现代数学基础

14 微分方程与数学物理问题

（中文校订版）

经典方法和现代新方法
非线性数学物理问题
对称性和不变性理论

■ [瑞典] Nail H. Ibragimov 著
■ 卢 琦 杨 凯 胡享平 译
■ 胡享平 校订

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013071024

0175
150-2

现代数学基础

14 微分方程与数学物理问题

（中文校订版）

经典方法和现代新方法
非线性数学物理问题
对称性和不变性理论

■ [瑞典] Nail H. Ibragimov 著
■ 卢 琦 杨 凯 胡享平 译
■ 胡享平 校订

北京航空航天大学 藏书 图书馆

北航 C1680259

0175
150-2

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

Weifen Fangcheng Yu Shuxue Wuli Wenti

01307102

图书在版编目（CIP）数据

微分方程与数学物理问题：中文校订版 /（瑞典）伊布拉基莫夫（Ibragimov, N. H.）著；卢琦，杨凯，胡享平译. -- 2版. -- 北京：高等教育出版社，2013.8

ISBN 978-7-04-038040-8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①伊… ②卢… ③杨… ④胡… Ⅲ.①微分方程－研究生－教材②数学物理方程－研究生－教材 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 164268 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李　鹏　　封面设计 张　楠　　版式设计 范晓红
责任校对 胡晓琪　　责任印制 尤　静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 化学工业出版社印刷厂
开　　本 787 mm × 1092 mm　1/16
印　　张 22.5
字　　数 420 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　http://www.landraco.com.cn

版　　次 2010 年 1 月第 1 版
　　2013 年 8 月第 2 版
印　　次 2013 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 38040-00

中文版序

1996 年, 我推导了非线性弹性悬链线的准确解. 如果人们用准确的微分方程来描述复杂自然现象, 那么该方程及其解必然存在着完整性和对称性. 那时我正困惑于将这一思想推广. 2000 年, 在一次国际非线性振动会议上, 我与土耳其教授嘎赞富 · 尤纳 (Gazanfer Ünal) 一次交谈中, 他向我介绍了纳伊尔 · 伊布拉基莫夫 (Nail Ibragimov) 教授. 从那以后, 我与纳伊尔保持着密切联系, 并且将他的《现代群分析引论》通读一遍, 收益颇深, 随后纳伊尔被邀请作为《非线性科学与数值模拟》杂志核心编委会成员. 此次承蒙伊布拉基莫夫教授邀请我为他的新书在中国出版写序, 倍感荣幸.

纳伊尔 · 伊布拉基莫夫教授是一位世界著名数学家. 他是微分方程群分析资深专家和传人. 微分方程群分析是由索菲斯 · 李在 19 世纪末创造, 而且在 20 世纪 60 年代有着惊人的突破. 微分方程群分析是用来寻找非线性微分方程的对称性, 从而获得精确解来准确描述复杂自然现象. 为获得非线性微分方程解, 沿袭简单线性叠加原理是不可以的. 李群和李代数有着广泛的应用, 它和其他的现代分析方法一起, 是求非线性微分方程的解析解的重要工具.

纳伊尔 · 伊布拉基莫夫毕业于莫斯科物理及工程技术学院, 后在苏联新西伯利亚州立大学深造. 在 1963 年至 1980 年, 纳伊尔在苏联科学院西伯利亚分院水动力研究室工作. 在这期间, 他系统地发展了微分方程群分析方法. 1983 年, 纳伊尔 · 伊布拉基莫夫被授予物理学、数学博士头衔和苏联国家科学技术奖以表彰他的突出贡献. 从那以后, 他非常积极地主持国际会议, 并推广群理论和李代数在工程和物理上的应用. 纳伊尔延伸了欧拉方程守恒定律的存在性定理, 给出

了充分条件, 并且获得了有限李群泛函不变性. 他发现了二阶双曲方程解的惠更斯原理与其在黎曼空间上保形不变性的相互关系. 纳伊尔还揭示了如何有效地应用 Lie-Backlund 理论去解决数学物理问题. 为了表彰纳伊尔 · 伊布拉基莫夫在理论物理和纯数学上的贡献, 2008 年在葡萄牙波尔图市举行的第二届非线性科学及复杂性大会上他被授予拉格朗日奖.

纳伊尔对科学的执着追求, 创造了科学上的辉煌与成就. 在此, 人们在读他的书的同时, 不仅要学习他的知识, 更要领略他的思维方式和为人之道. 他的科学成就将在这本书中反复展现, 并希望中华学子从中获得启迪.

罗朝俊于美国伊利诺伊州戊子秋

(Albert C.J. Luo, Illinois, USA, September, 2008)

校订者序

微分方程在数学、物理及其他领域的研究中有着举足轻重的作用, 同时在实际的生活中存在着广泛的应用. 由瑞典数学家纳伊尔 · 伊布拉基莫夫 (Nail Ibragimov) 所著的《微分方程与数学物理问题》是一本十分值得阅读和收藏的数学著作. 它使用精练的数学语言、简单的数学实例来阐述复杂的数学问题. 该书从基本的数学知识入手, 逐步介绍了常见的数学物理问题、常微分方程的解法、一阶和二阶偏微分方程的解法; 深入地讨论了线性和非线性常微分方程及偏微分方程的相关解法; 同时也讨论了广义函数及不变原理及基础解的相关问题. 本书是介绍求解常微分方程、偏微分方程李群方法的第一本中文翻译教材. 大量的实例使得初学者可以轻松进入李群分析方法的学习. 正如本书作者所说, 本书侧重于让读者对微分方程的解法有个全面和较新的认识, 同时也使读者能够用已知的算子来求解复杂的数学物理问题中的微分方程.

本书的首次翻译工作由校订者及其他几位译者于 2009 年在瑞典和美国共同完成, 并于 2010 年初由高等教育出版社出版. 应众多读者、原书作者及高等教育出版社的要求, 由校订者对全书做了全面的校订. 在本次校订工作中, 校订者再次仔细地通读了本书的中文版和英文版, 尽最大努力勘误了全书中的用词不当与歧义之处. 多处内容也得到合理的调整和再次翻译. 校订者真诚地希望此次的校订可以使得本书的翻译更加完善, 同时使读者在阅读本书时获得更多有用的知识.

最后, 校订者感谢高等教育出版社和原书作者在整个校订过程中给予的支持, 同时也感谢校订者家人一直以来默默的关怀. 校订者同时也感谢赵康乔、鲁

圣洁在校订本书过程中所提供的及时有用的帮助和建议.

由于校订者时间和水平有限, 书中难免仍有不当之处未能得到及时的修正, 恳请读者不吝批评指正.

胡享平于挪威特隆赫姆

(Xiangping Hu, Trondheim, Norway, January, 2012)

前言

现代数学有着 300 多年的历史. 最初, 我们主要关注微分方程的研究, 将其作为数学建模的主要工具. 大多数物理、工程科学、生物数学等领域的数学建模都会产生非线性微分方程.

今天, 理工科学生和研究者经常会遇到怎么求解在数学建模中产生的微分方程的问题. 有时, 这些解可以由对特殊型方程进行积分的传统特定方法解析地得到. 尽管我们总结了超过 400 种类型的可积二阶常微分方程的积分方法, 但是, 在一般的情况下, 我们还是不能由这些方法求得所有微分方程的解.

然而, 由微分方程刻画的基本自然规律和技术问题可以由李群分析方法成功地处理并解决. 例如, 李群可以将上述的 400 种类型的方程简化为 4 种类型. 群分析理论的发展给出了大量的证据证明: 当其他的一些积分方法失效的时候, 群理论是求解大量微分方程的通用工具. 事实上, 群分析是求解非线性微分方程解析解的唯一通用和有效的方法. 那些老的积分方法在很大程度上依赖于微分方程的线性性以及常系数的存在性. 但群分析理论处理线性和非线性方程的问题是等同的, 对于常系数和变系数都是同样的处理. 例如, 在传统的意义上, 带有常系数的线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0$$

和方程

$$\bar{x}^n \frac{\mathrm{d}^n \bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}^n} + a_1 \bar{x}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} \bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \bar{x} \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}} + a_n \bar{y} = 0$$

是不同的, 后一方程称为欧拉方程. 然而, 从群分析的角度讲, 这两个方程仅仅是

一个方程的两种不同表示, 是同一方程使用下述两种已知的交换对称算子的各自表示:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} \quad 和 \quad \overline{X}_1 = \bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \overline{X}_2 = \bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

这些对称算子跨越两种相似的李代数, 很容易得到 $x = \ln|\bar{x}|$ 变换. 该变换可将欧拉方程转变为常系数的微分方程.

我认为, 李群之所以有趣首先就在于它们可用来求解微分方程. 将它们与这种自然的应用分离开来, 而仅仅将其看成抽象数学的一个分支是极其错误的. "把数学与其他科学的实际需求割裂, 就如同把母牛关起来, 而与公牛隔离开一样, 将导致一无所获." (P.L. Chebyshev, 1821—1894)

今天, 群分析已经成为微分方程和非线性数学建模的一门课程, 吸引着越来越多的学生. 例如, 在莫斯科物理及工程技术学院, 对于偏微分方程这门课程, 当我使用李群分析理论来进行授课时, 它吸引了 100 多名学生前来听课, 而使用传统方法授课时, 仅仅有 10 个学生. 我在南非和瑞典授课时这种相似的情况也同样发生.

本书以上述课程为基础, 在一定程度上, 也反映我个人的兴趣与经验. 最初, 书稿是为布莱京尔理工学院 (Blekinge Institute of Technology) 的工程专业及数理专业的学生所开的微分方程课程而设计的. 之后, 教材内容又做了修改和扩充, 从而也适用于下列课程:

微分方程: 该课程涵盖常微分和偏微分方程, 它将解线性方程的基础经典方法和求非线性方程解析解的新方法结合起来, 主要面向初学者, 学生将通过求解定方程来学会求微分方程的对称算子.

数学建模中的解析法: 本门课程的重点是在物理、生物和工程科学领域内的非线性数学模型; 它涵盖的主题有: 非线性叠加, 对称和守恒定律, 群不变解系.

微分方程的群分析: 本门课程给数学和工程系的学生介绍群变换和李代数的某些理论, 这些理论在实际的应用中是非常重要的; 通过本门课程, 学生们将提高使用现代方法求解非线性常微分和偏微分方程组的分析技巧.

初值问题中的分布和不变原理: 一门快速入门的关于分布理论基本概念并着重于实用工具的导引课程; 李的无穷小技巧将被延伸到分布空间, 而且将和不变原理一起使用来求基础解系和解常系数或变系数初值问题方程.

在我的课堂上, 我一直致力于使理工科学生更容易地接受微分方程的群分析这个理论. 因此, 本书的重点在于如何应用已知的对称算子而不在于它们的计算. 为了阐述我解不同形式的微分方程的经验, 我改述著名的法国谚语 *cherchez la femme* (法语的字面意思为 "寻找那个女人", 意为当一个男人表现异常或者

处于困难时, 去寻求女人的智慧) 为: *If you cannot solve a nonlinear differential equation, cherchez le groupe* (如果你不能解非线性微分方程, 那么寻求群方法吧).

我真诚地感谢我的同事 Claes Jogréus 对我持续的帮助. 我的妻子 Raisa 阅读了第二版各阶段中的全部原稿, 纠正了打印错误并且贡献了许多有价值的批评和建议, 在此, 我由衷地表示感谢. 也很感谢我的女儿 Sania 和 Alia 给我提出的一些有帮助的意见.

Nail H. Ibragimov

Karlskrona, 瑞典, 2009 年 3 月 3 日

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37525-6	伽罗瓦理论——天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著

网上购书：academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, www.joyo.com, www.dangdang.com

其他订购办法：

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。**购书免邮费**，发票随后寄出。

单位地址：北京西城区德外大街 4 号

电　　话：010-58581118/7/6/5/4

传　　真：010-58581113

通过邮局汇款：

地　　址：北京西城区德外大街 4 号

户　　名：高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账：

户　　名：高等教育出版社有限公司

开 户 行：交通银行北京马甸支行

银行账号：110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　（010）58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　（010）82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街 4 号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

北航　C1680259

现代数学基础　图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	26547-7	微分方程与数学物理问题	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

目录

中文版序

校订者序

前言

第一章　数学分析中的几个话题 1

1.1　初等数学 1

1.1.1　数值、变量和初等函数 1

1.1.2　二次与三次方程 5

1.1.3　相似图形的面积 · 以椭圆为例 8

1.1.4　二次代数曲线 10

1.2　微分和积分运算 14

1.2.1　微分法则 14

1.2.2　中值定理 15

1.2.3　微分形式不变性 16

1.2.4　积分法则 17

1.2.5　泰勒级数 17

1.2.6　复变量 19

1.2.7　函数的近似表达式 21

1.2.8　雅可比行列式 · 函数无关性 · 多重积分的换元法 22

1.2.9 函数的线性无关 · 朗斯基行列式 · · ·

2.3.6 电动力学 · · · · · 65
2.3.7 狄拉克方程 · · · · · 66
2.3.8 流体动力学 · · · · · 67
2.3.9 Navier-Stokes 方程 · · · · · 68
2.3.10 灌溉系统模型 · · · · · 68
2.3.11 磁流体动力学 · · · · · 69
2.4 扩散现象 · · · · · 69
2.4.1 线性热传导方程 · · · · · 69
2.4.2 非线性热传导方程 · · · · · 71
2.4.3 Burgers 方程和 Korteweg-de Vries 方程 · · · · · 72
2.4.4 经济学数学模型 · · · · · 72
2.5 生物数学 · · · · · 73
2.5.1 巧妙的蘑菇 · · · · · 73
2.5.2 肿瘤的生长模型 · · · · · 75
2.6 波现象 · · · · · 75
2.6.1 绳索的微小振动 · · · · · 76
2.6.2 振动膜 · · · · · 78
2.6.3 极小曲面 · · · · · 80
2.6.4 振动细长杆和板 · · · · · 81
2.6.5 非线性波 · · · · · 82
2.6.6 Chaplygin 方程和 Tricomi 方程 · · · · · 84
习题二 · · · · · 84

第三章　常微分方程: 经典方法 · · · · · 87
3.1 简介和基础方法 · · · · · 87
3.1.1 微分方程 · 初值问题 · · · · · 87
3.1.2 方程 $y^{(n)} = f(x)$ 的积分 · · · · · 89
3.1.3 齐次方程 · · · · · 89
3.1.4 齐次性的不同种类 · · · · · 92
3.1.5 降阶 · · · · · 93
3.1.6 微分线性化 · · · · · 94
3.2 一阶方程 · · · · · 94
3.2.1 可分离变量的方程 · · · · · 94
3.2.2 全微分方程 · · · · · 95
3.2.3 积分因子 (A. Clairaut, 1739) · · · · · 96
3.2.4 里卡蒂方程 · · · · · 98
3.2.5 伯努利方程 · · · · · 101

3.2.6 齐次线性微分方程 · · · · · · 102
3.2.7 非齐次线性方程 · 常数变易法 · · · · · · 102
3.3 二阶线性方程 · · · · · · 104
3.3.1 齐次方程: 叠加性 · · · · · · 104
3.3.2 齐次方程: 等价性质 · · · · · · 105
3.3.3 齐次方程: 常系数 · · · · · · 108
3.3.4 非齐次微分方程: 常数变易法 · · · · · · 109
3.3.5 贝塞尔方程和贝塞尔函数 · · · · · · 113
3.3.6 超几何方程 · · · · · · 114
3.4 高阶线性方程 · · · · · · 115
3.4.1 齐次方程 · 基础解系 · · · · · · 115
3.4.2 非齐次方程 · 常数变易法 · · · · · · 116
3.4.3 常系数方程 · · · · · · 116
3.4.4 欧拉方程 · · · · · · 118
3.5 一阶微分方程组 · · · · · · 118
3.5.1 微分方程组的一般属性 · · · · · · 118
3.5.2 首次积分 · · · · · · 119
3.5.3 常系数的线性方程组 · · · · · · 124
3.5.4 方程组的常数变易法 · · · · · · 125
习题三 · · · · · · 128

第四章 一阶偏微分方程 · · · · · · 131
4.1 简介 · · · · · · 131
4.2 齐次线性方程 · · · · · · 132
4.3 非齐次方程的特解 · · · · · · 134
4.4 拟线性方程 · · · · · · 135
4.5 齐次方程组 · · · · · · 138
习题四 · · · · · · 142

第五章 二阶线性偏微分方程 · · · · · · 145
5.1 多元方程 · · · · · · 145
5.1.1 固定点的分类 · · · · · · 145
5.1.2 伴随线性微分算子 · · · · · · 147
5.2 含两个自变量的方程的分类 · · · · · · 149
5.2.1 特征值 · 三种类型方程 · · · · · · 149
5.2.2 双曲型方程的标准形式 · · · · · · 151

5.2.3 抛物型方程的标准形式 · · · · · 152
5.2.4 椭圆型方程的标准形式 · · · · · 153
5.2.5 混合型方程 · · · · · 154
5.2.6 非线性方程的类型 · · · · · 154
5.3 包含两个变量的双曲型方程的积分 · · · · · 155
5.3.1 d'Alembert 解 · · · · · 155
5.3.2 可化为波动方程的微分方程 · · · · · 156
5.3.3 欧拉方法 · · · · · 161
5.3.4 拉普拉斯级联法 · · · · · 163
5.4 初值问题 · · · · · 165
5.4.1 波动方程 · · · · · 165
5.4.2 非齐次波动方程 · · · · · 166
5.5 混合问题 · 变量分离 · · · · · 167
5.5.1 端部固定的弦的振动 · · · · · 168
5.5.2 热传导方程的混合问题 · · · · · 171
习题五 · · · · · 173

第六章　非线性常微分方程 · · · · · 175
6.1 简介 · · · · · 175
6.2 群变换 · · · · · 176
6.2.1 平面上只含一个参数的群 · · · · · 176
6.2.2 群生成元和李方程 · · · · · 177
6.2.3 指数映射 · · · · · 179
6.2.4 不变量和不变方程 · · · · · 180
6.2.5 典型变量 · · · · · 183
6.3 一阶微分方程的对称性 · · · · · 184
6.3.1 群生成元的首次延拓 · · · · · 184
6.3.2 对称群的定义和主要性质 · · · · · 185
6.3.3 给定对称性的方程 · · · · · 187
6.4 利用对称求解一阶微分方程的积分 · · · · · 189
6.4.1 李积分因子 · · · · · 189
6.4.2 利用典型变量求积分 · · · · · 191
6.4.3 不变解系 · · · · · 195
6.4.4 由不变解系给出的通解 · · · · · 196

6.5 二阶方程 · · ·

7.3.7 来自经典力学的例子 · · · · · · 275
7.3.8 爱因斯坦能量公式的推导 · · · · · · 277
7.3.9 狄拉克方程的守恒定律 · · · · · · 278
习题七 · · · · · · 279

第八章 广义函数或分布 · · · · · · 283
8.1 广义函数简介 · · · · · · 283
8.1.1 启发式思考 · · · · · · 283
8.1.2 分布的定义和举例 · · · · · · 285
8.1.3 用 δ 函数表示的极限 · · · · · · 286
8.2 分布的运算 · · · · · · 287
8.2.1 函数的乘法 · · · · · · 287
8.2.2 微分 · · · · · · 287
8.2.3 分布的直积 · · · · · · 287
8.2.4 卷积 · · · · · · 288
8.3 分布 $\Delta(r^{2-n})$ · · · · · · 289
8.3.1 球面上的平均值 · · · · · · 289
8.3.2 拉普拉斯方程 $\Delta v(r)=0$ 的解 · · · · · · 290
8.3.3 分布 $\Delta(r^{2-n})$ 的计算 · · · · · · 291
8.4 分布的变换 · · · · · · 292
8.4.1 线性换元法 · · · · · · 292
8.4.2 δ 函数的换元法 · · · · · · 293
8.4.3 任意的群变换 · · · · · · 294
8.4.4 分布的无穷小变换 · · · · · · 295
习题八 · · · · · · 296

第九章 不变原理和基本解 · · · · · · 297
9.1 简介 · · · · · · 297
9.2 不变原理 · · · · · · 298
9.2.1 不变原理的公式表达 · · · · · · 298
9.2.2 常系数线性方程的基本解 · · · · · · 298
9.2.3 拉普拉斯方程的应用 · · · · · · 299
9.2.4 热传导方程的应用 · · · · · · 301
9.3 热传导方程的柯西问题 · · · · · · 302
9.3.1 柯西问题的基本解 · · · · · · 302
9.3.2 用不变原理求解柯西问题基本解 · · · · · · 303

9.3.3 柯西问题的解 · · ·

第一章　数学分析中的几个话题

本章是为初学者而设计的一章, 是预备章, 它提供了初等数学和数学分析中的一些背景知识, 这些也是学习后续章节所必备的.

补充读物: E. Goursat [10].

1.1　初等数学

1.1.1　数值、变量和初等函数

实数大多以近似小数的形式出现在我们的实际生活中 (例如: 当你测量距离、质量等). 例如, 月球在近地点到地球的距离是 S 千米, 其中数 S 近似地等于 356 630. 一个更精确的距离值是 356 629 千米再加上 744 米. 因此:

$$S \approx 356\ 629.744 \equiv 356\ 629 + \frac{744}{1\ 000} = 356\ 629 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1\ 000}.$$

如果想得到更加精确的值, 我们使用更好的近似, 最后得到一个用无限小数表示的 S 值. 因此, 可以使用如下的定义.

定义 1.1.1　*实数和无限小数是等同的.*

$$a = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, \tag{1.1.1}$$

其中 a_0 *是整数,* $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ *是数字. 即它们代表阿拉伯数字 0 到 9 中的*

任意一个. 方程 (1.1.1) 意味着:

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots . \tag{1.1.2}$$

注 1.1.1 如果方程 (1.1.1) 是一个循环 (特别地, 有限) 小数, 而且只有在这种情况下, a 才是一个有理数, 即 $a = p/q$, 其中 p 和 q 是整数, $q \neq 0$. 由无限不循环小数确定的实数称为无理数. 数值 $0.(9) = 0.9999\cdots$ 和 1 是等同的.

例 1.1.1 下面是一些典型的无理数:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.4142136\cdots && \approx 1.41,\\
\pi &= 3.1415926535\cdots && \approx 3.14,\\
\mathrm{e} &= 2.718281828459045\cdots && \approx 2.72,\\
\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) && \approx 0.58,
\end{aligned}$$

其中 γ 称为欧拉数.

注 1.1.2 我们使用小数系统来表示实数是一个历史的巧合. 如果巴比伦文化持续更长的时间, 那么今天也许我们将会使用巴比伦的六十进制系统而且使用如下的表示方式:

$$a = a_0 + \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \cdots + \frac{a_n}{60^n} + \cdots , \tag{1.1.3}$$

而不是今天我们所使用的 (1.1.2).

定义 1.1.2 变量 x 是一个可以被赋予任何值的量. 如果它的值是固定的, 我们称它为常数. 我们需要将任意常数和绝对常数区别开来. 任意常数在我们的一次问题研究中保持任何给定的值, 而一个绝对常数则在所有问题中都保持相同的值.

例 1.1.2 在圆方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 中, x 和 y 是表示圆周上动点的坐标的变量, 其中半径 R 就是一个任意的常数. 另一方面, 周长公式中 $C = 2\pi R$ 的 R 是任意常数, 而 2 和 $\pi \approx 3.14$ 是两个绝对常数.

定理 1.1.1 任意实数 a 是一个有理数序列 $r_n = p_n/q_n$ (p_n 和 $q_n \neq 0$ 是整数) 的极限:

$$a = \lim_{n\to\infty} r_n. \tag{1.1.4}$$

证明 假设实数 a 如方程 (1.1.1) 所给. 我们取 r_n 为无限序列 (1.1.2) 所表示的和:

$$r_1 = a_0 + \frac{a_1}{10},\ r_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100},\ \cdots,\ r_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

这样, 所产生的有理数 $\{r_n\}$ 满足方程 (1.1.4).

基于定理 1.1.1, 我们可以得到下述定义.

定义 1.1.3 一些常用指数函数 $y=a^x$, 其中 $a>0$ 是任意实数, 其定义如下:

$$a^0=1,\ a^1=a,\ a^n=\underbrace{a\cdots a}_{n\uparrow},\quad n=2,3,\cdots \qquad (x=n);$$

$$a^{\frac{1}{n}}\equiv\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow\ b^n=a;\quad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p} \qquad (x=p/q);$$

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{x_n}\equiv\lim_{n\to\infty}\sqrt[q_n]{a^{p_n}}\quad (x=\lim_{n\to\infty}x_n,\ x_n=p_n/q_n).$$

指数函数的基本性质:

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x},\quad a^x\,a^y=a^{x+y},\quad (ab)^x=a^x\,b^x,\quad (a^x)^y=a^{xy}.$$

例 1.1.3 考虑数值 $10^{\sqrt{2}}=25.954\cdots$. 我们有 $\sqrt{2}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 其中 $x_0=1,\ x_1=1.4,\ x_2=1.41,\cdots$. 相应地, $10^{\sqrt{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 其中 $y_0=10^{x_0}=10,\ y_1=10^{x_1}\approx 25.12,\ y_2=10^{x_2}\approx 25.70,\cdots$.

在解微分方程的时候, 我们经常考虑指数函数

$$y=\mathrm{e}^x. \tag{1.1.5}$$

其中 e 是一个实数, 它的定义如下:

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.1.6}$$

这个定义在数学分析中是极其重要的. 在例 1.1.1 中, 给出了它精确到小数点后第 15 位的值.

函数 (1.1.5) 是初等函数的代表. 下面是初等函数的定义.

定义 1.1.4 基本初等函数有

$$y=C,\quad C\text{为常数};$$

$$y=x^\alpha,\quad x>0,\ \alpha\text{ 是一个实数};$$

$$y=a^x,\quad a>0,\ a\neq 1;$$

$$y=\log_a x,\quad a>0,\ a\neq 1;\quad x>0;$$

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x;$$

$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x.$$

当函数 $y=f(x)$ 是由基本初等函数经过有限的四则混合运算, 即加、减、乘、除和乘方运算而得到的, 那么该函数称为初等函数.

注 1.1.3 若对数函数 $\log_a x$ 中的 $a=\mathrm{e}$, 则它称为自然对数, 记为 $\ln x$.

注 1.1.4 基本初等三角函数可以由其中一个函数得到, 例如, 从正弦函数 $\sin x$ 我们可以得到其他的基本初等三角函数

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x},\quad \tan x=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}},\quad \cot x=\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}.$$

在反三角函数中, 这样的关系也是存在的, 例如:

$$\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.1.7}$$

例 1.1.4 如下的双曲函数是一些非基本初等函数的例子:

$$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}. \tag{1.1.8}$$

多元初等函数也是由相似的方法得到的.

例 1.1.5 下述函数 $\psi(t,x,z)$ 是一个三元初等函数, 其变量是 t,x,z :

$$\psi=-\frac{1}{4}\ln\left|M+\frac{1}{t}\left(2\sin^2 x+l_1\mathrm{e}^{-z}\sin x+l_2\mathrm{e}^{-2z}\right)\right|, \tag{1.1.9}$$

其中包含了三个任意常数: l_1, l_2 和 M.

例 1.1.6 如下的一些函数是积分中经常使用的, 它们也不是初等函数:

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\quad\text{(积分正弦)}, \tag{1.1.10}$$

$$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\quad\text{(积分余弦)}, \tag{1.1.11}$$

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\quad\text{(误差函数)}, \tag{1.1.12}$$

$$\mathrm{Ei}(x)=-\int_{-\infty}^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\equiv\mathrm{Ei}(\ln x), \tag{1.1.13}$$

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\quad\text{(Gamma 函数)}. \tag{1.1.14}$$

Gamma 函数在数学分析和微分方程中扮演着重要的角色. 它有如下一些重要的基本性质, 例如:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \tag{1.1.15}$$

和一些重要的数值 (参见, 例如: [34]):

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{2\pi^{n/2}}{\omega_n},\ \Gamma(n+1)=n!, \tag{1.1.16}$$

其中 ω_n 是 n 维空间中的单位球面的表面积.

1.1.2 二次与三次方程

初等数学中的一些问题经常可以使用变量代换的方法来解决. 这里, 我们先从初等代数开始.

我们知道一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0 \tag{1.1.17}$$

的根 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 可以由如下公式得到:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1.1.18}$$

其中, 我们称

$$\Delta=b^2-4ac \tag{1.1.19}$$

是一元二次方程 (1.1.17) 的判别式. 很显然, 在公式 (1.1.18) 中, 如果判别式等于零, 即

$$\Delta=b^2-4ac=0, \tag{1.1.20}$$

方程 (1.1.17) 将有两相等的实数根, $x_1=x_2$.

通常, 学生在学校学习公式 (1.1.18) 时, 都是通过配方的方法得到的. 事实上, 这种方法很简单, 但是它却不适用于三次方程, 也不适用于一般的高次方程.

使用方程的变量代换的思想, 不再像配方法那样只适用于二次方程, 它提供了一种既能适用于二次方程, 又能适用于简化高次方程的方法. 方程中最简单的变换当然是线性变换, 设变量为 x:

$$y=x+\varepsilon. \tag{1.1.21}$$

变换后, n 次方程仍然是 n 次方程. 在特殊情况下, 二次方程 (1.1.17) 在使用了变换 $x=y-\varepsilon$ 后方程变换为 $ay^2+(b-2a\varepsilon)y+a\varepsilon^2-b\varepsilon+c=0$. 因此, 经过变换 (1.1.21), (1.1.17) 变成一个新的一元二次方程,

$$\overline{a}\,y^2+\overline{b}\,y+\overline{c}=0,$$

其中

$$\overline{a}=a,\quad \overline{b}=b-2a\varepsilon,\quad \overline{c}=c+a\varepsilon^2-b\varepsilon. \tag{1.1.22}$$

定义 ε, 使 $b-2a\varepsilon=0$, 我们可以得到 $\overline{b}=0$ 和 $\overline{c}=c-b^2/(4a)$. 因此, 变换

$$y=x+\frac{b}{2a} \tag{1.1.23}$$

使 (1.1.17) 变成下面方程:

$$ay^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0.$$

将该方程的根

$$y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

代入到方程 (1.1.23), 我们可以得到方程 (1.1.17) 的根 (1.1.18).

现在我们考虑一般的一元三次方程, 为了简化计算, 其系数为二项式系数:

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0,\quad a\neq 0. \tag{1.1.24}$$

经过线性变换

$$y=ax+b, \tag{1.1.25}$$

我们得到如下的形式:

$$y^3+3py+2q=0, \tag{1.1.26}$$

其中

$$p=ac-b^2,\quad 2q=a^2d-3abc+2b^3. \tag{1.1.27}$$

经过简化, 我们可以很容易地求解方程 (1.1.26) , 假设

$$y=\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{l}.$$

那么我们可以得到

$$y^3-3\sqrt[3]{kl}\,y-(k+l)=0$$

并且方程 (1.1.26) 满足

$$k+l=-2q,\quad \sqrt[3]{kl}=-p.$$

我们得到 k 和 l 是二次方程

$$z^2+2qz-p^3=0$$

的根. 因此, 其中的一个根, 例如 k, 由如下公式得到:

$$k=-q+\sqrt{q^2+p^3}\,.$$

令

$$u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$$

是三次方程的根中的任意一个值, 那么 $\sqrt[3]{k}$ 的三个根是 u, ϵu, $\epsilon^2 u$. 这里 ϵ 是单位三次方根的虚数部分, 即 $\epsilon^3=1$, 其形式如下 (参见第 1.2.6 节, 例 1.2.1):

$$\epsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \text{其中}\quad i=\sqrt{-1}.$$

ϵ 的平方是单位三次方根的共轭复数:

$$\epsilon^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

既然 $\sqrt[3]{kl}=-p$, 那么与其对应的量 $\sqrt[3]{l}$ 是

$$-\frac{p}{u},\quad -\frac{p}{u}\epsilon^2,\quad -\frac{p}{u}\epsilon.$$

它们可以写成如下形式: v, $v\epsilon^2$, $v\epsilon$, 其中

$$v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

总结一下, 我们得到了三次方程的解, 称为*Cardan* 解. 即方程 (1.1.26) 的根有如下形式:

$$y_1=u+v,\quad y_2=\epsilon u+\epsilon^2 v,\quad y_3=\epsilon^2 u+\epsilon v, \tag{1.1.28}$$

其中

$$u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},\quad v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}, \tag{1.1.29}$$

表达式

$$\Delta=q^2+p^3 \tag{1.1.30}$$

称为三次方程 (1.1.26) 的判别式. 由公式 (1.1.29) 得, 判别式为 0, 方程 (1.1.26) 有两个相等实根. 把 (1.1.28) 代入三次方程 (1.1.25), 并且使用 (1.1.27), 我们可以得到三次方程 (1.1.24) 的根.

例 1.1.7 方程 $y^3-6y+4=0$ 满足形式 (1.1.26), 其中 $p=-2$ 和 $q=2$. 这里 $q^2+p^3=-4$, 并且 (1.1.29) 可以写为

$$u=\sqrt[3]{2(-1+i)},\quad v=\sqrt[3]{2(-1-i)}.$$

经过计算, 我们得到 $u=1+i$, $v=1-i$, 且公式 (1.1.28) 也给出了三个不相等的实根:

$$y_1=2,\quad y_2=-(1+\sqrt{3}),\quad y_3=-1+\sqrt{3}. \tag{1.1.31}$$

注 1.1.5 一元三次方程 (1.1.24) 的判别式也可以用如下的形式来表示:

$$(ad)^2-6abcd+4ac^3-3(bc)^2+4b^3d=-9\begin{vmatrix}3a & 2b & c & 0\\ 3b & 2c & d & 0\\ 0 & a & 2b & 3c\\ 0 & b & 2c & 3d\end{vmatrix}. \tag{1.1.32}$$

其判别式 (1.1.32) 等于零是方程 (1.1.24) 有两个相等根的条件. 更进一步, 方程 (1.1.24) 有三个相等实数根的条件是如下两个方程成立 (参见 (1.1.20)):

$$b^2-ac=0,\quad b^3-a^2d=0. \tag{1.1.33}$$

关于判别式 (1.1.32) 和方程 (1.1.33) 的不变量表述, 参见 [21] 的第 10.1.3 节.

1.1.3 相似图形的面积 · 以椭圆为例

定义 1.1.5 变换

$$\overline{x}=x\cos\theta+y\sin\theta+a_1,\quad \overline{y}=y\cos\theta-x\sin\theta+a_2 \tag{1.1.34}$$

是由旋转和平移组成的, 它并不改变点与点之间的距离, 因此也不改变在 (x,y) 平面上的几何图形的面积. 因此, 在 (x,y) 平面的变换 (1.1.34) 称为等距或者刚体运动. 在几何上, 若两个图形中的一个是由另外一个经过等距运动得到的, 那么我们称这两个图形为相等图形.

考虑伸缩变换

$$\overline{x}=ax,\quad \overline{y}=by, \tag{1.1.35}$$

称之为相似变换或者膨胀. 任意常数 $a\neq 0$ 和 $b\neq 0$ 称为变换系数. 当 $a=b$ 时, 伸缩变换称为一致扩充 (收缩), 相反则称为不一致扩充 (收缩).

定义 1.1.6 一个图形经过伸缩变换 (1.1.35) 所得到的几何图形与原图形称为相似图形.

例 1.1.8 任意一个矩形与单位正方形

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1$$

相似. 即: 如果一个矩形的长和宽分别为 a 和 b, 我们首先通过适当的平移和旋转将其移到 "标准位置", 那么它将有如下形式: $\{0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$. 然后, 通过下面伸缩变换: $\overline{x}=x/a$, $\overline{y}=y/b$ 可以将原矩形变成单位正方形 $\{0\leqslant\overline{x}\leqslant 1, 0\leqslant\overline{y}\leqslant 1\}$.

定理 1.1.2 假设两个平面几何图形 $\mathcal{M}$ 和 $\overline{\mathcal{M}}$ 是相似图形, 而且假设后者是由前者通过伸缩变换 $\overline{x}=ax, \overline{y}=by$ 得到的. 那么相应地 $\mathcal{M}$ 和 $\overline{\mathcal{M}}$ 的面积 S 和 $\overline{S}$ 有如下关系:

$$\overline{S}=abS. \tag{1.1.36}$$

证明 首先考虑一个在 x 和 y 方向上的、长和宽分别为 m 和 n 的矩形. 经过伸缩变换后, 我们可以得到长、宽分别为 $\overline{m}=am$ 和 $\overline{n}=bn$ 的矩形. 因此, 原矩形和新矩形的面积分别为 $S=mn$ 和 $\overline{S}=\overline{m}\,\overline{n}$, 满足关系式 (1.1.36). 我们可以将任意的几何图形用 (在不是太苛刻的条件下) 矩形网格来划分, 并对这些矩形使用 (1.1.36). 继续重复这种操作, 那么可以得到越来越细的网格. 因为问题中的图形的面积 S 是这些小矩形面积和的极限, 所以命题得证.

椭圆给了我们一个很好的例子. 一个在 (x,y) 平面上的椭圆是满足如下条件的点的轨迹: 它们到两个定点 (称为椭圆焦点) 的距离的和是一个常数. 在平面直角坐标系中, 椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1.1.37}$$

其中 $a\neq 0$ 和 $b\neq 0$ 是任意的常数, 相应地, 它们也称为椭圆的半长轴和半短轴.

定理 1.1.2 提供了计算椭圆的面积的一种基本方法. 注意到任意的椭圆 (特殊情况: 圆) 与单位圆

$$x^2+y^2=1$$

相似. 事实上, 伸缩变换:

$$\overline{x}=\frac{x}{a}, \quad \overline{y}=\frac{y}{b}$$

可以使椭圆 (1.1.37) 转变为一个单位圆

$$\overline{x}^2+\overline{y}^2=1,$$

后者的面积是 $\overline{S}=\pi$. 现在公式 (1.1.36) 可以写为

$$\overline{S}=\frac{S}{ab},$$

其中 S 是椭圆的面积. 因此, 椭圆 (1.1.37) 的面积为

$$S=\pi ab. \tag{1.1.38}$$

1.1.4 二次代数曲线

直线、椭圆 (特殊情况: 圆)、双曲线和抛物线是我们所熟知的平面代数曲线.

作为非平面代数曲线的例子, 我们有正弦函数、余弦函数和正切函数:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x,$$

对数函数、指数函数和概率曲线:

$$y = \ln x, \quad y = \mathrm{e}^{x}, \quad y = \mathrm{e}^{-x^2},$$

以及一些螺线, 例如阿基米德螺线、对数螺线、抛物螺线和双曲螺线:

$$r = a\theta, \quad \ln r = a\theta, \quad r\theta = a, \quad (r-c)^2 = a\theta,$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$, a 和 $c =$ 常数.

在一般情况下, (x, y) 平面上的代数曲线可以由方程 $P(x, y) = 0$ 来定义. 其中 $P(x, y)$ 是一个关于两个变量 x 和 y 的任意次多项式. 下面, 考虑二次方程

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + ax + by + c = 0, \tag{1.1.39}$$

其中 $A, \cdots, c$ 是任意常数. 如果 $A = B = C = 0$, 方程 (1.1.39) 将被简化为 $ax + by + c = 0$, 它代表一条直线. 这里, 我们要讨论二次曲线, 即方程 (1.1.39) 中至少含有 Ax^2, $2Bxy$ 和 Cy^2 等二次项中的一项.

平面上的一般的线性变换

$$x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \mu, \quad y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \nu \tag{1.1.40}$$

把方程 (1.1.39) 变为具有相同的形式的方程. 现在我们考虑可逆变换 (1.1.40), 即

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{1.1.41}$$

定义 1.1.7 *由线性变换 (1.1.40) 得到的、有着相同形式 (1.1.39) 的两个方程称为等价的. 由等价方程得到的曲线也称为等价曲线.*

下面我们将依照等价性对代数曲线进行分类. 注意, 线性变换 (1.1.40) 是由齐次线性变换

$$x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \quad y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} \tag{1.1.42}$$

和变换

$$x = \overline{x} + \mu, \quad y = \overline{y} + \nu \tag{1.1.43}$$

复合而成的. 变换 (1.1.42) 之所以称为齐次, 是因为它由 $\overline{x},\overline{y}$ 的一次项组成, 而且它将方程 (1.1.39) 的主部, 即二次形式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2 \tag{1.1.44}$$

映成二次形式, 亦即

$$\widetilde{A}\,\overline{x}^{\,2}+2\widetilde{B}\,\overline{x}\,\overline{y}+\widetilde{C}\,\overline{y}^{\,2},$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{A}&=\alpha^2A+2\alpha\gamma B+\gamma^2C,\\ \widetilde{B}&=\alpha\beta A+(\alpha\delta+\beta\gamma)B+\gamma\delta C,\\ \widetilde{C}&=\beta^2A+2\beta\delta B+\delta^2C.\end{aligned} \tag{1.1.45}$$

更进一步, 线性变换 (1.1.43) 并不改变方程 (1.1.39) 的二次项. 因此, 我们可以根据二次形式 (1.1.44) 关于齐次线性变换 (1.1.42) 的等价性来对代数曲线进行分类.

首先注意到, 我们可以同时消掉方程 (1.1.45) 中的系数 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{C}$. 即, 我们可以把方程写为 $\widetilde{A}=0$ 和 $\widetilde{C}=0$ 的形式, 将方程 (1.1.45) 两边同时除以 γ^2 和 δ^2, 同时把 α/γ 和 β/δ 记为 λ, 得到如下的二次方程:

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0. \tag{1.1.46}$$

如果 $B^2-AC\neq 0$, 方程 (1.1.46) 将有两个不相等的根, 即 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 既然 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 那么我们令 $\alpha/\gamma=\lambda_1$ 和 $\beta/\delta=\lambda_2$, 因为方程 $\alpha=\lambda_1\gamma,\beta=\lambda_2\delta$ $(\gamma\neq 0,\delta\neq 0)$ 满足条件 (1.1.41). 因此, 我们可以同时消去 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{C}$. 表达式 B^2-AC 称为二次形式 (1.1.44) 的*判别式*. 下面是从方程 (1.1.45) 中推出的结论.

引理 1.1.1 齐次线性变换 (1.1.42) 把判别式变换为形式

$$\widetilde{B}^2-\widetilde{A}\widetilde{C}=\Delta^2(B^2-AC), \tag{1.1.47}$$

其中 Δ 由 (1.1.41) 所给出.

根据引理 1.1.1, 三个条件

$$B^2-AC>0,\quad B^2-AC=0,\quad B^2-AC<0 \tag{1.1.48}$$

在变换(1.1.42)下是保持不变的, 而且在一般的线性变换 (1.1.40) 下也是不变的. 因此, 我们将分别单独考虑 (1.1.48) 所提到的上述几个条件.

当 $B^2-AC>0$ 时: 方程 (1.1.46) 有两个不等实根:

$$\lambda_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A},\quad \lambda_2=\frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

令 $\alpha/\gamma=\lambda_1$, $\beta/\delta=\lambda_2$, 我们可以同时消去 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{C}$. 然后, 例如令 $\gamma=\delta=1$, 将 $\alpha=\lambda_1$, $\beta=\lambda_2$ 代入 (1.1.45), 同时利用 $\lambda_1\lambda_2=C/A$, $\lambda_1+\lambda_2=-2B/A$, 可以得到

$$\widetilde{B}=\frac{2(AC-B^2)}{A}\neq 0.$$

因此, 改写方程 (1.1.39), 其新变量为 $\overline{x}$, $\overline{y}$, 这里 $\overline{x}$, $\overline{y}$ 由 (1.1.42) 定义为

$$x=\lambda_1\overline{x}+\lambda_2\overline{y},\quad y=\overline{x}+\overline{y}, \tag{1.1.49}$$

并且两边同时除以 $\widetilde{B}$, 将得到如下的双曲型方程:

$$\overline{x}\,\overline{y}+\tilde{a}\,\overline{x}+\tilde{b}\,\overline{y}+\tilde{c}=0. \tag{1.1.50}$$

因此, 当 $B^2-AC>0$ 时, 我们称方程 (1.1.39) 表示**双曲型代数曲线**.

为了进一步简化方程 (1.1.50), 我们可以使用变换 (1.1.43)

$$\overline{x}=\tilde{x}+\mu,\quad \overline{y}=\tilde{y}+\nu.$$

即, 令 $\mu=-\tilde{b}$ 和 $\nu=-\tilde{a}$, 可以将方程 (1.1.50) 简化为标准形式:

$$\tilde{x}\,\tilde{y}=k,\quad k=\text{常数}.$$

如果 $k=0$, 那么双曲线将退化为两条相交的直线, 即 $\tilde{x}=0$ 和 $\tilde{y}=0$. 注意, 如果令 $\tilde{x}=\xi+\eta$, $\tilde{y}=\xi-\eta$, 那么可以得到双曲型方程的第二种标准形式:

$$\xi^2-\eta^2=k,\quad k=\text{常数}.$$

注 1.1.6 在上述的推导中, 我们都假设 $A\neq 0$. 如果 $A=0$ 而且 $C\neq 0$, 交换变量 x 和 y, 那么我们同样可以得到上面的假设 $A\neq 0$. 最后, 如果 $A=C=0$, 那么 $B\neq 0$ 且方程 (1.1.39) 变成已有的形式 (1.1.50).

当 $B^2-AC=0$ 时: 方程 (1.1.46) 有两个相等的根, $\lambda=-B/A$. 令$\beta/\delta=\lambda$ 则得到 $\widetilde{C}=0$. 更进一步, 选择 $\beta=\lambda\delta$ 就可以得到 $\widetilde{B}=0$ 和 $\widetilde{A}\neq 0$. 假设 $\gamma=\delta=1$, 那么条件 (1.1.41) 要求 $\alpha\neq\lambda$ 成立. 因此, 改写方程 (1.1.39), 其新变量 $\overline{x}$, $\overline{y}$ 由 (1.1.42) 定义为

$$x=\alpha\overline{x}+\lambda\overline{y},\quad y=\overline{x}+\overline{y}\quad(\alpha\neq\lambda), \tag{1.1.51}$$

两边同时除以 $\widetilde{A}$, 我们可以得到如下方程:

$$\overline{x}^{\,2}+\tilde{a}\,\overline{x}+\tilde{b}\,\overline{y}+\tilde{c}=0. \tag{1.1.52}$$

现在, 使用变换 $\overline{x}=\tilde{x}-(\tilde{a}/2)$, $\overline{y}=\tilde{y}$ 可以将方程化为抛物型方程的标准形式:

$$\tilde{x}^2+\tilde{b}\,\tilde{y}+k=0.$$

因此, 当 $B^2-AC=0$ 时, 我们称方程 (1.1.39) 表示*抛物型代数曲线*.

当 $B^2-AC<0$ 时: 方程 (1.1.46) 有两个共轭复根, 即: $\lambda_1=p+iq$, $\lambda_2=p-iq$, 其中

$$p=-\frac{B}{A},\quad q=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}.$$

在 (1.1.45) 中, 分别令 $\alpha/\gamma=\lambda_1$ 和 $\beta/\delta=\lambda_2$, 那么可以同时消去系数 $\widetilde{A}$ 和系数 $\widetilde{C}$, 设 $\gamma=\delta=1$, 我们可以得到变量的复变换

$$x=(p+iq)\,x'+(p-iq)\,y',\quad y=x'+y',\tag{1.1.53}$$

它将方程 (1.1.39) 转变为双曲型方程 (1.1.50). 然而, 我们所需要的是避免变量的复变换, 而只使用实变量. 最后, 求解方程 (1.1.53), 这里我们使用的变量为 x' 和 y':

$$x'=\frac{y}{2}+i\frac{py-x}{2q},\quad y'=\frac{y}{2}-i\frac{py-x}{2q},$$

同时考虑将复共轭变量的实部和虚部 (为简单起见, 两边同时乘以 2) 作为新的变量:

$$\overline{x}=y,\quad \overline{y}=\frac{py-x}{q}.$$

解后面的方程, 这里变量为 x,y, 我们可以得到形如 (1.1.42) 的实变换

$$x=p\overline{x}-q\overline{y},\quad y=\overline{x}.\tag{1.1.54}$$

它将方程 (1.1.39) 转化为如下形式:

$$\overline{x}^2+\overline{y}^2+\tilde{a}\,\overline{x}+\tilde{b}\,\overline{y}+\tilde{c}=0.\tag{1.1.55}$$

为了消去一次项, 使用的变换 $\overline{x}=\tilde{x}-(\tilde{a}/2)$, $\overline{y}=\tilde{y}-(\tilde{b}/2)$, 这样可以将 (1.1.55) 化简为其标准形式

$$\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=k.$$

当 $k>0$ 时, 这个方程将表示一个圆; 当 $k=0$ 时, 它表示一个点; 当 $k<0$ 时, 它不表示任何实轨迹. 因此, 我们称方程 (1.1.55) 表示一个圆, 并且上面提到的退化情形也包含其中. 既然圆是椭圆的特殊形式, 所以我们称方程 (1.1.39) 满足 $B^2-AC<0$ 时表示的是*椭圆型代数曲线*.

下面我们对上述的结论加以总结.

定理 1.1.3 对于任意二次方程 (1.1.39), 若 $B^2 - AC > 0$, 那么它表示的曲线是双曲型, 经过齐次线性变换, 它满足形式 (1.1.50)

$$\overline{x}\,\overline{y} + \tilde{a}\,\overline{x} + \tilde{b}\,\overline{y} + \tilde{c} = 0, \tag{1.1.56}$$

若 $B^2 - AC = 0$, 那么它是抛物型, 可变换为形式 (1.1.52)

$$\overline{x}^{\,2} + \tilde{a}\,\overline{x} + \tilde{b}\,\overline{y} + \tilde{c} = 0, \tag{1.1.57}$$

若 $B^2 - AC < 0$, 那么它是椭圆型, 可变换为形式 (1.1.55)

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \tilde{a}\,\overline{x} + \tilde{b}\,\overline{y} + \tilde{c} = 0. \tag{1.1.58}$$

注 1.1.7 由变换 (1.1.53) 显而易见, 复线性变换将椭圆型和双曲型曲线联系了起来.

1.2 微分和积分运算

1.2.1 微分法则

令 $f(x)$ 为一元函数. 它在点 x 处的导数 $f'(x)$ 定义如下:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.2.1}$$

通常我们也习惯用如下形式来表示 $y = f(x)$ 的导数:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \quad y', \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad D(y) = D_x(y), \quad D(f(x)) = D_x(f(x)).$$

令 $u = f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 为一个含有 n 个变量的函数. 它对其中一个变量, 例如对 x^i, 的偏导数的定义如下:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f(x^1, \cdots, x^i + \Delta x^i, \cdots, x^n) - f(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\Delta x^i}. \tag{1.2.2}$$

它也通常被记为

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad u_i = u_{x^i}, \quad D_i(u) = D_{x^i}(u), \quad D_i(f(x)),$$

其中 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$.

微分的主要法则包括:

(i) 基本公式:

$$\begin{aligned} &D(au+bv)=aD(u)+bD(v),\\ &D(uv)=vD(u)+uD(v),\\ &D(u^{\alpha})=\alpha u^{\alpha-1}D(u),\\ &D\Big(\frac{u}{v}\Big)=\frac{vD(u)-uD(v)}{v^2}, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

其中 a,b 和 α 是常数, u,v 是函数, D 是一个常微分或偏微分;

(ii) 反函数的微分公式:

$$D_x(y)=\frac{1}{D_y(x)}; \tag{1.2.4}$$

(iii) 链式法则 : 如果 $y=y(u)$, $u=u(x)$, 那么

$$D_x(y)=D_u(y)\cdot D_x(u). \tag{1.2.5}$$

术语链式法则来源于对 (1.2.5) 的迭代性, 例如: 如果 $y=y(u)$, $u=u(v)$, 并且 $v=v(x)$, 那么

$$D_x(y)=D_u(y)\cdot D_v(u)\cdot D_x(v).$$

1.2.2 中值定理

这个名称下有如下的一些结论.

定理 1.2.1 假设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续可微, 那么, 对于点 x_1,x_2, 其中 $a<x_1<x_2<b$, 必然存在至少一点 $\xi\in[x_1,x_2]$ 满足:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(\xi). \tag{1.2.6}$$

下述中值定理的结论在积分运算和微分方程理论中是很重要的.

定理 1.2.2 假设函数 $y=f(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续可微, 当且仅当 $y=C=$ 常数时, $y'=0$ 在区间 $[a,b]$ 内恒成立.

证明 如果 $y=C$, 那么很显然, 由定义 (1.2.1) 可知 $y'=0$. 假设现在 $y'=0$, 根据定理 1.2.1, 对于在区间 $[a,b]$ 的任意变量 x_1,x_2, 我们有

$$y(x_2)-y(x_1)=(x_2-x_1)y'(\xi),$$

其中 $x_1\leqslant\xi\leqslant x_2$. 由假设 $y'=0$ 在整个区间 $[a,b]$ 恒成立, 并且有 $y'(\xi)=0$. 因此, 由上述方程得到 $y(x_2)=y(x_1)$, 即在区间 $[a,b]$ 内, $y=$ 常数恒成立.

推论 1.2.1 两个函数有相同的导数当且仅当它们只相差一个常数. 换句话说, 当且仅当

$$f(x) = g(x) + C$$

时, $f'(x) = g'(x)$, 其中 $C =$ 常数.

1.2.3 微分形式不变性

一元函数 $y = f(x)$ 的微分形式为

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x.$$

同理, 多元函数 $u = f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的微分的定义为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$

当求和指标是在上标或下标间重复进行的时候, 我们经常使用*求和缩写法*来简化求和符号. 例如, 上述方程可以写为如下形式:

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$

微分形式不变性是函数 $f(u)$ 微分的性质, 且可以使用如下的形式来表示. 如果 $u = u(x)$, 那么

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}f(u(x))}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \tag{1.2.7}$$

更一般的陈述见如下定理.

定理 1.2.3 令函数 $u = f(x)$ 含有 n 个变量 $x = (x^1, \cdots, x^n)$, 同时令函数 $x^i = x^i(t), i = 1, \cdots, n$ 含有 s 个变量 $t = (t^1, \cdots, t^s)$, 那么函数 $u = f(x)$ 关于 x 的微分与函数 $u = f(x(t))$ 关于 t 的微分是相等的, 即

$$\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial f(x(t))}{\partial t^k}\mathrm{d}t^k. \tag{1.2.8}$$

特别地, 如果 $u = f(x, y)$ 是二元函数, 那么任意的变量代换

$$x = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

并不改变函数的微分, 即

$$\frac{\partial f(\varphi(\tilde{x},\tilde{y}),\psi(\tilde{x},\tilde{y}))}{\partial\tilde{x}}\mathrm{d}\tilde{x} + \frac{\partial f(\varphi(\tilde{x},\tilde{y}),\psi(\tilde{x},\tilde{y}))}{\partial\tilde{y}}\mathrm{d}\tilde{y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

或者简单地记为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial\tilde{x}}\mathrm{d}\tilde{x} + \frac{\partial u}{\partial\tilde{y}}\mathrm{d}\tilde{y} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

1.2.4 积分法则

积分运算主要基于如下的一些主要法则.

1. 积分是微分的逆运算:

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C \quad 或 \quad \int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C, \tag{1.2.9}$$

其中 C 是任意的常数, 我们称其为积分常数 (参照推论 1.2.1).

2. 积分运算是线性的:

$$\int (au(x) + bv(x))\mathrm{d}x = a\int u(x)\mathrm{d}x + b\int v(x)\mathrm{d}x, \quad a, b = 常数. \tag{1.2.10}$$

3. 积分中的变量代换 (参见方程 (1.2.7)):

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{1.2.11}$$

4. 分部积分法:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u. \tag{1.2.12}$$

5. 定积分的微分:

$$\text{(i)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(s)\mathrm{d}s = f(x), \tag{1.2.13}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(s,x)\mathrm{d}s = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}s + \psi'(x)g(\psi(x),x) - \varphi'(x)g(\varphi(x),x).$$

1.2.5 泰勒级数

函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的泰勒级数展开式有如下形式:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \cdots, \tag{1.2.14}$$

其中 $f^{(n)}(a)$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的 n 阶导数, 如果 $a=0$, 泰勒级数 (1.2.14) 就变为我们所熟知的麦克劳林级数, 其形式如下:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots. \tag{1.2.15}$$

下面我们来计算指数函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 的麦克劳林展开式, 既然 $f'(x) = \mathrm{e}^x$, 那么有 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$, 则展开式 (1.2.15) 有如下形式:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

下面的表格包括了一些我们常用的麦克劳林展开式和泰勒展开式.

(i) 指数函数和对数函数

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots; \quad a^x = \mathrm{e}^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \cdots; \tag{1.2.16}$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots \ (0 < x \leqslant 2); \tag{1.2.17}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \ (-1 < x \leqslant 1); \tag{1.2.18}$$

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right) \ (-1 \leqslant x < 1). \tag{1.2.19}$$

(ii) 代数函数 (其中 α 是一个任意的正实数)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots; \tag{1.2.20}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots; \tag{1.2.21}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \cdots; \tag{1.2.22}$$

$$\sqrt{1\pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \cdots; \tag{1.2.23}$$

$$(1\pm x)^\alpha = 1 \pm \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \pm \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots; \tag{1.2.24}$$

$$(1\pm x)^{-\alpha} = 1 \mp \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \mp \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots. \tag{1.2.25}$$

(iii) 三角函数和双曲函数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots; \tag{1.2.26}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots; \tag{1.2.27}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots; \tag{1.2.28}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots. \tag{1.2.29}$$

(iv) 一些非初等函数 (见例 1.1.6)

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots ; \tag{1.2.30}$$

$$\mathrm{Ci}(x) = \gamma - \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \cdots ; \tag{1.2.31}$$

$$\mathrm{Ei}(x) = \gamma + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \cdots ; \tag{1.2.32}$$

$$\mathrm{li}(x) = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \cdots ; \tag{1.2.33}$$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\Big), \tag{1.2.34}$$

其中 γ 是在例 1.1.1 中定义的欧拉常数.

1.2.6 复变量

一个复数的形式为

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1},$$

其中 x 和 y 是实数, 并称为复数 z 的实部和虚部. z 的*共轭复数*是 $\overline{z} = x - iy$.

复数也可以用三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.2.35}$$

和极坐标形式 (参见欧拉公式 (1.2.41))

$$z = re^{i\theta} \tag{1.2.36}$$

来表示, 其中 r 和 θ 是实数, 并分别称为复数 z 的模和辐角. 从 (1.2.35) 可知, 若确定在任意 2π 的整数倍区间内, 角 θ 才是确定的. 考虑到这种不唯一性, 复数 z 的极坐标形式 (1.2.36) 可以写为

$$z = re^{i(\theta+2\pi k)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{1.2.37}$$

在 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ 的 θ 的值称为*辐角主值*.

如下复自变量的函数是通过将麦克劳林级数 (1.2.16), (1.2.26) 和 (1.2.27)

在复数域内扩展得到的:

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots ; \tag{1.2.38}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots ; \tag{1.2.39}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots . \tag{1.2.40}$$

从中可以得到 $\mathrm{e}^{iz} = \cos z + i \sin z$, 并且也可以得到欧拉公式:

$$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x (\cos y + i \sin y). \tag{1.2.41}$$

使用欧拉公式, 容易得到

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}. \tag{1.2.42}$$

更进一步, 从欧拉公式 (1.2.41) 和复数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的极坐标表达式 (1.2.36) 可以得到 Moivre 公式:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \tag{1.2.43}$$

将方程 (1.2.43) 中的 n 用 $1/n$ 代替, 并且使用 z 的极坐标形式 (1.2.37), 我们可以得到 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.2.44}$$

例 1.2.1 现在, 让我们来求单位 1 的三次方根, 即求解方程 $w^3 = 1$. 我们将单位 1 写为三角形式:

$$1 = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k),$$

使用方程 (1.2.44) 并且令 $k = 0, 1, 2$, 得到单位三次方根的解

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

双曲函数 (1.1.8) 也可以用一般的方法延伸到复数域:

$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

三角函数和双曲函数有如下关系:

$$\begin{aligned} &\sin z = -i\sinh(iz), \quad \cos z = \cosh(iz), \quad \tan z = -i\tanh(iz), \\ &\sinh z = -i\sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz), \quad \tanh z = -i\tan(iz). \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

复指数函数、复三角函数和复双曲函数的导数如下:

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z,\ (\sin z)' = \cos z,\ (\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z.$$

使用复数 z 的极坐标表达式 (1.2.37), 我们就可以定义复变量的 (多值的) 对数函数如下:

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{1.2.46}$$

最后, 指数函数 a^z 也可以定义如下:

$$a^z = \mathrm{e}^{z\ln a}, \tag{1.2.47}$$

其中 a 是任意复数.

1.2.7 函数的近似表达式

定义 1.2.1 当

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(x,\varepsilon)}{\varepsilon^p} = 0 \tag{1.2.48}$$

时, 我们称函数 $\alpha(x,\varepsilon)$ 的阶数低于 ε^p (其中整数 $p \geqslant 1$), 并且记为

$$\alpha(x,\varepsilon) = o(\varepsilon^p), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.2.49}$$

方程 (1.2.48) 和下面两个条件是等同的:

$$\alpha(x,\varepsilon) = \varepsilon^{p+1}\phi(x,\varepsilon), \quad \phi(x,\varepsilon) \neq \infty,\ \varepsilon \to 0$$

或者

$$|\alpha(x,\varepsilon)| \leqslant C\ |\varepsilon|^{p+1},$$

这里 $C =$ 常数.

定义 1.2.2 如果 $\varepsilon \to 0$ 时, 函数 $f(x,\varepsilon)$ 和函数 $g(x,\varepsilon)$ 满足

$$f(x,\varepsilon) - g(x,\varepsilon) = o(\varepsilon^p),$$

那么它们称为仅差 $o(\varepsilon^p)$ 近似相等的函数, 我们可以将近似相等的函数记为 $g \approx f$, 或者使用更加专业的记法:

$$g(x,\varepsilon) = f(x,\varepsilon) + o(\varepsilon^p).$$

根据泰勒级数展开式 (1.2.14), 函数 $f(x)$ 的近似表达式可以写为

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n, \tag{1.2.50}$$

其误差为 $o((x-a)^n)$, 这里 $x \to a$.

例如, 展开式 (1.2.34) 意味着误差函数的近似表达式如下:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + o(x^4).$$

注 1.2.1 近似相等的函数 f 和函数 g 通常称为等价函数, 而且被记为 $f \sim g$.

1.2.8 雅可比行列式 · 函数无关性 · 多重积分的换元法

定义 1.2.3 令 $x = (x^1, \cdots, x^n)$, 如果至少存在一个关系式 $\Phi(u^1(x), \cdots, u^m(x)) = 0$, 那么函数

$$u^\alpha = u^\alpha(x), \quad \alpha = 1, \cdots, m \ (m \leqslant n) \tag{1.2.51}$$

称为函数相关, 否则称为函数无关.

一个很方便简单的检验函数 (1.2.51) 是否无关的方法是由它们的雅可比矩阵

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right)$$

所给出的公式. 这里, α 和 i 分别表示矩阵的行数和列数. 即, 当且仅当雅可比矩阵的秩等于 m, 函数 (1.2.51) 是函数无关的. 若 $n = m$, 那么我们可以使用雅可比行列式

$$J = \det\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right)$$

来验证函数的无关性.

定理 1.2.4 当且仅当雅可比行列式不等于零时, 其自变量为 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 的 n 元函数 $u^1(x), \cdots, u^n(x)$ 称为函数无关的.

在将换元法 (1.2.11) 应用到多重积分时, 雅可比行列式也是很有用的. 即, 假设函数 (1.2.51) 是函数无关的, 并且 $m = n$, 那么 (1.2.51) 给出了一种换元法: $y = u(x)$, 其中雅可比行列式 $J \neq 0$. 这种换元法可以得到如下的多重积分的换元法

$$\begin{aligned} &\int f(y^1, y^2, \cdots, y^n)\,\mathrm{d}y^1\mathrm{d}y^2\cdots\mathrm{d}y^n \\ &= \int f(u^1(x), u^2(x), \cdots, u^n(x))|J|\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n. \end{aligned} \tag{1.2.52}$$

1.2.9 函数的线性无关 · 朗斯基行列式

定义 1.2.4 考虑 m 个一元函数, 其变量为 x:

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \cdots,\ y_m = y_m(x). \tag{1.2.53}$$

如果存在常数 $c_1, \cdots, c_m$ 不全为零, 使得

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_m y_m(x) = 0, \tag{1.2.54}$$

则函数组 (1.2.53) 称为线性相关的. 相反地, 如果不存在条件 (1.2.54), 我们称其为线性无关的.

一个简单方便的检验函数线性相关的方法是使用 $m \times m$ 行列式

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_m] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}, \tag{1.2.55}$$

这个行列式称为函数 (1.2.53) 的朗斯基行列式.

定理 1.2.5 当且仅当函数 (1.2.53) 的朗斯基行列式不等于零时, 即

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_m] \neq 0 \text{ 时}, \tag{1.2.56}$$

这些函数称为线性无关的.

1.2.10 积分

在实际的微分方程的积分中, 通常已知最简单的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1.2.57}$$

的通解. 根据定理 1.2.2, 方程 (1.2.57) 的通解为

$$y = C.$$

下面来详述由牛顿和莱布尼茨导出的基础微分方程的积分计算. 假设有一连续函数 $f(x)$, 现在要计算函数 $f(x)$ 的积分 $y = F(x)$, 即

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

函数 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的相对于 x 的积分原函数. 因此, 问题就转变为求解一阶常微分方程

$$y' = f(x). \tag{1.2.58}$$

它的通解可以写为

$$y = \int f(x)\mathrm{d}x + C, \tag{1.2.59}$$

其中 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$ 是函数 $f(x)$ 相对于 x 的任意一个积分, 并且 C 是一个任意常数, 通常称为积分常数. 如果给积分常数一个特定的值, 我们就可以得到方程的一个特解. 因此, 方程 (1.2.58) 有无数个解, 其解由含有一个参数的积分族 (1.2.59) 给出.

注释 在计算中, 不定积分的符号 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是方程 (1.2.58) 所有解的标准形式, 例如: $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, 其中 $F(x)$ 表示积分 $f(x)$ 的一个特解. 然而, 在微分方程的理论中, 另外一种不同的解释也经常被使用. 即, $\int f(x)\mathrm{d}x$ 与函数 $f(x)$ 的任何一个积分原函数 $F(x)$ 是相等的. 这也是本书所采用的一种解释.

在表达式 (1.2.59) 中, 二阶方程

$$y'' = f(x) \tag{1.2.60}$$

的通解包含了两个任意常数 C_1 和 C_2, 且写为如下形式

$$y = \int \mathrm{d}x \int f(x)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2, \tag{1.2.61}$$

其中 $\int \mathrm{d}x \int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(\int f(x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x$.

注 1.2.2 在一些经典的文献中, 积分公式 (1.2.59) 称为求积法. 因此, 微分方程 (1.2.58) 称为求积法的可积性. 相同的术语也适用于方程

$$y' = h(y),$$

这是因为它的由积分公式给出的解相似于 (1.2.59),

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} + C \equiv H(y) + C,$$

其中 $y = H^{-1}(x - C)$, 这里 H^{-1} 表示 H 的反函数.

1.2.11 曲线族的微分方程

在 (x,y) 平面上, 考虑曲线族

$$y=f(x,C_1,\cdots,C_n), \tag{1.2.62}$$

在通常情况下, 由下面隐函数给出:

$$\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0. \tag{1.2.63}$$

根据隐函数的定义, 如果方程 (1.2.63) 中的 y 被 (1.2.62) 中的函数 f 所代替, 那么它将满足变量 x (在相同的区间内) 对所有的参数 C_k, $k=1,\cdots,n$ 的容许值都成立. 因此, 相对于变量 x, 我们可以对该函数进行微分. 重复这个步骤 n 次, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y''=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y^{(n)}=0.
\end{aligned} \tag{1.2.64}$$

从方程 (1.2.63) 和 (1.2.64) 消去参数 C_k, 我们可以得到 n 阶常微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1.2.65}$$

函数 (1.2.62) 提供了微分方程 (1.2.65) 的一个解, 它含有 n 个任意的常数 C_k. 相应地, (1.2.65) 称为曲线族 (1.2.62) 或 (1.2.63) 的微分方程.

上述过程可以用*微分代数*符号简单表示 (参见第 1.4 节).

注释 取决于有限个变量 $x,y,y',y'',\cdots$ 函数的*全微分* D_x 的定义如下:

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+y''\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+y^{(s+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(s)}}+\cdots. \tag{1.2.66}$$

在此注释中, 方程 (1.2.64) 可以被简写为

$$D_x\Phi=0,\quad D_x^2\Phi=0,\ \cdots,\ D_x^n\Phi=0. \tag{1.2.67}$$

使用这种方法, 在推导方程 (1.2.64) 时, 我们就没有必要重复调用方程 (1.2.63) n 次.

练习 1.2.1 求解包含两个参数 a 和 b 的直线族 $y=ax+b$ 的微分方程.

解 设 $\Phi = y - ax - b$, 方程 (1.2.67) 可以写为

$$D_x\Phi \equiv y' - a = 0, \quad D_x^2\Phi \equiv y'' = 0.$$

在此, 最后一个方程不含有参数. 因此, 直线的微分方程 (1.2.65) 是最简单的二阶线性方程

$$y'' = 0. \tag{1.2.68}$$

练习 1.2.2 求形如 $\Phi \equiv y - ax^2 - bx - c = 0$ 的抛物型微分方程. 在抛物型方程中, 含有三个参数 a, b 和 c.

解 方程 (1.2.67) 可以写为

$$D_x\Phi \equiv y' - 2ax - b = 0, \quad D_x^2\Phi \equiv y'' - 2a = 0, \quad D_x^3\Phi \equiv y''' = 0.$$

因此, 抛物型微分方程是最简单的三阶线性微分方程

$$y''' = 0. \tag{1.2.69}$$

练习 1.2.3 求形如 $\Phi \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0$ 的圆型微分方程.

解 由方程 (1.2.67) 可以得到

$$x - a + (y-b)y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0, \quad 3y'y'' + (y-b)y''' = 0.$$

这里, 第三个方程并不包含参数 a 和 c, 由第二个方程, 我们有 $y - b = -(1 + y'^2)/y''$, 将其代入第三个方程. 最后, 我们得到, 圆型微分方程可以用如下非线性方程表示:

$$y''' - 3\frac{y'y''^2}{1+y'^2} = 0. \tag{1.2.70}$$

练习 1.2.4 求形如 $\Phi \equiv (y-a)(b-cx) - 1 = 0$ 的双曲型微分方程.

解 由方程 (1.2.67) 可得

$$(b-cx)y' - c(y-a) = 0, \quad (b-cx)y'' - 2cy' = 0, \quad (b-cx)y''' - 3cy'' = 0.$$

由第二个方程, 我们得到 $b - cx = 2cy'/y''$, 将其代入第三个方程, 最后我们得到双曲型微分方程如下:

$$y''' - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} = 0. \tag{1.2.71}$$

1.3 向量分析

向量分析为几何和物理问题提供了一种自然而且简单的记法. 因此, 在本科教育中, 它是理科和工科学生的主要课程. 它在牛顿力学、连续介质力学、相对论力学和电动力学等学科中被广泛使用. 本节涵盖了向量分析中的一些基础概念和公式.

1.3.1 向量代数

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的标量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个标量 (即一个实数), 它被定义如下:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta, \tag{1.3.1}$$

其中 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 在本书中, 标量积也写为内积的形式 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 或者简记为 $\boldsymbol{ab}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 写为笛卡儿坐标形式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a^1\boldsymbol{i}+a^2\boldsymbol{j}+a^3\boldsymbol{k}=(a^1,a^2,a^3),\\ \boldsymbol{b}&=b^1\boldsymbol{i}+b^2\boldsymbol{j}+b^3\boldsymbol{k}=(b^1,b^2,b^3),\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

这里 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是沿着三个坐标轴对应的单位向量. 那么, 它们的标量积由下列公式给出:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a^ib^i. \tag{1.3.3}$$

下面是一个力学中的简单的使用标量积的例子: 在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下, 质点移动一段距离 $\boldsymbol{x}$, 所做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}. \tag{1.3.4}$$

在方程 (1.3.4) 中, 存在一种特殊情况, 那就是当位移 $\boldsymbol{x}$ 与作用力 $\boldsymbol{F}$ 垂直的时候, 那么其做功为零. 例如, 在下图中, 当某人在地球重力场中提着一重物在水平方向上移动, 那么他所做的功为零. 相反, 在斜坡上移动, 他是做功的.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 定义如下:

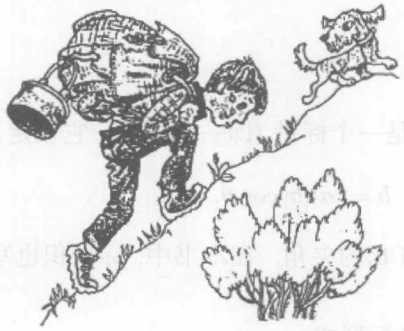
(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的大小为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, 其中 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角;

(ii) 向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所生成的平面垂直, 并且这三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 满足右手法则.

向量积也可以记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 或者 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]$. 向量积的大小 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积. 因此, 向量积表示有向面积, 在一些经典文献中, 我们也称之为向量面积.



这些小伙子没做功!



他做功了!

在笛卡儿坐标系中, 两个向量 (1.3.2) 的向量积可以写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a^1&a^2&a^3\\b^1&b^2&b^3\end{vmatrix},\tag{1.3.5}$$

其中

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a^1&a^2&a^3\\b^1&b^2&b^3\end{vmatrix}=(a^2b^3-a^3b^2)\boldsymbol{i}+(a^3b^1-a^1b^3)\boldsymbol{j}+(a^1b^2-a^2b^1)\boldsymbol{k}.$$

从方程 (1.3.5) 中, 我们知道, 向量积满足反交换律:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

当有三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 时, 我们可以得到三重积

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

向量三重积 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 可以很方便地由如下公式计算:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.\tag{1.3.6}$$

混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 是向量-标量积, 有时也称为标量三重积. 它是一个标量, 其大小为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积. 三元组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成一个右手系统.

混合积满足方程

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{1.3.7}$$

在笛卡儿坐标系中, 混合积可以使用如下的形式来表示. 令

$$\boldsymbol{a}=(a^1,a^2,a^3),\quad \boldsymbol{b}=(b^1,b^2,b^3),\quad \boldsymbol{c}=(c^1,c^2,c^3),$$

那么

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \tag{1.3.8}$$

1.3.2 向量函数

含有一个标量变量 t 的向量函数 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}(t)$ 是一个依赖 t 的可变向量. 在坐标系中, 它等同于三个标量函数

$$a^1=f_1(t),\quad a^2=f_2(t),\quad a^3=f_3(t),$$

并且可以写为

$$\boldsymbol{a}=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}.$$

向量函数的微分可以定义为

$$\boldsymbol{a}'\equiv\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t)}{\Delta t}.$$

在坐标系中,

$$\boldsymbol{a}'=f_1'(t)\boldsymbol{i}+f_2'(t)\boldsymbol{j}+f_3'(t)\boldsymbol{k}.$$

同理, 二阶导数也定义如下:

$$\boldsymbol{a}''=f_1''(t)\boldsymbol{i}+f_2''(t)\boldsymbol{j}+f_3''(t)\boldsymbol{k}.$$

向量函数也满足通常的微分规则, 即:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}',\quad (\varphi\boldsymbol{a})'=\varphi'\boldsymbol{a}+\varphi\boldsymbol{a}',$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}',\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'.$$

设向量 $\boldsymbol{a}$ 是标量 φ 的函数, 并且设 $\varphi=\varphi(t)$:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}\big(\varphi(t)\big),$$

那么, 向量函数的链式法则可以写为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

1.3.3 向量场

这里我们讨论向量场的快速微分计算. 所有的计算将在矩形笛卡儿参照系中进行. 因此, 这里的独立自变量是位置向量 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ 的坐标 x,y,z. 所有考虑的函数假定都是连续可微的.

标量场 ϕ 是位置向量 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ 的函数:

$$\phi=\phi(x,y,z).$$

向量场 $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2,a^3)$ 是一个向量函数:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z).$$

它们都依赖于 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$.

标量和向量场的*偏微分*也按通常的方法定义, 就是对向量函数中的一个变量进行微分.

*哈密顿算子*或者称为*符号微分算子* ∇ 是一个定义在直角笛卡儿坐标系 (x,y,z) 中的向量

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.3.9}$$

其中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是沿着坐标轴 x,y 和 z 的单位向量. 换句话说, ∇ 是一个向量算子, 由沿着 x,y,z 轴的

$$\nabla_x=\frac{\partial}{\partial x},\quad \nabla_y=\frac{\partial}{\partial y},\quad \nabla_z=\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3.10}$$

所组成. 我们所熟知的梯度、散度和旋度也可以用如下形式的哈密顿算子表示.

标量场 $\phi=\phi(x,y,z)$ 的*梯度*是对标量进行向量 ∇ 计算的产物, 即:

$$\operatorname{grad}\phi\overset{\text{def}}{=\!=}\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{1.3.11}$$

向量场 $\boldsymbol{a}$ 的*散度*是向量 ∇ 和 $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2,a^3)$ 的标量积:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}\overset{\text{def}}{=\!=}\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\nabla_x a^1+\nabla_y a^2+\nabla_z a^3\equiv\frac{\partial a^1}{\partial x}+\frac{\partial a^2}{\partial y}+\frac{\partial a^3}{\partial z}. \tag{1.3.12}$$

向量场 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$ 的*旋度*或者*旋转*是向量 ∇ 和 $\boldsymbol{a}$ 的向量积:

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{a}\equiv\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\overset{\text{def}}{=\!=}\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ a^1&a^2&a^3\end{vmatrix} \tag{1.3.13}$$

或者

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{a}=\Big(\frac{\partial a^3}{\partial y}-\frac{\partial a^2}{\partial z}\Big)\boldsymbol{i}+\Big(\frac{\partial a^1}{\partial z}-\frac{\partial a^3}{\partial x}\Big)\boldsymbol{j}+\Big(\frac{\partial a^2}{\partial x}-\frac{\partial a^1}{\partial y}\Big)\boldsymbol{k}. \tag{1.3.14}$$

算子 ∇ 和向量代数的公式使我们将标量场和向量场用微分联系了起来. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 ϕ,ψ 分别是向量场和标量场, α,β 是任意常数. 算子 ∇ 有如下一些性质:

1. $\nabla(\alpha\phi+\beta\psi)=\alpha\nabla\phi+\beta\nabla\psi$.
2. $\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{b}$.
3. $\nabla\times(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\alpha\nabla\times\boldsymbol{a}+\beta\nabla\times\boldsymbol{b}$.
4. $\nabla(\phi\psi)=\psi\nabla\phi+\phi\nabla\psi$. (1.3.15)
5. $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a})=(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{a}+\phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$.
6. $\nabla\times(\phi\,\boldsymbol{a})=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{a}+\phi\nabla\times\boldsymbol{a}$.
7. $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$.
8. $\nabla\cdot(\nabla\phi)\equiv\nabla^2\phi\equiv\Delta\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$.
9. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$.
10. $\nabla\times(\nabla\phi)=0$.

这些性质通常以 (1.3.11)—(1.3.12) 的记号写出. 例如, 性质 5 , 9 和 10 可以写为

$$5'.\ \operatorname{div}(\phi\,\boldsymbol{a})=\phi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}\phi,\quad 9'.\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0,\quad 10'.\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi=0.$$

1.3.4 三个经典的积分定理

Green 定理: 设 V 是 (x,y) 平面的任意一个区域, 其边界为 ∂V, 那么

$$\int_{\partial V}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_V\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.3.16}$$

对任意的 (可微) 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都成立.

Stokes 定理: 设 V 是一个在 (x,y,z) 空间的 (可定向) 曲面, 其边界为 ∂V, 并且设 $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 是任意的 (可微) 函数. 那么有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial V}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\int_V\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

如果采用向量的记法, 方程 (1.3.17) 可以写为形式

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V \operatorname{curl}\boldsymbol{A}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S}.$$

其中 $\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ 和 $\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S$, 这里 $\boldsymbol{\nu}$ 是曲面 V 的单位外法线方向.

散度定理 (Gauss-Ostrogradsky 定理): 设 V 是 (x,y,z) 空间的一个立体, 其封闭的边界为 ∂V, 并且 $\boldsymbol{A}$ 是任意的向量, 那么

$$\int_{\partial V} (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}S = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \equiv \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{1.3.18}$$

这里 $\boldsymbol{\nu}$ 是 V 的边界 ∂V 的单位外法线方向.

1.3.5 拉普拉斯方程

二阶微分算子

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.3.19}$$

称为*拉普拉斯算子*. 有三个变量的*拉普拉斯方程*

$$\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.3.20}$$

是最重要的数学物理方程之一. 它是一个线性的二阶偏微分方程.

例 1.3.1 拉普拉斯方程 (1.3.20) 的球对称解 $\phi=\phi(r)$ 有如下形式 (参见习题 1.21):

$$\phi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 且 $C_1, C_2=$ 常数.

1.3.6 行列式的微分

行列式的微分由如下公式给出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}(x) & a_{i2}(x) & \cdots & a_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

其中 $a'_{ij}(x)=\mathrm{d}a_{ij}(x)/\mathrm{d}x$.

1.4 微分代数的符号

对于处理微分方程的问题, 微分代数学提供给我们一个方便的语言和有效的工具. 在古典数学分析中, 我们经常需要处理函数 $u^\alpha(x)$, 其中 $\alpha = 1, \cdots, m$, $x = (x^1, \cdots, x^n)$. 微分

$$u_i^\alpha(x) = \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}, \quad u_{ij}^\alpha(x) = \frac{\partial^2 u^\alpha(x)}{\partial x^i \partial x^j}, \cdots$$

同样被视为 x 的函数.

在微分代数中, 我们在求解复合函数 $f(x, u(x), \partial u(x)/\partial x, \cdots)$ 时, 把 u^α, u_i^α, $u_{ij}^\alpha, \cdots$ 看成变量, 这就像在求解函数 $f(x, u, u_{(1)}, \cdots)$ 时, 把 $x, u, u_{(1)}, \cdots$ 当成独立的变量一样处理.

1.4.1 微分变量 · 全微分

首先, 我们从一维的情况开始. 即, 我们在此只考虑一个独立自变量 x 和一个有着连续微分 $y', y'', \cdots, y^{(s)}, \cdots$ 的因变量 y. 全微分 (参见 (1.2.66))

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + y^{(s+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + \cdots \tag{1.4.1}$$

作用于微分函数, 例如函数

$$f(x, y, y_{(1)}, \cdots), \tag{1.4.2}$$

其中存在有限个独立变量

$$x,\ y,\ y_{(1)} = y',\ y_{(2)} = y'', \cdots, \tag{1.4.3}$$

所有微分函数的集合被记为 $\mathcal{A}$.

下面我们来解释全微分 D_x 和偏微分 $\partial/\partial x$ 的差别. 对自变量 x, 我们将这两种运算同时作用在如下的 $\mathcal{A}$ 中的函数上:

$$f = x, \quad f = y, \quad f = xy'.$$

其全微分的结果为

$$D_x(x) = 1, \quad D_x(y) = y', \quad D_x(xy') = y' + xy'',$$

而偏微分的结果为

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (xy')}{\partial x} = y'.$$

1.4.2 乘积和复合函数的高阶微分

函数乘积的高阶微分的公式也适用于任意的微分函数. 即, 如果 $f, g \in \mathcal{A}$, 那么

$$D_x^k(fg) = D_x^k(f)g + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-s)!s!} D_x^{k-s}(f) D_x^s(g) + f D_x^k(g). \tag{1.4.4}$$

更进一步, Faà de Bruno (1857 年) 给出了复合函数高阶微分的计算公式. 它延伸了链式法则 (1.2.5). 即, 考虑一个形如 $f(y)$ 的微分方程, 那么它用 $y', \cdots, y^{(k)}$ 表示的 k 阶导数可以由如下公式给出:

$$D_x^k(f) = \sum \frac{k!}{l_1! l_2! \cdots l_k!} f^{(p)} \left(\frac{y'}{1!}\right)^{l_1} \left(\frac{y''}{2!}\right)^{l_2} \cdots \left(\frac{y^{(s)}}{s!}\right)^{l_s} \cdots \left(\frac{y^{(k)}}{k!}\right)^{l_k}, \tag{1.4.5}$$

这里

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}, \quad f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}, \quad \cdots, \quad f^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}y^k},$$

其中 (1.4.5) 的求和遍历所有满足下列等式的非负整数 $l_1, \cdots, l_k$.

$$l_1 + 2l_2 + \cdots + kl_k = k, \tag{1.4.6}$$

并且 p 为正整数, 对于 (1.4.6) 的每一个解集 $l_1, \cdots, l_k$, 它定义为

$$p = l_1 + l_2 + \cdots + l_k. \tag{1.4.7}$$

例如, 如果我们需要三阶导数, 这里 $k = 3$, 我们解方程 (1.4.6)—(1.4.7), 即

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 = 3,$$
$$p = l_1 + l_2 + l_3,$$

可以得到如下的由 l_1, l_2, l_3 (不等于零) 和 p 给出的三组解:

$$1)\ l_1 = 3,\ p = 3; \quad 2)\ l_1 = 1,\ l_2 = 1,\ p = 2; \quad 3)\ l_3 = 1,\ p = 1.$$

因此, 我们有

$$D_x^3(f) = f''' y'^3 + 3f'' y' y'' + f' y'''.$$

1.4.3 多元微分函数

现在我们考虑如下的独立代数变量:

$$x = \{x^i\},\ u = \{u^\alpha\}, \quad u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}, \quad u_{(2)} = \{u_{ij}^\alpha\}, \cdots, \tag{1.4.8}$$

其中, 指标 i 取从 1 到 n 的所有值, α 取从 1 到 m 的所有值. 我们假设, 变量 u_{ij}^{α} 的下标是对称的, 即 $u_{ij}^{\alpha}=u_{ji}^{\alpha}$.

对于任意的 $i=1,\cdots,n$, 我们引入算子

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}+u_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u_j^{\alpha}}+\cdots, \tag{1.4.9}$$

称其为对 x^i 全微分. 算子 D_i 是一个无限项的形式和. 然而, 当把它作用于任意含有有限个变量 $x,u,u_{(1)},\cdots$ 的函数时, 这是一个有限和. 因此, 对所有含有有限个变量 $x,u,u_{(1)},\cdots$ 的函数的全微分 D_i 是明确的. 例如, 我们可以很容易地验证

$$D_i(x^k)=\delta_i^k,\quad D_i(u^{\beta})=u_i^{\beta},\quad D_i(u_k^{\beta})=u_{ik}^{\beta},\quad D_i(f(u^1))=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u^1}u_i^1,$$

其中 δ_i^k 是克罗内克符号, 定义为

$$\delta_i^k=1\quad 若\quad i=k;\qquad \delta_i^k=0\quad 若\quad i\neq k.$$

因此, 虽然变量 (1.4.8) 是代数无关的, 它们却被下面的微分关系联系起来:

$$u_i^{\alpha}=D_i(u^{\alpha}),\quad u_{ij}^{\alpha}=D_j(u_i^{\alpha})=D_jD_i(u^{\alpha}),\cdots. \tag{1.4.10}$$

变量 x^i 称为独立变量, 其中 u^{α} 称为由 (1.4.10) 导出的依次排列的一阶、二阶、$\cdots\cdots$ 导数 $u_i^{\alpha},u_{ij}^{\alpha},\cdots$ 的微分变量. 我们可以称有着有限个变量 $x,u,u_{(1)},\cdots$ 的解析函数为微分函数. 微分函数 $f=f(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(p)})$ 中的最高阶导数 p 称为这个函数的阶数, 并且被记为 $\mathrm{ord}f$. 如果 f 是一个 p 阶微分函数, 那么全微分 D_i 的阶数将是 $p+1$ 阶. 由所有有限阶微分函数的全微分 D_i (1.4.9) 组成的集合称为微分函数空间, 并被记为 $\mathcal{A}$.

1.4.4 微分方程的空间曲面

设 $F\in\mathcal{A}$ 是一个 p 阶微分函数. 方程

$$F(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(p)})=0 \tag{1.4.11}$$

在变量空间 $x,u,\cdots,u_{(p)}$ 里定义了一个曲面.

微分方程的概念包含了两个明显不同的要素, 即:

(i) 形如 (1.4.11) 的曲面称为微分方程的空间曲面 (参见图 1.1);

(ii) 数学或者物理学中的微分方程的解系.

在一些经典的文献中, 微分方程的解只是所谓的可微函数. 而在现代数学和物理问题中, 我们需要将解的概念加以推广, 即考虑其通解 (分布), 它并不是所谓的经典解.

对常微分方程进行积分, 关键性的一步就是使用换元法对其结构进行化简. 李群分析给我们提供了一种很好的换元法. 假设无穷小对称是已知的, 我们引入典型变量. 通过将空间曲面转化成圆柱面而简化方程, 即在显函数中, 变量 x 或者 y 中的一个将被消掉.

例如, 考虑图 1.1 中的里卡蒂 (Riccati) 方程. 我们将把图 1.1 中的曲线拉直成如图 1.2 所示的柱面. 里卡蒂方程

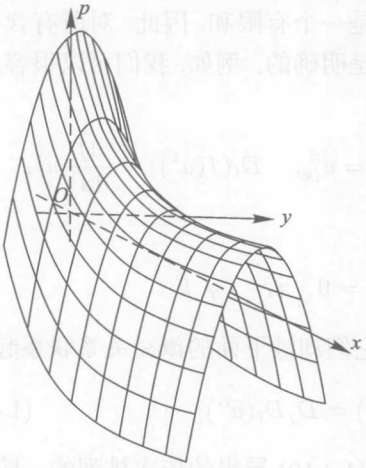


图 1.1 里卡蒂方程 $y'+y^2-2/x^2=0,\ p=y'$

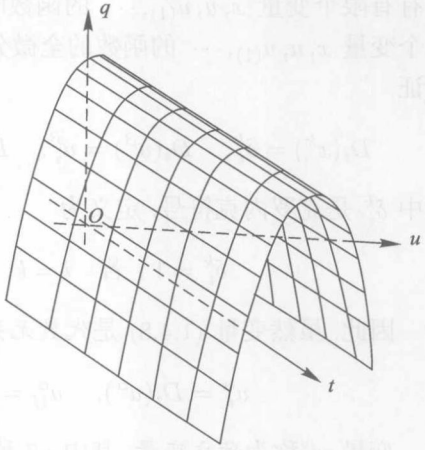


图 1.2 方程 $u'+u^2-u-2=0,\ q=u'$

$$y'+y^2-\frac{2}{x^2}=0$$

在如下伸缩变换中是不变的:

$$\overline{x}=ax,\quad \overline{y}=\frac{y}{a}.$$

根据李群分析, 我们可以很容易地得到典型变量 t 和 u, 其形式如下:

$$t=\ln x,\quad u=xy.$$

用这些变量表示的里卡蒂方程变为

$$u'+u^2-u-2=0.$$

设 $u'=q$, 我们得到第二个方程的空间曲面, 它是一个抛物柱面, $q+u^2-u-2=0$, 沿着 t 的方向延伸. 因此, 图 1.1 中的双曲抛物面就通过典型变量被拉直成抛物柱面了. 对于已知对称性的 (常微分和偏微分) 方程, 类似的方法也是很多的, 正因为如此, 在本书中我们采用李群分析的方法.

1.4.5 换元法求导

让我们从只含有一个自变量 x 和一个因变量 y 的情况开始. 考虑下列换元法:

$$\overline{x}=\varphi(x,y),\quad \overline{y}=\psi(x,y). \tag{1.4.12}$$

定理 1.4.1 (1.4.12) 中的换元法导致全微分的变换

$$D_x=D_x(\varphi)D_{\overline{x}}, \tag{1.4.13}$$

这里 D_x 和 $D_{\overline{x}}$ 是分别相对于 x 和 $\overline{x}$ 的全微分, 并且这也导致了如下顺次的求导公式的变换:

$$\overline{y}'=\frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)},\quad \overline{y}''=\frac{D_x(\varphi)D_x^2(\psi)-D_x(\psi)D_x^2(\varphi)}{(D_x(\varphi))^3},\cdots, \tag{1.4.14}$$

其中 $\overline{y}'=\mathrm{d}\overline{y}/\mathrm{d}\overline{x}$, $\overline{y}''=\mathrm{d}\overline{y}'/\mathrm{d}\overline{x}$.

证明 对 (1.4.12) 第一个方程使用链式法则, 我们可以得到全微分 (1.4.13) 的变换. 为了证明 (1.4.14) 的第一个方程, 我们对 (1.4.12) 中的第二个方程使用全微分 (1.4.13) , 这样可以得到 $D_x(\varphi)D_{\overline{x}}(\overline{y})=D_x(\psi)$. 另外, 我们也可以使用如下的计算方法:

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{y}}{\mathrm{d}\,\overline{x}}=\frac{\psi_x\mathrm{d}x+\psi_y\mathrm{d}y}{\varphi_x\mathrm{d}x+\varphi_y\mathrm{d}y}=\frac{(\psi_x+y'\psi_y)\mathrm{d}x}{(\varphi_x+y'\varphi_y)\mathrm{d}x}=\frac{\psi_x+y'\psi_y}{\varphi_x+y'\varphi_y}=\frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}.$$

通过重复操作

$$\frac{\mathrm{d}\overline{y}'}{\mathrm{d}\overline{x}}=\frac{D_x(\overline{y}')}{D_x(\varphi)}=\frac{1}{D_x(\varphi)}D_x\left(\frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}\right),$$

我们可以得到 (1.4.14) 中的第二个方程或者更高阶的求导公式.

例 1.4.1 反函数 (1.2.4) 的求导法则可以通过对公式 (1.4.14) 使用如下换元法求得:

$$\overline{x}=y,\quad \overline{y}=x.$$

事实上, 因为 $\varphi=y$, $\psi=x$, 方程 (1.4.13) 和 (1.4.14) 可以分别写成

$$D_x=y'\,D_{\overline{x}}$$

和

$$\overline{y}'=\frac{1}{y'},\quad \overline{y}''=-\frac{y''}{y'^3}.$$

现在我们考虑多元变量的一般情况, 并且考虑换元法:

$$\overline{x}^{\,i} = \varphi^i(x,u), \quad i = 1,\cdots,n, \tag{1.4.15}$$

$$\overline{u}^{\,\alpha} = \psi^\alpha(x,u), \quad \alpha = 1,\cdots,m. \tag{1.4.16}$$

在微分代数中, 我们可以很容易地得到求导公式相应的变化. 我们注意到对自变量应用 (1.4.15) 的换元法, 推出新旧变量各自的全微分 D_i, $\overline{D}_i$ 有如下关系 (参见 (1.4.13)):

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} D_i(\varphi^j)\overline{D}_j, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{1.4.17}$$

然后, 使用方程 $\overline{u}{}^\alpha_i = \overline{D}_i(\overline{u}^{\,\alpha})$, 我们对方程 (1.4.16) 的两边同时进行微分, 省略求和符号, 将结果写为形式 $D_i(\psi^\alpha) = D_i(\varphi^j)\overline{D}_j(\overline{u}^{\,\alpha}) = \overline{u}{}^\alpha_j\, D_i(\varphi^j)$. 因此, 一阶导数的换元法由如下公式所决定:

$$\overline{u}{}^\alpha_j D_i(\varphi^j) = D_i(\psi^\alpha), \tag{1.4.18}$$

或者

$$\left(\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i} + u^\beta_i\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^\beta}\right)\overline{u}{}^\alpha_j = \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^i} + u^\beta_i\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial u^\beta}.$$

剩下就是求解后一个方程了, 其变量为 $\overline{u}{}^\alpha_j$. 方程 (1.4.18) 的二阶微分将导致二阶微分的换元法, 等等.

例 1.4.2 设 t, x 是两个独立的自变量, u 是一个因变量. 我们引入新的自变量 τ,ξ 和因变量 v, 其定义如下:

$$\tau = t, \quad \xi = u, \quad v = x.$$

方程 (1.4.17) 和方程 (1.4.18) 分别满足

$$D_t = D_\tau + u_t D_\xi, \quad D_x = u_x D_\xi$$

和

$$0 = v_\tau + u_t\, v_\xi, \quad 1 = u_x\, v_\xi,$$

因此, 一阶导数的换元法有如下形式:

$$u_t = -\frac{v_\tau}{v_\xi}, \quad u_x = \frac{1}{v_\xi}.$$

1.5 变分法

1.5.1 最小作用量原理

哈密顿变分原理或最小作用量原理: 要确定具有一定动能 $T(t,q,v)$ 和势能 $U(t,q)$ 的力学系统的运动需要系统的质点轨迹提供作用量积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,v)\mathrm{d}t \tag{1.5.1}$$

的最大值, 其中 $L(t,q,v)=T-U$ 称为系统的拉格拉日量. 这里 t 表示时间, $q=(q^1,\cdots,q^s)$ 表示系统质点的坐标, 并且 $v=\dot{q}\equiv \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 表示它们的速度. 定义在函数组 $q^\alpha=q^\alpha(t)$ 上的作用量要求其积分在区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 上是存在的.

考虑当 q 有一微小变化, 即 $q+\delta q$. 假设其变化为函数 $\delta q=\delta q(t)$, 它满足任意点在区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 中都是微小量, 并在边界上其值为零: $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$. 对其微分, 可以得到 $\delta v=\mathrm{d}\big(\delta q(t)\big)/\mathrm{d}t$. 这也导致了作用量积分 (1.5.1) 的变化如下: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}(L(t,q+\delta q,v+\delta v)-L(t,q,v))\mathrm{d}t$. 被积函数对增量 δq 和 δv 的幂次的展开式导出了 δS 的线性主部 (在 $\alpha=1,\cdots,s$ 中求和):

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha+\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\delta v^\alpha\right)\mathrm{d}t.$$

对上面积分的第二项使用分部积分法, 它可以写为

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right)\right)\delta q^\alpha\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\delta q^\alpha\right)_{t_1}^{t_2},$$

或者, 利用边界条件 $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right)\right)\delta q^\alpha\mathrm{d}t,\qquad \text{其中 } D_t=\frac{\partial}{\partial t}+v^\alpha\frac{\partial}{\partial q^\alpha}+\dot{v}^\alpha\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\cdot$$

积分 (1.5.1) 存在极值的必要条件是 $\delta S=0$. 既然时间区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 和增量 δq^α 都是任意的, 那么

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right)=0,\quad \alpha=1,\cdots,s. \tag{1.5.2}$$

微分方程 (1.5.2) 就是著名的欧拉-拉格朗日方程. 因此, 带有拉格朗日量 $L(t,q,v)$ 的力学系统轨迹 $q=q(t)$ 就是欧拉-拉格朗日方程 (1.5.2) 的解.

1.5.2 多元欧拉-拉格朗日方程

多元自变量 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 和 (微分) 因变量 $u=(u^1,\cdots,u^m)$ 的情形可以用相似的方法进行处理. 这里, 我们使用微分代数的符号和相关术语.

设 $L\in\mathcal{A}$ 是一阶微分函数. 设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是一个任意的在有着边界 ∂V 的自变量 x 空间中的 n 维体积. 作用量就是如下的积分:

$$l[u]=\int_V L(x,u,u_{(1)})\mathrm{d}x. \tag{1.5.3}$$

它也称为变分积分. 由 u 的变化 $u+h(x)$ 所引起的积分 (1.5.3) 的变分 $\delta l[u]$, 被定义为积分 $\int_V(L(x,u+h,u_{(1)}+h_{(1)})-L(x,u,u_{(1)}))\mathrm{d}x$ 的线性主部 (在 h 中), 其形式如下:

$$\delta l[u]=\int_V\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}h^\alpha+\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}h_i^\alpha\right)\mathrm{d}x.$$

对第二项进行分部积分法, 得

$$\delta l[u]=\int_V\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}-D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)\right)h^\alpha\mathrm{d}x+\int_V D_i\Big(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}h^\alpha\Big)\mathrm{d}x.$$

使用散度定理 (1.3.18), 我们可以得到

$$\delta l[u]=\int_V\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}-D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)\right)h^\alpha\mathrm{d}x+\int_{\partial V}\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}h^\alpha\nu^i\mathrm{d}x,$$

其中 $\nu=(\nu^1,\cdots,\nu^n)$ 是 ∂V 的单位外法线. 已知函数 $h^\alpha(x)$ 在其边界 ∂V 上等于零, 我们可以得到如下结论:

$$\delta l[u]=\int_V\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}-D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)\right)h^\alpha\mathrm{d}x.$$

如果对于任意的体积 V 和任意的在 ∂V 上等于零的增量 $h=h(x)$, $\delta l[u(x)]=0$, 那么函数 $u=u(x)$ 称为变分积分 (1.5.3) 的一个极值. 从上面的表达式 $\delta l[u]$ 中, 我们可以得到 u 是一个极值的必要条件, 它由欧拉-拉格朗日方程给出:

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}\equiv\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}-D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)=0,\quad\alpha=1,\cdots,m. \tag{1.5.4}$$

在一般情况下, 方程 (1.5.4) 是由 m 个二阶偏微分方程组成的. $\delta L/\delta u^\alpha$ 称为变分导数.

习题一

1.1. 地球北半球的表面积比赤道截面大多少?

1.2. 通过求解关于 t 的方程

$$x=\sinh t=\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2},\quad x=\tanh t=\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}},\quad x=\cosh t=\frac{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}{2}$$

求下列反双曲函数:

(i) $t=\operatorname{arcsinh} x$, (ii) $t=\operatorname{arctanh} x$, (iii) $t=\operatorname{arccosh} x$.

1.3. 证明公式 (1.1.7):

$$\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}\cdot$$

类似于 (1.1.7), 求反双曲函数 $\operatorname{arcsinh} x$ 和 $\operatorname{arctanh} x$ 的关系.

1.4. 求三次方程 $x^{3}-3x^{2}+x+5=0$ 的解.

1.5. 求下列积分 ($k,m\geqslant 0$ 是任意的整数):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,\sin(mx)\,\mathrm{d}x,\quad m\neq k;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\cos(mx)\,\mathrm{d}x,\quad m\neq k;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\sin(mx)\,\mathrm{d}x,\quad m,k=0,1,2,\cdots;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2}(kx)\,\mathrm{d}x,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2}(kx)\,\mathrm{d}x,\quad k=1,2,\cdots.$$

1.6. 求函数 $1/(1-x)$ 的麦克劳林展开式 (1.2.20) .

1.7. 使用定义 (1.1.12), 求误差函数 $\operatorname{erf}(x)$ 的麦克劳林展开式 (1.2.34).

1.8. 验证下列含有三个自变量 x,y,z 的函数 f,g 和 h 的函数无关性:

(i) $f=\sqrt{x^{2}-y^{2}}$, $g=\sqrt{y^{2}-z^{2}}$, $h=x^{2}-z^{2}$;

(ii) $f=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$, $g=\sqrt{y^{2}+z^{2}}$, $h=x^{2}+z^{2}$;

(iii) $f=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$, $g=\sqrt{y^{2}+z^{2}}$, $h=x^{2}-z^{2}$.

1.9. 求双曲函数 $\sinh x,\cosh x$ 和 $\tanh x$ 的导数.

1.10. 验证下列函数的线性无关性:

(i) $y_{1}(x)=\mathrm{e}^{x}$, $y_{2}(x)=\mathrm{e}^{-x}$;

(ii) $y_{1}(x)=\mathrm{e}^{x}$, $y_{2}(x)=\cosh x$, $y_{3}(x)=\sinh x$;

(iii) $y_{1}(x)=\mathrm{e}^{x}$, $y_{2}(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $y_{3}(x)=\sinh x$;

(iv) $y_{1}(x)=\mathrm{e}^{x}$, $y_{2}(x)=\cosh x$, $y_{3}(x)=\tanh x$;

(v) $y_{1}(x)=\sinh x$, $y_{2}(x)=\cosh x$, $y_{3}(x)=\tanh x$.

1.11. 估算: (i) $\mathrm{e}^{i\pi}$, (ii) $\mathrm{e}^{i(\pi/2)}$, (iii) i^{i} 的值.

1.12. 求位置向量 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{x}$ 和旋度 $\nabla\times\boldsymbol{x}$.

1.13. 设 ϕ, ψ 和 $\boldsymbol{a}$ 分别为标量场和向量场. 计算下列表达式的值:

(i) $\nabla \times (\nabla \phi) \equiv \mathrm{curl}(\mathrm{grad}\phi)$;

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) \equiv \mathrm{div}(\mathrm{curl}\boldsymbol{a})$;

(iii) $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) \equiv \mathrm{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x})$;

(iv) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) \equiv \mathrm{curl}(\mathrm{curl}\boldsymbol{a})$;

(v) $\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi)$.

1.14. 将下面体积积分化为曲面积分:

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

1.15. 计算表达式 (1.4.14) 的一阶和二阶导数.

1.16. 求换元法 $\overline{x} = \mathrm{e}^x$, $\overline{y} = 1/y$ 下的一阶和二阶导数.

1.17. 求换元法 $\overline{x} = y$, $\overline{y} = x$ 下的三阶导数 y''' (参见例 (1.4.1)).

1.18. 求解方程 $w^3 + 1 = 0$.

1.19. 对于定积分, 求证如下中值定理:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\,(b-a), \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

1.20. 求证: 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上, 若 $g(x)$ 不改变符号, 那么

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

1.21. 通过寻找满足拉普拉斯方程 (1.3.20), $\Delta\phi = 0$ 的函数 $\phi = \phi(r)$, 求例 1.3.1 中的拉普拉斯方程的球面不变解.

1.22. 推导方程 (1.1.45).

1.23. 证明引理 1.1.1.

1.24. 说明变换 (1.1.54) 使方程 (1.1.39) 变为形如 (1.1.55) 的方程.

1.25. 根据注 1.1.7, 椭圆曲线族和双曲线族由线性复变换联系起来. 因此, 圆型方程 (1.2.70) 和双曲型方程 (1.2.71) 应由复变换联系起来. 试找到这一复变换.

1.26. 证明在第 1.3.6 节中给出的行列式的求导法则.

1.27. 根据方程组 (1.1.16), n 维空间的单位球面的表面积 ω_n 可以写为如下的 Gamma 函数:

$$\omega_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}.$$

这里, 设 $n = 2$ 和 $n = 3$, 可以分别得到我们所熟知的平面上的单位圆的周长和在三维空间中的单位球的表面积.

1.28. 证明 (1.1.15) 中的第一个方程, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

1.29. 计算 $\Gamma(-1/2)$ 的值.

1.30. 在 $\Gamma(x)$ 的定义 (1.1.14) 中, 令 $t=s^2$, 且 $x=1/2$, 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$.

1.31. 试说明在换元法中, 为什么在多重积分的公式 (1.2.52) 中, 其雅可比行列式 J 有绝对值符号, 而在一维情况下, 我们有相似的公式 (1.2.11) , 但它却不包含绝对值符号?

第二章　数学物理问题

从某种意义上讲, 微分方程在 17 世纪 80 年代已经出现在微积分创立者的著作中了. *微分方程*一词首次出现在莱布尼茨给牛顿 (1676 年) 的信中, 并在 1684 年后被用于他的著作中. 牛顿的《*自然哲学的数学原理*》(以下简称《原理》) [29] 中包含了许多微分方程, 这些方程用于构造并集成于初等几何框架中. 从那时起, 基本的自然规律和技术问题在严格数学模型下的公式频繁地甚至很普遍地, 以微分方程的形式给出.

补充读物: R. Courant and D. Hilbert [4]—[5], M.D. Greenberg [11], N.H. Ibragimov [21], J.D. Murray [27]—[28], G.F. Simmons [35].

2.1　导言

微分方程包含自变量和因变量以及它们的导数. n 阶微分方程是指它包含了 n 阶但不高于 n 阶的导数.

如果因变量是关于单个自变量的函数, 那么方程称为*常微分方程* (ODE). 著名的牛顿第二定律表述为, 当一个质点在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下, 存在如下形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \tag{2.1.1}$$

该方程正好属于这个类型. 这里时间 t 是自变量, m 和 $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ 分别代表质点质量 (一般来说, m 不是常数) 和它的速度向量. 如果外力 $\boldsymbol{F}$ 只依赖于 t 和 $\boldsymbol{v}$, 牛顿方程 (2.1.1) 是关于作为因变量的速度分量 v^i 的三个一阶方程

组成的方程组. 然而, 如果 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$, 我们可以得到关于质点的位置向量 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,x^3)$ 的一个二阶方程 (2.1.1). 事实上, 为简单起见, 令质点质量 m 为常数, $\boldsymbol{v}$ 用 $\boldsymbol{x}'$ 替换, 其中导数符号表示关于 t 的微分, 那么方程 (2.1.1) 可以被改写为由如下三个二阶方程所组成的方程组:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'). \tag{2.1.2}$$

另一方面, 若未知函数依赖于几个自变量, 而问题中的方程涉及自变量、因变量和它们的偏微分, 那么我们就得处理*偏微分方程* (PDE) 的问题. 这种类型的一个著名代表是有关弦的微小横向振动的 d'Alembert 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{2.1.3}$$

其中 k^2 是正的常数. 这是包含两个自变量——时间 t 和沿弦的坐标 x 的二阶偏微分方程. 这也正是所谓的一维波动方程.

均匀细长杆的横向微小振动模型给出了一个四阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f, \tag{2.1.4}$$

其中 f 是作用在杆上的合力, μ 是一个正的常数.

归功于傅里叶 (1811 年) 的热扩散数学模型给出了一个称为*热传导方程*的偏微分方程. 一维热传导方程有形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{2.1.5}$$

2.2 自然现象

2.2.1 人口模型

用数学处理人口统计学问题的先驱马尔萨斯 (Thomas Robert Malthus) 在其著名的《人口原理 (*An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society*)》(1798 年) 一文中提出人口模型. 他的模型在数学上相当简单, 是基于人口增长率和人口数 P 成比例的自然假设. 它由微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\alpha P,\quad \alpha=\text{常数}>0. \tag{2.2.1}$$

因此马尔萨斯人口论提出了基于指数定律的人口*无限增长模型*

$$P(t)=P_0\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}, \tag{2.2.2}$$

其中 P_0 和 $P(t)$ 分别表示在初始时间 $t=t_0$ 和任意时间 t 时以百万计的人口数. 该文的主要结论是, 幸福社会的实现将总是被人口增长超出了生计来源所阻碍.

然而我们马上看到, 马尔萨斯模型是不现实的, 需要修正. 随后, 人们考虑一些修正人口模型, 目的是为了寻找更加实际的人口规律. 其中之一, 就是我们所知道的*逻辑定律*, 它可以通过以下非线性方程来描述:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\alpha P-\beta P^2,\quad \alpha,\beta=\text{常数}\neq 0, \tag{2.2.3}$$

其中非线性项 βP^2 可以被理解为*一种社会阻滞*. 对该定律的一个分析显示它足以描述某种昆虫的数量. 然而, 若将该模型用于对人口增长的通用 "定律", 那么它的价值将会受到很大的限制.

由 A.J. Lotka (1925 年) 和 V. Volterra (1926 年) 提出的掠食者和被掠食者模型可以通过非线性一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(a-by)x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(kx-l)y \tag{2.2.4}$$

表示, 其中 a,b,k 和 l 是正的常数. 这里 y 表示掠食者种类, x 是它的被掠食者. 假设被掠食者数量提供了掠食者的总体食物供应. 对以上方程组解的定性分析显示, 任何一个被 Lotka-Volterra 方程 (2.2.4) 描述的生物系统最终达到的不是一个常数就是一个周期变化的数量.

2.2.2 生态学: 放射性的废弃物

放射性的产生是重金属元素原子分裂的结果, 例如铀矿. 放射性的发现提供了新的手段, 例如, 计算地质年代, 等等. 人工放射性在化学、医药、核能等实际事务中被广泛地应用. 然而, 因为放射性废弃物存在污染的危险性, 我们应该警惕核能的工业使用并且需要严格控制数量.

放射性衰变的数学描述是假设衰变率与放射性物质的量成正比. 因此其数学模型有 (2.2.1) 的形式:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-kU, \tag{2.2.5}$$

其中 U 是在时间 t 下的放射性物质的量, 并且 k 是个正常数. 方程 (2.2.5) 的解有如下形式

$$U(t)=U_0\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}, \tag{2.2.6}$$

其中 U_0 是初始 $(t=t_0)$ 的物质量. 经验常数 k 取决于问题中所提到的放射性物质. 一般来说, 它由所谓的*半衰期*来决定, 放射性物质的半衰期被定义为在物质减少到原来量的一半时的时间间隔 $\Delta t=t-t_0$.

例 2.2.1 镭的半衰期 $\Delta t = 1600$ 年. 因此, 根据公式 (2.2.6), $U_0/2 = U_0 \mathrm{e}^{-1600k}$, 其中 $k = (\ln 2)/1600 \approx 0.00043$. 从而, 在 t 年里镭的放射性衰变量由以下方程给出:

$$U(t) = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{1600} t}.$$

2.2.3 开普勒 (Kepler) 定律 · 牛顿万有引力定律

行星的外在运动看起来是不规则和复杂的. 然而, 很显然在遥远的过去, 太空被认为应该是数学之美的例证. 因为在那时行星被认为是沿圆周运动的. 这将仅限于行星沿圆形轨道运动的情形. 实际上, 在希腊科学中有一假设: 认为所有行星, 包括地球, 都是在围绕太阳做圆周运动. 然而开普勒却发现, 行星是以椭圆轨道运行, 并非是圆周轨道, 太阳只是其中的一个焦点, 而不是圆心. 在 1609 年他阐述了两个现代天文学的基本原理: *开普勒第一定律* (图 2.1) 和*开普勒第二定律* (图 2.2). 发表于 1619 年的开普勒第三定律断言 T^2/R^3, 即所有行星的周期 T 的平方和离太阳的平均距离 R 的立方的比率都相等.

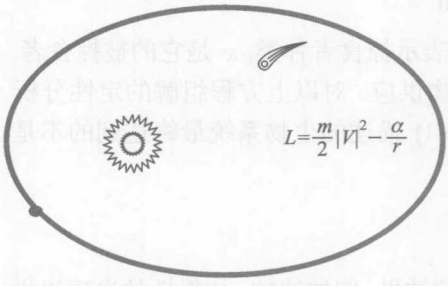


图 2.1 开普勒第一定律: 行星轨道是以太阳为一个焦点的椭圆

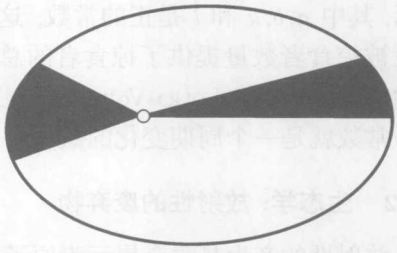


图 2.2 开普勒第二定律: 行星和太阳的连线在等时间里扫过的面积相等

开普勒定律开创了行星运动的几何学, 并在新的高度上揭示了自然界里的数学和协调. 开普勒基于经验天文学, 对于行星如何运动的问题给出了答案, 从实践的角度上来看这是很重要的. 由开普勒定律提供的太空几何学, 给科学家回答为什么行星遵守这些规律带来了挑战. 这个问题需要对太阳系统的动力学作研究. 这个必要的动力学已经由伽利略发起, 并且发展成牛顿在其《*原理*》里所阐述的现代理论力学.

根据牛顿万有引力定律, 太阳和行星间的引力可表示为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{x}, \quad \alpha = -GmM, \tag{2.2.7}$$

其中 G 是万有引力常量, m 和 M 分别是行星和太阳的质量, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 是当行星被作为一个质点考虑时的位置向量, 并且 $r = |\boldsymbol{x}|$ 是行星和太阳的距离.

因此, 在忽略太阳在行星引力下的运动的情况下, 牛顿第二定律 (2.1.2) 即是

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{x},\quad \alpha \text{ 为常数.} \tag{2.2.8}$$

方程 (2.2.8) 的积分问题称为*开普勒问题*. 牛顿通过解微分方程 (2.2.8) 导出了开普勒定律. 开普勒定律可以被看成牛顿万有引力定律特殊对称的直接结果. 特别地, 开普勒第一和第二定律的导出其实并不需要通过对 (2.2.8) 的积分而得到, 而是可以通过如下的两个向量域的守恒定律而导出, 即角动量守恒

$$\boldsymbol{M}=m(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}), \tag{2.2.9}$$

其中向量 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}\equiv \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$ 是速度, 并且守恒是已知的拉普拉斯向量

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}+\frac{\alpha}{r}\boldsymbol{x}. \tag{2.2.10}$$

2.2.4 地表的自由落体运动

假设物体在地表所受重力是常数, 考虑物体在仅受到重力作用时的自由落体运动. 设物体质量 m 为某一常数, h 为其距地面的高度, t 为时间, 地表附近的*重力加速度*是

$$g\approx 9.81\ \mathrm{m/s^2}.$$

在这种表示下, 重力 $F=-mg$, 牛顿定律 (2.1.2) 给出

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=-g.$$

此方程是 (1.2.60) 在 $f=-g$ 时的形式. 因此, 对 (1.2.61) 积分, 得

$$h=-\frac{g}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

速度 $v\equiv h'=-gt+C_1$, 令 $t=0$, 我们得到积分常数的物理意义, 即物体的初始位置是 $C_2=h_0$, 并且其初始速度为 $C_1=v_0$. 因此, 落体的轨迹由以下公式给出:

$$h=-\frac{g}{2}t^2+v_0t+h_0. \tag{2.2.11}$$

练习 2.2.1 物体由静止 ($v_0=0$) 开始从高度 h_0 下落. 求终点速度 v_*, 即物体到达地面的速度.

解 通过公式 (2.2.11), $h=h_0-gt^2/2$, $v=-gt$. 假设 t_* 为物体达到地面时 ($h=0$) 的时间, 并且 v_* 为这个时刻的速度, 我们得到 $v_*=-gt_*$, $h_0=gt_*^2/2$, 消去 t_*, 从而可以得到

$$v_*=-\sqrt{2gh_0}\,. \tag{2.2.12}$$

负号代表速度方向与 h 轴垂直地表向上的方向相反.

2.2.5 流星体

遥远的物体 (流星) 进入地球大气层前, 根据的是牛顿力学第二定律 (2.1.1) 和流星与地球之间的万有引力定律, 即 $F = GmM/r^2$, 其中

$$G = 6.67 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^2)$$

是万有引力常数, m 和 M 代表流星和地球的质量, r 为它们中心间的距离. 设 R 为地球半径, 那么地球表面的吸引力的大小为 $F = GmM/R^2$. 从另一方面说, 地表重力 (即质量为 m 的物体的重量) 写为 mg. 我们可以得到方程 $mg = GmM/R^2$, 或者 $GmM = mgR^2$. 因此物体受到地球的吸引力为 $F = mgR^2/r^2$.

流星的质量 m 在进入地球大气层前为常数. 我们忽略空气阻尼并假设沿着整个降落的轨道流星质量并未改变. 那么方程 (2.1.2) 写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{gR^2}{r^2}\,. \tag{2.2.13}$$

负号出现是因为 r 的方向为从地球指向流星, 因此和万有引力的方向是相反的.

练习 2.2.2 对方程 (2.2.13) 降阶.

解 应用 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = v(r)$ 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \equiv \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}r},$$

于是方程 (2.2.13) 可以写成

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}r} = -\frac{2gR^2}{r^2}\,.$$

对其积分, 同时考虑到在我们的表达式里速度是负值, 因此得到

$$v = -\sqrt{\frac{2gR^2}{r} + C}\,, \quad C = \text{常数}. \tag{2.2.14}$$

练习 2.2.3 计算流星从无穷远处由静止开始落下时的终点速度 v_* (即到达地表的速度).

解 首先我们通过假设初始时 ($t = 0$) 流星静止 ($v_0 = 0$) 处在地心到其中心的距离为 r_0 的位置来设定在 (2.2.14) 里的积分常数. 设 $t = 0$, 那么表达式 (2.2.14) 里 $v = 0$, 从而可以得到 $C = -2gR^2/r_0$, 公式 (2.2.14) 即变为

$$v = -R\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}\,.$$

设 $r_0=\infty$ 且 $r=R$, 得到流星最终速度

$$v_*=-\sqrt{2gR}. \tag{2.2.15}$$

因此流星到达地面的速度和一个物体在与地球半径 R 相同的高度 h_0 落到地面时的速度相同 (比较 (2.2.15) 和 (2.2.12)).

2.2.6 降雨模型

当我坐着小飞机飞行在非洲的奇形怪状的厚云层上时, 一种给自然现象建立简单模型的念头进入了我的头脑.

首先, 我们给出一些与假设模型的第一阶段相关的云层信息. 典型的蓄水云层厚度是从 100 m 到 4 km, 但是非常厚的云层 (积雨云) 可能达到 20 km. 为构造近似的降雨数学模型, 我们对降雨现象的两个连续阶段进行模拟, 第一阶段为*云层雨滴的产生*, 第二阶段为*雨滴从空中的下落*.

1. *产生雨滴*. 其中云层的雨滴的降落是通过在重力作用下, 球形水滴通过饱和大气层自由落向地面而产生的.

雨滴的质量 m 通过凝结而增加了, 其增量与时间和雨滴的表面积成正比, 即 $\mathrm{d}m=4\pi kr^2\mathrm{d}t$, 其中 r 为雨滴半径, k 为经验常数. 另一方面, 球形水滴的质量 (其密度为 $\rho=1$) 是 $m=4\pi r^3/3$, 据此 $\mathrm{d}m=4\pi r^2\mathrm{d}r$. 因此 $\mathrm{d}r=k\mathrm{d}t$, 当 $F=-mg$ 时, 牛顿第二定律 (2.1.1) 可写为

$$k\frac{\mathrm{d}(r^3v)}{\mathrm{d}r}=-gr^3. \tag{2.2.16}$$

在满足初始条件 $r=r_0$, $v=v_0$ 时, 该微分方程的解有如下形式:

$$v=-\frac{gr}{4k}\left(1-\frac{r_0^4}{r^4}\right)+\frac{r_0^3}{r^3}v_0. \tag{2.2.17}$$

典型云层水滴的半径为 $r_0\approx 10$ μm, 当雨滴到达地面时其半径大概为 1 mm. 在简单模型里我们假设, 雨滴的初始半径 r_0 无穷小. 将 $r_0=0$ 代入解 (2.2.17), 得到 $v=-gr/(4k)$. 调用方程 $r=kt$, 我们得到

$$v=-\frac{1}{4}gt. \tag{2.2.18}$$

因此在云层里积聚阶段的雨滴的下降速度 $|v|$ 随时间的增加而线性增加.

2. *雨滴下落*. 这个阶段是模拟雨滴穿过空气落向地面. 它假设只有重力和空气阻尼作用在雨滴上, 即, 雨滴的挥发被忽略了.

设空气阻尼为关于雨滴速度 v 的函数, 并表示为 $f(v)$. 我们记雨滴离开云层的瞬间质量为 m 并且假设其在下落过程中保持不变, $m=$ 常数. 那么根据牛顿第二定律, 雨滴的速度是可以计算的, 只需通过求解一阶微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg+f(v), \tag{2.2.19}$$

它满足初值条件

$$v\big|_{t=t_*}=v_*, \tag{2.2.20}$$

其中表达式 $|_{t=t_*}$ 表示在 $t=t_*$ 时的函数值. 这里 t_* 是雨滴离开云层的瞬时时刻, v_* 是当时的速度. t_* 和 v_* 在第一阶段中能被找到, 通过求解初值问题的微分方程 (2.2.19)—(2.2.20), 就能得到雨滴的速度.

一般来说, 考虑到物体不是 "非常小" 时, 空气阻尼和降落物体的速度的平方成正比, 并且它的速度比声音的速度小但并非是无穷小. 然而, 在一定条件下, 空气阻尼也能通过速度的线性函数来近似地表示. 因此, 我们可以考虑用以下方程建立降雨的合理模型 (2.2.19):

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-\alpha v+\beta v^2, \tag{2.2.21}$$

其中 $\alpha\geqslant 0$ 和 $\beta\geqslant 0$ 为经验常数. 符号的选择和空气阻尼与重力方向相反的事实一致, 并且 v 在我们的坐标系里是负的, 方向竖直向上.

2.3 物理学和工程学

2.3.1 牛顿冷却模型

使用周围介质来冷却 (加热) 物体的现象在日常生活中会被经常地用到. 我们为了将物体冷却 (加热), 会把它浸入温度比它稍低 (高) 的介质里. 介质可能是周围的空气、一个大冷浴室或是一个预热的烤箱等. 现象中的物体可能是温度计、一个要冷却的大金属盘、加热使用前以低温保存的血浆、牛奶以及其他的液体. 假设周围温度 T 未受浸入物体的影响, 即 $T=$ 常数. 或者, 一般来说, T 是个给定的函数 $T(t)$.

进一步设浸入物体的温度为 τ, 在其各个瞬间每部分温度都相同, 因而 $\tau=\tau(t)$. 那么如下就是我们所知道的*牛顿冷却定律*, 其简单地表述了物体温度 τ 的变化率和温度差 $T-\tau$ 成正比. 牛顿冷却定律可写成如下一阶常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=k(T-\tau), \tag{2.3.1}$$

其中 k 是取决于浸入物体的物质和周围介质的正常数.

例 2.3.1 加热杀菌法 (Pasteurization) 提供了一个好的例子. 加热杀菌法是个不用煮沸, 而对牛奶局部杀菌的方法, 它是基于巴斯特 (Louis Pasteur) 的发现: 如果牛奶的每个质点均被加热到 64° C, 那么牛奶里的细菌机能将暂时性地停止, 然后快速冷却牛奶. 该方法简称巴氏法.

我们设想一个受过教育的农民第一次去给牛奶用巴氏法灭菌, 但是不幸的是他发现温度计坏了. 因为这个农民受过教育, 我们能想象到他将在仅有烤箱和手表的条件下, 准确地将牛奶加热到 64°C, 从而通过使用如下方程 (2.3.1) 替代坏掉的温度计, 方法如下.

这个农民要做的第一件事情是计算系数 k. 为了得到它, 他将一杯保存于室温 $\tau_0 = 25°\,\mathrm{C}$ 的牛奶放在设置好温度的烤箱里, 例如, $T = 250°\,\mathrm{C}$, 将牛奶加热至沸腾. 设需要 15 min 让牛奶沸腾. 令牛奶的沸点为 90° C, 农民可以使用方程 (2.3.1) 的解来获得该常数:

$$\tau = T - B\mathrm{e}^{-kt}. \tag{2.3.2}$$

在初始时刻 ($t = 0$) 以上方程可写为 $25 = 250 - B$, 然后指定积分常数为 $B = 225$. 那么解在 $t = 15$ min 时得到:

$$90 = 250 - 225\mathrm{e}^{-15k},$$

其中我们仅仅考虑数值解. 因而, $15k = -\ln(160/225)$, 或者 $k \approx 34/1500$. 那么方程 (2.3.1) 得到牛奶在烤箱温度为 250° C 时的公式:

$$\tau = 250 - 225\mathrm{e}^{-34t/1500}.$$

同样地, 对于 $\tau = 64$ 它将遵循 $-34t/1500 = \ln(186/225) \approx -0.19$, 这样 $t \approx 8.4$ min. 因此, 这个农民在设定烤箱温度 250° C 时应该热牛奶 8 min 24 s.

近似于真实的情形, 牛顿冷却定律提供了一个好的近似方法建模, 例如对楼栋里的动态温度. 实际上, 设里面温度 τ 为关于时间 t 的未知函数. 令 $T = T(t)$ 为给定的外部温度的函数. 首先我们注意到牛顿定律 (2.3.1), 其中 k 是正常数, 它与客观实际一致: 当 $T > \tau$, 内部温度 τ 升高 ($\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t > 0$); 当 $T < \tau$, 内部温度降低 ($\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t > 0$). 常数 k 具有维数 t^{-1} 并取决于建筑物的质量, 尤其是其热绝缘性. 一般情况下, $0 < k < 1$, 它在理想隔热的建筑物里是无穷小的.

假设建筑物提供了暖气和空调. 用 $H(t)$ 表示由暖气引起的建筑物里的温度增加率, 用 $A(t)$ 表示由空调引起的建筑物里的温度变化率 (增加或者减少). 假设这些是仅有的影响建筑里温度的因素, 我们得到牛顿冷却定律 (2.3.1) 如下的修正:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = k(T(t) - \tau) + H(t) + A(t). \tag{2.3.3}$$

作为方程 (2.3.3) 当 $A(t) \neq 0$ 时的例子, 我们假设炉子以给定比率 $H(t) \geqslant 0$ 供热, 建筑物提供自动调温装置以保持室内在预定的 (临界的) 温度 τ_{c}. 如果实际温度 $\tau(t)$ 超过 τ_{c}, 空调将提供冷气, 否则它将关闭. 那么 $A(t) = l(\tau_{\mathrm{c}} - \tau)$, 其中 l 为正经验参数, 方程 (2.3.3) 写为

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = k(T(t) - \tau) + H(t) + l(\tau_{\mathrm{c}} - \tau), \tag{2.3.4}$$

其中 $T(t)$ 和 $H(t)$ 为给定方程, k, τ_{c}, l 为常数.

想象如下的情形. 在静寂寒冷的冬夜, 当室外温度恒定在 $T_0 = -10^\circ\,\mathrm{C}$, 电器在晚上 $t_0 = 6$ 时被关闭. 这让暖气和空调整晚地停止运转. 假设晚上 $t_0 = 6$ 时, 室内温度为 $\tau_0 = 25^\circ\,\mathrm{C}$. 然而不幸的是, 你的房子的门和窗子的密封不佳. 因此, 只需要 1 个小时就能让你的室内温度降到 $\tau = 19.5^\circ\,\mathrm{C}$.

练习 2.3.1 假设室外的温度整个晚上保持在 $T_0 = -10^\circ\,\mathrm{C}$ 呢? 请估算你的房间在上午 6 时的温度.



解 根据已知条件, 我们使用牛顿冷却定律 (2.3.1). 它的解由 (2.3.2) 给出,

$$\tau(t) = T_0 - B\mathrm{e}^{-kt}.$$

令 $t = t_0$, 则 $25 = -10 - B\mathrm{e}^{-kt_0}$ 或者 $B = -35\mathrm{e}^{kt_0}$ (单位 $^\circ\,\mathrm{C}$), 那么

$$\tau(t) = -10 + 35\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}.$$

已知条件 $\tau\big|_{t=t_0+1} = 19.5$, 即 $19.5 = -10 + 35\mathrm{e}^{-k}$, 因此 $k = \ln(1.18) \approx 1/6$.

那么, 室内温度为

$$\tau(t) = -10 + 35\mathrm{e}^{-(t-t_0)/6}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

即, 在上午 $t = t_1 = 6$ 时温度是 $-5.25°\,\mathrm{C}$. 如图 2.3 所示.

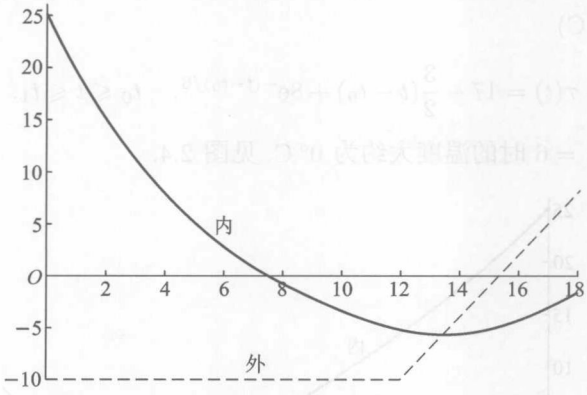


图 2.3 练习 2.3.1 和 2.3.2

练习 2.3.2 设练习 2.3.1 里的条件为, 室外温度从上午 6 点的 $-10°\,\mathrm{C}$ 稳定地增加到正午的 $+8°\,\mathrm{C}$. 求出这段时间室内温度的变化.

解 利用上例中这个建筑的保温系数 $k = 1/6$, 室外温度的变化为

$$T(t) = -10 + 3(t - t_1), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

其中 $t_1 = 6$, $t_2 = 12$, 解相关方程 (2.3.1),

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{6}(-10 + 3(t - t_1) - \tau),$$

我们得到如下室内温度的变化 (如图 2.3 所示):

$$\tau = -28 + 3(t - t_1) + 22.75\mathrm{e}^{-(t-t_1)/6}, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

练习 2.3.3 现在考虑之前的情形, 在下午 $t_0 = 6$ 时室外的温度为 $+8°\,\mathrm{C}$, 到上午 $t_1 = 6$ 温度减少到 $-10°\,\mathrm{C}$. 求出整个晚上你屋里的温度变化.

解 不像之前的情形, 这里室外温度不稳定, 其变化规律为 $T(t) = 8 - \dfrac{3}{2}(t - t_0)$, 其中 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. 方程 (2.3.1) 变形为

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = k\left(8 - \frac{3}{2}(t - t_0) - \tau\right),$$

其有通解

$$\tau(t) = 8 + \frac{3}{2k} - \frac{3}{2}(t - t_0) - B\mathrm{e}^{-kt},$$

其中 B 为常数, 初始条件 $\tau\big|_{t=t_0} = 25$, 即 $B = \left(\dfrac{3}{2k} - 17\right)\mathrm{e}^{kt_0}$. 从练习 2.3.3 得知, 问题中建筑的保温系数 $k = 1/6$. 因此, $B = -8\mathrm{e}^{t_0/6}$. 那么, 晚上室内的温度变化为 (单位 ° C)

$$\tau(t) = 17 - \frac{3}{2}(t - t_0) + 8\mathrm{e}^{-(t-t_0)/6}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

因此, 在上午 $t_1 = 6$ 时的温度大约为 0° C. 见图 2.4.

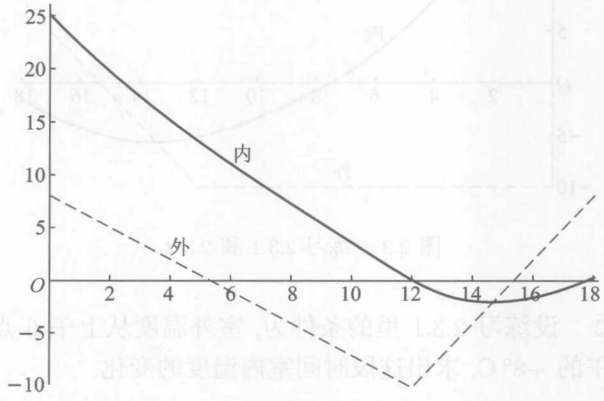


图 2.4 练习 2.3.3 和 2.3.4

练习 2.3.4 用练习 2.3.3 里的条件解练习 2.3.2 .

解 解的形式为 (如图 2.4 所示)

$$\tau = -28 + 3(t - t_1) + 28\mathrm{e}^{-(t-t_1)/6}, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

练习 2.3.5 在 20 世纪 70 年代, 我在贝加尔湖参加了由 Sergei Sobolev 组织的微分方程会议. 当我们高兴地和卓越的西伯利亚数学家讨论数学问题的时候, 我们惊讶于贝加尔湖不稳定的气温. 虽然还是夏季中旬, 整天的温度频繁而剧烈地从 +25° C 到 +5° C 的变化, 反之亦然. 这个练习里, 希望你想象你在贝加尔湖附近, 并回答如下问题. 假设你夏天处在隔热不好又没暖气的屋子里. 让我们假设在时间 t_0 (通过 $t_0 = 0$ 表示), 此时室内温度为 $\tau_0 = +16°$ C, 温度突然变化并且室外温度在 +26° C 和 +6° C 之间波动, 且可以使用如下模型来表示 (单位 ° C):

$$T(t) = 16 + A\sin(\pi t), \quad A = 10. \tag{2.3.5}$$

你是愿意待在家里, 还是你相信因为隔热性不好, 所以室内的温度和外面的温度一样呢?

解 当 $T(t)$ 由 (2.3.5) 给出时, 微分方程 (2.3.1) 可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = k(16 + A\,\sin(\pi t) - \tau). \tag{2.3.6}$$

使用齐次方程 $\tau' = -k\tau$ 的解 $\tau = C\mathrm{e}^{-kt}$, 并利用参数变分法求解上述问题, 于是可以得到

$$\tau = C(t)\mathrm{e}^{-kt},$$

代入方程 (2.3.6) 可得

$$C'(t) = k(16 + A\,\sin(\pi t))\,\mathrm{e}^{kt}.$$

使用标准积分

$$\int \mathrm{e}^{kx}\,\sin(lx)\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2 + l^2}(k\sin(lx) - l\cos(lx))\mathrm{e}^{kx} + B,$$

可得

$$C(t) = 16\mathrm{e}^{kt} + B + \frac{Ak}{\pi^2 + k^2}(k\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t))\mathrm{e}^{kt}.$$

那么, 方程 (2.3.6) 的通解的形式为

$$\tau(t) = 16 + B\mathrm{e}^{-kt} + \frac{Ak}{\pi^2 + k^2}(k\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)).$$

初始条件 $\tau\big|_{t=0} = 16$, 即 $B = Ak\pi/(\pi^2 + k^2)$, 最终我们得到如下解:

$$\tau(t) = 16 + \frac{Ak}{\pi^2 + k^2}(\pi\,\mathrm{e}^{-kt} + k\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)). \tag{2.3.7}$$

解 (2.3.7) 表明不管隔热性如何, 与其待在外面, 还不如待在屋里. 请参见图 2.5 和图 2.6.

同样地, 我们能求解更一般的问题, 假如室外温度 $T(t)$ 和初始温度 $\tau\big|_{t=0}$ 分别为

$$T(t) = T_0 + A\,\sin(\omega t) \tag{2.3.8}$$

和

$$\tau\big|_{t=0} = \tau_0, \tag{2.3.9}$$

那么室内温度如下变化:

$$\tau(t) = T_0 + \Big(\tau_0 - T_0 + \frac{Ak\omega}{\omega^2 + k^2}\Big)\mathrm{e}^{-kt} + \frac{Ak}{\omega^2 + k^2}(k\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)). \tag{2.3.10}$$

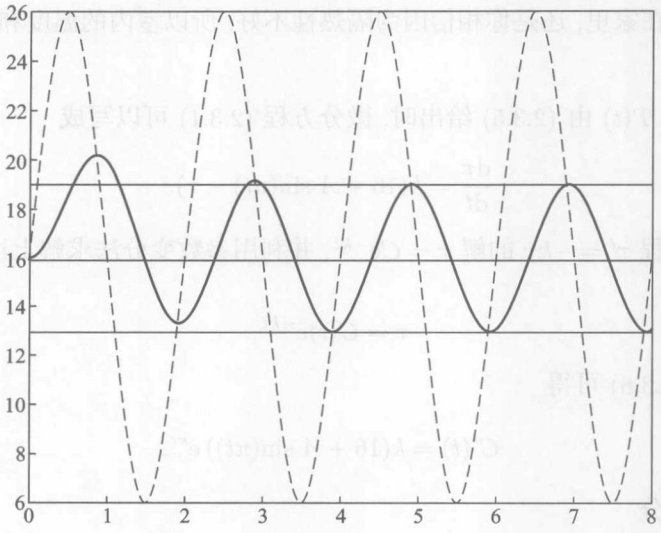


图 2.5　令人惊讶的贝加尔湖气温: $k=1,\ A=10$

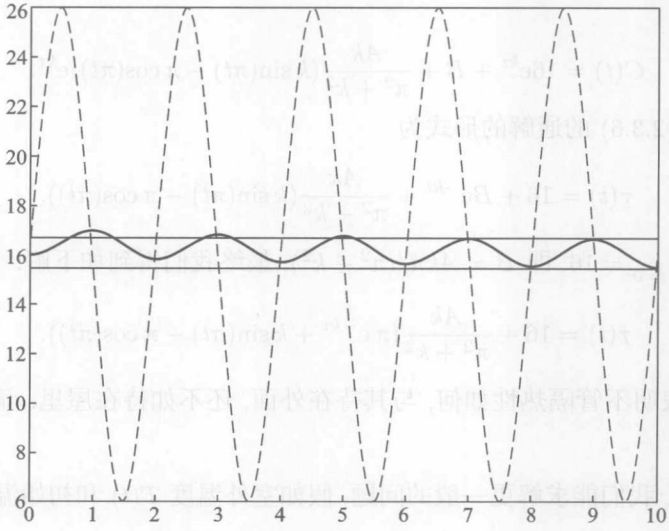


图 2.6　令人惊讶的贝加尔湖气温: $k=1/6,\ A=10$

即, 如果室外温度的变化周期为 24 小时, 例如, $24\omega=2\pi$, 那么 (2.3.10) 变成

$$\tau(t)=T_0+\left(\tau_0-T_0+\frac{12Ak\pi}{\pi^2+12^2k^2}\right)\mathrm{e}^{-kt}$$
$$+\frac{12Ak}{\pi^2+12^2k^2}\left(12k\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)-\pi\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right). \tag{2.3.11}$$

2.3.2 机械振动 · 钟摆

在日常生活里, 我们会遇到很多类型的机械振动问题. 例如, 刮风时落叶和树枝的沙沙声, 汽车在有裂痕的路上的跳动, 水波以及船在水浪中的摆动, 等等.

一个描述机械振动的微分方程的普通例子是悬于螺旋弹簧上的重质点的振动问题, 它的振动方向为垂直方向 y, 平衡位置为 $y=0$. 质点受到弹簧恢复力 F_1 的作用, 根据胡克定律, 该作用力与距离平衡点 $y=0$ 的位移 y 是成正比的, 并与位移的方向相反, 即

$$F_1=-ky,$$

其中 k 为正的常系数. 实际上, 当物体在介质中运动时, 仍然存在一个阻尼力 (或者摩擦力) F_2, 其趋于阻碍物体的运动. 一般来说, 假设该摩擦力与速度的大小成正比, 但是相对运动方向相反. 那么,

$$F_2=-l\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

其中自变量是时间 t, 比例系数 l 是正参数, 即所谓的*阻尼常数*. 我们用 $f(t)$ 表示总体外力 (取决于风, 路面断裂, 等等). 该作用力是时间的函数.

因此, 应用牛顿第二定律 (2.1.2) 以及

$$F=F_1+F_2+f(t),$$

对于质量为 m 的质点, 微小振动的方程有形式

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+l\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=f(t), \tag{2.3.12}$$

或者用微分算子来表示:

$$Ly=f(t),\quad \text{其中 } L=m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+k.$$

如果 $l\neq 0$, 这个机械振动称为*有阻尼的*, 否则为*非阻尼的*. 如果 $f(t)\equiv 0$, 该振子的运动称为*自由振动*, 否则该振子的运动称为*受迫振动*.

n 个自由度的机械系统的有阻尼振动由以下常微分方程来描述:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\frac{\mathrm{d}^2y^j}{\mathrm{d}t^2}+l_{ij}\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}+k_{ij}y^j\right)=f^i(t),\quad i=1,\cdots,n,$$

m_{ij}, l_{ij} 和 k_{ij} 为常系数. 在引入向量表达式 $\boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^n)$, $\boldsymbol{f}=(f^1,\cdots,f^n)$ 后, 方程 (2.3.12)可以使用矩阵微分算子 L 的形式来表示:

$$L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(t),\qquad L=M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+B,$$

其中 M, A, B 是元素分别为 m_{ij}, l_{ij} 和 k_{ij} 的矩阵.

注 2.3.1 在这本书里, 向量 $\boldsymbol{y}$ 等虽然被写作行向量, 但仍被认为是列向量. 相应地, 在矩阵 $M=(m_{ij})$ 中, 下标 i 和 j 分别代表矩阵的行和列.

当振幅足够小时, 以上线性模型对微小振动是合理的 (称为谐振), 有限振动 (或者它们的高次近似值) 经常用非线性微分方程描述, 即所谓的非谐振动.

例 (钟摆) 简单的钟摆由一个固定在竖直长杆上的重物 (钟锤) 组成. 杆的上端悬挂在柔性的低摩擦力支座上. 如果将钟锤拉向一边然后放开, 那么钟摆将会在重力的作用下在竖直平面上来回摆动. 将钟摆作为计时器得益于伽利略的著名观察[①], 在某些限制下, 如果摆杆的长度保持不变则摆动周期是恒定的.

以上钟摆的特性能从一个适当的数学模型推导出来. 令 m 为摆锤的质量, l 为摆杆的长度. 其杆的质量相对较轻, 并相对于 m 是可忽略的. 让我们用 y 表示钟摆到平衡点 $y=0$ 的角位移. 钟摆的数学模型可以通过使用线速度 $v=l\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 和重力 F 的分量 $F=-mg\sin y$, 结合使用牛顿第二定律 (2.1.1) 而得到. 钟摆的数学模型可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\sin y=0,\quad \text{其中}\quad \omega^2=\frac{g}{l}. \tag{2.3.13}$$

微小振动方程是可以由非线性方程 (2.3.13), 通过假设 $y\to 0$ 并使用一次近似值 $\sin y\approx y$ 替换 $\sin y$ 来得到. 这样, 我们就可以得到自由振动的钟摆线性方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2y=0. \tag{2.3.14}$$

它的通解形式为 (见 3.3.3 节, 例 3.3.2)

$$y=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t),\quad C_1,C_2=\text{常数}.$$

钟摆摆动一个完整的循环的时间称为周期, 且被表示为 τ. 当 t 被 $t+\tau$ 替代时, 我们使用如上条件所求得的解的形式保持不变. 换句话说, 如果 $\cos(\omega(t+\tau))=\cos(\omega t)$, 并且 $\sin(\omega(t+\tau))=\sin(\omega t)$, 则 $\omega(t+\tau)=\omega t+2\pi$, 或者 $\omega\tau=2\pi$. 因此, 利用 ω 的定义, 我们得到的结果符合伽利略观察的简谐振动周期的表达式, 即

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2.3.15}$$

其中 g 是万有引力常量. $\omega=2\pi/\tau$ 给出了在 2π 个时间单位里的摆动次数, 从而这正是我们所熟知的角频率.

[①] 伽利略于 1581 年发现钟摆原理. 这个理论表明我们能用质点的摆动来计时. 钟摆的引入是机械时钟结构的重要发展. 伽利略的发现可以与轮子发明的智巧性相比较.

我们使用一个简单的应用来总结这个例子. 让我们来求每秒摆动一次的时钟摆的长度 (即 $\tau/2 = 1$ s). 由方程 (2.3.15) 得

$$l = \frac{g}{\pi^2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2.$$

代入 $g \approx 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ 和 $\tau/2 = 1$ s, 我们得到摆杆的设计长度:

$$l \approx 1\ \mathrm{m}.$$

注 2.3.2 谐振周期 τ (2.3.15) 不取决于初始钟摆位移. 尽管事实上这个结论给出了伽利略观察的完美数学解释, 然而它与同样是基于牛顿定律而导出的自由落体运动理论是不一样的. 实际上, 自由落体 (见练习 2.2.1) 的时间 $t_* = \sqrt{2h_0}$, 不像简谐振动周期 (2.3.15), 该时间要取决于它的初始高度 h_0. 很明显这是由精确非线性模型 (2.3.13) 的线性近似值 (2.3.14) 导致的. 因此, 让我们讨论由 (2.3.13) 决定的非谐振动周期.

练习 2.3.6 使用条件当 $t = 0$ 时 $y = 0$, 当 $t = T/4$ 时 $y = \alpha$, 对方程 (2.3.13) 积分. 这里 T 是钟摆的非谐振动周期, α 是其角振幅, 即最大角位移, $\alpha = y|_{\max}$. 估计周期 T, 并将其与简谐振动周期 τ 比较.

解 将方程 (2.3.13) 乘以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, 积分一次得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2\omega^2\cos y = C.$$

因为 α 是最大位移, $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)|_{y=\alpha} = 0$. 因此 $C = -2\omega^2\cos\alpha$. 使用恒等式

$$\cos y - \cos\alpha = 2(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(y/2)),$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\omega\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(y/2)}.$$

对上式进行积分得到

$$\int_0^y \left(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(u/2)\right)^{-1/2}\mathrm{d}(u/2) = \omega t. \tag{2.3.16}$$

(2.3.16) 里的积分, 即我们知道的第一类椭圆积分, 且不能用初等函数表达. 定义新的变量 v 为

$$\sin(u/2) = \sin(\alpha/2)\sin v,$$

令 $\kappa = \sin(\alpha/2)$, 我们将以上积分写成标准形式, 即

$$\int \left(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(u/2)\right)^{-1/2}\mathrm{d}(u/2) = \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \kappa^2\sin^2 v}}.$$

根据换元法得到的新公式, $u=\alpha$ 表明 $\sin v=1$, 即 $v=\pi/2$. 当 $t=T/4$, 利用条件 $y=\alpha$, 我们得到当 $t=T/4$ 时 $v=\pi/2$. 因此, 通过将 $t=T/4$ 代入 (2.3.16) 我们能容易地得到周期, 并将椭圆积分改写为标准形式. 从而得到钟摆的非谐振动周期

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2 v}},\quad \text{其中}\quad \kappa=\sin(\alpha/2).$$

如果角振幅 α 为无穷小, $\alpha\to 0$, 那么 $k\to 0$, 因此 T 与由 (2.3.15) 给定的 τ 相符. T 与 (2.3.15) 的最大差值发生在当 $k\to 1$, 即当 $\alpha\to\pi$ (垂直位移) 时. 如果 $0<\alpha<\pi$, 那么 $|\kappa^2\sin^2 v|<1$, 因此

$$(1-\kappa^2\sin^2 v)^{-1/2}=1+(\kappa^2/2)\sin^2 v+(3\kappa^4/8)\sin^4 v+\cdots.$$

使用著名积分

$$\int\sin^2 v\,\mathrm{d}v=(v/2)-(1/4)\sin(2v),$$

$$\int\sin^4 v\,\mathrm{d}v=(3v/8)-(1/4)\sin(2v)+(1/32)\sin(4v),$$

等对这个级数逐项地积分, 最后代入 $\kappa=\sin(\alpha/2)$, 我们就得到如下方便用于数值计算的周期表达式, 该周期表达式不同于 (2.3.15), 它理论上满足

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cdots\right).\tag{2.3.17}$$

第一项与 (2.3.15) 是一致的, 该项定义了周期 T 的主体为 τ, 而 (2.3.17) 的其他项很小. 例如, 使用了天文精度的天文学的高级钟表装备的钟摆幅度为 $\alpha\approx 1.5°$. 对于这样的钟表, 使用 (2.3.17) 中的第一修正项, 从而得到

$$T\approx\tau+\frac{\tau}{20000}.$$

2.3.3 传动轴的失效

20 世纪初, 电动船的建造师们遇到了看似意外的 "弯曲振动" 的棘手现象和随之而来的轴动力传输系统失效的可能性 (见图 2.8). 这个奇怪的现象可以由微分方程来解释.

根据杆的振动模型 (2.1.4), 均一旋转轴的平衡位置由方程 (2.1.4) 的时间无关 ($\partial u/\partial t=0$) 解给出. 即, 这些解由四阶常微分方程

$$\mu\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}=f$$

给出, 其中 u 是旋转轴相对于平衡位置 $u=0$ 的位移, f 为作用在轴上的离心力密度. 为了求出 f, 考虑轴的微小单元 $\mathrm{d}x$, 用 p 表示轴单位长度的重量, 那么轴单元 $\mathrm{d}x$ 的质量为

$$\mathrm{d}m=\frac{p}{g}\,\mathrm{d}x,$$

其中 g 为重力加速度. 取决于恒定角速度 ω、且作用于 $\mathrm{d}x$ 的离心力 $\mathrm{d}f$ 为

$$\mathrm{d}f=\omega^2u\mathrm{d}m=\frac{p\omega^2}{g}\,u\mathrm{d}x.$$

因此

$$f=\frac{p\omega^2}{g}\,u,$$

该问题的微分方程可以写为

$$\mu\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}=\frac{p\omega^2}{g}u, \tag{2.3.18}$$

μ 为正常数且取决于轴的材料.

设该轴围绕在位置 $x=0$ 和 $x=l$ 处的轴承旋转 (图 2.7). 那么该方程满足边界条件 $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$. 此外, 我们能得到轴承是函数 $u=u(x)$ 的拐点. 那么, 我们需要求微分方程 (2.3.18) 满足以下四个边界条件

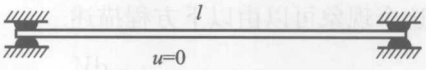


图 2.7 稳定轴

$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=l}=0 \tag{2.3.19}$$

的解. 当由方程 (2.3.18)—(2.3.19) 定义的边界值问题存在 "非平凡解" 时, 即解 $u=u(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant l$ 不同时全为零时, "弯曲" 现象就会发生.

将方程 (2.3.18) 的形式改写为

$$\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}=\alpha^4u,\quad \text{其中 } \alpha^4=\frac{p\omega^2}{g\mu}=\text{常数}, \tag{2.3.20}$$

同时对其积分, 从而得到该方程的通解

$$u=C_1\mathrm{e}^{\alpha x}+C_2\mathrm{e}^{-\alpha x}+C_3\cos(\alpha x)+C_4\sin(\alpha x),\quad C_i=\text{常数}. \tag{2.3.21}$$

应用边界条件 (2.3.19) 得到

$$C_1+C_2+C_3=0,\quad C_1\mathrm{e}^{\alpha l}+C_2\mathrm{e}^{-\alpha l}+C_3\cos(\alpha l)+C_4\sin(\alpha l)=0,$$

$$C_1+C_2-C_3=0,\quad C_1\mathrm{e}^{\alpha l}+C_2\mathrm{e}^{-\alpha l}-C_3\cos(\alpha l)-C_4\sin(\alpha l)=0.$$

计算显示 $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 \sin(\alpha l) = 0$. 如果 $C_4 = 0$, 能得到平凡解 $u = 0$, 即旋转轴是静止的而没有发生振动. 另一方面, 令 $\sin(\alpha l) = 0$, 即当 $\alpha = n\pi/l$ 时, 就是我们所看到的旋转轴发生"弯曲"时的情形. 因此, (2.3.21) 满足

$$u = C_4 \sin(n\pi x/l).$$



图 2.8 弯曲振动轴

根据 α 的定义, 当 $\alpha = n\pi/l$ 时, 旋转轴有失效可能性, 同时其对应的角速度为以下的任何一个临界值:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{g\mu}{p}}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.3.22}$$

2.3.4 van der Pol 方程

一个常见的例子就是电容通过一个电感线圈来放电. 根据电学基本定律[①], 这个现象可以由以下方程描述:

$$C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -I, \quad V - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI, \tag{2.3.23}$$

其中 I 为放电电流, V 为电压 (电容两端的电势差), R 为电阻, C 为电容的电容量, L 为线圈感应系数. 这里 I 和 V 为时间 t 的函数, 而 R, C 和 L 是给定的常数. 因此, 方程 (2.3.23) 为两个因变量 I 和 V 的一阶常微分方程组, 它们被认为是关于 t 的未知函数.

我们用 y 以及其相对于时间的一阶和二阶导数 y' 和 y'' 表示因变量 V. 用这个符号, 将 (2.3.23) 第一个等式中的 I 代入到第二个等式中, 从而得到一个二阶线性常微分方程

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

其常系数 $a = LC$, $b = RC$, $c = 1$.

将 (2.3.23) 里的第二个方程替换, 即使用所谓的广义欧姆定律替换经典欧姆定律, 我们可以得到一个非线性方程组

$$C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -I, \quad L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = V - h(I),$$

该非线性方程组等同于一个二阶非线性方程

$$ay'' + y = -f(y'), \quad a = \text{常数}.$$

[①]由 G.S. Ohm 于 1827 年建立, 并由 G.R. Kirchhoff 归纳.

设 $f(y')=\varepsilon(y'^3-y')$, 这样就得到了一个用作三极管理论的 van der Pol 方程

$$ay''+y=\varepsilon(y'-y'^3),\quad \varepsilon=\text{常数}. \tag{2.3.24}$$

事实上, van der Pol 方程是第一个存在周期解并且有着真正物理意义的非线性微分方程, 后面的特性是 Balth van der Pol 最先从他研究的电子电路及与其连接的电子心脏跳动模型的振动实验中认识到的①.

2.3.5 电报方程

众所周知, 在电动力学里, 沿着电缆传输的电流可以用方程组

$$Cw_t+Gw+j_x=0,\quad Lj_t+Rj+w_x=0 \tag{2.3.25}$$

很好地描述, 其中自变量为时间 t 和沿电缆的坐标 x, 因变量为电压 w 和电流强度 j. 方程中的常系数是由电缆的物理特征来描述的, 即 C 为电容, L 为自感, R 为电阻, G 为漏损率. 漏损率被定义为电流损失与电压的比值. 除去方程 (2.3.25) 中的一个因变量 w 或者 j, 并使用 v 来表示剩余的因变量, 我们就得到 (电流强度或者电压的)二阶线性微分方程, 即所谓的*电报方程*

$$v_{tt}-c^2v_{xx}+(a+b)v_t+abv=0.$$

其中的常数因子有以下的物理意义: c 为光速, a 和 b 是电容和感应阻尼因子. 它们是相互关联的, 即

$$c^2=\frac{1}{CL},\quad a=\frac{G}{C},\quad b=\frac{R}{L}.$$

电报方程里的一阶导数可以通过代换

$$u=\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}t}v$$

从而被消掉. 那么, 如果用 k^2 表示产生的正常数 $(a-b)^2/4$, 我们最后就得到以下形式的电报方程:

$$u_{tt}-c^2u_{xx}-k^2u=0,\quad c,k=\text{常数}. \tag{2.3.26}$$

2.3.6 电动力学

电磁场有两个组成部分, 即电场向量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场向量 $\boldsymbol{H}$. 电磁波理论或*电动力学*是基于以下的麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=c(\nabla\times\boldsymbol{H})-4\pi\boldsymbol{j},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho,\\&\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-c(\nabla\times\boldsymbol{E}),\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0.\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

①B. van der Pol, *Philosophical Magazine*, vol. 2, 1926, 978–992; B. van der Pol and J. van der Mark, *Philosophical Magazine*, vol. 6, 1928, 763–775. 参见 [11], 7.5 节.

其中 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ 分别为电流密度和电荷密度, $c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/s 为光速. 麦克斯韦方程组有四个自变量, 即时间 t 和位置向量 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. 因变量是向量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$. 电流 $\boldsymbol{j}$ 和电荷 ρ 是给定的函数, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x})$, $\rho = \rho(t, \boldsymbol{x})$. 因此, (2.3.27) 是一个由一阶偏微分方程组成的*超定组*: 它包含着 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的六个元素所组成的八个方程.

麦克斯韦方程组 (2.3.27) 在物理中经常写成

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \boldsymbol{H} - \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \boldsymbol{E}, \qquad\quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

在电磁波在真空中传播这个最简单情形里, 麦克斯韦方程组变成

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \boldsymbol{E}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

因此, 我们可以考虑微分方程的*确定组*

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \boldsymbol{H}, \tag{2.3.30}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \boldsymbol{E}. \tag{2.3.31}$$

实际上, 关系式 (见习题 2.7)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.3.32}$$

在任何情况下都是成立的, 如果它们满足初始时间 $t = t_0$. 因此它们仅仅是初始条件. 当方程 (2.3.32) 被

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = f(\boldsymbol{x}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = g(\boldsymbol{x})$$

(见 [21], 10.5 节) 替代时, 这个表述适用于更一般情形, 特别是在方程 (2.3.28) 中的 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ 与时间独立的情况下.

2.3.7 狄拉克方程

量子力学里的一个基本方程是狄拉克方程

$$\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m\psi = 0, \quad m = \text{常数}. \tag{2.3.33}$$

方程 (2.3.33) 用于研究质量为 m、自旋度为 $1/2$ 的相对论粒子, 例如电子、中子、质子和中微子 (当 $m=0$).

其中因变量 ψ 是一个带有复数值分量 $\psi^1,\psi^2,\psi^3,\psi^4$ 的四维列向量. 在量子力学里, 因变量常称为*波动函数*. 满足狄拉克方程的波动函数 ψ 称为*旋量*, 这是由于它在洛伦茨组 (见 7.3.8 节) 下的特殊的变换特性. 这个自变量为四维向量 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,x^3,x^4)$, 其中 x^1,x^2,x^3 为实值空间变量, x^4 是关于时间 t 和光速 c 的复变量, $x^4=ict$. 此外, γ^k 是如下称为狄拉克矩阵的 4×4 复矩阵:

$$\gamma^1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma^2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\gamma^3=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma^4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

2.3.8 流体动力学

在流体动力学中, 用以描述可压缩流体 (气体) 的基本数学方程模型是一阶非线性微分方程, 换言之:

$$\begin{aligned}\rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}&=0,\\ \rho\left(\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right)+\nabla p&=0,\\ p_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+A(p,\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}&=0,\end{aligned}\tag{2.3.34}$$

其中 $A(p,\rho)$ 是通过方程

$$A=-\rho\frac{\partial S/\partial\rho}{\partial S/\partial p}\tag{2.3.35}$$

给出的关联到熵 $S(p,\rho)$ 的任意函数. 因变量为流体的速度 $\boldsymbol{v}$、压强 p 和密度 ρ. 自变量为时间 t 和位置向量 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$.

如果流体的熵是恒定的, $S=$ 常数, 那么这个流动称为*等熵的*.

在这种所谓的*多变流*的情形下, 函数 (2.3.35) 的形式为 $A=\gamma p$, 并且 γ 是我们所知道的*绝热 (多变) 指数*. 常数 $\gamma=5/3$ 的情形符合单原子气流. 因为太阳附近主要包含了单原子气体, 所以这种情形很重要. 因而, 单原子气体由以下

方程描述:

$$\begin{aligned} &\rho_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0,\\ &\rho\left(\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) + \nabla p = 0,\\ &p_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla p + \frac{5}{3}p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

另一个重要物理例子是带有绝热指数 $\gamma = 2$ 的气体平面等熵流 (例如, $S =$ 常数). 等熵流的条件表明我们需要舍去气体运动方程组 (2.3.34) 的最后一个方程. 那么, 设

$$p = \frac{1}{2}\rho^2, \quad \rho = gh,$$

其中 g 为重力加速度, 化简 (2.3.34) 里的前两个方程为以下方程组:

$$\begin{aligned} &h_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla h + h\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0,\\ &\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + g\nabla h = 0, \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为一个二维向量, ∇ 是两元素 ∇_x 和 ∇_y (见 (1.3.10)) 所组成的哈密顿算子. 方程 (2.3.37) 描述了流经 (x, y) 平面中平直固体墙的浅水流, 其中 h 为墙上水平面的高度.

平面非稳定状态势能的跨音速气流可以由以下方程描述:

$$2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{2.3.38}$$

2.3.9 Navier-Stokes 方程

不可压缩的黏性流体可以用 Navier-Stokes 方程表述为

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\Delta\boldsymbol{v}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{2.3.39}$$

其中因变量为速度 $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ 和压强 p, 密度 ρ 被假设为给定的常量. 参数 ν 为流体的黏性.

2.3.10 灌溉系统模型

对特定灌溉系统的研究所得到的数学模型可以用非线性偏微分方程 (见 [19], 9.8 节及那里的参考文献)

$$C(\psi)\psi_t = \left(K(\psi)\psi_x\right)_x + \left(K(\psi)\left(\psi_z - 1\right)\right)_z - S(\psi) \tag{2.3.40}$$

给出, 其中 ψ 为土壤湿度压位差, $C(\psi)$ 为比水容量, $K(\psi)$ 为非饱和渗透系数, $S(\psi)$ 为源条件, t 为时间, x 为水平轴 (线), z 为向下为正的纵轴 (线). 这个方程可以用来描述一个覆盖有浅地下水位的层状非变形土壤剖面的土壤水分入渗、再分配和提取以及线源滴灌系统的灌溉. 线源滴灌系统产生了一个沿侧向 (y 轴) 长度的连续湿润带, 因此这个现象实际上包含了完整的三维空间坐标 x, y 和 z.

2.3.11 磁流体动力学

磁流体动力学研究的是重要的物理和工程问题, 这些问题起源于研究在电磁力作用下的离子流的运动. 让我们考虑描述磁场里的理想导电流体运动的数学模型. 我们假设磁导率 $\mu = 1$. 设 $\boldsymbol{H}$ 代表磁向量, $\boldsymbol{v}$ 代表流体的流速. 假设研究的是超导体, 这样我们就可以得到表达式

$$\boldsymbol{j} = \operatorname{curl} \boldsymbol{H}$$

和

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v},$$

$\boldsymbol{j}$ 为电流密度, $\boldsymbol{E}$ 为电向量场.

磁流体动力学方程能通过联立流体动力学方程 (2.3.34) 和麦克斯韦方程组 (2.3.28) 得到. 使用以上 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的表达式, 我们得到如下方程 (例如参见 [4], 第 VI 章, §3a.6):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{curl}(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v}) = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ &\rho_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \\ &\rho(\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}) + \nabla p - (\operatorname{curl} \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

$(\operatorname{curl} \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}$ 取决于施加在单位体积流体的磁场力 $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}$. 因为方程 $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ 仅仅是初始条件, 方程 (2.3.41) 提供了一个不定方程组: 它们包含 7 个方程, 而有 8 个未知函数 $H^1, H^2, H^3; v^1, v^2, v^3; \rho$ 和 p. 因此, 如果想要求解该不定方程组, 我们应该增加与问题的物理要求一致的一个额外的方程.

2.4 扩散现象

2.4.1 线性热传导方程

扩散过程中的物理系统行为可以通过忽略系统的分子特性来描述. 假设该理想系统中的元素, 不管体积为多小, 都不会受到分子波动的影响.

让我们推导用来描述在均匀材料中稳态热扩散的微分方程, 其中均匀是指材料的质量密度 ρ, 它的比热 c_* 和热导率 k 为正常数. 我们将材料隔离于一个任意体积 Ω 里, 并用 $\partial\Omega$ 代表其边界. 令 $\boldsymbol{\nu}$ 为表面 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 我们用 u 表示绝对温度, 因此 $u = u(t, \boldsymbol{x})$ 为对任意时间 t 和 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 需要计算的温度场.

在傅里叶于 1811 年发表热传导的理论论文以及他著名的书《热的解析理论 (*Théorie analitique de la chaleur*)》(1822 年) 出版之后, 热扩散的数学模型就经常使用基于如下称为傅里叶热传导定律的热平衡物理原理来描述.

(i) 在 Ω 里的热量 Q 与 Ω 的质量和它的温度成正比:

$$Q(t) = \int_{\Omega} \rho\, c_*\, u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{2.4.1}$$

(ii) 热由高温物体向低温物体传导, 热流与温度梯度成正比, 即在体积 Ω 里的通过其表面 $\partial\Omega$ 的热通量由

$$\int_{\partial\Omega} (k\,\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu})\mathrm{d}S \tag{2.4.2}$$

给出.

(iii) 在 Ω 里的热含量 (2.4.1) 的变化率, 可以用如下的表达式来表示:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega} \rho\, c_* \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

即该变化率等于在 (2.4.2) 中通过表面 $\partial\Omega$ 进入的热量. 那么, 我们有以下平衡方程:

$$\int_{\Omega} \rho\; c_* \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega} (k\,\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu})\mathrm{d}S. \tag{2.4.3}$$

用散度定理 (1.3.18), (2.4.3) 的右边面积分可以转换成为体积分, 即

$$\int_{\partial\Omega} (k\,\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu})\mathrm{d}S = \int_{\Omega} \nabla \cdot (k\,\nabla u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

从而, 积分方程 (2.4.3) 变为

$$\int_{\Omega} \rho\, c_* \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\Omega} \nabla \cdot (k\,\nabla u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{2.4.4}$$

因为 Ω 是任意的, 那么积分方程 (2.4.4) 等价于微分方程

$$\rho\, c_* \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k\,\nabla u). \tag{2.4.5}$$

因为热导率 k 为常数, 我们可以得到

$$\nabla \cdot (k\,\nabla u) = k\,\nabla \cdot (\nabla u) = k\,\Delta u,$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子 (1.3.19). 最后, 我们可以导出线性热传导方程

$$u_t = a^2 \Delta u, \tag{2.4.6}$$

并且正常数 $a^2 = k/(\rho\, c_*)$ 为材料的扩散率.

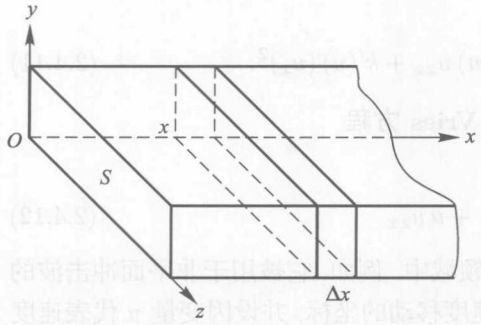


图 2.9 一维热流

在一维情形下, 当温度只取决于时间 t 和空间变量 x 时, 热传导方程 (2.4.6) 的形式可以简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2.4.7}$$

一维热扩散的物理现象可以表述如下. 考虑一侧面完全绝缘、沿 x 轴延长的截面积为 S 的无限均匀矩形条. 假设温度 T 在矩形条的任意截面都是均匀的. 就是说, $T = T(t, x)$ 为在时间 t 时, 直角坐标系 Ox, Oy, Oz 上平行于 (y, z) 面, 距离原点 O 为 x 的截面条上的温度. 考虑在域 Ω 内, 距离原点 O 为 x 并且其厚度为 Δx 的某一矩形条的微元 (如图 2.9). 平衡方程 (2.4.3) 可以近似地写作

$$\frac{\partial (S \Delta x T)}{\partial t} = S \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x} \right).$$

上述等式两边同时除以 $S\Delta x$, 令 $\Delta x \to 0$, 并且用 u 表示温度 T, 我们就可以得到一维热传导方程 (2.4.7). 它是线性而且带有常系数的, 例如, 在 t 和 x 的平移下它是不变量, 主要是因为我们是只考虑稳定的扩散过程且假设矩形条材料均匀.

2.4.2 非线性热传导方程

事实上, 前面章节的讨论都是基于温度的改变并不影响材料物理特性 ρ, c_* 和 k 的假设之上的. 如果温度的变化不大, 这个假设是合理的. 此外, 甚至假设当温度很高时, 密度和比热保持为它们的初始常数值, 这也是合理的. 然而, 如果温度大幅度地变化, 那么热导率将会受到影响.

如前假设 ρ 和 c_* 为正常数, k 取决于温度 $k = k(u)$, 再次考虑平衡方程 (2.4.3). 此外, 通过使用一个合适的时间范围, 我们可以令 $\rho c_* = 1$, 并将方程 (2.4.5) 变为形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k(u) \nabla u). \tag{2.4.8}$$

方程 (2.4.8) 称为*非线性热传导方程*. 它经常写为形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k(u) \operatorname{grad} u). \tag{2.4.9}$$

在一维情形, 非线性热传导方程的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{2.4.10}$$

或者

$$u_t = (k(u)\,u_x)_x = k(u)\,u_{xx} + k'(u)\,(u_x)^2. \tag{2.4.11}$$

2.4.3 Burgers 方程和 Korteweg-de Vries 方程

Burgers 方程

$$u_t = uu_x + \nu\,u_{xx} \tag{2.4.12}$$

广泛地应用于流体力学和非线性声学等领域中. 例如, 它被用于非平面冲击波的形成和衰变的建模, 其变量 x 是以声波速度移动的坐标, 并设因变量 u 代表速度波动.

在 Burgers 方程 (2.4.12) 里的系数 ν 经常被认为是常数. 然而, 实际上, 它是关于时间的函数, 因此研究如下广义 Burgers 方程是更有意义的:

$$u_t = uu_x + \nu(t)\,u_{xx}. \tag{2.4.13}$$

Korteweg-de Vries 方程为

$$u_t = uu_x + \mu\,u_{xxx}, \quad \mu = 常数, \tag{2.4.14}$$

该微分方程常被用于描述通道里长水波的传播.

Burgers 方程和 Korteweg-de Vries 方程因为它们著名的数学特性而闻名于非线性偏微分方程.

2.4.4 经济学数学模型

经济学数学建模的目的在于研究如同随机环境扩散过程的股票价格波动. 因此, 时间和不确定性成为对经济手段的金融行为建模的中心要素. 经济学中常见的数学模型是根据随机过程而建模的, 因此得到*随机微分方程*. 然而, 在某些简化的假设下, 模型能近似为常见的微分方程.

用作股票期权定价的 Black-Scholes 模型 (1973 年) 是其中一个著名的方程. 该模型的近似模型可以表示为如下含变系数的线性方程:

$$u_t + \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0, \tag{2.4.15}$$

其中 A, B 和 C 为其模型特性的常系数. 需要指出的是, Black-Scholes 方程 (2.4.15) 能通过相当复杂的变量代换后可转换成热传导方程.

2.5 生物数学

2.5.1 巧妙的蘑菇

一种很自然的假设是蘑菇在生长过程中要保持水分流失最小化. 因此, 它们的表面积也应该最小以减少水分蒸发量.

根据这个假设, 我们通过求解如下简单数学问题寻找蘑菇的最佳形状. 然后我们将其与实际蘑菇作比较. 考虑在 (x,y) 平面的连接固定点 $P_1=(x_1,y_1)$ 和 $P_2=(x_2,y_2)$ 的曲线 $y=y(x)$. 我们绕 y 轴旋转曲线以获得表面.

问题在于哪个曲线使其旋转的表面积最小. 让我们解这个问题. 当变量 x 介于值 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 之间时, 考虑其表面的微元带. 其微元带的面积为

$$2\pi x\mathrm{d}s=2\pi x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

这是因为

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2,$$

从而

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

因此, 旋转面的总表面积由积分公式

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

给出, 从而我们得到如下变分方程: 找出基于拉格朗日公式

$$L=x\sqrt{1+y'^2}$$

的变分积分曲线

$$\int L(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

其微分拥有一个平稳值. 平稳值的条件等同于欧拉-拉格朗日方程 (1.5.2)

$$\frac{\partial L}{\partial y}-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0. \tag{2.5.1}$$

因为在我们的例子里有

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y'}=\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

将方程 (2.5.1) 写为守恒定律的形式 (见 7.3 节):

$$D_x\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0. \tag{2.5.2}$$

因此, 经微分后, 我们得到二阶非线性微分方程

$$y'' + \frac{1}{x}(y' + y'^3) = 0. \tag{2.5.3}$$

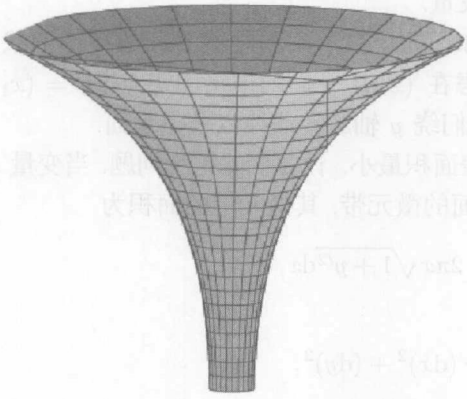


图 2.10 遵循 $y = C + k\ln|x + \sqrt{x^2 - k^2}|$ 生长的曲面



图 2.11 真实的蘑菇

由守恒定律 (2.5.2) 可以得到方程 (2.5.3) 的首次积分

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = A = 常数.$$

现在我们解以上关于 y' 的方程, 积分得到通解

$$y = B + k\,\mathrm{arccosh}\Big(\frac{x}{k}\Big),$$

该通解含有两个积分常数 B 和 k. 求解双曲余弦函数的倒数 (见 (1.1.8)), 就可以得到如下形式的通解:

$$y = B + k\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - k^2}}{k}\right| = C + k\ln|x + \sqrt{x^2 - k^2}|,$$

其中 $C = B - k\ln|k|$.

因此, 所求曲线由方程

$$y = C + k\ln|x + \sqrt{x^2 - k^2}|$$

给出, 同时满足方程 (2.5.3) 的边界条件 $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

2.5.2 肿瘤的生长模型

最近, 几个描述恶性肿瘤扩散的数学模型出现在文献中. 这些模型是使用非线性偏微分方程来描述恶性肿瘤扩散的. 我们选取其中一个模型在这里介绍.

在健康组织里, 细胞繁殖和细胞死亡保持着一定的平衡. DNA 基因的改变, 化学或者其他环境因素, 都能导致恶性肿瘤细胞. 这种细胞破坏这个平衡, 并渗透 (转移) 到周边或远端组织, 然后不受控制地复制.

有几个作者[①] 研究了忽略细胞扩散时恶性肿瘤入侵到周围组织中的问题. 根据在肿瘤生物学上几个重要的观察, 他们提出了合理的数学模型, 忽略与入侵方向垂直方向上的变化, 并研究一般一维恶性肿瘤的空间动态问题. 该模型是根据如下的非微分方程组来描述的:

$$\begin{aligned} u_t &= f(u) - (uc_x)_x, \\ c_t &= -g(c,p), \\ p_t &= h(u,c) - Kp, \end{aligned}$$

其中 u, c 和 p 取决于时间 t 和空间坐标 x, 并分别代表侵入细胞的浓度、细胞外基质 (例如, Ⅳ 型胶原) 和蛋白酶. 为了描述某一生物物种系统的动态, 提出该模型的作者引入*任意元素* $f(u)$, $g(c,p)$ 和 $h(u,c)$, 它们被假设为因变量 u, c, p 的增函数. 例如, 以上方程组中最后一个方程中的函数 $h(u,c)$ 代表蛋白酶合成对局部恶性细胞和胶原浓度的依赖, 而 $-Kp$ 项是基于蛋白酶线性衰减的假设, 其中 K 为通过半衰期实验计算而得到的正常数.

通过观察得到, 蛋白酶的合成和衰减的时间比细胞入侵的时间要短得多, 因此以上模型能推导为如下两个方程:

$$\begin{aligned} u_t &= f(u) - (uc_x)_x, \\ c_t &= -g(c,u), \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

其中 $f(u)$ 和 $g(c,u)$ 为满足以下条件的函数:

$$f(u) > 0, \quad g_c(c,u) > 0, \quad g_u(c,u) > 0.$$

2.6 波现象

振动现象的数学模型大多是简单地通过使用*哈密顿变分原理*或者*最小作用原理* (见 1.5 节) 得到的. 在经典力学中, 一般使用含有有限个变量 (坐标系统)

[①] A.J. Perumpanani, J.A. Sherrat, J. Norbury, and H.M. Byrne, *Physica* D, 126, 1999.

的关于时间的未知函数来描述任何机械系统. 从而, 系统的运动由常微分方程 (1.5.2) 控制, 这类问题已在 1.5.1 节中给予了相应的讨论.

在连续介质力学里, 连续系统的位置不能再通过关于时间的有限变量描述. 在这种情况下, 动能和势能由几个变量的积分来表示. 这将导致在 1.5.2 节中我们所讨论的通过哈密顿变分原理所得到的偏微分方程. 如果运动固定于连续系统的平衡位置附近, 那么数学模型将有着独特的简易 (线性) 形式.

2.6.1 绳索的微小振动

考虑一根沿着 x 轴的弹性细绳索, 其数学模型给出了一个简单的一维连续系统的例子.

考虑下面的物理模型. 让我们把绳索偏离于平衡位置并释放. 明显地, 由于绳索的张力, 它将设法回到原来的位置. 然而, 当达到平衡位置时绳索的振动没有停止, 惯性使它朝反方向偏离 x 轴, 这个过程将反复进行. 因此, 如果假设拉伸力为作用于绳索上的唯一作用力, 那么我们得到绳索在平衡位置附近的自由振动.

让我们考虑在时间 t 距离平衡位置 x 的点的横向位移 $u = u(x,t)$ 的微分方程. 我们仅考虑绳索的微小振动, 函数 $u(x,t)$ 及其导数的高阶项将被忽略.

这里采用下标的标准方式来表示偏导数. 例如, 函数 $u(x,t)$ 关于变量 x 和 t 的导数分别记为 u_x 和 u_t.

令 $\rho(x)$ 为绳索的线密度. 那么长度为 $\mathrm{d}x$、在区间 $(x, x+\mathrm{d}x)$ 里的微元的质量等于 $\rho(x)\mathrm{d}x$. 因此, 对于时间 t, 在点 x 的绳索的动能密度 T 有着如下形式:

$$T = \frac{1}{2}\,\rho(x)\,u_t^2. \tag{2.6.1}$$

相对于静止时绳索的非变形长度, 绳索的势能正比于其长度的增加量. 该比例因子 $\mu > 0$ 称为弹性系数. 相应地, 当偏移时, 绳索长度 $\mathrm{d}x$ 被表示为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (u_x \mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x \approx \left(1 + \frac{1}{2}\,u_x^2\right)\mathrm{d}x,$$

所以, 绳索微元的变形长度可表示为

$$\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\,u_x^2\,\mathrm{d}x.$$

因此, 势能密度的表达式为

$$U = \frac{1}{2}\,\mu\,u_x^2. \tag{2.6.2}$$

我们可以将该作用 S 的概念应用于 1.5.1 节所介绍的连续系统里. 绳索的作用积分写为

$$S = \int L\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中, 根据方程 (2.6.1) 和 (2.6.2), 拉格朗日函数

$$L = T - U$$

有形式

$$L = \frac{1}{2}\Big(\rho(x)u_t^2 - \mu u_x^2\Big). \tag{2.6.3}$$

那么, 欧拉-拉格朗日方程 (1.5.4) 的形式为

$$\frac{\delta L}{\delta u} \equiv \frac{\partial L}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) = 0, \tag{2.6.4}$$

其中 D_t 和 D_x 为全微分, 即 (见 (1.4.9))

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x}$$

和

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

对于在 (2.6.3) 中的拉格朗日函数, 我们得到

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = \rho(x)u_t, \quad \frac{\partial L}{\partial u_x} = -\mu u_x,$$

那么

$$D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) = \rho(x)u_{tt}, \quad D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) = -\mu u_{xx}.$$

将以上表达式代入方程 (2.6.4), 可以得到二阶线性偏微分方程

$$-\rho(x)\,u_{tt} + \mu\,u_{xx} = 0.$$

方程的两边同时除以 $\rho(x)$, 我们得到绳索的小幅横向振动的*波动方程*

$$u_{tt} - k^2(x)u_{xx} = 0, \quad \text{其中} \quad k^2(x) = \frac{\mu}{\rho(x)}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{2.6.5}$$

如果该绳索受到竖直外力 $f(x,t)$ 的作用, 那么其动能 (2.6.1) 将仍然保持不变, 但是 (2.6.2) 中的势能形式将变为

$$U = \frac{1}{2}\,\mu\,u_x^2 - f(x,t)\,u. \tag{2.6.6}$$

因此, 我们有

$$L = \frac{1}{2}\left(\rho(x)u_t^2 - \mu u_x^2\right) + f(x,t)\,u, \tag{2.6.7}$$

同时, 方程 (2.6.3) 将变形为

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f(x,t), \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = \rho(x)u_t, \quad \frac{\partial L}{\partial u_x} = -\mu u_x.$$

因此, 方程 (2.6.5) 可以转换为如下绳索的受迫振动, 即

$$\rho(x)\,u_{tt} - \mu\,u_{xx} = f(x,t). \tag{2.6.8}$$

同理, 我们可以得到弹性杆的纵向微小振动方程

$$\rho(x)u_{tt} - (E(x)u_x)_x = f(x,t), \tag{2.6.9}$$

其中 $E(x)$ 为杨氏模量.

2.6.2 振动膜

膜是由弹性材料制成的二维表面的一部分, 其势能与表面积变化成正比. 正常数 $\mu > 0$ (比例因子) 称为张力. 膜的密度记为 $\rho(x,y)$.

令膜静止地覆盖在平面 (x,y) 的一块区域, $u(x,y,t)$ 为膜垂直于其平衡位置的变形. 我们仍然只考虑微小的变形, 因此 u, u_x, u_y 的高阶项是可忽略的. 那么变形的膜单元面积为

$$\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \left(1+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.6.10}$$

减去单元变形前的面积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 我们得到如下面积变化:

$$\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此, 势能密度为

$$U = \frac{\mu}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right),$$

其动能与 (2.6.1) 相似, 即

$$T = \frac{1}{2}\,\rho(x,y)\,u_t^2.$$

因此, 膜的拉格朗日公式为

$$L = \frac{1}{2}\left(\rho(x,y)u_t^2 - \mu\left(u_x^2+u_y^2\right)\right), \tag{2.6.11}$$

并且相应的欧拉-拉格朗日方程写为

$$\frac{\delta L}{\delta u} \equiv \frac{\partial L}{\partial u} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - D_y\left(\frac{\partial L}{\partial u_y}\right) = 0, \tag{2.6.12}$$

其中 D_t, D_x 和 D_y 分别是关于 t, x 和 y 的全微分:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ty} \frac{\partial}{\partial u_y},$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y},$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{ty} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_y}.$$

如绳索问题的处理, 将拉格朗日方程 (2.6.11) 代入 (2.6.12), 并再次使用表达式

$$k^2(x, y) = \frac{\mu}{\rho(x, y)},$$

我们得到二维振动膜的*波动方程*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \tag{2.6.13}$$

括号里的表达式是拉格朗日方程 (1.3.19) 的二维形式, 方程 (2.6.13) 通常写为

$$u_{tt} - k^2(x, y)\Delta u = 0. \tag{2.6.14}$$

如果在平面 (x, y) 的垂直方向存在一外力 $f(x, y, t)$, 那么膜的受迫振动方程为

$$u_{tt} - k^2(x, y)\Delta u = F(x, y, t), \tag{2.6.15}$$

其中 $F(x, y, t) = f(x, y, t)/\rho(x, y)$.

一般情况下, 当密度 ρ 为常数时, 我们考虑波动方程. 那么系数 k^2 也是常数. 这个假设也适用于三维波动方程

$$u_{tt} - k^2 \Delta u = F(x, y, z, t), \quad k^2 = \text{常数}, \tag{2.6.16}$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子 (1.3.19)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

如果 $F = 0$, 波动方程 (2.6.16) 称为*齐次的*, 否则为*非齐次的* (见 5.1 节).

除了一维波动方程 (2.6.5) 和二维波动方程 (2.6.13), 我们也考虑三维线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0. \tag{2.6.17}$$

这是数学物理的一个基本方程. 例如, 它用于描述光波的传播; 那么方程 (2.6.17) 里的系数 k^2 和 c^2 相同, 其中 c 为真空里的光速.

注意任何带有常系数 k^2 的波动方程均能通过适当的伸缩变换简化为 $k^2=1$ 的方程. 因此, 我们也将使用如下等同形式, 即, 自由波动方程

$$u_{tt}-\Delta u=0. \tag{2.6.18}$$

2.6.3 极小曲面

我们利用 (2.6.10) 近似膜表面的振动, 得到膜的微小振动波动方程. 当该膜的表面积

$$\int_V \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

有最小值时, 极小曲面[①]问题需要确定所有可能的膜外形. 因此, 极小曲面的相应微分方程是由拉格朗日算子

$$L=\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} \tag{2.6.19}$$

确定的欧拉-拉格朗日方程, 因为拉格朗日算子 (2.6.19) 不包含 u 和 u_t, 并且因为

$$\frac{\partial L}{\partial u_x}=\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}},\quad \frac{\partial L}{\partial u_y}=\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}},$$

那么欧拉-拉格朗日方程 (2.6.12) 可以写为

$$D_x\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+D_y\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=0, \tag{2.6.20}$$

最后得到非线性方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0. \tag{2.6.21}$$

方程 (2.6.21) 的线性化给出膜的平衡问题的拉普拉斯方程

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}=0. \tag{2.6.22}$$

[①]这个问题首先由 L. 欧拉阐述. 几百年后, 比利时物理学家 J. Plateau 提出得到极小曲面的实验并于 1873 年描述出它们. 自从那时, 极小曲面问题成为我们所知道的*Plateau* 问题, 见 [35], 第 534 页. 这个问题的一个意义深远的数学研究得益于 R. Courant. 我还记得在 1963 年于 Novosibirsk 大学举行的俄-美会议上他的演讲, 那时我还是一个学生. 他的演讲通过重复 Plateau 实验的例证而活跃起来, 他将闭合的多种形式的金属丝, 通过蘸肥皂水实验得到极小曲面.

2.6.4 振动细长杆和板

物理细长杆为一细的抵抗弯曲的棒, 而不像绳索那样抵抗拉伸. 数学杆为一维连续体, 静止时处于直线状态, 弯曲时获得密度与曲率平方成正比的势能. 我们用 $u(x,t)$ 表示杆偏离平衡位置的位移. 我们再次考虑如绳索情景下定义的微小振动. 变形的杆为一条在 (x,u) 平面的曲线 $u=u(x,t)$, 其中时间 t 被认为是一个参数.

曲线的曲率是它的方向的变化率 (即曲线的切线), 并描述曲线的平滑和弯曲的程度. 对于一平面曲线 $u=u(x,t)$, 在点 x 处的曲率 K 的平方为

$$K^2=\frac{u_{xx}^2}{(1+u_x^2)^3},$$

而且可以近似地表示为

$$K^2\approx u_{xx}^2.$$

这样, 势能密度为

$$U=\frac{\mu}{2}u_{xx}^2,$$

同样, 动能密度写为方程 (2.6.1) 的形式,

$$T=\frac{1}{2}\rho\, u_t^2,$$

其中 $\rho=\rho(x)$, $\mu=$ 常数. 因此, 拉格朗日算子为

$$L=\frac{1}{2}\left(\rho u_t^2-\mu\, u_{xx}^2\right). \tag{2.6.23}$$

当拉格朗日算子包含二阶导数

$$L=L(t,x,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})$$

时, 哈密顿变分原理给出如下欧拉-拉格朗日方程 (参考方程 (1.5.4)):

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta u}\equiv{}&\frac{\partial L}{\partial u}-D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right)-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)\\&+D_t^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tt}}\right)+D_tD_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tx}}\right)+D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)=0.\end{aligned}\tag{2.6.24}$$

根据拉格朗日算子 (2.6.23), 方程 (2.6.24) 可写为

$$-D_t(\rho u_t)-D_x^2(\mu u_{xx})=-\rho u_{tt}-\mu u_{xxxx}=0.$$

就像处理绳索问题一样我们也能考虑外力. 那么, 细杆的微幅横向振动由以下四阶偏微分方程控制:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f, \tag{2.6.25}$$

其中 f 为作用于杆上的总力, μ 为正常数.

板振动的微分方程的推导和杆的情形相似, 一块板为二维弹性表面, 静止时为平面, 其变形后势能 U 的密度与板的主曲率里的二阶形式 K 和 H 成正比:

$$U=\alpha H^2+\beta K,\quad \alpha,\beta=\text{常数}.$$

K 和 H 的表达式在任何一本微分几何学书里都有. 在用方程 $u=u(x,y,t)$ 给出的二维曲面情况下, 其中时间 t 为参数, 我们得到

$$K=\frac{u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^2},\quad H=\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right),$$

其中 $\nabla u=(u_x,u_y)$. 使用极小振动的近似计算, 我们有

$$K\approx u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2,\quad H\approx \operatorname{div}(\nabla u)=\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}.$$

因此, 设 $\alpha=\mu/2$, 我们得到变形后的势能为

$$U\approx\frac{\mu}{2}(\Delta u)^2+\beta(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2).$$

例 2.6.1 证明

$$\frac{\delta}{\delta u}(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)=0. \tag{2.6.26}$$

考虑到方程 (2.6.26), 我们将拉格朗日算子写成

$$L=\frac{1}{2}(\rho u_t^2-\mu(\Delta u)^2). \tag{2.6.27}$$

由该拉格朗日算子, 欧拉-拉格朗日方程 (2.6.24) 的二维形式给出板振动的四阶偏微分方程

$$\rho u_{tt}+\mu(u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy})=0. \tag{2.6.28}$$

2.6.5 非线性波

我们考虑一个均一的、在变形时张力也随之变化的膜. 我们假设 $\mu=\phi(u)>0$ 和 $\rho=$ 常数, 为了简化问题, 我们设 $\rho=1$. 那么拉格朗日函数 (2.6.11) 可以改写为

$$L=\frac{1}{2}\left(u_t^2-\phi(u)\left(u_x^2+u_y^2\right)\right), \tag{2.6.29}$$

将其代入相应的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial u} - D_t\Big(\frac{\partial L}{\partial u_t}\Big) - D_x\Big(\frac{\partial L}{\partial u_x}\Big) - D_y\Big(\frac{\partial L}{\partial u_y}\Big) = 0,$$

我们有

$$-\frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_x^2 - \frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_y^2 - D_t[u_t] + D_x[\phi(u)u_x] + D_y[\phi(u)u_y] = 0$$

或者

$$-\frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_x^2 - \frac{1}{2}\,\phi'(u)\,u_y^2 - u_{tt} + \phi(u)(u_{xx} + u_{yy}) + \phi'(u)(u_x^2 + u_y^2) = 0,$$

据此, 合并同类项得

$$-u_{tt} + \phi(u)(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{1}{2}\,\phi'(u)(u_x^2 + u_y^2) = 0.$$

那么, 我们有非线性波动方程

$$u_{tt} = \phi(u)\,\Delta u + \frac{1}{2}\,\phi'(u)|\nabla u|^2. \tag{2.6.30}$$

非线性波动方程 (2.6.30) 可以写为任意个变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的形式. 例如, 一维情形为

$$u_{tt} = \phi(u)\,u_{xx} + \frac{1}{2}\,\phi'(u)u_x^2. \tag{2.6.31}$$

如下的非线性微分方程不同于 (2.6.31), 但是也可以用于研究非线性波现象:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (f(u)u_x)_x, \\ u_{tt} &= (f(x,u)u_x)_x, \\ u_{tt} &= (f(u)u_x + g(x,u))_x. \end{aligned} \tag{2.6.32}$$

通过方程 $u = v_x$ 定义势能 v, 方程组 (2.6.32) 改写为

$$\begin{aligned} v_{tt} &= f(v_x)v_{xx}, \\ v_{tt} &= f(x,v_x)v_{xx}, \\ v_{tt} &= f(v_x)v_{xx} + g(x,v_x). \end{aligned} \tag{2.6.33}$$

进而, 这些方程可以用如下的更一般形式的非线性波动方程来表示:

$$v_{tt} = f(x,v_x)v_{xx} + g(x,v_x). \tag{2.6.34}$$

另一种具有实际意义的非线性波是在气体动力学中的 “短波”. 它们由以下方程组描述:

$$u_y - 2v_t - 2(v-x)v_x - 2kv = 0,$$
$$v_y + u_x = 0, \quad k = \text{常数}.$$

这个由两个一阶方程组成的方程组能通过代换 $u = w_y, v = -w_x$ 导出一个二阶方程, 即

$$2w_{tx} + 2(x + w_x)w_{xx} + w_{yy} + 2kw_x = 0. \tag{2.6.35}$$

2.6.6 Chaplygin 方程和 Tricomi 方程

Chaplygin 方程的形式为

$$\varphi(x)u_{yy} + u_{xx} = 0. \tag{2.6.36}$$

它在高速空气动力学里发挥了重要作用, 是于 1902 年由 S.A. Chaplygin 在其论文 “On gas jets” 中提出的. Chaplygin 方程被用于研究二维稳定音速流并有着实际的应用, 例如, 该模型可以用于模拟飞机在飞行速度接近音速时引擎的气体喷嘴流通过机翼的物理过程.

Chaplygin 方程的一个很好的近似形式是 Tricomi 方程

$$xu_{yy} + u_{xx} = 0. \tag{2.6.37}$$

方程 (2.6.36) 和 (2.6.37) 提供了所谓的混合椭圆-双曲型的偏微分方程的例子. 即当 $x > 0$ 时 (2.6.37) 是椭圆型偏微分方程, 而当 $x < 0$ 时它是双曲型偏微分方程 (见 5.2.5 节). 事实上, 方程 (2.6.37) 是由 F.G. Tricomi 于 1923 年在他的混合型的线性二阶偏微分方程研究里提出的.

习题二

2.1. 解如下拉格朗日算子的欧拉-拉格朗日方程:

(i) $L = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2\right) - f(t,x,y,z)u,$

(ii) $L = \frac{1}{2}u_y^2 - u_t u_x - \frac{1}{6}u_x^3,$

(iii) $L = \frac{1}{2}\left(-u_t^2 + \mu u_{xx}^2\right) - f(t,x)u,\ \mu = \text{常数},$

(iv) $L = \frac{1}{2}\left(-u_t^2 + (u_{xx} + u_{yy})^2\right) - f(t,x,y)u.$

2.2. 给出方程 (2.6.21) 的详细求解过程.

2.3. 太阳的引力是球对称的. 因此有人会自然地推断行星的运动也应该是球对称的. 这仅仅是当行星在球面上作圆周运动时的情形, 然而, 开普勒发现 (1609 年) 行星作椭圆形运动而非圆形运动, 在固定的平面运动而非球面, 以太阳为焦点而非中心. 解释是什么违背了行星运动的对称性.

2.4. 让我们归纳开普勒问题, 并考虑质量为 m 的质点在一个任意中心势场的运动

$$U = U(r), \quad r = |\boldsymbol{x}| \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}.$$

根据最小作用原理 (见 1.5.1 节), 质点的运动由拉格朗日算子

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}(v^i)^2 - U(r)$$

确定. 找出相关的欧拉-拉格朗日方程 (1.5.2).

2.5. 狄拉克方程 (2.3.33) 是一个向量方程. 其组成部分提供了四个方程. 明确地写下这四个方程.

2.6. 对方程 (2.2.3) $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = \alpha P - \beta P^2$ ($\alpha, \beta =$ 常数 $\neq 0$) 进行积分.

2.7. 从方程 (2.3.30) 和 (2.3.31) 得到 $D_t(\operatorname{div}\boldsymbol{E}) = 0$, $D_t(\operatorname{div}\boldsymbol{H}) = 0$, 从而方程 (2.3.32) ($\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$) 如果在初始时间 $t = t_0$ 成立, 那么其在任何时间都成立.

第三章　常微分方程: 经典方法

本章简单地介绍了一些主要在 17、18 世纪所发展起来的基本的传统解法. 这些经典技术方法简单, 因而可以借助特定的方法广泛用于求解特殊类型的常微分方程.

补充读物: E. Goursat [9], G.F. Simmons [35].

3.1　简介和基础方法

3.1.1　微分方程 · 初值问题

一个 n 阶常微分方程 (ODE) 是关于单个自变量 x、因变量 y 以及它的导数 $y', \cdots, y^{(n)}$ 之间的关系

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.1.1}$$

下面是微分方程解的经典定义.

定义 3.1.1　已知函数 $y = \phi(x)$ 定义在 x_0 的邻域且 n 次连续可微, 如果在 x 的区间

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

满足

$$F\big(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)\big) = 0,$$

那么 $y = \phi(x)$ 被称作微分方程 (3.1.1) 的一个解.

因为任意方程 $y = y(x)$ 代表在 (x, y) 平面上的一条曲线, 所以常微分方程的解又被称作积分曲线.

存在性理论是微分方程一般理论的核心, 尤其在李群分析中更为重要.

第一个有关微分方程解的存在性的系统性研究源于柯西 (1845 年). 例如, 在形如 (1.2.58) 的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x),$$

对于连续的 $f(x)$, 给定 $x = x_0$ 的一个初值 y_0, 通过公式 (1.2.59) 可以容易地得到其解. 这种初值问题的解是唯一的, 定义在点 x_0 的邻域, 并由下式给出:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

柯西通过证明广义一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad y\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{3.1.2}$$

的初值问题解的存在性推广了该结果, 这里 $f(x, y)$ 是定义在 (x, y) 平面上点 (x_0, y_0) 邻域内的连续函数. 符号 $\big|_{x=x_0}$ 表示函数在 $x = x_0$ 时的值. 因此, 初值问题总是归为柯西问题.

如此, 柯西问题的解说明了过任意给定点 (x_0, y_0) 的积分曲线的存在性, 但是, 对于只是右连续的 $f(x, y)$, 这个方程的解并不是唯一的. 比如, 初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sqrt{|y|}, \quad y\big|_{x=x_0} = 0$$

就存在两个解, 它们分别有着如下的形式:

$$y = 0 \quad 和 \quad y = |x - x_0|(x - x_0).$$

因此, 柯西继续研究并得到柯西问题解的存在性与唯一性的一般定理. 而对我们来说, 只需用到下列简单的存在性与唯一性定理.

定理 3.1.1 设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 邻域内的连续可微. 那么初值问题 (3.1.2) 在 x_0 邻域内有且只有一个解.

注 3.1.1 一个更一般的理论 (虽然不是最一般的) 只需要一个比连续可微更弱的条件, 该条件叫做 Lipschitz 条件.

对于高阶方程的存在性和唯一性定理有如下形式.

定理 3.1.2 给定一个 n 阶方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{3.1.3}$$

柯西问题即是求满足如下的初值条件

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}=y_0',\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)} \tag{3.1.4}$$

的方程 (3.13) 的解. 若方程 (3.1.3) 中对应的函数 f 在 $x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 某个邻域内连续可微, 则这个柯西问题 (3.1.3)—(3.1.4) 在 x_0 某个邻域内有一个唯一解.

注 3.1.2 n 阶微分方程 (3.1.3) 的通解仅依赖于 n 个任意常数 $C_1, \cdots, C_n$.

3.1.2 方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的积分

方程

$$y^{(n)}=f(x)$$

的解和方程 (1.2.60) 的解 (1.2.61) 是相似的. 即, 依次的积分得到

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,\quad y^{(n-2)}=\int \mathrm{d}x\int f(x)\mathrm{d}x+C_1x+C_2,\ \cdots,$$

因此该方程的最终解和 (1.2.61) 相似:

$$y=\int \mathrm{d}x\int \mathrm{d}x\cdots\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+C_{n-1}x+C_n,$$

其中 $C_1, \cdots, C_n$ 是任意积分常数.

3.1.3 齐次方程

任意 n 阶齐次方程在 $n=1$ 时可通过一次积分求解, 当 $n>1$ 时可降阶到 $n-1$ 阶方程 (参看第六章). 一般齐次方程的定义可以表示如下.

定义 3.1.2 一个任意阶的常微分方程

$$F\big(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\big)=0, \tag{3.1.5}$$

如果它的自变量和因变量 (参考 (1.1.35)) 在比例变换 (伸缩变换)

$$\overline{x}=a^k x,\quad \overline{y}=a^l y \tag{3.1.6}$$

下保持不变, 则称它是齐次的. 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$, k 和 l 是任意固定的实数. 该不变性指

$$F\big(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}', \cdots, \overline{y}^{(n)}\big)=0, \tag{3.1.7}$$

其中 $\overline{y}' = \mathrm{d}\overline{y}/\mathrm{d}\overline{x}$, 等等. 特别地, 在一阶方程

$$y' = f(x, y) \tag{3.1.8}$$

中齐次性是指经过了比例变换 (3.1.6) 后方程 (3.1.8) 变成

$$\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}} = f(\overline{x}, \overline{y}). \tag{3.1.9}$$

例 3.1.1 一阶方程 (参考例 3.2.2)

$$y' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0$$

是齐次的, 这是因为在 $\overline{x} = a\,x$, $\overline{y} = a\,y$ 变换下它是不变的. 事实上,

$$\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}} = \frac{a\mathrm{d}y}{a\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv y', \quad \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^{\,2} - \overline{y}^{\,2}} = \frac{2a^2xy}{a^2(3x^2 - y^2)} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2},$$

因此该方程满足条件 (3.1.9):

$$\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}} - \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^{\,2} - \overline{y}^{\,2}} = y' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0.$$

例 3.1.2 二阶方程

$$y'' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0 \tag{3.1.10}$$

不是齐次的. 事实上, 考虑用一般的比例变换 (3.1.6) 来替代它, 为方便计算, 我们使用变换 $\overline{x} = a\,x$, $\overline{y} = b\,y$, 其中 a 和 b 为正系数, 然后我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}^{\,2}} = \frac{b}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^{\,2} - \overline{y}^{\,2}} = \frac{ab(2xy)}{3a^2x^2 - b^2y^2}.$$

因此, 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}^{\,2}} = \frac{2\overline{x}\,\overline{y}}{3\overline{x}^{\,2} - \overline{y}^{\,2}}$$

变为

$$\frac{b}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{ab(2xy)}{3a^2x^2 - b^2y^2}.$$

不变性条件要求下列两式成立:

$$\text{(i) } 3a^2x^2 - b^2y^2 = c(3x^2 - y^2), \quad \text{(ii) } \frac{b}{a^2} = \frac{ab}{c}. \tag{3.1.11}$$

因为方程 (3.1.11)(i) 中与 x 与 y 对应的系数应该相等, 所以 $a^2 = b^2 = c$. 这样方程 (3.1.11)(ii) 就可以写成

$$\frac{b}{a^2} = \frac{ab}{a^2},$$

则 $a = 1$. 此外, 因为 a 和 b 是正数, 从 $b^2 = a^2 = 1$ 得到 $b = 1$. 这样, 变换 $\overline{x} = a\,x$, $\overline{y} = b\,y$ 简化到恒等变换 $\overline{x} = x$, $\overline{y} = y$. 因此, 根据定义 3.1.2, 方程 3.1.10 不是齐次的.

例 3.1.3 方程

$$y' + y^2 = \frac{C}{x^2}, \quad C = \text{常数} \tag{3.1.12}$$

是齐次的, 因为它在伸缩变换 $\overline{x} = a\,x$, $\overline{y} = a^{-1}\,y$ 后是不变的 (也可见习题 3.4 和例 6.3.3).

定义 3.1.3 *如果方程在自变量伸缩变换和因变量伸缩变换下分别保持不变, 例如如果在变换条件*

$$\overline{x} = a\,x, \quad \overline{y} = y \tag{3.1.13}$$

和

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = b\,y \tag{3.1.14}$$

下, 其中 a 和 b 是独立的正系数, 表达式不变, 我们称 (3.1.5) 为双重齐次方程.

例 3.1.4 线性方程

$$xy' + C\,y = 0, \quad C = \text{常数} \tag{3.1.15}$$

和

$$x^2y'' + C_1\,xy' + C_2y = 0, \quad C_1, C_2 = \text{常数} \tag{3.1.16}$$

分别提供了一阶和二阶双重齐次方程的例子. 它们分别被称作一阶和二阶欧拉方程 (见 3.4.4 节). 事实上, 方程 (3.1.15) 是最广义的一阶双重齐次方程 (见习题 6.11). 另一方面, 最广义的二阶双重齐次方程有形式 (见习题 6.12)

$$y'' = \frac{y}{x^2}\,H\Big(\frac{xy'}{y}\Big), \tag{3.1.17}$$

其中 H 是一个任意函数. 方程 (3.1.16) 是 (3.1.17) 的一个特殊形式, 其

$$H\Big(\frac{xy'}{y}\Big) = -C_1\Big(\frac{xy'}{y}\Big) + C_2.$$

注 3.1.3 与双重齐次性不同, 定义 3.1.2 中的单齐次性只处理依赖于一个参数的伸缩变换下的不变性. 它在实际中可以通过寻找涉及两个参数 a 和 b 的伸缩变换 $\overline{x} = a\,x$, $\overline{y} = b\,y$ (见 (1.1.35)) 得到. 在大多数应用中, 计算会在恒等变换即 $a = b = 1$ 时或是只涉及一个参数的伸缩变换 (3.1.6) 后中止. 例如, 见例 3.1.2 和习题 3.4.

3.1.4 齐次性的不同种类

接下来的两种齐次性涉及 (3.1.6) 变换的特殊形式, 它基于某种特定的目的, 并经常 (甚至是多数情况下) 出现在标准教科书中. 一阶线性偏微分方程提供了一个例外 (见 4.1 节).

类型 1: 一致齐次性. 一致齐次方程在一致比例变换

$$\overline{x} = a\,x, \quad \overline{y} = a\,y \tag{3.1.18}$$

下是不变的, 此时 (3.1.6) 中的 $k = l = 1$. 因为一致比例变换 (3.1.18) 要求一阶导数不变, $\overline{y}\,' = y'$, 由方程 (3.1.8) 和 (3.1.9) 得到 $f(ax, ay) = f(x, y)$.

例 3.1.5 下面的带任意常系数 A, B 和 C 的一阶和二阶方程是一致齐次的:

$$y' + \frac{y}{x} = C, \quad y'' + \frac{A}{x}\,y' + \frac{B}{x^2}\,y = \frac{C}{x},$$
$$y' + \frac{x}{y} = C, \quad y'' + \frac{A}{xy'} + \frac{B}{y} = \frac{C}{x}.$$

一阶一致齐次方程的标准形式是 (见习题 6.2 (i))

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{3.1.19}$$

在 (3.1.18)的变换下, 方程 (3.1.19) 可以把不变值 y/x 作为一个新的因变量来求解, 即设

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{或} \quad y = xu(x).$$

事实上, 方程 (3.1.19) 有形式

$$xu' + u = \varphi(u),$$

可以通过分离变量法解得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \equiv \ln|x| + C.$$

类型 2: 函数齐次性. 该齐次性指明了关于变形 (3.1.6) 在 $k = 0$, $l = 1$ 时的不变性, 即仅关于 y 的伸缩变换

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = a\,y. \tag{3.1.20}$$

函数齐次性一般被用在线性常微分方程中 (3.2.6, 3.3, 3.4 诸节), 也用在线性偏微分方程中 (见 4.1 节和 5.1 节).

线性微分方程

$$y' + P(x)y = 0$$

是函数齐次性方程, 并且还提供了函数齐次性方程的一般形式 (见习题 6.2 (ii)). 高阶方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad n \geqslant 2$$

也是函数齐次性的. 但是在高阶方程的情形中, 不像一阶方程, 函数齐次性不意味着是高阶方程是线性的. 例如, 二阶函数齐次性方程的一般形式为 (见习题 6.2 (ii))

$$y'' = yF\Big(x, \frac{y'}{y}\Big).$$

考虑一种和上述两种类型不同的一般齐次性的例子. 令 $k = \sqrt{2}$, $l = 1$, 比例变换 (3.1.6) 变为

$$\overline{x} = a^{\sqrt{2}}\, x, \quad \overline{y} = a\, y.$$

在该条件下, 对应的一般一阶齐次方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\, F\left(\frac{y^{\sqrt{2}}}{x}\right). \tag{3.1.21}$$

它的求解在习题 6.10 将会被讨论到.

3.1.5 降阶

任意一个二阶微分方程

$$y'' = f(y, y') \tag{3.1.22}$$

可以通过变换

$$y' = p(y) \tag{3.1.23}$$

降为一阶微分方程.

通过链式法则, 从方程 (3.1.23) 中, 我们可以得到

$$y'' = y'p'(y) \equiv pp'.$$

现在方程 (3.1.22) 就变成一阶微分方程

$$pp' = f(y, p), \tag{3.1.24}$$

它是关于自变量为 y 的新未知函数 $p(y)$ 的方程.

倘若方程 (3.1.24) 的通解 $p=\phi(y,C_1)$ 已知, 原方程 (3.1.22) 的解可以通过方程 (3.1.23) 解得,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\phi(y,C_1),$$

分离变量并通过一次积分后, 可得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\phi(y,C_1)}=x+C_2.$$

同样地, 变换 (3.1.23) 能对任意不显式地包含自变量 x 的高阶微分方程, 即以下形式的高阶微分方程

$$y^{(n)}=f(y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

降阶. 在这个情形下我们有

$$y''=y'p'=pp',\quad y'''=y'(pp')'=p(pp')'=p(p')^2+p^2p'',\cdots,$$

因此该方程变成了关于 $p(y)$ 的 $n-1$ 阶方程

$$p^{(n-1)}=F\left(y,p,p',\cdots,p^{(n-2)}\right).$$

3.1.6 微分线性化

有些时候非线性方程可以通过微分线性化. 下面的例子将阐述其原理.

例 3.1.6 考虑下面的非线性二阶方程:

$$2yy''-y'^2=0. \tag{3.1.25}$$

微分后得到 $2yy'''=0$, 则 $y=0$ (方程 (3.1.25) 的一个平凡解) 或 $y'''=0$. 从方程 $y'''=0$ 得到 $y=ax^2+bx+c$, 其中 a,b,c 是任意常数. 为了解得这些常数, 我们将 y 的表达式代入方程 (3.1.25) 得到 $4ac-b^2=0$. 因此得到当 $a\neq 0$ 时, $c=b^2/(4a)$, 或 $a=b=0$. 因此, 方程 (3.1.25) 的通解是

$$y=ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=\frac{1}{4a}\left(2ax+b\right)^2\quad(a\neq 0)\quad\text{和}\quad y=c.$$

3.2 一阶方程

3.2.1 可分离变量的方程

如下形式的一阶常微分方程可以使用分离变量法:

$$y'=p(x)q(y). \tag{3.2.1}$$

我们把方程 (3.2.1) 改写为

$$\frac{1}{q(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = p(x)\mathrm{d}x,$$

关于 x 分别对两边积分:

$$\int \frac{1}{q(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int p(x)\mathrm{d}x + C.$$

这里我们用积分变量代换法 (见 1.2.4 节) 以及微分的不变性 (1.2.7) 把左边的积分变量 x 替代成 y, 重新得到以上的积分方程

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{q(y)} = \int p(x)\mathrm{d}x + C. \tag{3.2.2}$$

对两边同时积分且解关于 y 的方程, 可以解得包含积分常数 C 的通解.

3.2.2 全微分方程

定义 3.2.1 一阶微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.2.3}$$

称为全微分方程, 如果该方程的左边是可微的, 即, 如果

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y, \tag{3.2.4}$$

$\Phi(x,y)$为一函数.

对于一个全微分方程 (3.2.3), 未知函数 Φ 可通过将方程 (3.2.4) 改写成一个包含未知函数 Φ 的微分方程组

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = N(x,y) \tag{3.2.5}$$

求得. 这个超定组 (即, 关于一个未知函数 Φ 的两个方程) 是可积的 (即, 有一个解) 当且仅当

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{3.2.6}$$

为了解方程组 (3.2.5), 我们对方程组 (3.2.5) 的第一个方程关于 x 积分,

$$\Phi(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{d}x + g(y), \tag{3.2.7}$$

将其代入 (3.2.5) 的第二个方程:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x + g'(y) = N(x,y). \tag{3.2.8}$$

对 (3.2.8) 积分, 我们得到 $g(y)$, 把它代入方程 (3.2.7) 并最终得到 $\Phi(x,y)$. 全微分方程 (3.2.3) 的显式解 $y=f(x,C)$ 可通过求解

$$\Phi(x,y)=C, \tag{3.2.9}$$

而获得, 其中 C 是任意常数.

我们也可以对第二个方程 (3.2.5) 关于 y 进行积分. 那么方程 (3.2.7) 和 (3.2.8) 分别被方程

$$\Phi(x,y)=\int N(x,y)\mathrm{d}y+h(x) \tag{3.2.10}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy+h'(x)=M(x,y) \tag{3.2.11}$$

替换.

注 3.2.1 也可见 6.6.2 节的一个简单方法.

例 3.2.1 考虑方程 $\left(y\,\mathrm{e}^{xy}+\cos x\right)\mathrm{d}x+x\,\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y=0$. 函数 $M=y\,\mathrm{e}^{xy}+\cos x$ 和 $N=x\,\mathrm{e}^{xy}$ 符合方程 (3.2.6) 的条件:

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}=(1+xy)\,\mathrm{e}^{xy}.$$

利用方程 (3.2.10) 得到 $\Phi(x,y)=\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y+h(x)=\mathrm{e}^{xy}+h(x)$, 方程 (3.2.11) 可写成 $y\,\mathrm{e}^{xy}+h'(x)=y\,\mathrm{e}^{xy}+\cos x$, 这里 $h'(x)=\cos x$. 所以,

$$\Phi(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+\sin x.$$

方程 (3.2.9) 为 $\mathrm{e}^{xy}+\sin x=C$, 从而得到下面的被讨论的方程通解

$$y=\frac{1}{x}\ln|C-\sin x|.$$

3.2.3 积分因子 (A. Clairaut, 1739)

如果方程 (3.2.3) 不是全微分, 它可以通过乘以一个适当的函数转换成全微分形式. 它是由 Clairaut 在 1739 年首次提出的. 即对于任意方程 (3.2.3) 存在一个函数 $\mu(x,y)$, 其等价方程

$$\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=0$$

是全微分形式. 该函数称为积分因子. 根据全微分方程的定义, 积分因子满足方程 (见方程 (3.2.6))

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}. \tag{3.2.12}$$

关于 $\mu(x,y)$ 的该方程的求解通常不会比原方程 (3.2.3) 的积分简单. 但是积分因子可以通过猜测或是其他特定的形式[①]来得到. 例如, 它在一些现代的教科书中被广泛用于求解一阶非齐次线性方程, 从而取代了简单、有效、传统的常数变易法 (见 3.2.7 节). 接下来是一些有用的定理.

定理 3.2.1 方程 (3.2.3) 若含两个已知的线性无关积分因子 $\mu_1(x,y)$ 和 $\mu_2(x,y)$, 则无需积分即可得到通解

$$\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}=C. \tag{3.2.13}$$

例 3.2.2 方程

$$2xy\mathrm{d}x+(y^2-3x^2)\mathrm{d}y=0 \tag{3.2.14}$$

不是全微分形式, 因为它的系数 $M=2xy$ 和 $N=y^2-3x^2$ 不满足 (3.2.6). 我们来验证 $\mu=1/y^4$ 是一个积分因子. 事实上,

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\Big)=-6\frac{x}{y^4},\quad \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{2x}{y^3}\Big)=-6\frac{x}{y^4}.$$

使用该积分因子, 我们积分对应的全微分方程

$$\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\Big(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\Big)\mathrm{d}y=0. \tag{3.2.15}$$

利用方程 (3.2.7) 得到

$$\Phi(x,y)=\int\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+g(y)=\frac{x^2}{y^3}+g(y)$$

以及方程 (3.2.8) 可写成

$$-\frac{3x^2}{y^4}+g'(y)=\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4},$$

这里 $g'(y)=y^{-2}$. 这样, $g(y)=-1/y$, 我们最终得到 (也可见 6.6.2 节中例 6.6.3)

$$\Phi(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}.$$

微分方程的解为

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C\quad 或\quad x^2-y^2=Cy^3.$$

[①]李群分析提供了一个对于有已知无穷小对称性的一阶方程的积分因子的一般公式 (见 6.4.1 节).

其实, 该解也可以不通过对积分因子的积分而得到. 如果第一个积分因子为 $\mu_1 = 1/y^4$, 第二个积分因子为 $\mu_2 = 1/(y^3 - x^2y)$ (在 6.4.1 节可以推得, 例 6.4.1). 那么方程的解可以使用 (3.2.13) 而求得

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{y^3 - x^2y}{y^4} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = C.$$

3.2.4 里卡蒂方程

里卡蒂方程是二次非线性一阶微分方程

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2. \tag{3.2.16}$$

里卡蒂方程显著的性质是它符合非线性叠加. 即方程 (3.2.16) 中任意四个解

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad y_3(x), \quad y_4(x),$$

的交叉比是不依赖于 x 的,

$$\frac{y_4(x) - y_2(x)}{y_4(x) - y_1(x)} : \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)} = C, \quad C = 常数. \tag{3.2.17}$$

若已知该方程 (3.2.16) 三个特解就可得到它的通解. 事实上, 在 (3.2.17) 中取定任意三个不同的特解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, 我们可通过改变 y_4 来获得方程 (3.2.16) 的通解 y. 那么 (3.2.17) 变为

$$\frac{y - y_2(x)}{y - y_1(x)} : \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)} = C,$$

C 为一个任意常数. 解以上关于 y 的方程, 得到方程 (3.2.16) 的通解的表达式

$$y = \frac{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}. \tag{3.2.18}$$

这里

$$\varphi_1(x) = y_2(x) - y_3(x), \quad \varphi_2(x) = y_3(x) - y_1(x),$$

$$\psi_1(x) = y_1(x)\ \varphi_1(x), \quad \psi_2(x) = y_2(x)\ \varphi_2(x).$$

这样里卡蒂方程的通解是一个含有任意常数 C 的线性有理方程 (3.2.18). 反之, 如果一阶微分方程的通解是一个含有任意常数的线性有理方程, 则这个方程是一个里卡蒂方程.

任意里卡蒂方程 (3.2.16) 可以通过变换 $y \mapsto \alpha(x)y$ 写为

$$y' + y^2 = Q(x)y + P(x). \tag{3.2.19}$$

事实上, 令 $\overline{y}=\alpha(x)y$, 则

$$y=\frac{1}{\alpha}\overline{y},\quad y'=\frac{1}{\alpha}\overline{y}'-\frac{\alpha'}{\alpha^2}\overline{y},$$

由此

$$y'-Ry^2-Qy-P=\frac{1}{\alpha}\left(\overline{y}'-\frac{R}{\alpha}\overline{y}^2-\left(Q+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\overline{y}-\alpha P\right).$$

因此, 令 $\alpha(x)=-R(x)$, 我们将方程 (3.2.16) 变成

$$\overline{y}'+\overline{y}^2=\overline{Q}(x)\overline{y}+\overline{P}(x),$$

其中 $\overline{Q}=Q+(\alpha'/\alpha)$, $\overline{P}=\alpha P$. 将 $\overline{y}$, $\overline{Q}$ 和 $\overline{P}$ 分别用 y, Q 和 P 表示, 我们得到 (3.2.19).

此外, 方程 (3.2.19) 可以通过变换 $y\mapsto y+\beta(x)$ 写成

$$y'+y^2=P(x), \tag{3.2.20}$$

它同时也称为里卡蒂方程的*标准形式*. 令 $\overline{y}=y+\beta(x)$, 则

$$y=\overline{y}-\beta(x),\quad y'=\overline{y}'-\beta'(x),$$

$$y'+y^2-Qy-P=\overline{y}'+\overline{y}^2-\big(Q+2\beta\big)\overline{y}-\big(P+\beta'-\beta^2-Q\beta\big).$$

因此, 令 $\beta(x)=-\dfrac{1}{2}Q(x)$, 方程 (3.2.19) 将变为

$$\overline{y}'+\overline{y}^2=\overline{P}(x),$$

其中 $\overline{P}(x)=P(x)-\dfrac{1}{2}Q'(x)+\dfrac{1}{4}Q^2(x)$. 再次用 y 和 P 表示 $\overline{y}$ 和 $\overline{P}$, 我们就可以得到 (3.2.20).

一般说来, 变换$(x,y)\mapsto(\overline{x},\overline{y})$ 称为里卡蒂方程的*一个等价变换*, 如果任意方程 (3.2.16) 只是被变化为一个系数有可能不同的同类型方程. 两个方程若可以通过等价变换推得则称为*等价的*. 里卡蒂方程 (3.2.16) 的所有等价变换包括

(i) 对自变量的任意改变:

$$\overline{x}=\phi(x),\qquad \phi'(x)\neq 0; \tag{3.2.21}$$

(ii) 因变量的线性有理变换:

$$\overline{y}=\frac{\alpha(x)y+\beta(x)}{\gamma(x)y+\delta(x)},\qquad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0. \tag{3.2.22}$$

里卡蒂方程是一个一阶非线性微分方程. 它可以被重写成一个二阶线性微分方程. 即, 可以先把方程 (3.2.16) 变形为 (3.2.19), 然后设

$$y = \frac{u'}{u},$$

得到二阶线性微分方程

$$u'' = Q(x)u' + P(x)u. \tag{3.2.23}$$

线性化即使将阶数提高, 也可能对方程的求解有用.

例 3.2.3 考虑里卡蒂方程 (3.2.19), 其中 $P(x) = 0$:

$$y' + y^2 = Q(x)y.$$

其相关的线性微分方程

$$u'' = Q(x)u'$$

可以轻易地通过二次积分求解, 事实上, 设 $u' = z$, 得到一阶方程 $z' = Q(x)z$. 因此

$$z = A\mathrm{e}^{\int Q(x)\mathrm{d}x}.$$

使用代换 $z = u'$ 我们得到方程

$$u' = A\mathrm{e}^{\int Q(x)\mathrm{d}x}.$$

对以上的式子积分:

$$u = A\int \left(\mathrm{e}^{\int Q(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + B.$$

代入 $y = u'/u$ 得到

$$y = \frac{\mathrm{e}^{\int Q(x)\mathrm{d}x}}{C + \int \left(\mathrm{e}^{\int Q(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x}, \quad C = 常数.$$

例 3.2.4 里卡蒂在 1724 年发现并研究方程 (3.2.16) 的特殊形式, 即

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, \quad a, b, \alpha = 常数. \tag{3.2.24}$$

该微分方程为今天广为人们所知的*特殊里卡蒂方程*. 广义里卡蒂方程 (3.2.16) 是 d'Alembert 在 1763 年首次提出并研究的. 弗朗西斯科 · 里卡蒂和丹尼尔 · 伯努利分别注意到方程 (3.2.24) 在初等函数的有限形式下是可积的, 如果

$$\alpha = -\frac{4k}{2k \pm 1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{3.2.25}$$

1841年, 约瑟夫 · 刘维尔指出, 如果 α 不同于 (3.2.25), 那么特殊里卡蒂方程 (3.2.24) 的解就不能通过初等函数积分来表示.

笔者在 1989 年发现了所有的可线性化的里卡蒂方程 [15]. 以下陈述摘自 [15], 4.2 节 (也见 [21], 11.2.5 节), 它提供了对于线性化的一个简单检验.

定理 3.2.2 里卡蒂方程 (3.2.16)

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

可通过对因变量 y 进行变换而线性化, 当且仅当它符合任一以下两个等价条件 (A) 或 (B):

(A) 微分方程 (3.2.16) 或有形式

$$y' = Q(x)y + R(x)y^2, \tag{3.2.26}$$

$Q(x)$ 和 $R(x)$ 是任意两个函数; 或有形式

$$y' = P(x) + Q(x)y + k(Q(x) - kP(x))y^2, \tag{3.2.27}$$

$P(x)$ 和 $Q(x)$ 是任意两个函数, k 是一个常数 (通常是复数) 系数;

(B) 微分方程 (3.2.16) 有一个常数 (通常是复数) 解.

注 3.2.2 方程 (3.2.26) 有一个常数解 $y = 0$. 另一方面, 方程 (3.2.27) 有一个常数解 $y = -1/k$. 因此当 $k = 0$ 时, 方程 (3.2.27) 就变成一个特殊形式的线性方程 $y' = P(x) + Q(x)y$. 该方程也可以被认为是有 $y = \infty$ 这样一个特殊的常数解的里卡蒂方程.

3.2.5 伯努利方程

非线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0 \text{ 和 } n \neq 1)$$

被称作伯努利方程[①]. 它可以降阶为一个线性微分方程并可通过求积分得其解. 事实上, 伯努利方程两边同时除以 y^n 得到 $y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$, 或者

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

因此, 令 $z = y^{1-n}$, 伯努利方程降阶为线性微分方程

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

[①]伯努利在 1695 年发现并由莱布尼茨在 1696 年解出.

3.2.6 齐次线性微分方程

一般一阶线性微分方程的形式为

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{3.2.28}$$

当且仅当 $Q(x) = 0$ 时, 微分方程 (3.2.28) 是齐次的 (见 3.1.4 节). 因此, 下面一些术语在教科书里是经常用到的: 如果 $Q(x) = 0$, 方程 (3.2.28) 称为*齐次的*, 否则它是*非齐次的*.

注 3.2.3 为了简便的缘故, 一般齐次性指的是函数齐次性这个便利性在过去并不会引起混淆. 但是现在用电脑处理数学知识的趋势, 使得越来越多的学生和老师只是形式上以为齐次性只是微分方程的等式右边等于 0 , 并且也错误地用在非线性方程. 从他们的角度, 方程 (3.1.10)

$$y'' - \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 0$$

是齐次的, 而从例 3.1.5 得到的方程

$$y'' + \frac{A}{x}y' + \frac{B}{x^2}y = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0$$

是非齐次的.

考虑齐次线性方程

$$y' + P(x)y = 0. \tag{3.2.29}$$

我们分离变量:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} + P(x)\mathrm{d}x = 0,$$

并积分得到

$$\ln|y| + \int P(x)\mathrm{d}x = 常数,$$

因此, 得解

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}, \quad C = 常数. \tag{3.2.30}$$

3.2.7 非齐次线性方程 · 常数变易法

求解非齐次线性方程 (3.2.28) 的最简单方法是由让 · 伯努利在 1697 年提出的*常数变易法*. 我们从一个例子开始.

例 3.2.5 求解一个非齐次方程

$$y' - y = x. \tag{3.2.31}$$

我们首先考虑对应 (3.2.31) 的齐次方程

$$y' - y = 0.$$

它的通解是

$$y = C\,\mathrm{e}^{x}, \quad C = \text{常数}.$$

现在我们将积分常数 C 用一个未知方程 $u(x)$ 替代,

$$y = u(x)\,\mathrm{e}^{x}. \tag{3.2.32}$$

将 $y' = u'\,\mathrm{e}^{x} + u\,\mathrm{e}^{x}$ 代入方程 (3.2.31), 我们获得下面的关于 $u(x)$ 的方程:

$$u' = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

对它积分并仍令积分常数为 C, 那么可以得到

$$u = \int x\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + C = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + C, \quad C = \text{常数}.$$

最终, 我们将 $u(x)$ 的表达式代入方程 (3.2.32) 并得到方程 (3.2.31) 下面的通解:

$$y = C\,\mathrm{e}^{x} - x - 1. \tag{3.2.33}$$

对于一般非齐次方程 (3.2.28)

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

我们可以采用同样的处理. 即, 我们首先求解齐次方程

$$y' + P(x)y = 0,$$

并将它的通解 (3.2.30)

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}, \quad C = \text{常数}$$

中的积分常数 C 用一个未知函数 $u(x)$ 替换. 换句话说, 我们寻找非齐次方程解的如下形式:

$$y = u(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}. \tag{3.2.34}$$

对 (3.2.34) 进行微分得

$$y' = u'(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} - u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}.$$

代入方程 (3.2.28) 得到

$$u'(x)\,\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} = Q(x), \quad \text{或} \quad u'(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x},$$

求得

$$u(x) = \int Q\, \mathrm{e}^{\int P \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C, \quad C = \text{常数}.$$

在 (3.2.34) 中代入 $u(x)$, 这样, 我们通过两次积分就可以得到非齐次线性方程 (3.2.28) 的通解

$$y = \left(C + \int Q\, \mathrm{e}^{\int P \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{-\int P \mathrm{d}x}. \tag{3.2.35}$$

3.3 二阶线性方程

一般二阶线性方程具有形式

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x). \tag{3.3.1}$$

如果 $f(x) = 0$, 它称为齐次的, 否则称为非齐次的 (参考 3.2.6 节).

方程 (3.3.1) 常被写成

$$L_2[y] = f(x). \tag{3.3.2}$$

这里 L_2 是二阶线性微分算子

$$L_2 = D^2 + a(x)\, D + b, \tag{3.3.3}$$

其中

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad D^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}.$$

这样,

$$L_2[y] = D^2\, y + a(x)\, D\, y + by \equiv y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y. \tag{3.3.4}$$

线性微分算子 L_2 有以下一些基本性质:

$$L_2[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L_2[y_1] + C_2 L_2[y_2], \quad C_1, C_2 = \text{常数}. \tag{3.3.5}$$

3.3.1 齐次方程: 叠加性

齐次线性方程

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \tag{3.3.6}$$

或

$$L_2[y] = 0$$

拥有一个值得注意的性质, 称为叠加性, 更明确地讲, 线性叠加性. 此叠加性来源于线性微分算子 L_2 的性质 (3.3.5) , 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 (3.3.6) 的解, 那么由任意的常系数组合成的

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

也是该方程的一个解. 因为 $L_2[y_1(x)]=0$, $L_2[y_2(x)]=0$, 由性质 (3.3.5) 得

$$L_2[y]=C_1L_2[y_1(x)]+C_2L_2[y_2(x)].$$

既然任意二阶常微分方程的通解涉及两个任意常数, 叠加原理说明了方程 (3.3.6) 的通解为

$$y=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x), \tag{3.3.7}$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 (3.3.6) 的线性无关解. 因此, 为了构造齐次方程的通解, 仅需寻找两个无关解. 所以, 我们说这对线性无关解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 提供了关于方程 (3.3.6) 的一个*基础解系*.

3.3.2 齐次方程: 等价性质

等价性质在微分方程的实际积分上是有用的. 一个齐次线性方程的等价变换是一个保持方程 (3.3.6) 线性性和齐次性的变换. 所有的等价变换集合都包含对于一个自变量的任意变换 (参考 (3.2.21))

$$\overline{x}=\phi(x),\qquad \phi'(x)\neq 0, \tag{3.3.8}$$

以及对因变量的线性变换

$$y=\sigma(x)\,\overline{y},\quad \sigma\neq 0. \tag{3.3.9}$$

定义 3.3.1 *如果两个形如 (3.3.6) 的方程可以使用变换 (3.3.8) 和 (3.3.9) 相互转化, 那么它们是等价的. 此外, 如果两个方程能通过线性变换 (3.3.9) 互相转化, 那么它们是函数等价的.*

定理 3.3.1 任意二阶齐次线性微分方程 (3.3.6)

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0$$

都可以等价于最简单的二阶线性微分方程

$$\overline{y}''=0, \tag{3.3.10}$$

其中 $\overline{y}''=\mathrm{d}^2\overline{y}/\mathrm{d}\overline{x}^{\,2}$.

证明 方程 (3.3.6) 可通过变换

$$\overline{x}=\int\frac{\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}}{z^2(x)}\,\mathrm{d}x,\quad \overline{y}=\frac{y}{z(x)} \tag{3.3.11}$$

简化成方程 (3.3.10), 其中 $z(x)$ 是方程 (3.3.6) 的任意解, 即$z''+a(x)z'+b(x)z=0$. 关于验证变换 (3.3.11) 将这个一般线性方程转换至方程 (3.3.10), 参见习题 6.9 .

根据定理 3.3.1, 我们可以用变换 (3.3.8) 和 (3.3.9) 将形式 (3.3.6) 映射到另外两种形式. 换句话说, 所有的方程 (3.3.6) 都是等价的. 然而, (3.3.11) 表明, 要进行合适的变化, 我们需要该方程特解的相关信息.

因此, 在这里我们只用到线性变换 (3.3.9) 的函数等价性, 以及提供各种方程的一个简单积分的框架.

引理 3.3.1 一般齐次线性方程 (3.3.6)

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$$

和方程

$$y'' + \alpha(x)\,y = 0 \tag{3.3.12}$$

是函数等价的, 即线性变换

$$y = \overline{y}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int a(x)\mathrm{d}x} \tag{3.3.13}$$

将方程变为

$$\overline{y}'' + J(x)\,\overline{y} = 0, \tag{3.3.14}$$

其中

$$J(x) = b(x) - \frac{1}{4}\,a^2(x) - \frac{1}{2}\,a'(x). \tag{3.3.15}$$

证明 我们采用一个任意线性变换 (3.3.9) 得到

$$y = \sigma(x)\,\overline{y}, \quad y' = \sigma(x)\,\overline{y}\,' + \sigma'(x)\,\overline{y},$$

$$y'' = \sigma(x)\,\overline{y}\,'' + 2\sigma'(x)\,\overline{y}\,' + \sigma''(x)\,\overline{y}.$$

因此, 方程 (3.3.6) 变成

$$\sigma\,\overline{y}\,'' + (2\sigma' + a\,\sigma)\,\overline{y}\,' + (\sigma'' + a\,\sigma' + b\,\sigma)\,\overline{y} = 0. \tag{3.3.16}$$

令 $2\sigma' + a\,\sigma = 0$, 我们消去 $\overline{y}'$, 其中

$$\sigma = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int a(x)\mathrm{d}x}. \tag{3.3.17}$$

现在将 (3.3.17) 以及它的导数

$$\sigma' = -\frac{1}{2}\,a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int a\mathrm{d}x}, \quad \sigma'' = \left(\frac{1}{4}\,a^2 - \frac{1}{2}\,a'\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int a\mathrm{d}x}$$

代入方程 (3.3.16), 最后将结果乘以 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int a(x)\mathrm{d}x}$ 得到方程 (3.3.14)

$$\overline{y}'' + \left(b - \frac{1}{4}\,a^2 - \frac{1}{2}\,a'\right)\overline{y} = 0. \tag{3.3.18}$$

显然, 从证明可以看出, (3.3.15) 给出的方程 $J(x)$ 在方程 (3.3.6) 中使用任意变换 (3.3.9) 是不变的. 因此 J 称为方程 (3.3.6) 的不变量. $J(x)$ 的不变性和引理 3.3.1 带来下面的结果.

定理 3.3.2 两个齐次线性方程

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \tag{3.3.19}$$

和

$$\overline{y}'' + a_1(x)\,\overline{y}' + b_1(x)\,\overline{y} = 0 \tag{3.3.20}$$

是函数等价的, 即一个方程能通过适当的线性变换映射到另一个方程, 如果它们的不变量

$$J(x) = b(x) - \frac{1}{4}\,a^2(x) - \frac{1}{2}\,a'(x)$$

和

$$J_1(x) = b_1(x) - \frac{1}{4}\,a_1^2(x) - \frac{1}{2}\,a_1'(x)$$

是相等的, 即 $J(x) = J_1(x)$. 特别地, 方程 (3.3.6) 和方程 (3.3.10), $\overline{y}'' = 0$, 当且仅当 $J(x) = 0$ 时是函数等价的, 即方程 (3.3.6) 有形式

$$y'' + a(x)\,y' + \left(\frac{1}{4}\,a^2(x) + \frac{1}{2}\,a'(x)\right) y = 0. \tag{3.3.21}$$

例 3.3.1 方程

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \tag{3.3.22}$$

不是 (3.3.21) 那样的形式. 因此它与方程 $\overline{y}'' = 0$ 不是函数等价的. 方程 (3.3.22) 的不变量是 $J = 1$. 另一方面,

$$\overline{y}'' + \overline{y} = 0 \tag{3.3.23}$$

的不变量 J_1 有相同的值, 即 $J_1 = J = 1$. 因此, 方程 (3.3.22) 和方程 (3.3.23) 通过线性变换 $\overline{y} = \sqrt{x}\,y$ 等价, 它是通过使用 (3.3.13) 在 $a(x) = 1/x$ 时获得的. 由于方程 (3.3.23) 的通解具有下列形式 (见下一节例 3.3.2):

$$\overline{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

因此方程 (3.3.22) 的通解是

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right).$$

3.3.3 齐次方程: 常系数

考虑常系数的齐次线性方程 (3.3.6)

$$y'' + A\,y' + B\,y = 0, \quad A, B = \text{常数}. \tag{3.3.24}$$

欧拉在 1743 年给出了它的解. 他找到下列形式的特解 (欧拉猜想):

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \lambda = \text{常数}. \tag{3.3.25}$$

那么微分方程 (3.3.24) 可以写为代数方程

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0, \tag{3.3.26}$$

该方程也称为特征方程. 对应地, 多项式

$$P_2[\lambda] = \lambda^2 + A\lambda + B$$

也称为方程 (3.3.24) 的特征多项式. 这里有三个可能性:

(i) 特征方程 (3.3.26) 有两个不同的实根 λ_1 和 λ_2. 那么原方程有两个线性无关的特解:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

所以方程 (3.3.24) 的通解是

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{3.3.27}$$

(ii) 特征方程 (3.3.26) 的解是复数, 即 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 和它的共轭 $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. 相应的复数解用欧拉公式 (1.2.41) 可写成

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad \overline{y} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

因为任意复系数的线性结合也是原方程的解, 所以我们用实数解替代复数解, 设

$$y_1 = \frac{1}{2}(y + \overline{y}), \quad y_2 = \frac{1}{2i}(y - \overline{y}).$$

这样, 这对共轭复根提供了两个实数解:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{3.3.28}$$

因此, 方程 (3.3.24) 的通解是

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x + C_2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x. \tag{3.3.29}$$

例 3.3.2 考虑自由谐振方程 (2.3.14)

$$y'' + \omega^2 y = 0, \tag{3.3.30}$$

其中 $\omega \neq 0$ 是一个实数. 特征多项式 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ 有复根 $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, 其解 (3.3.29) 形如

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x. \tag{3.3.31}$$

(iii) 特征方程 (3.3.26) 有重根 $\lambda_1 = \lambda_2$. 那么公式 (3.3.25) 只提供了一个解

$$y = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

然而, 在这种情况下, 我们依然也能使用定理 3.3.2. 确实, 因为特征多项式有重根, 它的判别式

$$A^2 - 4B = 0.$$

但是不变量

$$J = B - \frac{1}{4} A^2$$

也为零, 因此 (3.3.24) 简化成 $\overline{y}'' = 0$. 特征多项式的根是 $\lambda_1 = -A/2$, 变换 (3.3.13) 写成

$$y = \overline{y}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int A\,\mathrm{d}x} = \overline{y}\, \mathrm{e}^{\int \lambda_1\,\mathrm{d}x} = \overline{y}\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

利用已知方程 $\overline{y}'' = 0$ 的解 $\overline{y} = (C_1 + C_2 x)$, 我们可以进而得到方程 (3.3.24) 的通解

$$y = (C_1 + C_2 x)\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x}. \tag{3.3.32}$$

例 3.3.3 考虑方程

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

它的特征多项式为

$$P_2[\lambda] = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \equiv (\lambda + 1)^2,$$

有重实根 $\lambda = -1$. 因此微分方程的通解是

$$y = (C_1 + C_2\, x)\, \mathrm{e}^{-x}.$$

3.3.4 非齐次微分方程: 常数变易法

假设齐次方程 (3.3.6) 的基础解系已知, 那么非齐次微分方程

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x) \tag{3.3.33}$$

可以通过下面的常数变易法积分求解.

我们考虑已知一个齐次方程的基础解系 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 并且设

$$y_1'' + a(x)\,y_1' + b(x)\,y_1 = 0, \quad y_2'' + a(x)\,y_2' + b(x)\,y_2 = 0. \tag{3.3.34}$$

然后我们使用常数变易法就可以获得非齐次方程 (3.3.33) 的通解. 如在一阶方程的情形下, 我们把齐次方程的解 (3.3.7)

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

里的常数 C_1 和 C_2 分别换为函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$, 因此,

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \tag{3.3.35}$$

微分一次可得

$$y' = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x). \tag{3.3.36}$$

如果将 (3.3.35) 代入 (3.3.33), 那么我们只可以得到一个带两个未知函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 的方程. 因此, 这就要求我们给这些函数多找一个条件, 该条件是

$$y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) = 0. \tag{3.3.37}$$

随后调用 (3.3.35) 和 (3.3.36), 可得

$$\begin{aligned}
&y = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x),\\
&y' = u_1(x)\,y_1'(x) + u_2(x)\,y_2'(x),\\
&y'' = u_1(x)\,y_1''(x) + u_2(x)\,y_2''(x) + y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x).
\end{aligned}$$

这样,

$$\begin{aligned}
&y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y\\
=\ & u_1(x)\big(y_1'' + a(x)\,y_1' + b(x)\,y_1\big) + u_2(x)\big(y_2'' + a(x)\,y_2' + b(x)\,y_2\big)\\
&+y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x),
\end{aligned}$$

因此, 调用方程 (3.3.34), 我们从方程 (3.3.33) 得到

$$y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x) = f(x). \tag{3.3.38}$$

因为 $y_1(x), y_2(x)$ 已知, 所以可以决定方程组 (3.3.37) 和 (3.3.38) 里的 u_1, u_2:

$$\begin{aligned}
&y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) = 0,\\
&y_1'(x)\,u_1'(x) + y_2'(x)\,u_2'(x) = f(x).
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

同时因为 $y_1(x), y_2(x)$ 是线性无关的, 方程组 (3.3.39) 的行列式

$$W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x) \tag{3.3.40}$$

称为朗斯基行列式, 其值不为零. 因此方程组 (3.3.39) 可以分别用未知函数的微分求得解

$$u_1' = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad u_2' = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)},$$

并积分得到

$$u_1 = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x + C_1, \quad u_2 = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x + C_2. \tag{3.3.41}$$

把 (3.3.41) 代入 (3.3.35), 我们得到下面的结果.

定理 3.3.3 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为齐次方程 (3.3.6)

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$$

的基础解系, 则非齐次方程 (3.3.33)

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)$$

的通解可通过求积得到且有如下形式

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) - y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $W(x)$ 是朗斯基行列式 (3.3.40).

例 3.3.4 解非齐次方程

$$y'' + y = \sin x.$$

我们得到对应齐次方程的基础解系

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$$

和朗斯基行列式 $W[y_1(x), y_2(x)] = 1$. 使用公式 (3.3.41) 可得

$$u_1(x) = -\int \sin^2 x\mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1,$$

$$u_2(x) = \int \cos x \sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2.$$

因此, 经过简单的化简就得到解

$$y = -\frac{x}{2}\cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

在这个例子中，我们可以使用初等函数来表达问题中的微分方程的通解. 但是，这个事实不是很重要，用积分表达通解也同等有效，比如解初值问题. 接下来的两个例子说明了这个观点.

例 3.3.5 我们对方程

$$y'' + 2y' - 8y = x\mathrm{e}^{4x} \tag{3.3.42}$$

积分解初值条件为

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \tag{3.3.43}$$

的柯西问题. (3.3.42) 的特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ 有根 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$, 因此基础解系是

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{-4x}.$$

该方程对应的朗斯基行列式 (3.3.40) 为 $W[y_1(x), y_2(x)] = -6\mathrm{e}^{-2x}$. 套用定理 3.3.3, 为了满足初值条件在 $x = 0$ 的便利性，我们将方程 (3.3.42) 的通解写成下面的形式:

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{2x}\int_0^x \tau\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau - \mathrm{e}^{-4x}\int_0^x \tau\mathrm{e}^{8\tau}\mathrm{d}\tau\right). \tag{3.3.44}$$

对 (3.3.44) 微分得

$$y' = 2C_1\mathrm{e}^{2x} - 4C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{2x}\int_0^x \tau\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau + 2\mathrm{e}^{-4x}\int_0^x \tau\mathrm{e}^{8\tau}\mathrm{d}\tau\right).$$

将初值条件 (3.3.43) 写成 $C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - 4C_2 = 1$, 可以得到 $C_1 = 1/6$, $C_2 = -1/6$. 代入 (3.3.44), 我们得到柯西问题 (3.3.42)—(3.3.43) 的解

$$y = \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{2x}\left(1 + \int_0^x \tau\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau\right) - \mathrm{e}^{-4x}\left(1 + \int_0^x \tau\mathrm{e}^{8\tau}\mathrm{d}\tau\right)\right). \tag{3.3.45}$$

注 3.3.1 我们能够计算 (3.3.44) 的积分并重新表达通解 (3.3.44), 因此可以使用初等函数来表示 (3.3.45). 对其分部积分得到

$$\int_0^x \tau\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{2\tau}\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4},$$

$$\int_0^x \tau\mathrm{e}^{8\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{\tau}{8}\mathrm{e}^{8\tau}\Big|_0^x - \frac{1}{64}\int_0^x \mathrm{e}^{8\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{x}{8}\mathrm{e}^{8x} - \frac{1}{64}\mathrm{e}^{8x} + \frac{1}{64}.$$

代入 (3.3.44) 得到

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{64}\mathrm{e}^{-4x} - \frac{15}{64}\mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{8}x\mathrm{e}^{4x}\right), \tag{3.3.46}$$

柯西问题 (3.3.42)—(3.3.43) 的解 (3.3.45) 可以写为

$$y=\frac{5}{24}\mathrm{e}^{2x}-\frac{65}{384}\mathrm{e}^{-4x}-\frac{5}{128}\mathrm{e}^{4x}+\frac{1}{16}x\mathrm{e}^{4x}. \tag{3.3.47}$$

例 3.3.6 我们对方程

$$y''+2y'-8y=\frac{1}{x+1}\mathrm{e}^{3x+1} \tag{3.3.48}$$

解初值条件为

$$y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=1 \tag{3.3.49}$$

的柯西问题. 如例 3.3.5 一样得到方程 (3.3.48) 的解

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{2x}\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{\tau+1}}{\tau+1}\mathrm{d}\tau-\mathrm{e}^{-4x}\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{7\tau+1}}{\tau+1}\mathrm{d}\tau\right). \tag{3.3.50}$$

微分 (3.3.50) 得到

$$y'=2C_1\mathrm{e}^{2x}-4C_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{2x}\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{\tau+1}}{\tau+1}\mathrm{d}\tau+2\mathrm{e}^{-4x}\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{7\tau+1}}{\tau+1}\mathrm{d}\tau\right).$$

利用初值条件 (3.3.43) 得到 $C_1=1/6$, $C_2=-1/6$. 因此, 柯西问题 (3.3.48)—(3.3.49) 的解是

$$y=\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{2x}\left(1+\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{\tau+1}}{\tau+1}\mathrm{d}\tau\right)-\mathrm{e}^{-4x}\left(1+\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{7\tau+1}}{\tau+1}\mathrm{d}\tau\right)\right). \tag{3.3.51}$$

函数 (3.3.51) 中的积分不可以用初等函数表示.

3.3.5 贝塞尔方程和贝塞尔函数

贝塞尔方程是齐次线性二阶变系数方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0. \tag{3.3.52}$$

这个贝塞尔方程的解称为贝塞尔函数, 该函数在数学物理中起很重要的作用. 由 $J_n(x)$ 表示其中的一个解并称之为 n 阶贝塞尔函数. 幂级数展开后如下, 当 $n=0$ 和 $n=1$ 时:

$$\begin{aligned}J_0(x)&=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots,\\ J_1(x)&=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots.\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

3.3.6 超几何方程

二阶线性微分方程

$$x(1-x)\,y''+\big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\big)\,y'-\alpha\beta\,y=0 \tag{3.3.54}$$

称为*超几何方程*, 其中 α,β 和 γ 为任意参数. 该方程在 $x=0$, $x=1$ 和 $x=\infty$ 有奇点.

此外, 任意齐次线性二阶微分方程

$$(x^2+Ax+B)\,y''+(Cx+D)\,y'+E\,y=0 \tag{3.3.55}$$

可被转换为超几何方程 (3.3.54), 前提是方程 $x^2+Ax+B=0$ 有两个不同的根 x_1 和 x_2. 在由

$$x=x_1+(x_2-x_1)t \tag{3.3.56}$$

定义的新的自变量 t 下改写方程 (3.3.54) 得

$$t(1-t)\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2}-C\,t\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-Ey=0.$$

其中设

$$\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2}=\gamma,\quad C=\alpha+\beta+1,\quad E=\alpha\beta,$$

再次用 x 表示新变量 t 即得到 (3.3.54).

如果 $\alpha\beta=0$ 则超几何方程 (3.3.54) 通过两次积分是可解的. 事实上, 例如 $\beta=0$ 并积分方程

$$\frac{\mathrm{d}y'}{y'}=\frac{(\alpha+1)x-\gamma}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x,$$

得到 $y'=C_1\mathrm{e}^{q(x)}$, 其中

$$q(x)=\int\frac{(\alpha+1)x-\gamma}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$

现在对其进行二次积分得到

$$y=C_1\int\mathrm{e}^{q(x)}\,\mathrm{d}x+C_2,\quad C_1,\ C_2=\text{常数}.$$

在超几何方程理论中, 我们主要强调的是超几何方程的渐近线和它在奇点附近的级数解 (例如见经典著作 [40]). 但是, 在实际问题中, 我们经常需要某一类超几何方程的通解解析式. 因此, 下面的定理[①] 给出了可以使用初等函数或求积法来求解的一类超几何方程. 这类函数的许多特殊情况可以在其他讲特殊函数的书中找到.

[①] N.H. Ibragimov, Invariant Lagrangians and a new method of integration of nonlinear equations, J. Mathematical Analysis and Applications, V. 304, No. 1, 2005, pp. 212–235.

定理 3.3.4 设在超几何方程 (3.3.54) 中, $\beta=-1$ 并且存在两个任意参数 α 和 γ:

$$x(1-x)\,y''+(\gamma-\alpha\,x)\,y'+\alpha\,y=0, \tag{3.3.57}$$

那么该方程的通解能通过积分得到, 其形式为

$$y=C_1\left(x-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\int\left(|x|^{-\gamma}\,|x-1|^{\gamma-\alpha}\left(x-\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right)^{-2}\right)\mathrm{d}x+C_2\left(x-\frac{\gamma}{\alpha}\right), \tag{3.3.58}$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数.

注 3.3.2 如果 γ 和 $\gamma-\alpha$ 是有理数, 可以通过标准变换将 (3.3.58) 中的积分化简为有理函数的积分并将 (3.3.58) 的解表示为初等函数.

3.4 高阶线性方程

一般 n 阶变系数线性方程有形式

$$L_n[y]\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x). \tag{3.4.1}$$

术语*线性*表示该方程满足性质

$$L_n[C_1y_1+C_2y_2]=C_1L_n[y_1]+C_2L_n[y_2], \tag{3.4.2}$$

其中 n 阶线性微分算子

$$L_n=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n,$$

$D=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. 因此 L_n 是*一个线性微分算子*. 如果 $f(x)=0$, 方程 (3.4.1) 是齐次的, 否则是*非齐次的* (参考 3.2.6 节和 3.3 节).

3.4.1 齐次方程 · 基础解系

*线性叠加原理*来源于性质 (3.4.2), 该原理指出齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \tag{3.4.3}$$

的通解是 n 个线性无关特解的*线性叠加*

$$y=C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x), \tag{3.4.4}$$

其中 $C_1,\cdots,C_n$ 是任意常数. 由 n 个线性无关解组成的任意集合 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 称为 (3.4.3) 的*一个基础解系*.

3.4.2 非齐次方程 · 常数变易法

定理 3.4.1 若齐次方程 (3.4.3) 的基础解系已知, 则非齐次方程 (3.4.1) 的通解可以通过积分获得.

证明 根据拉格朗日 (1774 年) 得到的结论, 该解可以通过一般常数变易法获得. 即, 我们使用方程 $u_i(x)$ 替代 (3.4.4) 中的常数 C_i 得到 (参考 3.3 节):

$$y = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x).$$

拉格朗日方法提出了以下决定未知方程 $u_i(x)$ 的关系式:

$$\begin{aligned}
y_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \cdots + y_n\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} &= 0,\\
y_1'\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \cdots + y_n'\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} &= 0,\\
&\cdots\cdots\\
y_1^{(n-2)}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \cdots + y_n^{(n-2)}\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} &= 0,\\
y_1^{(n-1)}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \cdots + y_n^{(n-1)}\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} &= f(x).
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

因为 $y_1, \cdots, y_n$ 已知并且它们线性无关, 所以方程 (3.4.5) 可以分别用未知函数的微分形式求解并写成积分形式

$$\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x} = \psi_k(x), \quad k = 1, \cdots, n.$$

3.4.3 常系数方程

欧拉猜想讨论了二阶方程的形式, 它也适用于高阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad a_1, \cdots, a_n = \text{常数}. \tag{3.4.6}$$

使用方程 (3.3.25) 的特解

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \lambda = \text{常数},$$

可以将 n 阶微分方程 (3.4.6) 简化为 n 次代数方程

$$P_n[\lambda] \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{3.4.7}$$

并称该方程为原方程的特征方程.

多项式 $P_n[\lambda]$ 称为 (3.4.6) 的特征多项式. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为特征方程 (3.4.7) 的相异实根. 其特解 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ 提供了一个基础解系. 根据叠加原理 (3.4.4) 可知, 常系数方程 (3.4.6) 的通解来自于线性组合

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n\mathrm{e}^{\lambda_n x}. \tag{3.4.8}$$

复根和重根的情况如在 3.3 节对二阶方程讨论时的情形那样处理. 例如, 假设存在 λ_1 重复 s 次, 那么它的相应的解是

$$y_1 = \left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_s x^{s-1}\right) \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \tag{3.4.9}$$

C_i 为任意常数. 取所有的多重根, 可以得到以下对通解 (3.4.8) 的修正:

$$y = q_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + q_r(x)\mathrm{e}^{\lambda_r x}. \tag{3.4.10}$$

这里 $q_s(x)$ 为任意系数的 $s-1$ 次多项式, 其中 s 是对应重根 λ_s 的次数 ($1 \leqslant s \leqslant r$).

考虑复数 $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ 的情况, 表达式 (3.4.9) 的右边 (由此 (3.4.10) 的首项) 应替代为

$$\left(C_1 + \cdots + C_s x^{s-1}\right)\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + \left(C_{s+1} + \cdots + C_{2s} x^{s-1}\right)\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x.$$

例 3.4.1 考虑方程 (2.3.20),

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} = \alpha^4 u, \quad \alpha = \text{常数}.$$

该方程对应的特征方程 $\lambda^4 - \alpha^4 = 0$ 有四个相异根:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha, \quad \lambda_3 = \alpha i, \quad \lambda_4 = -\alpha i.$$

这样得到公式 (2.3.21) 的通解

$$u = C_1\mathrm{e}^{\alpha x} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha x} + C_3\cos\alpha x + C_4\sin\alpha x.$$

例 3.4.2 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} + 2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0.$$

该方程对应的特征方程

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

有重虚根

$$\lambda_{1,2} = i, \quad \lambda_{3,4} = \overline{\lambda}_{1,2} = -i.$$

因此其通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

3.4.4 欧拉方程

方程

$$x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1 x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0 \tag{3.4.11}$$

称为欧拉方程, 其中 $a_1, \cdots, a_n =$ 常数. 这个变系数方程在伸缩变换下是不变的, 即用 kx 替换掉 x, $k \neq 0$, 方程保持不变. 因此变换

$$t = \ln |x| \tag{3.4.12}$$

将伸缩变换 $k\,x$ 转成变换 $t + \ln |k|$, 这样就可以将方程 (3.4.11) 转换为一个常系数方程 $y(t)$.

例 3.4.3 考虑二阶欧拉方程

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 3x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

引入一个新自变量 $t = \ln |x|$, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0.$$

对于后面的方程, 其对应的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

且该方程有重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. 因此

$$y = (C_1 + C_2\, t)\mathrm{e}^{-t}.$$

返回初始变量 x, 我们得到问题中的方程的通解

$$y = \frac{1}{x}\,(C_1 + C_2\, \ln |x|).$$

3.5 一阶微分方程组

3.5.1 微分方程组的一般属性

考虑由一阶常微分方程所组成的一般方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x} = f^i(x, y^1, y^2, \cdots, y^n), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.5.1}$$

设 f^i 在 $x_0, y_0^1, \cdots, y_0^n$ 的邻域内是连续的.

我们将使用向量记号

$$\boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^n),\quad \boldsymbol{f}=(f^1,\cdots,f^n)$$

并用向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{y}\big|_{x=x_0}=\boldsymbol{y}_0 \tag{3.5.2}$$

表达 (3.5.1) 初值问题, 其中

$$\boldsymbol{y}_0=(y_0^1,\cdots,y_0^n).$$

这样, $\boldsymbol{y}$ 是一个 n 元组因变量. 第 i 个元记为 y_i, 称为 $\boldsymbol{y}$ 的第 i 个坐标.

经典解的定义同样也适用微分方程组, 只需将单变量 y 自然替换成向量 $\boldsymbol{y}$ 即可. 我们将讨论微分方程组解的存在性和唯一性定理的简单形式.

定理 3.5.1 设函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 在点 $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 邻域内连续可微. 初值问题 (3.5.2) 在 x_0 邻域上有且只有一个解. 由此 n 个一阶微分方程 (3.5.1) 的方程组的通解依赖于 n 个任意常数 $C_1,\cdots,C_n$, 即, 依赖于 $x=x_0$ 对应的初值 $y_0^1,\cdots,y_0^n$. 因此, (3.5.1) 的通解可写成

$$y^i=\phi^i(x,C_1,\cdots,C_n),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.5.3}$$

3.5.2 首次积分

考虑 $n-1$ 个因变量组成的一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}=f^i(x,y^1,y^2,\cdots,y^{n-1}),\quad i=1,\cdots,n-1. \tag{3.5.4}$$

根据定理 3.5.1, 它的通解为

$$y^i(x)=\phi^i(x,C_1,\cdots,C_{n-1}),\quad i=1,\cdots,n-1,$$

其中, 分别求积分常数 C_i,

$$\psi_i(x,y^1,y^2,\cdots,y^{n-1})=C_i,\quad i=1,\cdots,n-1. \tag{3.5.5}$$

关系组 (3.5.5) 称为方程 (3.5.4) 的**通积分**. 若 $y^1,y^2,\cdots,y^{n-1}$ 被方程组 (3.5.4) 的任意解的坐标 $y^1(x),y^2(x),\cdots,y^{n-1}(x)$ 替代, 那么方程组 (3.5.5) 的每个方程的左边将约化为一个常数. 出于这个理由, 在 (3.5.5) 里的每个单独的关系称为方程组 (3.5.4) 的**首次积分**.

例 3.5.1 求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x. \tag{3.5.6}$$

我们可以使用如下的步骤求解该方程组. 先对 (3.5.6) 的第一个方程进行微分, 再替换第二个方程的 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 则问题简化成一个二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0$$

的积分. 它的基础解系是

$$x_{(1)} = \cos t, \quad x_{(2)} = \sin t,$$

因此

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

由 (3.5.6) 中的第一个方程 $y = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 可以得到

$$y = C_2 \cos t - C_1 \sin t.$$

因此方程组 (3.5.6) 的通解是

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = C_2 \cos t - C_1 \sin t. \tag{3.5.7}$$

解方程 (3.5.7) 的 C_1, C_2, 得到首次积分

$$x \cos t - y \sin t = C_1, \quad x \sin t + y \cos t = C_2. \tag{3.5.8}$$

因此在方程组 (3.5.5) 里的方程 ψ 是

$$\psi_1(t, x, y) = x \cos t - y \sin t, \quad \psi_2(t, x, y) = x \sin t + y \cos t. \tag{3.5.9}$$

首次积分也可以将方程组 (3.5.6) 表示成以下形式获得 (更多参见方程 (3.5.13)):

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = -\frac{\mathrm{d}y}{x} = \mathrm{d}t.$$

第一个方程的积分可以写成 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ 得

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad a = \text{常数}, \tag{3.5.10}$$

现在第二个方程可以写为

$$\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 0$$

并得

$$t+\arcsin(y/a)=C.$$

调用方程 (3.5.10) 和基本公式 (1.1.7), 我们有

$$\arcsin\frac{y}{a}=\arctan\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}=\arctan\frac{y}{x}, \tag{3.5.11}$$

因此

$$t+\arctan\frac{y}{x}=C.$$

最终, 我们得到方程 (3.5.5) 的首次积分方程

$$\widetilde{\psi}_1(t,x,y)=x^2+y^2,\quad \widetilde{\psi}_2(t,x,y)=t+\arctan\frac{y}{x}. \tag{3.5.12}$$

该首次积分方程不同于 (3.5.9).

首次积分 (3.5.5) 不是通解的唯一表达式. 事实上, 任意关系 $\widetilde{\psi}(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})=C$ 都是一个首次积分, 因此方程 ψ 可以替代为任意 $n-1$ 个函数无关的函数 $\widetilde{\psi}_i(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})$, $i=1,\cdots,n-1$. 因此, 独立于首次积分的通积分 (3.5.5) 的定义是有用的.

定义 3.5.1 给定一个方程组 (3.5.4), 它的首次积分是满足任意解 $y^i=y^i(x)$, $i=1,\cdots,n-1$ 的关系式

$$\psi(x,y^1,y^2,\cdots,y^{n-1})=C,$$

其中函数 ψ 是不同的常数. 换言之, 函数 ψ 也简称为首次积分, 对不同的解, 等于不同的常数.

方程组 (3.5.4) 可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y^1}{f^1}=\frac{\mathrm{d}y^2}{f^2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}y^{n-1}}{f^{n-1}}.$$

因为分母可以乘以任意不为 0 的函数, 我们可以将这些方程 (用符号 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 代替变量 $x,y^1,\cdots,y^{n-1}$) 写成对称形式:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1(\boldsymbol{x})}=\frac{\mathrm{d}x^2}{\xi^2(\boldsymbol{x})}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x^n}{\xi^n(\boldsymbol{x})}. \tag{3.5.13}$$

上式中, 对称是基于 $n-1$ 个一阶常微分方程的形式 (3.5.13) 并不是特别指明自变量, 可以是任意的 n 个变量 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 这一事实. 由定义 3.5.1 给出的方程组 (3.5.13) 的首次积分可写成

$$\psi(\boldsymbol{x})=C. \tag{3.5.14}$$

以后我们将 $\psi(\boldsymbol{x})$ 等同于首次积分 (3.5.14) .

引理 3.5.1 当且仅当 $u=\psi(\boldsymbol{x})$ 满足偏微分方程

$$\xi^1(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x^n}=0 \tag{3.5.15}$$

时函数 $\psi(\boldsymbol{x})=\psi(x^1,\cdots,x^n)$ 是方程组 (3.5.13) 的首次积分.

证明 设函数 $\psi(\boldsymbol{x})$ 提供了一个首次积分. 因为对微分方程组 (3.5.13) 的任意解 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$, $\psi(\boldsymbol{x})=$ 常数, 在 (3.5.13) 的任何积分曲线上作微分 $\mathrm{d}\psi$ 所得结果为零:

$$\mathrm{d}\psi\equiv\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n=0. \tag{3.5.16}$$

换言之, 当 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^n)$ 与向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$ 成比例时, 即 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{\xi}$, $\lambda\neq0$ 时, (3.5.16) 成立. 使用代换 $\mathrm{d}x^i=\lambda\xi^i$ 至 (3.5.16), 得到方程 (3.5.15). 这样, 我们证明了方程 (3.5.15) 在某点 x 处满足属于积分曲线组 (3.5.13). 但是, 根据定理 3.5.1, 积分曲线过任一点. 因此, 方程 (3.5.15) 在任意点 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域内同样成立. 以上的这些步骤是可逆的, 至此证明完成.

定义 3.5.2 一组 $n-1$ 个首次积分

$$\psi_k(\boldsymbol{x})=C_k,\quad k=1,\cdots,n-1 \tag{3.5.17}$$

称为无关的, 若函数 $\psi_k(\boldsymbol{x})$ 是函数无关的, 即没有形如 $F(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})=0$ 的关系.

例 3.5.2 考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

通过对方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}\quad\text{和}\quad\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

积分, 我们可以分别得到 $y/x=C_1$ 和 $z/x=C_2$. 因此, 我们有下面两个无关的首次积分:

$$\psi_1(x,y,z)=\frac{y}{x},\quad\psi_2(x,y,z)=\frac{z}{x}.$$

方程 (3.5.15) 有形式

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

我们可以容易地验证 $u=\psi_1(x,y,z)=y/x$ 和 $u=\psi_2(x,y,z)=z/x$ 满足这个方程.

任意 $n-1$ 个无关的首次积分代表了方程组 (3.5.13) 的通解. 因为一个由 $n-1$ 个一阶方程组成的方程组的通解也正是依赖于 $n-1$ 个任意常数 (见定理 3.5.1), 从而可以得到下面的定理.

定理 3.5.2 一个由 $n-1$ 个一阶常微分方程 (3.5.13) 组成的方程组有 $n-1$ 个无关的首次积分 (3.5.17). 微分方程组 (3.5.13) 的任意其他首次积分 (3.5.14) 可用 (3.5.17) 表示为

$$\psi = F(\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}). \tag{3.5.18}$$

例 3.5.3 考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz} = \frac{\mathrm{d}y}{xz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}.$$

该方程组等价于

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz} = \frac{\mathrm{d}y}{xz}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{xz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy},$$

或者, 在各自方程的两边同时乘以 z 和 x 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{y}.$$

上述方程组可以改写为 $y\mathrm{d}y - x\mathrm{d}x = 0$ 和 $y\mathrm{d}y - z\mathrm{d}z = 0$ 并积分, 得到下面两个无关的首次积分:

$$\psi_1 \equiv x^2 - y^2 = C_1, \quad \psi_2 \equiv z^2 - y^2 = C_2.$$

另外, 问题中的方程组也可写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{x}.$$

然后得到首次积分

$$\psi_1 \equiv x^2 - y^2 = C_1, \quad \psi_3 \equiv x^2 - z^2 = C_3,$$

因此可以得到三个不同的首次积分, $\psi_1 = C_1, \psi_2 = C_2$ 和 $\psi_3 = C_3$. 所以, 它们不是无关的. 事实上, $\psi_3 = \psi_1 - \psi_2$.

这样, 在这个例子中, 一个任意首次积分的形如 (3.5.18) 的表达式可写成 $\psi = F(x^2 - y^2, z^2 - y^2)$.

3.5.3 常系数的线性方程组

以上讨论的欧拉方法同样可应用于一阶常系数一般线性齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y^j=0,\ i=1,\cdots,n \quad 或 \quad \boldsymbol{y}'+A\boldsymbol{y}=0. \tag{3.5.19}$$

这里 $\boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^n)$ 表示因变量, $\boldsymbol{y}'=\mathrm{d}\boldsymbol{y}/\mathrm{d}x$ 和 $A=(a_{ij})$ 是一个常数 $n\times n$ 矩阵, 所以 $(A\boldsymbol{y})^i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}y^j$.

特解的欧拉公式现在可写成

$$\boldsymbol{y}=\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{l},\quad \lambda=常数. \tag{3.5.20}$$

这里 $\boldsymbol{l}=(l^1,\cdots,l^n)$ 是由方程 (3.5.19) 中决定的未知常数向量. 将 (3.5.20) 代入 (3.5.19) 得到

$$(A+\lambda E)\boldsymbol{l}=0, \tag{3.5.21}$$

其中 E 为单位 $n\times n$ 矩阵. 当且仅当判别式 $|A+\lambda E|=\det(A+\lambda E)=0$ 时, 线性方程组 (3.5.21) 有一个解 $\boldsymbol{l}\neq 0$. 方程组 (3.5.19) 的特征多项式 P_n 和特征方程被定义为

$$P_n(\lambda)\equiv|A+\lambda E|=0. \tag{3.5.22}$$

设特征方程 (3.5.22) 有异根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 那么可以得到 (3.5.21) 的 n 个线性无关解 $\boldsymbol{l}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{l}_{(n)}$, 由此得到基础解系

$$\boldsymbol{y}_{(1)}=\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{l}_{(1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_{(n)}=\mathrm{e}^{\lambda_n x}\boldsymbol{l}_{(n)}, \tag{3.5.23}$$

且方程组 (3.5.19) 的通解是

$$\boldsymbol{y}=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{l}_{(1)}+\ \cdots+\ C_n\mathrm{e}^{\lambda_n x}\boldsymbol{l}_{(n)}. \tag{3.5.24}$$

如果方程 (3.5.22) 有一个复数根 $\lambda=\alpha+i\beta$ (因此它的共轭复数也为根), 那么方程 (3.5.21) 有一个复数解 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{p}+i\boldsymbol{q}$. 相应的解 (3.5.20) 可以分离成两个实数解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_{(1)}&=\mathrm{e}^{\alpha x}(\boldsymbol{p}\cos\beta x-\boldsymbol{q}\sin\beta x),\\ \boldsymbol{y}_{(2)}&=\mathrm{e}^{\alpha x}(\boldsymbol{p}\sin\beta x+\boldsymbol{q}\cos\beta x).\end{aligned} \tag{3.5.25}$$

例 3.5.4 让我们解方程组 (参考例 3.5.1)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x.$$

这里 $\boldsymbol{y}=(x,y)$, $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=-1$, $a_{21}=1$. 特征方程有复数根 $\lambda=i$, $\overline{\lambda}=-i$, 使用方程 (3.5.21) 得到 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{p}+i\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}=(1,0)$, $\boldsymbol{q}=(0,1)$. 方程 (3.5.25) 提供了基础解系

$$\boldsymbol{y}_{(1)}=(\cos t,\ -\sin t),\quad \boldsymbol{y}_{(2)}=(\sin t,\ \cos t). \tag{3.5.26}$$

记 $\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{y}_{(1)}+C_2\boldsymbol{y}_{(2)}$, 最后可以得到解 (3.5.7)

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t,\quad y=C_2\cos t-C_1\sin t.$$

3.5.4 方程组的常数变易法

现在考虑非齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y^j=f_i(x),\quad i=1,\cdots,n. \tag{3.5.27}$$

如果 $f_i=0$, $i=1,\cdots,n$, 那么它是齐次的. 否则, 它是非齐次的 (参考 3.2.6 节).

若齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y^j=0,\quad i=1,\cdots,n$$

的通解已知, 则非齐次方程组 (3.5.27) 可以用常数变易法求解. 我们用下面的例子说明这个方法.

例 3.5.5 考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-y=\cos t,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x=1. \tag{3.5.28}$$

该方程组对应的齐次方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-y=0,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x=0,$$

且该齐次方程组的解为 (3.5.7)

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t,\quad y=C_2\cos t-C_1\sin t.$$

按照单个方程的情形来处理. 即, 将常数 C_1,C_2 用未知函数 $u(t),v(t)$ 替代, 从而可以得到表达式

$$x=u(t)\cos t+v(t)\sin t,\quad y=v(t)\cos t-u(t)\sin t, \tag{3.5.29}$$

将其代入 (3.5.28), 得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cos t+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\sin t=\cos t,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cos t-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\sin t=1,$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\cos^2 t-\sin t,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\cos t\,\sin t+\cos t. \tag{3.5.30}$$

对方程 (3.5.30) 的积分得到

$$u=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\,\cos t+\cos t+K_1,\quad v=-\frac{1}{2}\cos^2 t+\sin t+K_2. \tag{3.5.31}$$

将 (3.5.31) 代入 (3.5.29) 并通过 C_1 和 C_2 表示任意实数 K_1 和 K_2, 最后就可以得到方程组 (3.5.28) 的解

$$x=1+\frac{t}{2}\cos t+C_1\cos t+C_2\sin t,$$

$$y=-\frac{t}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t+C_2\cos t-C_1\sin t.$$

常数变易法也可以使用如下的向量形式来表示. 首先将方程组 (3.5.27) 写成

$$\boldsymbol{y}'+A(x)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(x). \tag{3.5.32}$$

此外, 我们把非齐次单个线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解 (3.2.35) 写成

$$y=C\,y_1(x)+y_1(x)\int y_1^{-1}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$y_1(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

是齐次方程 $y'+P(x)\,y=0$ 的特解. 如 3.2.7 节的过程, 我们可得到以下结果.

定理 3.5.3 设 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 是齐次方程组

$$\boldsymbol{y}'+A(x)\boldsymbol{y}=0$$

的基础解系, 非齐次方程组的通解 (3.5.32) 由下面积分求得:

$$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{y}_1(x)+\cdots+C_n\boldsymbol{y}_n(x)+Y(x)\int Y^{-1}(x)\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x, \tag{3.5.33}$$

其中 $Y(x)$ 是 $n\times n$ 矩阵, 定义为

$$Y(x)=(\boldsymbol{y}_1(x)\ \cdots\ \boldsymbol{y}_n(x)) \tag{3.5.34}$$

并称为基本矩阵, $Y^{-1}(x)$ 是其对应的逆矩阵.

例 3.5.6 再次考虑例 3.5.5 中方程组 (3.5.28). 采用向量形式 (3.5.32):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这样, 我们有一个二维关于自变量 t 的非齐次向量方程 (3.5.32), 且

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

齐次方程组的基础解系来自于 (3.5.26). 我们写成

$$\boldsymbol{y}_{(1)} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_{(2)} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

并获得以下的基本矩阵 (3.5.34) 和它对应的逆矩阵:

$$Y = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

这样, 通解公式 (3.5.33) 可写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = {} & C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

我们有

$$\int \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin t \\ \sin t \cos t + \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t.$$

对右边进行积分 (见方程 (3.5.30)) 得到

$$\begin{pmatrix} \int (\cos^2 t - \sin t)\mathrm{d}t \\ \int (\sin t \cos t + \cos t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\sin t \cos t + \cos t \\ -\dfrac{1}{2}\cos^2 t + \sin t \end{pmatrix}.$$

代入上面 $\boldsymbol{y}$ 的表达式并改变任意常数 C_1, C_2, 最后就可以得到例 3.5.5 中的解, 即

$$\boldsymbol{y} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + t\cos t \\ -t\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

习题三

3.1. 求解下列一阶微分方程:

(i) $y'=0$, (ii) $y'=2xy$, (iii) $y'=\dfrac{y}{1+x^2}$, (iv) $y'=y+x^2$,

(v) $y'+C_1y+x+x^2=0$.

3.2. 求解下列二阶微分方程:

(i) $y''=0$, (ii) $y''=2y$, (iii) $y''=-2y$, (iv) $y''=2y'$,

(v) $y''=y+x^2$, (vi) $y''=((x+x^2)\mathrm{e}^y)'$.

3.3. 求解下列三阶微分方程:

(i) $y'''=0$, (ii) $y'''=y$, (iii) $y'''+y=0$, (iv) $y'''=y+x^2$.

3.4. 挑选齐次方程$y'+y^2=C\,x^s$, 其中 C 和 s 是任意常数.

3.5. 根据例 3.1.5 证明方程的一致齐次性.

3.6. 给出证明定理 3.3.1 的详细计算过程. 特别是, 证明变换 (3.3.11) 可将一般线性齐次二阶方程 (3.3.6) 映射至最简单的形式 (3.3.10).

3.7. 通过定理 3.2.2 的两个性质 (A) 和 (B) 测试下面的里卡蒂方程的线性性:

(i) $y'=1+y^2$, (ii) $y'=1-y^2$, (iii) $y'=x+2xy+xy^2$

(iv) $y'=x+y^2$, (v) $y'=P(x)+Q(x)y+(Q(x)-P(x))y^2$,

(vi) $y'=x+xy^2$, (vii) $y'=P(x)+Q(x)y+(Q(x)-2P(x))y^2$,

(viii) $y'=x-xy^2$, (ix) $y'=P(x)+Q(x)y+2(Q(x)-2P(x))y^2$,

(x) $y'=P(x)+(1+P(x))y+y^2$, (xi) $y'=P(x)+(1+2P(x))y+y^2$,

(xii) $y'=\dfrac{2}{x^2}-y^2$, (xiii) $y'=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2-x^2}{x^2}y-y^2$,

(xiv) $y'=x+(1+x)^2\,y+(1+x+x^2)\,y^2$.

3.8. 解下面的初值问题:

$$\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}t}=y^2,\ \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t}=y^1,\quad y^1\big|_{t=0}=x^1,\ y^2\big|_{t=0}=x^2.$$

3.9. 指出下面的方程是全微分形式并求解:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{2y}{x}\,\mathrm{d}y=0.$$

3.10. 下面的方程描述了受小阻尼力的阻尼机械系统的自由振动, 试对其进行积分:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=0,$$

其中 b,c 是正常数, 并且 $b^2<c$.

3.11. 解下列方程:

(i) $y''+y=\tan x$, (ii) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$, (iii) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

3.12. 用例 3.2.1 中的方程 (3.2.7) 和 (3.2.8) 解全微分方程 $\left(y\,\mathrm{e}^{xy}+\cos x\right)\mathrm{d}x+x\,\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y=0$.

3.13. 求所有可以化简为形式 $g(x,y,y')y'''=0$ 的二阶微分方程 $f(x,y,y',y'')=0$.

3.14. 求解欧拉公式 $x^2y''+2xy'+4y=0,\ x>0$.

3.15. 求解方程

$$y''-3\frac{y'}{x}+3\frac{y}{x^2}=0.$$

第四章　一阶偏微分方程

只含有一个因变量的一阶偏微分方程也满足常微分方程的理论, 这两者在表面上看上去有着很大的区别, 但是它们之间可以使用特征方程联系起来. 更进一步, 对一阶偏微分方程理论的了解也是学习李群分析理论的先决条件.

补充读物: E. Goursat [9], V.I. Smirnov [36], N.H. Ibragimov [21].

4.1　简介

设 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 为 $n\geqslant 2$ 个自变量, u 为因变量. 我们记偏微分 $p_i=\partial u/\partial x^i$ 为 $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$.

在微分方程中, 当自变量的个数大于 1 时, 我们称该方程为偏微分方程. 当方程中的最高阶导数只有一阶时, 我们称该方程为一阶偏微分方程. 只含有一个因变量的一阶偏微分方程可以写成

$$F(x^1,\cdots,x^n,u,p_1,\cdots,p_n)=0. \tag{4.1.1}$$

如果 $n=2$, 其自变量记为 x 和 y, 其偏微分记为 $p=\partial u/\partial x$, $q=\partial u/\partial y$. 那么方程 (4.1.1) 可以写成 $F(x,y,u,p,q)=0$. 它的解 $u=\phi(x,y)$ 是三维空间 x,y,u 中的一个曲面, 因此, 它通常也称为**积分曲面**.

一般的一阶线性偏微分方程可以写为

$$\xi^1(x)p_1+\cdots+\xi^n(x)p_n+c(x)u=f(x), \tag{4.1.2}$$

或者

$$\xi^1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(x)\frac{\partial u}{\partial x^n}+c(x)u=f(x). \tag{4.1.3}$$

如果 $f(x)=0$, 方程 (4.1.2) 称为是函数齐次的 (参见 3.1.4 节和 3.2.6 节). 然而, 这里方程是齐次的, 表明在方程 (4.1.2) 中, 有 $c(x)=0$ 和 $f(x)=0$, 即得方程

$$\xi^1(x)p_1+\cdots+\xi^n(x)p_n=0. \tag{4.1.4}$$

一般的一阶拟线性偏微分方程有形式

$$\xi^1(x,u)p_1+\cdots+\xi^n(x,u)p_n=g(x,u). \tag{4.1.5}$$

4.2 齐次线性方程

下面, 我们来介绍一阶齐次偏微分方程算子

$$X=\xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}\cdot \tag{4.2.1}$$

引理 4.2.1 设 $\tilde{x}^i$ 是一个新的自变量, 并且定义为

$$\tilde{x}^i=\varphi^i(x),\quad i=1,\cdots,n. \tag{4.2.2}$$

那么, 微分算子 (4.2.1) 可以用新变量写为形式

$$\widetilde{X}=X(\varphi^1)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^1}+\cdots+X(\varphi^n)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^n}, \tag{4.2.3}$$

其中 $X(\varphi^i)=\xi^1(x)\partial\varphi^i/\partial x^1+\cdots+\xi^n(x)\partial\varphi^i/\partial x^n$.

证明 由偏微分的链式法则, 可得

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^k}.$$

只要把上面的表达式代入算子 (4.2.1) 中, 变形后即可得到表达式 (4.2.3).

如果使用这个算子, 齐次线性偏微分方程 (4.1.4) 可以写为

$$X(u)\equiv\xi^1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(x)\frac{\partial u}{\partial x^n}=0. \tag{4.2.4}$$

定理 4.2.1 方程 (4.2.4) 的通解有形式

$$u=F\left(\psi_1(x),\cdots,\psi_{n-1}(x)\right), \tag{4.2.5}$$

其中 F 是一个任意的含有 $n-1$ 个变量的函数, 并且

$$\psi_1(x)=C_1,\ \cdots,\ \psi_{n-1}(x)=C_{n-1}$$

是下面 $n-1$ 个常微分方程组的无关首次积分, 这 $n-1$ 个常微分方程称为方程 (4.2.4) 的特征方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1(x)}=\frac{\mathrm{d}x^2}{\xi^2(x)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x^n}{\xi^n(x)}. \tag{4.2.6}$$

证明 由方程 (4.2.5) 定义的函数 u 是方程 (4.2.4) 的解. 事实上, 由引理 3.5.1 可得 $X(\psi_1)=0,\ \cdots,\ X(\psi_{n-1})=0$. 因此, 由链式法则可得, 方程 (4.2.4) 变为

$$X\left(F(\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})\right)=\frac{\partial F}{\partial\psi_1}X(\psi_1)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\psi_{n-1}}X(\psi_{n-1})=0.$$

让我们来验证方程 (4.2.4) 的任意解都满足形式 (4.2.5). 首先引入新的自变量

$$x'^1=\psi_1(x),\ \cdots,\quad x'^{n-1}=\psi_{n-1}(x),\quad x'^n=\phi(x), \tag{4.2.7}$$

其中 $\psi_1(x),\cdots,\psi_{n-1}(x)$ 是特征方程组 (4.2.6) 的 $n-1$ 个无关的首次积分的左边项, $\phi(x)$ 是任意一个函数, 且该函数与 $\psi_1(x),\cdots,\psi_{n-1}(x)$ 无关. 引理 3.5.1 表明 $X(\psi_1)=\cdots=X(\psi_{n-1})=0$, 而 $X(\phi)\neq 0$. 根据引理 4.2.1, 方程 (4.2.4) 有形式

$$X(u)=X(\phi)\frac{\partial u}{\partial x'^n}=0,$$

其中 $\partial u/\partial x'^n=0$. 因此, 方程的通解是 $x'^1,\cdots,x'^{n-1}$ 的任意函数, 即 $u=F(x'^1,\cdots,x'^{n-1})$. 利用方程 (4.2.7), 我们就可以得到方程的通解的表达式 (4.2.5).

例 4.2.1 求解方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

特征方程组 (4.2.6) 的形式为 $\mathrm{d}x/x=\mathrm{d}y/y$, 因此由它可以得到首次积分 $y/x=C$. 那么, 方程 (4.2.4) 中的通解 (4.2.5) 可以写为 $u=F(y/x)$.

例 4.2.2 考虑方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

其特征方程 (4.2.6) 的形式为 $\mathrm{d}x/y=-\mathrm{d}y/x$, 或者 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$. 对其积分可得首次积分 $x^2+y^2=C$. 最后, 方程 (4.2.4) 的通解 (4.2.5) 可以写为 $u=F(x^2+y^2)$.

4.3 非齐次方程的特解

首先, 让我们从有如下形式的非齐次线性方程 (4.1.3) 开始:

$$\xi^1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(x)\frac{\partial u}{\partial x^n}=f(x). \tag{4.3.1}$$

使用微分算子 (4.2.1), 方程 (4.3.1) 可以写为

$$X(u)=f(x). \tag{4.3.2}$$

注意到我们可以由非齐次方程 $X(u)=f(x)$ 的一个特解 $u=\varphi(x)$ 来得到方程的通解. 即, 方程 (4.3.1) 的通解 u 由如下形式给出:

$$u=\varphi(x)+v, \tag{4.3.3}$$

其中 v 是对应齐次方程 $X(v)=0$ 的通解. 事实上, 令 $X(\varphi(x))=f(x)$. 设 $u=v+\varphi(x)$, 那么我们可以得到

$$X(u)=X(v)+X(\varphi(x))=X(v)+f(x).$$

当且仅当 $X(v)=0$ 时, $X(u)=f(x)$ 成立.

因此, 如果知道了方程 (4.3.1) 的一个特解为 $\varphi(x)$, 我们可以将求解非齐次线性偏微分方程 (4.3.1) 的问题转化为求解齐次线性微分方程的问题, 或者等价地, 确定特征方程组 (4.2.6) 的 $n-1$ 个无关的首次积分的问题. 通常, 找到一个特解 $\varphi(x)$ 并非很容易. 然而, 在一些特殊情况下, 我们可以很容易地得到所需要的特解. 例如, 在如下的一些情况下, 特解是可以很容易求出的.

例 4.3.1 求解方程 (4.3.1), 其中有 ξ^i 中的一个和函数 f 只取决于单一变量 x^i, 例如

$$\xi^1(x^1)\frac{\partial u}{\partial x^1}+\xi^2(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial u}{\partial x^2}+\cdots+\xi^n(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial u}{\partial x^n}=f(x^1). \tag{4.3.4}$$

我们可以很容易地得到方程 (4.3.4) 的一个特解, 将 $u=\varphi(x^1)$ 代入方程 (4.3.4) 中可得常微分方程

$$\xi^1(x^1)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x^1}=f(x^1),$$

因此, 其特解可以由积分

$$\varphi(x^1)=\int\frac{f(x^1)}{\xi^1(x^1)}\mathrm{d}x^1$$

求得. 其对应的通解由公式 (4.3.3) 给出.

例 4.3.2 设含有两个自变量 x 和 y 的方程

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=1$$

满足形式 (4.3.4), 其中 $\xi^1=x^2, f=1$. 因此, 我们可以找到形如 $u=\varphi(x)$ 的一个特解. 那么问题就转化为求解常微分方程 $x^2\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x=1$, 这样可以得到 (忽略积分常数) 特解为 $\varphi=-1/x$. 这里, 特征方程 (4.2.6) 为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{xy},$$

通过求解该特征方程, 我们就可以得到首次积分为

$$\frac{y}{x}=C.$$

因此, 方程的通解 (4.3.3) 可以写为

$$u=-\frac{1}{x}+F\left(\frac{y}{x}\right).$$

例 4.3.3 考虑方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=y.$$

在方程的两边同时除以 y, 比较形式 (4.3.4), 可得 $\xi^1=1, f=1$. 设 $u=\varphi(x)$, 我们可以从 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x=1$ 中得到一个特解 $\varphi=x$. 其相应的齐次线性偏微分方程的通解 (参见例 4.2.2) 为 $v=F\left(x^2+y^2\right)$, 因此最后可以得到所需要的非齐次微分方程的通解的形式如下:

$$u=x+F\left(x^2+y^2\right).$$

例 4.3.4 非齐次方程

$$x^1\frac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+x^n\frac{\partial u}{\partial x^n}=1$$

的通解形式如下:

$$u=\ln|x^n|+F\left(x^1/x^n,\ x^2/x^n,\ \cdots,\ x^{n-1}/x^n\right).$$

4.4 拟线性方程

本节将讨论拟线性偏微分方程求解的一般方法, 并得到任意的非线性偏微分方程 (4.1.3) 也可以使用相同的方法来求解的结论. 我们将给出一般的含有 n 个独立自变量的拟线性方程 (4.1.5)

$$\xi^1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x^n}=g(x,u), \tag{4.4.1}$$

特别地, 一个任意的非齐次线性偏微分方程 (4.1.3) 可以简化为一个含有 $n+1$ 个变量的齐次线性偏微分方程.

设 u 是一个自变量为 $x=(x^1,\cdots,x^n)$、并且由方程

$$V(x^1,\cdots,x^n,u)=0 \tag{4.4.2}$$

定义的隐函数, 现在把 V 看成是一个含有 $n+1$ 个变量的未知函数, 其变量为 $x^1,\cdots,x^n$ 和 u. 计算方程 (4.4.2) 的全微分

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+p_i\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.4.3}$$

这样就可以得到 n 个方程组

$$D_iV\equiv\frac{\partial V}{\partial x^i}+p_i\frac{\partial V}{\partial u}=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

其中

$$p_i=-\frac{\partial V/\partial x^i}{\partial V/\partial u},\quad i=1,\cdots,n. \tag{4.4.4}$$

将含有 p_i 的表达式 (4.4.4) 代入方程 (4.4.1) 中, 我们可以得到的未知函数 V 的齐次线性偏微分方程

$$\xi^1(x,u)\frac{\partial V}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n(x,u)\frac{\partial V}{\partial x^n}+g(x,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0, \tag{4.4.5}$$

其 $n+1$ 个自变量为 $x^1,\cdots,x^n$ 和 u. 现在对线性方程 (4.4.5) 使用定理 4.2.1, 即可得如下结论.

定理 4.4.1 拟线性偏微分方程 (4.4.1) 的通解隐含在如下的方程中:

$$V(x,u)=\Phi\left(\psi_1(x,u),\cdots,\psi_n(x,u)\right), \tag{4.4.6}$$

其中含有 n 个自变量的任意函数 Φ 满足 $\partial V/\partial u\neq 0$. 这里

$$\psi_1(x,u)=C_1,\ \cdots,\ \psi_n(x,u)=C_n$$

是如下方程组的无关的首次积分:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1(x,u)}=\frac{\mathrm{d}x^2}{\xi^2(x,u)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x^n}{\xi^n(x,u)}=\frac{\mathrm{d}u}{g(x,u)}, \tag{4.4.7}$$

该方程组称为拟线性方程 (4.4.1) 的特征方程组.

例 4.4.1 使用本节的方法, 求解方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=1. \tag{4.4.8}$$

这里 $g(x,y,u)=1$, 因此, 特征方程 (4.4.7) 可以写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=-\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{1}.$$

首先需要找到该特征方程组的两个无关的首次积分. 由第一个方程 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$ 可得 $x^2+y^2=a^2=$ 常数. 利用这个关系式, 第二个方程可以写为

$$\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}}=0,$$

因此, 对上式进行积分可得 $u+\arcsin(y/a)=C$. 利用公式 (3.5.11), 可以得到 $u+\arctan(y/x)=C$. 因此, 这两个无关的首次积分的形式为

$$\psi_1\equiv x^2+y^2=C_1,\quad \psi_2\equiv u+\arctan(y/x)=C_2.$$

最后, 对应方程 (4.4.5)

$$y\frac{\partial V}{\partial x}-x\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial u}=0$$

的通解由公式 (4.4.6) 给出:

$$V=\Phi(\psi_1,\psi_2)\equiv\Phi\left(x^2+y^2,u+\arctan(y/x)\right).$$

因此, 方程 (4.4.2) 可以写为

$$\Phi\left(x^2+y^2,u+\arctan(y/x)\right)=0.$$

如果 $\partial\Phi/\partial\psi_2\neq 0$, 我们可以相对于 u 求解该方程, 同时得到用显函数表示的通解, 其形式为

$$u=-\arctan(y/x)+F\left(x^2+y^2\right). \tag{4.4.9}$$

注 4.4.1 在定义为

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \tag{4.4.10}$$

或者

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arctan(y/x)$$

的极坐标下, 通解 (4.4.9) 可以写为 $u=-\theta+f(r)$, 因此在这里推荐使用极坐标. 这样可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

那么代入

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2},\ \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2},$$

我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

因此, 方程 (4.4.8) 可以简化为 $\partial u/\partial\theta=-1$ 并且可得 $u=-\theta+f(r)$.

例 4.4.2 现在考虑热传导方程 $u_t+uu_x=0$, 它也称为 Hopf 方程. 它的特征方程组 (4.4.7) 可以写成形式

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{u}=\frac{\mathrm{d}u}{0},$$

其中方程组中的最后一项意味着我们有一个首次积分 $u=C_1$. 利用这个首次积分, 特征方程组可以被简化为 $\mathrm{d}x-C_1\mathrm{d}t=0$, 其中 $x-C_1t=C_2$. 我们可得两个首次积分

$$u=C_1,\quad x-tu=C_2.$$

因此 $V=\Phi(u,x-tu)$, 并且 Hopf 方程的解由方程 (4.4.2) 给出:

$$\Phi(u,x-tu)=0,$$

或者

$$u=F(x-tu).$$

4.5 齐次方程组

当有几个只含有一个因变量 u 并且形如 (4.1.2) 的方程联立时, 它们组成了一个一阶线性偏微分方程的*方程组* (或者称为*联立方程组*). 既然我们有几个方程, 但是却只含有一个因变量, 所以称其为*超定组*.

这里, 当联立方程组是由形如 (4.1.4) 的方程组成时, 我们考虑齐次方程所组成的方程组. 在引入形如 (4.2.1) 的 r 个微分算子

$$X_\alpha=\xi_\alpha^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\xi_\alpha^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n},\quad \alpha=1,\cdots,r \tag{4.5.1}$$

之后, 含有 r 个齐次线性微分方程的方程组可以用如下简洁的形式来表示:

$$X_1(u)=0,\ \cdots,\ X_r(u)=0. \tag{4.5.2}$$

方程 (4.5.2) 含有一个平凡解 $u=$ 常数, 我们对该解毫无兴趣. 很显然, 方程组的任意一个方程都可以乘以 x 的函数. 因此, 如果函数 $u=u(x)$ 是 s 个方程

$$X_\alpha(u)=0,\quad \alpha=1,\cdots,s\leqslant r$$

的解, 那么这个解也满足这些方程的带有任意变系数 $\lambda^\alpha(x)$ 的线性组合

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\lambda^\alpha(x)X_\alpha(u)=0.$$

这个结论引出了下面的定义.

定义 4.5.1 *如果存在函数 $\lambda^\alpha(x)$ 不全等于零, 使得*

$$\lambda^1(x)X_1+\cdots+\lambda^s(x)X_s=0 \tag{4.5.3}$$

在共有的 x 的邻域内恒成立, 那么我们称微分算子 $X_1,\cdots,X_s$ 是相关的 (connected). 反之, 如果关系式 (4.5.3) 成立意味着 $\lambda^1=\cdots=\lambda^s=0$, 我们称算子 $X_1,\cdots,X_s$ 是无关的. 在后一种情况下, 其相应的微分方程 $X_1(u)=0,\cdots,X_s(u)=0$ 称为无关的.

设 Z_α 是算子 (4.5.1) 的线性组合:

$$Z_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}h_\alpha^\beta(x)X_\beta,\quad \alpha=1,\cdots,r,$$

其中变量系数为 $h_\alpha^\beta(x)$, 其行列式的值 $\left|h_\alpha^\beta(x)\right|$ 不等于零. 那么线性齐次方程组

$$Z_1(u)=0,\cdots,Z_r(u)=0 \tag{4.5.4}$$

有着和原方程组 (4.5.2) 一样的解系.

定义 4.5.2 *方程组 (4.5.2) 和 (4.5.4), 连同其相应的微分算子 X_α 和 Z_α 称为等价的.*

引理 4.5.1 在所有算子 (4.5.1) 中, 无关的算子的个数 r_* 等于它们的系数组成的 $r\times n$ 矩阵的秩:

$$r_*=\operatorname{rank}(\xi_\alpha^i(x)), \tag{4.5.5}$$

其中 α 和 i 分别为矩阵的行数和列数. r_* 的个数和等价算子 Z_α 的个数是一样的.

根据引理 4.5.1, 任意由 r 个齐次线性方程所组成的方程组可以被由 r_* 个无关的方程所组成的方程组代替. 这里, 我们可以很清楚地看到, n 个以上的方程必相关. 更进一步, 如果 $r=n$, 并且算子 (4.5.1) 是无关的 (即 $r_*=r=n$), 那么, 系数矩阵 $\xi_\alpha^i(x)$ 的行列式的值将不等于零. 在这种情况下, 方程组 (4.5.2) 有着平凡解, $u=$ 常数. 因此, 方程组存在非平凡解的必要条件是 $r_*<n$. 然而, 要使方程组存在非平凡解, 仅有条件 $r_*<n$ 是不够的.

例 4.5.1 方程组

$$X_1(u)\equiv z\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad X_2(u)\equiv y\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

由两个无关的方程所组成, 这是因为在算子 X_1 和 X_2 中包含着对不同变量的微分. 对方程组中的第一个方程进行积分, 我们可以得到 $u=v(x,\rho)$, 其中 $\rho=\sqrt{y^2+z^2}$, 并将上式代入到第二个方程中, 这样就可以得到

$$\rho\frac{\partial v}{\partial x}+z\frac{\partial v}{\partial \rho}=0.$$

既然 v 中不明显地含有变量 z, 那么

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=0,\quad \text{由此 } \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

这可得 $u=v=$ 常数. 因此, 我们可以看到, 虽然这里满足条件 $r_*=r=2$, 并且小于所含的变量数 $n=3$, 但所求方程组仍然不存在非平凡解. 这里, 方程组的变量为 x,y,z.

为了辨别方程组的真实特性, 我们需要如下完备系的概念. 注意到, 如果 $u=u(x)$ 是方程组 (4.5.2) 的解, 那么对任意的 α 和 β, 它也是方程 $X_\alpha\left(X_\beta(u)\right)=0$ 的解. 因此, u 是如下一阶方程组的解:

$$X_\alpha\left(X_\beta(u)\right)-X_\beta\left(X_\alpha(u)\right)\equiv\sum_{i=1}^{n}\left(X_\alpha(\xi_\beta^i)-X_\beta(\xi_\alpha^i)\right)\frac{\partial u}{\partial x^i}=0.$$

换句话说, u 和算子 (4.5.1) 将一起被消去, 它们所有的换位子有着如下定义.

定义 4.5.3 两个形如 (4.5.1) 的微分算子 X_α 和 X_β 的换位子是一个一阶微分算子 $[X_\alpha,X_\beta]$, 它定义为

$$[X_\alpha,X_\beta]=X_\alpha X_\beta-X_\beta X_\alpha,$$

或者, 用如下的等同的含有参数的显式形式表示:

$$[X_\alpha,X_\beta]=\sum_{i=1}^{n}\left(X_\alpha(\xi_\beta^i)-X_\beta(\xi_\alpha^i)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot\tag{4.5.6}$$

因此, 方程 (4.5.2) 的任意解也是方程组 $[X_\alpha, X_\beta](u) = 0$ 的解. 因此, 我们有如下的两种情况: 要么其中一些换位子 (4.5.6) 独立于原算子 (4.5.1), 要么换位子 (4.5.6) 是这些有着变系数的算子 (4.5.1) 的线性组合. 后面这种情况意味着算子 (4.5.1) 的组合与 (4.5.6) 是相关的.

在第一种情况下, 我们需要考虑将 (4.5.1) 和所有的独立的换位子结合起来, 这样可以得到一个扩展了的微分方程组. 然后, 我们可以对新的方程组使用上面的算子. 在这种方法下, 我们最终可以得到第二种情况, 并且可以得到所谓的完备系的概念.

定义 4.5.4 设 (4.5.2) 是由无关的偏微分方程所组成的方程组. 如果其所有的换位子 (4.5.6) 都依赖于算子 (4.5.1):

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} h_{\alpha\beta}^{\gamma}(x) X_\gamma, \tag{4.5.7}$$

那么它称为完备系. 如果 $h_{\alpha\beta}^{\gamma}(x) = 0$, 即如果所有的算子 (4.5.1) 的换位子都为零, 我们将得到一个特殊的完备系, 并称其为雅可比系.

在例 4.5.1 中, 方程组 $X_1(u) = 0, X_2(u) = 0$ 是不完备的. 因此, 在求解的过程中将产生一个新的方程, 并且其相应的完备系也会自然而然地产生.

如果方程组 (4.5.2) 是完备的, 那么其任何一个等价的方程组 (4.5.4) 也是完备的. 更进一步, 任意一个完备系都等价于雅可比系. 下面我们举例来说明完备系的求解过程.

例 4.5.2 考虑方程组 $X_1(u) = 0, X_2(u) = 0$, 其微分算子为

$$X_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}.$$

这些算子的换位子形如 $[X_1, X_2] = X_3$, 其中

$$X_3 = t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}.$$

这三个方程 $X_1(u) = 0, X_2(u) = 0$ 和 $X_3(u) = 0$ 组成了一个完备系, 这是因为

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -\left(\frac{t}{z}X_1 + \frac{y}{z}X_3\right), \quad [X_2, X_3] = -X_1.$$

由方程 $X_1(u) = 0$ 可以得到 $u = v(x, t, \rho)$, 其中 $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$. 这样 $X_3(u) = 0$ 可以简化为

$$t\frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

式中 $v=w(x,\lambda)$, 其中 $\lambda=\rho^2-t^2=y^2+z^2-t^2$. 现在, 最后的一个方程 $X_2(u)=0$ 也简化为 $\partial w/\partial x=0$. 因此

$$u=\phi(y^2+z^2-t^2).$$

习题四

4.1. 求下列方程组的首次积分和通解:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=xy.$$

4.2. 求下列方程或方程组的首次积分 $\psi(x,y)=C$.

(i) 方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{2y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{3x^2}$,

(ii) Lotka-Volterra 方程组 (2.2.4).

4.3. 解下列齐次线性微分方程:

(i) $x^1\dfrac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+x^n\dfrac{\partial u}{\partial x^n}=0$; (ii) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

(iii) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$; (iv) $2y\dfrac{\partial u}{\partial x}+3x^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

4.4. 解非齐次线性微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}-2z\frac{\partial u}{\partial z}=1.$$

4.5. 解下列方程:

(i) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$, (ii) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=yg(x)$, (iii) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=xh(y)$, 其中 $g(x)$ 和 $h(y)$ 是任意函数.

4.6. 试说明 $u+\arctan(y/x)=C$ 是如下方程组的首次积分:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=-\frac{\mathrm{d}y}{x}=\mathrm{d}u.$$

4.7. 解方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=x^2.$$

4.8. 解线性微分方程

$$x^1\frac{\partial u}{\partial x^1}+\cdots+x^n\frac{\partial u}{\partial x^n}=\sigma u,\quad \sigma=\text{常数}\neq 0.$$

4.9. 试研究如下方程组的完备性:

$$X_1(u)\equiv z\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad X_2(u)\equiv y\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

4.10. 解如下含有三个自变量 x, y, z 的微分方程组:

$$X_1(u) \equiv z\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$
$$X_2(u) \equiv x\frac{\partial u}{\partial z} - z\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
$$X_3(u) \equiv y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

4.11. 考虑如下含有四个自变量 t, x, y 和 z 的方程组, 方程组由两个线性方程所组成:

$$t\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \sin x\frac{\partial u}{\partial x} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} + 2\cos x\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

请问, 这个方程组是完备的吗? 并求解该方程组.

4.12. 试证明 $F(u, x - tu) = 0$ 给出了方程 $u_t + uu_x = 0$ 的通解.

4.13. 解方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

第五章　二阶线性偏微分方程

这一章主要包括了含两个变量的二阶偏微分方程. 其重点是微分方程的分类和积分方法. 在开始这章之前, 推荐阅读 1.1.4 节.

补充读物: R. Courant 和 D. Hilbert [4], A. Sommerfeld [38], G.F.D. Duff [6], S.L. Sobolev [37], J. Hadamard [12], A.N. Tikhonov 和 A.A. Samarskii [39], I.G. Petrovsky [33].

5.1　多元方程

5.1.1　固定点的分类

包含一个因变量 u 和 n 个自变量 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 的二阶线性偏微分方程 (PDE) 为

$$a^{ij}(x)u_{ij} + b^i(x)u_i + c(x)u = f(x), \tag{5.1.1}$$

这里使用通常的符号 $u_i = \partial u/\partial x^i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x^i \partial x^j$ 来表示偏导数. 根据求和缩写法 (1.2.3), 该假设是建立在 $i, j = 1, \cdots, n$ 的条件上. 同时假设系数 $a^{ij}(x)$ 是相互对称的, 即 $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$.

当且仅当 $f(x) = 0$ 时, 方程 (5.1.1) 为函数齐次方程 (见 3.1.4 节). 因此, 如果 $f(x) = 0$, 方程 (5.1.1) 称为*齐次的*, 否则称为*非齐次的* (比较 3.2.6 节). 因而, 齐次线性二阶偏微分方程的形式为

$$a^{ij}(x)u_{ij} + b^i(x)u_i + c(x)u = 0. \tag{5.1.2}$$

让我们将方程 (5.1.1) 的左边写为形式

$$L[u] = a^{ij}(x)u_{ij} + b^i(x)u_i + c(x)u, \tag{5.1.3}$$

这里 L 是由下式定义的二阶线性微分算子:

$$L = a^{ij}(x)D_iD_j + b^i(x)D_i + c(x). \tag{5.1.4}$$

我们通过使用变量代换 $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ 来简化算子的主项, 即二阶微分项. 分别关于 x 和 $\bar{x}$ 的微分 D_i 和 $\overline{D}_k$ 有着如下关系:

$$D_i = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\overline{D}_k.$$

因此,

$$L = \bar{a}^{kl}\overline{D}_k\overline{D}_l + \cdots,$$

这里

$$\bar{a}^{kl} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}a^{ij}. \tag{5.1.5}$$

让我们明确地固定一个点 $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)$, 并引入包含常系数 $a_0^{ij} = a^{ij}(x_0)$ 的二次形式 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$:

$$K(\mu) = a_0^{ij}\mu_i\mu_j. \tag{5.1.6}$$

考虑线性变换

$$\mu_i = \alpha_i^k\bar{\mu}_k, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{5.1.7}$$

同时假设该变换可逆的, 即, 行列式的值 $|\alpha_i^k|$ 不为零. 变换 (5.1.7) 将二次形式 (5.1.6) 变为如下:

$$K(\bar{\mu}) = a_0^{ij}\alpha_i^k\alpha_j^l\bar{\mu}_k\bar{\mu}_l. \tag{5.1.8}$$

由线性代数知识我们知道, 存在某一变换 (5.1.7) 使得二次形式 (5.1.6) 变为平方和形式, 即

$$K(\bar{\mu}) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\bar{\mu}_i^2, \tag{5.1.9}$$

其中 ε_i 为 ± 1 或 0. 现在我们比较 (5.1.5) 和 (5.1.8) , 并假设

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} = \alpha_i^k.$$

这些方程的积分给我们提供了变量的线性变换

$$\bar{x}^k = \alpha_i^k\, x^i, \quad k = 1, \cdots, n, \tag{5.1.10}$$

其引入如下陈述.

定理 5.1.1 在任何一个固定点 x_0, 方程 (5.1.2) 能通过变量的线性变换 (5.1.10) 映射为如下形式:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2 u}{\partial (\bar{x}^i)^2} + \cdots = 0. \tag{5.1.11}$$

方程 (5.1.11) 称为方程 (5.1.2) 的典型或者标准形式.

如果所有的 ε_i 都有相同的符号, 例如 $+1$ (如果它们都是 -1, 那么我们将方程 (5.1.2) 乘以 -1), 我们就称方程 (5.1.2) 为椭圆型.

如果没有 ε_i 为零, 并且一些 ε_i 为 $+1$, 一些为 -1, 我们称方程 (5.1.2) 为双曲型. 这其中标准双曲型方程的应用最频繁. 这类方程满足条件: 仅有一个 ε_i 为正 (或者仅有一个为负).

如果某些 ε_i 为 0, 那么 (5.1.2) 就是抛物型方程.

以上术语同样适用于非齐次方程 (5.1.1).

包含可变系数 a^{ij} 的方程可能在不同点 x 处是不同的类型. 更进一步, 要想找到在某个点, 而且在该点某个邻域内, 存在一个变换, 从而得到方程 (5.1.2) 在整个邻域内都是一个标准型, 这通常是不可能的. 仅当多元方程 (5.1.2) 包含常系数 a^{ij}, 或者存在某个坐标系使得 a^{ij} 全为常数时, 这种情况才是可能的. 唯一的例外为包含二元自变量的方程 (5.1.2) (见 5.2 节).

5.1.2 伴随线性微分算子

以下定义的伴随算子的概念在线性微分方程的理论和应用中扮演一个重要角色.

定义 5.1.1 设 L 为任意阶线性微分算子, 如果

$$vL[u] - uL^*[v] = D_i(p^i) \equiv \mathrm{div} P \tag{5.1.12}$$

适用于所有 u 和 v, 那么线性微分算子 L^* 称为 L 的伴随算子. 这里 $P = (p^1, \cdots, p^n)$ 是 $p^i(x)$ 组成的向量场. 同时方程 $L^*[v] = 0$ 也称为方程 $L[u] = 0$ 的伴随方程.

我们能证明伴随算子 L^* 只由方程 (5.1.12) 确定. 我们将在二阶微分算子 (5.1.4)

$$L = a^{ij}(x) D_i D_j + b^i(x) D_i + c(x)$$

的情况下证明该陈述.

定理 5.1.2 L 的伴随算子 L^* 是唯一确定的, 并有形式

$$L^*[v] = D_i D_j (a^{ij} v) - D_i (b^i v) + cv. \tag{5.1.13}$$

证明 关键的思想是要考虑表达式 $vL[u]$, 并将微分由 u 转化为 v. 我们得到

$$\begin{aligned} vL[u] &= va^{ij}D_iD_ju + vb^iD_iu + cuv \\ &= D_i(va^{ij}D_ju) - D_i(va^{ij})D_ju + D_i(vb^iu) - uD_i(vb^i) + ucv. \end{aligned}$$

此外, 我们将 $-D_i(va^{ij})D_ju$ 写为形式

$$-D_i(va^{ij})D_ju = -D_j(uD_i(va^{ij})) + uD_iD_j(a^{ij}v),$$

据此, 调换右边第一项里的 i 和 j , 并调用 $a^{ij} = a^{ji}$, 我们得到

$$-D_i(va^{ij})D_ju = -D_i(uD_j(va^{ij})) + uD_iD_j(a^{ij}v).$$

最后, 调用 $D_ju = u_j$, 我们得到方程

$$vL[u] = u(D_iD_j(a^{ij}v) - D_i(b^iv) + cv) + D_i(a^{ij}vu_j + b^iuv - uD_j(a^{ij}v)).$$

因此, 伴随算子由 (5.1.13) 定义, 并满足方程 (5.1.12), 其中

$$p^i = a^{ij}vu_j + b^iuv - uD_j(a^{ij}v). \tag{5.1.14}$$

注 5.1.1 伴随算子的定义同样适用于微分方程组. 即, 当二阶方程满足等式 (5.1.3) 里的函数 u 是 m 维向量, 且算子 (5.1.4) 的系数 $a^{ij}(x), b^i(x)$ 和 $c(x)$ 为 $m \times m$ 矩阵时.

定义 5.1.2 *如果*

$$L[u] = L^*[u] \tag{5.1.15}$$

对任意函数 $u(x)$ 都成立, 那么算子 L 称为自伴的. 相应地, 方程 $L[u] = 0$ 也称为自伴的.

定理 5.1.3 当且仅当

$$b^i(x) = D_j(a^{ij}(x)), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{5.1.16}$$

算子 (5.1.4), $L = a^{ij}(x)D_iD_j + b^i(x)D_i + c(x)$, 称为自伴的.

证明 自伴算子 L^* 的表达式 (5.1.13) 能写为形式

$$L^*[v] = a^{ij}v_{ij} + \left(2D_j(a^{ij}) - b^i\right)v_i + \left(c - D_i(b^i) + D_iD_j(a^{ij})\right)v. \tag{5.1.17}$$

将 (5.1.17) 代入方程 (5.1.15) 并使用对称式 $a^{ji}=a^{ij}$, 可以得到

$$2\,D_j(a^{ij})-b^i=b^i,\quad c-D_i(b^i)+D_iD_j(a^{ij})=c. \tag{5.1.18}$$

(5.1.18) 中的第一个方程即为 (5.1.16) , 而 (5.1.18) 中的第二个方程为 (5.1.16) 的结果. 注意, 当 (5.1.3) 为二阶线性方程组时, 其证明相同.

注 5.1.2 根据 [4] 中的陈述 (第 III 章的附录 1, §2.2), 自伴算子必遵循 (5.1.16) 和另外一个条件:

$$D_i(b^i)=0. \tag{5.1.19}$$

然而, 条件 (5.1.19) 是不必要的. 事实上, 例如, 让我们考虑如下二维自变量 x,y 的标量方程:

$$L[u]\equiv x^2u_{xx}+y^2u_{yy}+2xu_x+2yu_y=0.$$

算子 L 为自伴算子 (见习题 5.7), 但是不满足条件 (5.1.19), 因为 $D_i(b^i)=D_x(b^1)+D_y(b^2)=4$.

一个不满足条件 (5.1.19) 的简单自伴系统的例子为

$$x^2u_{xx}+u_{yy}+2xu_x+w=0,\quad w_{xx}+y^2w_{yy}+2yw_y+u=0.$$

包含两个自变量 x,y 和两个因变量 u,w 的这样方程组的系数满足方程 (5.1.16), 但是不满足条件 (5.1.19). 实际上,

$$a^{11}=\begin{Vmatrix}x^2&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad a^{22}=\begin{Vmatrix}1&0\\0&y^2\end{Vmatrix},\quad a^{12}=a^{21}=0,\quad c=\begin{Vmatrix}0&1\\1&0\end{Vmatrix},$$

$$b^1=\begin{Vmatrix}2x&0\\0&0\end{Vmatrix},\quad b^2=\begin{Vmatrix}0&0\\0&2y\end{Vmatrix},\quad D_x(b^1)+D_y(b^2)=\begin{Vmatrix}2&0\\0&2\end{Vmatrix}\neq 0.$$

5.2 含两个自变量的方程的分类

5.2.1 特征值 · 三种类型方程

包含两自变量 x 和 y 的齐次线性二阶偏微分方程的一般形式为

$$A\,u_{xx}+2B\,u_{xy}+C\,u_{yy}+a\,u_x+b\,u_y+c\,u=0, \tag{5.2.1}$$

这里 $A=A(x,y),\cdots,c=c(x,y)$ 为被指定的函数. 包含二阶导数的项

$$A\,u_{xx}+2B\,u_{xy}+C\,u_{yy} \tag{5.2.2}$$

组成方程 (5.2.1) 的主部.

研究方程 (5.2.1) 的关键步骤是通过如下变量代换将其主部 (5.2.2) 简化为所谓的标准型:

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y). \tag{5.2.3}$$

让我们得到所有形如 (5.2.1) 的方程的主部的标准型. 使用变换 (5.2.3) 得到如下关于导数的变换 (见 1.4.5 节):

$$\begin{aligned}
&u_x = \varphi_x u_\xi + \psi_x u_\eta, \qquad u_y = \varphi_y u_\xi + \psi_y u_\eta,\\
&u_{xx} = \varphi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_x\psi_x u_{\xi\eta} + \psi_x^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{xx} u_\xi + \psi_{xx} u_\eta,\\
&u_{yy} = \varphi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\varphi_y\psi_y u_{\xi\eta} + \psi_y^2 u_{\eta\eta} + \varphi_{yy} u_\xi + \psi_{yy} u_\eta,\\
&u_{xy} = \varphi_x\varphi_y u_{\xi\xi} + (\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) u_{\xi\eta} + \psi_x\psi_y u_{\eta\eta} + \varphi_{xy} u_\xi + \psi_{xy} u_\eta.
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

将表达式 (5.2.4) 代入 (5.2.2), 并只保留包含二阶导数的项 $u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}$, 我们得到方程 (5.2.1) 在新变量下的主部

$$\widetilde{A}\, u_{\xi\xi} + 2\widetilde{B}\, u_{\xi\eta} + \widetilde{C}\, u_{\eta\eta}, \tag{5.2.5}$$

这里

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= A\,\varphi_x^2 + 2B\,\varphi_x\varphi_y + C\,\varphi_y^2,\\
\widetilde{B} &= A\,\varphi_x\psi_x + B\,(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\,\varphi_y\psi_y,\\
\widetilde{C} &= A\,\psi_x^2 + 2B\,\psi_x\psi_y + C\,\psi_y^2.
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

如果我们选择 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 为以下方程的两个解:

$$A\,\omega_x^2 + 2B\,\omega_x\omega_y + C\,\omega_y^2 = 0$$

(若该方程有两个函数无关解 $\omega_1 = \varphi(x,y)$ 和 $\omega_2 = \psi(x,y)$), 那么方程 (5.2.6) 表明方程 (5.2.5) 的主部仅有一项, $2\widetilde{B}$. 然而, 我们考虑的方程可能仅有一个解或者甚至根本无解, 因为该方程是非线性的. 所以, 我们将仔细研究这个问题.

定义 5.2.1 一阶非线性偏微分方程

$$A\,\omega_x^2 + 2B\,\omega_x\omega_y + C\,\omega_y^2 = 0 \tag{5.2.7}$$

称为方程 (5.2.1) 的特征方程. 如果 $\omega(x,y)$ 为方程 (5.2.1) 的一个解, 那么曲线

$$\omega(x,y) = 常数 \tag{5.2.8}$$

称为方程 (5.2.1) 的特征值.

这些特征对于积分和 (或) 理解方程 (5.2.1) 的解的特征是很重要的. 为了找到特征值, 我们设

$$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\lambda \tag{5.2.9}$$

并改写特征方程 (5.2.7) 为形式

$$A(x,y)\lambda^2+2B(x,y)\lambda+C(x,y)=0. \tag{5.2.10}$$

方程 (5.2.1) 根据它们的特征值即根据二阶方程 (5.2.10) 的实根的个数, 可以被分为三种类型.

定义 5.2.2 如果二阶方程 (5.2.10) 有两个不同的实根 $\lambda_1(x,y)$ 和 $\lambda_2(x,y)$, 即如果

$$B^2-AC>0, \tag{5.2.11}$$

那么该方程 (5.2.1) 称为双曲型的; 如果 (5.2.10) 有重根 $\lambda_1(x,y)=\lambda_2(x,y)$, 即如果

$$B^2-AC=0, \tag{5.2.12}$$

那么该方程称为抛物型的; 如果根 $\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x,y)$ 为复数, 即

$$B^2-AC<0, \tag{5.2.13}$$

那么该方程称为椭圆型的.

5.2.2 双曲型方程的标准形式

让我们考虑双曲型. 方程 (5.2.10) 有两个不同的实根

$$\lambda_1(x,y)=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A},\quad \lambda_2(x,y)=\frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A}. \tag{5.2.14}$$

将它们代入 (5.2.9), 首先注意到特征方程 (5.2.7) 分成两个不同的一阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial\omega}{\partial y}=0. \tag{5.2.15}$$

方程 (5.2.15) 的特征方程组 (4.2.6) 是

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}+\frac{\mathrm{d}y}{\lambda_1(x,y)}=0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{1}+\frac{\mathrm{d}y}{\lambda_2(x,y)}=0. \tag{5.2.16}$$

对于方程组 (5.2.16), 每个方程均有一个无关的首次积分, $\varphi(x,y)=$ 常数和 $\psi(x,y)=$ 常数, 从而函数 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 分别满足方程组 (5.2.15) 中的第一和第二个方程:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y}=0, \tag{5.2.17}$$

因此它们是函数无关的. 由此, 它们提供了特征方程 (5.2.10) 的两个函数无关解, 那么我们能将它们作为变量代换 (5.2.3) 的右边, 将方程 (5.2.5) 的主部简化为一项, $2\widetilde{B}u_{\xi\eta}$. 新变量 ξ 和 η 被命名为**特征变量**. 最后经过变量代换后在由 (5.2.1) 得到的方程两边除以 $2\widetilde{B}$, 并得到所谓的双曲型方程**标准形式**. 我们总结 (比较定理 1.1.3 中方程 (1.1.56)) 如下.

定理 5.2.1 双曲型方程 (5.2.1) 用特征变量可写为标准形式

$$u_{\xi\eta}+\tilde{a}(\xi,\eta)u_{\xi}+\tilde{b}(\xi,\eta)u_{\eta}+\tilde{c}(\xi,\eta)u=0. \tag{5.2.18}$$

练习 5.2.1 证明 (5.2.17) 的第一个和第二个方程非平凡 (即不等于常数) 的解 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 为函数无关的.

例 5.2.1 一个典型的双曲型方程的代表为波动方程 (2.6.5)

$$u_{tt}-k^2u_{xx}=0.$$

设 $t=y$, 我们有 $A=-k^2$, $B=0$, $C=1$, 那么 $B^2-AC=k^2>0$. 我们将在 5.3.1 节继续讨论这个例子.

5.2.3 抛物型方程的标准形式

对于抛物型, 方程 (5.2.10) 有重实根

$$\lambda=-\frac{B}{A},$$

(5.2.17) 的两个方程降格为一个方程

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{5.2.19}$$

现在将变量代换 (5.2.3) 写为形式

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=x, \tag{5.2.20}$$

这里 $\varphi(x,y)$ 为方程 (5.2.19) 的一个解. 我们能容易地验证方程 (5.2.6) 满足 $\widetilde{A}=0$, $\widetilde{B}=0$. 除以 $\widetilde{C}\neq 0$, 我们就得到以下抛物型方程的**标准形式** (比较定理 1.1.3 中的方程 (1.1.57)).

定理 5.2.2 抛物型方程 (5.2.1) 在变量 (5.2.20) 下可写为标准形式

$$u_{\eta\eta}+\tilde{a}(\xi,\eta)u_{\xi}+\tilde{b}(\xi,\eta)u_{\eta}+\tilde{c}(\xi,\eta)u=0. \tag{5.2.21}$$

以上我们假设 $A \neq 0$. 但是如果 $A = 0$, 那么由条件 (5.2.12), $B^2 - AC = 0$, 得 $B = 0$, 则方程 (5.2.1) 已经是标准形式 (5.2.21).

例 5.2.2 抛物型方程的一个典型代表是热传导方程 (2.4.7)

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0.$$

这里 $A = -a^2$, $B = 0$, $C = 0$, 因此 $B^2 - AC = 0$.

5.2.4 椭圆型方程的标准形式

对于椭圆型, 由条件 $B^2 - AC < 0$ 得出方程 (5.2.10) 没有实根, 但是它有复根

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

和复共轭根 $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. 我们考虑复根为 λ_1 的 (5.2.15) 的第一个方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \tag{5.2.22}$$

将它的 (复) 解写为

$$\omega = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \tag{5.2.23}$$

(5.2.15) 的第二个方程仅与方程 (5.2.22) 复共轭:

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x} - \overline{\lambda}_1 \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y} = 0,$$

这里 $\overline{\omega} = \varphi(x, y) - i\psi(x, y)$. 因此, 我们只需考虑方程 (5.2.23). 它是特征方程 (5.2.7)

$$A\,(\varphi_x + i\psi_x)^2 + 2B\,(\varphi_x + i\psi_x)(\varphi_y + i\psi_y) + C\,(\varphi_y + i\psi_y)^2 = 0$$

的解. 将 $(\varphi_x + i\psi_x)^2 = \varphi_x^2 - \psi_x^2 + 2i\varphi_x\psi_x, \cdots$ 代入以上方程的左边并将实部和虚部分开, 我们得到

$$A\,\varphi_x^2 + 2B\,\varphi_x\varphi_y + C\,\varphi_y^2 = A\,\psi_x^2 + 2B\,\psi_x\psi_y + C\,\psi_y^2,$$

$$A\,\varphi_x\psi_x + B\,(\varphi_y\psi_x + \varphi_x\psi_y) + C\,\varphi_y\psi_y = 0.$$

因此, 使用变量代换 (5.2.3),

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

其中 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 来自 (5.2.23), 并调用 (5.2.6), 我们有 $\widetilde{A} = \widetilde{C} \neq 0$ 和 $\widetilde{B} = 0$. 在使用新变量表示的方程 (5.2.1) 的两边同时除以 $\widetilde{A}$, 就可以得到以下定理给出的椭圆型方程的标准形式 (请参见定理 1.1.3 中的方程 (1.1.58)).

定理 5.2.3 令方程 (5.2.1) 为一个椭圆型方程. 我们引入新的变量

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

这里 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 是复特征方程 (5.2.22) 的解 (5.2.23) 的实部和虚部. 变量代换将方程 (5.2.1) 变换为如下标准形式:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{a}(\xi, \eta)u_{\xi} + \tilde{b}(\xi, \eta)u_{\eta} + \tilde{c}(\xi, \eta)u = 0. \tag{5.2.24}$$

例 5.2.3 椭圆型方程的一个典型代表是包含两个变量的拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{5.2.25}$$

它表明特征方程 (5.2.7), $\omega_x^2 + \omega_y^2 = 0$, 没有实数解 $\omega(x, y)$.

注 5.2.1 方程 (5.2.18), (5.2.24) 表明双曲型和椭圆型方程通过复变换联系了起来 (参见注 1.1.7).

5.2.5 混合型方程

一个二阶混合型方程的例子由 Tricomi 方程 (2.6.37)

$$xu_{yy} + u_{xx} = 0 \tag{5.2.26}$$

提供. 当 $x < 0$ 时, 其为双曲型的, 当 $x > 0$ 时, 其为椭圆型的. Tricomi 方程用作气体动力学里研究跨音速气流的近似模型. 特别地, 方程 (5.2.26) 符合椭圆型域的亚音速气流, 也符合双曲型域的超音速气流.

5.2.6 非线性方程的类型

一个非线性偏微分方程

$$\begin{aligned} &A(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xx} + 2B(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xy} \\ &+ C(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

的类型取决于它的解系并定义如下.

定义 5.2.3 令

$$u^* = h(x, y)$$

为方程 (5.2.27) 的任意特解. 解为 u^* 的非线性方程 (5.2.27) 的类型等同于其对应的线性方程

$$A^*(x, y)\, u_{xx} + 2B^*(x, y)\, u_{xy} + C^*(x, y)\, u_{yy} = 0 \tag{5.2.28}$$

的类型, 其中系数 A^*, B^*, C^* 是由函数 $h(x,y)$ 及其导数将因变量 u 及其导数分别替换而得到的, 例如,

$$A^*(x,y) = A\left(x, y, h(x,y), h_x(x,y), h_y(x,y)\right).$$

在线性化方程 (5.2.28) 的过程中省略了包含低阶导数的项, 因为它们不影响方程的类型.

例 5.2.4 考虑非线性波动方程 (2.6.31)

$$u_{tt} = \phi(u)\, u_{xx} + \frac{1}{2}\,\phi'(u) u_x^2. \tag{5.2.29}$$

如果, 例如, $\phi(u) = u^2$, 则方程 (5.2.29)

$$u_{tt} = u^2\, u_{xx} + u\, u_x^2,$$

对于任意解 $u^* = h(x,y)$ 是双曲型的. 同样地, 如果 $\phi(u) = -u^2$, 方程 (5.2.29)

$$u_{tt} = -u^2\, u_{xx} - u\, u_x^2,$$

对于任意解 $u^* = h(x,y)$ 是椭圆型的. 另一方面, 例如令 $\phi(u) = u$, 我们得到混合类型的非线性方程

$$u_{tt} = u\, u_{xx} + \frac{1}{2}\, u_x^2.$$

对于任意正数解, $u^* = h(x,y)$, $h(x,y) > 0$, 其为双曲型的. 对于任意负数解, $u^* = h(x,y)$, $h(x,y) < 0$, 其为椭圆型的.

5.3 包含两个变量的双曲型方程的积分

本节我们介绍简单并且有效的积分方法, 该方法得益于 d'Alembert (1747 年), 欧拉 (1770 年) 和拉普拉斯 (1773 年). 拉普拉斯不变量在本节中是至关重要的.

5.3.1 d'Alembert 解

第一个偏微分方程, 即振动线的波动方程

$$u_{tt} = k^2 u_{xx}, \quad k = \text{常数} \tag{5.3.1}$$

于 1747 年由 d'Alembert 提出并解答.

让我们通过变换将方程 (5.3.1) 转化成标准形式来求解方程. 特征方程 (5.2.7) 可以写为

$$\omega_t^2 - k^2 \omega_x^2 = (\omega_t - k\omega_x)(\omega_t + k\omega_x) = 0.$$

它分离为两个一阶方程 (比较 (5.2.15))

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + k\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

和

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - k\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

与其相关联的特征方程 (5.2.16) 为

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{k}$$

和

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{k},$$

分别有首次积分 $x - kt =$ 常数和 $x + kt =$ 常数. 因此, 该波动方程的特征变量为

$$\xi = x - kt, \quad \eta = x + kt. \tag{5.3.2}$$

用特征变量 (5.3.2), 方程 (5.3.1) 写成标准形式

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{5.3.3}$$

首先关于 η 积分, 我们得到

$$u_\xi = f(\xi),$$

据此, 现在关于 ξ 积分并使用表达式 $F(\xi) = \int f(\xi)\mathrm{d}\xi$, 我们就可以得到方程 (5.3.3) 的通解

$$u = F(\xi) + H(\eta). \tag{5.3.4}$$

现在我们通过将特征变量的表达式 (5.3.2) 代入 (5.3.4) 从而返回原始变量, 并最终得到波动方程 (5.3.1) 的通解

$$u = F(x - kt) + H(x + kt), \tag{5.3.5}$$

它就是我们所说的 *d'Alembert* 解.

5.3.2 可化为波动方程的微分方程

考虑包含两个自变量且已经写为标准形式 (5.2.18) 的双曲型方程

$$u_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u = 0. \tag{5.3.6}$$

一些形如 (5.3.6) 的方程能通过变量代换简化为波动方程 (5.3.3), 因此可由 d'Alembert 方法解出. 让我们挑选所有的这些方程. 首先, 我们确定能被利用但不会

损失方程 (5.3.6) 的线性性和齐次性及其标准形式的变量代换最一般的形式. 这些变量代换称为等价变换并有以下形式:

$$\widetilde{\xi} = f(\xi), \quad \widetilde{\eta} = g(\eta), \quad v = \sigma(\xi,\eta)\,u, \tag{5.3.7}$$

其中 $f'(\xi) \neq 0$, $g'(\eta) \neq 0$, 且 $\sigma(\xi,\eta) \neq 0$. 这里 u 和 v 被分别看作是 ξ,η 和 $\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}$ 的函数. 形如 (5.3.6) 的两个方程若能通过等价变换 (5.3.7) 互相转化, 则称为等价的.

让我们通过设 $\widetilde{\xi} = \xi$, $\widetilde{\eta} = \eta$ 的等价变换 (5.3.7) 开始, 找到可通过因变量的线性变换进而简化为波动方程的方程 (5.3.6), 其因变量的变换形式为

$$v = u\,\mathrm{e}^{\varphi(\xi,\eta)}.$$

我们将表达式

$$\begin{aligned} u &= v\,\mathrm{e}^{-\varphi(\xi,\eta)},\\ u_\xi &= (v_\xi - v\varphi_\xi)\,\mathrm{e}^{-\varphi(\xi,\eta)}, \quad u_\eta = (v_\eta - v\varphi_\eta)\,\mathrm{e}^{-\varphi(\xi,\eta)},\\ u_{\xi\eta} &= (v_{\xi\eta} - v_\xi\varphi_\eta - v_\eta\varphi_\xi - v\,\varphi_{\xi\eta} + v\,\varphi_\xi\,\varphi_\eta)\,\mathrm{e}^{-\varphi(\xi,\eta)} \end{aligned}$$

代入方程 (5.3.6) 的左边, 得到

$$\begin{aligned} &u_{\xi\eta} + a\,u_\xi + b\,u_\eta + c\,u\\ &= \big(v_{\xi\eta} + (a - \varphi_\eta)\,v_\xi + (b - \varphi_\xi)\,v_\eta\\ &\quad + (-\varphi_{\xi\eta} + \varphi_\xi\,\varphi_\eta - a\varphi_\xi - b\varphi_\eta + c)\,v\big)\mathrm{e}^{-\varphi}. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

因此, 如果

$$a - \varphi_\eta = 0, \quad b - \varphi_\xi = 0 \tag{5.3.9}$$

且

$$\varphi_{\xi\eta} - \varphi_\xi\,\varphi_\eta + a\varphi_\xi + b\varphi_\eta - c = 0, \tag{5.3.10}$$

方程 (5.3.6) 将简化为波动方程 $v_{\xi\eta} = 0$. 方程组 (5.3.9) 是一个含两个自变量的未知函数 $\varphi(\xi,\eta)$ 的两个方程组成的方程组. 如前所述, 如果问题中方程组包含的方程个数比要解的未知函数多, 那么方程组称为超定方程组. 仅当满足某些相容性条件时, 超定方程组才有解.

因此, 方程组 (5.3.9) 为超定的. 它的相容性条件由等式 $\varphi_{\xi\eta} = \varphi_{\eta\xi}$ 得出, 并有形式

$$a_\xi = b_\eta. \tag{5.3.11}$$

在方程 (5.3.9) 和 (5.3.11) 条件下, 方程 (5.3.10) 可以写为

$$a_\xi + ab - c = 0. \tag{5.3.12}$$

引入如下定义的量 h 和 k [①]:

$$h = a_\xi + ab - c, \quad k = b_\eta + ab - c, \tag{5.3.13}$$

条件 (5.3.11) 和 (5.3.12) 可写为对称形式

$$h = 0, \quad k = 0. \tag{5.3.14}$$

注 5.3.1 在一般等价变换 (5.3.7) 下, 方程 (5.3.14) 是不变的. 结果, 自变量的变换并没提供新的可简化为波动方程的方程.

概括以上推断并考虑注 5.3.1, 我们得到以下结果.

定理 5.3.1 当且仅当拉普拉斯不变量 (5.3.13) 为零时, 即 $h = k = 0$ 时, 等式 (5.3.6) 等价于波动方程. 任何包含 $h = k = 0$ 的方程 (5.3.6) 在不改变自变量 ξ 和 η 的情况下都能通过因变量

$$u = v\,\mathrm{e}^{-\varphi(\xi,\eta)} \tag{5.3.15}$$

的线性变换简化为波动方程 $v_{\xi\eta} = 0$. 在 (5.3.15) 中的函数 φ 通过解如下相容方程组得到:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = b(\xi,\eta), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = a(\xi,\eta). \tag{5.3.16}$$

定理 5.3.1 给我们提供了一个通过简化为波动方程来求解一般类型双曲型方程 (5.2.1)

$$A\,u_{xx} + 2B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + a\,u_x + b\,u_y + c\,u = 0$$

的实际方法. 该方法要求如下两步.

第一步. 检查方程 (5.2.1) 是否为双曲型, 例如, 是否满足 $B^2 - AC > 0$. 假如满足这个条件, 通过引入特征变量 (见 5.2.2 节)

$$\xi = \omega_1(x,y), \quad \eta = \omega_2(x,y) \tag{5.3.17}$$

简化问题里的方程为标准形式 (5.3.6).

第二步. 找出拉普拉斯不变量 (5.3.13). 如果 $h = k = 0$, 通过解方程 (5.3.16) 找出 $\varphi(\xi,\eta)$, 并通过变换 (5.3.15) 化简方程为波动方程 $v_{\xi\eta} = 0$. 最后, 将 $v =$

[①]量 (5.3.13) 由欧拉引入 [7], 然后又被拉普拉斯重新发现 [23], 并在文献中成为我们熟知的拉普拉斯不变量. 更多内容请看 5.3.3 节和 5.3.4 节.

$f(\xi)+g(\eta)$ 代入 (5.3.15) 将得到含有特征变量的方程的解

$$u=(f(\xi)+g(\eta))\,\mathrm{e}^{-\varphi(\xi,\eta)}. \tag{5.3.18}$$

将含 ξ 和 η 的表达式 (5.3.17) 代入此解, 从而就得到含有原始变量 x,y 的解.

例 5.3.1 让我们通过如下方程举例说明上述方程的解法:

$$\frac{u_{xx}}{x^2}-\frac{u_{yy}}{y^2}+3\left(\frac{u_x}{x^3}-\frac{u_y}{y^3}\right)=0. \tag{5.3.19}$$

第一步. 这里 $A=x^{-2},B=0,C=-y^{-2}$, 那么 $B^2-AC=(xy)^{-2}>0$. 方程 (5.2.7) 的形式为

$$\left(\frac{\omega_x}{x}\right)^2-\left(\frac{\omega_y}{y}\right)^2=\left(\frac{\omega_x}{x}-\frac{\omega_y}{y}\right)\left(\frac{\omega_x}{x}+\frac{\omega_y}{y}\right)=0.$$

它可分成两个等式:

$$\frac{\omega_x}{x}+\frac{\omega_y}{y}=0,\quad \frac{\omega_x}{x}-\frac{\omega_y}{y}=0.$$

它们有如下首次积分:

$$x^2-y^2=\text{常数},\quad x^2+y^2=\text{常数}.$$

因此, 特征变量 (5.3.17) 被定义为

$$\xi=x^2-y^2,\quad \eta=x^2+y^2.$$

从而可以得到

$$\begin{aligned}
u_x&=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x=2x(u_\xi+u_\eta),\\
u_y&=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y=2y(u_\eta-u_\xi),\\
u_{xx}&=2(u_\xi+u_\eta)+4x^2((u_\xi+u_\eta)_\xi+(u_\xi+u_\eta)_\eta)\\
&=2(u_\xi+u_\eta)+4x^2(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}),\\
u_{yy}&=2(u_\eta-u_\xi)+4y^2((u_\eta-u_\xi)_\eta-(u_\eta-u_\xi)_\xi)\\
&=2(u_\eta-u_\xi)+4y^2(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}).
\end{aligned}$$

因此, 方程 (5.3.19) 采用如下形式:

$$u_{\xi\eta}+\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}u_\xi-\frac{x^2-y^2}{2x^2y^2}u_\eta=0.$$

调用 $x^2-y^2=\xi$, $x^2+y^2=\eta$ 并注意到

$$2x^2y^2=\frac{\eta^2-\xi^2}{2},$$

我们最终将方程 (5.3.19) 化为如下的标准形式:

$$u_{\xi\eta}+\frac{2\eta}{\eta^2-\xi^2}u_\xi-\frac{2\xi}{\eta^2-\xi^2}u_\eta=0. \tag{5.3.20}$$

第二步. 方程 (5.3.20) 的系数为

$$a=\frac{2\eta}{\eta^2-\xi^2},\quad b=-\frac{2\xi}{\eta^2-\xi^2},\quad c=0.$$

将该 a,b,c 的表达式以及它们的导数

$$a_\xi=b_\eta=\frac{4\xi\eta}{(\eta^2-\xi^2)^2}$$

代入 (5.3.13) 可以得到 $h=k=0$. 现在求解方程 (5.3.16)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{2\eta}{\eta^2-\xi^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=-\frac{2\xi}{\eta^2-\xi^2}$$

并得到

$$\varphi=\ln(\eta^2-\xi^2).$$

因此, 使用方程 (5.3.15)

$$v=u\mathrm{e}^{\ln(\eta^2-\xi^2)}=(\eta^2-\xi^2)\,u \tag{5.3.21}$$

可以将方程 (5.3.20) 转换为波动方程

$$v_{\xi\eta}=0.$$

因此

$$v(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta),$$

且由方程 (5.3.21) 得到

$$u(\xi,\eta)=\frac{f(\xi)+g(\eta)}{\eta^2-\xi^2}.$$

通过代入 $\xi=x^2-y^2$, $\eta=x^2+y^2$ 且令 $F=f/4$, $H=g/4$ 返回到原始变量, 最后, 我们就得到方程 (5.3.19) 的通解

$$u(x,y)=\frac{F(x^2-y^2)+H(x^2+y^2)}{x^2y^2}. \tag{5.3.22}$$

5.3.3 欧拉方法

这个方法属于伦纳德 · 欧拉 (Leonard Euler) [7], 他首次得到双曲型方程不必等价于波动方程的重要的积分理论. 他将 d'Alembert 解推广到更广泛的 (5.3.6) 类型. 也就是, 他引入量 (5.3.13) 并表明当且仅当至少 h 和 k 之一为零时, 方程 (5.3.6) 为可分解的. 通过分离变量, 将方程 (5.3.6) 简化为两个一阶常微分方程的连续积分问题.

下面将介绍欧拉方法. 考虑方程 (5.3.6)

$$u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = 0,$$

其中 $h = 0$. 那么这个方程是可分离变量的:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + b\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} + au\right) = 0. \tag{5.3.23}$$

令

$$v = u_\eta + a\,u, \tag{5.3.24}$$

我们改写方程 (5.3.23) 为一阶方程

$$v_\xi + b\,v = 0,$$

将它积分得到

$$v = Q(\eta)\mathrm{e}^{-\int b(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi}. \tag{5.3.25}$$

现在将方程 (5.3.25) 代入 (5.3.24), 对得到的关于 η 的非齐次线性方程积分

$$u_\eta + au = Q(\eta)\mathrm{e}^{-\int b(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi} \tag{5.3.26}$$

并得到如下结果.

定理 5.3.2 方程 (5.3.6)

$$u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = 0$$

(其中 $h = 0$) 的通解由以下公式给出:

$$u = \left(P(\xi) + \int Q(\eta)\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}\eta - b\,\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{e}^{-\int a\mathrm{d}\eta}, \tag{5.3.27}$$

该公式中包含着两个任意函数 $P(\xi)$ 和 $Q(\eta)$.

同样地, 如果 $k=0$, 方程 (5.3.6) 是可分离变量的:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+a\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\,u\right)=0. \tag{5.3.28}$$

在这种情形下, 我们将 (5.3.24) 替换为

$$w=u_\xi+bu. \tag{5.3.29}$$

参照在 $h=0$ 情形下的计算, 我们并得到如下结果.

定理 5.3.3 方程 (5.3.6)

$$u_{\xi\eta}+a(\xi,\eta)u_\xi+b(\xi,\eta)u_\eta+c(\xi,\eta)u=0$$

(其中 $k=0$) 的通解由以下公式给出:

$$u=\left(Q(\eta)+\int P(\xi)\mathrm{e}^{\int b\,\mathrm{d}\xi-a\,\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\int b\,\mathrm{d}\xi}. \tag{5.3.30}$$

当方程 (5.3.6) 被非齐次方程

$$u_{\xi\eta}+a(\xi,\eta)u_\xi+b(\xi,\eta)u_\eta+c(\xi,\eta)u=f(\xi,\eta) \tag{5.3.31}$$

取代时, 我们仍能用以上的方法. 例如, 当 $h=0$ 我们得到以下结果.

定理 5.3.4 如果 $h=0$, 方程 (5.3.31) 的解的形式为

$$u=\left(P(\xi)+\int\left(Q(\eta)+\int f(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\int b\,\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}\eta-b\,\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{e}^{-\int a\,\mathrm{d}\eta}. \tag{5.3.32}$$

例 5.3.2 让我们考虑以下著名的 Darboux 方程:

$$u_{xy}+\frac{\beta u_y}{x-y}=0,\quad \beta=\text{常数}. \tag{5.3.33}$$

这里

$$a=0,\quad b=\frac{\beta}{x-y},\quad c=0.$$

拉普拉斯不变量形式为

$$h=a_x+ab-c=0,\quad k=b_y=\frac{\beta}{(x-y)^2}\neq 0.$$

由公式 (5.3.27) 得出通解

$$u(x,y)=P(x)+\int Q(y)(x-y)^{-\beta}\mathrm{d}y.$$

让我们考虑由非特征线 $x-y=1$ 给定的初始条件

$$u|_{x-y=1}=u_0(x),\quad u_y|_{x-y=1}=u_1(x)$$

的柯西问题的通解. 该问题的通解可以写为形式

$$u=P(x)+\int_{-1}^{y}Q(\tau)(x-\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau.$$

初始条件为

$$u|_{x-y=1}=P(x)+\int_{-1}^{x-1}Q(\tau)(x-\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau=u_0(x),$$

$$u_y|_{x-y=1}=Q(x-y)=u_1(x).$$

由此可得,

$$Q(y)=u_1(y+1),\quad P(x)=u_0(x)-\int_{-1}^{x-1}u_1(\tau+1)(x-\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau.$$

那么, 该柯西问题的解为

$$u(x,y)=u_0(x)-\int_{-1}^{x-1}u_1(\tau+1)(x-\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau+\int_{-1}^{y}u_1(\tau+1)(x-\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau.$$

5.3.4 拉普拉斯级联法

1773 年, 拉普拉斯 [23] 提出了一个比欧拉方法更一般的方法. 在拉普拉斯方法, 也就是我们熟知的*级联法*中, h,k 起到了非常重要的作用. 拉普拉斯引入两个变换. 拉普拉斯的第一个变换形式为

$$v=u_\eta+a\,u, \tag{5.3.34}$$

第二个变换有形式 (5.3.29):

$$w=u_\xi+b\,u. \tag{5.3.35}$$

拉普拉斯变换允许我们解拉普拉斯不变量同时不为零的某些方程. 因此, 我们令 $h\neq 0,k\neq 0$ 并考虑变换 (5.3.34). 它将方程 (5.3.6) 映射为同样形式的方程, 即

$$v_{\xi\eta}+a_1\,v_\xi+b_1\,v_\eta+c_1\,v=0, \tag{5.3.36}$$

其系数为

$$a_1=a-\frac{\partial\ln|h|}{\partial\eta},\quad b_1=b,\quad c_1=c+b_\eta-a_\xi-b\frac{\partial\ln|h|}{\partial\eta}. \tag{5.3.37}$$

方程 (5.3.36) 的拉普拉斯不变量有形式

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial\xi\partial\eta}, \quad k_1 = h. \tag{5.3.38}$$

同样地, 我们能使用第二个变换 (5.3.35) 并得到 w 的一个线性方程, 其拉普拉斯不变量为

$$h_2 = k, \quad k_2 = 2k - h - \frac{\partial^2 \ln|k|}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{5.3.39}$$

如果 $h_1 = 0$, 我们能用上述欧拉方法解方程 (5.3.36), 然后将解 $v = v(x, y)$ 代入 (5.3.34), 并积分 u 的非齐次一阶线性方程 (5.3.34). 如果 $h_1 \neq 0$ 而 $k_2 = 0$, 我们用同样的方法找到方程 $w = w(x, y)$ 并解 u 的非齐次一阶线性方程 (5.3.35). 如果 $h_1 \neq 0$ 且 $k_2 \neq 0$, 我们能将变换 (5.3.34) 和 (5.3.35) 应用到关于 v 和 w 的方程中, 来迭代拉普拉斯变换. 这就是拉普拉斯级联法的本质.

例 5.3.3 让我们用拉普拉斯级联法解以下 Darboux 方程:

$$u_{xy} - \alpha\frac{u_x}{x-y} + \beta\frac{u_y}{x-y} = 0, \qquad \alpha, \beta = 常数. \tag{5.3.40}$$

我们已经求解了在 (5.3.40) 中当 $\alpha = 0$ 时的这种特例 (5.3.33). 方程 (5.3.40) 的系数为

$$a = -\frac{\alpha}{x-y}, \quad b = \frac{\beta}{x-y},$$

因此

$$a_x + ab - c = \frac{\alpha}{(x-y)^2} - \frac{\alpha\beta}{(x-y)^2} = \frac{\alpha(1-\beta)}{(x-y)^2},$$
$$b_y + ab - c = \frac{\beta}{(x-y)^2} - \frac{\alpha\beta}{(x-y)^2} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(x-y)^2}.$$

那么, 拉普拉斯不变量的形式为

$$h = \frac{\alpha(1-\beta)}{(x-y)^2}, \qquad k = \frac{\beta(1-\alpha)}{(x-y)^2}, \tag{5.3.41}$$

从而得到当 $\alpha = 0$ 或者 $\beta = 1$ 时 $h = 0$, 当 $\beta = 0$ 或者 $\alpha = 1$ 时 $k = 0$. 那么, 方程 (5.3.40) 在情形

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1; \qquad \beta = 0, \quad \alpha = 1 \tag{5.3.42}$$

时能由欧拉方法解出.

让我们考虑更一般情形并应用拉普拉斯第一变换 (5.3.34). 我们有

$$\frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x\partial y} = -\frac{2}{(x-y)^2}$$

和方程 (5.3.38)

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \ln|h|}{\partial x \partial y},$$

从而得到

$$h_1 = \frac{(\alpha+1)(2-\beta)}{(x-y)^2}.$$

因此, $h_1 = 0$ 当且仅当 $\alpha = -1$ 或 $\beta = 2$. 那么调用 (5.3.41), 现在我们知道在情形

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \pm 1; \qquad \beta = 0, \quad \beta = 1, \quad \beta = 2 \tag{5.3.43}$$

时能解方程 (5.3.40). 应用拉普拉斯第二变换 (5.3.35), 我们能深入扩展 (5.3.43) 并得到以下可积分情形:

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \pm 1 \quad \alpha = 2; \qquad \beta = 0, \quad \beta = \pm 1, \quad \beta = 2. \tag{5.3.44}$$

继续使用拉普拉斯级联法, 我们就能求解任意整数 α 和 β 下的 Darboux 方程 (5.3.40).

注 5.3.2 总结. 方程 (5.3.40)

$$u_{xy} - \alpha \frac{u_x}{x-y} + \beta \frac{u_y}{x-y} = 0$$

在以下情形可解:

(i) 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, 通过 d'Alembert 方法求解.

(ii) 当 $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 和 $\beta = 0$, $\alpha = 1$ 时, 通过欧拉方法求解.

(iii) 对于任意整数 α 和 β 通过拉普拉斯级联法求解.

5.4 初值问题

5.4.1 波动方程

让我们用 d'Alembert 公式 (5.3.5) 解波动方程 (5.3.1) $u_{tt} = k^2 u_{xx}$ 的柯西初值问题, 其初始条件为

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x). \tag{5.4.1}$$

由方程 (5.3.5) 和 (5.4.1) 可以得到

$$F(x) + H(x) = u_0(x), \quad H'(x) - F'(x) = \frac{1}{k} u_1(x). \tag{5.4.2}$$

微分 (5.4.2) 中的第一个方程并联立 (5.4.2) 中的第二个方程, 我们得到

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(u_0'(x) + \frac{u_1(x)}{k}\right),$$

因此

$$H(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2k}\int_{x_0}^{x} u_1(s)\mathrm{d}s. \tag{5.4.3}$$

现在使用 (5.4.2) 得到

$$F(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2k}\int_{x_0}^{x} u_1(s)\mathrm{d}s. \tag{5.4.4}$$

将方程 (5.4.3) 和 (5.4.4) 代入 d'Alembert 公式 (5.3.5) 导出定理 5.4.1.

定理 5.4.1 初始条件为 (5.4.1) 的波动方程的柯西问题的解为

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-kt) + u_0(x+kt)}{2} + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} u_1(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.4.5}$$

该解 (5.4.5) 揭示了特有的物理意义, 即波沿特征传播. 以下的两个例子提供了一个很好的例证. 更多细节, 请参考 [11].

例 5.4.1 在点 x_0 以脉冲形式弹拨有初始构型 $u_0(x)$ 的吉他弦. 从静止点释放弦, 即 $u_1(x) = 0$. 那么解 (5.4.5) 的形式为

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-kt) + u_0(x+kt)}{2} \tag{5.4.6}$$

并描述了初始构型的传播.

例 5.4.2 让我们通过柯西问题的解模仿钢琴弦的振动, 这里钢琴丝的初始位移为零, $u_0(x) = 0$, 但是弦受到一局部初始速度 $u_1(x)$. 那么解 (5.4.5) 的形式为

$$u(x,t) = \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} u_1(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.4.7}$$

5.4.2 非齐次波动方程

让我们考虑初始条件为 (5.4.1) 的非齐次一维波动方程

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = f(x,t), \quad k = \text{常数} \tag{5.4.8}$$

的柯西问题.

引理 5.4.1 定义为

$$v(x,t) = \frac{1}{2k}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-k(t-\tau)}^{x+k(t-\tau)} f(s,\tau)\mathrm{d}s \tag{5.4.9}$$

的函数 $v(x,t)$ 是非齐次波动方程 (5.4.8)

$$v_{tt}-k^2v_{xx}=f(x,t)$$

的解, 并满足初始条件

$$v\big|_{t=0}=0,\quad v_t\big|_{t=0}=0.$$

证明 使用定积分的微分规则 (1.2.13), 我们得到 (见习题 5.11)

$$\begin{aligned}
v_t&=\frac{1}{2}\int_0^t(f(x+k(t-\tau),\tau)+f(x-k(t-\tau),\tau))\mathrm{d}\tau,\\
v_{tt}&=\frac{k}{2}\int_0^t(f_x(x+k(t-\tau),\tau)-f_x(x-k(t-\tau),\tau))\mathrm{d}\tau+f(x,t),\\
v_x&=\frac{1}{2k}\int_0^t(f(x+k(t-\tau),\tau)-f(x-k(t-\tau),\tau))\mathrm{d}\tau,\\
v_{xx}&=\frac{1}{2k}\int_0^t(f_x(x+k(t-\tau),\tau)-f_x(x-k(t-\tau),\tau))\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}\tag{5.4.10}$$

使用 (5.4.9) 和 (5.4.10), 该引理得证.

定理 5.4.2 非齐次方程 (5.4.8)

$$u_{tt}-k^2u_{xx}=f(x,t)$$

满足初始条件

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t\big|_{t=0}=u_1(x)$$

的解是唯一的, 并且有形式

$$\begin{aligned}
u(t,x)=&\frac{u_0(x-kt)+u_0(x+kt)}{2}+\frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt}u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&+\frac{1}{2k}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-k(t-\tau)}^{x+k(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}\tag{5.4.11}$$

证明 使用定理 5.4.1 和引理 5.4.1 即可证明该定理.

5.5 混合问题 · 变量分离

变量分离法 (傅里叶方法) 也可以被用来求解满足给定的初始和边界值的微分方程的解的混合问题. 首先, 我们将用以下的积分结论 (见习题 1.5).

引理 5.5.1 设 k 和 m 为任意整数, $k \neq 0$. 那么

$$\int_0^{\pi} \sin(kx)\, \sin(mx)\, \mathrm{d}x = 0 \ (m \neq k), \quad \int_0^{\pi} \sin^2(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

可使用方程的简洁形式

$$\int_0^{\pi} \sin(kx)\, \sin(mx)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\, \delta_{km} \tag{5.5.1}$$

来表示, 其中 δ_{km} 为*克罗内克符号*: 如果 $m \neq k$, $\delta_{km} = 0$ 并且如果 $m = k$, $\delta_{km} = 1$ (见 1.4.3 节).

证明 使用方程

$$\sin\alpha\, \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right), \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right),$$

就可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(kx)\, \sin(mx)\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Big(\cos((k-m)x) - \cos((k+m)x)\Big)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\sin((k-m)x)}{2(k-m)} - \frac{\sin((k+m)x)}{2(k+m)}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 0\end{aligned}$$

和

$$\int_0^{\pi} \sin^2(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Big(1 - \cos(2kx)\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

5.5.1 端部固定的弦的振动

在给定初始构型和速度下, 考虑描述在端部 $x = 0$ 和 $x = l$ 固定的弦的振动的混合问题. 该问题是找到满足初始条件和边界条件的波动方程

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{5.5.2}$$

的解, 其*初始条件*为

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \tag{5.5.3}$$

且其*边界条件*为

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0. \tag{5.5.4}$$

初始和边界条件 (5.5.3) 和 (5.5.4) 的连贯性 (consistency) 意味着

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, \quad u_1(0) = u_1(l) = 0. \tag{5.5.5}$$

变量分离的方法是寻找一特殊的乘积形式

$$u(t,x)=T(t)\,X(x) \tag{5.5.6}$$

来表述其解, 使得没有因子同时为零. 将 (5.5.6) 代入方程 (5.5.2) 得到

$$T''X=TX''.$$

由此, 分别根据 t 和 x 来分离变量:

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda,$$

其中 λ 为正常数. 以上方程等价于以下两个方程

$$T''+\lambda T=0 \tag{5.5.7}$$

和

$$X''+\lambda X=0. \tag{5.5.8}$$

边界条件 (5.5.4) 推出

$$X(0)=0,\quad X(l)=0. \tag{5.5.9}$$

方程 (5.5.8) 的通解为

$$X=C_1\sin\sqrt{\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{\lambda}\,x\qquad(\lambda>0).$$

(5.5.9) 的第一个条件 $X(0)=0$ 推出 $C_2=0$. 因此解采用形式

$$X=C_1\sin\sqrt{\lambda}\,x. \tag{5.5.10}$$

那么 (5.5.9) 的第二个条件 $X(l)=0$ 可写为

$$C_1\sin\sqrt{\lambda}\,l=0.$$

因为函数 $X(x)$ 不应该为等于零的平凡解, 所以要求 $C_1\neq 0$, 那么以上方程可写为

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0.$$

因此 λ 为以下值:

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\quad k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots. \tag{5.5.11}$$

将 (5.5.11) 代入到 (5.5.10), 即可以得到边界值问题 (5.5.8)—(5.5.9) 的解的无穷序列

$$X_k(x) = C_1 \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

由标准化条件

$$\int_0^l (X_k(x))^2 \,\mathrm{d}x = 1,$$

常数 C_1 通常通过归一化条件而求得. 使用引理 5.5.1, 我们得到

$$\int_0^l (X_k(x))^2 \,\mathrm{d}x = C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \,\mathrm{d}x = C_1^2 \frac{l}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(ky) \,\mathrm{d}y = \frac{l}{2} C_1^2.$$

因此, 通过设 $C_1 = \sqrt{2/l}$, 我们得到标准函数

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{5.5.12}$$

对于边界值问题 (5.5.8)—(5.5.9), 由 (5.5.11) 给出的常数 λ_k 和由 (5.5.12) 给出的函数 $X_k(x)$ 分别称为*特征值*和*特征函数*. 注意因为特征函数 (5.5.12) 有性质 $X_{-k} = -X_k$, 所以只需令 k 为正整数 $1, 2, \cdots$ 即可.

通过采用级数

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right) \right) \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right), \end{aligned}$$

或者代入特征值 (5.5.11),

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{5.5.13}$$

我们得到方程 (5.5.7), 其中 $\lambda = \lambda_k$, 的通解形式为

$$T_k(t) = a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right), \quad a_k, b_k = \text{常数}.$$

因此我们得到波动方程的*形式解* $u(t,x)$. 在 (5.5.13) 上使用 (5.5.3) 的第一个初始条件 $u(0,x) = u_0(x)$, 可以得到

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{5.5.14}$$

方程 (5.5.14) 允许我们确定系数 a_k. 事实上, 在 (5.5.14) 两边上乘以 $\sin(m\pi x/l)$ 并从 0 到 l 积分就可以得到

$$\int_0^l u_0(x)\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x. \tag{5.5.15}$$

在新变量 $y=\pi x/l$ 下重写方程 (5.5.15) 右边的积分并调用方程 (5.5.1), 我们得到

$$\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{l}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(ky)\,\sin(my)\,\mathrm{d}y=\frac{l}{\pi}\frac{\pi}{2}\delta_{km}=\frac{l}{2}\delta_{km}.$$

因此, 方程 (5.5.15) 满足

$$\int_0^l u_0(x)\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,\delta_{km}=\sqrt{\frac{l}{2}}\,a_m.$$

最终, 我们得到如下的系数表达式:

$$a_m=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l u_0(x)\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad m=1,2,\cdots. \tag{5.5.16}$$

(5.5.3) 的第二个初始条件 $u_t(0,x)=u_1(x)$ 可以写成

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\,b_k\,\sin\frac{k\pi x}{l}=u_1(x).$$

据此, 乘以 $\sin(m\pi x/l)$, 并从 0 到 l 积分, 如前处理, 我们得到

$$\frac{m\pi}{\sqrt{2l}}\,b_m=\int_0^l u_1(x)\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$b_m=\frac{\sqrt{2l}}{m\pi}\int_0^l u_1(x)\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad m=1,2,\cdots. \tag{5.5.17}$$

现在我们将系数分别为 a_k 和 b_k 的表达式 (5.5.16) 和 (5.5.17) 代入 (5.5.13), 得到混合问题 (5.5.2)—(5.5.4) 的解 $u(x,t)$. 它仍然为一个形式解, 因为函数 $u(x,t)$ 由被称为傅里叶级数的形式级数 (5.5.13) 表示. 为了检验该形式解, 我们必须证明傅里叶级数 (5.5.13) 收敛并且二次连续可微.

5.5.2 热传导方程的混合问题

让我们用变量分离法解如下混合问题:

$$u_t=u_{xx}, \tag{5.5.18}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{5.5.19}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0. \tag{5.5.20}$$

条件 (5.5.19) 和 (5.5.20) 的连贯性要求

$$u_0(0) = u_0(l) = 0. \tag{5.5.21}$$

我们需要寻找乘积形式

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

的解并由此着手. 代入 (5.5.18) 得到

$$XT' = TX'',$$

因此

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

由上面连等式可得

$$T' + \lambda T = 0 \tag{5.5.22}$$

和

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \tag{5.5.23}$$

边界值问题 (5.5.23) 很容易解出, 并给出如下特征值和特征函数:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{5.5.24}$$

方程 (5.5.22) 给出以下解:

$$T_k(t) = c_k \mathrm{e}^{-(k\pi/l)^2 t}.$$

因此, 函数

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{-(k\pi/l)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5.5.25}$$

是热传导方程 (5.5.18) 的 (形式上的) 解并满足边界条件 (5.5.20). 初始条件 (5.5.19) 推出

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l} = u_0(x),$$

据此

$$c_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_0(x) \sin\frac{k\pi x}{l} \, \mathrm{d}x. \tag{5.5.26}$$

将 (5.5.26) 代入 (5.5.25), 我们就得到了混合问题 (5.5.18)—(5.5.20) 的解.

习题五

5.1. 给定算子为

$$L[u] = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \left(x^2 + y^2 + z^2 - t\right) u_{tt} - u_t,$$

指出在点 (t, x, y) 是椭圆型的、双曲型的和抛物型的时需要的条件.

5.2. 求零阶算子 $L[u] = c(x, y)u$ 的伴随算子.

5.3. 求一阶算子 $L[u] = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u$ 的伴随算子.

5.4. 求包含两个变量的一般双曲型方程 (5.2.18)

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \tag{P5.1}$$

的伴随方程的标准形式.

5.5. 求以下每个二阶方程的伴随方程:

(i) 拉普拉斯方程 : $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$,

(ii) 波动方程 : $u_{tt} - k^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$,

(iii) 热传导方程 : $u_t - k^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$,

(iv) $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0$,

(v) 电报方程 : $u_{tt} - c^2u_{xx} - k^2u = 0$ ($c, k =$ 常数),

(vi) $u_{tt} - \mu^2(x)u_{xx} - k^2u = 0$ ($k =$ 常数),

(vii) Black-Scholes 模型 : $u_t + \dfrac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0$,

(viii) $u_{xy} + \dfrac{u_x + u_y}{x + y} = 0.$

同时指出哪些方程为自伴随的?

5.6. 求以下一阶方程组的伴随方程和伴随算子:

$$u^1_x + a(x, y)u^2_x + b(x, y)u^2_y = 0, \quad u^1_y + c(x, y)u^2_x + d(x, y)u^2_y = 0.$$

5.7. 用特征变量改写电报方程 (2.3.26) $u_{tt} - c^2u_{xx} - k^2u = 0$ 为标准形式 (5.2.18).

5.8. 考虑以下含有变系数的波动方程:

$$u_{tt} - \mu^2(x)u_{xx} = 0. \tag{P5.2}$$

求所有可简化为波动方程 $v_{\xi\eta} = 0$ 的方程 (P5.2).

5.9. 以下陈述是有效的.

定理 5.5.1 方程 (P5.1) 等价于电报方程, 即当且仅当方程 (P5.1) 的拉普拉斯不变量遵从条件

$$h = k \neq 0, \quad (\ln|h|)_{xy} = 0,$$

该方程能通过适当的等价变换 (5.3.7)

$$\xi = f(x),\ \eta = g(y),\ v = \sigma(x,y)\,u$$

简化为电报方程 $v_{\xi\eta} + kv = 0$ ($k =$ 常数).

试用这个定理说明方程

$$u_{tt} - x^2 u_{xx} = 0$$

等价于电报方程 $v_{\xi\eta} + v = 0$ 并找出合适的变量代换.

5.10. 证明方程 (P5.2) 等价于电报方程 $v_{\xi\eta} + kv = 0,\ k =$ 常数.

5.11. 计算由 (5.4.9)

$$v(x,t) = \frac{1}{2k}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-k(t-\tau)}^{x+k(t-\tau)} f(s,\tau)\mathrm{d}s,$$

定义的函数 $v(x,t)$ 的导数并说明它的一阶导数和二阶导数 v_t, v_{tt} 和 v_x, v_{xx} 由方程 (5.4.10) 给出.

5.12. L 为任意线性微分算子, L^* 为其伴随算子. 说明 $(L^*)^* = L$, 即 L^* 的伴随算子等于原始算子.

5.13. 求解混合问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \sin x,\ u_t\big|_{t=0} = 0.$$

5.14. 求解混合问题

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \sin x.$$

5.15. 求解混合问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \sin x.$$

5.16. 讨论混合问题

$$u_t = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \cos x.$$

第六章　非线性常微分方程

基本自然规律和技术问题的数学模型通常需要用*非线性微分方程*来表示. 其中有很多是基于牛顿第二定律, 因此它们常常是二阶微分方程.

因而, 现实世界中很多问题的数学模型是由二阶非线性微分方程描述的. 李群分析方法提供了一种既简单又很有效的通用方法, 尤其是对于二阶方程的求解.

本章的重点在于介绍如何使用李群方法求解一阶和二阶非线性常微分方程中的积分问题. 针对线性和非线性偏微分方程的李群方法的应用将在后两章介绍.

补充读物: S. Lie [26], L.V. Ovsyannikov [32], N.H. Ibragimov [21], P.J. Olver [31], G.W. Bluman 和 S. Kumei [2].

6.1　简介

对称性的思想在以微分方程表示的数学模型中应用很普遍. 19 世纪的伟大的数学家索菲思 · 李在连续群理论中, 提出并详尽地阐述了微分方程对称性这一数学工具. 李群分析方法给出了使用线性和非线性常微分方程的对称性并使用该特性来进行积分的一般方法. 李群分析方法在求解非线性偏微分方程精确解方面也是很有效的.

来自美国斯坦福大学的教授 Brian Cantwell 在他最近的一本书 [3] 的序言中提到: "*我坚信, 任何一个自然科学和工程的研究生专业都需要量纲分析和李群*

分析这门包含广泛的课程. 学生们应该对对称性分析和傅里叶分析同样地熟悉, 特别是当我们所研究问题中包含的大量的非线性问题时."

很少有人不同意这个观点. 但是, 在过去, 李群分析仍然没有被广泛地接受, 并且现在仍然在大学教育中被忽视. 甚至, 现在有一种趋势, 那就是现在的一些教科书传统地忽视李群分析方法, 而采用数值分析这种直接的方法求解一些特殊形式的微分方程, 并且不采用对称观念来处理少量李标准方程, 而是使用一些人为替换的方法来求解大量的特殊方程. 的确, "通常, 一种传统方法的存在越没有理由, 丢弃它也就越困难" (马克 · 吐温).

在这一章中, 作者简单地介绍了使用李群分析求解常微分方程的基本概念. 至于更进一步的介绍, 有兴趣的读者可以参考 [17].

6.2 群变换

6.2.1 平面上只含一个参数的群

我们考虑只含一个参数 a 的 x, y 换元法:

$$T_a: \quad \overline{x} = \varphi(x, y, a), \quad \overline{y} = \psi(x, y, a), \tag{6.2.1}$$

函数 φ 和 ψ 满足

$$T_0: \quad \varphi(x, y, 0) = x, \quad \psi(x, y, 0) = y. \tag{6.2.2}$$

设 $\varphi(x, y, a)$ 和 $\psi(x, y, a)$ 是函数无关的, 即它们的雅可比行列式不为零 (参见 1.2.8 节, 定理 1.2.4):

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

我们可以认为方程 T_a (6.2.1) 是将 (x, y) 平面上的任意点 $P = (x, y)$ 转移到新位置 $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$ 的一个变换, 并且记为 $\overline{P} = T_a(P)$. 相应地, 其逆变换 T_a^{-1} 由如下公式给出:

$$T_a^{-1}: \quad x = \varphi^{-1}(\overline{x}, \overline{y}, a), \quad y = \psi^{-1}(\overline{x}, \overline{y}, a), \tag{6.2.3}$$

它将点 $\overline{P}$ 还原到原来的位置 P, 即

$$T_a^{-1}(\overline{P}) = P.$$

更进一步, 方程 (6.2.2) 意味着 T_0 是一个恒等变换:

$$T_0(P) = P.$$

设 T_a 和 T_b 是两个变换 (6.2.1), 其参数分别为 a 和 b. 它们的复合 (或者称为乘积) T_bT_a 被定义为连续地使用这种变换, 并由如下公式给出:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{x}} &= \varphi(\overline{x},\overline{y},b) = \varphi\Big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),\ b\Big),\\ \overline{\overline{y}} &= \psi(\overline{x},\overline{y},b) = \psi\Big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),\ b\Big).\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

对乘积变换的几何解释如下, 由于 T_a 将点 P 变换到点 $\overline{P}=T_a(P)$, T_b 将该点变换到新位置 $\overline{\overline{P}}=T_b(\overline{P})$, 乘积 T_bT_a 最终将点 P 直接变换到了最终的位置 $\overline{\overline{P}}$, 在点 $\overline{P}$ 并没有停顿. 因此, (6.2.4) 意味着

$$\overline{\overline{P}} \overset{\text{def}}{=} T_b(\overline{P}) = T_bT_a(P).$$

定义 6.2.1 如果 G 包含了逆变换 (6.2.3) 且所有元素的乘积 T_bT_a 满足

$$T_bT_a = T_{a+b},$$

那么遵循初始条件 (6.2.2) 的只含一个参数的变换族 G (6.2.1) 称为单参数群.

对于乘积这个条件, 利用 (6.2.4) 可以写为

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),\ b\Big) &= \varphi(x,y,a+b),\\ \psi\Big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a),\ b\Big) &= \psi(x,y,a+b).\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

6.2.2 群生成元和李方程

将函数 $\varphi(x,y,a)$ 和 $\psi(x,y,a)$ 在 $a=0$ 附近展开为泰勒级数, 同时考虑初始条件 (6.2.2), 就可得到无穷小变换

$$\overline{x} \approx x+\xi(x,y)a, \quad \overline{y} \approx y+\eta(x,y)a, \tag{6.2.6}$$

其中

$$\xi(x,y) = \frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}, \quad \eta(x,y) = \frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}. \tag{6.2.7}$$

含有元素 (6.2.7) 的向量 (ξ,η) 是由经过变化后的点 $(\overline{x},\overline{y})$ 所描述的曲线的切线向量 (在点 (x,y) 处), 并且因此我们称其为群 G 的切向量场.

切向量场 (6.2.7) 与如下一阶微分算子有联系:

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6.2.8}$$

我们称其为群 G 的生成元 .

如果给出一个无穷小变换 (6.2.6), 或者生成元 (6.2.8), 那么变换 (6.2.1) 可以用下列常微分方程组积分来定义, 该方程组称为*李方程组*:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}=\xi(\varphi,\psi),\quad \varphi\Big|_{a=0}=x,\\&\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}a}=\eta(\varphi,\psi),\quad \psi\Big|_{a=0}=y.\end{aligned}\tag{6.2.9}$$

这些方程也可以写为如下形式:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}a}=\xi(\overline{x},\overline{y}),\quad \overline{x}\Big|_{a=0}=x,\\&\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}a}=\eta(\overline{x},\overline{y}),\quad \overline{y}\Big|_{a=0}=y.\end{aligned}\tag{6.2.10}$$

例如, 由

$$\bar{x}=x\cos a+y\sin a,\quad \bar{y}=y\cos a-x\sin a\tag{6.2.11}$$

定义的旋转群分别有无穷小变换

$$\overline{x}\approx x+ya,\quad \overline{y}\approx y-xa$$

和生成元

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}.\tag{6.2.12}$$

同时, 我们可以很容易地验证李方程组

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}a}=\overline{y},\quad \overline{x}\Big|_{a=0}=x,\\&\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}a}=-\overline{x},\quad \overline{y}\Big|_{a=0}=y.\end{aligned}$$

例 6.2.1 求由无穷小变换

$$\overline{x}\approx x+ax^2,\ \overline{y}\approx y+axy$$

给出的单参数群, 或等价地, 其生成元

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}.\tag{6.2.13}$$

李方程组 (6.2.10) 有形式

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}a}=\overline{x}^2,\quad \overline{x}\Big|_{a=0}=x,\\&\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}a}=\overline{x}\,\overline{y},\quad \overline{y}\Big|_{a=0}=y.\end{aligned}$$

我们可以很容易地求解这个微分方程组, 并且得到

$$\overline{x}=-\frac{1}{a+C_1},\quad \overline{y}=\frac{C_2}{a+C_1}\cdot$$

初始条件给出 $C_1=-1/x$, $C_2=-y/x$. 因此, 我们可以得到被称为投影变换群的单参数群

$$\overline{x}=\frac{x}{1-ax},\quad \overline{y}=\frac{y}{1-ax}\cdot \tag{6.2.14}$$

6.2.3 指数映射

我们也可以通过寻找无限幂级数形式解的方法求解李方程组 (6.2.10). 那么关于生成元 X (6.2.8) 的群变换 (6.2.1) 由如下指数映射给出:

$$\overline{x}=\mathrm{e}^{aX}(x),\quad \overline{y}=\mathrm{e}^{aX}(y), \tag{6.2.15}$$

其中

$$\mathrm{e}^{aX}=1+\frac{a}{1!}X+\frac{a^2}{2!}X^2+\cdots+\frac{a^s}{s!}X^s+\cdots. \tag{6.2.16}$$

例 6.2.2 再次考虑生成元 (6.2.13)

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

根据 (6.2.15)—(6.2.16), 我们需要对所有的 $s=1,2,\cdots$ 找到 $X^s(x)$ 和 $X^s(y)$. 通过计算前几项, 即

$$X(x)=x^2,\quad X^2(x)=X(X(x))=X(x^2)=2!x^3,\quad X^3(x)=X(2!x^3)=3!x^4,$$

猜测

$$X^s(x)=s!x^{s+1},$$

然后使用数学归纳法就可以证明该等式:

$$X^{s+1}(x)=X(s!x^{s+1})=(s+1)!x^2x^s=(s+1)!x^{s+2}.$$

同样地, 我们计算

$$X(y)=xy,\quad X^2(y)=X(xy)=yX(x)+xX(y)=yx^2+yxy=2!yx^2,$$

$$X^3(y)=2!(yX(x^2)+x^2X(y))=2!(y(2x^3)+x^2xy)=3!yx^3,$$

猜测

$$X^s(y)=s!yx^s,$$

然后使用数学归纳法证明上述等式:

$$X^{s+1}(y) = s!X(yx^s) = s!(syx^{s+1} + x^s(xy)) = (s+1)!yx^{s+1}.$$

将指数映射代入如上的表达式可得

$$\mathrm{e}^{aX}(x) = x + ax^2 + \cdots + a^s x^{s+1} + \cdots .$$

将方程的右边改写为 $x(1 + ax + \cdots + a^s x^s + \cdots)$, 并且注意到当 $|ax| < 1$ 时, 括号中的级数为函数 $1/(1-ax)$ 的泰勒级数展开式, 因此

$$\overline{x} = \mathrm{e}^{aX}(x) = \frac{x}{1-ax}.$$

同样地, 我们可得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{aX}(y) &= y + ayx + a^2yx^2 + \cdots + a^s yx^s + \cdots \\ &= y(1 + ax + \cdots + a^s x^s + \cdots).\end{aligned}$$

因此

$$\overline{y} = \mathrm{e}^{aX}(y) = \frac{y}{1-ax}.$$

最后, 我们可得投影变换 (6.2.14)

$$\overline{x} = \frac{x}{1-ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1-ax}.$$

6.2.4 不变量和不变方程

定义 6.2.2 如果 $F(\overline{x}, \overline{y}) = F(x, y)$, 即

$$F\big(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a)\big) = F(x, y) \tag{6.2.17}$$

对于变量 x, y 和群参数 a 是恒成立的, 那么函数 $F(x, y)$ 称为变换群 (6.2.1) G 的不变量.

定理 6.2.1 当且仅当函数 $F(x, y)$ 是一阶线性偏微分方程

$$XF \equiv \xi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{6.2.18}$$

的解时, 该函数是群 G 的不变量.

证明 设 $F(x,y)$ 是一个不变量. 我们使用 $F\big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a)\big)$ 在 a 的泰勒展开式

$$F\big(\varphi(x,y,a),\psi(x,y,a)\big)\approx F(x+a\xi,y+a\eta)\approx F(x,y)+a\Big(\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}\Big),$$

或者

$$F(\overline{x},\overline{y})=F(x,y)+aXF+o(a),$$

并将其代入方程 (6.2.17):

$$F(x,y)+aXF+o(a)=F(x,y).$$

这样就可以推出 $aXF+o(a)=0$, 因此 $XF=0$, 即方程 (6.2.18).

反之, 设 $F(x,y)$ 是方程 (6.2.18) 的一个解. 假设函数 $F(x,y)$ 是解析的, 并且使用其泰勒展开式, 我们可以将函数 $F(x,y)$ 的指数映射 (6.2.15) 展开如下:

$$F(\overline{x},\overline{y})=\mathrm{e}^{aX}F(x,y)\overset{\text{def}}{=}\left(1+\frac{a}{1!}X+\frac{a^2}{2!}X^2+\cdots+\frac{a^s}{s!}X^s+\cdots\right)F(x,y).$$

由于 $XF(x,y)=0$, 我们有 $X^2F=X(XF)=0,\cdots,X^sF=0$. 我们得到 $F(\overline{x},\overline{y})=F(x,y)$, 即方程 (6.2.17), 因此定理得证.

从定理 6.2.1 中可得, 任何单参数群的平面变换都有一个独立的不变量, 它是由 (6.2.18) 特征方程的首次积分 $h(x,y)=C$ 所给出:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta(x,y)}\cdot \tag{6.2.19}$$

任何其他的不变量 F 是 h 的函数, 即 $F(x,y)=\Phi\big(h(x,y)\big)$.

例 6.2.3 考虑有生成元

$$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$$

(6.2.13) 的群. 其特征方程 (6.2.19) 可以写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

从上述特征方程中, 我们可得首次积分为 $h=x/y$. 因此, 其不变量为 $F(x,y)=\Phi(x/y)$, 其中 Φ 是含有一个变量的任意函数.

群变换 (6.2.1) 和如上讨论的相关概念可以很清晰地推广到更一般的在 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 的 n 维空间里的多维群变换

$$\overline{x}^{\,i}=f^i(x,a),\quad i=1,\cdots,n. \tag{6.2.20}$$

变换 (6.2.20) 的生成元可以写为

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6.2.21}$$

其中

$$\xi^i(x) = \frac{\partial f^i(x,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}.$$

李方程 (6.2.10) 变为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{x}^i}{\mathrm{d}a} = \xi^i(\overline{x}), \quad \overline{x}^{\,i}\big|_{a=0} = x^i. \tag{6.2.22}$$

指数映射可以写为

$$\overline{x}^{\,i} = \mathrm{e}^{aX}(x^i), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{6.2.23}$$

其中

$$\mathrm{e}^{aX} = 1 + \frac{a}{1!}X + \frac{a^2}{2!}X^2 + \cdots + \frac{a^s}{s!}X^s + \cdots. \tag{6.2.24}$$

在多元函数的情况下, 有关不变函数的定义 6.2.2 有着同样的公式. 即, 不变量由方程 $F(\overline{x}) = F(x)$ 来定义. 这里, 不变性验证也由定理 6.2.1 给出. 我们只需要将方程 (6.2.18) 换成 n 维时的情况:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \tag{6.2.25}$$

那么 $n-1$ 个由 (6.2.25) 的特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1(x)} = \frac{\mathrm{d}x^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x^n}{\xi^n(x)} \tag{6.2.26}$$

所给出的函数无关的首次积分 $\psi_1(x), \cdots, \psi_{n-1}(x)$ 给出了不变量的基. 即, 任意不变量 $F(x)$ 都由

$$F(x) = \Phi\big(\psi_1(x), \cdots, \psi_{n-1}(x)\big) \tag{6.2.27}$$

所给出.

下面, 让我们详细介绍高维的情况. 考虑方程组

$$F(x) = 0, \cdots, F_s = 0, \quad s < n. \tag{6.2.28}$$

我们假设满足方程 (6.2.28) 所有点 x 的矩阵 $(\partial F_k/\partial x^i)$ 的秩等于 s . 那么方程组 (6.2.28) 定义了一个 $n-s$ 维的曲面 M.

定义 6.2.3 *如果每个在曲面 M 上的点 x 经过群 G 的变换后仍在曲面 M 上, 那么方程组 (6.2.28) 相对于群 G 的变换 (6.2.20) 称为不变的, 即 $x \in M$ 意味着 $\overline{x} \in M$. 曲面 M 也称为不变曲面.*

定理 6.2.2 当且仅当

$$X(F_k)\Big|_M = 0, \quad k = 1, \cdots, s \tag{6.2.29}$$

成立时, 由方程组 (6.2.28) 给出的曲面 M 相对于组群 G 的变化 (6.2.20) 是不变的. 这里我们使用的生成元为 X (6.2.21).

6.2.5 典型变量

引理 4.2.1 得出的结论有很多应用, 例如我们可以用来对微分方程求积分.

定理 6.2.3 有生成元 (6.2.8)

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

的任意一个单参数群变换 (6.2.1), 采用合适的变量代换

$$t = t(x,y), \quad u = u(x,y), \tag{6.2.30}$$

可以被简化至有生成元

$$X = \frac{\partial}{\partial t} \tag{6.2.31}$$

的平移变换群 $\bar{t} = t + a$, $\bar{u} = u$, 并且我们称变量 t 和 u 为典型变量.

证明 变量代换 (6.2.30) 将微分算子 (6.2.8) 变为 (参见方程 (4.2.3))

$$X = X(t(x,y))\frac{\partial}{\partial t} + X(u(x,y))\frac{\partial}{\partial u}. \tag{6.2.32}$$

如果我们使用一阶偏微分方程组

$$\begin{aligned} X(t) &\equiv \xi(x,y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial t}{\partial y} = 1, \\ X(u) &\equiv \xi(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{6.2.33}$$

来定义 t 和 u, 那么我们得到了生成元 (6.2.31).

例 6.2.4 我们求有着如下生成元的伸缩群的典型变量:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.2.34}$$

(6.2.33) 中的第一个方程具有形式

$$X(t) = x\frac{\partial t}{\partial x} + y\frac{\partial t}{\partial y} = 1.$$

由于只要我们找到这个方程的任意一个特解就足够了, 于是我们考虑仅依赖变量 x 的特殊解 $t=t(x)$. 如上的方程可以化为常微分方程 $xt'(x)=1$, 因此可得 $t=\ln|x|$. (6.2.33) 中的第二个方程为

$$X(u)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

其首次积分为 $y/x=C$, 因此 $u=y/x$ 是方程 $X(u)=0$ 的解. 最后, 我们就得到典型变量

$$t=\ln|x|,\quad u=\frac{y}{x}\cdot$$

使用这些变量, 伸缩群

$$\bar{x}=x\,\mathrm{e}^{a},\quad \bar{y}=y\,\mathrm{e}^{a},$$

进而简化为平移变换群

$$\bar{t}=t+a,\quad \bar{u}=u.$$

以上方程可以由如下方程推导:

$$\bar{t}=\ln|\bar{x}|=\ln(|x|\,\mathrm{e}^{a})=\ln|x|+a=t+a,$$

$$\bar{u}=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\frac{y\,\mathrm{e}^{a}}{x\,\mathrm{e}^{a}}=\frac{y}{x}=u.$$

6.3 一阶微分方程的对称性

6.3.1 群生成元的首次延拓

在 1.4.5 节中已经介绍, 在群变换 (6.2.1) 下, 换元法的导数的变换被认为是一种变量的变换. 特别地, 一阶导数的换元法公式如下:

$$\overline{y}'\equiv\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}}=\frac{D_x(\psi)}{D_x(\varphi)}\cdot\tag{6.3.1}$$

因此, 我们从方程 (6.2.1) 的变换群 G 开始, 就已经得到由关于变量 (x,y,y') 的变换 (6.2.1) 和变换 (6.3.1) 组成的群 $G_{(1)}$. 群 $G_{(1)}$ 称为 G 的*首次延拓*. 用无穷小变换 (6.2.6) $\varphi=x+a\xi(x,y)$, $\psi=y+a\eta(x,y)$ 代替 (6.3.1), 并且忽略关于 a 的高次项, 因而就可得如下的无穷小变换 y':

$$\overline{y}'=\frac{y'+a\,D_x(\eta)}{1+a\,D_x(\xi)}\approx(y'+aD(\eta))(1-aD(\xi))\approx y'+(D(\eta)-y'D(\xi))a,$$

或者

$$\overline{y}' \approx y' + a\zeta_1,$$

其中

$$\zeta_1 = D_x(\eta) - y' D_x(\xi) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y. \tag{6.3.2}$$

群 G 的生成元 X 在经过延拓后得到

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'}. \tag{6.3.3}$$

方程 (6.3.2) 和 (6.3.3) 分别称为*首次延拓公式*和*无穷小生成元的首次延拓公式* (6.2.13).

6.3.2 对称群的定义和主要性质

定义 6.3.1 *方程 (6.2.1) 的变换群 G 称为一阶常微分方程*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{6.3.4}$$

的对称群, 或者方程 (6.3.4) 容许变换群 G, 如果在经过换元法 (6.2.1) 的变换后, 微分方程 (6.3.4) 的形式仍然保持不变, 即

$$\frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}} = f(\overline{x}, \overline{y}),$$

其中函数 f 与原方程 (6.3.4) 是一致的. 换句话说, 如果方程 (6.3.4) 关于群 G 的首次延拓 $G_{(1)}$ (参见 1.4.4 节) 的空间曲线在定义 6.2.3 的意义下是保持不变的, 那么我们称 G 是方程 (6.3.4) 的对称群.

最初由索菲思 · 李 (参见 [26], 第 16 章, 第 1 节, 定理 1) 给出并证明了对称群的主要性质: 当且仅当 G 将方程 (6.3.4) 的任意经典解转化为同一方程的某一特定的经典解时, 我们称 G 为对称群.

由微分方程所容许的群变换生成元 X *称为被允许的生成元或者称为方程* (6.3.4) *的无穷小对称.*

例 6.3.1 很明显, 方程

$$y' = f(y)$$

在变换 $\overline{x} = x + a$ 下是保持不变的. 这是因为方程中并不显含 x. 因此, 这个微分方程的对称群是由沿着 x 轴的群变换给出, 即 $\overline{x} = x + a$, 其生成元为

$$X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

同样地, 方程

$$y' = f(x)$$

容许沿着 y 轴的变换群 $\overline{y} = y + a$, 其生成元为

$$X = \frac{\partial}{\partial y}.$$

例 6.3.2 方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.3.5}$$

容许齐次伸缩群变换 (比例变换)

$$\overline{x} = x\mathrm{e}^{a}, \quad \overline{y} = y\mathrm{e}^{a},$$

其生成元 (6.2.34) 为

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

例 6.3.3 考虑里卡蒂方程

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \tag{6.3.6}$$

方程的左边是一个关于 x, y, y' 的有理函数. 因此, 我们可以试着寻找一个被该方程容许的变换群, 且其形式为放大变换:

$$\overline{x} = kx, \quad \overline{y} = ly.$$

因为

$$\overline{y}' + \overline{y}^2 - \frac{2}{\overline{x}^2} = \frac{l}{k}y' + l^2y^2 - \frac{1}{k^2}\frac{2}{x^2},$$

不变条件需要满足条件

$$\overline{y}' + \overline{y}^2 - \frac{2}{\overline{x}^2} = \lambda \cdot \left(y' + y^2 - \frac{2}{x^2}\right),$$

其中

$$\lambda = \frac{l}{k} = l^2 = \frac{1}{k^2}.$$

从上述方程可以得到 $l = 1/k$, 其中 $k > 0$ 是一个任意的参数. 设 $k = \mathrm{e}^{a}$, 我们就可得非齐次伸缩变换群

$$\overline{x} = x\,\mathrm{e}^{a}, \quad \overline{y} = y\,\mathrm{e}^{-a}.$$

因此, 里卡蒂方程 (6.3.6) 有如下的无穷小对称:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.3.7}$$

6.3.3 给定对称性的方程

这类问题的求解是基于群对称的定义 6.3.1、延拓公式 (6.3.2)—(6.3.3) 和不变曲面验证 (6.2.29). 即, 为了找到一般的一阶微分方程 (6.3.4)

$$y' = f(x, y), \tag{6.3.8}$$

且该方程容许给定的算子

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6.3.9}$$

我们使用公式 (6.3.2) 延拓算子 X:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'}$$

并将不变曲面验证 (6.2.29) 写为

$$\zeta_1\big|_{y'=f(x,y)} = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

将由 (6.3.3) 给出的 ζ_1 的表达式代入, 我们可得到确定 $f(x, y)$ 的拟线性一阶偏微分程

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2. \tag{6.3.10}$$

求解方程 (6.3.10), 我们就可得容许算子 (6.3.9) 产生的所有方程 (6.3.8).

例 6.3.4 求容许以下算子的方程:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.3.11}$$

方程 (6.3.10) 可写为

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = -2f. \tag{6.3.12}$$

对于方程 (6.3.12), 特征方程 (4.4.7) 为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}f}{2f}.$$

取其两个首次积分 $\psi_1 = xy$ 和 $\psi_2 = x^2 f$, 可得方程 (6.3.12) 的通解

$$f = x^{-2}\,F(xy).$$

因此, 容许算子 (6.3.11) 的方程为

$$x^2\,y' = F(xy). \tag{6.3.13}$$

例 6.3.5 求容许有生成元 (6.2.12)

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.3.14}$$

的旋转变换群 (6.2.11) 的方程.

方程 (6.3.10) 可以写为

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = -(1+f^2). \tag{6.3.15}$$

方程 (6.3.15) 的特征方程组 (4.4.7) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = -\frac{\mathrm{d}y}{x} = -\frac{\mathrm{d}f}{1+f^2}.$$

由第一个方程 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ 可得 $x^2 + y^2 =$ 常数. 因此, 取

$$\psi_1 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

那么对于特征方程, 我们可得 $x^2 + y^2 = a^2 =$ 常数. 利用这个方程的特点, 第二个方程可以写为 (参见例 4.4.1)

$$\frac{\mathrm{d}f}{1+f^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

由此对上式进行积分,

$$\arctan f = \arctan(y/x) + \arctan C. \tag{6.3.16}$$

剩下的就是我们来求解积分常数 C 并且使用首次积分 ψ_2 来确定 C. 设 $\psi_2 = F(\psi_1)$, 这样我们可以很容易地求得方程 (6.3.15) 的解. 因此, 我们将方程 (6.3.16) 写为形式

$$\arctan f = \arctan(y/x) + \arctan F(\psi_1).$$

针对于 f 求解此式, 并使用基本公式

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}$$

可得

$$f = \frac{(y/x) + F(\psi_1)}{1 - (y/x)\,F(\psi_1)} = \frac{y + xF(\sqrt{x^2+y^2})}{x - yF(\sqrt{x^2+y^2})}.$$

因此, 容许算子 (6.3.14) 的方程有形式

$$y' = \frac{y + xF(\sqrt{x^2+y^2})}{x - yF(\sqrt{x^2+y^2})}. \tag{6.3.17}$$

表 6.3.1 一些已知其对称的非线性一阶微分方程

序号	方程	对称
1	$y'=F(y)$	$X=\frac{\partial}{\partial x}$
	$y'=F(kx+ly)$	$X=l\frac{\partial}{\partial x}-k\frac{\partial}{\partial y}$
2	$y'=F(y/x)$	$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$
3	$y'=x^{k-1}F(y/x^k)$	$X=x\frac{\partial}{\partial x}+ky\frac{\partial}{\partial y}$
4	$xy'=F(x\mathrm{e}^{-y})$	$X=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$
5	$y'=yF(y\mathrm{e}^{-x})$	$X=\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$
6	$y'=\frac{y}{x}+xF(y/x)$	$X=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}$
7	$xy'=y+F(y/x)$	$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$
8	$y'=\frac{y}{x+F(y/x)}$	$X=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}$
9	$y'=\frac{y}{x+F(y)}$	$X=y\frac{\partial}{\partial x}$
10	$xy'=y+F(x)$	$X=x\frac{\partial}{\partial y}$
11	$xy'=\frac{y}{\ln x+F(y)}$	$X=xy\frac{\partial}{\partial x}$
12	$xy'=y(\ln y+F(x))$	$X=xy\frac{\partial}{\partial y}$

6.4 利用对称求解一阶微分方程的积分

6.4.1 李积分因子

考虑写成对称形式 (3.2.3) 的一阶微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{6.4.1}$$

李指出, 如果

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

是方程 (6.4.1) 的对称群, 并且如果 $\xi M+\eta N\neq 0$, 那么函数

$$\mu=\frac{1}{\xi M+\eta N} \tag{6.4.2}$$

是方程 (6.4.1) 的一个积分因子, 它称为李积分因子.

例 6.4.1 从例 3.2.2 可知, 方程 $2xy\mathrm{d}x+(y^2-3x^2)\mathrm{d}y=0$ 是齐次的 (例 3.1.1), 满足 (6.3.5) 的形式并容许

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

李公式 (6.4.2) 给出了该方程的积分因子

$$\mu = \frac{1}{2x^2y + y^3 - 3x^2y} = \frac{1}{y^3 - x^2y}.$$

例 6.4.2 让我们使用李积分因子来求解里卡蒂方程 (6.3.6). 首先将方程 (6.3.6) 重新写为如下的微分形式 (6.4.1):

$$\mathrm{d}y + \left(y^2 - \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 0, \tag{6.4.3}$$

并且使用对称 (6.3.7) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$. 将

$$\xi = x, \quad \eta = -y, \quad M = y^2 - \frac{2}{x^2}, \quad N = 1$$

代入 (6.4.2), 我们可得积分因子

$$\mu = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}.$$

然后在方程两边同时乘以该因子, 那么方程 (6.4.3) 变为

$$\frac{x\mathrm{d}y}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{1}{x^2y^2 - xy - 2}\,\frac{x^2y^2 - 2}{x}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{6.4.4}$$

该方程是全微分方程, 即, 其左边可以用 $\mathrm{d}\Phi$ 来表示. 我们当然可以使用 3.2.2 节中提供的一般步骤来求解函数 $\Phi(x, y)$. 然而在这种特殊情况下, 可以使用如下的简单计算. 注意到

$$\frac{x^2y^2 - 2}{x} = y + \frac{x^2y^2 - xy - 2}{x},$$

我们将方程 (6.4.4) 的左边写成形式

$$\frac{x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

记 $z = xy$ 并利用分解

$$\frac{1}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\Big),$$

于是积分可得

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{3}\ln\frac{z-2}{z+1},$$

因此方程 (6.4.4) 可以写成形式

$$\frac{x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}\Big(\ln x + \frac{1}{3}\ln\frac{xy-2}{xy+1}\Big) = 0.$$

其积分为

$$\frac{xy-2}{xy+1}=\frac{C}{x^3},\quad C\neq 0.$$

求解上式中的 y, 我们可得里卡蒂方程 (6.3.6) 的解

$$y=\frac{2x^3+C}{x(x^3-C)}.$$

例 6.4.3 再次考虑方程 (参见方程 (6.4.13))

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}.$$

从例 6.4.6 中可知, 该方程有对称

$$X_1=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

使用 6.3.2 节中例 6.3.3 所提供的方法, 我们可知该方程同样也容许如下的伸缩生成元:

$$X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

将本例中的方程写为微分形式

$$(x^2y+y^2)\mathrm{d}x-x^3\mathrm{d}y=0,$$

并将算子 X_1 和 X_2 代入 (6.4.2), 这样就可得两个相互线性无关的积分因子

$$\mu_1=\frac{1}{x^2(x^2y+y^2)-x^4y}=\frac{1}{x^2y^2},\quad \mu_2=\frac{1}{x(x^2y+y^2)-2x^3y}=\frac{1}{xy(y-x^2)}.$$

利用方程 (3.2.13), $\mu_1/\mu_2=C$ 可以写为 $y-x^2=Cxy$ 并最终求得其解为 $y=x^2/(1-Cx)$. 有兴趣的读者可以与例 6.4.6 中的 (6.4.15) 作比较.

6.4.2 利用典型变量求积分

使用*典型变量方法*, 用已知的无穷小对称

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\tag{6.4.5}$$

求解线性或非线性一阶常微分方程

$$y'=f(x,y).\tag{6.4.6}$$

其步骤如下:

第一步：通过求解已知算子 (6.4.5) 的微分方程 (6.2.33), 找到其典型变量 t, u.

第二步：改写方程 (6.4.6) , 这里新的变量为典型变量 t 和 u , 然后设新的因变量为 u, 新的自变量为 t. 即, 设 $u = u(t)$ 并且将以前的导数 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 用新的变量 t, u 和新的导数 $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 来表示. 那么方程 (6.4.6) 将变为可积形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = g(u). \tag{6.4.7}$$

第三步：对方程 (6.4.7) 进行积分, 将其代入解 $u = \phi(t, C)$ 中, 这里我们有 $t = t(x, y)$ 和 $u = u(x, y)$, 最后我们得到方程 (6.4.5) 的解.

例 6.4.4 使用无穷小对称 (6.2.34), 我们可以使用求积法对任何满足形式 (6.3.5) 的方程求积分. 为举例说明, 我们来求解满足形式 (6.3.5) 的特殊方程的积分

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}. \tag{6.4.8}$$

第一步：对于无穷小对称 (6.2.34) 的典型变量, 我们已经在例 6.2.4 中求得. 它们是

$$t = \ln|x|, \quad u = \frac{y}{x}.$$

第二步：以典型变量 t 和 u 为自变量, 改写方程 (6.4.8). 因为 $y = xu$, $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = 1/x$, 记 $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$:

$$y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(xu)}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = u + xu'\frac{1}{x} = u + u'.$$

因此, 方程 (6.4.8) 变为一个有着形式 (6.4.7) 的特殊方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u^3.$$

第三步：对上述方程积分可得

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{C - 2t}},$$

然后代入 $t = \ln|x|$ 和 $y = xu$ 可得

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{C - \ln x^2}}.$$

例 6.4.5 下面我们求解里卡蒂方程 (6.3.6)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0,$$

要求使用典型变量法和其对称 (6.3.7)

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

第一步：使用如上的对称 X 求解方程 (6.2.33), 我们可以求得其典型变量为 $t = \ln|x|$ 和 $u = xy$.

第二步：使用新的变量 t 和 u 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x}\right) = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x^2}\cdot$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{u'}{x^2} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(u' + u^2 - u - 2\right) = 0.$$

最后, 里卡蒂方程可以在新的典型变量下改写为可积形式 (6.4.7)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -(u^2 - u - 2).$$

第三步：对如上方程进行积分. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2 - u - 2} = -\mathrm{d}t,$$

将上述有理分数分解:

$$\frac{1}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+1}\right),$$

积分可得

$$\ln\left(\frac{u-2}{u+1}\right) = -3t + \ln C\cdot$$

现在我们来求解方程中的 u,

$$u = \frac{C + 2\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{e}^{3t} - C},$$

将 $t = \ln|x|$, $u = xy$ 代入上式, 这样就可以得到在例 6.4.2 中的里卡蒂方程 (6.3.6) 的解

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)}, \quad C = 常数. \tag{6.4.9}$$

如上的计算需要满足 $xy - 2$ 和 $xy + 1$ 都不等于零. 因此, 我们需要在方程 (6.3.6) 的解 (6.4.9) 中加入特解

$$y = \frac{2}{x} \quad 及 \quad y = -\frac{1}{x}\cdot \tag{6.4.10}$$

例 6.4.6 含有任意函数 F 的方程

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.4.11}$$

容许投影变换群 (6.2.14)

$$\overline{x} = \frac{x}{1-ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1-ax}$$

的生成元 (6.2.13)

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.4.12}$$

事实上, 由方程

$$D_x(\overline{x}) = \frac{1}{(1-ax)^2}, \quad D_x(\overline{y}) = \frac{(1-ax)y' + ay}{(1-ax)^2}$$

可得

$$\overline{y}' = \frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\mathrm{d}\overline{x}} = \frac{D_x(\overline{y})}{D_x(\overline{x})} = (1-ax)y' + ay.$$

因此,

$$\overline{y}' - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}} F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = (1-ax)y' + ay - \frac{y}{x} - \frac{1-ax}{x} F\left(\frac{y}{x}\right)$$

或者

$$\overline{y}' - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}} F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = (1-ax)\left(y' - \frac{y}{x} - \frac{1}{x} F\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

因此, 方程 (6.4.11) 变为

$$\overline{y}' - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}} F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = 0.$$

我们下面来求解满足形式 (6.4.11) 的特殊方程, 这里令 $F(\sigma) = \sigma^2$, 即方程 (参见例 6.4.3)

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}. \tag{6.4.13}$$

第一步: 有着生成元 (6.4.12) 的方程 (6.2.33) 可以写为

$$X(t) = x^2 \frac{\partial t}{\partial x} + xy \frac{\partial t}{\partial y} = 1, \quad X(u) = x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

取该方程的一个特解 $t = t(x)$, 我们可以得到典型变量

$$t = -\frac{1}{x}, \quad u = \frac{y}{x}. \tag{6.4.14}$$

第二步：使用新的变量改写方程，可得

$$y' = \frac{\mathrm{d}(xu)}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = u + xu'\frac{1}{x^2} = u + \frac{1}{x}u',$$

方程 (6.4.13) 变为形如 (6.4.7) 的可积形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u^2.$$

第三步：排除解 $u = 0$ 并且对其进行积分，我们有

$$u = -\frac{1}{C+t}.$$

在上式中代入 $t = -1/x, u = y/x$ 并加上解 $u = 0$，最后就可以得到方程 (6.4.13) 的通解

$$y = \frac{x^2}{1-Cx}, \quad y = 0. \tag{6.4.15}$$

6.4.3 不变解系

常微分方程对称群 G 的一个很重要的性质就是将方程任意一个解 (积分曲线) 仍然转变为一个解. 换句话说，对称变换仅仅是将积分曲线改变其排列顺序. 有可能积分曲线在群 G 变换下是不变的. 这样的积分曲线称为**不变解系**.

例 6.4.7 再次考虑里卡蒂方程 (6.3.6)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0,$$

并在如下无穷小变换下求其不变解系：

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

不变性验证 (6.2.18) $X(J) = 0$ 给出了单一独立不变解 xy. 因此 $xy =$ 常数，是唯一一个由不变量给出的关系式. 那么不变解系的一般形式可以写为 $xy = \lambda$，或者 $y = \lambda/x$，$\lambda =$ 常数. 将其代入里卡蒂方程，可得二次方程 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$，从中我们可以求得该常数的值，即 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = -1$. 所以，该不变解系和如下两个特解 (6.4.10) 是等同的：

$$y_1 = \frac{2}{x}, \quad y_2 = -\frac{1}{x}.$$

6.4.4 由不变解系给出的通解

不变解系的方法提供了在已知两个无穷小算子的条件下, 求解一阶常微分方程的积分的方法. 考虑如下例子.

例 6.4.8 考虑方程 (6.4.11), 这里 $F(\sigma)=\sigma^n$, 即方程

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{y^n}{x^{n+1}}.$$

如同它容许有生成元 (6.4.12) 的投影变换群, 它容许有生成元

$$X=(n-1)x\frac{\partial}{\partial x}+ny\frac{\partial}{\partial y}$$

的伸缩变换群, 取 $n=2$, 因此我们考虑方程 (6.4.13),

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3},$$

它有两个已知的无穷小对称

$$X_1=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

方程 $X_2(J)=0$ 给出了一个独立的不变量 y/x^2. 因此不变解可以从 $y/x^2=\lambda$ 或 $y=\lambda x^2$ 中得到. 这里 $\lambda\neq 0$ 是任意常数. 那么上述微分方程可以简化为

$$y'-\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^3}=2\lambda x-\lambda x-\lambda^2 x=\lambda(1-\lambda)x=0.$$

因此 $\lambda=1$, 并且可得不变解

$$y=x^2. \tag{6.4.16}$$

现在考虑由 X_1 生成的投影变换群 (6.2.14)

$$\overline{x}=\frac{x}{1-ax},\quad \overline{y}=\frac{y}{1-ax},$$

在这新的变量下改写不变解 (6.4.16), 我们得到形式

$$\overline{y}=\overline{x}^{\,2},$$

将 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 代入上式, 可得

$$\frac{y}{1-ax}=\frac{x^2}{(1-ax)^2}.$$

记参数 a 为 C, 我们可得通解 (6.4.15)

$$y=\frac{x^2}{1-Cx}.$$

6.5 二阶方程

6.5.1 群生成元的二次延拓 · 对称的计算

二阶和高阶常微分方程的无穷小对称就可以通过求解*决定方程*而获得. 学生若想要将来发展自己在从事李对称分析的分析能力, 可以在图书馆找到足够的参考文献. 此外, 作为一定的扩充, 这里为读者准备了一些例子, 同时介绍如何使用电脑代数软件包来计算对称.

在这节中, 我们通过计算二阶方程

$$y'' = f(x, y, y') \tag{6.5.1}$$

的对称来阐明决定方程方法. 我们的目标是寻找一个容许无穷小生成元

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{6.5.2}$$

系数 ξ 和 η 可以从下列称为*决定方程*的方程得到:

$$X\Big(y'' - f(x, y, y')\Big)\Big|_{y''=f} \equiv \big(\zeta_2 - \zeta_1 f_{y'} - \xi f_x - \eta f_y\big)\Big|_{y''=f} = 0, \tag{6.5.3}$$

其中符号 $|_{y''=f}$ 的意思是 y'' 在对应的表达式中被方程 (6.5.1) 的右边取代, 这里 ζ_1 和 ζ_2 由*延拓方程*决定:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= D_x(\eta) - y' D_x(\xi) \;=\; \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y\, y'^2, \\ \zeta_2 &= D_x(\zeta_1) - y'' D_x(\xi) = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' \\ &\quad + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}\, y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y\, y')y''. \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

将 (6.5.4) 代入方程 (6.5.3), 得到

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - y'^3\xi_{yy} - \xi f_x - \eta f_y \\ &\quad + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)f - (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y)f_{y'} = 0. \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

方程 (6.5.5) 包括所有三个变量 x, y 和 y', 但是 y' 并不出现在 ξ 和 η 中. 因此, 决定方程 (6.5.5) 可以分解成几个方程而变成对两个未知函数 ξ 和 η 的超定微分方程组. 解这个方程组以后, 即找到了方程 (6.5.1) 的所有无穷小对称.

例 6.5.1 我们来求方程

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} \tag{6.5.6}$$

的无穷小对称, 将 $f = y'y^{-2} - (xy)^{-1}$ 代入决定方程 (6.5.5), 我们有

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - y'^3\xi_{yy} - \frac{\xi}{x^2y} + \Big(2\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{xy^2}\Big)\eta$$
$$+(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)\Big(\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy}\Big) - \frac{1}{y^2}(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y) = 0.$$

这个方程应该在变量 x, y 和 y' 下同时成立. 因为它的左边是一个 y' 的三次多项式, 我们设 $y'^3, y'^2, \cdots$ 的系数为 0, 并得到下面四个方程:

$$\begin{aligned}
&\big(y'\big)^3 : \xi_{yy} = 0,\\
&\big(y'\big)^2 : y^2\left(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}\right) - 2\xi_y = 0,\\
&\big(y'\big)^1 : y^3\left(2\eta_{xy} - \xi_{xx}\right) - y\xi_x + 2\eta + 3\big(y^2/x\big)\xi_y = 0,\\
&\big(y'\big)^0 : x^2y^2\eta_{xx} - x^2\eta_x + xy\left(2\xi_x - \eta_y\right) - x\eta - y\xi = 0.
\end{aligned}$$

对前两个方程关于 y 积分得到

$$\xi = p(x)y + a(x), \quad \eta = -p(x)\ln(y^2) + p'(x)y^2 + q(x)y + b(x).$$

我们将 ξ 和 η 的表达式代入第三个和第四个方程. 得到的两个方程的左边将包含关于 y 的多项式, 也含 $\ln(y^2)$ 的项. 设后项为 0, 得 $p(x) = 0$. 因此, $\xi = a(x)$, $\eta = q(x)y + b(x)$. 现在由第三个和第四个方程推出

$$\xi = C_1x^2 + C_2x, \quad \eta = \Big(C_1x + \frac{1}{2}C_2\Big)y.$$

由此决定方程的通解提供了下列方程 (6.5.6) 的无穷小对称:

$$X = \Big(C_1x^2 + C_2x\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(C_1x + \frac{1}{2}C_2\Big)y\frac{\partial}{\partial y}$$

或者

$$X = C_1\Big(x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}\Big) + C_2\Big(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big) = C_1X_1 + C_2X_2,$$

其中 X_1 和 X_2 是方程 (6.5.6) 的两个线性无关 (基础) 无穷小对称:

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.5.7}$$

例 6.5.2 我们来求方程

$$y'' + \mathrm{e}^{3y}y'^4 + y'^2 = 0 \tag{6.5.8}$$

的无穷小对称, 将 $f=-(\mathrm{e}^{3y}y'^4+y'^2)$ 代入决定方程 (6.5.5), 得

$$\begin{aligned}&\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})y'^2-y'^3\xi_{yy}\\&+3\mathrm{e}^{3y}y'^4\,\eta-(\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y)(\mathrm{e}^{3y}y'^4+y'^2)\\&+(\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-y'^2\xi_y)(4\mathrm{e}^{3y}y'^3+2y')=0.\end{aligned}$$

这个方程的左边是一个 y' 的五次多项式. 如之前的例子, 设 $y'^5, y'^4, \cdots$ 系数均为 0, 并得到下面四个独立方程:

$$\begin{aligned}&\left(y'\right)^5:\xi_y=0,\\&\left(y'\right)^4:3(\eta_y+\eta)-2\xi_x=0,\\&\left(y'\right)^3:\eta_x=0,\\&\left(y'\right)^1:\xi_{xx}=0.\end{aligned}$$

$(y')^2$ 和 $(y')^0$ 的系数分别与 $(y')^4$ 和 $(y')^1$ 的系数同时消去. 以上关于 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 的四个微分方程可以容易解出, 得到 (见习题 7.16)

$$\xi=C_2+3C_3\,x,\quad \eta=2C_3+C_1\mathrm{e}^{-y},$$

其中 C_1, C_2, C_3 是任意常数. 因此, 被方程 (6.5.8) 容许的算子

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

为

$$X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3,$$

其中

$$X_1=\mathrm{e}^{-y}\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=3x\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.5.9}$$

换句话说, 方程 (6.5.8) 容许由算子 (6.5.9) 生成的一个三维向量空间 L_3 .

6.5.2 李代数

以上的例子可以看成是通过举例说明决定方程的一般性质. 即这些方程的所有解集构成一个如下定义的李代数.

考虑任意一阶线性偏微分算子

$$X_1=\xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=\xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.5.10}$$

定义 6.5.1 算子 (6.5.10) 的换位子 $[X_1, X_2]$ 是由公式

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$$

定义的线性偏微分算子, 或等价地

$$[X_1, X_2] = \Big(X_1(\xi_2) - X_2(\xi_1)\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(X_1(\eta_2) - X_2(\eta_1)\Big)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.5.11}$$

定义 6.5.2 设 L_r 是一个由形如 (6.5.10) 的任意 r 个线性无关算子生成的 r 维线性空间, 即算子的集合

$$X = C_1X_1 + \cdots + C_rX_r,$$

其中 $C_1, \cdots, C_r =$ 常数. 若此空间对于换位子是封闭的, 那么空间集 L_r 称为李代数, 也就是说, 当 $X, Y \in L_r$ 时, $[X, Y] \in L_r$. 其等价的条件为 $[X_i, X_j] \in L_r$ $(i, j = 1, \cdots, r)$, 若

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad c_{ij}^k = 常数. \tag{6.5.12}$$

算子 $X_1, \cdots, X_r$ 提供了一个李代数 L_r 的基. 我们也称 L_r 是一个由 X_i $(i = 1, \cdots, r)$ 生成的李群.

例 6.5.3 考虑算子 (6.5.7). 使用 (6.5.11), 就可以得到换位子 $[X_1,\ X_2] = -X_1$. 因此, 算子 (6.5.7) 生成一个二维李代数 L_2. 于是, 我们称方程 (6.5.6) 容许一个二维李代数.

定义 6.5.3 设 L_r 是一个由 $X_i,\ i = 1, \cdots, r$ 生成的李代数向量空间. L_r 的一个子空间 L_s 是由 L_r 的基的一个子集生成的, 例如 $X_1, \cdots, X_s,\ s < r$, L_s 称为 L_r 的一个子代数, 若

$$对于任意\ X, Y \in L_s,\ [X, Y] \in L_s,$$

即

$$[X_i, X_j] \in L_s,\ i, j = 1, \cdots, s.$$

此外, 如果当 $X \in L_s$ 和 $Y \in L_r$ 时,

$$[X, Y] \in L_s,$$

则 L_s 称为 L_r 的一个理想子代数, 即

$$[X_i, X_j] \in L_s,\ i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r.$$

为了寻求一个李代数、子代数和其他性质, 一个简便方法是通过换位子表的形式确定换位子: X_i 行和 X_j 列的元素为 $[X_i, X_j]$. 因为换位子 (6.5.11) 是反对称的, 换位子表也会是反对称的, 在主对角线上的元素都为 0.

例 6.5.4 考虑算子 (6.5.9). 用换位子的定义 6.5.11, 可以容易地列出下列换位子表.

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	$2X_1$
X_2	0	0	$3X_2$
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$	0

从上表可知, 算子 (6.5.9) 生成一个由方程 (6.5.8) 容许的三维李代数 L_3. 这个表也显示了任意两个算子, 即 (X_1, X_2), (X_1, X_3) 或 (X_2, X_3), 生成一个二维子代数. 此外, 换位子表也显示了由 X_1 和 X_2 生成的二维子代数是李代数 L_3 的理想子代数, 而算子 X_1 和 X_3 不能生成李代数 L_3 的一个理想子代数.

6.5.3 二维李代数的标准形式

在下节讨论的二阶常微分方程的李积分方法基于在二维李代数上的*典范坐标*. 对于每个 L_2, 这些变量提供了它的基的最简单形式而且将 L_2 所容许的一个微分方程化为可积形式. 陈述如下.

定理 6.5.1 任意二维李代数可以通过它的一个恰当的基和恰当的变量, 即称为*典型变量* t, u, 的选择, 变换成一个如表 6.5.1 显示的四个非相似标准形式之一.

表 6.5.1 L_2 的结构和标准形式

类型	L_2 的结构	L_2 的标准形式
I	$[X_1,\ X_2]=0,\ \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2\neq 0$	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial t},\ X_2=\dfrac{\partial}{\partial u}$
II	$[X_1,\ X_2]=0,\ \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2=0$	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial u},\ X_2=t\dfrac{\partial}{\partial u}$
III	$[X_1,\ X_2]=X_1,\ \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2\neq 0$	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial u},\ X_2=t\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial u}$
IV	$[X_1,\ X_2]=X_1,\ \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2=0$	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial u},\ X_2=u\dfrac{\partial}{\partial u}$

注 6.5.1 在类型 III 和 IV 中, 假设 $[X_1,\ X_2]\neq 0$, 可以通过在 L_2 中一个适当的基变换使条件 $[X_1,\ X_2]=X_1$ 得以满足.

6.5.4 李积分法

为了对所有容许一个二维李代数的二阶微分方程

$$y'' = f(x, y, y') \tag{6.5.13}$$

进行积分, 李证明了定理 6.5.1. 李方法包括把这些方程分类成符合表 6.5.1 的四种形式. 即, 通过引入典型变量 t, u, 可将被容许的李代数 L_2 化为表 6.5.1 的其中一个标准形式. 用典型变量重写方程 (6.5.13). 其结果

$$u'' = g(t, u, u') \tag{6.5.14}$$

将会是在表 6.5.2 的四个积分典型形式中的一个.

这方法介绍如下. 假设我们知道一个被容许的李代数 L_2 有一个基 (6.5.10), 那么, 积分需要下面的步骤.

第一步: 根据表 6.5.1 的列结构决定 L_2 的类型. 可能需要根据换位子的表达式类型 III 和 IV 对 L_2 的基作改变 (见备注 6.5.1).

第二步: 通过解与如下类型匹配的方程求典型变量:

$$\begin{aligned}
&\textbf{类型 I}: && X_1(t) = 1,\ X_2(t) = 0; && X_1(u) = 0,\ X_2(u) = 1.\\
&\textbf{类型 II}: && X_1(t) = 0,\ X_2(t) = 0; && X_1(u) = 1,\ X_2(u) = t.\\
&\textbf{类型 III}: && X_1(t) = 0,\ X_2(t) = t; && X_1(u) = 1,\ X_2(u) = u.\\
&\textbf{类型 IV}: && X_1(t) = 0,\ X_2(t) = 0; && X_1(u) = 1,\ X_2(u) = u.
\end{aligned} \tag{6.5.15}$$

选择 t 为一个新的自变量以及 u 为因变量, 把微分方程重新写成典型变量的形式. 它将会是在表 6.5.2 内的一个积分形式. 然后积分方程.

第三步: 重新用原始变量 x, y 表示所求得的结果. 这样完成积分步骤.

表 6.5.2 容许 L_2 的二阶方程的四种形式

类型	L_2 的标准形式	方程的标准形式
I	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(u')$
II	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u},\ X_2 = t\dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(t)$
III	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u},\ X_2 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = \dfrac{1}{t}f(u')$
IV	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u},\ X_2 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$	$u'' = f(t)u'$

例 6.5.5 方程

$$y'' = yy'^2 - xy'^3 \tag{6.5.16}$$

容许基为

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} \tag{6.5.17}$$

的二维李代数.

第一步: 算子 (6.5.17) 满足方程

$$[X_1,\ X_2] = X_1, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 = 0,$$

因此, L_2 有表 6.5.1 的类型 IV.

第二步: 由类型 IV 的方程 (6.5.15)

$$X_1(t) = 0,\ X_2(t) = 0;\ X_1(u) = 1,\ X_2(u) = u$$

得到典型变量

$$t = y, \quad u = \frac{x}{y}.$$

由 t 的定义, 我们有全微分的变换

$$D_x = y'D_t,$$

并且将其用于对方程 $u = x/y$ 的微分从而得到

$$y - xy' = y^2y'u'.$$

求解关于 y' 的方程得

$$y' = \frac{y}{x + y^2u'},$$

或者用新变量重写右边,

$$y' = \frac{1}{u + tu'}.$$

再次对这个方程求微分, 我们得到

$$y'' = -y'\,\frac{2u' + tu''}{(u + tu')^2} = -\frac{2u' + tu''}{(u + tu')^3}.$$

因此根据表 6.5.2, 方程 (6.5.16) 具备下面线性形式:

$$u'' = -\left(t + \frac{2}{t}\right)u'. \tag{6.5.18}$$

设 $u'=v$, 这样就可以重新把方程 (6.5.18) 写成一个一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\left(t+\frac{2}{t}\right)v,$$

于是

$$\ln v=\ln C_1+\ln(t^{-2})-\frac{t^2}{2},$$

或

$$v=\frac{C_1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

因此我们得到方程

$$u'=\frac{C_1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

对它积分就可以得到方程 (6.5.18) 的解

$$u=C_2+C_1\int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

第三步: 返回到原始变量, 我们得到方程 (6.5.16) 的通解的隐函数表达式

$$x=y\left(C_2+C_1\int\frac{1}{y^2}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right).$$

例 6.5.6 我们从例子 6.5.1 知道非线性方程 (6.5.6)

$$y''=\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{xy}$$

容许以 (6.5.7) 为基的二维李代数 L_2. 因此该方程可以使用李积分法.

第一步: 我们将会使用无穷小对称的基本形式 (6.5.7′)

$$X_1=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=-x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y},$$

得到 $[X_1,\ X_2]=X_1$ (参照例 6.5.3) 和 $\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2=x^2y/2\neq 0$. 因此, 李代数 L_2 具有表 6.5.1 中类型 III 的结构.

第二步: 我们来求典型变量并积分方程. 由关于新变量 t 的方程组 $X_1(t)=0,\ X_2(t)=t$ 有

$$t=\left(\frac{y}{x}\right)^2,\tag{6.5.19}$$

由关于 u 的方程组 $X_1(u)=1,\ X_2(u)=u$ 可得

$$u=-\frac{1}{x}.\tag{6.5.20}$$

如果使用典型变量 t,u, 那么算子 X_1,X_2 (6.5.7′) 变成

$$X_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}.$$

通过自变量代换 (6.5.19), (1.2.66) 定义的关于 x 的全微分 D_x 变换成如下定义的关于 t 全微分 D_t:

$$D_x=D_x\left(\frac{y^2}{x^2}\right)D_t=2\,\frac{y(xy'-y)}{x^3}\,D_t,$$

或者

$$D_x=2u(t-\sqrt{t}\,y')\,D_t\,. \tag{6.5.21}$$

现在我们利用方程 (6.5.21) 对方程 (6.5.20) 的两边同时微分, 并调用 (6.5.20) 关于 t 的左边和关于 x 的右边得

$$2u(t-\sqrt{t}\,y')\,D_t(u)=D_x\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}=u^2,$$

或者简化为

$$t-\sqrt{t}\,y'=\frac{u}{2u'}.$$

为了便于计算二阶微分的变换, 通常分别将关于全微分及一阶微分的变换写为

$$D_x=\frac{u^2}{u'}\,D_t$$

和

$$y'=\sqrt{t}-\frac{u}{2\sqrt{t}\,u'},$$

然后可以马上得到二阶微分变换

$$y''=\frac{u^3}{4t\sqrt{t}\,u'^2}+\frac{u^3u''}{2\sqrt{t}\,u'^3}.$$

由方程 (6.5.19)—(6.5.20) 推出

$$\frac{1}{xy}=\frac{u^2}{\sqrt{t}}.$$

此外, 使用 y' 的表达式和方程 (6.5.19)—(6.5.20) 推出

$$\frac{y'}{y^2}=\frac{u^2}{\sqrt{t}}-\frac{u^3}{2t\sqrt{t}\,u'}.$$

将上面的表达式代入原方程, 方程 (6.5.6) 满足积分形式

$$u''=-\frac{1}{t}u'\left(u'+\frac{1}{2}\right). \tag{6.5.22}$$

方程 (6.5.22) 等价于原方程 (6.5.6) 吗? 更具体一点, 方程 (6.5.6) 的全部解是否是从 (6.5.22) 的解通过变量 (6.5.19)—(6.5.20) 变换得到的, 反之是否也是? 答案并不是不言而喻的, 因为由 (6.5.19) 定义的变量 t 包含原方程 (6.5.6) 的因变量 y, 因此 t 可以被认为是一个新的自变量仅当方程 (6.5.6) 在 t 不等于常数时无解, 但是直接观察表明 (6.5.6) 确实有奇异解, 而且 $t=$ 常数, 即解由直线

$$y = Kx$$

给出, 其中 $K =$ 常数. 方程 (6.5.6) 的其他所有解是通过变量代换 (6.5.19)—(6.5.20) 得到的 (6.5.22) 的解.

此外, 应该检查方程 (6.5.22) 所有的解是否是 (6.5.6) 的解. 我们注意到方程 (6.5.22) 明显满足 $u'=0$ 和 $u'=-1/2$, 对应的解为 $u=A$, $u=C-t/2$, 其中 A 和 C 是任意常数. 根据 (6.5.20), 以上的第一个解 $u=A$ 意味着 $x=$ 常数. 因此它不是方程 (6.5.6) 的解且应该被忽略. 但是第二个解 $u=C-t/2$ 提供了方程 (6.5.6) 的一个解. 即, 分别替代关于 t 和 u 的表达式 (6.5.19) 和 (6.5.20) 得到方程 (6.5.6) 的解

$$y = \pm\sqrt{2x + Cx^2}.$$

现在我们积分方程 (6.5.22) 且排除以上奇异解, 即考虑 $u' \neq 0$ 和 $u'+1/2 \neq 0$. 那么由 (6.5.22) 得

$$\ln\left|K_1\sqrt{t}\right| = -\int \frac{\mathrm{d}u'}{u'(2u'+1)} = \int \frac{2\mathrm{d}u'}{2u'+1} - \int \frac{\mathrm{d}u'}{u'} = \ln\left|\frac{2u'+1}{u'}\right|,$$

或者

$$K_1\sqrt{t} = \frac{2u'+1}{u'},$$

其中

$$u' = \frac{1}{2(C_1\sqrt{t}-1)},$$

这里 $C_1 = K_1/2 \neq 0$. 最终, 对方程的两边同时进行积分得到

$$u = \frac{1}{C_1^2}\left(C_1\sqrt{t} + \ln\left|C_1\sqrt{t}-1\right| + C_2\right).$$

第三步: 我们用原始变量来重新表示解. 分别在最后一个方程用表达式 (6.5.19) 和 (6.5.20) 替代 t 和 u, 可以得到下面包含 $C_1 \neq 0$ 和 C_2 两个常数的方程 (6.5.6) 的解 $y(x)$ 的隐表达式

$$C_1 y + C_2 x + x\ln\left|C_1\frac{y}{x} - 1\right| + C_1^2 = 0.$$

加上上述讨论的两个奇异解最终得到方程 (6.5.6) 的通解, 以下面包含任意常数 K, C, C_1, C_2 ($C_1 \neq 0$) 的三个公式来表示:

$$y = Kx, \tag{6.5.23}$$

$$y = \pm\sqrt{2x + Cx^2}, \tag{6.5.24}$$

$$C_1 y + C_2 x + x \ln \left| C_1 \frac{y}{x} - 1 \right| + C_1^2 = 0. \tag{6.5.25}$$

方程 (6.5.6) 的通解是由三个明显不同的公式给出的这一事实并不和定理 3.1.2 在任意初值问题的解的唯一性相矛盾. 事实上, 下列练习显示了 (6.5.23)—(6.5.25) 初值条件只确定一个解.

练习 6.5.1 解下列方程 (6.5.6) 的柯西问题:

(i) $y'' = \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{xy}$, $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 1$;

(ii) $y'' = \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{xy}$, $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 0$;

(iii) $y'' = \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{xy}$, $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 2$.

解 问题 (i): 将 $x = 1, y = 1, y' = 1$ 代入所有三个解公式 (6.5.23)—(6.5.25), 证实初值条件 (i) 仅满足当 $K = 1$ 时的 (6.5.23).

问题 (ii): 对 $x = 1, y = 1, y' = 0$ 以相似的理由得到该方程的解为第二个表达式 (6.5.24), 而且应该取正号和 $C = -1$.

问题 (iii): 相似地, 代入初值条件 $x = 1, y = 1, y' = 2$ 得到在 $C_1 = 2, C_2 = -6$ 时的解公式 (6.5.25).

这样以上柯西问题的解是

$$\text{(i) } y = x, \quad \text{(ii) } y = \sqrt{2x - x^2}, \quad \text{(iii) } 2y - 6x + x \ln \left| 2\frac{y}{x} - 1 \right| + 4 = 0.$$

6.5.5 已知一个特解的线性方程的积分

我们考虑一个线性方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{6.5.26}$$

已知它的特解 $y = z(x)$. 这样关于 x 的方程 $z''(x) + a(x)z'(x) + b(x)z(x) = 0$ 成立. 我们这里讨论通过方程 (6.5.26) 的特解 $z(x)$ 得到它的通解的两个不同的方法.

方法一 第一种方法是使用定理 3.3.1 变换成简单的形式. 根据这个定理, 变换

$$t=\int \frac{\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}}{z^2(x)}\,\mathrm{d}x\,,\quad u=\frac{y}{z(x)} \tag{6.5.27}$$

将方程 (6.5.26) 化为最简单的二次线性方程

$$u''=0. \tag{6.5.28}$$

由此 $u=C_1t+C_2$, 那么方程 (6.5.26) 的通解为

$$y=z(x)\left(C_1\int \frac{\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}}{z^2(x)}\,\mathrm{d}x+C_2\right). \tag{6.5.29}$$

方法二 第二种方法是基于方程 (6.5.26) 在变换 $\overline{y}=y+az(x)$ 下是不变的, 并且因此容许生成元

$$X_1=z(x)\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.5.30}$$

因为方程 (6.5.26) 是齐次的, 它也容许生成元

$$X_2=y\frac{\partial}{\partial y}\cdot \tag{6.5.31}$$

算子 (6.5.30) 和 (6.5.31) 生成一个类型 IV 的二维李代数, 因此方程 (6.5.26) 可以通过 6.5.4 节的李积分方法得解. 即算子 (6.5.30)—(6.5.31) 的典型变量是

$$t=x,\quad u=\frac{y}{z(x)}\cdot \tag{6.5.32}$$

基于这些变量, 方程 (6.5.26) 可以写成积分的形式:

$$u''+\left(a(x)+2\frac{z'(x)}{z(x)}\right)u'=0, \tag{6.5.33}$$

这里

$$u=C_1\int \frac{\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}}{z^2(x)}\,\mathrm{d}x+C_2.$$

这样我们再次得到解 (6.5.29).

实际上, 最好用上述之一的方法而不是用求解的总公式 (6.5.29).

例 6.5.7 考虑方程

$$y''=xy'-y. \tag{6.5.34}$$

一般地容易通过求一个多项式解 $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots$ 而找到它的特解 $z(x) = x$. 我们应用第一种积分方法. 变换 (6.5.27) 为

$$t = \int \frac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad u = \frac{y}{x}.$$

基于这些变量, 方程 (6.5.34) 可以改写成 $u'' = 0$, 因此 $u = C_1t + C_2$. 代入 t 和 u 的表达式, 最终可以得到方程 (6.5.34) 的通解

$$y = \Big(C_1 \int \frac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_2\Big)x. \tag{6.5.35}$$

应用第二种方法. 用由算子 (6.5.30) 和 (6.5.31)

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

生成的类型 IV 李代数 L_2, 我们得到典型变量 $t = x, u = y/x$. 用这些变量, 方程 (6.5.34) 可写成

$$u'' = \Big(x - \frac{2}{x}\Big)u'.$$

在 $u' = v$ 的标准替换和变量分离后, 上述方程变成

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \Big(x - \frac{2}{x}\Big)\mathrm{d}x,$$

并因此得到

$$v = C_1\,\frac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{x^2}.$$

接下来, 对上述表达式进行积分:

$$u = C_1 \int \frac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_2.$$

最终, $y = xu$ 而得到通解 (6.5.35).

6.5.6 李的线性化验证

例 6.5.8 为了举例说明这个问题, 考虑非线性方程

$$y'' = 2\Big(\frac{y'^2}{y} - \frac{xy'}{1+x^2}\Big). \tag{6.5.36}$$

该方程是由最简单的线性方程 (6.5.28), $u'' = 0$, 通过变量代换

$$t = \frac{1}{y}, \quad u = \arctan x \tag{6.5.37}$$

而得到的. 事实上, 对方程 (6.5.37) 应用变换公式 (1.4.13)—(1.4.14) 得

$$D_x = -\frac{y'}{y^2} D_t, \quad -\frac{y'}{y^2} D_t(u) = D_x(\arctan x), \tag{6.5.38}$$

这里

$$u' = -\frac{y^2}{(1+x^2)\, y'}. \tag{6.5.39}$$

用 (6.5.38) 对方程 (6.5.39) 两边同时微分, 得到

$$\frac{y'^2}{y^4} u'' - \frac{y''}{y^2} u' + 2\frac{y'^2}{y^3} u' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

这里调用方程 (6.5.28) 和 (6.5.39), 我们最终得到方程 (6.5.36). 把线性方程 (6.5.28) 的通解 $u = C_1 t - C_2$ 代入到变量代换 (6.5.37) 中得

$$\arctan x = \frac{C_1}{y} - C_2,$$

因此, 我们得到非线性方程 (6.5.36) 的通解

$$y = \frac{C_1}{C_2 + \arctan x}. \tag{6.5.40}$$

形如 (6.5.36) 的可线性化方程在实际应用中经常遇到. 因此, 寻找一个对方程的可线性化的一般验证方法是很重要的. 对于二阶常微分方程, 索菲思 · 李 [25] 找到了解决这个问题的方程. 即, 他找到了所有可化为下列线性方程的二阶方程 (6.5.13) 的一般形式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = A(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + B(t)u + C(t), \tag{6.5.41}$$

这通过了变量代换

$$t = \varphi(x, y), \quad u = \psi(x, y). \tag{6.5.42}$$

他首先说明可线性化的二阶方程应该至多包含一阶导数的三次项. 这个结论可以通过利用在变量代换下的导数变换而获得. 回顾一下, 任意方程可以通过对自变量和因变量同时变换, 化成最简单方程 (6.5.28). 我们也可以从引理 3.3.1 知道线性方程和方程 (3.3.12) 是函数等价的. 这里我们将把方程 (3.3.12) 写成关于变量 t 和 u 的形式

$$u'' + \alpha(t)\, u = 0, \tag{6.5.43}$$

其中 u'' 是 u 关于 t 的二阶导数. 然后用 1.4.5 节的定理 1.4.1 给出的导数变换, 我们得到下面的结论.

引理 6.5.1 通过变量代换 (6.5.42) 的方法, 所有经方程 (6.5.43) 而得到的二阶方程最多有一阶导数的三次项, 其方程族的形式为

$$y''+F_3(x,y)y'^3+F_2(x,y)y'^2+F_1(x,y)y'+F(x,y)=0, \tag{6.5.44}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_3(x,y)&=\frac{\varphi_y\psi_{yy}-\psi_y\varphi_{yy}+\alpha\psi\varphi_y^3}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\
F_2(x,y)&=\frac{\varphi_x\psi_{yy}-\psi_x\varphi_{yy}+2(\varphi_y\psi_{xy}-\psi_y\varphi_{xy})+3\alpha\psi\varphi_x\varphi_y^2}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\
F_1(x,y)&=\frac{\varphi_y\psi_{xx}-\psi_y\varphi_{xx}+2(\varphi_x\psi_{xy}-\psi_x\varphi_{xy})+3\alpha\psi\varphi_x^2\varphi_y}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\
F(x,y)&=\frac{\varphi_x\psi_{xx}-\psi_x\varphi_{xx}+\alpha\psi\varphi_x^3}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x}.
\end{aligned} \tag{6.5.45}$$

但是, 并不是所有的有任意系数 $F_3(x,y),\cdots,F(x,y)$ 的方程 (6.5.44) 都可线性化. 当且仅当对关于给定的系数 $F_3(x,y),\cdots,F(x,y)$ 的两个函数 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 的非线性偏微分方程组 (6.5.45) 所组成的超定组可积时, 该方程才有可能被线性化. 李 [25] 提供了方程组 (6.5.45) 的兼容性 (即, 可积性) 条件. 李线性化验证可以用公式表达如下 (也可参考 [21]).

定理 6.5.2 当且仅当方程 (6.5.44) 的系数满足方程

$$3(F_3)_{xx}-2(F_2)_{xy}+(F_1)_{yy}=(3F_1F_3-F_2^2)_x-3(FF_3)_y-3F_3F_y+F_2(F_1)_y,$$

$$3F_{yy}-2(F_1)_{xy}+(F_2)_{xx}=3(FF_3)_x+(F_1^2-3FF_2)_y+3F(F_3)_x-F_1(F_2)_x$$

时, 该方程是可线性化的.

李的线性化验证在实际应用中简单而方便. 考虑如下例子.

例 6.5.9 方程

$$y''=F(x,y)$$

有 (6.5.44) 的形式, 其中 $F_3=F_2=F_1=0$. 使用线性化证明可以推出得到 $F_{yy}=0$. 因此, 方程 $y''+F(x,y)=0$ 不可被线性化, 除非它已经是线性的.

例 6.5.10 方程

$$y''-\frac{1}{x}(y'+y'^3)=0$$

和

$$y''+\frac{1}{x}(y'+y'^3)=0$$

也有 (6.5.44) 的形式. 它们的系数分别是 $F_3 = F_1 = -1/x, F_2 = F = 0$ 和 $F_3 = F_1 = 1/x, F_2 = F = 0$. 线性化验证显示了第一个方程是可以被线性化的而第二个不能.

如果方程 (6.5.44) 的系数 $F_3(x,y),\cdots,F(x,y)$ 满足定理 6.5.2 给出的线性化验证的条件, 则在 $F_3(x,y),\cdots,F(x,y)$ 已知情况下, 可以通过解关于 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 的超定方程组 (6.5.45), 将方程 (6.5.44) 通过变量代换化成形如 (6.5.43) 的线性方程.

例 6.5.11 考虑之前例子中提到的方程

$$y'' - \frac{1}{x}(y' + y'^3) = 0. \tag{6.5.46}$$

我们知道它的系数

$$F_3 = F_1 = -\frac{1}{x}, \quad F_2 = F = 0$$

满足定理 6.5.2 的条件. 让我们验证方程 (6.5.46) 是可以被变换成最简单线性方程 $u'' = 0$ 的, 并找到对应的线性映射. 这样我们设在 (6.5.43) 中 $\alpha(t) = 0$. 那么对于决定 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 方程 (6.5.45) 可以写成

$$\begin{aligned}
&\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy} = -\frac{1}{x}(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x),\\
&\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \psi_y\varphi_{xy}) = 0,\\
&\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \psi_x\varphi_{xy}) = -\frac{1}{x}(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x),\\
&\varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{6.5.47}$$

为了线性化方程 (6.5.46), 只需找到函数 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$, 它们可以是方程组 (6.5.47) 的任意函数无关, 即雅可比行列式不为零:

$$\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0, \tag{6.5.48}$$

的特解. 为了使方程组 (6.5.47) 最后一个方程成立, 可以设 $\varphi_x = 0$, 即 $\varphi = \varphi(y)$. 然后条件 (6.5.48) 要求 $\psi_x \neq 0$ 和 $\varphi_y \neq 0$. 为简便计算, 可设 $\varphi = y$. 那么由方程组 (6.5.47) 的第二个方程可得 $\psi_{xy} = 0$, 所以

$$\psi = a(x) + b(y).$$

现在由 (6.5.47) 第一个方程得到分离变量的方程

$$b''(y) = \frac{1}{x}a'(x).$$

紧接着有

$$b''(y)=\frac{1}{x}a'(x)=\lambda,\lambda=\text{常数}.$$

从这些方程可以得到

$$a(x)=\frac{\lambda}{2}x^2+C_1x+C_2,\quad b(y)=\frac{\lambda}{2}y^2+K_1y+K_2.$$

注意 (6.5.47) 中的第三个方程的等式成立, 设 $\lambda=2$, $C_1=C_2=K_1=K_2=0$, 我们得到下面的变量代换 (6.5.42):

$$t=y,\quad u=x^2+y^2. \tag{6.5.49}$$

这个变量代换把方程 (6.5.46) 化为线性方程 $u''=0$, 且其通解为 $u+At+B=0$, 利用 (6.5.49), 我们得到下面非线性方程 (6.5.46) 的隐式解:

$$x^2+y^2+Ay+B=0, \tag{6.5.50}$$

其中 $A,B=$ 常数. 注意到变量代换 (6.5.49) 对于 (6.5.46) 的解: $y=$ 常数是不合理的. 因此, 方程 (6.5.46) 的通解由奇异解 $y=$ 常数与 (6.5.50) 共同表示.

例 6.5.12 方程 $y''+y'^2=f(x)$ 具备形式 (6.5.44), 其中 $F_3=F_1=0$, $F_2=1$, $F=-f(x)$ 并且满足定理 6.5.2. 下面检验该方程可以通过因变量的代换而线性化. 换言之, 我们寻找 $t=x$, $u=\psi(x,y)$ 的线性变换 (6.5.42). 那么 (6.5.45) 的第一个方程成立而剩下的三个方程要求

$$\psi_{yy}=\psi_y,\quad \psi_{xy}=0,\quad \psi_{xx}+f(x)\psi_y+\alpha(x)\psi=0.$$

由前两个方程得 $\psi=g(x)+C\mathrm{e}^y$. 设 $C=1$, $g(x)=0$, 我们得到 $\psi=\mathrm{e}^y$. 然后由第三个方程得到 $\alpha=-f(x)$. 这样, 变量代换 $t=x$, $u=\mathrm{e}^y$ 将问题中的方程线性化并将其映射至 $u''=f(x)u$.

6.6 高阶方程

6.6.1 不变解 · 欧拉猜想的推导

在 6.4.3 节中介绍的一阶方程群不变解的概念也可应用到高阶方程.

例 6.6.1 一般的常数系数齐次线性常微分方程 (3.4.6)

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0,\quad a_1,\cdots,a_n=\text{常数}$$

容许有生成元

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

的平移群, 并且因为所考虑的方程是齐次的, 所以令 y 乘以任意参数, 即该方程也容许有生成元

$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

的伸缩群. 因此, 方程容许这些生成元的线性结合, $X = X_1 + \lambda X_2$:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda = 常数.$$

由方程 $\mathrm{d}y/y = \lambda\,\mathrm{d}x$ 得到不变量 $u = y\mathrm{e}^{-\lambda x}$. 不变解由设 $u = C$ 而得到. 因此得到欧拉猜想 (3.3.25)

$$y = C\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

由于 $y' = C\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}, \cdots, y^{(n)} = C\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}$, 将以上诸式代入方程 (3.4.6) 得到一个代数方程, 即我们所谓的特征方程 (3.4.7)

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

例 6.6.2 考虑在 3.4.4 节的欧拉方程 (3.4.11)

$$x^n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1\,x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\,x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n\,y = 0,$$

其中 $a_1, \cdots, a_n =$ 常数, 该方程是双重齐次的 (见定义 3.1.3), 即该方程容许有生成元

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

的伸缩群. 我们像在例 6.6.1 中那样处理并通过线性结合 $X = X_1 + \lambda X_2$:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}$$

来寻找不变解, 这里 $\lambda =$ 常数. 由特征方程 $\mathrm{d}y/y = \lambda\,\mathrm{d}x/x$ 得到不变量 $u = y\,x^{-\lambda}$. 通过设 $u = C$ 得到不变解, 其中

$$y = Cx^{\lambda}. \tag{6.6.1}$$

对上式进行微分并乘以 x, 我们有

$$xy' = C\lambda\,x^{\lambda}, \quad x^2y'' = C\lambda^2x^{\lambda}, \cdots, \quad x^ny^{(n)} = C\lambda^nx^{\lambda}.$$

代入方程 (3.4.11) 并除以共同因子 Cx^{λ}, 我们得到欧拉方程 (3.4.11) 的特征方程

$$\lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,\lambda + a_n = 0.$$

它和常系数方程的特征方程 (3.4.7) 是相同的 (参见 3.4.4 节).

6.6.2 积分因子 (N.H. Ibragimov, 2006)

我们习惯仅对一阶常微分方程考虑积分因子的方法. 此外, 在积分因子的经典方法中, 微分方程常写成不同的形式 (见 3.2.3 节). 我们将会在这里讨论在 [22] 中的积分因子方法. 这个新方法允许我们决定高阶方程和方程组的积分因子.

设 $u=(u^1,\cdots,u^m)$ 表示 $m\geqslant 1$ 个因变量且关于单个自变量 x 的逐阶微分记为 $u_{(1)}=\{\mathrm{d}u^\alpha/\mathrm{d}x\},u_{(2)}=\{\mathrm{d}^2u^\alpha/\mathrm{d}x^2\},\cdots$. 那么全微分 (1.4.9) 有形式

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+u^\alpha_{(1)}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+u^\alpha_{(2)}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{(1)}}+\cdots. \tag{6.6.2}$$

有一个自变量和多个因变量的高阶变分导数 (参见方程 (1.5.4) 和 (2.6.24)) 写成

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha}=\frac{\partial}{\partial u^\alpha}-D_x\frac{\partial}{\partial u^\alpha_x}+D_x^2\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{xx}}-D_x^3\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{xxx}}+\cdots. \tag{6.6.3}$$

我们将讨论的对于一个或多个自变量的任意阶常微分方程的积分因子的新方法基于下面的陈述. (更多细节和证明, 见 [21], 8.4 节.)

引理 6.6.1 设 $F(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(s)})\in\mathcal{A}$. 当且仅当 $F=C=$ 常数时, 方程 $D_x(F)=0$ 对所有的变量 $x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(s)}$ 和 $u_{(s+1)}$ 成立.

引理 6.6.2 当且仅当对于变量 $x,u,u_{(1)},\cdots$, 方程

$$\frac{\delta F}{\delta u^\alpha}=0,\quad \alpha=1,\cdots,m \tag{6.6.4}$$

成立时, 含一个自变量 x 的微分函数 $F(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(s)})\in\mathcal{A}$ 是一个全微分

$$F=D_x(\Phi),\quad \Phi(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(s-1)})\in\mathcal{A}. \tag{6.6.5}$$

对于只有一个因变量 y 的方程, 我们常用符号 y',y'' 等来表示对应逐阶微分. 因而, 全微分 (6.6.2) 和变分导数 (6.6.3) 分别写成

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+y''\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+y^{(s+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(s)}}+\cdots$$

和

$$\frac{\delta}{\delta y}=\frac{\partial}{\partial y}-D_x\frac{\partial}{\partial y'}+D_x^2\frac{\partial}{\partial y''}-D_x^3\frac{\partial}{\partial y'''}+\cdots, \tag{6.6.6}$$

在这种情况下, 引理 6.6.1 和 6.6.2 可以使用下面公式表示.

引理 6.6.3 设 $f(x,y,y',\cdots,y^{(s)})\in\mathcal{A}$. 如果方程 $D_x(f)=0$ 对于所有变量 $x,y,y',\cdots,y^{(s)}$ 和 $y^{(s+1)}$ 成立, 则 $f=$ 常数.

引理 6.6.4 当且仅当对于变量 $x, y, y', \cdots$ 方程

$$\frac{\delta f}{\delta y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^2 \frac{\partial f}{\partial y''} - D_x^3 \frac{\partial f}{\partial y'''} + \cdots + (-1)^s D_x^s \frac{\partial f}{\partial y^{(s)}} = 0 \tag{6.6.7}$$

都成立时, 含一个自变量 x 的微分函数 $f(x, y, y', \cdots, y^{(s)}) \in \mathcal{A}$ 是一个全导数, 即

$$f = D_x(\phi), \quad \phi(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)}) \in \mathcal{A}. \tag{6.6.8}$$

定义 6.6.1 考虑 s 阶常微分方程

$$a\big(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)}\big)\, y^{(s)} + b\big(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)}\big) = 0. \tag{6.6.9}$$

如果乘以 μ 可把方程 (6.6.9) 的左边转换成一个全微分方程 $\phi\big(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)}\big)$:

$$\mu a\, y^{(s)} + \mu b = D_x(\phi), \tag{6.6.10}$$

那么函数 $\mu\big(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)}\big)$ 称为方程 (6.6.9) 的一个积分因子.

积分因子方法允许对方程 (6.6.9) 降阶. 事实上, 由方程 (6.6.9) 和 (6.6.10) 得 $D_x(\phi) = 0$, 以及由引理 6.6.1 得到方程 (6.6.9) 的一个首次积分

$$\phi\big(x, y, y', \cdots, y^{(s-1)}\big) = C. \tag{6.6.11}$$

定义 6.6.1 可以轻而易举地推广至任意阶的常微分方程组.

定理 6.6.1 方程 (6.6.9) 的积分因子是由方程

$$\frac{\delta}{\delta y}\big(\mu a\, y^{(s)} + \mu b\big) = 0 \tag{6.6.12}$$

决定的, 其中 $\delta/\delta y$ 是变分导数 (6.6.6). 方程 (6.6.12) 包括变量 $x, y, y', \cdots, y^{(2s-2)}$ 并完全满足该方程.

证明 方程 (6.6.12) 是从引理 6.6.2 而得到的. 最高阶的导数可能在变分导数 (6.6.6) 出现 $2s-1$ 阶后出现, 它的项是

$$(-1)^s D_x^s(\mu a) \quad \text{和} \quad (-1)^{s-1} D_x^{s-1}\left(y^{(s)} \frac{\partial(\mu a)}{\partial y^{(s-1)}}\right).$$

舍去明显不包含 $y^{(2s-1)}$ 的项, 我们有

$$(-1)^s D_x^s(\mu a) = -(-1)^{s-1} D_x^{s-1}\left(y^{(s)} \frac{\partial(\mu a)}{\partial y^{(s-1)}}\right) + \cdots.$$

这样, 包含 $y^{(2s-1)}$ 的项相互抵消, 并且方程 (6.6.12) 只包含变量 $x, y, y', \cdots, y^{(2s-2)}$. 这样完成了证明.

对于一阶方程

$$a(x,y)y' + b(x,y) = 0, \tag{6.6.13}$$

方程 (6.6.12) 写成

$$\frac{\delta}{\delta y}(\mu a\, y' + \mu b) = y'\,(\mu a)_y + (\mu b)_y - D_x(\mu a) = 0.$$

因为 $D_x(\mu a) = (\mu a)_x + y'(\mu a)_y$, 我们得到下面可以用来决定一阶方程 (6.6.13) 的积分因子的方程

$$(\mu b)_y - (\mu a)_x = 0. \tag{6.6.14}$$

如果 $N = a, M = b$, 那么方程 (6.6.14) 和方程 (3.2.12) 是相等的.

例 6.6.3 我们用新观点考虑例 3.2.2 中的方程 (3.2.14). 我们改写方程 (3.2.14) 为形式

$$(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0,$$

并有

$$\frac{\delta}{\delta y}\Big((y^2 - 3x^2)y' + 2xy\Big) = 2yy' + 2x - D_x(y^2 - 3x^2) = 8x.$$

这样, 不满足条件 (6.6.12) , 因此 $(y^2 - 3x^2)y' + 2xy$ 不是一个全微分. 另一方面, 如果在方程两边乘以 $\mu = 1/y^4$, 那么我们可以得到方程

$$\Big(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\Big)y' + \frac{2x}{y^3} = 0 \tag{6.6.15}$$

满足条件 (6.6.12). 事实上,

$$\frac{\delta}{\delta y}\Big(\Big(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\Big)y' + \frac{2x}{y^3}\Big) = -\frac{2y'}{y^3} + 12\frac{x^2y'}{y^5} - \frac{6x}{y^4} - D_x\Big(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\Big) = 0.$$

现在

$$\frac{y'}{y^2} = D_x\Big(-\frac{1}{y}\Big), \quad -3x^2\,\frac{y'}{y^4} = x^2\,D_x\Big(\frac{1}{y^3}\Big) = D_x\Big(\frac{x^2}{y^3}\Big) - \frac{2x}{y^3},$$

由此

$$\Big(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\Big)y' + \frac{2x}{y^3} = D_x\Big(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\Big).$$

因此, 微分方程的解由下面的方程给出:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C \quad 或 \quad x^2 - y^2 = Cy^3.$$

现在考虑二阶方程

$$a(x,y,y')y''+b(x,y,y')=0. \tag{6.6.16}$$

积分因子 μ 是基于 x,y,y' 的, 确定 $\mu(x,y,y')$ 的方程 (6.6.12) 可写成

$$\frac{\delta}{\delta y}(\mu a\,y''+\mu b)=y''\,(\mu a)_y+(\mu b)_y-D_x\big(y''\,(\mu a)_{y'}+(\mu b)_{y'}\big)+D_x^2(\mu a)=0.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&D_x(\mu a)=y''(\mu a)_{y'}+y'(\mu a)_y+(\mu a)_x,\\
&D_x^2(\mu a)=y'''(\mu a)_{y'}+y''^2\,(\mu a)_{y'y'}+2y'y''(\mu a)_{yy'}+2y''(\mu a)_{xy'}\\
&\qquad\quad+y''(\mu a)_y+y'^2(\mu a)_{yy}+2y'(\mu a)_{xy}+(\mu a)_{xx},\\
&D_x\big(y''(\mu a)_{y'}\big)=y'''(\mu a)_{y'}+y''^2\,(\mu a)_{y'y'}+y'y''(\mu a)_{yy'}+y''(\mu a)_{xy'},\\
&D_x\big((\mu b)_{y'}\big)=y''\,(\mu b)_{y'y'}+y'\,(\mu b)_{yy'}+(\mu b)_{xy'},
\end{aligned}$$

并因此

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta y}(\mu a\,y''+\mu b)=&\,y''(y'\,(\mu a)_{yy'}+(\mu a)_{xy'}+2(\mu a)_y-(\mu b)_{y'y'})\\
&+y'^2\,(\mu a)_{yy}+2y'(\mu a)_{xy}+(\mu a)_{xx}\\
&-y'(\mu b)_{yy'}-(\mu b)_{xy'}+(\mu b)_y.
\end{aligned}$$

因为这个表达式对于 x,y,y' 和 y'' 都为零, 我们得到下面的表述.

定理 6.6.2 二阶方程 (6.6.16) 的积分因子 $\mu(x,y,y')$ 由下面方程组决定:

$$y'\,(\mu a)_{yy'}+(\mu a)_{xy'}+2(\mu a)_y-(\mu b)_{y'y'}=0, \tag{6.6.17}$$

$$y'^2\,(\mu a)_{yy}+2y'(\mu a)_{xy}+(\mu a)_{xx}-y'(\mu b)_{yy'}-(\mu b)_{xy'}+(\mu b)_y=0. \tag{6.6.18}$$

与一阶微分方程不同, 定理 6.6.2 显示了二阶方程可能没有积分因子. 的确, 任意一阶方程的积分因子 $\mu(x,y)$ 由单个的一阶线性偏微分方程 (6.6.14) 确定, 它总是有无数个解. 在二阶方程 (6.6.16) 的情况中, 一个未知函数 $\mu(x,y,y')$ 应该满足二阶线性偏微分方程 (6.6.17)—(6.6.18). 若超定方程组 (6.6.17)—(6.6.18) 是相容的, 积分因子才存在.

注 6.6.1 如果一个二阶方程 (6.6.16) 有两个积分因子可以导致两个完全不同的首次积分 (6.6.11), 那么方程 (6.6.16) 的通解就可以不用积分而求得.

例 6.6.4 考虑二阶方程

$$y''+\frac{y'^2}{y}+3\frac{y'}{x}=0. \tag{6.6.19}$$

可证明它的左边不满足条件 (6.6.4), 因此它不是一个全导数. 我们来寻找一个积分因子. 方程 (6.6.19) 有 (6.6.16) 的形式, 其中

$$a=1,\quad b=\frac{y'^2}{y}+3\frac{y'}{x}\cdot$$

为了简便起见, 我们将寻找形如 $\mu=\mu(x,y)$ 的积分因子. 方程 (6.6.17) 写成 $2\mu_y-(\mu b)_{y'y'}=0$. 因为 $(\mu b)_{y'y'}=2\mu/y$, 我们得 $\mu_y=\mu/y$, 所以 $\mu=\phi(x)y$. 于是, 我们有

$$\mu=\phi(x)y,\quad \mu_{yy}=0,\quad \mu_{xy}=\phi',\quad \mu_{xx}=\phi''y,\quad \mu b=\phi y'^2+3\frac{\phi}{x}yy',$$

$$(\mu b)_y=3\frac{\phi}{x}y',\quad (\mu b)_{yy'}=3\frac{\phi}{x},\quad (\mu b)_{xy'}=2\phi'y'+3\Big(\frac{\phi'}{x}-\frac{\phi}{x^2}\Big)y.$$

将以上各式代入方程 (6.6.18), 从而可以导出下面的欧拉方程:

$$x^2\phi''-3x\phi'+3\phi=0.$$

用自变量的标准变换 $t=\ln|x|$ 并积分, 我们得到两个独立解 $\phi=x$ 和 $\phi=x^3$. 这样, 方程 (6.6.19) 有两个积分因子

$$\mu_1=xy,\quad \mu_2=x^3y, \tag{6.6.20}$$

同时注意到该方程可以不必用额外积分求解 (见注 6.6.1).

事实上, 方程 (6.6.19) 乘以第一个积分因子, 我们有

$$xy\left(y''+\frac{y'^2}{y}+3\frac{y'}{x}\right)=xyy''+xy'^2+3yy'=0.$$

替代 $xyy''=D_x(xyy')-yy'-xy'^2$, 我们将它化为 $D_x(xyy')+2yy'=D_x(xyy'+y^2)=0$, 则

$$xyy'+y^2=C_1. \tag{6.6.21}$$

类似地, 由第二个积分因子 (6.6.20) 得到

$$x^3yy'=C_2. \tag{6.6.22}$$

从方程 (6.6.21)—(6.6.22) 消去 y', 得到方程 (6.6.19) 的通解

$$y=\pm\sqrt{C_1-\frac{C_2}{x^2}}. \tag{6.6.23}$$

线性化验证的应用 (6.5.6 节) 显示了方程 (6.6.19) 是可线性化的. 因此, 它容许了一个八维李代数, 并因此可以用 6.5.4 节的群方法积分. 现在让我们考虑一个没有对称的方程.

例 6.6.5 考虑非线性二阶方程

$$y'' - \frac{1}{y}y'^2 - \frac{x+x^2}{y}y' + 2x + 1 = 0. \tag{6.6.24}$$

通过解决定方程, 我们可以证明方程 (6.6.24) 没有点对称, 因此不能用李方法进行积分. 因此, 我们用积分因子的方法. 方程 (6.6.24) 有 (6.6.16) 的形式, 其中

$$a = 1, \quad b = -\frac{y'^2}{y} - \frac{x+x^2}{y}y' + 2x + 1.$$

为简便起见, 我们将寻找依赖两个变量的积分因子, 即 $\mu = \mu(x, y)$. 那么由方程 (6.6.17) 可以得到 $\mu_y = -\mu/y$, 因此 $\mu = p(x)/y$, 从而方程 (6.6.18) 可写成

$$\frac{2p}{y^3}y'^2 - \frac{2p'}{y^2}y' + \frac{p''}{y} + y'H_{yy'} + H_{xy'} - H_y = 0, \tag{6.6.25}$$

其中

$$H = \frac{p}{y^2}y'^2 + (x+x^2)\frac{p}{y^2}y' - (2x+1)\frac{p}{y}.$$

这个计算显示了方程 (6.6.25) 可化成简单方程

$$\frac{p''(x)}{y} + (x+x^2)\frac{p'(x)}{y^2} = 0,$$

于是对上述方程进行分离变量, 给出 $p'(x) = 0$, 即 $p =$ 常数. 设 $p = 1$, 我们得到方程 (6.6.24) 的积分因子

$$\mu = \frac{1}{y}.$$

在方程 (6.6.24) 两边乘以 μ, 可得

$$\frac{y''}{y} - \frac{1}{y^2}y'^2 - \frac{x+x^2}{y^2}y' + \frac{2x+1}{y} = 0. \tag{6.6.26}$$

该方程的左边可以简单地写成一个全导数. 事实上,

$$\frac{y''}{y} = D_x\left(\frac{y'}{y}\right) + \frac{y'^2}{y^2}, \quad -\frac{x+x^2}{y^2}y' = D_x\left(\frac{x+x^2}{y}\right) - \frac{1+2x}{y},$$

并且方程 (6.6.26) 可写成

$$D_x\left(\frac{y' + x + x^2}{y}\right) = 0. \tag{6.6.27}$$

因此,

$$\frac{y'+x+x^2}{y}=C_1,$$

或者

$$y'+x+x^2=C_1\,y, \tag{6.6.28}$$

其中 $C_1=$ 常数. 对非齐次线性一阶方程 (6.6.28) 进行积分, 我们得到下面的方程 (6.6.24) 的通解:

$$y=C_2\,\mathrm{e}^{C_1x}-\mathrm{e}^{C_1x}\int\left(x+x^2\right)\mathrm{e}^{-C_1x}\,\mathrm{d}x, \tag{6.6.29}$$

其中 $C_1,C_2=$ 常数. 计算 (6.6.29) 中的积分, 就可以把解表示成初等函数, 即: 当 $C_1=0$ 时

$$y=C_2-\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{3}\,x^3, \tag{6.6.30}$$

当 $C_1\neq 0$ 时

$$y=C_2\,\mathrm{e}^{C_1x}+\frac{1}{C_1^3}\left(C_1^2x^2+(2+C_1)C_1x+2+C_1\right). \tag{6.6.31}$$

例 6.6.6 考虑一阶方程组

$$\begin{aligned}&F_1(x,y,z,y',z')\equiv xzy'-2xyz'+yz=0,\\&F_2(x,y,z,y',z')\equiv xy'+2x^2zz'+2xz^2+y=0.\end{aligned} \tag{6.6.32}$$

我们来验证条件 (6.6.4). 设 $u^1=y,\ u^2=z$, 可得

$$\frac{\delta F_1}{\delta y}=-3xz',\quad \frac{\delta F_1}{\delta z}=3(y+xy').$$

因此, $F_1(x,y,z,y',z')$ 不是全导数. 另一方面,

$$\frac{\delta F_2}{\delta y}=0,\quad \frac{\delta F_2}{\delta z}=0,$$

因此 F_2 是一个全导数. 根据例 6.6.3 的方法, 可得

$$F_2=D_x(xy+x^2z^2). \tag{6.6.33}$$

对于 F_1, 我们来寻找一个积分因子 $\mu=\mu(x,y,z)$. 计算表明, 在 (6.6.4) 里的第一个方程可写成

$$\begin{aligned}\frac{\delta(\mu F_1)}{\delta y}&=\frac{\partial(\mu F_1)}{\partial y}-D_x\Big(\mu\,\frac{\partial F_1}{\partial y'}\Big)\\&=-3xz'\mu-xz\mu_x+(yz-2xyz')\mu_y-xzz'\mu_z=0.\end{aligned}$$

因为 μ 不依赖于 z', 所以以上方程可分为两个方程:

$$2y\mu_y + z\mu_z + 3\mu = 0, \quad x\mu_x - y\mu_y = 0.$$

解这个一阶线性偏微分方程组, 我们得到

$$\mu = \frac{1}{z^3}\phi\Big(\frac{xy}{z^2}\Big), \tag{6.6.34}$$

其中 ϕ 是一个任意函数. 可以证实由 (6.6.34) 给出的 μ 也是 (6.6.4) 里的第二个方程的解,

$$\frac{\delta(\mu F_1)}{\delta z} = \frac{\partial(\mu F_1)}{\partial z} - D_x\Big(\mu\frac{\partial F_1}{\partial z'}\Big) = 0,$$

并因此是 F_1 的一个积分因子. 因为在 (6.6.34) 里的函数 ϕ 是任意的, 所以可以设 $\phi = 1$, 把 F_1 乘以 $\mu = z^{-3}$ 得

$$\mu F_1 = \frac{xy'}{z^2} - 2\frac{xyz'}{z^3} + \frac{y}{z^2} = D_x\Big(\frac{xy}{z^2}\Big). \tag{6.6.35}$$

将方程 (6.6.33) 和 (6.6.35) 代入方程 (6.6.32), 我们得到下面的首次积分:

$$xy + x^2z^2 = C_1, \quad \frac{xy}{z^2} = C_2.$$

解 y 和 z, 从而得到方程组 (6.6.32) 的通解

$$y = \frac{C_1C_2}{x(C_2 + x^2)}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{C_1}{C_2 + x^2}}.$$

6.6.3 三阶方程的线性化

李的积分方法也适用于高阶方程 (例如, 见 [26], [31], [17]). 然而, 这里我们关心的是高阶方程的线性化, 而不是其积分.

例如对于不变量的计算, 将一般线性齐次方程 (3.4.3) 写为如下二项式系数的标准形式是有利的:

$$y^{(n)} + nc_1(x)y^{(n-1)} + \frac{n!c_2(x)}{(n-2)!2!}y^{(n-2)} + \cdots + nc_{n-1}(x)y' + c_n(x)y = 0. \tag{6.6.36}$$

高阶方程 (3.4.3) 的等价变换与二阶方程的变换 (3.3.8)—(3.3.9) 一样, 由如下的公式给出:

$$\overline{x} = \phi(x), \quad \phi'(x) \neq 0,$$

$$y = \sigma(x)\,\overline{y}, \quad \sigma \neq 0.$$

对于高阶线性方程, 类似定理 3.3.1 的结论在 19 世纪被发现. J. Cockle 于 1876 年和 E. 拉盖尔于 1879 年分别证明了对于 $n = 3$ 和对于当任意 n 时的情况, 即在任意方程 (6.6.36) 中最高阶数以下的两个阶次项可以同时被消去. 相应的结果可以用如下定理来表述 (对于证明, 见 [21], 10.2.1 节, 以及那里的参考文献).

定理 6.6.3 任意方程 (6.6.36) 通过合适的等价变换 (3.3.8) — (3.3.9) 能被简化为形式

$$y^{(n)}+\frac{n!\,c_3(x)}{3!\,(n-3)!}\,y^{(n-3)}+\cdots+nc_{n-1}(x)\,y'+c_n(x)\,y=0. \tag{6.6.37}$$

等价变换的计算需要一个对于方程 (6.6.36) 的 n 阶独立的二阶常微分方程的积分.

形式 (6.6.37) 称为线性齐次 n 阶方程的 *Laguerre* 典型形式. 特别地, 三阶方程的典型形式 (6.6.37) 是

$$y'''+\alpha(x)y=0. \tag{6.6.38}$$

最近我们[①] 找到了所有可线性化三阶方程

$$y'''=f(x,y,y',y''). \tag{6.6.39}$$

下面阐述三阶方程线性化的基本定理并通过例子说明它们. 我们将使用由定理 6.6.3 确保的线性三阶方程典型形式 (6.6.38).

引理 6.6.5 通过包含 $\varphi_y=0$ 的变量代换 (6.5.42),

$$t=\varphi(x),\quad u=\psi(x,y), \tag{6.6.40}$$

线性方程 (6.6.38) 变为三阶方程 (6.6.39), 且属于方程族

$$y'''+(A_1\,y'+A_0)y''+B_3\,y'^3+B_2\,y'^2+B_1\,y'+B_0=0, \tag{6.6.41}$$

这里 $A_0=A_0(x,y),\cdots,B_3=B_3(x,y)$. 通过变量代换

$$t=\varphi(x,y),\quad u=\psi(x,y),\quad \varphi_y\neq 0, \tag{6.6.42}$$

线性方程 (6.6.38) 变为三阶方程 (6.6.39), 并属于方程族

$$\begin{aligned}y'''+\frac{1}{y'+r}\Big(&-3(y'')^2+(C_2\,y'^2+C_1\,y'+C_0)y''\\&+D_5\,y'^5+D_4\,y'^4+D_3\,y'^3+D_2\,y'^2+D_1\,y'+D_0\Big)=0,\end{aligned} \tag{6.6.43}$$

这里 $C_0=C_0(x,y),\cdots,D_5=D_5(x,y)$, 且 $r=r(x,y)$.

对于含任意系数 $A_0,\cdots,B_3$ 和 $C_0,\cdots,D_5$ 的方程 (6.6.41) 和 (6.6.43), 提供了两个线性化选择.

[①] N.H. Ibragimov and S.V. Meleshko, *J. Math. Anal. Appl.*, 308(1), 2005, 266–289.

定理 6.6.4 方程 (6.6.41) 为可线性化的, 当且仅当它的系数满足以下 5 个方程:

$$A_{0y} - A_{1x} = 0, \quad (3B_1 - A_0^2 - 3A_{0x})_y = 0, \tag{6.6.44}$$

$$3B_2 = 3A_{1x} + A_0 A_1, \quad 9B_3 = 3A_{1y} + A_1^2, \tag{6.6.45}$$

$$27B_{0yy} = (9B_1 - 6A_{0x} - 2A_0^2)A_{1x} + 9(B_{1x} - A_1\, B_0)_y + 3A_0 B_{1y}. \tag{6.6.46}$$

如果条件 (6.6.44)—(6.6.46) 被满足, 线性变换 (6.6.40) 可使用关于函数 $\varphi(x)$ 的一个三阶常微分方程来定义, 即通过里卡蒂方程

$$6\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x} - 3\chi^2 = 3B_1 - A_0^2 - 3A_{0x}, \tag{6.6.47}$$

其中

$$\chi = \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}, \tag{6.6.48}$$

及通过如下关于 $\psi(x,y)$ 的偏微分方程的可积分方程组:

$$3\psi_{yy} = A_1\,\psi_y, \qquad 3\psi_{xy} = (3\chi + A_0)\psi_y, \tag{6.6.49}$$

$$\psi_{xxx} = 3\chi\,\psi_{xx} + B_0\,\psi_y - \frac{1}{6}\,(3A_{0x} + A_0^2 - 3B_1 + 9\chi^2)\,\psi_x - \Omega, \tag{6.6.50}$$

这里 χ 由 (6.6.48) 给出, 且 Ω 为表达式

$$\Omega = \frac{1}{6}\Big(A_{0xx} + 2A_0A_{0x} + 6B_{0y} - 3B_{1x} + \frac{4}{9}A_0^3 - 2A_0B_1 + 2A_1B_0\Big). \tag{6.6.51}$$

最后, 所得到的线性方程 (6.6.38) 的系数 α 为

$$\alpha = \Omega\,\varphi_x^{-3}. \tag{6.6.52}$$

例 6.6.7 方程

$$y''' - \left(\frac{6}{y}\,y' + \frac{3}{x}\right)y'' + 6\Big(\frac{y'^{\,3}}{y^2} + \frac{y'^{\,2}}{xy} + \frac{y'}{x^2} + \frac{y}{x^3}\Big) = 0 \tag{6.6.53}$$

是一个形如 (6.6.41) 的方程, 其系数为

$$A_1 = -\frac{6}{y},\ A_0 = -\frac{3}{x},\ B_3 = \frac{6}{y^2},\ B_2 = \frac{6}{xy},\ B_1 = \frac{6}{x^2},\ B_0 = \frac{6y}{x^3}\cdot \tag{6.6.54}$$

我们能容易地验证系数 (6.6.54) 满足条件 (6.6.44)—(6.6.46). 因此我们有

$$3B_1 - A_0^2 - 3A_{0x} = 0, \tag{6.6.55}$$

且方程 (6.6.47) 可写为

$$2\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}-\chi^2=0.$$

让我们采用它最简单的解 $\chi=0$. 然后使用 (6.6.48), 令 $\varphi=x$. 现在方程 (6.6.49) 写为

$$\frac{\partial\ln|\psi_y|}{\partial y}=-\frac{2}{y},\quad \frac{\partial\ln|\psi_y|}{\partial x}=-\frac{1}{x},$$

并由此得到

$$\psi_y=\frac{K}{xy^2},\quad K=\text{常数},$$

因此

$$\psi=-\frac{K}{xy}+f(x).$$

这里可以采用任意特解. 设 $K=-1, f(x)=0$, 则

$$\psi=\frac{1}{xy}.$$

使用 (6.6.55), 注意 (6.6.51) 推出 $\Omega=0$, 我们能很容易地验证函数 $\psi=1/(xy)$ 也是方程 (6.6.50) 的解. 因为 $\Omega=0$, 方程 (6.6.52) 给出 $\alpha=0$. 因此, 变换

$$t=x,\quad u=\frac{1}{xy} \tag{6.6.56}$$

将方程 (6.6.53) 映射为线性方程

$$u'''=0.$$

例 6.6.8 考虑如下形式的方程 (6.6.41):

$$y'''+\frac{3}{y}y'y''-3y''-\frac{3}{y}y'^2+2y'-y=0. \tag{6.6.57}$$

我们能很容易验证系数

$$A_1=\frac{3}{y},\ A_0=-3,\ B_3=0,\ B_2=-\frac{3}{y},\ B_1=2,\ B_0=-y$$

满足线性化条件 (6.6.44)—(6.6.46). 此外,

$$3B_1-A_0^2-3A_{0x}=-3$$

且方程 (6.6.47) 可写为

$$6\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}-3\chi^2=-3.$$

我们采用它的显式解 $\chi=1$ 并从 (6.6.48) 得到方程 $\varphi''=\varphi'$, 据此

$$\varphi=\mathrm{e}^x.$$

方程 (6.6.49) 有形式

$$\frac{\partial \ln|\psi_y|}{\partial y}=\frac{1}{y},\quad \psi_{xy}=0$$

且能容易求出其解. 该方程采用最简单的解 $\psi=y^2$ 并得到变量 (6.6.40) 的如下变换:

$$t=\mathrm{e}^x,\quad u=y^2. \tag{6.6.58}$$

将 $\Omega=-2$ 和 $\varphi_x=\mathrm{e}^x=t$ 代入方程 (6.6.52), 可得 $\alpha(t)=-2t^{-3}$.

因此, 方程 (6.6.57) 能通过变换 (6.6.58) 被映射为线性方程

$$u'''-\frac{2}{t^3}\,u=0. \tag{6.6.59}$$

定理 6.6.5 方程 (6.6.43)

$$y'''+\frac{1}{y'+r}\Big(-3(y'')^2+(C_2\,y'^2+C_1\,y'+C_0)y''$$
$$+D_5\,y'^5+D_4\,y'^4+D_3\,y'^3+D_2\,y'^2+D_1\,y'+D_0\Big)=0$$

是可线性化的, 当且仅当它的系数满足方程

$$C_0=6r\,\frac{\partial r}{\partial y}-6\,\frac{\partial r}{\partial x}+r\,C_1-r^2\,C_2, \tag{6.6.60}$$

$$6\,\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{\partial C_2}{\partial x}-\frac{\partial C_1}{\partial y}+r\,\frac{\partial C_2}{\partial y}+C_2\,\frac{\partial r}{\partial y}, \tag{6.6.61}$$

$$\begin{aligned}18D_0=\;&3r^2\Big(r\frac{\partial C_1}{\partial y}-2\frac{\partial C_1}{\partial x}-r\frac{\partial C_2}{\partial x}+3r^2\frac{\partial C_2}{\partial y}-12\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}\Big)-54\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2\\&+6r\Big(3\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+15\,\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}-6r\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2+(3C_1-rC_2)\frac{\partial r}{\partial x}\Big)\\&+r^2\Big(9(rC_2-2C_1)\frac{\partial r}{\partial y}-2C_1^2+2rC_1C_2+4r^2C_2^2+18r^2D_4-72r^3D_5\Big),\end{aligned} \tag{6.6.62}$$

$$18D_1 = 9r^2\frac{\partial C_1}{\partial y} - 12r\frac{\partial C_1}{\partial x} - 27r^2\frac{\partial C_2}{\partial x} + 33r^3\frac{\partial C_2}{\partial y} - 36r\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} + 18\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$
$$+ 6(3C_1 + 4rC_2)\frac{\partial r}{\partial x} - 3r(6C_1 + 7rC_2)\frac{\partial r}{\partial y} + 18r\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2 - 18\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}$$
$$- 4rC_1^2 - 2r^2C_1C_2 + 20r^3C_2^2 + 72r^3D_4 - 270r^4D_5, \tag{6.6.63}$$

$$9D_2 = 3r\frac{\partial C_1}{\partial y} - 3\frac{\partial C_1}{\partial x} - 21r\frac{\partial C_2}{\partial x} + 21r^2\frac{\partial C_2}{\partial y} + 15C_2\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$-15\,r\,C_2\frac{\partial r}{\partial y} - C_1^2 - 5rC_1C_2 + 14r^2C_2^2 + 54r^2D_4 - 180r^3D_5, \tag{6.6.64}$$

$$3D_3 = 3r\frac{\partial C_2}{\partial y} - 3\frac{\partial C_2}{\partial x} - C_1C_2 + 2rC_2^2 + 12rD_4 - 30r^2D_5, \tag{6.6.65}$$

$$54\frac{\partial D_4}{\partial x} = 18\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} + 3C_2\frac{\partial C_1}{\partial y} - 72\frac{\partial^2 C_2}{\partial x\partial y} - 39C_2\frac{\partial C_2}{\partial x}$$
$$+18r\frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} - 3rC_2\frac{\partial C_2}{\partial y} + \Big(72\frac{\partial C_2}{\partial y} + 33C_2^2\Big)\frac{\partial r}{\partial y} + 108D_4\frac{\partial r}{\partial y}$$
$$+270D_5\frac{\partial r}{\partial x} + 378\,r\,\frac{\partial D_5}{\partial x} - 108r^2\frac{\partial D_5}{\partial y} - 540rD_5\frac{\partial r}{\partial y}$$
$$+36\,r\,C_1D_5 - 8\,r\,C_2^3 - 36\,r\,C_2D_4 + 108\,r^2\,C_2D_5 + 54\,r\,H, \tag{6.6.66}$$

且

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 3H\frac{\partial r}{\partial y} + r\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{6.6.67}$$

这里

$$H = \frac{\partial D_4}{\partial y} - 2\frac{\partial D_5}{\partial x} - 3r\frac{\partial D_5}{\partial y} - 5D_5\frac{\partial r}{\partial y} - 2rC_2D_5$$
$$+\frac{1}{3}\Big(\frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} + 2C_2\frac{\partial C_2}{\partial y} - 2C_1D_5 + 2C_2D_4\Big) + \frac{4}{27}C_2^3. \tag{6.6.68}$$

如果条件 (6.6.60)—(6.6.67) 成立, 那么将方程 (6.6.43) 映射为一线性方程 (6.6.38) 的变换 (6.6.42)

$$t = \varphi(x, y), \quad u = \psi(x, y), \quad \varphi_y \neq 0$$

是通过求解如下关于函数 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 的兼容的方程组而得到的:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=r\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}W+r\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{6.6.69}$$

$$6\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=9\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big)^2+\Big(15rD_5-3D_4-C_2^2-3\frac{\partial C_2}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2, \tag{6.6.70}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=&W D_5\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{6}\Big(15\,r D_5-C_2^2-3D_4-3\frac{\partial C_2}{\partial y}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial y}\\&-\frac{1}{2}H\psi+3\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^{-1}-\frac{3}{2}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big)^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^{-2},\end{aligned} \tag{6.6.71}$$

这里函数 W 由如下方程定义:

$$3\frac{\partial W}{\partial x}=\Big(C_1-rC_2+6\frac{\partial r}{\partial y}\Big)W,\qquad 3\frac{\partial W}{\partial y}=C_2W. \tag{6.6.72}$$

所得到的线性方程 (6.6.38) 的系数 α 由以下公式给出 (比较 (6.6.52)):

$$\alpha=\frac{H}{2(\varphi_y)^3}, \tag{6.6.73}$$

其中 H 为定义在 (6.6.68) 里的函数.

例 6.6.9 考虑非线性方程

$$y'''+\frac{1}{y'}\Big(-3y''^2-xy'^5\Big)=0. \tag{6.6.74}$$

它有形式 (6.6.43), 其中系数为

$$\begin{gathered}r=0,\quad C_0=C_1=C_2=0,\\ D_0=D_1=D_2=D_3=D_4=0,\quad D_5=-x.\end{gathered} \tag{6.6.75}$$

让我们利用定理 6.6.5 来验证方程 (6.6.74) 是可线性化的. 首先, 我们可以证明系数 (6.6.75) 满足方程 (6.6.60)—(6.6.66). 此外, 方程 (6.6.67) 也是成立的, 因为 (6.6.68) 给出

$$H=2. \tag{6.6.76}$$

于是, 方程 (6.6.74) 是可线性化的, 因而我们能进一步地处理. 方程 (6.6.72) 可写为

$$\frac{\partial W}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial y}=0,$$

从而推出 $W=$ 常数. 因此, 方程 (6.6.69) 形式为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-W\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

故

$$\varphi=\varphi(y),\quad \psi=-Wx\varphi'(y)+\omega(y). \tag{6.6.77}$$

现在由三阶方程 (6.6.70) 和 (6.6.71) 可以分别得到关于 $\varphi(y)$ 的常微分方程

$$\varphi'''=\frac{3}{2}\frac{\varphi''^2}{\varphi'} \tag{6.6.78}$$

和关于 $\psi(x,y)$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=3\frac{\varphi''}{\varphi'}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{3}{2}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\psi-Wx\varphi'. \tag{6.6.79}$$

使用在 (6.6.77) 里给出的关于 ψ 的表达式和关于 φ 的方程 (6.6.78), 我们将方程 (6.6.79) 化为

$$3\frac{\varphi''}{\varphi'}\omega''-\frac{3}{2}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}\omega'-\omega-\omega'''=0.$$

因此, 令 $\omega(y)=0$, 方程 (6.6.79) 成立. 那么线性变换的构成需要称为 Schwarz 方程 (6.6.78) 的积分. 它的通解由直线

$$\varphi=ky+l \tag{6.6.80}$$

和双曲线

$$\varphi=a+\frac{1}{b-cy} \tag{6.6.81}$$

构成, 其中 $k,l=$ 常数, $a,b,c=$ 常数.

让我们采用 (6.6.80) 的最简单的解 $\varphi=y$. 那么由 (6.6.73) 推出 $\alpha=1$. 此外, 我们设 (6.6.77) 中 $W=-1,\omega=0$, 从而得到变量代换

$$t=y,\quad u=x, \tag{6.6.82}$$

将 (6.6.74) 化为线性方程

$$u'''+u=0. \tag{6.6.83}$$

6.7 非线性叠加

6.7.1 导言

索菲思 · 李拥有将分析计算法简化的非凡的几何想象力, 这常常导引他得到新的理论观念. 李为线性方程和这节要涉及的相关的非线性叠加理论的概括提供了一个很好的例子.

回顾齐次线性偏微分方程的求解和它的特征方程组 (常微分方程组) 的求解是等价问题. 此外, 任意含有 n 维因变量 x^i 的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = f^i(t,x), \quad i = 1, \cdots, n \tag{6.7.1}$$

可被看作 $n+1$ 个独立变量 t 和 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 的偏微分方程特征方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f^1(t,x)\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + f^n(t,x)\frac{\partial u}{\partial x^n} = 0. \tag{6.7.2}$$

李注意到线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = a_{i1}(t)x^1 + \cdots + a_{in}(t)x^n, \quad i = 1, \cdots, n \tag{6.7.3}$$

和相关的偏微分方程 (6.7.2),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}(t)x^i\frac{\partial u}{\partial x^k} = 0, \tag{6.7.4}$$

的经典理论都归结于 n^2 个算子 $X_{ik} = x^i\partial/\partial x^k$ 能产生一个含 n 个变量 x^i 的有限连续群 (即线性齐次群) 的事实. 这一观察使他相信线性方程 (6.7.3) 的主要特点能被推广到大量的形如广义分离变量的非线性方程类别:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = T_1(t)\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\xi_r^i(x), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{6.7.5}$$

假定算子

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \cdots, r \tag{6.7.6}$$

生成了一个有限维李代数. 系数 $T_\alpha(t)$ 为变量 t 的任意函数. 方程组 (6.7.5) 同以下等价线性偏微分方程一起被考虑:

$$A[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (T_1(t)X_1 + \cdots + T_r(t)X_r)\,u = 0. \tag{6.7.7}$$

索菲思 · 李于 1893 年写下如下的话 (见 [15] 以及那里的参考文献).

"我已勾画出方程 $A[u]=0$ 的一般的积分理论. 如同我在 'General studies on differential equations admitting a finite continuous group (容许有限连续群的微分方程的概括研究)' 中解释的 (*Mathematische Annalen*, 25(1), 1885, p. 128), 该理论基于如下事实: 如果我们知道它们的有限个特解

$$x_1=(x_1^1,\cdots,x_1^n),\ \cdots,\ x_m=(x_m^1,\cdots,x_m^n), \tag{6.7.8}$$

那么就有可能找到方程组 (6.7.5) 的通解, 并且通解 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 作为 (6.7.8) 的函数, 可通过解下述关于 $x^1,\cdots,x^n$ 的方程组得到:

$$J_i(x^1,\cdots,x^n;\ x_1^1,\cdots,x_1^n;\cdots,\ x_m^1,\cdots,x_m^n)=C_i,$$

这里 J_i 是我所称的关于由 $X_1,\cdots,X_r$ 产生的群的 $m+1$ 个点 $x^i,\ x_1^i,\cdots,\ x_m^i$ 的不变量.

E. Vessiot 刚写过一篇对线性微分方程理论有重要进展的论文, 该论文已经有了一个寻找处理基本积分方程组的**所有**常微分方程的幸运想法. Alf Guldberg 也处理着同样的问题.

同 Vessiot 和 Guldberg 一起, 寻找所有可以由方程组给出的 m 个特解

$$x^i=\varphi^i(x_1^1,\cdots,x_1^n;\cdots,\ x_m^1,\cdots,x_m^n;\ C_1,\cdots,C_n),\quad i=1,\cdots,n \tag{6.7.9}$$

来表示的通解为 $x=(x^1,\cdots,x^n)$的方程组 (6.7.1), 这是个非常有趣的问题.

可是, 因为这些作者没找到, 我所有的方程组 (6.7.5) 有效地容许了要求的特性, 在我看来, 他们的研究很可能有一个差距. 我推测这些作者含蓄地引入了一个基础的限制, 大部分通解公式 (6.7.9) 可以仅仅通过从给定方程组改变任意常数而推导出.

如果我是对的, 我就有幸成为第一个严格并简洁地证明我的方程组 (6.7.5) 是唯一具有要求特性的人."

6.7.2 非线性叠加的重要定理

以上的讨论形成如下的定义.

定义 6.7.1 常微分方程组 (6.7.1),

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=f^i(t,x),\quad i=1,\cdots,n$$

拥有基础解系, 如果该方程组的通解能表示为包括有限数 m 个特解 (6.7.8) 和 n 个任意常数 $C_1,\cdots,C_n$ 的形式 (6.7.9). 通解的表达式 (6.7.9) 称为非线性叠加, 并且特解 (6.7.8) 称为方程 (6.7.1) 的一个基础解系.

以下结果得益于李 (1893 年) 确定这些方程 (6.7.1) 是拥有基础解系的.

定理 6.7.1 方程 (6.7.1) 拥有一个基础解系, 当且仅当它们具有形式 (6.7.5),

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = T_1(t)\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\xi_r^i(x), \quad i = 1, \cdots, n,$$

其中系数 $\xi_\alpha^i(x)$ 满足下列条件: 其算子

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \cdots, r$$

生成有限维 r 的李代数 L_r. 必要特解 (6.7.8) 的个数 m 可以使用下列不等式来估计:

$$nm \geqslant r. \tag{6.7.10}$$

最后, 叠加公式 (6.7.9)

$$x^i = \varphi^i(x_1^1, \cdots, x_1^n; \cdots, x_m^1, \cdots, x_m^n; C_1, \cdots, C_n), \quad i = 1, \cdots, n$$

由以下 n 个隐式方程定义:

$$J_i(x^1, \cdots, x^n; x_1^1, \cdots, x_1^n; \cdots, x_m^1, \cdots, x_m^n) = C_i, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{6.7.11}$$

其中 J_i 是算子 (6.7.6) 的 $(m+1)$ 个点表达式 $V_\alpha = X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)}$ 的函数无关 (关于 x^i) 不变量. 换句话说, $J_i(x_1, \cdots, x_m)$ 是方程

$$\xi_\alpha^i(x)\frac{\partial J}{\partial x^i} + \xi_\alpha^i(x_1)\frac{\partial J}{\partial x_1^i} + \cdots + \xi_\alpha^i(x_m)\frac{\partial J}{\partial x_m^i} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r \tag{6.7.12}$$

的解, 并满足条件 $\det(\partial J_i/\partial x^k) \neq 0$.

证明 (见 [15] 的英文版以及那里列出的参考文献.) 令方程 (6.7.1)

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = f^i(t, x), \quad i = 1, \cdots, n$$

拥有一个基础解系. 在解出关于 C_i 后, 叠加公式 (6.7.9) 写为形式

$$J_i(x^1, \cdots, x^n; x_1^1, \cdots, x_1^n; \cdots, x_m^1, \cdots, x_m^n) = C_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

对这些关于 t 的恒等式微分, 得到方程

$$\frac{\partial J_i}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial J_i}{\partial x_1^k}\frac{\mathrm{d}x_1^k}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial J_i}{\partial x_m^k}\frac{\mathrm{d}x_m^k}{\mathrm{d}t} = 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

代入(6.7.1), 上式变为

$$f^k(t,x)\frac{\partial J_i}{\partial x^k}+f^k(t,x_1)\frac{\partial J_i}{\partial x_1^k}+\cdots+f^k(t,x_m)\frac{\partial J_i}{\partial x_m^k}=0. \tag{6.7.13}$$

注意到方程 (6.7.13) 对任意 $m+1$ 个解

$$x=(x^1,\cdots,x^n),\ x_1=(x_1^1,\cdots,x_1^n),\ \cdots,\ x_m=(x_m^1,\cdots,x_m^n) \tag{6.7.14}$$

都成立. 考虑到后者的初始值为任意的, 我们推断 (6.7.13) 对 $nm+n+1$ 个变量 $x_1^i,\cdots,x_m^i,x^i$ 和 t 也同样成立.

现在我们引入算子

$$Y=f^k(t,x)\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{6.7.15}$$

并将 x 分别替代为 $x_1,\cdots,x_m$ 从而得到的 Y 表示 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(m)}$. 那么方程 (6.7.13) 可以写为

$$Y(J_i)+Y^{(1)}(J_i)+\cdots+Y^{(m)}(J_i)=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

换句话说, 一阶线性偏微分方程

$$U(J)\equiv(Y+Y^{(1)}+\cdots+Y^{(m)})(J)=0 \tag{6.7.16}$$

应该有 n 个与 t 无关的独立解 $J_1,\cdots,J_n$ (6.7.11). 这里

$$U\equiv Y+Y^{(1)}+\cdots+Y^{(m)}=f^k(t,x)\frac{\partial}{\partial x^k}+f^k(t,x_1)\frac{\partial}{\partial x_1^k}+\cdots+f^k(t,x_m)\frac{\partial}{\partial x_m^k}$$

是含有由 (6.7.14) 给出的 $nm+n$ 变量 x^i, x_μ^i $(\mu=1,\cdots,m)$ 的一个微分算子. 包含在 U 的系数中的变量 t 可以看作一个参数.

通过令 t 假设为某一系列固定值 t_σ , 我们从 (6.7.16) 里挑选一定数目的与参数 t 无关的线性偏微分方程. $J_1,\cdots,J_n$ 可作为这些方程的公共解, 因为后者没有明显地依赖于参数 t, 因此对任意 t 均为方程 (6.7.16) 的解, 例如, 对任意给定值 $t=t_\sigma$. 根据一阶线性偏微分方程组的经典理论, 问题里的系列方程能被替代为一个含有有限数 s 个独立方程所组成的方程组

$$U_\sigma(J)\equiv(Y_\sigma+Y_\sigma^{(1)}+\cdots+Y_\sigma^{(m)})(J)=0,\quad \sigma=1,\cdots,s, \tag{6.7.17}$$

其中 Y_σ 和 $Y_\sigma^{(\mu)}$ 是分别通过令 Y 和 $Y^{(\mu)}$ 里的 $t=t_\sigma$而得到的. 方程组 (6.7.17) 最多有 $nm+n-s$ 个函数无关解. 另一方面, n 个无关解已经存在, 即 $J_1,\cdots,J_n$. 因此, $nm+n-s\geqslant n$. 换句话说, 方程 (6.7.17) 的个数由 $s\leqslant nm$ 估计. 注意算

子 U_σ 与变量 t 完全不相关, 因此一般方程 (6.7.16) 就应该是 (6.7.17) 给出的方程中的一个.

此外, 我们能将 (6.7.17) 替代为一个将所有无关换位子 $[U_\sigma, U_\tau]$ 添加入算子 U_σ 的完全方程组. 因为算子 $Y, Y^{(1)}, \cdots, Y^{(m)}$ 明显包含关于变量 x 的不同的类型, 于是我们得到

$$[U_\sigma, U_\tau] = [Y_\sigma, Y_\tau] + [Y_\sigma^{(1)}, Y_\tau^{(1)}] + \cdots + [Y_\sigma^{(m)}, Y_\tau^{(m)}]. \tag{6.7.18}$$

令所产生的完全方程组包含 r 个独立方程

$$V_\alpha(J) \equiv [X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)}](J) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r, \tag{6.7.19}$$

其中 X_α 和 $X_\alpha^{(\mu)}$ 分别为类型 Y_σ 和 $Y_\sigma^{(\mu)}$ 的算子. 从而, V_α 服从类似于 (6.7.18) 的换位子关系:

$$[V_\alpha, V_\beta] = [X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha^{(1)}, X_\beta^{(1)}] + \cdots + [X_\alpha^{(m)}, X_\beta^{(m)}].$$

注意方程组 (6.7.19) 至少有 n 个解, 即 $J_1, \cdots, J_n$. 因此, 如以上讨论的, $r \leqslant nm$. 因为方程组 (6.7.19) 是完全的, 所以服从关系 $[V_\alpha, V_\beta] = h_{\alpha\beta}^\gamma V_\gamma$ (对 $\gamma = 1, \cdots, r$ 求和):

$$[X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha^{(1)}, X_\beta^{(1)}] + \cdots + [X_\alpha^{(m)}, X_\beta^{(m)}] = h_{\alpha\beta}^\gamma (X_\gamma + X_\gamma^{(1)} + \cdots + X_\gamma^{(m)}).$$

据此, 分离变量:

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} h_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma; \qquad [X_\alpha^{(\mu)}, X_\beta^{(\mu)}] = h_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma^{(\mu)}, \quad \mu = 1, \cdots, m.$$

首先, 系数 $h_{\alpha\beta}^\gamma$ 可能依赖于所有 $nm + n$ 个变量 (6.7.14). 然而, 在最后的 $m + 1$ 个方程的每一个方程中, $h_{\alpha\beta}^\gamma$ 仅可包含一种 n 维变量. 仅当 $h_{\alpha\beta}^\gamma$ 与所有 $nm + n$ 个变量无关时, 即它们为常数 $c_{\alpha\beta}^\gamma$ 时这是可能的. 因而, X_α 满足方程

$$[X_\alpha, X_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \cdots, r, \tag{6.7.20}$$

因此生成 $r \leqslant nm$ 维李代数 L_r.

因为 (6.7.17) 中的 s 个方程包含在 (6.7.19) 中的 r 个方程里, 它们的算子是线性关联的:

$$U_\sigma = h_\sigma^\beta V_\beta, \quad \sigma = 1, \cdots, s.$$

这里系数 h_σ^β 为含有变量 (6.7.14) 的函数. 但是我们能分别用 U_σ 和 V_α 的展开式 (6.7.17) 和 (6.7.19) 来得到 $m + 1$ 个方程:

$$Y_\sigma = h_\sigma^\beta X_\beta; \qquad Y_\sigma^{(\mu)} = h_\sigma^\beta X_\beta^{(\mu)}, \quad \mu = 1, \cdots, m.$$

如上, 推出 h_σ^β 可仅为常数 C_σ^β. 因而 Y_σ 为包含常系数 X_β 的线性组合:

$$Y_\sigma = C_\sigma^\beta X_\beta, \qquad \sigma = 1, \cdots, s, \tag{6.7.21}$$

那么它属于由 $X_1, \cdots, X_r$ 生成的李代数.

因为包含任意值 t 的方程 (6.7.16) 也是方程 (6.7.17), 我们得到 $U = \omega_1 U_1 + \cdots + \omega_s U_s$, 或者以分离形式:

$$Y = \omega_1 Y_1 + \cdots + \omega_s Y_s; \quad Y^{(\mu)} = \omega_1 Y_1^{(\mu)} + \cdots + \omega_s Y_s^{(\mu)}, \ \mu = 1, \cdots, m.$$

后面的方程得出所有 ω_σ 均与变量 (6.7.14) $x, x_1, \cdots, x_m$ 无关, 但可能依赖于 t. 因此, $Y = \omega_1(t) Y_1 + \cdots + \omega_s(t) Y_s$, 或者利用 (6.7.21):

$$Y = T_1(t) X_1 + \cdots + T_r(t) X_r. \tag{6.7.22}$$

这里 X_α 形式为 (6.7.6) 并通过 (6.7.20) 生成一李代数 L_r. 利用 Y 的定义 (6.7.15), 我们看到如果方程 $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t = f^i(t, x)$ 拥有一基础解系, 那么它们有李代数形式 (6.7.5)

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = T_1(t)\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\xi_r^i(x).$$

我们也得到估计 (6.7.10), $r \leqslant nm$.

相反地, 形式为 (6.7.5) 的所有方程有所要求的性质. 实际上, 我们能采用足够大的数 m, 从而得到方程 (6.7.16), 或者在我们的例子中方程

$$\sum_{\alpha=1}^{r} T_\alpha(t)(X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)})(J) = 0$$

至少有 n 个函数无关解 $J_1, \cdots, J_n$, 它们是关于 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的函数且不包含 t, 那么包含一个适当选择的 m 的方程

$$(X_\alpha + X_\alpha^{(1)} + \cdots + X_\alpha^{(m)})(J) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, r \tag{6.7.23}$$

是无关的. 此外, 得益于换位子关系式 (6.7.20), 包含 $nm + n$ 个自变量的 r 个方程的方程组 (6.7.23) 是完全的, 它有 $mn + n - r$ 个解. 通过选取一个足够大的数 m, 我们能找到至少 n 个解

$$J_i(x^1, \cdots, x^n;\ x_1^1, \cdots, x_1^n; \cdots,\ x_m^1, \cdots, x_m^n), \quad i = 1, \cdots, n,$$

它关于 $x^1, \cdots, x^n$ 函数无关. 现在我们能转换方程 (6.7.13) 的推导, 并说明 J_i 保持为常数值, 只要 $mn + n$ 个变量 (6.7.14) 给出方程 (6.7.5) 的解. 这就完成了证明.

注 6.7.1 对于给定的方程组 (6.7.5), 定理 6.7.1 并不排斥有多个显然不同的通解表达式 (6.7.11) 以及包括的不同的 m 个特解 (6.7.8) 的可能性. 见例 6.7.6 和例 6.7.7.

注 6.7.2 由算子 (6.7.6) 生成的李代数 L_r 称为方程 (6.7.5) 的*Vessiot-Guldberg-*李代数 .

6.7.3 非线性叠加的例子

例 6.7.1 让我们考虑单个齐次线性方程 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A(t)x$. 这里 $r = 1$, $X = x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ (比较方程 (6.7.3), 其 $n = 1$). 我们采用 X 的两点表达式 V (见 (6.7.19), 其中 $m = 1$)

$$V = x\frac{\partial}{\partial x} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$$

以及其不变量 $J(x, x_1) = x/x_1$. 方程 (6.7.11) 形式为 $x/x_1 = C$. 因此, $m = 1$ 并且公式 (6.7.9) 为线性叠加 $x = Cx_1$. 条件 (6.7.10) 作为一个等式而成立.

李的最简单例子的一般形式 (6.7.5) 为包含分离变量的方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = T(t)h(x).$$

这里 $r = 1$ 且 $X = h(x)\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. 考虑两点表达

$$V = h(x)\frac{\partial}{\partial x} + h(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1},$$

并积分特征方程 $\mathrm{d}x/h(x) = \mathrm{d}x_1/h(x_1)$, 得到不变量 $J(x, x_1) = H(x) - H(x_1)$, 其中 $H(x) = \int (1/h(x))\mathrm{d}x$. 方程 (6.7.11) 形式为 $H(x) - H(x_1) = C$. 因此, $m = 1$ 且公式 (6.7.9) 给出非线性叠加 $x = H^{-1}(H(x_1) + C)$.

例 6.7.2 非齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + B(t)$$

形如 (6.7.5), 其中 $T_1 = B(t)$, $T_2 = A(t)$. Vessiot-Guldberg- 李代数 (6.7.6) 是由算子

$$X_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad X_2 = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

生成的 L_2. 将 $n = 1$ 和 $r = 2$ 代入 (6.7.10), $m \geqslant 2$, 我们看到通解的表达式 (6.7.9) 要求至少有两个特解. 事实上, 这个要求是充分的. 确实, 让我们采用基本算子 X_1 和 X_2 的三点表达式 (6.7.12)

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

并说明它们容许一个不变量. 为了找到这个不变量, 我们首先解方程 $V_1(J)=0$ 的特征方程组, 即 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1=\mathrm{d}x_2$. 积分得到两个独立不变量, 例如 $u=x-x_1$ 和 $v=x_2-x_1$. 因此, 两个算子 V_1 和 V_2 的公共不变量 $J(x,x_1,x_2)$ 能通过采用形式 $J=J(u,v)$ 和解方程 $\widetilde{V}_2(J(u,v))=0$ 而得到, 这里 V_2 的作用 (action) 可以通过使用公式 $\widetilde{V}_2=V_2(u)\partial/\partial u+V_2(v)\partial/\partial v$ 而被限制在变量 u,v 的空间上. 我们注意到 $V_2(u)=x-x_1\equiv u$, $V_2(v)=x_2-x_1\equiv v$, 得到

$$\widetilde{V}_2=u\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}\cdot$$

其不变量是 $J(u,v)=u/v$, 或者返回到原始变量, $J(x,x_1,x_2)=(x-x_1)/(x_2-x_1)$. 因此, 我们有 $m=2$, 且方程 (6.7.11) 写为 $(x-x_1)/(x_2-x_1)=C$ 或者 $(x-x_1)=C(x_2-x_1)$. 那么公式 (6.7.9) 为线性叠加 $x=x_1+C(x_2-x_1)\equiv(1-C)x_1+Cx_2$.

例 6.7.3 里卡蒂方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(t)+Q(t)x+R(t)x^2 \tag{6.7.24}$$

是一个有着基础解系的非线性方程的一个例子. 它有李代数形式 (6.7.5), 其中 $r=3$ 并且算子 (6.7.6)

$$X_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\quad X_2=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\quad X_3=x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot \tag{6.7.25}$$

后者生成投影 (变换) 群的李代数 L_3. 由 (6.7.10) 可以估计, $m\geqslant 3$, 表达式 (6.7.9) 至少要求三个特解. 让我们验证这个数 ($m=3$) 对于得到里卡蒂方程的通解是充分的. 我们取算子 (6.7.25) 的四点表达式 (6.7.12)

$$\begin{aligned}
V_1&=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3},\\
V_2&=x\frac{\partial}{\partial x}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3},\\
V_3&=x^2\frac{\partial}{\partial x}+x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3^2\frac{\partial}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{6.7.26}$$

并表明它们容许一包含 x 的不变量. 为了找到它, 如例子 6.7.2 中那样处理. 关于 $V_1(J)=0$ 的特征方程组得到三个不变量 $u_1=x_1-x, u_2=x_1-x_2$ 和 $u_3=x_3-x_2$. 现在将 V_2 限制至这些不变量以得到

$$\widetilde{V}_2=u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+u_2\frac{\partial}{\partial u_2}+u_3\frac{\partial}{\partial u_3}\cdot$$

它提供了两个独立不变量

$$v=\frac{u_2}{u_1}\equiv\frac{x_1-x_2}{x_1-x},\quad w=\frac{u_3}{u_2}\equiv\frac{x_3-x_2}{x_1-x_2}\cdot$$

最后, 注意到公共不变量应该形如 $J(v,w)$, 我们计算 V_3 在变量 v 和 w 上的作用, 从而得到

$$\widetilde{V}_3 = (x_1 - x_2)\Big((1-v)\frac{\partial}{\partial v} + (w-1)w\frac{\partial}{\partial w}\Big).$$

因此, 方程 $\widetilde{V}_3\big(J(v,w)\big) = 0$ 等价于

$$(1-v)\frac{\partial J}{\partial v} + (w-1)w\frac{\partial J}{\partial w} = 0.$$

其对应的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{1-v} = \frac{\mathrm{d}w}{w(w-1)} \equiv \frac{\mathrm{d}w}{w-1} - \frac{\mathrm{d}w}{w}$$

提供了不变量 $J = (v-1)(w-1)/w$. 将这个不变量视为一任意常数, 并代入关于 v 和 w 的表达式, 最后就可以得到非线性叠加公式 (3.2.17)

$$\frac{(x-x_2)(x_3-x_1)}{(x_1-x)(x_2-x_3)} = C.$$

例 6.7.4 两个齐次线性方程组成的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y \tag{6.7.27}$$

形式为 (6.7.5), 其系数为

$$T_1 = a_{11}(t), \quad T_2 = a_{12}(t), \quad T_3 = a_{21}(t), \quad T_4 = a_{22}(t),$$
$$\xi_1 = (x,0), \quad \xi_2 = (y,0), \quad \xi_3 = (0,x), \quad \xi_4 = (0,y).$$

因此, Vessiot-Guldberg-李代数是四维的并由

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.7.28}$$

生成, 估计公式 (6.7.10) 可以写为 $2m \geqslant 4$, 说明了我们至少需要两个 $(m=2)$ 特解. 计算表明算子 (6.7.28) 的三点表达式实际上提供了两个不变量

$$J_1 = \frac{xy_2 - x_2y}{x_1y_2 - x_2y_1}, \quad J_2 = \frac{x_1y - xy_1}{x_1y_2 - x_2y_1}, \tag{6.7.29}$$

因此通解可通过两个特解 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 表达为形式 (6.7.11). 后者则是预示着线性无关, 因此 $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$. 通解的显式公式 (6.7.9) 可以通过求解关于 x 和 y 的方程 $J_1 = C_1, J_2 = C_2$ 得到, 并提供了线性叠加

$$x = C_1x_1 + C_2x_2, \quad y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

例 6.7.5 在两个非齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + b_1(t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + b_2(t) \tag{6.7.30}$$

的情形下, 我们需要加入前一个例子中的如下系数 T_α 和 ξ_α:

$$T_5 = b_1(t), \quad \xi_5 = (1,0); \quad T_6 = b_2(t), \quad \xi_6 = (0,1).$$

因此, 例 6.7.4 中的代数 L_4 扩展为由

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial y},\ X_5 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_6 = \frac{\partial}{\partial y}$$

生成的代数 L_6 ,表达式 (6.7.9) 由以下线性叠加公式给出:

$$x = x_1 + C_1(x_2 - x_1) + C_2(x_3 - x_1),\ y = y_1 + C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_3 - y_1). \tag{6.7.31}$$

例 6.7.6 李考虑了线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)y + b_1(t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -a(t)x + b_2(t), \tag{6.7.32}$$

不像一般方程组 (6.7.30), 该方程组仅仅要求两个特解. 李的推理是基于一个事实: 算子 (6.7.6)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.7.33}$$

生成平面中的旋转群和两个平移. 因为这个群保持了所有的距离, 所以任意三个解 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) 都由下列式子关联起来:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = K_1, \quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = K_2. \tag{6.7.34}$$

让我们详述这个例子, 其讨论揭示了在 Vessiot-Guldberg- 李代数下利用 $m+1$ 点的不变量的好处. 估计公式 (6.7.10) 给出, $2m \geqslant 3$, 确定了至少需要 $m = 2$ 个必要特解. 因此, 我们采用算子 (6.7.33) 的三点表达式

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$V_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + y_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

V_1 和 V_2 的公共不变量的基为

$$u_1 = x - x_1,\ v_1 = y - y_1,\ u_2 = x - x_2,\ v_2 = y - y_2.$$

限制 V_3 的作用至这些不变量, 我们得到向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 和 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ 的无穷小同时旋转

$$\widetilde{V}_3=v_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial}{\partial v_1}+v_2\frac{\partial}{\partial u_2}-u_2\frac{\partial}{\partial v_2}.$$

该计算表明这个旋转的基本不变量是模 $|\boldsymbol{u}|$ 和 $|\boldsymbol{v}|$ 以及向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的标量积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$. 返回到原始变量, 最终可以得到如下 Vessiot-Guldberg- 李代数 (6.7.33) 的基本三点不变量:

$$\psi_1=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,\ \psi_2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2,$$
$$\psi_3=(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2).$$

因此, 包含两个特解 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的一般非线性叠加 (6.7.11) 的形式为

$$J_1(\psi_1,\psi_2,\psi_3)=K_1,\quad J_2(\psi_1,\psi_2,\psi_3)=K_2, \tag{6.7.35}$$

其中 $K_i=$ 常数. 这里 J_1 和 J_2 为三个变量的任意函数, 因此它们关于 x,y 的雅可比行列式不同时为零. 后面的条件意味着关于 x 和 y 的方程 (6.7.35) 有解. 例如, 令 $J_1=\psi_1$ 且 $J_2=\psi_2$, 得到通解的李代数表达式 (6.7.34). 另一个简单的非线性叠加可通过令 $J_1=\psi_1$ 和 $J_2=\psi_3$ 得到:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=K_1,\ (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=K_3. \tag{6.7.36}$$

通解的表达式 (6.7.34) 和 (6.7.36) 给出两个不同的 (即函数无关的) 非线性叠加.

因此, 方程组 (6.7.32) 的通解能表示为三个特解的线性叠加 (6.7.31), 或者两个特解的非线性叠加 (6.7.35).

例 6.7.7 定理 6.7.1 联系了所有容许解的叠加的微分方程组李代数. 作为一个说明性的例子, 考虑由

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.7.37}$$

生成的三维李代数, 这个代数是平面上的射影群的八维李代数的三维子代数. 因此, 关联方程组 (6.7.5) 的第一个方程,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=T_1(t)+2T_2(t)x+T_3(t)x^2,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=T_2(t)y+T_3(t)xy, \tag{6.7.38}$$

是 $P=T_1,Q=2T_2,R=T_3$ 的里卡蒂方程 (6.7.24). 算子 (6.7.37) 生成方程组 (6.7.38) 的 Vessiot-Guldberg- 李代数 L_3. 估计公式 (6.7.10) 给出, $2m\geqslant 3$, 计

算出必要特解的最小值 $m=2$. 因此, 我们采用算子 (6.7.37) 的三点表达式

$$V_1=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$V_2=2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+2x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2},$$
$$V_3=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2y_2\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

算子 V_1 提供五个不变量 $y,y_1,y_2,z_1=x_1-x,z_2=x_2-x_1$. 将 V_2 限制至这些不变量, 我们得到伸缩生成元

$$\widetilde{V}_2=2z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+y\frac{\partial}{\partial y}+y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

它的互不相关的不变量为

$$u_1=\frac{z_2}{z_1},\quad u_2=\frac{y^2}{x_1-x},\quad u_3=\frac{y_1^2}{x_1-x},\quad u_4=\frac{y_2^2}{x_1-x}.$$

因此, V_1 和 V_2 的公共不变量的基为

$$u_1=\frac{x_2-x_1}{x_1-x},\quad u_2=\frac{y^2}{x_1-x},\quad u_3=\frac{y_1^2}{x_1-x},\quad u_4=\frac{y_2^2}{x_1-x}.$$

我们仍然需要找到 V_3 的不变量的限制 $\widetilde{V}_3$:

$$\widetilde{V}_3=V_3(u_1)\frac{\partial}{\partial u_1}+\cdots+V_3(u_4)\frac{\partial}{\partial u_4}.$$

计算表明

$$V_3(u_1)=\frac{(x_2-x_1)(x-x_2)}{x-x_1}\equiv(x_1-x)(1+u_1)u_1,$$
$$V_3(u_2)=-y^2\equiv-(x_1-x)u_2,\ V_3(u_3)=y_1^2\equiv(x_1-x)u_3,$$
$$V_3(u_4)=\frac{x+x_1-2x_2}{x-x_1}\,y_2^2\equiv(x_1-x)(1+2u_1)u_4.$$

因此,

$$\widetilde{V}_3=\Big(x_1-x\Big)\bigg((1+u_1)u_1\frac{\partial}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial}{\partial u_2}+u_3\frac{\partial}{\partial u_3}+(1+2u_1)u_4\frac{\partial}{\partial u_4}\bigg).$$

从而, 方程 $\widetilde{V}_3\big(\psi(u_1,\cdots,u_4)\big)=0$ 等价于

$$(1+u_1)u_1\frac{\partial\psi}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial\psi}{\partial u_2}+u_3\frac{\partial\psi}{\partial u_3}+(1+2u_1)u_4\frac{\partial\psi}{\partial u_4}=0,$$

据此通过求解特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{(1+u_1)u_1} = -\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2} = \frac{\mathrm{d}u_3}{u_3} = \frac{\mathrm{d}u_4}{(1+2u_1)u_4},$$

我们得到如下三个无关的不变量

$$\psi_1 = u_2u_3 \equiv \frac{y^2y_1^2}{(x_1-x)^2},\ \psi_2 = \frac{u_1u_2}{1+u_1} \equiv \frac{(x_2-x_1)y^2}{(x_1-x)(x_2-x)},$$

$$\psi_3 = \frac{u_4}{(1+u_1)u_1} \equiv \frac{(x_1-x)y_2^2}{(x_2-x_1)(x_2-x)}.$$

因此, 包含两个特解 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的一般非线性叠加 (6.7.11) 可以写为

$$J_1(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = C_1, \quad J_2(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = C_2, \tag{6.7.39}$$

这里 J_1 和 J_2 为关于三个变量的任意函数, 其关于 x,y 的函数雅可比行列式不同时为零 (比较例 6.7.6). 例如, 令 $J_1 = \sqrt{\psi_1}$ 且 $J_2 = \sqrt{\psi_2\psi_3}$, 即指定 (6.7.39) 为形式

$$\frac{yy_1}{x_1-x} = C_1, \quad \frac{yy_2}{x_2-x} = C_2,$$

我们得到如下由两个特解而得到的通解的表达式:

$$x = \frac{C_1x_1y_2 - C_2x_2y_1}{C_1y_2 - C_2y_1}, \quad y = \frac{C_1C_2(x_2-x_1)}{C_1y_2 - C_2y_1}.$$

回顾单个里卡蒂方程 (6.7.24) 的通解, 需要求三个特解. 值得注意的是, 当相同的里卡蒂方程在两个方程所组成的方程组 (6.7.38) 中求解时, 我们仅仅需要知道它的两个特解!

例 6.7.8 两个非线性方程组成的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xy^2 - \frac{x}{2t}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x^2y - \frac{y}{2t} \tag{6.7.40}$$

经常会出现在非线性光学里 (见 7.2.6 节). 它有着形式 (6.7.5), 而且是由

$$X_1 = xy^2\frac{\partial}{\partial x} + x^2y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

生成的二维 Vessiot-Guldberg- 李代数 L_2. 估计公式 (6.7.10) 给出 $m \geqslant 1$, 因此一个特解可能足以表达该方程的通解. 为了检验这是确实可能的, 让我们找出以上算子的两点表达式的不变量 $J(x,y;x_1,x_2)$:

$$V_1 = xy^2\frac{\partial}{\partial x} + x^2y\frac{\partial}{\partial y} + x_1y_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2y_1\frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$V_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1}\cdot$$

因为 $[X_1, X_2] = -2X_1$, 那么因此 X_1 生成一个理想 L_2, 以算子 V_1 开始计算较为方便. $V_1(J) = 0$ 的特征方程组的第一个和最后一个方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2x} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2y} = \frac{\mathrm{d}x_1}{y_1^2x_1} = \frac{\mathrm{d}y_1}{x_1^2y_1}$$

分别提供了不变量 $z = x^2 - y^2$ 和 $z_1 = x_1^2 - y_1^2$. 只需解一个方程, 即

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2 - z)} = \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1(x_1^2 - z_1)},$$

其中 z 和 z_1 应该被看作常数. 积分可得第三个不变量,

$$z_2 = \frac{1}{z}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2 - z}} - \frac{1}{z_1}\ln\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - z_1}}$$

或者, 代入值 z 和 z_1,

$$z_2 = \frac{\ln x - \ln y}{x^2 - y^2} - \frac{\ln x_1 - \ln y_1}{x_1^2 - y_1^2}\cdot$$

现在将 V_2 限制至不变量 z, z_1, z_2,

$$\widetilde{V}_2 = 2\Big(z\frac{\partial}{\partial z} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\Big),$$

就可以容易地得到两个独立不变量, 例如

$$J_1 = \frac{z}{z_1}, \quad J_2 = z\,z_2.$$

将值 z, z_1, z_2 代入到这里, 并使所得到的 J_i 的表达式与任意常数 C_i 相等, 我们得到方程组 (6.7.40) 的非线性叠加 (6.7.11)

$$J_1 \equiv \frac{x^2 - y^2}{x_1^2 - y_1^2} = C_1, \quad J_2 \equiv \ln x - \ln y - \frac{x^2 - y^2}{x_1^2 - y_1^2}\Big(\ln x_1 - \ln y_1\Big) = C_2.$$

6.7.4 使用非线性叠加的方程组积分

Vessiot-Guldberg- 李代数提供了一个新的、容许非线性叠加的常微分方程组的一般积分理论的理论基础 [21].

为了说明这个方法, 让我们考虑含有两个方程的方程组的简单情形:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= T_1(t)\xi_1^1(x,y) + T_2(t)\xi_2^1(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= T_1(t)\xi_1^2(x,y) + T_2(t)\xi_2^2(x,y),\end{aligned} \tag{6.7.41}$$

该方程组有

$$X_1=\xi_1^1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\xi_1^2(x,y)\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=\xi_2^1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2^2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\tag{6.7.42}$$

生成的二维 Vessiot-Guldberg- 李代数 L_2. 为了解方程组 (6.7.41), 只需将基本算子 (6.7.42) 和相应方程 (6.7.41) 转换成表 6.7.1 所给出的标准形式.

表 6.7.1 算子 (6.7.42) 以及方程组 (6.7.41) 的标准形式

	Vessiot-Guldberg- 李代数	算子 (6.7.41) 的标准形式
I	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial x},\ X_2=\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=T_1(t),\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=T_2(t)$
II	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=x\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=T_1(t)+T_2(t)x$
III	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=T_2(t)x,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=T_1(t)+T_2(t)y$
IV	$X_1=\dfrac{\partial}{\partial y},\ X_2=y\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=T_1(t)+T_2(t)y$

例 6.7.9 让我们应用例 6.7.8 里的方程组 (6.7.40) 的积分方法:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xy^2-\frac{x}{2t},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x^2y-\frac{y}{2t}.$$

它的 Vessiot-Guldberg- 李代数是由

$$X_1=xy^2\frac{\partial}{\partial x}+x^2y\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\tag{6.7.43}$$

生成的二维代数.

我们有

$$[X_1,\ X_2]=-2X_1,\quad \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2=xy(y^2-x^2)\neq 0.$$

因此, 算子 (6.7.43) 生成在表 6.7.1 里类型 III 的 L_2.

从而我们能转换算子 (6.7.43) 及方程组 (6.7.40) 为表 6.7.1 中的标准形式 III. 首先找出第一个算子 (6.7.43) 的典型变量 $\tilde{x},\tilde{y}$, 这可以通过求解方程

$$X_1(\tilde{x})=0,\quad X_1(\tilde{y})=1$$

而得到. 据此

$$\tilde{x}=x^2-y^2,\quad \tilde{y}=\frac{\ln y-\ln x}{x^2-y^2}.\tag{6.7.44}$$

事实上, 我们能验证出变量 (6.7.44) 是代数 L_2 所要求的典型变量. 确实, 算子 (6.7.43) 能写成表 6.7.1 里的类型 III 的形式:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \quad X_2 = 2\Big(\tilde{x}\,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\Big).$$

因此, 改写方程 (6.7.40) 使其含有新的变量 (6.7.44), 可得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\tilde{x}}{t}, \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} = 1 + \frac{\tilde{y}}{t}\cdot \tag{6.7.45}$$

积分方程 (6.7.45) 而推出

$$\tilde{x} = \frac{C_1}{t}, \quad \tilde{y} = C_2\, t + t\ln t. \tag{6.7.46}$$

现在我们解关于 x 和 y 的方程 (6.7.44):

$$x = \sqrt{\frac{\tilde{x}}{1 - \mathrm{e}^{2\tilde{x}\,\tilde{y}}}}, \quad y = \sqrt{\frac{\tilde{x}}{\mathrm{e}^{-2\tilde{x}\,\tilde{y}} - 1}},$$

将解 (6.7.46) 代入, 最终得到方程组 (6.7.40) 的如下形式的通解:

$$x = \sqrt{\frac{k}{t(1-\zeta^2)}}, \quad y = \zeta\sqrt{\frac{k}{t(1-\zeta^2)}}, \tag{6.7.47}$$

其中 $\zeta = Ct^k$, 且 C 和 k 为任意常数.

习题六

6.1. 验证方程 $y'' - y'^2 + xy = 0$ 是否容许以下生成元的伸缩群:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

6.2. 求容许以下生成元的伸缩群的最一般的一阶和二阶方程:

(i) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$, (ii) $X = y\dfrac{\partial}{\partial y}$, (iii) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot$

6.3. 验证三阶方程

$$\mu^2\,\mu''' = \nu(2\mu\,\mu'' - \mu'^2), \quad \nu = 常数 \neq 0, \tag{P6.1}$$

其中 $\mu = \mu(x)$, 容许算子

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial \mu},$$

并利用这些对称将方程 (P6.1) 简化为一阶方程.

6.4. 计算以下二阶方程的无穷小对称:

$$\text{(i) } y''+\frac{y'}{x}-\mathrm{e}^{y}=0 \quad \text{和} \quad \text{(ii) } y''-\frac{y'}{x}+\mathrm{e}^{y}=0. \tag{P6.2}$$

6.5. 验证以下二阶方程是可线性化的:

$$\begin{gathered}\text{(i) } y''=yy'^{2}-xy'^{3}, \quad \text{(ii) } y''+3yy'+y^{3}=0,\\ \text{(iii) } y''=2\Big(\frac{y'^{2}}{y}-\frac{xy'}{1+x^{2}}\Big), \quad \text{(iv) } y''=\frac{y'}{y^{2}}-\frac{1}{xy},\\ \text{(v) } y''+\frac{y'}{x}-\mathrm{e}^{y}=0, \quad \text{(vi) } y''+\Big(1-\frac{xy'}{y}\Big)^{3}=0.\end{gathered} \tag{P6.3}$$

6.6. 考虑方程 (6.5.6)

$$y''=\frac{y'}{y^{2}}-\frac{1}{xy}$$

和被这个方程所容许的 (6.5.7) 的第二个算子

$$X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

(i) 找出典型变量 t,u 以使 X_2 为 $X_2=\partial/\partial t$.

(ii) 令 $u=u(t)$, 用变量 t,u 改写方程 (6.5.6).

(iii) 利用替代式 $u'=p(u)$ 减少得到的二阶方程 $u''=\phi(u,u')$ 的阶数.

6.7. 积分方程

$$y''+\frac{k}{(1+\omega^{2}x^{2})^{2}}y=0, \qquad k,\ \omega=\text{常数}\neq 0,$$

使用这个方程的两个对称

$$X_1=(1+\omega^{2}x^{2})\frac{\partial}{\partial x}+\omega^{2}xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2=y\frac{\partial}{\partial y}.$$

求出对任意参数 k 和 ω 的解, 以及特殊情形当 $k=3\omega^{2}$ 时的解.

6.8. 令 $X_1,\cdots,X_r$ 生成一向量空间 L_r, 并令对于所有的 i,j, $[X_i,X_j]\in L_r$. 证明对于任意 $X,Y\in L_r$, $[X,Y]\in L_r$ (参看定义 6.5.2).

6.9. 证明变换 (6.5.27) 将方程 (6.5.26) 映射为 $u''=0$.

6.10. 求容许算子

$$X=\sqrt{2}\,x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$$

的一阶方程的一般形式并将它们积分.

6.11. 求一阶双齐次方程的一般形式, 即容许两个独立算子

$$X_1=y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}$$

的方程 $y'=f(x,y)$.

6.12. 求二阶双齐次方程 $y''=f(x,y,y')$ 的一般形式.

6.13. 验证函数 (6.5.35) 满足方程 (6.5.34).

6.14. 通过首先找出多项式特解, 然后应用 6.5.5 节的方法, 求解方程 $y''=xy'-4y$.

6.15. 验证变量代换 $t=y$, $u=x^2+y^2$ 将方程 $xy''=y'+y'^3$ 映射为线性方程 $u''=0$, 并验证 $x^2+y^2+Ay+B=0$ 提供了方程 $xy''=y'+y'^3$ 的隐式解 (见例 6.5.11).

6.16. 验证非线性方程

$$y''+2\Big(y'-\frac{y}{x}\Big)^3=0$$

容许由

$$X_1=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

生成的代数 L_2 并用这个代数积分方程. 阐明以上所给的 L_2 是否是被问题中方程所容许的最大的李代数.

6.17. 求解下列初值问题:

(i) $y''+2\Big(y'-\frac{y}{x}\Big)^3=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=1,$

(ii) $y''+2\Big(y'-\frac{y}{x}\Big)^3=0,\quad y(1)=y'(1)=0,$

(iii) $y''+2\Big(y'-\frac{y}{x}\Big)^3=0,\quad y\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2},\quad y'\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{3}{4},$

(iv) $y''+2\Big(y'-\frac{y}{x}\Big)^3=0,\quad y(2)=\sqrt{2},\quad y'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}},$

(v) $y''+2\Big(y'-\frac{y}{x}\Big)^3=0,\quad y(2)=3\sqrt{2},\quad y'(2)=\frac{7}{2\sqrt{2}}.$

6.18. 求非线性方程 (6.6.53)

$$y'''-\Big(\frac{6}{y}y'+\frac{3}{x}\Big)y''+6\Big(\frac{y'^3}{y^2}+\frac{y'^2}{xy}+\frac{y'}{x^2}+\frac{y}{x^3}\Big)=0$$

的通解.

6.19. 求非线性方程 (6.6.74)

$$y'''+\frac{1}{y'}\Big(-3y''^2-xy'^5\Big)=0.$$

的通解.

第七章　非线性偏微分方程

本章包含了求非线性偏微分方程精确解的李群方法的简单应用. 这里也将介绍基础守恒定律.

补充读物: L.V. Ovsyannikov [32], W.F. Ames [1], N.H. Ibragimov [14], [18], [19], [20], P.J. Olver [31], G.W. Bluman 和 S. Kumei [2], B.J. Cantwell [3].

7.1　对称

偏微分方程的单参数群和对称群的定义和常微分方程相同. 例如, 在两个自变量 t, x 和一个因变量 u 的情况下, 变换 (6.2.1) 被如下的有关 t, x, u 的可逆变换所替换:

$$\bar{t} = f(t, x, u, a), \quad \bar{x} = g(t, x, u, a), \quad \bar{u} = h(t, x, u, a), \tag{7.1.1}$$

群的主要性质 (6.2.4)—(6.2.5) 也相应地由如下方程来表示:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{t}} &\equiv f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b) = f(t, x, u, a+b), \\ \bar{\bar{x}} &\equiv g(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b) = g(t, x, u, a+b), \\ \bar{\bar{u}} &\equiv h(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b) = h(t, x, u, a+b). \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

这样我们就可以得到下面的定义.

定义 7.1.1　*如果 G 包含恒等变换 $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u$ 及其逆变换, 且它遵循群性质 (7.1.2), 那么可逆变换 (7.1.1) 的集合 G 在变量 t, x, u 的空间下称为单参数变换群.*

7.1.1 对称群的定义和计算

我们用公式表示偏微分方程对称群的定义, 考虑二次发展方程

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}), \quad \partial F/\partial u_{xx} \neq 0. \tag{7.1.3}$$

定义 7.1.2 如果方程 (7.1.3) 在新变量 $\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}$ 下有相同的形式, 即

$$\bar{u}_{\bar{t}} = F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}), \tag{7.1.4}$$

其中方程 F 和方程 (7.1.3) 是相同的, 那么变换 (7.1.1) 的单参数群 G 称为被方程 (7.1.3) 容许, 同时 G 也称为方程 (7.1.3) 的一个对称群.

对称群 G 的构成和它的无穷小变换

$$\bar{t} \approx t + a\tau(t, x, u), \quad \bar{x} \approx x + a\xi(t, x, u), \quad \bar{u} \approx u + a\eta(t, x, u) \tag{7.1.5}$$

的决定是等价的, 上式是由 (7.1.1) 通过泰勒级数对群系数 a 展开并只保留对 a 的线性形式得到的. 无穷小变换 (7.1.5) 提供了群 G 的生成元, 即微分算子

$$X = \tau(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{7.1.6}$$

应用于任意可微函数 $J(t, x, u)$, 并写为形式

$$X(J) = \tau(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial u}.$$

生成元 (7.1.6) 称为方程 (7.1.3) 或者方程 (7.1.3) 的一个无穷小对称容许算子.

对应算子 (7.1.6) 的变换群 (7.1.1) 可以通过解李方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}a} = \tau(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \quad \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \xi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \quad \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}a} = \eta(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \tag{7.1.7}$$

求得. 其初值条件为

$$\bar{t}\big|_{a=0} = t, \quad \bar{x}\big|_{a=0} = x, \quad \bar{u}\big|_{a=0} = u.$$

我们重新回到方程 (7.1.4). (7.1.4) 中的 $\bar{u}_{\bar{t}}$, $\bar{u}_{\bar{x}}$ 和 $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ 可以将方程 (7.1.1) 的微分变换看成变量代换而获得. 然后, 关于参数 a 对 $\bar{u}_{\bar{t}}$, $\bar{u}_{\bar{x}}$, $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ 进行泰勒级数展开, 从而获得这些表达式的无穷小形式

$$\begin{gathered}\bar{u}_{\bar{t}} \approx u_t + a\,\zeta_0(t, x, u, u_t, u_x),\ \bar{u}_{\bar{x}} \approx u_x + a\,\zeta_1(t, x, u, u_t, u_x),\\ \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} \approx u_{xx} + a\,\zeta_2(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}),\end{gathered} \tag{7.1.8}$$

其中 ζ_0,ζ_1,ζ_2 由下面的延拓公式决定:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),\\ \zeta_1 &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\ \zeta_2 &= D_x(\zeta_1) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi).\end{aligned} \tag{7.1.9}$$

并且 D_t 和 D_x 是关于 t 和 x 的全微分:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

把 (7.1.5) 和 (7.1.8) 代入方程 (7.1.4) 得到

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\bar{t}} - F(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{u}_{\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}) \approx\ & u_t - F(t,x,u,u_x,u_{xx})\\ &+a\Big(\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau\Big).\end{aligned}$$

因此, 由方程 (7.1.3), 方程 (7.1.4) 变为

$$\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau = 0, \tag{7.1.10}$$

其中 u_t 由关于 ζ_0,ζ_1,ζ_2 的 $F(t,x,u,u_x,u_{xx})$ 取代.

方程 (7.1.10) 定义了方程 (7.1.3) 的所有的无穷小对称. 它们称为*决定方程*. 通常可以使用缩写形式

$$X\Big[u_t - F(t,x,u,u_x,u_{xx})\Big] = 0, \tag{7.1.11}$$

其中 X 表示算子 (7.1.6) 至一阶和二阶微分的延拓:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_0\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

决定方程 (7.1.10) (或它的等价式 (7.1.11)) 是一个关于未知函数 $\tau(t,x,u)$ $\xi(t,x,u),\eta(t,x,u)$ 的二阶线性齐次偏微分方程. 因此, 决定方程的所有解集是一个向量空间 L. 此外, 决定方程有以下重要的但不明显的性质. 向量空间 L 是一个*李代数*, 即它关于*换位子*是闭合的. 换言之, L 包含任何算子 X_1,X_2 及如下定义的换位子 $[X_1,X_2]$:

$$[X_1,X_2] = X_1X_2 - X_2X_1.$$

特别地, 如果 $L = L_r$ 是有限维的并有基 $X_1,\cdots,X_r$, 那么

$$[X_\alpha,X_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma,$$

其中 $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 是常系数, 称为 L_r 的结构常数.

决定方程 (7.1.10) 对于 $t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx}$ 六个独立自变量是等同的. 因此, 决定方程可以分解成一个方程组. 根据定义, 这是一个超定方程组, 因为它包含了比三个未知函数 τ, ξ 和 η 更多的方程. 因此, 在实际应用中, 决定方程可以得到显式解. 下面的预备引理归功于李对计算的简化.

引理 7.1.1 对于方程 (7.1.3), 对称变换 (7.1.1) 有形式

$$\bar{t} = f(t, a), \quad \bar{x} = g(t, x, u, a), \quad \bar{u} = h(t, x, u, a). \tag{7.1.12}$$

这样意味着可以找到无穷小对称的形式

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{7.1.13}$$

证明 我们挑选出决定方程 (7.1.10) 中包含 u_{tx} 的项. 从延拓方程 (7.1.9) 可看出只有 ζ_2 包含 u_{tx}, 即它的项 $u_{tx}D_x(\tau)$. 因为方程 (7.1.10) 对于 t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx} 都成立, 我们有 $D_x(\tau) \equiv \tau_x + u_x\tau_u = 0$. 因此 $\tau_x = \tau_u = 0$, 即 $\tau = \tau(t)$, 并且算子 (7.1.6) 有 (7.1.13) 的形式.

例 7.1.1 我们计算下面的非线性方程 (也称 Burgers 方程) 的对称形式:

$$u_t = u_{xx} + uu_x. \tag{7.1.14}$$

根据引理 7.1.1, 我们寻找 (7.1.13) 的无穷小对称. 关于算子 (7.1.13), 由延拓方程 (7.1.9) 得到

$$\begin{aligned} &\zeta_0 = D_t(\eta) - u_xD_t(\xi) - \tau'(t)u_t, \quad \zeta_1 = D_x(\eta) - u_xD_x(\xi), \\ &\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - u_{xx}D_x(\xi) \equiv D_x^2(\eta) - u_xD_x^2(\xi) - 2u_{xx}D_x(\xi). \end{aligned} \tag{7.1.15}$$

在我们的例子中, 决定方程 (7.1.10) 有形式

$$\zeta_0 - \zeta_2 - u\zeta_1 - \eta u_x = 0, \tag{7.1.16}$$

其中 ζ_0, ζ_1 和 ζ_2 由 (7.1.15) 给定. 我们挑选并舍去包含 u_{xx} 的项. 注意到 u_t 已被 $u_{xx} + uu_x$ 替换并且代入 ζ_2 表达式

$$\begin{aligned} D_x^2(\xi) &= D_x(\xi_x + \xi_u\, u_x) = \xi_u\, u_{xx} + \xi_{uu}\, u_x^2 + 2\xi_{xu}\, u_x + \xi_{xx}, \\ D_x^2(\eta) &= D_x(\eta_x + \eta_u\, u_x) = \eta_u\, u_{xx} + \eta_{uu}\, u_x^2 + 2\eta_{xu}\, u_x + \eta_{xx}, \end{aligned} \tag{7.1.17}$$

我们得到方程

$$2\xi_u\, u_x + 2\xi_x - \tau'(t) = 0.$$

它可分为两个方程, 即 $\xi_u = 0$ 和 $2\xi_x - \tau'(t) = 0$. 前一个方程显示 ξ 仅依赖 t, x, 对第二个方程积分得到

$$\xi = \frac{1}{2}\tau'(t)\,x + p(t). \tag{7.1.18}$$

由方程 (7.1.18) 得 $D_x^2(\xi) = 0$, 现在决定方程 (7.1.16) 化成形式

$$u_x^2\eta_{uu} + \left(\frac{1}{2}\tau'(t)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta\right)u_x + u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0$$

并分解为三个方程:

$$\begin{aligned} &\eta_{uu} = 0, \quad u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0, \\ &\frac{1}{2}\tau'(t)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta = 0. \end{aligned} \tag{7.1.19}$$

方程 (7.1.19) 中的第一个方程得到 $\eta = \sigma(t,x)u + \mu(t,x)$, 第三个方程变成

$$\left(\frac{1}{2}\tau'(t) + \sigma\right)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\sigma_x + \mu = 0,$$

其中

$$\sigma = -\frac{1}{2}\tau'(t), \quad \mu = -\frac{1}{2}\tau''(t)x - p'(t).$$

这样, 我们有

$$\eta = -\frac{1}{2}\,\tau'(t)\,u - \frac{1}{2}\tau''(t)x - p'(t). \tag{7.1.20}$$

最终将方程 (7.1.20) 代入方程 (7.1.19) 的第二个方程得到

$$\frac{1}{2}\tau'''(t)x + p''(t) = 0,$$

其中 $\tau'''(t) = 0$, $p''(t) = 0$, 并且我们有

$$\tau(t) = C_1t^2 + 2C_2t + C_3, \quad p(t) = C_4t + C_5.$$

应用 (7.1.18) 和 (7.1.20), 我们最终得到决定方程 (7.1.16) 的通解

$$\tau = C_1t^2 + 2C_2t + C_3,\ \xi = C_1tx + C_2x + C_4t + C_5,\ \eta = -(C_1t + C_2)u - C_1x - C_4.$$

它只包含五个任意常数 C_i. 它意味着 Burgers 方程 (7.1.14) 的无穷小对称形成由以下线性无关算子生成的五维李代数:

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - (x + tu)\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{7.1.21}$$

7.1.2 解的群变换

微分方程的任意对称变换使得原微分方程的任意解仍为它的解. 它的意思是, 正如常微分方程情形, 对称群变换是原微分方程的解重新排列组合. 这些解不能单独改变, 因此它们称为*不变解*. 相应地, 群分析提供了两种得到精确解的基本方法: 对已知解进行*群变换*和构造*不变解*.

在这节中, 我们使用线性热传导方程 $u_t - u_{xx} = 0$ 来阐述这些解的群变换的方法. 一个非线性方程的例子, 即 Burgers 方程将在 7.2.2 节中考虑.

此方法是基于一个对称群变换将方程的任意解变换至该方程的解的事实上. 即, 令 (7.1.1) 为方程 (7.1.3) 的一个对称变换群, 并使函数

$$u = \Phi(t, x)$$

是方程 (7.1.3) 的解. 因为 (7.1.1) 是一个对称变换, 以上的解也可以写成新变量的形式:

$$\bar{u} = \Phi(\bar{t}, \bar{x}).$$

利用 (7.1.1) 取代这里 $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}$, 我们得到

$$h(t, x, u, a) = \Phi\big(f(t, x, u, a), g(t, x, u, a)\big). \tag{7.1.22}$$

若求解了关于 u 的方程 (7.1.22), 我们就可以得到方程 (7.1.3) 的新解的一个单参数族.

线性热传导方程

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{7.1.23}$$

的无穷小对称包含了无限维代数, 且有生成元

$$X_\tau = \tau \frac{\partial}{\partial u},$$

其中 $\tau = \tau(t, x)$ 是方程 (7.1.23) 的一个任意解, 六维李代数由下面算子生成 (见习题 7.2):

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}(2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{7.1.24}$$

考虑算子 X_5, 它产生了*伽利略变换的热表示*

$$\bar{t} = t, \ \bar{x} = x + 2at, \ \bar{u} = u\,\mathrm{e}^{-(ax + a^2 t)}. \tag{7.1.25}$$

任意热传导方程的解 $u=\Phi(t,x)$ 都可以通过变换 (7.1.25) 转换至一个新解. 因为热传导方程在这个变换下是不变的, 我们用变量 $\overline{t},\overline{x},\overline{u}$ 把它写成 $\overline{u}_{\overline{t}}-\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}}=0$, 把解用同样的变量表示为

$$\overline{u}=\Phi(\overline{t},\overline{x}).$$

然后我们用 (7.1.25) 关于 $\overline{t},\overline{x},\overline{u}$ 的表达式代入上述方程得到关于 u 的表达式

$$u\mathrm{e}^{-(ax+a^2t)}=\Phi(t,x+2at),$$

我们得到关于参数 a 的新解

$$u=\mathrm{e}^{ax+a^2t}\Phi(t,x+2at). \tag{7.1.26}$$

练习 7.1.1 试通过变换 (7.1.25) 和公式 (7.1.26), 使用如下两个简单解, 从而求得热传导方程的解:

(i) $u=1$, (ii) $u=x$.

解 (i) 将 $\overline{u}=1$ 代入方程 (7.1.25), 由

$$u\,\mathrm{e}^{-(ax+a^2t)}=1$$

得到下面的新解 (7.1.26)

$$u=\mathrm{e}^{ax+a^2t}.$$

同样的结果可以从 (7.1.26) 中令 $\Phi(t,x+2at)=1$ 获得.

(ii) 将 $\overline{u}=\overline{x}$ 代入 (7.1.25), 由

$$u\,\mathrm{e}^{-(ax+a^2t)}=x+2at$$

得到下面的新解 (7.1.26)

$$u=(x+2at)\,\mathrm{e}^{ax+a^2t}.$$

同样的结果可以从 (7.1.26) 中令 $\Phi(t,x+2at)=x+2at$ 获得.

7.2 群不变解

7.2.1 简介

如果一个群变换将一个解映射到它的本身, 则我们称之为自相似或群不变解. 考虑发展方程 (7.1.3) . 给定方程 (7.1.3) 的一个无穷小对称性方程 (7.1.6), 由 X 产生的单参数群下的不变解由如下方法获得. 通过解方程

$$X(J)\equiv\tau(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial t}+\xi(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial J}{\partial u}=0,$$

计算两个自变量 $J_1=\lambda(t,x)$ 和 $J_2=\mu(t,x,u)$，或者求解它的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{\tau(t,x,u)}=\frac{\mathrm{d}x}{\xi(t,x,u)}=\frac{\mathrm{d}u}{\eta(t,x,u)}. \tag{7.2.1}$$

然后指定其中一个变量作为另外一个变量的函数, 例如

$$\mu=\phi(\lambda), \tag{7.2.2}$$

由此解出关于 u 的方程 (7.2.2). 最后, 将关于 u 的表达式代入方程 (7.1.3) 得到有一个变量的未知函数 $\phi(\lambda)$ 的一个常微分方程. 这个过程将把自变量的个数减少一个.

练习 7.2.1 在有如下生成元 (7.1.24) 的群 (7.1.25) 下寻找热传导方程 (7.1.23) 的不变解:

$$X=2t\frac{\partial}{\partial x}-xu\frac{\partial}{\partial u}.$$

解 关于 X 有两个自变量, 其中一个是 t, 而另一个是从特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{2t}+\frac{\mathrm{d}u}{xu}=0 \quad 或 \quad \frac{x\mathrm{d}x}{2t}+\frac{\mathrm{d}u}{u}=0$$

获得的. 对后一个方程积分得到不变量

$$J=u\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4t}}.$$

因此, 在 $J=\phi(t)$ 或

$$u=\phi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$$

中寻找不变解. 将上式代入热传导方程, 我们有

$$u_t=\left(\phi'+\frac{x^2}{4t^2}\,\phi\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}},\quad u_x=-\frac{x}{2t}\,\phi\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}},\quad u_{xx}=\left(\frac{x^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right)\phi\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}},$$

二阶偏微分方程 $u_t-u_{xx}=0$ 降阶至一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+\frac{\phi}{2t}=0.$$

由此得 $\phi(t)=C/\sqrt{t}$, $C=$ 常数. 因此热传导方程 (7.1.23) 的不变解是

$$u=\frac{C}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

7.2.2 Burgers 方程

我们从 7.1.1 节的例 7.1.1 得知 Burgers 方程 (7.1.14), $u_t = u_{xx} + uu_x$, 有 5 个无穷小对称 (7.1.21):

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - (x+tu)\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

同时考虑方程 (7.1.21) 中的生成元 X_5. 李方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}a} = \bar{t}^2, \quad \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \bar{t}\,\bar{x}, \quad \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}a} = -(\bar{x} + \bar{t}\,\bar{u}).$$

对这些方程积分并利用条件在 $a = 0$ 时 $\bar{t} = t, \bar{x} = x, \bar{u} = u$, 得到

$$\bar{t} = \frac{t}{1-at}, \quad \bar{x} = \frac{x}{1-at}, \quad \bar{u} = (1-at)\,u - ax. \tag{7.2.4}$$

将变换 (7.2.3)—(7.2.4) 代入方程 (7.1.22), Burgers 方程的任意已知解 $u = \Phi(t,x)$ 可以被映射到单参数的解集中:

$$u = \frac{ax}{1-at} + \frac{1}{1-at}\,\Phi\Big(\frac{t}{1-at}, \frac{x}{1-at}\Big). \tag{7.2.5}$$

例 7.2.1 通过选择任意的不变解作为一个初解 $u = \Phi(t,x)$, 我们可以获得很多例子. 让我们再次观察 (7.1.21) 中 X_2 的空间变化下产生的不变解. 在这个例子中不变值是 $\lambda = t$ 和 $\mu = u$, 并且方程 (7.2.2) 写成 $u = \phi(t)$ 的形式. 代入 Burgers 方程可得到常数解 $u = k$. 它是由 (7.2.5) 映射到下面的单参数解集而得到:

$$u = \frac{k+ax}{1-at}.$$

例 7.2.2 一个物理上有重要意义的解是在 X_1 产生的时间变换群的不变性的假设条件下获得的. 这个假设提供了平稳解

$$u = \Phi(x),$$

这样 Burgers 方程变换为

$$\Phi'' + \Phi\Phi' = 0. \tag{7.2.6}$$

对上述方程积分一次:

$$\Phi' + \frac{\Phi^2}{2} = C_1,$$

设 $C_1=0, C_1=\nu^2>0, C_1=-\omega^2<0$, 再次积分得

$$\Phi(x)=\frac{2}{x+C},$$

$$\Phi(x)=\nu\tanh\Big(C+\frac{\nu}{2}x\Big), \tag{7.2.7}$$

$$\Phi(x)=\omega\tan\Big(C-\frac{\omega}{2}x\Big).$$

由 X_4 产生的伽利略变换 $\bar{t}=t, \bar{x}=x+at, \bar{u}=u-a$ 映射平稳解 (7.2.7) 到动波 $u=f(x-ct)$.

例 7.2.3 如果应用变换 (7.2.5) 到平稳解 (7.2.7), 得到了下面的新非平稳解

$$u=\frac{ax}{1-at}+\frac{2}{x+C(1-at)},$$

$$u=\frac{1}{1-at}\left(ax+\nu\tanh\left(C+\frac{\nu x}{2(1-at)}\right)\right), \tag{7.2.8}$$

$$u=\frac{1}{1-at}\left(ax+\omega\tan\left(C-\frac{\omega x}{2(1-at)}\right)\right).$$

例 7.2.4 我们来求 X_5 产生的射影群下的不变解. 特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{\mathrm{d}x}{tx}=-\frac{\mathrm{d}u}{x+tu}$$

提供了不变量 $\lambda=x/t$ 和 $\mu=x+tu$. 因此, 不变解的一般表达式 (7.2.2) 有形式

$$u=-\frac{x}{t}+\frac{1}{t}\Phi(\lambda), \quad \lambda=\frac{x}{t}\cdot \tag{7.2.9}$$

在 Burgers 方程 (7.1.14) 中代入这个表达式, 可以精确地得到关于方程 (7.2.6) 的 $\Phi(\lambda)$. 因此, 用 λ 代替 x, 可以从 (7.2.7) 得到它的通解. 相关的不变解可以通过把结果表达式 $\Phi(\lambda)$ 代入方程 (7.2.9) 得到. 例如, 在 (7.2.7) 中的第二个公式使用 $\Phi(\lambda)$, 同时设 $\nu=\pi$, 从而得到如下形式的解:

$$u=-\frac{x}{t}+\frac{\pi}{t}\tanh\Big(C+\frac{\pi x}{2t}\Big). \tag{7.2.10}$$

这在非线性声学中是十分重要的, 它是由 R.I. Khokhlov 于 1961 年在物理推论中引出的.

例 7.2.5 由于由 X_3 生成的伸缩群下的不变解关系到量纲分析, 这些不变解称为物理相似解. 特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

提供了不变量 $\lambda = x/\sqrt{t}, \mu = \sqrt{t}\,u$. 因此, 我们求形式为

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

的不变解并得到 Burgers 方程的相似解的方程

$$\Phi'' + \Phi\Phi' + \frac{1}{2}(\lambda\,\Phi' + \Phi) = 0. \tag{7.2.11}$$

对上述方程积分一次得

$$\Phi' + \frac{1}{2}(\Phi^2 + \lambda\,\Phi) = C,$$

设 $C = 0$, 得到解 (由 O.V. Rudenko 在物理上发现)

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\,\frac{\mathrm{e}^{-x^2/(4t)}}{B + \operatorname{erf}(x/(2\sqrt{t}))},$$

其中 B 是一个任意常数, 并且

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

是一个误差函数.

7.2.3 非线性边值问题

考虑非线性方程

$$\Delta u = \mathrm{e}^u, \tag{7.2.12}$$

其中 $u = u(x, y)$ 和 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ 是有两个自变量的拉普拉斯算子. 方程 (7.2.12) 容许算子

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} - 2\xi_x\frac{\partial}{\partial u}, \tag{7.2.13}$$

其中 $\xi(x, y)$ 和 $\eta(x, y)$ 是柯西-黎曼方程组

$$\xi_x - \eta_y = 0, \quad \xi_y + \eta_x = 0 \tag{7.2.14}$$

的任意解. 因此, 非线性方程 (7.2.12) 的通解表达式可以通过拉普拉斯方程

$$\Delta v = 0 \tag{7.2.15}$$

的解以形式

$$u = \ln\left(2\frac{v_x^2 + v_y^2}{v^2}\right) \tag{7.2.16}$$

表示.

换言之, 非线性方程 (7.2.12) 通过变换 (7.2.16) 映射到线性方程 (7.2.15). 但是, 这个变换在处理实际问题时不是特别有用, 下面来自 [16] 的例子将很清楚地解释此现象.

考虑一个半径 $r=1$ 的圆的边值问题

$$\Delta u = \mathrm{e}^u, \quad u\Big|_{r=1} = 0, \tag{7.2.17}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 通解 (7.2.16) 不适合解决这个问题, 因为它是一个非线性边值问题

$$\Delta v = 0, \quad \left(v_x^2 + v_y^2 - \frac{1}{2}v^2\right)\Big|_{r=1} = 0.$$

解方程 (7.2.17) 用极坐标显得更为有效, 于是我们引入

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{7.2.18}$$

在这个坐标中, 方程 (7.2.12) 写成

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \mathrm{e}^u. \tag{7.2.19}$$

由于问题 (7.2.17) 的微分方程和边值条件对于旋转群是不变的, 于是我们来寻找只含有变量 r 的解. 方程 (7.2.19) 可写成

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \mathrm{e}^u. \tag{7.2.20}$$

我们假设函数 $u(r)$ 在 "奇" 点 $r=0$ 有界, 问题 (7.2.17) 的边值条件变为

$$u(1) = 0, \quad u(0) < \infty. \tag{7.2.21}$$

通过使用李群方法, 方程 (7.2.20) 可以积分. 即它有两个无穷小对称算子

$$X_1 = r\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = r\ln r\frac{\partial}{\partial r} - 2(1+\ln r)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{7.2.22}$$

通过变量代换

$$t = \ln r, \quad z = u + 2\ln r$$

将第一个算子降阶为形如 $X_1 = \partial/\partial t$ 的算子. 使用上述这些变量, 方程 (7.2.20) 可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{e}^z. \tag{7.2.23}$$

利用标准置换 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = p(z)$, 上式积分为

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{C_1 + 2\mathrm{e}^z}} = t + C_2. \tag{7.2.24}$$

当 $C_1 \leqslant 0$ 时, 求 (7.2.24) 的积分, 可以证实条件 $u(0) < \infty$ 是不满足的. 因此我们计算 $C_1 > 0$ 时的积分. 为了简化计算, 我们设 $C_1 = \lambda^2$, $C_2 = \ln c$. 然后计算积分, 把结果用旧变量表示并得到下面的结果:

$$u = \ln \frac{2\lambda^2 (cr)^\lambda}{r^2 (1 - (cr)^\lambda)^2}. \tag{7.2.25}$$

由此

$$u \approx (\lambda - 2) \ln r \quad (r \to 0),$$

条件 $u(0) < \infty$ 使得 $\lambda = 2$. 此外, 将边值条件 $u(1) = 0$ 代入得

$$8c^2 = (1 - c^2)^2,$$

其中

$$c^2 = 5 \pm 2\sqrt{6}. \tag{7.2.26}$$

因此, 问题 (7.2.17) 有两个解

$$u = \ln(8c^2) - \ln(1 - c^2 r^2)^2, \tag{7.2.27}$$

c^2 分别是

$$c^2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

和

$$c^2 = 5 + 2\sqrt{6},$$

对应 $c^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ 的第一个解在圆

$$x^2 + y^2 \leqslant 1$$

内处处有界, 对应 $c^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ 的第二个解在圆

$$x^2 + y^2 = r_*^2$$

上无界, 其中半径 $r_* = 1/c \approx 0.33$ (见图 7.1 和图 7.2).

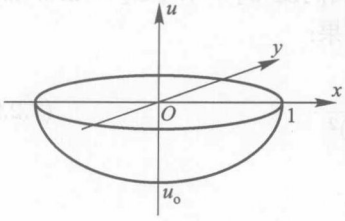


图 7.1 $c^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ 时 (7.2.27) 的解是有界的

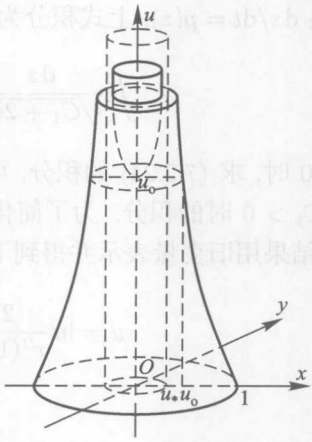


图 7.2 无界解, $c^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $u(0) = u(r_0) = u_0 \approx 4.37$; $r_* = 1/c$, $r_0 = \sqrt{2}/c$

7.2.4 灌溉系统的不变解

考虑非线性偏微分方程 (2.3.40),

$$C(\psi)\psi_t = \big(K(\psi)\psi_x\big)_x + \big(K(\psi)(\psi_z - 1)\big)_z - S(\psi),$$

该方程是对一个灌溉系统的土壤水流动的建模.

任意常系数方程 (2.3.40) 的无穷小对称组成一个李代数, 称为方程 (2.3.40) 的*本征李代数* $L_{\mathcal{P}}$. 它是由

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

生成的一个三维代数. 当代数 $L_{\mathcal{P}}$ 的一个延拓存在时, 会有 29 个特定形式的系数 $C(\psi), K(\psi), S(\psi)$. 我们来考虑当 $L_{\mathcal{P}}$ 由三个算子延拓时的一个情形. 即考虑方程

$$\frac{4}{M\mathrm{e}^{4\psi} - 1}\psi_t = \big(\mathrm{e}^{-4\psi}\psi_x\big)_x + \big(\mathrm{e}^{-4\psi}\psi_z\big)_z + 4\mathrm{e}^{-4\psi}\psi_z + M - \mathrm{e}^{-4\psi} \ (M = 常数). \tag{7.2.28}$$

方程 (7.2.28) 容许一个六维李代数 L_6, 该六维李代数的基为 X_1, X_2, X_3 及下面

三个算子:

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4}(M\mathrm{e}^{4\psi} - 1)\frac{\partial}{\partial \psi},$$
$$X_5 = \sin x\ \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial x} - \cos x\ \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\cos x\ \mathrm{e}^{-z}(M\mathrm{e}^{4\psi} - 1)\frac{\partial}{\partial \psi},$$
$$X_6 = \cos x\ \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial x} + \sin x\ \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sin x\ \mathrm{e}^{-z}(M\mathrm{e}^{4\psi} - 1)\frac{\partial}{\partial \psi}.$$

我们来求基于由 X_4, X_5 生成的二维子代数 $L_2 \subset L_6$ 的不变解. L_2 的不变量 $J(t, x, z, \psi)$ 由如下的线性偏微分方程组定义:

$$X_4(J) = 0, \quad X_5(J) = 0. \tag{7.2.29}$$

这个方程组提供了不变量的基

$$v = t\mathrm{e}^{2z}\big(\mathrm{e}^{-4\psi} - M\big), \quad \lambda = \mathrm{e}^{z}\sin x.$$

不变解有形式

$$t\mathrm{e}^{2z}\big(\mathrm{e}^{-4\psi} - M\big) = \Phi(\lambda),$$

最后解出上式中的 ψ:

$$\psi = -\frac{1}{4}\ln\left|M + \frac{\mathrm{e}^{-2z}}{t}\Phi(\lambda)\right|.$$

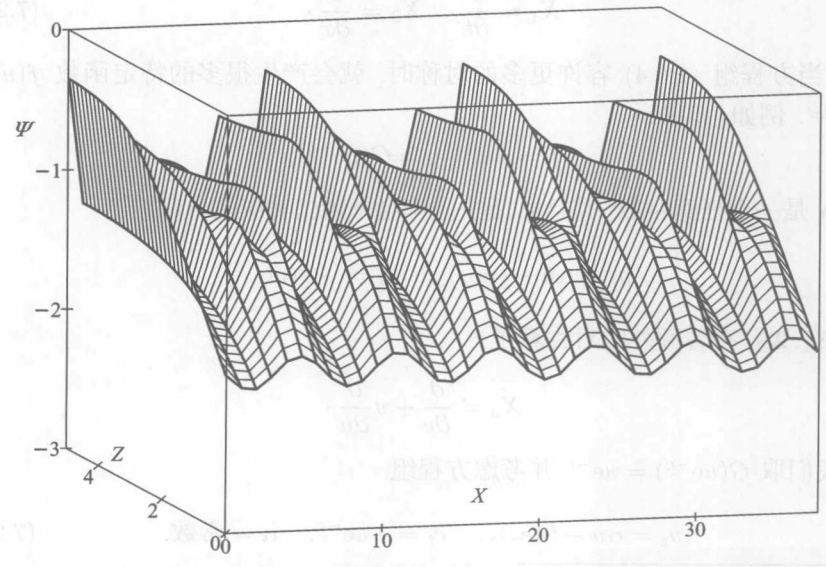


图 7.3 解 (7.2.30) 的图, $M = 4, l_1 = -2, l_2 = -4, t = 0.01$

代入方程 (7.2.28) 得到

$$\Phi''(\lambda) = 4,$$

因此可以很容易得到

$$\Phi(\lambda) = 2\lambda^2 + l_1\lambda + l_2, \quad l_1,\ l_2 = 常数,$$

这样, 不变解为

$$\psi = -\frac{1}{4}\ln\left|M + \frac{\mathrm{e}^{-2z}}{t}\left(2\mathrm{e}^{2z}\sin^2 x + l_1\mathrm{e}^{z}\sin x + l_2\right)\right|. \tag{7.2.30}$$

7.2.5 肿瘤生长模型的不变解

考虑肿瘤生长模型 (2.5.4):

$$u_t = f(u) - (uc_x)_x, \quad c_t = -g(c,u),$$

其中 $f(u)$ 和 $g(c,u)$ 满足条件

$$f(u) > 0, \quad g_c(c,u) > 0, \quad g_u(c,u) > 0. \tag{7.2.31}$$

若 $f(u)$ 和 $g(c,u)$ 是任意函数, 方程组 (2.5.4) 只有在 t 和 x 的变换下是不变的. 换言之, 它仅容许由以下两算子生成的二维李代数:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{7.2.32}$$

然而, 当方程组 (2.5.4) 容许更多的对称时, 就会产生很多的特定函数 $f(u)$ 和 $g(c,u)$[①]. 例如, 如果

$$f = \alpha u, \quad g = G(u\mathrm{e}^{-c}),$$

其中 α 是一个任意常数, 并且 G 是一个任意函数, 对应的方程组

$$u_t = \alpha u - (uc_x)_x, \quad c_t = -G(u\mathrm{e}^{-c}),$$

连同 X_1, X_2, 有着额外的对称算子

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial c} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

我们取 $G(u\mathrm{e}^{-c}) = u\mathrm{e}^{-c}$ 并考虑方程组

$$u_t = \alpha u - (uc_x)_x, \quad c_t = -u\mathrm{e}^{-c}, \quad \alpha = 常数. \tag{7.2.33}$$

[①]N.H. Ibragimov and N. Säfström, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 9(1), 61–68, 2004.

我们来求由算子

$$X_1 + X_3 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial c} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

产生的一维群下的不变解. 方程 $(X_1 + X_3)J = 0$ 给出三个自变量:

$$x, \quad \psi_1 = c - t, \quad \psi_2 = u\mathrm{e}^{-t}.$$

对应的不变解定义是

$$c = t + \psi_1(x), \quad u = \mathrm{e}^t\psi_2(x). \tag{7.2.34}$$

因此可以得到

$$\begin{aligned} &u_t = \mathrm{e}^t\psi_2(x), \quad u_x = \mathrm{e}^t\psi_2'(x), \\ &c_t = 1, \quad c_x = \psi_1'(x), \quad c_{xx} = \psi_1''(x). \end{aligned} \tag{7.2.35}$$

将 (7.2.34) 和 (7.2.35) 代入 (7.2.33) 的第一个方程得

$$\mathrm{e}^t\psi_2(x) = \alpha\mathrm{e}^t\psi_2(x) - \mathrm{e}^t\psi_1'(x)\psi_2'(x) - \mathrm{e}^t\psi_2(x)\psi_1''(x),$$

或

$$(1-\alpha)\psi_2(x) + \psi_1'(x)\psi_2'(x) + \psi_2(x)\psi_1''(x) = 0. \tag{7.2.36}$$

(7.2.33) 的第二个方程变为

$$1 = -\psi_2(x)\mathrm{e}^{-\psi_1(x)},$$

其中

$$\psi_2(x) = -\mathrm{e}^{\psi_1(x)}. \tag{7.2.37}$$

现在方程 (7.2.36) 变成

$$\psi_1''(x) + \psi_1'^2 + (1-\alpha) = 0,$$

那么

$$\psi_1(x) = \ln|A_2(x + A_1)|, \quad \text{当 } \alpha = 1, \tag{7.2.38}$$

$$\psi_1(x) = x\sqrt{\alpha - 1} + \ln\left|A_2\left(1 \pm \mathrm{e}^{2\sqrt{\alpha-1}(A_1 - x)}\right)\right|, \quad \text{当 } \alpha > 1, \tag{7.2.39}$$

$$\psi_1(x) = \ln\left|A_2\cos\left(\sqrt{1-\alpha}\,(A_1 - x)\right)\right|, \quad \text{当 } \alpha < 1, \tag{7.2.40}$$

其中 A_1 和 A_2 是任意常数.

将 (7.2.37)—(7.2.40) 代入 (7.2.34), 我们就得到方程组 (7.2.33) 的三个不同的不变解:

$$\begin{aligned} c(t,x) &= t + \ln|A_2(x + A_1)|, \\ u(t,x) &= -\mathrm{e}^t|A_2(x + A_1)|, \text{ 若 } \alpha = 1; \end{aligned} \tag{7.2.41}$$

$$\begin{aligned} c(t,x) &= t + x\sqrt{\alpha-1} + \ln\left|A_2\left(1 \pm \mathrm{e}^{2\sqrt{\alpha-1}\,(A_1-x)}\right)\right|, \\ u(t,x) &= -\mathrm{e}^{t+x\sqrt{\alpha-1}}\left|A_2\left(1 \pm \mathrm{e}^{2\sqrt{\alpha-1}\,(A_1-x)}\right)\right|, \text{ 若 } \alpha > 1; \end{aligned} \tag{7.2.42}$$

$$\begin{aligned} c(t,x) &= t + \ln\left|A_2\cos\left(\sqrt{1-\alpha}\,(A_1-x)\right)\right|, \\ u(t,x) &= -\mathrm{e}^{t}\left|A_2\cos\left(\sqrt{1-\alpha}\,(A_1-x)\right)\right|, \text{ 若 } \alpha < 1. \end{aligned} \tag{7.2.43}$$

条件 (7.2.31) 决定 $\alpha < 0$ 时解是 (7.2.43). 确实, 只在这种情形下, 函数 $f(u) = \alpha u$ 和 $g(c,u) = u\mathrm{e}^{-c}$ 满足条件 (7.2.31):

$$f(u) = \alpha u > 0, \quad g_c(c,u) = -u\mathrm{e}^{-c} > 0, \quad g_u(c,u) = \mathrm{e}^{-c} > 0,$$

因此解 (7.2.43) 在 $\alpha < 0$ 时是符合模型 (7.2.33) 的.

7.2.6 非线性光学的例子

在激光系统里的光学辐射的波前矫正是可用非线性方程模拟的, 它称为相位共轭反射方程组, 或者称为波前倒转. 考虑稳态波, 我们给出一个简单化的模型, 它选择一个特定的介质参数, 可用以下非线性光学的方程组来描述 (见 [21], 11.2.7 节):

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\Delta\right)E_1 = |E_2|^2 E_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Delta\right)E_2 = |E_1|^2 E_2, \tag{7.2.44}$$

其中 Δ 是 (x,y) 平面中的拉普拉斯算子, E_1 和 E_2 分别是入射的复数振幅和相位共轭 (放大后) 光波.

在 x, y, z 平移变换、(x,y) 平面旋转变换以及对自变量和因变量近似伸缩变换下, 方程 (7.2.44) 是不变的. 可以使用一个类似于 (7.2.44) 左边的式子和热传导方程来找到一个附加的对称群. 即, 我们用 E_α^* 表示 E_α 的复数共轭值并在下面的特定结构寻找一个方程组 (7.2.44) 的无穷小对称:

$$X = 2z\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha=1}^{2}\left(f_\alpha(x,z)E_\alpha\frac{\partial}{\partial E_\alpha} + g_\alpha(x,z)E_\alpha^*\frac{\partial}{\partial E_\alpha^*}\right),$$

并得到一个与热传导方程的伽利略变换 (7.1.24) 类似的生成元,

$$X = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}.$$

将从上述特殊结构得到的算子代入决定方程得

$$X = 2z\frac{\partial}{\partial x} + ix\left(E_1\frac{\partial}{\partial E_1} - E_2\frac{\partial}{\partial E_2} - E_1^*\frac{\partial}{\partial E_1^*} + E_2^*\frac{\partial}{\partial E_2^*}\right). \tag{7.2.45}$$

考虑由算子 (7.2.45) 生成的二维李代数以及 y 的平移生成元 $\partial/\partial y$. 不变量的基是

$$z, \quad u_1 = E_1 \mathrm{e}^{-ix^2/(4z)}, \quad u_2 = E_2 \mathrm{e}^{ix^2/(4z)}$$

和 u_1, u_2 的复数共轭. 因此, 我们有下列的不变解的一般形式:

$$E_1 = u_1(z)\mathrm{e}^{ix^2/(4z)}, \quad E_2 = u_2(z)\mathrm{e}^{-ix^2/(4z)}. \tag{7.2.46}$$

为了简便起见, 我们考虑实函数 u_1 和 u_2. 然后将方程 (7.2.46) 代入方程 (7.2.44) 得到

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z} = u_2^2 u_1 - \frac{u_1}{2z}, \quad \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}z} = u_1^2 u_2 - \frac{u_2}{2z}. \tag{7.2.47}$$

方程 (7.2.47) 在 6.7.4 节的例 6.7.9 已解出了, 其中 u_1, u_2 和 z 分别由 x, y 和 t 表示. 在方程 (6.7.47) 中作出相关替换, 我们有方程 (7.2.47) 的通解

$$u_1 = \sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}, \quad u_2 = \zeta\sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}, \tag{7.2.48}$$

其中 $\zeta = Cz^k$, $C, k =$ 常数.

最终, 我们将 (7.2.48) 代入 (7.2.46) 并得到方程组 (7.2.44) 的不变解

$$E_1 = \sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}\,\mathrm{e}^{ix^2/(4z)}, \quad E_2 = \zeta\sqrt{\frac{k}{z(1-\zeta^2)}}\,\mathrm{e}^{-ix^2/(4z)},$$

其中 $\zeta = Cz^k$ 包含两个任意常数 C 和 k.

7.3 不变性和守恒定律

我们在本节讨论对由变分原理得到的微分方程构造守恒定律的一个一般方法. 这个方法基于两个守恒定理. 第一个是诺特定理 [30], 关系到变分积分的不变性的守恒定律. 第二个定理将在 7.3.6 节作简洁陈述, 概括了诺特定理并且关系到变分积分的极值不变性的守恒定律. 它在 [13] 已被证明了.

这里讨论的守恒定律有许多应用. 其中也包含一些说明性的例子. 很多在机械、物理和工程科学中的应用收集在文献 [18]—[20] 中.

7.3.1 简介

守恒定律为发展和研究数学模型提供了一种基本的原理.

在日常生活中, 我们会遇到很多明显的守恒定律, 像传统的习俗, 或是自然法则如日夜交替、夏冬交替、星星的不变位置等. 有些守恒定律可能不是很清晰

明显. 其中的一个 "隐性守恒定律" 在作者开玩笑时称为问题数量的守恒. 它说明了"每个人有一定数目的问题. 如果某个人帮助他解决了他的一个问题, 一个新的问题会立即取代已解决的那个." 在大量观察中, 作者反复看见这一事实被证实.

但是, 我们关心的是数学的守恒定律. 守恒定律的概念是像经典力学中的能量、线性和角动量等的数量守恒. 这些数量在一个给定的动力系统的各个轨道上是常数从而是守恒的 (见 1.5.1 节). 即, 一个关于时间 t、位置坐标 $q=(q^1,\cdots,q^s)$ 和速度 $v=(v^1,\cdots,v^s)$ 的函数 $T=T(t,q,v)$ 称为守恒量, 如果在所考虑的动力系统的各个轨道 $q=q(t)$ 上满足方程

$$D_t(T)=0. \tag{7.3.1}$$

因为

$$D_t(T)\equiv\frac{\partial T}{\partial t}+v^\alpha\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}+\dot{v}^\alpha\frac{\partial T}{\partial v^\alpha} \tag{7.3.2}$$

是一个关于时间的全微分, 我们可以用公式表示如下定义. 设 $q=q(t)$ 是一个给定的轨道并且相应速度为 $v=\dot{q}(t)$. 那么守恒方程 (7.3.1) 意味着函数 $T(t)=T(t,q(t),v(t))$ 满足方程 $\mathrm{d}T(t)/\mathrm{d}t=0$. 换言之, 守恒量 $T(t,q,v)$ 在每个轨道上是常数. 因此, T 也称为一个运动常数.

例如, 一个质量为 m 的单粒子的自由运动用方程 $m\dot{\boldsymbol{v}}=0$ 表示. 粒子的能量 $E=m|\boldsymbol{v}|^2/2$ 是自由运动的一个常数. 它的全微分$D_t(E)=m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}$ 在任意关系到运动方程 $m\dot{\boldsymbol{v}}=0$ 的轨道上为零.

将守恒定律 (7.3.1) 延展至连续系统可引出下面在任意 $n\geqslant 1$ 个自变量时的定义. 考虑偏微分方程, 如二阶偏微分方程

$$F(x,u,u_{(1)},u_{(2)})=0, \tag{7.3.3}$$

其中 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 是自变量, $u=(u^1,\cdots,u^m)$ 是因变量, 并且 $u_{(1)}=\{u_i^\alpha\}$ 和 $u_{(2)}=\{u_{ij}^\alpha\}$ 分别表示一阶和二阶微分 (见 1.4.3 节的记号).

定义 7.3.1 一个向量场 $C(x,u,u_{(1)})$ 有 n 个分量

$$C=(C^1,\cdots,C^n), \tag{7.3.4}$$

当它在方程 (7.3.3) 的每个解 $u=u(x)$ 满足方程

$$\operatorname{div}C\equiv D_i(C^i)=0 \tag{7.3.5}$$

时称为一个守恒向量. 方程 (7.3.5) 称为方程 (7.3.3) 的一个守恒定律.

我们将时间当成一个自变量考虑, 例如 $x^n = t$. 那么方程 (7.3.5) 指出匀速运动 $T(t, u, u_{(1)})$ 的存在性. 即, 下面的陈述是合理的.

引理 7.3.1 设守恒定律 (7.3.5) 成立. 积分

$$T(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} C^n(x, u(x), u_{(1)}) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1} \tag{7.3.6}$$

对方程 (7.3.3) 的任意解 $u = u(x)$ 是常数, 即, 它满足方程 (7.3.1). 该定律表明守恒向量 C 的分量快速减小并在无穷远处趋于零. 相应地, C^n 称为守恒定律 (7.3.5) 的密度.

证明 设 Ω 是一个在所有自变量 $(x^1, \cdots, x^{n-1}, t)$ 的空间中的 $(n-1)$ 维管域, 定义如下:

$$\Omega: \quad \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2 = r^2, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

其中 r 和 t_1, t_2 是任意常数, 并且 $t_1 < t_2$. 设 S 是 Ω 的边界并设 ν 是表面 S 的单位外法线. 应用管域 Ω 的散度定理和方程 (7.3.5) 得

$$\int_S C \cdot \nu \quad \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} C = 0. \tag{7.3.7}$$

因为向量 C 的组成分量 C^i 在无穷远处快速趋于零, 所以我们可以设 $r \to \infty$ 并忽略在方程 (7.3.7) 左边表面 S 的圆柱部分的积分. 只需计算管域 Ω 下截面 K_1 (其中 $t = t_1$) 和上截面 K_2 (其中 $t = t_2$) 的积分, 同时我们注意到在 K_1 和 K_2 处分别有 $C \cdot \nu = -C^n|_{t=t_1}$ 和 $C \cdot \nu = C^n|_{t=t_2}$. 此外, 当 $r \to \infty$ 时, K_1 和 K_2 与空间变量 $(x^1, \cdots, x^{n-1})$ 的 $(n-1)$ 维空间 $\mathbb{R}^{n-1}$ 重合. 因此, 在 $r \to \infty$ 时对方程 (7.3.7) 的左边进行积分得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (C^n|_{t=t_2} - C^n|_{t=t_1}) \, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1},$$

那么由方程 (7.3.7) 得到

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} C^n \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}\Big|_{t=t_1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} C^n \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}\Big|_{t=t_2}.$$

因为瞬时 t_1 和 t_2 是任意的, 所以可以得到结论: 积分 (7.3.6) 对方程 (7.3.3) 的任意解 $u = u(x)$ 是常数. 这就完成了证明.

定义 7.3.2 如果一个向量场 $C(x, u, u_{(1)})$ 的散度 $D_i(C^i)$ 为零不仅是针对方程 (7.3.3) 的解, 而且可用于任意函数 $u(x)$, 那么 C 称为平凡守恒向量.

注 7.3.1 $\mathbb{R}^3$ 的向量场 $C=(C^1(x),C^2(x),C^3(x))$ 在一定域中满足方程 $\operatorname{div}C=0$, 则称为*无散度向量*.[①] 这样, 一个三维向量 $C(x,u,u_{(1)})$ 当且仅当它对任意函数 $u=u(x)$ 无散度时是一个平凡守恒向量. 由于我们处理的是任意维, 我们可以说它是一个*平凡守恒向量*.

当一个守恒向量可由另一个守恒向量加上一个平凡守恒向量后得到, 它们就可以被认为是等同的. 并且从守恒方程 (7.3.5) 的线性性可知, 如果方程 (7.3.3) 有几个守恒向量 $C_1,\cdots,C_r$, 那么它们的常系数线性组合 $C=k_1C_1+\cdots+k_rC_r$ 也是方程 (7.3.3) 的一个守恒向量. 因此我们总结:

定义 7.3.3 *设 $C_1,\cdots,C_r$ 是方程 (7.3.3) 的守恒向量. 如果存在不全为零的常数 $k_1,\cdots,k_r$, 使得线性组合 $k_1C_1+\cdots+k_rC_r$ 是平凡守恒向量, 那么它们称为线性相关, 相反则是线性无关.*

7.3.2 预备知识

考虑变分积分 (1.5.3)

$$\int_V L(x,u,u_{(1)})\mathrm{d}x, \tag{7.3.8}$$

及欧拉-拉格朗日方程 (1.5.4)

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}\equiv\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}-D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right)=0,\quad \alpha=1,\cdots,m, \tag{7.3.9}$$

其中拉格朗日算子 L 包含了自变量 $x=(x^1,\cdots,x^n)$, 因变量 $u=(u^1,\cdots,u^m)$ 和 u 的关于 x 的一阶微分 $u_{(1)}=\{u_i^\alpha\}$.

设 G 是一个单参数变换群

$$\overline{x}^i=f^i(x,u,a),\quad \overline{u}^\alpha=\varphi^\alpha(x,u,a), \tag{7.3.10}$$

且其生成元为

$$X=\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\cdot \tag{7.3.11}$$

定义 7.3.4 *对于任意域 V 和任意函数 $u(x)$, 下列方程成立:*

$$\int_{\overline{V}}L(\overline{x},\overline{u},\overline{u}_{(1)})\mathrm{d}\,\overline{x}=\int_V L(x,u,u_{(1)})\mathrm{d}x, \tag{7.3.12}$$

其中 $\overline{V}\subset\mathbb{R}^n$ 是由 V 通过变换 (7.3.10) 得到的一个域, 那么积分 (7.3.8) 称为在群 G 下不变的.

[①] 常数向量场提供了无散度向量的例子. 此外, 向量 $\boldsymbol{C}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$ 是无散度的 (见习题 7.9). 再者, 在向量分析中所有的无散度向量场 $C=(C^1(x),C^2(x),C^3(x))$ 可以表示为 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$. (见习题 7.11 和 7.12 的例子.)

下面的陈述使诺特定理更清楚. 引理的证明在 [21] 的第 8 章有更明确的陈述.

引理 7.3.2 当且仅当方程

$$X(L)+LD_i(\xi^i)=0 \tag{7.3.13}$$

成立时积分 (7.3.8) 在群 G 下是不变的, 其中 X 表示生成元 (7.3.11) 的首次延拓, 因此,

$$X(L)=\xi^i\frac{\partial L}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}+\zeta_i^\alpha\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha},\quad \zeta_i^\alpha=D_i(\eta^\alpha)-u_j^\alpha D_i(\xi^j).$$

引理 7.3.3 对任意函数 $L(x,u,u_{(1)})$ 下列方程成立:

$$X(L)+LD_i(\xi^i)\equiv W^\alpha\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}+D_i\big(C^i\big), \tag{7.3.14}$$

其中

$$W^\alpha=\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha,\quad \alpha=1,\cdots,m \tag{7.3.15}$$

并且

$$C^i=\xi^iL+(\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha},\quad i=1,\cdots,n. \tag{7.3.16}$$

引理 7.3.4 当且仅当函数 F 的变分微分为零时

$$F=D_i(H^i)\quad \text{当且仅当}\quad \frac{\delta F}{\delta u^\alpha}=0,\ \alpha=1,\cdots,m, \tag{7.3.17}$$

函数 $F(x,u,u_{(1)})$ 是某一确定的向量场 $H=(H^1,\cdots,H^n)$ 的散度.

7.3.3 诺特定理

定理 7.3.1 令变分积分 (7.3.8) 在生成元 (7.3.11) 的群下是不变的. 换句话说, 它满足不变性验证 (7.3.13), 则由

$$C^i=\xi^iL+(\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha},\quad i=1,\cdots,n \tag{7.3.18}$$

定义的向量场 $C=(C^1,\cdots,C^n)$ 是方程 (7.3.9) 的一个守恒向量. 即, C 满足守恒定律 (7.3.5) $D_i\big(C^i\big)=0$.

证明 由引理 7.3.2 和 7.3.3 即可得到结论.

注 7.3.2 变分积分 (7.3.8) 的不变性显然意味着欧拉-拉格朗日方程 (7.3.9) 在群 G 下的不变性. 因此, 假设 G 有额外性质使变分积分有不变性, 则诺特定理给出了用一个已知的欧拉-拉格朗日方程的对称群 G 决定守恒定律的构造方法.

推论 7.3.1 引理 7.3.4 指出可以增加任意散度类型函数 F 到拉格朗日算子. 因此, 不变性条件 (7.3.13) 可以由下面的散度条件取代:

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = D_i(B^i). \tag{7.3.19}$$

然后就可以得到如下不同于 (7.3.18) 的守恒向量:

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - B^i. \tag{7.3.20}$$

7.3.4 高阶拉格朗日算子

数学物理提供了很多用一阶和二阶拉格朗日算子描述的数学模型. 例如, 沿用守恒公式 (7.3.18), 我们有一个在板振动问题中的二阶拉格朗日算子 (2.6.27)

$$L = \frac{1}{2}\left(\rho u_t^2 - \mu(u_{xx} + u_{yy})^2\right),$$

那么对二阶拉格朗日算子描述的方程就会有着相似的公式.

在之前的记法中, 考虑一个包含二阶微分的拉格朗日算子 $L(x, u, u_{(1)}, u_{(2)})$. 诺特定理表明变分积分的不变性导致了守恒定律 (7.3.5) $D_i(C^i) = 0$, 其中欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) = 0, \tag{7.3.21}$$

守恒向量 (7.3.18) 改为

$$C^i = L\xi^i + W^\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_k\Big(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\Big)\right) + D_k(W^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}, \tag{7.3.22}$$

这里 W^α 仍由方程 (7.3.15) 定义, $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$.

注 7.3.1 提到的关于散度条件下的守恒定理也同样可应用于高阶的拉格朗日算子.

7.3.5 常微分方程组的守恒定律

常微分方程组同样可以适用守恒定律. 我们将在以上讨论的动态系统, 例如在方程 (7.3.2) 中稍改动记法, 我们将会再次假设自变量是时间 t, 但是这次记因变量 (如粒子坐标) 为 $x = (x^1, \cdots, x^n)$. 速度记为 $v = (v^1, \cdots, v^n)$, 其中 $v^i = \dot{x}^i \equiv \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$.

考虑拉格朗日算子

$$L(t, x, v) \tag{7.3.23}$$

和相应的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^i} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = 0, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{7.3.24}$$

其中 D_t 是关于 t 的全微分 (参见方程(7.3.2)):

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{v}^i \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

设 G 是一个变换群

$$\overline{t} = \varphi(t, x, a), \quad \overline{x}^{\,i} = \psi^i(t, x, a), \tag{7.3.25}$$

其生成元为

$$X = \xi(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{7.3.26}$$

以这种记法, 对拉格朗日算子 (7.3.23) 的变分积分的无穷小的不变性验证 (7.3.13) 可写成

$$X(L) + LD_t(\xi) = 0. \tag{7.3.27}$$

于是定理 7.3.1 可以表达如下.

定理 7.3.2 假设不变性验证 (7.3.27) 成立. 那么

$$T = \xi L + (\eta^i - \xi v^i)\frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{7.3.28}$$

是一个守恒量, 即对方程 (7.3.24) 所有的解 $x(t)$ 满足守恒定律

$$D_t(T) \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} + \dot{v}^i \frac{\partial T}{\partial v^i} = 0. \tag{7.3.29}$$

此外, 在下面的陈述中将给出与其相对应的守恒向量的散度条件 (7.3.19) 和公式 (7.3.20) .

定理 7.3.3 设下面的散度条件被满足:

$$X(L) + LD_t(\xi) = D_t(B), \tag{7.3.30}$$

则

$$T = \xi L + (\eta^i - \xi v^i)\frac{\partial L}{\partial v^i} - B \tag{7.3.31}$$

是对方程 (7.3.24) 的一个守恒量.

7.3.6 诺特定理的一般化

从定理 7.3.1 和注 7.3.2 中看出在欧拉-拉格朗日方程容许的群 G 作用下的变分积分的不变性给出了 (7.3.18) 为一个守恒向量的*充分条件*. 类似地, 推论 7.3.1 给出了 (7.3.20) 为一个守恒向量的充分条件. 从例子中看出不变性和散度性质不是*必要条件* (见 7.3.7 节和 7.3.9 节). 因此, 我们希望得到 (7.3.20) 为一个守恒向量的必要和充分条件.

[13] 中给出了这个问题的解 (也可参见 [21]). 结论将在下面定理中阐述. 定理中用到的*变分积分的极值*对应于欧拉-拉格朗日方程 (7.3.9) 表示的解 $u(x)$ 的积分值 (7.3.8).

定理 7.3.4 设欧拉-拉格朗日方程 (7.3.9) 容许一个带生成元 (7.3.11) 的连续群 G. 当且仅当积分 (7.3.8) 的极值在 G 下是不变的时, 向量 (7.3.18)

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}$$

为方程 (7.3.9) 提供了一个守恒定律. 积分 (7.3.8) 的极值不变性的无穷小验证是

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = F^\alpha \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}, \tag{7.3.32}$$

其中 $F^\alpha = F^\alpha(x, u, u_{(1)})$ 和由 (7.3.15) 定义的 W^α 是不同的.

注 7.3.3 若 $F^\alpha = W^\alpha$, 则 (7.3.18) 定义了一个平凡守恒定律. 事实上, 当 $F^\alpha = W^\alpha$ 时方程 (7.3.32) 和恒等式 (7.3.14) 使得 $D_i(C^i)$ 为零. 因此 C^i 是一个平凡守恒向量.

推论 7.3.2 方程 (7.3.32) 的极值不变性可被下列*极值的散度条件*所代替:

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = F^\alpha \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} + D_i(B^i), \quad F^\alpha \neq W^\alpha. \tag{7.3.33}$$

方程 (7.3.18) 被下列守恒变量代替:

$$C^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - B^i. \tag{7.3.34}$$

在常微分方程的情况中我们用 7.3.5 节的记法, 把方程 (7.3.33)—(7.3.34) 写成形式

$$X(L) + LD_t(\xi) = F^k \frac{\delta L}{\delta x^k} + D_t(B), \quad F^k \neq W^k, \tag{7.3.35}$$

$$T = \xi L + (\eta^i - \xi v^i)\frac{\partial L}{\partial v^i} - B. \tag{7.3.36}$$

7.3.7 来自经典力学的例子

质量为 m 的单粒子在一个位势场 $U(t,\boldsymbol{x})$ 中的运动用拉格朗日算子表达为

$$L=\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2-U(t,\boldsymbol{x}),\quad |\boldsymbol{v}|^2=\sum_{i=1}^{3}(v^i)^2, \tag{7.3.37}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,x^3)$ 是粒子的位置向量, $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)$ 是粒子速度. 由欧拉-拉格朗日方程 (7.3.24) 得到

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial U}{\partial x^i},\quad i=1,2,3. \tag{7.3.38}$$

变换群 (7.3.25) 的无穷小变换在力学中经常可以写成形式

$$\overline{t}=t+\delta t,\quad \overline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}, \tag{7.3.39}$$

其中 $\delta t=a\xi$, $\delta x^k=a\eta^k$, a 是群参数.

例 7.3.1 *粒子的自由运动.* 自由运动对应于 $U=0$. 由方程 (7.3.38) 得到自由运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}=0, \tag{7.3.40}$$

拉格朗日算子 $L=\dfrac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2$. 方程 (7.3.40) 容许伽利略群, 包含时间平移、空间坐标平移和旋转以及伽利略变换. 它们的生成元是

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t},\ X_i=\frac{\partial}{\partial x^i},\ X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j},\ Y_i=t\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{7.3.41}$$

其中 $i,j=1,2,3$. 我们来寻找相应的守恒定律.

(i) *时间平移.* 它的生成元是 X_0. 守恒量是由在方程 (7.3.28) 中替换 X_0 的坐标 $\xi=1$ 和 $\eta^1=\eta^2=\eta^3=0$ 得到, 令 $E=-T$, 它即为能量

$$E=\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2.$$

(ii) *空间平移.* 考虑由在坐标 $\xi=0$, $\eta^1=1$, $\eta^2=\eta^3=0$ 的 X_1 产生的 x^1-平移. 设 $T=p^1$, 方程 (7.3.28) 得到守恒量 $p^1=mv^1$. 所有生成元 X_i 的空间平移为我们提供了向量值守恒量, 即线性动量

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}.$$

(iii) *旋转.* 考虑围绕 x^3- 轴的旋转. 它的生成元 X_{12} 有坐标 $\xi=0$, $\eta^1=x^2$, $\eta^2=-x^1$, $\eta^3=0$. 代入 (7.3.28) 得到守恒量 $M_3=m(x^2v^1-x^1v^2)$. 通过生成元 X_{12},X_{13},X_{23} 的所有旋转, 我们推断旋转下的不变性可推出角动量 (2.2.9)

$$\boldsymbol{M}=m(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})$$

的守恒.

(iv) 伽利略变换. 它们的生成元 Y_i, 不像 X_0, X_i, X_{ij}, 不满足不变性验证 (7.3.13). 即, 在

$$Y_1 = t\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial v^1}$$

的作用下得到 $Y_1(L) + LD_t(\xi) = mv^1 \equiv D_t(mx^1)$. 因此, 散度条件 (7.3.30) 成立并且可以应用定理 7.3.3. 在 $B = mx^1$ 条件下方程 (7.3.31) 提供了守恒量 $T = m(tv^1 - x^1)$. 用所有的算子 Y_i 并用 Q 表示 T, 我们得到向量值守恒量

$$\boldsymbol{Q} = m(t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}).$$

在粒子系统里, 向量 $\boldsymbol{Q}$ 的守恒称为质心理论.

例 7.3.2 开普勒问题. 两天体之间的问题 (如, 太阳和一个行星) 称为开普勒问题 (见 2.2.3 节). 它有拉格朗日算子

$$L = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - \frac{\mu}{r}, \quad \text{其中} \quad r = |\boldsymbol{x}|,\ \mu = \text{常数}. \tag{7.3.42}$$

运动方程 (7.3.38) 可以写为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2} = \mu\frac{x^k}{r^3}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{7.3.43}$$

其对应的向量形式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mu\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\,.$$

方程 (7.3.43) 容许 (7.3.26) 的五个生成元

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{ij} = x^j\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z = 3t\frac{\partial}{\partial t} + 2x^i\frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{7.3.44}$$

时间平移和旋转的生成元 X_0 和 X_{ij} 再次分别推出能量 E 和角动量 $\boldsymbol{M}$

$$E = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{\mu}{r}, \quad \boldsymbol{M} = m(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})$$

的守恒. 算子 Z 不能获得守恒定律 (见习题 7.13).

例 7.3.3 注意到对应于 (7.3.44) 的算子 X_{ij} 的三个无穷小旋转变换可写成如 (7.3.39) 的形式:

$$\delta t = 0, \quad \delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}, \tag{7.3.45}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$. 方程 (7.3.43) 也容许如下的 (7.3.45) 的一般形式 (见 [14], 25.1 节):

$$\delta t = 0, \quad \delta\boldsymbol{x} = \big(\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a})\big) + \big((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{a}\big). \tag{7.3.46}$$

无穷小变换 (7.3.46) 对应于算子

$$\widehat{X}_i = \Big(2x^i v^k - x^k v^i - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\delta_i^k\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad i=1,2,3. \tag{7.3.47}$$

我们来考虑 (7.3.47) 的第一个算子

$$\widehat{X}_1 = -\Big(x^2v^2 + x^3v^3\Big)\frac{\partial}{\partial x^1} + \Big(2x^1v^2 - x^2v^1\Big)\frac{\partial}{\partial x^2} + \Big(2x^1v^3 - x^3v^1\Big)\frac{\partial}{\partial x^3}\cdot$$

该计算表明关于在 (7.3.42) 中的拉格朗日算子 $\widehat{X}_1$ 的首次延拓 (见习题 7.14) 有形式

$$\widehat{X}_1(L) = -W^k\frac{\delta L}{\delta x^k} + D_t\Big(-\frac{2\mu}{r}x^1\Big). \tag{7.3.48}$$

根据 (7.3.48), $\widehat{X}_1$ 和所有的对称 (7.3.47) 既不满足不变性验证 (7.3.27) 也不满足散度条件 (7.3.30). 因此, 诺特定理就不可应用在对称 (7.3.47) 上. 另一方面, (7.3.48) 表明在极值上的散度条件 (7.3.35) 满足 $F^k = -W^k$. 因此, 由 (7.3.36) 可以得到守恒量

$$T_1 = 2m\Big(x^1\big((v^2)^2 + (v^3)^2\big) - x^2v^1v^2 - x^3v^1v^3\Big) + \frac{2\mu}{r}x^1.$$

对 (7.3.47) 另两个算子进行相似的计算, 用 $2A^i$ 表示 T_i, 我们得到了拉普拉斯向量 (2.2.10) 的守恒:

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}] + \mu\frac{\boldsymbol{x}}{r}\cdot$$

注意到拉普拉斯向量的守恒推出行星是在椭圆轨道上移动的 (见 [21], 9.7.4 节). 这样, 对称 (7.3.47) 与开普勒第一定律就直接关联了起来.

7.3.8 爱因斯坦能量公式的推导

A. 爱因斯坦于 1905 年阐述的一个新的物理理论——狭义相对论的几何本质是将三维欧几里得空间和伽利略群分别替换为一个四维空间-时间 (称为闵可夫斯基空间) 和洛伦茨群.

洛伦茨群有下列生成元:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\ X_{ij} = x^j\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\frac{\partial}{\partial x^j},\ X_{0i} = t\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}x^i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{7.3.49}$$

其中 $i,j=1,2,3$, c 是光速. 伽利略群的生成元 (7.3.41) 可由在 (7.3.49) 中设 $c\to\infty$ 获得.

洛伦茨群下的不变性给出了一个质量为 m 的自由粒子的相对论拉格朗日算子

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}, \quad \text{其中} \quad \beta^2 = \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}\cdot \tag{7.3.50}$$

我们将诺特定理应用到拉格朗日算子 (7.3.50), 即生成元 X_0 的时间平移. X_0 的坐标是 $\xi = 1$ 和 $\eta^i = 0$. 将它们代入公式 (7.3.28) 并设 $E = -T$, 得到相对论能量的爱因斯坦公式

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2.$$

类似地, 可以用洛伦茨群的生成元 (7.3.49) 得到所有其他相对论守恒定律 (见 [21], 9.7.5 节).

7.3.9 狄拉克方程的守恒定律

考虑狄拉克方程 (2.3.33)

$$\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m\psi = 0 \tag{7.3.51}$$

及其共轭方程

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\psi} = 0. \tag{7.3.52}$$

这里 $\widetilde{\psi}$ 是由

$$\widetilde{\psi} = \overline{\psi}^T \gamma^4 \tag{7.3.53}$$

定义的行向量, $\overline{\psi}$ 表示 ψ 的复数共轭, T 表示转置.

方程 (7.3.51)—(7.3.52) 可以从下面的拉格朗日算子得到:

$$L = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\psi}\left(\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m\psi\right) - \left(\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\psi}\right)\psi\right). \tag{7.3.54}$$

这样我们得到

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = -\left(\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\psi}\right), \quad \frac{\delta L}{\delta \widetilde{\psi}} = \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m\psi.$$

狄拉克方程 (7.3.51)—(7.3.52) 给出了解释诺特定理和定理 7.3.4 的例子.

例 7.3.4 解释诺特定理的最简单的例子为通常的线性叠加, 可写为 $\psi' = \psi + a\varphi(x)$, $\widetilde{\psi}' = \widetilde{\psi} + a\widetilde{\varphi}(x)$ 及其生成元

$$X_\varphi = \varphi^k(x)\frac{\partial}{\partial \psi^k} + \tilde{\varphi}_k(x)\frac{\partial}{\partial \widetilde{\psi}_k}\cdot \tag{7.3.55}$$

其中向量 $\varphi(x)$ 和 $\tilde{\varphi}(x)$ 满足 (7.3.53), 并且它们的分量分别是 $\varphi^k(x)$ 和 $\tilde{\varphi}_k(x)$. 它们是方程 (7.3.51)—(7.3.52)

$$\gamma^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + m\varphi = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\widetilde{\varphi} = 0 \tag{7.3.56}$$

的解.

我们验证拉格朗日算子 (7.3.54) 和生成元 (7.3.55) 是否满足不变性验证 (7.3.13) 或散度条件 (7.3.19). 由于 $\xi=0$, (7.3.13) 的左边降阶到 $X_\varphi(L)$,

$$X_\varphi(L)=\frac{1}{2}\left(\widetilde{\varphi}\left(\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k}+m\psi\right)-\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k-m\widetilde{\psi}\right)\varphi\right)$$

且不为零. 因此, 不变性验证 (7.3.13) 不成立. 我们再验证散度条件 (7.3.19), 即验证 $X_\varphi(L)$ 的值是否是散度. 这可以通过引理 7.3.4 做出. 计算得到

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\left(X_\varphi(L)\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x^k}\gamma^k-m\widetilde{\varphi}\right),\quad \frac{\delta}{\delta\widetilde{\psi}}\left(X_\varphi(L)\right)=\frac{1}{2}\left(\gamma^k\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}+m\varphi\right).$$

由于方程 (7.3.56) 这些表达式等于零. 因此, 根据引理 7.3.4, $X_\varphi(L)$ 是一个散度. 即条件 (7.3.19) 满足. 我们可以证实 $X_\varphi(L)=D_k(B^k)$, 其中

$$B^k=-\frac{1}{2}\left(\widetilde{\psi}\gamma^k\varphi-\widetilde{\varphi}\gamma^k\psi\right).$$

现在继续寻找 (7.3.18) 的值. 我们有

$$\varphi\frac{\partial L}{\partial\psi_{,k}}+\widetilde{\varphi}\frac{\partial L}{\partial\widetilde{\psi}_{,k}}=\frac{1}{2}\left(\widetilde{\psi}\gamma^k\varphi-\widetilde{\varphi}\gamma^k\psi\right),$$

这里我们使用记号 $D_k(\psi)=\psi_{,k}, D_k(\widetilde{\psi})=\widetilde{\psi}_{,k}$. 将这些量和 B^k 代入 (7.3.20), 最后就可以得到守恒向量

$$C^k_\varphi=\widetilde{\psi}\gamma^k\varphi(x)-\widetilde{\varphi}(x)\gamma^k\psi.$$

习题七

7.1. 求 (7.3.44) 的生成元

$$Z=3t\frac{\partial}{\partial t}+2x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

的伸缩群变换.

7.2. 求下列方程所有的无穷小对称:

(i) 一维热传导方程 $u_t=u_{xx}$,

(ii) 二维热传导方程 $u_t=u_{xx}+u_{yy}$,

(iii) 三维热传导方程 $u_t=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

7.3. 求用无穷小对称

$$X=X_1+X_4=\frac{\partial}{\partial t}+ku\frac{\partial}{\partial u},\quad k=\text{常数}$$

得到的一维热传导方程 $u_t=u_{xx}$ 的不变解 (见习题 7.2(i)).

7.4. 研究用下列条件得到的二维热传导方程 $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ 的不变解:

(i) 一个无穷小对称 (参见习题 7.3)

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + ku\frac{\partial}{\partial u}, \quad k = 常数,$$

(ii) 由下面算子生成的二维李代数 (见习题 7.2(ii)):

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + ku\frac{\partial}{\partial u}, \quad Y = X_6 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

7.5. 行星绕太阳运行的规律可表示为微分方程组 (2.2.8)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{x}, \quad \alpha = 常数.$$

证明由公式

$$E = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{\alpha}{r}, \quad 其中 \quad |\boldsymbol{v}|^2 = \sum_{i=1}^{3}(v^i)^2$$

定义的行星能量是一个运动常数, 即 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$.

7.6. 在任意的中位势场 $U = U(r)$ 的质量为 m 的粒子的运动可表达成拉格朗日算子 $L = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - U(r)$. 对于这个拉格朗日算子, 求运动方程, 也就是欧拉-拉格朗日方程.

7.7. 在之前问题中拉格朗日算子的积分作用 $L = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - U(r)$ 在时间 t 在有生成元 $X_1 = \partial/\partial t$ 的时间平移和有生成元

$$X_{12} = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2}, \ X_{13} = x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^3}, \ X_{23} = x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3}$$

的空间变量 x^1, x^2, x^3 的旋转变换下不变. 计算由诺特定理给出的守恒定律并与问题 2.4 比较.

7.8. 考虑中位势场

$$U(r) = \frac{k}{r^2}, \quad k = 常数$$

和粒子运动的对应方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = 2k\frac{x^i}{r^4}, \quad i = 1, 2, 3.$$

伴随时间平移和空间变量的旋转变换 (见问题 7.7), 这些方程容许由

$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}$$

和

$$X_6 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\left(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

分别生成的伸缩或射影变换. 检查诺特定理对对称 X_5, X_6 的适用性并求相应的守恒定律 T_5, T_6.

7.9. 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个三维向量场. 证明 $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$ 是螺旋形的, 即 $\operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{a} = 0$ (见 (1.3.15) 的性质 9).

7.10. 设 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$. 验证

$$\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\right)=0.$$

在高维情况下推广这个性质. 即, 设 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $r=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$. 求 s 使

$$\operatorname{div}\left(\frac{x}{r^s}\right)\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x}{r^s}\right)=0.$$

7.11. 验证向量

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2},0\right)$$

是螺旋状的, 并求一个向量 $\boldsymbol{A}$ 使 $\boldsymbol{B}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$.

7.12. 回到习题 7.10 并求一个向量 $\boldsymbol{A}$ 使

$$\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}.$$

7.13. 检验习题 7.1 的生成元 Z 对守恒定理的适用性, 即验证性质 (7.3.30) 和 (7.3.33).

7.14. 求 7.3.7 节中下列算子的首次延拓部分 (即, 延拓至 $v^k=\mathrm{d}x^k/\mathrm{d}t$):

$$\widehat{X}_1=-\left(x^2v^2+x^3v^3\right)\frac{\partial}{\partial x^1}+\left(2x^1v^2-x^2v^1\right)\frac{\partial}{\partial x^2}+\left(2x^1v^3-x^3v^1\right)\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

7.15. 通过将变量 x 改变为 $y=\ln|x|$, 试变换 Black-Scholes 方程 (2.4.15)

$$u_t+\frac{1}{2}A^2x^2u_{xx}+Bxu_x-Cu=0$$

至一个常系数方程.

7.16. 用 6.5.1 节中例 6.5.2 解下列超定组 (即含有两个因变量 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 的四个方程):

$$\xi_y=0,\quad 3(\eta_y+\eta)-2\xi_x=0,\quad \eta_x=0,\quad \xi_{xx}=0.$$

第八章　广义函数或分布

本章介绍分布理论中基础概念和方法并重点介绍一些有用的工具. 更进一步, 本章也介绍了在第九章用来计算基础解系的不变原理. 该原理引出了群不变解理论的重构, 并且将李无穷小方法推广到分布空间. 这将在 8.4 节中给出.

补充读物: L. Schwartz [34], I.M. Gel'fand 和 G.E. Shilov [8], N.H. Ibragimov [17].

8.1　广义函数简介

在应用数学的最新发展中, 特别是在研究流体力学中的非线性问题中, 我们迫切地需要微分方程的非连续解. 因此, S.L. Sobolev 在 20 世纪 30 年代引入了广义解这个概念. 更进一步, 在更早的时候, 人们就已经注意到了有某些奇点的非连续解在求解数学物理问题中扮演着重要的角色. J. Hadamard 在 20 世纪 20 年代称这些解为*基本解*; 现在, 我们更习惯称其为*基础解系*. *广义函数* (S.L. Sobolev, 1936 年) 或*分布* (L. Schwartz, 1950 年) 定义的诞生, 对这一理论做出了巨大的贡献, 它保留了这些解的数学特性. 最常用的广义函数是狄拉克的 δ 函数. 在 20 世纪 30 年代, P.A.M. 狄拉克在理论物理中提出了这一概念. 它成为广义微分方程理论中一个有效的工具.

8.1.1　启发式思考

首先我们回忆一下可微函数的概念, 可微函数意味着该函数的微分产生一个解析 (普通) 函数. 有时候, 我们可能试图对一些不可微的函数进行微分来推

广微分的定义. 在引入广义函数后, 这种计算将变为可能. 这种方法的核心思想是将一个对不可微函数的微分转移到一个可微函数上. 实现这个思想的合适工具就是使用一元函数的分部积分法和多元函数的散度定理 (1.3.18).

首先, 我们考虑只含有一个变量 x 的情况. 假设函数 $u(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 是连续可微函数, 在 (1.2.12) 中使用分部积分公式

$$\int_a^b \varphi \mathrm{d}u = (u\varphi)\Big|_a^b - \int_a^b u\mathrm{d}\varphi.$$

更进一步, 假设函数 $\varphi(x)$ 在 x 轴上的某一个有界区间外为零[①], 并且我们记对 x 的微分为 D, 那么, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi D(u)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} uD(\varphi)\mathrm{d}x.$$

为方便起见, 我们用标量积符号 $(,)$ 表示相应函数的积分. 那么, 上面的方程可以写为形式

$$(Du, \varphi) = -(u, D\varphi). \tag{8.1.1}$$

从上面方程的左右两边, 我们得到的信息只是一种将对一可微函数 $u(x)$ 的微分 D 转移到了另外一个有着同一形式的函数 $\varphi(x)$ 上. 然而, 如果其中只有函数 φ 是连续可微的, 我们将得到一个非平凡的结论. 在方程 (8.1.1) 的右边, 函数 u 满足在积分区间是收敛的.

上面的方法在下面引入的新微分中起着关键的作用. 即, 设 u 为一个通常认为是不可微的函数, 但是在对方程 (8.1.1) 的右边积分中满足收敛条件. 函数 u 的广义微分即为 "函数" Du (在广泛意义上) , 对于任意有有界支集的可微函数 φ, 它满足方程 (8.1.1). 很明显, 广义微分运算可以重复地进行, 只要函数 φ 是一个可微函数. 例如, 二阶广义微分 D^2u 的定义如下:

$$(D^2u, \varphi) = -(Du, D\varphi) = (u, D^2\varphi).$$

为了可以处理任意阶的微分, 我们假设函数 φ 是无限可微的. 有有界支集的无限可微函数集合记为 C_0^∞. 函数 $\varphi \in C_0^\infty$ 称为*检验函数*.

为了理解广义微分 Du 的特性, 我们可以这样解释, 对于固定的函数 u, 表达式 (Du, φ) 将任意一个函数 $\varphi \in C_0^\infty$ 映射至 $(u, D\varphi)$ 上. 这是一种线性运算:

$$(Du, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(Du, \varphi_1) + c_2(Du, \varphi_2);\ c_1, c_2 = \text{常数},$$

[①] 如果函数 $\varphi(x)$ 在其最小的一个闭区间内不为零, 则该区间称为该函数的*支集*, 并记为 $\mathrm{supp}(\varphi)$. 如果该区间 $\mathrm{supp}(\varphi)$ 是有界的, 那么我们称 $\varphi(x)$ 是一个有界 (紧) 函数.

并且是连续的:

$$\text{在 } C_0^\infty, \text{ 当 } \quad \varphi_k \to \varphi, \quad (Du, \varphi_k) \to (Du, \varphi),$$

因此, 在空间 C_0^∞ 上, 广义微分 Du 是一个线性连续的泛函. 这些启发式的思维也可以用于多元函数 $x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ 并且得到如下的定义.

8.1.2 分布的定义和举例

定义 8.1.1 广义函数或分布是一个在空间 C_0^∞ 上的有界 C^∞ 函数 $\varphi(x) = \varphi(x^1, \cdots, x^n)$ 的线性连续泛函 f. 换句话说, f 将任意一个函数 $\varphi \in C_0^\infty$ 映射为一个数值, 并记为 (f, φ). 这种运算是线性的:

$$(f, \varphi_1 + \varphi_2) = (f, \varphi_1) + (f, \varphi_2), \quad (f, c\varphi) = c(f, \varphi), \text{ 其中 } c = \text{常数}; \tag{8.1.2}$$

并且是连续的:

$$\text{若在 } C_0^\infty \text{ 上 } \varphi_k \to \varphi, \text{ 那么 } (f, \varphi_k) \to (f, \varphi). \tag{8.1.3}$$

在 C_0^∞ 上, $\varphi_k \to \varphi$ 收敛, 这意味着它满足如下条件:

1. $\varphi_k, \varphi \in C_0^\infty$,
2. 序列 φ_k 的所有元素的支集包含在同一个 $\mathbb{R}^n$ 的有界的闭子集中,
3. 函数 $\varphi_k(x)$ 及其导数分别一致收敛于 $\varphi(x)$ 及其导数.

例 8.1.1 设函数 $f(x)$ 局部可积, 例如, 在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意一个有界域中可积. 积分

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{8.1.4}$$

定义了一个广义函数. 这种类型的广义函数称为正则的, 反之称为奇异的.

例 8.1.2 一元 *Heaviside* 函数 $\theta(x)$ 定义如下, 其中自变量为 x:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{8.1.5}$$

它决定了如下定义的正则广义函数 (8.1.4):

$$(\theta, \varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{8.1.6}$$

同样地, 这里的 Heaviside 函数

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

的如下积分公式也定义了一个正则广义函数:

$$(\theta(x-x_0),\varphi(x))=\int_{x_0}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

例 8.1.3 狄拉克的 δ 函数是最简单但又是极其重要的奇异广义函数. 我们记其为 δ 或者 $\delta(x)$, 并且其定义为

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0). \tag{8.1.7}$$

我们也可以将其写为

$$(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0),$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$. 同样地, $\delta(x-x_0)$ 定义为

$$(\delta(x-x_0),\varphi(x))=\varphi(x_0).$$

另外, 我们可以将 $\delta(x-a)$ 记为 $\delta_{(a)}$, 而且通常称其为在点 a 的 δ 函数.

8.1.3 用 δ 函数表示的极限

关于 δ 函数表示的一些很有用极限的推导, 参见参考文献 [8], 第 I 章, 2.5 节.

定理 8.1.1 考虑只有一个变量 x 的情况. 如下方程成立:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}, \tag{8.1.8}$$

$$\delta(x)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sin(\nu x)}{\pi x}, \tag{8.1.9}$$

$$\delta(x)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\nu}^{\nu}\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi, \tag{8.1.10}$$

$$\delta(x)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{8.1.11}$$

其中, 符号 $t\to+0$ 表示 t 正向趋于零. $f_n\to\delta$ 定义为 $(f_n,\varphi)\to(\delta,\varphi)$.

我们将把 (8.1.11) 推广到多个变量的情况, 即 $x=(x^1,\cdots,x^n)$. 记 $r=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$, 我们有

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}=\delta(x). \tag{8.1.12}$$

8.2 分布的运算

8.2.1 函数的乘法

分布 f 的乘法的乘积因子是在 C^∞ 中的函数 $\alpha(x)$, 那么它与检验函数 φ 的积 αf 的定义如下:

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi). \tag{8.2.1}$$

由于 $\alpha\varphi \in C_0^\infty$, 方程的右边的定义是明确的.

例 8.2.1 从 δ 函数的定义 (8.1.7) 和乘法定律 (8.2.1) 中, 我们可得

$$\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta. \tag{8.2.2}$$

即

$$(\alpha(x)\delta, \varphi) = (\delta, \alpha\varphi) = \alpha(0)\varphi(0) = \alpha(0)(\delta, \varphi) = (\alpha(0)\delta, \varphi).$$

8.2.2 微分

分布 f 的微分由如下方程定义:

$$\Big(D_i f, \varphi\Big) = -\Big(f, D_i\varphi\Big). \tag{8.2.3}$$

这里全微分 D_i 与偏微分 $D_i = \partial/\partial x^i$ 是一致的, 这是因为 φ 中只有一个变量 x^i. 这个定义表明, 任意一个广义函数都是无限可微的, 高阶的微分由连续地使用公式 (8.2.3) 而得到. 例如, $(D_j D_i f, \varphi) = -(D_i f, D_j\varphi) = (f, D_i D_j\varphi)$. 在特殊情况下, 我们有 $D_j D_i f = D_i D_j f$.

例 8.2.2 Heaviside 函数的微分是 δ 函数:

$$\theta'(x) = \delta(x). \tag{8.2.4}$$

更进一步, 由公式 (8.1.1) 和 (8.1.6) 可得

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\varphi\Big|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

8.2.3 分布的直积

设 $f(x)$ 是 n 元分布, 其变量为 $x = (x^1, \cdots, x^n)$, $g(t)$ 是 m 元分布, 其变量为 $t = (t^1, \cdots, t^m)$. 设 $\varphi(x, t)$ 是一个 $n+m$ 元检验函数, 其变量为 $(x^1, \cdots, x^n, t^1, \cdots, t^m)$.

定义 8.2.1 函数 $f(x)$ 和 $g(t)$ 的直积 $f(x)\otimes g(t)$ 是作用在检验函数 $\varphi(x,t)$ 的分布, 其定义如下:

$$\Big(f(x)\otimes g(t),\varphi(x,t)\Big)=\Big(f(x),\big(g(t),\varphi(x,t)\big)\Big). \tag{8.2.5}$$

我们可以很容易地从定义 8.2.1 中推导直积的如下性质 (参见, 例如 [8], 第 1 章, §5, 或 [34], 第 3 章):

$$\Big(f(x)\otimes g(t),\varphi(x)\psi(t)\Big)=\big(f(x),\varphi(x)\big)\big(g(t),\psi(t)\big), \tag{8.2.6}$$

$$f(x)\otimes g(t)=g(t)\otimes f(x), \tag{8.2.7}$$

$$\delta(x)\otimes\delta(t)=\delta(x,t), \tag{8.2.8}$$

其中 $\delta(x),\delta(t)$ 和 $\delta(x,t)$ 是各自变量的狄拉克 δ 函数.

8.2.4 卷积

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 的卷积 $(f*g)(x)$ 由如下积分定义:

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y. \tag{8.2.9}$$

为了定义分布的卷积, 我们从正则分布开始. 即, 对于卷积 (8.2.9), 我们对检验函数考虑运算 (8.1.4) 并且交换积分顺序. 我们有

$$(f*g,\varphi)=\int(f*g)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\varphi(x)\left(\int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int f(y)\mathrm{d}y\int g(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int f(y)\left(\int g(z)\varphi(z+y)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y.$$

在最后的一个积分中, 我们将 z 记为 x, 对于正则分布 f 和 g, 我们得到卷积 $f*g$ 是一个作用在检验函数上的如下分布:

$$(f*g,\varphi)=\int f(y)\left(\int g(x)\varphi(x+y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{8.2.10}$$

方程 (8.2.10) 可以写为形式

$$(f*g,\varphi)=\big(f(y),\big(g(x),\varphi(x+y)\big)\big).$$

由上面的推导, 我们得到如下定义.

定义 8.2.2 设 f 和 g 是任意的分布, 它们之中至少存在一个紧支集. 它们的卷积 $f*g$ 是一个由下式表示的分布:

$$(f*g,\varphi)=\Big(f(y),\big(g(x),\varphi(x+y)\big)\Big). \tag{8.2.11}$$

使用直积的定义 (8.2.5), 方程 (8.2.11) 可以写为

$$(f*g,\varphi)=\Big(f(y)\otimes g(x),\varphi(x+y)\Big). \tag{8.2.12}$$

注 8.2.1 即使 $\varphi(x)$ 有一个紧支集, 但在变量 x,y 的空间里, $\varphi(x+y)$ 却不满足这条性质. 因此, 对于任意的分布 f 和 g, 方程 (8.2.12) 可能是没有意义. 对于满足适当的条件的分布, 卷积的定义是明确的. f 或者 g 的支集的紧性就是我们所需要的条件之一. 在这里, 我们将不再讨论一般的限制条件, 因为定义 8.2.2 已经足够用了. 对于分布的支集的定义, 参见 [34], 第 Ⅱ 章, §1.3, 或者 [8], §1.4.

如下关于卷积的性质将在下章中用到.

定理 8.2.1 卷积 (8.2.11) 满足交换律:

$$f*g=g*f. \tag{8.2.13}$$

证明 从方程 (8.2.12) 和直积 (8.2.7) 的交换律, 我们可以证明上式.

定理 8.2.2 对于任意的分布 f, 它与 δ 函数的卷积是存在的, 并且满足下列方程:

$$f*\delta=f. \tag{8.2.14}$$

定理 8.2.3 设分布 f 和 g 有紧支集, 那么卷积的微分 $D_i=\partial/\partial x^i$ 满足如下方程:

$$D_i(f*g)=(D_if)*g=f*(D_ig). \tag{8.2.15}$$

8.3 分布 $\Delta(r^{2-n})$

8.3.1 球面上的平均值

首先, 我们介绍一些数学符号和一些预备的计算. 设

$$x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n,\quad |x|=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}.$$

函数 $\varphi(x)$ 在半径为 r、球心为 0 的球面 Ω_r 上的平均值 $\overline{\varphi}(r)$ 的定义为

$$\overline{\varphi}(r)=\frac{1}{S_r}\int_{\Omega_r}\varphi(x)\mathrm{d}S. \tag{8.3.1}$$

球面 Ω_r 是一些点 x 的集合, 这些点满足条件 $|x|=r$, S_r 是球面 Ω_r 的表面积. 因为 Ω_r 与单位球面相似, 并且其维数为 $n-1$, 我们有 (参照 1.1.3 节)

$$S_r = r^{n-1}\omega_n, \tag{8.3.2}$$

其中 $\omega_n = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$ 是在 n 维空间中的单位球面的表面积. 由方程 (8.3.1), 我们知道在任一点 $x\in\Omega_r$, $\overline{\varphi}(r)$ 有着一个相同的值, 该值独立于点 x 在球面 Ω_r 上的位置. 因此, $\overline{\varphi}(r)$ 称为**球面对称函数**.

8.3.2 拉普拉斯方程 $\Delta v(r)=0$ 的解

引理 8.3.1 设 v 是任意的球面对称函数, 即 $v=v(r)$. 那么拉普拉斯方程

$$\Delta v \equiv \sum_{i=1}^{n} v_{ii} = 0$$

可以写为

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = 0, \tag{8.3.3}$$

其中 $v_i = D_i(v) = \partial v/\partial x^i$, $v_{ii} = D_i^2(v)$ 且 $v' = \mathrm{d}v/\mathrm{d}r$.

证明 可以利用如下方程证明:

$$D_i(v) \equiv \frac{\partial v}{\partial x^i} = v'\frac{x^i}{r}, \quad D_i^2(v) = v''\frac{(x^i)^2}{r^2} + v'\left(\frac{1}{r} - \frac{(x^i)^2}{r^3}\right).$$

注 8.3.1 我们可以证明, 函数 $\varphi(x)$ 的拉普拉斯算子的平均值与函数 $\varphi(x)$ 的平均值的拉普拉斯算子是相等的, 即

$$\overline{\Delta\varphi}(r) = \Delta\,\overline{\varphi}(r) = \overline{\varphi}'' + \frac{n-1}{r}\overline{\varphi}'. \tag{8.3.4}$$

下面, 我们来求所有拉普拉斯方程的球面对称解 $v=v(r)$, 即对常微分方程 (8.3.3) 进行积分. 我们可得

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = \frac{1}{r}\left(rv'' + (n-1)v'\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left((rv')' + (n-2)v'\right) = \frac{1}{r}\left(rv' + (n-2)v\right)'.$$

因此, 方程 (8.3.3) 可以写为 $(rv' + (n-2)v)' = 0$, 并且可得

$$rv' + (n-2)v = C. \tag{8.3.5}$$

如果 $n>2$, 我们设 $C=(n-2)C_1$ 并将方程 (8.3.5) 改写为可分形式 $rv' + (n-2)(v-C_1) = 0$. 如果 $n=2$, 方程 (8.3.5) 有着可分形式 $rv' = C$. 如果 $n=1$, 方程 (8.3.5) 可以写为 $v''=0$. 在任何情况下, 上面的积分都是简单的, 并得到如下结论.

定理 8.3.1 方程的 (8.3.3) 的通解的形式如下:

$$v = C_1 + C_2\, r^{2-n}, \quad \text{若} \quad n \neq 2; \tag{8.3.6}$$

$$v = C_1 + C_2 \ln r, \quad \text{若} \quad n = 2. \tag{8.3.7}$$

8.3.3 分布 $\Delta(r^{2-n})$ 的计算

定理 8.3.1 表明, 当 $n > 2$ 和 $n = 2$ 时, 方程 (8.3.3) 的基础解系分别包含着平凡的常数解 $v = 1$ 和解 r^{2-n} 及 $\ln r$. 函数 r^{2-n} 和 $\ln r$ 在 $r = 0$ 即在原点 $x = 0$ 有奇点, 并且在此奇点函数没有解析导数. 因此, 这些函数的拉普拉斯算子在 $x \neq 0$ 时值为零, 并且在奇点 $x = 0$ 附近给出一个分布. 在此, 我们将计算当 $n > 2$ 时的分布 $\Delta(r^{2-n})$.

定理 8.3.2 设 $n > 2$, 那么 $\Delta(r^{2-n})$ 是由如下方程给出的分布:

$$\Delta(r^{2-n}) = (2-n)\omega_n\, \delta(x), \tag{8.3.8}$$

其中 $\delta(x)$ 是由方程 (8.1.7) 定义的狄拉克 δ 函数, 并且 ω_n 是单位球面的表面积.

证明 很显然, 函数 r^{2-n} 是局部可积的. 因此, 使用微分规则 (8.2.3) 和局部可积函数的分布的定义 (8.1.4), 并且使用方程

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_{\Omega_r} f\,\mathrm{d}S \tag{8.3.9}$$

我们可以得到

$$\big(\Delta(r^{2-n}), \varphi\big) = \big(r^{2-n}, \Delta\,\varphi\big) = \int_{\mathbb{R}^n} r^{2-n}\,\Delta\,\varphi\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_{\Omega_r} r^{2-n}\,\Delta\,\varphi\,\mathrm{d}S.$$

由方程 (8.3.1) 和 (8.3.2) 可得

$$\int_{\Omega_r} r^{2-n}\,\Delta\,\varphi\,\mathrm{d}S = r^{2-n}\,S_r\overline{\Delta\varphi}(r) = \omega_n r^{2-n}\,r^{n-1}\overline{\Delta\varphi}(r) = \omega_n r\overline{\Delta\varphi}(r).$$

由上述方程并使用方程 (8.3.4), 我们有

$$\big(\Delta(r^{2-n}), \varphi\big) = \omega_n \int_0^\infty r\overline{\Delta\varphi}(r)\mathrm{d}r = \omega_n \int_0^\infty (r\overline{\varphi}'' + (n-1)\,\overline{\varphi}')\mathrm{d}r. \tag{8.3.10}$$

现在我们计算方程 (8.3.10) 右边的积分:

$$\int_0^\infty (r\overline{\varphi}'' + (n-1)\,\overline{\varphi}')\mathrm{d}r = \int_0^\infty ((r\overline{\varphi}')' + (n-2)\,\overline{\varphi}')\mathrm{d}r = (r\overline{\varphi}' + (n-2)\,\overline{\varphi})_0^\infty.$$

由于 $\varphi \in C_0^\infty$, 当积分限为无穷的时候, 积分应该为零. 因此

$$(r\overline{\varphi}' + (n-2)\,\overline{\varphi})_0^\infty = -(n-2)\overline{\varphi}(0) = -(n-2)\varphi(0).$$

将上述表达式代入方程 (8.3.10) 中, 即可得

$$\big(\Delta(r^{2-n}), \varphi\big) = (2-n)\omega_n\varphi(0) = \big((2-n)\omega_n\delta(x), \varphi(x)\big),$$

因此方程 (8.3.8) 得证.

注 8.3.2 当 $n=2$ 时, 方程 (8.3.8) 将被转化为

$$\Delta(\ln r) = \omega_2\,\delta(x). \tag{8.3.11}$$

注 8.3.3 当 $n=1$ 时, 方程 (8.3.8) 也依然成立. 因此, 方程 (8.3.8) 和 (8.3.11) 可以被简单地写为如下形式:

$$\begin{aligned} &\Delta(r^{2-n}) = (2-n)\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,\delta(x) \quad (n \neq 2), \\ &\Delta(\ln r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,\delta(x) \quad (n=2). \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

如下的一些特殊情况在应用中非常重要:

$$\begin{aligned} &\Delta(|x|) = 2\,\delta(x) \quad (n=1), \\ &\Delta(\ln r) = 2\pi\delta(x) \quad (n=2), \\ &\Delta\big(r^{-1}\big) = -4\pi\delta(x) \quad (n=3). \end{aligned} \tag{8.3.13}$$

8.4 分布的变换

本节内容包含了将李无穷小方法延伸到分布空间, 并且其结论也将在下一章用到.

8.4.1 线性换元法

为简单起见, 我们先考虑一维情况, 并且从被大家熟知的分布的平移开始. 它所对应的换元法为 $\overline{x} = x - a$, 并且其定义也满足如下正则分布 (8.1.4) 的换元法则. 设 $f(x)$ 是一个只含有一个变量 x 的局部可积函数. 相应正则分布的平移 $f(x-a)$ 由如下换元公式给出:

$$\Big(f(x-a), \varphi(x)\Big) = \int f(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int f(\overline{x})\varphi(\overline{x}+a)\mathrm{d}\,\overline{x}.$$

使用 (8.1.4) 中的符号, 可得

$$\Big(f(x-a),\varphi(x)\Big)=\Big(f(\overline{x}),\varphi(\overline{x}+a)\Big),\tag{8.4.1}$$

或者, 重新记 $\overline{x}$ 为 x , 可得如下公式:

$$\Big(f(x-a),\varphi(x)\Big)=\Big(f(x),\varphi(x+a)\Big).\tag{8.4.2}$$

使用方程 (8.4.2) 作为任意分布的平移的定义. 例如, δ 函数的平移 $\delta(x-a)$ 有形式

$$\Big(\delta(x-a),\varphi(x)\Big)=\Big(\delta(x),\varphi(x+a)\Big)=\varphi(a).\tag{8.4.3}$$

广义函数的任意的线性变换有着相似的定义. 即, 设 $f(x)$ 为一个 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数, 并且设

$$\overline{x}=Ax-a$$

为一般的线性变换, 其中 $a=(a^1,\cdots,a^n)$ 是一个 n 维向量, $A=(a_{ij})$ 是一个任意的 $n\times n$ 矩阵, 并且满足 $\det A\neq 0$. 那么由积分 (8.1.4) 中的换元法可得

$$\Big(f(Ax-a),\varphi(x)\Big)=\int f(Ax-a)\varphi(x)\mathrm{d}x=|\det A|^{-1}\int f(\overline{x})\varphi(A^{-1}(\overline{x}+a))\mathrm{d}\,\overline{x}.$$

如下方程给出了任意分布的线性变换的定义:

$$\Big(f(Ax-a),\ \varphi(x)\Big)=\Big(\,|\det A|^{-1}f(\overline{x}),\ \varphi(A^{-1}(\overline{x}+a))\Big),\tag{8.4.4}$$

或者在上式中记 $\overline{x}$ 为 x:

$$\Big(f(Ax-a),\ \varphi(x)\Big)=\Big(\,|\det A|^{-1}f(x),\ \varphi(A^{-1}(x+a))\Big).\tag{8.4.5}$$

8.4.2 δ 函数的换元法

设函数 $p(x)$ 是一元函数, 其变量为 x 并且满足 $p(0)=0,\ p'(0)\neq 0$, 那么

$$\delta(p(x))=\frac{1}{p'(0)}\delta(x).\tag{8.4.6}$$

如果 $p(x)$ 有一些零点, 例如点 $a_1,\cdots,a_s$, 并且如果对于所有的 $\sigma=1,2,\cdots,s$, 有 $p'(a_\sigma)\neq 0$, 那么 (参见 [4], 第 Ⅵ 章, §3.3, 方程 (2))

$$\delta\big(p(x)\big)=\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{1}{p'(a_\sigma)}\,\delta(x-a_\sigma).\tag{8.4.7}$$

例 8.4.1 对 $\delta(x^2-a^2)$, $a\neq 0$ 使用 (8.4.7), 即可得

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}\Big(\delta(x-a)-\delta(x+a)\Big). \tag{8.4.8}$$

在多元变量 $x=(x^1,\cdots x^n)$ 的情况下, 方程 (1.2.52) 变为

$$\delta(p(x))=\frac{1}{|J(0)|}\,\delta(x),\quad J(0)=\det\left(\frac{\partial p^{\,i}}{\partial x^j}\right)_{x=0}. \tag{8.4.9}$$

8.4.3 任意的群变换

考虑任意将点 $x\in\mathbb{R}^n$ 变为 $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ 的变换 T:

$$\overline{x}=T\,x. \tag{8.4.10}$$

变换 T 也可以写为形式

$$\overline{x}^{\,i}=\overline{x}^{\,i}(x),\quad i=1,\cdots,n,$$

并且其雅可比行列式为

$$J=\det\left(\frac{\partial\overline{x}^{\,i}}{\partial x^j}\right). \tag{8.4.11}$$

这里我们假设 $J\neq 0$, 并且 $\overline{x}^{\,i}(x)$ 是无限可微的.

定义 8.4.1 *将任意分布 f 变换为 $\overline{f}$ 的变换 $f\to\overline{f}$ 由如下方程所定义, 这里我们使用表达式 (8.4.10):*

$$\Big(f\,(T\,x)\,,\varphi(x)\Big)=\Big(\overline{f}(\overline{x}),\varphi(T^{-1}\,\overline{x})\Big). \tag{8.4.12}$$

定义 8.4.1 是从线性变换得到的. 即, 当 $T\,x=x-a$ 且 $\overline{f}=f$ 时, 平移公式 (8.4.1) 符合形式 (8.4.12). 同样地, 当 $T\,x=Ax-a$ 且 $\overline{f}=|\det A|^{-1}\,f$ 时, 变换 (8.4.4) 符合形式 (8.4.12).

为了得到与 (8.4.10) 有关的分布的变换, 我们再次使用线性变换. 即, 设 $f(x)$ 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数. 那么积分中的换元法公式为

$$\Big(f(Tx),\,\varphi(x)\Big)=\int f(Tx)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int J^{-1}f(\overline{x})\,\varphi(T^{-1}\overline{x})\mathrm{d}\,\overline{x}.$$

对于任意分布, 其目的是获得方程

$$\Big(f(Tx),\varphi(x)\Big)=\Big(J^{-1}f(\overline{x}),\,\varphi(T^{-1}\overline{x})\Big), \tag{8.4.13}$$

其中 J 是雅可比行列式 (8.4.11). 在上式中, 如果我们记 $\overline{x}$ 为 x, 那么方程 (8.4.13) 也可以写为形式

$$\Big(f\,(Tx)\,,\,\varphi(x)\Big)=\Big(J^{-1}f(x),\varphi(T^{-1}x)\Big). \tag{8.4.14}$$

比较方程 (8.4.13) 和方程 (8.4.12) 可以得到, 对于任意分布, 我们有

$$\overline{f} = J^{-1} f. \tag{8.4.15}$$

例 8.4.2 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于伸缩变换 $\overline{x} = x\,\mathrm{e}^a$, 公式 (8.4.15) 变为

$$\overline{f} = \mathrm{e}^{-na} f. \tag{8.4.16}$$

例 8.4.3 考虑二维情况并且取旋转变换

$$\overline{x} = x\cos a + y\sin a, \quad \overline{y} = y\cos a - x\sin a.$$

公式 (8.4.15) 变为

$$\overline{f} = f. \tag{8.4.17}$$

8.4.4 分布的无穷小变换

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 考虑单参数群变换 G:

$$\overline{x} = T_a(x), \tag{8.4.18}$$

同时考虑无穷小变换

$$\overline{x}^{\,i} \approx x^i + a\xi^i(x), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{8.4.19}$$

根据方程 (8.4.15), 我们延伸群作用至分布 f:

$$\overline{x} = T_a(x), \quad \overline{f} = J^{-1} f. \tag{8.4.20}$$

这里, 当群参数 a 很小时, 雅可比行列式 (8.4.11) $J = \det(\partial \overline{x}^{\,i}/\partial x^j)$ 是正的.

将变换 (8.4.20) 在 $a = 0$ 处展开为泰勒级数, 并且考虑当 $a = 0$ 时 $J = 1$, 连同由 (8.4.19) 给出的关于 x 的无穷小变换, 可得如下 f 的无穷小变换:

$$\overline{f} \approx f - a f \left(\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}a}\Big|_{a=0} \right).$$

使用对雅可比行列式 (8.4.11) 的微分规则 (参见 1.3.6 节), 可得如下方程 (参见习题 8.7):

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}a}\Big|_{a=0} = D_i(\xi^i), \tag{8.4.21}$$

其中

$$D_i(\xi^i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

因此, 利用独立变量的无穷小变换 (8.4.19), 我们可以得到如下分布的无穷小变换:

$$\overline{f} \approx f - aD_i(\xi^i)f. \tag{8.4.22}$$

特别地, 设 $f(x)=\delta(x)$ 并且使用 (8.2.2), 可得 δ 函数的无穷小变换

$$\overline{\delta} \approx \delta - a\left(D_i(\xi^i)\big|_{x=0}\right)\delta. \tag{8.4.23}$$

习题八

8.1. 设 x 是单一变量. 求解下列 δ 函数的微分, 其中 $\varphi(x)$ 是检验函数. 即, 计算

(i) $(\delta'(x),\varphi(x))$, (ii) $(\delta''(x),\varphi(x))$, (iii) $(\delta'(x-x_0),\varphi(x))$.

8.2. 计算下列广义函数:

(i) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{2\varepsilon x}{\pi(x^2+\varepsilon^2)^2}$, (ii) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\displaystyle\int_{-\nu}^{\nu} i\xi \mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi$, (iii) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\displaystyle\int_{-\nu}^{\nu}\xi^2\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi$.

8.3. 设 $\alpha(x)$ 是 C^∞ 函数, f 是任意的分布, 证明:

$$(\alpha(x)f)' = \alpha'(x)f + \alpha(x)f'.$$

8.4. 设 $\alpha(x)$ 是任意 C^∞ 函数. 证明:

$$(\alpha(x)\theta(x))' = \alpha(0)\delta(x) + \theta(x)\alpha'(x).$$

8.5. 证明方程 (8.2.6), $\big(f(x)\otimes g(t),\varphi(x)\psi(t)\big) = \big(f(x),\varphi(x)\big)\big(g(t),\psi(t)\big)$.

8.6. 证明方程 (8.2.8), $\delta(x)\otimes\delta(t)=\delta(x,t)$.

8.7. 证明关于正则分布的卷积 (8.2.10) 的方程 $f*g=g*f$.

8.8. 证明卷积的性质 (8.2.14) 和性质 (8.2.15).

8.9. 验证当 $n=2$ 和 $n=3$ 时我们也有方程 (8.3.4).

8.10. 当 $n=2$ 时, 计算分布 $\Delta(\ln r)$ 并证明方程 (8.3.11).

8.11. 讨论方程 (8.3.9).

8.12. 证明方程 (8.4.21).

8.13. 设 $\alpha(x)$ 是任意 C^∞ 函数. 证明:

$$\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x).$$

8.14. 考虑变量 x 的换元法 $y=p(x)$, 并设 $p(0)=0$, $p'(0)\neq 0$. 证明方程 (8.4.6), $\delta(p(x)) = p'(0)^{-1}\,\delta(x)$.

8.15. 设函数 $p(x)$ 存在一些零点, 例如在点 $a_1,\cdots,a_s$ 上函数值为零. 并设对于任意的 $\sigma=1,2,\cdots,s$, 我们有 $p'(a_\sigma)\neq 0$. 证明方程 (8.4.7)

$$\delta\big(p(x)\big) = \sum_{\sigma=1}^{s}\frac{1}{p'(a_\sigma)}\,\delta(x-a_\sigma).$$

8.16. 推导方程 (8.4.8), $\delta(x^2-a^2) = (\delta(x-a)-\delta(x+a))/(2a)$.

第九章　不变原理和基本解

本章介绍了一个新的基于*不变原理*对于求解初值问题的群理论方法. 此方法对于解决常系数或变系数线性方程是有效的.

补充读物: N.H. Ibragimov [20], 第 3 章.

9.1　简介

通常认为李群方法在求解*初值问题*上不够实际有效. 这是因为任意的初值条件破坏了问题中微分方程的对称群. 但是 [15] 表明, 经典数学物理方程的基本解事实上是群不变解. 这个观点在初值问题中通过*不变原理*公式被放大, 导致了对称群理论方法在基本解上的发展 [17]. 这个新方法结合了李对称体系和分布理论.

成功运用群理论方法求基本解的关键点在于初值问题决定了基本解, 不像有任意边值和初值条件的一般问题, 该初值问题继承了微分方程的一定的对称性. 所以我们想要求基本解就在于求在继承对称群下的不变解.

椭圆型方程和抛物型方程的基本解是一般函数, 并且可以通过经典李理论获得 (见 9.2.3 节和 9.2.4 节). 但是对于双曲型方程, 基本解是一个分布 (见 9.4 节). 因此我们需要在 9.4.2 节中讨论含有分布的微分方程.

这个新的方法, 不像傅里叶变换方法, 它独立于坐标系的选择, 且对于*常系数*线性方程和*变系数*方程都可适用.

9.2 不变原理

9.2.1 不变原理的公式表达

在 [15] (也可见 [21]) 中阐述了一个叫作不变原理的一般性原理. 它修改了李群理论, 并使之可以处理边值问题, 特别是初值问题或者柯西问题. 该理论表明, 如果一个微分方程容许了一个李群 G, 并且其边值/初值问题在其子群 $H \subset G$ 下是不变的, 那么就可以在这个微分方程的 H 不变解中寻找这个问题的解. 这个不变原理对线性和非线性方程都可适用. 但是在接下来的章节中, 它将会被用于推导线性偏微分方程的基本解. 因此, 此处的不变原理公式只用于线性方程.

定义 9.2.1 设 L 是一个自变量为 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 的线性偏微分算子, 微分方程 $L(u) = f(x)$ 容许群 G. 如果如下条件成立:

1) 流形 S 在 H 下是不变的,

2) 边值 (初值) 条件 $u\big|_S = h(x)$ 在由 S 引入的群 $\widetilde{H}$ 下是不变的, 其中 $\widetilde{H}$ 被限制在 S 上,

则边值问题

$$L(u) = f(x), \quad u\big|_S = h(x) \tag{9.2.1}$$

称为在一个子群 $H \subset G$ 下不变.

不变原理 如果边值 (初值) 问题 (9.2.1) 在群 H 下是不变的, 该问题的解应该在 H 下的函数不变量中寻找.

9.2.2 常系数线性方程的基本解

定义 9.2.2 常系数线性微分算子 L 的基本解是一个广义函数 $\mathcal{E}$, 且

$$L\mathcal{E} = \delta. \tag{9.2.2}$$

接下来将介绍基本解的特征属性.

定理 9.2.1 令 $\mathcal{E}$ 为一个常系数线性微分算子 L 的基本解, 则函数

$$u = \mathcal{E} * f \tag{9.2.3}$$

是非齐次方程

$$Lu = f \tag{9.2.4}$$

的解.

证明 运用卷积的性质 (8.2.11)—(8.2.15), 得到

$$Lu = L(\mathcal{E} * f) = (L\mathcal{E}) * f = \delta * f = f.$$

9.2.3 拉普拉斯方程的应用

考虑一个含有任意数 $n \geqslant 3$ 元的变量 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 的拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = 0. \tag{9.2.5}$$

方程 (9.2.5) 的对称性包含了由

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$Y_i = (2x^i x^j - |x|^2 \delta^{ij}) \frac{\partial}{\partial x^j} + (2-n) x^i u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{9.2.6}$$

$$Z_1 = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Z_2 = u \frac{\partial}{\partial u} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

生成的有限维李代数以及其对应的生成元为

$$X_\tau = \tau \frac{\partial}{\partial u}$$

的无限维代数, 其中 $\tau = \tau(x)$ 是拉普拉斯方程的一个任意解. 接下来, 我们设 $\tau(x) = 0$ 并且只用到生成元 (9.2.6).

下面来求基本解 $\mathcal{E}(x)$. 我们将对方程 (9.2.2) 应用不变原理求基本解:

$$\Delta \mathcal{E} = \delta(x). \tag{9.2.7}$$

即我们将认为方程 (9.2.7) 是一个已给出 δ 方程的有固定奇点 (原点) 的边值问题. 我们首先从 (9.2.6) 挑选出不变奇点 $x = 0$ 的算子. 容易发现所有的算子 (9.2.6) 除了变换生成元 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ 都满足这些属性. 对于旋转的生成元 X_{ij} 以及伸缩生成元 Z_1 和 Z_2 这是显而易见的, 因为 $Y_i(x^k) = 2x^i x^k - |x|^2 \delta^{ik}$, 所以 Y_i 的不变性验证 $Y_i(x^k)\big|_{x=0} = 0$ 也是显然的.

现在我们来看方程 (9.2.7) 的不变性. 首先注意到方程 (9.2.7) 容许算子 X_{ij}, 这是因为拉普拉斯方程和 δ 函数对于旋转变换是不变的. 既然要考虑伸缩生成元 Z_1 与 Z_2, 它们就不能分开考虑. 因此我们测试它们线性组合

$$Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + ku \frac{\partial}{\partial u} \tag{9.2.8}$$

的不变性. 延拓算子 (9.2.8) 至二阶微分 u_{ii} 以及根据 (8.4.23) 延拓它对 δ 函数的作用. 注意到在此例中我们得到 $D_i(\xi^i) = n$ 以及通过延拓算子得到

$$\widetilde{Z} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + ku \frac{\partial}{\partial u} + (k-1) u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + (k-2) u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} - n\delta \frac{\partial}{\partial \delta}. \tag{9.2.9}$$

所以

$$\tilde{Z}(\Delta u-\delta)=(k-2)\Delta u+n\delta.$$

因此, 该不变性条件可以写成

$$\widetilde{Z}(\Delta u-\delta)|_{\Delta u=\delta}=(k-2+n)\delta=0,$$

则 $k=2-n$. 这样方程 (9.2.7) 容许算子

$$X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j},\quad Z=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}+(2-n)u\frac{\partial}{\partial u}\cdot \tag{9.2.10}$$

同样可验证算子 Y_i 也是被容许的. 但是我们不需要它们, 并认为它们是基本解的多余对称.

基于不变原理, 我们应该寻找关于生成元 (9.2.10) 的方程 (9.2.7) 的不变解. 该生成元 X_{ij} 有两个独立的不变量, 即 u 和 $r=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$. 我们把算子 Z 写成这些不变量:

$$Z=r\frac{\partial}{\partial r}+(2-n)u\frac{\partial}{\partial u},$$

解这个方程 $Z\big(J(r,u)\big)=0$ 获得算子 (9.2.10) 的不变量

$$J=ur^{n-2}.$$

将不变解写成形式 $J=C=$ 常数, 由此可得

$$u=Cr^{2-n}. \tag{9.2.11}$$

我们从 8.3 节可以知道函数 (9.2.11) 作为一个常数因子满足方程 (9.2.7), 即比较 (9.2.11) 和 (8.3.8) 得到常数 C 的值:

$$C=\frac{1}{(2-n)\omega_n},$$

其中 ω_n 是单位球面的表面积. 因此, 方程 (9.2.5) 在 $n\geqslant 3$ 的基本解 $\mathcal{E}_n$ 有形式 (参见 (8.3.12))

$$\mathcal{E}_n=\frac{1}{(2-n)\,\omega_n}\,r^{2-n}=\frac{\Gamma(n/2)}{2(2-n)\sqrt{\pi^n}}\,r^{2-n}. \tag{9.2.12}$$

总结: 拉普拉斯方程 (9.2.5) 的基本解是由作为常数因子的不变性条件所决定的. 方程 (9.2.7) 只是起了归一化条件的作用.

相似地, 不变原理可以用在 $n=2$ 的情形, 获得有两个变量 (5.2.25) 的拉普拉斯方程

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{9.2.13}$$

的基本解 (参见 (8.3.13))

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi} \ln r. \tag{9.2.14}$$

在 $n = 3$ 这个重要的情形中, 公式 (9.2.12) 给出了三维变量 (1.3.20) 的拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{9.2.15}$$

的基本解 (参见 (8.3.13))

$$\mathcal{E}_3 = -\frac{1}{4\pi r}. \tag{9.2.16}$$

9.2.4 热传导方程的应用

考虑 n 维空间变量 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 的热传导方程

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{9.2.17}$$

其中 Δ 是在 x^i 中的 n 维拉普拉斯算子 (见方程 (9.2.5)).

方程 (9.2.17) 的对称性包括了由

$$\begin{gathered} X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ Z_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Z_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad Z_{0i} = 2t\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i u \frac{\partial}{\partial u}, \\ Y = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{4}(2nt + |x|^2) u \frac{\partial}{\partial u} \end{gathered} \tag{9.2.18}$$

生成的有限维李代数和含有生成元

$$X_\tau = \tau \frac{\partial}{\partial u}$$

的无穷维的代数, 其中 $\tau = \tau(t, x)$ 是热传导方程的一个任意解. 我们设 $\tau(t, x) = 0$ 并只用生成元 (9.2.18).

方程 (9.2.2) 关于基本解 $\mathcal{E}(t, x)$ 有形式

$$\mathcal{E}_t - \Delta \mathcal{E} = \delta(t, x) \tag{9.2.19}$$

并且在有生成元

$$\begin{gathered} X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z_{0i} = 2t\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i u \frac{\partial}{\partial u}, \\ Z = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - nu\frac{\partial}{\partial u} \end{gathered} \tag{9.2.20}$$

的群下是不变的. 我们可以通过重复使用在拉普拉斯方程时的过程得到算子 (9.2.20). 即它们是通过要求点 $(t=0,x=0)$ 的不变性和方程 (9.2.19) 的不变性而从生成元 (9.2.18) 中挑选出来的.

我们应用不变原理. 对于 X_{ij} 的不变量是 t,r,u. 在这些不变量的空间里, 算子 Z_{0i} 写成

$$Z_{0i}=x^i\Big(2\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}-u\frac{\partial}{\partial u}\Big).$$

解方程 $Z_{0i}(J)=0$, 从而获得旋转和伽利略变换的两个不变量, 即 t 和 $p=u\,\mathrm{e}^{r^2/(4t)}$. 在这些不变量下重写 (9.2.20) 的最后一个算子:

$$Z=2t\frac{\partial}{\partial t}-np\frac{\partial}{\partial p}$$

并且解方程 $Z(J)=0$, 我们获得下面的不变量:

$$J=t^{n/2}p\equiv u\big(\sqrt{t}\big)^n\mathrm{e}^{r^2/(4t)}.$$

从 $J=$ 常数, 得出不变解, 即

$$u=\frac{C}{\big(\sqrt{t}\big)^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}},\quad t>0.$$

通过令 $u=0$ 我们扩展不变解至 $t<0$ 的情形, 换言之,

$$u=\frac{C\theta(t)}{\big(\sqrt{t}\big)^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}},\tag{9.2.21}$$

其中 $\theta(t)$ 是变量 t 的 Heaviside 函数 (8.1.5), 方程 (9.2.19) 再次起到归一化条件的作用. 在习题 9.10 和在下一节中 $C=(2\sqrt{\pi})^{-n}$ 出现. 这样我们得到了 n 维空间变量热传导方程相应的基本解

$$\mathcal{E}_n=\frac{\theta(t)}{\big(2\sqrt{\pi t}\big)^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}.\tag{9.2.22}$$

9.3 热传导方程的柯西问题

本节介绍柯西问题基本解的概念, 并用不变原理求解热传导方程. 从计算中得到, 热传导过程可以直接从不变原理推导出来.

9.3.1 柯西问题的基本解

定义 9.3.1 分布 $E(t,x)$ 称为热传导方程的柯西问题的基本解, 如果它是初值问题

$$E_t-\Delta E=0,\quad E\big|_{t=0}=\delta(x)\tag{9.3.1}$$

的解.

定理 9.3.1 (见习题 9.7) 如果 $E(t,x)$ 是柯西问题的基本解, 那么柯西问题

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x) \tag{9.3.2}$$

的解由 E 和初始函数 $u_0(x)$ 的卷积给出:

$$u(t,x) = E * u_0 = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) E(t, x-\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{9.3.3}$$

定理 9.3.2 假设 $E(t,x)$ 是柯西问题的基本解, $\theta(t)$ 是 Heaviside 函数. 那么

$$\mathcal{E} = \theta(t) E(t,x) \tag{9.3.4}$$

就是热传导方程的基本解, 即 $\mathcal{E}_t - \Delta \mathcal{E} = \delta(t,x)$.

证明 事实上, 我们知道

$$\mathcal{E}_t - \Delta \mathcal{E} = \theta'(t) E(t,x) + \theta(t)(E_t - \Delta E).$$

因此, 调用方程 (9.3.1) 并使用分布性质 (8.2.4), (8.2.2) 以及 (8.2.8), 最终得到方程 (9.2.19):

$$\mathcal{E}_t - \Delta \mathcal{E} = \delta(t) E(t,x) = \delta(t) E(0,x) = \delta(t) \otimes \delta(x) = \delta(t,x).$$

9.3.2 用不变原理求解柯西问题基本解

引理 9.3.1 满足初值问题 (9.3.1) 的李代数是由以下 (9.2.18) 的算子生成:

$$X_{ij},\ Z_{0i},\ Z_1 - nZ_2,\ Y, \quad i,j = 1, \cdots, n. \tag{9.3.5}$$

证明 因为微分方程 (9.2.17) 容许代数 L, 我们只需要考虑初始条件的不变性. 这里初始流形 S 由 $t=0$ 给出. 此外, 初始数据的不变性 (9.3.1) 预先假设 $\delta(x)$ 的支集, 即点 $x=0$, 保持不变. 因此, 定义 9.2.1 需要方程 $t=0$ 和 $x=0$ 的不变性. 这个条件从代数 L 处消掉了变换生成元 X_i, X_0, 因此 (9.2.18) 可以简化成

$$X_{ij},\ Z_{0i},\ Z_1,\ Z_2,\ Y.$$

(9.3.1) 中的初始条件是在算子 X_{ij}, Z_{0i} 和 Y 下的不变量. 但是在由 Z_1, Z_2 生成的二维代数中它是变量. 因此, 我们需要检查线性叠加

$$(Z_1 + kZ_2)\big|_{t=0} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + ku\frac{\partial}{\partial u}, \quad k = 常数$$

的不变性. 在这个算子下, 变量 u 和 δ 函数由转换方程

$$\overline{u} \approx u + aku, \quad \overline{\delta} \approx \delta - an\delta$$

得到, $\overline{u} - \overline{\delta} = u - \delta + a(ku + n\delta) + o(a)$, 并且

$$(\overline{u} - \overline{\delta})\big|_{u=\delta} = a(k+n)\delta + o(a).$$

因此, (9.3.1) 的不变性条件的形式是 $k + n = 0$. 从而我们得到算子 (9.3.5).

定理 9.3.3 n 维空间变量的热传导方程的柯西问题的基本解的形式是

$$E_n(t,x) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}. \tag{9.3.6}$$

这是唯一满足初始条件 (9.3.1) 的函数 $E = u(t,x)$, 并且该函数在有着无穷小生成元

$$X_{ij}, \quad Z_{0i}, \quad Z_1 - nZ_2, \quad i,j = 1, \cdots, n \tag{9.3.7}$$

的旋转群、伽利略变换群以及伸缩群下是不变的.

证明 首先我们注意到在旋转群下函数无关的不变量是 t, r, u. 于是我们把伽利略算子 Z_{0i} 写成这些不变量的函数:

$$Z_{0i} = x^i \left(2\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r} - u\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

对于这些算子, 其对应的无关不变量是 t 和 $p = u\exp(r^2/(4t))$. (9.3.7) 的最后一个算子被写成形式

$$Z_1 - nZ_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - np\frac{\partial}{\partial p}.$$

它有唯一的无关不变量 $J = t^{n/2}p = t^{n/2}u\exp(r^2/(4t))$. 因此可以总结出, 不变量函数 $E = u(t,x)$ 的一般形式是从方程 $J = C$ 获得, 由此

$$u = \frac{C}{\left(\sqrt{t}\right)^n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}, \quad t > 0.$$

这里令 $t \to 0$, 用初始条件 (9.3.1) 并且调用方程 (8.1.12), 我们得到 $C = (2\sqrt{\pi})^{-n}$. 因此我们得到 (9.3.6).

注 9.3.1 热传导方程的基本解 (9.2.22) 是通过将 (9.3.6) 代入方程 (9.3.4) 得到的.

9.3.3 柯西问题的解

由方程 (9.2.22), (9.3.6), (9.3.3) 和 (9.2.3) 得出如下结果.

定理 9.3.4 热传导方程 (9.2.17) 的基本解 $\mathcal{E}$ 和该热传导方程的柯西问题基本解 E 分别有形式 (9.2.22)

$$\mathcal{E}=\frac{\theta(t)}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}$$

和 (9.3.6)

$$E(t,x)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

柯西问题 (9.3.2)

$$u_t-\Delta u=0,\quad u\big|_{t=0}=u_0(x)$$

的解由以下公式给出:

$$u(t,x)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{\mathbb{R}^n}u_0(\xi)\,\mathrm{e}^{\frac{-|x-\xi|^2}{4t}}\mathrm{d}\xi,\quad t>0,\tag{9.3.8}$$

其中 $u_0(x)$ 为连续初始数据. 考虑到非齐次热传导方程

$$u_t-\Delta u=f(t,x),\quad u\big|_{t=0}=u_0(x)\tag{9.3.9}$$

的柯西问题, 其中 $f(t,x)(t\geqslant 0)$ 是二阶连续可微函数, $u_0(x)$ 是一个连续初始值. 该问题的解由下式给出:

$$\begin{aligned}u(t,x)=&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\tau,\xi)}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}\mathrm{e}^{\frac{-|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\&+\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{\mathbb{R}^n}u_0(\xi)\,\mathrm{e}^{\frac{-|x-\xi|^2}{4t}}\mathrm{d}\xi,\quad t>0.\end{aligned}\tag{9.3.10}$$

9.4 波动方程

9.4.1 微分形式的初步知识

假设 $\phi=\phi(x)$ 是可微函数, 其中 $x=(x^1,\cdots,x^n)$. 对函数 ϕ 的微分

$$\mathrm{d}\phi=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

可以写为

$$\mathrm{d}\phi=\phi_i\mathrm{d}x^i,$$

其中 $\phi_i=\partial\phi(x)/\partial x^i$. 下面是对本章讨论很有价值的关于微分性质的归纳.

定义 9.4.1 微分 1-形式有形式

$$\omega = a_i(x)\mathrm{d}x^i, \tag{9.4.1}$$

其中 $a_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$ 是任意函数.

特别地, 如果系数 $a_i(x)$ 是函数 ϕ 的偏微分形式, 则微分 1-形式 ω 就转变为对 ϕ 的微分

$$\omega = \mathrm{d}\phi.$$

假设 S 是三维空间 (x, y, z) 的一个曲面. 用符号 $\mathrm{d}S$ 表示面元, $\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ 表示垂直于单位曲面 $\mathrm{d}S$ 的外法线, 其中 ν^1, ν^2 和 ν^3 是 $\boldsymbol{\nu}$ 沿着各自 x, y 和 z 轴的元素. 在曲面积分的理论中, 定向曲面和面元是经常会用到的概念. 即, 一个定向曲面元 (或者称为向量曲面元) 的定义如下:

$$\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S = (\nu^1\mathrm{d}S,\ \nu^2\mathrm{d}S,\ \nu^3\mathrm{d}S).$$

它的分量是向量 $\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S$ 各自沿着坐标面 (y, z), (z, x) 和 (x, y) 的投影, 并可以使用下列形式表示 (参见 1.3.4 节):

$$\nu^1\mathrm{d}S = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \quad \nu^2\mathrm{d}S = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \quad \nu^3\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.4.2}$$

这个概念假定我们使用 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 系统的右手定则来确定 $\mathrm{d}S$ 的方向. 如果要改变定向, 只需调换 y 和 z 和用 $-\nu^1\mathrm{d}S$ 替换 $\nu^1\mathrm{d}S$. 因此, $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y = -\nu^1\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, 等等. 同理, 我们可以把外积 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ 和沿着 y 和 x 轴的向量 $\mathbf{d}\boldsymbol{y}$ 和 $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$ 的向量积联系起来.

如果 x^i 是 n 维的变量, 上面结果的一般形式将导出一个外积 $\wedge$, 它遵循规则

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \text{ (特别地, } \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i = 0). \tag{9.4.3}$$

定义 9.4.2 微分 2-形式有形式

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, \tag{9.4.4}$$

其中 $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \cdots, n$ 是任意函数. 根据外积性质 (9.4.3), (9.4.4) 可以简化为形式

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij}(x)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j. \tag{9.4.5}$$

定义 9.4.3 微分 p-形式 (简化为 p-形式) 写成

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}, \tag{9.4.6}$$

其中 $x=(x^1,\cdots,x^n)$, $\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^n)$, 并且 $a_{i_1\cdots i_p}(x)$ 是连续可微函数. 上述求和遍历所有满足 $i_1<\cdots<i_p$ 的 $i_1,\cdots,i_p=1,\cdots,n$.

外微分计算重在考虑处理微分形式, 而且被如下定义的遵循规则 (9.4.3) 的外积 $\wedge$ 和外微分所决定:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}. \tag{9.4.7}$$

根据 (9.4.7), p-形式 ω 的微分 $\mathrm{d}\omega$ 是 $(p+1)$-形式. 外微分和外积遵循下列规则:

$$\mathrm{d}^2\omega \equiv \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0, \tag{9.4.8}$$

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}\eta\wedge\omega, \tag{9.4.9}$$

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\eta, \tag{9.4.10}$$

其中 ω 是 p-形式, η 是 q-形式. 如果 $p=n$, 那么对于任意 n-形式将可以写为 $\omega = a(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$, 而且也存在积分定义

$$\int\omega = \int a(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n. \tag{9.4.11}$$

定义 9.4.4 如果

$$\mathrm{d}\omega = 0, \tag{9.4.12}$$

那么形式 ω 称为封闭的, 并且如果存在 $(p-1)$-形式 η 使得

$$\omega = \mathrm{d}\eta, \tag{9.4.13}$$

那么形式 ω 称为全微分形式.

方程 (9.4.8) 说明了任意的全微分形式都是封闭的. 如下 Poincaré 定理证实了其逆也是成立的.

定理 9.4.1 微分形式 ω 是封闭的当且仅当它是局部全微分, 即方程 (9.4.13) 在非特殊点 x 的邻域内成立.

例 9.4.1 在外微分计算的符号中, 全微分方程 (3.2.3) 的定义 3.2.1 意味着方程 (3.2.3) 的左边

$$\omega \equiv M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y$$

是全微分 1-形式 (见 (9.4.1), 其中 $n=2$), 即 $\omega = \mathrm{d}\Phi$. 调用 (9.4.7) 和 (9.4.3), ω 的微分可以写为

$$\mathrm{d}\omega = \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.4.14}$$

由于定理 9.4.1 说明了 ω 是全微分等价于 $\mathrm{d}\omega = 0$, 那么方程 (9.4.14) 将可以得到全微分性的 (3.2.6) 的典型条件.

在 3.2.3 节中所讨论的积分因子的概念也同时适合于微分形式. 即若 $\mathrm{d}(\mu\omega) = 0$, 我们称 $\mu(x)$ 是微分形式 ω 的积分因子. 根据 3.2.3 节, 任何 1-形式都存在一个积分因子.

外微分计算允许我们将 1.3.4 节中提到的三个经典的积分定理推广到如下更高维的形式.

定理 9.4.2 假设 V 是一个 p 维流形 (例如 V 是一在 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 p 维域, $p \leqslant n$), 其边界为 ∂V, 同时令 ω 是 $(p-1)$-形式, 则 Stokes 公式有形式

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V \mathrm{d}\omega. \tag{9.4.15}$$

下面我们证明 Green 公式、Stokes 公式和散度定理只是方程 (9.4.15) 的特殊形式.

Green 公式的推导 在这种情况下, V 是一个在 $\mathbb{R}^2$ 的二维域. 我们考虑微分 1-形式

$$\omega = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y. \tag{9.4.16}$$

由外微分 (9.4.7) 可得

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y,$$

使用外积的性质 (9.4.3) 可得

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{9.4.17}$$

把 (9.4.16) 和 (9.4.17) 代入 (9.4.15), 且调用微分形式的积分的定义 (9.4.11) , 我们就可以得到 Green 公式 (1.3.16)

$$\int_{\partial V} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Stokes 公式的推导　设 V 是在 $\mathbb{R}^3$ 空间上的二维域, 同时设

$$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z. \tag{9.4.18}$$

使用外微分 (9.4.7) 并调用

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$$

可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega =& \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega =& \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{9.4.19}$$

将 (9.4.18) 和 (9.4.19) 代入 (9.4.15), 可以得到方程 (1.3.17).

散度定理的推导 ($\dim V = 3$, $V \subset \mathbb{R}^3$)　利用方程 (9.4.2) 将方程的 (1.3.18) 的左边改写, 考虑微分 2-形式

$$\omega = A^1\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A^3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \equiv (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}S. \tag{9.4.20}$$

调用微分 (9.4.7) 并调用 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0$ 可得

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial A^1}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial A^2}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial A^3}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

利用性质 (9.4.9) 可得

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z. \tag{9.4.21}$$

将方程 (9.4.20) 和 (9.4.21) 代入 (9.4.15) 即可得 (1.3.18).

9.4.2 相伴齐次方程的分布

在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑由一个连续可微函数 $P(x)$: $P(x) = 0$ 决定的曲面. 假设在曲面 $P(x) = 0$ 上 $\nabla P \neq 0$.

定义 9.4.5 在曲面 $P(x)=0$ 上, *Leray* 形式 ([24], 第 IV 章, §1) 是 $(n-1)$-形式 ω, 并满足方程

$$\mathrm{d}P\wedge\omega=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

也可以以另外一种形式表示 (见 [24]):

$$\omega=(-1)^{i-1}\frac{\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i-1}\wedge\mathrm{d}x^{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n}{P_i},\tag{9.4.22}$$

对于任意的固定的 i 有 $P_i\equiv\partial P(x)/\partial x^i\neq 0$.

在曲面 $P(x)=0$ 上的 *Heaviside* 函数 $\theta(P)$ 的定义为

$$\theta(P)=\begin{cases}1, & P\geqslant 0,\\ 0, & P<0.\end{cases}$$

它可以与如下分布视为是等同的:

$$\big(\theta(P),\varphi\big)=\int_{P\geqslant 0}\varphi(x)\mathrm{d}x.\tag{9.4.23}$$

在曲面 $P(x)=0$ 上的狄拉克 δ 函数 $\delta(P)$ 的定义为

$$\big(\delta(P),\varphi\big)=\int_{P=0}\varphi\omega,\tag{9.4.24}$$

其中 ω 是 Leray 形式. 方程 (8.2.4) 将这里的两个分布联系了起来:

$$\theta'(P)=\delta(P).\tag{9.4.25}$$

使用上面的分布, 我们将可以明确地阐述和求解*相伴齐次微分方程*, 即一阶包含分布. 它们将用于求解波动方程的柯西问题. 我们从最简单的方程开始. 即考虑只含有一个自变量 x 的方程

$$xf'=0,\tag{9.4.26}$$

其唯一的经典解为 $f=$常数. 然而在分布空间中它却有更多的解. 当然, 在方程 (8.2.2) 中令 $\alpha(x)=x$, $\alpha(x)\delta=\alpha(0)\delta$, 可得

$$x\delta(x)=0.\tag{9.4.27}$$

调用 $\theta'(x)=\delta(x)$, 其中 $\theta(x)$ 是单变量 x 的 Heaviside 函数, 我们得到如下结论: 在分布空间中方程 (9.4.26) 有与 $f=$常数不同的解 $f=\theta(x)$. 由于方程 (9.4.26) 是线性的, 线性组合

$$f=C_1\theta(x)+C_2\tag{9.4.28}$$

给出了一个含有两个任意常数 C_1 和 C_2 的分布解. 下列理论得到了方程 (9.4.27) 和 (9.4.26) 解的一般形式.

定理 9.4.3 狄拉克的 δ 函数 (9.4.24) 满足下列方程组:

$$P\delta(P)=0, \tag{9.4.29}$$

$$P\delta^{(m)}(P)+m\delta^{(m-1)}(P)=0, \quad m=1,2,\cdots. \tag{9.4.30}$$

证明 利用定义 (9.4.24) 可得

$$\big(P\delta(P),\ \varphi\big)=\big(\delta(P),\ P\varphi\big)=\int_{P=0}P\varphi\omega=0,$$

即方程 (9.4.29) 成立. 进而设 $\partial P/\partial x^i\neq 0$ (对于某些 i, 从条件 $\mathrm{grad}P\neq 0$ 的角度看就是正确的), 在方程 (9.4.29) 中对 x^i 求微分得

$$\frac{\partial P}{\partial x^i}\,\delta(P)+P\delta'(P)\frac{\partial P}{\partial x^i}=0,$$

对上式两边同除以 $\partial P/\partial x^i$ 可以得到当 $m=1$ 的方程 (9.4.30). 连续的微分将可以得到当 $m=2,3,\cdots$ 时的方程 (9.4.30). 得证.

定理 9.4.4 一阶微分方程

$$Pf'(P)+mf(P)=0 \tag{9.4.31}$$

有下列在分布空间中的解的一般形式:

$$f=C_1\theta(P)+C_2, \qquad \text{当} \quad m=0, \tag{9.4.32}$$

$$f=C_1\delta^{(m-1)}(P)+C_2P^{-m}, \qquad \text{当} \quad m=1,2,\cdots. \tag{9.4.33}$$

证明 利用定理 9.4.3 并注意 $f=P^{-m}$ 是方程 (9.4.31) 的一个经典解. 至于更详尽的讨论, 可参见 [8].

9.4.3 波动方程基本解的对称性定义

考察多变量的波动方程 (见方程 (2.6.18))

$$u_{tt}-\Delta u=0, \tag{9.4.34}$$

这里 Δ 是一个关于 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 的 n 维拉普拉斯算子.

波动方程 (9.4.34) 的对称性包含 (参见洛伦茨群的生成元 (7.3.49)) 由算子

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_i=\frac{\partial}{\partial x^i},\quad X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j},\quad X_{0i}=t\frac{\partial}{\partial x^i}+x^i\frac{\partial}{\partial t},$$

$$Z_1=t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ Z_2=u\frac{\partial}{\partial u},\ Y_0=(t^2+|x|^2)\frac{\partial}{\partial t}+2tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}-(n-1)tu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_i = 2tx^i\frac{\partial}{\partial t} + \left(2x^ix^j + (t^2 - |x|^2)\delta^{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} - (n-1)x^iu\frac{\partial}{\partial u} \tag{9.4.35}$$

生成的有限维李代数, 其中 $i, j = 1, \cdots, n$, 和含有生成元

$$X_\tau = \tau(t,x)\frac{\partial}{\partial u}$$

的无限维代数, 其中 $\tau(t,x)$ 是波动方程的任意解. 我们将设 $\tau(t,x) = 0$ 并仅用生成元 (9.4.35).

方程 (9.2.2) 定义了如下波动方程的基本解 $\mathcal{E}_{(t,x)}$:

$$\mathcal{E}_{tt} - \Delta\mathcal{E} = \delta(t,x). \tag{9.4.36}$$

让我们用近似于热传导方程的方法给出波动方程的柯西问题的基本解的定义. 注意到一般的有任意初始条件的柯西问题

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \tag{9.4.37}$$

能被简化为特殊柯西问题

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = h(x). \tag{9.4.38}$$

事实上, 我们能容易地检验以下的结论.

引理 9.4.1 令 $v(t,x)$ 和 $w(t,x)$ 分别为特殊柯西问题 (9.4.38) 在 $h(x) = u_0(x)$ 和 $h(x) = u_1(x)$ 时的解. 那么函数

$$u(t,x) = w(t,x) + \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \tag{9.4.39}$$

是一般柯西问题 (9.4.37) 的解.

定义 9.4.6 *如果分布 $E(t,x)$ 满足特殊柯西问题*

$$E_{tt} - \Delta E = 0 \ (t > 0), \quad E\big|_{t=0} = 0, \quad E_t\big|_{t=0} = \delta(x), \tag{9.4.40}$$

其中

$$E\big|_{t=0} \equiv \lim_{t\to+0} E(t,x), \quad E_t\big|_{t=0} \equiv \lim_{t\to+0}\frac{\partial E(t,x)}{\partial t}.$$

那么它称为波动方程柯西问题的基本解.

定理 9.4.5 令 $E(t,x)$ 为柯西问题的基本解. 那么柯西问题 (9.4.38) 的解由 E 及初始函数 $h(x)$ 的卷积给出:

$$u(t,x) = E * h(x).$$

注 9.4.1 令 $E(t,x)$ 为柯西问题的基本解. 那么 $\mathcal{E} = \theta(t)E(t,x)$ 就是波动方程的基本解, 即 $\mathcal{E}_{tt} - \Delta\mathcal{E} = \delta(t,x)$.

9.4.4 基本解的求解

使用在 9.3.2 节中引理 9.3.1 的方法, 我们能得到如下结论.

引理 9.4.2 方程 (9.4.40) 的基本解容许的李代数由 (9.4.35) 中的以下算子生成:

$$X_{ij},\ X_{0i},\ Z_1+(1-n)Z_2,\ Y_0,\ Y_i,\quad i,j=1,\cdots,n. \tag{9.4.41}$$

我们在此得到奇数 n 维波动方程的柯西问题的基本解. 偶数 n 维波动方程的基本解可通过以下我们熟知的 Hadamard 的降维法得到, 参见 [12] (也可参见 [4], [14]).

定理 9.4.6 带奇数维空间变量的波动方程 (9.4.34) 的柯西问题基本解有以下的形式:

$$E_1=\frac{1}{2}\theta(t^2-x^2),\quad \text{当 } n=1, \tag{9.4.42}$$

$$E_3=\frac{1}{2\pi}\delta\left(t^2-r^2\right),\quad \text{当 } n=3, \tag{9.4.43}$$

$$E_n=\frac{1}{2\sqrt{\pi}^{\,n-1}}\delta^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\left(t^2-r^2\right),\quad \text{当 } n>3. \tag{9.4.44}$$

它可以由不变原理唯一确定. 即由 (9.4.42)—(9.4.44) 给出的 $E(t,x)$ 是特殊柯西问题 (9.4.40) 的唯一分布解, 且在含有无穷生成元

$$X_{ij},\quad X_{0i},\quad Z_1+(1-n)Z_2,\quad i,j=1,\cdots,n \tag{9.4.45}$$

的旋转群、洛伦茨变换群及伸缩群下不变.

证明 旋转群及洛伦茨变换群的生成元 X_{ij}, X_{0i} 有两个独立不变量 u 和 $p=t^2-r^2$, 其中 $r=|x|$. 我们限制由 (9.4.45) 中给出的伸缩生成元所产生的不变量

$$Z_1+(1-n)Z_2=2p\frac{\partial}{\partial p}+(1-n)u\frac{\partial}{\partial u} \tag{9.4.46}$$

并寻找形式 $u=f(p)$ 的不变量分布. 在算子 (9.4.46) 下的不变量验证中得出常微分方程

$$2pf'(p)+(n-1)f(p)=0.$$

我们设 $n=2m+1$ 并将它写为形式 (9.4.31)

$$pf'(p)+mf(p)=0,\quad m=0,1,\cdots.$$

当 $m=0$ 时, 它的一般解由 (9.4.32) $f(p)=C_1\theta(p)+C_2$ 给出; 当 $m\neq 0$ 时由 (9.4.33) $f(p)=C_1\delta^{(m-1)}(p)+C_2p^{-m}$ 给出. 因此

$$u=C_1\theta(p)+C_2 \qquad (n=1),$$

$$u=C_1\delta^{(\frac{n-3}{2})}(p)+C_2p^{\frac{1-n}{2}} \quad (n\geqslant 3).$$

利用 (9.4.40) 的初始条件和已知方程

$$\lim_{t\to 0}\delta^{(\frac{n-3}{2})}(p)=0, \quad \lim_{t\to 0}\theta(p)=0,$$

就可以得到

$$C_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi^{n-1}}}, \quad C_2=0.$$

因此, 我们得到基本解 (9.4.42)—(9.4.44).

利用等式 (8.4.8) 我们将 (9.4.43) 写成形式

$$E_3=\frac{1}{4\pi r}\Big(\delta(t-r)-\delta(t+r)\Big).$$

9.4.5 柯西问题的解

一维波动方程的柯西问题的解由 (5.4.11) 给出. 使用基本解, 我们就可以得到关于 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 的波动方程的解, 下面给出 $n=3$ 和 $n=2$ 时的情形.

定理 9.4.7 柯西问题

$$u_{tt}-k^2\Delta u=f(t,x), \quad u\big|_{t=0}=u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0}=u_1(x) \tag{9.4.47}$$

的解为

$$u(t,x)=\frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=kt}u_1(\xi)\mathrm{d}S+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=kt}u_0(\xi)\mathrm{d}S\right)\right.$$
$$\left.+\int\limits_{|\xi-x|<kt}f\left(t-\frac{|\xi-x|}{k},\xi\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi-x|}\right), \quad \text{当 } n=3, \tag{9.4.48}$$

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi k}\left(\int\limits_{|\xi-x|<kt}\frac{u_1(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{k^2t^2-|\xi-x|^2}}+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<kt}\frac{u_0(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{k^2t^2-|\xi-x|^2}}\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int\limits_{|\xi-x|<k(t-\tau)}\frac{f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{\sqrt{k^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}\right), \quad \text{当 } n=2. \tag{9.4.49}$$

9.5 变系数方程

不变原理提供了一个得到计算变量系数线性方程基本解的有效方法. 例如我们提到的用不变原理求解 Black-Scholes 方程的基本解. 我们可以在 [20], 第 3 章中找到, 含有变量系数的双曲型方程, 即非平凡共形群的弯曲时空中的波动方程的不变原理的应用.

Black-Scholes 方程 (2.4.15) 的柯西问题的基本解是满足以下初值问题的分布 $E(t,x;t_0,x_0)$:

$$E_t+\frac{1}{2}A^2x^2E_{xx}+BxE_x-CE=0\ (t<t_0),\quad E\Big|_{t\to -t_0}=\delta(x-x_0). \tag{9.5.1}$$

用不变原理就可以得到如下的基本解 (见 [15] 的英文或瑞典文版以及其中的参考文献):

$$E(x,t;x_0,t_0)=\frac{1}{Ax_0\sqrt{2\pi(t_0-t)}}\exp\Bigg(-\frac{(\ln x-\ln x_0)^2}{2A^2(t_0-t)}$$

$$-\Big(\frac{K^2}{2A^2}+C\Big)(t_0-t)-\frac{K}{A^2}(\ln x-\ln x_0)\Bigg),\quad K=B-\frac{A^2}{2}\cdot \tag{9.5.2}$$

习题九

9.1. 使用不变原理, 求解两个变量的拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的基本解 (9.2.14).

9.2. 证明含两个变量的 1-形式 (9.4.16) 的性质 (9.4.8).

9.3. 证明含三个变量的 1-形式 (9.4.18) 的性质 (9.4.8).

9.4. 证明任意的 p-形式 (9.4.6) 的性质 (9.4.8).

9.5. 证明性质 (9.4.9).

9.6. 证明方程 (9.4.25).

9.7. 证明定理 9.3.1, 即证明如果 $E(t,x)$ 是热传导方程的柯西问题的基本解, 则卷积

$$u(t,x)=E*u_0=\int_{\mathbb{R}^n}u_0(y)E(t,x-y)\mathrm{d}y$$

是柯西问题

$$u_t-\Delta u=0,\quad u\big|_{t=0}=u_0(x)$$

的解.

9.8. 证明定理 9.4.5, 即证明如果 $E(t,x)$ 是波动方程的柯西问题的基本解, 则卷积 $u(t,x)=E*h$ 是柯西问题 (9.4.38)

$$u_{tt}-\Delta u=0,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=h(x)$$

的解.

9.9. 推导三维波动方程的柯西问题的解 (9.4.48).

9.10. 对三维波动方程的解 (9.4.48) 应用降维法来推导二维波动方程的柯西问题的解 (9.4.49).

9.11. 证明函数 (9.2.21)

$$u = \frac{C\theta(t)}{(\sqrt{t})^n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}$$

在 $C = (2\sqrt{\pi})^{-n}$ 时正好满足方程 (9.2.19).

参考答案

第一章

1.2 (i) $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, (ii) $\operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$, (iii) $\operatorname{arccosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$ $(x \geqslant 1)$.

1.4 $x_1 = -1,\ x_2 = 2+i,\ x_3 = 2-i$.

1.5 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq k,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m,k = 0,1,2,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}x = \pi, \quad k = 1,2,\cdots.$$

1.8 函数组 (ii) 是函数无关的, 函数组 (i) 和 (iii) 是函数相关的.

1.9 $(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = 1/\cosh^2 x$.

1.10 函数组 (i), (iv) 和 (v) 是线性无关的, 然而函数组 (ii) 和 (iii) 是线性相关的.

1.11 $i^i = \mathrm{e}^{-\pi/2}$.

1.12 $\nabla \cdot \boldsymbol{x} = 3, \quad \nabla \times \boldsymbol{x} = 0$.

1.13 我们有

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \nabla\times(\nabla\phi)=0,\quad \text{(ii)}\ \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0,\\&\text{(iii)}\ \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}),\\&\text{(iv)}\ \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a},\\&\text{(v)}\ \nabla\cdot(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)=\phi\Delta\psi-\psi\Delta\phi.\end{aligned}$$

1.14 我们有

$$\int_V(\phi\Delta\psi-\psi\Delta\phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{\partial V}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S.$$

1.15 我们有

$$\overline{y}'=\frac{\psi_x+y'\psi_y}{\varphi_x+y'\varphi_y},\quad \overline{y}''=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_x+y'\varphi_y & \varphi_{xx}+2y'\varphi_{xy}+y'^2\varphi_{yy}+y''\varphi_y\\ \psi_x+y'\psi_y & \psi_{xx}+2y'\psi_{xy}+y'^2\psi_{yy}+y''\psi_y\end{vmatrix}}{(\varphi_x+y'\varphi_y)^3}.$$

1.16 $\overline{y}'=-\mathrm{e}^{-x}y^{-2}y'$, $\overline{y}''=(yy'+2y'^2-yy'')/(y^3\mathrm{e}^{2x})$.

1.17 $\overline{y}'''=(3y''^2-y'y''')/y'^5$.

1.18 方程 $w^3+1=0$ 的三个解分别为

$$w_1=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),\quad w_2=-1,\quad w_3=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

1.21 球面对称解为

$$\phi(r)=\frac{C_1}{r}+C_2.$$

1.25 圆型方程为

$$y'''-3\frac{y'y''^2}{1+y'^2}=0,\quad y=y(x),$$

双曲型方程为

$$z'''-\frac{3}{2}\frac{z''^2}{z'}=0,\quad z=z(t),$$

由如下的复变换联系起来: $x=z+it$, $y=t+iz$.

1.29 $\Gamma(-1/2)=-2\sqrt{\pi}$.

1.30 $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s=\sqrt{\pi}/2$.

第二章

2.1 欧拉-拉格朗日方程为

(i) $u_{tt}-\Delta u=f(t,x,y,z)$, 参见方程 (2.6.16), 其中 $k=1$;

(ii) $2u_{tx}+u_xu_{xx}-u_{yy}=0$, 参见方程 (2.3.38);

(iii) $u_{tt}+\mu u_{xxxx}=f$, 参见方程 (2.1.4);

(iv) $u_{tt}+u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=f(t,x,y)$, 参见方程 (2.6.28).

2.6 $P=\alpha C\mathrm{e}^{\alpha t}/\big(\beta C\mathrm{e}^{\alpha t}-1\big)$.

2.7 由方程 (2.3.31) 和 (1.3.15) 中的方程 9 得到

$$D_t(\operatorname{div}\boldsymbol{E})=\operatorname{div}\boldsymbol{E}_t=c\operatorname{div}(\nabla\times\boldsymbol{H})=0,$$
$$D_t(\operatorname{div}\boldsymbol{H})=\operatorname{div}\boldsymbol{H}_t=-c\operatorname{div}(\nabla\times\boldsymbol{E})=0.$$

第三章

3.1 (iv) $y=C\mathrm{e}^x-(x^2+2x+2)$, (v) $y=\mathrm{e}^{-C_1x}\left(C_2-\displaystyle\int(x+x^2)\mathrm{e}^{C_1x}\mathrm{d}x\right)$.

3.2 (vi) $y=C_1x-\ln\left|C_2-\displaystyle\int(x+x^2)\mathrm{e}^{C_1x}\mathrm{d}x\right|$.

3.3 (iii) 方程 $y'''+y=0$ 的通解是

$$y=K_1\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x/2}\Big(K_2\cos\Big(\frac{\sqrt3}{2}x\Big)+K_3\sin\Big(\frac{\sqrt3}{2}x\Big)\Big),\quad K_i=\text{常数}.$$

3.4 方程 $y'+y^2=Cx^{-2}$ 在伸缩变换 $\overline{x}=ax$, $\overline{y}=a^{-1}y$ 下是不变的, 并且齐次方程的形式只有 $y'+y^2=Cx^s$.

3.11 方程的解分别为

(i) $y=-\cos x\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C_1\cos x+C_2\sin x$.

提示: 利用 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$.

(ii) $y=\cos x\,\ln|\cos x|+x\sin x+C_1\sin x+C_2\cos x$.

(iii) $y=\sin x\,\ln|\sin x|-x\cos x+C_1\sin x+C_2\cos x$.

3.13 一般二阶方程 $f(x,y,y',y'')=0$ 通过微分变为 $g(x,y,y')y'''=0$, 具有形式

$$(ax^2+bx+c+ky)y''-\frac{k}{2}y'^2-(2ax+b)y'+2ay=0,$$

其中 $a,b,c,k=$ 常数. 对以上方程进行微分, 方程变为

$$(ax^2+bx+c+ky)y'''=0,$$

并因此可以化为线性方程 $y'''=0$.

3.14 替换 $t=\ln x$, 将问题中的方程化简为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=0$. 特征方程 $\lambda^2+\lambda+4=0$ 有根 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}$. 因此, 基础解系为

$$y_1=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right),\quad y_2=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right).$$

这样, 方程的通解为

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right)\right).$$

3.15 在方程两边同乘以 x^2, 得到欧拉方程 $x^2y''-3xy'+3y=0$, 并且通过改变自变量 $t=\ln x$ 进行积分, 简单计算后给出解 $y=C_1x+C_2x^3$.

第四章

4.9 方程组是不完备的, 参照例 4.5.1.

4.13 $u=\phi(z-xy)$.

第五章

5.9 方程 $u_{tt}-x^2u_{xx}=0$ 可通过如下变换映射至电报方程 $v_{\xi\eta}+v=0$:

$$\xi=\frac{1}{4}(t+\ln x),\quad \eta=\frac{1}{4}(t-\ln x),\quad u(t,x)=\sqrt{x}\,v(\xi,\eta).$$

5.13 由于初值条件仅仅包含一个三角函数 $\sin x$, 其解可以通过取在 (5.5.13) 中的唯一一项获得. 调用 $l=2\pi$, 设 $u(t,x)=(a\cos(kt/2)+b\sin(kt/2))\cdot\sin(kx/2)$. 对 t 微分并用条件 $u_t(0,x)=0$ 得 $b=0$. 因此, $u(t,x)=a\cos(kt/2)\cdot\sin(kx/2)$. 初值条件 $u|_{t=0}=\sin x$ 写成 $a\sin(kx/2)=\sin x$, 其中 $a=1$, $k=2$. 这样, 该方程的解是 $u(t,x)=\cos t\,\sin x$.

5.14 $u(t,x)=\sin t\,\sin x$.

5.15 公式 (5.5.26) 写成

$$c_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\sin x\,\sin\frac{k\,x}{2}\,\mathrm{d}x.$$

因此 $c_1=c_3=c_4=\cdots=0$, 并且

$$c_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\pi=\sqrt{\pi}.$$

这样, 解的级数 (5.5.26) 只含有一项:

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,c_2\,\mathrm{e}^{-(2\pi/2\pi)^2\,t}\,\sin x=\mathrm{e}^{-t}\,\sin x.$$

另一种解法 寻找具有 $u=T(t)X(x)$ 形式并满足初边值条件的解. 代入热传导方程得到关于 $T(t)$ 的一阶常微分方程 $T'+\lambda T=0$ 和关于 $X(x)$ 的二阶常微分方程 $X''+\lambda X=0$, 边值条件写成 $X(0)=X(2\pi)=0$. 由边值问题 $X''+\lambda X=0, X(0)=X(2\pi)=0$ 得到 $\lambda=(k/2)^2$, $X(x)=C_1\sin(kx/2)$, $k=1,2,\cdots$. 现在我们解方程 $T'+(k/2)^2T=0$ 并得到 $T(t)=C_2\mathrm{e}^{-(k/2)^2t}$. 最终就可以得到

$$u=C\mathrm{e}^{-(k/2)^2t}\sin(kx/2),$$

其中 $C=C_1C_2=$ 常数. 由初值条件得到 $C\sin\dfrac{kx}{2}=\sin x$, 其中 $k=2, C=1$, 我们得到方程的解 $u(t,x)=\mathrm{e}^{-t}\sin x$.

5.16 问题是不适定问题, 因为相容条件 (5.5.21) 不被满足.

第六章

6.1 不是.

6.2 最一般的不变方程是

(i) $y'=\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\quad y''=\dfrac{1}{x}F\left(\dfrac{y}{x},y'\right)$;

(ii) $y'+P(x)y=0$, $\quad y''=yF\left(x,\dfrac{y'}{y}\right)$;

(iii) $y'=\dfrac{1}{x}\phi(y)$, $\quad y''=\dfrac{1}{x^2}F(y,xy')$.

6.3 设 $\mu'=p(\mu)$, 那么 $\tau=\ln\mu$, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\tau=s(p)$. 因此关于 $\mu=\mu(x)$ 的三阶方程

$$\mu^2\mu'''=\nu(2\mu\mu''-\mu'^2), \quad \nu=\text{常数}\neq 0$$

可以转化为关于 $s=s(p)$ 的一阶方程

$$pss'=s(p-s)+\nu(2s-p).$$

6.4 方程 (P6.2) (i) $y''+(y'/x)-\mathrm{e}^y=0$ 有两个对称

$$X_1=x\ln x\frac{\partial}{\partial x}-2(1+\ln x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

方程 (P6.2) (ii) $y''-(y'/x)+\mathrm{e}^y=0$ 有一个对称

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

6.5 方程 (P6.3) (i), (ii), (iii) 和 (vi) 是可线性化的, 而 (iv) 和 (v) 是不可线性化的.

6.6 (i) 由方程 $X_2(t)=1,\ X_2(u)=u$ 可以得到 $t=\ln x,\ u=y/\sqrt{x}$.

(ii) 方程 (6.5.6) 可写成含有典型变量 t,u 的形式

$$u''=\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{2u}+\frac{u}{4}\cdot$$

(iii) 替换 $u'=p(u)$ 得到 $u''=pp'$, 因此把以上方程降阶至一阶方程

$$pp'=\frac{p}{u^2}-\frac{1}{2u}+\frac{u}{4}\cdot$$

6.7 在任意参数 k 和 ω 的情况下, 解是

$$y=A\sqrt{1+\omega^2x^2}\cos(C-p\arctan(\omega x)),$$

其中 $p=\sqrt{1+(k/\omega^2)}$, A 和 C 是常数. 特别地, 当 $k=3\omega^2$ 时, 调用基本公式 $\arctan s=\arccos(1/\sqrt{1+s^2})=\arcsin(s/\sqrt{1+s^2})$, 解可以写成

$$y=A\left(\frac{1-\omega^2x^2}{\sqrt{1+\omega^2x^2}}\cos C+\frac{2\omega x}{\sqrt{1+\omega^2x^2}}\sin C\right).$$

6.10 一阶方程容许算子

$$X=\sqrt{2}\,x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$$

有形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}F\left(\frac{y^{\sqrt{2}}}{x}\right).$$

使用求积法, 解可以用隐函数表示为

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\Phi(u)-u}=t+C.$$

6.11 双重不变一阶方程有形式

$$y'=C\frac{y}{x},\quad C=\text{常数}.$$

6.12 双重二阶齐次方程有形式

$$y''=\frac{y}{x^2}H\Big(\frac{xy'}{y}\Big).$$

6.14 寻找方程 $y''=xy'-4y$ 的多项式解 $y=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n$, 可验证当 $n=4$ 时解是存在的: $y=x^4-6x^2+3$. 应用 6.5.5 节中提到的一种方法, 得到 (参看关于 $z(x)=x^4-6x^2+3$ 的公式 (6.5.29)) 问题中方程的解

$$y=(x^4-6x^2+3)\left(C_1\int\frac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{(x^4-6x^2+3)^2}\,\mathrm{d}x+C_2\right).$$

6.16 代数 L_2 属于 II 型. 因此, 我们解方程 $X_1(t)=0,\ X_1(u)=1; X_2(t)=0,\ X_2(u)=t$ 并得到典型变量 $t=y/x,\ u=-1/x$. 由于变量 t 包含因变量 y, 仅当问题的方程不是奇异解且 t 是一个保持不变的常数时, 它可以是一个新的自变量. 这些奇异解是直线 $y=Kx,\ K=$ 常数. 使用变量 t,u 我们的方程可以改写成 $u''=2$, 其中 $u=t^2+C_1t+C_2$. 替换 t 和 u 的表达式我们得到 $y^2+C_1xy+C_2x^2+x=0$. 解关于 y 的方程并设 $A=-C_1/2,\ B=A^2-C_2$, 我们得到通解 $y=Kx, y=A\,x\pm\sqrt{B\,x^2-x}$.

由于问题中的方程容许一个类型 II 的 L_2, 6.5.4 节中的表 6.5.2 是可线性化的 (事实上, 它映射到方程 $u''=2$), 因此该方程容许一个八维李代数.

6.17 (i) $y=-\dfrac{x}{2}+\sqrt{\dfrac{5}{4}x^2-x}$.

6.18 方程 (6.6.53) 的通解为 (见 (6.6.56))

$$y=\frac{1}{K_1x+K_2x^2+K_3x^3},\quad K_i=\text{常数}.$$

6.19 使用方程 (6.6.82), (6.6.83) 和习题 3.3 (iii) 得到方程 (6.6.74) 的通解

$$x=K_1\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y/2}\Big(K_2\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,y\Big)+K_3\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,y\Big)\Big),\quad K_i=\text{常数}.$$

第七章

7.2 线性热传导方程的无穷小对称包含了无穷维代数, 其生成元为

$$X_\tau=\tau\frac{\partial}{\partial u},$$

其中 $\tau=\tau(t,x)$ 为热传导方程的一个任意解, 并且

(i) 对于一维热传导方程 $u_t-u_{xx}=0$, 其六维李代数由

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\quad X_4=u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_5=2t\frac{\partial}{\partial x}-xu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_6=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{4}(2t+x^2)u\frac{\partial}{\partial u}$$

生成.

(ii) 对于二维热传导方程 $u_t=u_{xx}+u_{yy}$, 其九维李代数由

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x},\ X_3=\frac{\partial}{\partial y},\ X_4=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},\ X_5=u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_6=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},\ X_7=2t\frac{\partial}{\partial x}-xu\frac{\partial}{\partial u},\ X_8=2t\frac{\partial}{\partial y}-yu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_9 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + ty\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{4}(4t + x^2 + y^2)u\frac{\partial}{\partial u}$$

生成.

(iii) 对于三维热传导方程 $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, 其 13 维李代数由

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_6 = u\frac{\partial}{\partial u},\ X_7 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},\quad X_8 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z},\quad X_9 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_{10} = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_{11} = 2t\frac{\partial}{\partial y} - yu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_{12} = 2t\frac{\partial}{\partial z} - zu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_{13} = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + ty\frac{\partial}{\partial y} + tz\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4}(6t + x^2 + y^2 + z^2)u\frac{\partial}{\partial u}$$

生成.

7.3 算子 $X = \dfrac{\partial}{\partial t} + ku\dfrac{\partial}{\partial u}$ 有两个无关不变量 x 和 $v = u\mathrm{e}^{-kt}$. 因此, 我们寻找形如 $v = \psi(x)$ 的不变解, 因此 $u = \psi(x)\,\mathrm{e}^{kt}$. 代入热传导方程, 我们得到 $\psi'' - k\psi = 0$. 如果 $k < 0$, 我们令 $k = -\alpha^2$ 则得到 $\psi = C_1\cos(\alpha x) + C_2\sin(\alpha x)$. 那么不变解为

$$u = \big(C_1\cos(\alpha x) + C_2\sin(\alpha x)\big)\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}.$$

如果 $k > 0$, 我们令 $k = \beta^2$ 则得到 $\psi = C_1\mathrm{e}^{\beta t} + C_2\mathrm{e}^{-\beta t}$. 那么不变解为

$$u = \big(C_1\mathrm{e}^{\beta t} + C_2\mathrm{e}^{-\beta t}\big)\mathrm{e}^{\beta^2 t}.$$

7.4 (i) 如同在习题 7.3 中一样处理, 我们能证明, 不变量在 $X = \dfrac{\partial}{\partial t} + ku\dfrac{\partial}{\partial u}$ 的作用下得到 $u = \psi(x, y)\,\mathrm{e}^{kt}$. 代入热传导方程 $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, 我们得到 $\psi_{xx} + \psi_{yy} = k\psi$.

(ii) 由 X, Y 生成的二维李代数有不变量 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $v = u\mathrm{e}^{-kt}$. 因此, 我们寻找形如 $v = \phi(r)$ 的不变解, 那么 $u = \phi(r)\,\mathrm{e}^{kt}$. 代入热传导方程并在方程的两边同时乘以 r, 我们得到方程 $r\phi'' + \phi' - kr\phi = 0$. 假设 $k < 0$. 然后设 $k = -\alpha^2$ 且 $\tilde{r} = \alpha r$, 对于零阶贝塞尔函数 $J_0(\tilde{r})$, 我们得到对应的贝塞尔方程 (见 3.3.5 节) $\tilde{r}\phi'' + \phi' + \tilde{r}\phi = 0$, 这里 "$'$" 表示关于 $\tilde{r}$ 的微分. 因此, $\phi = J_0(\tilde{r})$ 并且不变解由

$$u = J_0(\alpha r)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}$$

给出.

7.8 我们有 $T_5 = 2tE - m\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}, T_6 = 2t^2E + m\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x} - 2t\boldsymbol{v})$, 这里 $E = \dfrac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + k\,r^{-2}$ 为能量.

7.10 $s = n$.

7.11 一个简单解为

$$\boldsymbol{A_1} = \frac{x}{r}\left(0,\ \frac{z}{y^2+z^2},\ -\frac{y}{y^2+z^2}\right).$$

一个更对称的解为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{3r}\left(\frac{zy(z^2-y^2)}{(r^2-z^2)(r^2-y^2)},\ \frac{xz(x^2-z^2)}{(r^2-x^2)(r^2-z^2)},\ \frac{yx(y^2-x^2)}{(r^2-y^2)(r^2-x^2)}\right).$$

7.14 $\widehat{X}_1$ 的首次延拓通过加入以下项到原始算子 $\widehat{X}_1$ 后得到:

$$-\Big(x^2\dot{v}^2 + (v^2)^2 + x^3\dot{v}^3 + (v^3)^2\Big)\frac{\partial}{\partial v^1}$$

$$+\Big(2x^1\dot{v}^2 + v^1v^2 - x^2\dot{v}^1\Big)\frac{\partial}{\partial v^2} + \Big(2x^1\dot{v}^3 + v^1v^3 - x^3\dot{v}^1\Big)\frac{\partial}{\partial v^3}.$$

7.15 在引入变量 $y = \ln|x|$ 后, Black-Scholes 方程变为 $u_t + \dfrac{1}{2}A^2u_{yy} + Ku_y - Cu = 0$, 这里 $K = B - (A^2/2)$ (参见 (9.5.2)).

7.16 由第一个方程 $\xi_y = 0$ 可得 $\xi = \xi(x)$. 那么第四个方程 $\xi_{xx} = 0$ 变为 $\xi''(x) = 0$, 因此 $\xi = K_1 + K_2x$, 这里 $K_1, K_2 =$ 常数. 同样, 我们由第三个方程 $\eta_x = 0$ 得到 $\eta = \eta(y)$. 最后, 将 ξ 和 η 的表达式代入第二个方程 $3(\eta_y+\eta) - 2\xi_x = 0$, 我们得到一阶线性非齐次常微分方程 $\eta' + \eta = \dfrac{2}{3}K_2$, 因此 $\eta = \dfrac{2}{3}K_2 + K_3\mathrm{e}^{-y}$. 记 $K_3 = C_1,\ K_1 = C_2,\ 3C_3 = K_2$, 我们得到问题中的超定组的通解 $\xi = C_2 + 3C_3\,x,\ \eta = 2C_3 + C_1\mathrm{e}^{-y}$.

第八章

8.1 我们有

(i) $(\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta(x), -\varphi'(x)) = -\varphi'(0)$,

(ii) $(\delta'(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(x - x_0), -\varphi'(x)) = -\varphi'(x_0)$.

8.2 我们有 (见 8.1.3 节)

(i) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\varepsilon x}{\pi(x^2+\varepsilon^2)^2} = -\delta'(x)$, (ii) $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu} i\xi\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi = 2\pi\delta'(x)$,

(iii) $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\nu}^{\nu}\xi^2\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi = -2\pi\delta''(x)$.

第九章

9.11 对于函数 (9.2.21) 我们有

$$u_t-\Delta u=\theta'(t)\,\frac{C}{(\sqrt{t})^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}+\theta(t)\left(\left(\frac{C}{(\sqrt{t})^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\right)_t-\Delta\left(\frac{C}{(\sqrt{t})^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\right)\right).$$

调用 $\theta'(t)=\delta(t)$, $F(t,x)\delta(t)=F(0,x)\delta(t)$ 及

$$\left(\frac{C}{(\sqrt{t})^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\right)_t-\Delta\left(\frac{C}{(\sqrt{t})^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\right)=0,\quad t>0,$$

使用方程 (8.1.12) 和 (8.2.8), 可得

$$u_t-\Delta u=\delta(t)\lim_{t\to+0}\frac{C}{(\sqrt{t})^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}=C(2\sqrt{\pi t})^n\,\delta(t)\delta(x)=C(2\sqrt{\pi t})^n\,\delta(t,x).$$

因此, 方程 (9.2.19) 需要满足条件 $C(2\sqrt{\pi t})^n=1$.

参考文献

[1] AMES, W.F. *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Vol. I. Academic Press, New York, 1965.

[2] BLUMAN, G.W., AND KUMEI, S. *Symmetries and Differential Equations.* Springer, New York, 1989.

[3] CANTWELL, B.J. *Introduction to Symmetry Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[4] COURANT, R., AND HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics, Vol. II: Partial Differential Equations, By R. Courant.* Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, 1962. Wiley Classics Edition Published in 1989.

[5] COURANT, R., AND HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[6] DUFF, G.F.D. *Partial Differential Equations.* University of Toronto Press, Toronto, 1956.

[7] EULER, L. *Integral Calculus.* Vol. III, Part 1, Chapter II, 1769/1770.

[8] GEL'FAND, I.M., AND SHILOV, G.E. *Generalized Functions*, Vol. 1. Fizmatgiz, Moscow, 1959. English translation by E. Saletan, Academic Press, New York, 1964.

[9] GOURSAT, E. *Differential Equations.* Ginn and Co, Boston, 1917. English translation by E.R. Hedrick and O. Dunkel of Goursat's classical *Cours d'analyse mathématique*, Vol. 2, Part II.

[10] GOURSAT, E. *Cours d'analyse mathématique,* Tome 1, 5th ed. Gauthier-Villars, Paris, 1956. English transl. *A Course in Mathematical Analysis.*

[11] GREENBERG, M. *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd ed. Prentice Hall, New

Jersey, 1998.

[12] HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Yale University Press, New Haven, 1923. Reprinted in Dover Publications, New York, 1952. See also revised French edition: *Le problème de Cauchy,* Paris, 1932.

[13] IBRAGIMOV, N.H. Invariant variational problems and conservation laws. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika 1, No. 3* (1969), 350–359. English transl., *Theor. Math. Phys.*, 1, No. 3, (1969), 267–276. Reprinted in: N.H. Ibragimov, *Selected Works,* Vol. I, ALGA Publications, Karlskrona. 2006, Paper 8.

[14] IBRAGIMOV, N.H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics.* Nauka, Moscow, 1983. English transl., Riedel, Dordrecht, 1985.

[15] IBRAGIMOV, N.H. *Primer of Group Analysis.* Znanie, No. 8, Moscow, 1989 (Russian). Revised edition in English: *Introduction to Modern Group Analysis*, Tau, Ufa, 2000. Available also in Swedish: *Modern Grouppanalys: En Inledning Till Lies Lösningsmetoder av Ickelinjära Differentialekvationer,* Studentlitteratur, Lund, 2002.

[16] IBRAGIMOV, N.H. *Essay in Group Analysis.* Znanie, No. 7, Moscow, 1991 (Russian).

[17] IBRAGIMOV, N.H. Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie). *Uspekhi Mat. Nauk 47, No. 4* (1992), 83–144. English transl., Russian Math. Surveys, 47:2 (1992), 89–156. Reprinted in: N.H. Ibragimov, *Selected Works,* Vol. I, ALGA Publications, Karlskrona. 2006, Paper 21.

[18] IBRAGIMOV, N.H., Ed. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations,* Vol. 1: *Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws.* CRC Press Inc., Boca Raton, 1994.

[19] IBRAGIMOV, N.H., Ed. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations,* Vol. 2: *Applications in Engineering and Physical Sciences.* CRC Press Inc., Boca Raton, 1995.

[20] IBRAGIMOV, N.H., Ed. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations,* Vol. 3: *New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods.* CRC Press Inc., Boca Raton, 1996.

[21] IBRAGIMOV, N.H. *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

[22] IBRAGIMOV, N.H. Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 318, No. 2* (2006), 742–757.

[23] LAPLACE, P.S. Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris 23, No. 24* (1773), 341–402. Reprinted in: P.-S. Laplace, *Oevres complètes,* t. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1893, 5–68; English

Translation, New York, 1966.

[24] LERAY, J. *Hyperbolic Differential Equations.* Lecture Notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1953. Available in a book form in Russian translation by N.H. Ibragimov, Nauka, Moscow, 1984.

[25] LIE, S. Klassifikation und Integration von gewönlichen Differentialglei chungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. III. *Archiv for Matematik og Naturvidenskab* (Abbr. *Arch. for Math.) 8, Heft 4* (1883), 371–458. Reprinted in Lie's Ges. Abhandl., vol. 5, 1924, paper XIV, 362–427.

[26] LIE, S. *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen.* (Bearbeited und herausgegeben von Dr. G. Scheffers), B.G. Teubner, Leipzig, 1891.

[27] MURRAY, J.D. *Mathematical Biology, I: An Introduction*, 3rd ed. Springer, New York, 2002.

[28] MURRAY, J.D. *Mathematical Biology, II: Spatial Models and Biomedical applications*, 3rd ed. Springer, New York, 2003.

[29] NEWTON, I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy.* Benjamin Motte, Middle-Temple-Gate, in Fleet Street, 1929. Translated into English by Andrew Motte, to which are added, *The Laws of Moon's Motion, According to Gravity* by John Machin. 1st ed., 1687; 2nd ed., 1713; 3rd ed., 1726.

[30] NOETHER, E. Invariante Variationsprobleme. *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse Heft 2* (1918), 235–257. English transl., *Transport Theory and Statistical Physics,* Vol. 1, No. 3, 1971, 186–207.

[31] OLVER, P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer, New York, 1986. 2nd ed., 1993.

[32] OVSYANNIKOV, L.V. *Group Analysis of Differential Equations.* Nauka, Moscow, 1978. English transl., ed. W.F. Ames, Academic Press, New York, 1982. See also L.V. Ovsyannikov, *Group Properties of Differential Equations,* Siberian Branch, USSR Academy of Sciences, Novosibirsk, 1962.

[33] PETROVSKY, I.G. *Lectures on Partial Differential Equations*, 3 ed. Fizmatgiz, Moscow, 1961. English transl., Interscience, New York, 1964. Republished by Dover, 1991. Translated from Russian by A. Shenitzer.

[34] SCHWARTZ, L. *Métodes Mathématiques de la physique.* Hermann, Paris, 1961. English transl., Mathematics for the physical sciences, Addison-Wesley, Reading, 1966.

[35] SIMMONS, G.F. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1991.

[36] SMIRNOV, V.I. *A Course of Higher Mathematics*, Vol. IV. Pergamon Press, New York, 1964. Translated from Russian by D.E. Brown, edited by I.N. Sneddon.

[37] SOBOLEV, S.L. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* Dover, New York, 1989. Translated from Russian by E.R. Dawson, edited by T.A.A. Broadbent.

[38] SOMMERFELD, A. *Partial Differential Equations in Physics.* Academic Press, New York, 1964. English translation by E.G. Straus of A. Sommerfeld's *Lectures on Theoretical Physics, Vol. VI.*

[39] TIKHONOV, A.N., AND SAMARSKII, A.A. *Equations of Mathematical Physics*, 2nd ed. Dover, New York, 1990. Translated from Russian.

[40] WHITTAKER, E., AND WATSON, G. *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

索 引

Black-Scholes 模型, 72
    伴随方程, 173
    基本解, 315
Burgers 方程, 72
    广义, 72
Chaplygin, S.A. (1869—1942), 84
Chaplygin 方程, 84
Clairaut, A. (1713—1765), 96
d'Alembert, J. (1717—1783), 46
d'Alembert 公式, 165
d'Alembert 解, 156
Darboux 方程, 162
Faà de Bruno 公式, 34
Gamma 函数 $\Gamma(x)$, 4
Gauss, C.F. (1777—1855), 32
Gauss-Ostrogradsky 定理, 32
Green, G. (1793—1841), 31
Green 定理, 31
Green 公式, 308
Hadamard, J. (1865—1963), 283
Hadamard 降维法, 313
Heaviside 函数, 285, 310
Hopf 方程, 138
Kirchhoff, G.R. (1824—1887), 64
Korteweg-de Vries 方程, 72
Leray, J. (1906—1998), 310
Lie, S. (1842—1899), 175
Lotka-Volterra 方程, 47
Malthus, T.R. (1766—1834), 46
Navier-Stokes 方程, 68
Ohm, G.S. (1787—1854), 64
Ostrogradsky, M. (1801—1861), 32
Pasteur, L. (1822—1895), 53
Plateau, J. (1801—1883), 80
Plateau 问题, 80
Poincaré 定理, 307
Schwartz, L. (1915—2002), 283
Sobolev, S.L. (1908—1989), 283
Stokes, G.G. (1819—1903), 31
Stokes 定理, 31
Stokes 公式, 308
Tricomi 方程, 84, 154
van der Pol, B. (1889—1959), 65
van der Pol 方程, 65
Vessiot-Guldberg-李代数, 236

A
爱因斯坦公式, 278

B
摆动, 振动, 59
　　阻尼, 59
板, 82
伴随方程, 147
贝塞尔方程, 113, 324
被容许的群, 185
比例变换, 89
变分导数, 40, 215
变分积分, 40
　　不变性, 270
　　极值, 40, 274
变换
　　分布, 292
　　解, 254
　　伸缩 (相似), 8
　　无穷小, 177
　　系数, 8
　　线性, 5, 10
变量, 2
　　微分, 35
变量代换, 5, 16
　　积分, 17
变量分离, 94, 169
波动方程, 77, 152
　　对称, 311
　　多变量, 311
　　二维, 79
　　非线性, 83
　　基本解, 312
　　解, 314
　　柯西问题, 312
　　三维, 79
　　一维, 77
波动函数, 67
伯努利, Daniel (1700—1782), 100
伯努利, Jacques (1654—1705), 101
伯努利, Jean (1667—1748), 102
不变, 107
　　常微分方程的解, 195, 213
　　方程 (曲面), 182
不变解, 255
　　灌溉系统问题, 262
　　肿瘤生长模型, 264
不变解系, 195
　　里卡蒂方程, 195
不变量, 182
　　群, 180
不变性, 298
　　偏微分方程的解, 255
　　线性方程, 107
不变原理, 298
不定方程组, 69

C
参数群, 177
常数, 2
　　积分, 17, 24
　　绝对, 2
　　任意, 2
　　运动, 268
　　重力 (万有引力), 50
　　阻尼, 59
常数变易, 97
　　二阶方程, 109
　　一阶方程, 102
常微分方程, 45
　　对称, 185
超定方程组, 157
　　相容性条件, 157
超定方程组兼容性, 211
超定组, 138
超几何方程, 114
初等函数, 3

基本, 3
初始条件, 165
初值问题, 88
传动轴, 62
“弯曲” 与失效, 64
磁流体动力学, 69
存在性定理, 88, 119

D

代数曲线, 10
等价, 10
二次, 10
抛物型, 13
双曲型, 12
椭圆型, 13
单位球面的表面积, 5, 42
$\omega_n = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$, 42, 290
单原子气流, 67
等价, 10
方程, 10, 99, 105, 157
函数, 22
曲线, 10
等价变换, 99
对于里卡蒂方程, 99
双曲型方程, 157
线性方程, 105
等熵流, 67
狄拉克, P.A.M. (1902—1984), 283
狄拉克 δ 函数, 283
极限, 286
曲面上, 310
狄拉克方程, 66, 278
共轭, 278
拉格朗日算子, 278
守恒定律, 278
狄拉克矩阵, 67
典型变量, 36, 183
典型变量方法, 191
电报方程, 65, 174
电磁波, 65
电动力学, 65
叠加, 104
非线性, 231
线性, 104, 278
定向曲面元, 306
短波, 84
对数函数, 21

E

二次方程, 5
根, 5
判别式, 5
二阶线性偏微分方程, 145
非齐次, 145
齐次, 145
二阶线性方程, 104
非齐次, 104
齐次, 104

F

泛函, 285
方程, 5
Black-Scholes, 72, 281
Burgers, 72
Chaplygin, 84
Darboux, 162
Hopf, 138
Korteweg-de Vries, 72
Lotka-Volterra, 47
Navier-Stokes, 68
Tricomi, 84
van der Pol, 65
伴随, 147
贝塞尔, 113
波动, 77
伯努利, 101
常微分 (ODE), 45

超几何, 114
等价, 10
狄拉克, 66
电报, 65
二次, 5
二阶线性, 104
非齐次, 102
非线性, 80, 175
非线性波动, 83
非线性热传导, 71
混合类型, 84
可分离变量, 94
可线性化, 210
空间曲面, 36
拉普拉斯, 32
里卡蒂, 98
流体动力学, 67
麦克斯韦, 65
拟线性, 132
欧拉, 118
欧拉-拉格朗日, 40
抛物型, 151
偏微分 (PDE), 46
全微分, 95
热传导, 46
双重齐次, 91
双曲型, 151
特征, 108, 150
椭圆型, 151
微分, 45
线性, 102, 115, 131
一阶线性, 102
自伴, 148
方程组
常微分, 118
超定, 95
对称形式, 121
可积, 95
首次积分, 119
完备系, 141
非齐次方程, 102
波动, 166
二阶常微分, 109
高阶常微分, 116
热传导, 305
一阶常微分, 102
非齐次线性方程, 102
一阶常微分, 102
非线性方程的类型, 154
非谐振动, 60
幅值, 61
周期, 61
分布, 283
$\Delta(\ln r)$, 292
$\Delta(r^{2-n})$, 291
δ 函数, 286
函数的乘法, 287
卷积, 289
任意变换, 294
微分, 287
无穷小变换, 295
线性变换, 293
直积, 288
符号 o, 21
复数, 19
共轭, 19
傅里叶, J.B.J. (1768—1830), 46
傅里叶定律, 70
傅里叶方法, 167
傅里叶级数, 171

G

刚体运动, 8
钢琴弦, 166
光速, 66, 67, 79, 277
$c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/s, 66

广义分离变量, 230
广义函数, 285
　奇异的, 285
　正则的, 285

H

哈密顿, W.R. (1805—1865), 30
哈密顿变分原理, 39
哈密顿算子, 30
函数, 3
　初等, 3
　双曲, 4
　微分, 35
　误差, 4
　指数, 3
函数无关, 22
胡克 (1635—1703), 59
胡克定律, 59
换位子, 140, 200
　表, 201
换元法, 22
　多重积分, 22
　微分, 38
换元法的复合, 177
混合类型方程, 84
混合问题, 168
　波动方程, 168
　热传导方程, 171

J

基本解, 298, 302
　关于拉普拉斯方程, 300
　关于热传导方程, 302
　柯西问题, 302
基础解系, 231
　非线性方程, 231
积分, 17
　常数, 17
　分部, 17, 284
　李方法, 202
积分曲面, 131
积分曲线, 88
积分因子, 96
　高阶方程, 216
　微分形式, 308
吉他弦, 166
极小曲面, 80
极值, 40
极坐标, 137
级联法, 164
几何相似图形, 8
加热杀菌法 (Pasteurization), 53
伽利略 (1564—1642), 48, 60
伽利略群, 275
降阶, 93
降维法, 313
降雨, 51
　模型, 51
近似相等函数, 21
经济学数学模型, 72
卷积, 288
　分布, 289
　函数, 288
绝对常数, 2
绝热指数, 67
决定方程, 197

K

开普勒, J. (1564—1630), 48
开普勒定律, 48
开普勒问题, 49, 276
柯西, A.L. (1789—1857), 88
柯西问题, 88, 305
　波动方程, 165, 167
克罗内克符号, 35, 168
扩散率, 70

L

拉格朗日, J.L. (1736—1813), 39
拉格朗日算子, 277
　　相对论, 277
拉普拉斯, P.S. (1749—1827), 49
拉普拉斯不变量, 158
拉普拉斯方程, 32
　　对称, 299
　　基本解, 300
　　几个变量, 299
　　两个变量, 154, 300
　　三个变量, 32, 301
拉普拉斯级联法, 164
拉普拉斯算子, 32, 70
　　n 维, 301
拉普拉斯向量, 49, 277
莱布尼茨, G.W. (1646—1716), 45
朗斯基行列式, 23, 111
李, 175
　　代数, 200
　　方程, 178, 250
　　积分因子, 189
　　群分析, 175
　　线性化验证, 211
李代数, 200
　　二维, 200
　　基, 200
　　理想, 201
　　子, 201
里卡蒂, J. F. (1676—1754), 100
里卡蒂方程, 98, 186, 237
　　标准形式, 99
　　等价变换, 99
　　对称, 186
　　非线性叠加, 98, 238
　　可线性化, 101
　　特殊, 100
　　通解, 98
　　以有限形式积分, 100
链式法则, 15
量子力学, 67
刘维尔, J. (1809—1882), 100
流体, 67
　　可压缩, 67
　　理想导电, 69
　　黏性, 68
　　黏性不可压缩, 68
流体动力学, 67
　　浅水流, 68
洛伦茨群, 277
洛伦茨组, 67

M

麦克劳林级数, 17
麦克斯韦, J.C. (1831—1879), 65
麦克斯韦方程组, 65
膜, 78
　　极小曲面, 80
　　平衡问题, 80

N

牛顿, I. (1642—1727), 45
牛顿第二定律, 45, 59, 175
牛顿冷却定律, 52
牛顿万有引力定律, 48
诺特, E. (1882—1935), 267

O

欧拉, L. (1707—1783), 39
欧拉-拉格朗日方程, 40, 81
欧拉猜想, 108, 116, 214
欧拉方程, 91, 118, 214
欧拉方法, 161
欧拉公式, 20
欧拉数, 2

P

判别式, 5, 8, 11
　不变量表述, 8
　二次方程, 5
　化简后的三次方程, 7
抛物型方程, 151
　标准形式, 152
偏微分方程, 46, 131
　二阶, 149
　非线性, 154
　混合型, 154
　解, 87, 131
　拟线性, 132
　抛物型, 151
　齐次线性, 132
　双曲型, 151
　算子, 132
　特征方程, 133
　椭圆型, 151
　线性, 131
　一阶, 131
　主部, 150
平均值, 289

Q

齐次方程, 89
　函数齐次性, 92
　双重齐次, 91
　一致齐次性, 92
齐次线性方程, 104
　常系数, 108, 116
　二阶常微分, 104
　二阶偏微分, 145
　高阶常微分, 115
　一阶偏微分, 131
气流, 67
　超音速, 154
　等熵, 68
　非稳定状态, 68
　跨音速, 68
　亚音速, 154
气体动力学, 67
　短波, 84
浅水流, 68
球面对称函数, 290
求和缩写法, 16, 145
全微分, 25, 35, 77
全微分方程, 95, 190
群, 177
　单参数, 177
　生成元, 177
群换元法, 176
　单参数, 177

R

热传导方程, 46, 153
　对称, 301
　多变量, 301
　非齐次, 305
　非线性, 71
　基本解, 305
　解, 305
　柯西问题, 305
　线性, 70
　一维, 71
热扩散, 69
　傅里叶定律, 70
任意常数, 2

S

三次方程, 6
　Cardan 解, 7
　判别式, 8
三角函数, 18
　复, 21
　麦克劳林展开式, 18
散度定理, 32

伸缩变换, 8
生成元, 177
绳索, 76
    受迫振动, 78
    微小振动, 76
首次积分, 119
    无关, 122
守衡量, 268
守恒定律, 73, 268
    密度, 269
守恒向量, 268
    平凡, 269
    线性无关, 270
    线性相关, 270
数, 1
    复数, 19
    实数, 1
    有理数和无理数, 2
双曲函数, 4, 18
    复数, 20
双曲型方程, 151
    标准形式, 152
    特征变量, 152
随机微分方程, 72

T

泰勒级数, 17
特征, 133
特征变量, 152
特征多项式, 108
特征方程, 108, 133, 150
    二阶, 108
    高阶, 116
    拟线性, 136
    线性, 133
特征函数, 170
特征值, 150, 170
投影变换群, 179
椭圆, 9
    面积, 9
椭圆积分, 61
椭圆型方程, 151
    标准形式, 154

W

外积, 306
    乘法, 306
    微分, 307
完备系, 141
微分, 14, 16
    不变性, 16
    反函数, 15
    广义, 284
    行列式, 32
    偏, 15
    全, 33
微分方程, 45
    常 (ODE), 45
    偏 (PDE), 46
微分方程的空间曲面, 35
微分函数, 35
    空间 $\mathcal{A}$, 35
微分形式, 306
    p-, 307
    1-, 306
    2-, 306
    Leray, 310
    封闭, 307
    局部全, 307
    全, 307
无穷小变换, 177
    δ 函数, 296
    分布, 296
无穷小对称, 185
误差函数, 4

X

线性变换, 10
　　齐次, 10
线性常微分方程, 102
　　n 阶, 115
　　Laguerre 典型形式, 223
　　二阶, 104
　　一阶, 102
线性常微分方程组, 124
线性化, 210
　　二阶方程, 210
　　三阶方程, 223
线性微分算子, 115, 132
　　二阶, 146
　　二阶伴随, 147
　　一阶, 132
　　自伴, 148
线性无关, 23
相似图形, 8
　　面积, 9
向量场, 30, 268
　　切向, 177
　　无散度, 270
谐振, 60
　　角频率, 60
　　周期, 60
心脏跳动模型, 65
形式解, 171
旋量, 67

Y

雅可比矩阵, 22
雅可比行列式, 22, 176
延拓方程, 197
杨氏模量, 78
一阶线性微分方程, 102
　　非齐次, 102
　　齐次, 102
云层, 51
　　积雨云, 51
　　雨滴, 51

Z

振动, 59
　　非谐, 60
　　微小, 76
　　谐, 60
　　自由, 59
　　自由谐振, 109
　　纵向, 78
　　阻尼, 59
直积, 288
指数函数, 21
　　复, 21
指数映射, 179
中值, 15
中值定理, 15
　　积分, 42
钟摆, 60
重力 (万有引力) 常数, 50
　　$G = 6.67 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^2)$, 50
重力加速度, 49, 63, 68
　　$g \approx 9.81\ \mathrm{m/s}^2$, 49
子代数, 201
自伴方程, 148
自然对数, 4
最小作用量原理, 39
作用量积分, 39

☞ 包含特为初学者提供的简明和自包含的基本经典方法的介绍

☞ 轻松进入李群分析方法的学习

☞ 本书所描述的方法有着广泛的应用

☞ 友好的描述方式和实用的例子使本书拥有众多的读者

ISBN 978-7-04-038040-8

9 787040 380408 >

定价 49.00 元

■ 学科类别：数学

academic.hep.com.cn

本书英文版同时销售，书号为978-7-04-027603-9