数学分析习题课讲义

（下册）

雅惠民　许自求
易法槐　钱定边　编

高等教育出版社



ISBN 7-04-012941-8

9 787040 129410 >

定价 30.00 元

数学分析习题课讲义

（下　册）

谢惠民 恽自求
易法槐 钱定边　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"国家理科基地创建名牌课程项目"的研究成果，其目的是为数学分析的习题课教学提供一套具有创新特色的教材和参考书.

本书以编著者们近20年来在数学分析及其习题课方面的教学经验为基础，吸取了国内外多种教材和研究性论著中的大量成果，非常注意经典教学内容中的思想、方法和技巧的开拓和延伸，在例题的讲题中强调启发式和逐步深入，在习题的选取中致力于对传统内容的更新、补充与层次化.

本书分上、下两册出版.上册内容为极限理论和一元微积分，下册内容为无穷级数和多元微积分.

本书可作为高等院校理工科教师和学生在数学分析习题课方面的教材或参考书，也可以作为研究生入学考试和其他人员的数学分析辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题课讲义. 下册/谢惠民等编. —北京：高等教育出版社，2004.1

ISBN 7-04-012941-8

Ⅰ.数… Ⅱ.谢… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第113175号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004年1月第1版
印　　张	26.25	印　　次	2004年7月第2次印刷
字　　数	490 000	定　　价	30.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

策划编辑　王　瑜
责任编辑　薛春玲
封面设计　于　涛
责任印制　宋克学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089　64054601　64054588

附: 下册内容简介

下册的前四章为无穷级数, 后十章为多元微积分. 下面将介绍各章的部分内容. 还请使用书末的两个索引, 从中可查到在目录中不易找到的许多材料.

第十三章为数项级数. 从数学史上的 4 个例子引进无穷级数. 在正项级数中介绍了用级数来判定单调数列是否收敛于 0 的 Sapagof 判别法. 研究了二项式系数 $\binom{\alpha}{n}$ 的渐近性态. 利用无穷乘积证明了正弦函数的无穷乘积展开式, 引进 Γ 函数的无穷乘积定义.

第十四章为函数项级数和幂级数. 对三分法作了详细分析. 介绍了准一致收敛性和 Arzela 控制收敛定理的 Lewin 证明. 证明了每个幂级数一定是 Taylor 级数, 还介绍了正弦和余弦函数之外的基本三角函数的幂级数展开式.

第十五章为 Fourier 级数. §15.1 节为系数的性质. §15.2 节为 Fourier 级数的各种收敛性, 其中包括点收敛、在 Cesàro 意义下的收敛、平方平均收敛与一致收敛, 讨论了 Gibbs 现象, 以及系数单调的正弦级数为 Fourier 级数的充要条件.

第十六章介绍无穷级数的几个应用. 前两节是在积分计算与级数求和中的应用, 其中求出 $\zeta(2n)$ 的值, 并得到 Bernoulli 数的几个性质. §16.3 节集中于 Weierstrass 逼近定理的证明方法及其应用. 介绍了奇异积分方法、Bernstein 证明和 Cohen 证明. §16.4 节是用无穷级数构造具有某些特殊性质的函数.

第十七章为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集与实数基本定理的推广. 特别介绍了连通和道路连通的概念, 证明了区域必是道路连通的. 在 §17.2 节介绍 $\mathbf{R}^n$ 中的基本定理, 其中把闭区间套定理推广成比较方便的闭集套定理的形式.

第十八章为多元函数的极限与连续. 除通常对重极限与累次极限的一些讨论外介绍了多元函数连续的若干充分条件, 以集合语言刻画连续性的命题, 紧集上的连续函数性质及其应用, 以及向量值函数的压缩映射原理. 还以参考题的形式介绍了 Peano 曲线和 Tietze 扩张定理.

第十九章为偏导数与全微分. §19.3 节是求多元函数偏导数的链式法则. 在 §19.4 节介绍向量值函数的有限增量公式和拟微分平均值定理.

第二十章为隐函数存在定理与隐函数求导. 在 §20.2 节用压缩映射原理证明了局部逆映射存在定理. 在 §20.3 节对变量代换问题作了系统的讨论. 在 §20.4 节介绍隐函数 (组) 的整体存在性, 包括整体同胚的一些充分条件和充要条件.

第二十一章为偏导数在各个方面的应用. 在 §21.3 节用向量与矩阵语言重新叙述了 Taylor 公式, 并讨论了梯度为零向量时函数的最快增长方向问题 (第二组参考题 1). 在 §21.4 节对条件最值的求解作了系统与详细的讨论, 并收集了丰富的习题. 在 §21.5 节介绍了高维的 Rolle 定理, 这个材料引自**美国数学月刊**上的

论文, 可以作为多元微分学应用的一个有趣的例子.

第二十二章为重积分. 在二重积分中引入了平面上零面积集和零测度集的概念, 给出了 Riemann 可积的充要条件. 在重积分的应用中着重介绍了微元法、带重积分的不等式和重积分在不等式证明中的应用.

第二十三章为含参变量积分. 对于如何证明含参变量广义积分一致收敛或不一致收敛给出了一个总结. 在 §23.3 节中介绍了重要的特殊函数: B 函数和 Γ 函数, 对于 Γ 函数还证明了 Bohr-Mollerup 定理和其他几个重要公式.

第二十四章为曲线积分 (含 Green 公式). 在 §24.2 节中介绍梯度曲线的方法, 以此改进了一道美国大学 Putnam 竞赛题的结果, 并证明高维中值定理. 在 §24.3 节中利用 Green 公式证明了著名的等周不等式. 在 §24.4 节中介绍了连续向量场的旋转度并用之证明 Brouwer 不动点定理与代数基本定理.

第二十五章为曲面积分 (含 Gauss 公式与 Stokes 公式). 在 §25.4 节中介绍了一些外微分的知识. §25.5 节是一个完整的习题课教案, 其中证明了第一型曲面积分在正交变换下的不变性; 分析了用参数方程计算第二型曲面积分时积分号前正负号的选取法则; 证明了在球面上曲面积分的关系式 (25.28).

第二十六章为场论初步. 引入散度、旋度和 Laplace 算子, 分析了各种场之间的关系. 对调和函数作了一点初步的介绍. 本章是多元积分的综合应用, 另一方面也为进一步学习数学物理方程等课程作一些数学分析方面的准备工作.

附: 书中常用记号

为读者方便起见, 将下册中常用记号列举如下 (参见上册 §1.2 节):

1. $\mathbf{N}_+$ 是所有正整数所成的集合.
2. $\mathbf{R}$ 是所有实数所成的集合, 同时也表示区间 $(-\infty,+\infty)$.
3. $\Longleftrightarrow$ 是等价关系的记号.
4. $[x]$ 是实数 x 的整数部分, 即不超过 x 的最大整数.
5. □ 表示一个证明或解的结束.
6. $\dbinom{n}{k}=\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
7. 记号 $\approx$ 表示近似值, 例如 $\pi\approx 3.141\,592$.
8. 复合函数 $f(g(x))$ 也写成 $(f\circ g)(x)$.
9. 若 A 和 B 为两个集合, 则用记号 $A-B$ 或 $A\setminus B$ 表示 A 与 B 的差集, 即集合 $\{x\,|\,x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$.
10. 用 $O_\delta(a)$ 或 $U_\delta(a)$ 表示以 a 为中心, 以 $\delta>0$ 为半径的邻域. 在一维情况它就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 如不必指出半径, 则可简记为 $O(a)$ 或 $U(a)$.

目　录

下册内容简介 ····· 1

第十三章 数项级数 ····· 1

§13.1 无穷级数的基本概念 ····· 1

13.1.1 无穷级数的多种视角 (1)　13.1.2 思考题 (5)

§13.2 正项级数 ····· 6

13.2.1 比较判别法的一般形式 (6)　13.2.2 比较判别法的特殊形式 (7)

13.2.3 其他判别法 (9)　13.2.4 例题 (13)　13.2.5 练习题 (17)

§13.3 一般项级数 ····· 19

13.3.1 一般项级数的敛散性判别法 (20)

13.3.2 一般项级数的基本性质 (21)　13.3.3 例题 (23)

13.3.4 练习题 (26)

§13.4 无穷乘积 ····· 28

13.4.1 基本内容 (28)　13.4.2 例题 (29)　13.4.3 练习题 (34)

§13.5 对于教学的建议 ····· 35

13.5.1 学习要点 (35)　13.5.2 参考题 (36)

第十四章 函数项级数与幂级数 ····· 40

§14.1 一致收敛性及其判别法 ····· 40

14.1.1 基本内容 (40)　14.1.2 例题 (43)　14.1.3 练习题 (48)

§14.2 和函数与极限函数的性质 ····· 49

14.2.1 三分法与极限顺序交换原理 (49)　14.2.2 例题 (51)

14.2.3 准一致收敛与控制收敛定理 (53)　14.2.4 练习题 (58)

§14.3 幂级数的收敛域与和函数 ····· 58

14.3.1 幂级数的基本理论 (58)　14.3.2 思考题 (59)

14.3.3 例题 (60)　14.3.4 练习题 (63)

§14.4 函数的幂级数展开 ····· 65

14.4.1 Taylor 级数与函数的幂级数展开 (65)

14.4.2 将函数展开为幂级数的基本方法 (68)

14.4.3 例题 (70)　14.4.4 练习题 (73)

§14.5 对于教学的建议 ····· 74

14.5.1 学习要点 (74)　15.5.2 参考题 (75)

第十五章 Fourier 级数 ····· 79

§15.1 Fourier 系数 ····· 79

15.1.1 Fourier 系数的计算公式 (79)
15.1.2 Fourier 系数的渐近性质 (81)
15.1.3 Fourier 系数的几何意义 (82)
15.1.4 例题 (84) 15.1.5 练习题 (85)
§15.2 Fourier 级数的收敛性 87
15.2.1 Dirichlet 核和点收敛性 (87) 15.2.2 Gibbs 现象 (89)
15.2.3 Fourier 级数的 Cesàro 求和 (91)
15.2.4 Fourier 级数的平方平均收敛 (94)
15.2.5 Fourier 级数的一致收敛性 (95)
15.2.6 例题 (98) 15.2.7 练习题 (101)
§15.3 对于教学的建议 102
15.3.1 学习要点 (102) 15.3.2 参考题 (103)
第十六章 无穷级数的应用 106
§16.1 积分计算 106
16.1.1 关于逐项积分的补充命题 (106)
16.1.2 例题 (107) 16.1.3 练习题 (111)
§16.2 级数求和计算 111
16.2.1 级数求和法 (111) 16.2.2 例题 (112) 16.2.3 练习题 (118)
§16.3 连续函数的逼近定理 119
16.3.1 核函数方法 (120) 16.3.2 Bernstein 证明的概率解释 (123)
16.3.3 逼近定理的一个初等证明 (125)
16.3.4 逼近定理的其他证明 (127)
16.3.5 逼近定理的应用举例 (128) 16.3.6 练习题 (130)
§16.4 用级数构造函数 131
16.4.1 处处连续处处不可微的函数 (131)
16.4.2 填满正方形的连续曲线 (133)
§16.5 对于教学的建议 134
16.5.1 学习要点 (134) 16.5.2 参考题 (134)
第十七章 高维空间的点集与基本定理 137
§17.1 点与点集的定义及其基本性质 137
17.1.1 点的分类及其性质 (137) 17.1.2 集合的分类及其性质 (138)
17.1.3 思考题 (140) 17.1.4 练习题 (141)
§17.2 $\mathbf{R}^n$ 中的几个基本定理 141
17.2.1 综述 (141) 17.2.2 例题 (142) 17.2.3 练习题 (144)
§17.3 对于教学的建议 145

17.3.1 学习要点 (145)　17.3.2 参考题 (145)
第十八章 多元函数的极限与连续 …… 147
§18.1 多元函数的极限 …… 147
18.1.1 重极限 (147)　18.1.2 累次极限 (150)
18.1.3 证明函数的重极限不存在的常用方法 (150)
18.1.4 思考题 (151)　18.1.5 关于累次极限换序 (151)
18.1.6 练习题 (152)
§18.2 多元函数的连续性 …… 153
18.2.1 定义与基本性质 (153)
18.2.2 紧集上多元连续函数的性质 (158)
18.2.3 多元连续函数的介值定理 (160)
18.2.4 向量值函数 (160)　18.2.5 练习题 (161)
§18.3 对于教学的建议 …… 162
18.3.1 学习要点 (162)　18.3.2 参考题 (163)
第十九章 偏导数与全微分 …… 167
§19.1 偏导数 …… 167
19.1.1 偏导数的定义 (167)　19.1.2 偏导数与连续 (168)
19.1.3 高阶偏导数 (168)
§19.2 全微分 …… 171
19.2.1 全微分的定义与基本性质 (171)
19.2.2 多元函数的连续性、偏导数存在性及可微性之间的关系 (172)
19.2.3 思考题 (174)　19.2.4 练习题 (174)
§19.3 复合函数求导 (链式法则) …… 175
19.3.1 复合函数偏导数的链式法则 (175)　19.3.2 例题 (176)
19.3.3 齐次函数 (180)　19.3.4 练习题 (181)
§19.4 向量值函数的微分学定理 …… 182
19.4.1 有限增量公式与拟微分平均值定理 (182)
19.4.2 练习题 (184)
§19.5 对于教学的建议 …… 184
19.5.1 学习要点 (184)　19.5.2 参考题 (186)
第二十章 隐函数存在定理与隐函数求导 …… 188
§20.1 一个方程的情形 …… 188
20.1.1 隐函数存在定理 (188)　20.1.2 隐函数求导 (190)
20.1.3 思考题 (191)　20.1.4 练习题 (191)
§20.2 隐函数组 …… 192

20.2.1 存在定理 (192) 20.2.2 思考题 (193)
20.2.3 求已知函数组所确定的隐函数组的导数 (194)
20.2.4 存在定理的证明 (196) 20.2.5 练习题 (197)
§20.3 变量代换问题 198
20.3.1 仅变换自变量的情形 (198)
20.3.2 自变量与函数同时变换的情形 (199) 20.3.3 练习题 (201)
§20.4 隐函数及隐函数组的整体存在性 202
§20.5 对于教学的建议 203
20.5.1 学习要点 (203) 20.5.2 参考题 (205)
第二十一章 偏导数的应用 209
§21.1 偏导数在几何上的应用 209
21.1.1 曲线的切向量、切线与法平面 (209)
21.1.2 曲面的法向量、法线和切平面 (210)
21.1.3 曲线的夹角、曲面的夹角 (211) 21.1.4 练习题 (212)
§21.2 方向导数与梯度 212
21.2.1 方向导数 (212) 21.2.2 梯度 (213) 21.2.3 练习题 (214)
§21.3 Taylor 公式与极值问题 215
21.3.1 Taylor 公式 (215) 21.3.2 极值问题 (218)
21.3.3 最大最小值问题 (219) 21.3.4 练习题 (223)
§21.4 条件极值与条件最值 224
21.4.1 条件极值 (224) 21.4.2 条件最值 (227)
21.4.3 隐函数的极值 (231) 21.4.4 练习题 (232)
§21.5 高维 Rolle 定理 233
§21.6 对于教学的建议 235
21.6.1 学习要点 (235) 21.6.2 参考题 (235)
章二十二章 重积分 239
§22.1 二重积分的概念 239
22.1.1 二重积分的定义 (239) 22.1.2 可积函数类 (240)
22.1.3 思考题 (242) 22.1.4 练习题 (242)
§22.2 二重积分的计算 243
22.2.1 矩形区域上的二重积分 (243)
22.2.2 一般区域上的二重积分 (245)
22.2.3 二重积分的变量替换 (247) 22.2.4 练习题 (250)
§22.3 三重积分, n 重积分 251
22.3.1 三重积分在直角坐标系中的计算 (251)

22.3.2 三重积分的变量替换 (253)　22.3.3 例题 (254)
22.3.4 n 重积分 (256)　22.3.5 练习题 (256)
§22.4 广义重积分 …… 258
22.4.1 广义重积分的定义 (258)　22.4.2 收敛性判别法 (259)
22.4.3 例题 (260)　22.4.4 练习题 (261)
§22.5 重积分的应用举例 …… 262
22.5.1 几何应用 (262)　22.5.2 物理应用 (266)
22.5.3 重积分与不等式 (268)　22.5.4 练习题 (272)
§22.6 对于教学的建议 …… 273
22.6.1 学习要点 (273)　22.6.2 参考题 (275)
第二十三章 含参变量积分 …… 279
§23.1 含参变量常义积分 …… 279
23.1.1 定义与性质 (279)
23.1.2 几种常用的求参变量积分的方法 (281)　23.1.3 练习题 (285)
§23.2 含参变量广义积分 …… 285
23.2.1 一致收敛性 (285)　23.2.2 例题 (287)　23.2.3 练习题 (290)
23.2.4 主要性质 (290)　23.2.5 例题 (291)　23.2.6 练习题 (295)
§23.3 B 函数与 Γ 函数 …… 296
23.3.1 B 函数 (296)　23.3.2 Γ 函数 (297)　23.3.3 例题 (298)
23.3.4 Γ 函数的特征刻画和几个重要公式的证明 (301)
23.3.5 练习题 (304)
§23.4 对于教学的建议 …… 305
23.4.1 学习要点 (305)　23.4.2 参考题 (306)
第二十四章 曲线积分 …… 309
§24.1 第一型曲线积分 …… 309
24.1.1 第一型曲线积分的定义与计算 (309)
24.1.2 第一型曲线积分的应用 (311)　24.1.3 练习题 (312)
§24.2 第二型曲线积分 …… 313
24.2.1 第二型曲线积分的定义和计算 (313)
24.2.2 两类曲线积分的关系 (315)
24.2.3 第二型曲线积分的应用 (316)　24.2.4 练习题 (317)
§24.3 Green 公式 …… 318
24.3.1 Green 公式 (318)
24.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件 (322)
24.3.3 练习题 (324)　24.3.4 等周定理 (325)

§24.4 连续向量场的旋转度 …… 327
§24.5 对于教学的建议 …… 331
24.5.1 学习要点 (331) 24.5.2 参考题 (333)
第二十五章 曲面积分 …… 336
§25.1 第一型曲面积分 …… 336
25.1.1 第一型曲面积分的定义和计算 (336)
25.1.2 第一型曲面积分的应用 (338) 25.1.3 练习题 (339)
§25.2 第二型曲面积分 …… 340
25.2.1 第二型曲面积分的定义和计算 (340)
25.2.2 两类曲面积分之间的关系 (344) 25.2.3 练习题 (346)
§25.3 Gauss 公式与 Stokes 公式 …… 347
25.3.1 Gauss 公式 (347) 25.3.2 练习题 (351)
25.3.3 Stokes 公式 (352) 25.3.4 练习题 (354)
25.3.5 $\mathbf{R}^3$ 中曲线积分与路径无关的条件 (355) 25.3.6 练习题 (357)
§25.4 向量的外积, 微分形式的外微分与一般的 Stokes 公式 …… 357
25.4.1 向量的外积 (357) 25.4.2 微分形式 (358)
25.4.3 微分形式的外积 (359) 25.4.4 微分形式的外微分 (361)
25.4.5 变换与 Jacobi 行列式 (362)
25.4.6 重积分的变量代换 (363) 25.4.7 一般的 Stokes 公式 (363)
§25.5 对于教学的建议 …… 364
25.5.1 习题课教案一例 (364)
25.5.2 学习要点 (368) 25.5.3 参考题 (369)
第二十六章 场论初步 …… 371
§26.1 散度和旋度 …… 371
26.1.1 散度 (371) 26.1.2 旋度 (372) 26.1.3 Hamilton 算子 ∇ (374)
26.1.4 几种常用的场 (376) 26.1.5 练习题 (377)
§26.2 Laplace 算子与调和函数 …… 377
26.2.1 Laplace 算子 (377) 26.2.2 调和函数 (379)
26.2.3 Poisson 积分公式 (381) 26.2.4 练习题 (382)
§26.3 对于教学的建议 …… 383
26.3.1 学习要点 (383) 26.3.2 参考题 (383)
参考题提示 …… 386
参考文献 …… 400
中文名词索引 …… 402
外文名词索引 …… 407

第十三章　数项级数

本章是无穷级数理论的第一章. 在 §13.1 节中从无限项求和、部分和数列和广义积分三个角度对无穷级数的基本概念作综述. 在 §13.2 节和 §13.3 节中讲述正项级数和一般项级数的判别法与性质. §13.4 节用于介绍无穷乘积. 最后一节是学习要点和参考题. (有关级数求和的问题将在 §16.2 节集中讨论.)

§13.1　无穷级数的基本概念

13.1.1　无穷级数的多种视角

可以从几个不同角度来理解无穷级数的概念.

一、首先, 无穷级数是有限项求和的直接推广. 下面是数学发展史上的几个重要例子, 其中都涉及无穷级数问题 (参见 [30]).

例题 13.1.1 我国古代重要典籍《庄子》(约公元前 300 年) 一书中有 "**一尺之棰, 日取其半, 万世不竭**". 从数学上看, 这与下列无穷项求和有密切联系:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

例题 13.1.2 古希腊伊利亚学派的 Zeno 提出过 4 个著名的悖论, 其中的 Achilles[①] 悖论是: Achilles 永远追不上在他前面的一只乌龟, 因为 Achilles 必须首先跑到乌龟的出发点, 而在这段时间中乌龟又已经向前爬过一段距离, 因此仍然在 Archilles 的前面, 这种情况会无休止地继续下去.

若将上面提到的时间记为 t_1, 并继续下去, 问题就变成了计算 $t_1 + t_2 + \cdots$ 的和. 这是一个无穷级数求和问题. 虽然谁都知道 Achilles 一定会赶上乌龟, 而且不难直接计算出所需要的时间, 但是为了驳倒 Zeno 的说法, 就需要有关于无穷级数的概念和工具, 这超出了当时希腊数学的水平 (见下一小节的思考题 1).

例题 13.1.3 古希腊数学家 Archimedes 求得抛物线弓形的面积是同底同高的三角形面积乘以因子 $\frac{4}{3}$. 如图 13.1 所示, 其中作出了经过点 A, B, C 的抛物线弓形和对应的三角形. 由于过抛物线上点 A 的切线平行于直线段 BC, 因此它们符合同底 (BC) 同高 (AD) 的条件. 从图中可以看出在抛物线弓形中去掉上述三角形之后又得到两个较小的抛物线弓形, 于是又可以作出与它们分别同底同

① Achilles (阿基里斯) 是荷马史诗《伊利亚特》中的希腊名将, 以快跑著称, 在文中被称为 The great runner. 用无穷级数工具来解决 Zeno 悖论的想法最早来自 Gregory (1647).

高的两个三角形. Archimedes 证明它们的面积之和是第一个三角形面积的 $\frac{1}{4}$, 而且这个过程可以无限继续. 因此就出现了无穷级数的求和问题:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}. \tag{13.1}$$

由于当时没有无穷级数的概念和极限理论, Archimedes 在论证中只能使用 Eudoxus 的穷竭法, 否则证明可以简单得多.

例题 13.1.4 我国魏晋时代的数学家刘徽提出用 "割圆术" 来计算圆周率. 他的方法是从计算圆的内接正六边形的面积出发, 然后将内接正多边形的边数成倍增加, 将每次增加的小三角形的面积累加, 以得到越来越精确的圆面积值, 从而求出圆周率 π 的近似值. 刘徽提出: "**割之弥细, 所失弥少, 割之又割以至于不可割, 则与圆合体而无所失矣.**" 这就是说圆面积是一个无穷级数之和 (本题的分析将在本小节末完成).

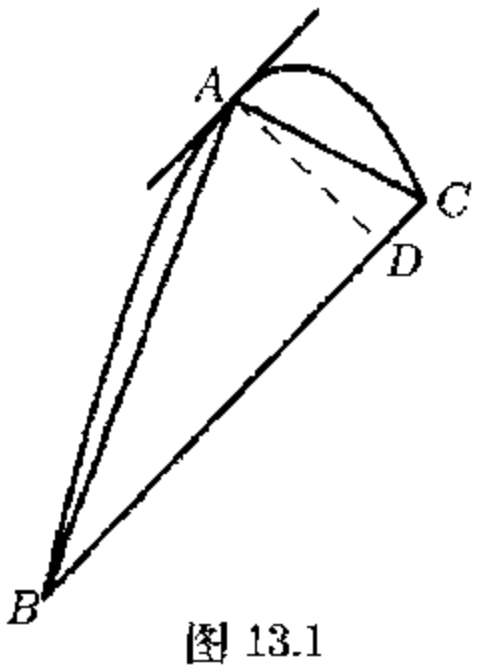


图 13.1

二、其次, 对数列的研究就会导致无穷级数. 在上册中我们已经有意识地这样做了. 在 2.2.3 小节末的注解中 (上册 24~25 页) 引入了**无穷级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{13.2}$$

的基本概念, 其中包括**通项** a_n, **部分和数列** $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $n=1,2,\cdots$. 当部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛时, 称无穷级数 (13.2) **收敛**, 否则称 (13.2) **发散**. 当无穷级数 (13.2) 收敛时, 称极限 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 为无穷级数 (13.2) 的**和**, 并记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=S.$$

此外, 对于 S 为无穷大量, 即部分和数列 $\{S_n\}$ 有广义极限的情况, 也写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$. 为简明起见, 常将无穷级数简称为**级数**, 有时还将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 简记为 $\sum a_n$.

对收敛级数来说, 还需要有余项概念. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$ 对每个 n 均收敛. 将它的和 R_n 称为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的第 n 个**余项**. 若将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列记为 $\{S_n\}$, 记级数的和为 S, 则就有 $R_n=S-S_n$, 因此作为数列的余项 $\{R_n\}$ 一定是无穷小量: $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

由级数的定义可见, 从给定的数列 $\{a_n\}$ 出发可以构造一个级数

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n), \tag{13.3}$$

使得二者同时收敛或发散. 当它们收敛时, 级数 (13.3) 的和 S 就等于数列的极限: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$. 今后将会看到, 对于给定的数列构造级数 (13.3) 是研究数列以及计算其极限的一种有用方法.

由于级数与数列的上述联系, 关于级数的不少性质可以从数列的性质直接推出. 首先是级数收敛的必要条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{13.4}$$

其证明见例题 2.2.9. 同时在那里已经指出, 这不是级数收敛的充分条件.

由数列的 Cauchy 收敛准则 (见 §3.4) 就得到**级数的 Cauchy 收敛准则**: 级数 $\sum a_n$ 收敛的充分必要条件是对每个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对满足条件 $n > N$ 的正整数和每个正整数 p, 成立不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{13.5}$$

注意: 若于 (13.5) 中令 $p = 1$, 就得到收敛级数的必要条件 (13.4). 此外, 例题 3.4.1 和 3.4.2 就是这个收敛准则在无穷级数上的应用.

若级数 $\sum a_n$ 的每一项同号, 则称该级数为**同号级数**. 习惯上称非负项级数为**正项级数**. 显然对同号级数只需研究正项级数就够了. 对于正项级数, 其部分和数列为单调增加数列, 因此就知道: **正项级数收敛的充分必要条件**是其部分和数列有上界.

在上册的内容中已经介绍了几个重要的正项级数. 例如, 已经用多种方法证明**调和级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散 (见例题 2.2.6, 3.4.2), 关于 p 次幂的调和级数 (简称为 **p 级数**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性结论: 当 $p \leqslant 1$ 时发散, 当 $p > 1$ 时收敛 (见 2.2.4 小节的题 10 和 2.3.2 小节的题 6). 在命题 2.5.2 中得到了自然对数的底 e 的无穷级数表示 (命题 2.5.2), 并将它用于 e 的近似计算与无理性证明中.

三、对无穷级数的第三个视角是将它与第十二章的广义积分作比较. 例如, 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与无穷限广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的基本概念之间, 存在**离散 $\leftrightarrow$ 连续**的对应关系: $n \leftrightarrow x$, $a_n \leftrightarrow f(x)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leftrightarrow \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \leftrightarrow \int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

在敛散性判别方面级数理论为广义积分提供了以下两个工具:

命题 13.1.1 设 f 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对于发散于正无穷大的每个数列 $\{A_n\} \subset [a,+\infty)$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 其中 $A_0 = a$.

命题 13.1.2 设 f 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积且不变号, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 存在发散于正无穷大的严格单调增加数列 $\{A_n\}\subset[a,+\infty)$, 使同号级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 其中 $A_0 = a$.

注 在例题 12.2.5 中实际上已经用了这个命题. 又已在 12.4.1 小节中指出, 无穷级数的性质 (13.4) 在广义积分中没有简单的平行结果.

现在用级数概念来完成对刘徽割圆术的分析.

例题 13.1.4 (续) 考虑刘徽对半径为 1 的圆面积计算. 从内接正 6 边形开始, 每次边数加倍, 第 n 次的正多边形边数为 $6\cdot 2^{n-1}$, 其面积为

$$S_n = 3\cdot 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

从 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$ 可见

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi.$$

以 $\{S_n\}$ 为部分和数列的无穷级数是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = S_n - S_{n-1}$ (设 $S_0 = 0$). 刘徽的方法就是将 a_n 累加以得到级数和 π 的近似值. 在图 13.2 中的正六边形的面积为 $S_1 = a_1$, 而在其每条边上的 6 个小三角形面积之和就是 $a_2 = S_2 - S_1$.

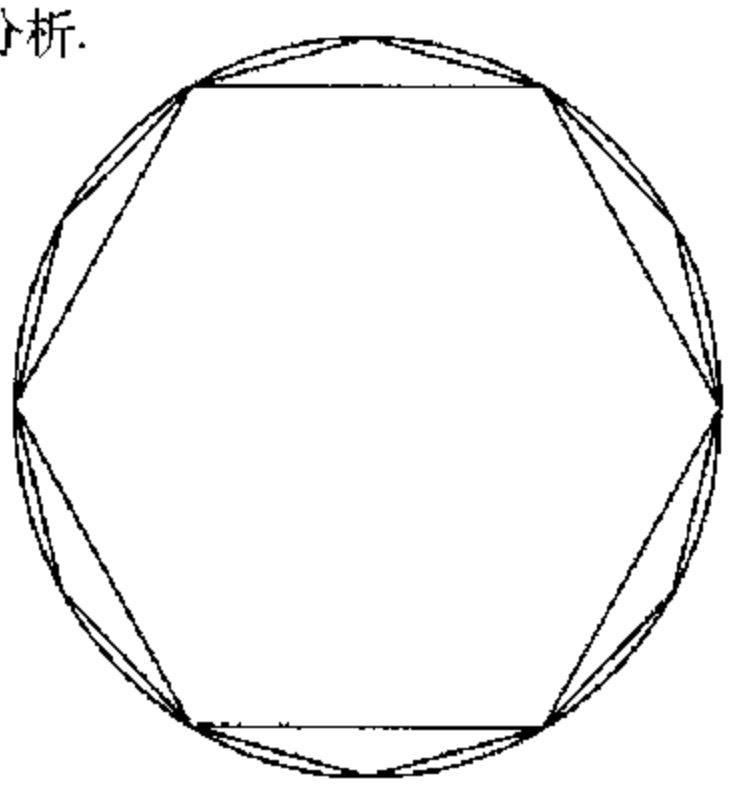


图 13.2

现在分析级数通项的渐近性态: 为方便起见令 $x_n = 3\cdot 2^{n-1}$, 则有

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= x_n\left(\sin\frac{\pi}{x_n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x_n}\right)\\ &= x_n\sin\frac{\pi}{x_n}\left(1-\cos\frac{\pi}{x_n}\right)\\ &\sim \frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{1}{x_n^2} = \frac{2\pi^3}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n, \end{aligned} \tag{13.6}$$

因此刘徽的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在渐近性态上相当于公比为 $\frac{1}{4}$ 的几何级数.

类似地可以分析每次计算后的误差, 这就是级数的余项:

$$\varepsilon_n = S - S_n = \pi\left(1 - \frac{\sin\frac{\pi}{x_n}}{\frac{\pi}{x_n}}\right) \sim \frac{\pi^3}{6}\cdot\frac{1}{x_n^2}. \tag{13.7}$$

由这些分析已可得到有用的结论. 首先, 从 (13.7) 知道 $\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{4}\varepsilon_n$, 这与上册 265~266 页的分析可谓异曲同工. 其次, 比较 (13.6) 和 (13.7) 可以知道

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{3}a_n. \tag{13.8}$$

从而就可以建立外推公式

$$\pi \approx S_n + \frac{1}{3}(S_n - S_{n-1}) = S_{n-1} + \frac{4}{3}(S_n - S_{n-1}). \tag{13.9}$$

例如根据参考文献 [4] 中的第 48 页, 仿照刘徽计算出 96 边形和 192 边形的面积:

$$S_5 \approx 3.139\,350\,203,\ S_6 \approx 3.141\,031\,951,$$

然后用 (13.9) 就可以得到有显著改进的结果:

$$\pi \approx S_6 + \frac{1}{3}(S_6 - S_5) \approx 3.141\,592\,534.$$

从 [4] 还知道, 刘徽在这一步也用了某种外推法, 但究竟是什么方法则仍是中国数学史上的一个悬案[①] (关于外推法可以参看 [13]). □

13.1.2 思考题

这一小节的思考题主要用于对级数定义进行复习, 对于其中的是非题, 若回答 "是", 则要作出证明, 若回答 "不是", 则要举出反例.

1. (例题 13.1.2 之续) 设比赛开始时, 乌龟在 Archilles 之前 1000 m, Archilles 的速度为 10 m/s, 乌龟的爬行速度为 0.1 m/s. 试将 Zeno 悖论中的论点转化为无穷级数求和问题, 并计算出 Archilles 赶上乌龟所需要的时间. (本题说明, 有了无穷级数的工具之后, Zeno 的这个悖论就不再是悖论了.)
2. 设级数 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛 (或发散), 讨论以下级数的敛散性:
$$\sum (a_n \pm b_n),\ \sum a_n b_n,\ \sum \frac{a_n}{b_n}(b_n \neq 0),$$
又对于 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均为正项级数情况讨论同样的问题.
3. 对于级数 $\sum \max\{a_n, b_n\}$, $\sum \min\{a_n, b_n\}$ 继续上题的讨论.
4. 如果级数 $\sum (a_n + a_{n+1})$ 收敛, 是否必可推出 $\sum a_n$ 收敛? 又在 $\sum a_n$ 是正项级数时, 答案又是什么?
5. 记 $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, 并作以下计算:
$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S \Longrightarrow S = \frac{1}{2},$$
问: 其中有何错误? 又请阅读第二组参考题 18 后再做此题.
6. 讨论级数 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_n - a_n + \cdots$ 的敛散性.

---

① 根据 [4] 的第 48 页, 刘徽计算的是 100π 的近似值. 他得到的 $S_5 = 313\frac{584}{625}$, $S_6 = 314\frac{64}{625}$, $S_6 - S_5 = \frac{105}{625}$, 因此按照 (13.8) 的修正量为 $\frac{35}{625}$, 而刘徽实际所用的修正量为 $\frac{36}{625}$, 从而得到 $100\pi \approx 314\frac{100}{625} = 314.16$.

7. 如果对每个正整数 p, 均成立

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,$$

问: 是否能由此推出级数 $\sum a_n$ 一定收敛?

8. 设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, 若已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时收敛 (或发散), 问: 能否推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛 (或发散)? 并请将你的结论与数列的夹逼定理 (见上册 20 页) 作比较.

9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于和 S, 若对于每个 n, 将 a_{2n-1} 和 a_{2n} 两项作交换, 证明所得的新级数收敛, 并求其和.

10. 设有收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 且对于每个正整数 n 成立 $a_n\leqslant a_nR_n$, 其中 R_n 为第 n 个余项, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 实际上是有限和.

§13.2 正项级数

从本节开始我们将主要关注级数的敛散性判别法. 如果能够判定一个级数收敛, 则原则上至少可以用数值方法来计算级数和的近似值. 关于级数求和的内容则在 §16.2 节中讨论.

正项级数的敛散性一般只需要从其部分和数列是否有界就可以解决, 在这方面已经得到了许多丰富的成果. 以下的前两个小节分别介绍比较判别法的一般形式和特殊形式, 然后在 13.2.3 小节介绍 Cauchy 积分判别法、Cauchy 凝聚判别法、Sapagof 判别法和 Kummer 判别法.

13.2.1 比较判别法的一般形式

首先列出比较判别法的几种常用形式, 它们的证明见教科书.

比较判别法的基本形式: 设正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 的通项之间满足条件 $a_n\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, 则就有以下结论:

$$(1)\quad \sum b_n \text{ 收敛}\Longrightarrow\sum a_n \text{ 收敛;} \tag{13.10}$$

$$(2)\quad \sum a_n \text{ 发散}\Longrightarrow\sum b_n \text{ 发散.} \tag{13.11}$$

注意其中关于两个级数通项之间的不等式关系只需要对充分大的 n 成立即可.

我们称 (13.10) 中的 $\sum b_n$ 与 (13.11) 中的 $\sum a_n$ 为**比较级数**. 一般常用的比较级数如

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$$

等等. 在使用比较判别法时经常需要知道以下 "级别" 关系 (参见 2.7.1 小节):

$$\ln n \ll n^{\varepsilon} \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

比较判别法的极限形式: 若对于正项级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 存在 (广义) 极限

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}, \tag{13.12}$$

则当 $0<c<+\infty$ 时正项级数 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 同敛数, 当 $c=0$ 时可以从 $\sum a_n$ 收敛推出 $\sum b_n$ 收敛, 或从 $\sum b_n$ 发散推出 $\sum a_n$ 发散, 当 $c=+\infty$ 时有相反的结论.

比较判别法的极限形式表明, 研究级数 $\sum a_n$ 的通项所成的数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的渐近性态往往是值得做的分析工作, 其中包括通项 $\{a_n\}$ 是否是无穷小量的初步观察, 如果不是, 则已经可以断定该级数发散. 对于上面 $0<c<+\infty$ 的情况, 可以称为**等价量判别法**.

比较判别法的比值形式: 设对于正项级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 的通项当 n 充分大时成立不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{13.13}$$

则结论 (13.10) 与 (13.11) 成立.

在下一小节会看到, 从 d'Alembert 判别法开始的许多判别法都是在取定某个 $\sum b_n$ 之后从 (13.13) 导出的比较判别法的特殊形式.

13.2.2 比较判别法的特殊形式

上一小节中的比较判别法有一个共同点, 就是都需要有比较级数. 如何对于给定的级数去寻找合适的比较级数往往是一个难题[①].

一种新的思维方法是 "守株待兔": 取定比较级数以导出简单易用的判别法. 例如, 一般教科书中的 Cauchy 根值判别法和 d'Alembert 比值判别法就是如此. 它们都是用几何级数作为比较级数. 区别在于, Cauchy 根值判别法是从 (13.10) 和 (13.11) 出发两边开 n 次根得到, 而 d'Alembert 比值判别法则从比值形式 (13.13) 推出. 由于教科书中都有它们的介绍和比较, 此处从略.

不难看出, 这样得到的每一种判别法的能力必定有限, 其适用范围为所取的比较级数所限定. 例如, p 级数的敛数性就不可能用 Cauchy 根值判别法或 d'Alember 比值判别法来进行判定. 利用数列收敛和发散的快慢概念, 就很容易理解这种现象. (参见 2.7.1 小节关于无穷大量的 "级别" 概念, §4.4 中关于无穷小量和无穷大量的比较, 以及 8.7.1 小节中关于收敛速度的讨论.)

① 这里的第一个困难在于, 由于事先不知道一个级数究竟是收敛还是发散, 因此事先不知道是按照 (13.10) 还是 (13.11) 去寻找比较级数. 这在原则上只能通过尝试和摸索来解决.

具体来说, 采用 p 级数作为比较级数就得到 Raabe 判别法, 采用 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}$ 作为比较级数就得到 Bertrand 判别法和 Gauss 判别法. 它们的证明都可以从 [19] 等书中找到, 此外还有许多更为细致的讨论和发展可以参考 [52] 和其中的文献.

现在我们将上述几种判别法的使用方法列表如下. 这里要注意, 每种判别法都有多种不同形式, 为简明起见, 这里只列出较易使用的形式. 以下设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数. 表中第一列为判别法名称, 第二列为计算量, 第三列为用法.

Cauchy 根值判别法:	$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=c,$	$c<1$ 时级数收敛,
		$c>1$ 时级数发散;
d'Alembert 判别法:	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=d,$	$d<1$ 时级数收敛,
		$d>1$ 时级数发散;
Raabe 判别法:	$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r,$	$r>1$ 时级数收敛,
		$r<1$ 时级数发散;
Bertrand 判别法:	$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=b,$	$b>1$ 时级数收敛,
		$b<1$ 时级数发散;
Gauss 判别法:	$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{\mu}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),\varepsilon>0,$	$\mu>1$ 时级数收敛,
		$\mu\leqslant 1$ 时级数发散.

注 1　表中除 Cauchy 根值判别法外, 所列出的判别法都基于对比值 a_{n+1}/a_n (或 a_n/a_{n+1}) 的分析, 因此都可以称为**比值判别法**. 在 Gauss 判别法中的 $\mu=1$ 时级数发散的结论可从 Bertrand 判别法得到. 此外, 若再考虑

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p},\ \sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n(\ln\ln\ln n)^p},\cdots \tag{13.14}$$

等比较级数, 就可以得到更为精细的判别法, 统称为 Bertrand 判别法 (见 [62]).

注 2　容易发现本小节列举的所有判别法中, 除了 Cauchy **根值判别法**之外, 都只能用于 $\{a_n\}$ 为单调的情况, 至少当 n 充分大时必须单调, 否则就不可能成功. 在这个意义上可以说, 它们都是**通项单调减少的正项级数判别法**. 正因为如此, 虽然 Cauchy 根值判别法只是以几何级数为比较级数得到的判别法, 能力有限, 但是它的适用范围不能为表中任何其他判别法所完全覆盖. 一个典型例子是以 $a_n=2^{-n-(-1)^n}$ 为通项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{8}, & n\text{ 为奇数},\\ 2, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{2}$ 知可用 Cauchy 根值判别法, 但比值判别法都不行.

注 3 在这方面还应当提到各种形式的**对数判别法**. 这里只举出两种对数判别法的极限形式 (此外还有非极限形式和上、下极限形式):

1. 若对正项级数 $\sum a_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=r', \tag{13.15}$$

则当 $r'>1$ 时级数收敛, 而当 $r'<1$ 时级数发散.

2. 若对正项级数 $\sum a_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/(na_n))}{\ln\ln n}=b', \tag{13.16}$$

则当 $b'>1$ 时级数收敛, 而当 $b'<1$ 时级数发散.

这两种判别法与 Raabe 判别法和 Bertrand 判别法的关系恰如 Cauchy 根值判别法与 d'Alembert 判别法那样, 即当后者有效时前者一定有效 (见本节练习题 12), 但反之不成立 (参见 [52]). 与根值判别法相同的是, 对数判别法不依赖于级数中的比值 a_{n+1}/a_n, 因此对于通项不是单调的正项级数仍然可能有效.

13.2.3 其他判别法

对正项级数来说, 除了上面介绍的几个判别法之外, 其他判别法还有很多. 本小节中只列举其中的几种判别法, 它们都含有新的思想. 此外, 最后还讨论了比较级数中的一个理论问题.

首先应当指出, 建立在广义积分基础上的 Cauchy 积分判别法是非常有用的. 它不依赖于比较级数. 例如在 (13.14) 中的级数的敛散性都可以用它得到解决, 但是不能用前面的那些判别法来判定.

命题 13.2.1 (Cauchy 积分判别法) 设 f 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与无穷限广义积分 $\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

注 积分判别法只是面积原理的一个应用 (见上册 371 页), 证明从略. 希望初学者要学习这种面积比较方法, 它可以解决不少问题.

命题 13.2.2 (Cauchy 凝聚判别法) 设 $\{a_n\}$ 是单调减少的正数散列, 则正项级散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是: 凝聚项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} + \cdots$$

收敛.

证 由于该正项级数的通项单调减少, 因此不等式

$$2^{k-1} a_{2^k} \leqslant a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k} \leqslant 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

对 $k \geqslant 1$ 成立. 注意不等式中间部分恰有 2^{k-1} 项. 取 k 从 1 到 n 并相加, 即可得到

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \leqslant a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k},$$

可见原来的级数的部分和与凝聚项级数的部分和同时有界或无界. □

注 这里也不需要比较级数, 建议读者对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ 和 (13.14) 中的级数用 Cauchy 凝聚判别法一试.

讨论一个数列 $\{a_n\}$ 是否收敛于 0 是数学分析中的基本问题之一, 具有多方面的应用. 无穷级数已经为此提供了一种方法, 这就是研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛, 若级数收敛, 则就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 容易理解这个方法不会很有效, 若级数发散就不能作出任何结论. 但是对于单调数列, 则有下面好得多的结果 (参见美国数学月刊 95 卷 (1988) 942 页).

命题 13.2.3 (Sapagof 判别法) 设正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

证 将题中的级数记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 其中 $b_n = 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n = 1, 2, \cdots$.

由于正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 因此有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 若 $a > 0$, 则 $b_n \leqslant \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 - a_n) = a_1 - a$, 可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 若 $a = 0$, 则有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{n+1}} = 1 - \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}}.$$

对任意给定的 n, 利用 $a_n \to 0$ 的条件, 总可以取到充分大的 p, 使上式大于 $\frac{1}{2}$, 可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

注 1 本命题有几种等价形式 (见 [19] 卷 2 的第 365 小节之 5)]):

(1) 设 $\{a_n\}$ 为单调增加的正数数列, 则该数列与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散 (这种形式在各种教科书中出现最多);

(2) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

注 2 应当指出, 在下一节的变号级数敛散性判别法中, 往往需要证明某个单调数列收敛于 0. 这时命题 13.2.3 就是一个有用的工具. 这样就可能将变号级数的敛散性判别问题归结为某个正项级数的敛散性判别问题, 而关于后者的方法要丰富得多. 此外, 还可以看出, 如数列极限理论中的例题 2.3.3 (上册 28 页) 这类经典性结果都可以看成为命题 13.2.3 的特例.

命题 13.2.4 (Kummer 判别法) (1) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是存在正数数列 $\{b_n\}$ 和正数 δ, 使得当 n 充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant \delta > 0; \tag{13.17}$$

(2) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散的充分必要条件是存在发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$, 使得当 n 充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0. \tag{13.18}$$

证 (1) 先证充分性. 不妨设条件 (13.17) 已对于 $n \geqslant 1$ 成立. 将它改写为 $0 < \delta a_{n+1} \leqslant b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1}$, 可见正数数列 $\{b_n a_n\}$ 单调减少, 因此有估计:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n-1} (b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1}) \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta} \cdot b_1 a_1,$$

从而知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

再证必要性. 在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时记其余项为 R_n, $n \geqslant 1$. 令 $b_n = \frac{R_n}{a_n}$, 则就有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{R_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{R_n - R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

因此取 $\delta = 1$ 即可.

(2) 这时的充分性就是比较判别法的比值形式 (见 (13.13)). **再证必要性.** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 取 $b_n = \frac{S_n}{a_n}$, 其中 S_n 为级数的第 n 个部分和. 这时 (13.18) 满足:

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 < 0.$$

从 $\frac{1}{b_n} = \frac{a_n}{S_n}$, 和命题 13.2.3 (注 1 之 (2)) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散. □

注 1 值得注意: Kummer 判别法中的 (1) 来自于正项级数收敛的充分必要条件是其部分和数列有上界, 而与比较判别法没有直接联系. (参见美国数学月刊 102 卷 (1995) 817~818 页中的历史观点.)

注 2 采取不同的 $\{b_n\}$, 就可以从 Kummer 判别法得到上一小节的各种比值判别法 (见 [19] 卷 2 的 362 小节]). 关于 Kummer 判别法的必要性结果取自美国数学月刊 101 卷 (1994) 450~452 页.

在上一小节中已经提到, 由于存在收敛 (发散) 速度不同的正项级数, 因此用特定的比较级数得到的比较判别法的能力总是有限制的. 现在我们证明, 对于比较判别法而言, 不论是为了判定级数收敛, 还是发散, 都不可能存在什么**万能**的比较级数.

命题 13.2.5 (1) **(du Bois Reymond 定理)** 对于一个给定的收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 一定存在一个收敛正项级散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$;

(2) **(Abel 定理)** 对于一个给定的发散正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 一定存在一个发散正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$.

证 (1) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知, 余项 R_n 单调减少收敛于 0. 令 $b_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$[①], 其中记 $R_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 从

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}} = \sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n} \to 0$$

和 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_k} \leqslant \sqrt{R_0}$ 可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为满足要求的收敛级数.

(2) 令 $b_n = \dfrac{a_n}{S_n}$, 然后引用命题 13.2.3 (注 1 之 (2)) 即可. □

注 利用 §2.4 的 Stolz 定理, 可以如下解释本题的结果. 对于 (1), 分别记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的余项为 R_n 和 R'_n, $n = 1, 2, \cdots$, 则它们都是单调减少的无穷小量. 由条件 $b_n > 0$ 还知 $\{R'_n\}$ 严格单调减少. 利用命题 2.4.2 ($\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理), 可见有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{R'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n - R_{n+1}}{R'_n - R'_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

从而 $R_n = o(R'_n)$. 这就是收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛速度比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收敛速度慢的严格表述.

对于 (2), 若分别记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和为 S_n 和 S'_n, $n = 1, 2, \cdots$, 则它们都是单调增加的正无穷大量, 而且 $\{S_n\}$ 还是严格单调增加的. 用命题 2.4.3 ($\dfrac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理) 就得到

$$S_n = o(S'_n), \text{ 也就是 } S'_n \ll S_n.$$

这就是作为正无穷大量的 S'_n 的发散速度慢于 S_n 的严格表述.

---

① 若 $\{R_n\}$ 从某项起为 0, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为有限和, 任何收敛正项级数都可以作为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 只要每个 $b_n > 0$.

13.2.4 例题

先介绍对 p 级数的敛散性证明, 它们与上册已有的证明不同. 其中第一个证明在方法论上很有价值.

例题 13.2.1 讨论 p 级数的敛散性.

证 1 对于 $p \leqslant 1$ 只需讨论 $p=1$, 即调和级数. 利用微分中值定理, 有

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{n+\theta}<\frac{1}{n},$$

其中 $0<\theta<1$, 因此对调和级数的部分和有估计 (参见上册 43 页):

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(N+1)-\ln N)=\ln(N+1),$$

可见级数发散. 对于 $p>1$ 同样有

$$\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}=\frac{p-1}{(n+\theta)^p}>\frac{p-1}{(n+1)^p},$$

其中 $0<\theta<1$, 因此有估计

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p}&<1+\frac{1}{p-1}\left[\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(N-1)^{p-1}}-\frac{1}{N^{p-1}}\right)\right]\\&=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{N^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1},\end{aligned}$$

可见级数收敛. □

证 2 对于 $p \leqslant 1$ 只需证明 $p=1$ 时调和级数发散. 用反证法. 若调和级数收敛, 其和为 S, 则

$$\begin{aligned}S&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots\right)\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\right)+\frac{S}{2},\end{aligned}$$

因此得到

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots=\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots.$$

但从 $1>\frac{1}{2},\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n},\cdots$, 可见这不可能成立.

再讨论 $p>1$, 这时级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 满足条件 $S_{2N}<S_{2N+1}$ 以及

$$\begin{aligned}S_{2N+1}&=1+\left(\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2N)^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2N+1)^p}\right)\\&<1+2\left(\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2N)^p}\right)=1+2^{1-p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{N^p}\right)\\&<1+2^{1-p}S_{2N+1},\end{aligned}$$

因此部分和数列 $\{S_n\}$ 以 $1/(1-2^{1-p})$ 为上界, 可见级数收敛. □

注 证 2 见 Math. Magazine, 52 卷 (1979) 178 页.

下面是利用 p 级数为比较级数的几个例题.

例题 13.2.2 讨论下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}};\qquad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};\qquad (3)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}.$$

解 只要知道对于任何两个正数 $a,b>0$ 均成立

$$a^{\ln b}=(\mathrm{e}^{\ln a})^{\ln b}=\mathrm{e}^{\ln a\ln b}=(\mathrm{e}^{\ln b})^{\ln a}=b^{\ln a},$$

就不难解决前两题. 在题 (1) 中, 利用 $3^{\ln n}=n^{\ln 3}$ 和 $\ln 3>1$, 可见这个级数本身就是 $p>1$ 的 p 级数, 因此收敛. 对于题 (2), 利用 $(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln\ln n}$ 和当 n 充分大时有 $n^{\ln\ln n}>n^2$, 就可用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 为比较级数而知其收敛. 类似地可以在题 (3) 中有 $(\ln n)^{\ln\ln n}=\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2}<\mathrm{e}^{\ln n}=n$, 因此可从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的发散性知其发散. □

在下面的例子中用等价量判别法 (当然也可用其他比较判别法):

例题 13.2.3 讨论下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^k;\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{a}{n}\right)^n\ (a>0);\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

解 (1) 利用关于阶乘的 Wallis 公式知道有 $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}$ (即公式 (11.29)), 因此该级数的通项 a_n 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\pi n)^{k/2}}$ 的通项为等价无穷小量. 从而知道级数当 $k\leqslant 2$ 时发散, 而当 $k>2$ 时收敛.

(2) 根据 Stirling 公式 (11.32), 可见成立

$$a_n=n!\left(\frac{a}{n}\right)^n\sim\left(\frac{a}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}=b_n.$$

若 $a\geqslant\mathrm{e}$, 则可看出数列 $\{b_n\}$ 不是无穷小量, 因此级数 $\sum b_n$ 以及 $\sum a_n$ 均发散. 否则, 可以取 $r\in\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}},1\right)$, 并看出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r^n}=0,$$

因此从几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ $(0<r<1)$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(3) 利用 Taylor 公式即可得到

$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\mathrm{e}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(见上册 230 页例题 8.1.4 之解 2), 因此知级数发散. □

下面是应用 Sapagof 判别法的一个典型例题.

例题 13.2.4 问: 在什么条件下数列 $\{a_n\}$ 为无穷小量, 其中

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ n=1,2,\cdots.$$

证 从定义可见, 若参数 α 为非负整数, 则数列至多只有前有限项不等于 0, 因此是无穷小量. 否则, 只需讨论 $\{|a_n|\}$. 从

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1}$$

可见当 $\alpha \leqslant -1$ 时有 $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$, 因此数列不可能趋于 0.

当 $\alpha > -1$ 时 $\{|a_n|\}$ 当 n 充分大时单调减少. 利用命题 13.2.3, 从

$$1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\alpha+1}{n+1} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{n+1}$$

发散可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

下面是在例题 13.2.1 中引进的微分中值定理方法的又一个应用.

例题 13.2.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $\{S_n\}$ 为其部分和数列, $p > 1$, 证明: 无论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛与否, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 总是收敛的.

证 这里的出发点是 $\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p}$. 设 $0 < a < b$, 对函数 x^{1-p} 在区间 $[a,b]$ 上用 Lagrange 微分中值定理, 可知存在 $a < \xi < b$, 值成立

$$\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{b^{p-1}} = \frac{(p-1)}{\xi^p}\cdot(b-a) > (p-1)\cdot\frac{b-a}{b^p}.$$

用 $a = S_{n-1}$, $b = S_n$ 代入, 得到不等式

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right).$$

由此可以作出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 的部分和数列的上界估计:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^p} &= \frac{1}{a_1^{p-1}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{S_k^p} < \frac{1}{a_1^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_k^{p-1}}\right)\\ &< \frac{1}{a_1^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{a_1^{p-1}} = \frac{p}{p-1}\cdot\frac{1}{a_1^{p-1}},\end{aligned}$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. □

注 以上证明对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛和发散情况都有数, 但可以看出, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 记和为 S, 则 $\frac{a_n}{S_n^p} \sim \frac{a_n}{S^p}$, 因此本题的结论是平凡的.

下一个例题也很有意义.

例题 13.2.6 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 也收敛.

证 从条件可见正数数列 $\{a_n\}$ 为正无穷大量. 以下分两步来做.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加, 则有

$$a_1+\cdots+a_{2n-1}\geqslant a_n+\cdots+a_{2n-1}\geqslant na_n,$$

因此有不等式:

$$\frac{2n-1}{a_1+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2n-1}{na_n}+\frac{2n}{na_n}<\frac{4}{a_n},$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 的部分和数列有上界, 因此收敛. 同时还得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}. \tag{13.19}$$

(2) 对于一般情况, 将数列 $\{a_n\}$ 按照从小到大重排[①], 并将重排后的数列记为 $\{b_n\}$. 根据收敛的正项级数在重排后仍收敛, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 收敛. 利用 (1) 知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 收敛. 同时容易看出对每个 n 成立不等式[②]

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n, \tag{13.20}$$

因此就有

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$

于是从比较判别法就知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛. □

注 我们不知道不等式 (13.19) 右边的系数 4 是否可以减少, 若可以的话, 其最优值又是多少 (参见下一个例题).

可以看出上题中第二个级数的第 n 项是第一个级数的前 n 项的调和平均值. 根据调和平均值-几何平均值不等式 (见上册第 8 页 1.3.2 小节题 3), 可见本题是以下著名不等式的一个推论.

例题 13.2.7 (Carleman 不等式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数, 则成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

其中右边的系数 e 不能再改进.

① 为了实现这样的重排需要反复利用一个初等结论: 若数列为正无穷大量, 则数列中必有最小数. 这就是 2.2.4 小节中的练习题 6. 其证明可以参考上册 18 页例题 2.2.1.

② 由于 $b_1,\cdots,b_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 中按照从小到大的顺序重新排列的前 n 项, 因此它们的和不会大于任何其他 n 项之和, 其中包括 $a_1+\cdots+a_n$.

证 对部分和估计如下 (其中利用的不等式 $\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$ 见上册 46 页):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt[n]{(a_1)(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n\sqrt[n]{n!}}\\&\leqslant\mathrm{e}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\mathrm{e}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k\\&=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}ka_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)\\&\leqslant\mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}a_k,\end{aligned}$$

然后令 $N\to\infty$ 即可得到 Carleman 不等式. 最后, 对于每个 N 构造一个数列: $a_n=1/n,\ n=1,2,\cdots,N$, 而 $a_n=0\ \forall n>N$, 然后作出由 $\{a_n\}$ 得到的两个级数和之比, 令 $N\to\infty$, 且用 Stolz 定理 (即命题 2.4.3), 就有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N}a_n}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{\sqrt[N]{N!}}=\mathrm{e}.$$

这表明不等式右边的系数 e 不能再改进. □

注 1 这里的 Carleman 不等式的证明来自 [27]. 此外还可以参见 [23, 39]. 在上述证明中的二重求和的顺序交换也可以利用裂项法改写为

$$\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}ka_k+a_{n+1},$$

并对于 $n=1,2,\cdots,N$ 相加, 就得到同样的结果:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k\leqslant a_1+\cdots+a_N.$$

注 2 与此有关的还有 Hardy 不等式, 其中当 $p>1$ 时为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{1/p}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

令 $p\to+\infty$ 就导出 Carleman 不等式.

13.2.5 练习题

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的通项为等价量: $a_n\sim b_n$, 又记两个级数的部分和为 S_n 和 S'_n, 余项为 R_n 和 R'_n, $n=1,2,\cdots$, 证明:

   (1) 若两个级数均收敛, 则 $R_n\sim R'_n$;

(2) 若两个级数均发数, 则 $S_n \sim S'_n$.

2. 设 $\sum a_n$ 为正项级数, 证明: 任意改变其中各项的顺序和加括号后得到的级数与原来的级数具有相同的敛散性, 且在收敛时级数的和不变. (这表明, 如果无限项求和时每项为非负数, 或至多只有有限项为负数, 则有限项求和时的**结合律**和**交换律**对无限项求和都依然成立.)

3. 讨论下列各级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}}{n^p}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ $(a,b,c>0)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

4. 从例题 13.2.6 和 13.2.7 知道, 若从收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 作出 $\{u_n\}$, 其中 u_n 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的调和平均值或几何平均值, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 但是若 u_n 为算术平均值, 则情况大不一样. 证明: 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则除了一种特殊情况之外, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 必定发散.

5. 试用 Sapagof 判别法 (即命题 13.2.3) 证明以下数列收敛于 0:

(1) $\left\{\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right\}$; (2) $\left\{\frac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}\right\}$; (3) $\left\{\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\right\}$ $(x>1)$.

6. 举出一个收敛的正项级数 $\sum a_n$ 的例子, 使它满足条件 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} na_n = 1$.

7. 已知正项级数 $\sum a_n$ 收敛, $p>1$, 证明: 级数 $\sum a_n^p$ 一定收敛. 又若去掉 $\sum a_n$ 为正项级数的条件, 结论是否还成立?

8. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少收敛于 0, 且 $b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n$ 收敛.

9. 设对于每个正整数 n 都有 $0 < a_n < a_{2n} + a_{2n+1}$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

10. 设 $x>0$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 收敛.

11. 设 $x>0$, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$$

的敛散性.

12. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 证明:

(1) 若在 Raabe 判别法中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 存在, 则在对数判别法 (13.15) 中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$ 也存在, 且极限值相同;

(2) 若在 Bertrand 判别法中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]$ 存在, 则在对数判别法 (13.16) 中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/(na_n))}{\ln\ln n}$ 也存在, 且极限值相同.

13. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, k 为一正整数, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+k}}{a_n}=l$, 证明: $l<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; $l>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(本题如取 $k=1$, 就是 d'Alembert 判别法. 因此, 本题可看作为 d'Alembert 判别法的一个推广.)

14. (Dini) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 其余项为 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$, $n=0,1,\cdots$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}}$ 发散, 但对任意 $p>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}$ 收敛.

15. 设 $0<a_1<\dfrac{\pi}{2}$, 然后用迭代公式 $a_n=\sin a_{n-1}$ 生成数列 $\{a_n\}$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 的敛散性 (参考上册 233 页的例题 8.1.10).

§13.3 一般项级数

本节研究一般项级数, 即在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 中既有无限多个正项, 又有无限多个负项的情况, 称这样的级数为**变号级数**. 对于其他情况则可以归之于正项级数的范畴去解决.

这里需要强调指出绝对收敛级数与条件收敛级数的区别. 从敛散性来看, 前者的收敛性可以用正项级数的各种判别法来判定. 而后者则需要全新的判别法. 从级数的一系列性质来看, 二者均有极大的不同. 粗略地说, 前者与有限和相似, 而后者则完全不同.

13.3.1 一般项级数的敛散性判别法

称收敛级数 $\sum a_n$ 为**绝对收敛级数**, 若 $\sum |a_n|$ 也收敛; 否则就称为**条件收敛级数**. 用 Cauchy 收敛准则就可以得到这里的基本结论:

命题 13.3.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定收敛.

由此可知, 在研究变号级数 $\sum a_n$ 的敛散性时, 可以先分析对应的正项级数 $\sum |a_n|$ 的敛散性. 对后者来说可以用正项级数的各种判别法. 若 $\sum |a_n|$ 收敛, 则原来的级数 $\sum a_n$ 的收敛性就已经解决. 若 $\sum |a_n|$ 发散, 则 $\sum a_n$ 的敛散性有两种可能: 条件收敛或发散. 这时上一节中以比较判别法为基础的各种判别法都不能奏效. 其中的例外是导致发散结论的 Cauchy 根值判别法和 d'Alembert 判别法. 这就是说, 在对于 $\sum |a_n|$ 用这两种判别法时, 若有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, 则可以肯定原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 其原因在于这两种判别法背后的比较级数是 (正项) 几何级数, 它在公比大于 1 时的级数通项不收敛于 0, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 是等价的, 因此它们的反面也等价.

变号级数中最基本的例子就是在上册 54 页例题 2.7.3 中的无穷级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots = \ln 2.$$

其求和计算见上册 45 页的例题 2.5.4 和 361 页的例题 11.4.1.

在一般项级数的敛散性判别法中除了 Cauchy 收敛准则仍然有效之外, 常用的其他判别法有:

1. **Leibniz 判别法** 若数列 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

注 满足 Leibniz 判别法中条件的级数称为 **Leibniz 型级数**, 它的各项符号交替取正号和负号. 我们将这样的级数称为**交错级数**. Leibniz 型级数就是通项单调收敛于 0 的交错级数. 初学者可能以为在变号级数中交错级数不会很多, 其实不然. 虽说一个级数加括号后收敛不能推出原来的级数也收敛, 然而利用级数收敛的定义或 Cauchy 收敛准则就可以得到下面的结果:

命题 13.3.2 若对级数 $\sum a_n$ 加括号后得到的级数收敛, 且在每个括号内各项的符号相同, 则级数 $\sum a_n$ 也收敛.

由此可知, 对于任何变号级数都可以采用加括号的方法使它成为一个交错级数, 而且两个级数的敛散性等价.

但是 Leibniz 判别法只是保证收敛性的一种充分条件, 而下面两个判别法都是级数收敛的充分必要条件. 又容易知道 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法的一个特例.

2. Dirichlet 判别法 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列有界, 数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

3. Abel 判别法 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 单调有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

注 1 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的基础是 **Abel 变换** (参见 [55] 的第一章). 这个变换在一系列问题中有用, 也是积分第二中值定理 (命题 10.2.2) 的基础. 其基本形式很简单. 设有两个有限数列 $\{a_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 和 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$, 令 $A_k = a_1 + \cdots + a_k$, $k = 1, \cdots, n$, 则

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ &= A_1b_1 + (A_2 - A_1)b_2 + \cdots + (A_n - A_{n-1})b_n \\ &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n. \end{aligned} \tag{13.21}$$

由此可导出各种有用的估计式. 设 $|A_k| \leqslant M$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则当 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 为非负单调减少时, 容易得到

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqslant Mb_1, \tag{13.22}$$

又若只值定 $\{b_k\}$ 单调, 则有

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|). \tag{13.23}$$

注 2 与广义积分中的命题 12.2.1 和 12.2.2 (上册 380~381 页) 类似地可以证明, Dirichlet 判别法和 Abel 判别法中的条件也是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛的必要条件. 这方面的结论见数学通报 7 卷 (1983) 29~32 页和 9 卷 (1984) 22~23 页.

13.3.2 一般项级数的基本性质

区分绝对收敛级数和条件收敛级数的意义不仅是它们的判别方法不同, 更重要的是它们在一系列性质上完全不一样.

作为无限项求和来说, 绝对收敛级数与正项收敛级数都满足结合律和交换律, 而且其和不变 (参见 13.2.4 小节的练习题 2).

但对条件收敛级数来说, 情况大不相同. 为了指出这两类收敛级数的根本差异何在, 需要引进由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 导出的两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$:

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & \text{若 } a_n > 0, \\ 0, & \text{若 } a_n \leqslant 0, \end{cases} \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n, & \text{若 } a_n < 0, \\ 0, & \text{若 } a_n \geqslant . \end{cases}$$

命题 13.3.3 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是由它导出的两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 同时收敛, (2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则该级数条件收敛的充分必要条件是这两个正项级数同时发散.

注 这就是说, 条件收敛级数中的正项之和为 $+\infty$, 而负项之和为 $-\infty$, 因此当 $n \to \infty$ 时其部分和数列 $\{S_n\}$ 必为 $\infty - \infty$ 型的不定式 (见上册 102 页的注). 由此可知条件收敛级数是依赖于正项和负项在求和过程 (即部分和数列当 $n \to \infty$ 的极限过程) 中相互抵消而收敛的.

由此出发, 就不难证明下列著名定理. 初看起来其结果似乎很惊人, 但其本质则不难理解.

命题 13.3.4 (Riemann 重排定理) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛, 则对于满足 $-\infty \leqslant A \leqslant B \leqslant +\infty$ 的任意一对 A, B, 可以改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的项的顺序, 使得重排之后的级数的部分和数列 $\{S'_n\}$ 满足要求:

$$\varliminf_{n\to\infty} S'_n = A, \quad \varlimsup_{n\to\infty} S'_n = B \text{ ①}.$$

特别是当 $A = B$ 时, 重排级数的和可以是任何有限数或带确定符号的无穷大.

绝对收敛级数和条件收敛级数的另一个差异表现在级数的乘积问题中.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的乘积是有限和与有限和的乘积的推广. 如果将上述两个无穷级数换为有限和, 则它们的乘积就等于所有形式为 $a_i b_j$ 的项之和. 对于无穷级数的乘积, 这类项有无限多个, 因此首先就是按什么顺序相加, 其次作为无限项求和当然还有敛散性问题.

为简明起见, 本书只考虑无穷级数的 Cauchy 乘积, 又称对角线乘积. 这就是定义级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的乘积为无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ 其中 } c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

这里的基本结果如下:

命题 13.3.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛, 它们的和分别为 A 和 B, 则它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛, 且其和为 $A \cdot B$.

上述结果还可以改进为:

---

① 由于此时 $a_n \to 0$, 从上册 96 页最后一题知, 若 $A \neq B$, 则部分和数列 $\{S'_n\}$ 的极限点集为闭区间 $[A, B]$. 这个结果对于 A, B 为非有限数的情况也成立.

命题 13.3.6 (Mertens 定理) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, 且其中至少有一个级数绝对收敛, 则就有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B$.

以上两个基本结果的证明见 [19] 等教科书. 此外, 还有一个补充结果, 它的证明用幂级数理论很容易得到:

命题 13.3.7 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 和它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 且分别以 A, B, C 为和, 则 $C = A \cdot B$.

13.3.3 例题

注意: 在一般项级数的敛散性讨论中, 若级数收敛, 则还需进一步讨论它是绝对收敛还是条件收敛.

下面的第一个例题的目的是强调: 对于变号级数来说, 将通项换为等价无穷小量的方法是没有根据的. 这表明 (在正项级数中非常有用的) **等价量判别法在变号级数中不能成立** (见比较判别法的极限形式 (13.12) 和**例题** 13.2.2).

例题 13.3.1 问: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是否同敛散?

解 第一个级数是典型的 Leibniz 型级数, 因此收敛. 但第二个级数是发散的. 虽然它是交错级数, 同时它的通项与第一个级数的通项是等价无穷小量, 但并不满足通项绝对值单调的条件, 因此不能用 Leibniz 判别法.

证明第二个级数发散的方法很多. 例如研究由两个级数通项之差构成的第三个级数: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$, 其中

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} \sim \frac{1}{n},$$

可见这个级数是发散的正项级数, 因此第二个级数一定发散. □

注 1 试用其他方法证明题中第二个级数发散. 例如从第一项开始对相邻两项加括号, 证明所得的级数发散, 从而可推出原来的级数一定发散.

注 2 在变号级数中不能随意将通项用等价无穷小量来替换的根本原因也是由条件收敛所引起的. 初学者需要在这里回顾命题 13.3.3 及其注. 从本质上说, 这里的问题与 4.4.3 小节中对于等价量代换法中的错误分析是一样的.

注 3 这里要注意, 对于变号级数, 分析通项的等价量还是经常有用的. 若级数绝对收敛, 当然就可以用等价量判别法. 对于条件收敛情况, 能够知道通项的渐近性态也可能是有用的. 下面就是一个例子.

例题 13.3.2 分析数列 $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}$ 的渐近性态, 并用于讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ 的敛散性, 其中 α 不是非负整数, $\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n=1,2,\cdots$.

解 (从例题 13.2.4 已知当 $\alpha>-1$ 时该数列为无穷小量.) 对于给定的 α, 取 $m>|\alpha+1|$, 则对于 $n>m$ 可分析如下, 其中出现的 C_1 等均为常数:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=C_1\frac{[m-(\alpha+1)]\cdots[n-(\alpha+1)]}{m\cdots n}=C_1\prod_{k=m}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)$$

$$=\exp\left[C_2+\sum^{n}_{k=m}\ln\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)\right]$$

$$=\exp\left[C_2-(\alpha+1)\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=m}^{n}O(\frac{1}{k^2})\right]\text{①}$$

$$=\exp[C_3-(\alpha+1)\ln n+o(1)]$$

$$\sim\frac{C}{n^{\alpha+1}},\tag{13.24}$$

其中利用了关于调和级数前 n 项的渐近性态 (上册 43 页) 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛的知识. 最后出现的正常数 C 将在后面用其他方法确定 (见 (13.41)).

将此结果用于级数, 就可知 $\alpha>0$ 是级数绝对收敛的充分必要条件, 而当 $\alpha\leqslant-1$ 时级数通项不趋于 0, 因此级数发散. 当 $-1<\alpha<0$ 时在例题 13.2.4 中已知级数为 Leibniz 型的交错级数, 因此为条件收敛. □

注 渐近性态 (13.24) 见 [36] 等, 这里的证明是沐定夷提供的. 对于本题的传统方法是用 Raabe 判别法, Leibniz 判别法和例题 13.2.4 的结论.

例题 13.3.3 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少趋于零, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 当 $x\neq k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时条件收敛.

证 只需讨论 $0<x<\pi$. 由 Dirichlet 判别法, 只需要证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和数列有界. 事实上, 对任意正整数 n, 利用三角恒等式

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2},$$

就可得到估计

$$|\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

---

① 当 $k\geqslant m$ 时, $\dfrac{|\alpha+1|}{k}\leqslant\dfrac{|\alpha+1|}{m}$. 利用 $\ln(1-t)+t\sim-\dfrac{t^2}{2}$ $(t\to0)$, 可见这里的 $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ 对于 $\frac{1}{k^2}$ 之比是一个与 k 无关的有界量.

这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和数列有界, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 收敛.

另一方面, 利用 $|a_n\sin nx|\geqslant a_n\sin^2 nx=\dfrac{1}{2}(a_n-a_n\cos 2nx)$, 仿上可以证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx$ 收敛, 因而由题设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(a_n-a_n\cos 2nx)$ 发散, 因此由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n\sin nx|$ 发散, 这就证明了原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 条件收敛. □

注 后半题和广义积分的例题 12.2.3 中当 $p=1$ 时 (见上册 384 页) 相同.

例题 13.3.4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

解 将级数中相邻的同号项合并, 从而组成一个交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 其中

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+k/n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left[1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]\\&=\frac{1}{n^2}\left[(2n+1)-\frac{2n+1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

由此即可知 $\{a_n\}$ 为无穷小量, 且至少当 n 充分大时单调减少:

$$a_n-a_{n+1}=\frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

这表明原级数加括号后得到的级数收敛. 由于括号中的项符号相同, 所以可推知原级数收敛 (见命题 13.3.2). □

注 以上证明是沐定夷提供的. 一般教科书中的方法是将 a_n 的和式中的 $2n+1$ 项分拆为前 n 项和后 $n+1$ 项两部分, 然后分别证明这两个和式之值都在区间 $(1/(n+1),1/n)$ 之内, 因此 $a_n>a_{n+1}$.

下一个例题是对于一个具体的变号级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$ 来验证 Riemann 定理 (即命题 13.3.4) 中的部分结论.

例题 13.3.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的一个重排, 其中 $\{a_n\}$ 中正项之间的顺序以及负项之间的顺序与重排之前相同, 又设在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项中有 p_n 个正项, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{n}=p$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{1-p}\right)$ (当 $p=0,1$ 时将右边的表达式理解为它在 $(0,1)$ 两端的广义极限 $-\infty$ 和 $+\infty$).

证 直接计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列如下:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p_n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(n-p_n)}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2p_n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-p_n}\right), \end{aligned}$$

然后利用上册 43 页末的渐近等式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1),$$

其中 γ 为 Euler 常数, 就可得到

$$\begin{aligned} S_n &= [\ln(2p_n)+\gamma+o(1)]-\frac{1}{2}[\ln p_n+\gamma+o(1)]-\frac{1}{2}[\ln(n-p_n)+\gamma+o(1)] \\ &= \ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)+o(1)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n/n}{1-p_n/n}\right)+o(1), \end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 可见结论为真. □

13.3.4 练习题

1. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\sin nx}{n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin n}{n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$;

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{1}{\ln n})$;

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$.

2. 将调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的各项改变符号, 其规则是每 p 个正项后为 q 个负项, 然后再如此重复, 但不改变各项原有的顺序. 证明: 所得级数当且仅当 $p=q$ 时收敛.

3. 设 $0<\alpha<1$, 将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ 按照每 p 个正项后为 q 个负项的规则进行重排, 但保持正项之间和负项之间的原有顺序, 证明: 重排后的级数当且仅当 $p=q$ 时收敛.

4. 设 $p,q>0$, 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $1-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}+\cdots$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$.

5. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+nx^n}$ (若分母为零则去掉该项) 的条件收敛性和绝对收敛性.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少且趋于零, 证明下列级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

7. 证明下列级数收敛:

$$1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots.$$

8. (du Bois Reymond 判别法) 设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

9. (Dedekind 判别法) 设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

10. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ 也发数.

11. 证明: 当 $|q|<1$ 时, 成立 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$.

12. 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 与自身的 Cauchy 乘积是收敛级数.

13. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $C(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$, 证明

$$2S(x)C(x)=S(2x).$$

14. 设级数 $\sum\dfrac{a_n}{b_n}$, $\sum\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2$ 均收敛, 又对每个 n 有 $b_n(a_n+b_n)\neq 0$, 证明: 级数 $\sum\dfrac{a_n}{a_n+b_n}$ 收敛.

15. 两个发散级数的 Cauchy 乘积可以是收敛的. 试验证以下两个发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的 Cauchy 乘积是绝对收敛级数.

16. (1) 举例说明收敛级数与发散级数的乘积既可能收敛, 也可能发散. (2) 证明: 对于正项收敛级数和正项发散级数的乘积, 其乘积一定发散 (假定其中的正项收敛级数的和大于 0).

§13.4 无穷乘积

正如研究数列的前后项之差导致无穷级数的研究, 研究数列的前后项之比就引向无穷乘积的研究. 本节利用无穷级数方面的已有工具, 对无穷乘积的基本内容和例题作一个简单介绍.

13.4.1 基本内容

无穷乘积的记号为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$, 其中假定**通项** $p_n \neq 0$, $n = 1, 2, \cdots$ [①]. 称 $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ 为它的第 n **个部分乘积**, $n = 1, 2, \cdots$. 如果部分乘积数列 $\{P_n\}$ 有非零极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, 则称这个无穷乘积**收敛**, 并记 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P$; 如果数列 $\{P_n\}$ 发散或者 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, 则称这个无穷乘积**发散**. 我们也采用简化记号 $\prod p_n$.

这里要指出, 将 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ 的情况称为无穷乘积发散 (于 0) 完全是为了便于和无穷级数的结果对应起来, 而并不是这种情况没有价值或没有意义. 采取这个做法的好处从下面的必要条件已可看出.

与无穷级数的通项趋于 0 是收敛的必要条件一样, 当无穷乘积 $\prod p_n$ 收敛时, 其通项必收敛于 1 [②]:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}} = 1.$$

因此, 总可以假设从某个 n 起 $p_n > 0$. 为方便起见, 在下面将 p_n 改记为 $1 + \alpha_n$, 将无穷乘积 $\prod p_n$ 改记为 $\prod(1 + \alpha_n)$, 并假设 $|\alpha_n| < 1$, $n = 1, 2, \cdots$.

与上面关于通项的讨论完全类似, 可以引进收敛无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的**余项** $Q_n = \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} p_k$, 并证明一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = 1$.

通过取对数将部分乘积变为和式, 就不难建立以下结果:

1. 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 收敛.

---

① 这是研究无穷乘积的基本前提, 否则已不必讨论.

② 在证明中已经利用了 $\{P_n\}$ 的极限非零的条件. 又容易看出: 若无穷乘积发散于 0, 则其通项不一定收敛于 1. 例如通项 $p_n = \frac{1}{2}$ $\forall n$ 的无穷乘积就是如此.

2. 若从某个 n 起 $\alpha_n \geqslant 0$, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛. (若该级数发散, 则无穷乘积为 $+\infty$.)

3. 若从某个 n 起 $\alpha_n \leqslant 0$, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛的充分必要条件是负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛. (若该级数发散, 则无穷乘积发散于 0.)

4. 若 $\{\alpha_n\}$ 变号, 但已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛, 则 (1) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 收敛时无穷乘积收敛, (2) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 发散时无穷乘积发散于 0 (这里要利用等价关系 $\ln(1+x)-x\sim-\dfrac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$).

5. 若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|\alpha_n|)$ 收敛, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 绝对收敛. 不难证明绝对收敛的无穷乘积一定收敛, 反之未必成立. 由此又可建立无穷乘积条件收敛等等与无穷级数类似的概念和结果.

13.4.2 例题

历史上第一个得到严格证明的无穷乘积是 Viète 在 1593 年发表的关于圆周率的 **Viète 公式**:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\cdots. \tag{13.25}$$

实际上这就是

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \tag{13.26}$$

Viète 公式是在微积分出现之前在分析方面的重要结果, 它在人类对于圆周率的认识上也是一个突破, 具有重要的历史意义 (参见上册 114 页题 5).

在上册 362~363 页中建立的 **Wallis 公式**是历史上较早出现的另一个重要的无穷乘积, 而且也是关于圆周率的结果. 除了已经在那里介绍的几种常用形式 (如 (11.27), (11.29), (11.30)) 外, 还可写成以下形式:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4},\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}. \tag{13.27}$$

不难验证以上两个无穷乘积的收敛性和等式成立 (作为练习).

在上册 25 页的 2.2.4 小节和 30 页的 2.3.2 小节中已有不少无穷乘积的练习题, 当然在那里都以数列的形式出现 (还可以注意上册 369 页的题 10).

下面是用无穷乘积理论研究数列的一些例题. 首先简要地叙述关于 (13.24) 的另一个证明.

例题 13.4.1 若 α 不是非负整数, 则存在非零常数 C, 使得

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right| \sim \frac{C}{n^{1+\alpha}}.$$

证 引入记号

$$a_n = \left|\binom{\alpha}{n}\right| \cdot n^{1+\alpha},$$

则只要证明 $\{a_n\}$ 有非零极限. 注意关于 α 的条件使得 $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \cdots$.

恰如数列与无穷级数的联系一样, 对于任意给定的一个非零数列 $\{a_n\}$, 不难写出一个无穷乘积, 使得它的部分乘积数列就是 $\{a_n\}$, 从而就有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{13.28}$$

于是问题就变为证明右边的无穷乘积收敛 (但无需计算出它的值). 本题的以下部分已经没有困难, 留作为练习题. □

下面是对于命题 13.2.3 的新证明, 它来自美国数学月刊 95 卷 (1988) 942 页. 为读者方便起见, 将该命题内容重新写出如下.

例题 13.4.2 设 $\{a_n\}$ 为单调减少的正数数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

证 将题中的级数通项记为 b_n. 从条件知 $0 < 1 - b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $n = 1, 2, \cdots$. 与上题一样将数列 $\{a_n\}$ 的极限与一个无穷乘积联系起来:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty}(1 - b_n).$$

但是要注意: 目前关心的是右边的无穷乘积是否**发散**于 0. 易见有等价关系:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n) \text{ 发散于 } 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-b_n)] = +\infty.$$

现在只需要证明以下两个正项级数同时发散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[-\ln(1-b_n)] = +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty. \tag{13.29}$$

分两种情况讨论. (1) 若 $\{b_n\}$ 不是无穷小量, 则两个级数的通项都不趋于 0, 因此 (13.29) 成立; (2) 若 $\{b_n\}$ 是无穷小量, 则从 $\ln(1-x) \sim -x$ $(x \to 0)$ 和比较判别法的极限形式 (13.12), 可见 (13.29) 也成立. □

下面是分析中的重要结果, 它是 Euler 首先用类比方法猜测出来的. 我们将主要根据 [19] 卷 2 的 359 小节给出证明.

例题 13.4.3 (Euler) 对所有 x 值成立

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{13.30}$$

证 可以看出当 x 为 π 的整倍数时两边为 0. 以下只需要讨论 x 不是 π 的整倍数的情况, 这时容易验证右边的无穷乘积收敛.

不难发现 $\sin(2n+1)\varphi$ 可展开为 $\sin\varphi$ 的 $2n+1$ 次多项式, 且只含奇次幂项, 因此可写成[①]

$$\sin(2n+1)\varphi = \sin\varphi\, P(\sin^2\varphi), \tag{13.31}$$

其中 $P(u)$ 为 u 的 n 次多项式. 将右边的 $\sin\varphi$ 除到左边并令 $\varphi\to 0$, 就可以定出 $P(0)=2n+1$. 又利用 $\varphi_k=\dfrac{k\pi}{2n+1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 使 (13.31) 左边为 0, 因此 $\sin^2\varphi_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 恰好是多项式 $P(u)$ 的所有根, 这样就完全确定了多项式 $P(u)$. 将所得表达式代入 (13.31) 的右边, 并令 $x=(2n+1)\varphi$, 得到

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right). \tag{13.32}$$

以下采用与命题 2.5.2 (上册 40 页) 中完全类似的方法. (差别只在于那里是级数, 而这里是乘积.) 固定 m, 令 $n>m$, 并将上式右边分解为

$$\sin x = U_m\cdot V_m, \tag{13.33}$$

其中

$$U_m = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right), \tag{13.34}$$

$$V_m = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right). \tag{13.35}$$

在 (13.33) 中令 $n\to\infty$, 这时左边与 n 无关, 从 (13.34) 得到

$$\lim_{n\to\infty}U_m = x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \tag{13.36}$$

因此第二个因子 V_m 的极限也存在. 但这里重要的是对这个极限的估计. 利用 (13.35), $|\sin x|\leqslant|x|$ 以及 Jordan 不等式 (见上册 253 页例题 8.5.6) 可以得到

$$\sin^2\frac{x}{2n+1}\leqslant\frac{x^2}{(2n+1)^2},$$

$$\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\geqslant\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2},\ k=1,2,\cdots,n,$$

① 例如用 de Moivre 公式 $\cos(2n+1)\varphi+\mathrm{i}\sin(2n+1)\varphi=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{2n+1}$ 或者数学归纳法即可.

从而有对于 V_m 的估计:

$$1>\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right)\geqslant\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)>\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right).$$

这样就得到对于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}V_m$ 的估计:

$$1\geqslant\lim_{n\to\infty}V_m=\frac{\sin x}{\lim\limits_{n\to\infty}U_m}=\frac{\sin x}{x\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}\geqslant\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right).$$

最后, 利用上式右边是一个收敛无穷乘积的余项, 因此当 $m\to\infty$ 时极限为 1, 这样就从数列极限的夹逼定理得到所要的展开式. □

注 1 在展开式 (13.30) 中令 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 就得到 Wallis 公式 (13.27) 中的第二个公式. 可见 Euler 的展开式是非常有力的结果.

注 2 关于展开式 (13.30) 的证明方法很多, 可以参看美国数学月刊 89 卷 (1982) 225~230 页的一个综述.

注 3 值得回顾 Euler 发现这个展开式的思维过程. 他的出发点是将 $\sin x$ 与多项式作类比, 由于 $\sin x$ 以所有 $k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) 为零点, 因此他猜测 (13.30) 会成立. 他又将该式两边展开为 x 的幂级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

等一系列重要结果. 其中第一个级数的求和问题即所谓 **Basel 问题**, 在 Euler 之前已有近百年的历史. 包括 Bernoulli 兄弟在内的许多数学家都作过努力而没有成功. 同时谁也想不到在它的答案中会出现圆周率 π. 这是数学史上最精彩的故事之一, 有着多方面的教育意义. 详细内容请看 [39] 的第二章和 [18] 的第九章. 在第十六章还会回到这个问题上来, 并推导出 p 为偶数时的 p 级数和 $\zeta(p)$ 的计算公式.

在上册 401 页已经引进特殊函数 $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ x>0$. 它是阶乘 $n!$ 的连续化. 现在我们介绍 Γ 函数的无穷乘积定义, 但是这里的定义域不局限于 $x>0$. 关于在 $x>0$ 时两个定义的等价性证明见后面的例题 16.1.4.

例题 13.4.4 对于 $x\neq 0,-1,-2,\cdots$, 定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x}{1+\dfrac{x}{n}}.\tag{13.37}$$

从 $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x}{1+\dfrac{x}{n}}=1+\dfrac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ 可知定义中的无穷乘积绝对收敛, 因此 Γ 函数的上述定义是有意义的.

写出上述无穷乘积的部分乘积

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})}=\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

即有 **Euler-Gauss 公式**

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{13.38}$$

由此就有

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

即 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. 从 $\Gamma(1)=1$ 可见有 $\Gamma(n+1)=n!$. 利用在上册 43 页处引进的 Euler 常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)\Big).$$

可见有

$$\mathrm{e}^{\gamma x}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{x/n}}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^x}.$$

将它与 Γ 函数的乘积定义结合, 就得到 Γ 函数的 **Weierstrass 公式**

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}. \tag{13.39}$$

又利用

$$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-x}}{1-\frac{x}{n}},$$

与 (13.37) 一起就得到 Γ 函数的**余元公式**:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}, \tag{13.40}$$

这里利用了正弦函数的无穷乘积公式 (13.30), 并在其中将 x 换为 πx. 若令 $x=\frac{1}{2}$ 代入, 就得到 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ (这也可从 Euler-Gauss 公式 (13.38) 和 Wallis 公式 (11.29) 得到).

注 将 Euler-Gauss 公式 (13.38) 与 $\binom{\alpha}{n}$ 比较就得到公式 (13.24) 的第三个证明, 而且这一次还得到了其中的非零常数:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|\sim\frac{1}{|\Gamma(-\alpha)|}\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}}. \tag{13.41}$$

例如, 对于 $\alpha=-1/2$, 上式就是熟知的结果:

$$\left|\binom{-1/2}{n}\right|=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\frac{1}{\Gamma(1/2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

13.4.3 练习题

1. 讨论下列无穷乘积的敛散性:

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$;

(2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n+1})$;

(3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}$;

(4) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$;

(5) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left[1+(-1)^n\dfrac{1}{n}\right]$;

(6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$ ①.

2. 设 $a,b>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 的每一项满足条件 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛的充分必要条件是无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos a_n$ 收敛.

4. 如果对正数数列 $\{a_n\}$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r>0$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. (可利用例题 13.4.2.)

5. 讨论无穷乘积 $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$ 的敛散性, 其中 α,β,γ 为参数, 且设 n_0 已足够大, 使得乘积中出现的所有因子均大于 0.

6. (Euler) 对于 $0<x<1$, 证明:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

7. (Stirling) 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$ 于某个 x 值时收敛, 则级数对任何 x 值都收敛.

8. (Landau) 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}\quad(x\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

与 Dirichlet级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 对同样的 x 值收敛.

9. 设正数数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{n}+O(b_n)$, 并已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. (可参考第 8 页的 Gauss 判别法.)

10. (Stirling 公式的又一证明) 用无穷乘积方法证明: 数列 $\{n!\mathrm{e}^n/n^{n+\frac{1}{2}}\}$ 有非零极限, 并求出此极限.

---

① 此题对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}=0$ 又提供了一个证明.

§13.5 对于教学的建议

13.5.1 学习要点

1. 正如本章开头所指出的那样, 数项级数与上册第二章的数列极限有密切联系. 建议在学习本章时能经常将级数内容与数列的相应内容加以比较.
2. 无穷级数在一系列概念和方法上又与上一章的广义积分非常相似. 虽然各种教材在这两部分内容的安排次序上并不一致, 但若能沟通两者之间的联系, 则对于学习是很有帮助的.
3. "$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要而非充分的条件" 是体现无穷级数收敛特点的一条基本性质.
4. 需要重点关心的一些级数是几何级数, p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, Leibniz 型级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$. 关于数项级数的绝大部分知识点可以通过对这些级数的讨论而得到展开.
5. 比较判别法是正项级数收敛性判别法的基本出发点. 要注意比较判别法对一般项级数来说, 只有绝对收敛情况才有效. 很能说明问题的例子是例题 13.3.1. 必须明白: 等价量判别法就是一种特殊的比较判别法. 而对于变号级数来说, 比较判别法在原则上是不成立的.
6. 如上册 75 页之 (4) 所说, 在实数系的许多等价的基本定理中, Cauchy 收敛准则将在积分和级数中起主要作用. 初学者不容易掌握它的意义和用法是很自然的. 本章的习题课应当有一部分时间用于围绕 Cauchy 收敛准则组织一些比较具体的例题, 多角度地应用 Cauchy 收敛准则, 以帮助学生学习这一基本工具.
7. Abel 变换是估计乘积项之和 $|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|$ 的重要方法, 它与分部积分公式、积分第二中值定理都有联系. 程度好的学生应能学会用公式 (13.21)~(13.23) 来处理类似的问题.
8. 证明一个级数发散有时比证明级数收敛更使学生感到困难. 证明级数发散常用的方法有:
   (1) 证明级数的通项不趋于零;
   (2) 利用 Cauchy 收敛准则;
   (3) 证明按某种方式加括号后所得的级数发散;
   (4) 对正项级数, 证明部分和数列无上界;
   (5) 对正项级数, 利用 § 13.2 节中的各种判别法;
   (6) 把级数通项分解为一个收敛级数的通项与一个发散级数的通项之和.

13.5.2 参考题

第一组参考题

1. 试用两种方法证明: 对于正数数列 $\{a_n\}$, 必有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=0.$$
2. (Abel-Pringsheim 定理) 设正项级数 $\sum a_n$ 的通项单调减少, 且已知级数收敛, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.
3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少, 又已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.
4. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 同敛散, 且在收敛时具有相同的和. 又对于通项不是单调减少的情况, 试举例说明 "同敛散" 的结论不再成立.
5. 由于数列 $\{a_n\}$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 具有相同的敛散性, 试用级数理论讨论下列数列的敛散性:

   (1) $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,\ n=1,2,\cdots$;

   (2) $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n},\ n=1,2,\cdots$;

   (3) $a_n=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}-\ln\ln n,\ n=2,3,\cdots$.

   (题 (1) 即上册 43 页命题 2.5.6, 题 (2) 见上册 56 页参考题 14. 又可以与上册 371 页参考题 10 作比较.)
6. 证明: (1) 若 f 是 $[1,+\infty)$ 上的非负单调减少函数, 则存在极限
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)=A,$$
   且 $0\leqslant A\leqslant f(1)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}=\frac{\pi}{2}$.
7. 若函数 f 在 $[-1,1]$ 上定义, 且存在 $f''(0)$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛的充分必要条件是 $f(0)=f'(0)=0$.
8. 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加且有极限 $f(+\infty)=A$. 证明:

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛, 并求其和;

   (2) 又若 f 在 $[1,+\infty)$ 上二次可微, 且 $f''(x)<0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 也收敛.

9. **(二重正项级数的求和顺序交换定理)** 设对每个正整数 n, 正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ 收敛, 且其和为 a_n. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

10. 对正整数 $m \geqslant 2$, 用 s_m 表示级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^m}$ 的和, 证明: $\sum\limits_{m=2}^{\infty} s_m = 1$.

11. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少趋于 0, 且已知数列 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_n)\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

12. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且数列 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格单调减少, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

13. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{na_n\}$ 单调, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

14. 设 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. (Fibonacci 数列的倒数所成级数收敛.)

15. 设 $0 < p < 1$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n^p}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

16. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则对于 $p > \frac{1}{2}$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛. 举例说明 $p = \frac{1}{2}$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{1/2}}$ 可能发散.

17. 证明下列两个级数发散: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

18. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 讨论以下级数的敛散性: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n a_n}$, (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2}$.

19. 设有收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$, (2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$ 收敛, 且其和也是 S.

20. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 为条件收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = t$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排. 若 $t \neq s$, 证明: 对于任意 N, 存在 n, 使 $|n - f(n)| > N$.

(这表明, 对于条件收敛级数作重排时, 如果每一项的新位置与原有位置之差不超过某个界限的话, 则级数的和不会改变.)

第二组参考题

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}$ 收敛.

2. 设 $a>0$, $a_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(a+a_1+\cdots+a_n)^{3/2}}$ 收敛, 且其和 $S\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且存在 $M>0$, 使对每个正整数 n 成立

$$a_k\leqslant Ma_n,\ n\leqslant k\leqslant 2n,$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

4. 试构造两个发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 它们的通项都单调减少, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 收敛.

5. (Frink 判别法) 设对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lambda$, 则当 $\lambda<\mathrm{e}^{-1}$ 时级数收敛, 而当 $\lambda>\mathrm{e}^{-1}$ 时级数发散.

6. (Ermakof 判别法) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少且大于 0, 又知存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^xf(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=p$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 当 $p<1$ 时收敛, 而当 $p>1$ 时发散.

7. (Lobatchevski 判别法) 通项单调趋于 0 的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n2^{-n}$ 同敛散, 其中 $b_n=\max\{k\mid a_k\geqslant 2^{-n}\}$.

8. 证明: 以下两个无穷乘积收敛于自然对数的底 e:

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)$, 其中 $a_1=1$, $a_n=n(a_{n-1}+1)\ \forall n\geqslant 2$;

(2) $2\left(\dfrac{2}{1}\right)^{1/2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\right)^{1/4}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{8}{7}\right)^{1/8}\cdots$.

(题 (2) 来自美国数学月刊 87 卷 (1980) 391 页.)

9. 证明: 若 $p\leqslant 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 发散.

10. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛, 证明: (1) 对任一正整数 k, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n+k}=0$.

11. 若对每一个满足 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 的数列 $\{b_n\}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

12. 若对每一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ 收敛.

13. 举出一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

14. 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上连续可微, 且 $\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: 广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同敛散.

15. 设 $p>0$, 证明: 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的和 S 满足估计 $\dfrac{1}{2} < S < 1$.

16. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 又知 $\{b_n\}$ 单调减少收敛于 0, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) b_n = 0.$$

(第一组参考题 19 之 (1) 为本题之特例.)

17. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^p}$ 收敛, 其中 $p>0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^p} = 0$.

18. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 并令 $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$. **定义**: 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **可以 Cesàro 求和** (或称级数在 Cesàro 意义下可求和), 并将极限值 σ 称为级数的 **Cesàro 和**. 证明: 收敛级数一定可以 Cesàro 求和, 且其 Cesàro 和与收敛级数在通常意义下的和相等. 但反之不真.

19. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 Cesàro 求和的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

(这个条件比通常意义下级数 $\sum a_n$ 收敛时通项必须为无穷小量的必要条件弱得多.)

20. 下列级数是否可以 Cesàro 求和? 如果可以, 试求出它们的 Cesàro 和.

(1) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$;　　(2) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$;

(3) $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \cdots$;　　(4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots$.

21. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$, 证明: 该级数在通常意义下收敛的充分必要条件是级数可以 Cesàro 求和.

22. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 Cesàro 求和, 证明: 该级数在通常意义下收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n} = 0$.

第十四章　函数项级数与幂级数

无穷级数为研究函数提供了全新的有力工具, 如果说数项级数是无穷级数的基础, 则函数项级数就是无穷级数的理论核心.

本章共分五节, 前两节是函数项级数的一般理论. 在 §14.1 节中, 我们讨论函数项级数与函数列的一致收敛性; §14.2 节是和函数与极限函数性质的讨论. 接下来的两节用于讨论最重要的一类函数项级数——幂级数. §14.3 为其一般理论, §14.4 为 Taylor 级数展开, 最后一节是学习要点和参考题.

§14.1　一致收敛性及其判别法

函数是数学分析的主要研究对象. 将函数展开为函数项级数, 使得级数的通项是比较简单的函数, 这样就为函数的研究和计算提供了新工具. 对于以函数项级数的和函数形式出现的大量非初等函数, 如何利用级数来研究它们的基本性质, 如连续性、可微性、可积性以及如何计算它们的导数和积分就成为需要解决的基本理论问题. 为此我们需要引进新的概念, 这就是一致收敛性.

14.1.1　基本内容

下面先列出函数项级数的一致收敛概念的要点.

1. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在某个数集 E 上的收敛性以及在收敛时的和函数是逐点定义的, 一般称为 "点收敛"、"逐点收敛" 或 "点态收数" 等. 这在上一章都已见过, 在讨论时与常数项级数没有区别. 但为了研究函数项级数的和函数, 则需要有比点收敛更强的条件, 这就是**一致收敛性**. 在 [31] 的第六章中有这方面发展的历史性材料.
2. 函数项级数在数集 E 上的一致收敛性是**一种整体性质**. 这类**整体**性质在数学分析中多次出现. 例如函数在某个区间上的有界性、一致连续性和 Riemann 可积性等. 与此相反, 函数的连续性、可微性和函数项级数的点收敛性则是局部性质 (可参考上册 137, 140 页).
3. 称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ **在数集 E 上一致收敛**, 如果该级数的部分和函数列 $\{S_n\}$ 在 E 上**一致**收敛.
4. 设一个函数列 $\{S_n\}$ 在数集 E 上收敛于其极限函数 $S(x)$. 称 $\{S_n\}$ 于 E 上一致收敛, 如果对于每个正数 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对每个正整数 $n > N$, 和每个 $x \in E$, 均成立 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

容易看出, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ 在所有 $x \in E$ 成立的不同之处是目前的 N 只与 ε 有关, 它对于所有 $x \in E$ 同时适用. 这就是收敛的 "一致性".

5. 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在开区间 (或其他数集) I 中的每个有限闭区间上一致收敛, 则称该级数在 I 中**内闭一致收敛**. 与有界性、一致连续性和可积性等整体性质一样, 若函数项级数在 I 上一致收敛, 则一定在 I 中内闭一致收敛, 但反之不一定成立.
6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 于数集 E 上一致收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 于 E 上**绝对一致收敛**. 在 E 上绝对一致收敛的函数项级数必在 E 上一致收敛, 但反之不真.

一致收敛性有明显的几何意义. 下面是三个例子及其几何图像.

例题 14.1.1 非负连续函数列 (1) $\{xe^{-nx}\}$, (2) $\{nxe^{-nx}\}$, (3) $\{n^2xe^{-nx}\}$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛于同一个极限函数 $S(x) \equiv 0$. 从图 14.1 上可以看出它们在 $[0,1]$ 上的收敛情况大不相同. (1) 是一致收敛的, (2) 不一致收敛, 但还是一致有界的, (3) 不一致收敛, 面且不一致有界. (图中对 (3) 只作出 $0 \leqslant x \leqslant 0.1$ 的部分.)

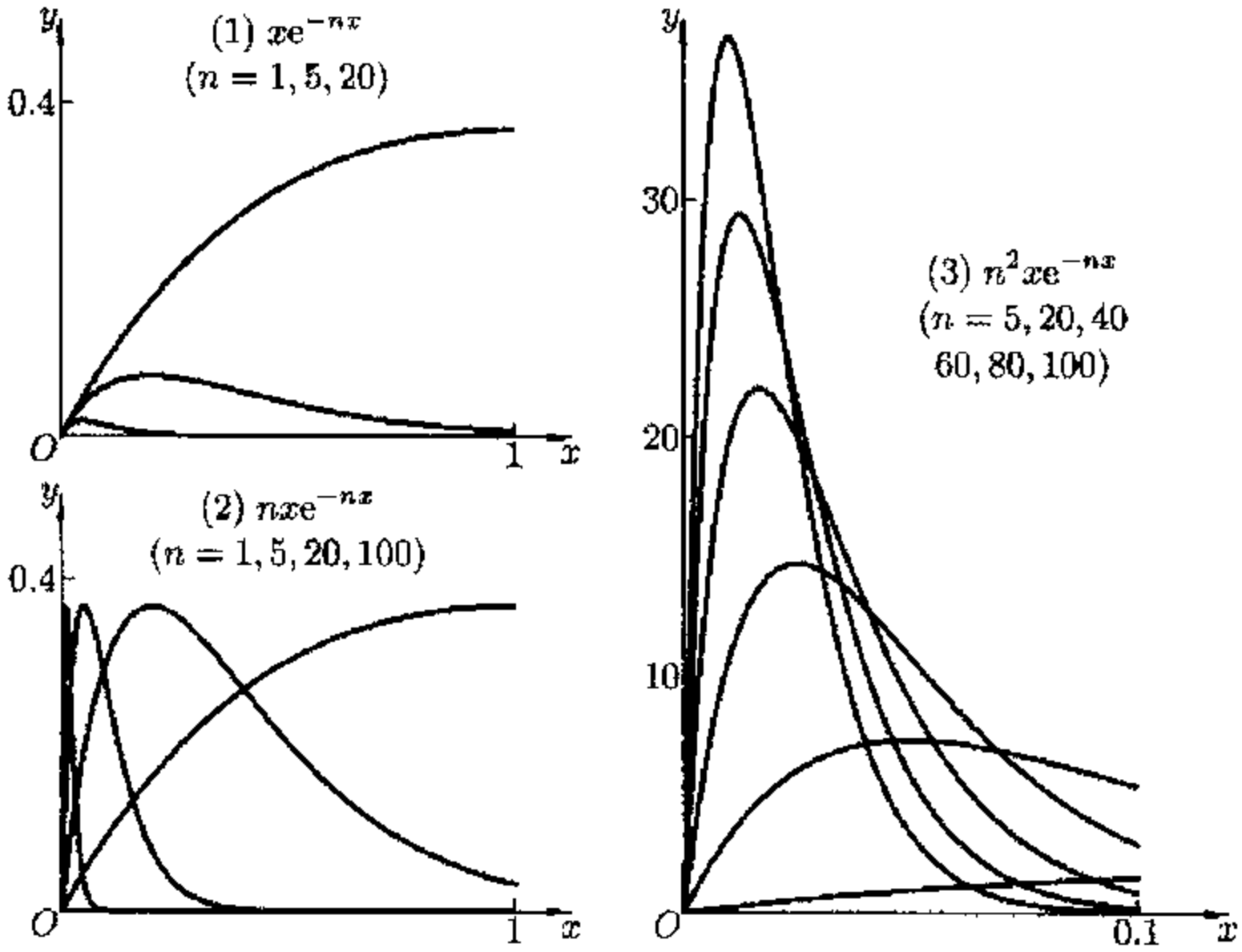


图 14.1

容易看出三个函数列中的第 n 个函数都在点 $x = 1/n$ 处达到最大值. 这些最大值分别为 $1/(ne)$, $1/e$ 和 n/e. 又不难计算出, 对这三个函数列都存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$, 极限值分别为 0, 0 和 1.

其次是一致收敛性的判别方法.

1. 对于函数项级数来说, 主要的一致收敛性判别法有: Cauchy 一致收敛准则, Weierstrass 判别法 (也称为 M-判别法、强级数判别法和优级数判别法等), 以及通过 Abel 变换得到的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.
2. Cauchy 一致收敛准则是充分必要条件, 但应用时往往需要较复杂的技巧;
3. Weierstrass 判别法只对绝对一致收敛的情况有效; 而且可以举例说明, 存在绝对一致收敛的函数项级数的例子, 使得 Weierstrass 判别法失效. 但由于它将问题归结为正项级数的收敛性判别, 使用方便, 因此有广泛的应用.
4. Abel 判别法和 Dirichlet 判别法都是函数项级数一致收敛的充分必要条件, 其证明与广义积分和数项级数的同名判别法类似.
5. 在数项级数中没有对应物的是基于 Dini 定理的 Dini 判别法:

   Dini 定理 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 (或 n 充分大后的项) 为有界闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 又已知级数的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续, 则级数在 $[a,b]$ 上一致收敛[①].

   当然 Dini 判别法对条件的要求较高, 但它仍在许多问题中有效. 此外, 如果关心的区间不是有界闭区间, 则还有可能得到内闭一数收敛性的结论.
6. 在讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛性时比较容易的一类情况是能够得到其部分和函数列 $\{S_n\}$ 的紧凑表达式, 这时问题就转化为**函数列的一致收敛性问题** (不难看出可以将已经列举的各种判别法改述为关于函数列的一致收敛性判别法). 如果同时还能得到级数的和函数, 即函数列 $\{S_n\}$ 的极限函数 $S(x)$ 的表达式, 则就有**上确界判别法**: 函数列 $\{S_n\}$ 在数集 E 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E}\{|S_n(x) - S(x)|\} = 0.$$

   对于具体问题来说, 则往往有可能用微分法求 $|S_n(x) - S(x)|$ 在 E 上的最大值或上确界, 又若能估计出它的上界 a_n 使得成立 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则也可以得到一致收敛的结论. 这也可称为**优势判别法**.

   这里需要指出几点:

   (1) 请初学者注意: 这个上确界判别法 (即优势判别法) 与函数项级数的 Weierstrass 判别法不一样, 并无直接关系, 前者是充分必要条件, 后者只是充分条件.

---

① Dini 定理对于非有界闭区间不成立, 例如对于函数列来说, 在 $[0,1)$ 上的函数列 $\{x^n\}$ 处处单调收敛于 0, 但不一致收敛.

(2) 由于上确界判别法是充分必要条件, 因此往往能解决不一致收敛的判别问题. 特别是还能得到以下的**对角线判别法**: 如果存在数列 $\{x_n\} \subset E$, 使得条件

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = 0$$

不满足, 则 $\{S_n\}$ 在 E 上**不一致收敛**于 $S(x)$.

(3) 为了便于掌握有关一致收敛的基本概念, 在教科书中均举出许多可以用上确界判别法得到解决的例题. 但是这并不表明这类方法可以用于许多函数项级数问题上去. 事实上求函数项级数的部分和函数列以及和函数的表达式一般是困难的或者根本做不到的事情.

7. 证明给定的函数项级数在某个数集 E 上不一致收敛的方法不很多. 如果不能将问题归结为函数列去研究的话, 则一般需要用 Cauchy 一数收敛准则. 此外, 在一数收敛条件下保证和函数或极限函数具有某种性质的一系列命题的逆否命题, 也往往可以用来判定非一致收敛性. 最常用的就是连续性命题的逆否命题: 若函数项级数 (或函数列) 的每一项于区间 I 上处处连续, 又已知其和函数 (或极限函数) 在 I 上不是处处连续, 则级数 (或函数列) 于 I 上不一致收敛. 在下面例题 14.1.3 中还会介绍它的一种变形.

14.1.2 例题

由于在一般教科书中已有大量关于函数列的例题, 本节不拟收入这方面的很多材料. 下面首先是几个涉及判别方法的例题.

例题 14.1.2 绝对一致收敛的函数项级数的一致收敛性不一定能够用 Weierstrass 判别法来判定: 观察非负函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 其中对 $n = 1, 2, \cdots$ 令

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x \text{ 为区间 } [0,1] \text{ 中的其他值.} \end{cases}$$

容易看出, 对于区间 $[0,1]$ 中的每个 x, 在级数的无限项中至多只有一项不是 0, 因此级数处处收敛. 又可以看出对余项的估计 $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ 在 $[0,1]$ 上一致成立, 因此级数在 $[0,1]$ 上一致收敛. 但是从 $\sup\limits_{x\in[0,1]} u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 和调和级数发散可知, 用 Weierstrass 判别法一定不成功. □

注 本题的构造方法可以推广为: 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 区间 I 上的函数列 $\{u_n\}$ 满足条件 $|u_n(x)| \leqslant a_n \ \forall n$, $u_i(x)u_j(x) = 0 \ \forall i \neq j$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上必一致收敛.

下一个例题中的结论可以作为一种**不一致收敛判别法**来使用.

例题 14.1.3 设对每个 n, 函数 $u_n(x)$ 在 $x=c$ 处左连续, 又已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散. 证明: 对任意正数 $\delta>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上必不一致收敛.

证 用反证法. 设有 $\delta>0$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上一致收敛, 这就是 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\, N>0$, 当 $n\geqslant N$ 时, 对每个正整数 p 和每个 $x\in(c-\delta,c)$, 成立

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon. \tag{14.1}$$

由题设, $u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)$ 在 $x=c$ 左连续, 在 (14.1) 中令 $x\to c^-$, 得到

$$|u_{n+1}(c)+\cdots+u_{n+p}(c)|\leqslant\varepsilon.$$

由数项级数的 Cauchy 收敛准则知道, 这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散的条件相矛盾. □

注 1 可将本题与一致连续性理论中的例题 5.4.5 (上册 140 页) 作比较.

注 2 例如, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $x=0$ 时发散, 因此该级数在 $(0,+\infty)$ 上必定不一致收敛. 当然, 还可以进一步研究是否内闭一致收敛等可能性.

下一个例题是用导函数的性质来判定函数项级数的一致收敛性.

例题 14.1.4 (Bendixon 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数项级数, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 的部分和函数列在 $[a,b]$ 上一致有界, 证明: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则必在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 由题设, 存在正常数 C, 使得对每个正整数 n 和每个 $x\in[a,b]$, 同时成立不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\right|\leqslant C.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取区间 $[a,b]$ 的等距分划 $\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$, 其中 m 充分大, 使分划的细度 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{m}<\dfrac{\varepsilon}{4C}$.

由于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 处处收敛, 因此从 Cauchy 收敛准则知, 存在 N, 使 $n>N$ 时, 对任意正整数 p 和分划的每个分点 x_i, 同时成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ i=0,1,\cdots,m.$$

现在对于任意的 $x\in[a,b]$, 不妨设 $x\in[x_{i-1},x_i]$, 就可以作出估计:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i) + \sum_{k=n+1}^{n+p} (u_k(x) - u_k(x_i))\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(\xi_i)\right| \cdot |x - x_i| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2C|x - x_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

其中在 $[x, x_i]$ 上对 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) - u_k(x_i)]$ 用微分中值定理, $\xi_i \in (x, x_i)$. 这表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 Cauchy 一致收敛准则, 从而在 $[a, b]$ 上一致收敛. □

例题 14.1.5 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛, 但不绝对一致收敛.

证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛: 实际上每项取绝对值之后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$ 的部分和函数列为 $\{x - x^{n+1}\}$, 因此在 $[0, 1]$ 上处处收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上不绝对一致收敛: 从 (1) 可见取绝对值后级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$ 的和函数为 $S(x) = x$, $x \in [0, 1)$, $S(1) = 0$, 它在点 $x = 1$ 的左侧不连续, 而级数通项在 $[0, 1]$ 上连续, 因此该级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛: 直接计算出余项

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} (1-x)}{1+x},$$

因此有估计 (其中利用了算术平均值-几何平均值不等式):

$$\begin{aligned}|R_n(x)| \leqslant (1-x)x^{n+1} &= \frac{1}{n+1}[(n+1)(1-x)x^{n+1}] \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} < \frac{1}{n+1} \to 0,\end{aligned}$$

可见级数于 $[0, 1]$ 上一致收敛. □

例题 14.1.6 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛域, 并讨论其一致收敛性.

解 (1) 先求收敛域. 当 $x = 0$ 时级数显然收敛. 当 $x \neq 0$ 时, 观察通项的绝对值:

$$\left|n\left(x + \frac{1}{n}\right)^n\right| = n|x|^n \left|\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n\right| \sim n|x|^n \mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

因而原级数当 $|x| < 1$ 时收敛, 当 $|x| \geqslant 1$ 时发散, 级数的收敛域是 $(-1, 1)$.

(2) 函数项级数一致收敛的一个必要条件是其通项一致收敛于 0. 但本题的级数通项不满足这个条件. 这用对角线判别法就可以知道: 对每个正整数 n, 取 $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (-1,1)$, 则就有

$$n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)^n = n \to +\infty.$$

因此所论级数在 $(-1,1)$ 上不一致收敛. □

注 这里也可用例题 14.1.3 提供的判别法. 由于当 $|x| = 1$ 时级数发散, 因此不可能在 $(-1,1)$ 上一致收敛. 但是容易证明级数在其中内闭一致收敛.

下一题在每种教科书中都有, 为了比较起见, 我们列入该题, 证明从略.

例题 14.1.7 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是该闭区间不含 2π 的整倍数点.

下面是用 Cauchy 一致收敛准则来判定函数项级数的经典性结果, 其中所用的分析方法具有新的特点, 值得学习 (参见 [50]).

例题 14.1.8 设 $\{b_n\}$ 为单调减少的非负数列, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

证 为方便起见引入下列记号, 其中 $n < p$:

$$S_{n,p} = b_n \sin nx + \cdots + b_p \sin px,$$

先证必要性. 此时只需考虑区间 $(0,1)$. 设级数在这个区间上一致收敛, 则对于 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对于任意的 $p > n > N$, 不等式 $|S_{n,p}| < \varepsilon$ 对所有 $x \in (0,1)$ 同时成立.

取 $p = 2n-1$, $x = \frac{\pi}{4n}$, 这时在和式

$$S_{n,2n-1} = b_n \sin nx + \cdots + b_{2n-1} \sin(2n-1)x$$

中的每个正弦函数的自变量都在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 中, 因此就有

$$b_{2n} n \sin\frac{\pi}{4} < b_{2n}[\sin nx + \cdots + \sin(2n-1)x] \leqslant S_{n,2n-1} < \varepsilon,$$

可见 $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ 成立.

再证充分性. 显然只要证明级数在区间 $[0,\pi]$ 上一致收敛. 这时对 $S_{n,p}$ 的估计将随 x 取不同值而采用不同的方法, 但最后综合起来的估计则与 x 无关.

从非负无穷小量 $\{nb_n\}$ 可以合理地定义一个新的单调减少数列:

$$\mu_n = \max_{m \geqslant n}\{mb_m\},\ n = 1,2,\cdots,$$

且有 $\mu_n \to 0$. 以下分三种情况估计 $S_{n,p}$:

(1) 若 $x \leqslant \frac{\pi}{p}$, 则在 $S_{n,p}$ 中的每一个正弦函数的自变量都在 $[0,\pi]$ 内, 再利用 $\sin\theta \leqslant \theta\ \forall \theta \in [0,\pi]$, 就得到

$$|S_{n,p}| = S_{n,p} \leqslant b_n n x + \cdots b_p p\, x \leqslant p\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.$$

(2) 若 $x \geqslant \dfrac{\pi}{n}$, 则利用三角变换 (见例题 13.3.3), Jordan 不等式 $\sin\theta \geqslant \dfrac{2}{\pi}\theta\ \forall\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ (例题 8.5.6) 和 $\dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 可以对于任意 $r \geqslant n$ 估计出

$$|\sin nx + \cdots + \sin rx| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant n,$$

然后从 Abel 变换和 $\{b_n\}$ 的非负单调性 (见 (13.22)) 得到

$$|S_{n,p}| \leqslant \frac{\pi}{x} \cdot b_n \leqslant nb_n \leqslant \mu_n.$$

(3) 若 $\dfrac{\pi}{p} < x < \dfrac{\pi}{n}$, 则需同时使用以上两种方法. 分拆 $S_{n,p} = S_{n,k} + S_{k+1,p}$, 其中取 $k = [\pi/x]$ (使得 $n \leqslant k < p$), 并分别用前面的两种方法估计, 就得到

$$|S_{n,p}| \leqslant |S_{n,k}| + |S_{k+1,p}| \leqslant \pi\mu_n + \mu_{k+1} \leqslant \mu_n(\pi + 1),$$

其中利用了 $kx \leqslant \pi < (k+1)x$ 和 $\mu_{k+1} \leqslant \mu_n$.

合并 (1)–(3), 就得到估计式 $|S_{n,p}| \leqslant \mu_n(\pi+1)$ 对于任意 $p > n$ 和 $x \in [0, \pi]$ 同时成立. 由于 $\mu_n \to 0$, 可见级数一数收敛. □

注 1 例题 14.1.7 中的级数显然不满足本题的条件.

注 2 用本题的方法 (或其他方法) 可以证明例题 14.1.7 中级数的部分和函数列在 $(-\infty, +\infty)$ 上一数有界, 这样就得到比本题较弱的结论: 若 $\{nb_n\}$ 单调减少趋于 0, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

下一个例题为 §16.3 节中的 Weierstrass 逼近定理的证明提供了一个初等起点, 同时又可以看成是 §2.6 节中迭代生成数列方法在函数列中的延伸.

例题 14.1.9 (Visser 定理) 在区间 $[-1, 1]$ 上定义函数列 $\{a_n(x)\}$ 如下:

$$a_1(x) \equiv 0,\ a_{n+1}(x) = a_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2(x)),\ n = 1, 2, \cdots,$$

证明: $\{a_n(x)\}$ 是在区间 $[-1, 1]$ 上一致收敛于 $|x|$ 的多项式序列.

分析 从对称性可见只需在区间 $[0, 1]$ 上讨论. 不难知道本题中由迭代得到的多项式序列 $\{a_n(x)\}$ 是在 $[0, 1]$ 上的严格单调增加的连续函数列, 且收敛于极限函数 $a(x) = x$. 因此用 Dini 定理就知道结论成立. 其中的具体细节请读者完成.

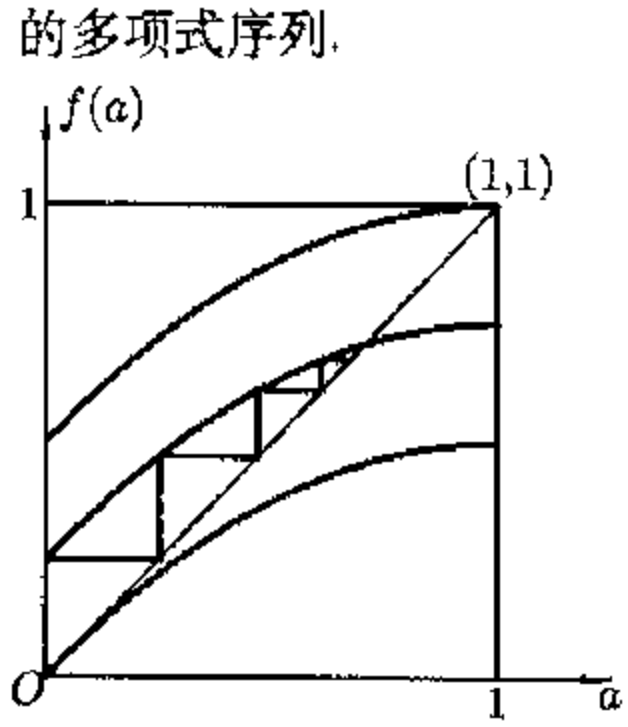


图 14.2

这里将从 §2.6 节的迭代生成数列的几何理论出发, 配合图 14.2 观察本题, 说明如何在分析论证之前就可以发现以上全部事实.

考虑 $[0, 1]$ 上的点收敛, 则从 a_n 到 a_{n+1} 的迭代方程是

$$f(a) = a + \frac{1}{2}(x^2 - a^2), \tag{14.2}$$

其中 x 是参数. 初始值 $a_1 = 0$. 如图 14.2 所示, 其中作出了迭代方程的三条曲线, 它们的参数分别为 $x = 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$. 在图中还对于中间一条曲线用 2.6.2 小节中的**蛛网工作法**从 $a_1 = 0$ 开始作了几次迭代 (参见上册 50 页的图 2.4). 容易看到, 由于参数 $x \in [0,1]$ 时的每条迭代曲线都严格单调增加, 因此所得到的迭代生成数列 $a_n(x)$ 也严格单调增加. 此外, 对每个参数 $x \in [0,1]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = x,$$

即收敛于迭代方程 (14.2) 的不动点 $a = x$. 这些都可以从关于迭代数列的两个基本规律的命题 2.6.1 和 2.6.2 直接得出.

14.1.3 练习题

1. 讨论函数列或函数项级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $S_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $n = 1, 2, \cdots$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $S_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $n = 1, 2, \cdots$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(3) $S_n(x) = \dfrac{n+x^2}{nx}$, $n = 1, 2, \cdots$, $x \in (0, \infty)$;

(4) $S_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$, (i) $x \in (0,1)$, (ii) $x \in (0, +\infty)$;

(5) $S_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$, (i) $x \in [0, a]$, (ii) $x \in (0, +\infty)$;

(6) $S_n(x) = \dfrac{1}{n} \ln(1 + \mathrm{e}^{-nx})$, $n = 1, 2, \cdots$, (i) $x \geqslant 0$, (ii) $x < 0$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^8}{\sqrt{n!}} \left(x^n + x^{-n}\right)$, $\dfrac{1}{t} \leqslant |x| \leqslant t$, $t > 1$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $x > 0$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \left[\mathrm{e}^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right]$, (i) 有限闭区间 $[0, b]$, (ii) $[0, +\infty)$.

2. 确定函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的收敛域与一致收敛域.

3. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛且一致收敛, 但不绝对一致收敛.

4. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 在区间 $(-a, a)$ 上一致收敛, 其中 a 是小于 $2\ln^2 2$ 的任意固定正数.

5. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{1}{3^n x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上处处收敛, 但不一致收敛.

6. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \sin \pi t \, \mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

7. 设 $\{f_n\}$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且设该函数列在 (a,b) 上一致收敛, 证明 $\{f_n\}$ 在点 a 和 b 都收敛, 且在 $[a,b]$ 上一致收敛.

8. 设 f 在 (a,b) 内有连续导函数, 定义

$$F_n(x)=\frac{n}{2}\left[f(x+\frac{1}{n})-f(x-\frac{1}{n})\right],\ x\in(a,b),\ n=1,2,\cdots.$$

证明函数列 $\{F_n\}$ 在 (a,b) 上处处收敛且内闭一致收敛.

9. 设函数列 $\{u_n\}$ 中的函数在 $[a,b]$ 上同为单调增加函数或同为单调减少函数, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 都绝对收敛, 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

10. 设在区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于极限函数 f, 且已知 f 在 $[a,b]$ 上无零点, 证明: 函数列 $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

11. 设函数列 $\{f_n\}$ 于区间 I 上一致收敛, 又设每个 f_n 于 I 上有界, 证明: 函数列 $\{f_n\}$ 于 I 上一致有界.

12. 设函数列 $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 分别在区间 I 上一致收敛. 如果每个 f_n 和 g_n 在 I 上有界, 证明: 函数列 $\{f_n\cdot g_n\}$ 在 I 上一致收敛[①].

13. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 定义函数列 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right),\ n=1,2,\cdots,$ 证明: 函数列 $\{S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

14. 设 $S_1(x)\in R[a,b]$, 定义

$$S_{n+1}(x)=\int_a^x S_n(t)\,\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots.$$

证明: 函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

§14.2 和函数与极限函数的性质

14.2.1 三分法与极限顺序交换原理

这里的基本问题是如何从函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 中的 $\{u_n\}$ (或从函数列 $\{S_n\}$) 出发去研究级数的和函数 (或函数列的极限函数) 的性质以及进行各种分析运算.

由于所关心的性质和运算本身都涉及极限运算, 因此就必然遇到**两个 (或两个以上) 极限过程的顺序交换问题**. 实际上在 10.2.3 小节的积分号下求极限中已经遇到这类问题, 但那时还不能进行一般性讨论.

在函数项级数的基础上, 就可以比较系统地研究极限顺序交换问题. 大致来说, 对于本节所提出的问题, 最基本的概念就是一致收敛性. 有关的基本结论在

① 如允许 f_n (或 g_n) 无界, 则结论可不成立 (见 [59] 的第二册 282 页).

教科书中均已有详细叙述, 这里不必重复. 本节主要是指出其中的一些重要问题, 以作为叙科书的补充.

从极限顺序交换角度出发, 下列命题看似平淡, 实际上具有很基本的意义. 我们将从方法的角度来分析它的证明, 而不是简单地重复教科书中的证明.

命题 14.2.1 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内一致收敛于函数 $S(x)$, 且对每个正整数 n, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$ 存在且有限, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x)$ 都存在且两者相等, 这就是

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x). \tag{14.3}$$

分析与证明 引入记号 $\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x) = a_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

(1) 先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 收敛. 因为 $\{S_n(x)\}$ 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内一致收敛于函数 $S(x)$, 所以由 Cauchy 收敛准则知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对于任意的 $n, m > N$ 和所有的 $x \in U(x_0)$, 同时成立

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon.$$

在此不等式中令 $x \to x_0$ 就有

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

这表明数列 $\{a_n\}$ 满足 Cauchy 收敛准则, 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

(2) 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x) = A$. 下面只需证明 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = A$. 然而如何去估计 $|S(x) - A|$? 从条件可见我们无法直接估计它, 而必须采取间接的 (或者说曲析的) 方法进行估计. 这就是在分析中常用的**三分法** (也称为 $\varepsilon/3$ 法或 3ε 法), 即为了估计 $|S(x) - A|$ 而作以下插项和分拆:

$$\begin{aligned} |S(x) - A| &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - a_n + a_n - A| \\ &\leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - a_n| + |a_n - A|. \end{aligned} \tag{14.4}$$

我们的目的是要证明: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时上式左边小于 ε, 而 (14.4) 使我们只需分别估计右边的三项.

右边第一项由于 $\{S_n\}$ 在邻域 $U(x_0)$ 内一致收敛, 因此只要 n 足够大, 就可以对该邻域中的所有 x 满足该项小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 的要求.

对于 (14.4) 右边的第二项则似乎只要利用 $\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x) = a_n$: 当 x 与 x_0 充分接近时, 这一项就可小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$. 但这里的 n 取什么? 是否存在 $\delta > 0$, 使得

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |S_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14.5}$$

对于一切 n 成立? 在题设中显然没有这样的一致性条件 (但是参看下面的命题 14.2.2).

再观察 (14.4) 的第三项. 由于 $a_n \to A$, 因此对于 ε, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 就有 $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ 成立.

如何将以上的分析综合起来以写出一个正确的证明? 对于 (14.4) 中的第一项和第三项, 可以分别取出 N_1 和 N_2, 使得当 $n > N_1$ 和 $n > N_2$ 时它们分别小于 $\frac{\varepsilon}{3}$. 由于这两步是独立的, 从而只要取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 就可以使得当 $n > N$ 时对这两项的估计都满足要求.

最后, 取定一个 n[①], 例如令 $n = N + 1$, 然后如前面所分析的那样, 存在 $\delta > 0$, 使得 (14.5) 成立. 这样就使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时 (14.4) 的左边小于 ε. □

对于命题 14.2.1 的以上分析可以使我们接触到极限顺序交换的基本原理. 这里不准备详细写出这个原理, 而是只讲一个大意, 然后举出与命题 14.2.1 对偶的但不很常见的结论.

这个原理就是: 设有在集合 $X \times Y$ 上定义的二元函数 $f(x, y)$, 同时存在 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$, 使得对于每个 $x \in X$ 存在极限 $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, 又对于每个 $y \in Y$ 存在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, 并且这两个极限过程之一对于另一个变量具有一致性, 则就保证以下两边的二次极限存在且相等:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

注意: 这里的二元函数以及所涉及的极限过程可以很广泛, 因此我们将它称为**极限顺序交换的基本原理**. 命题 14.2.1 只是它的一个特例. 这个原理的证明见后面 18.1.5 小节的命题 18.1.2. 下面举出使得 (14.3) 成立的对偶命题.

命题 14.2.2 设函数列 $\{S_n\}$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内收敛于函数 $S(x)$, 又设对每个正整数 n, 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} S_n(x)$ 存在且有限, 而且这个极限过程对 n 一致, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} S_n(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0} S(x)$ 都存在且两者相等, 即有 (14.3) 成立.

这个命题的证明不难, 留作练习. 这里只指出, 题意中的一致性是如何严格定义的. 称 $\lim\limits_{x \to x_0} S_n(x) = a_n$ **关于 n 一致**, 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时不等式 $|S_n(x) - a_n| < \varepsilon$ 对一切 n 同时成立. 当然这里的 δ 与 n 无关.

虽然用命题 14.2.2 的机会不多, 但是这里所包含的基本方法还是很有教益的. 如果初学者通过努力能够完成命题 14.2.2 的证明, 则可以认为已经对于三分法和上述极限顺序交换原理有了较好的理解. 这对于今后的学习很有帮助.

14.2.2 例题

本小节就和函数与极限函数的连续性、可微性和可积性举一些有助于理解基本概念和基本工具的例题.

① 这是证明的关键所在. 在 (14.4) 中的插项与分拆是分析中的常用方法, 根据需要也可能拆成二项或四项等. 这里的困难完全在于怎样处理 (14.4) 右边的 n, 它在左边并不出现.

首先, 对函数项级数或函数列来说, 若除了点态收敛之外不补充条件, 则不可能将级数通项或函数列所具有的这三种性质自动地 "**传递**" 给和函数或极限函数. 下面我们分别举出支持上述论点的例子.

例题 14.2.1 (连续性) 在一个区间上的连续函数列收敛于有间断点的极限函数的例子很多. 最常见的例子就是幂函数列

$$\{x^n\},\ x\in[0,1],$$

它的极限函数为 $S(x)=x,\ x\in[0,1),\ S(1)=1$. $S(x)$ 在点 1 处左侧不连续.

类似的例子在第十章中已经见到, 例如例题 10.2.4 (参见上册 310 页的图 10.3) 中的函数列

$$\{\sin^n x\},\ x\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

其极限函数为 $S(x)=0,\ x\in[0,\pi/2),\ S(\pi/2)=1$. $S(x)$ 在点 $\pi/2$ 处左侧不连续.

由此出发, 当然容易找出极限函数有有限个间断点的连续函数列. 考虑到例题 5.1.4 中的 Riemann 函数的间断点集合为处处稠密的有理数全体, 要构造以这样的函数为极限函数的连续函数列也是可能的 (参见 [22]).

但是应当指出, 可以证明: 区间上的连续函数列的极限函数必有处处稠密的连续点, 因此要想构造极限函数处处不连续的连续函数列是不可能的 (参见 [3] 第五章). 但是从 Dirichlet 函数的极限表达式 (上册 123 页) 出发, 就有

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}D_n(x), \tag{14.6}$$

其中 $D_n(x)=\lim\limits_{m\to\infty}[\cos(\pi\,n!\,x)]^{2m}$ 是在 $1/n!$ 的整倍数点上等于 1, 而在其他点均等于 0 的函数. 若限制在 $[0,1]$ 上, 则 $D_n(x)$ 恰有 $n!+1$ 个间断点, 但极限函数 $D(x)$ 则处处不连续.

从例题 14.1.1 又可以知道, 一致收敛性并不是保证极限函数或和函数的连续性的必要条件. 这里的理论问题见 14.2.3 小节.

例题 14.2.2 (可微性) 上一个例题中的前两个例子已经表明, 函数列可微不保证极限函数可微[①]. 但是这里与连续性不同, 可以说有两个问题: 即不仅要关心和函数 (或极限函数) 是否可微, 而且更要关心在可微时它们的导函数是否是级数逐项求导后的级数的和函数 (或函数列求导后的极限函数), 如果是的话, 则就有了计算它们的导函数的有力方法.

因此自然要关心以下的极限交换, 即逐项求导运算和求导与极限交换

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\ \text{与}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)$$

是否成立, 其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$ 在某个区间上已有定义.

---

① 从 16.4.1 小节的 Weierstrass 函数可知, 通项可微的函数项级数的和函数可以处处不可微.

容易举出不能逐项可微的例子. 例如, 在例题 14.1.7 中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛, 对其逐项求导得到的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx.$$

不难证明这个级数处处发散: 从 $\cos 2nx=2\cos^2 nx-1$ 可见, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx=0$, 就会得到 $0=-1$ 的矛盾. 因此级数的通项一定不收敛于 0.

在下一章知道这个例子中的和函数 S 很简单, 它是周期 2π 的函数, 在 $(0,2\pi)$ 上等于 $\dfrac{\pi-x}{2}$, 在 2π 的整倍数处为 0. 因此除了在这些点处不连续 (因而不可微) 之外, 在其他点上处处可微, 且导数值等于 $-\dfrac{1}{2}$. 这个例子表明, 若不另加条件, 则利用导数所成的无穷级数来计算和函数的导数是没有根据的.

例题 14.2.3 (可积性) 从 (14.6) 可见, 从 $\{u_n\}$ 或 $\{S_n\}$ 的可积性不能保证和函数或极限函数的可积性. 这里我们更关心的是在可积的前提下, 可否用逐项积分的方法来计算极限函数或和函数的积分, 即是否有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]\mathrm{d}x \text{ 与 } \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}S_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

容易举例说明不加条件是不行的. 在例题 14.1.1 中的三个例子表明: 在例 (1)、例 (2) 中可交换积分与极限的顺序, 但例 (3) 则不行. 与此类似的更简单例子为

$$S_n(x)=\begin{cases}n, & 0<x<\dfrac{1}{n},\\ 0, & x \text{ 为区间 } [0,1] \text{ 中的其他值.}\end{cases}\tag{14.7}$$

易见在区间 $[0,1]$ 上极限函数 $S(x)$ 处处为 0, 因此 $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x=0$. 同时对每个 n 有 $\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=1$.

例题 14.1.1 之 (2) 又表明, 一致收敛性并不是使逐项积分 (或积分与极限交换顺序) 成立的必要条件. 这里的理论问题将于下节讨论.

14.2.3 准一致收敛与控制收敛定理

如前所说, 在保证和函数或极限函数的连续性、可微性和可积性方面一致收敛性都是充分而非必要的条件. 为了叙述在连续性方面的充分必要条件, 我们需要新的概念: **准一致收敛**[①] (参见 [3, 31, 52, 55]). 下面我们只对于区间 $[a,b]$ 上的函数列叙述有关定义和结果.

定义 称函数列 $\{S_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上为**准一致收敛**, 如果该函数列于 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 $S(x)$, 且对每个 $\varepsilon>0$ 和每个 N, 存在 $N'>N$, 使得对于每个 $x\in[a,b]$, 有正整数 $n_x\in[N,N']$, 满足 $|S_{n_x}(x)-S(x)|<\varepsilon$.

① quasiuniform convergence, 译名有亚一致收敛、次一致收敛和拟一致收敛等.

注 若函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则必准一致收敛, 但反之不真.

命题 14.2.3 (Arzela-Borel 定理) 在区间 $[a,b]$ 上的连续函数列的极限函数在 $[a,b]$ 上连续的充分必要条件是函数列在 $[a,b]$ 上准一致收敛,

证 设连续函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 $S(x)$.

先证必要性. 任取 $x_0 \in [a,b]$, 则从 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$ 知, 对于给定的 $\varepsilon > 0$ 和 N, 存在一个确定的正整数 $n_0 > N$, 使得 $|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$. 利用 $S_{n_0}(x)$ 和 $S(x)$ 的连续性, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $x \in U_{\delta_0}(x_0) \cap [a,b]$ 时, 成立不等式 $|S_{n_0}(x) - S(x)| < \varepsilon$. 对于 $[a,b]$ 中每个点都如此做, 然后用覆盖定理 (见 §3.5 节) 就得到有限个正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$, 取其中最大的为 N' 即可验证 $\{S_n\}$ 准一致收敛于 $S(x)$ 中的条件, 从略.

再证充分性. 对于任意一点 $x_0 \in [a,b]$ 用三分法. 考虑分拆

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|. \quad (14.8)$$

由于 $\{S_n(x_0)\}$ 收敛于 $S(x_0)$, 因此对于 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时 (14.8) 右边的第三项小于 $\varepsilon/3$. 利用准一致收敛条件, 对于 N 和 $\varepsilon/3$ 存在满足条件的 N'. 由于 $[N, N']$ 中只有有限个正整数, 因此存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in [a,b]$ 时, (14.8) 右边的第二项对于每个 $n \in [N, N']$ 都小于 $\varepsilon/3$.

最后, 对于每个 x, 只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ 和 $x \in [a,b]$, 就存在 $n_x \in [N, N']$, 使得当 $n = n_x$ 时, (14.8) 右边的第一项以及其他两项同时小于 $\varepsilon/3$.

合并以上分析, 可见对 $0 < |x - x_0| < \delta$ 和 $x \in [a,b]$, (14.8) 的左边 $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$, 因此 $S(x)$ 于点 x_0 连续. □

由上可见, 准一致收敛条件虽然是充分必要条件, 但比较复杂, 因此其应用有限. 但在逐项积分问题中则有一个非常好的结果:

命题 14.2.4 (Arzela 控制收敛定理) 设 $\{f_n\}$ 是在 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 f 的可积函数列, 若 f 也在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\{f_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得对于每个 n 和每个 $x \in [a,b]$ 同时满足 $|f_n(x)| \leqslant M$, 则成立

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

评注 这个引人注目的定理是 Arzela 于 1885 年发表的. Osgood 又于 1897 年在连续情况下重新发现了这个结果 (称为 Osgood 定理). 毫无疑问, Arzela 定理比传统的逐项积分定理要强得多, 根本无需一致收敛条件. 由此可见, 例题 10.2.4 和例题 14.1.1 之 (2) 都是它的特例. 同时也使我们明白, 使得逐项积分不成立的例题 14.1.1 之 (3) 和 (14.7) 也只能在无界情况下存在.

由于这个定理的魅力非凡, 引得许多第一流的分析学家为之折腰 (其中包括 Riesz, Bieberbach, Landau, Hausdorff 等), 在几乎一个世纪中致力于寻找其初等

证明. 这类证明目前已超过 10 个. 应该说这些证明还不能令人非常满意. 一个标志就是除了 [19] 卷 2 的第 14 章 §4 之外, 绝大多数教科书中均未收入 Arzela 定理及其证明, 最多只是提到该定理, 而且总是抱歉说证明太难了, 无法写入等等.

就我们所见, 1986 年由 Lewin 提出的一个初等证明比以前的那些要好得多, 也许有可能为低年级大学生所理解, 并被收入今后的某些分析教科书中. 下面就是根据美国数学月刊 93 卷 (1986) 395~396 页改写的证明. 对于此前的历史情况和发展请看该刊 78 卷 (1971) 970~979 页及其中的丰富文献, 还可参看 [44].

在进入证明之前需要作些准备: 其中包括技术和心理两方面的准备.

1. 若 $f \in R[a,b]$, s 为 $[a,b]$ 上的阶梯函数 (即分段常值函数), 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{s\leqslant f}\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x. \tag{14.9}$$

其中记号 $s \leqslant f$ 是指满足条件 $s(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in [a,b]$. 学过 Darboux 积分理论的读者知道右边就是 **Darboux 下积分**的值. 直接从定积分的定义 (§10.1 节) 出发证明这个等式也是很容易的. 这里从略.

2. 要将 §3.2 节的闭区间套定理推广为 **非空有界闭集下降序列之交非空**.

定理 设 $\{A_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 内的**非空有界闭集序列**, 且单调下降, 即 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, 则它们的交非空: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.

这里的概念和证明都没有多少新意. 首先要给出实数集合 A 为**闭集**的定义: 如果点 a 的每个邻域中含有 A 中的点, 就有 $a \in A$. 然后用实数系中的某个基本定理就可以证明所需的结论. 参见第十七章的例题 17.2.1 闭集套定理.

3. 在下面的初等证明中需要克服的主要难点是如何处理诸如

$$\{x \in [a,b] \,\big|\, f(x) < \varepsilon\} \tag{14.10}$$

这样的实数集合. 这里所用的方法是考虑该集合中的特殊类型的子集合, 它们是区间或有限个区间之并, 然后用区间长度或长度之和来刻画集合 (14.10). 为此需要引入定义: 称**有限个不交的有界区间的并集为初等集**, 又称初等集 E 中的区间长度之和为 E 的**测度** $m(E)$.

就区间 $[a,b]$ 内的初等集而言, 它们的并、交与差仍为初等集. 又若 E 和 F 为初等集, 则 $m(E\cup F) \leqslant m(E)+m(F)$, 且当 E 与 F 不交时成立等号. 这些都可以推广到有限个初等集上去. 此外, 还需要**闭初等集**的概念, 它是有限个不交的有界闭区间的并集. 不难证明: 对于一个初等集 E 以及给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个闭初等集 $F \subset E$, 满足条件 $m(F) > m(E) - \varepsilon$.

以上的概念和结论都是非常简单和直观的, 证明从略.

4. 在以下证明中需要一个关于初等集的引理, 我们将在先承认它的前提下给出定理的证明, 然后再补充给出该引理的证明. 就前者而言思路很容易理解, 但后者则涉及集合运算中的一系列细节.

Arzela 定理的证明 对于给定的正数 $\varepsilon>0$, 定义集合序列

$$A_n=\{x\in[a,b]\mid \exists\, i\geqslant n \text{ 使得 } |f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}.$$

则从 f_n 于 $[a,b]$ 上处处收敛于 f 可知 $\{A_n\}$ 为单调下降的有界数集序列, 且有:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing. \tag{14.11}$$

利用初等集的概念定义数列:

$$\alpha_n=\sup\{m(E)\mid E \text{ 为含于 } A_n \text{ 中的初等集}\},\ n=1,2,\cdots.$$

显然数列 $\{\alpha_n\}$ 为单调下降的非负数列. 从下面的引理 14.2.5 知 $\alpha_n\to 0$. 因此存在 N, 使得对 $n>N$ 和 A_n 中的每个初等集 E, 成立 $m(E)<\varepsilon$.

以下只需要证明对于 $n>N$ 的每个 n, 积分 $\int_a^b|f_n-f|\leqslant K\varepsilon$, 其中 K 是一个确定常数.

利用 (14.9), 只需要对 $n>N$ 和在 $[a,b]$ 上满足条件 $0\leqslant s(x)\leqslant|f_n(x)-f(x)|$ 的每个阶梯函数 $s(x)$, 证明积分 $\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x<K\varepsilon$ 即可.

对于满足这个条件的阶梯函数 s, 定义两个集合

$$E=\{x\in[a,b]\mid s(x)\geqslant\varepsilon\},\quad F=[a,b]-E,$$

显然 E 与 F 都是初等集.

由于 $E\subset A_n$, 因此 $m(E)<\varepsilon$. 而对于 $x\in F$, 则有 $s(x)<\varepsilon$. 再利用 $\{f_n\}$ 为一致有界就得到

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x&=\int_E s(x)\,\mathrm{d}x+\int_F s(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant 2M\cdot m(E)+\varepsilon\cdot(b-a)\leqslant\varepsilon(2M+b-a).\end{aligned}$$

从 (14.9) 知对 $n>N$ 有

$$\int_a^b|f_n-f|\leqslant\varepsilon(2M+b-a).$$

利用 ϵ 的任意性和不等式 $\left|\int_a^b f_n-\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|f_n-f|$, 可见已经得到所要的结论:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\qquad\square$$

注 在 Arzela 定理的条件中必须假定极限函数的可积性, 这一点在一致收敛条件下的逐项积分定理中是不需要的, 一致收敛条件可以将函数列的可积性"传递"给极限函数. 但是只要略微修改上述证明中的集合 A_n 的定义就可以证明, 即使没有极限函数 f 的可积条件, 积分值所成的数列

$$\left\{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

必是基本数列 (见上册 74 页), 因此一定收敛. 这强烈地表明: 逐项积分不能进行的原因是积分定义不够广泛. 由此即可引向实变函数论中的 Lebesgue 积分定义和 Lebesgue 控制积分收敛定理, 在那里不需要事先假定极限函数的可积性.

现在我们来补充证明上面已经用到的引理. 这个结论本身是非常直观的, 但需要细致的分析, 并在最后用非空有界闭集的下降序列必有非空交的定理.

命题 14.2.5 (Lewin 引理) 设 $\{A_n\}$ 为单调下降的有界数集序列, 且其交为空集 (见 (14.11)), 又定义数列

$$\alpha_n = \sup\{m(E) \,\big|\, E \text{ 为含于 } A_n \text{ 中的初等集}\},\ n = 1, 2, \cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

证 用反证法. 设结论不真, 则单调减少的正数数列 $\{\alpha_n\}$ 的极限大于 0, 因此存在 $\delta > 0$, 使得对于每个 n 成立 $\alpha_n > \delta$.

对每个 n, 根据 α_n 的定义, 存在**闭初等集** $E_n \subset A_n$, 使得

$$m(E_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}.$$

这样得到的有界闭集序列 $\{E_n\}$ 未必单调下降, 为此再令

$$H_n = \bigcap_{k=1}^{n} E_n,\ n = 1, 2, \cdots,$$

就得到单调下降的有界闭集序列 $\{H_n\}$. 从 $H_n \subset E_n \subset A_n\ \forall n \in \mathbf{N}_+$ 就有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n. \tag{14.12}$$

引理的条件是上式左边为空集 $\varnothing$, 因此只要证明每个 H_n 非空, 然后从非空有界闭集的下降序列有非空交的定理知 (14.12) 的右边非空, 就引出矛盾.

考虑 $A_n - H_n$ 中的任一初等集 E, 则从 H_n 为 $E_1, \cdots, E_n$ 之交知道有

$$E = E - H_n = E - \bigcap_{k=1}^{n} E_n = \bigcup_{k=1}^{n} (E - E_k). \tag{14.13}$$

记 $F_i = E - E_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 则对于每个 i 有

$$m(F_i) + m(E_i) = m(F_i \cup E_i) \leqslant \alpha_i,$$

利用 $m(E_i) > \alpha_i - \frac{\delta}{2^i}$ 可知

$$m(F_i) < \frac{\delta}{2^i}\ \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

将这个结果代入 (14.13) 就得到 $m(E) < \delta$. 这表明 $A_n - H_n$ 中的任一初等集的测度小于 δ.

从 α_n 的定义和 $\alpha_n > \delta\ \forall n$ 可见, 如果 $H_n = \varnothing$, 则就可以取到一个初等集 $E \subset A_n$, 使得 $m(E) > \delta$. 由此推出每个 $H_n \neq \varnothing$, 从而在 (14.12) 中引出矛盾. 这表明一开始的假设错了, 只能有 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. □

注 这个引理与 Arzela 原来的引理比较, 可以认为有了很大的改进 (参见 [19] 的卷 2 第 487 小节). 从概念上看, 初等集只是**有限**个区间的并, 这在数学分析中是容易接受的. 此外, 还可以将引理的结论等价地叙述为更容易理解的事实: 若单调下降的有界数集之交非空, 则其中所含的任意初等集的长度一定趋于 0.

14.2.4 练习题

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$.
2. 确定函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的定义域, 并讨论其连续性与可微性.
3. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ 在任意有界闭区间上一致收敛, 并且它的和函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.
4. 设 $\{S_n\}$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续的函数列, 且已知它在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于函数 $S(x)$, 证明: 函数 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.
5. 设连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 且对 $\forall\,\varepsilon\in(0,b-a)$, $\{f_n\}$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上一致收敛. 如果存在 $g\in R[a,b]$, 使
$$|f_n(x)|\leqslant g(x),\ x\in[a,b],\ n=1,2,\cdots,$$
证明:
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
6. 设函数列 $\{f_n\}$ 于点 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 中收敛于函数 f, 又设每个 f_n 于点 x_0 连续, 证明: f 在点 x_0 连续的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\exists N$, 使得对于每个 $x\in O_\delta(x_0)$, 成立 $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.
7. 设函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于函数 $f\in C[a,b]$, 证明: $\{f_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是对于 $[a,b]$ 中的每个收敛数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.
8. 设可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 f, 且已知每个 f_n 在 $[a,b]$ 上有原函数, 证明: f 在 $[a,b]$ 上也有原函数.

§14.3 幂级数的收敛域与和函数

幂级数是最重要的一类函数项级数, 具有多方面的应用. 它可以看成是多项式的直接推广. 反之, 每个多项式都可以看成是非零项数有限的幂级数. 幂级数在收敛性态以及和函数的性质方面有许多特殊的良好性质.

为方便起见, 在幂级数研究中常用记号 $<a,b>$ 代表 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ 和 $[a,b]$ 中的任意一个, 并称 (a,b) 为 $<a,b>$ 的**内部**.

14.3.1 幂级数的基本理论

幂级数的一般形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 称 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ 为**幂级数的系数**. 幂级数在

收敛、绝对收敛和一致收敛方面都有非常独特的结论, 这就是以下两个由 Abel 建立的定理.

命题 14.3.1 (Abel 第一定理) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛域一定是以 x_0 为中心的区间 $<x_0-R, x_0+R>$, 且于其内部 (x_0-R, x_0+R) 处处绝对收敛 (其中 $R \geqslant 0$ 称为该幂级数的收敛半径).

命题 14.3.2 (Abel 第二定理) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 必于其收敛域中内闭一致收敛[①].

幂级数的和函数除了连续性之外, 还具有以下特殊性质:

命题 14.3.3 若幂级数的收敛半径大于 0, 则其和函数在幂级数的收敛域内部无限次可微, 且可逐项求积和逐项求导.

幂级数的另一个重要结果是计算收敛半径的 **Cauchy-Hadamard 公式**:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{14.14}$$

(若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, 则 $R = +\infty$). 这个公式完全解决了收敛半径的计算. 但有时用其他方法可能更方便. 例如, 若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, 则这个极限值也等于 R.

建立以上基本内容的各种证明都是应用函数项级数的基本理论的极好例题. 希望初学者重视并能独立推导.

14.3.2 思考题

1. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 a, b 两点收敛 $(a<b)$, 问: 该级数在 $[a,b]$ 上的收敛、绝对收敛和一致收敛的情况如何?
2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n b_n)x^n$ 的收敛半径.
3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径是 R, 且在 (x_0-R, x_0+R) 上一致收敛, 问该级数在 $x = x_0 \pm R$ 处的敛散性怎样?
4. 问: 是否可以用 Weierstrass 判别法 (即优级数判别法) 证明 Abel 第二定理 (即命题 14.3.2)?

---

① 这里从一致收敛性来叙述 Abel 第二定理. 在该定理的应用中的常见形式为: 若幂级数在其收敛域的端点收敛, 则和函数在该端点处 (单侧) 连续.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$, 试问:

   (1) 是否成立 $\int_0^R \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} R^{n+1}$?

   (2) 如果上式右边的级数收敛, 上式是否成立?

6. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 问 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径是多少?

7. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$, 和函数为 $S(x)$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 能否推出极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x)$ 不存在? (试考虑 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 则答案如何?

14.3.3 例题

由于 Cauchy-Hadamard 公式解决了收敛半径的计算, 因此在确定幂级数的收敛域时, 难点往往在于端点处的敛散性. 下面是一个典型例题.

例题 14.3.1 确定幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ 的收敛域, 其中

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ n=1,2,\cdots.$$

解 若 α 为非负整数, 则级数只有有限个非零项, 因此收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 否则从 $|a_{n+1}/a_n|\to 1$ 可见收敛半径 $R=1$. 以下只需讨论两个端点 $x=\pm 1$. 对于 $x=1$ 的讨论已见例题 13.3.2, 结论为: 当 $\alpha\leqslant -1$ 时级数发散, 且其通项不趋于 0; 当 $\alpha>0$ 时绝对收敛; 当 $-1<\alpha<0$ 时条件收敛.

当 $x=-1$ 时, 前两种情况的结论不变, 而当 $-1<\alpha<0$ 时级数不再是交错级数, 因此也是发散的. □

下一个例题是 Gauss 的工作. 历史上它是对级数收敛性进行严密研究的第一个重要例子 (参见 [26] 的第四册 20 页).

例题 14.3.2 (超几何级数) 设 α,β,γ 均不取负整数或 0, 确定幂级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$

的收敛域.

解 易见收敛半径为 1, 因此只要讨论 $x=\pm 1$ 时级数的收敛性.

引用 (13.24) 或 (13.41), 存在常数 $C\neq 0$, 使得通项的绝对值有渐近公式:

$$\left|\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\right| \sim \frac{C}{n^{1+\gamma-\alpha-\beta}}.$$

由此可见, $\gamma-\alpha-\beta>0$ 是级数于两端绝对收敛的充分必要条件, 而 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ 时级数通项不是无穷小量, 因此都发散.

当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时, 在 $x=1$ 处级数当 n 充分大时为正项级数, 因此发散. 而当 $x=-1$ 时级数当 n 充分大时为通项趋于 0 的交错级数. 从前后项之比的分析

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

可见当 n 充分大时通项绝对值单调减少, 因此条件收敛. □

由于幂级数可以在其收敛区间的内部逐项积分和逐项微分, 这往往可以用于求出某些幂级数的和函数. 下面就是这方面的几个例题.

例题 14.3.3 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的和函数.

解 当然首先需要确定级数的收敛域, 这就是和函数的定义域. 然后可以有不同的方法做. 下面只给出提示, 细节从略.

方法 1: 由 $(2n+1)x^{2n}=(x^{2n+1})'$ 出发可以试用逐项积分法求解.

方法 2: 改写级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n,$$

然后作代换 $y=x^2/2$ 并利用在 $|y|<1$ 时的恒等式

$$\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n,\quad \frac{1}{(1-y)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n$$

就可以计算出和函数.

答案为: 和函数 $S(x)=\dfrac{x^2(6-x^2)}{2(2-x^2)^2}$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. □

例题 14.3.4 求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数.

解 求出级数的收敛半径为 1, 又可判定级数于 $x=\pm 1$ 均收敛, 因此级数的收敛域是 $[-1,1]$.

可以看出两次逐项求导后可以得到易于求和的级数. 设和函数为 $S(x)$, 则在 $(-1,1)$ 中得到

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

和

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}.$$

因为 $S'(0)=0$, 所以 $S'(x)=\int_0^x S''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+x), x\in(-1,1)$.

再由 $S(0)=0$, 得 $S(x)=\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\ln(1+x)-x, x\in(-1,1)$.

最后, 由 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 因此上面所得的表达式对 $x=1$ 也成立. 但对于 $x=-1$ 则需求极限

$$S(-1)=\lim_{x\to -1^+}[(x+1)\ln(1+x)-x]=1. \quad \square$$

例题 14.3.5 求 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ 的和函数.

解 用 Wallis 公式 (11.29) 容易确定收敛域为 $[-1,1)$.

设和函数为 $S(x)$. 并在 $(-1,1)$ 中试用逐项求导, 得到

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(2n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x).$$

因此 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 中满足微分方程

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x).$$

这时可以看出在区间 $(-1,1)$ 上成立恒等式:

$$[\sqrt{1-x}S(x)]'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)\right]\equiv 0.$$

因此 $\sqrt{1-x}S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为常值函数. 再利用 $S(0)=1$, 就得到

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ -1<x<1. \tag{14.15}$$

从 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 于 $[-1,1)$ 上连续, 而上式右边的表达式也是如此, 因此 (14.15) 对 $x=-1$ 也成立. $\square$

需要提出与 Abel 第二定理有关的下列问题: 即若已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛, 能否推出数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛并求其和呢? 可以看出这就是问: Abel 第二定理的逆定理是否成立? 当然这不是无条件的. 这里有很多研究, 即寻求 $\{a_n\}$ 应当满足什么样的条件, 所得到的结果一般称为 Tauber 定理 (见 [55] 的第五章). 下面就是这方面较容易的一个结果.

命题 14.3.4 (Tauber 定理) 设已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上成立, 如果 $\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)=S$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S$.

证 采用三分法 (参见 14.2.1 小节), 写出

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S\right|. \tag{14.16}$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 由 Cauchy 命题得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|}{n} = 0$. 又由 $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|S\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - S\right| = 0$. 因此 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 N, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{3},\ n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3},\ \left|S\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, 则对于 (14.16) 右边的第一项有估计

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1})\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x)k = \frac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

对于 (14.16) 右边的第二项有估计

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| x^k < \frac{\varepsilon}{3n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3n} \cdot \frac{1}{1 - x} = \frac{\varepsilon}{3n \cdot \dfrac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

对于 (14.16) 右边的第三项有估计

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S\right| = \left|S\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

所以当 $n > N$ 时有 $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - S\right| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

注 对比命题 14.2.1, 命题 14.2.3 和本题中的三分法, 可以看出它们有共同点, 也有不同点. 就本题而言, (14.16) 右边的 x 在左边并不出现, 但又必须与 1 充分接近, 而且其接近程度还要与 n 有关, 这是本题比前两次三分法更为复杂之处. 取 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$ 就是为了这个目的.

14.3.4 练习题

1. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1^n + 2^n + \cdots + k^n}{n^2} \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^n$ 的收敛域, 其中 $k > 1$ 为整数.
2. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_0 \neq 0$, 试求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.
3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}} x^n$ $(a > 0)$ 的收敛半径.

4. 对任意正整数 k, 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$ 的收敛半径为 k^k, 收敛域为 $(-k^k,k^k)$.

5. 求下列幂级数 (或广义幂级数) 的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n+(-b)^n}{n}x^n$, $a,b>0$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{1+n^2}}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n^2}x^{n^3}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{3n}(x^2+x+1)^n$;

(8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1}\left(\dfrac{x}{3x+1}\right)^n$.

6. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n^2-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{n+2}-1)x^{2n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$.

7. 证明: $u(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4n)!}x^{4n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足微分方程 $u^{(4)}=u$.

8. 证明: Bessel 函数 $J_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n}$ 在 $x\neq 0$ 时满足微分方程

$$xu''+u'+xu=0.$$

9. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\ln(1+n)}x^n$, 证明:

(1) 函数 $S\in C[-1,1]$;

(2) $S'_+(-1)$ 有限, 而 $S'_-(1)=+\infty$.

(可参考上册 194 页命题 7.1.7 和本章 14.3.2 小节的第 7 题.)

10. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}x^n$, 证明: 函数 f 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 上连续, 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 上可导, 并讨论 f 在 $\dfrac{1}{2}$ 处的可导性.

11. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. 证明: 当 $x\in(0,1)$ 时有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

12. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$, 将级数的部分和函数列记为 $\{S_n\}$, 将和函数记为 S, 证明: 函数列 $\{S\circ S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $S\circ S$.

13. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 记 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, $n=0,1,\cdots$. 证明: (1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ 有相同的收敛半径; (2) 若 $a_n\geqslant 0$, $n=0,1,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.

§14.4 函数的幂级数展开

由于幂级数可以看成为多项式的直接推广, 因此如果一个函数能够在某个区间上展开为幂级数, 则就提供了研究和计算这个函数的有效手段[①].

14.4.1 Taylor 级数与函数的幂级数展开式

设函数 f 在区间 I 上有定义, x_0 为 I 的一个内点, 如果存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 使在该邻域内成立等式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 则称 f 能在 x_0 附近 (也称在点 x_0 处) 展开为幂级数, 并将该幂级数称为 f 在点 x_0 的**幂级数展开式**.

由幂级数理论可见, f 能够在点 x_0 展开为幂级数的必要条件是 f 在点 x_0 处无限次可导. 利用幂级数在其收敛域内部可以无限次逐项求导就可以知道, 如果在点 x_0 邻近成立

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

则一定有 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n=0,1,\cdots$. 因此, 如果 f 能够在点 x_0 附近展开为幂级数, 则这个展开式是惟一的, 其系数是完全确定的.

现设函数 f 在点 x_0 处无限次可微, 则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{14.17}$$

为函数 f 在 x_0 处的 **Taylor 级数** (在 $x_0=0$ 时, 又称幂级数 (14.17) 为 f 的 **Maclaurin 级数**). 由上面的讨论已经得到下面的命题, 它说明函数 f 在 x_0 处的 Taylor 级数与其在 x_0 处的幂级数展开式之间的基本关系:

---

① 即使对于初等函数来说, 这也是十分重要的. 因为如 $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ 和 e^x 等只不过是记号, 并没有提供计算它们的方法. 除了多项式之外, 初等函数的具体计算以及在计算器和电脑中的使用, 都是以幂级数展开式为基础的.

命题 14.4.1 (幂级数展开的惟一性定理) 如果函数 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内能够展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 则这个幂级数展开式是惟一的, 而且它就是 f 在 x_0 处的 Taylor 级数.

仔细检查上面的概念, 就可以发现, 为了将一个函数于某点附近展开为幂级数, 有几个重要的问题是必须研究的:

1. 若 f 在点 x_0 处无限次可微, 则按照 (14.17) 写出的 Taylor 级数是否一定有正收敛半径?

2. 若 f 在点 x_0 处无限次可微, 并且 f 在 x_0 处的 Taylor 级数有正收敛半径, 则在收敛域上该级数的和函数是否一定等于 f?

可以举例说明, 对这两个重要问题的回答都是不一定.

就问题 1 来说, 在许多教科书中都收入了下列函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}. \tag{14.18}$$

如果计算出这个函数在原点的所有阶导数值, 就可以证明所得到的 Maclaurin 级数的收敛半径为 0. 其他例子可以参考 [22] 等. 这些例子容易值人以为它们是少有的精品. 但是在数学通报 (10) (1964) 38～40 页的一文中证明了下列命题, 从而完全改变了人们的看法 (又见美国数学月刊 88 卷 (1981) 51～52 页和 [52]).

命题 14.4.2 每个幂级数都是 Taylor 级数.

证 只需证明对于任意给定的数列 $\{a_n\}$ 存在函数 f, 值满足 $f^{(n)}(0)=n!a_n$ $(n\in 0,1,\cdots)$ 即可. 这里当 $n=0$ 时记号 $f^{(0)}(0)=f(0)$. 与 (14.18) 相类似, 这样的函数可以用无穷级数构造出来.

首先介绍其中的基本 "构件": 对于指定的自然数 n 和常数 h, 可以构造一个无限次可微函数, 使它在原点的 n 阶导数等于 h, 而所有其他阶导数都等于 0. 先定义在三个区间上分别取常值的函数

$$f(x)=\begin{cases} h, & |x|\leqslant \dfrac{1}{2|h|+1},\\ 0, & |x|\geqslant \dfrac{2}{2|h|+1}, \end{cases} \tag{14.19}$$

然后在 f 已有定义的区间之间用无限次可微的单调函数相连接 (这里可以用上册 171 页例题 6.2.5 中的方法), 从而得到在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无限次可微函数. 在图 14.3 中作出了参数 $h=1$ 的函数 f 的图像, 其中 f 在 $x\geqslant 2/3$, $x\leqslant -2/3$ 和 $-1/3\leqslant x\leqslant 1/3$ 三个区间上均取常值.

这个函数 f 满足条件 $f(0)=h$, $f^{(n)}(0)=0\ \forall n>0$. 改记 $f=f_0$, 定义 $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f_1'(x)=f_0(x)$, $f_1'(0)=h$, $f_1^{(n)}(0)=0\ \forall n\neq 1$. 归纳地定义

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,$$

就知道 $f_n^{(k)}(0)=0\ \forall k\neq n,\ f_n^{(n)}(0)=h.$

同时还可以作出与 h 无关的估计. 从

$$f_n^{(n-1)}(x)=\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t$$

可知, $|f_n^{(n-1)}(x)|<1$, 即在图 14.3 中的曲线下面积小于 2.

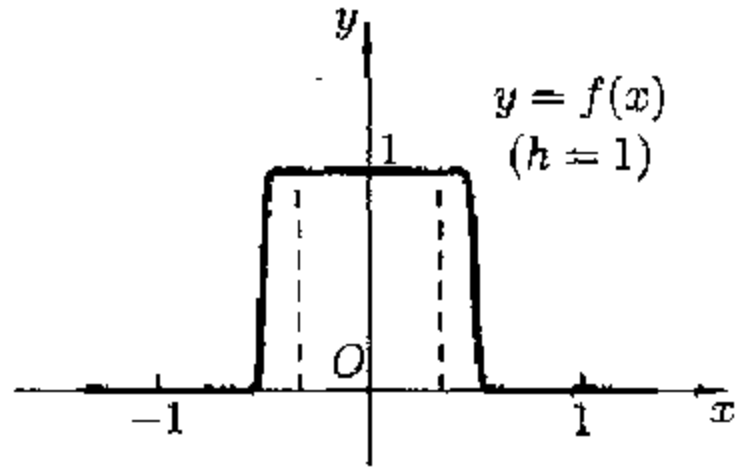


图 14.3

由此出发作积分, 就可以归纳地证明:

$$|f_n^{(k)}(x)|<\frac{|x|^{n-1-k}}{(n-1-k)!},$$

其中 $0\leqslant k<n.$

现在对于每个非负整数 n 取 $h=a_nn!$, 用上面的方法构造出在 $(-\infty,+\infty)$ 上无限次可微的函数列 $\{u_n\}$, 使满足条件

$$u_n^{(k)}=0\ \forall k\neq n,\ u_n^{(n)}(0)=a_nn!,$$

同时有估计 $|u_n^{(k)}(x)|<\dfrac{|x|^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\ \forall 0\leqslant k<n.$

现在定义下列函数项级数及其和函数:

$$u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=U(x).\tag{14.20}$$

由以上估计可知, 不仅级数 (14.20) 在任意有界闭区间上一数收敛, 而且在任意次逐项求导后的级数也一数收敛, 因此 $U(x)$ 无穷次可微, 且其导数可以用级数的逐项求导来得到. 这样就得到 $U^{(n)}(0)=u_n^{(n)}(0)=n!a_n.$ □

注 根据上述命题, 只要取 $\{a_n\}$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 0, 这样就得到收敛半径为 0 的 Taylor 级数.

就问题 2 来说, 上册 169 页的例题 6.2.4 已提供了这样的例子. 这就是

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处无限次可微, 在 $x=0$ 处的任意阶导数值为 0, 因此在该点的 Taylor 级数的每一项为 0, 收敛半径当然是 $R=+\infty$. 但是这个级数在 $x\neq 0$ 的每一点上的和函数值都不等于 $f(x)$ 的值. 因此, 这个函数在 $x=0$ 处也不能展开为幂级数 (参见上册 169 页的图 6.4) ①.

解决函数是否能展开为幂级数的工具是第七章中的 Taylor 公式: 设 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 中无限次可微, 则对于每个 n 有

① 将这个函数及其倍数加到任意一个 Maclaurin 级数上去, 就可以知道有无限多个函数具有相同的 Maclaurin 级数, 但其中至多只有一个函数以此级数为其幂级数展开式.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x),$$

其中余项可以有多种形式 (见命题 7.2.3, 7.2.4 或命题 11.4.3). 将此式改写为

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{14.21}$$

并与 (14.17) 作比较, 就可以看出, 这里的 $r_n(x)$ 就是 $f(x)$ 与其 Taylor 级数的第 $n+1$ 个部分和函数之差. 因此就可以建立下列基本结论:

命题 14.4.3 f 在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 能展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的充分必要条件是 f 的 Taylor 公式的余项 (14.21) 在邻域 $U(x_0)$ 内处处收敛于 0.

证 先证必要性. 设 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的和函数. 根据命题 14.4.1 可知, 这个幂级数只能是 Taylor 级数 (14.17). 由于该级数收敛, 因此该级数作为收敛级数的余项就是 Taylor 公式的余项 (14.21). 于是已经证明了 $r_n(x)$ 在该邻域内处处收敛于 0.

再证充分性. 若 $\{r_n(x)\}$ 在某个邻域 $U(x_0)$ 内处处趋于 0, 则从 (14.21) 可见 Taylor 级数 (14.17) 有正收敛半径, 且至少在 $U(x_0)$ 上以 $f(x)$ 为其和函数. □

注 1 由此可见, 利用 Taylor 公式的余项在理论上可以同时解决 Taylor 级数 (14.17) 是否有正收敛半径以及其和函数是否等于 $f(x)$ 的问题.

注 2 初学者往往容易将第七章的 Taylor 公式与本节的 Taylor 级数混淆, 因此这里简要地指出二者的差别: 第七章的 Taylor 公式并不涉及无限项求和问题, 其中只有有限项. 同时, 对于函数 f 的要求也只需要有若干次可微性. 这些都与本节的 Taylor 级数不同. 在上册 204 页开始引入的 Taylor 公式的余项概念与无穷级数中的余项概念完全不同. 在命题 14.4.3 的证明中的关键之处就在于这两个余项在命题的条件下可以等同起来.

14.4.2 将函数展开为幂级数的基本方法

与 7.2.2 小节中计算 Taylor 公式的方法类似, 将给定的一个函数在指定点附近展开为幂级数有直接法与间接法两种方法. 本节中将较多地介绍间接法. 这里的原因是容易理解的. 所谓**直接法** 或**直接展开法**, 就是利用命题 14.4.1 写出级数 (14.17), 然后再用命题 14.4.3 证明余项趋于 0. 因此用直接法首先需要计算函数在展开点的所有高阶导数, 又为了研究余项, 还需要计算 f 的所有**高阶导函数**, 而这往往是更困难的工作. 在教科书中也只是对于少数几个初等函数采用直接法得到它们的幂级数展开式. 因此我们将较多地介绍间接法.

下面六个基本的 Taylor 级数就是应用间接法的基础, 希望初学者把它们作为数学分析中最重要的公式牢牢记住.

1. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$, $x\in(-1,1)$;

2. $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

3. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

4. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

5. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots$, $x\in(-1,1]$;

6. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$,

其中 α 为不等于非负整数的任何实数, 而展开式成立的范围当 $\alpha\leqslant-1$ 时为 $(-1,1)$, 当 $-1<\alpha<0$ 时为 $(-1,1]$, 当 $\alpha>0$ 时为 $[-1,1]$.

注 上面的 Taylor 级数 6, 即**二项式级数**, 是一个十分有用的幂级数展开式. 例如上面的级数展开式 1 实际上是二项式级数的特例, 只要在其中将 x 换为 $-x$ 并且取 $\alpha=-1$ 即可. 只是由于该展开式的重要性, 我们单独把它作为一个展开式列出. 级数展开式 5 也可以用先对 $\ln(1+x)$ 求导, 再对 $\alpha=-1$ 时的二项式级数逐项积分得到. 在下面的例题中, 我们还会再用二项式级数推出一些常见的初等函数的幂级数展开式.

这里需要说明, 所谓间接法并没有明确的范围, 实际上只要不是用直接法就都是间接法. **间接法的理论基础是**幂级数展开的惟一性定理 (即命题 14.4.1). 根据这个定理, 不论用什么方法, 只要所得到的幂级数有正收敛半径就可以. 其中当然可以使用四则运算和微积分运算. 对于乘法运算, 由于幂级数在收敛域内部的绝对收敛性, 而乘积级数按照幂级数形式写出时恰好就是 Cauchy 乘积, 因此在 13.3.2 小节中的命题 13.3.4 已经解决了幂级数的相乘问题. 但是对于除法, 则需要有新的理论根据. 下面是这方面的一个命题, 取自 [57].

命题 14.4.4 设函数 f 在 $x=0$ 邻近可以展开为幂级数 $1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$, 则其倒函数 $\dfrac{1}{f}$ 也可以在 $x=0$ 邻近展开为幂级数.

证 从给出收敛半径的 Cauchy-Hadamard 公式可以知道, 存在 $r>0$, 使得 $|a_n|<r^n$ 对每个 $n=1,2,\cdots$ 成立. (此点请读者根据公式 (14.14) 作出证明.)

现在先作形式计算, 即求待定的数列 $\{b_n\}$, 使得成立

$$(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)(1+b_1x+b_2x^2+\cdots)=1. \tag{14.22}$$

将左边的乘积展开, 并等置两边同次数的乘幂项, 就得到计算 $\{b_n\}$ 的递归公式:

$$b_1=-a_1,\ b_2=-a_1b_1-a_2,\ \cdots$$

$$b_n=-a_1b_{n-1}-a_2b_{n-2}-\cdots-a_n,\ \cdots.$$

现在我们用数学归纳法来证明, 对于 $\{b_n\}$ 有下列估计式:

$$|b_n| < 2^{n-1}r^n,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{14.23}$$

对于 $n = 1$, 有 $|b_1| = |a_1| < r$, 因此符合 (14.23). 设估计式 (14.23) 对于 $n = 1, 2, \cdots, k-1$ 成立, 则对于 $n = k$ 就有

$$\begin{aligned} |b_k| &\leqslant |a_1 b_{k-1}| + |a_2 b_{k-2}| + \cdots + |a_{k-1} b_1| + |a_k| \\ &\leqslant (2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 1 + 1) r^k = 2^{k-1} r^k. \end{aligned}$$

因此估计式 (14.23) 成立.

利用这个估计式, 从 Cauchy-Hadamard 公式 (14.14) 就知道, 幂级数

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

至少在 $|x| < \frac{1}{2r}$ 时收敛. 从而当 $|x| < \min\{r, \frac{1}{2r}\}$ 时, 等式 (14.22) 不只是作形式运算 (即待定系数法) 的出发点, 而且是严格成立的. 这也就是所要的结果: 即在 $x = 0$ 的一个等域内有幂级数展开式:

$$\frac{1}{1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots. \quad \square$$

注 1 在这个命题的基础上再结合级数相乘, 就可以得到幂级数相除的一般结论: 若 $f = g/h$, 其中函数 g 和 h 在点 x_0 的邻近都可以展开为幂级数, 且 $h(x_0) \neq 0$, 则 f 也可以在 x_0 邻近展开成幂级数, 同时这个级数的系数可以用类似于上述命题证明中的待定系数法来得到.

注 2 在 [19] 的卷 2 第 419 小节中证明了更为一般的命题. 这里只叙述其结论, 证明从略. 还可以参考 [16] 的第二章.

命题 设幂级数展开式 $y = f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 0$ 邻近成立, 又有幂级数展开式 $z = \varphi(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ 在 $(-\rho, \rho)$ 中成立, 如果满足条件 $|a_0| = |f(0)| < \rho$, 则复合函数 $z = \varphi(f(x))$ 在 $x = 0$ 的邻近可以展开为幂级数, 同时其系数可以用级数代入级数的待定系数法得到.

14.4.3 例题

这一节的内容与 7.2.2 和 7.2.3 小节的部分内容有密切联系. 那里的许多 Taylor 公式的计算可以作为本节的特例得到, 而且当时的间接法还只有级数代入级数之类的方法, 现在则还可以用逐项求积与逐项求导方法.

以下第一个例题中的两个初等函数的 Maclaurin 展开可以用直接法得到, 也可以用逐项积分的间接法得到. 后者无疑更为方便. 初学者应当重视这些基本训练, 同时也应当记住这两个基本的 Taylor 级数展开式.

例题 14.4.1 用间接法求 $\arctan x$ 与 $\arcsin x$ 的 Maclaurin 级数展开式.

证 (1) 由于 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{(1+x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1,1)$, 用逐项积分就得到

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \ x \in (-1,1).$$

(2) 由于 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$, $x \in (-1,1)$, 用逐项积分就得到

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} + \cdots, \ x \in (-1,1).$$

注意: 用 Abel 第二定理知道两个展开式都在端点 $x = \pm 1$ 处成立. □

例题 14.4.2 现在求正弦和余弦之外的四个三角函数的 Maclaurin 展开式 (其中 $\cot x$ 和 $\csc x$ 是在乘以因子 x 之后的 Maclaurin 展开式). 仿照上册 216 页中的做法, 并应用命题 14.4.4, 就得到 Maclaurin 级数展开式

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!} x^n + \cdots, \tag{14.24}$$

其中左边的表达式在点 $x = 0$ 时用其极限值 1 来代替. 与 7.2.3 小节中的记号相同, $\{B_n\}$ 为 **Bernoulli 数**, 其中 $B_1 = -1/2$, 当 n 为大于 1 的奇数时 $B_n = 0$. 以下采用记号 $\overline{B}_n = (-1)^{n-1} B_{2n}$.

由此出发就可以与例题 7.2.8 和 7.2.9 类似地得到 Maclaurin 级数展开式

$$x \cot x = 1 - \frac{\overline{B}_1 2^2}{2!} x^2 - \frac{\overline{B}_2 2^4}{4!} x^4 + \cdots - \frac{\overline{B}_n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \tag{14.25}$$

$$\tan x = \frac{\overline{B}_1 (2^2-1) 2^2}{2!} x + \frac{\overline{B}_2 (2^4-1) 2^4}{4!} x^3 + \cdots + \frac{\overline{B}_n (2^{2n}-1) 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots. \tag{14.26}$$

再利用三角恒等式 $\csc x = \dfrac{1}{2}\left(\cot \dfrac{x}{2} + \tan \dfrac{x}{2}\right)$, 即可得到

$$x \csc x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{B}_n (2^{2n} - 2)}{(2n)!} x^{2n}. \tag{14.27}$$

最后, 回顾例题 7.2.7 并应用命题 14.4.4 就可以得到

$$\sec x = E_0 - \frac{E_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \tag{14.28}$$

其中 $\{E_{2n}\}$ 为 **Euler 数** (见上册 215 页)[①].

① 根据第十六章例题 16.2.3 后的注, 利用渐近等式 (16.13), 即 $\overline{B}_n \sim \dfrac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$, 就很容易确定 (14.24), (14.25), (14.26) 和 (14.27) 四个 Maclaurin 级数的收敛半径分别为 2π, π, $\pi/2$ 和 π. 又从 $\sec x = \left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \cdot (x \csc x)$ 和级数乘积定理, 就可以推出 (14.28) 的收敛半径为 $\pi/2$. 最后, 根据 Abel 第二定理即可确定所有这些展开式的准确的成立范围.

例题 14.4.3 求 $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ 在 (1) $x_0=0$ 和 (2) $x_0=-\dfrac{1}{2}$ 处的幂级数展开式.

解 (1) 这时可以如下计算:

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}&=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}\\ &=(1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+\cdots)-(x+x^4+x^7+x^{3n+1}+\cdots)\\ &=1-x+x^3-x^4+\cdots+x^{3n}-x^{3n+1}+\cdots,x\in(-1,1). \end{aligned}$$

这就是所求的幂级数展开式.

(2) 为了将函数 f 展开成关于 $x+\dfrac{1}{2}$ 的乘幂的幂级数, 可计算如下:

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}&=\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\\ &=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]^n\\ &=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{4}{3})^n\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

其中应用了上一节中列举的基本公式之 1, 即关于 $\dfrac{1}{1-x}$ 的幂级数展开式. 从以上计算过程不难看出级数展开式的有限范围为 $\left|\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right|<1$, 即是 $x\in(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2})$. □

注 如果注意到

$$\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k+1,\ k=0,1,2,\cdots,\\ 0, & n=3k+2,\end{cases}$$

则可以将 (1) 的幂级数展开式改写为

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}x^n,\ x\in(-1,1).$$

例题 14.4.4 求函数 $f(x)=\ln^2(1+x)$ 的 Maclaurin 级数展开式.

解 用级数乘法即可得到在 $(-1,1)$ 中成立幂级数展开式:

$$\ln^2(1+x)=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)x^n. \tag{14.29}$$

当 $x=1$ 时右边级数收敛, 从 Abel 第二定理知该展开式在 $x=1$ 时仍成立. □

例题 14.4.5 设 a 不是 π 的整倍数, 求函数 $\dfrac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$ 的 Maclaurin 级数展开式.

解 用待定系数法计算如下. 设

$$\frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

两边乘以 $1-2x\cos a+x^2$ 并等置两边同次项, 就可求出

$$a_0=0,\ a_1=\sin a,\ a_2=\sin 2a,\cdots,a_n=\sin na,\cdots.$$

因此 $\dfrac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\sin na$. 容易看出右边的级数在 $x\in(-1,1)$ 上收敛. 而当 a 不是 π 的整倍数时, 数列 $\{\sin na\}$ 不趋于 0, 因此级数的收敛域就是 $(-1,1)$. □

上面所举的例题都用间接展开法, 但这并不等于说, 间接法总是比直接法好, 下面这道例题, 用直接法要比用间接法容易一些.

例题 14.4.6 求 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$ 的 Maclaurin 级数展开式.

解 如果用间接展开法, 则需要将 e^x 与 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数展开式相乘, 运算将较为复杂. 因此我们采用直接展开法. 首先, 可用数学归纳法证明公式 $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^x\sin(x+\dfrac{n\pi}{4})$, 由此得到

$$f^{(n)}(0)=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4},\ n=1,2,3,\cdots.$$

这样就得到所求的 Maclaurin 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n!}x^n. \tag{14.30}$$

按照直接法的一般步骤, 到这里为止还不知道级数 (14.30) 是否收敛于 $\mathrm{e}^x\sin x$, 因此需要应用命题 14.4.3 去研究 Taylor 公式的余项. 但是这里可以避免这一步. 利用 e^x 和 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数展开式均在 $(-\infty,+\infty)$ 成立, 因此处处绝对收敛. 应用级数乘积定理 (命题 13.3.4), 就可以知道 $\mathrm{e}^x\sin x$ 也能够展开为幂级数, 且收敛半径也是 $+\infty$. 再利用幂级数展开的惟一性定理 (即命题 14.4.1), 可见 (14.30) 必定在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 $\mathrm{e}^x\sin x$. □

14.4.4 练习题

1. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$ $(a\neq 0)$ 分别按 x, $x-b$, $\dfrac{1}{x}$ 的乘幂展开.
2. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开为 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂级数.
3. 设函数 f 在区间 $(-a,a)$ $(a>0)$ 内无限次可微, 且导函数序列 $\{f^{(n)}\}$ 在 $(-a,a)$ 上一致有界, 证明: f 在 $(-a,a)$ 上可以展开为 Maclaurin 级数.

4. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可导, 并且其导函数列在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致有界, 如果存在正数数列 $\{x_n\}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ 且 $f(x_n)=0, n=1,2,\cdots$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

5. 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并确定其成立范围:

(1) $\sqrt{4-x}$;

(2) $a^x,\ a>0$;

(3) $\ln(1+3x+2x^2)$;

(4) $\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;

(5) $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$;

(6) $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1-x^2}$;

(7) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$;

(8) $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

6. 将下列函数在指定点展开为幂级数:

(1) $\dfrac{1}{3+x},\ x=2$;

(2) $\ln\dfrac{1}{3+2x+x^2},\ x=-1$;

(3) $\ln x,\ x=3$;

(4) $\dfrac{x-1}{x+1},\ x=1$;

(5) $\sin x,\ x=\dfrac{\pi}{6}$.

§14.5 对于教学的建议

14.5.1 学习要点

1. 一致收敛性是函数项级数与函数列中最重要也是最困难的概念. 对于这个概念的掌握需要花很大力气. 初学者首先要能正确叙述 "一致性" 的有关论述, 记住一些重要的反例, 如函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性讨论可以很形象地体现出 "一致性" 论述中的要点. 其次, 要能体会一致收敛性在将通项函数或函数列的分析性质 "传递" 给和函数或极限函数时的重要性.
2. 本章的一个难点是在函数项级数与函数列的概念中, 同时出现了两个变量: 正整数变量 n 与连续变量 x. 在处理收敛、一致收敛问题或讨论和函数与极限函数的分析性质时, 同学往往不容易分辨清楚何时该将哪个变量看成常量. 可以向同学强调的是, 在考虑两个极限的累次极限时, 计算第一个极限时, 应该把另一个变量看作常量; 同样, 对极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{|S_n(x)-S(x)|\ |\ x\in E\}$, 计算 $\sup\{|S_n(x)-S(x)|\ |\ x\in E\}$ 时, 要把 n 看作常数. 另外, 在讨论与点收敛有关的问题时, x 可以看作常数, 而讨论与一致收敛有关的问题时, 则 x 一般不能看作常数.
3. 尽管一致收敛性有很多判别法, 但最常用的一致收敛性判别法还是 M 判别法. 能用多种手段找出优级数是一致收敛性判别法部分的基本教学要求.

4. 函数项级数的和函数的连续性、逐项求导、逐项积分等本质上是运算次序的交换. 这里极限顺序交换的基本原理是很基本的一个事实, 在一系列问题中起指导作用.
5. 和函数 (极限函数) 在一个区间上的局部分析性质, 如连续性、可微性等都可以通过在每一点的邻域上的讨论而得. 因此, 可以用内闭一致收敛取代一致收敛, 即使是求积分, 也可先考虑内闭区间上的逐项积分. 如证明 Riemann 的 zeta-函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的无穷次可微, 求积分
$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x\right)\mathrm{d}x$$
的值等都是一些典型的例子.
6. 一般项的函数项级数的讨论可围绕一些重要的例子, 如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 等展开, 抓住重点, 举一反三.
7. 幂级数部分的教学除了以 Abel 定理为中心的基本理论之外, 应注意应用能力的培养, 如间接展开、定积分计算、求重要级数的和等.
8. 幂级数是一种特殊的函数项级数, 因此, 本章前两节中关于函数项级数的一切结论, 对于幂级数都是适用的. 在教学中, 遇到需要用这些结论时, 可复习一下一般函数项级数的对应结论, 以起到温故知新的作用.

14.5.2 参考题

第一组参考题

1. 试举例: 在 $[0,1]$ 上一致收敛于连续函数的函数列 $\{S_n(x)\}$, 但每个 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不连续.
2. 用逐项求导方法写出函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的任意阶导数的表达式, 并证明运算的合理性.
3. 证明 Dirichlet 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 的收敛域具有以下特性: 若存在 x_1,x_2, 使 $x=x_1$ 时级数发散, 而当 $x=x_2$ 时级数收敛, 则一定存在 $r\in(-\infty,+\infty)$, 使 $x<r$ 时级数发散, 而 $x>r$ 时级数收敛.
4. 设 $f\in C[0,1]$, 定义函数列 $S_n(x)=x^nf(x)$, $x\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$, 证明: $\{S_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛的充分必要条件是 $f(1)=0$.
5. 设数列 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 区间内的所有有理点的一个排列, 证明函数
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n},\ x\in[0,1]$$

具有性质: (1) 处处连续; (2) 在 $[0,1]$ 的每个无理点处可微, 而在每个有理点处不可微.

6. 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上无穷次可微且不恒等于 0, $f^{(n)}(0)=0, n=0,1,\cdots$. 如果函数列 $\{a_n f^{(n)}\}$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 0, 其中 $\{a_n\}$ 为一给定的数列, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n=0$.

7. 用幂级数方法证明级数乘积的一个基本结果 (即命题 13.3.7): 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 和它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛, 且分别以 A, B, C 为和, 则 $C=AB$.

8. 求下列函数的 Maclaurin 展开式:

$$(1)\ \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};\qquad (2)\ \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}};\qquad (3)\ \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$$

(函数在 $x=0$ 处用极限值定义).

9. 设数列 $\{a_n\}$ 有极限 L, 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=L$.

10. 设多项式序列 $\{P_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 P, 证明: P 也是多项式.

11. 设 $\{P_n\}$ 是次数不超过 D 的多项式序列, 证明: 若该序列于区间 $[0,1]$ 上收敛, 则也一定一致收敛.

12. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 Maclaurin 级数展开式, 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 f 为多项式.

13. 设 $C(a)$ 为 $(1+x)^a$ 的 Maclaurin 级数展开式中 x^{2003} 项的系数, 计算积分

$$\int_0^1 C(-y-1)\Big(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots+\frac{1}{y+2003}\Big)\mathrm{d}y.$$

14. 求级数和 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{m^2 n}{3^m(n3^m+m3^n)}$.

15. 甲乙两人掷骰子, 两人依次轮流掷并且由甲掷第一次, 问第一个六点由甲掷出的概率是多少?

16. 某侨商捐资给母校设立奖学基金. 该基金存入银行, 每年可以得到 $a\%$ 的利息. 奖学金按如下数目发放: 基金存入银行当日发放一万元, 第二年同一天发放二万元, 以后每年同一日发放, 发放金额比前一年多一万元. 要使这笔奖学金能够永远按此规律发放下去, 该侨商至少应捐资多少元?

第二组参考题

1. 设 $\{f_n\}$ 是在 $[a,b]$ 上的可积函数列, 且于 $[a,b]$ 上一致有界, 若已知 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 证明: 积分值所成的数列必有极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

2. 若在 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于极限函数 f, 证明: $f\in R[a,b]$, 且成立
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 设具有相同单调性的单调函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $f\in C[a,b]$, 则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

4. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列, 并已知对于每个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 单调增加收敛于 $f(x)$. 证明: f 在 $[a,b]$ 上必有最小值. 又问: 若将最小值换为最大值, 或将 $[a,b]$ 换为 (a,b), 则结论如何?

5. 设 $\{f_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数列, 且存在 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 使 $f_n(x_n)=x_n$, $n=1,2,\cdots$. 如果导函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 试证明:

   (1) 函数列 $\{f_n\}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

   (2) 设 $\{f_{n_k}\}$ 的极限函数为 f, 则存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$.

   (3) f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且在 $[a,b]$ 上 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)$.

6. 设在区间 $[a,b]$ 上的连续函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的通项之间满足条件 $|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$, $n=1,2,\cdots$, 又设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的和函数在 $[a,b]$ 上连续, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数也在 $[a,b]$ 上连续.

7. 证明: 对任意 n 和 x 成立不等式 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 2\sqrt{\pi}$.

8. 利用幂级数展开证明 (上册 374 页的) 不等式:
$$0<\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x<\frac{x^3}{3(1-x^2)},\ 0<x<1.$$

9. 利用幂级数展开证明: 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 和实数 x 成立不等式:
$$\left|\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\leqslant\mathrm{e}^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n<\frac{x^2\mathrm{e}^{|x|}}{2n}.$$

10. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的部分和数列为 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, $\sigma_n=(S_0+S_1+\cdots+S_{n-1})/n$, $n=0,1,\cdots$, 且有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=S$, 即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的 Cesàro 和为 S (参见第十三章末的几个参考题), 证明:

   (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛;

(2) 在 $(-1,1)$ 上成立 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_{n+1} x^n$;

(3) 记 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1,1)$, 则有 $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = S$.

11. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为正数数列, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, 且在 $x=1$ 处发散. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = A$, 证明:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = A.$$

12. 证明: 如果正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = A$, 则 $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = A$.

(本题为上题之特例, 但也可以用其他方法做.)

13. 设 f 在区间 $[0,r]$ 上无限次可微, 且 f 及其所有导函数都是非负的, 证明: f 的 Maclaurin 级数展开式在 $[0,r)$ 上成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

14. (生成函数法) 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $\forall n \geqslant 2$, 定义

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

为 $\{a_n\}$ 的**生成函数**. 试求出 f, 并由此求出 $\{a_n\}$ 的解析表达式, 同时求出该数列的**增长数**: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (参见上册 48 页).

15. 利用上题的生成函数方法证明组合学中的 Vandermonde 恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n},$$

并由此推出 $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

第十五章 Fourier 级数

Fourier 级数是幂级数之外的另一类重要的函数项级数, 它的出现对于现代数学的理论发展和实际应用都有重大意义. 本章只讨论 Fourier 级数理论的一些基础知识. §15.1 节为有关 Fourier 系数的各种性质. §15.2 节讨论 Fourier 级数在各种意义下的收敛性问题. 最后一节为学习要点和参考题.

§15.1 Fourier 系数

Fourier 级数是一类特殊的三角级数, 它的特殊性在于其系数是从某个可积函数出发经过 Euler-Fourier 公式计算出来的.

15.1.1 Fourier 系数的计算公式

设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积. 其中若 f 为常义可积, 则可积蕴含绝对可积, 又若 f 为广义可积, 则绝对可积蕴含可积.

计算 f 的 Fourier 系数的 Euler-Fourier 公式是:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots; \tag{15.1}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots. \tag{15.2}$$

如果三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 中的系数满足公式 (15.1) 和 (15.2), 则称该三角级数是 f 的 **Fourier 级数**, 记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{15.3}$$

注意: 上述公式只表明右边的系数 a_n, b_n 与左边的函数 f 之间满足公式 (15.1) 和 (15.2). 记号 "$\sim$" 没有其他含义, 公式 (15.3) 右边的级数是否收敛, 以及在收敛时其和函数是否等于 f, 都是需要另行讨论的问题.

回顾教科书中导出 Euler-Fourier 公式的过程, 其出发点是在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛 (也就是在一个周期长度的闭区间上一致收敛) 的一个三角级数, 然后通过逐项求积导出上述公式. 由此就得到 Fourier 级数学习中的第一个基本定理 (其中对一致收敛的范围理解如上):

命题 15.1.1 一致收敛的三角级数必是其和函数的 Fourier 级数.

虽然用 Euler-Fourier 公式得到的 Fourier 级数未必一致收敛, 但这个命题仍然是很有用的一个基本结果.

注 1 虽然只有周期函数才可能有 Fourier 级数, 但当 f 的定义域是某个长度为 2π 的区间时, 可先将其延拓成周期函数, 且把延拓后的周期函数的 Fourier 级数称为 f 在该区间上的 Fourier 级数. 对于周期不是 2π 的周期函数或只在长度不是 2π 的区间上定义的函数, 也可用类似的方法定义它们的 Fourier 级数.

注 2 当 f 为偶函数或奇函数时, f 的 Fourier 级数有较为简单的形式: 当 f 为偶函数时, 所有的 b_n 均为 0, 并且 (15.1) 成为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{15.4}$$

当 f 为奇函数时, 所有的 a_n 均为 0, 并且 (15.2) 成为

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{15.5}$$

这时 f 的 Fourier 级数中只出现含有余弦函数的项与常数项或只出现含有正弦函数的项, 分别称为**余弦级数或正弦级数**.

注 3 从公式 (15.4) 不难看出, 如果 f 在 $[0,\pi]$ 上具有某种对称性, 例如关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 为偶函数 (奇函数), 则可以证明在公式 (15.4) 中当 n 为奇数 (偶数) 时积分为 0. 对于公式 (15.5) 有类似的结论 (参见 10.4.3 小节中的命题和例题).

下一个命题建立 f 的 Fourier 系数与其导函数 f' 的 Fourier 系数之间的联系. 这也是 Fourier 系数的基本性质之一.

命题 15.1.2 设以 2π 为周期的连续函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上除了有限个点以外可导, 又设 (在任意补充有限个点上的值之后) f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 则从 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 就有

$$\begin{aligned} f'(x) &\sim \left(\frac{a_0}{2}\right)' + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx), \end{aligned}$$

若用 a'_n, b'_n 记 f' 的 Fourier 系数, 这就等价于

$$a'_0 = 0,\ a'_n = nb_n,\ b'_n = -na_n,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{15.6}$$

证 因为 f 是以 2π 为周期的连续函数, 因此 $f(-\pi) = f(\pi)$, 由此即可推出 $a'_0 = 0$. 然后由分部积分公式[①]可得

$$\begin{aligned} a'_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\cos nx \\ &= n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = nb_n. \end{aligned}$$

① 这里需要将分部积分公式 (10.11) 稍作推广, 参见上册 315 页注 2.

这就是 $b_n = \dfrac{a'_n}{n}$. 类似地可以证明 $a_n = -\dfrac{b'_n}{n}$. □

注 对于满足条件的 f, 公式 (15.6) 可以用于从 f 的 Fourier 系数得到 f' 的 Fourier 系数. 这里只需要形式上的 "逐项求导" 即可.

反之, 能否从 f' 的 Fourier 系数得到 f 的 Fourier 系数? 从命题的证明可知, 如果 $f \in C[-\pi,\pi]$ 但不满足 $f(\pi) = f(-\pi)$, 则肯定不行. 但是有一个方法可以解决这个问题. 这就是将 f 写成

$$f(x) = [f(x) - \frac{a'_0}{2}x] + \frac{a'_0}{2}x, \tag{15.7}$$

这时右边第一项满足命题中的条件, 其导函数为 $f'(x) - a'_0/2$, 因此可用 (15.6). 至于右边的第二项, 则可直接计算它的 Fourier 系数. 最后将两个结果合并. 当然 f 的 Fourier 系数 a_0 需要直接计算得到 (见后面的例题 15.1.2 之解 2).

15.1.2 Fourier 系数的渐近性质

由 Riemann 引理 (例题 10.2.6) 就得到这方面的第一个性质:

命题 15.1.3 若 f 为周期 2π 的可积和绝对可积函数, 则其 Fourier 系数 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 必为无穷小量: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

利用命题 15.1.2 可知在 f 的可导性与 Fourier 系数的渐近性态之间的联系:

命题 15.1.4 设以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上除了有限个点以外均有 $k+1$ 阶导数. 如果其 k 阶导函数 $f^{(k)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处连续且 $f^{(k+1)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 则有

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\ b_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

命题 15.1.5 设 f 是以 2π 为周期的函数且存在 $\alpha \in (0,1]$, 使 f 满足 α 阶 Lipschitz 条件:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha,$$

其中 L 为常数[①], 则成立:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\ b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

证 由本题的条件知, f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 因此其 Fourier 系数存在. 在 Fourier 系数公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \tag{15.8}$$

中令 $x = t + \dfrac{\pi}{n}$, 可得

① $\alpha > 1$ 是没有意义的, 见上册 153 页.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nt+\pi)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos nt\,\mathrm{d}t.$$

将上式与 (15.8) 取平均得到 $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nx\,\mathrm{d}x.$ 然后可以估计如下:

$$\begin{aligned}|a_n| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot|\cos nx|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}L\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|\,\mathrm{d}x \leqslant L\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

这就证明了 $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$. 类似地可证明 $b_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$. □

15.1.3 Fourier 系数的几何意义

初学者一定会感到奇怪, Fourier 系数的计算公式 (15.1), (15.2) 完全是积分运算, 怎么会有什么几何意义?

实际上这里的几何意义是人们的一种想像或者一种类比, 即将满足一定条件的函数集合想像为空间, 并将几何学中的正交 (即垂直) 概念推广到函数之间. 泛函分析等学科的发展充分证明这种方法具有极强的生命力. 对于 Fourier 级数来说, 这种观点也是非常本质的. 本小节就是要用几何观点来解释 Fourier 系数和 Fourier 级数的意义.

这里的函数空间是周期 2π 的可积和绝对可积函数集合, 其中有函数之间相加以及函数与实数的乘法. 按照线性代数这就是一个线性空间或向量空间.

然后在这个空间中引进正交概念. 考虑空间中的两个函数 f 与 g, 如果有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

就称 f 和 g **正交**. 在这个定义下, 三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

中任何两个函数正交, 因此称为**正交函数系**.

现在考虑用三角多项式

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) \tag{15.9}$$

来逼近函数 f, 其中的逼近误差, 也就是 T_n 与 f 之间的距离, 是按照平方平均意义来定义的:

$$d^2(f,T_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,\mathrm{d}x. \tag{15.10}$$

这时就可以证明下列结论.

命题 15.1.6 (Fourier 系数的最优性) 设 f 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的可积和平方可积函数[①], $T_n(x)$ 是 (15.9) 中的任意 n 次三角多项式, $S_n(x)$ 是 f 的 Fourier 级数 (15.3) 的部分和函数

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则有

$$d^2(f,S_n)\leqslant d^2(f,T_n),$$

且当且仅当 $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, $k=1,2,\cdots,n$ 时成立等号.

证 直接按照定义 (15.10) 计算并作配方得到

$$\begin{aligned}d^2(f,T_n)&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\pi a_0A_0-2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k)+\frac{\pi A_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\\&\qquad+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}((A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2)\right]\\&\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=d^2(f,S_n).\quad\square\end{aligned}$$

注 在右边的图中作出了命题的几何意义的示意图. 如果考虑由所有 T_n 构成的集合, 问题就是要从中找出与 f 距离最小的一个三角多项式. 这个问题的解就是 S_n. 其原因在于, Euler-Fourier 公式在几何上就是 f 到三角函数系的正交投影, 而 S_n 就是 f 到所有 T_n 的集合上的正交投影, 因此 S_n 到 f 的距离最短.

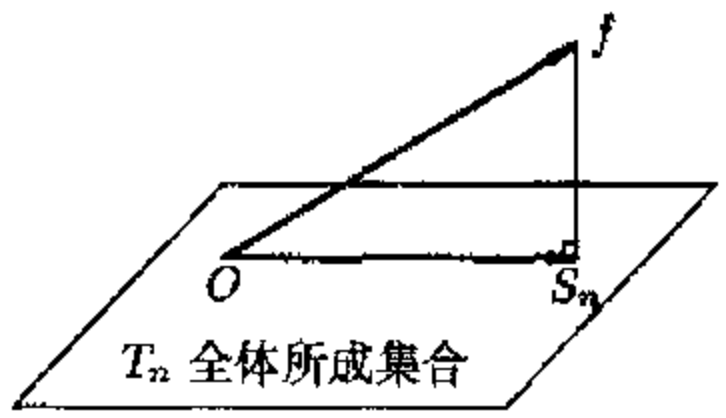


图 15.1

由命题 15.1.6 还可以得到

命题 15.1.7 (Bessel 不等式) 若 f 于区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, 且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.\tag{15.11}$$

① 关于 f 的条件要作些解释. 若 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上常义可积, 则也绝对可积和平方可积. 否则, 从 f^2 在 $[-\pi,\pi]$ 上广义可积, 由不等式 $|f(x)|\leqslant\frac{1+f(x)^2}{2}$ 可以推知 f 可积与绝对可积.

证 从命题 15.1.6 得到

$$d^2(f,S_n)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geqslant 0.$$

由于这对每个 n 成立, 因此 (15.11) 左边的正项级数的每个部分和均以右边的积分为上界, 从而收敛, 且使该不等式成立. □

注 1 这个结果与 Fourier 级数的收敛性没有关系, 由此就可以得到 $a_n=o(1)$, $b_n=o(1)$, 这里也不需要用 Riemann 引理.

注 2 由此可知, 在 $0<p<\frac{1}{2}$ 时, 三角级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 不可能是可积和平方可积函数的 Fourier 级数①.

15.1.4 例题

例题 15.1.1 证明: 三角多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$ 的 Fourier 级数就是其本身.

证 三角多项式可看成是只含有限个非零项的三角级数, 因此在 $(-\infty,+\infty)$ 上一数收敛, 引用命题 15.1.1 即得 (本题的另一个解法当然是直接计算). □

在用公式计算 Fourier 系数时, 即使对于相当简单的 f, 也可能要作多次分部积分运算, 计算量相当大. 因此, 除了要细心地按公式计算之外, 还应该学习 (或发明) 一些较为灵活的计算方法. 为此在下面列举几种非常规方法供参考. 此外, 在学了逐项积分定理后还会有新的计算方法.

例题 15.1.2 求函数 f 的 Fourier 级数, 其中 $x\in(-\pi,\pi)$ 时, $f(x)=x^3$.

解 1 利用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 在复数域进行计算往往是很有效的方法. 对本题可以计算如下:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\frac{3x^2}{(\mathrm{i}n)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\frac{6x}{(\mathrm{i}n)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\frac{6}{(\mathrm{i}n)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\\&=\mathrm{i}\frac{2(-1)^n}{\pi}\left(-\frac{\pi^3}{n}+\frac{6\pi}{n^3}\right)=\mathrm{i}(-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi^2}{n}-\frac{12}{n^3}\right).\end{aligned}$$

于是所求的 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi^2}{n}-\frac{12}{n^3}\right)\sin nx.\qquad\square$$

---

① 但是这两个三角级数仍然是其和函数的 Fourier 级数, 它们的和函数不平方可积, 但可积和绝对可积. 见后面的例题 15.2.3 和 15.2.4.

解 2 这里的工具是命题 15.1.2. 先用公式 (15.2) 直接计算出在 $(-\pi,\pi)$ 上函数 x 的 Fourier 级数:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \tag{15.12}$$

然后从 $(x^2)' = 2x$ 和公式 (15.6) 得到

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \tag{15.13}$$

其中常数项是直接计算得到的.

由于在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的 x^3 不可能连续延拓为周期 2π 的连续函数, 因此不能直接用命题 15.1.2, 但可以采用技巧 (15.7) 将 x^3 分解为:

$$x^3 = (x^3 - \pi^2 x) + \pi^2 x. \tag{15.14}$$

右边第一项可以延拓为满足命题 15.1.2 的周期 2π 的连续函数, 其导函数为 $3x^2$, 因此就可以用公式 (15.6) 和 (15.12) 得到 x^3 的正弦级数中 $\sin nx$ 的系数为

$$3 \cdot \frac{4(-1)^n}{n^3} + \pi^2 \cdot \frac{2(-1)^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^n 12}{n^3} + \frac{(-1)^{n-1} 2\pi^2}{n}. \quad \square$$

例题 15.1.3 设 f 为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的可积和绝对可积函数. 问: 如何将 f 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 上, 使其 Fourier 级数具有如下的形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x.$$

解 由题意要求 $a_{2n} = 0$, 从公式 $a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$ 可见, 由于 $\cos 2nx$ 在 $[0,\pi]$ 上关于其中点为偶函数, 根据上册 324 页命题 10.4.5, 只要有 $f(x) = -f(\pi - x)$ 成立就可以使上述积分为 0. 这决定了 f 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上的延拓. 定义 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 然后用偶延拓 $f(-x) = f(x)$ 将 f 延拓到 $(\pi,0)$ 上即可.

小结 将 f 以如下方式延拓:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ -f(\pi - x), & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \\ 0, & x = 0, \frac{\pi}{2}, \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad \square$$

15.1.5 练习题

1. 求下列函数的 Fourier 级数:
   (1) $\sin^3 x + \cos^4 x$;
   (2) $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x \in (-\pi,\pi)$.

2. 将定义在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的可积和绝对可积函数 f 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$ 上, 使其 Fourier 级数具有如下的形式: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x$.

3. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, & x = 0, \\ -c, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

的 Fourier 级数的前 $2n+1$ 项的和 $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 具有形式

$$S_n(x) = \frac{2c}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} \, \mathrm{d}t.$$

4. 设 $f \in C^1[-\pi, \pi]$, 证明

$$a_n = o(\frac{1}{n}), \ b_n = O(\frac{1}{n});$$

如果又有 $f(\pi) = f(-\pi)$, 则 $b_n = o(\frac{1}{n})$.

5. 设 f 是以 2π 为周期的有界函数且在 $(-\pi, \pi)$ 上逐段单调, 证明

$$a_n = O(\frac{1}{n}), \ b_n = O(\frac{1}{n}).$$

(可在每个单调区间上用积分第二中值定理 (即命题 10.2.2).)

6. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积和绝对可积, 证明: 用 $\sin x$ 去乘 f 的 Fourier 级数的每一项所得的三角级数就是 $f(x)\sin x$ 的 Fourier 级数.

7. 设 $[a, b]$ 上的连续函数系 $\{e_n\}$ 满足条件 $\int_a^b e_i(x)e_j(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{ij}$, 其中 $\delta_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$, 则称该函数系在 $[a, b]$ 上**为规范正交系**. 设 f 在 $[a, b]$ 上可积和平方可积, 定义 $c_n = \int_a^b f(x)e_n(x) \, \mathrm{d}x$ 为 f 关于 e_n 的 Fourier 系数, $n = 1, 2, \cdots$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ 收敛. 又问: 当 n 固定时, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 取什么值时, 平方平均误差

$$\int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

最小?

8. 设 g 是周期为 1 的连续函数且 $\int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x = 0$, 函数 $f \in C^1[0, 1]$, 令

$$a_n = \int_0^1 f(x)g(nx) \, \mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots,$$

证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

§15.2 Fourier 级数的收敛性

本节讨论 Fourier 级数在各种意义上的收敛性问题, 其中包括点收敛, 在 Cesàro 意义下的收敛, 平方平均收敛和一致收敛.

为方便起见, 在以下的叙述中只考虑周期 2π 的情况, 但通过简单变换就可以将结论推广到一般的周期情况.

15.2.1 Dirichlet 核和点收敛性

Fourier 级数的点收敛性研究主要依赖于 Dirichlet 核 (参见上册 322 页). 利用 Euler-Fourier 公式和三角变换, 将函数 f 的 Fourier 级数的部分和函数列

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ n = 1, 2, \cdots,$$

用 **Dirichle 积分**表示出来:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad (15.15)$$

其中 D_n 是 **Dirichlet 核**

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}. \quad (15.16)$$

$D_n(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在一个周期上的积分值为 π (见上册 (10.12)):

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \quad (15.17)$$

从方法上观察, 局部化定理以及各种常见判别法都可以通过对 Dirichlet 核的研究而得到. 在图 15.2 中作出了 $D_n(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的示意图, 其中取 $n = 9$. $x = 0$ 为 $D_n(x)$ 的可去间断点, 其极限值为 $n + \frac{1}{2}$, 是曲线的主峰高度. $D_n(x)$ 的绝对值最小的两个零点 $\pm\pi/(n+\frac{1}{2})$ 之间的主峰下的面积当 $n \to \infty$ 时趋于 π, 而其余峰谷和横轴之间的面积之和则正负相消趋于 0. 因此公式 (15.17) 中的积分值主要就是由这个最高的主峰提供的.

$D_n(x)$ 的这些特性值得当函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处满足一定条件 (例如可导) 时, 就能够建立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0).$$

这就是 Dirichlet 核的作用, 即通过积分运算和取极限 "提取" 出函数 g 在 $x = 0$ 的值. 若对 g 的自变量作平移就可以得到其他点的值.

由此得到的第一个结果就是**局部化定理**, 它是 Fourier 级数的一个特点. 由于函数 f 的 Fourier 系数是按照 Euler-Fourier 公式通过积分得到的, 因此 f 的 Fourier 级数在点 x_0 的敛散性似乎理所当然地应当与 f 在整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上的

性态有关. 但局部化定理对此给出了完全不同的论断. 有关点收敛的各种判别法也都是在这个基础上建立起来的.

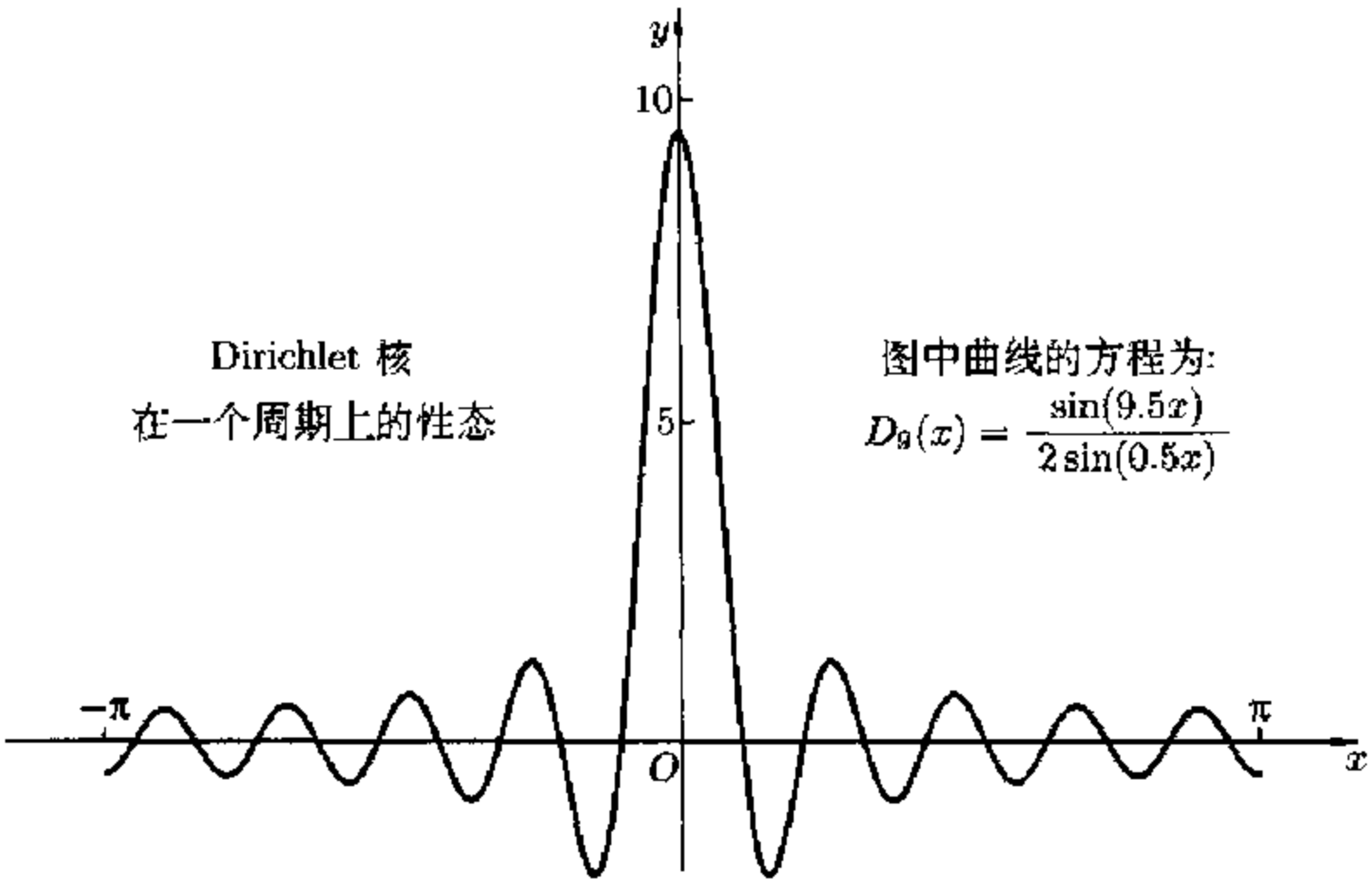


图 15.2

局部化定理即是对任意小的固定正数 δ 有渐近等式:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t+o(1)\quad(n\to\infty).$$

利用 (15.17), 对于任意 s 就有

$$S_n(x)-s=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2s]D_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15.18}$$

这样就可以研究在什么条件下 f 的 Fourier 级数于点 x 处收敛于 s. 由于 (15.18) 的特殊形式, 经常令 $s=\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$, 并在一系列条件下证明 f 的 Fourier 级数收数于这个值. 这就是教科书中的一系列判别法, 当然它们都是充分性判别法. 本书在这里不再重复.

需要指出, Fourier 级数的点收敛性是一个十分困难的问题, 即使对于连续周期函数也是如此. 这里浏览一下已经取得的进展是适宜的.

Fourier 级数的点收敛的研究进展 早期进展是举出发散的例子. 要找到一个连续函数, 使得它的 Fourier 级数在一个点上发散, 这已经不是一个平凡的问题. 自从 du Bois-Reymond (1873) 举出了这样的例子之后, 发散点处处稠密的连续函数例子也已经找到. 若在 Lebesgue 可积函数中考虑问题, 则 Kolmogorov 举出了 f 的 Fourier 级数几乎处处发散 (1923) 和处处发数 (1926) 的例子. (**几乎处处**是实变函数论中的概念, 在上册 304 页已有解释.)

另一方面, Lusin 则猜测连续函数的 Fourier 级数几乎处处收敛. 由于以上的许多反例, 在很长的时间内很少有人相信这个猜测是正确的. 这个猜测最终在

1966 年为 Carleson 正面解决, 他证明了包含连续函数在内的 L 平方可积函数的 Fourier 级数一定是几乎处处收敛的. 这是一个引起轰动的重大成果. (Carleson 是 1992 年 Wolf 奖的获得者.)

15.2.2 Gibbs 现象

由于 Fourier 级数的每一项是连续函数, 因此容易知道, 如果 Fourier 级数的和函数在某点不连续, 则级数在该点的邻域中不可能是一致收敛的. 但是对于 Fourier 级数来说这里还有一个更为奇特的现象, 即所谓 Gibbs 现象. 这里的要点是, 若 x_0 是和函数的一个 (第一类) 间断点, 则当 x_n 趋于 x_0 的左侧或右侧时, 部分和的值 $S_n(x_n)$ 不会收敛于 $S(x_0)$. 不但如此, 下面的分析表明, 这里的误差不会因 n 的增加而减少.

为简单起见, 我们先讨论具有典型意义的一个特例:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \tag{15.19}$$

其中 $S(x)$ 是周期 2π 的函数: $S(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\ \forall x\in(0,2\pi)$, $S(0)=0$.

在图 15.3 中作出了级数 (15.19) 的前 10 个部分和函数的示意图.

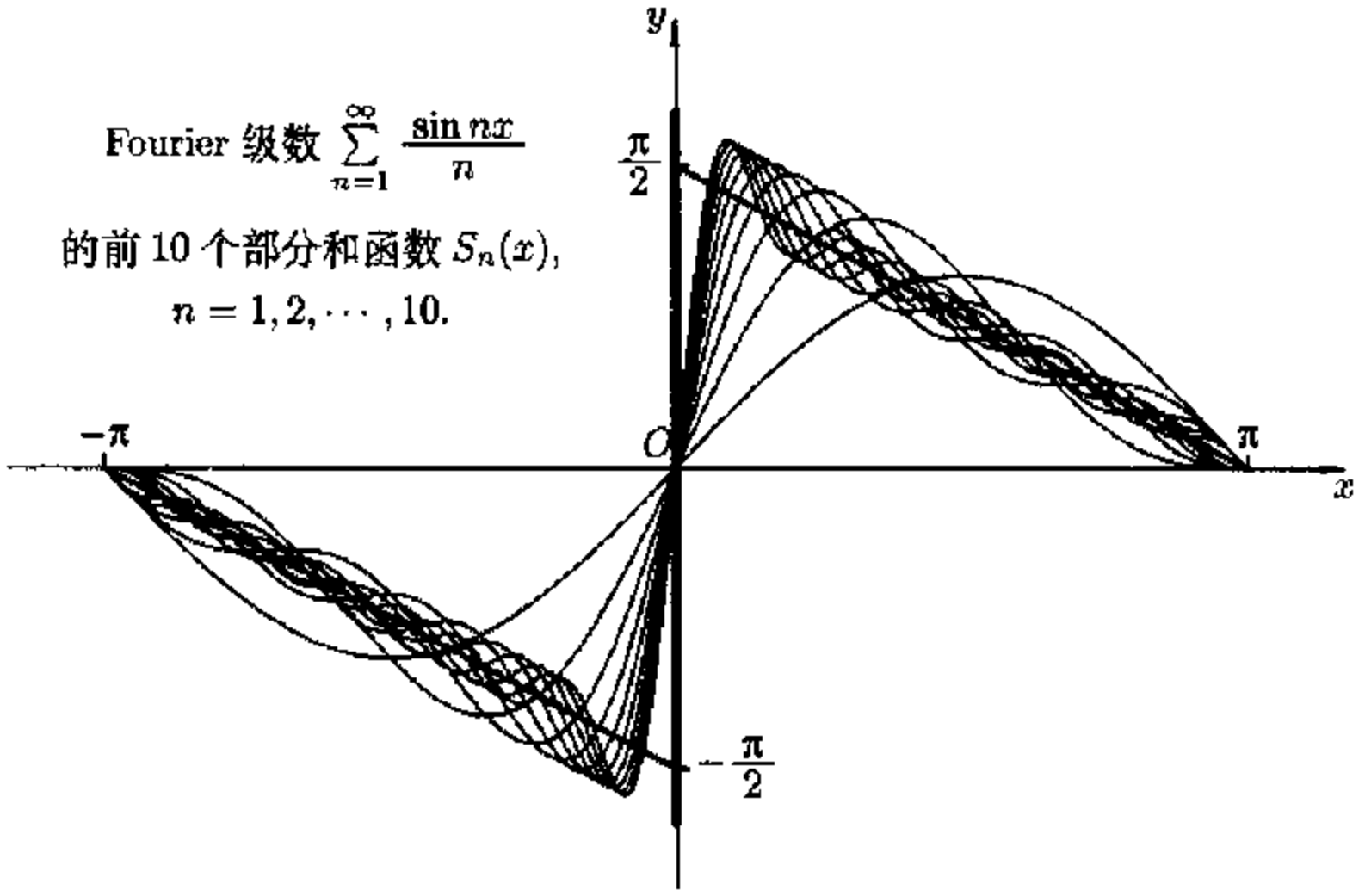


图 15.3

同时在图 15.3 中还用两段粗黑直线表示级数 (15.19) 的和函数 $S(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$, $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$. 从图中已经可以看出, 虽然只观察了前 10 个部分和函数, 但在 $x=0$ 附近的差值 $|S_n(x)-S(x)|$ 毫无趋于 0 的趋势, 更为精确的性态刻画可以总结如下. (其中只叙述 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 的情况, 对 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 的结论是类似的.)

例题 15.2.1 (Gibbs 现象) 记 $\{S_n\}$ 是 Fourier 级数 (15.19) 的部分和函数列, $S(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 为该级数在区间 $(0,2\pi)$ 上的和函数, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\{S_n(x)-S(x)\}=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\approx\frac{\pi}{2}\times 0.178\,98.$$

证 研究误差 $\varepsilon_n(x)=S_n(x)-S(x)$ 在 $x=0$ 右侧的性态. 直接计算得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_n(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

因此就有 (参见上册 322 页)

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_n(x)}{\mathrm{d}x}=D_n(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

可以看出误差 $\varepsilon_n(x)$ 的极值点为 $x_n^{(m)}=\pi m/(n+\frac{1}{2})$, $m=1,2,\cdots,2n$. 其中当 m 为奇数时是极大值点[①], 当 m 为偶数时是极小值点 (参见图 15.3).

直接计算在这些极值点上的误差值:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(x_n^{(m)})=S_n(x_n^{(m)})-S(x_n^{(m)})&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx_n^{(m)})}{k}-\frac{\pi-x_n^{(m)}}{2}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx_n^{(m)})}{kx_n^{(m)}}\cdot\frac{\pi m}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1/2}\right)-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi m}{2n+1}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx_n^{(m)})}{kx_n^{(m)}}\cdot\frac{\pi m}{n}\right)-\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由于右边第一项可看作为 Riemann 积分和式, 因此当 $n\to\infty$ 时就得到

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(x_n^{(m)})=\int_0^{m\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}.$$

容易知道当 $m=1$ 时的极限值最大[②], 即得到

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\times 0.178\,98.\qquad\square$$

注 1 若取 $x_n=c/n$, $n=1,2,\cdots$, 则类似地有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(\frac{c}{n})=\int_0^{c}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. 取不同的 c 值, 这样的极限值就会形成一个闭区间 $[CS(0^-),CS(0^+)]$, 其中 $C=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\approx 1.178\,98$. 在图 15.3 上用 y 轴上的一个粗黑直线段来代表这个区间.

注 2 虽然以上只是一个特例, 但可以用它以及它的平移来吸收一般的和函数中的所有间断点. 因此以上所得的结论、常数 18% 以及注 1 中的内容都具有普遍意义.

---

① 可以证明 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}\{S_n(x)-S(x)\}=\varepsilon_n(x_n^{(1)})$, 例如参考 [19] 的卷 3 第 674~675 小节.

② 不难证明变上限积分 $\displaystyle\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 的最大值也就是在 $x=\pi$ 处达到.

小结 若和函数有间断点, 则不可能依靠 Fourier 级数的部分和函数 $S_n(x)$ 的 n 增加来改进近似计算的精确程度. 这是在 Fourier 级数的应用中不能忽视的问题 (可以参考 [42] 的最后一章 "三角级数之和").

注 3 以上证明的思想来自美国数学月刊 87 卷 (1980) 210~212 页.

15.2.3 Fourier 级数的 Cesàro 求和

到目前为止, 凡是说到无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 就是指它的部分和数列收敛. 这就是由 Cauchy 提出的无穷级数的收敛定义. 但至少从 Euler 起, 就已经出现无穷级数的其他收敛定义. Cesàro 求和就是其中的一种, 它在 Fourier 级数理论中得到了重要的应用 (参见第十三章最后的几个参考题).

定义 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 定义数列

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n},\ n = 1, 2, \cdots,$$

如果存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **在 Cesàro 意义下可求和**, 且定义 σ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 **Cesàro 和**. 由 Cauchy 命题 (见上册 31 页) 知道, 若数列 $\{S_n\}$ 收敛于数 S, 则其前 n 项的平均值 σ_n 构成的数列也收敛于 S, 但反之则不然. 因此若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在通常意义下收敛, 则它在 Cesàro 意义下也收敛, 且有相同的和. 这表明对在通常意义下收敛的级数而言, Cesàro 求和没有给出新的结果.

然而在通常意义下的某些发散级数有可能在 Cesàro 意义下有和. 例如级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

的部分和数列为 $S_{2k-1} = 1, S_{2k} = 0, k = 1, 2, \cdots$, 因此该级数的 Cesàro 和为 $\frac{1}{2}$. 这就是 Euler 等数学家曾经提出过的和 (参见 [26, 49]).

初看起来这似乎有点荒谬, 为什么要考虑 (在通常意义下) 发散级数的和? 这样做有什么意义? 下面我们先观察 Cesàro 求和在 Fourier 级数理论中给我们带来什么结果.

命题 15.2.1 (Fejér 定理) 如果以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积和绝对可积, 并且在点 x_0 处有左、右极限 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$, 则 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处在 Cesàro 意义下收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

特别是当 f 于点 x_0 连续时, 则 Fourier 级数在点 x_0 的 Cesàro 和就等于 $f(x_0)$.

证 从部分和函数 $S_n(x)$ 的 Dirichlet 积分 (15.17) 出发计算 $\sigma_n(x)$, 经三角变换后可以得到 **Fejér 积分**:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot F_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中的非负函数

$$F_n(t)=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 \tag{15.20}$$

称为 **Fejér 核**. 用 $f(x)\equiv 1$ 代入就得到恒等式 (见 10.4.6 小节题 10):

$$\int_0^{\pi}F_n(t)\,\mathrm{d}t=1, \tag{15.21}$$

这样就可以利用 Fejér 积分和恒等式 (15.21) 将问题化为积分估计:

$$|\sigma_n(x_0)-\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]|$$
$$\leqslant\int_0^{\pi}\left(\frac{|f(x_0+t)-f(x_0^+)|+|f(x_0-t)-f(x_0^-)|}{2}\right)F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

现在对任意给定的 $\varepsilon>0$ 取 $\delta>0$, 使得当 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时, 有 $|f(x_0+t)-f(x_0^+)|<\varepsilon$ 和 $|f(x_0-t)-f(x_0^-)|<\varepsilon$ 成立, 于是就有

$$\int_0^{\delta}\left(\frac{|f(x_0+t)-f(x_0^+)|+|f(x_0-t)-f(x_0^-)|}{2}\right)F_n(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\int_0^{\delta}F_n(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon,$$

这里利用了 Fejér 核的非负性和恒等式 (15.21). 再利用当 $\delta\leqslant t\leqslant\pi$ 时

$$0\leqslant F_n(t)\leqslant\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{(\sin\frac{1}{2}\delta)^2},$$

就可以估计得到

$$\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{|f(x_0+t)-f(x_0^+)|+|f(x_0-t)-f(x_0^-)|}{2}\right)F_n(t)\,\mathrm{d}t=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\sigma_n(x_0)-\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]\right|<2\varepsilon,$$

这就是

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].\quad\square$$

注 将 Fejér 积分的估计和 Dirichlet 积分的估计作比较, 可见这里要方便得多, 连 Riemann 引理也不需要用. 原因在于 Fejér 核是非负的, 而 Dirichlet 核则是变号的 (见图 15.2). 如前所示的 Gibbs 现象的根源都在于此. 读者可以将图 15.4 中的 Fejér 核的示意图与图 15.2 作比较. 此外, 还可以参考 [19] 卷 3 第 723 小节关于正核的系统论述. 在下一章关于 Weierstrass 逼近定理的证明中我们将再次接触到这种核函数方法 (又称奇异积分方法).

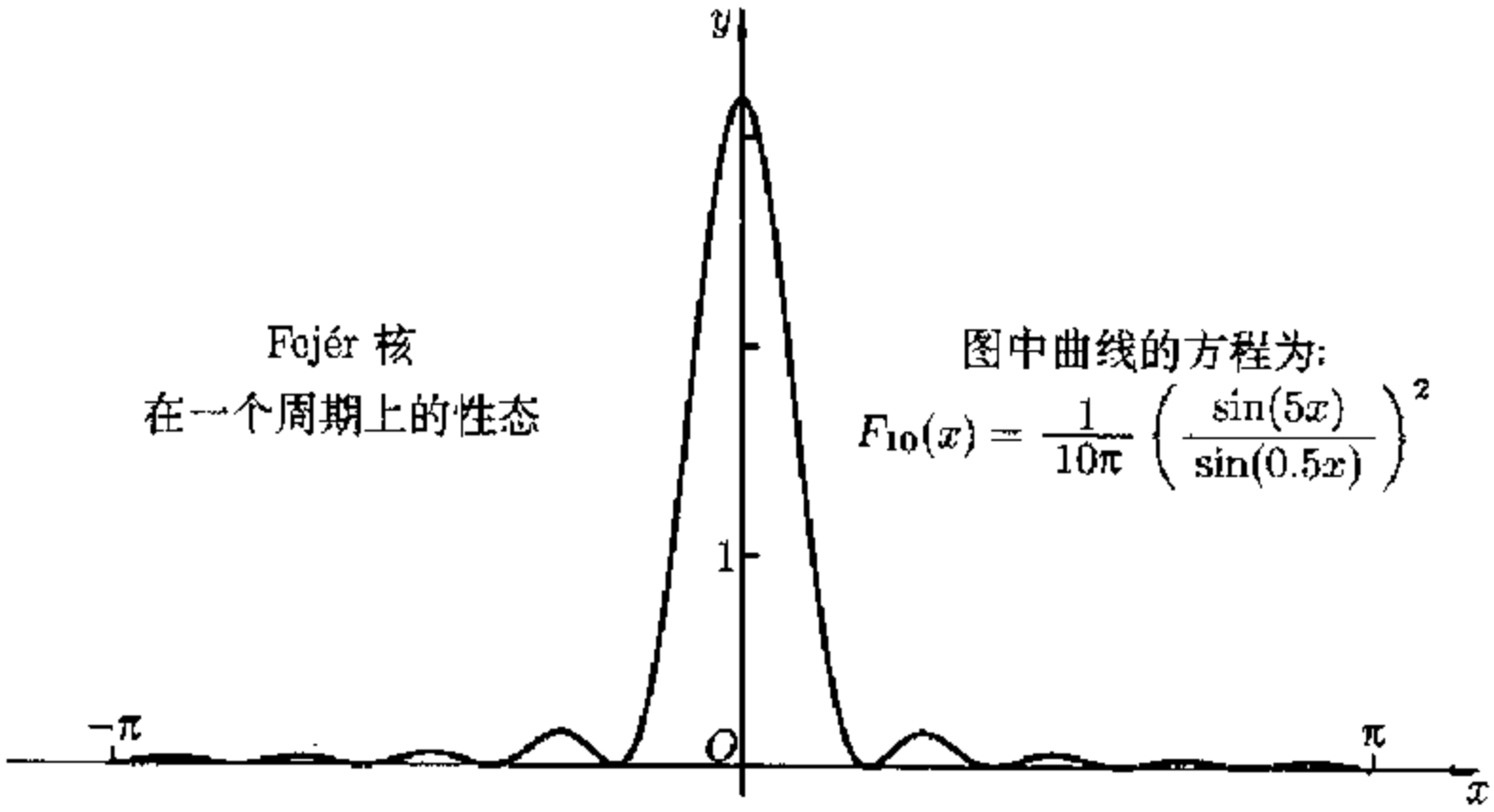


图 15.4

由 Fejér 定理可以立即得到关于 Fourier 级数收敛的一个重要结果.

命题 15.2.2 设以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 点 x_0 是 f 的连续点或第一类间断点, 如果 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛, 则它一定收敛于 $f(x_0)$ 或 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$.

证 设 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 s, 则其 Cesàro 和也是 s. 但由 Fejér 定理 (命题 15.2.1) 知其 Cesàro 和为 $f(x_0)$ 或 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$, 可见命题成立. □

注 结合前面提到的 Carleson 的工作, 可以知道连续周期函数的 Fourier 级数展开式一定几乎处处成立.

对于连续的周期函数, 从 Fejér 定理还可以得到两个重要结论.

命题 15.2.3 (Fourier 级数的惟一性定理) 设 f 为周期 2π 的连续函数, 且其 Fourier 系数均等于 0: $a_0=0$, $a_n=b_n=0$, $n=1,2,\cdots$, 则 f 必是恒等于 0 的常值函数.

证 这时 f 的 Fourier 级数的每一项都恒等于 0, 因此部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项也都恒等于 0. 由此就知道 $\sigma_n(x)\equiv 0$, $n=1,2,\cdots$. 从 Fejér 定理 (命题 15.2.1) 可见 $f\equiv 0$. □

注 由此可知若两个连续函数有相同的 Fourier 级数, 则这两个连续函数必相同. 注意: 这与 Taylor 级数很不一样 (参见命题 14.4.2, 68 页底注和上册 169 页的例题 6.2.4).

命题 15.2.4 (关于一致收敛的 Fejér 定理) 如果 f 是以 2π 为周期的连续函数, 则它的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下一致收敛于 f.

注 1 这只需要在命题 15.2.1 的证明中利用连续函数的 Cantor 定理 (见 §5.4 节) 即可.

注 2 由于 $\{\sigma_n(x)\}$ 是三角多项式函数列, 因此已经得到了关于周期连续函数用三角多项式一致逼近的 Weierstrass 第二逼近定理. 这将在下一章中再作进一步介绍. (又见命题 15.2.8 的注和参考题 19.)

15.2.4 Fourier 级数的平方平均收敛

定义 称函数列 $\{f_n\}$ 于区间 $[a,b]$ 上**平方平均收敛于** f, 若成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

从 Bessel 不等式 (即命题 15.1.7) 的证明已知

$$d^2(f,S_n)=\int_{-\pi}^{\pi} f^2-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

因此, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} d^2(f,S_n)=0$, 则 Bessel 不等式中的不等号就可换为等号. 这就是 Parseval 等式, 它又称为**封闭性方程**, 是 Fourier 级数中最重要的公式之一.

命题 15.2.5 (Parseval 等式) 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则有下列 Parseval 等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15.22}$$

证 这里只列出主要步骤, 细节从略.

(1) 先用连续函数在平方平均意义上逼近 f (参见上册 333 页**题** 5). 如果 f 为广义平方可积, 则还需要先用常义可积函数在平方平均意义上逼近 f, 然后再用连续函数逼近.

(2) 对于连续函数, 根据一致收敛的 Fejér 定理 (即命题 15.2.4), 存在一个三角多项式 T_n 一致逼近这个连续函数.

(3) 然后再用 S_n 在所有 T_n 中的最优性 (即命题 15.1.6), 并注意到 $d^2(f,S_n)$ 随 n 增大而单调减少, 可见成立 $\lim\limits_{n\to\infty} d^2(f,S_n)=0$, 因此所求结论为真. □

注 为了阐明 Parseval 等式的几何意义, 只需要将函数空间中从正交开始的几何类比进一步做下去. 将 $\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g$ 定义为 f 与 g 的**内积**, 并记为 (f,g), 则就可以将 $\sqrt{(f,f)}$ 定义为 f (作为向量) 的**长度** (或称为**模长**). 这时三角函数系中常值函数 1 的长度为 $\sqrt{2\pi}$, 其余的长度均为 $\sqrt{\pi}$. 于是在 f 的 Fourier 级数中各项的长度就是 $\frac{\sqrt{\pi}a_0}{2}$, $\sqrt{\pi}a_n$ 和 $\sqrt{\pi}b_n$, $n=1,2,\cdots$. 然后再观察 Parseval 等式 (15.22), 我们就会发现它就是平面几何与立体几何中的勾股定理在函数空间

中的推广. 因此我们认为所讨论的函数空间是无限维空间, 而这就是泛函分析学科将要专门研究的领域.

下面我们举例说明 Parseval 等式的一些应用.

首先解决三角函数系的完备性问题. 这里的问题是: 是否存在三角函数系以外的可积和平方可积函数 φ, 使 φ 与三角函数系中的每个函数正交, 且 $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2\neq 0$? 如果不存在这样的函数 φ, 就称三角函数系在 $[-\pi,\pi]$ 上具有**完备性**.

命题 15.2.6 三角函数系 $1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有完备性.

证 用反证法. 假设存在与三角函数系中每个函数正交的可积和平方可积函数 φ, 则它的每个 Fourier 系数都等于 0. 由 Parseval 等式 (15.22) 即有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=0.$$

这与假设 $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$ 矛盾. □

注 1 完备性概念也来自于日常的二维平面和三维空间. 例如, 在三维空间中两个正交向量组成的向量系是不完备的, 但三个两两正交的向量组成的向量系则是完备的.

注 2 由此又可以得到惟一性定理 (即命题 15.2.3) 的一个新证明. 因为对 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 φ 来说, 从 $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2=0$ 即可推出 φ 恒等于 0.

Parseval 等式的下列推广也很有用.

命题 15.2.7 (Parseval 等式的推广) 设 f,g 均在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, $\{a_n\},\{b_n\}$ 是 f 的 Fourier 系数, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 是 g 的 Fourier 系数, 则成立

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n).\tag{15.23}$$

证 写出 $f+g$ 和 $f-g$ 的 Parseval 等式, 相减除 4 即得. □

15.2.5 Fourier 级数的一致收敛性

下面我们用 Parseval 等式来证明 Fourier 级数的一致收敛性定理. 其思路是: 从 (15.22) 左边的级数收敛可以推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ 收敛, 然后从导函数的 Fourier 系数出发并利用命题 15.1.2.

命题 15.2.8 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 并且在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点以外可导, 又设 (在任意补充有限个点上的值之后) f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, 则 f 的 Fourier 级数绝对一数收敛于 f.

证 设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则由收敛性定理知该级数处处收敛于 f. 由 M-判别法可见, 只需再证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛.

设 $f'\sim\frac{a_0'}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$, 则 $a_0'=0$, 由 Parseval 等式有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n'}^2+{b_n'}^2\right).$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n'}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{b_n'}^2$ 都收敛. 由命题 15.1.2 得到

$$a_n=-\frac{b_n'}{n},\ b_n=\frac{a_n'}{n},\ n=1,2,\cdots,$$

从不等式

$$|a_n|=\left|\frac{b_n'}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left({b_n'}^2+\frac{1}{n^2}\right),\ n=1,2,\cdots$$

可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. 同样可证, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也绝对收敛. □

注 由于在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的连续周期函数可以先用分段线性连续函数一致逼近, 然后对于分段线性连续函数可以用本命题, 因此就提供了 Weierstrass 第二逼近定理的另一个证明 (参见命题 15.2.4 的注 2).

本小节当然要讨论 Fourier 级数的逐项积分与逐项微分问题. 但是这里都出现了与一般的函数项级数不同的结果. 其中逐项积分出现了令人感到意外的好结果: 不论 f 的 Fourier 级数的收敛情况如何, Fourier 级数逐项积分以后得到的级数必定收敛, 而且还是一致收敛.

命题 15.2.9 (Fourier 级数的逐项积分定理) 设 f 为周期 2π 的函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 一定收敛, 并且对于 $[-\pi,\pi]$ 中的任意 a,b 成立下列逐项积分公式:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t,\tag{15.24}$$

对于 $a=0,b=x$ 可以得到

$$\int_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),\tag{15.25}$$

且其中右边为等号左边的 Fourier 级数.

证 以下只对 f 为可积和平方可积给出证明. 一般情况可见 [19, 36] 等.

这时可用推广的 Parseval 等式 (15.23). 先将它改写为

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,\mathrm{d}x.$$

然后令

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-\pi,a)\cup(b,\pi],\end{cases}$$

代入即得所求的 (15.24). 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|+|b_n|}{n}$ 收敛, 因此其他结论显然成立, 而且最后的 Fourier 级数还是一致收敛的. □

注 由 Fourier 级数的逐项积分定理可知一个三角级数 $a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 能够是某个可积和绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 收敛. 因此, 例如

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n},\ \sum_{n=9}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$$

之类的三角级数, 由 Dirichlet 判别法知道它们在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛, 但它们都不可能是任何可积和绝对可积函数的 Fourier 级数.

但是 Fourier 级数逐项求导定理的条件却要强得多. 如果以 2π 为周期的函数 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续可微 (这时由收敛定理知 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi)$ 上处处收敛于 f), 仍然不能保证 f 的 Fourier 级数逐项求导以后得到的三角级数是 f' 的 Fourier 级数 (参见参考题 15).

命题 15.2.10 (Fourier 级数的逐项求导定理) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上除了有限个点外处处可导, 又设 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段光滑, 则对一切实数 x 成立下列逐项求导公式:

$$\frac{f'(x^+)-f'(x^-)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

注 在命题 15.1.2 中已经证明, 只要 f 为周期 2π 的连续函数, 则在 f 与 f' 的两个 Fourier 级数之间就有逐项求导关系. 那时并不考虑收敛性, 证明也很简单, 但所得的结果不能称为逐项微分定理. 现在有了 f' 分段光滑条件之后, 就知道求导后的 Fourier 级数收敛于 $[f'(x^+)+f'(x^-)]/2$. 如果 f' 连续, 则级数就处处收敛于导函数 f'. 若对 f 加更多的条件, 则 f' 的 Fourier 级数可以一致收敛. 这里的情况与一般的函数项级数的逐项微分定理也是很不相同的.

小结 从本小节可以知道, 在一致收敛性、逐项求积和逐项求导方面, Fourier 级数与幂级数完全不同. 又从Fourier 级数和三角级数之间的关系来看, 也与 Taylor 级数和幂级数之间的关系完全不同 (参见命题 14.4.2).

15.2.6 例题

Fourier 级数展开和 Parseval 等式在求级数和中常有应用. 下面是几个例子.

例题 15.2.2 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ 的和.

解 由例题 15.1.2 以及收敛性定理, 我们有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ x\in[-\pi,\pi],$$

用 $x=\pi$ 代入就得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 然后利用

$$a_0=\frac{2\pi^2}{3},\ a_n=\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2},\ b_n=0,\ n=1,2,\cdots,$$

由 Parseval 等式, 就得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}.$$

由此解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

同样, 对 $f(x)=x^3,\ x\in(-\pi,\pi)$ 的 Fourier 展开式

$$x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(6-\pi^2n^2)\frac{\sin nx}{n^3},\ x\in(-\pi,\pi)$$

应用 Parseval 等式, 可以得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^6\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot(-1)^n(6-\pi^2n^2)\frac{1}{n^3}\right)^2,$$

整理后得到

$$\frac{2}{7}\pi^6=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\pi^4}{n^2}-\frac{48\pi^2}{n^4}+\frac{144}{n^6}\right),$$

再利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 即可解得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$. □

例题 15.1.2 之解 3 在学了 Fourier 级数的逐项积分定理后可以如下求出在区间 $(-\pi,\pi)$ 上函数 x^3 的 Fourier 级数, 并同时确定其收敛性.

第一步与过去一样, 先求出 (15.12). 然后逐项积分得到等式

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}(1-\cos nx),$$

其中的常数项虽是个无穷级数, 但可以不必去管它, 只需直接按照公式 (15.1) $(n=0)$ 就可以得到所要的常数项 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}$, 因此就得到 Fourier 余弦级数展开式

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

再用逐项积分方法得到等式

$$x^3 = \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

在第一项中将 x 用它的 Fourier 级数代替, 就得到与解 1 相同的答案. □

下面将对于系数单调的 Fourier 级数作讨论, 其中的方法和结果都很有意义, 同时与过去的许多讨论也有联系. 这里的材料见 [19] 的卷 3 第 666 小节.

例题 15.2.3 设数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于 0, 且已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛, 则函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 于区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积和绝对可积.

证 从函数项级数的 Dirichlet 一致收敛判别法知道 f 在 $x \neq 0$ 时连续, 因此只有 $x = 0$ 有可能是瑕点. 以下只需要证明 $x = 0$ 为瑕点时 $|f|$ 在 $[0, \pi]$ 上广义可积. 为此将下列积分作分拆:

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

对于 $\pi/(k+1) \leqslant x \leqslant \pi/k$ 时的函数 f 作估计如下:

$$|f(x)| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{k} b_i \sin ix \right| + \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i \sin ix \right|,$$

其中右边第一项不超过 $S_k = b_1 + \cdots + b_k$, 而第二项可利用 $\{b_n\}$ 非负单调减少的条件和Abel 变换 (13.20) 估计如下 (参见例题 14.1.7):

$$\left| \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i \sin ix \right| \leqslant \frac{b_{k+1}}{|\sin x/2|} \leqslant \frac{b_{k+1}}{|x/\pi|} \leqslant (k+1) b_{k+1} \leqslant (k+1) b_k,$$

因此就有

$$\int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant [S_k + (k+1) b_k] \cdot \frac{\pi}{k(k+1)} = \pi \left[\frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{b_k}{k} \right].$$

令 $k = 1, \cdots, n$ 代入并相加, 就得到

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)} + \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k}.$$

对右边第一项利用例题 13.2.7 中的类似方法可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{i} - \frac{S_n}{n+1},$$

从 $b_n \to 0$ 可见右边第二项当 $n \to \infty$ 时也趋于 0, 因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

并最后估计得到

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

因此积分 $\int_0^\pi |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

例题 15.2.4 设数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于 0, 且已知 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 于 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是 f 的 Fourier 级数.

证 由于 f 于 $x \neq 0$ 时连续, 只需讨论 $x = 0$ 为瑕点时的情况. 利用广义积分的 Abel 判别法可知积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ 均收敛. 由于 f 为奇函数, 因此就得到 $a_n = 0$, $n = 0, 1, \cdots$. 以下只要证明 $b_n = 2\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$, $n = 1, 2, \cdots$.

写出

$$2\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \sin nx\right)\mathrm{d}x,$$

从 $\{b_k\}$ 单调收敛于 0, 又用三角变换和 Jordan 不等式可知对任意 $m \geqslant 1$ 有

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \sin kx \sin nx\right| \leqslant \left|\frac{\sin nx}{\sin(x/2)}\right| \leqslant \left|\frac{nx}{x/\pi}\right| = n\pi,$$

因此从 Dirichlet 一致收敛判别法知道积分号下的级数在 $[0,\pi]$ 上一致收敛, 用逐项积分计算就可以得到所求的结果. □

非 Fourier 级数的三角级数 合并以上两个结果就可以知道当 $\{b_n\}$ 单调趋于 0 时, 处处收敛的三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是其和函数 f 的 Fourier 级数的充分必要条件是数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{n}$ 收敛[①]. 因此在 Bessel 不等式 (即命题 15.1.7) 后注 2 中举出的例子 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$ $\left(0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$ 仍然是其和函数 f 的 Fourier 级数, 当然 f 不平方可积. 不难证明该注中的另一个例子也是如此[②].

但在命题 15.2.9 后所举的例子, 如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\ln x}$ 等, 则确实不是 Fourier 级数, 而且它的和函数一定不是可积和绝对可积函数.

关于三角级数何时必为 Fourier 级数有下列著名结果, 上面的例题 15.2.4 只是它的一个特例.

命题 15.2.11 (du Bois Reymond 定理) 在以下两种情况下的三角级数必是其和函数的 Fourier 级数: (1) 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛的三角级数的和函数在 $[-\pi,\pi]$ 上常义可积; (2) 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点外收敛的三角级数, 其和函数在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积.

---

① 这里可以与例题 14.1.7 和 14.1.8 的结果进行比较, 可见要使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的条件要强得多.

② 这是因为对于余弦三角级数有与例题 15.2.3 和 15.2.4 类似的结论, 证明也是类似的.

在三角级数展开方面的重要结果还有展开的惟一性定理 (请与命题 15.2.3 在条件和结论两个方面进行比较).

命题 15.2.12 (Cantor 定理) 如果有两个三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 和 $\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于同一个函数, 则这两个三角级数必恒同: $a_n=\alpha_n\ (n=0,1,\cdots)$, $b_n=\beta_n\ (n=1,2,\cdots)$.

小结 虽然我们不能在这里证明这些定理, 但还应当理解它们的重要意义 (证明见 [19] 的卷 3 第 733~734 小节): 这就是在理论上证明了, 在三角级数展开式中我们所见所用的绝大多数情况都是 Fourier 级数展开式.

15.2.7 练习题

1. 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}),\\ \frac{\pi}{4}, & x=\frac{\pi}{2},\\ x-\frac{\pi}{2}, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$ 展开为余弦级数, 并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的值.

2. 设对于 $a>0$ 有函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,\frac{a}{2}],\\ a-x, & x\in(\frac{a}{2},a],\end{cases}$ 将 f 展开为: (1) 余弦级数, (2) 正弦级数.

3. 设 α 为非整数, 利用 $f(x)=\cos\alpha x, x\in(-\pi,\pi)$ 的 Fourier 展开式, 证明下列关于余切函数和余割函数的部分分式展开式:

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},$$

$$\csc x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},$$

且求出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}$ 的和.

4. 将下列函数在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数:

(1) $f(x)=|\sin x|$; (2) $f(x)=\begin{cases}ax, & x\in[-\pi,0),\\ bx, & x\in[0,\pi].\end{cases}$

5. 将下列函数展开为正弦级数:

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}, x\in[0,\pi]$; (2) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}$

6. 将下列函数展开为余弦级数:

(1) $f(x)=x(\pi-x), x\in[0,\pi]$; (2) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in[0,\frac{\pi}{4}),\\ 1, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}].\end{cases}$

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & x=0,\\ -\pi-x, & -\pi<x<0,\end{cases}$$

(1) 求 f 的 Fourier 展开式;

(2) 讨论 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi]$ 上是否收敛于 f, 是否一致收敛?

8. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 证明 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$, 使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-P_n(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

9. 设 f 为周期 2π 的连续函数, 且已知 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 证明: 若右边的级数一致收敛, 则其和函数一定就是 f.

10. 设 $0<a<\pi$, 利用函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a;\\ 0, & a\leqslant|x|<\pi\end{cases}$$

的 Parseval 等式, 求下列级数的和: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}$.

§15.3 对于教学的建议

15.3.1 学习要点

1. Fourier 级数与幂级数是两类最重要的函数项级数. 如果说幂级数的通项是从计算角度来看最为简单的单项式, 则 Fourier 级数的通项就是最简单的周期函数——正弦函数与余弦函数. 将一般的周期函数展开为 Fourier 级数具有重要的理论和应用价值. 在许多具体的应用领域中 Fourier 级数的每项均有物理意义, 而幂级数则不是如此.
2. 一个函数的 Fourier 级数并不一定收敛, 也不一定收敛于这个函数本身. 但与 Taylor 级数相比, Fourier 级数的收敛条件还是很宽的. 可以说 Fourier 级数是至今为止我们遇到的最优美的一类级数, 这可以从以下几个方面看

出: 局部性定理; 收敛条件; 逐项积分与逐项求导的条件; Fourier 展开式的最佳均方逼近性质; 三角函数系可以构成无穷维空间的规范正交基等等.

3. 一个具体给定的周期函数的 Fourier 系数的计算, 特别是在函数的周期为 $2l$ ($l \neq \pi$) 的情况下, 是比较费力的事. 在习题课上, 应当举出一些具体计算给定函数的 Fourier 系数的例题, 结合一些计算技巧, 耐心地将 Fourier 系数计算出来. 在练习题中, 也应该含有这方面的习题. 然而, 这方面的例题与习题都不宜太多, 因为 Fourier 级数理论的核心部分是 Fourier 级数的收敛性定理、Parseval 等式与一些相关结果的证明或应用, 如果让学生觉得 Fourier 级数理论主要不过是按公式计算 Fourier 展开式, 那就不能算是成功的教学.
4. Bessel 不等式和 Parseval 等式体现了周期函数的内在性质, 在分析估计中非常有用. 本章在这方面给出了较多的介绍, 还应当指出 Parseval 等式在证明 Wirtinger 不等式中的妙用.

15.3.2 参考题

1. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $(0,2\pi)$ 上可积和绝对可积, 证明:
   (1) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上单调减少, 则 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0,\ n=1,2,\cdots$;
   (2) 设 f 在 $(0,2\pi)$ 可导且 f' 在 $(0,2\pi)$ 上可积和绝对可积, 如果 f' 在 $(0,2\pi)$ 上单调增加, 则 $\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0,\ n=1,2,\cdots$;
   (3) 定义 $F(x)=\int_0^x \left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t,\ x\in[0,2\pi]$. 如果 F 在 $(0,2\pi)$ 上单调增加, 则有与 (2) 相同的结论.
2. 设 f 为区间 $[0,2\pi]$ 上的下凸函数, 证明: $\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0\ \forall n \geqslant 1$.
3. 设 f 是周期 2π 的连续函数, $F_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $h>0$,
   (1) 证明 F_h 是以 2π 为周期的连续可微函数;
   (2) 证明对 $\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,h>0$, 使在 $[-\pi,\pi]$ 上一致成立 $|f(x)-F_h(x)|<\epsilon$;
   (3) 利用命题 15.2.8 重新证明 Weierstrass 第二逼近定理;
   (4) 计算 F_h 的 Fourier 级数.
4. 设 f 为周期 2π 的连续函数, $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 定义

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

计算 F 的 Fourier 系数, 并证明: (1) 关于 f 的 Parseval 等式, (2) F 的 Fourier 级数一致收敛.

5. (1) 利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^x\cos kt\,\mathrm{d}t$ 和 Dirichlet 核求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 之和.

   (2) 用类似的方法求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 之和.

6. 从上题的 (1) 所得的结果出发, 直接证明以下展开式成立:

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{2k}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2},\ 0<x<\pi$;

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\dfrac{\pi}{4},\ 0<x<\pi$;

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\dfrac{x}{2},\ |x|<\pi$;

   (4) $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ |x|<\pi$;

   (5) $x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ 0\leqslant x\leqslant\pi$;

   (6) $\dfrac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2},\ 0\leqslant x\leqslant\pi$.

7. (Steklov 不等式) 设连续函数 f 在 $[0,\pi]$ 上分段可导, 且 f' 在 $[0,\pi]$ 上可积和平方可积, 证明: 只要条件 (1) $\int_0^{\pi}f=0$ 和 (2) $f(0)=f(\pi)=0$ 之中有一个满足, 就成立不等式

$$\int_0^{\pi}f'^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

   且其中成立等号的条件为 (1) $f(x)=A\cos x$, (2) $f(x)=B\sin x$.

8. (Wirtinger 不等式) 设连续函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可导, $f(-\pi)=f(\pi)$, 且 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, 又 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

   且仅当 $f(x)=A\cos x+B\sin x$ 时成立等号.

9. 设周期 2π 的函数 f 及其导函数 f' 均分段连续, 证明: f 的 Fourier 级数在不含有 f 的间断点的任何闭区间上一致收敛.

10. 证明: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^2}=\dfrac{\pi-1}{2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^4}=\dfrac{(\pi-1)^2}{6}$.

11. 设函数 f 是以 2π 为周期的连续函数, 不恒等于 0, 且

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=0,\ k=0,1,\cdots,n.$$

   证明: f 在任何长度大于 2π 的区间上至少改变符号 $2n+2$ 次.

12. 设 f 是在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调连续函数, 且 $f(+\infty)=0$, 证明
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx=0.$$

13. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\mathrm{e}^{-n}\sin nx$, 证明: $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)|\geqslant\dfrac{2}{\pi\mathrm{e}}$.

14. 对于收敛于 0 的给定正数数列 $\{\varepsilon_n\}$, 证明: 存在连续函数 f, 使得 f 的 Fourier 系数 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 对于无限多个 n 满足不等式
$$|a_n|+|b_n|>\varepsilon_n.$$

15. 设 $f\in C[-\pi,\pi]$, 且其导函数 f' 可积和绝对可积, 若有 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 证明:
$$f'(x)\sim\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n+(-1)^n c)\cos nx-na_n\sin nx],$$
其中 $c=[f(\pi)-f(-\pi)]/\pi$, 且有 $c=\lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^{n-1}nb_n]$.

16. 设三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 有极限 $c=\lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^{n-1}nb_n]$, 又有可积和绝对可积函数 φ 满足条件
$$\varphi(x)\sim\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n+(-1)^n c)\cos nx-na_n\sin nx],$$
证明上述三角级数处处收敛, 为其和函数 f 的 Fourier 级数:
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$
且在 φ 的连续点上成立 $f'(x)=\varphi(x)$.

17. 利用上题证明: 三角级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-1}$ 是某个连续可微函数 f 的 Fourier 级数, 且 f 满足微分方程 $f''+f=-\sin x$, 并求出 f

18. 证明: 在区间 $[a,b]$ 上的可积和平方可积函数空间中, 由有限个函数组成的正交系不可能是完备的.

19. (de la Vallée Poussin 核) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 记
$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t.$$
证明: (1) V_n 是 n 次三角多项式, (2) 函数列 $\{V_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

20. 证明: 三角级数
$$\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx}{n}+\cdots$$
的部分和函数 $S_n(x)\geqslant -1$, 并且 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\min\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi} S_n(x)=-\ln 2$.

第十六章 无穷级数的应用

无穷级数作为一种分析手段具有多方面的应用, 本章只介绍其中的几点供教学中参考. §16.1 节是级数在积分计算中的应用, §16.2 节讨论级数求和问题, §16.3 节是关于 Weierstrass 逼近定理的证明方法及其应用, §16.4 节用无穷级数构造一些具有特殊性质的函数. 最后一节为学习要点和参考题.

§16.1 积分计算

从第九章不定积分已经知道, 初等函数的原函数未必是初等函数. 因此在第十章中用 Newton-Leibniz 公式计算积分的方法的适用范围是有限的. 在 12.3.2 小节 (见上册 390 页) 中列举了几个特殊的广义积分的计算, 可以说每一个例题都有其特殊的方法. 本节将从方法论的角度介绍无穷级数在积分计算中的应用. 这方面的更一般性讨论见后面第二十三章的含参变量积分.

16.1.1 关于逐项积分的补充命题

利用函数项级数的逐项积分法可以计算出许多在定积分或广义积分理论中无法计算的积分. 对于常义积分来说, 应用一致收敛充分条件下的逐项积分, 或者 Arzela 控制收敛定理 (命题 14.2.4) 一般就可以解决问题. 但是对于广义积分问题则还需要补充几个新的工具. 下面只对无穷限广义积分写出保证逐项积分成立的两个命题, 它们当然可以推广到瑕积分上去.

命题 16.1.1 设在区间 $[a,+\infty)$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 单调收敛于连续函数 φ, 又设每个 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 和 φ 均在区间 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 则成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 为确定起见, 只对函数列 $\{f_n\}$ 单调减少的情况写出证明. 对于 $A>a$ 写出

$$\begin{aligned}0\leqslant&\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\=&\int_a^{A}[f_n(x)-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x+\int_A^{+\infty}[f_n(x)-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{16.1}$$

利用 $\{f_n\}$ 单调减少收敛于 φ, 取定 N, 由于 f_N 和 φ 在 $[a,+\infty)$ 上均广义可积, 因此对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 可以取定 A, 使得

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty} [f_N(x) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因此当 $n > N$ 时 (16.1) 右边的第二项满足估计:

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty} [f_n(x) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x \leqslant \int_A^{+\infty} [f_N(x) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

然后在区间 $[a, A]$ 上利用 Dini 定理知道 $\{f_n\}$ 一致收敛于 φ, 因此存在 $N_1 > N$, 使得当 $n > N_1$ 时 (16.1) 右边的第一项也小于 ε. □

注 对于函数项级数有相应的结论, 从略.

为了建立更一般的充分条件. 这里需要引入一个新的概念.

定义 设函数列 $\{f_n\}$ 中的每个函数在区间 $[a, +\infty)$ 上均广义可积. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 使得当 $A > A_0$ 时 $\left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ 对于所有 n 同时成立, 则称**广义积分** $\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ **关于** n **一致收敛**.

命题 16.1.2 设在区间 $[a, +\infty)$ 上函数列 $\{f_n\}$ 内闭一致收敛于函数 φ, 又设 $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分关于 n 一致收敛, 且极限函数 φ 于 $[a, +\infty)$ 上内闭可积, 则成立

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 (只列出主要步骤) 先用 Cauchy 收敛准则证明 φ 于 $[a, +\infty)$ 上广义可积, 然后可用三分法估计如下:

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\quad\leqslant \int_a^A |\varphi(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_A^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right|. \quad \square\end{aligned}$$

注 将上两个命题所要建立的等式改写为

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \lim_{n\to\infty} \int_a^A f_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{16.2}$$

并应用极限顺序交换的基本原理 (命题 14.2.1 后注 2), 就可以知道上述命题中的广义积分关于 n 的一致收敛条件可以更换为

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

关于 $A \in [a, +\infty)$ 的一致性.

16.1.2 例题

首先指出, 这里的要点是将积分计算问题转化为级数求和问题. 在这之后的

问题从数值角度来说就是近似计算问题. 至于是否所求的积分值都有简单的表达式, 即能够用熟悉的常数和有限次初等运算得到, 那当然不一定.

例题 16.1.1 出现在一系列应用问题中的积分

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \tag{16.3}$$

称为**第二类完全椭圆积分**, 其中 $k\in(0,1)$ 为参数. 试将 $E(k)$ 展开为 k 的幂级数, 并利用它研究椭圆周长近似公式

$$s_1=\frac{\pi}{2}[a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}] \tag{16.4}$$

当椭圆偏心率充分小时的误差的渐近性态, 其中 $a>b>0$ 为椭圆的长半轴和短半轴, 偏心率 $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$ (公式 (16.4) 来自上册 356 页的例题 11.3.3).

解 除了 $k=0,1$ 之外这个积分的被积函数没有初等原函数 (参见上册 297 页), 但要将 $E(k)$ 展开为幂级数则是容易的. 在 $(1-x)^{1/2}$ 的 Maclaurin 级数中令 $x=k^2\sin^2\varphi$ 代入, 就得到

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-3)!!}{2^n n!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi,\ 0\leqslant k<1.$$

以 k 为参数, 以 $\varphi\in[0,\pi/2]$ 为自变量, 这是同号函数项级数, 从 Dini 定理可知一致收敛, 因此可以逐项积分, 这样就得到所要的展开式:

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right).$$

椭圆周长可以表示为

$$s=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=4aE(\varepsilon),\ 0<\varepsilon<1,$$

因此就有

$$\begin{aligned}s=2\pi a\Big(1&-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6-\frac{175}{16\,384}\varepsilon^8\\&-\frac{441}{65\,536}\varepsilon^{10}-\frac{4\,851}{1\,048\,576}\varepsilon^{12}\Big)+O(\varepsilon^{14})\quad(\varepsilon\to0).\end{aligned}\tag{16.5}$$

同时将近似计算公式 (16.4) 右边按 ε 展开, 并与上式比较得到:

$$s_1=s-2\pi a\left(\frac{5}{16\,384}\varepsilon^8\right)+O(\varepsilon^{10})\quad(\varepsilon\to0).\qquad\square$$

注 本题取材于 [43] 卷 2 第八章 §7. 其中还有椭圆周长的另一个近似公式

$$s_2=\pi(\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}). \tag{16.6}$$

采用同样的分析方法可以知道

$$s_2=s+2\pi a\left(\frac{3}{16\,384}\varepsilon^8\right)+O(\varepsilon^{10})\quad(\varepsilon\to0).$$

容易看出, 这两个公式的误差符号相反, 若采取加权平均的方法就可能得到更好的结果: 将 (16.4) 乘 3/8 与 (16.6) 乘 5/8 再相加, 就得到新公式:

$$s_3=\pi\left(\frac{9}{8}(a+b)+\frac{3}{16}\sqrt{2a^2+2b^2}-\frac{5}{8}\sqrt{ab}\right). \tag{16.7}$$

可以发现新公式的幂级数展开式的 ε^8 项和 ε^{10} 项的系数与 (16.5) 的展开式完全相同. 这里前者是预期的, 而后者是意外的. 于是误差的级别为 $O(\varepsilon^{12})$:

$$s_3 = s + 2\pi a\left(-\frac{7}{1\,048\,576}\varepsilon^{12}\right) + O\left(\varepsilon^{14}\right).$$

从数值计算可以知道, 这个近似公式不仅在 ε 充分小时有效, 而且直到 $\varepsilon = 0.9$ 时的相对误差还小于 10^{-4}.

利用极限顺序交换的方法可以较简单地计算命题 12.3.7 中的 Euler-Poisson 积分 (即概率积分).

例题 16.1.2 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-x^2}$ $(x \geqslant 0)$ 证明:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

解 用平均值不等式可以看出

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{1+n\left(1+x^2/n\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1},$$

因此在区间 $[0,+\infty)$ 上函数列 $\left\{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}\right\}$ 单调减少收敛于极限函数 e^{-x^2}. 应用命题 16.1.1 即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

用变量替换 $x = \sqrt{n}\tan t$ 计算左边极限号下的积分如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sqrt{n}\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sim \frac{\sqrt{n}\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\end{aligned}$$

这里最后一步利用了 Wallis 公式 (11.29). □

例题 16.1.3 (Euler 积分) 证明: 若 $0 < p < 1$, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

证 将积分拆开为区间 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上的两个积分.

在区间 $(0,1)$ 上 $\dfrac{1}{x^p(1+x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n-p}$, 它在 $(0,1)$ 上虽然不一致收敛, 但除去第一项之外, 级数的部分和在 $[0,1]$ 上一致有界, 因此可以根据 Arzela 定理 (即命题 14.2.4) 交换积分与求和的顺序[①], 得到

① 若不用 Arzela 定理, 则可以用 14.2.4 小节的题 5.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-p}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{n-p}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{1-p} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-p} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-p}.$$

对于 $[1,+\infty)$ 上的积分可作变量替换变为 $[0,1]$ 上的积分, 经同样计算得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-p}(1+x)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-(1+p)} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}.$$

合并两个结果得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x)} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{p-n} + \frac{1}{p+n}\right)$$
$$= \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2p}{p^2-n^2}.$$

最后利用余割函数 $\csc x$ 的部分分式展开式就得到所求结果. (该公式见 15.2.7 小节练习题 3, 也可以从 $\sin x$ 的无穷乘积展开式 (13.27) 求导得到.) □

注 本题的积分有各种不同的形式, 例如

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\ (0<a<1), \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^n}\ (0<m<n)$$

等. 此外, 上册 402 页参考题 8 中的所有公式均为本题之特例, 且其中的参数 m, n 等都可以不限于正整数. 读者可以对比两处所用方法, 从而知道在积分计算问题中我们已经取得的进步.

在上册 401 页引进了 $x>0$ 时的 Γ 函数的积分定义, 在例题 13.4.4 中又引进了它的无穷乘积定义. 利用积分号下取极限的过程, 我们可以证明当 $x>0$ 时两个定义是一致的.

例题 16.1.4 当 $x>0$ 时成立

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

证 在广义积分中作变量替换 $t=\ln\frac{1}{s}$, 当 t 从 0 到 $+\infty$ 时, s 从 1 到 0, 于是得到

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{x-1}\mathrm{d}s.$$

利用

$$\ln\frac{1}{s} = \lim_{n\to\infty} n(1-s^{\frac{1}{n}}),$$

而且右边的极限过程关于 n 单调, 就可以用命题 16.1.1 得到

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1[n(1-s^{\frac{1}{n}})]^{x-1}\,\mathrm{d}s.$$

对于右边的积分用变量替换 $s^{\frac{1}{n}}=y$, 然后分部积分就可以得到所要的结果. □

16.1.3 练习题

1. (广义积分的控制收敛定理) 设函数列 $\{S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中内闭可积, 且内闭一致收敛于函数 S, 如果存在函数 F, 使 $|S_n(x)|\leqslant F(x)$ 对于每个 n 和每个 x 都成立, 且广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}S(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数均非负, 收敛半径为 $+\infty$, 和函数为 $S(x)$. 证明: 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!$ 收敛, 则广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}S(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 且等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nn!$.
(去掉系数非负条件后本题结论仍成立, 这时可以利用命题 16.1.2 后的注.)

3. 证明以下结果:
(1) $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; (2) $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{8}$;
(3) $\int_0^1\ln x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=2-\frac{\pi^2}{6}$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$.

4. 证明: $\int_0^1x^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

5. 证明: $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^24^2}+\cdots+\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1/2}$.

§16.2 级数求和计算

本节列举了级数求和的各种方法供读者参考. 其中级数和的概念是在通常意义下的. 关于 Cesàro 求和概念见 15.2.3 小节, 本节不再讨论.

16.2.1 级数求和法

对于收敛级数来说, 原则上已经可以通过数值计算来得到级数和的近似值. 但如果能够发现某个级数的和可以用已知常数经过简单运算得到, 则当然更好. 由 Euler 解决的 Basel 问题, 即求出
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

就是级数求和方面的一个光辉例子. 在得到这个答案之前, Euler 已经计算出级数和的近似值 1.644 934$\cdots$ 直到 20 位有效数字, 但仍然看不出级数和是什么特殊的常数. 当然没有人想到这里会出现圆周率 (参见 [17, 第 3 章] 以及 13.4.2 小节末的注).

从命题 2.5.2 中的例子 $\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ 可以知道, 一个收敛的数项级数 (或函数项级数) 的和 (或和函数) 未必能够用过去已经掌握的数或函数经过简单的运算表示出来. 例如, 直到现在为止对于 p 级数的和

$$\zeta(p)=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,$$

当 p 为奇数时是否会与 p 为偶数时 Euler 所得的结果 (见上册 217 页 (7.26) 和下面的例题 16.2.3) 有类似的表达式, 始终还只是个猜测. 目前最好的结果是在 1978 年 Apéry 证明了 $\zeta(3)$ 为无理数 (见美国数学月刊 108 卷(2001)222~231 页).

因此, 在本节只是根据经验列出求级数和的若干方法, 这里不可能有什么万能的方法.

方法一 以已知的数项级数或函数项级数展开式为基础的方法无疑是有用的. 例如, 在一个幂级数展开式或 Fourier 级数展开式中, 将变量用不同的特定值代入, 就可以得到无穷多个数项级数的和, 或者用简单运算将所要研究的级数变换为已知级数等等. 当然这完全依赖于积累和经验.

方法二 如果能利用所谓**裂项相消法** (或**连锁消去法**) 得到部分和的紧凑形式, 则级数问题就转化为数列或函数列的极限问题.

方法三 这也可以看成是方法一的范围, 即用函数项级数的逐项积分或逐项微分方法将未知的级数转变为已知的级数. 这在幂级数中是最常用的方法, 但也可能解决其他类型的函数项级数求和计算.

方法四 (Abel 方法) 这是以幂级数理论中的 Abel 第二定理为基础的级数求和方法: 对于给定的收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 研究幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 它的收敛半径不会小于 1. 如果能够求出它的和函数 $S(x)$, 则所求的

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1^-}S(x)=S(1).$$

16.2.2 例题

例题 16.2.1 求下列级数的和:

$$\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}+\cdots.$$

解 1 (裂项相消法) 易见 $x=1$ 时级数发散. 对于 $x\neq1$ 记级数通项为 a_n, 从前后两项之间的关系式 $a_n(n+x)=na_{n-1}$ $(a_0=1)$ 出发得到

$$(n+1)a_n + (x-1)a_n = na_{n-1},$$

可见于 $x \neq 1$ 时有

$$a_n = \frac{1}{x-1}[na_{n-1} - (n+1)a_n],$$

从而可以得到级数的第 n 个部分和为

$$S_n = \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)},\ n = 1, 2, \cdots.$$

因此问题归结为上式右边第二项的敛散性. 利用 Sapagof 判别法 (命题 13.2.3) 或渐近公式 (13.24) 知第二项当 $x < 1$ 时发散, 而当 $x > 1$ 时收敛于 0. 因此级数当 $x \leqslant 1$ 时发散, 而当 $x > 1$ 时收敛于和 $1/(x-1)$. □

注 用裂项相消法求和时一般不必先讨论级数的敛散性. 若要讨论本题中级散的敛散性, 则用渐近公式 (13.24) 即可. 当然也可用 Raabe 判别法.

解 2 (逐项积分法) 由敛散性讨论可知只要研究 $x > 1$ 的情况. 级数的通项 (差一个因子 x) 可以写为积分形式:

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \int_0^1 (1-t)^{x-1}t^n \,\mathrm{d}t.$$

(这里虽然 x 未必为自然数, 但上册 326 页的分部积分计算仍有效. 实际上这都是 23.3.1 小节中 Beta 函散的特例.)

用逐项积分法计算如下:

$$S(x) = x\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(1-t)^{x-1}t^n \,\mathrm{d}t = x\int_0^1 (1-t)^{x-2}t \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x}{x-1}\int_0^1 (1-t)^{x-1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}.$$

其中逐项积分的合法性当 $x \geqslant 2$ 时可以用 Dini 定理知积分号下的函数项级散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-t)^{x-1}t^n$ 一致收敛来解决, 但是当 $1 < x < 2$ 时 $\int_0^1 (1-t)^{x-2}\,\mathrm{d}x$ 为收敛的瑕积分, 因此需要用命题 16.1.1 的结论. □

例题 16.2.2 (Euler) 求级数 $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ 的和.

这就是历史上的 Basel 问题 [17, 18]. Euler 是求出本题答案的第一人. 他根据类比猜测出正弦函数的无穷乘积展开式 (13.24). 将它改写为

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots,$$

其中左边当 $x = 0$ 时理解为其极限值 1, 因此左边为

$$1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\ \ (x \to 0).$$

Euler 又将展开式和多项式的根与系散关系作类比, 看出右边应该是

$$1 - \frac{x^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + O(x^4)\ \ (x \to 0),$$

比较两边的 x^2 项的系数就知道所求的级数和为 $\frac{\pi^2}{6}$. 下面我们将 Euler 的方法严格化, 作为第一个解.

解 1 在正弦函数的无穷乘积展开式中令 $y = x^2/\pi^2$, 然后讨论函数

$$F(y) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{n^2}\right). \tag{16.8}$$

这时由于 $F(y) = 1 - y\pi^2/6 + O(y^2)$, 因此只需要从 (16.8) 右边的无穷乘积出发证明函数 F 在 $y = 0$ 处的导数 $F'(0) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 即可.

对函数 F 在 $|y| < 1$ 范围内取对数, 并求导得到

$$\frac{F'(y)}{F(y)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{y}{n^2}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - y},$$

其中右边逐项求导的合理性容易从 Weierstrass 一致收敛性判别法得到验证, 同时这也保证了 F 的可微性. 然后令 $y = 0$ 代入, 利用 $F(0) = 1$, 可见所求结果成立. 因此有

$$F(y) = 1 - y\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) + o(y)\ (y \to 0),$$

这样就知道有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) + o(x^2)\ (x \to 0),$$

因此 Euler 的方法是正确的. □

注 在作代换 $y = x^2/\pi^2$ 时有 $y \geqslant 0$, 但从 (16.8) 可见, F 对于 $y < 0$ 仍有意义, 因此上述计算是正确的. 有兴趣的读者可以用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 对此作出解释.

解 2 (用反正弦函数的幂级数展开式)

先证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{16.9}$$

写出函数 $\arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 的幂级数展开式

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

在其中令 $x = \sin t$, 得到

$$t = \sin t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\sin^{2n+1}t,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

上式两端对 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分, 并对右端逐项积分, 得到

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

这就证明了 (16.9). 然后从

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

即可解出 $S = \pi^2/6$. □

注 1 解 2 也是 Euler 找到的, 发表于 1743 年 (参见 [17]), 又见于美国数学月刊 卷 94 (1987) 662~663 页和卷 95 (1988) 331 页. 实际上这个思路也出现在 [39] 的第二章的习题 41 中. 此外, 那里还指出从 $(\arcsin x)^2$ 的 Maclaurin 级数展开式出发也可以达到目的.

注 2 有很多函数的 Fourier 级数展开式可用于此题. 例如见例题 15.2.2, 这里不再重复.

以上的第一种解法可以推广到一般情况, 即利用正弦函数的无穷乘积展开式可以求出 p 为偶数时的所有 p 级数之和. 这是 Euler 最得意之作.

例题 16.2.3 证明: 对于所有正整数 n, $p = 2n$ 的 p 级数之和为

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m)^{2n}} = \frac{\overline{B}_n}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}, \tag{16.10}$$

其中 $\overline{B}_n$ ($n \geqslant 1$) 为 Bernoulli 数. 前七个 Bernoulli 数为 $\overline{B}_1 = \frac{1}{6}$, $\overline{B}_2 = \frac{1}{30}$, $\overline{B}_3 = \frac{1}{42}$, $\overline{B}_4 = \frac{1}{30}$, $\overline{B}_5 = \frac{5}{66}$, $\overline{B}_6 = \frac{691}{2\,730}$, $\overline{B}_7 = \frac{7}{6}$ (见 7.2.3 小节).

证 从正弦函数的无穷乘积 (见例题 13.4.3)

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

出发, 取绝对值后再取对数, 将无穷乘积转化为无穷级数:

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

对于 $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的 x, 在上式两边求导, 得到 ①

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}. \tag{16.11}$$

这里逐项求导的合理性不难用 Weierstrass 一致收敛性判别法加以验证, 从略. 然后在 $|x| < \pi$ 时作以下运算:

① 公式 (16.11) 已经出现在 15.2.7 小节的练习题 3, 那里是从函数 $\cos px$ ($0 < p < 1$, $x \in (-\pi, \pi)$) 的 Fourier 展开式中令 $x = 0$ 代入得到.

$$x\cot x = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2 - m^2\pi^2} = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dfrac{x^2}{m^2\pi^2}}{1 - \dfrac{x^2}{m^2\pi^2}}$$

$$= 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)^n = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)^n$$

$$= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{2n}}{\pi^{2n}}x^{2n},\ |x| < \pi,$$

其中 $s_{2n} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^{2n}}$ 即是 $p = 2n$ 时的 p 级数的和 (在以上计算中对二重正项级数求和利用了第十三章第一组参考题 9).

另一方面, 从 (14.25) 已经得到公式

$$x\cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{B}_n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}. \tag{16.12}$$

根据幂级数展开式的惟一性就可以得到所要的结果. □

注 由此可得到 Bernoulli 数的几个重要性质. 首先是 $\overline{B}_n = (-1)^{n-1}B_{2n} > 0$. 其次, 容易证明 $1 < s_{2n} < 2n/(2n-1)$ (见例题 13.2.1), 因此由 (16.10) 和 Stirling 公式可以得到 Bernoulli 数的渐近公式:

$$\overline{B}_n \sim \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sim 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi\mathrm{e}}\right)^{2n}. \tag{16.13}$$

这在确定例题 14.4.2 中的几个幂级数的收敛半径时有用. 又从

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

(见上册 374 页题 15) 可知, 用 (16.13) 右边的渐近公式可以对于 Bernoulli 数 $\overline{B}_n$ 给出相对误差很小的估计. 最后, 可由此看出在 $n > \pi\mathrm{e} \approx 8.54$ 之后 Bernoulli 数 $\{\overline{B}_n\}$ 的增长非常快, 虽然 $\overline{B}_7$ 刚超过 1, 但 $\overline{B}_{13}$ 已经大于 10^6.

下面的前半题已于本书多次见过.

例题 16.2.4 (1) 求 Leibniz 型级数的和 $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$;

(2) 令 $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2$, $n = 1, 2, \cdots$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和.

解 (1) 用 Abel 方法. 根据 Abel 第二定理, 有 $S = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x)$, 其中

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots.$$

对上式右边的幂级数在 $(-1, 1)$ 内逐项求导得到

$$S'(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1+x},$$

又利用 $S(0) = 0$, 因此可以求出

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x),\ -1 < x < 1.$$

从而得到

$$S = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

(2) 从 (1) 可见 a_n 就是该级数的第 n 个余项 (再乘以 -1), 因此可以得到 $a_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$, 再用 $\sum\int = \int\sum$ 即可得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2 - \frac{1}{2}$. □

注 过去已经知道 (1) 中的级数和, 但主要是通过一个特殊的 Catalan 恒等式将问题转化为求数列 $\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\}$ 的极限问题而解决的 (见例题 11.4.1 的注). 因此过去的这种方法太特殊了, 不如本题的 Abel 求和法可以解决不少级数求和问题.

Abel 方法也有可能解决某些函数项级数的求和问题.

例题 16.2.5 求三角级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 的和函数[①].

解 从函数项级数的敛散性判别法可以知道级数在 $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时收敛, 因此只需求 $(0, 2\pi)$ 上的和函数 S. 又从内闭一致收敛知 S 连续.

以 x 为参数, 另行引入变量 $\alpha \in (-1, 1)$, 由 Abel 第二定理有

$$S(x) = \lim_{\alpha\to 1^-} f(\alpha),$$

其中

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}\alpha^n.$$

为简明起见在 $f(\alpha)$ 中没有指出与参数 x 的依赖关系. 在 $(-1,1)$ 内将此幂级数对 α 逐项求导, 并用 Euler 公式计算如下:

$$f'(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}\cos nx = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

$$= \mathrm{Re}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\cos x - \alpha}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}.$$

然后再利用 $f(0) = 0$ 求积得到

$$f(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2),\ -1 < \alpha < 1.$$

最后就有:

$$S(x) = \lim_{\alpha\to 1^-} f(\alpha) = f(1) = -\frac{1}{2}\ln 2(1-\cos x) = -\ln 2 - \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|. \quad \square$$

注 由所得的等式

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

出发, 可以利用命题 16.1.2 逐项积分, 或者利用 Fourier 级数的逐项积分定理 (命题 15.2.9) 得到 Euler 积分 (命题 12.3.4) 的值:

---

① 对于余弦三角级数也有与例题 15.2.3 和 15.2.4 相同的结论 (见 [19] 的卷 3 第 666 小节), 因此事先就可以判定本题的和函数绝对可积, 而题中的三角级数为其 Fourier 级数.

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

从而对该积分的计算提供了一种级数解法.

下面是 1996 年新发现的圆周率公式.

例题 16.2.6 证明:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right). \tag{16.14}$$

证 利用逐项积分可知在 $k>0$ 和 $0<x<1$ 时成立

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^{k-1}}{1-t^8}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x (t^{k-1}+t^{k+7}+\cdots+t^{k-1+8n}+\cdots)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x^k}{k}+\frac{x^{k+8}}{k+8}+\cdots+\frac{x^{k+8n}}{k+8n}+\cdots.\end{aligned}$$

令 $x=\sqrt{2}/2$ 代入得到

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t^{k-1}}{1-t^8}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{k/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\cdot\frac{1}{8n+k}.$$

将这个结果与所求公式的右边比较, 可见已经得到右边的积分形式为:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x.$$

这是一个有理函数的定积分, 不难按照标准方法计算出它的值等于 π (已作为第十章的最后一个参考题). □

注 利用这个公式可以快速计算圆周率在小数点后的任意指定位数上的单个数字, 而不必求出在该位之前的所有数字. 由于这与过去所有算法的思路 (例如 8.7.1 小节中的刘徽-Archimedes 算法和 Salamin-Brent 算法) 不同, 因此有人称之为**圆周率的后现代算法**. 有兴趣的读者可以参考 [6, 51], 在后者的第二十章中附有为此编制的 Mathematica 程序. 但是要指出, 这里的圆周率在小数点后是按 16 进制展开的. 还不清楚是否存在与十进制对应的这类算法, 至少到现在还没有找到.

16.2.3 练习题

1. 设已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = B$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛并求其和.
2. 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 为 m 次多项式, 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{P(n)}{n!}$ 的和.
3. 求 $1-\dfrac{2^3}{1!}+\dfrac{3^3}{2!}-\dfrac{4^3}{3!}+\cdots$ 的和.
4. 求下列级数和: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{2}{n^2}$.

5. 设 $a>1$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{a^{2^n}+1}$ 的和.

6. 求 $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}-\cdots$ 的和.

7. 求 $1-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{15}+\cdots$ 的和.

8. 求 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots$ 的和.

9. 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ 的和.

10. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4n+1}+\dfrac{1}{4n+3}-\dfrac{1}{2n+2}\right)$ 的和.

11. 求 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{14}+\cdots$ 的和.

12. 求 $\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^9}{9!}+\dfrac{x^{15}}{15!}+\cdots$ 的和函数

13. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ 的和函数.

14. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 的和函数.

15. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 为发散的正项级数, $x>0$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$ 的和函数.

16. 设 $x>1$, 求 $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\dfrac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots$ 的和函数.

§16.3 连续函数的逼近定理

在一个区间上将一个函数展开为某种函数项级数是研究无穷级数的基本目的之一. 这样就有可能用比较简单的函数来逼近原来的函数. 因此, 这类函数项级数的通项应当尽可能简单. 幂级数的优点就在于此. 但是能够展开为幂级数的函数类太窄, 一个函数即使无限阶可微也还不能保证它能展开为幂级数, 而即使能展开的话, 收敛域也可能太小, 不能满足要求.

Weierstrass 的连续函数逼近定理克服了所有这些困难. 这就是下面的 Weierstrass 第一逼近定理和第二逼近定理.

命题 16.3.1 (Weierstrass 多项式逼近定理) 有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f 一定可以用多项式一致逼近到任意程度, 这就是说对于每个给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $n=n(\varepsilon)$ 次多项式 P_n, 使得 $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$ 对于 $x\in[a,b]$ 同时成立.

命题 16.3.2 (Weierstrass 三角多项式逼近定理) 周期 2π 的周期连续函数 f 一定可以用三角多项式一致逼近到任意程度, 这就是说对于每个给定的 $\varepsilon>0$,

存在三角多项式 $S_n(x)=a_0/2+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, 其中 $n=n(\varepsilon)$, 使得 $|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ 对于一切 x 成立.

注 逼近定理的其他叙述方式可以是: 在第一逼近定理中, f 是一致收敛的多项式序列的极限函数, 也是一致收敛的多项式级数的和函数; 在第二逼近定理中, f 是一致收敛的三角多项式序列的极限函数, 也是一致收敛的三角多项式级数的和函数.

毫无疑问, Weierstrass 的逼近定理是数学分析中的头等重要的结果, 无论在理论上还是实际应用上都有重大的意义.

本节将对 Weierstrass 逼近定理的证明方法作介绍, 然后以例题的形式举出它的几个应用.

16.3.1 核函数方法

在 Fourier 级数的一章中已经见到了 Dirichlet 核与 Fejér 核 (在其参考题中还有 de la Vallée Poussin 核). 在 Weierstrass 逼近定理的许多证明方法中, 很多都可以归入核函数方法之中.

定义 设 $\Delta_n(x)$ 是在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上定义的以 n 为参数的函数, 且具有下列性质:

1. $\Delta_n(x)$ 为非负函数, 即 $\Delta_n(x)\geqslant 0\ \forall x\in\mathbf{R}$;
2. $\Delta_n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上广义可积, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_n(x)\,\mathrm{d}x=1$;
3. 对任意给定的 $\delta>0$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\Delta_n(x)\,\mathrm{d}x=1$, 这等价于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right)\Delta_n(x)\,\mathrm{d}x=0;$$

则称 $\Delta_n(x)$ 为 (正) 核函数.

注 1 由定义可见, 可以将核函数看成为一个函数列. 但我们经常将它看成是以 n 为参数的函数 (或函数族). 实际上还可以定义带有连续参数的核函数. 在 Fourier 级数一章中的 Dirichlet 核与 Fejé 核的性质与这里的条件有些差异, 首先, Dirichlet 核不满足第一个条件, 即不是正核. 其次, 它们都是周期 2π 的周期函数, 因此需要将后两个条件中的 $\mathbf{R}$ 改为长度为一个周期的闭区间 $[-\pi,\pi]$.

注 2 这里需要强调指出, 从 15.2.1 的 Dirichlet 积分开始, 所用的方法与第十四章中的积分号下求极限的方法完全不同. 实际上从 Riemann 引理 (上册 313 页) 已经可以看到, 当 n (或其他参数) 趋于无穷大时, 积分号下的表达式未必有

极限, 然而积分作为 n (或其他参数) 的函数仍可能存在极限. 这里当然不可能用交换极限顺序的方法来求极限.

对于核函数而言, 一般将 $n \to \infty$ 时核函数的极限函数称为 Dirac 的 δ-函数, 也就是**广义函数**. 从核函数的定义可知, 这里的极限过程与广义函数都不能按照极限和函数的通常意义来理解. 广义函数是泛函分析中的研究内容. 例如可参看 [53] 的第七章 "广义函数".

注 3　关于核函数方法 (或奇异积分方法) 在数学分析中的介绍可以参考 [19] 的卷 3 第 723 小节, [60] 的卷 2 第 17 章 §4 和 [14] 的第 5 章等. 还可以参考 [35] 的第 10 章对于奇异积分的系统论述. 其中的记号和条件不尽相同.

下面举出几个核函数的例子.

1. 定义阶梯函数 $\Delta_n(x) = \begin{cases} n, & -\dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ 0, & \text{其他 } x, \end{cases}$ 则不难验证它满足核函数定义中的所有条件.

2. Weierstrass 逼近定理的 Landau 证明 (1908 年) 所用的核函数为

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{I_n}(1-x^2)^n, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

其中 $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x$. 这时核函数定义中的前两个条件显然满足. 对于条件 3, 当 $0 < \delta < 1$ 时, 从

$$0 \leqslant \int_{\delta}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\delta}^{1} (1-\delta^2)^n \,\mathrm{d}x = (1-\delta^2)^n(1-\delta),$$

以及对于 I_n 的估计

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x > 2\int_{0}^{1} (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1},$$

就知道

$$0 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \right) \Delta_n(x) \,\mathrm{d}x \leqslant (n+1)(1-\delta^2)^n(1-\delta),$$

因此当 $n \to \infty$ 时极限为 0.

3. 实际上构造核函数的一个很一般的方法是先在 $\mathbf{R}$ 上定义一个非负可积函数 $f(x)$, 使它在某个区间 $[-a, a]$ $(a > 0)$ 之外恒等于 0, 但积分 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x) \,\mathrm{d}x > 0$, 然后令 $\Delta_n(x) = \dfrac{n}{I} f(nx)$ 即可.

核函数的作用在于它与另一个函数 f 通过**卷积**运算得到的新的函数 $f * \Delta_n$:

$$(f * \Delta_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Delta_n(x-t) \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\Delta_n(u) \,\mathrm{d}u. \tag{16.15}$$

在数学文献中称这些积分为**奇异积分**.

对于上面的第一个例子的核函数, 这就是

$$(f * \Delta_n)(x) = n\int_{x-1/2n}^{x+1/2n} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

也就是函数 f 在区间 $[x-1/2n, x+1/2n]$ 上的积分平均值. 容易直接证明: 若 f 于点 x 连续, 则有

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{x-1/2n}^{x+1/2n} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

实际上这是下列命题的特例.

命题 16.3.3 设 f 是在 $\mathbf{R}$ 上定义而在某个区间 $[-a,a]$ 外恒等于 0 的连续函数, Δ_n 是某个核函数, 则对于每个 x 成立

$$\lim_{n\to\infty}(f * \Delta_n)(x) = f(x),$$

而且这个收敛过程在区间 $[-a,a]$ 上是一致的.

证 根据条件可知 f 与 Δ_n 的卷积存在. 为方便起见记 $f * \Delta_n = f_n$. 利用核函数定义中的条件 2, 只需估计下列积分:

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x-u) - f(x)]\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 在区间 $[-a-1, a+1]$ 上利用 f 的一致连续性, 存在 $0 < \delta < 1$, 使得当 $x, x' \in [-a-1, a+1]$, $|x-x'| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. 又设 $|f(x)| < M\ \forall x \in \mathbf{R}$. 于是从核函数条件 1 和 3 有

$$\left|\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} [f(x-u) - f(x)]\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant 2M\left|\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\right| = o(1),$$

且与 x 无关. 因此存在 N, 使得当 $n > N$ 时左边的值小于 ε.

对于在区间 $[-\delta, \delta]$ 上的估计如下:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\delta}^{\delta} [f(x-u) - f(x)]\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-u) - f(x)|\Delta_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} \Delta_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

注意这个估计对于 $x \in [-a, a]$ 一致. 于是当 $n > N$ 时就在 $[-a, a]$ 上一致成立所要的估计式:

$$|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon. \quad \square$$

注 1 若取 $a = 1/2$, Δ_n 为 Landau 的核函数, 则 $f_n(x)$ 是次数不超过 $2n$ 的多项式, 因此我们就已经对于命题中的连续函数证明了 Weierstrass 第一逼近定理, 即命题 16.3.1. 为了推广到定义在一般区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 则可以将 f 先线性延拓到 $[a-1, b+1]$, 使得 $f(a-1) = f(b+1) = 0$, 然后作线性变换使区间

$[a-1,b+1]$ 映射为某个区间 $[-c,c]$ $(c>0)$, 这时 $f(-c)=f(c)=0$, 然后在该区间之外将 f 作恒等于 0 的延拓.

注 2 Landau 证明在教科书中出现很多, 例如可以参看 [36, 54] 的不同论述.

16.3.2 Bernstein 证明的概率解释

目前许多教材往往采取 Bernstein 的方法来证明 Weierstrass 逼近定理. 这个证明无疑具有一系列优点, 例如: 除了 Cantor 的一致连续性定理之外, 可以不用微积分工具, 又能给出逼近多项式的显式表达式等等. 但是初学者往往难以明白它的思想从何而来. 因为 Bernstein 是从概率论出发得到这个证明的 (1912). 下面我们不重复在许多教科书中关于 Bernstein 证明的细节, 而是致力于用通俗的语言来阐明它的概率意义. 希望这些解释会对于初学者有点启发作用.

首先, 将证明的主要过程列出如下.

对于区间 $[0,1]$ 上的连续函数 f 写出 Bernstein 多项式

$$B_n(f)(x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},\ 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{16.16}$$

这里可以将 B_n 希成是带有参数 n 的算子, 它作用于 f 就得到一个多项式 $B_n(f)$.

利用恒等式

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=1, \tag{16.17}$$

就可以用拟合法得到:

$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}.$$

利用 f 在 $[0,1]$ 上一致连续, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x,x'\in[0,1]$, 且 $|x-x'|<\delta$ 时成立 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 然后将上面的和式按照 $|x-i/n|<\delta$ 和 $|x-i/n|\geqslant\delta$ 分拆, 即有

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right|\leqslant\left|\sum_{|x-\frac{i}{n}|<\delta}\right|+\left|\sum_{|x-\frac{i}{n}|\geqslant\delta}\right|.$$

对于第一个和式利用一致连续性和 (16.17) 估计如下:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{|x-\frac{i}{n}|<\delta}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\right|\\&\qquad\leqslant\sum_{|x-\frac{i}{n}|<\delta}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

对第二个和式则需要用一个恒等式:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}-x\right)^2x^i(1-x)^{n-i}=\frac{x(1-x)}{n}, \tag{16.18}$$

又假设 $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in [-1,1]$, 然后就不难证明存在 N (这里的细节见收有这个证明的教科书), 使得当 $n > N$ 时第二个和式的绝对值也小于 ε. 从而就在 $n > N$ 时得到所要的估计:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| < 2\varepsilon.$$

现在我们从概率角度来解释以上过程. 其中的有关知识可以在概率论的教科书中找到 (例如 [20]). 这里所用的概率模型是 Bernoulli 的独立试验序列概型. 其中设事件 A 的概率为 $x \in [0,1]$, 每一次试验只有两种结果, 即 A 出现, 或者 A 不出现. 假设作 n 次独立试验, 于是其中事件 A 出现 i 次的概率就是

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \tag{16.19}$$

这里的组合数 $\binom{n}{i}$ 是在 n 次试验中事件 A 出现 i 次的可能情况的个数. 例如, 在前 i 次接连出现 A 但以后就再不出现 A 就是其中的可能情况之一.

这样就可以理解恒等式 (16.17) 是什么意思了. 它简单地就是事件 A 在 n 次试验中出现 0 次, 1 次, 直到出现 n 次的概率之和, 当然就等于 1.

下面的问题就是在估计 (16.16) 时为什么要将和式作分拆? 又为什么要根据 $|x - i/n| < \delta$ 和 $|x - i/n| \geqslant \delta$ 来分拆? 为此最好要观察概率 (16.19) 作为 i 的函数的变化规律. 在图 16.1 中取定 $x = 0.2$ 后对于 $n = 20$ 与 $n = 100$ 的两种情况作出了示意图.

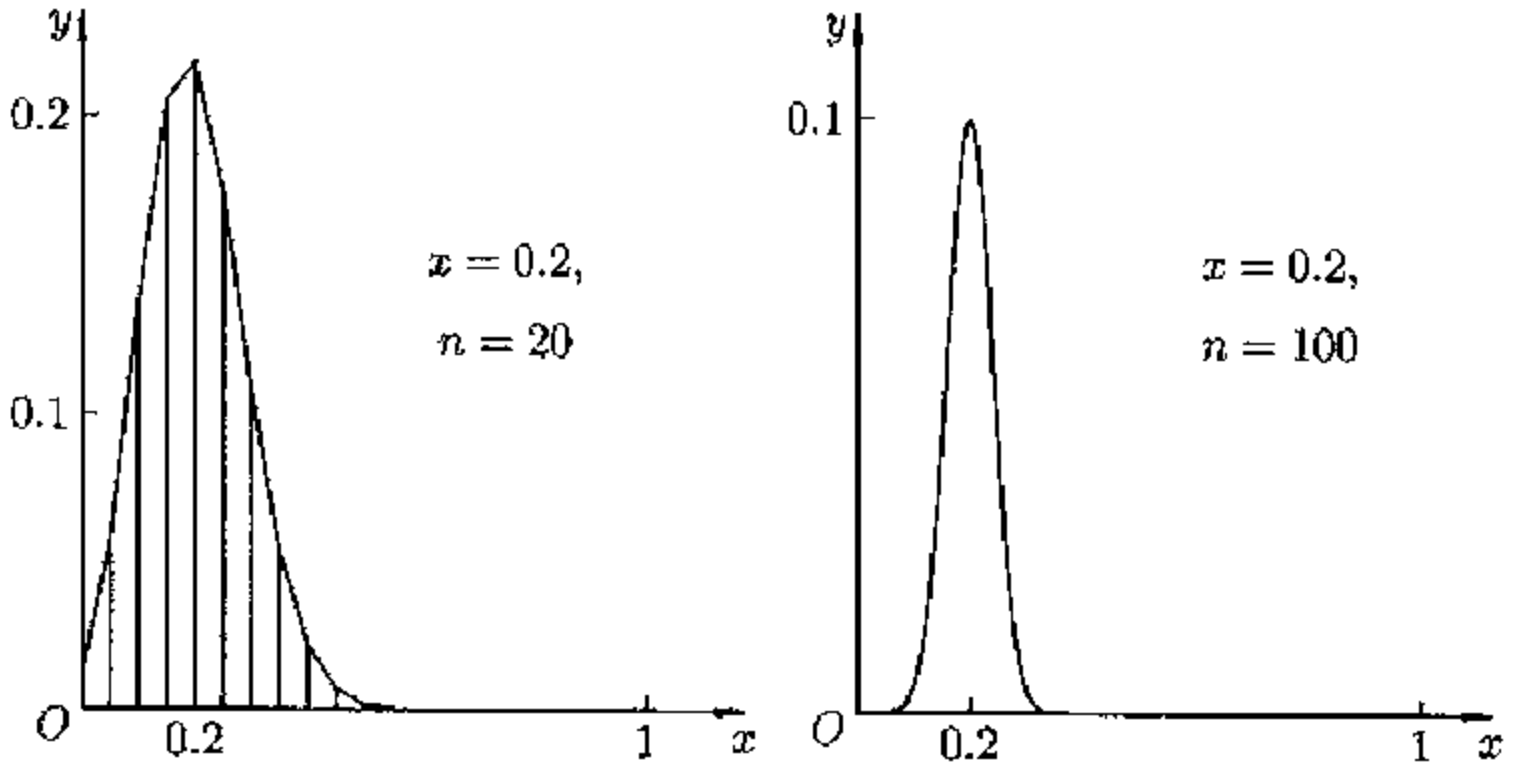


图 16.1

从图上可以看出, 将点 $(i/n, B_i^n(0.2))$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 相联得到的是一条单峰曲线, 它的最大值差不多就是 i/n 与 $x = 0.2$ 最接近的地方. 这一点从概率角度是很直观的事实. 我们往往称 i/n 为频率. 由于事件 A 出现的概率是 $x = 0.2$, 平时我们就说成每 5 次独立试验时事件 A 出现 1 次. 这当然不可能是完全准确的预言. 但是当试验次数 n 越来越大时, 频率应当接近 $x = 0.2$. 这个直观的猜测在概率论中有理论上的证明, 这里从略.

对比图 16.1 的两种情况, 可以看出当 n 从 $n=20$ 增加到 $n=100$ 时, 峰变得越来越窄. 这就是说当 n 变大时, 频率 i/n 越来越向概率值 $x=0.2$ 靠拢. 这种现象在概率论中也有专门讨论.

此外, 还要注意恒等式 (16.18) 的概率意义是度量频率偏离概率的程度, 在概率论中称为**方差**. 这个恒等式可以用微分法或组合计算得到. 其右边的表达式表明当 n 增大时方差是如何降低的.

最后, 将和式 (16.16) 分拆的处理表明, 在和式中第一个和式是提供接近 $f(x)$ 的主要部分, 原因就在于图 16.1 中的单峰现象. 而第二个和式则依赖于 (16.18) 来解决.

注 1 虽然 Bernstein 证明有着自己的特点, 但从本质上说仍然可以归纳入核函数方法之内. 只不过代替卷积是离散的和式 (16.16). 核函数定义中的三个条件在这里都是满足的.

注 2 关于 Bernstein 多项式在逼近理论中的地位, 以及由于 Bézier 方法的出现而得到新的发展等可以参看数学分析教材 [8] 的第一册第 5 章. 此外, 对 Weierstrass 逼近定理的 Bernstein 证明并不一定要从概率角度来理解. Korovkin 的证明 (1953) 完全从函数论出发, 可以参考教材 [9].

16.3.3 逼近定理的一个初等证明

这里所说的初等证明是指不必使用微积分工具, 同时其思路也比较简单.

这类证明已有多个. 这里介绍的是由 H. Cohen 给出的证明, 见 Archiv der Mathematik, 15 卷 (1964) 316~317 页 (参见 [52]).

第一步是对于一个多项式序列的分析.

命题 16.3.4 对于任意正数 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, 多项式序列 $Q_n(x)=(1-x^n)^{2n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[0,\delta]$ 和 $[1-\delta,1]$ 上分别一致收敛于 1 和 0.

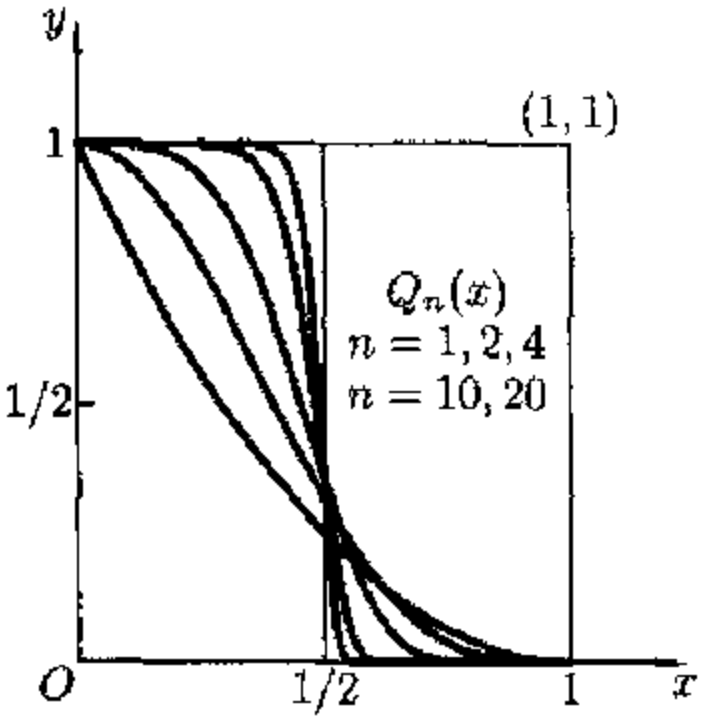


图 16.2

证 在图 16.2 上作出了 $n=1,2,4,10,20$ 的 $Q_n(x)$ 的图像. 容易证明

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.368.$$

以下的主要工具是 Bernoulli 不等式 (证明见上册第 3 页):

当 $h>-1, n\in\mathbf{N}_+$ 时, 有

$$(1+h)^n \geqslant 1+nh.$$

容易看出 $Q_n(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上严格单调减少. 在区间 $[0,\delta]$ 上

$$1 \geqslant Q_n(x) \geqslant Q_n(\delta) = (1-\delta^n)^{2^n} \geqslant 1 - 2^n\delta^n = 1 - (2\delta)^n \to 1.$$

又记 $\eta = 1-\delta > 1/2$, 则在区间 $[\eta,1]$ 上, 有 $0 \leqslant Q_n(x) \leqslant Q_n(\eta)$, 且有

$$\frac{1}{Q_n(\eta)} = \left(\frac{1}{1-\eta^n}\right)^{2^n} = \left(1 + \frac{\eta^n}{1-\eta^n}\right)^{2^n} \geqslant 1 + \frac{2^n\eta^n}{1-\eta^n} > (2\eta)^n \to +\infty.$$

可见结论成立. □

作为上述命题的推论就可以得到

命题 16.3.5 令 $P_n(x) = Q_n((1-x)/2)$, $n = 1,2,\cdots$, 则对于任意正数 $\delta \in (0,1)$, 多项式序列 $\{P_n\}$ 在 $0 < \delta \leqslant |x| \leqslant 1$ 上一致收敛于单位跳跃函数 (即 Heaviside 函数)

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

第一逼近定理的证明 设 $f \in C[0,1]$, 且不妨设 $f(0) = 0$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 利用 (§5.4 节的) Cantor 定理知, 存在阶梯函数

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k H(x - x_k),$$

其中 $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$, 使得在区间 $[0,1]$ 上 $|f(x) - T(x)| < \varepsilon/3$ 成立, 且 $|s_k| < \varepsilon/3$, $k = 1,\cdots,n$.

现在取 $\delta > 0$ 充分小, 使得所有区间 $(x_k - \delta, x_k + \delta)$ $(k = 1,\cdots,n)$ 均不相交. 然后对于这个 $\delta > 0$, 根据命题 16.3.5, 存在充分大的 n, 使得成立

$$|P_n(x) - H(x)| < \frac{\varepsilon}{3s} \quad \forall\, 0 < \delta \leqslant |x| \leqslant 1,$$

其中 $s = \sum_{k=1}^{n} |s_k|$. 此外还要注意 $P_n(x)$ 的取值范围必在 0 和 1 之间.

现在构造多项式

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k P_n(x - x_k),$$

则当 x 属于某个区间 $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时, 就有

$$\begin{aligned} |T(x) - P(x)| &\leqslant \sum_{k \neq i} |s_k||H(x - x_k) - P_n(x - x_k)| + |s_i||H(x - x_i) - P_n(x - x_i)| \\ &< s \cdot \frac{\varepsilon}{3s} + |s_i| \cdot 1 < \frac{2\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

而当 x 不属于任何 $(x_k - \delta, x_k + \delta)$ $(k = 1,\cdots,n)$ 时, 则上述不等式右边只有一项, 估计更为简单, 即小于 $\varepsilon/3$.

因此就得到

$$|f(x) - P(x)| \leqslant |f(x) - T(x)| + |T(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

16.3.4 逼近定理的其他证明

Weierstrass 逼近定理的证法很多, 在这里我们将浏览一下其他证明.

首先需要指出两个逼近定理是等价的, 即从其中之一可以推出另一个成立. 有兴趣的读者可以参考 [1, 35, 46] 等著作中关于等价性的证明. 这里从略.

在第十五章已经用两种方法证明了命题 16.3.2, 即第二逼近定理, 第一种方法是用 Fejér 核 (见命题 15.2.4 的注 2), 第二种方法是用 Fourier 级数的一致收敛定理 (见命题 15.2.7 的注). 此外, 还有在该章参考题 19 中的 de la Vallée Poussin 的证明, 它也是一种核方法 (参见 [43] 卷 2).

此外, 虽然我们在前面强调了核函数方法的价值, 但是从上一小节的证明已经知道, 逼近定理有不用核函数方法的初等证明.

对于第一逼近定理, 这里较为常见的不用核函数的方法是由 Lebesgue 给出的. 其基本思路非常直观. 先用分段线性函数来逼近连续函数, 然后证明可以将分段线性函数用函数 $f(x)=|x|$ 的平移和 x 的线性组合得到. 从而最后问题归结为证明在任意区间 $[a,b]$ 上存在多项式一致逼近 $y=|x|$. 这里我们见到的至少有三种方法. 第一种方法是利用在命题 14.1.9 介绍的 Visser 定理, 它利用迭代方法得到了在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $|x|$ 的多项式序列, 而无需微积分工具. 第二种是在 $(1+x)^{1/2}$ 的 Maclaurin 展开式中将 x 用 x^2-1 代替得到所要的多项式级数展开式. 读者可以在 [31, 34, 46] 找到详细的证明过程. 第三种方法是先证明函数列

$$f_n(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t},\ n=1,2,\cdots \tag{16.20}$$

对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$, 在区间 $[-1,-\varepsilon]$ 上和 $[\varepsilon,1]$ 上一致收敛于 $\operatorname{sgn}x$ [①], 然后不难证明函数列

$$g_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots$$

在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $|x|$ (参见 [7]).

最后还应当指出, Weierstrass 逼近定理有许多推广. Weierstrass 本人已经得到高维空间的逼近定理. 最有意义的推广是 Stone-Weierstrass 定理, 它包含了许多逼近定理为其特例, 已经成为现代分析的理论支柱之一. 读者可以参考在 [15, 46] 中的证明, 其中后者给出了 Weierstrass 逼近定理的 Stone 证明, 它可以几乎不加修改地用于证明 Stone 定理.

---

① 这里关于 (16.20) 的结论实际上等价于命题 16.3.5, 因此可以按照上一小节的证明做下去.

16.3.5 逼近定理的应用举例

在举具体例题前需要指出 Weierstrass 逼近定理对于一些基本问题的启示.

首先, 在闭区间上的每个连续函数都有用多项式级数或者三角多项式级数的解析表达式, 而不需要任何其他条件. 因此连续函数与我们过去已经熟悉的可以展开为幂级数的许多初等函数具有共同点: 即都可以展开为函数项级数, 而且不需要增加其他条件.

有了逼近定理, 又可以将连续函数与能够展开为幂级数的函数非常清楚地区分开来. 我们已经知道, 要将一个函数展开为幂级数, 至少要求该函数无限次可导, 而且这还不是充分的. 一般称这类函数为**实解析函数**.

如何求出逼近定理中的逼近多项式或三角多项式当然是很重要的问题. 这是函数逼近论的研究课题. Weierstrass 逼近定理就是逼近论的最重要的起点.

下面只是逼近定理在数学分析中的几个应用, 希望起到抛砖引玉的作用.

例题 16.3.1 (Lebesgue) 证明: 区间上的连续函数必有原函数.

证 设 $f \in C[a,b]$, 则根据逼近定理知, 存在多项式序列 $\{P_n\}$ 于区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

对每个多项式 P_n, 存在多项式 Q_n, 使得在 $[a,b]$ 上满足 $Q_n' = P_n$. 同时总可以令 $Q_n(a) = 0$ 成立. 这样就得到多项式序列 $\{Q_n\}$.

以下分两步, 先证明 $\{Q_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 然后证明其极限函数的导函数就是 f.

(1) 根据 $\{P_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛, 由 Cauchy 一致收敛准则 (的必要性) 知道, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对于每个 $n \geqslant N$ 和正整数 p, 对每个 $x \in [a,b]$ 同时成立

$$|P_{n+p}(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \tag{16.21}$$

于是可以在区间 $[a,x]$ 上用 Lagrange 微分中值定理得到

$$\begin{aligned} |Q_{n+p}(x) - Q_n(x)| &= |(Q_{n+p}(x) - Q_n(x)) - (Q_{n+p}(a) - Q_n(a))| \\ &= |P_{n+p}(\xi) - P_n(\xi)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

由于这对于所有 $n \geqslant N$ 和正整数 p 以及所有 $x \in [a,b]$ 都成立, 再次使用 Cauchy 一致收敛准则 (的充分性), 就知道 $\{Q_n\}$ 于 $[a,b]$ 一致收敛. 记其极限函数为 F. 它满足条件 $F(a) = 0$.

(2) 为了建立 $F' = f$, 只需对于任意点 $x_0 \in [a,b]$ 和任意给定的 $\varepsilon > 0$, 证明存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |h| < \delta$ 时, 成立关于差商的不等式

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < 3\varepsilon. \tag{16.22}$$

这里当然假设 $x_0 + h \in [a,b]$.

利用三分法可以将 (16.22) 的左边分拆成

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| \leqslant \left|\frac{Q_n(x_0+h)-Q_n(x_0)}{h}-P_n(x_0)\right|$$
$$+|f(x_0)-P_n(x_0)|+\left|\frac{F(x_0+h)-Q_n(x_0+h)-F(x_0)+Q_n(x_0)}{h}\right|, \quad (16.23)$$

首先, 对于 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时有 $|f(x_0)-P_n(x_0)|<\varepsilon$. 又不妨 N 已经足够大, 使得对于 $n\geqslant N$, 每个正整数 p 和每个 $x\in[a,b]$ 不等式 (16.21) 也已经成立. 然后在 (16.23) 右边取定 $n=N$.

对固定的 $n=N$, 对于 (16.23) 右边的第一项用微分中值定理得到

$$\left|\frac{Q_N(x_0+h)-Q_N(x_0)}{h}-P_N(x_0)\right|=|P_N(x_0+\theta h)-P_N(x_0)|,$$

其中 $0<\theta<1$. 利用 $P_N(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|h|<\delta$ 时, 上式右边小于 $\varepsilon/3$.

为估计 (16.23) 右边的第三项, 先对下列不等式的分子用微分中值定理, 得到

$$\left|\frac{Q_{N+p}(x_0+h)-Q_N(x_0+h)-Q_{N+p}(x_0)+Q_N(x_0)}{h}\right|$$
$$\leqslant|P_{N+p}(x+\theta h)-P_N(x+\theta h)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中 p 为任意正整数, $0<\theta<1$, 并利用在 $[a,b]$ 一致成立的不等式 (16.21). 最后, 在上式左边令 $p\to\infty$, 就知道 (16.23) 右边第三项不超过 ε, 因此所求证的不等式 (16.22) 成立. □

注 这个证明的意义在于, 连续函数的原函数的存在性完全不需要定积分概念就可以建立. 以上证明是依据 [31] 中的叙述作了改写. (参见按照传统思路安排下的命题 10.3.3.)

在 Fourier 级数的收敛性理论中最重要的工具是 Riemann 引理 (见例题 10.2.6). 由于在教科书中均有该引理的证明, 因此本书在前面对它未作证明. 下面是用 Weierstrass 逼近定理的一个证明.

例题 16.3.2 (Riemann 引理) 设 $f\in R[a,b]$, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

证 只证第一个即可. 对于可积函数 f 与任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g\in C[a,b]$, 使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$$

(见 10.5.2 小节第一组参考题 5).

根据逼近定理, 对于 g 存在于 $[a,b]$ 上一致逼近 g 的多项式 P, 满足

$$\int_a^b |g(x) - P(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因此就有

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x) - P(x)|\,\mathrm{d}x < 2\varepsilon.$$

然后从

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_a^b [f(x) - P(x)]\sin px\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b P(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(x) - P(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_a^b P(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

可见, 只需要对于多项式证明引理的结论就够了, 然而对于连续可微函数的 Riemann 引理的证明特别容易, 只需要用分部积分法即可, 以下从略. □

16.3.6 练习题

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上有定义, 且对每个 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 P, 使得满足条件 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon\ \forall x \in [a,b]$, 证明: $f \in C[a,b]$.
2. 设 $f \in C[a,b]$, 证明:
   (1) f 可以在 $[a,b]$ 上展开为一致收敛的多项式级数, 且在级数中除第一项之外均为在 $[a,b]$ 上非负的多项式.
   (2) f 可以在 $[a,b]$ 上展开为绝对一致收敛的多项式级数;
   (3) 对于任意给定的收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中有无限多项大于 0, 存在于区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f 的多项式级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, 使满足条件 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |P_n(x)| < a_n\ \forall n = 1,2,\cdots$.
3. 设 $f \in R[a,b]$, 则对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在两个多项式 $p(x)$ 和 $P(x)$, 使得满足条件: (1) $p(x) \leqslant f(x) \leqslant P(x)\ \forall x \in [a,b]$; (2) $\int_a^b [P(x) - p(x)]\,\mathrm{d}x < \varepsilon$.
4. 设 $f \in C[a,b]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明 f 为恒等于 0 的常值函数. 又, 若条件改为对于大于某个正整数 n_0 的所有 n 成立, 则也有相同结论.
5. (1) 设 $f \in C[-1,1]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_{-1}^1 x^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 f 必为奇函数.
   (2) 设 $f \in C[-1,1]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_{-1}^1 x^{2n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 f 必为偶函数.

6. 设 $f \in C[0,1]$, 证明: 存在奇次多项式序列在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f 的充分必要条件为 $f(0)=0$.
7. 设 $f \in R[a,b]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明 f 在每个连续点上等于 0.
8. 设函数 f 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可以展开为一致收敛的多项式级数, 证明: f 本身必是多项式. (这断定了 Weierstrass 定理不可能不作改变而推广到无限区间上去.)

§16.4 用级数构造函数

无穷级数不仅是研究函数的工具, 而且可以用于构造出具有各种特殊性质的函数, 其中有不少例子在数学发展史上起了重要的作用.

这里应当指出, 认为这些 "病态" 函数只是用作反例而没有其他意义的观点早已过时. 与 §5.6 节介绍的**混沌**几乎同时发展起来的另一个新的非线性科学领域是 "**分形**" (fractal), 其中的主要角色就是包括本节内容在内的各种 "怪物". 对此有兴趣的读者可以参考 [32, 21].

16.4.1 处处连续处处不可微的函数

在很长时间中人们对于连续性与可微性之间的关系不清楚, 许多人猜测连续函数只会在个别点或很少的点上不可微. 由于举出了处处连续处处不可微函数的例子, 这个问题得到了彻底解决.

这类例子最早出现在 Bolzano 的 1830 年的手稿中, 但只有曲线, 并无解析表达式, 也没有证明 (见 [16]). 正式发表的并有严格证明的第一个例子则属于 Weierstrass (1872 年) (可参考 [16, 26, 29] 等).

Weierstrass 函数是一个缺项 Fourier 级数:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin(b^n \pi x),$$

其中 b 为奇数, $0<a<1$, 且 $ab > 1+\dfrac{3\pi}{2}$. 由于右边的级数一致收敛, 因此函数 F 的连续性是明显的. 关于 F 处处不可微的证明可以在 [50, 29] 中找到.

目前教科书中在介绍处处连续处处不可微函数时一般均用 van der Waerden 于 1930 年提出的例子. 它在几何上相当直观, 证明也比较简单. 下面的证明可能比 [19] 卷 2 第 416 小节更简单一些. 主要是用关于差商的一个简单命题[①]: 若

① 证明是简单的, 用上册 159 页的有限增量公式 (6.1) 即可. 当然这里要求对每个 n 成立 $b_n - a_n > 0$. 又参见上册 189 页.

函数 f 于点 x_0 可导, 且 $\{[a_n, b_n]\}$ 是以点 x_0 为惟一公共点的闭区间套, 则就有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0). \tag{16.24}$$

与 Weierstrass 函数类似, van der Waerden 函数是用无穷级数来构造的. 现在按照下列步骤定义这个无穷级数的通项 $\{f_n\}$:

1. 将区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x) = |x|$ 按周期 2 延拓成为 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期连续函数, 仍记为 f.

2. 以 f 为模板构造函数列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x),\ n = 1, 2, \cdots,\ x \in (-\infty, +\infty). \tag{16.25}$$

可以看出 f_n 为周期 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 的连续周期函数, 且有 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$. 还可看出 f_n 的极值点等距分布, 相邻极值点之间的距离也是 $\frac{1}{2^n}$.

3. 重要的是 f_n 与 f_{n+1} 之间有如下的关系:

   (1) f_n 的极值点必是 f_{n+1} 的零点,

   (2) f_{n+1} 的任意两个相邻极值点必落在 f_n 为线性的一个子区间内.

4. 对任意自然数 n, 设 a_n, b_n 为 f_n 的任意两个相邻的极值点, 则

   (1) $k > n$ 时, 由 3.(1) 知 a_n, b_n 为 f_k 的零点, 因此

$$\frac{f_k(a_n) - f_k(b_n)}{a_n - b_n} = 0. \tag{16.26}$$

   (2) $k \leqslant n$ 时, 由 3.(2) 知

$$\frac{f_k(a_n) - f_k(b_n)}{a_n - b_n} = 1 \text{ 或 } -1. \tag{16.27}$$

以上关于 $\{f_n\}$ 的性质非常直观, 读者可以对照图 16.3(a) 中对于 f_1, f_2, f_3 在 $[0,1]$ 的曲线来理解这些性质

现在定义 van der Waerden 函数如下:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in (-\infty, +\infty). \tag{16.28}$$

从 $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 可知 (16.28) 右边的函数项级数一致收敛, 因此和函数 $W(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续. 最后, 我们来证明:

命题 16.4.1 连续函数 W 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处不可导.

证 对任意指定的点 x_0, 由 (16.24) 可知, 只要能找到以 x_0 为惟一公共点的闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$, 使得极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W(b_n) - W(a_n)}{b_n - a_n}$$

不存在即可.

利用 f_n 的极值点等距分布, 且相邻极值点的距离为 $1/2^n$, 取 a_n 和 b_n 为 f_n 的两个极值点, 满足条件: (1) $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$, (2) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$.

记 $d_n=\dfrac{W(b_n)-W(a_n)}{b_n-a_n}$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$d_n=\frac{1}{b_n-a_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k(b_n)-\sum_{k=1}^{\infty}f_k(a_n)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(b_n)-f_k(a_n)}{b_n-a_n}.$$

由式 (16.26) 知上式右边和式中的项当 $k>n$ 时均为 0, 因此有

$$d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(b_n)-f_k(a_n)}{b_n-a_n}.$$

由式 (16.27) 知上式右边和式的每一项为 -1 或 1. 因此当 n 为偶数时 d_n 为偶整数, 而当 n 为奇数时 d_n 为奇整数. 由此可见这样的数列 $\{d_n\}$ 一定发散, 而函数 W 在点 x_0 不可导. □

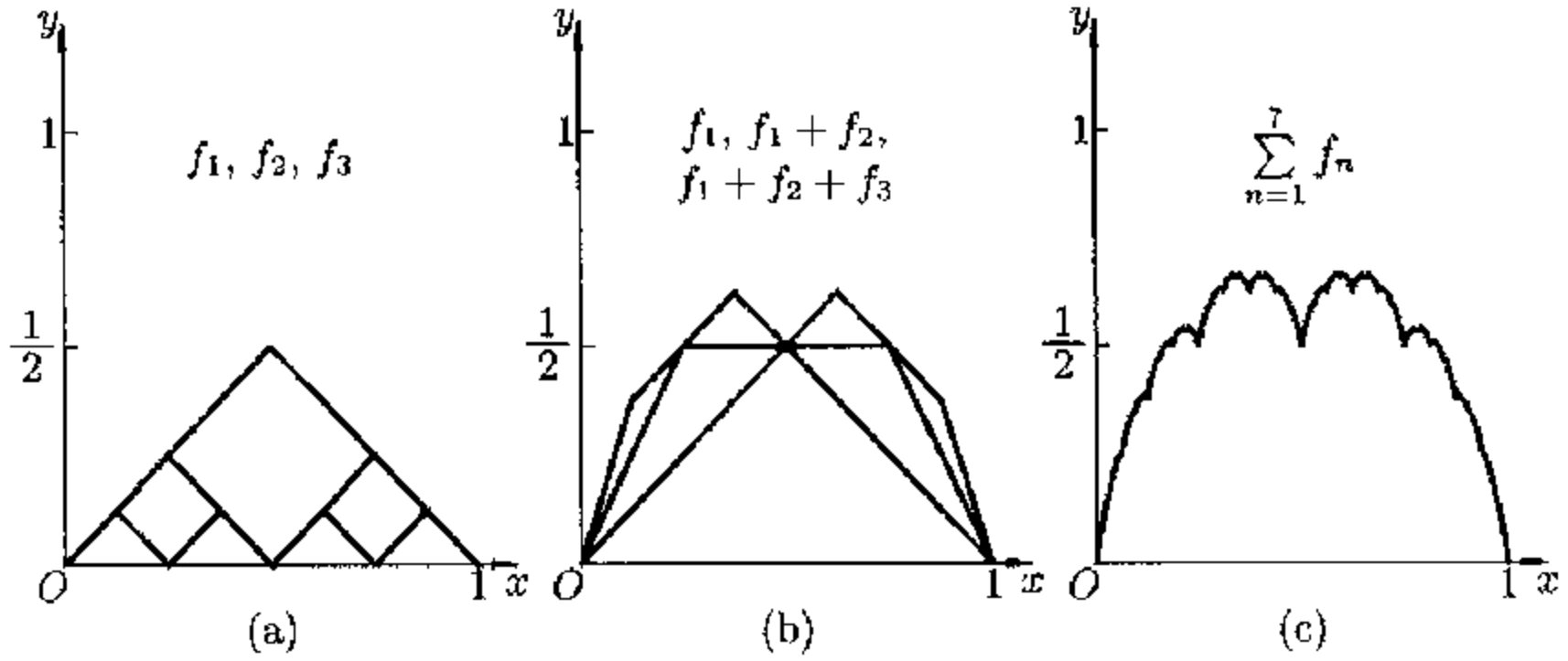


图 16.3

注 1 在图 16.3(b),(c) 中分别作出了 (16.28) 右边级数的前 3 个和第 7 个部分和函数. 读者可以结合证明来理解 van der Waerden 函数处处不可导的直观原因. 在 [19] 等著作中一般是证明两个单侧导数都不存在, 讨论比这里要更细致一点. 此外, 在定义 f_n 的公式 (16.25) 中的比例因子 2^n 改为 4^n 或 10^n 都是可以的. 在 [16] 中的证明则完全不依赖于几何直观, 也可供参考.

注 2 这方面的工作很多, 较近的发展见美国数学月刊 109 卷(2002) 378~380 页上的一文及其中的文献.

16.4.2 填满正方形的连续曲线

Cantor 首先证明: 直线上的所有点全体和平面上的所有点全体之间存在一一对应. 同样在区间 $[0,1]$ 内的所有点全体和单位正方形 $[0,1;0,1]$ 内的所有点全体之间也存在一一对应.

填满正方形的连续曲线就是将区间 $[0,1]$ 连续映射到单位正方形的满射. Peano 在 1890 年第一次构造出了这样的例子. 此后人们经常将这类曲线称为

Peano 曲线. 它使我们对于如何合理定义曲线的概念起了重要的推动作用 (参见 [5, 31]). 这里要注意, Peano 曲线一定有自交点. 这是因为在 $[0,1]$ 和 $[0,1;0,1]$ 之间的一一映射不可能是连续的.

下面这个例子是 1938 年由 Schoenberg 作出的. 显然, 这样的曲线需要用参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t),\ x \in [0,1]$$

来表示. 定义

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1/3], \\ 3t-1, & t \in (1/3,2/3], \\ 1, & t \in (2/3,1]. \end{cases}$$

按照

$$\varphi(t) = \varphi(-t),\ \varphi(t+2) = \varphi(t),\ t \in (-\infty,+\infty)$$

将 $\varphi(t)$ 延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上, 再令

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-2}t)}{2^n},\ y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-1}t)}{2^n},\ t \in [0,1].$$

这就是所要作的曲线. 将正方形 $[0,1;0,1]$ 中每个点的座标 (x,y) 用二进制展开就不难证明存在 $t \in [0,1]$, 使得 $x(t) = x$, $y(t) = y$ (可以参看 [8, 16] 等).

§16.5 对于教学的建议

16.5.1 学习要点

本章只是对于前三章的补充, 在教学中可根据情况选用.

1. 在许多积分计算中无穷级数经常有用, 它在求出有限形式答案和近似计算方面都是不可缺少的手段. 这里的问题已经与含参积分有关, 但其中的参数只是离散的正整数.
2. 级数求和有很多内容, §16.2 列出的都是常用方法. 关于幂级数求和的材料见 14.3.3 小节的例题, 这里不再叙述.
3. Weierstrass 逼近定理在教科书中都有, 但一般只举出一种证法. §16.3 对此给出一个综述, 同时还对其应用举例.
4. 利用无穷级数构造具有特殊性质的函数是个经典问题. 这方面可用下面的几个参考题进行训练.

16.5.2 参考题

I. 求下列级数之和:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}+\cdots$.

2. 求 Leibniz 型级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$ 之和.

3. 证明: $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\dfrac{1}{m^2-n^2}=-\dfrac{\pi^2}{8}$.

4. (Goldbach) 设 q 取遍所有大于 1 的正整数的乘幂, 且其指数均大于 1, 证明: $\sum\limits_{q}\dfrac{1}{q-1}=1$.

5. 设 $a_1=2$, $a_2=8$, $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$, $n=3,4,5,\cdots$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccot}a_n^2=\frac{\pi}{12}.$$

6. 证明: $\pi=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}$.

7. 设 $\{g_n\}$ 是 $[0,1]$ 上非负连续函数列, 且对每个 x^k $(k=0,1,\cdots)$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^k g_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

证明: 对任意的 $f\in C[0,1]$, 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界且有原函数, $g\in C[a,b]$, 证明: $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

9. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界且有原函数, $g\in C^1[0,1]$ 且 $g'(x)>0$, 证明: 复合函数 $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上有原函数.

10. 题 8 中 f 有界的条件不可去掉 (见 [59] 的第二册 340 页). 在 $[0,1]$ 上定义

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

验证它们满足题 8 中除 f 有界的所有条件, 但 $f\cdot g$ 在 $[0,1]$ 上无原函数.

11. 设函数 f 在有界开区间 (a,b) 上可以展开为一致收敛的多项式级数, 证明: f 必在 (a,b) 上一致连续.

12. 设 $f\in C[1,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在多项式 P, 使得

$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon,\ x\in[1,+\infty).$$

13. 设 $f\in C[0,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在多项式 P, 使得

$$|f(x)-P(\mathrm{e}^{-x})|<\varepsilon,\ x\in(0,+\infty).$$

14. (处处连续处处不可导的函数) 将 $(0,1)$ 中的数 x 按照十进制小数展开为 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_k}{10^k}$, 其中 x_k 为 0 到 9 的个位数字. 对于 x 有两种十进制表示的情况, 约定取从某位后全为 0 的一种表示. 定义函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{2^k},$$

其中 $u_1=1$, 而当 $k\geqslant 1$ 时

$$u_{k+1}=\begin{cases}u_k, & \text{若 } x_{k+1}=x_k,\\ 1-u_k, & \text{若 } x_{k+1}\neq x_k.\end{cases}$$

证明: f 于 $(0,1)$ 中处处连续, 但处处不可微.

(本例见美国数学月刊 59 卷 (1952) 222~225 页, 又见 [29].)

15. 设对每个正整数 n, u_n 是区间 $[0,1]$ 上的非负单调增加函数且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(1)$ 收敛. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 则 S 的不连续点集等于所有 u_n的不连续点集之并.

16. (有稠密间断点的单调函数) 设数列 $\{x_n\}$ 是 $(0,1)$ 上的有理数全体, 又任取一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中要求每个 $a_n>0$. 然后对每个正整数 n 定义

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_n,\\ a_n, & x_n<x\leqslant 1.\end{cases}$$

然后定义 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x), 0<x<1$, 并补充定义 $f(0)=-1$, $f(1)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 证明: f 是在 $[0,1]$ 上以所有有理点为其间断点的单调函数.

17. (有稠密间断点的导函数) 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\end{cases}$$

的导函数以 $x=0$ 点为其 (第二类)间断点 (见上册 164 页). 设 $\{r_n\}$ 为区间 $(0,1)$ 上的所有有理点, 构造在区间 $(0,1)$ 上的函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-r_n)}{2^n},$$

将其和函数记为 F, 用逐项微分定理求出导函数 F', 并证明: F' 在 $(0,1)$ 中以每个 r_n 为其第二类间断点, 而在其他点上连续.

第十七章　高维空间中的点集与基本定理

本章的内容是 $\mathbf{R}$ 中的点集与实数基本定理在 $\mathbf{R}^n$ 中的推广, 这是研究多元函数的基础. 在 §17.1 节依照位置关系与密切程度进行点和集合的分类, 并讨论其基本性质. §17.2 节是 $\mathbf{R}^n$ 中的基本定理. 最后一节是学习要点和参考题.

§17.1　点与点集的定义及其基本性质

17.1.1　点的分类及其性质

1. **内点、外点、边界点**　先回忆一下 $\mathbf{R}^n$ 中的距离与邻域的定义. 我们知道 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 的 **Euclid 范数** (又称**模**) $|\boldsymbol{x}|$ 定义为 $|\boldsymbol{x}|=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$. 由此可引进 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的 **Euclid 距离**为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{1/2}.$$

与距离有关的最重要的不等式是三角不等式 (参见上册第 6 页):

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|.$$

和 $\mathbf{R}$ 中的邻域定义相仿, 可通过距离定义 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域. 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, $\delta>0$, 称

$$O_\delta(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,\big|\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta\}$$

是点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**, 也称其为以点 $\boldsymbol{a}$ 为中心, 以 δ 为半径的 n 维开球.

在 $\mathbf{R}^n$ 中给定一个集合 S, 按照点与集合 S 的位置关系可将 $\mathbf{R}^n$ 中的点分为三类: S 的内点、外点、边界点. 具体地说, 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的某一点 $\boldsymbol{x}$, 若存在它的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\subset S$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**内点**; 若存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\cap S=\varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**外点**; 若在 $\boldsymbol{x}$ 的任一邻域中既有属于 S 的点, 又有不属于 S 的点, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**边界点**.

S 的全体内点组成的集合称为 S 的**内部**, 记为 $\mathrm{int}S$ 或 S°.

S 的全体边界点组成的集合称为 S 的**边界**, 记为 ∂S.

2. **聚点**　上述分类是按照任一点 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的邻域内的点是否属于 S 来进行的. 如果按照去心邻域进行分类, 则可将 $\mathbf{R}^n$ 中的点分为 S 的聚点与非聚点两大类. 确切地说, 对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 如果在 $\boldsymbol{x}$ 的任一去心邻域中总有 S 的点, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**聚点**. S 的全体聚点组成的集合记为 S^d, 称为 S 的**导集**. 显然内点一定是聚点, 外点一定不是聚点.

如果 $\boldsymbol{x}\in S$, 且存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\cap S=\{\boldsymbol{x}\}$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**孤立点**. 孤立点一定不是聚点, 而边界点有可能是聚点也有可能是孤立点.

聚点是一个重要概念, 它的下述两个等价定义是经常要用到的.

定义 (1) 设点 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 如果在它的任何邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 内总会有 S 中的无穷多个点, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的一个聚点.

定义 (2) 设点 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 如果存在由相异点组成的一个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset S$, $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 使得 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的一个聚点, 这里 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ 的含义是 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) \to 0$.

例题 17.1.1 证明集合 S 的导集的聚点是 S 的聚点, 即 $(S^d)^d \subset S^d$.

证 设 $\boldsymbol{x} \in (S^d)^d$, 则 $\exists S$ 的相异聚点 $\boldsymbol{x}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}$, 且 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. 从而 $\forall \delta > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $\boldsymbol{x}_n \in O_\delta(\boldsymbol{x})$. 设 $n_0 > N$, 由于 $\boldsymbol{x}_{n_0}$ 为 S 的聚点, 于是在 $O_{\delta - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{n_0}|}(\boldsymbol{x}_{n_0})$ 中含有无穷多个 S 中异于 $\boldsymbol{x}_{n_0}$ 的点. 显然 $O_{\delta - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{n_0}|}(\boldsymbol{x}_{n_0}) \subset O_\delta(\boldsymbol{x})$, 所以 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中有无穷多个异于 $\boldsymbol{x}$ 的 S 中的点, 由等价定义 (1) 知 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的聚点. □

17.1.2 集合的分类及其性质

1. **开集、闭集** 如果 $\mathrm{int}S = S$, 则称 S 为**开集**. 开集有如下重要性质:

(1) 任意多个开集的并集是开集;

(2) 有限多个开集的交集是开集;

(3) 全空间 $\mathbf{R}^n$ 和空集 $\varnothing$ 都是开集.

开集的余集定义为**闭集**. 又定义 S 的**闭包** $\overline{S}$ 为 $\overline{S} = S \cup S^d$. 易证 $\overline{S}$ 为闭集, 且 $\overline{S} = S \cup \partial S$. 关于闭集, 下列条件等价:

(1) S 是闭集;

(2) $S^d \subset S$ (即 $S = \overline{S}$);

(3) $\partial S \subset S$ (即 $S = \overline{S}$).

例题 17.1.2 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合, 则 ∂S 为闭集.

证 1 (按定义证) 设 $x \in (\partial S)^c$, 即 ∂S 的余集, 则 $\boldsymbol{x}$ 只能是 S 的内点或外点.

若 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{int}S$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset S$, 由内点定义知 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset \mathrm{int}S$, 从而 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset (\partial S)^c$;

若 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的外点, 则 $\exists \delta > 0$, 使得 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \cap S = \varnothing$, 因此 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset S^c$, 而 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 本身是开集, 这说明 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中的点都不是 S 的边界点, 即 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset (\partial S)^c$.

由定义知 $(\partial S)^c$ 为开集, 即 ∂S 为闭集. □

证 2 (证 $(\partial S)^d \subset \partial S$) 设 $\boldsymbol{x} \in (\partial S)^d$, 由聚点的等价定义 (2) 知存在相异点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset \partial S$, $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, 于是 $\forall \delta > 0$, $\exists N$,

当 $n > N$ 时 $\boldsymbol{x}_n \in O_\delta(\boldsymbol{x})$, 取 $n_0 > N$, 由于 $\boldsymbol{x}_{n_0} \in \partial S$, 则由边界点的定义知 $O_{\delta-|\boldsymbol{x}_{n_0}-\boldsymbol{x}|}(\boldsymbol{x}_{n_0}) \subset O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中有 S 中的点, 也有不在 S 中的点, 所以 $\boldsymbol{x} \in \partial S$. □

证 3 (证 $\partial(\partial S) \subset \partial S$) 设 $\boldsymbol{x} \in \partial(\partial S)$, 则 $\forall \delta > 0$, 在 $O_{\delta/2}(\boldsymbol{x})$ 中有 ∂S 的点 $\boldsymbol{y}$. 又由边界点定义, 在 $O_{\delta/2}(\boldsymbol{y})$ 中既有属于 S 的点, 也有不属于 S 的点. 由于 $O_{\delta/2}(\boldsymbol{y}) \subset O_\delta(\boldsymbol{x})$, 因此 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中既有属于 S 的点, 也有不属于 S 的点, 于是 $\boldsymbol{x} \in \partial S$. □

2. **紧集、凸集** 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 如果在 S 的任何一个无限开覆盖 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中总可以找出有限个开集 $O_1, \cdots, O_k$, 同样可以覆盖 S, 即 $\bigcup_{i=1}^{k} O_i \supset S$, 则称 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个**紧集**. 容易证明紧集一定是有界闭集, 而且我们将会看到, 在 $\mathbf{R}^n$ 中紧集与有界闭集的定义是等价的 (紧性定理).

设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 若 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, 有 $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 \in E$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 则称 E 为**凸集**. 从几何上看, 以 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 为端点的直线段位于 E 内.

例题 17.1.3 紧集的闭子集是紧集.

证 设 E 是一个紧集, F 是 E 的闭子集. 设 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是 F 的任一开覆盖, 由于 $F^c = \mathbf{R}^n - F$ 是开集, 则 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 与 F^c 一起形成紧集 E 的一个开覆盖, 由紧集的定义知在 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 与 F^c 中存在有限个开集形成 E 的一个有限覆盖, 记这有限个开集为 $O_1, \cdots, O_k$, 不妨设 $F^c = O_k$. 由于 $F \subset E$, 则

$$(\bigcup_{i=1}^{k-1} O_i) \cup F^c \supset E \supset F.$$

但 $F^c \cap F = \varnothing$, 所以

$$(\bigcup_{i=1}^{k-1} O_i) \supset F,$$

由紧集的定义知 F 为紧集. □

3. **连通集、区域** 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 如果当 D 分解为两个不相交的非空子集的并集 $A \cup B$ 时, 有 $A^d \cap B \neq \varnothing$ 或者 $A \cap B^d \neq \varnothing$, 则称 D 为**连通集**. 当 D 是开集时, 我们有: 开集 D 是连通集的充分必要条件是 D 不能分解为两个不相交的非空于开集的并 (第二组参考题 1). 在 $\mathbf{R}$ 中, 连通集有特别直观的描述: $\mathbf{R}$ 中集合 D 是连通集的充分必要条件是 D 为区间 (第二组参考题 2).

连通的开集称为**区域或开区域**. 开区域的闭包称为**闭区域**.

更为直观并易于判断的概念是道路连通集. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个集合, 如果当 D 内任何两点 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, 都可以找到连续曲线 $l \subset D$ 将 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 联结, 则称 D 为**道路连通集**. 这里的连续曲线是指 l 可以表示为参数方程

$$x_i = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中诸 φ_i 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 并且 $\boldsymbol{p}=(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\cdots,\varphi_n(0))$, $\boldsymbol{q}=(\varphi_1(1),\varphi_2(1),\cdots,\varphi_n(1))$. 可以证明道路连通集一定是连通集, 但连通集未必是道路连通集 (第二组参考题 5). 下面的命题说明了区域的道路连通性.

命题 17.1.1 $\mathbf{R}^n$ 中的区域都是道路连通的.

证 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个非空连通开集. 取 $\boldsymbol{x}\in D$, 设 $U(\boldsymbol{x})$ 为 D 中所有与 $\boldsymbol{x}$ 有 D 中连续曲线相联结的点的集合. 容易看到 $U(\boldsymbol{x})$ 是一个道路连通集. 我们证明 $U(\boldsymbol{x})=D$. 设 $\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x})$, 并取 $\delta>0$ 使 $O_\delta(\boldsymbol{y})\subset D$. $\forall\,\boldsymbol{z}\in O_\delta(\boldsymbol{y})$ 存在 $O_\delta(\boldsymbol{y})$ 中的直线段联结 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{y}$, 从而存在 D 中的连续曲线联结 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{x}$, 所以 $O_\delta(\boldsymbol{y})\subset U(\boldsymbol{x})$. 因而 $U(\boldsymbol{x})$ 是包含 $\boldsymbol{x}$ 的开集. 如 $D-U(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$, 则 $D-U(\boldsymbol{x})=\bigcup U(\boldsymbol{y}')$, 其中 $\boldsymbol{y}'$ 取遍 $D-U(\boldsymbol{x})$ 中的点. 按前面的证明, 每个 $U(\boldsymbol{y}')$ 都是开集, 因此 $D-U(\boldsymbol{x})$ 也是开集. D 有开集分解式 $D=U(\boldsymbol{x})\cup(D-U(\boldsymbol{x}))$, 与 D 是连通开集矛盾. 这就证明了 $D-U(\boldsymbol{x})=\varnothing$, 所以 $D=U(\boldsymbol{x})$ 是道路连通集. □

4. **距离概念的推广** 点与点的距离概念可推广到点 $\boldsymbol{x}$ 与集合 S, 集合 S_1 与集合 S_2 之间的距离:

$$d(\boldsymbol{x},S)=\inf_{\boldsymbol{y}\in S}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|;$$

$$d(S_1,S_2)=\inf_{\boldsymbol{x}\in S_1,\boldsymbol{y}\in S_2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\inf_{\boldsymbol{x}\in S_1}d(\boldsymbol{x},S_2)=\inf_{\boldsymbol{y}\in S_2}d(\boldsymbol{y},S_1).$$

点与集合的距离可以看作是两个集合之间的距离的特殊情况. 同时还可以定义一个集合 S 的**直径** d_S 为

$$d_S=\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

关于集合的运算有下列命题:

命题 17.1.2 (De Morgan 法则) 设 A_α $(\alpha\in I)$ 为一族集合, 则有

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c=\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c,\quad \Big(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha)^c.$$

由命题 17.1.2 易证下述结论: 任意多个闭集的交集仍是闭集; 有限多个闭集的并集仍是闭集.

17.1.3 思考题

1. 按定义证明闭集的如下重要性质:
   (1) 任意多个闭集的交集是闭集; (2) 有限多个闭集的并集是闭集.
2. 证明聚点定义 (1), (2) 的等价性.
3. 在例题 17.1.1 的证明中, 我们使用的是聚点等价定义(1). 若使用原始定义, 证明是否能通过? 若不能, 应如何修改 ?
4. 无限多个开集的交是否一定是开集?

17.1.4 练习题

1. 证明 $\overline{S} = S \cup \partial S$.
2. 证明 $\partial S = \overline{S} - \mathrm{int}S$.
3. 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $\overline{A} \cap (\mathrm{int}B) = \varnothing$.
4. 证明 $S = S^d \Longleftrightarrow S$ 闭, 且 S 无孤立点.
5. S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, 证明 $\overline{S} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x, S) = 0\}$.
6. 若 S 为凸集, 则 $\overline{S}$ 也是凸集.
7. 对于集合 S 与任一组集合 $A_\alpha, \alpha \in I$, 恒有分配律:

$$S \cap (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (S \cap A_\alpha).$$

§17.2 $\mathbf{R}^n$ 中的几个基本定理

17.2.1 综述

$\mathbf{R}$ 中的六个基本定理 (见第三章) 能推广到 $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$ 上的是四个定理, 它们是:

(1) 闭矩形套定理;

(2) 凝聚定理: $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列一定有收敛子列 (或聚点定理: 有界无限点集一定有聚点);

(3) Cauchy 收敛准则: 收敛点列 $\Longleftrightarrow$ 基本点列;

(4) 紧性定理: $\mathbf{R}^n$ 中的点集 S 是紧集的充要条件是 S 为有界闭集 (覆盖定理).

其他两个定理 (确界存在定理, 单调有界定理) 之所以不能推广到高维空间, 是因为它们与一维直线上的点的顺序有关.

紧性定理的叙述与一维的覆盖定理不同, 这可以从两方面进行解释:

(1) 如果在一维的情况下我们也定义闭集与紧集, 则覆盖定理就叙述为: 有界闭区间是紧集 (参见上册 81 页);

(2) 一维的覆盖定理不能以充要条件的形式叙述, 因为那时没有定义闭集, 而一维紧集是有界闭集但不一定是有界闭区间.

下面我们利用 De Morgan 法则给出紧性定理的另一种等价的表达形式.

定义 设集合 $S \in \mathbf{R}^n$, 称 $\mathbf{R}^n$ 中的子集族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in I}$ 关于 S 具有**有限交性质**, 若对于 I 的任何有限子集 J 均有

$$S \cap (\bigcap_{\lambda \in J} F_\lambda) \neq \varnothing.$$

命题 17.2.1 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 S 是紧集的充要条件是任何关于 S 具有有限交性质的闭集族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 与 S 必有非空交, 即

$$S\cap(\bigcap_{\lambda\in I}F_\lambda)\neq\varnothing.$$

证 先证充分性. 设任一关于 S 具有有限交性质的闭集族与 S 有非空交. 任取 S 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in I}$, 则由 De Morgan 法则, 从 $\bigcup\limits_{\lambda\in I}O_\lambda\supset S$ 得

$$\bigcap_{\lambda\in I}O_\lambda^c\subset S^c,$$

即

$$S\cap(\bigcap_{\lambda\in I}O_\lambda^c)=\varnothing.$$

由条件知, $\bigcap\limits_{\lambda\in I}O_\lambda^c$ 关于 S 无有限交性质, 即存在有限个 $O_1^c,\cdots,O_k^c$, 使得

$$S\cap(\bigcap_{i=1}^{k}O_i^c)=\varnothing,$$

从而

$$\bigcap_{i=1}^{k}O_i^c\subset S^c.$$

于是

$$\bigcup_{i=1}^{k}O_i\supset S.$$

这样的 $O_i\ (i=1,\cdots,k)$ 就是 S 的一个有限开覆盖, 所以 S 为紧集.

再证必要性. 设 S 为紧集, $\{F_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是任一关于 S 具有有限交性质的闭集族, 假设 $S\cap(\bigcap\limits_{\lambda\in I}F_\lambda)=\varnothing$, 即可由 De Morgan 法则推出矛盾. 从略. □

17.2.2 例题

例题 17.2.1 (闭集套定理) 设 $\{D_k\}$ 是一列非空闭集, 它满足:

(1) $D_{k+1}\subset D_k,\ k=1,2,\cdots,$

(2) D_k 的直径 $\delta_k=\sup\limits_{x,y\in D_k}|x-y|\to 0\quad(k\to\infty)$,

则这列闭集 $\mathrm{D}_k\ (k=1,2,\cdots)$ 存在惟一的公共点.

证 1 (用凝聚定理) 在每个 D_k 中任取一点 x_k, 则 $\{x_k,\ k=1,2,\cdots\}$ 为一有界无穷点列, 由凝聚定理存在 x 及 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_{k_i},\ i=1,2,\cdots\}$ 使得

$$x_{k_i}\to x\quad(i\to\infty).$$

下面证 x 为 $D_k\ (k=1,2,\cdots)$ 的公共点. 事实上, $\forall k_0\in\mathbf{N}_+$, 当 $k_i\geqslant k_0$ 时

$$x_{k_i}\in D_{k_i}\subset D_{k_0}.$$

令 $i \to +\infty$, 由于 D_{k_0} 是闭集, 则 $\boldsymbol{x} \in D_{k_0}$.

下证惟一性. 用反证法, 若存在两个公共点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*$, 记 $d = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*|$, 则 $d > 0$, 由于 $\delta_k \to 0$, 于是 $\exists K$, 当 $k > K$ 时, $\delta_k < d$, 此与 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^* \in D_k$ 矛盾. □

证 2 (用 Cauchy 收敛准则) 在每个 D_k 中取一点 $\boldsymbol{x}_k$, 则

$$|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l| \leqslant \max\{\delta_k, \delta_l\}.$$

由 Cauchy 收敛准则知存在 $\boldsymbol{x}$, 使得 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}$. 又 $\forall k_0 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > k_0$ 时

$$\boldsymbol{x}_k \in D_k \subset D_{k_0}.$$

令 $k \to \infty$, 则 $\boldsymbol{x} \in D_{k_0}$, 即 $\boldsymbol{x}$ 为 D_k $(k \geqslant 1)$ 的公共点. 惟一性的证明同证 1. □

例题 17.2.2 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的集合, 若 S 既开且闭, 则 $S = \mathbf{R}^n$ 或 $S = \varnothing$.

证 1 因 S 是闭集, 故 $\mathbf{R}^n - S$ 是开集. 于是 $\mathbf{R}^n = S \cup (\mathbf{R}^n - S)$ 是两个不相交开集的并. 由 $\mathbf{R}^n$ 的连通性可知 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 中至少有一为空集, 故 $S = \mathbf{R}^n$ 或 $S = \varnothing$. □

证 2 (不用连通性概念的证明) 首先证明 $\partial S = \varnothing$. 因为 S 开, S 内的点都是内点, 所以 S 内无 S 的边界点. 同理 $\mathbf{R}^n - S$ 内也无 S 的边界点, 因此 $\partial S = \varnothing$. 如果 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 均非空, 则存在 $\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n - S$. 设 L 是联结 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的直线段, 则 L 是有界闭集. 设 $\boldsymbol{z}$ 是 L 的中点, 则 $\boldsymbol{z} \in S$ 或 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n - S$. 因而 L 有子直线段 L_1 分别以 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 中的点为其端点, 依此可构造由 L 的子直线段组成的有界非空闭集套 $L \supset L_1 \supset \cdots \supset L_i \supset \cdots$, 其集合半径趋于零, 且两端点分别为 S 与 $\mathbf{R}^n - S$ 中的点. 由闭集套定理, 存在惟一的点 $\boldsymbol{p}$ 属于所有的直线段. 由边界点的定义可见 $\boldsymbol{p} \in \partial S$, 与 $\partial S = \varnothing$ 矛盾. □

例题 17.2.3 按 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1) 的次序证明以下三个命题的等价性.

(1) S 是紧集;

(2) S 的任一无限子集必有聚点在 S 中;

(3) S 是有界闭集.

证 (1) ⇒ (2). 用反证法. 设 F 是 S 的无限子集, $\forall x \in S$, 它都不是 F 的聚点 (这其中有两种可能, 一是 F 没有聚点, 二是 F 有聚点但不在 S 中). 由聚点的定义 $\exists \delta_{\boldsymbol{x}} > 0$, 使得在 $O_{\delta_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})$ 中没有异于 $\boldsymbol{x}$ 的 F 的点. 由于 $\bigcup\limits_{\boldsymbol{x} \in S} O_{\delta_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) \supset S \supset F$ 以及 S 是紧集, 从而存在有限个 $O_{\delta_1}(\boldsymbol{x}_1), \cdots, O_{\delta_k}(\boldsymbol{x}_k)$ 满足

$$\bigcup_{i=1}^{k} O_{\delta_i}(\boldsymbol{x}_i) \supset S \supset F.$$

由此可看出 F 是有限集, 与 F 是无限集矛盾.

(2) ⇒ (3). 由已知条件知 $S^d \subset S$, 从而 S 闭. 下面用反证法证明 S 有界, 若不然在 S 中有子列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足 $|\boldsymbol{x}_k| \to \infty$ $(k \to \infty)$, 可见 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 没有聚点, 与已知条件矛盾.

(3) ⇒ (1). 用闭矩形套定理. 其详细证明在很多教科书中都有, 从略. □

例题 17.2.4 设 S_1, S_2 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, 证明存在两个开集 O_1 和 O_2, 使得 $S_i \subset O_i, i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

分析 若 S_1 与 S_2 只是两个单点集 $\{\boldsymbol{x}_1\}$ 与 $\{\boldsymbol{x}_2\}$, 则 $d = d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) > 0$, 令

$$O_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i) < d/3\}, \quad i = 1, 2,$$

则 O_i 为开集, $O_i \supset S_i$, $i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. 由此启发我们对一般的有界闭集把证明分成两部分.

证 第一步: 证明 $d = d(S_1, S_2) > 0$.

用反证法. 若 $d(S_1, S_2) = 0$, 则由 $d(S_1, S_2)$ 的定义, $\exists \boldsymbol{x}_n \in S_1, \boldsymbol{y}_n \in S_2$, 使得

$$\lim_{n \to \infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0. \tag{17.1}$$

由 S_1, S_2 有界及凝聚定理知, $\{\boldsymbol{x}_n\}, \{\boldsymbol{y}_n\}$ 都有收敛子列, 不妨设 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$. 由 S_1, S_2 闭知 $\boldsymbol{x} \in S_1$, $\boldsymbol{y} \in S_2$. 在 (17.1) 中令 $n \to \infty$ 得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, 此与 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 矛盾.

第二步: 直接定义

$$O_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, S_i) < d/3\}, \quad i = 1, 2,$$

则 O_i 为开集, $O_i \supset S_i$, $i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

还有一种更有启发性 (可用于下面第一组参考题的第 5 题) 的构造 O_1, O_2 的办法是定义

$$O_1 = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in S_1} O_{d_x/3}(\boldsymbol{x}), \qquad O_2 = \bigcup_{\boldsymbol{y} \in S_2} O_{d_y/3}(\boldsymbol{y}), \quad \square$$

其中 d_x 是 $x \in S_1$ 到 S_2 的距离, d_y 是 $y \in S_2$ 到 S_1 的距离.

17.2.3 练习题

1. 设 A, B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个不相交的闭集, 其中一个有界, 证明: $d(A, B) > 0$. 如果 A, B 均是无界闭集, 是否仍有 $d(A, B) > 0$?
2. 设 S_1, S_2 为 $\mathbf{R}^n$ 中不相交的闭集, 其中一个有界. 证明: 存在开集 O_1, O_2 满足 $S_i \subset O_i$, $i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.
3. 由闭矩形套定理证明凝聚定理.
4. 由凝聚定理证明 Cauchy 收敛定理.
5. 由紧性定理证明聚点定理.

§17.3 对于教学的建议

17.3.1 学习要点

1. 本章有很多集合论的知识, 对于初学者来说是比较抽象的, 但它们却是进一步学习数学的基本语言之一. 在教学中最基本的要求是理解各类集合的概念. 根据我们的经验, 以聚点作为一个切入点来展开一些练习很有效果. 此外, 举例是理解概念的最有效的手段. 通常的教科书中有足够的例子供习题课选用.
2. 在上册第三章中的实数基本定理中, 除去单调有界定理和确界存在定理需要用到实数的有序性外, 其余四个基本定理都得到了推广, 其中闭区间套定理被推广成比较方便的闭集套定理的形式.
3. 在以后的学习中, 用得最多的集合概念是区域. 我们给出了它的比较正规的描述. 根据命题 17.1.1, 也可以道路连通开集来定义 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, 这样可以在现阶段避开连通与道路连通这两个易混淆的概念.
4. 多元基本定理延续了第三章的内容, 相对而言, 学生理解不是很困难. 因而有条件时可适当布置一些应用题, 如第一组参考题的题 2.
5. **对习题课的建议** 教师应该根据实际教学课时来选取材料, 确定教案. 一般来说, 本章的教学时段只有一次多一点的习题课. 因此, 习题课的安排首先要保证学生能理解概念, 能正确叙述多元基本定理的内容. 其次是一些初步的集合证明题和基本定理的应用题 (可集中于某一个定理, 如闭集套定理的应用). 至于连通性的讨论和紧性的等价描述完全是补充内容.

学生们在证明某个集合 S 具有某种性质时, 有时采用如下错误证法: 先对 S 是开集时证明结论, 然后对 S 是闭集时证明结论. 由以上两步得到结论成立. 要告诉他们尽管开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集, 但这并不意味着集合只有开集和闭集两大类.

在证明像练习题 17.2.3 中的题 1 时, 学生们往往不会下手, 或者是不会做, 或者是不得要领地写一大堆. 要引导他们从最简单的情况开始思考. 如果 A 为单点集 $\{x\}$ 时, 用反证法, 设 $d(x,B)=0$, 则存在 $y_n\in B$, 使得 $|x-y_n|\to 0$, $(n\to\infty)$, 因而 $\{y_n\}$ 是有界列, 有收敛子列. 然后如例 17.2.4 第一步那样推出矛盾. 当 A 为一般有界闭集时, 讨论是类似的 (此时如何证明 $\{y_n\}$ 也是有界列呢?).

17.3.2 参考题

第一组参考题

1. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交, 每个开集可表为可列个闭集的并.
2. 用闭集套定理证明三角形三边上的中线交于一点.
3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 证明 $E=\{(x,f(x))\mid x\in(-\infty,+\infty)\}$ 是平面上的闭集 (称为 f 的图).
4. 证明 $\mathrm{int}S$ 是开集, 而且是包含于 S 的最大开集.
5. ($\mathbf{R}^n$ 的正规性) 设 S_1,S_2 为 $\mathbf{R}^n$ 中不相交的闭集 (不一定有界). 证明存在开集 O_1,O_2 满足 $S_i\subset O_i, i=1,2$, 且 $O_1\cap O_2=\varnothing$.
6. (1) 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集合. 证明: $\forall\delta>0$, $\exists$ S 中有限个点 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_k$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}O_\delta(\boldsymbol{p}_i)\supset S$;

   (2) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式: 若 $\{G_\alpha\}$ 是有界闭集 F 的开覆盖, 则 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall\boldsymbol{p}\in F$, 存在 $\{G_\alpha\}$ 中的一个开集 G, 满足 $O_\delta(\boldsymbol{p})\subset G$;

   (3) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式与通常的表述形式 (若 $\{G_\alpha\}$ 是有界闭集 F 的开覆盖, 则存在 $\{G_\alpha\}$ 中的有限个开集 $G_1,\cdots,G_m$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_i\supset F$) 等价.

第二组参考题

1. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中开集 D 是连通集的充分必要条件是 D 不能分解为两个不相交的非空子开集的并.
2. 证明 $\mathbf{R}$ 中集合 D 是连通集的充分必要条件是 D 为区间.
3. 证明有公共点的连通集的并集是连通集.
4. 证明 $A=\{(x,y)\mid x,\ y$ 至少有一个是有理数$\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的道路连通集.
5. 证明道路连通集一定是连通集, 但连通集未必是道路连通集. (考察例子 $E=\{(x,\ y)\mid y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leqslant\frac{2}{\pi}\}$, 证明 $\overline{E}$ 是连通而非道路连通的.)
6. 设 A, B 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, 定义 $A+B$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中一切形如 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 的点组成的集合, 其中 $\boldsymbol{x}\in A$, $\boldsymbol{y}\in B$.

   (1) 如果 K 为 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集, C 为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集, 证明 $K+C$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集;

   (2) 如果 K, C 均为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集, $K+C$ 未必为 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集. 考虑 K 为整数集合, C 为一切形如 αm 的数组成的集合, 其中 $m\in K$, α 是某个确定的无理数. 证明 $\overline{K+C}=\mathbf{R}$, 但 $K+C\neq\mathbf{R}$.

第十八章　多元函数的极限与连续

本章讨论多元函数的极限与连续性. 其中 §18.1 节引进重极限与累次极限的概念, 讨论了它们的相互关系, 并介绍了一些常用方法. §18.2 节讨论多元函数的连续性, 介绍了一些多元函数连续的充分条件及以集合语言刻画连续性的命题, 然后介绍紧集上的连续函数性质及其应用, 最后对于向量值函数介绍了 $\mathbf{R}^n$ 中的压缩映射原理. §18.3 节是学习要点和参考题.

§18.1　多元函数的极限

18.1.1　重极限

设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, n 元函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个去心邻域中有定义, A 为某一常数, 若

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{当 } 0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta \text{ 时, 有 } |f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon.$$

则称 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时以 A 为极限 (又称它是 n 重极限), 记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A \text{ 或简记为 } f(\boldsymbol{x})\to A\ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}).$$

用邻域的语言来描述, 就是

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{当 } \boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})\setminus\{\boldsymbol{a}\} \text{ 时, 有 } f(\boldsymbol{x})\in O_\varepsilon(A).$$

注　在定义重极限时, 可以放宽对函数定义域的要求, 只要 $\boldsymbol{a}$ 是定义域的聚点即可.

从邻域的观点看, 多元函数极限的定义与一元函数极限的定义完全一样. 但现在是在高维空间中讨论, $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 是指 $\boldsymbol{x}$ 以任何方式或沿任何曲线趋于 $\boldsymbol{a}$. 其趋近方式要比一元函数的情形复杂得多. 一个简单的例子是讨论 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点的二重极限是否存在. 容易看出, 当 (x,y) 沿直线 $y=mx$ (其中 m 为任意实数) 趋于 $(0,0)$ 点时, $f(x,y)$ 的极限为 $\dfrac{m}{1+m^2}$, 与 m 有关. 由此可以看出这个二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的二重极限不存在.

与一元函数相仿, 也可以定义自变量趋于 $\pm\infty$ 或 ∞ 时的极限, 但现在是多个自变量, 于是可以出现某一些自变量趋于一个定数, 而另一些自变量趋于 $\pm\infty$ 或 ∞ 的情形, 以两个自变量为例, 有下述几种极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,$ 当 $|x|>M,\ |y|>M$ 时,

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon;$$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,+\infty)} f(x,y)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta,M>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta,$

$$y>M \text{ 时 } |f(x,y)-A|<\varepsilon;$$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,y_0)} f(x,y)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta,M>0,$ 当 $x<-M$,
$0<|y-y_0|<\delta$ 时, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

还有其他一些情形, 在此不一一列举. 此外当 A 为 $\pm\infty$ 或 ∞ 时, 与一元函数类似, 我们称之为广义极限或极限不存在 (参见上册 98 页).

多元函数的极限的惟一性, 局部有界性, 局部保号性, 局部比较原理, 四则运算法则, Cauchy 收敛准则以及 Heine 归结原理的叙述与论证完全与一元函数相仿, 这里就不再重复了 (参见上册第四章).

求多元函数的极限有如下常用方法:

1. 利用函数的连续性和函数极限的运算性质 (多元函数的连续性将在下一节讨论);
2. 利用不等式缩放或使用夹逼定理;
3. 利用变量替换化简或化为已知极限. 对含有三角函数或幂指函数的二重极限可考虑它是否能通过变形或变量代换化为一元函数中的基本极限, 如
$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\quad \lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1,\quad \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=\mathrm{e}$$
等 (参见上册 116 页题 9), 然后利用这些基本极限去求重极限的值;
4. 利用初等变形, 如分母有理化、对指数形式取对数等等.

例题 18.1.1 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

分析 直观上看分子的多项式次数高于分母的多项式次数, 极限应该是 0. 这种题目一般用极坐标代换后可化为一个有界量与无穷小量的乘积.

解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0. \quad \square$$

例题 18.1.2 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

解 由于
$$|\sin(x^3+y^3)|\leqslant|x|^3+|y|^3\leqslant(|x|+|y|)(x^2+y^2),$$
从而
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}|\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)=0,$$
所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0. \quad \square$$

注 也可对 $\sin(x^3+y^3)$ 用一元 Taylor 展式
$$\sin(x^3+y^3)=x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)\ (|x|+|y|\to0).$$

例题 18.1.3 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ y, & \text{当 } x=0,\ y\neq 0.\end{cases}$$

解 由于

$$|f(x,y)|=\begin{cases}|\dfrac{\sin xy}{x}|\leqslant |y|, & \text{当 } x\neq 0.\\ |y|, & \text{当 } x=0,\ y\neq 0,\end{cases}$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0.$$

于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0. \quad \square$$

例题 18.1.4 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}.$$

解 先求其对数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$. 由于

$$|xy\ln(x^2+y^2)|\leqslant r^2\ln r^2\to 0 \quad (r\to 0^+),$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0,$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=1. \quad \square$$

例题 18.1.5 证明

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

证 此题底数的极限并不存在, 但可用夹逼方法. 注意到 $x>0,\ y>0$ 时

$$0<\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

所以

$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}.$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$, 从而有

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0. \quad \square$$

关于证明重极限不存在的方法, 我们将在累次极限之后介绍.

18.1.2 累次极限

为方便起见在 $\mathbf{R}^2$ 中讨论, 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个去心邻域内有定义, 称下列两个极限 (如果存在的话)

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

分别是函数 f 在 (x_0,y_0) 点的先 x 后 y 的二次极限和先 y 后 x 的二次极限, 统称它们是**累次极限**.

重极限与累次极限的关系反映在下面的命题中.

命题 18.1.1 当重极限存在且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 时,

(1) 如果 $y\neq y_0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$;

(2) 如果 $x\neq x_0$ 时, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$.

由此命题可见: 当重极限和某个累次极限都存在时, 则该累次极限的值应该等于重极限的值. 但在一般情况下, 重极限与累次极限没有什么必然的关系.

当重极限存在时, 两个二次极限可以都不存在, 也可以一个存在而另一个不存在, 例如

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

此时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

当重极限不存在时, 可以是两个二次极限存在且相等, 也可以是两个二次极限存在但不相等, 还可以是两个二次极限中一个存在而另一个不存在. 例如

$$f(x,y)=\frac{y}{x},\quad \text{当 } x\neq 0.$$

显然有 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$, 但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 都不存在.

18.1.3 证明函数的重极限不存在的常用方法

1. 找两种特殊的趋近方式, 使得在两种方式下函数的极限值不同. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & x^2\leqslant |y| \text{ 或 } y=0,\\ 1, & \text{其他.}\end{cases}$$

当 (x,y) 沿过原点的任何直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

但 (x,y) 沿曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 趋于 $(0,0)$ 点时

$$\lim_{(x,y=x^2/2)\to(0,0)} f(x,y)=1,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的重极限不存在.

2. 证明两个累次极限存在但不相等, 例如

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1,$$

可见重极限不存在. 因为如果重极限存在, 两个累次极限又存在, 由命题 18.1.1 三个极限值应该相等.

18.1.4 思考题

1. 证明多元函数极限的 Heine 归结原理: 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n, A\in\mathbf{R}$, 则 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A$ 的充分必要条件是: 对满足条件 $\boldsymbol{x}_n\neq\boldsymbol{a}$ $(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}$ 的每个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n)=A$. (参见上册 104~105 页.)
2. 证明多元函数极限的 Cauchy 收敛准则: 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 有极限的充要条件是对每一个 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对于 $O_\delta(\boldsymbol{a})\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ 中的每一对点 $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$, 满足不等式 $|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$.

18.1.5 关于累次极限换序

命题 18.1.1 告诉我们, 如果在某一点二元函数的重极限与两个累次极限都存在, 则对 x 和 y 取极限的顺序可以交换, 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

如果我们并不知道重极限是否存在或者甚至知道重极限不存在, 那么在什么条件下, 累次极限可以交换次序呢? 下面的命题回答了这个问题.

命题 18.1.2 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个去心邻域中有定义, 如果

(1) 对固定的 $x\neq x_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$ 存在;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$ 关于 y 在 $0<|y-y_0|<\eta$ 上一致,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{y\to y_0} h(y)$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

分析 这是一个极限换序问题, 而条件 (2) 已给出对 y 的一致性, 这使我们想到利用一致收敛的函数列与求极限的有关性质 (参见在 14.2.1 小节中的讨论).

证 1 根据 Heine 归结原则, 我们只要证明 $\forall x_n$, $n=1,2,\cdots$, $x_n\neq x_0$, $x_n\to x_0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{y\to y_0} h(y).$$

为此, 我们定义 $f_n(y) = f(x_n, y)$. 由条件 (2) 知函数列 $\{f_n(y)\}$ 在 y_0 的去心邻域 $0 < |y - y_0| < \eta$ 上一致收敛, 因此有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y) = h(y).$$

另一方面, 由条件 (1) 得到

$$\lim_{y\to y_0} f_n(y) = \lim_{y\to y_0} f(x_n, y) = g(x_n).$$

由一致收敛的函数列求极限的性质 (见命题 14.2.1) 知以下两个极限存在且相等:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{y\to y_0} h(y).$$

再由 Heine 归结原则, 得到

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{y\to y_0} h(y). \quad \square$$

证 2 直接证明. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = h(y)$ 在 $0 < |y - y_0| < \eta$ 上对 y 一致, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta$ 且 $0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, $|f(x', y) - f(x'', y)| < \varepsilon$ 对 $y \in O_\eta(y_0) \setminus \{y_0\}$ 一致. 令 $y \to y_0$ 得到

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在, 记为 A. 由此可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时

$$|g(x) - A| < \varepsilon/3,$$

又由条件 (2) 知同时还可以成立

$$|h(y) - f(x, y)| < \varepsilon/3, \ \forall y \in O_\eta(y_0) \setminus \{y_0\}.$$

取定 $\bar{x} \in O_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\}$. 由条件 (1) 知 $\exists \delta \in (0, \eta)$, 使得当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时

$$|f(\bar{x}, y) - g(\bar{x})| < \varepsilon/3,$$

从而当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时

$$|h(y) - A| \leqslant |h(y) - f(\bar{x}, y)| + |f(\bar{x}, y) - g(\bar{x})| + |g(\bar{x}) - A| < \varepsilon,$$

于是

$$\lim_{y\to y_0} h(y) = A. \quad \square$$

18.1.6 练习题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x + y)\ln(x^2 + y^2)$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, 其中

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + xy)}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ y, & \text{当 } x = 0; \end{cases}$$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

2. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 不存在.

3. 讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的重极限与累次极限:

(1) $\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(2) $(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当}x\neq 0,\\ 0, & \text{当}x=0.\end{cases}$

4. 设一元函数 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有连续导数, 定义二元函数

$$g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\quad \text{当 } x\neq y,$$

求 $\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)}g(x,y)$.

5. 叙述并证明二元函数极限存在的惟一性定理, 局部有界性定理与局部保号性定理.

6. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$, 且在 (x_0,y_0) 附近有 $|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$, 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

7. 证明: 在命题 18.1.2 中若 $f(x,y)$ 除直线 $x=x_0,y=y_0$ 外有定义, 其他条件不变, 则重极限与两个累次极限都存在, 并且相等.

§18.2 多元函数的连续性

18.2.1 定义与基本性质

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, f 是定义在 S 上的函数, $x_0\in S$ 且是 S 的聚点, 若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 f 在 x_0 点**连续**, 否则就说 f 在 x_0 点**不连续**或**间断**, 如果 f 在 S 上的每一点都连续, 则称 f 在 S 上连续.

从定义可以看出, 在形式上多元函数的连续性的定义与一元函数的连续性的定义是相同的. 因此在连续性方面多元函数也有许多与一元函数相同的性质, 如保号性, 和、差、积、商的连续性, 复合函数的连续性等, 它们的叙述与证明都是和一元函数相同的 (参见上册第五章).

但与多元极限情况类似的是: 一个多元函数如果对每个变元都连续, 则并不能推出它是一个多元连续函数. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在全平面上对 x,y 都分别连续, 在原点当然也是如此, 但它作为二元函数在原点是不连续的 (见 147 页上的讨论).

例题 18.2.1 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在其定义域上是连续的.

证 显然 $f(x,y)$ 的定义域是 $xy>-1$ 且 $f(x,y)$ 在 $x\neq 0$ 处是连续的, 所以只须证明 $f(x,y)$ 作为二元函数在 y 轴上的每一点连续. 以下分两种情况讨论.

(1) 在 $(0,0)$ 点.

由于 $f(0,0)=0$, 而当 $x\neq 0$ 时

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{x}=\begin{cases}0, & y=0,\\ y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}, & y\neq 0.\end{cases}$$

又由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1,$$

从而 $\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x|<\delta_1$, $0<|y|<\delta_1$ 时

$$\left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right|\leqslant|y||\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}|\leqslant 2|y|.$$

由 $f(x,y)$ 的表达式知只要 $|x|<\delta_1$, $|y|<\delta_1$, 无论 $x=0$ 还是 $x\neq 0$ 都有

$$|f(x,y)|\leqslant 2|y|.$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0).$$

(2) 在 $(0,y_0)$ 点, $y_0\neq 0$.

当 $x\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,y_0)|&=|y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-y_0|\\ &=|y[\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1]+(y-y_0)|\\ &\leqslant|y|\cdot|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1|+|y-y_0|.\end{aligned}$$

而当 $x=0$ 时

$$|f(x,y)-f(0,y_0)|=|y-y_0|.$$

注意到当 $y_0\neq 0$ 时

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1.$$

结合上述各式得

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}(f(x,y)-f(0,y_0))=0.$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,y_0)$ 处连续, 从而在其定义域上是连续的. □

例题 18.2.2 (多元函数连续的若干充分条件) 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续. 证明: 当下列条件之一满足时 $f(x,y)$ 是 D 上的二元连续函数.

(1) $f(x,y)$ 在 D上对 x 连续且关于 y 一致, 即 $\forall x_0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$ (与 y 无关), $|x-x_0|<\delta$ 时, 对 $\forall y$, (x,y), $(x_0,y)\in D$ 恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon;$$

(2) $f(x,y)$ 在 D 上对 x 局部满足 Lipschitz 条件且关于 y 一致, 即: $\forall p_0=(x_0,y_0)\in D$, $\exists r>0$ 及 $L>0$, 使得对 $\forall(x_1,y)$, $(x_2,y)\in D\cap B_r(p_0)$, 恒有

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<L|x_1-x_2|;$$

(3) $f(x,y)$ 关于变量 y 是单调的.

证 (1) 由定义, 并用拆项补项的方法.

(2) 逐点连续是局部性质, 可由定义并用拆项补项的方法来证.

(3) 为证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 可找 (x_0,y_0) 的一个矩形邻域 $D_1=[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]\times[y_0-\delta_2,y_0+\delta_2]$. 先利用 $f(x_0,y)$ 在直线 $x=x_0$上的连续性, 可选取 δ_2 足够小, 使 f 在 D_1 的上下边中点 $(x_0,y_0\pm\delta_2)$ 的值与 $f(x_0,y_0)$ 的误差不超过 $\frac{1}{2}\varepsilon$; 然后再由 $f(x,y_0\pm\delta_2)$ 在直线 $y=y_0\pm\delta_2$ 上的连续性, 可取 δ_1足够小, 使 f 在 D_1 的上下边上的值与 $f(x_0,y_0)$ 的误差不超过 ε. 最后利用 f 关于 y 的单调性, 即可得 f 在 D_1 上的值与 $f(x_0,y_0)$的误差不超过 ε. □

连续性除了可用极限刻画之外, 也可用集合来刻画. 下面是一些等价描述.

命题 18.2.1 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$上的函数, 则下述几个条件等价:

(1) $f(\boldsymbol{x})$ 连续;

(2) 任何开集的原象是开集;

(3) 任何闭集的原象是闭集;

(4) 对 $\mathbf{R}^n$中的任意子集 E, 有 $f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$.

证 我们采用循环证明的方法.

(1) $\Rightarrow$ (2): 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续, A 是 $\mathbf{R}$ 中的任一开集, 如果 $f^{-1}(A)$ 是空集, 结论自然成立; 若 $f^{-1}(A)$ 非空, $\forall\boldsymbol{x}_0\in f^{-1}(A)$, 则 $f(\boldsymbol{x}_0)\in A$. 而 A 是 $\mathbf{R}$ 中

开集, 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的开邻域 $(f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon,\ f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon) \subset A$. 由于 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续知 $\exists \delta > 0$ 当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时 $f(\boldsymbol{x}) \in (f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon,\ f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon)$. 于是 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\} \subset f^{-1}(A)$, 从而 $f^{-1}(A)$ 为开集.

(2) $\Rightarrow$ (3) : 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的任一集合, 则

$$f^{-1}(S^c) = [f^{-1}(S)]^c. \tag{18.1}$$

事实上, 由于 $\boldsymbol{x} \in f^{-1}(S^c) \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \in S^c$, 而 $\boldsymbol{x} \in [f^{-1}(S)]^c \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \notin f^{-1}(S) \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \notin S$, 由此可以看出 (18.1) 成立.

设 F 是 $\mathbf{R}$ 中的任一闭集, 由 (18.1) 得

$$f^{-1}(F) = f^{-1}((F^c)^c) = [f^{-1}(F^c)]^c.$$

由条件 (2) 及 F^c 为开集知 $f^{-1}(F)$ 为闭集.

(3) $\Rightarrow$ (4) : 要证 $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$, 只要证 $\overline{E} \subset f^{-1}(\overline{f(E)})$. 事实上, 下面的包含关系显然成立,

$$E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

又由条件 (3) 及 $\overline{f(E)}$ 是闭集知

$$\overline{E} \subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

(4) $\Rightarrow$ (1) : 反证法. 若不然, $\exists \boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点不连续, 由 Heine 归结原则知, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及点列 $\{\boldsymbol{x}_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0$ 但

$$|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x}_0)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{18.2}$$

取 $E = \{\boldsymbol{x}_n\}_{n \in \mathbf{N}_+}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{E}$, $f(E) = \{f(\boldsymbol{x}_n)\}_{n \in \mathbf{N}_+}$. 由条件 (4) 知 $f(\boldsymbol{x}_0) \in \overline{f(E)} = \overline{\{f(\boldsymbol{x}_n)\}}_{n \in \mathbf{N}_+}$, 与 (18.2) 矛盾. $\square$

例题 18.2.3 函数 $f(x, y)$ 定义在正方形 $I_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上, 在底边 $I_0 = \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 上连续, 证明 $\exists \delta > 0$ 使得 $f(x, y)$ 在 $I_\delta = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \delta\}$ 上有界.

证 1 (用凝聚定理) 用反证法. 若不然, 则 $\forall \delta > 0$, $f(x, y)$ 在 I_δ 上都无界, 于是 $\exists (x_n, y_n) \in I_{\frac{1}{n}}$ 使得

$$|f(x_n, y_n)| > n. \tag{18.3}$$

由于 $\{(x_n, y_n)\}$ 有界, 由凝聚定理知存在子列 $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x_0, y_0)$, 且 $x_0 \in [0, 1]$, $y_0 = 0$, 由 $f(x, y)$ 在 $(x_0, 0)$ 点的连续性知

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_0, 0).$$

此与 (18.3) 矛盾.

证 2 (用紧性定理) $\forall x_0 \in [0, 1]$, 由 $f(x, y)$ 在 $(x_0, 0)$ 的连续性知 $\exists \delta_0 > 0$, 使得 $f(x, y)$ 在 $V(x_0) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta_0, |y| < \delta_0\} \cap I_1$ 上有界, 由此得到一族开集覆盖有界闭集 I_0, 由紧性定理可选出有限个 $V(x_i), i = 1, 2, \cdots, n$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V(x_i) \supset I_0$. 取 $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\delta_i\}$, 则 $f(x, y)$ 在 I_δ 上有界. $\square$

例题 18.2.4 设 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 定义

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)f(\varphi+\theta)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi.$$

则对于任意 $\theta_0\in\mathbf{R}$, 有

$$\lim_{(\rho,\theta)\to(1^-,\theta_0)}u(\rho,\theta)=f(\theta_0).$$

证 首先要用一个结果

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi=1,$$

即 $f\equiv 1$ 时, $u\equiv 1$. 这个关系式可用多种方法证明, 例如通过万能代换 (参见上册 291 页) 求出下面的不定积分

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{\varphi}{2}\right)\quad(|\varepsilon|<1)$$

来证明. 由这个结果就可以得到如下的表达式

$$u(\rho,\theta)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\left(f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)\right)\mathrm{d}\varphi.$$

$\forall\varepsilon>0$, 要找 $\delta>0$, 使得当 $1-\delta<\rho<1$, $|\theta-\theta_0|<\delta$ 时, 有

$$|u(\rho,\theta)-f(\theta_0)|<\varepsilon.$$

为此先由 f 的连续性知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $|\varphi|<\delta$, $|\theta-\theta_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

将要估计的积分分为三部分, 即

$$u(\rho,\theta)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)=I_1+I_2+I_3.$$

由于在 $(-\pi,-\delta)$ 上, $\cos\varphi\leqslant\cos\delta$. 于是

$$1-2\rho\cos\varphi+\rho^2\geqslant 1-2\rho\cos\delta+\rho^2=(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos\delta)\geqslant 4\rho\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

又由 f 的连续性知 $\exists M>0$, 使得

$$|f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)|\leqslant M.$$

于是

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(1-\rho^2)M}{4\rho\sin^2\frac{\delta}{2}}(\pi-\delta)\leqslant\frac{(1-\rho^2)M}{8\rho\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

从而 $\exists\delta_1$, 使得当 $1-\delta_1<\rho<1$ 时, 有

$$|I_1|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

同理可证, 此时

$$|I_3|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

最后估计 I_2, 有

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是 $\exists \delta$, δ_1, 使得当 $1-\delta_1<\rho<1$, $|\theta-\theta_0|<\delta$ 时, 有

$$|u(\rho,\theta)-f(\theta_0)|<\varepsilon. \quad \square$$

18.2.2 紧集上多元连续函数的性质

定义在紧集上的多元连续函数也具有与定义在有界闭集上的一元连续函数相同的性质: 有界性, 存在最大、最小值, 一致连续性以及值域也是紧集等.

命题 18.2.2 紧集上的连续函数的值域必是紧集 (有界闭集), 从而紧集上的连续函数必有界, 并存在最大、最小值.

命题 18.2.3 (Cantor 定理) 紧集上的连续函数必定一致连续.

例题 18.2.5 设 $f(x,y,z)$ 在 $a\leqslant x,y,z\leqslant b$ 上连续, 令

$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant y\leqslant x}\min_{a\leqslant z\leqslant b} f(x,y,z),$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 我们将证明分成两步.

第一步: 设

$$\psi(x,y)=\min_{a\leqslant z\leqslant b} f(x,y,z), \quad a\leqslant x,y\leqslant b.$$

因为 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域上连续, 从而一致连续. 于是 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 时

$$f(x_0,y_0,z)-\varepsilon<f(x,y,z)<f(x_0,y_0,z)+\varepsilon.$$

对 z 在 $[a,b]$ 上取最小值得到

$$\psi(x_0,y_0)-\varepsilon<\psi(x,y)<\psi(x_0,y_0)+\varepsilon.$$

可见 $\psi(x,y)$ 在正方形 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续.

第二步: 令 $y=a+k(x-a)$, 其中 $0\leqslant k\leqslant 1$, 则

$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x,y)=\max_{0\leqslant k\leqslant 1}\psi(x,a+k(x-a)).$$

由 ψ 在 $\{a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant x\}$ 上连续知 $\psi(x,a+k(x-a))$ 在 $\{a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant k\leqslant 1\}$ 上连续, 用与第一步中相同的方法可以证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. $\square$

注 从上面第二步所用的方法使我们想到一元函数中的一个题目:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$g(x)=\max_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi) \quad 与 \quad h(x)=\min_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

都在 $[a,b]$ 上连续 (见上册 155 页的题 10).

我们可以证明如下: 设 $\xi=a+k(x-a), 0\leqslant k\leqslant 1$, 则

$$g(x)=\max_{0\leqslant k\leqslant 1} f(a+k(x-a)).$$

由于二元函数 $f(a+k(x-a))$ 在 $\{a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant k \leqslant 1\}$ 上连续, 用例题 18.2.5 中的第一步中的证明方法可以证明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 同理 $h(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续.

从上例可见, 有些一元函数的问题可以在多元函数理论中得到较好的解决.

例题 18.2.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵, 它的行列式 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. 证明存在 $\alpha > 0$, 使对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 都有 $|\boldsymbol{Ax}| \geqslant \alpha |\boldsymbol{x}|$.

证 容易证明 $|\boldsymbol{Ay}|$ 是定义在有界闭集 $S^1 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{y}| = 1\}$ 上的连续函数. 因为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 故对 $\boldsymbol{y} \in S^1$, 有 $|\boldsymbol{Ay}| > 0$. 因此由命题 18.2.2, $\min\limits_{\boldsymbol{y} \in S^1} |\boldsymbol{Ay}| = \alpha > 0$. 从而当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|)| \geqslant \alpha$, 即 $|\boldsymbol{Ax}| \geqslant \alpha |\boldsymbol{x}|$. 当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 不等式显然. □

例题 18.2.7 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, $x \in \mathbf{R}^n$, $d(\boldsymbol{x}, E)$ 是上一章所定义的 $\boldsymbol{x}$ 和 E 的距离. 证明 $d(\boldsymbol{x}, E)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续.

证 任取 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{z} \in E$, 则

$$d(\boldsymbol{x}, E) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

对所有 $\boldsymbol{z} \in E$ 取下确界得 $d(\boldsymbol{x}, E) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, E)$. 同理得到 $d(\boldsymbol{y}, E) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{x}, E)$. 因而

$$|d(\boldsymbol{x}, E) - d(\boldsymbol{y}, E)| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

取 $\delta = \varepsilon$, 则由 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta$ 推出 $|d(\boldsymbol{x}, E) - d(\boldsymbol{y}, E)| < \varepsilon$. 所以 $d(\boldsymbol{x}, E)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续. □

例题 18.2.8 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 E 上. 对于点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 $O_\delta(\boldsymbol{a})$ 定义 f 在这个邻域上的振幅为

$$\omega_f(\boldsymbol{a}, \delta) = \sup_{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a})} \{f(\boldsymbol{x})\} - \inf_{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a})} \{f(\boldsymbol{x})\}.$$

然后令

$$\omega_f(\boldsymbol{a}) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(\boldsymbol{a}, \delta),$$

称为函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 的振幅. 证明:

(1) 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 E 上有界, 则 $\forall \boldsymbol{a} \in E$, $\omega_f(\boldsymbol{a})$ 存在;

(2) $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点连续的充要条件是 $\omega_f(\boldsymbol{a}) = 0$.

(参见上册 124 页的定义和 129 页的题 12).

证 (1) 对固定的 $\boldsymbol{a} \in E$, 由定义知 $\sup\limits_{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a})} \{f(\boldsymbol{x})\}$ 与 $\inf\limits_{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a})} \{f(\boldsymbol{x})\}$ 分别是 δ 的单调增加与单调减少函数. 由 $f(\boldsymbol{x})$ 的有界性, 知当 δ 充分小时, $\sup\limits_{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a})} \{f(\boldsymbol{x})\}$

与 $\inf\limits_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}$ 都是 δ 的有界函数, 于是 $\omega_f(a,\delta)$ 是 δ 的单调增加有界函数, 从而 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(a,\delta)$ 存在.

(2) 若 $f(x)$ 在 a 点连续. 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x\in O_\delta(a)$ 时, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. 此时应有

$$\omega_f(a,\delta)\leqslant\sup_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}-f(a)+f(a)-\inf_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}\leqslant 2\varepsilon,$$

于是

$$\omega_f(a)=\lim_{\delta\to 0^+}\omega_f(a,\delta)=0.$$

反之, 若 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(a,\delta)=0$. 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$, 当 $\delta\leqslant\delta_0$ 时

$$\sup_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}-\inf_{x\in O_\delta(a)}\{f(x)\}=\omega_f(a,\delta)<\varepsilon,$$

于是当 $x\in O_{\delta_0}(a)$ 时

$$|f(x)-f(a)|\leqslant\sup_{x\in O_{\delta_0}(a)}\{f(x)\}-\inf_{x\in O_{\delta_0}(a)}\{f(x)\}<\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 a 点连续. □

18.2.3 多元连续函数的介值定理

一元连续函数的介值定理 (上册 §5.2 节) 建立在区间的连通性上. 多元连续函数也有类似的讨论.

命题 18.2.4 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中连通集合 D 上的连续函数, a, $b\in D$, 则对任意数 $C\in(f(a),f(b))$, 存在 $c\in D$, 使得 $f(c)=C$.

证 首先证明连续函数把 $\mathbf{R}^n$ 中连通集合 D 映到 $\mathbf{R}$ 中的连通集 $f(D)$. 设有分解式 $f(D)=A\cup B$, 其中 A, B 为两个不相交的非空子集. 于是

$$D=E\cup F,$$

其中 $E=f^{-1}(A)$, $F=f^{-1}(B)$. 易知 E, F 非空且不相交. 由 D 的连通性, 可设 E 中有 F 的聚点, 即存在点列 $\{x_i\}\subset f^{-1}(B)$ 收敛到 $x\in f^{-1}(A)$. 由 f 的连续性, $\{f(x_i)\}$ 收敛到 $f(x)\in A$. 这表明 A 中有 B 的聚点. 故 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的连通集.

不难证明 $f(D)$ 是区间 (见第十七章的第二组参考题 2). 因此由 $f(a)$, $f(b)\in f(D)$ 得 $[f(a),f(b)]\subset f(D)$. 故 $C\in f(D)$, 即存在 $c\in D$, 使 $f(c)=C$. □

18.2.4 向量值函数

向量值函数是一个从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射 (n, $m\geqslant 1$). 对应于每一个自变量 $x\in\mathbf{R}^n$, 函数值是一个向量, 即它的每一个分量是一个多元函数 (或一元函数), 因此多元函数的极限与连续的概念都可以推广到向量值函数上来.

定义 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbf{R}^n$, 满足

(1) $\boldsymbol{f}(\Omega) \subset \Omega$;

(2) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Omega$, 有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)| \leqslant L|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|,$$

其中 $0 < L < 1$, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是 Ω 上的一个**压缩映射** (参见上册 77 页).

从以上定义可以看出, 有关向量值函数的压缩映射的定义是一元函数压缩映射定义的推广. 类似于一元函数, 我们也有下面的压缩映射原理.

命题 18.2.5 (压缩映射原理) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集, $\boldsymbol{f}$ 是 Ω 上的一个压缩映射, 则在 Ω 中存在 $\boldsymbol{f}$ 的惟一不动点 $\boldsymbol{x}^*$, 即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*.$$

证明与一维情况的命题 3.4.4 类似, 从略. 压缩映射原理有许多重要的应用, 这将在后面的章节中介绍 (例如在 §20.2 节中用于证明反函数组存在定理).

18.2.5 练习题

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b] \times [c,d]$ 上连续, 函数列 $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛并满足条件 $c \leqslant \varphi_n(x) \leqslant d$, 证明函数列 $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
2. 证明: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续.
3. 在命题 18.2.1 中, 由 (1) 直接证 (4).
4. 如果 f 把 $\mathbf{R}$ 中的任意开集映为开集, 问 $\boldsymbol{f}$ 是否是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.
5. $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续, 且 $\lim\limits_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y)$ 存在. 证明 $\boldsymbol{f}(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有界, 且一致连续.
6. 证明: 若 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界闭域, f 为 D 上连续函数, 则 $f(D)$ 是一个有界闭区间.
7. 利用命题 18.2.1 和例题 18.2.7 重新证明上一章的第一组参考题 5.
8. (14.1.1 小节中 Dini 判别法的推广) 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集, $\{f_k\}$ 是 D 上的连续函数列, 且对每一点 $\boldsymbol{x} \in D$ 有 $f_1(\boldsymbol{x}) \geqslant f_2(\boldsymbol{x}) \geqslant \cdots \geqslant f_k(\boldsymbol{x}) \geqslant \cdots$ 以及 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = 0$. 证明函数列 $\{f_k\}$ 在 D 上一致收敛.
9. 证明: 在例题 18.2.8 中的 $\omega_f(\boldsymbol{a})$ 可改用 $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \sup\limits_{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|\leqslant\delta} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|$.
10. 证明连续映射把紧集映为紧集.

§18.3 对于教学的建议

18.3.1 学习要点

1. 学生在学习多元函数极限与连续性时, 面临着两个任务: 一方面要复习, 巩固以前学到的 ε-δ 方法, 这是数学分析的基本功; 另一方面, 多元函数的情况更为复杂, 有许多新的问题产生, 如何对以前的方法进行调整, 有那些新的注意事项, 都要一一弄清. 为此, 要十分注意习题课内容的条理性.
2. 例子在这一章的学习中有着十分重要的地位. 学生首先是模仿, 然后自己要能举出一些说明问题的反例. 比如, 针对重极限与累次极限的关系, 多元函数连续与一元函数连续的相同点与不同点的一些例子.
3. **对习题课的建议** 关于求极限. 极坐标代换是讨论二元函数极限的有效手段, 学生们很喜欢用, 但在使用时必须小心. 例如

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在, 但如果用极坐标代换, 则

$$f(x,y)=\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\to 0,\quad \text{如果 } \theta\neq 0,\ \pi;$$

面当 $\theta=0,\pi$ 时, $y=0$, 故 $f(x,y)=0$, 因此容易误认为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 产生错误的原因在于忽视了用极坐标代换计算二元函数极限时, 要求极限过程对 $\theta\in[0,2\pi)$ 一致地成立. 而上述计算中极限过程与 θ 有关. 事实上, 如果我们选择一条特殊的趋于原点的曲线

$$L=\{(r,\theta)\mid \sin\theta=r\cos^2\theta\},$$

则

$$f(x,y)|_L=\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\Big|_L=\frac{1}{2},$$

从而二元函数极限不存在.

关于连续性. 在证明函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续时, 如果需要的话, 学生们都会将 $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 写为

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=[f(x,y)-f(x_0,y)]+[f(x_0,y)-f(x_0,y_0)].$$

但经常会犯的错误是, 由 f 对 x 的连续性得出 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon/2.$$

要提醒他们对每一个 y, $f(x,y)$ 是一个关于 x 的一元函数, 但含有 y. 因此 $f(x,y)$ 是一族含参数 y 的关于 x 的一元函数, 所以上述 δ 应该与 y 有关. 这还不是我们在二元连续时需要的 δ.

可以要求学生总结一下: 如果一个二元函数对每个变元分别连续, 还须加何种条件可保证二元函数连续 (结合例题 18.2.2). 这个问题可以作为习题课上进一步深入的一个内容.

18.3.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续, 且关于 y 单调增加. 如果
$$\lim_{y\to d^-} f(x,y) = f(x,d),$$
证明这一收敛关于 $x\in[a,b]$ 是一致的, 即 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<d-y<\delta$ 时, 对所有的 $x\in[a,b]$, 都有
$$|f(x,y)-f(x,d)|<\varepsilon.$$
2. 设 f 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续, 定义
$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant\xi\leqslant x}\max_{a\leqslant y\leqslant\xi} f(\xi,y),$$
证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
3. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集, f 为定义在 D 上的函数, 证明 f 在 D 上连续的充要条件是下列集合
$$\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid y=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D\}$$
是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的紧集.
4. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $[0,1]$ 上的 n 个连续函数, 称 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 $[0,1]$ 上**线性相关**, 若存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 使得
$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x)\equiv 0,\ x\in[0,1].$$
证明: $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 $[0,1]$ 上线性相关的充要条件是
$$\det\left(\left(\int_0^1 f_i(x)f_j(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\times n}\right)=0,$$
其中 $\det(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.
5. 设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_k$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 k 个相异的点, 证明存在一个最小半径的圆盘 B, 把这 k 个点覆盖. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的点, 也有类似的命题.
6. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶的实对称方阵, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. 设函数 $G(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ 定义在 $E=\mathbf{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 上, 其中 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的转置. 证明:

(1) $G(\boldsymbol{x})$ 可以在 E 上取到最大值;

(2) $G(\boldsymbol{x})$ 的最大值点是与 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 有关的某个矩阵的特征向量. 请写出这个矩阵.

第二组参考题

1. 设 T 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个映射, 如果存在常数 θ, $0 \leqslant \theta < 1$ 以及自然数 n_0, 使得

$$|T^{n_0}x - T^{n_0}y| \leqslant \theta|x-y|, \quad \forall x,\ y \in \mathbf{R}^n$$

证明映射 T 有惟一的不动点.

2. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, f 是 Ω 到 Ω 的一个映射, 满足

$$|f(x)-f(y)| < |x-y|, \quad \forall x,\ y \in \Omega,\ x \neq y.$$

证明 f 在 Ω 中存在惟一的不动点. 能否把命题中有界闭集的假设减弱为一般的有界集或无界的闭集?

3. 证明连续映射将连通集映为连通集.

4. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, 函数 f 定义在 Ω 上, 对于 $x_0 \in \Omega$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \Omega$, 且 $|x-x_0| < \delta$ 时

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0) - \varepsilon),$$

则称 f 在点 x_0 处**上半连续** (或**下半连续**). 证明:

(1) f 在点 x_0 处上半连续的充要条件是 f 在点 x_0 的邻近有上界, 且

$$\overline{\lim_{\Omega \ni x \to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0);$$

(2) f 在点 x_0 处下半连续的充要条件是 f 在点 x_0 的邻近有下界, 且

$$\underline{\lim_{\Omega \ni x \to x_0}} f(x) \geqslant f(x_0).$$

5. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集, f 是 Ω 上的上半连续函数 (下半连续函数), 则 f 在 Ω 上有上界并达到最大值 (有下界并达到最小值).

6. 设 $\{f_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧集 Ω 上的连续函数列, 如果对每个 $x \in \Omega$, 均有

$$\sup_k f_k(x) < +\infty,$$

证明函数

$$f(x) = \sup_k f_k(x)$$

在 Ω 上达最小值.

7. (Peano 曲线)[①] 设 Δ 是 $\mathbf{R}^2$ 中由 $y=0$, $y=\sqrt{3}x$ 和 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 所围成的正三角形闭区域. $f_0:\ [0,1] \to \Delta$ 定义为 $f_0(0)=(0,0)$, $f_0(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$, $f_0(1)=(1,0)$, 其余线性联结. 则 $f_0([0,1])$ 是 Δ 中从端点 A 到重心 K 再到端点 B 的一条折线 L (见图 18.1(a)).

① 关于 Peano 曲线的另一个例子见 16.4.2 小节.

然后将 Δ 等分成四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正三角形区域 Δ_i, $i=1,2,3,4$, L 等分成长度为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的四段 L_i, $i=1,2,3,4$. 设 $g_0: L\to\Delta$ 以类似于 f_0 的方式依次把 L_i, $i=1,2,3,4$ 映到 Δ_i, $i=1,2,3,4$ 中. 令 $f_1=g_0\circ f_0$, 则 $f_1([0,1])$ 就是 Δ 中一条联结 A, B 的折线, 由 2×4 段直线段连成 (见图 18.1(b)).

再设 g_1 把 $f_1([0,1])$ 的每一段作类似于 g_0 那样的变换. 令 $f_2=g_1\circ f_1$, 则 $f_2([0,1])$ 就如图所示是一条由 2×4^2 段直线段连成的折线 (见图 18.1(c)).

依类似的方式定义 $f_k=g_{k-1}\circ f_{k-1}: [0,1]\to\Delta$, $k=3,4,\cdots$, 使得 $f_k([0,1])$ 是一条由 2×4^k 段直线段连成的折线, 每段直线分别位于边长为 $\frac{1}{2^k}$ 的小正三角形区域中, 且 g_{k-1} 保持 $f_{k-1}([0,1])$ 的点在它所在的小正三角形区域中.

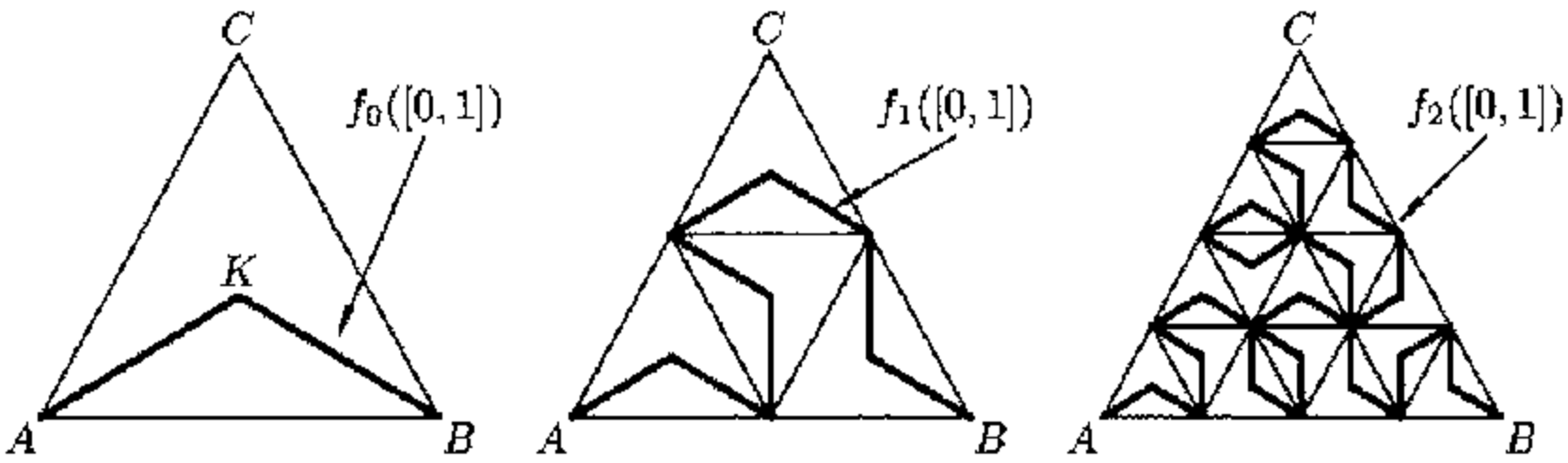


图 18.1

(1) 证明任取 $n>m$, 有 $|f_n(t)-f_m(t)|\leqslant\frac{1}{2^m}$, 从而 $f_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 设其极限映射为 f. 证明 $f: [0,1]\to\Delta$ 连续;

(2) 证明 $f([0,1])=\Delta$, 即连续映射 f 把一个区间 $[0,1]$ 映为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的区域 Δ.

8. (Tietze 扩张定理) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为闭子集, $f: D\to\mathbf{R}$ 为连续函数, 且 $|f(x)|\leqslant M$, $x\in D$. 设 $g_0(x)=0$, $g_k(x)$ 归纳定义为

$$g_k(x)=\frac{2^{k-1}d(x,A_k)}{3^k(d(x,A_k)+d(x,B_k))}-\frac{2^{k-1}d(x,B_k)}{3^k(d(x,A_k)+d(x,B_k))},$$

其中

$$A_k=\{x\in D\mid\varphi_k(x)\geqslant\frac{2^{k-1}}{3^k}M\},$$

$$B_k=\{x\in D\mid\varphi_k(x)\leqslant-\frac{2^{k-1}}{3^k}M\},$$

而 $\varphi_k(x)=f(x)-(g_0(x)+\cdots+g_{k-1}(x))$, $k=1,2,\cdots$.

(1) 证明 $g_k(\boldsymbol{x})$ $(k=1,2,\cdots)$ 连续, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛到 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g(\boldsymbol{x})$, 并且当 $\boldsymbol{x}\in D$ 时 $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$. 因此 g 称为 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续扩张, 也称连续开拓;

(2) 证明 (1) 的结论当 f 并不有界时也成立.

(以上两题取自 [2].)

9. 是否能把开集上的连续函数连续扩张到全空间? 一致连续函数呢? 考察 $\mathbf{R}$ 中的例子.

10. 证明可以把定义在 $\mathbf{R}^n$ 中有理点集上的一致连续函数惟一扩张到全空间.

第十九章 偏导数与全微分

本章前两节分别讨论多元函数的偏导数与全微分. 在 §19.3 节介绍求多元函数偏导数的链式法则. §19.4 节是向量值函数的微分学定理. 最后一节是学习要点和参考题. 方向导数, 梯度, Taylor 公式等将在第二十一章 (偏导数的应用) 中介绍.

§19.1 偏导数

19.1.1 偏导数的定义

以二元函数为例. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上有定义. 固定 $y=y_0$ 将 $f(x,y)$ 视为 x 的一元函数. 如果它在 x_0 点可导, 则称此导数是二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点关于 x 的**偏导数**, 记为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地可以定义 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ 以及任意个变元的多元函数的偏导数.

例题 19.1.1 求

$$f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 (0,0) 的偏导数.

解 由于

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\frac{\Delta y\ln(\Delta y)^2}{\Delta y}=\ln(\Delta y)^2,$$

从而

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ \text{不存在.}\quad \square$$

由于多元函数的偏导数是用一元函数的导数来定义的, 因此它具有导数的基本性质与运算法则, 例如偏导数的四则运算, 对复合函数求偏导数的链式法则等.

偏导数的几何意义 设 $z=f(x,y)$ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面, $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数存在, 则它与平面 $y=y_0$ 的交线 l_x 在点 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 τ_x 为 $(1,0,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))$, 与平面 $x=x_0$ 的交线 l_y 在点 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 τ_y 为 $(0,1,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))$.

19.1.2 偏导数与连续

在一元函数中, 可导可以推出连续. 但在多元函数中, 若 f 在某一点对每一个变元的偏导数都存在, 却不能断言 f 在该点连续, 甚至不能断言 f 在该点的极限存在, 最简单的例子是

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } xy\neq 0,\\ 0, & \text{当 } xy=0.\end{cases}$$

显然 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但 f 在 $(0,0)$ 点不连续, 甚至极限也不存在.

下面的命题说明, 如果偏导数在某一点的邻域内存在而且有界, 则可推出函数在该点连续.

命题 19.1.1 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 点的某个邻域内存在且有界, 则 f 在 (x_0,y_0) 点连续.

证 注意到

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= [f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

利用一元函数的微分中值定理, 得

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$. 已知 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有界, 所以

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=0,$$

即 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续. □

19.1.3 高阶偏导数

就二元函数而论, 若 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都存在, 则它们都是二元函数, 如果它们关于 x 的偏导数存在或者关于 y 的偏导数存在, 就称这些偏导数是 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**:

f 关于 x 的二阶偏导数, 记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 或 f_{xx};

f 关于 y 的二阶偏导数, 记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 或 f_{yy};

f 先关于 x 后关于 y 的二阶混合偏导数, 记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 或 f_{xy};

f 先关于 y 后关于 x 的二阶混合偏导数, 记为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 或 f_{yx}.

更高阶的偏导数也可以同样定义. 请注意两个混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 并不总是相等的, 例如设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则有

$$f_x(x,y)=\begin{cases}y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

从而在原点处有

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=1.$$

由此可见

$$f_{yx}(0,0)\neq f_{xy}(0,0).$$

注 上面定义的函数 $f(x,y)$ 连续可微 (关于可微的定义见下一小节), 因为 f_x 和 f_y 都是处处连续的. 但如果混合偏导数 f_{yx} 和 f_{xy} 连续, 则构造上述反例是不可能的. 事实上, 如果在某一点 (x_0,y_0) 的邻域内 f_x, f_y 都存在, 且 f_{yx} 与 f_{xy} 都在该点连续, 那么在 (x_0,y_0) 点一定成立 $f_{yx}=f_{xy}$. 在一般的分析教科书上都有这个结论及其证明. 我们可以证明下述更强的结论.

命题 19.1.2 设 f_x, f_y 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在且 f_{xy} 在 (x_0,y_0) 连续, 则 $f_{yx}(x_0,y_0)$ 存在, 且

$$f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0).$$

证 定义

$$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0).$$

由于函数 f 存在关于 x 的偏导数, 所以 $\varphi(x)$ 可导, 应用一元函数的中值定理, 有

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)&=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x\\ &=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1<1$, 又由 f_x 存在关于 y 的偏导数, 故对以 y 为自变量的函数 $f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y)$ 应用一元函数中值定理, 上式化为

$$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$. 因此

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)\\ &=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

在上式两边同除以 Δy, 并令 $\Delta y \to 0$, 由偏导数的定义以及 f_{xy} 在点 (x_0, y_0) 连续就得到

$$f_y(x_0 + \Delta x, y_0) - f_y(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)\Delta x.$$

再在上式两边同除以 Δx, 并令 $\Delta x \to 0$, 由 f_{xy} 在 (x_0, y_0) 点连续得到

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0). \quad \square$$

例题 19.1.2 证明: 函数 $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ 在上半平面 $\mathbf{R}^2_+ = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \mid t > 0\}$ 上满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{19.1}$$

其中 a 为正常数.

证 $\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2_+$, 由于

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{t^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{t^{1/2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \frac{x^2}{4a^2 t^2} \right) \\
&= \frac{1}{4a\sqrt{\pi} t^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(-1 + \frac{x^2}{2a^2 t} \right), \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(-\frac{x}{2a^2 t} \right), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \frac{x^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right) \\
&= \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi} t^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(\frac{x^2}{2a^2 t} - 1 \right),
\end{aligned}$$

所以方程 (19.1) 在 $\mathbf{R}^2_+$ 上成立. $\square$

例题 19.1.3 设 $\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, 则

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} [(x-\xi) + (y-\eta)]^{-1/2},$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} \right| \leqslant \frac{1}{\pi} [(x-\xi) + (y-\eta)]^{-1}.$$

证 由于

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \\
\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{\pi} \frac{(y-\eta)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2},
\end{aligned}$$

从而结论成立. $\square$

§19.2 全微分

19.2.1 全微分的定义与基本性质

为方便起见, 这里仅讨论二元函数. 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域上有定义, 如果 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(r),$$

其中 A, B 是两个仅与点 (x_0,y_0) 有关而与 Δx, Δy 无关的常数, $o(r)$ 是当 $r\to 0$ 时关于 r 的高阶无穷小量, $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称 f 在点 (x_0,y_0) **可微**, 且称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是函数 f 在 (x_0,y_0) 点的**全微分**. 记作

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

习惯上, 记 $\Delta x=\mathrm{d}x,\Delta y=\mathrm{d}y$, 于是全微分 $\mathrm{d}z$ 又可以写为

$$\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

从全微分的定义可知, 如果函数 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 那么在 (x_0,y_0) 点附近有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y.$$

上式右端是一个线性函数, 因此可微的意义在于在 (x_0,y_0) 附近函数可用一个 Δx 与 Δy 的线性函数近似代替.

全微分具有下列性质:

(1) 如果 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 则

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0);$$

(2) 若 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 则 f 在点 (x_0,y_0) 连续.

由性质 (1) 知, 如果 f 在点 (x_0,y_0) 可微, 则 f 在点 (x_0,y_0) 的全微分是

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

类似地可定义高阶全微分

$$\mathrm{d}^nf=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}f)=(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y})^nf,$$

其中 $(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y})^n$ 是将 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ 视为通常的量按照二项式定理展开而得到的对 f 的一个形式记号, 实际上是一个微分算子.

全微分的几何意义 设 $z=f(x,y)$ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面, 如果 f 可微, 那么在点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ 附近, 曲面可以用它在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的切平面近似代替. 其差是关于 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 的一个高阶无穷小量, 切平面由两个线性无关的切向量 $\boldsymbol{\tau}_x$, $\boldsymbol{\tau}_y$ 张成, 其法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1).$$

与一元函数的情况类似, 全微分可用于近似计算与估计误差. 以二元函数为例,

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

就是 (x_0, y_0) 附近的一个近似公式 (参见 6.4.3 小节中的例题),

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

就是 (x_0, y_0) 附近的一个近似的误差估计式 (参见 6.4.3 小节中的例题).

例题 19.2.1 求 $A = \sqrt{1 - (1.004)^2 + (1.994)^2}$ 的近似值.

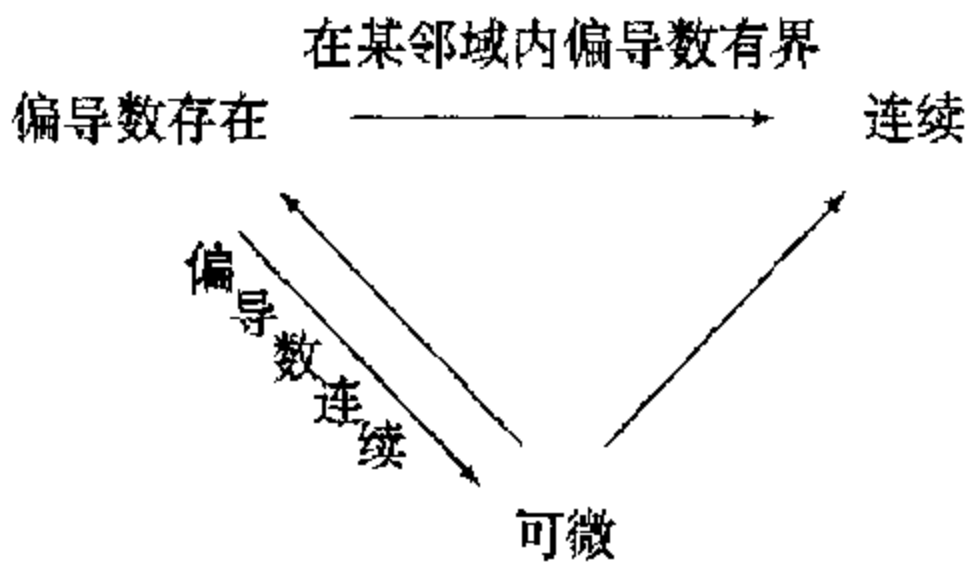
解 取 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0.004$, $\Delta y = -0.006$. 计算得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1.$$

于是 $A = f(1.004, 1.994) \approx f(1, 2) - \frac{1}{2} \cdot (0.004) + 1 \cdot (-0.006) = 1.992.$ □

19.2.2 多元函数的连续性、偏导数存在性及可微性之间的关系

多元函数在一个点处的的连续性、偏导数存在性及可微性之间有下列关系:



由此可得到证明一个函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 不可微的常用方法如下:

(1) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点至少有一个偏导数不存在;

(2) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点不连续;

(3) 从定义出发证明 $\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y \neq o(r)$.

例题 19.2.2 设 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 证明:

(1) $f(x, y)$ 在 (0,0) 点连续;

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ 都存在;

(3) $f(x, y)$ 在 (0,0) 点不可微.

证 (1) 由于 $|\Delta f| = |\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2}$, 于是

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} (f(0, 0) + \Delta f) = 0 = f(0, 0).$$

(2) 直接按定义计算得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

(3) 由于

$$\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2},$$

取 $\Delta x=\Delta y\to 0$, 则

$$\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{r}=\frac{|\Delta x|^{1/2}|\Delta y|^{1/2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点不可微. □

注 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微时, 成立**有限增量公式**:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta x|+|\Delta y|).$$

上述例子说明仅有 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 存在还不足以保证二维有限增量公式成立 (这与一维有限增量公式 (上册 159 页 (6.1)) 成立的条件是不一样的, 由此可以体会一元导数与多元偏导数的区别).

例题 19.2.3 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在 (0,0) 点的一个邻域上有定义, 要求给函数 $\varphi(x,y)$ 加上适当的条件, 使得

(1) $f(x,y)$ 在 (0,0) 点连续;

(2) $f(x,y)$ 在 (0,0) 点存在偏导数;

(3) $f(x,y)$ 在 (0,0) 点可微.

解 (1) 由于 $f(0,0)=0$, 而在 (0,0) 点附近

$$|f(x,y)|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}|\varphi(x,y)|,$$

于是当

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\varphi(x,y)=0$$

时, $f(x,y)$ 在 (0,0) 点连续.

特别地当 $\varphi(x,y)$ 在 (0,0) 点附近有界时 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点连续.

(2) 由于单侧导数

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\pm}(0,0)=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{\pm x\varphi(x,0)}{x}=\pm\lim_{x\to 0^{\pm}}\varphi(x,0),$$

从而当 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)=-\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x,0)$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)$.

同理当 $\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)=-\lim\limits_{y\to 0^-}\varphi(0,y)$时, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)$.

特别地当 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
&f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\\
=&|x-y|\varphi(x,y)-[\lim_{x\to 0^+}\varphi(x,0)]x-[\lim_{y\to 0^+}\varphi(0,y)]y\\
=&\begin{cases}[\varphi(x,y)-\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)]x-[\varphi(x,y)+\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)]y, & \text{若 } x>y,\\ -[\varphi(x,y)+\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)]x+[\varphi(x,y)-\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)]y, & \text{若 } x<y,\end{cases}
\end{aligned}
$$

由此可以推出, 当

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$$

时 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ 且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微. □

19.2.3 思考题

1. 为什么说 $f_x(x_0,y_0)$ 存在就能保证一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 连续? 由此能否进一步断言: 对充分接近 y_0 的 y_1, 一元函数 $f(x,y_1)$ 在点 x_0 连续?
2. 证明全微分的性质 (1), (2).
3. 举例说明:
   (1) $f(x,y)$ 在某一点的邻域内存在偏导数, 但在该点不一定连续, 从而不一定可微;
   (2) $f(x,y)$ 在某一点连续, 但在该点偏导数不一定存在, 从而不一定可微;
   (3) $f(x,y)$ 在某一点可微, 但在该点偏导数不一定连续.
4. 证明: 若 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在, $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微.
5. 设 $z=f(x,y)$ 在开集 $D=(a,b)\times(c,d)$ 上可微, 且全微分 $\mathrm{d}z$ 恒为零. 问 $f(x,y)$ 在 D 内是否应取常数值? 证明你的结论.

19.2.4 练习题

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|x-y|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

   讨论:
   (1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续 ?
   (2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微 ?

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

   证明:

(1) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 都存在;

(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 在 $(0,0)$ 点不连续;

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

(本题也说明从可微不能推出偏导数连续.)

3. 设 $f(x,y,z)$ 在开集 D 上有定义, $f_x(x,y,z)$ 与 $f_y(x,y,z)$ 在 D 上有界, 且对固定的 (x,y), $f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数. 证明 $f(x,y,z)$ 在 D 上连续.

4. 求 $u=\ln(1+x^2+y^2)$ 在 $(x,y)=(1,2)$ 处的全微分.

5. 已测得一圆柱体的底圆直径 $D_0=10.44$, 高 $H_0=18.36$, 且测量误差 $|\Delta D|\leqslant 0.02$, $|\Delta H|\leqslant 0.01$. 试估计用体积公式 $V=\dfrac{1}{4}\pi D^2H$ 计算时的绝对误差 ΔV 与相对误差 $\Delta V/V$.

6. $f(x,y)$ 定义在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上, 且 f_y 在 I 上连续, 证明 $f(x,y)$ 对 y 满足一致 Lipschitz 条件, 即 $\exists L>0$, 使得 $\forall (x,y_1),(x,y_2)\in I$, 都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 L 与 x 无关.

7. 若函数 $f(x,y)$ 的偏导数 f_x 和 f_y 在区域 D 内存在, 且 $\forall (x,y)\in D$, $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上为常数.

8. 设 $\Omega\in\mathbf{R}^2$ 是开区域, $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 内满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad u^2+v^2=C,$$

其中 C 为常数, 证明 $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 内恒为常数.

9. 设 $f(x,y)$ 在 $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 上有定义. 若 $f(x,0)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $f_y(x,y)$ 在 G 上有界. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

§19.3 复合函数求导 (链式法则)

19.3.1 复合函数偏导数的链式法则

若 $z=f(u_1,\cdots,u_m)$ 在点 $(u_1,\cdots,u_m)$ 可微, $u_i=g_i(x_1,\cdots,x_n)$ $(i=1,\cdots,m)$ 在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 有关于 x_j $(j=1,\cdots,n)$ 的偏导数, 则复合函数

$$z=f[g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n)]$$

关于自变量 x_j 的偏导数存在且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\quad j=1,\cdots,n. \tag{19.2}$$

写成矩阵的形式为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_m}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

特款 1 若 $z=f(x,y)$, 而 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(t). \tag{19.3}$$

特款 2 若 $z=f(x,y,t)$, 而 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s}, \tag{19.4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{19.5}$$

注意: 最后一个等式左边的 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 与等式右边的 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 不一样, $\frac{\partial z}{\partial t}$ 表示函数

$$z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t),t]$$

对 t 求偏导, 此时视 s 为常数, 而 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 是 $z=f(x,y,t)$ 对 t 求偏导, 把 x,y 视为常数. 为了避免混乱, 有时引入下面的记号

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,t),\quad f_2=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,t),\quad f_3=\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t),$$

其中下标 i $(i=1,2,3)$ 表示对第 i 个自变量求偏导, 于是可将 (19.4), (19.5) 写为

$$z_s=f_1\varphi_s+f_2\psi_s,\quad z_t=f_1\varphi_t+f_2\psi_t+f_3.$$

写成矩阵的形式为

$$(z_s,z_t)=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}\varphi_s & \varphi_t\\ \psi_s & \psi_t\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

19.3.2 例题

例题 19.3.1 对于幂指函数 $u=x^y$, 令 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 由 (19.3) 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)\\ &=yx^{y-1}\varphi'(t)+x^y\ln x\psi'(t)\\ &=x^y\left(\frac{y}{x}\varphi'+\ln x\psi'\right)\\ &=[\varphi(t)]^{\psi(t)}\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\varphi'(t)+[\ln\psi(t)]\psi'(t)\right).\end{aligned}$$ □

(以前我们曾用另外的方法证明过它, 参见上册 165~166 页的对数求导法.)

作为公式 (19.3) 的另一个应用, 讨论行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的求导, 其中假定元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都是 t 的一元函数, 它们关于 t 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}$ 都存在.

例题 19.3.2 证明行列式 Δ 的导数等于把 Δ 内的第 1, 第 2, $\cdots$, 第 n 行元素依次换成它们的导数而得出的 n 个行列式之和.

证 回忆行列式关于第 i 行元素的展开式

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a_{ij},$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 容易看出 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 中不含有元素 a_{ij}, $1\leqslant j\leqslant n$, 于是

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}=A_{ij}.$$

按照公式 (19.3) 有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}.$$

注意到 $\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}\dfrac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}$ 也表示一个行列式的展开式, 它同已知行列式 Δ 的差别仅在于把 Δ 中第 i 行的元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 换成它们的导数 $\dfrac{\mathrm{d}a_{i1}}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}a_{i2}}{\mathrm{d}t},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}a_{in}}{\mathrm{d}t}$, 由此可知结论成立. □

注 在使用链式法则 (19.2) 时, 要求 $f(u_1,\cdots,u_m)$ 在点 $(u_1,\cdots,u_m)$ 可微, 否则公式 (19.2) 有可能失效, 请看下面的例子:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{当 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{当 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

由于

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{当 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{当 } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{当 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{当 } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

可以看出 f_x 与 f_y 都在 $(0,0)$ 点不连续, 容易证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

令 $x=y=t$, 则 $f(t,t)=\dfrac{1}{2}t$, 从而 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}$. 如果用链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x x'_t + f_y y'_t.$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0$, 问题出在 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微, 也就是不满足链式法则的条件.

例题 19.3.3 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数, 且 $f(x,x^2)\equiv 1$.

(1) 若 $f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$;

(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$, 求 $f(x,y)$.

解 (1) 对 $f(x,x^2)\equiv 1$ 两边求导得

$$f_x + 2x f_y = 0.$$

由条件得

$$x + 2x f_y = 0,$$

所以当 $x\neq 0$ 时, $f_y(x,x^2)=-\dfrac{1}{2}$. 由 f_y 的连续性知当 $x=0$ 时也有 $f_y(x,x^2)=-\dfrac{1}{2}$.

(2) 令 $F(x,y)=f(x,y)-(x^2y+y^2)$, 则 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续可微, 且

$$F_y(x,y)=0.$$

于是 $F(x,y)$ 只是 x 的函数, 即 $F(x,y)=\varphi(x)$, 从而

$$f(x,y)=x^2y+y^2+\varphi(x).$$

再由 $f(x,x^2)\equiv 1$ 得 $\varphi(x)=1-2x^4$, 所以

$$f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4. \quad \square$$

例题 19.3.4 设 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y,u)$, $w=h(x,u,v)$, 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

解 复合这几个函数得到

$$w=h[x,f(x,y),g(x,y,f(x,y))].$$

从而

$$\frac{\partial w}{\partial x}=h_1+h_2\frac{\partial f}{\partial x}+h_3\left(g_1+g_3\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=h_2\frac{\partial f}{\partial y}+h_3\left(g_2+g_3\frac{\partial f}{\partial y}\right). \quad \square$$

例题 19.3.5 设二元连续可微函数 F 在直角坐标下可写为 $F(x,y)=f(x)g(y)$, 在极坐标系中可写为 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(r)$. 若 $F(x,y)$ 无零点, 求 $F(x,y)$.

解 注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\theta}&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\\&=f'(x)g(y)(-r\sin\theta)+f(x)g'(y)r\cos\theta\\&=-yf'(x)g(y)+xf(x)g'(y).\end{aligned}$$

另一方面有

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial h(r)}{\partial \theta} = 0.$$

于是 $-yf'(x)g(y) + xf(x)g'(y) = 0$. 当 $x \neq 0$, $y \neq 0$ 时有

$$\frac{f'(x)}{xf(x)} = \frac{g'(y)}{yg(y)}. \tag{19.6}$$

由于上式对任意的 $x \neq 0, y \neq 0$ 恒成立, 于是

$$\frac{f'(x)}{xf(x)} = \frac{g'(y)}{yg(y)} = \lambda, \tag{19.7}$$

其中 λ 为任一常数. 由 (19.7) 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda x,$$

即 $(\ln f)' = (\frac{\lambda}{2}x^2)'$, 所以

$$\ln f(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + C, \tag{19.8}$$

其中 C 为任意常数. 由 (19.8) 得到

$$f(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{\lambda x^2}{2}},$$

其中 C_1 为任意常数. 由 (19.7) 还可得到

$$g(y) = C_2 \mathrm{e}^{\frac{\lambda y^2}{2}},$$

其中 C_2 为任意常数. 最后得到

$$F(x,y) = C\mathrm{e}^{\frac{\lambda(x^2+y^2)}{2}},$$

其中 C, λ 为任意常数. $F(x,y)$ 在 $x=0$ 或 $y=0$ 的值由连续性得到. □

例题 19.3.6 设 $a, b \neq 0$, f 具有二阶连续偏导数, 且

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{19.9}$$

$$f(ax, bx) = ax, \tag{19.10}$$

$$f_x(ax, bx) = bx^2. \tag{19.11}$$

求 $f_{xx}(ax, bx)$, $f_{xy}(ax, bx)$, $f_{yy}(ax, bx)$.

解 对 (19.10) 两边求导, 得

$$af_x(ax, bx) + bf_y(ax, bx) = a. \tag{19.12}$$

对 (19.11), (19.12) 两边求导得

$$af_{xx}(ax, bx) + bf_{xy}(ax, bx) = 2bx, \tag{19.13}$$

$$a^2 f_{xx}(ax, bx) + 2abf_{xy}(ax, bx) + b^2 f_{yy}(ax, bx) = 0. \tag{19.14}$$

由 (19.9), (19.14) 得

$$f_{xy}(ax, bx) = 0. \tag{19.15}$$

将 (19.15) 代入 (19.13) 得

$$f_{xx}(ax,bx)=\frac{2b}{a}x. \tag{19.16}$$

最后将 (19.16) 代入 (19.9) 得

$$f_{yy}(ax,bx)=-\frac{2a}{b}x. \quad \square$$

19.3.3 齐次函数

定义 如果函数 $f(x,y)$ 满足 $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$, 其中 $t>0$, 则称 f 是 n 次**齐次函数**. 齐次函数有如下性质:

命题 19.3.1 设 f 有连续偏导数, 则 f 是 n 次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=nf(x,y).$$

命题 19.3.2 设 $f(x,y)$ 是二次连续可微的 n 次齐次函数, 则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=n(n-1)f(x,y),$$

这里 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+2xy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+y^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ 是一种缩写的记号, 即把 $x,y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ 都看成为常数, 按二项式展开.

命题 19.3.3 若 $f(x,y)$ 是二次连续可微的 n 次齐次函数, 则 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 是 $(n-1)$ 次齐次函数.

命题 19.3.4 若 $f(x,y)$ 是在 $\mathbf{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上连续的 n 次齐次函数, 则

$$|f(x,y)|\leqslant C(x^2+y^2)^{n/2},$$

其中 C 为正常数.

以上命题都可以推广到任意个自变量的情形. 它们的证明都不难, 留给读者.

例题 19.3.7 证明 $u=\varphi(\frac{y}{x})+y\psi(\frac{y}{x})$ 满足方程

$$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=.0, \tag{19.17}$$

其中 φ,ψ 均为二次连读可微函数.

分析 当然可以通过复合函数求导数来验证方程, 但观其特点, 首先是由 φ 和 ψ 的任意性知 $\varphi(\frac{y}{x})$ 与 $y\psi(\frac{y}{x})$ 都应该满足方程. 又注意到 $\varphi(\frac{y}{x})$ 为零次齐次函数, $y\psi(\frac{y}{x})$ 为一次齐次函数, 且方程 (19.17) 可写为

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u=\mathbf{0}.$$

证 由命题 19.3.2 知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\varphi(\frac{y}{x})=0(0-1)\varphi(\frac{y}{x})=0,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left[y\psi(\frac{y}{x})\right]=1\cdot 0\cdot\left[y\psi(\frac{y}{x})\right]=0.$$

于是

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left[\varphi(\frac{y}{x})+y\psi(\frac{y}{x})\right]=0.$$

这就是所要证明的. □

19.3.4 练习题

1. 设 $u=\mathrm{e}^x+\sin y+t$, $x=st$, $y=s+t$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
2. 设 $u=f(s,t)$, $s=\dfrac{x}{y}$, $t=\dfrac{y}{z}$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.
3. 设 $u=f(s,t,y)$, $s=\varphi(x,y)$, $t=\psi(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.
4. 设 $u=\mathrm{e}^x\sin y$, $x=2st$, $y=t+s^2$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
5. 设 $u=f(ax^2+by^2+cz^2)$, 求 $\mathrm{d}u$.
6. 设 $f(x,y,z)=(\dfrac{x}{y})^{1/z}$, 求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$.
7. 设 $w=F(xy,yz)$, F 为有连续偏导数的二元函数, 证明
$$x\frac{\partial w}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial z}=y\frac{\partial w}{\partial y}.$$
8. 设 $z=f(xy)$, f 为可微的一元函数, 证明
$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$
9. 设二元函数 $u=F(x,y)$ 满足方程
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$
证明: $F(x,y)$ 在极坐标系下只是 θ 的函数.
10. 设二元函数 F 在直角坐标系中可写成 $F(x,y)=f(x)g(y)$, 在极坐标中可写成 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(\theta)$, 求 $F(x,y)$.
11. 证明 $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$
其中 φ,ψ 为具有二阶连续导数的一元函数.
12. 设 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 满足
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},$$
又设 $w=w(x,y)$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,$$
证明:

(1) $w = w(x(u,v), y(u,v))$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$;

(2) $\dfrac{\partial^2 (xy)}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 (xy)}{\partial v^2} = 0$.

13. 证明: 可微函数 $z = f(x,y)$ 仅是 $ax + by$ $(ab \neq 0)$ 的函数的充要条件是

$$b\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y}.$$

14. 设 $u(x,y)$ 有连续二阶偏导数, $F(s,t)$ 有连续一阶偏导数, 且满足

$$F(u_x, u_y) = 0, \quad F_s^2 + F_t^2 \neq 0,$$

证明: $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$.

15. 设 $u = f(\sqrt{x^2+y^2})$ 有连续二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 试求 $u(x,y)$.

§19.4 向量值函数的微分学定理

19.4.1 有限增量公式与拟微分平均值定理

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$ 是一个向量值函数, 即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)),$$

其中 $f_1, \cdots, f_m$ 均是 n 元实函数. 当 $f_1, \cdots, f_m$ 均是 D 上的可微函数时, 称 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的**可微向量值函数**, 或者是 D 上的**可微映射**. 当 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处可微时, 称 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right)_{m\times n}$$

为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**全导数**, 记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ (又记为 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$), 它表示了一个自 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性变换. 当 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时, 我们有如下**有限增量公式**, 它给出了向量值函数的差的局部估计.

命题 19.4.1 设开区域 $D \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$ 在 D 上可微, $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x} \in D$, 则

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0),$$

其中 $o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 表示当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \to 0$ 时, 模为高阶无穷小量的向量.

所以, 可微映射在局部可以线性化, 它是一个常值映射与一个线性变换的和. 例子 19.2.2 说明偏导数存在还不足以保证有限增量公式成立.

在一元微分学中, Lagrange 中值定理给出了一元函数的差 (即增量) 的大范围估计. 对于定义在凸区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的 n 元可微函数 $f(\boldsymbol{x})$, 也有类似的数分中值定理, 即当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in D$ 时, $\exists \theta \in (0,1)$, 使

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

其中 $\nabla f(x)=(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n})$, "$\cdot$" 表示内积. 事实上我们可以证明:

例题 19.4.1 设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集 G 到 $\mathbf{R}^m$ 的可微映射 (向量值函数), $x,\ y\in G,\ x\neq y$, 证明: 若线段 $\overline{xy}\in G$, 则 $\forall\, a\in\mathbf{R}^m,\ \exists\, z\in\overline{xy}$, 使得

$$a\cdot(F(y)-F(x))=a\cdot JF(z)(y-x). \tag{19.18}$$

解 定义一元函数

$$f(\lambda)=a\cdot(F(x+\lambda(y-x))-F(x)),$$

则 $f(1)=a\cdot(F(y)-F(x)),\ f(0)=0$, 由一元函数的中值定理得

$$a\cdot(F(y)-F(x))=f(1)-f(0)=f'(\xi)=a\cdot JF(x+\xi(y-x))(y-x),$$

其中 $0<\xi<1$. 令 $z=x+\xi(y-x)$, 则 $z\in\overline{xy}$, (19.18) 得证. □

但不含内积的向量值函数的中值定理是不成立的, 下面是一个反例.

例题 19.4.2 设 $f(t)=(\cos t,\sin t),\ t\in[0,1]$, 则 $Jf(t)=(-\sin t,\cos t)$. 注意到 $f(0)=f(2\pi)$, 故不存在 $\theta\in(0,1)$, 使 $f(2\pi)-f(0)=Jf(\theta\cdot 2\pi)(2\pi-0)$. 事实上, $Jf(t)$ 恒不为零向量.

不过我们仍然有如下的向量值函数的差的全局估计.

命题 19.4.2 (拟微分平均值定理) 设凸区域 $D\subset\mathbf{R}^n$, f 在 D 上可微, $a,b\in D$, 则 $\exists\,\theta\in(0,1)$, 使

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\|Jf(a+\theta(b-a))\|\cdot|b-a|,$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的模, 即若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则 $\|A\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}|a_{ij}|$.

证 第一步. 先对 $n=1$ 的情况证明, 即 $a,\ b$ 为数. 设

$$\varphi(t)=f(t)\cdot(f(b)-f(a)),\quad t\in[a,b].$$

由一元函数的微分中值定理得到

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(a+\theta(b-a))(b-a)=Jf(a+\theta(b-a))\cdot(f(b)-f(a))(b-a).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|^2&=|Jf(a+\theta(b-a))\cdot(f(b)-f(a))|\cdot|b-a|\\&\leqslant\|Jf(a+\theta(b-a))\|\cdot|f(b)-f(a)|\cdot|b-a|.\end{aligned}$$

所以得到

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\|Jf(a+\theta(b-a))\|\cdot|b-a|.$$

第二步. 对于 $n>1$ 的情况. 设 $g(t)=f((1-t)a+tb),\ t\in[0,1]$, 则 $g(t)$ 为定义在 $[0,1]$ 上的向量值函数, $g(0)=f(a),\ g(1)=f(b)$. 利用复合函数求导及第一步的讨论可得到所需的不等式. □

例题 19.4.3 设 $\boldsymbol{f}$ 是凸域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的可微映射, 并且全导数 $J\boldsymbol{f}(x)$ 处处为 $\mathbf{0}$ (取值为零向量的零变换), 则 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的常值映射.

证 取定 $x_0 \in D$, 任取另一点 $x \in D$, 则由拟微分平均值定理有

$$|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(x_0)| \leqslant \|\mathbf{0}\| \cdot |x - x_0| = 0.$$

由于 $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(x_0)\ \forall x \in D$, 所以 $\boldsymbol{f}$ 是常值映射. □

注 可以把凸域 D 的结论推广到一般的开区域 D. 证明留给读者.

在第二十一章, 我们还将介绍一些向量值函数中值定理的几何形式.

19.4.2 练习题

1. 设 $\boldsymbol{f}: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $x_0 \in D$, 且存在矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得在 x_0 的邻域内有

$$\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(x_0) + \boldsymbol{A}(x - x_0) + o(x - x_0),$$

其中 $o(x - x_0)$ 表示当 $|x - x_0| \to 0$ 时, 模为高阶无穷小量的向量. 证明 $\boldsymbol{f}$ 在 x_0 处可微, 且 $J\boldsymbol{f}(x_0) = \boldsymbol{A}$.

2. 设 $\boldsymbol{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ 是可微的向量值函数, 满足条件 $|\boldsymbol{f}(t)| = 1\ \forall t \in \mathbf{R}$. 证明 $\boldsymbol{f}'(t) \cdot \boldsymbol{f}(t) = 0$, 并对这个结果进行几何上的解释.

3. 设 $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 $\mathbf{R}^2$ 上有一阶连续偏导数, 且存在 $C > 0$, 对任意的 $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$ $(i = 1, 2)$ 均成立

$$(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \geqslant C[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2],$$

其中 $u_i = u(x_i, y_i)$, $v_i = v(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2)$. 则 $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ 有

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

§19.5 对于教学的建议

19.5.1 学习要点

1. 在多元函数中, 让一个自变量变化, 其他自变量固定, 就成为一元函数. 这个一元函数的导数就是原来函数的偏导数. 偏导数反映了函数在某个坐标轴方向的变化率, 并不完全反映函数在一点附近的全面变化. 反映函数在一点附近的全面变化的量是全微分, 它是函数在一点附近的线性逼近和线性主部. 有些教科书是先引入全微分的概念, 如 [25]. 这就是沿着线性逼近或线性主部的线索来展开. 我们先讨论偏导数, 从计算上讲更具体些.
2. 在一元函数中, 可导等价于可微 (参见上册 177 页 6.3.1 小节), 很多学生对两者不予区分. 故这一章在概念上的重点是微分, 要求学生能从可微的定

义出发去证明一个函数在一点可微或不可微. 同时能清楚多元函数连续与偏导数存在, 偏导数连续与可微之间的关系, 并能举出反例.

3. 复合函数求导的链式法则是计算训练的重点, 初学者最容易犯的错误是漏项. 批改作业时要注意学生的计算过程.

4. **对习题课的建议** 在强调多元函数连续性, 可微性的条件时, 也要注意另一种倾向, 即学生太小心以至不敢用一元函数的有关定理. 例如学生们往往不能确定如下结论:

(1) 若 $f_x(x_0,y_0)$ 存在, 就能保证一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 点连续;

(2) 若 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有界, 则 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的邻域内连续.

又如, 他们在证明命题 19.1.1 时, 知道要将 Δf 写成如下形式:

$$\Delta f=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)],$$

但再往下有些同学不敢应用一元函数的微分中值定理, 因为他们知道微分中值定理要求函数在闭区间上连续, 在开区间上可导. 但现在是要证明函数的连续性, 怎么可以应用中值定理呢? 事实上, 他们混淆了一元函数和多元函数的连续性.

有些同学错误地认为偏导数连续是可微的必要条件, 因此应该告诉他们一个反例, 例如练习题 19.2.4 的题 2 就是一个反例. 思考题 19.2.3 的题 4 表明两个偏导数中只需要一个连续, 便可证出可微性. 因此如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$, 且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点不可微, 则任何一个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 不可能在 (x_0,y_0) 点连续.

对于多元函数连续、偏导数存在、偏导数连续和可微之间的关系, 最好组织学生自己进行小结.

要引导学生选择简捷的方法进行计算, 以达到快速准确的目的. 下面是一个很好的例子.

例题 19.5.1 设 $u=xyze^{x+y+z}$, 求 $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$, 其中 $p+q+r=k$.

解 由于

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x)\frac{\partial^q}{\partial y^q}(ye^y)\frac{\partial^r}{\partial z^r}(ze^z),$$

而

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x)=(p+x)e^x,$$

从而

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=(p+x)(q+y)(r+z)e^{x+y+z}. \quad \square$$

建议将例题 19.2.3 或类似的题布置为学生的课外题, 该类题可引导学生自己去推导出必要条件, 而不是在某种预先给定的条件下去证明结论.

19.5.2 参考题

1. 设 $u(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$, 证明当 $t>0$ 时 $\left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leqslant Ct^{-3/2}\mathrm{e}^{-\lambda\frac{x^2}{t}}$, 其中 C 为正常数, λ 为不超过 $\dfrac{1}{4}$ 的正常数.

2. 设 $\Gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1/2}$, 证明

$$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right|\leqslant\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y\partial z}\right|\leqslant\frac{3}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2},$$

$$\left|\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x\partial y\partial z}\right|\leqslant C\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-2},$$

其中 C 为正常数.

3. 设 $u(x,y)$ 有二阶偏导数, 无零点. 证明 u 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

的充要条件是 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

4. 证明关于 n 次齐次函数的命题 19.3.1–19.3.4.

5. 设 $u=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$, 证明:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{n(n-1)}{2}u$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正交矩阵, $f(\boldsymbol{y})$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的二次可微函数, $F(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{Ax})$. 证明: 当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$ 时有

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.

7. 求下列变换的 Jacobi 行列式:

(1) $x_1=r\cos\theta, x_2=r\sin\theta$, 求 $\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}$;

(2) $x_1 = r\cos\theta_1, x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2$, 求 $\dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2)}$;

(3)
$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \cdots\cdots \\ x_{m-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1}, \\ x_m = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1}, \end{cases}$$

这里 $r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta_1, \cdots, \theta_{m-2} \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta_{m-1} \leqslant 2\pi$, 试用数学归纳法求
$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{m-1})}.$$

8. 函数值计算的相对误差估计:

(1) 利用可微函数定义与近似等式 $\Delta f(x;h) \approx \mathrm{d}f(x)h$, 证明: 设 $f(x) = x_1\cdot\cdots\cdot x_m$ 是 m 个不为零的因子的乘积, 若 δ_i 是第 i 个因子的相对误差, 则它们乘积的相对误差为 $\delta = \delta(f(x);h) \approx \sum\limits_{i=1}^{m}\delta_i$;

(2) 利用等式 $\mathrm{d}\ln f(x) = \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}f(x)$, 再次得到上题结果并证明: 一般的分式 $\dfrac{f_1\cdots f_n}{g_1\cdots g_n}(x_1,\cdots,x_m)$ 的相对误差是函数 $f_1,\cdots,f_n,g_1,\cdots,g_n$ 的值的相对误差的和.

9. 设 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可微函数, 满足:
$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ \cdots\cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$
其中 $a_{ij} \geqslant 0, i,j = 1,\cdots,n$. 假如对任何 i, 当 $t \to +\infty$ 时, $x_i(t) \to 0$. 问函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$ 必定是线性相关的吗 (这里函数线性相关的定义见上一章的第一组参考题 4)?

10. 设 $\boldsymbol{f}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的 C^2 映射. $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为 Jacobi 矩阵, 它的元素为 $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$, $i,j = 1,2,\cdots,n$. 在 Jacobi 行列式 $\det(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 中对应的代数余子式为 $A_{i,j}(\boldsymbol{x})$, $i,j = 1,2,\cdots,n$. 证明如下的 Hadamard 恒等式:
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

第二十章 隐函数存在定理与隐函数求导

本章在 §20.1 节讨论一个方程所确定的隐函数. 在 §20.2 节讨论方程组所确定的隐函数组, 并用压缩映射原理证明了反函数组存在定理. 在 §20.3 节讨论微分式的变量替换. 在 §20.4 节讨论隐函数 (组) 的整体存在性, 这可以作为习题课的补充材料. 最后一节是学习要点和参考题.

§20.1 一个方程的情形

20.1.1 隐函数存在定理

命题 20.1.1 (隐函数存在定理) 设二元函数 $F(x,y)$ 满足下列条件:

(1) 在矩形区域 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$ 内有关于 x,y 的连续偏导数;

(2) $F(x_0,y_0)=0$;

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则有:

(1) 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内, 由方程 $F(x,y)=0$ 可以确定惟一的函数 $y=f(x)$, 也就是说, 存在 $\eta>0$, 当 $x\in O_\eta(x_0)$ 时有

$$F(x,f(x))=0, \quad \text{并且 } y_0=f(x_0);$$

(2) $f(x)$ 在 $O_\eta(x_0)$ 内连续;

(3) $f(x)$ 在 $O_\eta(x_0)$ 内有连续的导数

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{20.1}$$

称 $y=f(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**.

注 1 视 $F(x,y)=0$ 为方程, 我们知道一个方程只能解出一个未知量, 若我们视 x 为已知, y 为未知, 隐函数存在定理就是告诉我们在什么条件下可解出 $y=f(x)$. 但一般教科书上定理的证明是非构造性的, 只是证明了存在性, 并没有说明如何由 $F(x,y)$ 的表达式去得到 $f(x)$ 的表达式. 事实上, 即使 $F(x,y)$ 的表达式很简单, 也未必能将隐函数从 $F(x,y)=0$ 中具体解出来. 如天体力学中著名的 Kepler 方程 (见上册 80, 146, 172 页):

$$F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y=0, \quad 0<\varepsilon<1.$$

$F(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点附近满足定理所述条件, 从而隐函数 $y=f(x)$ (Kepler 函数) 存在、连续、可导, 且按 (20.1) 可求出隐函数 $y=f(x)$ 的导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}. \tag{20.2}$$

然而 $F(x,y)=0$ 的隐函数不能解成初等函数.

注意在公式 (20.1) 的右端的表达式中, 隐函数的导数同时含有 x 与 y. 这一点与显函数的导数是不相同的[①], 它应该理解为 $f'(x) = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}$. 但这并不妨碍我们研究隐函数的性质. 如根据 (20.2) 可知 Kepler 函数是单调增加的. 由 y 的可导性还可推知 y'' 的存在性等. 一般地若 $F(x,y)$ 二阶连续可微, 且满足隐函数存在定理的条件, 则对 (20.1) 两边对 x 求导得

$$y''(x) = -\frac{1}{F_y^2}[(F_{xx}+F_{xy}y')F_y - (F_{xy}+F_{yy}y')F_x].$$

将 (20.1) 代入得

$$y''(x) = \frac{1}{F_y^3}(2F_xF_yF_{xy} - F_x^2F_{yy} - F_y^2F_{xx}).$$

注 2 定理的结论是局部的, 即在 (x_0,y_0) 的某个邻域内由方程 $F(x,y)=0$ 可以惟一确定一个可微的满足 $y_0=f(x_0)$ 的隐函数 $y=f(x)$, 但定理并没有告诉我们这个邻域有多大.

注 3 对于方程 $F(x_1,\cdots,x_n,u)=0$ 在某点 $(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},u_0)$ 附近确定一个 n 元的隐函数 $u=f(x_1,\cdots,x_n)$ 也有类似的结果.

注 4 从一般教科书上给出的隐函数定理的证明中可以看出, 如果只要求隐函数连续, 则命题 20.1.1 的条件可减弱. 对此, 我们有下面的结论.

命题 20.1.2 如果

(1) $F(x,y)$ 在矩形 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$ 内连续,

(2) $F(x_0,y_0)=0$,

(3) $F(x,y)$ 对每一个 $x\in(x_0-a,x_0+a)$ 关于 y 严格单调;

则有:

(1) 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内, 由方程 $F(x,y)=0$ 可以确定惟一的函数 $y=f(x)$, 也就是说, 存在 $\eta>0$, 当 $x\in O_\eta(x_0)$ 时有

$$F(x,f(x))=0, \quad \text{并且 } y_0=f(x_0);$$

(2) $f(x)$ 在 $O_\eta(x_0)$ 内连续.

例题 20.1.1 证明在点 (1,1) 的某一邻域内存在惟一的连续可微函数 $y=f(x)$, 满足 $f(1)=1$, $xf(x)+2\ln x+3\ln f(x)-1=0$, 并求 $f'(x)$.

证 令 $F(x,y)=xy+2\ln x+3\ln y-1$, 则

(1) $F(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 点的邻域内有关于 x,y 的连续偏导数;

(2) $F(1,1)=0$; (3) $F_y(1,1)=(x+\dfrac{3}{y})\Big|_{(x,y)=(1,1)}\neq 0$.

① 参看第六章 6.2.2 小节的 "隐函数求导法".

由隐函数存在定理, 在 $(1,1)$ 的某邻域内存在惟一的连续可微函数 $y=f(x)$, 满足 $f(1)=1, xf(x)+2\ln x+3\ln f(x)-1=0$ 且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{y+\dfrac{2}{x}}{x+\dfrac{3}{y}}=-\frac{xy^2+2y}{x^2y+3x}. \quad \square$$

例题 20.1.2 设 (x_0,y_0,u_0) 满足 $u_0=y_0+x_0\varphi(u_0)$, 根据隐函数存在定理给函数 φ 加上适当条件, 使方程 $u=y+x\varphi(u)$ 可在 (x_0,y_0) 的某一个邻域内惟一确定一个连续可微函数 $u=f(x,y)$.

解 令 $F(x,y,u)=u-y-x\varphi(u)$, 则 $F(x_0,y_0,u_0)=0$. 由复合函数的性质知, 当 $\varphi(u)$ 连续可微时, $F(x,y,u)$ 连续, 有关于 x,y,u 的连续偏导数, 且

$$F_u=1-x\varphi'(u).$$

从而当 $\varphi(u)$ 连续可微且

$$x_0\varphi'(u_0)\neq 1$$

时, 方程 $u=y+x\varphi(u)$ 可在 (x_0,y_0) 的某一邻域内惟一确定一个连续可微函数 $u=f(x,y)$. $\square$

20.1.2 隐函数求导

若已知由方程 $F(x,y)=0$ 可惟一确定连续可微的隐函数 $y=f(x)$, 或由方程 $F(x,y,z)=0$ 可惟一确定连续可微隐函数 $z=f(x,y)$, 则在求导时既可直接应用公式, 也可用复合函数求导法则解出欲求之导数. 一般在隐函数求导中, 总认为连续可微的隐函数已存在, 故若无特殊声明, 不必再验证条件.

例题 20.1.3 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数, 试求 z_x,z_y 及 z_{xy}.

解 先求 z_x. 在 $F(x-y,y-z)=0$ 两边对 x 求导, 得

$$F_1-z_xF_2=0, \tag{20.3}$$

于是得 $z_x=\dfrac{F_1}{F_2}$.

求 z_y. 可用公式

$$z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-F_1+F_2}{-F_2}=\frac{F_2-F_1}{F_2}.$$

求 z_{xy}. 在 (20.3) 两边对 y 求导, 得

$$-F_{11}+F_{12}(1-z_y)-\{[-F_{21}+F_{22}(1-z_y)]z_x+F_2z_{xy}\}=0. \tag{20.4}$$

将 z_x, z_y 的表达式代入 (20.4), 得到

$$-F_{11}+F_{12}\frac{F_1}{F_2}-[(-F_{21}+F_{22}\frac{F_1}{F_2})\frac{F_1}{F_2}+F_2z_{xy}]=0.$$

解出 z_{xy} 得

$$z_{xy}=\frac{1}{F_2^3}(2F_1F_2F_{12}-F_2^2F_{11}-F_1^2F_{22}).$$

也可先在 $F-1-F_2+F_2z_y=0$ 两边对 x 求导, 然后解出 z_{xy}. □

注意隐函数求导时, 涉及一系列的复合的隐函数. 必须明辨函数关系, 弄清哪些是自变量, 哪些是因变量, 以免漏项.

20.1.3 思考题

1. 证明方程 $F(x,y)=(x-y)^2=0$ 在 $(0,0)$ 处有 $F_y(0,0)=0$, 但在 $x=0$ 附近仍存在惟一解 $y=x$ 且是连续可微的. 这与隐函数存在定理的结论是否矛盾?

2. 设有方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$, 证明:
   (1) 可确定 $(1,1,1)$ 附近的隐函数 $z=z(x,y)$, 并求 $z_x(1,1)$;
   (2) 可确定 $(1,1,1)$ 附近的隐函数 $y=y(x,z)$, 并求 $y_x(1,1)$..

20.1.4 练习题

1. 设 $y=y(x)$ 由下述方程确定, 求 y', y'':
   (1) $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$;
   (2) $x^y=y^x$;
   (3) $xy-2^x\ln 2+2^y=0$.

2. 求在指定点的导数:
   (1) $y^3+y-x^2=0$, 求 $y'(0)$;
   (2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-4=0$, 求 $(1,3\sqrt{3})$ 处的导数 y';
   (3) $\sin x+2\cos y-1=0$, 求在 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$ 处的 y', y''.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由下列方程确定的隐函数, 求指定的导数或微分:
   (1) $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
   (2) $x^3+y^3+z^3-3xyz-4=0$, 求在 $(1,1,2)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;
   (3) $z=\sqrt{x^2-y^2}\tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;
   (4) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$, 求 $\mathrm{d}z$;
   (5) $xy+yz+zx=1$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. 设 $z=z(x,y)$ 由下列方程确定, 求指定的导数或微分:

(1) $f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$, 求 $\mathrm{d}z$;

(2) $f(x, x+y, x+y+z)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $f(x+y, y+z, z+x)=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5. 验证下列各题中给出的隐函数满足指定的方程:

(1) $xz_x - yz_y = 2x$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(xy, z-2x)=0$ 确定的隐函数;

(2) $(x^2-y^2-z^2)z_x+2xyz_y=2xz$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\dfrac{z}{y})$ 确定的隐函数;

(3) $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z}=\varphi(\dfrac{y}{z})$ 确定的隐函数, φ 二次连续可微, 且 $x-y\varphi'(\dfrac{y}{z})\neq 0$;

(4) $u_x^2+u_y^2+u_z^2=2(xu_x+yu_y+zu_z)$, 其中 $u=u(x,y,z)$ 是由方程

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$$

确定的隐函数.

§20.2 隐函数组

20.2.1 存在定理

不失一般性, 下面仅研究两个方程和四个变量的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

在什么条件下可以确定 u,v 是 x,y 的函数

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y),$$

并且 u,v 关于 x,y 有连续偏导数. 我们有如下的隐函数组存在定理.

命题 20.2.1 (隐函数组存在定理) 设

(1) $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 在点 $\boldsymbol{p_0}(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一个邻域内对各个变元有连续的偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(3) $J(\boldsymbol{p}_0)=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_{\boldsymbol{p}_0}=\begin{vmatrix} F_u(\boldsymbol{p}_0) & F_v(\boldsymbol{p}_0) \\ G_u(\boldsymbol{p}_0) & G_v(\boldsymbol{p}_0) \end{vmatrix}\neq 0$, 其中 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 称为 **Jacobi 行列式**.

则存在 p_0 点的一个邻域, 在此邻域内由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

可以惟一确定一对函数

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y),$$

使满足 $F(x,y,u(x,y),v(x,y))=G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$ 及 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 且 u,v 具有关于 x,y 的连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)},$$

其中 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

命题 20.2.2 (反函数组存在定理) 若

$$u=f(x,y), \quad v=g(x,y)$$

在点 (x_0,y_0) 的某个邻域中连续可微, $u_0=f(x_0,y_0)$, $v_0=g(x_0,y_0)$, 且

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0,$$

则在 (u_0,v_0) 的某一邻域内存在惟一的反函数组

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v)$$

满足 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 且成立

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.$$

例题 20.2.1 给定函数 $u=\mathrm{e}^y\sin x$, $v=\mathrm{e}^y\cos x$, $w=2-\cos z$, 根据反函数组存在定理判断在哪些点 (x,y,z) 所对应的 (u,v,w) 的邻域内存在反函数 $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$?

解 函数 $\mathrm{e}^y\sin x$, $\mathrm{e}^y\cos x$, $2-\cos z$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中连续可微, 且

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \mathrm{e}^y\cos x & \mathrm{e}^y\sin x & 0 \\ -\mathrm{e}^y\sin x & \mathrm{e}^y\cos x & 0 \\ 0 & 0 & \sin z \end{vmatrix}=\mathrm{e}^{2y}\sin z.$$

所以在 $D=\{(x,y,z)\mid z\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 内任一点所对应的 (u,v,w)处, 存在一个邻域, 在此邻域内存在反函数. □

20.2.2 思考题

1. 若由 $F(x,y,z,u)=0$, $G(x,y,z,u)=0$, $H(x,y,z,u)=0$ 可解出 $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$, 根据隐函数组存在定理应如何对函数 F,G,H 假设条件?

2. 对极坐标变换

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

在哪些点 (r_0, θ_0) 附近可存在反函数组 $r = r(x, y), \theta = \theta(x, y)$? 在 $(0, \theta_0)$ 附近能否存在反函数组? 对结论做出直观解释.

20.2.3 求已知函数组所确定的隐函数组的导数

在这类问题中, 一般认为隐函数组, 反函数组存在且可微的条件均已满足, 因而注重于运算的正确与熟练. 此外, 在计算导数时, 一般不用求导公式, 因为这些公式既不便于记忆, 也不便于使用. 往往是对已知函数组求导数, 然后解所得的方程组便可得到所要的导数.

例题 20.2.2 设 $u(x, y)$ 是由方程组 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 确定的函数, 其中 f, g, h 均连续可微, 且 $\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 1 首先应该认清函数关系, 因为 $\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$, 故由

$$g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0 \tag{20.5}$$

可确定 z, t 为 y 的函数, 所以 $u = f(x, y, z(y), t(y))$, 即 u 是以 z, t 为中间变量的 x, y 的函数, 有了这个认识就可以具体地作求导运算.

由于

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3 z'(y) + f_4 t'(y), \tag{20.6}$$

为求 $z'(y)$ 和 $t'(y)$, 在方程组 (20.5) 两边对 y 求导, 得

$$g_y + g_z z' + g_t t' = 0,$$

$$h_z z' + h_t t' = 0.$$

由此得到

$$z' = -g_y h_t \left(\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}\right)^{-1}, \quad t' = g_y h_z \left(\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}\right)^{-1},$$

代入 (20.6) 得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y - g_y(f_z h_t - f_t h_z)\left(\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}\right)^{-1}. \quad \square \tag{20.7}$$

解 2 也可以直接考虑如下的方程组

$$F(x, y, z, t; u) = 0, \tag{20.8}$$

$$g(y, z, t) = 0, \tag{20.9}$$

$$h(z, t) = 0, \tag{20.10}$$

其中 $F(x,y,z,t,u)=u-f(x,y,z,t)$. 由于

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(u,z,t)}=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0,$$

从而我们可视 x,y 为自变量, u,z,t 为 x,y 的函数, 在 (20.8)–(20.10) 两边对 y 求导数, 则

$$u_y-f_y-f_zz_y-f_tt_y=0,$$

$$g_y+g_zz_y+g_tt_y=0,$$

$$h_zz_y+h_tt_y=0.$$

解此方程组可得 (20.7). □

例题 20.2.3 设 $x=\cos\varphi\cos\psi$, $y=\cos\varphi\sin\psi$, $z=\sin\varphi$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 1 由所给方程组的前两个方程可确定 $\varphi=\varphi(x,y),\psi=\psi(x,y)$, 故 $z=\sin\varphi(x,y)$, 即 z 是以 φ 为中间变量的 x,y 的函数, 所以

$$z_x=\cos\varphi\cdot\varphi_x. \tag{20.11}$$

在前两个方程两边对 x 求导, 得

$$1=-\sin\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi+\cos\varphi(-\sin\psi)\psi_x,$$

$$0=-\sin\varphi\cdot\varphi_x\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cdot\psi_x.$$

解出

$$\varphi_x=-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi},\quad \psi_x=-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}, \tag{20.12}$$

代入 (20.11) 得

$$z_x=-\cot\varphi\cos\psi.$$

在上式两边再对 x 求导得

$$z_{xx}=\csc^2\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi+\cot\varphi\sin\psi\cdot\psi_x.$$

将 (20.12) 代入, 得到

$$z_{xx}=\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi-1}{\sin^3\varphi}.\quad \square$$

解 2 由已知条件得 $x^2+y^2+z^2=1$, 两边对 x 求两次导数, 注意到 y 与 x 是各自独立的变量, 得

$$x+zz_x=0,\qquad 1+z_x^2+zz_{xx}=0,$$

于是

$$z_x=-\frac{x}{z},$$

$$z_{xx}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}=\frac{y^2-1}{z^3}=\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi-1}{\sin^3\varphi}.\quad \square$$

例题 20.2.4 设 $u=f(x-ut,y-ut,z-ut)$, $g(x,y,z)=0$, 试求 u_x,u_y. 这时 t 是自变量还是因变量?

解 由两个方程确定两个隐函数. 一个是 u, 另一个由第二个方程看出应为 z. 因此 t 是自变量. 两个方程分别关于 x 求导得

$$u_x = f_1(1 - u_x t) + f_2(-u_x t) + f_3(z_x - u_x t),$$

$$g_1 + g_3 z_x = 0.$$

解此方程组得

$$u_x = \frac{f_1 + f_3 \cdot (-\dfrac{g_1}{g_3})}{1 + (f_1 + f_2 + f_3)t}.$$

同理

$$u_y = \frac{f_2 + f_3 \cdot (-\dfrac{g_2}{g_3})}{1 + (f_1 + f_2 + f_3)t}. \quad \square$$

20.2.4 存在定理的证明

本节我们应用压缩映射原理证明反函数组存在定理, 把隐函数组存在定理的证明作为参考题. 由于定理的叙述与证明较抽象, 故这部分内容可作为补充材料. 我们先用映射的语言叙述反函数组存在定理, 或称为**局部逆映射存在定理**.

命题 20.2.3 (局部逆映射存在定理) 设 $\boldsymbol{f}: E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, $\boldsymbol{a} \in E$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, 并且 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 可逆. 则

(1) 存在开集 $U \subset E$ 和 V, 使得 $\boldsymbol{a} \in U$, $\boldsymbol{b} \in V$, 并且 $\boldsymbol{f}: U \to V$ 是 1-1 满映射;

(2) 设 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}^{-1}: V \to U$, 则 $\boldsymbol{g}$ 是 C^1 映射, 并且

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1}, \quad \boldsymbol{y} \in V.$$

证 (1) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, 取 $\lambda > 0$, 使得 $2\lambda \|\boldsymbol{A}^{-1}\| = 1$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的模 (如 $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$). 因为 $\boldsymbol{f}'$ 在 $\boldsymbol{a}$ 连续, 故可取以 $\boldsymbol{a}$ 为中心的开球 U, 使得

$$\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}\| < \lambda, \quad \boldsymbol{x} \in U. \tag{20.13}$$

对 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, 定义

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})), \ \boldsymbol{x} \in U. \tag{20.14}$$

则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的不动点. 再记 $V = \boldsymbol{f}(U)$, 下面证明由 (20.14) 定义的映射有惟一不动点 x, 即存在惟一的 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. 这就证明了 $\boldsymbol{f}$ 是 U 到 V 的 1-1 可逆映射. 为此, 先对 $\boldsymbol{\varphi}$ 作估计, 其 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})).$$

由 (20.13) 及 Schwarz 不等式得 $\|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})\| < \dfrac{1}{2}$, $\boldsymbol{x} \in U$. 再由拟微分中值定理得

$$|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_2)| \leqslant \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \quad \boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2 \in U. \tag{20.15}$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 是一个压缩映射. 其次, 注意到 $\forall \boldsymbol{y}_0 \in V$, 存在 $\boldsymbol{x}_0 \in U$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$. 取 r 足够小, 使以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心 r 为半径的开球 B 的闭包 $\overline{B} \subset U$. 限制 $\boldsymbol{y}$ 满足 $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| < \lambda r$, 此时对于 $\overline{B}$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 有

$$|\varphi(x)-x_0|\leqslant|\varphi(x)-\varphi(x_0)|+|\varphi(x_0)-x_0|\leqslant\frac{1}{2}|x-x_0|+|A^{-1}(y-y_0)|$$
$$\leqslant\frac{r}{2}+\|A^{-1}\|\cdot\lambda r\leqslant r,$$

因此 $\varphi(x)\in\overline{B}$, 从而 φ 是 $\overline{B}$ 上的压缩映射. 故存在惟一的 $x\in\overline{B}$, 使 $\varphi(x)=x$. 也即只要 y 满足 $|y-y_0|<\lambda r$, 就存在惟一的 $x\in\overline{B}$, 使 $f(x)=y$, 即 $y\in f(\overline{B})\subset f(U)=V$. 这一方面证明了以 y_0 为中心 λr 为半径的开球位于 V 中, 故 V 是开集. 另一方面也证明了 f 是 U 到 $V=f(U)$ 的 1–1 可逆映射.

(2) 因为 f 是 C^1 映射, 故 $\det f'(x)$ 是 x 的连续函数. $f'(a)$ 可逆, 即 $\det f'(a)\neq 0$, 故不妨认为在 (1) 中给出的邻域 U 内, 都有 $\det f'(x)\neq 0$. 即 $f'(x)$ 可逆. 记其逆为 T. 设 g 是 f 的逆, 即 $x=g(y)$. 取 $y\in V$, $y+k\in V$. 于是 $\exists h\in\mathbf{R}^n$, 使 $x\in U$, $x+h\in U$ 及 $y=f(x)$, $y+k=f(x+h)$. 用 (20.14) 中的估计有

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h+A^{-1}(f(x)-f(x+h))=h-A^{-1}k,$$

由 (20.15) 得 $|h-A^{-1}k|\leqslant\frac{1}{2}|h|$, 即 $|A^{-1}k|\geqslant\frac{1}{2}|h|$, 从而

$$|k|\geqslant\lambda|h|. \tag{20.16}$$

于是

$$g(y+k)-g(y)-Ty=h-Tk=-T(f(x+h)-f(x)-f'(x)h).$$

所以

$$\frac{|g(y+k)-g(y)-Ty|}{|k|}\leqslant\frac{\|T\|\cdot|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|}{\lambda|h|},$$

且当 $|k|\to 0$, 由 (20.16) 也有 $|h|\to 0$, 上式右边的极限为 0. 这就证明了 g 是可微映射, 且 $g'(y)=T=(f'(g(y)))^{-1}$. 关于 $g'(y)$ 为连续的证明留给读者. □

注 设 f: $E\subset\mathbf{R}^{n+m}\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, $(a,b)\in E$, 使 $f(a,b)=0$, 并且 Jacobi 矩阵 $f'(a,y)$ 可逆, 其中 "$'$" 表示固定 a 而把 y 看成自变量而得到的全导数. 这时方程 $f(x,y)=0$ 在 (a,b) 的邻域内存在惟一 C^1 隐映射 $y=y(x)$ 的局部隐映射存在定理可通过定义 $F(x,y)=(f(x,y),y)$ 而转化为 F 的局部逆映射存在定理. 其证明作为参考题.

20.2.5 练习题

1. 设 $x=e^v+u^3$, $y=e^u-v^3$, 求反函数组的一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.
2. 对由方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

确定的函数 $x=x(z)$, $y=y(z)$, 求在点 $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$ 处的导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

3. 对方程组

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

确定的隐函数组 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 求出导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 设

$$\begin{cases} x=u\cos\dfrac{v}{u}, \\ y=\sin\dfrac{v}{u}, \end{cases}$$

求反函数组的偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y.

5. 设 $u=u(x)$ 是由方程组 $u=f(x,y,z)$, $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$ 所确定. 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 求由方程组 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ 确定的 $z=z(x,y)$ 的所有二阶偏导数.

7. 设 $z=z(x,y)$ 为由方程组 $x=\mathrm{e}^{u+v}$, $y=\mathrm{e}^{u-v}$, $z=uv$ 所定义的函数, 求当 $(u,v)=(0,0)$ 时的 $\mathrm{d}z$, d^2z.

8. 设 $u=f(x,y,z)$, $g(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$, $y=\sin x$, 且已知 f 与 g 都有一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

§20.3 变量代换问题

今后, 例如在偏微分方程的求解过程中, 经常需要对自变量或函数作变量代换, 以求简化方程形式乃至求出方程的解. 变量代换计算的关键是隐函数组或反函数组的求导.

20.3.1 仅变换自变量的情形

例题 20.3.1 在方程 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$ 中作极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 试求方程在变换后的形式.

解 1 认为 $u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 则

$$u_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta,$$

$$u_\theta=r(-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta).$$

解此方程组得

$$u_x=\frac{1}{r}(r\cos\theta u_r-\sin\theta u_\theta),$$

$$u_y=\frac{1}{r}(r\sin\theta u_r+\cos\theta u_\theta).$$

代入原方程中得

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2 = u. \quad \square$$

解 2 认为 $u(r,\theta) = u(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x})$, 则

$$u_x = u_r\frac{x}{r} - u_\theta\frac{y}{r^2},$$
$$u_y = u_r\frac{y}{r} + u_\theta\frac{x}{r^2}.$$

于是 $u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2$, 从而方程化为

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2 = u. \quad \square$$

注 上述两种方法是自变量变换中通常使用的方法, 具体用哪一种方法使运算简单, 视具体情况而定.

例题 20.3.2 通过代换 $x = uv$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, 变换方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解 由链式法则

$$z_u = vz_x + uz_y, \quad z_v = uz_x - vz_y.$$

两式平方后相加得

$$z_u^2 + z_v^2 = (u^2+v^2)(z_x^2 + z_y^2).$$

于是

$$z_x^2 + z_y^2 = \frac{1}{u^2+v^2}(z_u^2 + z_v^2).$$

另一方面

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(u^2+v^2)^2,$$

代入原方程得

$$z_u^2 + z_v^2 = 2. \quad \square$$

20.3.2 自变量与函数同时变换的情形

这种情况比只变自变量的情况稍复杂些, 它要多一个函数关系分析的步骤.

例题 20.3.3 通过代换 $x = t$, $y = \frac{t}{1+tu}$, $z = \frac{t}{1+tv}$, 试把方程

$$x^2 z_x + y^2 z_y = z^2 \tag{20.17}$$

变为以 v 为函数, t, u 为自变量的形式.

分析 题目的意思是有一个函数 $z = z(x,y)$ 满足方程 (20.17), 作自变量代换

$$x = t, \quad y = \frac{t}{1+tu} \tag{20.18}$$

以及函数代换

$$z = \frac{t}{1+tv} \tag{20.19}$$

得函数 $v = v(t,u)$. 求 $v = v(t,u)$ 满足的方程.

解 1 直接从关系式 (20.19) 出发求 z_x 和 z_y:

$$z_x = (\frac{t}{1+tv})_t t_x + (\frac{t}{1+tv})_v (v_t t_x + v_u u_x), \tag{20.20}$$

$$z_y = (\frac{t}{1+tv})_t t_y + (\frac{t}{1+tv})_v (v_t t_y + v_u u_y). \tag{20.21}$$

由 (20.18) 得

$$t = x, \quad u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x},$$

于是

$$t_x = 1, \qquad t_y = 0,$$

$$u_x = \frac{1}{x^2}, \quad u_y = -\frac{1}{y^2}.$$

将它们代入 (20.20), (20.21), 得到

$$z_x = (\frac{t}{1+tv})_t + (\frac{t}{1+tv})_v (v_t + \frac{1}{x^2} v_u),$$

$$z_y = -(\frac{t}{1+tv})_v \frac{1}{y^2} v_u.$$

将以上式子代入 (20.17), 得到

$$x^2[(\frac{t}{1+tv})_t + (\frac{t}{1+tv})_v v_t] = z^2.$$

整理得

$$v_t = 0. \quad \square$$

解 2 从 (20.19) 中解出 v 得

$$v = \frac{1}{z} - \frac{1}{t},$$

于是

$$v_t = -\frac{1}{z^2}(z_x x_t + z_y y_t) + \frac{1}{t^2}, \tag{20.22}$$

$$v_u = -\frac{1}{z^2}(z_x x_u + z_y y_u). \tag{20.23}$$

由 (20.18) 得

$$x_t = 1, \quad x_u = 0,$$

$$y_t = \frac{1}{(1+tu)^2}, \quad y_u = -\frac{t^2}{(1+tu)^2}.$$

将它们代入 (20.22), (20.23) 得

$$v_t = -\frac{1}{z^2}[z_x + \frac{1}{(1+tu)^2} z_y] + \frac{1}{t^2},$$

$$v_u = \frac{1}{z^2} \frac{t^2}{(1+tu)^2} z_y.$$

出此解出 z_x, z_y, 得

$$z_x = z^2(\frac{1}{t^2} - v_t) - \frac{z^2}{t^2}v_u,$$

$$z_y = \frac{z^2(1+tu)^2}{t^2}v_u.$$

将它们代入原方程, 得

$$v_t = 0. \quad \square$$

20.3.3 练习题

1. 把方程 $(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ 变为 x 作因变量, y, z 为自变量的形式.
2. 引用新函数 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$ 变换微分式

$$w = x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

3. 以 $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ 为新自变量, 变换方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
4. 取 $u = y + z\mathrm{e}^{-x}$, $v = x + z\mathrm{e}^{-y}$ 为新的自变量, 变换微分式

$$F = (z+\mathrm{e}^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z+\mathrm{e}^y)\frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - \mathrm{e}^{x+y}).$$

5. 设 $u = x\mathrm{e}^z$, $v = y\mathrm{e}^z$, $w = z\mathrm{e}^z$, 试以 w 为新的函数, u, v 为新的自变量, 变换方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
6. 以 w 为新的函数, ξ, η, ζ 为新的自变量, 变换方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z},$$

其中 $\xi = \dfrac{x}{z}$, $\eta = \dfrac{y}{z}$, $\zeta = z$, $w = \dfrac{u}{z}$.

7. 试求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 在球坐标下的形式.
8. 以 $u = x+2y+2$, $v = x-y-1$ 为新的自变量, 变换方程

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

9. 以 w 为新的函数, u, v 为新的自变量, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + (1+\frac{y}{x})\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

其中 $u = x$, $v = x+y$, $w = x+y+z$.

10. 设 $xu = x^2+y^2$, $yv = x^2+y^2$, 试证明 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{uv}{xy}$.
11. 若 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 可微, 证明

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

12. 设 $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$, 试求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.
13. 设 $u = \dfrac{x}{r^2}$, $v = \dfrac{y}{r^2}$, $w = \dfrac{z}{r^2}$, 其中 $r^2 = x^2+y^2+z^2$, 试求 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

§20.4 隐函数及隐函数组的整体存在性

隐函数的整体存在性是一个比较复杂的问题. 设 $F(x,y)$ 在 $D=(a,b)\times(c,d)$ 上连续, $F_y(x,y)\neq 0$, $(x,y)\in D$. 于是在 D 中每一点附近方程 $F(x,y)=0$ 可惟一确定一个隐函数 $y=f(x)$. 但我们不知道当 y 在 (c,d) 变化时, 满足方程的 x 是否会布满 (a,b). 所以我们并不清楚隐函数 $y=f(x)$ 是否可定义在 (a,b) 上. 在很多时候 $y=f(x)$ 不能定义在 (a,b) 上. 读者可考察例子 $F(x,y)=y-2x$, $D=(-1,1)\times(-1,1)$. 下面是隐函数整体存在的一个充分性命题.

命题 20.4.1 设 $F(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid a<x<b,-\infty<y<+\infty\}$ 中连续, F_y 处处存在且 $F_y\geqslant m>0$, 则 $F(x,y)=0$ 在 (a,b) 中存在惟一连续解 $y=f(x)$.

证 $\forall x_0\in(a,b)$, 对任意 $y_2>y_1$, 考虑

$$F(x_0,y_2)-F(x_0,y_1)=F_y(x_0,\xi)(y_2-y_1)\geqslant m(y_2-y_1).$$

固定 y_1, 令 $y_2\to+\infty$, 由 $F(x_0,y_2)\geqslant F(x_0,y_1)+m(y_2-y_1)$, 知

$$\lim_{y\to+\infty}F(x_0,y)=+\infty.$$

固定 y_2, 令 $y_1\to-\infty$, 由 $F(x_0,y_1)\leqslant F(x_0,y_2)-m(y_2-y_1)$, 知

$$\lim_{y\to-\infty}F(x_0,y)=-\infty.$$

由介值定理, 存在 $y_0\in\mathbf{R}$ (且是惟一的), 使得 $F(x_0,y_0)=0$. 由 x_0 的任意性知存在 $y=f(x)$, 使得 $F(x,f(x))=0, x\in(a,b)$.

至此已证明了 $y=f(x)$ 的存在惟一性, $y=f(x)$ 的连续性的证明与隐函数存在定理中的证明相同. □

注意到以上命题中 $F_y\geqslant m>0$ 是一个很强的条件, 它保证了对每个固定的 $x\in(a,b)$, 存在惟一的 $y=f(x)$, 使得 $F(x,f(x))=0$. 在高维情况就要复杂得多.

下面只讨论映射 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是否存在定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的整体逆映射 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 的问题. 如果 F 与 F^{-1} 都是连续映射, 则称 F 是 $\mathbf{R}^n$ 上的**同胚**. 如果 F 与 F^{-1} 都是 C^k 映射 (即各个分量函数都是 k 次连续可微函数), 则称 F 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 $\mathbf{C^k}$ **同胚**. 反函数组定理告诉我们, 如果 $\forall x\in\mathbf{R}^n$, $\det J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\neq\mathbf{0}$, 则对每一个 $\boldsymbol{x}$ 都存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 U 和 $F(\boldsymbol{x})$ 的邻域 V, 使 $\boldsymbol{F}$ 是 U 到 V 的同胚. 但 F 不一定是 $\mathbf{R}^n$ 上的整体同胚, 即使有类似于命题 20.4.1 的条件也不行. 例如考虑可微映射

$$u=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos(y\mathrm{e}^{-x}),\quad v=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin(y\mathrm{e}^{-x}),\tag{20.24}$$

其 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 1$. 在 $\mathbf{R}^2$ 的每一点的附近存在逆映射. 但映射 (20.24) 是周期的, 故其确定的映射不是单射, 因而其逆映射在 $\mathbf{R}^2$ 中并不是整体存在的. 这里单射是关键, 事实上我们有如下逆映射定理.

命题 20.4.2 设开集 $D \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^n$. 如果

(1) $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续可微映射;

(2) 对每一个 $\boldsymbol{x} \in D$, $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

则 $G = \boldsymbol{f}(D)$ 为一开集. 又如果 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的单射, 那么存在由 G 到 D 上的连续可微映射 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 满足: 对一切 $\boldsymbol{y} \in G$ 有

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}, \quad J\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}) = (J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}, \tag{20.25}$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$.

证 $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{f}(D)$, $\exists \boldsymbol{x} \in D$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{f}$ 定义在 $\boldsymbol{x}$ 的某个邻域上, 且 $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$. 由反函数组存在定理, 存在 $\boldsymbol{y}$ 的邻域 V, 使逆映射在 V 上惟一存在, 即存在惟一的 $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$, 使

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}, \quad \forall \boldsymbol{y} \in D.$$

所以 $V \subset \boldsymbol{f}(D)$, 这就证明了 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{f}(D)$ 的内点. 由 $\boldsymbol{y}$ 的任意性就证明了 $\boldsymbol{f}(D)$ 是开集. 当 $\boldsymbol{f}$ 是 D 到 G 的 1–1 映射时, 逆映射是惟一存在的. 且整体惟一的逆映射必是局部惟一的逆映射, 再结合反函数组存在定理就证明 (20.25). □

关于整体同胚有许多漂亮的充要条件与充分条件, 下面是很经典的两个.

命题 20.4.3 (Hadamard 定理) 设 $\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, 并且 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 有 $\det J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, 即 Jacobi 矩阵 $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的逆矩阵 $J\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x})$ 存在, 如果还存在 $M > 0$, 使得 $\|J\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x})\| \leqslant M$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的模 (如 $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$). 则 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的 C^1 同胚.

命题 20.4.4 设 $\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, 并且 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 有 $\det J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq 0$. 则 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的 C^1 同胚的充要条件是

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})| = \infty.$$

尽管这两个命题的表述在数学分析的范围内很好理解, 但它们的证明要用到进一步的数学知识. 有兴趣的读者可在以后参考 Deimling K. Nonlinear functional analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 152～153, 171 页.

我们在参考题中列举了一些可以用多元微积分的知识来讨论的命题.

§20.5 对于教学的建议

20.5.1 学习要点

1. 隐函数 (组) 的概念和存在定理的证明对于初学者来说都不容易掌握. 最基本的要求是理解隐函数 (组) 的概念, 能叙述隐函数 (组) 存在定理并了解隐函数存在定理的证明.

2. 求隐函数 (组), 反函数 (组) 的导数和用变量替换去计算微分表达式的一个重要环节是分析哪些变量是自变量, 哪些是因变量. 很多学生在解题时不重视这个环节, 这是他们不会做题或出错的真正原因.
3. **对于习题课的建议** 告诉学生求隐函数的导数以及变量替换时, 首先要搞清楚自变量、因变量与它们的相互关系. 其次是要有耐心. 在求二阶以上导数时, 极易漏项. 可从学生作业中找出共同性的问题, 进行评讲. 处理繁琐题目的耐心也是一种基本的数学素养.

对于计算, 也绝非无技巧可言. 下面的两个例题用引入简单的微分算子的方法, 对我们会有所启发.

例题 20.5.1 设 $z = z(x, y)$ 二阶连续可微, 在微分方程

$$\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

中, 作变量代换

$$u = xy, \quad v = x - y. \tag{20.26}$$

求变换后的方程.

分析 注意到方程中的导数部分, 第一部分是 $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})^2$, 第二部分是 $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. 于是只要求出在变量替换 (20.26) 下 $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ 的表达式即可.

解 利用链式求导法则得到

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = y z_u + z_v,$$
$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = x z_u - z_v.$$

两式相加得

$$(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})z = (x+y)\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{20.27}$$

于是我们得到在变换 (20.26) 之下有

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = (x+y)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{20.28}$$

在 (20.27) 两边再作用算子 $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, 并利用 (20.28), 则

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)[(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}] \\ &= [\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(x+y)]\frac{\partial z}{\partial u} + (x+y)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 2\frac{\partial z}{\partial u} + (x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}. \end{aligned} \tag{20.29}$$

将 (20.27), (20.29) 代入原微分方程中, 则得到

$$\frac{1}{(x+y)^2}[2\frac{\partial z}{\partial u}+(x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}]-\frac{1}{(x+y)^3}(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

加以整理并将 (20.26) 代入得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{v^2+4u}\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

即已将原方程化为 v 作参数的二阶线性常微分方程. □

例题 20.5.2 设方程

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中 a,b,c 都是常数, $b^2-ac=0, c\neq 0$, 作代换

$$u=x+\alpha y,\quad v=x+\beta y. \tag{20.30}$$

问如何选择 α,β, 能使代换后的方程有简单的形式?

解 不妨设 $c=1$, 则 $a=b^2$, 于是原方程变为

$$\left(b\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=0.$$

若 $b=0$ 则原方程已是最简形式. 以下设 $b\neq 0$, 则我们的任务是在 (20.30) 中适当选取 α,β, 使得

$$b\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial u}. \tag{20.31}$$

由 (20.30) 得

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}.$$

明显地只要取 $\beta=-b$, $\alpha=1-b$, 则 (20.31) 成立. 此时原方程化为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0. \tag{20.32}$$

事实上, 只要取 $\beta=-b$, $\alpha\neq -b$, 则 (20.32) 仍成立. □

20.5.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 附近连续可微, 且 $f_y(0,1)\neq 0, f(0,1)=0$. 证明: $f(x,\int_0^t \sin x\mathrm{d}x)=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 附近确定一个隐函数 $t=\varphi(x)$, 并求 $\varphi'(0)$.
2. 证明: 由方程 $y=x+\frac{1}{2}\sin y$ 可在 $(-\infty,+\infty)$ 中确定隐函数 $y=y(x)$, 且 $y(x)\in C^\infty(\mathbf{R})$, 即 $y(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的无穷次可微函数.

3. 设 $x=y+\varphi(y)$, φ 满足 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(y)$ 在 $(-a,a)$ 中连续, 且 $|\varphi'(0)|\leqslant k<1$. 证明: 存在 $\delta>0$, 使当 $-\delta<x<\delta$ 时有惟一可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$.

4. 证明: 方程 $F(x,y)=1-\mathrm{e}^{-x}+y^3\mathrm{e}^{-y}=0$ 在 $\{x>0, y\in\mathbf{R}^1\}$ 中存在惟一解 $y=y(x)$ $(x>0)$, 且 $y(x)$ 连续可微.

5. 设 $f(x,y)$ 满足: f_x 在 $\mathbf{R}^2$ 上存在, f_y 在 $\mathbf{R}^2$ 上存在且连续, 且

$$|f_x|<M|f_y|, \quad f(x_0,y_0)=0,$$

这里 M 是正常数. 证明: $f(x,y)=0$ 惟一确定一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的可微解 $y=f(x)$, 且满足 $y(x_0)=y_0$. 再问条件 $|f_x|<M|f_y|$ 是否是必要的? 若去掉 $f(x_0,y_0)=0$ 这个条件, 结论是否仍成立?

6. 设 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数. 证明:

(1) 如果在 Ω 上有 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 0$, 则对 Ω 内任一点 (x_0,y_0), 存在 (x_0,y_0) 的邻域 U 和连续可微的函数 $F(u,v)$, $(F'_u)^2+(F'_v)^2\neq 0$, 使 $F(f(x,y),g(x,y))=0$ 在 U 上恒成立;

(2) 若有连续可微函数 $F(u,v)$, $(F'_u)^2+(F'_v)^2\neq 0$, 使 $F(f(x,y),g(x,y))=0$ 在 Ω 上恒成立, 则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 0, \quad (x,y)\in\Omega.$$

7. 设空间曲线 C 的方程是:

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}, \quad -1<t<1,$$

其中函数 $f(t)$, $\varphi(t)$ 在 $(-1,1)$ 内部具有二阶连续导数, 且一阶导数处处不等于 0. 设点集

$$E=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x=s^2+\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}s+f(t), y=2s+\varphi(t), z=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)},\ s,t\in(-1,1)\right\}.$$

证明: E 中与曲线 C 充分接近 (即 $|s|$ 充分小) 的一些点, 组成一张连续曲面 $z=z(x,y)$.

8. 设函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 是定义在平面开区域 G 内的两个函数, 在 G 内均有连续的一阶偏导数, 且在 G 内任意点处均有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0.$$

又设有界闭区域 $D\subset G$. 试证在 D 中满足方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

的点至多有有限个.

9. 设 f 是 $\mathbf{R}^3$ 上的连续可微函数. 若 $f(x,y,z)=0$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}=-1$.

(1) 解释上述命题的精确含义;

(2) 对 Clapeyron 公式 $\frac{P\cdot V}{T}=$ 常数, 验证上述命题的正确性;

(3) 对于 n 元连续可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 确定的关系式 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ 是否有上述类似公式? 验证你的判断.

10. 设 $\boldsymbol{f}:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为 C^1 映射. 若只存在有限多个点 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$, 使得 $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)=0,\ i=1,\cdots,r$, 并且对每个正数 M, $\{\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^2\ \big|\ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})|\leqslant M\}$ 是有界集, 证明 $\boldsymbol{f}$ 把 $\mathbf{R}^2$ 映满 $\mathbf{R}^2$.

11. 设 $\boldsymbol{f}:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为 C^1 映射, 且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆. 证明 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, 只要 $|\boldsymbol{x}|$ 充分小, 就存在 $\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{z}=o(|\boldsymbol{x}|)$, 使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

第二组参考题

1. 试用压缩映射原理证明如下局部微分同胚定理: 设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集, $\boldsymbol{f}:\ U\to\mathbf{R}^n$ 是 C^k 映射, $\boldsymbol{x}_0\in U$, $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$, 则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $W\subset U$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的邻域 V, 使得 $\boldsymbol{f}:\ W\to V$ 是 C^k 微分同胚.

2. 设 $\boldsymbol{f}:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, 且存在 $\alpha>0$ 使 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\cdot J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}\geqslant\alpha|\boldsymbol{u}|^2,\quad\forall\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n,$$

其中 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 的转置. 证明

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})|\geqslant\alpha|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\quad\forall\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,$$

且 $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的微分同胚.

3. 用映射的语言叙述隐函数组存在定理, 将它化为逆映射存在定理或直接用压缩映射原理证明.

4. 20.2.4 小节的逆映射存在性证明是构造性的, 它给出了逆映射的迭代构造格式. 设 $y\in V$, 取合适的初始点 $\boldsymbol{x}_0\in U$, 则

$$\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_{n-1}+(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}))^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n-1}))$$

就给出了迭代列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的公式. 讨论映射

$$T:\ u=\frac{1}{2}(x^2-y^2),\quad v=xy$$

的逆映射. 设 $\boldsymbol{a}=(1,1)^{\mathrm{T}}$. 先求

$$T'(\boldsymbol{a})=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(1,1)},$$

再利用迭代公式

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}+(T'(\boldsymbol{a}))^{-1}\left[\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}(x_{n-1}^2-y_{n-1}^2)\\ x_{n-1}y_{n-1}\end{pmatrix}\right]$$

在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域内求 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的二次迭代解 $(x_2, y_2)^{\mathrm{T}}$, 并用它与逆映射的一次微分近似

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v-1 \end{pmatrix}$$

作比较.

5. 设 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的开集, $\boldsymbol{f}: U \to \mathbf{R}^n$ 是 C^k 映射, 满足条件:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad J\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) \text{ 的秩为 } m \ (m \leqslant n).$$

证明: 存在 $\mathbf{R}^n$ 中含 $\mathbf{0}$ 的两个邻域 V 及 W, C^k 微分同胚 $\boldsymbol{h}: V \to W$ 使得 $\boldsymbol{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 并且

$$\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)\ \forall\, (x_1, \cdots, x_m) \in \boldsymbol{f}^{-1}(V).$$

6. 设 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的开集, $\boldsymbol{f}: U \to \mathbf{R}^n$ 是 C^k 映射, 满足条件:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad J\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) \text{ 的秩为 } n \ (m \geqslant n).$$

证明: 存在 $\mathbf{R}^m$ 中含 $\mathbf{0}$ 的两个邻域 V 及 W, C^k 微分同胚 $\varphi: V \to W$ 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 并且

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_n), \quad \forall\, (x_1, \cdots, x_m) \in V.$$

(以上两个命题称为**秩定理**, 你能否对它们作一个简单的几何解释.)

第二十一章 偏导数的应用

本章介绍偏导数在几个方面的应用. §21.1 节是偏导数在几何上的应用; §21.2 节是方向导数与梯度; §21.3 节讨论 Taylor 公式与极值问题; §21.4 节是条件极值与条件最值; §21.5 节是向量值函数的 Rolle 定理, 这可以作为习题课的补充材料. 最后一节是学习要点和参考题.

我们在本章的讨论中特别强调用向量与矩阵语言描述和处理多元问题, 对条件最值的求解作了比较详细的讨论.

§21.1 偏导数在几何上的应用

21.1.1 曲线的切向量、切线与法平面

设空间曲线 l 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量为

$$\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z),$$

则曲线 l 在 (x_0, y_0, z_0) 点的切线方程与法平面方程分别是

$$\frac{x - x_0}{\tau_x} = \frac{y - y_0}{\tau_y} = \frac{z - z_0}{\tau_z},$$

$$\tau_x(x - x_0) + \tau_y(y - y_0) + \tau_z(z - z_0) = 0.$$

如果空间曲线 l 的参数方程是

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), \ a \leqslant t \leqslant b,$$

其中 t 是参数. 又设 $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 并且不同时为 0, 这样的曲线称为**光滑曲线**. 则曲线上点 $(x_0 = x(t_0), \ y_0 = y(t_0), \ z_0 = z(t_0))$ 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), \ y'(t_0), \ z'(t_0)).$$

如果空间曲线 l 是用两个曲面

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

的交线来表示的, 又设 F 和 G 关于 x, y, z 有连续的偏导数. 点 $\boldsymbol{p}_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足这一方程组, 即 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. 并且 F, G 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的秩为 2, 则曲线 l 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \ \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right)\Bigg|_{p_0}.$$

例题 21.1.1 设 $f(x, y)$ 为可微函数, 曲线方程为

$$z=f(x,y),\ \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}.$$

求曲线上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线与 xOy 平面所成角的正切.

解 令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$, $G(x,y,z)=\sin\alpha(x-x_0)-\cos\alpha(y-y_0)$. 则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}-f_y & 1\\ -\cos\alpha & 0\end{vmatrix}=\cos\alpha,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}1 & -f_x\\ 0 & \sin\alpha\end{vmatrix}=\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-f_x & -f_y\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{vmatrix}=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha.$$

于是曲线上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线与 z 轴正方向所成夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\sin\alpha}{\sqrt{1+[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\sin\alpha]^2}}.$$

由此可算出切线与 xOy 平面所成角的正切为

$$f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\sin\alpha.\quad\square$$

21.1.2 曲面的法向量、法线和切平面

光滑曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y,z) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm(f_x(x,y),f_y(x,y),-1).$$

这里所说的光滑是指偏导数连续.

由 $F(x,y,z)=0$ 确定的光滑曲面在 (x,y,z) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z)),$$

其中 F_x,F_y,F_z 不同时为零.

由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

决定的光滑曲面在点 (x,y,z) 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

有了法向量之后, 过曲面上任一点的法线方程和切平面方程都可以很容易地写出来.

例题 21.1.2 求曲面

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$

的切平面当切点 $M(u,v)$, $u\neq v$, 趋于曲面的边界 $u=v$ 上的点 $M_0(u_0,v_0)$ 时的极限位置.

解 先求 $u\neq v$ 时的切平面方程. 由于

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{vmatrix}=6uv(v-u),\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}3u^2 & 3v^2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3(u^2-v^2),$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2u & 2v\end{vmatrix}=2(v-u),$$

于是过 (x,y,z) 点的切平面方程为

$$6uv(v-u)(X-(u+v))+3(u^2-v^2)(Y-(u^2+v^2))$$
$$+2(v-u)(Z-(u^3+v^3))=0.$$

消去 $v-u$, 并整理得到

$$6uvX-3(u+v)Y+2Z=3uv(u+v)-u^3-v^3.$$

令 $(u,v)\to(u_0,u_0)$, 则有

$$6u_0^2X-6u_0Y+2Z=4u_0^3.$$

将 (X,Y,Z) 改写为 (x,y,z), 可见所求的极限位置为

$$3u_0^2x-3u_0y+z=2u_0^3.\quad \square$$

21.1.3 曲线的夹角、曲面的夹角

由解析几何知 $\mathbf{R}^2$ 中两个相交向量 l 与 m 所交的角 ω 的余弦为

$$\cos\omega=\frac{l\cdot m}{|l|\cdot|m|},$$

其中 "$\cdot$" 为 Euclid 内积, $|\cdot|$ 为 Euclid 范数. 设连续可微的隐函数定义的曲线 $F(x,y)=0$ 与 $G(x,y)=0$ 在 (x,y) 处相交. 则在 (x,y) 处两曲线相应的切向量分别为 $(F_y,-F_x)$ 与 $(G_y,-G_x)$, 其夹角余弦为

$$\cos\omega=\frac{F_xG_x+F_yG_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}\cdot\sqrt{G_x^2+G_y^2}}.$$

两曲线正交的条件是: $F_xG_x+F_yG_y=0$.

在 $\mathbf{R}^3$ 中也有类似的讨论. 设 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中两光滑曲面. 它们在 (x,y,z) 处相交. 两曲面夹角定义为相应切平面的夹角 (或相应法向量的夹角). 设 ω 为其夹角. 有

$$\cos\omega=\frac{F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\cdot\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}.$$

两曲面正交的条件是: $F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z=0$.

例题 21.1.3 设

$$\frac{xy}{z}=u,\quad \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=v\quad 和\quad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=w$$

是三个分别以 u, v, w 为参数的单参数曲面族, 证明过同一点的三曲面族的三个曲面是两两正交的.

证 设三曲面交于 (x,y,z) 处, 则其法向量分别为

$$(\frac{y}{z},\frac{x}{z},-\frac{xy}{z^2}),$$

$$(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}),$$

$$(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}},-\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}-\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}).$$

由于这三个向量的两两内积均为 0, 所以过 (x,y,z) 点的这三个曲面族的三个曲面是两两正交的. □

21.1.4 练习题

1. 在曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上求出一点, 使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.
2. 证明斜驶线

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2})=\mathrm{e}^{k\varphi},\quad k=\text{常数},$$

与地球的一切子午线相交成定角, 其中 φ 为地球上点的经度、ψ 为地球上点的纬度.
3. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程.
4. 求曲面 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 在点 $(1,1,\frac{\pi}{4})$ 处的法线与切平面方程.
5. 证明: 曲面 $xyz=a^3\ (a>0)$ 的每一个切平面与坐标面形成体积相同的四面体.

§21.2 方向导数与梯度

21.2.1 方向导数

为方便起见, 我们在 $\mathbf{R}^3$ 中考虑. 设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域, f 是定义在 D 上的函数, $p_0\in D$, l 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个单位向量. 如果极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(p_0+tl)-f(p_0)}{t}$$

存在, 则称此极限是函数 f 在 p_0 点沿方向 l 的**方向导数**, 记为 $\frac{\partial f}{\partial l}(p_0)$. 它表示函数 f 在点 p_0 沿方向 l 的变化率. 特别地, 若 f 在 p_0 处存在关于 x 的偏导数, 则当 $l=(1,0,0)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}(p_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$; 当 $l=(-1,0,0)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}(p_0)=-\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$.

命题 21.2.1 设函数 f 在 p_0 点可微, 则 f 在 p_0 点沿任何方向 l 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial l}(\boldsymbol{p}_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\cos\gamma. \tag{21.1}$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是方向 l 的方向余弦.

21.2.2 梯度

设函数 f 定义于某个区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 内, 又设 f 具有关于各个变元的偏导数, 称向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是 f 在点 (x,y,z) 的**梯度**, 记为 $\mathrm{grad}f(x,y,z)$ 或 $\nabla f(x,y,z)$.

由梯度的定义, (21.1) 式可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\boldsymbol{l}=|\nabla f(x,y,z)|\cos\theta, \tag{21.2}$$

其中 θ 是向量 $\nabla f(x,y,z)$ 与 $\boldsymbol{l}$ 之间的夹角. 由 (21.2) 可以看出在一个固定点 (x,y,z), $f(x,y,z)$ 沿任意方向的方向导数中以沿 ∇f 的方向导数为最大. 其值为 $|\nabla f(x,y,z)|$. 从而梯度的方向就是函数在该点增加最快的方向.

例题 21.2.1 求 $u=x+y+z$ 在沿 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点的外法向的方向导数, 并问在球面上何点该方向导数取: (1) 最大值; (2) 最小值; (3) 等于 0.

解 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点的外法向方向为 (x,y,z), 函数 $u=x+y+z$ 沿 (x,y,z) 方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\nabla u\cdot(x,y,z)=|\nabla u|\cos\theta=\sqrt{3}\cos\theta,$$

其中 θ 是向量 $\nabla u=(1,1,1)$ 与 (x,y,z) 之间的夹角. 于是当 $x=y=z>0$ 时, 方向导数取最大值 $\sqrt{3}$, 此时 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 当 $x=y=z<0$ 时, 方向导数取最小值 $-\sqrt{3}$, 此时 $x=y=z=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 当 $x+y+z=0$ 时, 方向导数为 0. □

例题 21.2.2 若 $\mathbf{R}^2$ 上的可微函数 $f(x,y)$ 满足

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0, \tag{21.3}$$

则 $f(x,y)$ 恒为常数.

证 1 设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 取 $\boldsymbol{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 由 (21.3) 得

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\cos\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)=0.$$

于是在任一从原点出发的射线上的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=0$, 因此 $f(x,y)$ 在该射线上为常数, 即

$$f(x,y)\equiv f(0,0). \quad \square$$

证 2 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 由 (21.3) 得

$$\frac{\partial f}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = 0,$$

即 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 与 r 无关. 对任意固定的 θ, 令 $r \to 0^+$, 得

$$f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(0,0). \quad \square$$

证 3 由 (21.3) 知

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0 = 0 \cdot f(x,y),$$

由齐次函数的充要条件 (命题 19.3.1) 知 f 为零次齐次函数, 于是对 $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y),$$

于其中令 $t \to 0$, 得

$$f(x,y) = f(0,0). \quad \square$$

证 4 对任意固定的 $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, 定义一元函数

$$\varphi(t) = f(tx,ty), \quad t \geqslant 0.$$

则

$$\varphi'(t) = xf_1(tx,ty) + yf_2(tx,ty).$$

于是当 $t > 0$ 时, 由 (21.3) 得

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}[txf_1(tx,ty) + tyf_2(tx,ty)] = 0,$$

所以 $\varphi(t)$ 为常数. 取 $t = 1$, 则 $\varphi(t) \equiv \varphi(1)$. 即

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

令 $t \to 0$, 得

$$f(x,y) = f(0,0). \quad \square$$

21.2.3 练习题

1. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在沿椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向导数.
2. 设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x,y,z) = 0$ 上的点 (x,y,z) 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, 证明

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} + v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

3. 设 $f(t)$, $u = u(x,y,z)$ 为可微函数, 证明 $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.
4. 设 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0)$ 点可微, $\boldsymbol{l}_1, \cdots, \boldsymbol{l}_n$ 为 n 个单位向量, 相邻的两向量夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(x_0,y_0) = 0.$$

5. 设 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$, 其中 $a > b > c > 0$. 求在 $(0,0,0)$ 点函数 u 增加最快的方向.

6. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}x-y+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明: $f(x,y)$ 在原点处连续, 沿任何方向的方向导数存在, 但不可微.

§21.3 Taylor 公式与极值问题

21.3.1 Taylor 公式

在一元微分学中 (上册 §7.2 节), 我们对 Taylor 公式及其应用给予了足够的重视, 介绍了带有 Peano 余项和 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 它们分别表示一元函数带有渐近误差估计和大范围误差估计的多项式逼近. 在多元函数中, 我们仍然有相应的 Taylor 公式. 为叙述方便起见, 仅讨论二元函数的情形.

Taylor 公式 设函数 $f(x,y)$ 在开圆盘 $D=\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2\}$ 内有关于 x,y 的各个 $m+1$ 阶连续偏导数. 对 D 内任意一点 (x,y), 记 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, 则

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(x_0,y_0)&+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\\&+\frac{1}{2!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)+\cdots\\&+\frac{1}{m!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^mf(x_0,y_0)+R_m(x,y),\end{aligned}$$

其中

$$R_m(x,y)=\frac{1}{(m+1)!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^{m+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

$0<\theta<1$, 称为 **Lagrange 余项**.

在所述条件下 (甚至条件可减弱为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有关于 x, y 的各个 m 阶连续偏导数), 也可取 **Peano 余项** $R_m(x,y)=o(r^m)$, $r\to0$, 其中 $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

上述两个公式的证明均可化归为一元函数来证明. 其中在 Lagrange 余项的证明中, 令 $\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$; 在 Peano 余项的证明中可先把 $f(x,y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 作为 Δx 的一元函数进行带 Peano 余项的一元 Taylor 公式展开, 再对各阶偏导函数作 Δy 的一元函数展开, 然后整理.

命题 21.3.1 (Taylor 公式的惟一性) 设 $f(x,y)$ 具有 $m+1$ 阶连续偏导数, 若用某种方法得到展开式

$$f(x,y)=\sum_{i+j=0}^{m}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j+o(\rho^m),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, 则必有

$$A_{ij}=\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}f(x_0,y_0).$$

证明留作习题.

例题 21.3.1 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的 4 阶 Taylor 多项式, 并求出 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$.

解 由于

$$\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}=1+x(x^2+y^2)+\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)^2+o([x(x^2+y^2)]^2),$$

于是

$$\frac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}=-x-\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)+o(x^2(x^2+y^2)).$$

由 Taylor 展式的惟一性知 $f(x,y)$ 的 4 阶 Taylor 展开式为

$$-x-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2.$$

由此得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)=4!(-\frac{1}{2})=-12.\quad\square$$

Taylor 公式有许多重要而有趣的应用, 下面举出几例. 我们先用向量与矩阵形式来重新表达 Taylor 公式, 这样的表达式简单、明了. 特别是它的前三项, 与线性代数的知识紧密联系在一起, 建议同学要熟悉.

考虑定义在一个开区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 元二次连续可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$. 设点 $\boldsymbol{p}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$. 带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式可写为

$$f(\boldsymbol{p}_0+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p}_0)+\nabla f(\boldsymbol{p}_0)\cdot\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2!}\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+o(r^2),$$

其中 $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)=(x_1-x_1^0,\cdots,x_n-x_n^0)$, $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的梯度, $\boldsymbol{Q}=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_0}$ 称为 **Hesse 矩阵**.

记函数的增量 $\Delta f=f(\boldsymbol{p}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}_0)$. 易知当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)\neq\boldsymbol{0}$ 时可取不同的 $\Delta\boldsymbol{x}$, 使 Δf 取到正值与负值, 因此当 $\boldsymbol{p}_0$ 是可微函数 f 的一个极值点时, $\boldsymbol{p}_0$ 必是 f 的驻点 (又称临界点), 即有[①]

$$\nabla f(\boldsymbol{p}_0)=\boldsymbol{0}.$$

① 这里的结论和证明都可以与一元函数的 Fermat 定理作比较. 参见上册 187 页该定理的证明 2 和 239 页的例题 8.3.1. 当然在多元情况的梯度为 0 的结论具有更为丰富的意义.

又当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)\neq\boldsymbol{0}$, 且 $|\Delta\boldsymbol{x}|$ 为定值时, 在 $\Delta\boldsymbol{x}$ 与 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$ 同向时 Δf 取最大. 因此梯度方向是函数增长最快的方向. 当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)=\boldsymbol{0}$ 时, 可根据 $\boldsymbol{Q}$ 的情况来讨论函数增长最快的方向.

例题 21.3.2 设 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, 其中 $a>b>c>0$. 求在 $(0,0,0)$ 处函数增长最快的方向.

解 由于 $\nabla u(0,0,0)$ 为零向量, 故不能应用梯度方向是函数增长最快的方向的性质, 需另想办法. 考虑沿某单位方向 $\boldsymbol{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$ 函数 u 的变化

$$u(t\alpha,t\beta,t\gamma)-u(0,0,0),\quad \text{其中 } t \text{ 是参数.}$$

令 $\varphi(t)=u(t\alpha,t\beta,t\gamma)$. 由 Taylor 展式

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\varphi(0)&=\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2}t^2+o(t^2)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(0,0,0)\alpha^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}(0,0,0)\beta^2+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}(0,0,0)\gamma^2\right)t^2+o(t^2)\\&=\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

由于 $a>b>c$ 及 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, 当 $t>0$ 充分小时, 沿方向 $\boldsymbol{l}=(0,0,\pm1)$ $\varphi(t)-\varphi(0)$ 最大, 即函数 u 增加最快. □

注 设二次连续可微函数 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点的梯度为零向量, 但 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是非零矩阵, 则 f 增长最快的可能方向在 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值对应的特征子空间中. 如最大特征值对应的特征子空间为一维空间, 则相应的方向就是 f 增长最快的方向 (第二组参考题 1).

例题 21.3.3 设 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant1\}$ 上具有连续的一阶偏导数, 且满足 $|f(x,y)|\leqslant1\,\forall\,(x,y)\in D$. 试证: 存在点

$$(x_0,y_0)\in\mathrm{int}D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\},$$

使得在点 (x_0,y_0) 处有不等式 $f_x^2+f_y^2\leqslant16$.

解 设 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$. 在单位圆周上显然有 $g(x,y)\geqslant1$, 而在原点 $g(0,0)\leqslant1$. 所以或者 g 在 D 上恒等于 1, 或者 $g(x,y)$ 必在 D 的某个内点 (x_0,y_0) 处取到极小值. 因此总存在 $(x_0,y_0)\in\mathrm{int}D$, 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0,$$

于是就有

$$\left.(f_x^2+f_y^2)\right|_{(x_0,y_0)}\leqslant16\quad\square$$

例题 21.3.4 证明当 $|x|$ 和 $|y|$ 充分小时, 有近似式

$$\frac{\cos x}{\cos y}\approx1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\tag{21.4}$$

证 设 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$, 则 $f(x,y)$ 在原点附近无穷次可微, 且

$$f(0,0)=1,\quad f_x(0,0)=0,\quad f_y(0,0)=0,$$

$$f_{xx}(0,0)=-1,\quad f_{yy}(0,0)=1,\quad f_{xy}(0,0)=0.$$

由 Taylor 公式, 当 $|x|$ 和 $|y|$充分小时, 有

$$\frac{\cos x}{\cos y}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(|x|^2+|y|^2),$$

此即 (21.4). □

21.3.2 极值问题

考虑定义在一个开区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 元二次连续可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$. 设 $\boldsymbol{p}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 是 f 的一个极值点, 那么 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)=\boldsymbol{0}$. 由二阶 Taylor 展式得

$$f(\boldsymbol{p}_0+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p}_0)+\frac{1}{2!}\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+o(r^2),$$

因而可以根据二次型 $\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 的符号来确定 $f(\boldsymbol{x})$ 能否在 $\boldsymbol{p}_0$ 处取到极值, 即有如下的极值的充分条件:

设函数 f 在驻点 $\boldsymbol{p}_0$ 的某邻域内有二阶连续偏导数, 则

(1) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是正定的, 则 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是极小值;

(2) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是负定的, 则 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是极大值;

(3) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是不定的 (即既有正的特征值, 也有负的特征值), 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点不是极值点;

(4) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是半定的 (即所有特征值同号, 但有零特征值), 则需进一步判别.

注 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是否是正定、负定可以根据高等代数中半到的 Sylvester 准则来判断, 即考虑 $\boldsymbol{Q}$ 的各阶主子式的符号. 特别有:

设 f 是二元函数 $f(x,y)$. 如果 $f(x,y)$ 在驻点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有二阶连续偏导数, 并设 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$ 以及 $\Delta=AC-B^2$, 则

(1) 若 $\Delta>0,A>0$, 则 f 在 (x_0,y_0) 点有极小值;

(2) 若 $\Delta>0,A<0$, 则 f 在 (x_0,y_0) 点有极大值;

(3) 若 $\Delta<0$, 则 f 在 (x_0,y_0) 点没有极值;

(4) 若 $\Delta=0$, 则需进一步判别.

求多元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值的步骤可归结如下:

1. 通过解方程组 $f_{x_i}=0,i=1,2,\cdots,n$, 求出驻点 $\boldsymbol{p}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$;

2. 如果函数 f 在驻点 p_0 的某邻域内有二阶连续偏导数, 则考查 Hesse矩阵 $Q=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_{x=p_0}$, 利用上述的充分条件;
3. 考查 f_{x_i}, $i=1,2,\cdots,n$, 不存在的点是否为极值点;
4. 考查没有二阶连续偏导数的驻点是否为极值点.

例题 21.3.5 求 $z=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2-2x-2y+5$ 的全部极值点与极值.

解 由于 $z_x=z_y=x+y-2$, 则直线 $x+y-2=0$ 上的点都是驻点. 又 $A=f_{xx}=1$, $B=f_{xy}=1$, $C=f_{yy}=1$, 于是 $\Delta=AC-B^2=0$. 故不能用法则来判别这些驻点是否为极值点. 从函数本身来看

$$z=\frac{1}{2}(x+y)^2-2(x+y)+5=\frac{1}{2}[(x+y)-2]^2+3,$$

故 $x+y=2$ 上的全部点均为 z 的极小值点, 极小值为 3.

由于 z 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微, 故无其他极值点. □

注 本题表明, 对于二元函数, 即使它不是常值函数, 其驻点仍可以有无穷多个, 且可以构成曲线.

例题 21.3.6 设 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$. 证明: 沿着经过点 $(0,0)$ 的每一条直线, 点 $(0,0)$ 均是 $f(x,y)$ 在该直线上的极小值点. 但点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 在整体上的极小值点.

证 在 xOy 平面上画出 $S_1: y=x^2$ 和 $S_2: y=2x^2$ 表示的两条抛物线, 可见 S_1 和 S_2 把平面分成四个区域. 在每个区域 f 取确定的符号, 而过 $(0,0)$ 的每一条直线在 $(0,0)$ 附近都位于 f 取 "+" 的区域内, $f(0,0)=0$, 所以 $(0,0)$ 是 f 在该直线上取到极小值的点. 另一方面, $(0,0)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的任一小邻域内都包含着上述四个小区域, 即 f 可在这个小邻域取到正值, 也可以取到负值. 故 f 在 $(0,0)$ 处取不到极值.

注 根据需要在不同的区域取不同的值是构造二元函数反例的常用手法.

21.3.3 最大最小值问题

与一元函数相仿 (参见上册 §8.3 节), 可以通过求驻点的办法求函数的最大、最小值. 以二元函数为例叙述如下:

1. 如果 $f(x,y)$ 定义在有界闭区域上, 则先求出 D 内部的全部驻点, 不可导点及相应的函数值, 然后求出 f 在 ∂D 上的最值 (可将边界曲线代入 $f(x,y)$, 化为求一元函数的最值问题), 最后取所有这些函数值的最大者为最大值, 最小者为最小值;

2. 如果 $f(x,y)$ 定义在无界区域上, 则去掉明显取不到最值的某个无界子区域部分, 使之成为有界区域上的最值问题;
3. 利用
$$\max f = \max_x \max_y f \quad 或 \quad \max_y \max_x f,$$
对 x,y 累次求最值;
4. 如果 $f(x,y)$ 定义在有界开区域 D 上, 有时需要先将 $f(x,y)$ 的定义域连续延拓到 $\overline{D}$ 上, 然后求有界闭区域上的最大最小值, 最后求出所要的结果.

例题 21.3.7 求 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 在全平面上的最大最小值.

解 1 令 $f_x=2x-y-2=0$, $f_y=-x+2y+1=0$ 得驻点 $(1,0)$. $A=f_{xx}(1,0)=2>0$, $B=f_{xy}(1,0)=-1$, $C=f_{yy}(1,0)=2$, $\Delta=AC-B^2>0$. 故 $(1,0)$ 是极小值点, 极小值为 $f(1,0)=-1$. 又有
$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^2(1-\sin\theta\cos\theta)-\rho(2\cos\theta-\sin\theta)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\rho^2-3\rho\to+\infty \quad (\rho\to+\infty),$$
可见 $f(x,y)$ 在全平面上无最大值. 又可知存在 ρ_0, 当 $\rho\geqslant\rho_0$ 时, $f>-1$. 于是在 $x^2+y^2\geqslant\rho_0^2$ 内, f 不可能取最小值, 即 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上最小值与 f 在 $D=\{x^2+y^2\leqslant\rho_0^2\}$ 上最小值相同, 又 $f(x,y)$ 在 D 内无不可导点, 于是
$$\min_{\mathbf{R}^2} f=\min_D f=\min\{f(1,0),f|_{\partial D}\}=-1. \quad \square$$

解 2 由 $f(x,y)=y^2+(1-x)y+(x^2-2x)$, 先固定 x, 求 $\min\limits_{y\in\mathbf{R}} f(x,y)$. 将 $f(x,y)$ 改写为
$$f(x,y)=(y+\frac{1-x}{2})^2+(\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}),$$
于是
$$\min_{y\in\mathbf{R}} f(x,y)=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(x-1)^2-1,$$
从而
$$\min_{x\in\mathbf{R}}\min_{y\in\mathbf{R}} f(x,y)=\min_{x\in\mathbf{R}}[\frac{3}{4}(x-1)^2-1]=-1,$$
所以
$$\min_{\mathbf{R}^2} f(x,y)=-1.$$
又 $f(0,y)=y^2+y$ 无最大值, 因此 $f(x,y)$ 也无最大值. $\square$

解 3 $f(x,y)=(x-\frac{y}{2}-1)^2+\frac{3}{4}y^2-1\geqslant-1$ 且 $f(1,0)=-1$, 于是 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点取得最小值 -1, 无最大值. $\square$

注 在上例的解 1 中, 能否像一元函数那样 (上册 242 页练习题 1), 根据 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上只有惟一的极值点, 就断言该极值点是最值点呢? 回答是否定的, 考虑 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的情况 (见下一小节的练习题 5).

例题 21.3.8 设 D 为有界闭区域, $u(x,y)$ 在 D 上连续, 存在偏导数, 且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$, $u|_{\partial D}=0$, 则 u 在 D 上恒为零.

证 用反证法. 假设 u 在D 上有正的最大值或负的最小值. 由条件 $u|_{\partial D}=0$ 知这样的最大值或最小值只能在 D 的内部达到. 不妨设 $(x_0,y_0)\in \mathrm{int}D$, 且满足

$$u(x_0,y_0)>0,\quad u(x_0,y_0)\geqslant u(x,y),\quad \forall (x,y)\in D. \tag{21.5}$$

于是 (x_0,y_0) 也是极大值点, 从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=0. \tag{21.6}$$

另一方面, 由已知条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=u(x_0,y_0),$$

此与 (21.5), (21.6) 矛盾, 从而 $u\equiv 0$. □

例题 21.3.9 在平面上给定不在同一直线上的三点 $M_i(a_i,b_i)$, $i=1,2,3$. 求平面内的这样一点, 使它至此三定点的距离之和为最小.

解 任取点 $M(x,y)$, 令

$$\rho_i=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2},\quad i=1,2,3.$$

于是所给问题为研究函数

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\rho_i=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$$

的最小值. 除了在三个给定点以外, 它处处存在着偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{i=1}^{3}\frac{x-a_i}{\rho_i}=\sum_{i=1}^{3}\cos\theta_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{i=1}^{3}\frac{y-a_i}{\rho_i}=\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i,$$

其中 θ_i 表示 x 轴正向与以 M_i 为起点的射线 M_iM 的夹角 (见图 21.1).

首先找驻点 M_0, 令两个偏导数为 0 得

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0,$$

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0.$$

第一式乘以 $\sin\theta_2$, 第二式乘以 $\cos\theta_2$, 相减得

$$\sin(\theta_2-\theta_1)=\sin(\theta_3-\theta_2). \tag{21.7}$$

同样可得

$$\sin(\theta_3-\theta_2)=\sin(\theta_1-\theta_3). \tag{21.8}$$

由图 21.1 可以算出 $\angle M_1M_0M_2=\theta_2-\theta_1$, $\angle M_2M_0M_3=\theta_3-\theta_2$, $\angle M_3M_0M_1=\theta_1-\theta_3+2\pi$. 由 (21.7), (21.8) 得

$$\sin\angle M_1M_0M_2=\sin\angle M_2M_0M_3=\sin\angle M_3M_0M_1.$$

由于三个角都在 0 与 2π 之间, 且三个角之和为 2π, 于是

$$\angle M_1M_0M_2=\angle M_2M_0M_3=\angle M_3M_0M_1=\frac{2}{3}\pi.$$

于是点 M_0 可由下列方法求得: 在三角形 $M_1M_2M_3$ 的三边上各作一含圆周角为 $\frac{2}{3}\pi$ 的弧, 三弧的公共点为 M_0.

若三角形没有大于或等于 $\frac{2\pi}{3}$ 的内角, 则此弧确能在三角形之内相交而确定 M_0, 这时, 各边显然都对着顶点在 M_0 的等于 $\frac{2\pi}{3}$ 的角 (见图 21.1), 在这种情形, 就必须比较 $u(x,y)$ 在 M_0, M_1, M_2, M_3 这四个点的值. 我们将证明, 在驻点 M_0 处的 $u(x,y)$ 的数值必小于其他三个数值. 实际上由余弦定理以及 $\angle M_1M_0M_2=\frac{2}{3}\pi$, 有

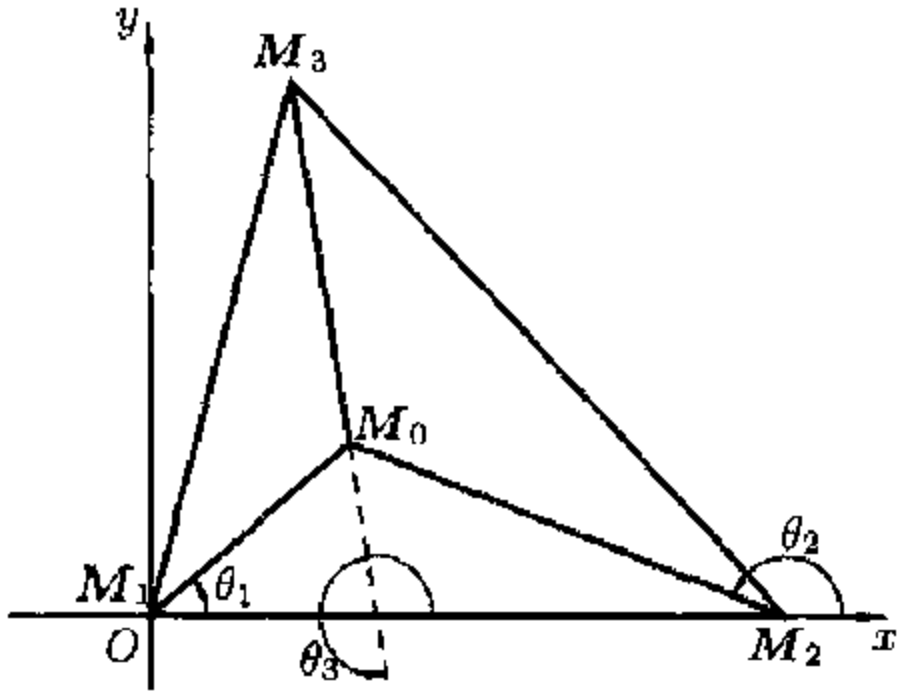


图 21.1

$$\begin{aligned}(M_1M_2)^2&=(M_0M_2)^2+(M_0M_1)^2+M_0M_2\cdot M_0M_1\\&>(M_0M_2+\frac{1}{2}M_0M_1)^2,\end{aligned}$$

于是 $M_1M_2>M_0M_2+\frac{1}{2}M_0M_1$, 同理 $M_1M_3>M_0M_3+\frac{1}{2}M_0M_1$, 两式相加得

$$M_1M_2+M_1M_3>M_0M_1+M_0M_2+M_0M_3,$$

即 $u(M_1)>u(M_0)$. 显然此处的 M_1 可以换成 M_2 或 M_3.

若三角形 $M_1M_2M_3$ 有一个内角大于或等于 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 情形就不同了, 这时三条圆弧没有公共点, 驻点也就不存在了. 而函数 $f(x,y)$ 在 M_1,M_2,M_3 中之一处, 也就是在钝角的顶点处达到其最小值. □

注 这一问题再一次说明, 在探求函数的最大最小值时, 除了驻点以外, 导数不存在的点也必须考虑在内.

例题 21.3.10 (最小二乘法) 设通过观测或实验得到一列数据 (x_i,y_i), $i=1,\cdots,n$. 它们大体上满足线性关系, 即大体上可以用直线方程来反映变量 x 与变量 y 之间的对应关系. 确定直线方程使这些数据代入后的偏差的平方和最小.

解 不妨设 x_i $(i=1,\cdots,n)$ 不全相等, 即直线是非垂直的, 设方程为 $y=ax+b$. 偏差的平方和为

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2.$$

现要确定 a, b, 使得 $f(a,b)$ 为最小. 为此, 令

$$f_a = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - y_i) = 0, \quad f_b = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0,$$

按 a, b 合并整理得

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + bm = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

解此方程组得惟一的稳定点 $(a = \bar{a},\ b = \bar{b})$. 为进一步确定该点是否取到极小值, 我们计算得到

$$A = f_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad B = f_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad C = f_{bb} = 2n,$$

$$D = AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 > 0.$$

由前述定理 $f(a,b)$ 在点 $(\bar{a},\bar{b})$ 取到惟一极小值, 并且由 x_i $(i = 1,\cdots,n)$ 不全相等的假定知道对任意 (a,b) 有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |ax_i + b| > 0.$$

从而

$$\min_{a^2+b^2=1} \{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |ax_i + b|\} \geqslant \delta > 0,$$

由此得到

$$\begin{aligned}\lim_{|a|+|b|\to+\infty} f(a,b) &= \lim_{|a|+|b|\to+\infty} (a^2+b^2)\sum_{i=1}^{n}(\frac{ax_i + b - y_i}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 \\ &\geqslant (a^2+b^2)(\delta^2 - o(\frac{1}{a^2+b^2})) \to +\infty.\end{aligned}$$

因此 f 的最小值在有界闭区域上取到. 故所得的惟一极小值就是最小值. □

注 1 在具体问题中 (主要指应用问题), 如果问题确有最值, 而边界值明显不是最值, 在区域内部驻点又惟一, 则此驻点必是最值点.

注 2 如例题 21.3.7 的注所指出的, 多元函数的惟一极值点并不一定是最值点. 但如果 f 是二次函数, 则 f 的极值点一定是最值点. 证明如下: 设 $\boldsymbol{p}_0$ 是 f 的极值点, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 是 f 的稳定点. 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处 Taylor 展开, 有

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_0).$$

由于 f 是二次函数, 故 $\boldsymbol{Q}$ 是常值矩阵. 并且 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 附近取到极值, 因此 $\boldsymbol{Q}$ 是半正定或半负定矩阵. 如果 $\boldsymbol{Q}$ 是半正定矩阵, 则 $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}_0) \geqslant 0$, $\forall\,\boldsymbol{x}$. 所以 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是最小值. 如果 $\boldsymbol{Q}$ 是半负定矩阵, 则 $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}_0) \leqslant 0\ \forall\,\boldsymbol{x}$, 所以 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是最大值. 由此也得到了最小二乘法中惟一极小值就是最小值的另一种证明.

21.3.4 练习题

1. 设 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内具有连续的二阶偏导数, 试证当 $h \to 0$ 时有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\frac{1}{h^2}[u(x_0+h,y_0)+u(x_0-h,y_0)$$
$$+u(x_0,y_0+h)+u(x_0,y_0-h)-4u(x_0,y_0)]+o(1).$$

2. 对于下列函数, $(0,0)$ 点是否为驻点? 是否为极值点?

(1) $f(x,y)=x^2-4xy+5y^2-1$;

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $f(x,y)=(x+y)^2-y^2$.

3. 求下列函数的极值点及相应的极值:

(1) $u(x,y)=x^2(y-1)^2$;

(2) $u(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$;

(3) $u(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$.

4. 求 $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant\pi\}$ 上的最大、最小值.

5. 证明函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有惟一的极大值点, 但该极大值点不是最大值点.

§21.4 条件极值与条件最值

21.4.1 条件极值

在满足约束条件 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ $(i=1,\cdots,m,\ m<n)$ 时, 求函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的极值问题, 可归结为对 Lagrange 函数

$$L(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{21.9}$$

求普通函数极值的问题, 其中 λ_i $(i=1,\cdots,m)$ 为常数因子. 这种方法称为 **Lagrange 乘子法**. Lagrange 乘子法的几何解释可见教材 [9, 25, 60] 等.

Lagrange 乘子法的具体步骤是:

1. 作出 Lagrange 函数 (21.9);

2. 由 $L_{x_i}=0$ $(i=1,\cdots,n)$ 与 $\varphi_i=0$ $(i=1,\cdots,m)$ 联立解出 L 的全部驻点与 λ_i $(i=1,\cdots,m)$ 的具体值, 并要求驻点处矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\end{pmatrix} \tag{21.10}$$

的秩为 m;

3. 对每个驻点 $\boldsymbol{p}_0$, 算出 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)=\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}(\boldsymbol{p}_0)$.

(1) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 正定, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极小值点;

(2) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 负定, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极大值点;

(3) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 既不是正定, 也不是负定, 则由

$$\mathrm{d}\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=0,\quad i=1,\cdots,m$$

以及矩阵 (21.10) 的秩为 m, 解出 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 中的 m 个. 不妨设可解出 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_m$, 将其代入 n 元二次型 $(\mathrm{d}x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\mathrm{d}x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n})^2 L(\boldsymbol{p}_0)$ 中, 化为 $(n-m)$ 元二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n-m} a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{(n-m)\times(n-m)}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极小值点. 若 $\boldsymbol{A}$ 是负定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为 (条件) 极大值点. 若 $\boldsymbol{A}$ 是不定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 不是 (条件) 极值点. 若 $\boldsymbol{A}$ 是半定的, 则需进一步判定.

如此看来, 若出现 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_0)$ 既不正定, 也不负定的情况下, 讨论将相当复杂.

例题 21.4.1 求 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ $(b\neq 0)$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 之下的极值.

解 1 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2-1).$$

解方程组

$$L_x=2ax+2by-2\lambda x=0, \tag{21.11}$$

$$L_y=2bx+2cy-2\lambda y=0, \tag{21.12}$$

$$x^2+y^2=1. \tag{21.13}$$

由 (21.13) 知 x,y 不可能同时为零, 于是由 (21.11), (21.12) 得

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0. \tag{21.14}$$

因判别式 $\Delta=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$, 从而解得两个相异实根

$$\lambda_{\pm}=\frac{1}{2}[a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}].$$

对每个 λ, 由 (21.11) (或(21.12)) 与 (21.13) 解出两组解

$$(\lambda_+,x_1,y_1),\ (\lambda_+,x_2,y_2),\ (\lambda_-,x_3,y_3),\ (\lambda_-,x_4,y_4),$$

且 $y_1y_2y_3y_4\neq 0$. 由 (21.11) 与 (21.12) 知

$$\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2(a-\lambda) & 2b \\ 2b & 2(c-\lambda) \end{vmatrix}=0.$$

从而在驻点, 矩阵 $\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix}$ 既不是正定的, 也不是负定的. 此时, 对 (21.13) 求微分得

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0,$$

解出

$$\mathrm{d}y = -\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x.$$

然后代入 $\mathrm{d}^2L = 2(a-\lambda)\,\mathrm{d}x^2 + 4b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2(c-\lambda)\,\mathrm{d}y^2$ 中, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2L &= \frac{2}{y^2}[(a-\lambda)y^2 - 2bxy + (c-\lambda)x^2]\,\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{2}{y^2}(a+c-2\lambda)\,\mathrm{d}x^2 \begin{cases} <0, & \lambda = \lambda_+, \\ >0, & \lambda = \lambda_-. \end{cases}\end{aligned}$$

因此, 对应于 λ_+ (λ_-), f 取得极大 (小) 值. □

解 2 用隐函数方法.

容易证明 $b \neq 0$ 时, f 的极值不在 $(\pm 1, 0)$ 取得, 而除去这两点外, $x^2+y^2-1=0$ 在单位圆上任意点的某邻域内有连续可导的隐函数 $y = h(x)$, 且 $y' = -\dfrac{x}{y}$.

记 $F(x) = f(x, h(x))$, 则

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2ax + 2b(y + xy') + 2cyy' \\ &= 2(ax+by) + 2(bx+cy)(-\frac{x}{y}) = \frac{2}{y}[(a-c)xy + b(y^2-x^2)].\end{aligned}$$

令 $F'(x) = 0$, 记 $u = \dfrac{x}{y}$, 由上式得

$$bu^2 - (a-c)u - b = 0.$$

它的判别式 $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$, 故方程有相异实根

$$u_\pm = \frac{1}{2b}[a - c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}],$$

且异号. 将它们代入 $x^2+y^2=1$ 中可解得对应于 u_+ 的解 x_1, x_2 和对应于 u_- 的解 x_3, x_4. 在这些驻点上

$$\begin{aligned}F''(x) &= \frac{2}{y}\{(a-c)y - 2bx + [(a-c)x + 2by](-\frac{x}{y})\} \\ &= \frac{2}{y^2}[(a-c)(y^2-x^2) - 4bxy] \\ &= \frac{2xy}{y^2}[-\frac{(a-c)^2}{b} - 4b] \\ &= -\frac{2u}{b}[(a-c)^2 + 4b^2] \begin{cases} <0, & u = u_+, \\ >0, & u = u_-. \end{cases}\end{aligned}$$

故 x_1, x_2 是 f 的极大值点, x_3, x_4 是 f 的极小值点, 其极大值和极小值分别为 $(au_+^2 + 2bu_+ + c)/(u_+^2+1)$ 和 $(au_-^2 + 2bu_- + c)/(u_-^2+1)$. □

解 3 注意到

$$f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

是一个实的二元二次型, 利用高等代数中的有关定理: 任意一个实二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad (a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,\cdots,n)$$

都可以经过正交的线性变换变成平方和

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征多项式全部的根. 因此 $f(x,y)$ 可化为

$$f(x,y)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2,\ \text{且}\ u^2+v^2=1,$$

其中 u,v 是 x,y 的线性组合, 然后再用 Lagrange 乘子法或初等方法求解. □

注 有些极值问题往往有初等解法, 但它们一般都有一定的局限性.

21.4.2 条件最值

在很多实际问题中, 要求的是条件最值. 从理论上讲, 可通过求条件极值及与边界值、不可导点的值等的比较来得到条件最值. 但从上节看到, 确定条件极值是一件比较麻烦的事. 在实际解题过程中, 有许多简捷的方法, 下面作些讨论.

以三元函数 $u=f(x,y,z)$ 和一个标准约束条件 $g(x,y,z)=0$ 为例 (设 f,g 在其定义域上连续可微). 在求 u 的最值时, 只要最值存在, 且 g_x,g_y,g_z 在 $D_1=\{(x,y,z)\mid g(x,y,z)=0\}$ 上不同时为 0, 则最值点必是极值点, 从而必是 Lagrange 函数的驻点. 事实上, 设 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 是最值点, 且 $g_z(p_0)\neq 0$, 则存在 (x_0,y_0) 点的邻域 $O(x_0,y_0)$, 值在其中确定隐函数 $z=z(x,y)$. 于是 $u=f(x,y,z(x,y))$ 在 $O(x_0,y_0)$ 中有定义, 且于 (x_0,y_0) 处取最值. 因为 $O(x_0,y_0)$ 是开域, 所以 $u=f(x,y,z(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 点取极值. 由此可得求条件最值的方法如下:

1. 若约束为标准形式 $g(x,y,z)=0$, 且约束集合 $D_1=\{(x,y,z)\mid g(x,y,z)=0\}$ 是有界闭集 (此时最值必定存在). 设 g_x,g_y,g_z 在 D_1 上不同时为 0, 则求出 Lagrange 函数的全部驻点及相应的函数值, 再取其最值即可;
2. 若约束为标准形式 $g(x,y,z)=0$, 但 D_1 为无界集. 通常加上附加约束, 转化为具有附加约束条件的有界域上的条件最值问题;
3. D_1 为有界集, 并有附加约束情况 (如 $x^2+y^2+z^2=1,x>0,y>0,z>0$). 先扩充为有界闭集 (如 $x^2+y^2+z^2=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$), 从而最值存在, 其次求出 Lagrange 函数全部驻点及相应的 f 的值, 令其最大者为 M_1, 最小者为 m_1, 然后求出 f 在附加约束边界上的最大值 M_2 和最小值 m_2, 若 $M_1\geqslant M_2$, 则条件最大值为 M_1; 若 $M_1<M_2$, 则条件最大值不存在. 条件最小值可类似讨论;

4. 标准约束 $g(x,y,z)=0, D_1$ 无界, 且具有附加约束 (如 $x+y+z=1, x>0, y>0, z>0$). 通常应该首先证明条件最值存在, 再证明条件最值点只能在某一有界域中, 从而转化为 3 的情形.

注 对具体问题要作具体分析. 对某个具体问题, 很可能有体现这个问题特点的更为简捷的方法, 甚至是完全初等的方法.

例题 21.4.2 椭球面 $\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}=1$ 被通过原点的平面 $2x+y+z=0$ 截成一个椭圆 l. 求此椭圆的面积.

解 只要求出椭圆 l 的长短半轴即可. 于是问题转化为在约束条件

$$F(x,y,z)\equiv \frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1=0, \tag{21.15}$$

$$G(x,y,z)\equiv 2x+y+z=0 \tag{21.16}$$

下求 $r^2=x^2+y^2+z^2$ 之最大最小值. 为此定义

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1)+\mu(2x+y+z).$$

令

$$L_x=2x+\frac{2}{3}\lambda x+2\mu=0, \tag{21.17}$$

$$L_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \tag{21.18}$$

$$L_z=2z+\lambda z+\mu=0. \tag{21.19}$$

将 (21.17)-(21.19) 分别乘 x,y,z, 然后相加, 利用 (21.15), (21.16) 得

$$\lambda=-r^2. \tag{21.20}$$

将 (21.20) 代入 (21.17), 得

$$(r^2-3)x=3\mu.$$

若 $r^2=3$, 则 $\mu=0$. 代入 (21.18), (21.19), 得 $y=z=0$, 显然不满足 (21.15) 和 (21.16). 因此 $r^2-3\neq 0$. 所以

$$x=\frac{3\mu}{r^2-3}. \tag{21.21}$$

同理将 (21.20) 代入 (21.18), (21.19) 得

$$y=\frac{\mu}{2(r^2-1)},\qquad z=\frac{\mu}{r^2-2}. \tag{21.22}$$

将(21.21), (21.22) 代入 (21.16), 得

$$\frac{6\mu}{r^2-3}+\frac{\mu}{2(r^2-1)}+\frac{\mu}{r^2-2}=0. \tag{21.23}$$

由于 $\mu\neq 0$, 消去 μ, 得

$$15(r^2)^2-49r^2+36=0.$$

由此解出两个根 r_1^2 和 r_2^2 即为条件驻点对应的函数值. 由于约束集合是有界闭集, 故 r^2 的最值存在, 又因在约束集合上 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ 不同时

为 0, 故最值必定在条件驻点达到, 因而这两个值也即为 r^2 的最大最小值, 即长、短半轴的平方. 根据 Viète 定理有 $r_1^2 \cdot r_2^2 = \dfrac{36}{15} = \dfrac{12}{5}$, 于是所求的面积为

$$s = \pi r_1 r_2 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{5}}. \quad \square$$

注 1 本题所用解法也是条件极值或最值问题中常用的技巧, 其特点是不必求出条件驻点, 而直接求出所要求的条件最值.

注 2 在得到 (21.20) 之后可用下面的解法来求 λ:

由 (21.15) 知 x, y, z 不能同时为 0, 于是在方程组 (21.16)—(21.19) 中视 x, y, z, μ 为未知量, λ 为系数, 则方程组有非零解. 于是系数矩阵的行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} 2+\frac{2}{3}\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2+2\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2+\frac{2}{3}\lambda)\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(2+\frac{2}{3}\lambda)(2+\lambda+2+2\lambda) - 4(2+2\lambda)(2+\lambda) = 0,$$

即

$$15\lambda^2 - 49\lambda + 36 = 0.$$

例题 21.4.3 设 $p \geqslant 1$. 求 $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^p + y^p)$ 在 $x + y = C$ (C为正常数), $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 的条件下的最小值.

解 设

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^p + y^p) + \lambda(x + y - C).$$

令

$$L_x = \frac{p}{2}x^{p-1} + \lambda = 0,$$
$$L_y = \frac{p}{2}y^{p-1} + \lambda = 0,$$
$$x + y = C.$$

解得驻点 $x = y = \dfrac{C}{2}$. 由于约束集合是有界闭集, 比较驻点值与附加约束集合边界点的值 $f(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}) = (\frac{C}{2})^p$, $f(0, C) = f(C, 0) = \dfrac{1}{2}C^p$, 得知 $(\frac{C}{2})^p$ 为最小值. $\square$

注 由本题结论可得

$$\frac{1}{2}(x^p + y^p) \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^p.$$

一般地可以证明: 若 $p \geqslant 1, x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^p \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^p.$$

很多不等式都可以类似地化为条件最值问题来证明.

例题 21.4.4 求 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 的最大值, 其中 $x^2+y^2+z^2=6r^2(r>0)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. 且证明对任何正数 a,b,c, 有

$$ab^2c^3 \leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \tag{21.24}$$

分析 原问题等价于求 $u=xy^2z^3$ 的最大值, 这样做是因为对数函数在零点无定义, 而幂函数则不然, 因而可将约束条件化为 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. 注意到在边界上 u 取最小值. 故在 $D_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=6r^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$ 的内部一定有 u 的最大值点.

证 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2).$$

令

$$L_x=y^2z^3+2\lambda x=0, \tag{21.25}$$

$$L_y=2xyz^3+2\lambda y=0, \tag{21.26}$$

$$L_z=3xy^2z^2+2\lambda z=0, \tag{21.27}$$

$$x^2+y^2+z^2=6r^2. \tag{21.28}$$

在 (21.25)-(21.27) 两边分别乘以 x,y,z, 然后相加, 利用 (21.28) 得

$$xy^2z^3=-2\lambda r^2. \tag{21.29}$$

再将 (21.29) 代入 (21.25)-(21.27) 中, 明显地 $\lambda\neq 0$, 则

$$x=r,\ y=\sqrt{2}r,\ z=\sqrt{3}r,\ \lambda=-3\sqrt{3}r^4.$$

对应了惟一驻点, 于是 xy^2z^3 的最大值为 $6\sqrt{3}r^6$, 即

$$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}r^6.$$

两边平方得

$$x^2y^4z^6\leqslant 108r^{12}.$$

令 $a=x^2, y^2=b, z^2=c$, 则 $r^2=\dfrac{a+b+c}{6}$. 于是

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \quad \square$$

注 也可以用算术平均值-几何平均值不等式 (上册第 4 页) 证不等式 (21.24):

$$ab^2c^3=2^2\cdot 3^3\cdot a\left(\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{c}{3}\right)^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \tag{21.30}$$

21.4.3 隐函数的极值

求隐函数的极值有两种方法: 第一种方法是用隐函数求导, 称为直接法; 第二种是化为条件极值去做, 称为间接法. 下面的例子给出了求隐函数极值的这两种方法.

例题 21.4.5 求由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0 \tag{21.31}$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解 1 (直接法) 由 (21.31) 对隐函数 $z=z(x,y)$ 求导, 得

$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2y-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{21.32}$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+2x-2-4\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{21.33}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 则

$$2x+y-1=0, \quad y+x-1=0.$$

由此得驻点为 $(0,1)$, 将之代入 (21.31) 得

$$z^2-4z+3=0.$$

于是 $z_1=1$, $z_2=3$, 在 (21.32), (21.33) 两边求导, 得

$$4+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \tag{21.34}$$

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \tag{21.35}$$

$$2+2(\frac{\partial z}{\partial y})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{21.36}$$

在 (21.34)-(21.36) 中令 $(x,y,z)=(0,1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $A=z_{xx}=2$, $B=z_{xy}=1$, $C=z_{yy}=1$, 于是 $D=AC-B^2>0$. 故 $z=1$ 为极小值.

在 (21.34)-(21.36) 中令 $(x,y,z)=(0,1,3)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $A=z_{xx}=-2$, $B=z_{xy}=-1$, $C=z_{yy}=-1$, 于是 $D=AC-B^2>0$. 故 $z=3$ 为极大值.

解 2 以 (21.31) 为约束条件, 取目标函数 $f(x,y,z)=z$, 则 Lagrange 函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=z+\lambda(2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4).$$

令

$$L_x=4\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{21.37}$$

$$L_y=2\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{21.38}$$

$$L_z=1+2\lambda z-4\lambda=0. \tag{21.39}$$

显然 $\lambda \neq 0$, 于是由 (21.37) 和 (21.38) 得驻点为 $(0,1)$. 代入 (21.31) 得 $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. 再由 (21.39) 得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. 由于

$$L_{xx} = 4\lambda, \quad L_{yy} = L_{zz} = 2\lambda, \quad L_{xy} = 2\lambda, \quad L_{xz} = L_{yz} = 0,$$

于是 L 在 $(0,1,1)$ 与 $(0,1,3)$ 的 Hesse 矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

前者正定, 后者负定, 所以 $z = 1$ 为极小值, $z = 3$ 为极大值. □

21.4.4 练习题

1. 求 $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$ 在条件 $xyz = 1$ 下的极值.
2. 求 $u = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值.
3. 求 $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ 在条件 $x - y = \frac{\pi}{4}$ 下的极值.
4. 求 $f(x,y,z) = x^l y^m z^n$ 在条件 $ax + by + cz = k$ 下的极值, 常数和变量均正.
5. 求 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$ 下的极值, 其中 $a > b > c > 0$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
6. 设约束条件为 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, $x_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$, 而 $a > 0$ 为定值. 求 $u = x_1 x_2 \cdots x_n$ 的极值.
7. 求满足约束条件 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 时, $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ 的极值.
8. 若 $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1$, 求 $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 的极值, 其中 $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是常数, 变量 $x_1, \cdots, x_n$ 均大于 0.
9. 求 $u = x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ 中的最大最小值.
10. 求 $z = x^2 - xy + y^2$ 在 $|x| + |y| \leqslant 1$ 中的最大最小值.
11. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使其到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 距离的平方和最小.
12. 求点 $(-1, 0)$ 到半立方抛物线 $y^2 = x^3$ 的最短距离.
13. 在周长为定数的三角形中, 求面积为最大的三角形.
14. 分解正数 a 为 n 个因子, 使其倒数和最小.
15. 长为 a 的铁丝截成两段, 一段围成一个正方形, 另一段围成一个圆. 这两段各为多少时, 正方形与圆面积之和达最大值.
16. 过椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 上任意点作此椭圆的切线, 求切线与两坐标轴围成的三角形面积最小者.

17. 求原点到曲面 $(x-y)^2+z^2=1$ 的最短距离.

18. 求 $x^2-xy+y^2-z^2=1$ 与 $x^2+y^2=1$ 的交线到原点的最近距离.

19. 在圆外切三角形中, 求面积最小的三角形.

20. 设四边形各边长为定数, 求面积最大的四边形.

21. 在一个已知凸四边形内求一点 C, 使其到四个顶点距离的平方和最小.

22. 证明椭圆的内接三角形中, 面积达最大的三角形的一个顶点处的法线, 必定与此三角形的该顶点所对的边正交, 并求面积最大的内接三角形.

23. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点, 使到直线 $3x+4y=12$ 的距离最短.

24. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的任一切线与 x、y 轴分别交于 A,B 两点, 试求线段 AB 长度的最小值.

25. 在抛物线 $y=x^2$ 的所有与法线重合的弦中求长度最短的弦.

26. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 将圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 包围于其内. 试求 a,b 的值, 使符合上述条件的椭圆的面积为最小.

27. 设方程 $F(x,y)=0$ 满足隐函数定理的条件, 并由此确定了隐函数 $y=f(x)$, 又设 $F(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数.

    (1) 求 $f''(x)$;

    (2) 若 $F(x_0,y_0)=0$, $y_0=f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极值, 证明当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 同号时, $f(x_0)$ 为极大值, 当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 异号时, $f(x_0)$ 为极小值;

    (3) 对方程 $x^2+xy+y^2=27$ 在隐函数形式下(不解出 y), 求 $y=f(x)$ 的极值, 并用 (2) 的结论判别极大或极小.

28. 设 D 是由两抛物线 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$ 所围成的闭域, 试在 D 内求一椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, 使其面积为最大.

§21.5 高维 Rolle 定理

本节可看成多元微分学应用的一个例子, 主要材料取自美国数学月刊 102 卷 (1995) 243~249 页.

首先我们给出如下形式的 Rolle 定理.

命题 21.5.1 设函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭球 $\overline{B}(0;r)$ 上连续, 在它的边界上等于常值, 并且在开球 $B(0;r)$ 内可微, 则在球内至少有一个点是函数的临界点 (驻点), 即存在 $(x_1^*,\cdots,x_n^*)\in B(0;r)$, 使 $\nabla f(x_1^*,\cdots,x_n^*)=\mathbf{0}$.

证 如果 f 在 $\overline{B}(0;r)$ 上为常值, 结论显然. 如果 f 在 $\overline{B}(0;r)$ 上不为常值, 则至少有一个最值在内部取到. 因此这个最值点就是极值点, 从而为 f 的临界点(驻点). □

当 $n=2$ 时, 设 $z=f(x,y)$ 表示定义在闭圆盘 $\overline{B}(0;r)$ 上的连续可微曲面 Σ. 曲面在点 (x_0,y_0) 处的切平面的法方向是 $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\pm 1)$. 上述定理表明存在点 (x_0,y_0), 使该点的切平面的法方向是 $(0,0,\pm 1)$. 因而切平面平行于 Σ 的边界所在的平面 $z=c$, c 为常值.

下面考虑在 $B(0,r)\subset\mathbf{R}^n$ 上的可微映射 $\boldsymbol{F}$. 有如下形式的 Rolle 定理:

命题 21.5.2 设 $\boldsymbol{F}: B(0,r)\to\mathbf{R}^m$ 可微, 在闭球 $\overline{B}(0,r)$上连续, 且存在非零向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^m$ 使

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=0 \text{ 对任意 } \boldsymbol{x}\in\partial B(0,r) \text{ 成立,} \tag{21.40}$$

则存在 $\boldsymbol{\xi}\in B(0,r)$, 使对任意 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$ 都有

$$\boldsymbol{v}\cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{u}=0 \tag{21.41}$$

几何分析 在给出这个定理的证明之前, 先看一下它的几何含义是什么. 如果 $n=2, m=3$, 则 $\boldsymbol{F}$ 就表示定义在圆盘 $\overline{B}(0,r)$上的一个双参数曲面 Σ. 条件 (21.40) 表明这个曲面在边界位于以 $\boldsymbol{v}$ 为法向量的一个平面 Π 上(即法向量与平面的生成向量正交). 然后再分别取 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的标准基, 则 $\boldsymbol{\alpha}=J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}=J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_2$ 就是 $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 的两个线性无关的列向量, 因此

$$\boldsymbol{v}\cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_j=0,\quad j=1,2$$

表明 $\boldsymbol{v}$ 与该两个线性无关向量正交. 另一方面, 这两个向量正是过 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 的切平面 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 的生成向量. 因此, $\boldsymbol{v}$ 是 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 的法向量. 也就是说 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 与 Π 平行. 一个定义在圆盘上的双参数可微曲面, 如果它在边界上的点都位于一个平面 Π上, 则必可在圆盘内部找到一参量 $\boldsymbol{\xi}$, 使对应于 $\boldsymbol{\xi}$ 的曲面的点的切平面 $\Pi_{\boldsymbol{\xi}}$ 与 Π 平行.

命题 21.5.2 的证明 定义多元函数 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, 则 g 是 $B(0,r)$ 上的可微函数, 在 $\overline{B}(0,r)$ 上连续, 并且当 $\boldsymbol{x}\in\partial B(\boldsymbol{0},r)$ 时, $g(\boldsymbol{x})=0$. 因此 g 的最大值和最小值中至少有一个在开球 $B(0,r)$ 中的点 $\boldsymbol{\xi}$ 上取到. 从而 $\boldsymbol{\xi}$ 必为 g 的极值点, 因此 $\nabla g(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}$. 所以, $\forall\,\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$, 有 $\nabla g(\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{u}=0$, 即

$$\boldsymbol{v}\cdot J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=0.\quad\square$$

注 1 在命题 21.5.2 中, 开球 $B(0,r)$ 可换成任一个有界开区域.

注 2 在命题 21.5.2 中, 条件 (21.40) 可换成: $\exists\,\boldsymbol{x}_0\in B(0,r)$, 使

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)) \text{ 在 } \partial B(0,r) \text{ 上不变号.}$$

注 3 命题 21.5.2 有很多有趣的几何应用, 如本章第二组参考题 2, 3.

§21.6 对于教学的建议

21.6.1 学习要点

1. 在解有关几何的习题中, 许多学生惧怕 "方向", 如切向, 法向等, 到了曲线、曲面积分部分更是如此. 要从这一章起开始培养学生用数学分析处理空间问题的兴趣和信心.

2. Taylor 公式是微分学应用的基础, 多元函数也是如此. 用向量与矩阵的语言叙述和运用 Taylor 公式也许一上来要多费些时间, 但从长远来看是非常值得的.

3. 极值问题 (包括条件极值, 条件最值) 是本章的一个重点, 材料十分丰富, 我们在很多地方加进了自己的学习体会. 一些重要的应用问题如距离问题、面积问题和不等式等是研究生入学试题中的常客. 练习题 21.4.4 中许多习题选自实际试题, 可用于考研复习.

4. **对习题课的建议** 现在有一种不好的苗头是削减多元微积分的课时, 有些老师把多元微积分上成了单纯的 "计算" 课. 但实际上多元微积分中包含了极为丰富的数学思想和解题技巧. 它所体现的综合性, 空间性, 应用性也不可能被一元微积分所替代. 本章集中了多元微分学应用最重要的一些内容, 在习题课安排上要给予充分的时间保证, 让学生逐步形成使用微分学工具描述、处理多维问题的能力. 由于向量与矩阵是处理多维问题最基本的数学工具, 在训练中, 要有意识地引导学生使用这些工具. 可多举一些结合高等代数知识的例子.

   在解条件极值问题时, 除认真分析目标函数, 限制条件, 正确写出 Lagrange 函数外, 对如何快速准确地求出结果, 要注意两点. 下面以例题 21.4.2 为例说明:

   (1) 在令偏导数为 0, 解代数方程组求驻点时, 要充分利用方程组的特点. 在例题 21.4.2 中, (21.15)—(21.19) 是 5 个方程, 5 个未知量的方程组. 如果不充分利用方程组的特点, 是很难解出的. 一般来说首先像例题中那样得到表达式 (21.20);

   (2) 在解方程组 (21.15)—(21.19) 时, 不需要将全部 5 个未知量都解出. 事实上由 (21.20) 知只需要将 λ 求出即可.

21.6.2 参考题

第一组参考题

1. 曲面 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 确定, 其中 a,b,c 为常数. 证明:

   (1) 曲面的切平面经过定点 (a,b,c);

   (2) 函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

2. 在平面上给定一个边长为 a,b,c 的三角形, 在它上面可作无数个有相等的给定高 h 的三棱锥, 在其中求出有最小侧面积 S 的那一个.

3. 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数, 记 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦. 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}(\frac{\partial u}{\partial l})$.

4. 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数, $\boldsymbol{l}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$, $i=1,2,3$ 为三个互相垂直的单位向量, 证明

   (1) $\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

   (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

   (3) 若 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}=0$, $i=1,2,3$, 则 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中恒为常数.

5. 设 f 在 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subset\mathbf{R}^n$ 上连续, 在 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 可微, 证明:

   (1) 如果 $\forall \boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, 有 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})<0$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个极大值点;

   (2) 如果 $\forall \boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, 有 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})>0$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个极小值点.

6. 设 f 在 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subset\mathbf{R}^n$ 上二次连续可微, 且 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$, Hesse 矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right)$ 为正定阵. 证明: $\exists\delta\in(0,\delta_0)$, 使 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})>0\,\forall\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$.

7. 用条件极值的方法证明 Hölder 不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{1/q},$$

   其中 $a_i\geqslant 0$, $x_i\geqslant 0$, $i=1,\cdots,n$; $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

8. 证明二次型

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

   在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值与最小值恰好是矩阵

$$\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的最大特征值与最小特征值.

9. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵, 且设 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = H_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 其中 $H_1,\cdots,H_n$ 是 n 个确定的非负实数.

   (1) 证明: 如果矩阵 A 的行向量是 $\mathbf{R}^n$ 中两两正交的向量, 则 $(\det\boldsymbol{A})^2$ 取到极值;

   (2) 根据等式 $(\det\boldsymbol{A})^2=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 A^{T} 是矩阵 A 的转置矩阵, 证明: $\max\limits_{\boldsymbol{A}}(\det\boldsymbol{A})^2 = H_1\times\cdots\times H_n$;

   (3) 证明: 对任意的矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 有 Hadamard 不等式

$$(\det\boldsymbol{B})^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(b_{ij})^2\right);$$

   (4) 给 Hadamard 不等式以直观的几何解释.

10. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 上满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$, 则

    (1) 若在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)\geqslant 0$, 证明: 当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时, $u(x,y)\geqslant 0$;

    (2) 若在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 证明: 当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时, $u(x,y)>0$.

11. 对多元函数极值的充分性定理给出详细的证明.

12. 仿照 21.4.2 小节对具有多个约束条件的条件最值的确定给出详细的讨论.

第二组参考题

1. 设二次连续可微函数 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点的梯度为零向量, 但 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为非零矩阵. 证明 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的函数值增长最快的方向位于 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值对应的特征子空间中. 如最大特征值对应的特征子空间为一维空间, 则相应的方向就是 f 增长最快的方向.

2. 设 $\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲线段 L 的参数表达式为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[a,b].$$

   $\boldsymbol{P}(x(a),y(a),z(a))$, $\boldsymbol{Q}(x(b),y(b),z(b))$为 L 的起点与终点. Π 是通过直线段 $\boldsymbol{PQ}$ 的任一平面. 证明: $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使得向量 $(x'(\xi),y'(\xi),z'(\xi))$ 与 Π 平行.

3. (Sanderson 中值定理) 设 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbf{R}^m$ 为 k 次可微向量值函数, 并且非零向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}(a),\boldsymbol{f}(b)$ 及 $\boldsymbol{f}^{(j)}(a), j=1,2,\cdots,k-1$ 正交. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}^{(k)}(\xi)$ 正交. 其中 $\boldsymbol{f}^{(j)}$ 表示 $\boldsymbol{f}$ 的各个分量函数的 j 阶导数组成的向量.

4. 证明与曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1 \quad (abc\neq 0)$ 相切的三个互相垂直的平面的交点在球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 上.

5. 设曲面 $\Sigma:\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D$ 的每一点的法线与 z 轴相交, 其中 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的圆环或圆盘, f 是 C^1 函数. 证明 Σ 是一个旋转曲面.

6. 证明不等式

$$2ab\leqslant \mathrm{e}^{a-1}+a\ln a+\mathrm{e}^{b-1}+b\ln b$$

对所有 $a>0,\ b>0$ 成立. 并求出等式成立的充分必要条件.

7. 设 $\boldsymbol{T}:\ u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 是平面上的一个变换. 如果在该变换下任何两条相交曲线的交角保持不变, 则称该变换是**保角**的.

(1) 如果 φ 与 ψ 满足 $\varphi_x=\psi_y,\ \varphi_y=-\psi_x$, 则 $\boldsymbol{T}$ 是保角变换;

(2) 证明下面的反演变换是保角的

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2};$$

(3) 证明任一圆的反演保是另一圆或直线;

(4) 求出反演变换的 Jacobi 行列式;

(5) 证明连续可微变换 $\boldsymbol{T}$ 是保角的充要条件是它满足 Cauchy–Riemann 方程

$$\varphi_x=\psi_y,\ \varphi_y=-\psi_x \ \text{ 或 } \ \varphi_x=-\psi_y,\ \varphi_y=\psi_x.$$

第一种情况保持角度方向, 第二种情况角度反向.

8. 由公式

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \zeta=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

定义三维反演变换.

(1) 证明任何两个曲面之间的夹角在反演变换下不变;

(2) 证明球面被变换为球面或平面;

(3) 求变换的 Jacobi 行列式.

第二十二章 重积分

从本章开始进入多元函数积分学. 这一章主要介绍重积分 (含广义重积分) 及其在几何、物理和不等式证明中的应用.

本章分为六节. §22.1 和 §22.2 两节分别讲述二重积分的概念与计算. §22.3 节讨论三重积分与 n 重积分. §22.4 节是广义重积分. §22.5 节是重积分在几何、物理以及不等式证明中的应用. 最后一节是学习要点和参考题.

§22.1 二重积分的概念

22.1.1 二重积分的定义

在形式上与一元函数的定积分类似, 可对二元函数的重积分定义如下:

设二元函数 f 在可求面积的有界区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上定义, 如果存在极限

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i, \tag{22.1}$$

则称 f 在 D 上**可积**, 并称 (22.1) 为 f 在 D 上的**二重积分**, 记为 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

在 (22.1) 中, T 是 D 的任一分划, $\|T\|$ 为子区域的最大直径, σ_i 为第 i 个可求面积的子区域, $\Delta\sigma_i$ 为 σ_i 的面积, (ξ_i, η_i) 是 σ_i 中任一点.

在上述定义中有两点是要加以特别说明的. 第一, 怎样定义可求面积的区域? 如何定义分划 T 使子区域均可求面积? 第二, 为什么要用子区域的最大直径来刻画分划的模 $\|T\|$? 对子第二点比较容易理解. 因为如果用子区域的最大面积来刻画分划的模的话, 即使子区域的面积很小, 但在同一子区域的点可能相距很远. 因此 "以直代曲" 就不可能在一个小范围内实现. 对于第一点, 现行教科书中有两类解决的方案. 在一些教科书上是先考虑在矩形区域上的二重积分 (见 [36, 8] 等), 因而分划 T 自然是用直线网来实现. 把 D 分成有限个小矩形, (22.1) 式的含义也是很清楚的. 对子一般的区域 D 上函数 f 的二重积分, 通过 f 对 D 的特征函数

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{当 } (x,y) \in D \text{ 时,} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

来过渡. 第二类方案 (见 [25, 12, 28, 9] 等) 是先定义平面区域的面积. 一个平面区域 D **可求面积**是指 $\forall \varepsilon > 0$, 存在有限个矩形组成的多边形 Σ_1, Σ_2, 使 $\Sigma_1 \subset D \subset \Sigma_2$, 且使得 Σ_2 的面积 $-\ \Sigma_1$ 的面积 $< \varepsilon$. 又如果一条曲线可用有限个面积任意小的矩形覆盖, 则称这条曲线是**零面积**的. 平面区域 D 可求面积的

充要条件为边界 ∂D 是零面积的. 因此分划 T 是用有限条零面积的曲线网来实现的. 读者可参考相应的教科书对这个定义作进一步的理解.

22.1.2 可积函数类

先引进平面 $\mathbf{R}^2$ 内的零测度集 (参见上册 304 页关于一维零测度集的定义). 设 S 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个点集, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在可列个矩形 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots$, 使得

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \supset S$, 即矩形集 $\{\Delta_n\}$ 覆盖了 S,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \varepsilon$, 其中 $|\Delta_n|$ 为 Δ_n 的面积,

则称 S 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个**零测度集**. 注意零面积集必是零测度集, 但零测度集不一定是零面积集. 例如 $\mathbf{R}^2$ 中有理点全体组成的集是零测度集, 但不是零面积集.

与一元函数的定积分类似, 我们有如下可积充要条件 (参见上册 304 页的 Lebesgue 定理).

命题 22.1.1 设 D 为可求面积的有界闭区域, f 是定义在 D 上的有界函数, 则 f 在 D 上可积的充分必要条件是 f 在 D 上的所有不连续点的集合是一个零测度集.

命题 22.1.1 的证明可参见 [28] 等. 由命题 22.1.1 立得: D 上的连续函数是可积的; 只有至多可列个不连续点的有界函数是可积的; 甚至若有界函数 f 的所有不连续点组成 D 的有限条零测度的曲线, 则 f 也是可积的.

二重积分的性质与一元函数的定积分完全类似, 这里不再重复. 如不作特殊申明, 以下均假设 D 为可求面积的有界闭区域.

例题 22.1.1 设 l: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, 其中 φ, ψ 连续, 且至少其中之一有连续导数, 则曲线 l 的面积为零.

证 不妨设 $\varphi(t)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, ψ 有连续导函数. $\forall \varepsilon > 0$, 可作分割 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 使当 $s, t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 时有

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

令

$$a_j = \min_{t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j} \varphi(t), \quad b_j = \max_{t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j} \varphi(t).$$

则有

$$b_j - a_j \leqslant \varepsilon, \ \ j = 1, 2, \cdots, n,$$

又令

$$c_j=\min_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\psi(t),\quad d_j=\max_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\psi(t),\quad I_j=[a_j,b_j]\times[c_j,d_j],$$

于是当 $t\in[t_{j-1},t_j]$ 时 $(\varphi(t),\psi(t))\in I_j$, 故曲线 $l\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n}I_j$. 由于 $\psi'(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 所以

$$|\psi'(t)|<M,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

由微分中值定理得

$$d_j-c_j\leqslant M(t_j-t_{j-1}),\ \ j=1,2,\cdots,n,$$

因而

$$\sum_{j=1}^{n}|I_j|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\varepsilon M(t_j-t_{j-1})=\varepsilon M(\beta-\alpha),$$

其中 $|I_j|$ 表示矩形 I_j 的面积. 因为 ε 是任意的, 故曲线 l 的面积为零. □

注 在后面我们将要遇到的大多数区域 (如 x 型区域、y 型区域) 都是由有限条满足上例条件的曲线段所围成的, 因此这样的区域都是可求面积的.

例题 22.1.2 设有界非负函数 f 在区域 D 上可积, 证明

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \tag{22.2}$$

的充分必要条件是 f 在其连续点处的值均为零 (参见上册 333 页题 9).

证 先证必要性. 用反证法. 若不然, 存在 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0)\in D$, f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点连续, 且 $f(x_0,y_0)>0$, 由连续函数的局部保号性定理知存在 $\delta>0$, 使得

$$f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_0,y_0),\quad \forall\,(x,y)\in O_\delta(\boldsymbol{p}_0)\subset D.$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant\iint_{O_\delta(\boldsymbol{p}_0)}\frac{1}{2}f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\delta^2 f(x_0,y_0)>0,$$

与 (22.2) 矛盾.

再证充分性. 设 $f(x,y)$ 在其连续点处的函数值为 0. 对任意分划 T 中可求面积的小区域 σ_i, 如 $\Delta\sigma_i>0$, 则 σ_i 不是零测度集. 由可积充要条件知在每一个 σ_i 上至少有 f 的一个连续点, 记之为 (ξ_i,η_i), 作和数 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi,\eta_i)\Delta\sigma_i=0.$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=0.\quad\square$$

例题 22.1.3 设 D_R 是由 $x = R$, $y = 0$, $y = \dfrac{2}{R}x - 1$ 围成, 求

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R} \mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 在图 22.1 中作出了区域 D_R 的图形. 由于函数 $\mathrm{e}^{-x}\arctan\dfrac{y}{x}$ 在 D_R 上连续, 由积分中值定理, 存在 $(\xi,\eta)\in D_R$, 使得

$$\iint_{D_R} \mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi}\cdot|D_R| = \frac{R}{4}\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi},$$

其中 $\dfrac{R}{2}\leqslant\xi\leqslant R$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$. 于是当 $R\to+\infty$ 时

$$\left|\iint_{D_R} \mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{R}{4}\mathrm{e}^{-R/2}\arctan\frac{\eta}{\xi}\longrightarrow 0. \quad \square$$

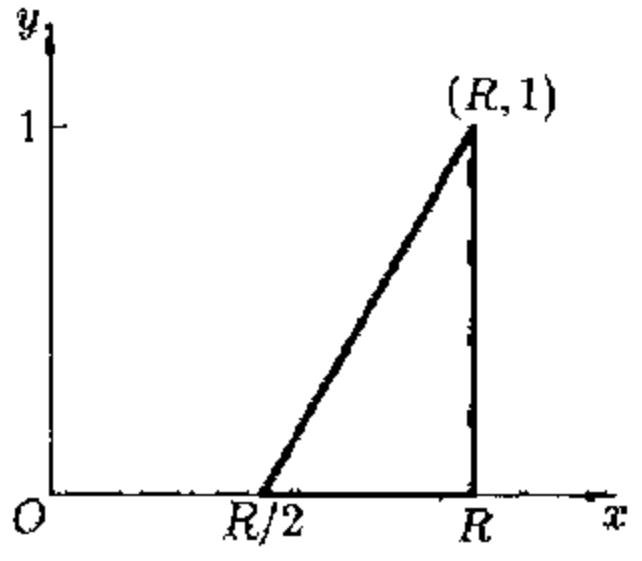


图 22.1

22.1.3 思考题

1. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 D 上可积, 证明 $f(x,y)g(x,y)$ 也在 D 上可积. 设 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且 $f(x,y)\neq 0$, 证明 $\dfrac{1}{f(x,y)}$ 也在 D 上可积.
2. 设 $u = u(x,y)$ 在 D 上可积, $f(u)$ 是 u 的连续函数, 证明 $f(u(x,y))$ 在 D 上可积. 如果 $f(u)$ 仅仅是 u 的可积函数, $f(u(x,y))$ 是否一定在 D 上可积?
3. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 D 上有界, 且在 D 上除了一个零面积集外处处相等, 证明 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上有相同的可积性, 可积时有相同的积分值. 如果 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上除了一个零测度集外处处相等, 情况又如何?
4. 如果 $f(x,y)$ 在 $\tilde{D}\subset D$ 上有界可积, 且 $D\setminus\tilde{D}$ 为零面积集. 我们可以认为 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且其积分值就取 $f(x,y)$ 在 $\tilde{D}$ 上的积分值. 讨论:

   (1) $f(x,y) = \sin\dfrac{1}{(x^2-1)^2+(y^2-1)^2}$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上;

   (2) $f(x,y) = \arctan\dfrac{1}{y-x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上

   的可积性.

22.1.4 练习题

1. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 都是 D 上的可积函数, 证明

$$h(x,y) = \max\{f(x,y), g(x,y)\}$$

也是 D 上的可积函数.

2. 设 $f(x,y)$ 在 $p_0(x_0,y_0)$ 的某邻域中连续, 求

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. 证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

4. 证明

$$\iint\limits_{D} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\ln 2\int_{1}^{2} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

其中 D 为 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ 在第一象限所围成的区域.

§22.2 二重积分的计算

22.2.1 矩形区域上的二重积分

矩形上的二重积分在一定条件下可以化为二次积分进行计算.

设 $f(x,y)$ 在矩形 $A=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对每个固定的 $x\in[a,b]$, 积分

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

由此可以看出, 若 $f(x,y)$ 在 A 上连续, 则两个二次积分是相等的 (都等于二重积分), 积分值与积分顺序无关. 但积分顺序不同时, 积分的难度可能相差很大. 请看下面的例子.

例题 22.2.1 设 $A=[0,1]\times[0,1]$, 求

$$I=\iint\limits_A \frac{y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

解 先对 y 后对 x 积分, 得到

$$\begin{aligned} I&=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\\ &=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

先对 x 后对 y 积分则得到

$$I=\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$=\int_0^1 y\Big(\frac{1}{1+y^2}\,\frac{x}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}\Big|_{x=0}^{x=1}\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)(2+y^2)^{1/2}}\qquad(\sqrt{2+y^2}=t)$$
$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.\quad\square$$

在 f 不满足可积或累次可积的条件时, 情况就比较复杂, 请看下面反例.

例题 22.2.2 设函数 f 定义在 $A=[0,1]\times[0,1]$ 上,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\\ 2y, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\end{cases}$$

则 (1) f 在 A 上不可积;

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在, $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 不存在.

证 (1) $\forall y\in[0,1]$, $y\neq\frac{1}{2}$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[0,1]$ 上处处不连续, 所以 $f(x,y)$ 在 A 上的 $y\neq\frac{1}{2}$ 的每点处都不连续. 于是 f 在 A 上不可积.

(2) 由于

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1\mathrm{d}y=1, & \text{当 } x \text{ 为无理数},\\ \int_0^1 2y\,\mathrm{d}y=1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\end{cases}$$

所以

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x=1.$$

另一方面, 对 $\forall y\in[0,1]$, $y\neq\frac{1}{2}$, $f(x,y)$ 作为 x 的一元函数, 在 $[0,1]$ 上每一点都不连续, 于是 $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对每个 $y\neq\frac{1}{2}$ 都不存在, 从而

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

不存在. $\square$

类似地, 也有二重积分存在, 但两个二次积分不存在以及两个二次积分存在且相等, 但二重积分不存在的例子.

22.2.2 一般区域上的二重积分

设 f 是区域 D 上的可积函数, 又设 D 可以表示为 **x 型区域**:

$$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为 x 的函数, 且对每一个固定的 $x\in[a,b]$, 积分

$$\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 f 在 D 上的二重积分可化为先对 y 后对 x 的积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

同样地, 如果区域 D 可以表示为 **y 型区域**

$$D=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

其中 $x_1(y)$, $x_2(y)$ 为 y 的函数, 且对每一个固定的 $y\in[a,b]$, 积分

$$\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

存在, 则 $\psi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 并且

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

对于一般区域, 如区域可分成若干个不相交的 x 型区域和 y 型区域的并, 则可先分别计算这些区域上积分的值, 然后通过积分的区域可加性求原积分的值.

在具体计算时, 应根据积分区域和被积函数的情况, 以方便计算为原则, 权衡利弊, 决定采用哪种积分区域的分解与积分顺序. 画出积分区域的草图往往有助于做出正确的选择.

例题 22.2.3 设区域 $D=\{(x,y)\mid 2y\leqslant x^2+y^2\leqslant 4y, x\geqslant 0\}$. 分别将 D 表示为 x 型区域和 y 型区域.

解 (1) 表示为 x 型区域, D 可分为三块 (见图 22.2), 其中

$$D_1=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 1-\sqrt{1-x^2},\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2},\end{cases}$$

$$D_3=\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2}.\end{cases}$$

(2) 表示为 y 型区域, D 可分为两块 (见图 22.3), 其中

$$E_1=\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 2,\\ \sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{4y-y^2},\end{cases}\qquad E_2=\begin{cases}2\leqslant y\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{4y-y^2}.\end{cases}\qquad\square$$

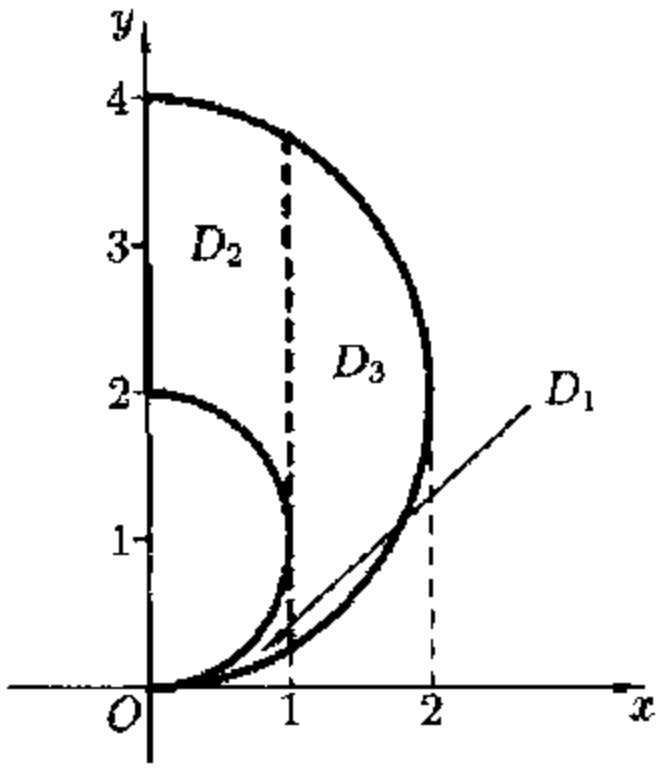


图 22.2

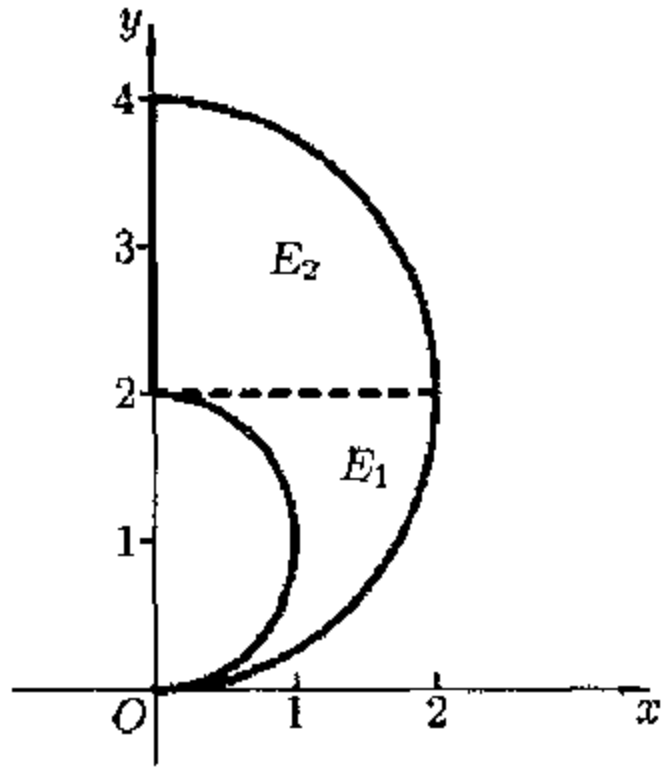


图 22.3

当 $f(x,y)$ 中含有 x^2+y^2 项或 D 的边界表达式中有 x^2+y^2 项, 则可利用

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\tag{22.3}$$

先化为极坐标下的二重积分, 然后化为关于 r 和 θ 的二次积分去求解.

例题 22.2.4 将例题 22.2.3 中的区域 D 分解为 θ 型区域与 r 型区域.

解 在极坐标系中, D 的边界

$$x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y,\ x=0$$

分别为

$$r=2\sin\theta,\ r=4\sin\theta,\ \theta=\frac{\pi}{2}.$$

于是表示为 θ 型区域是

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 2\sin\theta\leqslant r\leqslant 4\sin\theta;$$

表示为 r 型区域为 (见图 22.4):

$$D_1=\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 2,\\ \arcsin\dfrac{r}{4}\leqslant\theta\leqslant\arcsin\dfrac{r}{2},\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}2\leqslant r\leqslant 4,\\ \arcsin\dfrac{r}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\qquad\square$$

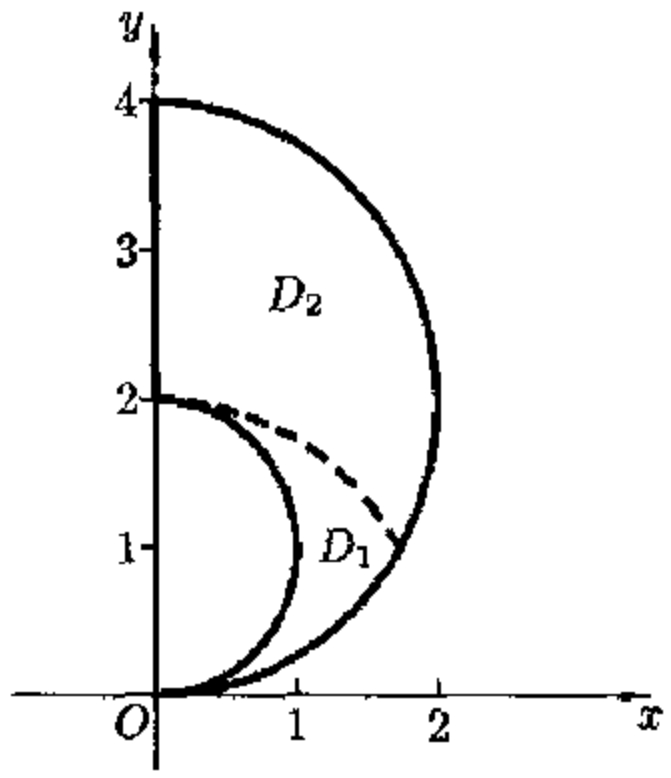


图 22.4

例题 22.2.5 求 $\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\ |y|\leqslant R}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 记

$$I_R = \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\ |y|\leqslant R}} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$C_R = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则 $C_R \leqslant I_R \leqslant C_{2R}$, 且

$$C_R = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^{R^2} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}-R^2\mathrm{e}^{-R^2}) \longrightarrow \pi \quad (R\to+\infty).$$

同理可证 $C_{2R}\to\pi$ $(R\to+\infty)$. 于是

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = \pi. \quad \square$$

例题 22.2.6 作极坐标变换, 将二重积分

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

化为定积分, 其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4} f(r)r\,\mathrm{d}\varphi + \int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\arccos(1/r)}^{\pi/4} f(r)r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 f(r)r\,\mathrm{d}r + \int_1^{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r})f(r)r\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} f(r)r\,\mathrm{d}r - \int_1^{\sqrt{2}}\arccos\frac{1}{r}f(r)r\,\mathrm{d}r. \quad \square$$

22.2.3 二重积分的变量替换

极坐标变换 (见(22.3)式) 是一种特殊的变量替换, 下面是一般的变量替换定理. 设

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad (u,v)\in D',$$

这一代换满足:

(1) 建立了 D 与 D' 之间的一一对应;

(2) x,y 在 D' 内具有关于各个变元的连续偏导数, 并且其逆变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在 D 内也具有关于各个变元的连续偏导数;

(3) 代换的 Jacobi 行列式 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 D' 内无零点 (称这代换为正则), 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{22.4}$$

回忆一下 (一元) 定积分的变量替换公式, 容易看出公式 (22.4) 是定积分的变量替换公式的推广. 定理的证明要比一元情况复杂得多, 请参考相应的教科书.

例题 22.2.7 求由曲线 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 所围的面积.

解 应用广义极坐标变换

$$x=a\rho\cos\theta,\quad y=b\rho\sin\theta,$$

则 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=ab\rho$, 所围成积分区域的曲线变为 $\rho^2=\cos 2\theta$ (双纽线), 于是所求的面积

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} ab\rho\,\mathrm{d}\rho=ab.\quad\square$$

例题 22.2.8 求 $\iint\limits_D\left(\sqrt{\dfrac{x-c}{a}}+\sqrt{\dfrac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $\sqrt{\dfrac{x-c}{a}}+\sqrt{\dfrac{y-c}{b}}=1$ 和 $x=c$, $y=c$ 所围成, 并且 $a,b,c>0$.

解 见图 22.5, 被积函数与积分区域的部分边界具有相同的形式, 因此要设法把被积函数表达式化成简单的形式.

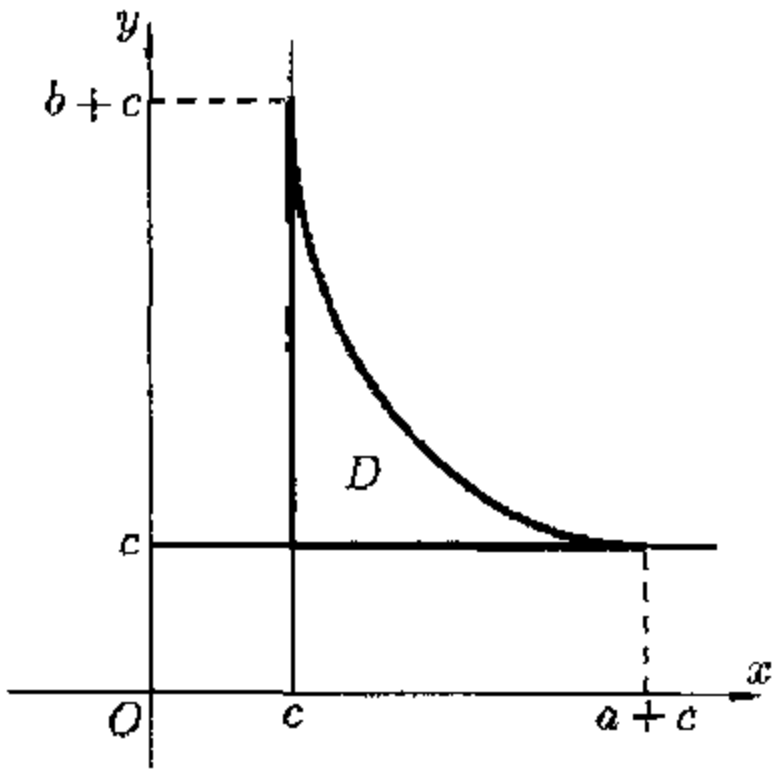


图 22.5

令

$$x=c+a\rho\cos^4\theta,\quad y=c+b\rho\sin^4\theta,$$

则

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

而积分区域变为 $\{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant 1\}$, 于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\rho}\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{2ab}{15}.\quad\square\end{aligned}$$

注 一般而言, 广义极坐标变换

$$x=\frac{1}{a}(c+r^{\frac{1}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta),\quad y=\frac{1}{b}(d+r^{\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta),$$

能把 $(ax-c)^p+(by-d)^p$ 变为 r, 但其中的 r, θ 一般不再具有通常的极径, 极角的意义.

例题 22.2.9 求 $I=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 围成.

解 积分区域如图 22.6, 作变换

$$u=x+y,\quad v=y,$$

则变换后的积分区域为

$$4\leqslant u\leqslant 12,$$

$$-1-\sqrt{2u+1}\leqslant v\leqslant -1+\sqrt{2u+1},$$

且 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$. 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_4^{12}u\,\mathrm{d}u\int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}}\mathrm{d}v\\&=\int_4^{12}2u\sqrt{2u+1}\,\mathrm{d}u\quad(\sqrt{2u+1}=t)\\&=\int_3^5(t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t=\frac{8\,156}{15}.\end{aligned}$$

□

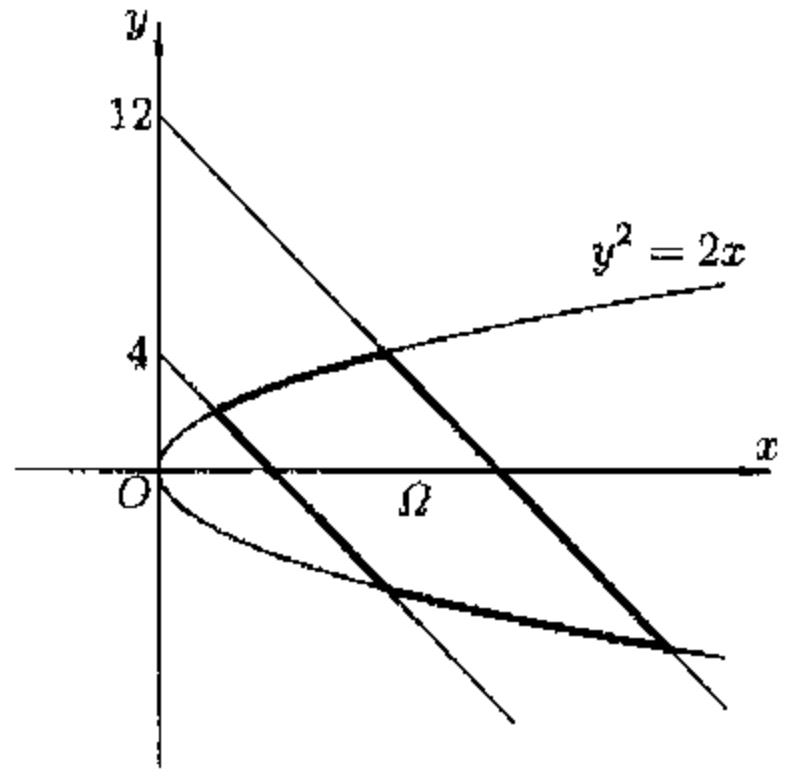


图 22.6

函数的奇偶性和积分区域的对称性常可用来简化积分的计算, 如

1. 积分区域 D 关于 x 轴对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D\cap\{y\geqslant 0\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. 积分区域 D 关于 y 轴对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(-x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(-x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D\cap\{x\geqslant 0\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3. 若 D 关于原点对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(-x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(-x,-y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D_1 是区域 D 的一半.

22.2.4 练习题

1. 试把累次积分

$$I=\int_0^{R/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}x\int_0^{Rx}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

改写为先对 x 后对 y 的累次积分形式.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. D 由 $y=\pi-x$, $x=\pi$, $y=\pi$ 围成, 求 $\iint\limits_D\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. D 由 $y=0$, $y=x^2$, $x+y=2$ 围成的第一象限的部分, 求 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

5. 求由 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), z=x^2-y^2, z=0$ 围成之立体的体积.

6. 设 D 是由 $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=px$, $y^2=qx$ 所围成的区域, 其中 $0<a<b, 0<p<q$, 求 $\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin xy}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

7. 证明 $\int_a^b\mathrm{d}y\int_a^y(y-x)^n f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}\int_a^b(b-x)^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

8. 设 D 是第一象限内由 y 轴及两个圆 $x^2+y^2=a^2, x^2-2ax+y^2=0$ 所围成的区域, 求 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

9. 求由四条直线 $x+y=p$, $x+y=q$, $y=ax$, $y=bx$ $(0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的图形的面积.

10. 求由曲线 $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$ 与直线 $x=0$, $y=0$ 所围成图形的面积.

11. 求 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid |y|\leqslant|x|\leqslant 1\}$.

12. 求 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $xy=1, x^2+y^2=4$ 围成.

13. 给定积分 $I=\iint\limits_D\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 作正则变换 $x=x(u,v), y=y(u,v)$, 区域 D 变为 Ω, 如果变换满足

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},$$

证明

$$I=\iint\limits_\Omega\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

14. 求积分

$$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x.$$

15. 证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (\sqrt{|xy|}+|xy|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{3}{2}.$$

16. 计算二重积分

$$I=\iint\limits_D |x-y^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$.

17. 求 $\iint\limits_D \ln\frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $y=x$, $y=1$, $x=2$ 围成的三角形.

§22.3 三重积分, n 重积分

三重积分的定义与二重积分类似, 这里不再重复.

22.3.1 三重积分在直角坐标系中的计算

1. 先一后二: 即先做一次关于某个变量的单积分, 然后做关于另外两个变量的二重积分.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界区域, 假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界相交不多于两点. 把 Ω 投影到 x,y 平面上, 得一平面闭区域 D, 即 (见图 22.7):

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\},$$

其中 $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ 在 D 上连续. 如果 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界可积, 且对任意 $(x,y)\in D$, $f(x,y,z)$ 作为 z 的函数在 $[z_1(x,y),z_2(x,y)]$ 上可积, 则

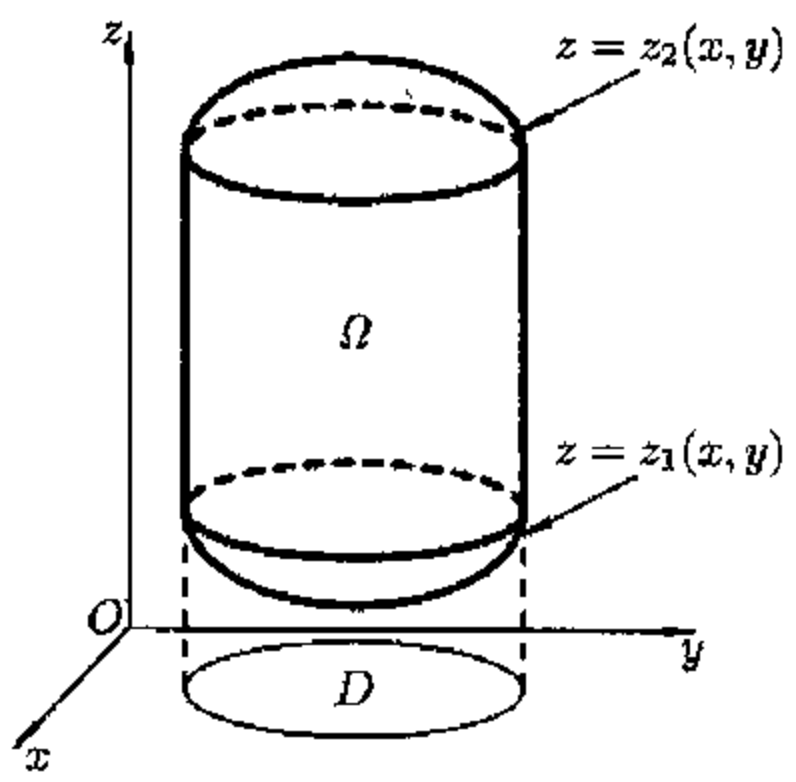


图 22.7

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

此种积分方法称为 "先一后二".

2. 先二后一: 即先作关于某两个变量的二重积分, 然后做关于另一个变量的单积分. 这种积分方法对区域没有任何特殊要求. 设

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant z\leqslant b,(x,y)\in D(z)\},$$

其中 $D(z)$ 是 x,y 平面上随 z 连续变化的有界闭区域. 如果 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界可积, 对任意 $z\in[a,b]$, $f(x,y,z)$ 作为 x,y 的函数在 $D(z)$ 上可积, 则

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

对这个公式可这样来理解: 把 Ω 看作是一个物质立体, $f(x,y,z)$ 为物质在 Ω 上的分布密度, 那么上式左端的三重积分就是物质立体的质量. 而上式右端则表明先把立体切成薄片, 再把所有薄片的质量积累起来.

当然, 我们不一定非固定 z 而先做关于 x,y 的二重积分不可, 也可根据被积函数的具体情况和积分域的构成, 把 y (或 x) 固定而先做关于 z,x (或 y,z) 的二重积分.

例题 22.3.1 求积分

$$I=\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为两个球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分.

解 先画出积分区域, 如图 22.8.

综合被积函数和积分区域, 可把积分视成在 $z\in[0,R]$ 上一系列带权 z^2 的小薄片的求和. 根据积分区域 Ω 的构成情况, 可将 Ω 分成两个子区域 Ω_1 与 Ω_2.

$$\Omega_1:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz,\\ 0\leqslant z\leqslant\dfrac{R}{2},\end{cases}$$

$$\Omega_2:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\\ \dfrac{R}{2}\leqslant z\leqslant R,\end{cases}$$

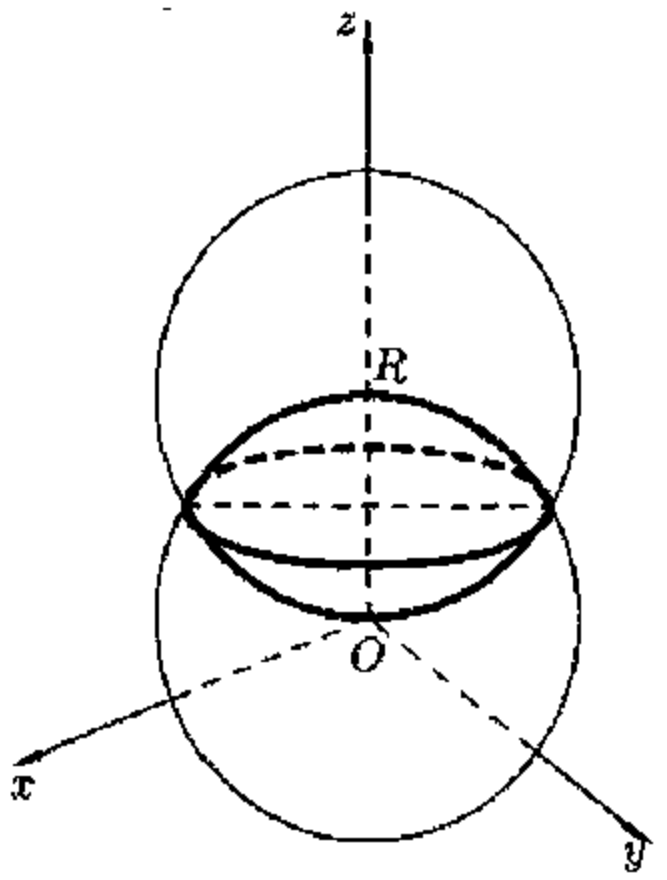


图 22.8

当 $z\in[0,\frac{R}{2}]$ 时, 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 可得到薄片面积为 $\pi(2Rz-z^2)$;

当 $z\in[\frac{R}{2},R]$ 时, 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 可得到薄片面积为 $\pi(R^2-z^2)$. 所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{R/2}\pi z^2(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z+\int_{R/2}^{R}\pi z^2(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z\\&=\left(\frac{1}{2}\pi Rz^4-\frac{1}{5}\pi z^5\right)\Big|_0^{R/2}+\left(\frac{1}{3}\pi R^2z^3-\frac{1}{5}\pi z^5\right)\Big|_{R/2}^{R}=\frac{59}{480}\pi R^5.\end{aligned}$$

□

22.3.2 三重积分的变量替换

类似于二重积分的变量替换, 有如下三重积分变量替换定理. 设

$$x = x(u,v,w),\ \ y = y(u,v,w),\ \ z = z(u,v,w),\quad (u,v,w) \in \Omega'.$$

这一代换满足:

(1) 建立了 Ω 与 Ω' 之间的一一对应;

(2) x,y,z 在 Ω' 内关于各个变元有连续偏导数, 并且逆变换 $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$ 在 Ω 内也关于各个变元有连续偏导数;

(3) 代换的 Jacobi 行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ 在 Ω' 内没有零点, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

常用的三重积分变换有

柱坐标变换

$$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta,\ \ z = z,$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty.$$

空间直角坐标系下的三重积分与柱坐标系下的三重积分的关系是

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

如果积分区域为柱形或被积函数中含有 x^2+y^2 项, 则往往将积分在柱坐标系中计算. 在计算时, 常常是把三重积分化为对 z 的单积分与关于 ρ,θ 的二重积分来计算, 至于是 "先一后二", 还是 "先二后一", 那要看具体情况.

我们可以看出, 柱坐标变换就是 z 不变, 而将 x,y 用极坐标变换. 在二重积分中我们曾提到广义极坐标变换, 因此对应过来也有广义柱坐标变换.

球坐标变换

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\varphi,$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty,\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

空间直角坐标系下的三重积分与球坐标系下的三重积分的关系是

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

注 利用球坐标系计算三重积分, 一般说来适用于积分区域是球心在原点或过原点而球心在坐标轴上的球体, 顶点在原点以坐标轴为旋转轴的圆锥体以及被积函数中出现 $x^2+y^2+z^2$ 的三重积分.

使用球坐标时对 ρ, θ, φ 的几何意义要十分清楚. 比如在我们上面给出的球坐标变换下, ρ 是球半径 ($0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$), θ 是转动角 ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), φ 是仰角 (与 z 轴正向的夹角, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$). 在有的教科书上给出了几种不同的球坐标系, 建议

只取一种记忆, 以免混淆. 此外对应于二重积分的广义极坐标变换, 也有广义球坐标变换.

22.3.3 例题

例题 22.3.2 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为由 $x=0, x=1, x^2+1=\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}$ 所围成.

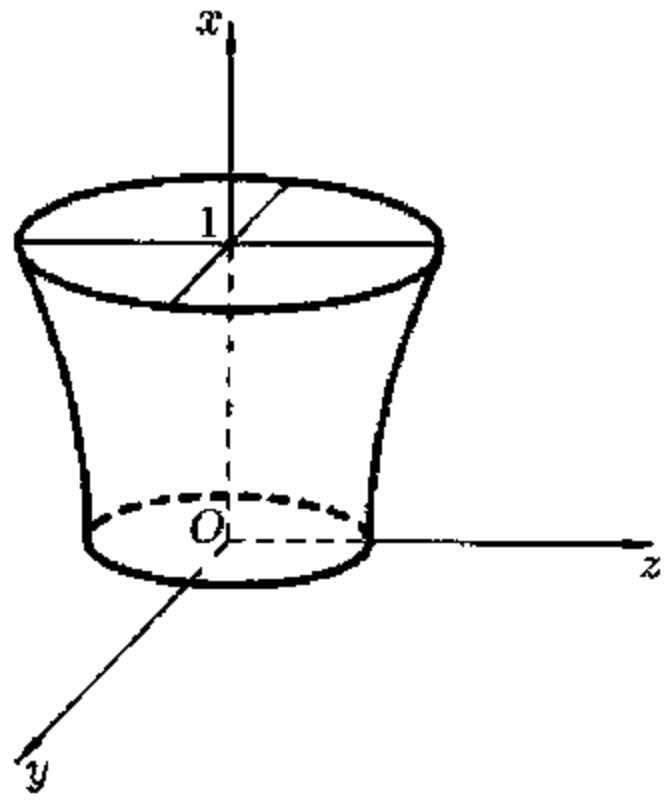


图 22.9

解 由积分区域 (见图 22.9) 的构成宜采用 "先二后一" 的积分次序.

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x \iint\limits_{D(x)}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $D(x)=\{\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leqslant 1+x^2\}$.

对于二重积分 $\iint\limits_{D(x)} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 由于 $D(x)$ 在 yOz 平面上的投影关于原点对称, 且 $f(y,z)=y=-f(-y,-z)$. 由 22.2.3 节中最后一部分关于简化积分的说明知 $\iint\limits_{D(x)} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$, 面

$$\iint\limits_{D(x)} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi abx(1+x^2).$$

于是

$$I=\pi ab\int_0^1 x(1+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\pi ab. \quad \square$$

例题 22.3.3 计算积分

$$H=\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}}\frac{xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}},\quad \text{其中 } a>b>c>0.$$

解 在球坐标下

$$H=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{r^4\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}}.$$

令 $\sin^2\varphi=u$, $\sin^2\theta=v$, 则

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\int_0^R r^4\frac{u\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{a^2u(1-v)+b^2uv+c^2(1-u)}}\\
&= \frac{1}{20}R^5\int_0^1 u\,\mathrm{d}u\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}}\\
&= \frac{1}{20}R^5\int_0^1\left\{\frac{2}{(b^2-a^2)u}\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}\right\}\Bigg|_{v=0}^{v=1}u\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\int_0^1\left\{\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)u}-\sqrt{c^2+(a^2-c^2)u}\right\}\mathrm{d}u\\
&= \frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\left\{\frac{2}{3(b^2-c^2)}[c^2+(b^2-c^2)u]^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3(a^2-c^2)}[c^2+(a^2-c^2)u]^{\frac{3}{2}}\right\}\Bigg|_0^1\\
&= \frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\left[\frac{2}{3(b^2-c^2)}(b^3-c^3)-\frac{2}{3(a^2-c^2)}(a^3-c^3)\right]\\
&= \frac{R^5}{15}\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2+bc+c^2}{b+c}-\frac{a^2+ac+c^2}{a+c}\right)\\
&= \frac{R^5}{15}\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\quad\square
\end{aligned}
$$

例题 22.3.4 设 $H(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$, 其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶正定对称阵. 求

$$
I=\iiint\limits_{H(x)\leqslant 1}\mathrm{e}^{\sqrt{H(x)}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.
$$

解 存在 3 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$
\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},
$$

其中 $\lambda_i>0, i=1,2,3$. 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 这里 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^3$, 则

$$
H(\boldsymbol{x})=H(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2
$$

且变换的 Jacobi 行列式 $\det\boldsymbol{P}\equiv 1$. 从而

$$
I=\iiint\limits_{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2}}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3.
$$

令

$$
\begin{aligned}
&y_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}r\sin\varphi\cos\theta,\quad y_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}r\sin\varphi\sin\theta,\\
&y_3=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}r\cos\varphi,
\end{aligned}
$$

则

$$I = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2 \mathrm{e}^r \sin\varphi \,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_0^1 r^2\mathrm{e}^r \,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}(\mathrm{e}-2).$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 所以

$$I = \frac{4\pi}{\sqrt{\det\boldsymbol{A}}}(\mathrm{e}-2). \quad \square$$

注 正交变换是一种很有用的坐标变换. 它的特点是刚体变换, 仅仅旋转坐标轴, 保持区域体积不变. 特别是保持单位球不变.

22.3.4 n 重积分

以四重积分为例, 按照三重积分的思路, 可以采用 "先一后三" 或者 "先三后一" 或者 "先二后二" 的积分次序, 而对于其中的 "三" 或者 "二", 则采用三重积分或者二重积分化累次积分的方法. 也可以用四维的变量替换.

例题 22.3.5 求四维空间中的单位球

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant a^2$$

的体积 V.

解 用四维空间中的球坐标变换

$$x = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\theta, \tag{22.5}$$
$$z = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \qquad t = r\cos\varphi_1, \tag{22.6}$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_1,\ \varphi_2 \leqslant \pi$. 则

$$\left|\frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(r,\varphi_1,\varphi_2,\theta)}\right| = r^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2.$$

于是

$$V = \iiiint\limits_{x^2+y^2+z^2+t^2\leqslant a^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi_2\int_0^{a} r^3\sin^2\varphi_1\sin\varphi_2\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi a^4}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2 = \frac{\pi^2 a^4}{2}. \quad \square$$

22.3.5 练习题

1. 计算积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-z-x}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}y.$$

2. 将累次积分

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 \mathrm{d}y \int_0^x f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

化为在柱坐标系下的累次积分.

3. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲线 $y^2=2z$, $x=0$ 绕 z 轴旋转而成的曲面, 平面 $z=2$ 与平面 $z=8$ 所围成的区域.

4. 求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant 4$ 的公共部分, 且 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

5. 求 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{r}$, 其中 Ω 为一半径为 R 的球, r 为球外一固定点到球域内任一点的距离.

6. 计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 与平面 $z=0$ 所围成, 曲面在上方, 平面在下方.

7. 求

$$\iiiint\limits_{\substack{x,y,z,u\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2+u^2\leqslant 1}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u.$$

8. 设

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 f 为连续函数, $f(1)=1$. 证明 $F'(1)=4\pi$.

9. 设 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 由 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16$ 所确定, 试计算函数 f 关于 Ω 的积分平均值

$$\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的体积.

10. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$, $z=0$, $xy=1$, $xy=2$, $y=3x$, $y=4x$ 所围成, 求积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

11. 利用正交变换计算三重积分 $\iiint\limits_{V}\cos(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. 其中 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, a,b,c 是不全为零的常数.

§22.4 广义重积分

22.4.1 广义重积分的定义

与第十二章类似, 对于重积分, 也可作两方面的推广: 无界区域上的积分和无界函数的积分. 我们仅考虑 $\mathbf{R}^2$ 的情况, 其结论很容易推广到 $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ 中去.

先考虑无界区域上的广义二重积分.

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域, 其边界由有限条光滑或逐段光滑曲线组成. 函数 f 定义在 D 上, 且在 D 的任何可求面积的有界子区域上可积. 设 D_r 是 D 的任一可求面积的有界子区域, 包含 $D \cap B_r$, 其中 B_r 是 $\mathbf{R}^2$ 中以 r 为半径的闭圆盘. 若极限

$$I = \lim_{r \to \infty} \iint\limits_{D_r} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在, 有限, 且与 D_r 的取法无关, 则称 f 在 D 上的 (广义) **积分收敛**, 或者称 f 在 D 上**广义可积**. 否则称 f 在 D 上的 (广义) **积分发散**. 极限值 I 称为 f 在 D 上的**广义积分的值**, 记为 $\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

如果函数 f 非负, 且在 D 上的任何可求面积的有界子区域上可积, D_n 是包含 $D \cap B_n$, $n = 1, 2, \cdots$ 的一列可求面积的有界子区域, 则 f 在 D 上可积的充要条件是

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{D_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在. 这个条件也相当于

$$\sup_n \iint\limits_{D_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

无界函数在有界区域上的广义二重积分可定义如下:

设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的可求面积的有界区域, 点 $\boldsymbol{p}_0 \in D$, 函数 f 定义在 $D \setminus \{\boldsymbol{p}_0\}$ 上, 且对任何 $\boldsymbol{p}_0$ 点的可求面积的邻域 Δ, f 在 $D \setminus \Delta$ 上有界可积. 如果

$$I = \lim_{d(\Delta) \to 0} \iint\limits_{D \setminus \Delta} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在, 有限, 且与 Δ 的取法无关, 其中 $d(\Delta)$ 是 Δ 的直径, 则称 f 在 D 上的 (广义) **积分收敛**, 或者称 f 在 D 上 **广义可积**. 否则称 f 在 D 上的 (广义) **积分发散**. 极限值 I 称为 f 在 D 上的**广义积分的值**, 记为 $\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

注 在上述定义中, 函数 f 在 D 内有一个奇点可改为在 D 内有一条奇线 γ, 即曲线 γ 上每一点都是 f 的奇点. 设 D_l 是任意可以将 γ 围起来的可求面积区

域, 设 f 在 $D\setminus D_l$ 中可积. 令 D_l 收缩为 γ, 记为 $D_l\to\gamma$, 如果极限

$$\lim_{D_l\to\gamma}\iint\limits_{D\setminus D_l} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在, 有限, 且与 D_l 的取法无关, 则称 f 在 D 上可积. 设 l 为 D_l 的边界, 其中 D_l 收缩为 γ 可理解为

$$\sup_{x\in l}\operatorname{dist}\{x,\gamma\}\to 0.$$

对于非负函数, 也有与有界区域上广义重积分类似的可积充要条件.

22.4.2 收敛性判别法

由上节关于非负函数可积的充要条件, 我们可以得到如下收敛性判别法:

比较判别法 设 D 为无界区域, 其边界由有限条光滑或逐段光滑曲线组成. 函数 f,g 在 D 上有定义, 对于 D 的任一可求面积的有界子区域 D_r, f,g 均在 D_r 上有界可积, 如果 g 非负, 且

$$|f(x,y)|\leqslant g(x,y),\quad \forall (x,y)\in D.$$

则当 g 在 D 上 (广义) 可积时, f 也在 D 上 (广义) 可积. 反之, 如果

$$|f(x,y)|\geqslant g(x,y),\quad \forall (x,y)\in D,$$

则当 g 在 D 上的广义积分发散时, f 在 D 上的广义积分也发散.

记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 并取 $g(x,y)=\dfrac{C}{r^p}$, C 为常数, 由上述比较判别法可得如下判别法:

Cauchy 判别法 设 D 为无界区域, 其边界由有限条光滑或逐段光滑曲线组成, f 在D 的任一可求面积的有界子区域上可积, 则

(1) 如果对充分大的 r, 有

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{C}{r^p},\quad p>2,$$

则广义积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 收敛.

(2) 如果 D 内含有一个顶点在原点的无限扇形: $D'=\{\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r\geqslant r_0\}$, 且在 D' 上,

$$|f(x,y)|\geqslant\frac{C}{r^p},\quad p\leqslant 2,$$

则广义积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 发散.

与一元函数在无限区间上的广义积分不同, 广义重积分的收敛性判别有一个重要特点: 积分的收敛与绝对收敛是等价的. 证明可见 [9, 19] 等.

对于无界函数在有界区域上的广义二重积分, 讨论是类似的.

22.4.3 例题

例题 22.4.1 计算 $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 并求 Poisson 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 被积函数为 e^{-r^2}. 当 $r \to +\infty$ 时, 它比任何 $\frac{1}{r^p}$ $(p > 2)$ 都更快地趋于零, 所以广义二重积分是收敛的.

取同心圆族

$$\Omega_\rho = \{x^2 + y^2 \leqslant \rho^2\},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{\rho\to+\infty} \iint\limits_{\Omega_\rho} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\rho\to+\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\rho} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \lim_{\rho\to+\infty} \pi(1-\mathrm{e}^{-\rho^2}) = \pi.\end{aligned}$$

在上述计算中, 如果取正方形族

$$\Omega_l = \{-l \leqslant x \leqslant l, -l \leqslant y \leqslant l\},$$

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{l\to+\infty} \iint\limits_{\Omega_l} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{l\to+\infty} \left\{\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right\} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right\}^2.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}. \quad \square$$

注 Poisson 积分中 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, Poisson 敏锐地观察到极坐标下二重积分有因子 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, 由此出发他给出了上述巧妙的算法①.

例题 22.4.2 讨论广义重积分

$$I = \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p}$$

的收敛性, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$. 当积分收敛时, 求积分的值.

解 由于被积函数恒正, 因此可以取任一列趋于 D 的有界区域列, 使得积分容易计算, 为此取

$$D_n = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant x+y \leqslant n\},$$

① Poisson 积分也称为 Euler-Poisson 积分. 该积分的其他计算方法在前面已有介绍, 参见上册 392 页例题 12.3.7, 第十六章例题 16.1.2.

则

$$I_n = \iint\limits_{D_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p}.$$

作变量替换 $x = u, x+y = v$, 则

$$I_n = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_1^n \frac{\mathrm{d}v}{v^p} = \frac{1}{1-p}(n^{1-p}-1).$$

从而当 $p > 1$ 时, 积分收敛, 且

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^p} = \frac{1}{p-1}. \quad \square$$

注 如果取

$$D_n = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1,\ y \leqslant n\},$$

则计算要复杂得多.

例题 22.4.3 证明广义二重积分

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 1\\ y\geqslant 1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

发散.

证 我们将证明在无限扇形 $D' = \{(x,y) \mid 2y \leqslant x \leqslant 3y, x \geqslant 1, y \geqslant 1\}$ 上

$$\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \geqslant \frac{C}{r^2},$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}, C$ 为正常数. 事实上当 $2y \leqslant x \leqslant 3y$ 时,

$$4y^2 \leqslant x^2 \leqslant 9y^2, \quad 3y^2 \leqslant x^2-y^2 \leqslant 8y^2, \quad 5y^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 10y^2,$$

从而

$$x^2-y^2 \geqslant 3y^2 = \frac{3}{10}\cdot 10y^2 \geqslant \frac{3}{10}(x^2+y^2).$$

于是

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \geqslant \frac{3}{10r^2},$$

所以原广义二重积分发散. $\square$

22.4.4 练习题

1. 讨论下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$;

(3) $\iint\limits_{x+y\geqslant 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

2. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界区域, $\{D_n\}$ 是 D 中的单调增加的闭区域序列, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$. 若 f 在 D 上非负, 且在每一个 D_n 上可积, 证明:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义. (提示: 设 D 和 $D_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为可求面积的有界闭区域时结论已经成立.)

3. 计算下列积分: $\iint\limits_{y\geqslant x^2+1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

4. 讨论下列二重广义积分的收敛性:

(1) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 D 由条件 $|y|\leqslant x^2, x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定;

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}$;

(3) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续, 讨论

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^p}$$

的收敛性, 其中 $D=[a,A]\times[b,B]$.

6. 计算下列积分:

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(2) $\iint\limits_D \ln\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=0$, $y=x$, $x=\pi$ 所界定.

§22.5 重积分的应用举例

除前面提到的用重积分计算曲面所围的空间几何体的体积和物体的质量外, 重积分还有许多其他应用. 本节再举一些例子.

22.5.1 几何应用

类似于上册 §11.1 节所介绍的, 几何、物理上计算重积分时也经常采用比较简捷的产生积分的方法——**微元法**. 即根据计算的目的把问题归结到一系列

很小的面积元素或体积元素 (微元)上, 然后对这些微元进行相应的几何或是物理量的分析, 分析完后把得到的对每个特定的微元的结果看成为带 "权" 的微元 (当然此时的 "权" 与位置有关), 然后按面积或体积求和. 比如前面的先一后二的计算三重积分的方法可看成在给定区域 D 上每一个带 "权" 的 "小竖条" $\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的求和. $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}z$ 可看成 "高度", $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 表示微元的底面积. 先二后一的计算方法则是在区间上具有带 "权" 面积的 "小薄片" $\left(\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$ 的求和. $\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 可视为 "面积", $\mathrm{d}z$ 是微元的厚度. 在引力计算中, 就要考虑每个引力微元, 它是体积微元所受到的引力. 微元法思维对准确、快速计算重积分十分有用. 下面先介绍微元法在几何应用中的一些例子.

旋转体的体积

例题 22.5.1 设 V 是由曲线 $x=\varphi(z)$, $a\leqslant z\leqslant b$ 绕 z 轴旋转而得的体积, 这里曲线不与 z 轴相交且旋转体被 $z=a$ 和 $z=b$ 所围住. 证明公式

$$V=\pi\int_a^b \varphi^2(z)\,\mathrm{d}z.$$

证 把 V 视为一个由一系列垂直于 z 轴的小薄片 (小圆盘) 所组成的体积, 则在 z 处, 圆盘面积为 $\pi\varphi^2(z)$, 厚度为 $\mathrm{d}z$, 薄片体积微元为 $\mathrm{d}V=\pi\varphi^2(z)$, 因而

$$V=\pi\int_a^b \varphi^2(z)\,\mathrm{d}z.$$

曲面的面积 曲面面积的定义需小心对待, 见相应的教科书或 25.1.1 小节. 我们这里用微元法给出一些曲面的计算公式. 假定曲面面积是存在的.

先设曲面 S 由方程

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

表示, 其中 D 是平面上可求面积的有界区域, $f(x,y)$ 是连续可微函数. 给定平面上一个小的可求面积区域 ΔD, 我们用 "以平代曲" 的方法计算其对应的曲面微元 ΔS, 即计算 S 对应于 ΔD 那部分的切平面面积, 以之取作 ΔS 的近似值. 为此取 $(\xi,\eta)\in\Delta D$. 设 S 在 $(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

再记对应于 ΔD 那部分的切平面面积为 $\Delta\sigma$, 则由投影定理

$$\Delta\sigma=\frac{\Delta D}{|\cos\gamma|}.$$

根据法向量的表达, 有

$$\boldsymbol{n}=(f_x(\xi,\eta),f_y(\xi,\eta),\pm 1).$$

因此

$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi,\eta) + f_y^2(\xi,\eta)}}.$$

即

$$\Delta S \approx \Delta\sigma = \sqrt{1 + f_x^2(\xi,\eta) + f_y^2(\xi,\eta)}\Delta D.$$

这样我们就得到了**面积微分**

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

曲面面积即为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果曲面 S 由参数方程

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in D$$

表示, 其中 D 是参数平面上可求面积的区域, $x(u,v)$, $y(u,v)$、$z(u,v)$ 在 D 上有连续偏导数, 则

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

因而

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

例题 22.5.2 设连续曲线 $z = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ 绕 z 轴旋转所得曲面为 Σ. 求 Σ 的面积 S.

解 用柱坐标把 Σ 参数化, 有

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \varphi(r),$$

$$a \leqslant r \leqslant b, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

故

$$E = 1 + (\varphi'(r))^2, \quad F = 0, \quad G = r^2.$$

$$S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r\sqrt{1 + (\varphi'(r))^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_a^b r\sqrt{1 + (\varphi'(r))^2}\,\mathrm{d}r. \quad \square$$

注 如果以 $z = \varphi(x)$ 的曲线弧长 s 为参数, 而以 $u(s)$ 表示 s 处曲线到 z 轴的距离, $u'(s) \geqslant 0$, $0 \leqslant s \leqslant l$. 设 $u(0) = a$, $u(l) = b$, 则 Σ 的参数方程为

$$x = u(s)\cos\theta, \quad y = u(s)\sin\theta, \quad z = \varphi(u(s)),$$

$$0 \leqslant s \leqslant l, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

故

$$S = 2\pi \int_0^l \sqrt{1 + (\varphi'(u(s)))^2} \cdot u'(s)u(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 l 为曲线的弧长. 平面曲线 $z = \varphi(x)$ 在弧长参数下质心的 x 坐标

$$X_c = \frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{1 + (\varphi'(u(s)))^2} \cdot u'(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此我们重新得到了 Guldin 第一定理 (见上册 342 页命题 11.1.2)

$$S = 2\pi X_c \cdot l.$$

如果曲面 S 的密度函数为 $f(x, y, z)$, 则其质量为

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S.$$

移动曲面扫过的体积 下面考虑一个稍微复杂一点的几何问题.

例面 22.5.3 设 V 是这样的几何体, 它是由参数曲面 $\Sigma_t : \varphi(x, y, z) = t$ 自 t 从 a 到 b 所扫成的, 证明 V 的体积

$$|V| = \int_a^b \left(\iint_{S_t} \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}\,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}t, \tag{22.7}$$

其中 S_t 表示曲面 Σ_t 所对应的曲面区域, $\mathrm{d}S$ 表示曲面 Σ_t 的面积微分.

证 关键是考虑 t 到 $t + \Delta t$ 时沿 $\varphi(x, y, z) = t$ 的法向距离的移动. 注意到此时的曲面 Σ_t 在 (x, y, z) 处的法向量为

$$n = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z).$$

考虑曲面随参数 t 的变化的性质. 设 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 表示了 Σ_t 中一串连续可微变化的质点, 则质点速度为 $(x'(t), y'(t), z'(t))$. 注意到质点总满足 $\varphi(x(t), y(t), z(t)) = t$, 因而又有

$$1 = \varphi_x x'(t) + \varphi_y y'(t) + \varphi_z z'(t).$$

所以从运动角度看 (x, y, z) 处的法向速度 (即速度在法向上的投影) 为

$$C = \frac{\varphi_x x'(t) + \varphi_y y'(t) + \varphi_z z'(t)}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}.$$

按微元法, 在 Δt 时间内 Σ_t 所移厚度为 Σ_t 的面积 $\iint\limits_{S_t} \mathrm{d}S$ 乘以 Δt 的法向分量 $C\Delta t$. 从面

$$|V| = \int_a^b \left(\iint_{S_t} C\,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}t. \quad \square$$

注 (22.7) 是一个一般的公式, 它有许多具体的应用. 比如, 设 Σ_t 是一个平面图形, 则曲面为

$$\xi(t)x + \eta(t)y + \zeta(t)z = p(t),$$

其中 $(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))$ 为单位法向. 设 Σ_t 上点 $(x(t),y(t),z(t))$ 随 t 连续可微变化. 按隐函数求导法则及注意到 $\xi^2(t)+\eta^2(t)+\zeta^2(t)\equiv 1$, 我们有

$$C=-[\xi'(t)x+\eta'(t)y+\zeta'(t)z-p'(t)]$$

因而

$$\iint\limits_{S_t} C\,\mathrm{d}S=\xi'(t)\iint\limits_{S_t} x\,\mathrm{d}S+\eta'(t)\iint\limits_{S_t} y\,\mathrm{d}S+\zeta'(t)\iint\limits_{S_t} z\,\mathrm{d}S-p'(t)\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S.$$

设 $(X(t),Y(t),Z(t))$ 是 Σ_t 的形心坐标, 就有

$$X(t)=\frac{\displaystyle\iint\limits_{S_t} x\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S},\quad Y(t)=\frac{\displaystyle\iint\limits_{S_t} y\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S},\quad Z(t)=\frac{\displaystyle\iint\limits_{S_t} z\,\mathrm{d}S}{\displaystyle\iint\limits_{S_t}\mathrm{d}S}.$$

从而

$$\iint\limits_{S_t} C\,\mathrm{d}S=-(X(t)\xi'(t)+Y(t)\eta'(t)+Z(t)\zeta'(t)-p'(t))\cdot\sigma_t, \tag{22.8}$$

其中 σ_t 是 Σ_t 的面积.

同时, 形心也位于 Σ_t 上, 故有

$$X(t)\xi(t)+Y(t)\eta(t)+Z(t)\zeta(t)=p(t).$$

求导并结合 (22.8) 得

$$\iint\limits_{S_t} C\,\mathrm{d}S=(X'(t)\xi(t)+Y'(t)\eta(t)+Z'(t)\zeta(t))\cdot\sigma_t.$$

注意到上式右端第一个因子正是形心关于 t 的速度在法向上的投影. 因此

$$\int_a^b (X'(t)\xi(t)+Y'(t)\eta(t)+Z'(t)\zeta(t))\,\mathrm{d}t=l,$$

其中 l 为形心所经过的路径长度. 特别地, 如果 S_t 的面积为常值 A, 应用 (22.7) 式得到

$$V=A\cdot l. \tag{22.9}$$

对于由平面图形 S 所成的旋转体, 设其形心到旋转轴垂直距离为 d, 则

$$V=A\cdot 2\pi d,$$

这是 Guldin 第二定理(见上册命题 11.1.3), 因而 (22.9) 称为广义的 Guldin 公式.

22.5.2 物理应用

矩 力学中的某些量常常与物体的密度函数的各阶矩有关, 下面讨论三维的情形. 二维的情形是类似的.

设 V 是由分片光滑的连续曲面围成的区域. $\mu(x,y,z)$ 在 V 上连续, 分别称

$$M_x(k)=\iiint\limits_V x^k\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$M_y(k)=\iiint_V y^k\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$M_z(k)=\iiint_V z^k\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

为密度函数 μ 关于 x,y,z 的 k 阶矩. 利用微元法容易得到

1. 质量 $m=M_x(0)=M_y(0)=M_z(0)=M(0)=\iiint_V \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

2. 质心 (X_c,Y_c,Z_c), 其中

$$X_c=\frac{M_x(1)}{M(0)}=\frac{1}{m}\iiint_V x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$Y_c=\frac{M_y(1)}{M(0)}=\frac{1}{m}\iiint_V y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$Z_c=\frac{M_z(1)}{M(0)}=\frac{1}{m}\iiint_V z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. 转动惯量为

$$I_x=M_y(2)+M_z(2),\quad I_y=M_z(2)+M_x(2),\quad I_z=M_x(2)+M_y(2),$$
$$I_{yz}=M_x(2),\quad I_{zx}=M_y(2),\quad I_{xy}=M_z(2).$$

例题 22.5.4 若直线 $x=0$, $x=a$, $y=0$ 与正连续曲线 $y=f(x)$ 围成的区域的质心的 x 坐标是 $g(a)$, 证明

$$f(x)=\frac{Ag'(x)}{[x-g(x)]^2}\exp\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}\right),$$

其中 A 为正常数, a 是参数.

证 见图 22.10,

$$g(a)=\frac{M_x(1)}{M(0)}=\frac{\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x},$$

即

$$g(a)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

两边对 a 求导得

$$g(a)f(a)+g'(a)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=af(a).$$

令 $F(a)=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, 注意到 $a-g(a)\neq 0$, 则

$$\frac{F'(a)}{F(a)}=\frac{g'(a)}{a-g(a)}.$$

两边对 a 积分, 得

$$\ln F(a)=\int\frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a+C.$$

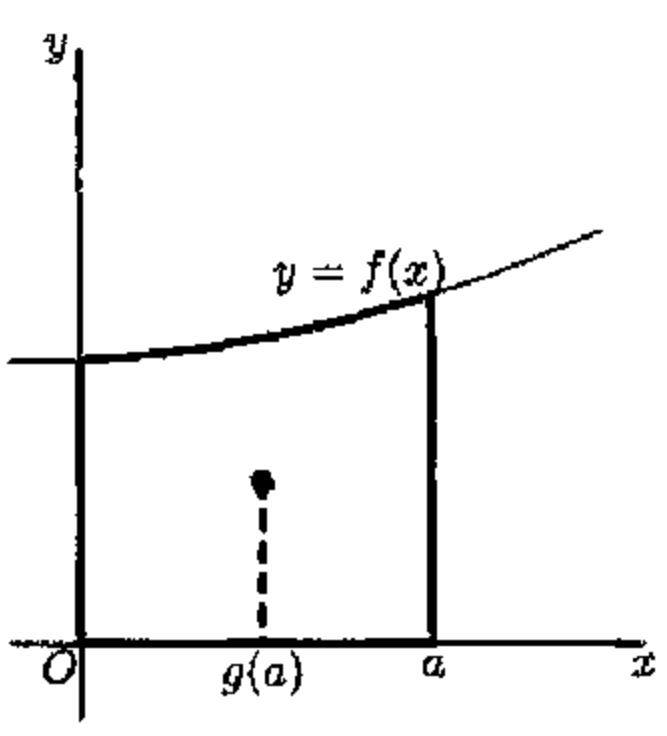


图 22.10

所以

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) = A\exp\left(\int \frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a\right).$$

两边对 a 求导得

$$f(a) = \frac{Ag'(a)}{a-g(a)}\exp\left(\int \frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a\right).$$

考虑到

$$\begin{aligned}\int \frac{g'(a)}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a &= \int \frac{g'(a)-1}{a-g(a)}\,\mathrm{d}a + \int \frac{\mathrm{d}a}{a-g(a)}\\ &= -\ln(a-g(a)) + \int \frac{\mathrm{d}a}{a-g(a)},\end{aligned}$$

则

$$f(a) = \frac{Ag'(a)}{[a-g(a)]^2}\exp\left(\int \frac{\mathrm{d}a}{a-g(a)}\right). \quad \square$$

引力 考虑体密度函数为 $\mu(x,y,z)$ 的立体 V 对具有质量 m 的点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ 的引力 $\boldsymbol{F}$. 由引力定律及微元法得 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$, 其中

$$F_x = \iiint\limits_V \frac{Gm\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$F_y = \iiint\limits_V \frac{Gm\mu(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$F_z = \iiint\limits_V \frac{Gm\mu(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 G 为引力常量, $r=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$.

22.5.3 重积分与不等式

本段介绍重积分在不等式中的一些应用. 先介绍如何用重积分的技巧证明一元的积分不等式.

例题 22.5.5 设 f 在 $[0,1]$ 上为正连续函数, 证明

$$1 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}, \tag{22.10}$$

其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值和最大值 (参见上册 374 页题 11).

证 设

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由对称性

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

令 $F(z)=z+\dfrac{1}{z}$, $z>0$, 则 $F(z)\geqslant 2$, $F''(z)>0$, 故 $F(z)$ 是凸函数. 当 $F(\alpha)=F(\beta)$ 时. 对 $z\in[\alpha,\beta]$ 有$F(z)\leqslant F(\alpha)=F(\beta)$. 取 $z=\dfrac{f(y)}{f(x)}$, $\alpha=\dfrac{m}{M}$, $\beta=\dfrac{M}{m}$, 得

$$2\leqslant \frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\leqslant \frac{m}{M}+\frac{M}{m},$$

从而

$$1\leqslant I\leqslant \frac{m^2+M^2}{2mM}.$$

但这与不等式 (22.10) 相比还不够精确. 为此分析 (22.10), 由右端的平方启发用算术平均值-几何平均值不等式 (上册第 4 页) 得

$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\cdot\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\right]^2. \tag{22.11}$$

但当 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 时不能充分利用 $z+\dfrac{1}{z}$ 的凸性来估计 $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$. 观察 I 的特点, 用 $\dfrac{f(x)}{\sqrt{mM}}$ 替代 $f(x)$ 得

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left(\int_0^1\left(\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}+\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\right)^2.$$

再取 $z=\dfrac{f(x)}{\sqrt{mM}}$, $\alpha=\sqrt{\dfrac{m}{M}}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{M}{m}}$, 由 $z+\dfrac{1}{z}$ 的凸性得

$$I\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

不等式 (22.10) 得证. □

从上述证明过程可见, 对学到的各种方法要善于比较, 综合运用 (本题还可参见上册 415 页的提示). 下面再举一个通过交换积分次序证明不等式的例子.

例题 22.5.6 设 f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 均为 $[0,1]\times[0,1]$ 中的连续函数, 且在 $[0,1]\times[0,1]$ 中成立 $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 和 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$.

(1) 证明: 对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$, 存在 $\xi\in[0,1]$, 值得 $|\xi-x|\leqslant\dfrac{1}{2}|t_1-t_2|$ 且 $|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\leqslant 4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}$;

(2) 由 (1) 的结论证明: 对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$ 成立

$$|f(x,t_1)-f(x,t_2)|\leqslant 5|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

分析 题目给出了 $f(x,t)$ 在 x 方向上的性质: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$. 由此证明在 t 方向上的性质. 可用的条件是 f 在 x 方向和 t 方向之间的关系: $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. 我们通过交换累次积分次序来转换.

证 (1) 由题设

$$f(x,t_1)-f(x,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

从而, 对任何 $\overline{x}\in[0,1]$, 由累次积分次序可交换, 成立

$$\int_x^{\overline{x}}[f(x,t_1)-f(x,t_2)]\,\mathrm{d}x=\int_x^{\overline{x}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_x^{\overline{x}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\overline{x})-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)\mathrm{d}t.$$

对上式左端应用积分中值定理, 右端利用已知条件 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$, 得

$$|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\cdot|x-\overline{x}|\leqslant 2|t_1-t_2|,$$

其中 ξ 在 x 和 $\overline{x}$ 之间. 对任何 x, t_1 和 $t_2\in[0,1]$ 总可找到某个 $\overline{x}\in[0,1]$, 使得

$$|x-\overline{x}|=\frac{1}{2}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}},$$

代入前式即得

$$|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\leqslant 4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 利用 (1) 得

$$|f(x,t_1)-f(x,t_2)|\leqslant|f(x,t_1)-f(\xi,t_1)|+|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|+|f(x,t_2)-f(\xi,t_2)|$$

$$\leqslant 1\cdot|x-\xi|+4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+1\cdot|x-\xi|$$

$$\leqslant|x-\overline{x}|+4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+|x-\overline{x}|=5|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.\quad\square$$

最后, 我们证明重积分形式的 Hölder 不等式, 并由此推出一些有用的估计.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中可求面积的有界区域, 函数 f 定义在 Ω 上, 如果 $|f|^p(p>0)$ 在 Ω 上广义可积, 则称 f 是在 Ω 上 p 次 (广义) 可积. Ω 上的 p 次可积函数的全体记为 $L^p(\Omega)$, 且记

$$\|f\|_p=\left(\iint_D|f(x,y)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

例题 22.5.7 (Hölder 不等式) 设 $u\in L^p(\Omega),v\in L^q(\Omega)$, $p,q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$\|uv\|_1\leqslant\|u\|_p\|v\|_q.$$

证 不妨设 $\|u\|_p>0$, $\|v\|_p>0$. 令

$$a=\frac{|u|}{\|u\|_p},\quad b=\frac{|v|}{\|v\|_p}.$$

由 Young 不等式 (上册 259 页题 10):

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

其中 $p,q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a,b\geqslant 0$, 得到

$$\frac{|u|\cdot|v|}{\|u\|_p\|v\|_p}\leqslant\frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p}+\frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q}.$$

两边在 Ω 上积分得

$$\frac{\iint\limits_{\Omega}|u|\cdot|v|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\|u\|_p\|v\|_p}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

由此得出所要证明的不等式 (参见上册 349~350 页). □

例题 22.5.8 设 $u\in L^q(\Omega),\ 0<p\leqslant q$, 则

$$|\Omega|^{-1/p}\|u\|_p\leqslant|\Omega|^{-1/q}\|u\|_q.$$

其中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的体积.

证 由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\|u\|_p^p&=\iint\limits_{\Omega}|u|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\Big(\iint\limits_{\Omega}(|u|^p)^{q/p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{p/q}\Big(\iint\limits_{\Omega}1^{q/(q-p)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{(q-p)/q}\\&=|\Omega|^{(q-p)/q}\|u\|_q^p,\end{aligned}$$

两边开 p 次方, 则

$$\|u\|_p\leqslant|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u\|_q.\quad\square$$

注 由上例的结论知对任意 $0<p\leqslant q$, $L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega)$.

例题 22.5.9 设 $u\in L^r(\Omega),\ 0<p\leqslant q\leqslant r$, 则

$$\|u\|_q\leqslant\|u\|_p^{\lambda}\|u\|_r^{1-\lambda},$$

其中 λ 满足 $\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r}$.

证 由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\|u\|_q^q&=\iint\limits_{\Omega}|u|^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}|u|^{\lambda q}|u|^{(1-\lambda)q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\Big\{\iint\limits_{\Omega}(|u|^{\lambda q})^{\frac{p}{\lambda q}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big\}^{\frac{\lambda q}{p}}\Big\{\iint\limits_{\Omega}(|u|^{(1-\lambda)q})^{\frac{r}{(1-\lambda)q}}\Big\}^{\frac{(1-\lambda)q}{r}}\\&=\|u\|_p^{\lambda q}\|u\|_r^{(1-\lambda)q},\end{aligned}$$

两边开 q 次方即为所求. □

例题 22.5.10 设 $u,\ u_x,\ u_y$ 在有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 上连续, 且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上 $u=u_x=u_y=0$, 则对于 $1\leqslant p<2$ 有

$$\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}\leqslant C\big(\|u_x\|_p+\|u_y\|_p\big),$$

其中 C 只与 p 有关, 与 u 无关.

证 先设 $p=1$. 当 $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\Omega$ 时, 定义 $u(x,y)=0$, 则

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{x}u_x(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad \text{且 } u(x,y)=\int_{-\infty}^{y}u_y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

从而

$$|u(x,y)|\leqslant\int_{-\infty}^{x}|u_x|\,\mathrm{d}x,\quad \text{且 } |u(x,y)|\leqslant\int_{-\infty}^{y}|u_y|\,\mathrm{d}y.$$

由此得

$$|u(x,y)|^2\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x(x,y)|\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}|u_y(x,y)|\,\mathrm{d}y.$$

两边在 $\mathbf{R}^2$ 上积分得到

$$\iint_{\Omega}|u(x,y)|^2\leqslant\iint_{\Omega}|u_x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\iint_{\Omega}|u_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

两边开平方, 得

$$\|u\|_2\leqslant\|u_x\|_1^{1/2}\|u_y\|_1^{1/2}.$$

利用 $\sqrt{a}\sqrt{b}\leqslant\frac{1}{2}(a+b)$, 就有

$$\|u\|_2\leqslant\frac{1}{2}(\|u_x\|_1+\|u_y\|_1).\tag{22.12}$$

这就证明了 $p=1$ 时的结论.

当 $1<p<2$ 时, 令 $\gamma=\dfrac{p}{2-p}$, 在 (22.12) 中用u^γ 代替 u, 则

$$\begin{aligned}\|u^\gamma\|_2&\leqslant\frac{1}{2}(\|\gamma u^{\gamma-1}u_x\|_1+\|\gamma u^{\gamma-1}u_y\|_1)\\&\leqslant\frac{\gamma}{2}(\|u^{\gamma-1}\|_q\|u_x\|_p+\|u^{\gamma-1}\|_q\|u_y\|_p),\end{aligned}\tag{22.13}$$

其中 q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 即 $q=\dfrac{p}{p-1}$. 由于

$$\|u^\gamma\|_2=\|u\|_{2\gamma}^{\gamma}=\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}^{\gamma},$$

$$\|u^{\gamma-1}\|_q=\|u\|_{(\gamma-1)q}^{\gamma-1}=\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}^{\gamma-1},$$

由 (22.13) 得

$$\|u\|_{\frac{2p}{2-p}}\leqslant\frac{\gamma}{2}\big(\|u_x\|_p+\|u_y\|_p\big).\quad\square$$

22.5.4 练习题

1. 计算由下列曲面围成的立体体积:

   (1) $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i$, $i=1,2,3$, 其中 (a_i,b_i,c_i) $(i=1,2,3)$ 线性无关;

   (2) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$, 其中 $a>0$;

   (3) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$;

   (4) $(x^2+y^2)^2+z^4=z$.

2. 计算下列曲面的面积:

   (1) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2$;

(2) $(x^2+y^2+z^2)^2=z^3$;

(3) 连续曲线 $y=f(x)\ (\geqslant 0)$, $x\in[a,b]$ 绕 x 轴旋转所得曲面.

3. 设抛物面壳 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的面密度 $\rho=z$, 求质量.

4. 半径为 R 的均匀圆盘, 其密度为 μ. 过圆心且与圆垂直的直线上有一密度为 ρ 的均匀细棒, 棒长为 l, 其近圆盘的一端与圆心相距为 a. 求圆盘对细棒的引力.

5. 半径为 a 的圆盘, 其各点的密度等于该点到圆心的距离. 今从圆盘上挖去一个半径为 $\dfrac{a}{2}$ 而其圆心离圆盘中心为 $\dfrac{a}{2}$ 的小圆盘. 求剩下几何图形的质心坐标.

6. 假定物体有连续的密度函数, 证明凸形物体的质心必在其体内.

7. 设 $u_i\in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{p_i}=1$. 证明

$$\iint\limits_{\Omega}u_1\cdots u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_m\|_{p_m}.$$

8. 证明

$$1<\iiint\limits_{[0,1]^3}(\cos(xyz)+\sin(xyz))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z<\sqrt{2}.$$

9. 证明

$$\left\{\int_a^b dx\Big[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big]^2\right\}^{1/2}\leqslant\int_c^d\mathrm{d}y\Big[\int_a^b f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\Big]^{1/2},$$

其中 f 是连续函数.

§22.6 对于教学的建议

22.6.1 学习要点

1. 如何快速准确计算出重积分的值是本章的重点之一. 为此有三点是至关重要的: 一是选择坐标变换, 二是选择积分顺序, 三是要优先利用对称性, 即积分区域的对称性与被积函数的奇偶性.

2. 计算重积分的过程中, 画出积分区域的示意图是很重要的一个步骤. 示意图的要点是区域所处的象限 (或卦限), 曲线的交点 (曲面的交线). 用球坐标时尤其要准确标出交线. 即使画不出图, 也要作必要的几何分析. 比如 $(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 所围立体. 首先从方程看出立体位于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间. 其次可看出这是一个旋转面, 令 $y=0$ 得母线 $x^4=z-z^4$.

3. 要重视重积分的应用部分的教学. 这里微元法是个重点. 要注意微元法的 "求和" 并不是简单的相加. 在 "曲" 的坐标下考虑的是求和方向上的分量

相加. 比如求移动曲面扫过的体积, 我们必须考虑移动的法向速度方向上的求和.

4. 重积分的计算是熟能生巧, 需要做大量的习题. 限于篇幅, 我们仅仅列举一些有特点的例子. 在一般的教科书上 (如 [25]) 都给出了足够丰富的例题与习题. 请读者自己把握.

5. **对习题课的建议** 应该根据实际需要选择坐标变换, 不能只会一种. 任何一种坐标变换都不是万能的. 球坐标变换很重要, 但并不是积分区域与球有关就要用球坐标. 如例题 22.3.1, 用球坐标就不简单.

关于积分顺序, 应该观察被积函数与积分区域的特点, 使得积分变得简单. 仍考察例题 22.3.1, 被积函数中有 z, 当然应该选择 "先二后一" 的顺序, 而且是先对 x,y, 后对 z, 这样对 x,y 作二重积分时, 被积函数是常数, 因而可以提到积分号之外.

对称性的使用不仅可以简化计算, 还能避免不必要的错误. 下面的例子可以很清楚地说明这一点.

例题 22.6.1 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ 和圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant ax$ $(a>0)$ 的公共部分所成的空间区域 (Viviani 体) 的体积 V.

解 如图 22.11 所示,

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant ax} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\cos\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(a^2\sin^2\theta)^{3/2}-a^3\right] \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

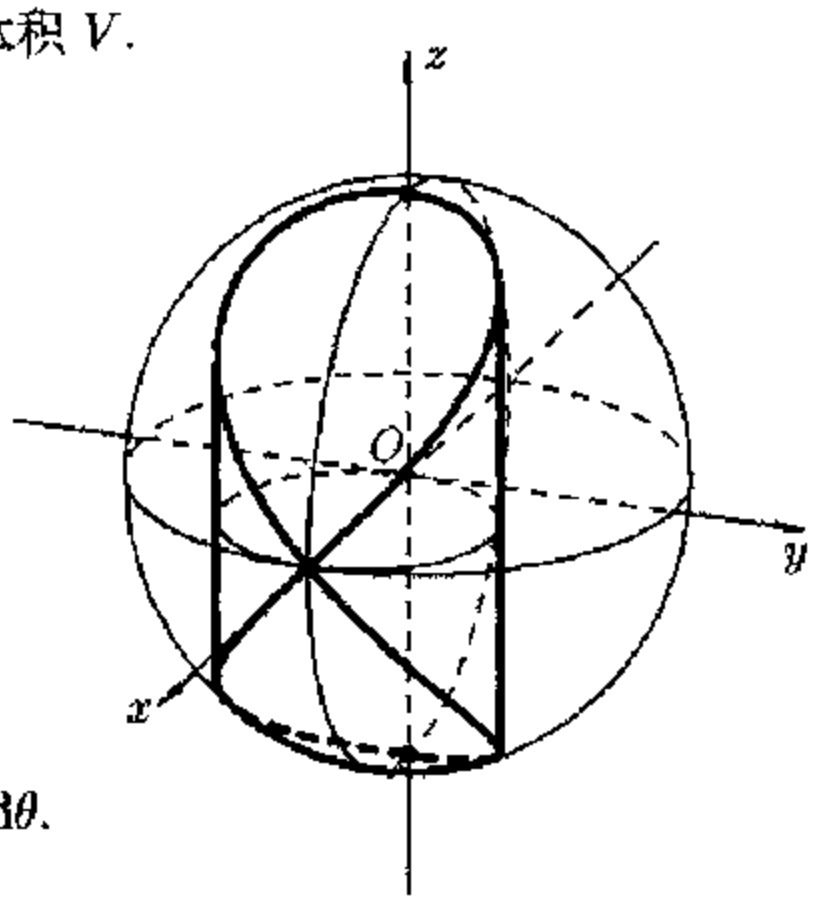


图 22.11

再往下作就有两种可能了, 一种是

$$(\sin^2\theta)^{3/2} = \sin^3\theta \quad (\text{这是错的!}),$$

应该是

$$(\sin^2\theta)^{3/2} = |\sin\theta|^3.$$

但如果一开始就利用对称性, 得

$$V = 4 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant ax,\ y \geqslant 0} \sqrt{z^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

不但使运算简便, 而且无形中避免了上述错误的发生.

22.6.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上有如下定义:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}, & \text{当 } x=\dfrac{p_x}{q_x},\ y \text{ 是无理数时,}\\ \dfrac{1}{q_y}, & \text{当 } y=\dfrac{p_y}{q_y},\ x \text{ 是无理数时,}\\ 0, & \text{其他情况,}\end{cases}$$

其中 q_x,q_y 分别表示有理数 x,y 写成既约分数后的分母. 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 但两个二次积分不存在.

2. 设 $f(x,y)$ 定义在 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 和 } y \text{ 都是非零有理数, } x=\dfrac{p_x}{q_x}, y=\dfrac{p_y}{q_y} \text{ 且 } q_x=q_y \text{ 时,}\\ 0, & \text{其他情况,}\end{cases}$$

其中 q_x,q_y 表示有理数 x,y 写成既约分数后的分母. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上不可积, 但两个二次积分存在且相等.

3. (1) 计算积分 $A=\displaystyle\int_0^1\int_0^1\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(2) 设 $z=f(x,y)$ 在闭正方形 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续, 且满足下列条件:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\qquad \iint\limits_D xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$$

求证: $\exists(\xi,\eta)\in D$ 使得 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\dfrac{1}{A}$.

4. 证明

$$1.96<\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<2.$$

5. 设 f 是连续函数, 证明

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)\,\mathrm{d}u,$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

6. 证明 Poincaré 不等式: 设函数 $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在闭区域

$$D:a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)$$

上连续, 其中 φ,ψ 在 $[a,b]$ 上连续. $f(x,\varphi(x))=0$, 则存在常数 $K>0$, 使得

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant K\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(Poincaré 不等式可看成是 Wirtinger 不等式 (见第十五章参考题 8) 在高维空间的推广, 见 [27] 及其中所引文献.)

7. 设 $u,\ v \in L^p(\Omega),\ p \geqslant 1$. 利用 Hölder 不等式证明 Minkowski 不等式

$$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p.$$

讨论 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式取等号的条件.

8. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上四次连续可微, 在其边界上取零,并且

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right| \leqslant B, \quad (x,y)\in D.$$

证明

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{B}{144}.$$

9. 设定积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$. 证明存在 D 的闭子区域 U, 使当 $(x,y)\in U$ 时, 有 $f(x,y)>0$.

10. 证明多重积分的中值定理: 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在有界闭区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上连续, 则 $\exists\boldsymbol{\xi}\in\Omega$, 使

$$\int\cdots\int_{\Omega} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = f(\boldsymbol{\xi})\cdot(\Omega \text{ 的体积 }).$$

11. 设函数 p 在 $[a,b]$ 上非负连续, $f,\ g$ 在 $[a,b]$ 上连续单调增加, 则

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

12. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 单调减少且恒取正值, 则

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

13. 设

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

其中 $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>R>0$, 则

$$\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{A+R} \leqslant I \leqslant \frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{A-R}.$$

14. 设 $f(t)$ 是连续函数, 令

$$F(t)=\iiint_D f(xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $D=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant t,\ 0\leqslant y\leqslant t,\ 0\leqslant z\leqslant t\}$. 证明

$$F'(t)=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\,\mathrm{d}u,$$

其中 $g(u)=\int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s$.

15. 设坐标平面上有一周长为 $2\pi l$ 的椭圆 Γ, 在其上选定一点作为计算弧长 s 的起点, 以逆时针方向作为计算弧长的方向, 这时 Γ 有参数方程

$$x=f(s),\ y=\varphi(s),\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi l.$$

x 轴的正半轴绕原点作逆时针旋转, 首次转到与点 $(f(s),\varphi(s))$ 处切线正向一致时的倾角为 $\theta(s)$. 记 D 为 Γ 的外部区域内与 Γ 的距离小于 l 的点所构成的区域.

(1) 如果用 t 表示 D 内一点 (x,y) 到 Γ 的距离, 试将 x, y 表示成 s, t 的函数

$$x=x(s,t),\quad y=y(s,t),\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi l,\ 0<t<l;$$

(2) 用计算验证区域 D 的面积为 $3\pi l^2$.

第二组参考题

1. 证明对任意 $\varepsilon>0$,

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-q/p}b^q}{q}\leqslant\varepsilon a^p+\varepsilon^{-q/p}b^q,$$

其中 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, p, $q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

2. 利用上题以及例题 22.5.9 的结论证明内插不等式:

$$\|u\|_q\leqslant\varepsilon\|u\|_r+\varepsilon^{-\mu}\|u\|_p,$$

其中 $\mu=(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})$, $0<p<q<r$, $\varepsilon>0$.

3. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中有界闭区域, $u(x,y)$ 在 Ω 上连续且恒取正值, 定义

$$\Phi_p(u)=\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega u^P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p},$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的面积, 证明:

(1) $\lim\limits_{p\to+\infty}\Phi_p(u)=\max\limits_\Omega u$;

(2) $\lim\limits_{p\to-\infty}\Phi_p(u)=\min\limits_\Omega u$;

(3) $\lim\limits_{p\to 0}\Phi_p(u)=\exp\left\{\dfrac{1}{|\Omega|}\iint\limits_{\Omega}\ln u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}$.

4. 设 P_0 为半径等于 R 的球内的一定点, 从 P_0 点向球面上任意一点 Q 处的切平面作垂线, 垂足为 P. 当 Q 在球面上变动时, P 点的轨迹形成一封闭曲面.

(1) 求此曲面所围成的立体的体积;

(2) 问当 P_0 沿什么方向变化时, 上述体积的变化率最大?

5. 证明不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)^{\frac{1}{2}}<\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4a^2}{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. 设连续函数 $f(x,y)$ 的等位线是简单封闭曲线, $S(v_1,v_2)$ 是由曲线 $f(x,y)=v_1, f(x,y)=v_2$ 所围成的域. 证明 Catalan 公式

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)\,\mathrm{d}v,$$

其中 $F(v)$ 是由曲线 $f(x,y)=v_1, f(x,y)=v$ 所包围的面积, 还假设 $F(v)$ 可微且导函数 $F'(v)$ 可积.

第二十三章　含参变量积分

在 §23.1 和 §23.2 两节中考虑含参量积分的一般性质, 其中包括含参量常义积分和含参量广义积分. 对后者而言, 其分析性质的研究首先涉及这些广义积分的收敛性是否关于参量一致. 然后给出许多具体计算的例子. 在 §23.3 节中介绍两个重要的特殊函数: B 函数和 Γ 函数. 最后一节是学习要点和参考题.

§23.1　含参变量常义积分

23.1.1　定义与性质

在实际问题中我们经常会遇到带参数的积分, 比如椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ 的弧长为

$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $k=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ 是离心率. 这里 $I(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ 称为第二类完全椭圆积分, 它不能用初等函数表示 ①. $I(k)$ 就是含参量积分的一个例子. 一般地, 设 $D\subset\mathbf{R}$, 二元函数 $f(x,t)$ 定义在 $[a,b]\times D$ 上, $\forall\, t\in D$, 设 $f(x,t)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上常义可积, 即通常所说的有界可积, 则

$$\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

是定义在 D 上的含参量常义积分. 它具有如下主要性质.

命题 23.1.1 (极限性质) 设 t_0 是 D 的聚点, 如果 $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)=\psi(x)$, 且收敛关于 $x\in[a,b]$ 是一致的, 则 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界可积, 且

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 23.1.2 (连续性) 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续.

命题 23.1.3 (交换积分次序) 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\int_c^d\mathrm{d}t\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

---

① 关于椭圆弧长以及椭圆积分参见上册 356 页和第十六章例题 16.1.1.

命题 23.1.4 (可微性) 设 $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上可导, 且

$$\varphi'(t)=\int_a^b f_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

如果在积分限中也含有参量, 则我们有如下更一般的结论.

命题 23.1.5 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都在 $[c,d]$ 上连续, 且

$$a\leqslant\alpha(t),\beta(t)\leqslant b,\quad\forall\, t\in[c,d],$$

则

$$\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续. 进一步若 $f_t(x,t)$ 也在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都在 $[c,d]$ 上可导, 则 $\varphi(t)$ 也在 $[c,d]$ 上可导, 且

$$\varphi'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

例题 23.1.1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 考察

$$F(t)=\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$

的连续性.

解 显然 $F(t)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上. 且 $\forall\, t_0\neq 0$, $h(x,t)=\dfrac{tf(x)}{x^2+t^2}$ 在 $[0,1]\times[\frac{1}{2}t_0,2t_0]$ 上连续 (或 $[0,1]\times[2t_0,\frac{1}{2}t_0]$ 上连续), 由命题 23.1.2 知 $F(t)$ 在 t_0 点连续.

下面讨论 $F(t)$ 在 $t=0$ 处的连续性. 我们先考虑

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{t^{1/3}}^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

而当 $t\to 0^+$ 时,

$$\int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\arctan\frac{t^{1/3}}{t}\to f(0)\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\int_{t^{1/3}}^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\frac{t}{t^{2/3}+t^2}\to 0.$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\frac{\pi}{2}.$$

同理可证

$$\lim_{t\to 0^-} F(t) = -f(0)\frac{\pi}{2},$$

所以当 $f(0)=0$ 时, $F(t)$ 在零点连续, 否则在零点不连续. □

例题 23.1.2 设

$$F(t)=\int_0^{t^2}\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y,$$

求 $F'(t)$.

解 令 $f(x,t)=\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 x, t 为参变量. 由含参量积分的求导公式

$$F'(t)=2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y+\int_0^{t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y\\ &=\sin[x^2+(x+t)^2-t^2]-(-1)\cdot\sin[x^2+(x-t)^2-t^2]\\ &\quad+\int_{x-t}^{x+t}(-2t)\cos(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y\\ &=2\sin 2x^2\cos 2xt-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}F'(t)=2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xt\,\mathrm{d}x\\ -2t\int_0^{t^2}\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y.\quad\square\end{aligned}$$

23.1.2 几种常用的求参变量积分的方法

如果直接求 $\varphi(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 有困难, 常采用以下两种方法.

1. 先求 $\varphi'(t)$, 即先求 $\displaystyle\int_a^b f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$, 然后再对 t 积分求出 $\varphi(t)$.
2. 把 $f(x,t)$ 表示为积分形式, 再用积分号下求积分的方法. 此时通常要交换积分次序.

例题 23.1.3 计算

$$I(x)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta,\quad 0<x<+\infty. \tag{23.1}$$

解 令 $f(x,\theta)=\ln(\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta)$. $\forall\, x_0\in(0,+\infty)$, $f(x,\theta)$ 在 $[\frac{1}{2}x_0,2x_0]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续, 且 $f_x(x,\theta)=\dfrac{2x\cos^2\theta}{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}$ 也在 $[\frac{1}{2}x_0,2x_0]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续. 应用积分号下求导的性质, 可得对 $\forall\, x\in(0,+\infty)$,

$$\begin{aligned}
I'(x)&=\int_0^{\pi/2}\frac{2x\cos^2\theta}{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=2x\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{x^2+\tan^2\theta}\quad(\text{令 }\tan\theta=t)\\
&=2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{x^2+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t\quad(x\neq1)\\
&=\frac{2x}{x^2-1}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{\pi}{1+x}.
\end{aligned}$$

积分得

$$I(x)=\pi\ln(1+x)+C.\quad(x\neq1)$$

由 $I(x)$ 的连续性知上述表达式对 $x=1$ 也成立. 在 (23.1) 中, 令 $x=1$, 则 $I(1)=0$, 从而 $C=-\pi\ln2$. 最后得到

$$I(x)=\pi\ln\frac{1+x}{2}.\quad\square$$

例题 23.1.4 求

$$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x,\ \ |\alpha|<1.$$

解 由于

$$\lim_{x\to\pi/2}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\Big[\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-\alpha\cos x)}{\cos x}\Big]=2\alpha,$$

于是 $x=\frac{\pi}{2}$ 不是瑕点. 又

$$\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-\alpha\cos x)}{\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x}.$$

令 $f(x,y)=1/(1+y\cos x)$, $\forall\,\alpha\in(-1,1)$, $f(x,y)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[-\alpha,\alpha]$ 上连续, 利用交换积分次序性质,

$$\begin{aligned}
I(\alpha)&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{\alpha}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\arctan\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\mathrm{d}y\\
&=\pi\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin\alpha.\quad\square
\end{aligned}$$

注 1 也可以用下面的方法求 $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{(1+y\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}.$$

由于 $\int_0^{\pi/2}\frac{y\cos x\,\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}$ 是 y 的奇函数, 于是 $\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{y\cos x\,\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}=0$, 从而

$$\begin{aligned}I(\alpha)&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1-y^2\cos^2 x}=2\int_0^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+(1-y^2)}\\&=2\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}y=\pi\arcsin\alpha.\end{aligned}$$

注 2 还可以用对参变量 α 求导的方法求 $I(\alpha)$.

例题 23.1.5 证明

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

分析 注意上式左端是含参量 t 的积分. 设 $f(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$. 要证明 $f(t)\equiv 2\pi$, 即 $f(t)$ 为常函数. 显然有 $f(0)=2\pi$, 于是只要证明 $f'(t)\equiv 0$.

证 1 由求导性质

$$\begin{aligned}f'(t)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta+\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

容易归纳证明

$$f^{(n)}(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta+n\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

于是

$$f^{(n)}(0)=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

从而利用 Taylor 展式

$$f(t)=f(0)+0+\cdots+0+\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

其中 ξ 介于 0 与 t 之间. 因为

$$|f^{(n)}(\xi)|=\left|\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\xi\cos\theta}\cos(\xi\sin\theta+n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{|\xi|}\,\mathrm{d}\theta\leqslant 2\pi\mathrm{e}^{|t|},$$

所以对每一个固定的 $t\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\xi)=0.$$

最后得到

$$f(t)\equiv f(0)=2\pi.\quad\square$$

证 2 利用下一章的曲线积分知识, 可以计算

$$f'(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\cos\theta\cos(t\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\oint_{x^2+y^2=1}\mathrm{e}^{tx}[\cos(ty)\,\mathrm{d}y+\sin(ty)\,\mathrm{d}x],$$

其中单位圆取逆时针方向. 用 Green 公式得

$$f'(t)=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{tx}\cos(ty))-\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{tx}\sin(ty))\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\quad\square$$

利用含参量积分的性质, 我们可以用**嵌入法**来计算一些定积分 $I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 这些定积分对应的不定积分不是初等函数, 故不能用 Newton–Leibniz 公式进行计算. **嵌入法**的步骤是先引入参变量 y, 化为 $I(y)=\int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x$, 使得 $I(y_0)=I$ (y_0 为某定值), 求出 $I(y)$ 后令 $y=y_0$. 在应用含参量积分性质时要注意条件检验.

例题 23.1.6 求定积分

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 对这个积分在上册 324 页的例题 10.4.7 中已经给出一种解法, 下面的解法是利用含参量积分的性质. 由于 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ 没有有限形式的原函数, 直接积分是不可能的. 引入变量 α, 定义

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

易见 $I(1)=I$. 可以验证 $f(x,\alpha)=\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上满足积分号下求导的条件, 于是

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1\left(\frac{\alpha+x}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\alpha\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(1+\alpha x)\right]\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right].$$

由此得出

$$I(1)=I(0)+\int_0^1 I'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha$$
$$=\left(\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)+\frac{1}{2}\ln 2\arctan\alpha\right)\Big|_0^1-I(1).$$

移项得

$$I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.\quad\square$$

23.1.3 练习题

1. 求 $F(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x\ \ (|\theta|<1)$.

2. 设 $f(s,t)$ 为可微函数, $F(x)=\int_0^x \mathrm{d}t\int_{t^2}^{x^2} f(t,s)\,\mathrm{d}s$. 求 $F'(x)$.

3. 设 $f(x,y)$ 在 $(a,b)\times(c,d)$ 上连续有界, 证明

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 (a,b) 上连续.

4. 设 $I(a)=\int_0^{2\pi}\ln(R^2+a^2-2aR\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$, $|a|<R$, 证明 $I'(a)=0$.

5. 设 $a,\ b>0$, 求 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $F(t)=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a f(x+y+t)\,\mathrm{d}y$, 其中 f 为连续函数, 证明

$$F''(t)=f(t+2a)-2f(t+a)+f(t).$$

7. 设 $f(t)=\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$, $g(t)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 证明 $f(t)+g(t)\equiv\frac{\pi}{4}$, 并由此计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

§23.2 含参变量广义积分

函数项级数可看成离散求和的含参量广义积分, 其中函数的自变量对应着参变量. 因此含参量广义积分的分析性质的研究与函数项级数的分析性质的研究在许多地方是类似的, 可以比照第十四章相关内容. 此外还可以参见 §16.1 节的内容, 其中涉及以 n 为参量的无穷限广义积分.

23.2.1 一致收敛性

含参变量 t 的广义积分

$$\varphi(t)=\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad t\in T \tag{23.2}$$

(T 是有限或无穷区间) 的分析性质研究的一个重要条件是积分关于参量的一致收敛性.

设积分对每一个 $t\in T$ 收敛. 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $A_0=A_0(\varepsilon)$, 当 $A>A_0$ 时, 对一切 $t\in T$, 成立

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

则称含参变量广义积分 (23.2) 关于 $t \in T$ **一致收敛**.

除了用上述定义外, 判定含参量广义积分 (23.2) 的一致收敛还有下述方法.

1. **Cauchy 一致收敛准则** $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛的充要条件是:

   $\forall \epsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 当 $A, A' > A_0$ 时, 对一切 $t \in T$, 有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| < \epsilon.$$

2. **Weierstrass 判别法 (M 判别法)** 设 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $t \in T$ 上收敛, 如果

   (1) $|f(x,t)| \leqslant F(x)$, $a \leqslant x < +\infty$, $t \in T$,

   (2) $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

   则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.

3. **Abel 判别法** 设

   (1) $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛,

   (2) 函数 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且作为二元函数是有界的,

   则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.

4. **Dirichlet 判别法** 设

   (1) $\int_a^{A} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 对 $\forall A \geqslant a, t \in T$ 是一致有界的,

   (2) 函数 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,t) = 0$ 关于 $t \in T$ 是一致的,

   则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛.

5. **Dini 定理** 设 $f(x,t)$ 在 $D = \{a \leqslant x \leqslant \infty, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 上连续且不变号, $\varphi(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in [\alpha,\beta]$ 一致收敛.

上面所说的含参变量的广义积分是指积分限是无穷大的情形, 同样可以研究有瑕点的含参变量的广义积分, 结论 (包括 5 个判别法) 完全相仿.

判定含参变量广义积分不一致收敛的常用方法如下.

1. 按定义: $\exists \epsilon_0 > 0, \forall M > 0$, 存在 $A(M) > M$ 以及 $t(M) \in T$, 使得

$$\left|\int_{A(M)}^{+\infty} f(x,t(M))\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \epsilon_0.$$

2. 按 Cauchy 一致收敛准则: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall M$, 存在 $A_1(M) > M, A_2(M) > M$ 以及 $t(M) \in T$, 使得
$$\left| \int_{A_1(M)}^{A_2(M)} f(x, t(M))\,\mathrm{d}x \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

3. 若 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty) \times T$ 上连续, t_0 为 T 的一个聚点, $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $T \setminus \{t_0\}$ 上收敛, 而 $\int_a^{+\infty} f(x,t_0)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 T 上必定不一致收敛.

4. $f(x,t)$ 在 $D = \{a \leqslant x < \infty, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 上连续, $\varphi(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在但不连续, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不一致收敛.

23.2.2 例题

最常用的判别法是 M 判别法, 教科书上已有很多例子. 下面举一些用其他判别法的例子, 此时被积函数往往是变号的, 并且广义积分是非绝对收敛的.

例题 23.2.1 讨论
$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^y}\,\mathrm{d}x$$
在 $y \in [0,+\infty)$ 中的一致收敛性.

解 1 (用 Abel 判别法) 首先对任意固定的 $y \geqslant 0$, 原广义积分是收敛的. 又因为 $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 与 y 无关, 故关于 $y \in [0,+\infty)$ 是一致收敛的.

任意固定 $y \in [0,+\infty)$, $\frac{1}{1+x^y}$ 是 x 的单调函数, 且 $\left|\frac{1}{1+x^y}\right| < 1$. 由 Abel 判别法知
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^y}\,\mathrm{d}x$$
关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. □

解 2 (用 Dirichlet 判别法) 将 $I(y)$ 改写为
$$\int_0^{+\infty} x \sin x^2 \frac{1}{x(1+x^y)}\,\mathrm{d}x.$$
由于
$$\left| \int_0^A x \sin x^2\,\mathrm{d}x \right| = \left| -\frac{1}{2}\cos x^2 \Big|_0^A \right| \leqslant 1, \quad \forall y \in [0,+\infty).$$
对每一个固定的 $y \in [0,+\infty)$, $\frac{1}{x(1+x^y)}$ 对 x 单调, 且

$$\left|\frac{1}{x(1+x^y)}\right| \leqslant \frac{1}{x} \to 0 \ (x \to +\infty),$$

故当 $x \to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{x(1+x^y)}$ 关于 y 一致收敛于 0. 由 Dirichlet 判别法知原广义积分对 $y \in [0,+\infty)$ 一致收敛. □

例题 23.2.2 讨论

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

在 (1) $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$, 其中 $\alpha_0 > 0$; (2) $\alpha \in (0,+\infty)$ 中的一致收敛性.

注 此题在上册 384 页的例题 12.2.3 中出现过, 积分区间是 $(0,+\infty)$, 0 点可能是瑕点, 在那里是讨论广义积分的收敛性与绝对收敛性.

解 (1) 由于 $\forall A > 1$ 有

$$\left|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2,$$

即关于 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$ 上述积分一致有界. 又对每一个 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ 对 x 单调, 且 $\left|\dfrac{1}{x^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{\alpha_0}} \to 0 (x \to +\infty)$, 即当 $x \to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ 关于 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$ 一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知 $I(\alpha)$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上是一致收敛的.

(2) $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ 在 $[1,+\infty)\times(0,+\infty)$ 中连续, 对每一个 $\alpha \in (0,+\infty)$, 广义积分是收敛的, $\alpha = 0$ 是 $(0,+\infty)$ 的聚点. 因此由积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ 发散知广义积分 $I(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

例题 23.2.3 讨论 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$ 在 (1) $p \geqslant p_0 > 0$; (2) $p > 0$ 中的一致收敛性.

解 (1) 当 $p \geqslant p_0 > 0$ 时, 积分以 $x = 0$ 为惟一瑕点, 由于当 $x \in (0,1)$ 时

$$|x^{p-1}\ln^2 x| \leqslant \frac{\ln^2 x}{x^{1-p_0}},$$

而瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x^{1-p_0}}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的, 故由 M 判别法知积分在 $p \geqslant p_0 > 0$ 上是一致收敛的.

(2) 当 p 充分接近 0 时, $x^{p-1}\ln^2 x$ 与 $\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 相接近, 而 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 是发散的, 由此猜测 $p > 0$ 时原积分不是一致收敛的. 下面给出严格的证明: $\forall \xi \in (0,1)$

$$\left|\int_0^\xi x^{p-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x\right| = \int_0^\xi x^{p-1}\ln^2 x\,\mathrm{d}x \geqslant \ln^2\xi \int_0^\xi \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-p}} = \ln^2\xi \cdot \frac{1}{p}\xi^p.$$

由于 $\displaystyle\lim_{\xi\to 0^+} \xi^\xi = 1$, 取 $p = \xi \in (0,1)$, 则当 $\xi \to 0^+$ 时

$$\ln^2\xi\frac{1}{p}\xi^p=\frac{\ln^2\xi}{\xi}\xi^\xi\to+\infty.$$

由极限的保号性知存在 $\xi_0\in[0,1]$, 当 $0<\xi\leqslant\xi_0$ 时, $\ln^2\xi\cdot\xi^{\xi-1}>1$, 所以存在 $\varepsilon_0=1,\forall\,\delta>0$, 存在 $\xi_1=\min\{\delta,\xi_0\}$, $p=\xi_1$, 使

$$\left|\int_0^\delta x^{p-1}\ln^2x\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\left|\int_0^{\xi_1}x^{\xi_1-1}\ln^2x\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\ln^2\xi_1\cdot\xi_1^{\xi_1-1}\geqslant1.$$

由一致收敛的定义知瑕积分不是一致收敛的. □

注 对瑕积分的一致收敛性的讨论, 也可以转化为无穷限积分的情形去讨论, 但这种转化中使用的变量代换不应与参变量发生关系, 否则会出现错误结论.

例题 23.2.4 证明 $I(t)=\int_1^{+\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

分析 被积函数中因子 $\frac{x}{a^2+x^2}$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐近性态与 $\frac{1}{x}$ 相同. 而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是不一致收敛的, 故可依此证明原含参量广义积分在 $(0,+\infty)$ 上也是不一致收敛的. 下面给出具体的证明.

证 1 反证法. 由于 $\frac{\sin tx}{x}=\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\cdot\frac{a^2+x^2}{x^2}$, 若 $I(t)=\int_1^{+\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, $\frac{a^2+x^2}{x^2}=1+\frac{a^2}{x^2}$ 对 x 单调且 $\left|1+\frac{a^2}{x^2}\right|\leqslant1+a^2$, 由 Abel 判别法知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$$

在 $(0,+\infty)$ 上也一致收敛. 矛盾. □

证 2 $\forall\,A>0$, 取 $A_0\geqslant A$, 且令 $t_0=\frac{1}{A_0}$, 则

$$\int_{A_0}^{2A_0}\frac{x\sin t_0x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{t_0A_0}^{2t_0A_0}\frac{y\sin y}{a^2t_0^2+y^2}\,\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{y\sin y}{\frac{a^2}{A_0^2}+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

不妨设 $A_0\geqslant a$, 则当 $1\leqslant y\leqslant2$ 时有

$$\frac{y}{\frac{a^2}{A_0^2}+y^2}\geqslant\frac{y}{1+y^2}=\frac{1}{y}\frac{y^2}{1+y^2}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y},$$

于是

$$\int_{A_0}^{2A_0}\frac{x\sin t_0x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y=\varepsilon_0>0.$$

由 Cauchy 准则知 $\int_1^{+\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

23.2.3 练习题

1. 讨论下列广义积分的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+a^2)t}\sin t\,\mathrm{d}t$, $a\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}\,\mathrm{d}x$, $y\in[y_0,+\infty)$, 其中 $y_0>0$;

(3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$, $t\in(0,+\infty)$;

(4) $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, $\alpha\in[0,+\infty)$;

(5) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\,\mathrm{d}x$, $y\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\int_0^{+\infty} x\ln x\,\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, (1) $t\in[t_0,+\infty)$, 其中 $t_0>0$, (2) $t\in(0,+\infty)$;

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t}\cos t\,\mathrm{d}t$, $u\in[0,1]$;

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\,\mathrm{d}t$, $\alpha\in(0,+\infty)$;

(9) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin y\,\mathrm{d}y$, $x\in(0,+\infty)$;

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\,\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}$, $\alpha\in(0,1)$;

(11) $\int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\,\mathrm{d}x$, $|t|<\frac{1}{2}$;

(12) $\int_0^1 (1-x)^{u-1}\,\mathrm{d}x$, (1) $u\in[a,+\infty)$, 其中 $a>0$, (2) $u\in(0,+\infty)$.

2. 设 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ 当 $\lambda=a$, $\lambda=b$ 时收敛 $(a<b)$. 证明 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致收敛.

3. 证明积分 $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

23.2.4 主要性质

与函数项级数类似, 含参变量的广义积分有如下主要性质.

命题 23.2.1 (连续性) 设 $f(x,t)$ 在 $D=\{a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$, 则 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 即 $\forall\, t_0\in[\alpha,\beta]$, 有

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{t\to t_0} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

命题 23.2.2 (可微性) 设 $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ 在 D 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛于 $\varphi(t)$, $\int_a^{+\infty} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛, 则 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且

$$\varphi'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

命题 23.2.3 (交换积分次序) **情形** 1: 在命题 23.2.1 的条件下, $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

情形 2: 若 $f(x,t)$ 在 $x\geqslant a$, $t\geqslant c$ 上连续,

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x \ \text{与}\ \int_c^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{23.3}$$

在任意有穷区间上一致收敛 (第一个关于 t, 第二个关于 x), 并且两个累次积分

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}t\int_a^{+\infty}|f(x,t)|\,\mathrm{d}x \ \text{与}\ \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,t)|\,\mathrm{d}t$$

中至少有一个存在, 则两个累次积分

$$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}t\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x \ \text{与}\ \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{23.4}$$

都存在并且相等.

注 1 (Dini 定理) 如果 $f(x,t)$ 连续非负, 且 (23.3) 中两个积分都是连续的 (第一个关于 t, 第二个关于 x), 则 (23.4) 中的两个累次积分中的一个存在可推出另一个也存在, 并且二者相等. 关于这个定理的证明可见 [8].

注 2 关于命题 23.2.1 中的极限号与积分号的换序, 如果将 $f(x,t)$ 视为 $f_t(x)$, 将 t 与命题 16.1.1, 16.1.2 中的下标 n 等同, 将 $t\to t_0$ 视为 $n\to\infty$, 则也有相应的极限与积分的换序定理.

23.2.5 例题

本小节的例题分为三种类型.

1. 应用 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha$$

或 Euler-Poisson 积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\ (\alpha>0)$$

求其他广义积分的值.

2. 讨论含参变量广义积分的分析性质.

3. 用积分号下求导或积分的方法, 求含参变量广义积分. 并用 "嵌入法" 计算广义积分.

例题 23.2.5 求 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha \geqslant 0$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1}{x^2} = -\alpha$, 所以 $x=0$ 不是瑕点. 原广义积分与 Poisson 积分比较, 多了和因子 -1 与积因子 $\frac{1}{x^2}$, 现设法用分部积分吸收掉.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1)\,\mathrm{d}\frac{1}{x}\\ &= -\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cdot(-2\alpha x)\,\mathrm{d}x\\ &= -2\alpha\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{\pi\alpha}. \quad \square\end{aligned}$$

注 本题目也可以用在积分号下求导的方法去求解.

例题 23.2.6 证明 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$ 在 $(2,+\infty)$ 上连续.

证 $\forall \varepsilon>0$, 当 $\alpha\in[2+\varepsilon,+\infty)$ 时有

$$\left|\frac{x}{2+x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}, \quad x\in[1,+\infty). \tag{23.5}$$

由 M 判别法知

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{23.6}$$

关于 $\alpha\in[2+\varepsilon,+\infty)$ 是一致收敛的. 由此以及一致收敛的定义知 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[2+\varepsilon,+\infty)$ 也是一致收敛的. 于是 $F(\alpha)$ 在 $[2+\varepsilon,+\infty)$ 上连续. 由 ε 的任意性知 $F(\alpha)$ 在 $(2,+\infty)$ 上连续. $\square$

注 1 由于连续性本质上是一种局部的分析性质, 我们可以先证明 $F(\alpha)$ 在 $(2,+\infty)$ 上的内闭一致收敛性, 然后用连续性定理得到内闭连续, 而内闭连续等价于在开区间上连续. 也可以对于 $(2,+\infty)$ 中的任一点 α_0, 在 α_0 的小的闭邻域中证明 $F(\alpha)$ 的连续性, 再从 α_0 的任意性推出 $F(\alpha)$ 在 $(2,+\infty)$ 上的连续性. 这种想法也可用于可微性证明.

注 2 由于不等式 (23.5) 只对 $x\in[1,+\infty)$ 成立, 在 $x\in[0,+\infty)$ 上不成立, 因此由 M 判别法只能证明 (23.6) 是一致收敛的. 但由一致收敛的定义,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{与}\ \int_1^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

的一致收敛性是等价的. 因此由后者的一致收敛性可推知前者的一致收敛性, 这种方法称为 "**截断法**".

例题 23.2.7 证明当 $b \neq 0$ 时

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(1 - \mathrm{e}^{-at}) \cos bt \, \mathrm{d}t$$

在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 上可导.

证 由于 $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t}(1 - \mathrm{e}^{-at}) = a$, 所以 $t = 0$ 不是瑕点.

(1) 证明 $F(a)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续. 令

$$f(t, a) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}(1 - \mathrm{e}^{-at}) \cos bt, & t > 0,\ a \geqslant 0, \\ a, & t = 0,\ a \geqslant 0, \end{cases}$$

则 $f(t, a)$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续.

由 $b \neq 0$ 知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos bt}{t} \, \mathrm{d}t$ 关于 $a \in [0, +\infty)$ 一致收敛, 又 $1 - \mathrm{e}^{-at}$ 对 t 单调, 且 $|1 - \mathrm{e}^{-at}| \leqslant 2$, 故由 Abel 判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}(1 - \mathrm{e}^{-at}) \cos bt \, \mathrm{d}t$ 关于 $a \in [0, +\infty)$ 一致收敛. 从而 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}(1 - \mathrm{e}^{-at}) \cos bt \, \mathrm{d}t$ 在 $a \in [0, +\infty)$ 上连续. 又由本章第一节的命题 23.1.2 (连续性) 知 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}(1 - \mathrm{e}^{-at}) \cos bt \, \mathrm{d}t$ 也是 $a \in [0, +\infty)$ 上的连续函数, 所以 $F(a)$ 在 $a \in [0, +\infty)$ 上连续.

(2) 证明 $F(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导. 由

$$\frac{\partial f}{\partial a}(t, a) = \mathrm{e}^{-at} \cos bt, \quad t \geqslant 0, a \geqslant 0$$

知 $f(t, a)$ 与 $f_a(t, a)$ 都在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, 且 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $a \geqslant \varepsilon$ 时

$$|f_a(t, a)| \leqslant \mathrm{e}^{-at} \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \ \ t \in [0, +\infty),$$

而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon t} \, \mathrm{d}t$ 收敛, 由 M 判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t, a) \, \mathrm{d}t$ 关于 $a \in [\varepsilon, +\infty)$ 是一致收敛的. 于是 $F(a)$ 在 $[\varepsilon, +\infty)$ 上可导, 由 ε 的任意性知 $F(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且

$$F'(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} \cos bt \, \mathrm{d}t, \ \ a \in (0, +\infty). \quad \square \tag{23.7}$$

例题 23.2.8 求例题 23.2.7 中的 $F(a)$.

解 1 利用表达式 (23.7), 则 $a > 0$ 时

$$F'(a) = \frac{\mathrm{e}^{-at}}{a^2 + b^2}(b \sin bt - a \cos bt)\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

于是

$$F(a) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + C. \tag{23.8}$$

由于 $F(a)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $F(0) = 0$, 于是在 (23.8) 中令 $a \to 0$, 得到

$$0 = \frac{1}{2} \ln b^2 + C.$$

所以 $C = -\dfrac{1}{2} \ln b^2$, 最后得到

$$F(a)=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{b^2}. \quad \square$$

解 2 用“嵌入法”. 注意到 $F(a)$ 的被积函数中难处理的因子是 $\frac{1}{t}$. 可以像解 1 那样用对 a 求导的办法消去 $\frac{1}{t}$, 又可以把 $\frac{1}{t}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$ 写成一个特殊的积分值, 即引入

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t})\cos bt\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha>0$, $b\neq 0$ 固定, 则 $F(\alpha)=I(0)$. 因为

$$\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t})=-\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-ty}\,\mathrm{d}y,$$

所以

$$I(\beta)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-ty}\cos bt\,\mathrm{d}y.$$

形式上交换积分次序得

$$I(\beta)=-\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ty}\cos bt\,\mathrm{d}t=-\int_\alpha^\beta\frac{y}{y^2+b^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+b^2}{\beta^2+b^2}.$$

若上式对 $\beta=0$ 成立, 则可得 $F(\alpha)=I(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+b^2}{b^2}$.

下面验证条件. 先考查对哪些 β 积分可换序.

(1) 设 $f(y,t)=\mathrm{e}^{-ty}\cos bt$, 则 $\forall\,\alpha,\beta$, $f(y,t)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[0,+\infty)$ 上连续.

(2) 设 $\beta>0,\alpha>0$, 由 $|\mathrm{e}^{-ty}\cos bt|\leqslant \mathrm{e}^{-\min\{\alpha,\beta\}t}$ 及 M 判别法知含参量广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ty}\cos bt\,\mathrm{d}t$ 在$[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上关于 y 一致收敛. 因此当 $\beta>0$ 时, 积分可换序, 故

$$I(\beta)=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+b^2}{\beta^2+b^2}.$$

最后验证在 $\alpha>0$, $b\neq 0$ 时, $I(\beta)$ 在 $\beta=0$ 处右连续. 令

$$f(t,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t})\cos bt, & t>0,\ \beta\geqslant 0,\\ -\beta+\alpha, & t=0,\ \beta\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $f(t,\beta)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.

下面用 Abel 判别法证明 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t})\cos bt\,\mathrm{d}t$ 关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而 $I(\beta)$ 在 $\beta=0$ 处右连续. 事实上

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\cos bt\,\mathrm{d}t$ 关于 $\beta\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的;

(2) 对任意固定的 $\beta\geqslant 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t})=-\beta\mathrm{e}^{-\beta t}+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}=\mathrm{e}^{-\alpha t}[\alpha-\beta\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)t}]$$

当 t 足够大时是定号的, 故 $\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}$ 当 t 充分大时是单调的, 又 $|\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}|\leqslant 2$, 由 Abel 判别法知 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t})\cos bt\,\mathrm{d}t$ 关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一

致收敛, 从而 $I(\beta)$ 在 $\beta=0$ 右连续. □

23.2.6 练习题

1. 设 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 对于 x 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 中收敛, $f_x(x,y)$ 在 $U(x_0)\times[a,+\infty)$ 中存在, 且当 $x\to x_0$ 时, $f_x(x,y)$ 关于 y 在任何有限区间上一致收敛于 $f_x(x_0,y)$, 又知积分 $\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $U(x_0)$ 上一致收敛. 证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\Big|_{x=x_0}$ 存在且等于 $\int_a^{+\infty} f_x(x_0,y)\,\mathrm{d}y$.

2. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}\,\mathrm{d}x$, 证明 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续, 在 $\alpha=\pm1$ 处间断.

3. 证明 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha x^2}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上连续.

4. 证明 $F(x)=\int_1^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-yx}}{y}\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(x)$ 存在, 且 $F'(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y}\mathrm{e}^{-yx}\right)\mathrm{d}y$.

5. 设 $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$, 证明 $F(\alpha)$ 在 $(0,2)$ 中连续.

6. 设 $F(y)=\int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cos[x(1-y)]\,\mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{y\to1}F(y)$.

7. 利用 Dirichlet 积分或 Euler-Poisson 积分求下列积分值:

   (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;

   (2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$;

   (3) $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (\alpha>0)$;

   (4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

8. 利用积分号下求导的方法求下列积分:

   (1) $I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ \ (a\geqslant0)$;

   (2) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\ \ (\alpha\geqslant0)$;

   (3) $f(x)=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{y}x\mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}y\ \ (x\geqslant0)$.

9. 利用积分号下求积分的方法求下列积分:

(1) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\ (\alpha\geqslant 0)$ (提示: $\frac{\arctan\alpha x}{x}=\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2x^2}$);

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$ (提示: $\frac{1}{x^2+\alpha^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(x^2+\alpha^2)}\,\mathrm{d}t$).

10. 求含参变量瑕积分

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\quad(|\alpha|\leqslant 1).$$

11. 计算

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2yx)\,\mathrm{d}x\ \ (-\infty<y<+\infty).$$

§23.3 B 函数与 Γ 函数

在计算积分或者解常微分方程时, 常常遇到其解不能表示为初等函数的问题. 解决这个问题的方法之一是引进一些新的函数, 它们可能是函数项级数的和函数, 或者是用含参量积分表示的函数, 然后研究它们的性质, 甚至做出函数值表. 这类函数一般称为**特殊函数**. 这一节介绍的 Beta 函数 (记为 B 函数) 与 Gamma 函数 (记为 Γ 函数) 就属于最重要特殊函数之列. 它们在数学的很多分支中都有应用. 有不少重要的定积分值可以用它们表示出来. 此外, Gamma 函数的一些性质本身也是数学分析中很好的训练, 在 23.3.4 小节中的部分内容可作为习题课的补充材料.

23.3.1 B 函数

B 函数也称为第一类 Euler 积分. B 函数是一个二元函数, 它的定义是

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x,\quad p,q>0. \tag{23.9}$$

它还有下列等价的积分表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

B 函数的主要性质如下:

1. 对称性: $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$;

2. $\mathrm{B}(p,q)$ 在其定义域内连续, 且有任意阶连续偏导数;

3. 递推公式:

$$\mathrm{B}(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q),\quad \mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).$$

如果 m,n 都是自然数, 则

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\ \text{(参见上册 326 页)}.$$

23.3.2 Γ 函数

Γ 函数也称为第二类 Euler 积分. 它是一元函数, 其含参积分定义为

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ s>0. \tag{23.10}$$

它有如下的 Gauss 无穷乘积分解 (也称为 Euler-Gauss 公式) ①

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}. \tag{23.11}$$

Γ 函数的主要性质如下:

1. Γ 函数与 B 函数的关系

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,\ q>0;$$

2. $\Gamma(s)$ $(s>0)$ 及其任意阶导数都连续, 且

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}(\ln t)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t;$$

3. 递推公式

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad s>0; \tag{23.12}$$

4. $\ln\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为下凸函数 (见上册 243 页);

5. Legendre 加倍公式: 对于 $s>0$ 有

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2});$$

6. 余元公式: 对于 $0<s<1$ 有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi};$$

注 1　从积分定义 (23.10) 出发, 利用递推公式 (23.12) 可以将 Γ 函数的定义域开拓如下. 将 (23.12) 变形为

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}. \tag{23.13}$$

① 在上册 401 页已经以参考题形式引进了 Γ 函数的积分形式. 在第十三章介绍了无穷乘积之后, 于例题 13.4.4 中引进了 Γ 函数的无穷乘积定义 (13.37), 其中的 Γ 函数对于自变量不是 0 和负整数时均有定义. 在例题 16.1.4 中证明: 当自变量大于 0 时两个定义等价. Euler-Gauss 公式可由无穷乘积定义直接得到, 参见 (13.38).

注意到右边当 $-1<s<0$ 时也有定义, 于是我们用 (23.13) 的右边定义为 $-1<s<0$ 时的 Γ 函数的值, 以此类推, Γ 函数的定义域可以开拓到除去 0 和负整数的一切实数. 当然这样的开拓结果与 (13.37) 的无穷乘积定义完全一致.

注 2 在所列举的 Γ 函数的性质中, 前三个在教科书中都有. 为证明 $\ln\Gamma(s)$ 下凸, 从 §8.4 节中的下凸函数的定义出发, 用无穷限积分的 Hölder 不等式即可得到. 最后两个性质的证明比较困难, 见下面的 23.3.4 小节.

23.3.3 例题

例题 23.3.1 设平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 与 $x+y+z=1$ 围成四面体 V, 证明

$$\iiint_V x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{(a+b+c)\Gamma(a+b+c)}\quad(a,b,c>0).$$

证 作以下计算即可:

$$\begin{aligned}I&=\iiint_V x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(y^{b-1}\frac{1}{c}z^c\right)\Big|_0^{1-x-y}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^{b-1}(1-x-y)^c\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

再令 $y=(1-x)t$, 则

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x\int_0^1(1-x)^{b-1}t^{b-1}(1-x)^c(1-t)^c(1-x)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+c}\,\mathrm{d}x\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^c\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{c}\mathrm{B}(a,b+c+1)\mathrm{B}(b,c+1)\\&=\frac{1}{c}\,\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c+1)}{\Gamma(a+b+c+1)}\cdot\frac{\Gamma(b)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b+c+1)}\\&=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{(a+b+c)\Gamma(a+b+c)}.\quad\square\end{aligned}$$

例题 23.3.2 确定 α,β,γ, 使

$$I=\iiint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}<+\infty,$$

并求 I 的值, 其中 $D=\{(x,y,z)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$.

解 首先应该有 $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$. 至于进一步的条件, 我们将在计算中得到, 令 $x=u^{2/\alpha},\ y=v^{2/\beta},\ z=w^{2/\gamma}$, 则

$$I=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\iiint\limits_{\Omega}\frac{u^{2/\alpha-1}v^{2/\beta-1}w^{2/\gamma-1}}{1+u^2+v^2+w^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,$$

其中 $\Omega=\{(u,v,w)\mid u\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\ w\geqslant 0\}$. 再作球坐标变换

$$u=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ v=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ w=\rho\cos\varphi,$$
$$\rho\geqslant 0,\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

则

$$I=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\pi/2}\cos^{2/\alpha-1}\theta\sin^{2/\beta-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})-1}\varphi\cos^{2/\gamma-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\times\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})-1}}{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma})\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

可见当且仅当 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$ 时后一个积分收敛, 并且有

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})),$$

这样便得到

$$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{\beta})\Gamma(\frac{1}{\gamma})\Gamma(1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})).\quad\square$$

例题 23.3.3 求积分 (见上册 395 页练习题 6(2))

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+\frac{t^2}{x^2})}\,\mathrm{d}x,\quad t>0.$$

解 1 由 M 判别法, $I(t)$ 关于 $t>0$ 是一致收敛的, 形式上求导得

$$I'(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+\frac{t^2}{x^2})}(-\frac{2t}{x^2})\,\mathrm{d}x.$$

$\forall t_0>0$, 上述积分在 t_0 的邻域内一致收敛, 所以上面的求导可行. 令 $x=\frac{1}{y}$, 则

$$I'(t)=\int_{+\infty}^0\mathrm{e}^{-(\frac{1}{y^2}+y^2t^2)}2t\,\mathrm{d}y.$$

再令 $yt=z$, 则

$$I'(t)=-2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(z^2+\frac{t^2}{z^2})}\,\mathrm{d}z=-2I(t).$$

所以

$$\ln I(t)=-2t+C,$$
$$I(t)=C\mathrm{e}^{-2t}.$$

考虑到 $I(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以

$$I(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \quad \square$$

解 2 下面的方法需要的工具不多, 但不容易想到: 令 $y=\frac{t}{x}$, 则

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t^2}{y^2}+y^2\right)}\frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

与原表达式相加得

$$\begin{aligned}2I(t)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\left(1+\frac{t}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2t}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x-\frac{t}{x}\right)\\&=\mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-2t}. \quad \square\end{aligned}$$

例题 23.3.4 证明 Riemann 的 zeta 函数的积分形式

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x,\quad s>1.$$

证 对于 $x>0$ 有展开式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}&=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\\&=\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}.\end{aligned}$$

于是 $\forall A>0$ 有

$$\int_0^A\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^A x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x.$$

对于固定的 $s>1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-nx}$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^A\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^A x^{s-1}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{nA}\left(\frac{y}{n}\right)^{s-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-y}}{n}\right)\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{nA}y^{s-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这个级数对于 $A\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的, 于是令 $A\to+\infty$, 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \quad \square$$

例题 23.3.5 求 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\mathrm{e}^{-t}$, 则

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0\frac{-t}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{-t}(-\mathrm{d}t)=-\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t.$$

在上题的结论中取 $s=2$, 则

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\Gamma(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi}{6}. \quad \square$$

例题 23.3.6 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ 其中 $a>0$, $p\geqslant 0$, Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 割下的区域 (Viviani 体).

解 见图 22.11 (现在 x,y 轴的位置有变化). 用柱坐标系, 则

$\Omega=\{(r,\theta,z)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a\sin\theta,\ -\sqrt{a^2-r^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-r^2}\}$.

于是

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}}\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)^p r\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}2r(a^2-r^2)^{\frac{p+1}{2}}\,\mathrm{d}r$$

$$=-\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{p+3}(a^2-r^2)^{\frac{p+3}{2}}\right)\Bigg|_0^{a\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{4a^{p+3}}{p+3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^{p+3}\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4a^{p+3}}{p+3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma(\frac{p+4}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+5}{2})}\right). \quad \square$$

23.3.4 Γ 函数的特征刻画和几个重要公式的证明

前面已介绍过 Γ 函数满足如下三条性质:

1. 当 $x>0$ 时, $\Gamma(x)>0$, 且 $\Gamma(1)=1$;
2. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;
3. $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为下凸函数.

关于 Γ 函数的一个非常漂亮的结果是 Bohr 与 Mollerup 定理 (1922 年), 即上面的三条性质完全刻画了 Γ 函数.

命题 23.3.1 (Bohr-Mollerup 定理) 如果定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:

(1) $f(x)>0$, 且 $f(1)=1$,

(2) $f(x+1)=xf(x)$,

(3) $\ln f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的下凸函数,

则 $f(x)\equiv\Gamma(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

证 已知 Γ 函数满足上述三条, 故只要证明 f 是由 (1), (2), (3) 惟一确定的函数就可以了. 而由 (2) 只要对 $x\in(0,1)$ 进行证明. 令 $\varphi(x)=\ln f(x)$, 则

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\ln x,\quad 0<x<+\infty, \tag{23.14}$$

$\varphi(1)=0$, 且 φ 是下凸函数. 设 $0<x<+\infty$, 考虑 φ 在

$$[n,n+1],\quad [n+1,n+1+x],\quad [n+1,n+2]$$

三个闭区间上的差商, 有

$$\ln n=\varphi(n+1)-\varphi(n)\leqslant\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}$$

$$\leqslant\varphi(n+2)-\varphi(n+1)=\ln(n+1). \tag{23.15}$$

另一方面, 重复 (23.14) 可得

$$\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\ln[x(x+1)\cdots(x+n)].$$

代入 (23.15) 并整理得

$$0\leqslant\varphi(x)-\ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)\leqslant x\ln(1+\frac{1}{n}).$$

由对数函数的连续性, 令 $n\to\infty$, 得

$$\varphi(x)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right).$$

因此

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

利用例题 16.1.4 的结论知 $f(x)=\Gamma(x)$. □

注 既然这个定理完全刻画了 Γ 函数, 因此就可以由它出发导出 Γ 函数的基本性质 (参见 [7] 的第 7 章), 下面就是一个例子.

命题 23.3.2 (Legendre 加倍公式) 对于 $x>0$ 成立

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}).$$

证 设 $g(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2})$, 利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, 容易检验 $g(x)$ 满足 Bohr-Mollerup 定理中的条件 (1)–(3), 可见有

$$\Gamma(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}),$$

将其中 x 换为 $2x$ 就得到所要的加倍公式. □

命题 23.3.3 (余元公式) 对于 $0<x<1$ 成立

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

根据本书前面的知识, 我们可以对余元公式给出下列三种证法:

证 1 利用 Γ 函数的 Euler-Gauss 无穷乘积表达式 (23.11) (即 (13.38)) 与正弦函数的无穷乘积表达式 (13.30). 具体细节见例题 13.4.4 以及 (13.40). □

证 2 首先利用 Γ 函数与 B 函数的关系得到

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\mathrm{B}(x,1-x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^x(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

然后利用例题 16.1.3 的 Euler 积分公式. □

证 3 利用上册 402 页参考题 8(2) 的结果: 当 $2m+1<2n$ 时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n}\csc\frac{(2m+1)\pi}{2n}$$

于是有

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{2m+1}{2n})\Gamma(1-\frac{2m+1}{2n})&=\mathrm{B}(\frac{2m+1}{2n},1-\frac{2m+1}{2n})\\&=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+y}\,\mathrm{d}y\\&=2n\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x\\&=\pi\csc\frac{(2m+1)\pi}{2n},\end{aligned}$$

当 x 为无理数时, 通过形如 $\frac{2m+1}{2n}$ 的有理数取极限. □

命题 23.3.4 (Γ 函数的 Stirling 公式) 关于 Γ 函数有渐近公式:

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\ (x\to+\infty)\ ^{①}.\tag{23.16}$$

证 (此证明取自 [45].) 在 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 中令 $t=x(1+u)$, 得到

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\int_{-1}^{+\infty}[(1+u)\mathrm{e}^{-u}]^x\,\mathrm{d}u.\tag{23.17}$$

令

$$h(u)=\begin{cases}\dfrac{2}{u^2}[u-\ln(1+u)], & -1<u<+\infty,\quad u\neq 0,\\ 1, & u=0.\end{cases}$$

则 h 在 $(-1,+\infty)$ 上为单调减少的连续函数, 并满足

$$(1+u)\mathrm{e}^{-u}=\exp\left(-\frac{u^2}{2}h(u)\right).$$

于是, 对 (23.17) 作代换 $u=s\sqrt{\dfrac{2}{x}}$, 得

$$\Gamma(x+1)=x^x\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中

① 对于 x 为正整数的情况, 在上册 364~365 页已给出了 $n!$ 的 Stirling 公式的证明. 在 13.4.3 小节练习题 10 中指出可以用无穷乘积方法证明关于 $n!$ 的 Stirling 公式. 又在上册 374 页的参考题 15 中指出如何可以得到更为精确的 Stirling 公式. 此外, 还在上册 363 页的 (11.31) 不加证明地给出了含有 Bernoulli 数的一般形式的 Stirling 公式.

$$\psi_x(s)=\begin{cases}\exp[-s^2h(s\sqrt{\dfrac{2}{x}})], & -\sqrt{\dfrac{x}{2}}<s<+\infty,\\ 0, & s\leqslant-\sqrt{\dfrac{x}{2}}.\end{cases}$$

可以验证

(1) 对每个 s 而言, 当 $x\to+\infty$ 时, $\psi_x(s)\to \mathrm{e}^{-s^2}$;

(2) 当 $x\geqslant 1$ 时, 对 $s>0$, 有 $0<\psi_x(s)<\psi_1(s)$;

(3) 对 $s<0$, 有 $0<\psi_x(s)<\mathrm{e}^{-s^2}$;

(4) 对于任意 $A>0$, 含参量广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,\mathrm{d}s$ 在 $x\in[-A,A]$ 上一致收敛;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_1(s)\,\mathrm{d}s$ 收敛.

因而, 就可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\sqrt{\pi},$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}x^x\mathrm{e}^{-x}}=1,$$

这就是关于 Γ 函数的 Striling 公式 (23.16). □

注 这只是关于 Γ 函数的 Stirling 公式的最简单形式. 与上册 363 页 (11.31) 类似的关于 Γ 函数的一般 Stirling 公式见 [19] (卷 2 第 501 小节) 等参考书.

23.3.5 练习题

1. 计算

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln\frac{1}{x}}}$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. 试用 Γ 函数或 B 函数表示

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x\ \ (|\alpha|<1)$;

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1(1+x)^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x\ \ (a,b>0)$.

3. n 为正整数, $p>0$, 证明

$$\mathrm{B}(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}.$$

4. 证明 $\ln\Gamma(s)$ 是下凸函数.

5. 按照下列步骤证明公式 $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

(1) $\Gamma(p)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$;

(2) $\Gamma(p)\Gamma(q)=\lim\limits_{A\to\infty}4\iint\limits_{G(A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, 其中

$$f(u,v)=u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)},$$

$$G(A)=\{(u,v)\,\big|\,0\leqslant u\leqslant A,\ 0\leqslant v\leqslant A\};$$

(3) 令 $D(R)=\{(r,\theta)\,\big|\,0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\}$, 则

$$\lim_{A\to+\infty}\iint\limits_{D(A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q),$$

$$\lim_{A\to+\infty}\iint\limits_{D(\sqrt{2}A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q);$$

(4) $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

§23.4 对于教学的建议

23.4.1 学习要点

1. 含参变量积分是我们遇到的又一种新的函数表示方式. 对于它的分析性质的研究, 如连续性、可微性和可积性等, 涉及积分运算和其他分析运算的运算次序的交换性. 一致收敛性给出了保证交换运算次序的重要条件. 在很多情况下, 可以用 M 判别法判断一致收敛性, 这是应该熟练掌握的.
2. 用嵌入法计算广义积分的值体现了数学中的“嵌入”思想. 我们要考虑一个 1 维的问题 (比如计算一个定积分). 我们不妨把这个问题放到更高维的框架中, 例如再引入一个参变量, 把这个积分作为含参变量积分的特例. 由于在引入的高维框架中, 我们可以有更多的可施展数学工具 (如积分、微分等) 的天地, 就有可能从另一个角度 (而这一个角度是我们引入高维框架后带来的) 把我们的问题简化, 从而达到解决原有问题的目的. 在具体计算过程中, 要作一些分析. 在什么地方引入参量比较合适, 用微分法还是用积分法, 都是有讲究的. 比如计算 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. 把它看成是含参量积分 $\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 当 $\alpha=0$ 时的值. 引入因子 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 有两个作用, 对 α 求导可消去导致不可积的因子 $\dfrac{1}{x}$, 同时 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 又是收敛因子, 保证了在 $\alpha>0$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\right)'_{\alpha}\,\mathrm{d}x$ 的内闭一致收敛性. 故可在积分号内求导, 则有

$$\varphi'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

再积分就有 $\varphi(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\alpha,\quad \alpha>0$. 如果 $\varphi(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\varphi(0)=\lim_{\alpha\to 0^+}\varphi(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

3. 含参量积分的一致收敛性的判别与函数项级数有许多类似之处, 同时也要注意到利用积分自身的特点, 如变量代换, 分部积分等. 以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 为例, 作变换 $x^2=t$, 就化为 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}}\,\mathrm{d}t$, 成为我们熟悉的类型.
4. B 函数的三个积分表达式, 各有各的长处, 应加以记忆. 这样, 遇到相应的积分, 就可写成特殊的 B 值, 再利用余元公式等得到积分值.
5. **对习题课的建议** 许多学生对讨论含参变量广义积分的一致收敛性有畏难情绪, 习题课上要由浅入深地进行引导, 分析难点, 找出办法. 大多数题目只需使用 M 判别法. 在用嵌入法计算一些特殊的广义积分的值时, 如果觉得证明计算合理性 (如检验一致收敛性等) 的过程较长, 可以在解题时先进行形式运算, 算出积分值后再给出运算合理性的证明.

本章的内容综合性强, 计算题大多具有一定的技巧性. 因此应在习题课上作比较系统的示范和总结.

23.4.2 参考题

1. 设 $f(x,t)$, $f_x(x,t)$ 连续, 记 $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi$, 其中 a 为正常数, 证明 $u(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t).$$

2. 设 n 为正整数, 记

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

证明 $J_n(x)$ 满足

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $f(0)=0$, 定义

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\ 0<x\leqslant 1,\ \varphi(0)=0.$$

证明:

(1) $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶连续可微, 且

$$\varphi'(x)=\int_0^x\frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\ 0<x\leqslant 1,\ \varphi'(0)=0;$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^x\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\ 0<x\leqslant 1.$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上单调 $(A>0)$, 证明

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0^+).$$

5. 设 $F(t)=t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有界可积 $(\forall b>0)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$, 证明 $\lim\limits_{t\to0^+}F(t)=\alpha$.

6. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

(1) $g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+u)f(u)\,\mathrm{d}u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界;

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/(4\varepsilon)}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$

7. 讨论下列函数在 $(0,1)$ 上的连续性:

(1) $f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$;

(2) $g(\alpha)=\int_0^1\dfrac{f(t)}{\sqrt{|t-\alpha|}}\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)$ 是 $[0,1]$ 上的有界可积函数.

8. 求曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围立体的体积.

9. 求立体

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant1,\quad x,\,y,\,z\geqslant0$$

的质心的 x 坐标.

10. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$ 所包围的面积对 x 轴的惯性矩.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中连续, 证明

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0).$$

12. 设 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

13. 求 $\int_0^{+\infty}\cos x^p\,\mathrm{d}x$, 其中 $p>1$.

14. 求 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$.

15. 求 Laplace 积分

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^k}\,\mathrm{d}x,\qquad J_k=\int_0^{+\infty}\frac{x\,\sin bx}{(a^2+x^2)^k}\,\mathrm{d}x,\ a,b>0,\ k\in\mathbf{N}_+.$$

16. 应用 Γ 函数的 Gauss 乘积分解证明 Euler 常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=-\Gamma'(1).$$

17. (1) 利用 n 次单位根分解式证明

$$1+x+\cdots+x^{n-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}\right);$$

(2) 利用 (1) 证明

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}};$$

(3) 证明 Euler 乘积

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

第二十四章 曲线积分

本章在 §24.1 和 §24.2 两节中分别介绍第一型和第二型曲线积分的定义、计算、应用以及这两类曲线积分之间的关系. §24.3 节介绍重要的 Green 公式, 平面上曲线积分与路径无关的条件以及等周定理. 在 §24.4 节中介绍连续向量场的旋转度并用于证明 Brouwer 不动点定理和代数基本定理. 最后一节是学习要点和参考题.

§24.1 第一型曲线积分

24.1.1 第一型曲线积分的定义与计算

$\mathbf{R}^n$ 中以 A 点为始点, B 点为终点的连续不自交的曲线段 $\Gamma = \widetilde{AB}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一条**简单曲线**. 如果 $A = B$, 则称 Γ 为封闭曲线或闭曲线, 否则为不封闭曲线. 在 Γ 上从 A 到 B 依次取有限个点 $A = A_0, A_1, \cdots, A_k = B$, 它们确定了 Γ 的一个分割 T. 依次联结 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 的线段组成一条折线, 称为 Γ 的**内接折线**, 其长度记为 $l(\Gamma, T)$. 如果

$$\sup_T l(\Gamma, T) < +\infty,$$

则称 Γ 为**可求长曲线**, 而且 $l(\Gamma) = \sup_T l(\Gamma, T)$ 称为 Γ 的**弧长**.

下面定义在简单可求长曲线上的第一型曲线积分. 设函数 f 定义在 Γ 上, 对于 Γ 的任一分割 $T: A = A_0, A_1, A_2, \cdots, A_k = B$, 记 ΔS_i 为从 A_{i-1} 到 A_i 的曲线段 $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ 的弧长, $d(T) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \Delta S_i$. 任取 $\xi_i \in \widetilde{A_{i-1}A_i}$, 如果

$$\lim_{d(T) \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta S_i$$

收敛, 且极限与 Γ 的具体分法无关, 则称函数 f 在 Γ 上的第一型 (或第一类) 曲线积分存在, 其极限值 I 称为 f 在 Γ 上的**第一型曲线积分**. 记为

$$I = \int_{\Gamma} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}s = \int_{\widetilde{AB}} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}s.$$

第一型曲线积分也称为对弧长的积分, 它与曲线的方向选取无关. 对于同一条简单可求长曲线 $\Gamma = \widetilde{AB}$, 也可选定 B 为始点, A 为终点, 记为 $\Gamma = \widetilde{BA}$, 则

$$\int_{\widetilde{AB}} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}s = \int_{\widetilde{BA}} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}s.$$

若 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中简单可求长曲线, f 在 Γ 上连续, 则 f 在 Γ 上的第一型曲线积分存在.

若 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中逐段光滑的简单曲线, 且有参数表示

$$\Gamma : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

则弧长微分

$$\mathrm{d}s = |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t = \Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i'(t))^2\Big]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

从而

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))|\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{24.1}$$

例题 24.1.1 求 $I = \oint_C x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

解 1 (常规方法) 先写出曲线 C 的参数表达式. 由于 C 是球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 与经过球心的平面 $x+y+z=0$ 的交线, 因此是空间的一个圆周. 它在 x,y 平面上的投影为一个椭圆, 这个椭圆方程可从两个曲面方程中消去 z 得到. 即以 $z=-(x+y)$ 代入 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 中, 得

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{R^2}{2}.$$

将左边配方成平方和

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 + (\frac{x}{2}+y)^2 = \frac{R^2}{2}.$$

令

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t, \qquad \frac{x}{2}+y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

即得到参数表示

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t, \qquad y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t - \frac{R}{\sqrt{6}}\cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

代入 $z=-(x+y)$ 中, 得

$$z = -\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t - \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

由此得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \\ &= R\sqrt{\frac{2}{3}\sin^2 t + \Big(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= R\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

故有

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^3\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\pi R^3. \quad \square$$

解 2 (利用对称性) 由对称性有

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \int_C y^2\,\mathrm{d}s = \int_C z^2\,\mathrm{d}s,$$

则

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}R^2\int_C \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi R^3. \quad \square$$

24.1.2 第一型曲线积分的应用

为方便起见, 在 $\mathbf{R}^3$ 中考虑以下问题.

求弧长 在 (24.1) 中令 $f\equiv 1$, 则得到弧长公式

$$l = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

求曲线的质量 设曲线 Γ 的线密度为 $\rho(x,y,z)$, 则曲线 Γ 的质量

$$\begin{aligned} m &= \int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

求曲线的质心坐标 曲线 Γ 的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由下面的公式确定:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ \ y_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ \ z_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $m = \int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ 为曲线的质量.

例题 24.1.2 求曲线 Γ:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = a(x+y), \\ x^2-y^2 = \dfrac{9}{8}z^2 \end{cases}$$

从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长, 其中 $a>0$, $x_0>0$.

解 在曲线方程第一式两边乘 $(x-y)$, 并利用第二式得

$$(x-y)^3 = a(x^2-y^2) = \frac{9a}{8}z^2,$$

即

$$x-y = \frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}. \tag{24.2}$$

将 (24.2) 代入第一式得

$$x+y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3}. \tag{24.3}$$

由 (24.2), (24.3) 把 z 看成参数, 得

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3}+\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}\right),\quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3}-\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}\right).$$

微分后得到

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3}+\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3}-\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)\mathrm{d}z.$$

于是

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3}+\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)\mathrm{d}z=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x,$$

所以弧长

$$\int_\Gamma \mathrm{d}s=\int_0^{x_0}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}x_0.\quad\square$$

例题 24.1.3 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限部分的边界的质心坐标 (x_0,y_0,z_0).

解 应用质心坐标公式, 其中 $\rho\equiv 1, m=\frac{3}{2}\pi a$. 如图 24.1 所示, 在 Γ_1 上用极坐标系 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$, 则 $\mathrm{d}s=a\,\mathrm{d}\theta$, 且

$$\int_{\Gamma_1}x\,\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2}a\cos\theta a\,\mathrm{d}\theta=a^2.$$

由对称性 $\int_{\Gamma_2}x\,\mathrm{d}s=a^2$, 且

$$\int_{\Gamma_3}x\,\mathrm{d}s=0.$$

于是

$$x_0=\frac{2}{3\pi a}\left(\int_{\Gamma_1}x\,\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2}x\,\mathrm{d}s\right)=\frac{4a}{3\pi}.$$

再用对称性得

$$y_0=z_0=\frac{4a}{3\pi}.\quad\square$$

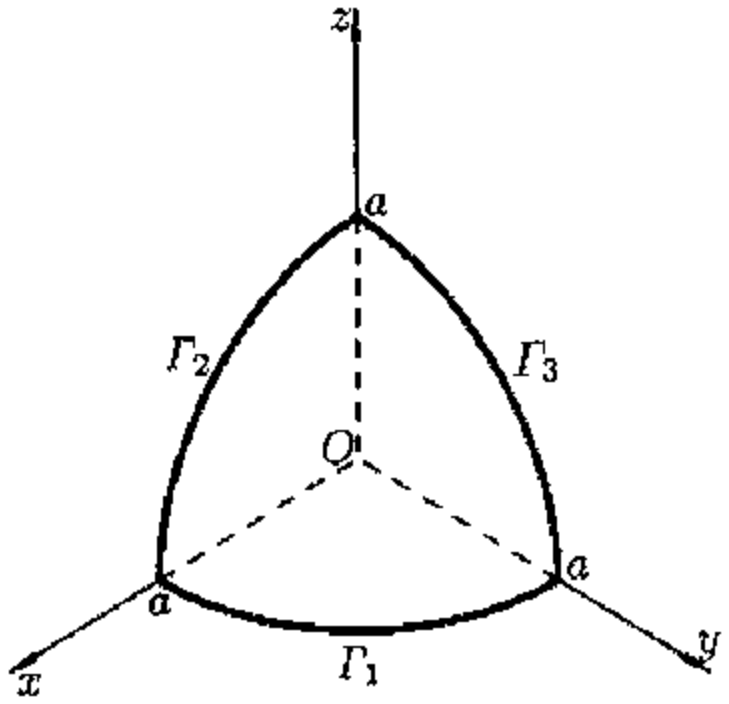


图 24.1

24.1.3 练习题

1. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_C(x^{4/3}+y^{4/3})\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

(2) $\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为由曲线 $r=a, \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 所界的凸围线;

(3) $\int_C|y|\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

(4) $\int_C\frac{\mathrm{d}s}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$;

(5) $\int_C z\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为曲线 $x^2+y^2=z^2, y^2=ax$ 从 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,\sqrt{2}a)$ 的弧.

2. 求下列空间曲线的弧长:

(1) $y = a\arcsin\dfrac{x}{a}$, $z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ 从 $(0,0,0)$ 到 (x_0,y_0,z_0);

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ch}(\arctan\dfrac{y}{x}) = a$ 从 $(a,0,0)$ 到 (x,y,z).

3. 计算均匀的曲线 $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ 从 $(0,a)$ 到 (b,h) 的弧的质心坐标.

4. 设 $\Gamma = \widetilde{AB}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的简单可求长曲线, Γ 的弧长记为 L. 对每一个 $s\in[0,L]$, 存在惟一的 $x\in\Gamma$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 使得 Γ 上从 A 到 x 的曲线段 $\widetilde{Ax}$ 的弧长等于 s, 由此定义了一个 $[0,L]$ 上的函数

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s), \quad 0\leqslant s\leqslant L. \tag{24.4}$$

即曲线 Γ 以弧长 s 为参数的参数方程为 (24.4). 设 f 是定义在 Γ 上的函数, 如果 f 在 Γ 上的第一型曲线积分存在, 则

$$\int_\Gamma f(x)\,\mathrm{d}s = \int_0^L f(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

§24.2 第二型曲线积分

24.2.1 第二型曲线积分的定义和计算

第二型曲线积分的物理背景之一是质点受力沿曲线运动所做的功. 因此我们给定了曲线的起点和终点. 这样的曲线称为**有向曲线**. 下面以 $\mathbf{R}^3$ 为例定义第二型曲线积分. 设 $\Gamma = \widetilde{AB}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一条简单可求长的有向曲线

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

为定义在 Γ 上的向量值函数. 对于与 Γ 方向一致的任意分割 T

$$T: A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m = B,$$

记 $A_i=(x_i,y_i,z_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, ΔS_i 为曲线段 $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ 的弧长, $d(T) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta S_i$. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\widetilde{A_{i-1}A_i}$, 如果极限

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_i\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right]$$

存在且极限与 Γ 的具体分法以及 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的具体取法无关, 则称 $\boldsymbol{F}$ 沿 Γ 的第二型曲线积分存在, 极限值称为 $\boldsymbol{F}$ 沿 Γ 的**第二型曲线积分**, 记为

$$I = \int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

或

$$I = \int_\Gamma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

第二型曲线积分又称为对坐标的积分.

若逐段光滑的有向曲线 Γ 有参数表示

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 $[a,b]$ 是实轴上的有向区间, 参数 t 从 a 变到 b 与 Γ 的定向一致, 设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Γ 上连续, 则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

例题 24.2.1 计算积分

$$I = \int_C (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}y,$$

其中 C 表示逆时针方向的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

解 利用椭圆的参数表达式

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

按给定方向 t 由 0 变到 π, 将 x, y 用 t 的表达式代入并用 $b\cos t\,\mathrm{d}t$ 来代替 $\mathrm{d}y$, 得

$$I = \int_0^\pi (a^2\cos^2 t + 2ab\cos t\sin t)b\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= a^2 b\int_0^\pi \cos^3 t\,\mathrm{d}t + 2ab^2\int_0^\pi \cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}ab^2. \quad \square$$

例题 24.2.2 求 $I = \int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

上 $z \geqslant 0$ 的部分, 这里 $a > 0$, 且从 x 轴正向看 Γ 是逆时针方向.

解 参见图 22.11. 先求曲线 Γ 的参数表达式. 若以 x, y, z 之一为参数, 则要涉及开方运算, 出现分支, 很不方便. 从第二个方程易见引入柱坐标

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

于是 Γ 的参数方程为

$$x = a\cos^2\theta, \quad y = a\cos\theta\sin\theta,$$
$$z = \sqrt{a^2 - r^2} = a|\sin\theta|, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

根据曲线定向, 有

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big[a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot 2a\cos\theta(-\sin\theta)$$
$$+ a^2\sin^2\theta\cdot a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + a^2\cos^4\theta\cdot z'(\theta)\big]\,\mathrm{d}\theta.$$

第一项是奇函数, 且因子 $z(\theta)$ 是偶函数, 所以 $z'(\theta)$ 是奇函数, 故第三项也是奇函数, 于是

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}a^3\sin^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2a^3\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta-2\sin^4\theta)\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{4}a^3.\quad\square$$

有的时候空间曲线的参数方程不容易写出或写出来比较复杂, 我们可以借助下列命题把问题转化为平面曲线的曲线积分.

命题 24.2.1 设逐段光滑闭曲线 Γ 在光滑曲面 $z=f(x,y)$ 上, 曲线 Γ 在 XY 平面上的投影曲线为 γ, 函数 $P(x,y,z)$ 在 Γ 上连续, 则

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x=\oint_\gamma P(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x,$$

其中 γ 的定向与 Γ 的定向一致.

证 设 γ 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

则空间曲线 Γ 的方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=f(\varphi(t),\psi(t)).$$

于是

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x=\int_a^b P\big[\varphi(t),\psi(t),f(\varphi(t),\psi(t))\big]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\oint_\gamma P(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x.\quad\square$$

24.2.2 两类曲线积分的关系

坐标微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$, 其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为曲线沿指定方向的单位切向. 因而就有

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\Gamma(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s.$$

对于空间曲线 Γ, 设 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是切方向余弦, 则

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s.\tag{24.5}$$

当 Γ 为平面曲线时, 取法线的方向 $\boldsymbol{n}$ 与切线的方向 $\boldsymbol{\tau}$ 的夹角 $\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau})=\dfrac{\pi}{2}$, 见图 24.2, 则

$$\angle(x,\boldsymbol{n})=\angle(x,\boldsymbol{\tau})+\angle(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n})=\alpha-\frac{\pi}{2},$$

即

$$\cos\alpha=-\sin(x,\boldsymbol{n}),\quad\sin\alpha=\cos(x,\boldsymbol{n}).$$

于是 Γ 为平面曲线时

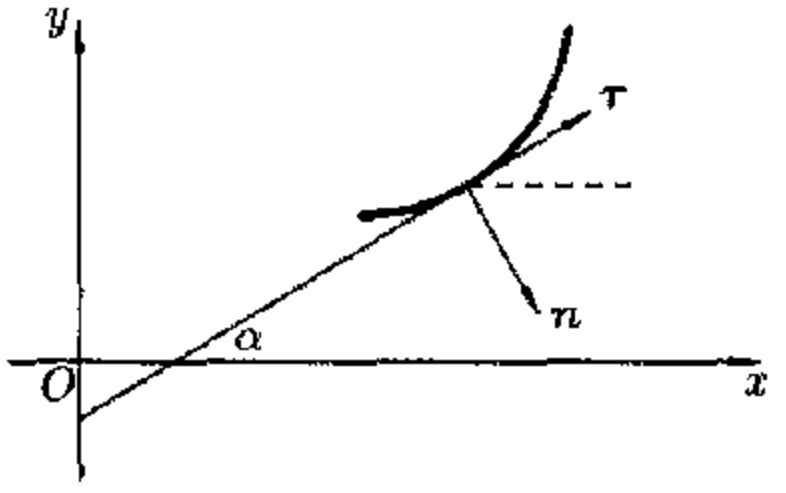


图 24.2

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_\Gamma[-P\sin(x,\boldsymbol{n})+Q\cos(x,\boldsymbol{n})]\,\mathrm{d}s.\tag{24.6}$$

24.2.3 第二型曲线积分的应用

求变力做功

例题 24.2.3 已知一平面力场, 它的方向指向坐标原点, 它的大小与它到原点的距离 r 的平方成反比:

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

其中 μ 为常数. 计算当质量 $m = 1$ 的质点自位置 A 移动到位置 B (不通过原点) 时力场做的功.

解 以 (x, y) 表示点的坐标. 设力与 x 轴的夹角 θ, 则

$$\cos\theta = -\frac{x}{r}, \quad \sin\theta = -\frac{y}{r}.$$

于是力在 x, y 方向的分量分别为

$$F_1(x,y) = F\cos\theta = -\mu\frac{x}{r^3}, \quad F_2(x,y) = F\sin\theta = -\mu\frac{y}{r^3}.$$

而功可表示为曲线积分

$$w = -\mu\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{r^3}.$$

容易看出

$$-\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{r^3} = \mathrm{d}\frac{1}{r}, \tag{24.7}$$

且如将 x, y 用参数表达式 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 代入, 其中 $a \leqslant t \leqslant b$, 并令

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}$$

时, 等式 (24.7) 仍成立. 于是

$$w = \mu\int_a^b \mathrm{d}\frac{1}{r} = \frac{\mu}{r}\Big|_a^b = \mu\Big(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\Big),$$

其中 r_A, r_B 分别表示原点到 A, B 的距离. □

梯度曲线 设 f 是区域 $D \subset \mathbf{R}^3$ 上的 C^1 函数, 并设 ∇f 是在 D 上处处不为零的向量. 若 Γ 是自某点 $(x_0, y_0, z_0) \in D$ 出发的可微曲线, 它的每一点的切线方向与 f 的梯度方向一致, 就称 Γ 为 f 在 D 上的**梯度曲线**. 设 Γ 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

则可取 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 满足如下微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{24.8}$$

初始值为 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$. 由常微分方程组解的存在性定理和延拓定理[①], $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 在 D 内存在并可延伸到 D 的边界. 由 (24.8), Γ 的弧长微分满足

① 可参考任何一本常微分方程的教科书, 我们所用的知识并没有超出大学二年级的范围. 这些材料均可作为曲线积分复习时的补充.

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t.$$

下面我们借助 $\mathbf{R}^2$ 中的梯度曲线重新讨论例题 21.3.3. 这是著名的美国大学 Putnam 竞赛第二十八届的 B6 题, 它公布的标准答案就是例题 21.3.3 的解答. 我们现在可以将那里的梯度模的最小值的上界估计从 16 改进为 4.

例题 24.2.4 设 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上具有连续的一阶偏导数, 且满足 $|f(x,y)| \leqslant 1\ \forall (x,y) \in D$. 试证: 存在点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0) \in \mathrm{int}D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$, 使得 $(f_x^2+f_y^2)\big|_{(x_0,y_0)} \leqslant 4$.

解 如果有点 (x_0,y_0), 使 $\nabla f(x_0,y_0) = \mathbf{0}$, 即 $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$, 则估计式成立. 如果 ∇f 在 D 中处处不为零向量, 则 f 在 D 中的梯度曲线存在. 设 Γ 是 f 在 D 中的梯度曲线, 其参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [0,T],$$

Γ 的起点为原点, 终点为 $(x(T),y(T))$. 由曲线积分公式得到

$$\begin{aligned} f(x(T),y(T)) - f(0,0) &= \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}} \cdot \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\Gamma (\nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

设 l 是 Γ 的弧长, 并且 Γ 自原点出发到达 D 的边界, 则 $l \geqslant 1$. 如果在 $\mathrm{int}D$ 上处处有 $\nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{\tau} > 2$, 则就有

$$2 \geqslant |f(x(T),y(T)) - f(0,0)| > 2l \geqslant 2,$$

引出矛盾. 因此存在 $(x_0,y_0) \in \mathrm{int}D$, 使 $\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{\tau} \leqslant 2$. 又因为 ∇f 与 $\boldsymbol{\tau}$ 相切, 故 $\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{\tau} = |\nabla f(x_0,y_0)| \leqslant 2$, 即 $(f_x^2+f_y^2)\big|_{(x_0,y_0)} \leqslant 4$. □

注 用梯度曲线来估计函数差的下界也是十分有效的, 其依据就是函数沿梯度方向增长最快. 用这样的方法可以证明如下的**高维中值定理** (见美国数学月刊 106 卷 (1999) 674~675 页, 其证明作为参考题):

设 $f(\boldsymbol{x})$ 为定义在 n 维球 $D = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant r^2\}$ 上的连续可微函数, 则存在点 $\boldsymbol{p}_0 = (p_1^0,\cdots,p_n^0) \in \mathrm{int}D$, 使

$$\max_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x}) - \min_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x}) = |\nabla f(\boldsymbol{p}_0)| \cdot 2r.$$

利用这个结果或修改例题中的证明可以将估计值 4 改进为最佳的估计值 1.

24.2.4 练习题

1. 计算 $\displaystyle\int_L xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为曲线 $\overset{\frown}{AB}$, 方向为由 A 到 B, $A = (1,1)$, $B = (2,3)$:

(1) $\widetilde{AB}$ 是直线 AB; (2) $\widetilde{AB}$ 的方程是 $y=2(x-1)^2+1$; (3) $\widetilde{AB}$ 是折线 $\widehat{ADB}, D=(2,1)$.

2. 求 $\int_C \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{y-a}\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 到 $t=\frac{\pi}{3}$ 的一段.

3. 求 $\int_C (x+y)^2\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是以 $A(1,1), B(3,2), D(3,1)$ 为顶点的三角形, 取顺时针方向.

4. 求 $\int_C 4xy^2\,\mathrm{d}x-3x^4\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 自 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段.

5. 求 $\oint_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2ax$ 的交线 $(0<a<R, z>0)$, 且由 z 轴正向看是逆时针方向.

6. 求 $\int_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面上的曲线:

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi,$$
$$R>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

并且使 (1) R, φ 为常数; 或 (2) R, θ 为常数.

7. 求 $\int_C (x^2+5y+3yz)\,\mathrm{d}x+(5x+3xy-2)\,\mathrm{d}y+(3xy-4z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为

(1) $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{bt}{2\pi}$ 自 $t=0$ 到 2π 的一段;

(2) 直线段 AB, 起点 $A=(a,0,0)$, 终点 $B=(a,0,b)$.

8. 已知力场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(x+y+z)\boldsymbol{k}$, 求质点沿曲线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{b}{2\pi}t$ 从点 $A(a,0,0)$ 运动到 $B(a,0,b)$ 时, 力场 $\boldsymbol{F}$ 对质点所作的功.

9. 质点在力场 $\boldsymbol{F}=\frac{e^x}{1+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}\boldsymbol{j}$ 作用下, 沿 $x^2+(y-1)^2=1$ 由 $(0,0)$ 点沿顺时针方向运动到 $(1,1)$ 点, 求力场作的功.

§24.3 Green 公式

24.3.1 Green 公式

Green 公式是将平面上某区域内的二重积分与该区域边界上的一个特定的第二型曲线积分之间建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个有界闭区域, 其边界 ∂D 由光滑曲线或逐段光滑曲线组成. 又设函数 P,Q 在 D 内有关于自变量 x 和 y 的连续偏导数, 则下列 Green 公式成立:

$$\iint_D \Big(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y, \tag{24.9}$$

其中 ∂D 的方向关于 D 是正向的.

由平面上两类曲线积分之间的关系式 (24.6) 知, Green 公式 (24.9) 又可以写为

$$\begin{aligned}\iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{\partial D} -Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y\\&=\int_{\partial D}[Q\sin(x,\boldsymbol{n})+P\cos(x,\boldsymbol{n})]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的单位外法向量. 利用 $\angle(x,\boldsymbol{n})=\angle(x,y)+\angle(y,\boldsymbol{n})=\frac{\pi}{2}+\angle(y,\boldsymbol{n})$ (参见图 24.2), 则

$$\iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D}[P\cos(x,\boldsymbol{n})+Q\cos(y,\boldsymbol{n})]\,\mathrm{d}s. \tag{24.10}$$

公式 (24.9), (24.10) 给我们提供了间接求平面上曲线积分的方法, 即利用 Green 公式将曲线积分化为二重积分, 即使曲线 C 不封闭, 也可以采用添加 "辅助线" 的方法去做.

例题 24.3.1 C 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 自 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的弧段, 求

$$I=\int_C (2xy^3-y^2\cos x)\,\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\,\mathrm{d}y.$$

解 令 $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x$, $Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$, 则

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

为了利用 Green 公式 (24.9), 添加辅助线 (如图 24.3), 则

$$I=\int_C+\int_{\overline{BA}}+\int_{\overline{AO}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{OA}}.$$

由 Green 公式, 前三项的积分为零, 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{OA}}\\&=\int_0^1[1-2y\sin\frac{\pi}{2}+3(\frac{\pi}{2})^2y^2]\,\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$ □

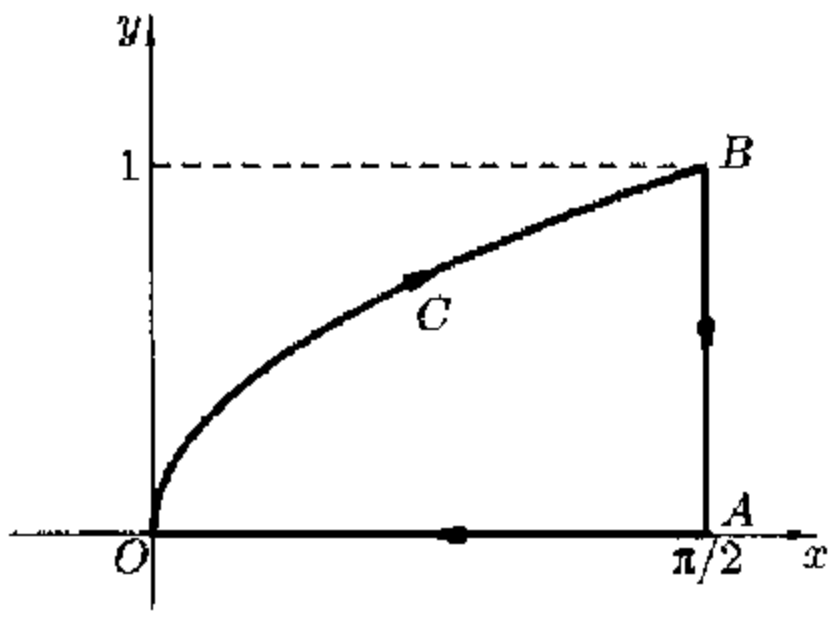


图 24.3

例题 24.3.2 计算积分

$$I=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s,$$

其中 C 为逐段光滑的简单闭曲线, $\boldsymbol{r}=(x,y), r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{n}$ 是 C 上的单位外法向量.

解 由 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}=\dfrac{1}{r}(x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y))$ 得到

$$I=\oint_C\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

当 $(0,0)$ 在 C 外时, 利用 Green 公式 (24.10), 则

$$I=\iint_D\Big[\partial_x\big(\frac{x}{r^2}\big)+\partial_y\big(\frac{y}{r^2}\big)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

其中 D 是以 C 为边界的区域.

当 $(0,0)$ 在 C 内时, 以 $(0,0)$ 为原心, 以充分小的 ε 为半径作圆 C_ε, 使得 C_ε 在 C 内, 以 C 及 C_ε 为边界的区域为 D_ε, 则

$$I=\oint_C\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s+\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s$$
$$-\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

其中 C_ε 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向指向坐标原点. 对前两项用 Green 公式, 则

$$I=-\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

在圆周 C_ε 上,

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=-\frac{x}{\varepsilon},\ \ \cos(\boldsymbol{n},y)=-\frac{y}{\varepsilon},\ \ r=\varepsilon,$$

从而

$$I=\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}s=2\pi.$$

当 $(0,0)\in C$ 时, 过原点作曲线 C 的切线 OA, OB, 设 OA, OB 的夹角为 θ (见图 24.4), 如果曲线 C 在原点光滑, 则 $\theta=\pi$.

作一个以 $(0,0)$ 点为心, ε 为半径的圆 B_ε, 记 B_ε 的圆周在 C 内的部分为 C_ε, 由上面的计算知

$$I=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to0}\theta_\varepsilon=\theta,$$

其中 θ_ε 是 C_ε 所对应的圆心角. □

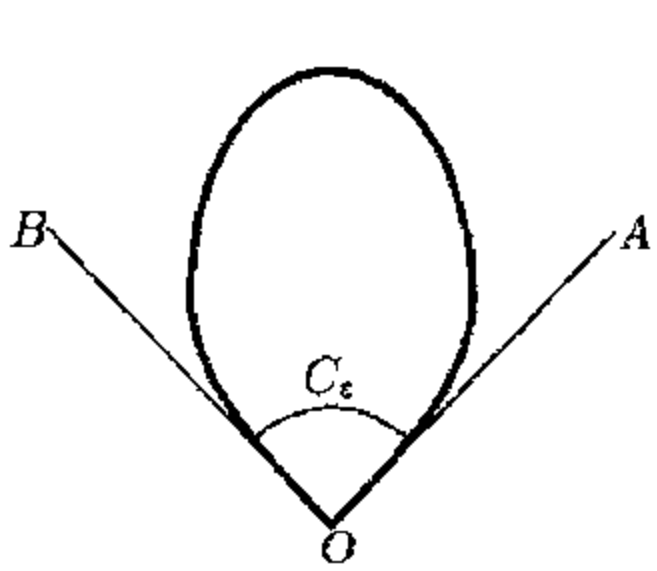


图 24.4

注 注意使用 Green 公式的条件: P, Q 在 D 上连续可微. 这正是在本题中要分 $(0,0)$ 在 C 外, C 内和 C 上三种情况讨论的缘故. 许多学生并不注意到这

里的区别, 尤其是 $(0,0)$ 在 C 内时, 他们会错误地认为被积函数在 C 上是连续可微的, 因而 Grren 公式就可以用了.

例题 24.3.3 计算

$$I=\oint_C \frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right],$$

其中 $C: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

解 令

$$P(x,y)=\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}(x\sin x+y\cos x),$$

$$Q(x,y)=\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}(y\sin x-x\cos x),$$

由计算知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 从而可在不包含原点的区域上用 Green 公式. 为此取 $C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$, 取逆时针方向, 则

$$I=\oint_C-\oint_{C_\varepsilon}+\oint_{C_\varepsilon}.$$

对等式右边前两项用 Green 公式, 于是

$$\begin{aligned}I&=\oint_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon}\mathrm{e}^y\left[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right].\end{aligned}$$

记 C_ε 围成的区域为 D_ε, 再用一次 Green 公式, 则

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}-2\mathrm{e}^y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

应用积分中值定理得到

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}(-2\mathrm{e}^\xi\pi\varepsilon^2\cos\eta)=-2\pi\mathrm{e}^\xi\cos\eta,$$

其中 $(\xi,\eta)\in D_\varepsilon$. 上述等式对 $\forall\varepsilon>0$ 都对, 令 $\varepsilon\to0$, 得

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-2\pi\mathrm{e}^\xi\cos\eta)=-2\pi.\quad\square$$

平面图形的面积 作为 Green 公式的直接推论, 可以得到如下的面积公式.

由逐段光滑的简单曲线 C 所界的面积 S 可用曲线积分表示为

$$S=\oint_C x\,\mathrm{d}y=-\oint_C y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x,$$

其中曲线的正向为逆时针方向 (参见上册 336~340 页的公式 (11.1) 及例题).

例题 24.3.4 计算双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\tag{24.11}$$

所围区域的面积.

解 1 由对称性只需计算第一, 四象限的面积. 令

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},$$

代入方程 (24.11) 得 $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, 则参数方程为

$$x(\theta) = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ \ y(\theta) = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ \ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

并且

$$x'(\theta) = a(-\sin\theta)\sqrt{\cos 2\theta} + a\cos\theta\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$y'(\theta) = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + a\sin\theta\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

所以

$$xy' - yx' = a^2\cos 2\theta.$$

由面积公式得到

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\oint x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2. \quad \square$$

解 2 (用定积分求面积) 在极坐标系中, 双纽线 (24.11) 的方程为

$$r^2 = a^2\cos 2\theta,\ \ \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}].$$

于是

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2. \quad \square$$

24.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件

在力学上一种非常重要的力场是**保守场**. 质点在保守场中移动, 保守场所做的功只与质点的起点和终点的位置有关, 与移动的具体路径无关. 什么样的力场是保守场的问题从数学上看就是在什么条件下第二型曲线积分与路径无关, 这个问题不仅具有明显的实际背景, 而且在理论上也有很重要的意义.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域, $P(x,y), Q(x,y)$ 在 Ω 上连续, 记

$$w = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

任取 $A, B \in \Omega$. Ω 内从 A 到 B 的一条逐段光滑的简单曲线称为 Ω 内从 A 到 B 的一条路径, 对于 Ω 内从 A 到 B 的任意路径 L, 如果第二型曲线积分

$$\int_L w = \int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

只与 A, B 有关, 与 L 的具体选取无关, 则称一阶微分形式 w 在 Ω 的**积分与路径无关**.

如果平面区域 D 内的任意简单闭曲线所包围的区域都完全在 D 中, 则称 D 是**单连通区域**. 设 D 是平面上的单连通区域, $w = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, 其中 P, Q 都在 D 内有连续的偏导数, 则下列结论等价:

(1) 对 D 内的任意一条闭曲线 C, 有

$$\int_C w = 0;$$

(2) 对 D 内的任一条路径 C, 积分 $\int_C w$ 仅与 C 的起点和终点有关, 而与所沿的路径无关;

(3) 在 D 内 (处处) 成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

(4) 存在函数 $\varphi(x,y)$, 使得在 D 内成立

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

即 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 是函数 φ 的全微分. 这时称 φ 是 w 的**势函数**, 又称 w 是一个**恰当微分形式**, 此时

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + C. \tag{24.12}$$

其中 (x_0,y_0) 为 D 内任一点, C 为任意常数, 且

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \varphi\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} = \varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0).$$

注 回忆例题 24.2.3 的求解过程, 由 (24.7) 知 $-\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{r^3}$ 是 $\dfrac{1}{r}$ 的全微分, 则积分与路径无关, 于是

$$w = \mu\Big(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\Big).$$

但当时我们不知道可以这样计算第二型曲线积分.

例题 24.3.5 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 有连续偏导数, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 的充要条件是

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{24.13}$$

证 先证充分性. 设 (24.13) 成立, 两边对 x 求导, 得

$$P(x,y) = P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

两边再对 y 求导, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

再证必要性. 由条件知 $w = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关. 取路径为从 (x_0,y_0) 经 (x_0,y) 到 (x,y), 则势函数

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y + C_1.$$

取路径为从 (x_0,y_0) 经 (x,y_0) 到 (x,y), 则

$$\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,\mathrm{d}y+C_2.$$

令 $(x,y)=(x_0,y_0)$, 得 $C_1=C_2$. □

例题 24.3.6 设 a,b,c 为常数, 满足 $ac-b^2>0$,

$$w=\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2},$$

易见 w 在 $(0,0)$ 以外的区域有定义, 且为恰当微分形式. 求 w 关于原点 $(0,0)$ 的**循环常数** $\oint_C w$, 其中 C 可取围绕 $(0,0)$ 的任一简单封闭曲线, 并取逆时针方向为正向.

解 设 $P(x,y)=\dfrac{-y}{ax^2+2bxy+cy^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{x}{ax^2+2bxy+cy^2}$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 可以看出, 沿椭圆 C:

$$ax^2+2bxy+cy^2=1$$

来计算曲线积分最为简便, 因为此时

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\oint_C x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x,$$

上述积分值恰为椭圆的面积的两倍, 于是

$$\oint_C w=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.\quad\square$$

24.3.3 练习题

1. 应用 Green 公式求下列第二型曲线积分.

   (1) $\oint_C (x^2+xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$, C 为由 $x=\pm1$, $y=\pm1$ 围成的正方形, 取正向;

   (2) 求 $\oint_C \ln\dfrac{2+y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\dfrac{x(y+1)}{2+y}\,\mathrm{d}y$, C 的定义同 (1);

   (3) 求 $\oint_C (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x-2xy\,\mathrm{d}y$, C 是由 $x^2+y^2=1$, $x=y$ 及 y 轴围成的曲边三角形, 取正向;

   (4) 求 $\int_C \dfrac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$, 其中 C 是: (a) 旋轮线 $x=a(t-\sin t)-a\pi$, $y=a(1-\cos t)$ 对应于 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一拱; (b) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 从 $(2,1)$ 经上半圆到 $(0,1)$ 的一段弧.

2. 设 $f(x)$ 连续可微, L 为逐段光滑闭曲线, 证明

   (1) $\oint_L f(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=0$;

   (2) $\oint_L f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0$.

3. 求 $\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s$. 其中 $u=x^2+y^2$, C 为 $x^2+y^2=6x$, n 为 C 上的单位外法向量.

4. 设 C 为逐段光滑的简单闭曲线, l 为给定方向, 证明:

$$\oint_C \cos(l,n)\,\mathrm{d}s=0,$$

其中 n 为 C 上的单位外法向量.

5. 设 C 为包围原点的按段光滑的简单闭曲线, a_{ij} $(i,j=1,2)$ 均为常数, $X=a_{11}x+a_{12}y$, $Y=a_{21}x+a_{22}y$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, 证明

$$\oint_C \frac{X\,\mathrm{d}Y-Y\,\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=2\pi\,\mathrm{sgn}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}).$$

6. 设 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$, 方向为逆时针, 求积分

$$\oint_L \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}.$$

7. 利用曲线积分求下述曲线所围区域的面积:

(1) $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(2) $x^3+y^3=3axy$, $a>0$;

(3) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=C\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$, a, b, $C>0$, n 为正整数.

8. 先证明曲线积分与路径无关, 然后计算积分值:

(1) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\psi(y)\,\mathrm{d}y$, 其中 $\varphi(x)$, $\psi(y)$ 是连续函数;

(2) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 沿不通过原点的路径.

9. 对于以下一阶微分形式 w, 求函数 $M(x,y)\neq 0$, 使得在适当的区域内 Mw 为全微分, 并求其原函数:

(1) $w=[-y\sqrt{x^2+y^2+1}-x(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x+[x\sqrt{x^2+y^2+1}-y(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}y$;

(2) $w=x[(ay+bx)^3+ay^3]\,\mathrm{d}x+y[(ay+bx)^3+bx^3]\,\mathrm{d}y$.

24.3.4 等周定理

等周问题是一个古老而又十分有趣的几何问题. 它可以表述为: 在周长相等的一切简单闭曲线 (即封闭而不自相交的曲线) 中, 怎样的曲线包围的图形有最大的面积. 早在古代, 人们就已经意识到这样的曲线应该是圆周[①], 但这一事

① 等周问题的最早提出和研究见于古希腊数学家 Pappus (约公元 300–350 年间) 的《数学汇编》中, 但严格证明则要到 19 世纪才得到, 其中最早的是 Steiner 的证明. 参见 [30, 26].

实的严格的数学证明还是在近代才得到的. 下面的经典证明是由 E. Schmidt 在 1939 年给出的. 我们只讨论分段光滑曲线的情况.

设 Γ 是平面上长为 L 的分段光滑的简单闭曲线, Γ 所围区域的面积为 A. 取 Γ 的一对平行切线 l_1, l_2, 它们把 Γ 夹在里面. 再取一圆周 S, 也被 l_1, l_2 所夹, 取 S 的圆心为坐标原点, x 轴垂直于 l_1, l_2. 假设 $x = x(s), y = y(s)$ 是 Γ 的弧长参数方程, 以逆时针方向为曲线的正向, $0 \leqslant s \leqslant L$, 其中 x, y 为 s 的连续分段可微函数. 设 l_1, l_2 与 Γ 的两个切点的参数值分别为 $s = s_1$ 和 $s = 0$, 即把 l_2 与 Γ 的一个切点取为曲线 Γ 的起始点. 下面我们借助圆 S 得到 A 与 L 的关系. 由 Green 公式, 曲线 Γ 所围区域的面积为

$$A = \int_0^L x(s)y'(s)\,\mathrm{d}s.$$

另一方面, 设圆 S 的半径为 r, 圆面积就为 πr^2. 定义

$$\tilde{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2(s)}, & 0 \leqslant s \leqslant s_1, \\ -\sqrt{r^2 - x^2(s)}, & s_1 \leqslant s \leqslant L, \end{cases}$$

则方程 $x = x(s), y = \tilde{y}(s), 0 \leqslant s \leqslant L$ 描画出与 S 同样的轨迹. 一般地, 这不是圆周 S 的参数表达式. 但由定积分的定义, 可以证明 S 所围面积的代数和为

$$\int_0^L \tilde{y}(s)x'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{s_1} \tilde{y}(s)x'(s)\,\mathrm{d}s + \int_{s_1}^L \tilde{y}(s)x'(s)\,\mathrm{d}s = -\frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = -\pi r^2.$$

由于 s 是 Γ 的弧长参数, 又有 $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 \equiv 1, 0 \leqslant s \leqslant L$. 利用 Schwarz 不等式 (见上册 346 页)

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L (x(s)y'(s) - \tilde{y}x'(s))\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^L |(-\tilde{y}(s), x(s)) \cdot (x'(s), y'(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^L \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \cdot \sqrt{(-\tilde{y}(s))^2 + (x(s))^2}\,\mathrm{d}s \\ &= r\int_0^L \mathrm{d}s = Lr. \end{aligned}$$

再由算术平均值-几何平均值不等式得

$$\sqrt{A \cdot \pi r^2} \leqslant \frac{A + \pi r^2}{2} \leqslant \frac{Lr}{2}.$$

即

$$4\pi A \leqslant L^2.$$

这就是**等周不等式**.

为使 $4\pi A = L^2$, 就必须在上述计算过程中使不等号均取等号, 因此有 $A = \pi r^2$, 即 $L = 2\pi r$. 由 Schwarz 不等式取等号条件有

$$(-\tilde{y}(s), x(s)) = c(x'(s), y'(s)),$$

c 是某个常数 (参见上册 347~348 页). 于是 $\sqrt{x^2(s) + \tilde{y}^2(s)} = r = |c|$. 即

$$(-\tilde{y}(s), x(s)) = \pm r(x'(s), y'(s)). \tag{24.14}$$

从圆周 S 的极坐标表达式

$$x = r\cos\theta, \quad \tilde{y} = r\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -r\sin\theta = -\tilde{y}, \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\theta} = r\cos\theta = x.$$

代入 (24.14) 得

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}, \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\theta}\right) = \pm\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right). \tag{24.15}$$

故 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \pm\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)$. 由一阶微分的形式不变性, 可得

$$r\,\mathrm{d}\theta = \pm\,\mathrm{d}s.$$

再回到 (24.15), 得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.$$

因此, $\tilde{y}(s) = y(s) + h$, 其中 h 是与 S无关的某常数. 这说明封闭曲线 Γ 与圆周 S 差一个沿 y 方向的平移. 这就证明了等周不等式取等号时, Γ 必定是半径为 $r = \frac{L}{2\pi}$ 的一个圆周.

§24.4 连续向量场的旋转度

连续向量场的旋转度可以通过曲线积分来定义, 它是多元微积分应用的一个重要例子. 本节可作为习题课的补充材料. 以 $\mathbf{R}^2$ 为例, 设 $\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 是连续映射, 我们也称 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个**连续向量场**. 即对每一点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, 确定一个随 (x, y) 连续变化的向量 $\boldsymbol{F}(x, y)$.

设 $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^2$ 是逐段光滑的定向封闭曲线. 如果 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathcal{L}$ 上恒不取零向量, 则称 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathcal{L}$ 上非退化. 定义 $\boldsymbol{T}(x, y) = \dfrac{\boldsymbol{F}(x, y)}{|\boldsymbol{F}(x, y)|}$, 则 $\boldsymbol{T}$ 把 $\mathcal{L}$ 映射到单位圆周 S. 当点 (x, y) 在 $\mathcal{L}$ 上逆时针方向绕 $\mathcal{L}$ 一周时, 向量 $\boldsymbol{T}(x, y)$ 在 S 上绕整数圈. 所绕圈数的代数和 (逆时针方向为正) 称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿 $\mathcal{L}$ 的**旋转度**, 记为 $\gamma(\boldsymbol{F}, \mathcal{L})$.

当 $\boldsymbol{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ 是一阶连续可微向量场时, 有

$$\gamma(\boldsymbol{F}, \mathcal{L}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\arctan\frac{v}{u}. \tag{24.16}$$

若 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是单连通或多连通闭区域, ∂D 由有限条逐段光滑的封闭曲线组成, 即

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{n} \partial D_i,$$

规定 ∂D 上的定向按其与内法线成正直角的方向为正定向. 设 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 在 ∂D 上非退化, 定义 $\gamma(\boldsymbol{F}, \partial D)$ 是 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 沿 D 的所有边界的旋转度的总和, 即

$$\gamma(\boldsymbol{F}, \partial D) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\boldsymbol{F}, \partial D_i).$$

以下我们都假定区域 D 的边界是逐段光滑的封闭曲线.

连续向量场的旋转度有下列几条性质.

性质 1 若两个闭连通区域 D_1 与 D_2 的内部不相交, $D = D_1 \bigcup D_2$, 则

$$\gamma(\boldsymbol{F}, \partial D) = \gamma(\boldsymbol{F}, \partial D_1) + \gamma(\boldsymbol{F}, \partial D_2).$$

性质 2 若在有界闭连通区域 D 上 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 非退化, 则 $\gamma(\boldsymbol{F}, \partial D) = 0$.

证 先设 D 是单连通区域, $\partial D = \mathcal{L}$.

当 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 是光滑向量场, 即 $u(x,y), v(x,y) \in C^1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\gamma(\boldsymbol{F}, \mathcal{L}) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d} \arctan \frac{v}{u} = \frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2+v^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_U \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right) \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_U \left(\frac{(u^2+v^2) - 2u^2 + (u^2+v^2) - 2v^2}{(u^2+v^2)^2} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= 0,
\end{aligned}$$

其中 S 是 $\mathcal{L}$ 在 uOv 坐标面上的映像, U 是由 S 所包围的区域.

当 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 是连续向量场时, 我们要用到 n 维空间中的 **Weierstrass 逼近定理** (参见命题 16.3.1): $\mathbf{R}^n$ 中紧集上的连续函数可以用多项式函数任意逼近.

故 ∂D 上的每一连续非退化向量场可以由光滑非退化向量场一致逼近到任意精确度. 另外, 由于旋转度是一个整数, 于是充分接近连续向量场的光滑向量场与这连续向量场都具有同样的旋转度. 这样性质 2 既然对光滑向量场成立, 对连续向量场自然也成立.

当 D 是多连通区域时, 把 D 分割成若干个单连通区域证明. □

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界闭区域, $\boldsymbol{F}_0$, $\boldsymbol{F}_1$ 是 ∂D 上的连续非退化向量场. 如果存在连续依赖于参数 λ 的连续向量场 $\boldsymbol{G} : \partial D \times [0,1] \to \mathbf{R}^2$, 且使 $\boldsymbol{G}(x,y,0) = \boldsymbol{F}_0(x,y)$, $\boldsymbol{G}(x,y,1) = \boldsymbol{F}_1(x,y)$, 则称 $\boldsymbol{G}$ 是自 $\boldsymbol{F}_0$ 到 $\boldsymbol{F}_1$ 的**连续形变**. 如果 $\boldsymbol{G}$ 在 ∂D 上关于 $\lambda \in [0,1]$ 均非退化, 则称 $\boldsymbol{G}$ 是**非退化形变**. 若存在自 $\boldsymbol{F}_0$ 到 $\boldsymbol{F}_1$ 的连续非退化形变, 则称 $\boldsymbol{F}_0$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ **同伦**. 容易证明同伦有传递关系, 即若 $\boldsymbol{F}_0$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 同伦, $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 同伦, 则 $\boldsymbol{F}_0$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 同伦.

性质 3 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界闭区域, 则 ∂D 上的同伦向量场有相同的旋转度.

证 因为 $\gamma(\boldsymbol{F}(x,y,\lambda), \partial D)$ 是一个整数, 且对 λ 连续, 所以当 λ 变化时它只能是一个常数, 即有

$$\begin{aligned}
\gamma(\boldsymbol{F}_0(x,y), \partial D) &= \gamma(\boldsymbol{G}(x,y,0), \partial D) = \gamma(\boldsymbol{G}(x,y,1), \partial D) \\
&= \gamma(\boldsymbol{F}_1(x,y), \partial D). \quad \square
\end{aligned}$$

下面我们举出一些向量场旋转度应用的例子. 我们先用旋转度证明如下著名的 Brouwer 不动点定理在 $\mathbf{R}^2$ 中的形式:

例题 24.4.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个有界凸区域, 其边界 ∂D 是一条光滑闭曲线. $\boldsymbol{F}$ 是自 D 到 D 的连续映射, 则在 D 内必存在 $\boldsymbol{F}$ 的一个不动点, 即 $\exists \boldsymbol{\xi} \in D$, 使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$.

证 由于 ∂D 是一条光滑闭曲线, 我们知 ∂D 上的沿逆时针方向的单位切向量组成 ∂D 上的一个光滑的非退化向量场 $\boldsymbol{\tau}(x, y)$, 且当 $(x, y) \in \partial D$ 逆时针一圈时, $\boldsymbol{\tau}(x, y)$ 也转了一圈, 即 $\gamma(\boldsymbol{\tau}, \partial D) = 1$. 同理, 设 $\boldsymbol{n}(x, y)$ 是 ∂D 上的内法向量场, 则 $\gamma(\boldsymbol{n}, \partial D) = 1$. 又 $\boldsymbol{F}$ 是自凸区域 D 映到 D 内的映射, 若 $\boldsymbol{F}$ 没有不动点, 则以 $(x, y) \in \partial D$ 为起点, $\boldsymbol{F}(x, y) \in D$ 为终点的有向线段指向切线的内侧. 即与内法向的夹角不大于 $\frac{\pi}{2}$. 于是有

$$(\boldsymbol{F}(x, y) - (x, y)) \cdot \boldsymbol{n}(x, y) \geqslant 0, \quad \forall (x, y) \in \partial D.$$

设 $\boldsymbol{G}(x, y, \lambda) = \lambda(\boldsymbol{F}(x, y) - (x, y)) + (1 - \lambda)\boldsymbol{n}(x, y)$. 当 $\lambda = 0$, 1 时, $\boldsymbol{G}(x, y, \lambda)$ 在 ∂D 上非退化. $\lambda \in (0, 1)$ 时

$$\boldsymbol{n}(x, y) \cdot \boldsymbol{G}(x, y, \lambda) \geqslant (1 - \lambda)|\boldsymbol{n}(x, y)|^2 > 0, \quad (x, y) \in \partial D,$$

所以 $\boldsymbol{G}(x, y, \lambda)$ 也在 ∂D 上非退化. 故 $\boldsymbol{F}(x, y) - (x, y)$ 与 $\boldsymbol{n}(x, y)$ 是在 ∂D 上的同伦向量场.

$$\gamma(\boldsymbol{F} - \mathrm{id}, \partial D) = \gamma(\boldsymbol{n}, \partial D) = 1.$$

由性质 2 可知 $\boldsymbol{F}(x, y) - (x, y)$ 必定是 D 上的退化向量场. 即 $\exists \boldsymbol{\xi} \in D$, 使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的不动点. □

一般形式的 **Brouwer 不动点定理**为:

$\mathbf{R}^n$ 中的非空紧凸子集 B 上的连续自映射 $\boldsymbol{F}$ 必有不动点. 即存在 $\boldsymbol{\xi} \in B$, 使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$.

其证明要用到一些拓扑知识, 可参考 [47, 33].

第二个例子是用旋转度证明代数基本定理.

例题 24.4.2 (代数基本定理) 复数 z 的 n 次多项式 $P_n(z)$ 在复域上至少有一个根.

证 设 $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbf{R}$. $P_n(z) = R(P_n(z)) + \mathrm{i}I(P_n(z))$, 其中 $R(\cdot)$ 与 $I(\cdot)$ 分别表示复数的实部和虚部. 构造一个映射

$$\boldsymbol{F} : (x, y) \to (R(P_n(x + \mathrm{i}y)), I(P_n(x + \mathrm{i}y))).$$

$\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 n 次多项式映射. $P_n(z)$ 在复域上有根的问题归结为 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上是否是退化向量场.

如果 $\boldsymbol{F}$ 是非退化向量场, 则由性质 2, $\gamma(\boldsymbol{F}, S_r) = 0$, 其中 S_r 表示以 r 为半径的单位圆周. 另一方面, 我们从其它性质计算 $\gamma(\boldsymbol{F}, S_r)$.

我们先计算 $P_n(z) = z^n$ 的情况. 设对应的多项式映射为 $\boldsymbol{F}_0$, 则

$$\gamma(\boldsymbol{F}_0, S_r) = \frac{1}{2\pi}\oint_{S_r}\frac{R\,\mathrm{d}I - I\,\mathrm{d}R}{R^2+I^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\cos nt(n\cos nt) - r\sin nt(-n\sin nt)}{r^2}\,\mathrm{d}t = n.$$

对于一般的 n 次多项式 $P_n(z)$, 不妨设其首系数为 1, 作复多项式的形变

$$G(z,\lambda) = \lambda z^n + (1-\lambda)P_n(z).$$

可知

$$\overline{z}^n \cdot G(z,\lambda) = \lambda|z|^{2n} + (1-\lambda)|z|^{2n} + Q(z).$$

其中 $Q(z)$ 满足 $\dfrac{|Q(z)|}{|z|^{2n}} \to 0 \quad (|z| \to +\infty)$. 因此

$$\overline{z}^n \cdot G(z,\lambda) = |z|^{2n} + o(|z|^{2n}) \quad (|z| \to +\infty).$$

所以当 r 足够大时, $G(z,\lambda)$ 在复平面的单位圆周 S_r 上取不到零点. 这说明 $P_n(z)$ 对应的 n 次多项式映射 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_0$ 在 S_r 上同伦, $\gamma(\boldsymbol{F}, S_r) = n$. 这就证明 $\boldsymbol{F}$ 必定是 $\mathbf{R}^2$ 上的退化向量场. 也证明了 z^n 在复域中至少有一根. □

最后我们用旋转度解决 1995 年匈牙利的 Miklós Schweitzer 数学竞赛中的一个积分问题. 这个积分问题在几何学和博弈论中有有趣的背景. 我们的材料取自美国数学月刊 106 卷 (1999) 227～240 页.

例题 24.4.3 设 f 和 g 是 $[0,1]$ 上的两个可积函数, 满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

证明存在 $[0,1]$ 中的某个闭区间 $[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

证 我们定义

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\},$$

并令

$$\boldsymbol{G}(x,y) = \left(\int_x^y f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}, \int_x^y g(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\right).$$

由 f, g 的可积性, 可知 $\boldsymbol{G}$ 是闭的单连通区域 D 上的连续向量场. 如果 $\boldsymbol{G}(x,y)$ 在 D 的某一点 (a,b) 上取零向量, 就证明了我们所要的结论. 否则, 可以考虑 $\gamma(\boldsymbol{G}, \partial D)$. ∂D 由三条直线段组成. 在对角线 $x=y$ 上取常值, 故旋转角度为 0. 在水平边界和垂直边界上, 注意到

$$G(0,x) + \boldsymbol{G}(x,1) = (0,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因而

$$\boldsymbol{G}(x,1) = -G(0,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因此水平边界的任一点的向量恰好与垂直边界上对应点的向量反向. 这说明 G 沿水平边界的旋转角度与其沿垂直边界的旋转角度一样. 而 $G(0,0)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $G(0,1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 故 G 沿垂直边界的旋转角度为 $2k\pi+\pi$, k 为整数. 所以有

$$\gamma(G,\partial D)=\frac{0+2(2k\pi+\pi)}{2\pi}=2k+1\neq 0.$$

由旋转度的性质 2 知, G 必在 D 上某点 (a,b) 处取零向量, 也即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

注 这个问题表面上看可以利用积分值关于积分区间端点的介值性质来解决, 即: $\exists a_0$, 使 $\forall a\in(0,a_0)$, 有a 的连续函数值 $b(a)$, 使 $\int_a^{b(a)} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. 实际上不可行, 这是因为上述 $b(a)$ 并不一定连续. 比如我们考虑如下的 $f(x)$, 它的原函数 $F(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 满足: 当 $0<x<1$ 时, $0<F(x)<1$; $F(0)=0$; 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上严格单调增加并在 $x=\frac{1}{2}$ 时取到惟一极大值 $\frac{3}{4}$, 然后严格单调减少至 $x=\frac{2}{3}$ 时取到惟一极小值 $\frac{2}{3}$, 然后严格单调增加至 $F(1)=1$. 考察使 $\int_a^{b(a)} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ 的点 a 与 $b(a)$. 注意到此时必有 $F(b(a))-F(a)=\frac{1}{2}$. 设 $F(a_0)=\frac{1}{2}$, 则 $0<a_0<\frac{1}{2}$. 因而 $a\in(0,a_0)$. 对应地有 $b(a_0)=1$. 当 a 自 a_0 连续地移向 0 时, $b(a)$ 自 1 连续地减少. 至 $F(a_1)=\frac{1}{6}$ 时, $b(a_1)=\frac{2}{3}$. 另一方面 $F(a)<\frac{1}{6}$ 时, $F(b(a))<\frac{2}{3}$, 故必有 $b(a)<\frac{1}{2}$. 因此 a_1 不是 $b(a)$ 的连续点.

§24.5 对于教学的建议

24.5.1 学习要点

1. 本章的重点之一是计算两型曲线积分, 从计算公式可以发现, 写出曲线的参数方程是计算的关键部分. 一般来说, 一条曲线可以有多种参数方程的形式, 到底哪一种给计算带来方便, 要视具体情况, 对如何求曲线的参数方程总结如下.

平面曲线

$$F(x,y)=0. \tag{24.17}$$

方法 1 若能从 (24.17) 中解出 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$, 则平面曲线 (24.17) 以 x 或 y 为参数的参数方程分别为

$$x=x,\quad y=f(x)$$

或

$$x = g(y), \quad y = y.$$

方法 2 将极坐标表达式 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ 代入 (24.17) 得

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0. \tag{24.18}$$

若能从 (24.18) 中解出 $r = f(\theta)$ 或 $\theta = g(r)$, 则平面曲线 (24.17) 的以 θ 或 r 为参数的参数方程分别为

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

或

$$x = r\cos g(r), \quad y = r\sin g(r).$$

空间曲线

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0. \tag{24.19}$$

方法 1 若能从 (24.19) 中解出两个字母, 不妨设可解出 y, z 为 x 的函数 $y = \varphi(x), z = \psi(x)$, 则空间曲线 (24.19) 的参数方程为

$$x = x, \ y = \varphi(x), \ z = \psi(x).$$

方法 2 将球坐标变换或柱坐标代换代入 (24.19) 得

$$F(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) = 0, \tag{24.20}$$

$$G(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) = 0 \tag{24.21}$$

或

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = 0, \tag{24.22}$$

$$G(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = 0. \tag{24.23}$$

若能从 (24.20), (24.21) 中或 (24.22), (24.23) 中解出两个字母为第三个字母的函数, 同样也可以得到参数方程.

方法 3 从 (24.19) 中消去一个字母 (例如 z), 得一条平面曲线

$$f(x, y) = 0. \tag{24.24}$$

它实际上是空间曲线 (24.19) 在 x, y 平面上的投影, 先写出 (24.24) 的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{24.25}$$

再将 (24.25) 代入 (24.19)中的某一个方程, 得

$$z = w(t). \tag{24.26}$$

(24.25), (24.26) 就是空间曲线 (24.19) 的参数方程.

2. 关于两类曲线积分之间的关系, 关系式 (24.5) 是基本的, 也是便于记忆的, 在平面上也是正确的. 但是在平面上常用的是法方向, 而不是切方向. 所以我们或者记住表达式 (24.6), 或者用图 24.2 临时再推导一下.
3. 关于 Green 公式, 比较方便于记忆的形式是

$$\int\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. 总结求平面上第二型曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 的几种方法.

(1) 用 Green 公式化为二重积分. 若 C 为闭曲线, 可直接用, 若 C 不闭可添加辅助线后用 Green 公式;

(2) 若满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 如果曲线 C 不封闭, 可考虑用求出原函数的方法;

(3) 利用曲线的参数方程化为定积分求解.

24.5.2 参考题

第一组参考题

1. 证明不等式

$$\left|\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant ML,$$

其中 L 是曲线 C 的弧长, $M = \max\limits_{(x,y)\in C} \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)}$, 并利用这个不等式证明 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$, 其中

$$I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

2. 求第一型曲线积分

(1) $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\mathrm{d}s \ \ (|a| \neq R)$;

(2) $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,\mathrm{d}s \ \ (a^2+b^2 \neq R^2)$.

3. 设 $f(x,y)$ 在 L 上连续, L 是逐段光滑的简单闭曲线, 证明

$$u(x,y) = \oint_L f(\xi,\eta) \ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}s$$

当 $x^2+y^2 \to +\infty$ 时趋于 0 的充要条件是

$$\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s = 0.$$

4. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续, 证明

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

对 $\forall r>0$ 都成立的充要条件是

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\oint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s$$

对 $\forall r>0$ 都成立.

5. 设 $f(x,y)$ 在 G 内一阶连续可微, 在 ∂G 上 $f(x,y)=0$, $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 证明

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi}{3}a^3\max_G(f_x^2+f_y^2)^{1/2}.$$

6. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面上有连续偏导数,而且对以 $\forall(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ 为心, 以 $\forall r>0$ 为半径的上半圆周 $C:x=x_0+r\cos\theta,y=y_0+r\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 都有

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

证明: $P(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0\ \ (\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2)$.

第二组参考题

1. 给出旋转度性质 2 的一个不用曲线积分的证明.
2. 证明如下形式的高维中值定理: 设 $f(\boldsymbol{x})$ 为定义在以 r 为半径的球

$$D=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2\}$$

上的连续可微函数, 则存在 $\boldsymbol{p}_0=(p_1^0,\cdots,p_n^0)\in\operatorname{int}D$, 使

$$\max_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x})-\min_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x})=|\nabla f(\boldsymbol{p}_0)|\cdot 2r.$$

3. 设 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$ 是 n 边形的 n 个顶点, 而且原点在其内部, 证明存在正实数 x 和 y,使得

$$(a_1,b_1)x^{a_1}y^{b_1}+(a_2,b_2)x^{a_2}y^{b_2}+\cdots+(a_n,b_n)x^{a_n}y^{b_n}=(0,0).$$

4. 设 D 是半径为 r 的一个圆所围成的平面区域, 对 D 内的点 (x,y), 用 $l(x,y)$ 表示以 (x,y) 为圆心, δ 为半径的圆在 D 外边的那段弧的长度. 试求

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_D l(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. 设 B 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单位圆盘, C 是单位圆周. $\boldsymbol{g}:\ B\to\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ 是二阶连续可微映射.

(1) 用 Grecn 公式把 $\displaystyle\iint\limits_B\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ 表示成 C 上的第二型曲线积分;

(2) 如果 $\boldsymbol{g}$ 在 C 上的限制是恒等映射, 即 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in C$, 证明

$$\oint_C x_1\,\mathrm{d}x_2=\oint_C g_1\,\mathrm{d}g_2=\oint_C g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2;$$

(3) 证明不存在满足 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in C$ 及 $\boldsymbol{g}(B)\subset C$ 的二阶连续可微映射 $\boldsymbol{g}$;

(4) 对上述命题给出一个几何上的解释.

6. (1) 设 B,C 与题 5 相同, $\boldsymbol{f}:\ B\to B$ 是二阶连续可微映射, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in B$, 从几何上可见以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为起点和 $\boldsymbol{x}$ 为终点的有向线段与 B 的边界 C 相交, 则交点可表示为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+t(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),$$

其中 $t(\boldsymbol{x})$ 是与 $\boldsymbol{x}$ 有关的参数, 证明 $t(\boldsymbol{x})$ 满足二次方程

$$t^2(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2+2t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2-1=0;$$

(2) 证明 (1) 中的 $\boldsymbol{g}$ 满足 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in C$ 及 $\boldsymbol{g}(B)\subset C$;

(3) 结合上题证明满足 (1) 的 $\boldsymbol{f}$ 是不存在的, 即若 $\boldsymbol{f}:\ B\to B$ 是二阶连续可微映射, 则 $\exists\boldsymbol{\xi}\in B$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$. 我们得到了 Brouwer 不动点定理的另一个证明. 你能否举几个运用 Brouwer 不动点定理的实际例子.

第二十五章 曲面积分

曲面积分与曲线积分一样也有两类: 与曲面的方向无关的第一型曲面积分和与曲面的方向有关的第二型曲面积分. 本章在 §25.1 和 §25.2 两节中讨论 $\mathbf{R}^3$ 中的这两类曲面积分以及它们之间的关系, 所有的概念和结果都可以推广到 $\mathbf{R}^n$ $(n>3)$ 的情况. 在 §25.3 节中介绍 Gauss 公式 (第二型曲面积分与三重积分之间的关系), Stokes 公式 (第二型曲面积分与第二型曲线积分之间的关系), 以及在 $\mathbf{R}^3$ 中曲线积分与路径无关的条件. 在 §25.4 节中介绍一些外微分的初步知识. 最后一节是学习要点和参考题.

§25.1 第一型曲面积分

25.1.1 第一型曲面积分的定义和计算

在 22.5.1 小节中我们在假定曲面面积存在的情况下, 推导出了曲面面积的计算公式, 下面给出曲面面积的严格定义. 考虑一个以分段光滑的闭曲线 L 为边界的光滑曲面 S, 设这一曲面被一个分段光滑的曲线网分成许多部分 $S_1, S_2, \cdots, S_m$, 并在每一部分 S_i 内任取一点 M_i, 把元素 S_i 垂直地投影到曲面在点 M_i 处的切平面上, 得到在切平面内的平面图形 T_i, 其面积 ΔT_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 的和在各个元素 S_i 的直径趋于零时的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_i \Delta T_i$$

称为**曲面 S 的面积**, 其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} d(S_i)$ 为 S_i $(i=1,\cdots,m)$ 中的最大直径. 如果极限为有限数, 则称曲面 S 为**可求面积的**.

设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的可求面积的曲面, 函数 f 在 S 上有定义. 对于 S 的任一分割 $T:\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$, 用 ΔS_i 表示 S_i 的面积, 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$, 如果当 $d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} d(S_i)\to 0$ 时, 和数

$$\sum_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

收敛, 且极限不依赖于 S 的具体分割与 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$ 的具体选择, 则称函数 f 在 S 上的第一型曲面积分存在, 该极限值称为 $f(x,y,z)$ 在 S 上的**第一型曲面积分**, 记为

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{d(T)\to 0}\sum_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

如果曲面 S 的参数方程是

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\ \ (u,v) \in D,$$

D 是 u,v 平面上可求面积的区域, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 在 D 上有连续偏导数, 则

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

且

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{25.1}$$

特别地, 若曲面 S 的方程为

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25.2}$$

例题 25.1.1 设 S 为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2 + y^2 = 2ax$ 割下的部分, 求

$$I = \iint\limits_S (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\,\mathrm{d}S.$$

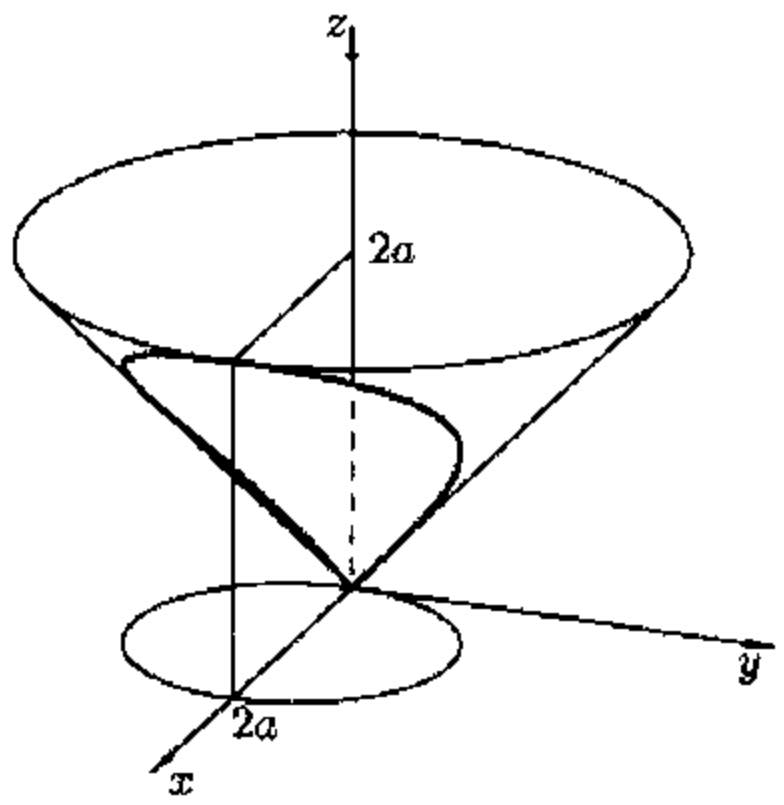


图 25.1

解 1 见图 25.1, 在直角坐标系中计算

$$z_x = \frac{x}{z}, \quad z_y = \frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2},$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2ax} [x^2y^2 + (x^2+y^2)^2]\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

用极坐标变换求上述二重积分, 则

$$I = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} (r^4\cos^2\theta\sin^2\theta + r^4) r\,\mathrm{d}r$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2\theta\sin^2\theta + 1)\cdot\left(\frac{1}{6}r^6\Big|_0^{2a\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}(2a)^6\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\theta(\cos^2\theta\sin^2\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6. \quad \square$$

解 2 用参数式计算. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在球坐标系中的方程为 $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 因此 S 的参数方程为

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta,\ \ y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta,\ \ z=\frac{1}{\sqrt{2}}r,\ \ (r,\theta)\in D.$$

又 S 的边界线

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2=2ax$$

的球坐标表示为

$$\varphi=\frac{\pi}{4},\quad r^2\sin^2\varphi=2ar\sin\varphi\cos\theta.$$

于是

$$D=\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2}a\cos\theta\}.$$

计算得

$$E=\frac{r^2}{2},\ \ F=0,\ \ G=1,$$

最后得到

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}a\cos\theta}(\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{1}{4}r^4)\frac{r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r\\&=\frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6.\quad\square\end{aligned}$$

25.1.2 第一型曲面积分的应用

1. 求曲面的面积. 在 (25.2) 与 (25.1) 中令 $f\equiv 1$, 则曲面 S 的面积为

$$\iint_S\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

2. 求曲面的质量. 设曲面 S 的面密度为 $\rho(x,y,z)$, 则它的质量

$$\begin{aligned}m&=\iint_S\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S\\&=\iint_D\rho(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

3. 求曲面的质心坐标. 曲面 S 的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由下面的公式确定:

$$x_0=\frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

例题 25.1.2 求上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 被 $x^2+y^2=ax$ 截取部分的面积与质心坐标, 其中 $a>0$.

解 见图 22.11, 这就是 Viviani 体的上表面. 由于

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

故所求面积

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r \\ &= (\pi-2)a^2. \end{aligned}$$

下面求质心坐标, 由对称性知 $y_0=0$, 且

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint_S x\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{2}{(\pi-2)a^2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ y\geqslant 0}}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(\pi-2)a}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r \quad (r=a\cos t) \\ &= \frac{2}{(\pi-2)a}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{a^2\cos^2 t}{a\sin t}(-a\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a}{\pi-2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2a}{3(\pi-2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint_S z\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi a}{4(\pi-2)}. \quad \square \end{aligned}$$

25.1.3 练习题

1. 求 $\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}S$, 其中

   (1) S 为 $z^2=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内的上半部分 $(z\geqslant 0)$;

   (2) S 为 $x=r\sin\alpha\cos\theta$, $y=r\sin\alpha\sin\theta$, $z=r\cos\alpha$, $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

2. 求 $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geqslant 0)$.

3. 求 $\iint\limits_S (x+y+z)^2\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

4. 求 $\iint\limits_S (x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 割下的部分.

5. 求 $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$, 其中

(1) S 为 $|x|+|y|+|z|=1$;

(2) S 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被 $z=1$ 割下的部分.

6. 求 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$, S 为 $|x|+|y|+|z|=a$.

7. 求 $F(t)=\iint\limits_{x^2+z^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, 其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当 } z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & \text{当 } z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

8. 求 $F(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为 $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=t^2$, $t>0$, (x,y,z) 为满足 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$ 的定点,

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases} 1, & \text{当 } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0, & \text{当 } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2.\end{cases}$$

9. 求 $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 其中 S 为立体 $x+y+z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的表面.

10. 求 $\iint\limits_S \dfrac{|x|}{z}\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是柱面 $x^2+y^2=2ay$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=2a$ 所截下的部分.

11. 求 $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$ 割下的部分.

§25.2 第二型曲面积分

25.2.1 第二型曲面积分的定义和计算

设 S 是逐片光滑的**定向曲面**, P, Q, R 是定义在 S 上的函数. 在 S 所指定的一侧作分割 T, 它把 S 分为 n 个小曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_n$, 分割 T 的细度

$\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S_i$ 的直径$\}$, 以 $\Delta S_i^{(1)}, \Delta S_i^{(2)}, \Delta S_i^{(3)}$ 分别表示 S_i 在 yOz, zOx, xOy 三个坐标平面上的投影区域的面积. 它们的符号由 S_i 的方向来确定, 当 S_i 的法线正向与 z 轴正向成锐角时, S_i 在 xOy 平面的投影区域的面积 $\Delta S_i^{(3)}$ 为正, 反之面积为负. $\Delta S_i^{(1)}$ 与 $\Delta S_i^{(2)}$ 的符号可类似地定义. 在每个 S_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 若

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^{(1)} + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^{(2)} + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i^{(3)}$$

存在, 且与曲面 S 的分割 T 以及 (ξ_i, η_i, ζ_i) 在 S_i 上的取法无关, 则称此极限为函数 P, Q, R 在曲面 S 上所指定的一侧上的**第二型曲面积分**, 记为

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

设 $R(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面

$$S: z = z(x,y), \quad (x,y)\in D_{xy}$$

上的连续函数, 以 S 的上侧为正侧, 则有

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果在正侧积分, 积分号前取正号; 如果在负侧积分, 积分号前取负号.

类似地, 当 $P(x,y,z)$ 在光滑曲面

$$S: x = x(y,z), \quad (y,z)\in D_{yz}$$

上连续时, 有

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

这里 S 是以 S 的法线方向与 x 轴的正向成锐角的那一侧为正侧.

当 $Q(x,y,z)$ 在光滑曲面

$$S: y = y(z,x), \quad (z,x)\in D_{zx}$$

上连续时, 有

$$\iint_S Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

这里 S 是以 S 的法线方向与 y 轴的正向成锐角的那一侧为正侧.

如果光滑曲面 S 由参数方程给出:

$$S: x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v)\in D,$$

且行列式

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

不同时为 0, 则

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_D (PA + QB + RC)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{25.3}$$

其中积分号前正负号的选取法则如下: 若向量 (A,B,C) 与曲面 S 上预先选定的侧的法向量方向一致, 则取 "+" 号, 否则取 "−" 号.

例题 25.2.1 设 Σ 为上半单位球面 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$, 取内侧, 求

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 1 用直角坐标系计算

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1 + I_2 + I_3.$$

计算 I_1 : $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1 : x = \sqrt{1-y^2-z^2},\ (y,z) \in D_{yz} = \{y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\},\quad \text{取后侧},$$

$$\Sigma_2 : x = -\sqrt{1-y^2-z^2},\ (y,z) \in D_{yz},\quad \text{取前侧},$$

则

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma_1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma_2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iint\limits_{D_{yz}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_{yz}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

同理有

$$I_2 = 0,\ I_3 = -\iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\pi.$$

最后得到

$$I = -\pi. \quad \square$$

解 2 用参数方程

$$\Sigma : x = \sin\varphi\cos\theta,\ \ y = \sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \cos\varphi,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

计算行列式

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\cos\theta, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin\varphi\cos\varphi.$$

因为 $C>0$, 则 (A,B,C) 的方向与上半球面 S 内侧的法线方向相反, 故积分号前取 "−" 号, 得

$$\begin{aligned} I &= -\iint\limits_D (\sin^2\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} [\sin^2\varphi(\cos\theta+\sin\theta) + \sin\varphi\cos\varphi]\,\mathrm{d}\theta \\ &= -2\pi\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\pi. \quad \square \end{aligned}$$

例题 25.2.2 求

$$I=\oiint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由 $x^2+y^2=1$, $z=1$ 及三个坐标平面围成的立体在第一卦限的部分的表面, 取外侧.

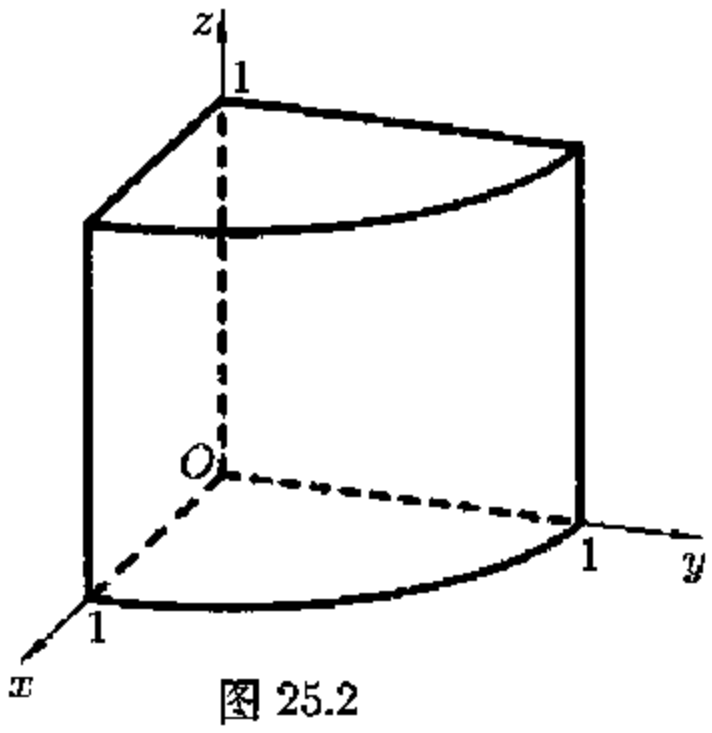


图 25.2

解 见图 25.2, 因为 Σ 分块较多 (需分 5 块), 不便于用参数式, 故应在直角坐标系中计算. 记 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5$. 其中 Σ_1 为圆柱面, Σ_2 为下底面, Σ_3 为上底面, Σ_4 为左侧面 $y=0$, Σ_5 为右侧面 $x=0$. 则有

$$I=\oiint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\oiint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\oiint_{\Sigma}(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I_1+I_2+I_3.$$

计算 I_1, 有

$$I_1=\sum_{i=1}^{5}\iint_{\Sigma_i}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

因为 $\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 在 yOz 平面上的投影面积为零, 于是

$$\iint_{\Sigma_i}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,\quad i=2,3,4,$$

而

$$\Sigma_1:\ x=\sqrt{1-y^2},\ (y,z)\in D_{yz}=\{0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\},\quad \text{取前侧},$$

$$\Sigma_5:\ x=0,\ (y,z)\in D_{yz},\quad \text{取后侧}.$$

于是

$$\begin{aligned}I_1&=\iint_{\Sigma_1}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_5}(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\iint_{D_{yz}}(\sqrt{1-y^2}+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{yz}}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

用类似的方法可求出 $I_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

然后求

$$I_3 = \sum_{i=1}^{5} \iint_{\Sigma_i} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

显然有

$$\iint_{\Sigma_i} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad i = 1,4,5,$$

而

$$\Sigma_2 : \ z = 0,\ (x,y) \in D_{xy} = \{x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}, \quad \text{取下侧},$$

$$\Sigma_3 : \ z = 1,\ (x,y) \in D_{xy}, \quad \text{取上侧},$$

于是

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\Sigma_2} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_3} (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\iint_{D_{xy}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} (1+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

最后得到

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{4}\pi. \quad \square$$

注 我们已经知道, 利用第二型曲线积分可以计算平面图形的面积. 类似地, 利用第二型曲面积分也可以计算空间立体的体积 (见表达式 (25.7)–(25.11)).

25.2.2 两类曲面积分之间的关系

设 S 是可定向曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 S 上选定的某一侧的法向量, 则

$$\begin{aligned} &\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\quad = \iint_S \left[P\cos(\boldsymbol{n},x) + Q\cos(\boldsymbol{n},y) + R\cos(\boldsymbol{n},z)\right] \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{25.4}$$

上述关系式的用处之一是可简化曲面积分的计算, 当某一类曲面积分的计算比较复杂时, 可利用公式 (25.4) 转化为另一类曲面积分进行计算.

例题 25.2.3 求

$$I = \iint_{\Sigma} xyz(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\,\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 为第一卦限中的球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$.

解 见图 25.3, 不论用参数式或直角坐标式, 直接计算均相当复杂, 取 Σ 的上侧, 则 (x,y,z) 处的法向量为 $(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$ 利用公式 (25.4),

$$\begin{aligned} I &= a\iint_{\Sigma}\left(y^3z^3\frac{x}{a}+z^3x^3\frac{y}{a}+x^3y^3\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}S \\ &= a\iint_{\Sigma}y^3z^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^3x^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^3y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 3a\iint_{\Sigma}x^3y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3a\iint_{D_{xy}}x^3y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中 $D_{xy}=\{x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 作极坐标代换得

$$\begin{aligned} I &= 3a\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^7\sin^3\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{3}{64}a^9\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{32}a^9. \quad \square \end{aligned}$$

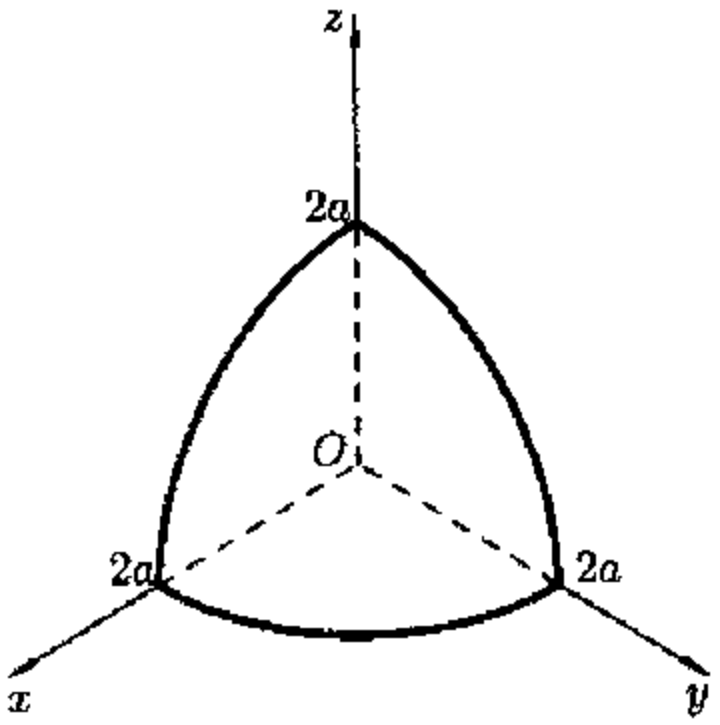


图 25.3

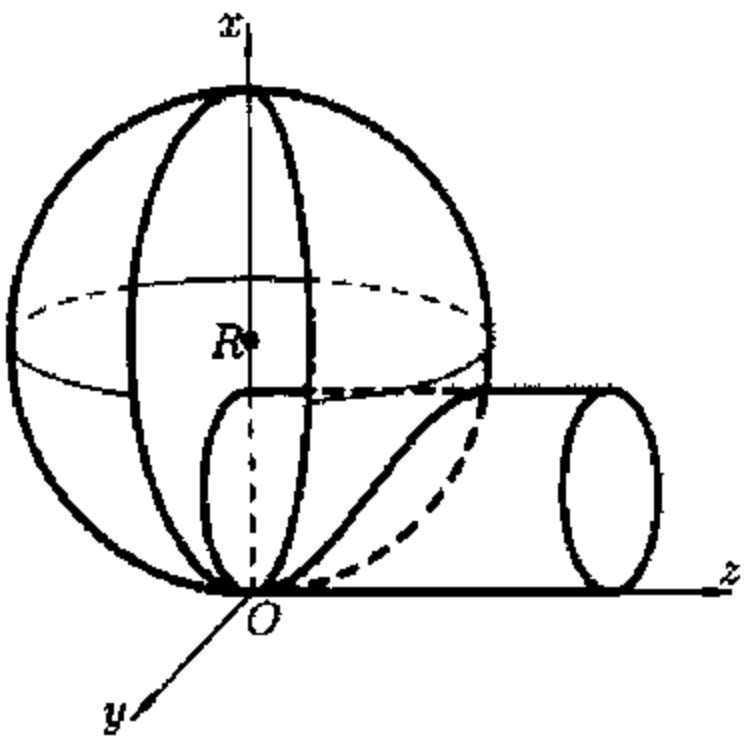


图 25.4

例题 25.2.4 求

$$I=\iint_{\Sigma}(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R)$ 截下的位于 $z\geqslant 0$ 的部分, 取外侧.

解 见图 25.4, 改写球面方程为 $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$, 其外侧的法向量

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right).$$

由公式 (25.4), 有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (y-z, z-x, x-y)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{R}\iint_{\Sigma} \left[(y-z)(x-R)+(z-x)y+(x-y)z\right]\mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma} (z-y)\,\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

由于 Σ 关于 xOz 平面对称, 而函数 y 是奇函数, 于是

$$I = \iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx} \sqrt{2Rx-x^2-y^2}\,\frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= R\cdot \pi r^2 = \pi R r^2. \quad \square$$

25.2.3 练习题

1. 设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$, 且 $z(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 中连续可微, 证明

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \pm\iint_{D} (-Pz_x - Qz_y + R)\Big|_{z=z(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

   当 Σ 取上侧时符号取 "+", 当 Σ 取下侧时符号取 "−".

2. 若 Σ 分块光滑, 且关于 xOy 平面对称, $f(x,y,z)$ 在 $\overline{\Sigma}$ 上连续, 且满足 $f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 2\displaystyle\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S, \\ 0. \end{cases}$$

   应选哪个结果? 其中 Σ_1 是 Σ 在 xOy 平面以上的部分.

3. 若 Σ 分块光滑, 且关于 xOy 平面对称, $R(x,y,z)$ 在 $\overline{\Sigma}$ 上连续, 且满足 $R(x,y,z)=-R(x,y,-z)$,

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\displaystyle\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\ 0. \end{cases}$$

   应选哪个结果? 其中 Σ_1 是 Σ 在 xOy 平面以上的部分, 取侧与 Σ 取侧相一致.

4. 设 Σ 是平面 Π 上的一个有界区域, 其面积为 S, Π 取上侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 且 $\cos(\boldsymbol{n},z)=\mu$. 证明 Σ 在 xOy 平面上的投影的面积为 μS, 并利用这个结果重新计算例题 21.4.2.

5. 求 $I_1=\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 取外侧.

6. 计算 $\iint\limits_{S} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $-1\leqslant z\leqslant 1$ 及 $x\geqslant 0$ 的部分, 取前侧.

7. 求 $\iint\limits_{S} x(z^2-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y(x^2-z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是 $y^2+z^2=1$ 被 $x=0, x=1, z+y=0, z-y=0$ 截取的上方部分, 取外侧.

§25.3 Gauss 公式与 Stokes 公式

25.3.1 Gauss 公式

Gauss 公式是将 $\mathbf{R}^3$ 中某区域内的三重积分与这一区域的边界上的特定的曲面积分建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 内的一个有界区域, 其边界 ∂D 由光滑曲面或逐片光滑曲面组成, 方向是外侧 (相对于区域 D 而言). 又设函数 P, Q, R 都在 D 内有关于 x, y, z 的连续偏导数, 则成立下列 **Gauss 公式**:

$$\iiint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25.5}$$

利用两类曲面积分之间的关系, Gauss 公式也可以写成

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ =&\oiint\limits_{\partial D}\left(P\cos(\boldsymbol{n},x)+Q\cos(\boldsymbol{n},y)+R\cos(\boldsymbol{n},z)\right)\mathrm{d}S,\end{aligned}\tag{25.6}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 ∂D 上的外法向量.

可以看出, Green 公式 (24.9) 与 Gauss 公式 (25.6) 的表达形式是类似的, 仅仅是空间的维数不同而已.

与 Green 公式相仿, Gauss 公式 (25.5) 与 (25.6) 为我们提供了一种新的计算曲面积分的方法.

例题 25.3.1 求

$$I=\iint\limits_{\Sigma} 4xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲线 $z=\mathrm{e}^y$ $(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面, 取下侧.

解 Σ 的方程为

$$z = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x^2+y^2 \leqslant a^2).$$

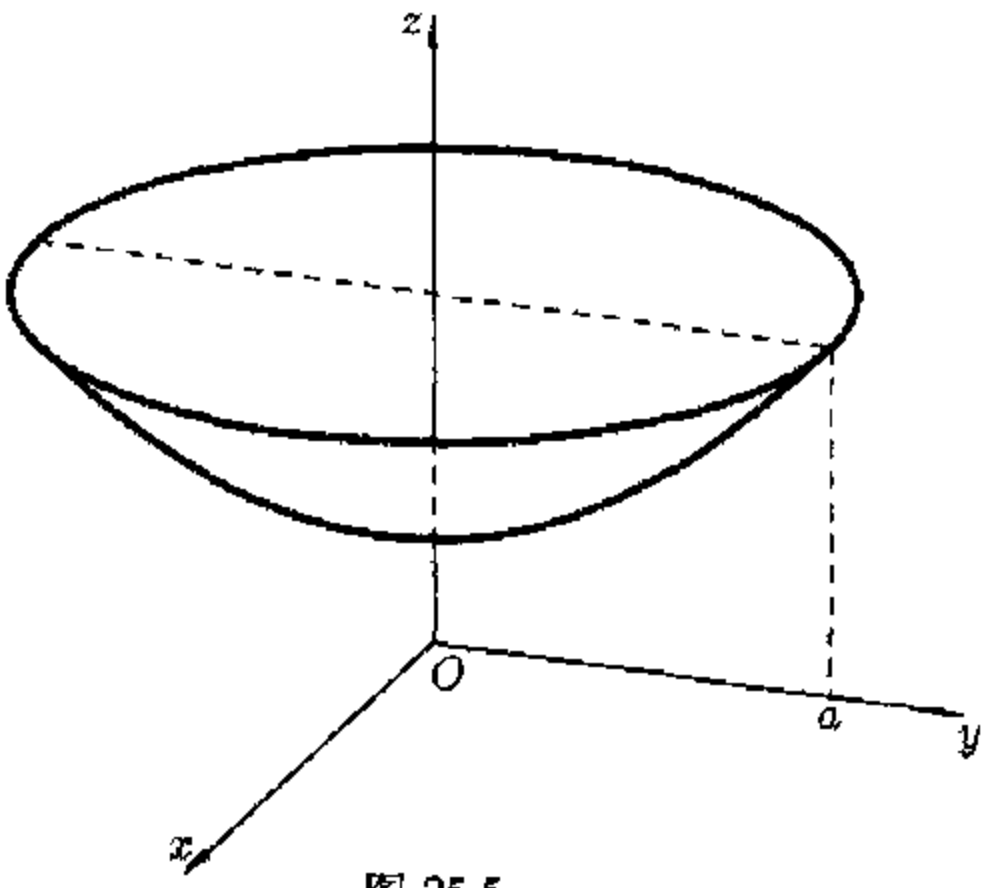


图 25.5

直接计算比较复杂. 考虑用 Gauss 公式. 由于 Σ 不闭, 需要添加辅助面

$$\Sigma_1 : z = \mathrm{e}^a, \quad (x^2+y^2 \leqslant a^2) \text{ 取上侧.}$$

见图 25.5, 设 Σ 与 Σ_1 围成的区域为 D, 令

$$P = 4xz, \ Q = -2yz, \ R = 1 - z^2.$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

由公式 (25.5), 得

$$\begin{aligned} I &= \left(\iint\limits_{\Sigma} + \iint\limits_{\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} \right) (1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\Sigma_1} (1-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= (\mathrm{e}^{2a}-1) \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2. \quad \square \end{aligned}$$

例题 25.3.2 计算曲面积分

$$I = \iint\limits_S \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}},$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 取外侧 $(a>0, b>0, c>0)$.

解 1 记 $P(x,y,z) = \dfrac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$, $Q(x,y,z) = \dfrac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$, $R(x,y,z) = \dfrac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$, 则在不包含原点的任何区域上

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

为了利用 Gauss 公式, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 作闭曲面

$$S_\varepsilon = \{ax^2 + by^2 + cz^2 = \varepsilon^2\},$$

取外侧. 由 Gauss 公式

$$I = \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}} = \frac{1}{\varepsilon^3} \iint\limits_{S_\varepsilon} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

上述积分在 S_ε 的外侧. 再一次用 Gauss 公式, 则

$$I = \frac{3}{\varepsilon^3} \iiint\limits_{ax^2+by^2+cz^2 \leqslant \varepsilon^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\varepsilon^3}{\sqrt{abc}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$$

解 2 (不用 Gauss 公式而直接计算) 利用单位球面的参数方程

$$x = \sin\varphi\cos\theta, \quad y = \sin\varphi\sin\theta, \quad z = \cos\varphi,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

计算得到

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\cos\theta, \; B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\sin\theta,$$
$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin\varphi\cos\varphi.$$

容易看出, (A,B,C) 的方向与单位球面外侧法线方向一致, 故积分号前取 "+" 号, 由 (25.3) 得

$$I = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}{(a\sin^2\varphi\cos^2\theta + b\sin^2\varphi\sin^2\theta + c\cos^2\varphi)^{3/2}}.$$

先计算对 φ 的积分, 我们令 $\cos\varphi = t$, 则

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(a\sin^2\varphi\cos^2\theta + b\sin^2\varphi\sin^2\theta + c\cos^2\varphi)^{3/2}}$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left[(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) - (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - c)t^2\right]^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)} \cdot \frac{t}{\left[(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) - (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - c)t^2\right]^{1/2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}.$$

最后得到

$$I = \frac{8}{\sqrt{c}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{8}{\sqrt{c}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{a + bt^2} \quad (t = \tan\theta)$$
$$= \frac{8}{\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}t\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}. \quad \square$$

注 利用 Gauss 公式来计算曲面积分在很多情况下是一种有效的手段, 但要注意使用 Gauss 公式的条件, 要弄清楚在什么情况下要 "挖洞" (即用封闭曲面把 P, Q, R 无定义或不可微的点挖去) 以及选择什么曲面 "挖洞" 计算更简便.

利用 Gauss 公式可导出用曲面积分表示 $\mathbb{R}^3$ 中逐片光滑边界的有界闭区域 Ω 的体积公式

$$|\Omega| = \iint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \iint_{\partial\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25.7}$$

上述积分在 $\partial\Omega$ 的外侧进行. 由两类曲面积分之间的关系, 又有

$$= \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S, \tag{25.8}$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 如果 $\partial\Omega$ 有参数表示

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\ \ (u,v) \in D,$$

则

$$V = \frac{1}{3}\left|\iint_D (Ax + By + Cz)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right|, \tag{25.9}$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \ B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \ C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

(25.9) 也可以写为

$$V = \frac{1}{3}\left|\iint_D \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right|. \tag{25.10}$$

特别地, 若一个立体的表面在球坐标系中由方程

$$r = r(\varphi,\theta), \quad (\varphi,\theta) \in D$$

给出, 则

$$x = r(\varphi,\theta)\sin\varphi\cos\theta,\ y = r(\varphi,\theta)\sin\varphi\sin\theta,\ z = r(\varphi,\theta)\cos\varphi,\ (\varphi,\theta) \in D.$$

代入公式 (25.10) 中得到

$$V = \frac{1}{3}\iint_D r^3(\varphi,\theta)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta. \tag{25.11}$$

当然, 公式 (25.11) 也可以从三重积分中直接得到, 事实上

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\substack{(\varphi,\theta)\in D \\ 0\leqslant\rho\leqslant r(\theta,\varphi)}} \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \iint_D \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\varphi,\theta)} \rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{1}{3}\iint_D r^3(\varphi,\theta)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

25.3.2 练习题

1. 利用 Gauss 公式计算积分:

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y^2+xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为以 $(0,0,0),(a,a,a)$ 为对角顶点的正方体的表面, 取内侧.

(2) $\iint\limits_\Sigma (x^3+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^2-xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^3+\frac{z}{x^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$, 取外侧.

(3) 设 $A_1=x^3-x^2y+z^3, A_2=xy^2+y^3, A_3=xz+z^2, \Sigma$ 是由 yOz 平面上的抛物线 $z=1-y^2$ 与 $z=0$ 所围成的平面区域绕 z 轴旋转后所得的旋转体的表面, 取外侧. 试求

$$\iint\limits_\Sigma (\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. 先添加辅助面, 再用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_\Sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant h$ 的一段, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 上的单位法向量, 其方向为下方.

(2) $\iint\limits_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上半部分, 取上侧.

(3) $\iint\limits_\Sigma (\frac{x^3}{a^3}+y^3z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\frac{y^3}{b^3}+z^3x^3)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\frac{z^3}{c^3}+x^3y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, x\geqslant 0$, 取后侧.

3. $F(x,y,z)$ 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的光滑函数, 且 $F(x,y,z)=0$ 是一个以原点为顶点的锥面 Σ, 如果 Σ 与平面 $\Pi: Ax+By+Cz=D$ 围成一个锥体, 证明此锥体的体积

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

其中 S 为平面 Π 上锥底部分的面积, H 为顶点到锥底的高.

4. 求由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 所围成的立体的体积.

5. 求 $\iint\limits_\Sigma (x^3+y^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x^3+2x^2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 在 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{3}$ 的部分, 取外侧.

6. $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<z<1\}$, $S=\partial V$, 求积分

$$\iint_S yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

积分沿外法线方向.

7. 求第二型曲面积分

$$\iint_S z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

25.3.3 Stokes 公式

Stokes 公式是将空间曲面上的第二型曲面积分与该曲面边界上的第二型曲线积分之间建立联系的一个重要公式.

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的分片光滑曲面, D 的边界 ∂D 由分段光滑曲线组成, 又设 P,Q,R 有关于 x,y,z 的连续偏导数, 则成立下列 **Stokes 公式**:

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_D \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{25.12}$$

其中 ∂D 的方向和 D 的方向服从右手法则. 由两类曲面积分之间的关系(25.4), (25.12) 又可以写为

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_D \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S, \tag{25.13}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面 D 上法向量的方向余弦. 如果曲面 D 在 xOy 平面上, 则公式 (25.12), (25.13) 就是 Green 公式. 公式 (25.12) 与 (25.13) 给我们提供了一个求曲线积分与曲面积分的新方法.

例题 25.3.3 求

$$I = \oint_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 是立方体 $\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a\}$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 的交线, 取向从 z 轴正向看去是逆时针方向.

分析 见图 25.6, 分六段积分的计算量很大, 且 C 也不便于表示为一个统一的参数式. 因 C 为闭曲线, 且 $P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$, $R=x^2-y^2$ 连续可微, 故考虑用 Stokes 公式.

解 令 Σ 为 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 被 C 所围的一块, 取上侧, 则 C 的取向与 Σ 的取侧相容. 应用 Stokes 公式 (25.13),

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}-4(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\frac{3}{2}a\,\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}a\cdot|\Sigma|$$

$$=-2\sqrt{3}a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.\quad\square$$

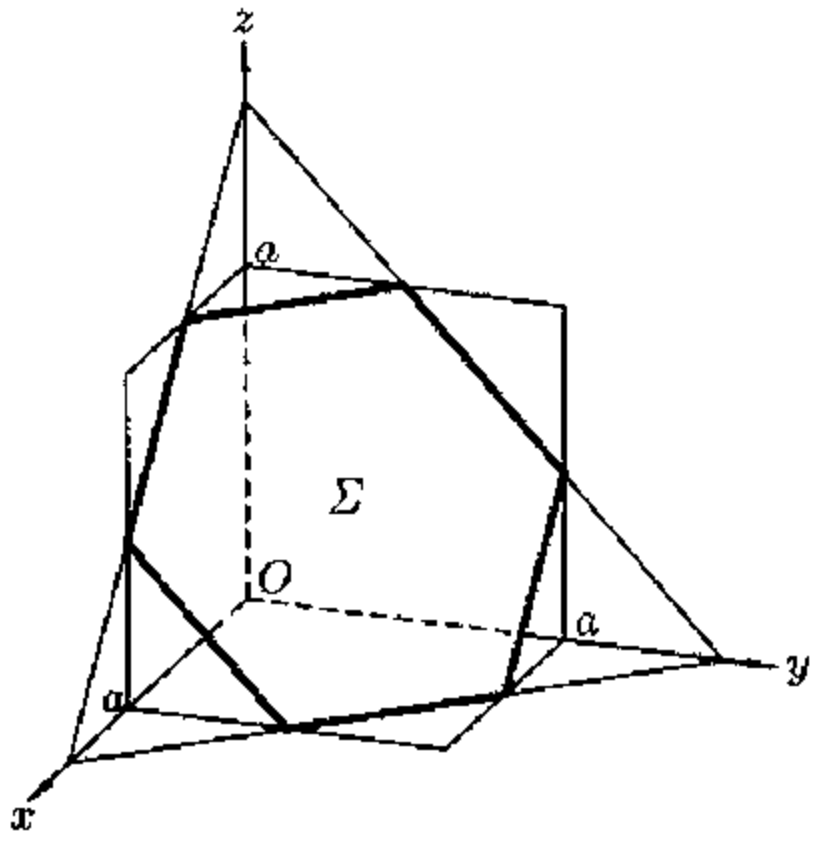


图 25.6

例题 25.3.4 设 Σ 是分片光滑的闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上的单位外法向量, 试证明

$$I=\oiint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=0,$$

其中分两种情形: (1) P, Q, R 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微, Ω 为 Σ 所围的立体; (2) P,Q,R 在 Σ 上一阶连续可微.

证 对情形 (1) 用 Gauss 公式

$$I=\oiint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=0.$$

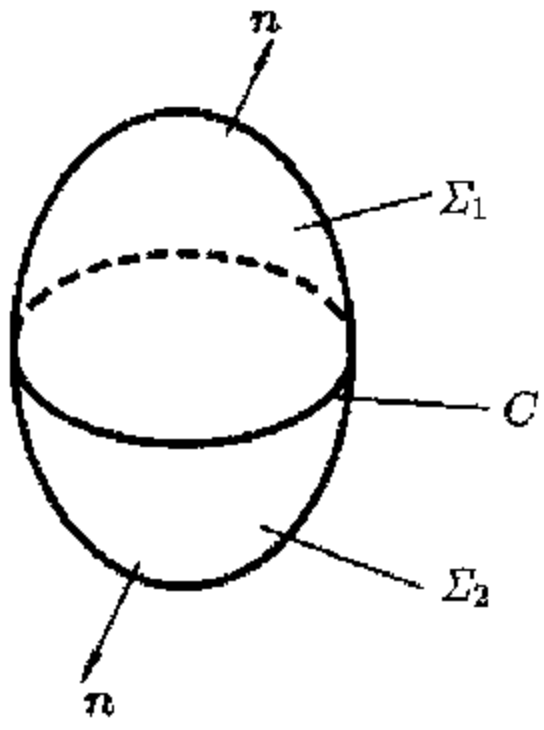


图 25.7

情形 (2) 参见图 25.7. 在 Σ 上任取一条逐段光滑的闭曲线 C, C 分 Σ 为两部分 Σ_1 与 Σ_2, 在 Σ_1, Σ_2 上分别应用 Stokes 公式, 则对于 $i=1,2$,

$$\iint_{\Sigma_i}\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\oint_{C_i}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z.$$

因 Σ_1,Σ_2 分居 C 两侧, 故 C_1,C_2 为同一条曲线 C, 只是它们的定向相反. 若记 C_1 为 C_+, 则 C_2 为 C_-, 从而

$$I=\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}\right)\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\left(\oint_{C_+}+\oint_{C_-}\right)P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=0.\quad\square$$

例题 25.3.5 试用 Stokes 公式计算

$$I=\oint_C(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 为 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与 $x^2+y^2=2rx$ 的交线 $(0<r<R,z>0)$, C 的定向使得 C 所包围的球面上较小区域保持在左边.

解 见图 25.4, 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx$ 所截部分的外侧, 由 Stokes 公式 (25.13)

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}\dfrac{x-R}{R} & \dfrac{y}{R} & \dfrac{z}{R}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{2}{R}\iint_S\left[(y-z)(x-R)+(z-x)y+(x-y)z\right]\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_S(z-y)\,\mathrm{d}S=2\iint_S z\,\mathrm{d}S=2R\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi r^2R.\quad\square$$

25.3.4 练习题

1. 设 C 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上逐段光滑的闭曲线, C 所界的面积为 S, C 的定向与 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 成右手系, 试计算积分

$$\oint_C\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

2. 求 $\oint_C(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, C 为 $x^2+y^2=1$ 与 $x+y+z=1$ 的交线, 从 x 轴正向看是逆时针方向.

3. 求 $\int_C(z^3+3x^2y)\,\mathrm{d}x+(x^3+3y^2z)\,\mathrm{d}y+(y^3+3z^2x)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $x=y$ 的交线, 自 $A(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},0)$ 到 $B(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}},0)$.

4. 用 Stokes 公式求 $\int_C \mathrm{e}^{x+z}\{[(x+1)y^2+1]\,\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y+xy^2\,\mathrm{d}z\}$, 其中 C 是右半柱面 $|x|+|y|=a$ $(y>0)$ 与平面 $y=z$ 的交线上从 $(-a,0,0)$ 到 $(a,0,0)$ 的一段 $(a>0)$.

5. 设 C 是空间任一逐段光滑的简单闭曲线, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是任意连续函数. 证明

$$\oint_C [f(x)-yz]\,\mathrm{d}x+[g(y)-xz]\,\mathrm{d}y+[h(z)-xy]\,\mathrm{d}z=0.$$

6. 求

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3-yz & -3xy^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在 $z\geqslant 0$ 的部分, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 下侧的单位法向量.

7. 求 $\oint_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向看是逆时针方向.

25.3.5 $\mathbf{R}^3$ 中曲线积分与路径无关的条件

利用 Stokes 公式可将 24.3.2 小节中平面曲线积分与路径无关的条件推广到 $\mathbf{R}^3$ 中, 但首先要清楚什么是 $\mathbf{R}^3$ 中的 "单连通区域", 为此我们要求无论 L 是区域 Ω 内的什么样的简单闭路, 总存在一个以 L 为边界而且全部包含在 Ω 内的曲面 S. 这时称空间区域 Ω 是 **曲面单连通区域**. 例如两个同心球面之间的部分是曲面单连通区域: 一个球打了一个贯通的柱形孔洞后剩下的部分, 如

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x^2+y^2\geqslant \frac{1}{2}\}$$

不是曲面单连通区域; $\mathbf{R}^3$ 中的圆环面

$$T^2:\ (\sqrt{x^2+y^2}-a^2)^2+z^2=b^2\ \ (0<b<a)$$

所围的区域也不是曲面单连通区域.

如果 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面单连通区域. $w=P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, 其中 P, Q, R 都在 D 内有连续偏导数, 则下列结论等价:

(1) 对 D 内任意一条闭曲线 C, 有

$$\int_C w=0;$$

(2) 对 D 内的任意一条路径 C, $\int_C w$ 仅与 C 的起点和终点有关, 而与所沿的路径无关;

(3) 在 D 内成立

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x};$$

(4) 存在势函数 $\varphi(x,y,z)$, 使得在 D 内成立

$$\mathrm{d}\varphi(x,y,z)=P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

且

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=&\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,\mathrm{d}y\\&+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,\mathrm{d}z+C,\end{aligned}\tag{25.14}$$

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\varphi\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}=\varphi(x,y,z)-\varphi(x_0,y_0,z_0).$$

例题 25.3.6 对于微分式

$$z\Big(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\Big)\,\mathrm{d}x+\frac{z}{xy^2}\,\mathrm{d}y+\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\,\mathrm{d}z,$$

判断原函数的存在性并求出之.

解 1 容易验证

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{z}{x^2y^2},\\ \frac{\partial Q}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{1}{xy^2},\\ \frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{x^2y}+\frac{z^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\end{aligned}$$

因此该微分式有原函数. 根据微分式的特点, 为计算简单起见取 $z_0=0$, $x_0,y_0>0$, 积分路径为 $(x_0,y_0,0)\longrightarrow(x,y_0,0)\longrightarrow(x,y,0)\to(x,y,z)$, 则

$$\varphi(x,y,z)=\int_0^z\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\,\mathrm{d}z+C=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C.\quad\square$$

解 2 求原函数时也可用下面求不定积分的方法: 由

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy},$$

则

$$\varphi(x,y,z)=\int\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\,\mathrm{d}z=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+\psi(x,y).$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=-\frac{z}{x^2+z^2}+\frac{z}{x^2y}+\frac{\partial\psi}{\partial x},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{z}{xy^2}+\frac{\partial\psi}{\partial y}.\end{aligned}$$

由 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$, 得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

即 $\psi(x,y)$ 为常数, 所以

$$\varphi(x,y,z)=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C. \quad \square$$

25.3.6 练习题

1. 证明下列微分式为全微分, 并求出其原函数:

   (1) $(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z$.

   (2) $\left[\frac{x}{(x^2-y^2)^2}-\frac{1}{x}+2x^2\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}-\frac{y}{(x^2-y^2)^2}+3y^3\right]\mathrm{d}y+5z^3\,\mathrm{d}z$.

2. 求 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z$.

3. 设 C 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的任一点沿任一路径运动到球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(b>a)$ 上的任一点的轨迹, C 按段光滑, 证明

$$\int_C r^3(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=\frac{1}{5}(b^5-a^5),$$

   其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

§25.4 向量的外积, 微分形式的外微分与一般的 Stokes 公式

虽然在多数院校的教学计划中, 也许没有讲授这些内容的足够的教学时间. 但应该看到, 微分形式、外积和外微分已成为近代分析的基本工具, 其简练的表达, 精致的结构给微积分基本问题的处理带来了极大的方便. 因而, 我们觉得这些内容即使不在课上讲, 也很值得推荐给学生作为课外阅读材料[①].

25.4.1 向量的外积

先考虑平面 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$. Π 为由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 张成的平行四边形. 现在规定, 当自 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 是逆时针方向旋转时, 其平行四边形的面积为正, 否则为负, 则由解析几何知识知, 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 就是上述意义下 Π 的有向面积.

① 近年来出版的数学分析教材大多数都 (或多或少地) 含有微分形式的外微分方面的材料. 就以本书参考文献中所收录的教科书为例, 在 [8, 9, 25, 28, 34, 36, 43, 45, 58, 60, 60, 61] 中全都是如此. 可以认为, 这是微积分教材改革方面的一个明显的动向. 此外还可以参考 [48].

值得提到的是著名数学家陈省身在 2001 年为南开大学的大学生开设的讲座《应用数学 (一), 微积分及其应用》中, 在第一讲 "微分和积分" 就引进外微分、外代数和一般的 Stokes 公式. 这就是本节要介绍的内容.

定义向量 a 与 b 的**外积**为

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

可以证明外积运算具有以下性质:

(1) 反对称性:

$a \wedge b = -b \wedge a \ \forall a, b \in \mathbf{R}^2$, 由此得到 $a \wedge a = 0 \ \forall a \in \mathbf{R}^2$.

(2) 线性分配律:

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c, \quad (a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c,$$

$$(\lambda a) \wedge b = a \wedge (\lambda b) = \lambda(a \wedge b), \quad \forall a,\ b,\ c \in \mathbf{R}^2,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

一般地, 定义 $\mathbf{R}^n$ 中向量 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的外积为

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这样的外积运算满足反对称性和线性分配律.

当 $n = 3$ 时, 可见三个线性无关向量 a_1, a_2, a_3 的外积就是以它们为棱的平行六面体的有向体积. a_1, a_2, a_3 构成右手系时, 体积为正, 否则为负.

25.4.2 微分形式

先看一个 n 元连续可微函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全微分

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i,$$

其中 $\mathrm{d}x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是各自独立的自变量增量, 与 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的具体取值是无关的. 这样把 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 看成一组基, $\mathrm{d}f$ 就可视为由这组基生成的线性空间的元素. 为此,我们构造如下一次微分形式的线性空间.

设 U 为 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U$, $C^0(U)$ 是 U 上全体连续函数. 设 $a_i(x) \in C^0(U)$, $i = 1, 2, \cdots n$, 则称

$$a_1(x)\mathrm{d}x_1 + a_2(x)\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n(x)\mathrm{d}x_n \tag{25.15}$$

为 U 上 C^0 类的**一次微分形式**, 简称 **1-形式**. 其全体记为 $\boldsymbol{\Lambda}^1$ (或 $\boldsymbol{\Lambda}^1(U)$).

注 1 如果 $a_i(x) \in C^k(U)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, k 为某个自然数, 则称 (25.15) 为 U 上的 C^k 类的一次微分形式.

注 2 以 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots \mathrm{d}x_n$ 为基, 系数取 $C^0(U)$ 中的函数, 按通常的线性运算, 可证明 $\boldsymbol{\Lambda}^1$ 是一个 $C^0(U)$ 上的线性空间.

下面形式地定义高次微分形式.

在 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\cdots$, $\mathrm{d}x_n$ 中任取 2 个组成有序元, 记为 $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 称为 $\mathrm{d}x_i$ 与 $\mathrm{d}x_j$ 的外积 (暂时先将它看作一种记号).

仿照向量的外积, 规定

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \quad \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

因此共有 C_n^2 个有序元

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

同 $\boldsymbol{\Lambda}^1$ 的构造类似, 以这些有序元为基就可以构造一个线性空间 $\boldsymbol{\Lambda}^2$, $\boldsymbol{\Lambda}^2$ 的元素称为**二次微分形式**, 简称 **2-形式**, 于是 $\boldsymbol{\Lambda}^2$的元素就可表为

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} g_{ij}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

这称为 2-形式的标准形式.

一般地, 在 $\{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ 中任取 p 个组成有序元, 记为

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

这里 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 是从集合 $1, 2, \cdots, n$ 中选取的任意 p 个整数 (同样地, 我们把 $\wedge$ 称为外积). 规定

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r} \wedge \mathrm{d}x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \\ &= -\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{r+1}} \wedge \mathrm{d}x_{i_r} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}, \quad 1 \leqslant r \leqslant p-1, \end{aligned}$$

而且如果 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 中有两个是相同的, 则 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = 0$. 因此共有 C_n^p 个有序元

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n.$$

以这些有序元为基构造一个线性空间 $\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\boldsymbol{\Lambda}^p$ 的元素称为 **p 次微分形式**, 简称 **p-形式**. 于是一般 p-形式就可表示为

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} g_{i_1, i_2, \cdots, i_p}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

这称为 p-形式的标准形式.

特别地, $\boldsymbol{\Lambda}^n$ 是 $\mathrm{C}_n^n = 1$ 维的线性空间, 它的基为 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, 因此一般 n-形式为

$$g(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

注意当 $p > n$ 时, 总有 $\mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = 0$. 因此当 $p > n$ 时, $\boldsymbol{\Lambda}^p = \{0\}$.

U 上的连续可微函数称为 (C^1 类的) 0-形式, 它们的全体记为 $\boldsymbol{\Lambda}^0$, 它也是一个线性空间, 函数 $g \equiv 1$ 是它的一个基.

25.4.3 微分形式的外积

在上节我们定义了抽象的线性空间 $\boldsymbol{\Lambda}^0$, $\boldsymbol{\Lambda}^1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\Lambda}^n$. 按线性空间的直积可

得到一个 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$ 维的线性空间

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^0+\boldsymbol{\Lambda}^1+\cdots+\boldsymbol{\Lambda}^n.$$

它的基是 $\boldsymbol{\Lambda}^0$, $\boldsymbol{\Lambda}^1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\Lambda}^n$ 的基的全体. $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的元素的一般形式为

$$\omega=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n,\quad \omega_i\in\boldsymbol{\Lambda}^i,\ i=0,1,\cdots,n.$$

现在在 $\boldsymbol{\Lambda}$ 上引入外积运算 $\wedge$:

记 $\mathrm{d}x_I=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$, $\mathrm{d}x_J=\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$, 则 $\mathrm{d}x_I$ 与 $\mathrm{d}x_J$ 的外积定义为

$$\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},$$

它是 $(p+q)$-形式. 如果 $\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_q\}$ 有公共元素, 那么 $\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J=0$. 对于一般的 p-形式 $\omega=\sum_I g_I(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I$ 和 q-形式 $\eta=\sum_J h_J(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_J$, 定义 ω 和 η 的外积 $\omega\wedge\eta$ 为

$$\omega\wedge\eta=\sum_{I,J}g_I(\boldsymbol{x})h_J(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J,$$

它是 $(p+q)$-形式.

对于 0-形式 f, 我们补充定义

$$f\omega=f\wedge\omega=\sum_I f(\boldsymbol{x})g_I(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I,\quad \omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p.$$

这样 $\wedge$ 是微分形式空间上的一种运算, 它有如下性质.

性质 1 设 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p,\eta\in\boldsymbol{\Lambda}^q$, 则当 $p+q>n$ 时

$$\omega\wedge\eta=0.$$

这是因为当 $p+q>n$ 时, $\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_q\}$ 必有公共元素.

性质 2 设 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\eta\in\boldsymbol{\Lambda}^q$, 则

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\omega.$$

推论 设 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\omega\neq0$, 则当 p 为奇数时, $\omega\wedge\omega=0$.

注 我们现在定义的外积 $\wedge$ 与 $\mathbf{R}^n$ 的向量的外积 $\wedge$ 在形式上只是大家都符合反对称性和线性分配律, 至于其他的结论都是各自的推论. 比如, 我们在 $\mathbf{R}^n$ 空间中仅仅定义了 n 个向量的外积, 并且如果这 n 个向量中有两个相等, 则其外积为零. 特别地, $\forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2$, 有 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}=0$. 但在 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, $n>2$ 时, 我们并没有给出 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}$ 的定义. 在微分形式的外积定义中, 我们允许 n 个微分中任意 p 个组成 p-形式的外积, 从而有当 $\omega\in\boldsymbol{\Lambda}^p$, $\omega\neq0$, p 为偶数时, 不一定成立 $\omega\wedge\omega=0$.

例如取 $\mathbf{R}^4$ 上的微分形式, 如果 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$, 那么

$$\begin{aligned}\omega\wedge\omega&=(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\wedge(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\\&=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\&=2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4.\end{aligned}$$

性质 3 对于任意 ω, η, $\sigma\in\boldsymbol{\Lambda}$ 成立

$$\text{分配律:}\quad (\omega+\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma,$$
$$\sigma\wedge(\omega+\eta)=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta;$$
$$\text{结合律:}\quad (\omega\wedge\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma).$$

25.4.4 微分形式的外微分

设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 是区域, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 U 上的可微函数, 其全微分

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_i,$$

可理解为对 0-形式 f 作了微分运算后成为了 1-形式. 对 $\boldsymbol{\Lambda}^p$ 中一个形如

$$\omega=g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

的 p-形式, 定义

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},$$

然后按线性和数乘分配律定义微分运算 $\mathrm{d}:\boldsymbol{\Lambda}\to\boldsymbol{\Lambda}$, 即

$$\mathrm{d}(\alpha\omega+\beta\eta)=\alpha\mathrm{d}\omega+\beta\mathrm{d}\eta,\quad\forall\,\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}^n,\ \omega,\ \eta\in\boldsymbol{\Lambda}.$$

并且称 $\mathrm{d}\omega$ 为微分形式 ω 的**外微分**.

例题 25.4.1 设 $\omega=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$, 则 $\mathrm{d}\omega=0$.

证 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(1\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k})$

$$=(\mathrm{d}1)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=0.\quad\square$$

例题 25.4.2 设 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的 C^1 类 1-形式, 计算 $\mathrm{d}\omega$.

解 $\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}P)\wedge\mathrm{d}x+(\mathrm{d}Q)\wedge\mathrm{d}y+(\mathrm{d}R)\wedge\mathrm{d}z$

$$=(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}y$$
$$+(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}z$$
$$=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\quad\square$$

例题 25.4.3 设 $f\in\boldsymbol{\Lambda}^0$ 是 C^2 类的 0-形式, 即 f 是二次连续可微的函数, 则 $\mathrm{d}^2f=0$.

证 由于 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 所以

$$\mathrm{d}^2f=\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$$
$$=\sum_{i<j}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i})\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=0.\quad\square$$

外微分有如下两个常用的性质.

性质 1 设 ω 和 η 分别为 C^1 类的 p-形式和 q-形式, 则

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\eta.$$

性质 2 设 ω 是 C^2 类的微分形式, 则 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$.

证明作为练习.

在后几节的实例中, 我们将会看到以上这些抽象的运算是如何恰到好处地反映了不同的实际问题的实质内容, 而这正是数学的特点之一.

25.4.5 变换与 Jacobi 行列式

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个线性变换, 其矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$, 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个立方体, 其边长分别是 α,β,γ, 则其体积为 $V=\alpha\beta\gamma$. 用向量外积的语言, 就是

$$V=\alpha\boldsymbol{i}\wedge\beta\boldsymbol{j}\wedge\gamma\boldsymbol{k}=\alpha\beta\gamma\,\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}.$$

再考虑 Ω 在 $\boldsymbol{A}$ 下的象集 $\boldsymbol{A}(\Omega)$ 的体积, 注意 $\boldsymbol{A}(\Omega)$ 是由 $\boldsymbol{\xi}=a_{11}\alpha\boldsymbol{i}+a_{21}\alpha\boldsymbol{j}+a_{31}\alpha\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\eta}=a_{12}\beta\boldsymbol{i}+a_{22}\beta\boldsymbol{j}+a_{32}\beta\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\zeta}=a_{13}\gamma\boldsymbol{i}+a_{23}\gamma\boldsymbol{j}+a_{33}\gamma\boldsymbol{k}$ 所张成的平行六面体, 因而其有向体积为

$$\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta}\wedge\boldsymbol{\zeta}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\cdot\alpha\beta\gamma\,\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}=\det\boldsymbol{A}\cdot\alpha\beta\gamma\,\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}$$

当 $\det\boldsymbol{A}>0$ 时, 可知 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}$ 构成右手系, 或者说它们的方向与 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 一致.

现设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个可求体积的有界闭集, 由重积分的定义以及体积的平移不变性 (即一个平行四面体的体积在平移后不变), 就得到 $\boldsymbol{A}(\Omega)$的有向体积

$$V=\iiint_{\boldsymbol{A}(\Omega)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\det\boldsymbol{A}\iiint_{\Omega}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\det\boldsymbol{A}\cdot V.$$

因此, $\det\boldsymbol{A}$ 表示了线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的 (体积) "膨胀系数"; 当 $\det\boldsymbol{A}\neq0$ 时, $\det\boldsymbol{A}$ 的符号表示了线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的 "方向". 特别地, $|\det\boldsymbol{A}|=1$ 称为**保体变换**; $\det\boldsymbol{A}>0$ 时称为**保向变换**.

这样的概念可推广到一般的变换 (映射). 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 是一个可微映射, 则在每个 (u_0,v_0,w_0) 附近, 可用一个线性映射 $\boldsymbol{A}(u_0,v_0,w_0)$ 近似替代, 其行列式就是 Jacobi 行列式 $\left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{(u_0,v_0,w_0)}$. 如果 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}>0$ 恒成立, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是**保向**的; 如果 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=1$ 恒成立, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是**保体积**的.

25.4.6 重积分的变量代换

我们可以用微分形式的外微**分**来理解重积分的变量代换.

设三重积分的重积**分**元为 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 在 O–xyz 右手坐标系中, 正是边长为 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的小方体的体积. 故我们合理地把 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 记为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. 设坐标变换 $\boldsymbol{T}:\Omega\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w),$$

并记 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ 为 $\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w$. 取微分, 并根据外积运算, 有

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w. \tag{25.16}$$

由 (25.16), 前面讲过的重积分变量代**换**公式就很容易地变成

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\boldsymbol{T}(D)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ &=\int\limits_{D} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w.\end{aligned}\tag{25.17}$$

注 (25.17) 最大的好处是无需对 Jacobi 行列式加上绝对值. 这正是设计微分形式这个抽象的数学工具的目的之一. 注意到 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 中外积的次序是重要的, 而 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 被称为正体积元是因为外积的次序与 O–xyz 右手系的次序一致, 而 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$. 类似的结论对 n 重积分也成立.

例题 25.4.4 极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 有

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta=r\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta.$$

25.4.7 一般的 Stokes 公式

先看 Green 公式. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域, ∂D 是 D 的边界, 取右手系的诱导定向, 于是就有

$$\int\limits_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

如记 $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 则可证 $\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 因而有

$$\int\limits_{\partial D}\omega=\int\limits_{D}\mathrm{d}\omega.$$

再看 Stokes 公式. 设 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面, $\partial\Sigma$ 是 Σ 边界. 也取右手系的诱导定向, 如记 $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$, 就有

$$\int\limits_{\partial\Sigma}\omega=\int\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\omega.$$

对于 Gauss 公式, 记 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域, $\partial\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的边界, 取右手系的诱导定向, 记 $\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 有

$$\oint_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$$

最后回顾 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b \mathrm{d}f(x) = f(x)\Big|_a^b,$$

如果将上式右端视为 0-形式 $f(x)$ 在区间 $D=[a,b]$ 的诱导定向边界 $\partial D=\{a,b\}$ 上的积分, 那么上式就可以表为

$$\int_{\partial D} f = \int_D \mathrm{d}f.$$

这样, Newtow-Leibniz 公式, Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式就都可以统一地写成如下形式:

$$\int_{\partial M}\omega = \oint_M \mathrm{d}\omega.$$

这个式子统称为**一般的 Stokes 公式**. 它说明了, 高次的微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在给定区域 M 上的积分等于低一次的微分形式 ω 在低一维的区域边界 ∂M 上的积分. Stokes 公式是单变量情形的 Newton-Leibniz 公式在多变量情形的推广, 是数学分析中最精彩的结论之一. 读者在今后的课程中还会看到它的广泛应用.

§25.5 对于教学的建议

25.5.1 习题课教案一例

作为大课的补充, 建议将下面的三个问题放在习题课上讲解.

1. 关于第一类曲题积分在正交变换下的不变性

第一类曲面积分在正交变换下的不变性, 即

$$\iint_S f(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})\,\mathrm{d}\Sigma, \tag{25.18}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵. 满足

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \tag{25.19}$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置. 曲面 Σ 是曲面 S 在正交变换 $\boldsymbol{A}$ 下的像.

公式 (25.18) 的证明如下: 设 S 的参数方程为

$$S:\ x=x(s,t),\ y=y(s,t),\ z=z(s,l),\quad (s,t)\in D.$$

通过 (25.19) 可得 Σ 的参数方程为

$$\Sigma:\ u=u(s,t),\ v=v(s,t),\ w=w(s,t),\quad (s,t)\in D.$$

则

$$\iint\limits_S f(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(\boldsymbol{X}(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{25.20}$$

$$\iint\limits_\Sigma f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})\,\mathrm{d}\Sigma=\iint\limits_D f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}(s,t))\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{25.21}$$

其中

$$E=\boldsymbol{X}_s^2,\ \ F=\boldsymbol{X}_s\cdot\boldsymbol{X}_t,\ \ G=\boldsymbol{X}_t^2,$$
$$E_1=\boldsymbol{U}_s^2,\ \ F_1=\boldsymbol{U}_s\cdot\boldsymbol{U}_t,\ \ G_1=\boldsymbol{U}_t^2.$$

由 (25.19) 得

$$\boldsymbol{U}_s=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_s,\ \ \boldsymbol{U}_t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t.$$

从而

$$E=E_1,\ \ F=F_1,\ \ G=G_1. \tag{25.22}$$

由 (25.20)-(25.22) 知 (25.18) 成立. □

例题 25.5.1 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, f 是连续函数, 证明

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u,$$

其中 a,b,c 是常数.

证 不妨设 $a^2+b^2+c^2\neq 0$, 设 $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. 其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的元素为 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 由 (25.18) 知

$$\begin{aligned}\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S&=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}S\\&=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=4\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u\int_0^{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\end{aligned}$$

$$= 4\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t \qquad (v = \sqrt{1-u^2}\sin t)$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u. \quad \square$$

2. 第二型曲面积分符号的确定 (公式 (25.3) 的证明)

在计算第二型曲面积分时, 要将第二型曲面积分化为二重积分, 其中的困难之一是如何决定二重积分前的符号. 在直角坐标系中计算时往往还比较容易. 当用参数方程计算时就要麻烦一些. 下面是公式 (25.3) 的证明:

首先由两类曲面积分之间的关系有

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

这里 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 S 所指定的一侧的单位法向量. 我们知道 S 在参数方程下的法向量

$$\boldsymbol{n} = \pm(A, B, C).$$

于是

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{pmatrix}.$$

由此可以看出, 其中 $\pm$ 号的选取应该是使 $\pm(A, B, C)$ 的方向与 S 所选的那一侧的法向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的方向一致. 另一方面,由$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$得到

$$\mathrm{d}S = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

于是 (25.3) 式成立. $\square$

例题 25.5.2 求第二类曲面积分

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 是柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 被两个平面 $z = 0$ 和 $z = 4$ 所截部分的边界, 积分沿边界的外侧.

解 设上底面为 S_1, 下底面为 S_2, 侧面为 S_3, 则

$$\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{S_1} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{S_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi.$$

在 S_2 上, $z = \mathrm{d}z = 0$, 于是在 S_2 上的积分为零. 下面计算在 S_3 上的积分. 令

$$x = \cos\theta,\ \ y = \sin\theta,\ \ z = z$$
$$(\theta, z) \in D = \{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 4\},$$

则

$$A = \cos\theta,\ \ B = \sin\theta,\ \ C = 0.$$

于是

$$\iint\limits_{S_3} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 8\pi.$$

这里积分号前取正号是因为向量 (A, B, C) 与柱面外侧法方向一致, 最后得到

$$\iint\limits_{S} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 12\pi. \quad \square$$

3. 球面上的曲面积分 (证明关系式 (25.28))

若曲面 S 是以 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 为球心, r 为半径的球面 $\partial B_r(M_0)$, 则其参数方程为

$$x = x_0 + r\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = y_0 + r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = z_0 + r\cos\varphi,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

由此计算出

$$E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = r^2\sin^2\varphi,$$
$$F = x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = 0,$$
$$G = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = r^2,$$

于是

$$\sqrt{EG - F^2} = r^2\sin\varphi.$$

与直角坐标系中三重积分化为球坐标积分的 Jacobi 行列式一样, 但这里的 r 是常数. 于是

$$\oiint\limits_{\partial B_r(M_0)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S_r$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0 + r\sin\varphi\cos\theta, y_0 + r\sin\varphi\sin\theta, z_0 + r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \quad (25.23)$$

其中 $\mathrm{d}S_r$ 是半径为 r 的球面的面积元. 从上面的计算可以看出

$$\mathrm{d}S_r = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \quad (25.24)$$

$$\mathrm{d}S_1 = \sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \quad (25.25)$$

于是就有

$$\mathrm{d}S_r = r^2\,\mathrm{d}S_1, \quad (25.26)$$

如果记

$$\sin\varphi\cos\theta = \alpha_1, \quad \sin\varphi\sin\theta = \alpha_2, \quad \cos\varphi = \alpha_3,$$

注意这里 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都是 φ, θ 的函数, 则 (25.23)可改写为

$$\oiint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_r = \oiint_{\partial B_r(\mathbf{0})} f(x_0+r\alpha_1, y_0+r\alpha_2, z_0+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_r$$
$$= r^2 \oiint_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(x_0+r\alpha_1, y_0+r\alpha_2, z_0+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_1. \quad (25.27)$$

另一方面, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 恰是球面 $\partial B_r(\mathbf{0})$ (也是 $\partial B_1(\mathbf{0})$) 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$, 方向指向球面的外部, 因此上述表达式又可以简写为

$$\oiint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_r = \oiint_{\partial B_r(\mathbf{0})} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_r$$
$$= r^2 \oiint_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1. \quad (25.28)$$

例题 25.5.3 设 $B_r(M_0)$ 是以 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为心, r 为半径的球, $\partial B_r(M_0)$ 是以 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为心, r 为半径的球面, 证明

(1) $\displaystyle\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^r \oiint_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_\rho\,\mathrm{d}\rho,$

(2) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_r$

证 只证 (1), 因为在 (1) 的两边对 r 求导便得到 (2). 作球坐标变换

$$x = x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y = y_0+\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z = z_0+\rho\cos\varphi,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant r.$$

则

$$\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta, y_0+\rho\sin\varphi\sin\theta, z_0+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$
$$= \int_0^r \oiint_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S_\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

最后一个等号是由 (25.23) 得出. □

25.5.2 学习要点

1. 求空间第二型曲线积分 $\displaystyle\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ 的几种方法.

(1) 用 Stokes 公式化为第二型曲面积分.

(2) 若满足 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$, 如果曲线 C 不封闭, 可考虑用求出原函数的方法.

(3) 利用曲线的参数方程化为定积分求解.

2. 求空间第二型曲面积分的几种方法.

(1) 用 Stokes 公式化为第二型曲线积分.

(2) 用 Gauss 公式化为三重积分.

(3) 利用曲面的参数方程化为二重积分求解. 要特别注意积分号前正负号的确定, 这在 25.2.1 和 25.5.1 小节中已分析得比较透彻了.

3. 计算第一类曲面积分一般都直接应用公式 (25.1) 或 (25.2), 若计算过于复杂, 则可考虑利用两类曲面积分之间的关系转化为求第二型曲面积分.

4. 利用曲线积分与路径无关的条件可以判断原函数的存在并求出原函数, 求原函数的两种方法见例题 25.3.6. 同时利用曲线积分与路径无关的条件还可以简化曲线积分的计算, 当在原来的路径上曲线积分的计算较复杂时, 可换一条新的路径, 使得曲线积分在新的路径上的计算可能变得简单.

5. 在球面上的曲面积分看似简单,实际上有很多技巧.

(1) 若把球心移到坐标原点,用球坐标系中的 θ,φ 作为球面的参数方程中的参数时,向量

$$(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$$

的长度为 1, 方向与该点的矢径的方向相同, 因此它就是球面上的单位外法向量,这在应用 Gauss 公式时带来一些运算上的方便.

(2) 在公式 (25.28) 中的两个表达式

$$\oiint_{\partial B_r(0)} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_r, \qquad r^2\oiint_{\partial B_1(0)} f(M_0+r\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1$$

各有用处. 前者表达简捷, 但由于积分限与被积函数中都有 r, 因此需要对 r 求导数时, 用后者方便.

(3) 例题 25.5.3 中的两个结论是非常有用的关系式.

25.5.3 参考题

1. 设 S 是平面 $x+y+z=t$ 上被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所割下的部分

$$\varphi(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & \text{当 } x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

证明

$$\iint_S \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} \dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & \text{当 } |t| \leqslant \sqrt{3}, \\ 0, & \text{当 } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

2. 证明

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\pi} \sin y\, \mathrm{e}^{\sin y(\cos x - \sin x)}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}).$$

3. 设 Ω 为空间第一卦限中的区域, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续一阶偏导数. S 为 Ω 中任一光滑闭曲面, 试给出第二型曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = 0$$

的充要条件, 并证明之.

4. 设 Σ 是光滑的闭曲面, 围成的区域为 Ω, n 为 Σ 上单位外法向量, (x_0,y_0,z_0) 为 Ω 内固定一点, $(x,y,z) \in \Sigma$, $\boldsymbol{r} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, 试证明

$$\oiint_{\Sigma} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = 2\iiint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

5. 已给平面 $\Pi: Ax+By+Cz=D$, 对于 Π 的任一定向, 求 $w = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, 使得沿 Π 上任意逐段光滑简单封闭曲线 Γ (Γ 的定向与 Π 的定向一致) 恒有

$$\oint_{\Gamma} w = S(\Gamma),$$

其中 $S(\Gamma)$ 为 Γ 在 Π 上所围区域的面积.

6. 设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中逐段光滑简单封闭定向曲线, 对于 $(x,y,z) \notin \Gamma$, 定义

$$P(x,y,z) = \oint_{\Gamma} \frac{(\zeta - z)\,\mathrm{d}\eta - (\eta - y)\,\mathrm{d}\zeta}{r^3},$$

$$Q(x,y,z) = \oint_{\Gamma} \frac{(\xi - x)\,\mathrm{d}\zeta - (\zeta - z)\,\mathrm{d}\xi}{r^3},$$

$$R(x,y,z) = \oint_{\Gamma} \frac{(\eta - y)\,\mathrm{d}\xi - (\xi - x)\,\mathrm{d}\eta}{r^3},$$

其中 $(\xi,\eta,\zeta) \in \Gamma$ 是积分变元,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

证明

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

7. 在上题中求函数 $u(z,y,z)$, 使得 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

8. 利用 Gauss 公式证明 Archimedes 的流体静力学定律: 物体在液体中所受的浮力等于物体排开液体的重量, 方向垂直向上.

第二十六章 场论初步

场本来是物理学的研究对象, 如温度场、电磁场、重力场等. 这些场除了有各自不同的物理性质之外, 表现在数量关系上可分为数量场与向量场.

本章介绍场论的初步数学知识. 在 §26.1 节引入散度和旋度的概念, 然后将梯度、散度、旋度与 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式融合在一起, 展现多元积分丰富多彩的一面. 在 §26.2 中介绍 Laplace 算子和有关调和函数的一些知识. 最后一节是学习要点和参考题.

§26.1 散度和旋度

26.1.1 散度

设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域, $\boldsymbol{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 是定义在 D 内的向量值函数, 称 $\boldsymbol{a}$ 是定义在 D 上的一个**向量场**. 又设 P, Q, R 有连续的偏导数, 记

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

称之为向量场 $\boldsymbol{a}$ 的**散度**, 它是一个数量, 有时也记为 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$. 注意与一个三元函数 f 的梯度 ∇f 的区别 (见 21.2.2 小节).

类似地在 $\mathbf{R}^2$ 中, 若 $\boldsymbol{a}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$, 则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y},$$

利用散度的记号, 可以将 Gauss 公式 (25.5), (25.6) 写为

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial D} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{26.1}$$

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S, \tag{26.2}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(P,Q,R)$, $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的单位外法向量. 而将 Green 公式 (24.9), (24.10) 写为

$$\iint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D} -Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y, \tag{26.3}$$

$$\iint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\partial D} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S. \tag{26.4}$$

又可将公式 (26.2) 与 (26.4) 统一写为

$$\int_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial D} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S. \tag{26.5}$$

上述公式称为**散度定理**, 它对任意维数都是成立的.

$n=1$ 时, 一元函数 $f(x)$ 的散度是 $f'(x)$, $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x$, 在区间的左端点 $\boldsymbol{n}=-1$, 在区间的右端点 $\boldsymbol{n}=1$, 在区间端点的点积分理解为被积函数在该点的值, 则 (26.5) 就是 Newton-Leibniz 公式.

$n=2$ 时 (26.5) 就是 Green 公式, $\mathrm{d}V$ 为面积元.

$n=3$ 时 (26.5) 就是 Gauss 公式, $\mathrm{d}V$ 是体积元, $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的单位外法向量.

例题 26.1.1 证明重积分的分部积分公式

$$\iiint_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma uv\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iiint_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 是 Ω 的边界, 分片光滑, 取外侧. u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上连续可微.

证 在 (26.1) 中令 $\boldsymbol{a}=(uv,0,0)$, 则

$$\iiint_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma uv\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \quad \square$$

注 令 $v=1$, 则有

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma u\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

26.1.2 旋度

设 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 是定义在区域 D 上的向量场, 又设 P,Q,R 在 D 内有连续偏导数. 记

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\boldsymbol{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\boldsymbol{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\boldsymbol{k},$$

称之为向量场 $\boldsymbol{a}$ 的**旋度**. 它是一个向量, 有时也记为 $\nabla\times\boldsymbol{a}$. 利用旋度的记号, 可将 Stokes 公式 (25.13) 写为

$$\iint_D \operatorname{curl}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial D}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s,$$

其中 D 是空间曲面, ∂D 是它的边界, $\boldsymbol{a}=(P,Q,R)$, 等式左端的 $\boldsymbol{n}$ 为 D 的单位外法向量, 等式右端的 $\boldsymbol{\tau}$ 是 ∂D 的切向量. 它们二者的方向服从右手系法则.

在下面需要星形区域的概念.

定义 设 M 是区域 G 内一点, 称 G 是关于 M 的**星形区域**, 如果对任意一点 $P \in G$, 都有 P 与 M 之间的直线段 $PM \in G$.

例题 26.1.2 设 G 是 $\mathbf{R}^3$ 中关于其内一点 M 的星形区域. $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ 是 G 内的光滑向量场, 且 $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. 证明: 存在 G 内的光滑向量场 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}.$$

证 不妨设 M 为原点. 由于 G 关于原点为星形区域, 于是对任何 $(x, y, z) \in G$, 有

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}[t^2 P(tx,ty,tz)]\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{26.6}$$

由已知条件有 $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial x} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y} - \dfrac{\partial R}{\partial z}$, 将它代入 (26.6) 中, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(x,y,z) = 2\int_0^1 & tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t \\ & - \int_0^1 t^2 x\Big[\frac{\partial Q}{\partial y}(tx,ty,tz) + \frac{\partial R}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big]\,\mathrm{d}t \\ & + \int_0^1 t^2 y \frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 z \frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t \\ = \frac{\partial}{\partial y}\Big[y\int_0^1 & tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t - x\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\Big] \\ & - \frac{\partial}{\partial z}\Big[x\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t - z\int_0^1 t\boldsymbol{P}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\Big]. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} A_1(x,y,z) &= z\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t - y\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t, \\ A_2(x,y,z) &= x\int_0^1 tR(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t - z\int_0^1 tP(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t, \\ A_3(x,y,z) &= y\int_0^1 t\boldsymbol{P}(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t - x\int_0^1 tQ(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

则

$$P(x,y,z) = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}.$$

同理可证

$$Q(x,y,z) = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad R(x,y,z) = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}.$$

令 $\boldsymbol{A} = (A_1, \boldsymbol{A}_2, A_3)$, 则

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}. \quad \square$$

26.1.3 Hamilton 算子 ∇

∇ 是一个算子符号, 称为 **Hamilton 算子**. 它的定义是

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

其具体含义如下: 设 f 是一个可微函数, 则

$$\nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z},$$

即

$$\nabla f = \mathrm{grad} f \ (f \text{ 的梯度 }).$$

设 a 是一个向量场, $a = Pi + Qj + Rk$, 则

$$\nabla \cdot a = \mathrm{div}\, a,$$

$$\nabla \times a = \mathrm{curl}\, a.$$

因此, 我们也常用 $\nabla \cdot a$ 和 $\nabla \times a$ 分别表示 a 的散度与旋度. 直接运算可以证明下列关系式 (其中 α, β 为常数, f, g 为数量函数, a, b 为向量函数):

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g, \tag{26.7}$$

$$\nabla \cdot (\alpha a + \beta b) = \alpha \nabla \cdot a + \beta \nabla \cdot b, \tag{26.8}$$

$$\nabla \times (\alpha a + \beta b) = \alpha \nabla \times a + \beta \nabla \times b, \tag{26.9}$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g), \tag{26.10}$$

$$\nabla \cdot (fa) = f(\nabla \cdot a) + (\nabla f) \cdot a, \tag{26.11}$$

$$\nabla \times (fa) = f(\nabla \times a) + (\nabla f) \times a, \tag{26.12}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times a) = 0 \quad (\text{即任一向量函数的旋度的散度为零}), \tag{26.13}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (\text{即任一数量函数的梯度的旋度为零向量}). \tag{26.14}$$

例题 26.1.3 A, B 为可微的向量函数, 则

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B).$$

证 设 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, 则有

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

于是

$$\nabla \cdot (A \times B) = \frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \partial_x a_2 & \partial_x a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \partial_y a_1 & \partial_y a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_z a_1 & \partial_z a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \partial_x b_2 & \partial_x b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \partial_y b_1 & \partial_y b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \partial_z b_1 & \partial_z b_2 \end{vmatrix}$$

$$= I_1 + I_2.$$

其中 I_1 为前三项, I_2 为后三项. 经计算验证有

$$I_1 = b_1(\partial_y a_3 - \partial_z a_2) + b_2(\partial_z a_1 - \partial_x a_3) + b_3(\partial_x a_2 - \partial_y a_1) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}),$$

同理可证

$$I_2 = -\boldsymbol{A}(\nabla \times \boldsymbol{B}). \quad \square$$

例题 26.1.4 设 $u(x,y,z)$ 在 $\overline{B}_R(M_0)$ 上二阶连续可微, 其中 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, $B_R(M_0)$ 是以 M_0 为心, 以 R 为半径的球. 对于 $0<\rho\leqslant R$, 如果都有

$$\oiint_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\partial B_\rho(M_0)$ 是以 M_0 为心, 以 ρ 为半径的球面, n 是球面上的单位外法向量, 则

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint_{\partial B_R(M_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

即球心的值等于球面上的积分平均值.

证 令

$$x = x_0 + \rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z = z_0 + \rho\cos\varphi,$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

则在 $\partial B_\rho(M_0)$ 上有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) &= \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \\ &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}(x_0 + \rho\sin\varphi\cos\theta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\theta, z_0 + \rho\cos\varphi) \\ &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}(\boldsymbol{M}_0 + \rho\boldsymbol{n}). \end{aligned}$$

于是

$$0 = \oiint_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \rho^2 \oiint_{\partial B_1(\mathbf{0})} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}(\boldsymbol{M}_0 + \rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1 \qquad (\text{由 } (25.28))$$

$$= \rho^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \oiint_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0 + \rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1.$$

由此可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\iint_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_1=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho^{-2}\iint_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_\rho]=0.$$

因此对于 $0<\rho\leqslant R$,

$$\rho^{-2}\iint_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_\rho=R^{-2}\iint_{\partial B_R(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_R.$$

另一方面, 当 $\rho\to 0^+$ 时,

$$\rho^{-2}\iint_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(\boldsymbol{M}_0+\rho\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S_\rho\to 4\pi u(\boldsymbol{M}_0).\quad\square$$

26.1.4 几种常用的场

记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 是一个向量场. 以下是一些常用的场.

无源场: 如果 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**无源场** (或管形场).

无旋场: 如果 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}=0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**无旋场** .

梯度场: 如果存在数量场 $u(x,y,z)$, 使得 $\boldsymbol{A}=\nabla u$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**梯度场** (或**有势场**), u 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**势函数**.

散度场: 一个数量场 $u(x,u,z)$ 称为**散度场**, 如果存在向量场 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$, 使得 $u=\operatorname{div}\boldsymbol{B}$.

旋度场: 如果存在向量场 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$, 使得 $\boldsymbol{A}=\operatorname{curl}\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**旋度场**.

在讨论线积分与路径无关时, 曾涉及保守场, 即如果存在 $u(x,y,z)$ (原函数), 使得 $\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=u(B)-u(A)$ (积分与路径无关), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**保守场**. 上述各种场之间的关系如下:

命题 26.1.1 (1) $\boldsymbol{A}$ 为梯度场 (即有势场) $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为保守场 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为无旋场 $\Longleftrightarrow$ 对任意简单闭曲线 C, 环量 $\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 为无源场 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为旋度场 $\Longleftrightarrow$ 对任意闭曲面 Σ, 通量 $\iint_\Sigma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=0$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的定侧单位法向量.

该命题的证明留作练习题 (见练习题 2).

26.1.5 练习题

1. 证明关系式 (26.7)–(26.14).
2. 证明命题 26.1.1.
3. $V \subset D \subset \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{A}$ 在 D 中连续可微, 证明: $\forall \boldsymbol{p}_0 \in V$, 成立

   (1) $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0) = \lim\limits_{\dim V \to 0} \dfrac{1}{|V|} \oiint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$,

   其中 $\Sigma = \partial V$ 为 V 的边界, $\dim V$ 是 V 的直径, $|V|$ 为 V 的体积, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量;

   (2) $\operatorname{curl} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0) = \lim\limits_{\dim V \to 0} \dfrac{1}{|V|} \oiint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}S$;

   (3) $\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{p}_0) = \lim\limits_{\dim V \to 0} \dfrac{1}{|V|} \oiint\limits_{\Sigma} \varphi \, \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$, 其中 $\varphi(x, y, z)$ 在 D 上连续可微.
4. 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的可微函数, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, 求 $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r})$ 和 $\operatorname{curl}(f(r)\boldsymbol{r})$.
5. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}$ 是常向量, 证明:

   (1) $\operatorname{curl} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$;

   (2) $\operatorname{curl}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{c}$.
6. 求满足 $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r}) = 0$ 的函数 $f(r)$.
7. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是无旋场, 证明 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 是无源场.

§26.2 Laplace 算子与调和函数

26.2.1 Laplace 算子

Laplace 算子 Δ 的定义如下:

$$\text{在 } \mathbf{R}^2 \text{ 中:} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\text{在 } \mathbf{R}^3 \text{ 中:} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

简单的计算表明,

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u,$$

即 Laplace 算子对一个函数的作用等子这个函数的梯度的散度.

例题 26.2.1 (第一 Green 恒等式) 设 Σ 为区域 Ω 的边界曲面, 分片光滑, u, v 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微, 试证明

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上的单位外法向量, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是 u 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的方向导数.

证 根据方向导数的计算公式,

$$\oiint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} v\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n},z)\Big]\,\mathrm{d}S.$$

利用公式 (26.2), 则

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S &= \iiint_{\Omega} \Big[\frac{\partial}{\partial x}(vu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(vu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(vu_z)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{\Omega} \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \quad \square\end{aligned}$$

注 1 令 $v = 1$, 则有

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \Delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{26.15}$$

注 2 由第一 Green 恒等式可以证明第二 Green 恒等式, 见练习题 2.

例题 26.2.2 设 $h(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上二阶连续可微, $\partial B_r(\boldsymbol{M})$ 是以 $\boldsymbol{M} = (x,y,z)$ 为心, r 为半径的球面, 定义

$$\boldsymbol{M}_h(x,y,z,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{\partial B_r(\boldsymbol{M})} h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S_r,$$

其中 $r > 0$, 证明

(1) $\boldsymbol{M}_h$ 是 x,y,z,r 的二次连续可微函数;

(2) $\Delta \boldsymbol{M}_h(x,y,z,r) = \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big)\boldsymbol{M}_h(x,y,z,r)$,

其中 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$;

(3) $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{M}_h(x,y,z,r) = 0.$

证 (1) 由 (25.27), $\boldsymbol{M}_h$ 的表达式可改写为

$$\boldsymbol{M}_h(x,y,z,r) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial B_1(0)} h(x + r\alpha_1, y + r\alpha_2, z + r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_1,$$

其中 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是球面 $\partial B_1(0)$ 的单位外法向量, $\mathrm{d}S_1$ 是 $\partial B_1(0)$ 的面积元. 由含参变量积分的性质知 $\boldsymbol{M}_h$ 是 x,y,z,r 的二次连续可微函数.

(2) 由含参变量积分的求导公式得

$$\Delta M_h(x,y,z,r)=\frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial B_1(\mathbf{0})}\Delta h(x+r\alpha_1,y+r\alpha_2,z+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_1, \tag{26.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_h}{\partial r}&=\frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial B_1(\mathbf{0})}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial h}{\partial y}\alpha_2+\frac{\partial h}{\partial z}\alpha_3\right)\mathrm{d}S_1\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(\mathbf{0})}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial h}{\partial y}\alpha_2+\frac{\partial h}{\partial z}\alpha_3\right)\mathrm{d}S_r. \quad (\text{由 (25.26)})\end{aligned} \tag{26.17}$$

应用 Gauss公式 (26.2), 则

$$\frac{\partial M_h}{\partial r}=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta. \tag{26.18}$$

应用例题 25.5.3 (2) 中的结果, 则

$$\frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2}=-\frac{1}{2\pi r^3}\iiint_{B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S_r. \tag{26.19}$$

由 (26.18), (26.19) 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial M_h}{\partial r}&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(M)}\Delta h(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S_r\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(\mathbf{0})}\Delta h(x+r\alpha_1,y+r\alpha_2,z+r\alpha_3)\,\mathrm{d}S_r\\&=\Delta M_h(x,y,z,r). \quad (\text{由 (26.16)})\end{aligned}$$

(3) 利用 (26.18) 以及积分中值定理可知

$$\lim_{r\to 0+}\frac{\partial}{\partial r}M_h(x,y,z,r)=\lim_{r\to 0+}\frac{1}{4\pi r^2}\Delta h(\xi^*,\eta^*,\zeta^*)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=0,$$

其中 $(\xi^*,\eta^*,\zeta^*)\in B_r(M)$. □

26.2.2 调和函数

如果在区域 Ω 内 $\Delta u=0$, 则称 u 是 Ω 内的**调和函数**. 调和函数有一些特殊的性质, 其中较重要的是下面的两条:

性质 1 (平均值公式) 设函数 $u(x,y,z)$ 是某区域 Ω 内的调和函数, $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 是 Ω 中任一点, 以 M_0 为心, R 为半径的球 $B_R(M_0)$ 完全落在 Ω 的内部, 则

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_{\partial B_R(M_0)}u(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

证 对于 $0<\rho\leqslant R$, 由 Green 公式得

$$\oiint_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iiint_{B_\rho(M_0)} \Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0,$$

由例题 26.1.4 知结论成立. □

性质 2 (极值原理) 记 $\boldsymbol{M}=(x,y,z)$, 设函数 $u(\boldsymbol{M})$ 是区域 Ω 内的调和函数, 且不恒等于常数, 则 u 在 Ω 的任何内点上的值不可能达到它在 Ω 上的上界或下界.

证 用反证法, 设调和函数 $u(\boldsymbol{M})$ 不恒等于常数, 且在区域 Ω 上的上界为 K, (这里假定函数 $u(\boldsymbol{M})$ 在 Ω 上有上界, 否则结论自然成立), 而 $u(\boldsymbol{M})$ 在 Ω 内某点 $\boldsymbol{M}_0$ 取值为 K, 我们来找出矛盾.

因为 $u(\boldsymbol{M})$ 不恒等于常数, 则至少存在一点 $\boldsymbol{M}_1=(x_1,y_1,z_1)\in\Omega$ 使得 $u(M_1)<K$. 在 Ω 中作一条连接 $\boldsymbol{M}_0,\boldsymbol{M}_1$ 的连续曲线 Γ (见图 26.1), 设 Γ 的参数方程为

$$\Gamma: x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

并且

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ z(0)=z_0,$$
$$x(T)=x_1,\ y(T)=y_1,\ z(T)=z_1.$$

定义

$$t^*=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\{u(x(t),y(t),z(t))=K\},$$

则 $0\leqslant t^*<T$. 以 $\boldsymbol{M}^*=(x(t^*),y(t^*),z(t^*))$ 为心, 充分小的 δ 为半径, 作一个完全落在 Ω 内部的球 $B_\delta(\boldsymbol{M}^*)$, 并且曲线

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t^*\leqslant t\leqslant T,$$

与球面 $\partial B_\delta(\boldsymbol{M}^*)$ 至少有一个交点 P (见图 26.1), 也就是说 $u(P)<K$. 由函数 $u(\boldsymbol{M})$ 在 P 点的连续性知存在 P 点的一个邻域, 使得在该邻域上 $u(\boldsymbol{M})<K$, 因此 $u(\boldsymbol{M})$ 在 $\partial B_\delta(\boldsymbol{M}^*)$ 上的积分平均值

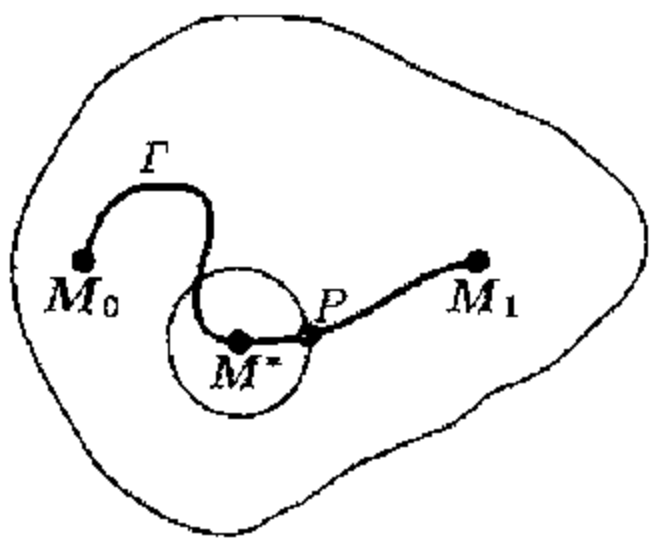


图 26.1

$$\frac{1}{4\pi\delta^2}\oiint_{\partial B_\delta(M^*)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S < \frac{1}{4\pi\delta^2}\oiint_{\partial B_\delta(M^*)} K\,\mathrm{d}S = K.$$

但由平均值公式有

$$\frac{1}{4\pi\delta^2}\oiint_{\partial B_\delta(M^*)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S = u(\boldsymbol{M}^*) = K,$$

由此得到矛盾. 同理可证 u 也不能在 Ω 的内点取得 u 在 Ω 上的下界. □

注 1 上述两个性质对任意维数的调和函数都是成立的.

注 2 若 Ω 是有界区域, u 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内调和, 则 u 的最大最小值只能在 Ω 的边界上达到.

26.2.3 Poisson 积分公式

在这一节我们证明, 平面上每一个在单位圆周上的连续函数可惟一连续延拓成为单位开圆盘上的调和函数. 为此设 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 我们要在单位圆盘上证明存在惟一的连续函数

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

当 $0 \leqslant r < 1$ 时是调和函数, 且

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta).$$

证惟一性. 设 u, v 都满足条件, 则 $w = u - v$ 当 $0 \leqslant r < 1$ 时是调和函数, 且

$$w(\cos\theta, \sin\theta) = 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

由极值原理 (性质 2) 知 $w \equiv 0$, 于是惟一性成立.

存在性的证明要困难得多. 考虑连续周期函数 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta),$$

由此提示定义函数

$$\begin{aligned} u(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)r^n \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos\ n(\theta-\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{Re}\left[\frac{1+re^{i(\theta-\varphi)}}{1-re^{i(\theta-\varphi)}}\right]\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

下面证明它的确提供了问题的解.

首先证明 u 在单位圆盘内是调和函数, 这只是一个对含参变量常义积分求二阶偏导数的计算, 所以留作练习, 其中要将 u 的表达式改写为

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-x^2-y^2}{1-2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+x^2+y^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

最后证明对每一个 θ_0,

$$\lim_{(\theta,r)\to(\theta_0,1^-)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi = f(\theta_0),$$

这件事我们已经在例题 18.2.4 中证明过了. 这就完成了下面命题的证明.

命题 26.2.1 若 f 是以 2π 为周期的连续函数, 则

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

是单位圆盘上的调和函数, 且

$$\lim_{(\theta,r)\to(\theta_0,1^-)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi = f(\theta_0).$$

推论 若 u 是半径为 $R>0$ 的圆盘上的调和函数, 则对于 $0\leqslant r<R$ 有

$$\begin{aligned} &u(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R\cos\varphi, R\sin\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{26.20}$$

称 (26.20) 为 **Poisson 积分公式**.

证 若 $R=1$, 结论就是命题 26.2.1. 对于一般情形只需作一相似变换, 具体细节留作练习. □

26.2.4 练习题

1. 证明

   (1) $\nabla\times(\nabla f)=0$;

   (2) $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}$, 其中 $\Delta\boldsymbol{a}=(\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3)$;

2. **(第二 Green 恒等式)** 设 Σ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 Ω, u, v 在 $\overline{\Omega}$ 上二次连续可微. 证明

   $$\iiint_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S,$$

   其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量.

3. Σ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 Ω, u 在 $\overline{\Omega}$ 上二次连续可微, 在 Ω 内调和. 证明

   $$\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S,$$

   并由此证明调和函数的惟一性.

4. 在调和函数性质 1 的条件下, 证明

   $$u(\boldsymbol{M}_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\iiint_{B_R(\boldsymbol{M}_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5. 证明命题 26.2.1 的推论.

6. 证明 Poisson 积分公式 (26.20) 定义的函数是调和函数.

7. 证明调和函数无限次可微.

8. 若 f 和 $g\circ f$ 都是一连通开集上的调和函数, g 二阶连续可微, f 不是常值函数, 证明 g 是线性函数.

9. 证明: 问题

$$\Delta u = f(x,y,z), \quad (x,y,z)\in D, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y,z), \quad (x,y,z)\in \partial D$$

有解 u 的必要条件是

$$\iiint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\partial D} g\,\mathrm{d}S.$$

§26.3 对于教学的建议

26.3.1 学习要点

1. 本章涉及的定义和概念较多. 定义了散度, 旋度之后, Green 公式, Gauss 公式与 Stokes 公式从表面上看是简单化了. 散度定理 (26.5) (或者是 (26.2), (26.4)) 的用处非常之广, 当需要证明重积分与曲线 (面) 积分具有某种关系时, 散度定理是一个非常有效的出发点.

2. 由于 Laplace 算子对一个函数的作用等于这个函数的梯度的散度, 因此当积分号后面出现 Laplace 算子, 再应用散度定理时, 各类积分变得丰富多彩, 能够熟练运用 Laplace 算符与散度定理是本章的主要目的之一.

3. 调和函数是一类性质非常好的函数, 调和二字表现在处处满足平均值公式, 事实上反过来的结论也成立, 即处处满足平均值公式的连续函数一定是调和函数 (见第二组参考题 1). 在本章只介绍了调和函数的一点基本知识, 在复变函数、数学物理方程等后续课程中还要进一步学习.

4. 对习题课教学的建议

(1) 在习题课上证明命题 26.1.1, 虽然题目并不难, 但却是对各种算子的定义, 各种场的定义, Green 公式, Gauss 公式, Stokes 公式, 曲线积分与路径无关的一个综合练习.

(2) 关于 Laplace 算子, 要求学生会证明第一和第二 Green 恒等式.

(3) 关于调和函数, 要求学生会证明平均值公式, 并能利用 Poisson 积分公式证明调和函数的一些性质.

26.3.2 参考题

第一组参考题

1. 设 $\boldsymbol{A}, B$ 为光滑向量场. 证明

(1) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$;

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$.

2. 设 G 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中关于原点 O 的星形区域, $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 为 G 内的光滑无源场. 定义

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\int_0^1[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]\,\mathrm{d}t.$$

利用上题 (2) 证明

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}.$$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的光滑向量场, $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中二次连续可微的向量场, 满足

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A}),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=0,$$

其中 L 是以原点为中心的球面上的封闭光滑简单定向曲线, $\boldsymbol{\tau}$ 是 L 上与其方向一致的单位切向量.

4. 设长度为 l 的平面简单闭曲线 C 由方程 $F(x,y)=0$ 确定. $F(x,y)$ 二阶连续可微, 且 $\nabla F(x,y)\neq 0$, 设 $D=\{(x,y)\mid F(x,y)>0\}$ 为曲线 C 围成的区域, 计算二重积分

$$\iint_D\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. 设 $u(x,y,z)$ 是连续函数, 它在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续二阶偏导数, 记

$$F(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_{\partial B_R(M)}u(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\partial B_R(M)$ 是以 M 为心, R 为半径的球面. 证明

$$\lim_{R\to 0}F(R)=u(M),$$

若 $\Delta u(M)$ 不等于零, 求无穷小量 $F(R)-u(M)$ 的主要部分.

6. 设 u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微, 且在 Ω 的边界上 $u=v$, 如果 u 是调和函数, 则

$$\iiint_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\leqslant\iiint_\Omega|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

7. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2<1$ 二阶连续可微, 且 $\Delta u=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, 证明

$$\iint_{x^2+y^2<1}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

第二组参考题

1. 证明处处满足平均值公式的连续函数一定是调和函数.
2. 设 $\{u_n(x,y)\}$ 是定义在圆盘 B_R 上的调和函数序列, 都在 $\overline{B}_R$ 上连续, 若 $\{u_n(x,y)\}$ 在 B_R 的边界 ∂B_R 上一致收敛, 则 $\{u_n(x,y)\}$ 在 B_R 上也一致收敛, 并且极限函数也是调和函数.
3. 设 $u(x,y,z)$ 在区域 D 上二阶连续可微, 证明 $\Delta u \geqslant 0\ (\forall (x,y,z) \in D)$ 的充要条件是

$$u(M_0) \leqslant \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\partial B_R(M_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S \quad \forall\, B_R(M_0) \subset D.$$

4. 设 $u(x,y,z)$ 是由光滑曲面 S 所包围的有界区域 Ω 内的调和函数, 则

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_S [u(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \boldsymbol{n}}]\,\mathrm{d}S$$

其中 $\boldsymbol{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$.

5. 利用 Poisson 积分公式证明不等式

$$\frac{R-r}{R+r}u(x_0,y_0) \leqslant u(x,y) \leqslant \frac{R+r}{R-r}u(x_0,y_0),$$

其中 u 是以 R 为半径, (x_0,y_0) 为圆心的开圆盘上的非负调和函数, $r < R$ 是 (x,y) 与 (x_0,y_0) 的距离.

6. 证明全平面上有界的调和函数一定是常值函数.

参考题提示

第十三章　数项级数

第一组参考题 (36 页)

1. 将该分式记为 u_n, 一种方法是用裂项法证明级数 $\sum u_n$ 收敛, 另一种方法是利用 u_n 的分母单调增加, 直接证明 $u_n \to 0$.
2. 可参考例题 12.4.2 的基本思路.
3. 先利用上题结论.
4. 前半题还是用 $na_n = o(1)$. 后半题当 n 为平方数时令 $a_n = 1/n$, 否则令 $a_n = 0$.
5. 对级数用等价量判别法, 或参考下一题.
6. (1) 记括号内为 d_n, 证明 $0 \leqslant d_n \leqslant f(1)$, 且单调减少. (2) 是 (1) 的应用.
7. 对 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 用等价量分析即可.
8. 二者都是正项级数, (2) 可用题 6.
9. 先证右边内层级数对每个 k 收敛.
10. 用上题结论.
11. 对 $n < m$, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_m) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m}(a_k - a_m)$, 利用右边有界去估计 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.
12. 可利用 $a_n^2 = \sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k^2 - a_{k+1}^2) \leqslant (a_n - a_{n+1}) \sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1})$.
13. 与题 2 类似, 又与 12.4.2 小节题 4 类似.
14. 若能证明 a_{n+1}/a_n 大于 3/2 即可.
15. 从 $a_{n+1} = (a_n - a_{n+1})/a_n^p$ 出发用微分中值定理 (参考例题 13.2.1 之证 1 和例题 13.2.5).
16. 前者用平均值不等式即可.
17. 只要证明级数通项不趋于 0 即可. 对于 (1), 若 $\sin n \to 0$, 则 $\sin(n+1) \to 0$, $\cos^2 n \to 1$, 由此即可引出矛盾. (2) 与此类似.
18. (1) 收敛, (3) 发散, 但对于 (2), (4), 收敛和发散都是可能的, 请举例.
19. (1) 用 Abel 变换, (2) 参考例题 13.2.7 中的证明.
20. 用反证法. 设有 M, 使得 $|n - f(n)| \leqslant M$ 对一切 n 成立. 然后估计两个级数的部分和之差 $|S_n - S'_n|$.

第二组参考题 (38 页)

1. 设 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 将通项写为 $\dfrac{n^2(A_n - A_{n-1})}{(A_n^2)} \leqslant \dfrac{n^2(A_n - A_{n-1})}{(A_n A_{n-1})}$ 作估计, 然后利用例题 13.2.6

2. 一种方法是用微分中值定理.

3. 对固定的 k, 考虑使 $a_k \leqslant Ma_n$ 成立的所有可能 n, 然后相加.

4. 先取两个通项单调减少趋于 0 的正项级数 $\sum c_n$ 和 $\sum d_n$, 使得前者收敛, 后者发散. 又使 $d_n > c_n\ \forall n \in \mathbf{N}_+$ 成立. 然后用它们的片段交替拼接成所求的两个级数.

5. 取对数后分析.

6. 这时级数与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散. 可试取满足 $x_n = \mathrm{e}^{x_n - 1}$ 的数列, 用命题 13.1.2.

7. 利用 $\{a_n\}$ 单调减少趋于 0, 可见 $k > b_n$ 时 $a_k < \frac{1}{2^n}$, 而 $k \leqslant b_n$ 时 $a_k \geqslant \frac{1}{2^n}$, 利用这些对两个级数部分和作估计.

8. (1) 猜测部分乘积并作归纳证明; (2) 归纳得到 $2\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{n-1}-1)!!(2^n)!!}{(2^{n-1})!!(2^n-1)!!}\right]^2\right\}^{2^n}$ $= 2\lim\limits_{n\to\infty}\left\{2^{n2^n+1}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}$, 然后用 Stirling 公式即可.

9. 利用 $\ln(n+1) - \ln(n) \sim \frac{1}{n}$, 即相邻的 $\ln n$ 值之间的距离趋于 0.

10. (1) 将级数改写为 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}(n-k)a_n = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} na_n\left(1 - \frac{k}{n}\right)$, 然后用 Abel 判别法; (2) 可以用 Abel 变换估计 (例如用 (13.23)).

11. 反证法, 利用 Abel 定理 (即命题 13.2.5 (2)).

12. 设法用上题的结果.

13. 正项级数和交错级数肯定都不行. 试用 $a_n - \frac{1}{n}a_n - \cdots - \frac{1}{n}a_n$ 的技巧.

14. 估计 $\left|\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)\right|$.

15. 利用 $1/x^p$ 为下凸函数, 证明 $S_{4n+1} > 1 - \frac{1}{2^p}S_{2n}$, 然后取极限.

16. 参考上册 57 页题 7 和 58 页题 10.

17. 用上题即可.

18. 用 Cauchy 命题 (上册 31 页).

19. 用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 代入即可.

20. (2) 不满足题 19 的必要条件. 其他题的答案为: (1) 1/2; (2) 2/3; (3) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$.

21. 观察 $S_n - \sigma_n$.

22. 必要性已见一组参考题 19 (1), 与可否 Cesàro 求和无关. 充分性只要将该表达式用 S_n 和 σ_n 表出即得.

第十四章 函数项级数与幂级数

第一组参考题 (75 页)

1. 例如, 设 $D(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 (见上册 103 页及索引), 令 $S_n(x) = \frac{1}{n}D(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 即可.

2. 这里的要点是可微性为局部性质, 只要在所讨论的点的一个邻域中满足逐项可微定理的条件即可.
3. 这里需要 Dedekind 切割 (参见上册 96 页题 2).
4. 先求出极限函数, 并利用 $\{x^n\}$ 于 $[0,1)$ 内闭一致收敛.
5. (2) 证明在无理点处可逐项求导, 而在每个有理点处除了一项之外也可逐项求导.
6. 按条件存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. 利用对每个 n 有 $f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta x_0) x_0^n$. $0 < \theta < 1$.
7. 用 Abel 第二定理 (见 59 页底注).
8. (1) 由于 $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上可展开为 Maclaurin 级数, 因此 $(\arcsin x)^2$ 至少在 $(-1,1)$ 上可以展开为 Maclaurin 级数, 它可以从计算 $(\arcsin x)^2$ 在 $x=0$ 的所有高阶导数值 (见 6.2.4 小节题 3) 得到. 然后逐项求导.
9. 先证明幂级数的收敛半径不小于 1, 然后用三分法估计 $(1-x)f(x) - L$.
10. 利用在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界的多项式只能是 0 次多项式, 即常数.
11. 可从常数项开始, 证明 P_n 的同次幂项系数分别收敛.
12. 必要性部分用第 10 题.
13. 被积表达式是全微分.
14. 将通项分解为两个分式之差. 答案为 9/32.
15. 将甲成功的事件分解为第一次成功, 第二次成功等等, 然后分别计算它们的概率并相加.
16. 计算出第 n 年的 n 万元对应于一开始的钱是多少, 然后相加. 答案为 $(100+a)^2/a^2$.

第二组参考题 (76 页)

1. 在 Arzela 定理 (即命题 14.2.4) 的证明中将一开始定义的集合 A_n 改为
$$B_n = \{x \in [a,b] \mid \exists i, j \geqslant n \text{ 使得 } |f_i(x) - f_j(x)| \geqslant \varepsilon\},$$
然后做下去.
2. 这里当然主要证明 $f \in R[a,b]$. 除了用可积条件 (见上册 301 页) 的传统证法外, 也可试用 Lebesgue 定理 (见上册 304 页).
3. 先证明极限函数单调. 然后将区间作分划来做.
4. 用反证法. 对后两个问题的答案均为否定, 不难构造反例.
5. 先证明有一个子函数列在一个点上收敛, 这个点可取为 $\{x_n\}$ 的一个极限点.
6. 本题若用准一致收敛概念和 Arzela-Borel 定理 (命题 14.2.3) 则非常方便.
7. 学习例题 14.1.8 的方法, 可取 $k = [\sqrt{\pi}/x]$. 若只要证明一致有界性, 则还可以用 Dirichlet 积分的方法.
8. 展开后比较同次乘幂项的系数即可.

9. 其中需要在 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时成立不等式 $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \geqslant 1-\frac{k(k-1)}{n}$. 这是上册 1.3.2 小节题 1(3) 之特例.
10. (1) 利用第十三章第二组参考题 19 知 $a_n = o(n)$, 从而知收敛半径不小于 1. (2) 然后用级数乘积. (3) 令 $a_0 = 1$, $a_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 就从 (1) 得到在 $(-1, 1)$ 上的恒等式 $1 = (1-x)^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, 然后乘以 S, 用拟合法估计 $|S(x) - S|$.
11. 这里的方法见上册 §2.4 节.
12. 这是 $c_n \geqslant 0$ 条件下的 Abel 第二定理. 最简单的方法是用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 为优级数.
13. 本题为 Bernstein 定理, 但这里的结果比上册 225 页题 19 更好一些, 见美国数学月刊 90 卷 (1983) 130~131. 用 Taylor 公式的积分型余项 (见 11.4.3 小节) 证明在 $x \in [0, r]$ 时 $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(r)}{r^{n+1}}$, 又有 $R_n(r) \leqslant f(r)$. 于是得到 $R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r)$ 因此在 $0 \leqslant x < r$ 时 $R_n(x) \to 0$.
14. 先从 $\{a_n\}$ 的递推公式导出 $f(x) = 1/(1-x-x^2)$, 将它作部分分式分解后再展开, 就得到 Fibonacci 数列的 Binet-Lucas 公式:
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], n = 0, 1, \cdots,$$
由此可见 (或利用 f 的幂级数展开式的收敛半径), $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.618$.
15. 本题的三个数列的生成函数为 $(1+x)^\alpha$, $(1+x)^\beta$ 和 $(1+x)^{\alpha+\beta}$.

第十五章　Fourier 级数

参考题 (103 页)

1. (1) 用积分第二中值定理; (2) 与 (3) 用分部积分, 或参考命题 15.1.2.
2. 以 a_1 为例, 将其积分公式中的积分区间 $[0, 2\pi]$ 分为 $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$ 等 4 个积分, 并通过变换成为 $[0, \pi/2]$ 上的一个积分, 然后利用凸性条件.
3. 本题中的函数 F_h 称为 Steklov 函数, 它表明平均后的函数性质比平均之前会有改善, 这与上册 334 页题 1 类似. (3) 可以用逐项积分定理.
4. F 是偶函数, 计算中需要用二元函数的二次积分交换顺序.
5. 用 Riemann 引理.
6. 这都可以认为是 Fourier 级数展开计算中的间接法的练习题.
7. 用偶延拓和奇延拓, 可认为是下题之特例.
8. 对 f 和 f' 用 Parseval 等式.
9. 不妨设在 $[-\pi, \pi]$ 内只有一个间断点 $x = 0$, 然后利用题 5(1) 中的 Fourier 级数.
10. 可以计算函数
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi-1}{2}x, & 0 \leqslant x < 1, \\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$
奇延拓后的 Fourier 级数.

11. 参考上册 317 页之证 2.

12. 需要积分第二中值定理.

13. 可用 Parseval 等式.

14. 本题表明, 没有收敛速度最慢的 Fourier 级数. 方法是使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ 收敛.

15. 本题可以看成是命题 15.1.2 的发展.

16. 以上题为基础, 本题成为计算 Fourier 展开式的一种方法.

17. 上题的一个应用. 最后计算需要二阶常系数线性微分方程的知识.

18. 本题很有意义. 可从反证法开始.

19. Weierstrass 第二逼近定理的一个证明, 对于 $(\cos\frac{u}{2})^{2n}$ 的计算可以用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$.

20. 和函数为 $-\ln 2-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$. 在区间 $[0,\pi]$ 上讨论即可. 设法利用 $S_n(x)+S_{n-1}(x)$ 于 $[0,\pi]$ 上单调减少.

第十六章　无穷级数的应用

参考题 (134 页)

1. 参考例题 16.2.1, 两个方法都可以用.

2. 答案为 $\gamma\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2$.

3. 将通项分解为 $\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right)$.

4. 开始有 $\sum\limits_{q}\frac{1}{q-1}=\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-1}+\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^3-1}+\cdots$, 其中 n 取不是 (指数大于 1 的) 乘幂的所有大于 2 的正整数. 将此写成二重求和, 并交换顺序.

5. 证明 $a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=4\,\forall\, n\geqslant 2$, 然后用裂项相消法.

6. 通项可写成 $\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x$.

7. 试用多项式序列一致逼近 f.

8. 先证明结论对 g 为多项式时成立, 然后用逼近定理.

9. 用上题即可.

10. 可以参考上册 323 页例题 10.4.4.

11. 参考上册 140 页例题 5.4.5 和例题 14.1.3.

12. 作变量代换 $y=1/x$.

13. 作变量代换 $y=\mathrm{e}^{-x}$.

14. 连续性的证明不难, 这里只对于可微性作简述. 对 $x\in(0,1)$, 构造点列 $\{x^{(n)}\}$, 记 $f(x^{(n)})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_k'}{2^k}$, 使得 $f(x)$ 和 $f(x^{(n)})$ 满足条件:

$$u_k'=u_k\ \forall\, 1\leqslant k\leqslant n,\ u_{n+1}'=1-u_{n+1},\ u_{n+2}'=u_{n+2},$$

然后估计差商 $\dfrac{f(x^{(n)})-f(x)}{x^{(n)}-x}$. 实现上述条件的方法是: 在 $x^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x'_k}{10^k}$ 中, 对于 $k=n+1,n+2$ 采用以下规定:

$$x'_{n+1}\begin{cases}\neq x_n, & u_{n+1}=u_n,\\ =x_n, & u_{n+1}\neq u_n,\end{cases}\qquad x'_{n+2}\begin{cases}\neq x'_{n+1}, & u_{n+2}=u_{n+1},\\ =x'_{n+1}, & u_{n+2}\neq u_{n+1}.\end{cases}$$

15. 利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.
16. 用上题即可.
17. 利用逐项求导定理.

第十七章 高维空间中的点集与基本定理

第一组参考题 (145 页)

1. 闭集 $S=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$, 其中 $S_k=\{x\in\mathbf{R}^n\mid d(x,S)<\frac{1}{k}\}$ 是开集. 开集证明类似.
2. 考虑以三角形 ΔABC 的三个中点 A', B', C' 为顶点的新三角形 $\Delta A'B'C'$, 以此类推, 得到一系列三角形组成的闭集套. 证明它们的惟一公共点就是原三角形中线的惟一交点.
3. 据定义.
4. 据包含关系.
5. 可用两种方法构造: (1) $O_i=\bigcup\limits_{x\in S_i}O_{d_x/2}(x)$ $(i=1,2)$, 其中 d_x 是 x 到另一个闭集的距离; (2) $O_1=\{\rho(x)<\frac{1}{2}\}$, $O_2=\{\rho(x)>\frac{1}{2}\}$, 其中
$$\rho(x)=\frac{d(x,S_1)}{d(x,S_1)+d(x,S_2)}.$$
6. (2) 用反证法和聚点定理; (3) 结合 (1) 和聚点定理.

第二组参考题 (146 页)

1. 根据定义用反证法.
2. 注意 I 是 $\mathbf{R}$ 中区间的特征是: 若 a, $b\in I$, 则 $\forall c\in(a,b)$, 有 $c\in I$.
3. 用反证法. 设并集有非连通的分解, 考虑每个连通集与这个分解的交, 推出矛盾.
4. 对 A 中任何两点找折线相连.
5. 证明用反证法. 例子的讨论注意 $F=\overline{E}\setminus E$ 是线段, 证明不存在联结 E 中点与 F 中点的连续曲线.
6. (1) 从定义; (2) 证明在 $[0,1]$ 任意 k 等分的小区间中, 有形如 $m+l\alpha$ 的小数部分, 可设法找 $m_1+l_1\alpha$, 使 $0<m_1+l_1\alpha<\dfrac{1}{k}$.

第十八章 多元函数的极限与连续

第一组参考题 (163 页)

1. 用二分法证明任意 $x_0 \in [a,b]$ 的某个小邻域内收敛是一致的, 再用有限覆盖定理.
2. $\max\limits_{a\leqslant y\leqslant \xi} f(\xi,y) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant 1} f(\xi, a+k(\xi-a))$.
3. 证明有界闭.
4. 利用齐次线性方程组有非零解的条件. 先考虑 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \int_0^1 f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x = 0$ $(i = 1,\cdots,n)$ 的非零解, 再对 $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ 讨论.
5. 设 B 以 a 为圆心, 以 r 为半径, 最小覆盖圆盘应满足 $r^2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} d^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}_i)$, 证明 r 作为 $\boldsymbol{a}$ 的连续函数能取到最小值.
6. (1) 考虑 $G(\boldsymbol{x})$ 在 S^1 上的最大值; (2) 利用 B 是正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 非奇异, 并证明对任意实对称矩阵 C, 有

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \leqslant \lambda_{\max}, \quad \boldsymbol{y}\in E,$$

$\lambda_{\min}$ ($\lambda_{\max}$) 是 $\boldsymbol{C}$ 的最小 (最大) 特征值.

第二组参考题 (164 页)

1. 先证明 T^{n_0} 有惟一不动点, 再证明此不动点就是 T 的惟一不动点.
2. 令 $g(\boldsymbol{x}) = |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}|$, 证明 g 是 Ω 上的连续函数, 并且在 Ω 上取到零点.
3. 用反证法.
4. 根据定义.
5. 用上题.
6. 用上题.
7. (1) 根据定义; (2) 利用有界闭区间上连续函数性质.
8. (1) 根据定义; (2) 作实轴到区间 $(-1,1)$ 上的同胚 h, 再对复合映射 $h\circ f$ 讨论.
9. $\mathbf{R}$ 上定义在有界开集上的无界连续函数不可扩张到全空间. 先利用 Cauchy 准则把一致连续函数扩张到开集的闭包上, 再用 Tietze 扩张定理.
10. 利用有理点集在 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密性及 Cauchy 准则.

第十九章 偏导数与全微分

参考题 (186 页)

1. 计算.
2. 计算.
3. 证明必要性时可考虑 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{u_x}{u}\right)$, 并注意 $\dfrac{\partial}{\partial x}(\ln u) = \dfrac{u_x}{u}$.

5. (1) 注意 $u=\prod\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}(x_k-x_j)$, 且 $\forall k\neq j$ 时, $(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i})(x_k-x_j)=0$; (2) 利用 u 是 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次齐次函数.
6. 根据链式法则和正交矩阵的行向量两两正交.
7. (1) r; (2) $r^2\sin\theta$; (3) $r^{m-1}\sin^{m-2}\theta_1\sin^{m-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{m-2}$, 引入中间变量 $t_1=r\cos\theta_1$, $t_2=r\sin\theta_1$.
8. 相对误差为 $\Delta f/f$.
9. 由 $a_{ij}\geqslant 0$, 矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 有满足 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant 0$ 的特征值 λ. 设其对应的特征向量为 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$, 令 $y(t)=\alpha_1x_1(t)+\cdots+\alpha_nx_n(t)$. 由题设及 $x_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 满足的微分方程组推出 $y(t)\equiv 0$.
10. 利用行列式求导法则及 $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i\partial x_k}(x)=\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_i}(x)$ 计算.

第二十章 隐函数存在定理与隐函数求导

第一组参考题 (205 页)

1. 令 $F(x,t)=f(x,\int_0^t\sin x\,\mathrm{d}x)$, $F_t=f_y\sin t$, $F_t(0,\frac{\pi}{2})=f_y(0,1)$.
2. 利用命题 20.4.1.
3. 用隐函数存在定理.
4. 当 $x>0$ 时, $F(x,0)>0$, $F(x,-\infty)=-\infty$, 且当 $y<0$ 时 $F_y(x,y)=(3-y)y^2e^{-y}>0$, 于是存在惟一的 $y=y(x)$ 使得 $F(x,y(x))=0$.
5. 用介值定理惟一确定函数 $y=f(x)$.
6. (1) 当 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 附近对 $u=f(x,y)$ 用隐函数存在定理解出 x, 再用题设条件证明 $g(x(u,y),y)$ 与 y 无关, 从而找出 $F(u,v)$. 其它情况类似; (2) 对 F 求 x, y 的偏导数, 并用齐次线性方程组有非零解的条件.
7. 把问题归结为证明满足 E 中前两个关系式的局部连续隐函数 $t=t(x,y)$ 存在.
8. 用反证法, 聚点定理与隐函数存在定理.
9. 检验.
10. 用反证法. 由隐函数存在定理及题设证明 $f(\mathbf{R}^2\setminus\{x_1,\cdots,x_r\})$ 与 $\mathbf{R}^2\setminus f(\mathbf{R}^2)$ 均是非空开集. 再用 $f(\{x_1,\cdots,x_r\})$ 的有限性找到联结 $f(\mathbf{R}^2\setminus\{x_1,\cdots,x_r\})$ 中点与 $\mathbf{R}^2\setminus f(\mathbf{R}^2)$ 中点的线段, 由连通性推出矛盾.
11. 利用映射的有限增量公式与局部逆映射存在定理.

第二组参考题 (207 页)

1. 可微性的证明根据定义检验.
2. 由例题 19.4.1 及 Schwarz 不等式.

3. 依照命题 20.2.3 的注.

4. 自己动手做一遍就有体会.

5. 利用局部逆映射定理把 h 找出来.

6. 几何上的解释可局部地把 f 看成线性映射.

第二十一章　偏导数的应用

第一组参考题 (235 页)

1. (1) 写出曲面的切平面方程, 以 (a,b,c) 代入; (2) 隐函数求导.

2. 设顶点在三角形中的投影为 M, 其到 a, b, c 三边的距离分别是 x, y, z. 则 $ax+by+cz=2$ 倍三角形的面积, 且求侧面积 S 可化为在前述限制条件下的极值问题.

3. $u_{xx}\cos^2\alpha+u_{yy}\cos^2\beta+u_{zz}\cos^2\gamma+2u_{xy}\cos\alpha\cos\beta+2u_{xz}\cos\alpha\cos\gamma+2u_{yz}\cos\beta\cos\gamma$.

4. (1), (2) 计算; (3) 利用 (1).

5. 对辅助函数 $F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 讨论.

6. 设二次型 $Q(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\Big)\boldsymbol{\alpha}$, 证明 $Q(\cdot,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面上取最小值 m. 再证明 $\exists\delta\in(0,\delta_0)$, 使 $Q(\cdot,\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面上取最小值至少为 $\dfrac{m}{2}$, $\forall\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$. 再证 $F''(t)\geqslant 0$, $F(t)$ 同上题.

7. 仿例题 21.4.3 的注.

8. Lagrange 函数为
$$L(x,y,z,\lambda)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy-\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

9. (1) 用 Lagrenge 乘子法, 用到行列式的求导公式; (2) 计算 $\boldsymbol{A}$ 的行向量是两两正交时 $(\det\boldsymbol{A})^2$ 的值; (3) 用到 (1), (2); (4) 考虑平行多面体.

10. (1) 用反证法. 设在内部取负的最小值, 利用方程找矛盾; (2) 考虑 $u(x,y)-c(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$, c 适当小.

第二组参考题 (237 页)

1. 利用第十八章第一组参考题 6(2) 的提示.

2. 给定 Π, 在 Π 上取点 $\boldsymbol{R}(a_0,b_0,c_0)$, 定义 $\boldsymbol{F}:\ [a,b]\to\mathbf{R}^3$ 为 $\boldsymbol{F}(t)=(x(t)-a_0,y(t)-b_0,z(t)-c_0)$, 就化为命题 21.5.2 当 $n=1$, $m=3$ 时的几何解释.

3. 由命题 21.5.2, $\exists\xi_1\in(a,b)$, 使 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}'(\xi_1)$ 正交, 再在 $[a,\xi_1]$ 上用命题 21.5.2. 依次类推.

4. 先考虑平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ 与曲面相切的条件, 再考虑切平面两两正交时的条件, 并计算原点到这些切平面的距离. 最后计算原点到交点的距离.

5. 证明 f 可以写成 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的函数.

6. 可通过证明 $ab \leqslant \mathrm{e}^{a-1} + b\ln b$ 或者 $a^2 \leqslant \mathrm{e}^{a-1} + a\ln a$ 来证明原不等式, 也可归结为求二元函数的最值 (在极值点取到). 取等号条件为 $a = b = 1$.
7. (1) 以 μ_1, μ_2 为斜率的两条直线夹角的斜率为 $k(\mu_1, \mu_2) = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1\mu_2}$. 证明 $k(\mu_1, \mu_2)$ 在 T 下不变; (2) 方法同上; (3) 反演变换满足 $(\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2) = 1$; (4) $-(x^2 + y^2)^{-2}$; (5) 验证.
8. (1) 曲面间的夹角就是交点处相应法线之间的夹角; (2) 计算坐标关系式; (3) $-(x^2 + y^2 + z^2)^{-3}$.

第二十二章 重积分

第一组参考题 (275 页)

1. f 是二元 Riemann 函数, 可积的证明仿照一元 Riemann 函数的讨论.
2. 根据可积定义讨论.
3. (1) $A = \dfrac{3}{32} + \dfrac{\ln 2}{8}$; (2) 用反证法, 利用 (1).
4. 利用不等式 $100 + \cos^2 x + \cos^2 y \leqslant (10 + \dfrac{\cos^2 x}{10})(10 + \dfrac{\cos^2 y}{10})$.
5. 用正交变换.
6. 利用 $f(x, y) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{y} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t$ 及 Schwarz 不等式.
7. 利用 Hölder 不等式.
8. 取辅助函数 $g(x, y) = x(1 - x)y(1 - y)$, 注意到
$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint_D \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
按不同的次序计算累次积分, 并用分部积分.
9. 证明存在 $f(x, y)$ 的连续点 (x_0, y_0), 使 $f(x_0, y_0) > 0$.
10. 设左端积分为 I. M, m 分别为 f 在 Ω 上的最大最小值, 则 $m \leqslant I/\Omega \leqslant M$. 再应用多元函数介值定理 (命题 18.2.4).
11. 考虑差
$$\Delta = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$
不同组合进行累次积分, 得到 $\Delta \geqslant 0$.
12. 仿上题证明方法.
13. 利用第 10 题.
14. 作变量代换 $x = x$, $u = xyt$, $s = xyz$, 并计算累次积分对 t 的导数.
15. (1) $x = f(s) + t\sin\theta(s)$, $y = \varphi(s) - t\cos\theta(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi l$, $0 < t < l$; (2) 作变换 $(x, y) \mapsto (s, t)$, 再计算积分.

第二组参考题 (277 页)

1. 利用上册 259 页练习题 10.

2. 利用上题与例题 22.5.9.

3. (1) 证明 $\forall \varepsilon > 0, p \to +\infty$ 时, $\Phi_p(u)$ 的下极限 $\geqslant (\max\limits_{\Omega} u) - \varepsilon$. (2) 利用 (1) 的结果.
(3) 利用 $\lim\limits_{p\to 0} \dfrac{\iint\limits_{\Omega} u^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - |\Omega|}{p|\Omega|} = \dfrac{1}{|\Omega|}\iint\limits_{\Omega} \ln u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

4. (1) 设球心是坐标原点, $P_0 = (0,0,a)$, P 点的轨迹形成的封闭曲面的方程为 $(x^2 + y^2 + z^2 - az)^2 = R^2[x^2 + y^2 + (z-a)^2]$, 所求体积 $V = \dfrac{4\pi}{3}R(R^2 + a^2)$, (2) 如果 $P_0 = (x, y, z)$, 则 $V = \dfrac{4\pi}{3}R(R^2 + x^2 + y^2 + z^2)$.

5. 利用 $\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = (\iint\limits_{Q_a} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)^{1/2}$, 其中 $Q_a = \{0 < x < a, 0 < y < a\} \supset D_a = \{x^2 + y^2 < a^2, x > 0, y > 0\}$. 证明右端不等式时与 $D_{2a/\sqrt{\pi}}$ 上的二重积分比较, 此时被积函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 是原点到 (x, y) 的距离的严格减少函数.

6. 用函数 $f(x, y)$ 的无限接近的等位线把积分区域分为许多部分.

第二十三章 含变参量积分

参考题 (306 页)

3. (1) $\varphi(x) = -2\sqrt{x-t}f(t)\Big|_0^x + 2\int_0^x \sqrt{x-t}f'(t)\,\mathrm{d}t$, (2) 利用(1),然后将积分交换次序.

4. $\int_0^A f(x)\dfrac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha A} f(\dfrac{y}{\alpha})\dfrac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} f(\dfrac{y}{\alpha})\dfrac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ (将 f 零延拓), 利用广义积分对 α 一致收敛取极限.

5. $F(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} f\left(\dfrac{y}{t}\right)\,\mathrm{d}y$, 利用广义积分对 t 一致收敛取极限.

6. (1) 固定 t, 由 Cauchy 不等式得
$$\left[\int_A^B f(t+u)f(u)\,\mathrm{d}u\right]^2 \leqslant \int_A^B f^2(t+u)\,\mathrm{d}u \int_A^B f^2(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_{A+t}^{B+t} f^2(u)\,\mathrm{d}u \int_A^B f^2(u)\,\mathrm{d}u,$$
其中 A, B 充分大或充分小, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+u)f(u)\,\mathrm{d}u$ 对每一个 t 都存在, 且对 t 一致收敛.
(2) $\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/4\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} g(2\sqrt{\varepsilon}x)\,\mathrm{d}x$, 由 g 有界知后面的广义积分对 ε 一致收敛.

7. (1) 注意 $f(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_0^{\pi} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$;
(2) 由于 f 不一定是连续函数, 故要用定义证 g 的连续性.

8. 用柱坐标变换和余元公式, 或用球坐标变换, 体积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

9. $\overline{x}=\dfrac{3a}{4}\cdot\dfrac{\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{\Gamma(n)\Gamma(4n)}$.

10. 惯性矩 $I=4\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{21}{2^9}\pi R^4$.

11. 与第 4 题的方法类似.

13. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}y^{\frac{1}{p}-1}\cos y\,\mathrm{d}y$, 利用 $\displaystyle y^{\frac{1}{p}-1}=\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{p})}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{p}}\mathrm{e}^{-yt}\,\mathrm{d}t$,

交换积分次序得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\Gamma(\frac{1}{p})\cos\frac{\pi}{2p}$.

14. 用余元公式, 结果为 $\ln\sqrt{2\pi}$.

15. 利用 $\dfrac{1}{a^2+x^2}=\lim\limits_{\epsilon\to0+}\displaystyle\int_\epsilon^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(a^2+x^2)}\,\mathrm{d}t$, 交换积分次序得 $I_1=\dfrac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-ab}$, $I_{k+1}=-\dfrac{1}{2ak}\dfrac{\partial I_k}{\partial a}$, $J_k=-\dfrac{\partial I_k}{\partial b}$.

16. 考虑 $\ln\Gamma(x)$ 的导数.

17. (1) $1+x+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}$; (2) 令 $x\to1$; (3) 利用余元公式.

第二十四章 曲线积分

第一组参考题 (333 页)

1. 利用两型曲线积分之间的关系。

2. 可以直接计算, 也可以对 R 求导后计算, 答案为:

(1) $2\pi R\ln R$ 当 $|a|<R$, $2\pi R\ln|a|$ 当 $|a|>R$.

(2) $2\pi R\ln R$ 当 $a^2+b^2<R^2$, $2\pi R\ln\sqrt{a^2+b^2}$ 当 $a^2+b^2>R^2$.

3. $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}[\ln\sqrt{x^2+y^2}-\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}]=0$ 对 $(\xi,\eta)\in L$ 一致地成立.

4. 等式两边乘以分母后求导或者积分.

5. 利用 Green 公式得 $\displaystyle\iint_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_G xf_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_G yf_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 于是

$$\left|\iint_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{2}\left|\iint_G(xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{2}\iint_G(f_x+f_y)^{1/2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6. 利用 Green 公式与中值定理.

第二组参考题 (334 页)

1. 先考虑对于任一点 $(x,y)\in D$, 存在以 (x,y) 为中心的开矩形, 使对于任一条位于开矩形及其边界上的逐段光滑定向闭曲线 Γ 有性质

$$\frac{\boldsymbol{F}(x_1,y_1)}{|\boldsymbol{F}(x_1,y_1)|}\neq-\frac{\boldsymbol{F}(x_2,y_2)}{|\boldsymbol{F}(x_2,y_2)|},\quad\forall(x_1,y_1),\ (x_2,y_2)\in\Gamma.$$

从而有 $\gamma(\boldsymbol{F},\Gamma)=0$, 然后用有限覆盖定理.

2. 证明 $\min\limits_{x\in D}|\nabla f(x)| \leqslant \frac{1}{2r}(\max\limits_{x\in D} f(x) - \min\limits_{x\in D} f(x)) \leqslant \max\limits_{x\in D}|\nabla f(x)|$, 再用多元函数介值定理. 可借助梯度曲线讨论.

3. 设 $f(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(a_i,b_i)\cdot v}$, 当 $|u|+|v|$ 充分大时有 $(u,v)\cdot\nabla f(u,v) > 0$, 用旋转度证明 $\nabla f(v)$ 有零点.

4. 不妨取 (x,y) 的极坐标为 $(\rho,0)$, 并计算出 $l(x,y) = L(\rho)$. 设小圆外弧对应的圆心角为 2φ, 则 $L(\rho) = 0,\ 0 \leqslant \rho \leqslant r-\delta;\ L(\rho) = 2\delta\varphi,\ r-\delta \leqslant \rho \leqslant r$. 再利用余弦定理表达出 φ, 并在积分号下取 $\delta \to 0$, 得极限值为 $4\pi r$.

5. (1) 利用 Green 公式; (2) 检验; (3) 对 $g_1^2(x) + g_2^2(x) = 1$ 两边求微分, 并用不同的方法计算 $\iint\limits_B \dfrac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$; (4) 设曲面定义在圆盘上, 并保持边界圆周不动. 则这样的曲面不能退缩到边界上, 除非撕破曲面.

6. 利用上题.

第二十五章 曲面积分

参考题 (369 页)

1. 坐标旋转, 使 $x+y+z=0$ 变为坐标平面.

2. 所求积分等于 $\oiint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} \mathrm{e}^{u-v}\,\mathrm{d}S$, 然后作坐标旋转.

3. f 是 -3 次齐次函数, 即 $3f + x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$.

4. 记以 (x_0,y_0,z_0) 为心, 以 ε 为半径的球为 B_ε, 在 $\Omega \setminus B_\varepsilon$ 上用 Gauss 公式, 然后证 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\oiint\limits_{\partial B_\varepsilon} \cos(n,r)\,\mathrm{d}S = 0$.

5. 用 Stokes 公式.

6. 记 $A = (\xi-x)/r^3, B = (\eta-y)/r^3, C = (\zeta-z)/r^3$, 则 $A_\xi + B_\eta + C_\zeta = 0$, $A_x + B_y + C_z = 0$. 于是 $P_y = \oint\limits_\Gamma C_y\,\mathrm{d}\eta - B_y\,\mathrm{d}\zeta = \oint\limits_\Gamma (C_y\,\mathrm{d}\eta + C_z\,\mathrm{d}\zeta) + A_x\,\mathrm{d}\zeta =$
$\oint\limits_\Gamma -(C_\eta\,\mathrm{d}\eta + C_\zeta\,\mathrm{d}\zeta) + A_x\,\mathrm{d}\zeta = \oint\limits_\Gamma C_\xi\,\mathrm{d}\xi + A_x\,\mathrm{d}\zeta = \oint\limits_\Gamma -C_x\,\mathrm{d}\xi + A_x\,\mathrm{d}\zeta = Q_x$.

7. 设 S 是以 Γ 为边界的光滑曲面, $(x,y,z)\notin S$, 由 Stokes 公式

$$\begin{aligned} P &= \iint\limits_S (-B_\eta - C_\zeta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta + B_\xi\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi + C_\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \iint\limits_S A_\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta + B_\xi\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi + C_\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_S A\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta + B\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\xi + C\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

8. 设液体表面为 xy 平面, z轴方向向下, 液体比重为 ρ, 物体表面面积元 $\mathrm{d}S$ 的深度为 z, 则这一元素所受液体压力为 $\rho z\,\mathrm{d}S$, 它在 z 轴方向的分力为 $-\rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\,\mathrm{d}S$, 于是在 z 轴方向受力 $=-\oiint\limits_S \rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\,\mathrm{d}S=-\rho\iiint\limits_V \mathrm{d}v=-\rho V$.

第二十六章 场论初步

第一组参考题 (383 页)

2. 证明 $\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^2\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)]$.
3. 在 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A})$ 两边求散度, 利用 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{n}$ 可证明 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=0$.
4. 注意到 $\nabla F/|\nabla F|$ 在边界上是单位内法向量, 用 Green 公式.
5. 类似于 (26.18), (26.19) 知 $F'(0)=0$, $F''(0)=\dfrac{1}{3}\Delta u(M)$.
6. $0=\iiint\limits_\Omega (u-v)\Delta u=\oiint\limits_{\partial\Omega}(u-v)\dfrac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S-\iiint\limits_\Omega \nabla(u-v)\nabla u$, 即
$$\iiint\limits_\Omega |\nabla u|^2\leqslant\frac{1}{2}\Big(\iiint\limits_\Omega |\nabla u|^2+\iiint\limits_\Omega |\nabla v|^2\Big).$$
7. $\iint\limits_{x^2+y^2<1}(xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta$, 再用 Green 公式计算 $\int_0^{2\pi}r\dfrac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta$.

第二组参考题 (384 页)

1. 由极值原理的证明知 $u(M)$ 满足极值原理. 在任一球 B_R 上用 Poisson 积分公式作 B_R 内的调和函数 $v(M)$, 使得在 ∂B_R 上 $v(M)=u(M)$, 再利用极值原理知在 B_R 内 $u(M)=v(M)$.
2. 利用极值原理和 Poisson 积分公式.
3. 用证明平均值公式的方法.
4. 记 B_ε 是以 (x,y,z) 为心, ε 为半径的球, 在第二 Green 公式中取 $v=1/r$, 积分区域为 $\Omega\setminus B_\varepsilon$.
5. 将被积函数放大,缩小.
6. 利用上题.

参 考 文 献

[说明] 以下文献按作者名 (编者名) 的 (拼音) 字母顺序排列. 为简明起见, 对翻译著作不列出原作的外文名和译者名. 对有多册或多卷的著作也只列出所见的最早版本.

[1] 阿赫叶惹尔. 逼近论讲义. 北京: 科学出版社, 1957

[2] 阿姆斯特朗. 基础拓扑学. 北京: 北京大学出版社, 1983

[3] 亚历山大罗夫. 集与函数的泛论初阶. 上海: 商务印书馆, 1956

[4] 白尚恕. 《九章算术》注释. 北京: 科学出版社, 1983

[5] 巴尔霍民柯. 曲线是什么. 北京: 科学出版社, 1957

[6] Berggren L, Borwein J, Borwein P. Pi: a source book. New York: Springer, 1997

[7] Bourbaki N. Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire). Paris: Herman, 1965

[8] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 南京: 江苏教育出版社, 1998

[9] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 2000

[10] 陈传璋, 金福临, 朱学炎, 欧阳光中. 数学分析. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1983

[11] 柯朗, 约翰. 微积分和数学分析引论. 北京: 科学出版社, 1979

[12] 邓东皋, 尹小玲. 数学分析简明教程. 北京: 高等教育出版社, 1999

[13] 邓建中. 外推法及其应用. 上海: 上海科技出版社, 1984

[14] Dieudonné J. Calcul infinitésimal. Paris: Hermann, 1968

[15] 迪厄多尼. 现代分析基础 第一卷. 北京: 科学出版社, 1982

[16] 德林费尔特. 普通数学分析教程补篇. 北京: 人民教育出版社. 1960

[17] Dunham W. Euler: the master of us all. MAA, 1999

[18] 邓纳姆. 天才引导的历程. 北京: 中国对外翻译出版公司, 1994

[19] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程. 北京: 高等教育出版社, 1954

[20] 费史. 概率论及数理统计. 上海: 上海科学技术出版社, 1962

[21] 法尔科内. 分形几何——数学基础及其应用. 沈阳: 东北大学出版社, 1991

[22] 盖尔鲍姆, 奥姆斯特德. 分析中的反例. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.

[23] 哈代, 李特伍德, 波利亚. 不等式. 北京: 科学出版社, 1965

[24] 华东师范大学数学系. 数学分析. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1991

[25] 华东师范大学数学系. 数学分析. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2002

[26] 克莱因. 古今数学思想. 上海: 上海科学技术出版社, 1979

[27] 匡继昌. 常用不等式. 长沙: 湖南教育出版社, 1989

[28] 李成章, 黄玉民. 数学分析. 北京: 科学出版社, 1999

[29] 刘文. 无处可微的连续函数. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1987

[30] 李文林. 数学史教程. 北京: 高等教育出版社, 2000

[31] 鲁金. 实变函数论. 北京: 高等教育出版社, 1954

[32] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982

[33] 米尔诺. 从微分观点看拓扑. 上海: 上海科学技术出版社, 1983

[34] 沐定夷. 数学分析. 上海: 交通大学出版社, 1993

[35] 那汤松. 实变函数论. 北京: 高等教育出版社, 1955

[36] 欧阳光中, 姚允龙. 数学分析. 上海: 复旦大学出版社, 1993

[37] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 北京: 高等教育出版社, 1993

[38] 波利亚. 怎样解题. 北京: 科学出版社, 1982
[39] 波利亚. 数学与猜想. 北京: 科学出版社, 1984
[40] 波利亚. 数学的发现. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 1979
[41] 波利亚, 舍贵. 数学分析中的问题和定理. 上海: 上海科学技术出版社, 1981
[42] 钱伟长. 应用数学. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1993
[43] 秦曾复, 朱学炎. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1991
[44] 黎茨, 纳吉. 泛函分析讲义. 北京: 科学出版社, 1963
[45] 卢丁. 数学分析原理. 北京: 人民教育出版社, 1979
[46] 沈燮昌, 邵品琮. 数学分析纵横谈. 北京: 北京大学出版社, 1991
[47] 斯玛特. 不动点定理. 重庆: 重庆出版社, 1982
[48] 斯皮瓦克. 流形上的微积分 —高等微积分中一些经典定理的现代化处理. 北京: 科学出版社, 1981
[49] 斯特洛伊克. 数学简史. 北京: 科学出版社, 1956
[50] 梯其玛希. 函数论. 北京: 科学出版社, 1964
[51] Wagon S. Mathematica in action. New York: Springer, 1999
[52] 汪林, 戴正德, 杨富春等. 数学分析问题研究与评注. 北京: 科学出版社, 1995
[53] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌. 实变函数与泛函分析. 北京: 人民教育出版社, 1979
[54] 辛钦. 数学分析八讲. 武汉: 武汉大学出版社, 1998
[55] 徐利治. 数学分析的方法及例题选讲. 北京: 商务印书馆, 1955
[56] 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲. 修订版. 北京: 高等教育出版社, 1983
[57] 杨宗磐. 数学分析入门. 北京: 科学出版社, 1958
[58] 张筑生. 数学分析新讲. 北京: 北京大学出版社, 1990
[59] 周民强, 方企勤. 数学分析. 上海: 上海科学技术出版社, 2003
[60] 卓里奇. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1987
[61] 邹应. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1995
[62] 邹应. 数学分析习题及其解答. 武汉: 武汉大学出版社, 2001

中文名词索引 (汉语拼音字母序)

B

闭包 …… 138

边界, 边界点 …… 137

变换

Abel ~ …… 21

保角~ …… 238

反演~ …… 238

极坐标~ …… 247

球坐标~ …… 253

柱坐标~ …… 253

不等式

Bessel ~ …… 83

Carleman ~ …… 16

Hadamard ~ …… 237

Hardy ~ …… 17

Hölder ~ …… 270, 276

Minkowski ~ …… 276

Poincare ~ …… 275–276

Steklov ~ …… 104

Wirtinger ~ …… 104, 276

等周~ …… 326

C

场

保守~ …… 322

散度~, 梯度~, 旋度~ …… 376

数量~, 向量~ …… 371

无源~, 无旋~ …… 376

乘积 …… 22

Cauchy ~ …… 22

部分~ …… 28

对角线~ …… 22

无穷~ (见无穷乘积)

初等集, 闭初等集 …… 55

D

单连通区域 (见区域)

导集 (见集)

点

内~, 外~, 边界~, 聚~, 孤立~ 137

定理

Abel ~ …… 12

Abel 第一~, Abel 第二~ …… 59

Abel-Pringsheim ~ …… 36

Arzela 控制收敛~ …… 54

Arzela-Borel ~ …… 54

Bernstein ~ …… 389

Bohr-Mollerup ~ …… 301

Brouwer 不动点~ …… 328–329

Cantor ~ …… 101, 158

Dini ~ …… 286, 291

du Bois Reymond ~ …… 12, 100

Fejér ~ …… 91, 93

Fourier 级数的惟一性~ …… 93

Fourier 级数的逐项积分~ …… 96

Fourier 级数的逐项求导~ …… 97

Hadamard ~ …… 203

Mertens ~ …… 23

Osgood ~ …… 54

Riemann 重排~ …… 22, 25

Rolle ~ …… 233

Sanderson 中值~ …… 237

Stone-Weierstrass ~ …… 127

Tauber ~ …… 62

Visser ~ …… 47

Weierstrass 逼近~ (见外文索引)

闭集套~ …… 55, 142

代数基本~ …… 329

等周~ …… 325

二重正项级数的求和顺序交换~ 37

反函数组存在~ …… 193

高维中值~ …… 317, 334

紧性~ ····· 141
局部化~ ····· 87
局部逆映射存在~ ····· 196
幂级数展开的惟一性~ ····· 66
拟微分平均值~ ····· 183
逆映射~ ····· 202 203
凝聚~ ····· 141
散度~ ····· 371
隐函数存在~ ····· 188
隐函数组存在~ ····· 192
秩~ ····· 208

F

范数 ····· 137
方程
Cauchy-Riemann ~ ····· 238
Kepler ~ ····· 188
封闭性~ (Parseval 等式) ····· 94
方向导数 ····· 212
分形 ····· 131

G

公式
Binet-Lucas ~ ····· 389
Catalan ~ ····· 278
Cauchy-Hadamard ~ ····· 59
Euler-Fourier ~ ····· 79
Euler-Gauss ~ ····· 33
Gauss ~ ····· 347
Green ~ ····· 318
Legendre 加倍~ ····· 297, 302
Poisson 积分~ ····· 381
Stirling ~ ····· 34, 303
Stokes ~ ····· 352
一般的 ~ ····· 363–364
Taylor ~ ····· 215
Viète ~ ····· 29
Wallis ~ ····· 29
Weierstrass ~ ····· 33
平均值~ ····· 379
有限增量~ ····· 173
余元~ ····· 33, 297, 302
规范正交系 ····· 86
光滑曲线 ····· 209

H

函数
Bessel ~ ····· 64
B ~ ····· 296
Γ ~ (见外文索引)
Riemann 的 zeta-~ · 75, 112, 300
Steklov ~ ····· 389
van der Waerden ~ ····· 132
Weierstrass ~ ····· 131
处处连续处处不可微的~ 131, 136
广义~ ····· 121
齐次~ ····· 180
生成~ ····· 78
势~ ····· 323
实解析~ ····· 128
特殊~ (见特殊函数)
调和~ ····· 379
隐~ ····· 188
有稠密间断点的单调~ ····· 136
有稠密间断点的导~ ····· 136
原~ ····· 128, 135
正交~系 ····· 82
核
de la Vallée Poussin ~ ····· 105
Dirichlet ~ ····· 87, 88
Fejér ~ ····· 92, 93
Landau ~ ····· 121–123
~函数方法 ····· 120
恒等式
Vandermonde ~ ····· 78
第一 Green ~ ····· 377–378
第二 Green ~ ····· 382

J

集
闭~ ····· 55, 138
初等~, 闭初等~ ····· 55
导~ ····· 137
紧~ ····· 139
开~ ····· 138
连通~ ····· 139
道路~ ····· 139
凸~ ····· 139

积分
Dirichlet ~ ····· 87, 291
Euler ~ ····· 109
Euler-Poisson ~ ····· 291
Fejér ~ ····· 91–92
Poisson ~公式 ····· 381
重~ ····· 239
二重~ ····· 239
三重~ ····· 251
n 重~ ····· 256
广义重~ ····· 258
含参变量~ ····· 279
含参变量常义~ ····· 279
含参变量广义~ ····· 285, 107
曲面~ (见曲面积分)
曲线~ (见曲线积分)
第二类完全椭圆~ ····· 108
奇异~ ····· 121
逐项~法 (级数求和) ····· 113
(广义重) ~收敛 ····· 258
(广义重) ~发散 ····· 258
级数 ····· 1–2
~乘积 ····· 22, 76
~求和 ····· 111
~ 的裂项相消法 ····· 112
~ 的 Abel 方法 ····· 112
Dirichlet ~ ····· 75
Fourier ~ (见外文索引)
Leibniz 型~ ····· 20
Maclaurin ~ ····· 65
Taylor ~ ····· 65
比较~ ····· 6
变号~ ····· 19
超几何~ ····· 60
交错~ ····· 20
绝对收敛~ ····· 20
幂~ (见幂级数)
数项~ ····· 1
条件收敛~ ····· 20
调和~ ····· 3, 13
p 次幂的~ (p 级数) ··· 3, 13
同号~ ····· 3
无穷~ ····· 1–2
余弦~, 正弦~ ····· 80
正项~ ····· 3, 6
~收敛的充要条件 ····· 3
通项单调减少的~ ····· 8, 9

极限
重~ ····· 147
累次~ ····· 150
极值原理 ····· 380
间断 (不连续) ····· 153
矩 ····· 266
矩阵
Hesse ~ ····· 216
距离 ····· 137
卷积 ····· 121

L

连续 ····· 153
上半~ ····· 164
下半~ ····· 164
~向量场 ····· 327
链式法则 ····· 175
裂项相消法 (见级数求和)
邻域 ····· 137
零测度集 ····· 240

零面积 (见面积)

M

幂级数
~的系数 …… 58
~展开式 …… 65
~展开的惟一性定理 …… 66
面积
可求~ …… 239
零~ …… 239
~微分 …… 264

N

内部 …… 58, 137

P

判别法
Abel ~ …… 21, 42, 286
Bendixon ~ …… 44
Bertrand ~ …… 8
Cauchy 根值 ~ …… 8
Cauchy (广义重积分) ~ …… 259
Cauchy 积分~ …… 9
Cauchy 凝聚~ …… 9
d'Alembert ~ …… 8, 19
Dedekind ~ …… 27
du Bois Reymond ~ …… 27
Dirichlet ~ …… 21, 42, 286
Dini ~ …… 42
Ermakof ~ …… 38
Frink ~ …… 38
Gauss ~ …… 8
Kummer ~ …… 11
Leibniz ~ …… 20
Lobatchevski ~ …… 38
M ~ …… 42, 286
Raabe ~ …… 8
Sapagof ~ …… 10, 30
Weierstrass ~ …… 42, 286
比较~ …… 6
~的比值形式 …… 7
~的基本形式 …… 6
~的极限形式 …… 7
比值~ …… 8
等价量~ …… 7
对数~ …… 9
对角线~ …… 43
上确界~ …… 42
优级数 (强级数) ~ …… 42
优势~ …… 42
偏导数 …… 167
~的几何意义 …… 167
高阶~, 二阶~ …… 168
平面
法~ …… 209
切~ …… 210

Q

嵌入法 …… 284, 305
区域 …… 139
x 型~, y 型~ …… 245
开~ …… 139
闭~ …… 139
单连通~ …… 322
曲面~ …… 355
曲线
~积分 …… 309
第一型~ …… 309
第二型~ …… 313
~与路径无关 …… 322, 355
可求长~ …… 309
简单~ …… 309
梯度~ …… 316
有向~ …… 313
Peano ~ …… 134, 165
曲面
~单连通区域 (见区域)
~积分 …… 336
第一型~ …… 336
第二型~ …… 340

定向~ ····· 340

S

散度 ····· 371
~定理 ····· 372
~场 ····· 376
三分法 ($\epsilon/3$ 法, 3ϵ 法) ····· 50
三角级数 ····· 79
非 Fourier 级数的~ ····· 100
生成函数 ····· 78
收敛
Cesàro 意义下求和 (~) 39, 77, 91
点~ (点态~, 逐点~) ·· 40, 87, 88
平方平均~ ····· 94
一致~ (见一致收敛)
准一致~ (见一致收敛)

T

特殊函数 ····· 296
梯度 ····· 213
~场 ····· 376
~曲线 ····· 316
通项 ····· 2, 28
同伦 ····· 328
同胚 ····· 202
椭圆
~周长的近似公式 ····· 108–109
第二类完全~积分 (见积分)

W

外积 ····· 357
完备性 (函数系的) ····· 95
微分
外~ ····· 361
全~ ····· 171
~的几何意义 ····· 171
~形式 ····· 358
恰当~ ····· 323
拟~平均值定理 ····· 183
微元法 ····· 262
无穷乘积 ····· 28
e 的~展开 ····· 38
π 的~展开 ····· 29
正弦函数的~展开式 ····· 31

X

系数
幂级数~ (见幂级数)
Fourier ~ (见外文索引)
瑕点 ····· 286
瑕积分 ····· 289
向量
切~ ····· 209
法~ ····· 210
旋度 ····· 372
~场 ····· 376
旋转度 ····· 327
循环常数 ····· 324

Y

压缩映射, ~原理 ····· 161
一致收敛 ····· 40, 79, 95, 107, 286
Cauchy ~准则 ····· 42, 286
关于~的 Fejér 定理 ····· 93
绝对~ ····· 41
内闭~ ····· 41
准~ ····· 53
引理
Lewin ~ ····· 57
Riemann ~ ····· 81, 84, 129
有限交性质 ····· 141–142
余项 ····· 2, 28
Lagrange ~ ····· 215
Peano ~ ····· 215
圆周率 ····· 2, 4–5, 29
~的后现代算法 ····· 118

Z

振幅 ····· 159
正交函数系 ····· 82
蛛网工作法 ····· 48
最小二乘法 ····· 222

外文名词索引 (拉丁字母序)

Abel
~ 变换 …… 21
~ 第一定理, ~ 第二定理 …… 59
~ 定理 …… 12
~ 判别法 …… 21, 42, 286
级数求和的 ~ 方法 …… 112
Abel-Pringsheim 定理 …… 36
Archilles 悖论 …… 1,5
Arzela 控制收敛定理 …… 54
Arzela-Borel 定理 …… 54
Basel 问题 …… 32, 113
Bendixon 判别法 …… 44
Bernoulli 数 …… 71, 115--116
Bernstein 定理 …… 389
Bessel 不等式 …… 83
Bessel 函数 …… 64
B 函数 …… 296
Binet-Lucas 公式 (见 Fibonacci 数列)
Bohr-Mollerup 定理 (见 Γ 函数)
Brouwer 不动点定理 …… 328–329
Cantor 定理 …… 101, 158
Carleman 不等式 …… 16
Catalan 公式 …… 278
Cauchy 乘积
级数的 ~ …… 22
Cauchy 根值判别法 …… 8
Cauchy 积分判别法 …… 9
Cauchy 凝聚判别法 …… 9
Cauchy 判别法 (广义重积分) …… 259
Cauchy 收敛准则 …… 20
Cauchy 一致收敛准则 …… 42, 286
Cauchy-Hadamard 公式 …… 59
Cauchy-Riemann 方程 …… 238
Cesàro 求和 …… 39, 77
Fourier 级数的 ~ …… 91
d'Alembert 比值判别法 …… 8, 19
Dedekind 判别法 …… 27
de la Vallée Poussin 核 …… 105
Dini 定理 …… 286, 291
Dini 判别法 …… 42
Dirichlet 核 …… 87, 88
Dirichlet 积分 …… 87, 291
Dirichlet 级数 …… 75
Dirichlet 判别法 …… 21, 42, 286
du Bois Reymond 定理 …… 12, 100
du Bois Reymond 判别法 …… 27
e 的无穷乘积展开式 …… 38
Ermakof 判别法 …… 38
Euler 积分 …… 109
Euler 数 …… 71
Euler-Fourier 公式 (见 Fourier 系数)
Euler-Gauss 公式 (见 Γ 函数)
Euler-Poisson 积分 …… 291
Fejér 定理 …… 91, 93
Fejér 核 …… 92, 93
Fejér 积分 …… 91–92
Fibonacci 数列 …… 37
~ 的 Binet-Lucas 公式 …… 389
~ 的生成函数 …… 78
Fourier 级数 …… 79
~ 的 Cesàro 求和 …… 91
~ 的点收敛性 …… 87, 88
~ 的平方平均收敛性 …… 94
~ 的惟一性 …… 93
~ 的一致收敛性 …… 79, 95
~ 的逐项积分 …… 96
~ 的逐项求导 …… 97
非 ~ 的三角级数 …… 100
系数单调的 ~ …… 99
Fourier 系数 …… 79

~ 的 Euler-Fourier 公式 …… 79
~ 的渐近性质 …… 81
~ 的几何意义 …… 82
~ 的最优性 …… 83
Frink 判别法 …… 38
Γ 函数 …… 32, 297
~ 的 Bohr-Mollerup 定理 …… 301
~ 的 Euler-Gauss 公式 …… 33
~ 的 Legendre 加倍公式 297, 302
~ 的 Weierstrass 公式 …… 33
~ 的两个定义的等价性 …… 110
~ 的余元公式 …… 33, 297, 302
Gauss 公式 …… 347
Gauss 判别法 …… 8
Gibbs 现象 …… 89
Green
~ 公式 …… 318
第一 ~ 恒等式 …… 377–378
第二 ~ 恒等式 …… 382
Hadamard 定理 …… 203
Hadamard 不等式 …… 237
Hardy 不等式 …… 17
Hesse 矩阵 …… 216
Hölder 不等式 …… 270, 276
Kepler 方程 …… 188
Kummer 判别法 …… 11
Landau 核 …… 121–123
Legendre 加倍公式 (见 Γ 函数)
Leibniz 判别法 …… 20
Leibniz 型级数 …… 20
Lewin 引理 …… 57
Lobatchevski 判别法 …… 38
M-判别法 …… 42, 286
Maclaurin 级数 …… 65
Mertens 定理 …… 23
Minkowski 不等式 …… 276
Osgood 定理 …… 54
Parseval 等式 …… 94
~ 的推广 …… 95
Peano 曲线 …… 133, 165
p-级数 (p 次幂的调和级数) …… 3, 13
Poincaré 不等式 …… 275–276
Poisson 积分公式 …… 381
Raabe 判别法 …… 8
Riemann 重排定理 …… 22, 25
Riemann 的 zeta-函数 …… 75, 112, 300
Riemann 引理 …… 81, 84, 129
Rolle 定理 …… 233
Sanderson 中值定理 …… 237
Sapagof 判别法 …… 10, 30
Steklov 不等式 …… 104
Steklov 函数 …… 389
Stirling 公式 …… 34, 303
Stone-Weierstrass 定理 …… 127
Stokes 公式 …… 352
一般的 ~ …… 363-364
Tauber 定理 …… 62
Taylor 级数 …… 65
Taylor 公式 …… 215
Vandermonde 恒等式 …… 78
van der Waerden 函数 …… 132
Viète 公式 …… 29
Visser 定理 …… 47
Viviani 体 …… 274, 314, 339
Wallis 公式 …… 29
Weierstrass 逼近定理 47, 103, 105, 119
~ 的 Bernstein 证明 …… 123
~ 的 Cohen 证明 …… 125
~ 的 Korovkin 证明 …… 125
~ 的 Landau 证明 …… 121, 123
~ 的 Lebesgue 证明 …… 127
高维空间中的 ~ …… 328
Weierstrass 公式 (见 Γ 函数)
Weierstrass 函数 …… 131
Weierstrass 判别法 …… 42, 286
Wirtinger 不等式 …… 104, 276