科学天下 新观念数学

微积分之

——打遍泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

[美]C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森 / 著 张荻 / 译 湖南科学技术出版社

倚天宝剑



昭告天下

真要命！

这本书内容过于清晰、直接、搞笑，
可能危及微积分“让学生迷惑、补考重修”
这历久不衰的重要功能。
本人建议：学校应该把这本书列为
禁书！

——William Thurston
（1982年菲尔兹奖得主）

HOW TO ACE THE REST OF CALCULUS: THE STREETWISE GUIDE

策划编辑＝孙桂均＋李　媛　文字编辑＝陈一心

书评

恭喜你通过了第一学期的微积分！精彩的部分现在才开始。这本书棒透了！会带给你一段难以忘怀的旅程。

—— 契立克（M. Chkhenkeli）
美国威廉斯学院

这本宝书替微积分的基础观念，做了精彩而且贴近读者的介绍，内容幽默，使人印象深刻，又极其实用。必修微积分的十万个学生引颈期盼的，正是这本宝书。

—— 格兰姆（Ron Graham）
前美国数学会（AMS）理事长、AT&T实验室首席科学家

这本书非常不同凡响！不但简洁、有趣，而且还把微积分的秘密全给抖出来了。这么有料的书上哪儿找？

—— 高巍（F.Gouvea）
MAA Online主编



ISBN 7-5357-4230-0
9 787535 742308 >
N·119　定价：25.00 元

科学天下% 新观念数学

微积分之倚天宝剑

——打遍泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

[美]C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森 / 著 张荻 / 译

湖南科学技术出版社



HOW TO ACE THE REST OF CALCULUS: THE STREETWISE GUIDE

图书在版编目（CIP）数据

微积分之倚天宝剑 /（美）亚当斯，（美）哈斯，
（美）汤普森著；张菽译. —长沙：湖南科学技术出版
社，2005. 5
ISBN 7-5357-4230-0

I.微... II.①亚...②哈...③汤...④张...
III. 微积分—高等学校—教学参考资料 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 043349 号

First published in the United States
by
W.H.FREEMAN AND COMPANY,New York and Basingstoke
Copyright © 2001 by W.H.Freeman and Company All Rights Reserved

湖南科学技术出版社通过台湾博达著作权代理公司获得本书中文简体版中国大陆
地区独家出版发行权。
版权登记号：18-2004-104

版权所有，侵权必究

科学天下 新观念数学

微积分之倚天宝剑

——打通泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

著　　者：[美]C· 亚当斯 J· 哈斯 A· 汤普森
译　　者：张　菽
策划编辑：孙桂均　李　媛
文字编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731 - 4375808
印　　刷：长沙化勘印刷有限公司
　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市青园路 4 号
邮　　编：410004
出版日期：2005 年 5 月第 1 版第 1 次
开　　本：700mm×1020mm　1/16
印　　张：19.5
字　　数：304000
书　　号：ISBN 7 - 5357 - 4230 - 0/N·119
定　　价：25.00 元
（版权所有 · 翻印必究）

目录

第 1 章 导 言 （2）

第 2 章 不定式与反常积分 （5）

2.1 不定义 （5）

2.2 反常积分 （9）

第 3 章 极坐标 （13）

3.1 何谓极坐标? （13）

3.2 极坐标中的面积 （19）

第 4 章 无穷级数 （26）

4.1 序列 （26）

4.2 序列的极限 （28）

4.3 级数:基本概念 （28）

4.4 个性外向的几何级数 （32）

4.5 第 n 项检验法 （34）

4.6 更多朋友:积分检验与 p 级数 （35）

4.7 比较检验法 （39）

4.8 交错级数与绝对收敛 （44）

4.9 更多检验法 （47）

4.10 幂级数 （50）

4.11 什么时候该用什么检验 （52）

4.12 泰勒级数 (54)
4.13 带有余项的泰勒公式 (61)
4.14 一些著名的泰勒级数 (64)

第5章 向量:从欧几里得到丘比特 (66)
5.1 平面上的向量 (66)
5.2 太空:最后的疆界(空间:期末考的边远地带) (72)
5.3 空间中的向量 (75)
5.4 点积(内积) (77)
5.5 叉积(外积;向量积) (84)
5.6 空间中的直线 (91)
5.7 空间中的平面 (94)

第6章 空间中的参数曲线:来坐坐云霄飞车 (101)
6.1 参数曲线 (101)
6.2 曲率 (108)
6.3 速度与加速度 (112)

第7章 曲面与作图 (116)
7.1 平面上的曲线:回顾一下 (116)
7.2 三维空间方程式的圆形 (118)
7.3 旋转曲面 (123)
7.4 二次曲面(带 - oid 字尾的曲面) (124)

目录

第 8 章 多变量函数及它们的偏导数 (132)

8.1 多变量函数 (132)

8.2 等高线 (137)

8.3 极限 (140)

8.4 连续性 (144)

8.5 偏导数 (147)

8.6 最大值和最小值问题 (157)

8.7 链式法则 (163)

8.8 梯度与方向导数 (167)

8.9 拉格朗日乘数 (172)

8.10 二阶导数检验 (176)

第 9 章 多重积分 (180)

9.1 二重积分与极限:技术方面的东西 (183)

9.2 求二重积分 (184)

9.3 二重积分与图形下方的体积 (191)

9.4 极坐标中的二重积分 (194)

9.5 三重积分 (198)

9.6 柱面坐标与球面坐标 (204)

9.7 质量、质心、矩 (216)

9.8 坐标变换 (223)

第 10 章 向量场与格林-斯托克斯帮 (227)

10.1 向量场 (227)

10.2 认识散度跟旋度 (230)

10.3 线积分阵容 (236)

10.4 向量场的线积分 (237)

10.5 保守向量场 (241)

10.6 格林定理 (246)

10.7 散度定理:求散度的积分 (249)

10.8 面积分 (252)

10.9 火上加油! (260)

第 11 章 期末考会考些什么? (264)

词汇表:数学名词速成 (270)

英汉对照索引 (282)

公式秘笈 (286)

谨以此书

献给

所有买了我们第一本书的学生们，

衷心希望你们第一学期

拿到 90 分





第1章 导言

本书是《微积分之屠龙宝刀》的续篇，读者是已经修过至少一学期微积分的学生，书里的内容包含了微积分剩下的部分中，所有你需要知道的素材，诸如多变量微积分，以及序列与级数．为什么我们要写这第二本书呢？主要原因是，在《微积分之屠龙宝刀》出版后，我们收到了无数正面回应的信件，得到广大读者的鼓舞．以下是其中一封来信：

亲爱的三位数学怪胎：

谁想得到你们三个满脑子数学的鸭蛋头，居然会写出一本让我欣赏的书？你们的《微积分之屠龙宝刀》真是写得很棒，完全转变了我对数学的观感．为了让自己有更多时间做数学习题，我已经毅然决然辞去了兄弟会的“整人组”组长一职，我甚至正在认真考虑，是否也应该一并戒掉啤酒．之所以迟迟未做决定，原因是一旦戒了酒，我这兄弟会自然就待不下去啦．不过现在想想，即使离开兄弟会，也没啥大不了！自从你们的书让我开了眼界，看到数学真实、美好的一面之后，我对人类的各种创新努力，重新产生了敬意，也不再贸然轻视我们这个多元社会里的每一个人．换言之，我不再以貌取人；以前我认为，怪胎不可能有啥能耐跟内涵，现在我终于了解到，外形上的特质不足以反映出内在的巨大创新潜力．为此，我要谢谢你们改变了我的一生．

我现在已下定决心，今后要贡献绵薄之力，扫除社会上跟昨日之我相同的无知偏见．不过我也知道，无论我如何努力，成效远不如你们通过著书立说，

匡正社会陋习的伟大贡献. 你们真了不起，我将永远感谢你们. 如果你们认为我有任何帮得上忙的地方，不管是人事上还是财务上，千万别客气，尽管吩咐.

庄孝维 谨上

附言 我只是在希望跟祈祷，你们能考虑为《微积分之屠龙宝刀》写一本续集，写完该书尚未提到的部分，包括序列、级数及多变量微积分等等.

好啦好啦！算你厉害，居然给你猜中了，这封信不是真的，而是我们杜撰出来的. 不过，信中流露的感情却是千真万确的. 在一个又一个邮包的来信里，虽说每位读者的表达方式不尽相同，但对《微积分之屠龙宝刀》的赞誉，却是异口同声，让我们大大感动.

如果你现在正在书店里翻阅这本书，你大概是：

1. 刚修过初等微积分，使用过我们的《微积分之屠龙宝刀》，而且顺利拿到高分. 那么你还在犹疑什么？已经证明有帮助了，不是吗？

2. 刚修过初等微积分，但没有读到我们的前一本书，结果成绩很差. 显然，你应该即刻买下这本书，以便亡羊补牢. 顺便把第一本也一并买下，保证有益无害.

3. 并没有买过我们的第一本书，而你也获得了高分. 恭喜你，你真是不简单，这证明了你的天资跟努力都具有相当水准. 但是你有没有仔细想一想，你是不是因为运气好，才拿到高分？奉劝你赶快买下这本书，好大幅提高胜算.

4. 的确买了我们的第一本书，学期结束时却没能获得高分. 难道是我们忘了告诉你，即使有了那本书，你还是必须上课听讲，考试时也不能缺席？

我们实在不愿意想到或看到，你站在书店拥塞的走道上读这本书，身旁人来人往，而你连个坐下伸个腿的地方都没有. 要是你现在就把书买回家，待会儿你就可以啜着冷饮，舒舒服服地坐下来，仔细阅读你刚买的新书. 这岂不是一大乐事？

在这本书中，我们将不再重复告诉你如何选任课老师、如何有效学习微积分等等（不过，我们希望这两本书能够并排摆在你的书架上，随时供你参考），在你使用这《微积分之倚天宝剑》时，那些忠告一样用得着.

这本书的目的，是在向你讲解微积分后半部的一些专题，而不是要取代你现有的教科书. 事实上，它也无法取代教科书，原因是份量不够重. 但是，这本书足以让你明白，微积分这门课究竟在搞些什么. 所以你就放心读吧，希望你读得开心!

附言　不妨上网浏览我们的网站 howtoace. com，你会看到许多帮助你拿高分的资讯，包括旧考题网页的联结、数学笑话，以及进一步的讲解等等.



第2章

不定式与反常积分

2.1 不定式

知道自己的能耐与极限，是一项非常重要的技能．这意思就是说，你最好不要因为一时高兴，跑到上海金茂大厦的屋顶，只用几根指头吊在屋檐边上，除非你确实知道你有这个本事，绝对不会出事．要练得这个不寻常的本事，不可一蹴而就，你必须花上许多工夫逐步练习；一开始时也许你得趁着没课，跑到学校体育馆吊吊单杠，接下来试试自家浴室的窗子外沿，然后是外白渡桥的桥身，最后才轮得到金茂大厦．你必须知道自己究竟有多大本事，你的极限在哪儿．

数学也一样，你希望计算出你的极限值．譬如看到$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2)$，你希望能算出11，或者：

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-2}{x^2}=\frac{-1}{e^2}.$$

不过，就像你可能会高估你的体能，你也很有可能高估了你求极限的本事．比方说，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-12}{x^3-8}$等于什么？

答案不是很明显吧？如果把$x=2$代进式子里，我们会得到$\dfrac{0}{0}$．那么$\dfrac{0}{0}$又

等于多少呢？等于0、1，还是∞？好问题！实际上，这个极限可以等于它们之中的任何一个．那就是为什么我们把这样的极限叫做“不定式”．

最顶顶有名的不定式就是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

如果我们把 $x=0$ 代进上式，得到的是 $\frac{0}{0}$，这答案能告诉我们的不多，但是我们真的很想知道这个极限，怎么办？

会得到 $\frac{0}{0}$ 这种极限的状况有许多种，特别是当我们要用导数的极限定义，来证明 $\sin x$ 的导数是 $\cos x$．好在我们可以用一条现成的法则，来求这类极限，这条法则是由17世纪的大数学家伯努利（Johann Bernoulli）首先发现的，但是却命名为“洛必达法则”．洛必达*（Guillaume L'Hôpital）是一位有钱的侯爵，他花钱请伯努利教他微积分，结果也抢走了伯努利的功劳！（*洛必达也是数学家．）

其实，这种事情屡见不鲜，就拿这本书来说吧，虽然作者挂着我们三个人的名字，可是根本就不是我们写的——而是我们花钱请比尔·盖茨写的！附带一提，L'Hôpital 的正确发音是 Low-pee-tall（译按：中文译成“洛必达”，算是相当传神，不过作者在此开了个玩笑，Low-pee-tall 在英文字面上有“智商低劣者，骑在高智商者头上撒尿”的意义）．

让我们言归正传，下面就是这个法则：

> **洛必达法则：** 如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是不定式，那么
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这条法则到底要告诉我们什么？它其实是说：“如果在你取极限时，你被卡在 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 这一步上，求不出答案，那么只要改看 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 就可以啦！”

例题 1 试求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

解： 首先我们得瞧瞧题目是否为不定式．把 $x=0$ 代入 $\frac{\sin x}{x}$ 之后，我们得到

$\frac{0}{0}$，因此用得上洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

哇塞！真是简单！看样子没有人不会爱上这条法则．我们再试一个问题看看！

例题 2 试求$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

解：这也是一个$\frac{0}{0}$不定式，可以套用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2.$$

对于这一题，其实我们无须用上洛必达法则；我们仅仅用一些代数，把式子化简一下就可以了，就像这样：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

瞧，答案一样，用哪一个方法全看你的喜好．

例题 3 试求$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$.

解：这又是一个$\frac{0}{0}$不定式！它们简直是无所不在．于是，洛必达告诉我们：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$ （然而这仍然还是$\frac{0}{0}$的形式，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$ 所以再套一次洛必达法则．）

注意，在这题中，我们连续用了两次洛必达法则，但是有个重点别忘了：在第二次套用洛必达法则前，还是必须检查它仍然是个不定式．

常犯的错误 把洛必达法则套用到非不定式，是学生常犯的错误．这种错误在任何一种情况下都可能发生，但最常出错的地方，就是套用不止一次的时候．无论何时，请在每一步骤仔细检查．

牵涉到∞的不定式

如果我们遇到$\frac{\infty}{\infty}$这种不定式，洛必达法则一样可以派上用场.

例题 4 试求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解：如果我们把 $x=\infty$ 代入分子与分母，会得到$\frac{\infty}{\infty}$，所以也是一个不定式. 套用洛必达法则，就得到：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

极限是 0. 这个答案应该怎么解释呢？它的意思就是，当 x 越近无穷大时，分母的$\sqrt{x}$增加得比分子的 $\ln x$ 要快.

其他的不定式

前面我们看到了，如果一个极限成了$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式，我们都可以用洛必达法则把它摆平；但这也是能够套用该法则的先决条件.

警告！ $\frac{0}{\infty}$可不是不定式，它根本就等于 0. 还有，$\frac{\infty}{0}$也不是不定式，它等于 $\pm\infty$. 这两种情形下，都不能使用洛必达法则.

有的时候，其他一些形式也可以改成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式. 比方说，我们假定$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$，由于这个乘积可以等于任何数，所以也是一种不定式；我们可以把它改成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式，只要把两个函数挪动一下就成了：

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\text{或}f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

如此挪动之后，直接做下去就可以求解了.

例题 5 试求$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\ln x$.

解：若让 x 越趋近无穷大，我们可以看出它是 $0\cdot\infty$ 的形式，于是照以上所说，把它重写为：

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x}}.$$

如此一来，它就变成不定式，所以：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x}} = 0.$$

这就有点像你想要过河，而唯一的桥建在离你所站的位置有点距离，那么你就得绕点路，走到桥头去．这也有点像小婴儿用奶瓶喝牛奶，喝完后胀了一肚子的空气，必须把空气拍出来，小婴儿才能入睡——把空气拍出来，相当于把原式重写成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式，入睡就是使用洛必达法则．

2.2 反常积分

在写《微积分之屠龙宝刀》时，我们一直避免提到这玩意，但是现在就不得不介绍一下了．你一定知道它们的那副德性：来参加“微积分舞会”时，穿着 T 恤，上面画着晚礼服；吃饭的时候，根本不理会餐桌礼仪，就只用那把吃甜点的小叉子，从头吃到尾；当旁人因消化不顺畅，不由自主地放了一个响屁时，它们会肆无忌惮的高声大笑，让人难堪．没错，我们描绘的就是反常积分，如果它们不是这么重要，我们压根儿不会请它们来搅局．

反常积分又可概分为两类．第一类是没有上限或下限的积分；这类的积分不是从 -2 积分到 4 或是从 3 积分到 7 等等，而是从 1 到 ∞，或从 $-\infty$ 到 2，甚至是从 $-\infty$ 到 ∞．例如 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$，就是一个像这样的积分．

反常积分的第二种类型是，它们有一定的积分区间，不过在积分过程中，被积函数的值在某处却跑到 $\pm\infty$ 去了．例如 $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^{2/3}}dx$，当 $x=0$ 的时候，它的被积函数等于 ∞．

为了容易解释，我们最好把以上两种类型分开来讨论．首先讲第一类型．

当积分上下限为 ± ∞ 时

让我们再瞧瞧上面所举的例子 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. 由于它的上限为无穷大，看起来多少有些怪怪的. 我们应该如何着手呢？在《微积分之屠龙宝刀》里你已经学到，定积分通常代表被积函数图形下方的面积，那么我们且利用这个观点，来看看这个例子. 没错，从图 2.1 可看出，它确实是表示从 1 到 ∞ 之间，$\frac{1}{x^2}$ 曲线下方的面积，应该没啥问题.

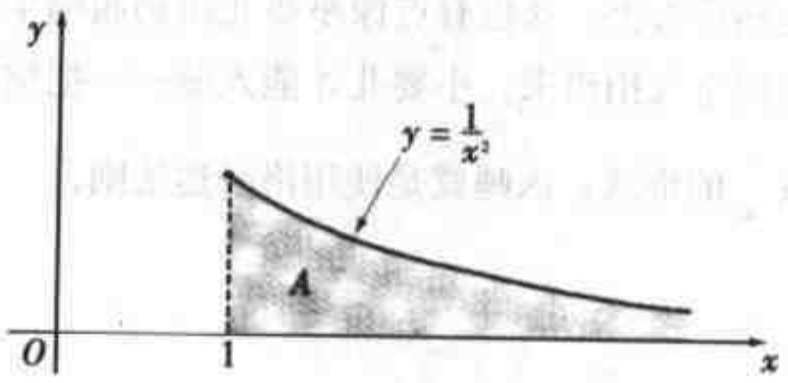


图 2.1 相当于 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的面积

我们知道你的脑袋里在想什么：图上那块灰色色块，面积会随着 x 增大而变大，无穷无尽，所以答案必定是 ∞，这还不简单！慢着！你这想法看似振振有词，但是却跟事实不符！为了发掘真相，我们得正确解释 ∞ 这个积分上限的性质与意义. 在这里，我们应该把 ∞ 想成是一堆愈来愈大的数的极限，也就是 $\lim_{b\to\infty} b$，如此一来，这个反常积分例子，就要正式解释成：

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{x}\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{-1}{b}\right)-(-1)\right]=0-(-1)=1,$$

所以在这个例子里，函数曲线下方的面积就等于 1.

把这个实例一般化之后，就得到以下的公式：

$$\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ .$$

有的时候，就像上例一样，反常积分的答案是个有限的数，此时我们就说这个反常积分“收敛”(converge). 但在其他时候，极限是 ∞ 或根本不存在，我

们就说它发散（diverge）.

例题 试求 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

解：这一题看起来跟上一题没多大区别，但是一旦我们取极限来算一算，马上就不一样了：

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} (\ln x) \Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} (\ln b - 0) = \infty .$$

这一题的积分发散.

以上是从某一定值 a 积分到无穷大的例子.我们可以依样画葫芦,另外定义:

$$\int_{-\infty}^b f(x) \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x .$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x) \mathrm{d}x + \int_c^{\infty} f(x) \mathrm{d}x .$$

其中的 c 为任何实数，可以是某人的生日、你拜树头得来的“明牌”，或者 0. 无论你选用哪一个，答案都会相同，所以我们建议你找一个最容易计算的数，除非你无所事事，闲得发慌.

现在我们来看看第二类的反常积分.

当被积函数变成 $\pm \infty$ 时

假如有人要我们计算刚才提到的另外一个积分：

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x .$$

我们就真的遇上麻烦了——原因是在 $x = 0$ 的地方，被积函数 $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ 没有定义. 它在 $x = 0$ 那一点急骤上升，像一座正在爆发的火山（见图 2.2）.

但是从图上看起来，曲线下方的面积并没有那么大——高则高矣，但宽度有限.

为了解决这个问题，我们从有问题的那一点（即 $x = 0$），把这题积分切成

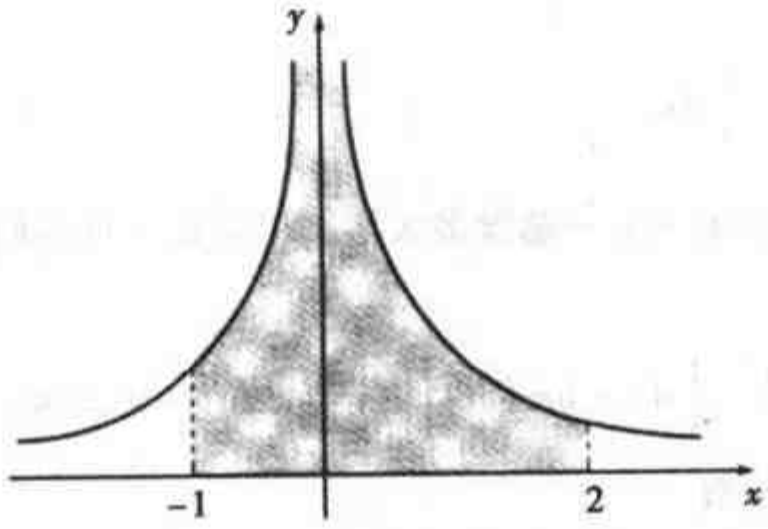


图 2.2 $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ 曲线下方的面积

两段：

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx.$$

现在，我们得重复前面讲过的概念，那就是：在 $x=0$，被积函数 $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ 的值不存在，因此我们就用一个极限，来代替第一个积分里的 0：

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx.$$

意思就是，我们取 b 从 0 的左边越近 0 的极限，因为积分的区间全在 0 的左边.

于是，我们就可以算出积分，并取极限：

$$\lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\lim_{b\to 0^-}3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{b}=\lim_{b\to 0^-}[3b^{\frac{1}{3}}-3(-1)^{\frac{1}{3}}]=3.$$

同理：

$$\lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\lim_{b\to 0^+}3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{b}^{2}=\lim_{b\to 0^+}[3(2^{\frac{1}{3}})-3b^{\frac{1}{3}}]=3(2)^{\frac{1}{3}}.$$

最后我们把左右两段加起来：

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx=3+3\,(2)^{\frac{1}{3}}\approx 6.780.$$

答案就现身啦！



第3章

极坐标

3.1 何谓极坐标?

你大概也看过一些冷战电影，熟悉这样的情节：美国的潜艇在深海中潜行，而就在50英尺外，有艘苏联潜艇，所以在场的每一个人都得非常安静不叫，深怕不一小心叫对方发觉，朝自己发射鱼雷．这时，银幕上就出现了一位海军少尉，坐在雷达显示器前面，而显示器上有一条绿色的亮光线，像时钟指针般不断扫过．然后，镜头扫到了潜艇上的军官，每一个人都汗流浃背，因为潜艇里面拥挤得像沙丁鱼罐，根本没有空间让船员把止汗除臭剂带上船．

接着，艇长压低了声音说："安静，任何人都不许出声．"而描述这些细节的同时，雷达显示器上的亮线仍一直转个不停，而且每转到差不多同一位置，就会出现一个大亮点，指出敌人潜艇的方向跟位置，而且每扫过那一点，雷达显示器就会"哔"地发出一声怪叫，就像三更半夜里的闹钟响．这时候你坐在电视机前，不由得奇怪，那些俄国人怎么听不见这个哔声？难道耳朵里塞了耳塞？还是他们把美国潜艇发出的哔声，跟他们自己的搞混了？当然都不是，那哔声响亮到可以把死人吵醒，所以艇长叫大家不得出声，根本是在欺骗没上过潜艇的老百姓!

于是，你坐在自己的家庭电影院里，对着电视告诉艇长："你根本不用压

低声音说话，雷达显示器不可能传递声音嘛.”而且即使你在这边敞开喉咙大唱“天佑美国”，俄国人也只能在那边说：“同志，你听到了什么声音?”或是“同志，我从他妈的雷达显示器上啥也听不到!”

当然，这类电影的场景，至少有80%发生在北极冰帽下面，原因是美苏两国的潜艇最容易在那儿碰头．难怪雷达显示器上所用的坐标，可叫做“极”坐标了．

稍后，显示器前的少尉也以说悄悄话的样子，大声向艇长说（不然就会被显示器的哔声压得根本听不见）：“报告艇长，对方似乎是一艘C级核动力突击艇，上面看起来载有37个男人、12个女人，和一只放养鸡．它的位置离我们50英尺，现在正在接近中．”

然后这位雷达官加上一句：“它在37度方向．”意思是说，对方在50英尺外，方向跟正 x 轴之间的夹角为正37度．若是用极坐标来表示，我们说该点的坐标是 $(r, \theta) = (50, 37°)$.

当然，我们跟海军有点不同，我们使用弧度，这是因为所有数学家都同意，弧度计算起来比较方便．如果你只是为找到鱼雷的位置，用“度”也还算方便，但是一旦牵涉到积分、微分等运算，你就必须用弧度了．

为了用极坐标来表示平面上的一点，我们得先说出该点跟原点之间的距离，此距离称为 r，然后是它与原点的连线，跟正 x 轴之间在反时针方向的夹角 θ．如此一来，我们就把一点表示成 (r,θ)，而不是 (x,y)，如图3.1所示．

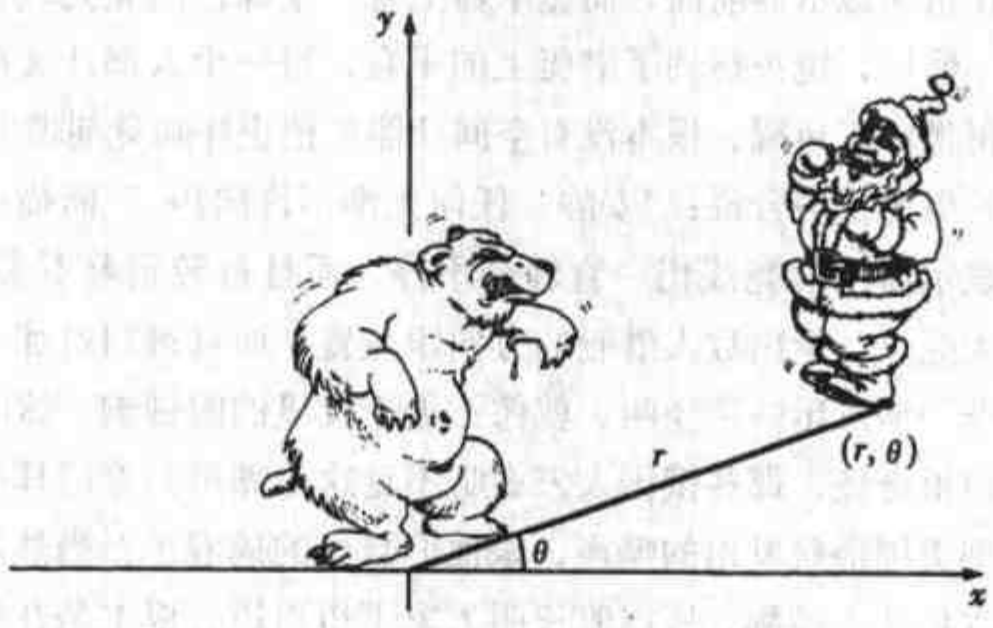


图3.1 极坐标决定了圣诞老人的位置

在极坐标上，对同一点不止一个表示方法．就拿直角坐标（x，y）上的一点（1，0）为例，它离原点的距离是1，而跟正 x 轴之间的夹角是0弧度，所以用极坐标表示此点时，它是（r，θ）=(1，0)．但是我们也可以写成（1，2π）、(1，4π）等等．这还不算稀奇，稀奇的是原点本身，除了（0，0），还可以写成（0，π）、$(0,\frac{\pi}{2})$、(0，7.3π）等等．

如果 r 是负值，表示从原点走出去时是朝着负 x 轴的方向走．所以如图3.2所示，（r，θ）=$(-1,\frac{\pi}{4})$ 这一点，跟 $(1,\frac{5}{4}\pi)$ 事实上为同一点．

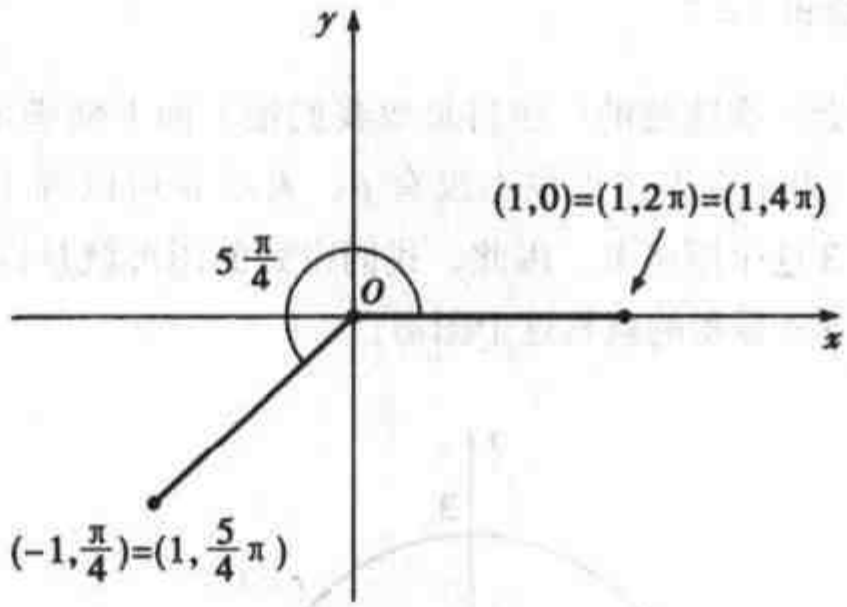


图3.2 在极坐标上，对同一点可以有不止一个表示法

从图3.3以及勾股定理，我们可以得到几个换算直角坐标与极坐标的基本

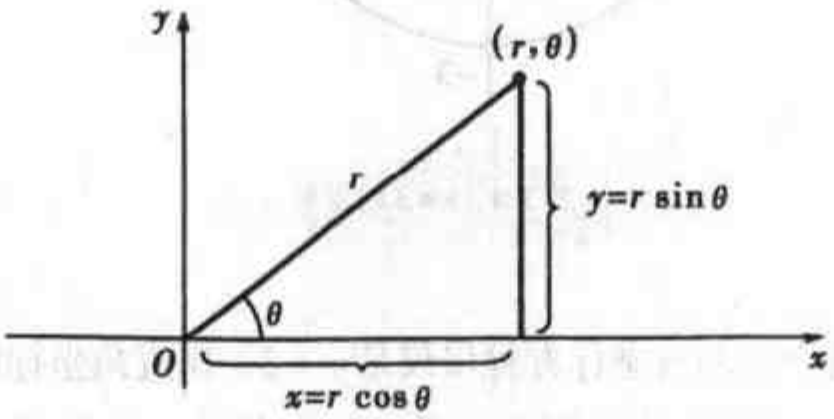


图3.3 用极坐标表示直角坐标

关系式：

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\tan\theta = y/x, \text{ 假定 } x \neq 0.$$

框框里的4个方程式，值得知道，但是不须硬背下来．原因是你只要记得图3.3，就能非常容易的从图上看出了．现在让我们画一些极坐标方程式的图．

例题1 试绘出 $r = 3$.

解：你一定会喜欢这题的！题目是要我们把平面上能满足 $r = 3$ 的所有点 (r, θ) 找出来．由于方程式里根本没有 θ，表示 θ 可以等于任何值；但是 r 不然，它固定在3这个距离上．因此，我们得到的图形就是以原点为圆心、半径为3的圆．图3.4显示的就是这个图形．

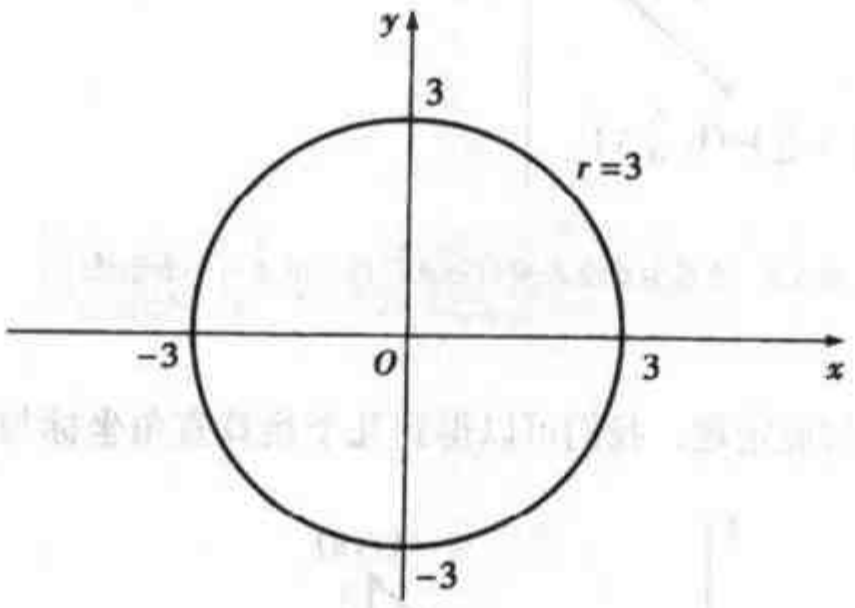


图3.4 $r = 3$ 的图形

反过来说，这个圆的极坐标方程仅仅是 $r = 3$，比直角坐标的圆方程式 $x^2 + y^2 = 9$，简单得多．这正是数学家喜欢极坐标方程的一个原因；这种方程式大大简化了某些常用的图形表示方法，特别是以原点为圆心的圆．

例题 2 试绘出 $r=2\sin\theta$.

解:

方法 1：标出一些点，然后连起来. 在绘图形时，这是一个经久不衰的传统办法. 当你不是很确定，或是被五花八门的“捷径”弄得迷迷糊糊、不知所从，这时最靠得住的方法就是返璞归真，把一些点标示出来，然后一个个连起来.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	…
$r=2\sin\theta$	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	…

把以上这些点连起来之后，就会得到图 3.5 所示的圆. 请注意，如果我们让 θ 从 0 变化到 2π，我们实际上是绕了图中这个圆 2 次.

方法 2：上述的描点法非常机械化，做多了只会叫你腰酸背痛、心烦气躁. 为了活动活动你的脑子，我们不妨变化一下，换个解题方式. 首先，在等号两边各乘以 r，于是得到 $r^2=2r\sin\theta$. 由刚才学到的关系式：$r^2=x^2+y^2$ 以及 $y=r\sin\theta$，我们就可以把这个方程式转换成直角坐标，也就是 $x^2+y^2=2y$. 看不出这是什么吗？不打紧，让咱们乾坤大挪移一下，重新写成：

$$x^2+(y^2-2y+1)=1,$$

$$x^2+(y-1)^2=1.$$

这不就是半径为 1、圆心在（0，1）的圆吗？（图 3.5）

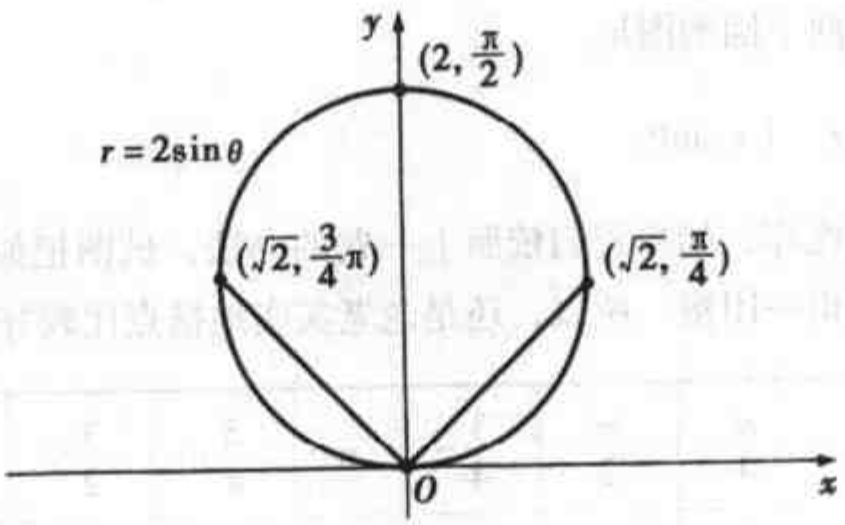


图 3.5 $r=2\sin\theta$ 的图形

由此，我们很容易看出：

> 一个半径为 a，圆心在（0，a）的圆，极坐标方程为
>
> $$r = 2a\sin\theta.$$

同样的，

> 一个半径为 a，圆心在（a，0）的圆，极坐标方程为
>
> $$r = 2a\cos\theta.$$

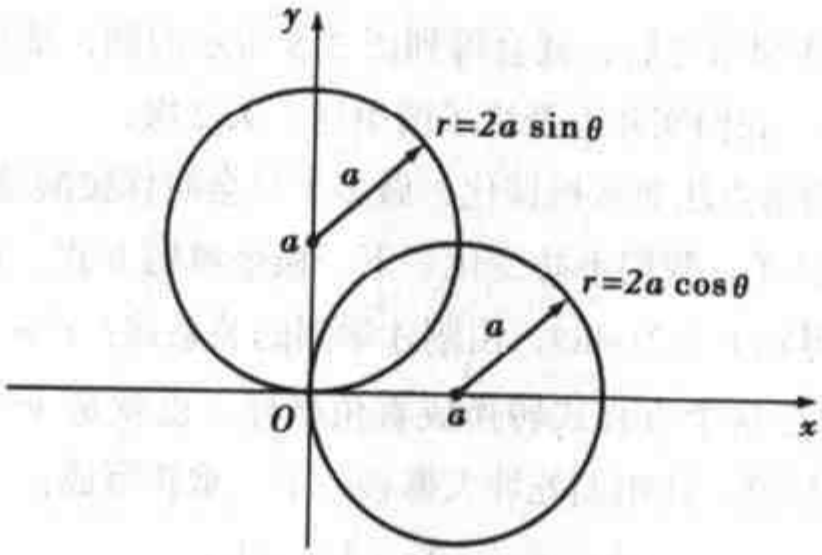


图 3.6　$r = 2a\sin\theta$ 及 $r = 2a\cos\theta$ 的图形

图 3.6 就是这两个圆的图形.

例题 3　试绘 $r = 1 + \sin\theta$.

解：这题比较诡诈．如果我们依照上一题的办法，试图把原方程转换成直角坐标，恐怕会弄得一团糟．所以，还是老老实实地描点比较好．

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$r = 1 + \sin\theta$	1	1.707	2	1.707	1	0.293	0	0.293	1

把这些点连起来之后，就得到图 3.7 的图形．这个图形跟心脏的外形相似，

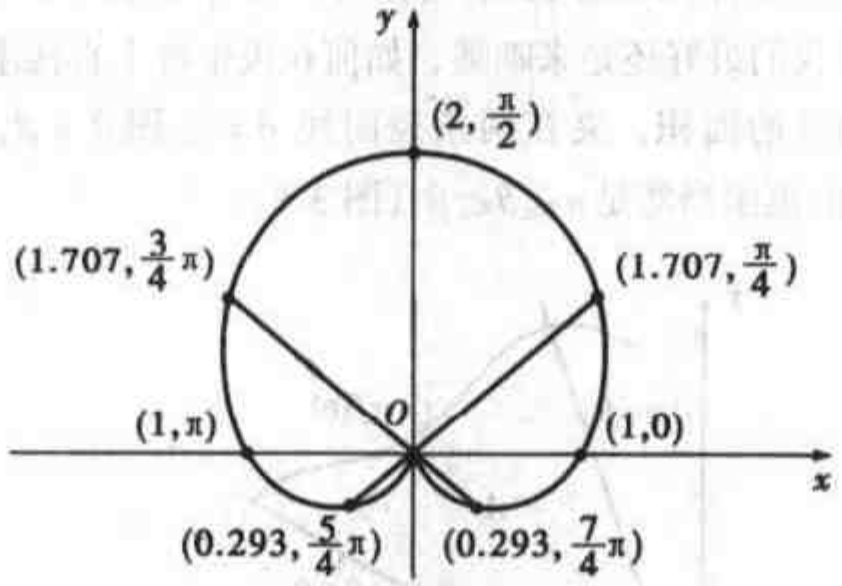


图 3.7 $r = 1 + \sin\theta$ 的图形

所以命名为“心脏线”. 西洋情人节期间满街可看到的“心形”，跟真的心脏比起来，长相根本就差了一大截. 图 3.7 的这个图形，才是真正的心形——因为它有个拉丁名字!

凡是形式为 $r = a(1 \pm \sin\theta)$ 或 $r = a(1 \pm \cos\theta)$ 的方程式，画出来的图形都是心脏线. 中国人常说：“某某人胸怀大志.”洋人则说：“She has a heart as big as the great outdoors.（她的心脏很大.）”指的就是 a 的大小：a 愈大，心脏也愈大. 方程式用的三角函数是 sin 还是 cos，决定了这个心脏线是竖着的，还是横着的；至于方程式里的正负号，则决定了凹进去的部位是朝下还是朝上（对横着的心脏线而言，则决定是朝左还是朝右）.

以上这几题，可说是极坐标方程里最著名的方程式，而且经常在考卷上露脸，所以若要得到好成绩，最好弄得一清二楚.

3.2 极坐标中的面积

如同直角坐标中的曲线“围住”一块面积，极坐标中的曲线也围住了一块面积. 我们已经学过，如何求直角坐标中两条曲线之间的面积，所以原则上，我们可以把以极坐标表示的曲线，先转换成直角坐标，然后求面积. 不过，这有点

像是把美国诗人弗洛斯特(Robert Frost)写的诗，先译成俄文，然后才去决定我们喜不喜欢．因此我们最好还是来瞧瞧，如何在极坐标上直接求面积．

假设我们要知道的面积，夹在两条径向线 $\theta=\alpha$ 跟 $\theta=\beta$，以及曲线 $r=f(\theta)$之间，而 θ 的范围当然是 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ (图 3.8)．

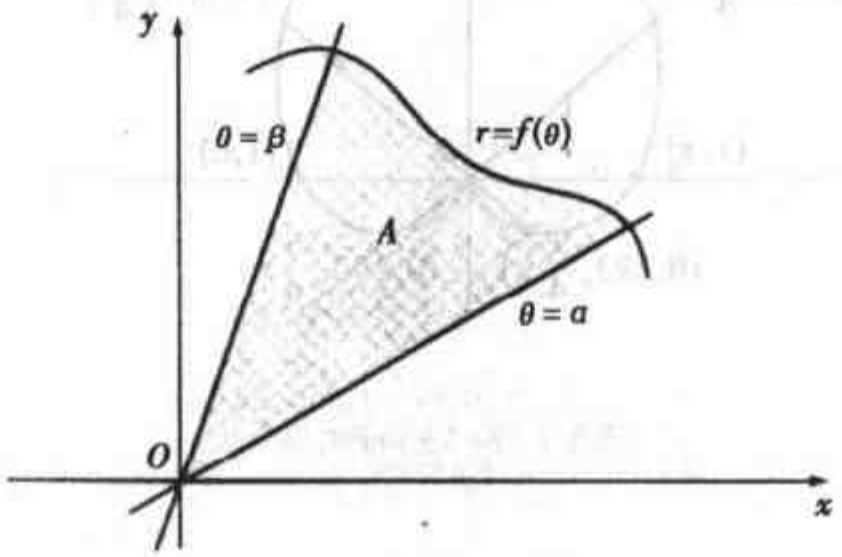


图 3.8 由 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$，以及 $r=f(\theta)$ 围成的面积

一看到这个图，你可能会想到黎曼和（见《微积分之屠龙宝刀》第 22.5 节），换一种方式说，就是“分开来各个击破”的策略．你可以把它当做一块派或比萨，分切成许多等份，来估算它的总面积．

说到派，数学系聚餐时常有的一道饭后甜点就是柠檬派，每当柠檬派分送

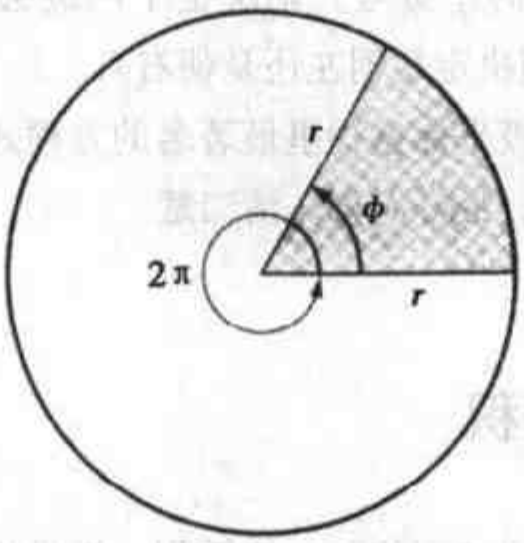


图 3.9 求一小块派的面积

到每个人面前，大家所做的第一件事，就是议论应该如何计算面前这块派的面积（每个人心里想的，实际上是究竟谁拿到了最大的那一块）. 如果这块派的半径为 r，圆心角为 ϕ，就像图 3.9 所画的那样，那简单，整个派的面积就是 πr^2，而你面前那一份应该是整个派的 2π 分之 ϕ. 也就是说，你的那一块派面积等于 $\pi r^2 \times \frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{2}(r)^2\phi$.

如果你搞不清楚数学系聚餐是怎么回事，现在你心里应该有点谱才是，当然好戏还在后头，等到吃完了饭要付账的时候，你就会大开眼界啦！闲话少说，言归正传，让咱们回到图 3.8 的面积问题.

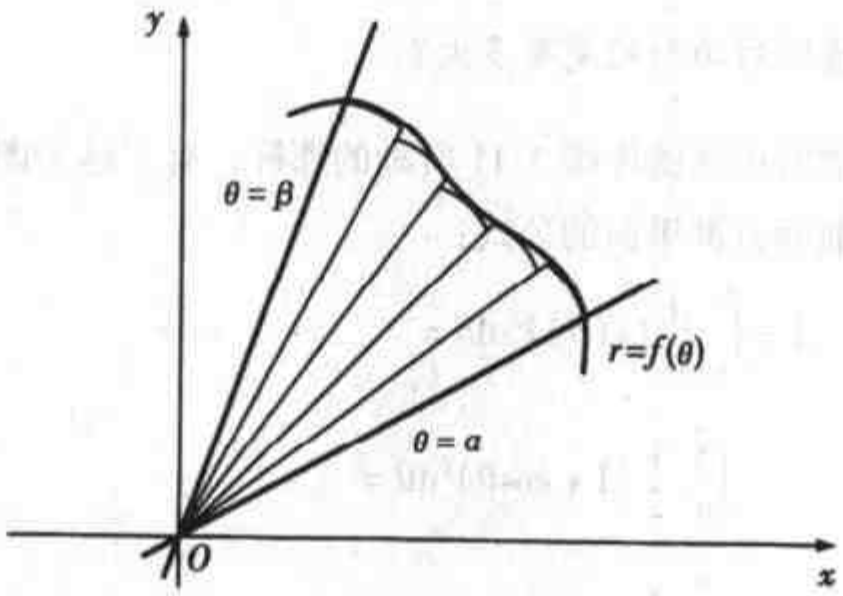


图 3.10 以等分小块派的面积，来估计整个面积

现在看看图 3.10. 我们把介于 α 到 β 的这个角分成 n 个等份，每一等份的大小为 $\Delta\theta$，而在每一个等分角中，我们再任选一个角 θ_i^* 来代表它的角度位置，那么第 i 个楔形小块派的半径就是 $r_i = f(\theta_i^*)$，而面积就等于

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}(r_i)^2\,\Delta\theta = \frac{1}{2}(f(\theta_i^*))^2\,\Delta\theta .$$

所以，整个区域的面积约等于这些小块派的面积和，写成数学式子就是：

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (f(\theta_i^*))^2\Delta\theta .$$

如果我们把派饼分得更细，然后取其极限，那么这个总和就变成从 α 到 β 的积分，我们也求出了整块派的面积：

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(f(\theta))^2\mathrm{d}\theta.$$

现在让咱们举个例子.

例题 1 （**看不透挡风玻璃的问题**）话说你要去球场看少年棒球赛，正沿着球场旁边开着车，这时不知哪个乡巴佬有意无意吐了一口槟榔汁，一摊血似的东西正巧落在你的挡风玻璃上. 修养到家的你，一句恶言也不发，马上启动雨刷，来回刮了几下，结果挡风玻璃上的“血渍”就散开来，成了一块介于 $\theta=0$、$\theta=\frac{\pi}{2}$，以及 $r=1+\cos\theta$ 之间的区域（r 的单位是英尺）. 那么请问，你那片看不透的红渍印的面积究竟有多大?

解：那片血渍的形状就像图 3.11 所画的那样，有了这个图，剩下的就是代代公式了. 利用前面方框里面的公式：

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(f(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[1+2\cos\theta+(\cos\theta)^2]\mathrm{d}\theta=$$

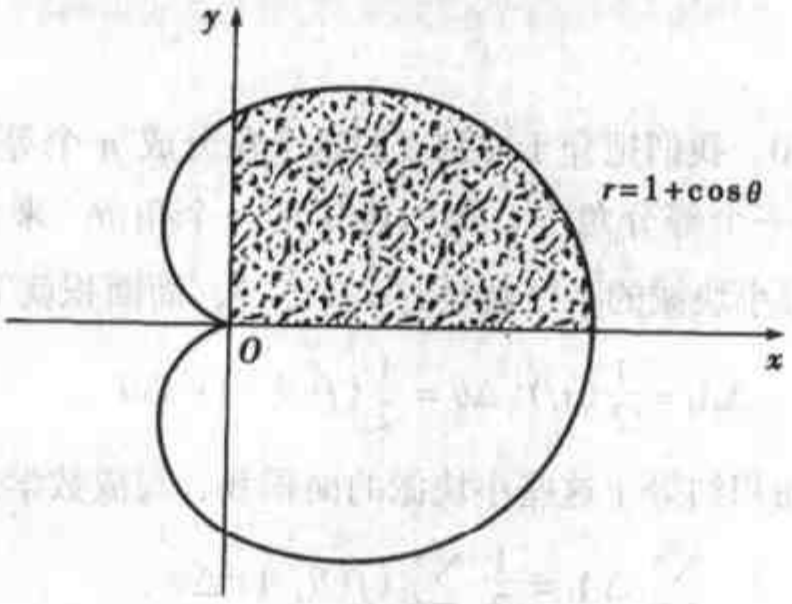


图 3.11 惨不忍睹的挡风玻璃

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[1+2\cos\theta+\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{1}{2}\left(\theta+2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{4}\right)=$$

$$\frac{3\pi}{8}+1\approx 2.178.$$

看样子,你只有赶紧去找家洗车店喽!

曲线所围成的面积

也许你也曾注意到,挡风玻璃上的雨刷,并非每一次都会回到雨刷从车体伸出来的地方.从实用观点来看应是件好事,因为那地方刮了不但没啥效果,雨刷也比较容易磨损.不管道理在哪儿,结果是咱们得知道,如何求两条极坐标曲线之间的面积.

假定我们想求,由两径向线 $\theta=\alpha$ 跟 $\theta=\beta$,以及两曲线 $r=f(\theta)$跟 $r=g(\theta)$所围成的面积(其中,对 α 跟 β 之间的所有 θ 来说,$0\leqslant f(\theta)\leqslant g(\theta)$),如图 3.12 所示.

由于两条径向线跟曲线 $r=f(\theta)$ 所围的面积等于 $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(\theta))^2\mathrm{d}\theta$,而两径向线跟另一条曲线 $r=g(\theta)$ 所围的面积,等于 $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(g(\theta))^2\mathrm{d}\theta$,所以这两

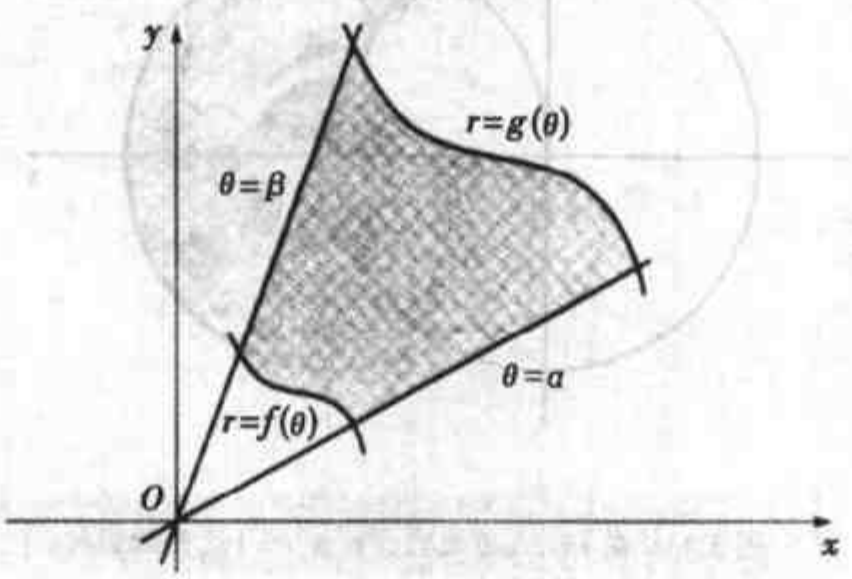


图 3.12 由 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$、$r=f(\theta)$ 跟 $r=g(\theta)$ 所围成的面积

条曲线之间所夹的面积，就等于后者减去前者：

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(g(\theta))^2\mathrm{d}\theta-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(f(\theta))^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[(g(\theta))^2-(f(\theta))^2]\mathrm{d}\theta.$$

例题 2 试求在圆 $r=2\cos\theta$ 之内却在圆 $r=1$ 之外的区域的面积.

解：

第 1 步：把题目做个图解. 圆 $r=1$ 很简单，但是 $r=2\cos\theta$ 是啥玩意？这个圆就不容易画了. 不过，我们在前一节碰过类似的例题，在此可以依样画葫芦、把它改成直角坐标：

先把等号两边都乘以 r，得到 $r^2=2r\cos\theta$. 由于 $r^2=x^2+y^2$，且 $x=r\cos\theta$，这个方程式就转换成直角坐标中的 $x^2+y^2=2x$. 接着，再做一点移项的工作，把它变成一个圆的标准公式：

$$(x^2-2x+1)+y^2=1,$$

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

如此一来，我们便知道 $r=2\cos\theta$ 这个圆的圆心为（1，0），半径为 1，如图 3.13 所示.

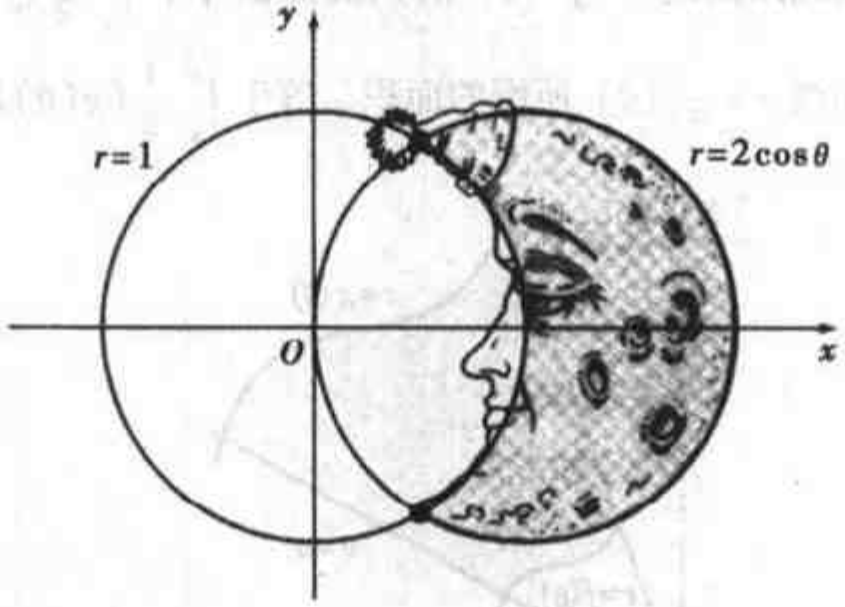


图 3.13 在 $r=2\cos\theta$ 之内、而在 $r=1$ 之外的面积

所以，这个题目就是要我们求图中那块弦月的面积.

第 2 步：我们需要找出两个圆的交点．由于在交点上，r 的值相等，所以

$$1 = 2\cos\theta,$$

$$\frac{1}{2} = \cos\theta,$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3}或\frac{\pi}{3}.$$

第 3 步：现在一切就绪，我们可以写下积分过程，求出面积了：

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[(g(\theta))^2 - (f(\theta))^2]\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[(2\cos\theta)^2 - (1)^2]\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[(4\cos^2\theta) - 1]\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{\left[4\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\right] - 1\right\}\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[1 + 2\cos(2\theta)]\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{1}{2}(\theta + \sin(2\theta))\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] - \left[-\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]\right\} =$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx$$

1.913.

嘿，怎么半天都没听到你吭声？



第4章

无穷级数

4.1 序列

什么是无穷序列?

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

就是一个无穷序列.

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots$以及$\pi,\ \pi^2,\ \pi^3,\ \cdots$也都是无穷序列. 所谓序列, 就是一组无穷无尽的实数, 而且以下面这样的顺序排列:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots.$$

序列中的每一个数, 我们称为"项", 所以首项就是a_1, 第二项就是a_2, 而第n项就是a_n.

心情很好的时候, 我们可能用$\{a_n\}$或是$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$这两种速记记号来代表序列. 譬如$\left\{\frac{1}{n}\right\}$, 就代表序列$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots$, 而$\{1+(-1)^n\}$, 即是序列$0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \cdots$.

序列的种类繁多, 在"序列名人堂"里, 你可以看见历代最伟大的序列, 虽然不见得个个都像$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$或$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$那般人尽皆知, 但是全

世界的序列迷都对它们敬爱有加.

较少人知道的其中一个，就是斐波那契序列.

例题 1 斐波那契序列（写成 F_n）就是：

$$1，1，2，3，5，8，13，21，\cdots.$$

这个序列的规则真是相当难看出：从第三项开始的每一项，皆为其前两项的和. 我们可以把上面的规则，写成所谓的递归公式，来定义或代表这个序列：

$$F_1 = 1,$$

$$F_2 = 1,$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}，\text{其中 } n \geqslant 2.$$

这些数经常出现在跟生物学有关的许多地方，最有名的就是活蹦乱跳的兔子的兔口成长问题，当然，也可以适用于活蹦乱跳的老鼠、活蹦乱跳的鸟儿，甚至看起来不太可能的活蹦乱跳的豪猪身上.

例题 2 兔子出生之后只需要一个月就成熟，可以开始繁殖下一代，而她的怀孕期也是一个月. 我们假定雌兔每次都生下雌雄各一双兔宝宝，而这些兔宝宝“满月后”开始怀孕，然后生下一只雌兔一只雄兔. 那么，从一对刚出生的兔宝宝开始算起，到第 n 个月后，一共有多少对兔子？

解：既然是从一对刚出生的兔宝宝开始起算，那么第一个月里只有这一对兔子，亦即 $F_1 = 1$，而在这第一个月里，这对兔宝宝渐渐成熟并开始恋爱，月底就缔结了连理，由于还没有生产，第二个月里仍然维持是原来这一对兔子，亦即 $F_2 = 1$. 第二个月开始不久，母兔子开始喜欢吃口味非常怪异的冰淇淋，而后就在第三个月月初，她产下一对兔宝宝.

因此，

$$F_1 = 1,$$

$$F_1 = 1,$$

$$F_3 = 2.$$

到了第四个月开始，兔妈妈丝毫没耽搁，生下第二胎兔宝宝，至于她的第一对子女，还在长大跟考虑结婚的问题（这个兔子家庭里允许兄妹乱伦）. 所

以，第四个月里有三对兔子，即 $F_4 = 3$. 等到第五个月一开始，兔妈妈跟她的大女儿各生下一对兔宝宝，这个兔子家庭又增加了两对新的成员，也就是 $F_5 = 5$. 像这样的快速繁殖，兔子们当然要大肆庆祝一番，少不了要喝掉许多胡萝卜汁，兴奋的跳来跳去. 养兔人家看在眼里，当然也是喜上心头，得赶紧扩建兔笼. 这样下去，你应该看得出来，在第 $n+1$ 个月的月初，兔子对的总数 F_{n+1}，就等于第 n 个月里的总数（F_n）加上第 $n-1$ 个月出生、而得到了可生育兔龄的总数（F_{n-1}）.

嘿！你的鼻孔为什么在抽搐？

4.2 序列的极限

你有没有想过，如果你随着一个序列一路走到底，会发生什么事？我们现在就来看看序列的极限，譬如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} n=0$. 我们的目标在取函数 $f(n)$的极限，这就好像先前取函数 $f(x)$ 在 x 趋近 ∞ 时的极限，都应用同样的一般法则.

例题 试求序列 $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ 的极限.

解： 解这个问题的过程，就跟求函数 $\frac{\ln n}{n}$ 在 x 趋近 ∞ 的极限完全相同. 让 n 趋近 ∞ 之后，你会发现题目中的式子变成不定式 $\frac{\infty}{\infty}$，所以马上就知道用洛必达法则：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0.$$

这简直就像喝蛋花汤一样轻松.

4.3 级数：基本概念

你大概常听人评论说，某某电视剧很好看，某某电视剧不怎么样，两者的

差别究竟在哪儿？一般说来，好的电视连续剧，在每一集的结尾，里面所有分别发展的情节都会汇聚到一起，让观众觉得完整而圆满．这一类的电视剧包括“欢乐单身派对”、“急诊室的春天”、“欲望城市”……．

反之，在不怎么样的电视连续剧里，虽然一样是有许多情节在同一时间发展，却从不交集，叫观众在看完一集时，不是一脑袋糨糊，就是头壳空空．实际范例真是不胜枚举，耳光打来打去，口水泪水喷来喷去的滥情单元剧，都属于这一类．

所以电视连续剧（series，在数学上是指级数）若要成功，它就必须具有汇聚情节的特质（convergence，在数学上是指收敛性），这就是本章要谈的重点．当然，这里讲的 series 是指级数，不是电视连续剧，因而牵涉到的不是什么精彩的剧情，而是谈一大堆数加起来的总和，请注意，是“一大堆”．多大一堆呢？就是要把一个无穷序列中的数全部加在一块．

所谓无穷级数，就是指下述形式的和：

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots.$$

若嫌上面的写法太长、太啰唆，也可以加以简化，记成 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$．有时我们也可以让序列从 $n=0$ 开始：

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

但是你必须小心，像这样的无穷和究竟是什么．把无穷多个数加在一起，一般人该如何理解这么玄的概念呢？搞数学的人碰到与无穷有关的问题时，通常会用极限来给它下个定义．不过，在此让我们先来瞧瞧与无穷和相对应的有限和．

定义 一个级数到第 n 项的部分和是

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

换言之，它就是该级数前 n 项的和．比方说：

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

当我们继续写下去，S_n 就愈来愈接近无穷级数，所以我们可以说：

一个级数的和 S 如果 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

此时，我们说该级数收敛到（converge to）S. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，我们则说该级数发散（diverge）.

例题 1 $1 + 1 + 1 + \cdots$.

我们注意到，$S_1 = 1$，$S_2 = 2$，以及 $S_n = n$. 那么，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

表示该极限不存在，因此这个级数发散.

例题 2 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

于是 $S_1 = \frac{1}{2}$，$S_2 = \frac{3}{4}$，$S_3 = \frac{7}{8}$，而 $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$. 由于

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1} = 1,$$

我们得知该级数收敛到 1.

以上两个范例，分别说明了级数的两种基本行为：一种是在你眼前爆炸开来，另一种则乖乖收敛到一个有限的数. 这样说相当抽象，不太容易懂，不过我们可以用浴缸作比喻，来解释两者之间的差别.

浴缸比喻

且让我们把一个无穷级数，想成是注水到浴缸里面. 假设浴缸一开始是空的，然后我们用一个量杯，把相当于级数第一项的水量倒进浴缸，接着又把相当于第二项的水量，也倒进了浴缸，如此继续同一个动作，依序把级数的各项一一倒进去，如图 4.1 所示.

现在，我们用这个比喻来看上面的两个范例. 范例 1 相当于第一次加一杯

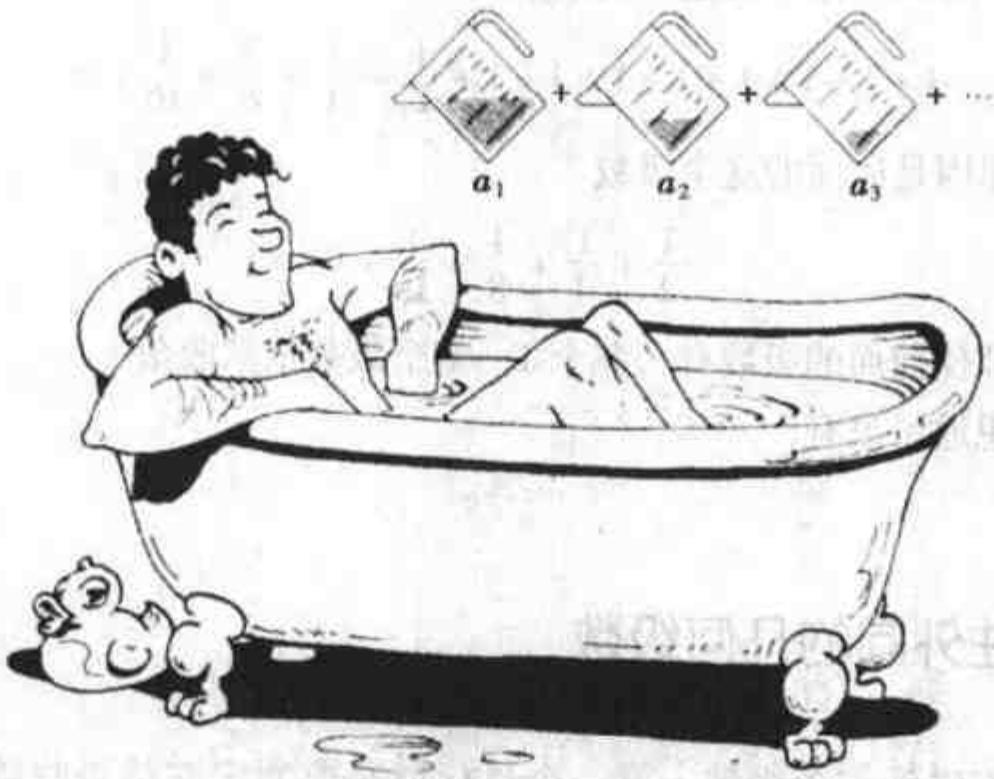


图 4.1 求级数的和，犹如加洗澡水

水，第二次也加一杯水，事实上是每次都加一杯水．虽然一量杯的水不多，但一直加下去，浴缸里的水终将会满出来．不管浴缸的容量多大，即使跟太平洋一样浩瀚，或是跟某些无耻政客的野心一样大，水迟早都会满出来的．这就是发散的本意！

相反的，如果我们来看第二个级数，情况就有些不一样了．咱们第一次加进浴缸的是半杯水，第二次加进去的是四分之一量杯，第三次只有八分之一量杯，也就是每次所加的水量，只有前一次的一半．照这种方法加水无数次，你指望浴缸会加满吗？压根儿不可能！事实上，如此这般的加了无数次水之后，浴缸里累积的总水量不过刚好一量杯而已，别说一个人洗澡不够用，就连替一只大老鼠洗澡，都还嫌少．

你可注意，这个加洗澡水的比喻还告诉了我们另一件事？这件事就是：一个级数是收敛还是发散，跟级数的前几项完全没有关系．如果该级数就是会发散，浴缸有多大都不管用，而第一杯水是一满杯还是半杯，也不重要．什么？难道前一百万项（前一百万次加水）都不重要吗？没错，无关痛痒．事实上，真正决定级数是收敛还是发散的，不是前面几项（或几百万、几十亿项），而

是后面的项．所以，像下面这样的级数：

$$1+1+1+1+1+1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

是收敛的，原因是后面的这个级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

是收敛的．即使前面的级数有一兆个 1，整个级数依然收敛．

嘿，你想通了没有？

4.4 个性外向的几何级数

每当我们碰到一个级数，第一个目标就是要判定它是否收敛．如果它收敛，接着我们就得试着找出它收敛到什么数．但是级数并不乐意把这些信息写在脸上，许多级数还很不愿意分享．

幸好不是每个级数都这么“闭俗”，还是有不少级数非常乐意告诉你它们是否收敛，以及收敛到哪个数（若收敛的话）．只要有机会，它们会在你耳边唠叨不绝．总之，它们可能是你见过的最最友善的级数，它们都是超级外向的家伙．

说到个性外向的人，问你一个问题：当你面对一位数学家，你可知道如何分辨她（他）是内向还是外向？

答案是：外向的人会一个劲地瞧着“你的”鞋子．

言归正传，继续谈外向的级数．这儿有两个范例：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots.$$

这两个就是所谓的几何级数，因为构成它们的各项，组成了所谓的几何数列（又称等比数列）．意思是说，级数中的每一项，皆等于它的前一项乘上某一个固定数（公比）．上面的第一个级数，公比是$\frac{1}{2}$，而第二个级数的公比则是$\frac{1}{2}$．这一类的级数的通式就是：

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots.$$

几何级数的每一项（除了第一项），都等于它的前一项乘上公比 r. 当你不期而遇，碰上了几何级数，那算是你运气好，可喜可贺，因为几何级数已经给研究得一清二楚，毫无秘密可言. 所以你可以高枕无忧，放心玩乐去吧!

几何级数检验法 如果 $|r|<1$，则几何级数 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ 收敛到 $\frac{a}{1-r}$；如果 $|r| \geqslant 1$，则该级数发散.

我们在这儿不准备讨论这个检验法，要证明不难，你应该去问问你的教授，看他（她）是否希望你们知道怎么证明.

让咱们实际应用一下.

例题 1 $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$.

解：此级数为几何级数，首项 $a = \frac{1}{3}$，而 $r = \frac{1}{3} < 1$，所以收敛，且收敛到

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

例题 2 有个橡皮球，被人从 6 英尺高处放手让它掉下来. 它每次着地之后弹跳起来的高度，永远是前一次高度的 $\frac{2}{3}$. 请问这皮球上下弹跳，一共会行经多少垂直的距离？(图 4.2)

解：从图上看来，这个橡皮球首先在撞地之前行经了 6 英尺，然后第一次弹跳起来到达的高度为 $(\frac{2}{3})6 = 4$ 英尺，接着也往下掉了 4 英尺. 然后第二次撞地跟弹跳，这次弹跳的高度为 $(\frac{2}{3})^2 6$ 英尺，而且又往下掉了 $(\frac{2}{3})^2 6$ 英尺……所以这个球前后行经的垂直总距离为

$$S = 6 + 2(4) + 2(4)(\frac{2}{3}) + 2(4)(\frac{2}{3})^2 + \cdots =$$

$$6 + 8 + 8(\frac{2}{3}) + 8(\frac{2}{3})^2 + \cdots.$$

我们先暂时不管第一项，因此其余部分显然是一个几何级数，它的 $a = 8$

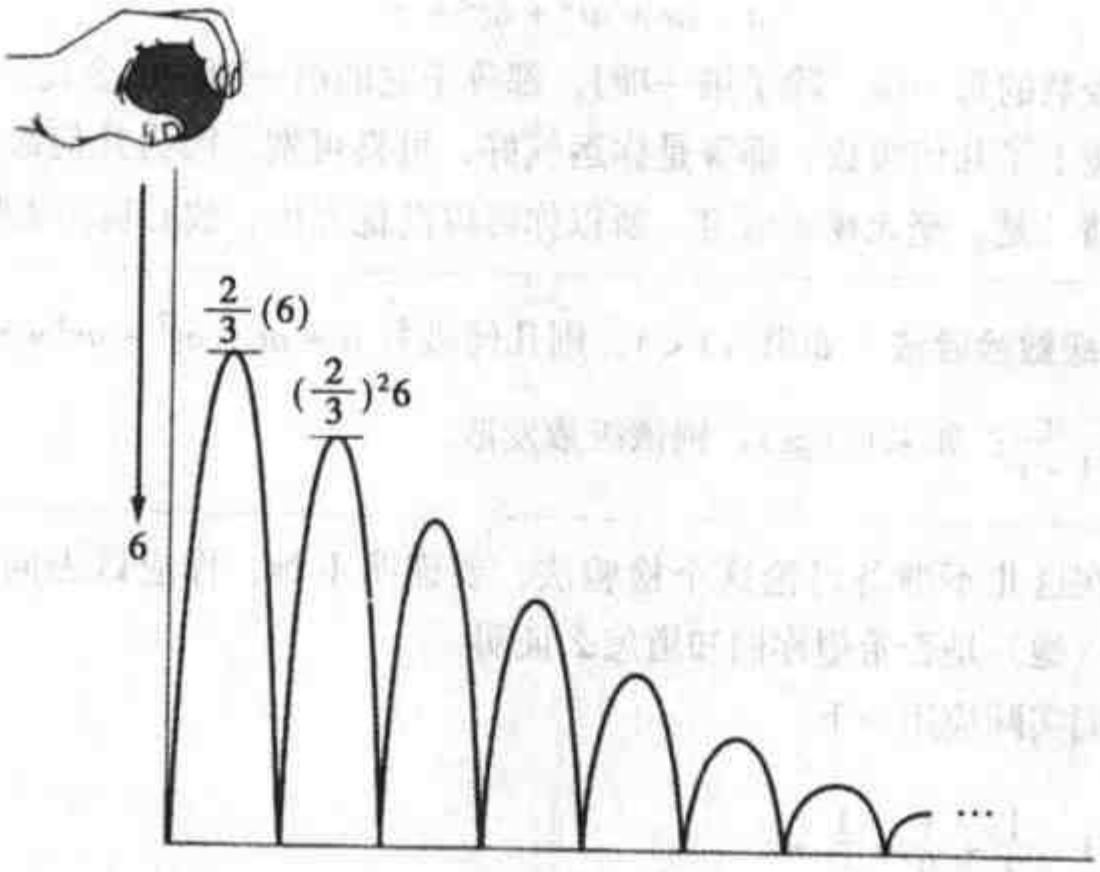


图 4.2 橡皮球一上一下弹跳历经的垂直总距离为多少

而 $r=\frac{2}{3}<1$. 所以说，

$$S=6+\frac{8}{1-\frac{2}{3}}=6+24=30\text{（英尺）}.$$

嘿！不要把嘴张得那么大！

4.5 第 n 项检验法

这是用来判定级数是否收敛的最基本检验法，如果受检验的级数没有通过检验，它就玩完了——发散，没啥可说！这个检验说的是：如果后来每一次加进去的水量并没有非常少的话，那么浴缸里的水迟早会满出来. 翻译成数学语言就是：

第 n 项检验法 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例题 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$，所以这个级数发散.

要另外找一个这么简单的检验方法，还真困难. 但是你得特别注意一点：**这个检验法倒过来不一定成立**. 譬如说，对于有些级数，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，但是仍然不收敛. 典型的例子就是所谓的调和级数，亦即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$. 我们待会再来讨论它的发散性.

常犯的错误 只因为看到 a_n 往 0 的方向缩小，就误以为级数 $\sum a_n$ 一定收敛.

4.6 更多朋友：积分检验与 p 级数

每见到一个级数，我们就想知道它是否收敛，想知道它的和究竟是个有限的数还是无穷大？我们收集了一些检验方法，可瞧出它的行为. 这些检验方法指出，我们所考虑的一些特殊级数与另一些级数是同犯，意思就是，如果其中一个级数收敛，另一个级数也收敛. 譬如下面这个检验方法就告诉我们，在某些情况下，级数跟一个反常积分就有着这种同犯关系.

这个检验法，以及接下来的几个检验法，都能应用到正项级数上；所谓正项级数，是指所有项皆为正数的级数.

> **积分检验法** 如果 $a_n=f(n)$，其中 f 是连续的正值函数，且对 $x\geqslant 1$ 时为递减，那么在这些条件下，$\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 跟 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是同犯；要么同为收敛，或是同为发散.

为什么？ 我们先来证明，如果 $\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也会跟着收敛. 从图 4.3 我们看得出来，当 x 从 1 趋向 ∞ 时，曲线 $y=f(x)$ 下方的面积，要比那些带阴影的长方形的面积和大些. 但是要注意，第一个长方形的高是 $f(2)=a_2$，宽为 1，所以面积是 a_2；而第二个长方形的高是 $f(3)=a_3$，宽同样为 1，故面积是 a_3. 如此一个个长方形继续看下去，第 n 个长方形的面积就是 a_{n+1}.

所以，图上所有长方形的面积和就是 $a_2+a_3+a_4+\cdots$. 由于这个面积和比

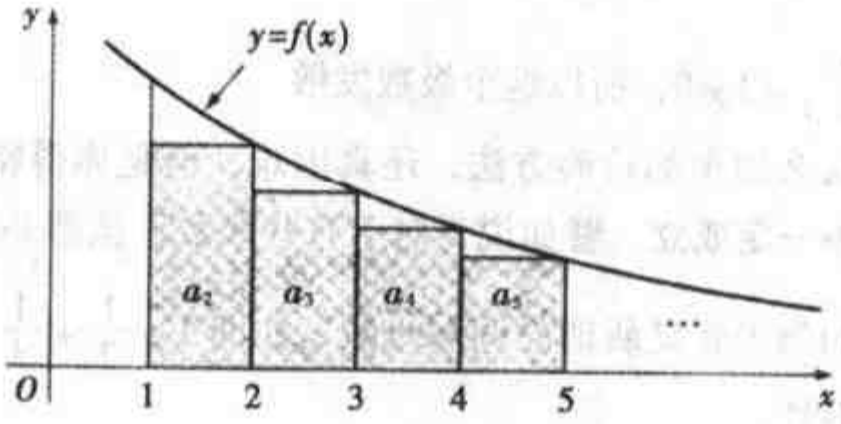


图 4.3 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$

曲线下的面积 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 小些，所以

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x > a_2 + a_3 + a_4 + \cdots.$$

但是我们刚才假设面积比较大的 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为有限，所以比较小的面积当然也是有限的.（此处的说明实际上还嫌不足，因为光有上界，尚不能保证收敛性，不过在这儿我们就不去仔细讨论了.）

所以，$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$收敛，既然它收敛，另外加上一项 a_1 并不会改变该事实，所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$也收敛.

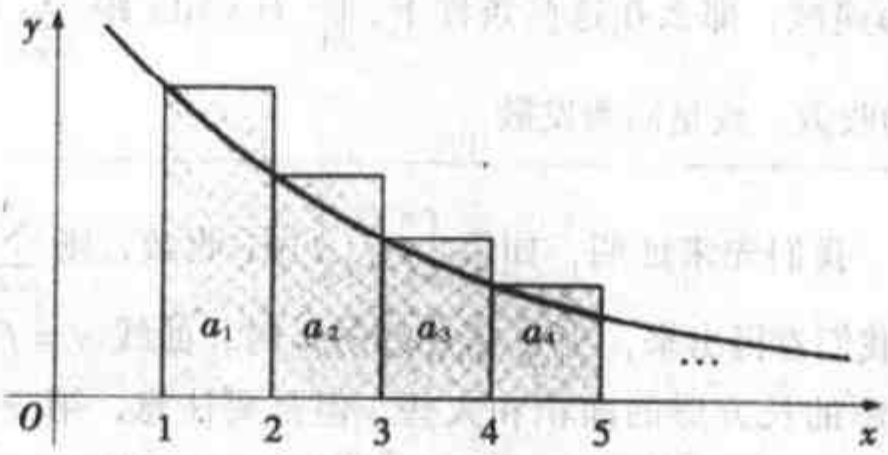


图 4.4 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

好了，接着我们要证明，如果 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么这个级数也发散. 现在我们换一个图，看图 4.4；与图 4.3 不同的是，这次那些阴影长方形的面积和，显然要比曲线下方的面积大了一些. 第一个长方形的面积等于 a_1，第二个长方形的面积等于 a_2，以此类推. 所以我们知道：

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots > \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

但是我们已经假定 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 发散，所以面积比它更大的级数也跟着发散.

调和级数

现在让我们把积分检验法，应用到下面这个调和级数：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

这个级数可能是现存的所有级数当中，最最著名的一个. 你一听我们这么说，一定会问为什么. 为什么一个小小的级数会如此有名？为什么有的人能那么出名？首先，你必须已经小有名望，然后你必须牵涉到一件丑闻，这几乎是出名的不二法门. 照这样说来，$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ 这个级数的确小有名气，因为我们只不过是取 1,2,3,4,…的倒数，然后相加. 我们很难想像出，还有哪个更简单的级数，看似满足第 n 项检验的反面，却仍有可能发散？

那它又闹了什么丑闻呢？这么说好了，因为这个级数的第 n 项 $a_n = \frac{1}{n} = f(n)$，其中 $f(x) = \frac{1}{x}$. 又由于 $\frac{1}{x}$ 是正值、连续，且对 $x \geqslant 1$ 为递减，所以合乎积分检验的条件.

换言之，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 跟 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 成了共犯，要么都是收敛，要么都是发散. 但是

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_1^b = \infty.$$

这表示这个积分跟级数都发散！也就是说，这个级数里面不起眼的小小项 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，居然会加成无穷大！

若是用浴缸比喻，第一次倒进一量杯的水，第二次倒进半杯的水，第三次

倒进$\frac{1}{3}$杯，这样一直倒下去，浴缸里的水终究会漫出来．甚至我们不是把水倒进浴缸，而是倒进干涸的太平洋，用同样的加水方法，到时候整个太平洋还是会泛滥成灾．这不是丑闻是什么？

当然，在程序上，这得花上非常长的时间．比方说，光是要让洗澡水积累到 5 杯的量（加到 5），一共得加 83 次水（加到第 83 项）．如果要加到 10，就必须加到第12 667 项；要加到 20，则必须加到第272 400 000 项．要是想积累到 1 000，那更不得了，一共得加 1.1×10^{434}项．这到底是多少项？实在很难想像，我们再举一个数字，或许你就能对这个数字之大有些概念：据科学家估计，我们这整个可观测的宇宙内，原子的总数大约是 10^{80}.

总之，这个级数发散，但是发散速度之慢，真叫人叹为观止．别的不说，你千万别用它来加洗澡水，除非你的寿命长达好几千兆年，而且没别的事儿可干！

p 级数

上面所说的调和级数倒非独行侠，它属于一个级数家族，常跟级数在外头鬼混的人，都知道这么一个家族．这个家族就是鼎鼎大名的 p 级数．

定义 形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（其中 $p>0$）的级数，即是 p 级数.

请注意，如果 $p\leqslant0$，则由第 n 项检验就知道该级数会发散．

我们真的很喜欢 p 级数，因为它们一点也不故弄玄虚，很乐意告诉你它们是发散还是收敛——而且是在第一次约会时．

p 级数检验法 对 $p>1$，p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛；对 $p\leqslant1$，则发散.

为什么？ 对 $p=1$，这个检验成立，因为它就是调和级数，我们已经验证过了．至于 $p\neq1$ 的部分，我们可以直接假设 $p>0$．因为要是 $p<0$，级数的每一个项不会变小．接下来我们要套用积分检验法，其中 $a_n=\frac{1}{n^p}=f(n)$，而$f(x)=\frac{1}{x^p}$.

由于$\frac{1}{x^p}$为正值连续函数，且对 $x \geqslant 1$ 为递减，所以我们可以用积分检验法，用此积分的“同犯”来判定它是否收敛：

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{\infty}.$$

当 $p>1$，指数 $(-p+1)$ 为负值，所以分子的 x^{-p+1}可以移到分母，指数变个号，变成 x^{p-1}，所以当我们求$\frac{1}{x^{p-1}(1-p)}$在 $x \to \infty$ 时的极限，我们会得到 0. 当 $p<1$ 时，指数 $(-p+1)$ 为正值，因而在取 $x \to \infty$ 时的极限时，我们得到 ∞.

所以，对 $p>1$，积分与级数均收敛，而对 $p \leqslant 1$ 为发散.

例题 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛，因为 $p=3>1$.

例题 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，因为 $p=\frac{1}{2} \leqslant 1$.

嘿，还有比这更简单的吗？

4.7 比较检验法

敝姓摩利，小名菲力普. 旁边这位是我的同事，也是我的堂弟巴布，没错，他的全名就叫巴布·摩利. 我们两个都是调查员，你没听错，我们是“英维加健康保养保险公司”的调查员. 英维加公司你大概听过，我们免费招待那些专门替我们节省大笔医疗保险给付的医生，到加勒比海的阿卢巴岛旅游，为此我们最近常上报纸宣传. 哪种医生？就是喜欢跟病人说：“你那条腿没有断，它本来就是那样.”这类屁话的医务人员.

我知道你这时在想啥，肯在那种公司上班的人会是什么正人君子？当然不是！所以我猜你应该大概知道了我们兄弟俩人的人品. 那么，在这样不事生产、寄生于社会的公司里，又是哪些人最下滥、是谁在决定你是否能够拿到免费的伟哥？没错，就是巴布跟我，摩利兄弟. 公司派我们出来调查各式各样的给付申请.

这回，我们遇上了特别狡诈的情况，啊！你也听说了？不过耳闻此事的人，大多数也就只知道这么多．没错，我在说支配，一个级数对另一个级数的支配．当我们比较两个不同级数时，如果发现第一个级数的每一项，都大于或等于第二个级数相对应的项，那么我们就说，第一个级数支配了第二个．用数学的说法就是：如果$\sum a_i$跟$\sum b_i$是两个级数，而对每一个可能的i来说，$a_i \geqslant b_i$，则我们说，$\sum a_i$支配了$\sum b_i$．

如果你的脑筋还没转过来，看看$\sum \frac{1}{n}$跟$\sum \frac{1}{n^2}$的例子．你应该不难看出：

$$\text{对 } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

所以$\sum \frac{1}{n}$支配了$\sum \frac{1}{n^2}$．懂了吧？这个观念不太容易理解吧？不过，有些级数却很喜欢受人控制，热衷此道，你又能怎么办？

那么为什么有人该关心此事？两个级数要私下对决，我的鼻子不会少掉一块皮，巴布的鼻子也不会．况且“各人自扫门前雪，休管他人瓦上霜”，古有明训，人嘛，尽量少管闲事，但是级数之间一对一的较量，非同小可，不是你死就是我亡．

这就是我们来此的原因，公司需要知道这种级数支配权之战所造成的医疗费用、风险，及可能的危害．如果需要6年的物理康复治疗，公司是否给付？经过一番调查研究，一些基本的比较检验法出笼了，用来显示迹象．

基本比较检验法　如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$跟$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都是正项级数，而且对所有的n，$b_n \geqslant a_n$，则

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$若收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛．
2. 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散．

这个检验法唯有在两级数的各项都为正数时才成立．用一种比较通俗的说法就是：

“如果较大的那个级数收敛，那么较小的级数也跟着收敛．”

“如果较小的那个级数发散，那么较大的级数也跟着发散.”

这个说法还是很容易弄混，一不小心就弄颠倒了，所以巴布跟我想出了一个最不容易出岔的“吹气球”记忆法.

气球比喻

我们可以把无穷级数的各项相加过程，想成是在吹气球，如图 4.5 所示. 每加一项，就是多吹一点空气进去，如果空气累积得太多，气球迟早会爆掉，级数就发散. 如果气球不爆炸，就表示级数收敛到一个有限的数，这个数就相当于气球内的空气.

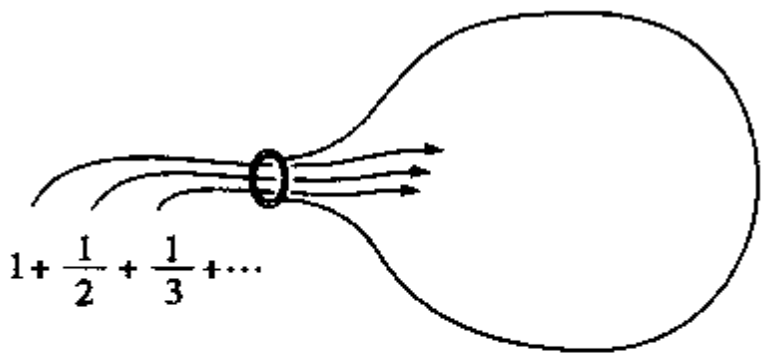


图 4.5　级数的每一项，都如同吹进气球内的空气

然后，我们可以把基本比较检验法想成套在一起的两个气球，如图 4.6 所示. 另外再假设，套在里面的气球的体积代表 $\sum a_n$，而外面的气球体积代表 $\sum b_n$，所以我们知道，$\sum b_n$ 支配了 $\sum a_n$，意思是相对应的每一项都是 $b_n \geqslant a_n$.

现在，我们想像一下这两个气球. 如果外面的气球永不爆炸，表示级数

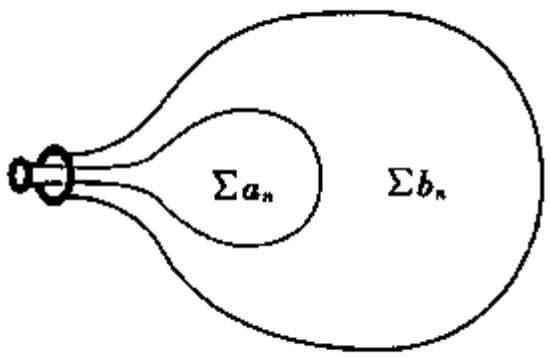


图 4.6　$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 支配了 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum b_n$收敛，气球的体积有限，而里面的气球也不会爆炸，因为体积较小．所以，较小的级数$\sum a_n$也收敛．

反之，如果里面那个气球爆炸了，意思是较小的级数$\sum a_n$发散，那么外面那个较大的气球，一定早就爆炸了，因为它的体积更大；意思是说，较大的级数$\sum b_n$必然已经发散了．简单明了之至．

但是你有没有注意到，另外还有两种可能，是哪两种呢？那就是：如果里面那个较小的气球没有爆炸，并不保证外面那个较大的气球会或不会爆炸；两者没有任何必然的因果关系，咱们不能武断地说，因为前者不爆炸，后者就一定会如何如何．同样的，如果外面的气球爆炸开来，也完全影响不了里面那个气球的爆炸与否．总之，这个气球比喻要我们注意四种可能，其中两种能告诉我们必然的结果，另外两种不能．

例题 1 试判定以下各个级数收敛或发散．

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$.

由于$\frac{1}{2+3^n}$的分母较大，故$\frac{1}{2+3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ 支配了 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}.$$

较大的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 是一个几何级数，公比 $r=\frac{1}{3}<1$，所以我们知道它收敛．根据基本比较检验法，我们得知，比它小的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ 也收敛（较大的气球不爆炸⇒较小的气球也不会爆炸）．

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$.

由于$\sqrt{n}-1$小于$\sqrt{n}$，因此$\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

又因为比较小的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是个 p 级数，其 $p=\frac{1}{2}<1$，因而发散．由基本比较检验法，较大的级数也必然发散（较小的气球爆炸，意味着较大的气球也会爆炸）．

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

一看到这个题目，你的第一个想法九成九是拿$\frac{1}{n}$来跟它比较，但是$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$是我们前面讨论过的调和级数，所以发散（得非常非常慢，记得吧?）. 然而，较大的级数发散（较大的气球爆炸），并不能告诉我们较小的级数究竟会怎样（较小的气球爆炸与否）.

所以拿$\frac{1}{n}$跟它比较，显然是白费力气，浪费时间. 那么该怎么办? 试试别的呀！下面这个如何?

$n+1 \leqslant n+n=2n$，所以$\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2n}$，然而比较小的级数是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

刚好是调和级数的一半，所以是发散，因为无穷大的一半仍然是无穷大！如此一来，较小的级数发散，就证明了较大的级数必定发散，解决了！

其实有一个更简单的方法，也能获得同样的结果，那就是让我们把题目中的级数展开：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

这不就是少了第一项的调和级数吗? 咱们前面讲过，不管是少一项或者多一项，都不会改变级数的性质，所以上面这个级数铁定发散.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

这题是个麻烦，怎么说呢? 如果我们不假思索，用直觉去套基本比较检验，会得到$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

不幸的是，较大的级数是一个 p 级数，其 $p=\frac{1}{2}<1$，所以是发散，但这结果无法告诉我们，比它小的级数是收敛还是发散. 此路不通，我们得另想办法！幸运的是，现成就有一个法子：

极限比较检验法 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 跟 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数，且对某个正数 k，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k,$$

则此两个级数同为收敛，或者同为发散.

它们是共犯，是级数中的雌雄大盗. 这其中的重点是，当 n 变得很大时，它们的行为变得非常相似：若 $k=1$，两级数的各项会愈来愈接近，变得相同；若 k 等于任何其他的数时，其中一个级数的项会愈来愈接近另一个的 k 倍. 因而，我们预期这两个级数行为一致. 唯有在上述的极限等于 0 或 ∞ 时，两个级数的行为才可能有所不同.

例题 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 收敛吗?

解：我们让 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. 刚才我们已经试过基本比较检验法，结果行不通. 现在我们改用极限比较检验法. 跟谁比较呢？一事不烦二主，咱们再把它跟级数 $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 比较好了：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1.$$

所以这个结果告诉我们：这两个级数互为共犯，其中一个干了什么，另一个也一定干了同样的事. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是一个 p 级数，其 $p=\frac{1}{2}<1$，所以发散，因此题目中的级数也发散.

4.8 交错级数与绝对收敛

一个级数若具有以下形式：

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

或是以下形式：

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots,$$

就称为交错级数，其中我们假设每一个 a_n 都是正数. 如果我们拿一个正项级数来，把每隔一项的正号改为负号，结果就是一个交错级数. 比方说，我们可能有

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

判断这类级数是否收敛，通常不是很难.

交错级数检验法 如果一项 a_n 都是正数，且对所有的 n，$a_{n+1} \leqslant a_n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则对应的交错级数收敛.

让我们瞧瞧如何应用这个检验法.

例题 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 是否收敛?

解：首先让我们查核一下，看看第一个条件是否满足. 为此我们把该级数的正项序列一一写出来：$a_1 = 1$，$a_2 = \frac{1}{2}$，…，$a_n = \frac{1}{n}$. 然后看看是否有：

$$a_{n+1} \leqslant a_n?$$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}?$$

不错，因为 $\frac{1}{n+1}$ 的分母比较大.

接下来查核第二个条件：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

也合乎要求. 所以，满足了交错级数检验法，该级数收敛. 请注意，此级数不过就是调和级数的交错版本，然而调和级数发散，交错调和级数却收敛. 这让人联想到一对亲兄弟，其中一个是温文谦恭的君子，另一个却是恶魔的化身.

例题 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ 是否收敛?

解：这回我们取 $a_n=\frac{n}{n^2+1}$. 首先检查交错级数检验法的第一个条件，看它是否：

$$a_{n+1}\leqslant a_n?$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\leqslant\frac{n}{n^2+1}?$$

$$(n^2+1)(n+1)\leqslant((n+1)^2+1)n?$$

$$n^3+n^2+n+1\leqslant n^3+2n^2+2n?$$

$$0\leqslant n^2+n+1?$$

我们发现，对所有的 $n\geqslant 1$，这条件成立.

继续检查第二个条件之前，让我们再看一个方法，可以证明本题中的 $a_{n+1}\leqslant a_n$；如果我们能证明函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 递减，那就表示 $f(n+1)\leqslant f(n)$，此结果其实跟 $a_{n+1}\leqslant a_n$ 相同. 要证明 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 递减，只需证明它的导数为负：

$$f'(x)=\frac{1(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}<0$$

对所有的 $x>1$，上式均成立.

当然，接下来我们还有第二个条件得检查：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

以上结果均根据洛必达法则得到.

由此观之，这个题目里的级数也是收敛的. 你还没搞糊涂吧？

绝对收敛

行为异常的人，我们叫他怪胎，但是当他的怪异行为表现，超过牙医吸了一氧化二氮（笑气）后的程度时，我们叫他绝对怪胎.

同样的，若一个级数的级数和等于一个有限的数，我们说它收敛，但是当各项的绝对值相加后，等于一个有限的数时，我们就说它是绝对收敛. 绝对收敛性，是一种性质更强的收敛性.

定义 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛.

譬如说，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 既为收敛，亦为绝对收敛. 原因是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是一个 $p>1$ 的 p 级数，而 $\frac{1}{n^2}$ 就是它本身的绝对值.

另一方面，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，却不是绝对收敛，因为取绝对值之后，整个级数就变成了调和级数. 我们把这类级数叫做条件收敛.

注意！如果某人是绝对怪胎，那么他横竖都是怪胎——绝对收敛性的意思也是如此.

绝对收敛定理 如果一个级数绝对收敛，那么它就是收敛的.

对一个正项级数来说，这个定理说了等于没说，因为当你取绝对值时，级数里面的各项压根儿不变. 但是有的时候，这个定理还真相当管用.

例题 3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛，原因是该级数取绝对值后，会得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$，一看就知道是一个 $p=2>1$ 的 p 级数，根据 p 级数检验，判定它为收敛，因此原先的级数为绝对收敛，而根据绝对收敛定理，此级数收敛. 注意到没有？我们原先学到的交错级数检验法，也可以证明本例的级数收敛，不过那相当麻烦，这样就简单得多啦！我们还有更好玩的事可做呢.

4.9 更多检验法

一位仁兄抱着他的爱犬冲进医疗所，跟兽医说："医生，快帮帮忙，我的狗生病了."兽医把狗接了过来，摆在诊断台上，然后用听诊器在狗的胸部听了一会儿，叹了一口气，对狗主人说："先生，真抱歉！这只狗已经断气了."

"怎么可能!"这位仁兄大概是悲伤过度，情绪完全失控，大声叫道："我

要听另一个医师的诊断!”

“没问题.”兽医耸了耸肩，走出房间. 几分钟后他又开门进来，手上捧着一只虎斑猫. 他把猫放在诊断台上的狗身旁，这只猫还真体察人意，非常谨慎的从头到尾把狗嗅了一遍，然后抬起头来，对着兽医“喵”了几声. 兽医随即宣布说：“这只猫证实，狗已死亡.”

“不对!”狗主人仍然不愿意面对现实：“你们两个一定都搞错了!”

“那好吧.”兽医说完再度离开了房间数分钟，这次他牵了一只黑色的拉不拉多猎犬进来. 这只拉不拉多犬把前脚搭在诊断台上，然后用鼻子在病狗身上各处轻推了几下，可是后者一点反应都没有，于是拉不拉多犬向他的兽医主人“汪汪”叫了几声.

“实在抱歉! 诊断结果还是一样.”兽医悲悯地说道. 于是狗主人无可奈何地接受了这个坏消息：“得啦得啦! 我现在相信你的话了. 我该付你多少钱?”

“一共是美金550元.”兽医回答道.“什么?”狗主人吓了一大跳：“你有没有搞错? 怎么会这么贵?”

“一点也没跟你多算，你瞧,”兽医非常诚恳地说道，“我的诊断费要50元，但是刚才的猫扫描费用是250元，拉不拉多犬检验的费用也是250元，加起来不就是550元吗?”（作者在这里玩了几个文字游戏：“电脑断层扫描”的英文是CATscan；拉不拉多猎犬 Labrador retriever 一般人习惯简称为 lab，而 lab test 又是医院化验的统称.）

说到检验法，下面谈到的可能是最常用的一个.

比值检验法 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个级数，那么

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$，则该级数绝对收敛.
2. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，则该级数发散.
3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$，则不定；它可能收敛，也可能发散，反正这个检验法不打算告诉我们.

现在让我们做个例题，看看这个检验法要怎么用.

例题 1 试判定 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$ 的收敛性.

解：在此例中，$u_n = \frac{(-1)^n n}{3^n}$. 我们把 u_n 里的每一个 n 都换成 $n+1$，就会得到 u_{n+1}：

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}}.$$

然后

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n}{3^n}}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3} =$$

$$\frac{1}{3} < 1.$$

比值检验法告诉我们，该级数为一绝对收敛级数，所以收敛.

这儿另有一个检验法，偶尔也可以派上用场：

根值检验法 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个级数，那么

1. 如果 $\lim_{n\to\infty} (|u_n|)^{\frac{1}{n}} < 1$，则该级数绝对收敛.
2. 如果 $\lim_{n\to\infty} (|u_n|)^{\frac{1}{n}} > 1$，则该级数发散.
3. 如果 $\lim_{n\to\infty} (|u_n|)^{\frac{1}{n}} = 1$，则不定；它可能收敛，也可能发散，反正这个检验法不打算告诉我们.

例题 2 试判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ 的收敛性.

解：
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{e^n}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{e}\right|=\frac{1}{e}=\frac{1}{2.718\cdots}<1.$$

根据根值检验法，该级数为一绝对收敛级数，所以收敛．如果你对此答案有任何疑虑，不妨用比值检验法再做一次，你会得到同样的结果．当然，我们也知道它是一个公比为 $r=\frac{1}{e}<1$ 的几何级数，所以收敛．

鸡只要煮熟了就能吃，怎么煮都可以．好吃或不好吃，则是另一个问题，不要跟能不能吃混为一谈．

4.10 幂级数

幂级数有着如下的形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

这类级数的行为极像消防水管；如果有人抓住了水管的喷头，并且对准了目标的话，用它来救火也好，驱散抗议微积分分数给得太低的示威学生也罢，都能让你得心应手，效果一级棒．但是你千万别放开手，你一旦失控，那么为了安全起见，你最好就近找个地方躲起来，因为它会像一条插上电插座的鳗鱼，到处甩来甩去，非常危险．

幂级数的 x 值是啥，决定了级数是否仍在控制中，有些 x 值会使级数收敛，其他的 x 值则会使级数发散，犹如消防水管失控．那么让幂级数收敛的 x 值，就称为幂级数的收敛区间．

让我们看几个例子．

例题 1 试判定能让下列级数收敛的所有 x 值．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots.$$

解：我们把比值检验法应用上：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = \quad \text{（对任意的固定 } x \text{ 值，这式子都越近于 0.）}$$

$$0<1.$$

这时，无论 x 是多少都无所谓；这个级数对所有的 x 值都收敛.

例题 2　试判定能让下列级数收敛的所有 x 值.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n} = \frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}+\frac{3x^3}{27}\cdots.$$

解：我们再使用一次比值检验：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)\ x^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{nx^n}{3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|\ (n+1)}{3n} = \frac{|x|}{3}.$$

依据比值检验，如果 $\frac{|x|}{3}<1$，则该级数收敛. 所以 $|x|<3$ 为此级数收敛的必要条件：也就是说，如果 $-3<x<3$，则该级数一定收敛，而对 $x<-3$ 跟 $x>3$ 时，级数一定发散.

接下来我们还得检查 $x=3$ 跟 $x=-3$ 时，此级数是否收敛.

*　当 $x=3$，该级数变成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}n$. 由于 $\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq 0$，级数中的各项并未缩小，则依据第 n 项检验法，得知这个级数发散.

*　当 $x=-3$，该级数变成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$.

由于 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\neq 0$，因此由第 n 项检验法，证明它也是发散.

所以这个级数只在 $-3<x<3$ 时收敛，所以我们说它的收敛区间为 $(-3,3)$.

例题 3　试判定能让级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$$

收敛的所有 x 值.

解：让我们用根值检验法来试试看：

$$\lim_{n\to\infty} |n^n x^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n|x| = \begin{cases} 0, & \text{若 } x=0, \\ \infty, & \text{若 } x\neq 0. \end{cases}$$

所以，对非 0 的任何 x，该级数都发散；而当 $x=0$ 时，该级数收敛，但是这个结论一点也不稀奇，因为 $x=0$ 时，此级数变成了 $0+0+0+\cdots$，当然应该收敛. 事实上，每一个幂级数在 $x=0$ 时都收敛，而这个例子只是最最罕见的一个罢了：它在必须收敛的 $x=0$ 这一点之外，竟然处处发散.

嘿！小心别吃太饱撑着了.

4.11 什么时候该用什么检验?

手上虽有了一套检验法，若是不知道何时该用哪一个，那就跟完全没有这些方法一样，于事无补；要是你有香港脚，却跑去妇科检查，九成检验不出什么所以然来. 所以，我们不但需要知道这种检验法，更重要的是能把它们运用得适得其所. 本节就要讲一些运用秘诀，要告诉你当你拿到一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 时，该怎么办.

第 1 步：应用第 n 项检验法（见第 34 页）. 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，则该级数发散. 既然判定是发散，这题就做完交错啦！如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则该级数有可能收敛，此时就需要进入第 2 步.

第 2 步：看一看它是不是几何级数（第 33 页）或 p 级数（第 38 页）. 如果它是几何级数，亦即具有 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ 的形式；而且 $|r|<1$，则为收敛；如果它是个 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，而且 $p>1$，那么它也收敛. 若它是几何级数但 $|r|\geqslant 1$，或它是 p 级数但 $p\leqslant 1$，则为发散.

第 3 步：如果它是正项级数，你可以在下列检验法中任选一种来应用：

1. 基本比较检验法（第 40 页）
2. 极限比较检验法（第 43 页）

在应用上述两种检验时，用来比较的对象，通常是 p 级数或几何级数的其中一种；在较为罕见的情况下，则是跟其他的级数比较，这级数可以是任何一个可用其他检验法（诸如积分检验法）证明为收敛或发散的级数.

3. 比值检验法（第 48 页）：如果待检验的级数内有 $n!$ 或 c^n，那么此种检验通常很好用.

4. 根值检验法（第 49 页）：如果级数内有 n^n，或者有某个次方为 n 的函数，这个检验法很可能用得上. 有时候此方法也可用在有 c^n 的级数上，不过得看级数里还有些什么.

5. 积分检验法（第 35 页）：待检验级数的各项 a_n 必须向 0 递减，而且可以积分.

第 4 步：如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是交错级数，就在下列检验法中任选一种应用：

1. 交错级数检验法（第 44 页）

2. 把第 3 步中的任一检验法应用到 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛（第 46 页）.

第 5 步：对付幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，可以用比值检验法或根值检验法，找出收敛区间，然后利用上述的任何一种方法，判定此收敛区间的两端点是否收敛.

现在让我们举几个例题，找出适合的检验法（详细的计算过程就留给你们了）.

举例

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$. 这只是一个几何级数，其公比 $r = \frac{e}{\pi} < 1$，所以收敛. 若不嫌麻烦的话，你也可以改用比值检验法或根值检验法.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n}$. 这是一个交错级数，取绝对值后，会变成一个收敛的几何级数，所以原交错级数也收敛. 你也可以用交错级数检验法.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$. 级数里有个阶乘，表示我们可用比值检验. 结果此级数收敛.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$. 这题不能用基本比较检验法，而是要利用极限比较检验法，拿它跟 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 比较，就可证明出它发散.

5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$. 可用基本比较检验法，拿它跟 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 比较，就可证明出它发散.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$. 此题无疑要用比值检验法（光看分子与分母中的阶乘，就知道了），而且答案为收敛.

嘿！你怎么一副坐立不安的样子？

4.12 泰勒级数

多项式这种函数，是我们可以亲近的一种函数，它们很开放、很坦白，心里想什么就说什么. 随便举个例子，$f(x)=2-3x+7x^2$，这个多项式会告诉我们，任何我们所想要知道的消息，甚至更多. 譬如我们问："嘿！f 老兄，你在4那一点的值是多少？"这时 $f(x)$ 会毫不迟疑地回答："这个嘛，你只要把4代进来，就会得到 $2-3(4)+7(4)^2=2-12+112=102$. 顺便告诉你，我前几天身上长了一种奇怪的疹子，痒得要命，幸好这两天症状减轻了一些……"

这就是典型的多项式，毫无心机可言. 你只要用一点加减乘除，就可以得到任意一点的函数值.

一般的多项式（通式如下）：

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^2$$

性情也一样坦白，虽然看起来比前页的例子复杂许多，也是只要用一点小学生就会的加法与乘法，就可以得到任何一个点的函数值. 没有隐藏什么秘密，也不要任何手段，一目了然.

即使下面这种更复杂的多项式形式

$$g(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^2$$

也不例外. 它看起来好像跟上述的通式不一样，其实只是换了一套衣服而已. 你只要把每一项的 $(x-a)^2$，$(x-a)^3$，…，$(x-a)^n$ 乘开，再让同项合并，

就会得到跟 $f(x)$ 相同的形式.

可是，还是有一些不很友善的函数，它们宁愿待在地下室，为的是不想跟人说话. 不错！我们说的就是 $\sin x$、$\ln x$、e^x 之类的函数，以及更叫人困惑的 $\arctan x$.

譬如你问 $\ln x$："嗨！你在 3 的值是多少呀？"此时你得到的答案很可能是："你为何问？你的脑子里打什么如意算盘？为何打听别人的私事？你是不是被数学搞昏头了？你以为凭着你那点加减乘除的三脚猫功夫，就能把我的底细掀出来？如果你真有这样的念头，就太幼稚可笑了. 况且我在 3 的值是多少，干你什么事？你现在给我闪开！免得我按捺不住，踢了你的要害."

啰啰唆唆讲了一大堆，一言以蔽之，就是不友善，而且是一开始就打定主意，不告诉你它在 3 的值为多少. 那么你该怎么办？

这个呢，就是本节要讨论的. 我们要把这些不怀好意的函数，用友善的多项式取代. 用容易计算的多项式，去估计那些难算的函数的近似值，想法不赖吧？现在就来看一个例子.

例题 1 用多项式去逼近 $f(x) = e^x$ 在 x 靠近 0 的函数值.

一般说来，愈是用花哨的高次多项式去逼近，得到的结果就会愈接近实际值. 让我们先从简单的开始着手.

第 1 阶段：以下面这种形式的多项式

$$y = a_0 + a_1 x$$

去逼近 $f(x) = e^x$.

这就是所谓的线性多项式，意指它的图形是一条直线. 假定我们要以一条直线，去逼近 $f(x) = e^x$ 在 x 靠近 0 处的函数值，那么最佳的选择就是，e^x 在点 $(x, y) = (0, 1)$ 的切线，如图 4.7 所示.

我们注意到，这条切线跟 e^x 在 $x = 0$ 时，它们的函数值跟一阶导数皆相同，而依照导数的定义，该切线的斜率就等于 e^x 在 $x = 0$ 的导数. 又由于 $\dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x$，所以

$$\left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0} = e^0 = 1.$$

所以切线的斜率为 1. 又该线的 y 截距为 1，故它的方程式为：

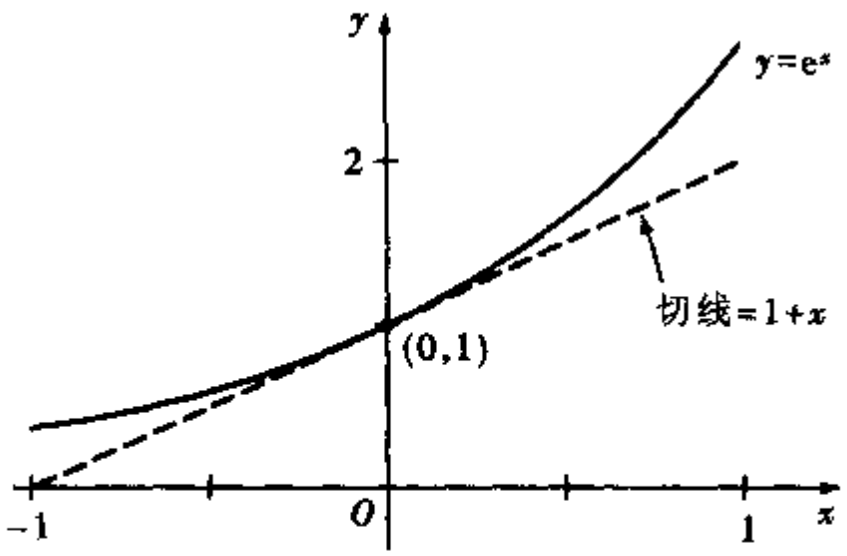


图 4.7 以一条直线逼近 $y=e^x$

$$y = x + 1.$$

总结下来，我们求出了一条直线 $y = x + 1$，它在 $x = 0$ 的附近跟 $y = e^x$ 近似．所以

$$e^x \approx 1 + x.$$

这条直线有多近似呢？我们可求出，当 x 等于很小的值时，比方说 $x = 0.1$，e^x 与 $1 + x$ 的值分别是多少．查自然对数表后，左式得到：

$$e^{0.1} \approx 1.105170918,$$

而右式为 $1 + x = 1 + 0.1 = 1.1$．所以我们可以看出，这个“线性逼近”准确到小数点第一位，还不差！

第 2 阶段：现在我们要进一步，用形式为 $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ 的二次多项式，来逼近 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 附近的值．上一阶段是用直线，这一回则是用抛物线，好处是会跟 e^x 的曲线靠得更近，而且靠近的时间更久．这一次，我们得求 a_0、a_1 跟 a_2 这三个值，让 $f(x)$ 跟 $g(x)$ 在 $x = 0$ 时，有相同的函数值、一阶导数，以及二阶导数．如此一来，这两个函数至少在离 $x = 0$ 的附近，会相当近似．

$$f(x) = e^x, \qquad \text{所以 } f(0) = e^0 = 1;$$
$$f'(x) = e^x, \qquad \text{所以 } f'(0) = e^0 = 1;$$
$$f''(x) = e^x, \qquad \text{所以 } f''(0) = e^0 = 1;$$

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2,\qquad \text{所以 } g(0)=a_0;$$
$$g'(x)=a_1+2a_2x,\qquad \text{所以 } g'(0)=a_1;$$
$$g''(x)=2a_2,\qquad \text{所以 } g''(0)=2a_2.$$

由于 $f(x)$ 跟 $g(x)$ 的函数值及两次的导数值在 $x=0$ 都一致，于是：

$$1=f(0)=g(0)=a_0,\qquad \text{所以 } a_0=1;$$
$$1=f'(0)=g'(0)=a_1,\qquad \text{所以 } a_1=1;$$
$$1=f''(0)=g''(0)=2a_2,\qquad \text{所以 } a_2=\frac{1}{2}.$$

我们得到 $g(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$，也就是对 0 附近的 x，

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}.$$

我们看到这个方程式的头两项，跟前面求出的线性逼近相同，只不过多出了一个 x^2 项. 图 4.8 中的虚线，就是这条近似的抛物线.

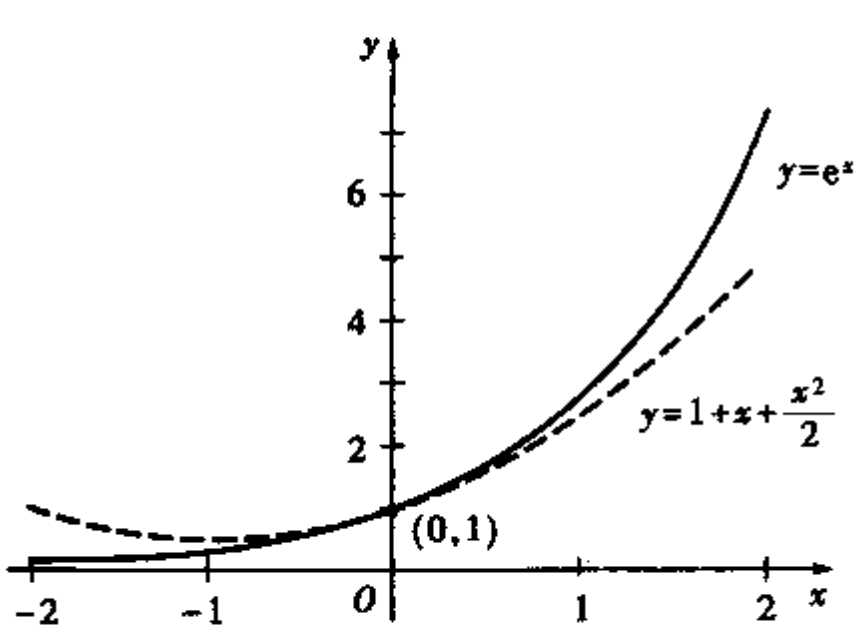


图 4.8　用一条抛物线逼近 $y=e^x$

那么这次的逼近有多好呢？我们同样用 $x=0.1$ 来试试看. 你还记得不？$e^{0.1}\approx 1.105170918$. 现在再把 $x=0.1$ 代入 $1+x+\frac{x^2}{2}$，得到 1.105. 哇！准确到小数点第三位了.

第 3 阶段：让我们再进一步，找一个三次多项式 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

$+a_3x^3$，来逼近 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 附近的函数值.

同样的，$f(0)=e^0=1$，$f'(0)=e^0=1$，$f''(0)=e^0=1$，$f'''(0)=e^0=1$. 而

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a^3x^3, \quad \text{所以 } g(0)=a_0;$$

$$g'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2, \quad \text{所以 } g'(0)=a_1;$$

$$g''(x)=2a_2+3(2)a_3x, \quad \text{所以 } g''(0)=2a_2;$$

$$g'''(x)=3(2)a_3, \quad \text{所以 } g'''(0)=6a_3.$$

为了让 $f(x)$ 跟 $g(x)$ 在 $x=0$ 的值及三次的导数都一致，于是：

$$1=f(0)=g(0)=a_0, \quad \text{所以 } a_0=1;$$

$$1=f'(0)=g'(0)=a_1, \quad \text{所以 } a_1=1;$$

$$1=f''(0)=g''(0)=2a_2, \quad \text{所以 } a_2=\frac{1}{2};$$

$$1=f'''(0)=g'''(0)=3(2)a_3, \quad \text{所以 } a_3=\frac{1}{6}.$$

把这些系数代入 $g(x)$，我们就得到

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}.$$

这就是由我们前面得到的逼近方程式，另外又加上了一个 $\frac{x^3}{6}$. 这个三次曲线就是我们对 e^x 在 $x=0$ 附近的新逼近曲线，如图 4.9 所示.

这条改良过的近似曲线有多准确呢？我们还是把 $x=0.1$ 代进去. 同样的，$e^{0.1}\approx 1.105170918$，而 $1+(0.1)+\frac{(0.1)^2}{2}+\frac{(0.1)^3}{6}$ 会得到 1.105166…. 哇！非常非常接近，让你兴奋得想去昭告天下.

我们明白了一个展开模式，如果我们继续按照这个模式去添加新的项，就会发现

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots.$$

它看起来非常像一个幂级数！

现在你应该有概念了！当我们碰到一个难看又难缠的函数 $f(x)$，我们会想到求出它在靠近某一固定点 a（上例的 $a=0$）的近似值.

结果，我们求出了一个多项式，它在 a 点附近跟 $f(x)$ 的行为非常相像，而一般来说，这个多项式为下列这种形式：

$$g(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+b_3(x-a)^3+\cdots+b_n(x-a)^n$$

为了要使得 $g(x)$ 在 x 靠近 a 的时候，跟 $f(x)$ 的行为相像，我们要让两个函数的值以及前 n 次的导数值，都两两相同.

也就是说，我们要让：

$$f(a)=g(a),$$
$$f'(a)=g'(a),$$
$$f''(a)=g''(a),$$
$$f'''(a)=g'''(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a).$$

现在，把 $g(x)$ 直接微分，就得到：

$$g(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+b_3(x-a)^3+\cdots+b_n(x-a)^n,$$
$$g'(x)=b_1+2b_2(x-a)+3b_3(x-a)^2+\cdots+nb_n(x-a)^{n-1},$$
$$g''(x)=2b_2+3(2)b_3(x-a)+\cdots+n(n-1)b_n(x-a)^{n-2},$$
$$g'''(x)=3(2)b_3+\cdots+n(n-1)(n-2)b_n(x-a)^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)b_n.$$

于是

$f(a)=g(a)=b_0$，　　所以 $b_0=f(a)$；

$f'(a)=g'(a)=b_1$，　　所以 $b_1=f'(a)$；

$f''(a)=g''(a)=2b_2$，　　所以 $b_2=\dfrac{f''(a)}{2}$；

$f'''(a)=g'''(a)=3!\ b_3$，　　所以 $b_3=\dfrac{f'''(a)}{3!}$；

$\cdots\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a)=n!\ b_n$，　　所以 $b_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

把 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代回$g(x)$，就得到了数学中最有名、最有用的公式.

泰勒逼近

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

对于靠近 a 的 x 值，这个泰勒多项式逼近得相当准，但是为了省事，我们也常把 a 设为 0，于是泰勒公式大幅简化且改了名字：

马克劳林逼近

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

现在让我们做个例题.

例题 2 试写出 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 的三阶泰勒多项式，并用此结果求 sin0.05的近似值.

解：由于 $f(x)=\sin x$，所以 $f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，而 $f'''(x)=-\cos x$.

因此，$f(0)=\sin 0=0$，$f'(0)=\cos 0=1$，$f''(x)=-\sin 0=0$，而 $f'''(0)=-\cos 0=-1$.

于是，

$$\sin x\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3\approx$$

$$0+1x+0+\frac{-1}{3!}x^3\approx$$

$$x-\frac{x^3}{6}.$$

在 $x=0.05$ 这点，此近似值够好吗?

在 $x=0.05$，$\quad x-\frac{x^3}{6}=0.049875$;

$$\sin 0.05=0.049979169\cdots.$$

又是一次惊人的逼近结果！我们只用了三阶而已，想想看，如果我们勤快一些，在后面多加上几项，不知会准确多少！其实，这么做并不会花你太多时

间，我们何不就多加几项：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

这是一个幂级数，我们称之为 $\sin x$ 的泰勒级数. 当它收敛时，我们可以用它来逼近 $\sin x$ 这个难缠的函数，而且项数愈多，就愈逼近. 可是一旦它发散，这个级数就完全没用 了.

嘿！你是否觉得有如醍醐灌顶?

4.13 带有余项的泰勒公式

泰勒公式的来龙去脉，我们差不多交代清楚了. 但是还剩下一个尾巴：泰勒级数的余项. 怎么说呢? 且听我等道来.

我们知道泰勒公式能够相当逼近$f(x)$在 $x = a$ 附近的值，但是无论多么逼近，总归还是近似值，不是正确值，它们中间总存在着一点点误差. 有的时候，这一点点误差还真是兹事体大，我们不能不搞清楚这误差究竟有多大. 要是不搞清楚，我们设计出来的桥梁，会差一点就负荷不了车子的重量，或是新制造出来的男性避孕丸，差一点就不能防止对方怀孕. 幸好我们有一个很简单的方法，可以抓出误差的范围.

带有余项的泰勒公式

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{泰勒多项式}P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{余项}R_n(x)},$$

其中 c 为介于 a 跟 x 之间的某个数.

$R_n(x)$即为余项或误差项，它是 n 阶泰勒多项式跟$f(x)$的正确值在 $x = a$ 点的差；由泰勒多项式得到的只是近似值. 请注意，这个余项取决于一个介于 x 和 a 之间的未知数 c.

我们先是利用泰勒逼近公式求得近似值，然后想知道这个近似值的误差有

多大，但是现在，我们不知道 c 的值，所以也无法算出精确的误差．因此，我们的做法是对介于 x 和 a 之间的任何 c 值，去界定余项 $R_n(x)$ 的上下限，如此一来，我们就有把握知道，这个误差绝不会超过某个范围．

例题 1 （估计 $\sin 1$）你曾经想知道 $\sin 1$ 的值等于多少（1 是指 1 弧度）？这种问题，可能会让你苦思一整夜．当然，你可以拿一个工程用计算机，把 $\sin 1$ 按进去，答案马上就会显现出来，但是那样八成不会满足你的求知欲，只会让你更睡不着觉，想知道计算机是怎么算出来的．现在我们就要来解决这个问题，好让你一觉睡到天明．在这儿我们要用一个三阶泰勒多项式估计出 $\sin 1$，然后判定该近似值的准确度．

解：从上一节的讨论得知，$\sin x$ 在 $a=0$ 的三阶泰勒逼近是 $\sin x \approx x - x^3/3!$．所以

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1^3}{3!} \approx$$

$$1 - 0.1666\cdots =$$

$$0.8333\cdots .$$

但是这个近似值有多准确呢？余项泰勒公式告诉我们，它的误差为 $R_3(1)$：

$$R_3(1) = \frac{(\sin x)^{(4)}(c)}{(4)!}(1)^4 .$$

式中的 c 是多少，我们完全不知道，只知 $0 \leqslant c \leqslant 1$，但是知道这么多就够了，因为我们只需判定出 $R_3(1)$ 的范围．由于 $\sin x$ 的四阶导数 $(\sin x)^{(4)}$ 仍然等于 $\sin x$，而不管 x 是多少，$\sin x$ 的值总是落在 -1 跟 1 之间，于是 $|(\sin c)^{(4)}| \leqslant 1$，所以

$$|R_3(1)| \leqslant \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

$$\leqslant 0.042.$$

这就表示，不管 c 的值是多少，误差都不会比 0.042 更大；换句话说，余项泰勒公式告诉我们：$\sin 1$ 的实际值介于 $(0.833\cdots - 0.042)$ 跟 $(0.8333\cdots + 0.042)$ 之间．为了检验是否真是如此，我们可以通过计算机计算或查三角函数表，$\sin 1 = 0.84147098480 79\cdots$，果然在上述范围之内．

例题 2 试以一个二阶泰勒级数，估计$\sqrt{e}$的近似值，并判定该近似值的误差范围．之后再用一个十阶泰勒多项式，重新估算近似值及准确度．

解：在 $a=0$ 附近，e^x 的二阶泰勒级数逼近为 $e^x \approx 1 + x + x^2/2!$．把 $x=0.5$ 代入，就得到

$$\sqrt{e} = e^{0.5} \approx 1 + (0.5) + \frac{(0.5)^2}{2!} \approx 1 + 0.5 + 0.125 = 1.625.$$

1.625 这个近似值有多准确呢？这得从余项公式来看：

$$R_2(0.5) = \frac{e^c}{3!}(0.5)^3.$$

其中 c 的范围是 $0 \leqslant c \leqslant 0.5$．这个 $R_2(0.5)$ 能有多大？这次不像上一个例子，我们不能铁定 e^c 永远比 1 小．不过，由于 e^x 是递增函数，我们能确定 $e^c \leqslant e^{0.5}$．问题是，我们也不知道 $e^{0.5}$究竟是多少——事实上，它就是本题的题目！

怎么办呢？退而求其次．我们知道 $e=2.71828\cdots$，因而 $e^{0.5} < 4^{0.5} = 2$，所以 $R_2(0.5)$ 满足

$$R_2(0.5) \leqslant \frac{2}{3!}(0.5)^3 = \frac{1}{24} < 0.042.$$

意思是误差小于 0.042，因此我们确定 $e^{0.5}$的值介于 1.625 − 0.042 跟 1.625 + 0.042 之间．看起来不怎么准确，但是别忘了，那是因为我们用的项数太少的缘故．

如果我们改用 10 次多项式，$e^x \approx 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^{10}/10!$，那么把 $x=0.5$代进去后，得到的 $e^{0.5}$近似值会是 1.648721271，它的余项 $R_{10}(0.5)$ 的上界就等于 $(2/11!)(0.5)^{11}$，小于 2.45×10^{-11}，这对近似值来说是小得不得了的误差．所以，我们只做了一点乘法与加法，就算出了 $e^{0.5}$的值 1.648721271，而且准确到小数点后那么多位，居然跟计算机的一模一样！这就意味，我们跟计算机一样聪明．（根据家用电器智商评价，电子计算机的智商等级落在烤面包机跟咖啡机之间．）

∀

讲到余项，不知你有没有听过一个小故事？有两位参加“数学俱乐部”的女学生，看上了一款红色 T 恤，上面印满黄色的微积分方程式，她们认为来年春天，这款 T 恤一定会在校园内流行起来．她们想趁机捞一把，于是当下决定把父母寄来的学费，以及跟朋友借到的钱，全部拿去买 T 恤，准备转卖给其他

学生图利．不料，天不从人愿，虽然她们在学校报纸上大登广告，眼看期末考试完要放寒假了，仍然乏人问津，电话连一次都没响过．宿舍里堆满了卖不掉的T恤（滞销货*），而手头空空，连下学期的学费都没着落，简直是偷鸡不着蚀把米，眼看不免是场大灾难．

就在缴学费的最后期限前一星期，电话铃响，对方说道："我是大学书店的巴德，听说你们有一批红色T恤，上面的图案是黄色微积分方程式．我们觉得很适合拿来做春季促销商品，所以我想出高价向你们买下来．"于是他提出一个非常好的价钱，但也加上一个但书："由于金额非常庞大，我必须呈报给采购部，由他们决定．所以如果你们在这个星期五下午5点以前，还没有接到我的取消电话，这笔买卖就成交了．"

这两位学生原本一筹莫展，放下电话后喜出望外，没想到竟能时来运转．星期五一到，她们一直紧张的坐在电话旁边，祈祷那要命的5点钟赶快过去．哪知道到了4点55分的时候，电话铃响起，其中一位紧张兮兮地拿起话筒，只见她默默听着，脸上渐渐出现了笑容，然后她转过头来向她的同伴说："好消息，是你的车着火烧起来了．"

*编注："余项"与"滞销货"的英文同是remainder.

4.14 一些著名的泰勒级数

我们已经提过几个最著名的泰勒级数，诸如：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

事实上，我们可以把泰勒级数当成像函数一样处理，去制造出其他级数．比方说，由于$\cos x$是$\sin x$的导数，所以我们可以把$\sin x$的泰勒级数逐项微分，得到的就是$\cos x$的泰勒级数：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

还有哪些泰勒级数呢？让我们暂时回到几何级数．还记得吗？当$|r| < 1$，

几何级数

$$a + ar + ar^2 + \cdots$$

收敛到 $a/(1-r)$. 我们让 $a=1$，然后以变数 x 取代 r，就可得到：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad \text{对任何} |x| < 1.$$

这就是 $1/(1-x)$ 的级数表示法. 事实上，如果我们套用泰勒公式，也会得到同样的结果；不过要特别注意，这个结果唯有对 $|x|<1$ 才成立.

警告：一个函数的泰勒级数，对一些或全部的 x 值可能为发散.

以上所讨论的 4 个基本级数，颇值得记下来，在有需要时，这些级数可以用来推导出其他的级数.

例题 试求 $\arctan x$ 的泰勒级数展开式（对 $|x|<1$）.

解：你可能记得，我们在讲解反导函数时曾提到

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

也许你已经不记得了. 反正这是我们在前面导出的公式之一.

现在，我们把 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ 的每一个 x，都以 $-t^2$ 取代，就得到

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots.$$

等号左右两边都积分，就得到

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \cdots)\mathrm{d}t =$$

$$t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{t^5}{5}\Big|_0^x - \cdots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

这就是对 $|x|<1$ 时，用来表示 $\arctan x$ 的泰勒级数. 但是此级数只在 $|x|<1$ 时才成立，虽然 $\arctan x$ 对所有的实数 x 都有定义.

嘿！你的开襟毛衣纽扣是啥材质的？



第5章

向量：从欧几里得到丘比特

在此章，我们要介绍向量，包括平面上及三维空间中的向量．向量就像一枝箭，具有方向跟长度．每当我们想到力或速度的时候，就会扯上向量，因为力或速度都有方向（施力的方向或前进的方向）以及大小（相当于箭的长度）．

5.1 平面上的向量

由于我们生活在三维空间中，因而我们不会在平面上花许多时间．但在本章的头两节，不妨暂时把我们自己“压平”，看一看平面世界，原因是它比较单纯，可帮助我们搞清楚三维空间的状况．现在我们就从距离说起．

最基本的事实 在 xy 平面上，两点 $P_1=(x_1,y_1)$ 和 $P_2=(x_2,y_2)$ 之间的距离为

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这条法则最早是由古希腊人毕达哥拉斯（Pythagoras）发现的．我们依照图5.1所示，把 P_1 跟 P_2 两点画在 xy 平面上，然后画一个直角三角形，于是，从图上可以看出，其中一股的长度等于 $|x_2-x_1|$，另一股等于 $|y_2-y_1|$，而斜边长就等于 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$．

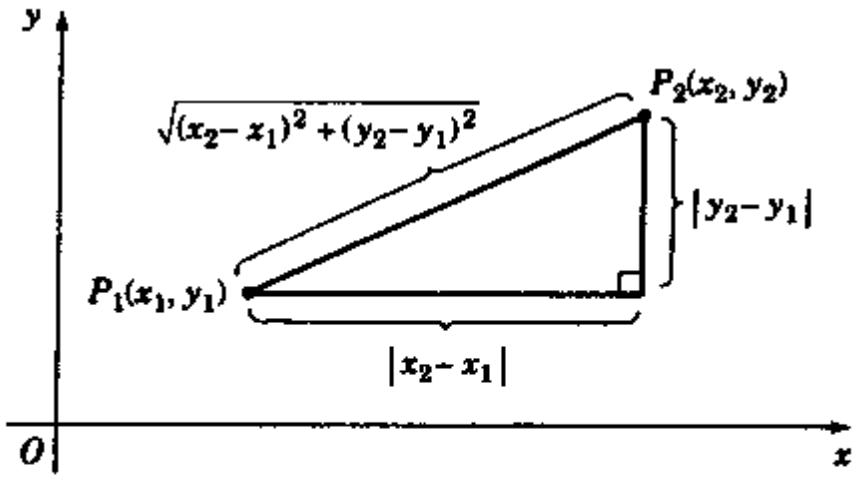


图 5.1　勾股定理告诉我们，如何测量平面上两点间的距离

现在我们来谈谈向量．你还记得那个叫做“那是啥米”的夏令营？当时你还只是十二三岁，你父母把你送去，在哪儿度过了整个暑假．你父母是说要你去见识见识大自然的奥妙，实际上是因为你开始了叛逆期，他们拿你没辙，干脆把你送离开家，图个耳根清静．而你也因此发现，所谓的奥妙大自然，主要就是超大的叮人蚊子，还有歪歪斜斜的松树，长在有毒植物遍布的野地上．

那整个夏天，除了搔痒把自己抓得体无完肤，唯一一件叫你向往的营区活动就是射箭．你觉得这世界上，再也没有比飞箭划过长空、直奔箭靶时发出的飕飕声响，更叫人兴奋了．不光如此，当你眼见自己一箭中靶，幻想着被你射中的是你那讨厌的哥哥（他也被你爸妈送来这个夏令营，而且是这个世界上，唯一能让你过得比拼命抓痒还难受的人）……

别因为我们患了早期的老年痴呆症，你就以为我们在离题胡说八道！我们是要帮助你记住，向量就像你所喜爱的箭，箭就代表了向量．你可以想像这枝箭已经射到空中，突然间时间冻结，一切动作停止，而在箭冻结的一刹那，有两个量跟它有关：第一个是它的长度，经验告诉我们，长的箭要比短的箭射得远；而第二个跟它有关的量，就是它的方向——对射箭这件事来讲，还有比方向更重要的吗？方向决定了箭是会正中红心，还是命中站在厕所前排队等候的某人屁股！

至于这枝箭（向量）在空间中的位置，我们此刻用不着操心．通常我们把它的尾端想成是在原点上，长度跟方向不变，然后我们用它的另一端，即箭尖

来描述这个向量．所以图 5.2 中的向量，我们称之为 $v = (2, 1)$，2 跟 1 这两个数，就称为该向量的“分量”．向量在坐标上的位置可以随便移动，只要它的长度跟方向维持不变，即使它的尾端移到了点（321，467）上，它仍然是同一个向量．就像你出去逛街，街上的你跟家里的你是同一个人．

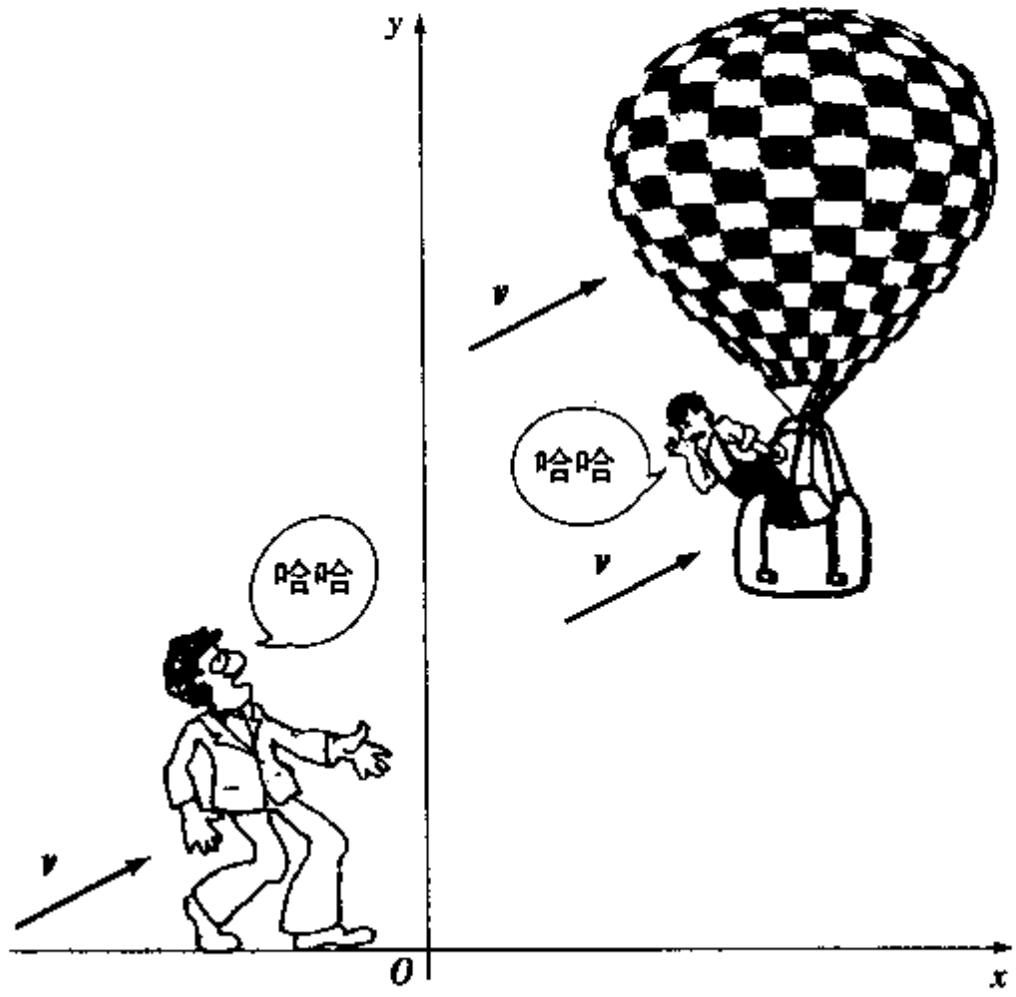


图 5.2　向量由它的长度跟方向决定．所以图中所画的三枝箭，其实是同一个向量

说到这儿，我们索性一并介绍另一个名词“纯量”．纯量就是实数．那为何要把实数另外取一个名称？为的就是要凸显向量跟纯量之间的差别：纯量是个实数，而向量不是；换个说法就是，纯量只有大小，没有方向，而向量两者皆有．

图 5.3 显示的向量是从点(2,1)出发，到达点(1,3)．我们把它平移，让它的尾端跟原点重合，那么该向量就变成从点（0，0）出发，到达点(－1，2)．因而我们得知它是 $v = (-1, 2)$．

其实我们并不需要搬动一个向量，去求得该向量的分量．那怎么办呢？办

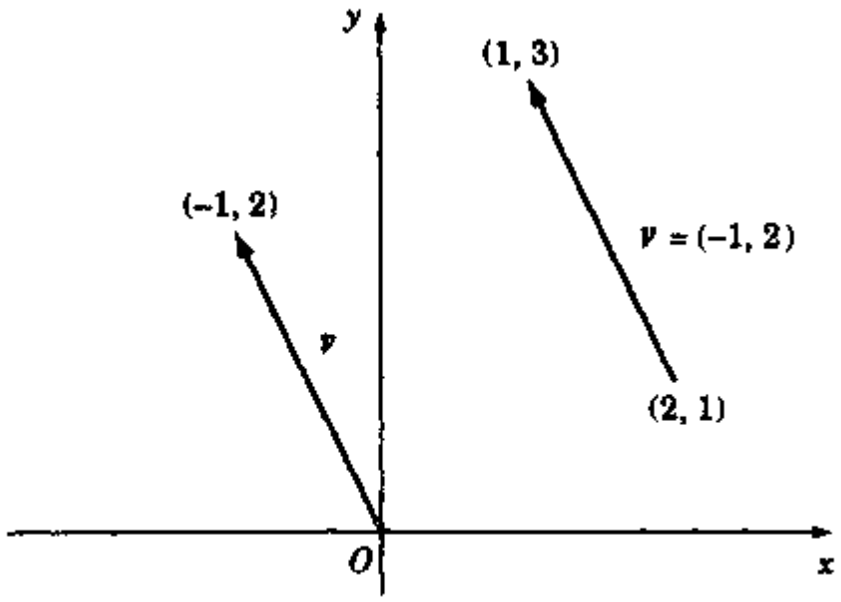


图 5.3　从点（2，1）出发的箭，与从原点出发的箭，代表的仍然是同一个向量

法是，如果一个向量的起点是 (x_1, y_1)，终点是 (x_2, y_2)，那么该向量就是

$$v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

向量的长度，是它的出发点 P 跟终点 Q 之间的距离．通常，向量 v 的长度表示成 $|v|$．当我们搬动一个向量，让它的出发点为原点时，它的长度就可以由勾股定理求出了．

勾股定理　如果 $v = (x, y)$，那么 $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

向量的长度 $|v|$，也可叫做该向量的范数或大小．

向量的各种运算

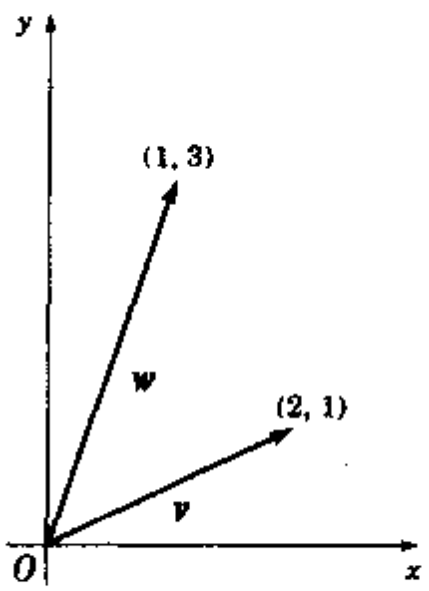
向量虽然不是数字，我们仍旧可以让它们相加与相减．不过，稍微麻烦一点，向量的加减必须是分量与分量相加减．譬如说，如果 $v = (x_1, y_1)$，而 $w = (x_2, y_2)$，则

$$v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$v - w = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

向量的加减也可以用几何来解释．向量相加，相当于把第一个向量的尾端放置在原点上，然后把第二个向量的尾端，放置在第一个向量的尖端上，所

以，两向量的和，则是从原点出发、而以第二个向量的尖端为终点的向量．你会发现，$v + w = w + v$，因为让两向量依这两种次序相加时，我们构成了一个共用同一条对角线的平行四边形（见图 5.4）.



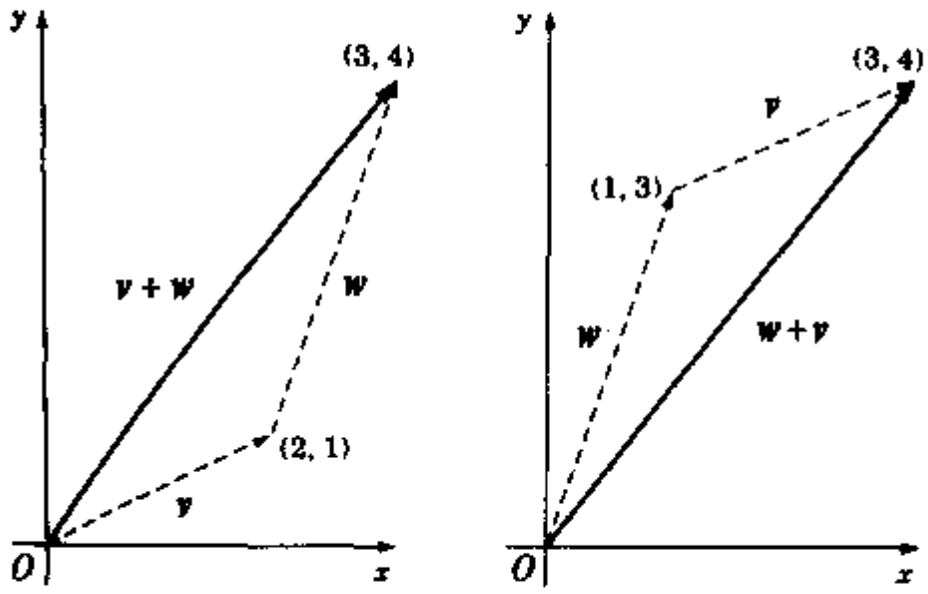


图 5.4　两向量相加；谁先谁后并不影响结果

双人剑法　两人一组，躺在平面上（躺在地板上就成了）．假想你们两人各是一个有头有尾的向量．按照图 5.4 所示，做不同次序的向量加法，证明次序不同并不影响相加的结果.

至于两向量相减，则是把第二个向量的方向颠倒过来．再接在第一个向量

的尖端，就像图 5.5 所示的那样．请注意，减法跟加法不同，前后次序更改会得到不同的结果．

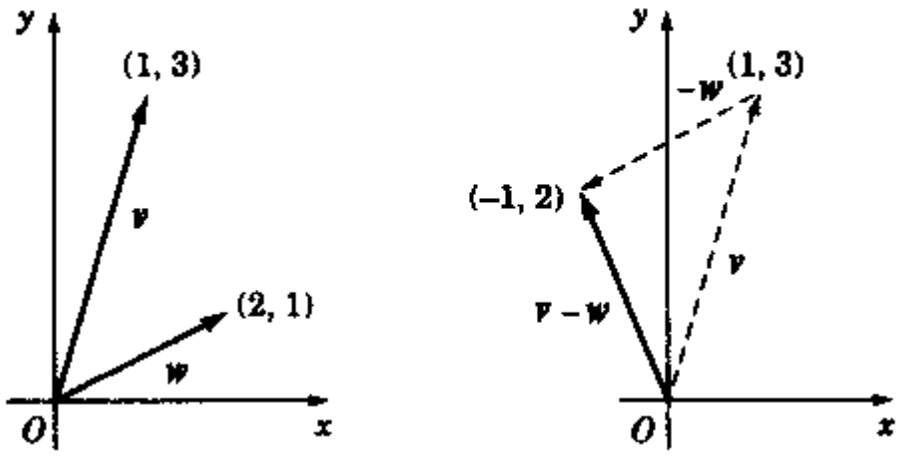


图 5.5　两向量相减：次序会影响结果

此外，我们也可以用一个实数（或纯量）c，去乘一个向量，这相当于把该向量的长度延伸到原先的 c 倍．把向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ 乘以 c 的公式是

$$c\boldsymbol{a} = (ca_1, ca_2).$$

这叫做纯量乘法，其中的 c 若为正数，得到的向量方向不变，仅改变长度．若所乘的 c 为负数，向量的方向会颠倒，而若是乘以 0，该向量就丧失了所有的方向．

向量行动准则

1．$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$（爱丽丝和比尔在豪华轿车上 = 比尔和爱丽丝在豪华轿车上）．

2．$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$（爱丽丝坐进豪华轿车时，发现比尔和克瑞格已经在车上 = 爱丽丝和比尔一起坐进豪华轿车时，发现克瑞格在车上）．

3．$c(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b}$（在豪华轿车里复制 c 个爱丽丝和比尔 = 在豪华轿车里复制 c 个爱丽丝和 c 个比尔）．

4．$(c + e)\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a} + e\boldsymbol{a}$（如果我们复制了 $c + e$ 个爱丽丝，把她们放进豪华轿车里，就等于先复制 c 个爱丽丝，再复制 e 个爱丽丝，然后把她们全放进车里）．

5. $(ce)\boldsymbol{a} = c(e\boldsymbol{a}) = e(c\boldsymbol{a})$（如果我们复制了 ce 个爱丽丝，送进豪华轿车里，就等于复制了 c 份 e 个爱丽丝，或是复制 e 份 c 个爱丽丝）.

一个非常特殊的向量

前面我们再三强调，每一个向量都具有长度跟方向. 事实上，这个说法有一个例外，那就是所谓的零向量，$\mathbf{0} = (0, 0)$. 当然，大部分的人对 0 这个数不当一回事，也说不出什么所以然. 数字的 0 本来就代表空无所有！面对空白你能说些什么呢？于是在英文里，你可以用 what a zero.（好一个零蛋！）来形容某个你素来没有好感的老兄.

不过，零向量比数字 0 更糟糕，更叫人瞧不起，原因是它既无长度，还缺乏方向. 哪种人够资格称为零向量呢？就是那些生活在漂泊不定，没有任何计划，压根儿不知道今后何去何从，年过 36 还跟父母同住，缺钱时只能打点零工、赚点零用钱，还未出游得向人伸手借车的人.

（本书英文版老编声明：以上言论不代表本出版社立场. 如果你是上面描述的那个人，请不要控告本社诽谤，要告就直接控告本书的三位作者，我们愿意提供作者的地址.）

5.2 太空：最后的疆界（空间：期末考的边远地带）

坦白说，所有的单变量微积分（也就是我们到目前为止谈过的微积分）都发生在 xy 平面上；换言之，它们都局限在二维世界里. 二维世界，就像一张薄饼似的，既薄且平，毫无高低起伏而言；相较于它的平坦，内布拉斯加就有如多丘的陵地，CD 上的沟轨则像喜马拉雅山脉. 我们讲的是扁平、光滑、毫无变化、无任何东西. 似乎此去两千英里内，极目望去，别说没有加油站，没有一寸土地隆起，也没有一处低洼！一言以蔽之，就是个“平”字. 了解了吧？

那么我们居住的世界是这样的吗？当然不是，我们的世界是实实在在的三维世界. 三维世界里的每一样东西都是厚厚实实，没有任何东西是完全二维的，甚至连纸牌和保鲜膜，都有些许厚度. 所以咱们现在要把数学带进另一个世界，要用数学描述我们身居其间的“家”，这美丽、刺激、满是琼浆玉液的

一维感官世界．从现在起，一个点不再只有两个坐标值，而将是三人：(x, y, z)．不错！我们现在已经进入了三维空间，正式名则是 $\mathbf{R}^3$（英文念法是 R three）．

两点之间的距离

现在，让我们找出空间中两点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 跟 $Q(x_1, y_1, z_1)$ 的距离公式．这应该不难，连雁鸭都会算．一群结伴南下过冬的雁鸭正在飞行，有只雁鸭一眼看到了躲在掩体内的猎人，便即刻转头对旁边的雁鸭说："雷明顿 T20 双管霰弹枪，方位南南西，距离 350 米．该枪型射程仅 200 米，所以我们目前没有危险．请把消息传送出去．"V 字形的飞行队形，方便飞行中的雁鸭传递消息，但是也容易使雁鸭注意力分散．若某只雁鸭飞偏了一点，所有的雁鸭都开始笑她、数落她，聒噪不已，等到大伙终于安静下来，时常为时已晚，"砰"的一声，今年南下过冬的候鸟又少了几只．

所以，雁鸭都有计算能力，只是有时因为注意力不够集中而饮恨．你则不然，你有维持注意力的本事，所以只要按部就班，你会在春假过后，安全到达佛罗里达州的罗德岱堡（Fort Lauderdale，候鸟栖息地之一），庆祝微积分期中考拿了 90 分．

以下是计算距离的公式．

距离公式　设 d 为点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 跟点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离，则

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这个公式从哪儿来的？它只不过是一连应用了勾股定理两次的结果：如图 5.6 所示，$|x_2 - x_1|$ 是图中立方盒在 x 方向上的边长，而 $|y_2 - y_1|$ 是 y 方向上的边长，因此，盒底对角线 δ 的长度，就等于以这两边为股的直角三角形的斜边长，于是

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

至于点 P 到点 Q 的距离，就是该立方盒的对角线，同时也是底为 δ、高为 $|z_2 - z_1|$ 的直角三角形的斜边，所以再利用一次勾股定理：

$$d(P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

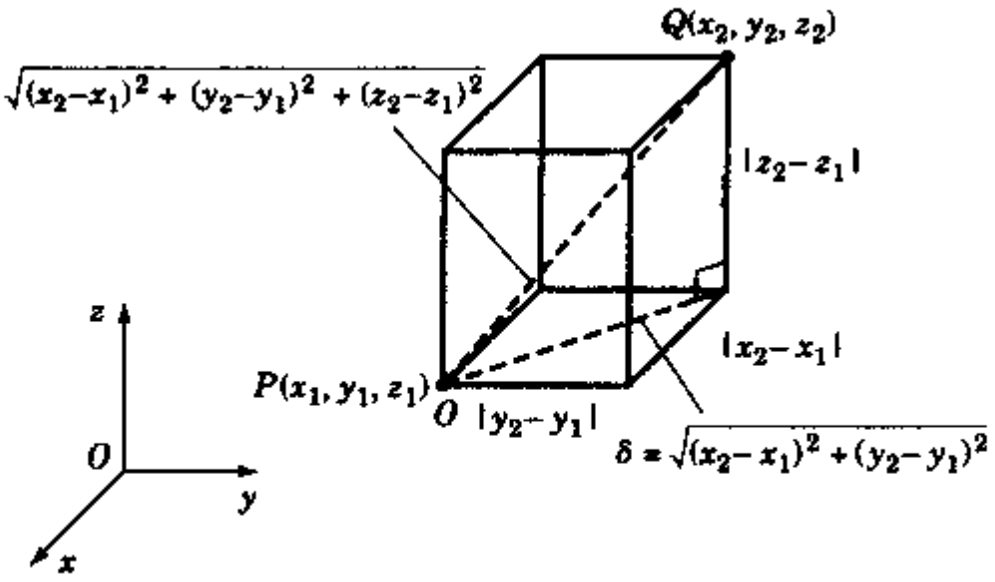


图 5.6 由勾股定理，我们也能测量出三维空间中两点间的距离

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

我们讲解得够干净利落吧！

空间中的球

咱们都知道球是什么样子，尤其是我们所居住的地球（或火星，如果你是外星读者），大大圆圆的.

要定出空间中某个球的位置，最直截了当的方式是描述它的球心 $P(a,b,c)$ 以及半径 r. 然后，如果 $Q(x,y,z)$ 是该球面上的任何一点，则

$$d(P(a,b,c),Q(x,y,z))=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r.$$

把等号两边同时平方，则可得到下面的一般方程式.

> 半径为 r、球心为 $P(a,b,c)$ 的球面方程式为
>
> $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

例题 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=16$ 即是一个半径为 4、球心在点 $P(3,4,-1)$ 的球面方程式.

嘿！别把嘴张得太大，你的牙齿不够好看！

5.3　空间中的向量

如前所述，我们应该把向量想成一枝箭，只是现在我们得让这枝箭穿梭在三维空间中，而不是平面上.

跟前面所说的一样，有两样东西决定一个向量，那就是它的方向跟长度. 通常我们让这个向量以原点为起点，然后以它的箭尖坐标来代表该向量. 所以我们把向量 $v=(2,3,4)$画出来之后，就像图 5.7 所示，它开始于点 $P(0,0,0)$，而终于点 $Q(2,3,4)$.

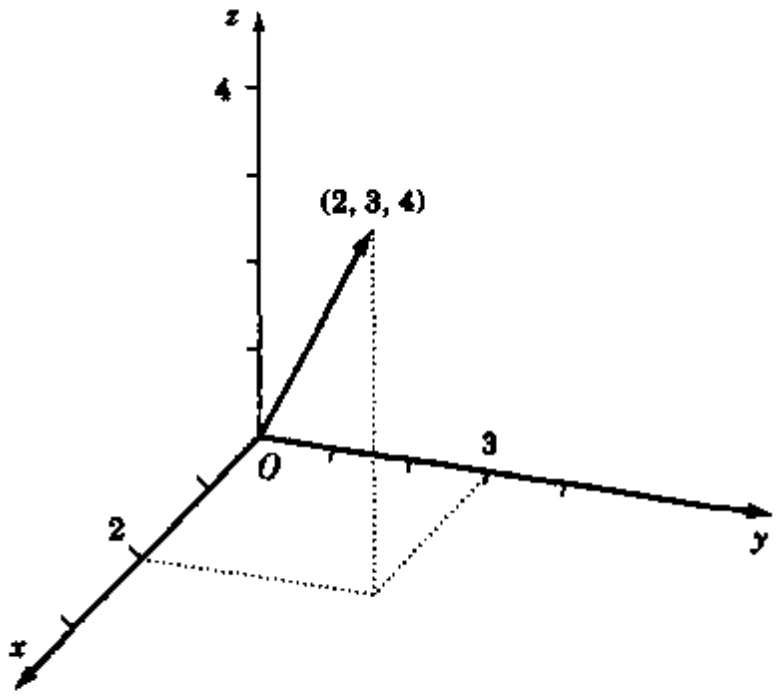


图 5.7　向量 $v=(2,3,4)$

向量的长度则是从起点 P 到终点 Q 的距离. 对于起始于原点的任何一个向量 $v=(x,y,z)$来说，其长度就是

$$|v|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

三维空间中的向量加法、减法跟纯量乘法，都与平面上的向量无异，只不过多出了一个分量. 至于零向量，也比平面上的零向量多一个零，即 $\mathbf{0}=(0,$

0,0).

单位向量

长度为 1 的向量我们称为单位向量. "1 个什么呀? 1 厘米? 1 英寸?" 你也许会问. 答案是 1 单位! 这种向量的大小为 1 个单位, 所以叫做单位向量. 单位向量有一卡车这么多, 只是方向各个不同.

很有用的事实 我们可以取任何一个向量 (零向量除外), 把它延长或缩短成单位向量. 譬如向量 v:

$$u = \frac{v}{|v|}.$$

得到的 u 就是一个单位向量, 其方向与 v 相同.

我们可以检验 u 的长度的确是 1. 如何检验呢?

$$|u| = \left|\frac{v}{|v|}\right| = \frac{|v|}{|v|} = 1.$$

这儿还有几个非常著名的向量:

$$i = (1,0,0),$$

$$j = (0,1,0),$$

$$k = (0,0,1).$$

许多人也常将这三个向量昵称为 Izzy、Jane 跟 Klondike. 它们三个都刚好是 1 单位长, 分别指向正 x 轴、正 y 轴跟正 z 轴的方向. 为什么会命名为 i、j、k 呢? 有人说是因为在它们的命名会议上, 最为人看好的提议是 "I just don't know." 另一说法是, 在 i 之前的 8 个英文字母全给用光了: a、b、c 一般用来代表常数, d 代表导数, e 是 2.71828…, f 跟 g 代表函数, 而 h 则拿来代表 Preparation H (一种常用的痔疮外用药膏). 所以, 只好从 i、j、k 开始.

我们可以用一组 i、j、k 的倍数, 来描述任何一个向量. 怎么说呢? 譬如向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$, 我们可以把它改写为

$$a = (a_1, a_2, a_3) = (a_1,0,0) + (0, a_2,0) + (0,0, a_3) =$$

$$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) =$$

$$a_1 i + a_2 j + a_3 k .$$

所以我们得到了:

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}.$$

数学家喜欢把向量写成(a_1, a_2, a_3)或像$\langle a_1, a_2, a_3\rangle$的括弧形式，而物理学家则偏好用单独的符号，诸如 $\boldsymbol{a}$，除非有必要强调其中的 $\boldsymbol{i}$ 分量、$\boldsymbol{j}$ 分量跟 $\boldsymbol{k}$ 分量.

那你呢？喜欢哪一种？

5.4　点积（内积）

所谓点积，就是把两个向量放在一起，然后产生一个实数．这跟两个向量相爱、结婚然后生下一个向量婴儿，截然不同．后面这种情况，不是我们现在要讲的，这部分稍后会再讨论．这儿所谈的点积，产下的婴儿不是向量而是实数，所以比较像是两向量相爱、结婚，之后产下一只小海豚！这是怎么做到的（我们问的是两向量的点积，而不是如何产下小海豚）？

假设有两个向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，跟 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$，那么它们的点积是下面这个数：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

例题 1（计算点积）　设两向量 $\boldsymbol{a} = (3,2,1)$跟 $\boldsymbol{b} = (2,-1,4)$，则它们的点积为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 3\ (2)\ +2\ (-1)\ +1\ (4)\ = 8$.

大多数的人都称之为点积，不过偶尔你也会听到有人叫它“内积”（别问我们为什么）.

人们经常会坦白地问：“点积究竟是啥？”这个我们知道；点积主要是看两个向量是否相容、能够愉快相处的指标；它是用来度量两个向量的相似程度．如果两向量差不多指向同一个方向，我们就会得到一个正的点积，而当方向愈接近，这个值就愈大（除非两个向量都非常小）．如果两向量互相垂直，点积的值就会是 0；如果两向量差不多指向相反的方向，点积的值则为负数.

用点积来做媒

我们可以利用点积，替人找出最佳的对象，这对象不必限定是人，也可以是动物、矿物质、蔬菜.

以下是做媒的步骤：请想找对象的人填一张简单的表格，表格上列有以下三个项目、评分范围从 -5 到 5，“-5”代表极端厌恶，而“5”表示非常有好感，填表人必须据实回答他或她对各项目的好恶：

1. 在身上打洞穿环（耳洞、鼻环、舌环……）

2. 寿司

3. classical music（古典音乐）

我们把每一位填表人所给的答案资料，写成一个三维空间里的向量，三个分量分别代表三个问题的答案，而此向量的名称就是“相容向量”. 接着，要决定两人之间的相容程度，我们只需取他们的相容向量之点积，得到的结果愈大，表示两人愈匹配.

譬如说，E 小姐决定为自己找一个如意郎君，她跑到“非常男女”联谊社，填写了上述的表格，如果是 E = (0,5,4). 同时，在同一栋楼的另外一间办公室里，L 先生跟 J 先生两位男士也填写了同样的表格，结果是 L = (-5, -2,5)及 J = (5,5,5). 当 E 小姐填完表格交到柜台时，服务人员张博士（心理学博士）说：“我要把资料输入电脑，请在此稍候一下!”

她走到后面的办公室问道：“小艾，你那儿有任何资料吗?”小艾头都没抬，就把 L 先生跟 J 先生的卡片交到张博士手上，张博士马上把这两位的相容向量，分别跟 E 小姐的相容向量 E 做了点积，结果发现 $E\cdot L = 10$，而 $E\cdot J = 45$.

“请 J 先生过来一趟!”她一边告诉小艾，一边走回 E 小姐等候的办公室，非常兴奋地告诉 E 小姐说：“你的运气真好，我一下子就替你找到了一位很般配的对象，简直可以称为天作之合. 还真是巧，他此刻正好就在这栋大楼里，我已经请人带他过来跟你见面. 瞧! 他们已经到啦!”

小艾领进来一位头发斑白的男士，他上身穿了一件相当短的灰色无袖 T 恤，使得肚皮露在外面不说，上臂硕大的匕首图案刺青也非常醒目. 见到 E 小姐他马上说道：“你好! 我姓 J. 你看起来真是不错，真的不错!”目光不断上下打量着 E 小姐.

“啊！”E小姐回应道：“你倒是不太像我所企盼的模样.”

“电脑可是比你更了解你自己！”张博士在旁边推波助澜.

当他们手挽着手走出大楼的时候，J先生说道：“你也喜爱 classical 音乐呀？我的小货车里正好有 REO Speedwagon（REO快速马车合唱团）的带子.”

（译注：REO快速马车合唱团是成立于1971年的美国摇滚团体，可见J先生把 classical music 解释成“经典老歌”，而非“古典音乐”.）

点积的运作法则

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$——这告诉了我们，你跟你自己最合得来. 你跟你自己的点积永远是正值，而且等于你的大小的平方. 这相当值得庆幸；要是你跟自己合不来，那就等于你跟一个你不喜欢的人一起住在你的脑子里，将来不出问题才怪！这条法则只有一个例外：零向量跟谁都不合，包括它自己.

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$——如果 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$ 合得来，则 $\boldsymbol{b}$ 跟 $\boldsymbol{a}$ 也合得来.

3. $c\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot c\boldsymbol{b}=c(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$——在点积式子中的纯量，可以随意移动到任何位置上.

点积的几何解释

在几何上，点积也具有某种特殊意义. 取两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$，且让它们的出发点相同，而所夹的角为 θ，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

从你对这个公式的反应，我们很容易看出你对余弦定律了解多少. 如果不知道这条律法，别紧张，没有人会因此被关起来，最多只会罚一点钱或做做社区服务. 这个式子有一个有趣的结论：如果 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$ 为任意两个非零向量，那么

> 向量 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

为什么呢？由前面的式子可以看出，若要 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，那么 $\cos\theta$ 必须等于0，而要它等于0，只有当 $\theta=\pi/2$ 时才办得到. 所以，现在我们有了一个非常容易的方法，可用来检验两个向量是否垂直. 我们马上就来试试.

例题2　**惠勒斯堡镇民代表会决定修建一条新的街道，用以调节小百货店**

前日益繁忙的交通．该街道将跟镇上的主街相交．如果主街是从点(0,0)到点(3,4)，而新街道预计要从点(2,5)到点(4,3)，试问这两条街道是否互相垂直(这套坐标是以镇公所为原点，单位为英里，x 轴指向正东，而 y 轴指向正北)?

解：我们可以把这两条街道看成两个向量．第一条街（也就是主街）相当于向量 $\boldsymbol{v}=(3,4)$，而第二条街则为向量 $\boldsymbol{w}=(4-2,3-5)=(2,-2)$．由于它们的点积为 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=3(2)+4(-2)=-2\neq 0$，所以我们知道，这两条街不是垂直相交的．

诗人能运用20个不同的词语来表达渴望，数学家也一样，他们热衷的观念通常也不只一种说法．比方“互成直角”这个概念，他们就会用 perpendicular（垂直）、orthogonal（正交）以及 normal（法向）等字眼．其中的 orthogonal 一字，源于希腊字根 - ortho，意思是直立、直角或标准，所以，orthodontist 的工作是矫正你的牙齿，orthoweed killer 的用途是帮你修剪草坪上的杂草．另外还有 orthodoxy，是指信仰的正统，orthorgraphy 则指正确拼字的理论．（你一定会想知道“不正确拼字理论”是啥理论．）

我们也可以利用前面那个公式，计算两向量所夹的角．

> 向量 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$ 所夹的角 θ 可由下列式子决定：
>
> $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

例题3 有个飞机跑道的方向可以用向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,0)$代表，现在正有一架飞机以速度向量 $\boldsymbol{b}=(3,2,-1)$准备降落．试计算跑道跟这架飞机降落方向之间的角度．

解：把两向量代入公式，就得到

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{8}{\sqrt{5}\sqrt{14}}\approx 0.9562.$$

所以 $\theta\approx\arccos 0.9562\approx 0.2971$ 弧度 $\approx 17°$．

飞机应该倾斜一下了！

向量在另一向量上的投影

在跟向量打交道时，我们经常需要找出一个向量在另一向量上的垂直阴

影，此阴影就是所谓的投影（图 5.8）.

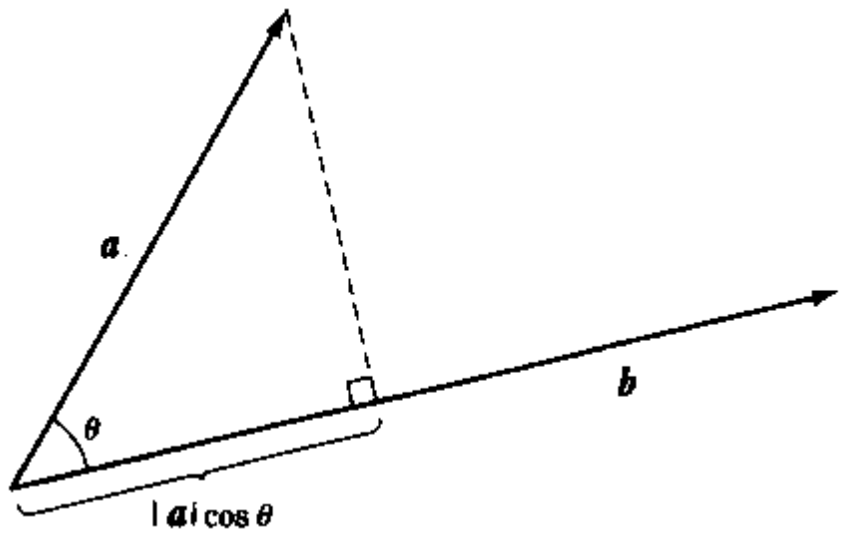


图 5.8　把向量 $\boldsymbol{a}$ 投影到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，所得到的投影长度等于 $\mathrm{comp}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$

我们把 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影长度记为 $\mathrm{comp}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$（意思是“$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的分量”）. 请注意，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影长度其实就等于 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$，因此，由前面框框中的公式，我们得到

$$\mathrm{comp}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}|\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

如果希望求出 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记为 $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，我们可以把 $\mathrm{comp}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 乘上 $\boldsymbol{b}$ 方向上的单位向量：

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = (\mathrm{comp}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a})\ \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} =$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\right)\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} =$$

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}.$$

例题 4　求向量 $\boldsymbol{a}=(1,3,2)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(-1,2,4)$ 上的投影.

解：这题简单.

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} = \frac{-1+6+8}{(-1)^2+(2)^2+(4)^2}(-1,2,4) = \frac{13}{21}(-1,2,4).$$

功

物理学对“做工（做功）”有个非常明确的定义，不过可能跟你的认知大不相同！举例来说，假如某天你花了整整一下午，很认真地打扫你住的公寓；你不但卷起了袖子，还跪在地上洗刷浴室地板，仔细清理各个角落，甚至替你的室友整理乱七八糟的床铺跟工作台，还得把笨重的钢琴挪开，打扫它的正下方．等到你把各处都洗刷、擦拭得一干二净之后，最后还得把所有家具、摆饰、杂物一一复原，摆回到它们原来的位置．

傍晚，你的室友从外面回来，你迫不及待地说：“瞧我今天做了多少工？”偏偏她是学物理的，瞟了一眼之后回道：“功？什么功？你压根儿没做任何功．真要做功，你必须把一件重物从地板这头拖到那一头，然后把你所施的力乘上重物被拖过的距离．据我看来，你今天什么功都没做！”这番话听得你七窍生烟；这也说明了为什么屋子里最好不要放置刀枪之类的武器．

在物理上，以一恒力使物体沿着一直线运动所做的功，就等于这个力的向量 $\boldsymbol{F}$ 及物体位移的向量 $\boldsymbol{D}$ 的点积：

$$\text{功 } \boldsymbol{W} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{D}.$$

上式中的位移向量 $\boldsymbol{D}$，是以该物体原来的位置为起点，而以最后的位置为终点．如果力的向量跟位移的向量刚好在同一直线上，那么所做的功就等于力向量的大小，乘上物体移动的距离（也就是位移向量的大小）．反之，如果力向量跟位移向量相互垂直，它们的点积就成了 0，意思是说该作用力对移动的物体没有做任何功．

在公制中，力的单位是牛顿（newton），而功的单位则是焦耳（joule）．1 焦耳就是指物体抗衡 1 牛顿的力时，前进了 1 米所做的功．相传“焦耳”一词来自大科学家牛顿的死对头，莱布尼茨所说过的一段话：“谁以行动反对牛顿，我就送珠宝*给谁．”〔* 译注：joule 与 jewel（珠宝）发音相近．〕

〔英文版老编声明：这是作者们瞎编的．谨在此向牛顿郑重道歉．〕

例题 5 菲菲（她是一只狮子狗，不是欧阳菲菲）拖着她的主人，在人行道上往前走，人行道全长 200 米．如果菲菲对拴狗的皮带施了 2 牛顿的力，而皮带跟地面成 45°角，那么这一趟走下来，菲菲共做了多少功？



图 5.9　菲菲所施的力

解：如图 5.9 所示，我们先假定菲菲跟她的主人是从 xy 平面上的原点（0，0）出发，沿着 x 轴移动了 200 米，所以，位移向量 $\boldsymbol{D}=(200,0)$. 题目还告诉我们，力的向量长度为 2，而且跟 x 轴夹 45°角，也就是说，力的方向跟向量 $(1,-1)$相同. 然而，$(1,-1)$的长度是$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，而我们要的向量 $\boldsymbol{F}$ 长度为 2. 怎么办呢？最不容易弄错的方法，就是先求出沿着$(1,-1)$方向上的单位向量：将$(1,-1)$除以它的长度$\sqrt{2}$，就得到单位向量$(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$了. 于是，向量 $\boldsymbol{F}$ 的长度就是单位向量的 2 倍，所以

$$\boldsymbol{F}=(\sqrt{2},-\sqrt{2}).$$

于是，所做的功 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}=\sqrt{2}\ (200)\ +\ (-\sqrt{2})\ (0)\ =200\sqrt{2}$（焦耳）.

如果在这个例子里，力的向量不是固定不变的，我们就得把整个位移细分成许多近似直线的小线段，使得作用力在每一段位移上差不多都是恒定的. 然后，我们把每一段所做的功加在一块，就可以得到整个过程中所做的功. 分得愈细，得到的结果就愈逼近实际值，这个过程的极限就成了积分，可用来计算非恒力作用在非直线位移时所做的功. 在第 10 章，我们将用“线积分”来计算诸如此类的量.

5.5 叉积（外积；向量积）

行列式

“行列式”的英文名称是 determinant. 绝大多数的现代学生恐怕会联想到阿诺·施瓦辛格的“魔鬼终结者”（The Terminator）. 其实，阿诺最伟大的电影是“行列式终结者”（The Determinator），可惜从未公开放映过. 在这部电影里，阿诺很难一见的端坐着，跟一堆行列式的数学习题奋战. 他就这样奋战了一个半小时，偶尔也会抬起头来，对着镜头说两句非常酷的独白：“I'll be back.”或“Hasta la vista, baby.”最后，他显然失去了耐性，不知从哪儿抽出一挺冲锋枪及一些手榴弹，跟“克里夫兰州立大学数学系”展开了一场枪林弹雨的殊死战——这是整部电影的高潮.

阿诺做的行列式究竟是什么玩意儿？如果给定一个由四个数组成的 2×2 阵列，它们的行列式就是

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

只要画两条垂直线在阵列的前后就可以了. 例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1(3) = -5 .$$

如果它是一个 3×3 的阵列，它的行列式就是：

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} .$$

例题 1　（3×3 行列式）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$1(-6) - 2(2) + 4(-11) = -54.$$

行列式在一个叫做“线性代数”的数学领域中非常重要，而线性代数的应用范围相当广，从经济学到电脑绘图．虽然行列式对了解微积分并不是很重要，我们仍然有必要知道，如何计算 2×2 矩阵跟 3×3 矩阵的行列式．

行列式与叉积

现在我们要取两个向量，叫它们相乘，结果会得到一个新的向量（图5.10）．这有些像把两个人关进一个房间，等了9个月之后，从房间里出来了3个人；当然，如果当初关进去的两个人性别相同，就没办法得到这样的结果了．所以，我们可以把叉积想成是两个不同的向量相遇、相爱，然后生出一个小孩，这小孩长大后变得又高又瘦，就跟向量一样．

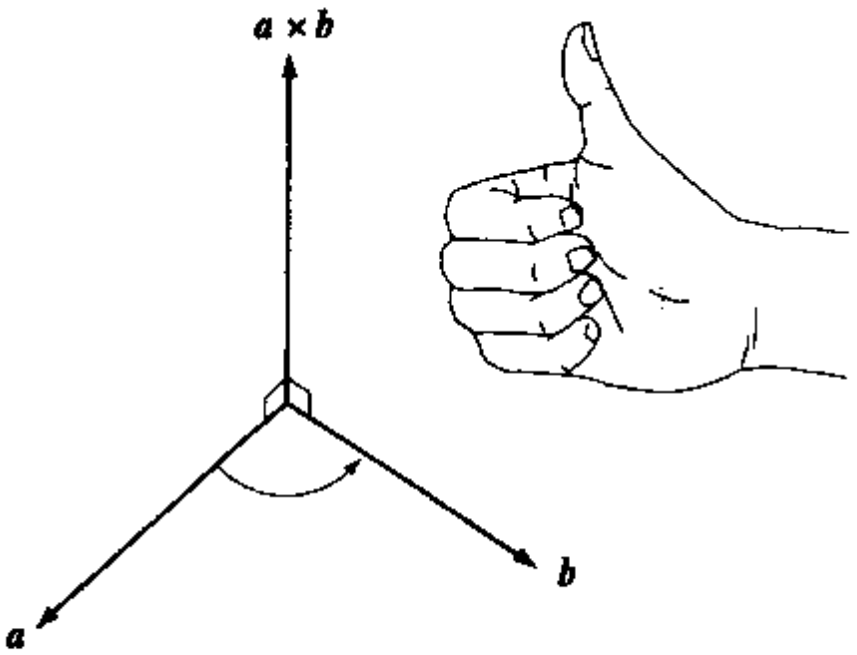


图5.10　叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时跟 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直．当你的右手四个指头顺着 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的方向旋转时，拇指所指的方向就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向

两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 跟 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 的叉积公式如下：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1).$$

要硬背下这个公式，对咱们这些脑筋不太灵光的等闲之辈，还真不太容易，就像要你一边游泳横渡英吉利海峡，一边念着不知所云的印度教经典，包你手忙脚乱．好在大家都不必硬背这个公式，因为有一个很简单的方法，可以求两向量的叉积，那就是：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

你只要记得，让矩阵的第一列为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，第二列为向量 $\boldsymbol{a}$，第三列向量为 $\boldsymbol{b}$，取行列式之后的结果就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

要证明上面这个式子，只需把行列式展开如下：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\boldsymbol{j}(a_1b_3-a_3b_1)-\boldsymbol{k}(a_1b_2-a_2b_1)=$$

$$(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1).$$

看到了没？结果跟前面难记的公式一模一样.

例题 2 若 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1),\boldsymbol{b}=(-2,3,1)$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$\boldsymbol{i}(5)-\boldsymbol{j}(-1)+\boldsymbol{k}(7)=(5,1,7).$$

这倒跟人世间的情形满相像的，怎么说呢？这个向量“小孩”跟它的父母处不好，它非常叛逆，跟父母一点都不相容，跟它们都成直角.

重要事实 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 跟 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 两个向量都垂直.

我们怎会知道呢？要证明两个向量互相垂直，咱们只需证明它们的点积等于 0.现在我们先来证明 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(a_1,a_2,a_3)\cdot(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)=$$

$$a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

式子中各项刚好互相抵消，于是点积等于 0，也就证明了这两个向量互相垂直. 同样的，$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$，因此 $\boldsymbol{b}$ 跟 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 也相互垂直.

千万记住，两个向量的叉积产品也是向量．为了帮助你记住这一点，数学家编造过无数跟此有关的笑话，我们也新编了几则．

叉积笑话集锦

问：如果让狮子跟老虎杂交*，会生下什么？

答：一个跟狮子、老虎都垂直的向量．（*译注：叉积 cross product 里的 cross 也有“杂交”的意思．）

问：如果让狮子跟登山者杂交，会生下什么？

答：啥都生不出来，因为向量跟纯量不能取叉积*．〔*作者注：lion（狮子）念起来像 line（直线），应该会让你想到“向量”，至于“登山者”为何会扯上纯量（scalar），就请你自己来举一反三啦．（别瞪我们，这不是我们瞎掰的．）〕

问：如果拿蚊子跟鱼贩杂交，会生下什么？

答：啥都生不出来，仍是因为向量跟纯量不能取叉积*．〔*译注：蚊子是病媒（disease“vector”），鱼贩是成天都在称鱼有多重的人（fish“scaler”）．〕

问：如果让数学家跟电影明星“杂交”，会生下什么？

答：继续做梦吧，这种好事还从未发生过！

问：为什么小鸡要穿越（cross）马路？

答：为了得到一个跟她自己和马路都垂直的向量．

问：如果拿向量 ***A*** 跟向量 ***Dresser*** 叉积，会产生什么？

答：变装癖*．（*译注：$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{Dresser}$ 用英文来念就是 a cross dresser；cross－dresser 是指男扮女装或女扮男装的人．）

好啦好啦，别做出那副皮笑肉不笑的模样！我们也知道这些笑话很冷，不过数学笑话本来就是十个里面有九个不好笑．通常，这种笑话的乐趣不在笑话本身，而是在说笑话的人有意揶揄自己．

叉积的几何意义

之前我们已经谈过叉积向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的方向，得知它跟 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 两个向量都垂直，并且遵守右手法则．那么它的大小呢？

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的大小是这么定义的：

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta.$$

θ 是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 两向量之间的夹角．你可注意到，这条公式跟前面讲过的点积公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 多么相似！小心别搞混了．

还要注意，叉积的大小，跟我们取叉积时的先后次序无关．换言之，

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|.$$

由于牵涉到右手法则，故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向跟 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的方向刚好相反．这两个向量的方向虽然相反，大小却相同，所以互为反向量，换言之，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

这点需要特别记住．

好啦，那叉积究竟能干什么？

有多少次，你对你生命中的那个真命天子说："亲爱的，你记不记得那个简单的三角形面积公式？就是相邻两边为两个已知向量，然后求三角形面积的那个公式？"然而对方却回答道："你连这个都不晓得？看样子我得另外找一个真命天子了．"

好啦，我们现在就告诉你一个简单的公式，从今以后你就用不着担心历史会重演了．

请瞧瞧图 5.11 所示的平行四边形，向量 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$ 为相邻两边．我们可以把左手边的一个直角三角形切下来，移到右边，这样就变成了一个长方形，它的高跟底与平行四边形相同，所以

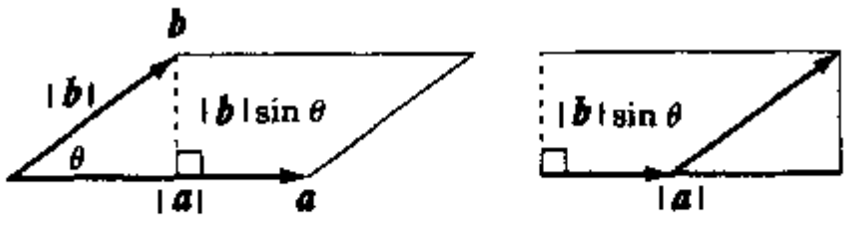


图 5.11　利用叉积，我们可以算出平行四边形跟三角形的面积

（平行四边形的）面积 = (高)(底) = $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

以 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$ 为相邻两边的三角形的面积，就正好等于这个平行四边形面积的一半，因而我们得到了以下的公式：

（三角形的）面积 = $1/2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = 1/2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

这个公式让我们想到了以下的笑话：

问：如果让河马跟长颈鹿杂交，会生下什么？

答：一个跟河马和长颈鹿都垂直的向量，而且它的长度等于河马的身长乘上长颈鹿的身长，再乘以他们的夹角的正弦值.

各位真命天子，搞清楚了没有？

三重内积（平行六面体的体积）

现在我们一不做、二不休，继续看“三个”向量的乘积. 这对我们来说，其实并非全新的东西，只不过是把前面讲过的点积跟叉积拼凑到一块而已. 如果做法正确，就会得到由这三个向量所张成的平行六面体的体积. 这种平行六面体（图 5.12），就像好端端的一个纸箱让你踩在上面，久了之后变得歪歪斜斜的. 说到这儿，有件事值得一提：抽空去查一查“平行六面体”的英文 parallelepiped 该怎么念（赔了累了拍屁的！），好好记住，这样就能让人对你肃然起敬、刮目相看.

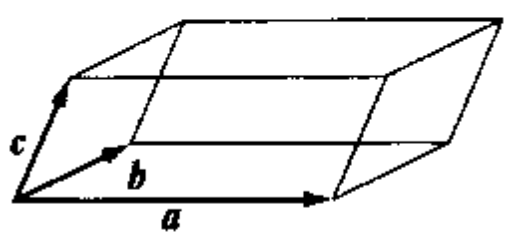


图 5.12　三重积就等于平行六面体的体积

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量的三重积公式是$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$. 如果你一时记错，把它写成了$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，别担心，你得到的结果还是相同，换句话说，点积跟叉积在公式中的先后次序，对结果完全不发生影响. 三重积的结果为一标量，其绝对值就是前述之平行六面体的体积.

只是你得特别注意，计算三重积时，必须先做叉积，然后才做点积．如果计算$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$，是毫无意义的，因为你若是先做两个向量的点积，结果必为标量，而标量是不能跟向量取叉积的！还要注意一点，取完叉积之后再取点积，得到的是一个数（标量），可能为正，也可能为负，若在它的前后各加一条垂直线，取绝对值，最后的结果就为正值了．

若真要先做叉积，然后做点积，那可是相当复杂而麻烦的，好在我们有个比较简单的公式，可以求标量三重积：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

三重内积这个概念，有一个满有用的用途，那就是证明三个向量是否在同一平面上；若三个向量在同一平面上，它们所张成的平行六面体的体积势必等于0．

例题3 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$、$\boldsymbol{b}=(3,2,1)$以及$\boldsymbol{c}=(8,4,0)$这三个向量是否在同一平面上？

解：取这三个向量的三重内积，我们发现

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

这三个向量张成的平行六面体体积等于0，所以我们可以下结论说，三个向量的确在同一平面上．

在接下来的几节中，还有其他应用的例子，用到本章介绍的各种概念．正如你问小鸡为什么要过马路而得到的回答一样，当你碰到了向量，就去求叉积，别问为什么．

亲爱的读者，你怎么不吭声啦？宰羊了没有？

5.6　空间中的直线

你还记得当初学习在 xy 平面上画直线的往事吗？首先，题目会给你一个方程式，比如 $y=2x+3$，然后你得找出所有能够满足该方程式的点（x，y）．不过，在此所举的例子里，一看就知道斜率为 2，y 截距离为 3，所以你很快就能画出这条直线．

但到了三维空间，谋生（包括画直线在内）就没有那样简单了．在三维空间中，直线得用三个方程式来描述．咱们先来瞧瞧如何在三维空间里决定一条直线．说起来其实非常容易：假定我们知道直线上任一点 P 的位置，及一个跟该直线相同方向的向量 $\boldsymbol{v}$，就能决定出唯一一条通过点 P、且与向量 $\boldsymbol{v}$ 同方向的直线；也就是说，一个点加上一个向量，就足以决定一条直线．

人生何尝不也是如此？譬如冒险家哥伦布（图 5.13），要不是当时西班牙女王伊莎贝拉一高兴，免费给了他三条船，让他航向美洲，他也不可能名垂青史．所以我们可以说，这一个时间点与航行方向，决定了他的“生命线”．如果我们之中的任何人，现在也碰到同样的运气，将来一样会飞黄腾达，创出一番伟大的事业！



图 5.13　哥伦布的生命线，由他的人生起点跟一个方向所决定

假设我们知道直线上有一点 $P(x_0, y_0, z_0)$，而且向量 $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ 与该直线的方向相同. 现在，我们另外取一点 $Q(x, y, z)$，用来代表直线上任何一点，那么向量 $\overrightarrow{PQ}$ 所指的方向，就跟向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同，也就是说，$\overrightarrow{PQ}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的某一倍数，所以存在一个纯量 t，使得 $\overrightarrow{PQ} = t\boldsymbol{v}$.

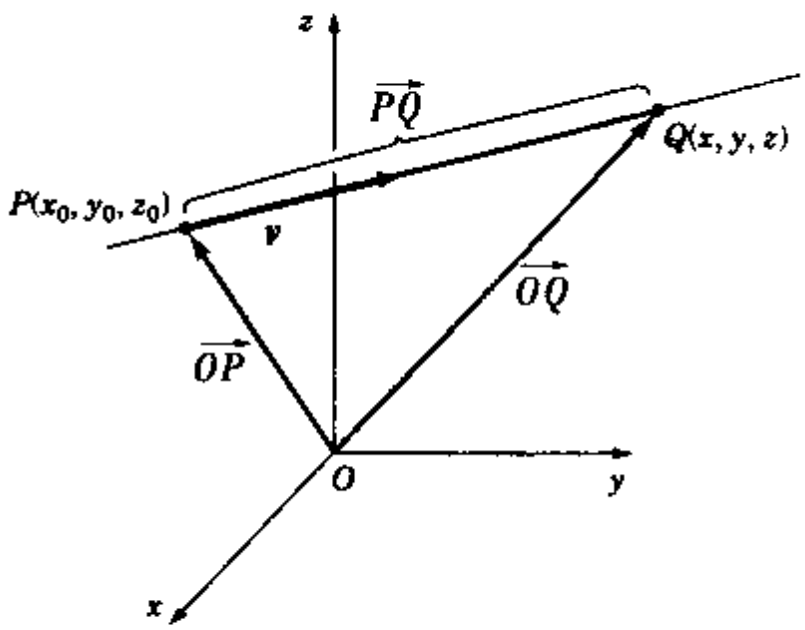


图 5.14 直线是由一点 P 跟一个向量 $\boldsymbol{v}$ 所决定

我们从图 5.14 中可以看出，向量 $\overrightarrow{OP}$ 加上 $\overrightarrow{PQ}$ 之后可得到向量 $\overrightarrow{OQ}$，也就是

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{v}.$$

把各个向量写出来，就得到

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c).$$

分别看三个分量，可得到

$$x = x_0 + ta,$$

$$y = y_0 + tb,$$

$$z = z_0 + tc.$$

这三个方程式，就描述了通过点 $P(x_0, y_0, z_0)$，而方向跟向量 $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ 相同的那条直线，称为该直线的“参数方程式”.

方程式中的变数 t 就称为参数. 当 t 的值改变时，点 Q 也会像一只虫一样，沿着直线移动. 如图 5.15 所示，当 $t = 0$ 时，这只虫正在起跑点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 上，等到 $t = 1$ 时，它到达了向量 $\boldsymbol{v}$ 的尖端，而当 t 继续增加，它也继续沿

线向前爬行．我们这些旁观者，一定觉得那只虫的一生真是无聊透顶，好在小虫子知足常乐，没有太大的野心．不过如果你的脑子也像虫子的脑一样大，你大概也不会有远大的期望和抱负．

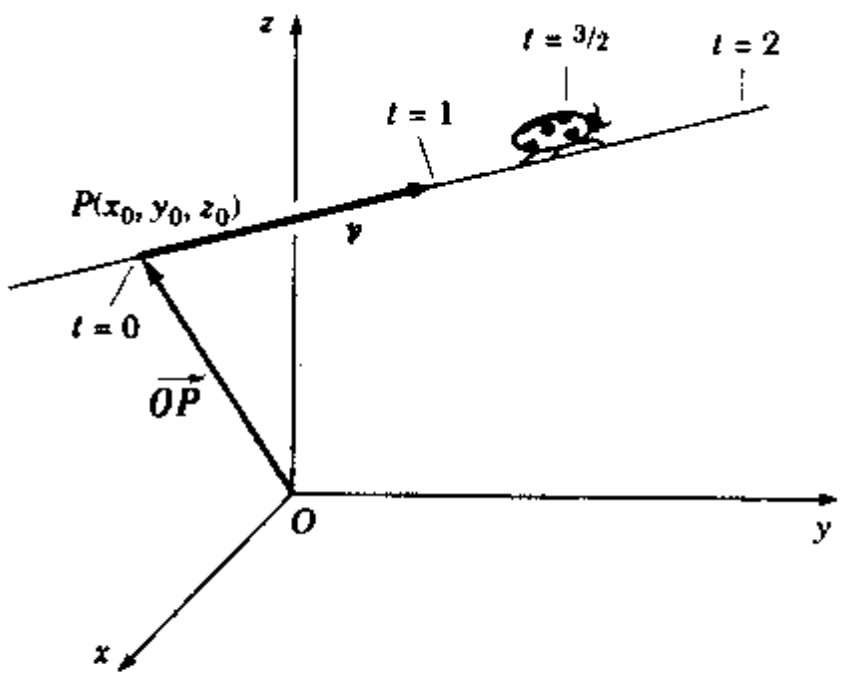


图 5.15　参数 t 决定了直线上的一点

由于直线上有无数个点可以用来做 P，而且又有无数个向量跟该直线平行，每一个都可以用来当做 v，所以同一条直线可以由无数个不同的参数方程式来描述．

我们还可以把这组直线方程式稍微改写一下．我们可以解每个方程式里的 t，然后令三个方程式的 t 相等，就得到了直线的对称方程式：

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

例题　有只蜜蜂的飞行路径是一条直线，这条直线经过了 $P_0(1,0,-1)$ 跟 $P_1(2,3,-2)$ 两点．试求描绘该直线的参数方程式及对称方程式．

解：如果你觉得这一题不够刺激，不妨直接用这两个点，而非一个点与一个向量，去找出直线的方程式．若要写出该直线的参数方程式，我们需要直线

上一点，以及跟直线同方向的向量．直线上一点，没问题，我们现成就有两个；向量也不难找，只要取从 P_0 到 P_1 的向量，亦即 $v=\overrightarrow{P_0P_1}=(2-1,3-0,-2-(-1))=(1,3,-1)$．向量 v 的三个分量，就是咱们要的 a、b 跟 c．至于 x_0、y_0 及 z_0 嘛，我们就选 P_0 的三个分量．所以我们可以得到如下的参数方程式：

$$x=1+t,$$
$$y=0+3t,$$
$$z=-1+(-1)t.$$

如果我们用的不是 P_0 而是 P_1，得到的参数方程式就成了：

$$x=2+(-t),$$
$$y=3+(-3t),$$
$$z=-2+t.$$

两组（及其他许多组）参数方程式看似不同，但都代表同一条直线．至于对称方程式，就要把参数方程式的三个 t 各自求出，然后令它们相等．所以如果我们用第一组参数方程式，就会得到

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

5.7 空间中的平面

“平面”一词的英文 plane，出自拉丁字 planus，原意是平坦、水平、没有任何特点可言．拉丁语的 Planus Janus，演变成了如今英语里的 Plain Jane（外表平凡的女孩）或 Planus in the Anus（直译为屁眼里的平面，就是指坐起来很不舒服的椅子），想不到吧？言归正传，我们现在想知道一些方法，让我们可以追踪、记录空间中平面的位置．

假设我们正坐在一张魔毯（或浴室踏垫）上，我们想请它载着我们飞到小吃摊附近，让聚集在那儿的人们开开眼界．不过我们这张魔毯不像卡通影片里的那样，它既不会讲也不懂中、英文，那么如何才能让它知道我们的目的地呢？其实非常简单：事实上，每一张魔毯上都竖着一根看不见的摇杆，而且跟魔毯垂直．就是因为魔毯必须随时与摇杆保持垂直，所以我们只要能抓住摇

杆，就能控制魔毯了．换句话说，这根垂直摇杆决定了魔毯在空中的去向（如果想让魔毯向前或向后飞，只需狠狠踢它一脚就成了）．

同样的观念也可以应用到空间中的平面．让我们取一个跟这个平面垂直的向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，称为法向量，然后在该平面上再取一点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$，于是，这个法向量 $\boldsymbol{n}$ 跟点 P_0 就完全决定这个平面（图 5.16）．

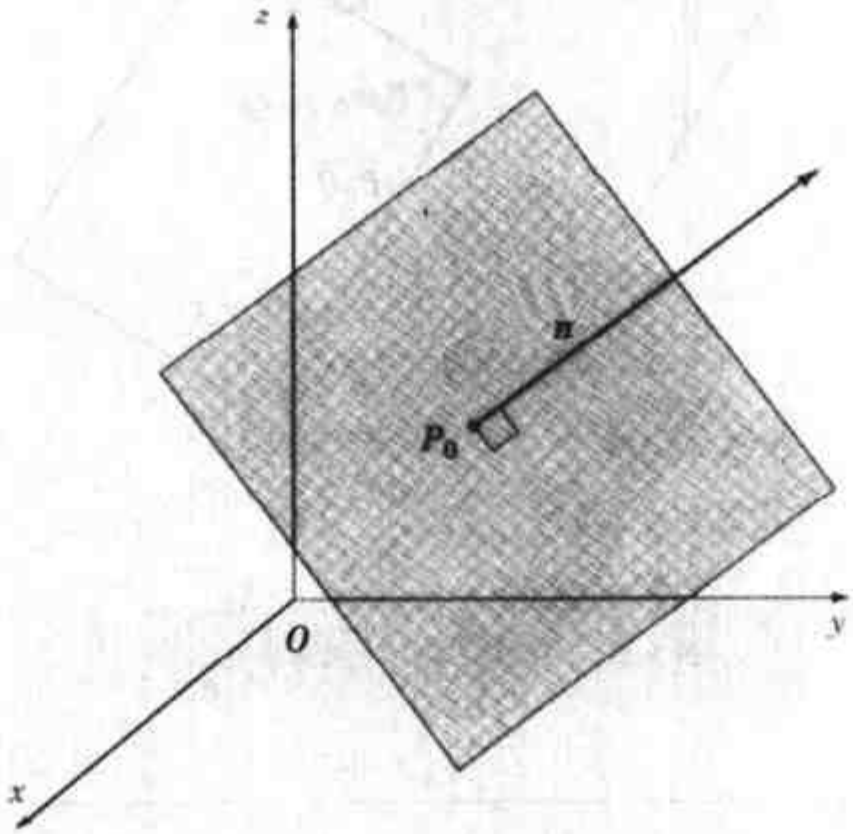


图 5.16 平面是由一点 P_0 及一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 所决定的

描述平面的方程式

若已知一个法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$及平面上一点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$，要怎样找一个描述该平面的方程式呢？让我们假设 $Q(x,y,z)$为平面上任何一点，那么如图 5.17 所示，向量$\overrightarrow{P_0Q}$躺在该平面上（说它坐或站在平面上也可以），因此也一定与法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，所以：

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0Q}=0,$$

$$(a,b,c)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

所以，该平面上的任意一点 Q（x，y，z）都会满足下列方程式：

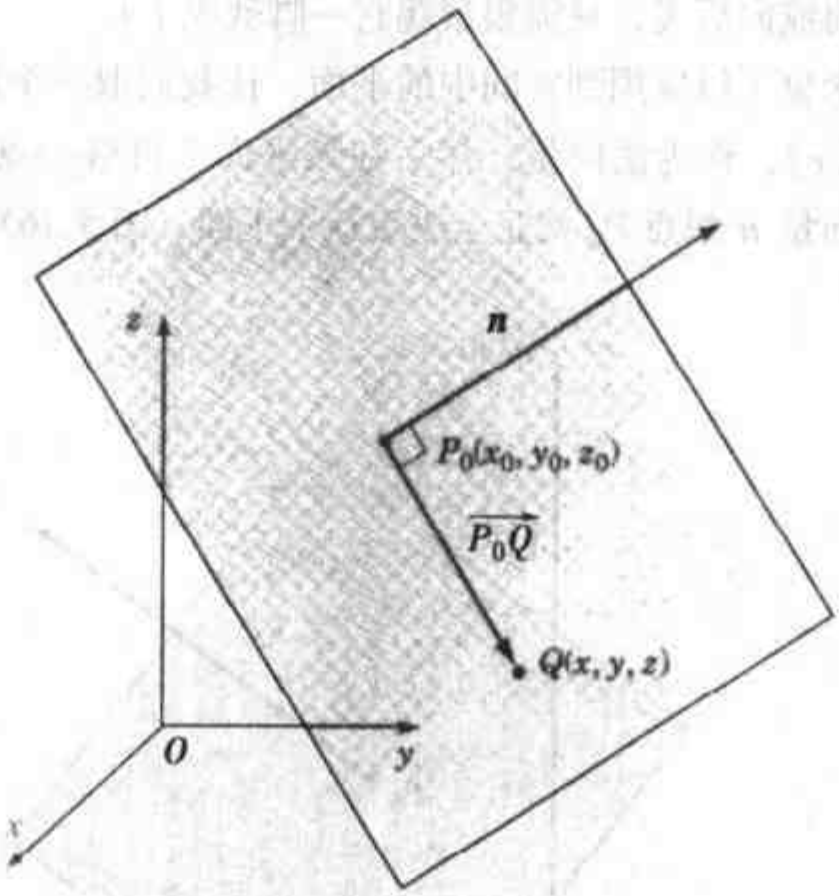


图 5.17 向量$\overrightarrow{P_0Q}$与法向量$\boldsymbol{n}$垂直

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

把上式乘开，然后把常数项移项到等号右边，就可写成

$$ax+by+cz=d.$$

其中的$d=ax_0+by_0+cz_0$为各常数的乘积和．上面框起来的两个方程式，即为平面方程式的两种形式．

例题 1（倾斜的地板） 为了节省盖房子的钱，你请你的表哥承包了工程，现在房子盖得差不多了，你才突然发现地板似乎不大平：你站在厨房里的一点$P(1,2,3)$，量得地板的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(4,5,3)$．试写出包含你家地板的平面的方程式．

解：题目里给了 $P(x_0, y_0, z_0)$跟 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$，所以我们只需直接代入上述公式：

$$4(x-1)+5(y-2)+3(z-3)=0.$$

化简之后变成

$$4x+5y+3z=23.$$

例题 2　你的表哥说地板应该没问题，准是你的法向量歪了．于是哥儿俩走出厨房，来到格局呈三角形的客厅，一起量得三个角落的位置分别是$P(1,2,3)$、$Q(5,0,1)$及 $R(0,4,1)$.试利用这三个点，重新计算包含你家地板的平面方程式.

解：题目给了我们三个点，但是没有法向量 $\boldsymbol{n}$，所以当务之急是要先求出 $\boldsymbol{n}$ 来．如图 5.18 所示，由于三个点全在地板平面上，因此向量$\overrightarrow{PQ}$跟$\overrightarrow{PR}$必然都躺在地板上，它们的叉积就会跟地板垂直，正好可当做一个法向量．于是，

$$\overrightarrow{PQ} = (5-1, 0-2, 1-3) = (4, -2, -2),$$

$$\overrightarrow{PR} = (0-1, 4-2, 1-3) = (-1, 2, -2),$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (8, 10, 6).$$

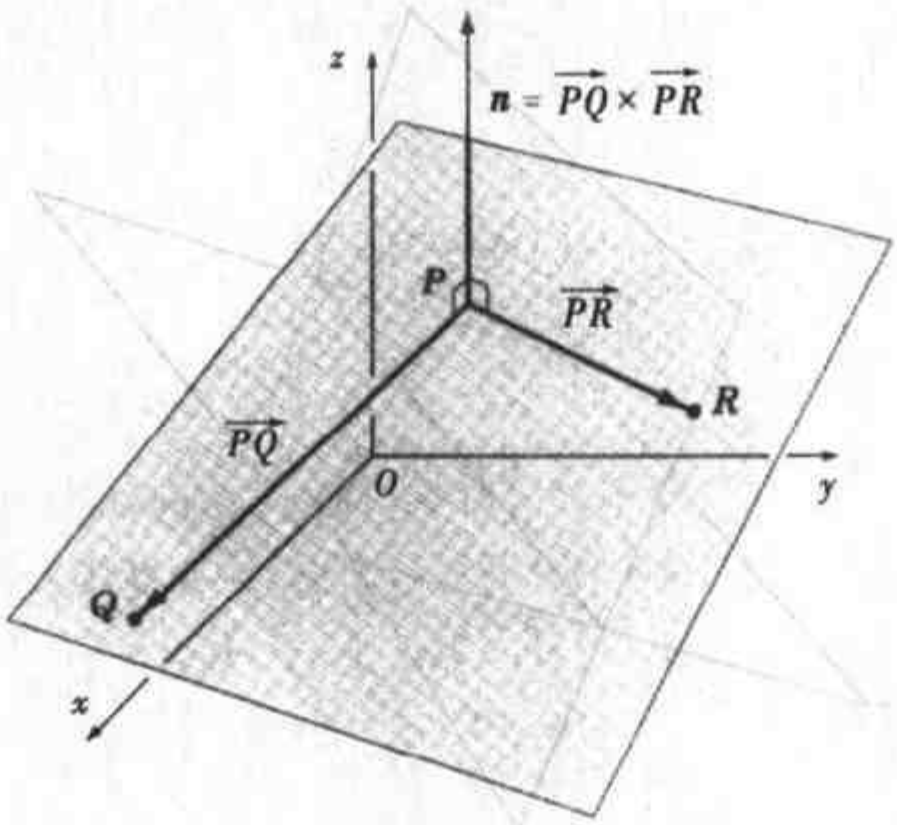


图 5.18　法向量就是向量$\overrightarrow{PQ}$跟$\overrightarrow{PR}$的叉积

接着，代入平面方程式的公式：

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

其中$(a,b,c)=(8,10,16)$，且取点 $P(x_0,y_0,z_0)=(1,2,3)$，就得到：

$$8(x-1)+10(y-2)+6(z-3)=0.$$

等号两边同时除以 2，我们就会得到：

$$4x+5y+3z=23.$$

跟你用厨房地板法向量算出来的一模一样，仍然不是很平．唉，不经一事，不长一智，下回找你的小舅子帮你盖房子吧！

例题 3 求两平面 $x+y-z=7$ 跟 $2x-3y+z=3$ 的交线的参数方程式．

解：这个问题称得上经典级的，就像古董车里的 1964 年产 MGB 跑车．要找出两平面交线的参数方程式，咱们得知道两件事，一是交线上的任何一点，一是跟交线方向一致的向量（图 5.19）．

第 1 步：首先咱们得找出这条交线上的一点．

令该点是$P(x,y,z)$，由于它同在所给的两个平面上，所以 x、y、z 同时满足两个平面方程式：

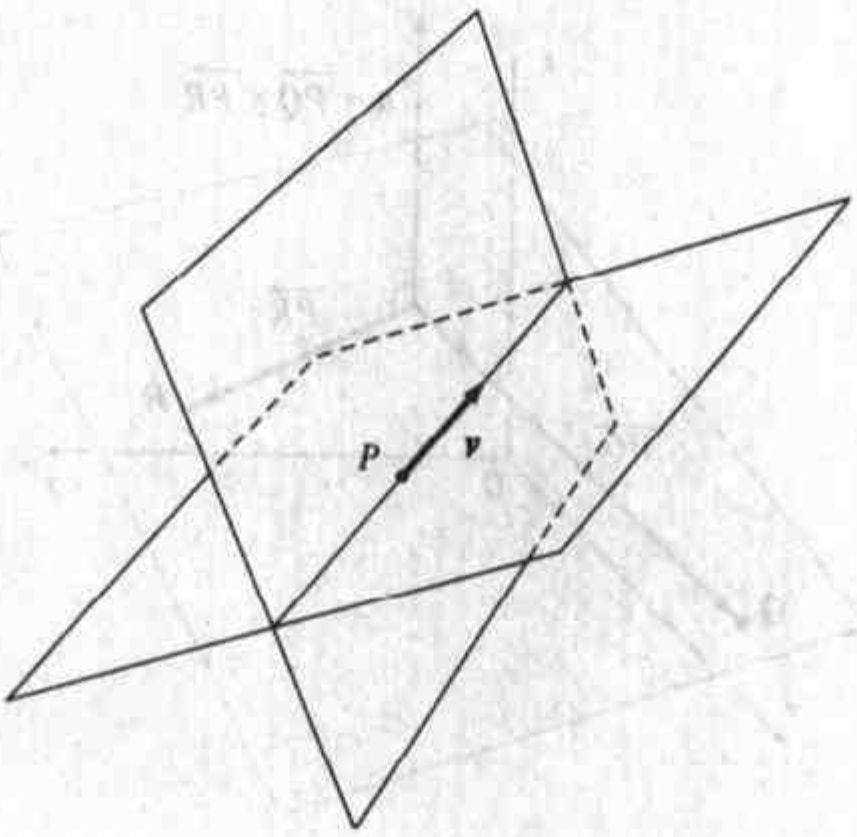


图 5.19 两平面相交于一直线

$$x+y-z=7,$$
$$2x-3y+z=3.$$

上面的三元一次方程组里只有两个方程式，所以应该有不止一个解；这一点也不稀奇，因为题目所给的平面相交于一直线，所以这个三元一次方程组的解为一整条直线，那该怎么解呢？一点也不难，我们只需先固定其中一个未知数，譬如设 $x=0$，让方程组变成

$$y-z=7,$$
$$-3y+z=3.$$

两式相加，就得到

$$-2y=10,$$
$$y=-5.$$

把它代回第一个式子，我们得到 $-5-z=7$，故 $z=-12$，所以就得到了交线上一点 $P(0,-5,-12)$．当然，随着你固定的未知数不同，可以得到许多其他的点，不管用哪个点都可以．

第 2 步：找出一个跟交线方向一致的向量．

其实从平面方程式的系数，我们就可以直接读出该平面的法向量，所以本题所涉及的两个平面，法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)$及 $\boldsymbol{n}_2=(2,-3,1)$．精彩的部分来了．我们知道，平面上的任何一条直线，必然与其法向量垂直，而两平面的交线同时在这两个平面上，所以必然分别与两平面的法向量垂直．一个向量若要同时与另外两个向量垂直，不就是后两个向量的叉积吗？也就是

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2,$$

其中

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k},$$

也就是 $\boldsymbol{v}=(-2,-3,-5)$，而在第 1 步我们找到的点为 $P(0,-5,-12)$，所以这条交线的参数方程式就是：

$$x=0+t(-2)=-2t,$$
$$y=-5+t(-3)=-5-3t,$$
$$z=-12+t(-5)=-12-5t.$$

如果把方向向量(-2,-3,-5)改为方向相反的向量(2,3,5)，我们得到的就是另一组参数方程式：

$$x = 2t,$$
$$y = -5 + 3t,$$
$$z = -12 + 5t.$$

看起来虽然有些不同，但实际上是同一条直线.

嘿！你把羊都宰光了吗?



第6章

空间中的参数曲线：来坐坐云霄飞车

在本章里，我们将看到一些相当特殊的函数，它们的函数值不是数，而是向量．这些向量值函数有许多用途，特别是用来描述空间中的曲线．

在此之前我们看函数时，有点像在研究一只懒狗，我们喂它一个数，它就把一个答案（也是一个数）吐在地毯上．现在我们要看的是另外一种函数，它的函数值存在于空间中．这种函数比较像一条眼镜蛇，因为每当我们喂它一个数，它不只是把一个数吐出来，而是直对着咱们的眼睛射出毒液；换言之，它制造出一个向量．

6.1　参数曲线

关于参数曲线，有许多著名的乐曲，其中之一是“大黄蜂的飞行”，作曲者是俄国的林姆斯基高沙可夫（N.Rimsky－Korsakov，1844～1908）．在聆听完这首短短的乐曲之后，你就会清楚地了解，这位作曲家一定是先找出了描述大黄蜂花间飞来飞去、四处采蜜的数学方程式，然后把这些方程式谱成了音乐．

（英文版老编注：用方程式谱曲的理论从未经过证实，所以大概又是作者们胡诌的无稽之谈．）

你也可以依样画葫芦，谱出一些美妙的参数曲线；事实上，前面我们在描述直线时，就已经做过这件事了．比方说，假设我们有一条直线，它的参数方

程式是

$$x = 2 + t,$$
$$y = -1 + 3t,$$
$$z = 4 - 2t.$$

我们可以把这三个方程式合并为一个 t 的向量函数：

$$\boldsymbol{r}(t) = (2 + t, -1 + 3t, 4 - 2t).$$

用来描述 x、y 跟 z 的三个方程式，现在分别变成了这个向量的 x 分量、y 分量跟 z 分量. 当 t 变动时，$\boldsymbol{r}(t)$就给出了沿着这条直线的各个值，如图 6.1 所示.

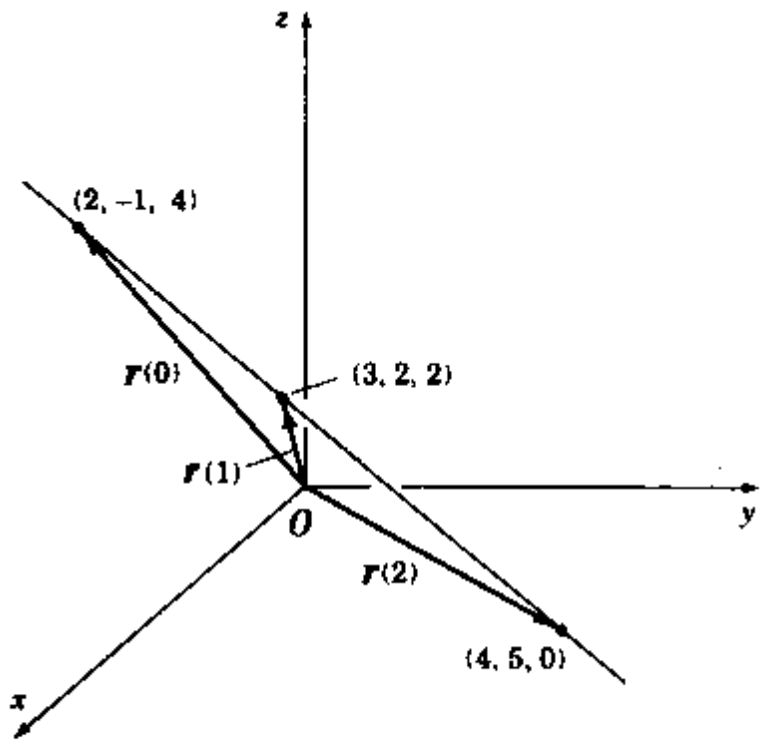


图 6.1　由 $\boldsymbol{r}(t) = (2 + t, -1 + 3t, 4 - 2t)$描述的直线

我们可以用向量函数的观念，去建构一些比直线复杂的曲线，这些曲线我们称为“参数曲线”. 下面是参数曲线的一个例子.

例题 1

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t, \cos t, t),$$

或者写成：

$$\boldsymbol{r}(t) = \sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}.$$

这就像一只喝醉了酒的大黄蜂的飞行路线，但是她心里却非常明白哪一朵花里蕴藏着佳酿，因而工作路线仍安排得很妥当，就像大部分出外买醉的人们一样．函数 $\boldsymbol{r}(t)$告诉我们这只黄蜂 t 秒后的位置；所以在一开始，也就是当 $t=0$ 时，黄蜂位于 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{j}$，即$(0,1,0)$．当 $t=20$ 时，也就是 20 秒后，这只黄蜂正嗡嗡飞过 $\boldsymbol{r}(20)=\sin 20\boldsymbol{i}+\cos 20\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$，即$(\sin 20,\cos 20,20)$.

要画出一个参数曲线的图形，有时可能相当不容易，但是我们现在所举的例子还不算顶难．当 t 递增时，函数的前两项坐标值是绕着一个圆（$\sin t$，$\cos t$）在转圈子，同时它的第三项坐标值则在稳定增加，形成的曲线就叫做螺旋线（图 6.2），它就是我们每回谈到基因时，少不了要提到的重要话题：DNA 的双螺旋结构.

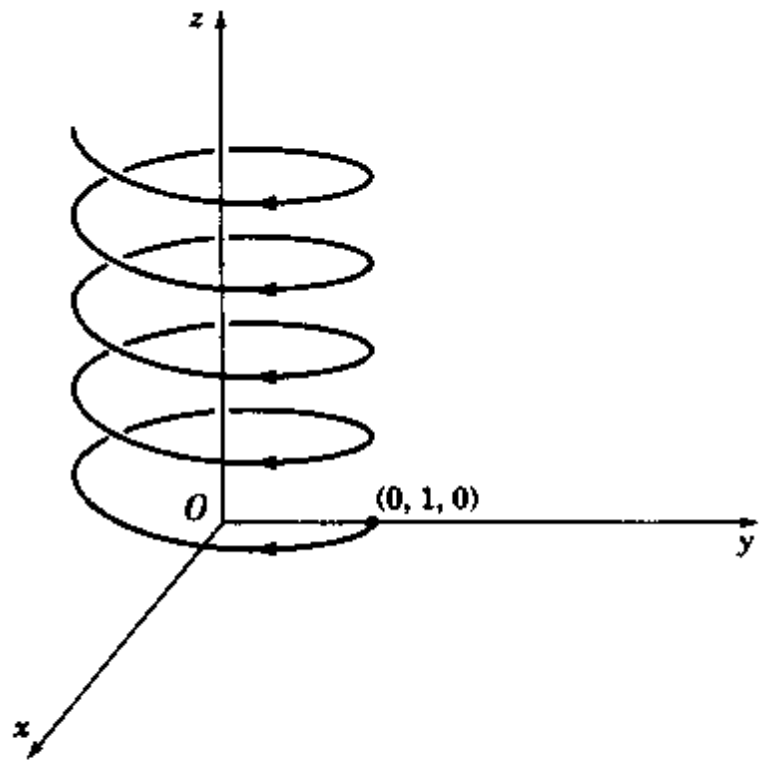


图 6.2　螺旋线

进一步归纳起来，所有具三个分量的向量值函数，都可以写成 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$的形式，在绝大多数的情况下，电脑是画这类曲线的最佳工具，既然这是微积分，咱们就来求这些曲线的微分.

向量值函数的微分

听起来很吓人，但是做起来一点也不复杂，只要把各个分量$x(t)$、$y(t)$跟$z(t)$分别微分就好了：

$$\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)).$$

向量$\boldsymbol{r}'(t)$称为该曲线在时间t的速度向量，有时候也叫做切线向量，原因是，如果我们以我们所计算的曲线上一点为起点，作向量$\boldsymbol{r}'(t)$，画出来的向量会与原曲线相切，且指向那一瞬间的运动方向（图6.3）.

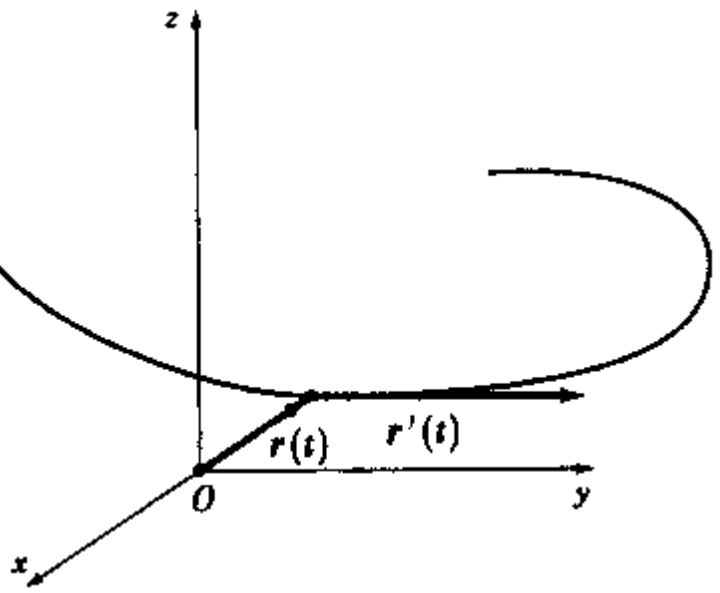


图6.3 速度向量$\boldsymbol{r}'(t)$与曲线在$\boldsymbol{r}(t)$相切

特别要注意的是，该导数为一向量，而非数值！若要搞清楚我们沿着一条曲线运动时的位置变化，我们得知道两件事：一是方向，一是代表我们朝那方向上移动得快或慢的数值. 所以换言之，我们要的是向量. $|\boldsymbol{r}'(t)|$这个数，也就是速度向量的大小，只告诉我们朝那方向移动的快慢，称为速率.

螺旋线$\boldsymbol{r}(t)=(\sin t,\cos t,t)$的速度向量为$\boldsymbol{r}'(t)=(\cos t,-\sin t,1)$，在$t=0$时，该向量为$(1,0,1)$，意指在$t=0$的那一瞬间，$x$坐标跟$z$坐标都在递增，但由于$y$坐标的导数为0，所以$y$坐标不变.

它的速率则是速度向量的长度，也就是

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{\cos^2 t+(-\sin t)^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

我们得到了一个跟 t 无关的常数，也就是说，当我们在螺旋线上绕圈子时，速率永远保持为$\sqrt{2}$，完全不受转弯的影响.

曲线微分的法则

关于向量值函数的点积、叉积等等情况的微分，有许多法则得遵循，这些法则跟微分普通函数时所用的积法则、链式法则及和法则大同小异. 只不过向量函数牵涉到的乘积不仅一种：有纯量乘积、点积及叉积，但把积法则适度变化一下，就能处理这些乘积了.

为了彻底明了这些法则，你心里先要记住$x(t)$跟 $s(t)$都是 t 的向量值函数，其中的 t 只是一个实数变量，就像一般函数里的 x、y 一样；而$f(t)$则是 t 的一般实值函数，在向量微积分里有时也叫做纯量函数. 最后，也可能是最不重要的一点就是 c，它代表一个实数常数.

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{s}(t)]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t)+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}(t)$,

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\boldsymbol{r}(t)]=c\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t)$,

3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\boldsymbol{r}(t)]=f(t)\boldsymbol{r}'(t)+f'(t)\boldsymbol{r}(t)$,

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)]=\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}'(t)+\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$,

5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)]=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}'(t)+\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{s}(t)$,

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(f(t))]=\boldsymbol{r}'(f(t))f'(t)$.

最后一条就是向量值函数的链式法则.

向量值函数的积分

向量值函数$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$的积分，跟它的微分一样，也是依分量各自积分：

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t,\int_a^b y(t)\mathrm{d}t,\int_a^b z(t)\mathrm{d}t\right).$$

如果这个积分不是一个定积分，就必须在积分结果的尾巴上加一个常数，就像一般的积分法一样，只是这儿的常数是一个向量：

$$\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \left(\int x(t)\mathrm{d}t, \int y(t)\mathrm{d}t, \int z(t)\mathrm{d}t\right) + \mathbf{C}.$$

例题 2 一只蚊子在时间 $t=0$ 时，位置是在点(1,1,1)，它从那一点开始沿着一条曲线飞了 1 秒钟，之后停下来吃中饭. 假设它在时间 t 的速度向量是 $\boldsymbol{v}(t)=(t,t^2,t^3)$，而你的耳朵位置是在$(\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4})$，你室友的鼻子位置是在$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$. 那么应该是谁被这只蚊子叮了？

解： 欲知道答案，我们得求 $\boldsymbol{v}(t)$的积分，找出位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$.

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t = \left(\int t\,\mathrm{d}t, \int t^2\mathrm{d}t, \int t^3\mathrm{d}t\right) =$$

$$\left(\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{2},\frac{t^4}{2}\right) + \boldsymbol{C}\ .$$

我们得想办法找出式子中的常数向量 $\boldsymbol{C}$. 事实上，我们可由这只蚊子在 $t=0$ 时的位置向量，把 $\boldsymbol{C}$ 计算出来：

$$(1,1,1) = \boldsymbol{r}(0) = (0,0,0) + \boldsymbol{C},$$

所以，$\boldsymbol{C}=(1,1,1)$，而且

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2}+1,\frac{t^3}{3}+1,\frac{t^4}{4}+1\right).$$

那么在 $t=1$，这个吸血的家伙在哪儿呢？

$$\boldsymbol{r}(1) = (\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}).$$

看来它刚好停在你的耳朵上饱餐一顿！

空间曲线的长度

假设你正在驾驶一架飞机，飞机上的全球定位系统随时会告诉你飞机的所在位置. 此时阳光普照、万里无云，加上心情很好，让你一时技痒，耍上几个空中特技，一连做了许多叫人内脏翻腾的高难度动作. 等你玩过瘾了，漂亮落地之后，你身旁的副驾驶才从呕吐袋上抬起头来，讪讪问道："我们刚才一共飞了多少里程？"

于是你面临了一个典型的弧长问题：刚才在转弯时，飞机在空中划过的美

妙曲线到底有多长？

这个问题似乎稀松平常，事实上却很有学问．我们应该了解，在微积分出现之前，人们测量长度的能耐非常有限，除了直线的长度之外，再来大概就只有一、两个圆的圆周长了．直线跟圆周的长度要怎么量，我们早在当小学生时就已经学过，现在学了微积分，我们就能量一量这些乱弯乱扭的曲线了．

要怎么量呢？首先，我们得把曲线切成许多小段，然后画出这些小段的近似直线，再把这些直线的长度全加起来．这个近似值的准确度有赖于分段的多少，你切成愈多段，得到的结果就愈准确；如果取极限，得到的就会是实际长度．还记得吧，当我们把区间分割得愈细，然后取其总和的极限，这不就是积分吗？

所以，假定我们有条曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，而我们想要量出 $\boldsymbol{r}(t)$从点 $t=a$ 到点 $t=b$ 之间的弧长 S．我们再假设 $\boldsymbol{r}(t)$到 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$之间这一小段曲线的长度为 Δs．那么，对于非常小的 Δt，该曲线即使转弯也转得非常有限，因此我们可以假设，移动的轨迹实质上是条直线．所以，如图 6.4 所示，我们移动的距离就等于速率乘上 Δt：

$$\Delta s \approx |\boldsymbol{r}'(t)|\Delta t=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\Delta t.$$

把所有的小段曲线长度全加起来，就会得到整段曲线弧长的近似值：

$$S\approx\sum\Delta s=\sum\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\Delta t.$$

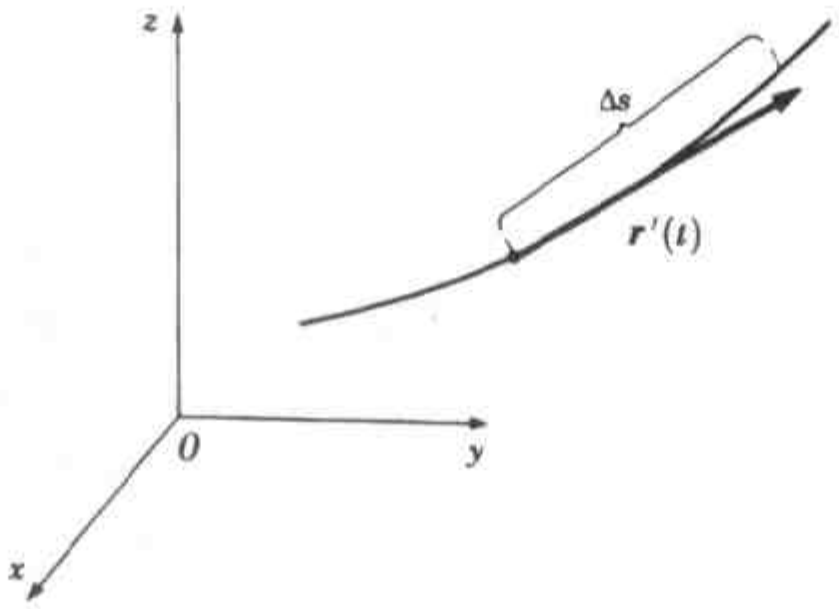


图 6.4　Δs 大约等于 $|\boldsymbol{r}'(t)|\Delta t$

若让时间间隔 Δt 更短，并取其极限，我们就得到了求曲线弧长的公式：

$$S=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t=\int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\mathrm{d}t$$

式子中的 a 跟 b 是我们度量曲线弧长的起始点，也就是从点 $\boldsymbol{r}(a)$量到 $\boldsymbol{r}(b)$.

例题 3 咱们先前提到的那只大黄蜂，在坐标位置(0,1,0)处饮用了一些发酵过的花蜜之后，决定飞回蜂巢．她的飞行路线是个参数曲线，在 t 时间的位置为

$$\boldsymbol{r}(t)=(\sin t,\cos t,t).$$

长度单位为英尺．已知这只大黄蜂用了 4π 秒的时间回到蜂巢，请问她一共飞了多远？

解：把 $t=0$ 代入 $\boldsymbol{r}(t)$，我们发现 $\boldsymbol{r}(0)=(0,1,0)$．表示这只黄蜂此时正好饮完花蜜，要打道回府．其次，我们要来计算它的速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=(|\boldsymbol{r}'(t)|)$：

$$|\boldsymbol{v}(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2+(1)^2}=\sqrt{2}.$$

所以，这只大黄蜂回家的全程是

$$S=\int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{4\pi}\sqrt{2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}t\Big|_0^{4\pi}=(\sqrt{2})(4\pi).$$

飞行路径是 $4\sqrt{2}\pi$，大约 17.77 英尺．

嘿！很酷嘛，不是吗？

6.2 曲率

曲率是用来度量曲线的弯曲程度．小的圆个头不起眼，但它们的曲率可相当大，反之，绕着地球跑出来的大圆，曲率却非常小，而那些我们肉眼看不到，只有在显微镜下才看得见的小圆，曲率可就大得不得了啦！在同一个圆上，每一点的曲率都相同，然而对于任何一条空间曲线来讲，曲率可能就会依曲率上各点而变．现在我们就要来了解，如何测量如 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$这样的参数曲线上任何一点的曲率．

要知道曲率，我们必须看切线向量的变化．正因为是向量，所以 $\boldsymbol{r}(t)$的切线向量可能有两种变化：一种是方向上的，不同的点的切线，指向不同的方

向；另一种是长短变化，但这只影响到我们在曲线上各点的移动速度，而不影响曲线的形状，所以并不是我们在此关心的焦点．因此，为了度量出曲率，我们选用曲线的另一种参数化表示，$\boldsymbol{r}(s)$，且让$|\boldsymbol{r}(s)|=1$．这个步骤就叫做“以弧长来参数化一段曲线”，在此步骤中，我们把时间参数 t 换成了弧长参数 s．

若以一个非常普通的例子来说明，就譬如我们坐在车上，由你开车，那么车子的加速度对我们有两种影响．如果你一会儿踩刹车、一会儿踩油门，那么即使道路笔直，当乘客的我们还是会被你整得前仆后倒．这种反应跟道路的曲率无关，而是在告诉我们，你的驾驶技术太烂了——你的驾照八成是在某家驾驶函授学校考到的．另一方面，如果你在启动之后，按下定速装置，让时速维持在 55 英里，然后顺着九弯十八拐的山路往前开，这时我们这些乘客就会被你甩得七荤八素，其间大伙儿所感觉到的加速度，就告诉了我们这条路的曲率．

团体练剑　与同学们聚餐之后，一起开车兜风，并且分别试试上述两种驾驶技术，看看哪一种方法让人最晕．务必放一些呕吐袋在车上，以备万一．

例题 1　试证明

$$\boldsymbol{r}(s)=\left(R\cos\frac{s}{R},R\sin\frac{s}{R},0\right)$$

为 xy 平面上一个半径为 R 的圆的弧长参数曲线．

解：首先我们看看它是否为一个半径为 R 的圆．由于

$$z=0$$

表示该曲线的确在 xy 平面上，又由于

$$\left(R\cos\frac{s}{R}\right)^2+\left(R\sin\frac{s}{R}\right)^2=R^2\left(\cos^2\frac{s}{R}+\sin^2\frac{s}{R}\right)=R^2$$

表示曲线上所有的点都能满足 $x^2+y^2=R^2$，而此式正是半径为 R 的圆方程式．

其次，我们得算算它的速度向量长度是否为 1：

$$\boldsymbol{r}'(s)=\left(-R\,\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R},R\,\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R},0\right)=\left(-\sin\frac{s}{R},\cos\frac{s}{R},0\right),$$

而它的大小就是

$$|\boldsymbol{r}'(s)| = \sqrt{\sin^2\frac{s}{R} + \cos^2\frac{s}{R}} = \sqrt{1} = 1,$$

所以这个速度向量的长度为 1，$\boldsymbol{r}(s)$确实为弧长参数曲线.

有了弧长参数曲线之后，$\boldsymbol{r}'(s)$的变化率就只剩下了方向上的变化. 但是方向上的变化率就是速度向量的变化率，后者为位置向量的一阶导数，所以方向变化率也就是位置向量的二阶导数. 因而我们是用位置向量二阶导数的大小，来衡量曲率.

由于它的速率恒等于 1，所以我们又可以把弧长参数曲线，称为单位速率曲线.

> 单位速率曲线 $\boldsymbol{r}(s)$的曲率 $k(s)$，就定义为 $k(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|$.

当你套用这个公式时，必须先确定你的曲线已经是弧长参数曲线，也就是确定它为单位速率曲线.

例题 2 试证明半径为 R 的圆的曲率为 $1/R$.

解：从上一个例子，我们知道 $\boldsymbol{r}(s) = (R\cos(s/R), R\sin(s/R), 0)$是一条单位速率曲线，且为半径为 R 的圆的弧长参数表示. 于是：

$$\boldsymbol{r}'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right), 0\right),$$

$$\boldsymbol{r}''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}, 0\right),$$

$$k(s) = |\boldsymbol{r}''(s)| = \sqrt{\left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2} = \frac{1}{R}.$$

结论是，半径为 R 的圆，曲率果然为 $1/R$. 这也证明了我们在此节一开始就指出的，大圆之曲率小、小圆之曲率大的说法.

但是，如果我们没有弧长参数曲线，该怎么求曲率？这些参数曲线，有时还真不容易求出来. 幸好有个运算简单的公式，可以帮助我们算出各种参数曲线的曲率.

由于向量值函数$\frac{\boldsymbol{r}'(s)}{|\boldsymbol{r}'(s)|}$是一单位向量，而其方向就是曲线上各点的切线方向，因而它也经常叫做单位切线向量，而且特别记做 $\boldsymbol{T}$. 有了它的帮忙，我

们就有了可求出任何参数曲线曲率的公式：

> 任意曲线 $\boldsymbol{r}(t)$的曲率定义为 $\boldsymbol{k}(t)=\dfrac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$.

例题 3　试求$y=x^2$在点$(x,y)=(1,1)$的曲率.

解：我们先不用顾虑是否化成一个单位速率参数曲线，我们只要把它参数化就行了．怎么做呢？由于曲线上每一点的 y 都等于 x^2，所以看起来最简单的参数表示就是：

$$x=t$$

$$y=t^2$$

这样一来，对任何 t 值，$y=x^2$ 总是成立，所以我们可以取 $\boldsymbol{r}(t)=(t,t^2)$，当做我们的参数曲线（该曲线位于 xy 平面上）.

由于 $\boldsymbol{r}'(t)=(1,2t)$，

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{(1)^2+(2t)^2}=\sqrt{1+4t^2},$$

那么，

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{(1,2t)}{\sqrt{1+4t^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}},\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right).$$

然后取导数，于是得到

$$\boldsymbol{T}'(t)=\left(\frac{-4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$|\boldsymbol{T}'(t)|=\sqrt{\left[\frac{-4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^2+\left[\frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^2}=$$

$$\sqrt{\frac{16t^2+4}{(1+4t^2)^3}}=\sqrt{\frac{4}{(1+4t^2)^2}}=\frac{2}{1+4t^2},$$

所以，

$$\boldsymbol{k}(t)=\frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{\dfrac{2}{(1+4t^2)}}{\sqrt{1+4t^2}}=\frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $t=1$，亦即在曲线上的点$(x,y)=(1,1)$时，我们的曲率为：

$$\boldsymbol{k}(1)=\frac{2}{(5)^{3/2}}\approx 0.1789\ .$$

如果你想知道这题答案的话，这就是啦！

6.3 速度与加速度

“加速（度）”这字眼似乎很酷，一般人都喜欢拿来吓人，譬如有人告诉你：“我已经加速了我的碳水化合物消耗量.”听起来很奇特，其实他的意思不过是：“我觉得自己像一头肥猪.”数学家跟物理学家也不例外，喜欢用“加速（度）”来帮助描述粒子（质点）的运动.

正如上一节讲解过的，若 $\boldsymbol{r}(t)$代表粒子的运动轨迹，其切线向量 $\boldsymbol{r}'(t)$就代表了该粒子的速度，而后者的大小 $|\boldsymbol{r}'(t)|$则是该粒子的速率. 至于这个粒子的加速度，则是它的速度向量的导数，记住，加速度本身也是向量：

$$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{v}'(t)=\boldsymbol{r}''(t),$$

也就是说，加速度是位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$的二阶导数.

例题 1 赫儿嘉跟她的室友们一块出去参加派对，她们预先约定好，由赫儿嘉当司机，现在她们正在回家的路上，后座里歪歪斜斜地躺着赫儿嘉的三位室友，全喝得酩酊大醉. 这时，如果车子的加速度超过了 750 英里/小时^2，后座地毯就会变成啤酒回收厂了. 假设赫儿嘉的车子所走的路径是下列这条参数曲线：

$$\boldsymbol{r}(t)=(\sin 30t,\cos 30t,10t),$$

试问：赫儿嘉第二天一早用车前，是否急需汽车除臭剂的帮助？

解：赫儿嘉的速度为 $\boldsymbol{r}'(t)=(30\cos 30t,-30\sin 30t,10)$，加速度为 $\boldsymbol{r}''(t)=(-900\sin 30t,-900\cos 30t,0)$，所以加速度的大小为：

$$|\boldsymbol{r}''(t)|=\sqrt{(-900\sin 30t)^2+(-900\cos 30t)^2+0^2}=$$

$$900\sqrt{\sin^2 30t+\cos^2 30t}=900.$$

看样子，她最好赶快拿出橡皮手套跟海绵了.（事实上，她的室友会吐，是预料中的事，因为她所走曲线是个螺旋线——搞了半天，原来赫儿嘉在停车场里迷路了.）

例题 2 假设你站在一栋大楼屋顶上的一角，离地高度为 50 英尺，从那儿你丢出一块乳酪，而且已知乳酪飞出的初速向量为 $\boldsymbol{v}_0=(8,6,4)$，单位是英尺/秒.

这时你的室友正好站在地面上，若以你所站的屋角正下方为原点，他的位置是在 x 方向的 14 英尺 4 英寸处，y 方向的 10 英尺 9 英寸处．试判断你丢出的乳酪会不会砸到他（图 6.5）．

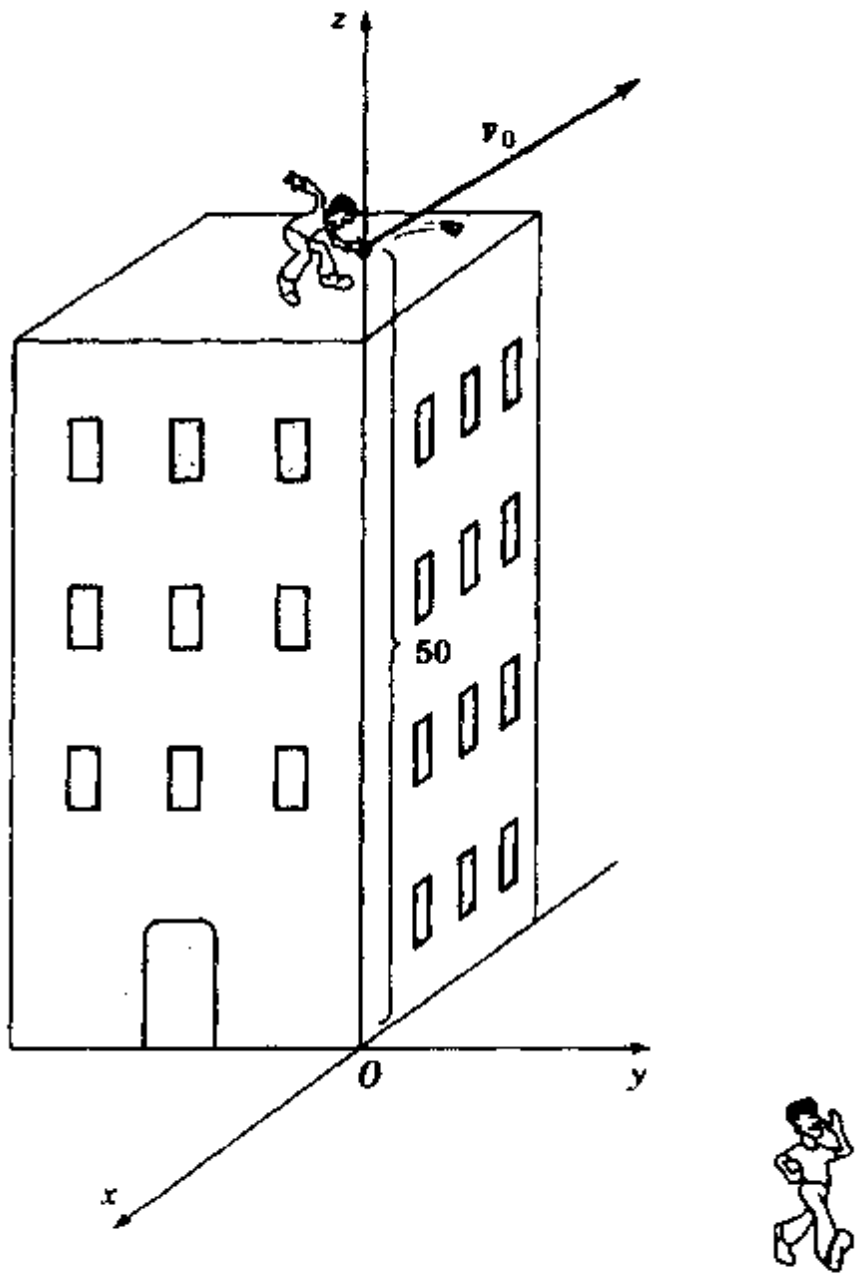


图 6.5　丢出的乳酪跟你的室友会不会碰到一起

解：这就是所谓的抛体问题．在这个范例里，你用的抛体是一块乳酪，吸引抛体的靶子是你的室友；如果你把乳酪换成了一袋葡萄干，或是半融化了的樱桃巧克力口味冰激凌，这还是叫做抛体问题．

在这种情形下，加速度只有一个来源，那就是重力，在地球曲面附近的重

力加速度，差不多总是等于32英尺/秒^2，而方向是垂直向下，所以我们可以把这个加速度向量写成 $\boldsymbol{a}=(0,0,-32)$.

求这个向量的积分，我们可以得到速度向量

$$\boldsymbol{v}(t)=(0,\ 0,\ -32t)+\boldsymbol{C}.$$

注意，我们在这儿任意选取了一个向量 $\boldsymbol{C}$. 但由于速度向量 $\boldsymbol{v}(t)$在 $t=0$ 时，应该等于题目所给的初速度，所以

$$(8,6,4)=\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}(0)=(0,0,0)+\boldsymbol{C}.$$

所以$\boldsymbol{C}=(8,6,4)$，把它代入$\boldsymbol{v}(t)$，就得到

$$\boldsymbol{v}(t)=(8,6,4-32t).$$

现在，把这个速度向量再做一次积分，我们就可以得到位置向量了：

$$\boldsymbol{r}(t)=(8t,6t,4t-16t^2)+\boldsymbol{D}.$$

这儿又出现了一个常数向量 $\boldsymbol{D}$，但是我们知道，这块乳酪最初（即当 $t=0$ 时）的位置是在 $\boldsymbol{r}_0=(0,0,50)$，亦即

$$(0,0,50)=\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(0)=(0,0,0)+\boldsymbol{D}.$$

所以$\boldsymbol{D}=(0,0,50)$，把它代入 $\boldsymbol{r}(t)$，我们就得到了：

$$\boldsymbol{r}(t)=(8t,\ 6t,\ 50+4t-16t^2).$$

于是，我们有了这块乳酪在被你丢出手之后，到它飞到离地6英尺（假设你的室友身高刚好6英尺）的这段期间的位置向量. 依据题意，我们想看看，当乳酪的 z 坐标等于6时，它的 x 坐标跟 y 坐标各为多少，这样我们就能知道它会不会砸到你的室友. 所以，我们令位置函数的 z 坐标等于6，然后解参数 t：

$$50+4t-16t^2=6,$$

$$4t^2-t-11=0.$$

用二次公式，我们求出 $t\approx 1.788$ 秒.

把此 t 值代入$\boldsymbol{r}(t)$，我们得到 $\boldsymbol{r}(1.788)=(14.30,10.73,6)$. 而由你室友目前的位置来看，我们敢保证这块乳酪会直接命中，就算没砸在他头上，也会打到他的上半身.

常犯的错误：在最后这个范例中，我们看到，$\boldsymbol{C}$ 跟 $\boldsymbol{D}$ 这两个常数量刚好等于 $\boldsymbol{v}_0$ 跟 $\boldsymbol{r}_0$. 这是因为在 $t=0$ 时，$\boldsymbol{v}(t)$跟 $\boldsymbol{r}(t)$中除了 $\boldsymbol{C}$ 跟 $\boldsymbol{D}$ 之外，其他部分恰好等于0. 千万不要因为此例的印象而误以为它们一定会如此. 下面这个例

3，就是用来提醒你这一点的.

例题 3　已知速度向量为 $\boldsymbol{v}(t)=(\sin t,\cos t,t)$，而初始位置向量为 $\boldsymbol{r}_0=(1,1,1)$，试求它的一般位置向量 $\boldsymbol{r}$.

解：求 $\boldsymbol{v}$ 的积分，我们得到

$$\boldsymbol{r}(t)=\left(-\cos t,\sin t,\frac{t^2}{2}\right)+\boldsymbol{C}.$$

由于在 $t=0$ 时，初始位置向量必须与一般位置向量相等，所以

$$(1,1,1)=\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(0)=(-1,0,0)+\boldsymbol{C},$$

得到 $\boldsymbol{C}=(2,1,1)$. 注意！它跟 $\boldsymbol{r}_0$ 并不相等.

其次，把 $\boldsymbol{C}$ 代入 $\boldsymbol{r}(t)$，我们得到

$$\boldsymbol{r}(t)=\left(2-\cos t,\ 1+\sin t,\ 1+\frac{t^2}{2}\right),$$

这就是我们所要的一般位置向量 $\boldsymbol{r}$.

嘿！这下子，你就不会有 $\boldsymbol{C}$ 一定等于 $\boldsymbol{r}_0$ 的错误印象啦！



第7章

曲面与作图

现在让我们做一个快速复习，看看平面上的几类简单曲线.

7.1 平面上的曲线：回顾一下

1. 首先是抛物线，它的一般式为 $y = x^2$ [图 7.1(a)]

我们可以把它的位置任意调高调低，就像同一图中所示的 $y = x^2 + 1$ 及 $y = x^2 - 2$，也可以把它变宽变窄，如图 7.1(b) 所示的 $y = x^2/2$ 跟 $y = 3x^2$.

我们还可以写成 $y = -x^2$，把它颠倒过来 [图 7.1(c)]，或者让它转个 90°，开口朝 x 轴的方向或反方向，如 $x = y^2$ 或 $x = -y^2$ [图 7.1(d)].

2. 然后是椭圆，它的标准式是 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. 画出来的图形是一个压扁了圆，跟 x 轴相交于 a 跟 $-a$ 两点，而跟 y 轴相交于 b 跟 $-b$，如图 7.2 所示.（我们可以看出，当 $a = b$ 时，它就变成了一个正圆.）

3. 然后是双曲线，它的方程式长相为 $y^2 - x^2 = 4$. 它跟椭圆或圆的不同处，在于 x^2 跟 y^2 两项前的正负号相反. 以刚举的例子来说，我们注意到 $x = 0$ 时，$y = 2$ 或 -2，因此，所得到的双曲线跟 y 轴相交两次，如图 7.3(a) 所示.

同样的，双曲线 $x^2 - y^2 = 9$ 会跟 x 轴相交于 3 跟 -3，如图 7.3(b) 所示. x^2 跟 y^2 两项前面的常数，会决定该双曲线弯曲的程度，但对它的其他性质没有什么影响.

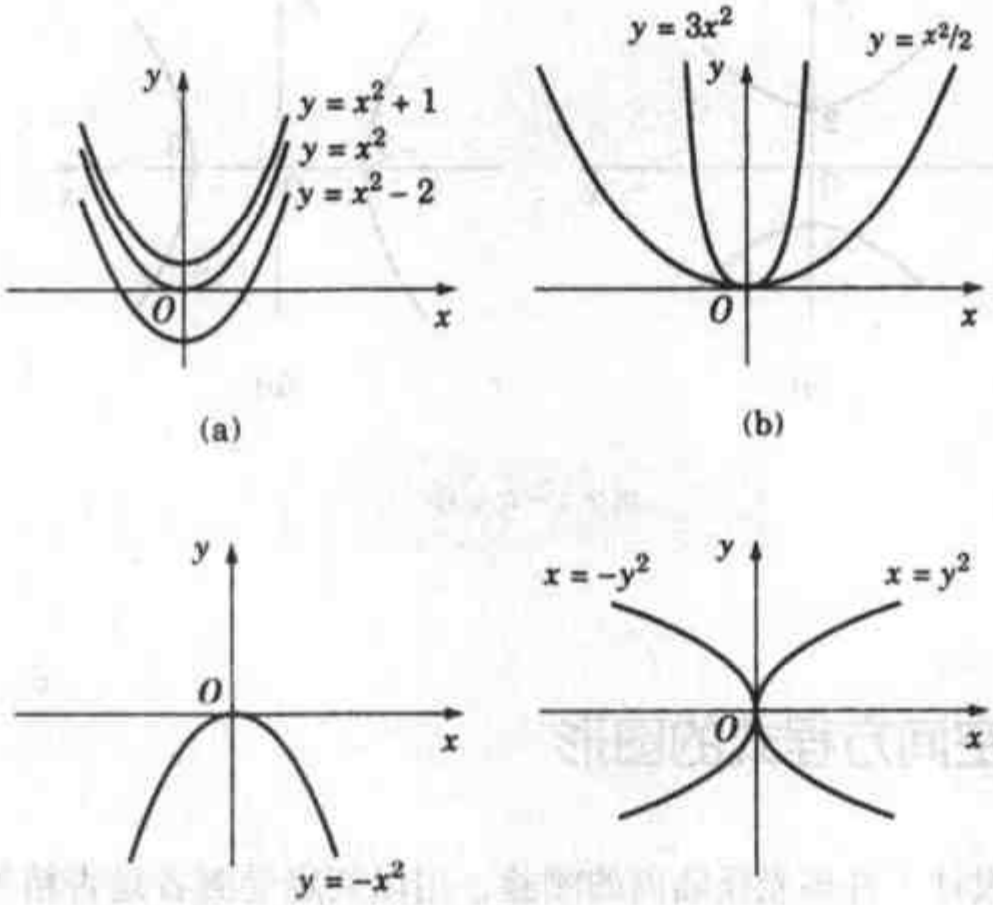


图 7.1 各式各样的抛物线

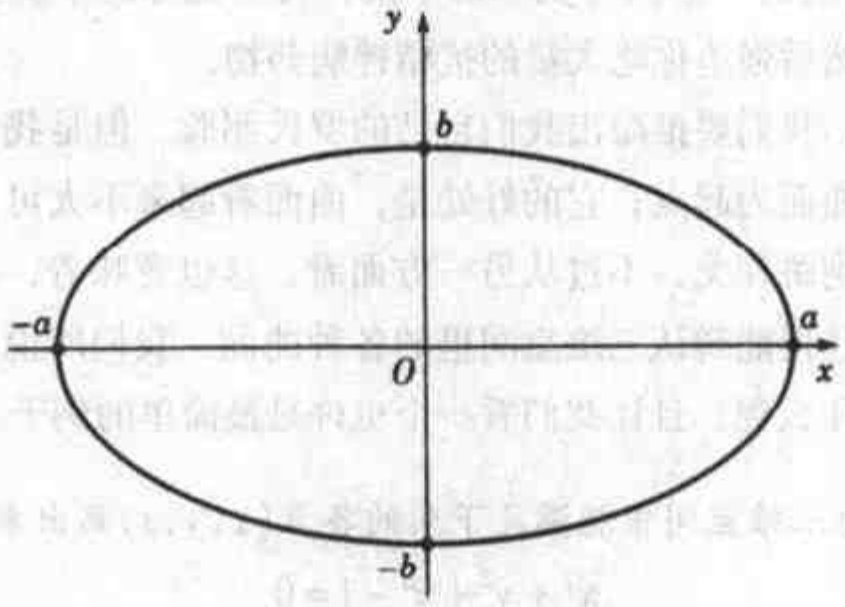


图 7.2 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 代表的椭圆

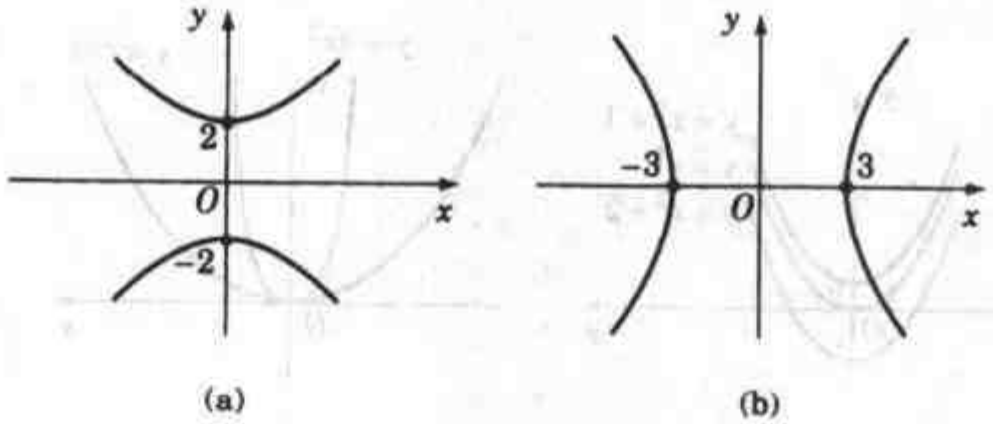


图 7.3 双曲线

7.2 三维空间方程式的图形

心理学家设计了许多光怪陆离的测验，用以判定受测者是否精神异常，其中最著名的一个叫做罗夏墨渍测验（或罗氏测验）. 在这个测验里，他们先给你看一团墨渍，然后问你看起来像啥. 如果你回答："它看起来很像是在明媚的春天里，在花叶间飞舞的可爱蝴蝶."那么他们就会认为你的精神没问题，不会为难你. 但是如果你的回答是："它看起来像是我的老爸，正在跟我们邻居家的狮子狗跳探戈!"他们可就二话不说，马上把你的手脚捆绑在一张有轮子的担架床上，然后强迫你吃大量的抗精神病药物.

在此章节中，我们要推敲出我们自己的罗氏测验. 但是我们的测验是以一些三维空间中的曲面为起点；它的好处是，曲面看起来不太可能像是你的老爸在跟邻居的狮子狗跳探戈. 不过从另一方面看，这也意味着，我们必须把画图的本事练好，并且得能辨认三维空间里的各种曲面. 我们所说的三维空间曲面作图，究竟在说什么呢？且让我们看一个也许是最简单的例子.

例题 1 试把三维空间中能满足下列的各点(x,y,z)画出来.

$$x^2+y^2+z^2-1=0.$$

解：把 1 移项，然后取平方根，就得到了$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$. 这就是指所有离原点距离为 1 的点，也就是以原点为球心，半径为 1 的球面，如图 7.4 所示.

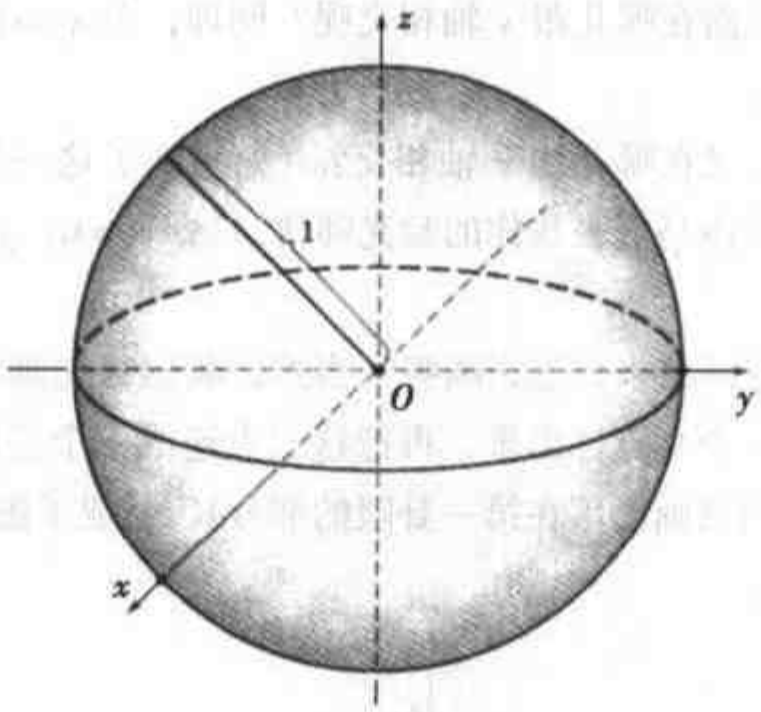


图 7.4 代表 $x^2+y^2+z^2-1=0$ 的球面

这个球对我们的罗氏测验没啥用处，原因是看过的每一个人都认为，它代表一个由外星人统治的星球，专门绑架地球人去做各种侵犯性的实验．不过，球面的确是曲面的一个很好的例子．我们若把前面这个例题说得更广义些，就是：在三维空间中，由满足方程式 $F(x,y,z)=0$ 的各种(x,y,z)所形成的集合，就是该方程式的图形；而这样的图形就叫做曲面．

例题 2 画出 $2x+3y+4z=12$ 的图形．

解：首先我们注意到，题目中这个方程式是线性的；意思是它既没有平方根，没有像 x^2 之类的乘方，也没有像 xy 之类的乘积，更要感谢老天的是，它也没有麻烦的正弦、余弦和对数符号．它只是简单的 $Ax+By+Cz=D$，其中的 A、B、C 跟 D 都是常数．凡是合乎这种形式的方程式，就叫做线性方程式，它的图形永远是一个平面，至于究竟是哪个平面，还需要一些计算之后才能确定．有个办法倒是非常简单，我们只需找出该平面分别与 x、y、z 三轴的交点就成了．

第 1 步：该平面在哪儿跟 x 轴相交？我们可以这么看，凡是在 x 轴上的点，它的 $y=0$ 且 $z=0$．所以，在该平面的方程式中，令 $y=0$，$z=0$，我们就

能找出它与 x 轴的交点；我们得到 $2x=12$，即 $x=6$.

第 2 步：这个平面在哪儿跟 y 轴相交呢？同理，令 $x=0$，$z=0$，我们得到 $3y=12$，所以 $y=4$.

第 3 步：那么它又在哪儿跟 z 轴相交？（如果到了这一步，你还没看出其中的模式，那么你应该马上去找你的验光师傅.）令 $x=0$，$y=0$，我们得到 $4z=12$，所以 $z=3$.

第 4 步：把图形画出来. 怎么画呢？当然，我们得先画出三条坐标轴，然后把刚才所求得的三个交点标出来，再把这三点连成一个三角形，中间涂得稍微暗一些（通常我们只画出落在第一卦限的部分），就成了图 7.5.

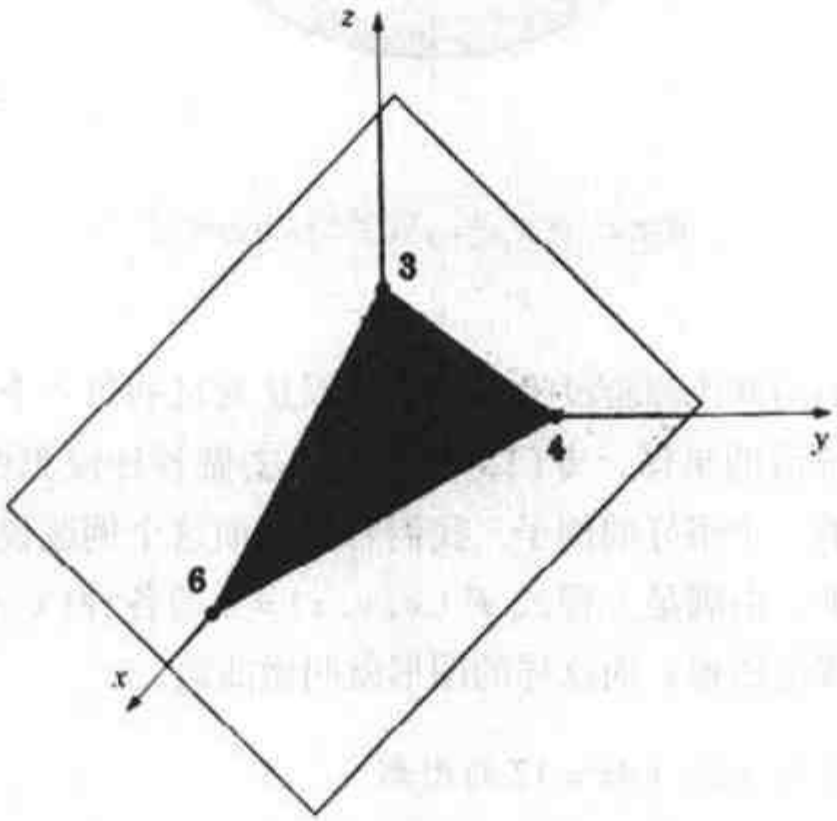


图 7.5　平面：$2x+3y+4z=12$

如果该平面跟三条坐标轴各有不同的交点，这个画平面的方法步骤才管用. 如果是其他情形，比如这块平面刚好通过原点，此法就无用武之地啦！那么又该怎么办呢？其实这也不难，我们可以先画出该平面的法线向量，然后画出与法线垂直的平面.

再强调一次，任何一次线性方程式的图形都是平面. 但是如果交给我们的不是线性方程式，那怎么办？别急，请继续看下去.

当双数跑去休假

假设我们要把空间中的方程式画出来，然而方程式中有一个变数缺席，比方说 $y^2+z^2=1$，其中的 x 若不是休假去了，就是跟人喝咖啡，或者是为了要待在家里玩网上游戏，而装病请病假．它没露面就是了，你看到的只有 y 跟 z．

现在让我们先瞧瞧若是 $x=0$，会出现什么图形？$x=0$ 意味着我们先自我限制在 yz 平面上，也就是又回到从前单变数微积分的时代，而这个方程式，一看就知道是一个以原点为圆心、半径为 1 的圆；这也告诉我们：这个圆是该方程式所代表的曲面跟 yz 平面的交线．

但是你要记住，x 是在休假；休假的时候，想做什么都随自己的便，任何禁令限制都可以抛在脑后．因此，x 不受任何限制，爱去哪就去哪；对这个方程式图形上的点(x,y,z)，x 坐标可以是任何值，但 y 跟 z 坐标必须随时满足 $y^2+z^2=1$．所以如果点$(0,y_0,z_0)$在图形上，x 坐标为任何值的任意点 (x,y_0,z_0)，也应该在图形上，而这些点会形成一条与 x 轴平行的直线，此直线也在图形上．以此类推，通过 yz 平面上以原点为圆心、半径为 1 的圆，且与 x 轴平

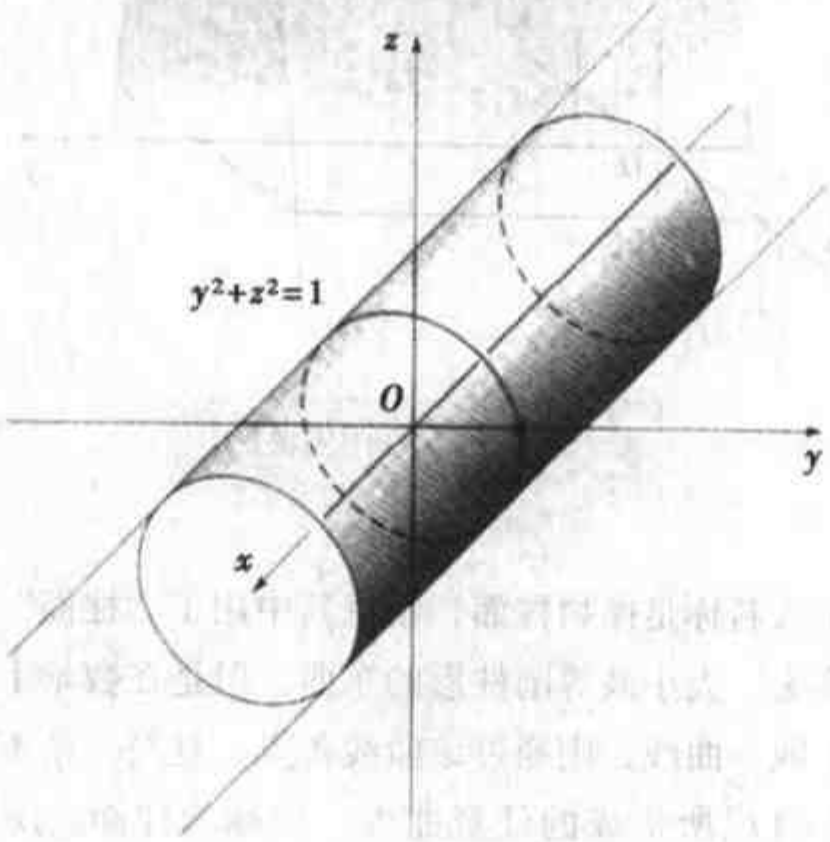


图 7.6 无限延伸的锡罐

行的所有直线，也都在图形上．因此，最后的圆形看起来就像一个圆筒或锡罐，以 x 轴为中心轴线，且向两端无限延伸，如图 7.6 所示．

例题 3 试绘出 $z = 1 - x^2$ 的图形．

解：这回轮到 y，它去巴厘岛休假了．所以我们得到了一条在 xz 平面上、而且开口朝下的抛物线．由于 y 可以等于任何值，所以得到的曲面就是由所有与 y 轴平行、通过 xz 平面上的抛物线上各点的直线集合而成，如图 7.7 所示．啊！这图形就可以用来做咱们的罗氏测验了．它看起来像很多不同的东西，譬如说像颠倒过来的屋檐雨沟，或是像一条隧道．不管你的答案是啥，你的心理医生准会给你一大堆分析解释．不过对我们来说，它倒满像军队营区常见到的铁皮圆顶屋．

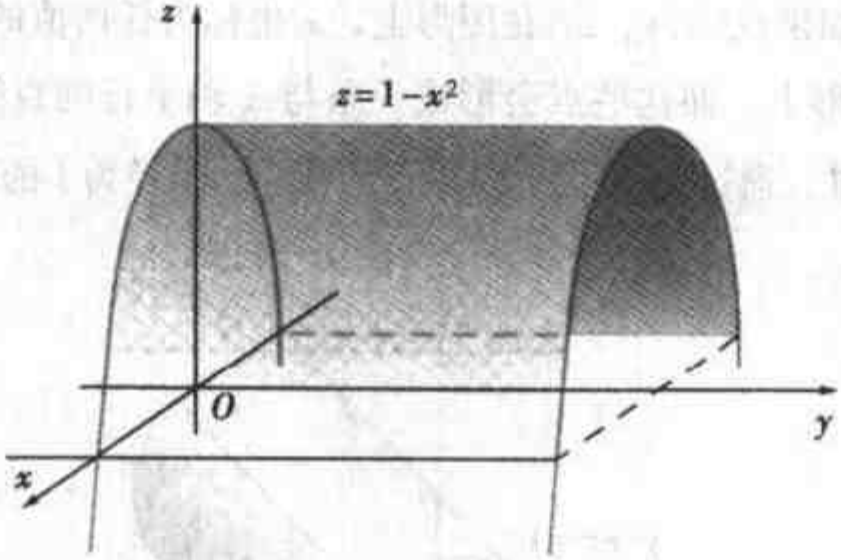


图 7.7 无限延伸的铁皮圆顶屋

这个曲面的正式名称是抛物柱面，注意其中用了“柱面”两个字．平常说到柱面，多半指罐头、大小鼓等圆柱形的东西．但是在数学上，柱面的意义极为广泛：在平面上取一曲线，则通过该曲线各点、且与一条不在该平面上的给定直线平行的所有直线所构成的任意曲面，就称为柱面．所以，我们有圆柱面、抛物柱面、椭圆柱面及双曲柱面，真是琳琅满目，不是吗？

7.3 旋转曲面

这儿有个简单的方法，可以用来制造一些有趣的曲面．我们可以在一个坐标平面上取一条曲线，然后让它绕着其中一条坐标轴旋转，结果可得到一个曲面，叫做旋转曲面．比如图 7.8 所示，就是假设我们在 yz 平面上有一条曲线 $z=f(y)$，并且让它绕着 z 轴旋转所得到的旋转曲面．

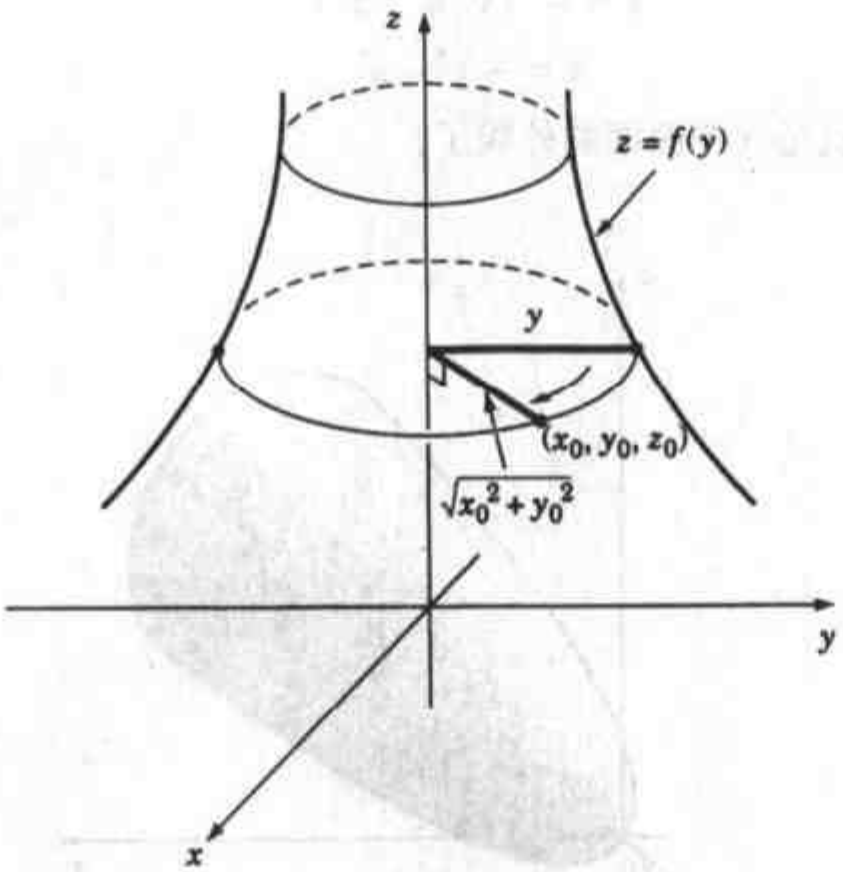


图 7.8 曲线 $z=f(y)$ 绕着 z 轴旋转

该曲线上的任何一点(y,z)，跟 z 轴的距离为 y，在旋转之后，原先的单独一点就形成了一整个圆的轨迹，其上各点跟 z 轴的距离均为 y．但是空间中的任何一点 (x_0, y_0, z_0)，跟 z 轴的距离为$\sqrt{x_0^2+y_0^2}$．因此，整个圆上的所有点都必须满足原曲线的方程式 $z=f(y)$，但是方程式里的 y 要以$\sqrt{x^2+y^2}$取代，所以

$$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

就是新形成的旋转曲面的方程式.

例题 当我们让曲线 $x = -z^2$ 绕着 x 轴旋转，会形成一个旋转曲面，试求该曲面的方程式.

解：经过刚才的解说，这题就成了为长者折枝的举手之劳. 我们只需依样画葫芦就可以了. 由于曲线上各点与 x 轴的距离为 z，所以我们以 $\sqrt{y^2+z^2}$ 取代原方程式中的 z，得到

$$x = -\ (\sqrt{y^2+z^2})^2,$$

$$x = -y^2 - z^2.$$

图 7.9 显示的就是这个曲面的外貌了.

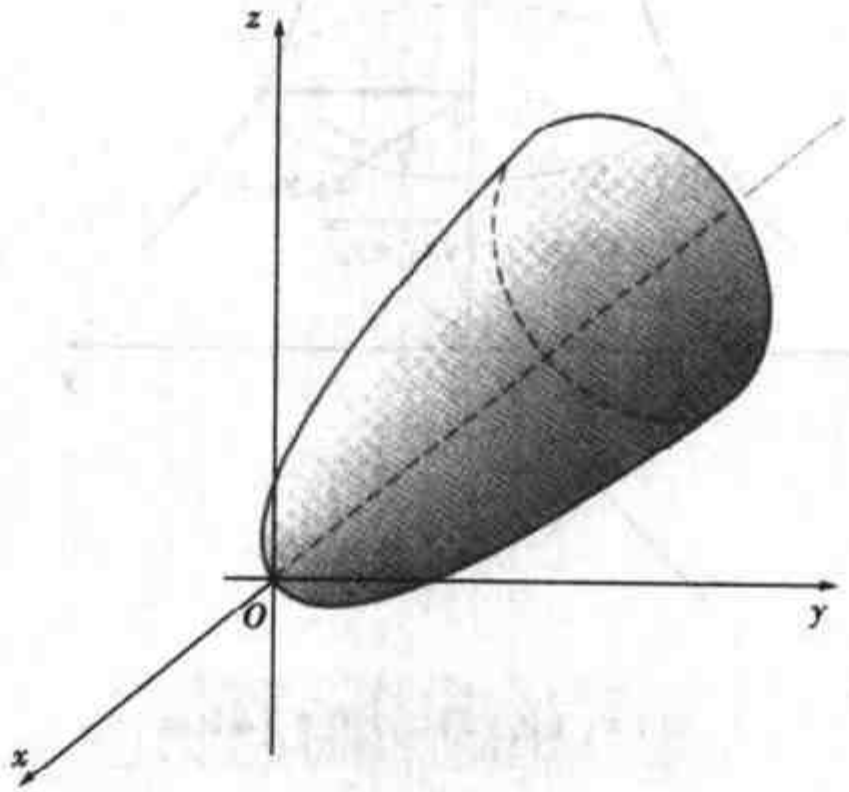


图 7.9 把曲线 $x = -z^2$ 绕着 x 轴旋转的结果

7.4 二次曲面（带 – oid 字尾的曲面）

对老美来说，带 – oid 字尾的字总是指一些怪异、让人不舒服甚至讨人嫌

的东西*. 譬如说 paranoid（偏执狂）；比较起来，这字还算不错的呢！另一个字是 steroid（类固醇）；除非你想在四健会的公牛比赛中夺取锦标，否则千万远离这个东西. 再来就是 void（空虚）；你年纪轻轻，不会喜欢在这个地方久待. 然后是 hemorrhoid（痔疮）；这个字嘛，恕无可奉告. （译按：其实 - oid 字尾是表示"类似……的"、"像……的"的意思，没有任何贬义在内.）

现在我们要介绍一组新的 - oid 字，这些字并不像上面所举的例子那么令人讨厌，它们就是：ellipsoid（椭球面）、hyperboloid（双曲面）、paraboloid（抛物面），及 hyperbolic paraboloid（双曲抛物面），这些就是所谓的二次曲面. 之所以叫做"二次"，是因为它们的方程式全是二次的，也就是变量最高次数为 2 的方程式. 二次方程式的通式为：

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + et + fz + g = 0.$$

既然形式都长得一个样，那么当我们面对其中一个时，又要如何判定它的图形是什么样子呢？可记得在你小的时候，祖母总是告诫你说："小乖乖，不要贪多，一次只能拿一片土司！"

当时你非常不以为然，心想："准是老奶奶没事找碴所订的馊规矩！"但是你后来渐渐发现，这真是金玉良言. 现在，我们又要再一次用上老奶奶的忠告，因为若要彻底了解这些曲面，我们也得把它们切成片，然后一次拿一片——别急着抹奶油.

例题 1 试画出曲面：$z = x^2 + y^2$.

解：怎么切呢？我们可以顺着三个坐标平面来切. 首先取 $x = 0$ 的那块平面，也就是 yz 平面，切的方法就是令 $x = 0$，结果得到了 $z = y^2$. 一看就知道，这个方程式是一条在 yz 平面上，开口朝正 z 轴方向，如假包换的抛物线.

接着我们取 $y = 0$ 的那块平面，亦即令 $y = 0$，结果得到了 $z = x^2$. 这是在 xz 平面上，开口向正 z 轴方向的标准抛物线.

我们再取 $z = 0$，亦即 xy 平面，令 $z = 0$，结果得到了 $0 = x^2 + y^2$. 由于 x^2 跟 y^2 都不可能是负数，唯一能让它们的和等于 0 的可能情况，是它们两个都等于 0；换言之，唯一的解就是点 $(0,0)$.

以上求出的两条抛物线跟一点，代表曲面 $z = x^2 + y^2$ 跟三块坐标平面的交线或交点，把它们分别画出来之后，就构成了一个骨架. 从这骨架看来，我们要画的曲面似乎是一个碗状的物件，可以用来盛装干果或放射性碘元素. 那么

我们要怎么才能确定，它的确是一个碗呢？让我们再切它一刀，这回用一个比 xy 平面高一些且跟它平行的平面，譬如说 $z=1$. 令 $z=1$，我们得到 $1=x^2+y^2$，表示该平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 相交于一个半径为 1 的圆. 把这个圆画在平面 $z=1$ 上，就足以证实我们的猜想：它的确是一个碗状的曲面[图 7.10(a)].

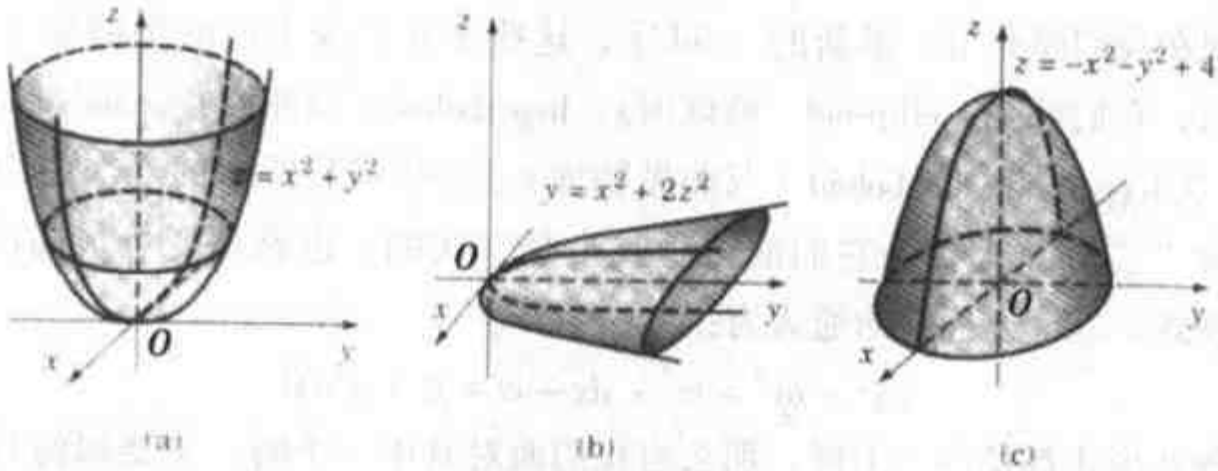


图 7.10 几个不同的抛物面

这种类型的碗，是抛物线的一种推广，故称为抛物面. 不过例题 1 所给的这个抛物面，就好像大卖场里的货色，可说是最阳春的一种. 我们可以把一些常数加在各个项的前面，并且（或者）把其中 x、y、z 的角色互相调换一下，这样就能制造出一些较为复杂而有趣的抛物面（当然价格上也就相对提高了）.

这儿随便举两个例子. 图 7.10（b）中所示的是 $y=x^2+2z^2$ 的图形，而图 7.10（c）则为 $z=-x^2-y^2+4$ 的图形.

罗氏测验问题 1 在看到图 7.10（c）的曲面时，你会联想到下列物品中的哪一样？

1. 山丘，
2. 鱼头，
3. 舌头.

现在再看另一类型的曲面.

例题 2 试画出曲面：$x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$.

解：分别顺着三块坐标平面切开时，我们都得到一个椭圆：

令 $x=0$，得到椭圆 $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$.

令 $y=0$，得到椭圆 $x^2+\frac{z^2}{16}=1$.

令 $z=0$，得到椭圆 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$.

在相对应的坐标平面上，分别画出这三条椭圆曲线，把它们当做骨架，我们就很容易看出，这曲面是个压扁了的球面，叫做椭球面（如图 7.11 所示）.

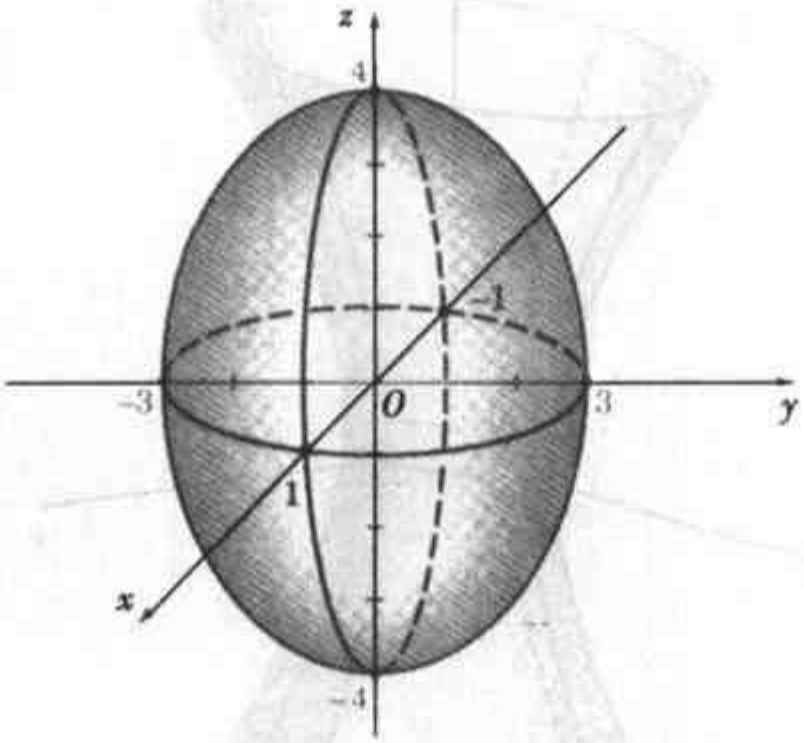


图 7.11 椭球面：$x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$

罗氏测验问题 2 在看到图 7.11 时，你会联想到以下哪一样东西？

1. 恐龙蛋，
2. 普拿疼药丸，
3. 睾丸.

让我们看看另一类型的曲面.

例题 3 试画出曲面：$z^2=x^2+4y^2-4$.

解：用平面 $x=0$ 来切，我们得到双曲线 $z^2=4y^2-4$. 当 $z=0$ 时，该双曲线与 y 轴相交于 ± 1；而当 $y=0$ 时，z 无解（$z^2=-4$），表示该双曲线不跟 z

轴相交.

用平面 $y=0$ 切开时，我们得到另一条双曲线：$z^2=x^2-4$；而用平面 $z=0$ 切开时，我们得到的是椭圆：$0=x^2+4y^2-4$. 把这三条曲线画出来之后，可以大略得到如图 7.12 所示的曲面骨架. 为了进一步确定这样的想法，我们可以选择在 $z=1$、2、-1、-2 分别切开，来一一证明.

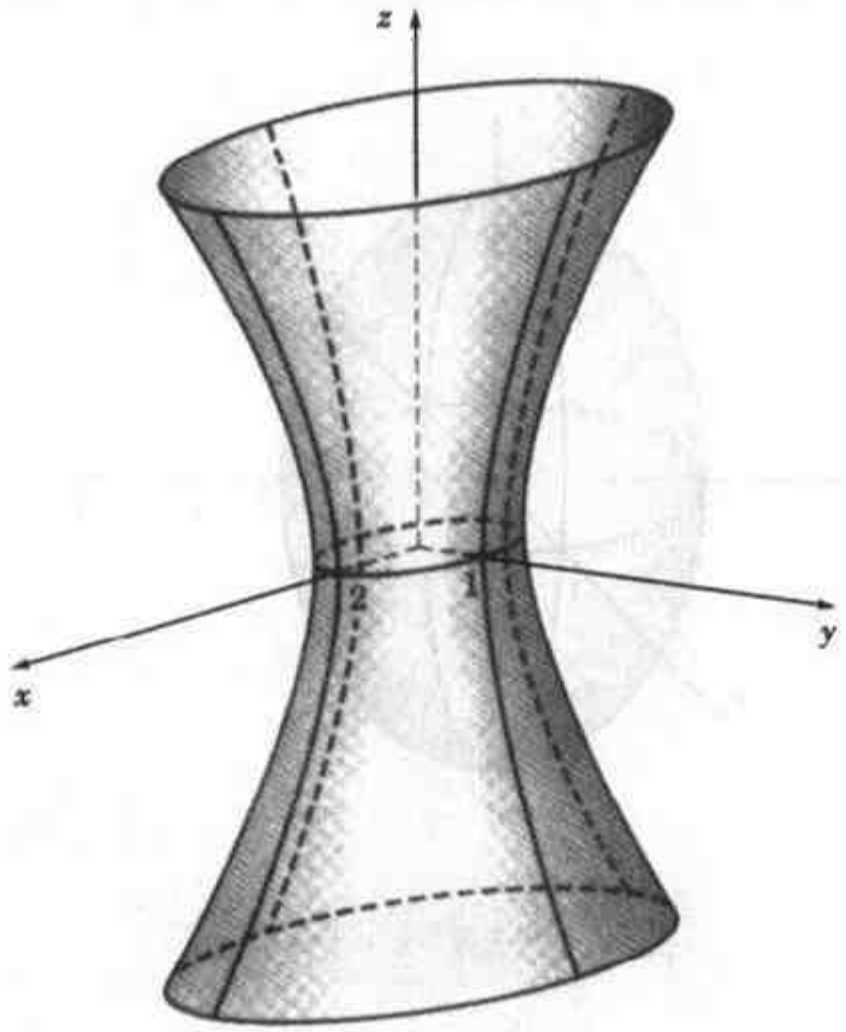


图 7.12　代表 $z^2=x^2+4y^2-4$ 的单叶双曲面

这种曲面叫做单叶双曲面.

罗氏测验问题 3　图 7.12 会使你联想到下列物品中的哪一样？

1. 核能发电厂的冷却塔，
2. 紧身胸衣，
3. 你的舅舅穿着紧身胸衣.

例题 4 试画出 $z^2 = x^2 + y^2$.

解：顺着 $x = 0$ 平面切开时，我们得到 $z^2 = y^2$，即 $z = \pm y$. 这是两条交叉直线；同样的，在顺着 $y = 0$ 平面切开时，我们得到了另外一对交叉直线：$z = \pm x$. 最后，顺着 $z = 0$ 平面切开时，得到的是 $0 = x^2 + y^2$，它唯一的解是点 $(x, y) = (0,0)$. 然而，等画了这个曲面的骨架之后，我们仍然很难看出它究竟是什么.

所以，我们还在平面 $z = 1$ 再切它一刀，结果得到一个半径为 1 的圆；同样的，顺着平面 $z = 2$ 切开时，得到一个半径为$\sqrt{2}$的圆；而在 $z = -1$ 跟 $z = -2$ 处分别切开时，也得到与前面相同的两个圆. 有了这四个圆，该曲面的外貌就变得非常明显了：如图 7.13 所示，它是一对在原点相连的圆锥面.

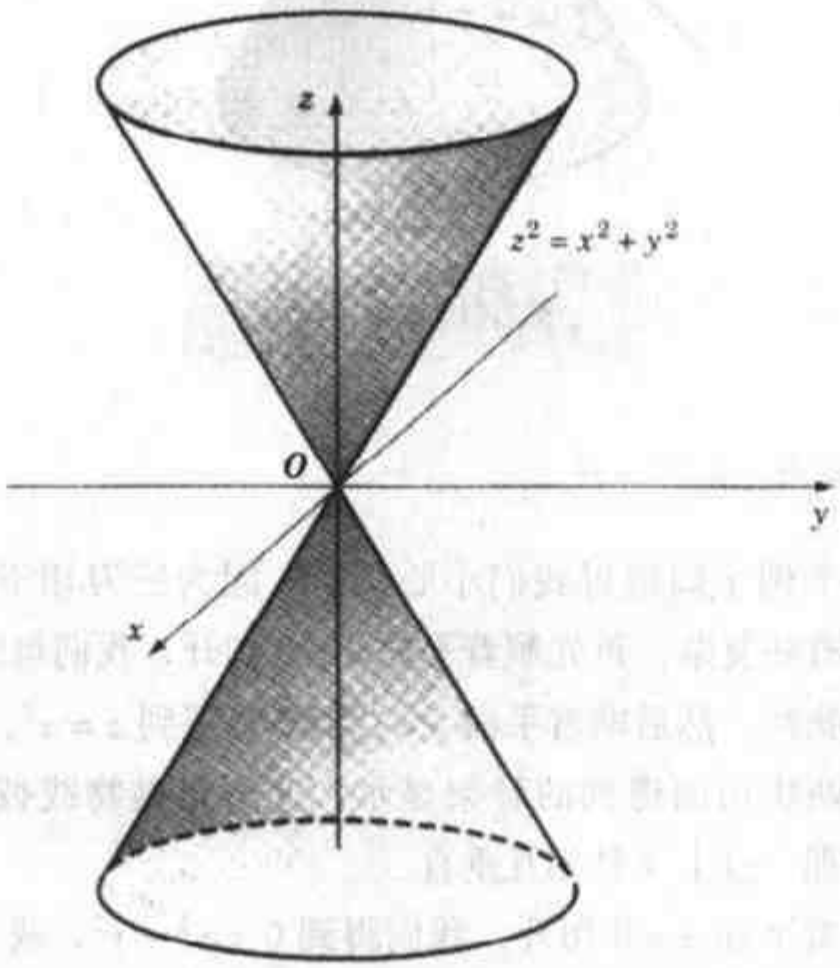


图 7.13 相连的两个圆锥面

例题 5 试画出 $z^2 = x^2 + y^2 + 1$.

解：看过上面各范例之后，现在你应该知道怎么做切片工作了. 本题得到

的曲面如图 7.14 所示，叫做双叶双曲面.

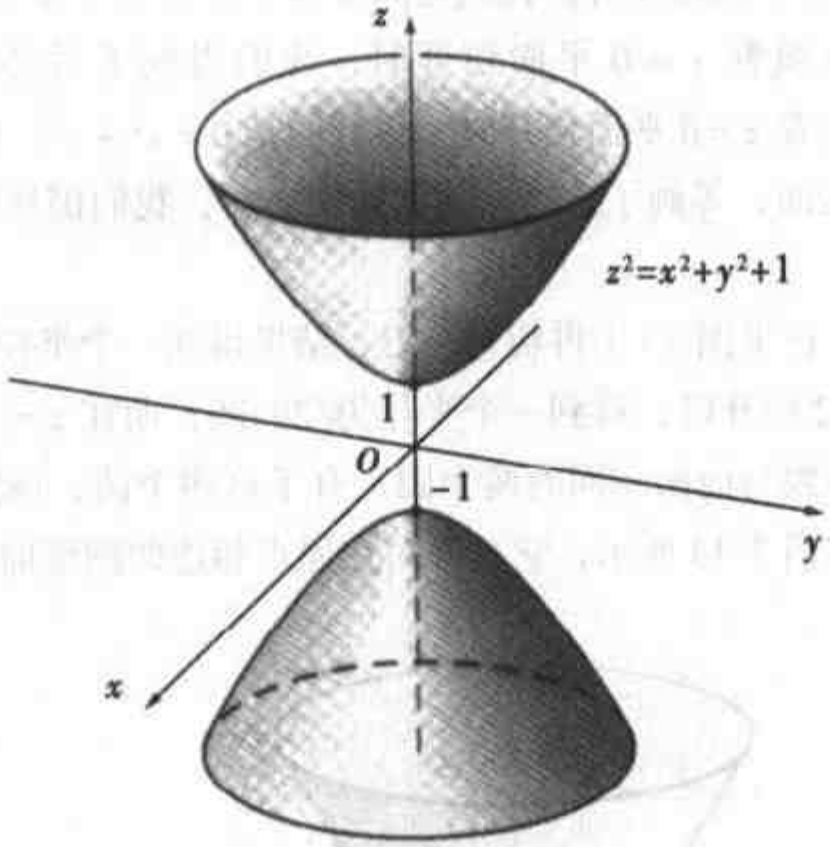


图 7.14 双叶双曲面

例题 6 试画出 $z = x^2 - y^2$.

解：最后这个例子颇值得我们小心从事，因为三刀切下来，结果都不一样，让事情变得有些复杂. 首先顺着平面 $x = 0$ 切开，我们得到 $z = -y^2$，是一条碗口朝下的抛物线. 然后顺着平面 $y = 0$ 切开，得到 $z = x^2$，是一条碗口朝上的抛物线. 从这两块切面得到的骨架显示，这两条抛物线彼此背对，共用一点，而且它们在那一点上又是相互垂直.

接下来，顺着平面 $z = 0$ 切开，我们得到 $0 = x^2 - y^2$，或 $y = \pm x$，代表两条直交的直线. 这两条直线跟上面的两条抛物线，构成如图 7.15(a) 所示的骨架，而图 7.15(b) 则是曲面本身的模样. 它的形状像一个马鞍或品客土豆片，数学家则喜欢把它叫做双曲抛物面，听起来比拴在马背上的旧皮货有学问一些.

罗氏测验问题 4 图 7.15(b) 会让你联想到下列物品中的哪一样?

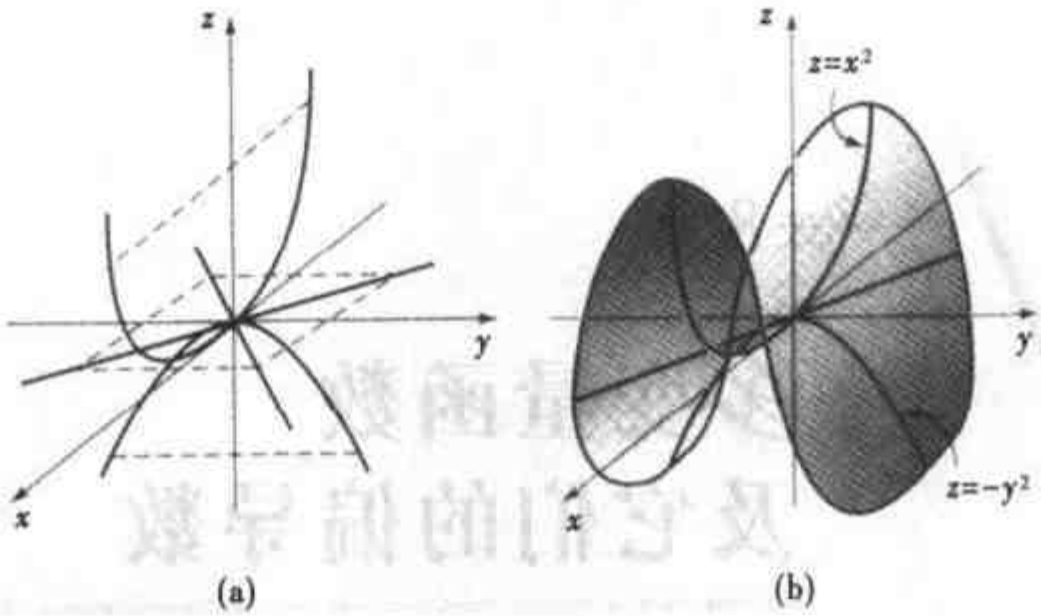


图 7.15 $z=x^2-y^2$ 代表的双曲抛物面

1．品客土豆片，

2．马鞍，

3．牛仔裤的裤裆．

好啦！让我们来瞧瞧你的罗氏测验结果．请把你在以上四个问题的答案号码加起来，然后参照下表，就可以得知你的精神状态：

0～3：你在阅读文字说明或遵照指示的能力方面显然有问题．

4～6：你的精神状态保证完全正常．

7～9：你有没有考虑过找心理医生谈谈？

10～11：你可能需要在一个四壁都铺有软垫的房间里待上几天．

12：你是个活动的定时炸弹．赶紧打 110 通知离你最近的治安机构，叫他们马上派员把你带走．

13：你跑错教室了，我们现在上的是微积分．修微积分之前，必须先学会加法．



第8章

多变量函数及它们的偏导数

8.1 多变量函数

从开始学习微积分到现在，我们所遇到的函数大多像$f(x)$一样，其中只包含一个变量，它们很单纯，运算起来也很简单，只要我们把一个数代进去，就可以等着它们的答案出来．我们对它们非常熟悉，其中一些甚至蛮讨人喜爱，譬如$f(x)=\sin x$，谁又会讨厌它呢？甚至向量函数$\boldsymbol{r}(t)=(2+t,3-5t,7t)$，虽然是个三维空间中的向量，但它的值也只是由一个变数t来决定．

人往高处走，人类是不会满足于简单、朴实无华的生活——你我都希望有朝一日能住进景观大厦的顶楼，开着红色敞篷车。同样的，我们也希望与比较有挑战性的多变量函数周旋，让自己看起来更有水平．

那么，有两个变量的函数是怎么回事呢？这种函数就像一个有两张嘴的函数机器，我们喂它x和y两个数，它就会吐出另外一个数：$f(x,y)$．为什么它只吐出一个数，而不是两个甚至三个呢？其实那些情况都有可能，不过我们首先要掌握一些基本概念，然后再去谈那些细枝末节．

例题1 $f(x,y)=2x+y$.

如果把一个数对(2,3)丢进去，会蹦出什么？这不是脑筋急转弯，答案很

明显：蹦出来的是 7. 那么两个数丢进去的次序与答案有关系吗？绝对有关！如果你把它们换成(3,2)再丢进去，仍旧得到 7，那么准是你的注意力涣散，该去喝杯咖啡提提神，然后重做一遍，因为你应该得到 8.

我们可以把$f(x,y)$这个数，想成是在告诉我们，xOy 平面上一点(x,y)在垂直方向的高度 z. 换言之，如果我们要画出两个变量的函数，我们可以设 $z=f(x,y)$，然后在三维空间中画出所有的点(x,y,z)，而全部的点(x,y,z)的集合，就是三维空间中的一个曲面. 以上述例题 1 中的函数为例，我们可以标出所有能满足 $z=2x+y$ 的点(x,y,z)，就会画出如图 8.1 的曲面（平面）. 这里的 z 叫做应变量，而 x 和 y 则为自变量.

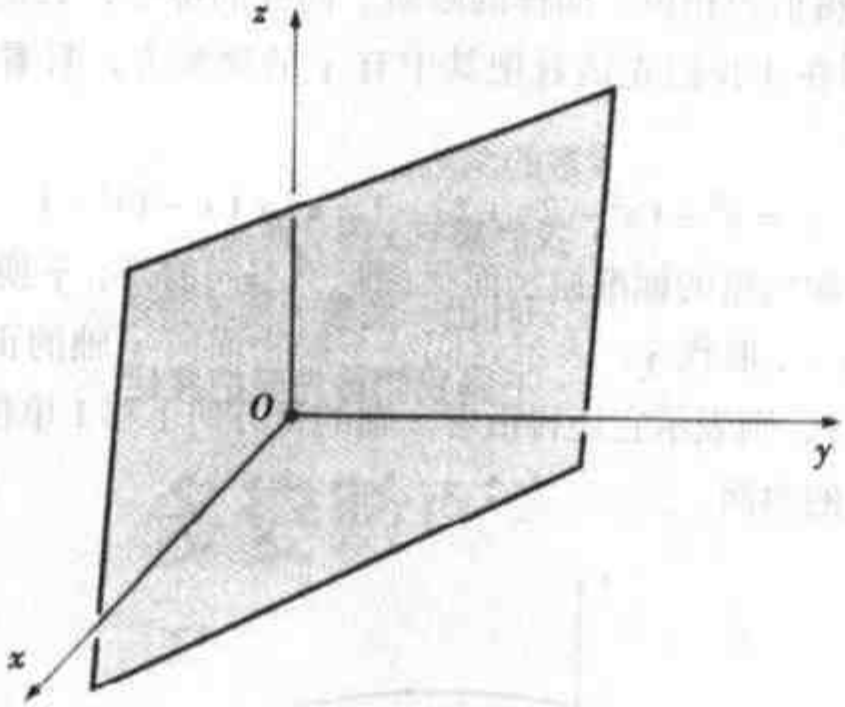


图 8.1　线性函数 $f(x,y)=2x+y$ 的图形

由于图 8.1 的这个曲面看似直线，所以它的函数$f(x,y)=2x+y$ 就叫做线性函数. 好吧，我们承认它不是直线，而是个平面. 线性函数里可以有任意多个变量，譬如下面这个线性函数就有四个变量：

$$f(x,y,z,w)=2x-y+57z-\sqrt{2}w+3\ .$$

若要像例题 1 那样，把它成功的画出来，我们恐怕需要一个五维空间图才办得到，那不是我们现在需要解决的问题. 要判定 f 是否为线性函数，其实只

需要看它的式子内容就可以了．函数里不能有任何搞怪的东西，包括乘方、三角函数、根号、流浪猫等；也就是说，其中每一项都只能是（常数）×（变数）的形式．上面的函数式里虽然有个$\sqrt{2}$，但没关系，因为$\sqrt{2}$是一个常数，不过，根号里绝对不能有变数，诸如$\sqrt{w}$．线性函数是一切函数中最单纯的一种，有如冰激凌世界里的香草口味．

对于那些认为香草冰激凌不解馋，喜欢浓浓的巧克力糖浆外加一粒樱桃的人，我们准备了以下的例题 2．

例题 2 $f(x,y)=x^2+y^2-2y$．

无论你怎么看，它都不会是线性函数．但是它与上一章里谈到的抛物面很接近，你应该觉得似曾相识．同样的眼睛、同样的鼻子，只是额头上多长出了一个 $-2y$ 项．现在让我们先试着把其中有 y 的项配方，看看是否对你的记忆有所帮助．

$$z=x^2+(y^2-2y+1)-1=x^2+(y-1)^2-1\ .$$

这不就与大卖场里的标准抛物面很像吗？不同的是，y 换成了 $y-1$，尾巴上还多了 -1．$y-1$ 取代 y，表示这同一个抛物面向 y 轴的正方向移动了 1 单位，而多出的 -1，则表示它还得沿着 z 轴的负方向下移 1 单位．移动之后的结果就成了图 8.2 的曲面．

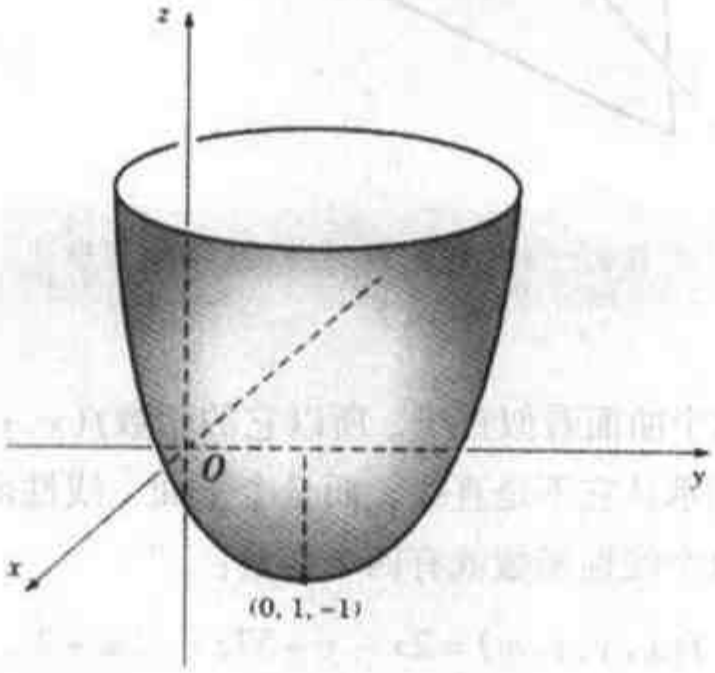


图 8.2 $f(x,y)=x^2+y^2-2y$ 的图形

对于口味更重、喜欢鲢鱼加辣根口味冰激凌的人来说，我们备有例题3.

例题3　$f(x,y)=\sin x\cos y$.

让我们把所有能够满足 $z=\sin x\cos y$ 的点(x,y,z)全找出来，说得倒是挺容易似的，究竟怎么个找法呢？不要慌，记住老祖母的话，一遍一遍来．首先我们顺着 $z=0$（即 xOy 平面)切开，我们发现在 xOy 平面上,所有能够叫 $\sin x\cos y=0$ 成立的点，合起来就是图8.3所画的格线．因为若要 $\sin x\cos y=0$，则 $\sin x=0$ 或 $\cos y=0$，前者需要 x 等于 π 的整数倍，后者则需要 y 等于 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍.

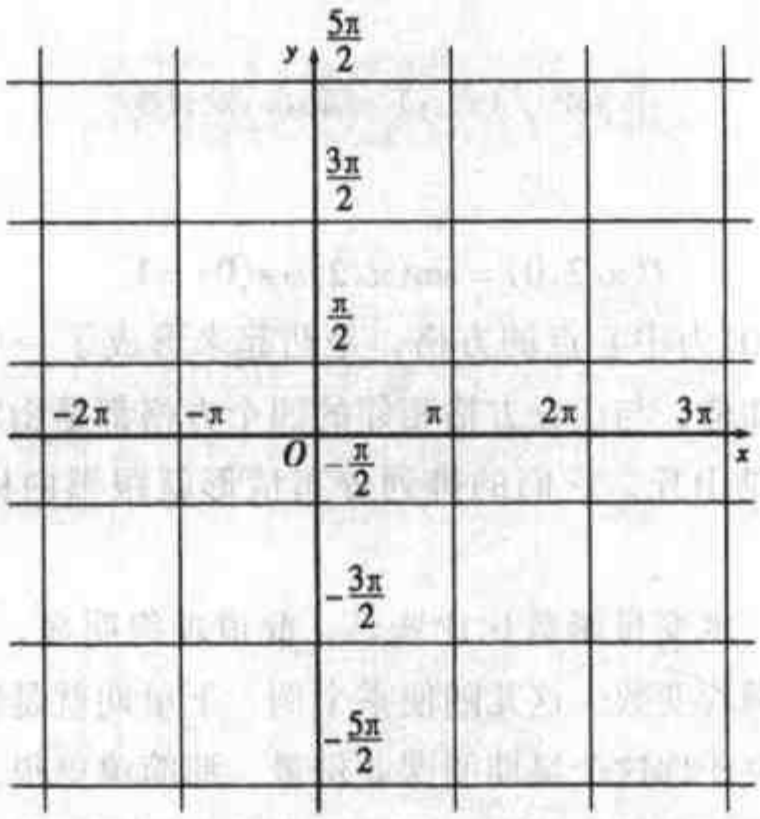


图8.3　当 $\sin x\cos y=0$ 时，所有（x，y）点构成了 xOy 平面上的格线

那么在 xOy 平面之外,也就是格线的中间部分，$z=\sin x\cos y$ 又在干些什么呢？由于四周都被格线钉牢在 xOy 平面上，我们可以想像，中间部分也没什么太多戏好唱，它要不是凸起来形成一个山丘，就是凹下去形成一个山谷（图8.4).

怎么判定在某一方格内它是凸起来或是凹下去呢？我们可以把该方格中心点的坐标值，诸如$(\pi/2,0)$，代进函数试试看：

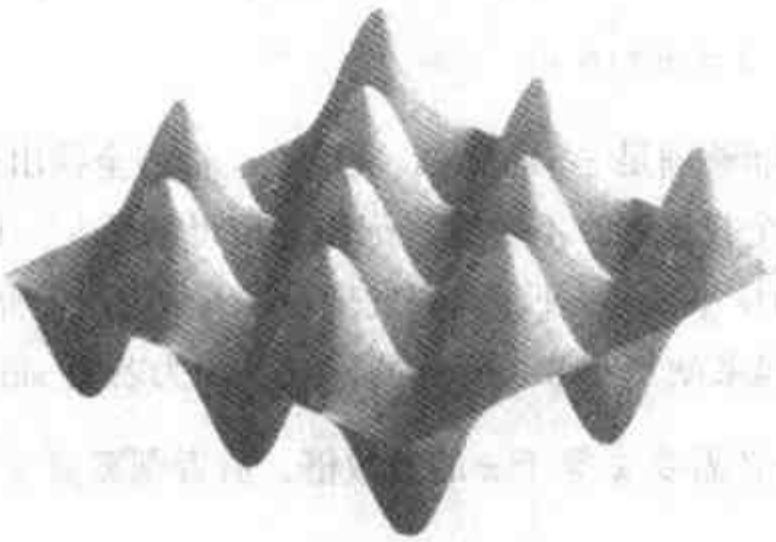


图 8.4 $f(x, y) = \sin x \cos y$ 的图形

$$f(\pi/2,0) = \sin(\pi/2)\cos(0) = 1.$$

这表示以$(\pi/2,0)$为中心点的方格，是凸起来形成了一个山丘．如此试了几个方格之后可以知道，与山丘方格相邻的四个方格都是山谷，而与山谷方格相邻的四个方格都是山丘．它们的排列分布情形就跟黑白格相间的西洋棋盘一样．

在现实生活中，多变量函数比比皆是，此道理很明显，正如人们常说的，世间一切事物都充满着变数．这儿随便举个例．下星期就是感恩节了，而你回不回家过节，只取决于你这个星期的课业份量，那简单得很，如果星期五你发现有太多书要念，有太多报告要交，那就呆在宿舍里不回家过节，牺牲一顿火鸡大餐；如果老师心肠软，这星期就只给了一个带回家做的测验，不用花费许多功夫就可摆平，那就回家吃火鸡．

但是经验告诉我们，影响一件事的因素往往不止一个：除了课业负担之外，你可能还会看那位从小专门喜欢整你的堂哥是否会到家中作客，你现在还欠你大哥多少钱，以及还想是否面对火鸡旁边那盘叫你恶心的配菜……总之，你回不回家的这个决定，是一个多变量函数．

本章的其余部分，我们要讨论具有一个以上变量的函数，包括如何描绘图形，如何取极限，如何求微分（因为此书是微积分），以及讨论我们为何求它们的微分．

嘿！今天你们家的感恩节火鸡肚子里是用什么做填料呀？

8.2　等高线

这一节里，我们要介绍“等高线”的概念，这个概念对喜爱露宿野外，与蚊为伴的人来说，并不陌生．在等高线图上，这类曲线能帮助你看出地形的高低起伏，而在这儿，我们要借助它们的帮助，看出三维空间曲面图形的立体感．

漫步森林中

话说你在美国怀俄明州境内的微温水国家公园，已经迷路了整整三天了，随身携带的干粮早已经吃光，除树皮草根之外，连皮夹都被你拿来祭了五脏庙．

正在山穷水尽疑无路的时候，你才突然记起衬衫左边口袋里面有一张地图．拿出来摊开一看，它正好就是你所希望看到的等高线图，整张地图上布满了弯弯曲曲的绿色丝条，每一条线各代表一个水平高度．地图上指出，全区的最高点是“中等高度峰”，于是你从四周林木的间隙中极目望出去，找出目力所及的最高点．哈哈！那大概就是“中等高度峰”了，你高兴的告诉自己，然后对准方向，朝它走去．

第二天中午之前，你终于来到了顶峰，兴奋的俯瞰着四周并不怎么出色的景致，对照着那张地图，你很快就看到公园入口处的小店，那儿可以买到分装好的冷冻热狗，只要在店里的微波炉中加热一下，就可以大饱饥肠了．当然，你知道地图上的等高线就是等高平面与这座山峰的交线，所以你可以参照地图，在心中想像整座山的地形地势，让自己安全的回到这个后现代文明世界里——你的热狗不加芥末吧？

我们要做的同样的事，虽然没有热狗．借由曲面的等高线，我们可以清楚知道这个曲面的真实面貌．

例题 1　试求曲面 $f(x,y)=4-x^2-y^2$ 的等高线．

解：$f(x,y)=4-x^2-y^2$ 的函数图形，相当于三维空间中所有能满足以下方程式的点(x,y,z)：

$$z=4-x^2-y^2.$$

顺着不同 z 值的平面切它几刀，所得到的交线就是我们要的等高线了．当 $z=0$ 时，我们得到一个圆：$x^2+y^2=4$，其半径为 2；当 $z=1$ 时，我们得到的是圆：$x^2+y^2=3$，半径为$\sqrt{3}$；而当 $z=2$ 时，我们得到一个半径为$\sqrt{2}$的圆；当 $z=3$，我们得到半径为 1 的圆；最后，当 $z=4$ 时，我们得到 $x^2+y^2=0$，亦即半径为 0 的圆，其实也就是一个点．把这些圆一起画出来，就成了图 8.5，这个图形是咱们的老朋友——抛物面，只不过这一回碗底朝上罢了．

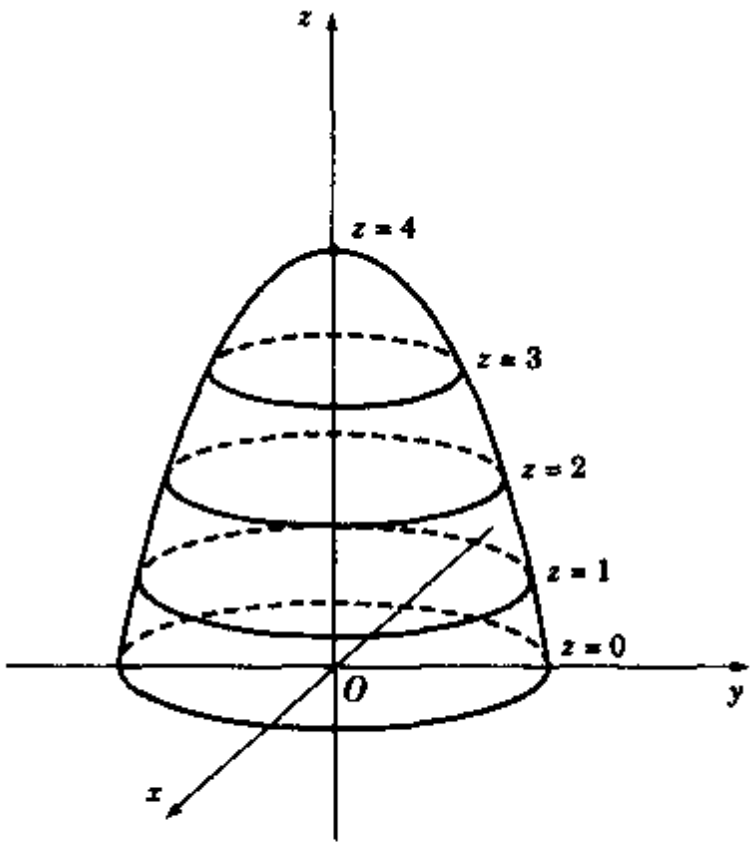


图 8.5 $f(x,y)=4-x^2-y^2$ 的图形

假如我们把这些交线都投影到 xOy 平面上，而且描绘在 xOy 平面上，并标出每条曲线的 z 坐标值，就可得到图 8.6．这种图形通常称为该函数的等高线图．

我们也可以反向操作，由等高线图推敲出三维的函数图形．

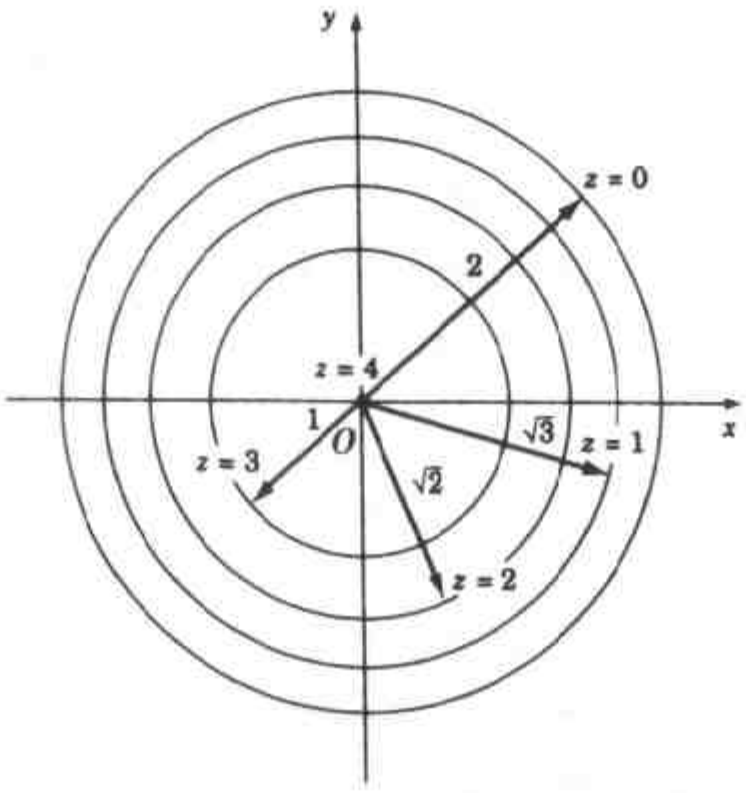


图 8.6　$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ 的等高线图

例题 2　图 8.7 中的等高线代表一个曲面，请问是啥曲面？

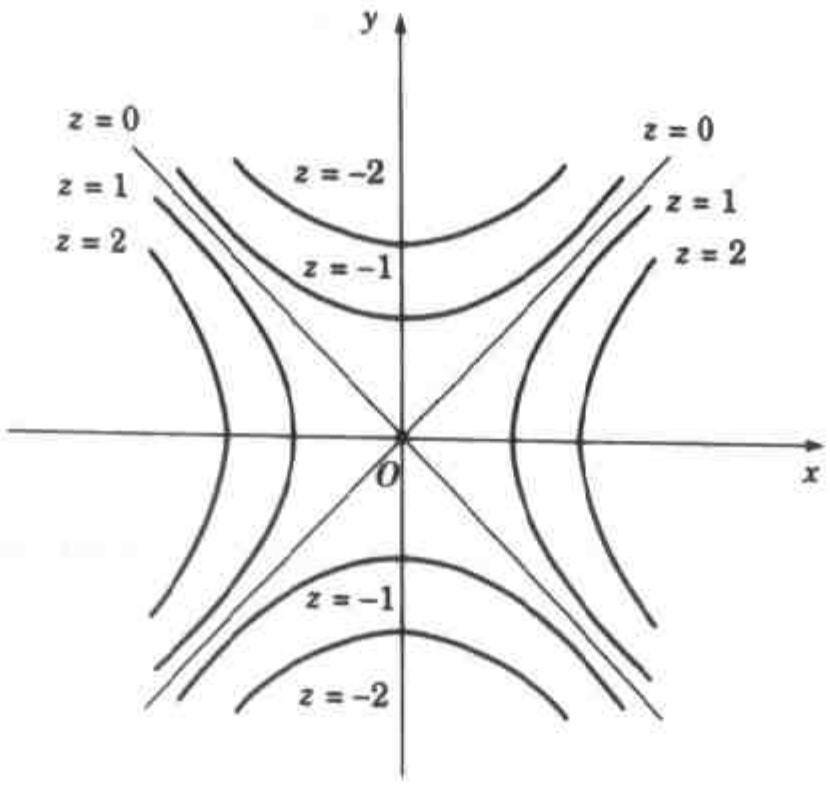


图 8.7　某个曲面的等高线图

解：我们从图上的等高线看到，这个曲面与 xOy 平面上方的那些水平平面（即 $z>0$ 者），相交于一些不经过 yOz 平面的双曲线，而且与 xOy 平面下方的水平平面（即 $z<0$ 者），相交于一些不经过 xOz 平面的双曲线．至于它与 xOy 平面本身的交线，则为两条直交的对角线．具有这样特性的曲面，就是每一位牛仔心中最惦念的曲面——马鞍．最简单的鞍面方程式就是 $z=x^2-y^2$，图 8.8 显示的就是它的圆形．

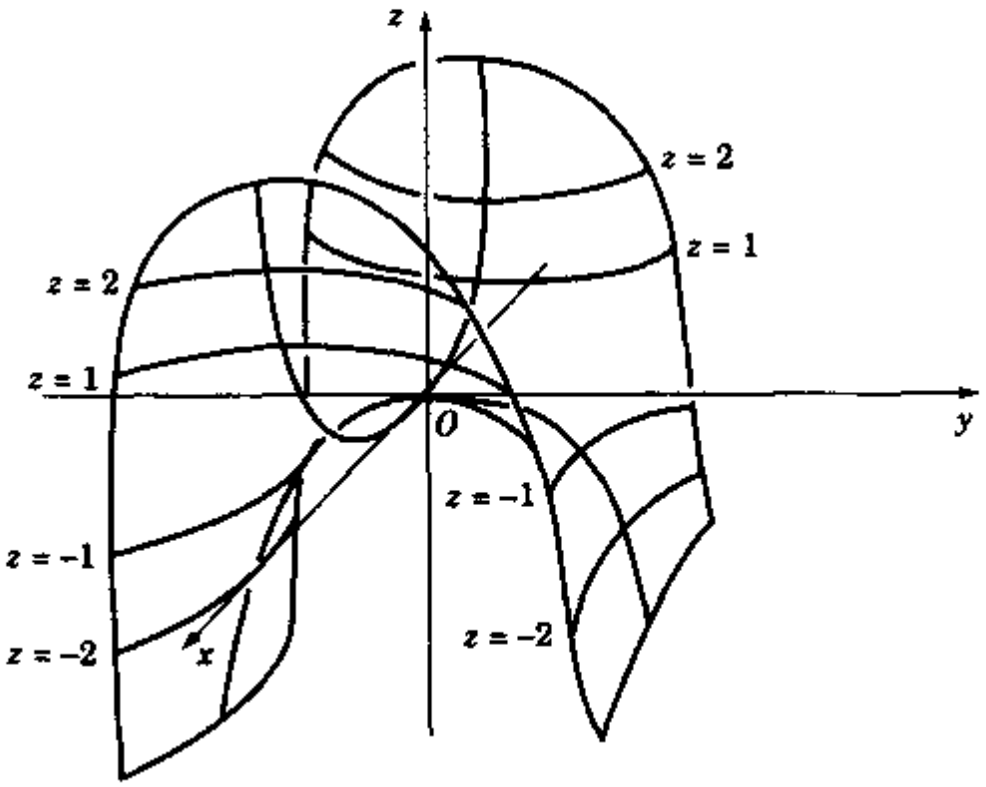


图 8.8 $z=x^2-y^2$ 所代表的马鞍（鞍面）

8.3 极限

为了定义多变量函数的导数，我们需要先了解它们的极限．在此之前，也许我们还应该复习一下单变量函数的极限．

单变量函数的极限：回顾

你还记得极限的概念吗？基本上，我们可以把极限想成是恋爱．如果当 x 趋近于 a，$f(x)$会趋近于 L，我们就说$\lim_{x\to a} f(x)=L$．这意思是说，当 x 趋近 a

时，$f(x)$对 L 的好感会逐渐增加．至于当 $x=a$ 时，$f(x)$的值究竟等于什么，就不重要了，关键是在 x 差一点就要变成 a 时的$f(x)$值．

比方说，

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+4)=2^2-3(2)+4=2\ .$$

在这个例子中，$f(x)$在 x 趋近于 a 时的极限刚好等于它在 $x=a$ 的值．我们看另一个例子：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}.$$

这时，虽然在 $x=1$ 时，$\dfrac{x^2-1}{x-1}$没有定义，但是下式依然成立：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ (x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)\ =2.$$

在单变函数的情形下，x 趋近于 a 的方式有两种：可从左边（因而 $x<a$），也可以从右边（因而 $x>a$）．唯有在 x 从左边和右边趋近 a 时，$f(x)$都趋近同一个 L 值的情况下，该极限才存在．

多变量函数的极限

不管函数是单变量还是多变量，取极限都类似恋爱．在这儿我们要强调一点，此处所说的恋爱，是真正的恋爱，而非瞬间即逝的激情，不期而遇时的惊艳倾心，接下来的发展都没啥好结果．虽然对方美好的第一印象，吸引了你的注意力，但是随后你多半会发现，他习惯用一把大弯刀剪脚指甲，或是晚上睡觉时，需要有人拍他的背才能入睡，这样一来，跟他生活在一起可能就不像当初想像得那么浪漫了．

所以，此处所说的恋爱，是一种缓慢、渐进的过程．对方每做一件小事，都只会使你觉得他（她）更加可爱．这就是函数的恋爱方式．

例题 1　当(x,y)趋近$(1,1)$时，$f(x,y)=x^2y+x$ 的极限为多少？

解：当(x,y)趋近$(1,1)$时，x^2y+x 会趋近 2．不管(x,y)是从哪个方向或路线去趋近$(1,1)$，到了决定时刻，x^2y+x 会毫不犹豫地采取行动，且忠于她之所爱，托付终身，在此例中，那个男人就是 2．所以我们写成：

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^2y+x)\ =2.$$

事实上，所有的多项式函数都是上述这种老实结婚型，也就是如果$P(x,y)$是一个x和y的多项式，则

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y) = P(a,b).$$

意思就是，我们只需用$P(x,y)$在点(a,b)上的值，来求得它的极限，换言之，只需把a、b代入即可．原因是，多变量函数也遵守单变量函数所遵守的法则．当f和g都各自有极限时，这些法则告诉我们：

1. $\lim(f+g) = \lim f + \lim g$；
2. $\lim cf = c\lim f$；
3. $\lim(fg) = \lim f \lim g$；
4. $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim f}{\lim g}$（若 $\lim g \neq 0$）．

所以

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2y + x = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2y + \lim_{(x,y)\to(1,1)} x =$$

$$\left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} y\right) + \lim_{(x,y)\to(1,1)} x =$$

$$(1)^2(1) + 1 = 2.$$

不过，比多项式更一般化的函数，其极限也会更复杂．不像我们在考虑单

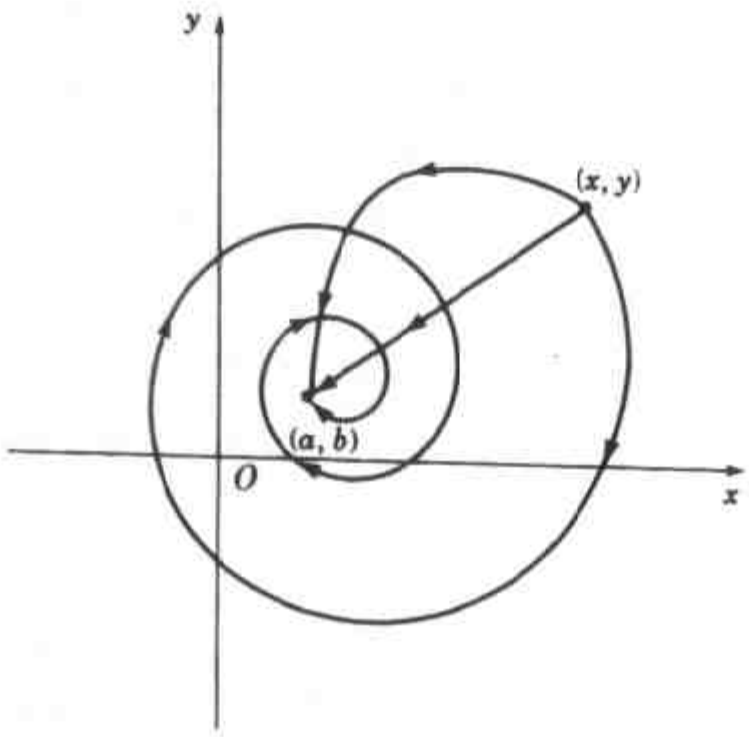


图 8.9　从(x,y)到(a,b)的可能路径

变量函数时，x 只会从 a 的左边或是右边趋近于 a．在有两个变量的函数的情况下，如果在 xOy 平面上有一点 (x,y) 朝向另一点 (a,b) 趋近，可能的趋近路径可以说有许多许多条．在图 8.9 中，我们画了三条比较具代表性的路径：一条直线，一条曲线，一条螺旋线．如果极限存在，不论所取的路径是啥，得到的结果都会相同．真爱是超越路径的．（这本书不只讨论微积分，还谈论人生呢！）

但是问题来了，既然路径的数目无限，那么如有必要时，我们如何去一一检验这些向 (a,b) 靠近的路径呢？让我们来看一个实际的例子好了．

例题 2　试求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$．

解：请注意，这个式子属于 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式．一听到不定式，你可能马上联想到洛必达法则，但是很抱歉，对多变量函数来说，洛必达法则爱莫能助．那么我们要如何检验从 (x,y) 到 (a,b) 的所有可能路径呢？试试这个：转换成极坐标．转换成极坐标这件事，很像你改变宗教信仰，只不过你的爸妈不会因此而恼火．还记得吧：

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

特别注意当 (x,y) 趋近 $(0,0)$ 时，r 会趋近 0．

因此，我们所求的极限变成

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to0}\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r}=\lim_{r\to0}(r\cos\theta\sin\theta)=0.$$

之所以等于 0，是因为 $\cos\theta$ $\sin\theta$ 绝不会大于 1，用它去乘一个趋近于 0 的 r，答案当然会跟着趋近于 0．

但是得注意，转换成极坐标这一招，只能用在当 (x,y) 趋近 $(0,0)$ 的情况下，除此之外可就无效了．

例题 3　试判定下列这个极限是否存在：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

解：如果把它转换成极坐标，我们得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}{r^2}=\lim_{r\to 0}[(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2]$$

这个答案很有意思，因为它随着 θ 的不同而有不同的值. 比方说，如果 $\theta=0$（这就相当于我们沿着 x 轴正方向趋近(0,0)），则极限为 1；如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$（这相当于我们沿着 y 轴正方向趋近(0,0)），则极限为 -1；如果 $\theta=\frac{\pi}{4}$（这相当于我们沿着直线 $x=y$ 向(0,0)趋近），则极限为 0. 由此我们看出，极限的值会随着趋近(0,0)的路径不同而有所差异，所以极限不存在!

这一题其实不用转换成极坐标，也能得到相同的答案. 方法很简单，先设 $y=0$（意思就是我们沿着 x 轴向(0,0)越近），极限就变成

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

但是，设 $x=0$（沿着 y 轴向(0,0)越近）时，极限却变成了

$$\lim_{x\to 0}\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1.$$

两个不同的路径导出不同的结果，所以极限根本就不存在.

嘿！你这马铃薯沙拉的味道与众不同，加了什么特殊佐料了?

8.4 连续性

函数分两类：一类为连续函数，另一类为不连续函数. 前者的图形很完整，其上没有漏洞和扯裂之处；不连续函数则非常危险，展现的地形一看就知道需要登山装备.

如果你想去走一趟，得注意些什么呢? 最要紧的是地上的凹洞，凹洞对每一个徒步旅行者来说，都可说是致命的陷阱，要是一脚不小心卡进洞里，腿骨就报销了，等到太阳下山，你就成了熊的晚餐. 当然，即使你十二万分小心，没踩进洞里，但若是没注意到断崖而摔了下去，那也是死路一条——这种走法看似捷径，实际上是一个很缓慢的程序；在离开这世界之前，你的一生都会在眼前重现一遍，而且是慢动作，画面中甚至包括了你与小学老师及同学去参观历史博物馆，在路上发生的小意外，以及中学时期，有人在班上散布你的谣

言，说你喜欢漂亮的音乐老师等等.

更坏的状况是，你走上一段山坡，一不小心就掉进了正在爆发的圣海伦斯火山口. 那可是一趟很了不起的天路历程，因为你的身体顿时变成了炽热的火山灰，被喷射到俄勒冈州的上空漫游去了. 不错，以上都是不连续性的例子.

当然，单变量函数的不连续性，不见得都这么糟，你的记忆里也可能有一些温馨的例子.

总而言之，以上所描写的三种情况：破洞、断崖和火山口，都在图 8.10 显示的函数$y=f(x)$的图形里，而在这三个点，函数$f(x)$都不连续. 至于除这三点之外的部分，这个函数都是连续的，而且自得其乐. 对于“单变数函数某一点为连续”的意义，咱们有一个正式的定义，是这么说的：

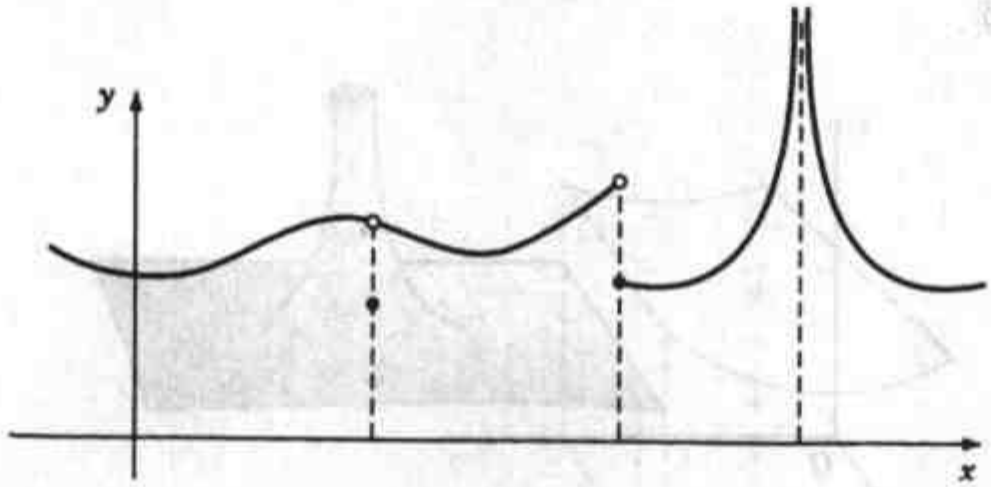


图 8.10　三种不连续性

如果$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$，则函数$f(x)$在 $x=a$ 处为连续.

这个定义说明了以下三件事：

1. 该极限存在；
2. 函数$f(x)$在 $x=a$ 有定义；
3. 该极限等于$f(a)$.

以图 8.10 所示的三个例子来说，我们可以看出：破洞处之所以不连续，原因是$\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$；断崖的情形则是，左极限和右极限不相等，所以极限不存在；最后的火山口，则是因为极限和$f(a)$都不存在.

然而，现在谈论的是双变量函数，因而我们假设$z=f(x,y)$为一个随 x 和 y 变化的函数. 它的连续性定义，应该跟单变量的完全相同.

> 如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$成立，则函数$f(x,y)$在$(x,y)=(a,b)$处为连续.

同样的，这个定义指出了以下三件事：

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$存在；
2. $f(x,y)$在(a,b)有定义；
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

如图 8.11 所示，若是在曲面上遇到了破洞、断崖或火山口，仍然表示$f(x,y)$不连续.

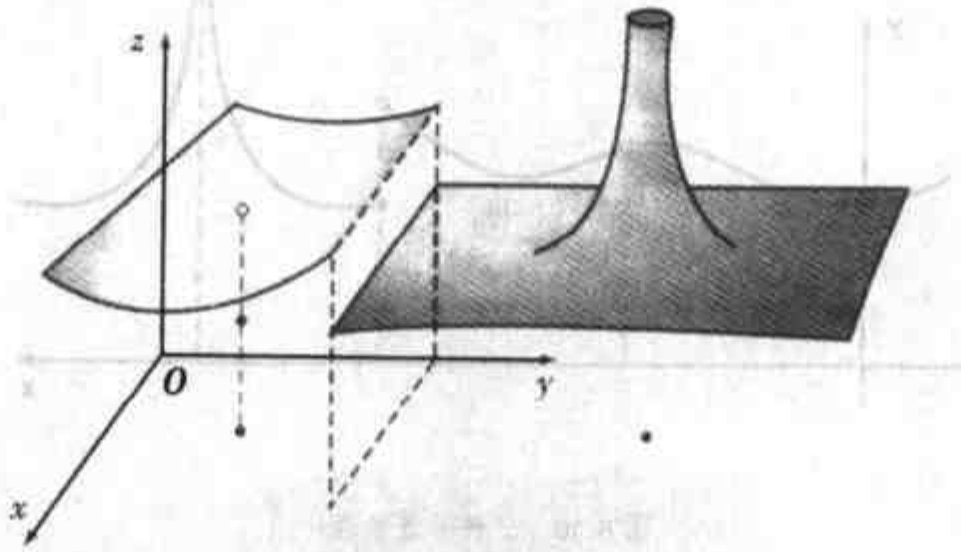


图 8.11 不连续函数

若某一函数在 xOy 平面上的所有点(a,b)都连续，则我们说该函数处处连续. 许多函数都是处处连续，譬如我们的好朋友，多项式，就是处处连续的函数，因为如果我们有个多项式，像 $P(x,y)=4x^3y+7xy^2-2x+9$，则

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y)=P(a,b),$$

而且对 xOy 平面上的每一个点(a,b)，上式都成立. 此外，由连续函数相加、相减、相乘、相除与合成，而得到的更复杂的函数，在有定义的各点上仍然是连续的.

例题 1　$f(x,y)=e^{\sin(xy)}+\ln(3x^2y^3)$在有定义的各点是连续的.

原因是，这个函数是由连续函数，如 $\sin x$、$\cos x$、$\ln x$、e^x 等组合在一起的，它们以 +、−、×、÷ 以及合成的方式串联而成. 但是必须特别注意除法，因为除法有可能造成分母等于 0 的状况，使函数在某些点没有定义. 另外我们还需记住，平方根不喜欢负数，而 $\ln x$ 的 x 亦然.

因此，这个函数只要在有定义的地方，就是连续的. 那么有人会问，它究竟在什么地方没有定义呢？让我们分析一下. 首先，它的第一项 $e^{\sin(xy)}$ 对所有的 x 和 y 来说，都有定义，原因是 $\sin x$ 和 e^x 在任何地方都有定义，但是第二项$\ln(3x^2y^3)$可就不一样了. 我们知道 $\ln x$ 要求 x 为正，亦即只有当 $3x^2y^3$ 为正值时，$\ln(3x^2y^3)$才有定义，这就表示点(x,y)必须同时满足 $x\neq 0$ 和 $y>0$——在这些点（亦即定义域），函数$f(x,y)$连续.

一般说来，我们可以把连续函数想像成很友善、肯合作，而相反的，不连续函数则代表危险、很难对付. 我们应尽量避开后者，若无可回避，则须非常小心.

嘿，你怎么才吃完马铃薯沙拉，又吃起奶油烤马铃薯了？

8.5　偏导数

你应该还记得，函数$f(x)$的导数就代表$y=f(x)$图形的切线（如图 8.12 所示）. 现在我们要把这个概念，推广到具有两个变量的函数$f(x,y)$.

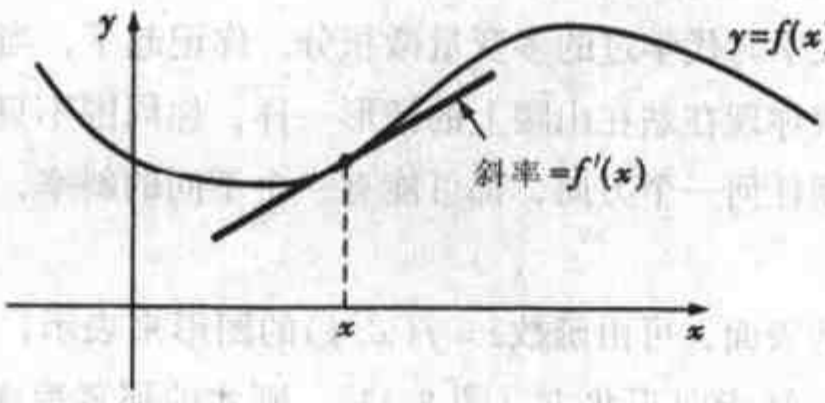


图 8.12　$f(x)$的导数值等于 $y=f(x)$曲线的切线斜率

怎么办呢，让我们假设，你现在正站在圣母峰的山腰上，身上是昂贵得出奇的登山装和装备，有着闪亮耀眼的时髦花样．当时你在专卖店试穿这套服装时，觉得自己酷得不得了，然而现在，你感觉不到酷了，而是寒冷彻骨，因为冰冷的寒风从外套的下缘缝中钻了进来，原来是你忘了把其中一条高科技束带扎紧．

你被绑在一根绳索的一端，绳索悬挂在你头顶上方那个卡在岩缝里的带环钢钉上，而绳索的另一端，则掌握在芬兰籍队长的手中．他这时正拼命向你打手势，并且用你压根儿听不懂的芬兰话向你猛喊：似乎从这次探险一开始，你对他的唯一印象，就是见他拼命向你打手势，并且用你听不懂的芬兰话向你猛喊．这时候风愈刮愈大，气温也似乎在急速下降，你不由得再一次自问．明明可以无忧无虑的躺在游泳池面上，啜饮着热带果汁，为什么要发神经参加什么高山探险队？

你猜测，也许这位芬兰队长看时候不早，应该转回基地营区，喝杯热可可加上软棉糖，以御寒气，所以你自以为是的向东跨出一小步．哪知道你这一脚踩了空，因为在你所踏出的方向，根本没有落脚处：下一个落脚处是在 z 负方向的 200 英尺外！幸好你头顶上的钢钉没有松脱，你才没摔下去，结果整个人悬在半空中．这时你的芬兰队长喊声更急促响亮，同时死命的拽住绳索，额头上的青筋都冒了出来．

当然，刚才这幕惊险镜头之所以发生，问题出在山峰的东侧坡度太陡．你定了定神，然后拿出吃奶的力气，好不容易才收回了你那只差一点就造成千古恨的脚．惊魂未定，仔细向下看清楚之后，你这才发现芬兰队长的手势，原来是在叫你向正北方移动前进，因为那一侧的坡度没那么大，一步跨出去，只不过向 z 负轴方向踏出 2 英尺而已．

这让你想起大学时代学过的多变量微积分．你记起了，当你在三维空间曲面上的一点，就跟你现在站在山腰上的情形一样，你周围不只有一个斜率．事实上，不管你面朝任何一个方向，都可能有一个不同的斜率，也就是在该方向上的切线的斜率．

假设这座山的表面，可由函数 $z=f(x,y)$ 的图形来表示，其中的正 x 轴指向正东方，而正 y 轴指向正北方（图 8.13）．刚才的那幕惊魂记，就相当于 x 轴方向上的切线斜率很大，而且为负值，约为 -200，因为落差有 200 英尺；至于正 y 方向（亦即正北方）上的切线斜率，虽然也是负值，但是没那么陡，大

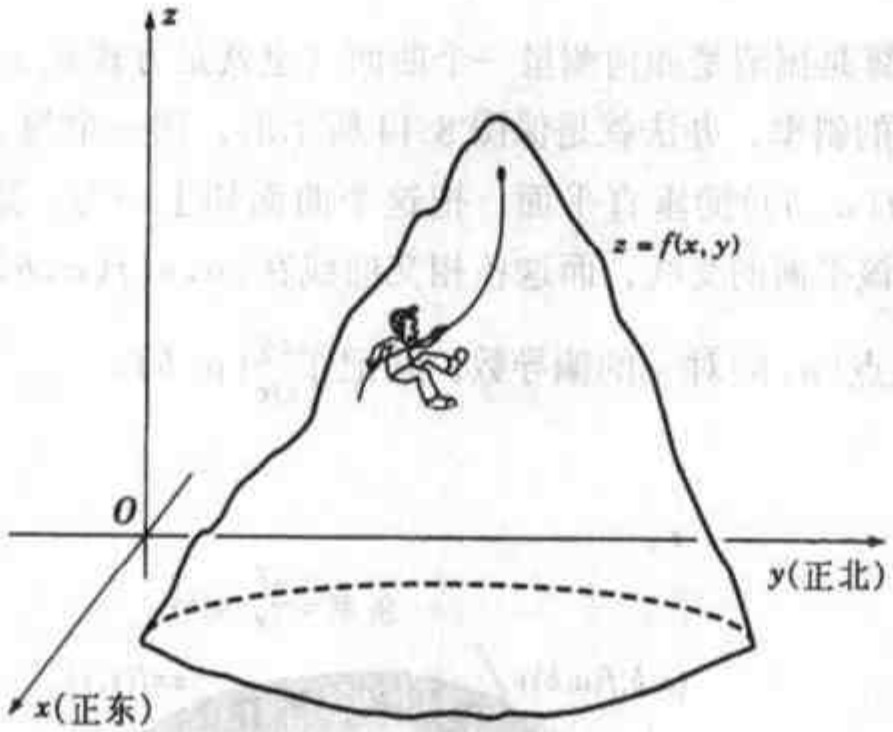


图 8.13　登山

约为 -2，因为落差仅 2 英尺.

你仍然记得，你的微积分老师（那个看起来不太爱干净的家伙）曾经告诉过你们，函数 f 对 x 的偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$，就是它在 x 方向的切线的斜率. 你还记得当时不太了解他的意思，于是发问道："对不起，教授！x 方向哪有什么切线？x 方向不是水平的吗？切线不都是倾斜的吗？"（多有趣啊，每当你的生命面临危险时，你常会突然记起一些毫不相干的往事.）

于是，你的教授抛过来一个非常不屑的眼神，然后说："你听好，我的意思是你得取一个通过所求的那一点，且跟 xOz 平面平行的平面，然后在该平面上取这个曲面的切线，而这条切线的斜率就叫做 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$."接着他就在黑板上画了一个图 8.14 的图形.

"我懂了！"你跟着说道："如此一来，我们就可以用平面上求导数的同样方法，去计算它的导数了."于是你也走上讲台，在黑板上画了一个类似图 8.15 的图形.

他见你如此举一反三，立刻冲着你露齿一笑，只是露出的两颗门牙还真是难看透顶. 即使如此，你对他马上产生了不少好感，心里还打算也许就此转

系，主修数学.

所以，我们算是搞清楚如何测量一个曲面（也就是方程式 $z=f(x,y)$的图形）在 x 方向上的斜率，办法就是像图 8.14 所示的，用一个与 xOz 平面平行，且通过点$(a,b,f(a,b))$的垂直平面，把这个曲面切上一刀. 这一刀切下去，切出的是曲面与该平面的交线，而这条相交曲线在$(a,b,f(a,b))$的切线斜率，就叫做$f(x,y)$在点(a,b)对 x 的偏导数，并记作$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

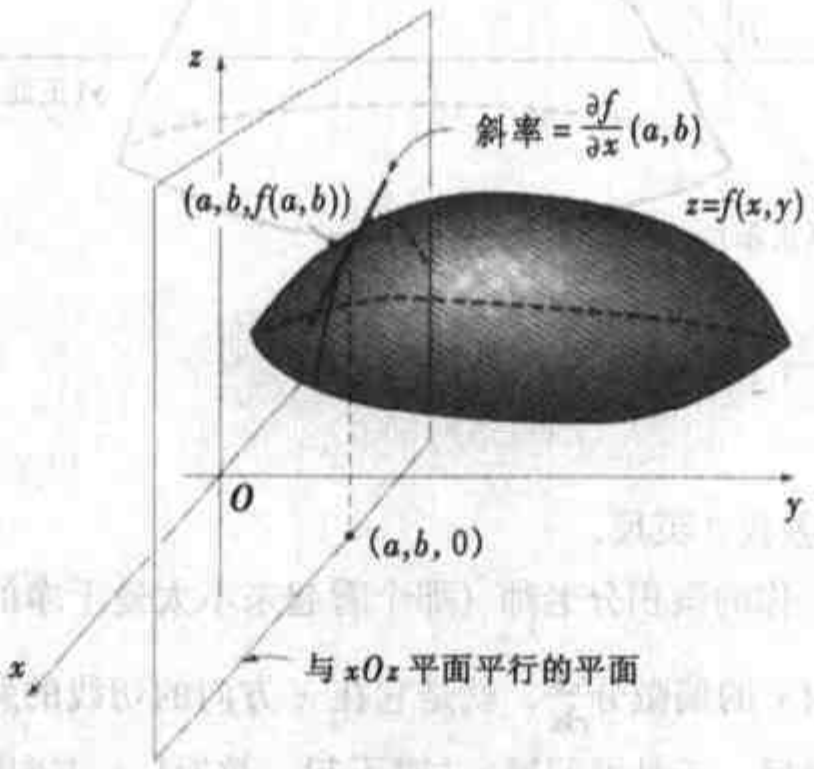


图 8.14 $\frac{\partial f}{\partial x}$即是这条切线的斜率

由于我们所用的垂直平面，把原先的三维空间切成了二维，使得我们能够应用单变量微积分中学过的方法，求切线斜率：如图 8.15 所示，在曲线上另取一个点$(a+h,b)$，算出连接这两点所成的割线的斜率，然后让第二个点$(a+h,b)$向第一个点(a,b)趋近，取其极限.

以我们在此所举的例子，写成数学式便成为：

函数 f 对 x 的偏导数，就等于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}.$$

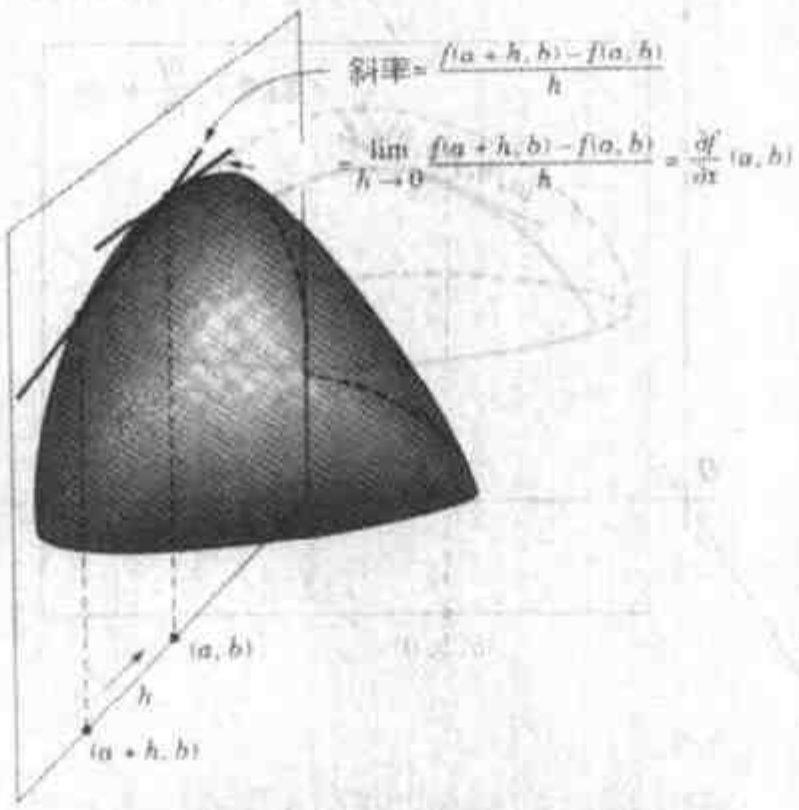


图 8.15　求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$

同理，$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$代表同一曲面在同一点$(a,b,f(a,b))$的另一条切线的斜率，这条切线是在一个与 yOz 平面平行的平面上，且该平面仍然通过点$(a,b,f(a,b))$. 如图 8.16 所示.

> 函数 f 对 y 的偏导数，就等于
>
> $$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

请注意，上述两种情况中，我们都仅仅动了 x 和 y 两个变量中的一个，而把另外那个变量当做一个常数. 事实上，这正是我们求偏导数的方法：在对其中一个变量进行微分时，把其他的变量当做常数看待. 我们索性把它写成一个正式的法则：

> 求$\frac{\partial f}{\partial x}$时，把 y 当作常数，然后对 x 微分.

所以如果$f(x,y)=2x+y$，那么$\frac{\partial f}{\partial x}=2$.

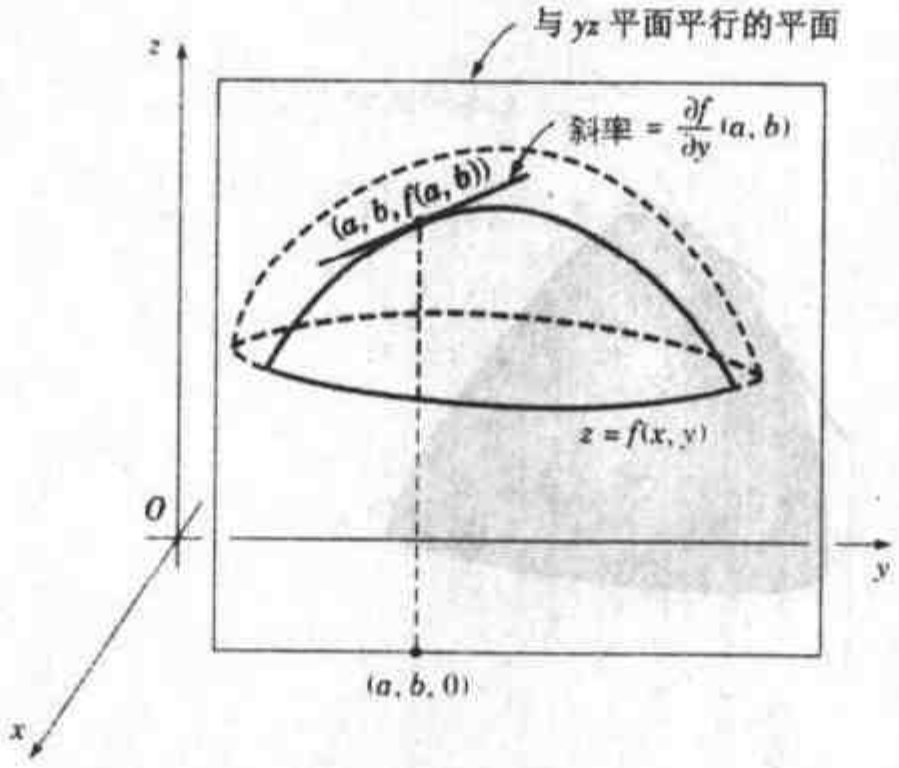


图 8.16 此切线的斜率等于 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

在这儿我们假装认为 y 不是变量，而是一个无足轻重的常数，因而一微分之后就不见了.

偏导数记号 偏导数的写法并非一种，以下是常见的几种.

$$f_x = 2$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2$$

或

$$\partial_x f = 2$$

或

$$D_x f = 2$$

让我们举几个别的例子试试：

例题 1 如果 $f(x,y) = x^2 y$，那么 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$.

例题 2 如果 $f(x,y) = \sin x \cos y$，那么 $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y$.

对今后（至少对下一章）很有用的特殊重点：在以上所举的例子中，在你把题目中所给的函数对 x 微分之后，所得到的都是一个新的函数，而这个新函数仍然具有与原先函数相同数目的变量．为了阐明此概念，比较小心的写法是：

$$f(x,y)=2x+y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2.$$

当然，所有双变量函数里面的 x 并不比 y 特殊，它之所以写在 y 的前面，只是字母顺序的关系．这就跟姓名以 z 起头的人，每次都编排到队尾一样，只有认命的份．所以，它既然能对 x 微分，就照样能对 y 微分，所得到的就是：

$$f(x,y)=2x+y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1$$

及

$$f(x,y)=x^2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2$$

及

$$f(x,y)=\sin x\cos y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x(-\sin y).$$

好了，有了这套新演算法，你可以用不着害怕回家过感恩节啦！怎么说呢？当你坐在餐桌上，你那开鞋店的堂哥开始念他的卖鞋经，请他如何替一位患有拇趾内侧囊肿炎的小老太婆试穿新鞋，或者餐桌上的恶心配菜和人数的比是 10:1，此时你可以客客气气地跟家人说，你必须先行告退，因为你还有学校带回来的作业要做，要练习求偏导数的偏导数，或者偏导数的偏导数的偏导数，就像这样：

$$f(x,y)=2x+y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0.$$

在这儿我们是把 f 对 y 取偏导数之后，再对 x 取偏导数．由于$\frac{\partial f}{\partial y}$的式子中

已经没有带 x 项，故答案为 0.

在$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$的写法上，分子里面的那个小 2，告诉我们前后一共取了两次偏导数，而分母则告诉我们这两次偏导数的先后次序，从右读向左. 这跟单变量函数连续取导数的程序相仿，所不同的是这儿不只一种可能.

在写多次取偏导数时，你就了解为什么还会有其他的写法，因为省事的缘故，譬如说，我们可以这么写（次序是由左到右）：

$$f(x,y)=2x+y,$$

$$f_y=1,$$

$$f_{yx}=0,$$

$$f_{yxy}=0.$$

这个函数才取了几下偏导数，就玩完了. 那么$f(x,y)=x^2y$ 呢？以下是随意取几个偏导数的一些例子：

$$f(x,y)=x^2y,$$

$$f_x=2xy,$$

$$f_{xy}=2x,$$

$$f_{xx}=2y,$$

$$f_{xxy}=2.$$

比上面那个线性函数持久了一些，但很快也宣告结束，没戏唱了.

再试试$f(x,y)=\sin x\cos y$，哇！这个函数可耐玩得很，你可以从感恩节开始取偏导数，到过了新年还没取完：

$$f(x,y)=\sin x\cos y,$$

$$f_x=\cos x\cos y,$$

$$f_y=-\sin x\sin y,$$

$$f_{yx}=-\cos x\sin y,$$

$$f_{xy}=-\sin x\cos y,$$

$$f_{xxx}=-\cos x\cos y,$$

$$f_{xxxx}=\sin x\cos y.$$

这个函数的偏导数还没完没了. 我们之所以写了一串 x，是因为在想，如果把它以这个样子公布在我们的网站上，一定会招来一大批闲着没事干的人，

上网来抗议！

请注意，当我们取所谓的二阶偏导数时，可能的组合一共有 4 个，那就是 f_{xx}、f_{yy}、f_{xy}以及f_{yx}，实在是太复杂了，幸好数学之神对我们很仁慈，主动发善心帮我们的忙，让 $f_{xy}=f_{yx}$，这样组合数目就少了一个，条件是只要它们是连续函数就成．我们通常叫这两个导数为混合二阶偏导数，也就是说，这两个混合二阶偏导数相等．让我们突出这件事实，把它写成公式：当这些偏导数连续时，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

由于几乎所有我们处理过的函数，以及它们的导数，在定义域里是连续的，我们大可不必担心这个条件．

例题 3　试验证函数 $f(x,y)=x^2y^3+7ysinx+6x$ 的两个混合二阶偏导数相等．

解：

$$f_x=2xy^3+7y\cos x+6,$$

所以

$$f_{xy}=6xy^2+7\cos x,$$

另一方面，

$$f_y=x^23y^2+7\sin x,$$

所以

$$f_{yx}=6xy^2+7\cos x.$$

你看，f_{xy}果然等于f_{yx}．这不是奇迹是什么？

那么，偏导数有啥用？

真高兴你问了这个问题．让我们再谈谈山好了．假设我们要去爬“帕马森乳酪郡”境内的最高峰，再假设那座山的表面函数为：$z=f(x,y)$的图形．为了达到登山的目的，我们得要能确认我们的确到过山顶．那么当我们到达山顶时，怎么才能证明它是山顶呢？在山顶上，任何一条切线都是水平的，亦即其斜率为 0．而$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$是其中两条切线的斜率，所以如果该点的确是山顶（如图

8.17 所示)，这两个偏导数都必须等于 0，即

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

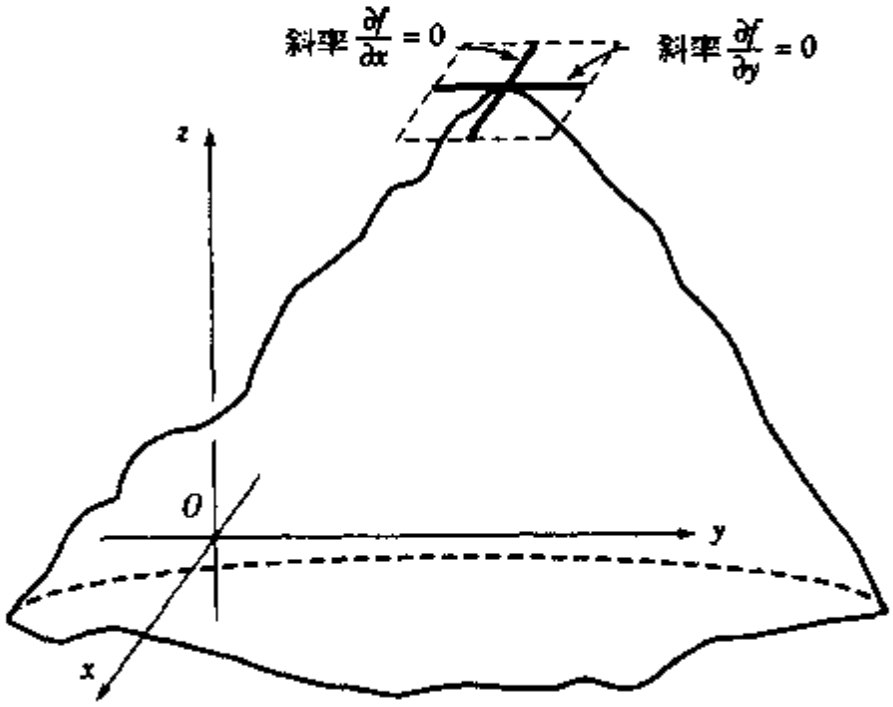


图 8.17　山顶的所有切线都是水平的

我们可以利用这两个条件来找出山顶：取这两个偏导数，令它们等于 0，然后解出同时符合$\frac{\partial f}{\partial x}=0$ 和$\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 的点(x,y). 这些点是山顶可能出现的所在点(叫做临界点).

事实上，这同一个概念也可以用来找出山谷的位置，而且不必限定是此处所爬的山顶，世上任何大山、小丘都一样适用. 对于任何双变数函数$f(x,y)$，不管它是一个利润函数，还是代表冷藏保鲜盒内细菌数目的函数，这个方法都可以帮助我们找出该函数的最大值或最小值，而这就是下节将要讨论的主题.

嘿！你这身大礼服烫得笔挺，该不会是要穿去爬山的吧！

8.6　最大值和最小值问题

在我们熟悉的真实世界里，我们最常遇到的问题，似乎都是在某种限制或约束条件下，去找出某个量的最大值或最小值．比方说，我们正为减肥而节食，却面对一大堆美味的甜点，这时我们脑子里会马上开始盘算，如何能取用最多样的甜点，而让热量摄取不超过 500 焦耳．或者学期即将结束，一星期之后就是大考，我们得考四门课，这时，任何一个有大脑的同学，一定会在心里规划如何分配这仅剩下的一星期，让这四门课考下来，可以得到最高的平均成绩．或者突然感觉到咖啡因瘾发作，下意识一掏口袋，身上总共只有 23 元钱，于是你脑筋就会开始转．如何利用这一点钱，得到最大量的咖啡因．

我们把这类性质类似的问题，统称为受约束的最大值和最小值问题．现在让我们看一个简单的例子．

例题 1　找出三个数 x、y 和 z，使它们的和是 120，而乘积为最大值．

解：这可是此类问题中的经典，早在石器时代，人类就已经在为它伤脑筋啦！不过在那个年头，人们知道的最大数字是 7，所以这个问题在那个时代的版本比较简单．

第 1 步：首先我们设定一个待求最大值的函数，以及一个所谓的约束方程式．设 $f(x,y,z)=xyz$，这就是我们想求最大值的函数．依题意，我们受限于一个约束方程式，那就是 $x+y+z=120$．

第 2 步：利用这个约束方程式，把待求函数里的变量减成两个．

由于 z 可以写成 x 和 y 的函数，亦即 $z=120-x-y$，我们用它取代函数里的 z：

$$f(x,y)=xy(120-x-y)=120xy-x^2y-xy^2\ .$$

于是我们有了一个只有两个变量的函数，供我们求最大值和最小值．

第 3 步：取偏导数，并令它们为 0．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=120y-2xy-y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=120x-x^2-2xy\ .$$

于是我们得到下面这组方程式：

$$120y - 2xy - y^2 = 0,$$

$$120x - x^2 - 2xy = 0.$$

第 4 步：解方程式，以求得所有的临界点.

第一个方程式的每一项都可以拿出一个 y：

$$y(120 - 2x - y) = 0.$$

第二个方程式的每一项都可以拿出一个 x：

$$x(120 - x - 2y) = 0.$$

如果 x 或 y 等于 0，我们显然会得到最小值，而不是最大值，所以我们可以假定，x 和 y 都不等于 0. 那么

$$120 - 2x - y = 0,$$

$$120 - x - 2y = 0.$$

把第一个式子减去第二个式子，可以得到

$$-x + y = 0,$$

$$x = y.$$

把这个式子代回第一个式子，就可得到

$$120 - 2x - x = 0,$$

$$3x = 120,$$

$$x = 40.$$

我们再把 $x = 40$ 代回 $x = y$，就可得到 $y = 40$，又由于 $z = 120 - x - y$，我们可以得到 $z = 40$. 因而若要得到最大乘积，x、y 和 z 三个数都等于 40，而得到的最大乘积则是 $40^3 = 64\,000$.

哇塞！这堆土豆真不小！

让我们再看一个例子：

例题 2 埃及艳后克丽奥佩脱拉要人替她制造一个珠宝箱，需要的容积为 8 立方腕尺，箱子的底部得用黄金平板制造，箱子的四壁用白银平板，而上面的盖子则是一块镶满珍珠的面板. 她愿意给你 1000 个半盎司金币，作为制造这个珠宝箱的酬劳. 假如当时的行情是：黄金平板的价格每平方腕尺 16 个金币，白银平板的价格则是每平方腕尺 6 个金币，而镶满珍珠的面板价格是每平方腕尺 8 个金币，那么试问你应不应该接下这个任务（这里的意思可不是问你买不

买克丽奥佩脱拉的面子，而是要你算算看，这笔生意有没有赚头)?



图 8.18　替克丽奥佩脱拉打造的珠宝箱

解：首先假设这个珠宝箱的尺寸是 x 腕尺长、y 腕尺宽、z 腕尺高．你问我 1 腕尺究竟有多长．你管它多长干什么？它的长度其实与解问题完全没有关系．(不过你既然问了，态度又很诚恳，不妨就告诉你吧．这个上古时代就有的长度单位，相当于手肘到伸直了的中指尖的长度，约 18 英寸．古时候的人经常把中指伸直，现代人则只是偶尔在用手势骂人时，才把中指伸直．古埃及人的腕尺又与别的地方的不一样，计算时还要加上法老王的手掌宽度，这使得腕尺的总长度达到了 21 英寸左右，视当政法老王的手掌大小而定．这种长度单位，对建造金字塔已经绰绰有余．)

第 1 步：画一幅类似图 8.18 的图，有艺术细胞的同学不妨把克丽奥佩脱拉也画进去；

第 2 步：找出变数之间的“约束”；

题目里说，珠宝箱的容积必须为 8 立方腕尺，这说明了三个变量之间的一个关系，即 $xyz=8$. 这个关系式称为约束方程式，因为它在三个变量上加了一个限制. 有了它，三个变量就不能肆无忌惮的变动了；拴住了其中两个，第三个变量也没得变了.

第 3 步：决定出待求最大或最小值的函数.

我们的目标是要得到珠宝箱的最低造价，所以我们就来瞧瞧本钱究竟是多少. 譬如盖子所需要的本钱，就等于盖子的面积（单位：平方腕尺）乘上材料的单价. 亦即：

盖子的本钱 = (盖子的面积) × (每平方腕尺单价) = $(xy)(8)$,

四壁的本钱 = (四壁的面积) × (每平方腕尺单价) = $(xz+xz+yz+yz)(6)=12xz+12yz$,

箱底的本钱 = (箱底的面积) × (每平方腕尺单价) = $(xy)(16)$.

所以总材料费为

$C(x,y,z)=$(盖子本钱) + (四壁本钱) + (箱底本钱) $=8xy+(12xz+12yz)+16xy=24xy+12xz+12yz$.

第 4 步：利用约束方程式，把上述函数化简成两个变量的函数.

前述之约束方程式为 $xyz=8$，亦即 $z=\dfrac{8}{xy}$，以之取代总材料费函数中的 z，则得

$$C(x,y)=24xy+12x\frac{8}{xy}+12y\frac{8}{xy}=24xy+\frac{96}{y}+\frac{96}{x}.$$

第 5 步：取偏导数，令它们为 0，然后求解所得到的方程式.

$$\frac{\partial C}{\partial x}=24y-\frac{96}{x^2},$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}=24x-\frac{96}{y^2}.$$

为了求最小值，我们令上述两式等于 0：

$$24y-\frac{96}{x^2}=0,$$

$$24x-\frac{96}{y^2}=0.$$

以上两式得同时成立. 我们先解第一式的 y：

$$y = \frac{4}{x^2}.$$

把它代入第二式，得到

$$24x - \frac{96}{(4/x^2)^2} = 0,$$

$$24x - 6x^4 = 0,$$

$$6x(4 - x^3) = 0,$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = 4^{1/3} \approx 1.587 \text{（腕尺）}.$$

$x = 0$ 这个解，显然不会让我们得到最小值，甚至做不出一个真正的珠宝箱．但是当 $x = 4^{1/3}$，我们会得到 $y = 4^{1/3}$ 及 $z = 2\ (4^{1/3})$，于是总造价为：

$$C = 24(4^{1/3})(4^{1/3}) + \frac{96}{4^{1/3}} + \frac{96}{4^{1/3}} \approx$$

181.42（个半盎司金币）.

这表示你的利润最多可达到 818 块金币，哇塞！这笔钱应该足够用来替你的破屋换个全新的豪华茅草屋顶！因此，以“利润”来说，这笔生意绝对可以做！

例题 3　如果我们想做一个箱子，使其中一角位于原点，而与该角相邻的三个面，分别位于三个坐标平面上，至于它的斜对角，则限定在第一卦限中，且在 $2x + 3y + 4x = 12$ 平面上．试求这样一个箱子的最大体积．

解：首先我们得问自己：为何要知道这个问题的答案？也许是因为我们刚好有一个屋顶倾斜的阁楼，另外又有一位因近亲通婚而导致身体畸形的皇室成员，所以我们想在那间阁楼里，建造一个箱型房间，用来藏匿这位不幸的皇室成员，免得那些唯恐天下不乱的狗仔队借题发挥，有损皇室形象．当然，这种办法虽值得一试，但有可能会欲盖弥彰．比较可行的办法可能是，让这位畸形的皇室成员成为新国王，然后大家假装不觉得他长相畸形．

或者，问题中的箱子代表利润，而箱子的体积代表着三个变量（譬如我们投入的资金、雇用人力的薪资，以及产品的需求）的函数，而这三个变量之间，受制于方程式 $2x + 3y + 4z = 12$ 所代表的约束关系．

又或者，这个问题与期中考试有某种关系（你瞧！有了这么一句提示，便足以让人急切地想知道如何求解）．不管这个题目背后的渊源是啥，让我们来

瞧瞧此题该如何解.

第 1 步：首先，依照题意画一个图，如图 8.19.

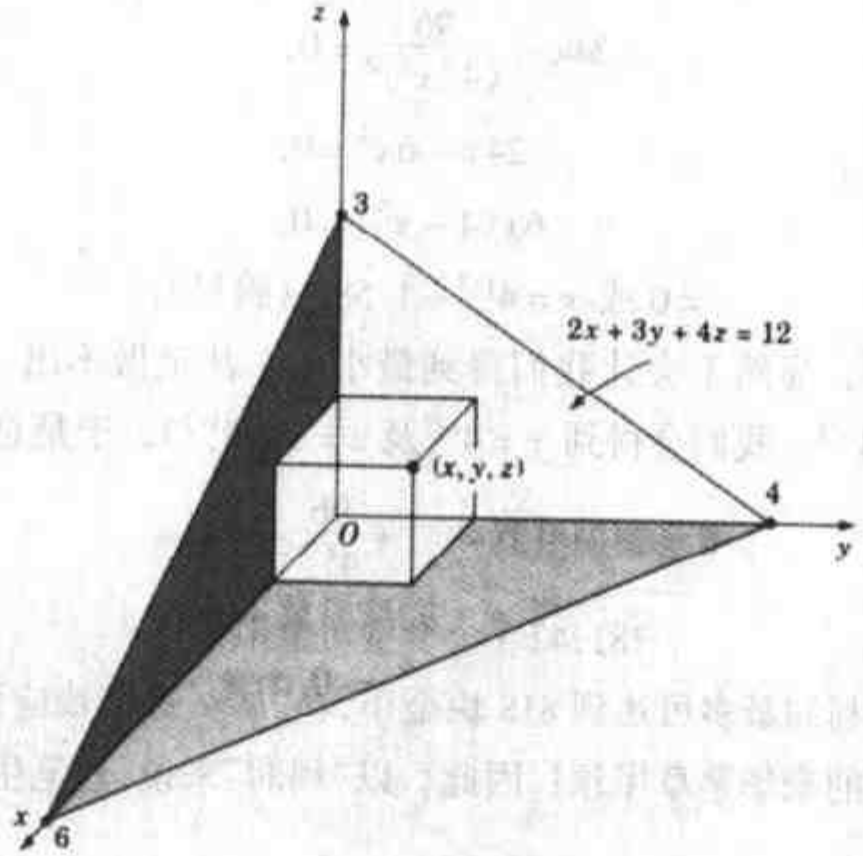


图 8.19 阁楼中的箱子

第 2 步：找出本题的约束方程式，以及要用来求最大值的函数.

请特别注意，如果设(x, y, z)就是位在平面 $2x + 3y + 4z = 12$ 上那个角的坐标，那么 x、y、z 三个坐标值，就正好是该箱子的长、宽、高；也就是说，这个箱子的体积等于它们的乘积，即 $V = xyz$，其中的 x、y、z 受制于方程式 $2x + 3y + 4z = 12$.

第 3 步：用约束方程式把体积函数里的三个变量，减成两个变量.

求解约束方程式中的 x，我们得到 $x = 6 - \frac{3}{2}y - 2z$，把它代入体积函数，我们得到

$$V = (6 - \frac{3}{2}y - 2z)yz =$$

$$6yz - \frac{3}{2}y^2z - 2yz^2.$$

第 4 步：取偏导数.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 6z - 3yz + 2z^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 6y - \frac{3}{2}y^2 - 4yz.$$

令两式为 0，得：

$$6z - 3yz - 2z^2 = 0,$$

$$6y - \frac{3}{2}y^2 - 4yz = 0.$$

第一式变成 $z(6 - 3y - 2z) = 0$.

第二式变成 $y(6 - \frac{3}{2}y - 4z) = 0$.

$z = 0$ 或 $y = 0$ 所得到的解，会使体积为零，而不可能是最大值，所以我们可以设 z 和 y 都不等于 0. 因此我们知道

$$6 - 3y - 2z = 0,$$

$$6 - \frac{3}{2}y - 4z = 0.$$

把第一式乘以 2，再减去第二式，就得到

$$6 - \frac{9}{2}y = 0.$$

所以 $y = \frac{3}{4}$. 再代回第一式，求得 $z = 1$，并由约束方程式，可得 $x = 2$. 所以这个箱子可能的最大体积为 $V = (2)(\frac{3}{4})(1) = \frac{8}{3}$，而此时的尺寸为 $2 \times \frac{3}{4} \times 1$.

感觉起来好像蛮狭小的，不过时间久了，他就会习惯了啦！嘿，人家皇室的家务事，我们小老百姓管得着吗?

8.7　链式法则

在我们讲到多变量函数的链式法则之前，让我们先做一次悠闲的怀旧之旅，怀念一下单变量函数的链式法则. 你还记得它是怎么一回事吗? 描述它的办法有两种：第一种是先设函数 $w = f(u)$，再设 $u = g(x)$，所以 $w = f(g(x))$，意思是说，w 间接受到 x 的控制，其间通过 u. 譬如 $w = \sin u$，其中 $u = x^2$，所

以事实上是 $w=\sin(x^2)$. 于是, 我们得到:

单变数函数的链式法则

$$\frac{\mathrm{d}(f(g(x)))}{\mathrm{d}x}=f'(g(x))g'(x).$$

另一种描述方式更是一目了然, 那就是:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

其实这两种方式根本就是同一回事, 因为 $f'(g(x))=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}$, 而 $g'(x)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 许多人都比较喜欢第二种方式, 因为它看起来好像其中两个 $\mathrm{d}u$ 可以互相抵消, 所以不容易记错.

以刚才所举的例子来看, $\frac{\mathrm{d}(\sin(x^2))}{\mathrm{d}x}=(\cos(x^2))(2x)$.

现在我们就要来谈:

多变量函数的链式法则

假如我们有个函数 $w=f(u,v)$, 其中 $u=g(x,y)$, $v=h(x,y)$. 所以 w 直接取决于 u 和 v, 而 u 和 v 又与 x 和 y 有直接关系. 我们可以用图 8.20 的图解, 来描述这些变量间的关系.

我们称 w 为因变量, 因为它直接取决于 u 跟 v, 而又间接跟 x 和 y 有关. 变量 u 和 v 则称做中间变量. 至于 x 和 y, 就是所谓的自变量, 因为它们并没有跟着其他变量而改变.

我们可以把这个情形, 想成是豪门家庭成员的经济支援关系. 身为祖父母的 w, 拿钱支援当父母的 u 和 v, 然后 u 和 v 再拿钱支援当子女的 x 和 y. 所以, 养这些子女的钱事实上是从祖父母那儿来的.

现在, 假如我们想知道, 这些当孙子的正以何种速率, 花掉它们祖父母 w 的资产, 那么我们所关心的就是 $\frac{\partial w}{\partial x}$.

多变量函数的链式法则如是说:

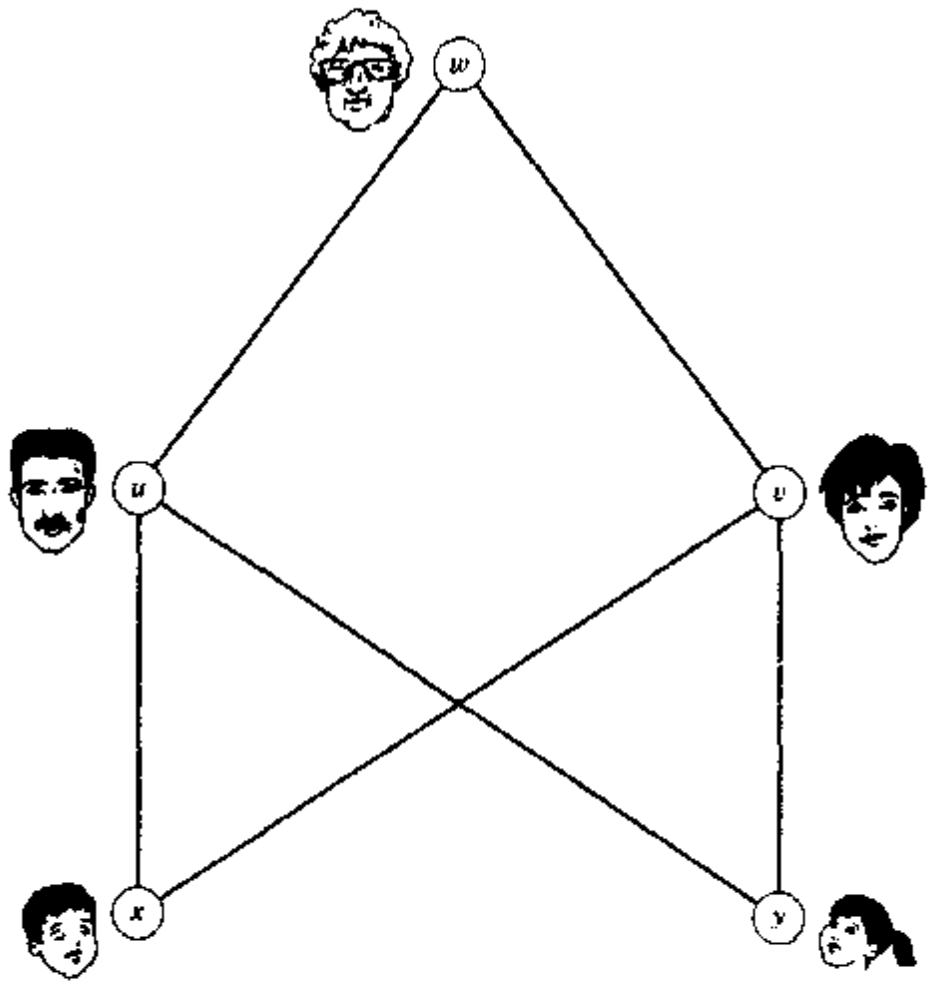


图 8.20　各变量之间的相互关系

多变量函数的链式法则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

换句话说，w 在孙子 x 身上花掉的银子，等于 w 为了 x 而在儿子 u 身上花掉的银子，加上 w 为了 x 而在媳妇 v 身上花掉的银子.

要怎么记住这么多变量函数的链式法则呢？这儿有个方法你可以试试. 欧美的有钱人经常去滑雪，所以我们可以把前面那个祖孙三代关系图，改画成雪山上的滑雪道图，图中的每一条滑雪道，都以相对应的偏导数来命名，所以从 u 滑到 x 的路径，就叫做 $\frac{\partial u}{\partial x}$，依此类推. 如果我们要知道 $\frac{\partial w}{\partial x}$，意思就是我们想从山顶上的 w 点，滑雪滑到山脚下的休息站 x（图 8.21）.

有一点要特别记住！我们必须滑过每一条可能的滑雪道. 在此例中，经过 u 的路径是 $\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$，而经过 v 的路径为 $\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，所以合起来我们得到

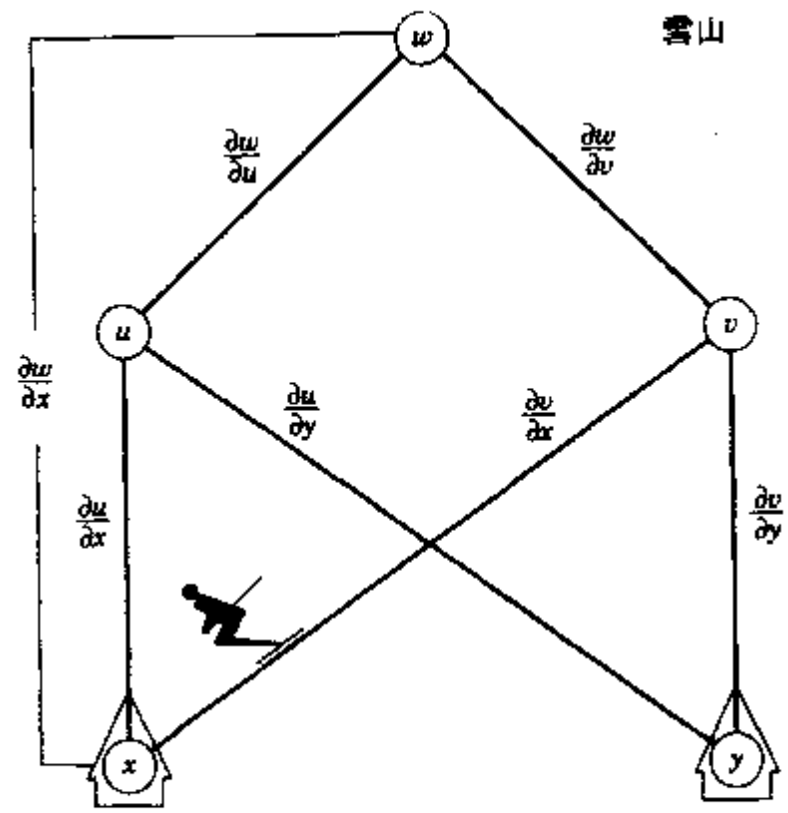


图 8.21 滑雪滑出了链式法则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同理，我们若要从 w 点滑到另一处休息站 y，我们的路径就是：

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

让我们试一个例子，看看如何应用这个链式法则.

例题 1 设 $w=u^2v+7v-u$，如果 $u=2x^2y$，$v=x+y^2$，试求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

解：依照滑雪道分析图，我们知道

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=(2uv-1)(4xy)+(u^2+7)(1).$$

把 u 和 v 分别用其含 x、y 的式子代入，让上式完全以 x 和 y 表示：

$$\frac{\partial w}{\partial x}=[2(2x^2y)(x+y^2)-1](4xy)+[(2x^2y)^2+7]=$$

$$20x^4y^2+16x^3y^4-4xy+7\ .$$

当然，你也可以先把 x 和 y 表示的 u 和 v，分别代进 w，使 w 变成 x 和 y 的函数，然后再取偏导数 $\frac{\partial w}{\partial x}$. 但是也有许多难办的情况，链式法则的主要用途，就是在帮助我们在这些情况下也行得通.

嘿！好香啊，你在做鲑鱼烧豆腐呀？

8.8　梯度与方向导数

现在我们要来见识见识这个叫做梯度的东西. 其实它也没啥了不起的地方，说穿了不过是用来标记两个一阶偏导数，故意取了一个很特殊的名称. 稍微高级些的服饰店最懂这一招. 一件牛仔衬衫，随便放在一个普通塑料袋里，仍是牛仔衫衬. 但是若肯花点工夫，用几根大头针和硬纸板，把它折叠得整整齐齐，然后用柔软的棉纸包好，放进黑色与金色交错的漂亮盒子里，外面再饰以金色的缎带，突然间，它就摇身一变，成了三倍价钱的 Calvin Klein 衬衫，虽然骨子里仍然是原来那件衬衫. 现在，我们也要来如法泡制，把一阶偏导数用个漂亮的向量包装起来. 不过请读者们尽管放心，我们保证不另外收费.

何谓梯度？

函数 $f(x,y)$ 的梯度就定义为：

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

我们也经常把它写成：$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$. 这种写法看起来虽然累赘，但是待会儿你就会发现它真好用.

例题 1　求 $f(x,y) = x^2y^3 - 3x$ 的梯度.

解：这个容易. 由于 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 3$，及 $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$，所以

$$\nabla f = (2xy^3 - 3, 3y^2x^2).$$

如果给你的函数有三个变量，即 $f(x,y,z)$，那么它的梯度也跟着多出一

项：

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

嘿，你通常都是用什么拔鸡毛的呀？

方向导数

前面讲到爬山的时候，我们说$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$分别是在$x$和$y$方向上的切线斜率. 但是$x$和$y$只是无数多个方向的其中两个，万一我们对南西方的地形变化率情有独钟，比别的方向更有兴趣，那该怎么办？我们要如何求得这些其他方向上的斜率呢？

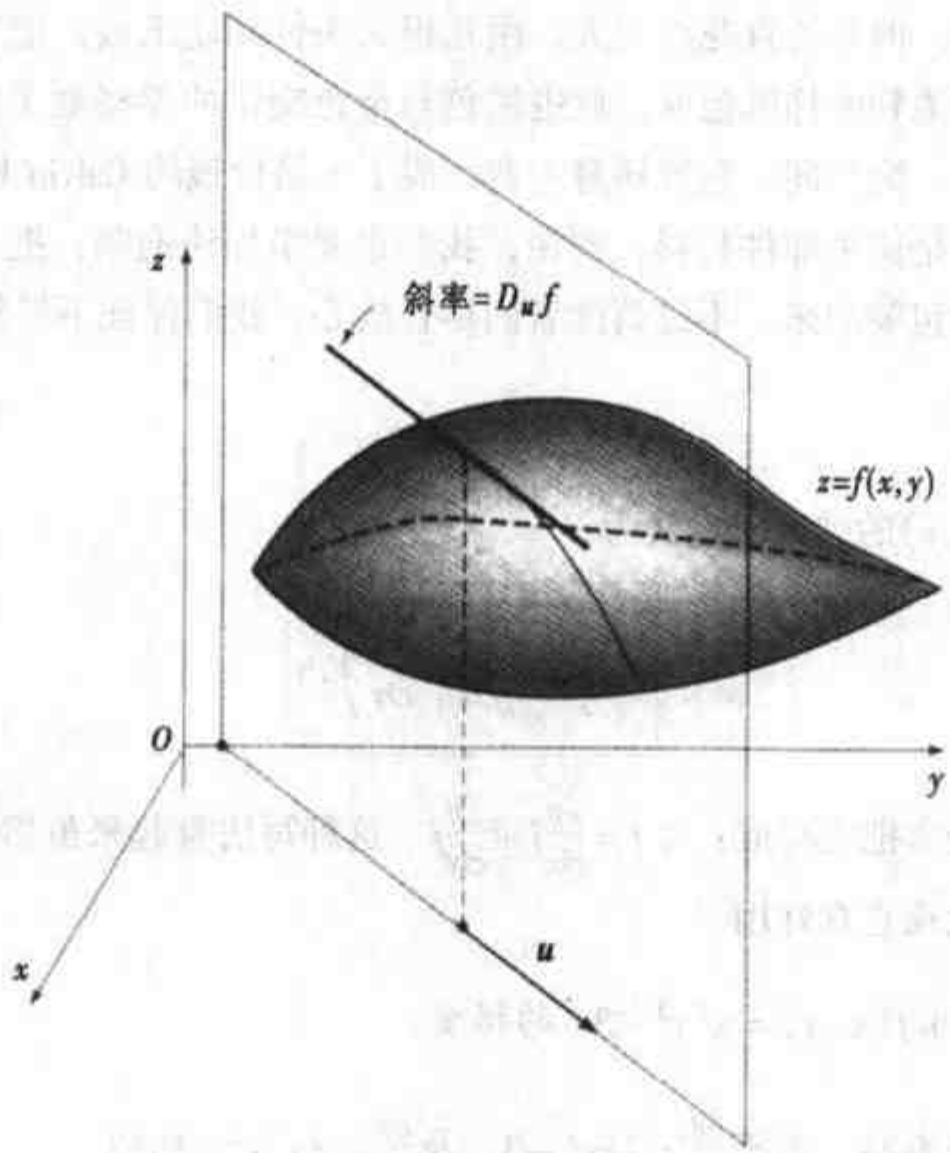


图 8.22　所谓方向导数，就是在包含 u 的垂直平面上的那条切线之斜率

首先，在 xOy 平面上取一个单位向量，并称它为 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$. 一般说来，取名为 u 有些不太礼貌，因为洋人习惯上不会直接用“Hey u!”来称呼别人，但是为向量取名字，就用不着计较那么多. 由于它是个单位向量，所以 $u_1^2+u_2^2=1$，至于它的方向，则可以指向 xOy 平面上的任何一个方向.

然后，我们把函数在 $\boldsymbol{u}$ 所指的方向上的变化率，定义为方向导数，而以符号 $D_u f$ 表示之. 换句话说，$D_u f$ 就是在包含 $\boldsymbol{u}$ 的垂直平面上的那条切线的斜率，如图 8.22 所示. 但是要如何求得这个斜率呢?

这儿是方向导数 $D_{\boldsymbol{u}}f$ 的公式:

$$D_{\boldsymbol{u}}f=\nabla f\cdot\boldsymbol{u}.$$

如果把它展开，就得到

$$D_{\boldsymbol{u}}f=\nabla f\cdot\boldsymbol{u}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(u_1,u_2)=\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2.$$

哇！通过同一点的切线何其多，然而有了上面这个公式之后，所有的切线斜率都可以用$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$来表示.

那么，这个公式又是从哪儿来的呢? 它是取下面这个极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tu_1,y+tu_2)-f(x,y)}{t}$$

而得来的. 所以你瞧，这个导数原来也是以一个极限来加以定义，就与单变量函数的导数相同. 但是也与单变量函数的情况一样，我们取偏导数时，几乎从来不必用到这个极限公式.

方向导数 $D_{\boldsymbol{u}}f$ 所衡量的物理量，就是当我们顺着 $\boldsymbol{u}$ 的方向，以单位速率运动时，f 的变化率.

现在让我们实地来试试好了.

例题 2　如果我们在一座小山上，这座山各点的高度，可用函数 $f(x,y)=3x^2+4y^2$ 来表示. 已知我们现在所在的位置是(1,2,19)，试求在方向 $\boldsymbol{a}=(3,4)$ 上的坡度（即方向导数）.（所有单位均为英尺）

解：虽然 $\boldsymbol{a}=(3,4)$给了我们一个在 xOy 平面上的方向，但它并不是单位向量，所以我们得先把它改一下，换成：

$$u = \frac{a}{|a|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = (3/5,4/5).$$

同时，我们可以计算出梯度

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (6x,8y).$$

由于我们只对我们所在的点(1,2,19)有兴趣，所以

$$\nabla f(1,2) = (6,16).$$

于是，

$$D_u f = \nabla f \cdot u = (6,16)\cdot(3/5,4/5) = 16\frac{2}{5}.$$

这表示这座山朝此方向非常陡峭，如果你想要向前跨出 1 英尺，高度就会上升超过 16 英尺．看来你的确需要一些登山装备．

常犯的错误

1．忘了把所给的方向向量改成单位向量．

2．误以为此类问题里的梯度向量为一个三维向量，实际上它只是 xOy 平面上的向量．

重回圣母峰 天气迅速转坏，没多久，你就发现自己身处一场大风雪之中，能见度变得只能看到大约 10 英寸之内．芬兰籍的队长已经从高处攀爬到你身边，虽然无法看得很真切，但直觉上你认为这家伙不怀好意，八成是想把你推下山去，所以你死命抓住岩石不放，而他一面在你耳边喊着你听不懂的话，一面要把你的双手掰开．为了保护小命，你非但不肯松手，还抽空踹了他几脚．你心里还一直后悔，这哪是你当初想的快乐假期？

终于，这位队长放弃了，把两臂向上一举，表示厌恶，然后一脚踩出了山崖．接着你看见他一屁股往白雪覆盖的陡坡上一坐，像溜滑梯一样往下滑，这时你才醒悟过来，他刚才是一番好意，要你跟着他，趁着新下的雪，取山坡坡度最大的方向，一块溜回营地去，可惜语言不通，理解错了．

这下子可好，你把人家踢走了，而且事出突然，能见度又差，你实在没看清楚他是朝哪个方向溜走的，不知道哪个方向的坡度最大．好在你的微积分还没有完全还给老师，同时你也清楚记得，这座山在你所处的这一带，差不多可以用函数 $f(x,y) = y^3 - 3x^2y$ 来表示，而你的所在位置是(2,4,16)．你记得微积

分课本曾告诉你：

> 最速上升的方向跟 ∇f 的方向一致，而且在此方向上，方向导数的大小为 $|\nabla f|$. 反之，最速下降的方向是 $-\nabla f$ 的方向，而此方向上的方向导数等于 $-|\nabla f|$.

不过，在这么恶劣的情况下，你觉得还是想清楚一些，比较保险，至少要证明你没把符号给弄颠倒了.

理由？ 你的目的是要找出能够获得最大方向导数 $D_u f$ 的单位向量 $\boldsymbol{u}$，原因是方向导数愈大，相对应的切线斜率也愈大. 但是方向导数的定义是

$$D_u f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = |\nabla f||\boldsymbol{u}|\cos\theta$$

其中的 θ 为 $\boldsymbol{u}$ 跟 ∇f 的夹角（见本书第 5.4 节）.

由于 $\boldsymbol{u}$ 为单位向量，所以 $|\boldsymbol{u}| = 1$，因而

$$D_u f = |\nabla f|\cos\theta$$

在这儿我们要找出一个 $\boldsymbol{u}$，让 $D_u f$ 为最大. 然而 $|\nabla f|$ 不受 $\boldsymbol{u}$ 的影响，故对 $D_u f$ 来说，唯一能影响其大小的是 $\cos\theta$. 每个人都知道，$\cos\theta$ 绝对不会大于 1，因此当 $\cos\theta = 1$（即 $\theta = 0$）时，$D_u f$ 为最大值. 而如果 $\boldsymbol{u}$ 跟 ∇f 的夹角等于 0，表示它们根本就是同一方向. 因此，我们证明了，方向导数的最大值就发生在我们顺着 ∇f 的方向时；这时，由于 $\cos\theta = 1$，我们得到 $D_u f = |\nabla f|$.

同理，如果我们想得到方向导数的最小值，我们就要取 $\cos\theta = -1$，故 $\theta = \pi$，意思就是 $\boldsymbol{u}$ 跟 ∇f 的方向正好相反，或是跟 $-\nabla f$ 同方向. 这时，由于 $\cos\theta = -1$，故 $D_u f = |\nabla f|$.

经过了这么一番推敲之后，你确定你的记忆没错，于是你开始计算梯度：

$$|\nabla f| = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-6xy, 3y^2 - 3x^2).$$

由于你的所在位置是(2,4,16)，所以会得到 $\nabla f = (-48, 36)$. 但是这是最大的上坡方向，而你要找的却是下坡方向，所以应该是

$$-\nabla f = (48, -36).$$

计算完之后，你掏出指南针，对准了方向，也一屁股往地上一坐，开始往下溜. 你实际上是坐在你那条高科技的登山裤裤裆上，雪花从你的裤裆中间不断喷上来. 一路上大部分时间都非常顺畅过瘾，只是偶尔有一两个稍大了点的

石块，雪没能把它们完全覆盖住，却刚好从你的胯下高速撞过，除哎哟大叫一声之外，还让你不由得怀疑这辈子是否会因此断了香火！

值得一提的是，对于变数更多的函数，梯度也一样能告诉你坡度最大的上坡方向.

例题 3 假设你是负责核反应堆的工程人员，某天在工作时喝百事可乐，一个不留神，把可乐泼到控制仪表板上面，不料造成了严重的机件失控，有可能引发熔毁的大灾难. 于是你接到上级指令，赶紧穿上防护衣，进入反应堆的防护室，要去用手开启失灵的遥控安全水阀. 假定函数 $T(x,y,z)=30x^2z-y+yz^3$ 代表着核反应堆里任何一点 (x,y,z) 的温度，而且已知你现在已经走到了坐标位置 $(1,1,2)$ 英尺，已经热得叫你有些吃不消，试判定你下一步朝哪个方向走时，温度增加得最快？

解：如果算出你现在位置的 ∇T，你就能知道在哪个方向温度会增加得最快：

$$\nabla T=\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y},\frac{\partial T}{\partial z}\right)=(60xz,-1+z^3,30x^2+3yz^2)=(120,7,42).$$

这下子就知道该避开哪个方向了. 若往这个方向走，温度的变化率会等于 $|\nabla T|=\sqrt{120^2+7^2+42^2}\approx 127°$，意思是你要是往这个方向前进，每前进一步（约 1 英尺），温度就会上升 127°. 所以你若不想变成一根核炸薯条，就切莫过去.

8.9 拉格朗日乘数

在真实世界里，你最常遇到的问题类型之一，就是在受限于方程式 $g(x,y,z)=0$ 给定的约束条件下，求出函数 $f(x,y,z)$ 的最大值或最小值.

属于这个情况的不同版本有：

1. 限定你必须吃掉离你嘴巴 300 米内的巧克力甜点，然后要求你仍然能保持最轻的体重.

2. 你根本无法在上午 11 点之前上班，或是不能迟过下午 3 点才下班，而

且希望午饭时段最好有 2 个小时——而你在上述条件之下，要求老板给你最高的薪资.

3. 在你能够活过 30 岁的条件下，看你最多能晒到多黑.

我们已经在第 8.6 节中，看到该如何在$g(x,y,z)=0$约束之下，求$f(x,y,z)$的最大值. 方法是先求解约束方程式里的其中一个变量，譬如 z，把它表示成其他两个变量；然后把这个式子代入函数 f，借它消掉$f(x,y,z)$中的变量 z，变成$f(x,y)$. 最后，取$f(x,y)$对 x 及对 y 的偏导数，并且令 $f_x=0$ 和 $f_y=0$，由此求出临界点.

可是，这个方法有个先决条件，那就是所给的约束方程式，其中的一个变量必须能够表示成另外两个变量. 如果我们的约束方程式长得有如：

$$x^2y^3-\sin(xyz)+e^xy+\ln(2x^2-y+z)=0,$$

那么，你试都不用试，因为你根本不可能把式子中的 x、y、z 里面的任何一个，用其他两个变数来表示. 这等于是叫你“挟泰山以超北海”，压根儿办不到的事情.

那么你猜，一个当母亲的人遇到了这个难题，会怎么办呢?

你别笑！生于意大利的 18 世纪法国数学家拉格朗日（Joseph Louis Lagrange）的老妈就碰到了这样的问题. 某天，她转头问小拉格朗日说：“小路，你能想个办法，解决这个问题吗?”她其实是用法文问的，不过大意差不多同上. 那个年纪的拉格朗日，还是个乖儿子，为了讨母亲高兴，可以无所不用其极（譬如新创一个艰深的数学概念）. 因此，拉格朗日回到房间，开始想办法解决妈妈的问题.

20 年后他再开房门走出来时，已经发明了一个方法：拉格朗日乘数. 悲惨的是，在他独自闭关的那些年，他的妈妈遇到了一位来自里昂的肉品店老板，名叫杰克，此人竟然把老妈给拐跑了！所以当小拉格朗日开了房门走出来时，发现自己已是孑然一身. 这故事挺伤感的，不过话说回来，至少后人沿用了他的姓氏，来称呼他所发明的方法，可说他的 20 年青春并未白忙一场!

〔英文版老编郑重声明：据我们所知，在上面这则故事中，除了拉格朗日的确发明了拉格朗日乘数之外，其他各情节纯属虚构. 为此我们深感抱歉!〕

言归正传. 在受限于$g(x,y,z)=0$的约束下，拉格朗日求$f(x,y,z)$最大值或最小值的方法是这样的：

第 1 步：一定要确定所给的约束方程式符合 $g(x,y,z)=0$ 的形式．所以，我们得把 $x^2+y^2=z^2$ 改写成 $g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$；

第 2 步：令 $\nabla f=\lambda\nabla g$；

第 3 步：解上述的方程式组，找出 x、y 和 z；

第 4 步：判定第 3 步得到的解，究竟谁是最大值或最小值．

看起来蛮简单．让我们拿一个实际问题来，试试实效如何．

例题 1 假设方程式 $x^2+y^2+z^2=1$ 表示地球的表面，且北极的坐标位置为 $(0,0,1)$，而厄瓜多尔的位置为 $(1,0,0)$．现在我们假设有某个外星种族，对着地球照射了一种增进心智能力的射线，而该射线的强度分布情形，可以用 $f(x,y,z)=xy+z$ 来表示．结果，住在该射线最强的地球表面的人们，个个都变成了爱因斯坦，而居住在该射线强度最弱区域的人们，智能变得跟鼻涕虫差不多．试找出地球表面上遍地皆天才的坐标位置在哪？

解：这时，咱们该求助于拉格朗日了．在这个题目里，我们想求 $f(x,y,z)$ 的最大值，而约束方程式是 $x^2+y^2+z^2=1$．

第 1 步：确定所给的约束方程式符合 $g(x,y,z)=0$ 的形式．这是非常非常重要的一步，也是许多人最常犯的错误．在此例中，我们得把所给的方程式改成 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ 的形式．

第 2 步：令 $\nabla f=\lambda\nabla g$．其实这个式子并没有什么玄机，不过就是：

$$f_x=\lambda g_x,\qquad \text{因而 } y=\lambda 2x;$$

$$f_y=\lambda g_y,\qquad \text{因而 } x=\lambda 2y;$$

$$f_z=\lambda g_z,\qquad \text{因而 } 1=\lambda 2z.$$

第 3 步：解上一步所得到的三个方程式（以及约束方程式），求 x、y 和 z．这里的四个方程式，牵涉到四个未知数，包括 λ，如果你想把它们四个都解出来，尽管解．方法不只一种．在此，我们将从第三个方程式 $1=\lambda 2z$ 着手，求解 λ．由于 $1=\lambda 2z$，我们知道 z 不等于 0，所以可以把等号两边同除以 $2z$，而得到

$$\lambda=\frac{1}{2z}.$$

我们把它代入前两个方程式，消掉其中的 λ：

$$y = \frac{x}{z},$$

$$x = \frac{y}{z}.$$

其次，把 y 式代入 x，我们得到

$$x = \frac{x/z}{z},$$

$$xz^2 = x.$$

所以有两个可能的解：$z^2 = 1$ 或 $x = 0$. 但是若 $x = 0$，$y = x/z = 0$，再把 x、y 代入约束方程式，结果得到 $z^2 = 1$. 所以事实上，它们根本就是同一个解，都是 $z^2 = 1$.

由于 $z^2 = 1$，z 可以是 1，也可以是 -1，但不管是哪种情形，x 和 y 都等于 0. 所以我们得到两个临界点：(0,0,1)和(0,0,-1)，前者是北极，后者则是南极. 把这两点分别代入 $f(x,y,z)$后，我们发现$f(0,0,1) = 1$，而 $f(0,0,-1) = -1$，由此看来，在不久的将来，北极会出现一些非常有智慧的北极熊，而目前正在南极做研究的科学家，个个都会变成白痴. 至于住在两极之间的你我，大概会维持老样子，继续热中于观赏电视上的职业摔跤节目.

那么，关于拉格朗日乘数的问题究竟难在哪儿?

你可能认为，最不容易摆平的地方在于问题的设定阶段. 其实不然，问题的设定通常一点也不难对付. 难解的部分是在接下来的阶段，当你开始解那四个带有四个未知数 x、y、z 和 λ 的方程式时. 可有比较容易的解法吗?

其实没有什么捷径可言，不过倒是有两个途径，写出来供大家参考.

方法 1：逐次消掉变量，一次一个. 你可以选其中一个方程式，解出 x，然后把它代进其他三个方程式，去把其中的 x 消掉，这样一来，就剩下三个方程式和三个未知数 y、z 和 λ. 重复以上步骤几次，直到你得到一个带有单一未知数的方程式，解出此未知数.

方法 2：利用你得到的方程式，把三个变量 x、y、z 都写成和 λ 的关系式. 接着，把这些式子代进约束方程式，求得一个只含未知数 λ 的方程式. 最后求出 λ，再由此求得 x、y 与 z.

解方程式时常犯的错误

1．我们经常看到，许多人一看到形式如 $h(x)=0$ 和 $k(x)=0$ 的两个方程式时，便贸然设定 $h(x)=k(x)$．殊不知他（她）这个看似无害的设定，让许多信息就此流失．怎么说呢？让我们打一个比方．好比你告诉大伙："这只牛是紫色的"．然后接着又说："那匹马是紫色的．"那么会比你只用一句话告诉大伙："这只牛和那匹马的颜色一样．"要隐含更多的信息，引发更多的好奇心．这里也是同样的道理．

2．许多学生一遇到了 $x=\lambda x$，就会自动把等号两边的 x 相抵消，然后接着说："$\lambda=1$．"但实际上，此举相当于等号两边同除以 x，而这只能在你确知 $x\neq 0$ 的情况下才能实施．因而，可能的解不仅只有 $\lambda=1$，还应该有 $x=0$ 才对．

到此为止，我们总算把有关拉格朗日乘数的一切交代得差不多了．嘿！有得吃就不错啦，谁在乎这乳酪是怎么存放的？

8.10 二阶导数检验

你应该还记得，在讨论单变量函数时，有个著名的二阶导数检验，可用来判定最大值和最小值．如果不记得了，我们现在就要唤起你的记忆．

函数 $f(x)$ 的二阶导数检验

如果 a 是 $f(x)$ 的一个临界点，亦即 $f'(a)=0$，那么：

1．若 $f''(a)>0$，则 $f(a)$ 为一局部极小值．

2．若 $f''(a)<0$，则 $f(a)$ 为一局部极大值．

3．若 $f''(a)=0$，则这个二阶导数什么都没告诉我们．

整个检验的结果，可浓缩成蜜妮和麦斯威尔的小脸蛋，如图 8.23 所示．他们两人的眼睛，显示了 $f''(a)$ 的正负号．如果眼睛是两个正号，表示此人很快乐，露着一副笑脸，嘴角上翘，这就代表一个局部极小值．反之，若眼睛是两个负号，此人一定很悲伤，眉头紧皱，嘴角下弯，也就表示是个局部极大值．

现在，我们要来瞧瞧含两个变数的函数了．假设我们已经在满足 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 的平面上，找到了一个临界点（a，b），那么我们该如何决定，此临界

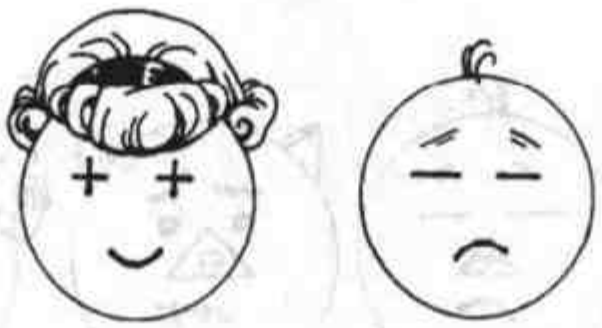


图 8.23　蜜妮和麦斯威尔的脸孔告诉我们，我们得到的是局部极小值还是局部极大值

点究竟是局部极大值还是局部极小值，抑或什么都不是呢？

首先，我们得用二阶偏导数，来定义所谓的判别式．

> 函数 f 的判别式，就等于 $\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$．

以下这个检验，跟上述的二阶导数检验类似，只是多了一维．

> **函数$f(x,y)$的二阶导数检验**　若(a,b)是$f(x,y)$的一个临界点，则：
>
> 1．如果 $\Delta > 0$，$f_{xx} > 0$，则 f 在点(a,b)有一局部极小值．
>
> 2．如果 $\Delta > 0$，$f_{xx} < 0$，则 f 在点(a,b)有一局部极大值．
>
> 3．如果 $\Delta < 0$，则 f 在点(a,b)既不是极小值，也不是极大值，而是一个鞍点．
>
> 4．如果 $\Delta = 0$，则此二阶导数检验完全不能告诉我们任何信息．

此处有两件事情需要注意．第一，有些奇怪的是，作为关键角色的二阶导数居然是 f_{xx}，而非 f_{yy}．但是事实上，在第一及第二部分，我们也可以用 f_{yy} 取代 f_{xx}，因为当 $\Delta > 0$ 时，f_{yy} 与 f_{xx} 的正负号相同．其次，刚才我们并没有考虑到一种情形，那就是当 $\Delta > 0$ 且 $f_{xx} = 0$ 时会是如何，但从 Δ 的定义来看，很容易看出此情形不可能发生．

当然，你心里可能会直嘀咕：真要命，一会儿这个是正的，一会儿又是那个是正的，我哪记得住这四种可能的结果？哈！算你运气不错，因为我们也替它们搭配了四副脸谱，并分别取名叫蜜妮、麦斯威尔、糊涂猪和疯狂小丑．

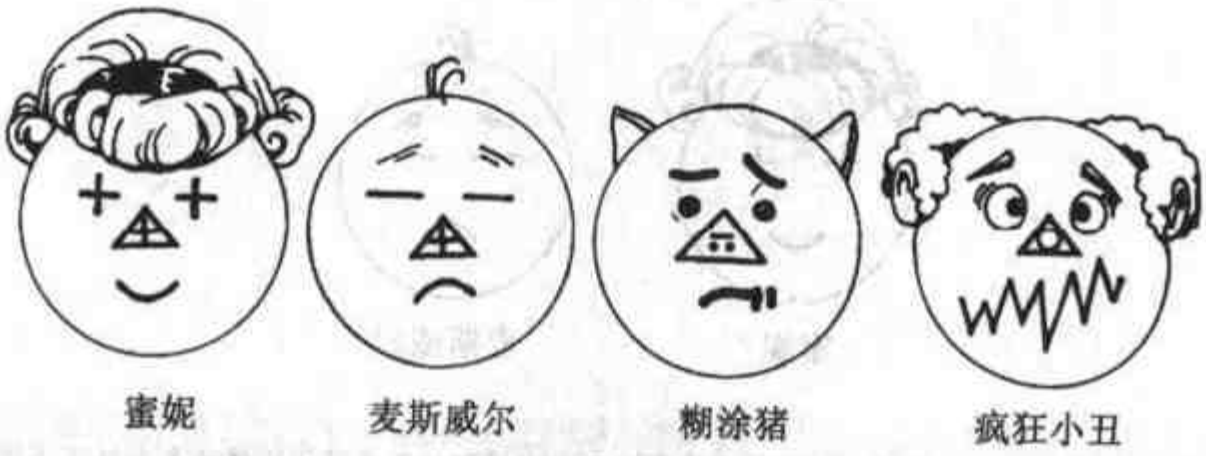


图 8.24 适用于$f(x,y)$的二阶导数检验结果

如图 8.24 所示，每一副脸上的鼻子代表了判别式 Δ 的正负，而眼睛则代表了 f_{xx}的正负. 前两副脸与单变量函数版本里的蜜妮和麦斯威尔几乎一样，只是各多出一个带正号的鼻子. 糊涂猪的脸上有个带负号的猪鼻子（Δ），因此它的嘴形为马鞍状的. 疯狂小丑则有一个圆球状的鼻子（$\Delta=0$），而它的嘴形完全没有透露任何讯息.

好啦！让我们实际举个例子试试.

例题 1 试找出以下函数的所有临界点，并一一分类：

$$f(x,y)=2x^3+y^3-3x^2-12x-3y.$$

解：首先，取一阶偏导数：

$$f_x=6x^2-6x-12,$$
$$f_y=3y^2-3.$$

然后分别令它们为 0：

$$6(x-2)(x+1)=0,$$
$$3(y-1)(y+1)=0.$$

所以，$x=2$ 或 $x=-1$，以及 $y=1$ 或 $y=-1$，由此得到四个临界点，分别为$(-1,-1)$、$(-1,1)$、$(2,-1)$及$(2,1)$.

再取二阶偏导数，我们得到

$$f_{xx}=12x-6,$$
$$f_{yy}=6y,$$

$$f_{xy}=0.$$

所以

$$\Delta=(12x-6)(6y)-(0)^2=36y(2x-1).$$

我们把该四个临界点的所有有关信息，列表于下：

临界点	$f_{xx}=12x-6$	$\Delta=36y(2x-1)$	该点性质
$(-1,-1)$	-18	108	局部极大值
$(-1,1)$	-18	-108	鞍点
$(2,-1)$	18	-108	鞍点
$(2,1)$	18	108	局部极小值

嘿！这可不是蒙着眼睛瞎胡闹，而是有凭有据的！



第9章

多重积分

费巴尼看起来的确很可疑．怎么说呢？咱们且到学生法庭现场，听听学生法律事务检察官的说法："我基于以下证据，确实相信该生考试作弊．在他的微积分期中考试卷上，他写的答案简直可以说是无懈可击，不但在极坐标、柱面坐标及球面坐标上，毫无错误地算出二重积分和三重积分，而且他居然还在考卷上，从黎曼和的观点对二重积分的正式定义做了精辟的讨论，而该次考试的试题中，压根儿没有这一题．然而事后我们发现，他不知道如何做直角坐标上的简单二重积分，更离谱的是，现在他连一个实心半球的质心在哪儿都说不上来．这些矛盾的唯一解释就是，该考生期中考试时作弊．"

主持这场听证会的教授转向费巴尼说："费同学，你对这项指控，有什么话要说?"

"我有!"费巴尼慢条斯理、不慌不忙的回答．各位！他被控的罪名可是非常严重，一旦宣判成立，学校就会把他开除．这时候会场里一片肃然，鸦雀无声，连一个希腊字母掉到地板上都听得见．"我确实没有作弊．原因是，去考试的那个人根本不是我，而是我的另一重人格，他叫做福瑞德．福瑞德对二重积分和三重积分非常在行，而我刚好相反．"

此语一出，法庭里顿时议论纷纷，一片嘈杂．最后，费巴尼被判为多重积分症．

∀

为了确保这种事情永远不会发生在你的身上，让我们来搞清楚多重积分这

玩意儿.

究竟什么是多重积分呢？简单的说，多重积分就是…个黎曼和在平面或空间中一个区域上的极限. 什么？你说你像鸭子听雷，又没有听懂？也许这个解释太简短了点.

我们先温习一下积分是啥. 其实仅仅用一个词就可以概括了，那就是乘积. 原因是，我们用积分去计算的东西虽然零零散散、五花八门，然而总离不开乘积，诸如面积（宽×高）、功（力×距离）、收益（卖掉的单位数×单价）等等. 你说乘积有啥稀奇？小学三年级时不就学过了？不错，只是那时候学的是两个固定的数的乘积而已.

现在有了积分，我们可以计算一些更有趣的东西. 就拿最简单的面积（宽×高）来说，我们不再只是计算高固定不变时的面积，而是高度可以变化时的面积. 在我们计算所做过的功时，不再限定需要固定不变的压力，而且只能在一条直线上运动，而是不但作用力可以随时改变，位移的路径也可以左弯右拐. 这些要怎么计算呢？其实就是把所有的东西切成许多小段，让上述的高、作用力或运动的方向，在这些个别小段内近似常数，如此就可以用小学三年级时学得的乘法，算出每一小段的面积或功等乘积，然后加总. 最后，我们取一个极限，看看切分得很细时会怎么样，而这个极限的值就把总和变成了积分.

在此之前，我们看到这个方法用在单变量的函数 $f(x)$上，其实同样的方法也可以用于多变量的函数，如$f(x,y)$或 $f(x,y,z)$,所得到的就是多重积分.

∀

两者之间的区别，最清楚的说明就是，前者是用在计算面积，而后者是用在计算体积. 求长方形面积的时候，我们把宽乘上高就好. 但要计算一条曲线 $y=f(x)$下方，从 $x=a$ 到 $x=b$ 之间的面积时，我们在第一学期的微积分已经看到，可以把区间$[a,b]$分成许多宽度为 Δx_i 的小段，然后把每一小段画成一个高为$f(x_i)$的长方形，而 x_i 即为第 i 小段中的一点. 这个长方形的面积就等于 $f(x_i)\cdot\Delta x_i$. 如图 9.1(a) 所示，当我们把所有分段里的长方形面积全加起来，得到的就是该曲线下方整个面积的近似值，而当我们让分段数目趋向无穷大并取其极限时，得到的积分就是实际的总面积.

我们可以利用同样的概念去计算体积. 就像总面积等于无数细长的长方形面积之和的极限，总体积也会等于无数个细长的长方盒体积和的极限. 由于每

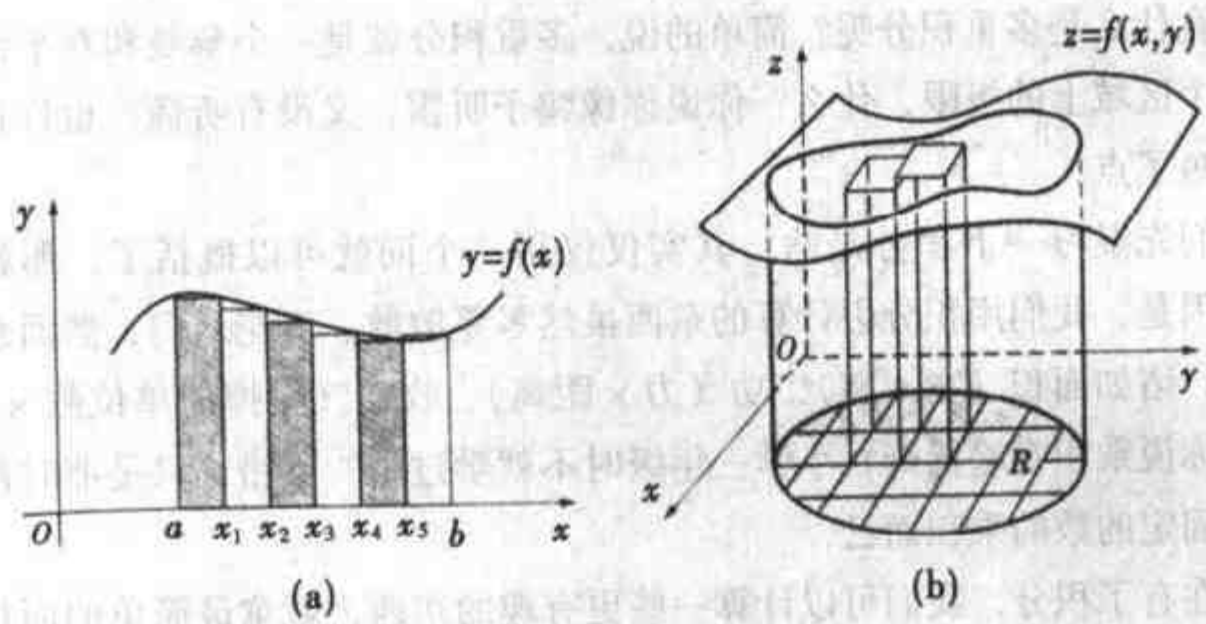


图 9.1 (a) 把面积切成细窄的长方形；(b) 把体积切成细瘦的长方盒

一个长方盒的体积都等于它的底面积×高，所以若要计算出曲面 $z=f(x,y)$ 下方并在 xOy 平面上一区域范围 R 内的体积，我们可以把区域 R 分割成许多大小为 $\Delta x \times \Delta y$ 的小长方块，其面积为 $\Delta x \cdot \Delta y$，或简写成 ΔA. 这样一来，每个小长方块的上方就有了一个长方盒，以小长方块为底，以 $f(x,y)$ 为高，其中的 (x,y) 为长方块上的某个点，于是，这个长方盒的体积就是 $f(x,y)\cdot\Delta A$. 如图 9.1(b) 所示，我们把所有细长长方盒的体积全加起来，就可以得到总体积的近似值. 如果取长方盒数目趋向无穷大时的极限，得到的就是该曲面下所围的实际体积.

同样的概念还可以进一步应用到其他许多数量的计算上，如总质量（体积×密度）、总雨量（面积×单位面积雨量）等等. 多重积分背后的最主要概念，就是把某个区域划分成许多很小的区域，让函数值在每个小区域中几乎可以看成是常数，然后让每块小区域的面积乘以该区域的函数值.

当然除了概念之外，我们还需要懂得实际的运算. 这倒不难，譬如计算二重积分，不过是把我们已经熟知的积分，连续做两次而已，而三重积分也只是连续做三次积分. 除了一两个技术问题可能需要顾及之外，多重积分的计算对我们来说，可以说是驾轻就熟.

9.1 二重积分与极限：技术方面的东西

二重积分的精确意义，可以用一个黎曼和形式的公式表示：

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i .$$

看起来虽然吓人，但它只是黎曼和这概念的又一次套用而已．我们把区域 R（叫做底）划分成许多面积各为 ΔA_i 的小长方块，然后在每个小方块上任选一点 (x_i,y_i)．每个小长方块将成为一个细瘦长方盒的底．

函数 f 在点 (x_i,y_i) 的值分别为其对应长方盒的高，因此每个长方盒的体积为 $f(x_i,y_i)\Delta A_i$，而所有长方盒体积的总和就是

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i .$$

这个总和给了我们一个近似值．如图 9.2 所示，当这些长方盒的数目 n 相当大的时候，这个和也就近似于二重积分的值；而当 R 切得愈细，愈小，使得小方块数目 $n\to\infty$，然后取极限，我们就能得到二重积分 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$．

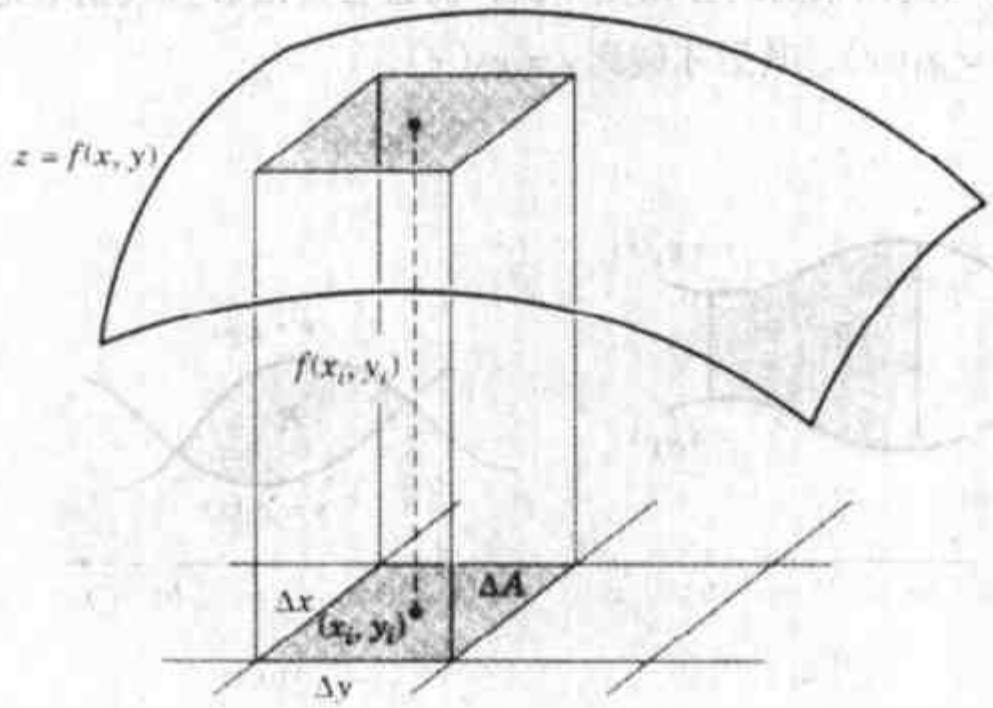


图 9.2 在每一个小长方块上方，都有一个高为 $f(x_i,y_i)$ 的长方盒

技术重点：有时候，如果函数$f(x,y)$非常难搞，或者积分区域 R 很古怪，此极限值有可能不存在．一般说来，$f(x,y)$若是连续函数，或是出现在初等微积分课本上的函数，这种找不到极限的情形不太会发生．还有一点，若要把二重积分解释为体积，你得先确定，在积分范围上的$f(x,y)$为正值．

到此，我们技术上已经知道二重积分是啥，剩下的部分就是：

* 如何着手计算；
* 它们的用途是什么．

9.2 求二重积分

二重积分的求法可以用一个词来概括，那就是：逐次积分．

区域 R 的最简单类型，就是左右夹在两条垂直线 $x=a$ 和 $x=b$ 之间，上下以两条函数曲线，$y=g_1(x)$和 $y=g_2(x)$为界的面积．如图 9.3（a）所示．这种 R 我们称为垂直简单型．要成为一个垂直简单型区域，有一点很重要，那就是在此区域内，两条函数曲线的上下位置不得互换，以图 9.3（a）的例子来说，$g_2(x)$总是在 $g_1(x)$的上方．另一个说法就是，xOy 平面上的所有垂直线，在这块区域内都与这两条曲线各相交一次，而且若是沿着直线朝上走，我们总是先碰到曲线$y=g_1(x)$，其后才碰到$y=g_2(x)$．

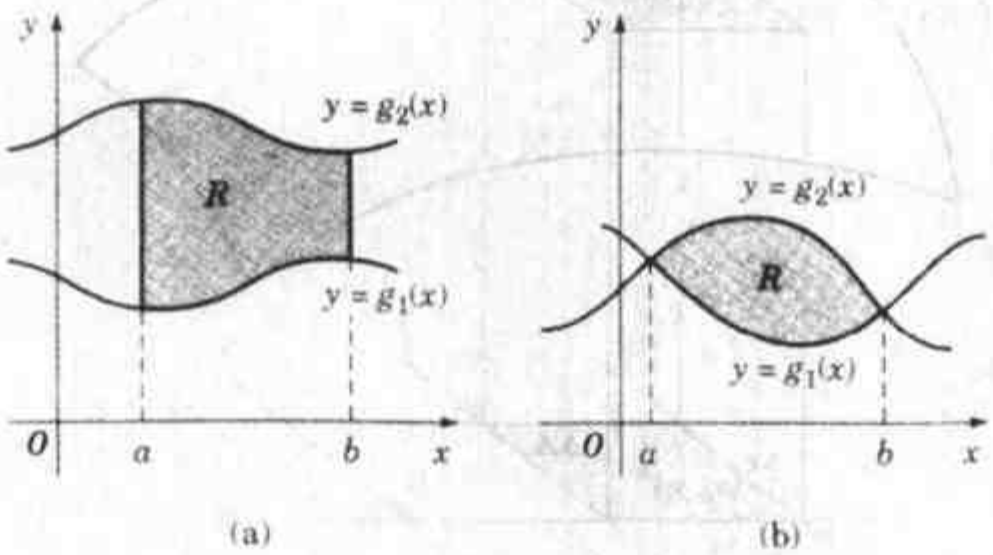


图 9.3 垂直简单型

垂直简单型也可以像图 9.3（b）所显示的那样，a 和 b 的值刚好是两条函数曲线的交点.

对这种类型的区域，我们就把二重积分写成

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x .$$

它的求法是连续作两次积分，叫做逐次积分，即

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x .$$

上述写法相当于先作括弧内的积分：

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y .$$

这时，不要把 x 当作变量，而是看成四处徘徊的常数. 等我们把括弧内的积分摆平之后，x 即刻又回复到变量的身份. 既然 x 又成了变量，第一次积分得到的式子就成了 x 的函数，于是我们可以继续下一步，对 x 进行积分.

记住，我们永远是从最里面的积分做起，一层层向外扩充. 所以，解决多重积分问题，有点像减掉身上难看的肥肉，必须由里向外才行.

写在里面积分符上的积分限，称为内限，而外边积分符号上的积分限则称为外限.

例题 1 试计算 $\int_1^2 \int_x^{x^2} (4x + 10y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

解：我们想要积分的区域（R）位在 xOy 平面上，它的下方边界为 $y = x$，上方边界为 $y = x^2$，左边为 $x = 1$，右边为 $x = 2$. 如图 9.4 所示.

当然，我们得先做内积分 $\int_x^{x^2} (4x + 10y)\,\mathrm{d}y$. 这时候，对 y 来说，$4x$ 是个常数，因而它的反导函数是 $4xy$，而 y 仍然是变量，所以 $10y$ 的反导函数是 $5y^2$. 因此

$$\int_1^2 \int_x^{x^2} (4x + 10y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^2 \Big[4xy + 5y^2 \Big]_{y=x}^{y=x^2} \mathrm{d}x =$$

（求内部的 y 积分）

$$\int_1^2 \{[4x(x^2) + 5(x^2)^2] - [4x(x) + 5(x)^2]\}\,dx =$$

（分别代入 y 的积分限）

$$\int_1^2 (4x^3 + 5x^4 - 9x^2)\,dx =$$

（进行外部的 x 积分）

$$\left[x^4 + x^5 - 3x^3\right]_1^2 =$$

$$[2^4 + 2^5 + 3(2^3)] - [1^4 + 1^5 - 3(1^3)] =$$

$$24 - (-1) = 25.$$

常见错误 把两个积分的先后次序颠倒，是一般人常犯的错误．如果你把次序搞错了，最后得到的答案很可能不是一个数，而是有可能还会剩下一些 x 或 y 在里面．所以千万记住，一定要从最里面的积分做起．

重要小事实 积分外限永远是常数．（所谓小事实，就是要么它确是事实，要么它应该是事实．）为什么它们应该是常数呢？如果不是，那在逐次积分之

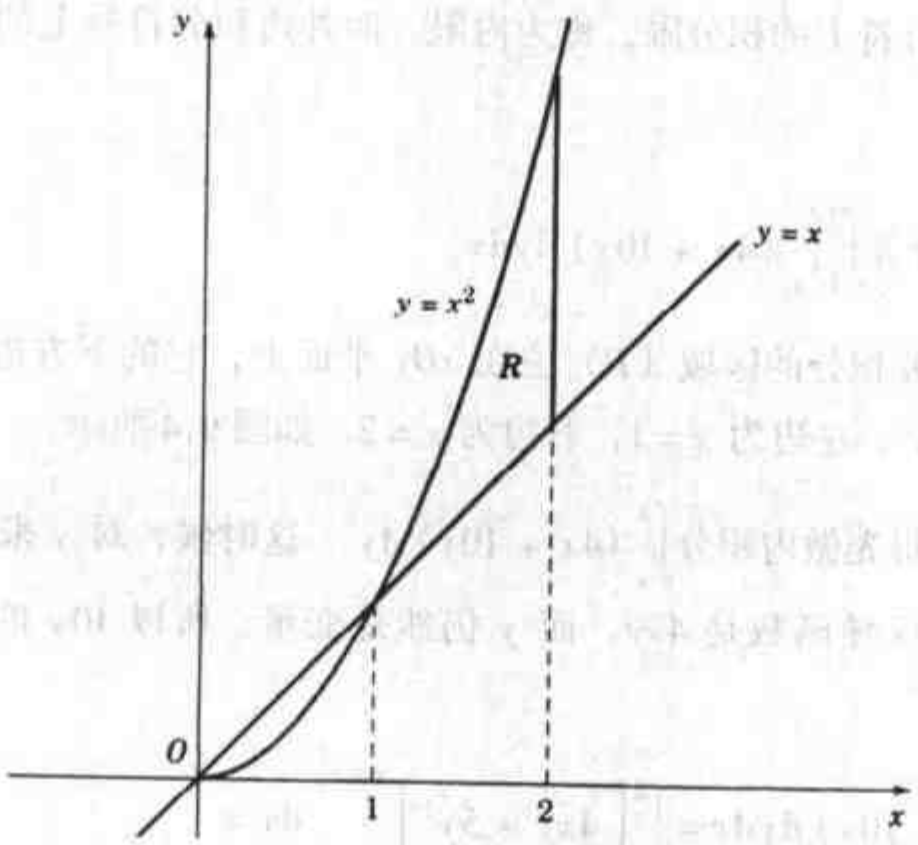


图 9.4 以 $y = x$ 和 $y = x^2$ 为边界，且夹在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 之间的积分区域

后，得到的结果有可能含有变量，因为我们最后是代入积分外限．这样一来，我们所得的答案可能不是一个数．

有的时候，题目里并没有明确告诉我们 a 和 b 在哪儿，而仅只提到界定区域 R 的上下两条曲线．

例题 2 假定 R 是以曲线 $y=x^2$ 和 $y=2x$ 为边界的区域．若 $f(x,y)=8x+10y$，试求 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ．

解：这一回，题目里没给我们两条垂直线 $x=a$ 和 $x=b$，去限制区域 R．但是如果我们画出 R 的草图（只要画得出来，一定要记得画图），如图 9.5 所示，我们就知道该怎么找出 a 跟 b．

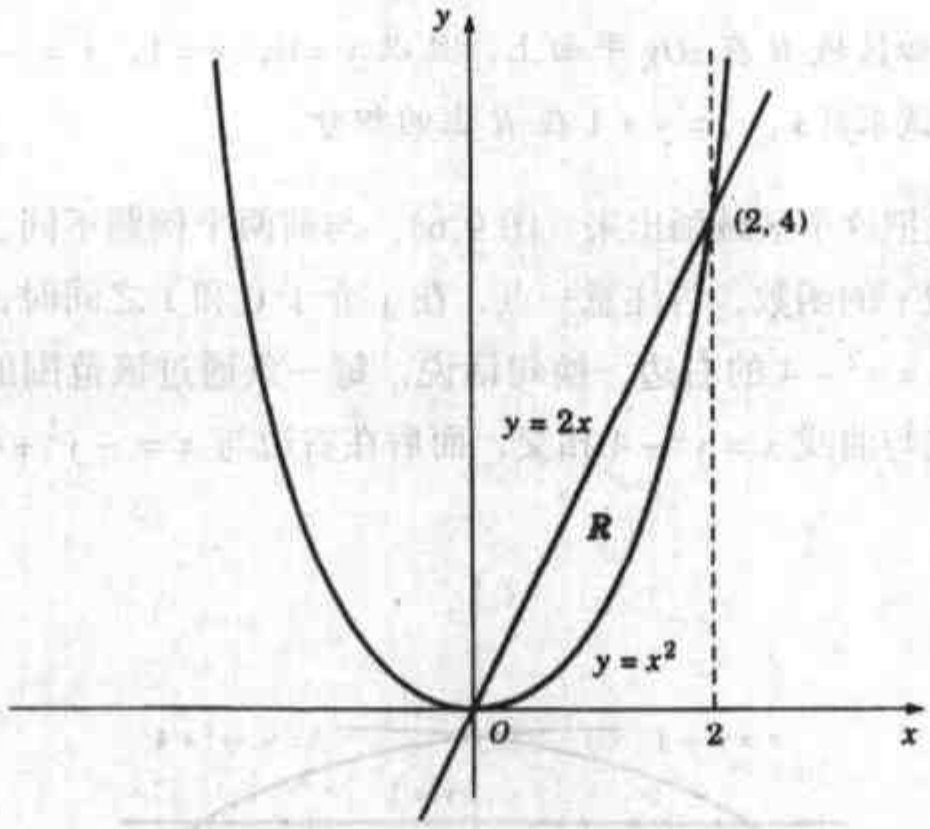


图 9.5 以曲线 $y=x^2$ 跟 $y=2x$ 为边界的区域

从图上看来，xOy 平面上的两曲线 $y=x^2$ 和 $y=2x$，相交于(0,0)和(2,4)两点，而由两曲线所围成的有限区域，就只有夹在 $x=0$ 和 $x=2$ 之间的那一块，所以它就是我们所要的区域 R，而且属于垂直简单型，所以我们可以得到

下列二重积分：

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(8x+10y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\ .$$

由内往外积分，就得到

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(8x+10y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^2\Big[\,8xy+5y^2\,\Big]_{y=x^2}^{y=2x}\mathrm{d}x=(\text{求内部的 }y\text{ 积分})$$

$$\int_0^2[(16x^2+20x^2)-(8x^3+5x^4)]\,\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^2(36x^2-8x^3-5x^4)\,\mathrm{d}x=\Big[\,12x^3-2x^4-x^5\,\Big]_0^2=$$

$$[12(8)-2(16)-32]-0=32\ .$$

对某些积分区域来说，x 与 y 所扮演的角色会互换.

例题 3 已知区域 R 在 xOy 平面上，且以 $y=0$，$y=1$，$x=-y^2+4$ 及 $x=y^2-4$ 为边界，试求 $f(x,y)=y+1$ 在 R 上的积分.

解：我们先把这个区域画出来（图 9.6）. 与前两个例题不同，这次的边界曲线是把 x 写成 y 的函数. 再注意一点，在 y 介于 0 和 1 之间时，$x=-y^2+4$ 的图形都位于 $x=y^2-4$ 的右边. 换句话说，每一条通过该范围的水平线，都一定是在左边先与曲线 $x=y^2-4$ 相交，而后在右边与 $x=-y^2+4$ 相交. 这样

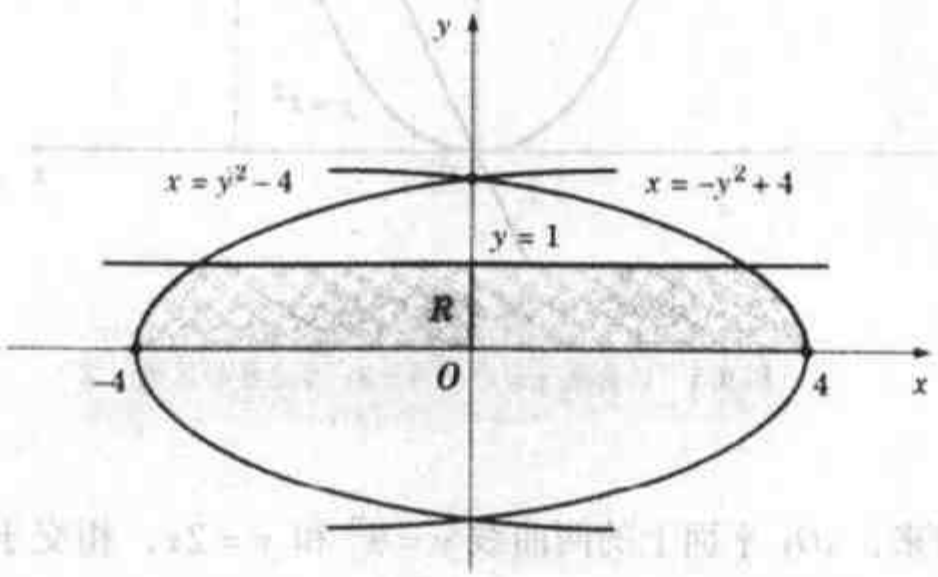


图 9.6 以 $y=0$，$y=1$，$x=-y^2+4$ 及 $x=y^2-4$ 为边界的积分区域

的积分区域就叫做水平简单型. 拿人来说，水平的头脑简单者（没有大脑的蠢蛋），其实就是垂直的头脑简单者躺下睡觉去了！然而对二重积分来讲，水平简单型与垂直简单型的区别，只是 x 与 y 的角色互换了而已.

当 R 是一个水平简单型区域，内积分会换成 x 积分. 在此范例中，就是：

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{y^2+4}^{-y^2+4} (y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y .$$

把 x 与 y 的角色互换，没啥了不起，不会产生很大的影响. 就好像我们在切披萨时，原先我们直切，后来又改成了横切. 只要最后披萨全给吃了，那么到底有多少乳酪进了肚子，与直切或横切完全无关. 这个例子举得有点不合适，因为谁都知道，切披萨一般习惯上不会切成许多直条.

言归正传，咱们继续求积分. 先从里面开始做起：

$$\int_0^1 \int_{y^2-4}^{-y^2+4} (y+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big[\ yx + x\ \Big]_{x=y^2-4}^{x=-y^2+4} \mathrm{d}y(\text{求内部的 } x \text{ 积分}) =$$

$$\int_0^1 \{[y(-y^2+4)+(-y^2+4)]-[y(y^2-4)+(y^2-4)]\}\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1 (8y-2y^3-2y^2+8)\,\mathrm{d}y =$$

$$\Big[\ 4y2-\frac{y^4}{2}-\frac{2y^3}{3}+8y\ \Big]_0^1 (\text{求外边的 } y \text{ 积分}) =$$

$$4-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+8 =$$

$$10\frac{5}{6}.$$

在求二重积分的时候，比较难处理的部分通常是在实际求积分之前，这时我们得正确描述出 xOy 平面上的积分范围 R，并设定两次积分的上下限. 比较起来，这个准备工作在遇到 R 属于垂直或水平简单型的时候，还算是相当容易的呢！

但是，一个人要是稍微有点深度、有自己的想法，无论他是站着或躺下，都不会被人叫头脑简单的蠢蛋. 同样的，复杂一些的积分区域也不叫做垂直或水平简单型. 若碰到这种非简单型的区域，该怎么办呢？有句俗话说得好："各个击破". 我们可以把积分范围切成一些段落，让每个段落各自形成垂直或水平简单型的范围，然后分别去积分，最后再加在一起，求得答案. 程序上麻

烦了许多，但解题的基本方法未变.

例题 4 已知某一区域 R 位于 xOy 平面上的第一象限，并以 $y=x^2$，$y=\frac{x^2}{8}$ 以及 $y=\frac{1}{x}$ 三条曲线为边界，试求 R 的面积.

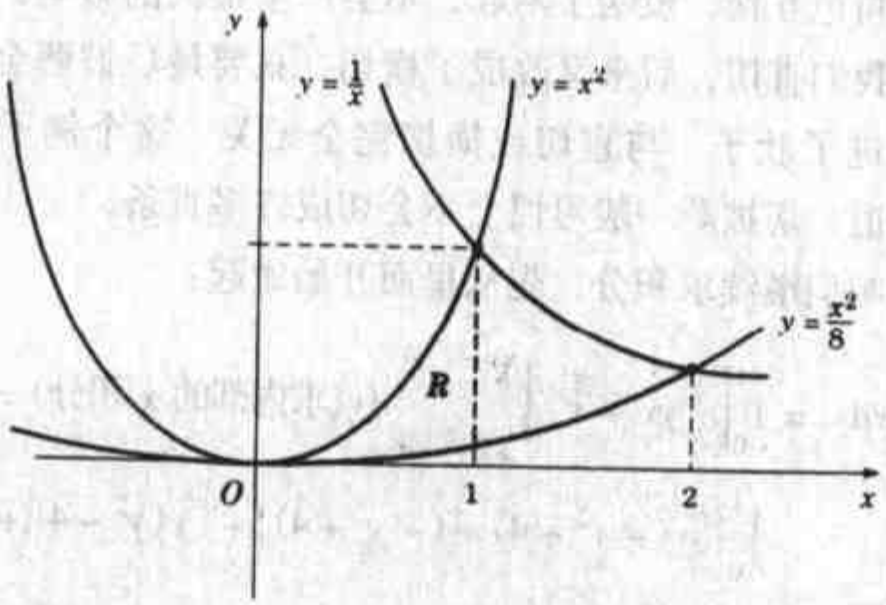


图 9.7 位于 xOy 平面第一象限、并以 $y=x^2$，$y=\frac{x^2}{8}$ 及 $y=\frac{1}{x}$ 为界的区域

解：首先，把区域 R 画出来（图 9.7）. 请注意，在 xOy 平面上的第一象限，只有一块有限的面积被这三条曲线所围，所以这块区域必定就是我们所要的 R. 其次，找出曲线 $y=x^2$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的交点，得到：

$$x^2=\frac{1}{x},$$

$$x^3=1,$$

$$x=1.$$

所以（1，1）就是这两条曲线的交点.

接着，我们得找出曲线 $y=\frac{x^2}{8}$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的交点：

$$\frac{x^2}{8}=\frac{1}{x},$$

$$x^3 = 8,$$

$$x = 2.$$

所以 $(2, \frac{1}{2})$ 就是这两条曲线的交点. 同理, 曲线 $y = x^2$ 跟 $y = \frac{x^2}{8}$ 的交点为 $(0, 0)$.

不幸的是, 题目中所给的这个区域, 既非垂直简单型, 也非水平简单型. 但是如果我们沿着 $x = 1$ 把 R 切成两块, 一块在 $x = 1$ 的左边, 另一块在右边, 我们就得到了两块垂直简单型区域. 所以, R 的总面积 A 就是这两块区域面积的和, 而这两块区域的面积都是常数 1 的积分. 又由于 $1\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\mathrm{d}x$, 式子里的 1 通常不用写出来:

$$A = \int_0^1 \int_{\frac{x^2}{8}}^{x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{\frac{x^2}{8}}^{\frac{1}{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left[y \right]_{\frac{x^2}{8}}^{x^2} \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[y \right]_{\frac{x^2}{8}}^{\frac{1}{x}} \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{24} \right]_0^1 + \left[\ln x - \frac{x^3}{24} \right]_1^2 =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \left[\ln(2) - \frac{1}{3} \right] - \left[\ln(1) - \frac{1}{24} \right] =$$

$$\ln 2 \approx 0.693.$$

你瞧! 问题不就解决了吗?

9.3 二重积分与图形下方的体积

现代人的话题, 似乎都离开不了体重. 你一天到晚都会听到: "老天! 我这两天又胖了 2 千克!" 其实这句话并未表达出他们想说的. 他们真正关心的, 实际上是体积. 如果数字增加之后, 仍然看起来又瘦又健康, 腹肌跟铁一样硬的话, 即使重达 200 千克, 他们也不会担心.

试想像这样的人们: 全身肌肉, 却不掺半点脂肪. 他们很可能随时穿上最

小件的比基尼，故意走来走去，炫耀身材——这也不过是人之常情，毕竟他们花了那么多功夫锻炼、健身．不过，若他们的骨头是铅做的，让他们的体重到达 450 千克，他们会担心吗？我们猜，除非他们要去骑马或搭电梯，而电梯里明白标示着："此电梯限重 200 千克．"其他时候，他们才不会担心呢？

因此，我们有兴趣计算的是物品的体积，尤其是我们自己的体积．正如一个单独的定积分能够计算出在区间$[a,b]$上，正值函数$f(x)$下方所围的面积一样，二重积分则让我们能算出一区域 R 上，正值函数$f(x,y)$下方所围的体积，如图 9.8 所示．

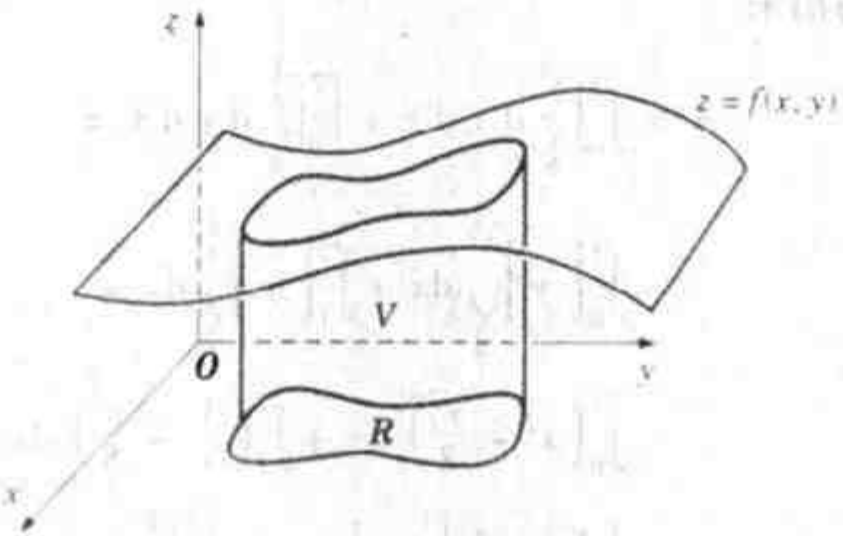


图 9.8　位于 $f(x, y)$ 曲面下方，而在 xOy 平面上区域 R 上方的立体 V

我们可以计算函数$f(x,y)$在区域 R 上方的二重积分，以此求得这个体积．

例题 1（一个凉快的例子）　你的小舅子哈维，以替人铺设限速路障为业，他的办公室设在一个高速公路的路桥下面．假设你要为他的办公室买台空调，你得知道办公室的体积是多少．这儿有两种型号的空调供你选择，便宜的那一种适用于 20 立方米，贵的那一种则适用于 30 立方米．由于办公室建在公路路桥下面，房间的形状很不规则，你测量（以米为单位）了一番之后发现，若以办公室的地板作为 xOy 平面上的区域 R，那么它的四边分别为 $y=x-1$，$y=x+1$，$x=1$ 和 $x=2$，而天花板高度则可以用函数$f(x,y)=6xy$ 来表示．请问这间办公室的体积是多少？

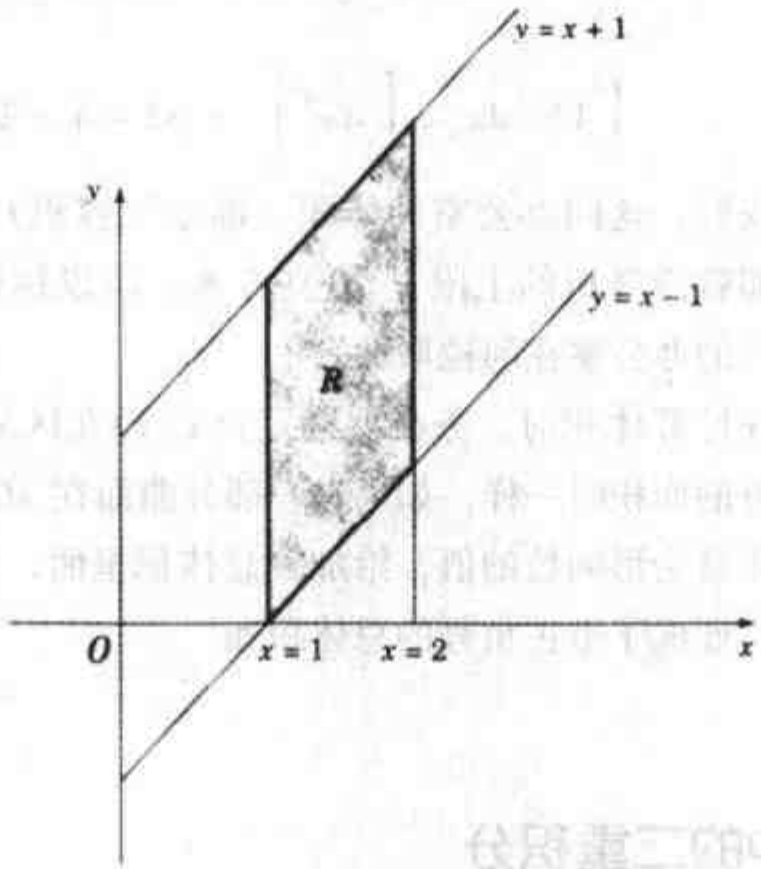


图 9.9 办公室地面构成了区域 R

解：首先，我们把办公室的地面图画出来（图 9.9）. 面对形状如此奇怪的房间，也许你想知道，为啥哈维会要这么一间怪办公室. 原来，它的房租非常便宜，但是那与我们要解决的问题无关. 与问题有关的是，它的天花板一直保持在地面之上，也就是$f(x,y)$在区域 R 内都是正值，若非如此，我们就得先找出$f(x,y)$在哪里为正，哪里为负. 不过我们知道，这块区域 R 落在第一象限，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，所以函数 $6xy\geqslant 0$. 又由于这块地面区域属于垂直简单型，因此我们可以直接求二重积分：

$$\text{体积} = \int_1^2\int_{x-1}^{x+1} 6xy\,dy\,dx\ .$$

由内往外求积分，我们得到

$$\int_1^2\int_{x-1}^{x+1} 6xy\,dy\,dx = \int_1^2 \Big[\ 3xy^2\ \Big]_{y=x-1}^{y=x+1} dx =$$

$$\int_1^2 \left|[3x(x+1)^2] - [3x(x-1)^2]\right| dx =$$

$$\int_1^2 \{[3x(x^2+2x+1)]-[3x(x^2-2x+1)]\}\mathrm{d}x =$$

$$\int_1^2 12x^2\mathrm{d}x = \left[4x^3\right]_1^2 = 32-4=28.$$

积分结果告诉我们，这间办公室的体积（即空气容积）为 28 立方米．题目里提到，便宜的那款冷气机的上限是 20 立方米，所以你得告诉哈维，贵的那款才够用（即使他的办公室在阿拉斯加）．

常犯的错误 在计算体积时，务必要确定$f(x,y)$在区域 R 内为正值．就与我们在求曲线下方的面积时一样．如果有一部分曲面在 xOy 平面下方，在积分时，这部分的体积就会形同负的值，给加到总体积里面，使得最后的结果不再代表实际的体积，而成了带正负号的总体积和．

9.4 极坐标中的二重积分

如果我们面对的区域是由圆所围成的，那么用极坐标通常会比较容易一些．在这种安排下，所有的点都以(r,θ)表示，而不再是(x,y)，而切分出的小

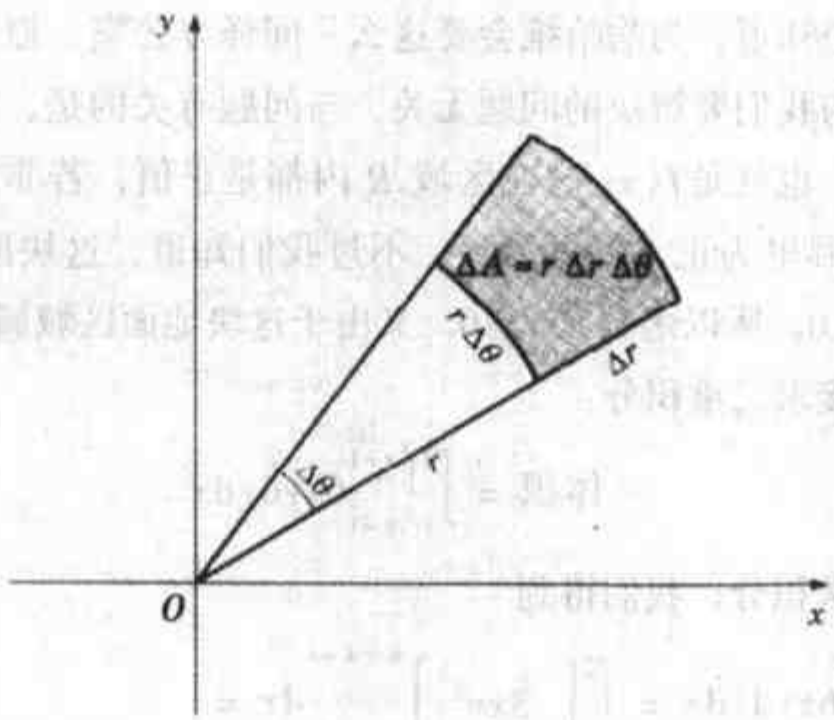


图 9.10 小块扇形的面积大约等于 $r\Delta r\Delta\theta$

区域面积不再是 dx，dy，而变成了 $rdrd\theta$. 用弧度为单位，有一个优点，那就是角度为 $\Delta\theta$ 的角所对的弧长（若圆半径为 r）等于 $r\Delta\theta$. 如图 9.10 所示. 当半径从 r 变成了 $r+\Delta r$，角度从 θ 变成了 $\theta+\Delta\theta$ 时，多出来的小块楔形面积就约略等于 $\Delta r\cdot r\Delta\theta$. 为什么中间会多出一个 r 呢？那是因为楔形的其中一边是 $r\Delta\theta$，而不是 $\Delta\theta$.

所以，在换用极坐标之后，二重积分的式子就变成了：

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_R f(r,\theta)r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ .$$

必须记住的剑法秘诀：只要用的是极坐标，每一个二重积分都得在 $\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ 之外再乘一个 r.

在极坐标中计算二重积分，方法与在直角坐标中没有两样，也是要逐次做两个单独积分.

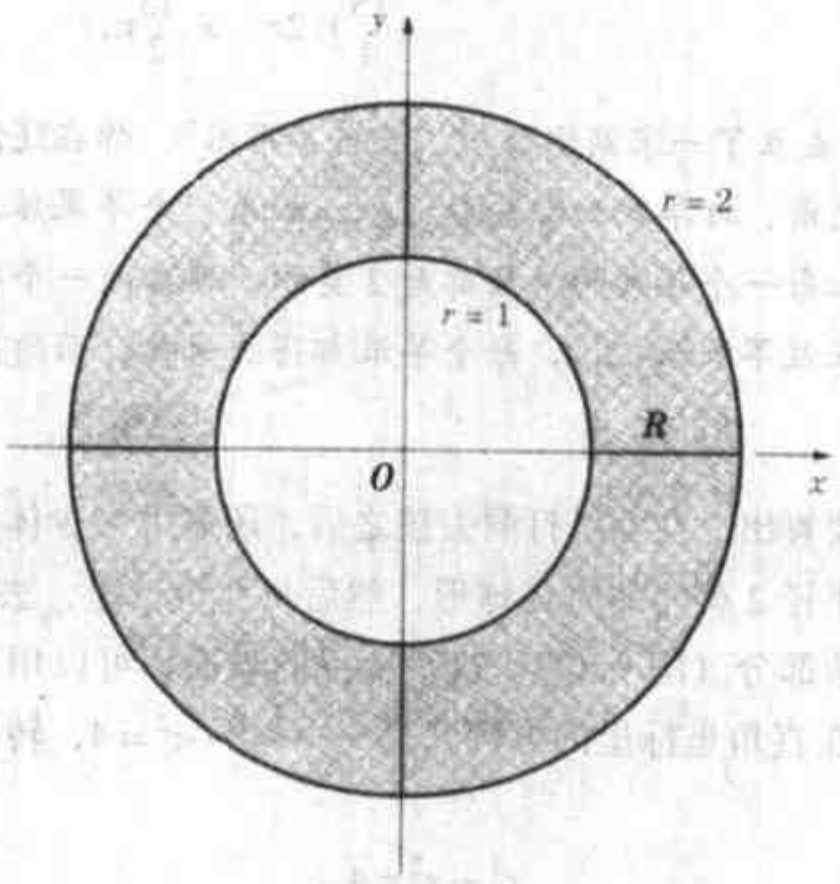


图 9.11 位于半径为 1 跟 2 的两个同心圆之间的区域 R

例题 1 已知一块区域位于大小两圆之间，两圆均以原点为圆心，大圆半径为 2，小圆半径为 1，试计算函数$f(x,y)=x^2+y^2$在这个区域上的积分.

解：极坐标在此可真管用，若是仍然采用直角坐标，要描述这题的区域 R（图 9.11），真得大费周折呢？然而在极坐标里，R 不过就是（r，θ），其中

$$1\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

由于 $x^2+y^2=r^2$，因此题目所给的函数$f(x,y)=x^2+y^2$，在极坐标里就成了$f(r,\theta)=r^2$. 所以二重积分就变成：

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\ r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\ \frac{r^4}{4}\ \right]_1^2\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{15}{4}\ \mathrm{d}\theta=$$

$$\left[\ (\frac{15}{4})\theta\ \right]_0^{2\pi}=$$

$$(\frac{15}{4})(2\pi)=\frac{15}{2}\pi.$$

例题 2 你刚成立了一家网络公司“亚当苹果派”. 你在还没来得及搞清楚如何焙制苹果派之前，订单就如雪片般飞来. 如果一个苹果派需要 150 立方英寸的苹果，而假如每一个苹果的半径都是 2 英寸，那么做一个苹果派需要多少个苹果？记住，在做苹果派之前，每个苹果都得去果核，而所用的打洞去核器的半径是 1 英寸.

解：我们需要算出，在苹果打洞去核之后，还剩下多少体积. 首先，假设每一个苹果都是半径 2 英寸的完美球形，然后从那个球里，去掉一个半径为 1 英寸的圆柱形果核部分（图 9.12）. 这个苹果的表面，可以用半径 2 英寸的球面代表，该球面在直角坐标里的方程式是 $x^2+y^2+z^2=4$，转换成极坐标之后就变成了：

$$r^2+z^2=4.$$

解 z，我们得到：

$$z=\pm\sqrt{4-r^2}.$$

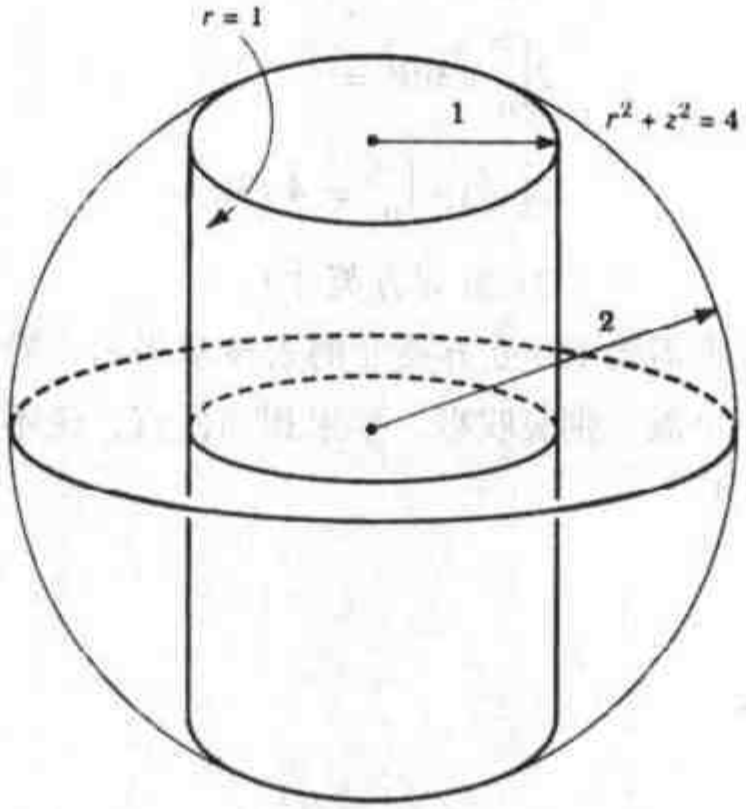


图 9.12　求一个去核苹果的体积

方程式 $z=\sqrt{4-r^2}$代表了上半个球，而 $z=-\sqrt{4-r^2}$则代表了下半个球.

接着，让我们用二重积分去算出上半个去核苹果的体积，然后把结果乘以2，就得到整个去核苹果的体积. 依题意，我们的积分区域为 xOy 平面上夹在 $r=2$ 与 $r=1$ 两个之间的部分，所以上半个去核苹果的体积，就等于曲面 $z=\sqrt{4-r^2}$下方而在这个积分区域上方的体积，也就不包括果核的部分. 所以，整个去核苹果的体积就是

$$2\int_0^{2\pi}\int_1^2(\sqrt{4-r^2})r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\ .$$

内部的 r 积分可以用代换法，让 $u=4-r^2$，于是

$$\text{体积}=2\int_0^{2\pi}\int_1^2(\sqrt{4-r^2})r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=$$

$$2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^2\mathrm{d}\theta=$$

$$2\int_0^{2\pi}\left[(-0)-\left(-\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right]\mathrm{d}\theta=$$

$$2\int_0^{2\pi}\sqrt{3}\mathrm{d}\theta=$$

$$2\left[\sqrt{3}\theta\right]_0^{2\pi}=4\sqrt{3}\pi\approx$$

21.8(立方英寸).

由于每一个苹果派需要 150 立方英寸的去核苹果肉，看来你得用将近 7 个去核苹果，才能做一个派. 别哀叹啦，苹果相当便宜，说不定你能成为靠电子商务赚到钱的第一人!

9.5 三重积分

比芙莉在大一那年，对积分产生了浓厚的兴趣，她觉得计算各种不同的面积很有趣，尤其是在学到分部积分之后，更是乐此不疲. 但是过了一阵子，由于失去了新鲜感，她就变得没有刚开始时那般热衷了，甚至连反双曲函数的反导函数，她也觉得有些腻了. 失望的感觉使得她考虑转念物理，甚至心理学. 这时，一位三年级的学长，把二重积分介绍给她，结果她又拾回对微积分的兴趣，又再度沉迷在计算面积、体积与质量的乐趣之中. 不过好景不长，过了不多久，她又玩腻了.

其实她早已听说，有某样东西比她学过的这些更刺激，但是很危险. 第一学期微积分的任课老师，就曾用鼻音很重的声音警告过她："别靠近那玩意儿! 一旦上瘾，你将永远不能自拔!" 这哪里是警告，说它是诱惑还差不多. 所以比芙莉决定，即使是上刀山、下火海，说什么她也得去实地瞧瞧、亲自试试.

那栋屋子座落在城里一个破落的地区，她看到几个助教和博士后研究生，歪歪斜斜的躺在走道里，身边乱七八糟堆放着草稿纸和破旧的微积分教科书. 地址是一位年级学长给她的，这位学长有着一双怒目，模样很衰老，很可能一毕业就会直升研究所，除非他短期内被送进精神疗养院. 这次还跟着她一起来，在她身后贼头贼脑的看着她. 她把身上剩下的几块钱塞进门上的投币口，然后兴奋的踏出她这趟旅程的最后一步：三重积分.

好啦！也许我们有点夸大，也许积分还不至于使人为了它去铤而走险，用快艇走私，但是三重积分的确是继承了二重积分的概念，而更上一层楼．三重积分是在三维空间中的区域上求积分，所以方法同前，只是再多做一次积分罢了．

在 xyz 坐标里，三重积分表示为：

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V \quad 或 \quad \iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ .$$

它们的定义是从下面的黎曼和得来的：

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i\ ,$$

其中的 V 是三维空间中的立体区域，而 V_i 则是体积为 ΔV_i 的小方盒．

要把这个立体 V 画出来，有时还真不容易，但是若要决定出正确的微分极限，还是少不了要画图．

如图 9.13 所示，立体 V 最基本的类型，是夹在两个曲面之间，且这两个曲面分别为平面上某区域 R 上方的函数图形．V 的上下界，分别由两函数表示，且 $h_1(x,y)\leqslant z\leqslant h_2(x,y)$，而平面上的区域 R，则由 $g_1(x)\leqslant y\leqslant g_2(x)$ 和 $a\leqslant x\leqslant b$ 来描述．像这样的立体，我们称为 z 简单型，原因是对三维空间里且

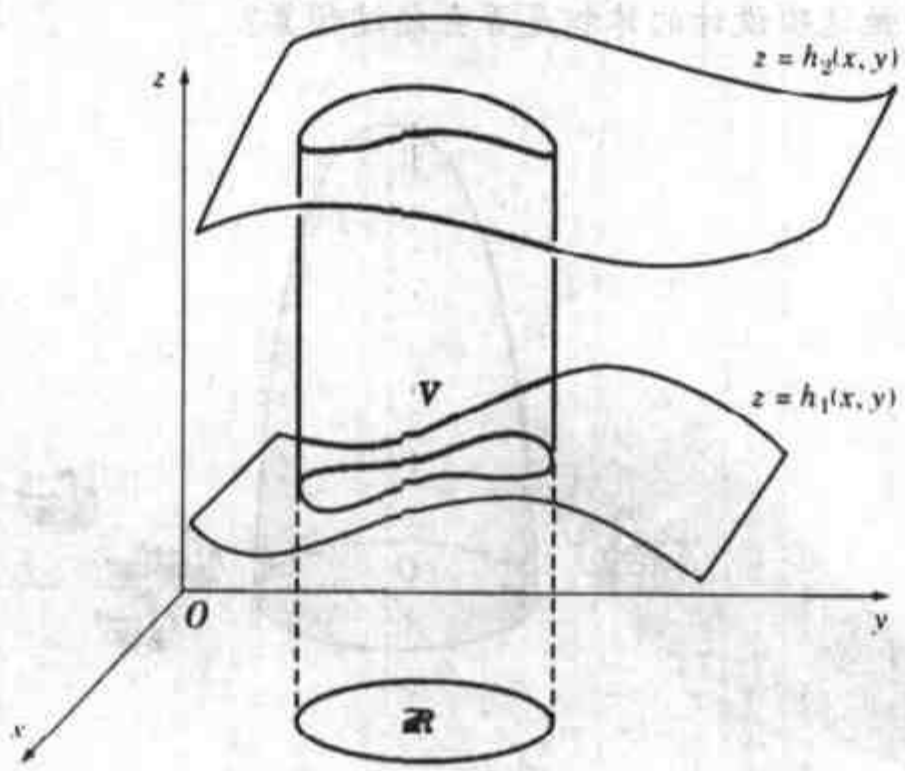


图 9.13 一个三维空间中的立体 V；它是以两个函数在 xy 平面上一区域 R 上方的图形为边界．

通过该区域的任何一条垂直线来说，当我们沿着直线往上，都会先与该立体相交于曲面$z=h_1(x,y)$，由此离开立体.

对这种三维空间里的区域，三重积分的逐次计算顺序是：

$$\int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

可以拿来求三重积分的最简单的函数，或许就是常数函数$f(x,y,z)=1$. 求这个函数在三维空间中一区域上的积分，就可以算出该区域的体积，这正是三重积分的一个用途.

$$\iiint_V 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\text{体积}\ (V).$$

例题1（不太小的小鸡） 著名的艺术家兼治疗师薇诺蒂雅身负一项任务，要为全国小鸡协会制作一座青铜雕塑作品. 她的构想是利用抽象派手法，做出一个代表小鸡的形象，外形看似界于xOy平面上方，抛物面$z=9-x^2-y^2$下方的实心体. 这只后现代的小鸡形象，将展示在协会总部大门前. 这座雕塑将命为“这是啥款?”已知全国小鸡协会发给她的经费预算，足够她买下130立方米的青铜，试问她这项设计的体积是否会超过预算?

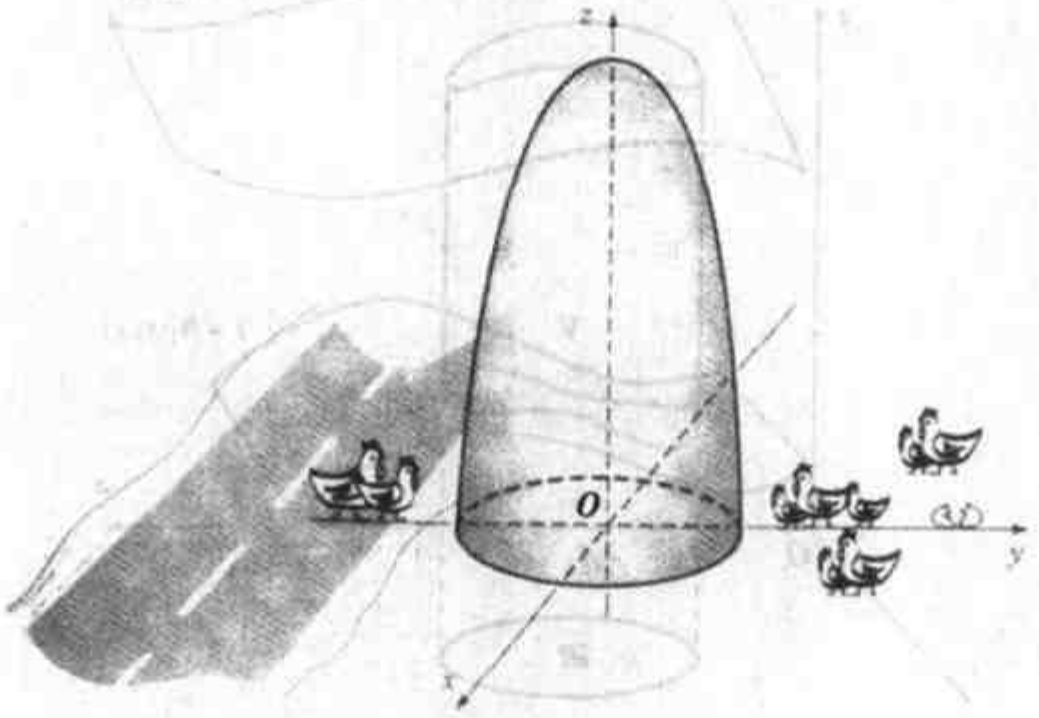


图9.14 在平面$z=0$上方，抛物面$z=9-x^2-y^2$下方的后现代小鸡雕塑

解：看吧，就算你学的是艺术，你还是需要懂微积分．此外，由于你的艺术天分，你绝对比微积分课堂上的其他同学更快画出像样的立体图（图 9.14）．

我们可以从图上看出，她设计的这个立体属于 z 简单型，而且也很容易看出，平面 $z=0$ 与曲面 $z=9-x^2-y^2$ 相交于一个圆．由 $9-x^2-y^2=0$，可得 $x^2+y^2=9$，这表示半径为 3 米的圆．

所以，在 xOy 平面上且位于此圆内的区域，就成为这个实心雕塑的底．解 $x^2+y^2=9$ 求 y，可得

$$y=\pm\sqrt{9-x^2}.$$

所以位于半径为 3 的圆内的区域，可以描述成：

$$-\sqrt{9-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{9-x^2},$$

$$-3\leqslant x\leqslant 3.$$

依题意，这尊雕塑位于 $z=9-x^2-y^2$ 之下以及 $z=0$ 之上，而题目问的是体积，所以我们用 $f(x,y,z)=1$ 当做被积函数，求它的小鸡实心雕塑上的三重积分（亦即雕塑的体积）：

$$V=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}1\mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x.$$

到此，我们已经描述了该立体的外形，并写出了积分式子，接下来就是实际计算了．三重积分的做法，与二重积分原则上没有区别，同样是从最里面的积分做起，在这儿是先做 z 积分．在做积分的时候，记得把被积函数中的 x 和 y，都当成常数看待．

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2+y^2}1\mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}[z]_0^{9-x^2+y^2}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(9-x^2-y^2)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ .$$

上面这个二重积分，是在半径为 3 的圆形区域上做积分，所以若是改换成极坐标，做起来就非常容易．要如何改呢？首先，半径为 3 的圆，可以改用 $0\leqslant r\leqslant 3$及 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 代表，函数 $9-x^2-y^2$ 变成了 $9-r^2$，而 $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$ 则变成了 $r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$．于是我们得到

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3(9-r^2)r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^3(9r-r^3)\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^3 \mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{81}{4}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{81}{4}(2\pi) =$$

$$\frac{81}{2}(\pi) \approx 127.2.$$

看起来这座雕塑似乎没有超出预算.

附记 这个问题其实并不需要用到三重积分，直接求函数 $9-x^2-y^2$ 的二重积分就成了. 理由是，被积函数 $f(x,y,z)=1$ 为常数. 但在我们计算一些如质量中心等其他东西时，被积函数不见得是常数，这时我们就非得用三重积分不可了.

例题 2 有块楔形的乳酪，它的三个面的方程式分别为 $y=0$，$z=x^2$ 以及 $y+z=1$. 试求其体积.

解：首先，我们分别作出这三个曲面的图形. 方程式 $y=0$ 就是 xOz 平面，方程式 $z=x^2$ 是放在 y 轴上的雨水槽形曲面，而方程式 $y+z=1$ 则是与 x 轴不相交，但分别通过 y 轴和 z 轴上的 $+1$ 单位处的倾斜平面［图 9.15（a)］.

这三个曲面所围成的有限体积部分，就只有图 9.15（b）所示的楔形. 虽然此立体是一个 z 简单型，它同时也是一个 y 简单型，而且在把它当做 y 简单型时，所谓的“底”比较容易捉摸.

注意，这个立体在 xOz 平面上的投影，长得真像一个鞋跟印子［图 9.15（c)］，它是由 $z=x^2$ 和 $z=1$ 围成的. xOz 平面上的这个区域，是个垂直简单型的区域，可表示成 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 和 $x^2\leqslant z\leqslant 1$，而对这个鞋跟形状区域内的任何一点 (x,z)，立体内的所有 y 值永远满足 $0\leqslant y\leqslant 1-z$. 因而这块乳酪的体积，就等于下面的三重积分：

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\ .$$

由于我们把这个立体视为 y 简单型，所以 y 积分要放在积分式子的最里边. 现在，我们由内向外逐次积分：

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-x} dy\, dz\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\Big[\, y \,\Big]_{0}^{1-x} dz\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(1-z)\, dz\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\Big[\, z-\frac{z^2}{2} \,\Big]_{x^2}^{1} dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\Big[\,(1-\frac{1}{2})-(x^2-\frac{x^4}{2})\Big] dx =$$

$$\int_{-1}^{1}(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2})dx = \Big[\,\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\Big]_{-1}^{1} =$$

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\Big)-\Big[\frac{-1}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^5}{10}\Big] =$$

$$1-\frac{2}{3}+\frac{2}{10}=\frac{8}{15}.$$

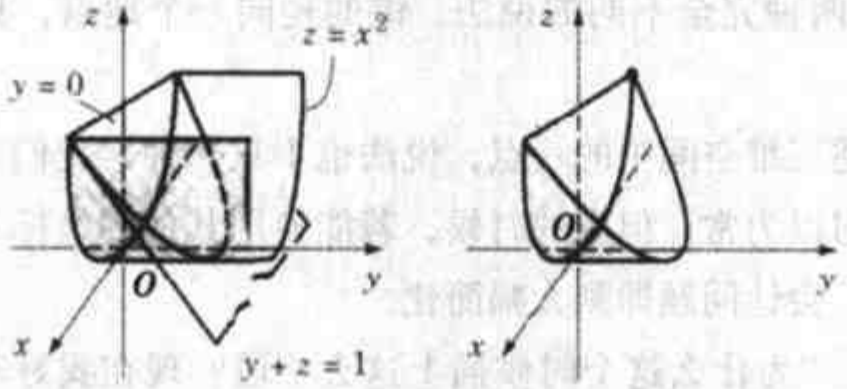


图 9.15 一块楔形的乳酪

嘿！你还没有晕头转向吧？

9.6 柱面坐标与球面坐标

假设你约一位朋友，去试吃最近新开张的老张牛肉面，你得告诉他面馆在哪儿．这时，说法有好几种，你可以告诉朋友："咱们在纬度 40°45′、经度 74°13′的老张牛肉面碰面"．对于这种方位，除非你的朋友当过海军或是跑过船，否则他压根儿不清楚你在说啥！

或者你可以说："从你现在所在的位置，沿着人民路朝南走，不久你会看到一间加油站．从加油站数起，继续往前再走三个红绿灯，中间经过两个闪黄灯的不算．在第三个红绿灯右转，前面遇到路边第二棵梧桐树时再向左偏转（不是左转到底的那条路），你就到了中山路．前面左手的第二家餐馆，就是老张牛肉面．"以上两种完全不同的说法，讲的是同一个地点，只是用的坐标系不一样．

同样的，描述三维空间中的一点，说法也不只一种．我们对直角（或笛卡儿）坐标系已经习以为常，但有的时候，若能换用其他的坐标系，譬如我们前面提过的极坐标，会让问题即刻大幅简化．

你也许会问："为什么这个时候插上这么一段？现在我好不容易对直角坐标系得心应手，觉得蛮高兴的，你是不是不想让我过好日子呀？"如果你真的这么想，那就是狗咬吕洞宾，不识好人心．你可伤了我们的心啦．

嘿！我们写这本书时，可说是昼夜不分，长时间斟酌该如何把它写得更清楚、更容易理解．下面要讨论的柱面坐标与球面坐标，会让读者你的日子更好过一些，绝不是我们要找你麻烦．待会儿你会知道，在许多节骨眼，你会非常庆幸有这些坐标系在场帮忙，搞不好会感激得跪下来亲吻它们的脚——假如它们有脚的话．

柱面坐标

柱面坐标相当容易，它只是在平面的极坐标之外，加上我们的老朋友 z 坐标．在柱面坐标里，一点的位置成了(r,θ,z)，其中的 r 和θ 告诉我们它在 xOy

平面上的投影位置，而 z 坐标则显示它是在 xOy 平面上方或下方，以及离 xOy 平面有多远. 所以举例来说，点 $(r, \theta, z) = (2, \frac{\pi}{4}, 3)$ 的位置就如图 9.16 所示.

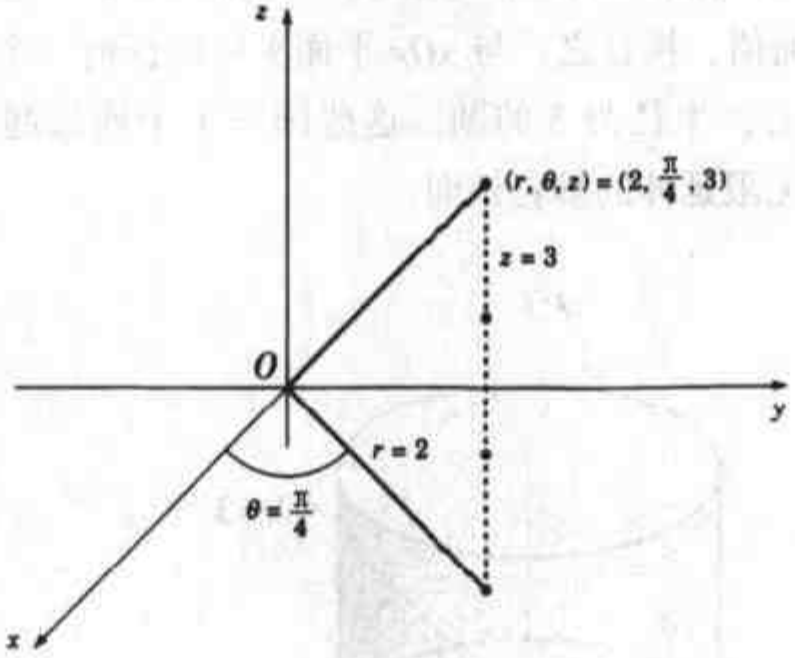


图 9.16 点 $(r,\theta,z)=(2,\frac{\pi}{4},3)$

用来换算直角坐标和柱面坐标的方程式，与换算直角坐标和极坐标的方程式完全相同：

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$r^2 = x^2 + y^2,$$
$$z = z.$$

因为在两种坐标系中，z 仍为同一个变数，所以 z 实际上并不需要一个方程式. 我们多此一举的把它列了出来，只是表示没把它忘掉而已.

某些形状若用柱面坐标来表示，要比用直角坐标容易得多，特别是柱面，另外还有圆锥、抛物面，以及其他可描述成和某直线维持固定距离的区域. 所以如果你是在计算导线周围的电场、流经管道的油料，或者在啤酒杯里打转的啤酒等等，你碰到的都是些柱面，而用柱面坐标会让你的日子好过许多!

例题 1 试描述柱面坐标中的方程式 $r=3$ 所代表的曲面.

方程式 $r=3$ 代表一个长度无限，半径为 3，以 z 轴为轴心的垂直柱面. 我们如何看出来是这样的呢?

首先，让我们看看它在 xOy 平面上，也就是 $z=0$ 时，是什么样子呢? $r=3$ 代表在该平面上，以原点为圆心，半径为 3 的圆. 由于 z 没有出现在方程式中，它可以等于任何值，换言之，与 xOy 平面平行的任何一个平面上，都同样有一个以 z 轴为圆心，半径为 3 的圆. 这些圆一个个连接起来，就形成了图 9.17 中所示，长度无限延伸的垂直柱面.

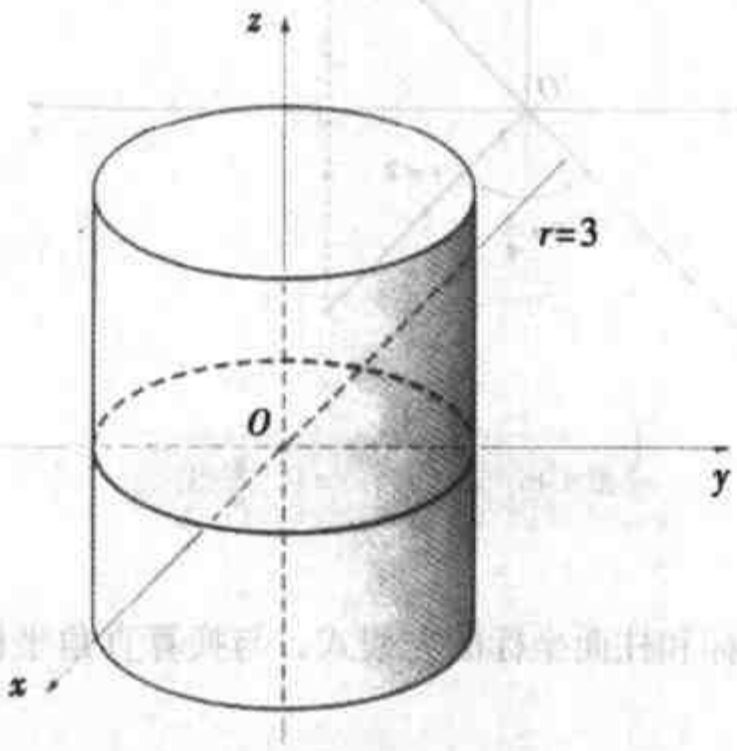


图 9.17 $r=3$ 所描述的曲面

上例是 r 固定，那么如果把 θ 固定，我们又会得到什么呢? 图 9.18 显示 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 所代表的曲面（平面）.

例题 2 试作 $z=r^3$ 的图形.

秘诀 如果方程式里面缺 θ，那可是个好兆头，表示作图一定不难. 怎么说呢? 让我们瞧瞧这个例子.

解：注意，当我们在 yOz 平面上任取一点$(0,y,z)$，则该点的 y 和 r 相等，因为两个都是该点与 z 轴的距离. 换言之，对 yOz 平面上的各点，题目里给的方程式 $z=r^2$ 就等价于方程式 $z=y^2$，于是我们可以在 yOz 平面上，先把抛物线$z=y^3$画出来. 好啦，由于方程式 $z=r^2$ 中没有 θ，表示 θ 可以是任何值，因而我们只要把刚才在 yOz 平面上画好的抛物线，绕着 z 轴转一整圈，所经过的轨迹就构成了一个曲面，曲面上的每一点，都应该与它在 yOz 平面上对应的那一点有同样的 r 值和 z 值，所以也会满足方程式 $z=r^2$. 结果如图 9.19 所示，是个碗状的曲面，事实上，我们对它并不陌生——它就是那个最标准的抛物面.

还有一个方法可以让我们看出：$z=r^2$ 所描述的就是标准抛物面，那就是

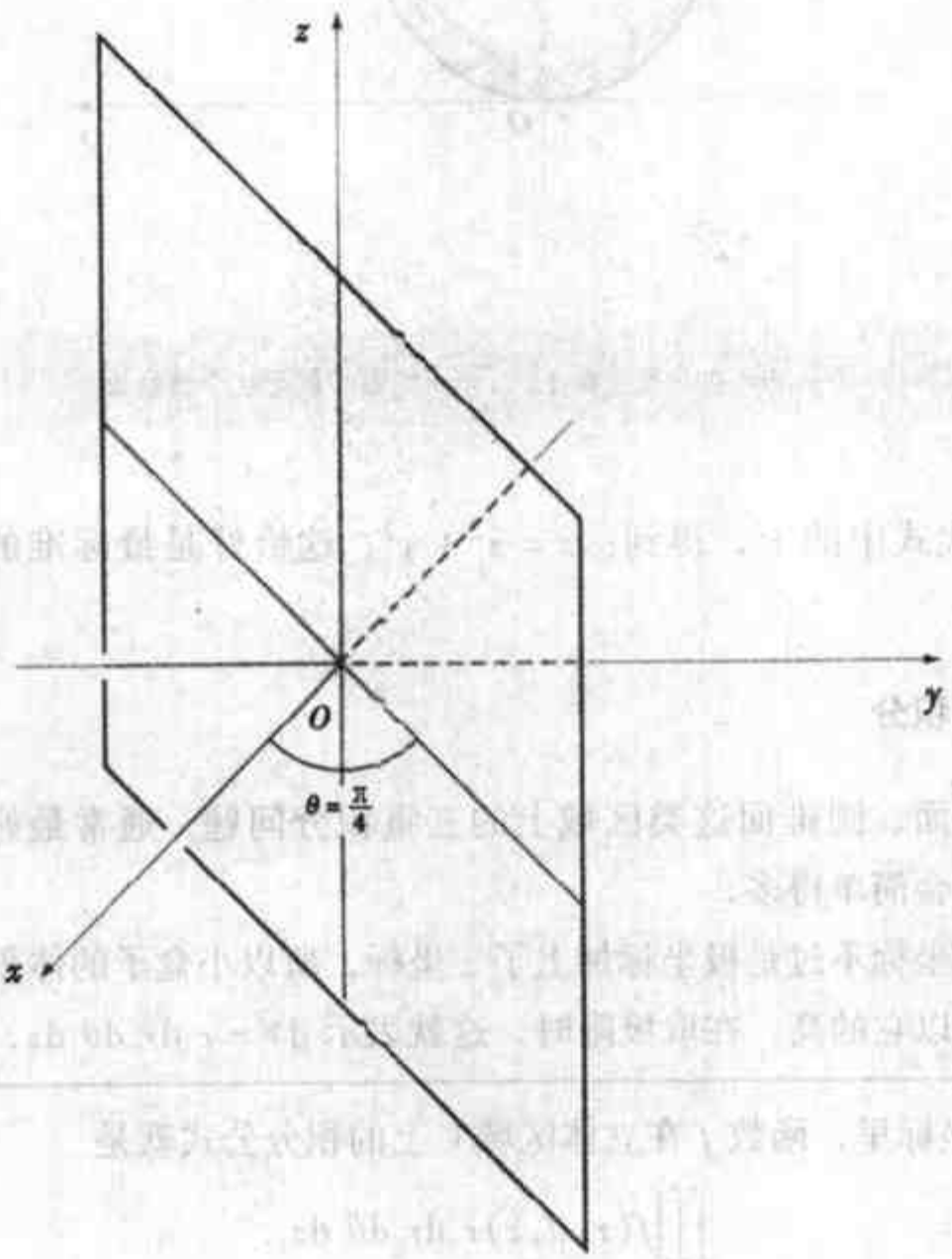


图 9.18 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 所描述的曲面

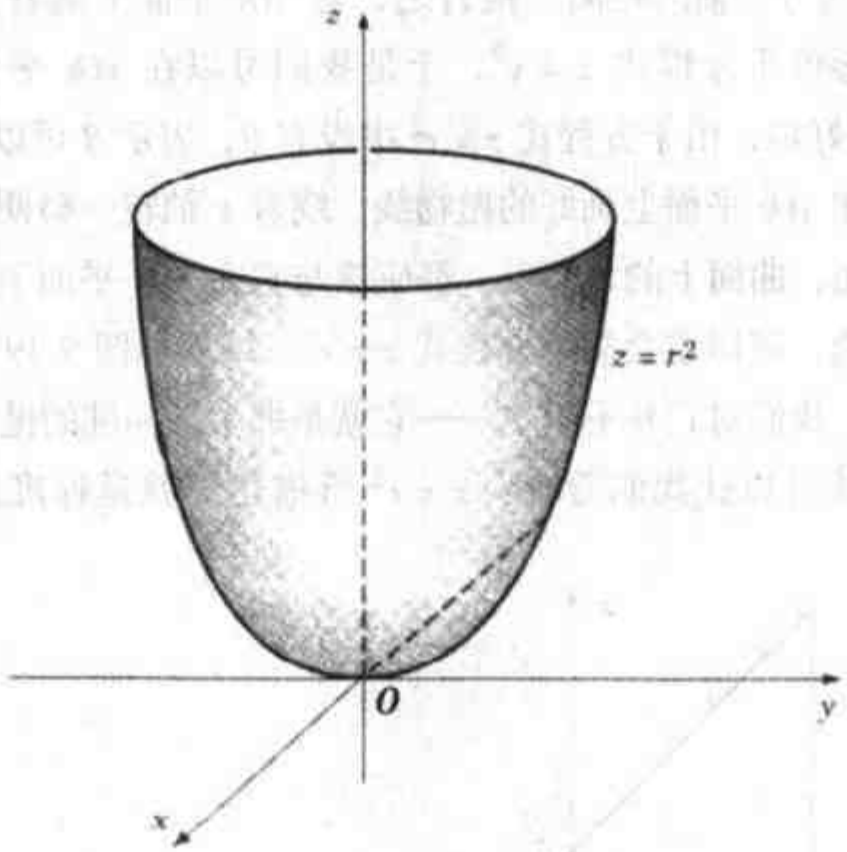


图 9.19 在柱面坐标上，$z = r^2$ 的图形就是这个抛物面

用 $x^2 + y^2$ 取代式中的 r^2，得到：$z = x^2 + y^2$，这恰好是最标准的抛物面的方程式.

柱面坐标上的积分

对于圆柱面、圆锥面这类区域上的三重积分问题，通常最好改用柱面坐标，计算起来会简单得多.

由于柱面坐标不过是极坐标加上了 z 坐标，所以小盒子的体积是它在 $r\theta$ 平面上的面积乘以它的高. 在取极限时，这就表示 $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$. 所以：

> 在柱面坐标里，函数 f 在立体区域 V 上的积分公式就是
>
> $$\iiint_V f(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz\ .$$

例题 3 试计算 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ 在下列立体 S 上的积分：S 位于平面 z

$=0$ 之上，曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 之下.

解：曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 是一个尖端朝上的圆锥面. 题目里所说的立体 S，看起来如图 9.20 所示.

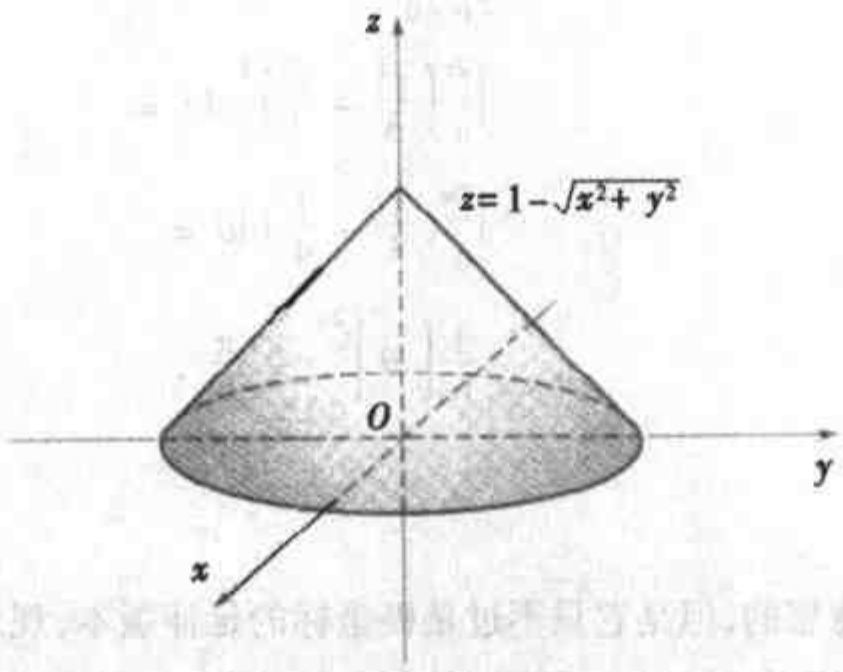


图 9.20 在 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 下方的区域

不小心让冰激凌掉到地上的工程师、物理学家以及小朋友，经常必须面对的计算问题. 那么我们该如何着手呢？如果呆在原来的笛卡儿坐标里做计算，结果到处都是根号，式子会变得非常复杂. 但是若改用了柱面坐标，一切麻烦完全消失，因为原先看起来叫人头大的 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$，摇身一变之后成了 $f(r,\theta,z)=r$，而立体的上界曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 也变成了 $z=1-r$. 于是，整个立体可以用下列三个不等式来表示：

$$0\leqslant z\leqslant 1-r,$$

$$0\leqslant z\leqslant 1,$$

$$0\leqslant \theta\leqslant 2\pi.$$

所以，这个问题的三重积分式子就可写成：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} r\,r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\ .$$

逐次积分三次，当然又是由内向外，计算如下：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} r^2\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [r^2 z]\Big|_{z=0}^{z=1-r} dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(1-r)\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 - r^3)\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{12}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}.$$

球面坐标

柱面坐标蛮有意思的，但是它只不过是极坐标的延伸版本，观念上没啥新奇可言.你可能正在抱怨说："教我一个真正的新坐标系好吗？好，让我拿去吓一吓刚认识的心上人."你的运气不错，我们正好有个现成的.

如果要用这个新坐标来表示三维空间中的一点，我们得把它和原点用一条直线连接起来，如图 9.21 所示.这根连接线段的长度叫做 ρ(rho，读做 row)，希腊字母总是用在让人印象较深刻的坐标系.另外，这条线与正 z 轴所夹的角叫做 ϕ(phi，读做 fee).如果 $\phi = 0$，该点就高高的位于正 z 轴上，若 $\phi = \pi$，则该点低低的位于负 z 轴上；如果 $\phi = \frac{\pi}{2}$，则这条线与 z 轴垂直，而该点就位于 xOy 平面上.现在，把线段投影到 xOy 平面上，然后定义该投影与正 x 轴之间的夹角为 θ，这个 θ 与前述的柱面坐标里的 θ 其实是同样的东西.

一般说来，当我们用这三个坐标来指定一个点时，ρ 不会取为负值，ϕ 取在 0（北极）到 π（南极）之间，而 θ 则可以在 0 到 2π 之间.这样的三个坐标值(ρ, ϕ, θ)就足以用来描述空间中的任何一点，而这就是所谓的球面坐标.其中 θ 和 ϕ 两个角度，决定了从原点到该点的方向，或决定了球面上的一点，而球面的半径 ρ，则决定了从原点到球面上一点的距离.

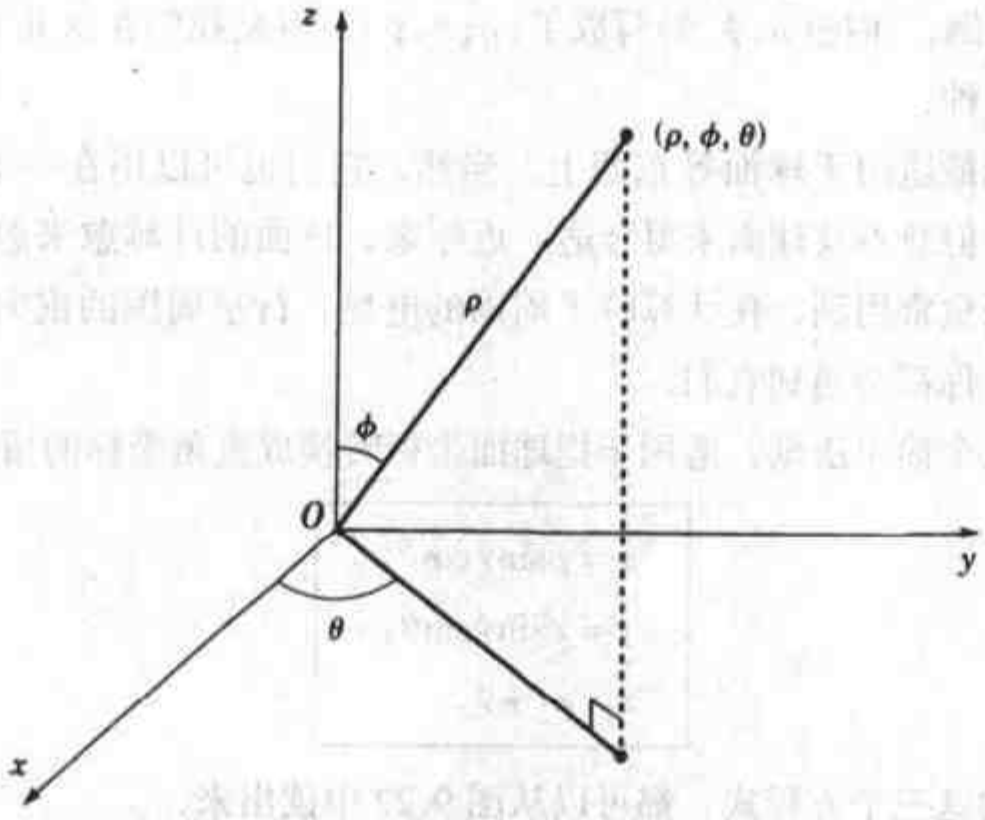


图 9.21 球面坐标

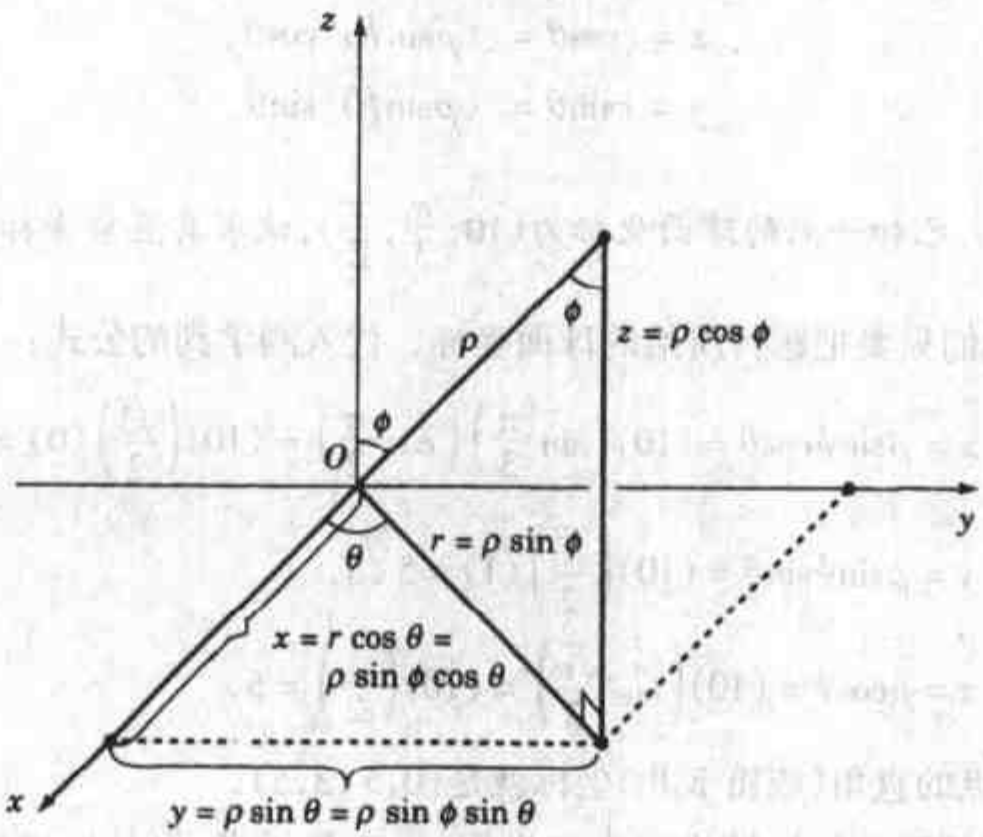


图 9.22 把球面坐标转换成直角坐标

警告 有些人在写球面坐标符号时，会把 ρ 误写成 r，甚至也有可能把 ϕ 和 θ 的意义颠倒，而把(ρ,ϕ,θ)写成了(ρ,θ,ϕ). 但是我们在这儿介绍的记法，是最常用的一种.

这种坐标最适用于球面等东西上. 当然，它们也可以用在一些其他形状，诸如椭球面，但总不及球面来得合适. 近年来，球面的计算愈来愈多，因此球面坐标也愈来愈常用到. 在计算粒子周围的电场、行星周围的重力场，以及水球的质量时，你都会遇到它们.

以下的几个简单法则，适用于把球面坐标转换成直角坐标的情形：

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta, \\ z &= \rho\cos\phi. \end{aligned}$$

方框里的这三个方程式，都可以从图 9.22 中读出来.

请注意，角 ϕ 不只可以是我们所定义的那个角，从初等几何可推知，它也等于垂直面上那个直角三角形的顶角. 而且从那个直角三角形上，我们马上可以得到 $z=\rho\cos\phi$ 以及 $r=\rho\sin\phi$. 于是

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = (\rho\sin\phi)\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta = (\rho\sin\phi)\sin\theta. \end{aligned}$$

例题 4 已知一点的球面坐标为$(10,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$，试求其直角坐标.

解：我们只要把题目所给的球面坐标，代入刚学到的公式：

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta=(10)\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=(10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0)=0,$$

$$y=\rho\sin\phi\sin\theta=(10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1)=5\sqrt{3},$$

$$z=\rho\cos\phi=(10)\left(\cos\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)=(10)\left(\frac{1}{2}\right)=5.$$

所以，同一点的直角(或笛卡儿)坐标就是$(0,5\sqrt{3},5)$.

以上是把球面坐标转换成直角坐标，很直截了当. 但是反过来，要把直角坐标转换成球面坐标时，就稍微麻烦一点了. 假设我们知道直角坐标的(x,y,z)，想转换成球面坐标的(ρ,ϕ,θ)，那么首先，我们得由以下的方程式求得 ρ：

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

这是从原点到点(x, y, z)的距离公式. 有了 ρ 之后，咱们就可以利用 $z = \rho\cos\phi$求出 ϕ，因为这时候我们已知 z 和ρ. 等有了 ϕ 之后，我们可以利用 $x = \rho\sin\phi\cos\theta$，进一步求出 θ，因为这时候我们已经知道除了 θ 以外的所有坐标. 在做这最后一步时，得特别注意要把 θ 放进正确的象限里面.

例题 5 已知一点的直角坐标为 $(1, 1, \sqrt{2})$，请问它的球面坐标是什么?

解：第一步，计算 ρ：

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + 1^2 + 2 = 4,$$

所以 $\rho = 2$. 其次，利用 $z = \sqrt{2}$求出 ϕ：

$$z = \rho\cos\phi,$$

$$\sqrt{2} = 2\cos\phi,$$

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

最后，我们得由 $x = \rho\sin\phi\cos\theta$ 来计算θ：

$$1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

(在最后这一步，我们必须小心选择 θ，因为满足 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$的 θ 也可以等于$\frac{7\pi}{4}$. 但是从 x 坐标和 y 坐标皆为正值来看，θ 应该落在第一象限.)

所以，该点的球面坐标是$(\rho, \phi, \theta) = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

球面坐标上的积分

要在球面坐标上计算三重积分,我们需要知道,直角坐标里的$dV = dx\ dy\ dz$在球面坐标中会转换成什么. 我们的解法是，把三个球面坐标值都改变一点

点，然后看看得到的立体可用什么式子来代表．如图 9.23 所示，同时让 ρ 改变一点 $\Delta\rho$，ϕ 改变一点 $\Delta\phi$，θ 改变一点 $\Delta\theta$，我们就得到了一个立体 ΔV.

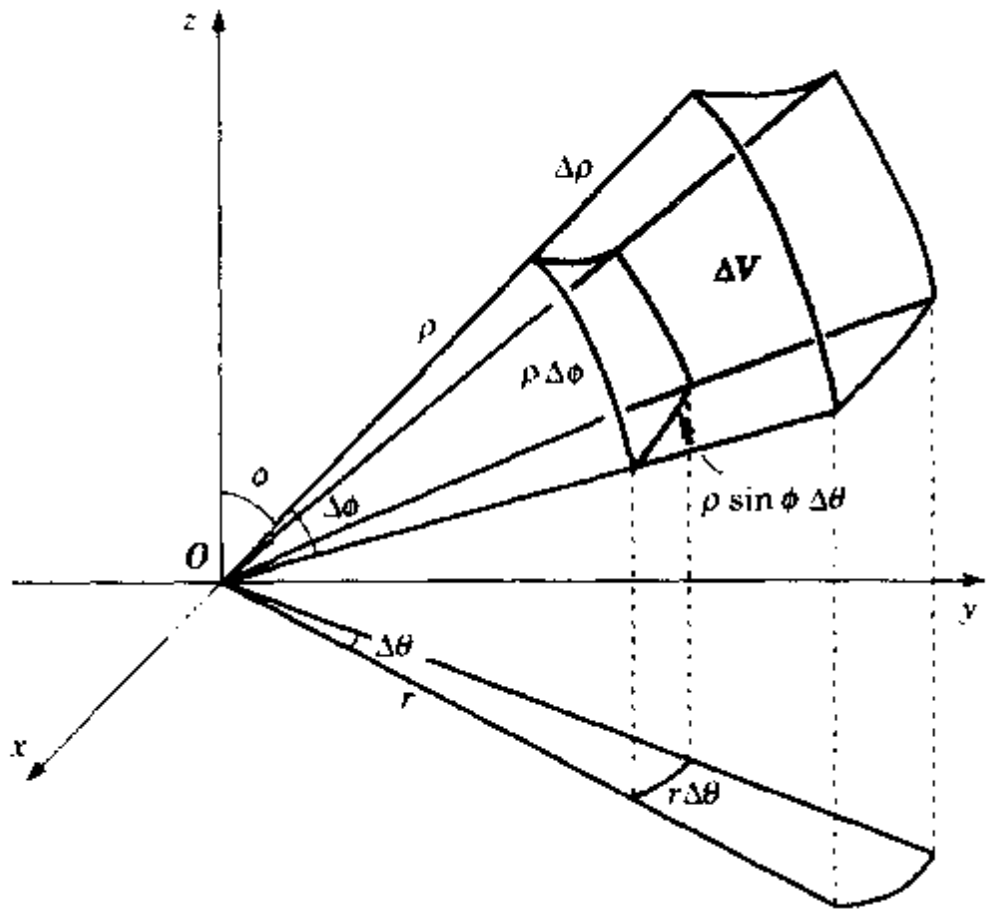


图 9.23　把球面坐标的三个坐标都改变一点

这个立体差不多是个方盒子，其宽为 $r\Delta\theta = \rho\sin\phi\,\Delta\theta$，径向的长度为 $\Delta\rho$，而纵深为 $\rho\,\Delta\theta$，因而它的体积大约为：

$$\Delta V \approx (\rho\sin\phi\,\Delta\theta)\ (\Delta\rho)\ (\rho\,\Delta\phi) \approx$$
$$\rho^2\sin\phi\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta.$$

若取极限，也就是把上述立体愈切愈小之后，所得到的近似值也就愈来愈靠近实际值．所以

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_V f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta\ .$$

每当我们求球面坐标上的积分，我们就自动用 $\rho^2 = \sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta$ 来取代 $\mathrm{d}V$.

例题 6（消除空气污染） 一种叫做“载提普拉兹”的外星人，由于自己居住的星球上缺氧，打算把地球的大气层搬回家. 当然它们得先算出整个大气层的质量，以便进一步计算要花多少时间完成任务. 大略估计，它们假定地球是个半径为6 400 000 米的地球，而在距离地面 h 米处的空气密度，为每立方米 $\frac{10^6}{6\,400\,000+h}$ 千克.（注意！千万别把这个函数贸然拿到气象学上去用，它跟实际数据差得很远. 嘿，它们是外星人，所以你就别管它们怎么想出这些函数的.）如果它们计划取走离地 20 千米内的所有空气，那么它们得搬回家的空气总质量应该是多少？

解：我们可以求大气层密度的积分，来计算大气层的总质量.（下一节还会有进一步的讨论.）根据这题目的情况，我们最好采用球面坐标来做计算，所以，我们的积分区域可以写成

$$6\,400\,000 \leqslant \rho \leqslant 6\,420\,000$$

（从地心量起的距离是6 400 ~ 6 420 千米），

$$0 \leqslant \phi \leqslant \pi.$$

以及

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

又由于 $h=\rho-6\,400\,000$，所以我们的被积函数是

$$f(\rho,\phi,\theta)=\frac{10^6}{6\,400\,000+(\rho-6\,400\,000)}=\frac{10^6}{\rho}.$$

这个函数给出了任何一点 (ρ,ϕ,θ) 上的空气密度. 于是，我们所要的三重积分式子就为

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{6\,400\,000}^{6\,420\,000}\frac{10^6}{\rho}\rho^2\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta.$$

记住，计算积分时要由内向外，所以得到：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{6\,400\,000}^{6\,420\,000}\frac{10^6}{\rho}\rho^2\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta=10^6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{6\,400\,000}^{6\,420\,000}\rho\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta=$$

$$10^6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{6\,400\,000}^{6\,420\,000}\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta\approx$$

$$10^6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}1.282\times10^{11}\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta=$$

$$1.282\times10^{17}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta=$$

$$1.282\times10^{17}\int_0^{2\pi}[-\cos\phi]_0^{\pi}\ \mathrm{d}\theta=$$

$$1.282\times10^{17}\int_0^{2\pi}[-(-1)-(-1)]\mathrm{d}\theta=$$

$$1.282\times10^{17}[2\theta]_0^{2\pi}=$$

$$1.282\times10^{17}\{4\pi\}\approx$$

$$1.611\times10^{18}(\text{千克}).$$

要送走这么多的质量，时间上来得及吗？没问题，外星人说，我们用的是航空邮件！

9.7 质量、质心、矩

在数学和物理上，我们为了计算上方便省事，经常把一个明明是有模有样的物体，假装视为一点．譬如我们突发奇想，要用一个弹射器把一头牛弹射到田野的另一头，而且想确定最后的落点是在水塘里，而不是本地人们聚集的菜市场，那么我们是否把这头牛假设为一点（即它的质量中心），大概都不会造成什么差异．真正的重点是这头牛的总质量，以及所谓的质心．

质量

首先，我们来瞧瞧如何求出这头牛的质量 V（此 V 不代表体积，而是代表 veal（小牛肉））？假设那头牛的密度并不均匀，有些部位的密度大些．再假设它身上各点(x,y,z)的密度，可以由函数$\sigma(x,y,z)$来表示．所以，如果我们把该头牛切成许多很小的立方块（这只是打比方，不是真的动手这么干，我们又不是供应新鲜小牛肉的厂商），那么每一个小立方块的质量，差不多等于该块肉上一点的密度，乘以它的体积．然后，把这些小立方块的质量加起来，再让小立方块数增加，体积变小，最后取其极限，结果就得到了一个三重积分：

$$\iiint_V\sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ .$$

注意，当密度$\sigma(x,y,z)=1$时，质量就刚好等于体积.

质心

质心又称为形心，要弄清楚质心是什么，让我们回忆一下童年时在游乐场上嬉戏的日子. 想当年，你还是个小不点，最喜爱的游戏就是爬上跷跷板的一头，另一头坐着隔壁家的阿明，一面慢慢的上下上下，一面高兴的叫着笑着. 突然，你趁着他高高在上的一刹那，滑下跷跷板，然后兴奋的看着阿明脸上闪过惊慌失措的表情，接着啪嗒一声，他那一头重重摔到地上，于是两个人都乐不可支的开怀大笑起来. 啊！童年就是这么美好，在一连串的恶作剧与欢笑声中不知不觉的溜走.

童年时坐跷跷板的经验，无形中启发了你对平衡、支点等力学概念，同时也让阿明很早就体验到人性中黑暗的一面. 但是现在我们只专心谈谈你所学到的概念.

跷跷板理论

假如我们有一个加强过的超坚固跷跷板，在其中一边的点x_1，坐着一位“绿湾包装人队”的球员，而在跷跷板的另一边的点x_2，坐着一位纽约市立芭蕾舞团的团员. 坐过跷跷板的人都知道，跷跷板若要平衡于$\bar{x}$，上述情况的平衡点一定比较靠近那位美国职业足球明星（图 9.24）.

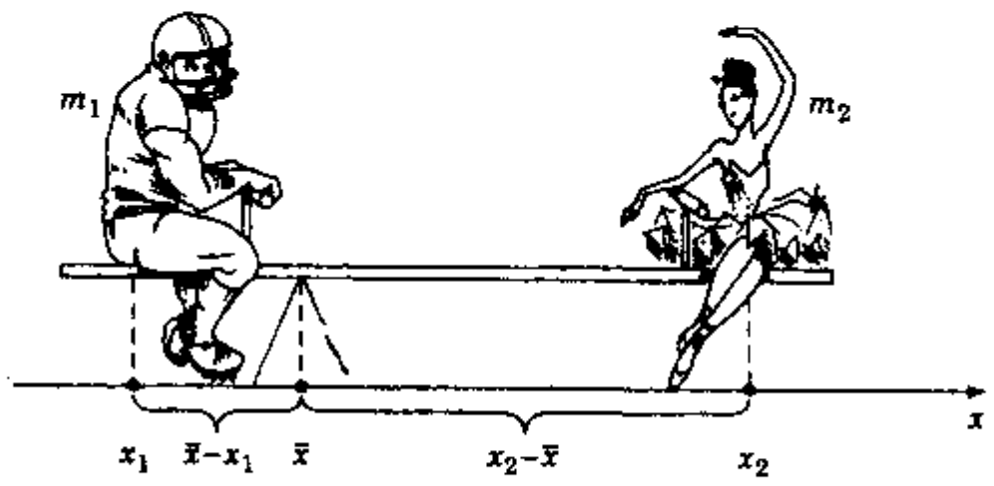


图 9.24 跷跷板

说得更精确一些，如果 $\bar{x}$ 是平衡点，则

$$m_1(\bar{x}-x_1)=m_2(x_2-\bar{x})$$

在平衡点的两边，质量与该质量距平衡点的距离的乘积会相等.

解上式求 $\bar{x}$，我们可得

$$m_1\bar{x}-m_1x_1=m_2x_2-m_2\bar{x},$$

$$m_1\bar{x}+m_2\bar{x}=m_1x_1-m_2x_2,$$

$$(m_1+m_2)\bar{x}=m_1x_1+m_2x_2.$$

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}.$$

换句话说，平衡点的坐标，就等于加权质量和除以总质量. 这里的质量如何加权呢？就是拿质量乘以它的坐标.

如果有许多个质点，譬如说 n 个点，上述公式就变成：

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

上面这个公式只是在一条直线上，但是当我们的质点是散布于空间中，同样的法则也适用于 y 坐标轴和 z 坐标轴上. 即：

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},$$

$$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

综合上面的三个坐标，所得的点$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$就为这 n 个质点的形心和质心.

我们的下一个目标，是要想办法求出任何一个立体 V 的质心. 我们要用的概念是把这个立体切成许多碎块，我们想求的就是这些碎块的质心. 要计算出区域内每个小盒子的质量，我们需要知道该区域内的质量分布情形，也就是密度函数 (x,y,z) 所透露的信息. 我们把该区域的体积（取极限之后为

$dx\ dy\ dz$) 乘以密度$\sigma(x,y,z)$，就得出了以下三个公式：

$$\bar{x}=\frac{\iiint_V \sigma(x,y,z)x\ dx\ dy\ dz}{\iiint_V \sigma(x,y,z)dx\ dy\ dz},$$

$$\bar{y}=\frac{\iiint_V \sigma(x,y,z)y\ dx\ dy\ dz}{\iiint_V \sigma(x,y,z)dx\ dy\ dz},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_V \sigma(x,y,z)z\ dx\ dy\ dz}{\iiint_V \sigma(x,y,z)dx\ dy\ dz}.$$

请注意，上面三个积分公式的分母都一样，都是立体 V 的质量. 由这些公式得到的点$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，即是该立体的质心，如果我们用一根绳子把它吊起来，只要吊的位置在质心，整个立体就会处于平衡状态.

而在上述三式的分子，由于被积函数为密度乘以 x、y 或 z 的一次方，所以分子的积分称为该立体的一次矩.

秘诀 在计算质心（形心）时，我们经常可以利用对称性来简化问题. 如果你面对的物体，在你把 x 以 $-x$ 取代之后看起来仍旧相同，而且函数 σ 也并未因此而改变，那么质心的 x 坐标必定是 0. 对 y 和 z 来说也是一样的.

例题 1 假设某立体的密度为一常数$\sigma(x,y,z)=1$，而且以 $z=x^2+y^2$ 和 $z=4$的图形为界，试求该立体的形心.

解：首先画出这个立体，如图 9.25 所示. 我们发现，若以 $-x$ 取代 x，该立体的本身与密度函数均维持不变，而以 $-y$ 取代 y 时也如此，因而我们知道，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$. 但是以 $-z$ 取代 z 时，积分区域会改变，所以我们必须求几个积分，找出 $\bar{z}$：

$$\bar{z}=\frac{\iiint_V \sigma(x,y,z)z\ dx\ dy\ dz}{\iiint_V \sigma(x,y,z)dx\ dy\ dz}.$$

让我们分开来计算分子与分母. 首先看分母，它所代表的是该立体的总质量. 由于这个立体的形状，我们将选用柱面坐标，于是积分区域可描述成：

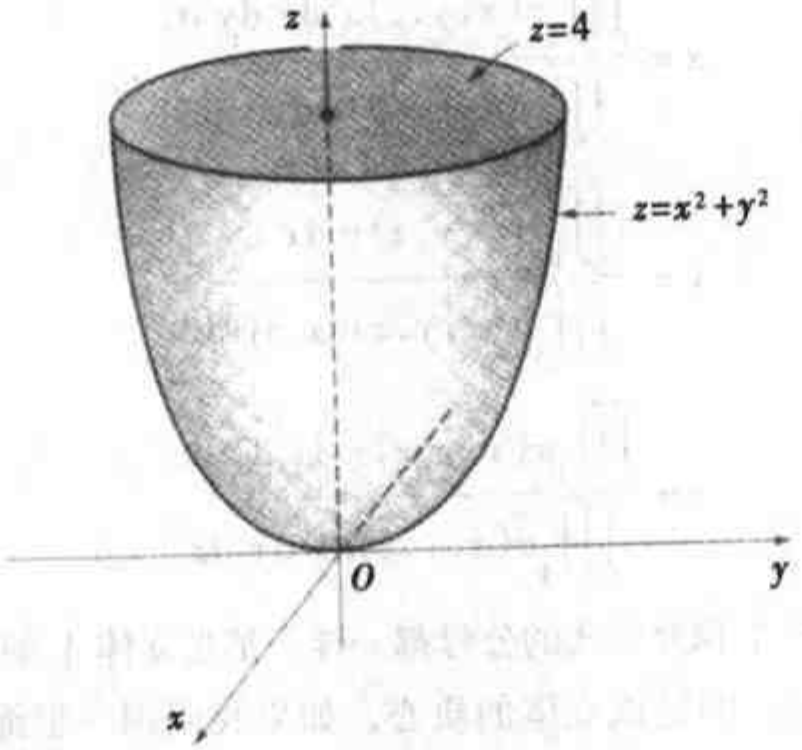


图 9.25 求质心

$$r^2 \leqslant z \leqslant 4,$$

$$0 \leqslant r \leqslant 2,$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

所以，计算总质量的三重积分（即分母）为：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta .$$

我们由内向外做逐次积分：

$$\text{质量} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \Big[\, rz \, \Big]_{z=r^2}^{z=4} dr \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 [4r - r^3] dr \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \Big[\, 2r^2 - \frac{r^4}{4} \, \Big]_0^2 d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} 4\mathrm{d}\theta = 8\pi .$$

接下来求分子：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} zr\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\left(\frac{z^2}{2}r\right)\right]_{z=r^2}^{z=4}\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\left(8r-\frac{r^5}{2}\right)\right]\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(4r^2-\frac{r^6}{12}\right)\right]_0^{2}\mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{32}{3}\mathrm{d}\theta = \frac{64}{3}\pi .$$

最后，让分子、分母归队：

$$\bar{z} = \frac{(64/3)\ \pi}{8\pi} = \frac{8}{3}.$$

因此，质心的位置是在(0,0,8/3).

例题 2　假设一个球的半径为 1，球心在原点，而密度可以用函数 $\sigma(x,y,z)=3x^2+2y^4+z^6$ 表示，试求它的质心位置.

解：没问题. 我们发现，在 (x,y,z) 和 $(-x,y,z)$，这个球还是同一个球，而且密度依然相同，所以我们可以确定 $\bar{x}=0$. 同理，我们得知 $\bar{y}=0$，$\bar{z}=0$. 所以质心位在(0,0,0)，也就是球心的位置上.

惯性矩（转动惯量）

惯性矩是什么？照它的英文 moment of inertia 字面来看，意思就是“迟钝的那一刻”. 当你的暗恋对象突然出现在走廊里，对着你迎面走过来，而且正目不转睛的盯着你，仿佛直视到你的心灵深处，你马上意识到这是个千载难逢的机会，要是能好好把握，很可能就此与她共骑一辆单车，携手度过此生. 你很想告诉她：“嗨！我刚才整堂课都盯着你的后脑瞧……”但是从你嘴巴里吐出来的，却是：“呃……”然后你只能眼睁睁的，望着你的心上人与你擦身而过，还一脸迷惘的回过头来瞄了你一眼，让你梦中的双人单车，一头栽进了路边水沟. 这就是你的“迟钝的一刻”，理工科系的男同学多半有过类似的际遇.

但是我们现在要谈的，却是另外一种解释：惯性矩.

剑法示范 两两一组，请你把你的伙伴打横扛在肩上，然后在原地打转. 注意要抓牢，不能放手. 开始转的时候会有些困难，但是等你顺利转动之后，就没那么难了. 惯性矩就是在衡量身体开始转动时所受的阻力.

对于粒子（或质点），它的惯性矩等于 mr^2，其中 m 为质量，而 r 则是该粒子（或质点）与转动中心之间的距离. 由于质量是乘以 r 的二次方，所以惯性矩又称做二次矩.

要计算一个物体（已知它充满某个立体 V）的惯性矩，我们同样要把它切成许多很小的方块或小盒子. 一点上每单位体积的质量，可写成一个叫做质量密度的函数，因而每个小盒子的质量，约等于它的体积乘以质量密度，于是它的惯性矩，就等于它的质量乘以它与转轴距离的平方. 就如同先前的例子，我们得到一个积分.

比方说，我们绕着 z 轴转，那么与转轴间的距离的平方，就等于 $x^2 + y^2$，而质量密度为 $\sigma(x,y,z)$ 的立体 V 的惯性矩就等于

$$\iiint_V \sigma(x,y,z)(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

换成柱面坐标则是：

$$\iiint_V \sigma(r,\theta,z)(r^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

惯性矩很重要，除了可用来计算发动机发动所需的能量外，还可以用来研究动物的翻转.

例题 3（旋转鸡） 薇诺蒂雅完成了她的小鸡雕塑之后（前情详见第 9.5 节），把它安置在一根两米高的细钢柱上，因而这件作品所占的区域，位于 $z=2$ 之上、$z=11-x^2-y^2$ 之下. 薇诺蒂雅还决定，要让她这只小鸡像陀螺般旋转，并且把作品名称从原来的“这是啥款?”改成“旋转鸡”（其他工作人员给它取了一个绰号：“烧烤架上的鸡”）. 为了确定它能够旋转顺畅. 试计算出这只鸡绕着 z 轴的惯性矩是多少.（已知青铜的密度是 8900 千克/立方米，即 $\sigma(x,y,z)=8900$.）

解：这只鸡绕着 z 轴的惯性矩，就等于下列的柱面坐标积分：

$$\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_2^{11-r^2}(8900)r^2 r\,dz\,d\theta\,dr.$$

注意！我们的积分次序是先对 z，后对 θ，最后对 r 积分．其实我们可以选择任何次序，只是上述次序对这个问题最适合．

因此，上述的积分结果为：

$$\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_2^{11-r^2}(8900)r^3 dz\,d\theta\,dr = \int_0^3\int_0^{2\pi}(8900)[r^3 z]_{z=2}^{z=11-r^2}d\theta dr =$$

$$\int_0^3\int_0^{2\pi}(8900)[9r^3 - r^5]d\theta dr =$$

$$\int_0^3(2\pi)(8900)(9r^3 - r^5)dr =$$

$$(2\pi)(8900)\left[\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]_0^3 =$$

$$(2\pi)(8900)\left[\frac{9(3^4)}{4} - \frac{3^6}{6}\right] \approx$$

$$3.4 \times 10^6.$$

哇！这只鸡的惯性大得惊人——如果薇诺蒂雅要让它顺利旋转，最好安装一些涂满润滑油的轴承，以防转不动，呆若木鸡！

9.8　坐标变换

在此之前，我们已经陆续了解如何在极坐标、柱面坐标及球面坐标里计算多重积分．但是坐标系有很多种，你甚至可以创造出你自己的坐标系．问题是，在随意换用一个坐标系时，我们应该用什么取代 $dV = dx\,dy\,dz$？若要在这些新坐标系里做积分，我们就需要知道这问题的答案．运气很好的是，有个简单的公式可以告诉我们．

假如在某个新的坐标系中，描述空间中一点的三个坐标变成 u、v、w，而不是常用的 x、y、z．再假设这套坐标与 x、y、z 之间的关系式为 $x = x(u,v,w)$，$y = y(u,v,w)$以及 $z = z(u,v,w)$．这时，函数$f(x,y,z)$的三重积分公式 $\iiint_V f(x,y,z)\,dV$ 就会换成 $\iiint_V f(u,v,w)\,dV$．

我们必须做的，就是把 dV 以新的坐标来表示，也就是要找出在 uvw 坐标系里，一个小盒形状区域的体积. 现在，设向量 $\boldsymbol{r}$ 为 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，于是 $\boldsymbol{r}=x(u,v,w)\boldsymbol{i}+y(u,v,w)\boldsymbol{j}+z(u,v,w)\boldsymbol{k}$. 那么，在 uvw 坐标系中，那个盒状区域的体积，差不多与以下三个向量

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\text{及}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$$

的三重积相等，也就是说，求 $\mathrm{d}V$ 的公式就等于这三个向量的三重内积，即：

$$\mathrm{d}V=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w.$$

第二个等号右边的式子，只是一种缩写方式. 上面这个行列式有个特殊的名称，叫做雅可比行列式，它代表了 u、v、w 坐标与 x、y、z 坐标之间的体积伸缩因子.

有了雅可比行列式，uvw 坐标中的三重积分就可以写成：

$$\iiint_V f(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w\ .$$

积分符号底下的 V，相当于我们的积分区域，这时是以 u、v、w 坐标来表示——虽然仍旧是同一个区域，但是它的叙述方式已经与原来的 x、y、z 坐标叙述方式有所不同了.

例题 1（英尺跟码坐标） 宿舍寝室里臭气冲天，原因是昨天晚上大伙吃了太多宵夜，还把吃剩下的垃圾塞在隔壁寝室同学的抽屉里. 现在大伙决议，每个人都得按照他（或她）的寝室大小（以立方英尺计），买足够的空气清新剂，来共同除去臭味. 除臭效果最强的空气清新剂，价钱是每立方英尺 5 美元，所以绝大多数的室友都以英尺为单位，丈量自己的寝室，并用 $f(x,y,z)=5$ 作为被积函数，以各自的寝室为积分区域，去求他们该出的钱.

艾咪喜欢标新立异，这回也不例外，她一向坚持用码为度量单位，而不用英尺. 她的那间寝室 S，若按一般的 x、y、z 英尺坐标来算，就是区域 $0\leqslant x\leqslant 6, 0\leqslant y\leqslant 6, 0\leqslant z\leqslant 6$（一个正立方体），但是按照码坐标 (u,v,w) 来算

的话，由于 $x=3u$，$y=3v$ 而 $z=3w$，因此她丈量的结果是 $0\leqslant u\leqslant 2$，$0\leqslant v\leqslant 2$，$0\leqslant w\leqslant 2$. 试用 u、v、w 坐标，写出三重积分式，并算出艾咪的寝室除臭费用.

解：首先，我们要算出把码坐标(u,v,w)换成英尺坐标(x,y,z)的雅可比行列式. 由于两者间只有倍数 3 的关系，所以我们得到

$$\boldsymbol{r}=x(u,v,w)\boldsymbol{i}+y(u,v,w)\boldsymbol{j}+z(u,v,w)\boldsymbol{k}=3u\boldsymbol{i}+3v\boldsymbol{j}+3w\boldsymbol{k}.$$

然后我们算出：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=3\boldsymbol{i},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=3\boldsymbol{j},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial v}=3\boldsymbol{k}.$$

雅可比行列式就等于这三个向量的三重内积，即：

$$\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{vmatrix}=27.$$

由于 u、v、w 坐标中的积分区域 S 是 $0\leqslant u\leqslant 2,0\leqslant v\leqslant 2,0\leqslant w\leqslant 2$，所以三重积分式就是

$$\iiint_S f(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 5\times 27\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w.$$

算出来的结果是 1080 美元，还真贵呢？这个数字与用 x、y、z 坐标算出来的--样，所以就算改用英尺坐标，该缴的钱还是不会少一些. 希望她打工所得的薪水够付这笔费用.

例题 2（从直角坐标到球面坐标） 试计算出把直角坐标(x,y,z)挨到球面坐标(ρ,ϕ,θ)的雅可比行列式，并利用此结果，算出球面坐标里一个半径为 R 的球的体积.

解：我们已经知道，这两个坐标系之间的转换公式为 $x=\rho\sin\phi\cos\theta$、$y=\rho\sin\phi\sin\theta$、$z=\rho\cos\phi$，所以

$$\boldsymbol{r}=\rho\sin\phi\cos\theta\boldsymbol{i}+\rho\sin\phi\sin\theta\boldsymbol{j}+\rho\cos\phi\boldsymbol{k}.$$

分别取偏导数，我们得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \sin\phi\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\phi\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\phi\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \rho\cos\phi\cos\theta\boldsymbol{i} + \rho\cos\phi\sin\theta\boldsymbol{j} + \rho\sin\phi\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -\rho\cos\phi\sin\theta\boldsymbol{i} + \rho\sin\phi\cos\theta\boldsymbol{j}.$$

雅可比行列式等于这三个向量的三重内积，即

$$\begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \\ \rho\cos\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi \\ -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\phi.$$

嘿，我们在讨论球面坐标内的三重积分时，就见过这个式子嘛！用不同的方法，得到了相同的结果，这不是更加确定了数学的一致性吗？

这个雅可比行列式，在区域 $0\leqslant\rho\leqslant R$，$0\leqslant\phi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上的积分，就等于半径为 R 的球的体积；也就是：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho^2\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^3}{3}\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}\mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{2R^3}{3}\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

你瞧！这不就是我们熟知的球体积公式吗？

嘿，你干嘛点头又摇头，有什么问题吗？



第 10 章

向量场与格林-斯托克斯帮

10.1　向量场

前面说过，每个向量就像一枝箭．但是如果一位农夫用一种基因改造小麦，在田地里种出一枝枝箭来，那么他那块地就可称为一个向量场．我们再假设田里长出来的这些箭都非常重，没办法保持直立站着，所以它们全躺在地上，于是，一个平面上的向量场就形成了，而在该平面上的每一点，都有一个二维的向量．

在我们的日常生活中，最简单的二维向量例子就是风．比方在一个刮风的日子里，我们走在农场里，这时不管在农田里的哪一点，我们都可以感觉到风吹，而且有特定的风速和风向．由于向量包含了方向和速率，所以我们可以在农场的每个地点，画一个二维向量，来同时表示该处的风向和风速．如果把这个画面，画成一张图，得到的图就像图 10.1．

若用方程式表示向量场，可以写成：

$$\boldsymbol{W}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

上面这个向量场，给了 xOy 平面上的每一点一个二维向量．注意，我们在这儿用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 表示向量，这是因为物理学家偏爱这些记号，而物理学又是向量场的大本营．

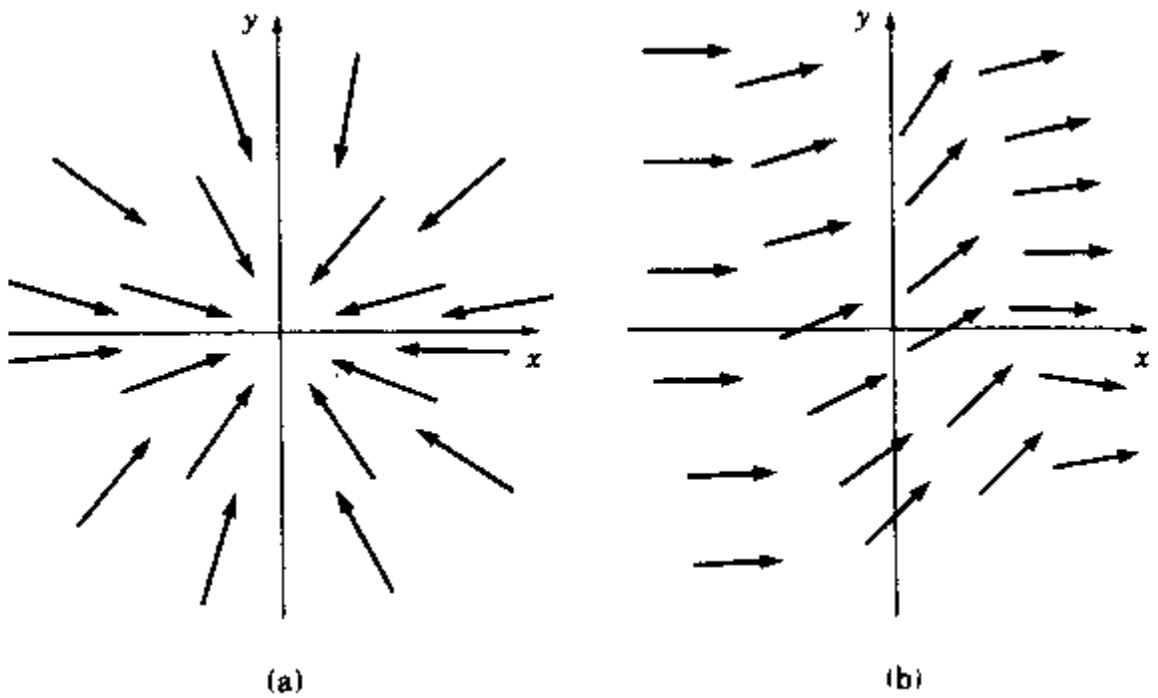


图 10.1 平面上的向量场

如果你现在的位置在$(x,y)=(3,1)$(在俄克拉何马州某处)，而该处的风向量场表示为：

$$\boldsymbol{W}(x,y)=(x^2-5y)\boldsymbol{i}+(6y-x)\boldsymbol{j}\ .$$

那么在你所站的位置，感觉到风就是向量$4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$. 这个向量的大小等于$\sqrt{4^2+3^2}=5$，表示你所站的那点上的风速，而风的方向就是向量$4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$所指的方向. 如果你被风吹倒，你的身体会跟它同一方向.

不但平面上有向量场，空间里也可以有向量场. 这个向量场，会给三维空间里的各点(x,y,z)一个三维的向量$\boldsymbol{F}(x,y,z)$. 这就像你坐在飞机上四处遨游，这时，整个风向量场可由一个函数表示，而此函数包括了分别在x、y、z方向上的坐标，看起来就像：

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}\ .$$

除了表示风，向量场也可用来描述各种作用力，诸如电力、重力及磁力等等. 力这玩意儿，就像恃强凌弱的恶势力，会把你随便推来推去（倘若你让它们予取予求的话）. 对空间中的每一点，受力的强度与方向取决于一个向量，所以力的本身就是一个向量场.

例题（重力向量场） 假设地心位于原点$(0,0,0)$，而地球的重力把周围

一切物质都吸向地心——这就是为什么澳洲人不会从地球表面往“下”掉到太空里而干扰通讯卫星正常运作的原因．地球的重力场可以表示为：

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{-cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{-cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{-cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\boldsymbol{k},$$

其中的 c 是常数，它的值随着我们所用的单位而异．这个式子看起来真是一团糟．但是你切莫将熟透了的番茄或生鸡蛋打到地上来验证．当你要它告诉你，无论位于何处的物体所受地球的引力是多少，这个公式还是不错的．譬如说，有一单位质量位于点(0,10 000,0)上，那么重力场就给了它一个力，也就是下面这个向量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(0,10\,000,0)=&\frac{-c(0)}{((0)^2+(10\,000)^2+(0)^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}\\&+\frac{-c(10\,000)}{((0)^2+(10\,000)^2+(0)^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}\\&+\frac{-c(0)}{((0)^2+(10\,000)^2+(0)^2)^{3/2}}\boldsymbol{k}=\\&\frac{-c(10\,000)}{(10\,000)^3}\boldsymbol{j}=\frac{-c}{(10\,000)^2}\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

这就证明了重力的平方反比性质：重力会随着距离平方的增加而减弱，当距离增加一倍，重力就减为原来的四分之一．

梯度场

要制造向量场，有一种方法是取一个函数的梯度．在每一点上，该函数都有一个梯度向量，综合起来就形成了一个向量场．比方说函数 $F(x,y)=xy-x^2$，我们取它的梯度，就可以得到下面的向量场：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}=(y-2x)\boldsymbol{i}+(x)\boldsymbol{j}.$$

由这种方式得到的向量场，叫做保守向量场，这倒不是指它们只穿灰色西服，或是扣子一直扣到领口的蕾丝女衬衫．待会你就会明白，在保守力场里面兜一圈后回到原来的位置，不会消耗能量，因而也没做任何净功．每个人都向往不用做功的工作，所以我们不难了解，为何保守向量场会这么受欢迎．

若取一个函数的梯度之后，可获得一个保守向量场，这个函数就称为位势

函数（potential function）. 所以当你的篮球教练告诉你："你很有潜力（potential）."他的意思可能只是，如果要取梯度、坐冷板凳，你是个很好的选择. 位势函数在物理学中是一个了不起的学问，物理学家花费许多时间，研究电位势这类事物. 重力也是保守场的一种，它是由一个函数取梯度的结果，而这个函数的负值就叫做重力位势，在我们的例子中，就是

$$f(x,y,z)=\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

这个函数的梯度，就是我们在前面看到的重力场.

你找到吃泡面的筷子了吗？没筷子，两支笔也可以.

10.2 认识散度跟旋度

想像你自己在一个刮风天里，站在高楼的屋顶上. 你跑上去干嘛？别人觉得奇怪，你也在问自己. 原因也许是，你刚被你最爱的她甩了，而且前两天才砸在"一路发"汽车零件网络公司股票上的一大笔血汗钱，居然一夕之间全泡了汤，更惨的是，一个小时前，你接到牙医的紧急通知，她上星期替你装好的牙套材料里，居然发现含有一种慢性毒物. 所以，你跑到屋顶上，希望能找到新的人生方向.

现在你站在屋顶上，却被这上面奇妙的风力震慑住了. 乘乘不得了！屋顶上的风真大，而且变化多端，你往旁边挪开一步，风居然改变另一个角度向你吹过来，而且风力也不相同！这究竟是怎么回事？突然间，你觉悟了，你发现了一个继续活下去的理由——你立志今后要试图去了解，当你四处移动时，风的速度向量场 $\boldsymbol{W}$ 在做何种变化？

散度仪

风速的散度，即 div $\boldsymbol{W}$，是度量空气朝向我们聚集或离我们而去的速度. 如果我们打了一个大喷嚏，一些空气急速离我们而去，那么 $\boldsymbol{W}$（我们的嘴所在的位置）的散度是正值；相对的，若吸进一大口气，空气朝我们聚集过来，那么这个散度就成了负值.

为了度量散度，我们可以利用一种专门用来进行生物试验的生物，称做“散度仪”. 此种散度仪是由一只小小的变形虫组成，这只变形虫本来活得很快乐，像其他变形虫一样随着外来刺激晃来晃去. 为了得知一个向量场中某一定点的散度，我们把这只变形虫放在该点上，然后通过显微镜，仔细观察它的动静. 向量场中的向量，代表着某东西在各个点上受到推挤的情形.

如果我们看到变形虫膨胀伸展开来，表示该点的散度为正值；如果我们看到它的手脚上有许多细小的部分朝四面八方飞散出去，那绝对显示散度为正的. 另一方面，如果变形虫看起来受到挤压，那么该处的散度为负值. 换言之，如果看到它正逐渐减小，而且小眼睛还暴了出来，那么我们可以确定散度为负. 如果看到这只变形虫悠然自得，既不胀也不缩、那么我们知道该点的散度为0.

（本书英文版老编启事：你说对了！变形虫哪来的手脚和眼睛？在此仅代表本出版社的全体同仁，向“单细胞生物之友”致歉. 另外，也请不要写信来抗议.）

让我们来瞧瞧，向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度的正式公式：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

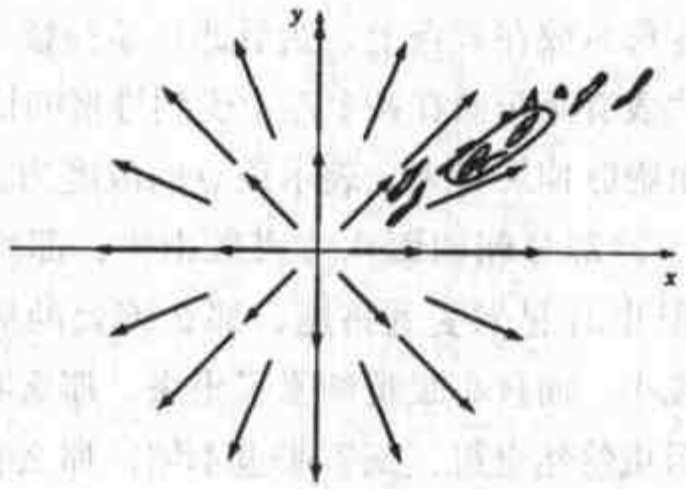
不错，散度只是向量场的 x 分量对 x 的偏导数，加上 y 分量对 y 的偏导数，再加上 z 分量对 z 的偏导数，也就是上述三个偏导数之和. 它之所以叫做散度，原因是如果这个向量场代表一种正在流动的流体（譬如热巧克力糖浆）的速度向量，它的散度就告诉我们，这巧克力糖浆从某一定点发散开（或向它聚集而来）的净速率. 注意，在空间中任一点，div $\boldsymbol{F}$ 是一个数，不是向量，所以 div $\boldsymbol{F}$ 只是三维空间上的一般函数.

例题 1　如果 $\boldsymbol{F}=3x^2z\boldsymbol{i}+4xyz\boldsymbol{j}+yz^2\boldsymbol{k}$，那么 div $\boldsymbol{F}$ 为何？

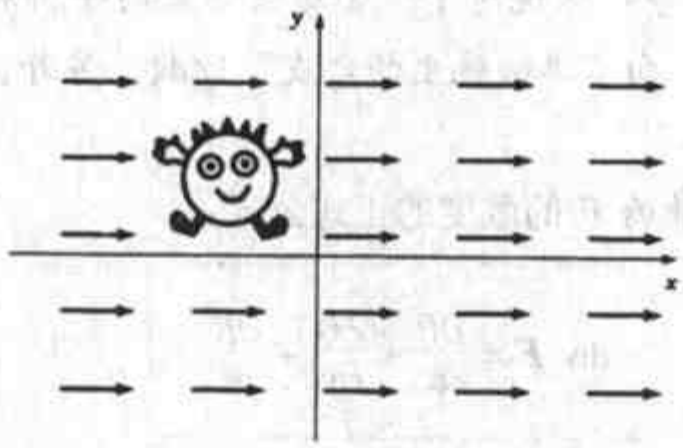
解：　$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial(3x^2z)}{\partial x}+\dfrac{\partial(4xyz)}{\partial y}+\dfrac{\partial(yz^2)}{\partial z}=9x^2z+4xz+2yz.$

让我们在三维空间中随便选取一点，譬如（1，2，－3），看看在这点上的 div $\boldsymbol{F}$ 是多少. 把坐标代入上式，得到 div $\boldsymbol{F}=-27-12-12=-51$. 所以如果你把变形虫放在点（1，2，－3），它会被压得向内缩、被压扁，就像一只……

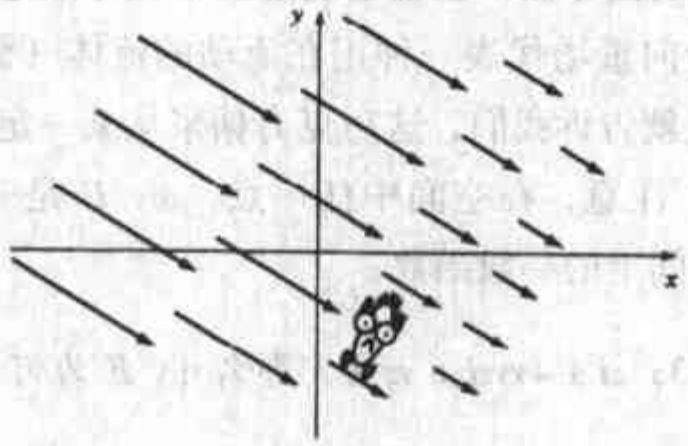
一只变形虫般.



(a) 散度爲正



(b) 散度爲0



(c) 散度爲負

图 10.2 在这三个点上，散度各是多少

常犯的错误　当题目是在求 div $\boldsymbol{F}$ 时，大部分的学生经常画蛇添足，把各种不同的 i、j 等东西丢进答案里．一定要记得，div $\boldsymbol{F}$ 在任何点上都只是一个数，不要想尽办法把它变成向量场．

例题 2　试从变形虫的反应，判定图 10.2 所示的各个向量场中，这只变形虫所在位置的散度为正？为负？抑或为 0?

解：在图 10.2（a）中，我们看到变形虫不断拉长，所以该点的散度为正值．在图 10.2（b）中，虽然变形虫可能被推往向量场的方向，但是它既未被拉长，也未被压扁，所以该点的散度为 0．至于图 10.2（c）的变形虫，显然被压扁变小，所以该点的散度应为负值．

有一个巧妙的方法，可以帮助你记住散度的计算公式．我们制造一个类似向量的怪物，并把它命名为“del”，以符号 ∇ 表示之：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

虽然它的三个分量不是数值，使得它不能算是一个纯正的向量，但是我们还是把它当做向量，对它礼遇有加．我们也把 ∇ 叫做算子（operator），因为它本身不具意义．就如同外科大夫，无论他或她技术多么高明，必须有病人需要他或她开刀（operate）治病才行．一旦没有病人，外科大夫就根本不能叫做外科大夫；没有了病人，当然就没有收入来源，也没有了保时捷，没有地位，没有以他（或她）为荣的老妈，没有了海边的豪华别墅．有了 ∇ 之后，散度的计算公式就变成了：

> $\boldsymbol{F}$ 的散度计算公式
>
> $$\text{div } \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}.$$

为什么呢？我们只要把等号右边的点积乘开便知：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

用旋度计测量旋度

风向量场 $\boldsymbol{W}$ 的旋度，记为 curl $\boldsymbol{W}$，计量的是该向量场的旋转效能，它告诉我们，这阵风试图让你旋转得多快，以及是绕着哪一根轴旋转．curl $\boldsymbol{W}$ 是一

个向量场，跟你的旋转轴同方向或平行，它的大小则指出旋转效能的强度有多大.

我们可以用一种改造过的纸风车（不是小朋友玩的那种）来测量旋度，我们称这种测量装置为“旋度计”. 旋度计上的叶片是平平直直的，有些像水车上的叶片. 我们要讲一个制做旋度计的（痛苦）办法，我们不建议你照着做，不过你听过之后，就会理解其中的观念，而且难以忘怀. 这个办法就是：把旋度计的叶片装在一根锐利的大针上，然后插在你的手指尖上（见图 10.3）.（这样才是名副其实的“指”风车嘛.）

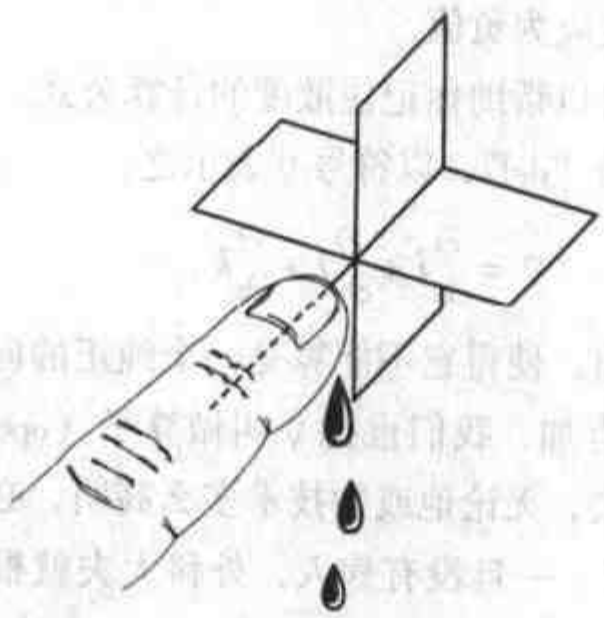


图 10.3 旋度计——用来测量旋度的装置

〔英文版老编启事：拜托拜托！请你改用胶带把那根大头针绑在你的手指头上，免得你手指受到感染，结果上法院告我们. 译注：纸风车的英文是 pinwheel，而 pin 又有“大头针”的意思.〕

旋度计不像纸风车，遇风就会旋转. 如果对着它的转轴方向吹气，这玩意儿根本就不会转动，你吹出的热气只是拂过它的叶片. 如果你把旋度计拿到稳定无变化的风中，它仍然不会旋转，为什么呢？因为叶片在顺时钟方向上所受的风力，刚好与反时钟方向上受的风力一样，互相抵消了. 所以都是白费劲！

但是你可别就此放弃，试多了之后你就会发现，在某些状况，它的确会旋转. 当风向量场会随着位置而改变，而且其中一方向所受的风力比另一方要强时，它就会像仪仗队指挥手中的指挥棒一样旋转. 试试看！你若从其中一侧对

着它的叶片吹气，它就会转得很好．它这一旋转，就转出了旋度，所谓旋度，就是向量场让它绕着轴转动的倾向．

在那些能够让它转动的风向量场中，转动的情况并非处处相同，在有的位置它会转得快，在另一些位置则可能根本不会转．

下面就是如何使用旋度计，来测量某一定点上的旋度：把旋度计的中心，也就是你的指尖，伸到你要测量的点上，然后转动你的手，直到找出能让旋度计转得最快的轴的方向．注意，在你变动方向时，旋度计的中心位置不变．（如果在转动手的过程中，你发觉全身僵直，则应该马上中断实验，尽快查明你上回注射破伤风预防针是什么时候的事．）风向量场 $\boldsymbol{W}$ 的旋度，是一个新的向量场，$\operatorname{curl}\boldsymbol{W}$．$\operatorname{curl}\boldsymbol{W}$ 这个向量场，告诉我们那个旋度计到底在干嘛：$\operatorname{curl}\boldsymbol{W}$ 的大小告诉我们旋度计会转多快，$\operatorname{curl}\ \boldsymbol{W}$ 的方向就是你手指头所指的方向．

我们漏掉了一个小细节，那就是：你所要找的方向，是使旋度计在“反时钟方向”转得最快的方向．若不这么规定，可能会造成不必要的困扰，譬如你和你的老哥一起进行这项实验时，很可能你们其中一人倒立着大叫道：“我找到啦！”而另外一人却站得好端端的，大声说：“是我找到啦！”．为避免这种误会，咱们就先约定好，以反时钟方向为准．

为什么选反时钟方向呢？这是有道理的：因为用“右手拇指定则”比较好记．这个定则是说，当你让右手拇指指向 $\operatorname{curl}\ \boldsymbol{W}$ 的方向，其他指头指向的方向就是向量场转动的方向．有个方法可以帮你记住：把旋度计从你的指尖上拔出来，改插在你的右手拇指指尖上．现在，改变拇指的方向，让你的其他指头指向使旋度计转得最快的方向，这时，你的拇指所指的就是 $\operatorname{curl}\ \boldsymbol{W}$ 的方向．好啦，实验做完了，你可以把大头针拔出来了．

所以，如果我们有一个向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，那么该怎么算出 $\boldsymbol{F}$ 在某一点 (x_0,y_0,z_0) 的旋度呢？由于旋度是含有三个分量的向量，所以它的计算公式有些复杂：

$$\operatorname{curl}\ \boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

幸好我们有条捷径，可以帮助我们记住这个式子．利用 ∇：

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

取 ∇ 跟 $\boldsymbol{F}$ 的叉积，我就可以得到 $\operatorname{curl}\ \boldsymbol{F}$：

$$\text{curl } \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

例题 3 试求向量场 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 3x^2z\boldsymbol{i} + 4xyz\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$ 的旋度.

解:

$$\text{curl } \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$(z^2 - 4xy)\boldsymbol{i} + (3x^2 - 0)\boldsymbol{j} + (4yz - 0)\boldsymbol{k} =$$

$$(z^2 - 4xy)\boldsymbol{i} + 3x^2\boldsymbol{j} + 4yz\boldsymbol{k}.$$

哇！你的指挥棒玩得真棒！

10.3 线积分阵容

一般的积分都是在某个区间 $[a, b]$ 上做积分，而（曲）线积分则是在空间中的曲线做积分. 线积分又称为路径积分，而路径也可以叫做曲线. 起始点与终点在同一点的路径，我们称为闭路（loop）或封闭曲线（closed curve）.

线积分有好几种. 第一种是沿着曲线去积分一个函数. 你应该还记得，在第 6.2 节里，我们是怎么找出要如何计算曲线 C 的弧长，其中的曲线是用参数形式 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 来描述的，参数 t 的变化范围则是从 $t = a$ 到 $t = b$. 求弧长的办法是，先把曲线切成许多小段，并让它们短到几乎是直线线段，因而每段的长度，就大约等于速率 $|\boldsymbol{r}'(t)|$ 乘以时间间隔 Δt. 其次，把这些小段的长度全加在一起，再取让 $\Delta t \to 0$ 时的极限，就会得到一个表示弧长的积分：

$$\text{长度} = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

但是，现在我们也许想求取弧长之外的数量，譬如说，我们可以积分一条弯曲金属线的密度函数，以求出它的总质量．同样的，每一小段金属线的质量，差不多等于那一小段的长度，乘上该段上任何一点的密度 $\sigma(x,y,z)$，即 σds．于是，这条金属线的总质量可以由下式求得：

$$\text{质量} = \int_C \sigma ds = \int_a^b \sigma(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt.$$

例题（总质量）　艺术家托弗·丹瑟尔先生设计了一条项链．这条项链的外形是一条金属线，缠绕成一个半径为 1 英尺的圆．已知它在点 (x,y) 的密度为英尺 $\sigma(x,y)=3+2y$ 磅，试求这条项链的总质量．

解：首先，我们把这个单位圆表示成参数形式，$\boldsymbol{r}(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$．其次，我们要算出 ds．由于 $x(t)=\cos 2\pi t$，$y(t)=\sin 2\pi t$，而且没有 $z(t)$ 这一项，所以

$$ds=\sqrt{[2\pi\ (-\sin 2\pi t)]^2+\ [2\pi\ (\cos 2\pi t)]^2}dt=2\pi dt.$$

同时，我们把密度函数改成一个 t 的函数：

$$\sigma(x,y)=3+2y=3+2\sin 2\pi t.$$

因而，求总质量的积分变成了：

$$\text{质量}=\int_C \sigma ds = \int_0^1 (3+2\sin 2\pi t)2\pi dt =$$

$$\int_0^1 (6\pi+4\pi\sin 2\pi t)dt =$$

$$[6\pi t-2\cos 2\pi t]_0^1 =$$

$$6\pi \approx$$

$$18.85(\text{磅}).$$

乖乖！好重的项链呀！

10.4　向量场的线积分

无论是粒子也好，钢琴也罢，我们移动任何东西时所做的功，都等于这件东西的位移，乘上我们在推它时需花费的力（假设力的大小、方向不变）．这

就是为什么搬家公司要多收大笔额外费用，才愿意帮你把钢琴搬到没有电梯的五层大楼上.

换言之，作用力（譬如重力）使粒子作直线运动时所做的功，就等于力向量 $\boldsymbol{F}$ 与位移向量 $\boldsymbol{D}$ 的点积 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}$. 所谓位移向量，就是指该粒子从一点移到另一点时所构成的向量. 由此可推知，当你使出了吃奶的力气，扛着笨重的钢琴爬了四层楼梯后，重力对钢琴所作的功是负值，但是就你的肌肉来说，所作的功则是正值. 如果你到了五楼之后，把钢琴从窗口推了出去，那么在它掉落的过程中，重力所作的功就变成了正值. 在这趟“上下”搬运过程中，重力对钢琴作的净功为 0.

现在，再假设我们移动一颗粒子时没走直线. 说实在的，在日常生活中，走直线的位移真是少之又少，通常都是一路上东拐西绕的. 比方说，老板有事要你上楼去见他，因此你得走出自己的办公室，穿过走道，拐几个弯，上楼，再拐上几个弯. 所以，假设我们让一颗粒子沿着一条曲线移动. 那么力向量呢？如果我们所施的力在不同的位置有不同的方向和大小，该怎么办？这时，我们需要用一个向量场来代表力向量，向量场里各个向量的方向与大小，取决于粒子在曲线上各点的位置.

为了计算所做的功，我们得把曲线切成许许多多小段，使得每小段都几乎是一条直线. 同时，也由于每段的距离很短，力向量在每一小段上的变化很小，因此我们可以假设每小段上的力向量固定不变. 因而，我们可以算出这个固定的力向量，与那一小段直线位移向量的点积，来当作我们使粒子沿着那一小段曲线运动时所做的功. 把整条曲线上的所有小片段上的功全加起来，就可以得到我们对该粒子行经整条曲线所做功的近似值. 随着曲线愈切愈细，我们得到了一个极限，这极限会把总和变成积分. 为了计算这类积分，我们可以利用一个向量值函数 $\boldsymbol{r}(t)$，把曲线 C 表示成参数形式，然后把力向量与位移向量，都改写成 t 的函数，接着取点积，最后，我们就写出了一个从 $t=a$ 积分到 $t=b$ 的一般积分式子：

$$\text{功}=\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_a^b \boldsymbol{F}(r(t))\cdot \boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t.$$

例题 1 （热水澡盆里的冰凉汽水） 网络零售商“处处汽水公司”正在设计一个新潮的热水澡盆，来推销该公司的汽水. 在澡盆里循环的水力可以用

向量场$\boldsymbol{F}(x,y)=x^2\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j}$来表示. 该澡盆附有一台电视机，而观赏电视的最佳座位是在 (0, 1). 澡盆的另一个附带设备，是一台装着冰镇汽水的冰箱，位置是在 (1, 0) (图 10.4).



图 10.4　一个与向量场有关的喝饮料问题

市场调查结果显示，为了取用冷饮，被调查顾客的手会不断从座位沿一直线移动到冰箱，一个下午下来，来回的次数可以多至数十次. 试问，该顾客每次从座位移动到存放汽水的位置，他需要做多少功?

解: 这题所求的是计算功的线积分，亦即$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 首先我们要写出一个参数曲线$\mathbf{r}(t)$，可以描述我们要积分的曲线或路径 C. 题目已经告诉我们，这路径是条直线，所以我们可以把它写成$\boldsymbol{r}(t)=(1-t)\boldsymbol{A}+(t)\boldsymbol{B}$，其中的 $\boldsymbol{A}$ 和

$\boldsymbol{B}$ 分别为起始位置向量和终点位置向量，所以

$$\boldsymbol{r}(t)=(1-t)(0,1)+(t)(1,0)=(t,1-t)=(t)\boldsymbol{i}+(1-t)\boldsymbol{j},$$

其中 $0\leqslant t\leqslant 1$. 其次，我们要算出 $\boldsymbol{F}(t)$，也就是 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))$：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))=\boldsymbol{F}(t,1-t)=t^2\boldsymbol{i}-2t(1-t)\boldsymbol{j}=t^2\boldsymbol{i}+(2t^2-2t)\boldsymbol{j}.$$

接下来，取 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导数：

$$\boldsymbol{r}'(t)=(1)\boldsymbol{i}+(-1)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},$$

于是我们所要的点积就是：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)=[(t^2)\boldsymbol{i}+(2t^2-2t)\boldsymbol{j}]\cdot[\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}]=$$
$$t^2-(2t^2-2t)=$$
$$2t-t^2.$$

由于行经路径 $\boldsymbol{r}(t)$ 的方式是取所有 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的 t 值，所以每次沿此路径走一次所做的功，就等于下面这个积分的结果：

$$\int_0^1(2t-t^2)\mathrm{d}t=\left[t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

我们在这儿看到了，循环水力所做的功是个正值，所以这位坐在澡盆里的顾客事实上不必使力，而是由澡盆里不断搅拌的水流，把他的手推向那些冷饮.（当力与位移发生在同一直线上，而它们之间的内积或点积为正值，就表示这个力所做的是正功.）此产品推出之后，这家网络公司的汽水畅销，所以当初设计这个澡盆的工程师，得到了公司的许多股票选择权.

那个 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是啥玩意儿?

线积分也经常写成下面的形式：

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

这种形式的积分出现时，都是在算让一颗粒子沿着一条路径移动需做的功. 式子里的 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，不过是把积分拆成 x 和 y 两个分量. 当我们有一个向量场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

以及一条参数（化）曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j},\qquad a\leqslant t\leqslant b,$$

那么

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}.$$

$\boldsymbol{F}$ 跟 $\boldsymbol{r}'(t)$ 的点积为

$$\boldsymbol{F}(r(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)=\left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).$$

于是所做的功就等于：

$$W=\int_C\boldsymbol{F}(r(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t=\int_C\left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

当我们求的是曲线 $y=f(x)$ 上的线积分时，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 这种形式特别管用. 曲线 $y=f(x)$ 本身就已经是一条参数曲线，其中 $x=t$ 而 $y=f(t)$，所以我们在求线积分时，可以把它当成积分区间为 $a\leqslant x\leqslant b$ 的标准积分来计算.

例题 2　已知曲线 C 为 $y=x^2-x$ 的一部分，区间是 $1\leqslant x\leqslant 2$，试计算 $\boldsymbol{F}=2x\boldsymbol{i}-6x^2\boldsymbol{j}$ 沿着曲线 C 上的线积分.

解：$\boldsymbol{F}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}=2x\boldsymbol{i}-6x^2\boldsymbol{j}$，即 $P=2x$，$Q=-6x^2$. 而 $y=x^2-x$，故 $\mathrm{d}y=(2x-1)\mathrm{d}x$. 所以

$$\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_1^2(2x)\mathrm{d}x+(-6x^2)(2x-1)\mathrm{d}x.$$

到此它已是一个非常标准的积分了. 继续做积分：

$$\int_1^2(2x-12x^3+6x^2)\mathrm{d}x=\left[x^2-3x^4+2x^3\right]_1^2=-28.$$

10.5　保守向量场

有的时候，把向量场沿着曲线做线积分，计算起来还可以更简单. 这种情况就发生在当我们的向量场是一个函数的梯度时，其中最常见的情况就是在研究电力和重力的时候.

> 函数 f 在区域 R 上的梯度为一保守向量场.

这情况有些类似我们在《微积分之屠龙宝刀》讨论过的微积分基本定理. 这个定理告诉我们，如果 $g(x)=G'(x)$，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=G(b)-G(a)$，这就让积分的计算变得容易多了. 同样的，当曲线 C 为区域 R 内一条从 A 所给定的

点，延伸到由 B 所给定的点，而在 R 上，$\boldsymbol{F}=\nabla f$，那么我们就会有一个简单的方法，可计算 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$.

> 当 $\boldsymbol{F}=\nabla f$，
>
> $$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{r}=f(B)-f(A).$$

我们可以把它想成是微积分基本定理的向量版本．现在就让我们瞧瞧，这方法对保守场的线积分计算有多容易：

例题 1 检验 $\boldsymbol{F}=(2x+3y)\,i+(3x-2y)\,j$ 是否为保守场，然后计算线积分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$，其中的积分路径 C 为单位圆的四分之一，以反时钟方向从点 $(1,0)$ 到 $(0,1)$.

解： 如果我们能够找到一个函数 $f(x,y)$，满足 $\boldsymbol{F}=\nabla f$，就能证明 $\boldsymbol{F}$ 是保守场．这儿就有一个：

$$f(x,y)=x^2+3xy-y^2.$$

这个函数在所有的点 (x,y) 的梯度都与 $\boldsymbol{F}$ 相等.

但是我们是如何找到这个函数的呢？方法是这样的：由于 $\nabla f=\boldsymbol{F}$，所以下式一定成立：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y.$$

把上式对变数 x 积分．我们得到 $f(x,y)=x^2+3xy+g(y)$，其中的 $g(y)$ 是一个只随着 y 变化而不随着 x 变化的函数，因此在对 x 做偏微分时，该项会变成 0 而消失．接着，我们把 $f(x,y)$ 对 y 做偏微分，得到：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x+g'(y)$$

它应该与 $\boldsymbol{F}$ 的第二个分量 $(3x-2y)$ 相等，因而我们得知

$$g'(y)=-2y,$$

$$g(y)=-y^2+K.$$

由于我们计算的是定积分，常数 K 的大小不会影响结果，所以可以把它设为 0．因而，就得到了

$$f(x,y)=x^2+3xy-y^2,$$

其 $\nabla f=\boldsymbol{F}$. 实际上，$f(x,y)=x^2+3xy-y^2+K$（K 可以为任何常数），也同样能满足 $\nabla f=\boldsymbol{F}$.

好了！我们已经证实 $\boldsymbol{F}$ 的确是保守的. 也正因为如此，它的线积分计算变得非常简单，我们不需要把积分路径换成参数形式，也不需取任何点积，我们只要算出：

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{r}=f(0,1)-f(1,0)=(-1)-(1)=-2.$$

如果我们沿着这个圆整整绕了一圈的话，那么起始点 A 与结束点 B 就合而为一，亦即 $A=B$. 意思就是，任何一个保守向量场沿着一对闭曲线的线积分，都等于 $f(B)-f(A)=f(A)-f(A)=0$. 你说像这样的计算，够不够简单？

保守向量场的重要性质

1. 求保守向量场沿着一条曲线的线积分时，只需要取该曲线两端点的位势函数差，即可得到.

2. 若一个向量场在某区域上为保守的，则它在该区域上某条曲线的线积分结果与所用的参数曲线无关，而仅与曲线的起点和终点有关. 换言之，它与路径无关.

3. 一区域上的保守向量场，若沿着该区域上的一条封闭曲线做线积分，则线积分的结果等于 0.（保守向量场绕一圈，什么都做不成；相对的，非保守向量场绕了一圈之后，就会产生赤字.）

那么，我们要如何辨别一个向量场是否为保守的？这问题并不好回答，我们干脆先瞧瞧如何辨别一个向量场“不是”保守的. 例题 1 已经指出，如果向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 为保守的，那么就能找出一个函数 $f(x,y)$，使得 $\boldsymbol{F}=\nabla f$，而 $P=\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$Q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$. 现在，如果我们把 P 对 y 做偏微分，会发现

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

此结果告诉我们：

> 任何一个保守向量场永远满足
>
> $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

换言之，如果这两个偏导数不相等，或是在某个区域中的某些地方不存在，那么该向量场在这个区域中就不是保守的.

例题 2 $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j}$ 是否为保守向量场?

解: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, 所以$\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial P}{\partial x}$, 表示这个向量场“不是”保守的. (你可不能就此认为它既然不保守，就一定是左派或自由派；若真要归类，它比较像中间路线的.)

要是$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$呢? 我们可以下结论说，该向量场一定是保守的吗? 我们一定能找到一个$f(x, y)$，满足 $\nabla f = \boldsymbol{F}$? 不尽然. 要能找到一个位势函数$f(x, y)$，使得 $\nabla f = \boldsymbol{F}$，我们还需要一个条件，那就是 $\boldsymbol{F}$ 的定义域上没有任何洞，也就是所谓的单连通区域. 在图 10.5 所显示的三个区域中，R 和 S 是单连通的，而

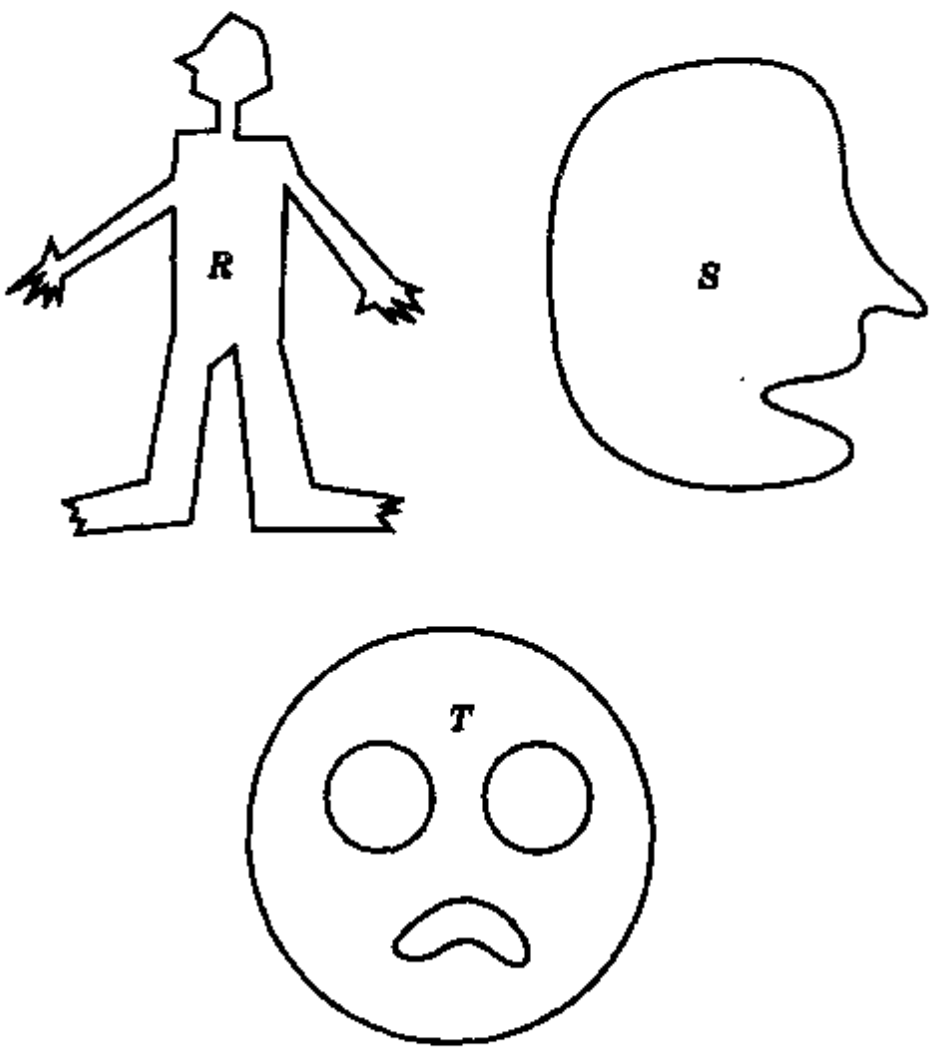


图 10.5 中间没有洞的区域（例如 R 和 S，但 T 不是），称为单连通区域

看起来不大高兴的 T 并不是.

> 如果在一个单连通区域 R 上，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则对 R 上的某个函数 $f(x, y)$，$\boldsymbol{F}=\nabla f$，因而 $\boldsymbol{F}$ 在 R 上为保守的.

常犯的错误　若要向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 为保守的，在一个单连通区域内，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 一定要处处成立. 若仅是沿着某一路径或闭路，此等式皆能成立，还不足以保证 $\boldsymbol{F}$ 为保守的. 以闭路为例，我们还得证明在闭路所围起来的区域上的所有点，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 也要成立，然后我们才能确定存在 f 使得 $\nabla f=\boldsymbol{F}$，而 $\boldsymbol{F}$ 沿着该闭路的线积分为 0.

例题 3　设 $\boldsymbol{F}$ 为如下的向量场：

$$\boldsymbol{F}=\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{-x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j},$$

试计算沿着路径 C 的线积分 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$，其中的路径 C 为反时钟方向绕单位圆一圈，起点跟终点都在点 $(1, 0)$.

附记　我们在这儿用了另一种积分符号 $\oint$，中间画了一个小圆圈，这表示我们在绕着一个闭路做线积分，我们的积分路径是个起点和终点相同的封闭曲线.

解：首先，检查一下 $\boldsymbol{F}$ 是否为保守向量场，如果是，问题就简单了，因为我们的积分路径是一个闭路，而保守向量场在任一闭路上的线积分等于 0.

所以让我们算算看. 利用商法则：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)(1)-(2y)(y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)(-1)-(2x)(-x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

它们两个相等，那么我们是不是可以接着说：$\boldsymbol{F}$ 为保守向量场呢？不行. 这里面有个问题，就是 $\boldsymbol{F}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在原点 $(0,0)$ 上都是被 0 除的分数，因而没有定义. 换

言之，$\frac{\partial P}{\partial y}$和$\frac{\partial Q}{\partial x}$相等的区域并未包括点(0,0)在内，表示这个区域并非单连通的．所以事实上，$\boldsymbol{F}$ 在包含该闭路的区域内并非保守的，因此，梯度等于 $\boldsymbol{F}$，而定义域包含整个曲线 C 的函数$f(x,y)$并不存在．

既然 $\boldsymbol{F}$ 不是保守向量场，我们当然不能走捷径，只能乖乖的按规矩来做线积分．首先，我们得把积分路经 C 写成参数曲线：

$$\boldsymbol{r}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j},\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

这是单位圆的参数表示．现在，我们知道 $x=\cos t$，$y=\sin t$，所以 $x^2+y^2=1$，而 $\boldsymbol{F}$ 也可以化简成：

$$\boldsymbol{F}=\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}.$$

又因为

$$\boldsymbol{r}'(t)=-\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j},$$

于是

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'(t)=-\sin^2 t-\cos^2 t=-1.$$

因此

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}-1dt=-2\pi.$$

瞧，答案并不是0，进而证实 $\boldsymbol{F}$ 的确不是一个保守向量场．好险！幸好我们刚才够仔细，考虑到了点（0，0）的情况．

10.6 格林定理

假如$\frac{\partial P}{\partial y}$和$\frac{\partial Q}{\partial x}$不相等，那么 $\boldsymbol{F}$ 一定不是保守的，而线积分的结果就跟所取的路径有关．因此沿着一个闭路做线积分之后，结果很可能不是0．格林定理就在告诉我们，如何计算任何一个向量场在某一闭路上的线积分．为了让格林定理的结果可行，我们在沿着闭路前进时，一般得顺着反时钟方向才行．换言之，当我们沿着边界曲线 C 走下去时，边界所围的区域 D 必须一直在我们的左手边（请看图 10.6）．我们把反时钟方向定为“正定向”．

（平面上的）格林定理 如果 C 是一个正定向的闭路，D 为 C 所包围的区域，而且 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 为 D 上的一个向量场，则

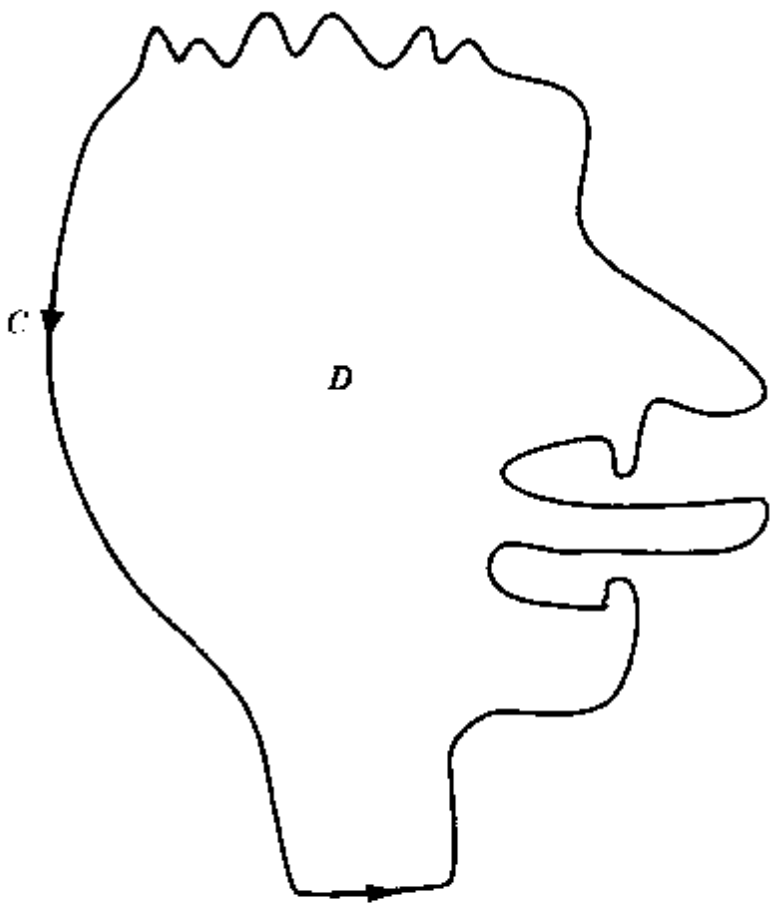


图 10.6　格林定理是说，在曲线 C 上所做的线积分，等于在区域 D 上所做的积分

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\ .$$

在 $\boldsymbol{F}$ 是保守向量场的情况下，这个方程式的等号两边都等于 0.

如果你肯仔细想想，就会觉得上面这个等式还真是个异数，因为等号右边是一个对整个区域做的二重积分，而左边是一个仅仅顺着该区域边界所做的线积分，而两边居然会相等！这有些像是你光看书的外貌，来评价书里的所有内容——对向量场来说，你的确能以貌取“人”.

重要剑法　在格林定理以及其他的积分定理中，向量场 $\boldsymbol{F}$ 及出现的其他函数，如$\frac{\partial P}{\partial y}$及$\frac{\partial Q}{\partial x}$，都必须是连续的，否则我们就会遇到如第 10.5 节例题 3 里，所看到的类似问题.

例题 1　试计算线积分 $\oint_C -y\,dx + x\,dy$，其中的 C 是平面上一个半径为 R 的圆，圆心在 (0, 0)，而前进的方向为反时钟方向.

解：由格林定理，我们知道，这个线积分就等于对圆里面的区域（我们令它为 D）所做的积分．在这儿，$P=-y$，$Q=x$，所以$(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=1-(-1)=2$，于是

$$\oint_C -y\,dx+x\,dy=\iint_D 2\,dx\,dy=2(\text{面积}(D))=2\pi R^2.$$

所以，此线积分刚好等于这个圆面积的两倍，这结果与圆的位置无关．其实，就算这条封闭曲线不是圆，$-ydx+xdy$ 在上面的线积分仍然是该封闭曲线所围面积的两倍．

例题 2 试计算下列线积分

$$\oint_C (x^3\sin x-5y)\,dx+(4x+e^{y^2})\,dy,$$

其中 C 是平面上一个半径为 2 的圆，圆心在 $(0,0)$，而前进的方向为反时钟方向．

解：我们以前的办法是先把 C 用参数形式表示，然后进行计算，但是格林定理提供了一个容易得多的方法．我们知道 $P=x^3\sin x-5y$，$Q=4x+e^{y^2}$，就可算出：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=4,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-5,$$

所以

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=4+5=9.$$

于是

$$\oint_C (x^3\sin x-5y)\,dx+(4x+e^{y^2})\,dy=\iint_D 9dxdy\ .$$

9 在 D 上的积分（D 就是 C 所围的区域），就等于 D 的面积的 9 倍，即 $9\pi r^2$，而 $r=2$.

$$9\pi(2)^2=36\pi.$$

还有什么比这更简单的？对了，你做好防风措施了吗？泡面买了没？记得再买两支笔，不会漏墨水的．

10.7　散度定理：求散度的积分

格林定理有一个表兄弟，是在告诉我们，把函数的散度拿来积分之后，究竟会发生什么事．这位表兄弟名字蛮长的，叫做足够适当散度定理，而且有两个版本，一个用在平面上，另一个用在空间上．

你应该还记得，散度就是计量在向量场内某一点上的流入或流出的净值．当我们做散度在某一区域上的积分时，会得到这整个区域内多出来或消失了的量．当然，世界上没有任何东西会平白多出来或不见，所以这些量的变化，会等于从这个区域的边界流入或流出的量，而这正是散度定理要告诉我们的信息．

例题 1（一个有毒的例子）　某个隶属于超基金（Superfund，美国为防止化学废弃物污染而设置的特别基金）组织的有毒废弃物浅埋场，四周建有围墙，其中贮存的有毒废弃物事实上并非静止不动，而是正在到处流窜．比方说，在某些点（破漏的废料桶）上，废弃物正不断进入该浅埋场，这些点叫做“源”，散度为正；而另外有些点叫做“壑”，废弃物在这些点上被吸收，因而散度为负值．这些有毒废弃物在该浅埋场内到处游荡，形成了一个速度向量场，此速度向量场就告诉我们，废弃液体（或烂泥，或各种多氯联苯）在这浅埋场上的每一点，正以何种方向和速率移动着．

其中一部分会流出浅埋场的围墙，进入附近居民的家里，因此居民们最想知道的问题就是：“这些废弃物对此地的房地产价格有什么影响?”或者换句话说：“究竟有多少流到外面来，以邻为壑?”散度定理就是要告诉我们这个问题的答案．

解：我们把这个速度向量场的散度加起来（做积分），就可以得到流出围墙的总量．

例题 2（派对线积分*）　有间大厅里正在进行一个喧嚣的派对，一大堆人在大厅里各处游走，进进出出．这些参加派对的人的动向，构成了一个派对速度向量场．（社会学家在派对结束之后，通常都会仔细研究残留在地上的口

水和啤酒痕迹，来分析这类向量场.）派对上，有些人像是磁铁，把其他人都吸引到他们身边，有时是因为他们口若悬河的言论，有时则是因为他们穿的无袖T恤特别好看，以致于受到崇拜者的层层包围．虽然他们自己从未如此承认过，他们就是我们所说的“壑”.

另外有些人刚好相反，简直是驱散剂，避之唯恐不及．原因？有时是因为他们见人只能谈最近牙医替他做的根管治疗，有时则是因为他们穿的无袖T恤特别不雅．派对上的人见到他们，都会不约而同的希望能在无伤大雅之下，争相走避．这些人物即是我们所说的“源”．然而，派对中绝大多数的其他人既不是源、也不是壑，他们只是人潮的一部分，随波逐流而已.

散度定理告诉我们的，就是这些个别源和壑之间的关系，以及走进和离开这间大厅的总人数．它是说，如果我们把上述派对向量场的散度找出来，然后求积分，我们就可以得到进入和离开的总人数，包括那些偷溜进来的白吃白喝的专家，以及从阳台上掉进下面游泳池的非正式离开人员，

＊这个例子是由J．Kasdan提供给我们的，谨此致谢.

用散度定理来做计算

假设D是平面上一个区域，它的边界是曲线C．在例题2中，这个区域就是大厅的地板．又假设$\boldsymbol{F}$是定义在D上的向量场，为了用散度定理来做计算，我们得算出究竟有多少东西流过了区域的边界，也就是去积分向量场$\boldsymbol{F}$跨越边界C的流量，亦即计算所谓的“通量”.

要计算东西被推越过边界曲线的总量，我们可以先算出每一小段曲线上通过的量，然后加和，最后取极限，获得一个积分．那么应该如何计算一小段曲线上通过的量呢？假设某一小段长度为ds，那么通过该小段的量，应该等于$\boldsymbol{F}$垂直于那一小段的部分，乘以长度ds（因为$\boldsymbol{F}$平行于该段曲线的部分，并不能把任何东西推出去）．而$\boldsymbol{F}$垂直于曲线C的分量，就等于$\boldsymbol{F}$跟C的单位法向量$\boldsymbol{n}$（长度为1）的点积（图10.7）.

单位法向量通常以$\boldsymbol{n}$来表示．对于平面上的任一曲线$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$，它的$\boldsymbol{n}$可以由下面的公式求出：

$$\boldsymbol{n}=\frac{y'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{i}+\frac{-x'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{j},$$

其中$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$.这是一个长度为1的向量，它与同一曲线

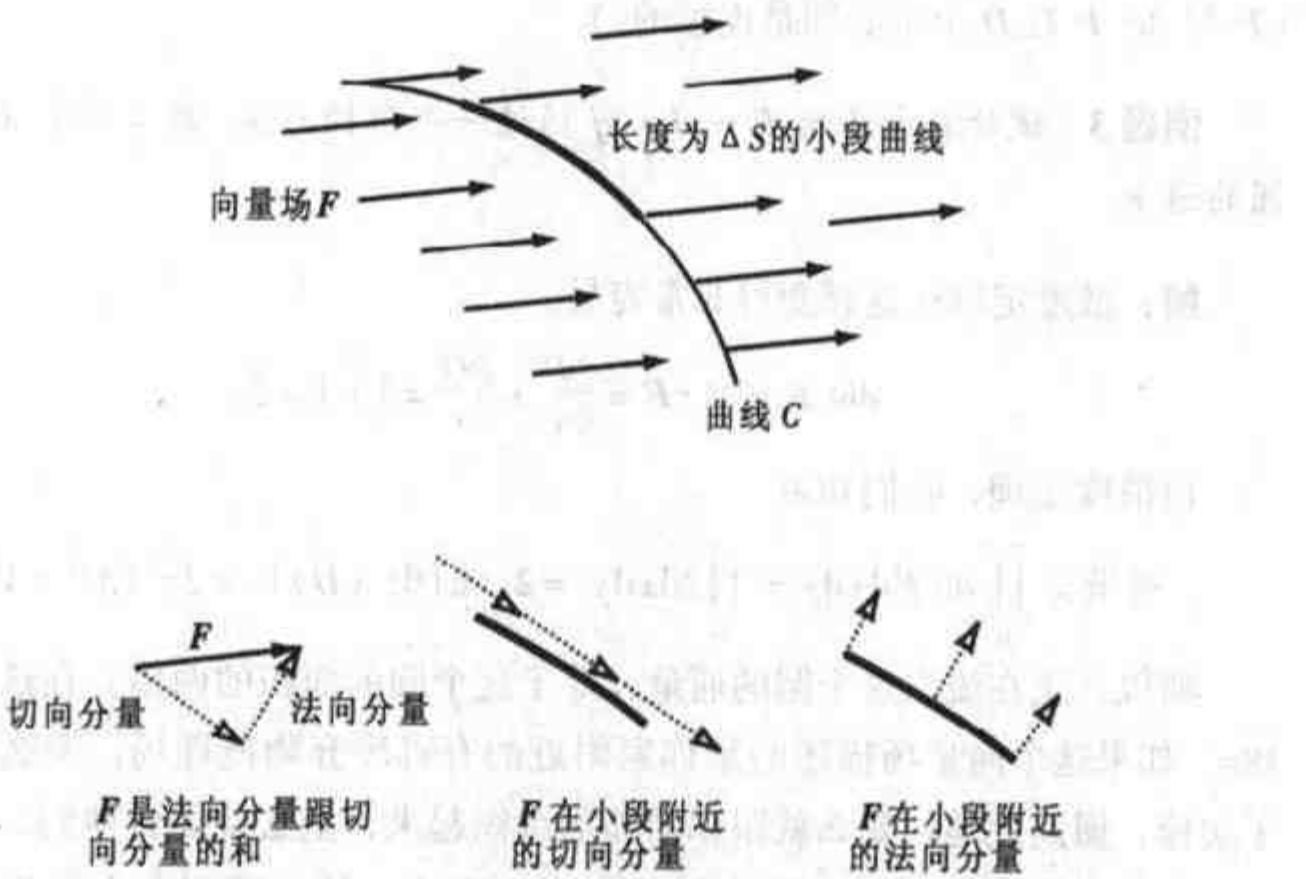


图 10.7　向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过曲线 C 一小段的量，等于该段曲线的长度，乘以 $\boldsymbol{F}$ 垂直于该段的分量的长度（大小）

的切向量 $x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j}$ 的点积为 0.

于是，通量就定义为：

$$\text{通量} = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s.$$

散度定理是在说，这个计算通量的积分式子，实际上也等于 $\boldsymbol{F}$ 的散度（$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$）在区域 D 内的积分，而 D 为曲线 C 所围的区域. 曲线 C 必须表示成参数形式，使得当我们沿着 C 走时，区域 D 维持在我们的左手边. 散度定理与前述的格林定理非常相似，两者的差异在于，被积分的东西稍有不同. 在格林定理之中，做线积分的是向量场沿着边界曲线的切向分量，然而在散度定理中，做线积分的部分则是向量场沿着边线的垂直分量.

以下就是散度定理：

（平面上的）散度定理

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

（$\boldsymbol{F}$ 与 div $\boldsymbol{F}$ 在 D 上都必须是连续的.）

例题 3 试计算向量场 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ 通过一个半径为 3，圆心位于（0，0）的圆的通量.

解： 散度定理让这题变得非常容易.

$$\text{div } \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$$

由散度定理，我们知道

$$\text{通量} = \iint_D \text{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\,(\text{面积}\,(D)) = 2\pi\,(3)^2 = 18\pi.$$

所以，正在流出这个圆的通量，等于这个圆的面积的两倍，在这一题就是 18π. 如果这个向量场描述的是你家附近的有毒废弃物掩埋场，要么赶紧把房子卖掉，搬离此地，要么就跟你的邻居组织起来，上法院控告他们. 如果这个向量场代表你家的派对，看来似乎有不少客人，从二楼阳台上摔进你的游泳池了.

10.8 面积分

现在，你可能希望知道怎么算出曲面上的积分. 为什么？因为你未来赖以维生的行业，有可能是在专门负责用红色的石蜡把艾登（Edam）乳酪包装起来，因而你需要知道，外形不同的乳酪，各需要准备若干石蜡. 或是你正面对一个曲面，曲面各处密度不同，而你需要计算它的总质量. 如果你想求出空间中任一曲面 S 上的积分，就必须把 S 以方程式表示出来.

前面我们已经讲过一个描述这种曲面的方法，这方法适用于方程式 $z = f(x, y)$ 的图形. 但是它并不是唯一的办法，现在我们来瞧瞧另一种.

就像我们可以把曲线化成参数形式 $\boldsymbol{r}(t)$，我们也可以把曲面参数化，成为 $\boldsymbol{r}(u, v)$. 所不同的是，这回的定义域内有 u 和 v 两个变数，因为我们面对的是两维的东西. 就像要描述我们在地球表面上的位置，必须同时标示出经度和纬度，所以要确定曲面上一点的位置，必须有两个坐标. 因而，描述参数（化）曲面的方程式有如下式：

$$\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}.$$

对不同的 u 和 v，$\boldsymbol{r}(u,v)$代表的都是空间中的一点.比方说,我们选了 $u=2$ 和 $v=5$,那么 $\boldsymbol{r}(u,v)$这个点的 x 坐标是 $x(2,5)$,y 坐标是 $y(2,5)$,而 z 坐标就是 $z(2,5)$.

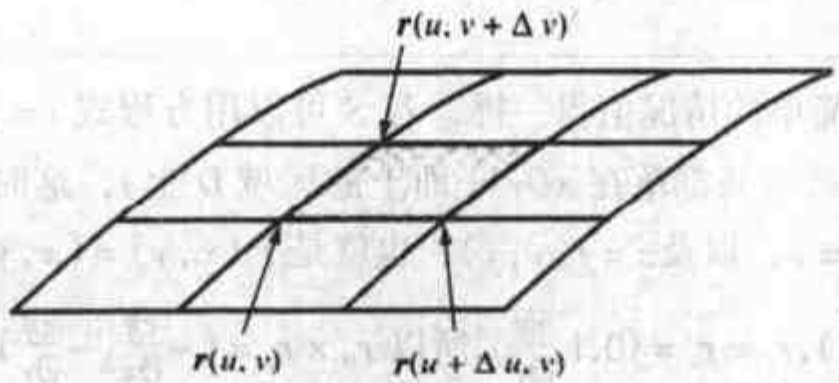
由 $z=f(x,y)$的函数图形所成的曲面，是其中的特殊情况. 若改写成向量形式，上式就变成了:

$$\boldsymbol{r}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+f(x,y)\boldsymbol{k}.$$

式子里的 z 坐标，成了 x 坐标和 y 坐标的函数，这是因为，在 x 和 y 值决定之后，z 值也跟着决定了，而且是唯一的. 这样的公式最适宜用来代表屋顶或马戏团的帐篷，因为它们最多只有一个制高点.

参数曲面及其面积

与前面谈过的许多情形一样，用来求参数曲面面积的积分，也是从取极限的程序得来的. 为了得到所要的计算公式，我们首先得算出一个小平行四边形



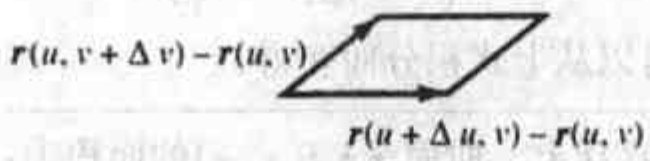


图 10.8　曲面上那个小小平行四边形的面积，大约等于 $|[\boldsymbol{r}(u+\Delta u,v)-\boldsymbol{r}(u+v)]\times[\boldsymbol{r}(u,u+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u+v)]|$

的面积，这个平行四边形的两条邻边，是由向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来代表，正如我们在第 5.5 节见过的，

$$\text{面积（平行四边形）} = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|.$$

现在，假定 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是描述该曲面的参数式. 如图 10.8 所示，我们把 u 和 v 稍微挪动一点距离 Δu 和 Δv，亦即从 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 到 $\boldsymbol{r}(u+\Delta u,v)$ 以及从 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 到 $\boldsymbol{r}(u,v+\Delta v)$，就形成了一个小平行四边形，其面积大约等于

$$\text{面积(平行四边形)} = |\boldsymbol{r}(u+\Delta u,v) - \boldsymbol{r}(u,v)) \times (\boldsymbol{r}(u,v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u,v))|.$$

这块面积就等于

$$\left|\left(\frac{\boldsymbol{r}(u,\Delta u,v) - \boldsymbol{r}(u,v)}{\Delta u}\right) \times \left(\frac{\boldsymbol{r}(u,v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u,v)}{\Delta u}\right)\right| \Delta u \Delta v.$$

取极限之后，就变成

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v,$$

其中的 $\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$，$\boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$，我们把 $\mathrm{d}S$ 称做曲面面积元，并且把它想成非常非常小的一块曲面的面积.

把所有这些小面积(通过积分)全加起来，就得到整个曲面的面积：

$$\text{面积} = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_S |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v.$$

有一个特别简单的情况值得一提. 若 S 可以用方程式 $z = f(x,y)$ 的图形表示（其中各点（x，y）都落在 xOy 平面上的区域 D 上），这时，S 的一种参数表示是 $x = u$，$y = v$，以及 $z = f(x,y)$，也就是 $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$. 于是 $\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_x = (1,0,\dfrac{\partial f}{\partial x})$，$\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}_y = (0,1,\dfrac{\partial f}{\partial y})$，所以 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y})$，而 S 上的小块 $\mathrm{d}S$ 面积就为

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

整个曲面 S 的面积，可以从上式积分而获得.

在 xOy 平面上的区域 D 上，曲面 $z = f(x,y)$ 的面积为：

$$\text{面积} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

例题 1（圆柱面的面积）　已知一半径为 3，以 z 轴为柱心，且夹在 $z=0$ 和 $z=10$ 之间的圆柱面．试找出该圆柱面的参数表示，并计算其面积．

解：我们可以把半径为 3 的圆（在 xOy 平面上）表示成以下的参数形式：

$$\boldsymbol{C}(\theta)=(3\cos\theta,3\sin\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

由此，我们可以先用一个 θ 值，确定一点在圆上的位置，然后再加上一个 z 值，告诉我们该点的高度，这样就定出了圆柱面上的一点了．所以，这个圆柱面的一种参数表示就是

$$\boldsymbol{r}(\theta,z)=(3\cos\theta,3\sin\theta,z),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant z\leqslant 10.$$

换成向量形式，上式可写成：

$$\boldsymbol{r}(u,v)=3\cos u\boldsymbol{i}+3\sin u\boldsymbol{j}+v\boldsymbol{k},\qquad 0\leqslant u\leqslant 2\pi,0\leqslant v\leqslant 10.$$

为了计算 S 的面积，我们首先得知道 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$．

$$\boldsymbol{r}_u=-3\sin u\boldsymbol{i}+3\cos u\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}.$$

以及

$$\boldsymbol{r}_v=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+1\boldsymbol{k},$$

于是

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\ =3\cos u\boldsymbol{i}+3\sin u\boldsymbol{j},$$

而

$$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|=\sqrt{(3\cos u)^2+(3\sin u)^2}=3,$$

所以

$$\text{面积}(S)=\iint_D 3\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v=\int_0^{10}\int_0^{2\pi}3\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v=\int_0^{10}\Big[\ 3u\ \Big]_0^{2\pi}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{10}6\pi\ \mathrm{d}v=\Big[\ 6\pi v\ \Big]_0^{10}=60\pi.$$

这其实就等于圆周长 6π，乘上圆柱面的高 10，与我们在中学里背过的面积公式不谋而合．

求函数在空间曲面上的积分

我们曾经说过，许多情况之下，我们会需要对空间中曲面上的函数做积分．譬如说，我们有可能想知道一个曲面的总质量，而该曲面的密度（也就是每单位

面积的质量),会随着曲面上位置不同而有差别.最常见的例子是复活节前后,西方人买来吃的空心巧克力兔,整只兔子表面的巧克力厚度不一.若是有一个函数能够告诉我们,表面上任何一点的巧克力密度的话,我们就可以拿这个密度函数做被积函数,求它在兔子表面上的积分,而得到兔子的总质量,看看我们共吃下去了多少巧克力.

若转换成数学,我们就说:已知一个曲面 S 的密度函数$\sigma(x,y,z)$,那么它的总质量,就等于每一小块曲面的密度,乘以各个小块的面积,再加起来.所以,它的总质量就等于:

$$\text{总质量} = \iint_S \sigma(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

下一步该如何计算,得看曲面 S 是以什么方式来描述.如果 S 表示成参数形式$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$,那么我们从前面已经知道,$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,所以,密度函数$\sigma(x,y,z)$在曲面 S 上的积分公式就为

$$\iint_S \sigma(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

例题 2(盖屋顶的微积分) 建筑师图先生为新建的数学大楼,设计了一个特别高耸的壮观屋顶,这个屋顶用的是最顶尖的太空时代建材,各处密度都不一样.假设此屋顶外观可以用函数 $z=10+2x+2y$,$0\leqslant x\leqslant 20$,$0\leqslant y\leqslant 15$ 的图形来描述(单位为米),而在点(x,y,z)的密度函数为 $\sigma(x,y,z)=(100-z)$千克/平方米.如果屋顶的总质量超过了60 000 千克,新大楼就会被它压垮,这个大学就不再开任何数学课程了.倘若总质量不到40 000 千克,一旦刮风,屋顶就会被吹走.

试求屋顶的实际质量,并预测以后是否还有人继续请图先生设计建筑物.(对于这个问题,我们必须假设,如果屋顶压垮整个数学系,学生们会非常生气.)

解: 由于屋顶就是$f(x,y)=10+2x+2y$ 的函数图形,所以它的质量就等于

$$\text{质量} = \iint_S \sigma(x,y,10+2x+2y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^{15}\int_0^{20}[100-(10+2x+2y)]\sqrt{1+(2)^2+(2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^{15}\int_0^{20}(270-6x-6y)\,dx\,dy=$$

$$\int_0^{15}\Big[\,270x-3x^2-6xy\,\Big]_{x=0}^{x=20}dy=$$

$$\int_0^{15}(4200-120)y\,dy=$$

$$\Big[\,4200y-60y^2\,\Big]_{x=0}^{x=15}=$$

49 500(千克).

所以，屋顶的质量既没有过重，也没有过轻，表示它会完好无恙的呆在原处．然而不幸的是，图先生在设计这栋建筑物时，居然没有想到要设计洗手间，以至于新落成的漂亮大楼周围得放置好些个流动厕所．看样子，他要找到下一个差事，只怕有点问题．

通过空间曲面的通量

我们可以计算出，向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过空间中一曲面 S 的通量，方法与平面上曲线的情形没什么两样．

这个曲面积分，或称 $\boldsymbol{F}$ 通过 S 的通量，就定义为：

$$\text{通量}=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS,$$

$\boldsymbol{n}$ 是垂直于 S 的单位法向量场．此积分求得的通量，就等于 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面 S 的流量．

让我们再仔细瞧瞧式子的 $\boldsymbol{n}\,dS$．假设曲面 S 可以写成平面上一区域 D 上的参数表示，而因为 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 即该曲面的法向量，因此它等于单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 乘上它的长度 $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$，即

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\boldsymbol{n},$$

所以

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}.$$

由于 $dS=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv$，因而

$$\boldsymbol{n}\,dS=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv.$$

所以我们得知

$$\text{通量} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_D \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv.$$

相较之下，向量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 在计算上要简便多了.

例题 3（蜜蜂通量） 在我们爬山的途中，看到一个铁丝网做的笼子，里面躺着一个蜂窝，这个笼子的表面可以用方程式 $x^2+y^2+z^2=1$ 来描述. 等我们经过时，有人不小心惊动了这蜂窝，蜜蜂从里面飞出来的速度，可以表示成速度向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 铁丝网笼子上的洞太大，关不住蜜蜂，所以蜜蜂能够自由出入，而 $\boldsymbol{F}$ 在笼子表面的通量，告诉我们究竟有多少蜜蜂穿过铁丝网，飞出笼子. 试计算此通量.

解： 从题目所给的方程式来看，我们知道这个笼子是一个半径为 1 的球面. 我们必须把球面的参数表示出来，而且动作要快！既然是球面，那我们最好使用球面坐标$(\rho、\phi、\theta)$，由第 9.6 节，可知 $x=\rho\sin\phi\cos\theta$，$y=\rho\sin\phi\sin\theta$，$z=\rho\cos\phi$. 由于这儿的球面半径为 1，可设 $\rho=1$. 所以该球面可写成：

$$\boldsymbol{r}(\phi,\theta)=(\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{j}+(\cos\phi)\boldsymbol{k}\ ,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi.$$

在此处，ϕ 和 θ 所扮演的角色，分别是前面公式中的 u 和 v，于是我们可算出：

$$\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_\theta=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=(\sin^2\phi\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin^2\phi\sin\theta)\boldsymbol{j}+(\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{k}.$$

又

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\phi,\theta))=(\sin\phi\cos\phi)\boldsymbol{i}+(\sin\phi\sin\phi)\boldsymbol{j}+(\cos\phi)\boldsymbol{k}\ ,$$

两者的点积就为：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\phi,\theta))\cdot(\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_\theta)=\sin^3\phi\cos^2\theta+\sin^3\phi\sin^2\theta+\cos^2\phi\sin\phi=$$

$$\sin^3\phi+\cos^2\phi\sin\phi=$$

$$(\sin^2\phi+\cos^2\phi)\sin\phi=$$

$$\sin\phi.$$

所以得到：

$$\text{通量} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi \; d\phi \; d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} 2d\theta = 4\pi.$$

这表示每秒钟有差不多 12 只蜜蜂飞出铁丝网.你们应该加把劲赶紧逃离.

三维空间中的散度定理

适用于三维空间的散度定理是说:在空间中一立体区域 V 内的向量场,其总散度就等于它穿越过该区域的边界曲面 S 的总流量.

(空间中的)散度定理

$$\text{通量} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} \; dS = \iiint_V \text{div } \boldsymbol{F} dV$$

($\boldsymbol{F}$ 和 div $\boldsymbol{F}$ 在区域 V 内必须是连续的.)

例题 4　在这一例题里,我们要用比较简单的方法,也就是利用散度定理,把例题 3 的蜜蜂通量再算一遍.散度定理告诉我们:

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} dS = \iiint_V \text{div } \boldsymbol{F} dV$$

所以,我们可以求速度向量场的散度在蜂窝笼子内部的积分,以此求得所要的通量.速度向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$ 的散度就是

$$\text{div } \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

所以

$$\text{通量} = \iiint_V \text{div } \boldsymbol{F} dV =$$

$$\iiint_V 3 \; dV =$$

$$3 \text{ 体积 } (V).$$

由于半径为 1 的球体积为 $(\frac{4}{3})\pi$, 所以最后的答案等于 $(3)(\frac{4}{3})\pi = 4\pi$,与我们上次得到的答案一样. 想想看, 如果刚才有一窝蜜蜂正朝你扑过来, 你会希望用哪一种方法来计算?

10.9 火上加油!

斯托克斯定理告诉我们，向量场的线积分和面积分之间，有一个让人意想不到的关联. 它让我们看的是一个悬浮在空间中的曲面（叫做 S），它并不是个封闭的曲面，而是有一条边或边界，而这条边界是一条曲线（叫做 C），如图 10.9 所示.

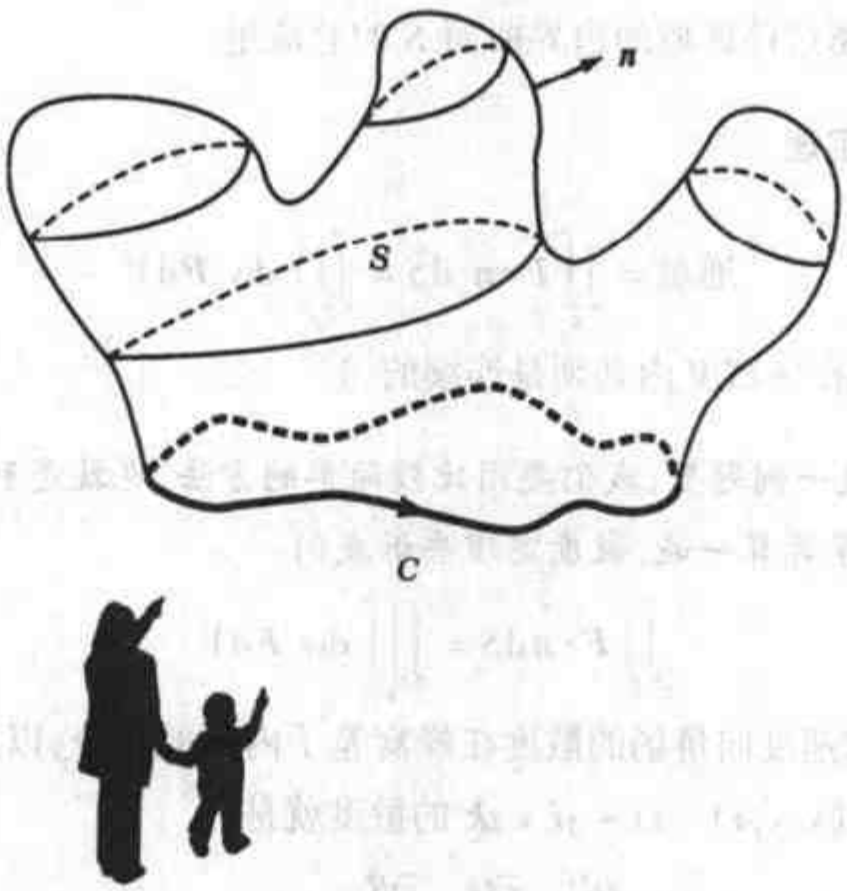


图 10.9 曲面 S 的边界曲线为 C，单位法向量为 $\boldsymbol{n}$

然后，我们把 S 的单位法向量称为 $\boldsymbol{n}$. 斯托克斯定理的一般形式就是：

斯托克斯定理

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n})\ \mathrm{d}S.$$

想不到吧！把向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲面 S 的所有的旋转全加起来，就可以判断出该向量场试图扭扯 S 的边界曲线的总量. 换言之，向量场 $\boldsymbol{F}$ 在曲面 S 上的旋度

的总和，就等于 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 C 的线积分，后者就是该向量场沿着 C 上的分量的总和.（注意！ $\boldsymbol{F}$ 和 curl $\boldsymbol{F}$ 必须为连续的.）

当两种量的其中一种比较容易计算时，斯托克斯定理就派上用场了，它让我们选择比较简单的解题步骤. 不过，这个定理要求你选对方向，怎么选才对呢？假如你沿着曲线 C 走，而与曲面 S 垂直的向量场 $\boldsymbol{n}$ 刚好与你脑袋所指的方向一致的话，那么 S 必须在你的左手边才行，否则你的答案会多出一个负号.

斯托克斯定理有一个特殊的情况，那就是当曲面 S 只是 xOy 平面上的区域时. 我们先讨论这个简单的特殊情况. 在此情况下，单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 就是 $\boldsymbol{k}$，而这个定理就变成了：

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_D (\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A.$$

例题 1（从纽约市立芭蕾舞团开溜）　纽约市立芭蕾舞团首演之夜，有一群旋转不停的芭蕾舞者不告而别，旋转到了曼哈顿的城中区. 纽约市警方看到这个情形之后，灵机一动，丢了一根绳子过去，把仍旧不停旋转的舞者围绕在绳子中间，希望暂时困住她们，等待舞团编舞者来把她们领回去. 当旋转的舞者碰到外面绳子的时候，她们会施给绳子一个旋转的力，把绳子拉紧. 警方知道，只要沿着绳子的作用力不超过 1000 牛顿，就可圈住舞者. 假设这些舞者产生的力，可以表示为 $\boldsymbol{F}(x,y)=(-2y)\boldsymbol{i}+(2x)\boldsymbol{j}$（单位同上），而这个绳圈可描述成一个圆 C：$x^2+y^2=100$，那么这根绳子能否圈得住舞者？

解：警方知道，他们得计算作用力 $\boldsymbol{F}$ 沿着绳子的线积分，然后看看结果是否超过 1000，但是他们没有时间一步步慢慢做，先把曲线 C 写成参数式，然后再做线积分. 幸好，他们知道可以利用斯托克斯定理，简化计算过程：沿着绳子的拉力，其实等于绳子所围区域里面的旋转力总和：

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_D (\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A.$$

其中 C 是半径为 10 的圆，而 D 是 C 中间的圆形区域.

等号右边的 curl $\boldsymbol{F}$ 就等于 $\nabla\times\boldsymbol{F}$：

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2y & 2x & 0 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{k}.$$

于是，(curl $\boldsymbol{F}$) $\cdot \boldsymbol{k} = 4$. 所以，在 D 上做面积分的函数只是一个常数函数 4. 由于 D 的面积为 $\pi (10)^2 = 100\pi$，所以绳子上所受的拉力是它的 4 倍，也就是 400π，大于 1000，这表示绳子会断掉. 因此如果警方仍要控制住局面，看样子得出动警棍才可能奏效.

好啦，以上是斯托克斯定理的一个简单情况，因为曲面 S 就只是平躺在 xOy 平面上而已. 也许你注意到，它看起来与格林定理颇为类似. 事实上，平面上的斯托克斯定理的确与格林定理差不多. 但是，格林定理只能用在平面上，而斯托克斯定理还可以用在空间曲面上.

例题 2（后现代建筑） 后现代主义建筑师图先生又设计了一个屋顶. 这回的形状是往下覆盖的抛物面：$z = 16 - x^2 - y^2$，且在平面 $z = 7$ 平面的上方. 假设吹向这个屋顶的风力向量场为

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = 2yz\boldsymbol{i} + 2xz\boldsymbol{j} + 2xy\boldsymbol{k},$$

而他这屋顶在其边缘 C 是用螺丝钉锁住的，但是这些螺丝钉在积分 $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 超过 6 的时候会断裂. 试问这座后现代设计师的创作是否会被风吹走?

解：我们当然可以直接计算 $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，但是与上一题一样，我们有比较简单的方法. 斯托克斯定理告诉我们：

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_D (\operatorname{curl} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}S.$$

我们先计算 curl $\boldsymbol{F}$：

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{vmatrix} = 0.$$

你瞧！这回碰到了一个绝佳的例子，说明斯托克斯定理如何大幅简化了许多麻烦. 既然 $\boldsymbol{F}$ 的旋度为 0，表示 (curl $\boldsymbol{F}$) $\cdot \boldsymbol{n}$ 也是 0，所以无论怎么积分，结果仍然是 0：

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}S = 0.$$

显然，风的所有扭力都相互抵消了，变成 0，所以这屋顶不会被吹跑. 当

然，这并不保证屋顶不会漏雨，不过，为了追求艺术，漏雨乃小事一桩，不足挂齿.

好啦，微积分课程到此结束，我们都教完了，剩下的部分就是庆祝微积分课程结束的大型派对，满屋子的气球、五颜六色的派对帽，以及冒充香槟的汽水. 对啦，别忘了还有期末考试，所以，继续看下一章……



第 11 章

期末考会考些什么?

在这一章，我们会想办法帮助你期末考前大猜题. 虽然每一位教授所上的课程多少都有些出入，但是要正确猜出考些什么题目，有方法可循. 最好的信息来源是你的任课老师. 所以上课时除了专心听讲，你还得特别留意老师说过哪些部分要考. 假如你有办法弄到以往几年的考题，你占的优势就大啦. 因为一般说来，很少有老师每年大幅度更改题型.

所以，以下就是一些经常会在考卷上出现的题目类型，所列出的都是我们在这本书里讨论过的主题.

如果你要真正的考题，而且要附详尽的题解，嘿! 我们都是过来人，怎么会不知道你的需求呢? 我们把许多过去的考题与题解放在网站上，我们的网址是:

www. howtoace. com

欢迎上来逛逛.

1. **多重积分问题**（最为普遍，期末考出现率达 100%）. 这类问题可能要你计算总质量、平均值、体积或是质心. 一般而言，这些问题就是在叫你计算某个函数在某个区域上的积分，而这个区域可能在平面上或是在空间中. 解这类问题的最困难的部分，通常是在判定该用哪个坐标系，正确无误的描述积分区域. 在每一题的计算过程里，你得一连做两次或三次积分. 正确的积分次序与你描述这个区域的方式有关.

诀窍 每次都不要忘记检验你的答案是否合理. 通常你都能从其他角度或

旁证，大致估计你的答案是否正确．譬如题目要你计算某个半径为 1 的小圆球的体积，那么，你的答案当然应该小于一个包住那个球的正立方体的体积；假设这个正立方体边长为 2，体积就等于 $2\times2\times2=8$，所以如果你的答案是 214，这答案一定错了，你必须重新计算这题．又譬如你计算出来的体积是个负值，你也必须重算一次；如果你的体积算出来之后长得像“$3x^2-7\pi y$”，还有变数夹在里面，那表示你要么是积分式子写得不对，要么就是做积分时没有遵循“由内向外”的原则．

2．**级数的收敛性**（最为普遍，期末考出现率达 100%）．只要你选的微积分课程里有序列和级数，那么考卷上一定会出现一题甚至多题，问你：“下列级数是否收敛？”后面可能还会继续问你：“收敛到哪里？”

你应该熟悉所有的收敛性检验法，以及条件收敛与绝对收敛的差别．

只要选对了检验法，这些题目都相当容易，不过你也得有点心理准备，可能会遇到一两个比较棘手的题目，需要绕一点圈子．最典型的是需要应用一点代数上的技巧，把所给的级数改头换面一番，使它能够套用某个检验法．

3．**偏导数与链式法则**（最为普遍，期末考出现率达 90%）．这类问题是要你算出函数$f(x,y,z)$的偏导数．典型的例子是：

$$若f(x,y)=e^{xy}+y^x,试求\frac{\partial f}{\partial y}.$$

这类问题也有可能换一种形式，题目并不告诉你函数是什么，只告诉你某些偏导数，然后要你算出其他的偏导数．在这种情况下，你得熟悉链式法则的用法．

4．**画出平面上的区域或空间中的立体，并把它们写成参数方程式**（非常普遍，期末考出现率达 80%）．这类题目是要你用式子描述某个东西，例如“夹在一个以 z 轴为轴、半径为 1 的柱面，与一个以原点为球心、半径为 2 的球面之间的区域”．这些题目经常与多重积分问题结合在一起，要你在这些区域上做多重积分．选对坐标（柱面坐标、笛卡儿坐标或球面坐标），是解此类问题的关键．

5．**涉及向量的计算**（非常普遍，期末考出现率达 80%）．这类题目可能要你计算点积（内积）、叉积（外积）、一个向量在另一个向量上的投影、三角形或平行四边形的面积、直线或平面的方程式等等．如果你能掌握向量的基本几何意义，并且熟悉一些诸如 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 之类的公式，这类问题不会给

你很多麻烦.

6. **画出一个曲面**（非常普遍，期末考出现率达 80%）. 这类问题可能是要你作图画出一个二次曲面，比方说抛物面、椭球面、双曲面，或是抛物面. 或者题目给了你一个方程式，里面少了一个变数，而要你把该方程式生成的某个柱面画出来. 又或者题目随意给你某个函数$z=f(x,y)$，叫你作图.

7. **陈述定理跟定义**（非常普遍，期末考出现率达 80%）. 虽然几乎没有哪个老师，会出考题要学生证明定理，但是他们通常希望学生能叙述出定理及定义的内容. 典型的考题也许是要你陈述格林定理、斯托克斯定理，或用来判断级数收敛性的积分检验，或是要你写出偏导数的定义，或问你一个级数收敛究竟是什么意思、$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续又是什么意思，若要拿到满分，你的陈述必须具相当程度的正确性，怎么说呢？譬如说，你在叙述格林定理的时候，应该加上连续性的假设，除非教授没有在课堂上提过这回事.

8. **线积分**（非常普遍，期末考出现率达 80%）. 这类问题会告诉你一条曲线以及一个函数或向量场，然后要你求线积分. 有时你可以直接计算，有时你会发现此路不通，而需要用格林定理替你解决问题.

9. **找出临界点**（非常普遍，期末考出现率达 80%）. 题目会丢给你一个函数$f(x,y)$或$f(x,y,z)$，要你计算出它的所有临界点，并且判定它们的性质：是极大值、极小值或是鞍点.

10. **解最大或最小值的问题**（非常普遍，期末考出现率达 80%）. 其用意是要你在某个约束条件下，求出某个函数的绝对极大值或绝对极小值. 你可以利用所给的约束条件，把函数里的变数减少掉一个，也可以利用拉格朗日乘数. 为了拿到满分，最好能够写下某种论证，来证明你找到的那个点的确是最大值或最小值.

11. **计算泰勒级数**（较普遍的，期末考出现率达 70%）. 题目会给你一个函数，然后要你计算它的泰勒级数展开式. 有时候，题目还会要你算出该级数收敛到哪个数.

变化 1：所要计算的泰勒级数不是 x 的幂级数，而是$(x-a)$的幂级数.

变化 2：只要你计算几项，然后找出误差公式，即余项.

12. **计算一个幂级数的收敛半径**（较普遍的，期末考出现率达 70%）. 题目里给你一个幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots,$$

然后要你算出它在 a 附近的收敛区间$(a-r, a+r)$，这个 r 就是收敛半径．答案可能小到等于0，也可能大到∞．题目常常会指明要你检验区间端点的收敛性，不过，当题目要你找收敛区间，则已经暗示你必须检验端点啦．

13．**与向量场有关的计算**（较普遍的，期末考出现率达70%）．你需要知道散度（div）和旋度（curl）的定义，也要能判定一个向量场是否为保守的．要解答这类问题，你必须懂得这些名词是什么意思，以及如何计算．

14．**面积分与通量**（较普遍的，期末考出现率达70%）．题目会给你某一个曲面，通常是一块平面、柱面或球面的一部分，然后要你求出某个向量场通过这个曲面的通量．

千万要选择最适用的坐标系．如果你能运用散度定理或斯托克斯定理，解这类问题的困难度往往会大大的减轻．

15．**计算三维区域的体积**（较普遍的，期末考出现率达70%）．通常这类问题的困难部分，都是在写出积分式的过程中．有的时候，这些区域的边界是一些函数图形，有的时候则是用文字来描述，比方说："这块立体是在一个以 z 轴为轴、半径为2的柱面里面，而且在平面 $z=0$ 之上、平面 $x+z=4$ 之下．"为了不容易弄错，最好是把题目所给的区域简单画下来．

计算体积时，你可以用三重积分，也可以用二重积分．如果你选用的是三重积分，而且立体的外形比较容易用柱面坐标或是球面坐标来描述的话，最好就用这两种坐标．

16．**有关极限与连续性的题目**（较普遍的，期末考出现率达70%）．你已经见过单变数函数$f(x)$的极限和连续性问题．现在，你会看到两个变数的函数$f(x,y)$，甚至三个变数的函数$f(x,y,z)$．同时，题目还会问你，$f(x,y)$或$f(x,y,z)$在何处连续．

17．**方向导数与梯度**（较普遍的，期末考出现率达70%）．你可能必须计算某一个方向导数 $D_u f$，计算时要注意，所用的向量 $\boldsymbol{u}$ 应是一个单位向量．这类题目也有可能要你找出最速上升或最速下降的方向．

18．**格林定理、散度定理、斯托克斯定理**（还算普遍，期末考出现率达50%）．这类题目会明确指示你应用某一个定理去计算一个积分．事实上，这比起只丢给你积分式子，要你自己看着办要容易得多．**但是你也得把这些定理**

弄得滚瓜烂熟不可，你得实地做练习，每个定理都找几个例题来做，而且还得搞清楚它们的来龙去脉.

有的时候，题目会要你用两种方法去计算同一个积分，以证明格林定理成立，因而你必须知道等号两边的积分式子该如何计算.

此外，每当题目要你计算通过一个曲面的通量时，记得问你自己，这些定理是否能够帮上忙.

19. **参数曲线的速度向量和加速度向量**（还算普遍，期末考出现率达50%）. 题目可能会告诉你位置向量、速度向量或加速度向量的任何一个，外加一些初始信息，然后要你求出没告诉你的另外两个向量. 这类题目大部分都和抛体问题有关.

20. **质心与矩**（还算普遍，期末考出现率达50%）. 这类问题牵涉到多重积分的计算，由此求出质心、惯性矩（转动惯量）、平均密度等. 首先，你得知道这几个名词是什么意思，计算公式是什么，以及如何写出多重积分式，如何做积分. 譬如说，题目要你计算一个空间区域 V 绕着 z 轴旋转的惯性矩，而且告诉你该区域的密度函数是 $\sigma(x,y,z)$，这时你就必须晓得惯性矩的计算公式是

$$\iiint_V \sigma(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ .$$

当然，你还需要知道怎么写出和算出这个多重积分.

21. **反常积分**（还算普遍，期末考出现率达50%）. 这类积分的积分极限，其中一个或两个都是无穷大，或是被积函数在区间中出现无穷大的函数值. 解这类问题时，得选用合适的积分极限.

22. **拉格朗日乘数**（还算普遍，期末考出现率达50%）. 并不是所有的微积分课程里都包含这个部分，但是如果你在课堂上见过的话，它就很可能会出现在你的期末考试考卷上. 当其他领域应用到微积分时，譬如在经济学上，拉格朗日乘数是最常用的工具之一，所以如果你修的商用微积分，那么这类问题的出现机率会很高.

23. **洛必达法则**（还算普遍，期末考出现率达50%）. 每当你代入某个值之后，函数的极限出现了不定式（像 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$）时，就是需要使出洛必达法则的时机. 在同一题里你经常得套用两次甚至三次. 不过每次使用前一定要看清

楚，若非不定式，则千万别用!

24. **切平面或切线**（不太普遍，期末考出现率仅 25%）. 在这类问题中，一个典型的例子是要你找出通过曲面上某一点的切平面方程式. 你必须计算出两个不同方向上的偏导数，用它们去找出这两个方向上的切向量，然后取它们的叉积以得到法向量，最后取所有与法向量垂直的向量，就可以找出所要的平面方程式了.

25. **弧长**（不太普遍，期末考出现率仅 25%）. 这类题目之所以不常见，是因为能用手做的例子很罕见，积分式子通常会变得太难看、难以收拾. 但是，简单的例子可能出现，诸如算出沿着直线、圆或螺旋线的弧长.

26. **曲率**（不普遍，期末考出现率仅 10%）. 与上面所说的原因一样，这类问题很容易变得难以处理，因此不适合当做考题.

词汇表：数学名词速成

del：符号 ∇ 称为 del，它代表：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

∇ 是一个算子，本身不具任何意义，但是 ∇f 代表一个函数 $f(x,y,z)$ 的梯度，$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 是向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度，而 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 则是向量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度．就好像你得把一个“i”加在“del”的后面，才能买到美味的三明治（deli 是专卖香肠、乳酪等熟食的商店），你也得在 ∇ 后面加上一个函数或向量场，才能得到有意义的结果．

（二画）

二重积分（double integral）：此乃数学系派对上最受欢迎的鸡尾酒之一（需加冰块），受喜爱的程度与“粉红拉格朗日乘数”不相上下．当然，二重积分就是逐次积分，“二重”表示要做两遍的意思．所以当你看到：

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ ,$$

你就该知道，它是要你连续做两次普通积分，而且顺序永远是从里面的 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x$ 开始，然后把得到的答案当做第二次积分的被积函数．里面的积分极限有可能是函数，然而外边的积分极限几乎永远是常数．

（三画）

三重积分（triple integral）：就与棒球比赛中有双杀与三杀一样，既然有二重积分，当然也有三重积分，动作一样，只是多做了一次．做三重积分时，你

得逐次积分三次，顺序是从内向外.

叉积（cross product，又称外积）：一个性情非常乖戾的乘积，也许是因为它的计算公式比点积（内积）复杂得多. 两个向量的叉积，仍然是向量，不是数字，因此它还必须保有许多坐标值. 若 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$，而 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3)$，则 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=(v_2w_3-v_3w_2)\boldsymbol{i}+(v_3w_1-v_1w_3)\boldsymbol{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\boldsymbol{k}$. 为了比较容易记忆，上面这个式子也可以写成行列式的形式：

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

（四画）

不定式（indeterminate form）：从英文上看，它是你用来填报所得税的表格. 此外，它也是指趋近 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限值. 有不定式出现，你就可以使用洛必达法则.

方向角（direction angles）：此乃拍摄一部分微积分电影时，拍特写镜头的最佳角度. 如果你对本书的电影版权有兴趣，请与作者们联系！如果我们在空间中任意选取了某个方向，那么这个方向分别与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角为 α、β、γ，就叫做方向角.

方向导数（direction derivative）：一天到晚都有人在问路、问方向，可是没有人会问方向导数. 函数 $f(x,y)$ 在某个单位向量 $\boldsymbol{u}$ 方向上的方向导数定义为：

$$D_{\boldsymbol{u}}f=\nabla f\cdot\boldsymbol{u}.$$

心脏线（cardioid）：因为英文字里有 card，所以这个英文字是专业卡片设计者的诨名. 此外，它也是一种心脏形的图形，在极坐标上，它的方程式看起来像 $r=1+\cos\theta$ 或 $r=1+\sin\theta$.

心脏停止（cardioid arrest，但是作者故意写成 cardioid arrest）：经常发生在那些没有读过这本书，而贸然去参加微积分期末考的学生身上.

（参数曲线上的）切线（tangent line to a parametrized curve）：从英文字面上来看，是指切线们排队登记爱车、购买邮票，或是存放行李的地方. 这种切线，是用来逼近曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 在点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 附近的曲线，其参数方程式为

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+s\boldsymbol{r}'(t_0),\qquad -\infty<s<\infty$$

或是

$$\frac{x-x_0}{x'(0)}=\frac{y-y_0}{y'(0)}=\frac{z-z_0}{z'(0)}.$$

切平面（tangent plane）：是空间中的平面，与曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$在其上一点 $(x_0,y_0,z_0)=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$平行，同时在该点附近最近似这个曲面．我们可用叉积，取得点(x_0,y_0,z_0)上的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$，于是切平面的方程式就是

$$[(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}]\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

切向分量（tangent component）：向量在曲线切线方向上的分量．通常用在加速度向量上，加速度向量的切向分量可以告诉我们，速度的变化究竟有多快．

（五画）

加速度向量（acceleration vector）：它是速度向量的导数，或是位置向量的二阶导数．它的长度（大小）告诉我们速度的变化有多快．你可以在十字路口和大伙一块儿等红灯时，用这个数学名词和别的驾驶人串门子："你刚才的加速度向量超猛"．

（六画）

行列式（determinant）：一个与数字方阵有关的数字，在计算两向量的叉积（外积）时非常有用．

$$\det\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=ad-bc;$$

$$\det\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}e&f\\h&j\end{bmatrix}-b\begin{bmatrix}d&f\\g&j\end{bmatrix}-c\begin{bmatrix}d&e\\g&h\end{bmatrix}.$$

收敛半径（radius of convergence）：如果$|x-a|$小于此半径，则幂级数

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots$$

收敛，而如果$|x-a|$大于此半径，则为发散．收敛半径可以是从 0 到 ∞ 的任何数．不过，在$|x-a|$等于收敛半径的点上，这个幂级数不一定收敛或发散，所以必须逐点检验．

（序列之）收敛性：序列里的各项是否逐渐朝向一个数靠过去？换言之，

它们是否有个极限？如果答案是肯定的，我们说该序列收敛到那个数.

（级数之）收敛性：一个级数若收敛，即使相加的数很多，多到与天上的行星恒星加起来一样多，它的和仍然是有限的数. 要决定级数是否收敛，可以看部分和. 令该级数前 n 项的和为 S_n，然后看看序列 S_n 是否收敛.

（反常积分之）收敛性：有的时候，我们可以驯服、教化那些教养不好、态度恶劣、不遵守积分社会规范的积分类型. 这种积分的上下限可能是 $\pm\infty$，而不是比较文明的 a 到 b，或者被积函数是一些在 $x=0$ 没有定义的函数，像 $\frac{1}{\sqrt{x}}$. 但是只要调教得当，它们可以解释成标准型积分的极限. 所以，在 $x=0$ 有一个难缠奇异点的 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，可以解释成标准的 $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，而后者可以很容易的算出来：

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0}\left[2-2\sqrt{t}\right] = 2.$$

曲率（curvature）：原文是从“curvy chair”（弯曲的椅子）衍生而来，是一种 19 世纪前现代学校里的椅子设计风格，得过许多设计奖，但长久以来并未造成流行，原因是人坐在上面的时候，很容易翻倒. 所谓曲率，是指一条参数曲线 $\boldsymbol{r}(t)$的弯曲程度$\kappa(t)$，它告诉我们，这条曲线的单位切线向量 $\boldsymbol{T}(t)$的方向改变得有多快：

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

对单位速率曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 来说，它的单位切线向量就是 $\boldsymbol{r}'(s)$，而$\kappa(s)$就定义为

$$\boxed{\kappa(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|.}$$

而任意曲线 $\boldsymbol{r}(t)$的曲率就是

$$\boxed{\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.}$$

（七画）

位置向量（**position vector**）：病媒*性爱指南中的重要章节. 也是指用来描述一件物体的位置的向量.（* vector 也可解释为“病媒”.）

位势函数（**potential function**）：是指一个预定要在校园内举办，但尚未取

得校方许可的派对．另外也可指一个函数 f，其梯度形成一个向量场 $\boldsymbol{F}$．

形心（centroid）：其实就是质心的别名，花俏一些罢了．

抛物面（paraboloid）：一种曲面，看起来好像是把一条抛物线绕着一根轴转了一圈．它的一般式是 $z = x^2 + y^2$．

芝诺（Zeno of Elea）：英文微积分辞典里的最后一条．芝诺是古希腊哲学家，以芝诺悖论（Zeno's paradox）而名传千古．他指出，一个跑者若要跑一英里的路，他必须先跑完半英里，接下来必须跑剩下的一半，即四分之一英里，然后又得跑这段四分之一英里路的一半……如此就有无穷多段路要跑．显然这名跑者不可能在有限的时间内，完成要跑的无穷多段路，所以他的结论是，运动是不可能办到的，因而只是一种幻象．

我们在前一本《微积分之屠龙宝刀》写过这样的话语：整个世界并非是一场梦，何不翻个身，继续睡你的大头觉？然而在这本续集《微积分之倚天宝剑》里，我们已经看到，无穷多个距离可以加和成一个有限的量，而且，$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$（英里）．芝诺悖论就到此为止，各位赶紧醒来，泡杯咖啡．

（八画）

弧长（arc length）：据说诺亚造出的全长是 300 腕尺——唉呀，看错了一个字母，此处是 arc，不是 ark（方舟）．若要算出参数（化）曲线的长度，我们要先算线积分．我们所积分的量 $\mathrm{d}s$，叫做弧长元．对一条参数曲线 $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$，$a \leqslant t \leqslant b$，它的弧长元是 $\mathrm{d}s = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$，而此曲线的长度就等于 $\int_C \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t$．

法向量（normal vector）：只是个很普通、很谦虚的垂直向量（normal 在此处的意思不解释为“正常”，所以没有 abnormal vector）．对于平面上的曲线，法向量垂直于该曲线的切线；而对于空间中的曲面，法向量则垂直于该曲面的切平面．有时也称为正交向量（orthogonal vector）．

拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）：一种解题技巧，可解决受约束的最大值、最小值问题．应用范围很广，尤其是在经济学上，投资往往受制于资金来源，除非你是比尔·盖茨．当你求 f 的最大值时，把 g 当做常数，然后找出满足 $\nabla f = \nabla g$ 的常数倍数的点，这样就可以找出 f 受制于约束方程式 g 时的最大值或最小值．

（九画）

面积分（surface integral）：有些积分具有复杂的个性，但是在面对世人的大多数时候，它们都只显现出一种表面性格，从不表露出内心的挣扎煎熬．这些积分让我们能够计算一些与空间曲面有关的量．在计算某函数的曲面上的积分时，我们会利用一个包含曲面面积元 dS 的二重积分．

柱面坐标（cylindrical coordinates）：是个杂种，它就等于取平面上的极坐标 r 和 θ，另外加上直角坐标里的 z．看起来颇像一辆顶着凯迪拉克发动机盖的福斯汽车．

（十画）

纯量（scalar）：数的花俏说法，一些势利的数喜欢用它来强调自己“不是”向量．

纯量三重积（scalar triple product）：一种在微积分休息室里提供的冰激凌点心，同时也是把三个向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 相乘而得到一个数的方法．这个数就是此三个向量张成的平行六面体的体积．计算方法是取 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$．

泰勒级数（Taylor series）：泰勒杯奥林匹克运动会转换竞赛项目的总决赛，同时也是与函数 $f(x)$ 及某一点 $x=a$ 有关的无穷级数

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

只需用有限的几项，即可得到 $f(x)$ 的近似值，而它的误差上限，可以用泰勒余项公式算出．

马克劳林级数（Maclaurin series）：看似下式的幂级数：

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots.$$

我们可以经由它得到一个多项式，用来逼近函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的近似值．

格林定理（Green's theorem）：第一种解释（绿色环保定理）：大多数的环保运动人士，都要开非常耗油的多功能跑车，住宅阳台全用稀有的红木建造，而且大量使用抛弃式纸尿布，即使家里没有小孩．

第二种解释：在平面上，格林定理告诉我们，如何以反时钟方向，沿着一条封闭曲线做线积分．如果 $F = Pi + Qj$ 是一个向量场，而 C 围绕着区域 R，则

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

要注意，P、Q 及它们的导数都得是连续函数．

（十一画）

条件收敛（conditional convergence）：“条件”二字给人的感觉有点像征婚启事上，求婚的一方说：“如果你想和又老又有钱的我结婚，你必须签一张婚前协议书．”一个收敛的级数，里面有些项可能是负值，因而它的绝对值会变成发散．属于此类的一个重要级数是$1-(\frac{1}{2})+(\frac{1}{3})-(\frac{1}{4})+\cdots$，它是条件收敛，但非绝对收敛．

偏导数（partial derivative）：考试时你对其中一个导数问题，给了一个不完全的答案，坏处是你可能要被扣些分数，好处是可能获得部分分数．它也是指一个多变量函数的导数，它一次只能对其中一个变量取导数而已．它的写法是$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$或$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$．

速度向量（velocity vector）：描述粒子（质点）沿着一条参数路径$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$运动的向量，它可以告诉我们该粒子运动的速率和方向．公式很简单：

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)).$$

连续性（适用于多变量函数）：与单变量函数的连续性没什么不同．如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续；若该函数在定义域的每一点(x_0,y_0)都连续，则为连续函数．

通量（flux）：从英文来看，是指你的微积分知识的现状——通常是在增进，偶尔也会倒退，总之是一直在变化．在这里呢，是指一个向量场流过某个曲面的量．在曲面上每一点，通量就定义为 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{V}$ 是某个向量场，而 $\boldsymbol{n}$ 则是在该点上与曲面垂直的单位向量（事实上，单位向量有两个，为了求通量，我们必须选与曲面垂直的那个方向）．由散度定理，一个向量场通过一曲面的总通量，就等于该向量场的散度在该曲面内区域上的积分．

参数曲线（parametric curve）：英文字面就是指一对使用公制的曲线．在

这里呢，是指一个向量值函数，用来描述一个正在空间中运动的粒子、小虫子、棒球，或一块乳酪的位置．典型的参数曲线看起来就像：

$$\boldsymbol{C}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

梯度（gradient 或 grad）：空间中一函数$f(x,y,z)$的梯度是一个向量：

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\ .$$

旋度（curl）：当你发现期末考卷上，赫然有一个斯托克斯定理的问题，你的头发的自然反应．但是不用紧张，你只要记得，旋度就代表一个向量场绕着一根轴旋转的倾向．对于三维空间中的一个向量场 $\boldsymbol{V}$，curl $\boldsymbol{V}$ 也是个向量．在空间中的特定一点上，向量场 curl $\boldsymbol{V}$ 的方向就是旋转最大时的轴的方向，它的长度（大小）即代表旋转的量．旋转量愈大，旋度也愈大，而 curl $\boldsymbol{V}$ 所指的方向（轴的方向），来自于右手定则．除了以上所说的之外，还有一个简单的公式，可用来计算 curl $\boldsymbol{V}$：

$$\text{curl}\ \boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}.$$

球面坐标（spherical coordinates）：另一种三维空间的坐标系，其中 ρ 是你与原点之间的直线距离，而 ϕ 是该直线与正 z 轴的夹角，还有一个 θ，则是同一条线段在 $x0y$ 平面上的投影与正 x 轴的夹角．相信金字塔形水晶有神秘力量的人，比较喜欢使用球面坐标，而且以 Ocnomon 这位转世神灵为原点．

（十二画）

几何级数（geometric series）：一种形式为 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$的级数．如果$|r|<1$，它收敛到$\frac{a}{1-r}$，其他情形一概发散．弹跳的球所走过的总距离，就是一种几何级数．

北极熊（polar bear）：一个非常难以应付的极坐标问题．

极坐标（polar coordinates）：极北地区的流行风格，特色是上衣裤子整套全是白色的．它也是一种描述平面上各点的方法，每一点都以（r，θ）来表示，其中 r 是该点与原点的距离，而 θ 为该点和原点连线与正 x 轴的夹角，此 θ 角是从 x 轴以反时钟方向量起．

无穷序（数）列（infinite sequence）：不要与 infinite sequins（无穷亮片）搞混了，后者是拉斯维加斯秀场钢琴乐师常穿的服饰．无穷序列是一长串没完没了的数，最著名的是 1，2，3，4，…，不过像 2，4，6，8，…和 1，4，9，16，…也是很好的例子．

绝对收敛（absolute convergence）：如果级数 $\sum a_n$ 的绝对值 $\sum |a_n|$ 收敛，则该级数绝对收敛．与原级数的收敛性相比，绝对收敛与它一样难，甚至更难达成，所以绝对收敛性蕴涵（imply）收敛性．一个级数若是收敛而非绝对收敛，就叫做条件收敛．

等高线（contour cure，也称做 level curve）：函数的“等高线或等位线”，是指函数值为同一常数所成的曲线．譬如函数 $z = f(x, y)$，函数值 $f(x, y) = 3$ 的所有点 (x, y) 连成的曲线，就是 $z = 3$ 这条等高线．

最速上升/下降的方向（direction of steepest assent/descent）：当你站在山腰上一点，应该能够看出，从哪个方位往上或往下走的坡度最陡，这个方位就是最速上升（或下降）的方向．若换成数学术语，向量 ∇f 所指的就是最速上升的方向，而 $-\nabla f$ 则指向最速下降的方向．如果你站在悬崖边，为了安全，千万别往 $-\nabla f$ 所指的方向迈步．

散度（divergence 或 div）：我走在森林里，走着走着，前面分岔（diverge）成两条小径，我选了比较少的人走的那条，结果得到错误的答案．向量场 $\boldsymbol{F}$ 在某一点上的散度，是指该向量场在那一点正在压缩或扩张的量，它的计算公式是

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}.$$

散度定量（divergence theorem）：平面上的散度定理是说，如果你把一个向量场在平面上某区域中的散度（利用积分）全加起来（就等于该区域中的总压缩或扩张量），你就得到了该向量场通过区域边界的总流量，称为通量．如果你正把大量的枫糖浆，泼洒到排水装置有限的舞台上，此定理会特别有用．

定理：$\iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s$.

此定理的三维空间版本是说，在一个空间区域中，向量场的全部散度，等于流过边界曲面的流量．

定理：$\iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S$.

$\boldsymbol{F}$ 跟 $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ 必须为连续函数．

斯托克斯定理（Stokes's Theorem）：每年十月间，随着斯托克斯托伯节（Stokestoberfest）一起庆祝的一个定理，在节庆期间，许多巴伐利亚人会在一块用绳子圈起来的区域内（叫做啤酒园 D），喝掉一加仑又一加仑的啤酒．他们喝着酒，又唱歌又跳舞，还一直在原地旋转打圈子，这动作让绳子 C 受到非常大的张力．

这个定理就是：

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_D (\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot \boldsymbol{k}\ \mathrm{d}A.$$

对三维空间，该定理也有一套说辞．在三维空间中，我们有一个曲面 S，其边缘（边界）是一条封闭曲线，叫做 C．设 $\boldsymbol{F}$ 为 S 上的向量场，而单位法线向量为 $\boldsymbol{n}$．于是斯托克斯定理说，沿着曲线 C 的线积分，就等于曲面 S 上的面积分：

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_D \operatorname{curl}\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S.$$

也就是说，向量场 $\boldsymbol{F}$ 对曲面 S 的扭力的总效应，等于该向量场沿着曲线 C 上的切向分量总和．不管是二维还是三维的情形，$\boldsymbol{F}$ 和 curl $\boldsymbol{F}$ 都必须是连续的．

（十三画）

微分方程（differetial equation）：其中含有导数的方程式，$3\dfrac{\partial^2 x}{\partial^2 t} - 5\dfrac{\partial x}{\partial t} - x = 7$ 就是一例．

（十四画）

惯性矩（moment of inertia）：在刚说完“我们结婚吧！”之后，那极短暂的一刻．也是指一个正在绕着某一根轴转动的物体，对要改变它的角动量的抗拒力的大小．对于平面上的一个密度为 $\sigma(x,y)$ 的区域 R，它绕着 x 轴转动的惯性矩就等于：

$$I_x = \iint_R y^2\sigma(x,y)\mathrm{d}A\ ,$$

而绕着 y 轴转动的惯性矩则为：

$$I_y = \iint_R x^2\sigma(x,y)\mathrm{d}A\ ,$$

而对密度为 $\sigma(x,y,z)$ 的立体 V，它绕着 z 轴转动的惯性矩则为：

$$\iiint_V (x^2+y^2)\sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z.$$

（十五画）

质心（center of mass）：在你吃完感恩节火鸡大餐之后，它位于你的肚子中央．当你移动的时候，它也跟着移动，只是移动得较慢．对于一个两维的扁平物体来说，它是该物体的平衡点；对于一个三维的实心物体来说，如果你顺着通过此点的任何平面，把该物体一刀切开，所得到的两半质量相等．

调和级数（harmonic series）：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$．这是人类史上的伟大级数之一．虽然所加的项愈到后面愈小，但这个级数“并不”收敛．

线积分（line integral）：一个定义在空间中或平面上的函数，沿着空间或平面上某条参数曲线所做的积分．

鞍面（saddle）：也叫做双曲抛物面．不过我们很难想像，西部电影里会有这样的台词：“伙伴，时间差不多啦！让我们赶紧丢一张双曲抛物面到马身上，然后上路吧．”双曲抛物面是一种向两个不同方向弯曲的曲面，就像马鞍一样，不说你也知道．一个典型的例子是 $z=x^2-y^2$．

（十六画）

幂级数（power series）：是指双方得分皆达两位数的职业棒球冠军总决赛．也是指一个外貌如下的“无穷次多项式”：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots.$$

更一般的形式是：

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots.$$

椭球面（ellipsoid）：这是指一种曲面，看起来像变了形的球面，而它的一般式是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

（十七画）

点积（dot product，又称内积）：点积是两个向量的一种乘积，得到的是一个数，它代表这两个向量在方向上是否一致．点积就等于两向量的长度乘积再乘以夹角的余弦．由于它的公式计算起来超级容易，所以非常有用：当 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$，而 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,w_3)$，则

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3.$$

对于其他具有较少或较多分量的向量，此计算公式同样适用.

（十八画）

链式法则（适用于多变量函数）：用来微分 $f(g(x,y),h(x,y))$ 这类复合函数的一个方法，而这些复合函数本身，也含有不只一个变量.

双曲面（hyperboloid）：从英文字面上看，hyper 是极度活跃的意思，所以这是非常活跃的一种 boloid，无法叫它保持安静. 这其实是一种面，看起来好像是把一条双曲线，绕着一根轴转了一圈. 它的典型方程式是：

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

（二十画）

宝（valuble，treasure）：当形容词用，就是珍贵的意思，譬如《微积分之屠龙宝刀》、《微积分之倚天宝剑》，就是两把很珍贵的兵器、刀剑合璧，可帮助你在微积分考场上，一路过关斩将. 当名词用，就是宝藏的意思，譬如你买到《微积分之屠龙宝刀》与《微积分之倚天宝剑》就等于挖到宝藏，前途一片光明. 至于爱耍刀耍剑的宝贝蛋，可简称“耍宝”，本书的三位作者，就特别爱耍宝. 据说他们的下一本书，已经取好书名，叫《微积分之康宝浓汤》，少了杀气，非常营养……有朝一日，“微积分”变成“营养学分”，不再砍杀莘莘学子的时候，肯定会出版.

英汉对照索引

absolute convergence 绝对收敛
absolute convergence theorem 绝对收敛定理
acceleration 加速度
alternating series teat 交错级数检验
amoeba 变形虫
apple pie 苹果派
arc length 弧长
　　parametrization 参数化（法）
area 面积
arrow 箭
balloon analogy 气球比喻
basic comparison test 基本比较检验
bathtub analogy 浴缸比喻
beehive 蜂窝
Bernoulli, Johann（1667 ~ 1748） 伯努利
Cardioid 心脏线
Cartesian coordinates 笛卡儿坐标
center of mass 质心
centroid 形心
chain rule 链式法则
change of coordinates 坐标变换
chicken 鸡
circle equation for 圆方程式
cliff 断崖
Columbus, Christopher
component of a vector 向量的分量
conditional convergent 条件收敛
cone 圆锥面
conservative vector field 保守向量场
constrained max - min problem 受约束的最大、最小值问题
constraint 约束；限制
constraint equation 约束方程式
continuous 连续的
continuous everywhere 处处连续
contour curve（level curve） 等高线
convergence 收敛性
coordinate system 坐标系
critical point 临界点
cross product 叉积
cubit 腕尺
curl 旋度
curvature 曲率；曲率公式
curve 曲线；
length of ~ 曲线的长度
parametric ~ 参数曲线
cylinder 柱面
cylinder coordinates 柱面坐标
del 参见“梯度”
density 密度
dependent variable 应变数
determinant 行列式
differential equation 微分方程
direction angle 方向角
directional derivative 方向导数
discriminant 判别式
divergence 散度
divergence theorem 散度定理

dot product (inner product) 点积（内积）
double integral 二重积分

element of surface area 曲面面积元
ellipse 椭圆
ellipsoid 椭球面

Fibonacci sequence 斐波那契序列
final exam 期末考
flux 通量
force 力
function 函数；
  vector – valued ~ 向量（值）函数；
  ~ of several variables 多变量函数
fundamental theorem of calculus 微积分基本定理

Gates Bill 比尔·盖茨
geometric series test 几何级数检验
gradient 梯度
gravitational force 重力
gravitational potential 重力位势
Green's Theorem 格林定理
helix 螺旋线
holes 洞
horizontally simple (horizontal simpleton) 水平简单型
hyperbola 双曲线
hyperbolic paraboloid 双曲抛物面
  ~ of one sheet 单叶
  ~ of two sheets 双叶

improper integral 反常积分
independent variable 自变数
indeterminate form 不定式
infinite sequence 无穷序列（数列）
inner limits 内（积分）限
infinite series 无穷级数
integral test 积分检验
intermediate variable 中间变数
interval of convergence 收敛区间
iterated integral 逐次积分

Jacobian determinant 雅可比行列式

Lagrange, Joseph Louis 拉格朗日
Lagrange multiplier 拉格朗日乘数
Leibniz, Gottfried Wilhelm von 莱布尼茨
L'Hôpital's rule 洛必达法则
limit comparison test 极限比较检验
limits 极限：
  one variable ~ 单变量函数
  several variables ~ 多变量函数
line 直线：
  parametric equations for ~ 直线的参数方程式；
  symmetric equations for ~ 直线的对称方程式
line integral 线积分
linear equation 线性方程式
linear function 线性函数
Maclaurin's approximation 马克劳林逼近
maximum 最大值；极大值
minimum 最小值；极小值
mixed second partial 混合二阶偏导数
moment of inertia 惯性矩（转动惯量）
moment 矩
  first ~ 一次矩
  second ~ 二次矩
multiple integral 多重积分

New York City Ballet 纽约市立芭蕾舞团
Newton, Isaac (1642 ~ 1727) 牛顿
normal vector 法向量
nth – term test 第 n 项检验

operator 算子
orthogonal vector 正交向量
outer limits 外（积分）限

p – series p 级数

parabola 抛物线
parabolic cylinder 抛物柱面
paraboloid 抛物面
parallelepiped 平行六面体
area of parallelogram 平行四边形的面积
parameter 参数
parametric equations 参数方程式
parametric (parametrized) curve 参数（化）曲线
parametric (parametrized) sureface 参数曲面
partial derivative 偏导数
partial sum 部分和
independent of path 与路径无关
plane 平面
　　equation for ~ 平面方程式
　　intersection of two ~ 两平面相交
polar coordinates 极坐标
　　area in ~ 极坐标中的面积；
　　equations for ~ 极坐标方程式
position vector 位置向量
positively oriented 正定向
potential function 位势函数
power series 幂级数
projectile problem 抛体问题
projection 投影
Pythagorean theorem 勾股定理

quadrant 象限
quadric surface 二次曲面

radius of convergence 收敛半径
ratio test 比值检验
rectangular coordinates 直角坐标
Riemann sum 黎曼和
root test 根值检验
Rorschach test 罗氏测验
saddle 鞍
saddle point 鞍点
scalar 标量
scalar multiplication 标量乘法
scalar triple product 三重内积
Schwarzenegger, Arnold 阿诺·史瓦辛格
secant line 割线
second partial 二阶偏导数
seesaw 跷跷板
sequence 序列，数列
　　limits of ~ 序列的极限
series 级数
　　alternating series 交错级数
　　convergence of ~ 级数的收敛性
　　divergence of ~ 级数的发散性
　　geometric series 几何级数
　　harmonic series 调和级数
　　positive term series 正项级数
shekel 半盎司金币（一种古代货币）
simply connected 单连通
slope 斜率
speed 速率
sphere 球
spherical coordinates 球面坐标
steepest ascent 最速上升
steepest descent 最速下降
Stokes 's theorem 斯托克斯定理
submarine 潜艇
surface 曲面
surface integral 面积分
surface of revolution 旋转曲面
symmetry 对称性

tangent line 切线
tangent plane 切平面
Taylor series 泰勒级数
Taylor's approximation 泰勒逼近
Taylor's formula with remainder 泰勒公式（含余项）
term 项
torpedo 鱼雷
area of triangle 三角形的面积
triple integral 三重积分

unit speed curve 单位速率曲线
unit tangent vector 单位切线向量
unit vector 单位向量

vector 向量:
acceleration ~ 加速度向量
addition of ~ 向量加法
displacement ~ 位移向量
magnitude of ~ 向量的大小;
norm of ~ 向量的范数;
in the plane ~ 平面上的向量;
projection of ~ 向量的投影;
in space ~ 空间中的向量;
subtraction of ~ 向量的减法;
tangent ~ 切向量;
velocity ~ 速度向量;
zero ~ 零向量
vector field 向量场
vertically simple (vertical simpleton) 垂直简单型
volcano 火山
volume 体积

wedge 楔形
work 功

z - simple z 简单型
Zeno 芝诺

公式秘笈

洛必达法则：

如果$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$是一个不定式($\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$)，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f\ (x)}{g\ (x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'\ (x)}{g'\ (x)}.$$

反常积分：

- $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- 如果$f(x)$在a没有定义，我们得让$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to a^+}\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

极坐标：

- $x=r\cos\theta$，

  $y=r\sin\theta$，

  $r=\sqrt{x^2+y^2}$，

  又$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，假设$x\neq0$.
- 半径为a、圆心在$(0,a)$的圆方程式为$r=2a\sin\theta$.
- 半径为a、圆心在$(a,0)$的圆方程式为$r=2a\cos\theta$.
- 心脏线的方程式为$r=a(1\pm\sin\theta)$或$r=a(1\pm\cos\theta)$.
- 边界为两径向线$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$与曲线$r=f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$的面积$A$为

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[f(\theta)]^2\mathrm{d}\theta.$$

• 边界为两径向线 $\theta = \alpha$、$\theta = \beta$ 及两曲线 $r = f(\theta)$、$r = g(\theta)$ 的面积 A 为 $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}|[g(\theta)]^2 - [f(\theta)]^2|\mathrm{d}\theta$，其中，对 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, 0 \leqslant f(\theta) \leqslant g(\theta)$.

无穷级数：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 收敛到 S，其中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是前 n 项部分和. 在此情形下，我们把它写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

几何级数：

如果 $|r| < 1$，几何级数 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ 收敛到 $\frac{a}{1-r}$，如果 $|r| \geqslant 1$，该级数发散.

p 级数：

对 $p > 1$，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，而对 $p \leqslant 1$ 则发散.

绝对收敛：

• 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 绝对收敛.

• 如果一个级数绝对收敛，它也收敛.

• 如果一个级数收敛，但不为绝对收敛，我们就说它为条件收敛.

收敛性的检验法：

• 第 n 项检验：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

• 积分检验：若 $a_n = f(n)$，其中 f 为正值连续函数且对 $x \geqslant 1$ 为递减，则 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是共犯，两者同时收敛或同时发散.

• 基本比较检验：若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 都是正项级数，且对所有的 n，$b_n \geqslant a_n$，则

1. 若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 也收敛.

2. 若 $\sum a_n$ 发散，则 $\sum b_n$ 也发散.

• 极限比较检验：若 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 为正项级数，且对某个正数 k，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k$，则两级数同时收敛或同时发散.

• 交错级数检验：若 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n+\cdots$ 或 $-a_1+a_2-a_3+a_4+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots$ 为交错级数，其中每一项 $a_n>0$，且对所有的 n，$a_{n+1}\leqslant a_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则这个交错级数收敛.

• 比值检验：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一级数，则

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$，则该级数绝对收敛.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，则该级数发散.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$，则我们什么结果都不知道.

• 根值检验：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一级数，则

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(|u_n|)^{\frac{1}{n}}<1$，则该级数绝对收敛.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(|u_n|)^{\frac{1}{n}}>1$，则该级数发散.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(|u_n|)^{\frac{1}{n}}=1$，则我们什么结果都不知道.

幂级数：

具有如下形式的级数就是幂级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

利用比值检验，可以决定收敛半径，并检验端点，以决定收敛区间；所谓收敛区间，就是让该级数收敛的所有 x 值所成的集合.

泰勒级数：

• 泰勒逼近：

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

* 马克劳林逼近：

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

* 带余项的泰勒公式：

$$f(x)=\underbrace{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{泰勒多项式}}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{余项}}.$$

* 几个著名的泰勒级数：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots;$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots,\ \text{对任何}|x|<1.$$

平面上的向量：

- 一个开始于(x_1,y_1),结束于(x_2,y_2)的向量，可以写成$v=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.
- 若$v=(x,y)$，它的长度就等于$|v|=\sqrt{x^2+y^2}$.
- 若$v=(x_1,y_1)$，$w=(x_2,y_2)$，则
  $v+w=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,
  $v-w=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.
- $ca=(ca_1,ca_2)$称为标量乘法.
- 向量的运算法则：

$$a+b=b+a,$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},$$
$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b},$$
$$(c+e)\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+e\boldsymbol{a},$$
$$(ce)\boldsymbol{a}=c(e\boldsymbol{a})+e(c\boldsymbol{a}).$$

空间中的向量：

- 若 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$，则其长度为 $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- 若 $\boldsymbol{v}$ 为任一向量，则 $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ 为一单位向量，方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同.
- 以下为三个非常有用的单位向量：

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),$$
$$\boldsymbol{j}=(0,1,0),$$
$$\boldsymbol{k}=(0,0,1),$$
$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

- $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 的点积（内积）为一标量

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},$$
$$c\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot c\boldsymbol{b}=c(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

- 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.
- 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的分量（为一长度）定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{comp}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{a}&=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\\&=|\boldsymbol{a}|\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.\end{aligned}$$

- 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影（为一向量）定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{a}&=(\mathrm{comp}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{a})\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\\&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

行列式：

$$\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc,$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

叉积（外积）：

- 向量 $\boldsymbol{a}$ 跟 $\boldsymbol{b}$ 的叉积定义为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$.
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.
- $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$
- 面积（平行四边形）$= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，

  面积（三角形）$= \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

- $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

空间中的直线：

- 给定直线上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$，以及与该直线同方向的向量 $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$，则这条直线的参数方程式为：

$$x = x_0 + ta,$$

$$y = y_0 + tb,$$

$$z = z_0 + tc.$$

- 这条直线的对称方程式为：$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.

空间中的平面：

给定法向量 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ 及平面上一点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$，则该平面的方程式为

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

参数曲线:

• 当参数 t 变动时，$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 代表空间中的一条参数曲线．$\boldsymbol{r}(t)$ 称为位置向量．

• 速度向量 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ 为这条曲线的切线．$|\boldsymbol{v}|$ 为速率．

• 加速度向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{v}'(t)=\boldsymbol{r}''(t)$．

• 向量值函数的微分法则：

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{s}(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}(t)$，

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\boldsymbol{r}(t)]=c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t)$，

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\boldsymbol{r}(t)]=f(t)\boldsymbol{r}'(t)+f'(t)\boldsymbol{r}(t)$，

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)]=\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}'(t)+\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$，

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)]=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}'(t)+\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{s}(t)$，

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(f(t))]=\boldsymbol{r}'(f(t))f'(t)$．

• 求向量值函数的积分：

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t,\int_a^b y(t)\mathrm{d}t,\int_a^b z(t)\mathrm{d}t\right).$$

• 求曲线弧长的计算公式：

$$S=\int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

曲率:

• 单位速率曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率 $\kappa(s)$ 定义为 $\kappa(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|$．

• 任意曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率为 $\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$，其中 $\boldsymbol{T}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$．

曲面:

• $ax+by+cz=d$ 是一个平面．

• 如果 a 和 b 同号，则 $z=ax^2+by^2$ 为一个抛物面．

• $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$是一个椭球面，而轴长分别为 a、b、c.

• $z^2 = ax^2 + by^2 - c(a,b,c>0)$ 是一个以 z 轴为轴的单叶双曲面.

• $z^2 = ax^2 + by^2 + c(a,b,c>0)$ 是一个以 z 轴为轴的双叶双曲面.

• $z^2 = ax^2 + by^2(a,b>0)$ 是一对以 z 轴为轴，共顶点的椭圆锥面.

• $z = ax^2 - by^2(a,b>0)$ 是一个鞍面（也叫做双曲抛物面）.

• 对于以上几个以 z 轴为轴的曲面方程式，我们也可以把 x、y 和 z 的位置互换，而得到以 x 轴或 y 轴为轴的曲面.

极限与连续性：

• $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ 的意思是，对 xOy 平面上每一条趋近 (a,b) 的路径，$f(x,y)$ 都会趋近于 L.

• 如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$，

我们说函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 连续.

偏导数：

• 函数 f 对 x 的偏导数为$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$.

• 函数 f 对 y 的偏导数为$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 为通过曲面上一点 $(a,b,f(a,b))$ 的其中一条切线的斜率，这条切线位于一个与 xOz 平面平行且通过该点的平面上.

• $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ 为通过曲面上一点 $(a,b,f(a,b))$ 的其中一条切线的斜率，这条切线位于一个与 xOy 平面平行且通过该点的平面上.

• 求$\frac{\partial f}{\partial x}$时，把 y 当做常数，然后对 x 微分.

求$\frac{\partial f}{\partial y}$时，把 x 当做常数，然后对 y 微分.

• 当这些偏导数为连续函数时，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

• 在局部极大值点或局部极小值点，$\frac{\partial f}{\partial x}=0$ 且$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，如果这两个偏导数存在的话.

受约制的最大值、最小值问题：

当 $g(x,y,z)=0$,求 $f(x,y,z)$ 的最大值或最小值的方法如下：

第 1 步：写出待求最大（小）值的函数 $f(x,y,z)$ 及所谓的约束方程式 $g(x,y,z)=0$.

第 2 步：利用约束方程式，把 f 当中的变量减少成两个.

第 3 步：取 f 的偏导数，并且令它们等于 0.

第 4 步：解这些方程式，找出临界点.

第 5 步：判定哪一个临界点是最大（小）值.

链式法则：

若 w 直接随着 u 和 v 改变，u 和 v 又随着 x 和 y 改变，则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

方向导数：

- 函数 $f(x,y)$ 的梯度定义为 $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
- 其方向导数则为 $D_u f=\nabla f\cdot \boldsymbol{u}$.
- 最速上升的方向即为 ∇f 的方向，而在此方向上，$D_u f=|\nabla f|$;最速下降的方向则为 $-\nabla f$ 的方向，而在此方向上，$D_u f=-|\nabla f|$.

拉格朗日乘数：

当 $g(x,y,z)=0$，求 $f(x,y,z)$ 的最大值或最小值的方法如下：

第 1 步：确认约束方程式的形式为 $g(x,y,z)=0$.

第 2 步：令 $\nabla f=\lambda\nabla g$

第 3 步：解第 2 步得到的方程组，找出 x、y、z.

第 4 步：判定哪一组解是最大值或最小值.

二阶导数检验：

f 的判别式定义为 $\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$.

如果 (a,b) 为 $f(x,y)$ 的一个临界点，那么：

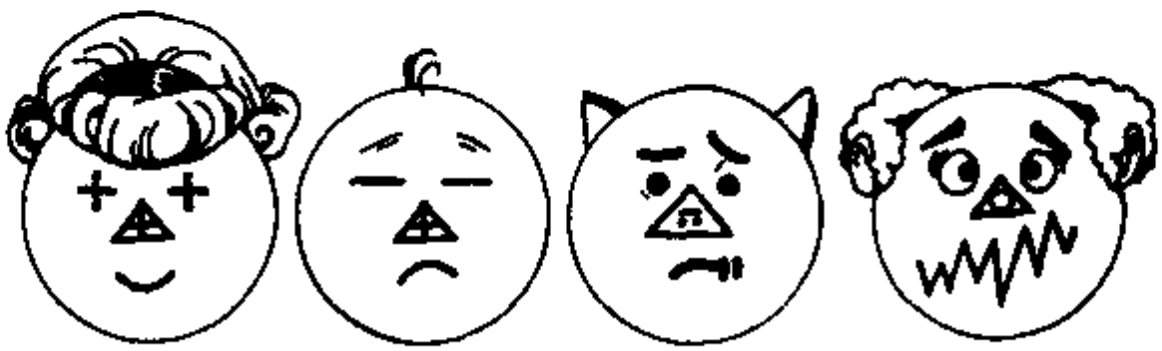
1. 若 $\Delta>0$ 且 $f_{xx}>0$，则 f 在 (a,b) 有局部极小值.

2. 若 $\Delta>0$ 且 $f_{xx}<0$，则 f 在 (a,b) 有局部极大值.

3. 若 $\Delta<0$，则点 (a,b) 既不是 f 的局部极大值，也不是局部极小值，而是一个鞍点.

4. 若 $\Delta=0$，则这个检验什么结果也没告诉我们.

二阶导数检验可以画在下列四张脸孔上：

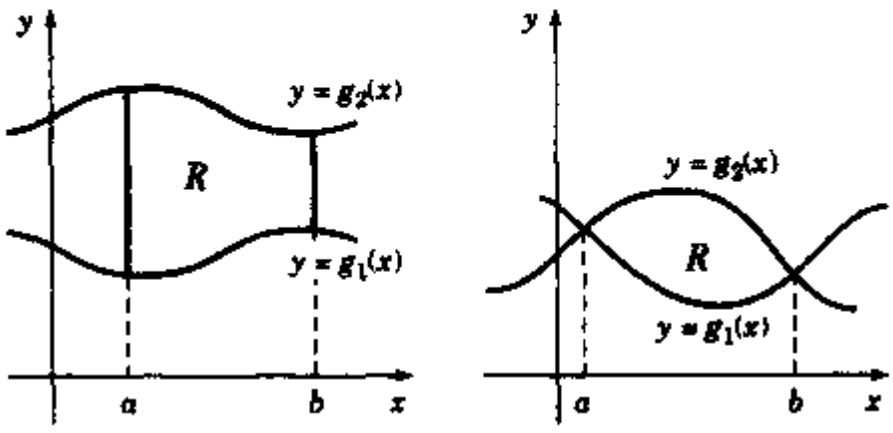


蜜妮　　麦斯威尔　　糊涂猪　　疯狂小丑

多重积分：

• 区域 R 上的二重积分定义成黎曼和的极限：

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta A_i\ .$$



当区域 R 位于 $y=g_2(x)$ 下方、$y=g_1(x)$ 上方，且夹在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间时，函数 $f(x,y)$ 在 R 上的二重积分就变成了：

$$\int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}y.$$

先把 x 当做常数，做里面的积分 $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$，然后把这次的积分结果当做被积函数，让 x 恢复其变量身份，做外面的积分.

当区域 R 位于 $x=h_1(x)$ 右方、$x=h_2(x)$ 左方，且夹在 $y=c$ 和 $y=d$ 之间时，函数 $f(x,y)$ 在 R 上的二重积分就变成了：

$$\int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

• 极坐标：平面上的点表示成 (r,θ)，此时，在区域 R 上的二重积分就变成了 $\iint_R f(r,\theta)r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ 的模样.

• 在三维空间中一立体区域 V 上的三重积分，也同样定义成黎曼和的极限：

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i .$$

典型的区域 V 描述成：$h_1(x,y) \leqslant z \leqslant h_2(x,y)$，$g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$. 于是，这个三重积分就成了下列的形式：

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x .$$

积分的顺序是由内向外，连续做三次.

• 柱面坐标：空间中的点描述成 (r,θ,z)，其中 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$、$z=z$. 在这个坐标系中，立体区域 V 上的三重积分形式如下：

$$\iiint_V f(r,\theta,z)r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z .$$

• 球面坐标：空间中的点描述成 (ρ,ϕ,θ)，其中 $x=\rho\ \sin\phi\ \cos\theta$、$y=\rho\ \sin\phi\ \sin\theta$、$z=\rho\ \cos\phi$. 在这个坐标系中，立体区域 V 上的三重积分形式如下：

$$\iiint_V f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\ \sin\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta .$$

• 质量、质心、矩：我们可以做密度函数 σ 在区域 V 上的积分，来求出 V 的质量.

$$\text{质量} = \iiint_V \sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z .$$

V 的质心（又称形心）即为该立体“达到平衡”的点 (x,y,z)，该点的坐标分别为：

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V \sigma(x,y,z)x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \sigma(x,y,z)dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V \sigma(x,y,z)y\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \sigma(x,y,z)dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V \sigma(x,y,z)z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \sigma(x,y,z)dx\,dy\,dz}.$$

分子部分的三个积分，叫做 V 的一阶矩.

• 立体 V 的惯性矩，代表让它旋转时它所给的阻力. 若要让它绕着 z 轴转动，它的惯性矩就等于：

$$\iiint_V \sigma(x,y,z)(x^2+y^2)dx\,dy\,dz.$$

• 坐标变换：当我们使用某种坐标 (u,v,w)，而非直角坐标 (x,y,z) 来做多重积分时，我们必须把积分公式做一些调整. 我们把 x、y、z 全都表示成一个 (u,v,w) 的函数，即 $x = x(u,v,w)$、$y = y(u,v,w)$、$z = z(u,v,w)$，那么，令

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix},$$

则在区域 V 上的三重积分就改成了：

$$\iiint_V f(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

向量场、散度、旋度：

• 平面上的一个向量场，会给平面上每一点一个向量，此向量场看起来就像 $\boldsymbol{W}(x,y) = P(x,y)\,\boldsymbol{i} + Q(x,y)\,\boldsymbol{j}$. 空间中的向量场，看起来就像 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$.

• 向量场 $\boldsymbol{F}$ 若为某个函数 f 的梯度，我们说它是保守的，而 f 则称为位势函数.

• 向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度是一个函数，定义为 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

在 $\boldsymbol{F}$ 扩张的各点，散度为正，而在 $\boldsymbol{F}$ 压缩的各点，散度为负. 上述方程式可以简写成 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}$，其中 ∇ 代表下面这个算子：

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

• 向量场的旋度，代表该向量场使某物体绕着一轴旋转的倾向. 对一个向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\,\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$，$\nabla$ 跟 $\boldsymbol{F}$ 叉积就等于 $\operatorname{curl}\boldsymbol{F}$：

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{bmatrix}.$$

• （曲）线积分：若想沿着一条曲线做积分，线积分就派上用场了. 当曲线 C 描述成参数形式 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),a\leqslant t\leqslant b$ 时，该曲线的弧长就等于：

$$\int_C\mathrm{d}s=\int_C|\boldsymbol{v}|\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

若想算出一作用力所做的功，我们得利用力场 $\boldsymbol{F}$，求线积分：

$$\text{功}=\int_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t.$$

• 保守向量场的性质：

1. 保守向量场沿着某一曲线上的线积分，可以由曲线两端点上的位势函数差而求得.

2. 若一个向量场在某区域上是保守的，那么这个保守向量场在该区域上的线积分，只与曲线的起点与终点有关，而与路径无关.

3. 若一个向量场在某区域上是保守的，那么它在该区域内某条封闭曲线上的线积分会等于 0.

4. 任何保守向量场皆永远满足 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

• 如果在某一单连通区域 R 上，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则对 R 上某个函数 $f(x,y)$，$\boldsymbol{F}=\nabla f$，因此 $\boldsymbol{F}$ 在 R 上为保守的.

• 格林定理：若 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 为一向量场，且 C 为区域 D 的边界曲线，则