求导可以给出 $M$ 受到的引力的分量. 当用密度为 $\rho$ 的 $V$ 取代有限多个质点, 且 $M$ 在 $V$ 的外部时, 函数 $\Omega$ 满足方程

$$\Omega(x,y,z)=\mu\iiint_V\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{r(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)}, \tag{10}$$

其中 $r(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}$ [135, vol. VI, p. 349].

1782 年和 1785 年, 拉普拉斯证明 [137, vol. X, p. 361–363 和 vol. XI, p. 276–280] 函数 $\Omega$ 在 $V$ 的外部满足方程

$$\Delta\Omega\equiv\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0, \tag{11}$$

1813 年, 泊松完善了这一结果 ([178], [S, p. 342–346]), 他证明了如果 $\rho$ 在 $V$ 上是连续的, 则积分 (10) 在 $V$ 中仍然有意义且 $\Omega$ 满足 “泊松方程”

$$\Delta\Omega+4\pi\rho=0. \tag{12}$$

泊松的想法是在 $V$ 中将 $\Omega$ 在点 $M$ 处的值看成是相应函数 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 的和式, 这里 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 分别与 $V$ 中以 $M$ 为中心的小球 $V_1$ 和 $V_1$ 的补集 $V_2$ 有关. 从而有 $\Delta\Omega_2=0$, 当 $V_1$ 的半径趋近于 0 时, 泊松表明 $\Delta\Omega_1$ 趋近于 $-4\pi\rho(M)$. (事实上, 当只假设 $\rho$ 连续, 且当 $\rho$ 满足赫尔德 (Hölder) 条件时, 才能保证 $\Delta\Omega$ 存在, 泊松的讨论是不严格的. 当 $\rho$ 只是连续时, 只有在广义函数理论 (第八章, 第 3 节) 的意义下取二阶导数时方程 (12) 才是成立的.)

库仑 (Coulomb) 定律发现 (1785 年) 后, 拉普拉斯方程在静电学中非常重要. 它也出现在流体动力学中的 “平稳” 现象和热理论中. 18 世纪中叶以来, 已经知道对 $x$ 和 $y$ 的实函数 $P$ 和 $Q$, 所谓的 “柯西 – 黎曼” 方程使得 $P+iQ$ 是 $x+iy$ 的解析函数. 从而可以推得 $P$ 和 $Q$ 是 2

个变量的拉普拉斯方程的解. 19 世纪初期, 高斯 (Gauss) 很好地意识到了这一联系, 他也知道对平面上有界域 $D$, 用

$$\Omega(x,y)=\iint_D \rho(\xi,\eta)\log\frac{1}{r(x,y,\xi,\eta)}d\xi d\eta \tag{13}$$

取代函数 (10) 可以得到 2 个变量的拉普拉斯方程的解. 柯西发展的复变量全纯函数的理论能够得到 2 个变量的调和函数的性质, 例如 2 个变量的调和函数在其定义区域内不存在极值. 从而自然会想到对 3 个变量和 $n\geqslant 4$ 个变量的调和函数也有类似的性质成立, 虽然要用不同的方法来证明.

1828 年, 格林 (George Green) 写了第一篇处理偏微分方程一般边值问题的论文. 他是一个自学成才的英国数学家. 他在这篇文章中对静电学进行了整体研究并首次提出了位势函数. 他指的不仅是形如公式 (10) 的函数, 而且还有后来称为单层位势的函数, 它形如

$$\Omega(M)=\iint_\Sigma \frac{\rho(P)}{MP}d\sigma(P), \tag{14}$$

其中 $\Sigma$ 是光滑曲面, $\rho$ ("密度") 是 $\Sigma$ 上的连续函数, $d\sigma$ 是 $\Sigma$ 上的面积微元. 他根据电荷分布在导体表面的事实自然地得到了这些函数.

格林还对表面密度 $\rho$ 和它定义的位势之间的关系感兴趣. 他首先建立了一个对算子 $\Delta$ 的著名的定理. 这个定理把微分算子和它的伴随算子 (第一章, 公式 (5)) 之间的关系推广到三维情形中:

$$\iiint_V (u\Delta v-v\Delta u)d\omega=\iint_\Sigma\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma, \tag{15}$$

其中 $\Sigma$ 是有界体 $V$ 的光滑表面, $u$ 和 $v$ 在 $\overline{V}$ 的某一邻域中是 $C^2$ 函数, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 是 $u$ 沿 $\Sigma$ 的外法线方向的导数①. 接着, 他原创性的思想② 是考虑函数 $u$, 对 $V$ 中所有不同于 $M$ 的点 $u$ 仍然是 $C^2$ 函数, 当 $P$ 趋于 $M$ 时, $u$ 在 $M$ 处的值是无穷的, 但差 $u(P)-(1/MP)$ 是有界的. 他把 (15) 应用到 $V$ 上, 从 $V$ 中可以分割出一个以 $M$ 为中心的小球, 再令

①拉格朗日 [135, vol. I, p. 263] 和高斯 [82, vol. V, p. 22] 已经得到体积和表面积分之间的比较特殊的关系.

②用相同的思想可以得到柯西公式, 当全纯函数在 $D$ 的边值上已知时, 这个公式能给出全纯函数在区域 $D$ 中的值. 不过, 格林肯定没有看过柯西的论文.

这个球的半径趋于 0, 如果三重积分存在, 他得到公式

$$4\pi v(M)+\iiint_V (u\Delta v - v\Delta u)d\omega = \iint_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{16}$$

特别地, 对 $\Delta v = 0$ 的解 $v$, 取 $u(P) = 1/MP$ 会得到

$$4\pi v(M) = \iint_\Sigma \left( v\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma, \tag{17}$$

其中 $r(P) = MP$. 换句话说, 当 $v$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 在 $\Sigma$ 上已知时, 用积分公式能求解拉普拉斯方程. 这一结果与当时二阶偏微分方程的已知结果是一致的, 如弦振动方程 (第一章, 第 2 节). 然而, 实验表明 $v$ 是完全由它在 $\Sigma$ 上的值确定的. 因而对 $\Sigma$ 上的 $v$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial n}$, 不可能都是任意连续函数, 所以这种情形与双曲型方程的边值问题是完全不同的. 进一步, 至少存在一种情形, 用扩展到 $\Sigma$ 上的积分给出 $V$ 内的显式公式 $v$, 即 1820 年发表的泊松公式, 对于以 $O$ 为中心、以 $a$ 为半径的球 $V$, 有

$$v(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{a^2-\rho^2}{ar^3}v(P)d\sigma, \tag{18}$$

其中 $\rho = OM$. 格林注意到对一般的区域 $V$ 有一个类似的公式

$$v(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma v(P)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n}d\sigma. \tag{19}$$

在 (16) 中用函数 $G(M,P)$ 替代 $u$ 可以得到这个公式, 这里 $G(M,P)$ 满足:

1) 在 $V\times V$ 中, 如果 $M\neq P$ 且 $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ 在 $\Sigma$ 上是存在的, 则 $G$ 是 $C^2$ 函数;

2) 当 $P$ 趋于 $M$ 时, $G(M,P) - 1/MP$ 仍然有界;

3) 当 $M$ 在 $V$ 内且 $P$ 在 $\Sigma$ 上时, $G(M,P) = 0$;

4) 当把 $M$ 固定在 $V$ 内时, $G$ 是 $P$ 的函数且在 $V$ 内满足拉普拉斯方程.

他没有证明这个 “格林函数” 的存在性, 但是他借助实验事实使得人们相信这一存在性: 当曲面 $\Sigma$ 接地时, 一个电量为 1 的正电荷位于点 $M$ 处, 在 $\Sigma$ 上它能感应出一个电荷, 使得这个电荷与点 $M$ 处的

电荷在 $\Sigma$ 上的总势能等于 0. 这个势能就是函数 $G(M,P)$ ([90], [S, p. 347–358]).

最后, 灵活地运用他的公式 (15), 格林证明了在 $V\times V$ 内, 当 $M\neq P$ 时, $G(P,M)=G(M,P)$.

## §4 狄利克雷原理

高斯很早就对拉普拉斯方程感兴趣, 两个变量的拉普拉斯方程与他关于复数的工作有关, 3 个变量的拉普拉斯方程与他的天文学研究有关. 他在 1813 年关于球体引力的论文中证明了格林公式 (15) 的特殊情形. 1830 年后, 他主要致力于磁学研究, 包括理论和实验方面的研究, 它们使得位势理论取得了新的进展, 1840 年他发表了这些成果 [90, vol. V, p. 197–242]. 在这篇文章中, 他没有引用其他人在这个课题上的工作, 也不可能听说过格林 (即使在英国, 知道格林的人也不多)①. 虽然他没有想到公式 (16), 但是推广了他 1813 年的公式, 且用这种方式得到格林公式 (15) 的许多特殊情形. 与公式 (16) 最接近的是他著名的 "平均值公式", 即对以 $O$ 为球心的球面 $\Sigma$ 上的调和函数 $v$, 有

$$v(0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}v(P)d\sigma, \tag{20}$$

奇怪的是, 他没有注意到这个公式就是泊松公式 (18) 的特殊情形, 但是他肯定知道泊松公式.

和格林一样, 当 $M$ 趋于曲面 $\Sigma$ 上一点时, 高斯对单层位势 (14) 的变化情况特别感兴趣. 经过仔细研究, 他表明了位势 $\Omega$ 处处连续, 并且它在 $\Sigma$ 上一点 $M_0$ 处的双侧法向导数都存在, 但值不相等, 它们的差为 $4\pi\rho(M_0)$. 格林是在没有证明的情况下得到这些结果的.

高斯研究了几个和位势理论有关的问题, 而它们中的一些在 1930 年后成为研究热点. 其中一个是平衡问题, 即在闭曲面 $\Sigma$ 上寻找电荷的分布, 这个分布在 $\Sigma$ 上的势能为常数. 另一个问题是用 $\Sigma$ 表面的电荷代替 $\Sigma$ 内的电荷, 这一方式使得 $\Sigma$ 外的位势是相同的 (后来称其为

①高斯在相同意义下也用到术语 "位势", 这一点归因于这样一个事实, 即这个术语的拉丁语形式在 18 世纪经常被 "自然哲学家" 使用.

“扫除” 过程), 而且高斯表明如果平衡问题有解, 那么后一个问题也可以解决.

对于后一个问题, 高斯有一个新想法, 这个想法是位势理论中的核心思想. 他认识到如果位势 $\Omega$ 由 (14) 给出, 其中 $\rho \geqslant 0$, 且 $U$ 是 $\Sigma$ 上任意连续函数, 而且如果在 $\rho$ 的所有可能的值中选取 $\rho$ 使得积分 $\iint_{\Sigma}(\Omega - 2U)\rho d\sigma$ 取最小值, 则 $\Omega - U$ 在 $\Sigma$ 上是常数, 他还补充道, 这样的密度 $\rho$ 的存在是显然的.

通过对 $\Omega$ 中增加适当的常数, 高斯的这个方法解决了在 $V$ 内寻找调和函数 $u$ 的问题, 其中 $u$ 在 $\overline{V} = V \cup \Sigma$ 上连续, 且在 $\Sigma$ 上等于给定的函数 $U$[①]. 不久之后, 汤普森 (W. Thompson) (后来的 Kelvin 爵士) 于 1847 年考虑了相同的问题, 差不多同时, 狄利克雷在他的演讲 (很久以后才出版) 中也考虑了这一问题. 它就是现在著名的狄利克雷问题. 汤普森和狄利克雷的想法和高斯的类似, 即考虑三重积分

$$\iiint_{V}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)d\omega, \tag{21}$$

其中函数 $v$ 在 $\overline{V}$ 上连续, 它的一阶导数在 $V$ 中连续且有界 ($v$ 在 $\Sigma$ 上取给定的值), 对这样的函数 $v$, 积分 (21) 取最小值. 用变分法的标准方法, 他们很容易地证明了这样的函数在 $V$ 内其实是调和函数.

这个想法最大的成功之处可能在于黎曼在一篇划时代的论文中直接使用了虚数, 这篇论文是关于全纯函数、黎曼曲面和阿贝尔积分的. 通过考虑这种函数的实部和虚部, 黎曼第一个意识到可以从对于这些调和函数的类似存在性定理推导出他需要的存在性定理. 他认为用类似于狄利克雷关于 2 个变量的积分的讨论可以证明这个问题, 他称之为 “狄利克雷原理” [182, p. 97].

他的宏大结果引起很大关注, 但是数学家们很快意识到这些结果是以汤普森、狄利克雷和黎曼没有给出证明的三个性质为基础的:

1) 对 $\Sigma$ 上给定的连续函数 $g$, 存在 $\overline{V}$ 上的连续函数 $v$, 它在 $\Sigma$ 上等于 $g$, 且对这个函数 $v$, 积分 (21) 是有意义的.

---

①如果这样的问题被解决, 就可以推出格林函数的存在性: 考虑函数 $u(M,P)$ 在 $V$ 中调和 (它是 $P$ 的函数), 它在 $\Sigma$ 上的取值为 $-1/MP$. 从而如果 $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ 在 $\Sigma$ 上存在且连续, 则格林函数 $G(M,P) = u(M,P) + (1/MP)$.

2) 如果这样的函数存在, 则存在一个 $v$ 使得 (21) 取最小值.

3) 对这个函数 $v$, 它的二阶导数 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ 存在.

然而, 1871 年, 普里姆 (F. Prym) 给出一个例子 (这个例子中函数具有 2 个变量, $V$ 是圆盘 $x^2+y^2<1$), 满足性质 1) 的函数 $v$[①] 不存在. 另一方面, 1870 年, 魏尔斯特拉斯意识到在 18 世纪以来变分法研究的所有问题中, 性质 2) 和性质 3) 是在没有证明的情况下认为是成立的. 他给出了下面这样一个简单的例子, 这个例子中性质 2) 不成立. 在所有 $C^1$ 函数 $y$ 中求积分 $\int_{-1}^{1} xy'^2 dx$ 的极小值, 其中 $y$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的函数且满足边值条件 $y(-1)=a$ 和 $y(1)=b$, $a\neq b$ [S, p. 390–391].

在这些难题的刺激下, 魏尔斯特拉斯和他的学生们 (杜布瓦 · 雷蒙 (P. Du Bois-Reymond)、克内泽尔 (A. Kneser) 以及扎雷姆巴 (S. Zaremba)) 试图对变分法建立稳固的基础, 并且他们挽救了由这样的反例引起的许多令人怀疑的经典结论. 但是他们没有在 "狄利克雷原理" 上取得成果, 直到 1899 年希尔伯特才用所谓 "直接方法" 的新思想完全证明了黎曼对这一 "原理" 的运用是正确的 [111, vol. III, p. 10–37].

## §5 贝尔 – 诺依曼方法

我们将会在后面几章中看到, 希尔伯特和魏尔斯特拉斯学派用到的概念和工具在建立一般拓扑学和后来引入偏微分程 "弱" 解的概念中所起的作用. 同时, 证明拉普拉斯方程的狄利克雷问题和类似边值问题的解的存在性一直是很难解决的问题, 至少在黎曼工作中提到的条件下是很难解决的. 1870 年到 1890 年间, 这一很难解决的问题被施瓦茨 (1870 年左右)、诺依曼 (1877 年) 和庞加莱 (H. Poincaré) (1887 年) 三位数学家成功解决.

我们这里不详细讨论施瓦茨和庞加莱的贡献, 这些贡献对泛函分析的发展没有产生直接的影响. 他们以逼近的思想为基础. 从特殊区域中的狄利克雷问题的已知解出发, 进而用逼近的方法能得到更一般

[①] 这个发现通常归功于阿达玛, 他于 1906 年给出了一个类似的例子 [94, vol. III, p. 1245–1248].

区域中的狄利克雷问题的解. 施瓦茨只考虑了 2 个变量的情形. 他先考察凸多边形的区域, 在这个区域中可以直接证明 (通过直接的构造) 存在单位圆盘上的共形映射, 因而狄利克雷问题的解存在 (将泊松公式从圆转化到凸多边形上可以得到). 利用极大值原理, 用一系列内接凸多边形序列来逼近狄利克雷问题的解, 从而能证明在凸区域中狄利克雷问题的解存在. 不久之后, 他发明了巧妙的 “交替过程”, 这使得他证明了如果能在平面上的两个区域中求解狄利克雷问题, 则也能在这两个区域的并中求解狄利克雷问题, 因而根据这个结果他最终证明了平面上由分段光滑曲线围成的区域中狄利克雷问题是可解的 [196, vol. II, p. 133–210].

庞加莱著名的 “扫除法” 可应用于任意维数的狄利克雷问题. 为了解决由曲面 $\Sigma$ 围成的有界区域 $V$ 中的狄利克雷问题, 他利用极大值原理表明在 $\Sigma$ 上给定的函数是函数 $\Phi$ 在 $\Sigma$ 中的限制, 其中 $\Phi$ 是定义在 $\overline{V}$ 中的邻域 $W$ 上的函数, 它属于 $C^2$ 类且满足 $\Delta\Phi \geqslant 0$. 由泊松公式 (12) 可知, $\Phi$ 是调和函数与质量大于等于 0 的位势 $\Phi_0$ 的和式. 基本的思想是: 如果 $B$ 是包含在 $W$ 中的球, 为了用另一个位势代替 $\Phi_0$, 则可以用推广到 $B$ 的曲面上的泊松积分 (18), 其中在 $B$ 外这个位势等于 $\Phi_0$, 在 $B$ 中它比 $\Phi_0$ 要小. $B$ 中的质量已经被 “扫除” 到 $B$ 的表面上. 从而可以取球 $B_n$ 的无穷序列, 它们的并是 $V$, 且将 “扫除” 过程按 $B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, B_2, B_3, B_4, \cdots$ 的顺序重复用于 $B_n$ 上 (每个 $B_n$ 都被 “扫除” 无穷多次). 位势相应的序列是递减序列, 因此它在 $V$ 中有极限. 利用哈纳克不等式 (泊松公式 (18) 的结果) 和极大值原理, 庞加莱能证明这一极限是狄利克雷问题的解. 这里假设边界 $\Sigma$ 满足 “正则性条件”, 即对任意点 $M \in \Sigma$, 一定存在一个小球, 它和 $\overline{V}$ 的交为点 $M$ [177, vol. IX, p. 33–54]. 不久之后, 扎雷姆巴用顶点为 $M$ 的小锥体代替了这个条件中的小球.

与施瓦茨和庞加莱的论文相比, 贝尔 – 诺依曼的方法因引入了后来被称为 “第二型弗雷德霍姆积分方程” 的第一个例子, 而成为泛函分析发展的里程碑. 格林的公式 (17) 自然地引入另一种形式的位势

$$u(M) = \iint_{\Sigma} \rho(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{MP} \right) d\sigma, \tag{22}$$

它在曲面 $\Sigma$ 外是调和函数. 在磁理论中也有同样的结果, 在磁理论中它被称为双层位势. 它被看成是单层位势的差的极限, 其中一个单层位势在 $\Sigma$ 上的密度为 $\mu$, 另一个在与 $\Sigma$ 平行的曲面 $\Sigma'$ 上的密度为 $\mu$ 且 $\Sigma$ 与 $\Sigma'$ 相距 "无穷小" 的距离 $\varepsilon$. 当 $\varepsilon$ 趋于 0 时, 假设 $\mu$ 增加到 $+\infty$, 但乘积 $\mu\varepsilon$ 趋于 $\rho$.

高斯研究表明这样的位势在 $\Sigma$ 附近具有与单层位势的法向导数非常类似的变化情况. 当 $M$ 沿着 $M_0$ 点处的法线方向趋于 $\Sigma$ 的点 $M_0$ 时, $u(M)$ 趋于 $\Sigma$ 的每个侧面的极限, 但是通常情况下这些极限是不同的. 不过 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 在曲面两侧的值相同.

公式 (22) 也有一个很好的几何解释. $\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{MP}\right)=\dfrac{\cos\varphi}{MP^2}$, 其中 $\varphi$ 是 $MP$ 与 $\Sigma$ 在点 $P$ 处的法线之间的夹角, $\dfrac{\cos\varphi}{MP^2}d\sigma$ 是无穷小的 "立体角", 其中 $d\sigma$ 是从点 $M$ 处可以 "看到" 的.

1860 年左右, 贝尔 (Beer) 提出对 $\Sigma$ 上适当的密度 $\rho$, 用公式 (22) 可以得到狄利克雷问题的解. 从双层势的连续性中可知如果 $\Sigma$ 是光滑的曲面, 且 $g(M)$ 是 $\Sigma$ 上的函数, 解 $u(M)$ 一定等于 $g(M)$, 则未知密度一定满足方程

$$2\pi\rho(M)+\iint_{\Sigma}\rho(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{MP}\right)d\sigma=g(M),\quad M\in\Sigma. \tag{23}$$

他接下来总结道, 可以用通常的 "逐次逼近法" 来计算 $\rho$, 其中 $\rho_0(M)=\dfrac{1}{2\pi}g(M)$, 递归地定义 $\rho_n(M)$ 为

$$2\pi\rho_n(M)+\iint_{\Sigma}\rho_{n-1}(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{MP}\right)d\sigma=0,\quad n\geqslant 1,$$

从而级数 $\rho(M)=\rho_0(M)+\rho_1(M)+\cdots+\rho_n(M)+\cdots$ 就给出了方程 (23) 的解. 但是他没有证明这个级数收敛.

1877 年, 诺依曼试图给出这样一个证明 [165]. 他只研究了区域 $V$ 是凸的且有界的情形, 但是他允许边界 $\Sigma$ 是非光滑的. 从而方程 (23) 被改进为

$$4\pi\rho(M)=\iint_{\Sigma}(\rho(M)-\rho(P))\frac{\cos\varphi}{MP^2}d\sigma+f(M), \tag{24}$$

其中 $f$ 在 $\Sigma$ 上连续, 可以用 “逐次逼近法”, 这里 $4\pi\rho_0(M)=f(M)$, 当 $n\geqslant 1$ 时,

$$4\pi\rho_n(M)=\iint_{\Sigma}(\rho_{n-1}(M)-\rho_{n-1}(P))\frac{\cos\varphi}{MP^2}d\sigma. \tag{25}$$

诺依曼的想法是考虑 $\rho_n$ 的最大值 $L_n$ 和最小值 $l_n$, 并证明存在数 $q$, 它满足 $0<q<1$ 且

$$L_n-l_n\leqslant(L_0-l_0)q^{n-1}, \tag{26}$$

他利用 (25) 将 $|\rho_n(M)|$ 放大为 $q^n$ 的倍数, 可以得出级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_n(M)$ 收敛到一个连续函数.

为了证明 (26), 诺依曼将 $\Sigma$ 划分成两部分 $A_n$ 和 $B_n$, 分别用下面条件来定义

$$\frac{1}{2}(L_{n-1}+l_{n-1})\leqslant\rho_{n-1}(P)\leqslant L_{n-1},$$

$$l_{n-1}\leqslant\rho_{n-1}(P)<\frac{1}{2}(L_{n-1}+l_{n-1}).$$

他从 (25) 推出对 $\Sigma$ 上所有点 $M$, 有

$$\begin{aligned}&(L_{n-1}-l_{n-1})\left(A_n(M)+\frac{1}{2}B_n(M)\right)\\ \leqslant\ &4\pi\rho_n(M)\leqslant(L_{n-1}-l_{n-1})\left(\frac{1}{2}A_n(M)+B_n(M)\right),\end{aligned}$$

其中 $A_n(M)$ 和 $B_n(M)$ 是立体角, 从 $M$ 可以 “看到” $A_n$ 和 $B_n$. 这推出

$$L_n-l_n\leqslant(L_{n-1}-l_{n-1})q,$$

其中 $q$ 是下面量

$$\Lambda(M,M',A,B)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}A(M)+B(M)+A(M')+\frac{1}{2}B(M')\right) \tag{27}$$

的上确界, 当 $M$ 和 $M'$ 在 $\Sigma$ 上任意变化时, $A$ 是 $\Sigma$ 上的任意闭集, $B$ 是它的补集. 因此现在是表明 $q<1$ 的纯几何问题. 表达式 (27) 可以写成

$$\frac{1}{4\pi}\left(A(M)+B(M)+A(M')+B(M')-\frac{1}{2}(A(M)+B(M'))\right),$$

也可以写成

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}(A(M)+B(M))+\frac{1}{2}(A(M')+B(M'))+\frac{1}{2}(A(M')+B(M))\right).$$

有 $A(M)+B(M)\leqslant 2\pi$ (从立体角的最大值的点中的一个可以 "看到" 整个 $\Sigma$), 所以可以用两种等价方式来阐述这一问题, 对 $\Sigma$ 中两部分 $A$ 和 $B$ 中的所有点 $M$ 和 $M'$, 有

$$A(M)+B(M')\geqslant 4\pi r,\quad r>0, \tag{28}$$

$$A(M)+B(M')\leqslant 4\pi s,\quad s<1. \tag{29}$$

(28) 式表明存在一个特殊类型的凸集, 它并不满足条件, 即在这种情况下, $V$ 是两个凸锥面 ("双锥面") 的交. 事实上, 如果 $A$ 是其中一个锥面的表面, $B$ 是另一个锥面的表面, $M$ 和 $M'$ 分别是 $A$ 和 $B$ 的顶点, 则有 $A(M)=B(M')=0$. 进一步, $A$, $B$, $M$ 和 $M'$ 的这种特殊取法是使得 $A(M)+B(M')$ 可能等于 0 的唯一情形. 不过, 当除去特殊情形外, 诺依曼根据一个事实, 即对 $A$, $B$, $M$ 和 $M'$ 的所有取法, 有 $A(M)+B(M')>0$, 他得出存在 $r>0$, 使得对所有这些取法, (28) 是成立的. 他没有证明对不同于双锥面的所有凸集, 这一断言是正确的. 诺依曼证明中的这个漏洞直到 1937 年才被勒贝格 (Lebesgue) 注意到 ([138], vol. IV, p. 151–166). 他指出如何用紧性来弥补这一漏洞: 存在 $\Sigma$ 上的两个点 $M_0$ 和 $M_0'$, 它们分别是序列 $\{M_k\}$ 和 $\{M_k'\}$ 的极限, 并且对每个 $k$, $\Sigma$ 能划分成两部分 $A_k$ 和 $B_k$, 使得 $A_k(M_k)+B_k(M_k')$ 趋于 $A(M)+B(M')$ (对 $A$, $B$, $M$ 和 $M'$ 的所有取法) 的上确界 $4\pi s$. 另一方面, 存在 $\Sigma$ 上的点 $N$ 以及 $M_0$, $M_0'$ 和 $N$ 各自在 $\Sigma$ 上的邻域 $V(M_0)$, $V(M_0')$ 和 $V(N)$ 使得 $V(N)$ 上所有点的支撑平面, 既不与 $V(M_0)$ 相交也不与 $V(M_0')$ 相交 (这里假设 $V$ 不是一个双锥面). 从而基本的几何讨论对 $s$ 给出了一个小于 1 的上界. 历史上, 这样的论证直到 19 世纪 70 年代后期才成为可能. 但是我很怀疑诺依曼能熟练地运用 "波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯" 定理 (当时就是这么称它的) 证明上述结论. 对简单凸集, 如椭球面, 有可能对 $s$ 明确计算出一个小于 1 的上界.

诺依曼用同样的方法处理了平面上的狄利克雷问题, 不过证明中也有同样的漏洞.

在很长一段时间里, 在所有狄利克雷问题的解的存在性的证明中对曲面 $\Sigma$ 的限制被认为是证明方法上的缺点. 但是 1912 年, 勒贝格在三维情形下给出了一个例子, 对有界开集 $V$ (同胚于一个球), 存在 $V$ 的边界 $\Sigma$ 上的连续函数, 关于该连续函数, 狄利克雷问题没有解 ([138], vol. IV, p. 131). 这是现代位势理论的起点, 一方面, 狄利克雷问题的最初表述被改进为对任意有界区域, 狄利克雷问题有唯一 “解”, 这里指 “弱” 解形式. 另一方面, 在各种条件下研究这些 “弱” 解在区域的边界上的变化情况 [30]. 对这个广泛的理论的历史的详细考查超出了本书范围, 就不讨论了.

# 第三章　薄膜振动方程*

## §1　施瓦茨 1885 年的论文

导致弦振动方程 (第一章, 第 2 节, 方程 (7)) 的相同的物理讨论也适用于薄膜的小的振动, 这里的薄膜位于 $Oxy$ 平面, 密度是常数: 如果 $z = u(x, y, t)$ 表示时刻 $t$ 曲面的方程, 则函数 $u$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

(对合适的单位长度和单位时间). 通常的 "变量分离" 法在于寻找形如 $u(x, y, t) = v(x, y)w(t)$ 的解, 对 $v$ 可以得到方程 (也称为亥姆霍兹方程)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0, \tag{2}$$

其中 $\lambda$ 是常数. 另外, 如果薄膜是平面的有界部分 $\Omega$, 且在它的边界 $\Sigma$ 处是固定的 (意思是如果 $(x, y) \in \Sigma$, 则对所有 $t$, $u(x, y, t) = 0$), 则 $\lambda$ 一定大于 0, $w(t) = \sin\sqrt{\lambda}\, t$. 并且需要找到 (2) 的一个解 $v$, 它在 $\Sigma$ 上等于 0, 但在 $\Omega$ 内不恒为 0. 与弦振动中相应问题的求解比较, 对这个问题的阐述在 19 世纪整个后 50 年间极大地挑战了数学家的能力.

实验证据及这个问题在矩形、圆盘这样的特殊区域 $\Omega$ 上的明确解表明, 正如弦振动的情形一样, 只有当 $\lambda$ 是大于 0 的实数构成的无

*本章由邹学文翻译.

穷序列 $\{\lambda_n\}$ 中的某个值时, 方程 (2) 才有在 $\Sigma$ 上等于 0 但在 $\Omega$ 内不恒等于 0 的解, 其中 $\lambda_n \to +\infty$ ($\lambda_n$ 是问题的 "特征值").

1869 年, 韦伯 (H. Weber) 最早对一般区域 $\Omega$ 试图证明这个结果 [224], 他采用的方法是黎曼求解狄利克雷问题时所使用的变分方法. 运用格林公式 (第二章, 公式 (15)), 他首次表明如果 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 是两个不同的特征值, $v_1$ 和 $v_2$ 是两个相应的 "特征函数", 则

$$(\mu_1 - \mu_2) \iint_\Omega v_1(x,y)v_2(x,y)dxdy = 0, \tag{3}$$

正如泊松对常微分方程所做的那样 (第一章, 第 3 节), 由这个式子他推导出特征值必须是实数. 为了确定最小的特征值 $\lambda_1$, 对 $\overline{\Omega}$ 上的 $C^2$ 函数 $v$, 他考虑了狄利克雷积分

$$F(v) = \iint_\Omega \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy, \tag{4}$$

$v$ 在 $\Sigma$ 上等于 0 且满足附加条件

$$\iint_\Omega v^2 dxdy = 1. \tag{5}$$

和黎曼一样, 他假设在这个函数的集合 $\mathcal{F}_1$ 中有一个函数 $v_1$, 它使得 $F(v)$ 等于它的最大的下界 $\lambda_1$, 并且通过运用通常的变分方法, 他证明当 $\lambda = \lambda_1$ 时, 这个函数 $v_1$ 是方程 (2) 的解. 接下来, 他考虑由另一个条件

$$\iint_\Omega v(x,y)v_1(x,y)dxdy = 0 \tag{6}$$

定义的 $\mathcal{F}_2$, 它是 $\mathcal{F}_1$ 的子集. 取函数 $v_2 \in \mathcal{F}_2$, $F(v_2)$ 等于它的最大下界 $\lambda_2$, 并且证明当 $\lambda = \lambda_2$ 时, $v_2$ 是方程 (2) 的解. 从而这个递归步骤是显然的, 韦伯证明了存在正特征值的无穷递增序列 $\{\lambda_n\}$, 其中每一个特征值都对应一个由条件 (5) 标准化的特征函数 $v_n$, 并且它们彼此正交. 但是他没有尝试去证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$, 也没有证明 $\mathcal{F}_1$ 中的函数具有 "傅里叶展式" $\sum\limits_n c_n v_n$, 它与施图姆 – 刘维尔问题中的展式相同 (第一章, 第 3 节, 公式 (33)) (这是他陈述的一个结果, 但是没有证明).

韦伯的证明当然服从魏尔斯特拉斯对变分法的批判, 但是直到 1885 年, 也没有人试着建立一个更加严格的证明. 就在那一年, 施瓦

茨 (H. A. Schwarz) 发表了一篇关于极小曲面理论的很长的论文, 文章中他考虑了比方程 (2) 稍微一般的一类方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda^2 pv=0, \tag{7}$$

其中 $p$ 是区域 $D$ 上的连续函数, 其值大于 0. 他的讨论对任意这样的函数都是适用的, 但是事实上他只对特殊情形 $p(x,y)=\dfrac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$ 感兴趣 [195, vol. I, p. 223–269].

由于采用方法的原创性, 施瓦茨的这篇文章非常重要, 它似乎是在没有受到之前任何工作的启发下写出的. 对施图姆 – 刘维尔问题的研究有可能使他做出这些讨论, 这后来几乎一字不差地转换到一般的对称核积分方程上 (第五章, 第 2 节), 但是他的文章中没有隐含这样一个影响, 并且事实上他没有引用任何人的东西, 甚至是韦伯的.

他的研究起点不再是方程 (7) 的特征值 $\lambda^2$ 的存在性问题, 而是对取决于参数 $\xi$ 的方程

$$\Delta w+\xi pw=0 \tag{8}$$

研究 "狄利克雷问题". 他只研究了这样一种情形, $w$ 在 $D$ 的边界 $\Gamma$ 上等于 1. 运用当时将解表示为 $\xi$ 的幂级数 (第二章, 第 1 节)

$$w=w_0+\xi w_1+\cdots+\xi^n w_n+\cdots \tag{9}$$

的方法, 他取 $w_0$ 为等于 1 的常函数, 对 $n\geqslant 1$, 让 $w_n$ 在 $\Gamma$ 上等于 0; 从而它们可以由方程

$$\Delta w_n+pw_{n-1}=0,\quad n\geqslant 1 \tag{10}$$

递归地确定出来. 他假设对区域 $D$, 格林函数 $G(M,P)$ 存在 (记住在广泛的情形下他自己已经证明了这一存在性 (第二章, 第 4 节)). 格林函数的性质能够推出对 $\overline{D}$ 上连续的任一函数 $f$, 方程

$$\Delta w+f=0 \tag{11}$$

有唯一一个在 $\Gamma$ 上等于 0 的解, 它可以由公式

$$w(M)=\frac{1}{2\pi}\iint_D f(P)G(M,P)d\omega\quad(d\omega=dxdy) \tag{12}$$

给出. 从而他的函数 $w_n$ 由公式

$$w_n(M)=\frac{1}{2\pi}\iint_D p(P)w_{n-1}(P)G(M,P)d\omega \tag{13}$$

明确给出.

对足够小的 $|\xi|$ 的值必须研究 (9) 的收敛性, 在这里施瓦茨开始了原创性的贡献. 他主要的工具是以他名字命名的不等式①, 即对 $\overline{D}$ 上的任意两个连续函数 $f$ 和 $g$, 有

$$\left(\iint_D fgd\omega\right)^2\leqslant\left(\iint_D f^2d\omega\right)\left(\iint_D g^2d\omega\right),$$

再由 (13) 式可以得到

$$\begin{aligned}4\pi^2(w_n(M))^2&\leqslant\left(\iint_D p^2(P)G^2(M,P)d\omega\right)\left(\iint_D w_{n-1}^2(p)d\omega\right)\\&\leqslant A\left(\iint_D w_{n-1}^2(P)d\omega\right),\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $A$ 是一个与 $n$ 无关的常数 (它可以由有界域上格林函数的性质得到). 因此施瓦茨研究了数

$$w_{n,k}=\iint_D pw_kw_{n-k}d\omega,\tag{15}$$

运用格林函数的对称性, 他证明这些数与 $k$ 无关, 因而有 $w_{n,k}=w_{n,0}$, 他将 $w_{n,k}$ 记成 $w_n$. 他也证明了

$$w_{n,k}=\iint_D\left(\frac{\partial w_{k+1}}{\partial x}\frac{\partial w_{n-k}}{\partial x}+\frac{\partial w_{k+1}}{\partial y}\frac{\partial w_{n-k}}{\partial y}\right)dxdy.\tag{16}$$

最后, 运用施瓦茨不等式, 他得到关系式

$$w_n^2\leqslant w_{n-1}w_{n+1},\tag{17}$$

因此数列 $\left\{\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right\}$ 是递增的. 另一方面, 对 (14) 进行积分可以得到 $w_{2n}\leqslant Bw_{2n-2}$, 其中 $B$ 是一个与 $n$ 无关的常数. 因此数列 $\left\{\dfrac{w_n}{w_{n-1}}\right\}$ 的

①1859 年, 布尼亚科夫斯基发现了这个不等式, 但是在 1885 年前, 它似乎都没有被注意到, 也没有被许多数学家用到. 当然, 它是有限和情形下相应的不等式的推广, 这最早可以追溯到柯西, 甚至更早一些.

极限是一个大于 0 的有限数 $c$. 进而由 (14) 可以得出当 $|\xi| < \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ 时, 级数 (9) 在 $\overline{D}$ 上是绝对一致收敛的. 格林函数的性质使得能够证明 $w$ 的导数也可以由一个收敛级数给出, 对 (9) 逐项微分可以得到这个级数, 从而表明 $w$ 满足 (8) 且在边界 $\Gamma$ 上等于 1.

不过施瓦茨继续往前走了一步. 他证明了当 $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ 时, 级数 (9) 的一般项一致地趋于极限 $U_1$, $U_1$ 在 $\overline{D}$ 上不恒为 0, 但是在边界上等于 0, 而且它是

$$\Delta w + (1/c)pw = 0 \tag{18}$$

的解, 因此他对在边界上等于 0 的函数, 证明了方程 (8) 存在最小特征值 $\lambda_1^2 = \dfrac{1}{c}$, 相应的特征函数也存在.

在此可以看出这些发展正是对 "密码积分" 方程 (不过, 施瓦茨没有写出来) 的另一种处理方式. 如果写 $w = w_0 + \zeta v$, 并用公式 (12) 来 "求解" 方程 (8) (运用刘维尔 1837 年得到他的 "沃尔泰拉积分方程" 的思想) (第二章, 第 1 节和第一章, 第 3 节, 方程 (35)), 这时对 $v$ 可以得到一个 "弗雷德霍姆积分方程"

$$v(M) = g(M) + \frac{\xi}{2\pi} \iint_D p(P)G(M,P)v(P)d\omega, \tag{19}$$

其中

$$g(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_D G(M,P)p(P)d\omega.$$

因此施瓦茨的方法本质上与诺依曼关于狄利克雷问题的方法是一样的, 至少出发点是一样的. 主要的不同点在于施瓦茨将重点放在了关于参数 $\xi$ 的讨论上.

为了领会施瓦茨方法的原创性和威力, 有必要说明在几乎不变的情况下如何将施瓦茨的方法应用到可分希尔伯特空间中的紧自伴算子的理论上. 假设 $U$ 是 $E$ 上的自伴紧算子, 另外我们假设它是正的, 也就是说, 对所有 $f \in E$, $(U \cdot f|f) \geqslant 0$. 从而 $U$ 的谱是一个递减序列 (有限或无限) $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \cdots > 0$, 其中每个 $\mu_n$ 是按重数计算的特征值. 0 通常是它的谱, 但是 $Ker(U)$ 可以被化简为 0 或者它是无穷维的. 对每个 $\mu_n$, 存在一个范数为 1 的特征向量 $\varphi_n$, 使得 $E$ 是一

维空间 $\mathbb{C}\varphi_n$ 和 $Ker(U)$ 的希尔伯特和. 令

$$w_0 = \sum_n d_n\varphi_n + w_0',$$

其中 $w_0' \in Ker(U)$, 它是向量 $w_0 \in E$ 在前面的分解下的表达式. 从而, 对任意 $m \geqslant 1$, 有

$$U^m \cdot w_0 = \sum_n \mu_n^m d_n\varphi_n,$$

因此, 如果 $|\xi| < \mu_1^{-1}$, 施瓦茨级数 (9) 等于

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m U^m \cdot w_0 = \sum_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \mu_n^m\right) d_n\varphi_n = \sum_n \frac{d_n}{1-\xi\mu_n}\varphi_n,$$

并且我们有 $w = \xi U \cdot w + w_0 - w_0'$. 对 $\xi = \dfrac{1}{\mu_1}$,

$$\xi^m U^m \cdot w_0 = \sum_n \xi^m \mu_n^m d_n\varphi_n = \sum_n (\mu_n/\mu_1)^m d_n\varphi_n$$

在 $\mu_1$ 是一个单特征值的情况下, 它趋于 $d_1\varphi_1$, 通常 $\mu_n = \mu_1$ 的情况下它趋于 $d_n\varphi_n$ 的和式. 最后, 我们有

$$w_m = (U^m \cdot w_0 | w_0) = (U^{m-k} \cdot w_0 | U^k \cdot w_0) = \sum_n \mu_n^m d_n^2,$$

由此可以得出如果 $d_n$ 使得 $\mu_n = \mu_1$, 则 $d_n$ 不全为 0, 比率 $\dfrac{w_m}{w_{m-1}}$ 趋于 $\mu_1$. 进一步, 有

$$\begin{aligned} w_{2m} &= \|U^m \cdot w_0\|^2 = |(U^{m+1} \cdot w_0 | U^{m-1} \cdot w_0)| \\ &\leqslant \|U^{m+1} \cdot w_0\| \cdot \|U^{m-1} \cdot w_0\| = (w_{2m-2}w_{2m+2})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

对所有整数 $m$, 为了得到不等式 $w_m \leqslant (w_{m-1}w_{m+1})^{\frac{1}{2}}$, 必须考虑唯一满足 $V^2 = U$ 的紧正算子 $V$, 并把前面的讨论运用到 $V$ 上. 当然, 施瓦茨不知道正的自伴算子的 "平方根" 的概念, 这就是为什么他必须对他的数 $w_n$ 用表达式 (16) 的原因.

1893 年, 皮卡 (Picard) 发表了一篇很短的 Comptes-Rendus 注释 ([172], vol. II, p. 545–550), 注释中他得到了新的结果. 对任意点 $M \in D$, 由施瓦茨级数 (9) 给出的函数 $w(M,\xi)$ 在圆 $|\xi| < \xi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ 中是全纯

函数, 并且皮卡研究了 $\xi \mapsto w(M,\xi)$ 在圆外的解析延拓. 他表明在一个半径与 $M \in D$ 无关的圆 $|\xi| < \xi_2$ 中存在这样的解析延拓, 在点 $\xi_1$ 处有留数为 $-\xi_1 U_1(M)$ 的单极点. 他只研究 $p = 1$ 而且 $\Gamma$ 是凸的且光滑的情形, 他的想法是采用诺依曼 (第二章, 第 4 节) 估计差值 $|\xi_1^n w_n - \xi_1^{n-1} w_{n-1}|$ 的方法. 显然他做出了和诺依曼相同的结果 (注释中没有给出细节), 他 "证明" 了存在常数 $C$ 和与 $M$ 无关的 $q < 1$, 使得

$$|\xi_1^n w_n - \xi_1^{n-1} w_{n-1}| \leqslant C q^n,$$

因而对另一个常数 $C'$, 有 $|\xi_1^n w_n - U_1| \leqslant C' q^n$. 写成

$$w = \frac{U_1}{1 - (\xi/\xi_1)} + v,$$

他寻找了一个类似于 (9) 的幂级数展式

$$v = v_0 + \xi v_1 + \cdots + \xi^n v_n + \cdots, \tag{20}$$

但是在圆 $|\xi| < \xi_2$ 中级数是收敛的, 其中 $\xi_2 > \xi_1$. 他用逐次逼近法来确定 $v_n$,

$$\Delta v_0 - \xi_1 U_1 = 0, \quad \Delta v_n + v_{n-1} = 0 \quad (n \geqslant 1),$$

其边界条件为 $\Gamma$ 上 $v_0 = 1$ 且 $v_n = 0, n \geqslant 1$. 引入类似于施瓦茨的数 $w_{n,k}$, 他能够证明 (20) 的收敛半径 $\xi_2$ 是有限的, 但是他没能表明存在一个相应于 $\xi_2$ 并且在 $\Gamma$ 上等于 0 的特征函数.

## §2 庞加莱的贡献

1890 年, 庞加莱在《美国数学杂志》(American Journal of Mathematics) 上发表了一篇很长的文章, 这篇文章包括了他从 1887 年以来的许多研究成果, 它们在 3 篇 Comptes-Rendus 注释中公布过 ([177], vol. IX, p. 15–113). 这篇文章中包括两个完全不同的部分. 他在第一部分详细描述了他求解狄利克雷问题的 "扫除法" (第二章, 第 4 节), 他在第二部分致力于研究热理论中的冷却问题. 之前, 傅里叶已经研究了一些特殊情形, 如温度是到圆心的距离的函数时球面的冷却问题 (第一章, 第 2 节). 傅里叶描述的一般的冷却问题是下面形式的: 给出

一个常密度的实心物体 $V$, 它对热的传导是各向同性的, 需要做的是找到 $V$ 内的温度 $u(x,y,z,t)$, 它是一个关于坐标 $x,y,z$ 和时间 $t$ 的函数, 在 $V$ 的外部温度为 0. 傅里叶表明函数 $u$ 在 $V$ 内必须满足方程 (这里 $a$ 是一个常数)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \tag{21}$$

并且 $u$ 还满足在 $V$ 的表面 $\Sigma$ 上的边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0, \tag{22}$$

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 是法向导数 (指向外部), $h$ 是常数且 $h \geqslant 0$ (第四章, 第 4 节). 运用 "分离变量" 法能够得到形如 $u(x,y,z,t) = e^{-\lambda a^2 t} v(x,y,z)$ 的解, 其中 $v$ 应该是亥姆霍兹方程

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{23}$$

的解, 此时它的边界条件不同于从薄膜振动方程中得到的边界条件, 即在 $\Sigma$ 上

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0. \tag{24}$$

1869 年, 韦伯 (H. Weber) 在他的论文中也考虑了这个问题, 但是他只讨论了在 $h = 0$ 的特殊情形下得到特征值和特征函数的变分方法. 显然庞加莱不知道韦伯的文章, 在他的工作中也从来没有提及韦伯的工作. 1890 年, 他首先对一般边界条件 (24) 重复韦伯的讨论, 即用函数

$$F(v) = h \iint_{\Sigma} v^2 d\sigma + \iiint_V \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) d\omega \tag{25}$$

代替狄利克雷积分. 因此得到特征值的递增无穷序列 $\{\lambda_n\}$ 和相应的特征函数的序列 $\{v_n\}$ 后, 庞加莱意识到他的 "证明" 中存在不严格的地方. 但是在当时能达到的处理水平下, 这已经是最好的讨论了. 他理所当然地认为 $\lambda_n$ 和 $v_n$ 存在, 并且继续更加详细地研究它们, 首先证明序列 $\{\lambda_n\}$ 趋于 $+\infty$, 这一点是韦伯没能解答的. 庞加莱攻克这一问题时, 引入了一整套全新的思想. 首先, 他把特征值看成是常数 $h$ 和区域 $V$ 的函数 $\lambda_n(h,V)$, 并且开始研究 $h$ 和 $V$ 对这些函数的影响, 这是后来在外尔 (H. Weyl) 和库朗 (R. Courant) 的工作中发展起来的

思想趋势, 甚至到现在人们对它也没有完全失去兴趣. 庞加莱先证明对固定的 $V$, $\lambda_n(h,V)$ 关于 $h$ 是递增的, 这通过对对应于 $h$ 的两个值的特征函数 $v_n(h,V)$ 和 $v_n(h',V)$ 运用格林公式可以得到. 因为他想证明 $\lambda_n(h,V)$ 趋于 $+\infty$, 所以他假设 $h=0$, 这可以推出 $\lambda_1(0,V)=0$ 且 $v_1(0,V)$ 是常数.

另一种想法是将 $V$ 分解为更小的区域 $V_1,V_2,\cdots,V_p$ 的并. 他用 $\lambda_n$ 的变分方法证明如果 $p\leqslant n-1$, 那么 $\lambda_n(0,V)$ 至少等于数 $\lambda_2(0,V_1),\cdots,\lambda_2(0,V_p)$ 中的最小值. 因此庞加莱用一个只与 $V$ 的几何有关的数将 $\lambda_2(0,V)$ 最小化. 根据定义 (由于 $h=0$), 这意味着寻找表达式

$$\frac{\iiint_V\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)d\omega}{\iiint_V v^2d\omega} \tag{26}$$

的下界, 其中 $v$ 是 $\overline{V}$ 上的一个 $C^2$ 函数, 它满足条件

$$\iiint_V vd\omega=0. \tag{27}$$

他假设 $V$ 是凸的. 运用极坐标和变分法的标准方法, 他得到下界为

$$C\cdot vol(V)/(diam(V))^5, \tag{28}$$

其中 $C$ 是一个绝对常数. 这里应该强调这样一个事实: 这个庞加莱不等式是我们现在称为 "先验" 不等式的第一个例子 (第九章, 第 4 节). 再来考虑 $\lambda_n(0,V)$ 的较小值, 他取 $p=n-1$, 假设 $V$ 可以分解为 $n-1$ 个区域 $V_j$, $V_j$ 是凸的, 其直径 $\frac{1}{n}$ 趋向于 0, 并且它们的体积与直径的五次幂的比率随着 $n$ 的增大趋于 $+\infty$. 这样就得出了他的结论.

庞加莱下一步研究了 $\lambda_n$ 和 $v_n$ 如何给出冷却问题的解, 此时温度 $u(x,y,z,0)$ 是 $V$ 中时刻 $t=0$ 的已知函数 $f(x,y,z)$. 傅里叶的方法在于写出

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp(-\lambda_n a^2t)v_n(x,y,z), \tag{29}$$

对未知系数 $c_n$, 它给出条件 $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nv_n$, 因此由正交关系可以得出

$c_n = \iiint_V f v_n d\omega$. 但是庞加莱, 包括韦伯在内, 他们当时无法证明这个傅里叶展式在 $V$ 中收敛于 $f$. 然而, 受到逼近理论中切比雪夫 (Tchebychef) 结果的启发, 庞加莱证明 (通过对格林公式的灵活运用) 积分

$$S_n = \iiint_V \left( u - \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(-\lambda_k a^2 t) v_k \right)^2 d\omega$$

满足一个不等式 $S_n \leqslant C \exp(-\lambda_{n+1} a^2 t)$, 其中 $C$ 与 $n$ 和 $t$ 无关. 换句话说, 对 $t > 0$, 他证明在现在称为希尔伯特空间的拓扑 (29) 中级数收敛①.

庞加莱论文的最后一部分 (如果我们除去补充, 这将在后面的第四章, 第 4 节中讨论) 致力于对特征函数 $v_n$ (它们存在时) 的一般研究. 通常情况下, 如果 $v$ 满足 (23) 和 (24), 用格林公式表明存在一个类似于位势的格林表达式 (第二章, 第 3 节, 公式 (17)) 的公式

$$-4\pi v(M) = \iint_\Sigma v \left( \frac{\partial T}{\partial n} + hT \right) d\sigma, \tag{30}$$

其中 $T$ $\left($替换函数 $\dfrac{1}{r}\right)$ 是 $\exp(i\sqrt{\lambda} r)/r$. 运用这个公式, 在经过相当长

---

①勒让德 – 高斯的最小平方法使得切比雪夫用给定函数 $\psi_j$ 的线性组合 $\sum_{j=1}^{N} a_j \psi_j$ 定义了函数 $F$ 的 "最佳逼近", 用的条件是

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(x_k) \left( F(x_k) - \sum_{j=1}^{N} a_j \psi_j(x_k) \right)^2$$

取最小值. 1883 年, 格拉姆 (Gram) 通过考虑积分

$$\int_a^b \rho(x) \left( F(x) - \sum_{j=1}^{N} a_j \psi_j(x) \right)^2 dx \tag{+}$$

而不是有限和, 而对这个问题进行了推广, 他用原创的方法解决了这个问题, 即对 $\psi_j$ 进行施密特 "标准正交化" 过程 [89]. 因此, 他将问题转化为这样一种情形, 即 $\psi_j$ 构成一组规范正交系 (对测度 $\rho dx$), 他表明给出最佳逼近的 $a_j$ 是 "傅里叶系数" $\int_a^b \rho(x) F(x) \psi_j(x) dx$. 他继续考虑了无穷规范正交系 $\{\psi_n\}$, 他也研究了当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时, 积分 (+) 的最小值 $\mu_n$ 趋于 0 的情形. 他注意到这与规范正交系 $\{\psi_n\}$ 的 "完备性" 有关, 也就是说, 只有等于常数 0 的函数与所有 $\psi_n$ 正交. 庞加莱是不可能知道格拉姆的论文的.

的一段讨论后 (模仿双层位势的研究, 不过更难), 他表明在 $\overline{V}$ 上 $v$ 是连续的, 他也能在 $V$ 中得到 $v$ 的导数的界.

庞加莱的另一篇更具原创性的文章是关于薄膜振动的 ([177], vol. IX, p. 123–196). 这篇文章可能写于 1890 年, 当时他并不知道施瓦茨 1885 年的文章. 皮卡发表于 1893 年的注释立刻引起了他的注意, 并且在几个月后他将施瓦茨的方法和他 1890 年的 "先验" 不等式结合起来而取得了比皮卡更好的结果, 他证明了函数 $\xi \mapsto w(M,\xi)$ 的解析延拓是整个复平面上的亚纯函数, 同时证明了亥姆霍兹方程 (具有与施瓦茨一样的边界条件) 的特征值和特征函数的存在性.

庞加莱对表达式 (26), 开始简化和改进他的不等式. 利用施瓦茨不等式, 对一个凸体 $V$, 他能用 $C/(diam(V))^2$ 来代替了他的下界 (28). 从而他只假设对一般的立体 $V$, 能将它分解为直径为任意小的凸体, 并且利用这种分解的思想证明了如下的重要引理: 给定 $\overline{V}$ 上的 $p$ 个任意 $C^2$ 函数 $F_1, F_2, \cdots, F_p$, 则选取 $p$ 个数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 使得对 $v = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p$, 有 $\iiint_V v d\omega = 0$, 且比率 (26) 至少是 $L_p$, 其中 $L_p$ 是一个仅与 $V$ 和 $p$ 有关的数 (它与 $F_j$ 无关), 且当 $p \to +\infty$ 时, $L_p \to +\infty$. 通过将 $V$ 分解成 $p-1$ 个凸子集 $V_j$ 的并, 由 $p-1$ 个条件 $\iiint_{V_j} v d\omega = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant p-1)$ 来选取系数 $\alpha_j$, 从而就可以简单得到.

和皮卡一样, 庞加莱只研究了这样一种情形, 即方程 (8) 里的函数 $p$ 是常数 1, 但是他考虑了一个问题, 它稍微推广了施瓦茨的问题, 也就是说, 寻找一个函数 $v$, 它是方程

$$\Delta v + \xi v + f = 0 \tag{31}$$

的解且在边界 $\Sigma$ 上等于 0, 其中 $f$ 是任意的 $C^\infty$ 函数 (如果施瓦茨方程 (8) 中 $p=1$, 记 $w = w_0 + \xi v$, 则对 $v$, 方程 (8) 是方程 (31), 其中 $f = w_0$), 他能很好地运用这种任意性. 庞加莱注意到对任意 $f$ 和 $f=1$ 的情形, 施瓦茨的方法有效, 且对充分小的 $|\xi|$, 证明了方程 (31) 存在在 $\Sigma$ 上等于 0 的解. 他将这个解记为

$$v = [f, \xi] = v_0 + \xi v_1 + \cdots + \xi^n v_n + \cdots,$$

其中 $\Delta v_0 + f = 0$, $\Delta v_n + v_{n-1} = 0$ $(n \geqslant 1)$, 所有 $v_n$ 在 $\Sigma$ 上等于 0.

对任给的整数 $p$, 他引入 $p$ 个任意系数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 且它们构成的函数 (至少对很小的 $\xi$ 是由定义的)

$$w=[\alpha_1 f+\alpha_2 v_0+\cdots+\alpha_p v_{p-2},\xi]=w_0+w_1\xi+\cdots+w_n\xi^n+\cdots. \tag{32}$$

然后应用他的引理计算对应于 $w$ 的施瓦茨积分 $w_n$, 他能够证明对适当选取的 $\alpha_j$, 当 $|\xi|\leqslant L_p$ 时, 级数 (32) 收敛 (在 $\overline{V}$ 中一致收敛). 若记 $u_j=[v_{j-2},\xi]$, 则可以得到线性方程组

$$\begin{cases}\alpha_1 v+\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_p u_p=w,\\ v-u_2\xi=v_0,\\ u_2-u_3\xi=v_1,\\ \cdots\cdots\cdots\\ u_{p-1}-u_p\xi=v_{p-2},\end{cases} \tag{33}$$

由克莱姆公式得

$$v=P/D, \tag{34}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p\\ 1 & -\xi & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\xi & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\xi\end{vmatrix}$$
$$=\alpha_p-\alpha_{p-1}\xi+\alpha_{p-2}\xi^2-\cdots+(-1)^{p-1}\alpha_1\xi^p$$

和

$$P=\begin{vmatrix}w & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p\\ v_0 & -\xi & 0 & \cdots & 0 & 0\\ v_1 & 1 & -\xi & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ v_{p-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\xi\end{vmatrix},$$

其中 $P$ 和 $w$ 一样, 是一个级数

$$P=P_0+P_1\xi+\cdots+P_n\xi^n+\cdots, \tag{35}$$

这里 $P_n$ 是 $\overline{V}$ 中的 $C^\infty$ 函数且在 $\Sigma$ 上等于 0, 当 $|\xi|<L_p$ 时, 级数 (35) 在 $\overline{V}$ 中一致收敛, 且对级数 (35) 逐项求导可得到 $P$ 的所有导数 (关

于 $\xi$ 或 $x, y, z$ 的导数). 这表明 $\xi \mapsto v(M, \xi)$ 可以拓展为一个亚纯函数, 它在 $|\xi| < L_p$ 内有有限个极点, 它们是 $D(\xi) = 0$ 的与 $M$ 无关的根. 用格林公式容易表明这些极点都是单极点. 因为对任意 $p$, 这是正确的, 所以 $\xi \mapsto v(M, \xi)$ 可扩展到整个复平面上的亚纯函数, 它具有与 $M$ 无关的实的且正的单极点. 进一步, 对这些极点 $\lambda_n$ 中的每一个, 函数 $P(M, \lambda_n)$ 满足方程 $\Delta P + \lambda_n P = 0$. 换句话说, 对每个特征值 $\lambda_n$, 找到了相应的特征函数 $u_n$. 另外, 庞加莱的先验不等式证明了 $\lambda_n \geqslant c \cdot n^{2/3}$, 其中 $c$ 是常数.

庞加莱 1894 年的论文的其余部分还致力于两个问题:

A) 在论文的最后 4 节, 他重新考虑了傅里叶展开问题 (边界条件 $v = 0$). 将函数 $f$ 与它的 "傅里叶系数" $c_n = \iiint_V f u_n d\omega$ (其中特征函数 $u_n$ 已由 $\iiint_V u_n^2 d\omega = 1$ 标准化) 联系起来, 他先从关系式 $\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0$ 和施瓦茨不等式中推出在 $\overline{V}$ 中 $|u_n| \leqslant A\lambda_n$ ($A$ 是常数), 也推出 $c_n$ 是一致有界的. 由此可以得出对不同于特征值的 $\xi$, 方程 (31) 在 $\Sigma$ 上等于 0 的唯一解可以用绝对且一致收敛的级数

$$v = -\sum_n \frac{c_n u_n \xi^2}{\lambda_n^2 (\xi - \lambda_n)} + v_0 + v_1 \xi \tag{36}$$

给出. 另外, 庞加莱表明若级数 $\sum_n c_n u_n$ 是绝对收敛的, 则它的和等于 $f$. 他没有证明对在 $\Sigma$ 上等于 0 的 "任意" 函数 $f$ (可能至少是 $C^4$ 函数), 级数收敛, 但他证明了当 $\Delta f$ 和 $\Delta^2 f$ 在 $\Sigma$ 上也等于 0 时, 级数绝对收敛.

B) 在讨论傅里叶展开问题前, 庞加莱试图在具有边界条件 (24) 的冷却问题的特征值、特征函数的存在性上来扩展他的结果. 他意识到施瓦茨的方法是有效的, 假如能够证明具有新的边界条件的拉普拉斯方程存在 "格林函数", 也就是说, 函数 $G(M, P)$ 具有与格林函数相同的性质, 不同的是对 $M \in V$, $P \mapsto G(M, P)$ 在边界上满足 (24), 则他的存在性定理也能够证明.

对特殊情形 $h = 0$, 诺依曼在他关于狄利克雷问题的工作中表明当 $V$ 是凸的, 但不是双锥时, 如何得到这样的 "格林函数" (也称为 "诺依曼函数"). 他注意到通过改变贝尔 – 诺依曼方程 (第二章, 第 4 节,

公式 (23)) 中积分前的符号, 新方程的解给出一个密度函数 $\rho$, 它对应着相应的双层位势, 它在 $V$ 的外部 ($\overline{V}$ 的补集) 是调和的, 且在无穷远处值趋于 0, 在边界 $\Sigma$ 上趋于 $-g$ (它是所谓外狄利克雷问题的解). 由这个结果, 他表明如何对拉普拉斯方程得到所谓的诺依曼问题的解: 在 $V$ 中寻找调和函数 $u$, 使得 $u$ 在 $\overline{V}$ 中连续且在 $\Sigma$ 上有法向导数 $\dfrac{\partial n}{\partial u}$, 且它在 $\Sigma$ 上等于给定的函数 $g$. 解存在的一个必要条件 (将格林公式应用于 $u$ 和常数 1 上可推出) 是 $\iint_{\Sigma} g d\sigma = 0$. 诺依曼证明这个条件是充分的 (通过增加一个常数来确定解): 他考虑密度 $\dfrac{1}{4\pi} g$ 定义的单层位势 $w$, 它在 $\Sigma$ 上连续, 当从里到外穿过 $\Sigma$ 时, 它的法向导数在 $-g$ 处间断. 诺依曼接着取双层位势为 $v$, 在 $\Sigma$ 上取外狄利克雷问题的解趋于 $-w$. 从而函数 $u = v + w$ 在 $\Sigma$ 外是调和函数, 在 $V$ 的外部等于 0. 因为 $v$ 的法向导数在 $\Sigma$ 两边相等, 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 从 $\Sigma$ 到 $V$ 的内部趋于 $g$, 因此求解了诺依曼问题.

当边值条件为 $\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu = g$ ($h > 0$) 时, 诺依曼不能求解相应的问题. 庞加莱将 $u$ 表示成 $h$ 的幂级数 $u = u_0 + hu_1 + \cdots + h^n u_n + \cdots$ 来试图解这个问题, 实际上他通过这种方法得到一个级数, 对所有 $h > 0$, 该级数收敛, 且在 $\overline{V}$ 中一致收敛. 然而, 对一阶导数, 他的方法只能证明级数在 $V$ 的一个紧子集中一致收敛, 从而不能得出 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 $\Sigma$ 上有意义, 也不能表明 $u$ 是问题的解. 这一尝试中最有趣的结果是庞加莱可能第一次提出边界问题的 "弱" 解的思想. 他证明函数 $u$ 对所有在 $\overline{V}$ 上是 $C^2$ 函数的函数 $v$, 有

$$\iiint_V u \Delta v d\omega + \iint_{\Sigma} g v d\sigma = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial v}{\partial n} + hv \right) u d\sigma, \tag{37}$$

在 "物理意义" 下这等价于真解.

庞加莱关于偏微分方程的三篇长论文中的最后一篇写于 1895 年 ([177], vol. IX, p. 202–272). 虽然它包含的新结果最少, 但是可能比其他几篇有更大的影响. 狄利克雷问题的工作和薄膜振动方程的工作使得庞加莱确信存在与狄利克雷问题有关的 "特征值" 和 "特征函数". 对于我们而言, 这是显然的. 因为如果我们找方程 $\Delta u = 0$ 的解, 它

在 $V$ 的边界 $\Sigma$ 取给定的值, 则我们可以将 $\Sigma$ 上的给定函数 $g$ 拓展到 $\overline{V}$ 中的 $C^2$ 函数 $h$ (当有可能时). 用 $v=u-h$ 代替 $u$, 我们找方程 $\Delta v+f=0$ 的解, 其中 $f=\Delta h$, 这个解在 $\Sigma$ 上等于 0, 这正是对 $\xi=0$ 的方程 (31) 的施瓦茨问题的特殊情形.

但是, 当时没有人去思考这个简单的讨论[①]. 而且庞加莱给出了十分不同且更迂回的讨论. 他注意到可以将内部和外部狄利克雷问题看成是一个问题的特殊情形, 这个问题是寻找双层外势 $W$ (对 $\Sigma$ 上的密度), 它使得对 $s\in\Sigma$, 有

$$W(s^-)-W(s^+)-\lambda(W(s^-)+W(s^+))=2\Phi(s), \tag{38}$$

其中 $W(s^-)$ 是 $W$ 沿着内法线在 $s$ 处的极限, $W(s^+)$ 是 $W$ 沿着外法线在 $s$ 处的极限, $\lambda$ 是复参数, $\Phi$ 是 $\Sigma$ 上给定的函数. $\lambda=1$ 和 $\lambda=-1$ 分别对应的是内部、外部狄利克雷问题. 对这个一般问题, 庞加莱将它和一个新的变分问题联系起来: 对 $\Sigma$ 上由密度定义的任意单层位势 $\psi$, 他考虑比率 $J/J'$, 其中 $J$ 是狄利克雷积分 $\iiint(\mathrm{grad}\psi)^2d\omega$, 它能扩展到 $V$ 上, $J'$ 是相同函数的积分, 它能扩展到 $V$ 的外部上. 通常不严格的讨论使得他有这样的猜想: (1) 存在单调递增的特征值序列 $0=\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$; (2) 对每个 $\lambda_i$, 存在单层位势 $\Phi_i$, 在 $\Sigma$ 上满足

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}(s^-)+\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}(s^+)=0. \tag{39}$$

另外, 对 $i\neq j$, 有 $\iiint_V\mathrm{grad}(\Phi_i)\cdot\mathrm{grad}(\Phi_j)d\omega=0$. 用 $\iiint_V(\mathrm{grad}\Phi_i)^2d\omega=1$ 将 $\Phi_i$ 标准化, 他假设对 $\Sigma$ 上给定的函数 $\Phi$, 有傅里叶展开 $\Phi=\sum_i c_i\Phi_i$, 用 $W(s^-)=\sum_i A_i\Phi_i(s)$ 和 $W(s^+)=-\sum_i\lambda_iA_i\Phi_i(s)$ 求解方程 (38), 其中 $A_i=2c_i/(1+\lambda_i-\lambda(1-\lambda_i))$.

所有这些纯粹是庞加莱的推测, 也是他详细研究 (用的方法受到施瓦茨的启发) 比率 $J/J'$ 的动机, 这些是他 1896 年论文的核心部分.

[①]1909 年, 莱维 (E. E. Levi) 明确提到了这一讨论 [145, vol. II, p. 302–313]. 1907 年, 勒贝格 (Lebesgue) 最早陈述和证明了可以将整个空间 $\mathbb{R}^3$ 中的连续函数推广为定义在闭子集中的连续给定函数 (即现在称为蒂策 – 乌雷松定理) [138, vol. IV, p. 99–100].

但是从他的研究中只能得到这样一个肯定的结果, 即贝尔 – 诺依曼级数收敛 (第二章, 第 4 节), 不仅对凸体 $V$, 而且对具有如下性质的区域 $V \subseteq \mathbb{R}^3$ 也收敛. 通过在无穷远处添加一个点而将 $\mathbb{R}^3$ 嵌入到三维球体 $\mathbb{S}_3$ 中时, 用 $\mathbb{S}_3$ 到自身的同胚将 $V$ 转化为一个球, 无穷远处是不动的, 这个同胚在 $\mathbb{S}_3$ 中是 $C^2$ 的, 它的逆同胚也是 $C^2$ 的①.

庞加莱的文章发表后, 几位数学家很快完善和扩展了他的结果. 1898 年, 勒鲁瓦 (E. Le Roy) [144] 证明了庞加莱在他 1896 年文章中猜想的单层位势 $\Phi_i$ 是存在的. 他用 $(J + J')/I$ 代替 $J/J'$, 其中 $I$ 是曲面积分 $\iint_\Sigma \rho^2 d\sigma$, $\rho$ 是 $\Sigma$ 上对应于单层位势 $\psi$ 的密度, 他也采用了施瓦茨和庞加莱对相应变分问题的方法. 1899 年, 扎雷姆巴 (S. Zaremba) [232] 用修正了的庞加莱求解诺依曼问题的方法完成了 "冷却问题" 的后部分解, 并证明庞加莱的 "弱解" 是真解. 1901 年, 扎雷姆巴和史蒂科夫 (W. Stekloff) 独立地表明可以取消庞加莱和勒鲁瓦用到的区域 $V$ 的全部拓扑性质, 甚至可以减弱 $\Sigma$ 上的 "光滑" 条件. 他们在本质上用到了李雅普诺夫 (Liapounoff) 发表于 3 年前的论文中的结果 [147]. 李雅普诺夫在这些不太严格的条件下, 证明了狄利克雷问题的解在 $\Sigma$ 上的法向导数存在.

① 在没有一点证明的情况下, 庞加莱 "清晰地" 断言对任意有界区域 $V$, 这个性质成立, 其中区域 $V$ 使得边界 $\Sigma$ 是光滑的单连通曲面 ([177], vol. IX, p. 223–224). 将现代微分拓扑作为工具可以证明这个定理. 但是在 1895 年, 庞加莱已经开始阐述这个理论中最重要的概念, 不知道他是否意识到当他想写出来时, 他面临的困难其实在于严格的证明方法 (当取消 $\Sigma$ 上的光滑条件和同胚条件时, 结果是错误的, "亚历山大的带角球"是一个反例).

# 第四章　无穷维思想*

## §1　19 世纪的线性代数

我觉得为了理解泛函分析思想的发展趋势, 有必要总结一下 19 世纪线性代数的发展过程. 直到 1830 年左右, 线性代数都在研究具有任意多个变量的实或复系数的线性方程组, 很多时候只是研究方程个数等于变量个数的情形. 当方程组的系数行列式不为 0 时, 由克莱姆公式可知方程组具有唯一解, 但是对其他情形的研究比较少. 偶尔会用到这样一个结果, 即由 $m$ 个具有 $n$ 个 $(n > m)$ 变量的齐次方程构成的方程组通常有非平凡解 (对 $m$ 用归纳法可以得到).

从 18 世纪开始, 数学家开始熟悉变量的线性变换

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \quad (1 \leqslant j \leqslant m) \tag{1}$$

(大多数情况下 $m = n \leqslant 3$). 这些线性变换自然使得已有的计算不再是关于数的计算, 而是关于数的垂直排列 $\{a_{jk}\}$ 的计算, 其中 $\{a_{jk}\}$ "表示" 变量的变化. 从高斯 (Gauss) 开始, 西尔维斯特 (Sylvester) 和凯莱 (Cayley) 于 19 世纪 50 年代在矩阵理论中将这一发展趋势系统化.

自从有了笛卡儿坐标系 (18 世纪称它为 "解析几何"), 数学家知

*本章由李亚亚翻译.

道了如何从几何上来解释 2 或 3 个变量的方程组的计算, 他们甚至希望能用类似的方法在 "$n$ 维几何" 中解释任意 $n$ 个变量的方程组的计算, 不过要做到这一点缺乏 "理论依据". 1840 年后, 主要受哈密顿 (Hamilton) 和凯莱的影响, 越来越多的数学家开始慢慢地接受这一几何语言, 到 20 世纪末的时候已经普遍接受了. 由于 1822 年后 "几何" 基本上指的是射影几何, 从而 19 世纪的数学家不是在向量空间 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中对已有计算进行 "几何" 解释, 而是在复射影空间 $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ 上来解释. 例如, 当 $m = n$ 时, 可以将关系式 (1) 解释为定义在 $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ 上的射影变换, 它将齐次坐标的点 $\{x_j\}$ 映射到齐次坐标的点 $\{y_j\}$. 1900 年, 数学家开始关注格拉斯曼 (Grassmann) 和皮亚诺 (Peano) 用公理化方法引入向量空间的工作.

1850 到 1880 年间, 线性代数的主要定理得以建立, 这段时间线性代数主要关注方阵的 "约简" 问题. 问题之一是对给定方阵 $U$, 寻找一个可逆矩阵 $P$, 它使得 $PUP^{-1}$ 有唯一的 "约简" 了的典范形式. 对复矩阵 $U$, 这里的典范形式指的是若尔当矩阵的对角排列. 若尔当 (Jordan) 就是用这种方式处理问题的, 他的工作改善了格拉斯曼先前的结果. 格拉斯曼表明了对任一 $U$, 都存在一个 "约简" 了的三角矩阵 $PUP^{-1}$ (他用自同态的本质思想代替方阵的思想).

不过, 另一种类型的 "约简" 干扰了前面的结果. 对称矩阵 $\{a_{jk}\} = U$ 可以对应二次型 $\sum_{j\leqslant k} a_{jk}x_jx_k$. 自柯西之后, 人们认识到如果 $U$ 是实矩阵, 则可以找到一个可逆实矩阵 $P$ (甚至可以假设它是正交的), 它使得 $PUP^{-1}$ 是一个 (实) 对角矩阵. 其实这等价于寻找变量的正交变换, 在这个正交变换的作用下二次型可以化为线性组合 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$, 其中 $\lambda_j$ 是对角矩阵 $PUP^{-1}$ 中的元素, 或者等价地说, $\lambda_j$ 是 "特征方程" $\det(U - \lambda I)$=0 的根 (按其重数计算). 魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 最早找到了复方阵的 "若尔当标准型" (2 年后, 若尔当也独自找到了)[①], 他的做法是先考虑双线性形式 $\sum_{j,k} a_{jk}x_jy_k$ ($U = \{a_{jk}\}$ 是任意方阵), 再将变量的两个 "合同" 变换应用到 $x_j$ 和 $y_j$ 上, 也就是说, 使得双线性形

[①]若尔当没有处理元素是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的矩阵, 而是处理了元素包含在有限域中的矩阵 ([123], p. 114–126).

式 $\sum_{j,k} x_j x_k$ 保持不变, 从而他将复方阵的 "若尔当标准形" 看成是二次型 "约简" 的推广. 这相当于用矩阵 $PUP^{-1}$ 来代替 $U$. 1878 年, 弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 系统地阐述了这些结果 ([78], vol. I, p. 343–405), 不过他没有用矩阵语言, 而是用双线性形式的语言将两个双线性形式 $A(x,y)$ 和 $B(x,y)$ 的 "积" 定义为 $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_k}$①.

1900 年, 数学家才开始慢慢熟悉向量空间中的对偶概念. 数学家在射影几何中能很好地理解对偶 (射影几何是 19 世纪早期的重大发现之一), 即把对偶看成是三维射影空间中平面上点的双射, 后来也可以看成任意维超平面上点的双射. 由于线性形式等同于它们的系数组, 因此 "向量" 和 "线性形式" 都可以看成是 "$n$ 元数组", 这样的话, 根据它们在变量变换下的作用, 将它们区分为 "非相合" 和 "相合" 系. 向量空间等同于它的对偶空间, 这一点在自同态与双线性形式的等同中具有深刻的影响, 这在前面已经提到过②.

概括起来说, 19 世纪末线性代数和多重线性代数的重要结果已经建立, 不过表达形式不够清晰. 这些结果无益于线性代数向无穷维空间的推广, 无穷维空间是在泛函分析的发展中产生的. 线性代数中这些结果的建立经历了艰难的历程, 首先是线性方程组, 接着是行列式, 再后来是双线性形式和矩阵, 最后才有向量空间和线性映射, 换句话说, 有限维线性代数的历史发展实际上与我们没有提到的逻辑顺序是相反的!

## §2 无穷行列式

具有无穷多个未知量的无穷维线性方程组最早出现在傅里叶关于热传导理论的工作中. 傅里叶为了确定对所有 $y$ 成立的关系式

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2m-1)y \tag{2}$$

①1896 年, 平凯莱 (Pincherle) 用自同态语言重新解释了魏尔斯特拉斯的结果 ([173], vol. I, p. 358–367).

②现代线性代数中, 有限维向量空间 $E$ 的自同态空间等同于张量积 $E^* \otimes E$, 但是 $E \times E$ 上的双线性形式空间等同于 $E^* \otimes E^*$.

的系数的无穷序列 $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ ([67], vol. I, p. 149), 他对 (2) 两边取所有阶导数, 当 $y=0$ 时, 式子两边相等, 从而有这样一个关于 $a_m$ 的无穷维线性方程组

$$\begin{cases} 1=\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m, \\ 0=\sum\limits_{m=1}^{\infty} (2m-1)^2 a_m, \\ 0=\sum\limits_{m=1}^{\infty} (2m-1)^4 a_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

为了求解这个方程组, 他先考虑前 $k$ 个方程, 当 $m>k$ 时, 用 0 代替 $a_m$, 接着用克莱姆公式, 从而得到由 $k$ 个数 $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \cdots, a_k^{(k)}$ 组成的一组数, 再对固定的 $m$, 他令表达式 $a_m^{(k)}$ 中的 $k$ 趋于无穷. 他利用得到范德蒙行列式的公式得出

$$a_1^{(k)}=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot\ \cdots\ \cdot(2k-1)^2}{8\cdot 24\cdot\ \cdots\ \cdot(4k^2-4k)}$$

趋于 $a_1=\dfrac{4}{\pi}$, 且有

$$\frac{a_{m+1}^{(k)}}{a_m^{(k)}}=\frac{2m-1}{2m+1}\cdot\frac{m+k}{m-k}.$$

由此, 可以得出 $a_m=(-1)^{m-1}4/\pi(2m-1)$. 傅里叶后来在书中证明了傅里叶系数的一般公式, 当然他也能够验证 $a_m$ 的这些值是正确的. 但是他没有对他的过程给出合理的解释, 也忽略了其中涉及的所有收敛问题. 当然也可以将这一过程用到无穷维方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k=b_j\quad (j=1,2,\cdots) \tag{4}$$

上, 只是在 1885 年之前没有人对此进行研究[①]. 1885 年, 阿佩尔 (P. Appell) 遇到一个方程组, 对这个方程组中给定的序列 $\{a_k\}$, 有 $a_{jk}=$

[①]期间, 傅里叶的方法被两篇比较重要的文章引用, 一篇是 1860 年弗斯特诺 (Fürstenau) 计算代数方程根的文章, 另一篇是 1870 年克特里奇 (Kötteritzch) 的文章, 文中他处理了方程组 (4), 但在方程组中当 $j>k$ 时, $a_{jk}$ 等于 0 (见 [184], p. 8–12).

$a_k^j$. 这一问题与椭圆函数有关, 他用与傅里叶相同的方法处理了这一问题, 他的文章也引起了庞加莱的关注. 阿佩尔表明对这样一个 "广义范德蒙方程组", 如果对所有复数 $z$, 无穷积 $F(z)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_k}\right)$ 收敛, 则傅里叶的过程是正确的.

第二年, 美国天文学家和数学家希尔 (G. W. Hill) 在他发表于 1877 年关于月球理论的文章中研究了这一课题 [114]. 他提出了一个新方法, 这个方法依赖于一个二阶微分方程

$$w''+\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta_n e^{nit}\right)w=0 \tag{5}$$

的积分, 其中 $\theta_n$ 是常数, 现在的问题是寻找一个周期为 $2\pi$ 的解. 希尔将方程的三角级数解写成

$$w=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n e^{i(n+c)t}, \tag{6}$$

将它代入到 (5) 中, 可以得到一个关于系数 $b_n$ 的无穷维线性方程组

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta_{n-k}b_k-(n+c)^2b_n=0,\quad -\infty<n<+\infty. \tag{7}$$

希尔可能不知道傅里叶的工作, 但用的方法与傅里叶的类似, 即在 (7) 中令 $-p\leqslant n\leqslant p$, 当 $m<-p$ 或 $m>p$ 时, 在这些方程中用 0 代替 $b_m$, 可以得到有限维情形下方程组的解, 进一步在这些解中令 $p$ 趋于无穷, 可以得出无穷维情形下的解.

庞加莱研究了一般方程组 (4), 他假设对所有 $j, a_{jj}=1$ (当 $a_{jj}\neq 0$ 时, 用 $a_{jj}$ 除以第 $j$ 个方程可以将方程组 (4) 化简为 $a_{jj}=1$ 的方程组). 他想把行列式 $D_n=\det(a_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ 看成是积 $P_n=\prod\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{jk}|\right)$. 显然由行列式的定义可知 $|D_n|\leqslant P_n$, 由前面对对角线上元素的假设可知 $|D_m-D_n|\leqslant P_m-P_n$, 从而庞加莱可以得到 $D=\lim\limits_{n\to\infty}D_n$ 存在的充分条件是双重和 $\sum\limits_{j\neq k}|a_{jk}|$ 是有限的. 而且, 庞加莱表明当用有界序列 $\{b_j\}$ 代替 $D$ 的第 $k$ 列时, 新的 "无穷行列式" 也是收敛的, 他还表明用

通常的克莱姆公式可以给出 (4) 的唯一有界解 $\{x_k\}$ (解当然是用 "无穷行列式" 表示的)①. 最后他把他的结果推广到双重无穷维线性方程组

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk}x_k = b_j \quad (-\infty < j < +\infty) \tag{8}$$

上, 他对这个方程组同样假设对所有 $j, a_{jj} = 1$. 特别地, 他表明希尔的方法对方程组 (7) 是正确的 ([177], vol. V, p. 95–107).

几年后, 科克 (H. von Koch) [220] 改善和推广了庞加莱的结果. 取消庞加莱对对角线上元素的假设条件, 他用 $\delta_{jk} + c_{jk}$ 表示系数 $a_{jk}$, 并用行列式 $\Delta_n = \det(\delta_{jk} + c_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ 来表示主子式的和式

$$\begin{aligned}\Delta_n = 1 + \sum_{s=1}^{n} c_{ss} + \frac{1}{2!}\sum_{s_1,s_2}\begin{vmatrix} c_{s_1s_1} & c_{s_1s_2} \\ c_{s_2s_1} & c_{s_2s_2}\end{vmatrix} \\ + \frac{1}{3!}\sum_{s_1,s_2,s_3}\begin{vmatrix} c_{s_1s_1} & c_{s_1s_2} & c_{s_1s_3} \\ c_{s_2s_1} & c_{s_2s_2} & c_{s_2s_3} \\ c_{s_3s_1} & c_{s_3s_2} & c_{s_3s_3}\end{vmatrix} + \cdots\end{aligned} \tag{9}$$

(4 年后这个表达式成为弗雷德霍姆 (Fredholm) 积分方程定理的出发点 (第四章, 第 1 节)). 从而他能用一个比较弱的条件来代替庞加莱的收敛准则, 这个条件是和式 $\sum_j |c_{jj}|$ 和 $\sum |c_{i_1i_2}c_{i_2i_3}\cdots c_{i_pi_1}|$ 是有限的, 其中第二个和式取遍不同指标的所有序列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$. 另一个收敛准则是和式 $\sum_j |c_{jj}|$ 和 $\sum_{j,k} |c_{jk}|^2$ 有限.

## §3 对函数空间的探索

不应该相信集合论概念在布尔 (Boole) (1847 年) 或康托尔 (Cantor) 之前是未知的. 这一概念可以追溯到亚里士多德 (Aristotle), 或者更早一些. 自 19 世纪以来, 数学家开始频繁地用词 "类" 来命名具有共同性质的对象的集合. 但是在 19 世纪后半叶, 只有在布尔之后才开

①必须意识到这样一个事实, 傅里叶的方法 (对 $a_{jk}$ 没有限制条件时) 可以很好地给出收敛的 "无穷行列式", 但是用克莱姆公式给出的值可能使得 (4) 的左边级数是不收敛的. 当 $j > k$ 时, 取 $a_{jk} = 0$, 当 $j \leqslant k$ 时, 取 $a_{jk} = 1$, 也取 $b_j = (-1)^j$, 这可以给出一个例子. 这个例子中方程的 "解" 为 $x_k = 2(-1)^k$.

始或多或少地用字母表示任意集合, 也开始普遍借助这些字母来进行运算.

特别地, 虽然对函数 "类" 的描述并不确切, 但是分析中还是会经常考虑函数 "类". 自 18 世纪以来, 函数序列或与一个或多个实参数有关的函数 (例如变分法中的函数) 开始被广泛地运用. 当然, 数学家确实隐约地认识到这样的函数簇比要考虑的所有函数的 "类" 小得多. 黎曼最早尝试对这种认识给出一个更加清晰的表达. 在他关于几何基础的著名演讲中, 他试图给出一个想法, 这个想法能表明 "有限维重数" (也就是说流形) 是什么, 其中点的位置能用数的有限集来确定. 他补充道, 存在这样的 "重数", 但是不能这样来确定, 而是需要 "一个无穷序列或一个数组的连续重数", 他还给出一个例子, 即 "函数在给定区域上所有可能的确定方式" ([182], p. 276).

很早的时候, 数学家就想把极限和连续的概念推广到曲线、曲面或函数这样一些不同于数或点的数学对象上. 数学家也想这样来处理这些对象的序列, 或处理与有限多个实参数有关的簇. 黎曼也最早考虑给整个函数 "类" 赋予某种 "几何" 结构 (我们现在称之为拓扑), 因为只有这样来考虑函数, 狄利克雷积分 (第二章, 公式 (21)) 才有意义. 他指出 "函数的这个集合构成了一个连通区域, 且它本身是闭的" ([182], p. 30). 尽管他的表达不是十分清楚, 但是在这个陈述中我们最早看到 "紧性" 概念, 这个概念将在 19 世纪末出现.

1820 年左右, 对函数序列极限的深入研究揭示出这样一个现象, 即函数序列 $\{f_n\}$ 可以用几种不同的方式来趋近极限 $f$, 这一点与 $\mathbb{R}^n$ 中数或点的序列不同. 1850 年左右, 数学家才弄清楚简单收敛和一致收敛之间的差异. 紧接着在 19 世纪的后 30 年中又对这些概念进行了深刻研究, 这主要归功于意大利学派 (迪尼 (Dini), 阿斯科利 (Ascoli), 阿尔泽拉 (Arzela)). 1883 年, 阿斯科利引入了等度连续的概念, 这也是这个学派跨出的最重要一步. 他发现如果函数序列具有下面特征: 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 当 $|x' - x''| \leqslant \delta$ 时, 对所有指数 $n$, 都有 $|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant \varepsilon$ (换句话说, 连续是 "一致的", 不仅关于 $x$, 而且关于 $n$), 这时有界闭区间 $I$ 上的连续函数序列不会简单收敛于一个非连续函数, 从而使得这样一个令人不满意的现象不会发生 [8].

等度连续序列的基本特征之一是当 $f_n$ 一致有界时, 可以找到一个一致收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}$, 这是数列的 "波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯" 定理的推广. 1880 年后, 数学家才熟知这一结果. 希尔伯特的工作使得对定义在 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集上的函数都成立的 "紧性" 性质成为数学家的关注点, 他在一个特殊情形中再次单独发现了这一性质 (他没有引用意大利学派的结果). 在他 1900 年著名的论文中他将 "紧性" 看成是一个基本的工具, 在这篇论文中他发现了变分法 ([111], vol. III, p. 10–14) 中的 "直接方法", 用这一方法能证明黎曼对 "狄利克雷原理" 的运用是正确的 (第二章, 第 3 节) ([111], p. 15–37).

19 世纪的后几年, 从变分法中产生了函数的 "邻域" 概念. 早在 18 世纪末, 数学家就研究过这样一个问题, 即欧拉方程的解 $y$ 是否能对积分 $\int_a^b F(x,y,y')dx$ 给出一个 "相对极值". 勒让德 (Legendre) 用 $y+\varepsilon u$ 代替积分中的 $y$ 而试图给出这个问题的解, 其中 $u=\delta y$ 是 $C^1$ 类的任意 "变分". 因此, 他得到了实参数 $\varepsilon$ 的函数 $\Phi(\varepsilon)$, 如果 $\Phi''(0)>0$ ($\Phi''(0)<0$), 则函数在 $\varepsilon=0$ 处可以取到相对极小值 (极大值). 这一点可以推出条件 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$ ($<0$). 但是人们很快意识到这个条件并不能保证积分实际上比这样一些数都小 (大), 对一个 "小" 的变分 $\delta y$, 用 $y+\delta y$ 代替 $y$ 能得到这些数. 显然, 这其实与术语 "小" 表示什么意思有关. 自拉格朗日以来, 人们理所当然地认为无论 $\delta y$ 是否是 "小" 的, 导数 $(\delta y)'=\delta y'$ 都是 "小" 的. 但是魏尔斯特拉斯和他的学派觉得这只是一个假设条件, 从而他们区别了 "强极值" 和 "弱极值": "弱极值" 对应的是 $C^1$ 函数 $y$ 的 "邻域" 概念, 当 $|z-y|$ 的极大值很小时, $z$ "接近" $y$, 当 $|z-y|$ 的极大值和 $|z'-y'|$ 的极大值都很小时, 只有第一个 $z$ 是 "接近" $y$ 的.

我们很早就注意到格拉姆 (Gram) 和庞加莱在 "傅里叶展开式" 的研究中可以很自如地运用 "平均平方收敛" 的概念 (第三章, 第 2 节). 因此, 可以说在 19 世纪的后几年, 具有各种 "拓扑" 结构的 "函数空间" 的思想是 "公开的". 当用非常一般和简单的术语来表述这一思想

时, 它就可以得到进一步的发展和完善①.

从函数集到 $\mathbb{R}$ 或另一个函数集的映射的概念比从任意集合到任意集合的映射的一般定义出现得早. 在戴德金 (Dedekind) 写于 1872 年的著名的《数是什么? 数应当是什么?》(尽管在 1888 年才出版) 一书之前, 数学家好像没有阐述过这个一般定义 ([48], vol. III, p. 335–391). 变分法出现后, 数学家熟悉这样一个想法, 即对区间 $[a,b]$ 上的每个 $C^1$ 函数 $y$, 它与数 $\int_a^b F(x,y,y')dy$ 有关. 19 世纪末, 这样的映射被命名为 "泛函". 17 世纪末, 函数的概念连同它在微积分中的运用一起出现. 算子作用到给定函数上会产生一个新的函数, 从而算子的概念连同一些例子, 如导数 $f \mapsto D^\nu f$ 或平移算子 $f \mapsto \gamma(a)f$ (函数 $x \mapsto f(x-a)$) 一起出现. 从莱布尼茨 (Leibniz) 到平凯莱 (Pincherle) (19 世纪末), 许多分析学家都研究过这些算子的代数性质以及它们与通常的代数结果之间的类似性 (最初只设想应用在数上). 例如, 平凯莱利用乘积的多重微分 $d^n(uv)$ 的莱布尼茨公式与二项式定理之间的类似性而试图对负指数或无理指数引入微分. 后来许多数学家 (如刘维尔、黎曼和平凯莱) 都研究过这一问题, 而且这一问题最终与现代分布理论联系在一起. 另一个例子是拉格朗日表明泰勒公式的表达式可以是算子间的关系式 $\gamma(-a) = e^{aD}$, 或者是可微多项式 $D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n$ 的因子, 这是以普通多项式 $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ 的因子为模型的.

这些思想主要形成于 1790—1830 年间, 它们在很大程度上被用于处理代数中的新概念, 如处理符号而不是数字, 后来又公理化和形式化整个数学中的概念 (见 [54], 第 8 章, 第 3 节). 但是这些思想的发展对分析学没有产生明显的影响, 可能是因为没有太多关注连续性的问题. 19 世纪的后几年, 这些问题非常偶然地出现在平凯莱、布尔勒 (Bourlet) 和沃尔泰拉的论文中.

平凯莱和布尔勒只研究了复平面的区域 $\Delta$ 上的所有全纯函数做

①不过, 数学发展具有典型的不可预见性, 没有人能够准确预测它的发展方向, 即使推断性的预测也是不可能的. 1900—1910 年间, 没有人能预测泛函分析的发展方向. 这从阿达玛在 1897 年举办的第一届国际数学家大会的报告中可以看出来 ([94], vol. I, p. 311–312). 他对 "集合论" 思想非常感兴趣, 也对将要发生的一切抱有很大期望. 但是他认为没有什么会超过修复的 "狄利克雷原理" 和今天称之为 "准紧性" 的一些模糊思想.

成的 "空间" $E$, 他们对这一空间上的线性算子进行了专门研究. 1886 年, 平凯莱研究了使得全纯函数[①] $\varphi$ 与函数 $x \mapsto \int_\Gamma A(x,y)\varphi(y)dy$ 有关的一些算子, 其中 $\Gamma$ 是 $\Delta$ 上的曲线, $A$ 是全纯函数, 他记这个函数为 $@\varphi$. 但是他只研究了拉普拉斯变换型的函数的特殊情形 ([173], vol. I, p. 92–141). 后来, 他对这个问题又进行了几次研究, 但是都没有取得很有价值的结果[②]. 1897 年, 布尔勒 [29] 只研究了 $\Delta$ 是 $|z| < r$ 的圆盘的情形, 他明确确定了 $E$ 上的 "连续" 线性算子 (从而他认为我们现在所称的紧收敛的拓扑是连续的), 他也表明平凯莱考虑的算子是积分算子.

最后, 我们来讲一下 1887 年年轻的沃尔泰拉在 "泛函分析" 上做出的首次尝试 ([219], vol. I, p. 294–314), 这一尝试在阿达玛 (Hadamard) 的影响下具有历史重要性. 沃尔泰拉研究了解析函数的推广, 这一推广可以看成是霍奇 (Hodge) 理论[③] 的一个预兆. 在推广过程中他要用到他所称的 "线的函数". 虽然以我们现在的观点来看, 他的定义并不十分准确[④], 但是他显然考虑了从一个区间 $I \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的 $C^1$ 映射构成的集合 $E$ ("线"), 他还认识到映射 $y : E \to \mathbb{R}$ 在一致收敛的拓扑意义下是连续的. 他想将导数的古典概念立刻推广到这些 "线的函数" 上. 他用变分法的方法研究了 "变分" $\delta y = y(\varphi + \theta) - y(\varphi)$, 其中假设增量 $\theta$ 在 $[a,b]$ 外等于 0, 商为 $\delta y/\sigma$, $\sigma = \int_a^b |\theta(t)|dt$. 当 $b-a$ 和 $|\theta|$ 的极大值趋于 0 时, $\sigma$ 应该趋于一个极限. 纵观泛函分析 50 年的历史发展, 如果没有一般拓扑学的基本概念, 这些特有的定义是不完善的. 不过, 这些定义引起了阿达玛的兴趣, 他想把类似的思想应用到格林函

①继格拉斯曼 (1862 年) 后, 平凯莱好像是最早用单个字母 $\varphi$ 表示函数的数学家之一, 而与他同时代的所有数学家都将函数表示为 $\varphi(x)$. 在他后来的文章中, 他反复强调这样一个事实, 即函数应该看成是某个集合中的 "点".

②他认为 $E$ 中闭的超平面的第一种概念可能是连续线性形式的核, 具有余维数的闭子空间的第一种概念可能是超平面的交 ([173], vol. I, p. 395). 1897—1898 年, 他想推广拉格朗日算子的 "伴随" (第一章, 第 1 节, 公式 (5)), 他的做法是考虑 $E$ 的两个子空间 $S$ 和 $S'$, 同时他也考虑了 $S \times S'$ 上非退化的双线性形式 $(\varphi, \psi)$. 他接着将 "伴随" $A$ 与 $S$ 到 $S'$ 的线性映射联系起来, $S'$ 到 $S$ 的映射使得 $(A\cdot\varphi, \psi) = (\varphi, A\cdot\psi)$. 他观察到 $A$ 的核与 $A$ 的像之间的关系 ([173], vol. II, p. 77–84).

③见 A.Weil, Oeuvres Scientifiques, vol. II, Commentaires sur [152 e], 修订版的 p. 532 (或 vol. III, 第一版的 p. 450), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

④1906 年以前的所有数学家对它的定义都不准确.

数上, 他也鼓励他的学生们朝这一方向努力 (见 [94], vol. I, p. 401–404 和 435–453). 但是时至今日, 这些思想在谱理论和分布理论中都没有取得任何类似的应用, 我们将在第七章和第四章中讲到. 在无穷维流形理论的最新进展中值得重新来审视它们, 无穷维流形可能才是它们自然的生长环境.

## §4 从“有限到无限”的过渡

尽管所有哲学都有成见且反对, 但是在希腊数学中已经表现出处理“无穷”的需要, 并且在处理“无穷”方面取得了各种形式. 从“有限到无限”最简单和最“自然”的过渡是加法运算的无限次重复, 被加数越来越小时就产生了收敛级数的概念, 这一点可以追溯到阿基米德. 用乘法代替加法, 就有了无穷积, 它与 17 世纪的微积分一起产生. 更复杂的代数运算产生了连分数和第 2 节已经讨论过的无穷行列式.

“有限到无限”思想的另一个线索可以追溯到欧多克索斯 (Eudoxus) 的“消耗法”, 或者更早一些. “消耗法”最早导致积分的概念出现. 但是 17 和 18 世纪的数学家将一个对象分解为无穷多个“无穷小”部分的思想发展为一个非常复杂的方法, 他们用这一方法发现了常微分方程或偏微分方程, 这些微分方程涵盖了“大量”情形, 他们所研究的情形在“无穷小”部分上更容易描述为“最好的逼近”. 正是用这种方式建立了弦振动方程 (第一章, 第 2 节, 公式 (7)), 建立的方法有两种, 一种是像伯努利那样把具有质量的弦看成是分布在无质量弦上的 $n$ 个质点构成的系统 (当 $n$ 趋于无穷时) 的极限, 另一种是像达朗贝尔那样通过其邻域来分析作用在弦的“无穷小”部分上的力.

傅里叶正是用第二种方法建立了热方程, 他理所当然地认为在小“分子”的系统中, 给定的分子 $M$ 在“无穷小”的时刻 $dt$ 从分子 $M'$ 那里得到的热量等于 $M$ 和 $M'$ 的温度差乘以 $dt$ 和只与距离 $MM'$ 有关的系数. 如果分子 $M$ 位于一个将分子系统与内部分开的表面上, 那么它辐射出的热量也等于它的温度与内部温度的差再乘以 $dt$ 和另一个与 $M$ 有关的系数. 因此, 他通过下面的方法建立了“冷却”过程的方程 (第三章, 第 2 节, 方程 (21)), 将固体 $V$ 分解为“无穷小”的立方体, 估计一个立方体在 $t$ 时刻从 6 个邻域中得到的热量, 他认为这些热量

与这个立方体的温度的变分 $du$ 是成比例的, 这个比例是常数. 他通过估计无穷小立方体在 $V$ 的表面丢失的热量 (因为辐射) 而类似地得到了边界条件 (第三章, 第 2 节, 方程 (22)).

1890 年, 庞加莱在有关冷却问题的论文的最后部分给出了另一种方法, 这个方法使人们想起了伯努利的过程. 他首先考虑分子 $M_i$ 的数目 $N$ 很大, 根据傅里叶的物理研究, 如果用 $v_i(t)$ 表示 $t$ 时刻 $M_i$ 的温度, 则这些函数满足线性微分方程组

$$\frac{dv_i}{dt}+\sum_{k\neq i}C_{ik}(v_i-v_k)+C_iv_i=0 \quad (1\leqslant i\leqslant N), \tag{10}$$

其中 $C_{ik}(v_i-v_k)$ 是 $M_i$ 从 $M_k$ 中得到的热量, $C_iv_i$ 是 $M_i$ 向系统外辐射出的热量. 庞加莱没有令分子的数量增加到无穷多, 他用古典的欧拉 – 拉格朗日方法对方程组 (10) 进行积分: 记 $v_i(t)=u_ie^{-\alpha t}$, 由于矩阵 $\{C_{ik}\}$ 是对称的, 他认识到在这个方程中可以得到一个关于 $\alpha$ 的方程, 而由这个 $\alpha$ 的方程可以得到相应的非退化正二次型

$$\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_N)=\sum_{i\neq k}C_{ik}(u_i-u_k)^2+\sum_i C_iu_i^2 \tag{11}$$

的对称矩阵的特征值. 令 $\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\cdots\leqslant\xi_N$ 是这些特征值, 由古典二次型理论可得

$$\Phi=\xi_1\varphi_1^2+\cdots+\xi_N\varphi_N^2, \tag{12}$$

其中 $\varphi_i$ 是关于变量 $u_1,\cdots,u_N$ 的线性形式, 它们使得 $\varphi_1^2+\cdots+\varphi_N^2=u_1^2+\cdots+u_N^2$. 如果对两个线性形式 $f=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_Nu_N$, $g=\beta_1u_1+\cdots+\beta_Nu_N$, 记 $(f|g)=\sum\limits_k\alpha_k\beta_k$, 则 $N$ 个线性形式 $\varphi_i$ 在这个标量积下是相互正交的. 从而 $\xi_1$ 是 $u_1,\cdots,u_N$ 的函数

$$\frac{\Phi(u_1,\cdots,u_N)}{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_N^2}=\frac{\Phi}{\varphi_1^2+\cdots+\varphi_N^2} \tag{13}$$

的最小值, 其中 $u_i$ 是任意的. 相似地, 当 $\varphi_1=0$ 时, $\xi_2$ 是 (13) 的极小值, $\xi_3$ 作为 $u_i$ 间的关系式, 当 $\varphi_1=\varphi_2=0$ 时, 它是 (13) 的极小值, 等等. 当然在 $N$ 维空间中这一过程与三维空间中确定椭球面的 "轴" 的古典方法是类似的. 在冷却问题中定义特征值 (或韦伯定义特征值)

时, 庞加莱认为表达式 (13) 其实对应于商

$$\frac{\iiint_V \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)dw+h\iint_\Sigma v^2 d\sigma}{\iiint_V v^2 dw}.$$

这些特征值是函数 $[f,\xi]$ 的极点 $\lambda_m$ (第三章, 第 2 节), 它们对应的是 (12) 中的 $\xi_j$, 特征函数 $U_m(M)=P(M,\lambda_m)$ 对应的是 (12) 中的 $\varphi_j$, $\varphi_j$ 的正交性对应的是 $U_m$ 间的关系式

$$\iiint_V U_p U_q dw=0,\quad p\neq q.$$

最后, 他认识到他可以在其他问题上运用相同的思想, 在弹性理论上的应用可以作为一个例子. 他指出可以简单地令公式 (12) 中的 $N$ 趋于 $+\infty$ 来严格地证明特征值 $\lambda_m$ 和特征函数 $U_m$ 的存在性, 但是他对此没有给出严格的证明. 虽然之后他没有再讨论这个问题, 但是我们还是能看出他其实给出了一种方法. 1904 年, 希尔伯特将这一方法运用到对称核积分方程上而取得了成功 (第五章, 第 2 节).

拉鲁 (Le Roux) 1894 年和沃尔泰拉 (Volterra) 1896 年的论文开始研究积分方程一般理论, 这一理论中也首次出现了类似于 “从有限到无限过渡” 的思想. 另外, 还出现了一些特殊的积分方程, 如刘维尔在施图姆 – 刘维尔问题中遇到的积分方程 (第一章, 第 3 节, 方程 (34) 和第二章, 第 1 节, 方程 (6))、贝尔和诺依曼在狄利克雷问题中遇到的积分方程 (第二章, 第 4 节, 方程 (23)) (因为方程没有被明显写出来, 所以我们称其为 “密码积分” 方程. 如果写出来了, 许多问题也就解决了) 及其一些与积分有关的方程. 与这些积分方程的出现紧密相关的一些问题与常微分方程或偏微分方程是没有直接关系的. (按时间顺序来说) 第一个工作是 1822 年傅里叶引入的变换的 “反演” 问题 (我们将在第七章, 第 6 节重新讨论), 这一问题把函数

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos txdx \tag{14}$$

与 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f$ 联系起来, 现在的问题是当变换 $\varphi$ 是一个给定函数时, 如何来寻找 $f$. 这个问题可以通过傅里叶反演变换 ([67], vol.

I, p. 392)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(x)\cos txdx \tag{15}$$

来解决, 傅里叶和平常一样完全用形式计算而得到这两个公式. 不久之后, 阿贝尔 (Abel) 发表了一篇研究力学问题的论文 ([1], vol. I, p. 11–17 和 97–101), 在这篇论文中他其实是想找一个函数 $\varphi$, 它使得

$$\int_0^x\frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}}=\psi(x) \tag{16}$$

是一个给定的函数. 他通过公式

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\psi'(y)dy}{\sqrt{x-y}} \tag{17}$$

得到解 $\varphi(x)$, 他也将他的结果推广到这样一种情形中, 即用 $(x-y)^{\alpha}(0<\alpha<1)$ 来代替 $\sqrt{x-y}$. 他给霍尔姆伯 (Holmboe) 的信中甚至暗含了更一般的结果, 但是在他有关这一课题的论文中却找不到任何结果. 之后, 直到 1890 年才有几篇文章部分地推广了阿贝尔的结果①. 1894 年, 拉鲁才攻克了 "定积分反演" (它被称为定积分反演) 的一般问题, 也就是说, 寻找 $[a,b]$ 上的一个 $C^1$ 函数 $\varphi$, 它满足方程

$$\int_a^y\varphi(x)H(x,y)dx=f(y), \tag{18}$$

其中 $f$ 和 $H$ 分别是 $[a,b]$ 和 $[a,b]\times[a,b]$ 上的 $C^1$ 函数, $f(a)=0$②. 与他的前辈不同, 拉鲁无意对未知函数找一个类似于 (15) 和 (17) 的 "封闭公式". 他假设 $h(y)=H(y,y)$ 在 $[a,b]$ 上不等于 0, 对 (18) 两边求导, 得到

$$h(y)\varphi(y)+\int_a^y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\varphi(x)dx=f'(y), \tag{19}$$

再应用几年前皮卡推广的逐次逼近法:

$$u_0(y)=\frac{f'(y)}{h(y)},\quad u_n(y)=\frac{f'(y)}{h(y)}-\frac{1}{h(y)}\int_a^y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)u_{n-1}(x)dx,\quad n\geqslant 1,$$

他很容易证明序列 $\{u_n\}$ 收敛于 (18) 的一个解 ([143], p. 244–246).

①可以参看 1897 年沃尔泰拉在有关积分方程的文章中很长的历史讨论 ([219], vol. II, p. 279–287).

②因为阿贝尔的方程中不满足这些条件, 所以拉鲁的结果 (对他而言这些结果是他在偏微分方程研究中所需要的辅助特征) 不能直接推广到阿贝尔的方程上.

1896 年, 沃尔泰拉 (他显然不知道拉鲁的论文) 在他一系列 4 个注释中用相同的方法求解了相同的问题 ([219], vol. II, p. 216–262). 他给出解的明确表达式为

$$\varphi(y)=\frac{f'(y)}{h(y)}-\frac{1}{h(y)}\int_a^y\left(\sum_{i=0}^{\infty}S_i(x,y)\right)f'(x)dx, \tag{20}$$

从而超越了拉鲁, 其中 $S_i$ 是用归纳法来定义的:

$$S_0(x,y)=\frac{1}{h(x)}\frac{\partial H}{\partial y}(x,y),\quad S_i(x,y)=\int_y^x S_0(\xi,y)S_{i-1}(x,\xi)d\xi,\quad i\geqslant 1. \tag{21}$$

在后面的注释中, 他讨论了 $h(y)$ 在有限多个点可能等于 0 的情形, 也讨论了当 $0<\alpha<1$ 时, $H(x,y)=G(x,y)/(x-y)^{\alpha}$ 且 $G$ 是连续的情形 (这是阿贝尔方程的推广). 他在得到公式 (20) 后作出这样的注记: “如果考虑方程组

$$\begin{cases} b_1=a_{11}x_1,\\ b_2=a_{12}x_1+a_{22}x_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_n=a_{1n}x_1+\cdots+a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{22}$$

则积分概念很容易使人这样来考虑方程 (18) 所表达的泛函分析问题, 即把这个问题看成是一个类似于 (22) 的方程组的解的极限形式, 这里 $a_{ij}$ 和 $a_{ii}$ 分别类似于 $H(x,y)$ 和 $H(y,y)$.” 这是他注释中最有影响的部分. 虽然他只描述了这种情形 (有点模糊), 但是他已经清晰地意识到在 (18) 中用值

$$y_k=a+\frac{k}{n}(b-a),\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

来代替 $y$, 用点 $y_k$ 来划分 $[a,b]$, 用相应的 “黎曼和” 来代替积分, 从而可以得到形如 (22) 的方程组

$$f(y_j)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(y_k)H(y_k,y_j),\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

最后, 虽然沃尔泰拉没有提到矩阵的积, 但是他在注释中给出了这样的形式, 即将两个 “核” $H_1(x,y)$ 和 $H_2(x,y)$ 与核

$$H(x,y)=\int_x^y H_1(x,\xi)H_2(\xi,y)d\xi$$

联系起来 (后来他将其写成 $H = H_1 * H_2$). 为了简单起见, 我们采用这一符号, 从而他指出如果对任意连续函数 $S_0(x,y)$, 当 $i \geqslant 1$ 时, 用 $S_i = S_{i-1} * S_0$ 来定义 "核" $S_i$, 则对 $1 \leqslant j \leqslant i$, 有 $S_i = S_{i-j} * S_{j-1}$, 且有最大值

$$|S_i(x,y)| \leqslant \frac{M^{i+1}}{i!}|x-y|^i.$$

这可以推出级数

$$F_0 = \sum_{i=0}^{\infty} S_i \tag{23}$$

是一致收敛的, 也可以推出关系式

$$F_0 - S_0 = S_0 * F_0. \tag{24}$$

他观察到可以对这个关系式进行 "反演": 如果对 $i \geqslant 1$, 用 $F_i = F_0 * F_{i-1}$ 来定义 $F_i$, 则有

$$S_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i F_i. \tag{25}$$

在他的注释的最后部分, 他讨论了被希尔伯特称为 "第二型积分方程" 的

$$\varphi(y) - \int_a^y S_0(x,y)\varphi(x)dx = f(y) \tag{26}$$

的一般概念, 得出积分方程 (26) 的解是由

$$\varphi(y) = f(y) + \int_a^y F_0(x,y)\varphi(x)dx \tag{27}$$

给出的, 这一点可以从 (24) 中立刻得到, "核" 和 "预解核" 在这些公式中具有完全对称的作用.

# 第五章　至关重要的几年和希尔伯特空间的定义*

1900 年到 1910 年间, 19 世纪积累的所有思想方法变得明晰起来, 我们在前面几章已经讲过这些思想方法. 这一点本质上归因于四篇基础性文章的发表:

1900 年弗雷德霍姆关于积分方程的文章,

1902 年勒贝格关于积分的博士论文,

1906 年希尔伯特关于谱理论的文章,

1906 年弗雷歇关于度量空间的博士论文.

## §1　弗雷德霍姆的发现

1888 年, 杜布瓦 · 雷蒙 (P. Du Bois-Reymond) 在他关于狄利克雷问题的文章中首次使用了 "积分方程" 这一术语 [61]. 他关注了贝尔 – 诺依曼型方程 (第二章, 第 4 节), 也认识到这一类方程的一般理论带来的 "无法克服的困难". 他确信这个理论中还会出现一些新的进展, 但是他承认 "对这一问题几乎没有什么东西是已知的". 我们在第三章的第 2 节中已经讨论过的庞加莱的工作以及他的追随者们的工作

*本章由李亚亚翻译.

都没有消除杜布瓦·雷蒙留下的这一印象. 他们的结果似乎与位势理论微小的估量有关. 弗雷德霍姆在他发表于 1900 年的简短注释中指出之前考虑的所有积分方程 (或 "密码积分" 方程) 的一般理论事实上非常简单 (这比当时偏微分方程理论中考虑的任何事情都要简单), 因此弗雷德霍姆的发现完全就像是一个惊喜.

弗雷德霍姆是米塔 – 列夫勒 (Mittag-Leffler) 1888—1890 年间在斯德哥尔摩大学的学生. 他一生中只发表了为数不多的几篇文章, 其中大多数是关于偏微分方程的 (我们将会在第九章, 第 5 节中讨论他 1898 年的博士论文). 在巴黎访学期间他接触了法国几乎所有的分析学家, 熟读了庞加莱最新发表的文章. 访学结束后他于 1899 年 8 月与他的老师米塔 – 列夫勒交流讨论了他关于积分方程的最初结果, 这些结果于 1900 年发表 [74, p. 61–68], 两年后他将这些结果写成一篇文章发表在 Acta Mathematica 上 ([74, p. 81–106] 和 [75]).

弗雷德霍姆 1900 年的注释题为 "关于狄利克雷问题解的新方法", 弗雷德霍姆在文章中从一开始就没有理会贝尔 – 诺依曼方程的所有特殊特征, 而是和拉鲁、沃尔泰拉对阿贝尔方程的处理一样 (第四章, 第 4 节) 直接来研究一般的 "第二型积分方程" (这一术语是由希尔伯特给出的)

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt, \tag{1}$$

其中假设 $K$ 在 $[a,b] \times [a,b]$ 上有界和分段连续, $\varphi$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\lambda$ 是一个复参数. 他简单地提到了积分方程与线性方程组之间的类似性, 并开始用公式表示 "行列式" (见下面). 在 1909 年的一次演讲中 ([74], p. 123–131), 他提到:

1. 他的研究灵感来源于沃尔泰拉从线性方程组到积分方程的 "极限过渡" 思想;

2. 得益于科克关于无穷行列式的工作 (第四章, 第 2 节).

从这些零散的描述中我们可以最大可能地重构他的步骤, 而重构的关键在于将下面三个简单的想法联系起来:

I) 在 (1) 中用黎曼和代替积分, 运用第四章, 第 4 节中的符号, 我

们可以得到关于 $f(y_j)$ 的 $n$ 个线性方程构成的方程组:

$$f(y_j)+\frac{\lambda(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}K(y_k,y_j)f(y_k)=\varphi(y_k)\quad(1\leqslant j\leqslant n).\tag{2}$$

II) 根据科克的公式 (第四章, 第 2 节, 公式 (9)) 写出线性方程组的行列式

$$1+\frac{\lambda(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}K(y_k,y_k)+\frac{\lambda^2(b-a)^2}{2!n^2}\sum_{k_1,k_2}\begin{vmatrix}K(y_{k_1},y_{k_1}) & K(y_{k_1},y_{k_2})\\ K(y_{k_2},y_{k_1}) & K(y_{k_2},y_{k_2})\end{vmatrix}+\cdots,$$

接着令 $n\to+\infty$, 从而给出了弗雷德霍姆所称的积分方程 (1) 的 "行列式" 公式

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=1+\lambda\int_a^b K(s,s)ds+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1 & s_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}ds_1ds_2+\cdots\\ +\frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & \cdots & s_m\\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m\end{pmatrix}ds_1ds_2\cdots ds_m+\cdots,\end{aligned}\tag{3}$$

其中

$$K\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_m\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \cdots & K(x_1,y_m)\\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \cdots & K(x_2,y_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ K(x_m,y_1) & K(x_m,y_2) & \cdots & K(x_m,y_m)\end{vmatrix}.\tag{4}$$

III) 证明级数 (3) 在复平面的任一紧集上都是一致收敛的, 因为用一种合适的方式能够将行列式 (4) 放大. 在他 1899 年的信中, 弗雷德霍姆给出了这个放大的值为 $n^{\frac{n}{2}}M^n$, 其中 $M$ 是 $|K|$ 的上界. 显然他已经单独地得到了这个结果, 不过他意识到这是 1893 年阿达玛 ([94], vol. I, p. 239–245) 对任意 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 得到的不等式

$$|\det A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\tag{5}$$

的特殊情形.

接下来很 "自然" 的一步当然是对方程组 (2) 运用克莱姆公式, 再次令分子中的 $n$ 趋于无穷, 弗雷德霍姆用下面优美的方法来描述这一

结果: 根据第一行将行列式 (4) 展开得到

$$\begin{aligned} & K\begin{pmatrix} s & x_1 & \cdots & x_m \\ t & x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \\ &= K(s,t)K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} - K(s,x_1)K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ t & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \\ &\quad + K(s,x_2)K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m \\ t & x_1 & x_3 & \cdots & x_m \end{pmatrix} - \cdots \\ &\quad + (-1)^m K(s,x_m)K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ t & x_1 & \cdots & x_{m-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

另一方面, 弗雷德霍姆定义 "较小值"

$$\begin{aligned} \Delta(s,t;\lambda) &= K(s,t) + \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix} s & x_1 \\ t & x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \cdots \\ &\quad + \frac{\lambda^m}{m!} \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} s & x_1 & \cdots & x_m \\ t & x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \cdots dx_m + \cdots, \end{aligned} \tag{7}$$

用表达式 (6) 代换每个被积函数可以得到简单关系式

$$\Delta(s,t;\lambda) = K(s,t)\Delta(\lambda) - \lambda \int_a^b K(s,\xi)\Delta(\xi,t;\lambda)d\xi. \tag{8}$$

他接下来引入函数

$$\Phi(s) = \varphi(s)\Delta(\lambda) - \lambda \int_a^b \Delta(s,\xi;\lambda)\varphi(\xi)d\xi \tag{9}$$

并从 (8) 式中得出方程

$$\Phi(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\Phi(t)dt = \varphi(s)\Delta(\lambda). \tag{10}$$

因此可以立刻得出这样的结论: 如果 $\Delta(\lambda) \neq 0$, 函数 $f(s) = \dfrac{\Phi(s)}{\Delta(\lambda)}$ 就是积分方程 (1) 的解. 他进一步得到

$$\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b \Delta(s,s;\lambda)ds, \tag{11}$$

他从这个式子中推导出如果 $\lambda_0$ 是整函数 $\Delta(\lambda)$ 的 $\nu$ 阶零点, 则对一个适当选择的 $\varphi$, $\Phi(s)$ 不能被 $\lambda - \lambda_0$ 的幂整除, 这个幂的指数比 $\nu - 1$ 大;

如果 $\Phi(s)=(\lambda-\lambda_0)^k\Phi_1(s)$, 则从 (10) 中可以推出

$$\Phi_1(s)+\lambda_0\int_a^b K(s,t)\Phi_1(t)dt=0. \tag{12}$$

换句话说, 如果齐次方程 (12) 不存在非平凡解, 则必须有 $\Delta(\lambda_0)\neq 0$, 因此当 $\lambda=\lambda_0$ 时, 积分方程 (1) 的解存在且唯一. 但是当时他并没有证明 (12) 的非平凡解存在可以推出 $\Delta(\lambda_0)=0$. 注释的结尾部分令人震惊: 他考虑了有界平面区域上带有 $C^3$ 边界的贝尔 – 诺依曼方程, 这个贝尔 – 诺依曼积分方程的核是有界且连续的, 对 $\lambda_0=1$ 的情形, 从双层位势的性质中能容易地推出齐次方程 (12) 没有非平凡解. 因此, 狄利克雷问题解的存在性和唯一性就被证明了, 可以说, 大笔一挥就去掉了诺依曼 – 庞加莱解的所有复杂性!

弗雷德霍姆在 1903 年的论文中就一些关键点完善了他的结果. 他首先定义更一般的 "较小值"

$$\begin{aligned}\Delta\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & \cdots & s_m\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)&=K\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & \cdots & s_m\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m\end{pmatrix}\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_m & x_1 & \cdots & x_n\\ t_1 & \cdots & t_m & x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}dx_1\cdots dx_n.\end{aligned} \tag{13}$$

这时根据第一行和第一列将行列式展开, 他得到

$$\begin{aligned}&\Delta\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_m\\ t_1 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)+\lambda\int_a^b K(s_1,\xi)\Delta\begin{pmatrix}\xi & s_2 & \cdots & s_m\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)d\xi\\ &=K(s_1,t_1)\Delta\begin{pmatrix}s_2 & \cdots & s_m\\ t_2 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)-K(s_1,t_2)\Delta\begin{pmatrix}s_2 & s_3 & \cdots & s_m\\ t_1 & t_3 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)\\ &+\cdots\end{aligned} \tag{14}$$

和

$$\begin{aligned}&\Delta\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_m\\ t_1 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)+\lambda\int_a^b K(\xi,t_1)\Delta\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & \cdots & s_m\\ \xi & t_2 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)d\xi\\ &=K(s_1,t_1)\Delta\begin{pmatrix}s_2 & \cdots & s_m\\ t_2 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)-K(s_2,t_1)\Delta\begin{pmatrix}s_2 & s_3 & \cdots & s_m\\ t_2 & t_3 & \cdots & t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)\\ &+\cdots,\end{aligned} \tag{15}$$

特别地, 当 $m=1$ 时, (14) 可以化简为 (8), (15) 可以化简为

$$\Delta(s,t;\lambda)=K(s,t)\Delta(\lambda)-\lambda\int_a^b K(\xi,t)\Delta(s,\xi;\lambda)d\xi. \tag{16}$$

在这里他对这些公式的使用要比在注释中复杂一些. 他引入对应于核 $K$ 的算子 $f\mapsto S_Kf$, 这个算子使得 $S_Kf(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t)f(t)dt$, 对两个核 $K$ 和 $K'$, 记复合 $S_KS_{K'}$ 为 $S_{K''}$, 其中

$$K''(x,t)=K(x,t)+K'(s,t)+\int_a^b K(s,\xi)K'(\xi,t)d\xi. \tag{17}$$

现在假设 $\Delta(\lambda)\neq 0$, 记

$$R(s,t;\lambda)=-\frac{\Delta(s,t;\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{18}$$

(在后来希尔伯特的术语中它是预解核). 从 (17), (8), (16) 中我们得到

$$S_{\lambda K}S_R=S_RS_{\lambda K}=Id, \tag{19}$$

因此, 弗雷德霍姆表明积分方程 (1) 的解存在且唯一的充分必要条件是 $\Delta(\lambda)\neq 0$, 核 $\lambda K$ 和预解核 $R$ 具有完全对称的作用, 这和它们在沃尔泰拉的公式中的作用是一样的 (第四章, 第 4 节, 公式 (26) 和 (27)).

弗雷德霍姆接下来考查了 $\Delta(\lambda)=0$ 时的情形. 首先他把 (11) 推广为

$$\frac{d^m\Delta(\lambda)}{d\lambda^m}=\int_a^b\cdots\int_a^b\Delta\begin{pmatrix}s_1&\cdots&s_m\\ s_1&\cdots&s_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)ds_1\cdots ds_m, \tag{20}$$

他从这个式子中推出如果 $\Delta(\lambda)=0$, 则存在一个整数 $m$ 使得 $\Delta\begin{pmatrix}s_1&\cdots&s_m\\ t_1&\cdots&t_m\end{pmatrix};\lambda\Bigg)$ 不恒为 0. 如果 $m$ 是具有这一特征的最小整数 ($m$ 实际上是 $\Delta$ 的零点 $\lambda$ 的阶数), 他运用 (14) 得出齐次方程的 $m$ 个解为

$$\Phi_1(s)=\frac{\Delta\begin{pmatrix}s&s_1&\cdots&s_m\\ t&t_1&\cdots&t_m\end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix}s_1&\cdots&s_m\\ t_1&\cdots&t_m\end{pmatrix}},$$

$$\Phi_2(s)=\frac{\Delta\begin{pmatrix}s_1 & s & s_3 & \cdots & s_m\\ t_1 & t & t_3 & \cdots & t_m\end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_m\\ t_1 & \cdots & t_m\end{pmatrix}},\quad \cdots, \tag{21}$$

他指出它们是线性无关的, 也指出齐次方程的每个解是 $\Phi_j$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ 的一个线性组合. 当 $\lambda$ 是 $\Delta$ 的 $m$ 阶零点时, 弗雷德霍姆对 $\varphi$ 给出积分方程 (1) 的解存在的充分必要条件, 从而建立了其理论 (通常称它为 "弗雷德霍姆择一性"). 他认识到用 $K(t,s)$ 代换积分方程 (1) 中的 $K(s,t)$ 得到的 "转置方程" 和方程 (1) 有相同的 "行列式", 从而相应的齐次方程实际上有 $m$ 个线性无关解 $\psi_1,\cdots,\psi_m$, 而 $\varphi$ 必须满足条件

$$\int_a^b \varphi(x)\psi_j(x)dx=0,\quad 1\leqslant j\leqslant m. \tag{22}$$

最后, 弗雷德霍姆指出对任意两个核 $K$ 和 $K'$, 如果 $\Delta_K$ 和 $\Delta_{K'}$ 是相应的 "行列式", 则对 (17) 式定义的 "合成核" $K''$, 有

$$\Delta_{K''}=\Delta_K\Delta_{K'}, \tag{23}$$

这表明这里选用 "行列式" 这个术语是正确的. 他也指出他的结果可以推广到核 $K$ 不是有界的情形上, 但是必须要使得 $(x-y)^\alpha K(x,y)(0<\alpha<1)$ 有界. 他指出可以立即将他的定理扩展到任意数目的变量的情形上.

这篇优美的文章可以看成是谱理论所有进一步发展的源泉. 这在数学世界中留下了一个深远的、持久的影响, 似乎在突然之间积分方程理论变成了分析学家非常喜欢的课题 ([23], [175], [107]).

## §2 希尔伯特的贡献

希尔伯特是积分方程新理论最积极的支持者之一. 他一听到弗雷德霍姆的结果就开始着手研究这些问题, 它们成为哥廷根讨论班的主要课题之一[①], 他也就这个理论的各个方面指导了许多学位论文.

[①](黑林格) 在报告中提到希尔伯特在他的研讨班上专门划分出一个单元来汇报能够证明黎曼猜想的方法的发展情况. 黎曼猜想的问题在于证明一个特殊整函数的所有零点都在一条实线上, 并且希尔伯特希望将这个函数可以表示为对称核积分方程的 "行列式". 不过, 没有人能找到这样一个方程.

1904 年到 1906 年间, 他在《哥廷根自然科学皇家学会报告》上发表了 6 篇关于积分方程的文章, 这些文章后来出版为《线性积分方程理论基础》一书 [112].

希尔伯特在第一篇文章中 [112, p. 1–38] 一开始就明确地做出了沃尔泰拉和弗雷德霍姆只暗含了的工作, 即在方程组 (2) 中 "极限过渡", 他只考虑了核 $K$ 是对称的情形 (几乎所有工作中他都限制了这一点), 也就是说, $K$ 是一个满足 $K(s,t)=K(t,s)$ 的实连续函数. 他很快意识到在这个特殊情形下他可以得到比弗雷德霍姆更精确的结果. 令对称矩阵 $K(y_k,y_j)$ 是二次型 $\sum\limits_{j,k}K(y_k,y_j)\xi_k\xi_j$ 的矩阵, 希尔伯特也将他的 "极限过渡" 运用到这个二次型上. 他因此得到了庞加莱在其考虑的特殊情形中所预示出的结果 (第四章, 第 4 节): 弗雷德霍姆行列式的根是实数; 如果把它们写成序列 $\{\lambda_n\}$, 每一个按其重数计算, 则对每个 $n$ 存在一个特征函数 $\varphi_n$, 使得当 $m\neq n$ 时, $\int_a^b\varphi_m(t)\varphi_n(t)dt=0$. 最后, 通过条件 $\int_a^b\varphi_n^2(t)dt=1$ 将 $\varphi_n$ 标准化, 对 $[a,b]$ 上的每个连续函数 $x$, 定义它的 "傅里叶系数" 为 $(x|\varphi_n)=\int_a^b x(t)\varphi_n(t)dt$, 从而希尔伯特对任意两个连续函数 $x$ 和 $y$, 证明了关系式

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)dsdt=\sum_n\frac{1}{\lambda_n}(x|\varphi_n)(y|\varphi_n) \tag{24}$$

成立, 他将这个关系式看成是二次型化简到其 "轴" 上的古典约简的自然推广. 希尔伯特建立这个公式的方式中最有趣的一点是他指出当函数 $x$, $y$ 仅在条件 $\int_a^b x^2(t)dt\leqslant 1$ 和 $\int_a^b y^2(t)dt\leqslant 1$ 的限制下任意改变时, 方程 (24) 的右边是一致收敛的, 这第一次预示了几年后 "希尔伯特空间上的单位球" 是什么. 希尔伯特也对他的积分方程证明了特征值 $\lambda_n$ 的变分定义 (第三章, 第 1 节) 是正确的, 这个变分定义是韦伯第一次提出来的. 他表明 $\lambda_n$ 的集合是无穷集, 除非 $K(x,y)$ 可以表示成形如 $u(x)v(y)$ 的有限多个函数的线性组合. 他也证明了预解核 $R(s,t;\mu)$ (在弗雷德霍姆的意义下) 有特征值 $\lambda_n-\mu$, 其相应的特征函数是 $\varphi_n/(\lambda_n-\mu)$ ($\mu$ 不同于 $\lambda_n$), 且对不同于 $\lambda_n$ 的 $\mu$ 和 $\nu$ 得到这样一

个恒等式

$$R(s,t;\mu)-R(s,t;\nu)=(\mu-\nu)\int_a^b R(s,\xi;\mu)R(\xi,t;\nu)d\xi. \tag{25}$$

最后, 他指出如果对一个连续函数 $g$, 函数 $f$ 能写成下面形式

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)dt, \tag{26}$$

则 $f$ 相应的 "傅里叶展式" 为

$$f(s)=\sum_n (f|\varphi_n)\varphi_n(s), \tag{27}$$

这个级数是绝对一致收敛的, 且有 "帕塞瓦尔等式"

$$\int_a^b f^2(s)ds=\sum_n (f|\varphi_n)^2 \tag{28}$$

成立. 但是希尔伯特只给出了严格假设下的证明, 这个假设条件是任意函数都可以用形如 (26) 的函数来逼近 (在平均平方值的情形下或者正如我们现在所说的希尔伯特空间的拓扑的情形下!).

1905 年, 施密特 (Erhard Schmidt) 在他的博士论文中证明了希尔伯特的最后一个条件是多余的, 他是希尔伯特最好的学生之一 [191]. 除此以外, 这篇论文中没有包含一些惊人的新结果, 但是它仍然值得关注, 因为它是消除弗雷德霍姆 "行列式" 的首次尝试, 且他用了一个比较概念化的方法来代替这些 "行列式"[①].

施密特一开始就对任意规范正交系 $\{\varphi_n\}$ 证明了贝塞尔等式

$$\int_a^b \left(f(s)-\sum_{n=1}^N (f|\varphi_n)\varphi_n(s)\right)^2 ds=\int_a^b f^2(s)ds-\sum_{n=1}^N (f|\varphi_n)^2, \tag{29}$$

他由 (29) 推出对任意连续函数 $f$ 和 $g$, 级数 $\sum_n (f|\varphi_n)(g|\varphi_n)$ 是绝对收敛的, 当 $f$ 在条件 $\int_a^b f^2(s)ds\leqslant A$ 的限制下改变时, 级数是一致收敛的, 其中 $A$ 是一个固定常数.

[①]史蒂科夫 (W. Stekloff) 也独立地得到了施密特的一些结果 [204].

他接下来假设特征值 $\lambda_n$ 和相应的标准化的特征函数 $\varphi_n$ 存在, 并运用贝塞尔不等式证明了

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(s,t)dsdt \tag{30}$$

成立, 由这个式子可以得出每个 $\lambda_n$ 的重数是有限的, 且如果有特征值 $\lambda_n$ 的集合是无穷集, 当 $n$ 趋于无穷时 $|\lambda_n| \to +\infty$.

为了给出特征值存在性的证明, 他和弗雷德霍姆、沃尔泰拉一样引入叠核

$$K_m(s,t) = \int_a^b K_{m-1}(s,\xi)K(\xi,t)d\xi, \quad m > 1, \tag{31}$$

其中 $K_1 = K$, 他指出如果 $\varphi$ 是 $K_m$ 的特征函数, 当 $m$ 是奇数时, 它也是 $K$ 的特征函数, 当 $m$ 是偶数时, $\varphi$ 是 $K$ 的两个特征函数的和. 这一点使得他能运用施瓦茨的方法证明不恒等于 0 的 $K$ 至少存在一个特征值, 这和我们在第三章的第 1 节中所讲述的是一样的, 因为通过这种方式他得到了 $K_2$ 的一个特征值.

最后对 (26) 式给出的函数 $f$, 他将最开始的引理运用到函数 $t \mapsto K(s,t)$ 和 $g$ 上而证明了傅里叶展式 (27) 的收敛性. 他对公式 $x(s) = \sum_n (x|\varphi_n)\varphi_n(s)$ 两边乘以 $K(s,t)y(t)$ 再积分而得到希尔伯特的公式 (24).

希尔伯特对对称核积分方程的兴趣当然源自用它们来解决分析学中的问题, 如狄利克雷问题, 在他关于积分方程的第二篇和第三篇文章中主要致力于这一应用. 在这里我们先不讨论他的这两篇文章以及最后两篇文章中的重要结果 (见第七章和第九章), 转而来关注他发表于 1906 年的第四篇文章, 这是一篇杰作, 也是他写过最好的文章之一. 由于他思想的深刻新颖性, 这篇文章成为泛函分析历史上的转折点, 而且确实值得看成是那个原理下发表的最重要的文章.

显然在这篇文章中希尔伯特有一个全新的出发点: 他没有从积分方程出发, 而是回到了无穷维线性方程组这一比较古老的概念上 (第四章, 第 2 节), 但是这走了一段弯路. 他之所以这样做是因为他意识到积分方程的理论可以归入到无穷维线性方程组这一古老理论中作为它的特殊情形: 令 $\{w_n\}$ 是 $[a,b]$ 上连续函数构成的完备规范正交系,

且假设连续函数 $f$ 是 $\lambda=1$ 时积分方程 (1) 的一个解. 从而如果考虑“傅里叶系数” 为

$$\begin{aligned} k_{pq} &= \int_a^b \int_a^b K(s,t)\omega_p(s)\omega_q(s)dsdt, \\ b_p &= \int_a^b \varphi(s)\omega_p(s)ds, \\ x_p &= \int_a^b f(s)\omega_p(s)ds, \end{aligned} \tag{32}$$

则可以得出 $x_p$ $(p=1,2,\cdots)$ 是满足无穷维线性方程组

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}x_p = b_p \quad (p=1,2,\cdots) \tag{33}$$

的. 由于贝塞尔等式, 可以得到新的结果是

$$\sum_{p,q} k_{pq}^2 < +\infty, \quad \sum_p b_p^2 < +\infty, \quad \sum_p x_p^2 < +\infty. \tag{34}$$

相反地, 假设有 (33) 的一个解 $\{x_p\}$ (它满足条件 (34)), 如果考虑 $k_q(s) = \int_a^b K(s,t)\omega_q(t)dt$, 则函数 $k_q$ 是连续的, 有

$$\sum_p k_p^2(s) \leqslant \int_a^b K^2(s,t)dt,$$

从而级数 $u(s) = \sum_p x_p k_p(s)$ 是绝对且一致收敛的, 因此 $u$ 是连续的且有 $(u|\omega_p) = b_p - x_p$. 如果 $f = \varphi - u$, $(f|\omega_p) = x_p$, 规范正交系 $\{\omega_p\}$ 是完备的, 则可以得出 $f$ 是 $\lambda=1$ 时积分方程 (1) 的一个解.

希尔伯特接下来开始着手研究完全陌生的领域:

1. 他专门考虑了满足 $\sum_p x_p^2 < +\infty$ 的实数序列 $x = \{x_p\}$ $(p = 1,2,\cdots)$.

2. 相反, 对实数的双重序列 $\{k_{pq}\}$, 他最初摒弃了像 (34) 的第一个条件那样的限制条件, 只保留了对称性条件 $k_{qp} = k_{pq}$.

3. 他兴趣的核心不再是方程组 (33) 的解, 而是转向了 “对称双线性形式”

$$K(x,y) = \sum_{p,q} k_{pq}x_p y_q, \tag{35}$$

这里他想通过一个能推广 (24) 的公式来 "化简" 它.

即使在条件 $\sum_p x_p^2 < +\infty$, $\sum_p y_p^2 < +\infty$ 的限制下, (35) 的右边通常是无意义的①. 和傅里叶、庞加莱及科克的工作一样 (第四章, 第 2 节), 希尔伯特对每个整数 $n$, 考虑了 $2n$ 个变量的对称双线性形式 ($K$ 的 "部分")

$$K_n(x,y) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} k_{pq}x_p y_q, \tag{36}$$

但是他没有研究这些双线性形式的行列式, 而是把它们每一个都 "约简" 到它们的 "轴" 上, 当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时他面临的问题是如何将这些 "约简" 形式 "过渡到其极限" 上. 我们将他解决这一问题的原始方法的细节考查推后到第七章, 在第七章我们主要致力于探讨现代谱理论的历史, 希尔伯特的第四篇文章是讨论这一原始方法的一个起点. 这里我们将只讨论希尔伯特在这篇文章中引入的各种新观点.

A) 希尔伯特一点都没有用到几何语言, 这在他的追随者们中变得非常流行 (参看第 3 节), 但是他所做的任何事情显然都受到它们与 $n$ 维欧氏空间之间类似性的启发. 特别地, 他的主要工具之一是正交变换的推广: 对每一个满足 $\sum_p x_p^2 < +\infty$ 的序列 $\{x_p\}$, 他通过正交变换将 $\{x_p\}$ 与序列 $\{x'_p\}$ 联系起来, 有

$$x'_p = \sum_q a_{pq}x_q \quad (p = 1, 2, \cdots), \tag{37}$$

而且他对双重序列 $\{a_{pq}\}$ 施以条件

$$\begin{aligned} &\sum_q a_{pq}^2 = 1, \quad \sum_p a_{pq}a_{pr} = 0, \quad q \neq r, \\ &\sum_p a_{pq}^2 = 1, \quad \sum_q a_{pq}a_{nq} = 0, \quad n \neq p, \end{aligned} \tag{38}$$

从而他根据由 $\{a'_{pq}\}$ 定义的 "逆" 正交变换, 从 $\{x'_p\}$ 中推导出来 $\{x_p\}$, 其中 $a'_{pq} = a_{qp}$.

①对这一相当不恰当的表述, 黑林格和特普利茨 (Toeplitz) [106] 用 "无穷矩阵" $\{k_{pq}\}_{1\leqslant p,q<+\infty}$ 来代替对称双线性形式进行研究, 受弗罗贝尼乌斯的启发他们也考虑了无穷矩阵的 "演算", 但是他们没有将自同态与矩阵联系起来.

B) 希尔伯特只研究他称之为有界的形式 (35): 有界形式 (不必是对称的) 是指如果对 $\sum_p x_p^2 \leqslant 1, \sum_p y_p^2 \leqslant 1$ 和所有 $n$, 存在一个 $M > 0$, 使得 $|K_n(x,y)| \leqslant M$ 成立. 他也引入有界线性形式 $L(x) = \sum_p a_p x_p$, 其中 $\sum_p a_p^2 < +\infty$, 从而对每个 $x$ (或 $y$) 以及任一有界双线性形式 $K$, 线性形式 $K(x,\cdot) : x \mapsto K(x,y)$ 和 $K(\cdot,y) : x \mapsto K(x,y)$ 都是有界的. 受有限多个变量的双线性形式 "约简" 的启发, 他想做的事情之一是对 $x$ 和 $y$ 运用正交变换, 用表达式 (37) 代换 $x_p$, 对 $y_p$ 也做同样的代换. 遗憾的是, 他遵循了弗罗贝尼乌斯双线性形式的 "卷积" 概念 (而不是 "合成" 变换的自然想法), 所以对两个有界双线性形式 $A$ 和 $B$, 他需要指出形式 $A_n(x,\cdot)B_n(\cdot,y)$ (它是 $A_n(x,y)$ 和 $B_n(x,y)$ 的卷积, 这两个双线性形式和 (36) 式中定义的形式是一样的) 是对应于一个有界形式 $C(x,y)$ 的双线性形式 $C_n(x,y)$, 他也称 $C(x,y)$ 是 $A(x,y)$ 和 $B(x,y)$ 的 "卷积", 记为 $A(x,\cdot)B(\cdot,y)$. 希尔伯特接下来可以将正交变换在一个有界双线性形式 $K(x,y)$ 上的作用表示为一个 "卷积"

$$K'(x',y') = K(\cdot,\cdot)O(\cdot,x')O(\cdot,y'), \tag{39}$$

其中 $O(x,y) = \sum_{p,q} a_{pq} x_p y_q$ 是有界双线性形式, 他将这个有界双线性形式与正交变换 (37) 联系起来.

C) 对于泛函分析的发展而言, 希尔伯特引入的最重要的概念是他所称的 "连续" 和 "全连续" 概念, 这两个概念与后来希尔伯特空间上的 "强" 和 "弱" 拓扑对应起来. $F(x)$ 是对满足 $\sum_p x_p^2 < +\infty$ 的所有序列 $x = \{x_p\}$ 定义的复值函数, 如果当 $\sum_p (x_p - x_p^{(n)})^2$ 趋于 0 时, $F(x_p^{(n)})$ 趋于 $F(x)$, 则希尔伯特称 $F$ 是连续的; 如果当 $\sum_p x_p^2 \leqslant 1$, $\sum_p (x_p^{(n)})^2 \leqslant 1$ 而且每个坐标 $x_p^{(n)}$ 趋于 $x_p$ 时, $F(x^{(n)})$ 趋于 $F(x)$, 则称 $F$ 是全连续的. 他得出有界双线性形式 $K(x,y)$ 是连续的, 且证明了当 $n \to \infty$ 时, $K_n(x,y)$ 趋于 $K(x,y)$. 他特别关注全连续对称双线性形式, 用不同方法证明了通过一个正交变换可以把任意全连续对称双线性

形式化简为

$$K(x,y)=\frac{1}{\lambda_1}x_1y_1+\frac{1}{\lambda_2}x_2y_2+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}x_ny_n+\cdots, \tag{40}$$

其中序列 $\{|\lambda_n|\}$ 要么有限, 要么趋于 $+\infty$. 他意识到这才是公式 (24) 真正的推广, 它是 $\sum\limits_{p,q}k_{pq}^2<+\infty$ 的特殊情形 (这对应于后来所谓的希尔伯特 – 施密特算子), 他也提到了另一种特殊情形, 即 $K(x,x)>0$ 且 $\sum\limits_{p}k_{pp}<+\infty$ (这与后来的正核算子是对应的). 这个公式 (40) 使得他在求解方程组 (33) 方面超越了弗雷德霍姆, 方程组 (33) 不再是从积分方程中得出的, 而只需要假设 $k_{pq}$ 能使得对称双线性形式 (35) 是全连续的. 最后他重复运用他所谓的 "选择原理", 这个 "选择原理" 等价于后来所谓的弱拓扑意义下单位球的紧性, 他也将他的结果扩展到埃尔米特半双线性形式

$$K(x,y)=\sum_{p,q}k_{pq}x_p\overline{y}_q \tag{41}$$

上, 其中序列 $\{x_p\}$, $\{y_p\}$ 及 $\{k_{pq}\}$ 是复序列, $k_{qp}=\overline{k}_{pq}$.

## §3 几何、拓扑以及分析的融合

对我们而言, 希尔伯特的结果显然与现在我们所称的希尔伯特空间理论大相径庭. 紧随着希尔伯特论文的发表, 希尔伯特空间理论产生了, 这归因于这样一个事实, 这些论文恰好出现在结构概念这个数学中的新概念出现之际.

19 世纪中期以前, 数学家只处理一些明确确定的数学 "对象": 数、点、曲线、曲面、体积、函数、算子. 不同类型 "对象" 上的代数运算的出现很快引起了人们的注意 (第四章, 第 3 节), 1840 年后这些运算的本质逐渐变得清晰起来, 其本质不在于对象的基本性质, 而在于处理这些对象时需遵循的法则, 对不同类型的对象这些法则有可能是相同的. 然而, 要准确阐述这一思想还需要广泛接受集合论的概念和语言. 1895 年, 韦伯 (Weber) 给出了任意集合上群的概念 [225]. 这极大地推动了定义代数结构的发展趋势, 到 1920 年左右的时候代数学中的所有基础性概念均已被定义.

1900 年, 分析中没有出现与代数类似的发展. 对已有的极限和连续的思想的推广通常与曲线、曲面或函数这样的特殊对象有关. 1904 年, 弗雷歇 (Fréchet) 首次提出可以在任意集合上定义这些概念 [69], 他在其 1906 年著名的博士论文中又进一步发展了这一思想 [71]. 对这些定义, 他提出的最简单和最有效的方法是在一个集合 $E$ 上引入距离, 即对 $E$ 中任意的元素对 $(x,y)$ 定义函数 $d(x,y)$, 它的值 $\geqslant 0$ 且满足条件:

1) $d(x,y)=0$ 等价于 $x=y$;

2) $d(y,x)=d(x,y)$;

3) 对于 $E$ 中任意 3 个元素 $x,y,z$, 有 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

通过运用这些简单的公理, 有可能将 $\mathbb{R}^n$ 空间中与邻域、极限及连续有关的许多概念和讨论进行推广, 而这些概念的引入通常与欧几里得距离有关. 弗雷歇最重要的功绩体现在他对紧性、完备性以及可分性三个概念的强调上, 这三个概念在后来泛函分析的所有发展中扮有基础性的作用. 他并没有限制自己在抽象的环境下建立一般定理, 他在其博士论文中用超过一半的篇幅致力于说明一些与分析学紧密相关的非常 "具体" 的度量空间 (后来称之为度量空间), 这些度量空间包括 $\mathbb{R}$ 的紧区间上的连续实函数构成的空间, 它带有一致收敛的拓扑; 所有序列 $n\mapsto x_n$ 构成的空间 $\mathbb{R}^n$, 它带有简单收敛的拓扑; 圆盘 $|z|<1$ 上全纯函数构成的空间, 带有紧子集上一致收敛的拓扑以及所有连续 "曲线" 构成的空间, 这些连续 "曲线" 是 $\mathbb{R}^3$ 中连续映射作用在 $[0,1]$ 上的图像, 这个空间带有一个 "距离", 它是后来被称为两个紧集间的豪斯多夫距离的特殊情形.

希尔伯特的工作显然是对这些思想的应用, 这些工作甚至使得欧氏几何在 "无穷维" 情形下发生了整体性的转换. 这一点实际上是由弗雷歇本人 [72] 和施密特 [192] 在 1908 年做出的. 在施密特的文章中, 我们找到了现在称为 (复) 空间 $l^2$ (或 $l^2_{\mathbb{C}}$) 的定义, 这一定义是在数量积和范数 (现记为 $\|A\|$) 概念下给出的, 我们也找到了正交、闭集及向量子空间的定义. 这篇文章最有趣的一点在于证明了把一个点映射到一个闭向量子空间上的正交投影的存在性, 施密特运用这个结果并以纯粹的几何方法来讨论希尔伯特空间中最一般的线性方程组

$$(x|a_n)=c_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{42}$$

其中 $a_n$ 是 $l^2$ 中的任意向量, $c_n$ 是任意复数.

对每个 $n$, 施密特考虑了由方程 $(x|a_j)=c_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 定义的 $l^2$ 中的闭线性仿射簇 $F_n$, 也考虑了把原点映射到 $F_n$ 上的正交投影 $x^{(n)}$. 方程组 (42) 的解存在的充分必要条件是递增序列 $\{\|x^{(n)}\|\}$ 有界. 从而序列 $\{x^{(n)}\}$ 在 $l^2$ 中有一个弱极限 $x$, $x$ 是 (42) 的最小范数的解. 当然, 每个 $F_n$ 一定不是空集, 意思是说, 由向量 $a_n$ 之间的任一线性关系式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k a_k=0$ 一定能推出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k c_k=0$. 假设 $a_n$ 是线性无关的 (通过降低方程 (42) 的一些条件), 施密特在这种情形下得到了 $\|x^{(n)}\|$ 的清晰表达式

$$\|x^{(n)}\|^2=\frac{\Delta_n}{D_n}, \tag{43}$$

其中

$$D_n=\begin{vmatrix} (a_1|a_1) & (a_1|a_2) & \cdots & (a_1|a_n)\\ (a_2|a_1) & (a_2|a_2) & \cdots & (a_2|a_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_n|a_1) & (a_n|a_2) & \cdots & (a_n|a_n)\end{vmatrix},$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ \overline{c}_1 & & & & \\ \vdots & & D_n & & \\ \overline{c}_n & & & & \end{vmatrix}. \tag{44}$$

1906—1907 年两位年轻数学家费舍尔 (Fischer) 和里斯 (Riesz) 接受了这一几何观点, 他们最重要的工作是 (独立地) 建立了现在的费舍尔 - 里斯定理, 这个定理在希尔伯特空间和积分理论之间建立了联系, 这一点在当时是没有预料到的 ([66], [183, vol. I, p. 378–395]). 从柯西到若尔当和皮亚诺, 积分理论一直以一种完全独立于谱理论的方式逐步发展 [103]. 当弗雷德霍姆和施密特通过减弱对核 $K(x,y)$ 的假设条件来扩大他们关于积分方程的结果的适用范围时, 由于运用了所谓的 "黎曼积分"①, 所以他们没有得到其他结果. 如果勒贝格积分没有

①即使当部分函数 $x\mapsto K(x,y)$ 不是 "黎曼可积" 时, 两个变量的函数 $K(x,y)$ 也可能是 "黎曼可积" 的, 所以弗雷德霍姆假设核 $K$ 和它的部分函数都是可积的! 虽然施密特于 1905 年完成了他的博士论文, 但是很有可能他当时并不知道勒贝格的博士论文.

适时出现在希尔伯特研究积分方程的时候, 泛函分析的发展进程很有可能会严重缓慢下来, 不过刚好就有这样一个令人高兴的巧合. 在这个非常好的新工具的帮助下, 费舍尔和里斯能够在紧区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上定义空间 $L^2(I)$, 这个空间是由平方可积函数构成的, 如果两个函数只在一个测度为 0 的集合上不同, 则它们是相等的. 他们的基础性结果是如果对每个函数 $f \in L^2(I)$, 可以将它与它关于完备规范正交系 (方程 (32)) 的傅里叶系数序列 $\{x_p\}$ 对应起来, 则就称 $L^2(I)$ 与 $l^2$ 是同构的, 因此可知 $L^2(I)$ 是完备且可分的. 这一结果推出弗雷德霍姆和施密特的结果在不改变积分方程而只假设积分方程的核属于 $L^2(I \times I)$ 的情况下仍然适用, 因为积分方程等价于一个线性方程组, 这个方程组对应于希尔伯特意义下的一个 "全连续" 双线性形式.

费舍尔 – 里斯定理最重要的结果是它开启了数学家对 $L^p$ 空间的定义和对赋范空间的一般理论的研究, 这是下一章的主题.

# 第六章　对偶和赋范空间的定义*

## §1　对连续线性泛函的研究

在第四章的第 3 节中, 我们了解到 1897 年布尔勒 (C. Bourlet) 在连续条件下第一次解决了确定连续函数空间之间的线性映射 $U : E \to F$ 的问题. 在 1903 年的一个简短注释中 ([94], vol. I, p. 405–408), 阿达玛解决了同样的问题, 其中 $E = \mathcal{C}[a, b]$, 即闭区间 $[a, b]$ 上连续函数构成的空间, $F = \mathbb{R}$. 并且他认为 "连续" 指的是当 $f_n$ 一致地收敛于 $f$ 时, $U(f_n)$ 收敛于 $U(f)$. 他选取了一个固定的函数 $F$, 使得对任意连续函数 $f$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} n \int_a^b f(t)F(n(t-x))dt \tag{1}$$

对 $x$ 一致收敛. 从而

$$U(f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\Phi_n(t)dt, \tag{2}$$

其中 $\Phi_n(t)$ 是 $U$ 在函数 $x \mapsto nF(n(t-x))$ 处的值, 取 $F(x) = e^{-x^2}$ 使得 $\Phi_n$ 是连续的, 但是 $F$ 的选取在很大程度上是任意的 (这个讨论是后来称为 "正则化" 过程的一个典型情况).

*本章由李威翻译.

在 1904 年和 1905 年的两篇文章中, 弗雷歇用另一种方法证明了阿达玛定理, 但是比较有趣的是他用另外的 "函数空间" 代替了 $C[a,b]$ 来研究类似的问题. 例如 [70], 他指出若取空间 $E$ 为区间 $[a,b]$ 上所有有界可积函数 (连续或不连续) 构成的空间 $\mathcal{B}([a,b])$, 该空间具有一致收敛的拓扑, 则存在不同于阿达玛的公式给出的连续线性泛函, 如映射

$$f \mapsto c_1 f(x_1) + \cdots + c_m f(x_m),$$

其中 $x_j$ 是区间 $[a,b]$ 中的任意点, $c_j$ 是常数. 类似地, 如果取 $E$ 为定义在 $[a,b]$ 上的所有 $C^r$ 函数构成的空间, 其中收敛指的是函数及它的直到 $r$ 阶导数是一致收敛的, 则弗雷歇表明连续线性泛函可以写成

$$f \mapsto c_0 f(a)+c_1 f'(a)+c_2 f''(a)+\cdots+c_{r-1} f^{(r-1)}(a)+\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^{(r)}(t)\Phi_n(t)dt.$$

一开始研究希尔伯特空间 (第五章, 第 3 节), 弗雷歇 [72] 和里斯 [183, vol. I, p. 386–388] 就独自表明希尔伯特空间 $l^2_{\mathbb{R}}$ (对强拓扑而言) 上的连续 "线性泛函" 对每个向量 $a \in l^2$, 能唯一地表示为 $x \mapsto (x/a)$.

1909 年, 里斯 ([183], vol. I, p. 400–402) 通过取消序列 $\{\Phi_n\}$ 的任意性, 最终对阿达玛定理给出了一个更好的形式. 他的想法是运用斯蒂尔切斯积分, 这与希尔伯特在其谱理论工作中的做法是一样的 (第七章, 第 2 节): 他指出任意一个连续线性泛函: $C[a,b] \to \mathbb{R}$ 都能被唯一地写成

$$U : f \to \int_a^b f(x)d\alpha(x), \tag{3}$$

其中 $\alpha(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个有界变差函数, 并且满足附加条件: $\alpha(x)$ 在 $[a,b]$ 上左连续且 $\alpha(a) = 0$. 他的方法在于考虑函数 $f_t \in C[a,b]$ (对任何 $t \in [a,b]$) 和函数 $A : t \mapsto U(f_t)$, 这里 $f_t$ 的定义为:

$$f_t = \begin{cases} x - a, & \forall a \leqslant x \leqslant t, \\ t - a, & \forall t \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

他指出函数 $A$ 是利普希茨函数, 并且在点 $t$ 取值 $-\alpha(t)$, 它是 $A$ 在点 $t$ 处的 "导出数" 之一, 从而容易证明 $\alpha$ 是一个有界变差函数, 并且用标准方法就能在不改变 $U$ 的情况下, 修改 $\alpha$ 使得它满足上述附加条件.

尽管同时代的人没有意识到里斯方法的新颖性, 但是我们在他的结果 (正如他自己做的那样) 中确实看到他基本上是从当时所流行的线性代数的概念出发的:

1. 然而, 由于里斯 – 费舍尔定理, $L^2$ 空间等同于数列空间, 这推广了线性代数中作为 "$n$ 元数组" 理论的具有主要作用的凯莱概念, $C[a,b]$ 中没有这样的等同性, 在 $C[a,b]$ 中我们不得不直接研究向量, 而不是它们的 "坐标".

2. 有界变差函数在可数点集上可能是不连续的, 因此 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函不可能再等同于这个空间的元素 (根据里斯 – 弗雷歇定理, 这与 $l^2$ 空间中的情况相反).

在 $L^p$ 和 $l^p$ 空间的理论中这些特征更加显然, 里斯在 1910 年开始研究 $L^p$ 和 $l^p$ 空间理论 ([183], vol. I, p. 403).

## §2 $L^p$ 空间和 $l^p$ 空间

定义了 $L^2$ 空间后, 对任一区间 $I \subset \mathbb{R}$ 类似地定义 $L^p(I)$ 是一个很自然的推广. $L^p(I)$ 为定义在 $I$ 上且对任意的 $p>0$, $|f|^p$ 可积的所有复值可测函数 $f$ 构成的集合 (如果两个函数几乎处处相等, 则称它们是相等的). 里斯在一篇基础性的论文中开始研究这些空间 ([183], vol. I, p. 441–497), 这篇文章在泛函分析发展中的重要性仅次于希尔伯特 1906 年的论文 (第五章, 第 2 节).

里斯从 $p>1$ 的情形开始研究, 这是为了能够运用赫尔德 (Hölder) 和闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{4}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

他第一次把这两个不等式推广到可测函数上, 表明如果 $f \in L^p(I)$, $g \in L^q(I)$, 则 $fg$ 是可积的且

$$\left|\int_I f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{6}$$

而且如果 $f \in L^p(I)$, $g \in L^p(I)$, 则 $f+g \in L^p(I)$ 且

$$\left(\int_I |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (7)$$

他的中心问题是研究无穷维线性方程组

$$\int_I f(x) g_\alpha(x) dx = c_\alpha, \quad (8)$$

其中 $g_\alpha$ 属于 $L^q(I)$, 这里需要寻找一个解 $f \in L^p(I)$. 根据里斯 – 费舍尔定理 (第五章, 第 3 节, 方程 (42)), 这可以看成是施密特在 $l^2$ 空间中处理的问题的推广. 为了使施密特的方法在这一问题仍然适合, 里斯通过扩展希尔伯特空间理论中的许多定义和结果来开始研究: 如果 $L^p(I)$ 中的函数列 $\{f_n\}$ 和函数 $f \in L^p(I)$ 满足 $\int_I |f(x)-f_n(x)|^p dx$ 趋于 0, 则称 $\{f_n\}$ 强收敛于 $f \in L^p(I)$. 他先对弱收敛给出这样的定义, 即对所有的数 $x \in I$, $\int_a^x f_n(t)dt$ 趋于 $\int_a^x f(t)dt$ 成立. 尽管不久后他证明这个定义等价于对于所有的 $g \in L^q(I)$, 积分 $\int_I (f(x)-f_n(x))g(x)dx$ 趋于 0, 但是他本质上还是运用前面的定义来证明希尔伯特的 "选择原理" 的推广 (也就是说, $L^p(I)$ 上单位球的弱紧性), 这是他求解方程组 (8) 的主要步骤之一. 他的另一个主要步骤是从 1907 年兰道 (E. Landau) 得到的结果中获得的 [136]. 1906 年, 黑林格和特普利茨表明如果数列 $\{a_n\}$ 使得对 $l^2$ 中所有序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum_n a_n x_n$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 属于 $l^2$ [106]. 兰道证明了更一般的情形, 如果对满足 $\sum_n |x_n|^p < +\infty$ 的所有序列 $\{x_n\}$, 有 $\sum_n a_n x_n$ 收敛, 则 $\sum_n |a_n|^q < +\infty$. 用只有可数多个值的函数逼近 $L^p$ 中的函数, 里斯从兰道的结果中推出如果对一个可测函数 $g$ 和所有的函数 $f \in L^p$, 乘积 $fg$ 是可积的, 则必须有 $g \in L^q$.

里斯用与施密特相同的思路求解了方程组 (8). 他从有限维方程组 (8) 开始研究, 对它运用分析学中的标准方法 (拉格朗日乘子), 他证明了当 $\int_I |f(x)|^p dx$ 取极小值时, 方程组的解 $f \in L^p$ 存在且唯一. 现在的问题则在于找到一个关于 $c_\alpha$ 的充分必要条件, 使得当从 (8) 中选取对应于任意有限子集 $H$ 中指标 $\alpha$ 的有限维方程组时, 对 "极小"

解取的积分 $\int_I |f(x)|^p dx$ 所对应的极小值 $M_H$ 是一致有界的 (与 $H$ 无关). 运用上面提到的两个因素, 通过类似于施密特的讨论可以得出方程组 (8) 的解的存在性. 当然, 在这里取不到 $M_H$ 的清晰表达式 (类似于第五章, 第 3 节中的公式 (43)), 里斯的原创性在于找到了一个完全不同类型的条件, 即存在一个数 $M > 0$, 使得对指标集的任意可数子集 $H$ 和标量的任意簇 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in H}$, 有不等式

$$\left|\sum_{\alpha\in H}\lambda_\alpha c_\alpha\right| \leqslant M\left(\int_I \sum_{\alpha\in H}|\lambda_\alpha g_\alpha(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{9}$$

特别地, 里斯将这个条件应用到特殊的情形, 即 $g_\alpha$ 是 $L^q(I)$ 中的所有函数. (9) 式则等价于由 $L(g_\alpha) = c_\alpha$ 定义的线性泛函在 $L^q(I)$ 中的连续性, 因此他推广了他前面得到的关于 $l^2$ 空间和 $C(I)$ 的结果, 证明了我们现在说的 $L^q(I)$ 空间的对偶是 $L^p(I)$ 空间.

当然里斯没有用到 "对偶" 这个词, 但是他明确考虑到, 对一个 $L^p$ 到自身的 "有界" 线性映射 $T$ (它是这样定义的, 即对所有使得 $\int_I |f(x)|^p dx \leqslant 1$ 的 $f$, $\int_I |T(f)(x)|^p dx$ 仍然是有界的), 对所有 $f \in L^p(I)$, 它的转置映射 $T'$ 由方程

$$\int_I T(f)(x)g(x)dx = \int_I f(x)T'(g)(x)dx \tag{10}$$

来定义. 事实上, 对一个函数 $g \in L^q(I)$, 这个式子定义了 (相差一个零集的情形下) 唯一的函数 $T'(g)$, 它也属于 $L^q(I)$ (由里斯前面的结果可知). 而且, 容易证明 $L^q(I)$ 到自身的映射 $T'$ 也是线性和 "有界" 的. 从而里斯运用这个概念对映射 $T$ 得到一个充分必要条件, 即 $T$ 是双射: 他表明这个条件是存在一个数 $m > 0$, 使得对所有的 $f \in L^p(I)$ 和所有的 $g \in L^q(I)$, 下列两个不等式

$$\begin{aligned}\int_I |T(f)(x)|^p dx &\geqslant m\int_I |f(x)|^p dx,\\ \int_I |T'(g)(x)|^q dx &\geqslant m\int_I |g(x)|^q dx\end{aligned} \tag{11}$$

都成立. 因此, 里斯第一次给出了我们现在称为不同构于它们的对偶

的自反巴拿赫空间的例子①. 在 1913 年关于无限维线性方程组的书中 ([183], vol. II, p. 835–1016 和 [184]), 他用类似的方法处理了 $l^p$ 空间, 其中 $p>1$ (这个空间是由使得 $\sum\limits_n |x_n|^p<+\infty$ 的所有复序列 $\{x_n\}$ 构成的). 另外在没有证明的情况下他还表明当 $p\neq 2$ 时, $l^p$ 空间和 $L^p$ 空间不再是同构的, 这与里斯 – 费舍尔定理是矛盾的 ([183], vol. I, p. 444–445).

## §3 赋范空间的诞生和哈恩 – 巴拿赫定理的建立

1911 年, 里斯把他在 $L^p$ 空间中处理方程组 (8) 的方法与空间 $C[a,b]$ 上有关线性泛函的阿达玛 – 里斯定理结合起来, 目的是研究线性方程组

$$\int_a^b g_\alpha(x)d\xi(x)=c_\alpha, \tag{12}$$

其中 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧区间, $g_\alpha$ 在 $[a,b]$ 上连续, $c_\alpha$ 是常数, 现在的问题在于确定 $[a,b]$ 上对所有 $\alpha$ 满足方程组 (12) 的有界变差函数 $\xi$. 这个问题可以看成是 1894 年最先由斯蒂尔切斯提出和解决的问题的推广, 称其为 "矩量问题": 确定一个定义在 $[0,+\infty)$ 上的递增函数 $\xi$, 使得

$$\int_0^{+\infty} x^n d\xi(x)=c_n>0,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

(等式左边叫做函数 $\xi$ 的 "矩量", 这个术语来源于概率论) [205], 之后, 把集合 $[0,+\infty)$ 换成集合 $(-\infty,+\infty)$ ("汉布格尔矩量问题") 或换成紧区间 $[a,b]$ ("豪斯多夫矩量问题"), 相同的问题也被考虑过 [3].

求解这些 "矩量问题" 在于对 $c_n$ 给出明确的条件, 这些条件与函数 $\xi$ (或测度 $d\xi$) 的存在性 (或存在唯一性) 有关. 里斯给出一般方程组 (12) 的解 $\xi$ 的存在性条件类似于条件 (9) 式, 即存在一个数 $M>0$, 使得对任意标量的有限簇 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in H}$, 都有

$$\left|\sum_{\alpha\in H}\lambda_\alpha C_\alpha\right|\leqslant M\sup_x\left|\sum_{\alpha\in H}\lambda_\alpha g_\alpha(x)\right| \tag{14}$$

①施坦豪斯表明对一个紧区间 $I\subset\mathbb{R}$, $L^1(I)$ 对偶同构于 $L^\infty(I)$ [202]. 他利用了 $L^2(I)\subset L^1(I)$ 的事实, 因此 $L^1(I)$ 上的连续线性泛函在 $L^2(I)$ 上也是连续的.

(他清楚地观察到这个不等式的右边正好是当 $q \to +\infty$ 时, (9) 式右边的极限). 他的证明类似于对 (8) 的证明. 他首先限制自己考虑 (12) 的有限维的情形, 表明这个方程组的 "极小" 解存在. 接着, 再运用 "选择原则" (用现在术语表述的话, 它是斯蒂尔切斯测度空间中单位球的弱紧性), 他表明条件 (14) 对任意方程组 (12) 是一个充分条件. 他的证明过程比对 (8) 的证明更为复杂, 因为即使在有限维方程组 (12) 的情形中, "极小" 解都不是唯一的 ([183], vol. II, p. 798–827).

我们现在用下列方式来解释条件 (9): 首先, 如果在 $L^q(I)$ 空间中 $\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha = 0$, 则 $\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha c_\alpha = 0$, 这就推出如果 $F$ 是由 $g_\alpha$ 生成的 $L^q(I)$ 空间的向量子空间, 则存在定义在 $F$ 上的确定的线性形式 $L$, 使得对每个 $\alpha$, 都有 $L(g_\alpha) = c_\alpha$. 从而条件 (9) 意味着这个线性形式 $L$ 在 $F$ 上是连续的. 对所有 $\alpha$, 存在满足 $L(g_\alpha) = \int_I f(x) g_\alpha(x) dx$ 的 $f \in L^p(I)$ 则意味着 $L$ 能延拓为定义在整个 $L^q(I)$ 空间上的连续线性形式. 换句话说, 它是我们现在称为哈恩 – 巴拿赫定理的特殊情形. 如果用空间 $C[a,b]$ 代替空间 $L^q(I)$, 对条件 (14) 会有一个类似的解释.

里斯并没有解释他的结果. 1912 年, 奥地利数学家黑利的论文中首次出现这一观点, 他在这篇论文中对里斯关于方程组 (12) 的结果给出了不同的证明 [107, bis]. 时隔 9 年之后 (由于第一次世界大战, 期间他成了俄国的战俘), 黑利在 1921 年的论文中又开始讨论他的这一方法 [108], 这是泛函分析历史中的又一项里程碑式的工作, 因为他没有考虑像 $l^p$, $L^p$ 或 $C[a,b]$ 这样的特殊空间, 而是第一次处理了一般的 "赋范序列空间", 与施密特和里斯相比, 他的方法不依赖于空间的特殊性质①.

黑利考虑了全体复数序列构成的向量空间 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的子空间, 并假设在这个子空间 $E$ 上能定义一个范数 $\|x\|$ (他既没有用这个名称, 也没有用这个符号) 使得:

1) $\|x\| \geqslant 0$ 并且 $\|x\| = 0$ 等价于 $x = 0$;

2) 对任意常数 $\lambda$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

①1910—1920 年期间, 里斯一直努力用公理化的方法来推广他的结果, 但是他在这一方向上没有发表任何结果 ([183], vol. I, p. 452).

它可以定义 $E$ 上弗雷歇意义下的距离 $d(x,y)=\|x-y\|$. 当然在 $l^p$ 空间、$L^p$ 空间和 $C[a,b]$ 中范数已经被定义, 但是黑利好像第一次注意到这个概念与闵可夫斯基早年在他的《数的几何》中引入的凸性概念之间的关系 ([161] 和 [162]). 他表明有限维空间 $\mathbb{R}^n$ (限制在实数上的标量) 上的范数的概念等价于 "对称凸体" 的概念, "对称凸体" 是闭的、对称的有界凸集, 在其上原点 $O$ 是内点: 这样的集合 $B$ 可以用不等式 $p(x)\leqslant 1$ 来定义, 其中 $p$ 是一个唯一确定的范数. 这个集合的边界能用方程 $p(x)=1$ 来定义, 而且闵可夫斯基证明了对这个边界上的每个点 $x_0$, 至少存在一个支集的超平面 $H$ 包含 $x_0$ 且使得 $B$ 完全位于 $H$ 的一边上. 如果对一个实数组成的 $n$ 元数组 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 和一个点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 记 $\langle u,x\rangle=u_1x_1+\cdots+u_nx_n$, 则 $H$ 的方程对适当的 $u$, 有 $\langle u,x\rangle=1$, 且对所有 $x\in\mathbb{R}^n$, 有不等式 $\langle u,x\rangle\leqslant p(x)$, 且 $\langle u,x_0\rangle=p(x_0)$. $n$ 元数组 $u$ 等同于 $\mathbb{R}^n$ 上相应的线性形式 $x\mapsto\langle u,x\rangle$, 闵可夫斯基还定义了 "支撑函数" $q(u)=\sup\limits_{x\neq 0}\langle u,x\rangle/p(x)$, 而且表明它也是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数, 它与 $p$ "对偶" 且使得 $B$ 的 "支撑超平面" 是超平面 $\langle u,x\rangle=1$, 其中 $q(u)=1$. 此外, $p$ 是对偶于 $q$ 的范数, 换句话说, $p(x)=\sup\limits_{u\neq 0}\langle u,x\rangle/q(u)$.

为了把这些定义和概念转化到序列空间上, 黑利把 $E$ 与 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的子空间 $E'$ 联系起来, $E'$ 是使得对 $E$ 中所有 $x=\{x_n\}$, 级数 $\sum\limits_n u_nx_n$ 收敛的所有序列 $u=\{u_n\}$ 构成的①, 接着他考虑了 $\langle u,x\rangle=\sum\limits_n u_nx_n$. 对任意 $u\in E'$, 如果对某些 $u\neq 0$, 数 $\|u\|=\sup\limits_{x\neq 0}\langle u,x\rangle/\|x\|$ 不为零, 则它定义了 $E'$ 上的一个范数. 除了这一情形, 黑利最先得到了闵可夫斯基关于支撑超平面的结果的一个弱扩展形式. 如果 $B$ 是由 $\|x\|\leqslant 1$ 定义的 $E$ 的子集, 他表明由 $\langle u,x\rangle=1$ 定义的超平面 $H$ 当 $\|u\|<1$ 时, 它与 $B$ 相交, 当 $\|u\|>1$ 时, 它与 $B$ 不相交, 但如果 $\|u\|=1$, 这个交集 $H\cap B$ 很可能是空集: 通过取 $E=l^1, E'=l^\infty$ 可以给出一个例子, 而且对 $H$, 支撑超平面为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x_n=1$.

①这不同于我们现在所说的空间 $E$ 的对偶.

黑利文章的中心问题是讨论方程组

$$\langle u^{(\nu)}, x\rangle = c_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \tag{15}$$

的解, 其中 $u^{(\nu)} \in E'$, 且寻找一个解 $x \in E$. 由不等式 $|\langle u, x\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|x\|$ 可以立即得到类似于里斯的条件 (9) 和 (14) 的必要条件, 即存在一个数 $M > 0$, 使得对任意 $n$ 和所有选取的标量 $\lambda_\nu$, 有

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu c_\nu\right| \leqslant M \left\|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u^{(\nu)}\right\|; \tag{16}$$

但是前面给出的例子 (对单个方程) 表明可能没有解使得 $\|x\| = M$, 即使当条件 (16) 满足时也没有.

黑利和施密特、里斯一样, 先考虑 (15) 的 $N$ 个方程构成的有限维线性方程组的情形, 其中和平常一样, $u^{(\nu)}$ 可以被假定是线性无关的. 从而 $E$ 到 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的映射 $f : x \mapsto \langle u^{(\nu)}, x\rangle_{1\leqslant\nu\leqslant N}$ 是一个满射. 黑利表明在 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上 $y = \inf\limits_{f(x)=y} \|x\|$ 是一个范数 (对于我们而言, 它是从 $E$ 上的范数中推导出的 $E/f^{-1}(0)$ 上的自然范数). 条件 (16) 则保证了 (15) 的解 $x$ 的存在性, $x$ 使得对任意的 $M_1 > M$ (如果不必 $M_1 = M$ 的话), 有 $\|x\| \leqslant M_1$.

从有限维方程组 (15) 到一般情形的过渡是黑利最有原创性的思想, 他将问题分成两个部分:

A) 给定 $M_1 > M$, 找一个线性形式: $L : E' \to \mathbb{C}$ 使得对所有 $u \in E'$, 有 $L(u) \leqslant M_1\|u\|$, 而且对所有 $\nu$, 有 $L(u^{(\nu)}) = c_\nu$.

B) 当找到那样的线性形式 $L$ 后, 如果可能的话, 再找一个元素 $p \in E$, 使得对所有 $u \in E'$, 有 $\langle p, u\rangle = L(u)$.

为了解决问题 A), 黑利假定一个附加条件, 即 $E'$ 是可分的度量空间. 接着, 他用下面的方法证明了解的存在性 (哈恩－巴拿赫定理的特殊形式). 令 $\{p^{(\nu)}\}$ 是 $E'$ 中的元素序列, 它在这个空间中是稠密的. 黑利选取一组递增数列 $M < M^{(1)} < M^{(2)} < \cdots < M_1$, 他证明的关键点在于表明存在一个复数族 $\{\gamma_\nu\}$, 使得对任意两个整数 $m \geqslant 1, n \geqslant 1$ 和任意标量族 $\{\lambda_\nu\}$ 和 $\{\mu_\nu\}$, 都有

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu c_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu \gamma_\nu\right| \leqslant M^{(m)} \left\|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u^{(\nu)} + \sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu p^{(\nu)}\right\|. \tag{17}$$

从而容易证明存在一个定义在 $E'$ 上的线性形式 $L$, 使得对任意指标 $\nu$, 有 $L(p^{(\nu)}) = \gamma_\nu$, 并且这是问题 A) 的解.

可以对 $m$ 用归纳法来证明 (17) 式, 当 $m = 0$ 时, 假设它是 (16). 接着不得不证明点 $\gamma_{m+1} \in \mathbb{C}$ 的存在性, 对任意的 $n \geqslant 1$ 和任意两族标量 $\{\lambda_\nu\}_{1\leqslant\nu\leqslant n}$ 和 $\{\mu_\nu\}_{1\leqslant\nu\leqslant m}$, 它属于 $\mathbb{C}$ 中所有由

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu c_\nu + \sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu\gamma_\nu + \gamma_{m+1}\right| \\ &\leqslant M^{(m+1)}\left\|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu u^{(\nu)} + \sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu p^{(\nu)} + p^{(m+1)}\right\| \end{aligned} \tag{18}$$

定义的圆盘. 然而, 黑利自己证明的有限维空间上有关凸集的一般结果可以将这个问题化简为证明 (18) 的任意 3 个圆盘具有公共点, 而且黑利表明这是前面对有限维方程组 (15) 证明的结果的推论.

转到问题 B), 黑利发现它可能没有解. 用现在术语表述的话, 他给出了第一个非自反巴拿赫空间的例子①. 这个例子是所有使得级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛的序列 $\{x_k\}$ 构成的空间 $E$, 其范数为 $\|x\| = \sup_n \sum_{k=n}^{\infty} x_k$. 黑利证明了 $E'$ 是由所有使得 $\|u\| = |u_1| + \sum_{k=1}^{\infty}|u_{k+1} - u_k|$ 有限的序列 $\{u_k\}$ 组成的, $\|u\|$ 是 $E'$ 上的自然范数. 接着如果取 $L(u) = \lim_{k\to\infty} u_k$, 则 $L$ 在 $E'$ 上连续, 但是不存在 $p \in E$, 使得 $L(u) = \langle p, u\rangle$.

从里斯和黑利的工作出发, 在任意实数或复数域上的向量空间上定义范数是一个很自然的推广, 而不仅仅局限在函数空间或 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的子空间上定义范数. 哈恩 [97] 和巴拿赫 [12] 已经独立完成了这一步, 但是他们只考虑了完备空间.

巴拿赫的论文指的是他 1920 年的博士论文: 虽然他没有提及凸性, 但是他认真地发展和广泛地运用了几何语言. 他主要的兴趣集中在连续线性算子 $u : E \to F$ 以及这些算子序列的极限上, 其中 $E$ 和 $F$ 都是任意完备的赋范空间. 尽管哈恩只考虑了线性形式, 但是他的

① 里斯已经注意到我们能在有界变差函数构成的空间上定义连续线性泛函, 对一个连续函数 $f$, 它的形式不是 $\xi \mapsto \int_a^b f(x)d\xi(s)$ (例如我们能取 $f$ 为递增的非连续函数) ([183], vol. II, p. 827).

观点与巴拿赫的相似. 当时他和巴拿赫都对线性形式的延拓问题不感兴趣, 我们推后到第 4 节来详细讨论他们 1922—1923 年的论文. 然而, 这里我们应该指出巴拿赫在他的论文中给出了逐次逼近法的抽象表述, 即 "压缩映射原理": 如果 $F$ 是完备的赋范线性空间到自身的映射, 使得 $\|F(x)-F(y)\| \leqslant k\|x-y\|$, 其中 $0<k<1$, 则由 $x_{n+1}=F(x_n)$ 归纳定义的序列 $\{x_n\}$ ($x_0$ 是任意的) 收敛于唯一的 "不动点" $x$, 使得 $F(x)=x$.

直到 1927 年哈恩才研读了黑利的论文, 在完备赋范线性空间的一般环境中完全解决了这些空间的延拓问题 [98]. 哈恩和黑利一样继续使用归纳法, 但是他通过引入超穷归纳法而不是一般的归纳法[①], 从而极大地简化和推广了这个方法, 这是第一次在泛函分析的一般问题上引入这个方法. 在完备的赋范线性空间 $E$ 中, 存在 $E$ 的向量子空间 $V$ 和定义在 $V$ 上的 (实值) 线性形式 $f$, 对 $x\in V$, 有 $|f(x)| \leqslant M\|x\|$. 现在的问题是将 $f$ 延拓到 $E$ 上的一个线性形式 $F$, $F$ 使得对 $y\in E$, 有 $|F(y)| \leqslant M\|y\|$. 哈恩通过表明序数 $\gamma$ 的存在性和映射 $\xi \to V_\xi$ 的存在性来开始他的研究, $\xi \mapsto V_\xi$ 将 $E$ 的子空间 $V_\xi$ 与特定的序数 $\xi<\gamma$ 联系起来, $V_\xi$ 使得 $V_0=V$, 当 $\xi<\eta$ 时, 有 $V_\xi \subset V_\eta$, $V_\xi$ 在 $V_{\xi+1}$ 中有余维数 1, 且当 $\xi<\gamma$ 时, $E$ 是 $V_\xi$ 的并. 这个问题可以简化为这样一种情形, 即 $V$ 在 $E$ 中有余维数 1, $E$ 由 $V$ 生成的, 且元素 $a\notin V$. 哈恩对 $x\in V$ 考虑了数 $f(x)-M\|x-a\|$ 的最小上界 $B$ 和数 $f(x)+M\|x-a\|$ 的最大下界 $A$, 并且运用对 $x\in V$ 的假设条件 $|f(x)| \leqslant M\|x\|$, 他容易表明 $A\leqslant B$. 从而对所有 $\lambda\in\mathbb{R}$, 延拓 $F$ 是由 $F(x+\lambda a)=f(x)+\lambda c$ 定义的, 其中 $c$ 是使得 $A\leqslant c\leqslant B$ 的任意数.

作为他的定理的一个特殊情形, 哈恩表明对 $\forall a\in E$, 且 $a\neq 0$, 存在 $E$ 上的一个连续的线性形式 $L$, 使得 $\|L\|=1$ 且 $L(a)=\|a\|$. 接着, 他正式引入 $E$ 的对偶空间 $E'$ (当时用的术语是 "极空间"), 根据前面的结果, $E'$ 不能是仅包含 0 元素的集合. 对 $x\in E$ 和 $u\in E'$, 他记 $B(u,x)$ 来替代 $u(x)$, 并且对任意 $x\in E$, 他考虑了 $E'$ 上的线性形式 $c(x): u\mapsto B(u,x)$, 他表明 $\|c(x)\|=\|x\|$. 换句话说, 他定义了从 $E$ 到它

[①]分析学家在康托尔之后开始运用超穷归纳法, 但是与哈恩的工作最接近的应用可能是巴拿赫的方法. 1923 年, 巴拿赫证明了定义在 $\mathbb{R}$ 的所有子集上的 "测度" 在 $\mathbb{R}$ 上的存在性且它具有简单的可加性 [13].

的二次对偶空间 $E''$ 的一个等距映射 $c$, 如果 $c$ 是双射, 则他称 $E$ 是 "正则的" (我们的自反空间). 因此, 可以确切地说随着哈恩这篇文章的出现, 对偶理论最终得以发展并走向成熟.

两年之后, 巴拿赫在没有参考哈恩文章的情况下, 用相同的思路建立了相同的定理 (他后来承认了哈恩的优先权). 另外, 巴拿赫认识到这一讨论可以被推广: 如果 $p$ 是定义在向量空间 $E$ 上的实值函数, 使得 $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ 和 $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, 其中 $\lambda \geqslant 0$, 而且如果 $f$ 是定义在 $E$ 的子空间 $V$ 上的一个线性形式, 使得在 $V$ 中有 $f(x) \leqslant p(x)$, 则有可能将 $f$ 延拓为定义在 $E$ 上的线性形式 $F$, 使得在 $E$ 上有 $F(x) \leqslant p(x)$. 这个延拓后来在局部凸空间理论中的发展中起到重要的作用 (参看第八章).

## §4 滑脊方法和贝尔纲

在 1922 年的文章 [97] 中, 哈恩证明了这样一个定理: 令 $E$ 是一个完备的赋范线性空间, $\{u_n\}$ 是 $E$ 上连续线性形式的序列, 假定对于每一个 $x \in E$, 数列 $|u_n(x)|$ 是有界的, 其中这里所说的界是一个与 $x$ 有关的数, 则范数列 $\|u_n\|$ 是有界的. 可以用反证法来证明这个定理. 假定序列 $\{\|u_n\|\}$ 是无界的, 用归纳法来确定 $E$ 中序列 $\{x_k\}$ 和整数序列 $\{n_k\}$ 使得

1° 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛于一个元素 $x \in E$;

2° $\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} |u_{n_k}(x_j)| \leqslant 1$;

3° $|u_{n_k}(x_k)| \geqslant k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} |u_{n_k}(x_j)|$.

则对每个 $k$, 有

$$|u_{n_k}(x)| \geqslant |u_{n_k}(x_k)| - \sum_{j=1}^{k-1} |u_{n_k}(x_j)| - \sum_{j=k+1}^{\infty} |u_{n_k}(x_j)| \geqslant k-1$$

成立, 这与假设是矛盾的. 为此, 假设当 $j<k$ 时, $u_{n_j}$ 是确定的, 且考虑 $E$ 中一个球

$$B_k : \|x\| \leqslant 2^{-k} \inf_{j<k} (\|u_{n_j}\|+1)^{-1};$$

由于假设 $\{\|u_n\|\}$ 是无界的, 从而存在一个指标 $n_k$ 和一个点 $x_k \in B_k$, 它们使得条件 3° 成立, 而从对球 $B_k$ 的半径的选取中可以推导条件 1° 和 2°.

这就是常说的 "滑脊方法": 当 $j$ 从 1 增加到 $+\infty$ 时, 在数值序列 $|u_{n_k}(x_j)|$ 中, 指标 $j=k$ 对应的 "峰" 比其他指标所对应的 "峰" 之和还要大得多.

这个结果可以用不同的方式表达为: 如果序列 $\{\|u_n\|\}$ 是无界的, 则至少存在一个 $x \in E$, 使得序列 $\{|u_n(x)|\}$ 是无界的.

1905 年, 勒贝格在 $[0,2\pi]$ 上构造连续周期函数 $F(x)$ 时用到了 "滑脊方法", 其中 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $O$ 处是发散的 ([138, vol. III, p. 101] 和 [139, p. 86–88]), 这是该方法在这一表达形式下的第一个例子. 他已经证明了如果我们记 $S_n(g)$ 是连续函数 $g$ 的傅里叶级数的前 $n$ 项和, 则能够找到有界变差的连续周期函数的序列 $\{g_n\}$, 使得在 $[0,2\pi]$ 上有 $|g_n(t)| \leqslant 1$, 且使得函数值序列 $S_n(g_n)(0)$ 趋向于 $+\infty$. 他接着定义

$$F(x) = \varepsilon_1 f_1(n_1 x) + \varepsilon_2 f_2(n_2 x) + \cdots + \varepsilon_k f_k(n_k x) + \cdots,$$

其中 $\varepsilon_k > 0$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = 1$, $f_k$ 是有界变差的连续周期函数, 它使得在 $[0,2\pi]$ 上有 $|f_k(t)| \leqslant 1$, 且使得对一个递增的整数列 $\{p_k\}$, 有 $|S_{p_k}(f_k)(0)| \geqslant k/\varepsilon_k$. 最终用 $n_k > n_{k-1}p_{k-1}$ 的方式来选取这个递增的整数列 $\{n_k\}$, 且对有界变差的连续函数 $F_k(x) = \varepsilon_1 f_1(n_1 x) + \cdots + \varepsilon_{k-1} f_{k-1}(n_{k-1} x)$, 当 $n \geqslant n_k$ 时, 所有和式 $S_n(F_k)(0)$ 的绝对值是 $\leqslant 2$ 的 (它们收敛于 $F_k(0)$). 这种选取方法可以推出当 $j > k$ 时, $f_j(n_j x)$ 的傅里叶级数的前 $n_k p_k$ 项之和减少为这个级数的第一项的值, 因此它的绝对值 $\leqslant 1$. 对所有 $k$, 用这种定义能够容易检验 $|S_{n_k p_k}(F)(0)| \geqslant k-3$.

一年之后, 希尔伯特的两个学生黑林格和特普利茨对希尔伯特给出的有界双线性形式的定义找到了一个令人吃惊的补充条件 (第五章, 第 2 节). 他们假设对所有的 $n$, $x=\{x_p\}$ 和 $y=\{y_p\}$, 满足 $\sum\limits_p x_p^2 \leqslant 1$ 和 $\sum\limits_p y_p^2 \leqslant 1$ 的每个序列对 $(x,y)$, 都有 $|K_n(x,y)| \leqslant M_{x,y}$, 其中数 $M_{x,y}$ 以任意方式取决于 $x$ 和 $y$, 而不是 $|K_n(x,y)| \leqslant M$. 独立于勒贝格, 他

们用 "滑脊方法" 证明了这个结论, 即构造了对 $(x,y)$, 它们使得如果 $K$ 在希尔伯特的意义下不是有界的, 则序列 $|K_n(x,y)|$ 是无界的 [106].

以后的 20 年里, 出现了很多关于 "滑脊方法" 的例子. 勒贝格在 1909 年的一篇关于 "奇异积分" 的文章中反复用到了这种方法, 即对各种函数 $f$, 能对 "核" $K_n$ 找到条件确保当 $n \to +\infty$ 时, 积分 $\int_a^b f(t)K_n(t,x)dt$ 收敛于 $f(x)$ ([138], vol. III, p. 259–351). 这种方法在 "求和过程" 中也有卓越功效, 即运用公式 $y_n = \sum_{m=1}^{n} a_{nm}x_m$ 把序列 $\{x_n\}$ "转换" 成序列 $\{y_n\}$, 且需要对 $a_{nm}$ 找到一个条件使得当 $\{x_n\}$ 存在一个极限时, $\{y_n\}$ 趋于相同的极限 ([193], vol. II, p. 321–389). 哈恩 1922 年的文章 [97] 对所有这些结果给出了一般背景, 他表明它们都是他的一般定理的结果. 巴拿赫在他的博士论文中独立地证明了一个比哈恩更一般的定理, 其中 $u_n$ 是从完备的赋范线性空间 $E$ 到完备的赋范线性空间 $F$ 的连续线性算子. 他表明对每个 $x$, 范数 $\|u_n(x)\|$ 在一个与 $x$ 有关的数下是有界的, 这可以推出范数序列 $\|u_n\|$ 是有界的.

最终在 1927 年, 巴拿赫和施坦豪斯 (运用萨克斯 (Saks) 的思想) 发现不用 "滑脊方法", 用贝尔 (Baire) 1899 年建立的定理可以证明这个定理 [11]. 他表明可数多个稠密开子集的交在 $\mathbb{R}^n$ 中是稠密的①. 这可以推出如果 $u$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中下半连续的实函数, 且如果对每一个 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $u(x) < +\infty$, 则 $\mathbb{R}^n$ 中任意的一个非空开子集 $U$ 都包含一个非空的开子集 $V$, 使得 $\sup_{x\in V} u(x) < +\infty$. 当用任意完备度量空间代替 $\mathbb{R}^n$ 时, 可以将这些结果和它们的证明进行推广. 如果 $H$ 是完备的赋范线性空间 $E$ 到完备的赋范线性空间 $F$ 的线性映射构成的集合, 且如果对每个 $x \in E$, 有 $\sup_{u\in H} ||u(x)|| < +\infty$, 则函数 $p(x) = \sup_{u\in H} ||u(x)||$ 是下半连续的, 根据贝尔定理可知 $p$ 在 $O$ 的邻域中是有界的, 这能推出 $\sup_{u\in H} ||u||$ 是有限的 [16].

① 当 $n=1$ 时, 奥斯古德 (W. Osgood) 在两年前已经证明了相同的结果 [170].

## §5 巴拿赫的书及其影响

1932 年, 巴拿赫出版了一本书 [15], 这本书对当时赋范空间理论中所有已知结果给出了综合性的描述, 特别是对他在 1923 年和 1929 年发表的论文中的定理的描述. 书中的大部分内容致力于研究弱收敛的定义及其他的推广, 他从 1929 年就已经开始对它们进行了研究. 我们将推后至第八章第 1 节来讨论这些问题. 这本书包含的最重要的结果是巴拿赫发现了贝尔定理的另一个推论, 它比巴拿赫 - 施坦豪斯定理更加深刻: 如果 $u$ 是从完备的赋范线性空间 $E$ 到完备的赋范线性空间 $F$ 的连续线性映射, 则 $u(E)$ 在 $F$ 中要么是贫集 (在贝尔的术语中是 "第一型" 集), 要么有 $u(E) = F$. 这个定理的直接推论是著名的闭图像定理: 如果 $u$ 是从 $E$ 到 $F$ 的线性映射, 它在 $E \times F$ 上有闭图像, 那么 $u$ 是连续的. 在泛函分析的应用中这些令人惊奇的结果成为最强大的两个工具.

这些特点以及在古典分析中的许多应用使得这本书具有强大的吸引力, 它在泛函分析方面产生的影响类似于范德瓦尔登在两年前写的关于代数的书的影响. 全世界的分析学家开始注意到这种新方法带来的强大威力, 并且开始运用它们来处理各种问题. 人们普遍接受巴拿赫的术语和符号, 完备的赋范线性空间就是著名的巴拿赫空间, 并且它们的理论很快成为大多数研究生课程的必修内容. 1935 年以后, 赋范空间理论成为更一般的局部凸空间理论的一部分, 我们将在第八章讨论这些内容. 不过, 最近数学家的兴趣又聚焦在赋范空间和它们的 "几何" 的特性上. 由于发展太快, 目前还无法对这些结果的所属领域及它们与数学中其他分支之间的关系给出一个清晰的看法, 感兴趣的读者可参阅文献 [4], [17], [47], [50], [116], [134], [149], [150] 和 [185].

# 第七章 1900 年后的谱理论*

## §1 里斯的紧算子理论

我们已经提到弗雷德霍姆的论文使得许多数学家开始研究积分方程理论和无穷维线性方程组理论, 尤其是希尔伯特做出新的推动后. 这里我们将不再讲述这些论文, 它们中的大多数只关注于一些特殊情形, 从而与泛函分析的发展进程没有太大联系, 我们建议感兴趣的读者去参阅文献 [107] (特别是 p. 1543–1552 和 p. 1574–1575).

在 "无穷维线性代数" 中 "弗雷德霍姆择一性" 对应于一个古典关系式, 即核与 $\mathbb{C}$ 上有限维向量空间上的自同态的像之间的古典关系式. 对这样的自同态, 有许多结果已经是已知的, 即特征化至 "相似" 的若尔当标准形, 于是一个很自然的问题是研究弗雷德霍姆算子的类似特征. 里斯写于 1916 年的文章 (用匈牙利语写的 ([183], vol. II, p. 1017–1052), 以德文发表于 1918 年的论文中 ([183], vol. II, p. 1053–1080)) 对这一问题给出了一个完整的回答, 而之前在这一方向上只取得了一部分成果, 里斯对弗雷德霍姆的结果找到了一个合适的位置, 其中包括现在称为紧算子的里斯 – 弗雷德霍姆理论.

里斯没有采用希尔伯特用双线性形式处理线性方程的方法, 而

*本章由李亚亚翻译.

是像弗雷德霍姆那样开始使用算子语言. 在他关于 $l^p$ 空间的工作中 ([183], vol. II, p. 876–911 和 [184]), 他将希尔伯特全连续双线性形式的概念转化为全连续算子的概念: 全连续算子是从 $l^p$ 空间到自身的线性映射, 它能将一个弱收敛序列映射成一个强收敛序列. 里斯 1918 年这篇文章的新颖点在于他意识到他可以对全连续概念给出一个等价定义, 在不涉及弱收敛的情况下运用弗雷歇对紧性引入的一般概念来给出. 如果一个线性算子能将有界集映射成准紧集 (在强拓扑的情况下), 则称这个算子是全连续算子. 现在这一定义可以从 $l^p$ 空间推广到任意赋范空间上. 里斯 1918 年的论文中只研究了紧区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的空间 $\mathcal{C}(I)$, 但是他明确提到他考虑的这种情形可以看成是对更一般概念的 "试金石". 事实上, 他对 $\mathcal{C}(I)$ 定义了范数之后, 只有在证明连续核的弗雷德霍姆算子在 $\mathcal{C}(I)$ 上是全连续时, 才用到了范数的公理化定义, 其他时候他都没有用到这一定义 (记住这一定义仅出现在 4 年后的发表物中!).

依我之见, 里斯 1918 年的文章是他最优秀的文章之一, 文章完全是用几何的语言和精神写出来的. 这篇文章具有不可替代性且证明过程几乎可以逐字记录下来, 因此它被广泛接受. 他的文章从比较显然的两个标注开始: 1) 在赋范空间 $E$ 中, 如果 $V$ 是一个不同于 $E$ 的闭向量子空间, 则存在一个向量 $x \in E$ 使得 $\|x\| = 1$ 且对所有 $y \in V$, 有 $\|x - y\| \geqslant \dfrac{1}{2}$; 2) 如果 $S$ 中存在一个无穷序列 $\{x_n\}$, 它使得对所有不同指标对有 $\|x_j - y_k\| \geqslant \dfrac{1}{2}$, 则称子集 $S \subset E$ 不是准紧的. 第一个结果是著名的定理, 它将有限维赋范空间刻画为一个局部紧的空间: 用有限多个球 $\|x - a_j\| \leqslant \dfrac{1}{4}$ 来覆盖球 $\|x\| \leqslant 1$, 不存在任一点使得对由 $a_j$ 生成的向量子空间 (必须是闭的) 的所有点有 $\|z\| = 1$ 和 $\|z - y\| \geqslant \dfrac{1}{2}$.

里斯接着考虑 $E$ 到自身的全连续线性映射 $u$ (或者我们今天所说的紧线性映射), 他也研究了 $E$ 的自同态 $v = 1_E - u$. 运用前面的两个标注, 经过非常简单的讨论, 他证明了下面一些特征:

a) 核 $v^{-1}(0)$ 是有限维的;

b) 像 $v(E)$ 在 $E$ 上是闭的;

c) $E$ 中 $v(E)$ 的余维数是有限的.

里斯接下来考虑 $v$ 的迭代 $v^k$, 核 $N_k$, $v^k$ 的像 $F_k$[①]. $N_k$ 形成有限维闭子空间中的一个递增序列, $F_k$ 形成具有有限余维数的闭子空间中的一个递减序列. 通过反证法和上面的标注 2), 里斯指出存在一个最小整数 $n$ 使得当 $k \geqslant n$ 时, 有 $N_{k+1} = N_k$. 当 $k \geqslant n$ 时, 容易证明 $F_{k+1} = F_k$, 且 $E$ 是 $F_n$ 和 $N_n$ 的拓扑直和. 也能容易证明 $v$ 在 $F_n$ 上的限制是一个从 $F_n$ 到自身的线性同胚. 特别地, 如果 $N_1 = v^{-1}(0) = \{0\}$, 则 $v$ 是 $E$ 到自身的线性同胚, 它的逆 $w = v^{-1}$ 使得 $(1_E - u)w = 1_E$, 换句话说, $w = 1_E + uw$ 与 $v$ 具有相同的形式, 因为 $uw$ 是紧的.

上述这些结果使得里斯能够全面处理紧算子的特征值问题. 紧算子在 $\mathbb{C}$ 中至多有可数多个特征值 $\lambda_n \neq 0$, 每个特征值在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 中是孤立的, 特征值的集合是有界集, 如果这个集合是无限集, 则 0 属于它的闭包. 对每个 $\lambda_n \neq 0$, $E$ 是两个闭子空间 $F(\lambda_n)$ 和 $N(\lambda_n)$ 的拓扑直和, $F(\lambda_n)$, $N(\lambda_n)$ 在 $u$ 的作用下是稳定的. $N(\lambda_n)$ 具有有限维数, 且存在一个最小的整数 $k_n$ 使得 $(u - \lambda_n \cdot 1_E)^{k_n}$ 在 $N(\lambda_n)$ 上的限制为 0. $u - \lambda_n \cdot 1_E$ 在 $F(\lambda_n)$ 上的限制是 $F(\lambda_n)$ 到自身的一个线性同胚. 如果 $E$ 完备, 函数 $\zeta \mapsto (u - \zeta \cdot 1_E)^{-1}$ 是 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上的亚纯函数 (它的值包含在 $E$ 的连续自同态的空间 $\mathcal{L}(E)$ 中). 在不同于 $\lambda_n$ 的点处, 这个函数是全纯函数, 在每个 $\lambda_n$ 处它有 $k_n$ 阶极点. 最后, 如果 $m \neq n$, 则子空间 $N(\lambda_n)$ 包含在 $F(\lambda_m)$ 中. 不过, 通常情况下存在将 $E$ 分解为子空间 $N(\lambda_n)$ 的和式的不完整分解, 这种分解类似于希尔伯特空间中的紧自伴算子的情况 [99]. 有这样一个事实, 即可能就没有特征值, 如沃尔泰拉算子就没有特征值.

在对 $u - \zeta \cdot 1_E$ 的研究中, 值 $\zeta = 0$ 是完全例外的. $u(E)$ 通常不是闭的, 它可能有无穷余维数, $u^{-1}(0)$ 也可能有无穷维数. 这一点解释了对 "第一型" 积分方程求解的困难性, 也解释当 $u$ 是紧算子时, 来解方程 $u(x) = y$ 的特殊情形的困难性, 早期研究积分方程的数学家很难解决这一问题.

虽然数学家关于特殊类型的紧算子做了很多工作, 但是在里斯 1918 年的论文发表后, 紧算子的一般理论中仍然有很多东西是未知

[①]在有限维空间中, 韦尔 (E. Weyr) 发展了一个得到自同态的若尔当标准型的方法 [228].

的. 最新结果中出现这样一个事实, 当 $u$ 是完备赋范空间上的紧算子时, 它在对偶空间 $E$ 上的转置算子 ${}^tu$ 也是一个紧算子 [188]. 可以证明即使 $E$ 中的紧算子 $u$ 没有特征值, 也存在 $E$ 的闭向量子空间 $V$, 它不同于 $E$ 和 $\{0\}$ 且使得 $u(V)\subset V$ [7].

## §2 希尔伯特的谱理论

我们现在回到希尔伯特 1906 年论文中最具原创性的部分 (第五章, 第 2 节), 在这篇文章中他发现了 "连续谱" 这一全新的现象. 傅里叶在他的 "热理论" 中考虑用三角级数来表示周期为 $2a$ 的函数, 这里 $a$ 趋于 $+\infty$ (第一章, 第 2 节, 公式 (13)). 边界条件为 $y(-a)=y(a)=0$ 的方程 $y''+\lambda y=0$ 对应的施图姆 – 刘维尔问题的特征值为 $\lambda_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2/a^2$, 它将区间 $[0,+\infty)$ 以 $\dfrac{1}{a}$ 分为长度趋于 0 的区间, 这使得傅里叶考虑了周期为 $2a$ 的函数的三角函数展开式的 "极限情形", 即对定义在 $\mathbb{R}$ 上的任意函数 $f$, 这一 "极限情形" 是一个用积分表示的表达式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_0^{\infty}f(t)\cos u(x-t)du, \tag{1}$$

其中 "特征值" 充满区间 $[0,+\infty)$ ([67], vol. I, p. 392).

1897 年, 维尔丁格 (Wirtinger) 对希尔的方程

$$y''+\lambda q(x)y=0 \tag{2}$$

发展了一个类似于傅里叶的想法, 其中 $q$ 是周期为 1 的连续函数. 这些方程的一般理论在当时是已知的: 从一个基础的方程组开始, 它的解 $u_1, u_2$ 使得

$$u_1(0,\lambda)=1,\quad u_1'(0,\lambda)=0,$$

$$u_2(0,\lambda)=0,\quad u_2'(0,\lambda)=-1,$$

所以 $u_2u_1'-u_1u_2'$ 是常函数 1, 可以对所有 $x\in\mathbb{R}$, 考虑使得 $f(x+1)=\rho f(x)$ 的复数解 $f$, 具有这个性质的常数 $\rho(\lambda)$ 是方程

$$\rho^2+\Phi(\lambda)\rho+1=0 \tag{3}$$

的解, 其中 $\Phi(\lambda)=u_2'(1,\lambda)-u_1(1,\lambda)$. 周期为 1 的解 $f$ 对应 "特征值" $\lambda$, $\lambda$ 满足 $\Phi(\lambda)=2$, 满足 $|f(x+1)|=|f(x)|$ 的解 $f$ 对应的 $\lambda$ 值使得 $-2\leqslant\Phi(\lambda)\leqslant 2$, 这些 $\lambda$ 值通常构成 $\mathbb{R}$ 上的不相交区间 $I_k$. 维尔丁格寻找周期为 $n$ (任意整数) 的解, 这些解对应于使得 $(\rho(\lambda))^n=1$ 的 $\lambda$ 值, 他指出当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时, $\lambda$ 的这些值几乎 "充满" 区间 $I_k$. 由于它与分子的光学谱之间的类似性使得他认为方程 (2) 的 "Bandesspectrum" 是由区间 $I_k$ 的并构成的, 他也认为应该存在一个类似于 (1) 的积分公式, 但没有想到这个公式是什么.

虽然希尔伯特没有提到维尔丁格的论文, 但是很有可能他看过这篇论文 (希尔伯特的几个学生引用过它), 而且希尔伯特用的术语 "谱" 也可能来源于此. 从维尔丁格相对模糊的思想到希尔伯特非常一般且精确的结果是数学发展的一个非常迫切的需要. 另一方面, 1894 年, 斯蒂尔切斯 (Stieltjes) 关于连续分数的长篇论文对希尔伯特产生了明确的影响: 斯蒂尔切斯对复变量的有理函数序列取极限

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{z+x_i},$$

其中 $M_i$ 和 $x_i$ 是实数, 他指出对一个有界变差的函数 $\Phi$, 这个极限可以写成一个 "斯蒂尔切斯变换"

$$F(z)=\int_0^{\infty}\frac{d\Phi(u)}{z+u}$$

(这是在创建 "斯蒂尔切斯积分" 概念的目的下做的) [205]. 希尔伯特面临的问题与斯蒂尔切斯的类似, 即他想将其 "有界" 二次型 $K(x,x)$ 的第 $n$ "部分"

$$K_n(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}k_{pq}x_px_q \tag{4}$$

的古典 "约简" 过渡到二次型 $K(x,x)$ 本身的 "约简" 上: 古典理论表明

$$K_n(x,x)=\frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)}}+\cdots+\frac{(L^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)}}, \tag{5}$$

其中 $\lambda_j^{(n)}$ 是满足 $\lambda_1^{(n)}\leqslant\lambda_2^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n^{(n)}$ 的实数, $L_j^{(n)}(x)$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性形式, 且使得

$$(L_1^{(n)}(x))^2+\cdots+(L_n^{(n)}(x))^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2. \tag{6}$$

对 $l^2$ 中每个点 $x=\{x_p\}$, 当 $p>n$ 时, 有 $x_p=0$, 希尔伯特把这些点与实变量的分段线性凸函数

$$u^{(n)}(x;\lambda)=\sum_{p=1}^{n}(L_p^{(n)}(x))^2(\lambda-\lambda_p^{(n)})^+ \tag{7}$$

联系起来. 他的想法是对这里的每个函数取极限, 其极限是在 $l^2$ 中只有有限多个坐标不等于 0 的点处来取的 (如果可能的话). 运用他的"选择原理" (第五章, 第 2 节) 和康托尔的对角线法, 希尔伯特表明这些极限是存在的, 至少对适当选取的 $u^{(n)}$ 序列是存在的. 事实上, 他只对这样两类点取了极限, 一类是点 $x^{(pp)}$, 其指数 $p$ 的坐标等于 1, 其他的都等于 0, 另一类是点 $x^{(pq)}(p\neq q)$, 其指数 $p$ 和 $q$ 的坐标等于 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 其他的都等于 0. 他对所有整数对 $(p,q)$ 写出其相应的极限为 $u_{pq}(\lambda)$. 它们是 $\lambda$ 的凸函数, 因此对所有 $\lambda$, 右导数 $v_{pq}^{+}(\lambda)$ 和左导数 $v_{pq}^{-}(\lambda)$ 存在, 且除了 $\lambda$ 值的一个至多可数集外, 它们是相等的. 对所有整数对 $(p,q)$, 希尔伯特记 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\cdots$ 为 $\lambda$ 的例外值序列, 而且他定义二次型

$$v^{+}(x;\lambda)=\sum_{p,q}v_{pq}^{+}(\lambda)x_px_q,\quad v^{-}(x;\lambda)=\sum_{p,q}v_{pq}^{-}(\lambda)x_px_q$$

且对每一个指数 $r$, 定义

$$E_r(x)=v^{+}(x;\lambda_r)-v^{-}(x;\lambda_r).$$

所有这些都是有界二次型, 更准确地说, 它们的值在 $l^2$ 中是大于等于 0 且小于等于 $(x|x)$ 的. 对于不同于 $\lambda_r$ 的 $\lambda$ 值, 他记:

$$e(x;\lambda)=\sum_{\lambda_r<\lambda}E_r(x),$$

$$\sigma(x;\lambda)=v(x;\lambda)-e(x;\lambda),$$

其中 $v$ 是 $v^{+}$ 和 $v^{-}$ 的公共值. 运用这些符号, 他最终的结果是将二次型 $K(x,x)$ 进行"约简": 对每个 $x\in l^2$, 函数 $\lambda\mapsto\sigma(x;\lambda)$ 是一个有界变差的连续函数, 而且可以写出

$$\begin{cases}(x|x)=\displaystyle\sum_r E_r(x)+\int d\sigma(x;\lambda),\\ K(x|x)=\displaystyle\sum_r\frac{1}{\lambda_r}E_r(x)+\int\frac{1}{\lambda}d\sigma(x;\lambda).\end{cases} \tag{8}$$

他称 $\lambda_r$ 的集合为 $K$ 的点谱, 所有 $\sigma(x;\lambda)$ 为常数的集合的补集为 $K$ 的连续谱.

当然, 当 $K$ 是 "全连续" 二次型时, 连续谱是空集, 而且希尔伯特给出了没有点谱的二次型的例子. 例如 (见 [183], vol. II, p. 986–989), 如果 $\{\varphi_p\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧区间 $[a,b]$ 上的一个完备规范正交系, $f$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数, 则可以用公式

$$a_{pq}=\int_a^b f(\mu)\varphi_p(\mu)\varphi_q(\mu)d\mu \tag{9}$$

来定义一个有界二次型 $A(x,x)=\sum\limits_{p,q}a_{pq}x_px_q$ 且可以得到 "约简" 公式

$$\begin{aligned}(x|x)&=\int_a^b\left(\sum_p x_p\varphi_p(\mu)\right)^2 d\mu,\\ A(x,x)&=\int_a^b f(\mu)\left(\sum_p x_p\varphi_p(\mu)\right)^2 d\mu,\end{aligned} \tag{10}$$

从这两个式子中可以看出存在没有点谱的二次型 (除非 $f$ 在一个区间上为常数), 如果 $f$ 是连续的, 则连续谱包含整个区间 $[m,M]$, 其中 $m$ 和 $M$ 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的极小值和极大值. 如果取 $a=0$, $b=\pi$, $\varphi_p(\mu)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin p\mu$, $f(\mu)=\cos\mu$, 则可以得到希尔伯特给出的第一个例子

$$A(x,x)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots. \tag{11}$$

如果取 $a=-\pi$, $b=\pi$, $\varphi_p(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin p\mu+\cos p\mu)(-\infty<p<+\infty)$, 且当 $\mu<0$ 时, 取 $f(\mu)=-\pi-\mu$, 当 $\mu>0$ 时, 取 $f(\mu)=\pi-\mu$, 则可以得出如果 $p+q\neq 0$, 有 $a_{pq}=\dfrac{1}{p+q}$, 如果 $q=-p$, 有 $a_{pq}=0$. 对 $p\leqslant 0$, 取 $x_p=0$ 可以得到希尔伯特的第二个例子 $A(x,x)=\sum\limits_{p,q=1}\dfrac{x_px_q}{p+q}$. 对 $p\leqslant 0$, 取 $x_p=0$, 对 $p\geqslant 0$, 取 $y_p=0$, 可以得到希尔伯特的另一个例子 $A(x,y)=\sum\limits_{p,q}{}'\dfrac{x_py_q}{p-q}$, 其中和式取遍大于 0 的不同整数对 $(p,q)$, 这两个

例子中的连续谱都在区间 $[-\pi,\pi]$[①].

里斯在 1913 年的书 ([183], vol. II, p. 956–989 和 [184]) 中基于一种完全不同的方法解释了希尔伯特的结果, 这一解释直到 1950 年左右一直被认为是标准的. 正如我们已经指出的, 他用更自然的 $E=l^2_{\mathbb{R}}$ 的连续自同态来代替希尔伯特的双线性形式. 对一个自同态 $A$, 它与 "有界" 双线性形式 $(x,y)\mapsto(A\cdot x|y)$ 有关, 反过来, 每个这样的双线性形式可以唯一地用这种方式写出来. 里斯的中心思想是对这样的自同态 $A$ 定义 "函数" $f(A)$, 它也是 $E$ 的连续自同态, 其中 $f$ 是特定的实变量函数, 他也想用这样的 "函数" 对一个对称自同态 $A$ (即对 $E$ 中所有的 $x,y$ 有 $(A\cdot x|y)=(x|A\cdot y)$) 写出一个对应于希尔伯特公式 (8) 的典型的 "谱分解".

为了完善这些想法, 里斯开始研究 $E$ 的所有连续自同态的代数 $\mathcal{L}(E)$ 的一些一般结果. 对范数 $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|A\cdot x\|$, $\mathcal{L}(E)$ 是一个巴拿赫空间, 它有单位元 (恒等映射 $1_E$), 且使得 $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$. 不过, 为了实现他的目标, 里斯没有用从 $\mathcal{L}(E)$ 的范数中得出的 "一致" 收敛概念, 而是用了强收敛的概念: 如果对每个 $x\in E$, 序列 $\{\|A_n\cdot x-A\cdot x\|\}$ 趋于 0, 则称序列 $\{A_n\}$ 强收敛于 $A$.

里斯接下来考虑了所有对称算子构成的子空间 $\mathcal{H}(E)$, 在 $\mathcal{H}(E)$ 中存在一个次序关系 $A\leqslant B$, 意思是说, 对所有 $x\in E$, 有 $(A\cdot x|x)\leqslant(B\cdot$

---

[①]也应该提到如何将斯蒂尔切斯关于连续分数和矩量问题的结果纳入到希尔伯特 – 冯 · 诺依曼的谱理论中. 1848 年, 雅可比 (Jacobi) 研究了特殊二次型 $J(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k^2-2\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_{k+1}x_kx_{k+1}$, 他表明这个二次型的特征值是有限连续分数

$$\frac{1}{a_0-z}-\frac{b_1^2|}{|a_1-z}-\frac{b_2^2|}{|a_2-z}-\cdots-\frac{b_n^2|}{|a_n-z} \tag{F}$$

的分母的根 ([120], vol. VI, p. 318–321). 早在 1878 年, 海涅 (Heine) [104, vol. I, p. 421] 暗示出形如 (F) 的无穷连续分数可能与无穷多个变量的雅可比二次型 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_n^2-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x_nx_{n+1}$ 有类似的关系. 斯蒂尔切斯直接研究形如 (F) 的连续分数, 将它们表示为 "斯蒂尔切斯变换", 对给定的斯蒂尔切斯变换确定斯蒂尔切斯测度的问题导致产生了他的 "矩量问题", 但是他没有考虑连续分数和二次型之间的关系. 1910 年, 特普利茨 (Toeplitz) 研究了雅可比有界二次型与连续分数之间的关系, 后来也将其推广到一般情形中. 这证明了这些二次型实际上对应的是重数为 1 的谱 [207].

$x|x)$. 假设 $a\cdot 1_E \leqslant A \leqslant b\cdot 1_E$, 则对 $[a,b]$ 上每个大于等于 0 的实系数多项式 $P(\xi)$, 可以得出 $P(A)\geqslant 0$. 实际上, 如果假设 $a=0, b=1$, 则 $P$ 是形如 $Q(\xi)^2, \xi(Q(\xi))^2, (1-\xi)(Q(\xi))^2$ 或 $\xi(1-\xi)(Q(\xi))^2$ 中之一的多项式的和式, 用这一点能证明 $A(1_E-A)\geqslant 0$. 但是对正二次型 $(A\cdot x|x)$, 从柯西 – 施瓦茨不等式中可以得出 $\|A\cdot x\|^4 \leqslant (A\cdot x|x)(A^2\cdot x|A\cdot x) \leqslant \|x\|^2\|A\cdot x\|^2$. 从而能推出 $\|A\| \leqslant 1$, 接着有 $\|A\cdot x\|^4 \leqslant (A\cdot x|x)\|A\cdot x\|^2$, 最后可得 $(A^2\cdot x|x) \leqslant (A\cdot x|x)$. 从这里可以得出如果一个实系数多项式 $P(\xi)$ 满足在 $[a,b]$ 上有 $m\leqslant P(\xi)\leqslant M$, 则能推出 $m\cdot 1_E \leqslant P(A) \leqslant M\cdot 1_E$ 和 $\|P(A)\| \leqslant \sup(|m|,|M|)$[①].

这些结果首先能推出如果多项式序列 $\{P_n\}$ 一致收敛于 $[a,b]$ 上的连续函数 $f$, 则序列 $\{P_n(A)\}$ 是巴拿赫空间 $\mathcal{L}(E)$ 中的柯西序列, 它的极限只依赖于 $f$, 因此可以写成 $f(A)$. 映射 $f\mapsto f(A)$ 是从代数 $\mathcal{C}([a,b])$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的同态, 它在 $\mathcal{H}(E)$ 中取值, 从而对这个术语的选取是正确的. 如果在 $[a,b]$ 上 $m\leqslant f(\xi)\leqslant M$, 则也能得出 $m\cdot 1_E \leqslant f(A)\leqslant M\cdot 1_E$.

不过里斯走出了更远的一步. 如果 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上连续函数的递增序列, 且它是一致有界的, 则对每个 $x\in E$, 序列 $\{f_n(A)\cdot x|x\}$ 是递增且有界的, 因此它有一个极限, 从而由线性可以得出对 $E$ 中的任意元素对 $x$ 和 $y$, 序列 $\{f_n(A)\cdot x|y\}$ 是收敛的. 黑林格 – 特普利茨 (Hellinger–Toeplitz) 定理 (第五章, 第 4 节) 表明这个极限可以写成 $(B\cdot x|y)$, 其中 $B\in\mathcal{H}(E)$. 如果 $g$ 是序列 $\{f_n\}$ 的 (单个) 极限, 重新记 $B=g(A)$, 这使得能对 $[a,b]$ 上任意有界的 (上界或下界) 半连续函数或对这些函数的线性组合来定义 $g(A)$, $g(A)$ 又能构成一个代数且 $g\mapsto g(A)$ 是一个同态.

里斯运用这些结果得出了下面的谱分解: 如果 $e_\xi$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 它使得当 $u<\xi$ 时, 有 $e_\xi(u)=1$, 当 $u\geqslant\xi$ 时, 有 $e_\xi(u)=0$, 则 $e_\xi(A)=A_\xi$ 是有定义的, 因为 $e_\xi$ 是有界且下半连续的. 对任一向量对 $x,y$, 函数 $\xi\mapsto(A_\xi\cdot x|y)$ 是一个有界变差函数, 对任一连续函数 $f$, 有

$$(f(A)\cdot x|y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d(A_\xi\cdot x|y), \tag{12}$$

[①]里斯并不是这样进行讨论的, 他将 $A$ 的 "部分" $A_n$ 的已知结果极限过渡而得到了这一结果.

这个公式也可以写成

$$f(A)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)dA_\xi, \tag{13}$$

公式 (13) 被证明是正确的, 这是因为对任意 $\varepsilon>0$, 按照下面方式

$$-\varepsilon\cdot 1_E \leqslant f(A)-\sum_k f(\mu_k)(A_{\xi_{k+1}}-A_{\xi_k})\leqslant \varepsilon\cdot 1_E,$$

用点 $\xi_k$ 将区间 $[a,b]$ 进行分割, 其中 $\xi_k\leqslant\mu_k\leqslant\xi_{k+1}$. $A$ 的谱[①] 包含在区间 $[a,b]$ 上, 它是一些点的集合的补集, 这些点具有一个邻域, 在这个邻域中 $\xi\mapsto A_\xi$ 是常数.

算子 $A_\xi$ 是 $E$ 到一个闭子空间 $E_\xi$ 的正交投影算子, $E_\xi$ 在 $A$ 作用下是稳定的, 对所有 $x\neq 0$, 在 $E_\xi$ 中有 $(A\cdot x|x)<\xi(x|x)$. $1_E-A_\xi$ 是 $E$ 到子空间 $E_\xi^\perp$ 的正交投影算子, 其中 $E_\xi^\perp$ 与 $E_\xi$ 正交, 且在 $E_\xi$ 中有 $(A_\xi\cdot x|x)<\xi(x|x)$. $A$ 的点谱是 $\xi$ 值的可数集, 其中函数 $\xi\mapsto(A_\xi\cdot x|y)$ 中至少有一个是非连续的. $A$ 的点谱包含 $A$ 的所有特征值, 由相应特征向量生成的子空间 $N_\xi$ 可能是无穷维的. 子空间 $E_\xi$ 使得当 $\xi<\eta$ 时, 有 $E_\xi\subset E_\eta$, 当 $\xi<a$ 时, 有 $E_\xi=\{0\}$, 当 $\xi>b$ 时, 有 $E_\xi=E$. 当 $\xi<\eta$ 时, 如果 $\xi$ 不是点谱, 则子空间 $E_\eta$ 的交可以约简为 $E_\xi$, 如果 $\xi$ 是点谱, 则子空间 $E_\eta$ 的交是 (正交) 子空间 $E_\xi$ 和 $N_\xi$ 的直和.

如果 $(A\cdot x|y)=\sum_{i,k}a_{ik}x_iy_k$ 是对应于算子 $A$ 的 "有界" 双线性形式, 则对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量 $x=\{x_k\}$ 的坐标是线性方程组

$$\lambda x_i-\sum_k a_{ik}x_k=0\quad(i=1,2,\cdots) \tag{14}$$

的解. 不过, 希尔伯特的理论没有回答这样一个问题, 即当谱中的数 $\lambda$ 不是点谱时, 如何确定一些可以代替特征向量的 "对象". 在一些情形中这个问题有奇特的答案. 例如, 对于二次型 (11), 它没有点谱且谱为区间 $[-1,1]$, 对这个区间上的每个值 $\lambda=\cos t$, 方程组 (14) 有一个解, 即当 $k=1,2,\cdots$ 时, 容易验证 $x_k(t)=\sin kt$ 是一个解. 但是对这样一个序列, 级数 $\sum_k x_k(t)^2$ 不收敛. 这样的 "广义特征向量" 的存在性

[①] 把希尔伯特 "谱" 的概念转换到里斯的概念时, 必须要用 $1/\xi$ 来代替希尔伯特的参数 $\lambda$.

仅包含在后来更加一般的定理中 (见第九章, 第 2 节). 但是对二次型 (11), 如果记 $\rho_k(\xi)=\int_0^{\xi} x_k(t)dt$, 则对所有 $\xi\in\mathbb{R}$, 向量 $(\rho_k(\xi))_{k=1,2,\cdots}$ 属于 $E$, 从 $x_k(t)$ 满足的关系式 (14) 中可以得出对 $\mathbb{R}$ 的任一区间 $[\lambda_1,\lambda_2]$, 可以写出

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\xi d\rho_i(\xi)-\sum_k a_{ik}(\rho_k(\lambda_2)-\rho_k(\lambda_1))=0\quad(i=1,2,\cdots). \tag{15}$$

这使得黑林格系统研究了有界变差的函数序列 $\{\rho_k(\xi)\}_{k=1,2,\cdots}$, 它对所有区间满足 (15), 且对所有 $\xi$, $\sum_k \rho_k(\xi)^2$ 是有限的, 他称 $d\rho_k$ 为算子 $A$ 的 "特征微分". 这一研究使得他攻克了希尔伯特的谱理论引起的问题, 他是借助与有限维情形的类似性来完成的: 对算子 $A$ 和 $B$, 是否能得到具有与对称矩阵 "相似" 一样的充分必要条件, 也就是说, 是否存在一个 $E$ 到自身的正交变换 $U$ 使得 $B=UAU^{-1}$? 在有限维情形中, 这一充分必要条件是 $A$ 和 $B$ 的特征值相等, 且每个特征值具有相同的重数. 结合黑林格和哈恩 [95] 的成果可以对 $l^2_{\mathbb{R}}$ 上的算子得到一个充分必要条件, 可以用 "特征微分" 构成的特殊系来表述这个条件. 在这里我们不陈述这些复杂条件的细节, 我们将会借助交换巴拿赫代数的盖尔范德 (Gelfand) 理论以一种更加简单的方式来阐述 (见第 5 节).

里斯方法的成果之一是他能够给出 $A$ 的全部谱的直接定义, 一点都不涉及分解 (12): 点 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是谱当且仅当算子 $\lambda\cdot 1_E-A$ 不具有连续逆算子. 最后, 他指出他的方法 (即希尔伯特的方法) 可以推广到复希尔伯特空间 $l^2_{\mathbb{C}}$ 中的自伴有界算子 $A$ 上, 也就是说, 对这个空间上的埃尔米特数量积, 这些算子是满足相同条件 $(A\cdot x|y)=(x|A\cdot y)$ 的算子. 从而映射 $\zeta\mapsto(\zeta\cdot 1_E-A)^{-1}$ 在 $A$ 的谱之外是全纯的. 1913 年之后, 有关希尔伯特空间上谱理论的几乎所有文章都在处理复希尔伯特空间.

## §3 外尔和卡莱曼的工作

希尔伯特将 "有界" 双线性形式 $K(x,y)$ 与具有对称核 $K(s,t)$ 的积分方程联系起来的方法 (第五章, 第 2 节) 是有效的, 即使 $K^2(s,t)$ 在

$[a,b]\times[a,b]$ 上不可积, 相应的双线性形式可能不是 "全连续的", 这一方法也是有效的. 早在 1906 年的课程中, 希尔伯特对区间 $[0,1]$ 给出 $K(s,t)=(s+t)^{-1}$ 的一个例子 ([227], vol. I, p. 83), 在他的研讨班中他认识到当区间 $[a,b]$ 无界时, 弗雷德霍姆定理是不成立的, 他也用它作为例子解释了傅里叶反演公式 (1) ([227], vol. I, p. 2): 在区间 $[0,+\infty)$ 上当 $K(s,t)=\cos st$ 时, $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ 和 $-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ 是仅有的特征值, 而且它们都有无穷重数①. 因此, 他鼓励他最有天赋的学生外尔 (Hermann Weyl) 来研究这些 "奇异" 积分方程, 尤其对核 $K(s,t)$ 来确定一些条件, 这些条件能推出双线性形式 $K(x,y)$ 是 "有界" 的, 从而能将 "奇异" 积分方程纳入到他的谱理论中. 这是外尔博士论文的主题, 他在其博士论文和随后的文章 ([227], vol. I, p. 2–86 和 102–153) 中对 $[a,b)=[0,+\infty)$ 给出了下面充分条件:

1° 对每个 $s\geqslant 0$, 积分 $\displaystyle\int_0^\infty K^2(s,t)dt$ 有限;

2° 存在一个常数 $M\geqslant 0$, 使得对满足

$$\int_0^\infty (u(s))^2ds\leqslant 1$$

和

$$\int_0^\infty (v(s))^2ds\leqslant 1$$

的所有连续函数对 $u$ 和 $v$, 都有

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty K(s,t)u(s)v(t)dsdt\right|\leqslant M.$$

这一研究的另一方面源自用积分方程的语言来解释施图姆 – 刘维尔理论 (第一章, 第 3 节). 考虑一个二阶微分方程

$$y''-q(x)y+\lambda y=f(x),\tag{16}$$

其中 $q$ 和 $f$ 是紧区间 $[a,b]$ 上的连续函数, $q$ 有实值, $f$ 有实或复值, $\lambda$ 是一个复参数. 另外, 我们有两个边值条件

$$y(a)\cos\alpha-y'(a)\sin\alpha=0,\quad y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0,\tag{17}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是两个取值为正数的常数. 基础性的讨论表明当 $f=0$ 时, 如果 $\lambda\leqslant -r$, 则齐次方程 (16) 在边值条件 (17) 下没有解, 其中 $r$ 是大

①第一次出现了傅里叶变换和泛函分析之间的关系 (见第 6 节).

于 0 的数且与 $q$ 有关. 用 $q(x)+r$ 代替 $q(x)$, 用 $\lambda+r$ 代替 $\lambda$, 可以看出当 $\lambda \leqslant 0$ 时, 齐次方程 $y''-q(x)y+\lambda y=0$ 没有满足条件 (17) 的解.

现在先来考查方程 (16) 在 $\lambda=0$ 时的情形. 方程 $y''-q(x)y=0$ 存在两个使得 $u_1(a)\cos\alpha-u_1'(a)\sin\alpha=0$, $u_2(b)\cos\beta-u_2'(b)\sin\beta=0$ 成立的解 $u_1$ 和 $u_2$, 且 $u_1$ 和 $u_2$ 是线性无关的. 对每个 $t\in[a,b]$, 定义函数

$$\begin{cases} K(t,x)=-u_2(t)u_1(x)/d, & a\leqslant x\leqslant t,\\ K(t,x)=-u_1(t)u_2(x)/d, & t\leqslant x\leqslant b, \end{cases} \tag{18}$$

其中 $d$ 是常数 $u_1(x)u_2'(x)-u_2(x)u_1'(x)$. 函数 $x\mapsto K(t,x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在每个半开区间 $a\leqslant x<t$, $t<x\leqslant b$ $(a<t<b)$ 上, 这个函数满足方程 $y''-q(x)y=0$, 另外它还满足条件 (17). 最后, 函数 $x\mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}K(t,x)$ 在点 $x=t$ 处是非连续的, 这一点使得 $\dfrac{\partial}{\partial x}K(t,t_+)-\dfrac{\partial}{\partial x}K(t,t_-)=-1$. 经过计算可以得出如果要使得函数 $y$ 是方程 $y''-q(x)y=f(x)$ 的满足条件 (17) 的解, 必须要有

$$y(x)=-\int_a^b K(t,x)f(t)dt, \tag{19}$$

从而方程 (16) 的满足 (17) 的解实际上是积分方程

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(t,x)y(t)dt=g(x) \tag{20}$$

的解, 其中

$$g(x)=-\int_a^b K(t,x)f(t)dt. \tag{21}$$

显然, 这一方法模仿了施瓦茨借助拉普拉斯的格林函数来求解薄膜振动方程的方法 (第三章, 第 1 节), 因此对算子 $L(y)=y''-q(x)y$ 和边值条件 (17), 函数 $K$ 被称为格林函数 [35]. 因为 $K(x,t)=K(t,x)$, 所以施图姆 – 刘维尔问题可以化简为弗雷德霍姆 – 希尔伯特对称核积分方程的特殊情形.

在 1904 年关于积分方程的第二篇的文章中, 希尔伯特发展了这一方法并将其推广到不同于 (17) 的边值条件上. 他意识到从 18 世纪以来分析学中引入的许多 “特殊函数” (超几何函数、贝塞尔函数、勒让德多项式及埃尔米特函数等) 都满足形如 (16) 的方程, 而且只有很

少的限制条件: 用一个无界区间代替区间 $[a,b]$, 函数 $q$ 在区间的端点处有奇异点. 在这一情形中, 希尔伯特提出应该用其他条件来代替相应的边值条件, 这一条件在端点处 $y$ 是有界的, 或者 $y$ 趋于无穷时的速度没有某个给定的奇异函数的速度快. 他接着用各种事例表明即使在这样 "奇异" 的情形下, 用对称特征 $K(t,x)=K(x,t)$ 定义一个 "格林函数" $K$, 在 $x=t$ 处 $K$ 关于偏导数同样具有非连续性. 例如, 如果 $L(y)=y''+y$, 则在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $K(x,t)=-\dfrac{1}{2}\sin|x-t|$. 希尔伯特当时还没有发展他的 "有界" 双线性形式的理论, 所以他只考虑了格林函数 $K$ 是积分方程的核的情形, 在这一情形中弗雷德霍姆理论是适用的 ([112], p. 39–58). 当然他在一些例子中意识到人们可能会关注 "奇异" 积分方程, 这些例子包括上面提到的例子. 希尔伯特的学生希尔 (E. Hille) 在他 1908 年 "取得大学授课资格的文章" 中将希尔伯特 "有界" 线性形式的理论应用到 "奇异" 施图姆 – 刘维尔问题的两种特殊情形上 [110].

1909—1910 年间, 外尔发现他可以用他博士论文中的结果来处理形如

$$L(y)=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y \tag{22}$$

的二阶算子的最一般问题, 其中 $p$ 和 $q$ 是区间 $I\subset\mathbb{R}$ (有界或无界) 上的实连续函数, 唯一的限制条件是在区间 $I$ 上 $p(x)>0$. 在他 "取得大学授课资格的文章" 中 ([227], vol. I, p. 248–297), 他考虑了 $I=[0,+\infty)$ 的情形, 他最原创的方法是对非实数的 $\lambda$ 值, 研究了方程

$$L(y)+\lambda y=0, \tag{23}$$

事实上, 他认识到只需要考虑 $\lambda=i$ 的情形. 令 $u_1$ 和 $u_2$ 是 $L(y)+iy=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上的两个解, 它们满足初始条件

$$u_1(0)=1,\quad p(0)u_1'(0)=0,\quad u_2(0)=0,\quad p(0)u_2'(0)=1.$$

令 $\alpha$ 是任一大于等于 0 的数, 考虑 $L(y)+iy=0$ 的两个解

$$v_\alpha=-\sin\alpha\cdot u_1+\cos\cdot u_2,\quad w_\alpha=\cos\alpha\cdot u_1+\sin\alpha\cdot u_2,$$

从而 $v_\alpha$ 是满足边值条件

$$\cos\alpha\cdot y(0)+\sin\alpha\cdot p(0)y'(0)=0 \tag{24}$$

的解. 现在任取 $a>0, \beta \geqslant 0$ 来确定复数 $\mu$, 用的条件是解 $u_\mu = v_\alpha + \mu w_\alpha$ 满足边值条件

$$\cos\beta \cdot y(a) + \sin\beta \cdot p(a)y'(a) = 0. \tag{25}$$

外尔表明当 $\beta$ 从 0 变到 $2\pi$ 时, 唯一确定的数 $\mu$ 刻画了上半平面 $\vartheta z > 0$ 上的一个圆 $\Gamma_a$.

从 $v^\alpha$ 和 $u_\mu$ 这两个解出发, 可以用与 (18) 相同的公式在区间 $[0,a]$ 上构造一个格林函数 $K_a^\mu(t,x)$, 除了 $K_a^\mu$ 有复值的情形之外. 现在令 $a$ 趋于 $+\infty$, 外尔指出圆 $\Gamma_a$ 可以形成一个单径递减的嵌套族, 因此有一个极限 $\Gamma_\infty$, 它可能是一个半径大于 0 的圆, 或者是单个点. 无论如何, 如果令点 $\mu \in \Gamma_a$ 趋于一个极限 $\mu_0 \in \Gamma_\infty$, 则 $u_\mu$ 趋于解 $u_{\mu_0}$, $K_a^\mu$ 趋于核 $K^{\mu_0}(t,x)$, 通常情况下核 $K^{\mu_0}(t,x)$ 满足外尔博士论文中的两个条件. 这一点使得能将希尔伯特 "有界" 双线性形式的理论应用到相应的奇异积分方程上. 就像对通常的施图姆 – 刘维尔问题那样, 函数

$$y(x) = -\int_0^\infty K^{\mu_0}(t,x)f(t)dt \tag{26}$$

是

$$L(y) + iy = f(x) \tag{27}$$

的解, 这个解在端点 0 处满足边值条件 (24), 在 "无穷远处" 满足条件

$$\lim_{t\to+\infty} p(t)(y(t)u'_{\mu_0}(t) - u_{\mu_0}(t)y'(t)) = 0. \tag{28}$$

此外, 解 $u_{\mu_0}$ 属于 $L^2(0,\infty)$. 外尔接着表明问题可以分为下面两种情形来考虑:

I) "极限圆" 的情形: $\Gamma_\infty$ 是半径大于 0 的圆. $L(y)+iy=0$ 的所有解属于 $L^2(0,\infty)$, 对所有 $\mu_0 \in \Gamma_\infty$, $K^{\mu_0}$ 是希尔伯特 – 施密特核. 施图姆 – 刘维尔理论的结论对方程 (23) 也是成立的, 方程 (23) 在端点 0 处满足边值条件 (24), 它也满足 (28) 的实数部分在端点 $+\infty$ 处等于 0.

II) "极限点" 的情形: $\Gamma_\infty$ 可以约简到一个单点 $\mu_0$. $u_{\mu_0}$ (取决于常数因子) 是 $L(y)+iy=0$ 的属于 $L^2(0,\infty)$ 的唯一解, 外尔的主要目标是建立积分公式, 这些积分公式可以代替古典施图姆 – 刘维尔理论中的 "傅里叶展式", 就像维尔丁格所期望的那样, 而且希尔在特殊情形中得到了这一结果. 将他博士论文中的结果应用到核为 $K^{\mu_0}$ 的虚部

的 "奇异" 积分算子上, 并运用黑林格的 "特征微分", 外尔做到了这一点. 他也给出了微分算子 $L$ 的谱的定义, 即参数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的集合的补集, 对这些参数, 微分方程 $L(y)+\lambda y = g(x)$ 具有属于 $L^2(0,\infty)$ 的解, 且对每个属于 $L^2(0,\infty)$ 的连续函数 $g$, 这个解满足 (24). 他对函数 $p$ 和 $q$ 给出各种假设, 他在这些假设条件下研究了这个谱的结构. 特别地, 他给出一个例子, 这个例子中的谱在整个实线上. 最终, 在随后的一篇论文中 ([227], vol. I, p. 222–247), 他指出当区间 $I$ 为整个实线 $\mathbb{R}$ 时, 如何来推广他的理论, 他也指出在两个端点处方程属于 "极限点" 的情形.

依后来冯 · 诺依曼理论 (见第 4 节) 的先进观点来看, 外尔的这些显著结果可以看成是对希尔伯特空间中具有非零 "亏量" 的无界埃尔米特算子的首次研究, 也可以看成是对无界埃尔米特算子自伴延拓的首次研究. 具有复值的核 $K^{\mu_0}$ 定义的奇异积分算子可能是希尔伯特空间中正规算子的第一个例子, 但是它不是自伴算子①.

1920 年, 这样的现象在卡莱曼 (T. Carleman) 关于奇异积分方程的工作中变得更加明显 ([37] 和 [38], p. 313–342). 他从只满足外尔的第一个假设条件的核开始研究, 即 $\int_a^b |K(s,t)|^2 dt$ 几乎处处有限 (现在称它们为卡莱曼核, 对应的算子 $s \mapsto \int_a^b K(s,t)f(t)dt$ 与 $f$ 有关, 称它为卡莱曼算子). 他处理这些算子 (埃尔米特核) 的理论时, 用的方法与外尔的相似: 他考虑 $[a,b]$ 的可测子集做成的递增序列 $\{A_n\}$, 在考虑空集的情况下 $\{A_n\}$ 的并等于 $[a,b]$, 当 $(s,t) \in A_n \times A_n$ 时, $K_n(s,t) = K(s,t)$, 否则 $K_n(s,t) = 0$, 此时核有一个有限的积分 $\int_a^b \int_a^b |K_n(s,t)|^2 ds dt$. 如果现在考虑积分方程

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt = f(s), \tag{29}$$

其中 $\lambda$ 不是实数, $f$ 属于 $L^2([a,b])$, 则可以用通常的希尔伯特 – 施密特积分方程

$$\varphi_n(s) - \lambda \int_a^b K_n(s,t)\varphi_n(t)dt = f(s) \tag{30}$$

① 1877 年, 弗罗贝尼乌斯用条件 $AA^* = A^*A$ 给出了具有复元素的正规方阵 $A$ 的定义. 他指出这个条件等价于存在使得 $UAU^{-1}$ 是对角矩阵的酉矩阵 $U$ [78, vol. I, p. 391].

构成的序列来逼近它, 对适当的 $\lambda$, (30) 有唯一解 $\varphi_n \in L^2([a,b])$. 卡莱曼的原始步骤是对 (30) 乘以 $\overline{\varphi_n(s)}$ 后进行积分, 由此他得到了虚部间与核无关的等式

$$\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)\int_a^b |\varphi_n(s)|^2 ds = \frac{1}{\lambda}\int_a^b \overline{\varphi_n(s)} f(s) ds - \frac{1}{\overline{\lambda}}\int_a^b \varphi_n(s)\overline{f(s)} ds, \quad (31)$$

他通过运用柯西 – 施瓦茨不等式, 从这个式子中推出

$$\int_a^b |\varphi_n(s)|^2 ds \leqslant \frac{4|\lambda|^2}{|\lambda-\overline{\lambda}|^2}\int_a^b |f(s)|^2 ds. \quad (32)$$

借助希尔伯特的 "选择原理" 和里斯有关稠密性的讨论, 卡莱曼通过令 $n \to +\infty$ 能在 $L^2$ 中定义一个线性映射 $f \mapsto T_\lambda \cdot f$, 它使得对每个 $f \in L^2$, $\varphi = T_\lambda \cdot f$ 是 (29) 的一个解, 在 (32) 中极限过渡可以得出 $T_\lambda$ 是连续的. 他还写出了等价于

$$T_\lambda \cdot f = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda-\overline{\lambda}}(f + U_\lambda \cdot f) \quad (33)$$

的方程而且得出 $\|U_\lambda \cdot f\| \leqslant \|f\|$.

他意识到对非实数的 $\lambda$, (29) 的解可能不唯一. 他给出了导致这种现象出现的核的例子, 他称这些核为类 II 核, 称其他的核为类 I 核. 他也表明这些核可能比里斯的连续算子或外尔考虑的核更一般.

对 $L^2$ 中的任意函数 $\varphi$ 和 $\psi$, 可以对埃尔米特的卡莱曼核 $K$ 定义函数

$$S \cdot \varphi : s \mapsto \int_a^b K(s,t)\varphi(t) dt, \quad S' \cdot \psi : s \mapsto \int_a^b K(t,s)\psi(t) dt, \quad (34)$$

且 $L^2$ 中满足 $S \cdot \psi \in L^2$ ($S' \cdot \psi \in L^2$) 的函数构成的集合 $D$ ($D'$) 通常是 $L^2$ 的一个真子空间, $D'$ 是 $D$ 中函数的复共轭构成的. 卡莱曼表明 $K$ 是 "类 I 核" 的充分必要条件是对 $D$ 中所有的 $f$ 和 $g$, 关系式

$$\int_a^b f(s)(S' \cdot \overline{g})(s) ds = \int_a^b \overline{g(s)}(S \cdot f)(s) ds \quad (35)$$

成立.

他接下来就像希尔伯特在希尔伯特 – 施密特核的公式中 (第五章, 第 2 节, 公式 (24)) 那样, 令核 $K_n$ 及其共轭 $\overline{K_n}$ 中的 $n$ 趋于 $+\infty$, 从而他对对应于 $K$ 和 $\overline{K}$ 的算子 $T_\lambda$ 和 $T'_\lambda$ 得到了类似于希尔伯特在他

的 "有界" 二次型理论中得到的公式. 对 "类 II" 核, 对这些公式的研究使得卡莱曼挑出这样的情形来单独考虑, 即 (33) 中的算子 $U_\lambda$ 和 $T'_\lambda$ 相应的算子 $U'_\lambda$ 都是酉的. 他表明这一特征与半平面 $\vartheta\lambda > 0$ 或 $\vartheta\lambda < 0$ 中非实数 $\lambda$ 的选取无关, 他也表明这能推出 $L^2$ 中 $\varphi - \lambda S \cdot \varphi = 0$ 和 $\psi - \lambda S' \cdot \psi = 0$ 的解空间的维数相同. 最后, 他证明了在这种情形下对相同的核 $K$, 存在无穷多个算子 $T_\lambda$ 和 $T'_\lambda$ (他称之为 "极大解"), 它们具有上面的特征.

所有这些结果都令人非常惊讶. 特别是, 对实数 $\lambda$, $L^2$ 中方程 $\varphi - \lambda S \cdot \varphi = 0$ 的解 $\varphi \neq 0$ 存在, 这似乎与古典的讨论相矛盾 (回想泊松 (第一章, 第 3 节), 甚至来回想一下拉格朗日在有限维的情形下的结果 ([135], vol. XIII, p. 239)). 因为对所有 $\varphi$, 数 $(S \cdot \varphi|\varphi)$ 都是实数, 所以不可能存在非实数 $\lambda$ 使得当 $\varphi \neq 0$ 时, 有 $\varphi = \lambda S \cdot \varphi$, 这是因为它可以推出 $(\varphi|\varphi) = \lambda(S \cdot \varphi|\varphi)$. 我们将会在下一部分看到冯 · 诺依曼理论是如何来解决这一明显的矛盾的, 冯 · 诺依曼理论将卡莱曼的先驱性结果安置到恰当的位置中.

## §4 冯 · 诺依曼的谱理论

1926 年秋天, 年轻的冯 · 诺依曼 (1903—1957) 来到哥廷根, 作为希尔伯特的助手开始了他的研究. 这几年, 量子力学以飞快的速度发展, 每几个星期就有新的思想产生 [121]. 发展新理论的理论物理学家们寻找合适的数学工具, 他们使用了无穷维矩阵, 不过没有考虑收敛性[①], 也使用了微分算子和 "连续" 矩阵 (不管它具有什么意思) 等. 最终他们明白他们的 "观察物" 具有一些特征, 这些特征使得它看起来像希尔伯特空间中的埃尔米特算子, 非常巧合的是他们发现希尔伯特的 "谱" (他显然是根据表面的类似性来选取这个名字的) 是解释原子的 "谱" 的核心概念. 因此, 他们自然想到来寻求希尔伯特的帮助, 进而使他们的计算具有数学意义. 在诺德海姆 (Nordheim) 和冯 · 诺依曼的帮助下, 希尔伯特最早尝试用 $L^2$ 中的积分算子, 但是这需要用到狄拉克的 "$\delta$ 函数", 这一概念对当时的数学来说是自相矛盾的 (第八章, 第 3 节). 因此, 冯 · 诺依曼需要用别的方法来解决.

[①] 一直到 1924 年, 大多数物理学家甚至都不知道有限矩阵!

分析学家开始熟悉费舍尔 – 里斯定理 (第五章, 第 3 节), 这个定理表明序列空间 $l^2_{\mathbb{C}}$ 与定义在 $\mathbb{R}^n$ 的某个子集 $\Omega$ 上的平方可积函数构成的空间 $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ 是同构的, 人们将这些 "具体" 空间中的某个空间理解为 "希尔伯特空间", 这些空间上的 "算子" 要么是 "矩阵", 要么是某种类型的 "积分算子". 冯 · 诺依曼最早构想建立 "抽象" 的希尔伯特空间, 用公理化定义 "抽象" 希尔伯特空间为带有埃尔米特数量积, 在相应的范数意义下可分和完备的复向量空间, 从而通常的 "具体" 希尔伯特空间可以 "转化" 成为 "抽象" 空间. 这一步非常关键, 它使得数学家开始全面理解希尔伯特空间中正规算子和埃尔米特算子的谱理论, 冯 · 诺依曼在他出版于 1929 年至 1932 年间的 3 篇基础性论文中继续完善了这一谱理论, 时至今日他的工作 (除了对谱的描述外, 见第 5 节) 基本上仍然是对这一课题的定性描述 ([221], vol. II, p. 1–85, 86–143 及 242–258)[①].

冯 · 诺依曼没有对希尔伯特空间进行任何 "具体" 的描述, 而是从本质上开始研究, 他只用到一些概念, 这些概念可以用公理中列举出的概念来直接定义, 从而不包括其他别的概念. 这一点使得他发现了一系列显著的全新思想和方法.

1) 量子力学中使用的大多数算子不能定义在整个希尔伯特空间上. 例如 $L^2(\mathbb{R})$ 中, 像 $x \mapsto x$ 的不动函数的乘积得到的算子或函数的导数得到的算子都不能定义在整个空间上. 因此, 人们需要考虑通常情况下在整个希尔伯特空间 $E$ 上取值的线性映射 $T$, 它的定义域却是一个真子空间 $dom(T)$ ($T$ 的 "域"). 最有趣的情形是稠定算子 $T$, 也就是说, $dom(T)$ 在 $E$ 中稠密 (正如前面的两个例子).

2) 如果 $dom(T)$ 在 $E$ 中稠密, 且 $T$ 是连续的, 则 $T$ 可以立刻延拓到整个空间 $E$ 上, 从而可以将其纳入到希尔伯特理论中. 冯 · 诺依曼想引入更弱的条件来代替连续性, 即用 $T$ 的图像 $\Gamma(T)$ 在 $E \times E$ 上是闭的这一条件来代替, 这时 $T$ 被称为是闭算子. 显然, 当 $dom(T) = E$ 时, 如果 $T$ 连续, 则 $T$ 是闭的, 反过来可以由闭图像定理得出 (第六章,

[①]同一时期, 斯通独立于冯 · 诺依曼得到了自伴 (无界) 算子的相同结果 [206], 他后来又对整个理论及其在当时的应用给出了一个教学式的阐述, 他的表达比冯 · 诺依曼论文中的表达更清楚, 他的这一工作成为这一课题多年的参考文献 [207].

第 5 节). 1) 中给出的两个例子中, 第一个是闭的, 第二个不是.

3) 最后一个例子引起了这样一个问题, (如果可能的话) 如何将一个不是闭的稠定算子 $T$ 延拓为一个闭算子. 冯 · 诺依曼将它与自伴算子概念的推广联系起来, 从而对这个问题给出一个完美的回答, 不过对有界算子这个问题是已知的. 通常, 对一个稠定算子 $T$ 和向量 $y \in E$, 定义在 $dom(T)$ 上的线性形式 $x \mapsto (T \cdot x|y)$ 不必是连续的. 如果它是连续的, 通过连续性它可以唯一延拓到 $E$ 上, 从而对唯一一个向量 $y^* \in E$, 它可以写成 $x \mapsto (x|y^*)$. 具有这一特征的向量 $y \in E$ 构成的集合是一个向量子空间, 如果对这些向量记 $y^* = T^* \cdot y$, 则 $T^*$ 是定义在这个子空间 (因此它是 $dom(T^*)$) 上的线性算子. 现在容易表明 $T^*$ 通常是闭的 (即使 $T$ 不是闭的), 它的图像是 $E$ 的子空间, $E$ 是 $J(\Gamma(T))$ 的闭包的正交补, 其中 $J$ 是 $E \times E$ 的线性自同构 $(x, y) \mapsto (y, -x)$ (称其为 "右角的旋转"!). 冯 · 诺依曼依据对 $dom(T^*)$ 的这种解释证明下面条件是等价的:

a) $T$ 可以被延拓成一个闭算子 (称 $T$ 是准闭算子);

b) $T^*$ 是稠定算子.

可以给出一些 $dom(T^*) = \{0\}$ 的例子. 如果 $T$ 是闭的, 则 $T$ 的最小闭延拓是 $T^{**}$, 且可以得出 $\Gamma(T^{**}) = \Gamma(T)$ 和 $(T^{**})^* = T^*$.

4) 闭稠定算子不是处处有定义的这一事实使得对这些算子的代数组合的研究比较困难: $A + B$ 只在 $dom(A) \cap dom(B)$ 上有定义, $AB$ 只在 $dom(B) \cap B^{-1}(dom(A))$ 上有定义. 可以给出一个闭稠定算子 $dom(T^2) = \{0\}$ 的例子. 然而, 冯 · 诺依曼用闭的正交子空间 $\Gamma(T)$ 和 $J(\Gamma(T^*))$ 的直和分解 $E \times E$, 证明了对任一闭稠定算子 $T$, $dom(T^*T)$ 是稠密的, $T^*T$ 是闭的且 $(T^*T)^* = T^*T$. 而且, $1_E + T^*T$ (闭的且定义在 $dom(T^*T)$ 上) 是一个从 $dom(T^*T)$ 到整个空间 $E$ 上的双射, 它的逆 $B = (1_E + T^*T)^{-1}$ 是有界自伴算子而且是单射, 它的谱包含在区间 $[0, 1]$ 中.

5) 这些结果使得冯 · 诺依曼能够对 $E$ 中正规算子的谱理论给出一个全面的阐述. 根据定义, 正规算子是使得 $dom(N^*N) = dom(NN^*)$ 且 $N^*N = NN^*$ 的闭稠定算子 $N$. 最重要的正规算子有两类, 一类是自伴算子 (冯 · 诺依曼称其为 "极大值"), 它是由条件 $N^* = N$ 来定义

的 (当然可以用 $dom(N^*)=dom(N)$ 推出), 另一类是酉算子, 它有界且使得 $N^*N=1_E$ (因此它是可逆的且使得 $N^{-1}=N^*$).

里斯对有界算子的谱的定义可以推广到 $E$ 上的任一闭算子 $T$ 上. 如果满足下面两个条件, 则称复数 $\zeta$ 是 $T$ 的正则值: 条件 (1) 算子 $T-\zeta 1_E$ 是子空间 $dom(T)$ 到整个空间 $E$ 的双射, 条件 (2) 逆映射 $R_T(\zeta)$ (也称为 $T$ 的预解式) 是一个将 $E$ 映射到 $dom(T)$ 的有界算子. 因此 $T-\zeta 1_E$ 是单射, 它的像 $L$ 在 $E$ 中稠密, 从 $L$ 到 $dom(T)$ 的逆映射是连续的. $T$ 的正则值的集合在 $\mathbb{C}$ 中的补集 $Sp(T)$ 被定义为 $T$ 的谱, 而且从 $\mathbb{C}-Sp(T)$ 到 $L(E)$ 的映射 $\zeta\mapsto R_T(\zeta)$ 是全纯的. 对一个数 $\zeta\in Sp(T)$, 有下面三种可能性:

1° $T-\zeta 1_E$ 不是单射, 这表明存在一个 $x\in dom(T)$ 使得 $x\neq 0$ 且 $T\cdot x=\zeta x$, 换句话说, $\zeta$ 是 $T$ 的特征值, 则称 $\zeta$ 属于 $T$ 的点谱.

2° $T-\zeta 1_E$ 是单射且它的像 $L$ 在 $E$ 中稠密, 但是逆映射 $(T-\zeta 1_E)^{-1}$ 在 $L$ 中不连续, 则称 $\zeta$ 属于 $T$ 的连续谱.

3° $T-\zeta 1_E$ 是单射, 但是它的像 $L$ 在 $E$ 中不稠密, 则称 $\zeta$ 属于 $T$ 的剩余谱.

正规算子不存在剩余谱. 自伴算子是谱包含在 $\mathbb{R}$ 中的正规算子, 酉算子是谱包含在单位圆 $\mathbb{U}:|\zeta|=1$ 中的正规算子.

6) 冯 · 诺依曼推广了里斯对希尔伯特谱理论 (第 2 节) 的表述, 他表明对 $E$ 中的每个自伴算子 $A$, 它很自然地与一个唯一的单位分解有关. 他的意思是说 $E$ 中的正交投影算子簇 $\lambda\mapsto E(\lambda)$ 与参数 $\lambda$ 有关, 且使得:

1° $E(\lambda)E(\mu)=E(\mu)E(\lambda)=E(\lambda),\ \lambda\leqslant\mu$;

2° 当 $\lambda>\lambda_0$ 趋于 $\lambda_0$ 时, $E(\lambda)$ 强趋于 $E(\lambda_0)$; 当 $\lambda$ 趋于 $-\infty$ 时, $E(\lambda)$ 强趋于 0, 且当 $\lambda\to+\infty$ 时, $E(\lambda)$ 强趋于 $1_E$;

3° 对任意 $x\in E$, 映射 $\lambda\mapsto\|E(\lambda)\cdot x\|^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上从 0 增加到 $\|x\|^2$, $dom(A)$ 实际上是使得斯蒂尔切斯积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 d(\|E(\lambda)\cdot x\|^2)$ 有限的 $x\in E$ 构成的集合.

4° 对任意 $x\in dom(A)$ 和任意 $y\in E$, 函数 $\lambda\mapsto(E(\lambda)\cdot x|y)$ 是有界

变差函数, 且有与斯蒂尔切斯积分一样的表达式

$$(A\cdot x|y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d((E(\lambda)\cdot x|y)),\quad (x|y)=\int_{-\infty}^{+\infty}d((E(\lambda)\cdot x|y)).\quad (36)$$

相应地, 对任意满足条件 1° 和 2° 的正交投影算子簇 $\lambda\mapsto E(\lambda)$, 条件 3° 和 4° 定义了一个自伴算子 $A$ 和它的定义域, 对算子 $A$ 而言给定的正交投影算子簇是它的单位分解. 算子 $A$ 有界当且仅当存在一个紧区间 $[\alpha,\beta]$ 使得当 $\lambda<\alpha$ 时, 有 $E(\lambda)=0$, 当 $\lambda>\beta$ 时, 有 $E(\lambda)=1_E$. $A$ 的谱是点 $\mu\in\mathbb{R}$ 构成的集合的补集, 这些点 $\mu$ 使得 $E(\lambda)$ 在它的邻域中为常数, $A$ 的点谱是使得 $E(\mu^-)$ 不同于 $E(\mu)$ 的点 $\mu$ 的集合.

对酉算子 $U$, 有一个类似的结果: $U$ 对应于一个满足上面条件 1° 和 2° 的唯一的单位分解 $\lambda\mapsto E(\lambda)$, 当 $\lambda<0$ 时, 有 $E(\lambda)=0$, 当 $\lambda>1$ 时, 有 $E(\lambda)=1_E$. 条件 3° 自动满足, (36) 的第一个关系式被

$$(U\cdot x|y)=\int_0^1 e^{2i\pi\lambda}d((E(\lambda)\cdot x|y))\quad (37)$$

代替. 对所有正规算子也有一个类似的 "分解", 我们在第 5 节将对它给出一个更加简单的等价描述.

7) 冯 · 诺依曼有关谱理论的工作中最有原创性的地方是他发现了希尔伯特空间 $E$ 中的埃尔米特算子并对该算子进行了研究, 埃尔米特算子不同于自伴算子. 埃尔米特算子 $H$ 是满足下面两个条件的稠定算子, (1) $dom(H)\subset dom(H^*)$, (2) $H^*$ 在 $dom(H)$ 中的限制等于 $H$, 换句话说, 对 $dom(H)$ 中的 $x$, $y$ 有

$$(H\cdot x|y)=(x|H\cdot y),\quad (38)$$

特别地, 对所有 $x\in dom(H)$, $(H\cdot x|x)$ 是实数. 这一点可以推出 $H$ 是闭的, 而且它的闭包 $H^{**}$ 也是埃尔米特算子. 因此我们可以只研究闭的埃尔米特算子. 冯 · 诺依曼的新思想是将 1855 年凯莱参数化正交群时引入的方法用到希尔伯特空间中: 他表明对一个 $n\times n$ 实反对称矩阵 $S$, 它使得 $\det(I+S)\neq 0$, $U=(I-S)(I+S)^{-1}$ 是一个正交矩阵, 且使得 $\det(I+U)\neq 0$ 的任一正交矩阵 $U$ 可以用这种方式来表示. 相似地, 对一个闭的埃尔米特算子 $H$, 当 $x\in dom(H)$ 时, 有 $\|x\|^2\leqslant\|H\cdot x+ix\|^2$, 这一点能推出闭算子 $H+iI$ 是 $dom(H)$ 上的单射,

且它能将 $dom(H)$ 映射到闭子空间 $F$ 上, $(H+iI)^{-1}$ 在 $F$ 上连续, 也能推出 $V: y \to (H-iI)(H+iI)^{-1}\cdot y$ 是 $F$ 到 $E$ 的闭子空间 $V(F)$ 的等距同构. 相应地, 如果 $U$ 是 $E$ 的闭子空间 $F$ 到另一个闭子空间 $U(F)$ 的等距同构, 且使得 $I-U$ 在 $F$ 中的像 $G$ 在 $E$ 中稠密, 则 $I-U$ 是 $F$ 到 $G$ 的双射. 如果对 $y \in G$, 记 $H\cdot y = i(I+U)(I-U)^{-1}\cdot y$, 则 $H$ 是闭埃尔米特算子, 它使得 $dom(H)=G$ 且 $U=(H-iI)(H+iI)^{-1}=V$ (上面定义的).

如果 $E_H^+$ 是 $F$ 在 $E$ 中的正交补, 则它是 $dom(H^*)$ 的子空间, $dom(H^*)$ 是由 $H^*\cdot x = ix$ 的解构成的. 相似地, $V(F)$ 在 $E$ 中的正交补 $E_H^-$ 是 $H^*\cdot x = -ix$ 在 $dom(H^*)$ 中的解所构成的空间的子空间, 且 $dom(H^*)$ 是 3 个子空间 $dom(H)$, $E_H^+$ 和 $E_H^-$ 的直和.

8) 这一方法使得冯 · 诺依曼对所有埃尔米特算子 $H_1$ 给出了一个描述, 算子 $H_1$ 可以延拓为一个给定的埃尔米特算子 $H$. 这一点能刻画等距同构 $V_1$ 是 $H_1$ 的 "凯莱变换": 取 $E_H^+$ 的闭子空间 $M$, 也取 $M$ 到 $E_H^-$ 的闭子空间 $N$ 的等距同构 $W$, 则 $V_1$ 被定义在希尔伯特和 $F_1 = E\oplus M$ 上, 且它在 $F$ 中等于 $V$, 在 $M$ 中等于 $W$. $E_{H_1}^+$ 是 $M$ 在 $E_H^+$ 中的正交补, $E_{H_1}^-$ 是 $N$ 在 $E_H^-$ 中的正交补. 只有当 $\dim(M) \leqslant \dim(E_H^-)$ 时, 这样的构造才有可能. $E_H^+$ 的维数 $d^+$ 和 $E_H^-$ 的维数 $d^-$ 被称为 $H$ 的 "亏量". 可以给出一些例子, 在这些例子中维数为任一积分值或是无穷的.

自伴算子被定义为满足 $H^*=H$ 的埃尔米特算子, 或等价地定义为亏量为 $(0,0)$ 的算子. 可以从前面的标记中得出, 能延拓为自伴算子的闭的埃尔米特算子实际上是两个亏量相等 (有限或无限) 的算子. 除非两个亏量都为 0, 否则就有无穷多个这样的自伴延拓.

为了给出一个亏量为 $(1,0)$ 的闭埃尔米特算子的例子, 冯 · 诺依曼取 $E$ 的规范正交基为 $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$, 他在 $E$ 中考虑正交于 $e_0$ 的闭超平面 $F$, 得出 $F$ 是由 $e_n (n\geqslant 1)$ 生成的. 他用 $U$ 表示 $F$ 到 $E$ 的等距同构, 记为 $U\cdot e_n = e_{n-1} (n\geqslant 1)$. 容易表明在 $I-U$ 的作用下 $F$ 的像在 $E$ 中稠密, 因此 $U$ 是具有所需特征的闭埃尔米特算子 $H$ 的凯莱变换. 另一个 (非闭的) 埃尔米特算子的例子是通过下面方法而给出的. 取 $E=L^2(I)$, 其中 $I$ 是 $\mathbb{R}$ 中的任一区间, $H=i\dfrac{d}{dx}$, 它定义在集合 $E$ 的子

空间上, 这里 $E$ 是满足下面两个条件的 $C^1$ 函数的集合, 其中 (1) $C^1$ 函数在 $I$ 的两端点处等于 0, (2) 它的导数是平方可积的 (或是在 $L^2(I)$ 中稠密的那个子空间的任一子空间, 例如在 $I$ 上具有紧支集的 $C^\infty$ 函数构成的空间). 从而可以表明如果 $I$ 有界, 则 $H^{**}$ 的亏量为 $(1,1)$; 如果 $I$ 只是上有界的, 则 $H^{**}$ 的亏量为 $(1,0)$; 如果 $I$ 只是下有界的, 则 $H^{**}$ 的亏量为 $(0,1)$; 如果 $I=\mathbb{R}$, 则 $H^{**}$ 的亏量为 $(0,0)$.

正如我们前面已经提到的 (第 3 节), 冯 · 诺依曼理论可以很容易地解释外尔有关实系数的二阶线性方程的结果: 微分算子 $L$ 是埃尔米特的, 在 "极限圆" 的情形下, $L^{**}$ 的亏量为 $(2,2)$, 在 "极限点" 的情形下, $L^{**}$ 亏量为 $(1,1)$. 这些结果预示了 1950 年左右发展起来的形式自伴线性微分方程的谱理论 (见第九章, 第 3 节).

冯 · 诺依曼理论也可以用下面方式解释卡莱曼的结果: 对一个卡莱曼核 $K$, 如果记 $k^2(s)=\int_a^b |K(s,t)|^2dt$, 则为了得到一个埃尔米特算子, 需要对第 3 节中的算子 $S$ (公式 (34)) 进行一些限制, 即要求它定义在使得积分 $\int_a^b k(s)|f(s)|ds$ 有限的函数 $f$ 构成的 (在 $L^2$ 中稠密) 子空间上. 从而 $S$ 是这个算子的伴随算子, 这一点解释了 $S\cdot\varphi=i\varphi$ 在 $D=dom(S)$ 中存在非零解, 这一点也表明适当限制的算子 $U_\lambda$ 与 "凯莱变换" 是一致的, 冯 · 诺依曼后来在更加一般的情形中定义了 "凯莱变换".

最后, 应该提一下冯 · 诺依曼在一篇特定的文章中 ([221], vol. II, p. 144–172), 研究如何用无穷矩阵来表示埃尔米特算子 (许多数学家, 甚至大多数物理学家都喜欢使用无穷矩阵). 他指出如果用通常的规则 $a_{mn}=(H\cdot e_m|e_n)$ 将埃尔米特算子 $H$ 和矩阵 $(a_{mn})$ 联系起来, 其中 $\{e_n\}$ 是希尔伯特空间中的规范正交基, 则立刻会遇到困难, 因为向量 $H\cdot e_m$ 应该是有定义的, 换句话说, 对所有 $n$, 应该有 $e_n\in dom(H)$, 且和式 $\sum\limits_n |a_{mn}|^2$ 应该都是有限的. 但是如果 $H$ 不是极大的 (也可以说两个亏量都大于 0), 则任一可以延拓为 $H$ 的埃尔米特算子显然具有相同的矩阵 $\{a_{mn}\}$. 冯 · 诺依曼详细地说明了矩阵和算子之间的非 "一对一" 对应关系如何导致产生这一反常的现象, 这也使得所有分析学家再次确信矩阵在谱理论中是一个完全不充分的工具.

## §5 巴拿赫代数

我们看到 (§2) 里斯可能是第一个考虑可分希尔伯特空间 $E$ 上的所有连续自同态构成的代数 $\mathcal{L}(E)$ 的数学家, 这个代数具有范数及后来所谓的强拓扑. 冯 · 诺依曼在他关于谱理论的第二篇文章 ([221], vol. II, p. 86–143) 中引入最一般形式的正规算子的概念, 从而开始对 $\mathcal{L}(E)$ 和它的子代数进行更加详细的研究. 他引入 $\mathcal{L}(E)$ 上的弱拓扑 (第八章, 第 1 节) 和 $\mathcal{L}(E)$ 的子集 $M$ 的交换子 $M'$ 的概念 (受到舒尔 (I. Schur) 关于群的线性表示工作的启发), 但有附加条件: $M'$ 包含所有算子 $A$, 不仅 $A$ 而且 $A^*$ 对 $M$ 中的所有元素都是可交换的. 他的兴趣在于 $\mathcal{L}(E)$ 的子代数 (后来称为对合子代数或 *-子代数), 这个子代数也包含每个元素 $A$ 的伴随 $A^*$. 在那篇文章中他对这样的子代数证明了最初的两个重要结果: 包含 $1_E$ 的 $\mathcal{L}(E)$ 的任一对合子代数 $M$ 的二重交换子 $M''$ 是 $M$ 的弱闭包; $\mathcal{L}(E)$ 的任意弱闭的交换子代数可由单个自伴算子 $A$ 生成. 稍后, 他指出对所有定义在 $\mathbb{R}$ 上的通用可测有界函数 $f$, 可以定义自伴算子 $A$ 的 "函数 $f(A)$" (正如里斯, 不仅是对半连续函数), 从而完成了后一个结果. 而且他证明 $A$ 生成的弱闭子代数包含前面定义的所有算子 $f(A)$ ([221], vol. II, p. 177–212).

但是对冯 · 诺依曼来说这仅仅只是个开始. 1926—1932 年间, 莫利恩 (Molien)、嘉当 (E. Cartan) 及韦德伯恩 (Wedderburn) 的 "超复数" 理论发展到了阿廷 (E. Artin) 和诺特 (E. Noether) 的 "环的降链条件" 理论, 紧随其后, 布饶尔 (R. Brauer)、哈塞 (H. Hasse) 和阿尔伯特 (A. Albert) 将它们应用到群的线性表示和数论上. 冯 · 诺依曼对这些发展非常感兴趣, 他考虑能否对 $\mathcal{L}(E)$ 的对合子代数建立类似的理论, 其中当然不可能有 "链条件", 但是可以用适当的拓扑限制来替代, 这将得到一个合理的分类 ([221], p. 89). 这远离了我们的主题 —— 我们的初衷是详细描述开始于 1935 年的一系列论文. 在这些论文中冯 · 诺依曼与默里 (F. Murray) 合作在这一课题上取得了很大的进展 (我们现在称之为冯 · 诺依曼代数), 即他们得到 $\mathcal{L}(E)$ 中对合子代数等于它们的二重交换子. 由于方法新颖、成果丰硕, 这些论文堪称是冯 · 诺依曼最具深度和难度的论文 ([221], vol. III). 它们揭示了许多完全未曾

预料到的事实, 最显著的一个结果是出现在具有平凡中心 (称它们为因子) 的冯 · 诺依曼代数的分类中的代数标号的 5 个类型, 即 $I_n$, $I_\infty$, $II_1$, $II_\infty$ 和 $III$, 其中 $I_n$ 表示 $n \times n$ 矩阵的代数, $I_\infty$ 是代数 $\mathcal{L}(E)$ 本身, 但是其他 3 种类型是完全未预料到的且展现出了新的性质, 例如在这些代数中投影算子的属性包含有一个 "维数", 对型 $II$ 的代数, 这些 "维数" 可能是 $[0,1]$ 或 $[0,+\infty)$ 中的任意实数, 而不是整数. 默里和冯 · 诺依曼对这些新代数的性质的阐述在 20 世纪后 40 年引起了许多数学家的关注, 及至最近一些问题才开始被解决, 如型 $III$ 的代数的分类问题 (见 [57], [210] 和 [44]). 此外, 自 1950 年以来, 冯 · 诺依曼代数成为局部紧的群的线性表示理论的重要工具 (见第 6 节). 近几年来, 它们与叶状结构和阿蒂亚 – 辛格 (Atiyah-Singer) 指标的推广产生了联系 (见 [58], [10], [31], [36], [45], [113], [132], [199]).

令人吃惊的是, 冯 · 诺依曼代数的艰深理论首先被发展起来, 而 5 年后赋范代数理论的基本概念才被定义! 1941 年, 盖尔范德 (I. Gelfand) 创建了赋范代数的理论 [83]. 对复数域 $\mathbb{C}$ 上的代数 $A$ 定义赋范空间的结构且 $A \times A$ 到 $A$ 的映射 $(x,y) \mapsto xy$ 是连续映射, 则称这个代数 $A$ 为复数域上的赋范代数. 从而有可能在 $A$ 上选择一个范数, 这个范数与向量空间结构和 $A$ 的拓扑相容, 而且满足条件 $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$. 如果 $A$ 有单位元 $e$, 则可以假设 $\|e\| = 1$. 如果 $A$ 没有单位元, 则可以将 $A$ 嵌入到带有单位元 $e$ 的赋范代数 $\tilde{A}$ 中, 且 $\tilde{A}$ 是 $A$ 与 $\mathbb{C}e$ 的直和. 对 $\mathbb{C}$ 上的任意赋范空间 $E$, $E$ 的自同态构成的代数 $\mathcal{L}(E)$ 是一个赋范代数, 范数为 $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|A \cdot x\|$, 而且还有许多其他类型的赋范代数, 最基本的一个是 $\mathbb{R}$ 的紧区间 $I$ 上的复连续函数构成的代数 $\mathcal{C}(I)$, 它的范数为 $\|f\| = \sup\limits_{t \in I} \|f(t)\|$.

盖尔范德的主要思想是将谱理论推广到赋范代数的元素上, 这是一个极富成效的思想. 如果 $A$ 是具有单位元 $e$ 的赋范代数, 则可以用里斯的谱定义 (第 2 节) 来定义任意元素 $x \in A$ 的谱. $x$ 的谱是使得 $x - \zeta e$ 在 $A$ 中不可逆的复数 $\zeta$ 构成的集合. 盖尔范德认识到为了得到实质性的结果, 必须假设 $A$ 是完备的, 即 $A$ 是巴拿赫空间, 称赋范代数 $A$ 为巴拿赫代数. 初步论证表明任意元素 $x \in A$ 的谱 $Sp_A(x)$ 是非空的紧子集, 且包含在圆盘 $|\zeta| \leqslant \|x\|$ 中. $A$ 中的可逆元形成了一个开

群, 这个开群包含球 $\|x-e\|\leqslant 1$, 且 $G$ 上诱导的拓扑与群结构相容. 对每个 $x\in A$, 补集 $\mathbb{C}-Sp_A(x)$ 到 $A$ 的映射 $\zeta\mapsto(x-\zeta e)^{-1}$ 是全纯映射. 最后, 盖尔范德对包含 $Sp_A(x)$ 的以 $O$ 为中心的最小圆盘的半径得到一个漂亮的公式. 这个半径被称为 $x$ 的谱半径, 它等于

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\right). \tag{39}$$

盖尔范德接下来用原创的方法来研究一般的交换巴拿赫代数. 可能受到交换群理论 (见第 6 节) 的启发, 他定义巴拿赫代数 $A$ 的特征 $\chi$ 为 $A$ (可以看成是 $C$-代数) 在域 $\mathbb{C}$ 上的同态, 它不恒为 0. 简单起见, 假设 $A$ 有单位元 $e$, 从而任意特征 $\chi$ 满足 $\chi(e)=1$, 且 $\chi$ 是 $A$ 上的连续线性形式, 范数为 $\|\chi\|=1$. 进一步, 对每个 $x\in A$, 有 $\chi(x)\in Sp_A(x)$. 这样盖尔范德将 $A$ 的所有特征构成的集合 $X(A)$ 与 $A$ 联系起来. 映射 $\chi\mapsto\chi^{-1}(0)$ 是 $X(A)$ 到 $A$ 中所有极大理想构成的集合 (它自然是闭集) 的双射. 1937 年, 斯通 (Stone) [208] 考虑了环的特殊类型的极大理想构成的集合, 即 "布尔环" $B$, 它是可交换的且对所有 $x\in B$, 满足 $x^2=x$ 和 $2x=0$. 斯通表明这种环是任意集合 $E$ 的子集 $M$ 的特征函数 $\varphi_M$ 构成的集合做成的环, 其中乘法是通常的乘法运算, 加法 $\dot{+}$ 是由 $\varphi_M\dot{+}\varphi_N=\varphi_{M\cup N}-\varphi_{M\cap N}$ 定义的. 他当然也意识到对希尔伯特空间中的自伴算子 $A$, 正交投影算子 $\varphi_M(A)$ 在相同的加法运算下可以形成一个布尔环, 其中 $M$ 是 $\mathbb{R}$ 中的普通可测的子集. 因此, 对交换巴拿赫代数的极大理想构成的集合的考察符合当时谱理论的精神.

因为集合 $X(A)$ 包含在巴拿赫空间 $A$ 的对偶空间 $A'$ 的单位球 $\|x'\|\leqslant 1$ 中, 所以 $A$ 到它的二重对偶 $A''$ 的自然嵌入能将每个元素 $x\in A$ 与 $X(A)$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $\chi\mapsto\chi(x)$ 联系起来. 这个映射被称为 $x$ 的盖尔范德变换, 记为 $\mathcal{G}x$. 容易看出 $X(A)$ 在 $A'$ 的弱拓扑下是紧的, $\mathcal{G}x$ 在这一拓扑下是 $X(A)$ 上的连续函数. 因而可以定义一个从巴拿赫代数 $A$ 到巴拿赫代数 $C(X(A))$ 的连续同态 $x\mapsto\mathcal{G}x$, 它使得 $\mathcal{G}x$ 的值构成的集合是 $x$ 的谱, 从而 $\|\mathcal{G}x\|=\rho(x)\leqslant\|x\|$. 因此, 紧空间 $X(A)$ 被称为巴拿赫代数 $A$ 的谱.

如果从紧空间 $K$ 上的连续函数做成的巴拿赫代数 $A=C(K)$ 出发, 则容易得出 $x\mapsto\mathcal{G}x$ 是 $A$ 到 $C(X(A))$ 的同构映射, 其中 $X(A)$ 等同于 $K$ 上的狄拉克测度空间. 但是通常情况下 $A$ 到 $C(X(A))$ 的同态 $x\mapsto\mathcal{G}x$

既不是满射也不是单射. 不久之后, 盖尔范德与奈马克 (Naimark) [85] 开始合作研究具有对合运算 $x \to x^*$ 且满足 $\|x^*x\| = \|x\|^2$ 的巴拿赫代数, 其中对合运算满足 $(x+y)^* = x^* + y^*$; $(xy)^* = y^*x^*$, 对每个标量 $\lambda$, $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$ 和 $(x^*)^* = x$. 现在称这些代数为 $C^*$-代数. 盖尔范德和奈马克证明的主要结果是对具有单位元 $e$ 的交换 $C^*$-代数 $A$, $x \mapsto \mathcal{G}x$ 是 $A$ 到 $\mathcal{C}(X(A))$ 的等距同构映射且使得对所有 $x \in A$, 有 $\mathcal{G}x^* = \overline{\mathcal{G}x}$. 进一步, 如果存在 $A$ 中的元素 $x_0$ 使得 $A$ 的由 $x_0$, $x_0^*$ 和 $e$ 生成的子代数在 $A$ 中稠密, 则映射 $\chi \mapsto \chi(x_0)$ 是 $X(A)$ 到 $Sp_A(x)$ 的同胚映射, $Sp_A(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 的紧子集, 它因此而等同于 $A$ 的谱.

盖尔范德 – 奈马克定理为希尔伯特谱理论的全新阐述铺平了道路. 令 $E$ 是可分希尔伯特空间, $N$ 是 $E$ 上的连续正规算子, 则由 $1_E$, $N$ 和 $N^*$ 生成的代数在 $\mathcal{L}(E)$ 中的闭包 $A$ (在范数拓扑下) 是可分的具有单位元的交换 $C^*$-代数, 映射 $\eta : \chi \mapsto \chi(N)$ 是 $X(A)$ 到谱 $Sp(N) \subset \mathbb{C}$ 的同胚映射. 从盖尔范德 – 奈马克定理可知, 映射 $f \mapsto \mathcal{G}^{-1}(f \circ \eta)$ 是代数 $\mathcal{C}(Sp(N))$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的子代数的等距同构映射, 记为 $f \mapsto f(N)$, 用这种方式可以得到里斯和冯 · 诺依曼考虑过的 "正规算子的连续函数" 的新定义. 根据冯 · 诺依曼的方法可以将同态 $f \mapsto f(N)$ 推广到 $\mathcal{U}(Sp(N))$ 上, $\mathcal{U}(Sp(N))$ 是 $Sp(N)$ 上所有普遍可测的有界函数做成的代数.

最后, 通过改良冯 · 诺依曼的论证, 黑林格和哈恩得到了里斯 – 冯 · 诺依曼 "单位分解" 和黑林格 – 哈恩 "重数理论" 的现代表述:

1° 存在 $E$ 的一个分解, 它能将 $E$ 分解为闭子空间 $\{E_j\}_{1 \leqslant j < \omega}$ ($\omega$ 是整数或 $+\infty$) 的希尔伯特和式 (有限或无限), 每个闭子空间在 $N$ 和 $N^*$ 的作用下是稳定的.

2° 存在具有支集 $Sp(N)$ 的紧空间 $Sp(N) \subset \mathbb{C}$ 上的正测度 $\nu$, 且存在一个递减序列 $\{S_j\}_{1 \leqslant j < \omega}$, 其中 $S_1 = Sp(N)$, 这个序列中的集合是普遍可测集.

3° 对每个满足 $1 \leqslant j < \omega$ 的 $j$, 存在希尔伯特空间 $E_j$ 到希尔伯特空间 $F_j = L^2(Sp(N), \varphi_{S_j} \cdot \nu)$ 的等距同构映射 $T_j$, 它使得 $F_j$ 上的正规算子 $T_j N T_j^{-1}$ 是 "乘法算子", 这个 "乘法算子" 将函数 $\zeta \mapsto \zeta u_j(\zeta)$ 组成的类与定义在 $S_j$ 上且在 $S_j$ 上对 $\nu$ 是平方可积的任意函数 $u_j$ 组成

的类联系起来.

4° 在这一描述中, 测度 $\nu$ (视为 $\mathbb{C}$ 上的一个测度时) 在等价的意义下是唯一确定的, 集合 $S_j$ 在相差一个零测度的意义下是唯一确定的 (对 $\nu$). 集合 $M_j = S_j - S_{j+1}$ 是 $Sp(N)$ 的部分, 它的重数为 $j$. 当 $\omega = +\infty$ 时, $M_\infty = \bigcap_j S_j$ 是的 $Sp(N)$ 的部分, 它的重数是无穷. 如果 $P_j$ 是正交投影算子 $\varphi_{M_j}(N)$ 且 $H_{ik} = P_k(E_i)$, 则 $N$ 在 $k$ 个正交子空间 $H_{ik}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 上的限制是等价的. 子空间 $E_i$ 不是唯一确定的, 但是子空间

$$G_k = P_k(E) = H_{1k} \oplus H_{2k} \oplus \cdots \oplus H_{kk}$$

是唯一确定的. $\nu$ 的等价类和集合 $S_j$ 的类是 $N$ 的酉不变量, 在酉等价 $N \to UNU^{-1}$ 的意义下是唯一确定的.

可以说这一论述就是正规算子 $N$ 的对角化. 在古典情形下, 即当 $N$ 是有限维空间 $E$ 的正规自同态时, 这一术语是正确的. 从而 $Sp(N)$ 是 $\mathbb{C}$ 的离散子集, 它是由 $N$ 的特征值组成的, $S_j$ 是重数大于等于 $j$ 的特征值组成的子集. $\nu$ 是测度, 它在 $Sp(N)$ 的每个点处具有质量 $+1$. $G_j$ 是 $E$ 的子空间, 它是重数为 $j$ 的特征值对应的特征空间 $N$ 的直和.

运用冯 · 诺依曼的结果能将前面的论述推广到无界正规算子 $N$ 上. 从而 $Sp(N)$ 是 $\mathbb{C}$ 的任意闭子集 (可能是 $\mathbb{C}$ 本身), $S_j$ 是 $Sp(N)$ 的任意普遍可测子集, 它可以形成了一个递减序列. $N$ 没有定义在整个子空间 $E_j$ 上, 但 $dom(N) \cap E_j$ 是这样的子空间, 它被 $T_j$ 变换成 $F_j$ 中使得函数 $\zeta \mapsto \zeta u_j(\zeta)$ 在测度 $\nu$ 下是平方可积的 $u_j$ 组成的子空间.

对 $Sp(N)$ (有界或无界) 中的每个普遍可测函数 $f$, $f(N)$ 通常是一个无界正规算子, 它可以用下面方式来定义: $dom(f(N)) \cap E_j$ 是一个子空间, $T_j$ 能将它转化为 $F_j$ 的子空间, 它由使得函数 $\zeta \mapsto f(\zeta)u_j(\zeta)$ 是平方可积的 $u_j$ 组成, 这个函数的类是 $T_j f(N) T_j^{-1}$ 作用下 $u_j$ 的类的像集.

通过下面注记能将 $E$ 中的自伴算子 $A$ 与黑林格的 "特征微分" 联系起来. 这是因为里斯指出对每个 $x = \{x_k\} \in l^2$, 通过对每个 $\xi \in \mathbb{R}$, 取 $A_\xi \cdot x$, 可以定义向量 $(\rho_k(\xi))$.

## §6 后续的发展

1940 年以来, 数学家发表了大量关于巴拿赫代数、谱理论及其应用的论文. 我认为全面整理和记载这些发展需要岁月的沉淀, 以及由此孕育出现的全新视角①. 微分方程 (常微分或偏微分方程) 和积分方程理论是一个例外, 这些理论有着比谱理论还要复杂的背景, 我们在第九章中来考虑, 在这里我们只给出这一发展趋势的一般线索, 也提到一些论文和著作.

A) 巴拿赫代数的结构

盖尔范德和他的学派研究了所有巴拿赫代数的一般性质后, 数学家聚焦于这些巴拿赫代数的两个特殊的类, 即交换巴拿赫代数和对合巴拿赫代数.

对一个交换巴拿赫代数 $A$, 一个核心问题是仿照里斯和冯 · 诺依曼的工作, 对元素 $x \in A$ 定义比多项式更一般的 "函数". 冯 · 诺依曼甚至表明对定义在 $\mathbb{C}^k$ 上的所有连续函数 $f$, 可以在希尔伯特空间中对交换正规算子 $N_j$ 定义函数 $f(N_1, \cdots, N_k)$. 对一般的交换巴拿赫代数 $A$, 只有对 $f$ 给出一些限制条件这一定义才有意义. 如果 $x_1, \cdots, x_k$ 是 $A$ 的任意元素, 则它们的联合谱是映射 $\chi \mapsto (\chi(x_1), \chi(x_2), \cdots, \chi(x_k))$ 在 $\mathbb{C}^k$ 中的像集, 其中 $\chi$ 取遍 $X(A)$ 中的值 (当 $k = 1$ 时, $X(A)$ 当然是 $x_1$ 的谱). 从而可以证明如果 $B$ 是函数 $f$ (的芽) 的代数, 函数 $f$ 在 $x_1, \cdots, x_k$ 的联合谱的邻域 (与 $f$ 有关) 中是全纯函数, 则存在同态映射 $B \to A$, 将其记为 $f \mapsto f(x_1, \cdots, x_k)$, 它唯一地将 $\mathbb{C}^k$ 上的多项式代数的自然同态推广到 $A$ 上, 记法类似 ([222], [27]).

人们很快注意到交换巴拿赫代数 $A$ 的谱 $X(A)$ 上的拓扑, 这个拓扑不同于巴拿赫空间 $A$ 的对偶空间 $A'$ 的弱拓扑诱导的拓扑. 对布尔环, 斯通想在布尔环 $B$ 的极大理想空间上定义一个拓扑, 在这个拓扑意义下闭集被定义为包含 $B$ 的任意给定理想的极大理想构成的集合. 因为交换巴拿赫代数 $A$ 的特征构成的集合 $X(A)$ 与极大理想构成的

①黑林格 – 特普利茨在《数学百科全书》中的 1923 年的文章中给出了一些缺乏视角的显著例子 [107], 这篇文章过度地强调了积分方程. 阿达玛 1928 年关于泛函分析的文章 ([94], vol. I, p. 435–453) 中仅仅提到了里斯, 一点也没有涉及谱理论!

集合是一一对应的, 所以可以用相同的方法在 $X(A)$ 上定义斯通的拓扑. 通常情况下, 这个拓扑一般比弱拓扑粗糙一些, 如果在 $X(A)$ 上这两个拓扑重合, 则称 $A$ 是正则的交换巴拿赫代数. 例如, 紧空间 $K$ 上的连续函数做成的代数 $\mathcal{C}(K)$ 是正则代数.

可以将 $A$ 中的任意闭理想 $J$ 与在 $J$ 上等于 0 的所有特征 $\chi \in X(A)$ 构成的集合 $h(J)$ 联系起来. 自然有这样一个问题, 满足 $\chi \in h(J)$ 的所有核 $\chi^{-1}(0)$ ($A$ 的极大理想) 的交集通常包含 $J$, 那它是否等于 $J$ 呢? 从而可以说理想 $J$ 容许谱综合. 在正则的交换巴拿赫代数中给出闭理想容许谱综合的条件是数学家广泛关注的问题 ([21], [58]).

对合巴拿赫代数 $A$ (不必是交换的) 是具有对合运算 $x \mapsto x^*$ 的巴拿赫代数, 这里的对合运算对所有 $x \in A$, 有 $||x^*|| = ||x||$. $C^*$-代数 (第 5 节) 是对合代数, 但是存在不是 $C^*$-代数的对合巴拿赫代数 (见下面的 C)). 对合巴拿赫代数中的核心概念是希尔伯特空间 $E$ 中对合巴拿赫数 $A$ 的表示, 这指的是代数的同态 $f : A \to \mathcal{L}(E)$, 它还满足 $f(x^*) = f(x)^*$. 它们是许多研究的主题, 引导了 $C^*$-代数的几种类的结构的阐述. 冯 · 诺依曼代数理论 (它们是特殊类型的 $C^*$-代数) 在这些研究中具有重要作用 ([58], [36]).

B) 连续函数的代数

1960 年以来, 许多数学家致力于研究紧空间 $K$ 上的连续函数做成的巴拿赫代数 $\mathcal{C}(K)$ 的子代数. 古典分析中研究过 $K$ 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘 $|z| \leqslant 1$ 的情形. 从而在 $\mathcal{C}(K)$ 中有一个特别有趣的巴拿赫子代数, 即圆盘的内部 $|z| < 1$ 上的全纯函数做成的代数 $B$. 这个代数等同于代数 $B_0$, $B_0$ 是 $B$ 中的函数在单位圆 $\mathbb{U} : |z| = 1$ 上的限制做成的代数, 且 $B_0$ 也是三角多项式做成的代数在 $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ 中的闭包. 其实对 $B_0$ 的研究与各种空间 $L^p(\mu)$ 中的三角多项式做成的空间的完备化有紧密联系, 其中 $\mu$ 是 $\mathbb{U}$ 上的哈代测度. 数学家也发现这些空间 $L^p(\mu)$ (如哈代空间 $H^p(u)$) 具备许多好的性质. 但是依据交换巴拿赫代数理论, 如果把这些结果推广到代数 $\mathcal{C}(K)$ 的子代数上, 且将这些结果与 $K$ 上的各种测度联系起来的话, 则可以更好地理解这些结果, 其中 $K$ 为任意紧空间 (见 [18], [33], [79], [116], [140]).

C) 调和分析

我们已经强调过一个事实 (第一章, 第 2 节), 即当认识到傅里叶级数可以推广到由边值问题引起的 "正交" 函数级数 "展开" 上时, 傅里叶级数成为谱理论发展的起点.

可以看出 "三角函数系" $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 具有非常特殊的性质, 一般的 "正交函数系" 不具有这些性质, 而且 "三角函数系" 还与泛函方程 $e^{i(x+x')} = e^{ix}e^{ix'}$ 有关. 例如, 如果 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)e^{nix}$ 和 $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b(n)e^{nix}$ 是两个傅里叶级数, 则对它们乘积得到的傅里叶级数 $f(x)g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(n)e^{nix}$, 有非常简单的公式

$$c(n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a(p)b(n-p) \tag{40}$$

成立. 类似地, 从公式 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)e^{nix}$ 中可以推出

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n+1)e^{nix} = e^{-ix}f(x), \tag{41}$$

棣莫弗 (de Moivre) 使用过这一性质, 拉普拉斯甚至用它来求解差分方程 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k a(n+k) = 0$, 他用的方法是将傅里叶级数 $f(x) = \sum_n a(n)e^{nix}$ 和序列 $\{a(n)\}$ 联系起来, 从而将差分方程化简为 $f(x)$ 的代数方程.

"傅里叶变换" 也有类似的特性, 它将 $\mathbb{R}$ 上的可积函数 $f$ 与函数

$$\mathfrak{F}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixt}f(t)dt \tag{42}$$

联系起来. 在傅里叶、柯西和泊松看来, 傅里叶变换的主要优点是它能将常系数的线性偏微分方程化简为代数问题, 这是因为导数 $f'$ 的傅里叶变换是函数 $x \mapsto 2\pi ix\mathfrak{F}f(x)$. 而且, 切比雪夫 (Tchebychef) 在他概率论的研究中表明, 如果 $F_1$ 和 $F_2$ 是具有 "概率定律" $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的两个独立的 "随机变量", $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的测度的密度为 $g_1$ 和 $g_2$, 则 $F_1 + F_2$ 的概率定律具有密度 $g = g_1 * g_2$, 这里 $g_1 * g_2$ 代表 $g_1$ 和 $g_2$ 的

卷积, 其定义为

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)g_2(x-t)dt \quad ([211],\ \text{vol. II, p. 481–491}), \tag{43}$$

切比雪夫的学生李雅普诺夫开始在概率论中运用傅里叶变换, 他认识到 [148]

$$\mathfrak{F}(g_1 * g_2)=\mathfrak{F}g_1\cdot\mathfrak{F}g_2. \tag{44}$$

这里也应该提到泊松公式 (柯西也独立地发现了它), 即对 $\mathbb{R}$ 上的充分正则函数 $f$, 有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{F}f(n). \tag{45}$$

数学家用了 100 多年的时间来理解这些特性, 他们通过特征的概念和群代数的概念将这些特性与群的观点联系起来. 1882 年, 韦伯最早对任意有限交换群定义了特征. 如果对有限交换群 $G$ 中所有的 $x$ 和 $y$, 群 $G$ 上值不等于 0 的复值函数 $\chi$ 满足 $\chi(xy)=\chi(x)\chi(y)$, 则韦伯称它为 $G$ 的特征. 在很久以前勒让德、高斯及狄利克雷已经考虑过一些特殊情形. 1896 年, 弗罗贝尼乌斯发现将特征概念推广到非交换有限群上是很有意义的. 在推广过程中不用考虑 $G$ 到乘法群 $\mathbb{C}^*$ 上的同态, 而对任意整数 $n$, 考虑 $G$ 到 $n$ 阶可逆矩阵做成的一般线性群 $GL(n,\mathbb{C})$ 的同态 $s\mapsto U(s)$. 这个同态也被称为 $G$ 在向量空间 $E=\mathbb{C}^n$ 中的 $n$ 次线性表示: 给出这样的表示等价于 $G$ 在 $E$ 上定义了一个作用 $(s,x)\mapsto s\cdot x$, 使得 $s\cdot(t\cdot x)=(st)\cdot x$, 对中性元 $e\in G$, 有 $e\cdot x=x$, 并且使得每个映射 $x\mapsto s\cdot x$ 都是线性的 (具有矩阵 $U(s)$).

对有限群 $G$, 凯莱定义群代数 $\mathbb{C}[G]$ 为所有形如 $\sum_{s\in G}\xi_s s$ 的线性组合做成的向量空间, 其中 $\xi_s\in\mathbb{C}$, 乘法被定义为

$$\left(\sum_{s\in G}\xi_s s\right)\left(\sum_{s\in G}\eta_s s\right)=\sum_{(s,t)\in G\times G}\xi_s\eta_t st. \tag{46}$$

当在 $E$ 上存在 $G$ 的与前面一样的给定作用 $(s,x)\mapsto s\cdot x$ 时, 在 $E$ 上自然可以用

$$\left(\sum_{s\in G}\xi_s s\right)\cdot x=\sum_{s\in G}\xi_s(s\cdot x) \tag{47}$$

来定义左 $\mathbb{C}[G]$-模的结构, 因此对 $G$ 的线性表示的研究等价于对左 $\mathbb{C}[G]$-模的研究.

从而可以用下面方式表述弗罗贝尼乌斯有限群的基础性结果. $\mathbb{C}[G]$ 的元素 $\sum\limits_{s\in G}\xi_s s$ 等同于 $G$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $f: s\mapsto \xi_s$, 因而 $\mathbb{C}[G]$ 等同于 $G$ 到 $\mathbb{C}$ 的所有映射做成的向量空间 $\mathbb{C}^G$, 其中乘法记为 $f*g$, 定义为

$$(f*g)(s)=(Card(G))^{-1}\sum_{t\in G} f(t)g(t^{-1}s). \tag{48}$$

$\mathbb{C}[G]$ 可以写成相互零化的子代数的直和 $A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_h$, 其中 $h$ 是 $G$ 中共轭元素类的个数. 每个 $A_k$ $(1\leqslant k\leqslant h)$ 是 $\mathbb{C}$ 上维数为 $n_k^2$ 的矩阵代数, 意思是说 $A_k$ 存在一个由 $n_k^2$ 个属于 $\mathbb{C}^G$ 的元素构成的基 $\{m_{ij}^k\}$, 这个基具有下面性质:

$$m_{pq}^k * m_{rs}^k=\delta_{qr}m_{ps}^k,\quad 1\leqslant p,q,r,s\leqslant n_k, \tag{49}$$

$$m_{pq}^k * m_{rs}^{k'}=0,\quad k\neq k'. \tag{50}$$

另外, 有

$$m_{ji}^k(s)=\overline{m_{ij}^k(s^{-1})},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n_k, s\in G, \tag{51}$$

$$\sum_{s\in G} m_{pq}^k(s)m_{rs}^{k'}(s)=0,\quad \text{除非 } p=r, q=s, k\neq k', \tag{52}$$

$$\sum_{s\in G} m_{pq}^k(s)\overline{m_{pq}^k(s)}=n_k Card(G),\quad 1\leqslant p,q\leqslant n_k, \tag{53}$$

(53) 是正交关系式. 可以得出 $n_1^2+n_2^2+\cdots+n_h^2=Card(G)$, 通过正交关系式, 可以清晰地给出任意函数 $f\in\mathbb{C}^G$ 关于空间中的基 $\{m_{ij}^k\}$ 的表达式为

$$f(s)=\sum_{i,j,k} c_{ij}^k m_{ij}^k(s), \tag{54}$$

其中

$$c_{ij}^k=(n_k Card(G))^{-1}\sum_{s\in G} f(s)\overline{m_{ij}^k(s)}. \tag{55}$$

如果将 $n_k\times n_k$ 矩阵 $\{n_k^{-1}m_{ij}^k(s)\}$ 写成 $M_k(s)$, 则有

$$M_k(st)=M_k(s)M_k(t)\quad 和\quad M_k(s^{-1})=(M_k(s))^*. \tag{56}$$

换句话说, $s \mapsto M_k(s)$ 是的 $G$ 的 $n_k$ 次线性表示, 其中 $1 \leqslant k \leqslant h$. 这个线性表示是不可约的, 意思是说相应的 $\mathbb{C}[G]$-模是单一的 (也就是说不具有非平凡的子模). 而且, $\mathbb{C}$ 上每个有限维的 $\mathbb{C}[G]$-模是一些模的直和, 这些模中的每个模都对应一个线性表示 $s \mapsto M_k(s)$. 我们说, $G$ 的每个线性表示是完全可约的, 如果在对应模的直和分解中有 $d_k$ 个子模对应于 $s \mapsto M_k(s)$, 并且它含有重数为 $d_k$ 的不可约表示 $s \mapsto M_k(s)$.

现在可以用相同的方式对任意有限或无限群 $G$ 定义 $n$ 次线性表示. 早在 1901 年, 舒尔 (I. Schur) 在他的学位论文 ([193], vol. I, p. 1–70) 中能够确定一般线性群 $GL(N,\mathbb{C})$ 的所有线性表示, 这些线性表示使得 $U(s)$ 的元素是矩阵 $s \in GL(N,\mathbb{C})$ 中元素的多项式. 他表明这些线性表示也是完全可约的, 他能明确确定不可约的线性表示 (见 [53]). 但是对这样的无限群, 上面描述的所有弗罗贝尼乌斯的关系式都是无意义的. 1924 年, 舒尔注意到这些线性表示在旋转 $G = SO(N,\mathbb{R})$ 的群上的限制可以给出这个紧群的不可约表示, 而且他注意到这些线性表示是连续的, 它们可以写成 $s \mapsto M_k(s)$, 其中和 (56) 一样, $M_k(s)$ 是酉矩阵. 并且, 他证明了下面关系式, 他将这些关系式看成是 (52) 的类似情形

$$\int_G m_{pq}^k(s)\overline{m_{rs}^{k'}(s)}ds = 0, \quad \text{除非} \quad p = r, q = s, k \neq k', \tag{57}$$

其中 $ds$ 是 $G$ 上的左右不变测度. 自李 (S. Lie) 以来, 这些关系式的存在性实际上是已知的. 早在 1898 年, 胡尔维茨已经用它们来构造 $SO(N,\mathbb{R})$ 的不变量 ([193], vol. II, p. 440–494).

这些结果引起了外尔的注意. 第二年, 外尔发表了 3 篇优秀的文章, 文章中他巧妙地将舒尔的想法与嘉当 (E. Cartan) 的 "无穷小" 方法结合起来, 从而能明确确定紧的半单李群的所有连续不可约的线性表示 (在 $SO(N,\mathbb{R})$ 的情形中, 包括 "旋量" 表示, 舒尔没有考虑到). 1913 年, 嘉当用他的 "无穷小" 方法得到复半单李群的所有有限维表示. 在所有情形中, 正交关系式 (57) 一直是成立的, 紧的半单李群的每个连续线性表示是完全可约的 ([227], vol. II, p. 633).

当然, 对紧的李群, 存在由不可约表示 $M_k$ 构成的无穷系, 且像 (54) 那样的关系式也是成立的. 但是对群 $SO(1,\mathbb{R}) = \mathbb{U}$ (圆群), 它的不可约表示是特征 $\zeta \mapsto \zeta^n$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 且外尔认识到与 (54) 对应的

公式正好是 $f$ 的傅里叶级数展开 (当 $f$ 是充分正则时) [227, vol. III, p. 34–37]. 他接下来将这个级数展开式推广到所有紧的半单李群 $G$ 上. 对一个半单紧李群, 他确定的函数 $m_{ij}^k$ 构成希尔伯特空间 $L^2(G)$ 中的正交系 (对左右不变测度). 现在的问题是证明这个正交系是完备的.

1927 年, 外尔在一篇与他的学生彼得 (F. Peter) 合作完成的优秀论文中证明了这个问题 [227, vol. III, p. 58–75], 这一工作可以看成是谱理论在调和分析上的首次应用. 他发现可以用紧群 $G$ 上连续复值函数构成的空间 $\mathcal{C}(G)$ 来代替群代数 $\mathbb{C}[G]$, 其上由卷积定义了一个代数结构, 它是 (40), (43) 和 (48) 的推广:

$$(f * g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)dt, \tag{58}$$

其中积分是对 $G$ 上左右不变且全质量为 1 的正测度进行的. 外尔接着注意到用 $n$ 阶酉矩阵给定 $G$ 的线性表示 $s \mapsto U(s)$, 如果写

$$U(f) = \int_G f(s)\overline{U(s)}ds, \tag{59}$$

则可以得到代数 $\mathcal{C}[G]$ 到 $End(\mathbb{C}^n)$ 的同态, 换句话说,

$$U(f * g) = U(f)U(g), \tag{60}$$

且如果写 $\overset{\vee}{f}(s) = \overline{f(s^{-1})}$, 则有

$$U(\overset{\vee}{f}) = (U(f))^*. \tag{61}$$

外尔证明的关键在于表明对 $\mathcal{C}(G)$ 中不等于 0 的函数 $f$, 至少存在一个连续表示 $s \mapsto U(s)$, 它使得 $U(f) \neq 0$. 因为 $s \mapsto U(s)$ 是完全可约的, 所以至少存在一个不可约表示 $s \mapsto M_k(s)$ 使得 $M_k(f) \neq 0$, 这也表明 $f$ 不能与所有函数 $m_{ij}^k$ 正交. 不过, 如果函数系 $\{m_{ij}^k\}$ 不完备, 则存在非可略函数 $g \in L^2(G)$, 它与所有 $m_{ij}^k$ 正交. 而且因为 $\mathcal{C}(G)$ 的由 $m_{ij}^k$ 生成的子空间 $L$ 是双边理想 (有 $(f*U)(s) = U^*(f)U(s)$), 所以对任意函数 $h \in \mathcal{C}(G)$, $h * g$ 也与 $L$ 正交, 且对适当的函数 $h$, 有 $h * g \in \mathcal{C}(G)$ 和 $h * g \neq 0$[①].

[①]这稍微简化了外尔的讨论, 通过归纳地应用施瓦茨 – 施密特方法, 对 $\mathcal{C}(G)$ 中的每个函数得到了类似于费舍尔 – 里斯展开式的结果.

外尔从希尔伯特–施密特积分方程理论中推导出了使得 $U(f)\neq 0$ 的表示 $U$ 的存在性证明. 他考虑函数 $g=f*\overset{\vee}{f}$, 对 $g$, 有 $U(g)=U(f)U^*(f)$ 成立. 且对某个 $U$, 有 $U(g)\neq 0$. 外尔形成这样一个函数列 $g_1=g$, $g_2=g*g_1$, $\cdots$, $g_n=g*g_{n-1}$, $\cdots$, 这里 $g(e)=\int_G |f(t)|^2dt>0$. 他改进了胡尔维茨的方法, 就像施密特将这个方法推广到对称核积分方程 (第三章, 第 1 节和第五章, 第 2 节) 上那样, 他证明了数列 $\gamma_n=g_n(e)/g_{n-1}(e)$ 是递增数列, 它趋于一个极限 $\gamma>0$, 且 $g_n/\gamma_n$ 一致趋于连续函数 $u$, $u$ 满足 $g*u=u*g=\gamma u$ 和 $u*u=u$. $\gamma$ 是埃尔米特核 $K(s,t)=g(st^{-1})$ 的特征值, 且如果 $\varphi_j$ $(1\leqslant j\leqslant r)$ 能形成相应特征空间的规范正交基, 则容易证明 $u(st^{-1})=\varphi_1(s)\overline{\varphi_1(t)}+\cdots+\varphi_r(s)\overline{\varphi_r(t)}$. 而且, 对任意 $t\in G$, 函数 $s\mapsto\varphi_j(st^{-1})$ 也是特征空间的特征向量, 从而 $\varphi_j(st^{-1})=\sum_{k=1}^{r}\overline{u_{ik}(t)}\varphi_k(s)$. 如果 $U(t)=\{u_{jk}(t)\}$, 则 $t\mapsto U(t)$ 是 $G$ 的线性表示, $U(g)\neq 0$.

外尔注意到用这个方法也能证明不可约表示 $M_k$ 的存在性, 且它对任意紧的李群 (不必是半单的) 也是适用的. 不久之后, 当哈尔 (A. Haar) 于 1933 年证明了任意紧的子群上存在左右平移下不变的测度时, 外尔的理论可以立即推广到这一一般情形上.

第二年, 鉴于在代数拓扑上的应用, 庞特里亚金 (Pontrjagin) 指出将彼得–外尔理论应用到可度量化的交换紧群上会导致有限交换群之间对偶的显著推广, 而有限交换群的对偶理论自韦伯以后就是众所周知的. 在古典理论中交换群 $G$ 的不可约线性表示必须是一次的. 换句话说, 交换群 $G$ 的不可约线性表示是 $G$ 的特征 $\chi$. 因此, 彼得–外尔理论将 $G$ 的所有连续特征构成的集合 $\hat{G}$ 与可度量化的紧交换群 $G$ 联系起来, $\hat{G}$ 在通常的乘法下本身是一个可数群. 从而对任意 $x\in G$, 映射 $x\mapsto\chi(x)$ 显然是 $\hat{G}$ 的特征, 而且庞特里亚金表明 $\hat{G}$ 的所有特征都是这种形式的. 相反, 如果 $D$ 是任意可数群, $\hat{D}$ 是 $D$ 的所有特征做成的群, 则可以在 $\hat{D}$ 上定义单收敛的拓扑, $\hat{D}$ 在这个拓扑意义下成为一个可度量化的紧群. 从而 $\hat{D}$ 的所有连续特征实际上是对所有 $x\in D$ 的映射 $x\mapsto\chi(x)$.

庞特里亚金还取得了一些新成果, 他能将这一对偶推广到某些局

部紧的交换群上 [179]. 1936 年, 范坎彭 (Van Kampen) 用不同的方法表明庞特里亚金的结果可以推广到所有局部紧的交换群 $G$ 上. $G$ 上所有连续特征组成的对偶 $\hat{G}$ 可以用 $G$ 的紧子集上一致收敛的拓扑给出, $\hat{G}$ 在这个拓扑意义下也是局部紧的. 每个 $x \in G$ 对应于 $\hat{G}$ 上的连续特征 $\eta(x) : \chi \mapsto \chi(x)$, 而且庞特里亚金 – 范坎彭的对偶定理表明 $\eta$ 是 $G$ 的拓扑群到 $\hat{G}$ 的同构映射 [216].

这一发现使得能够对傅里叶级数和傅里叶积分进行统一处理. 通常情况下, 对任意函数 $f \in L^1(G)$, 可以定义 $\hat{G}$ 上的函数

$$\mathfrak{F}f(x) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx \tag{62}$$

为 $f$ 的傅里叶变换. 当 $G = \mathbb{R}$ 时, 对实数 $y$, 连续特征可以唯一地写成 $x \mapsto \exp(2\pi i x y)$, 从而 $\hat{G}$ 等同于 $\mathbb{R}$ 本身, 而且 (62) 正好是傅里叶积分的定义. 当 $G = \mathbb{Z}$ 时, 所有特征是连续的, 且对唯一确定的复数 $\zeta \in \mathbb{U}$, 它们可以写成 $n \mapsto \zeta^n$. 对 $\mathbb{Z}$ 上满足 $\sum_n |c(n)| < +\infty$ 的函数 $n \mapsto c(n)$, 如果定义在 $\mathbb{Z}$ 的对偶 $\mathbb{U}$ 上的函数 $\zeta = e^{i\theta}$, 则 (62) 的右边会成为绝对收敛的傅里叶级数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\zeta^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)e^{ni\theta}$. 当 $G = \mathbb{U}$ 时, 对唯一确定的 $n \in \mathbb{Z}$, 连续特征是函数 $\zeta \mapsto \zeta^n$. 而且函数 $f \in L^1(\mathbb{U})$ 的傅里叶变换是它的 "傅里叶系数" 的序列 $n \mapsto c(n)$. 1940 年, 韦伊 (A. Weil) [226] 表明如何将傅里叶级数和傅里叶积分的大多数结果推广到所有局部紧的交换群上. 中心定理是帕塞瓦尔关系式的推广, 即如果 $G$ 上的函数 $f$ 属于 $L^1(G) \cap L^2(G)$, 则它的傅里叶变换属于 $L^2(\hat{G})$, 且对 $\hat{G}$ 上适当的哈尔测度, 有关系式

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\hat{G}} |\mathfrak{F}f(\chi)|^2 d\chi. \tag{63}$$

1910 年, 普朗谢雷尔 (M. Plancherel) [174] 对 $G = \mathbb{R}$ 的情形证明了这个关系式, 对局部紧的交换群, 它就是著名的普朗谢雷尔定理.

前面已提到过 (第 5 节), 当盖尔范德在交换巴拿赫代数上定义特征时, 他仿效了外尔和庞特里亚金的工作. 事实上, 在与莱科夫 (D. Raikov) 合作写成的一篇文章 [86] 中, 他表明如何用更简单的方法从他的巴拿赫代数的一般结果中推导出庞特里亚金 – 范坎彭 – 韦伊理

论, 而以前的证明严重依赖于局部紧的交换群的结构情况. 基本的想法是对局部紧的交换群 $G$, 考虑空间 $L^1(G)$ (对 $G$ 上的哈尔测度), 这个空间上巴拿赫代数的结构是用卷积 (58) 来定义的. $L^1(G)$ 是具有对合 $f \mapsto \overset{\vee}{f}$ 的对合代数, 但是通常情况下它不是 $C^*$-代数. 从而在盖尔范德的意义下这个代数的特征可以唯一地写成 $f \mapsto \mathfrak{F}f(\chi)$, 其中 $\chi$ 在庞特里亚金的意义下很容易确定. 所以谱 $X(L^1(G))$ 在 $L^\infty(G)$ 的弱拓扑诱导的拓扑下等同于对偶群 $\hat{G}$, 因此傅里叶变换仅仅是盖尔范德变换的特殊情形, 在这一特殊情形中方程 (44) 表达这样一个事实, 即盖尔范德变换是代数的同态!

调和分析与谱理论的融合不只是体现在交换群上. 对局部紧的可分幺模群 (即对这些群, 左不变的哈尔测度也是右不变的, 如紧群或半单李群) 仍然可以定义巴拿赫代数 $L^1(G)$, 而且 $L^1(G)$ 也是一个对合代数. 另一方面, 不仅当 $U(s)$ 是酉矩阵时, 而且更一般地当 $U(s)$ 是复希尔伯特空间 $E$ 的自同构时, 可以对这样的群 $G$ 定义线性表示 $s \mapsto U(s)$. 从而可以说线性表示 $s \mapsto U(s)$ 是 $G$ 在 $E$ 中的酉表示, 对这个定义补充这样一个另外的条件, 即对任意 $x \in E$, $G$ 到希尔伯特空间 $E$ 的映射 $s \mapsto U(s) \cdot x$ 是连续映射. 从而对任意函数 $f \in L^1(G)$, 可以像 (59) 那样定义 $U(f)$, 更准确地说, 对任意 $x \in E$ 和 $y \in E$, 有

$$(U(f) \cdot x|y) = \int_G f(s)(U(s) \cdot x|y)ds, \tag{64}$$

其中 $ds$ 是 $G$ 上左右不变的哈尔测度. 从 $G$ 在 $E$ 中的酉表示出发, 可以用这种方式得到一个双射, 这个双射将这些酉表示构成的集合映射到 $L^1(G)$ 到 $C^*$-代数 $\mathcal{L}(E)$ 的所有同态 $V$ 构成的集合上, 这些同态 $V$ 满足 (61) 且是非退化的, 也就是说, 对 $x \in E$, 这些同态 $V$ 使得 $V(f) \cdot x$ 和 $f \in L^1(G)$ 生成 $E$ 的一个稠密子空间. 经过适当的修改, 所有局部紧的群也有一个类似的结果成立. 因此希尔伯特空间中局部紧的群的酉表示的一般理论在某种意义下属于希尔伯特空间中算子代数中的对合巴拿赫代数的同态理论 [58].

时至今日, 大多数有关局部紧群的酉表示的结果是在李群上取得的, 其中用到了大量比较精炼和有力的工具 (李代数、微分几何、偏微分方程等). 在这里我们只提一下这个优美且困难的理论 (著名的

非交换调和分析). 1950 年以来, 数学家对它进行了广泛的研究, 其中许多问题是公开的. 感兴趣的读者可以去参看 [32], [43], [152], [217] 和 [223]. 对调和分析历史以及它与概率论、量子力学和数论之间关系的描述请参看 [155].

D) 其他的发展

1930 年, 斯通 (M. H. Stone) 得到了无穷维表示的一个重要结果 [206]. 他指出公式 $t \mapsto e^{itA}$ 可以给出加法群 $\mathbb{R}$ 在可分希尔伯特空间 $E$ 中的任意酉表示, 其中 $A$ 是 $E$ 中任意的自伴算子 (通常是无界的). 所以可以说 $\mathbb{R}$ 的酉表示理论等价于无界自伴算子的谱理论.

如果 $E$ 是任意的巴拿赫空间, $A$ 是 $E$ 中的有界算子, 则显然 $t \mapsto e^{tA}$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 中可逆元做成的群的同态映射. 像希尔伯特空间那样, 在巴拿赫空间 $E$ 上定义无界算子 $A$, 但是对这样一个无界算子, $e^{tA}$ 对每个实数 $t$ 是没有意义的. 各种分析学问题使得希尔 (E. Hille) 在开始于 1936 年的一系列文章中研究了映射 $t \mapsto P_t$, 它是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{L}(E)$ 的映射, 它只对 $t > 0$ 有定义, 且对 $s > 0$ 和 $t > 0$, 它使得

$$P_{s+t} = P_s P_t. \tag{65}$$

这样的映射被称为算子的半群. 如果假设对所有 $t > 0$, 有 $\|P_t\| \leqslant C$, 也假设对每个 $x \in E$, $t \mapsto P_t \cdot x$ $(t > 0)$ 是连续映射, 则可以将 $E$ 中的无界算子 $A$ 与这样一个半群联系起来, 用

$$A \cdot x = \lim_{t \to 0} t^{-1}(P_t - 1_E) \cdot x \tag{66}$$

来定义.

这是广泛理论应用到分析中的研究起点 [115].

大量文献致力于研究巴拿赫空间中各种类型的算子. 比较一般的方法是从算子 $A_0$ 开始, $A_0$ 的性质是已知的, 如希尔伯特中的正规算子. 通过 "扰动" $P$ 来考虑算子 $A = A_0 + P$, 它不同于 $A_0$, 在某种意义下 $P$ "很小". 如范数 $\|P\|$ 被假设是足够小的, 或 $P$ 是紧算子. 在很多情形中这样的假设能将 $A_0$ 的某些性质推广到 $A$ 上 (见 [124]).

算子 $1_E + K$ (其中 $K$ 是紧算子, 见第 1 节) 的良好性质刺激了对这类算子的推广. 如弗雷德霍姆算子 $U$, 它是用这样一些特点来定

义的, 即 $U^{-1}(0)$ 是有限维的, $U(E)$ 是闭的且具有有限余维数, 但是 $U^{-1}(0)$ 的维数和 $U(E)$ 的余维数不必相等 [133]. 最后, 存在算子的广泛理论, 这个理论中存在着具有类似于投影算子族 $E(\lambda)$ 的性质的投影算子族, 其中 $E(\lambda)$ 与冯 · 诺依曼理论中的自伴算子有关 (第 4 节). 这个理论的研究困境当然在于要找到这样的算子族的存在性的准则 ([62], vol. III).

# 第八章　局部凸空间和广义函数论*

## §1　弱收敛和弱拓扑

弗雷歇在他的博士论文中已经注意到度量空间中的收敛通常不同于某些古典的函数收敛. 例如, 如果 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上所有有界实值函数构成的向量空间, 则不可能在这个空间上定义一个距离, 使得 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 中的简单收敛等同于按照这个距离定义的收敛. 这个结果源于这样一个事实, 即如果 $A$ 是度量空间 $E$ 的一个子集, 则 $A$ 在 $E$ 中的闭包 $\overline{A}$ 等价于 $A$ 中元素的收敛序列的极限构成的集合. 不过, 如果在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 中取 $A=\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 是所有有界连续函数构成的集合, 则 $A$ 中的元素列在简单收敛意义下的极限是第一类贝尔函数, 我们知道存在着不是第一类贝尔函数的第二类贝尔函数, 所以 $\overline{A}$ (对于假设的距离) 不只是由第一类贝尔函数组成的集合 [71, p. 15].

因此非常有必要来推广度量空间的概念, 没有人证明它对泛函分析发展的重要作用, 直到豪斯多夫 1914 年创立 "一般拓扑", 正如我们现在的理解, "一般拓扑" 是以邻域概念为基础的 [100]. 但是足以令人惊讶的是, 对这一重要作用的理解却经历了很长的时间. 从希尔伯特开始, 序列的 "弱收敛" 就是一个中心问题, 首先在希尔伯特空间中进

*本章由李威翻译.

行讨论, 接着里斯和黑利在一些类型的赋范线性空间中 (第六章) 也展开了讨论, 并且豪斯多夫的拓扑概念将用于测试这个概念. 但是直到 1934 年, 冯 · 诺依曼似乎是唯一有这种想法的数学家: 他用点 $a_j \in E$ 的有限多个条件 $|(x - x_0|a_j)| \leqslant \varepsilon$ 定义了希尔伯特空间中点 $x_0$ 的弱邻域, 接着他在 $E$ 的自同态构成的代数 $\mathcal{L}(E)$ 中, 用 $x_j \in E$ 的有限多个条件 $\|(u - u_0) \cdot x_j\| \leqslant \varepsilon$ 定义了算子 $U_0$ 的 "强邻域", 并且通过有限多个条件 $|((u - u_0) \cdot x_j|y_j)| \leqslant \varepsilon$ 定义了算子 $U_0$ 的 "弱邻域" [221, vol. II, p. 94–104]. 但是他没有尝试将这些思想推广到其他的巴拿赫空间中.

相反, "弱收敛" 是巴拿赫书中的中心概念, 他就这个概念取得的结果被认为是他最深远的工作. 但是为了更好地理解他的工作, 比较好的方法可能是先来陈述他的三个主要定理的最终形式:

I) 如果 $E$ 是巴拿赫空间, $E'$ 是由弱拓扑 $\sigma(E, E')$ 给出的 $E$ 的对偶, 则 $E'$ 中的单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 在这个拓扑下是紧的.

II) 向量子空间 $V \subset E'$ 在拓扑 $\sigma(E', E)$ 下是闭的充分必要条件是对 $E'$ 中的任意闭球 $B'$, $V \cap B'$ 在这个拓扑下是紧的.

III) $E$ 是自反的充分必要条件是 $E$ 中的单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 在弱拓扑 $\sigma(E, E')$ 下是紧的.

在这种形式中, 布尔巴基 (Bourbaki) 于 1938 年证明了这些定理 [25], 一段时间后, 阿拉奥格卢 (L. Alaoglu) 独自证明了这些定理 [5]. 他们的证明都需要下列条件:

a) 对任意 $x_j \in E$, 用有限多个条件 $|\langle x - x'_0, x_j\rangle| \leqslant \varepsilon$ 定义的集合作为 $x'_0 \in E'$ 的邻域来定义弱拓扑 $\sigma(E', E)$. 通过互换 $E$ 和 $E'$, 能类似地定义 $\sigma(E, E')$.

b) 在布尔巴基的意义下运用术语 "紧的", 它指的是亚历山德罗夫 (P. Alexandroff) 和乌雷松 (P. Urysohn) 在 1924 年定义的 "双紧集" (在豪斯多夫空间中) [6]: 对于这些 "双紧集" 而言, 如果空间中的每个开覆盖都包含一个有限的覆盖, 则这个空间就是 "双紧的" ("博雷尔 – 勒贝格公理").

c) 紧集可以借助于 "网" 的极限概念来等价地刻画, 这个概念推广了序列的极限, 莫尔 (E. H. Moore) 和史密斯 (H. L. Smith) 在 1922 年引入了这个概念 [164] (布尔巴基运用 "滤子" 的极限的等价概念).

d) 任意紧空间的乘积是紧的, 这是吉洪诺夫 (A. Tychonoff) 于 1930 年证明的吉洪诺夫定理.

然而, 虽然他们重复引用豪斯多夫 1927 出版的书[①], 但是 1940 年之前巴拿赫以及他学校的数学家都没有提及这些定义或定理中任何一个. 对于他们而言, 术语 "紧性" 通常是在弗雷歇的最初意义下使用的, 它指的是空间中没有无穷的离散闭集. 当限制到可度量化的空间时, 这个概念等价于 "双紧" 空间的概念. 因此, 巴拿赫证明的定理 I 的表述是限制在可分巴拿赫空间 $E$ 上的 [15, p. 123]. 因为在这一情形下, 球 $\|x'\| \leqslant 1$ 对弱拓扑 $\sigma(E', E)$ 是可度量化的. 当然这推广了希尔伯特、里斯和黑利的 "选择原则" (第五章和第六章).

另一方面, 巴拿赫能对所有巴拿赫空间证明一个等价于定理 II 的定理, 他从 $E'$ 的向量子空间开始研究, 这些子空间在范数诱导的拓扑意义下是闭的, 而且他注意到对这样的子空间 $V$, $V$ 中的点列 $\{x'_n\}$ 有不属于 $V$ 的弱极限. 此外, 如果 $V_1$ 是包含所有这些弱极限的向量空间, 则 $V_1$ 中的点列可能有不属于 $V_1$ 的弱极限, 等等 [15, p. 209]. 在没有提到弱拓扑的情况下, 他接着引入弱的闭向量子空间, 取名为 "正规闭的" 子空间, 他这样来定义空间 $V$: 对任意的 $x'_0 \notin V$, 存在 $x \in E$ 使得对所有 $x' \in V$, 都有 $\langle x', x\rangle = 0$, 但是 $\langle x'_0, x\rangle \neq 0$. 意识到序列的弱收敛是一个不充分的工具这样一个事实, 巴拿赫接着引入一个概念, 在对偶空间 $E'$ 中 "有界超限序列的极限": 对 $E'$ 中元素的任意族 $\{u'_\xi\}_{\xi<\gamma}$, 这些元素包含在一个球中并且被赋予序指标, 他证明了 (通过运用哈恩 – 巴拿赫定理) 一定存在元素 $u' \in E'$ 使得对每个 $x \in E$, 有

$$\liminf_{\xi\to\gamma}\langle u'_\xi, x\rangle \leqslant \langle u', x\rangle \leqslant \limsup_{\xi\to\gamma}\langle u'_\xi, x\rangle$$

且称这里的 $u'$ 是超限序列 $\{u'_\xi\}$ 的 "极限" (可能有无穷多个这样的 "极限"!). 从而如果 $V$ 的元素的每个有界的超限序列在 $V$ 中至少有一个 "超限极限", 则他称 $V$ 是 "超限闭的", 通过一个非常聪明的讨论, 他证明了 "正则闭" 与 "超限闭" 是等价概念 [15, p. 121]. 在巴拿赫关于获得定理 II 的等价结论的证明中, 用 "网" 或 "滤子" 来代替 "超限序列" 是很容易的.

[①]这本书的大部分内容都致力于度量空间的研究 [101], 他只用 5 页的篇幅给出了一般的拓扑空间. 豪斯多夫似乎对他 1914 年的想法不太自信了.

最后, 通过考虑 $E$ 为自然地嵌入在它的二次对偶空间 $E''$ 中, 而且再次运用 "超限极限", 巴拿赫能证明定理 III, 但是只是当 $E$ 是可分空间的时候①.

这里应该提及这些定理使得巴拿赫获得一系列有关连续线性映射 $u : E \to F$ 的性质的有趣的定理 ($E$ 和 $F$ 都是巴拿赫空间)、它们的转置映射 ${}^t u : F' \to E'$ 的性质以及像 $u(E)$ 和 ${}^t u(F')$ 的性质 (见 [51])②.

## §2 局部凸向量空间

虽然 1906 年后赋范空间理论处于泛函分析发展的前沿, 但是人们很快意识到并不能把拓扑概念完全地应用其上. 但是我们现在称为拓扑向量空间一般理论中的各种概念是以一种相当随机的方式出现的, 而且直到 1950 年, 这些概念才成为一个能系统处理的课题.

在弗雷歇的博士论文中已经有一些这样的空间的例子, 他强调的不是它们的代数性质, 而是能否用距离定义它们的拓扑 (第五章, 第 3 节), 以及由此而得到的度量空间是完备的. 加法和数乘运算在这样的空间中是连续的, 这个事实由弗雷歇于 1926 年独自阐述 [73]; 巴拿赫采用了这种想法, 他在其书中通常在 "$(F)$ 型空间" 术语下考虑了这些空间, 并表明闭图像定理对它们是适用的. 不久以后, 马祖尔 (S. Mazur) 和奥尔利奇 (W. Orlicz) 系统化了弗雷歇 1906 年的例子中定义距离的方法, 他们称之为 "$(B_0)$ 型空间" 理论 [160]: 它们是我们现在所称的弗雷歇空间, 其中拓扑是由满足一定条件的半范数序列 $\{p_n\}$ 定义的, 这个条件是 $x \neq 0$ 能推出至少存在一个指数 $n$, 使得 $p_n(x) \neq 0$. 这个距离是由下面公式

$$d(x,y) = \frac{p_1(x-y)}{1+p_1(x-y)} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{p_2(x-y)}{1+p_2(x-y)} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} + \cdots$$

来定义的, 并且假设这个空间在这个距离下是完备的. 根据弗雷歇的例子 (所有序列构成的空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 和 $|z| < 1$ 中的全纯函数构成的空间),

①1938 年, 戈尔斯坦 (Goldstine) 证明的结果等价于这样一个性质, 即对任意巴拿赫空间 $E$, 交集 $E \cap B''$ 在弱拓扑 $\sigma(E'', E')$ 的意义下在 $B''$ 中是稠密的, 其中 $B''$ 是二阶对偶 $E''$ 中的单位球 $\|x''\| \leqslant 1$. 从这个定理 III 中容易得出 [88].

②1931 年, 豪斯多夫得到了巴拿赫的一些结果 [102], 值得注意的是, 他没有提到弱拓扑!

容易表明拓扑不能由单个范数来定义.

其他一些类型的空间甚至是不可度量的. 1929 年, 冯 · 诺依曼就希尔伯特空间上的弱拓扑注意到了这一点 (第 1 节). 但是早在 1910 年, 莫尔已经有了用他所谓的 "相对一致收敛" 来代替 $\mathbb{R}$ 中一致收敛的想法. 这一点相当于考虑用下列方法定义 0 的邻域: 考虑 $\mathbb{R}$ 上对所有 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $g(x) > 0$ 的连续函数 $g$, 将使得 $|f| \leqslant g$ 的所有函数 $f$ 组成的 0 的邻域 $V_g$ 与每个这样的函数 $g$ 联系起来. 当限制这些函数连续且具有紧支集时, 这些邻域实际上是由后来称为 $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ 上的 $(LF)$-拓扑定义的 [163].

1932 年后, 有界这样一个新的定义出现. 巴拿赫早已经认识到在相同的向量空间上, 对 $x \neq 0$, 使得比值 $\|x\|_1/\|x\|_2$ 和 $\|x\|_2/\|x\|_1$ 是有界的两个范数 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 定义了相同的拓扑, 因此如果在赋范空间 $E$ 中定义有界集为包含在某些球中的集合, 则这个定义与特定选取的范数无关. 然而, 在任意度量空间中, 两个距离可能产生相同的拓扑, 且当仍然运用之前的定义时, 能给出完全不同的 "有界集" 概念. 但是对任意的拓扑度量空间 (即对加法和数乘运算连续的空间), 结果是可以给出一个有界集的定义, 这个定义与之前赋范空间中的定义一致, 且只与拓扑有关: 如果对集合 $A$ 中的任意点列 $\{x_n\}$ 和任意趋于 0 的数列 $\{t_n\}$, 有序列 $\{t_n x_n\}$ 收敛于 0, 则称集合 $A$ 是有界的. 一个基础的讨论表明这个定义等价于下面定义: 对 0 的任意邻域 $V$, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得 $\lambda A \subset V$. 运用这个概念得到的最早的一般结果是 (豪斯多夫) 拓扑向量空间的特征, 在这个空间中能用范数定义拓扑, 柯尔莫哥洛夫 (A. Kolmogoroff) 于 1935 年发现了这个结果 [130]: 它们是这样一些拓扑, 即存在 0 的有界邻域.

同时, 克特 (Köthe) 和特普利茨于 1934 年引入了一种新的拓扑向量空间 [129]. 对所有实 (或复) 数序列构成的 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 空间 (或 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 空间) 中的任意子空间 $E$, 他们考虑了 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 空间 (或 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 空间) 中使得 $\sum\limits_n |u_n x_n|$ 收敛的序列 $\{u_n\}$ 构成空间 $E^*$ (现在称 $E^*$ 是 $E$ 的克特对偶空间). 接着考虑空间 $E^{**}$, 显然 $E^{**}$ 包含 $E$. 当 $E = E^{**}$ 时, 克特和特普利茨称 $E$ 是完全的 ("Vollkommen"), 这类空间是他们的主要研究内容, 克特和他的学生们在后续许多文章也对其进行了研究 ([128], [130]). 在

这样一个空间 $E$ 上, 他先用与冯 · 诺依曼相同的方式定义了弱拓扑 $\sigma(E,E^*)$ (第 1 节), 即对任意 $a_j^* \in E^*$, 用有限多个不等式 $|\langle x, a_j^*\rangle| \leqslant 1$ 来定义 0 的邻域. 对这个拓扑, 他们这样定义有界集 $A \subset E$, 即使得每个函数 $x \to \langle x, a^*\rangle (a^* \in E^*$ 是任意的) 在 $A$ 中是有界的, 这当然是前面提到的一般概念的特殊情形, 但是他们在没有任何参考的情况下引入了这个概念. 但是他们接下来的一步非常有趣. 因为 $E$ 和 $E^*$ 具有对称作用, 所以也能在 $E^*$ 中定义弱拓扑 $\sigma(E^*,E)$ 和有界集. 这使他们在 $E$ 上定义了一个新拓扑, 即强拓扑, 其中用下列方式定义 0 的邻域: 对所有 $y^* \in B$, 能够将所有使得 $|\langle x, y^*\rangle| \leqslant 1$ 的所有 $x \in E$ 组成的集合 $V_B$ (在后来的术语中称为 $B$ 的 "极集") 与 $E^*$ 中的每个有界集 $B$ 联系起来, 且 $V_B$ 在强拓扑意义下构成 0 的邻域的基础系. 从而可以在这个拓扑意义下在 $E$ 中定义有界集, 克特和特普利茨的重要结果之一是 $E$ 中的有界集在强拓扑和弱拓扑意义下是相同的.

上面提到的所有拓扑向量空间都属于我们现在所称的局部凸空间, 但是这些空间的一般定义 (在 "凸空间" 名义下) 是由冯 · 诺依曼基于对概周期函数的研究于 1935 年单独给出的 [221, vol. II, p. 508–527]. 这与数学家开始感兴趣于拓扑向量空间中凸集性质有关, 其实在黑利之后, 凸集的性质一直被完全忽视: 只是在巴拿赫书的结尾处的一个注释中简单提及一下它们 [15, p. 246]. 1933 年, 马祖尔给出了哈恩 – 巴拿赫定理的 "几何" 表述, 这推广了闵可夫斯基的理论, 他是通过表明如果 $K$ 是赋范空间 $E$ 中的开凸集, 则通过 $K$ 的每个边界点存在 $K$ 的支集的超平面 [158]. 不久以后, 克赖因 (M. Krein) 和米尔曼 (D. Milman) 对凸集 $K$ 引入了端点的概念. 如果对 $K$ 中一个点, $K$ 中任意开线段都不包含这个点, 则称这个点是端点. 他们证明了一个显著的事实, 即对紧的凸集 $K$, 通常有足够多的端点, 更确切地说, $K$ 是包含所有端点的最小闭凸集 [131]. 这个定理在泛函分析的各个领域中都有重要应用.

一旦局部凸空间被定义, 可以将克特 – 特普利茨过程安置在一个更一般的背景中: 从两个度量空间 $E, F$ 和 $E \times F$ 上的双线性形式 $B$ 开始, 其中 $B$ 是非退化的, 也就是说, 关系式 "对所有 $y \in F$, $B(x,y) = 0$" 等价于 $x = 0$ 且关系式 "对所有 $x \in E$, $B(x,y) = 0$" 等价于 $y = 0$. 接着

考虑 $E$ 上所有豪斯多夫局部凸拓扑, $F$ 是 $E$ 的对偶, 麦凯 (G. Mackey) 确定了这些拓扑 [154], 他证明了取 $F$ 的一个子集族 $\mathfrak{S}$ 的 "极集" 的有限交, 可以得到此拓扑 0 的邻域基本系, $\mathfrak{S}$ 是由弱拓扑 $\sigma(F,E)$ 下的紧对称集组成, 且构成 $F$ 的一个覆盖. 除此之外, 麦凯还证明了对所有这些拓扑, $E$ 中的有界集是相同的.

我们不过多地描述自 1950 年以来发表的致力于拓扑向量空间的论文. 不久之后, 出现了第一批关于这一主题的综合性的专著 [26, 62, 92, 125, 128, 215]. 大多数的研究者致力于研究特殊类型的局部凸空间, 例如弗雷歇空间和它们的正向极限 ([55, 92])、克特 – 特普利茨意义下的各种类型的 "Vollkommen" 序列空间, 它们产生了丰富的例子和反例, 以及许多具有各种性质的函数构成的空间. 最近出现的最有意义的结果是关于各种拓扑的, 在其上可以定义两个局部凸空间的张量积 $E\otimes F$. 格罗滕迪克 (A. Grothendieck) 在他著名的论文中对此进行了深入的研究, 这可以看成是继巴拿赫之后在泛函分析中取得的最显著的进展 [91]. 这一研究使得作者发现了一种新的局部凸空间, 即核空间, 在某种程度上它比希尔伯特空间更接近有限维空间 (它们与希尔伯特空间有一些惊人的联系) [59]. 广义函数理论中的大多数空间 (第 3 节) 是核空间, 并且核弗雷歇空间在概率论中变得相当重要. 最后我们应该提及一下拓扑向量空间中有关凸集的大量文献, 包含从萧凯的漂亮的结果到克赖因 – 米尔曼定理的定量解释: 如果 $C$ 是 $\{0\}$ 和紧凸集 $K$ 的并集的凸包, $K$ 包含在不包含 0 的闭超平面中, 则 $C$ 中每个点是由 $C$ 的端点得到的正测度的重心, 并且这个测度是唯一的当且仅当用锥体 $C'$ 定义的序关系是一个格, 其中 $C'$ 是对 $\lambda>0$ 的所有 $\lambda C$ 的并 [42]. 这个结果在位势论中有重要的应用.

## §3 广义函数论

1930 年到 1940 年之间, 一些数学家开始系统地研究线性偏微分方程的弱解问题, 这些我们可以在庞加莱的论文中不断看到 (没有被命名) (第三章, 第 2 节). 一般地, 设 $P: f\to\sum\limits_{\alpha} a_\alpha D^\alpha f$ 是定义在开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的具有 $C^\infty$ 系数的任意微分算子, 并对 $\Omega$ 中的局部可积函

数 $f$ 和 $\Omega$ 中的具支集的连续函数 $g$, 记 $\langle f,g\rangle=\int_\Omega f(x)g(x)dx$; 接着能够很容易地推广拉格朗日的自伴微分算子 ${}^tP$ 的定义, 特别地 ${}^tP$ 满足

$$\langle P\cdot f,g\rangle=\langle f,{}^tP\cdot g\rangle, \tag{1}$$

当 $f$ 在 $\Omega$ 中是 $C^\infty$ 函数, $g$ 是 $\Omega$ 中具有紧支集的 $C^\infty$ 函数. 如果 $f$ 是 $P\cdot f=0$ 的 $C^\infty$ 解, 那么 $\langle f,{}^tP\cdot g\rangle=0$ 对所有的函数 $g$ 都成立, 其中 $g$ 是 $C^\infty$ 的且具有紧支集. 反之, 在 $\Omega$ 中局部可积且满足上述性质的任意函数 $f$ 被称为方程 $P\cdot u=0$ 的一个弱解, 即使它根本不是可微的, 庞加莱面对的问题是证明这个弱解实际上是真正的 $C^\infty$ 解.

但是事实上对于简单的微分算子 $D=\dfrac{d}{dx}$, 杜布瓦·雷蒙于 1879 年已经考虑和解决了相同的问题 [60]. 由于受到魏尔斯特拉斯有关变分法的评论的启发 (第二章, 第 4 节), 他想证明了如果闭区间 $[a,b]$ 上的 $C^1$ 函数 $y$ 是积分 $I(y)=\int_b^a F(x,y,y')dx$ 的一个极值, 其中 $F$ 是 $C^1$ 函数, 那么欧拉方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')\right)-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,y')=0 \tag{2}$$

是有意义的. 因为没有什么能保证 $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')$ 是可微的, 所以上述式子并不明显! 遵循拉格朗日的经典步骤, 可以得到对在 $(a,b)$ 上具有紧支集的任意 $C^1$ 函数 $\zeta$, 当 $\varepsilon=0$ 时, 函数 $\varepsilon\mapsto I(y+\varepsilon\zeta)$ 有极值, 这与下列这个关系式是等价的:

$$\int_b^a\left(\frac{\partial F}{\partial y}\zeta+\zeta'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx=0; \tag{3}$$

但是, 用 $\zeta(a)=\zeta(b)=0$ 这样一个事实来消除 $\zeta$ 代替用分部积分来消除 $\zeta'$. 分部积分确实能把 (3) 式写成形式

$$\int_b^a\zeta'(x)f(x)dx=0, \tag{4}$$

其中仅已知 $f(x)=\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))-\int_a^b\dfrac{\partial F}{\partial y}(t,y(t),y'(t))$ 在 $(a,b)$ 上连续. 这个问题是证明 $f$ 是常量时, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))$ 确实是可微的并

且满足方程 (2). 然而这相当于表明 $D(u)=0$ 的任何弱解是常数, 这正是杜布瓦·雷蒙证明的结果①.

当然, 这一结果对任意微分算子并不都是正确的: 例如如果 $A$ 和 $B$ 是 $\mathbb{R}$ 中的任意局部可积函数, 函数 $(x,y)\mapsto A(x)+B(y)$ 是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ 的一个弱解, 那么对任意一个具有紧支集的 $C^2$ 函数 $g$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} A(x)dx\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}dy=0 \text{ 和 } \int_{\mathbb{R}} B(y)dy\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}dx=0.$$

下一步将定义 "广义" 算子 $P$, 它作用在不可微的函数上: 对 $\Omega$ 中的局部可积函数 $f$, $P\cdot f$ (根据定义) 是局部可积函数 $h$, 它使得对任意定义在 $\Omega$ 中具有紧支集的 $C^\infty$ 函数 $g$, 有

$$\langle h,g\rangle=\langle f,{}^tP\cdot g\rangle. \tag{5}$$

在稍微不同的背景中, 嘉当在 1922 年注意到 [39] 对微分二形式 $\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$, 有时可以定义一个 "外导数" $d\omega$, 即使 $P,Q,R$ 仅是连续的, 但不必是可微的. 如果 $S$ 是一个连续函数, 使得对有光滑边界 $\Sigma$ 的任意开集 $V$, 有

$$\iiint_V Sdxdydz=\iint_\Sigma (Pdydz+Qdzdx+Rdxdy), \tag{6}$$

则可以定义 $d\omega=Sdx\wedge dy\wedge dz$. 作为一个例子, 他给出的形式是如果 $P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$, $R=\dfrac{\partial U}{\partial z}$, 其中 $U$ 是密度 $\rho$ 的电势, 且仅假设 $\rho$ 是连续的, 那么 $P,Q,R$ 不必是可微的, 但是 $S=-4\pi\rho$ 满足 (6).

对 $P=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ (命名为 "伪微商"), 勒雷 (J. Leray) 在 1934 年的一篇论文中首次系统地引入 "广义" 算子 [141]②. 除此之外, 勒雷还借助具有紧支集的趋于 0 的 $C^\infty$ 函数序列 $\{\rho_n\}$, 引入了局部可积函数 $f$ 的正则化过程, 使得 $\rho_n\geqslant 0$ 且 $\int\rho_n dx=1$: 他表明如果 $f$ 是连续的, 那么 $\rho_n*f$ 是一个 $C^\infty$ 函数, 并且在每个紧子集中一致收敛于 $f$, 且如果

①有趣的是需要指出杜布瓦·雷蒙在这篇文章中用到了 (可能是第一次) 我们现在所说的 "测试函数", 即具有紧支集的 $C^\infty$ 函数.

②1939 年, 弗里德里希斯再次独立地发现了勒雷的结果 [76].

$h$ 是连续的且是 $f$ 的 "广义导数", 那么 $\rho_n * h$ 是 $\rho_n * f$ 的导数[①] (通常情况下).

根据我们已有的知识, 我们认识到广义导数的定义是应用勒贝格积分的一个自然结果. 分析学家逐渐开始熟悉这样的想法, 即在许多分析学的运算中, 对两个在零测度集以外相等的可测函数不进行区分. 然而对微分并不是这样的: 如果 $f$ 是一个 $\mathbb{R}$ 中的 $C^\infty$ 函数, 且 $\varphi$ 是有理数集的特征函数, 那么 $f+\varphi$ 几乎处处等于 $f$, 但是在通常意义下 $f+\varphi$ 在任意点处都没有导数! 然而, 它自然有等于 $f'$ 的 "广义导数", 这将使得对分析中导数的 "自然" 定义的正确性产生怀疑.

如果定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f$ 有 "广义导数" $h$, 且 $h$ 是局部可积的, 那么 $f$ 几乎处处等于 $\int_0^x h(t)dt + c$, 其中 $c$ 是常数. 这表明一个连续函数可能几乎处处存在通常意义下的导数, 而没有 "广义导数", 例如递增且不绝对连续的函数 $f$, 这也是在经典意义下导数概念不适用性的另一个例子.

毋庸置疑, 这也表明在 $\mathbb{R}$ 中的一个点处不连续的函数不可能有 "广义导数". 然而, 由狄拉克可知, 理论物理学家们毫不犹豫地认为当 $x<0$ 时 $Y$ 等于 0、当 $x\geqslant 0$ 时 $Y$ 等于 1 的海维赛德 (Heaviside) 函数 $Y$ 有 "广义导数", 即当 $x\neq 0$ 时 $\delta$ 等于 0、且 $\int \delta(x)dx = 1$ 的所谓的 "狄拉克函数" $\delta$. 之后他们还对这个 "函数" 引入一系列 "导数" $\delta', \delta'', \cdots$, 对一个 $C^n$ 函数 $g$, 可以写出下述 "方程"

$$\int g(x)\delta^{(n)}(x-a)dx = g^{(n)}(a) \tag{7}$$

或者

$$\int \delta'(a-x)\delta^{(n)}(x-b)dx = \delta^{(n+1)}(a-b). \text{ [56]} \tag{8}$$

在一段时间内, 数学家们对这些处理方法很困惑, 这最终导致了对真函数的正确论述. 索伯列夫 (S. Sobolev) 于 1936 年迈出了决定性的一步 [200]: 这些函数的结果最终完美地定义了恰当的线性型, 如

[①] 对不同形式的函数列 $\{\rho_n\}$, 关于积分 $\rho_n * f$ 的研究受到从魏尔斯特拉斯到勒贝格的分析学家们的偏爱, 取名为 "奇异积分". 对具有收敛于一点的紧支集的连续函数 $\rho_n$, 外尔将奇异积分系统地应用到李群上来代替 $L^1(G)$ 中缺失的单位元素 ([227], vol. III, p. 73).

定义在度量空间 $\vartheta(\Omega)$ 上的 $f \mapsto f^{(n)}(a)$, 其中 $\vartheta(\Omega)$ 是由定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上的具有紧支集的 $C^{\infty}$ 函数的全体构成的空间. 如果用真数学的属性来刻画它们, 那么索伯列夫的想法就是直接处理这样的线性型. 他的这个想法是被一个具体的问题刺激产生的, 即具有一般边界条件的二阶双曲型方程的柯西问题的解 (见第四章, 第 5 节). 他知道他需要什么样的性质, 并且 $\vartheta(\Omega)$ 上的 "泛函" 的一般性质给出了刻画, 我们现在称之为 $\Omega$ 上的分布 (施瓦兹 (L. Schwartz) 之后): 对每个紧子集 $K \subset \Omega$, 考虑 $K$ 中具有支集的所有 $C^{\infty}$ 函数构成的 $\vartheta(\Omega)$ 的子空间 $\vartheta(\Omega; K)$, 且对半范数

$$P_{m,K}(f) = \sup_{|\alpha| \leqslant m, x \in K} |D^{\alpha} f(x)|, \tag{9}$$

它是一个弗雷歇空间. 从而分布是 $\vartheta(\Omega)$ 上的线性型 $T$, 它在子空间 $\vartheta(\Omega; K)$ 上的限制在前面的拓扑意义下是连续的①. 任意一个 $\Omega$ 上的局部可积函数 $F$ 可以定义一个分布 $f \mapsto \int_{\Omega} F(x) f(x) dx$, 两个几乎处处相等的函数可以定义相同的分布 (当然它是 $\Omega$ 上的测度, 这个测度关于勒贝格测度有一个密度), 所以由局部可积函数类组成的空间 $L^1_{loc}(\Omega)$ 被认为是所有分布组成的空间 $\vartheta'(\Omega)$ 的子空间, 但是更一般的是所有定义在 $\Omega$ 上的拉东 (Radon) 测度是特殊的分布, 并且能正确地定义所谓的狄拉克函数 $x \mapsto \delta(x-a)$ 为测度 $\varepsilon_a : f \mapsto f(a)$, 即在点 $a$ 处质量为 $+1$ 的测度. 索伯列夫指出通过将 $g \cdot T$ 定义为分布 $f \mapsto T(gf)$ 可以对 $\Omega$ 上的任意 $C^{\infty}$ 函数 $g$ 乘以一个分布 $T$. 更重要的是, 可以把任意分布 $T$ 的导数 $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 定义为 $f \mapsto -T\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. 最后, 他考虑空间 $\vartheta'(\Omega)$ 上的弱拓扑 $\sigma(\vartheta'(\Omega), \vartheta(\Omega))$, 且表明可对分布进行正则化过程: $\rho_n * T$ 被定义为分布 $f \mapsto T(\check{\rho}_n * f)$, 它是 $C^{\infty}$ 函数类, 并且当 $n \to +\infty$ 时, $\rho_n * T$ 弱收敛于 $T$. 分布是 $C^{\infty}$ 函数的极限 (对弱拓扑而言) 的事实使得一些数学家也将其称为 "广义函数" [86].

同一时期, 在分析中的不同领域, 尤其是在古典调和分析中, 需要

①索伯列夫并没有谈及拓扑, 但是他在空间 $\vartheta(\Omega)$ 中定义的收敛序列等价于空间 $\vartheta(\Omega; K)$ 中的那些拓扑. 这个定义的另一种表述是空间 $\vartheta(\Omega; K)$ 中拓扑的 "方向极限". 当 $\vartheta(\Omega)$ 给定那种拓扑时, 广义函数成为空间 $\vartheta(\Omega)$ 的对偶的元素.

以某种方式来推广算子的定义, 而不是微分算子的定义[①]. 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f$ 的傅里叶变换 $\mathfrak{F}f$ 只在 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 时才有意义. 然而, 直到 1910 年, 普朗谢雷尔定理 (第七章, 第 6 节) 表明运用连续性可以扩展原来的定义域 $L^1 \cap L^2$, 从而可以把算子 $f \mapsto \mathfrak{F}f$ 定义为希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的等距映射. 换句话说, 对于一个属于 $L^1$ 的函数 $f \in L^2$, 依然能定义傅里叶变换 $\mathfrak{F}f$, 但是仅仅只能通过极限过程. 之后的努力为对 $L^p$ 空间中的函数 $f$ 定义相似的傅里叶变换. 关于这一问题的讨论, 韦伊在 1940 年注意到 [226, p. 118] 如果 $\Lambda$ 是由所有使得 $\mathfrak{F}f$ 也属于 $L^1 \cap L^\infty$ 的函数 $f \in L^1 \cap L^\infty$ 构成的空间, 那么对所有函数 $f \in \Lambda$, 如果两个函数 $\Phi, \varphi$ 使得

$$\int \Phi(x)\overline{\mathfrak{F}f(x)}dx = \int \varphi(x)\overline{f(x)}dx, \tag{10}$$

从而可以认为 $\Phi$ 是 $\varphi$ 的傅里叶变换.

早在 1911 年, 外尔在他关于二阶线性微分方程的工作中 (第七章, 第 6 节) 已经注意到, 如果函数 $f$ 使 $f(x)/(1+|x|)$ 在 $\mathbb{R}$ 中可积 (例如, 如果 $xf(x)$ 是有界的) 且满足一个附加的正则条件, 那么如果用斯蒂尔切斯测度代替 $\mathfrak{F}f$, 则能得到函数 $f$ 的傅里叶反演公式 ([227], vol. I, p. 359–360). 这相当于定义有界斯蒂尔切斯测度的傅里叶变换, 这个定义后来由丹尼尔 (Daniell) 于 1920 年清晰地给出 [46], 且后来成为了概率论学家们喜爱的一个工具. 哈恩 [96] 和维纳 [229] 发展了外尔的思想, 且博赫纳 (Bochner) 后来将外尔的思想扩展到使得 $f(x)/(1+|x|^k)$ 是可积的函数上, 其中 $k$ 是任意整数 [24]. 利用这个事实, 傅里叶变换变成导数乘以 $x$ (相差一个常数), 博赫纳沿用黎曼处理三角级数的方法 [182, p. 245]. 为得到一个可积函数, 他从 $e^{-ix\xi}$ 中减去一个函数 $L_k(x\xi)$, $L_k(x\xi)$ 在 0 的紧邻域中等于 $e^{-ix\xi}$ 的幂级数展开的前 $k$ 项 $\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!}(-ix\xi)^m$, 且它在 0 的紧邻域外等于 0, 记这个可积函数为

$$E(\xi, k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{e^{-ix\xi} - L_k(x\xi)}{(-ix)^k}dx. \tag{11}$$

[①]例如, 在变分法中会考虑在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个光滑 $p$ 维变分 $V$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上 $p$ 微分式的向量空间上的一个线性 "泛函" $\omega \mapsto \int_V \omega$, 这导致产生了 "广义变分" [231] 和 "电流层" 的思想 [49].

当然, 这仅仅确定了一个关于 $\xi$ 的次数小于或等于 $k-1$ 的多项式, 博赫纳的想法是在某种意义下将 $E(\xi,k)$ 的一个导数看成是 $f$ 的 "傅里叶变换", 确实在 "形式上" 记为

$$f(x)\sim\int e^{ix\xi}d^kE(\xi,k),$$

它是 "反演公式". 但是他手头上并没有 "$k$ 阶导数" 这样的定义可以使用, 他只能研究在应用方面他对差分方程给出的函数 $E(\xi,k)$.

1945 年, 施瓦兹认识到索伯列夫引入的分布概念 (后来他独立地发现了该定义) 能够给傅里叶变换进行令人满意的推广, 该推广包括之前所有的傅里叶变换的定义 [194], 这是施瓦兹的主要贡献之一. 这里他不再考虑韦伊引入的空间 $\Lambda$, 这类空间不容易被准确刻画, 他的观点是这样的, 令定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 $C^\infty$ 函数 $f$ 是 "测试函数", 在这里使得 $f$ 及它的所有导数在 "无穷远处速降", 即使得它们与任意多项式的乘积是可积的. 由 "速降函数" 构成的空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质是傅里叶算子 $f\mapsto\mathfrak{F}f$ 在空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中是双射, 且 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 具有由下述半范数定义的弗雷歇拓扑:

$$q_{s,m}(f)=\sup_{|\alpha|<s,x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^m|D^\alpha f(x)|. \tag{12}$$

容易得出, 对 $\mathbb{R}^n$ 中的每个紧子集 $K$, 空间 $\vartheta(\mathbb{R}^n;K)$ 包含在空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中, 并且单射 $\vartheta(\mathbb{R}^n;K)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是连续的. 再者, 所有 $\vartheta(\mathbb{R}^n;K)$ 的并在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的. 因此, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性型能被认为是特殊的分布, 施瓦兹称之为缓增广义函数. 从而缓增广义函数空间 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶) 上的傅里叶变换 $T\mapsto\mathfrak{F}T$ 被定义为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的傅里叶变换的转置自同构 (通过对方程 (10) 进行推广), 换句话说, 缓增广义函数 $T$ 的傅里叶变换 $\mathfrak{F}T$ 可被定义为

$$\langle\mathfrak{F}T,f\rangle=\langle T,\mathfrak{F}f\rangle,\quad \text{对于所有的 } f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{13}$$

施瓦兹努力把以前的结果都归结为一个统一的完整理论, 并且通过其经典论著中的大量定义和结果使得这些理论更加丰富 (例如张量积和广义函数的卷积) [194]. 通过自己和许多学生的努力, 他开始探究广义函数的潜在威力, 并且成功地使全世界的分析学家确信这个新概

念将成为求解分析学中所有线性问题的核心, 这是由于它在基本微分运算中的自由性和一般性使得其摆脱了许多不必要的限制和缺陷①. 我们应该特别提及他最原始的工作, 即 "核定理" [195]. 从希尔伯特和里斯的工作开始, 我们已经意识到了一个由 "核函数" $K(x,y)$ 定义的积分算子 $f \mapsto K\cdot f$, 如 $(K\cdot f)(x)=\int K(x,y)f(y)dy$, 已经远离了对线性算子的一般概念的彻底探讨, 即使恒等算子也不能用这样的方式来表述! 因此在这个定义中如果用 "核分布" 来代替 "核函数", 我们几乎得到现在分析问题中遇到的所有线性算子. 更确切地说, 如果 $X\subset\mathbb{R}^m$ 和 $Y\subset\mathbb{R}^n$ 都是开集, 从 $\vartheta(X)$ 到 $\vartheta'(Y)$ 的任意线性映射 $K$, 对任意紧子集 $L\subset X$, 只假设得到一个局部连续映射 $\vartheta(X;L)\to\vartheta'(Y)$ (当给出 $\vartheta(X;K)$ 的弗雷歇拓扑和 $\vartheta'(Y)$ 的弱拓扑时), 则 $K$ 能被唯一确定的 "核分布" $K\in\vartheta'(X\times Y)$ 来定义, 通过这种方式, 对任意 $u\in\vartheta(X)$, 分布 $K\cdot u$ 对任意的函数 $v\in\vartheta(Y)$, 满足:

$$\langle K\cdot u,v\rangle=\langle K,u\otimes v\rangle. \tag{14}$$

对这个结果感兴趣是因为这样一个事实, 对大多数由定义在 $X$ 上函数构成的空间 $E$, 使得 $\vartheta(X)\subset E\subset\vartheta'(X)$、单射 $\vartheta(X;L)\to E$ 和 $E\to\vartheta'(X)$ 是连续的. 如果 $A$ ($B$ 也是) 是由定义在 $X$ 上的函数构成的上述空间, 且 $U:A\to B$ 是一个连续线性映射, 则复合映射 $\vartheta(X;L)\to A\xrightarrow{U}B\to E\to\vartheta'(X)$ 是连续的, 所以能被一个 "核分布" 定义. 例如恒等映射 $A\to A$ 能被分布 $I$ 定义, $I$ 是 $X\times X$ 中的对角 $\Delta_X$ 确定的一个测度, 且使得 $\int_{X\times X}w(x,y)dI(x,y)=\int_X w(x,x)dx$.

①施瓦兹在分布理论中的作用与牛顿和莱布尼茨在微积分历史中的作用相似: 与流行的说法相违背, 他们并没有创造它. 当牛顿和莱布尼茨还是学生的时候, 微积分已经被卡瓦列里、费马和罗贝瓦尔等人掌握. 他们使微积分的算法和定义系统化, 以至于微积分成为我们所了解的强有力的万能工具. 而在此之前, 微积分要经过复杂的论证和图解才能使用 (见 [28]).

# 第九章　泛函分析在微分方程和偏微分方程中的应用*

我不打算列举泛函分析在最近 50 年里取得的所有应用, 这些应用已经充分证明了创建泛函分析这套理论的合理性. 但是就像我们在前四章中看到的那样, 泛函分析中许多概念和问题的起源与常微分方程及偏微分方程有关. 因而我觉得有必要对这些问题中的几个最突出的进展给出粗略的描述, 这些问题已经用到了泛函分析提供的新工具, 尤其是谱理论和分布理论.

## §1　不动点定理

在我们将要讨论的第一个应用中, 除了巴拿赫空间的定义外, 它几乎没有太多的用处, 且结果主要是关于非线性方程的. 它的主要思想类似于把压缩映射原理 (第六章, 第 3 节) 应用到微分方程的局部存在性定理上, 对函数构成的某个巴拿赫空间 $E$ 中的函数 $z$, 它可以表示为 $z = F(z)$. 如果 $B$ 是巴拿赫空间 $E$ 中的一个有界开凸集的闭包, $F$ 是 $B$ 到其自身的一个压缩映射, 则由压缩映射原理可知 $z = F(z)$ 在 $B$ 中有唯一解, 我们称这个解为 $F$ 的不动点. 20 世纪初, 由于庞加

*本章由李斐翻译.

莱在 1895—1910 年创立了代数拓扑这个新的数学分支, 从而我们可以获得新的 "不动点定理". 应用代数拓扑理论的概念, 布劳威尔在 1910 年得到了这样的结果, 即若 $B$ 与某个有限维向量空间 $E$ 中的闭球同胚, $F$ 是 $B$ 到其自身的任意一个连续映射 (这里不再假设 $B$ 是压缩映射), 则 $F$ 在 $B$ 中至少有一个不动点.

现在的问题是在无限维巴拿赫空间 $E$ 中建立类似的定理. 1922 年, 伯克霍夫和凯洛格获得了这方面的第一个结果. 他们考虑了 $E=C(I)$ 或 $E=l^2$ 的情形, 而且证明了若 $B$ 为一个紧凸集 [22], 则可以把布劳威尔定理推广到该巴拿赫空间上. 他们用的基本策略是借助 $B$ 的紧性用有限维紧凸集序列 $B_n$ 来 "逼近" $B$, 类似地, 用 $B_n$ 到自身的连续映射 $F_n$ 来 "逼近" $F$. 绍德尔对这一方法进行了极大推广, 他证明了这一结果适用于任意巴拿赫空间 $E$, 并且对可分的巴拿赫空间, 可以用弱紧性来代替 $B$ 的紧性, 用弱连续性来代替 $F$ 的连续性 ([186], [187]). 这一结果使得绍德尔在仅假设 $f$ 是有界连续的情况下证明了方程

$$\Delta z=f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

在边界光滑的区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 内有解, 在边界上值为零. 这个方法把 (1) 式转化为积分 – 微分方程

$$z(x,y)=\iint_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)f\left(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\frac{\partial z}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)d\xi d\eta, \tag{2}$$

其中 $G$ 是关于 $\Omega$ 的格林函数.

随后不久, 绍德尔用一个更好的方法解决了局部拟线性双曲型方程

$$\begin{aligned}&\sum_{i,k}A_{ik}\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_k}\\&=A\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

的柯西问题①. 他的方法为对给定函数 $z=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 求线性双

①假设方程是 "正规的", 即方程的左边使得二次型 $\sum\limits_{i,k}A_{ik}\xi_i\xi_k$ 有符号差 $(1,n-1)$.

曲型方程

$$\sum_{i,k} A_{ik}\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i\partial x_k}$$
$$= A\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{4}$$

的柯西问题, 其中 $Z$ 为未知函数. 当 $z$ 是恰当集合 $K$ 中的元素时, 该问题有唯一解 $Z(z)$, 且若方程 $Z(z)=z$ 在 $K$ 中有解, 则方程 (3) 在 $K$ 中存在解 $z$. 这个问题的关键在于选择合适的集合 $K$, 使得在此可以应用推广的绍德尔不动点定理. 主要的一点是对 "正规的" 线性双曲型方程

$$L(u)\equiv\sum_{i,k} A_{ik}(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_j B_j(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}$$
$$+C(x_1,\cdots,x_n)u$$
$$= F(x_1,\cdots,x_n) \tag{5}$$

的解得到了先验不等式, 其中方程 (5) 定义在截棱柱 $P$ 上, $P$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中有更大的基 $B$. 1926 年, 弗里德里希斯 (K. O. Friedrichs) 和卢伊 (H. Lewy) 首次引入了一个方法, 该方法需要通过分部积分和斯托克斯公式对积分 $\int_P \frac{\partial u}{\partial x_n}L(u)d\omega$ 进行变换, 绍德尔用这个方法得到了 (对 $P$ 进行适当的限制且系数 $A_{i,k}$, $B_j$ 和 $C$ 为 (5) 中的系数) 不等式

$$\int_P\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right)d\omega$$
$$\leqslant M\left(\int_B\left(u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right)d\sigma+\int_P F^2 d\omega\right), \tag{6}$$

其中 $M$ 为独立于 $u$ 的常数. 绍德尔运用微分法, 对 $u$ 的所有微商 (任意阶), 得到了类似的不等式. 对恰当的 $r$, 可以用范数 $\sup\limits_{x\in P}\left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}|D^\alpha f(x)|\right)$ 来定义空间 $E$, 但是对 $s$ 的另一个恰当的值, 若空间 $E$ 是用另一个范数 $\left(\int_P\left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant s}|D^\alpha f(x)|^2\right)dx\right)^{1/2}$ 来定义的, 则集合 $K$ 为 $E$ 中的一个

球. 因而, 绍德尔利用他的先验不等式证明了 $K$ 在 $E$[①] 中是紧的, 并且 $z \mapsto Z(z)$ 在 $K$ 中连续 [190].

布劳威尔证明的另一个著名定理是区域不变性. 若 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, $f$ 为 $\Omega$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续单射, 则 $F$ 的像 $F(\Omega)$ 也为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集. 1929 年, 绍德尔证明了在某些类型的巴拿赫空间中, 上述定理对形如 $x \mapsto x + H(x)$ 的映射 $F$ 仍然成立, 其中 $H$ 在里斯的意义下是全连续的, 但不一定是线性的. 因此绍德尔推断, 如果我们知道方程

$$\Delta z - f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \psi(x, y) \tag{7}$$

在 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的边界上最多有一个解, 那么这个解取给定值 $\varphi(s)$, 从而若给定的函数 $\varphi_0$ 和 $\psi_0$ 存在这样的解的话, 则对充分趋近于 $\varphi_0$ 和 $\psi_0$ 的函数 $\varphi$ 和 $\psi$, 该结果也成立 [189].

勒雷 (J. Leray) 和绍德尔 1934 年发表的著名论文是代数拓扑在泛函方程中最好的应用 [142]. 若 $U$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中使 $\overline{U}$ 为紧集的开集, 并且 $f$ 为 $\overline{U}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的连续映射, 则对每个点 $z \in \mathbb{R}^n$, 它不属于 $f$ 在 $U$ 的边界上的像集, 布劳威尔证明整数 $d(f, U, z)$ 仅依赖于 $z$ 所属的连通分支 $\mathbb{R}^n - f(Fr(U))$, 且当 $f(x) = F(x, \lambda)$ 时, $d(f, U, z)$ 随 $\lambda$ 连续变化, 其中 $F$ 是连续的且 $\lambda$ 为实参数; 再者, 当 $d(f, U, z) \neq 0$ 时, 逆像集 $f^{-1}(z)$ 非空. 通过用有限维子集逼近巴拿赫空间的紧子集, 勒雷和绍德尔能够运用布劳威尔的这个定理证明下述存在定理. 设 $E$ 为巴拿赫空间, $I \subset \mathbb{R}$ 为紧区间, $\Omega \subset E \times I$ 为 $E \times I$ 中的有界开集, $F : \overline{\Omega} \to E$ 为全连续且一致连续的映射. 我们假设对每个 $\lambda \in I$, 方程 $x - F(x, \lambda) = 0$ 在 $\Omega$ 边界上无解, 对 $\lambda$ 的一个值 $\lambda_0 \in I$, 方程 $x - F(x, \lambda_0) = 0$ 在 $\Omega$ 中有解, 则对每个 $\lambda \in I$, 方程 $x - F(x, \lambda) = 0$ 在 $\Omega$ 中至少存在一个解.

该定理在偏微分方程中的应用通常需要先验不等式, 该先验不等式能够保证定理满足所有前提假设.

## §2 卡莱曼算子和广义特征向量

为了应用于偏微分方程, 必须推广第五章第 3 节中卡莱曼算子的定义. 设 $X$ 是局部紧的可度量且可分的空间, $\mu$ 为 $X$ 上的正测度, $H$

[①] 这可能是空间 $H^s$ 的范数的第一次出现.

为可分希尔伯特空间 (有限维或无穷维), 设 $\{a_n\}_{n\in J}$ 为 $H$ 的希尔伯特基, 其中 $J$ 为有限集或可数集. 定义向量值函数 $f: x \mapsto \sum_{n\in J} f_n(x)a_n$ 构成的空间为一个新的希尔伯特空间 $L^2_H(X,\mu)$, 其中 $f$ 为 $X$ 到 $H$ 的函数, 它使得每个 $f_n$ 是 $L^2(X,\mu)$ 中的复值函数且 $|f|^2 = \sum_{n\in J} |f_n|^2$ 是 $\mu$-可积的. 该希尔伯特空间中的标量积由

$$(f|g) = \sum_{n\in J} \int_X f_n \bar{g}_n d\mu \tag{8}$$

来定义. 现在设 $Y$ 为另一个局部紧的可度量且可分的空间, $\nu$ 为 $Y$ 上的正测度, 则 $X\times Y$ 上的卡莱曼核 (对测度 $\mu\otimes\nu$ 和希尔伯特空间 $H$) 为 $X\times Y$ 到 $\mathbb{C}^J$ 上的映射 $K:(x,y)\mapsto (K_n(x,y))_{n\in J}$, 它满足:

1° 每个复函数 $K_n$ 是 $(\mu\otimes\nu)$-可测的.

2° 存在一个空集 $N\subset Y$, 使得对每个 $y\notin N$, 函数 $x\mapsto K_n(x,y)$ 是 $\mu$-可测的且函数 $x\mapsto \sum_{n\in J} |K_n(x,y)|^2$ 是 $\mu$-可积的.

若 $f=\sum_{n\in J} f_n a_n$ 是 $L^2_H(X,\mu)$ 中的函数, 则对所有 $y\notin N$, 函数 $x\mapsto \sum_{n\in J} K_n(x,y)f_n(x)$ 是 $\mu$-可积的, 且

$$g(y) = \int_X \sum_{n\in J} K_n(x,y) f_n(x) d\mu(x) \tag{9}$$

为定义在 $Y-N$ 中的 $\nu$-可测函数. 记 $K\cdot f = g$, 称定义在 $L^2_H(X,\mu)$ 中的 $K$ 为由卡莱曼核 $K$ 定义的卡莱曼算子.

1952 年, 毛特纳 (F. Mautner) 发现可以用一些性质来刻画卡莱曼算子, 这些性质与核的定义无关 [157]. 假设有一个空集 $N\subset Y$, 且对每个 $y\in Y-N$, 连续线性映射 $F_y: L^2_H(X,\mu)\to\mathbb{C}$ 使得对每个函数 $f\in L^2_H(X,\mu)$, 映射 $y\mapsto F_y(f)$ 是 $\nu$-可测的. 从而存在卡莱曼核 $K=\{K_n\}$ 和空集 $N'\supset N$ 使得对任意 $y\notin N'$ 及所有函数 $f\in L^2_H(X,\mu)$, 有 $F_y(f)=(K\cdot f)(y)$.

我们已经看到 (第七章, 第 5 节), 可以将连续正规算子 "对角化", 这个对角化可以把它转化成与一个恒等映射 $\zeta\mapsto\zeta$ 的乘法. 更一般地, 在希尔伯特空间 $E$ 中, 通过用可分的局部紧空间 $Y$ 代替 $Sp(B)$, 用

$Y$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $\zeta \mapsto \Phi(\zeta)$ 代替函数 $\zeta \mapsto \zeta$, 进而可以像在第七章第 5 节中那样对函数 $\zeta \mapsto \Phi(\zeta)$ 定义连续正规算子 $B$ 的对角化.

借助他对卡莱曼算子的刻画, 即当算子 $B$ 是定义在希尔伯特空间 $E = L^2(X, \mu)$ 上的算子, 且它是定义在 $X \times X$ 上对应于卡莱曼核 $(x, y) \mapsto K(x, y)$ 的卡莱曼算子时, 相对于测度 $\mu \otimes \mu$, 毛特纳能够对对角化进行更精确的描述. 另外假设对等距映射 $T = \{T_j\}_{1 \leqslant j < \omega}$, 它定义了函数 $\Phi$ 的对角化, 则在 $Y$ 中 (对于测度 $\nu$) 几乎处处有 $\Phi(\zeta) \neq 0$, 这等价于假设 $B$ 和 $B^*$ 是单射. 从而可以描述等距映射

$$T_j : E_j \to F_j = L^2(Y, \varphi_{S_j} \cdot \nu),$$

它按下述方式可实现对角化:

1° 对每个指数 $j$, $1 \leqslant j < \omega$, 存在 $(\mu \otimes \nu)$-可测函数 $(x, \zeta) \mapsto e_j(x, \zeta)$ 使得对 $\zeta \notin S_j$, 有 $e_j(x, \zeta) = 0$, 且使得对几乎所有的 $x \in X$, 函数

$$\zeta \mapsto |\Phi(\zeta)|^2 \sum_{1 \leqslant j < \omega} |e_j(x, \zeta)|^2$$

是 $\nu$-可积的.

2° 设 $r(x) = \left( \int_X |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2}$ 是 $\mu$-可测的且几乎处处有限, 则对每个使得 $\int_X^* r(x)|f(x)|d\mu(x) < +\infty$ 的函数 $f \in E_j$, 有

$$(T_j \cdot f)(\zeta) = \int_X f(x)\overline{e_j(x, \zeta)} d\mu(x) \tag{10}$$

对几乎每个 $\zeta \in Y$ 都成立.

3° 存在具有下列性质的空集 $N \subset X$, 即对每个满足 $1 \leqslant j < \omega$ 的 $j$, 设 $u_j$ 为属于 $F_j$ 的函数, 且假设函数

$$\zeta \mapsto |\Phi(\zeta)|^{-2} \sum_{1 \leqslant j < \omega} |u_j(\zeta)|^2$$

是 $\nu$-可积的. 从而对每个 $x \notin N$, 函数 $\zeta \mapsto \sum_{1 \leqslant j < \omega} e_j(x, \zeta) u_j(\zeta)$ 是 $\nu$-可积的, 且

$$(T^{-1} \cdot (u_j))(x) = \int_Y \left( \sum_{1 \leqslant j < \omega} e_j(x, \zeta) u_j(\zeta) \right) d\nu(\zeta). \tag{11}$$

若我们把该结果限制在调和分析的情形中, 则可更好地理解此结果的性质. 取 $X=G$ 为局部紧的可分交换群, 设 $\mu$ 是 $G$ 上的哈尔测度, 考虑复函数 $b\in L^1(G)\cap L^2(G)$, 则 $B: f\mapsto b*f$ 是 $L^2(G)$ 中满足 $B^*\cdot f=\overset{\vee}{b}*f$ 的连续正规算子. 进一步, 由定义

$$(b*f)(x)=\int_G b(x-y)f(y)d\mu(y)$$

可知 $B$ 是对应于卡莱曼核 $K(x,y)=b(x-y)$ 的卡莱曼算子. 普朗谢雷尔定理和傅里叶变换的乘法性质 (第七章, 公式 (44)) 表明等距映射 $T: f\mapsto \mathfrak{F}f$ 可以定义算子 $B$ 的对角化, 其中 $Y=\hat{G}$, $\omega=2$, $\Phi(\zeta)=\mathfrak{F}b(\zeta)$ 以及 $\nu$ 为 $\hat{G}$ 上的哈尔测度. 从而公式 (10) 和公式 (11) 可归结为

$$(T\cdot f)(\zeta)=\int_G f(x)\overline{e(x,\zeta)}d\mu(x),\quad (T^{-1}\cdot u)(x)=\int_{\hat{G}} e(x,\zeta)u(\zeta)d\nu(\zeta), \tag{12}$$

其中对 $x\in G$ 和 $\zeta\in\hat{G}$, $e(x,\zeta)=\langle x,\zeta\rangle$, 也就是说, 它们是傅里叶变换及其逆变换的定义. 这些公式仅对 $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ 和 $u\in L^1(\hat{G})\cap L^2(\hat{G})$ 成立, 这表明不能完全去掉公式 (10) 和 (11) 中对函数 $f$ 的限制. 对每个 $\zeta\in\hat{G}$, 有

$$b*e(\cdot,\zeta)=\Phi(\zeta)e(\cdot,\zeta), \tag{13}$$

虽然在一般情况下, 函数 $e(\cdot,\zeta)$ 不属于 $L^2(G)$, 但是在某种意义下, 它们是算子 $B$ 的 "广义特征向量", 里斯已经注意到这一点 (第七章, 第 2 节).

1953 年, 戈尔丁 (L. Gårding) [81] 与布劳德 (F. Browder) [34] 同时发现所有自伴算子都有 "广义特征向量", 这些自伴算子来源于形式自伴椭圆型微分算子 (参看第 5 节). 假定算子 $P$ 或 $L^2(X)$ ($X$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的有界开子集) 中的 $m$ 阶算子有自伴扩张 $A_P$, 从而 $L=A_P+iI$ ($I$ 为单位算子) 为无界正规算子, 它也是 $dom(A_P)$ 到 $L^2(X)$ 的双射. 因此其逆 $L^{-1}$ 是 $L^2(X)$ 中的连续正规算子, 当然其迭代 $B=L^{-q}$ 也是 $L^2(X)$ 中的连续正规算子. 由算子 $P$ 存在拟基本解 (看第 5 节) 可知对 $qm>n$, $B$ 是卡莱曼算子. 因而也可以由算子 $P$ 的次椭圆性及毛特纳定理可知存在 $A_P$ 的对角化, 其中 $Y=Sp(A_P)$ 和 $\Phi(\zeta)=\zeta$, 对 $\zeta\notin Sp(P)$, 每个函数 $e_j(\cdot,\zeta)$ 是偏微分方程

$$(P\cdot e_j(\cdot,\zeta))(x)=\zeta e_j(x,\zeta) \tag{14}$$

的 $C^\infty$ 函数解 (一般不在 $L^2(X)$ 中).

## §3 常微分方程的边值问题

外尔在二阶线性偏微分方程谱理论方面的研究结果很自然地提出了这样的一个问题 (第七章, 第 3 节), 即把这些结果推广到任意阶线性微分方程上, 但是直到 1949 年小平邦彦 (K. Kodaira) [126] 才解决了这个问题. 令人非常惊讶的是, 虽然斯通在他的书 [207] 中已经表明如何应用冯 · 诺依曼的谱理论得到外尔的结果, 但是小平邦彦还是选择用外尔的方法对此进行适当推广. 与此同时, 格拉茨曼 (Glazman) 和奈马克的工作以及后来许多数学家的工作完善了小平邦彦的结果, 也将这些结果归入到冯 · 诺依曼的理论中. 读者可从 [62, vol. II, p. 1588–1592] 中获得更多的历史细节, 而接下来我们只讨论该理论的主要特点.

考虑偶数阶 $2r$ 的微分算子

$$L : u \mapsto D^r(p_0 D^r u) + D^{r-1}(p_1 D^{r-1} u) + \cdots + D(p_{r-1} Du) + p_r u, \quad (15)$$

其中 $p_0, p_1, \cdots, p_r$ 是 $\mathbb{R}$ 的开区间 $J = (\alpha, \beta)$ (有界或无界) 上的实 $C^\infty$ 函数, 且对所有 $t \in J$, $p_0(t) \neq 0$. 微分算子 (15) 是形式自伴算子, 也就是说, 对 $\vartheta(J)$ ($J$ 中的具有紧支集的 $C^\infty$ 函数构成的空间) 中的任意两个函数 $u$ 和 $v$, 有

$$(L \cdot u | v) = (u | L \cdot v), \quad (16)$$

其中在 $L^2(J)$ 中取标量积. 记算子 $L$ 为 $T_L$, 把它看成是 $L^2(J)$ 中的埃尔米特算子 (无界的), 且 $dom(T_L) = \vartheta(J)$. 从而 $T_L$ 的伴随 $T_L^*$ 是稠定算子, 更精确地说, $dom(T_L^*) = H_L$ 是 $J$ 中所有 $C^{2r-1}$ 函数 $u$ 构成的空间, 这里函数 $u$ 使得分布 $L \cdot u$ 为 $L^2(J)$ 中的函数且 $T_L^* \cdot u = L \cdot u$. 冯 · 诺依曼的谱理论 (第七章, 第 7 节) 表明 $H_L$ 是 $dom(T_L^{**})$, $E_L^+$ 和 $E_L^-$ 的直和, 其中 $E_L^\pm$ 是 $C^{2r-1}$ 函数 $u$ 做成的子空间, $u$ 是 $L \cdot u = \pm iu$ 的解且在 $J$ 中是平方可积的. 事实上, 它们是 $C^\infty$ 函数. 由于 $p_j$ 是实函数, 所以空间 $E_L^+$ 和 $E_L^-$ 具有相同的维数 $p \leqslant 2r$. $E_L^+ \oplus E_L^-$ 的对偶 $\mathfrak{M}$ 等同于 $H_L$ 上线性形式构成的空间, 这些线性形式在 $dom(T_L^{**})$ 上等于 0. 它是直和 $\mathfrak{M}_\alpha \oplus \mathfrak{M}_\beta$, 其中 $\mathfrak{M}_\alpha$ (或 $\mathfrak{M}_\beta$) 是 $\mathfrak{M}$ 的子空间, 它是由所有线性

形式 $\theta$ 组成的, 对所有在 $\alpha$ (或 $\beta$) 的邻域中等于 0 的函数 $u \in H_L$, $\theta$ 满足 $\theta(u) = 0$. 若记拉格朗日 "附加" 公式 (第一章, 第一节, 公式 (5)) 为

$$v(L \cdot u) - u(L \cdot v) = \frac{d}{dt}(C(u, v)),$$

其中函数 $u$ 和 $v$ 为 $J$ 中的 $C^\infty$ 函数, 则由此可把任意线性形式 $\theta \in \mathfrak{M}_\alpha$ (或 $\mathfrak{M}_\beta$) 写成

$$\theta(u) = \lim_{t \to \alpha} C(u, w)(t) \quad (\text{或 } \theta(u) = \lim_{t \to \beta} C(u, w)(t)),$$

其中 $w$ 为 $J$ 中的 $C^\infty$ 函数, 且对每个 $u \in H_L$, 上面的极限存在. 反之, 任意这样的函数定义了 $\mathfrak{M}_\alpha$ (或 $\mathfrak{M}_\beta$) 中的一个线性形式. 由此可得, 对任意 $\theta \in \mathfrak{M}$, $\theta(u) = 0$ 是微分算子 $L$ 的边值条件.

因为 $T_L^{**}$ 的两个亏值都等于 $p$, 所以存在 $T_L$ 的自伴扩张 $A_L$, 如果 $p > 0$, 那么有无穷多个自伴扩张. 对每个自伴扩张 $A_L$, $dom(A_L)$ 是余维数为 $p$ 的 $H_L$ 的子空间, $dom(A_L)$ 可以用 $p$ 个独立的 "极限条件" $\theta_j(u) = 0$ 来定义, 其中 $\theta_j \in \mathfrak{M}$ (因为对 $dom(A_L)$ 中的 $u$ 和 $v$, 有 $(T_L^* \cdot u|v) = (u|T_L^* \cdot v)$ 成立, 所以线性形式 $\theta_j$ 不是任意的). 对给定的自伴扩张 $A_L$, 设 $S$ 是它的谱集, 它是 $\mathbb{R}$ 的闭子集 (可能是整个实线 $\mathbb{R}$, 通常是无穷和无界集). 对任意 $\zeta \notin S$, $(A_L - \zeta I)^{-1}$ 是 $L^2(J)$ 中的连续正规算子. 可以证明它是具有核 $(s, t) \mapsto G(\zeta, s, t)$ 的卡莱曼算子, 称 $(s, t) \mapsto G(\zeta, s, t)$ 为 $A_L - \zeta I$ 的格林函数, 且有

$$G(\zeta, t, s) = \overline{G(\bar{\zeta}, s, t)}.$$

对每个 $\zeta \notin S$ 和 $t \in J$, 函数 $s \mapsto G(\zeta, t, s)$ 是 $C^{2r-1}$ 函数, 且在区间 $(\alpha, t)$ 和 $(t, \beta)$ 中, 它是方程 $L \cdot u - \zeta u = 0$ 的 $C^\infty$ 解, 该方程满足定义了 $A_L$ 的边值条件. 再者, 函数 $s \mapsto \dfrac{\partial^{2r-1}}{\partial s^{2r-1}} G(\zeta, t, s)$ 在点 $s = t$ 处有左右极限, 且满足

$$\frac{\partial^{2r-1}}{\partial s^{2r-1}} G(\zeta, t, t-) - \frac{\partial^{2r-1}}{\partial s^{2r-1}} G(\zeta, t, t+) = 1/p_0(t). \tag{17}$$

显然, 这些条件推广了第七章第 3 节中二阶方程的条件; 当 $L \cdot u - \zeta u = 0$ 的 $2r$ 个解 $t \mapsto v_j(\zeta, t)$ 的基础解系已知时, 该基础解系能完全确定 $G$,

且能够用矩阵术语来表述

$$\begin{cases} G(\zeta,s,t)=\vec{v}(\overline{\zeta},s)^{*}W^{-}(\zeta)\,\vec{v}(\zeta,t), & t<s,\\ G(\zeta,s,t)=\vec{v}(\overline{\zeta},s)^{*}W^{+}(\zeta)\,\vec{v}(\zeta,t), & t>s, \end{cases} \tag{18}$$

其中 $\vec{v}(\zeta,t)$ 是列矩阵 $\{v_j(\zeta,t)\}_{1\leqslant j\leqslant 2r}$, $W^{-}(\zeta)$ 和 $W^{+}(\zeta)$ 是两个仅与 $\zeta$ 有关的 $2r$ 阶方阵. 进一步, 如果选取 $v_j$ 使得对每个 $t\in J$, 函数 $\zeta\mapsto v_j(\zeta,t)(1\leqslant j\leqslant 2r)$ 在开子集 $H\subset\mathbb{C}$ 中是全纯函数, 则 $W^{-}$ 和 $W^{+}$ 在 $H\cap(\mathbb{C}-S)$ 中是全纯的.

因为算子 $L$ 是形式自伴的椭圆型算子, 所以可以应用戈尔丁 – 布劳德定理 (第 2 节). 可以证明这样一个结果, 用第 2 节中引入的记号表述为 $\omega\leqslant 2r+1$, 换句话说, $A_L$ 在它的谱 $S$ 中的重数至多是 $2r$. 为简便起见, 若 $\omega<2r+1$, 则对 $m\leqslant j\leqslant 2r$, $t\in J$ 和 $\xi\in S$, 可以定义函数 $e_j(t,\xi)=0$. 而对 $J$ 的其他值, $(t,\xi)\mapsto e_j(t,\xi)$ 是 $J\times S$ 中的 $(\lambda\otimes\nu)$-可测函数, 它使得对每个 $\xi\in S$, $t\mapsto e_j(t,\xi)$ 是方程 $L\cdot u-\xi u=0$ 的解, 且使得对几乎所有的 $t\in J$, 函数 $\xi\mapsto e_j(t,\xi)$ 在 $S$ 的每个紧子集上是平方可积的 (对 $\nu$). 另外, 对 $\xi\notin S_j$, 有 $e_j(t,\xi)=0$. 对 $\xi\in S\subset\mathbb{R}$, 由 $\vec{e}(t,\xi)=(e_j(t,\xi))_{1\leqslant j\leqslant 2r}$, 可记列矩阵

$$\vec{e}(t,\xi)=Q(\xi)\cdot\vec{v}(\xi,t), \tag{19}$$

矩阵 $Q$ 的元素是 $\nu$-可测的且在 $S$ 的每个紧子集上是平方可积的. 设

$$P(\xi)=Q(\xi)*Q(\xi), \tag{20}$$

对所有 $\xi\in S$, 它是一个正埃尔米特矩阵. 从而算子 $(A_L-\zeta I)^{-1}$ 的谱分解可按下面方式来明确表示: 对任意函数 $f\in\vartheta(J)$, 记

$$(U\cdot f)(\zeta)=\left(\int_J\overline{f(t)}v_j(\zeta,t)dt\right)_{1\leqslant j\leqslant 2r}, \tag{21}$$

则对 $\vartheta(J)$ 中的 $f$ 和 $g$, 有

$$(f|g)=\int_S((U\cdot f)(\xi))^{*}P(\xi)((U\cdot g)(\xi))d\nu(\xi) \tag{22}$$

和

$$((A_L-\zeta I)^{-1}\cdot f|g)=\int_S(\xi-\zeta)^{-1}((U\cdot f)(\xi))*P(\xi)((U\cdot g)(\xi))d\nu(\xi). \tag{23}$$

从而集合 $S_j - S_{j+1}$ 是使得矩阵 $P(\xi)$ 的秩为 $j$ 的 $\xi \in S$ 构成的集合, 并且 (向量) 测度 $P \cdot \nu$ 可由关系式

$$\int_{[a,b]} P(\xi) d\nu(\xi) - \frac{1}{2}(P(a)\nu(\{a\}) + P(b)\nu(\{b\})) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b (W^+(\sigma + i\varepsilon) - W^+(\sigma - i\varepsilon)) d\sigma \tag{24}$$

从矩阵 $W^+$ (公式 (18)) 中得到.

对二阶算子, 蒂奇马什 (E. ch. Titchmarsh) 已经得到了这些结果 [212].

在算子 $L$ 的各种假设之下, 数学家做了很多工作来确定谱 $S$, 各种子集 $S_j$ 以及测度 $P \cdot \nu$ ([62], [166]). 需要强调的是, $\mathbb{R}$ 上的测度 $P \cdot \nu$ 基本是任意变化的: 盖尔范德 (I. M. Gelfand) 和列维坦 (B. M. Levitan) 在 1951 年的一篇优秀论文 [84] 中表明, 在 $\mathbb{R}$ 的任意紧算子集 $H$ 上给定一个任意测度 $\rho$, 总可以找到一个具有 $C^\infty$ 系数的二阶算子 $L$, 它使得 $p(\xi)$ 形如 $\begin{pmatrix} p_{11}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且测度 $p_{11} \cdot \nu$ 在 $H$ 上的限制是给定的测度 $\rho$.

## §4 索伯列夫空间和先验不等式

1940 年之前, 还没有建立任意阶线性偏微分方程或线性偏微分方程组的一般理论. 除了一些特殊类型的常系数微分方程外 (例如 "双调和方程" $\Delta^2 u = 0$), 大部分文章都在研究任意多个变量的二阶方程, 其中包括一小部分关于两个独立变量的任意阶方程的结果.

当数学家开始对 "弱" 解感兴趣时, 并随着后来分布论的出现 (第八章), 线性偏微分方程理论的研究范围才被极大地扩大了. 若

$$u \to P \cdot u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha u \tag{25}$$

是一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 $\Omega$ 上的具有复 $C^\infty$ 系数[①] 的线性微分算子, 则对任意分布 $T \in \vartheta'(\Omega)$, 可定义 $a_\alpha D^\alpha T$, 因此也可以定义 $P \cdot T$, 并

[①]对具有 $C^\infty$ 系数 (或 $C^r$ 系数) 的方程感兴趣的主要数学家是阿达玛. 他反复强调说, 为了物理学中的应用, 毫无疑问我们必然要对具有解析系数的微分方程进行研究 [93].

且可以找到方程

$$P \cdot T = S \tag{26}$$

的解 $T$, 其中 $S$ 为 $\vartheta'(\Omega)$ 中任意给定的分布. 特别地, 若 $S$ 为 $\Omega$ 中的 $C^\infty$ 函数, 则是否需要对方程 (26) 的分布解 $T$ 增加一些限制条件. 在某些情况下, $P \cdot T = 0$ 的解或许可以是任意阶分布 (即尽可能 "不正则"). 例如, 当 $P = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ 时, 不仅任意局部可积函数 $A(x) + B(y)$ 是其解, 而且任意型如 $A \otimes 1 + 1 \otimes B$ 的分布也是其解, 其中 $A$ 和 $B$ 为 $\vartheta'(\mathbb{R})$ 中任意分布. 另一方面, 对 $\Omega$ 中所有 $C^\infty$ 函数 $f$, $P \cdot T = f$ 的任意解必为 $C^\infty$ 函数, 现在称这种算子 $P$ 为亚椭圆型算子. 这是一种情形, 例如, 当 $n = 1$ 且 $P = D^p + a_1 D^{p-1} + \cdots + a_p$ 是首项系数为 1 的任意线性微分算子时, 则从 $p = 1$ 开始, 由归纳法可得到一个基本结果, 即杜布瓦 · 雷蒙引理 (第八章, 第 3 节). 1927 年, 扎雷姆巴 (S. Zaremba) 用现代数学语言证明拉普拉斯算子 $\Delta$ 是亚椭圆型的. 1940 年, 外尔用另外一种方法对此重新进行了证明 ([227], Vol. III, p. 758–791).

1950 年之后, 数学家开始研究任意阶算子 (25) 的上述问题及古典边界问题的推广, 这预示着偏微分方程理论进入到空前发展时期. 对这个时期发展的众多方法, 我们将在第 5 节进行讨论, 这些方法与基本解概念和拟基本解有关. 这里我们研究 "先验不等式" 的应用, 这些先验不等式是借助分布理论、索伯列夫空间及其它们的推广而建立的.

在第一节中我们看到, 绍德尔已经研究了 $\Omega$ 中的 $C^p$ 函数 $f$ 构成的空间, 其中 $f$ 使得当 $|\alpha| \leqslant p$ 时, 其所有微商 $D^\alpha f$ 属于 $L^2(\Omega)$. 他还在这个空间中引入了范数 $\|f\|_p = \left( \int_\Omega \left( \sum_{|\alpha| \leqslant p} |D^\alpha f(x)|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$, 遗憾的是该空间关于此范数并不完备. 1936 年, 索伯列夫有这样一个想法, 即他研究函数 $f \in L^2(\Omega)$, 当 $|\alpha| \leqslant p$ 时, 函数 $f$ 的弱 (分布) 微商 $D^\alpha f$ 仍然属于 $L^2(\Omega)$, 此时函数空间 (具有与上述绍德尔引入的范数相同的范数) $H^p(\Omega)$ 完备 (即为希尔伯特空间). 另外, 索伯列夫发现, $p$ 越大, $H^p(\Omega)$ 中的函数越正则; 若 $p > \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$, 则它们是 $C^r$ 函数, 其中 $r = p - \left[\dfrac{n}{2}\right] - 1$. 因此, 所有 $H^p(\Omega)$ 的交是由使其所有微商属于 $L^2(\Omega)$

的 $C^\infty$ 函数组成的 [201].

后来数学家意识到可以用傅里叶变换定义 $H^s(\mathbb{R}^n)$, 因为对分布空间中的元素 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 它的傅里叶变换 $\mathfrak{F}T$ 是局部可积函数, 对此函数 $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^s|\mathfrak{F}T(\xi)|^2$ 是可积的. 显然这个定义可以推广到 $s$ 为任意实数的情形.

这些性质是证明函数是 $C^\infty$ 的 "自助法" 的源头: 若函数属于某个索伯列夫空间 $H^r(\Omega)$, 则可以证明它也属于空间 $H^{r+1}(\Omega)$. 该方法的思想第一次出现似乎是在弗里德里希斯的文章中 [77], 他应用该方法证明椭圆算子 (25) (参看第 5 节) 是亚椭圆型算子, 这个问题我们将在第 5 节中进行讨论. 他所采用的工具是一个新的先验不等式, 对椭圆型算子[①] 和其他类型的算子, 该先验不等式是得到许多类似结果的起点. 在这里我们仅讨论一种最典型的算子 [117, p. 207], 它与所谓的 "主正规" 算子 $P$ 有关, 这里并不打算对此进行详细描述, 但它包括实系数算子及常系数算子. 在 $\Omega$ 上与算子 $P$ 的特征超曲面有关的各种假设条件下, 由于太复杂这里不再复述, 最基本的结果是若 $u$ 为区域 $\Omega$ 上具有紧支集 $K$ 的分布, 且它使得 $P\cdot u$ 属于某个 $H^s(\Omega)$, 则 $u$ 必定属于 $H^{s+m-1}(\Omega)$, 且存在不依赖于 $u$ 并使得

$$\|u\|_{s+m-1} \leqslant C_{s,K}(\|P\cdot u\|_s + \|u\|_{s+m-2}) \tag{27}$$

成立的常数 $C_{s,K}$. "自助法" 表明, 若 $P\cdot u = f$, 其中 $f$ 为 $C^\infty$ 函数, 则 $u$ 本身也是 $C^\infty$ 函数. 但是从不等式 (27) 中可以获得更多的结果: 例如, 支集在 $K$ 中的方程 $P\cdot u = 0$ 的解空间是有限维的且其元素为 $C^\infty$ 函数; 若 $f$ 是一个对所有函数 $u$ 满足 $\int_\Omega f(x)u(x)dx$ 的 $C^\infty$ 函数, 则在 $\Omega$ 中存在 $C^\infty$ 函数 $v$, $v$ 是伴随方程 ${}^tP\cdot v = f$ 在 $K$ 中的解 ([117], p. 210). 类似地, 应用这些不等式可以证明任意阶双曲型方程 (参看第 5 节) 柯西问题的存在性及唯一性 ([62], Vol. II, p. 1748–1766).

## §5 基本解、参数和伪微分算子

我们已经看到 (第二章, 第 3 节), "牛顿位势" 的思想一开始就与

[①] 对各种方法的描述是基于 1956 年的先验不等式, 参看 [168].

拉普拉斯算子密切相关. 若我们在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑由核 $-\dfrac{1}{4\pi|x-y|}$ (这里 $|x|$ 是欧几里得范数) 定义的积分算子 $U$, 则泊松方程 (第二章, 公式 (12)) 可以写成 $\Delta\cdot(U\cdot\rho)=\rho$, 其中 $\rho\in\vartheta(\mathbb{R}^3)$. 若 $f$ 是密度为 $\rho$ 的位势, 则也可以记 $U\cdot(\Delta\cdot f)=f$, 对所有 $f\in\vartheta(\mathbb{R}^3)$ 该方程仍成立. 后来, 当证明在 $\mathbb{R}^3$ 的区域 $\Omega$ 中存在格林函数时, 对所有 $f\in\vartheta(\Omega)$, 我们有类似的关系式 $\Delta\cdot(U\cdot f)=f$ 和 $U\cdot(\Delta\cdot f)=f$, 其中 $U$ 是由核 $\dfrac{1}{4\pi}G(x,y)$ 定义的积分算子. 在这两种情形中, $y\mapsto\dfrac{1}{|x-y|}$ 和 $y\mapsto G(x,y)$ 均是拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的解, 但它们在 $y=x$ 处奇异.

1860 年, 黎曼提出用与点 $x$ 有关的伴随方程 ${}^tP\cdot v=0$ 的特解 $y\mapsto R(x,y)$ 来求解含有两个变量的二阶双曲型微分方程 $P\cdot u=0$ 的柯西问题. 在这种方法中, 由核 $R$ 定义的积分算子 $U$ 也满足 $P\cdot(U\cdot f)=f$, 其中 $f\in\vartheta(\mathbb{R}^2)$, 这里函数 $R$ 对于 $P$ 所起的作用类似格林函数对拉普拉斯算子所起的作用. 在上述情形中, $R$ 是连续的. 但是当沃尔泰拉和阿达玛把这种方法推广到 $n\geqslant 3$ 个变量的二阶双曲型微分方程时, 他们遇到了困难, 这个困难源于对应于 $R$ 的函数 (作为格林函数) 不仅在点 $x$ 处奇异, 而且沿着曲线或曲面奇异.

在此我们不可能对这些研究的所有细节进行描述, 读者可以参看 [93]. 这里我们想强调的是, 在 19 世纪末已经有这样的一个思想 (相当模糊), 即对二阶线性偏微分算子 $P$, 寻找伴随方程 ${}^tP\cdot v=0$ 的解 $y\mapsto R(x,y)$, 该解在点 $x$ 处具有某种奇异性, 并且由核 $R$ 定义的积分算子 $U$ 满足 $P\cdot(U\cdot f)=f$, 其中 $f\in\vartheta(\Omega)$, 则称这样的函数 $R$ 为算子 ${}^tP$ 的基本解. 这种思想不仅适用于拉普拉斯算子 $\Delta$, 而且适用于热传导算子 $\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, 当 $t>0$ 时, $R(t,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}$, 当 $t<0$ 时, $R(t,x)=0$, $R(0,x)$ 未被定义. 但对双曲型方程, 由于不仅要对 $f$ 而且要对 $f$ 的某些微商应用由核 $R$ 定义的积分算子, 从而使之变得不那么简单 [122].

1900 年之后, 数学家开始尝试把基本解概念及其应用推广到更高阶方程上. 对算子 (25), 可以把 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的多项式 (后来称作 $P$ 的 "象征")

$$\sigma_p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)(2\pi i\xi)^\alpha \tag{28}$$

与由最高阶 $m$ 次项构成的 $\xi$ 的齐次多项式 ($P$ 的 "主象征")

$$\sigma_p^0(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)(2\pi i\xi)^\alpha \tag{29}$$

联系起来. 对所有 $x\in\Omega$ 及所有 $\xi\neq 0$, 若 $\sigma_p^0(x,\xi)\neq 0$, 则称算子 $P$ 是椭圆型的. 弗雷德霍姆在他的学位论文中研究了 $n=3$ 的常系数椭圆算子, 他通过把该算子表示成阿贝尔积分的方式证明了基本解的存在性 ([74], p. 17–57). 他的这一工作后来被推广到任意多个变量的常系数椭圆算子上 (Holmgren, Herglotz [109]). 1907 年, 莱维 (E. E. Levi) 研究了具有两个变量或具有任意多个变量的二阶变系数椭圆算子. 在这两种情形中, 由于常系数算子的基本解是已知的, 从而他把对基本解的确定问题转化为求解弗雷德霍姆积分方程的问题, 进而来说明如何证明基本解的存在性 ([145], Vol. II, p. 28–84).

对于常系数算子, 分布理论完全阐明了 "基本解" 的概念 [194]. 这种算子可记为 $u\mapsto A*u$, 其中 $A=\sum\limits_a a_\alpha D^\alpha\varepsilon_0$ 为位于 $\mathbb{R}^n$ 的原点处的狄拉克测度 $\varepsilon_0$ 的微商的线性组合. 从而根据定义, 基本解为 $\mathbb{R}^n$ 上使

$$A*E=\varepsilon_0 \tag{30}$$

的分布 $E$; 由该定义立刻可得, 对任意具有紧支集的分支 $T$ (不仅仅是函数), 有

$$A*(E*T)=E*(A*T)=T. \tag{31}$$

1954 年, 埃伦普里斯 (L. Ehrenpreis) [63] 与马尔格朗日 (B. Malgrange) [156] 分别独自证明了任意型如 (25) 的常系数算子 $P$ 存在基本解 $E$. 当然, 这个解可由 $E$ 与 $P\cdot S=0$ 中的 $S$ 唯一确定. 不易看出的是, 在这些分布中可能会存在弱分布; 由于 $\mathfrak{F}A$ 是多项式 $\sigma_P(\xi)$, 从而它使得基本解满足

$$\sigma_p(\xi)\cdot\mathfrak{F}E=1. \tag{32}$$

仅在 1958 年, 赫尔曼德尔 (L. V. Hörmander) [118] 与洛雅希维奇 (S. Łojasiewicz) [153] 才分别独立地证明对任意多项式 $Q$, 能够找到弱分布 $T$ 使 $Q\cdot T=1$.

在证明算子 $P$ 是亚椭圆型 [117, p. 100], 或对某些算子证明其柯西问题的唯一性时 [117, p. 141], 基本解是非常有用的. 然而数学家逐渐意识到, 寻找微分算子的 "近似右逆" 要比直接寻找其 "右逆" 简单得多, 这种 "近似右逆" 与 "右逆" 的作用相同.

1907 年, 希尔伯特在研究椭圆型算子 $P$ 或球 $\mathbb{S}_2$ 上的二阶算子时, 第一次以拟基本解的名称引入了这一思想. 他证明存在积分算子 $Q$, 它使得 $QP = I + R$, 其中积分算子 $Q$ 是由具有与格林函数的对数奇异性相似的奇异性的核定义的, $R$ 是一个积分算子. 因此方程 $P \cdot u = f$ 的解是积分方程 $u + R \cdot u = Q \cdot f$ 的解 [112, p. 233–242]; 从而可把 $Q$ 看成 $P$ 的 "近似左逆".

两年之后, 莱维独自在更一般、更困难的问题中引入了类似方法, 即对任意阶椭圆算子, 推广狄利克雷问题. 除了一些特殊算子之外, 例如迭代拉普拉斯算子, 该问题在此之前完全没有被研究过. 由这些特殊例子可得, 对一个 $2m$ 阶算子, 其狄利克雷问题应该对应这样的边界条件, 即在有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的边界 $\Gamma$ 上固定解及其 $m-1$ 阶正规微商的值. 莱维仅仅研究了含有两个变量的情形, 并首次证明该问题 (对光滑边界 $\Gamma$) 或许可以转化为这样的情形, 即求解方程 $P \cdot u = f$ 的解, 使 $u$ 及其前 $m-1$ 次正规微商在边界 $\Gamma$ 上取值为零. 这个思想能够确定定义在 $\overline{\Omega}$ 及 $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ 上的两个函数 $\varphi(x, y)$ 和 $K(x, y, x_1, y_1)$, 使得: 1° 对每个点 $(x_1, y_1) \in \Omega$, 函数 $(x, y) \mapsto k(x, y, x_1, y_1)$ 及其前 $m-1$ 次正规微商在边界 $\Gamma$ 上为零; 2° 函数

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} K(x, y, x_1, y_1)\varphi(x_1, y_1)dx_1dy_1 \tag{33}$$

满足方程 $P \cdot u = f$. 为了得到这个结果, 他用

$$(P \cdot u)(x, y) = \varphi(x, y) + \iint_{\Omega} K_1(x, y, x_1, y_1)\varphi(x_1, y_1)dx_1dy_1 \tag{34}$$

来确定 $K$, 其中 $K_1$ 是可应用弗雷德霍姆理论的核, 从而他就把该问题转化为弗雷德霍姆积分方程. 若记 (33) 的右边为 $Q \cdot \varphi$, 则算子 $Q$ 使得 $PQ = I + R$, 其中 $R$ 为积分算子, $Q$ 是 $P$ 的 "近似右逆". 由于确定满足这些条件的函数 $K$ 是件困难的事情, 从而在莱维之后, 1960 年之前有关这一方向的研究工作并不多的现象就不足为奇了 ([145], vol. II, p. 207–343).

当时, 在完全不同的方向上取得了进展. 1814 年, 柯西在关于复变函数沿着 $\mathbb{C}$ 中路径的复变函数积分工作中发现, 若 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 的区间 $[-a,a]$ 上的 $C^1$ 函数且 $f(0)\neq 0$, 则函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 不可积, 但当 $\varepsilon$ 趋向于 0 时, 和式 $\displaystyle\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{f(x)dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$ 有极限, 他称这个极限为积分主值. 类似地, 若 $L$ 为 $C$ 中的 $C^1$ 曲线, 则对每个定义在 $L$ 上的 $C^1$ 函数 $f$, 极限

$$(H\cdot f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L_\varepsilon}\frac{f(z)dz}{z-x} \tag{35}$$

存在, 并记为 $vp\displaystyle\int_L\frac{f(z)dz}{z-x}$, 其中 $x\in L$, $L_\varepsilon$ 为 $L$ 的一部分, 且连接 $x$ 和 $z$ 的 $L$ 的弧的长度大于 $\varepsilon$. 若 $L$ 为一条简单闭曲线, 它是有界开集 $\Omega$ 的边界, 则对 $x\notin L$ 可以定义通常的线积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{f(z)dz}{z-x}$, 并且在 $\Omega$ 中它为全纯函数 $F^+(x)$, 在外部 $\mathbb{C}-\overline{\Omega}$ 中它为另一个全纯函数 $F^-(x)$; 当 $x$ 趋向于点 $t\in L$ 时, 这两个函数的极限分别为

$$F^+(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2\pi i}vp\int_L\frac{f(z)dz}{z-t},$$

$$F^-(t)=-\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2\pi i}vp\int_L\frac{f(z)dz}{z-t}.$$

希尔伯特在他关于积分方程的第三篇文章中应用这些公式得到, 可以找到 $\Omega$ 中的全纯函数 $F^+(x)$ 和 $\mathbb{C}-\overline{\Omega}$ 中的全纯函数 $F^-(x)$, 使得对 $t\in L$, 当 $x$ 趋向于 $t$ 时, 它们的极限 $F^+(t)$ 和 $F^-(t)$ 存在, 并满足关系式 $F^+(t)=g(t)F^-(t)$, 其中 $g$ 是 $L$ 上的 $C^1$ 函数 [112, p. 81–108]; 因此称由 (35) 式定义的 $H\cdot f$ 为函数 $f$ 的希尔伯特变换.

1910—1955 年间, 许多数学家研究把这个算子推广到任意个变量的函数上的各种情况, 并应用这些推广来解决各种分析学问题. 这里我们不可能对这一发展的所有细节进行描述, 对此读者可参看 [197]. 最一般的 "奇异积分算子" (也被称为考尔德伦 – 济格蒙德算子) 是按下述方式定义的: 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, $(x,\xi)\mapsto K(x,\xi)$ 是 $\Omega\times(\mathbb{R}^n-\{0\})$ 到 $\mathbb{C}$ 的局部可积映射, 且对每个 $x\in\Omega$, 它关于 $\xi$ 是 $-n$ 阶正齐次的; 再假设对任意 $x\in\Omega$, $\displaystyle\int_{\mathbb{S}_{n-1}}K(x,\xi)d\sigma(\xi)=0$ ($\sigma$ 是 $\mathbb{S}_{n-1}$ 上的不变测度),

则对任意函数 $u \in \vartheta(\Omega)$ 及每个 $x$, 极限

$$(P \cdot u)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geqslant \varepsilon} K(x, y-x)u(y)dy \tag{36}$$

存在并定义了一个奇异积分算子 $P$.

1960 年左右, 数学家意识到用傅里叶变换 (推广到分布) 可以定义一类线性算子, 这类线性算子包含形如 (25) 的微分算子、奇异积分算子及一些一般的积分算子 (具有局部可积核). 许多数学家对这一新理论做出了各自的贡献, 但是我们同样不能在这里对所有历史细节进行描述, 我们仅对当前的情况进行一个简单的描述 (关于更多的细节, 可参看 [D], [119] 和 [68]). 傅里叶变换的逆变换表明可以把算子 (25) 写成

$$(P \cdot u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(2\pi i(x|\xi))a(x, \xi)\mathfrak{F}u(\xi)d\xi, \quad u \in \vartheta(\Omega), \tag{37}$$

其中 $a(x, \xi) = \sigma_P(x, \xi)$ (公式 (28)). 用 $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 中更一般的 $C^\infty$ 函数代替 (37) 中 $\xi$ 的多项式 $\sigma_P(x, \xi)$ 就可以对此进行推广, 该推广仅依赖于下述条件: 即当 $|\xi|$ 趋向于 $+\infty$ 时, 对多项式 $\sigma_P$, 其微商 $D_x^\alpha \sigma_P$ 与 $\sigma_P$ 的增长性相同, 而 $D_\xi^\beta \sigma_P$ 是一个 $\xi$ 的 $m - |\beta|$ 阶多项式. 因此, 可以定义象征 $a$ 为 $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{C}$ 上的 $C^\infty$ 映射 $(x, \xi) \mapsto a(x, \xi)$, 且对所有复指标 $\alpha$, $\beta$ 和所有紧子集 $L \subset \Omega$, 有

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta L}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \tag{38}$$

成立, 其中 $x \in L$ 及 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 是任意的, $C_{\alpha\beta L}$ 不依赖 $x \in L$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^n$; 两者的主要区别在于这里的 $m$ ($a$ 或 $P$ 的阶) 是任意实数. 对 $u \in \vartheta(\Omega)$, 称由 (37) 定义的算子 $P$ 为由象征 $a$ 定义的伪微分算子; 因此, 微分算子对应 $m \geqslant 1$ 阶的象征, 牛顿位势对应 $m = -2$ 阶的象征, 奇异积分算子 (36) (关于 $k$ 为 $C^\infty$ 类) 对应 $m = 0$ 的象征. 最有趣的是 $a = a_0 + a_1$ 的情形, 其中 $a_0$ 关于 $\xi$ 是 $m$ 阶正齐次的, $a_1$ 是阶小于 $m$ 的象征, 则称 $a_0$ 是伪微分算子 (37) 的主象征, 记为 $a_0 = \sigma_P^0$.

伪微分算子的主要性质如下:

I) 若 $P$ 把空间 $\vartheta(\Omega)$ 映射到 $\Omega$ 中由所有 $C^\infty$ 的复变函数构成的空间 $\mathcal{E}(\Omega)$ 上, 且 $P$ 有满足

$$(P \cdot u|v) = (u|P^* \cdot v) \tag{39}$$

的伴随 $P^*$, 其中 $u$ 和 $v$ 属于 $\vartheta(\Omega)$ ($L^2(\Omega)$ 中的标量积), 它是 $m$ 阶伪微分算子; 若 $P$ 有主象征, 则 $P^*$ 有满足

$$\sigma^0_{P^*} = \overline{\sigma^0_P} \tag{40}$$

的主象征.

II) 若 $P$ 和 $P^*$ 为把 $\vartheta(\Omega)$ 映射到其自身的映射, 则称 $P$ 是 "恰当型"; 对任意 $r$ 阶伪微分算子 $Q$, 从而可定义 $QP$ 和 $PQ$ 的合成, 且它们是 $m+r$ 阶伪微分算子; 若 $P$ 和 $Q$ 有主象征, 从而有 $PQ$ 和 $QP$, 且

$$\sigma^0_{PQ} = \sigma^0_{QP} = \sigma^0_P \sigma^0_Q. \tag{41}$$

III) 若 $m < -1$, 则 $P$ 为积分算子, 它的核在 $\Omega \times \Omega$ 上是局部可积的, 但在 $x = y$ 处奇异; 若 $m < -n - k$, 则核在整个 $\Omega \times \Omega$ 上是 $C^k$ 类. 若对每个实数 $m$, 象征 $a$ 满足不等式 (38), 则称象征 $a$ (及对应的伪微分算子 $P$) 是 $-\infty$ 阶的, 因而 $P$ 是具有 $C^\infty$ 核的积分算子; 反之, 所有这种算子是 $-\infty$ 阶的伪微分算子, 且其主象征为 0.

IV) 由连续性 (关于弱拓扑), 能够把任意伪微分算子 $P$ 从 $\vartheta(\Omega)$ 推广到由 $\Omega$ 上所有具有紧支集的分布构成的空间 $\mathcal{E}'(\Omega)$ 上. $-\infty$ 阶算子 $P$ 具有这样的特征, 即对任何分布 $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $P \cdot T$ 为 $\Omega$ 上的 $C^\infty$ 函数, 称这种算子是光滑算子. 任意伪微分算子是 "恰当型" 伪微分算子与光滑算子的和. 当 $K$ 为光滑算子时, 对任意伪微分算子 $P$, 若算子 $K$ 与 $P$ 有一个是恰当型的, 则乘积 $KP$ 及 $PK$ 也是光滑算子.

若 $P - Q$ 是光滑算子, 则记 $P \sim Q$.

V) 伪微分算子最显著的特征是可以通过渐近展开定义象征. 设给定象征的无限序列 $a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots$, 它们的阶为 $m_0 > m_1 > \cdots > m_k > \cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = -\infty$, 则存在 $m_0$ 阶象征 $a$, 使得对任意 $k$, $a - (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)$ 的阶 $< m_k$; 记

$$a \sim a_0 + a_1 + \cdots + a_k + \cdots$$

并称上式右边为 $a$ 的渐近展开. 若 $P_0, \cdots, P_k, \cdots$ 是由象征 $a_0, \cdots, a_k, \cdots$ 所定义的伪微分算子, $P$ 是由 $a$ 定义的伪微分算子, 则记

$$P \sim P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots.$$

VI) 若对 $x \in \Omega$ 和 $\xi \neq 0$, $\sigma_P^0(x,\xi) \neq 0$, 则称具有 $m$ 阶主象征的伪微分算子 $P$ 为椭圆型算子; 对微分算子, 这与前面的定义一致. 也就是说, 存在 $-m$ 阶的恰当型伪微分算子 $Q$, 使 $QP = I+R$, $PQ = I+R'$, 其中 $R$ 和 $R'$ 为光滑算子; 换句话说, 在非常强的意义下, $P$ 有 (左和右) 拟基本解. 该证明很简单; 对于必要性, 若 $QP \sim I$, 则由 (41) 必有 $\sigma_P^0 = (\sigma_Q^0)^{-1}$. 反之, 若 $P$ 是椭圆型的, 则存在由象征 $(\sigma_P^0)^{-1}$ 定义的恰当型伪微分算子 $Q_1$; 从而 $Q_1 P = I - P_1$, 其中 $P_1$ 的阶 $\leqslant -1$, 因此问题就转化为寻找使 $Q_2(I-P_1) = I+R$ 的伪微分算子 $Q_2$, 其中 $R$ 是光滑算子; 然而我们完全可以用 $Q_2 \sim I + P_1 + P_1^2 + \cdots + P_1^k + \cdots$ 来得到此结果!

VII) 对椭圆微分算子 $P$, 由拟基本解 $Q$ 的存在性立刻可得 $P$ 是亚椭圆的. 由于 $T$ 是使 $P\cdot T = f \in \mathcal{E}(\Omega)$ 的分布, 从而有 $Q\cdot f = T + R\cdot T$, 并且由于 $R$ 是光滑算子, $R\cdot T$ 和 $Q\cdot f$ 均为 $C^\infty$ 函数, 则 $T$ 也是 $C^\infty$ 函数. 用伪微分算子还能得到这样的结果, 即对每个 $x_0 \in \Omega$, 存在 $x_0$ 的小邻域 $U \subset \Omega$ 使方程 $P\cdot u = f$ 在 $U$ 中有解 (换句话说, 对椭圆微分算子 $P$, 卢伊现象不会发生 (第二章, 第 2 节)); 然而值得注意的是, 存在定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的椭圆算子 $P$, 它使方程 $P\cdot u = f$ 在包含 $f \in \vartheta(\mathbb{R}^n)$ 的支集的大球中无解 [176].

VIII) 若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界的, 则 $\Omega$ 中的恰当型伪微分算子关于索伯列夫空间有简单的连续性: 若 $P$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 邻域中的 $r$ 阶算子, $s$ 是任意实数, 则存在仅依赖 $P$ 和 $s$ 的常数 $C$, 使得对任意 $u \in \vartheta(\Omega)$ 及 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 和 $H^{r+s}(\mathbb{R}^n)$ 中的范数有

$$\|P\cdot u\|_s \leqslant C\|u\|_{r+s}. \tag{42}$$

若 $r > 0$ 且 $P$ 为椭圆型算子, 则对 $P$ 的拟基本解应用该结果立刻可得弗里德里希斯型先验不等式

$$\|u\|_r \leqslant C(\|P\cdot u\|_0 + \|u\|_0). \tag{43}$$

另外, 假设对大的 $|\xi|$, $P = P^*$ 是使 $\sigma_P(x,\xi) > 0$ 的微分算子; 则由一个简单的归纳法可得 (通过其象征的渐近展开) 阶为 $r/2$ 且使 $P = S^*S + R$ 的恰当型伪微分算子 $S$, 其中 $R$ 是光滑算子. 对 $S$ 应用

(42) 和 (43) 可得存在常数 $a>0, b>0, c>0$, 使得对 $\vartheta(\Omega)$ 中的 $u$ 和 $v$, 有

$$|(P\cdot u|v)_0|\leqslant c\|u\|_{r/2}\|v\|_{r/2}, \tag{44}$$

$$(P\cdot u|u)_0\geqslant a\|u\|^2_{r/2}-b\|u\|^2_0. \tag{45}$$

1953 年, 戈尔丁首次证明了第二个不等式 [80]. 这使得他能把冯·诺依曼的谱理论应用于希尔伯特空间 $L^2(\Omega)$ 中的埃尔米特算子 $T_P$, 其中 $dom(T_P)=\vartheta(\Omega)$. 一般地, $T_P^{**}$ 的亏量均为无限值, 并且可按下列方式定义 $T_P$ 的特殊自伴扩张 $A_P$: $dom(A_P)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的稠密子空间, $L^2(\Omega)$ 是由使分布 $P\cdot u$ 仍在 $L^2(\Omega)$ 中的分布 $u$ 构成的空间, 则 $A_P\cdot u=P\cdot u$; 进一步, $dom(A_P)$ 包含在空间 $H_0^{r/2}(\Omega)$ 中, 且为 $H^{r/2}(\mathbb{R}^n)$ 中 $\vartheta(\Omega)$ 的闭包. $A_P$ 的谱只是点谱, 它由趋向于 $+\infty$ 的具有有限重数的递增实特征值序列 $\{\lambda_n\}$ 构成; 对应的特征函数 (适当正规化) 构成 $L^2(\Omega)$ 的希尔伯特基且它们为 $C^\infty$ 函数; 对任意不同于 $\lambda_n$ 的 $\zeta\in C$, $G_\zeta=(A_P-\zeta I)^{-1}$ 是紧算子, 称为 $P-\zeta I$ 的格林算子. 易知 $G_\zeta$ 对 $\vartheta(\Omega)$ 的限制是 $-r$ 阶伪微分算子, 一般而言它不是恰当型的算子. 然而, 对 $\Omega$ 中的每个具有紧支集的分布 $T$, 有 $(P-\zeta I)\cdot(G_\zeta\cdot T)=G_\zeta\cdot((P-\zeta I)\cdot T)=T$. 特别地, 对任意点 $x\in\Omega$, 有

$$(P-\zeta I)\cdot(G_\zeta\cdot\varepsilon_x)=G_\zeta\cdot((P-\zeta I)\cdot\varepsilon_x)=\varepsilon_x, \tag{46}$$

从而称 $G_\zeta\cdot\varepsilon_x$ 为 $P-\zeta I$ 在点 $x$ 处的基本解.

IX) 特别地, 对 $2p\geqslant 2$ 阶的微分算子

$$(P\cdot u)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant p,|\beta|\leqslant p}D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u(x)) \tag{47}$$

应用 VIII) 的结果, 其中 $a_{\alpha\beta}$ 是有界集 $\overline{\Omega}$ 的邻域中的有界 $C^\infty$ 函数, 使得:

1° $(-1)^{|\beta|}a_{\beta\alpha}=(-1)^{|\alpha|}\overline{a_{\alpha\beta}}$, 这保证了 $P^*=P$;

2° 存在常数 $C>0$, 使得对每个 $x\in\Omega$ 和每个复数族 $(z_\alpha)_{|\alpha|=p}$, 有

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=p}(-1)^p a_{\alpha\beta}(x)z_\alpha\overline{z_\beta}\geqslant C\left(\sum_{|\alpha|=p}|z_\alpha|^2\right). \tag{48}$$

从而, 格林算子 $G_\zeta$ 是核 $(x,y)\mapsto \overline{G(\zeta,x,y)}$ 定义的积分算子, 该核在 $\Omega\times\Omega$ 中局部可积, 在对角线外是 $C^\infty$ 且使 $G(\overline{\zeta},x,y)=G(\zeta,y,x)$ ($P$ 的格林函数); 由 (46) 可得, 在点 $x$ 的补集 $\Omega-\{x\}$ 中, $y\mapsto G(\zeta,x,y)$ 是方程 $P\cdot u=\zeta u$ 的解.

对充分大的数 $b>0$, 取 $\zeta=-b$, 且对任意函数 $f\in\mathcal{E}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, 则方程 $P\cdot u+bu=f$ 有唯一解, 这个解属于空间 $H_0^p(\Omega)$ 且在 $\Omega$ 中为 $C^\infty$ 函数.

1953 年, 戈尔丁和维西克 (独自地) 得到了这些结果 (当然没有伪微分算子理论) ([80], [218]); 可以把它们看成莱维所研究的广义狄利克雷问题的 "弱" 解: 即对 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 没有任何要求, 但要求在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑意义下, 解应该任意接近于 $C^\infty$ 中在 $\Gamma$ 的某邻域内恒为零的函数; 但若 $\Gamma$ 不光滑, 则它 (或它的微商) 在 $\Gamma$ 上的点会有十分反常的性质.

若再假设

$$(P\cdot u)(x)=\sum_{|\alpha|=p,|\beta|=p}D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u(x))+\sum_{|\nu|<p}D^\nu(a_\nu(x)D^\nu u(x)),$$

其中对任意 $|\nu|<p$, $(-1)^{|\nu|}a_\nu(x)\geqslant 0$, 则在戈尔丁 – 维西克定理中可取 $b=0$ (尤其对 $(-\Delta)^p$ 的情形).

X) 若 $E$ 和 $F$ 是两个紧可微流形 $X$ 上的复向量丛, 且 $\Gamma(E)$, $\Gamma(F)$ 是 $X$ 上这些向量丛的 $C^\infty$ 截面构成的向量空间, 则可定义伪微分算子 $P:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$, 在局部坐标系下它变成常伪微分算子构成的矩阵. 因而可以定义主符号 $\sigma_P^0$: 对每个 $x\in X$ 及每个点 $x$ 处的关于 $X$ 的余切向量 $\xi$, $\sigma_P^0(x,\xi)$ 是向量空间之间的一个同态 $E_x\to F_x$, 这里 $E_x$ 和 $F_x$ 分别是 $E$ 和 $F$ 在点 $x$ 处的纤维; 在局部坐标系下, $\sigma_P^0(x,\xi)$ 是一个矩阵, 其元素是矩阵等于 $P$ 的元素的主符号. 可以在 $\Gamma(E)$ 和 $\Gamma(F)$ 上定义准希尔伯特空间的结构, 并且可以把任意伪微分算子 $P$ 与它的伴随 $P^*:\Gamma(F)\to\Gamma(E)$ 联系起来, 使得 $(P\cdot u|v)=(u|P^*\cdot v)$, 且它仍满足性质 (40) 及 (41).

若对每个 $x\in X$ 及 $\xi\neq 0$, $\sigma_P^0(x,\xi)$ 是 $E_x$ 到其自身的双射, 且像在性质 VI) 中那样可证明该算子存在拟基本解, 则称伪微分算子 $P:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是椭圆型的. 对每个满足 $P^*=P$ 的椭圆算子, 在这

里把谱理论应用于埃尔米特算子 $T_P$ (在希尔伯特空间中, $\Gamma(E)$ 的完备化) 要比在性质 VIII) 中简单得多. 这是因为没有下述 "边界条件": 存在使 $P\cdot u_k=\mu_k u_k$ 的 $\Gamma(E)$ 的希尔伯特基 $\{u_k\}$, 其中 $\mu_k$ 是实的且 $|\mu_k|$ 趋向于 $+\infty$, 且对每个 $f\in\Gamma(E)$, 有 $f=\sum\limits_k (f|u_k)u_k$, 该级数关于弗雷歇空间 $\Gamma(E)$ 的拓扑收敛, 且 $P\cdot f=\sum\limits_k \mu_k(f|u_k)u_k$ 有相同的收敛性. 特别地, $Ker(P)$ 是有限维子空间, $Im(P)$ 是闭的且为 $Ker(P)$ 的拓扑余集.

现在若 $P$ 为任意椭圆算子 $\Gamma(E)\to\Gamma(E)$, $P^*P$ 和 $PP^*$ 是两个等于它们伴随的椭圆算子, 对这些算子进行研究需要我们去求 $P$ 的指数 $\dim(Ker(P))-\dim(Ker(P^*))$, 也需要用 $P$ 的主象征和 $X$ 的上同调的公式来表示它. 这就是著名的阿蒂亚 – 辛格公式, 它具有广泛应用并促使数学家对许多方向进行研究 ([10], [31], [198], [199]). 事实上, 为了证明这个公式而发展的必要工具开启了伪微分算子理论的研究.

XI) 性质 IX) 中的戈尔丁 – 维西克定理提出了两个未被解决的问题: 1° 为什么在狄利克雷问题及其推广问题中, 只需边界上一半的柯西数据就足以确定其解? 2° 在光滑边界 $\Gamma$ 的点的附近中, 属于 $H_0^p(\Omega)$ 的唯一解的性质是什么?

为了回答这两个问题, 我们从椭圆算子的柯西问题及在一般情况下它为什么无解开始研究. 假设有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有光滑边界 $\Gamma$, (为了简便起见) $P$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 的邻域 $\Omega_0$ 中的阶为 $2p\geqslant 2$ 的微分算子, 且在 $\Omega_0$ 中 $P$ 有 $-2p$ 阶的拟基本解 $Q$, 它使得对任意分布 $T\in\mathcal{E}'(\Omega_0)$, 有 $Q\cdot(P\cdot T)=P\cdot(Q\cdot T)$ (这是 VIII) 中的算子 $P-\zeta I$ 的情形, 但在这里并不假设 $P^*=P$). 对任意函数 $u\in\mathcal{E}(\Omega_0)$, 记 $Dch(u)$ 为定义在边界 $\Gamma$ 上且在 $\mathbb{C}^{2p}$ 中取值的函数 $(g_0,g_1,\cdots,g_{2p-1})$, 其中 $g_j$ 是 $\Gamma$ 的一点处的正规微商 $\dfrac{\partial^j u}{\partial n^j}$. 研究的出发点是基于下面所述的索伯列夫的思想 ([200], p. 63): 设 $u^0$ 为在 $\overline{\Omega}$ 中等于 $u$、在 $\overline{\Omega}$ 的补集 $\Omega_0-\overline{\Omega}$ 中等于 0 的不连续函数, 则可以把 $P\cdot u^0$ 定义成 $\Omega_0$ 上的分布, 且易证明

$$P\cdot u^0=(P\cdot u)^0+N\cdot Dch(u) \tag{49}$$

成立, 其中 $N$ 是一个对 $(\mathcal{E}(\Gamma))^{2p}$ 中的每个 $C^\infty$ 函数, 把分布与 $\Gamma$ 中的

支集联系起来的线性算子 (不依赖函数 $u$). 因为 (49) 的两边均为 $\Omega_0$ 上具有紧支集的分布, 从而用算子 $Q$ 作用 (49) 的两边可得

$$u^0 = Q \cdot ((P \cdot u)^0) + Q \cdot (N \cdot Dch(u)). \tag{50}$$

这是第二章, 第 3 节格林公式 (17) 的一般形式. 对任意函数 $f \in \mathcal{E}(\Omega_0)$, 分布 $Q \cdot f^0$ 在 $\Omega$ 上有限制, 它是使其所有微商在 $\Gamma$ 的每个点处都有极限的 $C^\infty$ 函数, 称它为 $\Omega$ 上密度为 $f$ 的质量分布的 $Q$-位势. 类似地, 对任意向量函数 $g \in (\mathcal{E}(\Gamma))^{2p}$, 分布 $Q \cdot (N \cdot g)$ 有相同的性质, 称它在 $\Omega$ 上的限制为多层 $N \cdot g$ 的 $Q$-位势. 显然, 这些性质推广了单层及双层质量分布的牛顿位势的古典性质 (第二章, 第 3 节) (当然, $Q \cdot (N \cdot g)$ 在 $\Omega_0 - \overline{\Omega}$ 上的限制也有类似性质. 但一般而言, $\Gamma$ 的点的极限与 $Q \cdot (N \cdot g)$ 在 $\Omega$ 上的限制在相同点处的极限不同). 因此, 方程 (50) 表明若存在 $u \in \mathcal{E}(\Omega)$, 它使 $P \cdot u = f$ 且 $Dch(u) = g$ 为已知函数, 则函数 $u$ ($u^0$ 的限制) 是唯一的, 这对应于柯西问题. 但是另外必须有 $Dch(u^0) = g$, 它给出了 $f$ 和 $g$ 间的必要条件

$$g = Dch(Q \cdot f^0) + Dch(Q \cdot (N \cdot g)). \tag{51}$$

数学家证明 $C : g \mapsto Dch(Q \cdot (N \cdot g))$ 为 $(\mathcal{E}(\Gamma))^{2p}$ 到其自身的伪微分算子, 称它为对应于拟基本解 $Q$ 的考尔德伦算子.

更详细的研究表明, (51) 等价于 $2p$ 个函数 $g_0, \cdots, g_{2p-1}$ 及其微商之间的 $p$ 线性关系式; 这就解释了为什么不能在 $\Gamma$ 上描述 $2p$ 个函数 $u, \dfrac{\partial u}{\partial n}, \cdots, \dfrac{\partial u^{2p-1}}{\partial n^{2p-1}}$, 而仅可以描述它们中的 $p$ 个函数. 更一般地, 可以研究 $(\mathcal{E}(\Gamma))^{2p}$ 到 $(\mathcal{E}(\Gamma))^p$ 的微分算子 $B$, 且对给定的向量函数 $g \in (\mathcal{E}(\Gamma))^p$, 可用边界条件 $B \cdot (Dch(u)) = g$ 代替柯西问题. 从而可以明确地给出一组充分条件 (称为洛帕京斯基条件), 这组充分条件将 $B$ 和 $C$ 联系起来且暗含着能够把问题转化为 $\Gamma$ 上的弗雷德霍姆积分方程. 更确切地, 这些条件表明 $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ ($\mathcal{E}(\Omega_0)$ 的函数在 $\overline{\Omega}$ 上的限制做成的空间) 到 $\mathcal{E}(\overline{\Omega}) \times (\mathcal{E}(\Gamma))^p$ 的映射

$$u : g \mapsto (P \cdot u, B \cdot (Dch(u))) \tag{52}$$

有有限维的核及有限余维数的闭像.

特别地, 若对 $B\cdot g$, 取函数 $g_j$ 的 $p$ 个相继序列 $\{g_q, g_{q+1}, \cdots, g_{q+p-1}\}$, 则可以验证洛帕京斯基条件总成立, 且 $q=0$ 时对应的问题正好是莱维提出的狄利克雷问题.

关于这一点, 由例子 (47) 可以想到, 除了 $\zeta\in\mathbb{C}$ 的值构成的可数集外, 映射 $u\mapsto((P-\zeta I)\cdot u, B\cdot(Dch(u)))$ 实际上是双射. 然而, 这并不是一般情形, 对 $\zeta\notin C$, 存在单射的例子.

对算子 (47) 应用戈尔丁 – 维西克定理可以证明, 若 $\zeta\in Sp(A_P)$, 则前面的映射是双射且 $B\cdot g=(g_0,\cdots,g_{p-1})$. 当 $\Gamma$ 光滑时, 用连续性可以将唯一解 $u\in H_0^p(\Omega)$ 及其所有微商推广到 $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ 上 (前面提到的第二个问题). 事实上, 即使 $\Gamma$ 在每一点处不光滑, 也能保证在 $\Gamma$ 的光滑点处这些函数的极限存在. 1955 年, 尼伦伯格 (L. Nirenberg) 首次对此进行了证明 [167]; 1961 年, 皮特里 (Peetre) 用不同的方法又对此进行了证明, 然而该证明方法仍然需要用到先验不等式 [171]. 可以把这些结果推广到满足洛帕京斯基条件 $B\cdot(Dch(u))=g$ 的其他类型的边界条件上, 即对满足 $P^*=P$ 的椭圆算子 $P$.

进一步推广. 若用傅里叶变换的定义代替 $\mathfrak{F}u$, 则可把定义伪微分算子的公式 (37) 写成

$$(P\cdot u)(x)=\widetilde{\iint}_{\Omega\times\mathbb{R}^n}\exp(2\pi i(x-y|\xi))a(x,\xi)u(y)dyd\xi,$$

其中积分不再是勒贝格积分, 而是可通过给相同函数乘以函数 $h(\xi/q)$ 后的积分的极限得到的 "不恰当" (或 "振荡的") 积分, 其中 $h\in\vartheta(\mathbb{R}^n)$ 在 0 的邻域内等于 1, $q$ 趋向于 $+\infty$. 这表明若用关于 $\xi$ 为正齐次的 "分段函数" $\varphi(x,y,\xi)$ 代替 $\exp(2\pi i(x-y|\xi))$, 用更一般的 "象征" $a(x,y,\xi)$ 代替 $a(x,\xi)$, 则可定义类似的积分.

I) 这种算子自然会出现在严格的双曲型算子理论中, 其中最简单的就是波动算子 (或达朗贝尔算子)

$$\Box u=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2u}{\partial x_n^2}\right). \tag{53}$$

柯西已经解决了这种算子的柯西问题, 即寻找方程 $\Box u=0$ 满足给定函数 $u(0,x)=g_0(x)$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g_1(x)$ 的解; 柯西给出了解的明确表

达式, 即 $u(t,x)=u_+(t,x)+u_-(t,x)$ , 其中

$$u_\pm(t,x)=\frac{1}{2}\iint \exp(2\pi i((x-y|\xi)\pm|\xi|t))\left(g_0(y)\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{g_1(y)}{|\xi|}\right)dyd\xi, \tag{54}$$

在某种容易描述的意义下该积分是 "不恰当" 积分. 一般地, 我们研究 $n+1$ 个变量 $t,x_1,\cdots,x_n$ 的 $m$ 阶算子

$$p\cdot u=\frac{\partial^m u}{\partial t^m}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|\leqslant j}c_{j\alpha}(t,x)D_x^\alpha\left(\frac{\partial^{m-j}u}{\partial t^{m-j}}\right) \tag{55}$$

且假设可把其主象征 $\sigma_P(\tau,\xi,t,x)$ 记为

$$\sigma_P^0(\tau,\xi,t,x)=\prod_{j=0}^{m-1}(\tau-q_j(t,x,\xi)), \tag{56}$$

其中 $q_j$ 为 $I\times\Omega\times(\mathbb{R}^n-\{0\})$ 上的 $C^\infty$ 实函数 ($I$ 为 $\mathbb{R}$ 的开子集, $\Omega$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集), 关于 $\xi$ 是正齐次的或一次的, 且对 $j\neq k$, 总有 $q_j(t,x,\xi)\neq q_k(t,x,\xi)$. 需要解决的柯西问题是寻找函数 $v(t,x)$, 它满足 $P\cdot v=f$ 且对 $t_0\in I$, 在 $(t_0,x_0)\in I\times\Omega$ 的一个方便邻域中 $\dfrac{\partial^j}{\partial t^j}v(t_0,x)=g_j(x)$ $(0\leqslant j\leqslant m-1)$, 其中 $f$ 和 $g_j$ 为 $C^\infty$ 函数. 把 (54) 作为模板, 则可以引入 $m^2$ 个算子 $E_{jh}(s)$ $(0\leqslant j,h\leqslant m-1)$, 其中 $s$ 在属于 $I$ 的 $t_0$ 的邻域中, 它们使得若 $E_h(s)=\sum\limits_{j=0}^{m-1}E_{jh}(s), 0\leqslant h\leqslant m-1$, 则有 (局部地)

$$PE_h(s)=R_h(s),\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k E_h(s)=\delta_{hk}I,\quad t=s,\ 0\leqslant k\leqslant m-1, \tag{57}$$

其中 $R_h(s)$ 是光滑算子. 若记

$$(L\cdot u)(t,x)=\int_{t_0}^{t}(E_{m-1}(s)\cdot u(s,\cdot))(t,x)ds,$$

则对 $0\leqslant k\leqslant m-1$, 有 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^k(L\cdot u)(t_0,x)=0$ 和 $P\cdot(L\cdot u)=u-V\cdot u$, 其中 $V$ 是沃尔泰拉积分算子

$$(V\cdot u)(t,x)=\int_{t_0}^{t}ds\int_U K(t,s,x,y)u(s,y)dy, \tag{58}$$

其中 $U$ 为 $\Omega$ 中 $x_0$ 的邻域, $K$ 为 $C^\infty$ 函数. 易知 $I+V$ 可被 $I+W$ 转化, 其中 $W$ 是类似的沃尔泰拉算子. 因此, 通过取 $(t_0,x_0)$ 的充分小的邻域求得柯西问题的解为

$$v=\sum_{j=0}^{m-1}E_j(t_0)\cdot g_j+L\cdot\left((I+W)\cdot\left(f-\sum_{j=0}^{m-1}R_j(t_0)\cdot g_j\right)\right). \tag{59}$$

可以运用 1957 年拉克斯 (P. Lax) 引入的思想来构建 $E_h$, 并且在知道沿着 "光线" "传播" 的波动方程的解之后可对此进行构造. 对系数解析的算子 (25), 由柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理可知, 若超曲面是由 $z(x_1,\cdots,x_n)=\text{Const.}$ 局部给出的, 则对于在超曲面上给定的数据, 柯西问题的解不唯一, 其中 $z$ 是一阶偏微分方程

$$\Phi\left(x_1,\cdots,x_n,\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \tag{60}$$

的解, 用 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial z}{\partial x_n}\right)$ 代替向量 $\xi$ 可以由主象征 $\sigma_P^\circ(x,\xi)$ 得到 $\Phi$; 这种超曲面被称为算子 $P$ 的特征.

对严格双曲算子 (55), 按照 (56), 可把特征超曲面方程 (60) 分成 $m$ 个方程

$$\frac{\partial z}{\partial t}-q_j(t,x,\operatorname{grad}_x z)=0,\quad 0\leqslant j\leqslant m-1, \tag{61}$$

其中 $\operatorname{grad}_x z=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial z}{\partial x_n}\right)$. 对波动算子 (53), 方程 (61) 是解为

$$z=2\pi((x|\xi)\pm|\xi|t)$$

的方程

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\pm|\operatorname{grad}_x z|,$$

当 $t=0$ 时, 它简化为 $2\pi(x|\xi)$, 它们是柯西公式 (54) 中的 "分段函数". 因此, 对一般的严格双曲算子 (54), 引入

$$\begin{aligned}&(F_{jh}(s)\cdot u)(t,x)\\&=\iint_{U\times\mathbb{R}^n}\exp(i(\psi_j(t,s,x,\xi)-2\pi(y|\xi)))a_{jh}(t,s,x,y,\xi)u(y)dyd\xi\end{aligned} \tag{62}$$

定义的 $m^2$ 个算子 $F_{jh}(s)$, 其中 $\psi_j(t,s,x,\xi)$ 是方程 (61) 满足初始条件

$$\psi_j(s,s,x,\xi)=2\pi(x|\xi) \tag{63}$$

的唯一解, 并且 $a_{jh}$ 是 $-h$ 阶象征 (在定义伪微分算子的意义下). 我们的目的是为了用这种方式确定 $a_{jh}$, 若记 $F_h(s)=\sum\limits_{j=0}^{m-1}F_{jh}(s)$, 则它满足下列条件:

1° $Q_h(s)=P\circ F_h(s)$ 是光滑算子;

2° 对每个 $g\in\vartheta(U)$, 函数 $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k}(F_h(s)\cdot g)$ 在超平面 $t=s$ 上的限制是形如 $(s,x)\mapsto\delta_{hk}g(x)+(Q_{hk}(s)\cdot g)(x)$ 的, 其中当 $0\leqslant h,k\leqslant m-1$ 时, $Q_{hk}(s)$ 是光滑算子.

因而, 可由

$$(R_h(s)\cdot g)(t,x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-s)^k}{k!}(Q_{hk}(s)\cdot g)(x)$$

和

$$E_h(s)=F_h(s)-R_h(s)$$

得到条件 (57).

为了达到这个目的, 用渐进扩张

$$a_{jh}\sim\sum_{l=0}^{\infty}a_{jh}^{(l)}\tag{64}$$

来定义 $a_{jh}$, 其中 $a_{jh}^{(l)}$ 是象征或 $-h-l$ 阶的, $a_{jh}^{(l)}$ 可由 $l$ 上的归纳法来确定. 在这种方式下, 若记

$$\begin{aligned}&(F_{jhN}(s)\cdot u)(t,x)\\&=\sum_{l=0}^{N}\widetilde{\iint}_{U\times\mathbb{R}^n}\exp(i(\psi_j(t,s,x,\xi)-2\pi(y|\xi)))a_{jh}^{(l)}(t,s,x,y,\xi)u(y)dyd\xi,\end{aligned}$$

则

1° 每个算子 $P\circ F_{jhN}(s)$ 可由 $m-h-N-2$ 阶象征来定义.

2° 若 $F_{hN}(s)=\sum\limits_{j=0}^{m-1}F_{jhN}(s)$, 则函数 $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k}(F_{hN}(s)\cdot g)$ 在 $t=s$ 上的限制是形如 $(s,x)\mapsto\delta_{hk}g(x)+(Q_{hkN}(s)\cdot g)(x)$ 的, 其中 $Q_{hkN}(s)$ 是 $k-h-N-1$ 阶伪微分算子, 这里 $0\leqslant h,k\leqslant m-1$.

正是在这个归纳过程中出现了“光线”的类似物. 对每个方程 (61), 对一阶偏微分方程进行积分的古典柯西方法在于研究空间 $I \times \Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$ 中的常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = -\dfrac{\partial q_j}{\partial \xi_k}(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n), \\ \dfrac{dp_k}{dt} = \dfrac{\partial q_j}{\partial x_k}(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n), \end{cases} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{65}$$

解的“特征”曲线

$$t \mapsto (t, x_1(t), \cdots, x_n(t), p_0(t), p_1(t), \cdots, p_n(t))$$

并验定条件 $p_0 = q_j(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$, 它们在 $I \times \Omega$ 上的投影 $t \mapsto (t, x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 组成算子 $P$ 的第 $j$ 个次特征曲线族. 对波动算子, 当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时, 使 $x_k(s) = y_k$ 的次特征曲线实际上是经典“光线”

$$t \mapsto y_k \pm \frac{\xi_k}{|\xi_k|}(t - s) \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

在一般理论中, 取每个 $a_{jh}^{(N)}(t, s, x, \xi)$ 为不依赖 $y$ 的, 且可通过沿着每个次特征曲线对一阶线性常微分方程进行积分而得到 (变量为 $t$), 对 $l \leqslant N-1$, 当 $a_{jh}^{(l)}$ 已知时可确定其系数; 最后从 $a_{jh}^{(0)}(s, s, x, \xi)$ 的值开始归纳, 它由线性方程组

$$\sum_{j=0}^{m-1} (iq_j'(s, x, \xi))^k a_{jh}^{(0)}(s, s, x, \xi) = \delta_{jh} \quad (0 \leqslant k \leqslant m-1) \tag{66}$$

给出, 其中 $q_j'(s, x, \xi) = q_j(s, x, \operatorname{grad}_x \psi_j(s, s, x, \xi))$; 由于假设 $q_j$ 互不相同, 所以这个线性方程组的行列式不等于零.

这个完美构造的结果之一是, 对 $f = 0$, 在公式 (59) 中用 $\Omega$ 上的任意分布代替“初始条件” $g_j$, 则 $v$ 可由 $P \cdot T = 0$ 的分布解 $T$ 来代替. 对这些方程, 超平面 $\{t\} \times \Omega$ 上的分布的“迹” $T_t$ 可以被定义成 $\Omega$ 上的分布 (虽然 $T$ 不是函数), 它随着 $t$ 的变换而改变, 这可以称为随着“时间” $t$ 而“传播”, 其起始于“初始”分布 $T_{t_0} = S_0$. 因此可以证明 $T_t$ 的奇异支集包含在集 $M_t$ 中, 集合 $M_t$ 可按下述方式来获得: 考虑分布 $S_j$ 的奇异支集的并 $M_0$, 以及由 $M_0$ 的点产生的所有次特征曲线; $M_t$ 为 $t$ 时刻这些次特征曲线上所有点构成的集合. 这为下述现象提供了

精确意义, 即对我们所知道的关于二阶双曲型微分方程及其特殊类型的 "初始值": 沿着次特征曲线的奇异传播.

在其他条件下, 若分解 (56) 中的一些 $q_j$ 是相等的, 则可以对这些结果进行推广 [41].

II) 推广的伪微分算子的另一个重要应用是偏微分方程 $P \cdot u = f$ 的解的局部存在性问题, 继卢伊的发现 (第二章, 第 2 节) 之后, 这已经促进了许多研究工作. 历经 15 年多, 在赫尔曼德尔、尼伦伯格和特利夫斯的共同努力下, 他们成功得到了一系列条件, 比尔斯 (R. Beals) 和费弗曼 (C. Fefferman) [20] 用新的算子类型 [19] 最终证明这些条件是方程的解局部存在的充要条件. 我们在这里的讨论不会比查阅这些文章详细.

# 参考文献


[1] N. H. ABEL, *Oeuvres*, 2 vol. éd. Sylow et Lie, Christiania, 1881.

[2] N. ADASCH *et al.*, Topological vector spaces, *Lecture Notes in Math.*, no. 639, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1978.

[3] N. AKHIEZER, *The classical moment problem*, Edinburg-London, Oliver and Boyd, 1965.

[4] E. AKIN, The metric theory of Banach manifolds, *Lecture Notes in Math.*, no. 662, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1978.

[5] L. ALAOGLU, Weak topologies of normed linear spaces, *Ann. of Math.*, 41 (1940), p. 252–267.

[6] P. ALEXANDROFF und P. URYSOHN, Zur Theorie der topologischen Räume, *Math. Ann.*, 92 (1924), p. 258–266.

[7] N. ARONSZAJN and K. T. SMITH, Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.*, 60 (1954), p. 345–350.

[8] Giulio ASCOLI, Le curve limiti di una varietà data di curve, *Mem. Acc. dei Lincei*, (3), 18 (1883), p. 521–586.

[9] Guido ASCOLI, Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, *Ann. di Mat.*, (4) 10 (1932), p. 33–81 and 203–232.

[10] M. ATIYAH, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, *Astérisque*, 32–33 (1976), p. 43–72.

[11] R. BAIRE, Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. di Mat.*, (3), 3 (1899), p. 1–123.

[12] S. BANACH, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, 3 (1923), p. 133–181.

[13] S. BANACH, Sur le problème de la mesure, *Fund. Math.*, 4 (1923), p. 7–33.

[14] S. BANACH, Sur les fonctionnelles linéaires, *Studia Math.*, 1 (1929), p. 211–216 et 223–229.

[15] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[16] S. BANACH et H. STEINHAUS, Sur le principe de condensation des singularités, *Fund. Math.*, 9 (1927), p. 50–61.

[17] Banach spaces of analytic functions, Kent, Ohio, 1976 Proceedings, *Lecture Notes in Math.*, no. 604, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.

[18] K. BARBEY and H. KÖNIG, Abstract analytic function theory and Hardy algebras, *Lecture Notes in Math.*, no. 593, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.

[19] R. BEALS, A general calculus of pseudodifferential operators, *Duke Math. Journ.*, 42 (1975). p. 1–42.

[20] R. BEALS and C. FEFFERMAN, Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), p. 1–24.

[21] J. BENEDETTO, *Spectral synthesis*, New York, Academic Press, 1975.

[22] G. D. BIRKHOFF and O. KELLOGG, Invariant points in function space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 23 (1922), p. 96–115.

[23] M. BÔCHER, An introduction to the theory of integral equations, *Cambridge Tracts*, no. 10, Cambridge Univ. Press, 1909.

[24] S. BOCHNER, Darstellung realvariabler und analytischer Funktionen durch verallgemeinerte Fourier- und Laplace-Integrale, *Math. Ann.*, 97 (1927), p. 635–662.

[25] N. BOURBAKI, Sur les espaces de Banach, *C. R. Acad. Sci.*, 206 (1938), p. 1701–1704.

[26] N. BOURBAKI, Eléments de Mathématique, Livre V, Espaces vectoriels topologiques, *Actual. Scient. Ind.*, Chap. I-II, no. 1189, Chap. III-V, no. 1229, Hermann, Paris, 1953–1955.

[27] N. BOURBAKI, Eléments de Mathématique, Théories spectrales,

Chap. I-II, *Actual. Scient. Ind.*, no. 1332, Hermann, Paris, 1967.

[28] N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1969.

[29] C. BOURLET, Sur les opérations en général, et les équations différentielles d'ordre infini, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3) 14 (1897), p. 133–189.

[30] M. BRELOT, Historical introduction, *C. I. M. E. 1 Ciclo* 1969, *Potential Theory*, p. 1–21, Roma, Cremonese, 1970.

[31] M. BREUER, Fredholm theories in von Neumann algebras, *Math. Ann.*, 178 (1968), p. 243–254, and 180 (1969), p. 313–325.

[32] J. P. BREZIN, Harmonic Analysis on compact solvmanifolds, *Lecture Notes in Math.*, no. 602, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.

[33] A. BROWDER, *Introduction to function algebras*, New York-Amsterdam, Benjamin, 1969.

[34] F. BROWDER, The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 40 (1954), p. 454–459.

[35] H. BURKHARDT, Sur les fonctions de Green relatives à un domaine à une dimension, *Bull. Soc. Math. de France*, 22 (1894), p. 71–75.

[36] $C^*$-algebras and applications to physics, Proceedings 1977, *Lecture Notes in Math.*, no. 650, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1978.

[37] T. CARLEMAN, *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Uppsala, Univ. Arsskrift, 1923.

[38] T. CARLEMAN, *Edition complète des articles, publiée par l'Institut Mittag-Leffler*, Malmö, Litos Reprotryck, 1960.

[39] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.

[40] A. L. CAUCHY, *Oeuvres complètes*, 26 vol. (2 séries), Paris, Gauthier-Villars, 1882–1958.

[41] J. CHAZARAIN, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, *Ann. Institut Fourier*, 24, fasc. 1 (1974), p. 173–202.

[42] G. CHOQUET, Unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes réticulés, *C. R. Acad. Sci.*, 243 (1956), p. 555–557; Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes, *Ibid.*, p. 699–702 et 736–737.

[43] Conference on harmonic Analysis, College Park, Maryland, 1971, *Lecture Notes in Math.*, no. 266, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972.

[44] A. CONNES, On the classification of von Neuamnn algebras and their automorphisms, *Symposia math.*, 20 (1976), p. 435–478.

[45] A. CONNES, Sur la théorie non commutative de l'intégration, in *Lecture Notes in Math.*, no. 725, p. 19–143, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1979.

[46] P. J. DANIELL, Stieltjes-Volterra products, *Congr. Intern. des Math.*, Strasbourg, 1920, p. 130–136.

[47] J. DAY, *Normed linear spaces*, 3rd ed., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1973.

[48] R. DEDEKIND, *Gesammelte math. Werke*, 3 vol., Braunschweig, Vieweg, 1932.

[49] G. DE RHAM, Über mehrfache Integrale, *Abh. math. Sem. hansischen Univ.*, 12 (1938), p. 313–339.

[50] J. DIESTEL, Geometry of Banach spaces, *Lecture Notes in Math.*, no. 485, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975.

[51] J. DIEUDONNÉ, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3) 59 (1942), p. 107–139.

[52] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, Paris, Hermann, 1968.

[53] J. DIEUDONNÉ and J. CARRELL, *Invariant theory, old and new*, New York-London, Academic Press, 1971.

[54] J. DIEUDONNÉ *et al.*, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 1700-1900, 2 vol., Paris, Hermann, 1978.

[55] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, La dualité dans les espaces (F) et (LF), *Ann. Institut Fourier*, 1 (1949), p. 61–101.

[56] P. A. M. DIRAC, The physical interpretation of the quantum dynamics, *Proc. Royal Soc. London*, A, 113 (1926–1927), p. 621–641.

[57] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[58] J. DIXMIER, *Les $C^*$-algèbres et leurs représentations*, Paris, Gauthier-Villars, 1964.

[59] E. DUBINSKY, The structure of nuclear Fréchet spaces, *Lecture Notes in Math.*, no. 720, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1979.

[60] P. DU BOIS-REYMOND, Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung, *Math. Ann.*, 15 (1879), p. 289–314 and 564–576.

[61] P. DU BOIS-REYMOND, Bemerkungen über $\Delta z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, *J. de Crelle*, 103 (1888), p. 204–229.

[62] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, *Linear operators*, 3 vol., New York-London-Sydney-Toronto, Wiley-Interscience, 1958–1971.

[63] L. EHRENPREIS, Solutions of some problems of division I, *Amer. Journ. of Math.*, 76 (1954), p. 883–903.

[64] L. ERDELYI and R. LANGE, Spectral decompositions on Banach spaces, *Lecture Notes in Math.*, no. 623, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.

[65] L. EULER, *Opera Omnia*, 61 vol. parus (4 séries), Leipzig-Berlin-Zürich, Teubner et O. Füssli, 1911–1980.

[66] E. FISCHER, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci.*, 144 (1907), p. 1022–1024; Application d'un théorème sur la convergence en moyenne, *ibid.*, p. 1148–1151.

[67] J. B. FOURIER, *Oeuvres*, 2 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1888–1890.

[68] Fourier integral operators and partial differential equations, Colloque international, Université de Nice, 1974, *Lecture Notes in Math.*, no. 459, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975.

[69] M. FRÉCHET, Généralisation d'un théorème de Weierstrass, *C. R. Acad. Sci.*, 139 (1904), p. 848–850.

[70] M. FRÉCHET, Sur les opérations linéaires, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6 (1905), p. 134–140.

[71] M. FRÉCHET, Sur quelques points du Calcul fonctionnel, *Rend. Circ. mat. Palermo*, 22 (1906), p. 1–74.

[72] M. FRÉCHET, Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, *Nouv. Ann. de Math.*, (4) 8 (1908), p. 97–116 and 289–317.

[73] M. FRÉCHET, Les espaces abstraits topologiquement affines, *Acta math.*, 47 (1926), p. 25–52.

[74] I. FREDHOLM, *Oeuvres complètes publiées par l'Institut Mittag-Leffler*, Malmö, Litos Reprotryck, 1955.

[75] I. FREDHOLM, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta math.*, 27 (1903), p. 365–390.

[76] K. FRIEDRICHS, On differential operators in Hilbert spaces, *Amer.*

*Journ. of Math.*, 61 (1939), p. 523–544.

[77] K. FRIEDRICHS, On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 6 (1953), p. 299–325.

[78] G. FROBENIUS, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1968.

[79] T. GAMELIN, *Uniform algebras*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1969.

[80] L. GÅRDING, Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, 1 (1953), p. 55–72.

[81] L. GÅRDING, Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators, *C. R. du* $12^{e}$ *Congrès des mathém. scand.*, 1953, Lund, H. Ohlssons Boktryckeri, 1954.

[82] C. F. GAUSS, *Werke*, 12 vol. Göttingen, 1870–1927.

[83] I. GELFAND, Normierte Ringen, *Mat. Sborn.*, (N.S.) 9 (1941), p. 3–24.

[84] I. GELFAND and B. LEVITAN, On the determination of a differential equation from its spectral function, *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 1 (1955) p. 253–304.

[85] I. GELFAND and M. NAIMARK, On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Mat. Sborn.* (N.S.), 12 (1943), p. 197–213.

[86] I. GELFAND and D. RAIKOV, On the theory of characters of commutative topological groups, *Dokl. Akad. Nauk*, 28 (1940), p. 195–198.

[87] I. GELFAND and G. SHILOV, *Generalized functions* I, New York-London, Academic Press, 1964.

[88] H. GOLDSTINE, Weakly complete Banach spaces, *Duke math. Journ.*, 4 (1938), p. 126–131.

[89] J. P. GRAM, Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, *J. de Crelle*, 94 (1883), p. 41–73.

[90] G. GREEN, *Mathematical Papers*, Paris, Hermann, 1903.

[91] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem Amer. Math. Soc.*, no. 16, Providence, Amer. Math.

Soc., 1953.

[92] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, 2e éd., São Paulo, éd. Soc. mat. de São Paulo, 1958.

[93] J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, Hermann, 1932.

[94] J. HADAMARD, *Oeuvres*, 4 vol., Paris, Ed. du C.N.R.S., 1968.

[95] H. HAHN, Über die Integrale des Herrn Hellinger und die orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *Monatsh. für Math. und Phys.*, 23 (1912), p. 161–224.

[96] H. HAHN, Über eine Verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel, *Acta math.*, 49 (1926), p. 301–353.

[97] H. HAHN, Über Folgen linearer Operationen, *Monatsh. für Math. und Phys.*, 32 (1922), p. 1–88.

[98] H. HAHN, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. de Crelle*, 157 (1927), p. 214–229.

[99] H. HAMBURGER, Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen, *Math. Nachr.*, 4 (1950), p. 56–69.

[100] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit, 1914.

[101] F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, Berlin, de Gruyter, 1927.

[102] F. HAUSDORFF, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *J. de Crelle*, 167 (1931), p. 294–311.

[103] T. HAWKINS, *Lebesgue's theory of integration*, Madison-Milwaukee-London, The Univ. of Wisconsin Press, 1970.

[104] E. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2 vol., Berlin, Reimer, 1881.

[105] E. HELLINGER, Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *J. de Crelle*, 136 (1909), p. 210–271.

[106] E. HELLINGER und O. TOEPLITZ, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, *Göttinger Nachr.*, 1906, p. 351–355 and *Math. Ann.*, 69 (1910), p. 281–330.

[107] E. HELLINGER und O. TOEPLITZ, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, New York, Chelsea, 1953 (= *Enzykl. der math. Wiss.*, II C13, 1927).

[107 bis] E. HELLY, Über lineare Funktionaloperationen, *Sitzungsber. der math. naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss.* (*Wien*), 121 (1912), p. 265–297.

[108] E. HELLY, Ueber Systeme linearer Gleichungen mit un-endlich vielen Unbekannten, *Monatsh. für Math, und Phys.*, 31 (1921), p. 60–91.

[109] G. HERGLOTZ, Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, *Abh. math. Sem. hansischen Univ.*, 6 (1928), p. 189–197.

[110] E. HILB, Über Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, 66 (1908), p. 1–66.

[111] D. HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Berlin, Springer, 1932–1935.

[112] D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*, 2$^{e}$ éd., Leipzig-Berlin, Teubner, 1924.

[113] Hilbert space operators, Proceedings 1977, *Lecture Notes in Math.*, no. 693, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1978.

[114] G. W. HILL, *Collected mathematical works*, 4 vol., Carnegie Inst., Washington, 1905–1907.

[115] E. HILLE and R. PHILLIPS, *Functional Analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI, 1957.

[116] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall, 1962.

[117] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1964.

[118] L. HÖRMANDER, On the division of distributions by polynomials, *Ark. Mat.* 3 (1958), p. 555–568.

[119] L. HÖRMANDER, On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, *L'Enseignement math.*, (2), 17 (1971), p. 99–163.

[120] C. G. J. JACOBI, *Gesammelte Werke*, 7 vol., Berlin, Reimer 1881–1891.

[121] M. JAMMER, *The conceptual development of quantum mechanics*, New York, McGraw Hill, 1966.

[122] F. JOHN, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, New York-London, Interscience, 1955.

[123] C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, 2e éd., paris, Gauthier-Villars et A. Blanchard, 1957.

[124] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1966.

[125] J. KELLEY *et al.*, *Linear topological spaces*, Princeton-Toronto-New York-London, Van Nostrand, 1963.

[126] K. KODAIRA, On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, *Amer. Journ. of Math.*, 72 (1950), p. 502–544.

[127] G. KÖTHE, Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, *Math. Nachr.*, 4 (1950), p. 70–80.

[128] G. KÖTHE, *Topological vector spaces*, 2 vol., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1969–1979.

[129] G. KÖTHE und O. TOEPLITZ, Lineare Räume mit unendlich-vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, *J. de Crelle*, 171 (1934), p. 193–226.

[130] A. KOLMOGOROFF, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Math.*, 5 (1934), p. 29–33.

[131] M. KREIN and D. MILMAN, On extreme points of regular convex sets, *Studia Math.*, 9 (1940), p. 133–138.

[132] K-Theory and operator algebras, Athens, Georgia 1975, *Lecture Notes in Math.*, no. 575, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.

[133] J. PH. LABROUSSE, *Thèse*, Univ. de Nice, 1979.

[134] H. LACEY, *The isometric theory of classical Banach spaces*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.

[135] J. L. LAGRANGE, *Oeuvres*, 14 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1867–1892.

[136] E. LANDAU, Über einen Konvergenzsatz, *Göttinger Nachr.*, 1907, p. 25–27.

[137] P. S. LAPLACE, *Oeuvres*, 14 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1878–1912.

[138] H. LEBESGUE, *Oeuvres scientifiques*, 5 vol., Genève, L'enseignement math., 1972–1973.

[139] H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906.

[140] G. LEIBOWITZ, *Lectures on complex function algebras*, Glenview (Ill.), Scott Foresman, 1970.

[141] J. LERAY, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta math.*, 63 (1934), p. 193–248.

[142] J. LERAY et J. SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), 51 (1934), p. 43–78.

[143] J. LE ROUX, Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du $2^e$ ordre à 2 variables indépendantes, *Ann, Ec. Norm. Sup.*, (3) 12 (1895), p. 227–316.

[144] E. LE ROY, Sur l'intégration de l'équation de la chaleur ($2^e$ partie), *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3) 15 (1898), p. 9–178.

[145] E. E. LEVI, *Opere*, 2 vol., Roma, Cremonese, 1959–1960.

[146] P. LÉVY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

[147] A. LIAPOUNOV, Sur certaines équations qui se rattachent au problème de Dirichlet, *Journ. de Math.*, (5) 4 (1898), p. 241–311.

[148] A. LIAPOUNOV, Sur une proposition de la théorie des probabilités, *Izv. Akad. Nauk*, (5) 13 (1900), p. 359–386.

[149] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI, Classical Banach spaces, *Lecture Notes in Math.*, no. 338, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1973.

[150] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI, *Classical Banach spaces* I, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.

[151] J. LIOUVILLE, Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant an paramètre arbitraire, *Journ. de Math.*, (1) 1 (1836), p. 253–265 and 2 (1837), p. 16–35 and 418–436.

[152] R. LIPSMAN, Group representations. A survey of some current topics, *Lecture Notes in Math.*, no. 388, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.

[153] S. ŁOJASIEWICZ, Sur le problème de division, *Studia Math.*, 18 (1959), p. 87–136.

[154] G. MACKEY, On convex topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 60 (1946), p. 519–537.

[155] G. MACKEY, Harmonie Analysis as the exploitation of symmetry — a historical survey, in History of Analysis, *Rice Univ. Studies*, 64 (1978) n$^{os}$ 2 et 3 p. 73–228.

[156] B. MALGRANGE, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Institut Fourier*, 6 (1955–1956), p. 271–355.

[157] F. MAUTNER, On eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Ac. Sei. USA*, 39 (1952), p. 49–53.

[158] S. MAZUR, Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, *Studia Math.*, 4 (1933), p. 70–84.

[159] S. MAZUR und W. ORLICZ, Über Folgen linearer Operationen, *Studia Math.*, 4 (1933), p. 152–157.

[160] S. MAZUR et W. ORLICZ, Sur les espaces métriques liné-aires (I), *Studia Math.*, 10 (1948), p. 184–208.

[161] H. MINKOWSKI, *Gesammelte Abhandlungen*, 2 vol., Leipzig-Berlin, Teubner, 1911.

[162] H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, Teubner, 1896.

[163] E. H. MOORE, Introduction to a form of general Analysis, *The New Haven Math. Colloquium*, New Haven, Yale Univ. Press, 1910.

[164] E. H. MOORE and H. L. SMITH, A general theory of limits, *Amer. Journ. of Math.*, 44 (1922), p. 102–121.

[165] C. NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Leipzig, Teubner, 1877.

[166] M. NEUMARK, *Lineare Differentialoperatoren*, Berlin, Akad. Verlag, 1960.

[167] L. NIRENBERG, Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), p. 648–674.

[168] L. NIRENBERG, Estimates and existence of solutions for elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 (1956), p. 509–529.

[169] L. NIRENBERG, Lectures on linear partial differential equations, *CBMS Reg. Conf. Series in Math.*, 17 (1973), Providence, Amer. Math. Soc.

[170] W. OSGOOD, Non uniform convergence and the integration of series term by term, *Amer. Journ. of Math.*, 19 (1897), p. 155–190.

[171] J. PEETRE, Another approach to elliptic boundary value problems,

*Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), p. 711–731.

[172] E. PICARD, *Oeuvres*, vol. II, Paris, Ed. du C.N.R.S., 1979.

[173] S. PINCHERLE, *Opere scelte*, 2 vol., Roma, Cremonese, 1954.

[174] M. PLANCHEREL, Contributions à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rend. Cire, mat. Palermo*, 30 (1910), p. 289–335.

[175] J. PLEMELJ, Zur Theorie der Fredholmsche Funktionalgleichung, *Monatsh. für Math. und Phys.*, 15 (1904), p. 93–128.

[176] A. PLIŠ, A smooth linear elliptic equation without any solution in a sphere, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), p. 599–616.

[177] H. POINCARÉ, *Oeuvres*, 11 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1916–1956.

[178] D. POISSON, Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes, *Bull. Soc. Philomath. Paris*, 3 (1813), p. 388–392.

[179] L. PONTRJAGIN, The theory of topological commutative groups, *Ann. of Math.*, 35 (1934), p. 361–388.

[180] H. PRÜFER, Neue Herleitung der Sturm-Liouvillesche Reihenentwicklung stetigen Funktionen, *Math, Ann.*, 95 (1926), p. 499–518.

[181] F. PRYM, Zur Integration der Differentialgleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *J. de Crelle*, 73 (1871), p. 340–364.

[182] B. RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke*, 2$^{e}$ éd., Leipzig, Teubner, 1892; *Nachträge*, ibid., 1902.

[183] F. RIESZ, *Oeuvres complètes*, 2 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1960.

[184] F. RIESZ, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

[185] J. J. SCHÄFFER, *Geometry of spheres in normed spaces*, New York, Dekker, 1976.

[186] J. SCHAUDER, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, *Math. Zeitschr.*, 26 (1927), p. 47–65 and 417–431.

[187] J. SCHAUDER, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, 2 (1930), p. 171–180.

[188] J. SCHAUDER, Über lineare, vollstetige Operationen, *Studia Math.*, 2 (1930), p. 183–196.

[189] J. SCHAUDER, Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ord-

nung vom elliptischen Typus, *Math. Ann.*, 106 (1932), p. 661–721.

[190] J. SCHAUDER, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, *Fund. Math.*, 24 (1935), p. 213–246.

[191] E. SCHMIDT, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, I. Teil: Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systeme nachgeschriebener, *Math. Ann.*, 63 (1907), p. 433–476.

[192] E. SCHMIDT, Ueber die Auflösung linearcr Gleichungcn mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. Cire. mat. Palermo*, 25 (1908), p. 53–77.

[193] I. SCHUR, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1973.

[194] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, *Actual. Scient. Ind.*, n$^{os}$ 1091 and 1122, Paris, Hermann, 1950–1951.

[195] L. SCHWARTZ, Théorie des noyaux, *Proc. Intern. Congress of mathem.*, Cambridge, Mass., 1950, vol. I, p. 220–230, Providence, Amer. Math. Soc., 1952.

[196] H. A. SCHWARZ, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 2 vol., Berlin, Springer, 1890.

[197] R. SEELEY, Elliptic singular integral equations, *Proc. Symp. Pure Math.* X, 1967, p. 308–313.

[198] P. SHANAHAN, The Atiyah-Singer index theorem, *Lecture Notes in Math.*, no. 638, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1978.

[199] I. M. SINGER, Future extensions of index theory and elliptic operators, *Prospacts in mathematics*, Ann. Math. Studies no. 70, p. 171–185, Princeton Univ. Press, 1971.

[200] S. SOBOLEV, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Mat. Sborn.* (N.S.), 1 (1936), p. 39–72.

[201] S. SOBOLEV, Sur un théorème d'Analyse fonctionnelle (Russian), *Mat. Sborn.*, (N.S.) 4 (1938), p. 471–496.

[202] H. STEINHAUS, Additive und stetige Funktionaloperationen, *Math. Zeitschr.*, 5 (1919), p. 186–221.

[203] W. STEKLOFF, Sur les problèmes fondamentaux de la Physique

mathématique, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3) 19 (1902), p. 192–259 and 455–490.

[204] W. STEKLOFF, Théorie générale des fonctions fondamentales, *Ann. Fac. Sei. de Toulouse*, (2) 6 (1904), p. 351–475.

[205] T. STIELTJES, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, 8 (1894), p. J1–J122.

[206] M. H. STONE, Linear transformations in Hilbert space: I. Geometrical aspects, *Proc. Nat. Acad. Sei. USA*, 15 (1929), p. 198–200; II. Analytical aspects, *ibid.*, p. 423–425; III. Operational methods and group theory, *ibid.*, 16 (1930), p. 172–175.

[207] M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XV, 1932.

[208] M. H. STONE, The theory of representation for Boolean algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, 40 (1936), p. 37–111.

[209] C.STURM, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *Journ. de Math.*, (1) 1 (1836), p. 106–186.

[210] M. TAKESAKI, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, *Lecture Notes in Math.*, no. 128, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1970.

[211] P. TCHEBYCHEF, *Oeuvres*, 2 vol., St-Petersbourg, 1899–1907.

[212] E. TITCHMARSH, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, 2 vol. Oxford, Clarendon Press, 1946–1958.

[213] O. TOEPLITZ, Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *Göttinger Nachr.*, 1907, p. 101–109.

[214] O. TOEPLITZ, Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *Göttinger Nachr.*, 1910, p. 489–506.

[215] F. TREVES, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, New York, Academic Press, 1967.

[216] E. VAN KAMPEN, Locally bicompact abelian groups and their character groups, *Ann. of Math.*, 36 (1935), p. 448–463.

[217] V. S. VARADARAJAN, Harmonic analysis on real reductive groups, *Lecture Notes in Math.*, no. 576, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977.

[218] M. VIŠIK, On general boundary problems for elliptic differential equations (Russian), *Trudy Moskov. Mat. Obsc.*, 1 (1952), p. 187–246.

[219] V. VOLTERRA, *Opere matematiche*, 5 vol., Acc. dei Lincei, 1954–1962.

[220] H. VON KOCH, Sur la convergence des déterminants d'ordre infini, *Bihang till Vet. Akad. Handlinger*, Afd. 1, no. 4, 1896.

[221] J. VON NEUMANN, *Collected Works*, 6 vol., Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press, 1961–1963.

[222] L. WAELBROECK, Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives, *Journ. de Math.*, (9) 33 (1954), p. 147–186.

[223] G. WARNER, *Harmonic analysis on semi-simple groups*, 2 vol., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972.

[224] H. WEBER, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$. *Math. Ann.*, 1 (1869), p. 1–36.

[225] H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, 2$^{e}$ éd., 3 vol., Braunschweig, Vieweg, 1898–1908.

[226] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, *Actual. Scient. et Ind.*, no. 869, Paris, Hermann, 1940.

[227] H. WEYL, *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vol., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1968.

[228] E. WEYR, Zur Theorie der bilinearen Formen, *Monatsh. für Math, und Phys.*, 1 (1890), p. 163–236.

[229] N. WIENER, On the representation of functions by trigonometric integrals, *Math. Zeitschr.*, 24 (1927), p. 575–616.

[230] W. WIRTINGER, Beiträge zur Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme, *Math. Ann.*, 48 (1897), p. 364–389.

[231] L. C. YOUNG, Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations, *C. R. Soc. Sei. Varsovie*, 30 (1937), p. 212–234.

[232] S. ZAREMBA, Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \lambda u + f = 0$ et sur les fonctions harmoniques, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3) 16 (1899), p. 427–464.

[233] S. ZAREMBA, Sur un problème toujours possible comprenant, à

titre de cas particulier, le problème de Dirichlet et celui de Neumann, *Journ. de Math.*, (9), 6 (1927), p. 127–163.

[D] J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'Analyse*, vol. VII et VIII, Paris, Gauthier-Villars, 1978.

[S] *A Source book in Classical Analysis* (ed. G. Birkhoff), Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1973.

# 人名索引*


N. ABEL, 阿贝尔 (1802—1829): 56, 57, 60, 163
L. ALAOGLU, 阿拉奥格卢 (1914—1981): 136
A. ALBERT, 阿尔伯特 (1905—1972): 117
P. ALEXANDROFF, 亚历山德罗夫 (1896—1982): 136
P. APPELL, 阿佩尔 (1855—1930): 46, 47
ARCHIMEDES, 阿基米德 (公元前 287 — 公元前 212): 53
ARISTOTLE, 亚里士多德 (公元前 384 — 公元前 322): 117
E. ARTIN, 阿廷 (1898—1962): 49
C. ARZELÀ, 阿尔泽拉 (1847—1912): 49
G. ASCOLI, 阿斯科利 (1843—1896): 118, 171
M. ATIYAH, 阿蒂亚 (1929— ): 118, 171

R. BAIRE, 贝尔 (1874—1932): 88, 90, 91, 135
S. BANACH, 巴拿赫 (1892—1945): 82, 83, 85, 90, 100, 103, 117, 122, 130, 136, 140, 149, 150, 152
R. BEALS, 比尔斯 (1938— ): 178
A. BEER, 贝尔 (1825—1863): 21, 22, 23, 39, 42, 55, 59, 60, 63
D. BERNOULLI, 丹尼尔 · 伯努利 (1700—1782): 4, 16, 53, 54
F. BESSEL, 贝塞尔 (1784—1846): 9, 67, 68, 69, 105
G. D. BIRKHOFF, 伯克霍夫 (1884—1944): 150
S. BOCHNER, 博赫纳 (1899—1982): 146, 147


*本部分由刘茜翻译.

B. BOLZANO, 波尔查诺 (1781—1848): 25, 50
G. BOOLE, 布尔 (1815—1864): 48
E. BOREL, 博雷尔 (1871—1956): 136
N. BOURBAKI, 布尔巴基 (1935— ): 136
C. BOURLET, 布尔勒 (1866—1913): 51, 52, 77
R. BRAUER, 布饶尔 (1901—1977): 117
L. E. J. BROUWER, 布劳威尔 (1881—1966): 150, 152
F. BROWDER, 布劳德 (1927— ): 155, 158
V. BUNIAKOWSKY, 布尼亚科夫斯基 (1804—1889): 30

A. CALDERON, 考尔德伦 (1920—1998): 165, 172
G. CANTOR, 康托尔 (1845—1918): 48, 98
T. CARLEMAN, 卡莱曼 (1892—1949): 103, 108, 109, 110, 116, 152, 153, 154, 155, 157
E. CARTAN, 嘉当 (1869—1951): 117, 127, 142
A. CAUCHY, 柯西 (1789—1857): 12, 14, 15, 17, 74, 124, 125, 161, 165, 173, 175
B. CAVALIERI, 卡瓦列里 (1598—1647): 148
A. CAYLEY, 凯莱 (1821—1895): 43, 79, 115, 116, 125
CHARPIT, 沙比 (?—1784): 3
G. CHOQUET, 萧凯 (1915—2006): 141
A. CLAIRAUT, 克莱罗 (1713—1765): 5
C. COULOMB, 库仑 (1736—1806): 16
R. COURANT, 库朗 (1888—1972): 34
G. CRAMER, 克莱姆 (1704—1752): 2, 38, 43, 46, 48, 61

J. d'ALEMBERT, 达朗贝尔 (1717—1783): 2, 3, 7, 53, 173
P. DANIELL, 丹尼尔 (1889—1946): 146
R. DEDEKIND, 戴德金 (1831—1916): 51
A. de MOIVRE, 棣莫弗 (1667—1754): 124
U. DINI, 迪尼 (1845—1918): 49
P. DIRAC, 狄拉克 (1902—1984): 110, 120, 144, 145, 163
G. DIRICHLET, 狄利克雷 (1805—1859): 5, 19, 20, 26, 29, 40, 49, 68, 125, 164, 170, 173
P. du BOIS REYMOND, 杜布瓦 · 雷蒙 (1831—1889): 21, 59, 60, 142, 143, 160

L. EHRENPREIS, 埃伦普里斯 (1930—2010): 163
EUDOXUS, 欧多克索斯 (公元前 4 世纪): 53
L. EULER, 欧拉 (1707—1783): 2, 3, 4, 50

C. FEFFERMAN, 费弗曼 (1949— ): 178
P. FERMAT, 费马 (1601—1665): 148
E. FISCHER, 费舍尔 (1875—1956): 75, 79, 80, 82, 128
J. FOURIER, 傅里叶 (1768—1830): 3, 4, 8, 15, 28, 33, 41, 45, 50, 66, 70, 75, 89, 96, 128, 146, 155, 161, 173
M. FRÉCHET, 弗雷歇 (1878—1973): 73, 78, 135, 171
I. FREDHOLM, 弗雷德霍姆 (1866—1927): 22, 31, 48, 59, 66, 72, 74, 93, 104, 132, 163, 164, 172
K. FRIEDRICHS, 弗里德里希斯 (1901—1982): 143, 151, 161, 168
G. FROBENIUS, 弗罗贝尼乌斯 (1849—1917): 45, 70, 108, 125, 127
E. FÜRSTENAU, 弗斯特诺: 46

L. GÅRDING, 戈尔丁 (1919—2014): 155, 158, 169, 170, 171, 173
C. F. GAUSS, 高斯 (1777—1855): 17, 19, 23, 36, 43, 125
I. GELFAND, 盖尔范德 (1913—2009): 103, 118, 119, 120, 122, 130, 131, 159
I. GLAZMAN, 格拉茨曼: 156
H. GOLDSTINE, 戈尔斯坦 (1903—1989): 138
J. GRAM, 格拉姆 (1850—1916): 36, 50
H. GRASSMANN, 格拉斯曼 (1809—1877): 44, 52
G. GREEN, 格林 (1793—1841): 17, 20, 22, 28, 35, 39, 40, 105, 150, 157, 162, 164, 169, 170, 172
A. GROTHENDIECK, 格罗滕迪克 (1928—2014): 141

A. HAAR, 哈尔 (1885—1933): 129, 130, 131, 155
J. HADAMARD, 阿达玛 (1865—1963): 21, 51, 61, 77, 82, 122, 159, 163
E. HAHN, 哈恩 (1879—1934): 82, 85, 88, 90, 103, 120, 137, 140, 146
H. HAMBURGER, 汉布格尔 (1889—1956): 82
W. HAMILTON, 哈密顿 (1805—1865): 44
G. HARDY, 哈代 (1877—1947): 123
C. HARNACK, 哈纳克 (1851—1888): 22
H. HASSE, 哈塞 (1898—1979): 117
F. HAUSDORFF, 豪斯多夫 (1868—1942): 73, 82, 135, 136, 137, 138, 139, 141
E. HEINE, 海涅 (1821—1881): 100
E. HELLINGER, 黑林格 (1883—1950): 65, 70, 80, 89, 101, 103, 108, 120, 121, 122
E. HELLY, 黑利 (1884—1943): 83, 84, 85, 86, 87, 136, 137, 140
H. HELMHOLTZ, 亥姆霍兹 (1821—1894): 27, 34, 37

G. HERGLOTZ, 赫格洛茨 (1881—1953): 163
D. HILBERT, 希尔伯特 (1862—1943): 21, 32, 50, 60, 65, 71, 73, 78, 89, 93, 97, 102, 111, 122, 131, 135, 146, 153, 164
G. HILL, 希尔 (1838—1914): 47, 48, 96
E. HILLE, 希尔 (1894—1980): 132
W. HODGE, 霍奇 (1903—1975): 52
O. HÖLDER, 赫尔德 (1859—1937): 16, 79
L. HÖRMANDER, 赫尔曼德尔 (1931—2012): 164, 178
B. HOLMBOE, 霍尔姆伯 (1795—1850): 56
E. HOLMGREN, 霍姆格伦 (1873—1943): 163
A. HURWITZ, 胡尔维茨 (1859—1919): 127, 129

C. JACOBI, 雅可比 (1804—1851): 100
C. JORDAN, 若尔当 (1838—1922): 44, 45, 74, 93, 95

O. KELLOGG, 凯洛格 (1878—1932): 150
W. KELVIN, 开尔文 (1824—1907): 20
A. KNESER, 克内泽尔 (1862—1930): 21
K. KODAIRA, 小平邦彦 (1915—1997): 156
G. KÖTHE, 克特 (1905—1989): 139, 140, 141
T. KÖTTERITZCH, 克特里奇: 46
A. KOLMOGOROFF, 柯尔莫哥洛夫 (1903—1987): 139
S. KOWALEWSKA, 柯瓦列夫斯卡娅 (1850—1891): 14, 15, 175
M. KREIN, 克赖因 (1907—1989): 140, 141
L. KRONECKER, 克罗内克 (1823—1891): 45

E. LANDAU, 兰道 (1877—1938): 80
J. L. LAGRANGE, 拉格朗日 (1736—1813): 2, 9, 16, 17, 50, 51, 52, 54, 80, 110, 142, 157
P. LAPLACE, 拉普拉斯 (1749—1827): 14, 15, 16, 17, 18, 21, 39, 40, 52, 105, 124, 160, 162, 164
P. LAX, 拉克斯 (1926— ): 175
H. LEBESGUE, 勒贝格 (1875—1941): 25, 26, 41, 59, 74, 89, 90, 136, 144, 145, 173
G. LEIBNIZ, 莱布尼茨 (1646—1716): 51, 148
A. LEGENDRE, 勒让德 (1752—1833): 36, 50, 105, 125
J. LERAY, 勒雷 (1906—1998): 143, 152
J. LE ROUX, 拉鲁 (1863—1949): 55, 56, 57, 60

E. LE ROY, 勒鲁瓦 (1870—1954): 42
E. E. LEVI, 莱维 (1883—1917): 41, 163, 164, 165, 170, 173
H. LEWY, 卢伊 (1904—1988): 14, 151, 168, 178
A. LIAPOUNOFF, 李雅普诺夫 (1857—1918): 42, 125
S. LIE, 李 (1842—1899): 127, 128, 129, 131
J. LIOUVILLE, 刘维尔 (1809—1882): 1, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 28, 29, 31, 51, 55, 96, 104, 105, 106, 107, 108
S. ŁOJASIEWICZ, 洛雅希维奇 (1926—2002): 164
Y. LOPATINSKI, 洛帕京斯基 (1906—1981): 172, 173

G. MACKEY, 麦凯 (1916—2006): 141
B. MALGRANGE, 马尔格朗日 (1928— ): 163
F. MAUTNER, 毛特纳: 153, 154, 155
S. MAZUR, 马祖尔 (1905—1981): 138, 140
D. MILMAN, 米尔曼 (1912—1982): 140, 141
H. MINKOWSKI, 闵可夫斯基 (1864—1909): 79, 84, 140
M. MITTAG-LEFFLER, 米塔 - 列夫勒 (1846—1927): 60
T. MOLIEN, 莫利恩 (1861—1941): 117
G. MONGE, 蒙日 (1746—1818): 3
E. H. MOORE, 莫尔 (1864—1932): 136, 139
F. MURRAY, 默里 (1911—1996): 117, 118

M. NAIMARK, 奈马克 (1909—1978): 120, 156
C. NEUMANN, 诺依曼 (1832—1925): 13, 14, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 33, 39, 40, 42, 55, 59, 60, 63
I. NEWTON, 牛顿 (1642—1727): 16, 148, 166, 172
L. NIRENBERG, 尼伦伯格 (1925— ): 173, 178
E. NOETHER, 诺特 (1882—1935): 117
L. NORDHEIM, 诺德海姆: 110

W. ORLICZ, 奥尔利奇 (1903—1990): 138
W. OSGOOD, 奥斯古德 (1864—1943): 90

M. A. PARSEVAL, 帕塞瓦尔 (1755—1836): 5, 67, 130
G. PEANO, 皮亚诺 (1858—1932): 44, 74
J. PEETRE, 皮特里: 173
F. PETER, 彼得: 128, 129
E. PICARD, 皮卡 (1856—1941): 13, 32, 33, 37, 56

S. PINCHERLE, 平凯莱 (1853—1936): 45, 51, 52
M. PLANCHEREL, 普朗谢雷尔 (1885—1967): 130, 146, 155
H. POINCARÉ, 庞加莱 (1854—1912): 15, 21, 22, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 47, 48, 54, 59, 60, 63, 66, 70, 141, 142
S. POISSON, 泊松 (1781—1840): 6, 7, 16, 18, 19, 22, 28, 110, 124, 125, 162
L. PONTRJAGIN, 庞特里亚金 (1908—1988): 129, 130, 131
H. PRÜFER, 普吕弗 (1896—1934): 8
F. PRYM, 普里姆 (1841—1915): 21

J. RADON, 拉东 (1887—1956): 145
D. RAIKOV, 莱科夫: 130
J. RICCATI, 里卡蒂 (1676—1754): 7
B. RIEMANN, 黎曼 (1826—1866): 16, 20, 21, 28, 49, 50, 51, 57, 65, 74, 146, 162
F. RIESZ, 里斯 (1880—1956): 74, 75, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 93, 94, 95, 100, 109, 111, 113, 117, 120, 121, 122, 136, 148, 152, 155, 163
G. ROBERVAL, 罗贝瓦尔 (1602—1675): 148

S. SAKS, 萨克斯 (1897—1942): 90
J. SCHAUDER, 绍德尔 (1899—1943): 150, 151, 152, 160
E. SCHMIDT, 施密特 (1876—1959): 36, 67, 72, 74, 75, 80, 81, 85, 107, 108, 109, 128, 129
I. SCHUR, 舒尔 (1875—1941): 117, 127
L. SCHWARTZ, 施瓦兹 (1915—2002): 145, 147
H. A. SCHWARZ, 施瓦茨 (1843—1921): 14, 21, 22, 27, 29, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 41, 68, 101, 109
I. SINGER, 辛格 (1924— ): 118, 171
H. L. SMITH, 史密斯 (1826—1883): 136
S. SOBOLEV, 索伯列夫 (1908—1989): 144, 145, 159, 160, 161, 168
H. STEINHAUS, 施坦豪斯 (1887—1972): 82, 90, 91
W. STEKLOFF, 史蒂科夫: 42, 67
T. STIELTJES, 斯蒂尔切斯 (1856—1894): 78, 82, 83, 97, 113, 114, 146
G. STOKES, 斯托克斯 (1819—1903): 151
M. H. STONE, 斯通 (1903—1989): 80, 111, 122, 123, 132, 156
C. STURM, 施图姆 (1803—1855): 1, 6, 7, 8, 10, 12, 28, 55, 96, 104, 105, 106, 107
J. SYLVESTER, 西尔维斯特 (1814—1897): 43

B. TAYLOR, 泰勒 (1685—1731): 4, 51
P. TCHEBYCHEF, 切比雪夫 (1821—1894): 36, 124, 125

W. THOMPSON, 汤普森 (1860—1948): 20
H. TIETZE, 蒂策 (1880—1964): 41
E. TITCHMARSH, 蒂奇马什 (1899—1963): 159
O. TOEPLITZ, 特普利茨 (1881—1940): 70, 80, 89, 100, 101, 122, 139, 140, 141
F. TRÈVES, 特利夫斯 (1930— ): 178
A. TYCHONOFF, 吉洪诺夫 (1906—1993): 137

P. URYSOHN, 乌雷松 (1898—1924): 41, 136

A. VANDERMONDE, 范德蒙 (1735—1796): 46, 47
B. L. VAN DER WAERDEN, 范德瓦尔登 (1903—1996): 91
E. VAN KAMPEN, 范坎彭 (1908—1942): 130
M. VIŠIK, 维西克: 170, 173
V. VOLTERRA, 沃尔泰拉 (1860—1940): 13, 31, 51, 52, 55, 60, 64, 66, 68, 95, 162, 174, 175
H. VON KOCH, 科克 (1870—1924): 48, 60, 61, 70
J. VON NEUMANN, 冯 · 诺依曼 (1903—1957): 100, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 120, 133, 136, 139, 140, 156, 169

WEBER, 韦伯 (1804—1891): 28, 29, 34, 36, 54, 66, 72, 125, 129
WEIERSTRASS, 魏尔斯特拉斯 (1815—1897): 21, 25, 28, 45, 50, 142, 144
WEIL, 韦伊 (1906—1998): 130, 146, 147
WEYL, 外尔 (1885—1955): 34, 103, 104, 106, 107, 108, 109, 116, 127, 128, 129, 144, 156, 160
E. WEYR, 韦尔 (1848—1894): 95
WIENER, 维纳: 146
WIRTINGER, 维尔丁格 (1865—1945): 96, 97, 107

ZAREMBA, 扎雷姆巴 (1863—1942): 21, 22, 42, 160
ZYGMUND, 济格蒙德: 165

# 名词索引*


Abel's integral equation, 阿贝尔积分方程: 56
Action of a group, 群的作用: 125
Adjoint of a linear differential operator, 线性微分算子的伴随: 2
Adjoint of an operator, 算子的伴随: 52, 116
Adjoint of an unbounded operator, 无界算子的伴随: 112
Alexander's horned sphere, 亚历山大的带角球: 42
*-algebra, *-代数: 138
Alternating process of Schwarz, 施瓦茨的交替法: 22
A priori inequalities, 先验不等式: 39, 160
Asymptotic expansion of a pseudo-differential operator, 伪微分算子的渐进展开: 168
Axes of a quadratic form, 二次型的轴: 54, 66

Baire's theorem, 贝尔定理: 91
Banach algebra, 巴拿赫代数: 122
Banach space, 巴拿赫空间: 101
Beer-Neumann integral equation, 贝尔 – 诺依曼积分方程: 63
Bessel's identity, Bessel's inequality, 贝塞尔恒等式, 贝塞尔不等式: 9, 68
Bicharacteristic curves, 双特征曲线: 177
Boundary conditions, 边界条件: 173
Bounded bilinear form, 有界双线性形式: 89


*本部分由王光鑫翻译.

Bounded set, 有界集: 139, 140
Buniakowsky's inequality, 布尼亚科夫斯基不等式: 30

Calderon operator, 考尔德伦算子: 172
$C^*$-algebra, $C^*$-代数: 131
Carleman kernel, 卡莱曼内核: 108, 153
Carleman operator, 卡莱曼算子: 108, 153
Cauchy-Kowalewska theorem, 柯西 – 柯瓦列夫斯卡娅定理: 15
Cayley transform, 凯莱变换: 116
Character of a Banach algebra, 巴拿赫代数的特征: 119
Character of a group, 群的特征: 125
Characteristic hypersurface, 特征超曲面: 175
Closable operator, 准闭算子: 112
Closed graph theorem, 闭图像定理: 91
Commutant of a set, 集合的交换子: 117
Compact operator, 紧算子: 93
Comparison theorems of Sturm, 施图姆比较定理: 8
Completely continuous function in $l^2$, $l^2$ 上的全连续函数: 71
Completely continuous operator, 全连续算子: 94
Completely reducible representation, 完全可约表示: 127
Completeness of an orthonormal system, 完备规范正交系: 9, 36
Continuous function in $l^2$, $l^2$ 上的连续函数: 71
Continuous spectrum, 连续谱: 96, 113
Contraction principle, 压缩原理: 87
Convex set, 凸集: 84
Convolution, 卷积: 125, 128
Cooling off problem, 冷却问题: 54
Current, 流动形: 146

Declining function, 倾斜函数: 147
Decomposition of unity for a self-adjoint operator, 自伴随算子的分解: 113
Defects of a hermitian operator, 自伴算子的亏量: 115
Density of a layer, 层的密度: 17
Determinant of a Fredholm integral equation, 弗雷德霍姆积分方程的行列式: 61
Diagonalization of an operator, 算子的对角化: 121, 153
Dirac function, 狄拉克函数: 144
Dirichlet integral, 狄利克雷积分: 28, 34
Dirichlet principle, 狄利克雷原理: 28

Dirichlet problem, 狄利克雷问题: 28, 40
Distance on a set, 集合上的距离: 73
Distributions, 分布: 145
Double commutant, 二重交换子: 117
Double cone, 对顶锥: 25
Double layer potential, 双层势: 23
Dual group, 对偶群: 131
Dual space of a normed space, 赋范空间的对偶空间: 87
Dual space of $L^p(I)$, $L^p(I)$ 的对偶空间: 81

Eigendifferential, 本征微分: 103
Eigenfunction, 本征函数: 6, 28, 34, 66
Eigenvalue, 本征值: 6, 28, 34, 54, 66
Elementaty solution, 基本解: 160
Elliptic operator, 椭圆算子: 161, 171, 173
Elliptic partial differential equation, 椭圆型偏微分方程: 15
Equation of vibrating membranes, 薄膜振动方程: 34
Equation of vibrating strings, 弦振动方程: 3
Equilibrium problem, 平衡问题: 15
Exterior Dirichlet problem, 外部狄利克雷问题: 39
Extreme point, 极值点: 140

Factor (von Neumann algebra), 因子 (冯 · 诺依曼代数): 117
"Faltung" of two bilinear forms, 两个双线性形式的卷积: 71
"Faltung" of two matrices, 两个矩阵的卷积: 46
Formally self-adjoint operator, 形式自伴算子: 156
Fourier coefficients, 傅里叶系数: 9, 36, 39, 66
Fourier transform, 傅里叶变换: 104, 124, 130
Fourier's inversion formula, 傅里叶反演公式: 104
Fréchet space, 弗雷歇空间 (简称 F 空间): 138
Fredholm alternative, 弗雷德霍姆选择: 65
Fredholm integral equation, 弗雷德霍姆积分方程: 22, 31
Fredholm operator, 弗雷德霍姆算子: 132
Function of an endomorphism, 自同态的函数: 93
Function of lines, 线函数: 77
Functional, 泛函: 43

Gelfand transform, 盖尔范德变换: 119

Generalized eigenvectors, 广义本征向量: 102
Generalized Fourier series, 广义傅里叶级数: 9
Generalized variety, 广义簇: 146
Green function, 格林函数: 18, 29, 169
Green operator, 格林算子: 169
Green's formula, 格林公式: 19
Group algebra, 群代数: 125

Hardy spaces, 哈代空间: 123
Heat equation, 热传导方程: 53
Helmholtz equation, 亥姆霍兹方程: 27
Hermitian form, 埃米尔特形式: 72
Hermitian operator, 埃米尔特算子: 108
Hilbert-Schmidt operator, 希尔伯特 – 施密特算子: 72
Hilbert space, 希尔伯特空间: 103
Hilbert sum, 希尔伯特和式: 32
Hilbert transform, 希尔伯特变换: 165
Hyperbolic partial differential equation, 双曲型偏微分方程: 151
Hypermaximal operator, 超极大算子: 113
Hyperplane, 超平面: 45
Hyperplane of support, 支撑超平面: 84
Hypoelliptic operator, 亚椭圆算子: 160

Infinite determinant, 无穷行列式: 45
Infinite matrix, 无穷矩阵: 70
Integral equation, 积分方程: 13, 48, 55
Integral equation of the first kind, 第一类积分方程: 95
Integral equation of the second kind, 第二类积分方程: 58, 60
Integral operator, 积分算子: 52
Inversion of a definite integral, 定积分的反演: 56
Involution, 对合: 120
Involutive algebra, 对合代数: 117
Irreducible representation, 不可约表示: 127
Iterated kernels, 叠核: 68

Joint spectrum, 联合谱: 122

Kernel, 核: 58

Kernel distribution, 核分布: 148
Kernel theorem, 核定理: 148
Köthe dual, 克特对偶: 139

Laplace equation, 拉普拉斯方程: 15
H. Lewy's example, 卢伊的例子: 14
Linear representation, 线性表示: 117
Locally convex space, 局部凸空间: 140

Mean value formula, 均值公式: 19
Method of the gliding hump, 滑脊方法: 89
Moment problems, 矩量问题: 82
Multiplicity, 重数: 120

Neumann function, 诺依曼函数: 39
Neumann problem, 诺依曼问题: 39
Norm, 范数: 73, 83
Normal operator, 正规算子: 108, 111
Normed algebra, 赋范代数: 118
Normed sequence space, 赋范序列空间: 83
Nuclear operator, 核算子: 72
Nuclear space, 核空间: 141

Operator, 算子: 51
Order of a pseudo-differential operator, 有序伪微分算子的阶: 166
Orthogonal transformation, 正交变换: 44
Orthogonality,Orthogonality relations, 正交, 正交关系: 6, 28, 35, 44, 73
Orthogonalization process, 规范正交化过程: 36
Oscillating integral, 振荡积分: 173

Parametrix, 拟基本解: 155, 160
Parseval's formula, 帕塞瓦尔公式: 5
Plancherel theorem, 普朗谢雷尔定理: 130
Point spectrum, 点谱: 99, 102, 113
Poisson equation, 泊松方程: 16
Poisson formula, 泊松公式: 15
Potential, 位势: 16, 17
Principal symbol of a pseudo-differential operator, 伪微分算子的主象征: 167

Principal value of an integral, 积分主值: 165
Principle of choice, 选择原则: 83, 137
Pseudo-differential operator, 伪微分算子: 167, 168
Pseudo-differential operator of proper type, 恰当形的微分算子: 167

Quasi-linear partial differential equation, 拟线性偏微分方程: 15
$Q$-potential, $Q$-位势: 172

Reflexive Banach space, 自反巴拿赫空间: 82, 86
Regular Banach algebra, 正则巴拿赫代数: 123
Regular value of an operator, 算子的正则值: 111
Regularization, 正则化: 143
Representation of an involutive Banach algebra, 对合巴拿赫代数的表示: 122
Residual spectrum, 剩余谱: 113
Resolvent kernel, 预解核: 58, 64, 66
Resolvent of an operator, 预解算子: 113

Scalar product, 标量积: 73
Section ("Abschnitt") of a bilinear form, 双线性形式的部分: 71
Self-adjoint bounded operator, 自伴有界算子: 103
Self-adjoint unbounded operator, 自伴无界算子: 113
Semi-group of operators, 算子半群: 132
Separation of variables, 分离变数法: 5, 27, 34
Simple layer potential, 单层位势: 17
Singular integral operator, 奇异积分算子: 108, 165
Smoothing operator, 光滑算子: 167
Sobolev spaces, 索伯列夫空间: 159
Space $l^2_{\mathbb{C}}$, $l^2_{\mathbb{C}}$ 空间: 73
Spaces $l^p(I)$, $l^p(I)$ 空间: 82
Spaces $L^2(I)$, $L^2(I)$ 空间: 80
Spaces $L^p(I)$, $L^p(I)$ 空间: 81
Spectral radius, 谱半径: 119
Spectral synthesis, 谱综合: 123
Spectral theory, 谱理论: 10
Spectrum, 谱: 97, 101, 103, 113
Spectrum of a Banach algebra, 巴拿赫代数的谱: 120
Spectrum of a differential operator, 微分算子谱: 108
Spectrum of an element of a Banach algebra, 巴拿赫代数的元素的谱: 119

Stieltjes integral, 斯蒂尔切斯积分: 97
Stieltjes transform, 斯蒂尔切斯变换: 97
Strictly hyperbolic operator, 严格椭圆算子: 161
Strong convergence of elements, 元素的强收敛: 80, 94
Strong convergence of operators, 算子的强收敛: 101
Strong extremum, 强极值: 50
Strong topology, 强拓扑: 117
Sturm-Liouville problem, 施图姆 – 刘维尔问题: 6
Successive approximations, 逐次逼近: 113
Support function, 支撑函数: 84
Sweeping out process, 扫除过程: 20
Symbol of an operator, 算子的象征: 167
Symmetric bilinear form, 对称双线性型: 70
Symmetric convex body, 对称凸体: 84
Symmetric kernel, 对称核: 65

Tempered distribution, 缓增广义函数: 147
Tensor product, 张量积: 141
Transfinite induction, 超穷归纳法: 87
Transposed mapping, 转置映射: 81

Uniform convergence of operators, 算子的一致收敛性: 101
Unitary operator, 酉算子: 113
Unitary representation, 酉表示: 131

Variation of constants (method of), 常数变易法: 2
Von Neumann algebra, 冯 · 诺依曼代数: 117

Weak convergence, 弱收敛: 80, 91
Weak extremum, 弱极值: 50
Weak solution, 弱解: 42, 141
Weak topology, 弱拓扑: 136

泛函分析的历史表明，泛函分析是代数学和拓扑学相互结合的产物，它的演变发展受到这两大数学分支的影响。显而易见，泛函分析已经涵盖了现代分析中相当大的一部分，特别是偏微分方程理论。

本书共分为九章，第一章主要讨论线性微分方程和施图姆-刘维尔问题。第二章讨论了“密码积分”方程，包括狄利克雷原理和贝尔-诺依曼方法。第三章讨论薄膜振动方程，包括庞加莱的贡献和H. A. 施瓦茨1885年的论文。第四章讨论了无穷维思想。其他几章分别为：第五章介绍至关重要的几年和希尔伯特空间的定义，包括弗雷德霍姆的发现和希尔伯特的贡献；第六章讨论对偶和赋范空间的定义，包括哈恩-巴拿赫定理和滑脊方法与贝尔纲；第七章讲述1900年后的谱理论，包括F. 里斯、希尔伯特、冯·诺依曼、外尔和卡莱曼的理论和工作；第八章讨论局部凸空间和广义函数论；第九章介绍泛函分析在常微分方程和偏微分方程中的应用。

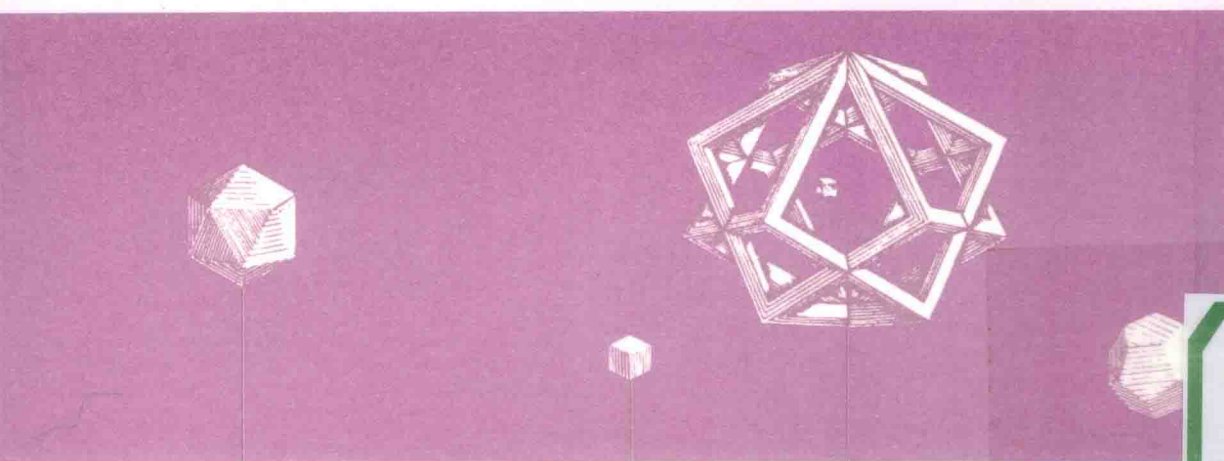
本书可供数学和统计专业的本科生、研究生和教师阅读，也可供相关研究领域的工作者和数学史学者参考。

本书是任何泛函分析标准课程的很好补充。

——美国数学月刊

这是一本令人敬佩的书，由资深数学家撰写，有助于我们理解现在已知的泛函分析的历史进程……，对泛函分析的历史演变，迪厄多内为我们提供了一个易读且精彩的解说……，对想要了解泛函分析这门学科如何应运而生的泛函分析学家而言，本书是一本必要的读物。

——美国数学学会通报



ISBN 978-7-04-045494-9

9 787040 454949 >

■ 学科类别：数学、数学文化

academic.hep.com.cn

定价 49.00 元