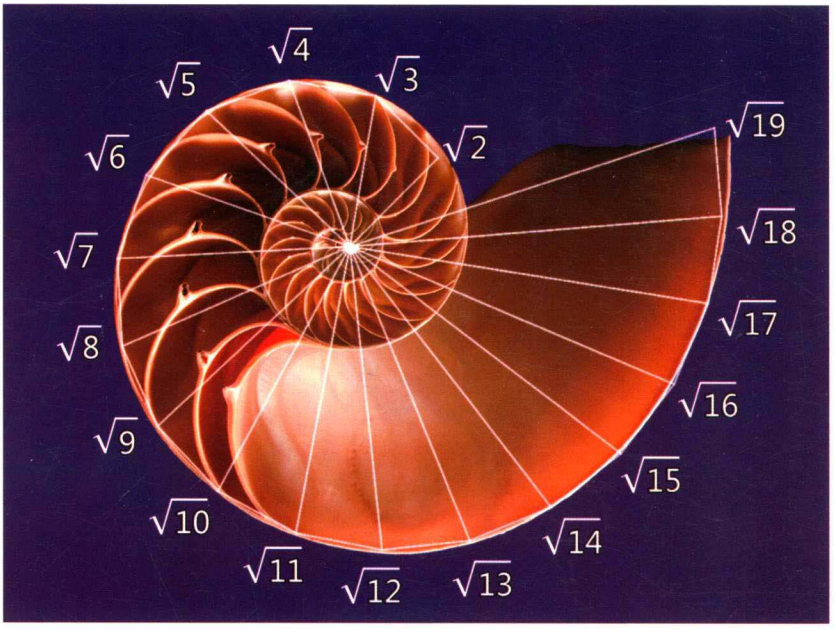
理性派

身边的数学译丛

无理数的那些事儿

[英]朱立安·哈维尔（Julian Havil） 著

程晓亮 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

身边的数学译丛

无理数的那些事儿

The Irrationals：A Story of the Numbers You Can't Count On

[英] 朱立安·哈维尔（Julian Havil） 著

程晓亮 译

机械工业出版社

本书是关于无理数的综合性读物，讲述了从古代到21世纪关于无理数的内容，以及相关数学家们的故事.

本书适合列入数学相关专业学生的书单，也适合数学教师、数学爱好者和相关科研人员阅读.

The Irrationals：A Story of the Numbers You Can't Count On/by Julian Havil/9780691143422

Copyright © 2012 Princeton University Press.

Simplified Chinese edition copyright © 2018 by China Machine Press.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

本书简体中文版由普林斯顿大学出版社授权机械工业出版社在中华人民共和国境内地区（不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区）出版与发行。未经许可之出口，视为违反著作权法，将受法律之制裁。

北京市版权局著作权合同登记　图字：01-2013-3821号。

图书在版编目（CIP）数据

无理数的那些事儿/（英）朱立安·哈维尔（Julian Havil）著；程晓亮译. —北京：机械工业出版社，2018.1

（身边的数学译丛）

书名原文：The Irrationals：A Story of the Numbers You Can't Count On

ISBN 978-7-111-58608-1

Ⅰ.①无…　Ⅱ.①朱…②程…　Ⅲ.①无理数　Ⅳ.①O122

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第295446号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐

责任校对：郑　婕　封面设计：路恩中

责任印制：孙　炜

天津翔远印刷有限公司印刷

2019年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm·16.25印张·264千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58608-1

定价：49.00元

安徽大学图书馆 藏书 www.lib.ahu.edu.cn

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务

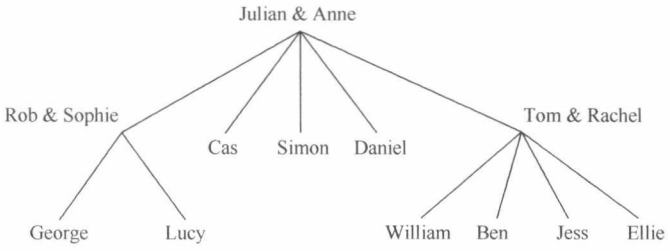
服务咨询热线：010-88361066　　机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-68326294　　机工官博：weibo.com/cmp1952

010-88379203　　金书网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版　　教育服务网：www.cmpedu.com

谨以此书献给世界上“最伟大”的家庭



致　谢

非常感谢我的编辑，维奇·卡尼，感谢他无限的耐心和理解；感谢乔恩·温赖特如此熟练和灵巧地排版此书；感谢肖恩·库雷西、安德鲁·莉和乔治·沃特金森给出专业的计算机图形学的意见；感谢古希腊人从音响工程师的角度给出专业的知识. 最后特别提到阿达瓦·阿夫沙尔和阿奇·博特，是我以前的两名学生，感谢他们如此仔细地阅稿并直率地给出评论，他们对这本书的出版有不可估量的帮助.

做一名数学家并非易事；这是一门令人生畏的学科，即使是受过教育的人对此也是知之甚少，甚至不知道它究竟是什么，而对此他们可能还会堂而皇之地吹嘘自己的无知.

——安德鲁·霍奇斯(《艾伦·图灵传》)

一个数学家的命运是对无穷多的事情知道得无穷少；而一个哲学家的命运则是对无穷少的事情知道得无穷多.

——佚名

1[⊖] 引 言

空气实验无根据的平息（10）

1，《每日电讯报》字谜 26488 号，2011 年 3 月 1 日

无理数被认识大约有 2500 年了，但只是在过去的近 150 年里才被人们真正地理解. 本书将指引你了解无理数在长期历史进程中的一些重要的理论思想、人物以及相关事件的发生地点.

无理数的“大事记”起源于大约公元前 450 年的希腊，当时的希腊是纯粹数学的发源地，大部分理论的基石已经奠定，但其中的一块注定要过早地瓦解. 第一位代表人物是萨摩斯岛的毕达哥拉斯，神秘主义使得他被人们确切所知的东西很少，但他的确是最早建立纯粹数学的人. 常数$\sqrt{2}$有时候被作为无理数的代名词，一般地（尽管不是普遍地）认为它是一个基本无理数，正如一致认为正是$\sqrt{2}$动摇了古希腊数学信仰中至关重要的基本哲学原理：万物皆为有理数. 人们认识到正整数不能统治整个宇宙. 然而，正如我们所知道的那样，古希腊人并没有发现无理数，更不用说$\sqrt{2}$（直到 1525 年才出现）这个符号了；他们已经论证了，一个正方形的边长和对角线不能用同一个单位来测量，或者换句话说，测量边长的任何单位与对角线都是不可公度的. 我们的一个早期的任务就是解决无理数的不可公度这一问题.

关于无理数的故事就这样开始了，有时可以预见它的进展方向，但是通常它都是沿着人迹罕至的道路，并长期被遗弃或隐藏在数学专著的浓密的灌木丛中. 正如之前所提到的，我们已经知道了关于无理数的一些结论，这些各种各样的结论已经形成了无理数的历史. 无论是伟大的，还是渺小的；无论是著名的，

⊖ 此为原版书页码，书中引用和书后索引页码为此页码.

还是无名的；也无论是现代的，还是古典的——最后我们都赋予它们接近原始的形式，尽管这样做代价有点高. 对于数学，再没有比 G. H. Hardy（哈代）更会审美的了，他有一句最为广泛流传的语录是[1]：

世上永没有丑陋数学的立身之地.

也许不是这样，但是最早获得的关于事物本质的证明往往是看似幼稚、令人害羞的[2]，然而这些证明不应该被遗忘，而且这个过程是积累的绝好机会，对它们稍加改动，便可以获得更好的方法，能够被用于后期获得的数学思想方法中.

在阅读这本书的旅途到达终点时，希望读者能够洞察到无理数在纯数学发展中的重要性[3]及其对数学发展提出的巨大挑战. 事实上，有些挑战已经出现了，其他的挑战也将慢慢地显现.

那么，所谓的无理数是什么呢？的确，回答是显而易见的：

无理数就是不能表示为两个整数的比的数.

或者，等价地说，

就是无限不循环小数.

然而，从上面的两个定义可以看出，定义无理数不能像定义奇数那样，说它不是偶数. 问题所在的严重性是，这些答案仍有诸多局限性：例如，我们怎么去定义两个无理数是否相等，或者，它们之间的算术运算又是怎样的呢？尽管这些定义是熟悉的、可理解的、无异议的，但它们在实践中也毫无作用. 由此，无理数就被定义成它们中的一个，而不再是独立存在的了. 谁说它们是存在的呢？为了创新，我们采用第三种鲜为人知的方法：

因为每个有理数 r 都可以写成 $r=\dfrac{(r-1)+(r+1)}{2}$ 的形式，即每个有理数都是其他两个有理数（在这里，就是 $r-1$ 和 $r+1$）的平均数，因此，不存在有理数会与所有其他有理数不同的情况.

鉴于此，将无理数定义为：

所有实数中不是有理数的数的集合.

---

[1] *A Mathematician's Apology*（Cambridge University Press，1993）.

[2] 正如哈代所言.

[3] 即使没有可以接受的符号用来代表它们.

这种新颖的定义相较以前的定义局限性更小. 然而，有一个令人不安的事实是，如果我们使用整数（也许不用），那么有理数严格有效的定义更为简单直接，但是如何将它从无理数中分离出来确实又是另一重要的问题，有这样一个形象的比喻：有理数集合与整数集合规模一样，但是无理数集合规模更大. 这个问题酝酿了几个世纪，它的解答分析更是花费了较长时间，自从“埃利亚的芝诺”开始，在超过两千年后，19 世纪严格主义者们提出了更多挑战性的问题及更为复杂的悖论. 最后是在德国解决了这一问题，多位德国数学家几乎同时提出了三种答案. 我们在倒数第二章进行讨论，细节上毋庸置疑，尽管烦琐的查证会占据很大的篇幅，但是我们希望给读者足够的信念以便留下一个积极的信号.

那么，这一切的目的是什么呢？无疑是希望读者能够更好地了解实变量及其相关的极限和级数，为了使他们能像阅读历史书那样，依次从开始到结束. 同时也为了那些数学训练较少、但是有极强的好奇心和热情的人：他们可能钻研熟悉或新颖的知识，从而像尝试拼图游戏那样填满缺口. 最后，这个拼图可能不完整，但是它的结构足够使我们能清晰地认识它. 有时为了解释较为复杂的想法，我们付出了很多努力，我们必须承认读者也需要投入很多精力. 借用普林斯顿大学前任校长詹姆斯·麦考士的话，叙述如下：

> 读书不是为了你，而是为了让你思考.[⊖]

见多识广的读者可能会对一些内容的疏漏感到失望，例如以 φ 为底数的黄金（φ）进制（用于确定黄金比率），又如法雷序列和福特圆. 这些内容和一些其他思想是被有意省略的，当然更多的内容是在无意间被忽略了. 无理数这门学科历史古老，涉及知识范围广，思想内容深，本书仅试图展示其代表内容，高度概括的写作难免会忽略一些内容. 这本书的每一章都可以拓展成另一本书，每本书都可以分成几卷.

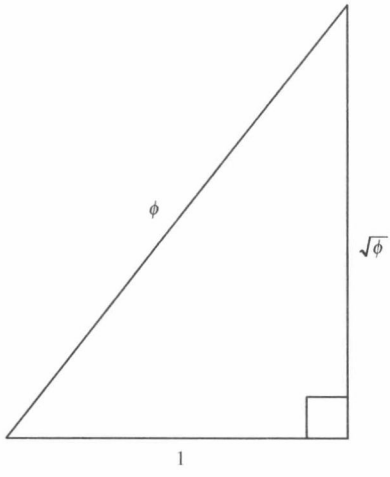
在此，我们为本书中所有印刷或其他错误向读者道歉，为了消除这种愧疚，我们用埃里克·贝克的评论来博取读者的理解与同情：

> 出版以后再校对更为有效.

⊖ 他继续说道：“世界上没有任何书能与《圣经》相媲美.”这就承认了，我们更看重情操的宽广.

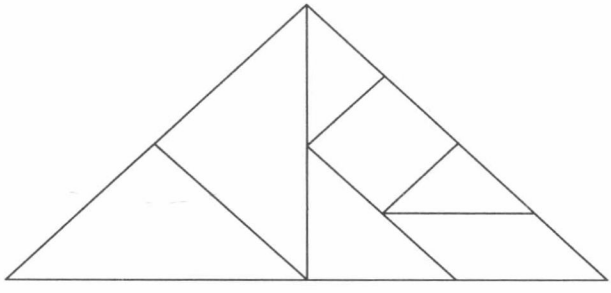
最后人类的稳定被局限在获取养老金上（6，4）　5

3，《每日电讯报》字谜26501号，2011年3月16日



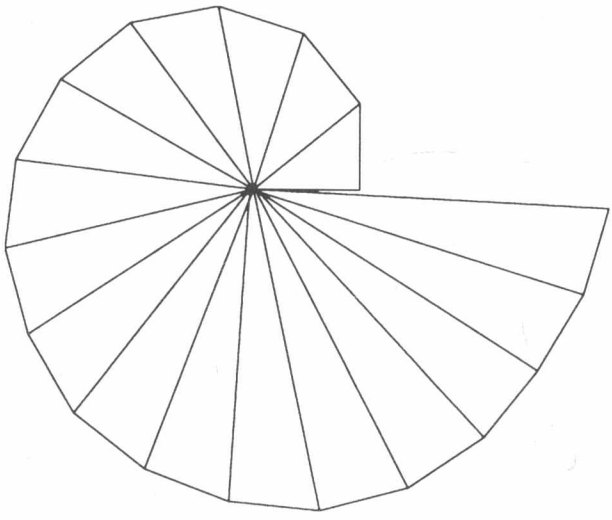
毕达哥拉斯和世界上“最无理的数”　5

6



毕达哥拉斯，$\sqrt{2}$和七巧板　6

7



7 西奥多罗斯的螺线

8

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

目　录[⊖]

致谢

引言

第一章　希腊起源 …… 1

第二章　德国之路 …… 36

第三章　两个新的无理数 …… 68

第四章　无理数，旧的和新的 …… 83

第五章　一个非常特殊的无理数 …… 106

第六章　从有理到超越 …… 120

第七章　超越数 …… 145

第八章　再论连分数 …… 170

第九章　问题与随机问题 …… 183

第十章　一个问题，三种解答 …… 192

第十一章　无理性重要吗 …… 206

附录 …… 223

附录 A　西奥多罗斯螺线 …… 223

附录 B　圆的有理参数化 …… 228

附录 C　连分数的两个性质 …… 230

附录 D　寻找罗杰·阿培里的坟墓 …… 234

附录 E　等价关系 …… 236

附录 F　中值定理 …… 239

索引 …… 241

⊖ 本书在页边标注了英文原书页码的起始和终止位置，书中“第＊页”和书后索引是指原书页码.

第一章

希腊起源

考虑要投入多少研究去判定最不重要的事实是一件可怕的事情.

——司汤达

起源与辩解

欧洲数学是无理数的摇篮：诞生于公元前几个世纪的希腊. 为了证明这个事实，我们必须依赖于一些那个时代的莎草纸文献的片段、后期整理完成的手稿以及许多专家的研究工作。有些后期手稿虽然是完整的，但出现时间较晚. 专家的研究之间也存在根本性的分歧，甚至有些专家的学说本身就产生矛盾. 下面是一段非常重要的话：

曾前往埃及的泰勒斯[1]，是最早将“几何”这一科学引入希腊的人. 他自己有许多几何学上的发现，并将其发现的几何原理传授给他的门徒，用一般的方式或者更多地以前人的经验解决一些问题. 继他之后，诗人斯特希科鲁的兄弟玛默库斯也被记载曾投入到几何学的研究中；伊利斯的希皮亚斯记录了他在这方面获得的成就. 继这些人之后，毕达哥拉斯将数学哲学转化为一种自由教育的方案，自上而下地研究它的原理，以无形的（抽象的）知识性的方式检验它的原理. 于是他发现了比例学说和宇宙轮廓的结构.[2]

现在谈谈《欧德莫斯概要》，它是《欧几里得〈几何原本〉第一卷评注》的一篇序言，它的作者是普罗克鲁斯，全名是普罗克鲁斯·狄奥多库斯，我们很快就能发现普罗克鲁斯成功的原因. 普罗克鲁斯，最后一个伟大的古希腊哲学

[1] Thay-leez，但是最初是写成 T-hay-leez.

[2] 由 Glenn R. Morrow 翻译的：*Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*（Princeton University Press, 1992）.

家，他提到了米利都的泰勒斯（前624—前546），泰勒斯可能是第一位纯数学家；他也提到了萨摩斯岛的毕达哥拉斯（前580—前520），毕达哥拉斯可能是第二位纯数学家，并且有可靠证据表明无理数的故事可能是由他而开始的. 我们对普罗克鲁斯的认识[一]并非独创，英国著名的博学家艾弗·布尔默-托马斯给予了他客观的历史评价：[二]

《欧德莫斯概要》连同帕普斯的《数学汇编》及欧托基奥斯对阿基米德三部著作的注释，是希腊数学早期历史的三个最宝贵的资源. 在结束语中普罗克鲁斯表达了他希望能以相同的方式完成《几何原本》剩余几卷的注释；不过没有证据表明他曾经完成了，但正如第一卷的注释包含了定义、假设和公理，这提醒我们他曾经想说一些非常重要的事情.

我们所拥有的一些资料是在1000年后将古代时期主要的可靠信息按照编年史的方式加以记载，这些资源提供了对其他历史内容做评论的更为重要的依据；最有影响、最具研究性、再版最多[三]、阅读最广泛的数学作品是《几何原本》.
10 讽刺的是，这一标志性的作品幸存的手稿少之又少，使得我们对古希腊的数学
11 认识显得那么的贫乏. 希腊是用莎草纸来做书写媒介的，莎草纸是由源自尼罗河三角洲的一种像草一样的植物制作的，受自然的影响常常会快速腐烂，尤其是在希腊相对潮湿的气候里. 在这种气候下，长期保存记录并不容易：它会腐烂. 一些被认为很值得保存的资料将会雇佣抄写员抄写下来，可能作为忠实性副品或者人们希望对其做一些适当的改变来保存；但其他的作品都会因容易腐烂而丢失. 下面再次引述艾弗·布尔默-托马斯的话：

《几何原本》如此成功以至于它前面的著作都退出了历史舞台.

一个简单的事实是，正是卓越的《几何原本》削弱了先于它的一些著作中的问题，使得阐述这些问题的一些作品默默无闻，然后被遗忘；在19世纪，大卫·希尔伯特的评论确实相当不错地总结了这种情形：

通过早期出版的数量来衡量一部科学作品的重要性是没有必要的.

在本章的后面我们将大量地用到《几何原本》，但是读者应该清楚，因为没

[一] “普罗克鲁斯之于欧几里得正如博斯韦尔之于约翰逊”，根据Howard Eves所说.

[二] Ivor Bulmer-Thomas，1972，Proclus on Euclid Ⅰ，*The Classical Review*（New Series）22：345-47.

[三] 为了新奇，读者可能希望阅读Oliver Byrne最为著名的版本，现在的重印版是：Werner Oechslin，2010，*Byrne*，*Six Books of Euclid*，ed. Petra Lamers-Schutze（Harper Paperback）.

有现存的原版，我们又必须依赖二手资料. 实际上，这部著作现存的最早的副本从 9 世纪开始就被保存在牛津大学的梵蒂冈图书馆和博德利图书馆里；这个副本是欧几里得所处时期一千年之后的版本. 据说，一些更早的片段被发现于大约公元前 225 年的埃及的陶片上和公元前 100 年的几页莎草纸上：前者记录了第八卷中两个命题的注释，后者包含了第二卷的上部分.

由于希腊的记录材料和环境有致命的不足，《几何原本》使无数的早期著作变得毫无意义，并且天命般地影响着随后的许多年，我们必须接受随之而来的历史困境：影响并不止于此. 事实上，始于大约公元前 450 年的希腊习俗——口头传播知识，以及后期的评论者喜欢夸大伟人的贡献，最终一步一步地摧毁了 *11*
亚历山大的学术财富：罗马人（大约在公元前 48 年）将拥有大约 500000 册手 *12*
稿的伟大的亚历山大图书馆夷为平地，基督教徒（在 392 年）掠夺了亚历山大塞拉皮斯圣殿中的大约 300000 册手稿，最后穆斯林烧毁了它成千上万的书籍（大约在 640 年）. 加上毕达哥拉斯学派的习惯是将所有成果归功于创始人，但是这个人从来没书写下来任何记录，这构成了我们数学历史噩梦的要素；由于缺乏可靠证据，对于判断的准确性和客观性而言就只能是一些专家不可推卸的责任了，而我们的论述必须依赖于这些人.

特别地，关于我们对毕达哥拉斯的认识，当代古典学教授卡尔·霍夫曼提供了一个缓冲的观点[⊖]：

……任何由毕达哥拉斯的生活编制成的大事件都如同用最劣质的纤维织成的布料.

毕达哥拉斯可能是泰勒斯的学生，也可能是对普罗克鲁斯产生重要作用的人；例如，柏拉图（前 428—前 347）在《理想国》第十卷中提到他是一位伟大的老师，这可以追溯到大约公元前 380 年. 同时也有三部涉及他的传记：第一部是第欧根尼（200—250）所写的关于希腊哲学家的工作和生活的十卷著作中的一卷，即《毕达哥拉斯的生活》；另外两部分别是卡尔基斯的杨布里科斯（约 245—325）所著的《毕达哥拉斯的生活方式》，以及他的老师波菲利（234—305）所著的《毕达哥拉斯的生活》. 这些都是写于毕达哥拉斯时代之后的大约 800 年，但是至少是现存的. 现代这方面的专著是由德国的古典文学家瓦尔特·

⊖ Huffman, Carl, 1993, *Philolaus of Croton Pythagorean and Presocratic: A commentary on the Fragments and Testimonia with Interpretive Essays* (Cambridge University Press), pp: 1-16.

伯克特[1]所著的，我们向有兴趣和忠诚的读者推荐它；为适合本书的需要，我们将满足于下面叙述中的毕达哥拉斯学派的影响.

12 万物皆数：这是毕达哥拉斯学派的中心思想. 对他们而言，数字意味着离散
13 的正整数，用单位 1 可以衡量其他的数字. 这意味着所有的数字是单位 1 的倍数；即所有的数字都可以由它来进行度量. 相对地，长度、面积、体积、质量等都是连续的量，古希腊人用这些量来代替实数. 离散的量从概念上来看是有把握的，其他的量也可以设想出来，只要两种相关性的标准是同一类型的. 此外，现代的表述

$$A : B = C : D$$

是有意义的，这里等式的一边是同一类型的量，另一边是另一种同类型的量. 这可以说一边是表示长度的量，另一边是表示面积的量，稍后我们将看到这一点的作用. 此外，音阶的研究揭示了哲学与音乐的和谐的声音，这可用弦的长度比例来衡量，例如，八度音阶相应的长度比例为 2 : 1，纯四度的长度比即是3 : 2 等. 有证据表明，连续的量也可以用离散的量来衡量. 我们考虑亚里士多德[2]总结的情况：

这些哲学家以及之前的人们，也就是所谓的毕达哥拉斯学派，是第一个接受数学的，不仅仅是最先研究它，而且提出了数学中的原理也是一切事物的原理这一思想. 这些原理数字是由自然孕育的，他们似乎意识到用这些数字可以代表许多存在或未知的事物——不仅仅是火、土、水（数的某种改进意义是合理的，一些可以表示判断，一些表示灵魂、理性和机遇等，数字化的方式可以表达近乎一切相似事物）；然后，再一次，他们认为这些改进和音阶比率都可以用数字表达，数
13 字看起来是一切自然事物的根源，数字是整个自然界的第一件大事，他们猜想数
14 字元素是构成一切事物的元素. 整个世界都是音阶和数. 他们认为整个世界中所有的事物，按照某种特质，都可以收集填充到这个体系中；如果哪个地方有分歧，他们总是做出补充使得他们的理论更为完善，就如数字 10 被认为是完美的，它包括了整个自然界中的所有事物. 他们说移动于世间的物体都是 10，但是可见的物体只是 9，为了满足这个，他们创造了 10——“对应整个地球”.

---

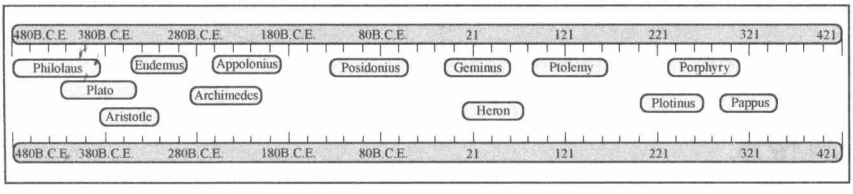
[1] *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*，由 Edwin Minar 翻译（Harvard University Press，1972）.

[2] 亚里士多德，形而上学，卷 1（1），由 W. D. Ross 翻译，可用网址是 http://ebooks. adelaide. edu. au/a/aristotle/metaphysics/complete. html（访问于 2011 年 9 月 19 日）.

由于毕达哥拉斯学派的教条主义，希腊数学随着“一个名副其实的逻辑丑闻”[㊀]而在这一阶段出现了危机，这可能是第一个长期存在，并一直持续至今的危机.

有了可靠的资源，学者们从关于遥远时期的可靠的证据中挖掘信息. 然而，直到现在，我们还是希望读者有一个客观的认识历史的内在价值的能力，在众多同时期的评论中，以智慧的方式接受所谓的权威论述.

作为最后一个重点，我们将泰勒斯、毕达哥拉斯和普罗克鲁斯联系起来获得一些想法，这得益于20世纪早期荷兰数学研究者范佩西的学术工作[㊁]，他详细研究了普罗克鲁斯接触过或直接使用过的作品，不论它们是否被明确引用. 图1.1显示的是人物时间表，由熟悉的或者不太熟悉的人名和大概的时间构成. 最特别的是，罗兹岛的欧德莫斯（前350—前290），是一位历史学家，主要贡献在于写了一部遗失了很长时间、涵盖了公元前335年之前的希腊几何学的历史著作；尤其是，范佩西（和其他人）确信普罗克鲁斯是在参考这部著作的基础上完成了《欧德莫斯概要》. 14



15

图　1.1

然而，范佩西的列表中缺少两个名字，因为这两个人具体生活的时期不为人知. 第一位是安提阿的卡布斯，或者是“工程师卡布斯”，因为他，普罗克鲁斯明确了一个角是一个数量的定义，特别是线或面之间的距离的定义；他也是被卡尔基斯的杨布里科斯认可的毕达哥拉斯学派中解决了古代三大难题之一的人：化圆为方是不可能的. 他生活的时期可能在公元前200年到公元200年之间的某个时间段.

第二位是亚历山大的叙利亚诺斯，他是柏拉图和亚里士多德的注解员，通

㊀ Paul Tannery, 1887, *La Géométrie Grecque* (Paris), pp. 141-161.

㊁ *De Procli fontibus*, Dissertatio ad historiam mathemsecs Graecae pertinens (Lugduni-Batavorum, Apud L. Van Nifterik, 1990).

过他，我们能稍微了解一些有关普罗克鲁斯的事情. 柏拉图学派在普鲁塔克领导下的复兴促使很多有地位的学者来到雅典，其中就有哲学家叙利亚诺斯和一位20岁左右前途无量的年轻人，即普罗克鲁斯. 年迈的普鲁塔克答应在他死之前短暂的时间里可以破例指导普罗克鲁斯. 当叙利亚诺斯取代普鲁塔克成为领导者时，也取而代之成了普罗克鲁斯的老师. 轮到普罗克鲁斯时，他继承了叙利亚诺斯成为学派的领导者；这次事件使普罗克鲁斯在自己的名字中加上了狄奥多库斯（意思为继承者）. 普罗克鲁斯与叙利亚诺斯的关系在学术和情感上都非常亲密，以至于留下指示，在他死后将他安置于叙利亚诺斯的墓中. 该墓位于利卡维托斯山1000英尺［1英尺(ft)=0.3048米（m)］高的山峰上，可以俯瞰雅典，现在成了一个旅游景点. 普罗克鲁斯受叙利亚诺斯影响的程度可从他们共同的墓志铭上看出来：

我就是普罗克鲁斯，利西亚人，
我旁边的人是叙利亚诺斯，他培育我为其学说的继承人.
一个坟墓装载了我们两人的身躯；
可能在同一个地方接受了我们两个人的灵魂.

15 由于种种原因，这个坟墓很久以前就消失了.

16 继承与传承

正是由于普罗克鲁斯的权威性，泰勒斯被称为古希腊七贤第一人，他将几何学从埃及带到了希腊. 特别地，随着普罗克鲁斯对《几何原本》注释的进展，他在几何学中的主要贡献在于下面四个结论：

1. 圆被任意一个直径平分.
2. 等腰三角形的两个底角相等.
3. 两相交直线所成的对顶角都是相等的.
4. 如果两个三角形中有两个角和一个边对应相等，那么这两个三角形全等.

这些结论看似是现代的结果. 然而它们的简单掩盖了它们的意义，因为它们展示的是希腊哲学演绎进程中的萌芽，还促进了数学的发展：古埃及和古巴比伦文明没有想到的公理体系、抽象概括，或者一般化，其数学结果形式有神秘的个人主义色彩. 这并不是否定地说，一些知识没有取得新的进展，只是单单认为我们所说的纯粹数学的最本质方法——演绎法，被完全忽视了. 反常的是，存

在大量关于这些古老文明的证据；古埃及人也用莎草纸，但是古埃及的气候与希腊的相比，对莎草纸的保存更为容易，古巴比伦人把楔形文字写在湿黏土片上，使得一些文献保存了几千年.

为了进一步认识对泰勒斯所使用的方法，在此，我们将详细地分析两个当时的例子，其中的问题分别来自两种文明.[㊀]从莫斯科莎草纸中可以看到，这个例子可追溯到大约公元前 1850 年，它是一个古埃及的问题：

四棱台体积的计算方法：

如果一个台体高为 6，下底面是边长为 4 的正方形，上底面是边长为 2 的正方形.

将 4 平方，可以得到 16.

将 4 与 2 相乘，可以得到 8.

将 2 平方，可以得到 4.

将 16、8 和 4 相加，可以得到 28.

将 6 取$\frac{1}{3}$，得到 2. *16*

将 28 乘以 2，可以得到 56. *17*

看，其结果就是 56.

你会发现你是正确的.

此时的计算过程是$\frac{1}{3}\times6\times(4^2+4\times2+2^2)=56$. 一般地，对于金字塔状的方体体积的计算公式为 $V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$. 这里我们只是给出了一个特殊的例子，如图 1.2 所示.

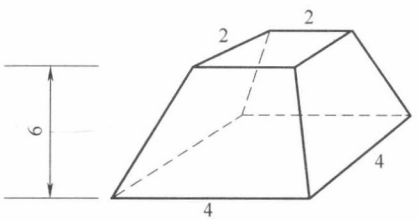


图　1.2

㊀ Victor J. Katz（编辑），*The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*（Princeton University Press, 2007）.

下面的例子源自大约公元前2000年—公元前1600年的一块古巴比伦碑[⊖]：

一个圆的周长是100.

我将圆周上的点向圆内移动2个单位.

分界线（我达到的）是什么呢？

你将2平方或两个2相加.

你将得到4.

从20中减去4，分界线.

你将得到16.

将20平方.

你将得到640.

将16平方.

你将得到416.

用640减去416.

你将得到224.

谁的平方是224呢？

12的平方，分界线.

这就是求弦长的过程.

17 古巴比伦人是用60做基数的，在这种情形下，参看图1.3的说明. 基数为60时，圆周为100的圆，在基数为10时，其圆周为60个单位. 描述计算距离圆
18 自身2个单位的弦长（我达到的分界线）的过程，神秘的20出现在这个事实中，如果圆的半径为 r，$2\pi r=60$，π 取3，$2r=20$（$\frac{25}{8}$是 π 的另一个近似值）. 用现代的数学符号，对长度为 $2l$ 的弦，有

$$(2l)^2=(2r)^2-(2r-2^2)^2,$$

$$l^2=r^2-(r-2)^2,$$

在毕达哥拉斯之前的至少1000年中，除了这个问题，没有其他关于毕达哥拉斯定理的应用.

这些是典型的例子，潜在的定理完全被掩藏，一般化的结果没有任何迹象

⊖ 这里翻译者使用了习俗：[restored missing words],<restored accidental omissions>, <<accidental inclusions>>及（编辑注释）.

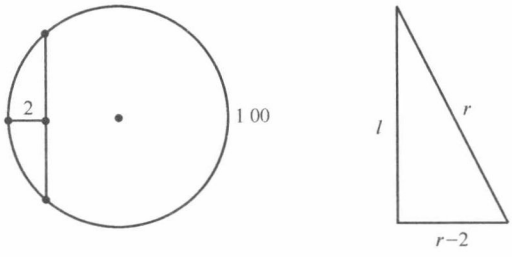


图　1.3

被显示出来. 17 世纪，伟大的德国哲学家康德评论了古埃及、古巴比伦的数学是如何过渡到希腊的[⊖]：

在人类理性历史发展的早期，数学中有许多先行者. 希腊已经进入了科学的轨道路……新的闪光点来自于第一人（可能是泰勒斯或其他人）的思想，他证明了等腰三角形的性质. 所以他发现了，真正的方法不是去检验他在图中或是概念本身辨识到的东西，而是某种程度上从中提取出它的性质；但是为了从概念中引出隐含的必要的东西，他自己做了先行者，必须将它们带入到自己先前的图形解释当中. 18 19

为此，数学开始朝着科学的方向发展，即从“合理”假设推导出逻辑结论. 臭名远扬的欧几里得平行公设作为假设被隐藏是第二个例子：一般的可公度性的假设是第一个例子.

未曾提及的，不可比较的

有可能是泰勒斯为数学开启了被康德所谓的“平坦的科学之路”，但是相传是毕达哥拉斯指明了这条距离不可通约性的概念并不遥远的道路，古希腊人所认为的不可通约性就是我们今天说的无理数.

毕达哥拉斯认为一切事物都可由数衡量；即由正整数或者两者的比率来衡量. 他们的信念是一切连续的量也是可以如此度量的，如长度、面积、体积. 这也意味着不仅是被限制的弦长能产生协调单音，不加限制的也能产生：即任意两个长度都可以互相比较，这次不只是用一个单位测量它们，而是更多神秘未知的可靠的单位. 即给定不同长度（两种不同的量）的两条线，由毕

⊖　《*Critique of Pure Reason*》（纯粹理性的批判）第 2 版的序言（1929，由 Norman Kemp Smith 翻译）.

达哥拉斯定理可知必然存在第三条线完美细分这两条线，它们的长度就是它们共同的单位.（当然，那条线的任意细分也是一个单位.）在现代符号中，如果一条线的长度为 l_1，另一条线的长度为 l_2，共同的单位是 u，必然存在整数 n_1 和 n_2 使得 $l_1=n_1u$ 和 $l_2=n_2u$. 这个结论就是任意两个量的比就是两个整数的比，$l_1 : l_2=n_1u : n_2u=n_1 : n_2$. 我们将看到，这个结论将产生远超过哲学上的简便方法的意义.

19 不幸的是，这其中的逻辑错误长期被掩饰，没有被揭露，它是怎样被发现
20 的，是由谁发现的，至今都是学术争论的一个焦点.

一种可能是，毕达哥拉斯学派对两个数的平均数这一概念产生兴趣，导致他们的注意力很自然地转向求 1 和 2 的几何平均值；1 代表所有数的生成单位，2 代表双数，是第一个女性的符号. 一般情况是考虑两个数 a 和 c，找到它们的平均值 b，其中 $a\leqslant b\leqslant c$. 方法是由于 $b-a$，$c-b$，$c-a$ 都是大于零的，其中任意两组的比都可以与任意两组原始数字的比进行比较，可以用现代的符号举出下面三个基本的例子：

- $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{a}=\dfrac{b}{b}=\dfrac{c}{c}$，这里 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 是算术平均值.
- $\dfrac{c-b}{b-a}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$，这里 $b=\sqrt{ac}$ 是几何平均值.
- $\dfrac{c-b}{b-a}=\dfrac{c}{a}$，这里 $b=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}$ 是调和平均值.

由几何公式 $\dfrac{b}{1}=\dfrac{2}{b}$，就有了 $\sqrt{2}$ 的出现.

据传，毕达哥拉斯思想的破坏者正是他的一位追随者：麦塔庞顿的希帕索斯，一个对毕达哥拉斯思想有绝对负面压力的人. 他不仅被指控破坏了通约的概念，也有意诋毁毕达哥拉斯学派，他有意宣称他发现了十二面体能够内接于一个球. 前面提到过的卡尔基斯的杨布里科斯，由于他的威信，对普罗克鲁斯有相
20 当大的影响[⊖]：
21 他们说第一位向外透露不认可通约和不可通约本质的人，是如此被憎恨以

⊖ John Dillon（编辑）和 Jackson Hershbell（译者），1991，（*Iamblichus*）：*On the Pythagorean Way of Life. Text*，*Translation*，*and Notes*（Atlanta：Scholars Press）.

至于他们不仅迫使他离开团体，还当他已经死了一样为这位他们曾经的朋友建立圣陵. 有些人补充说上帝已经对透露毕达哥拉斯教义的他感到厌烦；一些人说对于展示了十二面体怎样内接于一个球的他，要像恶人一样死于大海. 还有人说这位传播无理数和不可通约性的人的身上发生了种种的不幸.

据亚里士多德所说，毕达哥拉斯学派可能会创造一个“对应地球”以弥补他们的宇宙论，但是不可通约性不是那么容易被处理的. 两个量的比不必现在定义，这意味着类似的基本几何工具取代了它们，正如我们看到的那样，所有的结果都依赖于不可通约的使用.

柏拉图在他的几个对话中提过这个事情，揭示了一个有趣的语言学上的发展：柏拉图在《大希庇阿斯篇》（如果作者确实是他）和《理想国》中把不可通约称为 αρρετος，即说不出口的事，而在后来的作品《泰阿泰德篇》和《法篇》中又变成了 μχει ο σμμετροι，即不可通约. 我们很快就会看到不可通约又是怎样突变为无理这个词的.

是希帕索斯，还是其他的人发现了不可通约性？是否有人已经通过研究手段认识了不可通约？这些都还未曾可知；证明的方法也仍然是一个谜，但是普遍流传的说法是希帕索斯应用毕达哥拉斯定理证明了一个边长为 1 的单位正方形的对角线长$\sqrt{2}$，与 1 是不可通约的. 这样一个结论出现在《几何原本》第十卷的附录 27 中，如下所述[⊖]：

设 $ABCD$ 是一个正方形，AC 是对角线. 要证 AC 与 AB 在长度上不可通约. 假设它可通约. 会发现同一个数既是偶数又是奇数. 显然 AC 的平方是 AB 的平方 *21*
的两倍，由假设知 AC 与 AB 可通约，则 AC 与 AB 的比是两个整数的比. 设其比 *22*
是 $DE : DF$，设 DE，DF 是比例中最小的数. DE 不可能是单位长. 如果 DE 是单位长，DE 比 DF 就等于 AC 比 AB，AC 比 AB 大，DE 这个单位长就比 DF 大，这是不可能的. 因此 DE 不是单位长，而是比单位长大的整数. 因为 $AC : AB = DE : DF$，所以 $AC^2 : AB^2 = DE^2 : DF^2$. 又 $AC^2 = 2AB^2$，所以 $DE^2 = 2DF^2$. 所以 DE^2 是一个偶数，因此 DE 必然也是一个偶数. 如果 DE 是奇数，则它的平方肯定也是奇数，因为任意奇数与奇数相加，得到的数与奇数相加结果仍是奇数，因此 DE 是偶数. 设 DE 在 G 点处被分成相等的数，由于 DE，DF 是同一比中最

⊖ Kurt Von Fritz, 1945, The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, *The Annals of Mathematics* (Second Series) 46 (2): 242-264.

小的数，即它们的比值是最简分数，所以它们是互质的. 因此，DE 是偶数，DF 必然就是奇数. 因为如果 DF 是偶数，2 将是 DE 和 DF 的公约数，这与它们互质相矛盾. 因此 DF 是奇数. 因为 $DE=2EG$，则有 $DE^2=4EG^2$，又 $DE^2=2DF^2$，所以 $DF^2=2EG^2$. 即 DF^2 是偶数，从而 DF 也是偶数. 前面证明了 DF 是奇数，这就产生矛盾了. 因此，这就证得了 AC 与 AB 不可通约.

稍有一点耐心，通过一个简单的计算，就可以得到这个结论众所周知的代数形式. 假设$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 是互质的正整数. 则 $a^2=2b^2$，那么 a^2 是偶数，从而 a 是偶数. 记 $a=2k$，则 $a^2=4k^2$，就有 $2b^2=4k^2$，从而 $b^2=2k^2$，使得 b 是偶数，这与 a，b 互质相矛盾[㊀].

22 用几何形式证明这个结论使它的内在美被遮掩了，它代表了两大绝妙的初等数
23 学证明之一，哈代把这些都选进了他的《一个数学家的辩白》一书中.

然而，一个可持续发展的观点认为欧几里得的《几何原本》中的见解只是一个例子，而不是原始的方法. 我们将探寻另一条通向毕达哥拉斯可通约性的毁灭之路.[㊁]

危险的迹象

有点惊奇的是，跨越了时代，评论家们对毕达哥拉斯学派所赋予的一些图形的神秘意义做了标注. 例如，初版的《牛津英文词典》第 1908 个词条对毕达哥拉斯的注解中，著名的编辑吉姆·墨瑞用大写希腊字母 upsilon（Y）来代表善与恶两条岔路. 同样著名的美国原创的《世纪词典》中的第 1906 个词条是六角星形，词条中指出一般的六边形以及六角星形都和毕达哥拉斯的神秘主义相关. 这些出版物的现代版本或其他类似出版物保持了同样做法. 伟大的古典学者托马斯·希尔斯爵士，前面我们已经提及他，援引萨莫萨塔的卢西恩（125—180）和阿里斯托芬早期的剧本《云》作为权威，说明五边形和相关的五角星形是毕达哥拉斯学派的识别象征.

正方形、五角星形、六角星形，它们不需要毕达哥拉斯定理去隐藏它们的

㊀ 注意到，$a^2=2b^2$ 足够满足矛盾，如果方程用二进制：用二进制，任意正整数的平方在其右边有一个 0 的偶数（不包含它们），乘以 2 又得到了另一个.

㊁ 可见，例如，Kurt Von Fritz，同上.

不可通约性；它们自身神圣的标志就可以预示它们在哲学上的悖论.

为此，我们先看看可通约性定义的一个直接结论，它在《几何原本》中有广泛的应用：

如图 1.4 所示，如果 AD 和 AE 是可通约的，那么 AD 和 $AD-AE$ 是可通约的.



图　1.4

结果显而易见，它的证明看似简单，但是事实却不尽然，假设 AD 和 AE 可 23
用单位量 u 通约，设 $AD=Nu$，$AE=nu$，则 $AD-AE=Nu-nu=(N-n)u$，这说明 AD 24
和 $AD-AE$ 是可用单位量 u 来通约的.

现在考虑图 1.5 所示正方形，在对角线 AD 上取点 E，使得 $AE=AB$，作垂线 EF. 现在考虑 ED，将 ED 平行向下移动到 GH，从而得到了平行四边形 $DEGH$. 考虑平移过程中 $\angle BGH$ 的大小变化，刚开始，GH 位于 ED 处，$\angle BGH=\angle BED>90°$，最后，当 G 与 F 重合时，$\angle BGH=\angle BFH<90°$. 由于这个过程是连续的，必存在某个 GH 的位置，使得 $\angle BGH=90°$；观察图 1.5 中的等腰直角三角形 BGH. 若 AD 和 AB 可通约，则 AD 也可和 AE 通约，从而，AD 可以和 $AD-AE=ED=GH$ 通约. 设 GH 是下一个正方形的对角线，无限地重复上述过程，直到更小的嵌套的三角形没有可通约的单位量存在. 必会有 AD 与 AB 不可通约，并且这里从来没有应用到毕达哥拉斯定理. 24

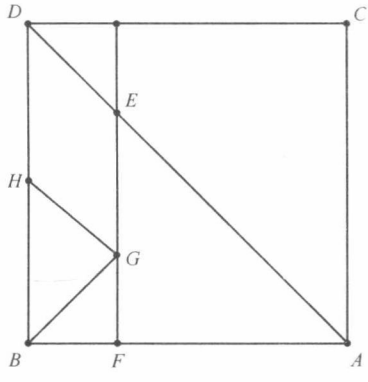


图　1.5

如此简单的正方形，暗含着被毕达哥拉斯赋予神秘意义的可通约性遭到了 25
破坏. 现在我们再来看一下正五边形；能使人联想到毕达哥拉斯的具有神秘含义

的图形中，最为人熟知的是正五角星形.

五角星形是人类历史上最强大、最持久的符号之一. 古往今来，异教徒、犹太人、基督徒、魔术师、女巫和许多邪教等都使用过这个符号. 托马斯·马洛礼爵士的《亚瑟王之死》中，韦恩爵士用它作为标志，并安置在他的盾牌上，丹·布朗的《达·芬奇密码》中，垂死的卢浮宫博物馆馆长雅克索·尼埃用自己的血在腹部上留下五角星形符号，作为证实他被谋杀的线索. 在图 1.6 中，我们可以不加定义地看到正五角星形和它的外接圆. 对于数学家来说，它是星形多边形中的一个最简单例子，五个顶点中的每一个都用直线与另一个相连接，一般情况下，n 个点中 m 个点之间有这种连接，由此得到的图形用符号$\left\{\frac{n}{m}\right\}$标记. 由美学常识，我们通常假定 m 和 n 互质，$n>2m$，并且所有这些点到图形中心距离相等；根据这种记法，五角星形可记为$\left\{\frac{5}{2}\right\}$，另外一些例子如图 1.7 所示，可记为$\left\{\frac{8}{2}\right\}$，$\left\{\frac{7}{3}\right\}$，$\left\{\frac{6}{2}\right\}$，在这些图中，最后一个例子引起了我们的注意.

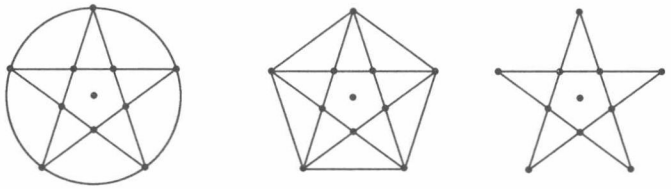


图 1.6

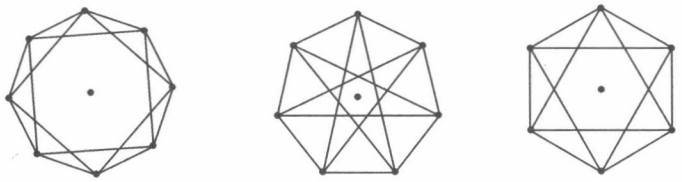


图 1.7

如果我们考虑用五角星形定义的正五边形，映入眼帘的是许多全等或相似
25 的等腰三角形，和图中无限递归生成的旋转得到的嵌套正五边形，如图 1.8 所
26 示. 我们可以再次用和正方形一样的方法找到一个矛盾点. 线 AED 作为五边形的

对角线，假设对角线 AD 和大五边形的边 AC 是可通约的. 我们有 $AD-AC=AD-AE=ED=AB$ 和 $AB=BC=BF$，这里 BF 又是里面的五边形的对角线. 由于 AD 和 $AD-AE=AB=BF$ 可通约，原始五边形的对角线 AD 必须和较小的嵌套的五边形的对角线 BF 是可通约的. 再一次无限重复这个过程，无论如何假定的衡量 AD 和 AE 的单位最终比嵌套的五边形的对角线的长度要大；不可避免地，就不存在这样的公约数.

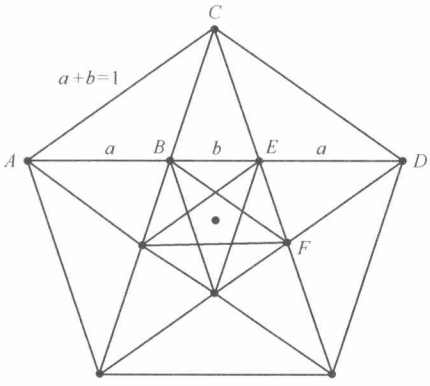


图　1.8

最后（必须是最后，我们很快就会提及），记号为$\left\{\frac{6}{2}\right\}$的星形多边形、正六 *26*

边形，可用于同样的无限递归的过程. 由相关的双重叠的等边三角形构成的六角 *27*
星形是最古老、最广泛的精神符号之一，因此它被称作所罗门的印章、大卫之星、六角星，或由犹太人所说的，是萨菲罗斯和 Ararita 支持的七颗行星的工作，七个字母的神圣的名字；丹·布朗同样在小说中也用到了它. 最开始并不是所有对角线都是等长的，最长的被证明了与边可通约，是它长度的两倍. 但是较短的对角线呢？我们现在看到 AED 作为一条较短的对角线，如图 1.9 所示，这里点 E 定义满足 $AE=AY$. 现在在 DY 上找到一个点 X，使得 $\angle AEX=60°$，则 XED 构成了较小的正六边形的邻近的两边，以 DX 为较短的对角线. 如果 AD 与 AY 可通约，用最开始的结论，ED 是新的正六边形的一边，则 AD 也可与 AE 通约；再一次用无限的递归过程，得到了假设可通约的矛盾点.

现在，以单位 1 为边长的正方形的对角线是$\sqrt{2}$，它是无理数，正五边形的对角线和正六边形的较短的对角线也是无理数. 我们可以以下面的方式定义后面的两个无理数.

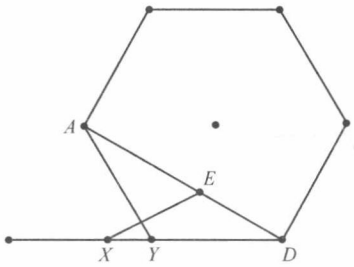


图 1.9

再一次使用图 1.8 中的记号，由以单位 1 为边长的五角星形的对称性知，$AE=AC=a+b=1$，同时，三角形 ABC 和三角形 ACD 相似. 后一个结论说明

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC},$$

从而

27

$$\frac{1}{a+1}=\frac{a}{1},$$

28 化简得

$$a^2+a-1=0,$$

可得

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

对角线的长度为

$$2a+b=2a+(1-a)=1+a=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=\varphi,$$

这是黄金比例，也体现了 1 和 2 的希腊平均值（在第 10 页中已提到过），定义成

$$\frac{c-b}{b-a}=\frac{a}{b}.$$

最具讽刺的是“分成平均值和极端的比例”在希腊数学中被如此尊崇，而这应该可以当作最早的数学戒律，占据了建筑学的绝大部分，这应当是它毁灭的根源.

最后，我们可以很容易地得到边长为单位 1 的正六边形的较短的对角线的

长度为$\sqrt{3}$.

很明显，从正六边形之后，这一结论不成立；即：尝试通过对边数大于6的正多边形重复无限递归过程注定失败，巴尔博[⊖]给出了一个完美而冗长的证明.

这些重要的毕达哥拉斯符号摧毁了他们所珍视的可通约性的思想，如果这还不够，可用另一种不同的类型说明：鱼的气泡或鱼的容器，对于毕达哥拉斯学派的人，是给予整个宇宙生命的象征的摇篮. 如图1.10所示，两个半径相等 *28*
的圆部分重叠并且各自经过另一个圆的圆心，如果这两个圆的半径都为1，则在 *29*
图中很容易找到长度为$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$（和$\sqrt{5}$）的线，如果令它们的长度相应增加，长度为φ的线也很容易找到.

当然，我们不能确定是否是希帕索斯，以及它是否是一个正方形，或五角星形、六角星形或者任何一个摧毁了毕达哥拉斯可通约性思想的图形的对角线，但是也不知是哪位建筑师，也不知是他所使用的哪种思想提供了这样的启示，放在“平坦的科学之路”上的巨石不会超过一个世纪.

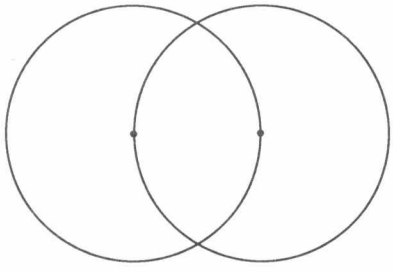


图　1.10

进步的迹象

柏拉图（前429—前347），苏格拉底的学生和助手，亚里士多德的老师，《柏拉图对话录》的作者，雅典学院的创始人，根据《斯坦福哲学百科全书》

⊖ E. J. Barbeau, 1983, Incommensurability Proofs: A Pattern That Peters Out, *Mathematics Magazine* 56 (2): 82-90.

可知：

无论从哪个方面来看，他都是西方文学传统中最耀眼的作家之一，也是哲学史上最敏锐、最多产、最富有影响力的作者之一.

我们已经讲过柏拉图在他的几个对话中提到了不可通约性，具体的日期还存在争议，看起来是在公元前 399 年苏格拉底自杀以后开始的，而柏拉图死于公元前 347 年，一个清晰的时间窗口若隐若现. 没有争议的是苏格拉底对他们的重要性，事实上，他们是伟大哲学家的成果记录的主要来源（连同色诺芬的《回忆苏格拉底》）；如同毕达哥拉斯一样，他也没有写下任何东西. 尽管《柏拉图对话录》的确切日期还有疑问，但是对他们有一个合理的确定的顺序，我们会挖掘他们三个的信息，后来被称之为早期、中期、后期.

从早期的《大希庇阿斯篇》中，苏格拉底对希庇阿斯的提问[⊖]，我们可以
29 取得一些有理数和无理数算术上的进步：
30

所谓的完美是属于谁的呢？是那些你提到的群体吗？如果我是强大的，而你也一样，总的来说我们都是强大的，如果我是正确的而你也是一样，我们都是正确的，如果我们都是这样的，那么每个也是如此，如果我是完美的而你也一样，我们都是完美的，如果我们都是这样的，那么是否每个都这样？或者有什么是不成立的，例如给定两个数的和是偶数，它们有可能都是奇数，也有可能都是偶数，而两个无理数的和可能是有理数也可能是无理数，等等. 我所说的出现在你的脑海中的无数的情况是不是也这样？

在后来的早期过渡的对话《美诺篇》中有苏格拉底问美诺的男孩奴隶怎样找到正方形的边长而它的面积是给定的正方形面积的两倍. 由此产生的苏格拉底与男孩之间的交流是一种苏格拉底式的教学模式，男孩从开始的不正确的观点，即新的正方形的边长是原来正方形的边长的两倍，被引导到最终正确的答案，即它的边长是原来正方形的对角线长. 通过这个对话，我们所谓的 $\sqrt{2}$ 被认知了.

但是它后期过渡的对话《泰阿泰德篇》是我们最有兴趣的，因为它给我们提供了明确的具体进展的证据同时也有自身的限制. 两个当时的对话之一以已故的泰阿泰德为主要内容（另一篇是《智者篇》），它们结合在一起形成了关于被柏拉图留下的以前的学生，雅典的泰阿泰德（前 417—前 369）的颇有说服力的

⊖ 本杰明·乔伊特翻译的.

证据. 毫无疑问，苏格拉底是另一位主要人物，第三位是西奥多罗斯（前465—前398），曾经一段时间，他是柏拉图和泰阿泰德的老师.

在《泰阿泰德篇》早期的文章中不可通约性又出现了，虽然有点异国特色但是为了能更好地解释，我们给出它最初的希腊原文：

Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. 30

乔伊特的翻译如下： 31

西奥多罗斯为我们写出了一些关于根的东西，如3或5的根，展示出它们用单位是不可通约的：他挑选了一些例子直到17的根——也就是在这里他停止了.

柏拉图通过泰阿泰德与苏格拉底的讨论表达了知识的本质. 泰阿泰德回忆了苏格拉底和西奥多罗斯的结论，证明了从$\sqrt{3}$到$\sqrt{17}$非平方数的不可通约性.

显然，在充满障碍的岁月里取得了进步，尽管程度上还远远不够；最特别的一个说法是，西奥多罗斯没有建立不可通约性的一般方法，否则的话，他为什么要重复对每个整数进行证明呢？

文章的最后一部分非常有趣，它为我们提供了另一种译本[㊀]：

…直到17的根这里，有什么东西使他停止了（或者：这里他就停止了）…

还有这样一种译本[㊁]：

…直到17的平方根，“在这一点有什么原因使他停止了”.

在希腊它的出现是模糊的：西奥多罗斯在17这里或之前停止了吗？无论这个问题的答案是什么，为什么他在这里停止呢？这里有什么使得他用于证明不可通约性的方法失效了吗？

自然而然这些问题引起了学者们的注意，正如也有人不同意一样. 确定的是，$\sqrt{2}$的不可通约性是众所周知并被接受的. 在《美诺篇》中早有过隐晦的提及并得到柏拉图的强力支持，他在给一位学院学生的赞助者的回绝信中写到： 31

他的名字不值得被提到，因为他忽视了这样一个事实，即正方形的对角边 32
用它的边长是不可通约的.

㊀ 由B. L. van der Waerden的Arnold Dresden翻译的，*Science Awakening*（Groningen，1954）.

㊁ T. L. Heath，*A Manual of Greek Mathematics*（London，1931）.

但是他在《泰阿泰德篇》中又继续说到[一]：

现在有无数的根，我们的意见是，试图用一个名称或类别概括它们所有的.

使之清晰的是，17 不是停下来的明显地方. 他在 17 这里或之前停下来的原因还在被学者们用巧妙的并且不同的方式讨论，其中包含了一个由哈代和莱特提出的颇有武断色彩的说法[二]：

他也可能是太累了.

有一种特殊的解释是，他有一个特别的目的是希望毕达哥拉斯学派能够有自信去证明这样一个事实（西奥多罗斯是一位毕达哥拉斯学派的学者），数的奇偶性是最伟大的，这一点被后期的数学家和数学历史学家范德瓦尔登所强调：

对于毕达哥拉斯学派，偶数和奇数不仅是算术的基本概念，也是自然界所有事物的基本原则.

他们对偶数和奇数的定义是：

一个偶数能被分成大小相同的两部分，而一个奇数是不会这样的，它被分成的两个部分是不相等的.

有这样的一个观点，利用奇偶性的方法证明了$\sqrt{2}$的无理性，如第 22 页所示
32 的那样，有一个一般化的过程. 它先被德国的业余数学家安德赫布描述在一篇难
33 以捉摸的文章[三]中，随后又在哲学博士威尔伯诺尔的学术论文中重新出现，它被拓展到一本珍贵的书中，[四]再后来它的历史性影响被罗伯特·麦凯布所发掘.[五]

观察到 17 是形如 $8m+1$ 的第一个非平方数，对于这类整数奇偶性的结论就不成立：即，西奥多罗斯在 17 之前停止，用这种方法可能不能再持续进行下去了. 可能的原因如下：

因为任意正整数可被写成 $4n$，$4n+1$，$4n+2$，$4n+3$ 的一种形式，其中 $n=0$，1，2，…，我们可以将它们分类处理.

[一] Benjamin Jowett 翻译的.

[二] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5thedn(Oxford University Press, 1980).

[三] J. H. Anderhub, Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes (Joco-Seria, Wiesbaden, Kalle-Werke, 1941).

[四] W. R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry* (Springer, 1974).

[五] Theodorus' Irrationality Proofs, 1976, *Mathematics Magazine* 49 (4): 201-203.

（1）若是形如 $4n$ 的整数，则它的平方根是 $\sqrt{4n}=2\sqrt{n}$，我们可以类似地对数 n 进行处理.

（2）暂时忽略 $4n+1$ 这种情况，假设是形如 $4n+2$ 的整数，记 $\sqrt{4n+2}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质. 则 $a^2=(4n+2)b^2$，这说明 a^2 是偶数，从而 a 是偶数. 记 $a=2k$，则 $a^2=4k^2=(4n+2)b^2$，从而 $(2n+1)b^2=2k^2$，因此 b^2 是偶数，从而 b 也是偶数. 矛盾.

（3）现在考虑形如 $4n+3$ 的整数，记 $\sqrt{4n+3}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质. 则 $a^2=(4n+3)b^2$. 现在，a 和 b 不能都是偶数，则至少有其中一个是奇数，这说明它的平方也是奇数；无论是哪个，用先前的等式我们得到另一个的平方也是奇数，从而另一个数自身也是奇数，因此，a 和 b 都必为奇数. 记 $a=2k+1$，$b=2l+1$，则 $(2k+1)^2=(4n+3)(2l+1)^2$，化简得

$$4k^2+4k+1=16nl^2+16nl+4n+12l^2+12l+3,$$

$$2k^2+2k=8nl^2+8nl+2n+6l^2+6l+1.$$

其左边显然是偶数，而右边是奇数. 再次得到矛盾.

（4）最后假设是形如 $4n+1$ 的整数，那么 n 要么是偶数，要么是奇数. 若 n 是奇数，则它形如 $2m+1$，则有 $4(2m+1)+1=8m+5$. 重复上面的过程得到 $\sqrt{8m+5}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质，则 $a^2=(8m+5)b^2$，这说明 a 和 b 必须都是奇数. 记 $a=2k+1$，$b=2l+1$，则 $(2k+1)^2=(8m+5)(2l+1)^2$，化简得

$$4k^2+4k+1=32ml^2+32ml+8m+20l^2+20l+5,$$

$$k^2+k=8ml^2+8ml+2m+5l^2+5l+1,$$

$$k(k+1)=8ml^2+8ml+2m+5l(l+1)+1.$$

由于两个连续整数的乘积是偶数，这说明左边是偶数，而右边是奇数. 矛盾.

还剩下最后一种情况，就是形如 $4n+1$ 的整数，其中 $n=2m$ 是偶数，则它可看作形如 $4(2m)+1=8m+1$ 的整数，现在这个过程无效，因为若 $\sqrt{8m+1}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质，则 $(2k+1)^2=(8m+1)(2l+1)^2$，这说明 a 和 b 必须是奇数. 记 $a=2k+1$，$b=2l+1$，则 $(2k+1)^2=(8m+1)(2l+1)^2$，化简得

$$4k^2+4k+1=32ml^2+32ml+8m+4l^2+4l+1,$$

$$k^2 + k = 8ml^2 + 8ml + 2m + l^2 + l,$$
$$k(k+1) = 8ml^2 + 8ml + 2m + l(l+1).$$

它的两边都是偶数：这次不存在矛盾.

如果我们用 $\sqrt{17}$ 去验证奇偶性的观点，有：

记 $\sqrt{17} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质，则 $a^2 = 17b^2$，这再次说明 a 和 b 必须是奇数.

记 $a = 2k+1$，$b = 2l+1$，化简得

$$4k^2 + 4k + 1 = 17(4l^2 + 4l + 1),$$
$$k^2 + k = 17l^2 + 17l + 4,$$
$$k(k+1) = 17l(l+1) + 4.$$

无论 k 和 l 是奇数还是偶数都没有矛盾，从这个简单的例子出发还可以推导
34 出更多的例子.

35 这是否是西奥多罗斯证明停下来的理由我们可能永远都不知道，但是这作为一种可能性确实是值得考虑的，在 1942 年安德赫布设定了一种更为实际的理由，简单，有吸引力，而且没有历史争议：为了证明，西奥多罗斯使用了一个沙箱，如前面第 7 页展示的，他将一直重叠直到最后一个三角形的斜边长为 $\sqrt{17}$，这使他的证明并不可行. 这个图是以这样的方式建立的，以一个边长为 1 的等腰直角三角形的斜边为第二个直角三角形的一边，[⊖]另一边仍是 1，不断重复这个过程直到最后一个三角形的斜边长为 $\sqrt{17}$，这里圆心角是

$$\sum_{r=1}^{16} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) = 351.150\cdots^\circ,$$
$$\sum_{r=1}^{17} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) = 364.783\cdots^\circ.$$

螺旋式的数学，西奥多罗斯的螺旋式，连同许多观点后来都被戴维斯等人研究[⊖].

相似性的遗失

哲学上不被接受的不可通约性的概念进入到了古希腊毕达哥拉斯学派的世

⊖ The marks for right angles and the lengths of sides are omitted for aesthetic reasons.

⊖ 见第 272 页的附录 A.

界，随着它的出现，为古希腊人带来了一种珍贵的思想，这是数（正整数）与几何的首次结合. 这些数的不可通约性构造了从算术比率（正整数比率）抽离出来的长度，并构造了几何的量；几何可以用像$\sqrt{2}$这样的方式看待，但是算术不行. 因此，我们现在称为无理性的第一个重要的含义是数学研究变成了几何研 35
究，这种方法渗透了整个欧洲数学界，随后又影响了整个 18 世纪. 第二个含义 36
与相似图形类似，所有的证明都依据于此.

为此，我们考虑两个相似的三角形；即对应角相等的三角形，如图 1.11 所示，假设标记它们是三角形 ABC 和三角形 PQR. 我们需要选取三个相应的比，为此需要求助于可通约性. 假设边 BC 和 QR 可用单位 a 通约. 再假设 BC 由 n 个 a 组成，QR 由 m 个 a 组成，由此 a 将线段 BC、QR 分别 n 等分和 m 等分. 在三角形 ABC 中从每条边的端点出发作平行线，即从 BC 出发，作 AB 的平行线交于 AC 边上相应的点，重复这个过程，从 AB 出发，作 BC 的平行线交 AC 边上相应的点；最后，从 AC 出发，再作 BC 的平行线交于 AB 边上相应的点. 通过这种方法 AC 边被分成 n 等份，每一份的长度为 b，类似地，AB 边被分成了 n 等份，每一份的长度为 c，三角形 ABC 由边长为 a，b，c 的全等三角形镶嵌而成. 现在对相似的三角形 PQR 进行同样的处理. 通过这个过程，它也被这些同样的全等三角形镶嵌，这说明有如下的等比关系：

$$AB : PQ = BC : QR = AC : PR (= nc : mc = na : ma = nb : mb = n : m).$$

相似三角形边长的比是两个整数的比：这个比值正是所谓的毕达哥拉斯数.

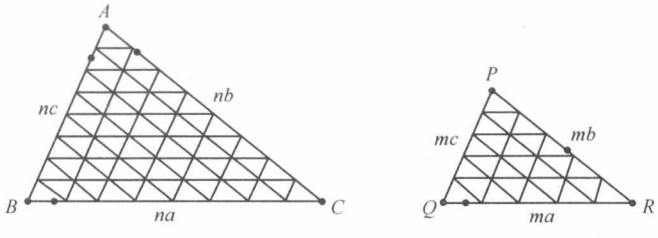


图　1.11

现在证明为什么逃向几何就如同逃向另一个数学的牢房一样简单. 36

例如，考虑简单线性方程 $ax = bc$ 的解. 希腊的方法在《几何原本》第六卷 37
的命题 8 和命题 9 中被概括出来，但是用现在的代数符号更容易解决. 在图 1.12 中，线 AX 上有点 B 和点 C，B 到 A 的距离是 a 个单位长度，C 到 A 是 $a+c$ 个单位长度. 线 AX 和 AY 呈某个适当的角度，点 E 在 AY 上距离点 A 有 b 个单位长

度，我们可以画出 BE；过点 C 画 BE 的平行线交 AY 于点 D，DE 的长即为 x.

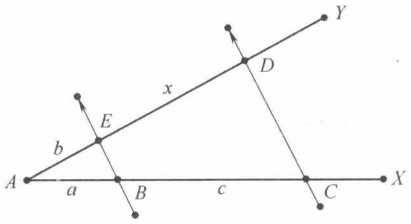


图 1.12

现在的方法，注意到三角形 ACD 和三角形 ABE 是相似的，因此

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+x},$$

这说明了 $ax=bc$.

再如，如图 1.13 所示. 它是一个直角三角形 ABC，过点 C 的垂线交 AB 于点 D，这样就有了三个相似的直角三角形. 按相应的顺序（三角形 ABC、三角形 ACD、三角形 CBD），利用相似性，可以得到

37

$$\frac{BD}{BC}=\frac{CB}{AB},\ \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},$$

38 从而

$$BD=\frac{BC^2}{AB},\ AD=\frac{AC^2}{AB},$$

则

$$\frac{BC^2}{AB}+\frac{AC^2}{AB}=BD+AD=AB,$$

因此，

$$BC^2+AC^2=AB^2.$$

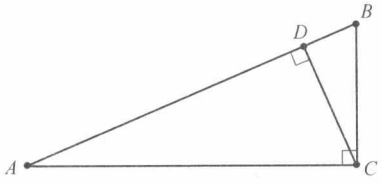


图 1.13

正如我们所提到的，毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派不知道有什么方法（如

果有的话）来证明这个著名的定理，但是有一件事情是可以确定的：如果他们用了一种简单的相似性的观点，那么不可通约性的发现将会受到毁灭性的打击.

一位杰出的具有洞察力的最伟大的古希腊思想者之一妥善地处理了不可通约的量，拯救了相似性问题，由此产生了几何方法.

欧几里得和系统化

对于《几何原本》，正如我们前面提到的，在数学史上有正面也有负面的影响. 它的13卷本构建起了古希腊数学的演绎体系，并且直到今天我们仍然在学习它的几何和数论，尽管过程漫长而曲折，还是有完整的资料流传下来.

不幸的是，当我们追问欧几里得其人的时候，我们几乎没有明确地知道他的任何事. 事实上有很多古老的作者提到了他，但是没有像普罗克鲁斯那样确切. 我们再一次从《欧德莫斯概要》中引入：

柏拉图的这些学生中没有比欧几里得更年轻的了，他整理出了《几何原本》，将欧多克索斯等人的许多定理编排进去，特别是许多泰阿泰德的定理，也 *38*
无可辩驳地证明了前辈们不能严格证明的东西. 克罗狄斯·托勒密首次提到他； *39*
而阿基米德是继克罗狄斯·托勒密之后提到欧几里得，并且他们说克罗狄斯·托勒密曾经问过他是否有比《几何原本》更快捷的方法去研究几何，为此他回应说几何之路上没有康庄大道. 他比柏拉图的圈子更年轻，又比埃拉托色尼和阿基米德古老；对于同时代的人，正如埃拉托色尼所说，他的目标是成为柏拉图式的人，因为他赞成他的哲学观点，据此他完成了所谓的柏拉图式的完整的《几何原本》的最后部分.

为此我们更加确信他任教于托勒密成立的优秀的亚历山大大学，《几何原本》大约写于公元前320年，一位现代作家提到他时增加了一点演绎的色彩[⊖]：

总而言之，几乎无法否认《几何原本》是一项难以忍受的学究和严格的工作.

《几何原本》是我们必须寻找的认识无理性进展的证据，为了这个目的我们关注第五卷和第十卷：第五卷收集了尼多斯的欧多克索斯的著作；第十卷提到了泰阿泰德. 我们将开启欧多克索斯著作的欧几里得体系.

⊖ Salomon Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (Princeton University Press, 1966).

如果锡拉库萨的阿基米德（前 287—前 212）是古代最伟大的数学家，那么可以确定尼多斯的欧多克索斯（前 408—前 355）是第二伟大的，尽管他主要是以天文学上的研究闻名. 他最初的工作没有保存下来，但是我们有强有力的证人，如第欧根尼、普罗克鲁斯和阿基米德等. 可能读者认为有足够的证据表明，第五卷中结合两种定义来处理毕达哥拉斯学派的不可通约性问题，这种方法非常有先见之明，18 世纪德国数学家理察德·戴德金在他自己的无理数的定义中也采用了这两种定义，我们将在第九章看到. 第五卷中出现了一些非常了不起的
39 材料，第一次尝试理解可能有点困难，著名的 19 世纪英国数学家狄摩根非常欣
40 赏其中一点，这在他自己的书的序言中也有解释[⊖]：

几何离开算术没办法走得更远，欧几里得在第五卷中，第一次做了这样一个连接，这是一个非常困难的猜想，第一次读它的人要么忽略，要么理解. 这卷书和亚里士多德的逻辑论是两个最无可非议、无懈可击的论著.

我们的主要目标不是去理解整本书，而是要证明欧几里得所展示的无理性的欧多克索斯方法，以及用这种方法有效处理它所带来的问题；要做到这一点我们将不再需要本卷中的 25 个命题，只需要其中的 18 个定义中的两个，还有第一卷和第六卷中的几个命题.

欧多克索斯公理（阿基米德认为是他）

定义 4，第五卷

如果其中一个量超过另一个量，这两个数的大小能够用比来表示.

这里我们要解释一下“能够”意味着是“有道理的”，最初的定义看起来有点没有道理；当然，一些足够多的小的量能够超过大的量吗？其实不是这样的. 首先考虑尝试比较一条有限的直线和一条无限的直线；不可能找到有限直线部分的任何倍数可以超过整条线. 第二，这个定义也排除了试图形成不能比较的量的比；例如，长度和面积. 最后，更微妙的是，欧多克索斯知道的号形角的概念，即一条直线和一条曲线之间的角，如图 1.14 所示. 欧几里得记录了这个概念，
40 如果不是根据名字，那么就是根据它的本质.

⊖ *Number and Magnitude. An Attempt to Explain the Fifth Book of Euclid*. Available at http://www. archive. org/details/connexionofnumbe00demorich（访问于 2011 年 10 月 3 日）.

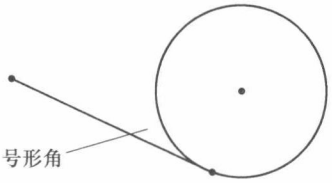


图　1.14

41

命题 16，第三卷

由一个圆的直径的端点作直线与直径成直角，则该线落在圆外，在这个平面上在这条直线与圆周之间不能再插入另外的直线，**而且半圆角大于任何锐直线角，而剩余的角小于任何锐直线角**.

最后，粗体部分是说一个号形角比直线角要小；因此没有那么多号形角的量大于直线角的量，这个定义再次出现了问题；无穷小由此触及. 在这几行中定义 4 起到了显著的效果. 用它我们可以比较不同的数，可通约的或不可通约的，而不需要提及术语也不需要使用整数. 例如，$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 可作为一个比进行比较，由于可证明 $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}>\sqrt{3}$；类似地，我们也可以比较可通约和不可通约的数：如 2 和 $\sqrt{2}$，可证明 $2>\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}>2$.

因此，我们有任意两个可比较量的比的意义. 现在我们看看欧多克索斯随后的定义，这个定义展示他完全势不可挡的洞察力，他扫清了与不可通约性相关的所有问题，方法就是忽略不可通约性. 下面是他的任意两个量之间的比的定义，这两个量可以是不可通约的，也可以不是；古希腊几何深陷不可通约性的泥潭一个世纪后，凭借这个定义才重新往前发展.

定义 5，第五卷

量被称作有相同的比，第一个比第二个，第三个比第四个，当第一个和第三个是任意的等倍数，第二个和第四个是任意的等倍数，采取相应的命令前面的等倍数要么超过，要么等于，要么小于后面的相应顺序的等倍数. 41 42

这段语句开始是有点混乱，但是可用现代的代数学使之更为清晰，在这种情况下他说（隐含地对一些可比较的量，如前面定义 4 所说）比例 $a:b=c:d$ 对一切正整数 m 和 n 有：

若 $na>mb$，则 $nc>md$，

若 $na=mb$，则 $nc=md$，

若 $na<mb$，则 $nc<md$.

下面这个可能更为合理：

对于实数 x 和 y，定义它们之间的等式 $x=y$，使用比较便利的正整数讨论它，即任意正整数 m 和 n：

若 $x>\frac{m}{n}$，则 $y>\frac{m}{n}$，

若 $x=\frac{m}{n}$，则 $y=\frac{m}{n}$，

若 $x<\frac{m}{n}$，则 $y<\frac{m}{n}$.

因此，对于任意正整数 m 和 n，$x=y$：

若 $nx>m$，则 $ny>m$，

若 $nx=m$，则 $ny=m$，

若 $nx<m$，则 $ny<m$.

现记为

$$x=\frac{a}{b}\text{和}\ y=\frac{c}{d}.$$

对任意实数 a，b，c，d. 则

42

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

43 如果对于任意正整数 m 和 n：

若 $n\frac{a}{b}>m$，则 $n\frac{c}{d}>m$，

若 $n\frac{a}{b}=m$，则 $n\frac{c}{d}=m$，

若 $n\frac{a}{b}<m$，则 $n\frac{c}{d}<m$.

可以得到

若 $na>mb$，则 $nc>md$，

若 $na=mb$，则 $nc=md$，

若 $na<mb$，则 $nc<md$.

注意到，虽然 a 和 b 必须是同一种量，c 和 d 也必须是同一种量，但是这两种量不一定相同；例如，a 和 b 可能是长度，而 c 和 d 可能是面积.

欧多克索斯公理有更广泛的应用，由于它可以被展示出使上述无关的中间状态，只留下不等式，进一步可以结合以下令人满意的方式[⊖]：

当它们之间没有有理分数时，两个比是相等的.

我们简短地比较证明的两种类型，一种使用可通约性，另一种是欧多克索斯方法. 为此我们考虑：

命题 1，第六卷

高度相等的三角形和平行四边形的面积的比可以用它们各自的底的比来计算.

如果我们关注三角形，这表明高度相等的两个三角形面积的比是它们底的比. 两个证明都依赖于一个早期命题，这两种证明不受通约性的影响. 43

命题 38，第一卷 44

有形同底的三角形在同一平行线下面积彼此相等.

也就是，同底等高的两个三角形的面积相等.

首先，我们考虑基于可通约性上的命题 1 的证明.

如图 1.15 所示，如果是三角形 ABC 和三角形 AXY，故 BC 和 XY 有一个单位 u 可通约；假设 $BC=nu$，$XY=mu$. 在每个底上分别划分 n 和 m 等份，从顶点 A 出发将其分成 n 和 m 个三角形，每个都有相同的底和高. 则 $\triangle ABC$ 划分成了 n 个面积相等的三角形，$\triangle AXY$ 划分成了 m 个面积相等的三角形.

因此，$\triangle ABC : \triangle AXY = n : m = BC : XY$.

现在考虑一个不假设可通约性的情况.

考虑问题中的三角形 ABC 和三角形 AXY. 如图 1.16 所示，对于任意正整数 44
m 和 n，延长 CB，划分成 m 等份，并与点 A 连接：类似地，延长 XY，划分成 n 等份，与点 A 连接. 则 $B_{m-1}C=mBC$，$\triangle AB_{m-1}C=m\triangle ABC$. 若用符号>=<总结三 45
部分的欧多克索斯条件，对于任意正整数 m 和 n，由 $B_mC>=<XY_n$ 得到 $\triangle AB_mC>=<\triangle AXY_n$，由 $mBC>=<nXY$ 得到 $m\triangle ABC>=<n\triangle AXY$.

⊖ Otto Stolz, 1885, *Vorlesungen über allgemeine arithmetik: nach den neueren ansichten* (Cornell University Library).

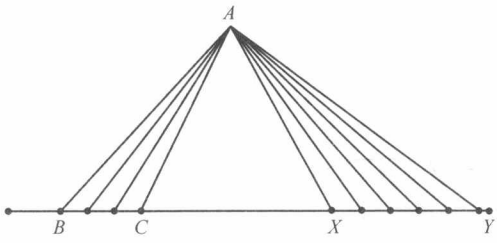


图 1.15

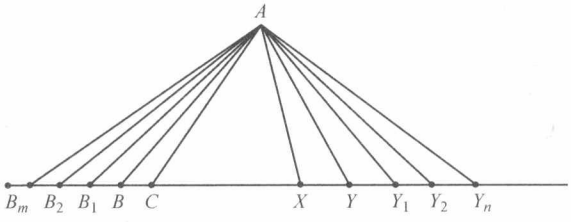


图 1.16

因此如证明要求的那样得到了$\triangle ABC : \triangle AXY = n : m = BC : XY$. 没有提到长度的可通约性：没有整数比.

最后，如果我们要估计不可通约性的重要性，依据相似性所伴随的任何结果都是注定的，先看一下毕达哥拉斯定理本身. 早期已有依赖于相似性的巧妙的推导，但是欧几里得在《几何原本》第一卷的命题 47 中明确展示了其结果（和以前一样没有署名），他的系统化要求这个结论贯穿从第二卷开始的其他命题；直至第五卷中的欧多克索斯方法. 欧几里得需要它，又不能用相似性的任何思想去证明它，因此他提供了著名的“新娘的椅子”命题，这（被普罗克鲁斯和其他人）归功于欧几里得自身. 我们需要提醒读者它的细节相对复杂.

命题 47，第一卷

在直角三角形中，以直角所对边为边长的正方形的面积等于以两个直角边为边长的正方形的面积之和.

如图 1.17 所示的“新娘的椅子”，它的叙述如下.

以 *BC* 为边的正方形 *BDEC*，以 *BA* 为边的正方形 *BFGA* 和以 *AC* 为边的正方形 *AHKC*. 过点 *A* 作 *BD* 的平行线 *AL*，连接 *AD* 和 *FC*.

由于三角形 *BAC* 和三角形 *BAG* 都有一个直角，所以 *CA* 和 *AG* 在一条

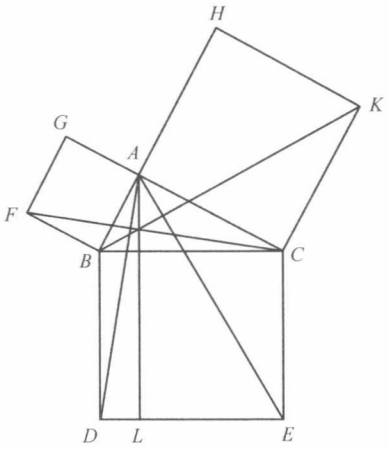


图　1.17

直线上.

同理 *BA* 和 *AH* 也在同一条直线上.

角 *DBA* 和角 *FBC* 相等，因为它们都是一个直角与角 *ABC* 的和.

因为 *BD* 等于 *BC*，*BF* 等于 *BA*，*AB* 和 *BD* 分别等于 *FB* 和 *BC*，角 *ABD* 等于 *45*
角 *FBC*，因此底 *AD* 等于底 *FC*，三角形 *ABD* 全等于三角形 *FBC*. *46*

现在矩形 *BL* 是三角形 *ABD* 面积的两倍，因为它们有同样的底 *BD*，并且都在平行线 *BD* 和 *AL* 之间. 正方形 *BFGA* 是三角形 *FBC* 面积的两倍，因为它们有同样的底 *FB*，并且都在平行线 *FB* 和 *GC* 之间.

因此矩形 *BL* 的面积等于正方形 *BFGA* 的面积.

类似地，如果连接了 *AE* 和 *BK*，矩形 *CL* 的面积也可被证明等于正方形 *ACKH* 的面积. 因此整个正方形 *BDEC* 的面积等于两个正方形 *BFGA* 和 *ACKH* 的面积之和.

又正方形 *BDEC* 是以 *BC* 为边建立的，正方形 *BFGA* 和 *ACKH* 分别是以 *BA* 和 *AC* 为边建立的.

因此以 *BC* 为边的正方形面积等于以 *BA* 为边和以 *AC* 为边的正方形面积之和.

因此，在直角三角形中，以直角所对边为边长的正方形的面积等于以两个直角边为边长的正方形的面积之和.

但是在这方面努力的过程中，得到这个结果却付出了一个沉重的时间代价：

如果我们看看第六卷，这个结果是命题 31 的推广，以直角三角形的两边为边长的长方形，其证明是基于相似性！

46 由于公认的量的不可通约性，迫使我们来到第十卷，它是迄今为止 13 卷中
47 最长和最具挑战性的（它大约构成了《几何原本》的四分之一），专门总结了不可通约数的计算.

对第十卷的看法多种多样，如狄摩根说它是“最完整的一卷，其他卷（即使是第五卷）都不具备它的完整性”托马斯·希尔斯爵士说第十卷“可能是最引人注目的，也是《几何原本》所有卷中最完美的。”后期斯坦福学派的威尔伯·克诺尔（他也致力于研究西奥多罗斯的最著名的一卷），是 20 世纪最著名的数学古代史学家之一，他给出了一个平衡的观点[⊖]：

怀着期望接近了欧几里得第十卷的学生对它的见长和隐晦可能有些失望. 正如我们所看到的，数学思想很少，表达本来可以更简洁清晰. 第十卷真正的价值，我相信它不会小，它是唯一将推导系统分类并全面阐述的范例，这是古代的数学哲学家一致认同的. 它提供了详细的学术练习的体系去解一个具体的几何问题，并证明了这些解决方法中所涉及线的基本性质. 因此我们可从第十卷中去了解作者怎样试图将几何的发现转化为数学知识体系.

幸运的是学者们得到了帕普斯关于第十卷的评注的可靠副本（原来在阿拉伯），正是由于他的权威性[⊖]，泰阿泰德被认为与第十卷有关.

我们通过前四个定义及随后多个命题来说明：

47 **定义 1，第十卷**

48 可用同样的量衡量的那些量称作可通约的，而那些没有公度量的量称作不可通约的.

不可通约量存在的必然性是公认的.

定义 2，第十卷

当以直线为边的正方形可用同样的面积衡量，正方形中的直线称作可通约

⊖ Wilbur Knorr, 1883, La Croix des Mathématiciens: The Euclidean Theory of Irrational Lines, *Bulletin of the American Mathematical Society* 9 (1).

⊖ *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*, translation from the Arabic by William Thomson (Harvard University Press, 1930).

的，当以直线为边的正方形没有面积作为公度量，称这些直线是不可通约的.

两种不可通约性的区别在于：一些量尽管自身是不可通约的，但是在正方形中可通约，而另一种却不是. 要区别概念，例如，$\sqrt{2}$ 和 $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；在单位为 1 的正方形中 $\sqrt{2}$ 可通约，因为 $(\sqrt{2})^2=2$，但是 φ 不是可通约的，因为 $\varphi^2=\varphi+1$（见第 5 页）.

定义 3，第十卷

根据假设，对一条指定的直线被证明存在无限多与其可通约和不可通约的直线有些仅仅是在长度上，有些也在面积上. 设这条指定的线为有理的，与这条线可通约的直线都是有理的，不管是在长度上和面积上，或者只是在面积上，但是与它不可通约的直线都是无理的.

定义 4，第十卷

以指定直线为边的正方形称为有理的，那些与它可通约的面积是有理的，不可通约的是无理的，由此产生的直线也是无理的，即在面积是正方形情况下，边是它们自己的，但是在面积是其他任何直线图形情况下，以直线为边的正方形与之相等.

由这些定义可以发现不可通约性和可通约性在数量上是无限的，可能有一点混乱.

下面，来看看欧多克索斯的另一个贡献：　*48*

衰竭的欧多克索斯方法　*49*

命题 1，第十卷

设两个不等的量，如果从较大的量扣除一个比它一半要大的量，这样剩下的一个量比它的一半要大，如果一直重复这个过程，则会存在一些剩下的量小于给定的较小的量.

不再重现《几何原本》中的原始证明，我们展示一个等价的证明，它也说明了欧多克索斯公理的另一个用途.

假设有一个较大的量 AB 和一个较小的量 CD，则公理告诉我们存在一个正

整数 m 使得 $mCD>AB$，这说明 $CD:AB>1:m$. 显然也存在一个正整数 n 使得 $2^n>m$. 因此存在 n 使得 $CD:AB>1:2^n$，这说明 $\frac{1}{2^n}AB<CD$，不等式的左边 AB 的系数长度上有一个上界. 因此，这个量小于 CD，即证.

再次，这个结论的作用可能不会立即显现，但是量 CD 可以想要多小就选定多小；用字母 ε 表示它，很容易得到一个现代的说法：

…给定 $\varepsilon>0$，则存在一个整数 n 使得取决于 n 的某个量要比 ε 小…

我们可以在某些恰当的方面有限地使用这个过程，例如，在与埃拉托色尼的一封信中，阿基米德记录了，欧多克索斯第一个使用此方法证明了圆锥和棱柱的体积分别是与其同底同高的圆柱体和棱柱体体积的三分之一；德谟克利特知道这个结果，但是他不能给出严格的证明. 阿基米德应用了这个方法并得到了一系列重要的令人印象深刻的求积的结论，先于微积分的计算大约 2000 年.

现在看看随后的一个命题，它给出了不可通约性的一个标准，尽管它的通
49 用性仍是个开放性的问题：“永不”什么时候发生呢？

50 **命题 2**

如果两个不等量中较小的量一直从较大的量中扣除，剩下的量不能衡量之前的这个，则称两个量是不可通约的.

下面几个命题刻画了可通约性：

命题 5

可通约的量和另一个量的比有一个数与数之间的比.

命题 6

如果两个量的比是两个数的比，则称这两个量是可通约的.

命题 7

不可通约的量之间不能用两个数的比表示.

命题 8

如果两个量不能用两个数的比表示，则称这两个量是不可通约的.

随着可通约性被定义，我们后来发现了一组不同的不可通约的量，给定两个量 a 和 b，它们自身是不可通约的，但是在面积中是可通约的：它们的中间项是平均比例（几何平均）$\sqrt{ab}$，它们的和 $a+b$ 和它们的差 $a-b$（$a>b$）. 我们要再次提到帕普斯：

泰阿泰德区分可通约和不可通约，他根据均值提出了众所周知的无理线，从而他赋予中间线几何意义，赋予它们的算术和的意义，赋予它们的差调和意义，如同欧德莫斯经常说的那样. *50*

随着对话的发展，欧几里得有条不紊地标记了所有可能的量，记作 *51*

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$$

到这里无理数发展的开篇将要结束：有许多提到过、研究过它的文章，但是都没有产生伟大的成果. 不可通约性被发现，人们寄予几何来解决它，算术被牢牢固定在可通约上，而这一直影响了许多个世纪的研究. 无理数尚未产生.

第二章

德国之路

数学一直吸引人的一个方面就是它看似矛盾的地方会绽放出完美的理论.

——戴维斯

在第一章中我们看到了古人为了得到不可通约性所做的努力. 这里我们以一定的速度穿越时空来继续这个故事，把故事的时间和地点转移到古印度和阿拉伯、中世纪的欧洲，最后到 19 世纪的德国.

古希腊人没有接受无理性，他们尽可能地避免它，并用几何学掩饰了它，罗马文明的成功也没有推进它的进步. 那么罗马人为我们做了什么呢？1979 年有一部既讽刺又滑稽的电影，名为《布莱恩的一生》. 剧中一个持不同意见的人，名字叫作雷，雷问了同样的问题，对话如下：

雷：好的，但除了卫生设施、医药、教育、葡萄酒、公共秩序、灌溉、道路，淡水系统和公共卫生，罗马人还为我们做过什么吗？

与会者：带来和平？

雷：哦，和平-闭嘴吧！

当然，他们给我们带来了公历. 然而，在雷的名单中没有更广泛的数学完整
52 性的进展，很少有用单位测量不可通约的问题. 他们实用主义的口头禅是：罗马
53 人没有为纯粹数学家做任何事情. 可以充分认识到整个罗马帝国时期（大约从公元前 750 年到公元 476 年，直到最后的罗马皇帝被废黜）都没有关于罗马数学家的记录. 相反地，莫里斯·克莱因[1]写到：

在数学史上，他们的整个角色就是一个破坏者.

当然，这是一种极端的观点，因为其只关注到纯粹数学方面，而忽略了罗马人其他方面的巨大贡献. 如前面关于雷的对话中提到的诸多方面，涵盖了从哲学到工程学的各个领域. 然而，如果我们要探寻更多关于无理数进展的消息，我

---

[1] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University Press, 1972), p. 178.

们必须看得更远，应该在印度和阿拉伯文明中找到希腊数学的继承者.

印度人和阿拉伯人

印度人的文明要追溯到公元前几千年. 但是高峰期是在大约 200 年到 1200 年，这时有了数学思想的进步. 他们研究数学的动机不像希腊人那样为了单纯的抽象理论，而是为了处理实际问题（会计、天文学和占星术），也是为了理解理论（特别是数论）. 他们最先接受 0 和负数，最先产生 10 进制的数的体系，并且一定程度上运用了平方根. 他们不是寻求无理数哲学上的证明进程，仅仅只是像对待有理数那样接受并运用无理数：几何的不可通约性变成了算术的无理数.

我们再来看看[⊖]这个时期的一位具有代表性的天文学家和数学家斯里帕蒂（1019—1066），他把自己所做的关于天文学和数学的工作写成著作，名为《Siddhantasekhara》：

53
54

对于加法和减法，根[⊖]应该与某个相应的数相乘，从而变成平方. 和的平方或根的差应该被某个乘数区分. 这些根不会被某个数相乘成为平方根，所以应该（并排的）放在一起.

对于古印度人，根不是指平方根，而是指非平方数的正整数. 对于这样的整数 a 和 b，用斯里帕蒂的方法，有

$$\frac{1}{c}(\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc})^2=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$$

所以

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{c}(\sqrt{ac}\pm\sqrt{bc})^2}.$$

当然，这种思想是通过引入一个因数来构造完全平方数. 此时只有在 a 和 b 的质因数分解中所有质因数的幂指数的奇偶性分别相同时才能实现. 例如，取 $a=3,b=12$，可以取 $c=12$（此时 a，b 的所有质因数为 2 和 3，质因数分解中 3 的幂都为 1，而 2 的幂可视为 0 和 2），则

⊖ Bibhutibhusan Datta and Awadhesh Narayan Singh, 1993, Surds in Hindu mathematics, *Indian Journal of History of Science* 28 (3): 254.

⊖ 翻译者选择的词. 我们稍后将处理这个词“surd”的用法.

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{\frac{1}{12}(\sqrt{36}+\sqrt{144})^2}=\sqrt{\frac{1}{12}(6+12)^2}=\sqrt{\frac{18^2}{12}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

以目前的眼光来看，这确实有些烦琐，但无疑是一种敏锐的思想.

稍后我们会从12世纪一位伟大的数学家婆什迦罗二世（1114—1185）的著作《代数学》中了解到他的贡献：

假设两个根的和是一个较大的根，它们乘积的平方根的两倍是一个较小的
54 根. 它们之间的加法和减法运算与整数时的相同.
55

也就是说，由等式 $a+b\pm2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$，有

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}.$$

再一次看上面我们（和他）讨论的例子，

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{3+12+2\sqrt{3}\sqrt{12}}=\sqrt{3+12+2\sqrt{36}}=\sqrt{15+12}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

下面我们再看看印度数学中普遍使用的关于根的加法和减法的其他等价描述：

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{b\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\pm1\right)^2},$$

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{a}(a\pm\sqrt{ab})^2},$$

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{c\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\pm\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2}.$$

随后，出现了包含根的和与差的乘法和除法的多种多样的表达式，婆什迦罗二世展示了

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54}}{\sqrt{25}+\sqrt{3}}=\sqrt{18}+\sqrt{3}.$$

这里所用的方法的确令人费解，并且，如果感觉这还不够复杂的话，他还指出了 $16+\sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}$ 的平方根是 $\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$，并给出了一个原理加以完全的解释，这个原理同时被应用于判断多项式的根是否有这样的平方根，他也指出“先前的作者没有充分地解释这种方法. 我为它做了烦琐的说明.”

印度人用自己的方式来处理形如非完全平方数的平方根这样的无理数. 他们也建立了自己的三角学，采用10进制，列表计算三角函数值，并达到了一定的

精度；Sangamagramma 的 Madhava（玛德哈万）（1350—1425）创建了分析学， 55
给出了三角函数的无穷级数（早于泰勒和麦克劳林几个世纪），由此 π 的值修正 56
到了小数点后 11 位. 他们对数学的贡献是一个整体，特别是对于根形式的无理数的计算，帮助建构了一个古希腊数学和欧洲文艺复兴时期数学的桥梁；但是，阿拉伯人也同样做了很大贡献.

奥尔·伊本·哈塔卜（大约 580 年—644 年）是伊斯兰哈里发的第二位继承者，他开始了伊斯兰帝国的巨大扩张. 人们一直认为他该对伟大的亚历山大图书馆最后的破坏负责任，虽然这种说法缺乏证据，但将成千上万的手稿付之一炬理应受到谴责：

要么书中包含的东西正如《古兰经》所说的，在这种情况下我们不必读它，要么书中包含的东西与《古兰经》所说的相反，这种情况下我们不能读它.[⊖]

现代学者严重怀疑此事，但是他对统治的重要性是无人质疑的. 阿拉伯帝国持续扩张，直到 8 世纪，从北非到南欧，从中东到印度西部边界. 与印度接触确保了许多印度数学成果的传播，包括十进制，并且广泛的接触也将希腊人的主要著作带到了新帝国的首都巴格达. 哈里发曼苏尔建都于 762 年，他的统治迎来了普遍意义上的学术繁荣时代，特别是对于先前被压制的波斯人；曼苏尔的继承人哈里发哈伦·拉希德安排把许多希腊数学著作（包括欧几里得的《几何原本》）第一次翻译成阿拉伯文. 哈伦·拉希德的继承人是他的儿子，哈里发阿尔·玛蒙，玛蒙在学术繁荣上走得更远，他修建了智慧宫，它是一种科学院的形式，一直持续了超过 200 年. 这里聚集了广博的希腊语和梵语手稿，学者翻译它们；多年来， 56
许多重要的希腊和印度数学的译本内容被加入到《几何原本》中. 57

曾经在智慧宫里工作过的一位思想家和翻译家就是阿布·贾法尔·穆罕穆德·本·穆萨·阿尔·花剌子模（大约 780—850），简写为阿尔·花剌子模. 作为一位思想家，我们应感激他，但是，更应该感激他发现了数学中常用的一些知识：例如，算法和代数. 也有可能我们必须相信，是由阿尔·花剌子模将根这个词收入到数学词汇中.

作为证据，我们可以看看柏拉图早期的对话、《大希比亚斯》（如果他是真正的作者）和《理想国》. 在那个阶段，不可通约数在希腊作为 αρρετος 被提

⊖ 为了与 St Augustine（圣·奥古斯汀）（354—430）所谓的评论进行比较："人们从《圣经》之外获得的任何知识，如果它是有害的，那么就会被谴责；如果它是和善的，那么就会被容纳."

及，翻译成拉丁文就是 *arrhetos*（或 *alogos*），意思是难以启齿或难以形容的. 花剌子模把它翻译成阿拉伯文就是 *asamm* 或 *deaf*，后来，可能被克雷莫纳的盖拉尔多翻译成拉丁文，变成 *surdus*，*surde* 或 *surd*，这里的意思是哑的或是聋的. 我们也应该提到这个词的现代意义没有一个通用的基础：$\sqrt{2}$ 肯定是一个根，即无理数，但是，又如 $1+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\pi}$ 是不是呢?

代数学的发展过程就是无理数的使用过程，它模糊了不同类型的数之间的区别：整数、有理数或无理数都可以当作一种特殊类型的方程的根；解方程也就是在计算这个数——不管它是什么. 阿拉伯人最善于使用它，尽管他们的方法是用文辞来叙述的，并且没有使用现在法则中的数学符号.

第二个重要（同样具有挑战性）的名字是花剌子模学术上的接班人，阿布·卡米尔·舒亚·本·阿斯拉姆·穆罕穆德·本·舒亚（约 850—约 930），简称为阿布·卡米尔. 关于他的身世，极少数情况是可以确定的，但是我们了解很多他的作品，并且能够推断出他在计算极其复杂根的能力方面是很有天赋的. 他很喜欢研究这些数，不论它们是否是某些方程的根或是方程的系数.

我们就来看看他作品中的两个例子，每一个都能充分说明他不愧于“埃及
57 计算者”的称号.

阿布·卡米尔的著作《五边形和十边形》中的例 16，求得了边长为 10 的五
58 边形的外接圆的直径，他归纳的步骤如下[㊀]：

1. 显然你能先得到一条边与自身相乘的积，再把所得的这个积变为原来的 2 倍，得到一个结果，并保存下来.

2. 然后把 1 中得到的积再与自身相乘.

3. 然后把 1 中保存下来的结果与自身相乘.

4. 然后把 2 和 3 中得到的结果相加并取平方根，再变为 2/5 倍，得到新的结果.

5. 然后把 1 和 4 中的结果相加，并保存下来.

6. 然后取 5 中保存的结果的平方根.

7. 在 6 中得到的就是圆的直径.

对于边长为 a 的五边形，其计算步骤可以用现代符号表示如下：

㊀ Mohammad Yadegari and Martin Levey, 1971, Au Kamil's 'On the Pentagon and the Decagon', *History of the Science Society of Japan* (Tokyo) Supplement2, p. 1.

1. $a^2 \to 2a^2$.
2. $a^2 \to (a^2)^2$.
3. $2a^2 \to (2a^2)^2$.
4. $\frac{2}{5}\sqrt{(2a^2)^2+(a^2)^2}$.
5. $2a^2+\frac{2}{5}\sqrt{(2a^2)^2+(a^2)^2}$.
6. $\sqrt{2a^2+\frac{2}{5}\sqrt{(2a^2)^2+(a^2)^2}}$.

读者可能希望用一点代数方法证明阿布·卡米尔给出的$\frac{1}{5}a\sqrt{50+10\sqrt{5}}$的标准结果，那么就尝试一下证明它吧.

第二个例子来自于阿布·卡米尔现存的著作《代数学》，它是花剌子模的第二部被发表作品的评注和推广. 花剌子模提出的 40 个问题被推广到了 69 个，这是一次多样且困难的推广：这里，将用问题 61 来展示其中的方法，现在无理数是可以计算的. 我们非常明智地节省了这个问题原始烦琐的论述，也更少描述其 *58*
解答过程；正如我们所说，阿拉伯数学是完全口述的. 以现代的形式就是要求同 *59*
时满足下面三个方程的一个三元数组或者一组解.

$$x+y+z=10,$$
$$xz=y^2,$$
$$x^2+y^2=z^2.$$

他的方法叫作“纠错法”，这是一种很久以前就用到的方法，用到了令人眼花的高度；其原理是给出答案的一个猜测，然后再纠正. 开始时，取 $x=1$. 这使得后两个方程变成了 $z=y^2$ 和 $1+y^2=z^2$，然后得到四次方程 $1+y^2=y^4$，它的正根被写成

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

从而

$$z=\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}.$$

注意到原方程中后面两个方程的形式，不难发现，如果这组方程存在一组解，那么这组解的任意倍数也是它的解. 这意味着原始解的任意倍数

$$k\left(1,\ \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}},\ \frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)$$

也是解. 寻找 k 的取值，使其满足第一个方程，即

$$k\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}+\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)=10$$

或

$$k\left(1\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)=10,$$

那么，这组解

$$\frac{10}{1\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}\left(1,\ \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}},\ \frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)$$

59 就是原方程的一组解.

60 将其简化为

$$x=\frac{5}{4}\left(4-3\sqrt{2(1+\sqrt{5})}+\sqrt{10(1+\sqrt{5})}\right)=2.57066\cdots,$$

$$y=\frac{5}{2}\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}\right)=3.26993\cdots,$$

$$z=\frac{5}{4}\left(2(1+\sqrt{5})+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}-\sqrt{10(1+\sqrt{5})}\right)=4.15941\cdots,$$

如图 2.1 所示，阿布·卡米尔找到了三个曲面的唯一的一个交点.

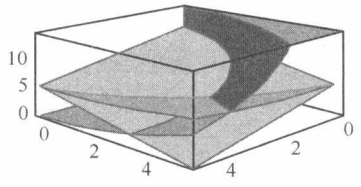


图 2.1

由于缺乏对阿布·卡米尔工作的欣赏，我们远离了他，但是，特别地《代数学》是做过许多游历的比萨的数学家斐波那契开展数学工作的基础. 后面我们会讲到斐波那契，他把代数公式的运算律和计算方法带到了欧洲，不幸的是，此时的欧洲处于中世纪没落的年代.

我们再来看看另一位伟大的学者，阿布·巴克尔·本·穆罕穆德·本·阿尔·侯赛因·阿尔·凯拉吉（953—约1029），简写为阿尔·凯拉吉，他是一位工程师和数学家，也是斐波那契工作的另一个奠基者. 他用几何方法证明了

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=(1+2+3+\cdots+10)^2.$$

这是一种独创性的证明，但是他对不可通约性的历史最重要的贡献在于建议用无理数代替欧几里得几何的不可公度的量，在他约1000年写于巴格达的《算术全书》[㊀]一书中的第六章，他讨论了平均值、二项式和欧几里得线段，注释如下：[㊁] 60

现在我来展示怎样把这些术语转化成数字并把它们加进来，因为对于算术 61
而言原有的数还远远不够.

当我们浏览纷繁的西方人的名字时，我们应该提到奥玛·海亚姆（1048—1122），他的诗歌与其数学成就同样闻名. 他也非常赞同将不可通约量当作数来思考，在他最著名的书《代数问题的论证》中，他带来了欧多克索斯的比例理论的数字版本哲学上的巨大飞跃，这已经很接近19世纪的理查德·戴德金所提出的严格的无理数的定义. 在他的早期的一篇论文[㊂]中，他强调围绕一个几何问题的讨论，将他推向了下面的三次方程

$$x^3+200x=20x^2+2000.$$

奥玛·海亚姆从代数的角度出发，利用插值法和三角函数表求解了这个方程，几何上，其解是一条双曲线和一个圆的交点，他为此作了一个令人惊讶的深刻的注解：

这不能用平面几何来解释，因为它当中有一个三次幂. 为了解决这个问题我们需要圆锥曲线.

在第七章，我们将讨论19世纪晚期数学中这一特殊的部分，我们以著名的爱德华·菲茨杰拉德对他的《鲁拜集》中的最著名的四行诗的翻译作为对他短暂的了解之旅的结束，诗的名字可能为《一位作家的哀叹》：

移动的手指在写，就有了文书， 61

㊀ 意味着，计算（包括代数运算）.

㊁ J. Lennart Berggren, *Mathematics in Medieval Islam*. Part of *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A Sourcebook*, ed. V. J. Katz (Princeton University Press, 2007).

㊂ Omar Khayyam, 1963, A paper of Omar Khayyam, *Scripta Mathematica* 26: 323-337.

移动：不是你所有的虔诚，也不是你的智慧
将吸引它回来抵消一半的线，
也不是你的眼泪洗刷掉它的一句话.

62 这个必要的，但令人沮丧的短暂的旅途，对印度人和阿拉伯人的世界有深远的影响，我们必须到中世纪的欧洲看看更多的无理数的信息，所以这不可避免地要谈到比萨的斐波那契.

斐波那契

阿尔及利亚北部的贝贾亚（有不同的叫法，意大利语是 Bugia）是 12 世纪阿拉伯帝国的一部分，它是一个重要的港口，也是文化和贸易中心. 在那个时期，意大利比萨城的商人利益的一个代表人是古格列尔·波那契，所以，令人毫不惊奇的是，古格列尔的儿子，莱昂纳多，在比萨接受学校教育. 莱昂纳多又叫莱昂纳多·斐波那契，又称莱昂纳多 Bigollo、莱昂纳多 Pisano. 或者现在用他死后被公认的昵称，比萨的斐波那契[⊖]（1170—1250）. 斐波那契这个词现在几乎总是被当作一个形容词，来限定自己的名词——数列，这来源于斐波那契所提出的兔子繁殖问题的解答中产生的数列；我们普遍认为斐波那契是从 4 世纪的丢番图到 17 世纪的费马这 1300 年间最伟大的数论学家. 斐波那契在少年时代就学习了印度——阿拉伯的十进制，后来他开始在中东游历，积累了更多的数学知识，当时这些并不被中世纪早期的欧洲所认知. 斐波那契积累知识的一个重要升华是在代数学上的开拓性工作，他的百科全书式的著作《算盘全书》（计算之书）于 1202 年第一次出版，在 1228 年被再版. 其中涵盖了数制的详细内容，包含了 1，2，3，4，5，6，7，8，9 和 zephirum，0（拉丁化的阿拉伯语叫作 zephr），意大利语是 zefiro，威尼斯方言是 zero. 斐波那契首次以非专家的方式阐述位值表示法的可靠性，他解释了用位值表示法取代仍在使用的罗马非位值制的优越性，并利用实际的算术例子加以实践. 在这本书的第四部分他给出了无
62 理数的有理近似值，从而完全地将无理数从几何中分离出来. 斐波那契的工作是在六十进制或基数为 60 的系统上. 遗憾的是，他的工作没有被保存下来，尤其
63 是关于《几何原本》第十卷的一个注释，这个工作公认为是由他所完成的，我

⊖ 来自斐波那契，或者说是波那契家族的儿子.

们知道它包含了欧几里得不可通约数的完整的数值化处理. 但是，他还有另一部幸存的作品，名为《花朵》，写于 1225 年，在其相对较少的卷数中包含了巴勒莫的约翰内斯给斐波那契的三大数学难题的陈述和答案；其中有一个是我们所感兴趣的. 斐波那契作为数学家和评注者的名声就是在这个时候建立的，有一点惊奇的是他关注科学的资助人，大体了解了“昏庸的穆迪”[㊀]或神圣罗马帝国皇帝——腓特烈二世. 弗雷德里克的宫廷可能是“巴勒莫风景如画的天方夜谭，有活跃的舞女、杂技演员、音乐家、太监和异国情调的动物园”[㊁]，它也是伟大的艺术和科学领域中的思想家的聚会地，其中就有来自巴勒莫的哲学家和翻译家约翰内斯. 尽管这种聚会始于巴勒莫，但是这种活动也是巡回的，1225 年在伟大的城市比萨也有出现. 弗雷德里克希望见到由斐波那契的朋友介绍来的欧洲优秀数学家多米尼克斯·希思帕尼斯，他也是优秀的天文学家.

约翰内斯作为参加聚会的朋友，按照惯例要向尊敬的客人提出智力上的难题，在这种情况下，这三个问题就被约翰内斯提出来了，其中第二个问题是找到下面这个方程的根（仅是实根）

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

他的论点很快就出来了，这样的根不可能是整数或者是有理数，甚至它不可能是欧几里得《几何原本》第十卷中的任何一种形式，这样它就代表了一种新型的无理数，一种不能被直尺和圆规构造的数，这也是对奥玛·海亚姆的一个回应. 他继续进行了如下评论[㊂]：

63

因为用上面的任何方法都解不出这个方程，我转而求这个解的近似值. *64*

然后，无须验证，表明了它的根近似于 1；22，07，42，33，04，40，这里用的是六十进制. 若用十进制，这个数就写成了

$$1;22,07,42,33,04,40=1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}=1.36880810785,$$

这是无理数

$$\frac{1}{3}\left(-2-\frac{13\times 2^{2/3}}{(176+3\sqrt{3930})^{1/3}}+(352+6\sqrt{3930})^{1/3}\right),$$

㊀ 世界奇观.

㊁ Joseph and Frances Gies, 1969, *Leonard of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages* (Thomas Y. Crowell).

㊂ B. Boncompagni, transl., 1857-1862, *Fibonacci's Flos*, in *Scritti di Leonarda Pisano: mathematico del secolo decimoterzo*, *Tipografia delle Scienze Mathematiche e Fisiche* 2: 227-253.

精确到小数点后 9 位的一个有理近似.

无理数越来越频繁地出现在文献中，有关其多样性的提示变得越来越强烈. 我们在 203 页将看到非构建的无理数，现在先来看一个无理数被接受的例子，这也是一个早期梦幻般使用无理数的例子.

大年的周期

这段历史可以追溯到对学者（约翰）邓斯·司各脱[㊀]（约 1266—1308）的各种追忆. 由于他对哲学和神学的观点使他有一个“灵巧博士”的称号；他关于语法、逻辑和玄学的专著建立了中世纪里的大学相关课程的标准，他对后期天主教的思想有非常重大的影响. 邓斯的教学一直持续到文艺复兴时期，后来，他被有自由思想的人本主义者所诋毁. 邓斯的顽固支持者们被认为是“老而狂吠的野狗”，被称为“愚蠢的邓斯人”，从那时起，就产生了 Dunse 这个词，然后变成 dunce，意味着是愚蠢的意思，所以犯规的学生往往带上圆锥形的“愚蠢
64 帽”. 命运的艰辛使他成为幸运的约翰·邓斯·司各脱，在 1992 年由教皇约翰·
65 保罗二世赐福于他. 邓斯对于无理数的认识源于他对不可通约性的使用（可能是第一次这样），这种使用产生于他反对古典时代宇宙周期性方式的观念. 这种周期性方式正如西塞罗[㊁]所言：

> 数学家根据行星不同的运动轨迹提出所谓的“大年”，即当太阳、月亮和五大行星都完成了它们各自的运行轨迹并且回到彼此相对同样的位置时就完成了一个“大年”. 关于“大年”的长度有过激烈的争论，但它确实是一个固定的明确的时间.

一个流行的说法是这个大（完美的）年的周期是 36000 年[㊂]，用托勒密的《天文学大成》以 360×100 计算，给出了在 100 年中以 1°的昼夜均分的进程. 不管如何等待，重复一遍又一遍对宇宙的极端的信仰，和地球上特别的生命回归到其原始状态. 这一再生的终极版本对于一些人（例如，斯多葛学派和他们后来的追随者）来说整齐方便，但是对于别人来说（例如，基督徒）是不方便的，

㊀ 附文只是说明西塞罗来自苏格兰边境的邓斯村庄.

㊁ Cicero, *On the Nature of the Gods*（Rackham 译）.

㊂ 因此，由于其他原因，是 48000 年.

智慧的圣方济各会的神学家司各脱的干预不足为奇，虽然它的本质很新奇：

这个观点㊀可以用它的原因来反驳，如果能用另一个天体的运动证明某种天体的运动是不可通约性的，那么就可以说所有的运动都不能回到同样的地方.

他用一个数学标准代替了哲学观点：天体运动的自然循环要求它们的运动与另一天体的运动可通约；证明了没有破坏精确重复的可能，也没有破坏完美年的可能. 例如，他给出了一个理论上的论述. 假设两个物体以相同的速度来回运动，一个沿着正方形的一条边，一个沿着正方形的对角线（暗示了方向的瞬息万变）；如果它们同时从同一个端点开始，则同时回到起始的端点要求存在正 65
整数 m 和 n 满足 $n\sqrt{2}=m\times 1$，由 $\sqrt{2}$ 的无理性可知这不可能. 尽管如此，他承认， 66
天体运动的观点要求一个“伟大的讨论”.

这个“伟大的讨论”吸引了很多人参与，其中备受推崇的一个是向爱德华三世和坎特伯雷大主教做忏悔的人. 乔叟在他的《修女与牧师的故事》中给这个人很重要的地位，正如下面的几行诗㊁所言：

但是我不能区分有效和无效的观点，
也许是神圣的奥古斯丁博士能做到，
或者是哲学家波伊提乌，或者是布兰德沃迪主教.

托马斯·布雷德沃丁（约 1290—1349），被称为“精深博士”，也是一位著名的科学家，在他丰富的著作中有一部 1328 年完成的《论比例》，其中他从亚里士多德的著作《物理学》中的思想出发，进行改良和拓展. 亚里士多德认为物体所受动力与阻力的比和速度成比例，即速度与动力成正比，与阻力成反比. 布雷德沃丁反驳了这个观点，提出了亚里士多德运动定律之外的可选择定律（同样错误但巧妙）. 当动力与阻力的比的增长为平方的、立方的等，相应的速度的增长为双倍的、三倍的等；即，动力与阻力的比是几何增长时，相应的速度是算术增长的.

用符号说明如下，如果动力 F_1 和阻力 R_1，给出了一个速度 v_1，记为 $\dfrac{F_1}{R_1}\to v_1$.

㊀ 宇宙的周期性.

㊁ 但是我不能区分有效观点和无效的观点，
也许神圣的奥古斯丁博士能做到，
或者是哲学家波伊提乌，或者是布兰德沃迪主教.

如果将这个比例平方，即$\frac{F_2}{R_2}=\left(\frac{F_1}{R_1}\right)^2$，那么根据布雷德沃丁的定律，有$\frac{F_2}{R_2}\to v_2$，

其中$v_2=2v_1$，可记为$\frac{F_2}{R_2}=\left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}$.

布雷德沃丁的这些思想被莫顿学院的素有牛津计算器之称的理查德·斯温斯黑德研究员所采用，并研究了比例的特性（约1350年写于他的《计算》一书中）. 但是，这里我们感兴趣的是另一个人的思想，也就是要介绍的第三位同时代的名人：尼科尔·奥雷斯姆（1323—1382）. 他是一位学者、翻译家、哲学
66 家、物理学家、音乐家、经济学家、心理学家、作家、富豪议员、数学家、神
67 学家和主教，他多次采用不可通约的概念. 他有同样的决心反对占星术，其本质上取决于对天体的精确定位.

与司各脱一致，他的方法是说，如果两个天体的速度是彼此不可通约的，那么它们在相同时期所运行的距离也是不可通约的，这样要求它们在未来的某个时间回到某个初始位置是不可能的. 就布雷德沃丁的以动力与阻力的比作为未知数的方程中，速度的比值形式构成的幂指数是个分数，并且将是一个无理数.

当然，并不希望得到关于这些严格证明的方法，从方便的有限算术的情形推算到天体运动的复杂情况，他借助于一种似乎不可触及的信仰的飞跃. 他的观点第一次出现在他的著作《论比例的比例》中，成书于14世纪50年代，这里他采用了能够想象得到的从$\frac{1}{1}$到$\frac{100}{1}$这100个有理数作为$\frac{F}{R}$的值，写出相应的有理数幂. 这些就形成了序列

$$\frac{2}{1},\left(\frac{2}{1}\right)^2,\left(\frac{2}{1}\right)^3,\left(\frac{2}{1}\right)^4,\left(\frac{2}{1}\right)^5,\left(\frac{2}{1}\right)^6,$$

其中$2^7>100$. 也就是说，例如，

$$\left(\frac{2}{1}\right)^4=\left(\left(\frac{2}{1}\right)^5\right)^{\frac{4}{5}}$$

或

$$\frac{16}{1}=\left(\frac{32}{1}\right)^{\frac{4}{5}}$$

当然，从而就有$\binom{6}{2}=15$.

对于 3 的类似的序列则有

$$\frac{3}{1},\ \left(\frac{3}{1}\right)^2,\ \left(\frac{3}{1}\right)^3,\ \left(\frac{3}{1}\right)^4,$$

其中 $3^5>100$，从而有 $\binom{4}{2}=6$.

一次一个，用下面的配对组成剩余的四组：

$$\frac{5}{1},\ \left(\frac{5}{1}\right)^2;\ \frac{6}{1},\ \left(\frac{6}{1}\right)^2;\ \frac{7}{1},\ \left(\frac{7}{1}\right)^2;\ \frac{10}{1},\ \left(\frac{10}{1}\right)^2.$$ 67

68

总之，$15+6+4\times1=25$ 是由相关的对于比 $\frac{m}{n}$ 的表达式 $\frac{a}{b}=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{m}{n}}$ 得到的. 但是，他讨论了其中有 $4950\left(=\binom{100}{2}\right)$ 种可能的组合，因此 $4950-25=4925$，为此指数必须是无理数，产生于下面这个比：

有理数组合：无理数组合 $=4925:25=197:1$.

由此，他推断，比的最大值被用作合理的搭配比例，则会降低这个论点的真实性：

然而，许多数在这个序列中被使用，完美数或立方数远远少于其他数，更多的在序列中用到，较大的是非立方的数与立方数的比或非完美的数与完美数的比. 因此，如果有一些数，并有它们是什么或有多大这样的信息，无论它大还是小，或者完全都不知道……可能那些未知的数就不是一个立方数或完美数.

但是力与天体所受阻力的比还未可知，肯定有很多因素控制它们的运动，所以最有可能的是任意一组速度比都是无理数：大年变成永久的占星家的骗术. 从同样的文件中可知：

此外，不可通约性可在各种连续的事情中找到，在所有的情况下连续性可想而知，要么广泛要么深入. 一个量与另一个量不可通约，一个角与另一个角不可通约，一种运动与另一种运动不可通约，一种速度与另一种速度不可通约，一段时间与另一段时间不可通约，一个比与另一个比不可通约，一个度与另一个度不可通约，一种声音与另一种声音不可通约等可应用于任意类似的事情.

这个绝望的说法显然没有破坏完美年（大年）这一想法，但从中可以考虑将其作为第一个论述，即无理数比有理数多. 现在我们继续向前进入到 16 世纪，为了找到从三角函数值得到的无理数的充分使用的丰富的证据. 68

69 一个巨大的挑战

这个挑战指的是我们考察如下的多项式：

$$P(x)=45x-3795x^3+95634x^5-1138500x^7+7811375x^9-34512075x^{11}+105306075x^{13}-232676280x^{15}+384942375x^{17}-488494125x^{19}+483841800x^{21}-378658800x^{23}+236030652x^{25}-117679100x^{27}+46955700x^{29}-14945040x^{31}+3764565x^{33}-740259x^{35}+111150^{37}-12300x^{39}+945x^{41}-45x^{41}+x^{45}$$

在这里，我们不是只“简单”地找到它的根，而且要回答下面的四个问题：

1. 若 $P(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$，则证明 $x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

2. 若 $P(x)=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$，则证明 $x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$.

3. 若 $P(x)=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{3.414213562373095048801688724209698078569671875375}$，则证明

$$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{3}{16}}+\sqrt{\frac{15}{16}}+\sqrt{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{5}{64}}}}}$$

69

$$=\sqrt{0.002740930490852252431015883121126838818 0}.$$

第四个问题是当 $P(x)=\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{\frac{15}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}}$ 时，找到满足条件的 x.

这个挑战的提出者是阿德里安·范罗门[⊖]（1561—1615），挑战出现在《应用数学理论》序言的最后，《应用数学理论》是范罗门在 1593 年所写的一部数学汇编，记录了这一时期最重要的数学内容. 范罗门是著名的比利时数学家（特别地，他利用几何方法计算 π 到小数点后 16 位），当时是位于比利时弗拉芒语社区的鲁汶大学数学系的教授. 这似乎是对“全世界的数学家”所发出的挑战，从没想到会被一位法国人所解答，因为在他的挑战名单中没有一个法国名字；但是这其中也忽视了弗朗索瓦·韦达（Francois Vièta）（1540—1603）.

韦达确实是一位专业的律师和业余的数学家，但一方面他有足够的能力破

⊖ 熟知的是他的拉丁名字，阿德里安斯·罗马讷斯（*Adrianus Romanus*）.

译密码，事实上，为了维护自己的国王亨利四世的利益，韦达在1590年破译了西班牙菲利普二世的密码. 另一方面，韦达在数学上的贡献是非常显著的，我们看到，在1593年（公认最早地），他证明了π的如下无限表示形式：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots.$$

韦达能自由自在地写出无理数的复杂根式表达式. 作为一个旁观者，荷兰大使告知了亨利四世，在范罗门的名单中缺少了法国名字这一令人不愉快的消息. 亨利四世国王为此召集了他的电码译员们.

韦达用几何方法和三角恒等式 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 得到了π的无限表示结果，这是他又一次使用它，他不仅找到了挑战中所提出问题的唯一解，也找到了所有的正数解.

在此，我们代表性地用现代符号来考虑第一个问题的解，其他问题的解答过程类似. 从右边的式子 *70* *71*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

开始.

已知二倍角的公式可记为

$$2\cos\alpha=\sqrt{2+2\cos 2\alpha},$$

由此建立下面关于角的等式：

$$2\sin\left(\frac{15\pi}{32}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{32}\right)=2\cos\frac{\pi}{32}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{16}}=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{8}}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

等式的右边用到了三角函数，我们按照韦达的方法对最左边进行同样的处理，首先用到另一个标准的三角恒等式：$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

从中可以得到，如果

- $\alpha=15\theta$，$\sin 45\theta=3\sin 15\theta-4\sin^3 15\theta$，
- $\alpha=5\theta$，$\sin 15\theta=3\sin 5\theta-4\sin^3 5\theta$.

最后使用的三角恒等式是

$$\sin^5\theta=\frac{5}{8}\sin\theta-\frac{5}{16}\sin 3\theta+\frac{1}{16}\sin 5\theta,$$

将这个等式与上一个等式联立，得

$$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 10\sin\theta + 5\sin 3\theta = 16\sin^5\theta - 10\sin\theta + 5(3\sin\theta - 4\sin^3\theta).$$

从而

71
$$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta.$$

72 因此，

$$\sin 15\theta = 3\sin 5\theta - 4\sin^3 5\theta = 3[16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta] - 4[16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta]^3$$

这就有

$$\begin{aligned}\sin 45\theta &= 3\sin 15\theta - 4\sin^3 15\theta = 3\{3[16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta] - \\ &\quad 4[16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta]^3\} - 4\{3[16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta] - \\ &\quad 4[16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta]^3\}^3\end{aligned}$$

这里有一个问题：作为正弦函数 $\sin\theta$ 的一个多项式，其次数为 $5\times 3\times 3 = 45$.

如果将 $x = 2\sin\theta$ 替换到表达式中（为了计算）进行简化，可以得到的精确的结果是 $\frac{1}{2}P(x)$. 即有

$$P(x) = 2\sin 45\theta, \text{ 其中 } x = 2\sin\theta.$$

最后，为了求解原来的代数方程只需要求解三角函数方程

$$2\sin 45\theta = 2\sin\left(\frac{15\pi}{32}\right),$$

从而

$$45\theta = \frac{15\pi}{32} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

则

$$\theta = \frac{15\pi}{32\times 45} + \frac{2k\pi}{45} = \frac{\pi}{3\times 2^5} + \frac{2k\pi}{45}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

得到 x 的值如下：

72
$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^5} + \frac{2k\pi}{45}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

73 下面得到的都是 x 的近似值：

{0.0654382, 0.342998, 0.613883, 0.872818, 1.11477, 1.33502,
1.52928, 1.69378, 1.82531, 1.92132, 1.97992, 1.99999, 1.98114,
1.92372, 1.82886, 1.6984, 1.53489, 1.3415, 1.122, 0.880662,
0.622182, 0.351593, 0.0741595, −0.204717, −0.479609, −0.745166,

-0.996219，-1.22788，-1.43565，-1.61547，-1.76384，-1.87789，
-1.95538，-1.99482，-1.99543，-1.9572，-1.88087，-1.76794，
-1.62059，-1.44171，-1.23476，-1.00378，-0.753257，
-0.488076，$-0.213396\}$.

韦达很快就发现了两个解，在接下来的日子里，他找到了前 23 个解中的其余 21 个解，而剩下的 22 个解却一直困扰着他：处理无理的量是一回事，处理负数的解是另一回事. 有兴趣的读者可能希望按照韦达的方法解决难题的剩下三个部分，它们的右边可能被验证为

$$2\sin\left(\frac{15\pi}{64}\right)，\ 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\text{ 和 }2\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)，$$

然后分别地参考他自己的原始记录，其在 1595 年作为《*Quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus*》发表，现在已是随手可得的.

在不用三角函数无理量之前，我们在上下文中用非平凡的观察力提出一个问题

$$P(x)=\sum_{i=0}^{22=\left\lfloor\frac{45}{2}\right\rfloor}(-1)^i\frac{45}{45-i}\binom{45-i}{i}x^{45-2i},$$

其一般化为

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}x^{n-2i}.$$

当 n 为奇数时，有 $P_n(2\sin\theta)=2\sin(n\theta)$. $\sin\theta$ 的周期性保证了 $\sin(n\theta)=\alpha$ 恰 *73*
好有 n 个根，用参数化方法可表示 $x=2\sin\theta$ 所有的根. 如图 2.2 展示了 $P_9(x)$ 和 *74*
$P_{45}(x)$ 的表现形式.

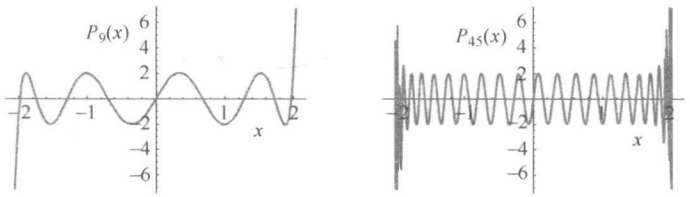


图　2.2

无限的云团

我们发现了意大利方济会修士卢卡·帕西欧利一项关于黄金比例的研究，著作名为《神圣比例论》. 尽管这本书很有名，但是它很大程度上依赖于《算盘全书》，它没有对已知事实进行过多的汇编；没有增加对无理数的理解. 读者从下面摘录的故事中有限地收集其一些有意义的思想：

就像上帝不能被正确地定义一样，也不可以通过文字去理解，同样，我们的比例不能通过容易理解的数来表示，也不能通过任何有理的量来表达，但它始终保持神秘和秘密，被数学家称为无理数.

更令人深刻的是16世纪伟大的德国代数学家奥古斯丁派的修道士迈克尔斯·蒂弗尔（1487—1567）的公认的混杂观点. 在1544年他的《算术积分》中讲道：

无疑要争论的是无理数是真的还是假的. 因为在研究几何图形时，有理数对我们来说不起作用而被无理数代替，证明了一些有理数不能证明的事情……我们动摇了并不得不承认无理数是真实的数，顺从它们使用的结果，我们察觉到
74 它们是真实的数. 另一方面，其他的考虑迫使我们否认无理数就是数. 就是说，
75 当我们试图用它们计算的时候，它们永远在逃避，因此它们中没有一个可由自身去理解……既然有不能被称为真正的数这一特质，它就缺少了精度……因此，仅仅作为一个无限的数还不是数，从而一个无理数就不是真正的数，而是存在于隐蔽的无限的云团之中.

对于π而言：

由于数学中的圆正是由无限多条边的多边形来刻画的. 从而数学中的圆的圆周上没有任何数，不管是有理数还是无理数[⊖].

然而，这一最具影响力的工作因为很多原因而很突出，不仅是代数方法的使用程度，还因为它使用了相关的现在的代数符号如+，-和$\sqrt{\ }$；此外，我们可从中发现指数的发展和他自己的对数的版本. 他更多的工作就是接受了《几何原本》第十卷的无理数，他考虑了用十进制符号来表示无理数. 尽管我们会离开他，但是可用他的算术支持着神秘主义. 他的朋友马丁·路德的一位忠实的追随者用他自己的命理学形式证明了教皇利奥十世的名字暗含了“野兽数字”；

⊖ 意思是，代数学.

在《理想国》的第666页. 他的方法是用简便的方式记录教皇的名字，从中精确得到罗马数字并对它们进行简便的运算，如下：

Leo X→LEO DECIMVS→LeoDeCIMVs→LDCIMV→MDCLVI→1656.

那么移动字母M，神秘一词的首字母，添加利奥十世的X得到656+10=666[⊖]：现在即是无理数. 也许毫不奇怪他的命理学方法[⊖]预言了世界末日是在1533年10月19日的上午8点（灾难性的错误使得他被安全局拘留），而之后再也没有他使用过它们的记录. 75 76

但是最后我们应该承认荷兰数学家、工程师和会计师西蒙·史蒂文（1548—1620）颇具影响的洞察力. 正是他通过自己1585年写于荷兰的《*La Thiende*》向欧洲介绍了十进制体系（阿拉伯人和印度人，还有中国人的），随后很快地翻译成法语（La Disme）和英语（Disme，第十和十进制的艺术），给欧洲世界带来了更伟大的思想，将十进制体系引入了数学中心. 尽管它还被限制在有限的十进制，并且不是普遍的，但是主要的思想被接受了，特别是约翰·纳皮尔用他自己的对数表. 对于史蒂文，这一年无疑是忙碌的一年，（除开别的不说）他（用法语）发表了《*L'arithmétique*》，真的是一部短篇集的纲要，每卷都用随意的方式叙述，但是全都集中在整数、分数、无理数的算法的基本思想上，还有多项式的代数与方程的理论的一些东西. 对于他来说，1仅仅是另一个数，但是0是不被认可的，尽管负数被认可（相当大的怀疑），但是复数是完全不被接受的. 此外，他指出欧几里得对数的想法太过严格，认为数是一个连续的概念：

……正如连续的水对应一个连续的湿度，一个连续的量对应一个连续的数……

不简单的是：

没有荒谬的、无理的、不规则的、莫名的或不尽根的数……确实$\sqrt{8}$与一个算术上的数不可通约，但是不意味着它是荒谬的……如果$\sqrt{8}$和一个算术上的数都是不可通约的，那么$\sqrt{8}$和这个算术上的数有同样或多或少的缺陷. 76

⊖ 天主教的读者的愤怒可能因为当时的天主教神学家Peter Bongus的工作而得到缓和，他使用不同的字母分配任务，并用一个相似的方法证明了路德是一个反基督徒. 被挫败的微软用户可能对哈珀杂志的工作感兴趣，其用ASCII译码证实了比尔·盖茨是一个反基督徒.

⊖ 在这种情况下，确定三角形的数字字母，所以发明了三角字母.

那么，进步就成了数学发展的一个紧迫的问题. 我们将考虑它的一个特别重
77 要的方面.

被刺穿的平面

法国人皮埃尔·德·费马（1601—1665）和勒内·笛卡儿（1596—1650）除了都是法国国籍以外，还有一点额外的共同点. 费马是法国的专业律师和业余数学家，笛卡儿是哲学家和自我怀疑的无神论者；他的一部最著名的著作就是《方法论》，他的另一个论述就是“我思故我在”㊀，他们是同时代的人，但是仅仅是生活在同一时代而从未见过面，并且各自独立地创立了解析几何.㊁他们的方法与他们的生活中的对比形成对照，费马通常用 x 和 y 写下一个方程，然后再研究它相关的曲线，而笛卡儿通常采用一个已知的曲线然后去找它的关于 x 和 y 的方程. 但是，阅读他们的著作（经过翻译的）就会意识到坐标系的思想并不容易形成，有了这样的参考，就产生了一组倾斜的方向，然后又以某种倾斜的方式：乔治 F. 西蒙斯的观点应该值得思考㊂：

从表面上看，笛卡儿的文章看起来是解析几何，但它其实不是；而费马的文章看起来不是解析几何，但它确实是.

尽管这样仍旧不用在意，历史逻辑上已经有了对比：解析几何的出现是解决方程的必要，与其相关的几何问题是等价的，它们常常会有无理根；这几乎不是一个新问题，却是将假设付诸实践的时刻. 举例来说，平面中两点间的距离 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 可能是一个无理数.

77 现假设我们都避免使用无理数，只考虑平面上距离为有理数的以及坐标为
78 有理数㊃的点. 假设选取三个这样的点来表示具有有理数的一个三角形的顶点，那么用标准符号根据余弦定理有

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

㊀ 它的原文是“Cogito ergo sum”.

㊁ 几何与算术的融合，通过一个坐标系的使用进行代数和解析.

㊂ George F. Simmons, 1992, *Calculus Gems* (Mcgraw-Hill).

㊃ 平面上的有理点是指它的坐标都为有理数.

它是有理数. 但是我们在第四章会看到，如果 A 是有理数，可用度来测量，$\cos A$ 仅有的有理数值就是 0，$\pm\frac{1}{2}$，± 1；那么角 A 可能的度数就是 60°和 90°，并且三个角同样的都是这样，就假定角 $A=60°$，这个三角形是等边三角形. 总之，边长为有理数的三角形唯一的可能是等边三角形. 但是三角形顶点的坐标都是有理数，这意味着如图 2.3 中所示的边 AB 和 AC 的斜率分别是有理数 m_1 和 m_2，用一个标准的三角函数恒等式表示：

$$\tan\angle CAB=\tan(\angle CAX-\angle BAX)=\frac{\tan\angle CAX-\tan\angle BAX}{1+\tan\angle CAX\tan\angle BAX}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

这说明 $\tan\angle CAB$ 是一个有理数，在第四章会看到 $\angle CAB=45°$.

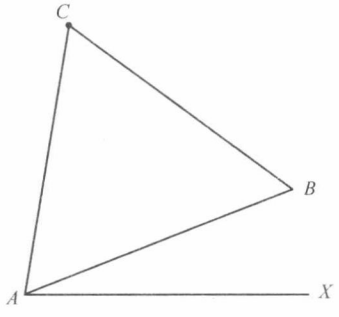


图　2.3

我们被困在一个逻辑和算术的漩涡之中：这样的三角形不可能存在. 78

现在来看看单位圆 $x^2+y^2=1$. 用它的标准的代数参数表示法，为 79

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},$$

我们知道它包含了无限多个坐标为有理数的点，当参数取遍所有的有理数时，用这个参数表示能满足它们中的任意一个. 然而在单位圆上还有无限多的点，它们中的坐标至少有一个是无理数. 这又怎么办呢？试图找到 $x^2+y^2=1$ 与线 $y=x$ 的交点，很快发现无理数是不可避免的.

那么圆 $x^2+y^2=5$ 又怎样呢？它也有无限多个点的坐标至少有一个是无理数，但它也有无限多的点的坐标都是有理数，这个读者可用一般的参数法表示[⊖]：

⊖ 有兴趣的读者可以看看第 278 页附录 B 的推导过程.

$$x=\frac{t^2-4t-1}{t^2+1},\qquad y=-2\frac{t^2+t-1}{t^2+1},$$

其中 t 是有理数.

那么圆 $x^2+y^2=3$ 呢？我们只能通过改变半径去改变参数表示吗？答案是否定的，因为，除开无理数的存在，圆上的其他所有的点都不能出现在笛卡儿平面上：它上面不存在坐标仅有一个为有理数的点；也不可能用有理数的参数表示. 我们可以证明它.

假设有理数的点 $\left(\frac{p}{q},\ \frac{r}{s}\right)$ 在圆上，则 $\frac{p^2}{q^2}+\frac{r^2}{s^2}=3$，从而 $p^2s^2+q^2r^2=3q^2s^2$，$(ps)^2+(qr)^2=3(qs)^2$，因此存在正整数使得 $a^2+b^2=3c^2$. 因为两个偶数的和与两个奇数的和都是偶数，所以 a^2 和 b^2 中有一个是偶数，另一个是奇数；记 $a^2=2m$，$b^2=2n+1$，则 $a^2+b^2=4(m^2+n^2+n)+1=4N+1=3c^2$. 现在设 C 是四种可能 $c=4M,4M+1,4M+2,4M+3$ 中的任意一种，说明 c^2 对应的形式分别为 $4N$，$4N+1$，
79 $4N$，$4N+1$，则 $3c^2$ 对应的形式分别为 $4N$，$4N+3$，$4N$，$4N+3$，所需要的 $4N+1$
80 没有了：矛盾. 费马的“两个平方的和”的结论：

“一个正整数 n 可以写成两个平方的和，当且仅当其形如 $4k+3$ 的素因子出现的次数为偶数.”

保证了很多不确定的圆的存在. 当然，圆只是问题中的一种特殊情形，必须存在有理数的点贯穿的平面：三次曲线 $x^3+y^3=1$ 和 $x^3+y^3=3$ 的消失是确定的，由于整数的特征，它可被写成两个立方的和，可转化为等价的几何问题. 我们能够继续证明曲线的不同例子部分或完全消失，但最后就只有一个：如同唯一的点 $(0,\ 1)$ 一样 e^x 出现了.

总之，尽管有点难以理解但它还是不可避免的，随着笛卡儿坐标系和几何的代数形式的出现，无理数至少或暗或明的不可或缺了；离开了无理数，笛卡儿平面就不可持续了. 微分和积分很快从初期发展到成熟期；我们现在来看看它的初期发展.

笛卡儿的解析几何方法出现在他 1637 年出版的著名的《Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences》[⊖]中，通常被说成是《方法论》，其题目显示了他的目的. 确切地说，它出现在《La

⊖ 关于正确地推导理性的方法和科学中寻求真理的话语.

Géométrie》中，是其中的三个附录中的第三个，其目的是展示他的“方法”的应用成果. 事实上，《La Géométrie》共分为三卷，其中第二卷是微分学的先驱，因为它包含了他的法线的方法，他的方法找到了一条曲线在任意给定的点处的坡度. 将一条曲线一组一组的研究，就是现在的参数方程，但是不仅是任意一组，因为

……螺旋、割圆曲线和相似曲线……

都是被忽视的机械曲线，是不属于几何范围的，而几何曲线亦是如此，对物理界而言——是很不同的东西. 也许，对割圆曲线的谴责特别不公平，（根据普罗克鲁斯）因为正是这种曲线，伊利斯的希庇亚斯（约公元前 460 年）在他的三等分角和求圆的面积的古代问题研究中使用到了它（我们将在七章再次提及）. 它被认为可能是第一种不是由直线和圆产生的曲线，也是在它们之后首个被命名的曲线；如图 2.4 所示. *80* *81*

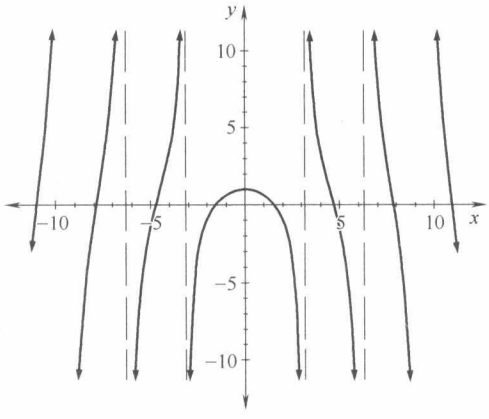


图　2.4

不幸的是，笛卡儿对于机械曲线和几何曲线之间的区别有点模糊，他给出了机械曲线的标准定义是

它们被描述为两种独立运动，它们的关系没有精确的测定.

笛卡儿的割圆曲线方程可写成 $y=x\cot x$. 它的最简单的参数形式为 $y=t\cot t$，$x=t$ 基本依赖于三角函数，其成为了已知的超越函数的例子；即，函数超越了代数方法. 笛卡儿需要代数方法来达到他的目的. 当然，单位圆 $x^2+y^2=1$ 有一个标准的三角函数形式的参数方程为 $x=\cos t$，$y=\sin t$，我们注意到，这种代数形式依赖于非代数函数，单位圆的这两种代数表示是有本质差别的. *81*

82 他的目的是找到一条曲线在一个点处的梯度的原理，开始是很吸引人的：圆（他假设其圆心在 x 轴上）与曲线在给定的点处相接；那么容易计算从连接圆心到和这个点的连线（法线）的梯度，就是计算与它（圆和曲线在这点的正切值）相垂直的线的梯度，如图 2.5 所示. 例如，我们用他的方法找到与参数形式为 $x=\frac{1}{2}t^2-3$，$y=t$ 的抛物线的切线在点（-1，2）处的梯度.

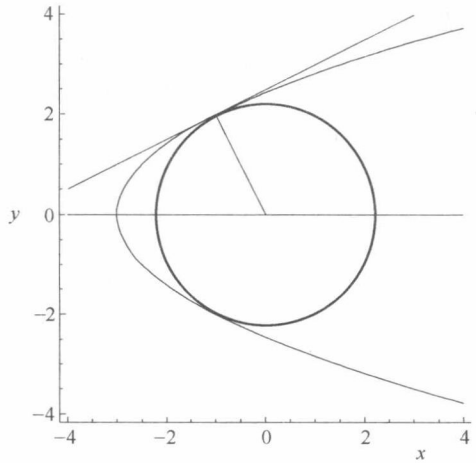


图 2.5

它的笛卡儿形式显然是 $y^2=2x+6$，我们必须找到合适的圆的圆心和半径，为此从方程 $(x-a)^2+y^2=r^2$ 开始. 自始至终，都参考图 2.5，将看到圆的半径必须是点（a，0）和点（-1，2）间的距离，这意味着有

$$(x-a)^2+y^2=(a+1)^2+2^2.$$

联立消去 y 得到

$$(x-a)^2+2x+6=(a+1)^2+2^2,$$

82 简化成二次方程，得

83
$$x^2+(2-2a)x+(1-2a)=0,$$

为了达到目的，它必须有相等的根，则有

$$(2-2a)^2=4(1-2a).$$

得到 $a=0$ 是它唯一可能的值. 那么，所要求的圆就是我们之前看到过的一种：

$x^2+y^2=5$. 法线的梯度是$\frac{2}{-1}=-2$，使得与抛物线相切的切线在给定点的梯度为$-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$.

至少在理论上，他的方法类似于现代给定曲线的曲率的方法的定义，但是实际上有很多局限性——比费马给出的假设的限制更多. 我们的例子是经过仔细选取，使问题得以解决，正如笛卡儿给出的那些例子，隐藏了任何不便计算的特殊情形的事实，这一切是难以应付的（不仅涉及无理数），如果用同时代的语言表达问题，它们可能是：

一个很难摆脱的迷宫.

费马自己的方法虽然很难严密且清晰地给予解释，但是可以由初等的微积分简化成现在非常熟悉的符号：

$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

其中 h 的取值足够小.

笛卡儿对它一无所知，而我们现在清楚地意识到这种方法的价值，费马的另类方法的无名的出版物优先证实了一个不幸公开的争论，笛卡儿的自尊相当程度的被侮辱了. 有趣的是当笛卡儿坚持认定自己的工作几乎没有清楚的被人熟知，宣布了他形成的争论的观点：

笛卡儿先生你是对的，而费马先生也不是错的.

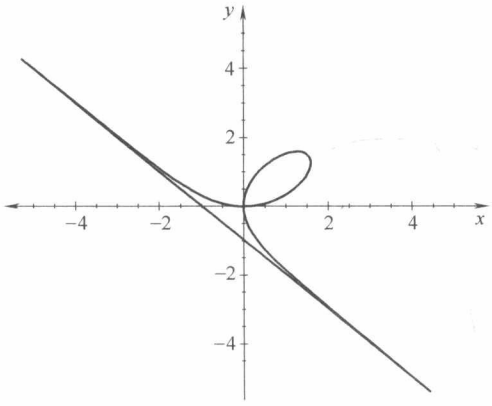
这个机智的判断并不能使愤怒的笛卡儿得到满足，而使他带来了数学中一个著名的代数曲线，就是我们现在熟知的笛卡儿叶形线，它的参数方程是

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},$$

笛卡儿方程是

$$x^3+y^3=3axy,$$

其中 a 为任意的常数. 一个典型的笛卡儿观点如图 2.6 所示，笛卡儿向费马发出挑战要求他找到它任意点处的梯度，虽然他自己也没有做到. 费马及时地给出了解答，笛卡儿最终勉强地接受了他的方法. 这个接受就产生了一个极限的问题，这是自古以来一直持续的问题，要求注意到——极限的过程要求连续性，连续性要求无理数的存在. 微积分曾被设置在一个牢固的基础之上，数的线和平面要求细微的注意，然而他们经过了两个多世纪还没有得到.



84

图 2.6

85 捕捉普罗蒂厄斯

到目前为止，在牛津大学中萨维尔几何学教授任期最长的是约翰·沃利斯（1616—1703），任期从1649年直到他去世共54年. 我们曾经提到一个争议，尽管他是牛顿之前并鼓励牛顿的最具影响力的英国数学家，但是通过另一个方面能很容易记住他：与哲学家托马斯·霍布斯20年的争论（主要是在“求圆的面积”这个问题上出现分歧）. 我们单独挑出他的微积分方法其中的一半，求积分或现在称作的积分，更有意义的部分是它与无理数持续的微弱的联系. 霍布斯的观点出自《无穷算术》一书，是霍布斯1656年出版的作品，给我们传达了他最重要的数学思想.

17世纪的积分问题是找到平面图形的面积或立体图形的体积，要用到两种方法：穷举法，这是从古代人（尤其是欧多克斯、阿基米德和帕普斯）流传下来的，还有无穷小的使用，同样从古代流传但是很大程度上摒弃了费解的芝诺
85 悖论. 开普勒在他1615年的著作《测量酒桶的新立体几何》中再现了无穷小的使用，其次是卡瓦列里、罗泊威尔、帕斯卡、费马和托里，他们中有人建立了
86 公式，记为

$$\int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$$

其中 p 是一个正整数. 在《无穷算术》[⊖]中，沃利斯采用了祖暅原理（也称卡瓦列里原理）[⊜]的一个变式，其中，用两个维度可用现在的方式来描述.

给定一个正值的连续函数 $f(x)$，定义在正实数轴上，在区间 $[0, N]$ 上 M_N 有绝对最大值：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{r=0}^{N} f(r)}{\sum_{r=0}^{N} M_N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{r=0}^{N} f(r)}{M_N(N+1)}$$

换言之，增加曲线上与 x 轴垂直的线的长度，然后分成同样规则的矩形面积的近似值. 从一个简单例子来看，取 $f(x)=x^2$，如图 2.7 所示：

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{r=0}^{N} r^2}{N^2(N+1)} = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{N}{6}(N+1)(2N+1)}{N^2(N+1)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2N+1}{N}\right) = \frac{1}{3}.$$

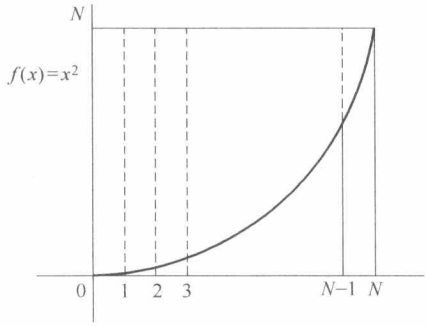


图　2.7

最特别的是，许多年来的一个大问题就是求圆的面积，它的解决办法建立在我们称之为 π 的自然基础上，无理数与跟仍然是类次的，确定 π 是否是无理数是值得考虑的，如果它是，它怎样用无理数的形式表示：参考图 2.8，圆的面积与其半径的平方之比可被计算为 $\frac{\pi}{4}$. 在圆的方程 $x^2+y^2=R^2$ 中，他取 $R=6$ 这一特殊情况，得到了圆 $x^2+y^2=6^2$ 和 $N=6$，计算表达式 86 87

⊖ All quotatations refer to *The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656*, J. A. Stedall, *Sources & Studies in the History of Mathematica & the Physical Sciences* (Springer).

⊜ 两固体体积相等，如果横截面区域面积处处对应相等.

$$\frac{\sqrt{36-0^2}+\sqrt{36-1^2}+\sqrt{36-2^2}+\sqrt{36-3^2}+\sqrt{36-4^2}+\sqrt{36-5^2}+\sqrt{36-6^2}}{6+6+6+6+6+6+6},$$

化简得

$$\frac{6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0}{42}$$

当 $R=N=10$ 时，化简得到的表达式为

$$\frac{19+\sqrt{19}+\sqrt{51}+5\sqrt{3}+2\sqrt{21}+\sqrt{911}+4\sqrt{6}+3\sqrt{11}}{105}.$$

如果表达式变得更加复杂，没有可识别的模式也没有明显的方法来简化；极限似乎离得很远，他评论道：

87 确实更多的部分取决于半径或直径，所有正弦[⊖]的比是如此之小，最大的可
88 取相同的倍数，似乎还可以表示. 因此如果半径或直径取无限多的部分（为了达到目的似乎是必要的），所有正弦的比、半径都取相同的倍数，即四分之一圆或半圆与外接圆或平行四边形的比似乎不能完全表示，至少这种表示是足够被认定的.

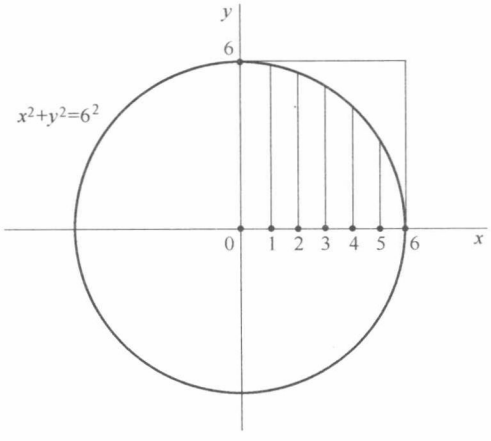


图 2.8

π 的本质仍然成迷，它的持久的恢复力解释它的本质，从一个因小气而闻名的人那里带来了相当感人的段落：

⊖ 纵坐标.

因此必须仔细衡量，它几乎使我放弃对这件事情的研究，它也是我在上面所述的. 这件事情所给予的希望也正是如此. 即虽然在平方根、立方根、四次方根等中有同样的困难，算术比例的事情变得不再严重.

他为了他的进程所做的简化函数带来了看似清晰的胜利.

我们提到众所周知的式子，对于一个正整数 p，$\int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \dfrac{1}{p+1}$. 用 $f(x)=x^p$ 和他所谓的归纳，他得到了满意的式子（如图 2.9 所示）

$$\frac{0^p + 1^p + 2^p + \cdots + N^p}{N^p + N^p + N^p + \cdots + N^p} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p+1} = \int_0^1 x^p \mathrm{d}x.$$

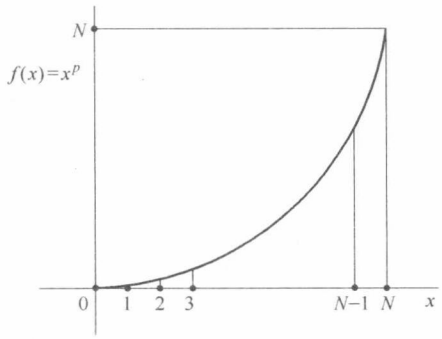


图　2.9

他从使用所谓的插空推断出一个认定为正确的结果，即对于一个正有理数的指数，得到 $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$，则 88 89

$$\frac{0^{\frac{p}{q}} + 1^{\frac{p}{q}} + 2^{\frac{p}{q}} + \cdots + N^{\frac{p}{q}}}{N^{\frac{p}{q}} + N^{\frac{p}{q}} + N^{\frac{p}{q}} + \cdots + N^{\frac{p}{q}}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\frac{p}{q}+1} = \int_0^1 x^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x.$$

他用这种方法再进一步推论. 在我们看来是盲目的乐观，他断言对于无理数 p，这个结果依然成立，用没有丝毫隐藏的论述：

如果 $p=\sqrt{3}$，出现的对应的比是 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

即

$$\frac{0^{\sqrt{3}} + 1^{\sqrt{3}} + 2^{\sqrt{3}} + \cdots + N^{\sqrt{3}}}{N^{\sqrt{3}} + N^{\sqrt{3}} + N^{\sqrt{3}} + \cdots + N^{\sqrt{3}}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \int_0^1 x^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x,$$

再来看看$f(x)=x^{\frac{p}{q}}$似乎成立的地方，这里令$\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$，他再次取$N=6$的情形，得到

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}+6}{42},$$

再次增加N的值，类似这种类型的其他序列，对于任意有限值的N，它的根式表达式更为复杂：

这种序列似乎看起来更为强大，因为这种有限的序列和与其最大值相同数量的序列几乎不被允许有其他任何比的表示，相对于一块一块重复同一件事；仅仅进行两个或更多的量的比较就可能得到它们的和.

但是，在极限中，根式消失不见了.

我有时会倾向于相信这件事是完全不可能的，一个无限的根数，彼此是不
89 可通约的，可能会使得它们的和与某个被提出的有理数的量之间有一个明确的
90 比. 但是如果同样的序列一直无限持续下去，最终会产生一个比为$\frac{2}{3}$……事实上，（令人惊奇的）是它自身的无限性破坏了无理性.

即

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{N}}{\sqrt{N}+\sqrt{N}+\sqrt{N}+\cdots+\sqrt{N}}=\frac{0^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+\cdots+N^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}+N^{\frac{1}{2}}+N^{\frac{1}{2}}+\cdots+N^{\frac{1}{2}}}\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

无法理解这个极限过程和几乎不能更好地理解无理数的思想给当时的人提出了一个难题，不管生活在当时的某些数学家是否有优异的能力.

因此，沃利斯在他代表性的时期，用摒弃和改进的方式归纳了从特殊到一般的计算根式的方法，今天在不同于他的一些方面更为适当和严格地进行了定义. 他试图抓住π的本质使得他用了一个最为恰当的比喻.

因为没有一点希望，我们手中的东西也不是很可靠，就像普罗蒂厄斯，他用同样的方式，经常逃避，所以希望破灭了.

普罗蒂厄斯，传说中希腊的海神，众所周知除非他被抓住否则他拒绝回答问题，可是他有能力变成任何能想象到的形状使抓住他这个任务更加困难.

π的形状正如沃利斯所说的难以形容，但是我们离开了他，而他继续以一种正面的注释为当时10岁的牛顿（和八岁的莱布尼茨）带来了微分和积分的世界. 无论π是不是一种无理数，他都将它记成是无理数，他尝试用都是正整数

的沃利斯乘积来表示，即

$$□=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\cdots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\cdots}=\frac{9\times25\times49\times\cdots}{8\times24\times48\times\cdots},$$

其中符号□是他的一种记录方式，写作$\frac{4}{\pi}$.

他的最后一个评论：

90

91

周长与直径的比不是分数也不是无理数……必然存在一种更为创新的符号表示[⊖]，不是负数，不是分数，不是（通常称作的）无理根，也不是常微分方程的根，甚至不是普通方式的任何可能的方程的可想到的根.

它们是：超越数.

讲到沃利斯，我们来到了18世纪的边缘. 这不是一个数学绝望的世纪，而是有着广泛发展的世纪：负数可能还没有一个牢固的基础，但是它的使用是明显的，这就涉及复数. 至于无理数，它们比负数更具哲学性，我们急需确定一个数是否是无理数而无须过多的担心它所带来的影响；无论如何，欧多克斯公理总是在退却. 正是这个时期，莱昂哈德·欧拉第一次证明了e是一个无理数，而约翰·朗伯证明了π是无理数. 勒让德在1794年发表的《几何学原理》中重组了欧几里得的《几何原本》，取而代之的是标准的欧洲几何文本. 《几何原本》不仅仅只涉及几何，其中也给出了一个简单的证明，即π是无理数，π^2也是无理数；他还推断π不是任何有限的系数为有理数的代数方程的根，更清楚地说明了沃利斯的怀疑.

我们将在后面的一章中讨论这些问题.

⊖ 一些其他类的数.

92

第三章

两个新的无理数

知道 π 是无理数一点实际作用都没有，但是如果我们知道的话，就不用忍受不知道的痛苦.

——特德·蒂奇马什

在引言中，我们评论到“首次的证明是一面害羞的镜子”，这一章主要涉及其中的两个证明，即关于 π 和 e 的证明. 它们都不能说是“最完美的”，但当我们仔细观察、注视它们时，发现它们确是伟大的 18 世纪数学中的“国王”，而不是一个邪恶的“王后”. 最后，我们看到 π 的神秘本质不是首先被认识的，因为对 π 的理解是发生在 e 的无理性被确定的整整 30 年之后——然而 e 这个数不是产生于古代，只是在 18 世纪才出现的. 在上一章中，我们已经看到沃利斯为了证明 π 的本质所做的努力；他怀疑过 π 不仅是无理数，而且还是一种新型的无理数，是不能用有限数量的根式形式加以定义的. 在本章中，我们将确定它的无理性，但是第二个特质，即超越性，这将直到第七章才能被给出，而这个性质的证明历经了 200 年.

当我们继续研究无理数的历史，“连分数”理论的出现是一个伟大的时刻. 我们通过连分数这些完美的构造，首次证明了 π 和 e 都是无理数. 为了理解这些，我们需要清楚连分数是什么，并了解如何构造和运用它们. 在第八章中，我们将会更多地讨论连分数的应用.

基本的连分数

92
93

到了 18 世纪，对于连分数的研究已经有了很古老的历史. 两位来自意大利博洛尼亚市的几乎同时代的人，拉斐尔·邦贝利（1526—1572）和皮特罗·卡塔尔迪（1548—1626）处理了特殊情形的连分数，但是由于约翰·沃利斯对其的研究揭示了连分数的潜在作用. 紧随他的研究之后，英国皇家协会的第一任主

席洛德·鲁克尔（1620—1684）给出了一个特别鼓舞人心的结论，他使用在第90页提到的沃利斯的无限乘积证明了

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}.$$

这给我们提供了连分数的一个例子，也就是说，一个数可以表示成如下形式：

$$\alpha=a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\cdots}}}},$$

其中 a_i，b_i 是整数. 这里我们将局限于研究简单的连分数，其形式如下：

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}},$$

其中 a_i 是正整数.

我们注意到这个表达式可能是有限的，也可能是无限的，例如，

$$\frac{225}{157}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

和

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cdots}}}}.$$

93

这种表达形式可能是打字排版的噩梦，因此，发展了一些更为紧凑的记法，其中主要的一种是 *94*

$$[a_0;a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots]$$

对问题中所研究的数，我们用分号来分割其整数和小数部分. 下面用两个例子来说明，

$$\frac{225}{157}=[1;2,3,4,5],$$

$$\pi=[3;7,15,1,292,\cdots].$$

连分数的渐进分数为

$$a_0+\frac{1}{a_1},\ a_0+\frac{1}{a_1+\dfrac{1}{a_2}},\ a_0+\frac{1}{a_1+\dfrac{1}{a_2+\dfrac{1}{a_3}}},\ a_0+\frac{1}{a_1+\dfrac{1}{a_2+\dfrac{1}{a_3+\dfrac{1}{a_4}}}},\ \cdots.$$

在这个过程中，产生了问题中所要研究的数越来越精确的近似值. 在上面的例子中，有

$$\frac{225}{157}\sim\frac{3}{2},\ \frac{10}{7},\ \frac{43}{30},\ \pi\sim 3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102}.$$

这是 π 的最著名的有理逼近，并且随后的三个近似值有很高的精确度.

用连分数计算一个数的近似值是基本的算术问题，正如连分数自身就来源于小数的计算一样. 例如，

94

95

$$\mathrm{e}=2.718281828\cdots=2+0.718281828\cdots=2+\frac{1}{\left(\dfrac{1}{0.718281828\cdots}\right)}$$

$$=2+\frac{1}{1.392211191\cdots}=2+\frac{1}{1+0.392211191\cdots}$$

$$=2+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{0.392211191\cdots}\right)}}=2+\frac{1}{1+\dfrac{1}{2.549646778\cdots}}$$

$$=2+\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+0.549646778\cdots}}=2+\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{0.549646778\cdots}\right)}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1.819350244\cdots}}},\ \cdots.$$

将 e 的连分数记为

$$e=[2;1,2,1,\cdots].$$

在下一节，我们将看到欧拉从上面的计算中发展了自己的思想. 接下来的问题曲折迂回，连分数不只是表示一个数，而是一个函数.

欧拉和 e

因为用到有关下面这个极限的研究

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

95

e 的发现可能应归功于伟大的雅各布·伯努利（1654—1705），但证明它是无理数要归功于比他更伟大的数学家欧拉. 1737 年 e 的无理性第一次被记录在一篇论文中，但论文七年后才发表在圣彼得堡科学院院刊[㊀]上，文章的编辑是吉斯塔夫·恩斯特龙，编号为 E71，这告诉我们它在 866 篇已经接受的文章中的位置，文章的作者就是有压倒性优势的多产的 18 世纪瑞士数学天才莱昂哈德·欧拉（1707—1783）. 欧拉改变了他曾经的不安，曾经的尖锐，用包罗万象的数学思维去对待连分数的问题，第一次深刻思考这个问题（尽管他将回到漫长而又令人印象深刻的职业生涯[㊁]中的其他经常性主题）. 论文的题目是《关于连分数的一个尝试》. 在序言中他写道[㊂]：

96

> 因为我已经研究连分数有很长一段时间了，也因为我观察到与它的应用和推导相关的很多重要事实，我决定在这里讨论它们. 尽管我还没有得到一个完整的理论，但我相信经过我努力工作所发现的部分结论将对这一主题的深入研究有确实的贡献.

在 40 页的文章中，欧拉触及了一些基本的代数理论，也触及了更微妙的关于连

㊀ 在 1737 年 3 月 7 日提交给学院.

㊁ 有兴趣的读者可以查阅欧拉档案，http://math. dartmouth. edu/~euler/.

㊂ 由 M. F. Wyman 和 B. F. Wyman 翻译，1985，*Mathematicla Systems Theory* 18：295-328.

96 分数的解析含义，尽管他有惊人的计算能力，这一工作的繁重程度也是非常明
97 显的. 这篇论文划定了连分数的早期理论的巨大领地，我们将选取一条最便于达到目的的道路，从文章的第 11a 节的一个观察开始：

将一个普通的分数转化成一个分子都为 1 的连分数，它的整个分母必须先表示出来. 此外，每个分子与分母都是有限数的有限分数可以转化成一个被截断的有限形式的连分数. 另一方面，分子和分母都是无限大的数（例如，给定的是无理数和超越数）将趋近一个无限形式的连分数. 为了找到这样一个连分数，只需确定分母，因为我们已经假定了所有分子都为 1.

换句话说，欧拉知道有理数的简单的连分数形式是有限的，而无理数的是无限的. 为了证明 e 的无理性，他需要构造这样的一个连分数：这个舞台是为他惊人而敏锐的处理能力所设置的.

我们再来看看论文的第 21 和 22 节，将会看到他将注意力转移到 e 的近似值 e~2.71828182845904 的连分数的形式. 这里的 14 位小数要求他计算这个和式 $\sum_{r=0}^{16}\frac{1}{r!}$. 已知 e 的无穷级数展开式，那么一直重复这个过程就得到了 e 的连分数

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}.$$

这要求他对与 e 相关的数进行试验，需要付出相当多的努力，正如下面所显示的，读者将开始对欧拉的非凡计算能力有所估量. 引用著名的 18 世纪法国政治家和数学家多米尼克·弗朗索斯·阿拉戈的话说：

欧拉毫不费力的计算，就如同人在呼吸，或者鹰在空中翱翔.

分母的规律也难逃欧拉的慧眼，他注意到：

对于分母，从第三个数开始，每隔两个数时就由等差级数 2，4，6，8，… 所构成，其他的都是 1. 尽管这个规则仅仅是通过观察得到的，然而能合理地假

设它可以延展到无穷. 事实上，这个结果将在下面得到证明.

当然，如此的证明将显示 e 是无理数. 97

正是欧拉不屈不挠的尝试，使他得到了$\sqrt{e}=1.6487212707$，并且其连分数为 98

$$\sqrt{e}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cdots}}}}}}}}}}}.$$

再一次，对于下面这个例子

$$\frac{\sqrt[3]{e}-1}{2}=0.1978062125\cdots=1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{30+\cfrac{1}{42+\cfrac{1}{54+\cdots}}}}},$$

注意到他所描述的等差级数出现了中断，但是除了一个虚假的第一项，这个中断将会消失. 并且在下面这个例子中没有出现中断：

$$\frac{e^2-1}{2}=3.19452804951\cdots=3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{15+\cdots}}}}}}.$$

欧拉的研究并没有完成，只是为分子是 1 而分母是等差级数的连分数给出了一个导向，他在第 31 节中给出了一个如下的刻画：

$$s=a+\cfrac{1}{(1+n)a+\cfrac{1}{(1+2n)a+\cfrac{1}{(1+3n)a+\cfrac{1}{(1+4n)a+\cdots}}}}.$$

他评论道：

98 此外，从数 e 本身来说，它的连分数的分母是一个中断的等差级数，我发
99 现自由中断的连分数的一些变化能被形式化，例如，

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{26+\cdots}}}}}}.$$

现在，他构造了一个“非中断的”等差级数，它是他的一般模式中的一种特殊情况，即 $a=n=2$（他没有给出这个数的明确的小数近似值）的情形.

在前面的章节中，我将数 e（其对数是 1）和它的幂都转换成了连分数，我只是观察到分母是等差级数，而除了这一级数可能持续到无穷，我一直无法确认其他任何东西. 因此，在这里我尽全力了：我会探讨这一过程的必要性并进行严格的证明. 即使我用一种奇特的方式追求到这个目标……

欧拉开始了对连分数的一般等差级数类型的本质的研究，他写出了前几个渐进分数：

$$a,\ \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a},\ \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1},\ \cdots,$$

然后，用早期文章中的观点，将连分数改写成两个幂级数的比

$$s=\frac{p}{q},$$

99 其中变量 p 和 q 定义如下：

100
$$p=a+\frac{1}{1\cdot na}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 1(1+n)n^2a^3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+n)(1+2n)n^3a^5}+\cdots,$$

$$q=1+\frac{1}{1(1+n)na^2}+\frac{1}{1\cdot 2(1+n)(1+2n)n^2a^4}+$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6}+\cdots.$$

接下来是考察一系列变量的显著变化.

首先，变量 z 被定义为 $a=\dfrac{1}{\sqrt{nz}}$，从而

$$s=\frac{1}{\sqrt{nz}}\frac{t}{u},$$

其中变量 t 和 u 被定义为

$$t=1+\frac{z}{1\cdot 1}+\frac{z^2}{1\cdot 2\cdot 1(1+n)}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+n)(1+2n)}+\cdots$$

和

$$u=1+\frac{z}{1(1+n)}+\frac{z^2}{1\cdot 2(1+n)(1+2n)}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)}+\cdots.$$

他注意到 $\dfrac{dt}{dz}=u$，并且

$$t-u=\left(\frac{nz}{1(1+n)}+\frac{nz^2}{1\cdot(1+n)(1+2n)}+\frac{nz^3}{1\cdot 2(1+n)(1+2n)(1+3n)}+\cdots\right)=nz\frac{du}{dz},$$

那么，有

$$nz\frac{du}{dz}=t-u.$$

接下来用到的替换为 $t=uv$，从而定义了变量 v，并且使得 $s=\dfrac{v}{\sqrt{nz}}$.

利用函数乘积的求导法则，有

$$u=\frac{dt}{dz}=\frac{d(uv)}{dz}=u\frac{dv}{dz}+v\frac{du}{dz},$$

100
101

使得

$$u\frac{dv}{dz}=u-v\frac{du}{dz},$$

现在，

$$nz\mathrm{d}u/\mathrm{d}z = t - u = uv - u,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{uv - u}{nz},$$

用上面得出的式子替换，则有

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = u - v\frac{uv - u}{nz},$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = 1 - v\frac{v - 1}{nz},$$

$$nz\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = nz - v^2 + v,$$

$$nz\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} + v^2 - v = nz.$$

最后，他用 $z=r^n$ 和 $v=qr$ 定义了 r 和 q，进行了漂亮的计算，其现代形式是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}(qr)}{\mathrm{d}z} = q\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} + r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} = q\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} + r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = \left(q + r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z},$$

$$nz\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = nz\left(q + r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = nr^n\left(q + r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\right)\frac{1}{nr^{n-1}} = r\left(q + r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\right),$$

使得

101

$$nz\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} + v^2 - v = r\left(q + r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\right) + q^2r^2 - qr = r^2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r} + q^2r^2 = nz = nr^n,$$

102 化简得

$$r^2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r} + q^2r^2 = nr^n,$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r} + q^2 = nr^{n-2},$$

由此欧拉观察到：

从这个方程可以看出，如果 q 可由 r 确定，r 被设定为 $r=n^{-\frac{1}{n}}a^{-\frac{2}{n}}$，那么所期望的值是 $s=aqr$.

关于这个微分方程他评论道：

赞同这是由里卡蒂伯爵曾经提出的方程.

在这一点上，读者可以从定义的变量及对由其所定义的方程的总结中得到好处，

如表 3.1 所示. 在这种情况下，正如欧拉所观察得到的，$s=\dfrac{v}{\sqrt{nz}}=av=aqr$.

表　3.1

表　达　式	定义变量
$a=1/\sqrt{nz}$	z
$t=$分子	t
$u=$分母	u
$t=uv$	v
$z=r^n$	r
$v=qr$	q

欧拉一直致力于对微分方程中一类特别困难的类型的研究，[1]这种方程是由威尼斯一个贵族，雅格布·弗朗西斯科·里卡蒂伯爵（1676—1754）在 1720 年提出来的. 欧拉试图用某种办法将无穷的连分数转化为方程的解，我们相当钦佩他将二者匹配起来. 他致力于连分数和里卡蒂方程的研究，将二者[2]结合在一 *102*
起，幸运的是，这里对我们来说，重要的是关注 $n=a=2$ 时的情况，这是一种特 *103*
殊的情形，此时求方程的解是容易的. 因此，

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}+q^2=2,\ \int\frac{\mathrm{d}q}{q^2-2}=-\int\mathrm{d}r,\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{q+\sqrt{2}}{q-\sqrt{2}}=r+c,$$

这使得

$$q=\sqrt{2}\frac{Ae^{2\sqrt{2}r}+1}{Ae^{2\sqrt{2}r}-1}.$$

为了使 $v=qr$ 总是有限的，我们有边界条件“$q=\infty$，$r=0$”，令 $A=1$，$q=\sqrt{2}\dfrac{e^{2\sqrt{2}r}+1}{e^{2\sqrt{2}r}-1}$最后 $r=\dfrac{1}{a\sqrt{2}}$，$s=arq=\dfrac{q}{\sqrt{2}}$，从而

$$s=\frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}.$$

---

[1] E70，*De constructione aequationum*. 在 1737 年 2 月 7 日提交给圣彼得堡科学院.

[2] In a paper dated 20 March 1780 and entitled E751-Analysis facilis aequationem Riccatianam per fracionem continuam resolvendi, but which was originally pubilished in *Meoires de l'academie des sciences de St. -Petersbourg* 6: 12-29 (1818).

用这个事实，对于我们所考虑的 $a=2$ 的情况，有

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{26+\cdots}}}}}}.$$

因为在数 $\frac{e+1}{e-1}$ 的连分数的表达形式中，其分母是一个无限的等差级数，因此 $\frac{e+1}{e-1}$ 是无理数，从而 e 是无理数. 在编号 E71 的文章中没有这么鼓舞人心的论述，仅仅说是一个早期的怀疑得到了证实.

当然，对于 $\frac{e^2-1}{2}$ 来说，欧拉的连分数形式没有任何实际作用，因此对于证明 e^2 是无理数，仍然是一个较强的结果.

103

104 兰伯特和 π

尽管在欧拉的观察下，π 的连分数表示

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}.$$

为确定 π 的无理性提供了一点鼓励. 欧拉的研究并没有给出一种漂亮的模式，有一位数学家利用连分数的方法完成了这项工作，他就是与欧拉同时代的，但比他小 21 岁的约翰·海因里希·兰伯特（1728—1777），他设法首先发表了一个证明（以巨大的努力为代价）. 兰伯特是哲学家、物理学家、几何学家、概率学家和数论学家，曾经是欧拉的助手和朋友，但后来成为欧拉的反对者，在 49 岁的时候去世了. 似乎是在非同寻常的一天，这两位柏林科学院

的不同寻常的同胞之间的友谊因对学院拍卖一览表[㊀]持不同观点开始遭到无法挽回的破坏. 然而，兰伯特在相对短暂的生命中取得了令人惊奇的丰硕成果，在 1761 年，π 是无理数的证明[㊁]这一成果是他达到的数学高峰之一. 更确切地说，他证明了，如果 $x\neq 0$ 是有理数，那么 $\tan(x)$ 是无理数. 利用它的逆否命题的逻辑可知，由于 $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ 是有理数，那么 $\frac{\pi}{4}$ 一定是无理数，从而 π 是无理数.[㊂]

他的证明过程使用的不是一个数的连分数表示，而是一个函数 $\tan(x)$（其中 x 的单位是 rad）. 证明可以分成两个部分. *104* *105*

首先，他需要建立如下式子的连分数形式：

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

为了达到目的，利用下面两个级数表示，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

和

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots.$$

他得到

$$\tan x=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots}.$$

通过一系列惊人的处理，即长除法和递归的有效混合使用，这两个幂级数的比就能变成无限的连分数（与欧拉早期描述的方法相反）；在这里，它们是无济于

㊀ N. N. Bogolyubov, G. K. Mikhailov and A. P. Yushkevich (eds), 2007, *Euler and Modern Science* (Mathematical Association of America).

㊁ J. H. Lambert, 1761, Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiquees, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres der Berlin* 17: 265-322. Reprinted in 1948 in *Iohannis Henrici Lambert*, *Opera Mathematica*, Vol. II, ed. A. Speiser (Zürich: Orell Füssli).

㊂ 在同样的文章中，用同样的方式证明了 e^x 的同样的结果，使用复数和 $\tanh(x)$ 的连分数形式.

事的，但是有兴趣的（耐心的、勇敢的）读者可以自由地追寻这些细节.[⊖]这里的省略切断了一个巨大的绷带，即兰伯特的复杂难懂的天才的论证，但我们认为读者能够判断什么才是令人印象深刻的！他已经建立了

105
$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cdots}}}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{-x^2}{3 + \cfrac{-x^2}{5 + \cfrac{-x^2}{7 + \cfrac{-x^2}{9 + \cdots}}}}}.$$

106 证明的第二部分依赖于连分数的下面两个性质.

对于连分数

$$y = b_0 + \cfrac{a_0}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}.$$

1. 如果 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$ 是非零数的无穷序列，连分数

$$b_0 + \cfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1 b_1 + \cfrac{\lambda_1\lambda_2 a_2}{\lambda_2 b_2 + \cfrac{\lambda_2\lambda_3 a_3}{\lambda_3 b_3 + \cfrac{\lambda_3\lambda_4 a_4}{\lambda_4 b_4 + \cdots}}}}$$

与 y 有相同的渐进分数，并且，如果其收敛的话，那么它也收敛于 y.

2. 假设 $b_0 = 0$. 如果对于任意的 $i \geqslant 1$，$|a_i| < |b_i|$，那么

(a) $|y| \leqslant 1$;

(b) 记

$$y_n = \cfrac{a_n}{b_n + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \cfrac{a_{n+3}}{b_{n+3} + \cdots}}}}.$$

⊖ Pierre Eymard and Jean-Pierre Lafon, 2004, *The Number* π (American Mathematical Society).

若对某个 n，上式从来没有 $|y_n|=1$ 的情形出现，那么 y 是无理数.

在这里不证明这些结果，有兴趣的读者可以参考第 281 页的附录 C. 106

107

现在考虑 $y=\tan x$ 的连分数表达式，假设 $x=\frac{p}{q}$. 那么

$$\tan\left(\frac{p}{q}\right)=\cfrac{\frac{p}{q}}{1+\cfrac{\frac{-p^2}{q^2}}{3+\cfrac{\frac{-p^2}{q^2}}{5+\cfrac{\frac{-p^2}{q^2}}{7+\cfrac{\frac{-p^2}{q^2}}{9+\cdots}}}}}.$$

我们能用上面的性质 1 来去掉这些分母，对于任意的 i，令 $\lambda_i=q$，得到

$$\tan\left(\frac{p}{q}\right)=\cfrac{p}{q+\cfrac{-p^2}{3q+\cfrac{-p^2}{5q+\cfrac{-p^2}{7q+\cfrac{-p^2}{9q+\cdots}}}}}.$$

对上面的形式，定义

$$y_n=\cfrac{-p^2}{(2n+1)q+\cfrac{-p^2}{(2n+3)q+\cfrac{-p^2}{(2n+5)q+\cdots}}},$$

这样就能确保对足够大的 n，满足 $p^2<2nq$. 这说明 $|-p^2|<(2n+r)q$，其中 $r=1$，3，5，…，这说明上面的条件 2 是满足的，因此 $|y_n|\leqslant 1$；显然，也有 $|y_{n+1}|\leqslant 1$.

但是对 $y_n=\frac{-p^2}{(2n+1)q+y_{n+1}}$，其分子是负数，分母 $(2n+1)q+y_{n+1}=2nq+(q+y_{n+1})$ 是正数，又因为 $q\geqslant 1$ 和 $|y_{n+1}|\leqslant 1$，这说明

$$|y_n| = \left|\frac{-p^2}{(2n+1)q + y_{n+1}}\right| = \frac{p^2}{2nq + (q + y_{n+1})} \leqslant \frac{p^2}{2nq} < 1.$$

因此，尽管 $|y_n| \leqslant 1$，实际上有 $|y_n| < 1$，所以对于足够大的 n，$y_n \neq \pm 1$.

107 这说明 $\tan\left(\frac{p}{q}\right)$ 是无理数. 正如这个人自己所说，

108 直径（一个圆的）是整数并不代表其周长就是整数.

与这些讨论一起，我们追随着最高水准的数学先驱们的足迹. 在数学证明中，“第一个”很少能和“完美的”联系在一起，也经常不能和“严格的”联系在一起，特别是早期的时候. 下一章将建立这两个结果和更多结论的更现代的

108 观点.

第四章

无理数，旧的和新的

无理数以各种各样的形式存在，的确，没有任何记号能够给它们中的每个提供一个单独的名字.

——威拉德·冯·奥曼·奎因

如果说上一章目标简单，那么本章确实不是如此. 我们将深入探求各种形式的无理数. 在这个过程中，将从刚刚建立的 e 和 π 的无理性的方法开始，转而看看构建更多无理数的一般方法，从而获得新型的无理数，最后以超越数结束.

傅里叶和 e

奇怪的是，以数学家欧拉的声望，他竟然没有发现 e 的无理性是由其作为无穷级数的典型表示的必然结果，众所周知：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots.$$

直到 1815 年，这个级数才被约瑟夫·傅里叶用于建立数的无理性，而现在傅里叶以他的热传导理论更被人熟知. 也就是说，在傅里叶现存的著作中没有提及这一结果，我们必须依赖于 M. J. 斯坦维尔编著的题目为《代数与几何分析汇本》，其中第一卷的第 341 页的第 232 段的一个注脚作为证据. 这一段包含了这个证明的一个版本，在最后写到：

Cette démonstration m'a été communiquée par M. Poinsot, qui m'a dit la tenir de M. Fourier.[⊖]

斯坦维尔，巴黎数学教师，死于一个避难所，他与同时代杰出的路易斯·潘索有所接触，潘索是伟大的几何学家和几何力学的发明人，几何力学以力的

⊖ 这一证明被交流给了路易斯·潘索，他将之归功于傅里叶.

分解这一内容挑战现在的高中生. 然后，我们就把这与傅里叶联系起来，由于斯坦维尔的书的出版时间是 1815 年，从而就有了傅里叶在这一年建立了 e 的无理性的证明.

如前所述，证明依旧是用反证法. 因为很容易证明 e 存在于两个整数之间，它自身又不是整数，假设它是有理数，并记为 $e=\frac{m}{n}$，$n>1$，从而可以将 e 的级数形式写为两部分，即

$$e=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+\cdots,$$

那么

$$n!e=n!\frac{m}{n}=(n-1)!\ m=\left(n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\frac{n!}{4!}+\cdots+\frac{n!}{n!}\right)+R,$$

这使得 $R\neq 0$ 是两个整数之差，从而 R 自身也是整数.

但是

$$\begin{aligned}R&=n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\\&<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}<1.\end{aligned}$$

故有整数（严格上是正的）R 小于 1，从而得到矛盾.

110 事实上，这个方法可以用来进一步显示 e^2 的无理性.

111 再次假设 $e^2=\frac{M}{N}$，$N>1$，那么 $Ne=M\times\frac{1}{e}$，这说明

$$N\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\right)=M\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots\right).$$

对于任意给定的 n，两边都乘以 $n!$，有

$$N\left(I_n+\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+3)!}+\cdots\right)=$$

$$M\left(J_n+(-1)^{n+1}\left(\frac{n!}{(n+1)!}-\frac{n!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+3)!}-\cdots\right)\right),$$

其中 I_m，J_n 都是整数，正如上面所描述的.

这使得

$$NI_n+N\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\right)=$$

$$MJ_n+M(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\cdots\right),$$

移项整理为

$$NI_n-MJ_n=M(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\cdots\right)-$$

$$N\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\right), \qquad 111$$

由三角不等式，则有 112

$$|NI_n-MJ_n|\leqslant M\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\cdots\right|-$$

$$N\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\right|<\frac{M+N}{n},$$

因为上式中两个无限的和的上界是 $\frac{1}{n}$. 现在令 n 足够大使得左边的正整数小于 1，从而只能为 0. 这就有对于 n 的无限集，有 $NI_n=MJ_n$ 成立，这显然是不可能的.

e 作为无穷级数的出现使得有一个简单、有效的方法去建立它的无理性［e^2也是如此（这个方法还可以继续推广）］，还有无数个其他可能的无理常数被定义成无穷级数，但读者应该抑制这种乐观的想法，即认为级数形式必然导致无理性的证明. 举三个例子（还有许多）加以说明，下面的数的本质仍然是个谜：

- 与 e 相关的，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!+1}=1.52606813447333\cdots,$$

这个数是由保罗·厄多斯提出来的.

- 卡塔兰常数

$$G=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}=0.915965594177\cdots.$$

- 欧拉-马歇罗尼常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\ln n\right)=0.577215664901532\cdots. \qquad 112$$

113 埃尔米特和 π

在 1945 年，剑桥大学数学入学考试中的一个典型棘手问题是由杰出的数学家玛丽·卡特赖特女士从她过去的经验中精选出来的. 这一构造性的问题，不是证明 π 的无理性，而是更强地证明 π^2的无理性；她表示对原始的复杂难懂的方法并不确定，但下面的一个观察是最为重要的，即

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$$

是$\frac{\pi^2}{4}$的一个多项式，其系数是整数，次数是$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$（其中“$\lfloor\cdot\rfloor$”为向下取整函数），假设 π^2是有理数，可再一次推导出存在小于 1 的正整数的矛盾. 事实上，上述积分是在 19 世纪法国数学家查理斯·埃尔米特[⊖]（1822—1901）的著作中发现的，他对于无理数的历史有重大贡献，这将在本章的后面和下一章有所阐述. 而现在我们要详细看看考试中的问题，用积分来建立 π^2的无理性.

记

$$I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

首先注意到，对于所有这样的 n，积分是有界的，事实上，对于$-1<x<1$，有

$$0<(1-x^2)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)<1,$$

因此，

$$\int_{-1}^{1}0\mathrm{d}x<\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x<\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x,$$

113 这使得 $0<I_n<2$. 不可避免地，我们需要确定这个积分的本质，为此将计算它的
114 几个例子，或者，更精确地用数学计算包计算它们：

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\times0+1}I_0=2,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\times1+1}I_1=4,$$

⊖ C. Hermite, 1873, Extrait d'une lettre de Mr. Charles Hermite à Mr. Borchardt, *J. De Crelle* 76: 342-44; *Oeuvres*, t. III, 1912, pp. 146-49 (Gauthier-Villars, Paris).

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\times 2+1} I_2 = 2!\ \left(96-8\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\times 3+1} I_3 = 3!\ \left(960-96\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\times 4+1} I_4 = 4!\ \left(3360-1440\left(\frac{\pi^2}{4}\right)+32\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^2\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\times 5+1} I_5 = 5!\ \left(60480-26880\left(\frac{\pi^2}{4}\right)+960\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^2\right).$$

对于给定的 n，这一结果可以有两种解释，一个是作为 $\frac{\pi}{2}$ 的次数为 $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 的整系数多项式，另一个是作为 $\frac{\pi^2}{4}$ 的次数为 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 的整系数多项式. 采用后一种解释，我们能得到 π^2 是无理数的证明.

因此，这暗示着

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} I_n = n!\ P_n, \qquad (*)$$

其中 P_n 是 $\frac{\pi^2}{4}$ 的次数为 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 的整系数（依赖于 n）多项式.

有这样一个疑惑，用归纳法证明的过程自然地需要建立一个关于 I_n 的递推公式，我们两次使用分部积分，获得递推关系：

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{\pi}(1-x^2)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{1} + \frac{4n}{\pi}\int_{-1}^{1}x(1-x^2)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4n}{\pi}\int_{-1}^{1}x(1-x^2)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4n}{\pi}\left\{\left[-\frac{2}{\pi}x(1-x^2)^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{1} + \right. \\
&\quad \left.\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)^{n-1}-2(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2}\}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x\right\} \qquad 114 \\
&= \frac{4n}{\pi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)^{n-1}-2(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2}\}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x\right\} \qquad 115 \\
&= \frac{8n}{\pi^2}\left\{\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)^{n-1}-2(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2}\}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}$$

现在重写一下这个表达式，有

$$I_n=\frac{8n}{\pi^2}\left\{\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)^{n-1}+2(n-1)((1-x^2)-1)(1-x^2)^{n-2}\}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{8n}{\pi^2}(I_{n-1}+2(n-1)I_{n-1}-2(n-1)I_{n-2}),$$

从而，有

$$\frac{\pi^2}{4}I_n=2n(2n-1)I_{n-1}-4n(n-1)I_{n-2},\ n\geqslant 2.$$

此时用归纳法，假设对于所有$\leqslant k$的整数，式（*）都成立，考虑$k+1$的情形. 利用递推关系式，有

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}I_{k+1}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2}\{2(k+1)(2k+1)I_k-4(k+1)kI_{k-1}\}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}\{2(k+1)(2k+1)I_k-4(k+1)kI_{k-1}\}$$

$$=2(k+1)(2k+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}I_k-4(k+1)k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}I_{k-1}$$

$$=2(k+1)(2k+1)k!P_k-4(k+1)k\left(\frac{\pi^2}{4}\right)(k-1)!P_{k-1}.$$

由此得到关于$\frac{\pi^2}{4}$的整系数多项式，其次数为

$$\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor+1=\left\lfloor\frac{k-1}{2}+1\right\rfloor=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor.$$

115 已经假定对起始n值都是成立的，由归纳法，有$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}I_n=n!P_n$.

116 最后，假设$\frac{\pi^2}{4}=\frac{a}{b}$，两边都平方，则有

$$\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^{2n+1}I_n^2=(n!)^2(P_n)^2,$$

所以

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}I_n^2=(n!)^2(P_n)^2,$$

这说明

$$\frac{a^{2n+1}}{(n!)^2}I_n^2=b^{2n+1}(P_n)^2.$$

因为 P_n 是关于 $\frac{a}{b}$ 的整系数多项式，其次数为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，$(P_n)^2$ 的次数为 $2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，则必有 $b^{2n+1}P_n$ 是一个整数. 但是 $\frac{a^{2n+1}}{(n!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 因此对于足够大的 n，因为 I_n 是有界的，正如前所述，有 $0<\frac{a^{2n+1}I_n}{n!}<1$.

这就有了 0 和 1 间存在整数这样错误的矛盾.

尼文和其他人

美国数学协会出版发行的卡勒斯数学专著系列的第十一卷是《无理数》[1]，该书在 1955 年由备受赞誉的加拿大裔美国数学家伊凡·尼文（1915—1999）所编著. 书中有丰富的关于无理数的结果，包含了尼文的 π 的无理性的一个证明，改编于他 1947 年的原始证明，[2]这是已经出版的关于 π 的无理性的第一个现代证明.

在这本书中，为了这个证明和其他的结论，尼文采用的方法用到了埃尔米特的积分，其核心是构造一个次数为 $2n$ 的多项式，它的典型形式是

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

它通常的名字是“尼文多项式”. *116*

当然，多项式随着 n 的变化而变化，但是如果限制在区间 $[0, 1]$ 上，对于任意的正整数 n，它的图像形式就具有一定的特征，对于 $n=4$ 的情形，如图 4.1 所示. *117*

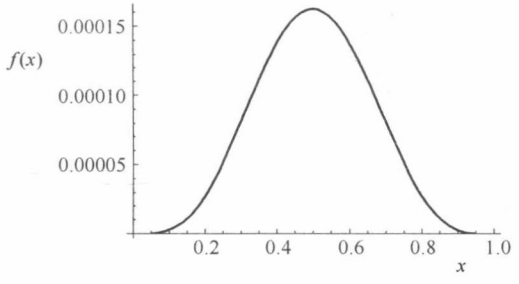


图　4.1

[1] Ivan Niven, 2005, *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monographs (Mathematical Association of America).

[2] Ivan Niven, 1947, A simple proof that π is irrational, *Bull. Am. Math. Soc.* 53: 509.

随着 n 的变化，这类多项式的本质特征是不变的. 再一次，我们来处理$n=4$的情况，采用标准的记号，把 $\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}f(x)$ 记作$f^{(r)}(x)$，有

$$f(x)=\frac{x^4(1-x)^4}{4!}:f(0)=f(1)=0,$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{6}(1-x)^4x^3-\frac{1}{6}(1-x)^3x^4:f^{(1)}(0)=f^{(1)}(1)=0,$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{1}{2}(1-x)^4x^2-\frac{4}{3}(1-x)^3x^3+\frac{1}{2}(1-x)^2x^4:f^{(2)}(0)$$
$$=f^{(2)}(1)=0,$$

$$f^{(3)}(x)=(1-x)^4x-6(1-x)^3x^2+6(1-x)^2x^3-(1-x)x^4:f^{(3)}(0)$$
$$=f^{(3)}(1)=0,$$

$$f^{(4)}(x)=(1-x)^4-16(1-x)^3x+36(1-x)^2x^2-16(1-x)x^3+x^4:f^{(4)}(0)$$
$$=f^{(4)}(1)=1,$$

$$f^{(5)}(x)=-20(1-x)^3+120(1-x)^2x-120(1-x)x^2+20x^3:f^{(5)}(0)$$
$$=-20=-f^{(5)}(1),$$

$$f^{(6)}(x)=180(1-x)^2-480(1-x)x+180x^2:f^{(6)}(0)=f^{(6)}(1)=180,$$

$$f^{(7)}(x)=-840(1-x)+840x:f^{(7)}(0)=-840=-f^{(7)}(1),$$

117 $$f^{(8)}(x)=1680:f^{(8)}(0)=f^{(8)}(1)=1680.$$

118 在这种情形下，观察其相关特性，不难发现：

- 对于 $r<4$，有 $f^{(r)}(0)=f^{(r)}(1)=0$.
- 对于 $r\geqslant 4$，有 $f^{(r)}(0)=(-1)^rf^{(r)}(1)$.
- 对于任意的 r，$f^{(r)}(0)$和$f^{(r)}(1)$都是整数.

为了建立一般情形的情况，做如下讨论.

$f(x)$ 的分子是两个 n 次幂形式的乘积，因此用乘积的求导法则，微分次数小于 n 时，导数中的每一部分都会有 x 项和 $a(1-x)$ 项作为因式，所以对于$0\leqslant j<n$,有$f^{(j)}(0)=f^{(j)}(1)=0$. 现在我们讨论 $n\leqslant j\leqslant 2n$ 时的$f^{(j)}(x)$，为此我们用两种不同方法去观察它的形式.

一方面，多项式$f(x)$ 与它的泰勒展开式是相同的，因此

$$f(x)=f(0)+xf^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+$$
$$\frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0)+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(0)+x^{2n}.$$

已知这些导数的前半部分是0，但是对于所有的$0\leqslant j\leqslant 2n$，x^j的系数是$\dfrac{f^{(j)}(0)}{j!}$.

另一方面，如果使用$f(x)$的标准二项式展开，则有

$$f(x)=\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k(-x)^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{2n-k}.$$

对于$j>n$，由于x^j的系数的两种形式相等，则有

$$\frac{f^{(j)}(0)}{j!}=\frac{\binom{n}{2n-j}(-1)^{j-n}}{n!},$$

因此

$$f^{(j)}(0)=\binom{n}{2n-j}(-1)^{j-n}\frac{j!}{n!}.$$

这说明$f^{(j)}(0)$是一个整数. *118*

$f^{(j)}(1)$也是这样. 事实上，由对称性，有$f(x)=f(1-x)$，使得$f^{(j)}(x)=(-1)^jf^{(j)}(1-x)$，因此$f^{(j)}(1)=(-1)^jf^{(j)}(0)$. *119*

这些性质是尼文的方法的核心——对其他继承他的方法的人也是如此.

尼文最开始使用这种思想证明了π的无理性，使用它的各种变形，使得所有形式的数的无理性都可以根据它得到. 前面已经介绍了埃尔米特的方法是怎样证明π^2是无理数的，但是，为了再次体验应用尼文多项式的感觉，我们将用它们再次证明这一事实，然后进一步地看看它们深层次的重要的应用. 该方法来自于1949年Y. Iwamoto[⊖]的论证.

首先，给定任意一个可微函数$f(x)$，对

$$\int_0^1 f(x)\sin x\mathrm{d}x$$

使用分部积分运算，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x&=\left[-\frac{1}{\pi}f(x)\cos\pi x\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1 f^{(1)}(x)\cos\pi x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}(f(0)+f(1))+\frac{1}{\pi}\int_0^1 f^{(1)}(x)\cos\pi x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

现在重复这一过程，可得到

⊖ Y. Iwamoto, 1949, A proof that π^2 is irrational, *J. Osaka Inst. Sci. Tech.* 1: 147-148.

$$\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(f(0)+f(1))+\frac{1}{\pi^2}[f^{(1)}(x)\sin\pi x]_0^1-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f^{(2)}(x)\sin\pi x\mathrm{d}x$$

119

$$=\frac{1}{\pi}(f(0)+f(1))-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f^{(2)}(x)\sin\pi x\mathrm{d}x,$$

120 这给我们提供了一个递推关系，得到了下面一步，

$$\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(f(0)+f(1))-\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\pi}(f^{(2)}(0)+f^{(2)}(1))-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f^{(4)}(x)\sin\pi x\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{\pi}f(0)-\frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(0)\right\}+\left\{\frac{1}{\pi}f(1)-\frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(1)\right\}+\frac{1}{\pi^4}\int_0^1 f^{(4)}(x)\sin\pi x\mathrm{d}x,$$

接下来，有

$$\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=\left\{\frac{1}{\pi}f(0)-\frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(0)+\frac{1}{\pi^5}f^{(4)}(0)\right\}+\left\{\frac{1}{\pi}f(1)-\frac{1}{\pi^3}f^{(2)}(1)+\frac{1}{\pi^5}f^{(4)}(1)\right\}-\frac{1}{\pi^7}\int_0^1 f^{(6)}(x)\sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^5}\{\pi^4 f(0)-\pi^2 f^{(2)}(0)+f^{(4)}(0)\}+\frac{1}{\pi^5}\{\pi^4 f(1)-\pi^2 f^{(2)}(1)+f^{(4)}(1)\}-\frac{1}{\pi^7}\int_0^1 f^{(6)}(x)\sin\pi x\mathrm{d}x,$$

继续这个步骤一直求到最大的 $2n$ 阶导数，得到

$$\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^{2n+1}}\{\pi^{2n}f(0)-\pi^{2n-2}f^{(2)}(0)+\pi^{2n-4}f^{(4)}(0)-$$

120

$$\pi^{2n-6}f^{(6)}(0)+\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(0)\}+\frac{1}{\pi^{2n+1}}\{\pi^{2n}f(1)-$$

121

$$\pi^{2n-2}f^{(2)}(1)+\pi^{2n-4}f^{(4)}(1)-\pi^{2n-6}f^{(6)}(1)+\cdots+$$

$$(-1)^n f^{(2n)}(1)\}+(-1)^{n+1}\int_0^1 f^{(2n+2)}(x)\sin\pi x\mathrm{d}x.$$

让我们再来看看尼文多项式，因为 $f(x)$ 是次数为 $2n$ 的多项式，$f^{(2n+1)}(x)=f^{(2n+2)}(x)=0$，这说明上面最后的积分为 0. 如果定义一个原函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi^{2n+1}}\{\pi^{2n}f(x)-\pi^{2n-2}f^{(2)}(x)+\pi^{2n-4}f^{(4)}(x)-$$
$$\pi^{2n-6}f^{(6)}(x)+\cdots+(-1)^{n}f^{(2n)}(x)\},$$

那么

$$\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=F(0)+F(1). \tag{1}$$

现在用反证法加以证明，假设 $\pi^2=\frac{a}{b}$. 如果它确实是这样，则有

$$F(x)=\frac{1}{\pi(\pi^2)^n}\{(\pi^2)^n f(x)-(\pi^2)^{n-1}f^{(2)}(x)+(\pi^2)^{n-2}f^{(4)}(x)-$$
$$(\pi^2)^{n-3}f^{(6)}(x)+\cdots+(-1)^{n}f^{(2n)}(x)\}$$
$$=\frac{b^n}{\pi a^n}\left\{\frac{a^n}{b^n}f(x)-\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}f^{(2)}(x)+\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}f^{(4)}(x)-\right.$$
$$\left.\frac{a^{n-3}}{b^{n-3}}f^{(6)}(x)+\cdots+(-1)^{n}f^{(2n)}(x)\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi a^n}\{a^n f(x)-a^{n-1}bf^{(2)}(x)+a^{n-2}b^2f^{(4)}(x)-$$
$$a^{n-3}b^3f^{(6)}(x)+\cdots+(-1)^{n}f^{(2n)}(x)\}.$$

这使得

$$\pi a^n F(0)=a^n f(0)-a^{n-1}bf^{(2)}(0)+a^{n-2}b^2f^{(4)}(0)-$$
$$a^{n-3}b^3f^{(6)}(0)+\cdots+(-1)^{n}f^{(2n)}(0), \tag{121}$$
$$\pi a^n F(1)=a^n f(1)-a^{n-1}bf^{(2)}(1)+a^{n-2}b^2f^{(4)}(1)-$$
$$a^{n-3}b^3f^{(6)}(1)+\cdots+(-1)^{n}f^{(2n)}(1). \tag{122}$$

如果将式（1）重写为

$$\pi a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x=\pi a^n F(0)+\pi a^n F(1),$$

其右边是一个整数，所以左边一定也是一个整数. 但是考虑下面的情形.

因为 $0<x<1$，必有 $0<x(1-x)<1$，因此 $0<f(x)<\frac{1}{n!}$，这说明

$$0<\pi a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x<\frac{\pi a^n}{n!}\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x,$$
$$0<\pi a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi x\mathrm{d}x<\frac{\pi a^n}{n!}\left[\frac{-\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1=\frac{2a^n}{n!},$$

对于足够大的 n，其右边比 1 小，所以产生了存在整数位于 0 和 1 之间这样的矛盾.

现在，哲学上说使用两次的方法就是一个计谋，尼文以各种形式采用这一思想，其中“对于有理 $r\neq 0$，$\cos r$ 是无理数”[⊖]的证明是更为重要的，这也可在这个著作中找到. 这个结果中有很多简单的论证（使用三角函数恒等式等）导致了三角函数及其反函数、双曲函数及其反函数、指数函数和自然对数函数有相似的无理性. 特别地，对于有理数 $r\neq 0$，e^r 是无理数，对于 $r\neq 1$ 且 $r>0$，$\ln r$ 是无理数.

他还做了一个有趣的观察：

有意思的是，在这个过程中，$\cos r$ 作为基本函数似乎是必要的. 即，虽然 $\sin r$ 和 $\tan r$ 的无理性可由 $\cos r$ 的无理性加以说明，但是用这样简单的方式不能从 $\sin r$ 或 $\tan r$ 的无理性中推出 $\cos r$ 的无理性.

122 那么，我们也许要更好地攻克 $\cos r$ 的无理性. 遗憾的是，尽管“基本”，但这一论证阐述起来有点太长了，相当具有挑战性，并且太曲折了（要选择尼文
123 多项式的变形）. 但是我们从 Alan E. Parks 的一个漂亮的结果[⊖]中找到一个可接受的方案. 他也使用了尼文的基本方法，能够充分证明：

如果 r 是有理数，且 $0<|r|\leqslant\pi$，那么 $\sin r$ 和 $\cos r$ 中至少有一个是无理数.

他使用了尼文多项式的一个变形；与尼文自己的证明一样，π 是无理数.

构造

$$f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!},$$

其中 a 和 b 是正整数.

此时假设 $f(x)$ 是次数为 d 的任意多项式，$g(x)$ 是区间 $[0,\ c]$ 上的有界函数的积分. 记

$$f^{(k)}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(k-1)}(x),$$

也记

$$g_{(k)}(x)=\int g_{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

⊖ 这里用弧度（rad）表示角的度量.

⊖ Alan E. Parks, 1986, pi, e and other irrational numbers, *American Mathematical Monthly* 93: 722-723.

再次运用分部积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^c f(x)g(x)\mathrm{d}x &= [f(x)g_{(1)}(x)]_0^c - \int_0^c f^{(1)}(x)g_{(1)}(x)\mathrm{d}x\\ &= (f(c)g_{(1)}(c) - f(0)g_{(1)}(0)) -\\ &\quad \left\{[f^{(1)}(x)g_{(2)}(x)]_0^c - \int_0^c f^{(2)}(x)g_{(2)}(x)\mathrm{d}x\right\}\\ &= (f(c)g_{(1)}(c) - f^{(1)}(c)g_{(2)}(c)) -\\ &\quad (f(0)g_{(1)}(0) - f^{(1)}(0)g_{(2)}(0)) + \int_0^c f^{(2)}(x)g_{(2)}(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

123

继续化简为

124

$$\int_0^c f(x)g(x)\mathrm{d}x = (f(c)g_{(1)}(c) - f^{(1)}(c)g_{(2)}(c) + \cdots + (-1)^d f^{(d)}(c)g_{(d+1)}(c)) -$$

$$(f(0)g_{(1)}(0) - f^{(1)}(0)g_{(2)}(0) + \cdots + (-1)^d f^{(d)}(0)g_{(d+1)}(0)).$$

由于 $f(x)$ 的 d 阶导数在某点自然停止，因此

$$\int_0^c f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(c) - F(0).$$

这里原函数是

$$F(x) = (f(x)g_{(1)}(x) - f^{(1)}(x)g_{(2)}(x) + \cdots + (-1)^d f^{(d)}(x)g_{(d+1)}(x)).$$

最后，如果有与它等价的逆否命题成立，即

如果对于 $0<|r|\leqslant\pi$，$\sin r$ 和 $\cos r$ 都是有理数，那么 r 是无理数.

我们就有了一个研究的方向.

假设 $r=\dfrac{a}{b}>0$ 是任意正有理数（可以使用对称性讨论 r 为负数的情形），用分子和分母作为尼文多项式的分量，令 $c=r$.

假设 $\sin r$ 和 $\cos r$ 都是有理数，令这两个有理数中较大的分母为 D，可定义函数 $g(x)=D\sin x$.

然后有 $f(x)=\dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$，$g(x)=D\sin x$，其中 $c=r=\dfrac{a}{b}$.

之前在第 118 页关于 $f^{(r)}(0)$ 和 $f^{(r)}(1)$ 的论证同样是正确的，稍加修改，就有 $f^{(k)}(0)$ 和 $f^{(k)}(c)$ 是整数. 由假设和构造知，$g^{(k)}(0)$ 和 $g^{(k)}(c)=g^{(k)}(r)$ 是整数，再次 $F(c)-F(0)$ 是一个确定的整数. 在 $f(x)$ 的定义中取足够大的 n，可使得这个整数位于 0 和 1 之间，这与 r 是有理数的假设矛盾.

124

作为额外的奖励，更精明的选择可使我们得到下面的结果：

125

如果 $0<r\neq 1$ 是有理数，那么 $\ln r$ 是无理数.

（注意到，因为 $\ln\frac{1}{r}=-\ln r$，可以假定 $r>1$，所以 $\ln r>0$.）

这里令 $r=\frac{a}{b}$，$c=\ln r$. 定义 $g(x)=be^x$，则 $g(0)=b$ 和 $g(c)=be^c=be^{\ln r}=br=b\times\frac{a}{b}$都是整数. 用同样的$f(x)$，再一次得到站不住脚的情况，从而必定可以得到 $\ln r$ 是无理数的结论.

一个单一方法获得了根本性的结果，它们可以用来处理数学中非常多的基本函数的无理性的证明. 当然，在我们的知识中，仍有一个这样的缺陷：尽管我们现在知道对于有理数 r，e^2是无理数，但是关于 r^e，我们一无所知.

回到不尽根数

我们回到不尽根数，进而继续无理数的研究. 在第一章中，已知$\sqrt{2}$的无理性的最著名的证明被欧几里得保存下来. 我们猜测用西奥多罗斯的方法可以确定 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，…，$\sqrt{15}$的无理性，也许也可以确定 $\sqrt{17}$的无理性. 那么对于一般情形$\sqrt{n}$的无理性又会怎么样呢？这是个小问题，可以用一些推广的方法去处理，考虑用所谓的可分性理论进行分类处理，这在很多年前以不同的方式在不同的地方出现过.

若$\sqrt{n}$是一个整数，那我们就不用再进行思考了. 否则，它不是一个整数，因此，它是介于两个连续整数之间，即 $k<\sqrt{n}<k+1$. 现在假设$\sqrt{n}$是有理数，其最简分数形式中的分母为 d；那么 d 是使得 $d\sqrt{n}$是整数的最小整数. 考虑 $d(\sqrt{n}-k)=d\sqrt{n}-dk$，显然它是一个小于 d 的整数；但是 $[d(\sqrt{n}-k)]\sqrt{n}=dn-k(d\sqrt{n})$ 是一个整数，矛盾.

然后，我们有了基本不尽根数集，可以通过三个简单的观察在其上建立如下结论：

- 如果 $r\neq 0$ 是有理数，x 是无理数，那么 rx 是无理数，这就确保了形如 $2\sqrt{7}$和$\frac{2}{3}\sqrt{15}$这样的数的无理性.

• 如果 r 是有理数，x 是无理数，那么 $r+x$ 是无理数：这确保了形如 $3+2\sqrt{7}$ 和 $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\sqrt{15}$ 这样的数的无理性. 126

• 如果 r 是有理数，那么对于所有整数 n，r^n 都是有理数；等价地说，如果 x 是无理数，那么对于所有整数 n，$\sqrt[n]{x}$ 都是无理数：这确保了形如 $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$ 和 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 这样的数的无理性.

因此，通过求根，以这种方式组合有理数与无理数，可以拓宽已知的不尽根数形式的无理数，但还存在一个显然的未解问题，形如 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$，…这样的数是无理数吗？也就是说，无理数的相加的结果是否一定是一个新的无理数呢？

显然，答案是否定的；例如，取相加的和为 $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})$，看似更微妙的，考虑两个十进制的数

$$a=0.\,01001000100001000001\cdots,$$

$$b=0.\,10110111011110111110\cdots,$$

其中数字的出现形式以上述方式无限的继续下去. 稍后，我们将接受这样的事实（将在第八章进行证明），一个无理数的小数部分是无限且不循环的，而有理数的小数部分是有限的或是无限循环的，我们确定上述的 a 和 b 都是无理数. 现在将它们加起来，得到

$$a+b=0.\,111111\cdots=\frac{1}{9},$$

从而得出两个无理数的和仍然是一个有理数的结论. 这里潜在的结构，记为

$$a+\left(\frac{1}{9}-a\right)=\frac{1}{9}.$$

这种情况几乎不出乎意料；我们仅仅是用简便的方式构造了两个无理数，将二者加起来，从而使得无理的部分相互抵消了.

有一种感觉，使数的无理部分抵消是一种特别方便的方法，这样无理数“真正的”加法没有作用；对于这种情况，我们需要更精确的描述，这里可以采用 Gregg N. Patruno 所提出的方法[⊖]去处理，他很好地解决了这一问题. 126 127

⊖ Gregg N. Patruno, 1988, Sums of irrational square roots are irrational, *Mathematics Magazine* 61 (1).

如果回到上面$\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})$的情况，将括号移开，考虑三个数的和$s=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}$. 它的一般情形的表达式是$s=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，其中a_1^2，a_2^2，a_3^2，$\cdots$，a_n^2是有理数.

假设s是一个有理数，关注s的一个特殊的构成变量，为了方便，不妨考察a_1.

定义

$$F(x,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)=\prod_{\text{对所有}\pm\text{号组合}}(x-a_1\pm a_2\pm a_3\pm\cdots\pm a_n).$$

显然，$F(s,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)=0$，但是这个函数还有一个不太明显的性质，首先从$n=2$，3的情况开始探究：

$$\begin{aligned}F(x,a_1,a_2)&=\prod_{\text{对所有}\pm\text{号组合}}(x-a_1\pm a_2)=(x-a_1+a_2)(x-a_1-a_2)\\&=(x-a_1)^2-a_2^2=(x^2+a_1^2-a_2^2)-a_1(2x),\end{aligned}$$

如果略去可怕的代数运算，

$$\begin{aligned}F(x,a_1,a_2,a_3)&=\prod_{\text{对所有}\pm\text{号组合}}(x-a_1\pm a_2\pm a_3)\\&=(x-a_1+a_2+a_3)(x-a_1+a_2-a_3)(x-a_1-a_2+a_3)+(x-a_1-a_2-a_3)\\&=(x^4+6a_1^2x^2-2a_2^2x^2-2a_3^2x^2+a_1^4+a_2^4+a_3^4-2a_1^2a_2^2-2a_1^2a_3^2-2a_2^2a_3^2)-\\&\quad a_1(4a_1^2x-4a_2^2x-4a_3^2x+4x^3).\end{aligned}$$

127

128 这两种情况都是下面这个函数的特殊情形：

$$\begin{aligned}F(x,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)&=G(x,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)-\\&\quad a_1H(x,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2),\end{aligned}$$

其中$G(x,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)$和$H(x,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)$都是整系数多项式.

主要的一点是，对F右边的乘积结果，重复的±号确保了a_2，a_3，a_4，$\cdots$，a_n中的每一个都以偶次幂的形式出现，只有a_1既出现偶次幂，也出现奇次幂；对于一般情况，也很容易用归纳法（或其他）去证明. 根据F的组成情况，产生了G和H两个函数，如果取$x=s$，则有

$$F(s,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)=G(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)-a_1H(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)=0,$$

因此

$$a_1=\frac{G(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)}{H(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)}.$$

现在如果 s 假定为有理数，我们知道两个有理数的商也是有理数，这说明 a_1 是有理数. 当然，其中的下标 1 是任意的，因此，如果 s 是有理数，$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ 中的所有数都是有理数；反之，如果 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ 中的任意一个都是无理数，那么 s 也一定是无理数. 那么上面所说的情况，包含了 $\sqrt{2}$ 么？上面的方法唯一不足的地方是当分母 $H(s, a_1^2, a_2^2, a_3^2, \cdots, a_n^2)$ 为 0 时，无法进行下去. 我们来验证何时发生这种情况. 考虑

$$\begin{aligned} & F(s,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n) - F(s,-a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n) \\ &= 0 - F(s,-a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n) \\ &= [G(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2) - a_1 H(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)] - \\ &\quad [G(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2) + a_1 H(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2)], \end{aligned} \tag{128}$$

则有

$$-F(s,-a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n) = -2a_1 H(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2) \tag{129}$$

和

$$\begin{aligned} H(s,a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots,a_n^2) &= \frac{1}{2a_1} F(s,-a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n) \\ &= \frac{1}{2a_1} \prod_{\text{对所有}\pm\text{号组合}} (s \pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n) \\ &= \frac{1}{2a_1} \prod_{\text{对所有}\pm\text{号组合}} (2a_1 + (a_2 \pm a_2) + (a_3 \pm a_3) + \cdots + (a_n \pm a_n)) \\ &= \frac{1}{2a_1} \prod_{T\subset\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}} \left(2a_1 + 2\sum_{a_r\in T} a_r\right) \\ &= \frac{1}{a_1} \prod_{T\subset(a_2,a_3,\cdots,a_n)} \left(a_1 + \sum_{a_r\in T} a_r\right). \end{aligned}$$

对 $H(s, a_1^2, a_2^2, a_3^2, \cdots, a_n^2)$ 的乘积表达式，仅当某个因子 $(a_1+\sum a_r)$ 为 0 时，其结果才为 0——这种情形正是先前所举例的情况.

现在可以将二次不尽根数的“自然”生成集合中的所有形式的数相加产生无理数.

那么三次的不尽根数、四次的等，情况又如何呢？本节开始部分的关于二次不尽根数的无理性的证明很容易推广到一般情形，因此

如果 m 和 n 都是正整数，并且 $\sqrt[m]{n}$ 不是一个整数，那么它是无理数.

但是，这样的不尽根数及其混合式子的和的无理性又是怎样的呢？特别地，形

如$\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$的无理性是怎样的？水虽然很浑浊，但从不同角度考虑，某种程度上是清澈的，例如我们可以利用多项式方程加以考察.

如果记$x=\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$，那么$(x-\sqrt{3})^3=5$，所以$x^3-3\sqrt{3}x^2+9x-3\sqrt{3}=5$，即$x^3+9x+5=3\sqrt{3}(x^2+1)$.现在两边平方得$(x^3+9x+5)^2=27(x^2+1)^2$，可以用计算机软件简化成

129

$$x^6-9x^4-10x^3+27x^2-90x-2=0.$$

我们发现这个整系数的多项式方程有一个根为$\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$，从这个事实出发，可以使用一个已知的代数结果“有理根定理”看到数的无理性.

考虑一般的多项式方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0=0,$$

其中所有系数都是整数，假设它有一个有理数根，其最简分数形式为$\frac{p}{q}$. 那么

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\cdots+a_0=0,$$

所以

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots+a_0q^n=0,$$

这说明

$$a_np^n=-q(a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}q+\cdots+a_0q^{n-1}).$$

因此q是a_np^n的一个因子. 因为p和q没有公因子，所以q能整除a_n.

如果记原方程为

$$\begin{aligned}a_0q^n&=-(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots+a_1pq^{n-1})\\&=-p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+a_{n-2}p^{n-3}q^2+\cdots+a_1q^{n-1}),\end{aligned}$$

则有p整除a_0q^n，进而p整除a_0.

总之，有理根定理的内容可叙述为：

如果最简分数$\frac{p}{q}$是整系数多项式方程的一个有理根，那么p整除a_0，q整除a_n.

130

131

特别地，如果$a_n=1$，$\frac{p}{q}$是最简分数形式的有理根，那么必有$q=\pm1$. 所以对于任何整数有理根p，都有其整除常数项a_0.

因此，对于上面我们所考虑的方程，其唯一可能的有理根为±1，±2，但它

们都不满足方程，这就证明了$\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$是无理数.

处理整系数多项式方程是一项艰巨的任务，由这种思想事情变得相对容易，为了达到目的，只需追踪常数项. 如果我们不是检验一个给定数的无理性，而是产生一个无理数，事情会变得更加容易. 例如写下一个多项式方程

$$x^6 + 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 12 = 0.$$

它有两个实根（$\neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$），因此，这两个根都是无理数. 有点盲目自信，但确实也是合理有效的.

让我们通过多项式的次数更为系统化的分类处理这个事情. 对于所有整系数多项式方程，考虑如下：

- 二次方程 $ax^2+bx+c=0$. 由求根公式，可能的无理根的形式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，对那些有理根必有其分子整除 c，并且其分母整除 a.

- 三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$. 这个有点难处理，但是它的根有标准的根式表达式，其中明确给了一个看上去不合意，但确定的实根

$$x=-\frac{b}{3a}-\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right)}-$$

$$\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(p-\sqrt{p^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}\right)},$$

其中 $p=2b^3-9abc+27a^2d$. 那些有理数根的分子整除 d，并且它们的分母整除 a. 131

- 四次方程的根有明确的显式形式，但我们不敢写出来，因为害怕打字机 132
神志不清，它的形式是复杂的，[⊖]是有理数、平方根和立方根的组合.

这里要暂停一下. 我们已经达到五次方程的地步了，这是追求多项式方程的无理根的一个分水岭，这里没有一般的五次方程的求根公式. 换句话说，存在五次方程它的无理根不是不尽根数形式. 这里重要的意义是我们有了一种新型的无理数.

一种新型的代数无理数

关于这个问题，高不可攀的高斯在他 1799 年的博士论文中有所预示，并不

⊖ 感兴趣的读者可访问 http：//planetmath. org/encyclo pedia/QuarticFormula. html. 看看细节.

知名的保罗·鲁菲尼（1765—1822）在1799年和1813年间在不同程度上给出了有争议的“证明”，悲剧的挪威数学家尼尔斯·阿贝尔（1802—1829）在1824年给出了严格证明，同样悲剧的、热衷政治的、在爱情中神魂颠倒的、坦率的埃瓦里斯特·伽罗瓦（1811—1832）在1830年归纳推广，其简洁形式的结果具体如下：

存在不能被根式表示的代数数.

代数数是整系数的多项式方程的根，阿贝尔最初的论文标题[⊖]中就揭示了

关于代数方程的记录显式解出一般的五次方程是不可能的.

当然，这不排除有根式形式无理根的五次方程. 例如，取

$$x^5 - 5x^4 + 30x^3 - 50x^2 + 55x - 21 = 0,$$

这个方程唯一可能的有理根要整除21，所以为±1，±3，±7，±21；但它们都不
132 满足方程. 事实上，它唯一的实数解是无理数
133

$$x = 1 + \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{16},$$

与下面的式子比较显得有些平凡

$$x^5 - 5x + 12 = 0,$$

其唯一可能的有理根为±1，±2，±3，±4，±6，±12，再一次它们都不满足方程，唯一的实数解为无理数

$$-1.84208596619025438271118\cdots;$$

它的精确根式表达式中，需要大约600个符号.

然而，阿贝尔的结果显示存在五次方程其解没有根式表示；甚至更无辜的看一下这个例子

$$x^5 - x - 1 = 0. \qquad (*)$$

显然，±1不是它的根，这个方程是阿贝尔所说的一个；它的根不能由根式的有限形式所表达，它唯一的实数根是

$$\alpha = 1.1673039782614186843\cdots.$$

我们将集中注意这一类无理数，它是代数上的非不尽根数，选择它是因为它的存在令人感到新奇和惊讶.

熟悉英国数学家约翰·霍尔顿·康威的读者并不会惊奇地想起或学习过他

⊖ 出现在J. De Crelle中，已经在前一章提到了.

的“看读数列”[⊖]，其定义如下：

- 选定一个正整数为数列的第一项.
- 通过描述前面一项的组成部分来产生数列后面的所有项.

典型的一个是从 1 开始的，产生数的过程如下：

第一项是 1.

第一项被描述成“一个 1”，所以第二项为 11，

第二项被描述成“两个 1”，所以第三项为 21，

第三项被描述成“一个 2 和一个 1”，所以第四项为 1211，

第四项被描述成“一个 1，一个 2，两个 1”，所以第五项为 111221，

第五项被描述成“三个 1，两个 2，一个 1”，所以第六项为 312211，

第六项被描述成“一个 3，一个 1，两个 2，两个 1”，所以第七项为 13112221，

第七项被描述为“一个 1，一个 3，两个 1，三个 2，一个 1”，所以第八项为 1113213211，….

那么产生的数列就是

1，11，21，1211，111221，312211，13112221，1113213211，….

我们可能猜测无论开始的数字是什么，数列的项会变得非常复杂，但是怀疑被终止，如果数列以 22（“两个 2”）开始，其过程永远没有变化. 康威将所有可能的开始数字所产生的数列划分成三类：

- 92 个原子元素，康威称作“公共元素”；
- 2 个数列，称作“超铀元素”（连同它们无限多的同位素）；
- 无限多的外来元素.

它们每一个都有一些例子，例如：

- 22，1113，13112221133211322112211213322113，132；
- 3122113222122211211232221 1 [≥4] 和 1311222113321132211221121332211 [≥4]

（最后一个数是任意≥4 的整数，形成主要元素的同位素）；

⊖ J. H. Conway，1985，The weird and wonderful chemistry of audioactive decay，*Eureka* 46：5-16；reprinted in 1987 in *Open Problems in Communication and Computation*，ed. T. M. Cover and B. Gopinath（Springer），pp. 173-188.

134 • 1，2，23，7777.

135 我们会切合实际地对这些来自化学上的称谓尝试产生异议，但是有点化学背景的读者将会理解这些借用的术语. 当我们知道了“分解”的定义，92 种元素中的原子的属性（不能被分解）可能就会被理解.

我们采用函数的记号描述“看读”的过程，从数字 s 开始，产生了数字串 $\alpha(s)$. 数字串 $s=l\,r$ 称为可以“分解”的，如果 $\alpha(s)=\alpha(lr)=\alpha(l)(r)$，并且对于每个正整数 k，$\alpha^k(s)=\alpha^k(l)\alpha^k(r)$. 例如，

$$\alpha(1511)=(1115)(21)=\alpha(15)\alpha(11),$$

$$\alpha^2(1511)=\alpha(111521)=(3115)(1211)=\alpha^2(15)\alpha^2(11),\cdots.$$

不能分解的数字串就称为一个原子，的确有 92 个原子. 92 种自然生成的化学元素对应于一个“元素周期表”，每一种元素恰好对应一个原子元素. 周期表从氢开始，与之对应的是 22，以铀结束，与之对应的是 3；原子数列的每个其他成员都有与它对应的化学元素. 至于超铀元素的使用，这些数字串对应的原子数（93 和 94）超过了铀的元素序号，借用同位素的名称也很自然. 外来元素是一些既不是公共元素，也不是超铀元素的数字串.

康威自称这个理论的“最杰出成就”就是他所谓的“宇宙定理”，表述如下：无论数列以什么开始，经过最少的 24 次迭代以后，结果数列仅由原子元素和超铀元素（一个组合）构成；康威这样来描述，每个迭代花费“一天”时间，所有的外来元素将会在“大爆炸”之后的 24 天消失.

所有的这些对无理数有什么用呢？这个理论产生一个被康威证实了的“康威算数定理”，即无论起始数字是什么，这个数列长度的渐进增长率是一个常数，这个常数是

135 $$\lambda = 1.303577269034296\cdots,$$

136 也就是所谓的“康威常数”. 也就是说

$$\frac{\#\alpha^{k+1}(s)}{\#\alpha^k(s)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

难以置信的是，λ 是一个代数数，同样难以置信的是它是下面这个多项式的唯一正实数根：

$$x^{71}-x^{69}-2x^{68}-x^{67}+2x^{66}+2x^{65}+x^{64}-x^{63}-x^{62}-x^{61}-x^{60}-x^{59}+2x^{58}+5x^{57}+$$
$$3x^{56}-2x^{55}-10x^{54}-3x^{53}-2x^{52}+6x^{51}+6x^{50}+x^{49}+9x^{48}-3x^{47}-7x^{46}-8x^{45}-$$
$$8x^{44}+10x^{43}+6x^{42}+8x^{41}-5x^{40}-12x^{39}+7x^{38}-7x^{37}+7x^{36}+x^{35}-3x^{34}+10x^{33}+$$

$$x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6 = 0.$$

它也可能不能用不尽根数形式表示！[⊖] *136*

⊖ Óscar Martín, 2006, Look-and-Say biochemistry : exponential RNA and multistranded DNA, *American Mathematical Monthly* 113 (4): 289-307.

137

第五章

一个非常特殊的无理数

证明之所以成为证明是在社会“接受它是一个证明”之后.

——Yu. I. Manin

数学中的常数或者是无名的，或者是大名鼎鼎的. 名望是其重要性的一个反映. 我们可以区分哪些常数的名声源自其自身本质，哪些常数的名声是强加于身的，例如，π，e 和$\sqrt{2}$进行比较. 毋庸置疑，前两个数的名声是由其自身的“明星”特质所致，但是我们也已经看到，贯穿于毕达哥拉斯学派的传统，$\sqrt{2}$在数学中有自己独特的地方. 这一章主要关注另一个偶然出名的数. 尽管我们都认为添加以前没有加进去的两个数并不能构成数学上的一个突破，但是对于判断这两个数中的一个的无理性的确意义非凡，其结果是 20 世纪数学史上最令人瞩目的成就之一. 这个数记为 $\zeta(3)$，它是一个无穷实数列中的第二项，以如下形式定义在正整数 n（可能有更有意义的延伸）上：

$$\zeta(n)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}$$

希腊字母 ζ，揭示了其 Zeta 函数名称的由来.

在这个无穷数列中 $\zeta(3)$ 看起来是出现在第三项，我们把它视为第二项是因为作为第一项的调和级数

$$\zeta(1)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}$$

137 是发散的. 这个结果中世纪博学的尼科尔·奥里斯姆（见第 66 页）就曾提到.

138 我们的兴趣也不在此数列的第二项

$$\zeta(2)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2},$$

因为在 1735 年欧拉已经用非常巧妙的可以想象的方法[㊀]证明了

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

由 π^2 的无理性可知这一项的无理性是显然的.

欧拉的成就不止于此. 他证明了

$$\zeta(2n)=C\pi^{2n},$$

其中 C 是一个有理常数，所以 Zeta 函数在正偶数上取值时的无理性是确定的. 不确定的是对于 $n\geqslant 1$，$\zeta(2n+1)$ 的无理性问题，因为无论是欧拉还是任何追随他的人都没有找到这个数的有效表示，也很少去证明它是无理数——直到 1978 年法国人 Roger Apéry（罗杰·阿培里）结合下面这个证明做了一系列惊人断言：

$$\zeta(3)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^3}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\cdots=1.2020569\cdots$$

是无理数，尽管这个数的有效表示仍然难以捉摸. *138*

阿培里是一位优秀的数学家，一位非常优秀的数学家. 一个考查人的可靠方 *139*
法是看一看是否有已经很有名望的人对其认可. 阿培里拥有来自吉恩·迪厄多内的友谊和尊敬，得到埃利·嘉当资助这些足够说明其优秀. 也许读者应该好好地调查一下吉恩·迪厄多内和埃利·嘉当这两位先生. 吉恩·迪厄多内在抽象代数，代数曲线和丢番图分析领域中都做出了巨大贡献，但是对他的最大数学褒奖是在 1978 年的 6 月，他 62 岁的时候，源自于他在马赛卢米尼的青年算术会议上做的一个演讲，演讲的题目是《$\zeta(3)$ 的无理性》.

尽管对他所宣称的证明早有传言，但是怀疑是普遍的. 这个演讲使得这个观点更加难以置信. 那些听得漫不经心的人和那些痛苦于不懂法语的人，仅仅是听到一系列认为不太可能的断言.

上面的描述出自阿尔弗雷德·范德，[㊁]他是那些不相信这个断言的听众之一.

这一章的唯一目的是关注阿培里最初的观点[㊂]，即使不是完全地，至少希望可以差不多地了解他奇妙的见解，看到他将一个看似天真的问题与一个难以置信的解结合起来；我们不能期望他的结论是自然得到的. 再一次，用到反证法证

㊀ 见例子，J. Havil，2009，*Gamma: Exploring Euler's Constant*（Princeton University Press），p. 39.

㊁ A. van der Poorten，1979，*Math. Intelligencer* 1：195-203.

㊂ Which appeared as：R. Apéry，1979，Irrationalité de ζ(2) et ζ(3)，*Astérisque* 61：11-13.

明：假设 $\zeta(3)$ 是有理数，就能构造出一个小于 1 的正整数. 这个正整数是不容易得到的，是来自 $\zeta(3)$ 的一个非常精确的有理近似值，用到一个整数与一个整数相乘的差异性改变；正是这种差异性的改变最终证明其小于 1.

递推关系

阿培里的方法从一个神秘的二阶递推关系开始

139

$$n^3u_n + (n-1)^3u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1},$$

140 给出上式的两个初始条件 $a_0=0$，$a_1=6$ 和 $b_0=1$，$b_1=5$，生成了解 a_n 和 b_n.

表 5.1

n	a_n	b_n
0	0	1
1	6	5
2	$\frac{351}{4}$	73
3	$\frac{62531}{36}$	1445
4	$\frac{11424695}{288}$	33001
5	$\frac{35441662103}{36000}$	819005
6	$\frac{20637706271}{800}$	21460825
7	$\frac{963652602684713}{1372000}$	584307365
8	$\frac{43190915887542721}{2195200}$	16367912425
9	$\frac{1502663969043851254939}{2667168000}$	468690849005

表 5.1 中列出了每一个序列的前几项，立刻发现了两件事情：一是 b_n 是正整数，a_n 是有理数；二是它们的分子增长得非常快，比分母的增长要快得多. 为了证明这是他所提出的一种一般情况，而事实上，不需要证明，他给出了递推关系式：

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 .$$

很容易看到，与表中所给出的结果是一致的. 对于 a_n，其形式是更为复杂的， 140
用到如下的辅助序列 $c_{n,k}$： 141

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} ,$$

并且

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 .$$

我们不会非常麻烦地去证明这些，但是情况确实是这样的，[⊖]此时，也就很容易领会到那些参加会议的人所持有的怀疑.

与 ζ(3) 相关联的

$c_{n,k}$的表达式中至少揭示了 $\zeta(3)$. 事实上，阿培里进一步断言

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \zeta(3).$$

我们看一看 $c_{n,k}$的表达式，首先通过仔细地观察发现 $c_{n,k}$的求和中前面那项与变量 k 无关；因此求和可以继续进行，把 b_n 部分替换. 符号表达为

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} \right) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} . \qquad 141$$

所以 142

$$a_n = b_n \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} \right) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} ,$$

现在考虑（两个中的第一个）分母

$$2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m} ,$$

⊖ 感兴趣的读者可查阅，例如，Jorn Steuding, 2005, *Diophantine Analysis* (Chaman & Hall), pp. 56-59.

由帕斯卡三角形的基本性质有

$$\binom{n}{m}\binom{n+m}{m} \geqslant \binom{n}{1}\binom{n+1}{1} = n(n+1) > n^2,$$

所以，一定有

$$2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m} > 2m^3n^2,$$

进而

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} < \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m^3n^2} = \frac{1}{2n^2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m^3} < \frac{1}{2n^2}\zeta(3) < \frac{1}{n^2},$$

这说明

$$a_n < b_n\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}\right) + b_n\frac{1}{n^2} < b_n\zeta(3) + b_n\frac{1}{n^2},$$

重新整理为

$$\left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

142 换句话说，$\left|\zeta(3)-\frac{a_n}{b_n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$，这样就得到了收敛性的证明.

143 收敛的速度

尽管收敛的速度比上面的讨论过程进行得还要快，但是我们还需要对它做更精确的估计. 为此，再利用 a_n 和 b_n 都满足前面的递推关系，有

$$n^3a_n + (n-1)^3a_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)a_{n-1},$$

$$n^3b_n + (n-1)^3b_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)b_{n-1}.$$

现在，为了使两个方程的右边一样，两个方程分别乘以 b_{n-1} 和 a_{n-1}，得到

$$n^3a_nb_{n-1} + (n-1)^3a_{n-2}b_{n-1} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)a_{n-1}b_{n-1},$$

$$n^3a_{n-1}b_n + (n-1)^3a_{n-1}b_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)a_{n-1}b_{n-1}.$$

此时计算两个方程的左边，有

$$n^3a_nb_{n-1} + (n-1)^3a_{n-2}b_{n-1} = n^3a_{n-1}b_n + (n-1)^3a_{n-1}b_{n-2},$$

$$n^3a_nb_{n-1} - n^3a_{n-1}b_n = (n-1)^3a_{n-1}b_{n-2} - (n-1)^3a_{n-2}b_{n-1},$$

$$n^3(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)=(n-1)^3(a_{n-1}b_{n-2}-a_{n-2}b_{n-1}),$$

$$a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n=\frac{(n-1)^3}{n^3}(a_{n-1}b_{n-2}-a_{n-2}b_{n-1}).$$

再对上式使用递推关系直到最后得到

$$\begin{aligned}a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n&=\frac{(n-1)^3}{n^3}\frac{(n-2)^3}{(n-1)^3}(a_{n-2}b_{n-3}-a_{n-3}b_{n-2}),\\&=\frac{(n-2)^3}{n^3}(a_{n-2}b_{n-3}-a_{n-3}b_{n-2})=\cdots\\&=\frac{1}{n^3}(a_1b_0-a_0b_1)=\frac{6}{n^3}.\end{aligned}$$

由初始值知，$a_1b_0-a_0b_1=6$.　　143

最后，有　　144

$$a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n=\frac{6}{n^3},$$

这说明

$$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=\frac{6}{n^3b_{n-1}b_n}.$$

因此，

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{6}{n^3b_{n-1}b_n}+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}.$$

为了后面方便，将表达式中的 n 变成 $n+1$，则

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{6}{(n+1)^3b_nb_{n+1}}+\frac{a_n}{b_n}.$$

现在得到了一个序列串

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_n}{b_n}&=\frac{6}{(n+1)^3b_nb_{n+1}},\\\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}&=\frac{6}{(n+2)^3b_{n+1}b_{n+2}},\\&\vdots\\\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{N-1}}{b_{N-1}}&=\frac{6}{N^3b_{N-1}b_N}.\end{aligned}$$

将上述式子相加，得

$$\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=n+1}^{N}\frac{6}{k^3b_{k-1}b_k}.$$

固定 n，对 N 考虑收敛性，得到

144

$$\lim_{N\to\infty}\frac{a_N}{b_N}=\zeta(3).$$

145 则

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{6}{k^3b_{k-1}b_k},$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_n}{b_n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{6}{k^3b_{k-1}b_k},$$

$$\zeta(3)-\frac{a_n}{b_n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{6}{k^3b_{k-1}b_k}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\zeta(3)-\frac{a_n}{b_n}&=6\left(\frac{1}{(n+1)^3b_nb_{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^3b_{n+1}b_{n+2}}+\frac{1}{(n+3)^3b_{n+2}b_{n+3}}+\cdots\right)\\&\leqslant\frac{6}{b_n^2}\left(\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\frac{1}{(n+3)^3}+\cdots\right)=\frac{6}{b_n^2}\left(\zeta(3)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\right)\\&\underset{n\to\infty}{\sim}0-\frac{6}{b_n^2}\zeta(3).\end{aligned}$$

最后我们对收敛的速度有一个更好的估计：

$$\left|\zeta(3)-\frac{a_n}{b_n}\right|\sim\frac{1}{b_n^2}$$

关于收敛速度将在第七章再次谈到.

需要让这些 a_n 变成整数，作为结束，我们将暂时不考虑 $\zeta(3)$ 的事情，转而给出从 1 到 n 这 n 个正整数的最小公倍数的上界的一个标准的完美估计.

最小公倍数

145 记[1，2，3，…，n] 为整数{1，2，3，…，n}的最小公倍数.

146 为了达到目的，先做一种尝试，考虑一个特殊的情形，取［1，2，…，20］，将这 20 个整数写成如下因数的形式：

$$2,3,2^2,5,2\times3,7,2^3,3^2,2\times5,11,2^2\times3,13,$$
$$2\times7,3\times5,2^4,17,2\times3^2,19,2^2\times5.$$

通过观察，$[1, 2, 3, \cdots, 20]=2^4\times3^2\times5\times7\times11\times13\times17\times19$，其所组成的质数成分可分解为

$2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$，所有$\leqslant20$的质数，

2×3，所有平方$\leqslant20$的质数，

2，所有立方$\leqslant20$的质数，

2，所有四次幂$\leqslant20$的质数.

我们看到，$[1, 2, 3, \cdots, 20]$是由这四种形式的数的乘积构成的，即小于20的质数，平方小于20的质数，立方小于20的质数，最后是四次幂小于20的质数.

对一般的n，用归纳法或其他方法，可以证明$[1, 2, 3, \cdots, n]$由所有质数p的方幂的乘积得到，同时这些质数的方幂的结果小于或等于n，即

$$[1,2,3,\cdots,n]=\prod_{m,p^m\leqslant n}p,$$

那么，对于给定的p和n，满足条件的m的最大值是多少呢？我们所要求满足的条件为$p^m\leqslant n$，这说明$m\ln p\leqslant\ln n$，$m\leqslant\dfrac{\ln n}{\ln p}$，因为$m$是一个最大值，则$m=\left[\dfrac{\ln n}{\ln p}\right]$（这里再次用到求整函数）.

这都说明

$$[1,2,3,\cdots,n]=\prod_{p\leqslant n}p^{\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor}.\qquad(*)$$

由此可以得到一个$[1, 2, 3, \cdots, n]$的大小的估计.

显然$p^{\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor}\leqslant n$，因此从方程（*）中知：

$$[1,2,3,\cdots,n]=\prod_{p\leqslant n}p^{\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor}\leqslant\prod_{p\leqslant n}n.$$

这里，右边的值是n的方幂的形式，其幂指数就是小于等于n的质数的个数，对于这个我们给出其一般通用记号$\pi(n)$，π被称为质数计数函数. *146* *147*

如果阿培里的结果是20世纪最重要的成果之一，那么“素数定理”就是19世纪最重要的成果之一. 高斯在1792年（当他15岁的时候）对它进行了推测，但是直到19世纪末才出现了证明，在1896年由比利时数学家普森和法国数学家

哈达玛先后独立给出了证明.

素数定理的结果有几种形式，都是等价的，我们需要其中一种最简单的：

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n},$$

则有

$$[1,2,3,\cdots,n] \leqslant n^{\pi(n)} \sim n^{n/\ln n} = \mathrm{e}^n.$$

随着 n 的增长，就有了 $[1, 2, 3, \cdots, n]$ 大小的一个简便估计，图 5.1 画出了 $\ln([1, 2, 3, \cdots, n])$ 的发展趋势.

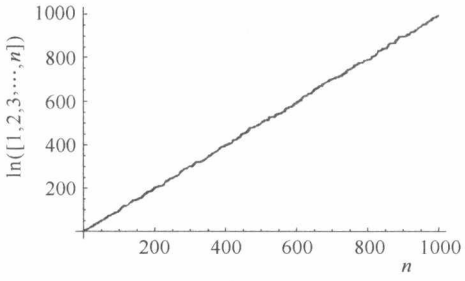


图 5.1

最后，对于给定的正整数 N，我们给出质数 p 的最高次幂的大小的估计，记为 $\mathrm{Ord}_p(N)$. 那么用这种记号，有

147

$$\mathrm{Ord}_p([1,2,3,\cdots,n]) = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor.$$

148 这与二项式系数有某种等价关系（在此我们不证明）：

$$\mathrm{Ord}_p\left(\binom{n}{m}\right) \leqslant \mathrm{Ord}_p([1,2,3,\cdots,n]) - \mathrm{Ord}_p(m),$$

因此

$$\mathrm{Ord}_p\left(\binom{n}{m}\right) \leqslant \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor - \mathrm{Ord}_p(m).$$

构造整数列 a_n

我们渐渐接近一个矛盾点，即一个表达式是一个小于 1 的正整数.

148 为此需解决一个事实，即 a_n 本身不是整数，但当它们乘以

$2[1, 2, 3, \cdots, n]^3$ 时，其结果就是整数. 这不是显然的，第一步我们可以先看看表 5.2. 回到第 141 页看看 a_n 的定义；$c_{n,k}$ 使得 a_n 成为一个分数，并且 $c_{n,k}$ 的第一部分是

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

如果把它记为一个单独的分数，这个分数的分母（在可能抵消之前）是 $[1, 2, 3, \cdots, n]^3$，所以乘以这个数以后就得到了一个整数.

表　5.2

n	a_n	$a_n \times [1, 2, 3, \cdots, n]^3 \times 2$
0	0	0
1	6	12
2	$\frac{351}{4}$	1404
3	$\frac{62531}{36}$	750372
4	$\frac{11424695}{288}$	137096340
5	$\frac{35441662103}{36000}$	425299945236
6	$\frac{20637706271}{800}$	11144361386340
7	$\frac{963652602684713}{1372000}$	104074481089949004
8	$\frac{43190915887542721}{2195200}$	23323094579273069340
9	$\frac{1502663969043851254939}{2667168000}$	1803196762852621505926 8

第二个要解决的是 $c_{n,k}$ 表达式中的第二部分的分母，需要借助一个

$$\binom{n+k}{k}$$

它来自于 a_n 表达式. 只要借助下面的式子：

$$2[1, 2, 3, \cdots, n]^3,$$

与其相乘，就得到

$$2[1, 2, 3, \cdots, n]^3 \binom{n+k}{k},$$

但是

$$\binom{n+k}{k}$$

已经存在，进而被代入了 $c_{n,k}$ 的第二部分中.

考虑构成

$$\frac{2[1,2,3,\cdots,n]^3\binom{n+k}{k}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$$

的基本表达式.

需要利用二项式的性质改变表达式中的分母，这可以通过下面的恒等式：

$$\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+m}{m}}=\frac{\binom{n+k}{k-m}}{\binom{k}{m}}$$

149 得到.

150 现在将表达式变成了

$$\frac{2[1,2,3,\cdots,n]^3\binom{n+k}{k-m}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}},$$

我们来看看 p 的幂指数，对于给定的出现在表达式的分子和分母中的每一个质数，如果能够证明在分母中的这个质数的幂指数都小于分子中的，那么就可以确保有一个整数表达式. 为此，不再需要项 $\binom{n+k}{k-m}$. 因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ord}_p([1,2,3,\cdots,n])&=\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor\Rightarrow\mathrm{Ord}_p([1,2,3,\cdots,n]^3)\\
&=3\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor,\\
\mathrm{Ord}_p\left[m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}\right]&=\mathrm{Ord}_p(m^3)+\mathrm{Ord}_p\left(\binom{n}{m}\right)+\mathrm{Ord}_p\left(\binom{k}{m}\right)\\
&\leqslant 3\mathrm{Ord}_p(m)+\left\{\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor-\mathrm{Ord}_p(m)\right\}+\left\{\left\lfloor\frac{\ln k}{\ln p}\right\rfloor-\mathrm{Ord}_p(m)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Ord}_p(m) + \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln p} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\ln m}{\ln p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\ln k}{\ln p} \right\rfloor.$$

必然地，$m \leqslant k \leqslant n$，所以分子中的三个部分中的每一个至少和分母中的三个部分中的每一个一样大. 质数 p 在分子中的幂指数比分母中的要大，因此这个表达式必定是一个整数，由此就得到了一列整数 a_n. 150

b_n的大小 151

对于足够大的 n，要找到 b_n的一个估计，为此需再回到所定义的递推关系式

$$n^3 b_n + (n-1)^3 b_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) b_{n-1},$$

重新记作

$$b_n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 b_{n-2} = \left(34 - \frac{51}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right) b_{n-1},$$

注意到，对于足够大的 n，有这样一个近似结果

$$b_n + b_{n-2} = 34 b_{n-1},$$

这是一个漂亮的、简单的、常系数的二阶递推关系式，通常可以有平凡解 $b_n = B^n$，其中 B 是某个常数. 在上面的递推表达式中代入 $b_n = B^n$，得到一个关于 B 的一元二次方程，即 $B^n + B^{n-2} = 34B^{n-1}$，或 $B^2 + 1 = 34B$，或 $B^2 - 34B + 1 = 0$. 利用求根公式，显然有一个正数解 $B = 17 + 12\sqrt{2}$；不是显然地，又有 $B = 17 + 12\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^4$. 那么对于足够大的 n，$b_n \sim (1+\sqrt{2})^{4n}$.

一个不是整数的整数

最后，假设 $\zeta(3)$ 是有理数，最低次项有一个分母 d，考虑表达式

$$\left| 2d\,[1, 2, 3, \cdots, n]^3 b_n \zeta(3) - 2d\,[1, 2, 3, \cdots, n]^3 a_n \right|,$$

把它记为

$$2d\,[1, 2, 3, \cdots, n]^3 \times b_n \times \left| \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} \right|,$$

对于足够大的 n，近似于

$$2d\,(\mathrm{e}^n)^3 \times (1+\sqrt{2})^{4n} \times \frac{1}{[(1+\sqrt{2})^{4n}]^2} = \frac{\mathrm{e}^{3n}}{(1+\sqrt{2})^{4n}} = \left(\frac{\mathrm{e}^3}{(1+\sqrt{2})^4}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

因为有这样的情形：

151 $$e^3 = 20.08553\cdots < 33.97056\cdots = (1+\sqrt{2})^4.$$

152 我们有一个正整数的表达式，最终发现其是小于 1 的. 显然，这些多种多样的估计的后果应该被考虑，当细节注意到了，一切就会发现是很好的.

用威廉·布莱克的话说：

现在证明的是曾经只能想象的.

在第三章中，我们给出了 e 和 π 的无理性的一个最初的证明，在第三章有更接近的，更精确的，更有说服力的观点. 不管是 18 世纪或 19 世纪或不论什么时候看，我们都注意到，一个重要结果的第一个证明通常不是最好的或者最简洁的，但是它留下了一些东西以供后人研究和参照，或是完全忽略最初的方法，而用自己的方法去替代它. 现在有哪一个证明比我们所展示的证明更为轻松安逸呢？

虽然数学家们是怀疑的，但阿培里的观点很快被接受，在演讲之后不久，荷兰数学家 Frits Beukers 使用了与阿培里的非常不同的思想给出了自己的证明，[1]其他人的证明（使用一些新的思想）也紧随其后. 其中一个是俄国数学家 Wadim Zudilin，我们可以从他的论文的简介中得到一些事情的看法：[2]

我们展现了一个新的初等的 $\zeta(3)$ 的无理性的证明，这基于 Yu. Nesterenko、T. Rivoal 和 K. Ball 最近的一些超几何思想和 Zeilberger 的创意伸缩的运算法则.

对于六页的严格论证，作者写道：

不管它的基本论点，我们的阿培里定理的证明看起来并不比原始的（也是初等的）的证明……或是（几乎初等的）Beukers 的证明简单，他利用了勒让德多项式和重积分.

152 数学上对通常的同义词“初等的”和“简单的”有细微的区别，“初等的”
153 说明不需要太多的数学知识就可以阅读，而“简单的”说明不需要太多的数学能力就能够理解. 对于这个结果和我们的目的来说，这两个形容词有了相同的意思，都是“复杂的”的反义词，其对非专业人士而言，正是需要争论的地方. 我们在阿培里证明的神秘之中离开 $\zeta(3)$，感兴趣的读者可以通过想象去解决它们.[3]

---

[1] F. Beukers, 1979, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. Lond. Math. Soc.* 11: 268-272.

[2] Wadim Zudilin, 2002, An elementary proof of Apéry's Theorem, E-print math. NT/0202159, 17 February.

[3] The above reference is a starting point, as is the following : Dirk Huylebrouck, 2001, Similarities in irrationality proofs for π, ln2, $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, *American Mathematical Monthly* 108 (3): 222-231.

另外，有些人可能希望通过证明与 Zeta 函数的无理性相关的其他结果去获得名声，那他们应该要意识到已经取得了一些超越阿培里的进展，值得注意的是下面的结果：

- 无限多的数 $\zeta(3)$，$\zeta(5)$，$\zeta(7)$，…是无理数.㊀
- 每组 $\zeta(s+2)$，$\zeta(s+4)$，…，$\zeta(8s-3)$，$\zeta(8s-1)$，其中 $s>1$ 是奇数，至少包含一个无理数.㊁
- 对上面的 $s=3$，有一个较强的结果是 $\zeta(5)$，$\zeta(7)$，$\zeta(9)$，$\zeta(11)$ 这四个数中至少有一个是无理数.㊂

我们希望这些结果被其他人阅读以后，还能有更多的进展.

我们将离开罗杰·阿培里的结果，它值得敬畏，阿培里已经长眠在巴黎的拉雪兹神父公墓的墓地里了. 靠近这个墓地很容易发现它的确切位置，被遮住的石头上的碑文的底部是

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\cdots\neq\frac{p}{q},$$

要得到这个结论又完全是另一回事了.㊃ *153*

㊀ K. Ball and T. Rivoal, 2001, Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zéta aux entiers impairs, *Invent. Math.* 146 (1): 193-207.

㊁ W. Zudilin, 2002, Irrtionality of values of the Riemann Zeta function, *Izv. Ross. Akad, Nauk Ser. Mat.* (*Russian Acad. Sci. Izv. Math.*) 66 (3).

㊂ Wadim Zudilin, 2004, Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, *Journal de the'orie des nombres de Bordeaux* 16 (1): 251-291.

㊃ 见第 286 页的附录 D.

第六章

从有理到超越

一个人就像是一个分数，他的实际才能好比分子，而他对自己的估计好比分母，分母越大，则分数的值越小.

—列夫·尼古拉耶维奇·托尔斯泰（1828—1910）

上一章中阿培里的证明过程的本质部分就是表达式 $|\zeta(3)-a_n/b_n|\sim 1/b_n^2$ 的运用，该表达式的左边包含了 $\zeta(3)$ 的一个有理逼近序列，而右边则是用来度量这些近似值的精确度的. 利用阿培里的证明，只需通过上面的表达式就可以获得所需要的误差，但实质上，他自己已经算出了一列的有理近似值 a_n/b_n，其精确度比前者的更高，而且确实是惊人的好. 如表 6.1 所示.

表 6.1

n	$\lvert\zeta(3)-a_n/b_n\rvert$
0	1.2020569
1	2.0569×10^{-3}
2	2.10864×10^{-6}
3	1.96774×10^{-9}
4	1.77747×10^{-12}
5	1.55431×10^{-15}
6	1.396211×10^{-18}
7	1.226386×10^{-21}
8	1.073800×10^{-24}
9	9.381550×10^{-28}

一个无理数能够多么“好”地被一个有理数逼近呢？如果这里的“好”指的是精确度，那么答案就是想要多好就有多好. 当然，在理论上，我们都希

望那些被选中的满足精确度的近似有理数能够大量存在，并且希望该无理数的小数点部分能与所想的一样短. 但如我们所见，这其中隐藏了一定的误差. 这里有两个选项，其一就是我们所说的足够精确，因为其中有一些有理数都比其他的数更有理化地趋近于所指定的无理数；另一种就是我们能够将所呈 *154*
现的重要差别体现出来. 在本章我们将学习关于丢番图逼近的历史、理论和实 *155*
践，丢番图逼近是研究无理数的有理逼近，对于我们来说，整个过程中，只研究正无理数的有理逼近. 我们也不得不承认有理数的有理逼近比麻烦的无理数的有理逼近要方便得多. 在这个过程中，我们将提出许多非常著名的结论；这些都是天成的，并且它里面的必然结果都曾被一些伟大的数学家研究过，接下来会提到其中的几个.

重要的观察

作为一个预备，通过一个较短的简易逻辑来看看问题的背景.

由于我们正在考虑一个实数 α 的有理近似值 p/q，就不可避免地对逼近中产生的误差 $|\alpha-p/q|$ 感兴趣，如果允许最大误差为 ε，则有表达式 $|\alpha-p/q|<\varepsilon$.

对于一个给定的实数 α，我们知道会有无限多个如此的有理近似值，但暂时假定反之也是成立的，即存在一个 α，使得只有有限多个有理近似值满足条件. 因为只有有限多个近似值，那么一定存在一个最接近 α 的. 不妨假设其为 p_1/q_1. 当然有 $|\alpha-p_1/q_1|<\varepsilon$，现在利用这个式子定义一个更精确的误差 $\delta=|\alpha-p_1/q_1|<\varepsilon$，必定有任何近似值都不可能包含在区间 $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$ 内. 也就是说，α 只能不超过一定限度的被近似，并不能随我们所想的那样去被逼近. 正是这个原因，我们 *155*
应去寻找一个满足任何误差要求的无限有理逼近；有限数恰恰不能充分好的满 *156*
足任意精度要求.

但这有限多个逼近值的想法能够实现吗？如果将逼近条件 $|\alpha-p/q|<\varepsilon$ 改写为 $|\alpha q-p|<q\varepsilon$，并用三角不等式，可以得到

$$|p|=|(p-q\alpha)+q\alpha|\leqslant|p-q\alpha|+|q\alpha|<q\varepsilon+q\alpha=q(\varepsilon+\alpha).$$

现在考虑限制有理近似值分母的大小，如 $q\leqslant n$；那么 p 也一定是有上限的，即 $p<n(\varepsilon+\alpha)$. 由于我们最多只有分母的 n 个取值，且对于其中的每一个分母的取值相应地最多有 $\lfloor n(\varepsilon+\alpha)\rfloor$ 个分子的取值，这样仅有有限多个这样的逼近值.

将上述后面的两个事实结合在一起，就可以得出这样的结论，如果有理近似值的分母大小是有所限制的，那么这个逼近过程就不能任意精确了；换一种说法就是，如果这个逼近过程能够任意精确，那么有理近似值的分母就得无上限的增大. 如果想得到 α 的有任意精度的有理近似值，就得需要足够大的分母.

在这个背景下，无论给出的是有理数还是无理数，我们将开始寻找其更为精确的有理近似. 逼近的复杂性将自然地由近似分数的分母大小和逼近精度来决定：相对于p'/q'，如果 $q|\alpha-p/q|<q'|\alpha-p'/q'|$，即 $|\alpha q-p|<|\alpha q'-p'|$，按照这个想法，我们就判定 p/q 能够更好地逼近于 α.

适度的误差

首先，来探讨一下，近似值的精确性是否取决于分母的大小. 如果有一个复杂的有理逼近，那么就希望有相当高的精度. 用符号表示就是，对任意给定的实数 α，我们能否期盼有无穷多的有理近似值 p/q，使其满足 $|\alpha-p/q|<1/q^2$? 换一种形式来描述就是，对某些整数 p，我们能否找到整数 q，使其满足 $|\alpha q-p|<1$?

156 无须多想，就可以相信这个答案是肯定的，有如下结论：

157 若 α 为任意实数，则存在无限多个有理数 p/q，使得 $|\alpha-p/q|<1/q$ 成立.

的确，再一次使用取整函数，对任意的整数 q，都能找到一个相应的 p，因为要使 $|\alpha-p/q|<1/q$ 成立，只要 $-1/q<\alpha-p/q<1/q$ 成立，从而只要 $\alpha q-1<p<\alpha q+1$ 成立，这样 $p=\lfloor \alpha q \rfloor$ 和 $p=\lfloor \alpha q+1 \rfloor$ 或 $\lfloor \alpha q \rfloor+1$ 都可以作为所求的整数解.

因此，我们可以明确地表述如下：

对任意的实数 α 和任意的正整数 q，有理数 $\lfloor \alpha q \rfloor/q$ 和 $\lfloor \alpha q+1 \rfloor/q$（不一定是最简分数形式）都能以小于 $1/q$ 的误差逼近 α.

让我们脱离一般理论，来考虑一个例子. 假设我们想通过分母分别为 9，37，113 和 1000000 的有理数来逼近 π. 表 6.2 给出了相应的计算结果，并且注意到$\frac{355}{113}$是非常精确的近似.

另外，图 6.1a、b 中的部分内容分别显示了 $\pi-\lfloor \pi q \rfloor/q$ 和 $\lfloor \pi q+1 \rfloor/q-\pi$ 随着 q 增长到 100 的散点变化；每个图中的叠加曲线描绘的就是 $1/q$ 的图像.

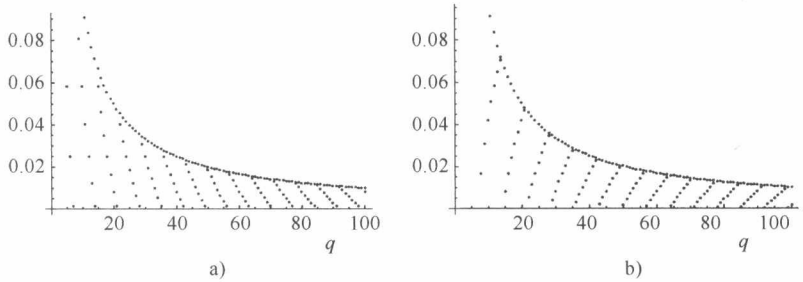


图　6.1

表　6.2

分母 q	近　似　值	近　似　分　数	误　　差
9	$\frac{\lfloor \pi\times 9\rfloor}{9}$ 或 $\frac{\lfloor \pi\times 9\rfloor+1}{9}$	$\frac{28}{9}$ 或 $\frac{29}{9}$	$0.030\cdots$ 或 $0.080\cdots\left(<\frac{1}{9}\right)$
37	$\frac{\lfloor \pi\times 37\rfloor}{37}$ 或 $\frac{\lfloor \pi\times 37\rfloor+1}{37}$	$\frac{116}{37}$ 或 $\frac{117}{37}$	$6.45\cdots\times 10^{-3}$ 或 $2.05\cdots\times 10^{-2}\left(<\frac{1}{37}\right)$
113	$\frac{\lfloor \pi\times 113\rfloor}{113}$ 或 $\frac{\lfloor \pi\times 113\rfloor+1}{113}$	$\frac{354}{113}$ 或 $\frac{355}{113}$	$8.8492\cdots\times 10^{-3}$ 或 $2.66\cdots\times 10^{-7}\left(<\frac{1}{113}\right)$
1000000	$\frac{\lfloor \pi\times 1000000\rfloor}{1000000}$ 或 $\frac{\lfloor \pi\times 1000000\rfloor+1}{1000000}$	$\frac{3141592}{1000000}$ 或 $\frac{3141593}{1000000}$	$6.53\cdots\times 10^{-7}$ 或 $3.46\cdots\times 10^{-7}\left(<\frac{1}{1000000}\right)$

相斥的有理数

结果对 α 是有理数还是无理数并无差别，因此让我们来看看相应的 π 的最著名的有理近似值$\frac{22}{7}$，如表 6.3 所示：更不用说其他差异，近似值$\frac{355}{113}$已经失去了它神奇的精确度. 我们必须承认，一个无理数的有理近似值和一个有理数的有

157 理近似值之间存在非常大的差异；这是不可避免的，因为有理逼近之间存在巨
158 大的差异，我们现在来讨论这个问题.

表 6.3

分母 q	近似值	近似分数	误差
9	$\frac{\lfloor 22\times 9\rfloor}{9}$ 或 $\frac{\lfloor 22\times 9\rfloor+1}{9}$	$\frac{28}{9}$ 或 $\frac{29}{9}$	$\frac{2}{63}$ 或 $\frac{5}{63}\left(<\frac{1}{9}\right)$
37	$\frac{\lfloor 22\times 37\rfloor}{37}$ 或 $\frac{\lfloor 22\times 37\rfloor+1}{37}$	$\frac{116}{37}$ 或 $\frac{117}{37}$	$\frac{2}{259}$ 或 $\frac{5}{259}\left(<\frac{1}{37}\right)$
113	$\frac{\lfloor 22\times 113\rfloor}{113}$ 或 $\frac{[22\times 113]+1}{113}$	$\frac{354}{113}$ 或 $\frac{355}{113}$	$\frac{1}{791}$ 或 $\frac{6}{791}\left(<\frac{1}{113}\right)$
1000000	$\frac{\lfloor 22\times 1000000\rfloor}{1000000}$ 或 $\frac{\lfloor 22\times 1000000\rfloor+1}{1000000}$	$\frac{3142857}{1000000}$ 或 $\frac{3142858}{1000000}$	$\frac{1}{7000000}$ 或 $\frac{3}{3500000}\left(<\frac{1}{1000000}\right)$

158

159 考察标准误差 $|\alpha-p/q|$，假设 $\alpha=a/b$ 是有理数. 那么

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|aq-bp|}{bq}.$$

但 $|aq-bp|$ 是一个严格的正整数，因此有 $|aq-bp|\geqslant 1$，从而有 $|\alpha-p/q|\geqslant 1/(bq)$，这个过程中产生的误差有下界；我们不能以任意的精度来逼近. 特别地，假设我们希望能通过把 q 扩大 k 倍来适度地减小前面的误差，即使得 $|\alpha-p/q|<1/(kq)$；这个观察告诉我们，一定要有 $k<b$.

例如，这意味着不存在有理数 $p/q\left(\neq\frac{22}{7}\right)$ 能够满足不等式 $|\frac{22}{7}-p/q|<1/(7q)$，然而，要使得 $|\pi-p/q|<1/(7q)$ 成立，却有无限多种可能，例如取 $p/q=\frac{3}{1}$，$\frac{22}{7}$，$\frac{25}{8}$，$\frac{47}{15}$，$\frac{69}{22}$，$\frac{113}{36}$，…，这里按分母从小到大的顺序排列. 但是，将这个倍数减为 6，则就如同开启了防洪闸门，$\frac{3}{1}$，$\frac{25}{8}$，$\frac{47}{15}$，$\frac{69}{22}$…都将率先通过；也就是说，例如取 $p/q=\frac{25}{8}$，就能够满足不等式 $\left|\frac{22}{7}-p/q\right|<1/(6q)$.

对 $\alpha=a/b$，其误差下界 $|\alpha-p/q|\geqslant 1/(bq)$ 仍然有更多可能的结果，因为它可以改写为

$$\alpha-\frac{p}{q}\geqslant\frac{1}{bq}\quad 或\quad \alpha-\frac{p}{q}\leqslant-\frac{1}{bq},$$

因此有

$$\frac{p}{q}\leqslant\alpha-\frac{1}{bq}\quad 或\quad \frac{p}{q}\geqslant\alpha+\frac{1}{bq}.$$

现在考虑减小误差，采用的方法不是通过扩大 q 的倍数，而是使其幂指数大于 1；也就是说，我们希望找到近似值，使其对某个 $\varepsilon>0$，有

$$|\alpha-p/q|<\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}.$$

159

上式可改写为

160

$$\alpha-\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}<\frac{p}{q}<\alpha+\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}.$$

要使上面的两个不等式都成立，必有

$$\alpha+\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}>\alpha+\frac{1}{bq}\quad 或\quad \alpha-\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}>\alpha-\frac{1}{bq}.$$

这两个不等式就化为 $1/q^{1+\varepsilon}>1/(bq)$，这就要求 $q^{\varepsilon}<b$；也就是 $q<b^{1/\varepsilon}$，因此 q 的可能取值为 $1, 2, 3, \cdots, \lfloor b^{\frac{1}{\varepsilon}}\rfloor$，并且这样的取值只有有限多个. 每个这样的 q，p 的取值都要满足条件

$$\frac{|aq-bp|}{bq}<\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}\quad 或\quad |aq-bp|<\frac{b}{q^{\varepsilon}},$$

化简得 $(a/b)\,q-1/q^{\varepsilon}<p<(a/b)\,q+1/q^{\varepsilon}$.

因此，只有有限多个 q 的值能够满足条件，并且其中每个 q 值都有有限个相应的 p 值；数学语言描述如下：

设 $\alpha=a/b$ 是一个有理数. 对任意的 $\varepsilon>0$，只有有限多个有理数 p/q 满足不等式

$$|\alpha-p/q|<1/(q^{1+\varepsilon}).\tag{1}$$

例如，如果我们回到对 $\frac{22}{7}$ 的逼近，并且取 $\varepsilon=0.9$，找出满足不等式 $\left|\frac{22}{7}-p/q\right|<1/q^{1.9}$ 的有理数，从而就有 $q=1, 2, 3, \cdots, \lfloor 7^{10/9}\rfloor=1, 2, 3, 4, 5,$

6，7，8，且其中每一个 q 的值都满足 $\frac{22}{7}q-1/q^{0.9}<p<\frac{22}{7}q+1/q^{0.9}$. 表 6.4 给出了计算结果，其中“×”代表没有满足这个不等式的 p 存在.

我们可能会感到惊讶，在有理数与无理数之间有如此的区别：有理数比无理数更加有效地排斥有理逼近. 现在来探讨这个事实.

在这么做之前，一定要注意到我们想获取这种有理逼近，那么 αq 从来不可能是整数. 这样对 $\alpha=a/b$，不等式变成 $|a/b-p/q|<1/q$，可改写为 $|aq/b-p|<1$，
160 要使得两个整数的差小于 1：唯一的可能就是 $aq/b=p$，因此有 $a/b=p/q$.

161 表 6.4

q	p	$\frac{p}{q}$	$\left\|\frac{22}{7}-\frac{p}{q}\right\|$ 的误差
1	3	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{7}\left(<\frac{1}{1^{1.9}}\right)$
2	6	$\frac{6}{2}$	$\frac{1}{7}\left(<\frac{1}{2^{1.9}}\right)$
3	×	×	×
4	×	×	×
5	×	×	×
6	19	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{42}\left(<\frac{1}{6^{1.9}}\right)$
7	22	$\frac{22}{7}$	不被允许
8	25	$\frac{25}{8}$	$\frac{1}{56}\left(<\frac{1}{8^{1.9}}\right)$

倍数误差

现在暂时回到任意实数的有理逼近：我们已经看到用近似分数分母的大小给定相当的误差范围，存在无限多个有理近似值. 接下来通过扩大近似分数分母的倍数来减小误差，不懈地寻求更高精确度的近似值，不加证明，我们能很容易地将误差减半，得到如下结论：

若 α 为任意实数，则存在无穷多个有理数 p/q，使得 $|\alpha-p/q|<1/(2q)$ 成立.

这个结论是正确的，因为对任意给定的实数 α 和正整数 q，闭区间 $\left[q\alpha-\frac{1}{2},\ q\alpha+\frac{1}{2}\right]$ 的长度为 1，所以在该区间内或者仅有一个整数，或者有两个整数，并且这两个整数恰好为区间的两个端点. 假设 p 是这样的一个整数，则有 $p-\left(q\alpha-\frac{1}{2}\right)<1$，且 $\left(q\alpha+\frac{1}{2}\right)-p<1$，因此有 $p-q\alpha<\frac{1}{2}$，同样有 $p-q\alpha>-\frac{1}{2}$. 合并两式，可得 $-\frac{1}{2}<p-q\alpha<\frac{1}{2}$，变形可得 $-1/(2q)<p/q-\alpha<1/(2q)$，因此就可得到 $|\alpha-p/q|<1/(2q)$.

要记住，有理数的有理逼近存在自然的障碍，我们能否提高近似分数分母的倍数的大小呢？ *161*

这个答案是肯定的，我们将发现为什么会在此碰到本章的第一个伟大的数学家：约翰·皮特·古斯塔夫·勒热纳·狄利克雷（1805—1859）. 在拿破仑战败之前他待在法国，战败之后回到了普鲁士，他的数学血统灿烂辉煌，牛津大学第 11 任萨维尔几何学教授亨利·史密斯这样评论到： *162*

这位杰出的几何学家的离世（1859 年 5 月 5 日）对算数科学来说是一个不可挽回的损失. 自从高斯时代以来，他的原始研究可能比起其他学者的进展贡献更大，至少，如果我们判断成果是依靠其重要性而不是数量的话. 在他的回忆录里提到，他曾将自己的成果用来给出算数理论的基本性质，这些内容出现在高斯的著作中时，是非常乏味和模糊的；并且他为在数学家中普及数论做了大量工作，而这是一种不可能获得太高赞誉的服务.[⊖]

没有什么能比他的“抽屉原理”更加重要的了，它貌似是数学中最强有力的一个原理. 现在以“鸽笼原理”之名而众所周知，其内容为：

如果 n 个鸽子住在 m 个鸽笼里，且 $n>m$，那么至少有两个鸽子住在同一个鸽笼里.

对于任何熟悉这个原理的读者，它的有用性是毋庸置疑的，而对那些新接触的读者来说，探寻这个问题，在他们面前将会是一个令人羡慕地兴奋而惊奇的旅程. 对于上面所说的第二类被诱惑者，考虑下面一个简单的例子：

⊖ H. J. S. Smith, 1965, *Report on the theory of numbers* (New York: Chelsea). (Also in *Collected papers of Henry John Stephen Smith*, vol. 1, 1894 (reprinted: New York: Chelsea, 1965).)

如果从1到8这8个整数中抽出五个数，那么其中必有两个数，其和等于9. 为了得到这个结论，先把1和8，2和7，3和6，4和5组成4个数对；这就是4个鸽笼. 要抽出来的5个数就是鸽子. 应用鸽笼原理，这5个数字中必有两个是
162 来自于同一个数对，由数对的构造可知其和必为9.

163 大约是1834年，狄利克雷在研究佩尔方程[⊖]中首次用到了这个原理，但我们转到1842年，当时他运用此原理证明了丢番图逼近中的第一个伟大的结果，即“狄利克雷的丢番图逼近定理”：

设 α 是一个实数，那么对任意的正整数 n，都存在正整数 p 和 q，且 $q\leqslant n$，满足 $|q\alpha-p|<1/(n+1)$.

该定理告诉我们，通过乘以一个适当整数，任何实数都能依我们所愿被一个整数逼近. 他给我们做了如下的展示.

首先，将半开区间 $[0,1)$ 等分成不相交的 $n+1$ 个半开子区间，每个子区间的长度都为 $1/n+1$，即

$$I_1=\left[0,\frac{1}{n+1}\right),\ I_2=\left[\frac{1}{n+1},\frac{2}{n+2}\right),\ I_3=\left[\frac{2}{n+1},\frac{3}{n+1}\right),\cdots,\ I_n=\left[\frac{n-1}{n+1},\frac{n}{n+1}\right),I_{n+1}=\left[\frac{n}{n+1},1\right).$$

现在考察数集 $S=[\{\alpha\},\{2\alpha\},\{3\alpha\},\cdots,\{n\alpha\}]$，其中 $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ 是 x 的小数部分.

首先，如果这 n 个数的集合中有重复的元素，则必存在 i，$j(i<j)$，使得 $\{i\alpha\}=\{j\alpha\}$，这意味着 $i\alpha-\lfloor i\alpha\rfloor=j\alpha-\lfloor j\alpha\rfloor$，所以 $\alpha=(\lfloor j\alpha\rfloor-\lfloor i\alpha\rfloor)/(j-i)$，且必为有理数. 显然，$j-i<n<n+1$，$(j-i)\alpha-(\lfloor j\alpha\rfloor-\lfloor i\alpha\rfloor)=0<1/(n+1)$，并且这个条件是自然满足的.

我们也许会猜测，当 α 是一个无理数时，也就意味着集合 S 中的元素都是不同的. 此过程需要讨论 $\{q\alpha\}$ 在区间 $[0,1)$ 中的两种极端可能，然后，用鸽笼原理来讨论其他情况.

若对某个 q，有 $\{q\alpha\}\in I_1$，那么 $|\{q\alpha\}|<1/(n+1)$，这意味着 $|q\alpha-\lfloor q\alpha\rfloor|<1/(n+1)$，所以取 $p=\lfloor q\alpha\rfloor$ 就得到结论.

⊖ P. G. L. Dirichlet, R. Dedekind translation by John Stillwell: *Lectures on Number Theory* (American Mathematical Society, 1999).

另一方面，若对某个 q，有 $\{q\alpha\} \in I_{n+1}$，那么 $|\{q\alpha\}-1<1/(n+1)$，这意味着 163
$|q\alpha-\lfloor q\alpha\rfloor-1|=|q\alpha-(\lfloor q\alpha\rfloor+1)|<1/(n+1)$，所以取 $p=\lfloor q\alpha\rfloor+1$ 就得到结论. 164

否则，S 中所有的 n 个元素都分布在剩下的 $n-1$ 个子区间 I_2，I_3，I_4，…，I_n 中. 运用鸽笼原理，至少有两个元素位于同一个子区间当中，令它们为 $\{q_1\alpha\}$，$\{q_2\alpha\}$，且 $q_1<q_2$，考察

$$\begin{aligned}|\{q_2\alpha\}-\{q_1\alpha\}| &= |(q_2\alpha-\lfloor q_2\alpha\rfloor)-|(q_1\alpha-\lfloor q_1\alpha\rfloor)\\ &= |(q_2-q_1)\alpha-(\lfloor q_2\alpha\rfloor-\lfloor q_1\alpha\rfloor)|<\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

此时取 $q=q_2-q_1$，$p=\lfloor q_2\alpha\rfloor-\lfloor q_1\alpha\rfloor$，则结论成立. 由构造过程可知 $q\leqslant n$.

在狄利克雷的结论中，将两边都除以 q 可以得到：

设 α 是任意实数，则对任意的正整数 n，都存在正整数 p 和 q，且 $q\leqslant n$，满足 $|\alpha-p/q|<1/((n+1)q)$.

由以上讨论，我们可以得到通过乘以 $n+1$ 使得用 p/q 逼近 α 的误差减小了，其中 $q\leqslant n$.

例如，$|\pi-p/q|<1/(101q)$ 具有唯一的解 $p=22$，$q=7$. 但是注意到，著名的用 $\frac{22}{7}$ 来做的逼近比这个来得更加精确，事实上，有 $\left|\pi-\frac{22}{7}\right|=1.2644\cdots\times10^{-3}$. 实际上，这个结论给了我们更多的启示.

从倍数到幂

q 的大小限制为通过扩大其倍数减少误差和提高幂指数减少误差之间开启了一扇门：对 $q\leqslant n<n+1$，有如下结果：

设 α 是一个实数，那么存在有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/q^2$.

因此，我们可以对 q 的限度要求得更多，而不仅仅扩大其倍数，也可以对它进行平方；然而，我们并没提及备受重视的近似值个数的无穷性. 当然，这也是不存在的，因为我们知道，对有理数的有理逼近这就不是事实.

然而，如果 α 是一个无理数，假设只存在有限多个近似值 p_1/q_1，p_2/q_2， 164
p_3/q_3，…，p_k/q_k，满足 $|\alpha-p/q|<1/q^2$. 由于 α 是无理数，$|\alpha-p_r/q_r|>0$，所以存 165
在一个正整数 n，使得对所有的 $r=1$，2，3，…，k，都有 $|\alpha-p_r/q_r|>1/(n+1)$ 成立.

然而根据狄利克雷的结论，对于这个 n，还有另外一个有理数 $p/q(q\leqslant n)$，使得 $|\alpha-p/q|<1/((n+1)q)<1/q^2$ 成立，这是矛盾的.

我们必然可以得到如下结论：

若 α 是一个无理数，则存在无限多个有理数 p/q，满足

$$|\alpha-p/q|<1/q^2. \tag{2}$$

165 并且这里也明确地给出了有理数和无理数的一个显然区别：任意的 $\varepsilon>0$，对于一个有理数 α，仅有有限多个有理近似值的误差的阶是 $q^{1+\varepsilon}$，然而对任意的无理数 α，有无限多个有理近似值的误差的阶是 q^2.

把这个结论和第 160 页的结论（1）结合起来，可以得到：

一个实数 α 是无理数当且仅当存在无限多个有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/q^2$.

至此，就得到了无理性的一个特征.

在表 6.5 中，我们首次得到黄金比例 φ 的有理近似值 p/q，精确到的误差限度为 $1/q^2$，读者洞察到出现了斐波那契数列. 表 6.6 提供了关于 $\sqrt{2}$ 的逼近的同样信息，给出了一列读者期望的近似值.

表 6.5

q	p	$\frac{p}{q}$	$\left\lvert\varphi-\frac{p}{q}\right\rvert$ 的误差
1	1	$\frac{1}{1}$	$0.618\cdots\left(<\frac{1}{1^2}\right)$
1	2	$\frac{2}{1}$	$0.381\cdots\left(<\frac{1}{1^2}\right)$
2	3	$\frac{3}{2}$	$0.118\cdots\left(<\frac{1}{2^2}\right)$
3	5	$\frac{5}{3}$	$0.048\cdots\left(<\frac{1}{3^2}\right)$
5	8	$\frac{8}{5}$	$0.018\cdots\left(<\frac{1}{5^2}\right)$
8	13	$\frac{13}{8}$	$0.0069\cdots\left(<\frac{1}{8^2}\right)$
13	21	$\frac{21}{31}$	$0.026\cdots\left(<\frac{1}{13^2}\right)$

表　6.6

q	p	$\frac{p}{q}$	$\left\|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right\|$ 的误差
2	3	$\frac{3}{2}$	$0.085\cdots\left(<\frac{1}{2^2}\right)$
5	7	$\frac{7}{5}$	$0.014\cdots\left(<\frac{1}{5^2}\right)$
12	17	$\frac{17}{12}$	$0.0024\cdots\left(<\frac{1}{12^2}\right)$
29	41	$\frac{41}{29}$	$0.00042\cdots\left(<\frac{1}{29^2}\right)$
70	99	$\frac{99}{70}$	$0.000072\cdots\left(<\frac{1}{70^2}\right)$
169	239	$\frac{239}{169}$	$0.000012\cdots\left(<\frac{1}{169^2}\right)$
408	577	$\frac{577}{408}$	$0.0000021\cdots\left(<\frac{1}{408^2}\right)$

基于这个近似有理数的分母，我们追求更高的近似精度，用明辨的眼光来研究这些数，现在，第一个结果的微小差别使得对第二个结果的要求更高.

算数的题外话

为了能进一步研究，数字需要三个属性. *166*

1. 关于整数的算数的基本结果是“贝佐特等式”，它归功于 18 世纪的法国数学家艾蒂安·贝佐特（虽然可能与几个更早的发明者有优先权之争）. 用它的最简单的形式描述就是：两个正整数 a 和 b 的最大公因数，$GCD(a,b)$，是这两 *166* 个整数的线性组合；即存在整数 r 和 s，使得 $GCD(a,b)=br+as$ 成立. *167*

在这里我们不去证明它（这是欧几里得算法的一个直接结果），但我们对系数 r 和 s 的性质非常感兴趣：

- 首先，由于对任意的整数 k，都有 $br+as=(r+ka)\,b+(s-kb)\,a$，因此对每一

对 a 和 b，都存在无限多对系数.

• 其次，再次运用前面的观察方法，我们可以把 r 中 a 的倍数部分计算到 k 中，同样也可以把 b 的倍数部分放到 k 中，因此可以得到系数 $r<a$ 和 $s<b$.

• 再次，如果重写公式 $GCD(a,b)=br-as$，那么这两个系数都是正数. 从而就有 $1\leqslant r<a$，$1\leqslant s<b$.

2. 所有的无理数组成一个稠密集，这意味着任何两个实数之间都存在一个无理数；也就是说，如果 α 和 β 是任意两个实数，且 $\alpha<\beta$，那么存在一个无理数 γ，满足 $\alpha<\gamma<\beta$. 这里我们将要去证明它，部分原因是这个最微妙的欧多克索斯公理的迷惑力，该公理作为欧几里得《几何原本》第五卷的定义 4 出现，在第一章也有提起过. 这里再将它复述一遍：

两个量之间被说成有一个比，如果其中一个能通过扩大倍数而超过另一个.

为了证明该结论，假设 $I>1$ 是任意的无理数. 对正数 $\beta-\alpha$ 和 I 运用欧多克索斯公理，得出存在一个正整数 n 满足 $n(\beta-\alpha)>I$ 或 $n\beta>n\alpha+1$. 现在定义正整数 $m=\lfloor n\alpha\rfloor$. 由于 $m\leqslant n\alpha$，则一定有 $m+I\leqslant n\alpha+I$，结合上式，有 $m+I\leqslant n\alpha+I<n\beta$，因此有 $m+I<n\beta$. 由于 m 是一个小于等于 $n\alpha$ 的最大整数，且有 $I>1$，则一定有 $m+I>n\alpha$，这使得 $n\alpha<m+I<n\beta$ 和 $\alpha<m/n+(1/n)I<\beta$ 都成立. 由于 I 是无理数，所以 $m/n+(1/n)I$ 也是无理数，结论是成立的.

3. 上述的两个实数也可能都是有理数，任意给出一个无理数 α，能使它的两边都是有理数，即有 $p/q<\alpha<r/s$（其中的分数为最简分数）. 我们接下来证明，
167 能使得选择出来的分数满足条件 $ps-qr=1$.

168 因此，对给定的一个无理数 α，考虑满足 $|\alpha-u'/v'|<\varepsilon$ 的有理数 u'/v' 的集合，限定分母 $v'\leqslant n$，其中 n 是某固定的正整数，从而确保了如此的 u'/v' 的数量是有限的（正如我们在本章开头看到的那样）. 对于这个集合中的 u'/v'，假设 $|\alpha-u/v|$ 取到最小值，且 u/v 是最简分数，当然，也有 $v\leqslant n$. 这样有两种情况.

若 $u/v<\alpha$，取 u/v 作为左边的分数 p/q，并且据如下构造右边的分数. 利用贝佐特等式，存在整数 $r(1\leqslant r<p)$ 和 $s(1\leqslant s<q)$，满足 $GCD(p,q)=qr-ps$，由于 $u/v=p/q$ 是最简分数，则有 $GCD(p,q)=qr-ps=1$. 因为 $qr-ps>0$，$p/q<r/s$，又因为当 $q\leqslant n$，$s<q\leqslant n$ 时，$|\alpha-p/q|$ 是最小值，则一定有 $|\alpha-p/q|<|\alpha-r/s|$. 这就意味着 r/s 大于 p/q，且 $r/s\notin(p/q,\alpha)$，所以它必大于 α. r/s 就是所求的分数.

否则，$u/v>\alpha$，现在取 u/v 是右边的分数 r/s. 此时求解 $qr-ps=1$ 中的 p 和 q，其中 $1\leqslant p<r$，$1\leqslant q<s$，通过同样的讨论可以推出这个 p/q 就是所求的分数.

不难得到这样的论断：一定存在无数对这样的分数.

再论倍数

对于那些在逼近的论证中没有出现的近似有理数，是时候问一个我们期望得到的自然的问题了. 给出一个无理数 α，能否找到它的有理近似值，使得对 $k>1$ 都满足 $|\alpha-p/q|<1/kq^2$？并且这样的近似值存在多少个呢？上面的最后结论给了我们一个答案.

对无理数 α，我们可以在无数多对的不可约分数当中找到两个，使其满足 $p/q<\alpha<r/s$，其中 $qr-ps=1$.

现在定义 $\mu=\min\{q^2(\alpha-p/q)\ ,\ s^2(r/s-\alpha)\}$.

那么由定义，有 $\mu\leqslant q^2(\alpha-p/q)$ 和 $\mu\leqslant s^2(r/s-\alpha)$，因此就有 $\mu/q^2\leqslant\alpha-p/q$，$\mu/s^2\leqslant r/s-\alpha$，将上面两式的两边相加，就有 $\mu/q^2+\mu/s^2\leqslant r/s-p/q$ 或 $\mu(1/q^2+1/s^2)\leqslant r/s-p/q=(qr-ps)/qs=1/qs$. 上式两边同时乘以 qs，就得到 $\mu(s/q+q/s)\leqslant 1$. *168*

在这里，我们将上式视为变量 $x=s/q$ 的方程，改写为 $x+1/x\leqslant 1/\mu$. 但对任意的 $x>0$ 都有 $x+1/x\geqslant 2$，因此有 $2\leqslant x+1/x\leqslant 1/\mu$ 且 $\mu\leqslant\dfrac{1}{2}$. *169*

这就意味着 $\mu=\min\{q^2(\alpha-p/q)\ ,\ s^2(r/s-\alpha)\}\leqslant\dfrac{1}{2}$，从而有下列简单的陈述：

每个无理数 α 都存在无数多个有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/(2q^2)$.

收紧这个网

误差已经变得减小了，其分母并不是夸张地扩大到了狄利克雷所说的 $n+1$ 倍，而仅仅只是扩大了 2 倍；这使得形势越来越难判定了. 19 世纪德国数学家阿道夫·赫维茨（1859—1919）提到了这个问题，这是本章中碰到的第二位伟大的数学家.

赫维茨是菲利克斯·克莱因的一名学生，他也是大卫·希尔伯特和赫尔曼·闵尔科夫斯基的老师. 毫无悬念，赫维茨是享有较高声誉的数学家. 他写有超过 100 篇研究论文，继他之后，出现了大量的数学研究主题和进展，他的著作对后世有很高的学术价值，并且，就数论而言，其讣告中言简意赅的概述

如下[1]：

同样令人奇怪的是，他关于连分数和无理数的近似表示的论文也是原创性的. 在一些基本原则下，他所有的代数工作都留有罕见洞察力的痕迹.

这里我们将要看看他在 1891 年的结果[2]，对q^2的倍数他给出了一个非常奇怪的下界，我们将其分成两部分；首先，将 2 倍推进为$\sqrt{5}$倍：

169 对每一个无理数 α，都存在无数多个有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/(\sqrt{5}q^2)$.

170 利用上述对 2 倍时的讨论，我们不需要过多地修正获得结果的过程.

由 α 的无理性，在无数对有理近似值中选择两个不可约分数，使其满足 $p/q<\alpha<r/s$，其中 $qr-ps=1$. 从这两个分数出发，构造第三个分数，其实就是位于它们中间的数，定义为 $u/v=(p+r)/(q+s)$，并且它有两个相关性质：

- 它位于这两个分数之间，即

$$\frac{p}{q}<\frac{u}{v}<\frac{r}{s} \quad 或 \quad \frac{p}{q}<\frac{p+r}{q+s}<\frac{r}{s};$$

- $qu-pv=1$ 和 $rv-su=1$.

第一个结论成立，因为

$$\frac{p+r}{q+s}-\frac{p}{q}=\frac{pq+qr-pq-ps}{q(q+s)}=\frac{qr-ps}{q(q+s)}=\frac{1}{q+s}\left(r-\frac{ps}{q}\right)=\frac{s}{q+s}\left(\frac{r}{s}-\frac{p}{q}\right)>0$$

(同理有 $r/s-(p+r)/(q+s)>0$.

第二个结论成立的原因是

$$qu-pv=q(p+r)-p(q+s)=qr-ps=1,$$

并且

$$rv-su=r(q+s)-s(p+r)=qr-ps=1.$$

此时，由于 α 是无理数，$u/v\neq\alpha$，因此 $u/v>\alpha$ 或 $u/v<\alpha$. 我们接下来讨论 $u/v>\alpha$的这种情形，另一种情形几乎是一样的.

定义 $\mu=\min\{q^2(\alpha-p/q),\ s^2(r/s-\alpha),\ v^2(u/v-\alpha)\}$. 这就意味着

$$\mu\leqslant q^2\left(\alpha-\frac{p}{q}\right),\mu\leqslant s^2\left(\frac{r}{s}-\alpha\right) 和 \mu\leqslant v^2\left(\frac{u}{v}-\alpha\right),$$

---

[1] *Proc. Lond Math. Soc.* 20: xlviii-liv (1922).

[2] A. Hurwitz, 1891, Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, *Math. Ann.* 39 : 279-284.

因此

$$\frac{\mu}{q^2} \leqslant \alpha - \frac{p}{q},\ \frac{\mu}{s^2} \leqslant \frac{r}{s} - \alpha \text{ 和} \frac{\mu}{v^2} \leqslant \frac{u}{v} - \alpha, \qquad 170$$

把上式中的第一个与第二个相加，第一个与第三个相加，整理得 171

$$\frac{s}{q} + \frac{q}{s} \leqslant \frac{1}{\mu} \text{ 和} \frac{v}{q} + \frac{q}{v} \leqslant \frac{1}{\mu}.$$

现在我们回到函数 $x+1/x$，图 6.2 中给出了其图像和高度为 $1/\mu$ 的水平线. 它们的两个交点分别为 $x=x_1$ 和 $x=x_2(x_1<x_2)$，则一定有 $x=s/q$ 和 $x=v/q$ 位于区间 $[x_1, x_2]$ 中，并且 x_1 和 x_2 是方程 $x+1/x=1/\mu$ 或 $x^2-(1/\mu)x+1=0$ 的根.

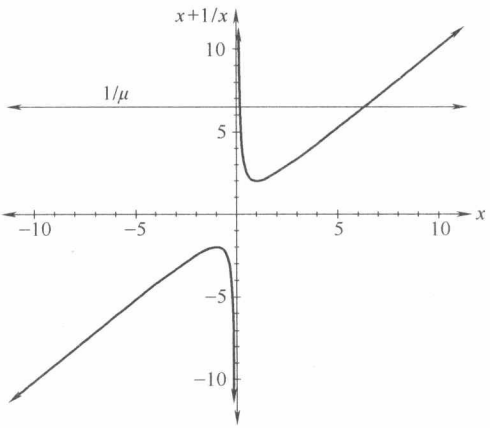


图　6.2

利用二次方程的基本理论，有 $x_1+x_2=1/\mu$，$x_1x_2=1$，这就意味着 $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1/\mu^2-4$. 由于 $v=q+s$，因此有 $v/q=1+s/q$，就可以得到 $x_2-x_1 \geqslant v/q-s/q=1$. 联立这些结果，有 $1/\mu^2-4 \geqslant 1$，即 $\mu \leqslant 1/\sqrt{5}$.

所有这些说明，对任意的无理数 α，不等式 $|\alpha-p/q|<1/(\sqrt{5}q^2)$ 都有无限多个解. 在这种情形下，如果把原不等式用 $q|\alpha q-p|<1/\sqrt{5}$ 来表示，则 p 的值就限制在这个不等式的解之中，并得到 $q\|\alpha q\|<1/\sqrt{5}$，其中 $\|\cdots\|$ 表示四舍五入取整函数. 这个结论可以概括如下：

对任意的无理数 α，存在无限多个整数 q，满足 $q\|\alpha q\|<1/\sqrt{5}$. 171

图 6.3 给出了 $q\|\varphi q\|$ 的示意图，其中 φ 是黄金分割比，其图像揭示了这个 172
函数的奇特本质；尽管如此，我们保证有无限多个 q 的值，使其图中的点在

$1/\sqrt{5}$以下. 读者可能希望去验证小于 1000000 的 q 值，即

$$\{1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377,\ 987,\ 2584,\ 6765,$$
$$17711,\ 46368,\ 121393,\ 317811,\ 832040\}.$$

最后，有了这个再形成的过程，对于那些感觉数学轻松的人，我们对其可以呈现丢番图逼近理论中最著名的一个猜想.

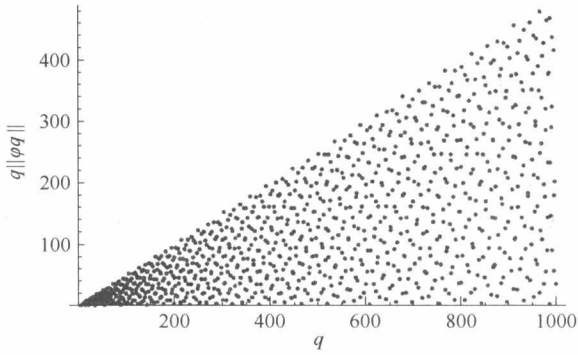


图 6.3

我们现在能很好地理解这样的事实，对任意的无理数 α，都存在无限多个整数 q，满足 $q\|\alpha q\|<1$. 这显然暗示着，对任意的两个无理数 α 与 β，都存在无限多个整数 q，使得 $q\|\alpha q\|\ \|\beta q\|<1$. 图 6.4 给出了当 $\alpha=\varphi$ 和 $\beta=\pi$ 时，关于 q 的这个函数的近乎迷人的形态，并且在 20 世纪 30 年代约翰·艾德森·李特尔伍德给出了一个几乎不可能成立的猜想：$\lim\limits_{q\to\infty}\inf\ q\|\alpha q\|\ \|\beta q\|=0$. 静候佳音!

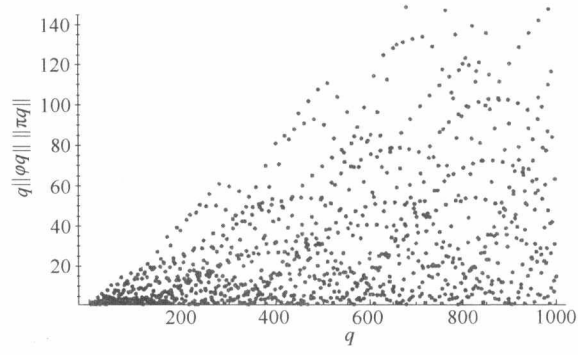


图 6.4

无理的阶梯

到目前为止，我们知道有理数与无理数的有理逼近过程是有一定区别的；用赫维茨的第二个结论，我们开始对无理数本身进行区分. 用文字表述就是，这 *172*
个不等式是严格的；用符号语言来说就是：

如果 $c>\sqrt{5}$，那么存在无理数 α，使得不等式 $|\alpha-p/q|<1/(cq^2)$ 成立的 p/q *173*
的值只有有限多个.

实际上，这样的无理数之一就是黄金分割比 $\alpha=\varphi=(1+\sqrt{5})/2$.

来看看这个事实，对某个 $c>\sqrt{5}$ 的常数，假设使不等式 $|(1+\sqrt{5})/2-p/q|<1/(cq^2)$ 成立的 p 和 q 有无数多对，建立方程 $(1+\sqrt{5})/2-p/q=1/(xq^2)$，定义以 p 和 q 为函数的变量 x，则一定有 $|x|>c>\sqrt{5}$. 改写这个方程为 $1/(xq)-\sqrt{5}q/2=q/2-p$，再两边平方有 $(1/(xq)-\sqrt{5}q/2)^2=(q/2-p)^2$，因此有 $1/(x^2q^2)-\sqrt{5}/x+5q^2/4=q^2/4-pq+p^2$，进而可得 $p^2-pq-q^2=1/(x^2q^2)-\sqrt{5}/x$ 和 $|p^2-pq-q^2|=|1/(x^2q^2)-\sqrt{5}/x|$.

上式的左边是一个整数，因此右边肯定也是一个整数，但是

$$\left|\frac{1}{x^2q^2}-\frac{\sqrt{5}}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x^2q^2}\right|+\left|\frac{\sqrt{5}}{x}\right|<\frac{1}{q^2}+\frac{\sqrt{5}}{c},$$

由 $\frac{\sqrt{5}}{c}<1$，我们可以选择无限多个充分大的 q，使得不等式的整个右边小于 1，对如此的 q，有 $|p^2-pq-q^2|$ 小于 1，所以 $p^2-pq-q^2=0$，即 $(p/q)^2-p/q-1=0$，这恰恰是黄金分割比自身的定义方程；从而 $p/q=(1+\sqrt{5})/2=\varphi$. 我们所谓的“有理”逼近不得不是一个无理数，并且把它构造出来了. *173*

对此，将黄金分割比归在第一类“尴尬”的无理数中，也就是说，这是第 *174*
一个不允许 q^2 的倍数增长到超过 $\sqrt{5}$ 的数. 在这类数中，只有这一个数吗？除了它，是否存在其他的“尴尬”无理数，使其能够允许通过扩大 q^2 的倍数而减小误差限？这两个问题的答案都是否定的；存在无限多个像黄金分割比一样的“尴尬”无理数，并有存在无限多个数分享着无限多更小的“尴尬”度. 的确，这是一个非常复杂的事情. 为了看一下它有多复杂，我们先从分母的倍数开始，

这些倍数称作为拉格朗日谱，

$$\left\{\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \frac{\sqrt{221}}{5},\ \frac{\sqrt{1517}}{13},\ \cdots\right\},$$

与之相应的“尴尬”数为

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1+\sqrt{2},\ \frac{-9+\sqrt{221}}{14},\ \frac{-23+\sqrt{1517}}{38},\ \cdots\right\}.$$

由此可以得到：

- 对任意除了 φ 之外的无理数 α，都有无限多个有理数 p/q 满足 $|\alpha-p/q|<1/(cq^2)$，其中 $c>\sqrt{5}$.
- 对任意除了 φ 和 $-1+\sqrt{2}$ 之外的无理数 α，都有无限多个有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/(cq^2)$，其中 $c>\sqrt{8}$.
- 对任意除了 φ，$-1+\sqrt{2}$ 和 $(-9+\sqrt{221})/14$ 之外的无理数 α，都有无限多个有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/(cq^2)$，其中 $c>\sqrt{221}/5$.
- 对任意除了 φ，$-1+\sqrt{2}$，$(-9+\sqrt{221})/14$ 和 $(-23+\sqrt{1517})/38$ 之外的无理数 α，都有无限多个有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/(c\,q^2)$，其中 $c>\sqrt{1517}/13$，等等.

对于上述的谱，除了注意到存在大量的二次根式和二次无理形式外，我们对其他形式的这种数并不清楚；我们还注意到，当发现这个形式的数时，对其知道的也不多. 为了实现了解这些数的目的，我们将实数轴分成四个区间做如下讨论：

174 $\{x:\ x<\sqrt{5}\}$，这个区间中不包含谱中的元.

175 $\{x:\ \sqrt{5}\leqslant x<3\}$，这个区间中有可数无穷多个谱中的元，每一个元由下述形式给出.

这个无限序列的一般表达式是 $(\sqrt{9w^2-4})/w$，其中 w 定义为丢番图方程

$$u^2+v^2+\omega^2=3uvw$$

的正整数解 $\{u,\ v,\ w\}$ 中的最大值. 虽然这并不明显，但丢番图方程的解序列依次是

$$\{u,v,w\}\in\{(1,1,1)\ ,(1,1,2)\ ,(1,2,5)\ ,(1,5,13)\ ,(2,5,29)\ ,\cdots\},$$

由此构成的马尔可夫数 w 为

$$\{1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 29,\ 34,\ \cdots\}.$$

将它们代到公式里去，就可以看到由其生成的误差限序列.

$\{x:\ 3\leqslant x<\theta\}$，这个区间是当前研究的一个主题，部分成果如下：

- $\theta=4+\dfrac{253589820+283748\sqrt{462}}{491993569}$，是由 G. 弗里曼[㊀]证明出来的，因此称其为弗里曼常数是恰当的.
- 如果 α 不是二次无理数，那么相应的 $c\geqslant 3$.
- 对于 $c=3$，存在不可数无限多个 α.
- 奥斯卡·佩龙证得，$(\sqrt{12},\ \sqrt{13})$ 和 $\left(\sqrt{13},\ \dfrac{65+9\sqrt{3}}{22}\right)$ 是最大的间隙，即对于 $c\in(\sqrt{12},\ \sqrt{13})$ 或 $c\in\left(\sqrt{13},\ \dfrac{65+9\sqrt{3}}{22}\right)$，不存在 α.（还存在其他的间隙，例如 $\left(\sqrt{\dfrac{480}{7}},\ \sqrt{10}\right)$）.
- 当 $c=\sqrt{13}$ 时，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$（或与它等价的），然而，对于 $c=\sqrt{12}$，存在不可数多个不等价的 α.

175

$\{x:\ x\geqslant\theta\}$，整个半实轴都在谱中. 该区间被称为霍尔射线，因为是由马歇尔·霍尔[㊁]证明的而得名. 图 6.5 展示了这些情况.

176

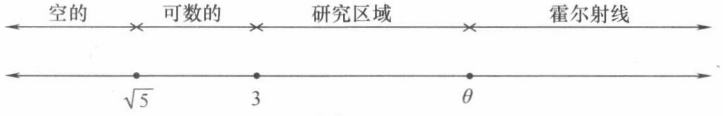


图　6.5

最后，前面曾经提到过的等价这个概念是什么呢？可以定义如下：

两个实数 α 和 β 被说成是等价的，如果存在整数 p，q，r，s，且 $|ps-qr|=1$，使得 $\beta=(p\alpha+q)/(r\alpha+s)$ 成立.

这仍然不够明确，但在技术意义上定义了一种等价关系[㊂]，并将实数分成了无限多个的不相交等价类，其中一类是有理集，并且任意两个等价的数有相同程度

㊀ G. Freiman, 1975, *Diophantine approximations and the geometry of numbers*, (*Markov's problem*) (Kalinin. Gosudarstv. University).

㊁ Marshall Hall Jr, 1947, On the sum and product of continued fractions, *Ann. of Math.* (2), 48: 966-993.

㊂ 见第 289 页附录 E.

的有理逼近.

二次无理数

我们正沉浸在数学的深水中，里面的结论是令人难以相信的，证明过程也是让人难以理解的. 如果离水面越近，就越能坚定地把握这些问题，当将一些思想应用于一种特殊的无理数（二次无理数）时，我们就能看清这些思想的本质；所谓一个二次无理数就是整系数二次方程的根.

因此，令 α 为一个二次无理数，假设其定义方程为 $ax^2+bx+c=0$，则关于 x 的判别式为 $\Delta_x=b^2-4ac$. 首先，由 α 是一个无理数，从而对整数表示的二次式 Δ_x 是有限制的. 很显然，它不能是一个完全平方数. 它也不能是 $4n+2$ 的形式，
176 如果这样的话，将意味着 b^2 是偶数，从而 $b=2m$ 也一定是偶数，这使得 $4n+2=4m^2-4ac$ 或 $1=2m^2-2ac-2n$，但对 m，a，c，n 都是整数来说，这显然是不可能
177 的；同样的，它也不能是 $4n+3$ 的形式. 对 $\Delta_x=4n$ 或 $\Delta_x=4n+1$ 不存在这样的矛盾，所以判别式是 $4n$ 或 $4n+1$ 形式的正整数，并且它们还不能是完全平方数，这样的数是

$$\{5,8,12,13,17,20,21,\cdots\}.$$

现在来展示，做了变量替换 $w=(px+q)/(rx+s)$ 后，所得到的二次方程的判别式仍为 Δ_x.

我们能简单的验证，这个复合的（双线性）变换能够分解成三个更简单的变换，依次写为

$$x\to rx+s,x\to\frac{1}{x},x\to\frac{p}{r}-\frac{ps-qr}{r}x.$$

限制 $|ps-qr|=1$，可以得到

$$x\to rx+s,x\to\frac{1}{x},x\to\frac{p}{r}\pm\frac{1}{r}x.$$

现在，我们分别考虑每个变换对原来二次方程的判别式的影响，进而获得其组合后的情况.

对第一个变换，由 $y=rx+s$，得 $x=(y-s)/r$，把它代入到原始的二次方程，可以得到

$$a\left(\frac{y-s}{r}\right)^2+b\left(\frac{y-s}{r}\right)+c=0,$$

或 $a(y-s)^2+br(y-s)+cr^2=0$，最后整理可得一个新的二次方程

$$ay^2+(br-2as)y+(as^2-brs+cr^2)=0,$$

它的判别式表示为

$$\begin{aligned}\Delta_y&=(br-2as)^2-4a(as^2-brs+cr^2)\\&=b^2r^2-4abrs+4a^2s^2-4a^2s^2+4abrs-4acr^2\\&=b^2r^2-4acr^2=r^2(b^2-4ac)=r^2\Delta_x.\end{aligned}$$

177

对变换 $z=1/y$，即 $y=1/z$，把它代入到上面产生的二次方程，可以得到另一个二次方程 178

$$a\left(\frac{1}{z}\right)^2+(br-2as)\frac{1}{z}+(as^2-brs+cr^2)=0,$$

或 $(as^2-brs+cr^2)z^2+(br-2as)z+a=0$，它具有整系数，很容易看到其判别式 $\Delta_z=\Delta_y$.

对于最后一个变换 $\omega=p/r\pm(1/r)z$，它就是第一个变换的重复，生成的最后一个整系数的二次方程的判别式为 $\Delta_w=(1/r^2)\Delta_z$. 最后这个二次方程的判别式是在对原方程做组合变换下得到的，有

$$\Delta_w=\frac{1}{r^2}\Delta_z=\frac{1}{r^2}\Delta_y=\frac{1}{r^2}r^2\Delta_x=\Delta_x.$$

这个完美的事实给了我们什么启示呢？

对于根 α，此时这个二次方程所对应的二次函数定义为

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$，其中 β 是二次方程的另一个（无理数）根.

现在，假设 p/q 是 α 的一个有理近似值，满足 $|\alpha-p/q|<1/(cq^2)$，则利用三角不等式，有

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|&=\left|a\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)\left(\frac{p}{q}-\beta\right)\right|=\left|\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)\right|\left|a\left(\frac{p}{q}-\beta\right)\right|\\&=\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\left|a\left(\beta-\frac{p}{q}\right)\right|\\&=\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\left|a\left(\beta-\alpha+\alpha-\frac{p}{q}\right)\right|\\&=\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\left|a(\beta-\alpha)+a\left(\alpha-\frac{p}{q}\right)\right|\\&<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\left\{|a(\beta-\alpha)|+\left|a\left(\alpha-\frac{p}{q}\right)\right|\right\}\\&=\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\left\{|a(\alpha-\beta)|+\left|a\left(\alpha-\frac{p}{q}\right)\right|\right\}.\end{aligned}$$

我们可以用根与系数的关系 $\alpha+\beta=-b/a$ 和 $\alpha\beta=c/a$，将判别式写成关于这两根的一个形式，即

178

$$\Delta=b^2-4ac=a^2\left(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right)=a^2((\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta)=a^2(\alpha-\beta)^2.$$

这就意味着

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|<\frac{1}{cq^2}\left(\sqrt{\Delta}+\frac{|a|}{cq^2}\right).$$

但是，也有

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\left(\frac{p}{q}\right)+c\right|=\left|\frac{ap^2+bpq+cq^2}{q^2}\right|$$

$$=\frac{|ap^2+bpq+cq^2|}{q^2}\geqslant\frac{1}{q^2},$$

因为其中的分子一定是正整数.

联立这两个关于 $|f(p/q)|$ 的不等式，可以得到

$$\frac{1}{cq^2}\left(\sqrt{\Delta}+\frac{|a|}{cq^2}\right)>\frac{1}{q^2},$$

因此可以得到 $\sqrt{\Delta}+|a|/(cq^2)>c$，最后可得 $cq^2(c-\sqrt{\Delta})<|a|$.

现在，如果 $c>\sqrt{\Delta}$，当 q 无限增大时，左边不等式也是无界的，然而不等式的右边有固定值 $|a|$，这显然是不可能的. 唯一可能的就是 q 是有上界的，这导致近似分数的分母仅有有限多个可能的取值，因此，分子也只有有限多个，正如我们前面所看到的.

总结如下：

如果 α 是一个二次无理数，并且相应的二次方程的判别式为 Δ，那么当 $c>\sqrt{\Delta}$ 时，仅存在有限多个有理数 p/q，满足 $|\alpha-p/q|<1/(cq^2)$.

我们已经在拉格朗日谱中确定了一些元的位置. $\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{8}$ 位于第一个非空区间，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{17}$ 与 $\sqrt{20}$ 位于下一个区间，其他的都在霍尔射线上.

当然，我们可以利用判别式 $\Delta=b^2-4ac=5$ 来生成相应的“尴尬”无理数，此时，b 一定是奇数. 假设 $b=1$，则 $ac=-1$，从而得到两个可能的二次方程分别为 $x^2-x-1=0$ 和 $x^2+x-1=0$，第一个方程的正根是黄金分割比 $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$，而第二个方程的正根是它的倒数

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\varphi-1}{0\varphi+1},$$

179

它与 φ 是等价的（正如前面所定义的）. 其他的 b 的奇数值产生其他等价的“尴尬”无理数. 180

正如在第 175 页所提到的，当 $c=\sqrt{13}$ 时，取 $\Delta=13$，由 $b^2-4ac=13$，得到 b 是一个奇数，若取 $b=1$，可以得到 $ac=-3$，选择 $a=1$，$c=-3$，则可以得到二次方程 $x^2+x-3=0$，它的正根是 $(-1+\sqrt{13})/2$：再一次，所有其他的可能值都等价于这个根.

最出色的滤子

将 q^2 的倍数从 2 增大到 $\sqrt{5}$ 带来了重大的影响，体现在极其复杂的拉格朗日谱上. 我们所做的最后一步就是，将幂指数增加到比 2 大来改进有理逼近的误差限. 问题是，对给定的一个无理数 α，是否有某个 $\varepsilon>0$，都存在无限多个有理近似值，满足

$$|\alpha-p/q|<1/q^{2+\varepsilon}.$$

事实上，我们已经做了足够的证明，这个添加的要求能充分地排除二次无理数.

回顾前面就知道，对一个二次无理数，当 $c>\sqrt{\Delta}$ 时，只存在有限多个有理数，满足 $|\alpha-p/q|<1/(cq^2)$. 这就意味着我们能够将 c 增加到 c_1，使得不存在有理数满足 $|\alpha-p/q|<1/(c_1q^2)$，由此可以得到下面结论：

若 α 是一个二次无理数，则对任意的 $\varepsilon>0$，都只存在有限多个有理数满足 $|\alpha-p/q|<1/q^{2+\varepsilon}$.

为了验证这个结论，采用反证法，假设反之成立，即存在有无限多个这样的 p/q. 也就是说 q 可以无界地增大，取 $q=q_1$，满足 $q_1^{\varepsilon}>c_1$. 然而

$$\left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|<\frac{1}{q_1^{2+\varepsilon}}=\frac{1}{q_1^{\varepsilon}q_1^2}<\frac{1}{c_1q_1^2}.$$

这样就得到了矛盾.

有了这个动力，那么自然要问三次无理数、四次无理数和一般 n 次代数无理数（整系数 n 次不可约多项式的无理根）情况如何呢？用我们已经做的准备工作，二次无理数的情况很容易被获得了，但是，对于一般的代数无理数，用任何方式也不能加以解释和详细构造. 这个结论的原始证明有 20 页，其证明过 180 181

程是最深刻的、最巧妙的，它的现代变形几乎是不清晰的，或者是不吸引人的；该结论叙述为：

对任意一个次数≥2的代数数α，对任意的$\varepsilon>0$，都仅存在有限多个有理数p/q，满足$|\alpha-p/q|<1/q^{2+\varepsilon}$.

我们对二次无理数证明的结论对一般代数无理数也成立. 这个结果在1955㊀年由德国人克罗斯·罗斯首次获得，他也因此得到了菲尔兹奖，在数学界相当于诺贝尔奖. 该奖项颁发于1958年在爱丁堡举行的国际数学家大会，杰出的英国数论学家哈罗德·达文波特在颁奖典礼上对罗斯的工作加以评价，简洁地概括了其成就的水准：

这个成就本身就说明了一点：它终结了一个篇章，又开启了一个新篇章. 罗斯定理解决了一个既基本又极端困难的问题. 因为只要数学在发展，它都将具有里程碑的意义.

那个新篇章现在是好读的，如果不要求理解，它拥有许多结论和更多的猜想——大部分我们应该没有接触过. 最后得出，正在筛选的最好的无理数，并不是代数方程的根，而是超越数.

㊀ K. F. Roth, 1955, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* 2: 1-20.

第七章

超越数

如果把方程比作穿越数字风景线的火车，那么没有火车在 π 处停车. *182*

——理查德·普雷斯顿

在上一章，我们确定了超越数这个王国，但并没有确定其中的任何一个居民：这里我们将找出所有形式的超越数，从最低的、不知名的到重要的，例如 π 和 e.

超越概念的首次出现要追溯到莱布尼茨，在 1682 年，他提出 $\sin x$ 并不是关于 x 的代数函数（也就是说，它不能写成关于 x 的方幂、倍数、和与根式的有限复合形式）. 在 1704 年，他宣称

数 $\alpha = 2^{1/a}$ 是一个超越数，其中 $a = \sqrt{2}$.

然而，当时并没有给超越数下定义.

我们可以回顾第 91 页约翰·沃利斯的评论. 1744 年欧拉的不朽著作《无穷小分析引论》中有如下描述：

由于真数不能表示成底数方幂形式的对数既不是有理数，也不是无理数[⊖]，它们被合理地称为超越数. 也因这个原因对数就被称为是超越的. 举例说明，如果 c 是半径长等于 1 的圆的周长，那么 c 就是一个超越数.

除了这些，关于超越数这个最令人难以捉摸的概念，还有很多其他的参考材料，这些材料来自于 17 世纪和 18 世纪的其他数学家：但许多都是被怀疑却没有被证明的. *182* *183*

第一个超越数

直到 1844 年，更确切地说，是在 1851 年证明了超越数的存在，它不是 π

⊖ 意味着代数数.

和 e 以及任意一个其他著名的常数，而是一个完全人为的数：刘维尔数.

方程 $\mathrm{d}^{1/2}/\mathrm{d}\,x^{1/2}\ (x) = 2\sqrt{x}/\sqrt{\pi}$ 是 1695 年莱布尼茨给洛必达的一封信中提出的一个惊人事实，但最早严格地指出这个分数阶微分结论的合理性是在 1832 年，其提出者是约瑟夫·刘维尔（1809—1882），那时他热衷于电子学，在电动力学的研究报告中提出了一种利用分数阶导数的方法. 他仍然记得初等函数的组合不一定就有初等函数作为其不定积分这一令人不安的事实；也就是说，积分具有本质上的困难. 刘维尔是物理学家、天文学家、纯粹数学家、政治家，创办了一个有巨大影响的数学杂志[㊀]并长期担任编辑. 也是他第一个证实了一件长期被人质疑的事：超越数的存在性.

在 1844 年，借用连分数理论的思想，刘维尔指出了如何构造超越数[㊁]，但没有显式地给出任何一个超越数，直到 1851 年，他最终构造了一个能被证明的超越数[㊂]，用到了今天熟知的刘维尔逼近定理. 上一章我们提到了罗斯定理，刘
183 维尔逼近定理是对罗斯定理一系列改进的最高峰，结论如下：

184 如果 α 是一个整系数不可约多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + a_0$$

的无理根，那么对任意的 $\varepsilon>0$，都仅存在有限多个有理数 p/q，使得 $|\alpha-p/q| < 1/q^{n+\varepsilon}$ 成立.

我们看到，它是一个比罗斯定理更弱的结论，其误差限依赖于这个代数无理数的定义多项式的次数. 刘维尔自己也怀疑这个结果不是最佳的，因为 q 的幂的大小有可能会被减小. 其被减小的过程是依如下一步一步实现的：

- 阿克塞尔·图厄（1909 年）将 n 减小为 $\frac{1}{2}n+1$；
- 卡尔·西格尔（1921 年）将 $\frac{1}{2}n+1$ 减小为 $2\sqrt{n}$；
- 弗里曼·戴森和亚历山大·盖尔方德（各自独立，1947 年）将 $2\sqrt{n}$ 减小到 $\sqrt{2n}$.

㊀ *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.*（纯粹与应用数学）

㊁ J. Liouville, 1844, Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationelles algébriques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 18: 883-85, 910-911.

㊂ J. Liouville, 1851, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, *J. Math. Pures Appl.* 16: 133-142.

然后得到罗斯定理的最终结果.

然而，尽管刘维尔的结果是相对较弱的，但他为一个数是代数数提供了一个必要条件，从而为一个数是超越数提供了一个充分条件，因此我们可以站在一个新颖的角度来证明一个一般的结论，现在就来做这个工作.

基于以上阐述，选择一个包含 α 的足够小的区间$(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$，使得 α 是该区间内$f(x)$ 的唯一根：如果 p/q 是 α 的一个有理近似值，或者它在这个区间内，或者它不在这个区间内.

假设它不在这个区间内，则 $\delta<|\alpha-p/q|<1/(q^{n+\varepsilon})$，这也意味着 $q<1/\delta^{1/n+\varepsilon}$.

否则，若 p/q 在这个区间内，就有

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\cdots+a_0\right|$$

$$=\left|\frac{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots+a_0 q^n}{q^n}\right|,$$

这意味着 $|f(p/q)|\geqslant 1/q^n$，然而中值定理[⊖]告诉我们，在 α 与 p/q 之间存在一个数 c，使得$f(p/q)-f(\alpha)=(p/q-\alpha)f'(c)$. 这就意味着

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)\right||f'(c)|<\frac{1}{q^{n+\varepsilon}}|f'(c)|, \tag{184}$$

因此有 (185)

$$\frac{1}{q^n}<\frac{1}{q^{n+\varepsilon}}|f'(c)|.$$

化简得 $q<|f'(c)|^{1/\varepsilon}$.

在这两种情况下整数 q 都是有界的，由于$|\alpha-p/q|<1$，则一定有 $q(\alpha-1)<p<q(\alpha+1)$，所以对每一个 q 都只能取到有限多个 p 值，其结果就是只有有限多个分数值 p/q 可取.

刘维尔得到了这个结果，但他是如何利用这个结果找出第一个超越数的呢？

他构建了如下的数 α.

$$\alpha=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{10^{r!}}=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\cdots$$

$$=0.\,110001000000000000000001\cdots.$$

当然它不是有理数，因为构成它的十进制展开既不是有限的，也不是循环的. 因

⊖ 见第 294 页附录 F.

此，它是一个无理数. 现在让我们更加仔细地探究它的本质.

对于给定的 $k=1, 2, 3, \cdots$，定义整数p_k，q_k具体如下：

$$p_k = 10^{k!}\left(\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots + \frac{1}{10^{k!}}\right), q_k = 10^{k!}.$$

则有

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| &= \frac{1}{10^{(k+1)!}} + \frac{1}{10^{(k+2)!}} + \frac{1}{10^{(k+3)!}} + \frac{1}{10^{(k+4)!}} + \cdots \\ &= \frac{1}{10^{(k+1)!}} \times \left(1 + \frac{1}{10^{k+2}} + \frac{1}{10^{k+2}\,10^{k+3}} + \frac{1}{10^{k+2}\,10^{k+3}\,10^{k+4}} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{10^{(k+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) \\ 185 \qquad &= \frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{10^{(k+1)!}} = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{10^{(k+1)k!}} = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{(10^{k!})^{k+1}} = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{(q_k)^{k+1}}.\end{aligned}$$

186 以上也就意味着，对每一个正整数 k，都有

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{(q_k)^{k+1}}.$$

现在假设 α 是一个 n 次的代数数，考虑关于变量 k 的不等式

$$\frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{(q_k)^{k+1}} < \frac{1}{(q_k)^{n+k}}. \qquad \text{其中 } \varepsilon > 0.$$

这个不等式的结果就是

$$(q_k)^{k+1-n-\varepsilon} > \frac{10}{9}.$$

无论 n 取什么值，k 都有一个最小值，对所有比这个最小值大的 k 值，都能使得这个不等式成立，因此，就有无限多个 k 的值，使得

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{(q_k)^{n+\varepsilon}}$$

成立，这与刘维尔定理是矛盾的. 如果这个数不是代数数，那么它一定是超越数.

更一般地，一个刘维尔数 α 是一个能在有理逼近中取到最好精度的数，也就是说，对于所有的正整数 k，存在无限多个有理数 p/q，使得不等式 $|\alpha - p/q| <$

$1/q^k$成立. 而刘维尔数 $\sum_{r=1}^{\infty} 1/10^{r!}$ 只是一个特例.

第一个超越数已经找到了. 这个数当然完全人为地符合刘维尔逼近定理：刘维尔逼近定理构造了可证明的超越数（尽管技巧是令人惊讶的），但刘维尔逼近定理另一方面还能确定数学当中重要常数的超越性本质，例如 e 和 π 的本质. 在考虑这些重要的问题之前，我们先回到 1840 年，再次看看刘维尔的著作，迈着简洁的步伐对 e 进行尝试性的研究.

e，非二次无理数

在上一章的结尾，我们考虑到一个关于二次无理数的重要结论；刘维尔证明了 e 虽然是无理数，但它却不是二次无理数. *186*

同前面一样，他运用反证法加以证明. 假设存在整数 a，b，c，$a\neq 0$，满足 *187*

$$ae^2 + be + c = 0,$$

变形得

$$ae + b + c/e = 0.$$

可以将 e 的标准级数展开式分成两部分，前 $n+1$ 项和剩余的部分，就像前面做的一样，得到

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

这就可以保证，当乘以 $n!$ 时，$n!e$ 可以分成整数和小数两部分，即

$$n!e = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

并且，还能找到小数部分的上、下界.

一方面，

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots > \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1},$$

另一方面

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \cdots$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$$

187
$$= \frac{1/(n+1)}{1-1/(n+1)} = \frac{1}{n},$$

188 合并以上两式，有

$$\frac{1}{n+1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n},$$

变形得

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+\alpha},$$

其中 $0<\alpha<1$

综上所述，有

$$n!\mathrm{e} = I_1 + \frac{1}{n+\alpha},$$

其中I_1是一个整数，且有 $0<\alpha<1$.

现在对 1/e 重复上面的过程，就得到 $n!/\mathrm{e}$，其中 $1/\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 1/k!$ ：

$$\frac{n!}{\mathrm{e}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

为 $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!}$ 找一个类似的表达式，但问题现在更加微妙，由于这个级数可交换的本质使得估计变得更加困难，但是我们可以借鉴下面实分析的标准结果：

假设 $S = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l a_l$ 是收敛的，其中$\{a_l\}$是一个趋近于 0 的单调递减序列.

如果部分和记为 $S_N = \sum_{l=0}^{N} (-1)^l a_l$， 那么$S_N<S<S_{N+1}$.

为了以更精确的方式利用这个结果，我们把求和表达式中的变量改为 $l=k-(n+1)$，则 $\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!}$ 可以变形为

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+(n+1)} \frac{n!}{(l+(n+1))!}$$

$$= (-1)^{(n+1)} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{n!}{(l+(n+1))!}$$

188
$$= (-1)^{(n+1)} S.$$

利用上面引用的结果，当 $N=1$ 时，有 *189*

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+2)\ (n+1)}<S<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+2)\ (n+1)}+\frac{1}{(n+3)(n+2)\ (n+1)}.$$

左边显然会等于 $1/(n+2)$ 且右边的上界为 $1/(n+1)$. 结果有

$$\frac{1}{n+2}<S<\frac{1}{n+1}.$$

令

$$S=\frac{1}{n+1+\beta},$$

其中 $0<\beta<1$，所以

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\frac{n!}{k!}.=(-1)^{(n+1)}S=\frac{(-1)^{(n+1)}}{n+1+\beta},$$

其中 $0<\beta<1$.

所以这就意味着

$$\frac{n!}{\mathrm{e}}=I_2+\frac{(-1)^{(n+1)}}{n+1+\beta},$$

其中 I_2 是一个整数，且 $0<\beta<1$

现在，我们将变形的二次方程乘以 $n!$，得到

$$a(n!\mathrm{e})+bn!+c(n!/\mathrm{e})=0,$$

因此有

$$a\left(I_1+\frac{1}{n+\alpha}\right)+bn!+c\left(I_2+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+\beta}\right)=0,$$

变形得

$$(aI_1+bn!+cI_2)+\left(\frac{a}{n+\alpha}+\frac{c(-1)^{n+1}}{n+1+\beta}\right)=0. \quad \textit{189}$$

由于第一个括号中是一个整数，所以第二个括号一定是整数. 然而，我们更喜欢 *190*
自由选择所希望的 n，实际上，可以使得它任意大，这就会使得整数

$$\frac{a}{n+\alpha}+\frac{c(-1)^{n+1}}{n+1+\beta}$$

变得任意小（如果有必要的话就取绝对值）；我们就只能下结论说它一定等于 0.

因此，有

$$\frac{a}{n+\alpha}+\frac{c(-1)^{n+1}}{n+1+\beta}=0,$$

所以

$$a(n+1+\beta)+(-1)^{n+1}c(n+\alpha)=0.$$

由于该式对所有的 n 都成立，那么对特殊的 $n=1$，3 也是成立的，这就意味着

$$a(2+\beta)+c(1+\alpha)=0,\quad a(4+\beta)+c(3+\alpha)=0.$$

加减消元得 $a+c=0$，将其代入到第一个方程，有 $(2+\beta)-(1+\alpha)=0$，从而有 $1+\beta=\alpha$. 由于 $0<\beta<1$，这与 $0<\alpha<1$ 的限制是矛盾的.

刘维尔容易地推广了这个方法，证明了 e^2 不是二次无理数，但进一步推广到 e 的高次幂时，例如能否推广到三次无理数，上述的证明是困难的. e 的超越性这个巨大问题需要新的研究方法，刘维尔的一个学生，查理斯·埃尔米特，提供了证明方法，他的方法为后来的伊凡·尼文的有效应用建立了基础.

埃尔米特和 e

实际上，在 1873 年，埃尔米特证明了，对所有的有理数 $r\neq 0$，e^r 是超越数. 接着，我们将要看到他关于 e 的非凡论断，这好比是敏锐的灵感应用得恰到好
190 处. 他最出名的一个学生亨利·庞加莱，这样评价他的这位老师：
191 请称呼埃尔米特为一个逻辑学家！对我来说，这是一个不争的事实. 方法总是在他的脑海中以一些神秘的方式出现.

下面就让我们来看看这个特殊的神秘方法.

假设 e 是一个代数数，在这个情形下，它满足一个最低次数的整系数方程

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0=0,$$

这里 a_0，$a_n\neq 0$.

这就使得

$$a_n e^n+a_{n-1}e^{n-1}+a_{n-2}e^{n-2}+\cdots+a_0=0.$$

对于一个素数 p（它的大小将在后面根据需要来选择），在区间 $0<x<m$ 内定义一个次数为 $mp+p-1$ 的多项式 $f(x)$ 如下：

$$f(x)=\frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-m)^p}{(p-1)!}.$$

用我们之前建立的简便记号 $f^{(k)}(x)=\mathrm{d}^k y/\mathrm{d}x^k$，现在来定义一个原函数

$$\begin{aligned}F(x)&=f(x)+f^{(1)}(x)+f^{(2)}(x)+\cdots+f^{(mp+p-1)}(x)\\&=\sum_{k=0}^{mp+p-1}f^{(k)}(x).\end{aligned}$$

由于$f(x)$是一个次数为$mp+p-1$的多项式，因此对任意的$k>mp+p-1$，有$f^{(k)}(x)=0$,所以$F(x)$的定义终止在$mp+p-1$阶导数是自然的.

下面来计算$F(x)$在$r=0, 1, 2, \cdots, m$时的取值，分两种情况来讨论，即求$F(r)(r>0)$和$F(0)$.

首先，考虑$f(x)$定义中的分子的括号项. 对于$r=1, 2, \cdots, m$，使得$f^{(k)}(r)\neq 0$的唯一方式是$k=p$，在这种情况下，对分子的求导结果中有因数$p!$，与分母中$(p-1)!$约分后，分子中还含有因数p. 这就意味着，对$r>0$，$F(r)$是一个整数，且p是它的一个因数. 191

现在，考虑$f^{(k)}(0)$. 使得它不等于零的唯一方式就是$k=p-1$，此时，有 192
$f^{(p-1)}(0)=(-1)^p\cdots(-m)^p$，如果选取$p>m$，就能得到虽然这个数是整数，但是它不能被$p$整除. 这就意味着，$F(0)$是不以$p$为因子的一个整数.

由于$F(x)$中的最后一项的导数等于0，这表明

$$F'(x)=f^{(1)}(x)+f^{(2)}(x)+\cdots+f^{(mp+p-1)}(x),$$

这就意味着

$$F(x)-F'(x)=f(x).$$

现在，注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}F(x))&=\mathrm{e}^{-x}F'(x)-\mathrm{e}^{-x}F(x)\\&=-\mathrm{e}^{-x}(F(x)-F'(x))=-\mathrm{e}^{-x}f(x),\end{aligned}$$

这就意味着

$$\int_0^r \mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x=[-\mathrm{e}^{-x}F(x)]_0^r=F(0)-\mathrm{e}^{-r}F(r).$$

最后这个方程通常被称为埃尔米特恒等式. 将上式乘以$a_r\mathrm{e}^r$，并且对r进行求和，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^m a_r\mathrm{e}^r\int_0^r \mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{r=0}^m a_r\mathrm{e}^r[F(0)-\mathrm{e}^{-r}F(r)]=F(0)\sum_{r=0}^m a_r\mathrm{e}^r-\sum_{r=0}^m a_rF(r)\\&=F(0)\times 0-\sum_{r=0}^m a_rF(r)=-\sum_{r=0}^m a_rF(r)\\&=-a_0F(0)-\sum_{r=0}^m a_rF(r).\end{aligned}$$

我们知道，最后这个方程的右边是一个整数，并且它第二部分中的所有项以素

数 p 为公因数. 我们也知道，p 不能整除 $F(0)$，且 $a_0 \neq 0$，因此，如果确定有 $p > |a_0|$，就有 p 不能整除 a_0，这就使得当除以 p 时，表达式的第一部分一定是一个分数. 也就意味着，整个表达式不会等于 0，即，它是非零的整数，那么，它的绝对值 $\geqslant 1$.

现在我们来看原始方程的左边. 由 x 的取值范围，对于 $f(x)$ 的大小，有一个显而易见，且重要的上界估计

$$|f(x)| \leqslant \frac{m^{p-1}\, m^{mp}}{(p-1)!} = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{r=0}^{m} a_r \, \mathrm{e}^r \int_0^r \mathrm{e}^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \sum_{r=0}^{m} |a_r| \mathrm{e}^r \int_0^r \mathrm{e}^{-x} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{r=0}^{m} |a_r| \mathrm{e}^r \int_0^r \mathrm{e}^{-x} \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{m} |a_r| \mathrm{e}^r (1 - \mathrm{e}^{-r}) = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{m} |a_r| (\mathrm{e}^r - 1),
\end{aligned}$$

对于固定的 m，我们可以允许 p 增大，从而分母中的阶乘能使表达式的分数值减小为一个小于 1 的数. 这与假设 e 是一个代数数相矛盾.

随着这种观点的完全出现，庞加莱认为他的老师的观点似乎是可以推广的，但是很快埃尔米特对自己的成就感到不安，他写信给德国数学家卡尔·威廉·博查特：

我不会冒任何风险去尝试证明 π 的超越性. 如果有人证明了这个结论，没有一个人会比我为他们的成功而更高兴. 但请相信我，只要他们付出努力就一定会成功的.

林德曼与 π

埃尔米特的评论对建立 π 的超越性所必需的数学有着很高的预见，我们可以假设他设想需要新的方法去达到证明的目的. 也可以假设，在为了获得一个矛盾的期望中，许多数学家会把 π 代入到大量的整系数多项式方程中加以验证. 最后，这个目标在 1882 年被实现，它只需要修正埃尔米特自身的方法，这是由另一个德国人，费迪南德·林德曼（1852—1939）完成的. 埃尔米特的名字与大量令人印象深刻的数学思想相关联，但只因这唯一的一个结果，林德曼就在

数学研究界留名，这个结果产生于他与埃尔米特本人的讨论之后，也呼应着通常作为整个数学中的一个最美公式：

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

与林德曼相比，最美数学公式这个名字关联着一个比任何人都拥有更多数学和科学思想的人；他就是前面提到过的瑞士天才，莱昂哈德·欧拉. 然而，这个公式的显式形式似乎没有出现在欧拉的大量文集中. 事实上，也有人已经表明这个结果是正确的，但我们在欧拉 1748 年的不朽著作《无穷小分析引论》中发现了下面的表达式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

尽管他没有计算 $\theta=\pi$ 时的情况.

因为 $i=\sqrt{-1}$（它作为 $x^2+1=0$ 的根）是代数数，这能够充分地证明 $i\pi$ 是超越数. 事实上，如果 π 是代数数，由代数数对乘法的封闭性，就能保证 $i\pi$ 也是代数数.

最后，假设结论是错误的，即 $i\pi$ 是代数数，并令以 $i\pi$ 为根的最小多项式的根为 $\alpha_1=i\pi$，α_2，α_3，…，α_N，并假设其首项系数为 A.

由于 $e^{i\pi}+1=0$，则必有

$$(e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1)(e^{\alpha_3} + 1)\cdots(e^{\alpha_N} + 1) = 0.$$

我们需要将这些括号乘出来，为了容易理解，让我们看看 $N=3$ 时的情形，这时其结果就有 $2^3=8$ 项，即 *194*

$$(e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1)(e^{\alpha_3} + 1)$$

$$= e^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + e^{\alpha_1+\alpha_2} + e^{\alpha_2+\alpha_3} + e^{\alpha_1+\alpha_3} + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3} + 1 = 0. \quad 195$$

一般地，将有 2^N 个 e 的幂相加，此时，幂指数的形式为 $\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3+\cdots+\varepsilon_n\alpha_n$，其中 $\varepsilon_r\in\{0, 1\}$. 将这些幂指数写成 φ_1，φ_2，φ_3，…，φ_{2^N}，其中可能不止一个为 0，因此假定它们中的前 n 个不为 0，剩下的 $q=2^N-n$ 个都为 0. 相乘后的表达式就变成了

$$q + e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} + \cdots + e^{\varphi_n} = 0.$$

我们和以前一样定义中心多项式函数.

回顾对 $i=1$，2，3，…，n，$A\varphi_i$ 是整数，由此生成一个整系数多项式

$$(x - A\varphi_1)(x - A\varphi_2)(x - A\varphi_3)\cdots(x - A\varphi_n)\ ;$$

则必有

$$(Ax - A\varphi_1)(Ax - A\varphi_2)(Ax - A\varphi_3)\cdots(Ax - A\varphi_n)$$

$$= A^n(x-\varphi_1)(x-\varphi_2)(x-\varphi_3)\cdots(x-\varphi_n),$$

所以

$$[A^n(x-\varphi_1)(x-\varphi_2)(x-\varphi_3)\cdots(x-\varphi_n)]^p$$
$$= A^{np}(x-\varphi_1)^p(x-\varphi_2)^p\cdots(x-\varphi_n)^p,$$

其中令 p 为一个未确定的素数.

定义多项式函数为

$$f(x) = \frac{A^{np}x^{p-1}(x-\varphi_1)^p(x-\varphi_2)^p\cdots(x-\varphi_n)^p}{(p-1)!},$$

上多项式函数为

$$F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(np+p-1)}(x)$$

195

$$= \sum_{k=0}^{np+p-1} f^{(k)}(x).$$

196 再一次利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}F(x)) = -\mathrm{e}^{-x}f(x),$$

使得

$$\mathrm{e}^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x \mathrm{e}^{-y}f(y)\,\mathrm{d}y.$$

将 $y=kx$ 代入上式右边的积分中，得到

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-y}f(y)\,\mathrm{d}y = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-kx}f(kx)\,\mathrm{d}k,$$

因此有

$$\mathrm{e}^{-x}F(x) - F(0) = -x\int_0^1 \mathrm{e}^{-kx}f(kx)\,\mathrm{d}k,$$

最后有

$$F(x) - \mathrm{e}^{-x}F(0) = -x\int_0^1 \mathrm{e}^{(1-k)x}f(kx)\,\mathrm{d}k.$$

现在，我们来计算这个表达式分别在φ_1，φ_2，φ_3，…，φ_n时的值，并将它们求和，得

$$\sum_{j=1}^{n}[F(\varphi_j) - \mathrm{e}^{\varphi_i}F(0)] = -\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\int_0^1 \mathrm{e}^{(1-k)\varphi_i}f(k\varphi_j)\,\mathrm{d}k.$$

因此有

$$\sum_{j=1}^{n}F(\varphi_j) - F(0)\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\varphi_i} = -\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\int_0^1 \mathrm{e}^{(1-k)\varphi_j}f(k\varphi_j)\,\mathrm{d}k.$$

并且

$$q + e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} + e^{\varphi_3} + \cdots + e^{\varphi_n} = q + \sum_{j=1}^{n} e^{\varphi_j} = 0,$$

有

$$\sum_{j=1}^{n} F(\varphi_j) + qF(0) = -\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \int_0^1 e^{(1-k)\varphi_j} f(k\varphi_j)\, dk. \qquad 196$$

让我们首先来看看方程的左边. 197

对和式 $\sum_{k=0}^{np+p-1} f^{(k)}(\varphi_j)$ 有贡献的非零项来自于 $k \geqslant p$ 的项，其中指数 p 将导致分子含有 $p!$，与分母中的 $(p-1)!$ 约分后，分子中含有因数 p；简而言之，每个 $F(\varphi_j)$ 都是能被 p 整除的整数.

现在，考虑 $F(0) = \sum_{k=0}^{np+p-1} f^{(k)}(0)$. 这样有以下三种情况：

$f^{(x)}(0) = 0, \quad k < p-1$

$f^{(p-1)}(0) = A^{np}(-1)^{np}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_n)$

$f^{(k)}(0) = p \times$(整数)，k 是有限数且 $k > p-1$.

对所有的情形，得到的都是一个整数，因此 $F(0)$ 是一个整数，如果选择一个 p，使得它不能整除 A 或 q，并且使它足够大，使得其也不能整除 $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_n$，就能保证 p 也不能整除 $qF(0)$. 那么，这使得上面表达式的左边是一个非 0 的整数.

最后，由于 $f(x)$ 是在区间 $[0,1]$ 上有界，表达式右边的分母部分再次被 $(p-1)!$ 所控制着，如前所述，选取一个充分大的 p，使得表达式变得要多小有多小. 林德曼得到了一个与埃尔米特的做法中一样的矛盾.

基本观察

除了上面这些来之不易的例子，落户于超越数的世界是非常困难的.

当然，若 $x \neq 0$ 是一个代数数，且 y 是一个超越数，则 $x+y$ 和 xy 也是超越数.这就保证了类似于 $\pi+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}e$ 这样的数也是超越数. 但不幸的是，超越数不 197
像代数数那样，却和无理数类似，即超越数在加法和乘法下不是封闭的，因此， 198
尽管我们知道 π 和 e 是超越数，但类似于 $\pi \pm e$，πe，π/e，π^e，π^π，e^e 这样的数是否为超越数仍然是未知的.

事实上，我们甚至并不能判定 $\pi+e$ 和 πe 是否为无理数，但能用一个简单

的方法来证明其中至少有一个是无理数：一个以 π 和 e 为根的一元二次方程为 $x^2-(\pi+e)x+\pi e=0$，如果 π+e 和 πe 都是有理数，那么 π 和 e 将都是代数数：但现在我们知道它们并不是代数数！

我们可以利用代数数的封闭性做其他的基本观察来获得更多结论：π±e 不能都是代数数，因为这将使它们的和 2π 是代数数，并且 π/e 和 πe 也不能都是代数数，否则这将使它们的积 π^2 也是代数数，因为 π 是超越数，那么它的幂也一定是超越数. 因此由这个思想，我们可以想到，第五章的 Zeta 函数，当变量是奇数时其本质是可怕的噩梦，但是对偶数情形，$\zeta(2n)=C\pi^{2n}$ 显然是超越数，其中 C 是有理数.

超越性的阶梯

基于上述的观察和其他类似的结果使得处理数的超越性问题取得了一些进展，但是有一个结果，具有另外的意义. 读者可能已经注意到，上述 e 和 π 的组合形式中漏掉了一个：e^{π}. 这里的遗漏，是因为我们已经知道它是超越数，这个结果以令人赞赏的盖尔方德-施奈德定理而知名，并且这也回答了曾经列出的最著名数学问题中的一个.

我们在之前就已经提到过德国数学大家戴维·希尔伯特（1862—1943）：在 1900 年，他 38 岁时就给出了被广泛认为是有史以来最杰出的说明性演讲之一，演讲是在巴黎索邦大学举行的第二届国际数学家大会上做的，这篇题为《数学的问题》的演讲打破了以往的传统，专注于未来的数学挑战而不是总结过去的努力；演讲的核心是列出了 23 个问题，有一些问题是特殊性的，有一些是一般性的，他认为这些问题对未来数学的发展是最重要的，在他的演讲中他只讲了 10 个问题. 其诱人及鼓舞人心的开头是这样的：

我们当中有谁不想揭开未来的面纱；去看一看今后世纪中这门学科的发展前景和奥秘呢？我们的下几代人主导的数学精神将追求什么样的特殊目标？在
198 广泛而丰富的数学思想领域，什么新方法和新结论将在新世纪产生呢？

199 在他最初的评注当中，他关注以前证明费马大定理时的丰富的不成功的尝试，并且在 1928 年，在一个报告中，他选择了这个伟大定理与他提出的 23 个问题中的两个数论问题在难度上做比较：问题 8，就是现在众所周知的黎曼假设，问题 7，他问到数 $2^{\sqrt{2}}$ 的本质是什么，更一般的 α^{β} 的本质是什么，其中 $\alpha\neq 0$，1 是

代数数，而β是一个代数无理数. 特别地，他问到这样的数是否总表示一个超越数或者至少是一个无理数.

在1928年的报告中，希尔伯特表示，他相信黎曼假设在他的有生之年将会被解决，费马大定理会在更年轻的听众中的有生之年被解决，但是这屋里将没有一个人能够看到第七个问题被解决. 这个伟大的人错了. 在本书印刷时，黎曼假设仍没有被证明；费马大定理在1994年被安德鲁·怀尔斯解决了，在那个报告会中的一个衰老的幸存者刚好看到了这戏剧性的一幕，第7个问题在报告后的仅仅六年，1934年，就被完全解决了. 赫尔曼·外尔后来指出，能够解决希尔伯特23个问题中的任何一个的人，都能进入到荣誉数学家的行列，俄罗斯的亚历山大·盖尔方德和德国的西奥多·施奈德注定是这个杰出群体中的成员，因为他们同时独立地对第7个问题首次给出了完全的解答.

实际上，对于希尔伯特第7个问题，第一个巨大成功是盖尔方德早期结果的一个推广，在1929年，伴随着希尔伯特演讲的流行，盖尔方德得到了下面的结论：

如果$\alpha\neq 0$，1是代数数，并且$\beta=i\sqrt{b}$是一个有理数，其中$b>0$，$i^2=-1$，那么α^β是一个超越数.

由这个结论，可以得到$2^{i\sqrt{2}}$是一个超越数. 在结论中除去i的限制这一成果，很大一部分归功于德国的卡尔·西格尔（他对这个问题和其他数论中大量领域的工作都具有开创性），但是他决定不公开他的结论；他宽宏的观点是，盖尔方德本人很快就会看到如何推广这个结果. 实际上，在1930年，俄罗斯数学家R. O. 库茨马的名字第一个出现在印刷版的结果中，但盖尔方德在1934年（和施奈德）带着希尔伯特第7个问题的完整解答回来了，即： *199* *200*

如果α（$\neq 0$，1）和β都是代数数，且$\beta\notin\mathbf{Q}$，那么α^β是一个超越数.

现在，如果使用欧拉恒等式$e^{i\pi}+1=0$，就有

$$e^{\pi}=(e^{i\pi})^{-i}=(-1)^{-i},$$

从而就得到了需要的结果，即e^{π}是超越数. 不需额外的付出，我们有更强的结论，即该数的平方根也是一个超越数，因为

$$\sqrt{e^{\pi}}=e^{\pi/2}=(e^{i\pi/2})^{-i}=i^{-i},$$

林德曼已经给出了一个比上面结论更强的结果，但并没有证明出来，并指出它能用他之前用过的类似的思想加以证明. 其结果可以表述为：

对任意给定的n个互不相同的代数数α_1，α_2，α_3，…，α_n，如果存在代数数

a_1，a_2，a_3，…，a_n，使得$a_1e^{\alpha_1}+a_2e^{\alpha_2}+a_3e^{\alpha_3}+\cdots+a_ne^{\alpha_n}=0$成立，那么$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=0$.

与林德曼同时代的德国同胞，卡尔·魏尔斯特拉斯（1815—1897），给出了这个结论的证明（艰难的），后来作为林德曼-魏尔斯特拉斯定理而知名，并且还有一些广泛的结论：

- 对任意非零的代数数α，e^{α}是超越数：如果e^{α}是代数数，那么对非零代数数a_1，a_2，则有$e^{\alpha}=-a_1/a_2$，因此有$a_1+a_2e^{\alpha}=a_1e^0+a_2e^{\alpha}=0$，即$a_1e^{\alpha_1}+a_2e^{\alpha_2}=0$，其中$\{\alpha_1,\ \alpha_2\}=\{0,\ \alpha\}$是两个不同的代数数，矛盾.

- π是一个超越数：由于$e^{i\pi}+1=0$，如果$i\pi$是代数数的话，则对两个代数数$\{\alpha_1,\ \alpha_2\}=\{1,\ 1\}$和$\{\alpha_1,\ \alpha_2\}=\{\pi,\ 0\}$，有$a_1e^{\alpha_1}+a_2e^{\alpha_2}=1\times e^{i\pi}+1\times e^0=0$成立，矛盾. 因此$i\pi$是超越数，所以$\pi$必是超越数.

- 对任意非零的代数数α，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\sinh\alpha$，$\cosh\alpha$，$\tanh\alpha$都是超越数，对于它们的反函数形式也是如此：这些都符合它们的定义，恒等式和（或者）结果的运用. 例如，我们可以说，由于$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，如果其中一个函数是代数数，则另外一个也一定是，因此有$\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$也是代数数，但这是一个超越数. 也可以这样考虑，最后一个等式给出了$\sin\alpha=(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})/(2i)$，因此有$e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}-2i\sin\alpha=0$，如果$\sin\alpha$是代数数，则必有$1\times e^{\alpha_1}+(-1)\times e^{\alpha_2}+(-2i\sin\alpha)\times e^{\alpha_3}=0$，其中$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}=\{1,\ -1,\ -2i\sin\alpha\}$和$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}=\{i\alpha,\ -i\alpha,\ 0\}$，矛盾.

200
201

另外一些使我们陷入对数学无知的泥潭，这个唯一的结论激发了令人惊奇的知识力量；我们可以从中获得更多，并由此希望充分地传递它的影响.

构造性问题

随着π的超越性的确定，不但高难度的顽固的数学堡垒被攻破了，而且古代的最后三个几何问题也被解决了：

1. 倍立方（德洛斯问题）；
2. 三等分任意角；
3. 化圆为方.

这些描述简单的问题是否可能仅使用直尺和圆规来完成，几千年来都是挑战，如下来建构：

1. 作一个立方体，使它的体积是已知立方体（单位立方体）的体积的两倍，所以其边长就是$\sqrt[3]{2}$；

2. 做出将任意给定的角三等分的直线；

3. 作一个正方形，使它的面积等于给定的圆（单位圆）的面积，所以其边长为$\sqrt{\pi}$.

我们将不去探究这些问题的历史细节，但它们的古老和知名可以通过喜剧《鸟》中已经包含了其中的第三个问题来判断，《鸟》是希腊剧作家阿里斯托芬的著作，上演于公元前414年[㊀]，由此我们可以判断出这些问题的古老和知名度；这故事情节是围绕着天空城邦的创建者，男主人公佩斯特泰罗斯展开，他 *201*
得到了热情的鸟的帮助和一些不欢迎的人的干扰. 这些人中的一个就是几何学家 *202*
默冬（他是实际存在的），他提出只用直尺和圆规做一套城邦设计方案，要求如下[㊁]：

……用一根直尺测量出一根杆的长度，然后应用它，让你的圆可以变成正方形；并且它的中心会有一个市场，而且有平直的马路通向它，通向中心……

佩斯特泰罗斯是这样回复他的：

这个家伙是泰勒斯！

我们在第一章提到过，化圆为方将是一个伟大的圣人的壮举.

实际上，解决这三个问题花费了大约2200年，并且解决的时间发生在间隔少于50年的两个阶段，这个冗长的故事中散落着著名数学家的名字. 皮埃尔·旺策尔（1814—1848）并不是相当突出，但这个法国人在这里有一席之地，是他第一个证明了倍立方和三等分角问题无解；他的心不在焉也使我们被夺去了一个角色，而不只是他的名字，也使我们得到一些值得注意的事，正如他的数学合作者吉恩·克劳德·圣维南所说：

他该受到责备的原因是他对方法和友情的审慎太过叛逆. 通常他都是在晚上工作，直到很晚才躺下；然后他阅读，仅利用几个小时困难的睡眠，错误地交替使用着咖啡和麻醉剂，并且吃饭也非常不规律，直到他结婚才有好转. 他无限的相信，自己天生体格强壮，对所谓各种滥用都快乐的嘲笑.

㊀ 至少出现在一些译本中，有人认为是在一个正方形中作圆，但我们选择了一个比较有权威地位的认识.

㊁ W. J. Hickie 翻译，谷歌图书搜索网址 http://books.google.com/books?id=Cm4NAAAAYAAJ&source=gbs_navlinks_s.

尽管他的妻子做了各种调养的努力，可他 34 岁时就逝世了，这几乎并不会使人惊奇. 但他 23 岁时的工作却深深地吸引着我们，那是在 1837 年，他的文章
202 发表在享有声望的《纯粹与应用数学》杂志，这个杂志本章已经提到过，文章
203 中对这两个问题和更多问题进行了分析[㊀]，后来，在 1845 年，他也对一般的五次方程没有求根公式给出了一种新的证明.

现在，他的方法归入了伽罗瓦理论中，而更一般地，他们攻克能用直尺和圆规加以构造的更广泛的问题，但通过下面的观察，我们的特殊需求要被满足. 有理系数的三次方程

$$x^3 + a\,x^2 + bx + c = 0$$

有一个根是可构造数[㊁]仅当它有一个有理根[㊂]：其结果是，无有理根暗示着无可构造根.

倍立方问题需要构造的边长为$\sqrt[3]{2}$，它是$x^3-2=0$ 的一个根，但我们知道这个方程没有有理根.

关于 60°角的不可能三等分问题需要标准等式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

其中 $3\theta=60°$.

将 $x=\cos 20°$代入到等式中，得到

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x, x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0 \quad 或 \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

再一次，由于上述方程没有有理根，所以它就没有可构造根：因此 cos20°是不可构造数，所以60°角就不能被三等分.

过去，也就是 1837 年，旺策尔填补了高斯留下的空白，高斯有一个非常著名的证明：如果 p 是一个形式为$2^{2^n}+1$ 的素数，那么一个正 p-角形能被作图（利
203 用直尺和圆规）. 高斯告诫读者对除了这些数之外的素数不要尝试去构造，但并没有给出不可能性的证明. 旺策尔证明了正七边形是无法尺规作图的，就上面的

㊀ Pierre Wantzel, 1837, Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre à la règle et au compas, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2: 366-372.

㊁ 这也就是说，能用尺规作图加以获得.

㊂ 为了获得其证明，读者可查阅这本书的一个例子，Craig Smorynski, 2007, *History of Mathematics: A Supplement* (Springer).

方法而言，可以转化为一个七次方程，很容易将其降为三次方程 *204*

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

该方程是没有有理根的.

直到林德曼证明出了 π 是一个超越数，旺策尔的方法才能推广到化圆为方问题，也能解决任何其他的问题；因为所有的可构造数都是代数数，那么这个不可能性就得到了证实. 这个伟大而古老的问题被林德曼解决了，我们也想知道是否他的发现是一种难堪的告知：

你对 π 的漂亮研究有什么意义？因为无理数并不存在，为什么要研究这类问题.

持如此观点的人正是对他有影响的伟大同胞，利奥波德·克罗内克（1823—1891），他批判性的观点对无理数发展的下一个贡献者康托尔有着毁灭性的影响.

康托尔与无限

克罗内克形容德国的格奥尔格·康托尔（1845—1918）是一个败坏青年，庞加莱提出康托尔集合论中的超限数、所有反直觉的特性和悖论是一种疾病，并称疾病总有一天将会被治愈. 它并不会在 1874 年导致不和谐，仅仅在埃尔米特的证明出现一年后，康托尔发表了一篇文章，用一种精确的方式显示，尽管超越数是难以捉摸的，但它们的数量比代数数更多. 为了能够获得这一非凡的结论，他需要用到无限集合的相对大小，可数集是最小的，它可以定义为一个能与集合 $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 一一对应的集合：另一种描述可数集的方法就是它的元素能够一一写出来，而这写出来的每个元素都能与其所在位置一一对应地被确定.

如果代数数集能被证明是可数的，而实数集 **R** 是不可数的，那么代数数集 *204*
在实数集的补集中的数肯定会比代数数本身的数量多，即超越数多于代数数. *205*

他的讨论发表于 1874 年的《克雷尔杂志》，标志着我们现在所指的集合论这一主题的开端，他将下面的两个结果结合起来得到了结论. 如果可以扩充，我们将大量的以它们的原始形式加以再现.

首先，代数数集是可数的.

每个实代数数都是一个整系数多项式方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

的根. 定义这个多项式的高为

$$h = n + |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|.$$

则 $h \geqslant 2$ 是一个整数. 每个多项式都有一个高，表 7.1 列出了前几个多项式的高和相应的实根. 显然，对任意给定的高，仅存在有限多个多项式，每个多项式又
205 仅有有限多个根. 这意思就是说，对任意给定高的多项式，只能得到有限多个代
206 数数. 现在按照高的大小把多项式确定的代数数不重复地依次列出来，具体如下：(0)，$(-1, 1)$，$\left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$，$\left(-3, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 3\right)$，….

表 7.1

高 h	n 值	多 项 式	实 根
2	1	$x=0$	0
3	1	$2x=0$，$x\pm1=0$	0，±1
	2	$x^2=0$	
4	1	$3x=0$，$2x\pm1=0$，$x\pm2=0$	0，$\pm\frac{1}{2}$，
	2	$2x^2=0$，$x^2\pm1=0$，$x^2\pm x=0$	±1，±2
	3	$x^3=0$	
5	1	$4x=0$，$3x\pm1=0$，	0，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{1}{2}$，
		$2x\pm2=0$，$x\pm3=0$	±1，±3，$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，
	2	$3x^2=0$，$2x^2\pm1=0$，$x^2\pm2=0$	$\pm\sqrt{2}$，±2，
		$2x^2\pm x=0$，$x^2\pm2x=0$，	$\frac{\pm1\pm\sqrt{5}}{2}$
		$x^2\pm x\pm1=0$	
	3	$2x^3=0$，$x^3\pm1=0$，	
		$x^3\pm x=0$，$x^3\pm x^2=0$	
	4	$x^4=0$	

这个代数数的排列意味着它们一定是可数的. 现在康托尔需要确定实数集 **R**，并不是可数的. 他的微妙方法能使假设 **R** 是可数集而得到矛盾，而且这也是能够

产生无理数和超越数的精确方法. 它依赖于任何实数区间[α, β]的几个基本性质:

- 它是线性有序的;
- 它是稠密的: 也就是说这个区间中的任意两个数之间必然存在第三个数;
- 它是没有缝隙的: 就是说, 如果将这个区间分成两个非空集合 A 和 B, 使得其中的序关系为 A 中的每一个元都小于 B 中的每一个元, 那么存在一个边界值 x, 使得 A 中的每一个元都小于或等于 x, 而 B 中的每一个元都大于 x.

现在我们来考虑他的结论和证明.

给定任意一个实数序列 S 和实轴上的任意区间[α, β], 则可以在[α, β]中确定一个数 η, 使得它不属于 S. 因此, 我们能在[α, β]中确定无限多个这样的数 η. 为此, 假设这个实数列为

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots\}.$$

在 S 中找到前两个数, 使其属于[α, β]; 令较小的那个为α_1, 较大的为β_1. 把这两个数作为区间套$[\alpha_1, \beta_1]$的端点, 然后继续在 S 中找到前两个数, 使其属于$[\alpha_1, \beta_1]$; 称较小的那个为α_2, 较大的为β_2, 同样, 这两个数为区间套$[\alpha_2, \beta_2]$的端点. 继续这样的过程, 产生区间套序列, 这些区间套的端点都是 S 中的数. 那么, 有两种可能性: 这个区间套序列在操作有限多次后结束或者无限 206
继续下去. 207

第一种情形, 唯一的可能是最多找到 S 中的一个数 ω, 它位于最后一个区间套$[\alpha_N, \beta_N]$中: 在$[\alpha_N, \beta_N]$中任取一个异于α_N, β_N和 ω 的数 η, 并且可以保证 η 不在 S 中.

第二种情形, 有无数多个区间套, 并且每个来自 S 的端点形成两个无穷数列$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$, 第一个数列是递增的、有上界的 (β 为一个上界), 第二个数列是递减的、有下界的 (α 为一个下界). 那么, 每个数列在 S 中都有一个极限点, 康托尔把它们分别记为α_∞和β_∞. 再一次, 有两种情况:

$\alpha_\infty = \beta_\infty$: 取 η 为这个公共极限, 由构造过程可知, 它不属于 S.

$\alpha_\infty < \beta_\infty$: 取 η 为区间$[\alpha_\infty, \beta_\infty]$中的任意一个数, 同样由其构造过程可知, 它不属于 S.

在所有的情形中, 我们都得到了区间[α, β]中的一个数, 且它不在可数序列 S 中.

如图 7.1 所示.



图 7.1

假设实数集是可数的，取 $S=\mathbf{R}$，可以假设反面成立从而得到矛盾. 将最后两个结果放在一起，可以得到代数数集是不可数实数集的可数子集，也就是说，超越数集是不可数的，并且其数的个数“远远超过”代数数.

康托尔的任务通过非构造性的讨论完成了. 然而，这个讨论的本质在于数列 S 的一般性质；它是任意的实数（无限）序列，并且他也展示了所有这类序列中都缺少某些实数. 根据他在那篇文章中进一步的观察，它变成了一个构造性的方法，在代数数的任意序列中，情形 $\alpha_\infty=\beta_\infty$ 应满足：对任意如此的 S，我们都能保证有一个实数是不包含在其中的.

207 例如，取 S 为代数数（可数）集，那么他的结论就不会出现矛盾，但存在实
208 数并不是该数列的元；也就是说，如果一个数不是代数数，即它肯定是超越数. 为了能满足目标，给代数数排序，这在康托尔的第一个结论里已经给出了，如果从区间 [0, 1] 中取出这样一列数$\left(\text{该数列就是}\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cdots\right\}\right)$，这一过程能够产生 0 和 1 之间的一个超越数. 不幸的是，计算的难度非常大，而罗伯特·格雷[⊖]用了一种更容易的处理方法得到这列代数数，他不是按照多项式的高来排序，而是通过所谓的多项式的大小，使用标准的符号其定义为 $\max\{n,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$，利用二次排序来安排那些具有相同大小的数. 从他找到的几个数中，不难发现其计算难度是显然的，利用前面的符号，有

$$\alpha_7=\omega_{1406370}=0.57341146\cdots$$

和

$$\beta_7=\omega_{1057887}=0.57341183\cdots.$$

生成的超越数应该是以 0.573411…，也许我们会有兴趣，这两个代数近似值的定义多项式方程分别是

$$x^6-x^5+2x^4+3x^3-x^2+x-1=0$$

和

$$x^6-4x^5-x^4+5x^3+2x^2+3x-3=0.$$

⊖ Robert Gray, 1944, Georg Cantor and transcendental numbers, *American Mathematical Monthly* 101: 819-832.

谦虚地说，我们希望把这个过程应用到处理有理数，这里将选择比较方便地按分母进行排序

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\cdots,$$

所有这些有理数都在区间(0，1)中，其中有些是重复出现的.

利用康托尔的结论，我们一定能断定在0和1之间存在一个实数不在这个有理数列中；那它必是一个无理数. 编程的任务很简单，且计算任务完全可以操作，可以生成表7.2. *208*

表 7.2 *209*

n	n	分数		小数	
		α_n	β_n	α_n	β_n
2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0.33333333…	0.5
8	18	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	0.4	0.442857142…
127	60	$\frac{7}{17}$	$\frac{5}{12}$	0.411176470…	0.41666666…
390	797	$\frac{12}{49}$	$\frac{17}{41}$	0.41379310…	0.41463414…
4794	2375	$\frac{41}{99}$	$\frac{29}{70}$	0.411414141…	0.41428571…
14098	28302	$\frac{70}{169}$	$\frac{99}{239}$	0.41420118…	0.41422594…
165839	82790	$\frac{239}{577}$	$\frac{169}{408}$	0.41421143…	0.41421568…
484044	968713	$\frac{408}{985}$	$\frac{577}{1393}$	0.41421319…	0.41421392…
5651234	2824861	$\frac{1393}{3363}$	$\frac{985}{2378}$	0.41421349…	0.41421362…

读者可以注意到α_n和β_n在中分子与分母之间的联系，这也许是研究的一个诱人之处，且有$\sqrt{2}-1=0.41421356\cdots$：而且，在线百科全书[⊖]中的整数数列A084068也

⊖ http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html.

很有意思.

有理（无理）性的层次

我们将先离开本章的超越数，但超越数的研究远未结束，把实数定量地划分成三种类型：有理数、代数数和超越数，并且超越数在相对超越性上也存在
209 着定量的区别.

210 这个区别可以通过考虑逼近中的刘维尔界限而获得，其方式如下：

如果我们回到本质的不等式$|\alpha-p/q|<1/q^{\mu+\varepsilon}$. 我们可以看到，若$\alpha$是一个有理数，则仅有有限多个有理近似值，使得对任意的$\varepsilon>0$，$|\alpha-p/q|<1/q^{1+\varepsilon}$成立；若$\alpha$是一个代数数，由罗斯的结论可知仅有有限多个有理近似值，使得对任意的$\varepsilon>0$，$|\alpha-p/q|<1/q^{2+\varepsilon}$成立. 在这两种情况下，数的类型已经尽可能地通过对其逼近的能力而缩小了. 对于超越数，我们只知道它们能够在$\mu\geqslant 2$的情况下被逼近，因此这样就有充分的理由探讨任何特殊的数，使得μ的大小可以超过2时，仍然存在无限的有理逼近.

根据这些思想，对于一个给定的数α，我们能用μ的上界μ_α定义其无理测度，此时对任意的$\varepsilon>0$，相应的逼近不等式都有无数个解.

最极端的例子就是刘维尔数，其中$\mu_\alpha=\infty$. 当我们转移到其他数时，情况就会变得有深刻的技术性和难度. 关于这种特殊的数，我们了解的非常少，并且也很少有一般性的定理. 表7.3列举了几个最新的上界：注意到$\mu_e=2$并不是矛盾的（代数数$\Rightarrow\mu=2$，但是$\mu=2$推不出其为代数数），并且由$\xi(3)$的外观来看它基本就被认为是超越数了.

表 7.3

α	μ_α
有理数	1
代数数	2
刘维尔数	∞
e	2
π	8.016045…
$\zeta(2)$	5.441243…

一个被建立起来的一般性定理通常都是令人沮丧的：最后的这个结论是由俄罗斯的一位数学家亚历山大·辛钦给出的，他还给出了一个非存在性的证明，即几乎所有实数的无理测度都为 2. 我们与康托尔有了共鸣. *210*

211

第八章

再论连分数

如果你改变看待事物的方式，那么你看待的事物也会发生变化.

——马克斯·普朗克

在第三章中，我们就讨论了连分数在18世纪的应用，那是它们被用来创造出e和π的无理性的首次证明. 在无理数的研究中，连分数的作用是相当巨大的，前几章中的许多结果都隐含着对它们的依赖；这里给出几个明确的例子.

我们将继续把研究兴趣严格限定在简单的连分数，即它们的表达式是有限的或者是如下的无限形式

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

并且采用这样的记号，即第 n 项收敛的连分数就记为

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

首先，我们将处理有限形式的连分数，实际上操作的是有理数，得到下面的两个结果.

1. 如果两个简单的连分数是相等的，即

211 $$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n] = [b_0; b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m],$$

212 且 a_n，$b_m > 1$（表达式中 b_m 的下标 m 只是技术性的，用以应对不严格的歧义），那么 $m=n$ 且 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_3=b_3$，$\cdots$，$a_n=b_m$.

2. 一个数是有理数当且仅当它的简单的连分数展开是有限的.

这些我们将不加以证明，但它们的真实性可以很容易地用一些基本理论而证得，并且是很容易找到的.

有了这些，我们再看无理数，那么只能用无限连分数来表示它们.

首先，我们把18世纪的欧拉和19世纪的拉格朗日的结果合并起来，可以得到一个重要的分类，这里仍然不加以证明：

一个数的连分数表示是循环的当且仅当它是一个二次不尽根数.

在第三章中，我们讨论过二次不尽根数. 循环的连分数恰好对应循环小数，即在某一段重复出现的那些数. 例如，

$$[0;1,2,3,4,5,6,4,5,6,4,5,6\cdots]=\frac{2557-\sqrt{18229}}{1690}.$$

我们将很快回去讨论二次无理数，但是，首先看看一般情形. 在这里我们知道一个无理数 α 必然有无限的连分数表示，并不考虑其数字的任何形式.

渐进分数的层级

首先，连分数的过程能够简便地用矩阵相乘加以表示[⊖]，将其符号化表示为

$$\begin{pmatrix}p_n & p_{n-1}\\ q_n & q_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

也就是

$$\begin{pmatrix}p_n & p_{n-1}\\ q_n & q_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n-1} & p_{n-2}\\ q_{n-1} & q_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{212}$$

这也就意味着

$$p_n=a_n p_{n-1}+p_{n-2}\quad 和\ q_n=a_n q_{n-1}+q_{n-2}, \tag{213}$$

从上面可以看到这个渐进分数的分子和分母都是随着 n 的增大而增大.

这些关系可以发展为这些p_n与q_n之间的相互关系，即

$$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(-1)^n,$$

$$p_{n+1}q_{n-1}-p_{n-1}q_{n+1}=(-1)^{n+1}a_{n+1}.$$

我们的兴趣在于这两个式子中的第一个，将概括性地对它加以证明.

对于式子的左边，作为 n 的函数，可以改写为 $n-1$ 的形式，即

$$\begin{aligned}p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}&=(a_{n+1}p_n+p_{n-1})q_n-p_n(a_{n+1}q_n+q_{n-1})\\&=a_{n+1}p_nq_n+p_{n-1}q_n-a_{n+1}p_nq_n-p_nq_{n-1}\\&=p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}\end{aligned}$$

⊖ 该结论是由归纳假设法证明出来的.

$$=-(p_n q_{n-1}-p_{n-1} q_n).$$

现在，注意到$p_0=a_0$，$q_0=1$，$p_1=a_0a_1+1$，$q_1=a_1$，我们可以快速地验证结论的初始状态是正确的，这样就得到了归纳性证明中所需要的所有条件；或者，应用行列式乘法的性质来给出结论.

这个结果告诉我们三件事：

1. 最大公因数

$$[p_n,q_n]=[p_{n+1},p_n]=[q_{n+1},q_n]=1.$$

2. 这个形式

$$\frac{p_{r+1}}{q_{r+1}}-\frac{p_r}{q_r}=\frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}}$$

显示了渐近分数或者以大于α形式逼近，或者以小于α形式逼近.

3. 将上式相加得到

213

$$\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{p_{r+1}}{q_{r+1}}-\frac{p_r}{q_r}\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}},$$

214 并且把左边的式子加起来，可以得到

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_0}{q_0}=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}},$$

因此，有

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_0}{q_0}+\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{q_r}q_{r+1}.$$

由上面最后一个式子，又已知这些q_n是递增的，可以得到

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_0}{q_0}+\left(\frac{1}{q_0 q_1}-\frac{1}{q_1 q_2}\right)=\frac{p_0}{q_0}+\frac{1}{q_1}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_2}\right)>\frac{p_0}{q_0},$$

$$\frac{p_4}{q_4}=\frac{p_2}{q_2}+\left(\frac{1}{q_2 q_3}-\frac{1}{q_3 q_4}\right)=\frac{p_2}{q_2}+\frac{1}{q_3}\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_4}\right)>\frac{p_2}{q_2},$$

且显然可以这样继续下去，得到

$$\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\frac{p_4}{q_4}<\cdots.$$

类似地，关于奇数项的渐近分数，有

$$\frac{p_3}{q_3}=\left(\frac{p_0}{q_0}+\frac{1}{q_0 q_1}\right)+\frac{1}{q_2 q_3}-\frac{1}{q_1 q_2}=\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{q_2 q_3}-\frac{1}{q_1 q_2}$$

$$= \frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\left(\frac{1}{q_3} - \frac{1}{q_1}\right) < \frac{p_1}{q_1},$$

这样继续下去就可以得到

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \cdots.$$

最后，联立奇数项与偶数项渐进分数

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = a_0 + \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}} \quad 和 \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = a_0 + \sum_{r=0}^{2n-1} \frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}},$$

得到

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \left(a_0 + \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}}\right) - \left(a_0 + \sum_{r=0}^{2n-1} \frac{(-1)^r}{q_r q_{r+1}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{q_r q_{r+1}} = \frac{1}{q_r q_{r+1}} > 0,$$

214

这样就能得到完全的层级关系

215

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \alpha < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

因此，偶数项渐近分数构成单调递增序列收敛于 α，奇数项渐近分数构成单调递减序列也收敛于 α. 表 8.1 显示了当 $\alpha=\pi$ 时的情形.

表　8.1

n	p_n/q_n	n	p_n/q_n
0	3.0000000000000000000	1	3.1428571428571428571
2	3.1415094339622641509	3	3.1415929203539823008
4	3.1415926530119026040	5	3.1415926539214210447
6	3.1415926534674367055	7	3.1415926536189366233
8	3.1415926535810777712	9	3.1415926535514039784
10	3.1415926535893891715	11	3.1415926535898153832
12	3.1415926535897926593	13	3.1415926535897934025
14	3.1415926535897931602	15	3.1415926535897932578
16	3.1415926535897932353	17	3.1415926535897932390
18	3.1415926535897932383	19	3.1415926535897932384

特别要注意，这个路径是：左-右-左…，这给出了一个摆动数列，并且最大的偶数项渐近分数小于最小的奇数项渐近分数，并且 π 介于它们之间，也恰好处于每个连续的渐进分数对之间.

再论有理逼近

在第六章中，我们反复抓住一个给定无理数的有理逼近的更好精度的问题，假设 $|q\alpha-p|<|q'\alpha-p'|$，我们就断定近似值 p/q 比 p'/q' 更好. 因为缩小了这个误差限，因此能用带有“爆破-点”的拉格朗日谱来完成筛选无理数，这与另外的马尔可夫谱密切相关. 证明是非存在性的，并掩盖了这个事实，连分数经常处于核心地位，我们在此将抓住机会重新看一下一些结论，换一种表达方式
215 加以叙述.

216 渐进分数 p_n/q_n 是最佳的可能近似值，在这个意义下，即，若有整数 p 和 q，且 $q<q_{n+1}$，则 $|q\alpha-p|\geqslant|q_n\alpha-p_n|$.

用反证法来证明这个结论，假设 $|q\alpha-p|<|q_n\alpha-p_n|$ 成立，其中 $q<q_{n+1}$.

如果通过下面两个方程来定义两个数 u 和 v：

$$p=up_n+vp_{n+1} \quad 和 \quad q=uq_n+vq_{n+1},$$

那么 u 和 v 都是整数，由于

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_n & p_{n+1}\\ q_n & q_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\frac{1}{p_nq_{n+1}-p_{n+1}q_n}\begin{pmatrix}q_{n+1} & -p_{n+1}\\ -q_n & p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{pmatrix}q_{n+1} & -p_{n+1}\\ -q_n & p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix},$$

这就意味着

$$u=(-1)^{n+1}(pq_{n+1}-p_{n+1}q) \quad 和 \quad v=(-1)^{n+1}(-pq_n+p_nq).$$

更进一步地，有 $v\neq0$，事实上，若反之是成立的，则 $p=up_n$，$q=uq_n$，且可以得到如下矛盾，$|q\alpha-p|=|uq_n\alpha-up_n|=|u||q_n\alpha-p_n|\geqslant|q_n\alpha-p_n|$. 也有 $u\neq0$，若反之成立的话，则有 $q=|v|q_{n+1}$，这与 $q<q_{n+1}$ 矛盾.

另外，u 和 v 一定是符号相反的，若 $v<0$，$up_n=p-vp_{n+1}\Rightarrow u>0$，反过来，$v>0$，

$q<v\ q_{n+1}\Rightarrow u\ q_n<0\Rightarrow u<0.$

也注意到，$\alpha\ q_n-p_n=q_n\left(\alpha-\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ 和 $\alpha\ q_{n+1}-p_{n+1}=q_{n+1}\left(\alpha-\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$ 也一定是互为异号的，因为，由第213页的（3）可知，α 在p_n/q_n与p_{n+1}/q_{n+1}之间. 结合这些结果，得到下面这两个式子一定是同号的：

$$u(\alpha q_n-p_n)\quad 和\quad v(\alpha\ q_{n+1}-p_{n+1}). \tag{216}$$

但是，会有

$$\begin{aligned}|q\alpha-p|&=|\alpha(u\ q_n+v\ q_{n+1})-(u\ p_n+v\ p_{n+1})|\\&=|u\ (\alpha q_n-p_n)+v(\alpha\ q_{n+1}-p_{n+1})|\geqslant|\alpha\ q_n-p_n|,\end{aligned} \tag{217}$$

这又是一个矛盾.

我们也能断定任何一个无理数都能被逼近，能做到使得 $|\alpha-p/q|<1/(2q^2)$ 成立. 下面的两个结论给出了清晰的方法.

若 $|\alpha-p/q|<1/(2q^2)$，则 p/q 是 α 的连分数的一个渐进值.

为了得到这个结论，令p_n/q_n为 α 的某个渐进值，利用上面的最佳逼近结果加以考察，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right|&=\left|\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)+\left(\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right)\right|\\&\leqslant\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|+\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\\&=\frac{1}{q}|\alpha q-p|+\frac{1}{q_n}|\alpha\ q_n-p_n|\\&\leqslant\frac{1}{q}|\alpha q-p|+\frac{1}{q_n}|\alpha q-p|\\&=\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q_n}\right)|\alpha q-p|<\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q_n}\right)\frac{1}{2q}.\end{aligned}$$

把 α 的渐进分数的分母的谱记为$\{q_1,\ q_2,\ q_3,\ \cdots\}$，并选取适当的 n，使得 $q_n\leqslant q\leqslant q_{n+1}$，在这种情况下，$1/q\leqslant 1/q_n$，这样有

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{2}{q_n}\times\frac{1}{2q}=\frac{1}{q\ q_n},$$

这就意味着正整数$|p\ q_n-q\ p_n|<1$，所以必有 $p/q=p_n/q_n$.

对任意一个无理数 α 及其他的任意两个连续渐进分数p_n/q_n，p_{n+1}/q_{n+1}，要么

$|\alpha-p_n/q_n|<1/(2q_n^2)$ 成立，要么 $|\alpha-p_{n+1}/q_{n+1}|<1/(2q_{n+1}^2)$ 成立，要么两者均成立. 此时，有

217
$$\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|=\frac{|p_n q_{n+1}-p_{n+1}q_n|}{q_n q_{n+1}}=\frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

218 利用这个结论，我们可以知道 α 介于两个连续渐进分数之间，并且

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|+\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\alpha\right|=\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

因此

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|+\left|\alpha-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|=\frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

但是

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab>0,$$

所以

$$ab<\frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

取 $a=1/q_n$，$b=1/q_{n+1}$，则有

$$\frac{1}{q_n}\frac{1}{q_{n+1}}=\frac{1}{q_n q_{n+1}}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_n^2}+\frac{1}{q_{n+1}^2}\right)=\frac{1}{2q_n^2}+\frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

所以

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|+\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\alpha\right|<\frac{1}{2q_n^2}+\frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

这就意味着，对下面的这两个不等式

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{2q_n^2}\quad\text{和}\quad\left|\alpha-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|<\frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

或者其中一个成立或者两者都成立.

如果我们继续下去的话，就可以得到赫维茨的结论，它某种程度上展示了上式中的 2 可以增加到$\sqrt{5}$. 再一次，运用了部分分数解释了原因，结果如下：

无理数 α 的任意 3 个连续渐进分数p_n/q_n，p_{n+1}/q_{n+1}和p_{n+2}/q_{n+2}中至少有一个能够满足 $|\alpha-p/q|<1/(\sqrt{5}q^2)$.

假设结论不成立，那么，有

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}\quad\text{和}\quad\left|\alpha-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2},$$

因此，有 218

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}\, q_n^2} + \frac{1}{\sqrt{5}\, q_{n+1}^2}, \quad 219$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) \leqslant 1.$$

记 $\lambda = q_{n+1}/q_n$，并且有 $\lambda + 1/\lambda \leqslant \sqrt{5}$. 由于 λ 是有理数，所以可以得到因此 $\lambda + 1/\lambda < \sqrt{5}$. 因此，

$$\lambda^2 - \sqrt{5}\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) < 0.$$

这就意味着 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \lambda < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，特别地有 $\lambda < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，这使得 $1/\lambda > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 成立.

记 $\mu = q_{n+2}/q_{n+1}$，有 $\mu < (\sqrt{5}+1)/2$. 但由于 $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$，因此有 $q_{n+2}/q_{n+1} = a_{n+2} + q_n/q_{n+1} \geqslant 1 + q_n/q_{n+1}$，从而，有

$$\mu \geqslant 1 + \frac{1}{\lambda} > 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

这就产生了矛盾.

接下来让我们看看怎么使用连分式，并结合赫维茨的结论对无理性加以测量.

世上最无理的数

由赫维茨定理，我们知道，对每一个无理数 α 都存在无限多个有理的近似值 p/q 满足 $|\alpha - p/q| < 1/(\sqrt{5}q^2)$，并且我们看到 α 的渐进分数是其中最佳的一个. 对这无限多个更精确的近似值，我们发现任何一个赫维茨误差界都大于其实际误差. 例如，考虑表 8.2，给出了 π 的前四个渐进分数，并且这四个值的误差都在赫维茨描述的误差范围内. 注意第二行的数据，我们看到近似值 $\frac{355}{133}$ 的误差远远小于要限定的误差限，可以使用两者的比值来量化这种差异，把它们列在表的最后一列. 根据这个，我们就能够更加精确地知道 219
一个数怎样比另一个数“更加无理”，即，我们认为 α 比 β 是更加无理的，

如果 α 的比值 E/H 中的最小值比 β 的要大. 可以断定当 E/H 接近 0 时，其近似值比我们所预想的还要更加精确，而比值接近 1，其近似值勉强符合赫维茨误差限的要求. 表 8.3 给出了 e 的相关数据，表 8.4 给出了黄金分割比的相关数据.

220

表 8.2

n	p_n/q_n	误差(E)	$(1/\sqrt{5}q_n^2)(H)$	E/H
1	$\frac{22}{7}$	1.26499×10^{-3}	9.12682×10^{-3}	0.13854
3	$\frac{355}{113}$	2.66764×10^{-7}	3.50234×10^{-5}	0.0076167
5	$\frac{104348}{33215}$	3.31628×10^{-10}	4.0536×10^{-10}	0.818097
7	$\frac{312689}{99532}$	2.91434×10^{-11}	4.5142×10^{-11}	0.64558

表 8.3

n	p_n/q_n	误差(E)	$(1/\sqrt{5}q_n^2)(H)$	E/H
1	3	0.281718	0.447214	0.629941
4	$\frac{19}{7}$	3.99611×10^{-3}	9.12681×10^{-3}	0.437844
7	$\frac{193}{71}$	2.80307×10^{-5}	8.87153×10^{-5}	0.315963
10	$\frac{2721}{1001}$	1.10177×10^{-7}	4.46321×10^{-7}	0.246857

看上去好像 e 比 π 更难逼近，并且其黄金分割比更具有抗拒性，其相对误差刚刚能够保持在上限 1 以下. 在前面的事实中，已经暗示了黄金分割比实际上是最无理的数. 在此，我们来证明确实如此，用连分数近似值清晰地加以展示，

220

$$\left|\varphi-\frac{p_n}{q_n}\right|\xrightarrow{n\to\infty}1\times\frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2},$$

或者用另一种方式

$$q_n^2\left|\varphi-\frac{p_n}{q_n}\right|=q_n\left|q_n\varphi-p_n\right|\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

表　8.4　　221

n	p_n/q_n	误差（E）	$(1/\sqrt{5}q_n^2)$（H）	E/H
1	3	0.381966	0.447214	0.854102
3	$\frac{5}{3}$	0.0486327	0.0496904	0.978714
5	$\frac{13}{8}$	6.96601×10^{-3}	6.98771×10^{-3}	0.996894
7	$\frac{34}{21}$	1.01363×10^{-3}	1.01409×10^{-3}	0.999547

开始证明之前，我们知道

$$p_n=F_{n+1}\quad\text{和}\quad q_n=F_n.$$

我们也知道 φ 的第 n 个斐波那契数的比奈（或欧拉或棣莫弗）公式为

$$F_n=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}.$$

现在考虑

$$\begin{aligned}
q_n^2\left|\varphi-\frac{p_n}{q_n}\right|&=q_n\left|q_n\varphi-p_n\right|\\
&=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\right)\varphi-\frac{\varphi^{n+1}-(1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}\right|\\
&=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\left|\frac{\varphi^{n+1}-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}-\frac{\varphi^{n+1}-(1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}\right|\\
&=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\left|\frac{\varphi^{n+1}-\varphi(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\right|\\
&=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\left|(1-\varphi)^n\right|\left|\frac{(1-\varphi)-\varphi}{\sqrt{5}}\right|\\
&=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\left|(1-\varphi)^n\right|\left|\frac{1-2\varphi}{\sqrt{5}}\right|.
\end{aligned}$$

221

222 由于 $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$1-2\varphi=-\sqrt{5}$，因此有

$$q_n^2\left|\varphi-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\left|(1-\varphi)^n\right|\left|\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right|$$

$$=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\left|(1-\varphi)^n\right|$$

$$=\frac{\left|[\varphi(1-\varphi)]^n\right|-(1-\varphi)^n\left|(1-\varphi)^n\right|}{\sqrt{5}},$$

φ 的定义式为 $\varphi^2=\varphi+1$，从而有 $\varphi(1-\varphi)=-1$，所以

$$q_n^2\left|\varphi-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{\left|(-1)^n\right|-(1-\varphi)^n\left|(1-\varphi)^n\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1-(1-\varphi)^n\left|(1-\varphi)^n\right|}{\sqrt{5}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1-0}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

这就完成了证明.

马尔可夫谱

赫维茨结果的第二部分指出对有些无理数在逼近过程中已经达到了一个本质的边界，例如，φ 就不能以更小的误差限被逼近；由此可以得到各种所谓具有边界的无理数，它们就是曾被马尔可夫研究过的一系列神秘的数（和与其等价的），即马尔可夫谱. 这个谱如下：

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1+\sqrt{2},\frac{-9+\sqrt{221}}{14},\frac{-23+\sqrt{1517}}{38},\cdots.$$

由前面的结论，我们知道这些二次无理数的连分数的数字出现形式将是重复的；让我们考察一下前四个：

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\{0;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\cdots\},$$

222 $$-1+\sqrt{2}=\{0;2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\cdots\},$$

223 $$\frac{-9+\sqrt{221}}{14}=\{0;2,2,1,1,2,2,1,1,2,2,1,1,2,2,1,1,2,2,1,1,2,2,1,1,\cdots\},$$

$$\frac{-23+\sqrt{1517}}{38}=\{0;2,2,1,1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,\cdots\},$$

并且察觉到，在这些不尽根数中，有一种表示形式并没有出现，当然它们是循环的，但是以一种特殊的循环形式吸引着我们. 表 8.5 中以连分数形式列出了这些数和与其相应的边界无理数. 为了简便起见，采用标准的记法，例如，

$$[0;1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,2,2,\cdots]=[0;\overline{1_4,2_2}].$$

表　8.5

α	边　界　值
$[0;\overline{1}]$	$\sqrt{5}$
$[0;\overline{2}]$	$\sqrt{8}$
$[0;\overline{2_2,1_2}]$	$\frac{\sqrt{221}}{5}$
$[0;\overline{2_2,1_4}]$	$\frac{\sqrt{1517}}{13}$
$[0;\overline{2_4,1_2}]$	$\frac{\sqrt{7565}}{29}$
$[0;\overline{2_2,1_6}]$	$\frac{\sqrt{2600}}{17}$
$[0;\overline{2_2,1_8}]$	$\frac{\sqrt{71285}}{89}$
$[0;\overline{2_6,1_2}]$	$\frac{\sqrt{257045}}{169}$
$[0;\overline{2_2,1_2,2_2,2_4}]$	$\frac{\sqrt{84680}}{97}$

由这些，我们离揭示马尔可夫数的神秘性越来越近了，但是要完全揭示它们，超过了我们的讨论范围. 尽管如此，我们可以进一步渗透到一些理论. 这些 *223*
边界无理数并不是孤立的，而是由等价关系形成等价类[⊖]： *224*

α 和α'是等价的，若存在整数 a、b、c、d，使得有$\alpha'=(a\alpha+b)/(c\alpha+d)$ 成立，其中 $|ad-bc|=1$.

例如，下列的无理数是等价的：

$$\sqrt{8}=\{2;1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,\cdots\},$$

⊖　见附录 E.

$$\frac{7\sqrt{8}+5}{4\sqrt{8}+3}=\{1;1,2,1,2,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,\cdots\},$$

$$\frac{11\sqrt{8}+7}{8\sqrt{8}+5}=\{1;2,1,1,1,2,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,\cdots\}.$$

但需要注意的是，除去前几个数字外，后面两个数的表达式与第一个数的表达式是相同的. 实际上，这类连分数表明

$\alpha\sim\alpha'$当且仅当它们的连分数表达式从某个数字开始后续部分是相同的.

另外，

假设$\alpha>1$且$c>d>0$，那么a/c和b/d是α'的连续数表示中的两个连续的渐进分数.

例如，对上面最后的一个无理数，其连分数的渐进分数为

$$1,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{7}{5},\frac{11}{8},\frac{29}{21},\frac{40}{29},\cdots.$$

在无理数的研究中，通过连分数的使用将会有越来越多的研究成果出现，我们只是希望读者能够获得一些卓有成效的感受. 在下一章，我们将研究无理数非常不同的一个方面——连分数展现了一种明确的极限性.

224

第九章

问题与随机问题

任何考虑用算术方法产生随机数的人，可以肯定，都在犯错误.

——约翰·冯·诺依曼

我们将会由问题：一个无理数会有怎样的无理性，转移到另一个问题：一个无理数的小数展开具有怎样的随机性？关于无理性，我们可以用比较的方法加以度量，但关于随机性，存在什么样的方法加以度量呢？在上面的引言当中，天才的冯·诺依曼提供了这个问题复杂性的蛛丝马迹，包括当我们试图利用随机性时，将会遇到一些困难. 首先，再次讨论有理数.

用小数展开刻画有理数

这种刻画包括下面的三个结论：

- 如果一个数的小数展开是有限的，那么这个数是有理数：例如，

$$3.14159 = 3\frac{14159}{10000}$$

并且，一般地

$$a_0.\ a_1a_2a_3\cdots a_n = a_0\frac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{10^n}.$$

- 如果一个数的小数展开是循环的，那么这个数也是一个有理数：例如，

$$\begin{aligned}3.\overline{14159} &= 3 + 0.14159 + 0.0000014159 + 0.0000000000014159 + \cdots\\ &= 3 + 14159(10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \cdots)\\ &= 3 + 14159\frac{10^{-5}}{1 - 10^{-5}}\\ &= 3 + \frac{14159}{10^5 - 1}\end{aligned}$$

$$= 3\frac{14159}{99999}.$$

一般地，

$$a_0.\overline{a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n} = a_0 + a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n(10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \cdots)$$

$$= a_0 + a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n \times \frac{10^{-n}}{1 - 10^{-n}}$$

$$= a_0\frac{a_1\,a_2a_3\cdots a_n}{10^n - 1}.$$

• 相反地，如果一个数是有理数，那么它的小数展开要么是有限的，要么是循环的. 为了能够找到 a/b 的小数展开，其中 $a<b$，$b>1$，$r_0=a$，做如下操作：

$$r_0 = b \times a_1 + r_1 \qquad 0 \leqslant r_1 \leqslant b - 1,$$

$$r_1 = b \times a_2 + r_2 \qquad 0 \leqslant r_2 \leqslant b - 1,$$

$$r_3 = b \times a_3 + r_3 \qquad 0 \leqslant r_3 \leqslant b - 1,$$

$$\vdots$$

其中a_1，a_2，a_3，…是 a/b 的小数展开中的数字. 如果任意一个余数是 0 的话，那么这个小数展开就是有限的，否则，由于 $0\leqslant r_0$，r_1，r_2，$\cdots\leqslant b-1$，由第 162 页的鸽笼原理可知，在整数r_0，r_1，r_2，…，r_b中，必然会有$r_i = r_j$. 在这种情况下，

$$a_{i+1} = a_{j+1}, \quad r_{i+1} = r_{j+1}, \quad a_{i+2} = a_{j+2}, \quad r_{i+2} = r_{j+2}, \cdots,$$

226 因此，这个小数展开式是循环的.

227 与随机性的斗争

因此，对于无理数，我们已经保证了它是无限的不循环小数：但它们能否组成一列随机数呢？无论怎样，我们都应该给出随机小数展开概念的详细意义，我们不能只满足于类似 0.01001000100001…这样的一个例子. 在这个例子中，每增加一个台阶，0 的个数就多 1 个，所以这个小数展开既不是有限的，也不是循环的：这个数一定是无理数. 然而，由它的生成过程可知，它并没有随机性，它的构成中仅仅用到了两个数字：我们很难满足于从 1，2，3，…，9 中选择部分数字来形成随机数.

上面的这个数是一个特例，构造它的目的是为了提出问题. 为了能够避免上述情况的出现，我们至少需要数字 1，2，3，…，9 的某种组合；但随后的

0. 12345678911223344556677889911122233344455566677788899 9…

确实 1，2，3，…，9 都出现了，它是第二个让人讨厌的例子. 当然，它也是一个无理数的例子，但的确缺乏随机性的直观属性.

因此，也许我们需要的是所有的这十个数字在平等的基础上出现，并且它们以一种随机的方式混合在一起.

让我们看看一个自然的无理数：π. 它的小数展开中的前 650 个数字为

3. 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872，

以这种无规律的方式永远继续[㊀]下去. 由此，设想 e 也做同样的小数展开. 也许这两者都以完全相同的方式无规律地展开，也许 π 的小数展开是以 e 的小数展开作为结尾？当然，这是不可能的. 假设这是成立的，则

$$\begin{aligned}\pi &= 3.14159\cdots a_n 27181828\cdots \\ &= 3.14159\cdots a_n + 10^{-(n+1)} \times 2.7181828\cdots,\end{aligned}$$

所以有

$$\pi = \frac{p}{q} + 10^{-(n+1)} \times e \quad 和 \quad \pi - 10^{-(n+1)} \times e = \frac{p}{q}.$$

㊀ 记录的保持者法布里斯·贝拉写出了其小数展开中的 27000 亿个数字.

总而言之，有$10^{(n+1)}\pi-e=10^{(n+1)}p/q$. 在之前已经提到过 $\pi\pm e$ 是否是有理数并不知道；实际上，我们的无知程度更大：对任何一对整数 m，n，$m\pi+ne$ 是否是无理数，我们也不知情. 我们对它并没有把握，但这对假设并没有构成矛盾，也许 π 就是以 e 结尾的.

不管情况怎样，π 生成的数字序列中，几乎没有一个能带给我们随机产生的感觉；每个数字都确切地被描述，这是毫无疑问的，比如第一百万个数字[⊖]是 1. 这些数字给我们的直观感觉就是非常平衡，尽管：这个小数展开看上去是随机的. 如果它真是随机的话，长度相同的所有序列都将在展开式中的某个位置出现. 当然，为了这个研究，我们需要检验（大概非常长）一个截断的近似值，并且二项式展开的实践表明，如果这个小数展开被假定为随机的，那么一个长度为 n 个数字的序列在 $N>n$ 个数字的截断中出现的概率为

$$1-(1-0.1^n)^{N-n+1}$$

这里要求 $N\approx 2.4\times 10^{10}$，确保能有 90% 的机会出现十个数字（例如，
228 0123456789，或者这本书的 10 个数字的 ISBN 号）的序列：实际上，0123456789
229 第一次开始于第 17387594880 位数字；然而，0691143422 继续下去的情况是难以捉摸的了[⊖].

我们也许会不明确地玩弄这种思想，但实际上它确实是这样的：一种玩. 随机性是一个非常、非常微妙的概念，对它的研究确实更多地属于统计学家而不是数学家. 在 1951 年，迪克·莱默，一个计算领域的开拓者，特别是计算数论，给出了一个有意义的观点：

一个随机序列是一个模糊的概念，其中的每一个元素对于缺少经验的人来说都是不可预知的，其里面的数字是统计学家通过一定量的传统数据测试得到的，而且序列的得到是因为需要才给出的.

下面的两个特殊的例子为这种测试给出了重要的标准，假定每个数都是以二进制的形式给出的. 第一个例子是美国标准与技术研究院（NIST）的测试方案，其为一个有 16 条测试的统计包：

1. 单比特频数测试；
2. 分块块内频率测试；

⊖ 在小数点后面.

⊖ 利用这个截断的水平，13 个数字 ISBN 号将以大约 0.2% 的可能性出现.

3. 游程测试；
4. 块内最长游程测试；
5. 二进制矩阵秩测试；
6. 离散傅里叶（光谱）变换测试；
7. 非重叠块匹配测试；
8. 重叠块匹配测试；
9. maurer（毛雷尔）的“通用统计”测试；
10. Lemple-Ziv 压缩测试；
11. 线性复杂度测试；
12. 串行测试；
13. 近似熵测试；
14. 累积和测试；
15. 随机游动测试；
16. 随机游动状态频数测试.

第二种可被接受的方法，是乔治·马沙利亚的 Diehard 测试：

1. 生日间隔检验；
2. 重叠置换检验；
3. 二进制矩阵秩检验；
4. 比特流检验；
5. 比特 1 计数检验；
6. 泊车检验；
7. 最短距离检验；
8. 三维圆球检验；
9. 减数检验；
10. 可重叠累计和检验；
11. 运行检验；
12. 双骰子检验.

在这里是留有疑问的，我们将留给感兴趣的读者去解决；一个简单的事实是，随机序列的定义并不是合理存在的，并且存在的都是符合合理准则的集合，而这集合中的数字是不能赋予随机名字的，当然，无论它是什么意思.

正规性

1909 年，法国数学家埃米尔·博莱尔引入了正规数的概念，以一种精确的数学方式描述我们关于数的展开的随机性的直觉想法. 我们对十进制展开的兴趣已经有了，并将继续保持，但正规性这个概念是依赖于进制的，并自然地分成了三部分[⊖]：

- 一个 b 进制数 x 被称为是简单正规的，如果其 b 进制展开中的每个数字出现的频率都是 $1/b$.
- 一个 b 进制数 x 被称为是正规的，如果 b 其进制展开中的每个数字和每个长度的数字串出现的频率都是确定的. 即，单个数字出现的频率是 $1/b$，两个数字的数字对出现的频率是 $1/b^2$，三个数字的数字对出现的频率是 $1/b^3$等，依次下去.

230 - 一个数被称为是正规的，如果这个数在所有 $b \geqslant 2$ 进制下都是正规的.

231 我们发现，这个观点是符合我们的直觉的，并不是作为随机性的定义，而是作为这样一个量的必要条件.

简单正规数就是那些数字以相等频率出现的数，并不能排除任意长度的数字串出现的频数的随机性：表 9.1 给出了 π 的前 50000000000 个数字的并不令人吃惊的频数分布. 但简单正规性并不是无理性的充分条件；例如，

$$0.01234567890123456789012345678 9\cdots$$

是一个有理数，但也是简单正规数. 也有可能构造这样的数，使得其在某一进制下是简单正规的，但在另一进制下却不是简单正规的. 例如，下面的数

$$\begin{aligned} 0.10101010\cdots &= 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + \cdots \\ &= \frac{2^{-1}}{1 - 2^{-2}} = \frac{2}{3} \\ &= 0.66666\cdots. \end{aligned}$$

这个数在二进制下是简单正规的，但转换成十进制有理数后却不是简单正规的. b进制正规数的概念提出了更多的要求，其中每个数字串在展开中一定要出现无穷多次. 因此，这样的数不能是有理数. 同样，也要注意到，如果一个数是 b 进制正规的，它同样也是b^k（$k \geqslant 1$）进制正规的（反过来同样成立）. 正规数在一定意义上体现了随机性的概念.

⊖ 有其他形式的定义.

表　9.1

数　字	频　数
0	5000012647
1	4999986263
2	5000020237
3	4999914405
4	5000023598
5	4999991499
6	4999928368

那么，用这个精确的定义，能否找到正规数呢？答案是肯定的，但并不是我们需要的：第一个例子是由瓦茨拉夫·谢尔宾斯基在 1916 年给出的，另一个重要的例子是由格雷戈里·柴廷在 1975 年找到的；这两个例子是神奇的，是构造性的. 大家普遍猜测，“自然”的超越数包括 π，是正规的，但事实上，证明这个猜想目前遥不可及. 我们甚至不知道任何显然的常量在任何进制下是否都是简单正规数；具体地说，我们不知道 π 的十进制展开中是否存在无穷多个 2. 过去，康托尔已经给出了无数多个令人难以捉摸的超越数；与此同时，在 1909 年的那篇文章中，博雷尔证明了几乎所有的实数都是正规数！ *231*

有一个非常著名的 10 进制正规数. 这是由英国人大卫·钱珀瑙恩（1912—2000）构造的，其结果出现在 1933 年他作为剑桥大学的一名大学生时所写的一篇文章中[⊖]. 想要完全地欣赏钱珀瑙恩的成就，需要了解剑桥大学荣誉学位系统，一年中的前半年他获得了数学学位考试中的两次第一名，然后他转向经济学专业，并且在经济学位的部分考试中获得了另一个第一名：也许我们能足够意识到是凯恩斯影响了他从数学转到了经济学，他不仅是阿兰·图灵的一个亲密朋友，而且智力水平也能与其相媲美. *232*

钱珀瑙恩常数是一个由非负整数序列构成的十进制数：

0. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21….

而且，这个数也是一个超越数.

我们在上一章就懂得了连分式表示在研究无理数时是非常有用的，但钱珀

⊖ D. G. Champernowne, 1933, The construction of decimals normal in the scale of ten, *J. Lond. Math. Soc.* 8: 254-260.

瑙恩常数给我们提供了一个关于无理数的非常精彩的例子，它对连分数的运用具有抵抗力：它的连分式形式为[⊖]

$$[0;8,9,1,149083,1,1,1,4,1,1,1,3,4,1,1,1,15,457540$$
$$1113910310\quad 7648364662\quad 8242956118\quad 5996039397$$
$$1045755500\quad 0662004393\quad 0902626592\quad 5631493795$$
$$3207747128\quad 6563138641\quad 2093755035\quad 5209460718$$
$$3089984575\quad 8014698631\quad 4883359214\quad 1783010987,$$
$$6,1,1,21,1,9,1,1,2,3,1,7,2,1,83,1,156,4,58,8,54,\cdots].$$

读者要注意表达式当中用以隔开数字的逗号：数字 15 的后面有 166 个数字，在
232 接下来的数字 54 的后面将有 2504 个数字，这意味着这个特殊的无理数能够非常
233 好地被有理逼近[⊖]. 例如，取这个极大的数字 149083，得到非常精确的有理近似值

$$0.1234567891011\cdots-\frac{1490839}{12075796}\sim 4.4\times 10^{-15}.$$

伯西科维奇也构造了一个数. 在 1934 年，他证明了这个数是 10 进制正规数，它是由整数的平方连接起来的无理数，现在被称为伯西科维奇常数，其形式为

$$0.149162536496481100121144169196\cdots.$$

另一个由钱珀瑙恩猜测出来的由素数构成的无理数也是 10 进制正规数：

$$0.2357111317192329313741 43\cdots.$$

直到 1946 年，科普兰和不可企及的保罗·埃尔德什才提供了证明，也因此产生了数学中的科普兰-埃尔德什常数.

最后，埃尔德什回过来又和达文波特证得，若 $P(x)$ 是一个关于 x 的多项式，并且当 x 取正整数时，该多项式的值也为正整数，那么数

$$0.P(1)P(2)P(3)\cdots$$

233 由多项式在 $x=1$，2，3，…取值连接起来构成的，该数是 10 进制正规数.

234 我们与其去定义一个随机小数部分，还不如抓住第二章沃利斯的变形，且就算我们现在有比较精确的方法，运用起来都非常困难. 到目前为止，所有实验的证据都指出，数学中标准的无理常数都有“随机的”的小数部分，并且我们

⊖ http://www.research.att.com/~njas/sequences/A030167.

⊖ 也许读者还想与数字 $\frac{10}{81}-\frac{3340}{3267}10^{-9}$ 进行比较.

并不能证得这样一个事实，在很大程度上是因为不能定义这样一个名词.

如果我们允许自己有一个有趣的幻想，就可以以一个积极的态度结束这一章.

考虑用某种方法编码字母、空间，从 0 到 9 的整数和标准的标点符号（例如 ASCII 码），然后在这个方案中取出一块文字和一串编码的字符；最后将取出的字符组成一个单一的、巨大的正整数. 任何一个 10 进制正规数都会在它的小数展开式中出现这样的整数无限多次，例如，钱珀瑙恩常数包括所有版本的圣经、莎士比亚的所有作品、大英图书馆的所有作品，或博尔赫斯的巴别塔图书馆的所有作品；实际上包括了所有人的作品，不管是过去还是未来的. 对人类来说，有些事情是无法述说的！ *234*

225

第十章

一个问题，三种解答

人们都会非常坦然地接受$\sqrt{2}$，但却无法接受$\sqrt{-1}$. 这是因为他们认为他们 235
能够在物理空间中目睹前者，而后者不能. 的确，$\sqrt{-1}$是一个更简单的概念.

——Edward Titchmarsh（爱德华·蒂奇马什）（1899—1963）

在第四章中，我们提到过玛丽·卡特赖特，她向未来的大学生发出挑战，让他们去证明π^2是无理数. 泰德·蒂奇马什是她在牛津大学时的同龄人，后来，他获得了萨维尔几何学教授席位，这大约是在约翰·沃利斯担当这一席位之后的280年，然后任职“仅仅”是32年. 我们从他那里开始引入问题，关于$\sqrt{-1}$的物理性质，存在一定的误解，即$\sqrt{2}$是一个显然的概念，而$\sqrt{-1}$是一个广泛深远的问题. 然而，正如我们在第二章中看到的，没有无理数，解析几何和极限思想就会陷入严重的困境，而这些结果孕育着微积分. 现在自然地要关注19世纪，走进其中的最伟大的数学家之一，尼尔斯·阿贝尔，我们前面曾经提到他，他指出存在不能由根式形式表示出来的代数数：

是否你忽视了这个非常简单的事实，整个数学中没有一个无穷级数的和是能够严格确定的. 换句话说，数学中最重要的部分是没有根基的.

235 这是不可靠的，直观的抓住实数的本质是不足以用来完完全全地把握它们
236 的，更重要的是，我们放松理解的问题正是构成无理数的精确概念，倘若没有它，算术、极限和连续性的确切本质是永远不能被理解的.

基础准备

19世纪早期出现了赋予无理数意义的各种尝试. 德国的奥古斯特·克雷尔最让人津津乐道的是，他鼓励那些有数学天分的青年并创办了《纯粹与应用数学杂志》（曾经提到的《克雷尔杂志》），该杂志宣传一群显赫数学人才的早期

工作成果，其中包括19世纪数学严格化的第一流缔造者之一卡尔·魏尔斯特拉斯，也包括阿贝尔；在第205页，我们已经间接地提到康托尔的工作也曾发表在该杂志上. 克雷尔的家就是一个天才们的聚会地，在无理数的故事中，我们遇到一个特殊的小角色，阿贝尔在给他的良师益友，天文学家克里斯托弗·汉斯廷的一封信中写道：

在克雷尔的家中每周都有一个数学家聚会，但他不得不暂停这个聚会，因为有个名为马丁·欧姆的人极度傲慢，没人愿意与他相处.

这位“来自地狱的客人”能最好地被记住，因为他是德国物理学家格奥尔格·欧姆的弟弟：更有意义的是，他是第一个创造性地把最无理的数 $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 称为黄金分割比的人，并且他尽自己的努力试图给无理数下定义. 从他1829年的《数学分析的思想：它与逻辑系统的关系》这一著作中可以看到，他以下面的方式考虑有理数的稠密性.

因为对任意的正整数 n，有 $7n-1<7n<7n+1$，又 $\frac{7}{3}=7n/3n$，则一定有 $(7n-1)/3n<\frac{7}{3}<(7n+1)/3n$；当 n 变得任意大时，它们之间的差可以变得任意小，所以他得到了三个分数彼此之间连续的定义，因此他得到了有理数与无理数之间的一个不可靠的区别，描述如下：

分数之间处于彼此连续的状态，尤其是较大的数有无限大的分母，也相应地有无限大的分子（然而这并不意味着分数本身是无穷大的，而是介于两个彼此靠近的分数之间，且有有限的分子和分母）. 那些被断开的数叫作无理数，即所有被具有有限分子和分母的分数断开的数（与有理数相比较）就是无理数. 236 237

更重要的是：

小数的区分，如果一个小数能够准确写成一个无穷级数，那么通常称其为一个“无理小数”，在对它进行大小比较的实际应用中，一个近似值可以替换它.在这样一个无理小数中，n 个小数的和不断地接近一个确定的值，并不是无限大的极限，即使 n 本身被认为是无限大的；等等. 这样的一个无理小数总是被称为收敛的无穷级数.

但欧姆并不孤单. 爱尔兰皇家天文学家，威廉·罗文·哈密顿爵士，四元数的发明者，他是第一个正式构建复数的人，也是一个全才，他提出了一个实数的观点，并不是作为线上的点，而是平凡地作为时间的实例. 另外，他在进入爱

尔兰皇家学会之前，分别在 1833 年和 1835 年发表了两篇文章，题为《作为纯粹时间科学的代数》，他引入了将有理数重复分割成两类的思想，并定义无理数是由分割产生的，但他并没有完成这项工作. 波西米亚的数学家、逻辑学家、神学家、哲学家和教父伯纳德·波尔查诺发表了他的观点，有许多知识领域与他的名字相关，他 1835 年的一篇手稿中预示着一种无理数的可接受的定义形式. 不过，波尔查诺的影响应该可以与奥古斯丁·路易斯·柯西（1789—1857）相媲美. 在他 1821 年具有巨大影响的著作《分析课程》中写道：

一个无理数是不同的分数的极限，这些分数越来越逼近这个无理数.

柯西是伟大的 19 世纪中的严格主义者之一，他给出了收敛数列的极限的精确
237 定义：
238 这些渐近值能以各种方式无限接近一个固定值，并最终能以要多小有多小的误差结束，那么这个固定值就叫作其他值的极限值.

用符号表示就是，数列$\{x_n\}$有一个极限 x，若：

对任意的 $\varepsilon>0$，都存在一个 N，使得当 $n>N$ 时，都有 $|x_n-x|<\varepsilon$ 成立.

回顾欧多克索斯的穷截法. 然而，这个关于无理数的发现并不能用来定义它们：这个收敛的定义需要极限的存在，如果只有有理数的话，无法做到使这个极限存在.

对于定义无理数的方式，柯西的持续贡献就是数列收敛的第二定义：

一个数列$\{x_r\}$收敛的充分必要条件是对所有的充分大的整数 m，n，x_m与 x_n 的差能够任意小.

重要的是要注意到，这个结论不能被削弱为，若数列中连续两项之差能任意小，则该数列收敛：取调和级数的部分和数列 $\{x_n\}$，$x_n=\sum_{r=1}^{n}(1/r)$，由于调和级数连续两项之差就是调和数列本身. 调和数列显然是趋近于 0 的，但调和级数（不太明显的）是知名的发散到无穷大的一个级数，正如我们在第 138 页所提到的一样，这也使得它的部分和数列也能发散到无穷大.

当然，这个必要性部分源于收敛的定义，因为数列收敛意味着：

$$|x_n-x_m|=|(x_n-x)-(x_m-x)|\leqslant|x_n-x|+|x_m-x|<\varepsilon.$$

但充分性部分需要定义无理数，应当注意的是，不是假设极限的存在，正如我们所见.

继而在 1867 年，赫尔曼·亨克尔发表了题为《*Prinzip der Permanenz der for-*

malen Gesetze》的文章，文中他问到是否存在其他的数系，使得其与实数有本质相同的运算规则；这似乎是第一个用到我们将在下面提到的魏尔斯特拉斯的方法的文章，但是他自己证明了他的疑虑：

238

每一次正式处理无理数的尝试，在对其没有（几何的）量的概念的前提下，必然导致最深奥和最棘手的人为困境，尽管它们是被完全严格操作的，因为我们有各种权力怀疑，它们并没有更高的科学价值. *239*

法国人查尔斯·马雷（1835—1911）是第一个发表无理数稠密性理论的人，该理论作为1869年兴业学术会议报告[㊀]的一部分，在1870年出版. 虽然是第一个，但不是最重要的，没有比亨利·庞加莱下面的评论更有权威的了：

不幸的是，由于他总是用他所创造的特殊的语言，这就排斥了大多数的读者，使得他的影响实际上是比较平凡的.

三种答案

那么，什么是无理数呢？虽然依旧布满逻辑的颠簸，但基本上已经为实数的运算意义做好了充分的准备，即从大小上区分数，两年的等待之后，1872年这一年在德国发表了四篇文章，也因此我们把1872年称之为无理数之年，这些文章是：

- 恩斯特·科萨克发表的《Die Elemente der Arithmetik》；
- 爱德华·海涅发表的《Die Elemente der Functionenlehre》[㊁]；
- 格奥尔格·康托尔发表的《Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen》[㊂]；
- 理查德·戴德金发表的《Stetigkeit und Irrationale Zahlen》.

前两篇文章是魏尔斯特拉斯著作的延续，在19世纪60年代，魏尔斯特拉斯在柏林的一系列讲座中，他已经概括出了把无理数作为无限小数扩张的集合的方法；格奥尔格·康托尔是他的助理. 我们可以毫无损失地跳过科萨克的贡献；

㊀ Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données (Remarks on the nature of the quantities defined by the condition of use limits on variable data).

㊁ *J. De Crelle* 74：172-188.

㊂ 一篇有关傅里叶级数的文章，出现在 *Math. Annalen* 5：123-132.

239 魏尔斯特拉斯也曾认为其一塌糊涂的混乱. 海涅的贡献是基于他从康托尔那里所
240 学到的魏尔斯特拉斯的成果，呼应了康托尔本人更一般的方法，后来奥拓斯托尔兹给出了进一步的发展.

康托尔的文章标题可以翻译成“关于三角级数理论中一个定理的推广”，这好像偏离了无理数理论，但在文章中，他本人建立了无限点集到级数收敛问题之间的关系，为了能够严谨的工作，他提出了一个无理数运算理论. 他接受了柯西关于数列收敛的思想，小心翼翼地避免了循环论证，从而推广了魏尔斯特拉斯的方法.

理查德·戴德金（1831—1916）1858 年在苏黎世理工学院获得了一个职位，由此达成的一个约定就是，他要教授微积分初步，这是 27 岁的数学教授第一次被要求做这种事情，并且他对自己的努力并不感到满意：用他自己的话说就是[⊖]：

在讨论一个变量趋近于一个固定极限值的方法中，特别是在证明这个定理的过程中，即对每个连续增加的，并不超过限制的所有量，必然趋近于一个极限值，我不得不求助于几何的证明方法……但把这种形式引入到微积分中不能宣称是科学的，没人能够否认这一点. 就我自己而言，这种不满足感是如此的强烈，以至于我下定决心继续思考这个问题，直到我能够找到无穷小分析原则的一个纯粹算术的、完全严格的基础.

他确实这样做了，在这个成果中，后来他评论道：

……并且用这种方法，我们可以得到定理的真实证明，例如$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，这是我之前从来没有建立的最好的结果.

240 值得称道的瞬间定格在 1858 年 11 月 24 日（一个周三），在同一卷中，他告诉
241 我们，他认为实数轴被有序的有理数占据后剩下的间隙就是无理数. 想象数轴被每一个间隙切割成两部分，由此就产生了切口，或者分割. 这个思想独立于哈密顿创造的方法，现在我们通常将其称之为戴德金分割. 当他意识到海涅和康托尔等人都发表了对实数严格定义的看法时，他也决定应该去发表自己的观点.

不久，很多文章随之出现了，但都没有提出特别新的想法；实质上，利用康托尔和戴德金的方法，已经将无理数的问题解决了. 现在我们来简单地看一下实数系的三种标准定义形式，它们中的每一个的本质都是相通的，我们可以从

⊖ Richard Dedekind, 2003, *Continuity and Irrational Numbers*, included in *Essays on the Theory of Numbers* (Dover).

算术、分析和代数的角度考虑其方法上的不同之处.

魏尔斯特拉斯-海涅模型

实数被定义成无限小数扩展的集合

$$\mathbf{R}=\{a_0,a_1,a_2,a_3\cdots:$$
$$a_0\in\mathbf{Z},a_r\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},r>0\},$$

这也可以被解释为如下的无穷级数之和

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots.$$

值得注意的是，它们一定为无限小数的扩展，这就产生了精妙之处，例如，$2.7000\cdots=2.6999\cdots$. 另外，虽然对于正数来说，无穷级数和小数的形式是一样的，但对于小于0的数，情况并非如此. 例如，由于$-2.7\neq-2+\frac{7}{10}$，我们必须写成$-2.7=-3+\frac{3}{10}$. 定义基本的算术运算是一个非常微妙的问题，因为它们中的每一个都表现为无限长的数列对，这样就很可能引起巨大的逻辑困难. 最终这个困难能够被克服，对于有理数的扩张，或者以无限重复的形式出现，或者以每个数字都为9的无限序列结束，剩余的就是无理数. 省略所有这些巧妙的（相当冗长的）细节，我们就得到了第一个合适的实数系模型. 实数被定义成 *241* *242*

$\mathbf{R}$=无限小数扩张的集合.

康托尔-海涅-梅雷模型

如果我们考虑下面的有理数序列，它以如下方式继续下去，3，3.1，3.14，3.141，3.1415，3.14159，…，我们很清楚它们是收敛到无理数π的，所以，如果这个数列的第n项是x_n，那么，利用柯西的严格的极限定义，对给定的任意有理数$\varepsilon>0$，存在一个正整数n，使得$|x_n-\pi|<\varepsilon$成立. 可以考虑把这个数列的极限作为π的定义，但前面已经提到过，论证将会是循环的：实际上，我们正在用极限本身来定义极限，需要知道的是，在不假定极限存在的前提下，如何把无理数定义为一个无限序列的极限.

我们回到（有理数的）柯西序列的思想，$\{x_r\}$作为一个柯西序列，甚至它

的所有项之间的差都能做到任意小；用符号表示就是：

对任意的有理数 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得对所有的 r，$s>N$，都有 $|x_r-x_s|<\varepsilon$ 成立.

现在，让我们来考虑一般的无限小数的扩张，主要集中于小数部分. 取 $x=0.n_1n_2n_3\cdots$，可得到有理的截断序列：

$$\{x_i\}=\{0.n_1n_2n_3\cdots n_i\}$$
$$=\{n_1\times10^{-1}+n_2\times10^{-2}+n_3\times10^{-3}+\cdots+n_i\times10^{-i}\}.$$

那么，对 $j>i$，

$$|x_i-x_j|=n_{i+1}\times10^{-(i+1)}+n_{i+2}\times10^{-(i+2)}+n_{i+3}\times10^{-(i+3)}+\cdots+n_j\times10^{-j}<10^{-i}.$$

对于足够大的 i（因此 j 也足够大），可以使得上式任意小，所以 $\{x_i\}$ 是一个柯西
242 序列，因此魏尔斯特拉斯的方法是适用的.

243 显然，若 q 是任意的有理数，$x_r=\{q,q,q,\cdots\}$ 是一个柯西序列，且我们可以合理地认为这个柯西序列恒等于这个有理数；每一个其他的柯西序列都能作为与其本身相应的一个实数的定义，与其是同一个实数. 计算上比之前的模型更加容易，例如，

$$0=\{0,0,0,\cdots\}\quad 和\quad 1=\{1,1,1,\cdots\}.$$

且对两个实数 $\alpha=\{x_r\}$，$\beta=\{y_r\}$，

$$\alpha+\beta=\{x_r+y_r\},\quad \alpha\times\beta=\{x_ry_r\},$$
$$-\alpha=\{-x_r\},\quad \frac{1}{\alpha}=\left\{\frac{1}{x_r}\right\}.$$

对于不相等，也有如下自然的定义：

$\alpha<\beta$ 当且仅当存在有理数 $\varepsilon>0$，且存在一个自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，都有

$$x_n+\varepsilon<y_n\ 成立.$$

令人惊讶的是，定义相等有点更加微妙，微妙源于内在的含糊. 例如，取两个柯西序列：

$$x_r=\{q,q,q,\cdots\}\quad 和\quad y_r=\{0,0,0,\cdots,q,q,q,\cdots\},$$

其中 0 的个数是有限的：它们每一个都代表有理数 q. 更一般地，取任意的柯西序列，都可以通过改变其中的有限项而造出另一个序列；这两者都是柯西序列，且都收敛于相同的极限. 另外，取一个柯西序列的无限子序列也会有相同的结果. 我们需要处理这个模糊的问题，因此运用到等价的思想：

给出两个柯西序列 $\{x_r\}$ 和 $\{x_r'\}$，如果对任意的有理数 $\varepsilon>0$，都存在一个正整

数 N，使得对任意的 $r>N$，都有 $|x_r-x'_r|<\varepsilon$ 成立，那么就称 $\{x_r\}$ 和 $\{x'_r\}$ 是等价的（记为 $\{x_r\}\sim\{x'_r\}$）；也就是说，最后它们的差是趋近于 0 的.

这个条件定义了一个等价关系[⊖]，我们需要的就是确保所有等价的柯西序列 243
收敛于相同的极限值. 为了看到这个，假设 $x_r \xrightarrow{r\to\infty} x$，$x'_r \xrightarrow{r\to\infty} x'$，且有 $\{x_r\}\sim\{x'_r\}$. 244
那么

$$\begin{aligned}|x'-x| &= |(x_r-x)-(x'_r-x')-(x_r-x'_r)| \\ &< |x_r-x|+|x'_r-x'|+|x_r-x'_r|.\end{aligned}$$

由于当 r 足够大时，能够使得不等式右边三项中的每一项都是任意小，从而左边两个常数之差也会任意小，那么，事实上，留给它们的唯一选项只能是相等.

由此，在这种等价关系的意义下，我们能修正最初的表述，把实数定义为柯西序列的等价类，这样把相等定义为

$$\alpha=\beta\Leftrightarrow\{x_r\}\sim\{y_r\}.$$

正如之前，有许多问题需要检验，尤其是需要验证，我们能用任意一个等价类中的任意一个成员去表示相应的实数. 我们将满意于如下的讨论：

柯西序列

$$\{x_r\}=\{\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{r项}\}\quad 和\quad \{x'_r\}=\{\underbrace{0.9,0.99,0.999,\cdots}_{r项}\}$$

是等价的，由于

$$\begin{aligned}\{x_r-x'_r\} &= \{\underbrace{(1-0.9),(1-0.99),(1-0.999),\cdots}_{r项}\} \\ &= \{\underbrace{0.1,0.01,0.001,\cdots}_{r项}\}\end{aligned}$$

因此有 $|x_r-x'_r|\xrightarrow{r\to\infty}0$，这就意味着 $0.999\cdots=1$.

这样，我们就有了实数的第二种实现方法：

$\mathbf{R}$ = 柯西序列的所有等价类的集合.

戴德金模型

一个戴德金分割是一对非空的不相交子集 L，$R\subset\mathbf{Q}$，满足：

(a) $L\cup R=\mathbf{Q}$； 244

⊖ 见第 289 页附录 E

245 (b) $\forall a \in L$, $b \in R$, 有 $a<b$;

(c) L 中没有最大元.

其结果是，对任意的有理数 q，$L=\{r \in \mathbf{Q}: r<q\}$，$R=\{r \in \mathbf{Q}: r \geqslant q\}$. 显然有，$L$ 的结构自动显示出 R 的结构，因此就能够用第一个集合 L 的意义来简单地表示一个分割；例如，

$$\frac{22}{7}=\left\{r \in \mathbf{Q}: r<\frac{22}{7}\right\}$$

我们将这些称为“闭”分割；比较有趣的还是那些“开”分割. 引用戴德金的话就是：

在每种情况下，一个给定的分割都不能由一个有理数产生，我们创造一个新的数，一个无理数，我们认为它完全是由分割来定义的；我们将说这个数与该分割是一致的，或者说这个数生成了这个分割.

例如，取$\sqrt{2}$，它被定义为如下分割：

$$\sqrt{2}=\{r \in \mathbf{Q}: r \leqslant 0\} \cup \{r \in \mathbf{Q}_+: r^2<2\},$$

一个更加复杂的例子是

$$2^{2/3}=\{r \in \mathbf{Q}: r \leqslant 0\} \cup \{r \in \mathbf{Q}_+: r^3<4\}.$$

对于两个实数 α 和 β，如果作为集合它们是相等的，我们就说它们是相等的，即 $\alpha=\beta$，若作为集合有 $\alpha \subset \beta$，就说 $\alpha<\beta$. 这样很容易对两个数做比较.

当然，作为有理数，有

$$0=\{r \in \mathbf{Q}: r<0\} \quad 和 \quad 1=\{r \in \mathbf{Q}: r<1\}.$$

加法可以自然地表示成

$$\alpha+\beta=\{a+b: a \in \alpha, b \in \beta\},$$

对正数而言，乘法也是同样的，即

245 $$\alpha \times \beta=\{r \in \mathbf{Q}: r \leqslant 0\} \cup \{ab: a \in \alpha, b \in \beta, a, b>0\}.$$

246 当我们不得不定义负数时，问题将会更加的微妙.

当然，数$-3=\{r \in \mathbf{Q}: r<-3\}$，但这也必须来自于$3=\{r \in \mathbf{Q}: r<3\}$的否定.

3 与它的相反数-3是相关的，可以写成

$$-3=\{r \in \mathbf{Q}: r<-3\}=\{r \in \mathbf{Q}: -r>3\},$$

这就生成了分割中的 R 部分，这使得 L 部分为

$$-3=\{r \in \mathbf{Q}: -r \leqslant 3\},$$

但这并不是一个分割，因为 L 中有最大元. 为了修正这个问题，我们需要消除掉

相等的可能性，如此定义

$$-\alpha = \{r \in \mathbf{Q};\ -r > \alpha,\ -r \text{不是} \mathbf{Q}-\alpha \text{里的最小值}\}$$
$$= \{r \in \mathbf{Q};\text{存在} x > 0, \text{满足} -r-x > \alpha\}.$$

消除了这个尴尬，我们能够如下定义一般的乘法：

$$\alpha \times \beta = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \text{或} \beta = 0, \\ |\alpha| \times |\beta|, & \alpha < 0, \beta < 0, \text{或者} \alpha > 0, \beta > 0, \\ -|\alpha| \times |\beta|, & \alpha > 0, \beta < 0 \text{或} \alpha < 0, \beta > 0. \end{cases}$$

其中

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha > 0, \\ -\alpha, & \alpha < 0. \end{cases}$$

最后我们将提到乘法的逆运算，因为它与上面加法的逆运算有同样的技巧，定义为

$$\alpha^{-1} = \{r \in \mathbf{Q}: r \leqslant 0\} \cup \{a > 0, 1/a > \alpha, 1/a \text{不是} \mathbf{Q}-\alpha \text{的最小值}\}$$
$$= \{a \in \mathbf{Q}: \text{存在} b > 0, \text{使得} -1/a - b \notin \alpha\},$$

其中假设 $\alpha>0$. 若 $\alpha<0$，则 $\alpha^{-1} = -(|\alpha|)^{-1}$. 246

由戴德金定理，来看看 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$，有 247

$$\sqrt{2} = \{r \in \mathbf{Q}: r \leqslant 0\} \cup \{r_1 \in \mathbf{Q}_+: r_1^2 < 2\},$$
$$\sqrt{3} = \{r \in \mathbf{Q}: r \leqslant 0\} \cup \{r_2 \in \mathbf{Q}_+: r_2^2 < 3\},$$

由乘法的定义，

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \{r \in \mathbf{Q}: r \leqslant 0\} \cup \{r_1 r_2 \in \mathbf{Q}_+: r_1^2 < 2, r_2^2 < 3\}$$
$$= \{r \in \mathbf{Q}; r \leqslant 0\} \cup \{r_1 r_2 \in \mathbf{Q}_+: r_1^2 r_2^2 < 6\}$$
$$= \{r \in \mathbf{Q}; r \leqslant 0\} \cup \{r_1 r_2 \in \mathbf{Q}_+: (r_1 r_2)^2 < 6\}$$
$$= \sqrt{6}.$$

有了这个成功，我们还有事情要做，但要记住

$$\mathbf{R} = \text{戴德金分割集}.$$

和谐

那么，实数到底是由柯西序列集定义的，还是由戴德金分割集定义的呢？当然，它们两者都是，在这里我们将要架设一个桥梁，使其从实数的一种定义

方法能通向到另一种方法.

首先，与柯西序列$\{q, q, q, \cdots\}$相应的戴德金分割是$\{r \in \mathbf{Q}: r<q\}$.

现在，若取一个无理数$x=\{x_n\}$，将据如下构造其戴德金分割：

对每一个有理数q，考虑数列$\{x_n-q\}$. 如果对足够大的n，有$\{x_n-q\} \geqslant 0$，那么$\lim_{n\to\infty}\{x_n-q\} \geqslant 0$，因此$x-q>0$，$q<x$，进而$q$位于集合$L$中，否则$q>x$，所以有$q \in \mathrm{R}$.

相反地：

1. 由分割（L，R）开始定义无理数.
2. 选出一些有理数$x_L \in L$，$x_R \in R$.
3. 定义$x_0=x_L$，$x_1=x_R$.
4. 令这个数列的下一个项为$a=(x_L+x_R)/2$.
5. 若这个有理数a在L中，就把它作为新的x_L，否则就把它作为新的x_R.

247 6. 回到第4步.

248 显然，$\{x_n\}$是一个收敛于分割点的柯西序列；另外，很容易看出，起始时用不同的有理数产生等价的柯西序列.

抽象化

对实数系长期的感知，使我们看到所需要的实数系，本质上存在两种算术运算，即+和×，以及对它们以可接受的方式进行运算和组合，也需要有数之间的顺序性以及完备性.

这些不同的特性是在1900年由德国数学天才戴维·希尔伯特抽象出来的，他提供了一个实数的理论模型，可以利用它作为任何实数实现的衡量标准. 我们可以看看这个抽象化过程，首先是保罗·坦纳的早期工作，他第一个实现了有理数的抽象化.

如果我们是以克罗内克的神赐整数[⊖]开始的，有理数就能定义成与数对(a, b)，$b \neq 0$的等价类，其中等价关系[⊖]定义如下：

$$(a,b) \sim (c,d) \text{ 当且仅当 } ad = bc.$$

⊖ “上帝创造了整数，所有其余的都是人造的”——在一顿晚饭后的演讲中他所说的一句非常著名的话.

⊖ 见第289页附录E.

加法、乘法和顺序关系定义如下：

- $(a,b)+(c,d)=(ad+bc,bd)$
- $(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$
- $(a,b)<(c,d)\Leftrightarrow ad<bc$

相应的各种事情都必须验证，但当我们把它作为要找的有理数系时，只要注意到从 $(a,\ b)$ 到 a/b 的符号变化，其他的问题就完全是在我们所熟悉的领域进行了. 此外，如果采取跳跃战术，假设实数系也满足上述定义，那么以同样的方式很容易构建复数系：

- $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
- $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$，

其中相应的$(a,\ b)=a+ib$. 那么，我们对蒂奇马什的评论的本质就有了明证.

248

249

根据这个背景，我们将仔细看看对一个数系需要要求什么，才能使其充分丰富地满足数学的需求，那些要求自然的就要分成三个方面.

算术公理

算术公理是说，当运用加法+或乘法×结合两个实数时，其结果也是实数，并且有：

对于加法：

1. 存在一个加法的恒等元 $0\in\mathbf{R}$，使得对任意的 $a\in\mathbf{R}$，都有 $0+a=a+0=a$ 成立.

2. 对每一个 $a\in\mathbf{R}$，都存在一个加法的逆元，记为$-a$，使得 $a+(-a)=(-a)+a=0$.

3. 结合律成立：也就是说，对任意的 a，b，$c\in\mathbf{R}$，有$(a+b)+c=a+(b+c)$：即，表达式 $a+b+c$ 的值是确定的.

4. 交换律成立：也就是说，对任意的 a，$b\in\mathbf{R}$，有 $a+b=b+a$ 成立.

对于乘法：

1. 存在一个乘法的恒等元 $1\in\mathbf{R}$，使得对任意的 $a\in\mathbf{R}$，都有 $1\times a=a\times 1=a$ 成立.

2. 对每一个 $a(\neq 0)\in\mathbf{R}$ 都存在一个乘法的逆元，记为 a^{-1}，使得 $a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1$.

3. 结合律成立：对任意的 a，b，$c\in\mathbf{R}$，有$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$：即，表达式

$a\times b\times c$ 的值是确定的.

4. 交换律成立：对任意的 a，$b\in\mathbf{R}$，有 $a\times b=b\times a$ 成立.

最后，分配律保证了加法和乘法是相容的：

对任意的 a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$，也就是说能够把括号乘开.

249 对于有限的算术运算来说，用这些就能获得我们需要的全部结果，并且由此能
250 推导出所有的算术运算结果，例如，$0\times a=0$，这就说明 0 没有乘法的逆元；还有这个事实，“负数乘负数等于正数”：$-1\times(-1)=1$.

我们还没有真正地理解实数. 一般地，在一个集合的元素间定义了满足这些公理的两种运算（加法与乘法），就称这个集合构成一个域，域的例子是大量存在的：特别地，不仅实数集能构成一个域，有理数集和复数集也构成域. 我们需要更多的公理来简化数系.

顺序公理

顺序公理是定义在 $\mathbf{R}$ 中所有元素间的一种“$<$”关系，满足以下规则：

1. 三分律成立，即对任意的 a，$b\in\mathbf{R}$，$a<b$，$b<a$，$a=b$ 中有且仅有一个成立.

2. 传递性成立，即若 $a<b$，$b<c$，则必有 $a<c$.

3. 加法的相容律成立，若 $a<b$，则对任意的 $c\in\mathbf{R}$，都有 $a+c<b+c$ 成立.

4. 乘法的相容律成立，若 $a<b$，则对任意的 $0<c\in\mathbf{R}$，都有 $a\times c<b\times c$ 成立.

当然，为了方便，还有符号$>$，$\geqslant$，$\leqslant$，其意义是显然的. 如果我们坚持把这些都作为域的公理，就得到了有序域，尽管有理数域是有序域，因为从顺序公理能得出这样的结论，即对任意的 $a\neq0$，$a\times a>0$ 成立，所以复数域不是有序域.

在此证明的主要步骤保留了.

完备性公理

如果一个有序域的每个有上界的非空子集都有一个上确界，那么这个域就称为一个完备有序域. 我们对其进行展开说明. 考虑有序域的一个子集 S，如果对任意的 $s\in S$，都有 $s\leqslant b$，那么 b 就是 S 的一个上界，进而，若 c 为 S 的任意其他上界，都有 $b<c$，则 b 就是上确界（能被证明其唯一）. 由于这条公理，我们能断定有理数域不是完备的，例如，集合 $S=\{s\in\mathbf{Q}:\ s\times s<2\}$ 有很多的上界（例

如，取 2），但其没有上确界——因为$\sqrt{2}$是无理数. 正因为这个最后的结构，就 *250*
有了完备有序域的名字. *251*

还剩下谁能是完备有序域呢？实数域. 即，它是可能的，证明有且仅有一个完备有序域：这种结构就是实数域的抽象化. 与实数有关的所有性质都能通过这些公理来建立，无论是所有的实数都能写成无限小数的形式，还是三角不等式（$|a+b| \leqslant |a|+|b|$）成立，或者是第一章的阿基米德公理：若 a，$b>0$，则存在一个整数 $n>0$，使得 $na>b$ 成立. 我们指出柯西序列与戴德金分割相关的细节能够被检验，对一个完备有序域来说，这些细节就是这些公理. 鉴于此，柯西序列与戴德金分割这两个实数模型就是相同的唯一结构的不同观点. 现在，我们宣布实数系统已经得到了满意的定义. 用德国数学家卡尔·托马斯在 1898 年的话说就是：

> 数的正式概念需要的是对其本身更加适度的限制，而不是逻辑的定义. 不用问，数是什么和将是什么，但应该问，在运算中数需要什么.

这也就是说，这个关于数学基础的深奥领域引来了许多有趣的争论，我们给出与希尔伯特同时代的伟大的德国数学哲学家戈特洛布·弗雷格的观点，他并不知道希尔伯特、魏尔斯特拉斯、康托尔与戴德金（等）的任何建树，直到 1903 年，写道：

> 这个任务[⊖]从来没有被深入尝试，更不用说被解决了. *251*

⊖ 对实数进行定义.

252

第十一章

无理性重要吗

如果圆的周长与直径之比取到35位小数，用这个结果来计算整个可见宇宙的周长，其误差不会比用最强大的显微镜能看到的极微小的长度大.

——西蒙·纽康（1835—1909）

开头的引言是摘自纽康1882的书，其书名为《对数与其他数学表：关于计算艺术的使用与提示的相关例子》. 显微镜对他来说已经是非常强大的了，要想和使用望远镜一样，我们就需要大大增加小数的位数，才能确保他的论断成立. 然而它有可能是正确的，此外，他宣称“对于大多数实际的运用”，5位精度是足够的. 在航海年历办公室分享他的对数表的人，提醒他什么是现在广为人知的本福德定律，其中取 $\pi=3.14159$.

实际问题

从众多的包含 π 和 e 的公式当中，各挑出4个：

- 柯西分布的密度函数 $\varphi(x)=1/\pi(1+x^2)$.
- 两个随机选取的整数互素的概率 $6/\pi^2$.

252

- 单摆的周期 $T=2\pi\sqrt{l/g}$.

253

- 爱因斯坦场方程 $R_{ik}-g_{ik}R/2+\Lambda g_{ik}=(8\pi G/c^4)T_{ik}$.
- 对数螺线的极坐标方程 $r=e^{a\theta}$.
- 悬链线的笛卡儿方程 $y=(e^x+e^{-x})/2$.
- 阻尼调和振子控制方程 $x=e^{-t}\cos(wt+a)$.
- 泊松分布的密度函数 $\varphi(k)=e^{-\lambda}x^k/k!$.

并且还有正态分布的密度函数为 $\varphi(x)=(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$，显然其中包含了我们认识的三个标准的无理数 π，e 和 $\sqrt{2}$.

这些公式的每一个理论推导，都导致了一些基本常数的出现：例如 π，e 和$\sqrt{2}$这三个常数. 它们以精确的数出现，因此给它们冠以专门的数学符号是恰当的，但这与它们是无理数并不相关. 在所有的实际应用中，公式中出现的任意一个令人尴尬的常数都要根据需要加以近似，从而这些理论上的公式能够被用来帮助我们解决现实世界中的问题，一个众所周知的数学“玩笑”将问题变得轻松起来：

π 是什么?

数学家回答：π 是圆的周长与其直径的比值.

计算机程序员回答：π 是双精度的 3.141592653589.

物理学家回答：π = 3.14159±0.000005.

工程师回答：π 大约为 22/7.

营养师回答：π 是健康美味的甜点.

在第二章我们提到，印度人和阿拉伯人发现了处理不尽根数的技巧，另一方面，他们对无理数的逼近能力也同样令人印象深刻. 在那里，天文学家和数学家花剌子模用到了 π 的三个近似值：$\frac{22}{7}$，10 和$\frac{62832}{20000}$，他描述到，第一个值是近似值，第二个值是被几何学家所使用的，第三个是被天文学家所使用的. 所有的这些值都不是新的，此外更多的是，它们起源于印度，阿拉伯人是通过翻译著作而得到的；这个神秘的最后的一个值，能够引人注目的精确到小数点后四位数，它 *253*
好像是源于印度博学的阿耶波多一世（476—550），并在他的作品《阿耶波多 *254*
集》中能找到：

100 与 4 的和的 8 倍再加上 62 的 1000 倍是一个直径为 20000[㊀]的圆的周长的近似值.

这就使得 $\pi \sim \frac{8(100+4)+62\times 1000}{20000} = 3.1416$. 至于他是怎样得到这个近似值的还是一个谜.

纵观几千年，希腊人和他们的前辈，在继印度人和阿拉伯人之前和之后的很长一段时间，他们用以逼近无理数的方法就体现了科学家的聪明才智，每一个新的方程都带来无理数的有意义的应用. 让我们来举一个现代的例子：如果我

㊀ Victor J. Katz (ed.), 2007, *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam* (Princeton University Press).

们采用国家标准和技术研究院[⊖]网站上的普适常数，我们能够找到一张表格，其中一项是真空磁导率 μ_0，也被称为磁常数，它的准确定义值为 $4\pi\times10^{7}\mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-2}$. 这个常数的计算值为 $12.566370614\cdots\times10^{7}$，这就意味着，$3.1415926533\leqslant\pi<3.1415926536$.

现在来研究 $\sqrt{2}$，其被包含在等程音阶的划分中. 20 世纪音阶分成为一个八度区，升一个八度也就把频率扩大两倍. 这个频率区间被分成 12 个子区间，即一个八度区有 12 个半音，比如说，从 C 开始再回到 C，此时后一个 C 的频率是前一个 C 的两倍. 用音乐术语音符来表示如下：

A, A#, B, C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#

在等程音阶定义后，从 C#到 *A*#的确切频率为 435Hz，这意味着在八度音阶中音符的频率逐次为

254 $$435\times(1,2^{1/12},2^{2/12},2^{3/12},2^{4/12},2^{5/12},2^{6/12},2^{7/12},2^{8/12},2^{9/12},2^{10/12},2^{11/12},2).$$

255 这样，我们就得到了由十一个无理数组构成的集合，其具有两位小数的标准精度值为

$$(435,460.87,488.27,517.31,548.07,580.67,615.18,$$
$$651.76,690.52,731.58,775.08,821.17,870).$$

用这个可接受的有用的精度标准，若 $2^{1/12}$ 的近似值写成 T，最大的要求是 $821.165<T^{11}\times435<821.175$，这就使得

$$1.05946243<T<1.05946326.$$

由于 $2^{1/12}=1.059463094\cdots$，我们能放心地运用近似值 $T=1.059463$，并且六位小数能充分地满足需要.

最后，来考虑黄金分割比，$\varphi=(-1+\sqrt{5})/2$. 普遍认为大小为 $1\times\varphi$ 的长方形是非常令人赏心悦目的，从古至今，这种和谐美都是设计师和艺术家所推崇的. 然而，很难想象对于艺术家或设计师来说，有比应用 $\varphi\sim1.6$ 和 $1/\varphi\sim0.6$ 更具挑战性的计算任务：没有黄金分割比的应用，就不会有帕特农神庙的诞生，蒙娜丽莎看上去也会逊色许多. 音箱的设计中需要用到更高精度的 φ 值. 专家们认为，如果一个简单的正方体形音箱的尺寸比为 $1/\varphi:1:\varphi$，那么它将如我们所愿充分消除其内部的不良驻波. 让我们来看看一个专家[⊖]对一个体积为 4 立方英尺

⊖ physics. nist. gov/cgi-bin/cuu/Category? view=gif&Universal. x=117&Universal. y=10.

⊖ answers. yahoo. com/question/index? qid=20080406124528AAfNJia.

的音箱的最佳尺寸建议：

首先，取所需的外壳容量，并将其转换成一个更高精度（“可工作的”）的测量单位——如你可以取英寸. 1 立方英尺等于 1728 立方英寸；因此 4 立方英尺等于 6912 立方英寸.

下一步，取总容量 6912 立方英寸的立方根. 这个结果就产生了外壳的基本的工作尺寸. 对于一个 6912 立方英寸的外壳，其立方根将是 19.0488 英寸.

现在取 19.0488 英寸并乘上 $(-1+\sqrt{5})/2$，或 0.6180339887，你将获得另一个“最优”的维度，其长度应该是 11.7728 英寸，这就是外壳的最小内尺寸. 255 256

最后，把最初的结果 19.0488 英寸乘以 $(-1+\sqrt{5})/2$，或 1.6180339887，这样你将能获得最后一个最优尺寸，它的长度为 30.8216 英寸，这就是外壳的最大内尺寸.

如果你想检验你的计算结果是否正确，你可以将三个结果相乘，这样就应该能得到几乎准确的起初外壳的体积.

事实上，近似的，我们有 11.7728 英寸×19.0488 英寸×30.8216 英寸 = 6911.9993 立方英寸. 另外，我必须强调的非常重要的一点是，记住上面的所有尺寸都是外壳的内尺寸.

所以，有了最优尺寸，每个尺寸都有四位小数. 不过，建议是这样结束的：

也请注意，如果你愿意的话，你可以安全地在四周都增加半个英寸（0.5 英寸），也不会引起任何不良的结果.

因此，最后这个音箱的最佳尺寸是 12 英寸×19 英寸×31 英寸.

这个最后的精度限制要求，是由下面两个不等式决定的：

$$11.5\leqslant\sqrt[3]{6912}\times\frac{1}{\varphi}<12.5 \quad 和 \quad 30.5\leqslant\sqrt[3]{6912}\times\varphi<31.5$$

为了更好地处理这些问题，我们对 φ 取更高的精度，现在使用标准计算器给出体积的立方根，这样就给出下面 φ 的两个区间，

$$1.5239<\varphi<1.6564 \quad 和 \quad 1.6011<\varphi<1.6536$$

当然，第二个条件更强，我们可取 φ 为区间 $1.6011<\varphi<1.6536$ 中的任何值. 排除那些尴尬的体积，代之以更加简便的，如取体积为 1000 个单位，这就使得 $1.55<\varphi<1.65$. 所以，似乎 $\varphi\sim1.61$ 看起来很不错. 作者问他的一个音响师朋友，在他的计算中 φ 应该取什么值时，他的朋友很快就回答是 1.618，这看上去非常合理. 256

257 无理性是相当无关紧要的，那么我们来考虑另一种至关重要的情况.

理论问题

函数$\chi(x)$的定义为

$$\chi(x)=\begin{cases}1, x \text{ 是有理数},\\ 0, x \text{ 是无理数},\end{cases}$$

有理数或其他数是非常重要的，这不足为奇. 令人吃惊的可能是在第 8 页给出的这个函数的解析表达式

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\ \pi x)=\begin{cases}1, x \text{ 是有理数},\\ 0, x \text{ 是无理数},\end{cases}$$

它可以作为一个（无）有理数的指标函数，并且它是无限函数序列中的一个令人震惊的例子，即它的二重极限处处不连续.

狄利克雷似乎是第一个考虑这种反常函数的人，似乎也是德国的卡尔·托梅将其改进为

$$f(x)=\begin{cases}1/q, x=p/q \text{ 是最简分数形式的有理数}\\ 0, x \text{ 是无理数}\end{cases},$$

这个托梅（爆米花、巴比伦之星等）函数，如图 11.1 所示，显然是依赖于（无）有理性的，而这种依赖性不太明显的结果是，这个函数在所有的无理点是
257 连续的，在所有的有理点是不连续的.

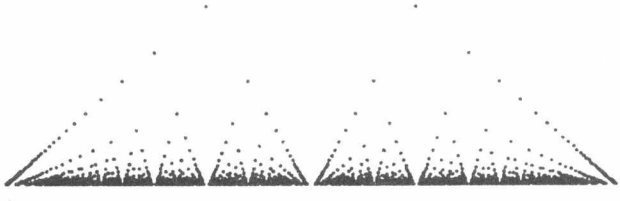


图 11.1

258 这个事实的非正式证明是有趣的，它用到第六章的一个观察：如果我们想用有理数任意地逼近一个实数，那么那些无理数的分母必须能够任意地增长. 根据这个提示，假设 x 是一个无理数，所以就有 $f(x)=0$. 若 x_1 可以任意接近

x，那么或者 x_1 是无理数，这时 $f(x_1)=0$，或者 x_1 是有理数，这时 $f(x_1)\sim 0$，因为此时 $f(x_1)$ 的分母可以任意变大. 综上所述，$f(x)$ 在 x 取无理数时是连续的. 另一方面，假设 x 是有理数，同样对于任意逼近它的 x_1，要么是无理数，这时有 $f(x_1)=0$，要么是有理数，所以有 $f(x_1)\sim 0$，此时，这两种情况都不能做到任意接近 $f(x)=1/q$，即 $f(x)$ 在 x 取有理数时是不连续的.

对无理性的依赖，其更精细的例子是彭罗斯结构，它是由飞镖和风筝构成的，如图 11.2 所示. 这种结构能够非周期性地平铺平面，仅仅是因为黄金分割比是无理数，否则这种平铺应该是具有周期性的.

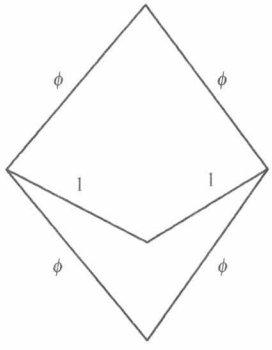


图　11.2

现在考虑来自动力系统研究的三个结果，通常都是以圆形作框架的：

取一个周长为 1 个单位的圆 C，任取一个实数 α，在圆上以 α 为长度尺度反复移动（如逆时针方向）圆上的每个点. 由此，每个点在圆周上的轨迹是不确定的，但在某种程度上，其轨迹依赖于 α 是有理数还是无理数：

258
259

如果 $\alpha=p/q$ 是最简分数形式的有理数，那么每个点的轨迹都是封闭的，并且 q 次操作后其轨迹将重复.

如果 α 是无理数，那么整个过程将更加复杂，对于这些结果，我们可以参考圆上任意点的轨迹：

1. 轨迹“穷竭这个圆”，此时要求所取的圆上的任意一点满足存在一个轨迹的无穷子序列收敛于该点.

2. 对于圆上的任意长度为 l 的圆弧，该圆弧内的轨迹上点的渐近分数精确值为 l.

3. 如果我们把轨迹截断成有限点集，这些点将把圆分成至多三种不同长度的区间，如果分成了三种不同的长度，那么最长的一段是另外两段的和.

实际上，第一个结论是由尼克尔·奥里斯姆预言的，我们首次提起他是在第二章，他试图用无理数去消除令人不舒服的有关完美之年的思想. 在他的著作《天体运动的可通约性或者不可通约性》[⊖]中的命题Ⅱ.4，是关于两个物体以相同的但不可通约的速度在一个圆里运动的问题，他做出了以下评论：

没有一个圆中的扇形是如此的小，以至于在其里面以如此方式运动的两个物体能够在未来的某个时间相结合，并且也不能在过去的某个时间曾经结合过.

我们可以继续这样下去，再次考虑这三种情况，其中无理性是至关重要的. 在前两种情形中，会让人想起，当证明有关实数的结果时，复数在其中的角色为：出现、解决问题、消失；就如同一个可爱的数学救星. 第三种情况，是没什么兴趣的一个几何的结果.

在1957年，瓦茨拉夫·谢尔宾斯基非常含糊不清地回应了雨果·施泰因豪
259 斯提出的一个问题：点$\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\right)$与平面点阵[⊖]中的所有点的距离都不相同.

260 首先，我们来看一下为什么.

假设存在横纵坐标都为整数的两个点$(a_1,\ b_1)$和$(a_2,\ b_2)$，并且它们与点$(\sqrt{2},\ \frac{1}{3})$是等距的. 那么

$$(a_1-\sqrt{2})^2+\left(b_1-\frac{1}{3}\right)^2=(a_2-\sqrt{2})^2+\left(b_2-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2-\frac{2}{3}(b_1-b_2)=2\sqrt{2}(a_1-a_2).$$

等式左边是有理数；除非$a_1=a_2$，否则等式右边是无理数. 这样就使得左边必然等于0. 因此有

$$a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2-\frac{2}{3}(b_1-b_2)=0,$$

并且，由于$a_1=a_2$，进而有

$$b_1^2-b_2^2-\frac{2}{3}(b_1-b_2)=(b_1-b_2)\left((b_1+b_2)-\frac{2}{3}\right)=0.$$

⊖ 原文为《Tractatus de commensurabilitate vel in commensurabilitate motuum celi》.

⊖ 平面上的两个坐标都为整数的点.

由于已经假设这两个点是不同的了，且横坐标已经被证明了是相同的，从而必有 $b_1 \neq b_2$，因此有

$$(b_1 + b_2) - \frac{2}{3} = 0,$$

又因为 b_1，b_2 是整数，上式是不可能成立的.

起初，施泰因豪斯的问题似乎离谢尔宾斯基的答案很远，因为他的问题是：对任意的正整数 n，是否存在一个圆，使得其上恰好有 n 个点是具有整数坐标的?

需要强调的是，在这种条件下，确实应该有 n 个点，实际上也是如此，答案就在下面令人满意的讨论中.

我们已经知道，康托尔在很久以前就证明了整数集合 **Z** 和平面点阵的集合 **Z×Z** 都是可数的. 我们已经注意到，这就意味着这个集合中的元能够列出来，因此可以如下列出平面点阵中的点：

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{L_1, L_2, L_3, \cdots\},$$

其中的排列顺序是按与点 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ 的距离递增的方式进行的. 那么 *261*

$$\left| x - \left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right) \right| < \left| L_{n+1} - \left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right) \right|$$

定义了一个以 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ 为圆心，半径长为 $\left| L_{n+1} - \left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right) \right|$ 的圆盘，其中恰好包含了 n 个点 L_1，L_2，L_3，…，L_n. *260*

第二个例子需要更冗长的讨论. 取一些正整数，并将它们分成两个无限的非空不相交的子集. 这些子集可能存在某种结构或者不存在：如果其中一个集合的结构是素数集，那么另一个的结构就是合数集，但形式上没有固定的模式；如果其中一个是偶数集，那么另一个就是奇数集，这两个集合形式上都有固定的模式；如果其中一个集合是随机选择的，两者都没有固定的模式. 我们将要观察下列这种情况，它有一个清晰的结构，有时可以生成一个模式，而有时并不能. *261*

在杰出的数学物理学家约翰·斯特拉、男爵瑞利（瑞利勋爵）三世，1877年编著的书《声音的理论》中，我们找到了他的一个观察，在研究弦振动的谐波时本质的应用到了纯粹数学的术语——无理数. 这个问题也是由美国数学家

塞缪尔·比蒂[㊀]独立发现的，它以问题的形式出现在美国数学月刊上：

3173 号问题. 提供者塞缪尔·比蒂，多伦多大学.

若 x 是一个正的无理数，y 是它的倒数，证明数列

$$(1+x),2(1+x),3(1+x),\cdots,$$

$$(1+y),2(1+y),3(1+y),\cdots$$

包含每一对连续正整数中的唯一一个.

解决方案被发表在次年[㊁]三月的该月刊上，并且在 1959 年，这个问题被作为当年的普特南数学竞赛[㊂]的问题 A6 又被提出来，下面是做了稍加修改后的形式：

证明，如果 x 和 y 是满足 $1/x+1/y=1$ 的正无理数，那么数列 $\lfloor x\rfloor,\lfloor 2x\rfloor,\cdots,\lfloor nx\rfloor,\cdots$ 和 $\lfloor y\rfloor,\lfloor 2y\rfloor,\cdots,\lfloor ny\rfloor,\cdots$ 包含每一个正整数恰好一次.[㊃]

这种形式正是我们想要研究的一种现象.

261 首先要注意到，对一个有理数 x 上述不能成立：记 $x=p/q$，$p>q$（因为 $x>1$），
262 则当 $\lfloor (p/q)n\rfloor=\lfloor (p/(p-q))m\rfloor$，且 $n=q$ 和 $m=p-q$ 时，将会达到一个相同值，或者在此基础上都乘以公共整数 p，它的乘积也产生相同的效果.

在讨论该问题之前，让我们重述这个问题如下：

令 α 是一个正无理数，由 $1/\alpha+1/\beta=1$ 定义无理数 β，并且集合 A，B 定义如下：

$$A=\{\lfloor n\alpha\rfloor : n=1,2,3,\cdots\} \quad 和 \quad B=\{\lfloor n\beta\rfloor : n=1,2,3,\cdots\}.$$

那么

$$A\cap B=\varnothing,\ A\cup B=\mathbf{N}$$

在这种情形下，我们将数列 A 和 B 说成是互补的.

我们知道无理性的要求是该结论成立的必要条件，在证明它的充分性之前，来感受一下这个过程，考虑下面的四个例子.

取 $\alpha=\sqrt{2}$，则 $\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$，有

㊀ *American Mathematical Monthly*, March 1926, Problem 3173, 33 (3): 159.

㊁ *American Mathematical Monthly*, March 1927, Solution 3177, 34 (3): 159-160.

㊂ William Lowell Putnam Mathematical Competition: Problems and Solutions 1938—1964, 1980, *Math. Ass. Am.*, pp. 513-514.

㊃ 这里 $\lfloor\cdot\rfloor$ 是向下取整函数.

$$A=\{\lfloor 1\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 2\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 3\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 4\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 5\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 6\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 7\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 8\sqrt{2}\rfloor,$$
$$\lfloor 9\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 10\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 11\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 12\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 13\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 14\sqrt{2}\rfloor,$$
$$\lfloor 15\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 16\sqrt{2}\rfloor,\lfloor 17\sqrt{2}\rfloor,\cdots\},$$
$$B=\{\lfloor 1(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 2(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 3(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 4(2+\sqrt{2})\rfloor,$$
$$\lfloor 5(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 6(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 7(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 8(2+\sqrt{2})\rfloor,$$
$$\lfloor 9(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 10(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 11(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 12(2+\sqrt{2})\rfloor,$$
$$\lfloor 13(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 14(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 15(2+\sqrt{2})\rfloor,\lfloor 16(2+\sqrt{2})\rfloor,$$
$$\lfloor 17(2+\sqrt{2})\rfloor,\cdots\},$$

化简得

$$A=\{1,2,4,5,7,8,9,11,12,14,15,16,18,19,21,22,24,\cdots\},$$
$$B=\{3,6,10,13,17,20,23,27,30,34,37,40,44,47,51,54,58,\cdots\}.$$

262

类似地，若 $\alpha=\pi$，数列为

263

$$A=\{3,6,9,12,15,18,21,25,28,31,34,37,40,$$
$$43,47,50,53,56,59,62,\cdots\},$$
$$B=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20,$$
$$22,23,24,26,27,29,\cdots\}.$$

若 $\alpha=e$，数列为

$$A=\{2,5,8,10,13,16,19,21,24,27,29,32,35,38,$$
$$40,43,46,48,51,54,\cdots\},$$
$$B=\{1,3,4,6,7,9,11,12,14,15,17,18,20,22,$$
$$23,25,26,28,30,31,\cdots\}.$$

最后，令人振奋的是，若 $\alpha=\gamma+1$[㊀]，

$$A=\{1,3,4,6,7,9,11,12,14,15,17,18,20,22,$$
$$23,25,26,28,29,31,\cdots\},$$
$$B=\{2,5,8,10,13,16,19,21,24,27,30,32,35,$$
$$38,40,43,46,49,51,54,\cdots\}.$$

在这些结论看似正确的前提下，我们来证明它.

㊀ 欧拉常数 $\gamma=0.57721\cdots$，该数的无理性仍是一个公开问题. 这里，我们需要的是与其相关的大于 1 的情况.

首先，证明 $A\cap B=\varnothing$，用反正法来证明，假设这两个数列有一个公共元. 如果这样的话，那么一定存在正整数 m 和 n，使得 $\lfloor n\alpha\rfloor=\lfloor m\beta\rfloor=N$ 成立，这就意味着下面的两个不等式

$$N<n\alpha<N+1 \quad 和 \quad N<m\beta<N+1$$

必须同时成立：注意其中的关键点是，因为 α 和 β 都是无理数，这两个不等式都是严格不等的. 对其变形，就有

263

$$\frac{n}{N+1}<\frac{1}{\alpha}<\frac{n}{N} \quad 和 \quad \frac{m}{N+1}<\frac{1}{\beta}<\frac{m}{N}.$$

将上述两个不等式相加，得

264

$$\frac{n}{N+1}+\frac{m}{N+1}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<\frac{n}{N}+\frac{m}{N}.$$

由定义中的条件，有

$$\frac{m+n}{N+1}<1<\frac{n+m}{N}.$$

变形，得

$$N<n+m<N+1,$$

这就告诉我们在整数 N 与 $N+1$ 之间严格地存在一个整数 $m+n$，但这是不可能的. 所以必有 $A\cap B=\varnothing$ 成立.

现在，考虑两个有限的数列，其中一个数列中的最大的元为 N，另一个的元都比 N 小：

$$A_N=\{\lfloor n\alpha\rfloor:\lfloor n\alpha\rfloor\leqslant N;n=1,2,3,\cdots\},$$

$$B_N=\{\lfloor n\beta\rfloor:\lfloor n\beta\rfloor<N;n=1,2,3,\cdots\}.$$

例如，对于上面 $\sqrt{2}$ 的情形，取 $N=12$，有

$$A_{12}=\{1,2,4,5,7,8,9,11,12\} \quad 和 \quad B_{12}=\{3,6,10\}.$$

这样一个小小的思想揭示了每个数列中元素的个数都能计算如下：

$$|A_{12}|=9=\left\lfloor\frac{12+1}{\sqrt{2}}\right\rfloor 和 |B_{12}|=3=\left\lfloor\frac{12+1}{2+\sqrt{2}}\right\rfloor.$$

一般地，

$$|A_N|=\left\lfloor\frac{N+1}{\alpha}\right\rfloor \quad 和 \quad |B_N|=\left\lfloor\frac{N+1}{\beta}\right\rfloor.$$

因此，两个数列中所有元素的总和是

$$|A_N| + |B_N| = \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N+1}{\beta} \right\rfloor$$
$$= \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor (N+1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \right\rfloor$$
$$= \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor (N+1) - \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor. \quad 264$$

现在，对一个整数 M 和任意数 θ，得到向下和向上取整函数的两个属性：　265

$$\lfloor M+\theta \rfloor = M + \lfloor \theta \rfloor \quad 和 \quad \lfloor -\theta \rfloor = -\lceil \theta \rceil.$$

利用这些性质，有

$$|A_N| + |B_N| = \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor + N + 1 + \left\lfloor -\frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor$$
$$= \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor + N + 1 - \left\lceil \frac{N+1}{\alpha} \right\rceil.$$

由于 $(N+1)/\alpha$ 不可能是整数，$\lfloor (N+1)/\alpha \rfloor = \lceil (N+1)/\alpha \rceil - 1$，这就意味着

$$|A_N| + |B_N| = \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha} \right\rfloor - 1 + (N+1) - \left\lceil \frac{N+1}{\alpha} \right\rceil = N.$$

由此，我们已经做到了：对任意的 N，这两个数列结合起来就是正整数集 $\{1, 2, 3, \cdots N\}$ 的序列.

现在来回顾上面的四个例子. 比较细心的读者可能已经注意到了 $A \cup B$ 后面部分中的间隙，因为我们受到了数列 A 和 B 列表中不可避免的停顿点的影响：远不止此，我们被迫使用这个数的有理数近似值去生成该数列. 简而言之，我们可以证明这个结论，但从没有实现它.

最后，让我们来看一个更加一般的结构，该结构将正整数分离开了.

在 1954 年，两个加拿大的数学家，利奥·莫泽和乔基姆·兰贝克构建了如下关于互补数列的结论[⊖]：

令 $f(n)$ 是一个非递减函数，该函数将自然数映射到自然数集，并且定义第二个函数，$f^*(n)\max\{k\}$，其中对任意的自然数 n，每一个 k 都使得 $f(k)<n$. 现在，再额外定义两个函数 $F(n)=f(n)+n$ 和 $G(n)=f^*(n)+n$，那么由 $F(n)$ 和 $G(n)$ 生成的数列是互补的.

⊖ J. Lambek and L. Moser, 1954, *Inverse and complementary sequences of natural numbers*, *American Mathematical Monthly* 61: 454-458.

起初，这个结论还有点让人无法掌握，因此我们先考虑一个比较特殊的情况，
265 即 $f(n)=2n$. 此时，这个过程能生成如下的表格：

n	1	2	3	4	5	6	7	…
$f(n)$	2	4	6	8	10	12	14	…
$f^*(n)$	0	0	1	1	2	2	3	…
$F(n)$	3	6	9	12	15	18	21	…
266 $G(n)$	1	2	4	5	7	8	10	…

我们看到表格的最后两行给出了自然数的一个划分，所需要的两个集合定义如下：

$$A=\{3,6,9,12,15,18,21,\cdots\},$$

$$B=\{1,2,4,5,7,8,10,\cdots\},$$

这两个集合分别是 3 的倍数集和非 3 的倍数集.

另外，对 $F(n)$，我们能得到一个简单的公式 $F(n)=f(n)+n=2n+n=3n$，这是不足为奇的. 令人更加兴奋的是，我们也能够为非 3 倍数的数列 B 找到一个简洁的公式；也就是说，能获得函数 $G(n)=f^*(n)+n$ 的简单的显式表达式.

如果我们更加仔细地观察 f^* 的定义，对任意的 n，要找出它所对应的函数值，需要寻找使得 $2k<n$ 成立的最大的 k 值，即 $k<n/2$. 这个最大的值就是向下取整函数 $k=\lfloor n/2\rfloor$；但这里的不等号是严格的，若 n 是偶数，将会有 $\lfloor n/2\rfloor=n/2$ 这样的麻烦. 为了克服这个困难，两种情况同时讨论，对奇数 n，$n/2$ 的小数部分准确的就是 $\frac{1}{2}$，所以将其减去 $\frac{1}{4}$，将不会对向下取整函数的值产生影响. 也就是说，取这个最大的 $k=\left\lfloor n/2-\frac{1}{4}\right\rfloor$，所以 $f^*(n)=\left\lfloor n/2-\frac{1}{4}\right\rfloor$，这就使得

$$G(n)=f^*(n)+n=\left\lfloor n/2-\frac{1}{4}\right\rfloor+n,$$

这样对于数列 B，就有了一个简洁的公式，因此对所有的非 3 的倍数也就有了公式. 试一下！之后读者也可以使用同样的技巧[⊖]，去证明第 n 个非平方的自然数能够写成

$$G(n)=\left\lfloor\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right\rfloor+n,$$

266

⊖ 这次，以 $F(n)=n^2$ 开始.

且毫无提示的，第 n 个非三角形数为　　267

$$G(n)=\left\lfloor \sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right\rfloor +n,$$

然后，可以考虑其他的各种可能的数.

我们的主要兴趣是能够构造出前面提到的使得这些公式中包含无理数的结果.

定义

$$f(n)=\lfloor n\alpha\rfloor -n\ ,\text{因此}\ f(n)=\lfloor n\alpha\rfloor .$$

由定义可知，$f^*(n)\max\{m\}$，其中的 m 使得 $f(m)<n$ 成立. 也就是取使得 $\lfloor m\alpha\rfloor -m<n$ 成立的最大的 m，所以也有 $\lfloor m\alpha-m\rfloor=\lfloor m(\alpha-1)\rfloor<n$. 这反过来就意味着 $\lfloor m(\alpha-1)\rfloor=n-1$，即有 $n-1<m(\alpha-1)<n$. 最后，m 一定就是使得 $m<n/(\alpha-1)$ 成立的最大的整数，这就使得 $m=\lfloor n/(\alpha-1)\rfloor$. 所有的这些意味着 $f^*(n)=\lfloor n/(\alpha-1)\rfloor$，这使得

$$G(n)=\left\lfloor \frac{n}{\alpha-1}\right\rfloor +n=\left\lfloor \frac{n}{\alpha-1}+n\right\rfloor =\left\lfloor n\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}\right\rfloor =\left\lfloor n\frac{\alpha}{\alpha-1}\right\rfloor =\lfloor n\beta\rfloor ,$$

其中 $\alpha/(\alpha-1)=\beta$，或 $1/\alpha+1/\beta=1$. 这时读者就可以看出，为什么无理性很重要了.

应用无理数，我们能将正整数分成三个或更多的不相交的无限集的并吗？我们不能，阿维泽里·西格蒙德·弗伦克尔已经为下面的结果[⊖]提供了令人愉悦的证明：

令 $m>1$，α_1，…，α_m 是正数. 则 $\{\lfloor n\alpha_i\rfloor:i=1,\cdots,m;n=1,2,\cdots\}$ 是一个互补的系统，当且仅当

1. $m=2$，
2. $1/\alpha_1+1/\alpha_2=1$，
3. α_1 是无理数.　　267

尽管有如此的系统　　268

$$\{\{\lfloor\varphi\lfloor n\varphi\rfloor\rfloor\},\{\lfloor\varphi\lfloor n\varphi^2\rfloor\rfloor\},\{\lfloor n\varphi^2\rfloor\}:n=1,2,3,\cdots\},$$

或者

$$\begin{aligned}\{\{\lfloor\varphi\lfloor n\varphi\rfloor\rfloor\}:n&=1,2,3,\cdots\}\\&=\{1,4,6,9,12,14,17,19,22,25,27,30,\\&\quad 33,35,38,40,43,46,48,51,\cdots\},\end{aligned}$$

⊖ Aviezri S. Fraenkel, 1977, Complementary Systems of Integers, *American Mathematical Monthly*. 84: 114-115.

$$\{\lfloor \varphi \lfloor n\varphi^2 \rfloor \rfloor : n = 1,2,3,\cdots\}$$
$$= \{3,8,11,16,21,24,29,32,37,42,45,$$
$$50,55,58,63,66,71,76,79,84,\cdots\},$$
$$\{\lfloor n\varphi^2 \rfloor : n = 1,2,3,\cdots\}$$
$$= \{2,5,7,10,13,15,18,20,23,26,28,31,$$
$$34,36,39,41,44,47,49,52,\cdots\},$$

这个系统已经被挪威数学家托拉尔夫·斯科朗证实是互补的，他也创设了二维等价，也不必要包含无理数，但当他这样做时，却发现：

若 α_1 是无理数，则 $\{S(\alpha_1,\beta_1),S(\alpha_2,\beta_2)\}$ 组成了一个划分，当且仅当

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=1,\text{并且}\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\text{是一个整数},$$

其中

$$S(\alpha_i,\beta_i)=\{\lfloor \alpha_i n+\beta_i \rfloor : n=1,2,3,\cdots;i=1,2,3,\cdots\}.$$

我们将暂时搁置无理数的重要性，考虑一个反面的注记：在那里的例子中，有理数而非无理数起着关键的作用.

最后，我们将考虑把一个正方形剖分成几个正方形的问题，这看起来是近年来最令人吃惊的问题. 英国难题天才亨利·杜德耐是第一个在所谓的伊泽贝尔夫人灵柩问题中，暗示有这种想法的人，该问题出现在 1902 年 1 月的《海滨杂志》上. 实际上，这个问题是要求将一个 20×20 的正方形分割成几个小正方形和

268 一个 $10\times\frac{1}{4}$ 的长方形，但是这个思想很快就唤起了人们的想象力，与之相关的

269 问题迅速出现了，现在有非常多的这方面的问题. 我们感兴趣的是马克斯·德恩贡献的一个结论，他在 1903 年证明出一个长方形能分割成正方形，当且仅当其长与宽的比值是一个有理数. 图 11.3 给出了一个将长方形分割成正方形的例子，最后，给出这个结果的证明.

首先要证明，如果一个长方形的长与宽之比是有理数，那么这个长方形就能够分割成正方形. 实际上这正如同在浴室地板上镶嵌边长为 1 的单位正方形瓷砖. 若这个尺寸为 $a\times b$ 的长方形的长与宽都是整数，显然能用单位正方形来镶嵌；若 $a/b=p/q$ 是有理数，那么这个长方形就与尺寸为 $qa\times qb=pb\times qb$ 的长方形相似，这就能由边长为 b 的正方形镶嵌.

现在，假设这个长方形能由正方形镶嵌. 建立一个直角坐标系，其原点取在

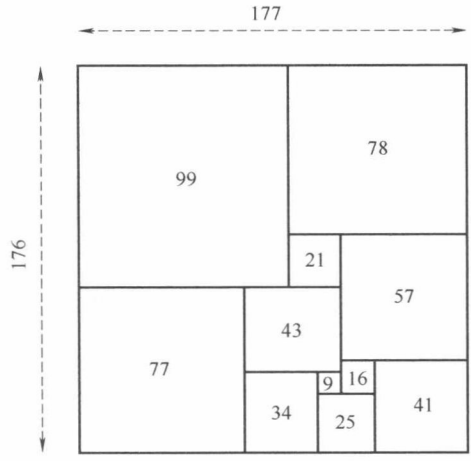


图　11.3

一个正方形的左下角的顶点，相应的边被取为 x 轴和 y 轴，如果恰好使得每个正方形的每个顶点的坐标都是整数，那么每个正方形的边长都是整数，所以长方形的长与宽也一定是整数.

那么，现在假设不是这种情况，回忆第六章的狄利克雷的逼近定理：　*269*

假设 α 是一个实数，那么对任意的正整数 n，都存在正整数 p 和 q，$q \leqslant n$，　*270*
使得 $|q\alpha - p| < 1/(n+1)$ 成立.

也就是说，任意一个实数乘以一个合适的整数后其积能够被某一整数任意逼近.

假设有两个实数 α 和 β. 那么根据上述结果，对合适的整数，有

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{n-1} \quad 和 \quad |q_1\beta - p_1| < \frac{1}{n+1}$$

成立，但不是很显然的，对某个 q，可能有 $q_1 = q$ 成立；也就是说，这两个不等式可以同时成立. 将这一结论推广到任意有限个实数的情形，这就会带给我们所谓的狄利克雷同时逼近定理成立是可能的. 我们选择不去证明这个困难的结论，但当然我们现在要去利用它.

整个过程，我们都参考图 11.4. 尽管并不是所有正方形的所有顶点的坐标都是整数，我们借助定理，将其中每一个坐标都乘以同一个整数，去构建一个相似的长方形，使其能够用近似整数坐标的正方形完全镶嵌. 现在以半个单位为间隔再穿过整个长方形画水平直线，考虑这些直线在该长方形内部的总长度 L_h. 首先，构成 L_h 的每一段的长都为 a，存在整数 n_a，使得 $L_h = a \times n_a$；类似地，构

270 建垂直线，其结果为 $L_v = b \times n_b$.

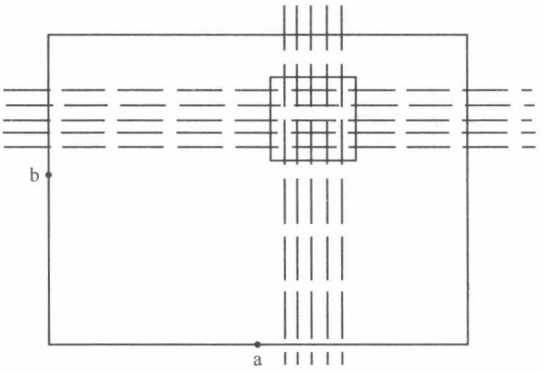


图 11.4

第二，我们通过计算镶嵌的每个正方形，来累加 L_h 中的每一段的长度. 如果将正方形的边长记为 S_i，那么 $L_h = \sum_i s_i \times n_{s_i}$；我们再对垂直线重复这个过程，这就得到其中的近似整数坐标. 由于坐标能被任意地逼近整数，无论这个正方形处在长方形的哪个位置，垂直线都将与水平线以相同的次数穿过这个正方形，

271 因此 $L_v = \sum_i S_i \times n_{s_i}$，也就是说 $L_h = L_v$，因此 $a \times n_a = b \times n_b$，这就意味着 $a/b = n_a/n_b$ 是有理数.

由此得到：关于无理性的考察已经到了最后的篇章. 它是一个漫长的艰苦卓绝的故事，饱含了绝望时的乐观、委屈的接受、灵感的洞察以及最后的毫无争议. 我们这种 21 世纪的理解虽然坚定但是是远远不够的，因为我们还被无法解决的问题所困扰. 我们希望在这本书的读者当中，能够有一个或者更多的人进一

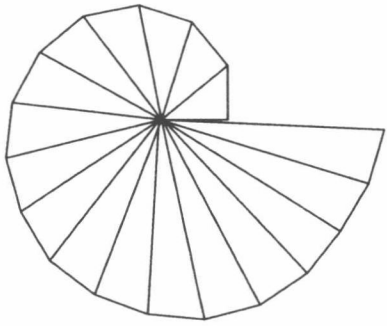
271 步地提出问题.

附　录

附录 A　西奥多罗斯螺线

我们在第 7 页提到了西奥多罗斯螺线. 在本附录中，我们进一步地追寻这个思想，以满足那些已被勾起兴趣的读者. 首先，读者可能想知道螺线的另一个名字 Quadratwurzelschnecke，这是由奥地利的数学家埃德蒙·赫劳卡在 1980 年的后期创造的，他研究了螺线的大量性质.

我们重新做出下面的这个原始图形，并为三角形的非直角顶点的坐标寻找一个公式，此时使用复数是方便的.



由顶点 $z_1=1+\mathrm{i}$ 开始，且通过附加条件由 z_n 生成 z_{n+1}：

$z_{n+1}=z_n+$与 z_n 成直角的模为 1 的一个合适的复数.

回想一下，一个复数乘以 i，将使其沿逆时针方向旋转 90°，并且一个复数除以它的模之后就得到模为 1 的复数. 因此可以如下生成螺线

272

273

$$z_1 = 1 + \mathrm{i},$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{z_n}{|z_n|}\mathrm{i}, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

因为我们知道 $|z_n| = \sqrt{n+1}$，可以重新将公式写成

$$z_{n+1} = z_n + \frac{z_n}{|z_n|}\mathrm{i} = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right) z_n,$$

并且一直做下去，有

$$z_{n+1}=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right)z_n=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right)z_{n-1}$$
$$=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n-1}}\right)z_{n-2}$$
$$=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n-1}}\right)\cdots(1+\mathrm{i})$$
$$=\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right).$$

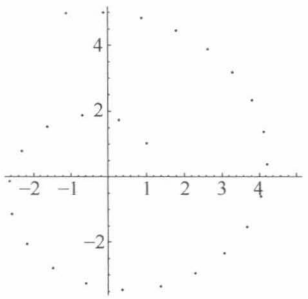


图 A.1

那么，顶点坐标可由下列公式得到

$$z_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right),n=1,2,3,\cdots.$$

图 A.1 显示了从三角形中孤立出来的顶点. 继续这个过程，需要更多的条件来
273 强调这个螺线结构的本质：很难抵制如此的诱惑，即连接这些点，从而形成一
274 个连续的曲线. 当然，这样做的话，我们必须摒弃曲线上所有交叉的点，因为所有原始的离散点都是作为三角形的顶点的；该怎样最好地做到这件事呢？

让一个特别著名的先例来引导我们：离散的阶乘函数 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times2\times1$ 扩展到伽玛函数 $\Gamma(x)$. 对于 $n=1$，2，3，…，把点（n，$n!$）连接起来，的确暗示我们由此能形成一条光滑的曲线，伟大的莱昂纳多·欧拉在 1729—1730 年间明确了这个研究主题，即取正整数时等于 $n!$ 的函数，对除了负整数以外的所有数都是有意义的：不知道细节的读者可能希望进一步探寻此事. 在此，我们的困难是第 n 个顶点的表达式是由 n 项乘积给出的，这样 n 必须是一个正整数. 我们在这里使用的方法与欧拉曾用过的方法是不相同的：将有限的乘积

代之以收敛的无限乘积. 因此，

$$z_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)$$

$$= \frac{\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)\right\}\times\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right)\times\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+2}}\right)\times\cdots}{\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+1}}\right)\times\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+2}}\right)\times\cdots}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)\Big/\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n+k}}\right)\right\}.$$

利用这个，可以用连续变量 α 来代替正整数变量 n，因此来考虑实变量 α 的一个复值函数：

$$T(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)\Big/\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\alpha+k}}\right)\right\}.$$

分母中的 $k=1$ 时的这一项给我们提出了 $\alpha>-1$ 的限制，但是如果利用对数将这个乘积转换成求和，就能更好地研究这个函数，从而也可以利用上微积分. *274*

如此，有 *275*

$$\ln[T(\alpha)] = \ln\left[\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)\Big/\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\alpha+k}}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)\Big/\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\alpha+k}}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)-\ln\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\alpha+k}}\right)\right].$$

现在对 α 进行微分，然后将获得的复数分离出实部和虚部：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\ln[T(\alpha)] = \frac{T'(\alpha)}{T(\alpha)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}\right)-\ln\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\alpha+k}}\right)\right]$$

$$= 0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+k)\sqrt{\alpha+k}}\right)\Big/\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\alpha+k}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+k)\sqrt{\alpha+k}+\mathrm{i}(\alpha+k)}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\sqrt{\alpha+k}+\mathrm{i})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha+k}-\mathrm{i}}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha+k}}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha+k}(\alpha+k+1)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(\alpha+k)}-\frac{1}{(\alpha+k+1)}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^{3/2}+(\alpha+k)^{1/2}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+1}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^{3/2}+(\alpha+k)^{1/2}},
\end{aligned}
$$

275 其中第一个级数逐项相消后化简成了 $1/(\alpha+1)$.

276 那么，有

$$
\frac{T'(\alpha)}{T(\alpha)}=\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+1}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^{3/2}+(\alpha+k)^{1/2}}. \qquad (*)
$$

现在利用这个简便的式子，积分后找到 $T(\alpha)$ 的另一个表达式，有

$$
\int_0^{\alpha}\frac{T'(\alpha)}{T(\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\mathrm{d}\alpha+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^{3/2}+(\alpha+k)^{1/2}}\mathrm{d}\alpha,
$$

$$
[\ln[T(\alpha)]]_0^{\alpha}=\frac{1}{2}[\ln(\alpha+1)]_0^{\alpha}+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^{3/2}+(\alpha+k)^{1/2}}\mathrm{d}\alpha,
$$

且因为 $T(0)=1$，有

$$
\ln T(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(\alpha+1)+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^{3/2}+(\alpha+k)^{1/2}}\mathrm{d}\alpha.
$$

综上所述，有

$$
T(\alpha)=\sqrt{\alpha+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},
$$

这里 θ 是一个令人讨厌的表达式，其中含有积分和无限和，对此我们不打算关注太多.

当然，这个表达式说明 $|T(\alpha)|=\sqrt{\alpha+1}$，正如我们所希望的，且可以用下面的方式发展螺线的渐近的极坐标方程：有 $r=\sqrt{\alpha+1}$，并且有渐近表示 $\theta\sim 2\sqrt{\alpha+1}+K$（见下文）. 这使得极坐标方程的渐近形式为 $r\sim\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}k$，即形式为 $r=a+b\theta$，这恰好是阿基米德螺线的定义方程：西奥多罗斯螺线渐进地逼近于阿基米德螺线. 我们必须承认，本书的封面自命不凡地应用了鹦鹉螺贝壳所呈

现的对数螺线，其表达式为 $r=ae^{b\theta}$！

图 A.2 给出了 $T(\alpha)$ 在复平面上的曲线图. 注意这个图在起始点 1+i 以前的形态是怎样推算出来的，这条曲线点 1 处跨过横轴，此时 $\alpha=0$，并且 $\alpha\to-1$（从右侧趋近）时，螺线趋于原点. 276

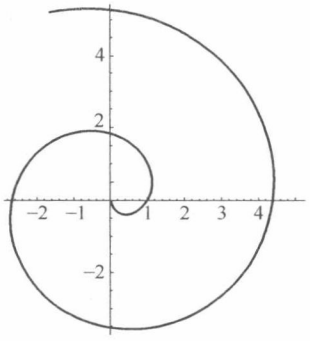


图　A.2

菲利普·戴维斯和其他人已经对这种结构进行了研究，在他们的著作中[⊖]可以发现关于上面的 θ 的推导过程. 戴维斯把这条曲线在点 1 处跨越水平线时的斜率称为“基本的世界常数”：我们将看到它的计算过程. 277

首先，由于 $T(\alpha)$ 是关于实变量 α 的一个复值函数，若记 $T(\alpha)=u(\alpha)+iv(\alpha)$，所以 $T'(\alpha)=u'(\alpha)+iv'(\alpha)$，这使得曲线的梯度为 $v'(\alpha)/u'(\alpha)$.

现在，回到公式（*），代入 $\alpha=0$，有

$$\frac{T'(0)}{T(0)}=\frac{T'(0)}{1}=T'(0)=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}},$$

这就告诉我们，当曲线跨越水平线时，该曲线的梯度为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}}\Big/\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}(k+1)},$$

从而定义戴维斯的西奥多罗斯常数[⊖]，勉强地写出它的小数形式为

$$T=1.860025079221190307180695915717143324666524121523 45\cdots,$$

它很可能是一个无理数！ 277

⊖ Philip J. Davis, 1993, *Spiral from Theodorus to Chaos* (A. K. Peters).

⊖ 不要和通常的西奥多罗斯常数$\sqrt{3}$相混淆.

278

附录 B　圆的有理参数化

在第二章中，我们给出了圆 $x^2+y^2=5$ 的有理参数化，

$$x=\frac{t^2-4t-1}{1+t^2},\quad y=\frac{2-2t-2t^2}{1+t^2},$$

现在来看看它的推导过程.

首先，回顾两个定义，表述如下：

- 所谓平面上的一个有理点指的就是其横、纵坐标都是有理数的点.
- 所谓平面上的一条有理直线指的就是其方程可以写成 $ax+by+c=0$ 的直线，其中 a，b，c 都是有理数.

我们可以在圆上的有理点和有理直线上的有理点之间建立一一对应关系，参考图 B. 1，构建方式如下：

- 画一个圆.
- 在给定的圆上选取任意的一点 P 作为一个固定点.
- 随意地画一条有理直线 L.
- 经过圆上的每一个有理点 Q，画一条直线 PQR，其中 R 是其与直线 L 的交点.
- 这个一一对应关系就是 $Q\leftrightarrow R$.

为了能对圆上的任意一个有理点 Q 建立一一对应关系，因为 P 是有理点，那么直线 PQ 是有理直线. 有一个平凡的事实，若两条有理直线相交，它们肯定相交于一个有理点，这就确保了直线 PQ 与 L 的交点 R 是一个有理点. 反过来，在直线 L 上任取一个有理点 R，画出有理直线 PR. 那么这条直线与圆的
278 相交将产生一个有理系数的二次方程（以 x 表示，形式为 $ax^2+bx+c=0$），且
279 其中的一个根（有理）是 P 点的横坐标 x. 由于两根之和等于 $-b/a$ 这是一个有理数，那么它的另一个根也一定是有理数，由此我们能够知道圆上有理点 Q 的横坐标 x 是有理的，进而其纵坐标 y 也是有理的. 因此，这个一一对应关系就这样建立起来了. 因为两条直线有交点，这就保证了它们是不平行的，为了方便，我们可以取直线 L 与 OP 垂直，且通过点 O；也有，点 P 本身和 L 上的“无穷远点”相对应.

为了推广这种思想的应用，我们首先来看看，这个方法是怎样处理标准的

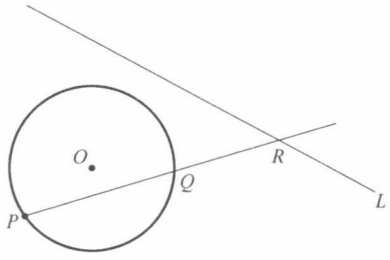


图　B.1

单位圆 $x^2+y^2=1$ 的代数参数化问题的.

取点 $P=(-1,0)$，取直线 L 为 y 轴，如图 B.2 所示. 直线 PQR 的方程为 $y=t(1+x)$，令 $R=(0,t)$，且 Q 点的横坐标 x 由下列方程给出：

$$1-x^2=[t(1+x)]^2=t^2(1+x)^2,$$

约去因式 $1+x$，得到 $x=(1-t)^2/(1+t^2)$，代入到 y 的方程，得到 $y=2t/(1+t^2)$，因此就有了标准的有理参数化方程 *279* *280*

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

对于 $x^2+y^2=5$，参照图 B.3，取点 $P=(1,2)$，则 L 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$. 直线 PQR 的方程为 $y-2=t(x-1)$，这使得

$$R=\left(\frac{2t-4}{2t+1},\frac{2-t}{2t+1}\right),$$

且点 Q 的横坐标 x 由方程 $5-x^2=[t(x-1)+2]^2$ 给出，将其变形为二次方程

$$(1+t^2)x^2+2t(2-t)x+(t^2-4t-1)=0.$$

我们知道 $x=1$ 是其一个根，两根之和为 $-(2t(2-t))/(1+t^2)$，因此 Q 点的横坐标 x 为 $Q=-(2t(2-t))/(1+t^2)-1=(t^2-4t-1)/(1+t^2)$，代入到纵坐标 y 的表达式，有 $y=(2-2t-2t^2)/(1+t^2)$.

对于圆上的那个唯一的有理点 P，在这个过程中将对应所有的无穷远点. 但由于不能取到简单的 P，类似于 $x^2+y^2=3$ 这样的方程，方法将失效. 这个方法适用于一般的圆锥曲线. *280*

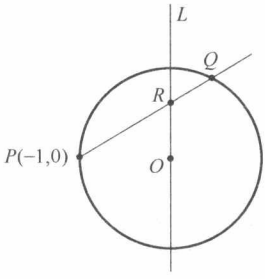


图 B.2

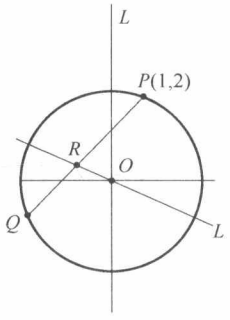


图 B.3

281

附录 C 连分数的两个性质

在第三章中，π 的无理性的兰伯特证明需要连分式的两个特殊性质，在这里我们证明它们，为了方便，重新叙述一下.

对于连分数

$$y = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}.$$

1. 若 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$ 是非零数的无限数列，连分数

$$b_0 + \cfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1 b_1 + \cfrac{\lambda_1\lambda_2 a_2}{\lambda_2 b_2 + \cfrac{\lambda_2\lambda_3 a_3}{\lambda_3 b_3 + \cfrac{\lambda_3\lambda_4 a_4}{\lambda_4 b_4 + \cdots}}}}$$

与 y 有相同的渐进分数，并且，如果其收敛的话，那么它也收敛于 y.

2. 假设 $b_0=0$. 如果对于任意的 $i\geqslant 1$，$|a_i|<|b_i|$，那么

281 (a) $|y|\leqslant 1$；

(b) 记

282

$$y_n = \cfrac{a_n}{b_n + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \cfrac{a_{n+3}}{b_{n+3} + \cdots}}}}.$$

若对某个 n，上式从来没有 $|y_n| = 1$ 的情形出现，那么 y 是无理数.

这两个结果都可以由归纳法证明，接下来我们将以非常规的方法来证明. 不幸的是，每个形式化过程中都有些不受欢迎的表达式，如果想要的话，我们将留给读者去构造.

1 的证明

我们将简单地列出取前三个值时的情形.

第 1 个：

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} = b_0 + \frac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1 b_1}.$$

第 2 个：

$$b_0 + \cfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1 b_1 + \cfrac{\lambda_1\lambda_2 a_2}{\lambda_2 b_2}} = b_0 + \cfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1\left(b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}\right)} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}}.$$

第 3 个：

$$\begin{aligned} b_0 + \cfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1 b_1 + \cfrac{\lambda_1\lambda_2 a_2}{\lambda_2 b_2 + \cfrac{\lambda_2\lambda_3 a_3}{\lambda_3 b_3}}} &= b_0 + \cfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1 b_1 + \cfrac{\lambda_1\lambda_2 a_2}{\lambda_2\left(b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}\right)}} \\ &= b_0 + \cfrac{\lambda_1 a_1}{\lambda_1\left(b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + a_3/b_3}\right)} \\ &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}}. \end{aligned}$$

282

283 我们希望，通过这些，这个结论的神秘面纱就能够被揭开.

2 的证明

（a）因为

$$|a_{i+1}| < |b_{i+1}|, \quad \frac{|a_{i+1}|}{|b_{i+1}|} = \left|\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| < 1,$$

所以

$$-1 < \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} < 1,$$

这就意味着

$$b_i - 1 < b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} < b_i + 1.$$

由此，有

$$b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} > b_i - 1.$$

再利用不等式的两边都是正数，有

$$\left|b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| > |b_i - 1|.$$

由三角不等式的变形形式 $|\alpha-\beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$，那么，有

$$\left|b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| > |b_i - 1| \geqslant |b_i| - 1.$$

现在，a_i 和 b_i 都是整数，所以一定有 $|a_i| < |b_i|$，$|b_i - 1| \geqslant |a_i|$，这就意味着

$$\left|b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| > |a_i|,$$

所以

283

$$\left|\frac{a_i}{b_i + a_{i+1}/b_{i+1}}\right| < 1.$$

284 我们继续同样的讨论，考察这个连分数的起始结构，由

$$\left|\frac{a_i}{b_i + a_{i+1}/b_{i+1}}\right| < 1,$$

所以

$$-1 < \frac{a_i}{b_i + a_{i+1}/b_{i+1}} < 1,$$

进而，有

$$b_{i-1} - 1 < b_{i-1} + \frac{a_i}{b_i + a_{i+1}/b_{i+1}} < b_{i-1} + 1$$

和

$$\left| b_{i-1} + \frac{a_i}{b_i + a_{i+1}/b_{i+1}} \right| > |b_{i-1} - 1| > |b_{i-1}| - 1 \geqslant |a_{i-1}|,$$

这意味着

$$\left| \frac{a_{i-1}}{b_{i-1} + \dfrac{a_i}{b_i + \dfrac{a_{i+1}}{b_{i+1}}}} \right| < 1.$$

对这个连分数的起始构造继续这个过程，有对所有的 i，第 $i+1$ 项展开式的绝对值都小于 1. 这就意味着，在极限状态下，有 $|y| \leqslant 1$.

（b）假设 y 是一个有理数，因此

$$y = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}} = \frac{p_0}{p_1},$$

则一定有 $|p_1/p_0| \leqslant 1$，因此有 $|p_1| \leqslant |p_0|$. 现在记 $y = p_1/p_0 = a_1/(b_1 + y_2)$，那么 y_2 一定是有理数，记作

$$y_2 = \frac{a_1 p_0 - b_1 p_1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

且 $|y_2| \leqslant 1$，这就暗示着 $|p_2| \leqslant |p_1|$. 无限地继续这个过程，直到取到一个 n，使得 $|y_n| < 1$，因此，就有 $|p_{n+1}| \leqslant |p_n|$. 这样就生成了一个无限递减的正整数序列：

$$|p_0| \geqslant |p_1| \geqslant |p_2| \geqslant \cdots \geqslant |p_n| > |p_{n+1}| > \cdots,$$

这显然是不可能的. 那就只能接受 y 是无理数这个事实了.

286

附录 D　寻找罗杰·阿培里的坟墓

巴黎自诩在其中心附近有三个著名的墓地：北边是蒙马特；南边是蒙帕纳斯；东边的拉雪兹神父公墓是它们中最出名的一个，它的大小也跟它的名声一样大. 它位于第 20 个法国行政区的一个城市的山上，名字起源于这块地的前任主人，即路易十四世的忏悔者：弗朗索瓦（1624—1709）. 在 1804 年，拿破仑下令购买这块土地，并用作城市的公墓，后来扩展到现在的 119 英亩，其充分证明了巴黎的绰号：死亡之地；死亡的城市. 建议读者不要低估了这块地的复杂性. 据估计，在过去的几年里，有一百万的人被埋藏在这里，对于“普通”人来说它仍然是一个活跃的墓地，正如它的名声一样：一些这个城市的“永久性居民”的名单才是真正令人印象深刻的[⊖]. 在公墓当局提供的（免费）小册子上列出了大概 160 位伟人的名字及其事迹[⊖]，大致上游览一下这个列表：常见的且能吸引数学眼界的是弗朗索瓦·加斯帕德和弗朗索瓦·阿拉戈，但却没有罗杰·阿培里的名字. 他与他的父母安息在一起，他们的骨灰盒都放在小墓穴墙上的壁龛里，一个非常难找的墓穴. 读这本书的人应该去巴黎，去参观这个地方和那个墓地，为避免为了寻找一个大墓地上的一个壁龛而浪费大量时间，我们在
286 这里做一个简短的导游.

287 墓地附近有三个地铁站（其中一个称为拉雪兹神父公墓）和大量的公交车站，并且它一共有五个入口. 我们建议最好从位于梅尼孟丹大道和巴克大道交汇处的主入口进入. 在第一个地铁站拉雪兹神父公墓站下车可以沿着公墓墙的左边一直走到主入口，并使读者避免了由角落入口进入；在第二个地铁站菲利普·奥古斯特地铁站下车可以忽略暂休入口，并沿着公墓墙的右边走到主入口；第三个地铁站甘贝塔明显比其他两个站更靠近采石场. 然而，这个便利之处应与沿着主干道进入到这个引人注目的地方加以权衡.

在这个公墓里可以通过小册子有效地找到那个隐藏的地方：从主大道的第一个路口右转，然后左转，它就在你的右边. 无论你是在小册子的引导下还是好奇心的驱使下，最终你都能由它的大小和高度找到这个为数不多的采石场形成

⊖ Philip J. Davis, 1993, *Spirals from Theodorus to Chaos* (A. K. Peters).

⊖ Not to be confused with the commonly held Theodorus Constant that is $\sqrt{3}$.

的壁龛. 它占据了整个第 87 区，并且能够通过一条路径找到它，而这条路径便是主大道的延伸，一直通往墓地的中心. 在通过教堂附近大约一半的路时，便可以找到壁龛的主要入口了.

这壁龛是一个打开的长方体结构，火葬场就在其中心处. 长方体的顶部和大部分边都不见了，残余的四个角组成的墙的内部（两层）就是火葬场-或其中的一部分.这些坟墓从主入口的右边沿逆时针方向升序地单独标号了；这保证了这个角落到它的左边包含了最高的序号，且这些最高达到了 7400：阿培里墓地的标号为 7971.

墙上的空间在很早之前就已经快被摧毁了，一开始并不明显，当局通过挖壁龛的地道延长了对其的占用；由于这些原因，要找到位于地下两层的成千上万的坟墓并不是特别的困难；不幸的是，其中没有一个坟墓是编号为 7971 的. *287*
从谈话中得知，第一个扩展和第一个包含阿培里休息的地方，是由壁龛外面仅 *288*
有的入口构成的，这在它左边墙的外面，后面的一个角落. 因此，这个角落位于 Combattants Étrangers 大道和 Circulaire 大道的交叉路口，并且在那可以找到一个通向 L 形房间的小楼梯；在墙的左手边的末端，低处的右边就是编号为 7971 的坟墓. 图 D. 1 展示了这个寻找的成果.

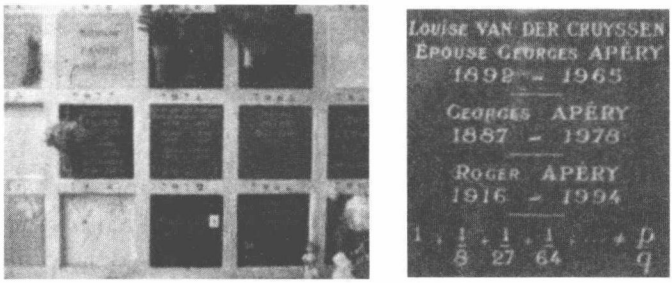


图　D. 1

作为最著名的奖励，在这些受参观的墓地中，可能最受欢迎和最亲的[⊖]坟墓，是位于墓地外附近的奥斯卡・王尔德的坟墓. 但，在离开壁龛之前，读者应该去寻找编号为 16258 的坟墓，那是玛利亚・卡尔斯的坟墓，但那是一个空的 *288*
坟墓.

⊖　在 2011 年，这个坟墓被清洗了，并在它的前面放了一个保护玻璃屏障.

289

附录 E　等价关系

在整本书中，我们有四个地方涉及了集合上的等价关系. 这个定义的构造性质在上下文中被简要地间接提到，但这里将更加详细地讲述这些问题.

首先，一个等价关系可以看成是“相等”概念的推广. 通常的表示 $x=y$[⊖]被类似于 $x\sim y$ 的符号所代替，虽然在这里并没有所谓的标准化. 关于相等，很明显的是等号两边的表达式是可以互换的，所以在任何操作当中，都可以用其中一个来替换另一个；以其自身的方式，等价关系也可以做如此的替换.

我们必须以一个集合开始，如果其中的元不是数，那么就是任何其他定义好的事物，可以是数学上的或者其他的：当前的解释中，我们限制于实数集及其子集.

所谓一个集合的划分，就是把这个集合分成若干个互不相交的子集，并且所有这些子集的并集就是原集合本身：用“相等关系”来划分集合，必然是不同的元在不同的子集中，即每个子集都包含唯一的一个元素；用“等价关系”划分集合，虽然元素可能不相等，但在等价意义下考虑时将不加区分. 在集合划分后的每个子集中选择一个元素作为这个集合中所有元素的代表是必要的.

如何定义一个集合中元素之间的关系才能产生这个集合的一个划分呢？让我们来考虑一些例子.

取整数集，并定义其中元素之间的关系如下：

289

$$x\sim y, x-y \text{ 能被 } 2 \text{ 整除.}$$

290

很明显这将整数分成了奇数和偶数两部分；显然是对整数集的一个划分.

或者，

$$x\sim y, \text{ 若 } x^2=y^2;$$

整数集划分为 $\{\{0\},\{-1,1\},\{-2,2\},\{-3,3\},\cdots\}$.

最后，考虑实数集上定义的一个关系

$$x\sim y, \text{ 若 } x-y \text{ 是一个整数;}$$

这将实数按小数部分相等进行了划分；如 π，$\pi\pm1$，$\pi\pm2$，….

当然，并不是所有的关系都能对集合进行划分；例如，

⊖ 第一次记载是出现在《The Whetstone of Witte》，1557 年出版，作者 Welshman Robert Recorde.

$$x \sim y, \text{若} x < y.$$

在使用等价这个附加条件时，我们就要区分哪些关系是等价的，哪些是不等价的，等价的关系需要满足下面三个条件. 对于集合中的所有元素：

1. $x \sim x$：反身性；

2. 若有 $x \sim y$，则有 $y \sim x$：对称性；

3. 若有 $x \sim y$ 和 $y \sim z$，则有 $x \sim z$：传递性.

很快，我们就可以发现“<”关系对前两个条件都不能满足（并且“≤”只对第二个条件不满足），但我们一开始举的三个例子对三个条件都满足.

证明一个集合上满足上述三个条件的任何关系都能对该集合进行划分是一个简单的事情，为此做如下讨论.

令集合为 S. 应用反身性，S 中的任一元素都被包含在其自身的等价类中，因此所有的元都在等价类中加以考虑. 现在把包含 x 的等价类记为 X，且假设 $X \cap Y \neq \varnothing$. 若 $z \in X \cap Y$，则有 $z \sim x$，$z \sim y$，利用反身性有 $x \sim z$，$z \sim y$，再根据传递性有 $x \sim y$；这就说明这两个等价类是相同的.

所以，一个集合上定义的等价关系就划分了该集合. 反过来，我们认为一个集合的任何一个划分都定义了一个一般的等价关系，等价类恰好就是划分出来的那些子集. *290* *291*

现在我们来看看使用等价关系的一些细节.

在第 175 页和第 223 页的“等价性”问题中，我们定义了实数集上的一个关系：

两个实数 α 和 β 被说成是等价的，如果存在整数 p，q，r，s，且 $|ps-qr| = 1$，使得 $\beta = (p\alpha+q)/(r\alpha+s)$ 成立.

现在我们来展示这个关系满足等价关系中的三个条件.

1. 对所有的 α，都有 $\alpha \sim \alpha$，因为有 $\alpha = (1\alpha+0)/(0\alpha+1)$，且 $|1\times1-0\times0| = 1$.

2. 若 $\alpha \sim \beta$，那么 $\beta = (p\alpha+q)/(r\alpha+s)$ 成立，其中 $|ps-qr| = 1$. 这意味着 $\alpha = (s\beta-q)/(-r\beta+p)$，并且有 $|ps-(-q)(-r)| = 1$，因此有 $\beta \sim \alpha$.

3. 最后，假设 $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$. 那么有 $\beta = (p\alpha+q)/(r\alpha+s)$ 和 $\gamma = (t\beta+u)/(v\beta+w)$ 成立，其中 $|ps-qr| = 1$，$|tw-uv| = 1$.

因此，

$$\gamma = \frac{t(p\alpha+q)/(r\alpha+s)+u}{v(p\alpha+q)/(r\alpha+s)+w}$$

$$=\frac{pt\alpha+qt+ru\alpha+su}{pv\alpha+qv+rw\alpha+sw}=\frac{(pt+ru)\alpha+(su+qt)}{(pv+rw)\alpha+(qv+sw)},$$

其中

$$|(pt+ru)(sw+qv)-(su+qt)(pv+rw)|=|ps-qr|\,|tw-uv|=1.$$

显然，有理数构成一类，因为如果 $\beta(\sim\alpha)$ 是有理数，那么 α 也一定是有理数.

在第 243 页我们定义了两个柯西序列之间的关系：

两个柯西序列 $\{x_r\}$ 和 $\{x'_r\}$ 被称为是等价的（记为 $\{x_r\}\sim\{x'_r\}$），如果对任意的有理数 $\varepsilon>0$，都存在一个正整数 N，使得对 $\forall r>N$，都有 $|x_r-x'_r|<\varepsilon$ 成立；也
291 就是说，最后它们的差逼近于 0.

292 1. 反身性显然成立；

2. 对称性显然成立；

3. 假设有 $\{x_r\}\sim\{x'_r\}$ 和 $\{x'_r\}\sim\{x''_r\}$，也就意味着，当 r 充分大时，有 $|x_r-x'_r|<\varepsilon$ 和 $|x'_r-x''_r|<\varepsilon$ 成立；则有

对足够大的 r，$|x_r-x''_r|=|(x_r-x'_r)+(x'_r-x''_r)|\leqslant|x_r-x'_r|+|x'_r-x''_r|<2\varepsilon$ 也成立，因此传递性成立.

在第 248 页我们已经把有理数集定义为整数对的等价类集，其关系如下：

$$(a,b)\sim(c,d)\text{ 当且仅当 }ad=bc.$$

1. 对所有的 (a,b)，都有 $(a,b)\sim(a,b)$ 成立，因为 $ab=ab$.

2. 若 $(a,b)\sim(c,d)$，则显然有 $(c,d)\sim(a,b)$ 成立.

3. 若有 $(a,b)\sim(c,d)$ 和 $(c,d)\sim(e,f)$，则有 $ad=bc$ 和 $cf=de$. 因此有 $a/b=c/d$ 和 $c/d=e/f$ 成立，故有 $a/b=e/f$ 和 $af=be$ 成立，因此传递性成立. 我们可以通过例子 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\cdots$，更加形象化地看到这种思想.

最后，我们的研究对象都是对无限集，但等价的概念对有限集合问题也是同样有意义的，如果采取划分的方法，那么它将更加具有吸引力，同样可以使用等价关系. 现在我们退一步来问：一个含有 n 个元素的集合一共有多少个划分？

如果该集合只有一个元素，$S=\{a\}$，那么它就只有一个划分，就是它本身.

如果该集合有两个元素，$S=\{a,b\}$，那么它就会有两个划分：$(\{a\}\{b\})$
292 和 $\{a,b\}$.

293 如果该集合有三个元素，$S=\{a,b,c\}$，那么它就会有 5 个划分：

$$(\{a\}\{b\}\{c\}),(\{a\}\{bc\}),(\{b\}\{ac\}),(\{c\}\{ab\}),\{abc\}.$$

读者可能会对一个具有 n 个元素的集合的划分个数 B_n 的公式比较好奇. 该公式可由 Dobinski 公式递推给出，定义为贝尔数

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad \text{和} \quad \mathrm{B}_0 = 1 : \mathrm{B}_1 = 1,$$

以一个无理数的形式显式表示为

$$B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

表 E. 1 给出了 B_n 快速增长的前几个值，图 E. 1 给出了其中一些值的对数形式的描点. *293*

表　E. 1

n	B_n
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4140
9	21147
10	115975
20	51724158235372

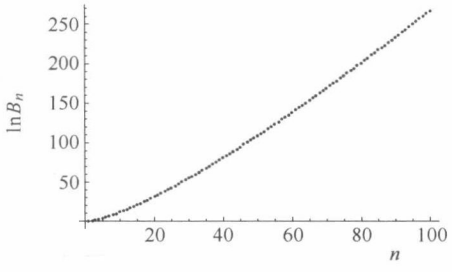


图　E. 1

附录 F　中值定理 *294*

在第二章中，我们省略了其生卒年和生活地的重要的古代数学家之一，就

是印度的 Vatasseri Parameshvara（1360—1425）. 这里我们需要提到的一个人是巴斯卡拉二世，在 Parameshvara 对巴斯卡拉工作的评论中，我们发现了微积分的一个本质结果，它在 1691 年以罗尔定理的形式被表达出来. 用现在的符号，表述如下：

设 $f(x)$ 是一个实值函数，它在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的，在开区间 (a, b) 上是可微的，并且 $f(a)=f(b)$. 那么存在某个实数 $c \in (a,b)$，使得 $f'(c)=0$ 成立.

一个示意图就能使我们绝对相信，这个结果是真实的. 在实分析中，能毫不费力证明它确实是正确的. 在第 184 页，我们使用了它的第一个推广形式，中值定理. 这个定理是柯西首次以下述方式给出的，叙述为：

设 $f(x)$ 是一个实值函数，它在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的，在开区间 (a, b) 上是可微的. 那么存在某个实数 $c \in (a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ 成立.

这个定理具有普遍的重要性，对于它的证明，有了罗尔定理之后就是平凡的.

定义函数

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

那么 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的连续性和可导性，另外有 $g(a)=g(b)=0$；因此其满足罗尔定理的条件. 由于 $g'(x)=f'(x)-(f(b)-f(a))/(b-a)$，存在点 $c \in$ 294 (a,b)，满足 $g'(c)=0$，因此有 $f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)$ 成立，证明完毕.

索　引[⊖]

尼尔斯·阿贝尔，132，235
阿布卡米尔，57
卡拉吉，60
阿尔·花剌子模，57，253
代数无理数，180
天文学大成，65
解析几何，77
安德鲁，32
三等分角，201
罗杰·阿培里，138
非周期性瓷砖，258
天青石，50
阿拉果·阿拉戈，97
阿基米德螺线，276
阿基米德，49
亚里士多德，13
算术公理，249
整数算术，74
无穷算术，85
算术定理，135
阿耶波多，254
欧多克索斯原理，40，43，49，167，251

塞缪尔·贝蒂，261
贝尔数，293
柏林科学院，104
雅克比·伯努利，96
维奇常数，233
A. S. 维奇，233
贝佐特等式，166
婆什迦罗二世，54
比内公式，221
二项式，50
威廉·布莱克，152
伯纳德·波尔查诺，237
波莱尔·埃米尔，230
新娘的椅子，45
克尔勋爵，93
瓦尔特·布科特，12

哈里发阿尔·玛蒙，56
哈里发哈伦·拉希德，56
哈里发奥马尔·伊本·哈塔卜，56
康托尔，204，239
康托尔-海涅-梅雷模型，242
卡特莱特·玛丽夫人，113
卡塔兰常数，112
链，253
柯西分布，252
柯西数列，242
奥古斯丁·路易·柯西，237
祖暅原理，86
格雷戈里·柴廷，231
钱珀瑙恩数，232
大卫·钱珀瑙恩，232
乔叟，66
西塞罗，65
可通约性，13

⊖ 索引页码为原版书页码，标在本书页边.

正方形中的可度量性，48
公共元，134
互补序列，262
全序域，250
完备性定理，250
规矩数，203
连分式，92，183
康威常数，136
约翰·何顿·康威，133
A. H. 科普兰，233
科普兰-尔多斯常数，233
互质，252
外观数列，135
可数集，204
反地球，14
克雷勒·奥古斯特，236

J. 戴维斯·菲利普，277
神圣比例，74
德摩根·奥古斯特，47
M. J. 德·苏瓦瑟尔，109
戴德金分割，241，244
戴德金模型，244
理查德·戴德金，39，239
数学，269
提洛问题（倍立方），201
稠集，167
笛卡儿，77
顽固的测试套件，229
丢番图逼近，154
狄利克雷的丢番图逼近定理，163，269
狄利克雷的同时逼近定理，270
狄利克雷，162
方法论，80

Dobinski 公式，293
抽屉原理，162
亨利·杜德耐，268
笨蛋高帽，64
邓斯·司各脱，64
倍立方，201
动力系统，258
弗里曼·戴森，184

爱因斯坦场方程，253
等倍数，41
等价关系，289，290
埃拉托色尼，49
保罗·厄多斯，112，233
欧几里得，38
欧几里得元素，10，11，21，39
欧德莫斯概要，10，14
欧德莫斯，14
尤得赛斯，39，41，49
多克斯的穷竭法，49，238
欧拉常数，263
莱昂哈德·欧拉，96，182，274
欧拉-马歇罗尼常数，112
奇特的元素，134

阶乘函数，274
费马大定理，199
皮尔德·费马，77
里昂那多·斐波那契，60，62
斐波那契数列，166
域，250
取整函数，113，146，157，261，266
浮点运算站，63
笛卡儿叶形线，84
约瑟夫·傅里叶，109

S. 如弗兰克，267
弗雷德雷克二世，63
弗雷格，251
弗雷曼常数，175

伽罗瓦，132
伽马函数，274
格尔丰德·施奈德定理，198
格尔丰德·亚历山大，184，199
几何曲线，80
几何平均数，50
黄金分割数，28，74，174，220，236，255
罗伯特·格雷，208
大年，65
最大公约数，166，213

霍尔射线，176
马歇尔·霍尔，176
威廉·罗文·哈密顿爵士，237
赫尔曼·汉克尔，238
G. H. 哈迪，32
谐振子，253
调和级数，138，238
多项式的高，205
埃尔米特等式，192
夏尔·埃尔米特，113，190，193
六线形，27
大卫·希尔伯特，11，169，198，248
印度文明，53
希帕索斯，20
托马斯·霍布斯，85
号形角，40
智慧之家，56
阿道夫·赫维兹，169

不可通约，48
指标函数，257
无理数，29，53，63，65，74，77，97，165，167，172，174，176，199，204，209，232，233，237，242，245，247
无理数的加法，126
另一种定义，3
有理逼近，160
李特尔伍德猜想，172
五次方程，132
Zeta 函数，153
没有无理数的代数，132
诞生于，9
康托尔构建，209
柯西定义，237
密集性，167
斯蒂夫观点，74
最无理性，219
魏尔斯特拉斯观点，239
Y. 岩本，119

约翰内斯·巴勒莫，63
本杰明·乔伟特，29

伊曼努尔·康德，18
亚历山大·辛钦，210
菲利克斯·克莱因，169
R. 克诺尔·威尔伯，33，47
利奥波德·克罗内克，204

拉戴姆，76
伊莎贝尔夫人的灵柩，268
拉格朗日光谱，174
吉姆·兰贝克，265
约翰海里希·兰贝克，104

最小公倍数，145
迪克·莱默，229
戈特弗里德·莱布尼茨，182
算盘书，62，74
亚历山大图书馆，11，56
巴别塔图书馆，234
布莱恩的一生，52
斐迪南·林德曼，194
林德曼-魏尔斯特拉斯定理，200
刘维尔逼近定理，183
刘维尔数，183，186
约瑟夫·刘维尔，183
约翰·李特尔伍德，172
对数螺线，253，276
外观数列，133
路易十四，286
马丁·路德，75

玛德哈万，55
马尔可夫数字，175，223
马尔可夫光谱，222
L. 麦凯布·罗伯特，33
值，20
比例，50
中值定理，184，294
机械曲线，80
平均的，50
查尔斯·梅雷，239
法线方法，80
赫尔曼·闵可夫斯基，169
里奥·莫泽，265
詹姆斯·默里，23

国家标准技术局，254
测试套件，229
西蒙·纽康，252
尼云多项式，116
伊万·尼云，116
正态，230
分布，253
基于 b，230
范数，230
野兽数字，75

欧姆·马丁，236
奥玛·海亚姆，61
鲁拜集，61
整数序列的在线百科全书，209
次序公理，250
有序域，250
尼克尔·奥里斯姆，66，138，259

卢卡·帕西奥利，74
格雷格·哥尔摩，127
彭罗斯地砖，258
五角星形，25
拉雪兹神父公墓，153，286
真空磁导率，254
奥斯卡·佩龙，175
鸽笼原理，162，226
柏拉图，12，21，29
柏拉图的对话，29
亨利·庞加莱，190，239
泊松分布，253
利奥十世，75
素数计数函数，147
素数定理，147
普罗克罗斯陨石坑，10，15，38
渊博的博士，66
普罗透斯，90

毕达哥拉斯常数，1
毕达哥拉斯，9，10
毕达哥拉斯定理，18，38，45

二次无理数，176，186
二次不尽根数，212
割圆曲线，81
正交，85

有理数列，278
有理点，278
有理根定理，130
瑞利勋爵，261
里卡蒂方程，102
雅格布·弗朗西斯科·里卡蒂伯爵，102
黎曼猜想，199
罗尔定理，294
克罗斯·罗斯，181
鲁菲尼，132

西奥多·施奈德，199
切开，241
六十进制的，63
希格尔·卡尔，184，199
谢尔宾斯基，231
相似图形，36
简单连分式，211
单摆，252
基于 b 的简单规范数，230
多项式的长度，208
拉尔夫·斯科朗，268
亨利·史密斯，162
西奥多罗斯螺线，7，35，47，272
化圆为方，15，201
斯里帕蒂，53

星形多边形，25
斯泰因豪斯，259
西蒙·斯蒂文，76
斯蒂菲尔，74
腓特烈二世，63
睿智博士，64
两个平方数之和，80
不尽根，125
语源学，57
理查德，66

保罗·坦纳，248
米利都的泰勒斯，9，10，12，16
算术平方根，277
卡尔，251，257
布雷德沃丁，66
阿克塞尔·图厄，184
超越方程，81
超越数，183，185，197，199，204，210，232
超铀元素，134
三角不等式，156

阿尔弗雷德·范德，139
J. G. 范佩斯，14
阿德里安·范·罗门，70
两尖端椭圆形，28
弗朗索瓦·韦达，70

谢尔宾斯基，259
约翰·沃斯，85，93
旺策尔，202
魏尔斯特拉斯·卡尔，200，236
魏尔斯特拉斯-海涅模型，241
等程音阶，254

赫尔曼·外尔，199
安德鲁·怀尔斯，199

无理数之年，239

零的词源，62
Zeta 函数，137

The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On

这本书的内容就像其英文副书名一样巧妙和引人注目。哈维尔是英国“温彻斯特公学”的退休教师，他在那里教了数十年的数学。在这本书中，他把读者带入了一段无理数的历史。本书从古希腊的毕达哥拉斯开始，人们现在知道通往无理数的道路最有可能是由毕达哥拉斯开启的，这条道路一直延续到今天。本书影响我不时思考无理数相关的问题，比如“无理数小数表示中的数字是随机的吗？”

——《科学美国人》Anna Kuchment

本书适合任何对数和数的发展历史感兴趣的人，书中精彩有趣的史实不仅适合浏览性阅读也适合精读。这本书的难度恰到好处，不仅有很多适合高中水平的读者阅读的内容，也由浅入深地介绍了一些非常深刻的数学，非常精彩！

——《美国数学协会书评》Richard Wilders

因为作者并不回避提供一些详细的论据，所以想要完全读懂本书的部分数学内容，需要读者至少具有二年级的本科数学背景。但是，书中的史料呈现是以现代数学的形式给出的。许多读者将在这本书中遇到很多精彩的和令人惊讶的论题，其中很多是值得继续探索的领域。

——《数学评论剪报》E．J．Barbeau

这是一本写得很好的书。如果你是不打算在大学里学习数学的高中生，应该在学校的最后两年里抽时间阅读这本书。写这样一本书是很有挑战性的，作者还制作了许多清晰的图表来说明问题。作者用幽默的语言介绍了大量的例子，给读者以欢快的阅读体验。这本书对于文科学生来说也是一本很好的读物，因为它不仅与数学内容的历史渊源有关，而且与一些伟大的哲学思想有关。

——《数论与离散数学短文》A．G．Shannon

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
服务咨询热线：010-88361066
读者购书热线：010-68326294
010-88379203
网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
金书网：www.golden-book.com
教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

机械工业出版社微信公众号

ISBN 978-7-111-58608-1

ISBN 978-7-111-58608-1

定价：49.00元