中国科学院大学本科生教材系列

# 数学分析讲义

（第一卷）

丁彦恒 刘笑颖 吴 刚 编

科学出版社

中国科学院大学教材出版中心资助
中国科学院大学本科生教材系列

# 数学分析讲义

## (第一卷)

丁彦恒　刘笑颖　吴　刚　编

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书始于实数的基本理论. 接着进入一元微积分学, 包括极限、连续、级数、微分、复数、积分等, 重视它对现代数学的启迪, 适时介绍些抽象概念(如对基的极限), 以益于拓展到一般分析学. 其次探讨拓扑空间(特别是度量空间、欧氏空间 $\mathbb{R}^n$)的映射, 展开多元微积分学, 其中涉及隐函数定理、集合上的积分、流形(特别是 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面)及微分形式、流形(特别是曲线与曲面)上微分形式的积分、向量分析与场论. 继而研究线性赋范空间中的微分学、函数项级数与函数族的基本分析运算、含参变量的积分(特别是函数的卷积与广义函数等)、傅里叶变换、渐近展开等.

全书分 3 卷出版. 第一、二卷大体上适合那些仅安排在 1 学年时间里学习"数学分析"课程的学生, 而全套则可用以安排 3 个或 4 个学期的"数学分析"课程.

**图书在版编目(CIP)数据**

数学分析讲义. 第一卷/丁彦恒, 刘笑颖, 吴刚编. —北京: 科学出版社, 2018.12

ISBN 978-7-03-058364-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①丁… ②刘… ③吴… Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 167690 号

责任编辑: 胡庆家 张茂发 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 12 月第一次印刷 印张: 18 1/4
字数: 351 000

**定价: 68.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前　言

本书是编者授课 “数学分析” 的讲义. 它形成于教学实践中, 特别是在与中国科学院大学 2014 级、2016 级、2017 级 (本科)、北京师范大学 2017 级 (励耘班) 的同学们一道学习由华东师范大学数学系[①]、卓里奇 B A[②] 分别编著的《数学分析》的过程中. 为了缓解同学们边听课边做笔记而引发的忙碌, 应他们的建议, 基本上沿用上述两书的框架和内容, 师生互动组稿成书.

全书分 3 卷出版. 第一、二卷大体上适合那些仅安排在 1 学年时间里学习 “数学分析” 的学生, 而全套则可用以安排 3 个或 4 个学期的 “数学分析” 课程. 本书由中国科学院大学教材出版中心资助.

丁彦恒

2018 年 1 月于北京

① 华东师范大学数学系. 数学分析. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

② 卓里奇 B A. 数学分析 (第一卷、第二卷). 第 4 版. 蒋铎, 王昆扬, 周美珂, 邝荣雨译, 周美珂校. 北京: 高等教育出版社, 2012.

# 一些符号与记号

这里列出书中涉及的一些逻辑符号、某些常用记号以及数学命题的逻辑结构.

1. 逻辑符号

(a) $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 分别表示: 非、且、或、蕴含、等价. 规定优先次序: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. 如:

(1) $A \wedge B$ 表示 $A$ 与 $B$ 同时成立.

(2) $A \vee B$ 表示只要 $A, B$ 中有一个为真, $A \vee B$ 就正确.

(3) $A \Rightarrow B$ 表示 "$A$ 蕴含 $B$", 或者 "$B$ 由 $A$ 推出".

(4) $A \Leftrightarrow B$ 表示 $A$ 蕴含 $B$, 同时 $B$ 蕴含 $A$.

(5) $A \vee B \Rightarrow C$ 表示 $(A \vee B) \Rightarrow C$, 而非 $A \vee (B \Rightarrow C)$.

(6) $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ 表示 $(((\neg A) \wedge B) \vee C) \Rightarrow D$.

(b) $\exists$ 表示 "存在" 或 "找到"; $\exists!$ 表示 "存在唯一的", $\forall$ 表示 "任给" 或 " 对于任何的".

2. 某些专门记号

(a) 符号 $\square$ 表示证明结束.

(b) 记号 $:=$ (据定义等于) 引进定义, 其中两点放在被定义的对象一边. 例如, 式子

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi)$$

是用右端定义左端, 而右端的含义认为是已知的. 而对于已有定义的式子, 也用这个记号引进简缩记法. 例如, 式子

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =: \sigma(f; P, \xi)$$

就是引进记号 $\sigma(f; P, \xi)$ 表示左端的专门和式.

(c) $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{C}$ 分别表示实数集、自然数集、整数集、有理数集以及复数集.

(d) $\mathbb{R}^n := \{x = (x^1, \cdots, x^n) \,|\, x^k \in \mathbb{R}, k = 1, \cdots, n\}$.

3. 关于数学命题的逻辑结构

(a) 复杂的命题的表示及其写法, 都可归结为完成下面的初等逻辑运算:

(1) 在某些命题之前放上否定号并把所得结果用括号括起来作成新命题.

(2) 在两个命题间放上必有的连接词 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ 等, 再把结果括起来作成新命题.

(3) 构成命题 "对任何 $x$ 都有性质 $P$"(写成 $\forall x P(x)$) 或构成命题 "存在具有性质 $P$ 的 $x$"(写成 $\exists x P(x)$).

例如, $\exists x((P(x)) \wedge (\forall(y(P(y)) \Rightarrow (y = x))))$, 它表示:
存在那样的客体 $x$, 它具有性质 $P$, 并且, 如果 $y$ 是具有性质 $P$ 的任何客体, 那么 $y = x$. 实际上就是存在唯一的客体 $x$ 具有性质 $P$, 简记为 $\exists! x P(x)$, 今后我们将会利用这一简记法.

(b) 约定相关符号的逻辑运算的顺序为: $=, \exists, \forall, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$. 例如,

$$\exists! x P(x) := \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y = x)).$$

(c) 还约定:

$(\forall x \in X)P := \forall x(x \in X \Rightarrow P(x))$,

$(\exists x \in X)P := \exists x(x \in X \wedge P(x))$,

$(\forall x > a)P := \forall x(x \in \mathbb{R} \wedge x > a \Rightarrow P(x))$,

$(\exists x > a)P := \exists x(x \in \mathbb{R} \wedge x > a \wedge P(x))$.

(d) 为了叙述简洁, 常把 "使得" 简写为 " s. t.".

(e) 关于构造含有量词的命题的否命题的法则:

(1) 命题 "有 $x$ 使 $P(x)$ 成立" 的否定, 就是 "对于任何 $x$, $P(x)$ 不成立";

(2) 命题 "对于任何 $x$, $P(x)$ 成立" 的否定, 则是 "存在 $x$, 使 $P(x)$ 不成立".

于是

$$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x); \quad \neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x).$$

4. 函数 (映射)

(a) 映射 $f : X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$, 其中: $X, Y$ 记两个集合, $f$ 表示规律, 按照它, $\forall x \in X$ 有确定的元素 $y \in Y$ 与之对应. 称 $D(f) = X$ 为定义域, $f(Y) := \{y \in Y \,|\, \exists x \in X, \text{s.t.}\, y = f(x)\}$ 为 $X$ 的像.

(1) 单射: 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$ 有 $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$;

(2) 满射: 如果 $f(X) = Y$.

(3) 双射 (或一一映射): 如果 $f$ 既是单射又是满射.

(4) 逆映射: 若 $f : X \to Y$ 是单射, 则可用关系 $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$ 定义映射 $f^{-1} : Y \supset f(X) \to X$, 称其为 $f$ 的逆映射.

(5) 复合映射: 若 $f : X \to Y$ 与 $g : Y \to Z$, 且 $f(Y) \subset D(g)$, 则可用公式 $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ 定义映射 $g \circ f : X \to Z$, 并称 $g \circ f$ 为复合映射.

(b) *函数*. 如果 $X$ 与 $Y$ 都是实数域 $\mathbb{R}$ 的子集, 常称映射 $f$ 为 (实变量) 实值函数 (简称函数).

(1) *基本初等函数*:

常量函数 $y=c$ ($c$ 是常数); 幂函数 $y=x^{\alpha}$ ($\alpha$ 是实数);

指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0, a\neq 1$); 对数函数 $y=\log_{a} x$ ($a>0, a\neq 1$);

正弦函数 $y=\sin x$; 余弦函数$y=\cos x$;

正切函数 $y=\tan x$; 余切函数$y=\cot x$;

反正弦函数 $y=\arcsin x$; 反余弦函数$y=\arccos x$;

反正切函数 $y=\arctan x$; 反余切函数$y=\operatorname{arccot} x$.

(2) *初等函数*: 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数.

# 目　录

前言
一些符号与记号
第 1 章　实数 ····· 1
1.1　实数集的公理系统及它的某些一般性质 ····· 1
1.1.1　实数集的定义 ····· 1
1.1.2　实数的某些代数性质 ····· 3
1.1.3　确界原理 ····· 6
1.2　重要的实数类 ····· 8
1.2.1　自然数与数学归纳原理 ····· 8
1.2.2　有理数与无理数 ····· 10
1.2.3　阿基米德原理 ····· 13
1.2.4　实数集的几何解释与位置记数法 ····· 15
1.3　与实数集的完备性有关的等价引理 ····· 21
1.4　可数集与连续统 ····· 25
1.4.1　集的势 (基数) ····· 25
1.4.2　可数集 ····· 25
1.4.3　连续统的势 ····· 27
第 2 章　极限 ····· 30
2.1　序列的极限 ····· 30
2.1.1　定义和例子 ····· 30
2.1.2　数列极限的性质 ····· 31
2.1.3　数列极限的存在问题 ····· 34
2.1.4　级数的初步知识 ····· 41
2.2　函数的极限 ····· 51
2.2.1　定义和例子 ····· 51
2.2.2　函数极限的性质 ····· 55
2.2.3　函数极限的一般定义 (对基的极限) ····· 59
2.2.4　函数极限的存在问题 ····· 62
2.2.5　根据极限理论定义指数函数、对数函数与幂函数 ····· 65
2.2.6　两个重要极限 ····· 70

2.2.7 函数的渐近行为比较 ····· 75
**第 3 章 连续函数** ····· 85
3.1 基本定义和例子 ····· 85
3.1.1 函数在一点处的连续性 ····· 85
3.1.2 间断点 ····· 89
3.2 连续函数的性质 ····· 92
3.2.1 局部性质 ····· 92
3.2.2 全局 (整体) 性质 ····· 93
**第 4 章 微分学** ····· 104
4.1 可微函数 ····· 104
4.1.1 导数和微分 ····· 104
4.1.2 切线; 导数和微分的几何意义 ····· 106
4.1.3 一些例子 ····· 108
4.2 微分的基本法则 ····· 114
4.2.1 微分法和算术运算 ····· 114
4.2.2 反函数的微分法 ····· 117
4.2.3 复合函数的微分法 ····· 121
4.2.4 基本初等函数的导数表 ····· 123
4.2.5 高阶导数 ····· 124
4.2.6 最简单的隐函数的微分法 ····· 127
4.3 微分学的基本定理 ····· 132
4.3.1 费马引理和罗尔定理 ····· 132
4.3.2 拉格朗日和柯西的微分中值定理 ····· 134
4.3.3 泰勒公式 ····· 137
4.4 用微分学的方法研究函数 ····· 151
4.4.1 函数单调的条件 (参看函数单调性检验法) ····· 151
4.4.2 函数内极值点条件 ····· 152
4.4.3 函数凸的条件 ····· 157
4.4.4 洛必达法则 ····· 163
4.4.5 作函数的图像 ····· 166
4.5 复数　初等函数彼此间的联系 ····· 172
4.5.1 复数 ····· 172
4.5.2 $\mathbb{C}$ 中的收敛及复数项级数 ····· 175
4.5.3 欧拉公式以及初等函数彼此间的联系 ····· 179
4.5.4 函数的幂级数表示, 解析性 ····· 182

4.5.5 复数域 $\mathbb{C}$ 的代数封闭性 ····· 187
4.6 自然科学中应用微分学的一些例子 ····· 195
4.6.1 齐奥尔科夫斯基公式 ····· 195
4.6.2 放射衰变、连锁反应及原子反应堆 ····· 196
4.6.3 振动 ····· 198
**第 5 章 积分学** ····· 201
5.1 原函数与不定积分 ····· 201
5.1.1 概念 ····· 201
5.1.2 求原函数的基本的一般方法 ····· 202
5.1.3 有理函数的原函数 ····· 207
5.1.4 $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ 型的原函数 ····· 211
5.1.5 $\int R(x, y(x))\mathrm{d}x$ 型的原函数 ····· 213
5.2 定积分 ····· 219
5.2.1 积分定义和可积函数集的描述 ····· 219
5.2.2 积分的性质 ····· 233
5.2.3 积分和导数 ····· 242
5.2.4 定积分的一些应用 ····· 253
5.2.5 反常积分 ····· 266

# 第1章 实 数

人猿揖别后, 人类就在使用数, 并在随后的历史发展长河中, 约定俗成了数的规则, 这规则就是现在所谓的关于数的公理. 进入数学科学领域, 自然要知道究竟什么是数. 本章起首就是回忆关于实数的一个确切的定义.

## 1.1 实数集的公理系统及它的某些一般性质

### 1.1.1 实数集的定义

这里采用抽象公理系统的形式给出实数集的定义, 这个定义形式上并不假定事先知道关于数的任何知识. 从这个定义出发, 可把人们通常熟悉的实数的其他性质作为定理推导出来.

**定义 1** 称集合 $\mathbb{R}$ 是一个*实数集*, 如果其上定义了加法运算“$+$”、乘法运算“$\cdot$”和序关系“$\leqslant$”, 它们满足*实数集的公理系统*: (Ⅰ) *加法公理*、(Ⅱ) *乘法公理*、(Ⅲ) *序公理*、(Ⅳ) *完备 (连续) 公理*以及(Ⅰ, Ⅱ) *加法与乘法的联系*、(Ⅰ, Ⅲ) *加法与序关系的联系*、(Ⅱ, Ⅲ) *乘法与序关系的联系*. 此时称 $\mathbb{R}$ 的元素为*实数*.

下面具体描述实数集公理系统.

(Ⅰ) **加法公理** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x+y$ (称为 $x,y$ 之和), 满足:

$1_+$ ($\exists$ *零元*) 有中性元 0 (加法零元), 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$x+0=0+x=x;$$

$2_+$ ($\exists$ *负元*) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists -x\in\mathbb{R}$, 叫做 $x$ 的负元, 使得

$$x+(-x)=(-x)+x=0;$$

$3_+$ (*结合律*) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, 成立

$$x+(y+z)=(x+y)+z;$$

$4_+$ (*交换律*) $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 成立

$$x+y=y+x.$$

(Ⅱ) **乘法公理** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x\cdot y$ (称为 $x,y$ 之积), 满足:

1. (∃ 单位元) 存在单位元 $1 \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x;$$

2. (∃ 逆元) 每个元 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 有逆元 $x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 使得

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$$

3. (结合律) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, 成立

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

4. (交换律) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 成立

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(III) **序公理**　$\mathbb{R}$ 的元素间有 (不等) 关系 $\leqslant$, 满足下列条件:

$0_{\leqslant}$ (反身性) $\forall x \in \mathbb{R}$ $(x \leqslant x)$;

$1_{\leqslant}$ (反对称性) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$;

$2_{\leqslant}$ (传递性) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$;

$3_{\leqslant}$ (有序性) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$.

(IV) **完备 (连续) 公理**　如果 $X$ 与 $Y$ 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 且具有性质: $\forall x \in X, y \in Y$ 有 $x \leqslant y$, 则 $\exists c \in \mathbb{R}$, 使对 $\forall x \in X, y \in Y$ 有 $x \leqslant c \leqslant y$.

(I,II) **加法与乘法的联系** (分配性)

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(I,III) **加法与序关系的联系**

$$(x \leqslant y) \ \Rightarrow \ (x + z \leqslant y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(II,III) **乘法与序关系的联系**

$$(0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y) \ \Rightarrow \ (0 \leqslant x \cdot y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

任何满足这些公理系统的集合都是实数集的具体实现, 或通常所说的实数模型. 需要强调的是这组公理所确定的数学对象是唯一的. 所谓唯一须作如下理解: 设 $\mathbb{R}_A$ 和 $\mathbb{R}_B$ 是两个满足公理系统的模型, 则可建立双射 $f : \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}_B$, 它保持算术运算与序关系, 即

$$\begin{aligned} &f(x + y) = f(x) + f(y), \\ &f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \\ &x \leqslant y \ \Leftrightarrow \ f(x) \leqslant f(y). \end{aligned}$$

这时, 从数学的观点来看, $\mathbb{R}_A$ 与 $\mathbb{R}_B$ 只是实数的不同的 (完全平等的) 实现 (模型)(例如, $\mathbb{R}_A$ 是无穷十进制小数, 而 $\mathbb{R}_B$ 是数轴上的点). 这些实现叫做同构实现, 而 $f$ 则叫做同构. 于是, 数学研究的结果对该公理系统的同构模型类中的每个模型都是适用的.

**注 1** (1) 如果集 $G$ 上确定了满足公理 $1_+, 2_+, 3_+$ 的一个运算, 则称 $G$ 是一个*群*; 若称此运算为加法, 则称 $G$ 为*加群*; 若此运算又是交换的 (即 $4_+$), 则称 $G$ 为*交换群* (*或阿贝尔群*).

(2) 如果集 $G$ 上同时确定了上述加法和乘法运算, 则称它为*代数域* (*简称域*).

(3) 如果集 $G$ 的某些元素之间有满足公理 $0_\leqslant, 1_\leqslant, 2_\leqslant$ 的关系, 就称此 $G$ 为*偏序集*; 若除此外又满足 $3_\leqslant$, 则称 $G$ 为*线性序集*.

### 1.1.2 实数的某些代数性质

1. *加法公理的推论*

加法公理的推论如下:

(1) 实数集中有唯一的零元.

(2) 实数集中的每个元素有唯一的负元.

(3) 方程 $a+x=b$ 在 $\mathbb{R}$ 中有唯一解 $x=b+(-a)$.

**证** (1) 若 $0_1$ 与 $0_2$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的零元, 则由零元的定义得到

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

(2) 若 $x_1$ 与 $x_2$ 都是 $x \in \mathbb{R}$ 的负元, 则利用零元的定义、负元的定义及加法的结合律与交换律, 得到

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 \\ &= x_2 + (x_1 + x) = x_2 + 0 = x_2. \end{aligned}$$

(3) 由每个元 $a \in \mathbb{R}$ 有唯一的负元得到

$$\begin{aligned} a + x = b &\Leftrightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a) \\ &\Leftrightarrow x + (a + (-a)) = b + (-a) \\ &\Leftrightarrow x + 0 = b + (-a) \Leftrightarrow x = b + (-a). \end{aligned}$$

□

2. *乘法公理的推论*

乘法公理的推论如下:

(1) 实数集中有唯一的单位元.

(2) 对于每个数 $x \neq 0$, 有唯一的逆元 $x^{-1}$.

(3) 方程 $a \cdot x = b$, 当 $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 时有唯一解 $x = b \cdot a^{-1}$.

以上结论的证明与加法的相应结论证明类似, 读者可自行证明.

3. 加法与乘法联系的公理的推论

加法与乘法联系的公理的推论如下:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

由此得到, 如果 $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, 则 $x^{-1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(2) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-x = (-1)x.$$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(-1)(-x) = x.$$

(5) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(-x)(-x) = x \cdot x.$$

**证**　(1) $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ 蕴含

$$0 = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0.$$

(2) 假如 $y \neq 0$, 则由关于 $x$ 的方程 $xy = 0$ 的解的唯一性得 $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$.

(3) 由于 $x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, 再由负元的唯一性即得所证.

(4) 由 (3) 及 $-x$ 的负元 $x$ 的唯一性得, 即 $(-1)(-x) = -(-x)$, 而 $-(-x) = x$, 得证.

(5) 由 (3), (4) 及乘法的交换律与结合律有

$$(-x)(-x) \overset{(3)}{=} ((-1) \cdot x)(-x) = (x \cdot (-1))(-x) = x((-1)(-x)) \overset{(4)}{=} x \cdot x. \qquad \square$$

4. 序公理的推论

首先注意, 关系 $x \leqslant y$ (读作 "$x$ 小于或等于 $y$") 也可以写成 $y \geqslant x$("$y$ 大于或等于 $x$"); 当 $x \neq y$ 时, 关系 $x \leqslant y$ 写成 $x < y$ (读作 "$x$ 小于 $y$") 或 $y > x$("$y$ 大于 $x$"), 并称之为严格不等式.

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 在

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

中, 有且仅有一种关系成立. 即实数是有序的.

(2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x < y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x < z),$$

$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

**证** (1) 这由刚引入的严格不等式的定义, 以及公理 $1_{\leqslant}$ 与 $3_{\leqslant}$ 推知.

(2) 先证第一个推断. 由传递性推知

$$(x<y)\wedge(y\leqslant z)\Leftrightarrow(x\leqslant y)\wedge(y\leqslant z)\wedge(x\neq y)\Rightarrow(x\leqslant z).$$

往证 $x\neq z$. 若不然, 就有

$$\begin{aligned}(z<y)\wedge(y\leqslant z)&\Leftrightarrow(z\leqslant y)\wedge(y\leqslant z)\wedge(z\neq y)\\&\Leftrightarrow(z=y)\wedge(y\neq z),\end{aligned}$$

矛盾.

再证第二个推断. 类似地, 先推知 $x\leqslant z$. 若 $x=z$, 则

$$(x\leqslant y)\wedge(y<z)\Leftrightarrow(z\leqslant y)\wedge(y\leqslant z)\wedge(y\neq z).$$

从而推得 $(y=z)\wedge(y\neq z)$, 矛盾. □

5. *序与加法及乘法联系的公理的推论*

序与加法及乘法联系的公理的推论如下:

(1) $\forall x,y,z,w\in\mathbb{R}$,

$$(x<y)\Rightarrow(x+z)<(y+z),$$

$$(0<x)\Rightarrow(-x<0),$$

$$(x\leqslant y)\wedge(z\leqslant w)\Rightarrow(x+z\leqslant y+w),$$

$$(x\leqslant y)\wedge(z<w)\Rightarrow(x+z<y+w).$$

(2) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$,

$$(0<x)\wedge(0<y)\Rightarrow(0<xy),$$

$$(x<0)\wedge(y<0)\Rightarrow(0<xy),$$

$$(x<0)\wedge(0<y)\Rightarrow(xy<0),$$

$$(x<y)\wedge(0<z)\Rightarrow(xz<yz),$$

$$(x<y)\wedge(z<0)\Rightarrow(yz<xz).$$

(3) $0<1$.

(4) $0<x\Rightarrow 0<x^{-1}$, 且 $(0<x)\wedge(x<y)\Rightarrow(0<y^{-1})\wedge(y^{-1}<x^{-1})$.

**证** (1) 仅证第一、三两个推断. 关于第一个, 按严格不等式的定义及公理 (I, III), 得

$$(x<y)\Rightarrow(x\leqslant y)\Rightarrow(x+z\leqslant y+z).$$

只需验证 $x+z \neq y+z$. 事实上,

$$(x+z=y+z) \Rightarrow (x=(y+z)-z=y+(z-z)=y),$$

与 $x<y$ 矛盾.

关于第三个推断. 由 $x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$; $z \leqslant w \Rightarrow z+y \leqslant w+y$. 再由传递性得 $x+z \leqslant w+y$.

(2) 我们只验证第一个与第三个推断.

关于第一个, 据严格不等式的定义及公理 (II, III), 有

$$(0<x) \wedge (0<y) \Rightarrow (0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y) \Rightarrow 0 \leqslant xy.$$

由于前已证明

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x=0) \vee (y=0),$$

所以 $0 \neq xy$.

再验证第三个.

$$\begin{aligned}(x<0) \wedge (0<y) &\Rightarrow (0<-x) \wedge (0<y)\\ &\Rightarrow 0<(-x)\cdot y \Rightarrow 0<((-1)\cdot x)y\\ &\Rightarrow 0<(-1)\cdot(xy) \Rightarrow 0<-(xy)\\ &\Rightarrow xy<0.\end{aligned}$$

(3) 由 $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 知 $0 \neq 1$. 假如 $1<0$, 则由 (2) 有

$$(1<0) \wedge (1<0) \Rightarrow 0<1\cdot 1 \Rightarrow 0<1.$$

矛盾. 故必 $0<1$.

(4) 首先由 $0<x$ 知 $x^{-1} \neq 0$. 假如 $x^{-1}<0$, 则有

$$(x^{-1}<0) \wedge (0<x) \Rightarrow x \cdot x^{-1} < 0 \Rightarrow 1<0.$$

此与 (3) 矛盾. □

通常, 我们称大于零的实数为正数, 小于零的数为负数. 因此我们证明了: 单位元是正数, 正数与负数的乘积是负数, 正数的倒数也是正数.

### 1.1.3　确界原理

**定义 2**　设 $X \subset \mathbb{R}$. 若存在一数 $c \in \mathbb{R}$, 使对一切 $x \in X$ 都满足 $x \leqslant c\,(c \leqslant x)$, 则称集合 $X$ 是上 (下) 有界集. 此时数 $c$ 就称为 $X$ 的一个上 (下) 界. 既有上界又有下界的集合叫做有界集.

**定义 3** 元素 $a \in X$ 叫做 $X \subset \mathbb{R}$ 的**最大元或极大元(最小元或极小元)**, 如果对于一切 $x \in X$ 有 $x \leqslant a$ (或 $a \leqslant x$).

极大元与极小元常形式地表示为

$$(a = \max X) := (a \in X \wedge \forall x \in X(x \leqslant a)),$$

$$(a = \min X) := (a \in X \wedge \forall x \in X(a \leqslant x)).$$

有时也记 $\max X = \max\limits_{x \in X} x$ 和 $\min X = \min\limits_{x \in X} x$.

由序公理 $1_{\leqslant}$ 可知, 若一个数集有极大 (小) 元, 则它只有一个. 对于任何一个集合, 即使是有界的, 也未必一定有极大元 (极小元). 例如, $X = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x < 1\}$ 有极小元, 但无极大元.

**定义 4** 集合 $X$ 的上 (下) 界中的最小 (大) 者称为 $X$ 的**上确界 (下确界)**, 记作 $\sup X$ 或 $\sup\limits_{x \in X} x$(记作 $\inf X$ 或 $\inf\limits_{x \in X} x$).

用符号表示为

$$(s = \sup X) := \forall x \in X((x \leqslant s) \wedge (\forall s' < s\, \exists x' \in X(s' < x'))).$$

$$(i = \inf X) := \forall x \in X((i \leqslant x) \wedge (\forall i < i'\, \exists x' \in X(x' < i'))).$$

等价地:

$\sup X := \min\{c \in \mathbb{R} | \forall x \in X(x \leqslant c)\}$ —— 上界中的最小者.

$\inf X := \max\{c \in \mathbb{R} | \forall x \in X(c \leqslant x)\}$ —— 下界中的最大者.

**定理 1** (确界原理) 实数集的任何非空有上界 (下界) 的子集有唯一的上确界 (下确界).

**证** 仅证上确界情形 (下确界情形类似). 因为我们已经知道了数集最小元的唯一性, 所以只要证明上确界的存在性即可.

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是给定的子集, 而 $Y = \{y \in \mathbb{R} | \forall x \in X(x \leqslant y)\}$ 是 $X$ 的上界构成的集合. 由题设 $X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$. 根据完备公理, 存在数 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in X, \forall y \in Y(x \leqslant c \leqslant y)$. 因此数 $c$ 是 $X$ 的上界, 也是 $Y$ 的下界. 作为 $X$ 的上界, $c$ 是 $Y$ 中的元素, 而作为 $Y$ 的下界, $c$ 是 $Y$ 的极小元. 于是 $c = \min Y = \sup X$. □

看一个例子: $X = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x < 1\}$. 由所证的引理, 它应有上确界. 显然 $\sup X \leqslant 1$. 为了证明 $\sup X = 1$, 必须验证对任何数 $q < 1$, 能找到数 $x \in X$, 使得 $q < x$, 简单地说就是 $q$ 与 1 之间还有数 (证明这一点很容易, 例如, 可以证明

$$q < 2^{-1}(q + 1) < 1).$$

至于下确界, 则当集合有极小元时, 它的下确界与集合的极小元一致. 把刚才的这一判断用到我们的例子里, 就得到 $\inf X = 0$.

## 1.2　重要的实数类

### 1.2.1　自然数与数学归纳原理

1. 自然数集的定义

**定义 1**　如果对于集合 $X \subset \mathbb{R}$ 的每个数 $x \in X$, 同时有 $x+1 \in X$, 就称 $X$ 为一个归纳集.

例如, $\mathbb{R}$ 是归纳集; 所有正数之集 (记作 $\mathbb{R}^+$) 也是归纳集; 任意多个归纳集 $X_\alpha$ 之交 $X = \bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, 如果不空, 也是归纳集, 事实上,

$$\begin{aligned}\left(x \in \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\right) &\Rightarrow \left(\forall \alpha \in A(x \in X_\alpha)\right)\\ &\Rightarrow \left(\forall \alpha \in A(x+1 \in X_\alpha)\right)\\ &\Rightarrow \left(x+1 \in \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = X\right).\end{aligned}$$

现在引进下面的定义.

**定义 2**　包含数 1 的最小的归纳集, 即含数 1 的一切归纳集之交叫自然数集.

自然数集用 $\mathbb{N}$ 表示, 它的元素叫自然数. 例如, $1, 1+1, (1+1)+1$ 等就是自然数.

2. 数学归纳原理

如果 $E$ 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的子集, $1 \in E$, 并且当 $x \in E$ 时, $x+1 \in E$, 那么 $E = \mathbb{N}$. 用符号表示为

$$(E \subset \mathbb{N}) \wedge (1 \in E) \wedge (\forall x \in E(x \in E \Rightarrow (x+1) \in E)) \Rightarrow E = \mathbb{N}.$$

下面证明自然数的一些基本性质.

**定理 1**　自然数具有下述性质:

(1) 自然数的和与积是自然数.

(2) $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow ((n-1) \in \mathbb{N})$; 作为其推论之一有 $\min \mathbb{N} = 1$.

(3) 对于任何 $n \in \mathbb{N}$, 集合 $\{x \in \mathbb{N} \,|\, n < x\}$ 有极小元, 并且

$$\min\{x \in \mathbb{N} \,|\, n < x\} = n+1.$$

(4) $(m \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1 \leqslant m)$.

(5) 数 $(n+1)\in\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 中紧跟着 $n$ 的一个自然数, 即没有任何自然数 $x$ 能满足条件 $n<x<n+1$.

(6) 如果 $n\in\mathbb{N}$, 且 $n\neq 1$, 那么数 $n-1\in\mathbb{N}$, 并且它是 $\mathbb{N}$ 中在 $n$ 前面的紧挨着 $n$ 的自然数, 即没有任何自然数 $x$ 能满足条件 $n-1<x<n$.

(7) 自然数集的任何非空子集有最小元.

(8) 自然数集的任何非空有界集必有最大元.

(9) 自然数集没有上界.

**证** (1) 设 $m,n\in\mathbb{N}$, 欲证 $(m+n)\in\mathbb{N}$. 令

$$E=\{n\in\mathbb{N}:\ m+n\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{N}\}.$$

则 $1\in E$. 事实上, 因 $\mathbb{N}$ 是归纳集, $\forall m\in\mathbb{N}$ 必有 $m+1\in\mathbb{N}$. 假设 $n\in E$, 则 $n+m\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{N}$, 从而 $(n+1)+m=n+(1+m)\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{N}$, 故 $n+1\in E$. 由归纳原理知 $E=\mathbb{N}$. 这证明了加法不会超出 $\mathbb{N}$ 的范围.

类似地, 用 $E$ 表示那些自然数 $n$ 之集, 对任何 $m\in E$ 有 $(m\cdot n)\in\mathbb{N}$. 于是 $1\in\mathbb{N}$, 这因为 $m\cdot 1=m$; 另外, 如果 $n\in E$, 从而 $m\cdot n\in\mathbb{N}$, 那么 $m\cdot(n+1)=mn+m$ 是二自然数之和, 据刚才已证明了的断言, 它属于 $\mathbb{N}$, 于是据归纳原理 $E=\mathbb{N}$.

(2) 考察 $\mathbb{N}$ 的子集

$$E=\{m=n-1:\ 1\neq n\in\mathbb{N}\},$$

往证 $E=\mathbb{N}$.

因为 $1\in\mathbb{N}$, 所以 $2:=(1+1)\in\mathbb{N}$, 而这表明 $1=2-1\in E$.

如果 $m\in E$, 那么 $m=n-1$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, 此时 $m+1=(n+1)-1$, 由 $(n+1)\in\mathbb{N}$ 有 $m+1\in E$. 据归纳原理 $E=\mathbb{N}$.

最后, 由 $\mathbb{N}$ 的定义及 $\mathbb{R}^+$ 是归纳集的事实知 $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}^+$, 换言之 $n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 故 $\forall n\in\mathbb{N}$ 成立 $0\leqslant n-1$, 即 $n\geqslant 1$. 因此 $\min\mathbb{N}=1$.

(3) 对任何 $n\in\mathbb{N}$, 记 $\mathbb{N}_{>n}=\{x\in\mathbb{N}:\ x>n\}$. 令

$$E=\{n\in\mathbb{N}:\ \min\mathbb{N}_{>n}=n+1\}.$$

我们来证 $E=\mathbb{N}$.

首先验证 $1\in E$, 即 $\min\mathbb{N}_{>1}=2$. 为此, 令

$$M=\{x\in\mathbb{N}:\ (x=1)\vee(2\leqslant x)\}.$$

据 $M$ 的定义, $1\in M$. 又如果 $x\in M$, 那么或者 $x=1$, 此时 $x+1=2\in M$; 或者 $2\leqslant x$, 此时 $2\leqslant(x+1)$, 从而仍得到 $(x+1)\in M$. 于是 $M=\mathbb{N}$. 这表明, 如果 $(x\neq 1)\wedge(x\in\mathbb{N})$, 那么 $2\leqslant x$, 这实际上就是 $\min\mathbb{N}_{>1}=2$. 因此 $1\in E$.

现在来证如果 $n \in E$, 那么 $n+1 \in E$.

首先, 注意若 $x \in \mathbb{N}_{>(n+1)}$, 则 $(x-1) = y \in \mathbb{N}_{>n}$. 因为已经证明了所有自然数都不小于 1, 所以 $(n+1 < x) \Rightarrow (1 < x) \Rightarrow x \neq 1$. 据 (2) 得 $(x-1) = y \in \mathbb{N}$.

现在设 $n \in E$, 亦即 $\min \mathbb{N}_{>n} = n+1$. 这时, $x - 1 = y \geqslant n+1$, 即 $x \geqslant n+2$, 也就是说

$$(x \in \mathbb{N}_{>(n+1)}) \Rightarrow (x \geqslant n+2),$$

所以 $\min \mathbb{N}_{>(n+1)} = n+2$, 即 $n+1 \in E$. 据归纳原理 $E = \mathbb{N}$.

性质 (4), (5), (6) 都是 (2) 及 (3) 的直接推论.

(7) 设 $M \subset \mathbb{N}$. 如果 $1 \in M$, 则因 $\forall n \in \mathbb{N}(1 \leqslant n)$, 所以 $\min M = 1$. 今设 $1 \notin M$, 即 $1 \in E = \mathbb{N} \backslash M$, 必能找到自然数 $n \in E$, 使得不超过 $n$ 的自然数都在 $E$ 中, 而 $n+1 \in M$. 这是因为假如这样的 $n$ 不存在, 那么集 $E \subset \mathbb{N}$ 含有单位元, 并且当 $n \in E$ 时, $E$ 也包含 $(n+1)$, 从而据归纳原理 $E = \mathbb{N}$. 但这不可能, 因为 $\mathbb{N} \backslash E = M \neq \varnothing$. 求得的数 $(n+1) \in M$ 必是 $M$ 中的最小元, 因为前已看到, $n$ 与 $n+1$ 之间已不再有自然数了.

(8) 设 $E \subset \mathbb{N}$ 是任一非空有界集. 根据确界原理, $\exists! \sup E = s \in \mathbb{R}$. 据上确界的定义, 存在自然数 $n \in E$, 满足条件 $s - 1 < n \leqslant s$. 这时 $n = \max E$, 这是因为大于 $n$ 的自然数必不小于 $n+1$, 而 $n+1 > s$.

(9) 如果不然, 那么必存在极大的自然数 $n$, 但 $n < n+1$. □

**注 1**　(1) 根据上述定理, 如常我们表示

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}, \quad -\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots\}.$$

(2) 可直接用完备公理 (即无须中介于确界原理) 证明 (8). 令 $X = E$, $Y = \{y \in \mathbb{R} | \forall x \in X (x \leqslant y)\}$. 由完备公理, $\exists c \in \mathbb{R}$ s.t. $x \leqslant c \leqslant y, \forall x \in X, y \in Y$. 显然 $c \in E$ (否则必有 $b \in \mathbb{R}$ 满足 $b < c$ 而 $b > x, \forall x \in X$), 从而 $c = \max E$.

### 1.2.2　有理数与无理数

1. 整数

**定义 3**　整数集, 记作 $\mathbb{Z}$, 定义为 $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$, 其元素称为整数.

**命题 1**　整数的和与积仍然是整数.

**证**　设 $n, m \in \mathbb{Z}$. 若其中有一个为零, 则显然 $m+n \in \mathbb{Z}, mn = 0 \in \mathbb{Z}$. 设 $n, m$ 均不是零. 若 $m, n \in \mathbb{N}$, 则 $m+n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, m \cdot n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. 若 $(-m), (-n) \in \mathbb{N}$, 则 $-(m+n) = (-1)(m+n) = (-m) + (-n) \in \mathbb{N}$, 于是 $(m+n) \in \mathbb{Z}$, $m \cdot n = ((-1)m)((-1)n) \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. 若 $(-m), n \in \mathbb{N}$, 则 $(-m) \cdot n \in \mathbb{N}$, 即 $m \cdot n \in \mathbb{Z}$; 为证 $m+n \in \mathbb{Z}$, 考虑集合

$$E=\{n\in\mathbb{N}: n+l\in\mathbb{Z},\forall l\in\mathbb{Z}\},$$

往证 $E=\mathbb{N}$. 首先, $1\in E$, 事实上, 若 $-l=1$ 则 $1+(-1)=0\in\mathbb{Z}$, 若 $-l=k\geqslant 2$, 则 $1\leqslant k-1\in\mathbb{N}$, 从而 $1+l=1-k=-(k-1)\in-\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$. 假设 $n\in E$. 则 $\forall l\in\mathbb{Z}$ 成立 $n+l\in\mathbb{Z}$, 从而 $(n+1)+l=n+(1+l)\in\mathbb{Z}\Rightarrow n+1\in E$. 于是 $E=\mathbb{N}\Rightarrow n+m\in\mathbb{Z}$. 类似地处理 $m,(-n)\in\mathbb{N}$ 的情形. □

于是, $\mathbb{Z}$ 关于加法运算构成阿贝尔群, 但对乘法它不是群, 甚至 $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 也不是群.

当两数 $m,n\in\mathbb{Z}$, 而 $k=m\cdot n^{-1}\in\mathbb{Z}$, 即当 $m=k\cdot n$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$ 时, 就说整数 $m$ 能被 $n$ 整除, 或它是 $n$ 的*倍数*, 或说 $n$ 是 $m$ 的*因数*. 若 $1\neq p\in\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{N}$ 中除 1 和 $p$ 外不再有因数, 就把 $p$ 叫做*素数*.

下面不加证明地回顾所谓的算术基本定理.

*算术基本定理* 每个自然数能唯一地不计因数顺序的区别表成乘积的形式

$$n=p_1\cdots p_k,$$

其中 $p_1,\cdots,p_k$ 都是素数.

数 $m,n\in\mathbb{Z}$ 叫做互素数, 假如它们除 $1,-1$ 之外没有公因数.

特别地, 由算术基本定理能看出, 如果两个互素数 $m$ 与 $n$ 的乘积 $m\cdot n$ 能被素数 $p$ 整除, 那么数 $m,n$ 之一也能被 $p$ 整除.

2. 有理数

**定义 4** 形如 $m\cdot n^{-1}$ 的数叫*有理数*, 其中 $m,n\in\mathbb{Z}$. 有理数集用 $\mathbb{Q}$ 表示.

有理数 $q=m\cdot n^{-1}$ 也可以写成 $m$ 与 $n$ 之比, 即所谓有理分数 $\dfrac{m}{n}$ 的形式. 于是, 当 $n\neq 0$ 时, 整数序对 $(m,n)$ 确定了一个有理数.

**命题 2** 两个序对 $(m_1,n_1),(m_2,n_2)$ 给出同一个有理数的充要条件是它们成比例, 即存在 $k\in\mathbb{Z}$, 使得或 $m_2=km_1$ 且 $n_2=kn_1$, 或 $m_1=km_2$ 且 $n_1=kn_2$.

**证** 实际上, 因为 $(nk)(k^{-1}n^{-1})=1$, 即 $(n\cdot k)^{-1}=k^{-1}\cdot n^{-1}$, 所以 $(mk)(nk)^{-1}=(mk)(k^{-1}n^{-1})=m\cdot n^{-1}$. 可见, 不同的序对 $(m,n)$ 与 $(mk,nk)$ 给出了同一个有理数.

另一方面, 如果序对 $(m_1,n_1)$ 与 $(m_2,n_2)$ 给出同一个有理数, 即 $m_1\cdot n_1^{-1}=m_2\cdot n_2^{-1}$, 那么 $m_1n_2=m_2n_1$; 如果 (比如说)$m_1$ 与 $n_1$ 互素, 那么由算术基本定理的推论即知 $n_2\cdot n_1^{-1}=m_2\cdot m_1^{-1}=k\in\mathbb{Z}$. □

据此命题知, 在把任一分数进行相应约简之后, 有理数能够用互素的整数序对给出.

3. 无理数

**定义 5** 不是有理数的实数叫*无理数*.

**命题 3**　$\sqrt{2}$ 是无理数.

**证**　需验证: 第一, 存在正实数 $s$, 使得 $s^2=2$; 第二, $s\notin\mathbb{Q}$.

令

$$X=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0,\ x^2<2\},\quad Y=\{y\in\mathbb{R}:\ y>0,\ y^2>2\}.$$

显然 $X$ 与 $Y$ 都不空, 因为 $1\in X, 2\in Y$. 又因对于任何正实数 $x$ 与 $y$ 来说,

$$(x<y)\Leftrightarrow(x^2<y^2),$$

所以任何 $x\in X$ 小于任何 $y\in Y$. 据完备公理 $\exists s\in\mathbb{R}$, 使得 $\forall x\in X, \forall y\in Y$ 有

$$x\leqslant s\leqslant y.$$

兹证 $s^2=2$.

假如 $s^2<2$, 那么, $s+\dfrac{2-s^2}{3s}$ 就大于 $s$, 但它的平方却小于 2. 实际上, 因为 $1\in X$, 所以 $1^2<s^2<2$. 因而 $0<\Delta=2-s^2<1$. 这就是说

$$\left(s+\frac{\Delta}{3s}\right)^2=s^2+2\cdot\frac{\Delta}{3}+\left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2<s^2+3\cdot\frac{\Delta}{3}=s^2+\Delta=2.$$

因此 $\left(s+\dfrac{\Delta}{3s}\right)\in X$, 这与 "当 $x\in X$ 时, 必定 $x\leqslant s$" 这件事不相容.

假如 $2<s^2$, 那么, $s-\dfrac{s^2-2}{3s}$ 就小于 $s$, 但 (类似上述展开验证) 它的平方却大于 2. 这又与 $s$ 是 $Y$ 的下界矛盾.

于是只有一种可能, 即 $s^2=2$.

最后证明 $s\notin\mathbb{Q}$. 假如 $s\in\mathbb{Q}$, 设 $\dfrac{m}{n}$ 是 $s$ 的既约分数. 于是 $m^2=2n^2$, 因此 $m^2$ 能被 2 整除, 从而 $m$ 能被 2 整除. 设 $m=2k$, 于是 $2k^2=n^2$. 根据同样的理由, 推知 $n$ 也能被 2 整除, 从而与分数的既约性矛盾. □

后面将证明存在着很多的无理数, 事实上, 无理数的势, 大于有理数的势, 而与一切实数之集的势相同 (见 1.4 节).

无理数又可分为所谓代数数与超越数. 一个实数, 如果它是某个有理系数 (或等价地说成是整系数的) 代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根就叫做*代数数*. 反之就叫做*超越数*.

我们将看到, 代数数集的势与有理数集的势相同, 而超越数集的势与实数集的势相同. 但证明一个具体的数的超越性常有很大困难. 例如, 直到 1882 年才证明了著名的几何数 $\pi$ 是超越数, 而希尔伯特问题之一就是证明 $\alpha^\beta$ 的超越性, 其中的 $\alpha$ 是个代数数 $(\alpha\neq0)\wedge(\alpha\neq1)$, 而 $\beta$ 是代数无理数 (例如, $\alpha=2,\beta=\sqrt{2}$).

### 1.2.3 阿基米德原理

阿基米德原理是重要的. 在其他实数集的公理系统中, 常把它作为公理. 我们将依据完备公理 (更确切地说是依据与之等价的确界原理) 来证明阿基米德原理. 以后将会看到, 阿基米德原理实际上反映了与完备公理相联系的自然数和整数的性质.

观察, 由定义及自然数的性质易见整数集满足:

(1) $\mathbb{Z}$ 的任何上有界不空子集有极大元 (在定理 1(8) 的证明中, 把 $\mathbb{N}$ 换成 $\mathbb{Z}$ 再重复一遍即可).

(2) $\mathbb{Z}$ 的任何下有界不空子集有极小元.

(3) $\mathbb{Z}$ 既没有上界又没有下界.

**阿基米德原理** 如果 $h$ 是任意一个固定的正数, 那么对于任何实数 $x$, 必能找到唯一的整数 $k$, 使得 $(k-1)h \leqslant x < kh$.

**证** 因为 $\mathbb{Z}$ 没有上界, 集合 $\left\{n \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x}{h} < n\right\}$ 是整数集的一个不空下有界子集, 于是有最小元 $k$, 即 $(k-1) \leqslant \frac{x}{h} < k$. 因为 $h > 0$, 这些不等式与阿基米德原理中所说的不等式等价. 满足上面两个不等式的整数 $k$ 是唯一的, 这可由数集的极小元的唯一性推知 (见 1.1.3 小节). □

**注 2** 等价地: 任意固定 $h > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! k \in \mathbb{Z}$, s.t. $kh \leqslant x < kh + h$.

**推论 1** 阿基米德原理有下述直接推论.

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. 事实上, 据阿基米德原理, 存在 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 $1 < \varepsilon \cdot n$. 因为 $0 < 1$, 且 $0 < \varepsilon$, 所以 $0 < n$. 于是, $n \in \mathbb{N}$ 且 $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) 如果 $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0$, 且对于任何 $n \in \mathbb{N}$ 有 $x < \frac{1}{n}$, 那么 $x = 0$. 事实上, 据 (1), 不可能有 $x > 0$.

(3) 对于满足 $a < b$ 的任意数 $a, b \in \mathbb{R}$, 存在有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$. 事实上, 由 (1) 可选出某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $0 < \frac{1}{n} < b - a$, 据阿基米德原理, 存在着数 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}$. 此时 $\frac{m}{n} < b$, 这是因为, 若不然, 就有 $\frac{m-1}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m}{n}$, 由此得 $\frac{1}{n} \geqslant b - a$. 因此, $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, 且 $a < \frac{m}{n} < b$.

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! k \in \mathbb{Z}$, 使得 $k \leqslant x < k + 1$. 这个数 $k$ 通常记为 $[x]$, 称为 $x$ 的整数部分, 量 $\{x\} := x - [x]$ 称为 $x$ 的小数部分. 显然, $x = [x] + \{x\}$ 且 $\{x\} \geqslant 0$.

此段末, 我们利用命题 3 的讨论方法, 给出 $a > 0$ 的算术根 $\sqrt[r]{a}$ 的定义 (第 2

章学习极限理论, 在尚未系统定义指数函数之前就要与它见面).

**命题 4**　方程 $x^n = a$ 当 $n \in \mathbb{N}$ 且 $a > 0$ 时有正根 (记作 $\sqrt[n]{a}$ 或 $a^{\frac{1}{n}}$), 叫 $a$ 的 $n$ 次算术根.

**证**　令

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^n < a\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R} : y > 0, y^n > a\}.$$

显然 $X$ 与 $Y$ 都不空. 又因 $\forall x > 0, y > 0$ 成立

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}),$$

故

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^n < y^n),$$

所以任何 $x \in X$ 小于任何 $y \in Y$. 据完备公理 $\exists s \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in X, \forall y \in Y$ 有

$$x \leqslant s \leqslant y.$$

兹证 $s^n = a$.

假如 $s^n < a$. 记 $\Delta = a - s^n$ 并取 $\gamma > 1$ 使得 $a - s^n < \gamma(2^n - 1)$. 若 $s \leqslant 1$, 则 $s + \dfrac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)}$ 就大于 $s$, 但它的 $n$ 次方却小于 $a$. 事实上,

$$\begin{aligned}\left(s + \frac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)}\right)^n &= s^n + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k s^{n-k} \left(\frac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)}\right)^k \\ &< s^n + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)} < s^n + \Delta = a.\end{aligned}$$

若 $s > 1$, 则 $s + \dfrac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)s^{n-1}}$ 大于 $s$, 但

$$\begin{aligned}\left(s + \frac{\Delta}{s^{n-1}\gamma(2^n - 1)}\right)^n &= s^n + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k s^{n-k} \left(\frac{\Delta}{s^{n-1}\gamma(2^n - 1)}\right)^k \\ &< s^n + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)} < s^n + \Delta = a.\end{aligned}$$

所以, 无论 $s \leqslant 1$ 或 $s > 1$ 都说明 $s^n < a$ 是不可能的.

假如 $a < s^n$, 记 $\Delta = s^n - a$, 如上分别考虑 $s - \dfrac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)}$, 若 $s \leqslant 1$, 与 $s - \dfrac{\Delta}{\gamma(2^n - 1)s^{n-1}}$ 若 $s > 1$, 我们就会得到矛盾.

综上所述知只有一种可能, 即 $s^n = a$.　□

### 1.2.4 实数集的几何解释与位置记数法

1. 数轴

这是对于实数经常使用的形象的几何语言. 根据几何公理, 直线 $\mathbb{L}$ 上的点与实数集 $\mathbb{R}$ 的数之间能建立一一对应 $f:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ 满足: 任给一个平移 $T:\mathbb{L}\to\mathbb{L}$, 存在一个 (只与 $T$ 有关的) 数 $t\in\mathbb{R}$, 使得

$$f(T(x))=f(x)+t,\quad \forall x\in\mathbb{L}.$$

称 $f(x)\in\mathbb{R}$ 为点 $x$ 的坐标 (也常直接称 $f(x)$ 为点); 称直线为坐标轴 (数轴或数直线); 实数集 $\mathbb{R}$ 本身也常叫做数直线, 而它的元素, 叫做数直线上的点.

观察, 一旦坐标为 $1\in\mathbb{R}$ 的点 $x_1\in\mathbb{L}$ 和坐标为 $0\in\mathbb{R}$ 的点 $x_0\in\mathbb{L}$ (坐标原点) 被确定, 即 $f(x_1)=1$, $f(x_0)=0$ 被确定, 则 $f$ 就完全确定了, 此时由这两点所确定的线段叫单位线段. 从原点出发而含有 1 的射线所定的方向叫做正方向, 而沿这个方向 (从 0 到 1) 的运动叫做自左向右的运动, 按照这种约定, 就说 1 位于 0 的右边, 而 0 位于 1 的左边.

具体些说, 两点确定后, 考虑满足 $Tx_0=x_1$ 的平移, 有 $1=f(x_1)=f(Tx_0)=f(x_0)+t=t$. 于是

$$2=f(Tx_1),\ 3=f(Tx_2),\ \cdots,n+1=f(Tx_n),\cdots,$$

$$-1=f(T^{-1}x_0),\ -2=f(T^{-1}x_{-1}),\cdots,-(n+1)=f(T^{-1}x_{-n}),\cdots.$$

即坐标为 2 的点 $x_2=Tx_1$, 坐标为 3 的点 $x_3=Tx_2,\cdots$, 坐标为 $n+1$ 的点 $x_{n+1}=Tx_n$, 而坐标为 $-1$ 的点 $x_{-1}=T^{-1}x_0,\cdots$, 坐标为 $-n-1$ 的点 $x_{-n-1}=T^{-1}x_{-n}$. 从而得到了坐标为整数 $m\in\mathbb{Z}$ 的一切点.

根据泰勒斯 (Thales) 定理把单位线段分成相应的 $n$ 个合同的线段, 取其中有一个端点为原点的线段, 则另一端 (记作 $x_{1/n}$) 的坐标 $y$ 满足等式 $n\cdot y=1$, 即 $y=\dfrac{1}{n}$. 继而, 考虑将 $x_0$ 变到 $x_{1/n}$ 的平移 $T_n$, 有 $f(T_nx)-f(x)=\dfrac{1}{n}$, 于是对于所有 $m=1,\cdots,n-1$ 求得坐标为 $\dfrac{m}{n}$ 的点 $x_{m/n}=T_nx_{(m-1)/n}$. 当 $m\geqslant n$ 时, $\exists p,r\in\mathbb{N}\cup\{0\},r<n$ 使得 $m=pn+r$, 即 $\dfrac{m}{n}=p+\dfrac{r}{n}$, 易见点 $f^{-1}\left(\dfrac{m}{n}\right)=T^{(p)}f^{-1}\left(\dfrac{r}{n}\right)$ 的坐标是 $\dfrac{m}{n}$ 的点. 如此即可求得具有有理坐标 $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ 的一切点.

在 $\mathbb{L}$ 上还有其他的点, 每个这样的点把直线分成了两个射线, 在每个射线上有一些以整数 (有理数) 为坐标的点 (这是阿基米德原来的几何原理的推论). 这样一来, 点产生出了分割, 或说产生出了 $\mathbb{Q}$ 的分划, 把 $\mathbb{Q}$ 分成两个非空集 $X$ 与 $Y$, 分

别对应着左、右射线上的有理点 (以有理数为坐标的点). 据完备定理, $\exists c \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in X, \forall y \in Y$ 有 $x \leqslant c \leqslant y$. 因为 $X \cup Y = \mathbb{Q}$, 所以 $\sup X = s \leqslant c \leqslant i = \inf Y$. 若 $s < i$, 则在 $s$ 与 $i$ 之间就找到一个既不在 $X$ 中又不在 $Y$ 中的有理数. 因此, $s = i = c$. 这个唯一确定的数 $c$ 就对应于直线上指定的点.

2. 绝对值和距离

数 $x \in \mathbb{R}$ 的模或绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

由定义容易验证下述性质:

(1) $|a| = |-a| \geqslant 0$ 且 $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(2) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(3) $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$;　$|a| \leqslant h \Leftrightarrow -h \leqslant a \leqslant h, h > 0$;

(4) $|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$;

(5) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$.

**证**　仅证 (2) 和 (4).

(2) 观察:

$$\text{当} a \geqslant 0 \text{时}, \quad -|a| \leqslant 0 \leqslant a = |a|,$$

$$\text{当} a < 0 \text{时}, \quad -|a| = -(-a) = a < 0 \leqslant |a|,$$

故 $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

(4) 下两式相加

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \quad (+) \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b| \quad (\text{由 (2)})$$

得 $-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant (|a| + |b|)$, 从而由 (3) 得

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.2.1}$$

将式 (1.2.1) 中的 $b$ 换成 $-b$ 即得 $|a - b| \leqslant |a| + |b|$. 另一方面, 由 (1.2.1), $|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$. 从而

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|. \tag{1.2.2}$$

将 (1.2.2) 中 $b$ 换成 $-b$ 即得 $|a| - |b| \leqslant |a + b|$. □

利用归纳原理可将性质 (4) 推广为

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|,$$

并且等式成立的充要条件是所有数 $x_1, \cdots, x_n$ 同时非负或同时非正.

**定义 6** 称 $|x-y|$ 为 $x, y \in \mathbb{R}$ 之间的**距离**.

由数的绝对值的性质推知此定义满足一般的“距离公理”：距离是非负的, 当且仅当 $x$ 与 $y$ 重合时, 它才等于零; 从 $x$ 到 $y$ 的距离与从 $y$ 到 $x$ 的距离是一样的 (这是因为 $|x-y| = |y-x|$); 如果 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 那么 $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$.

兹引进下列集合记号和称谓：

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \text{ —— 开区间}ab;$$

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\} \text{ —— 闭区间}ab;$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\} \text{ —— 含端点 } b \text{ 的半开区间}ab;$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\} \text{ —— 含端点 } a \text{ 的半开区间}ab.$$

**定义 7** 开区间、闭区间、半开区间都叫**数区间**或简称**区间**, 确定区间的数叫做它的**端点**. 量 $b-a$ 叫做区间的**长**. 如果 $I$ 是某个区间, 就用 $|I|$ 表示它的长.

下述集合都是无界集 (**无界区间**):

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | a < x\},$$

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x\},$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} | x < b\},$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant b\},$$

$$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}.$$

有时为了表达数集的上 (下) 无界性, 常记 $\sup X = +\infty (\inf X = -\infty)$.

**定义 8** 称含有 $x \in \mathbb{R}$ 的开区间为 $x$ 的一个**邻域**. 特别当 $\delta > 0$ 时, 开区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 叫做点 $x$ 的一个$\delta$ **邻域**, 它的长是 $2\delta = [(x+\delta) - (x-\delta)]$, 即以 $x-\delta, x+\delta$ 为端点的区间之长.

数 $\dfrac{a+b}{2}$ 叫做$a, b$ 的**中点**, 或叫做以 $a, b$ 为端点的区间的**中心**, 因为它距区间的两端点等远.

特别地, 点 $x \in \mathbb{R}$ 是它的 $\delta$ 邻域 $(x-\delta, x+\delta)$ 的中心, 而 $\delta$ 邻域中的一切点与 $x$ 的距离小于 $\delta$.

3. 位置记数法

每个数可用它的有理近似序列给出来, 换言之, 对于每个实数, 能建立唯一的这样的有理近似序列. 这种方法导致了位置记数法的建立.

**引理 1**　如果固定实数 $q>1$, 那么, 对于任何正数 $x\in\mathbb{R}$, 必有唯一的整数 $k\in\mathbb{Z}$, 使得

$$q^{k-1}\leqslant x<q^k.$$

**证**　首先证明集合 $\mathbb{Q}_q:=\{q^k:k\in\mathbb{N}\}$ 无上界. 若不然, 它就有上确界 $s$. 因 $q>1$ 蕴含 $\dfrac{s}{q}<s$, 从而, 据上确界之定义, $\exists m\in\mathbb{N}$, 使得 $\dfrac{s}{q}<q^m\leqslant s$, 这时 $s<q^{m+1}$, 与 $s$ 是上确界冲突.

由 $q>1$ 知当 $m,n\in\mathbb{Z}$ 且 $m<n$ 时, 有 $q^m<q^n$. 因 $\mathbb{Q}_q$ 无上界, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\in\mathbb{N}$, s.t. $q^M>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 从而对任何 $m>M$ 成立 $q^m>q^M>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

于是, 对 $x>0$, 集合 $\mathbb{Z}_x:=\{m\in\mathbb{Z}:q^m>x\}$ 有下界 $\left(\text{考虑 }\varepsilon=\dfrac{1}{x}\right)$, 从而有最小元 $k\in\mathbb{Z}_x$. 显然 $k$ 就是所求的整数, 因为对于它成立 $q^{k-1}\leqslant x<q^k$.

最后证这样的整数 $k$ 是唯一的. 否则有 $m,n\in\mathbb{Z}$, $m<n$ 满足要求. 注意到 $m\leqslant n-1$, 于是 $q^{m-1}\leqslant x<q^m\leqslant q^{n-1}\leqslant x<q^n$, 这意味着 $x<x$, 矛盾. □

固定 $q>1$, 取任意的正数 $x\in\mathbb{R}$. 根据引理 1 可求得唯一的整数 $p\in\mathbb{Z}$, 使得

$$q^p\leqslant x<q^{p+1}. \tag{1.2.3}$$

**定义 9**　满足关系 (1.2.3) 的整数 $p$ 叫做数 $x$ 关于记数法的基 $q$ 的阶或 ($q$ 固定时) 简称为数 $x$ 的阶.

根据阿基米德原理, 存在唯一的自然数 $\alpha_p\in\mathbb{N}$, 使得

$$\alpha_pq^p\leqslant x<\alpha_pq^p+q^p. \tag{1.2.4}$$

注意到 (1.2.3) , 即可断定 $\alpha_p\in\{1,\cdots,q-1\}$.

从 (1.2.4) 出发重复进行上述讨论知: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists!\,\alpha_{p-j}\in\{0,1,\cdots,q-1\}$, $j=0,1,\cdots,n$, s.t.

$$r_n\leqslant x<r_n+\frac{1}{q^{n-p}},\quad \text{其中 } r_n=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{p-j}q^{p-j}. \tag{1.2.5}$$

当学了极限理论后, 我们看到, $\forall x>0$, 在 (1.2.5) 中令 $n\to\infty$ 产生

$$x=\lim_{n\to\infty}r_n=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{p-j}q^{p-j}=\sum_{j=0}^{p-1}\alpha_{p-j}q^{p-j}+\alpha_0+\sum_{j=p+1}^{\infty}\alpha_{p-j}\frac{1}{q^{j-p}}, \tag{1.2.6}$$

其中 $\alpha_{p-j} \in \{0, 1, \cdots, q-1\}$.

(1.2.5) 表明: 每个正数 $x$ 一一地与数列 $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \cdots, \alpha_{p-n}, \cdots$ 对应. 换句话说, 我们用特殊的有理数列 $\{r_n\}$ 建立了 $x$ 的越来越好的不足近似值与过剩近似值. 符号 $\alpha_p, \cdots, \alpha_{p-n}, \cdots$ 是整个序列的密码, 为了能根据这个密码恢复序列 $\{r_n\}$, 必须指出 $x$ 的阶数 $p$.

我们约定, 当 $p \geqslant 0$ 时, 在 $\alpha_0$ 后面放上小数点或逗点; 当 $p < 0$ 时, 在 $\alpha_p$ 的左边补写上 $|p|$ 个零, 而在最左边的零后边放上小数点或逗点 (注意 $\alpha_p \neq 0$), 即

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{p-j} q^{p-j} =: \begin{cases} \alpha_p \alpha_{p-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0 . \alpha_{-1} \alpha_{-2} \cdots \alpha_{-n} \cdots, & p \geqslant 0, \\ 0.\ \underbrace{0 \cdots 0}_{(|p|-1)\text{个零}}\ \alpha_p \alpha_{p-1} \cdots \alpha_{p-n} \cdots, & p < 0. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

例如, 当 $q = 10$ 时,

$$123.45 := 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2},$$
$$0.00123 := 1 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5};$$

当 $q = 2$ 时,

$$1000.001 := 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^{-3}.$$

由 (1.2.7) 可见, 两个不同的数 $x$ 与 $x'$ 对应着不同的序列, 即不同的符号 $\alpha_p, \cdots, \alpha_0, \cdots$ 与 $\alpha'_p, \cdots, \alpha'_0, \cdots$. 进一步, 可以验证, 由数 $\alpha_k \in \{0, 1, \cdots, q-1\}$ 组成的任何记号 $\alpha_p, \cdots, \alpha_0, \cdots$, 如果其中无论哪一个数码后面总有不是 $q-1$ 的, 则它必对应于某个数 $x \geqslant 0$.

对应式 (1.2.7) 叫做 $x$ 的*$q$ 进位记法*. 记号中所用到的数字叫*数码*, 数码相对于小数点的位置叫数码的*位*.

我们约定, 数 $x < 0$ 对应于正数 $-x$ 的记号联上一个减号, 而把数 0 对应于 $0.0 \cdots 0 \cdots$.

这样就建成了*实数的 $q$ 进位记数系统*. 在日常生活中最常用的是十进位记数系统, 但是按照技术原理来说, 常用的则是二进位记数法 (在电子计算机中). 三进位与八进位记数法在计算技术部分中也有用, 但是用得不多.

值得指出的是, 另一种从有理数得出所有实数的不太具有构造性的方法是属于戴德金的. 他把实数与有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个分割等同起来, 这就是把 $\mathbb{Q}$ 分成没有共同元素的两个集合 $A, B$, 使得 $\forall a \in A, \forall b \in B (a < b)$. 这样处理实数时, 我们所采用的完备公理变成了著名的戴德金公理. 由于这个缘故, 常把我们所采用的完备公理称为戴德金公理.

## 练　习

1. 依据归纳原理证明:

(1) 当 $x>-1$ 且 $n\in\mathbb{N}$ 时, $(1+x)^n\geqslant 1+nx$; 同时只有 $n=1$ 或 $x=0$ 时等号成立 (伯努利不等式).

(2) $(a+b)^n=a^n+\dfrac{n}{1!}a^{n-1}b+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots 2}{(n-1)!}ab^{n-1}+b^n$(牛顿二项式).

2. 设 $S$ 为非空有下界数集. 证明:

$$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S.$$

3. 设 $-A$ 是形如 $-a$ 的数的集合, 这里 $a\in A\subset\mathbb{R}$, 试证, $\sup(-A)=-\inf A$.

4. 设 $A+B$ 是形如 $a+b$ 的数的集合, $A\cdot B$ 是形如 $a\cdot b$ 的数的集合, 其中 $a\in A\subset\mathbb{R}$, $b\in B\subset\mathbb{R}$. 试检查是否总有

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

(2) $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$.

5. (1) 如果 $A\subset B\subset\mathbb{R}$, 那么 $\sup A\leqslant\sup B$, 而 $\inf A\geqslant\inf B$.

(2) 设 $\mathbb{R}\supset X\neq\varnothing$, 且 $\mathbb{R}\supset Y\neq\varnothing$. 若 $\forall x\in X$, $\forall y\in Y$ 满足 $x\leqslant y$. 那么 $X$ 上有界而 $Y$ 下有界, 并且 $\sup X\leqslant\inf Y$.

(3) 如果 (2) 中的 $X$ 与 $Y$ 又满足 $X\cup Y=\mathbb{R}$, 那么, $\sup X=\inf Y$.

(4) 如果 $X$, $Y$ 是 (3) 中所定义的集, 那么, 或者 $\exists\max X$, 或者 $\exists\min Y$(这是戴德金定理).

(5) (接 (4)) 试证戴德金定理与完备公理等价.

6. (1) 验证 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Q}$ 都是归纳集.

(2) 举出一个异于 $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 的归纳集的例子.

7. 试证: 任何归纳集无上界.

8. 验证有理数集 $\mathbb{Q}$ 满足实数集的一切公理, 但完备公理除外.

9. (1) 在数轴上解释完备公理.

(2) 证明上确界原理与完备公理等价.

10. 设 $a,b\in\mathbb{R}$. 证明: 若对任何正数 $\varepsilon$ 有 $|a-b|<\varepsilon$, 则 $a=b$.

11. 试证: 在任何 $q$ 进位记数法中, 有理数必是循环的, 即从某一位开始, 由周期重复的一组数码构成.

12. 将 $(100)_{10}$ 写成二进位及三进位数的形式.

13. (1) 试证方程 $x^n=a$ 当 $n\in\mathbb{N}$ 且 $a>0$ 时有正根 (记作 $\sqrt[n]{a}$ 或 $a^{\frac{1}{n}}$), 叫 $n$ 次算术根.

(2) 验证, 当 $a>0$, $b>0$ 且 $n,m\in\mathbb{N}$ 时,

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\quad\text{且}\quad\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

(3) $(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}=:a^{\frac{m}{n}}$ 而 $a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$.

(4) $(a^{\frac{m}{n}})^{-1}=(a^{-1})^{\frac{m}{n}}=:a^{-\frac{m}{n}}$.

(5) 试证: 对于任何 $r_1,r_2\in\mathbb{Q}$,

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}\quad 且\quad (a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1r_2}.$$

14. (1) 试证: 像有理数集 $\mathbb{Q}$ 一样, 形如 $a+b\sqrt{n}$ 之集 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 是有序域, 其中 $a,b\in\mathbb{Q}$, 而 $n$ 是不等于平方整数的固定的自然数. $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 还满足阿基米德原理, 但不满足完备公理.

(2) 如果在 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 中保留以前的算术运算, 而按

$$a+b\sqrt{n}\leqslant a'+b'\sqrt{n}:=\big((b\leqslant b')\vee((b=b')\wedge(a\leqslant a'))\big)$$

规定序关系, 检验实数公理中的哪些对 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 不再满足. 这时对 $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ 来说, 阿基米德原理是否还正确?

(3) 在有理系数或实系数多项式集合 $\mathbb{P}[x]$ 中建立序关系使

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m\succ 0,\quad 若\quad a_m>0.$$

(4) 试证: 系数 $a_j$, $b_j$ 属于 $\mathbb{Q}$ 或属于 $\mathbb{R}$ 的所有有理分式

$$\mathbb{R}_{m,n}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}$$

的集合 $\mathbb{Q}[x]$, 在按 $\mathbb{R}_{m,n}\succ 0$, 若 $\dfrac{a_m}{b_n}>0$ 引入序关系与通常的算术运算之后, 构成有序域, 但不是阿基米德序域. 这意味着, 阿基米德公理不能抛开完备公理从 $\mathbb{R}$ 的其他公理推出.

## 1.3 与实数集的完备性有关的等价引理

在这里, 我们建立几个简单、有效的原理, 其中每一个都能当作完备公理成为建立实数理论的基础, 它们在分析学定理的各种各样的证明中有广泛的应用. 先引进几个概念.

**定义 1** 几个拓扑概念.

(1) (*闭区间套*) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是集合的序列. 如果

$$X_1\supset X_2\supset\cdots\supset X_n\supset\cdots,\quad 即\quad \forall n\in\mathbb{N}(X_n\supset X_{n+1}),$$

就说它是*集列套*. 特别地, 当 $X_n=I_n$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间时, 称该集列套为*闭区间套*.

(2) (*覆盖*) 设 $S=\{X\}$ 是由一些集合 $X$ 构成的集族. 如果 $Y\subset\bigcup\limits_{X\in S}X$(即集合 $Y$ 的每个元素 $y$, 至少含在集族 $S$ 的一个集合 $X$ 中), 就说 $S$ *覆盖*集合 $Y$, 或称 $S$ 是 $Y$ 的一个*覆盖*. 特别地, 当 $S$ 只由有限多个集合组成时, 称 $S$ 是 $Y$ 的一个*有限覆盖*.

(3) (**极限点**)　设 $X \subset \mathbb{R}$. 假如点 $p \in \mathbb{R}$ 的任何邻域都包含 $X$ 的一个无穷子集, 就称 $p$ 为集合 $X$ 的**极限点**.

这里看几个极限点的例子.

设 $X = \left\{ \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$, 则只有点 0 是 $X$ 的极限点.

对开区间 $(a,b)$ 来说, 闭区间 $[a,b]$ 的每一点都是极限点, 并且不再有其他的极限点.

$\mathbb{R}$ 的每一点是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的极限点, 因为在实数集的任何开区间中都含有有理数.

**定理 1**　下述几个原理都与确界原理等价.

(1) (**闭区间套定理–柯西–康托尔原理**)　对于任何闭区间套 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, 存在一点 $c \in \mathbb{R}$, 属于这些闭区间的每一个. 此外, 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 在序列中能找到闭区间 $I_k$, 使其长 $|I_k| < \varepsilon$, 那么 $c$ 就是所有闭区间的唯一公共点.

(2) (**有限覆盖定理–博雷尔–勒贝格原理**)　在覆盖一个闭区间的任何开区间族中, 存在着覆盖这一闭区间的有限子族.

(3) (**极限点定理–波尔察诺–魏尔斯特拉斯原理**)　每个无穷有界集至少有一个极限点.

**证**　我们将证**确界原理** $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ **确界原理**.

**确界原理** $\Rightarrow$ (1). 首先注意, 对我们序列中的任何两个 $I_m = [a_m, b_m], I_n = [a_n, b_n]$, 必有 $a_m \leqslant b_n$. 因为, 如若不然, 就得到 $a_n \leqslant b_n < a_m \leqslant b_m$, 即闭区间 $I_m, I_n$ 没有公共点, 但同时其中下标较大的一个又要包含在另一个之中.

因此数集 $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ 有上界, $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ 有下界, 由确界原理得 $\alpha := \sup A$, $\beta := \inf B$, 且 $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 显然任何满足 $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$ 的点 $c$ 位于一切闭区间 $I_n$ 中.

再设 $\forall \varepsilon > 0, \exists |I_k| < \varepsilon$. 则 $c = \alpha = \beta$ 唯一. 事实上, 若 $\alpha < \beta$, 那么由 $a_n \leqslant \alpha < \beta \leqslant b_n$ 推知 $0 < \beta - \alpha \leqslant b_n - a_n = |I_n|$ 对一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 矛盾.

(1) $\Rightarrow$ (2). 设 $S = \{U\}$ 是覆盖闭区间 $[a,b] = I_1$ 的开区间族, $U$ 是开区间. 假如闭区间 $I_1$ 不能用 $S$ 中的有限个来覆盖, 那么, 把 $I_1$ 等分成两个闭区间时, 至少有一个不能有有限覆盖, 将这个闭区间记作 $I_2$. 对 $I_2$ 进行同样的对半分手续就得到 $I_3$, 等等.

这样就得到一个闭区间套

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,$$

它们都不能用开区间族 $S$ 的有限子族覆盖. 因为这样做 $n$ 步时得到的线段 $I_n$ 之长为 $|I_n| = \dfrac{|I_1|}{2^n}$, 所以, 在序列 $\{I_n\}$ 中有长度任意小的闭区间 (参看 1.2.4 节第 3

小节的引理 1). 据闭区间套定理, 存在一点 $c$, 属于每一个闭区间 $I_n, n \in \mathbb{N}$. 因为 $c \in I_1 = [a,b]$, 所以必有族 $S$ 中的一个开区间 $(\alpha,\beta) = U \in S$ 包含着点 $c$, 即 $\alpha < c < \beta$. 令 $\varepsilon = \min\{c-\alpha, \beta - c\}$, 在所做出的那一列闭区间中找出一个 $I_n$, 使得 $|I_n| < \varepsilon$. 因为 $c \in I_n$, 且 $|I_n| < \varepsilon$, 所以 $I_n \subset U = (\alpha,\beta)$. 但这与 $I_n$ 不能由开区间族 $S$ 中的有限个所覆盖这件事矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $X$ 是给定的 $\mathbb{R}$ 的子集. 由 $X$ 的有界性的定义推知, $X$ 含在某个闭区间 $[a,b] = I \subset \mathbb{R}$ 中. 现在证明, 闭区间 $I$ 中至少有 $X$ 的一个极限点.

若不然, 则每点 $x \in I$ 有邻域 $U(x)$, 其中或者不含 $X$ 的点, 或者只有有限多个这种点. 对于每个 $x \in I$ 所构造的这些邻域的总体 $\{U(x)\}$, 形成闭区间 $I$ 的一个开区间覆盖; 根据有限覆盖定理, 能从中取出有限个开区间 $U(x_1), \cdots, U(x_n)$ 来, 仍然覆盖闭区间 $I$. 但是 $X \subset I$, 所以这有限个区间也覆盖着 $X$. 然而在每个 $U(x_i)$ 中只含 $X$ 的有限个点, 所以在它们的并中也只含 $X$ 的有限个点, 即 $X$ 是有限集. 这与假设矛盾, 从而完成了证明.

(3) $\Rightarrow$ 确界原理. 设 $X \subset \mathbb{R}$ 有上界. 不妨设 $X \cap (0,\infty) \neq \varnothing$. $\forall n \in \mathbb{N}$, 作 $\mathbb{N}$ 的子集 $A_n := \left\{k \in \mathbb{N} : k\dfrac{1}{n} > x, \forall x \in X\right\}$, 则 $A_n \neq \varnothing$ ( 只需观察, $\forall m \in \mathbb{N}$, 对 $k = mn$ 而言有 $k\dfrac{1}{n} = m$ ), 从而有最小元 $k_n$ 满足 $k_n\dfrac{1}{n} > x, \forall x \in X$, 而 $(k_n - 1)\dfrac{1}{n}$ 不是 $X$ 的上界 (自然数子集性质). 于是 $\exists x_n \in X$ s.t. $(k_n-1)\dfrac{1}{n} \leqslant x_n < k_n\dfrac{1}{n}$.

因 $X$ 有上界, 故 $\left\{a_n := k_n\dfrac{1}{n}\right\}$ 有界 (不妨设它是无穷集), 从而有极限点 $a$, 即 $\forall \delta > 0$, $(a-\delta, a+\delta)$ 含有无穷多个 $a_n$.

下面证 $a$ 是 $X$ 的上确界.

首先, $a$ 是 $X$ 的一个上界. 否则有 $x \in X$ 使得 $a < x \leqslant a_n, \forall n$, 于是对 $\delta = \dfrac{1}{2}(x-a)$ 有

$$a + \delta = a + \frac{x-a}{2} = \frac{a+x}{2} < \frac{x+x}{2} = x \leqslant a_n, \quad \forall n,$$

从而 $(a-\delta, a+\delta)$ 中无 $a_n$, 矛盾.

再证: $\forall \delta > 0$, $X \cap (a-\delta, a] \neq \varnothing$. 为此断言: $\forall \delta > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, s.t. $a_{n-1} > a - \delta$. 事实上, 若不然, 则有某 $\hat{\delta} > 0$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$ 成立 $a_n - \dfrac{1}{n} \leqslant a - \hat{\delta}$. 于是当 $n > \dfrac{2}{\hat{\delta}}$ 时, 有

$$a_n \leqslant a - \hat{\delta} + \frac{1}{n} = a - \frac{\hat{\delta}}{2} - \left(\frac{\hat{\delta}}{2} - \frac{1}{n}\right) < a - \frac{\hat{\delta}}{2}.$$

这表明 $\left(a-\dfrac{\hat{\delta}}{2}, a+\dfrac{\hat{\delta}}{2}\right)$ 至多含有有限多个 $a_n$, 与 $a$ 是 $\{a_n\}$ 的极限点相矛盾. 于是据以上证明及选取知, $\forall \delta>0, \exists n$ 满足

$$a-\delta<a_n-\frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant a.$$

综上所述, $a$ 是 $X$ 的上确界. 类似地可证有下界的集合必有下确界. □

**注 1**　其实, 可循环证明: **完备性公理 ⇒ 阿基米德原理 ⇒ 闭区间套定理 ⇒ 有限覆盖定理 ⇒ 极限点定理 ⇒ 确界原理 ⇒ 完备性公理**. 因此, 这六个原理中任意一个都可以作为公理来推出其他五个原理.

## 练　习

1. 证明数集 $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$ 有且只有两个极限点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$.

2. 证明: 任何有限数集都没有极限点.

3. 设 $H=\left\{\left(\dfrac{1}{n+2}, \dfrac{1}{n}\right) \middle| n=1,2,\cdots\right\}$. 问

(1) $H$ 能否覆盖 $(0,1)$?

(2) 能否从 $H$ 中选出有限个开区间覆盖 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$?

(3) 能否从 $H$ 中选出有限个开区间覆盖 $\left(\dfrac{1}{100}, 1\right)$?

4. 试证:

(1) 如果 $I$ 是任意一个闭区间套, 那么

$$\sup\{a \in \mathbb{R} | [a,b] \in I\}=\alpha \leqslant \beta=\inf\{b \in \mathbb{R} | [a,b] \in I\},$$

且

$$[\alpha, \beta]=\bigcap_{[a,b] \in I}[a,b].$$

(2) 如果 $I$ 是一个开区间套, 那么, 交集 $\bigcap\limits_{(a,b) \in I}(a,b)$ 可能是空集.

**提示**　$(a_n, b_n)=\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

5. 试证:

(1) 覆盖一个闭区间的闭区间族不必包含此闭区间的有限子覆盖.

(2) 覆盖一个开区间的开区间族不必包含此开区间的有限子覆盖.

(3) 覆盖一个开区间的闭区间族也不必包含此开区间的有限子覆盖.

6. 试证: 如果将所有实数之集 $\mathbb{R}$ 代之以有理数之集 $\mathbb{Q}$, 把闭区间、开区间与点 $r \in \mathbb{Q}$ 之邻域理解成 $\mathbb{Q}$ 的相应的子集, 那么, 定理 1 所证明的三个基本原理的任一个都不再成立.

7. 试证, 如果把

(1) 波尔察诺–魏尔斯特拉斯原理

或

(2) 博雷尔–勒贝格原理

取作为实数集的完备公理, 那么就得到与前面等价的 $\mathbb{R}$ 的公理系统.

**提示** 由 (1) 推出阿基米德原理及原来形式的完备公理.

(3) 用柯西–康托尔原理代替公理系统中的完备公理, 另外, 再假定阿基米德原理, 这样得到的公理系统与原公理系统等价 (参看 1.2 节习题 14).

## 1.4 可数集与连续统

现在, 我们介绍一些有关实数的势的内容.

### 1.4.1 集的势 (基数)

设 $X, Y$ 为两个集合. 如果存在 $X$ 到 $Y$ 上的双射, 即 $\forall x \in X, \exists! y \in Y$ 与之对应, $X$ 中不同的元, 在 $Y$ 中所对应的元也不同, 并且每个 $y \in Y$ 必是 $X$ 中某元的对应元, 则称 $X$ 与 $Y$ 等势. 以 $X \sim Y$ 表示 $X$ 与 $Y$ 等势. 等势关系把所有集合所成的族分成了彼此等价的集合类. 同一个等价类中的集有相同数量的元素 (等势), 不同类中的集所含元素的数量不同. 集 $X$ 所在的类叫集 $X$ 的势 (或集 $X$ 的基数), 记其为 $\operatorname{card} X$. 于是, 若 $X \sim Y$, 则 $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

如果集合 $X$ 与集合 $Y$ 的某个子集等势, 就说 $X$ 的基数不大于 $Y$ 的基数, 并记作 $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$.

用 $\mathcal{P}(X)$ 记 $X$ 的一切子集构成的集, 康托尔发现了下述定理.

**定理 1** (康托尔) $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$.

### 1.4.2 可数集

**定义 1** 如果集合 $X$ 与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势, 即 $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$, 就称为**可数集**.

**命题 1** (1) 可数集的无穷子集是可数集.

(2) 有限个或可数个可数集的并是可数集.

**证** (1) 只需验证自然数集 $\mathbb{N}$ 的每个无穷子集与 $\mathbb{N}$ 等势. 我们用下面的方式来建立所需要的双射 $f : \mathbb{N} \to E$. $E$ 有最小元, 使它与 $1 \in \mathbb{N}$ 对应, 并记作 $e_1 \in E$. 因集 $E$ 是无穷集, 所以 $E_2 = E \setminus \{e_1\}$ 不空, 使 $E_2$ 的最小元与数 2 对应, 记作 $e_2 \in E_2$. 然后考察 $E_3 = E \setminus \{e_1, e_2\}$ 等. 因为 $E$ 是无穷集, 所以这种做法不能到第

$n$ 步就结束了. 因此, 据归纳原理, 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 有某个数 $e_n \in E$ 与之对应, 所建立的映射 $f : \mathbb{N} \to E$ 显然是内射.

现在只需验证映射 $f$ 是满射, 即 $f(\mathbb{N}) = E$. 设 $e \in E$. 集合 $\{n \in \mathbb{N} | n \leqslant e\}$ 是有限集, 它的子集 $\{n \in E | n \leqslant e\}$ 更是有限集了. 设在此子集里有 $k$ 个元素. 这时, 根据我们的做法, $e = e_k$.

(2) 如果 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 是可数集族, 并且每个集合

$$X_m = \{x_m^1, \cdots, x_m^n, \cdots\}$$

本身也是可数集, 那么, 由元素 $x_m^n (m, n \in \mathbb{N})$ 组成的集 $X = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} X_m$ 的势不小于每个 $X_m$ 的势, 所以 $X$ 是无穷集. 可以把元素 $x_m^n \in X_m$ 与自然数对 $(m, n)$ 等同起来. 因此, $X$ 的势不大于这些序对之集的势. 进而, 考虑映射

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \quad (m, n) \mapsto \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m,$$

则 $f$ 是单射, 即 $\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$, 必有

$$f(m_1, n_1) \neq f(m_2, n_2). \tag{1.4.1}$$

事实上, 由 $f$ 的定义得

$$\begin{aligned} A :=& 2\big(f(m_2, n_2) - f(m_1, n_1)\big) \\ =& \big((m_2 + n_2) - (m_1 + n_1)\big) \cdot \big((m_2 + m_1) + (n_2 + n_1) + 1\big) + 2(m_2 - m_1). \end{aligned}$$

(1) 当 $(m_2 + n_2) = (m_1 + n_1)$ 时, 易见 (1.4.1) 成立.

(2) 当 $(m_2 + n_2) > (m_1 + n_1) \Leftrightarrow (n_2 - n_1) > (m_1 - m_2)$ 时, 若 $m_2 \geqslant m_1$ 则 (1.4.1) 显然成立; 若 $m_2 < m_1$ 则

$$A \geqslant \big((m_2 + m_1) + (n_2 + n_1) + 1\big) + 2(m_2 - m_1) > (2(m_1 - m_2) + 1) + 2(m_2 - m_1) = 1,$$

从而 (1.4.1) 成立.

(3) 当 $(m_2 + n_2) < (m_1 + n_1)$ 时, 类似上面的讨论知, 若 $m_1 \geqslant m_2$, 则 (1.4.1) 显然; 若 $m_1 < m_2$, 则

$$-A \geqslant \big((m_2 + m_1) + (n_2 + n_1) + 1\big) + 2(m_1 - m_2) > (2(m_2 - m_1) + 1) + 2(m_1 - m_2) = 1,$$

从而 (1.4.1) 成立.

因为 $f$ 是单射, 所以 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}$ 的一个子集对等. 故 $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathbb{N}$. 又因 $X$ 是无穷集, 根据 (1) 推知 $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$. □

由命题 1 推知, 可数集的任何子集, 或有限, 或可数. 如果知道了某个集合或为有限, 或为可数, 就说它是**至多可数集** (等价的写法 $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathbb{N}$).

特别地, 现在可以断定, **至多可数个至多可数集的并是至多可数的**.

**推论 1** (1) $\operatorname{card} \mathbb{Z} = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

(2) $\operatorname{card} \mathbb{N}^2 = \operatorname{card} \mathbb{N}$ (这个结论说的是可数集的直积是可数集).

(3) $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$, 即**有理数集是可数的**.

(4) 代数数集是可数的.

**证** 只需证推断 (3)与推断 (4).

先证推断 (3). 有理数 $\dfrac{m}{n}$ 由整数序对 $(m,n)$ 给出.

两个序对 $(m,n),(m',n')$ 给出同一有理数的充要条件是它们成比例. 因此对每个有理数 $r$, 可取 $n \in \mathbb{N}$ 使存在 $m \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{m}{n} = r$ 且 $n$ 是满足这些条件的最小者. 易见, 对每个 $r \in \mathbb{Q}$, 这样的整数对 $(m,n)$ 是唯一的. 于是知集 $\mathbb{Q}$ 等势于集 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的某个无穷子集. 但是 $\operatorname{card} \mathbb{Z}^2 = \operatorname{card} \mathbb{N}$, 因此 $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

下面证推断 (4). 首先注意由 $\operatorname{card}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \operatorname{card} \mathbb{N}$, 据归纳法得知, 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $\operatorname{card} \mathbb{Q}^k = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

元素 $r \in \mathbb{Q}^k$ 是 $k$ 个有理数的序组 $(r_1, \cdots, r_k)$.

有理系数的 $k$ 次代数方程可以写成

$$x^k + r_1 x^{k-1} + \cdots + r_k = 0$$

的形式, 其中最高次幂的系数等于 1. 这样, 有多少个不同的 $k$ 次代数方程, 就有多少个有理数序组, 即 $k$ 次有理系数代数方程构成可数集.

一切有理系数代数方程也组成可数集, 因为它是可数集的并 ($k$ 次有理系数代数方程之集关于次数 $k \in \mathbb{N}$ 的并). 每个这样的方程只有有限个根, 因此, 代数数之集最多可数, 然而它是无限集, 所以必是可数集. □

### 1.4.3 连续统的势

**定义 2** 实数集也叫做**数的连续统**, 而它的势叫做**连续统的势**.

**定理 2** (康托尔) $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathbb{R}$.

**证明** 兹证 $[0,1]$ 上的点就已经不可数了. 假如它可数, 即它能写成序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的形式. 在闭区间 $[0,1] = I_0$ 上, 取定一闭区间 $I_1$, 使 $|I_1| \neq 0$ 且 $x_1 \notin I_1$; 在 $I_1$ 中取定闭区间 $I_2$, 使 $|I_2| \neq 0$ 且不含 $x_2$; 如果已经做出了闭区间 $I_n$, 使 $|I_n| \neq 0$ 且不含 $x_n$, 那么从其中即可截取 $I_{n+1}$, 使 $|I_{n+1}| \neq 0$ 且 $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. 据闭区间套原理, 存在一点 $c$, 它属于一切闭区间 $I_0, I_1, \cdots, I_n, \cdots$. 但按照这一做法, 闭区间 $I_0 = [0,1]$ 的这个点, 不能是点列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 中的任何一点. □

**推论 2**　(1) $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ 且无理数存在.

(2) 因为代数数之集可数, 所以存在超越数.

集合论之初, 就出现了是否存在着可数集势与连续统势的中间势的集这个问题, 并提出了叫做 " 连续统假定" 的命题, 它断定不存在中间势.

这个问题深刻地涉及数学的基础, 它被美国数学家科恩 (P. Cohen) 在 1963 年完全解决. 科恩证明了连续统假定是不可解的, 并指出, 无论是它本身还是它的否定, 与公理化集合论都没有矛盾, 所以连续统假定在这公理系统框架内既不能被证明, 也不能被否定. 这与欧几里得关于平行线的第五公设独立于其他几何公理的情况完全类似.

## 练　　习

1. 试证: 所有实数之集与开区间 $(-1, 1)$ 之点的集等势.

2. 在以下各对点集之间直接建立双方单值对应 (一一对应) 关系.

(1) 两个开区间.

(2) 两个闭区间.

(3) 闭区间与开区间.

(4) 闭区间 $[0, 1]$ 与实数集 $\mathbb{R}$.

3. 试证:

(1) 任何无穷集含有可数子集.

(2) 偶数集与所有自然数集 $\mathbb{N}$ 等势.

(3) 无穷集与一个至多可数集的并的势与原来那个无穷集的势一样.

(4) 无理数集具有连续统势.

(5) 超越数之集具有连续统势.

4. 试证: (1) 递增自然数列之集与形如 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 之二进位小数之集等势.

(2) 可数集的一切子集之集合, 具有连续统的势.

5. 试证: (1) 集合 $X$ 的一切子集的集合 $\mathcal{P}(X)$, 与一切在 $X$ 上定义而取值为 0 或 1 的函数 (即一切映射 $f : X \to \{0, 1\}$) 之集等势.

(2) 设 $X$ 是 $n$ 个元素之有限集, 那么 $\operatorname{card}\mathcal{P}(X) = 2^n$.

(3) 注意到习题 4(2) 与 5(1) 之结论, 可以得到 $\operatorname{card}\mathcal{P}(X) = 2^{\operatorname{card} X}$, 特别地, $\operatorname{card}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\operatorname{card}\mathbb{N}} = \operatorname{card}\mathbb{R}$.

(4) 对于任何集合 $X$, 有

$$\operatorname{card} X < 2^{\operatorname{card} X},$$

特别地, 对一切 $n \in \mathbb{N}$, 有 $n < 2^n$.

6. 设 $X_1, \cdots, X_m$ 是有限个有限集, 试证:

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right) = \sum_{i_1} \operatorname{card} X_{i_1} - \sum_{i_1<i_2} \operatorname{card}(X_{i_1} \cap X_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} \operatorname{card}(X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}) - \cdots + (-1)^{m-1} \operatorname{card}(X_1 \cap \cdots \cap X_m),$$

并且求和是对于在 $1, \cdots, m$ 范围内满足和号下的不等式的一切可能的选取来做的.

7. 在闭区间 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ 上画出那样的数 $x$ 的集合: $x \in [0,1]$, 其三进位记法 $x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots(\alpha_i \in \{0,1,2\})$ 具下列三个性质之一:

(1) $\alpha_1 \neq 1$.

(2) $(\alpha_1 \neq 1) \wedge (\alpha_2 \neq 1)$.

(3) $\forall i \in \mathbb{N}(\alpha_i \neq 1)$(康托尔集).

8. (续习题 7) 试证

(1) 在三进位记法中不含有 1 的那些数 $x \in [0,1]$ 的集, 与二进位记法中表示成 $0.\beta_1\beta_2\cdots$ 的所有数的集等势.

(2) 康托尔集与闭区间 $[0,1]$ 的所有点之集等势.

# 第2章 极 限

人们常说要掌控趋势, 预见未来. 无论是人类社会还是自然界, 谈趋势就是讲过程, 如有限 → 无限、已知 → 未知、近似 → 精确、量变 → 质变等. 于是产生了所谓极限的概念.

## 2.1 序列的极限

### 2.1.1 定义和例子

**定义 1** 定义域为自然数集的函数 $f:\mathbb{N}\to X$ 叫做*序列*.

函数 $f$ 的值 $f(n)$ 称为序列的*项*, 它们用映射到达集 $X$ 的元素, 并附加自变量作为下标来表示: $x_n := f(n)$. 因此, 序列本身用符号 $\{x_n\}$ 表示, 也可写成 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的形式, 并称之为*$X$ 中的序列或元素列*. 元素 $x_n$ 称为*序列的第 $n$ 项*.

在下面的几节中, 我们只讨论实数列 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

**定义 2** 称数 $A\in\mathbb{R}$ *为数列 $\{x_n\}$ 的极限*, 如果对于点 $A$ 的任何邻域 $V(A)$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得数列 $\{x_n\}$ 之所有标号大于 $N$ 的项都包含在点 $A$ 的这个邻域 $V(A)$ 之中.

习惯上, 用"$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$"表示数列 $\{x_n\}$ 的极限是 $A$. 于是

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) := \forall V(A), \exists N\in\mathbb{N}, \forall n > N (x_n \in V(A))}.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 就说数列 $\{x_n\}$ *收敛于 $A$ 或趋于 $A$*, 并记成"$x_n\to A(n\to\infty)$". 有极限的序列叫做*收敛数列*, 没有极限的序列叫做*发散数列*.

数列极限的另一种等价表述如下.

**定义 2′** 称数 $A\in\mathbb{R}$ *为数列 $\{x_n\}$ 的极限*, 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对于一切 $n > N$, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 即

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) := \forall \varepsilon > 0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n > N (|x_n - A| < \varepsilon).$$

1. *收敛数列之例子*

**例 1** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. 因为当 $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 时, $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ 成立.

**例 2** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$. 因为当 $n>N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 时, $\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立.

**例 3** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)=1$. 因为当 $n>N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 时, $|x_n-1|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立.

**例 4** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$. 因为当 $n>N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 时, $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立.

**例 5** 当 $|q|>1$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{q^n}=0$. 事实上, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ 使得 $\dfrac{1}{|q|^N}<\varepsilon$, 于是, 只要 $n>N$ 就有

$$\left|\frac{1}{q^n}-0\right|=\frac{1}{|q|^n}<\frac{1}{|q|^N}<\varepsilon.$$

2. 发散数列之例子

**例 6** 数列 $1,2,\dfrac{1}{3},4,\dfrac{1}{5},6,\dfrac{1}{7},\cdots$, 即 $x_n=n^{(-1)^n}$ 是发散的. (反证) 假设该数列有极限 $A$. 显然 $A\neq 0$, 因为取 $\varepsilon=1$, 总有 $|x_{2k}-0|>1$ 对一切 $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$ 成立. 而若 $A\neq 0$, 取 $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}>0$, 则所有满足 $k>\dfrac{1}{|A|}-\dfrac{1}{2}$ 的项 $x_{2k+1}=\dfrac{1}{2k+1}$ 都有 $|x_{2k+1}-A|>\varepsilon$, 矛盾.

**例 7** 类似地可证数列 $1,-1,1,-1,\cdots$ $(x_n=(-1)^{n-1})$ 没有极限.

### 2.1.2 数列极限的性质

1. 一般性质

下面列出的性质, 虽然是对数列讨论的, 但对一般的序列也可建立类似的性质.

**定义 3** 我们称数列 $\{x_n\}$ 为**最终常数列**, 如果存在一个数 $A$ 与 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时 $x_n=A$; 称数列 $\{x_n\}$ 为**有界数列**, 如果存在一个数 $M$, 使得对于任何 $n\in\mathbb{N}$ 有 $|x_n|<M$.

**定理 1** 下述结论成立.

(1) 最终为常数的数列收敛.

(2) 数列极限的任何邻域, 包含着数列中除了有限多个数之外的所有项.

(3) (唯一性) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限唯一.

(4) (有界性) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必有界.

**证** 结论 (1) 和 (2) 由数列极限的定义直接得到.

(3) 设 $x_n\to a$, $x_n\to b$, 证 $a=b$. 事实上, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N},N_2\in\mathbb{N}$, 使得 $|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2},\forall n>N_1,|x_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2},\forall n>N_2$. 于是

$$|a-b|\leqslant|a-x_n|+|x_n-b|<\varepsilon,\quad\forall n>N:=\max\{N_1,N_2\}.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知必有 $a = b$.

(4) 设 $x_n \to a(n \to \infty)$, 则对 $\varepsilon = 1 > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < 1$, 从而

$$|x_n| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|, \quad \forall n > N.$$

取 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a| + 1\}$, 则 $|x_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$. □

2. 极限的算术运算

**定义 4**　设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个数列, 那么分别称

$$\{(x_n + y_n)\}, \quad \{(x_n y_n)\}, \quad \left\{\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right\}$$

为它们的和、积与商 (当然, 只有当 $y_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ 时, 商才有定义).

**定理 2**　设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是数列, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = A + B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$, 如果 $y_n \neq 0\,(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $B \neq 0$.

**证**　(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|y_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$|(x_n + y_n) - (A + B)| \leqslant |x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

类似地可证 $x_n - y_n \to A - B$.

(2) 观察: 因 $\{y_n\}$ 收敛从而有界, 即 $\exists M > 0$, s.t. $|y_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$. 可得

$$\begin{aligned} |x_n y_n - AB| =& |x_n y_n - A y_n + A y_n - AB| \\ \leqslant& |x_n - A||y_n| + |A||y_n - B| \leqslant M|x_n - A| + |A||y_n - B|. \end{aligned}$$

另一方面, 由收敛性, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$M|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |A||y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N.$$

于是当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n y_n - AB| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(3) 观察:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|x_n B - y_n A|}{|y_n||B|} \leqslant \frac{|x_n - A||B| + |A||y_n - B|}{|y_n||B|}.$$

$$|y_n| = |y_n - B + B| \geqslant |B| - |y_n - B|.$$

因 $|B| > 0$, 故 $\exists N_0$, 当 $n > N_0$ 时, $|y_n - B| < \dfrac{|B|}{2}$, 从而 $|y_n| > \dfrac{|B|}{2}$,

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|x_n B - y_n A|}{|y_n||B|} \leqslant \frac{|x_n - A||B| + |A||y_n - B|}{|B|^2/2}$$
$$= \frac{2|x_n - A||B| + 2|A||y_n - B|}{|B|^2}.$$

另一方面, 由收敛性, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_n - A| < \varepsilon$ 且 $|y_n - B| < \varepsilon$. 这证明了当 $n > N = \max\{N_0, N_1\}$ 时,

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| < \frac{2(|B| + |A|)\varepsilon}{|B|^2}.$$ □

3. 极限过程与不等式

**定理 3** 下列结论成立:

(1) (保不等式) 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. 若 $A < B$, 则有 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于任何 $n > N$, 不等式 $x_n < y_n$ 成立.

(2) (迫敛性) 设 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 是三个数列, 满足: 当 $n > N_0 \in \mathbb{N}$ 时, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

**证** (1) 取一数 $C$ 使 $A < C < B$. 据极限定义, 存在数 $N'$ 与 $N''$, 使得当 $n > N'$ 时, $|x_n - A| < (C - A)$, 且当 $n > N''$ 时, $|y_n - B| < B - C$. 从而, 当 $n > N = \max\{N', N''\}$ 时就得到

$$x_n < A + (C - A) = C = B - (B - C) < y_n.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\{x_n\}, \{z_n\}$ 的收敛性知, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon, \quad \forall n > N_1,$$

$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $A - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < A + \varepsilon$. 即

$$|y_n - A| < \varepsilon$$ □

.

**推论 1** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. 如果存在 $N$, 使得当 $n > N$ 时,

(1) $x_n \geqslant y_n$, 则 $A \geqslant B$.

(2) $x_n \geqslant B$, 则 $A \geqslant B$.

**证** (用反证法) 从定理 3 的 (1) 直接推出 (1); (2) 是 $y_n \equiv B$ 的特殊情形. □

注意, 一个严格不等式序列, 在求极限后可能变成等式. 如 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

### 2.1.3　数列极限的存在问题

1. 柯西准则

**定义 5**　数列 $\{x_n\}$ 称作**基本列 (或柯西列)**, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得由 $n > N, m > N$ 推知 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

**定理 4** (数列收敛的柯西准则)　数列收敛的充要条件是它是基本列.

**证**　$\Rightarrow$: 设 $x_n \to A(n \to \infty)$. 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $|x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n > N$. 于是 $\forall n, m > N$ 成立

$$|x_n - x_m| = |(x_n - A) - (x_m - A)| \leqslant |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: 设 $\{x_n\}$ 是基本列. 由假设, 对于 $\varepsilon_0 = 1, \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.t. $|x_n - x_{N_0+1}| < 1$, $\forall n > N_0$. 于是

$$|x_n| \leqslant |x_n - x_{N_0+1}| + |x_{N_0+1}| < 1 + |x_{N_0+1}|, \quad \forall n > N_0.$$

令 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{N_0}|, 1 + |x_{N_0+1}|\}$, 则 $|x_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$, 换言之, $\{x_n\}$ 有界.

对一切 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$a_n := \inf_{k \geqslant n} x_k, \quad b_n := \sup_{k \geqslant n} x_k.$$

易见 $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. 据闭区间套原理, 闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 有公共点 $A$, $a_n \leqslant A \leqslant b_n$, 且当 $k \geqslant n$ 时, 有

$$a_n = \inf_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_k \leqslant \sup_{k \geqslant n} x_k = b_n.$$

于是, 当 $k \geqslant n$ 时,

$$-(b_n - a_n) \leqslant -(A - a_n) = a_n - A \leqslant x_k - A \leqslant b_n - A \leqslant b_n - a_n,$$

从而

$$|x_k - A| \leqslant b_n - a_n.$$

柯西条件意味着 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $\forall n, m > N$,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow x_m - \frac{\varepsilon}{3} < x_n < x_m + \frac{\varepsilon}{3}.$$

特别地, 取 $m = N + 1, \forall n > N$,

$$x_{N+1} - \frac{\varepsilon}{3} < x_n < x_{N+1} + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$x_{N+1}-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant \inf_{k\geqslant n} x_n = a_n \leqslant b_n = \sup_{k\geqslant n} x_k \leqslant x_{N+1}+\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而当 $n>N$ $(k\geqslant n)$ 时

$$b_n - a_n \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

$$|A-x_k|<\varepsilon,$$

证得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = A$. □

**注 1** $\{x_n\}$ 是基本列的否命题是

$$\exists \varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n>N, \exists m>N(|x_n-x_m|\geqslant\varepsilon).$$

**例 8** 数列 $(-1)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 没有极限, 因它不是基本列. 事实上, 对 $\varepsilon=1$, $\forall N\in\mathbb{N}$ 有

$$|x_{N+1}-x_{N+2}| = |1-(-1)| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

**例 9** 令

$$x_1 = 0.\alpha_1,\ x_2 = 0.\alpha_1\alpha_2,\ x_3 = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ \cdots,\ x_n = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,\cdots$$

是一个二进位小数的数列, 每项后面的项, 是把该项末尾补充一个数码 0 或 1 得来的. 往证它是一个柯西列. 令 $m>n$,

$$|x_m-x_n| = \left|\frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\alpha_m}{2^m}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\dfrac{1}{2^N}<\varepsilon$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|x_m-x_n| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

**例 10** 讨论数列 $\{x_n\}$, 其中

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

因为对任何 $n\in\mathbb{N}$,

$$|x_{2n}-x_n| = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n} > n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

所以, 根据柯西准则, 这数列没有极限.

2. 单调数列的极限存在准则

**定义 6**　设有数列 $\{x_n\}$. 如果 $\forall n \in \mathbb{N}(x_n < x_{n+1})$, 则称 $\{x_n\}$ 是递增列; 如果 $\forall n \in \mathbb{N}(x_n \leqslant x_{n+1})$, 则称其为不降列; 如果 $\forall n \in \mathbb{N}(x_n \geqslant x_{n+1})$, 则称其为不增列; 如果 $\forall n \in \mathbb{N}(x_n > x_{n+1})$, 则称其为递降列. 这四种数列统称为单调数列.

**定义 7**　称数列 $\{x_n\}$ 为上有界列, 如果存在数 $M$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}(x_n < M)$. 类似地定义下有界列.

**定理 5** (魏尔斯特拉斯)　不降数列有极限的充要条件是它上有界.

**证**　在讨论数列的一般性质时, 已证明任何收敛数列必是有界数列, 故只需证明充分性.

由题设, $\{x_n\}$ 上有界, 故它有上确界 $a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. $\forall \varepsilon > 0$, 由上确界的最小性知 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $x_N > a - \varepsilon$. 由不降性, 当 $n > N$ 时, $x_n \geqslant x_N > a - \varepsilon$, 而 $x_n \leqslant a$, 故

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant a < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

类似地可验证若 $\{x_n\}$ 是下有界的不增数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. □

**例 11**　当 $q > 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{q^n} = 0$.

**证**　记 $x_n = \dfrac{n}{q^n}$. 显然 $x_n > 0$ (下有界). 因 $q > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1,$$

故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $n > N$ 时, $x_{n+1} < x_n$ (递降). 从而 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{N+k} = x \in \mathbb{R}$ 存在. 由于收敛性与数列的前有限多项无关, 所以 $x_n \to x (n \to \infty)$. 注意到

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{nq} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q} x,$$

故 $x = 0$. □

**推论 2**　由此例可得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(2) 对于任何 $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

**证**　(1) $\forall \varepsilon > 0$, 则 $q = 1 + \varepsilon > 1$, 由例 11, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \Rightarrow 1 \leqslant n < (1+\varepsilon)^n,$$

从而

$$1 - \varepsilon < 1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

(2) $a=1$ 时显然. 设 $a>1$. 则 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时有 $1<a<(1+\varepsilon)^n$, 从而 $1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$. 这说明 $\sqrt[n]{a}\to 1\,(n\to\infty)$. 设 $0<a<1$. 则 $1<\dfrac{1}{a}$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=1.$$ □

**例 12** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q^n}{n!}=0$, 其中 $q\in\mathbb{R}$ 任意给定, $n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$.

**证** $q=0$ 时显然. 设 $q\neq 0$. 因 $\left|\dfrac{q^n}{n!}\right|=\dfrac{|q|^n}{n!}$, 故考虑 $q>0$ 即可. 记 $x_n=\dfrac{q^n}{n!}$, 易见 $x_{n+1}=\dfrac{q}{n+1}x_n$, 故 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{q}{n+1}<1$, 从而 $x_{n+1}<x_n$ (递降), $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 存在. 进而有

$$x=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{q}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=0\cdot x=0.$$ □

3. 数 e

**例 13** 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

**证** 记 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(1) $\{a_n\}$ 是不减的. 回忆平均值不等式:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1+\dfrac{1}{n}$, $x_{n+1}=1$, 得

$$\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}\leqslant\frac{1}{n+1}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}\right),$$

即

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\leqslant\frac{1}{n+1}\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right)=1+\frac{1}{n+1},$$

换言之, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

(2) $\{a_n\}$ 是有界的且 $1<a_n<3$. 由二项式定理, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\mathrm{C}_n^1\frac{1}{n}+\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+\mathrm{C}_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\frac{1}{n^n},$$

其中

$$\mathrm{C}_n^k \frac{1}{n^k} = \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^{k-1}} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)}, \quad k = 2, \cdots, n,$$

故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\left(\frac{1}{2(2-1)}+\frac{1}{3(3-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right) = 2+\left(1-\frac{1}{n}\right) < 3.$$

于是, 由单调有界定理得证所需. □

**定义 8**　记

$$\boxed{\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

并称以 e 为底的对数为自然对数, 通常记为

$$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x.$$

e 是一个著名的无理数,

$$\mathrm{e} = 2.718281828459\cdots.$$

4. 子列与数列的部分极限

**定义 9**　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是一数列, 而 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 是自然数的一个递增列, 则称 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$ 为 $\{x_n\}$ 的一个子列.

例如, 当把奇自然数 $1, 3, 5, \cdots$ 按其天然的顺序排列时就是数列 $1, 2, 3, \cdots$ 的一个子列, 而数列 $3, 1, 5, 7, 9, \cdots$ 就非数列 $1, 2, 3, \cdots$ 的子列.

**定理 6**　任何实数列都有单调子列.

**证**　设 $\{x_n\}$ 为实数列. 分两种情形.

(1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\{x_{k+n}\}$ 有最大项. 取

$$x_{n_1} = \max_{n\in\mathbb{N}}\{x_{1+n}\}, x_{n_2} = \max_{n\in\mathbb{N}}\{x_{n_1+n}\}, \cdots,$$

显然,

$$\{x_{n_1+n}\} \supset \{x_{n_2+n}\}, \cdots, \{x_{n_k+n}\} \supset \{x_{n_{k+1}+n}\},$$

故 $n_k < n_{k+1}$ 且 $x_{n_k} \geqslant x_{n_{k+1}}$. 换言之, 子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是单调递减数列.

(2) $\exists k \in \mathbb{N}$, $\{x_{k+n}\}$ 没有最大项. 取 $n_1 = k+1$. 于是, $x_{n_1} < \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_{n_1+n}\}$. 有 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} > x_{n_1}$. 同理, 有 $n_3 > n_2$ 使得 $x_{n_3} > x_{n_2}$. 如此下去, 我们得到一严格递增的子列 $\{x_{n_k}\}$. □

**推论 3** (波尔察诺–魏尔斯特拉斯引理)　每个有界数列含有收敛子列.

**证** 由定理 6 知该数列有单调子列, 再由定理 5(魏尔斯特拉斯) 知该子列收敛. □

**定义 10** 设 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$. 称 $\{x_n\}$

(1) 趋于**正无穷** (以正无穷为极限), 若

$$x_n \to +\infty := \forall c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(c < x_n);$$

(2) 趋于**负无穷** (以负无穷为极限), 若

$$x_n \to -\infty := \forall c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(x_n < c);$$

(3) 趋于**无穷** (以无穷为极限), 若

$$x_n \to \infty := \forall c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N(|c| < |x_n|).$$

此三种情形统称为 $\{x_n\}$ 趋于**无穷**. 我们不视趋于无穷的数列为收敛数列.

**推论 4** 设 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$.

(1) 如果 $\{x_n\}$ 有界, 则它必有收敛子列.

(2) 如果 $\{x_n\}$ 无界, 则它必有子列趋于无穷.

对于数列 $\{x_n\}$, 令 $a_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$, $b_n = \sup\limits_{k \geqslant n} x_k$. 由于 $\{x_k : k \geqslant n\} \supset \{x_k : k \geqslant n+1\}$, 所以 $\{a_n\}$ 是不减的, $\{b_n\}$ 是不增的, 它们都有极限.

**定义 11** 称数 $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 为 $\{x_n\}$ 的下极限, 记为

$$\underline{\lim_{k \to \infty}} x_k \quad 或 \quad \lim_{k \to \infty} \inf x_k;$$

称数 $b = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ 为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记为

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} x_k \quad 或 \quad \lim_{k \to \infty} \sup x_k.$$

**例 14** $x_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\underline{\lim_{k \to \infty}} x_k = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geqslant n} x_k = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geqslant n} (-1)^k = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1,$$
$$\overline{\lim_{k \to \infty}} x_k = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geqslant n} x_k = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geqslant n} (-1)^k = \lim_{n \to \infty} (+1) = 1.$$

**例 15** $x_k = k^{(-1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\underline{\lim_{k \to \infty}} k^{(-1)^k} = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0,$$
$$\overline{\lim_{k \to \infty}} k^{(-1)^k} = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n \to \infty} (+\infty) = +\infty.$$

**例 16**　$x_k=(-1)^k k,\ k\in\mathbb{N}$.

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\,(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}(-\infty)=-\infty,$$
$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}(-1)^k k=\lim_{n\to\infty}(+\infty)=+\infty.$$

**定义 12**　如果数列 $\{x_n\}$ 有一子列收敛到某数 $x$ (或趋于 $+\infty$, 或趋于 $-\infty$), 则称 $x$ (或 $+\infty$, 或 $-\infty$) 是 $\{x_n\}$ 的**部分极限**.

**命题 1**　任何数列的下极限是它的部分极限中的最小者, 而它的上极限是它的部分极限中的最大者.

**证**　以下极限为例. 设 $\{x_n\}$ 是一数列. 如果它的下极限是 $-\infty$, 则必然是部分极限中的最小者. 设 $\{x_n\}$ 下有界. 记 $a_n:=\inf\limits_{k\geqslant n}x_k$, 则 $a_n$ 不降, $a_n\to a:=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$. $\forall n,\exists k_n\in\mathbb{N}$ 使得

$$a_{k_{n-1}+1}\leqslant x_{k_n}<a_{k_{n-1}+1}+\frac{1}{n},\quad k_n<k_{n+1},$$

这里 $k_0=0$. 根据迫敛性, $x_{k_n}\to a\,(n\to\infty)$. 于是 $a$ 是 $\{x_n\}$ 的部分极限. $a$ 还是最小的部分极限. 事实上, $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}$ 使得

$$a-\varepsilon<a_n=\inf_{k\geqslant n}x_k\leqslant x_k,\quad\forall k>n.$$

这说明 $\{x_n\}$ 的任何部分极限不能小于 $a-\varepsilon$. 因 $\varepsilon$ 是任意的, 故任何部分极限也不能小于 $a$. □

**推论 5**　数列有极限或趋于负无穷或趋于正无穷当且仅当它的上、下极限重合.

**推论 6**　$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 的所有子列收敛且极限相同.

**证**　$\Leftarrow$: $\{x_n\}$ 自身就是它的一个子列, 故收敛.

$\Rightarrow$: 设 $x_n\to x(n\to\infty)$, $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$. $\forall\varepsilon>0$. 因 $x_n\to x(n\to\infty)$, 故 $\exists N_0\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_0$ 时, $|x_n-x|<\varepsilon$, 则当 $k>N_0$ 时, 由于 $n_k\geqslant k>N_0$, 故有 $|x_{n_k}-x|<\varepsilon$. □

**注 2**　证明 $\{x_n\}$ 发散的方法:

(1) 找发散子列 $x_{n_k}$ (若有).

(2) 找两个收敛子列 $x_{n_k}$ 与 $x_{m_k}$, 但它们的极限不同.

例如, 考察数列 $\{(-1)^n\}$, 因 $x_{2k}=1;x_{2k-1}=-1$; $\{2^{(-1)^n n}\}:x_{2k}=2^{2k}=4^k$, 故发散.

问: 若 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k-1}\}$ 均收敛且极限相同, 问 $\{x_n\}$ 是否收敛?

**推论 7**　$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k-1}\}$ 均收敛且极限相同.

**证**　$\Rightarrow$: 推论 6.

⇐: 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = x$. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, k > N_1, |x_{2k} - x| < \varepsilon; \exists N_2, k > N_2, |x_{2k-1} - x| < \varepsilon$. 取 $N = 2\max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 若 $n = 2k$, 则 $k > \max\{N_1, N_2\} \geqslant N_1$, 从而

$$|x_n - x| = |x_{2k} - x| < \varepsilon;$$

若 $n = 2k-1$, 则 $2k - 1 > 2\max\{N_1, N_2\} \Rightarrow k > \max\{N_1, N_2\} \geqslant N_2$, 有

$$|x_n - x| = |x_{2k-1} - x| < \varepsilon.$$

从而, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - x| < \varepsilon$. □

### 2.1.4 级数的初步知识

1. 级数的和与级数收敛性的柯西准则

**定义 13** (级数) 数列 $\{u_n\} \subset \mathbb{R}$ 的表达式: $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, 称为常数项无穷级数或数项级数 (简称级数), 常写作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或 $\sum u_n$; 称 $u_n$ 为通项 或一般项, $S_n = u_1 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ 为第 $n$ 个部分和 (简称部分和); 若部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且收敛于 $S$, $S$ 为级数的和, 记作 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 若 $\{S_n\}$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**例 17** 讨论等比级数 (也称为几何级数) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 的收敛性, 其中 $a \neq 0$.

**解** $q \neq 1$ 时, 由于

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

因此

(1) 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, 此时, 级数收敛, 其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

(2) 当 $|q| > 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, 此时, 级数发散.

(3) 当 $q = 1$ 时, $S_n = na$, 级数发散.

(4) 当 $q = -1$ 时, $S_{2k} = 0, S_{2k-1} = a$, $k = 1, 2, \cdots$, 级数发散.

**例 18** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

**解**　$u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, 故

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1,\quad n\to\infty.$$

于是, 所论级数收敛且其和为 1.

由数列极限的柯西收敛准则直接可得如下定理.

**定理 7** (柯西收敛准则)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $m>N$ 时, $\forall p\in\mathbb{N}$, 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{m+k}\right|=|u_{m+1}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon.$$　□

特别地, $p=1$ 时, $|u_{m+1}|<\varepsilon$, 于是得如下推论.

**推论 8** (级数收敛的必要条件)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

例如, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散, 这因为一般项数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

**注 3**　(1) $u_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 未必推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists m_N,p_N\in\mathbb{N},m_N>N$, 使得

$$|u_{m_N+1}+\cdots+u_{m_N+p_N}|\geqslant\varepsilon_0.$$

例如, **调和级数**: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 的通项 $u_n=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$, 但前面已知 $|S_{2n}-S_n|>\dfrac{1}{2}$, 故 $\{S_n\}$ 发散.

**例 19**　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

**证**　$\forall m,p\in\mathbb{N}$, 考察

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{m+k}\right|=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(m+p-1)(m+p)} \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+p-1} - \frac{1}{m+p}\right) \\
&= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p} < \frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $m > N$ 时, $\forall p \in \mathbb{N}$, 有

$$
\left| \sum_{k=1}^{p} u_{m+k} \right| < \frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \varepsilon.
$$

2. 收敛级数的性质

**定理 8** 收敛级数具有下述性质:

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 其和分别为 $S, T$, 则对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛, 且其和为 $aS + bT$, 即

$$
\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n + b \sum_{n=1}^{\infty} v_n.
$$

(2) 去掉、增加或改变级数的有限多个项, 不改变级数的敛散性.

(3) (结合律) 在收敛级数的项中任意加括号, 其收敛性不变, 其和不变.

**证** (1) 由数列极限的四则运算及级数的收敛定义直接推出.

(2) 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于充分远的任意片断的绝对值可以任意小, 而与前有限项无关.

(3) 设

$$
\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, v_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1}, v_2 = u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}, \cdots, v_k = u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}.
$$

则 $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = S_{n_k}$. 可见 $\lim\limits_{m \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} v_k = \lim\limits_{m \to +\infty} S_{n_m} = S$.

**注 4** (1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 也收敛, 设其和为 $R_n$, 则 $R_n = S - S_n$, 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 $n$ 个余项 (简称余项).

(2) 当带有括号的级数收敛时, 不能去括号 (去括号后可能发散), 即收敛级数可以加括号, 但不能去括号.

3. 绝对收敛性、比较定理及其推论

**定义 14**　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

因 $|u_n+\cdots+u_m|\leqslant|u_n|+\cdots+|u_m|$, 故由柯西准则知, 如果一个级数绝对收敛则它必收敛. 但反之不真. 例如, 级数

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$$

的部分和是 $\dfrac{1}{n}$ 或 0, 所以它收敛于 0. 但其绝对值级数 $1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\cdots$ 发散.

因为 $|u_n|\geqslant 0$, 为了研究绝对收敛性只需考虑正项级数就行了. 观察: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数 $(u_n\geqslant 0,\forall n)$, 则 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 必不减.

(1) 基本原理

**定理 9**　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

(2) 比较原则

**定理 10**　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为两个正项级数, 若 $\exists N\in\mathbb{N}$, 使当 $n>N$ 时, 有 $u_n\leqslant v_n$. 则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

**证**　设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k, T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}v_k$, 由定理 8 性质 (2), 不妨设 $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant v_n$. 则 $S_n\leqslant T_n$, 由基本原理知 (1), (2) 成立.

**例 20**　考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$ 的敛散性.

**解**　因为 $n\geqslant 2$ 时,

$$\frac{1}{n^2-n+1}\leqslant\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n(n-1)}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2}.$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$ 收敛, 故该级数收敛.

**推论 9** (魏尔斯特拉斯比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个级数. 若存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N_0$ 时 $|u_n| \leqslant v_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

**例 21** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ 是绝对收敛的. 因为 $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

当讨论级数的收敛性时常选用所谓 $p$-级数 $\sum \dfrac{1}{n^p}$ 作对比. 下述命题有益于研究 $p$-级数.

**命题 2** (柯西) 设 $\{u_n\}$ 是不增的正数列. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ 收敛.

**证** 记 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}$. 因为

$$u_2 \leqslant u_2 \leqslant u_1,$$

$$2u_4 \leqslant u_3 + u_4 \leqslant 2u_2,$$

$$4u_8 \leqslant u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \leqslant 4u_4,$$

$$\vdots$$

$$2^n u_{2^{n+1}} \leqslant u_{2^n+1} + u_{2^n+2} + \cdots + u_{2^{n+1}} \leqslant 2^n u_{2^n},$$

$$\vdots$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k u_{2^{k+1}} \leqslant u_2 + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k},$$

即

$$\frac{1}{2}(S_{n+1} - u_1) \leqslant A_{2^{n+1}} - u_1 \leqslant S_n,$$

由此据比较原则知结论成立. □

**例 22** 证明: $p$-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leqslant 1$ 时发散.

**证** 由命题 2 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 与 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \dfrac{1}{(2^k)^p} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$ 同时收敛或同时发散, 而后者收敛的充要条件是 $2^{1-p} < 1$, 即 $p > 1$. □

**注 5** (比较原则的极限形式)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$. 则

(1) 若 $0 < l < +\infty$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.

(2) 若 $l = 0$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(3) 若 $l = +\infty$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**证**　(1) 对 $\varepsilon = \dfrac{l}{2} > 0$,　$\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3l}{2}.$$

(2) 对 $\varepsilon = 1$,　$\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{u_n}{v_n} = \left| \frac{u_n}{v_n} - 0 \right| < 1 \Rightarrow u_n < v_n.$$

(3) 对 $G = 1$,　$\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{u_n}{v_n} > 1 \Rightarrow u_n > v_n.$$

□

**例 23**　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n - n}$ 是收敛的, 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2^n - n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = 1 > 0,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛, 故所论级数收敛.

**推论 10** (根式判别法-柯西判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一级数, $N_0 \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{R}$,

(1) 若 $\sqrt[n]{|u_n|} \leqslant l < 1, \forall n > N_0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1, \forall n > N_0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**证** (1) $n > N_0$ 时, $\sqrt[n]{|u_n|} \leqslant l < 1 \Rightarrow |u_n| \leqslant l^n$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.

(2) 由 $n > N_0$ 时, $\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1 \Rightarrow |u_n| \geqslant 1 \Rightarrow u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. □

**注 6** (根式法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一级数, $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|}$. 这时有

(1) 若 $\alpha < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\alpha > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 若 $\alpha = 1$, 则该级数有可能绝对收敛, 也有可能发散.

**证** (1) 对 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(1-\alpha)$, $l = \dfrac{1+\alpha}{2}$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt[n]{|u_n|} < \alpha + \varepsilon = \frac{1+\alpha}{2} = l < 1.$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.

(2) 存在子列 $\{n_k\}$ 使得 $\sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} \to \alpha\,(k \to \infty)$. 对 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(\alpha - 1)$, $l = \dfrac{1+\alpha}{2}$, $\exists K$, 当 $k > K$ 时,

$$\sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} > \alpha - \varepsilon = \frac{1+\alpha}{2} = l > 1.$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 例如, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. 虽然 $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} \to 1$, $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} \to 1$, 但是前者发散, 后者收敛. □

**例 24** 讨论当 $x \in \mathbb{R}$ 取何值时, 下述级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + (-1)^n\right)^n x^n.$$

**解** 计算

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\left(2 + (-1)^n\right)^n x^n\right|} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|2 + (-1)^n\right| = 3|x|.$$

因此, 当 $|x|<\dfrac{1}{3}$ 时绝对收敛; 当 $|x|>\dfrac{1}{3}$ 时发散. 而当 $|x|=\dfrac{1}{3}$ 时, 观察

$$\left(2+(-1)^{2k}\right)^{2k}x^{2k}=3^{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}=1,$$

从而级数不满足收敛的必要条件.

**推论 11** (比式判别法–达朗贝尔判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一级数, $N_0\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{R}$,

(1) 若 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\leqslant l<1,\forall n>N_0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant 1,\forall n>N_0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

**证**　(1) 因改变级数的有限多项不影响级数的收敛性, 不妨设 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\leqslant l<1,\forall n\in\mathbb{N}$. 于是

$$|u_{n+1}|=\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|\cdots\left|\frac{u_2}{u_1}\right||u_1|\leqslant|u_1|\,l^n.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}l^n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛.

(2) 因 $n>N_0$ 时, $|u_{n+1}|\geqslant|u_n|$, 故不满足收敛的必要条件. □

**注 7** (比式判别法的极限形式)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一级数, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\alpha$. 则

(1) 当 $\alpha<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

(2) 当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(3) 当 $\alpha=1$ 时无法判断.

**证**　类似于根式判别法极限形式的证明. □

**例 25**　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ $(x>0)$ 的敛散性.

**解**　令 $u_n=nx^{n-1}$, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}=x\cdot\frac{n+1}{n}\longrightarrow x,\quad n\to+\infty.$$

可见当 $0<x<1$ 时, 级数收敛. 当 $x>1$ 时, 级数发散. 当 $x=1$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$, 显然发散.

综上所述, 当 $0<x<1$, 级数收敛. 当 $x \geqslant 1$ 时, 级数发散.

**例 26** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

**解** 令 $u_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$, 则 $\dfrac{1}{2} \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant \dfrac{\sqrt[n]{3}}{2}$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}}{2}=\dfrac{1}{2}$, 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}=\dfrac{1}{2}<1$, 故所论级数收敛.

**注 8** 例 26 中, 比式判别法无效. 事实上,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{1}{6}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

无法判断级数的敛散性.

凡能用比式判别法鉴别收敛性的级数, 也能由根式判别法来判断, 因此可以说根式判别法比比式判别法更有效. 这是因为

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{u_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{u_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

## 练 习

1. 按 $\varepsilon$-$N$ 定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{n}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}=0$.

2. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则对任一正整数 $k$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}=a$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{n}p!\right)/n!$.　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right), 0<\alpha<1$.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n}), |\alpha|<1$.

4. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 $m$ 个正数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$.

(2) 若 $a>0$, $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

6. 证明下列数列极限存在并求其值:

(1) 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$, $n=1,2,\cdots$.

(2) 设 $a_1=\sqrt{c}(c>0)$, $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$, $n=1,2,\cdots$.

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$, 又问由此等式能否反过来推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(2) 若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

8. 求以下数列的上、下极限:

(1) $\{1+(-1)^n\}$.　(2) $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}\right\}$.

(3) $\{2n+1\}$.　(4) $\left\{\dfrac{2n}{n+1}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$.

(5) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}$.　(6) $\left\{\sqrt[n]{\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|}\right\}$.

9. 圆周上有一固定点, 把圆周转动 $n$ 个弧度, $n$ 取一切自然数, 就得到圆周上的许多点. 试求这样得到的点集的所有极限点.

10. 如果 $a$ 与 $b$ 是正数, 而 $p$ 是任意实数, 就称

$$S_p(a,b)=\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

为 $a$ 与 $b$ 的 $p$ 次平均值. 特别当 $p=1$ 时得到算术平均值; $p=2$ 时得到二次平均值或均方值; 当 $p=-1$ 时, 得到调和平均值.

(1) 试证任何次的平均值 $S_p(a,b)$ 介于 $a$, $b$ 之间.

(2) 求平均值列

$$\{S_n(a,b)\},\quad \{S_{-n}(a,b)\}$$

的极限.

11. 试证: 如果 $a>0$, 那么数列

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

收敛于 $a$ 的算术平方根, 其中 $x_1>0$. 估计收敛速度, 即估计与 $n$ 有关的绝对误差 $|\Delta_n|=|x_n-a|$.

12. 证明下列级数的收敛性, 并求其和.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

13. 应用比较原则判别下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$.

(3) $\displaystyle\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

(5) $\displaystyle\sum\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$.

14. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum\frac{1\cdots(2n-1)}{n!}$.

(2) $\displaystyle\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$.

(3) $\displaystyle\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

(4) $\displaystyle\sum\frac{n!}{n^n}$.

(5) $\displaystyle\sum\frac{n^2}{2^n}$.

15. 设级数 $\sum a_n^2$ 收敛, 证明 $\sum\dfrac{a_n}{n}(a_n>0)$ 也收敛.

16. 设正项级数 $\sum u_n$ 收敛, 证明级数 $\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 也收敛.

17. 设 $a_n>0$, 证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 同时收敛或同时发散.

## 2.2 函数的极限

### 2.2.1 定义和例子

设 $E\subset\mathbb{R}$, $a$ 是 $E$ 的一个极限点, $f:E\to\mathbb{R}$ 是定义在 $E$ 上的一个实值函数. 我们以极限来描述当点 $x\in E$ 接近于 $a$ 时, 函数 $f$ 的值 $f(x)$ 接近于某数 $A$ 的过程.

**定义 1** 设有函数 $f:E\to\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}$. 如果对于任何 $\varepsilon>0$, 存在一数 $\delta>0$, 使得对于满足 $0<|x-a|<\delta$ 的任何 $x\in E$, 关系

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立, 我们就称当 $x$ 趋于 $a$ 时, 函数 $f$ 趋于 $A$, 或说, $A$ 是函数 $f$ 当 $x$ 趋于 $a$ 时的极限.

所说条件用逻辑符号写出来就是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

如果当 $x$ 沿集合 $E$ 趋于 $a$ 时 $A$ 是 $f(x)$ 的极限, 就记成

$$f(x) \to A, \quad x \to a, x \in E, \quad \text{或} \lim_{x \to a, x \in E} f(x) = A.$$

此外, 常把 $x \to a, x \in E$ 写成 $E \ni x \to a$, 而把 $\lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x)$ 写成 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$.

**例 1**　设 $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 验证

$$\lim_{E \ni x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

事实上, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 就有

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

回忆一点 $a$ 的邻域是包含这个点的一个任意的开区间. 为方便计, 引入如下定义.

**定义 2**　一点 $a$ 的邻域 $U(a)$, 去掉这个点 $a$ 本身 $U(a) \setminus \{a\}$, 叫做这个点 $a$ 的去心邻域. 记作 $\mathring{U}(a)$. 集合

$$U_E(a) := E \cap U(a),$$
$$\mathring{U}_E(a) := E \cap \mathring{U}(a),$$

分别叫做点 $a$ 在集合 $E$ 中的邻域与点 $a$ 在集合 $E$ 中的去心邻域.

如果 $a$ 是 $E$ 的极限点, 那么, 总有 $\mathring{U}_E(a) \neq \varnothing$.

如果记 $\mathring{U}_E^{\delta}(a) := (a - \delta, a + \delta) \cap E \setminus \{a\}$ 与 $V_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}(A) := (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, 则上面引进的函数的 "$\varepsilon$-$\delta$" 定义可以改写成下述形式:

$$\boxed{\left( \lim_{E \ni x \to a} f(x) = A \right) := \forall V_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}(A), \exists \mathring{U}_E^{\delta}(a) \left( f(\mathring{U}_E^{\delta}(a)) \subset V_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}(A) \right)}.$$

考虑到在数轴上一点的任何邻域中, 必含这一点的一个对称邻域 ($\delta$ 邻域), 我们现在得到极限定义的如下形式的写法.

**定义 3**

$$\boxed{\left( \lim_{E \ni x \to a} f(x) = A \right) := \forall V_{\mathbb{R}}(A), \exists \mathring{U}_E(a) \left( f(\mathring{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A) \right)}.$$

对于数值函数, 即 $a, A \in \mathbb{R}$ 时, 两定义是等价的. 当把极限概念推广到更一般的函数, 也就是函数的定义域不是数集时, 适合用后一种定义方式. 从这种定义顺便看到, 只要告诉 $X$ 和 $Y$ 中点的邻域是什么, 换句话说, 就是如果在 $X$ 和 $Y$ 中给定了拓扑, 我们就能定义映射 $f: X \to Y$ 的极限概念.

**例 2** 证明在整个数轴上定义的符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

当 $x$ 趋于 0 时它没有极限.

需证无论取怎样的 $A$, 都存在点 $A$ 的邻域 $V(A)$, 使得对点 0 的无论怎样 (小) 的去心邻域 $\mathring{U}(0)$, 至少存在 $x \in \mathring{U}(0)$, 使得函数 sgn $x$ 在 $x$ 的值不在 $V(A)$ 内, 亦即

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists V(A), \forall \mathring{U}(0), \exists x \in \mathring{U}(0)(f(x) \notin V(A)).$$

事实上, 注意 $\operatorname{sgn}(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$, 若 $A \notin \{-1, 0, 1\}$, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$ 成立 $\operatorname{sgn}(\mathbb{R}) \cap V_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}(A) = \varnothing$. 若 $A \in \{-1, 0, 1\}$, 则对 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, 点 1 和 $-1$ 不能同时都落入 $V_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}(A)$. 然而, 无论取点 0 的哪个去心邻域 $\mathring{U}(0)$, 它都既含负数又含正数, 即在某些点上 $f(x) = -1$, 而在另外某些点上 $f(x) = 1$, 故能找到点 $x \in \mathring{U}(0)$, 使 $f(x) \notin V_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}(A)$.

我们约定, 如果函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在某点 $a \in \mathbb{R}$ 的整个去心邻域上有定义, 即当 $\mathring{U}_E(a) = \mathring{U}_{\mathbb{R}}(a) = \mathring{U}(a)$ 时, 将代替 $E \ni x \to a$ 使用比较简单的记法 $x \to a$.

**例 3** $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$.

事实上, 当 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 时, $|\operatorname{sgn} x| = 1$, 即它在 0 点的任何去心邻域 $\mathring{U}(0)$ 中是常数 1, 因此, 对于 1 的任何邻域 $V(1)$ 得到 $f(\mathring{U}(0)) \subset V(1)$.

下面令 $\mathbb{R}_-$ 与 $\mathbb{R}_+$ 分别表示负数集与正数集.

**注 1** (1) 虽然函数 $|\operatorname{sgn} x|$ 在 0 已有定义 $|\operatorname{sgn} 0| = 0$, 但此值对函数的极限并无任何影响. 此例表明, 不能把函数在 $a$ 点的值 $f(a)$ 与当 $x$ 趋于 $a$ 时的极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 混为一谈.

(2) 在例 2 中, 我们已知 $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在. 但是函数 sgn 在 $\mathbb{R}_-$ 上的限制 $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}_-}$ 是等于 $-1$ 的常数函数, 而 $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}_+}$ 是等于 1 的常数函数. 于是

$$\lim_{\mathbb{R}_- \ni x \to 0} \operatorname{sgn} x = -1, \qquad \lim_{\mathbb{R}_+ \ni x \to 0} \operatorname{sgn} x = 1.$$

可见同一个函数, 当把它限制在不同的子集上时, 在同一点处可有不同的极限, 而原来的函数在这一点没有极限.

**例 4**　类似于例 2 可以证明函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时没有极限. 事实上, 在任何去心邻域 $\mathring{U}(0)$ 中, 总存在形如

$$\frac{1}{-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi} \quad 与 \quad \frac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$$

的点, 其中 $n\in\mathbb{N}$, 在这些点上, 函数分别取值 $-1$ 与 $+1$. 但是当 $\varepsilon<1$ 时, 这两个数不能同时含于点 $A\in\mathbb{R}$ 的 $\varepsilon$ 邻域 $V(A)$ 内. 这就是说, 任何 $A\in\mathbb{R}$ 不能是这函数在 $x\to 0$ 时的极限. 但如果令

$$E_-=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x=\frac{1}{-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi},\ n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$E_+=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x=\frac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

则有

$$\lim_{E_-\ni x\to 0}\sin\frac{1}{x}=-1,\qquad \lim_{E_+\ni x\to 0}\sin\frac{1}{x}=1.$$

以下定理 1 反映了数列极限与数值函数极限的密切的联系.

**定理 1** (归结原则)[①]　$\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)=A$ 当且仅当对于任何收敛于 $a$ 的点列 $\{x_n\}, x_n\in E\setminus\{a\}$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $A$.

**证**　由定义立刻得到

$$\lim_{E\ni x\to a}f(x)=A\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

实际上, 如果 $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)=A$, 那么对于点 $A$ 的任何邻域 $V(A)$, 存在 $a$ 在 $E$ 中的去心邻域 $\mathring{U}_E(a)$, 使得对于 $x\in\mathring{U}_E(a)$ 有 $f(x)\in V(A)$. 如果集合 $E\setminus\{a\}$ 的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, $x_n\in\mathring{U}_E(a)$, 因此, $f(x_n)\in V(A)$. 这样一来, 根据数列极限的定义推知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

现证命题的另一面. 如果 $A$ 不是 $f(x)$ 当 $E\ni x\to a$ 时的极限, 则存在一个邻域 $V(A)$, 使得对于任何 $n\in\mathbb{N}$, 点 $a$ 的 $\dfrac{1}{n}$ 邻域中必有点 $x_n\in E\setminus\{a\}$, 使得 $f(x_n)\notin V(A)$. 这正好是说, 虽然数列 $\{x_n\}$ 趋于 $a$, 但数列 $\{f(x_n)\}$ 并不收敛于 $A$. □

① 有时称这个命题为柯西极限定义 (邻域形式) 与海涅极限定义 (序列形式) 的等价命题. 海涅 (H. E. Heine, 1821—1881) 是德国数学家.

### 2.2.2 函数极限的性质

现在来建立一些经常用到的函数极限的性质, 其中大多数与已证过的数列极限的性质类似. 此外, 根据归结原则, 函数极限的许多重要性质, 显然都能由数列极限的相应性质直接推出. 注意, 要想建立函数极限的所有性质, 仅仅需要关于集合的极限点的去心邻域的两条性质:

(1) $\mathring{U}_E(a) \neq \varnothing$, 即去心邻域是非空集.

(2) $\forall \mathring{U}'_E(a), \forall \mathring{U}''_E(a), \exists \mathring{U}_E(a)\big(\mathring{U}_E(a) \subset \mathring{U}'_E(a) \cap \mathring{U}''_E(a)\big)$, 即任意两个去心邻域之交还是一个去心邻域.

1. 函数极限的一般性质

**定义 4** 先给出几个概念.

(1) 把只取一个值的函数 $f: E \to \mathbb{R}$, 叫做常值函数. 设 $a$ 是 $E$ 的一个极限点, 如果在 $a$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}_E(a)$ 中, $f$ 是常数, 就说函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 当 $E \ni x \to a$ 时最终为常值函数.

(2) 对于函数 $f: E \to \mathbb{R}$, 如果存在着数 $C \in \mathbb{R}$, 使得对于任何 $x \in E$ 成立

$$|f(x)| < C \text{ 或 } f(x) < C \text{ 或 } C < f(x),$$

就分别称 $f$ 为有界函数, 上有界函数, 下有界函数. 如果这三种关系式只在点 $a$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}_E(a)$ 中成立, 就分别把函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 叫做当 $E \ni x \to a$ 时最终有界、最终上有界、最终下有界函数.

易见, 最终为常值 $A$ 的函数之极限为 $A$.

**例 5** 用公式定义的函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x} + x\cos\dfrac{1}{x}$, 其中 $x \neq 0$, 在其定义域内不是有界函数, 但它是当 $x \to 0$ 时最终有界的函数.

**例 6** 例 5 之结论, 对于在 $\mathbb{R}$ 上定义的函数 $f(x) = x$ 也成立.

**定理 2** 函数的极限有以下性质.

(1) (局部有界性) 若 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$, 则当 $E \ni x \to a$ 时 $f(x)$ 最终有界.

(2) (唯一性) 若 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$ 存在, 则其极限唯一.

(3) (保不等式) 设 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{E \ni x \to a} g(x) = B$, 若 $A < B$, 则 $\exists \mathring{U}_E(a)$ 使得 $f(x) < g(x), \forall\, x \in \mathring{U}_E(a)$.

(4) (迫敛性) 设 $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = \lim\limits_{E \ni x \to a} g(x) = C$, 且在某邻域 $\mathring{W}_E(a)$ 内有 $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, 则 $\lim\limits_{E \ni x \to a} h(x) = C$.

**证** 类似于数列极限中的相应定理.

有极限的函数必定最终有界的结论 (1), 由相应的定义直接推知.

兹证明极限的唯一性 (2). 设 $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A_1$ 又 $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A_2$. 假如 $A_1\neq A_2$, 这时我们可以取得邻域 $V(A_1)$ 与 $V(A_2)$, 满足 $V(A_1)\cap V(A_2)=\varnothing$. 根据极限定义, 有

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A_1 \;\Rightarrow\; \exists \mathring{U}'_E(a)(f(\mathring{U}'_E(a))\subset V_{\mathbb{R}}(A_1)),$$

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A_2 \;\Rightarrow\; \exists \mathring{U}''_E(a)(f(\mathring{U}''_E(a))\subset V_{\mathbb{R}}(A_2)).$$

今取 $a$ 点 ($E$ 的极限点) 的去心邻域 $\mathring{U}_E(a)$ 使 $\mathring{U}_E(a)\subset \mathring{U}'_E(a)\cap \mathring{U}''_E(a)$ (例如, 可以取 $\mathring{U}_E(a)=\mathring{U}'_E(a)\cap \mathring{U}''_E(a)$, 因为这个交也是去心邻域). 因为 $\mathring{U}_E(a)\neq\varnothing$, 必能取得 $x\in\mathring{U}_E(a)$, 这时 $f(x)\in V(A_1)\cap V(A_2)$; 但这是不可能的, 因为, 由 $V(A_1), V(A_2)$ 的作法, 它们没有公共点.

现证 (3). 取数 $C$, 使 $A<C<B$. 根据极限之定义, 必有点 $a$ 在集合 $E$ 中的一个去心邻域 $\mathring{U}'_E(a)$ 及 $\mathring{U}''_E(a)$, 使得当 $x\in\mathring{U}'_E(a)$ 时, $|f(x)-A|<C-A$, 而当 $x\in\mathring{U}''_E(a)$ 时, $|g(x)-B|<B-C$. 因此, 在含于 $\mathring{U}'_E(a)\cap\mathring{U}''_E(a)$ 的任何去心邻域 $\mathring{U}_E(a)$ 中, 必有

$$f(x)<A+(C-A)=C=B-(B-C)<g(x).$$

最后证 (4). 设 $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=C$, 那么, 对任何固定的 $\varepsilon>0$, 可求得点 $a$ 在集合 $E$ 中的一个去心邻域 $\mathring{U}'_E(a)$ 及 $\mathring{U}''_E(a)$, 使得当 $x\in\mathring{U}'_E(a)$ 时, $C-\varepsilon<f(x)$, 而当 $x\in\mathring{U}''_E(a)$ 时, $g(x)<C+\varepsilon$. 因此, 在含于 $\mathring{U}'_E(a)\cap\mathring{U}''_E(a)$ 的任何去心邻域 $\mathring{W}_E(a)$ 中, 必有

$$C-\varepsilon<f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)<C+\varepsilon,$$

即 $|h(x)-C|<\varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{E\ni x\to a} h(x)=C$. □

**推论 1**　设 $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=B$, 如果在点 $a$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}_E(a)$ 中,

(1) 满足 $f(x)>g(x)$, 那么 $A\geqslant B$.

(2) 满足 $f(x)\geqslant g(x)$, 那么 $A\geqslant B$.

(3) 满足 $f(x)>B$, 那么 $A\geqslant B$.

(4) 满足 $f(x)\geqslant B$, 那么 $A\geqslant B$.

**证**　由定理 2 之结论 (3), 用反证法直接推出结论 (1) 与 (2); 结论 (3) 与 (4) 是 (1) 与 (2) 当 $g(x)\equiv B$ 时的特例. □

2. 算术运算

**定义 5**　设 $f:E\to\mathbb{R}, g:E\to\mathbb{R}$ 是有公共定义域 $E$ 的两个函数. 用以下

各式

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x),$$
$$(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)},\ \text{如果当}\ x\in E\ \text{时}\ g(x)\neq 0,$$

在 $E$ 上定义的函数, 分别叫做它们的**和**、**积**、**商**.

**定义 6** 对于函数 $f: E\to\mathbb{R}$, 如果有 $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=0$, 就说 $f$ 是当 $E\ni x\to a$ 时的**无穷小**.

**命题 1** 下述结论成立.

(1) 设 $\alpha,\beta: E\to\mathbb{R}$ 都是当 $E\ni x\to a$ 时的无穷小, 则其和 $\alpha+\beta: E\to\mathbb{R}$ 也是当 $E\ni x\to a$ 时的无穷小.

(2) 设 $\alpha: E\to\mathbb{R}$ 是当 $E\ni x\to a$ 时的无穷小, $\beta: E\to\mathbb{R}$ 是当 $E\ni x\to a$ 时最终有界函数, 则其积 $\alpha\cdot\beta: E\to\mathbb{R}$ 是当 $E\ni x\to a$ 时的无穷小.

**证** (1) 设给定了 $\varepsilon>0$, 根据极限的定义知

$$\left(\lim_{E\ni x\to a}\alpha(x)=0\right)\Rightarrow\left(\exists\mathring{U}'_E(a),\forall x\in\mathring{U}'_E(a)\left(|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

$$\left(\lim_{E\ni x\to a}\beta(x)=0\right)\Rightarrow\left(\exists\mathring{U}''_E(a),\forall x\in\mathring{U}''_E(a)\left(|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

因此, 对于去心邻域 $\mathring{U}_E(a)\subset\mathring{U}'_E(a)\cap\mathring{U}''_E(a)$, 得到

$$\forall x\in\mathring{U}_E(a),\ |(\alpha+\beta)(x)|=|\alpha(x)+\beta(x)|\leqslant|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon.$$

这就验证了 $\lim\limits_{E\ni x\to a}(\alpha+\beta)(x)=0$.

(2) 假设

$$\left(\lim_{E\ni x\to a}\alpha(x)=0\right)\wedge\left(\exists M\in\mathbb{R},\exists\mathring{U}_E(a),\forall x\in\mathring{U}_E(a)(|\beta(x)|<M)\right).$$

任意给定 $\varepsilon>0$, 根据极限定义得

$$\left(\lim_{E\ni x\to a}\alpha(x)=0\right)\Rightarrow\left(\exists\mathring{U}'_E(a),\forall x\in\mathring{U}'_E(a)\left(|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\right)\right).$$

因此, 对于去心邻域 $\mathring{U}''_E(a)\subset\mathring{U}'_E(a)\cap\mathring{U}_E(a)$, 得到

$$\forall x\in\mathring{U}''_E(a),|(\alpha\cdot\beta)(x)|=|\alpha(x)\cdot\beta(x)|=|\alpha(x)|\cdot|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon,$$

这就验证了 $\lim\limits_{E\ni x\to a}(\alpha\cdot\beta)(x)=0$. □

**注 2**　函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 趋于 $A$, 当且仅当它能表成 $A+\alpha(x)$, 这里 $\alpha(x)$ 是当 $E \ni x \to a$ 时的无穷小函数, 即

$$\boxed{\left(\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A\right) \Leftrightarrow (f(x)=A+\alpha(x)) \wedge \left(\lim_{E\ni x\to a}\alpha(x)=0\right)}.$$

这可直接由极限的定义推出, 因为有

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{E\ni x\to a}(f(x)-A)=0.$$

下面讨论极限的四则运算.

**定理 3**　设 $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=B$, 那么

(1) $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f+g)(x)=A+B$.

(2) $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f\cdot g)(x)=A\cdot B$.

(3) $\lim\limits_{E\ni x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{A}{B}$, 假定 $B\neq 0$, 并且当 $x\in E$ 时, $g(x)\neq 0$.

**证**　(1) 由上面的注 2 知

$$f(x)=A+\alpha(x), \quad g(x)=B+\beta(x),$$

其中 $\alpha(x),\beta(x)$ 是当 $E\ni x\to a$ 时的无穷小. 这时

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=A+\alpha(x)+B+\beta(x)=(A+B)+\gamma(x),$$

其中 $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$, 作为无穷小之和, 是当 $E\ni x\to a$ 时的无穷小. 因此,

$$\lim_{E\ni x\to a}(f+g)(x)=A+B.$$

(2) 仍把 $f(x),g(x)$ 表成 $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ 的形式, 于是

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha(x))(B+\beta(x))=A\cdot B+\gamma(x),$$

其中 $\gamma(x)=A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$, 根据无穷小的性质, 它是当 $E\ni x\to a$ 时的无穷小函数. 因此, $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f\cdot g)(x)=A\cdot B$.

(3) 仍记 $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, 其中 $\lim\limits_{E\ni x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{E\ni x\to a}\beta(x)=0$. 因为 $B\neq 0$, 存在去心邻域 $\mathring{U}_E(a)$, 使得在它的每一点上有 $|\beta(x)|<\dfrac{|B|}{2}$, 从而

$$|g(x)|=|B+\beta(x)|\geqslant |B|-|\beta(x)|>\frac{|B|}{2},$$

于是在 $\mathring{U}_E(a)$ 中 $\dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|B|}$, 即函数 $\dfrac{1}{|g(x)|}$ 当 $E \ni x \to a$ 时最终有界. 现在记

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \frac{A}{B} = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}$$
$$= \frac{1}{g(x)}\frac{1}{B}\big(B\alpha(x) - A\beta(x)\big) = \gamma(x).$$

根据无穷小的性质 $\left(\text{以及刚刚证的 } \dfrac{1}{g(x)} \text{ 的最终有界性}\right)$, 可知函数 $\gamma(x)$ 是当 $E \ni x \to a$ 时的无穷小, 于是证明了 $\lim\limits_{E\ni x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{A}{B}$. □

### 2.2.3 函数极限的一般定义 (对基的极限)

在 2.2.2 小节中, 对于定义在去心邻域中的函数, 我们证明了一些极限性质. 不难看出, 在这些证明中, 除了那里引进的去心邻域的性质 (1) 和 (2), 实际上不再需要别的什么, 因此, 有理由引进以下数学对象.

1. 基的定义与主要例子

**定义 7** 由集合 $X$ 的某些子集 $B \subset X$ 组成的集族 $\mathcal{B}$ 称为集合 $X$ 中的基, 假如族 $\mathcal{B}$ 的元素不是空集且任二元素之交都含有族的某个元素, 即它满足两个条件:

(1) $\forall B \in \mathcal{B}(B \neq \varnothing)$.

(2) $\forall B_1 \in \mathcal{B}$, $\forall B_2 \in \mathcal{B}$, $\exists B \in \mathcal{B}(B \subset B_1 \cap B_2)$.

下表是分析中一些最常用的基:

| 基的表示法 | 表示法的名称 | 由什么集合 (元素) 组成的基 | 基中的元素的定义与表示法 |
|---|---|---|---|
| $x \to a$ | $x$ 趋于 $a$ | 点 $a \in \mathbb{R}$ 的去心邻域组成的基 | $\mathring{U}(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta_1 < x < a + \delta_2 \wedge x \neq a\}$ 其中 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ |
| $x \to \infty$ | $x$ 趋于无穷大 | 由无穷的邻域组成的基 | $U(\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid \delta < \lvert x\rvert\}$, 其中 $\delta \in \mathbb{R}$ |
| $x \to a$, $x \in E$ 或 $E \ni x \to a$ | $x$ 沿 $E$ 趋于 $a$ | 点 $a$ 在 $E$ 中的去心邻域组成的基 *) | $\mathring{U}_E(a) := E \cap \mathring{U}(a)$ |
| $x \to \infty, x \in E$ 或 $E \ni x \to \infty$ | $x$ 沿 $E$ 趋于无穷大 | 在集合 $E$ 中的无穷的邻域组成的基 **) | $U_E(\infty) := E \cap U(\infty)$ |

*) 假定 $a$ 是 $E$ 的极限点.

**) 假定集合 $E$ 无界.

记 $E = E_a^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ $(E = E_a^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\})$, 则可把 $x \to a, x \in E$ 写成 $x \to a + 0 (x \to a - 0)$ 并说 $x$ 从右趋于 $a$, 或从大值方面趋于 $a$(相应地说从

左趋于 $a$, 或从小值方面趋于 $a$). 当 $a=0$ 时, 就把 $x\to 0+0(x\to 0-0)$ 缩写成 $x\to +0(x\to -0)$.

我们还用 $E\ni x\to a+0(E\ni x\to a-0)$ 代替 $x\to a, x\in E\cap E_a^+(x\to a, x\in E\cap E_a^-)$, 它表示 $x$ 沿 $E$ 趋于 $a$, 但总是大于 (小于)$a$ (有的教科书称 $\lim\limits_{E\ni x\to a+0} f(x)$ ($\lim\limits_{E\ni x\to a-0} f(x)$)为 $f$ 在 $a$ 处的右极限 (左极限)).

如果

$$E_\infty^+=\{x\in\mathbb{R}|c<x\}\ \ (E_\infty^-=\{x\in\mathbb{R}|x<c\}),$$

就把 $x\to\infty, x\in E$ 写成 $x\to +\infty(x\to -\infty)$ 并说$x$ 趋于正无穷 ($x$ 趋于负无穷).

用 $E\ni x\to +\infty(E\ni x\to -\infty)$ 这种写法代替 $x\to\infty, x\in E\cap E_\infty^+(x\to a, x\in E\cap E_\infty^-)$.

当 $E=\mathbb{N}$ 时 (如果不会发生误解), 我们就把 $x\to\infty, x\in\mathbb{N}$ 写成 $n\to\infty$, 在数列的极限理论中, 我们已经采用了这种记法.

注意, 上面举出的所有基, 都有一个共同的特点, 即基中的任何两个元素之交, 还是这个基中的一个元素, 而不只是包含着基的某个元素. 当我们讨论的函数不是在数轴上给出的时候, 将会遇到其他的基①.

还要注意, 这里所用的术语“基”, 是数学中叫做“滤子基”的简述, 下面引入的关于基的极限, 对分析来说, 是现代法国数学家嘉当 (Cartan) 所创立的滤子极限的最重要的部分②.

2. 关于基的极限

**定义 8**　设 $f: X\to\mathbb{R}$ 是集合 $X$ 上的函数; $\mathcal{B}$ 是 $X$ 中的一个基; $A\in\mathbb{R}$. 如果对于 $A$ 的任何邻域 $V(A)$, 存在 $B\in\mathcal{B}$, 使 $f(B)\subset V(A)$, 就说 $A$ 是函数 $f$ 关于基 $\mathcal{B}$ 的极限.

如果 $A$ 是函数 $f: X\to\mathbb{R}$ 关于基 $\mathcal{B}$ 的极限, 则记

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x)=A.$$

用逻辑符号把关于基的极限定义写出来, 就是

$$\boxed{\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x)=A\right):=\forall V(A),\exists B\in\mathcal{B}(f(B)\subset V(A))}.$$

把这个基本定义写成下列形式比较方便:

$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x)=A\right):=\forall\varepsilon>0,\exists B\in\mathcal{B},\forall x\in B(|f(x)-A|<\varepsilon).$$

① 例如, 平面上含有给定点的开圆 (不包含圆周) 的族是一个基. 基中的二元素之交不一定是圆, 但它总是包含着这个族里某个圆.

② 关于详细情况, 请参看 Bourbaki 的《一般拓扑学》.

在这个说法里, 把任意邻域 $V(A)$ 换成了关于 $A$ 点对称的邻域 ($\varepsilon$-邻域). 关于实函数这两种定义的等价性, 前面已经说过, 是由在一点的任何邻域中都含有该点的一个对称邻域这样一个事实推出.

我们已经给出了函数关于基的极限的普遍的定义. 上面又讨论了分析中最常用到的基的例子. 在具体问题中, 可能出现这些基中的某一种, 必须善于解读一般定义在具体问题中的具体含义, 并具体地写出它的基.

例如,

$$f \text{ 在 } a \text{ 处的右极限}: \left(\lim_{x\to a+0} f(x) = A\right) := \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$
$$\forall x \in (a, a+\delta)(|f(x) - A| < \varepsilon),$$
$$f \text{ 在 } a \text{ 处的左极限}: \left(\lim_{x\to a-0} f(x) = A\right) := \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$
$$\forall x \in (a-\delta, a)(|f(x) - A| < \varepsilon),$$

以及

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\right) := \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x < \delta(|f(x) - A| < \varepsilon) \text{ 等.}$$

在讨论基的例子时, 我们特别引入了无穷的邻域这一概念. 如果利用这一概念, 那么, 根据极限的一般定义, 作如下约定是合理的:

$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty\right) := \forall V(\infty), \exists B \in \mathcal{B}(f(B) \subset V(\infty)).$$

同样, 也可写成

$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty\right) := \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}, \forall x \in B(\varepsilon < |f(x)|),$$
$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = +\infty\right) := \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}, \forall x \in B(\varepsilon < f(x)),$$
$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = -\infty\right) := \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}, \forall x \in B(f(x) < -\varepsilon).$$

通常, $\varepsilon$ 总是指小的量, 但在上面的定义中显然并非如此. 例如, 按我们的约定, 可以写

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x > \delta(f(x) < \varepsilon).$$

在 2.2.2 小节中, 我们对于特殊基 $E \ni x \to a$ 已经证明了一些有关极限的定理; 为了在普遍情况证明这些定理, 就需要在任何基下, 给出最终为常数、最终有界与无穷小等的相应的定义.

**定义 9** 称函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 对基 $\mathcal{B}$:

(1) **最终为常数.** 如果存在一数 $A \in \mathbb{R}$ 及 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $\forall x \in B$ 成立 $f(x) = A$.

(2) **有界, 或最终有界.** 如果存在一数 $c > 0$ 及 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $\forall x \in B$ 有 $|f(x)| < c$.

(3) **为无穷小.** 如果 $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = 0$.

给出了这些定义, 并注意到 "有关极限定理的证明只需要基的性质 (1) 与 (2)" 这个事实, 易见 2.2.2 小节中所建立的所有极限性质关于任意的基全都是正确的. 特别地, 我们现在已能谈论当 $x \to \infty$, 或 $x \to -\infty$, 或 $x \to +\infty$ 时函数的极限了. 为了完全掌握关于任意基的极限概念, 我们将在普遍形式下证明进一步的函数极限性质.

### 2.2.4　函数极限的存在问题

1. 柯西准则

在叙述柯西准则之前, 先给出一个有关的定义.

**定义 10**　称

$$\omega(f; E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|$$

为函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 在集合 $E \subset X$ 上的**振幅**. 这是在一切可能的点对 $x_1, x_2 \in E$ 上, 函数值之差的模的上确界.

**例 7**　$\omega(x^2; [-1, 2]) = 4$.

**例 8**　$\omega(x; [-1, 2]) = 3$.

**例 9**　$\omega(x; (-1, 2)) = 3$.

**例 10**　$\omega(\operatorname{sgn} x; [-1, 2]) = 2$.

**例 11**　$\omega(\operatorname{sgn} x; [0, 2]) = 1$.

**例 12**　$\omega(\operatorname{sgn} x; (0, 2)) = 0$.

**定理 4** (函数极限存在的柯西准则)　设 $X$ 为一集, $\mathcal{B}$ 为 $X$ 中的基. 函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 关于基 $\mathcal{B}$ 有极限, 当且仅当对任何数 $\varepsilon > 0$, 存在着 $B \in \mathcal{B}$, 使得函数在 $B$ 上的振幅小于 $\varepsilon$. 即

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}(\omega(f; B) < \varepsilon).$$

**证**　必要性. 如果 $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A \in \mathbb{R}$, 那么, 对 $\varepsilon > 0$, 选出基 $\mathcal{B}$ 之元素 $B$, 使得在任何 $x \in B$ 处, $|f(x) - A| < \varepsilon/3$. 但这时对任何 $x_1, x_2 \in B$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

所以 $\omega(f; B) < \varepsilon$.

充分性. 兹证: 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}$, 使得 $\omega(f;B) < \varepsilon$, 则函数有极限. 为此, 对 $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, 取 $B_n \in \mathcal{B}$, 使得 $\omega(f;B_n) < \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. 由于 $B_n \neq \varnothing$, 取 $x_n \in B_n$, $n = 1,2,\cdots$, 则序列 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$ 是基本列. 事实上, 因 $B_n \cap B_m \neq \varnothing$, 可借助于辅助点 $x \in B_n \cap B_m$, 得到

$$|f(x_n) - f(x_m)| \leqslant |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(x_m)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

根据对数列已经证明了的柯西准则, 数列 $\{f(x_n)\}$ 有一极限 $A$. 在上边的不等式中令 $m \to \infty$ 得 $|f(x_n) - A| \leqslant \dfrac{1}{n}$. 结合 $\omega(f;B) < \dfrac{1}{n}$, 就得到: 如果 $n > N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, 则在任意点 $x \in B_n$ 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 即得所证. □

**注 3** 后边将看到, 上边这个证明对于在任何所谓完备空间 $Y$ 中取值的函数也是有效的, 我们现在感兴趣的是 $Y = \mathbb{R}$ 的情形, 这时, 可如愿地使用在序列情况证明柯西准则充分性时的那些想法. 事实上, 记 $m_B = \inf\limits_{x \in B} f(x), M_B = \sup\limits_{x \in B} f(x)$, 并注意到, 对基 $\mathcal{B}$ 的任何元 $B_1, B_2$ 都成立

$$m_{B_1} \leqslant m_{B_1 \cap B_2} \leqslant M_{B_1 \cap B_2} \leqslant M_{B_2},$$

根据完备性公理, 可以找到数 $A \in \mathbb{R}$ 分离数集 $\{m_B\}$ 和 $\{M_B\}$, 其中 $B \in \mathcal{B}$. 由于 $\omega(f;B) = M_B - m_B$, 可以断言, 只要 $\omega(f;B) < \varepsilon$, 就在每个点 $x \in B$ 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

**例 13** 我们来证明, 当 $X = \mathbb{N}$ 且 $\mathcal{B}$ 是基 $n \to \infty, n \in \mathbb{N}$ 时, 这个函数极限存在性的一般柯西准则, 与前面讨论的数列极限存在的柯西准则一致.

实际上, 基 $n \to \infty, n \in \mathbb{N}$ 的元素是

$$B = \mathbb{N} \cap U(\infty) = \{x \in \mathbb{N} | N < n\},$$

它是由大于某数 $N \in \mathbb{R}$ 的所有自然数 $n \in \mathbb{N}$ 组成的集合, 可以认为 $N \in \mathbb{N}$ 而不失普遍性. 关系 $\omega(f;B) < \varepsilon$ 在现在的情况, 就是 $\forall n_1, n_2 > N$ 有 $|f(n_1) - f(n_2)| < \varepsilon$.

因此 "对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在基 $\mathcal{B}$ 的元素 $B \in \mathcal{B}$, 使函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 在 $B$ 上的振幅 $\omega(f;B)$ 小于 $\varepsilon$" 这个条件, 等价于条件 "$\{f(n)\}$ 是基本列".

2. 复合函数的极限

**定理 5** (复合函数极限的定理) 假设:

(1) $Y$ 是一个集合, $\mathcal{B}_Y$ 是 $Y$ 的一个基; $g : Y \to \mathbb{R}$ 是关于基 $\mathcal{B}_Y$ 有极限的一个映射.

(2) $X$ 是一个集合, $\mathcal{B}_X$ 是 $X$ 的一个基; 映射 $f : X \to Y$ 满足: $\forall B_Y \in \mathcal{B}_Y$, $\exists B_X \in \mathcal{B}_X$ 使得 $f(B_X) \subset B_Y$.

则映射 $f$ 与 $g$ 的复合 $(g\circ f):X\to\mathbb{R}$ 有定义, 关于基 $\mathcal{B}_X$ 有极限, 且

$$\lim_{\mathcal{B}_X}(g\circ f)(x)=\lim_{\mathcal{B}_Y}g(y).$$

**证**　复合函数 $(g\circ f):X\to\mathbb{R}$ 有定义, 因为 $f(X)\subset Y$. 设 $\lim\limits_{\mathcal{B}_Y}g(y)=A$, 我们来证 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X}(g\circ f)(x)=A$. 对于 $A$ 点的给定邻域 $V(A)$, 取 $B_Y\in\mathcal{B}_Y$, 使得 $g(B_Y)\subset V(A)$. 据题设 $\exists B_X\in\mathcal{B}_X$ 使得 $f(B_X)\subset B_Y$. 这时

$$(g\circ f)(B_X)=g(f(B_X))\subset g(B_Y)\subset V(A),$$

这样, 我们就证明了, $A$ 是函数 $(g\circ f):X\to\mathbb{R}$ 关于基 $\mathcal{B}_X$ 的极限. □

3. 单调函数的极限

现在讨论一类特殊但非常有用的数值函数——单调函数.

**定义 11**　定义在数集 $E\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 叫做在 $E$ 上是递增的, 如果

$$\forall x_1,x_2\in E(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2));$$

在 $E$ 上是不降的, 如果

$$\forall x_1,x_2\in E(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2));$$

在 $E$ 上是不增的, 如果

$$\forall x_1,x_2\in E(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2));$$

在 $E$ 上是递减的, 如果

$$\forall x_1,x_2\in E(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)).$$

上面这几种函数都叫做集合 $E\subset\mathbb{R}$ 上的单调函数.

假定数 (或符号 $-\infty,+\infty$)$i=\inf E$ 或 $s=\sup E$ 是 $E$ 的极限点, 且 $f:E\to\mathbb{R}$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的单调函数, 则定理 6 成立.

**定理 6**　(单调函数极限存在的准则)　集合 $E\subset\mathbb{R}$ 上的不降函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 当 $x\to s,x\in E$ 时有极限的充要条件是它上有界; 当 $x\to i,x\in E$ 时有极限的充要条件是它下有界.

**证**　我们对极限 $\lim\limits_{E\ni x\to s}f(x)$ 来证明这一定理.

(1) 假设这极限存在. 则函数对基 $E\ni x\to s$ 是最终有界的. 进而由于 $f$ 在 $E\subset\mathbb{R}$ 上不降, 可推知 $f$ 有上界 (实际上还能断定对于任何 $x\in E,f(x)\leqslant\lim\limits_{E\ni x\to s}f(x)$).

(2) 现在转而证明, 在 $f$ 上有界的条件下, 极限 $\lim\limits_{E\ni x\to s} f(x)$ 存在. 既然 $f$ 上有界, 那么像集 $f(E):=\{f(x)|x\in E\}\subset\mathbb{R}$ 有上界从而有上确界. 设 $A=\sup\limits_{x\in E} f(x)$, 今证 $\lim\limits_{E\ni x\to s} f(x)=A$. 对 $\varepsilon>0$, 根据集合的上确界的定义, 存在点 $x_0\in E$, 使得 $A-\varepsilon<f(x_0)\leqslant A$. 因为 $f$ 在 $E\subset\mathbb{R}$ 上不降, 所以当 $x_0<x\in E$ 时, $A-\varepsilon<f(x)\leqslant A$. 但集合 $\{x\in E|x_0<x\}$ 显然是基 $x\to s, x\in E$ 的元素 (因为 $s=\sup E$). 于是 $\lim\limits_{E\ni x\to s} f(x)=A$ 得证.

对于极限 $\lim\limits_{E\ni x\to i} f(x)$, 可完全类似地证得

$$\lim_{E\ni x\to i} f(x)=\inf_{x\in E} f(x). \qquad \square$$

### 2.2.5 根据极限理论定义指数函数、对数函数与幂函数

1. 指数函数

**定义 12** (指数函数) 假设 $a\in\mathbb{R}_+=\{y\in\mathbb{R}|\,0<y\}, a\neq 1$. 以 $a$ 为底的指数函数是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射: $x\mapsto a^x$, 按下述规则定义.

(1) 约定 $a^0=1$.

(2) 对于自然数 $n\in\mathbb{N}$, 依归纳法令

$$a^1:=a,\quad a^{n+1}:=a^n\cdot a,\quad a^{-n}:=\frac{1}{a^n}.$$

(3) 对于有理数 $\mathbb{Q}\ni r=\dfrac{m}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$, 令

$$a^r=a^{\frac{m}{n}}:=(a^{\frac{1}{n}})^m,\quad a^{-\frac{1}{n}}:=(a^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

(4) 对于无理数 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 令

$$a^x:=\begin{cases}\sup\limits_{\mathbb{Q}\ni r<x} a^r, & a>1;\\ \inf\limits_{\mathbb{Q}\ni r<x} a^r, & a<1.\end{cases}$$

通常记 $a^x$ 为 $\exp_a x$. 当 $a=$e 时简记作 $\exp x$.

**注 4** (1) 在中学的数学课程里给出了有理函数幂 $a^r$ 的定义及其性质:

$$a^0=1;\quad a^1=a.$$

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}.$$

当 $a>1$ 时, $r_1<r_2\Rightarrow a^{r_1}<a^{r_2}$;

当 $0<a<1$ 时, $r_1<r_2\Rightarrow a^{r_1}>a^{r_2}$.

(2) 因此, $a^r$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是单调的, 从而由确界原理容易推知, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$a^x = \begin{cases} \inf\limits_{\mathbb{Q} \ni r > x} a^r, & a > 1, \\ \sup\limits_{\mathbb{Q} \ni r > x} a^r, & a < 1. \end{cases}$$

此外, 如果把 $a^r$ 定义中的 "$r < x$" 改为 "$r \leqslant x$" (以及上式中的 "$r > x$" 改为 "$r \geqslant x$"), 则无论 $x \in \mathbb{Q}$ 还是 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 都可用如上注 4(2) 的确界形式统一起来.

**命题 2**　指数函数具有下述性质.

(1) $a^1 = a$.

(2) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$.

(3) 若 $a > 1$, 则 $(a^{x_1} < a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$; 若 $0 < a < 1$, 则 $(a^{x_1} > a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$.

(4) 当 $x \to x_0$ 时, $a^x \to a^{x_0}$.

(5) 函数 $x \mapsto a^x$ 的值集是一切正实数之集.

(6) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 成立 $(a^x)^y = a^{xy}$.

**证**　(1) 与 (2) 由定义和极限运算给出.

验 (3). 设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. 当 $a > 1$ 时, $(x_1 < x_2) \Rightarrow (a^{x_1} < a^{x_2})$. 事实上, 在开区间 $(x_1, x_2)$ 上, 存在两个有理数 $r_1 < r_2$. 既然 $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$, 那么据 $a^x$ 定义及在 $\mathbb{Q}$ 上的性质, 就得到

$$a^{x_1} = \inf_{\mathbb{Q} \ni r > x_1} a^r < a^{r_1} < a^{r_2} < \sup_{\mathbb{Q} \ni r < r_2} = a^{x_2}.$$

当 $0 < a < 1$ 时, 由 $(a^{-1})^{x_1} < (a^{-1})^{x_2}$ 推知 $a^{x_1} > a^{x_2}$.

验 (4). 由单调性 (3) 及定理 6(单调函数极限存在的准则) 容易推得.

验 (5). 令 $y_0 \in \mathbb{R}_+$. 如果 $a > 1$, 我们知道, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $a^{-n} < y_0 < a^n$. 因此

$$A = \{x \in \mathbb{R} | a^x < y_0\} 与 B = \{x \in \mathbb{R} | y_0 < a^x\}$$

这两个集合都不空. 但是, 由于 (当 $a > 1$ 时)$(x_1 < x_2) \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, 那么, 对于 $x_1 \in A, x_2 \in B$, 就必定有 $x_1 < x_2$. 因此, 对于集合 $A, B$ 应用完备公理, 就得到一数 $x_0$, 使对于任何 $x_1 \in A$ 及 $x_2 \in B$, 有 $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$. 今证 $a^{x_0} = y_0$.

假如 $a^{x_0} < y_0$, 那么, 由于当 $n \to \infty$ 时, $a^{x_0 + \frac{1}{n}} \to a^{x_0}$, 应有数 $n \in N$ 使 $a^{x_0 + \frac{1}{n}} < y_0$. 这就得到 $\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \in A$. 但这与已经证明的 $x_0$ 分割 $A$ 与 $B$ 的性质不相容. 所以 $a^{x_0} < y_0$ 之假定不能成立. 同样可证不等式 $y_0 < a^{x_0}$ 也不可能成立. 因此根据实数的性质, 必然 $a^{x_0} = y_0$.

如果 $0<a<1$, 则对 $\frac{1}{y_0}$, 上述讨论推知 $\exists x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}=\frac{1}{y_0}$, 换言之, $a^{x_0}=y_0$.

(6) 的证明放在下述对数函数性质证明完毕之后. □

2. 对数函数

由指数函数的性质知映射 $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 是双射, 所以它有反函数.

**定义 13** $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 的逆映射叫做*以 $a(0<a,a\neq 1)$ 为底的对数函数*, 记作

$$\log_a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}.$$

**定义 14** 以 $a=\mathrm{e}$ 为底的对数函数, 或对数, 叫做*自然对数*, 并记作 $\ln:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$.

根据定义, 对数函数是指数函数的反函数, 于是

$$\forall x\in\mathbb{R}(\log_a(a^x)=x),$$
$$\forall y\in\mathbb{R}_+(a^{\log_a y}=y).$$

由这个定义及指数函数的性质得到下述命题.

**命题 3** 由指数函数的性质 (1)—(5) 推知对数在自己的定义域 $\mathbb{R}_+$ 中有如下性质.

(1′) $\log_a a=1$.

(2′) $\log_a(y_1\cdot y_2)=\log_a y_1+\log_a y_2$.

(3′) $a>1$ 时 $(\log_a y_1<\log_a y_2)\Leftrightarrow(y_1<y_2)$; $0<a<1$ 时 $(\log_a y_1>\log_a y_2)\Leftrightarrow(y_1<y_2)$.

(4′) 当 $\mathbb{R}_+\ni y\to y_0\in\mathbb{R}_+$ 时, $\log_a y\to\log_a y_0$.

(5′) 函数 $\log_a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 的值集为整个实数集 $\mathbb{R}$.

(6′) 对任何 $b>0$ 及任何 $\alpha\in\mathbb{R}$, 以下等式成立:

$$\log_a(b^\alpha)=\alpha\log_a b.$$

**证** 由指数函数的性质 (1) 与对数之定义即得 (1′).

由指数函数之性质 (2) 得到 (2′). 实际上, 设 $x_1=\log_a y_1, x_2=\log_a y_2$. 于是 $y_1=a^{x_1}, y_2=a^{x_2}$, 而且, 由 (2), 得 $y_1\cdot y_2=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$, 因此 $\log_a(y_1\cdot y_2)=x_1+x_2$.

类似地, 从指数函数的性质 (3), 可导出对数函数的性质 (3′). 以 $a>1$ 为例.

令 $x = \log_a y$. 则

$$\begin{aligned}\log_a y_1 < \log_a y_2 &\Leftrightarrow x_1 < x_2\\ &\Leftrightarrow \exp_a x_1 < \exp_a x_2\\ &\Leftrightarrow y_1 < y_2.\end{aligned}$$

性质 (4′) 可由单调性 (3′) 及定理 6 (单调函数极限存在的准则) 推得.

显然, (5) ⇒ (5′).

最后证 (6′).

(1) 当 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 时, 等式成立, 因为由对数性质 (2′), 用归纳法可得

$$\log_a(y_1 \cdots y_n) = \log_a y_1 + \cdots + \log_a y_n,$$

于是

$$\log_a(b^n) = \log_a b + \cdots + \log_a b = n \log_a b.$$

(2) $\log_a(b^{-1}) = -\log_a b$, 因为, 如果令 $\beta = \log_a b$, 那么

$$b = a^{\beta}, \quad b^{-1} = a^{-\beta}, \quad \text{从而 } \log_a(b^{-1}) = -\beta.$$

(3) 于是, 对于 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 等式 $\log_a(b^{\alpha}) = \alpha \log_a b$ 成立.

(4) 当 $n \in \mathbb{Z}$ 时, $\log_a(b^{\frac{1}{n}}) = \dfrac{1}{n} \log_a b$. 实际上

$$\log_a b = \log_a(b^{\frac{1}{n}})^n = n \log_a(b^{\frac{1}{n}}).$$

(5) 对任何有理数 $\alpha = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, 现在可验证命题正确. 实际上,

$$\frac{m}{n} \log_a b = m \log_a(b^{\frac{1}{n}}) = \log_a(b^{\frac{1}{n}})^m = \log_a(b^{\frac{m}{n}}).$$

(6) 既已对于任何有理数 $r \in \mathbb{Q}$ 证明了等式

$$\log_a b^r = r \log_a b,$$

令 $r$ 沿着 $\mathbb{Q}$ 趋于 $\alpha$, 据指数函数的性质 (3), 与对数函数的性质 (3′), 就得知当 $r$ 足够接近于 $\alpha$ 时, $b^r$ 就接近于 $b^{\alpha}$, 于是 $\log_a b^r$ 就接近于 $\log_a b^{\alpha}$. 这就是

$$\lim_{\mathbb{Q} \ni r \to \alpha} \log_a b^r = \log_a b^{\alpha}.$$

但 $\log_a b^r = r \log_a b$, 所以

$$\log_a b^{\alpha} = \lim_{\mathbb{Q} \ni r \to \alpha} \log_a b^r = \lim_{\mathbb{Q} \ni r \to \alpha} r \log_a b = \alpha \log_a b. \qquad \square$$

**命题 2 之 (6) 的证明** (指数性质 (6)) 现在利用已建立的对数性质证明命题 2 之 (6).

当 $a=1$ 时, 由于对任何 $\alpha$ 都有 $1^\alpha=1$, 等式显然成立.

当 $a\neq 1$ 时, 则有

$$\log_a((a^\alpha)^\beta)=\beta\log_a(a^\alpha)=\alpha\cdot\beta\log_a a=\alpha\cdot\beta=\log_a(a^{\alpha\beta}),$$

再由对数性质 (3′), 就得 $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$. □

在图 1 中画出了函数 $\mathrm{e}^x, 10^x, \ln x, \log_{10}x=:\lg x$ 等的图像, 而在图 2 中画出了 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x, (0.1)^x, \log_{\mathrm{e}^{-1}}x, \log_{0.1}x$ 的图像.

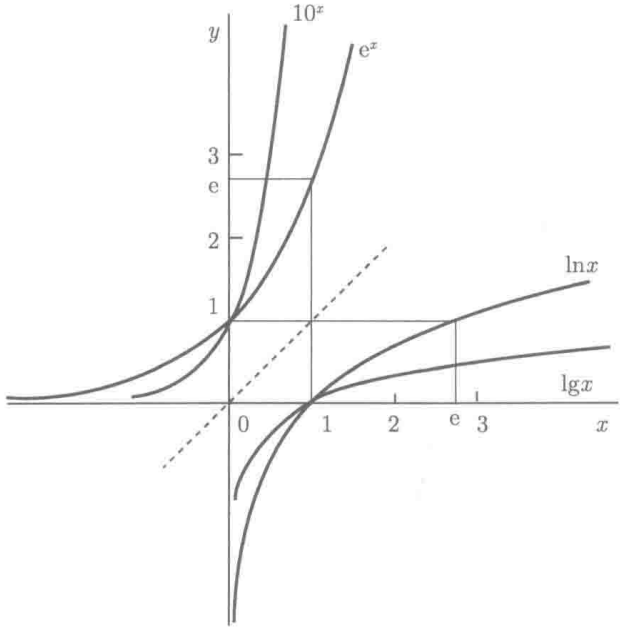


图 1

3. 幂函数

我们已对任何 $x>0$ 及任何 $\alpha\in\mathbb{R}$ 定义了 $x^\alpha$(读作 $x$ 的 $\alpha$ 次幂).

**定义 15** 定义在正实数集 $\mathbb{R}_+$ 上的函数 $x\mapsto x^\alpha$, 叫做**幂函数**, 称 $\alpha$ 为**幂指数**. 幂函数显然是指数函数与对数函数的复合, 确切地说就是

$$x^\alpha=a^{\log_a(x^\alpha)}=a^{\alpha\log_a x}.$$

在图 3 中, 对一些幂指数画出了 $y=x^\alpha$ 的图像.

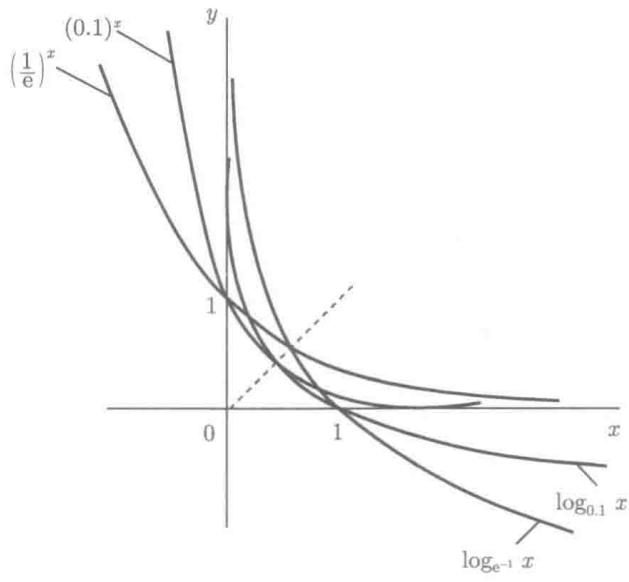


图 2

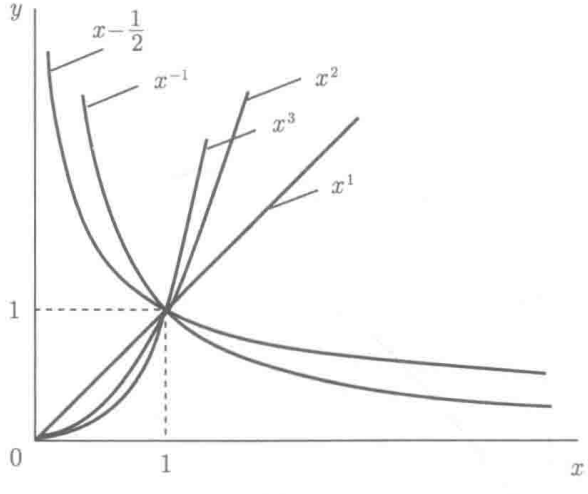


图 3

### 2.2.6　两个重要极限

(1) **证明**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}.$$

**证**　首先证明不等式：$\forall\, 0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$,

$$\cos^2 x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{2.2.1}$$

事实上, 因为 $\cos^2 x$ 与 $\dfrac{\sin x}{x}$ 都是偶函数, 故只需讨论 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 的情形. 如图 4 所示, 比较扇形 $\triangleleft OCD$, 三角形 $\triangle OAB$ 与扇形 $\triangleleft OAB$ 的面积, 得到

$$\begin{aligned} S_{\triangleleft OCD} &= \frac{1}{2}|OC| \cdot |\widehat{CD}| = \frac{1}{2}(\cos x)(x\cos x) = \frac{1}{2}x\cos^2 x \\ &< S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |BC| = \frac{1}{2}(1)(\sin x) = \frac{1}{2}\sin x \\ &< S_{\triangleleft OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |\widehat{AB}| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

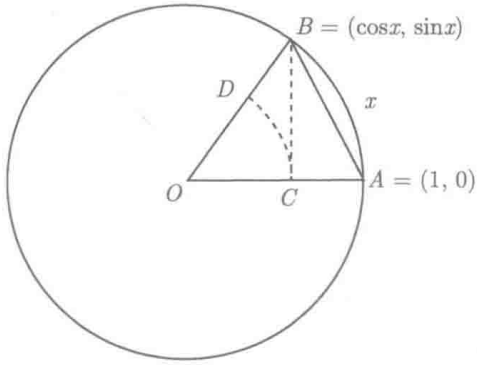


图 4

将此不等式除以 $\dfrac{1}{2}x$, 即得 (2.2.1).

其次,

$$|\sin x| < |x|. \tag{2.2.2}$$

事实上, 当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时由 (2.2.1) 推出 (2.2.2). 但 $|\sin x| \leqslant 1$, 所以当 $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2} > 1$ 时, (2.2.2) 也成立. 只有当 $x = 0$ 时, 才有 $\sin x = x = 0$. 于是, 由 (2.2.2) 得 $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x| = 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

最后证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. 不妨认为 $|x| < \dfrac{\pi}{2}$. 根据 (2.2.1) 得到

$$1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

但

$$\lim_{x\to 0}(1 - \sin^2 x) = 1 - (\lim_{x\to 0}\sin x)(\lim_{x\to 0}\sin x) = 1 - 0 = 1,$$

因此, 根据迫敛性定理, 即知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. □

(2) 证明

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}}.$$

**证**　先考虑 $x>0$. 设

$$\begin{aligned}&Y=\mathbb{N},\mathcal{B}_Y\text{是基}n\to\infty,n\in\mathbb{N};\\&X=\mathbb{R}_+,\mathcal{B}_X\text{是基}x\to+\infty;\\&f:X\to Y\text{是映射}x\overset{f}{\mapsto}[x].\end{aligned}$$

显然, 对于基 $n\to\infty,n\in\mathbb{N}$ 中任何元素 $B_Y=\{n\in\mathbb{N}|n>N\}$ 存在着基 $x\to+\infty$ 的元素 $B_X=\{x\in\mathbb{R}|x>N+1\}$, 使得它在映射 $x\to[x]$ 下的像含于 $B_Y$ 中.

作函数 $g(n)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,g_1(n)=\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n,g_2(n)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. 它们关于基 $n\to\infty,n\in\mathbb{N}$ 都有极限 e.

根据关于复合函数极限的定理, 可以断定下述函数关于基 $x\to+\infty$ 也有极限 e:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]};\\(g_1\circ f)(x)&=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]};\\(g_2\circ f)(x)&=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.\end{aligned}$$

注意到当 $x>0$ 时, 有

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

并且当 $x\to+\infty$ 时, 两端之项都趋于 e, 所以, 根据迫敛性知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

其次考虑 $x<0$. 如上利用复合函数. 令 $y=-x$, 则当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y.$$

令 $y-1=t$. 则

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=\mathrm{e}.$$

综合上述, 得证

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

□

**例 14** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}$.

**解** 令 $g(y)=\dfrac{\sin y}{y}, f(x)=7x$, 则 $(g\circ f)=\dfrac{\sin 7x}{7x}$. 考虑 $Y=\mathbb{R}\setminus 0, X=\mathbb{R}$. 因为

$$\lim_{y\to 0} g(y)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1,$$

因此, 为了应用复合函数定理, 必须验证, 不论取基 $y\to 0$ 中的哪个元, 必能找到基 $x\to 0$ 的元素, 使它在映射 $f(x)=7x$ 下的像含于事先取定的、基 $y\to 0$ 中的那个元中.

基 $y\to 0$ 的元素是点 $0\in\mathbb{R}$ 的去心邻域 $\mathring{U}_Y(0)$. 基 $x\to 0$ 的元素, 也是 $0\in\mathbb{R}$ 的去心邻域 $\mathring{U}_X(0)$. 令

$$\mathring{U}_Y(0)=(\alpha,0)\cup(0,\beta)$$

(其中 $\alpha<0,\beta>0$) 是 $Y$ 的一个去心邻域. 取

$$\mathring{U}_X(0)=\left(\frac{\alpha}{7},0\right)\cup\left(0,\frac{\beta}{7}\right),$$

则成立

$$f(\mathring{U}_X(0))=\mathring{U}_Y(0)\subset\mathring{U}_Y(0),$$

复合函数定理的条件已被满足, 所以, 可以断定

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

**例 15** 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

**解** 令 $t=\pi-x$(变量替换), 则 $x\to\pi$ 时, $t\to 0$, 故

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

**例 16** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

**解** $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$. 令 $t=\dfrac{x}{2}$, 则 $x\to 0$ 时, $t\to 0$. 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2 t}{(2t)^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

**例 17** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

**解**　令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, 且 $x\to 0$ 时, $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1.$$

**例 18**　设函数 $g(y)=|\operatorname{sgn} y|$, 如在例 3 所见, 有极限 $\lim\limits_{y\to 0}|\operatorname{sgn} y|=1$.

函数 $y=f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, 当 $x\neq 0$ 时有定义, 它也有极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$(例 1). 然而函数 $(g\circ f)(x)=\left|\operatorname{sgn}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|$ 当 $x\to 0$ 时没有极限. 实际上, 在点 $x=0$ 的任何去心邻域中都有函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 的零点. 因此, 函数 $\left|\operatorname{sgn}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|$ 既能取得值 0, 又能取得值 1, 根据柯西准则, 当 $x\to 0$ 时不可能有极限.

**例 19**　$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$.

**证**　做代换 $x=\dfrac{1}{t}$ 之后, 就变成第二个重要极限了.

**例 20**　当 $q>1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{q^x}=0$.

**证**　前面已知当 $q>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{q^n}=0$. 现在, 可把函数 $[x]$($x$ 的整数部分) 定义的映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$ 当作辅助映射. 利用不等式

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{[x]}{q^{[x]}}<\frac{x}{q^x}<\frac{[x]+1}{q^{[x]+1}}q,$$

并注意到, 根据复合函数极限定理, 当 $x\to+\infty$ 时, 两端的极限都是零, 推知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{q^x}=0$$

□

.

**例 21**　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x}=0$.

**证**　设 $a>1$. 令 $t=\log_a x$, 则得 $x=a^t$. 根据指数函数与对数函数的性质(注意 $a^n$ 之无界性, $n\in\mathbb{N}$), 有 $(x\to+\infty\Leftrightarrow(t\to+\infty))$. 利用复合函数极限定理与例 20 的结果, 得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{a^t}=0.$$

如果 $0<a<1$, 则令 $-t=\log_a x, x=a^{-t}$. 这时 $(x\to+\infty\Leftrightarrow(t\to+\infty))$, 又因为 $\dfrac{1}{a}>1$, 所以仍然得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{a^{-t}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\left(\frac{1}{a}\right)^t}=0.$$

□

### 2.2.7 函数的渐近行为比较

看一个例子. 设 $\pi(x)$ 是不超过给定实数 $x$ 的素数的个数. 人们关心素数分布的渐近规律, 特别是研究当 $x \to +\infty$ 时函数 $\pi(x)$ 的行为. 从欧几里得时代起, 人们就已经知道, 当 $x \to +\infty$ 时 $\pi(x) \to +\infty$. 但是 $\pi(x)$ 大体上像 $\dfrac{x}{\ln x}$ 那样增长的结论, 直到 19 世纪才由切比雪夫[①] 证明. 可见在一般情况下这类研究的难度.

当产生需要描述函数在某一点附近 (或在无穷远处) 的行为的问题时, 通常函数本身在该点并没有定义, 这时常说对函数在这个点的邻域中的*渐近性或渐近行为*感兴趣.

函数的渐近行为, 通常是*用另一个较简单的或研究得比较透彻的函数来刻画, 它在所讨论的点的邻域内, 以较小的相对误差再现了所研究的函数的值*.

例如, 当 $x \to +\infty$ 时, $\pi(x)$ 的行为犹如 $\dfrac{x}{\ln x}$; 当 $x \to 0$ 时, 函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的行为犹如常数 1. 显然, 当谈及函数 $x^2 + x + \sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x \to +\infty$ 时的行为, 我们会说, 它基本上像函数 $x^2$, 而当 $x \to 0$ 时, 却如 $\sin\dfrac{1}{x}$.

**定义 16** 如果函数的某种性质, 或函数间的某种关系, 在基 $\mathcal{B}$ 的某个元素 $B \in \mathcal{B}$ 上成立, 就说这种性质或关系*对这个基 $\mathcal{B}$ 最终被满足*.

之前我们正是在这个意义下理解对已知基最终为常数函数, 或最终为有界函数这些概念的. 我们还将在这个意义下谈论, 例如, 函数 $f, g, h$ 最终满足关系式 $f(x) = g(x)h(x)$. 这些函数甚至连原来的定义域也可能不同, 但是, 如果我们所关心的只是它们对基 $\mathcal{B}$ 的渐近行为, 那么, 对我们来说, 重要的只是它们都在 $\mathcal{B}$ 的某个元素上有定义就行了.

1. *比较无穷小*

**定义 17** 如果函数 $f$ 与函数 $g$ 之间成立关系: $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ 对基 $\mathcal{B}$ 最终被满足, 其中 $\alpha(x)$ 是对基 $\mathcal{B}$ 为无穷小函数, 就说*对于基 $\mathcal{B}$, 函数 $f$ 与函数 $g$ 比较是无穷小*, 并记作 $f \overset{\mathcal{B}}{=} o(g)$ $\left(\text{即 } f \overset{\mathcal{B}}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0\right)$. 当 $g(x) \equiv 1$ 时, $f \overset{\mathcal{B}}{=} o(1) \Leftrightarrow$ 对于基 $\mathcal{B}$, $f$ 为无穷小. 如果 $f \overset{\mathcal{B}}{=} o(g)$ 且 $g$ 本身对基 $\mathcal{B}$ 为无穷小, 就说*对于基 $\mathcal{B}$, $f$ 是比 $g$ 更高阶的无穷小*.

**例 22** 当 $x \to 0$ 时, $x^2 = o(x)$, 因为 $x^2 = x \cdot x$.

**例 23** 当 $x \to \infty$ 时, $x = o(x^2)$, 因为最终 $x \neq 0, x = \dfrac{1}{x} \cdot x^2$.

① 切比雪夫 (П. Л. Чебышев) (1821—1894)——伟大的俄国数学家与力学家, 圣彼得堡数学学派的奠基人.

由这些例子, 可得这样的结论: 即指出 $f = o(g)$ (读作 "$f$ 等于小 $og$") 是在什么基之下成立这件事是完全必要的.

**例 24**　当 $x \to \infty$ 时, $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ 是比 $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ 更高阶的无穷小.

2. 比较无穷大

**定义 18**　关于给定的基趋于无穷的函数叫做*对于所给基的无穷大函数* (简称为*对于所给基是无穷大*). 如果 $f$ 与 $g$ 对于基 $\mathcal{B}$ 都是无穷大, 并且 $f \overset{\mathcal{B}}{=} o(g)$, 就说*对于基 $\mathcal{B}$, $g$ 是比 $f$ 更高阶的无穷大* $\left(\text{即 } \lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0\right)$.

**例 25**　当 $x \to 0$ 时, $\dfrac{1}{x} \to \infty$, 当 $x \to 0$ 时, $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$, 且当 $x \to 0$ 时, $\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. 所以, 当 $x \to 0$ 时 $\dfrac{1}{x^2}$ 是比 $\dfrac{1}{x}$ 更高阶的无穷大.

**例 26**　我们来证明, 当 $a > 1$ 时, 不论对哪个 $n \in \mathbb{Z}$, 都有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0,$$

即当 $x \to +\infty$ 时, $x^n = o(a^x)$.

**证**　当 $n \leqslant 0$ 时, 结论显然成立. 设 $n \in \mathbb{N}$. 令 $q = \sqrt[n]{a}$, 则 $q > 1$, 且 $\dfrac{x^n}{a^x} = \left(\dfrac{x}{q^x}\right)^n$, 于是

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{q^x}\right)^n = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{q^x} \cdot \cdots \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{q^x}}_{n\text{个}} = 0.$$

这里利用了归纳法原理、乘积极限的定理及例 20 的结果. □

因此, 如果 $a > 1$, 对于任何 $n \in \mathbb{Z}$, 则当 $x \to +\infty$ 时, $x^n = o(a^x)$.

**例 27**　现在把例 26 推广, 证明当 $a > 1$ 时, 对于任何 $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0,$$

即当 $x \to \infty$ 时, $x^\alpha = o(a^x)$.

**证**　实际上, 取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n > \alpha$, 这时, 当 $x > 1$ 时得到

$$0 < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{x^n}{a^x}.$$

依据极限性质及例 26 之结果, 即可推得 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$. □

**例 28** 证明当 $a>1$ 时, 对于任何 $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0}\frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^{\alpha}}=0,$$

即当 $x\to 0$ 且 $x\in\mathbb{R}_+$ 时, $a^{-\frac{1}{x}}=o(x^{\alpha})$.

**证** 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 据复合函数极限定理, 并利用例 27 之结果, 就得到

$$\lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0}\frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^{\alpha}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha}}{a^{t}}=0.$$ □

**例 29** 证明当 $\alpha>0$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=0,$$

即对于任何正幂指数 $\alpha$, 当 $x\to+\infty$ 时, $\log_a x=o(x^{\alpha})$.

**证** 如果 $a>1$, 就令 $x=a^{\frac{t}{\alpha}}$. 这时, 根据指数函数与对数函数的性质、复合函数极限定理以及例 27 之结果, 求得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)}{a^{t}}=\alpha^{-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{a^{t}}=0.$$

如果 $0<a<1$, 则 $\dfrac{1}{a}>1$, 作代换 $x=a^{\frac{-t}{\alpha}}$ 后得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(-\dfrac{t}{\alpha}\right)}{a^{-t}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{t}}=0.$$ □

**例 30** 再证明对于任何 $\alpha>0$,

$$x^{\alpha}\log_a x=o(1),\quad x\to 0, x\in\mathbb{R}_+.$$

**证** 只要证当 $\alpha>0$ 时 $\lim\limits_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0}x^{\alpha}\log_a x=0$. 设 $x=\dfrac{1}{t}$, 应用复合函数极限定理及例 29 之结果, 得到

$$\lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0}x^{\alpha}\log_a x=\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a\left(\dfrac{1}{t}\right)}{t^{\alpha}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a t}{t^{\alpha}}=0.$$ □

3. 同阶无穷小 (无穷大)

**定义 19**　约定: 把两个函数 $f, g$ 对于基 $\mathcal{B}$ 最终满足关系式 $f(x)=\beta(x)g(x)$ 记作 $f \overset{\mathcal{B}}{=} O(g)$ 或对于基 $\mathcal{B}, f=O(g)$ (读作对于基 $\mathcal{B}, f$ 等于大 $Og$), 其中的 $\beta(x)$ 是关于 $\mathcal{B}$ 最终有界的函数. 特别地, 记号 $f \overset{\mathcal{B}}{=} O(1)$ 表示对于基 $\mathcal{B}$, 函数 $f$ 最终有界.

**例 31**　当 $x \to \infty$ 时, $\left(\dfrac{1}{x}+\sin x\right)x = O(x)$.

**定义 20**　如果 $f \overset{\mathcal{B}}{=} O(g)$ 且 $g \overset{\mathcal{B}}{=} O(f)$, 就说对于基 $\mathcal{B}$, 函数 $f$ 与 $g$ 是同阶的, 并记作: 对于基 $\mathcal{B}, f \asymp g$.

**例 32**　当 $x \to \infty$ 时, 函数 $(2+\sin x)x$ 与 $x$ 是同阶的. 但当 $x \to \infty$ 时, $(1+\sin x)x$ 与 $x$ 不同阶.

条件 $f$ 与 $g$ 对于基 $\mathcal{B}$ 同阶, 显然等价于: 存在 $c_1>0, c_2>0$ 及基之元素 $B \in \mathcal{B}$, 使得在 $B$ 上, 关系式

$$c_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant c_2|g(x)|$$

或

$$\frac{1}{c_2}|f(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant \frac{1}{c_1}|f(x)|$$

成立.

4. 等价无穷小 (无穷大)

**定义 21**　如果两个函数 $f$ 与 $g$ 对于基 $\mathcal{B}$ 最终满足关系式 $f(x)=\gamma(x)g(x)$, 其中 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\gamma(x)=1$, 就说对于基 $\mathcal{B}$, 函数 $f$ 渐近于函数 $g$, 或者简称为 $f$ 与 $g$ 等价. 我们把 $f$ 与 $g$ 的这种关系记成 $f \overset{\mathcal{B}}{\sim} g$, 或对于基 $\mathcal{B}, f \sim g$.

这里用 "等价" 这个词是合适的, 因为

$$(f \overset{\mathcal{B}}{\sim} f),$$
$$(f \overset{\mathcal{B}}{\sim} g) \Rightarrow (g \overset{\mathcal{B}}{\sim} f),$$
$$(f \overset{\mathcal{B}}{\sim} g) \wedge (g \overset{\mathcal{B}}{\sim} h) \Rightarrow (f \overset{\mathcal{B}}{\sim} h).$$

实际上, 关系 $f \overset{\mathcal{B}}{\sim} f$ 是显然的, 这时 $\gamma(x) \equiv 1$. 此外, 如果 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\gamma(x)=1$, 那么,

$$\lim_{\mathcal{B}} \frac{1}{\gamma(x)} = 1, \quad \text{且 } g(x) = \frac{1}{\gamma(x)} f(x).$$

这里只需说明, 为什么可以认为 $\gamma(x) \neq 0$. 如果在元素 $B_1 \in \mathcal{B}$ 上 $f(x)=\gamma(x)g(x)$ 成立, 而在元素 $B_2 \in \mathcal{B}$ 上 $\dfrac{1}{2} < |\gamma(x)| < \dfrac{3}{2}$ 成立, 那么就能在 $\mathcal{B}$ 中取元素 $B \subset B_1 \cap B_2$,

使以上两关系都成立, 在 $B$ 之外, 为了方便, 可认为处处 $\gamma(x)\equiv 1$. 这样一来, 确实

$$(f \overset{\mathcal{B}}{\sim} g) \Rightarrow (g \overset{\mathcal{B}}{\sim} f).$$

最后, 如果在 $B_1 \in \mathcal{B}$ 上 $f(x)=\gamma_1(x)g(x)$, 而在 $B_2 \in \mathcal{B}$ 上 $g(x)=\gamma_2(x)h(x)$, 那么取 $B \subset B_1 \cap B_2, B \in \mathcal{B}$, 则在 $B$ 上二关系同时成立, 所以在 $B$ 上 $f(x)=\gamma_1(x)\gamma_2(x)h(x)$. 但

$$\lim_{\mathcal{B}} \gamma_1(x)\gamma_2(x) = \lim_{\mathcal{B}} \gamma_1(x) \cdot \lim_{\mathcal{B}} \gamma_2(x) = 1;$$

这样就验证了 $f \overset{\mathcal{B}}{\sim} h$.

注意: 因为 $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma(x)=1$ 与 $\gamma(x)=1+\alpha(x)$ 等价, 其中 $\lim\limits_{\mathcal{B}} \alpha(x)=0$, 所以对于基 $\mathcal{B}, f \overset{\mathcal{B}}{\sim} g$ 与 $f(x)=g(x)+\alpha(x)g(x)=g(x)+o(g(x))$ 等价.

我们看到, 若函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 对于基 $\mathcal{B}$ 等价, 则借助函数 $g(x)$ 去逼近函数 $f(x)$ 时, 其相对误差 $|\alpha(x)|=\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right|$ 是对于 $\mathcal{B}$ 的无穷小.

5. 几个例题

**例 33** 当 $x\to\infty$ 时, $x^2+x=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)x^2 \sim x^2$.

此二函数之差的绝对值

$$|(x^2+x)-x^2| = |x|$$

趋于无穷. 当 $x^2+x$ 用与之等价的 $x^2$ 代替时, 相对误差 $\dfrac{|x|}{x^2}=\dfrac{1}{|x|}$ 当 $x\to\infty$ 时趋于零.

**例 34** 在 2.2.7 小节开头曾谈到著名的素数分布的渐近规律. 现在能写出它的精确表达式了:

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right), \quad x\to\infty.$$

**例 35** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 所以当 $x\to 0$ 时, $\sin x \sim x$, 这又可以写成等式 $\sin x = x+o(x)$ 当 $x\to 0$ 的形式.

**例 36** 证明当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$.

**证**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln \mathrm{e}=1.$$

第一个等式中用了 $\log_a(b^\alpha)=\alpha\log_a b$, 在第二个等式中用了

$$\lim_{t\to b}\log_a t=\log_a b=\log_a\left(\lim_{t\to b} t\right).$$

于是, 当 $x \to 0$ 时, $\ln(1+x) = x + o(x)$. □

**例 37**　证明当 $x \to 0$ 时, $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$.

**证**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

在上式中, 我们作了代换 $\mathrm{e}^x - 1 = t, x = \ln(1+t)$, 并利用了当 $x \to 0$ 时, $\mathrm{e}^x \to \mathrm{e}^0 = 1$, 以及当 $x \neq 0$ 时, $\mathrm{e}^x \neq 1$. 这样, 根据复合函数极限定理及例 36 之结果, 即得所证.

于是, 当 $x \to 0$ 时, $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$. □

**例 38**　证明当 $x \to 0$ 时, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.

**证**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+x)}{x} \\ &= \alpha \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.\end{aligned}$$

在计算时, 假定了 $\alpha \neq 0$, 作了代换 $\alpha\ln(1+x) = t$, 并利用了例 36 和例 37 之结果. 当 $\alpha = 0$ 时, 结论是显然的.

于是, 当 $x \to 0$ 时, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$. □

当计算极限时, 有时要用到下面的简单命题.

**命题 4**　设 $f \overset{\mathcal{B}}{\sim} \tilde{f}$, 那么 $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)g(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}} \tilde{f}(x)g(x)$, 如果这两个极限至少有一个存在.

**证**　实际上, 既然 $f(x) = \gamma(x)\tilde{f}(x)$ 且 $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma(x) = 1$, 就有

$$\begin{aligned}\lim_{\mathcal{B}} f(x)g(x) &= \lim_{\mathcal{B}} \gamma(x)\tilde{f}(x)g(x) \\ &= \lim_{\mathcal{B}} \gamma(x) \lim_{\mathcal{B}} \tilde{f}(x)g(x) = \lim_{\mathcal{B}} \tilde{f}(x)g(x).\end{aligned}$$

□

**例 39**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sin x^2} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

在这里, 我们利用了: 当 $\alpha \to 0$ 时 $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, 以及当 $x \to 0$ 时, $\sin^2 x \sim x^2$.

我们证明了, 在求单项式极限时, 对于已知基相互等价函数可彼此替代. 但这条规则不能应用于求函数的和或差.

**例 40**　当 $x \to +\infty$ 时, $\sqrt{x^2+x} \sim x$, 但是

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\neq\lim_{x\to+\infty}(x-x)=0.$$

实际上,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

我们还应注意关于记号 $o(\ ),O(\ )$ 在分析中广泛用到的几个变换规则.

**命题 5** 对于给定的基, 有

(1) $o(f)+o(f)=o(f)$.

(2) $o(f)$ 也是 $O(f)$.

(3) $o(f)+O(f)=O(f)$.

(4) $O(f)+O(f)=O(f)$.

(5) 如果 $g(x)\neq 0$, 那么

$$\frac{o(f(x))}{g(x)}=o\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right),$$

并且

$$\frac{O(f(x))}{g(x)}=O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

需注意由符号 $o(\cdot)$ 和 $O(\cdot)$ 本身的含义而来的它们的运算的特殊性. 例如, $2o(f)=o(f)$, 或 $o(f)+O(f)=O(f)$ (虽然, 一般说来, $o(f)\neq 0$), 或 $o(f)=O(f)$, 但 $O(f)\neq o(f)$. 这里等式的符号有词 "是" 的意思. 符号 $o(\cdot)$ 和 $O(\cdot)$ 本身所表示的与其说是函数, 倒不如说是函数的渐近行为的特征, 正好这个特征是许多函数具有的, 例如, $f$, $2f$ 等.

**证** (1) 第一个符号 $o(f)$ 表示某个形如 $\alpha_1(x)f(x)$ 的函数, 这里 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\alpha_1(x)=0$. 第二个符号表示某个形如 $\alpha_2(x)f(x)$ 的函数, 其中 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\alpha_2(x)=0$. 因此,

$$\alpha_1(x)f(x)+\alpha_2(x)f(x)=(\alpha_1(x)+\alpha_2(x))f(x)=\alpha_3(x)f(x),$$

这里 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\alpha_3(x)=0$.

(2) 可从有极限的函数必定最终有界推知.

(3) 由 (2) 与 (4) 推知.

(4) 由最终有界函数之和仍为最终有界推知.

(5) $\dfrac{o(f(x))}{g(x)}=\dfrac{\alpha(x)f(x)}{g(x)}=\alpha(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}=o\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$.

可类似验证 (5) 的第二部分. □

现在, 利用这些规则及例 38 中得到的等价关系, 就能用以下方法直接求出例 40 中的极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

不久之后学了微分理论后, 我们会应用泰勒展式获得一些公式, 它们有助于进一步研究函数的渐近行为 (特别是取极限问题).

## 练　习

1. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-4}$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[7]{1+x}-1}{x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

(10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$.

(13) $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

(15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

2. 证明: 若 $f$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 则 $f(x)\equiv0$.

3. 证明:

$$\lim_{x\to0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right\}=1.$$

4. 设函数 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(2x)=f(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 证明: $f(x)\equiv A$, $x\in(0,+\infty)$.

5. 设函数 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^2)=f(x)$, 且

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(1).$$

证明: $f(x)\equiv f(1)$, $x\in(0,+\infty)$.

6. 试证:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+o(1),\quad n\to\infty.$$

这里 $c$ 是常数 ($c=0.57721\cdots$ 叫做欧拉常数).

**提示** 可用

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\infty.$$

7. 试证:

(1) 如果两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数, 且当 $n\to\infty$ 时 $a_n\sim b_n$, 则这两个级数同时收敛或同时发散.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$ 仅当 $p>1$ 时收敛.

8. 试证:

(1) 如果对于任何 $n\in\mathbb{N}$ 有 $a_n\geqslant a_{n+1}>0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则当 $n\to\infty$ 时 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(2) 如果 $b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 则必能做出一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $b_n=o(a_n)$.

(3) 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则以 $A_n=\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k}-\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}$ 为项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 也收敛, 并且当 $n\to\infty$ 时, $a_n=o(A_n)$.

(4) 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不收敛, 则以 $A_n=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}-\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}$ 为项的级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n$ 也不收敛, 并且当 $n\to\infty$ 时, $A_n=o(a_n)$.

由 (3) 与 (4) 推知, 没有任何收敛 (发散) 级数, 能够作为用比较法对其他级数判断收敛 (发散) 的万能的标准级数.

9. 试证:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln a_n$, $a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ 收敛当且仅当数列 $\{\Pi_n=a_1\cdots a_n\}$ 有不为零的极限.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛, 当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 其中 $|a_n|<1$.

**提示**　参看习题 7(1).

10. 设数列 $\Pi_n=\prod\limits_{k=1}^{n}e_k$ 有有限的异于零的极限 $\Pi$, 就说无穷乘积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}e_k$ 收敛, 且记 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}e_k=\Pi$. 试证:

(1) 如果无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e_n$ 收敛, 则当 $n\to\infty$ 时, $e_n\to 1$.

(2) 如果 $\forall n\in\mathbb{N}(e_n>0)$, 那么, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e_n$ 收敛, 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln e_n$ 收敛.

(3) 如果 $e_n=1+a_n$, 并且所有 $a_n$ 同号, 那么, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

# 第3章 连续函数

## 3.1 基本定义和例子

### 3.1.1 函数在一点处的连续性

设 $f$ 是定义在点 $a \in \mathbb{R}$ 的某个邻域中的实值函数. 直观地说, 函数 $f$ 在点 $a$ 处连续, 是指它的值 $f(x)$ 随着自变量 $x$ 趋近点 $a$ 而趋近于函数在该点处的值 $f(a)$.

**定义 1** 称函数 $f$ 在点 $a$处连续, 如果对于函数在点 $a$ 处的值 $f(a)$ 的任何一个邻域 $V(f(a))$, 都存在点 $a$ 的一个邻域 $U(a)$, 它在映射 $f$ 下的像含在 $V(f(a))$ 中:

$$(f \text{ 在点 } a \text{ 连续}) := (\forall V(f(a)), \quad \exists U(a)(f(U(a)) \subset V(f(a)))).$$

**定义 1′** 实值函数 $f$ 在点 $a$处连续

$\Leftrightarrow$ (极限语言) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists U(a), \quad \forall x \in U(a)(|f(x) - f(a)| < \varepsilon);$$

$\Leftrightarrow$ ($\varepsilon$-$\delta$ 语言) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $|x - a| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon);$$

$\Leftrightarrow$ (增量语言) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, 其中, $\Delta x = x - a$ (自变量增量), $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = y - y_0$ (函数增量).

这些等价性是基于事实: 点 $a$ 的任何一个邻域都包含该点的某个对称邻域. 这些定义假设了函数 $f$ 在点 $a$ 的整个邻域上有定义.

现在来考察一般的情形, $f : E \to \mathbb{R}$ 是定义在某个集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上的实值函数, $a \in E$, 而考虑函数相对于 $E$ 的连续性.

**定义 2** 称函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在点 $a \in E$ 连续 如果对于 $f(a)$ 的任意邻域 $V(f(a))$, 存在点 $a$ 在集 $E$ 中的一个邻域 $U_E(a) := E \cap U(a)$, 它的像 $f(U_E(a))$ 含在 $V(f(a))$ 中, 即

$$(f : E \to \mathbb{R} \text{在点} a \in E \text{连续}) := (\forall V(f(a)), \exists U_E(a)(f(U_E(a)) \subset V(f(a)))).$$

当然, 定义 2 也可以用前面见到的定义 $1'$ 那样的形式写出. 例如,

$$(f:E\to\mathbb{R}\text{在}a\in E\text{连续}):=(\forall\varepsilon>0,\exists U_E(a),\forall\, x\in U_E(a)(|f(x)-f(a)|<\varepsilon));$$

$$(f:E\to\mathbb{R}\text{在}a\in E\text{连续}):=(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in E(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)).$$

**注 1**　下面详细地讨论函数在一点处连续的概念.

(1) $f:E\to\mathbb{R}$ 在任何孤立点处是连续的. 事实上, 如果 $a$ 是集 $E$ 的孤立点, 即存在 $a$ 点的一个邻域 $U(a)$ 满足 $U_E(a):=E\cap U(a)=\{a\}$, 则任给邻域 $V(f(a))$, 恒有 $f(U_E(a))=\{f(a)\}\subset V(f(a))$.

(2) 连续这一概念主要关注 $a\in E$ 且是 $E$ 的极限点情形. 从定义易见

$$(f:E\to\mathbb{R}\text{在}E\text{的极限点}a\in E\text{处连续})\Leftrightarrow\left(\lim_{E\ni x\to a}f(x)=f(a)\right).$$

事实上, 如果 $a$ 是 $E$ 的极限点, 则点 $a$ 的空心邻域 $\mathring{U}_E(a)=U_E(a)\setminus\{a\}$ 的基 $E\ni x\to a$ 有定义. 若 $f$ 在 $a$ 连续, 那么, 对于邻域 $V(f(a))$, 找一个邻域 $U_E(a)$ 使 $f(U_E(a))\subset V(f(a))$, 同时就有 $f(\mathring{U}_E(a))\subset V(f(a))$, 于是根据极限的定义 $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)=f(a)$. 反之, 如果知道 $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)=f(a)$, 则对于邻域 $V(f(a))$, 存在空心邻域 $\mathring{U}_E(a)$, 使 $f(\mathring{U}_E(a))\subset V(f(a))$. 但由于 $f(a)\in V(f(a))$, 所以 $f(U_E(a))\subset V(f(a))$. 根据定义 2 知函数 $f$ 在点 $a\in E$ 连续.

(3) 由于关系式 $\lim\limits_{E\ni x\to a}f(x)=f(a)$ 可以改写成

$$\lim_{E\ni x\to a}f(x)=f\left(\lim_{E\ni x\to a}x\right),$$

我们现在得到这样一个有用的结论: 在一点连续的函数或运算, 并且仅仅是这样的函数或运算, 可以同极限运算交换次序. 这就表明, 在数 $a$ 上完成运算 $f$ 所得到的数 $f(a)$, 可以依任意精确度借助于在量 $a$ 的具有相应精确度的近似值 $x$ 上完成运算 $f$ 来逼近.

(4) 如果注意到, 当 $a\in E$ 时, 点 $a$ 的邻域 $U_E(a)$ 构成一个基 $\mathcal{B}_a$ (这与 $a$ 是集合的极限点还是孤立点无关), 那么我们就会看到, 函数在点 $a$ 处连续的定义 2, 与数 $f(a)$——函数在点 $a$ 处的值——是函数 $f$ 关于这个基的极限的定义是一样的, 即

$$(f:E\to\mathbb{R}\text{在}a\in E\text{连续})\Leftrightarrow\left(\lim_{\mathcal{B}_a}f(x)=f(a)\right).$$

(5) 但我们发现, 如果 $\lim\limits_{\mathcal{B}_a} f(x)$ 存在, 那么, 由于对于任意的 $U_E(a)$ 都有 $a \in U_E(a)$, 于是这个极限非等于 $f(a)$ 不可. 这样一来, 函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在点 $a \in E$ 处连续等价于函数关于点 $a$ 在 $E$ 中的诸邻域 (但不是空心邻域)$U_E(a)$ 的基 $\mathcal{B}_a$ 有极限. 于是

$$(f: E \to \mathbb{R}在a \in E连续) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{\mathcal{B}_a} f(x)\right).$$

(6) 根据极限存在的柯西准则, 现在可以说, 函数在点 $a \in E$ 连续当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在点 $a$ 在 $E$ 中的邻域 $U_E(a)$, 使在 $U_E(a)$ 上函数的振幅 $\omega(f, U_E(a))$ 小于 $\varepsilon$. 符号 $\omega(f, X)$ 已被使用, 它表示函数在集 $X$ 上的振幅. 但是我们永远也不考虑函数在一个点所成的集上的振幅 (这个振幅显然等于零). 不过, 为了记号的方便, 引入如下定义.

**定义 3** 量 $\omega(f, a) = \lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega(f, U_E^\delta(a))$(其中 $U_E^\delta(a)$ 是点 $a$ 在 $E$ 中的 $\delta$ 邻域)叫做函数 $f: E \to \mathbb{R}$ *在点 $a$ 的振幅*.

因此, 符号 $\omega(f, a)$, 其中 $a$ 是一个点, 永远表示我们刚刚用定义 3 引入的函数在一点的振幅这样一个概念.

函数在子集合上的振幅不超过它在集合上的振幅, 因此 $\omega(f, U_E^\delta(a))$ 是 $\delta$ 的非增函数. 由于它是非负的, 那么, 或者它当 $\delta \to 0+0$ 时有有限的极限, 或者对于任意的 $\delta > 0$, $\omega(f, U_E^\delta(a)) = +\infty$. 在后一种情形时, 自然认为 $\omega(f, a) = +\infty$.

(7) 使用在 (6) 中叙述的定义 3, 现在可以做这样的概括: 函数在一点处连续当且仅当它在这点处的振幅等于零. 写作

$$(f: E \to \mathbb{R}在a \in E连续) \Leftrightarrow (\omega(f, a) = 0).$$

**定义 4** 称函数 $f: E \to \mathbb{R}$ *在集合 $E$ 上连续*, 如果它在集合 $E$ 的每点都连续.

我们约定把一切在集合 $E$ 上连续的实函数的集合记作 $C(E; \mathbb{R})$ 或简记为 $C(E)$.

现在考察一些例子.

**例 1** 如果 $f: E \to \mathbb{R}$ 是常函数, 则 $f \in C(E)$. 这个论断是明显的, 因为 $\forall x \in E$, $f(x) = c \in V(c)$, 不管 $c \in \mathbb{R}$ 的邻域 $V(c)$ 怎样它都成立.

**例 2** 函数 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 事实上, 对于任意的点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 只要 $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$, 就有 $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$.

**例 3** 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 事实上, 对于任意的点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 只要 $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$, 就得到

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$$
$$= |x-x_0| < \varepsilon.$$

这里使用了不等式 (2.2.2).

**例 4**　函数 $f(x)=\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 事实上, 像例 3 中一样, 对于任意的点 $x_0\in\mathbb{R}$, 只要 $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$, 我们就有

$$|\cos x-\cos x_0| = \left|-2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x-x_0| < \varepsilon.$$

**例 5**　函数 $f(x)=a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 实际上, 根据指数函数的性质 4(见 2.2.5 小节命题 2), 在任意点 $x_0\in\mathbb{R}$ 处, 有

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},$$

现在我们知道, 这等价于函数 $a^x$ 在点 $x_0$ 连续.

**例 6**　函数 $f(x)=\log_a x$ 在定义域 $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ 上连续. 事实上, 根据对数函数的性质 4(见 2.2.5 小节命题 3), 在任意点 $x_0\in\mathbb{R}_+$ 处, 有

$$\lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

这等价于函数 $\log_a x$ 在点 $x_0$ 连续.

我们顺便对任意正数 $\varepsilon$ 来求点 $x_0$ 的邻域 $U_{\mathbb{R}_+}(x_0)$, 使得在任意的点 $x\in U_{\mathbb{R}_+}(x_0)$ 处有

$$|\log_a x-\log_a x_0| < \varepsilon.$$

这个不等式等价于关系式

$$-\varepsilon < \log_a\frac{x}{x_0} < \varepsilon.$$

为确定起见, 设 $a>1$; 那么最后的关系式等价于条件

$$x_0a^{-\varepsilon} < x < x_0a^{\varepsilon}.$$

区间 $(x_0a^{-\varepsilon}, x_0a^{\varepsilon})$ 就是点 $x_0$ 的待求的邻域. 注意到这个邻域不但依赖于量 $\varepsilon$, 而且也依赖于点 $x_0$ 本身. 这一点在例 1 ~例 4 中不曾出现.

**例 7**　任何数列 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 都是在自然数集 $\mathbb{N}$ 上连续的函数, 因为集 $\mathbb{N}$ 的每个点都是它的孤立点.

### 3.1.2 间断点

为了更好地掌握连续这个概念, 我们要弄清楚函数在它的不连续的点的邻域里会是怎样的.

**定义 5** 如果函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在集 $E$ 的某点不连续, 则此点叫做 $f$ 的**间断点**.

也就是说, 称 $a \in E$ 是函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 的间断点, 如果存在 $f(a)$ 的一个邻域 $V(f(a))$, 使得对点 $a$ 在集合 $E$ 中的任何一个邻域 $U_E(a)$, 都存在点 $x \in U_E(a)$, 它的像 $f(x)$ 不含在 $V(f(a))$ 中. 即:

$$(a \in E\text{是函数 } f \text{ 的间断点}) := (\exists V(f(a)), \forall U_E(a), \exists x \in U_E(a)\ (f(x) \notin V(f(a)))).$$

这个定义的 $\varepsilon$-$\delta$ 形式是

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E(|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| > \varepsilon).$$

兹举几个例子.

**例 8** 函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在异于零的任意点 $a \in \mathbb{R}$ 的一个邻域内为常数, 从而它在这个邻域内连续. 而在零的任何邻域内, 它的振幅 $\omega(\operatorname{sgn}, 0) = 2$. 这就表示 0 是函数 $\operatorname{sgn} x$ 的间断点. 我们还看出, 函数在点 0 处有左极限 $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$ 及右极限 $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$, 但是, 这两个极限彼此不等, 并且它们都与函数在点 0 处的值 $\operatorname{sgn} 0 = 0$ 不等. 这直接证实了 0 是函数的间断点.

**例 9** 函数 $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ 当 $x \to 0$ 时有极限 $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x = 1$, 但是 $f(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$, 因此

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0),$$

于是 0 是函数的间断点.

但是注意到, 如果改变函数在点 0 处的值, 并令它等于 1, 我们就得到一个在 0 处连续的函数.

**定义 6** 如果函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 的间断点 $a \in E$ 是这样的: 存在一个在点 $a$ 连续的函数 $\tilde{f}: E \to \mathbb{R}$, 使得 $f|_{E \setminus \{a\}} = \tilde{f}|_{E \setminus \{a\}}$, 那么 $a$ 叫做函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 的**可去间断点**.

所以可去间断点的特征是: 极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 存在, 但是 $A \neq f(a)$, 从而, 只要置

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E,\ x \neq a, \\ A, & x \in E,\ x = a, \end{cases}$$

我们就得到一个在点 $a$ 连续的函数 $\tilde{f}: E \to \mathbb{R}$.

**例 10**　函数

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 0 处间断, 并且当 $x\to 0$ 时, 它没有极限. 这是因为在 2.2.1 小节例 4 中曾经证明了极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在. 函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的图像见图 5.

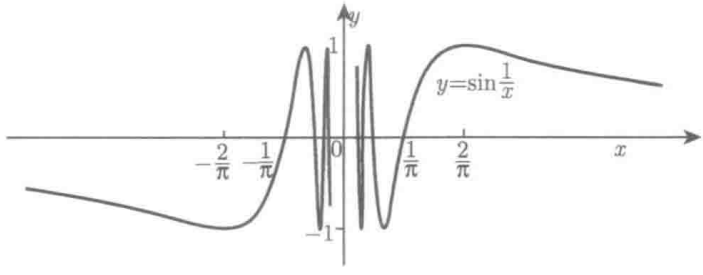


图 5

回忆左、右极限的定义:

$$f(a-0):=\lim_{E\ni x\to a-0}f(x),\quad f(a+0):=\lim_{E\ni x\to a+0}f(x).$$

以上三个例子阐明了下面的定义.

**定义 7**　点 $a\in E$ 叫做函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 的**第一类间断点**, 如果

(1) 当 $a$ 同时是 $E_a^-$ 和 $E_a^+$ 的极限点时, $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 都存在, 但至少有一个不等于 $f(a)$.

(2) 当 $a$ 非 $E_a^-$ (或 $E_a^+$) 的极限点时, $f(a+0)$ (相应地 $f(a-0)$) 存在, 但不等于 $f(a)$.

$f$ 的任何一个间断点, 如果不是第一类的就叫做**第二类间断点**.

再举两个经典的例子.

**例 11**　**狄利克雷**[①] **函数**

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

①狄利克雷 (P. G. Dirichlet)(1805—1859)——德国大分析家、数学家, 在高斯 (C. Gauss) 逝世后任哥廷根大学额内教授职.

这个函数在所有的点都间断, 且它的一切间断点都是第二类的, 因为在任何区间上都既有有理数也有无理数.

**例 12** 黎曼[①] 函数

$$\mathcal{R}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}\left(\dfrac{m}{n}\text{是既约分数}\right),\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

我们指出, 对于无论怎样的点 $a\in\mathbb{R}$ 和它的有界邻域 $U(a)$ 以及无论怎样的数 $N\in\mathbb{N}$, 在 $U(a)$ 中仅有有限个有理数 $\dfrac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$, 使得 $n<N$. 因此, 只要缩小邻域, 就可以认为位于其中的一切有理数 (若 $a\in\mathbb{Q}$ 的话, 可能除去数 $a$) 的分母都比 $N$ 大, 这样一来, 在任意点 $x\in\mathring{U}(a)$ 处, $|\mathcal{R}(x)|<\dfrac{1}{N}$. 这样我们就证明了, 在任意点 $a\in\mathbb{R}$ 处

$$\lim_{x\to a}\mathcal{R}(x)=0.$$

这表明, 黎曼函数在任意无理数点都连续. 在其他点处, 即在点 $x\in\mathbb{Q}$ 处函数间断, 且所有这些点都是第一类间断点.

## 练　习

1. 指出下列函数的间断点并说明其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$.

(2) $f(x)=[|\cos x|]$.

(3) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$.

(4) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

(5) $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{为有理数},\\ -x, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

2. 举出定义在 $[0,1]$ 上分别符合下述要求的函数.

(1) 只在 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{4}$ 三点不连续的函数.

(2) 只在 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{4}$ 三点连续的函数.

(3) 只在 $\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$ 上间断的函数.

(4) 只在 $x=0$ 右连续, 而在其他点都不连续的函数.

①黎曼 (G. M. Riemann)(1826—1866)——卓越的德国数学家, 他的主要著作奠定了整个现代几何和现代分析领域的基础.

## 3.2　连续函数的性质

### 3.2.1　局部性质

函数的某性质叫做*局部的*, 如果它是由函数在其定义域中的点的任意小邻域中的性状确定的. 下面列出连续函数的基本的局部性质.

**定理 1**　设 $f: E \to \mathbb{R}$ 在点 $a \in E$ 处连续, 则下列论断成立.

(1) (*局部有界*)　$f$ 在点 $a$ 的某个邻域 $U_E(a)$ 中有界.

(2) (*局部保号*)　若 $f(a) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $a$ 的某个邻域 $U_E(a)$ 中的所有值与 $f(a)$ 同时为正或同时为负.

(3) (*算术运算*)　若函数 $g: U_E(a) \to \mathbb{R}$ 亦在点 $a$ 连续, 那么函数

(i) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$;

(ii) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$;

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (在 $g(a) \neq 0$ 的条件下)

在点 $a$ 的某个邻域中有定义且在点 $a$ 连续.

(4) (*复合运算*)　若函数 $g: Y \to \mathbb{R}$ 在点 $b \in Y$ 连续, 而函数 $f: E \to Y$ 满足 $f(a) = b$ 且 $f$ 在点 $a$ 连续, 那么, 复合函数 $(g \circ f)$ 在 $E$ 上有定义且在点 $a$ 连续.

**证**　回忆: 函数 $f$ 或 $g$ 在其定义域的某点 $a$ 连续等价于此函数关于 $a$ 的邻域基 $\mathcal{B}_a$ 的极限存在且等于它在 $a$ 处的值:

$$\lim_{\mathcal{B}_a} f(x) = f(a), \quad \lim_{\mathcal{B}_a} g(x) = g(a).$$

于是论断 (1)～(3) 可以直接从函数在一点连续的定义和函数极限的相应性质推出.

论断 (4) 推论于复合函数的极限的定理:

$$\lim_{\mathcal{B}_a}(g \circ f)(x) = \lim_{\mathcal{B}_b} g(y) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

这等价于 $(g \circ f)$ 在点 $a$ 连续. 只需验证对于任何 $\mathcal{B}_b \in U_Y(b)$, 都存在 $U_E(a) \in \mathcal{B}_a$, 使得 $f(U_E(a)) \subset U_Y(b)$. 事实上, 若 $U_Y(b) = Y \cap U(b)$, 则按函数 $f: E \to Y$ 在点 $a$ 连续的定义, 对于邻域 $U(b) = U(f(a))$, 存在点 $a$ 在集 $E$ 中的邻域 $U_E(a)$, 使得 $f(U_E(a)) \subset U(f(a))$. 由于 $f$ 是从 $E$ 映到 $Y$ 中的, 那么 $f(U_E(a)) \subset Y \cap U(f(a)) = U_Y(b)$, 这就证明了复合函数 $(g \circ f)$ 在点 $a$ 连续. □

**例 1**　代数多项式 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 是在 $\mathbb{R}$ 上连续的函数.

实际上, 由定理 1 之 (3) 及归纳法可以推出有限个在某点连续的函数的和与积都是在这点连续的函数. 在 3.1 节的例 1 和例 2 中我们已经验证了常数函数及函

数 $f(x)=x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 那么函数 $a\cdot x^m=a\cdot\underbrace{x\cdot\cdots\cdot x}_{m个}$ 也在 $\mathbb{R}$ 上连续. 因此多项式 $P(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

**例 2** 从例 1 和定理 1 之 (3) 可知, 有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$——多项式的比, 在它有定义即 $Q(x)\neq 0$ 的地方处处连续.

**例 3** 有限个连续函数的复合, 在自己的定义域的任何一点都是连续的. 这可依定理 1 之 (4) 并用归纳法推出. 特别地, 例如, 函数 $\mathrm{e}^{\sin^2(\ln|\cos x|)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上除去它没有定义的那些点, 即点 $\dfrac{\pi}{2}(2k+1), k\in\mathbb{Z}$ 之外是处处连续的.

### 3.2.2 全局 (整体) 性质

用描述性的语言来说, 与函数的整个定义域有关的性质叫做函数的*整体性质*.

1. *闭区间上连续函数的基本性质*

**定理 2** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它具有下述特殊性质:

(1) (*有界性定理*) $f$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) (*最值定理*) $f$ 在 $[a,b]$ 上有最大值、最小值.

(3) (*介值性定理*) 若 $f(a)\neq f(b)$, 则对任何介于 $f(a),f(b)$ 之间的实数 $c$, 至少有一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=c$.

(4) (*根的存在性定理*) 若 $f(a)f(b)<0$, 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$, 即

$$(f\in C[a,b])\wedge(f(a)\cdot f(b)<0)\Rightarrow(\exists c\in(a,b),f(c)=0).$$

**证** (1) 因 $f$ 在 $E=[a,b]$ 上连续, 根据连续函数的局部有界性 (定理 1), $\forall x\in E,\exists U(x)$, 使得 $f$ 在集 $U_E(x)=E\cap U(x)$ 上有界. 则 $\mathcal{A}=\{U(x)|x\in E\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的开覆盖, 根据有限覆盖引理, 可从 $\mathcal{A}$ 中取出有限个 $U(x_1),\cdots,U(x_n)$, 它们覆盖闭区间 $[a,b]$. 由于 $f$ 在集 $E\cap U(x_k)=U_E(x_k)$ 上有界, 即有 $m_k,M_k\in\mathbb{R}$ 使得 $m_k\leqslant f(x)\leqslant M_k(\forall x\in U_E(x_k))$. 则 $\forall x\in E$, 有

$$\min\{m_1,\cdots,m_k\}\leqslant f(x)\leqslant\max\{M_1,\cdots,M_k\},$$

即 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界.

(2) 由 (1) 和确界原理知 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ 与 $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ 均存在. 往证 $\exists\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=M$. 若不然, $\forall x\in[a,b],f(x)<M$. 令 $F(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$, 则 $F$ 在 $[a,b]$ 上连续, 由 (1) 知 $F$ 在 $[a,b]$ 上有上界, 设 $F(x)<G(G>0)$. 于是 $f(x)<M-\dfrac{1}{G}$, 与上确界的最小性矛盾. 于是 $\exists\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=M$. 同理可

证 $\exists \eta \in [a,b]$, 使得 $f(\eta)=m$.

(3) 令 $g(x)=f(x)-c$, 则 $g$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a)g(b)<0$. 把区间 $[a,b]$ 平分成两个, 若在分点处函数不等于零, 则这两个区间中有一个, 记作 $I_1=[a_1,b_1]$, 使得 $g(a_1)g(b_1)<0$. 再将 $I_1$ 平分成两个, 并且进一步继续这个过程.

那么, 我们或者在某一步得到一个点 $c\in[a,b]$, 使得 $g(c)=0$, 或者得到一个闭区间套 $\{I_n\}, I_n=[a_n,b_n], b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$, 且 $g(a_n)g(b_n)<0$. 在后一种情况下, 根据关于闭区间套的引理, 存在唯一的一个点 $c\in[a_n,b_n]\subset[a,b], n=1,2,\cdots$. 因为

$$g(a_n)g(b_n)<0,\quad n=1,2,\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c,$$

根据极限的性质和连续的定义, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}[g(a_n)g(b_n)]=g^2(c)\leqslant 0,$$

于是 $g(c)=0$.

(4) 这是 (3) 的直接推论. □

**注 1**　(1) $f$ 在 $(a,b)$ 上连续 $\not\Rightarrow$ $f$ 在 $(a,b)$ 上有界 $\left(\text{例如, } f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)\right)$; $f$ 未必有最小值 (如 $f(x)=\sin x,\ x\in(0,\pi)$), 也未必有最大值 (如 $f(x)=x,\ x\in(0,1)$).

(2) 若 $f$ 在区间上连续, 在区间的点 $a$ 和 $b$ 取值满足 $f(a)<f(b)$, 则 $[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$. 事实上, $\forall c\in(f(a),f(b))$, 在闭子区间 $[a,b]$ 上考察 $\varphi(x)=f(x)-c$, 则

$$\varphi(a)\cdot\varphi(b)=(f(a)-c)(f(b)-c)<0,$$

应用定理 2 之 (4) 即得.

(3) $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 非常函数, $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x), m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$, 则 $f([a,b])=[m,M]$.

(4) 介值性定理的证明提供了一个求方程 $f(x)=0$ 在这样的闭区间上的根的最简单的算法, 在这个闭区间的两端连续函数 $f$ 取异号的值.

(5) **介值性定理的几何意义**　若函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)\neq f(b)$, 任何介于 $y=f(a)$ 与 $y=f(b)$ 之间的直线 $y=C$, 与曲线 $y=f(x), x\in[a,b]$ 至少有一个交点.

**例 4**　证明: 对 $p>0, n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_0>0$, 使得 $x_0^n=p$ (称 $x_0$ 是 $p$ 的 $n$ 次正根或算术根, 记为 $x_0=\sqrt[n]{p}$).

**证**　令 $f(x)=x^n-p, f(0)=-p<0$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$, 故 $\exists b>0$ s.t. $b^n>p$, 于是 $f(b)=b^n-p>0$, 显然 $f$ 在 $[0,b]$ 连续, 故由根的存在性定

理知 $\exists x_0 \in (0,b)$ s.t. $f(x_0)=0$, 即 $x_0^n = p$. 若 $x_1 > 0$ 也满足 $x_1^n = p$. 则 $0 = x_1^n - x_0^n = (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1})$, 从而 $(x_1 - x_0) = 0$, 即 $x_1 = x_0$, 于是结论成立. □

**例 5** 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 满足 $f([a,b]) \subset [a,b]$, 证明: 存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

**证** 由已知有: 对任何 $x \in [a,b]$, 有 $a \leqslant f(x) \leqslant b$, 特别地

$$a \leqslant f(a) \text{ 以及 } f(b) \leqslant b.$$

若 $a = f(a)$ 或 $f(b) = b$, 则取 $x_0 = a$ 或 $b$ 即可. 否则令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$F(a) > 0, \quad F(b) < 0.$$

由根的存在性定理, 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$. □

2. 一致连续性

**定义 1** 函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 叫做是在集 $E \subset \mathbb{R}$ 上一致连续的, 如果对于任意的数 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使得对于任意满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的点 $x_1, x_2 \in E$ 成立 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 简言之,

$$(f : E \to \mathbb{R} \text{一致连续}) :=$$

$$(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)).$$

**注 2** (1) 若函数在集上一致连续, 则它在集的任意点处连续. 实际上, 只要在所述定义中置 $x_1 = x$ 和 $x_2 = a$, 我们就见到函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在点 $a \in E$ 连续的定义已满足.

(2) 一般说来函数的连续性并不蕴含一致连续性.

**例 6** 证明 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续.

**证** 任给 $\varepsilon > 0$, 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 要使 $|f(x_1) - f(x_2)| = |a||x_1 - x_2| < \varepsilon$, 只要取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|} > 0$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 所以 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续. □

**例 7** 证明 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

**证** $\forall \varepsilon > 0$, 要使

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| = \left|2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \leqslant |x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

只要取 $\delta = \varepsilon$, 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. □

**注 3**　$f$ 在区间 $I$ 上不一致连续当且仅当

$$(\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1 \in E, \exists x_2 \in E(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon)).$$

**例 8**　证明 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

**证**　取 $\varepsilon_0 = 1, \forall \delta > 0$, 取 $x_1 = \min\left\{\delta, \dfrac{1}{2}\right\}, x_2 = \dfrac{x_1}{2}$, 则 $x_1, x_2 \in (0,1)$, 虽然 $|x_1 - x_2| = \dfrac{x_1}{2} \leqslant \dfrac{\delta}{2} < \delta$, 但 $|f(x_1) - f(x_2)| = \dfrac{1}{x_1} \geqslant 2 > 1$. □

下述定理说明在某种条件下, 连续与一致连续的关系.

**定理 3**　如果函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么 $f$ 必在 $[a,b]$ 上一致连续.

**证**　反证法. 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续, 则有 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\delta_n = \dfrac{1}{n} > 0$, $\exists x_n', x_n'' \in [a,b]$, s.t.

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

由于 $\{x_n'\} \subset [a,b]$, 故 $\{x_n'\}$ 有界, 由波尔察诺 - 魏尔斯特拉斯引理 (见 2.1.3 小节推论 3) 知 $\{x_n'\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}'\}$, 设 $x_{n_k}' \to x_0 (k \to \infty)$, 则 $x_0 \in [a,b]$. 于是由 $|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \dfrac{1}{n_k}$ 知 $x_{n_k}'' \to x_0 (k \to \infty)$. 因 $f$ 在 $x_0$ 处连续, 从而 $f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'') \to f(x_0) - f(x_0) = 0$. 另一方面, 由 $|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \geqslant \varepsilon_0$ 得 $0 = |f(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$, 矛盾. 故结论成立. □

由上述证明可以得到以下结论.

**命题 1**　函数 $f$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上一致连续的充要条件是: 对于 $E$ 中任何两个点列 $\{x_n'\}, \{x_n''\}$, 只要 $x_n' - x_n'' \to 0$, 就有 $f(x_n') - f(x_n'') \to 0$.

**注 4**　由命题 1 知 $f$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上不一致连续的充要条件是: 存在 $\{x_n'\}, \{x_n''\} \subset E$, 虽然 $x_n' - x_n'' \to 0$, 但 $f(x_n') - f(x_n'') \nrightarrow 0$.

**例 9**　在 $\mathbb{R}$ 上连续的函数 $f(x) = x^2$, 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

事实上, 取 $x_n' = \sqrt{n+1}, x_n'' = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

而 $f(x_n') - f(x_n'') = 1$.

**例 10**　在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界的函数 $f(x) = \sin x^2$, 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续, 因为取 $x_n' = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}(n+1)}, x_n'' = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}n}, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}(x'_n - x''_n) = \lim_{n\to\infty}|x'_n - x''_n| = 0.$$

但是 $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$.

3. 单调函数与反函数的连续性

本小节最后我们来研究, 在怎样的条件下在闭区间上连续的实值函数有反函数, 以及在什么情况下这个反函数连续.

**命题 2** 闭区间 $E = [a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 中的连续映射 $f : E \to \mathbb{R}$ 是单射的充要条件是函数 $f$ 在闭区间 $E = [a, b]$ 上严格单调.

**证** 充分性是显然的. 下证必要性. 即若连续函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是单射, 则 $f$ 是严格单调的.

若不然, 则可得到 $[a, b]$ 的三个点 $x_1 < x_2 < x_3$, 使 $f(x_2)$ 不在 $f(x_1)$ 和 $f(x_3)$ 之间. 在这种情况下, 或者 $f(x_3)$ 在 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间, 或者 $f(x_1)$ 在 $f(x_2)$ 和 $f(x_3)$ 之间. 不妨设所述两种可能的后一种情形发生. 按条件函数在闭区间 $[x_2, x_3]$ 上连续, 因此 (见定理 2 的推断 (3)) 存在点 $x'_1 \in [x_2, x_3]$, 使 $f(x'_1) = f(x_1)$. 于是 $x_1 < x'_1$ 且 $f(x_1) = f(x'_1)$, 这与 $f$ 是单射矛盾. $f(x_3)$ 在 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间的情形可类似地证明. □

**命题 3** 每个定义在数集 $X \subset \mathbb{R}$ 上的严格单调函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 都有反函数 $f^{-1} : Y \to \mathbb{R}$, 它定义在函数的值的集合 $Y = f(X)$ 上且在 $Y$ 上具有与函数 $f$ 在集 $X$ 上相同的单调性.

**证** 映射 $f : X \to Y = f(X)$ 是满射, 即是到集合 $Y$ 上的映射, 不妨设 $f : X \to Y$ 在 $X$ 上增 (减的情形类似), 即

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X(x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)). \tag{3.2.1}$$

从而 $f : X \to Y$ 是单射, 因此 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的双方单值映射. 这就是说, 当 $y = f(x)$ 时, $x = f^{-1}(y)$ 这一公式给出的逆映射 $f^{-1} : Y \to X$ 有定义.

把映射 $f^{-1} : Y \to X$ 的定义和关系式 (3.2.1) 相对照, 我们得到关系式

$$\forall y_1 \in Y, \forall y_2 \in Y(f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2). \tag{3.2.2}$$

它表明函数 $f^{-1}$ 在其定义域上是增的. □

由命题 3 可见, 欲知实值函数的反函数的连续性, 需研究单调函数连续的条件.

**命题 4** 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上单调的函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 只可能有第一类间断点.

**证** 不妨设 $f$ 是不减函数 (否则可考虑函数 $-f$). 假设 $a \in E$ 是 $f$ 的间断点. 由于 $a$ 不能是 $E$ 的孤立点, 所以 $a$ 至少是集

$$E_a^- = \{x \in E | x < a\} \quad 和 \quad E_a^+ = \{x \in E | a < x\}$$

之中一个的极限点. 由于 $f$ 是不减函数, 所以 $\forall x \in E_a^-$ 都有 $f(x) \leqslant f(a)$, 于是 $f$ 在 $E_a^-$ 上的限制 $f|_{E_a^-}$ 是不减的有上界的函数. 那么, 存在极限

$$\lim_{E_a^- \ni x \to a} (f|_{E_a^-})(x) = \lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0).$$

类似可证存在极限

$$\lim_{E \ni x \to a+0} f(x) = f(a+0),$$

如果 $a$ 是集 $E_a^+$ 的极限点的话. □

**推论 1**　若 $a$ 是单调函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 的间断点, 则极限

$$\lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0), \quad \lim_{E \ni x \to a+0} f(x) = f(a+0)$$

之中至少有一个是确定的; 如果是非减的 (或者非增的) 那么不等式

$$f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0) \quad (\text{或者} f(a-0) \geqslant f(a) \geqslant f(a+0))$$

之中至少有一个严格成立的不等号; 在这个严格的不等式所确定的开区间中不含有函数的值; 对应于单调函数的不同的间断点的这种开区间彼此不相交.

**证**　实际上, 若 $a$ 是间断点, 则它是集 $E$ 的极限点, 且根据命题 3 它是第一类间断点. 因此, 基

$$E \ni x \to a-0 \quad \text{和} \quad E \ni x \to a+0$$

中至少有一个是有定义的且沿着这个基 (当两个基都有定义时, 则分别沿着每个基) 函数 $f$ 有极限. 不妨设 $f$ 是不减的. 由于 $a$ 是间断点, 那么, 不等式 $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0)$ 中至少有一个实际上是严格的不等式. 由于当 $x \in E$ 且 $x < a$ 时, 有

$$f(x) \leqslant \lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0),$$

而类似地, 当 $x \in E$ 且 $a < x$ 时, $f(a+0) \leqslant f(x)$, 所以, 由严格不等式 $f(a-0) < f(a)$ 或 $f(a) < f(a+0)$ 确定的开区间实际上不含有函数的值. 设 $a_1, a_2$ 是函数的两个不同的间断点, 并设 $a_1 < a_2$, 那么由于函数 $f$ 不减, 我们有

$$f(a_1-0) \leqslant f(a_1) \leqslant f(a_1+0) \leqslant f(a_2-0) \leqslant f(a_2) \leqslant f(a_2+0).$$

由此推出, 相应于不同的间断点的那些不含函数值的开区间是不相交的. □

**推论 2**　单调函数的间断点的集合至多可数.

**证**　根据推论 1, 我们把单调函数的每个间断点 $a$ 和一个这样的开区间联系起来, 它是由 $f(a)$ 和 $f(a+0)$ 或 $f(a-0)$ 来确定的. 这些开区间彼此不相交. 在每

个这种开区间当中可取一个有理点, 那么, 开区间的集合就与全体有理数所成的可数集 $\mathbb{Q}$ 的子集等势. 这就是说, 它本身至多可数. 单调函数的间断点的集合按结构是与这个开区间的集合等势的, 因此和它一样是至多可数集. □

**命题 5** (单调函数的连续性准则) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是单调函数, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续当且仅当 $f([a,b])$ 是一个以 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为端点的闭区间.

**证** 若 $f$ 是连续的单调函数, 则根据 $f$ 的单调性, $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 中所取的一切值都介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间. 根据函数的连续性, 它必定也取到一切介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的中间值. 所以, $f([a,b])$ 是以 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为端点的闭区间.

反之, 设 $f$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数. 若它在某点 $c\in[a,b]$ 处间断, 则据命题 4 的推论 1, 开区间

$$(f(c-0),f(c)),\quad (f(c),f(c+0))$$

中的一个是确有定义的, 且它不含有函数 $f$ 的值, 但根据函数的单调性, 这个开区间是包含在以 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为端点的闭区间之中的. 因此, 若在闭区间 $[a,b]$ 上单调的函数具有哪怕只是一个间断点, 则以 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为端点的闭区间就不能整个地含在 $f([a,b])$ 之中. □

**定理 4** (关于反函数) 集 $X\subset\mathbb{R}$ 上严格单调的函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 有反函数 $f^{-1}:Y\to\mathbb{R}$, 它定义在函数 $f$ 的值的集合 $Y=f(X)$ 上. 函数 $f^{-1}:Y\to\mathbb{R}$ 是单调的, 而且它在 $Y$ 上的单调形式和函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在集 $X$ 上的单调形式相同.

此外若 $X$ 是闭区间 $[a,b]$, 且函数 $f$ 在此集上连续, 则集 $Y=f(X)$ 是以 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为端点的闭区间, 且函数 $f^{-1}:Y\to\mathbb{R}$ 在集 $Y$ 上连续.

**证** 定理中关于 $X=[a,b]$ 且 $f$ 连续时, $Y=f(X)$ 是以 $f(a),f(b)$ 为端点的闭区间的结论, 从上面已证的命题 5 推出. 剩下的是验证 $f^{-1}:Y\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 但是 $f^{-1}$ 在 $Y$ 上单调, $Y$ 是闭区间, 且 $f^{-1}(Y)=X=[a,b]$ 也是闭区间. 根据命题 5 我们断定函数 $f^{-1}$ 在以 $f(a),f(b)$ 为端点的闭区间 $Y$ 上连续. □

**例 11** 函数 $y=f(x)=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增且连续, 于是根据定理 4, 这个函数在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的限制具有反函数 $x=f^{-1}(y)$, 记为 $x=\arcsin y$, 它定义在闭区间 $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\sin\frac{\pi}{2}\right]=[-1,1]$ 上, 由 $-\frac{\pi}{2}$ 递增到 $\frac{\pi}{2}$, 且在这个闭区间上连续.

**例 12** 函数 $y=\cos x$ 在闭区间 $[0,\pi]$ 上的限制是递减连续函数. 根据定理 4 它有反函数, 记为 $x=\arccos y$, 这个函数定义在 $[-1,1]$ 上且在这个区间上由值 $\pi$ 递减到值 $0$.

**例 13** 函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的限制是由 $-\infty$ 向 $+\infty$ 递增的

连续函数.

根据定理 4 的第一部分, 它有定义在整个数轴 $Y=\mathbb{R}$ 上的反函数, 记为 $x=\arctan y$, 且在由它自己的值所成的开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的范围内递增. 为了证明函数 $x=\arctan y$ 在它的定义域的任意一点 $y_0$ 处连续, 对 $\varepsilon>0$, 我们取点 $x_0=\arctan y_0$ 和闭区间 $[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\subset\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 取

$$\delta_1=\tan x_0-\tan(x_0-\varepsilon)=y_0-\tan(x_0-\varepsilon)$$

及

$$\delta_2=\tan(x_0+\varepsilon)-\tan x_0=\tan(x_0+\varepsilon)-y_0,$$

那么

$$x_0-\varepsilon=\arctan(y_0-\delta_1),\quad x_0+\varepsilon=\arctan(y_0+\delta_2),$$

则根据函数 $x=\arctan y$ 的递增性质可以断定, 当 $y_0-\delta_1<y<y_0+\delta_2$ 时, 将有

$$x_0-\varepsilon<\arctan y<x_0+\varepsilon.$$

于是当 $-\delta_1<y-y_0<\delta_2$ 时

$$|\arctan y-\arctan y_0|<\varepsilon,$$

而当 $|y-y_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 时, 当然更有此式成立. 即函数 $x=\arctan y$ 在 $y_0$ 处连续.

**例 14**　与例 13 中所进行的讨论类似, 我们知道, 由于函数 $y=\cot x$ 在开区间 $(0,\pi)$ 上的限制是由 $+\infty$ 递减到 $-\infty$ 的连续函数, 所以它有反函数, 记为 $x=\operatorname{arccot}y$, 此函数定义在全数轴 $\mathbb{R}$ 上, 在由它自己的值所成的开区间 $(0,\pi)$ 的范围内从 $\pi$ 递减到 0, 且在 $\mathbb{R}$ 上连续.

**注 5**　若记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 则它们的图像关于第一象限的平分线是对称的.

## 练　习

1. 设 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 进一步证明 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

2. 设函数 $f$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 证明: 存在点 $x_0\in[0,a]$, 使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

3. 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

4. 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$, 另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明: 存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

题 3 是本题的特例, 其中 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$.

5. 证明:

(1) 若 $f\in C(A)$ 且 $B\subset A$, 则 $f|_B\in C(B)$.

(2) 若函数 $f:E_1\cup E_2\to\mathbb{R}$ 使 $f|_{E_i}\in C(E_i)(i=1,2)$, 则并不总有 $f\in C(E_1\cup E_2)$.

(3) 黎曼函数 $\mathcal{R}$ 和它在有理数集上的限制 $\mathcal{R}|_{\mathbb{Q}}$ 一样, 在集 $\mathbb{Q}$ 的每点, 除零外都间断, 并且所有的间断点都是可去间断点.

6. 证明: 若函数 $f\in C[a,b]$, 则函数

$$m(x)=\min_{a\leqslant t\leqslant x}f(t),\quad M(x)=\max_{a\leqslant t\leqslant x}f(t)$$

也在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

7. (1) 证明: 开区间上的单调函数的反函数在自己的定义域上连续.

(2) 构造一个具有可数个间断点的单调函数.

(3) 证明: 若函数 $f:X\to Y$ 和 $f^{-1}:Y\to X$ 互反 (这里 $X,Y$ 都是 $\mathbb{R}$ 的子集) 且 $f$ 在点 $x_0\in X$ 连续, 那么, 由此还不能推出函数 $f^{-1}$ 在点 $y_0=f(x_0)\in Y$ 连续.

8. 证明:

(1) 若 $f\in C[a,b]$ 且 $g\in C[a,b]$, 同时 $f(a)<g(a)$ 且 $f(b)>g(b)$, 那么, 存在点 $c\in[a,b]$, 在这点处 $f(c)=g(c)$.

(2) 任何闭区间到自身的连续映射 $f:[0,1]\to[0,1]$ 都有不动点, 即点 $x\in[0,1]$ 使 $f(x)=x$.

(3) 若从闭区间到自身的连续映射 $f$ 和 $g$ 是可交换的, 即 $f\circ g=g\circ f$, 则它们并不总有共同的不动点.

(4) 连续映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可以没有不动点.

(5) 连续映射 $f:(0,1)\to(0,1)$ 可以没有不动点.

(6) 若映射 $f:[0,1]\to[0,1]$ 连续, $f(0)=0$, $f(1)=1$, 且在 $[0,1]$ 上 $(f\circ f)(x)\equiv x$, 则

$$f(x)\equiv x.$$

9. 证明: 任意一个在闭区间上连续的函数的值的集合也是闭区间.

10. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, $f(0)=f(1)$. 证明

(1) 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, 存在两端点在这个函数的图像上且长度等于 $\dfrac{1}{n}$ 的水平线段.

(2) 若数 $l$ 不是形如 $\dfrac{1}{n}$ 的数, 则存在所说的那样的函数, 在它的图像上已不能内接上长为 $l$ 的水平线段.

11. 以下述方式对于 $\delta>0$ 定义的函数 $\omega(\delta)$, 叫做函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 的连续模:

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{|x_1-x_2|<\delta\\ x_1,x_2\in E}}|f(x_1)-f(x_2)|.$$

这里上确界取遍集 $E$ 的相互距离小于 $\delta$ 的一切可能的点对. 证明:

(1) 连续模是非减的非负的函数, 有极限

$$\omega(+0)=\lim_{\delta\to 0+0}\omega(\delta).$$

(2) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意的点 $x_1,x_2\in E$, 关系式 $|x_1-x_2|<\delta$ 蕴含 $|f(x_1)-f(x_2)|<\omega(+0)+\varepsilon$.

(3) 若 $E$ 是闭区间、开区间或半开区间, 则对于函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 的连续模成立着关系式

$$\omega(\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2).$$

(4) 在全直线上考察的函数 $x$ 和 $\sin x^2$ 的连续模分别是在区域 $\delta>0$ 中的函数 $\omega(\delta)=\delta$ 和常数函数 $\omega(\delta)=2$.

(5) 函数 $f$ 在集 $E$ 上一致连续当且仅当 $\omega(+0)=0$.

12. 设 $f$ 和 $g$ 是定义在同一个集合 $X$ 上的有界函数. 量

$$\Delta=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

称为有界函数 $f$ 和 $g$ 之间的距离; 它表示在给定的集 $X$ 上, 一个函数近似于另一个函数的好坏程度如何. 设 $X$ 是闭区间 $[a,b]$. 证明, 如果 $f,g\in C[a,b]$, 那么, $\exists x_0\in[a,b]$, 使 $\Delta=|f(x_0-g(x_0))|$, 而对于任意的有界函数, 此事一般说来并不成立.

13. 设 $P_n(x)$ 是 $n$ 阶多项式. 我们用多项式来逼近有界函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 设

$$\Delta(P_n)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|以及E_n(f)=\inf_{P_n}\Delta(P_n),$$

其中下确界取遍一切可能的 $n$ 阶多项式. 如果 $\Delta(P_n)=E_n(f)$, 则多项式 $P_n$ 叫做函数 $f$ 的最佳逼近多项式. 证明:

(1) 存在零阶最佳逼近多项式 $P_0(x)\equiv a_0$.

(2) 当 $P_n$ 是固定的多项式时, 在形如 $\lambda P_n$ 的多项式 $Q_\lambda(x)$ 中间, 存在多项式 $Q_{\lambda_0}(x)$ 使得

$$\Delta(Q_{\lambda_0})=\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\Delta(Q_\lambda).$$

(3) 如果 $n$ 阶最佳逼近多项式存在, 则 $n+1$ 阶最佳逼近多项式也存在.

(4) 对于任意的在闭区间上有界的函数和任意的 $n=0,1,2,\cdots,n$ 阶最佳逼近多项式总存在.

14. 证明:

(1) 奇数阶实系数多项式至少有一个实根.

(2) 若 $P_n(x)$ 是 $n$ 阶多项式, 则函数 $\operatorname{sgn}P_n(x)$ 最多有 $n$ 个间断点.

(3) 若在闭区间 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个点 $x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}$ 使得量

$$\operatorname{sgn}[(f(x_i)-P(x_i))(-1)^i]$$

对于 $i=0,1,\cdots,n+1$ 为常数, 则 $E_n(f)\geqslant \min\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1}|f(x_i)-P(x_i)|$. 这是德拉瓦莱–布森定理. $E_n(f)$ 的定义见题 13.

15. (1) 证明对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, 闭区间 $[-1,1]$ 上定义的函数

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

是 $n$ 阶代数多项式 (切比雪夫多项式).

(2) 求出多项式 $T_1,T_2,T_3,T_4$ 的明显的代数表达式并画出它们的图像.

(3) 求出多项式 $T_n(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上的根以及量 $|T_n(x)|$ 在闭区间上达到最大值的点.

(4) 证明在 $x^n$ 项的系数为 1 的一切 $n$ 阶多项式当中, 多项式 $T_n(x)$ 是唯一的与零偏差最小的多项式, 即

$$E_n(0)=\max_{|x|\leqslant 1}|T_n(x)|$$

($E_n(f)$ 的定义见习题 13).

# 第4章 微 分 学

## 4.1 可微函数

17 世纪 20 年代，法国数学家费马 (Fermat) 在研究极值问题时引入了导数的思想. 同一世纪下半叶，在分别研究力学和几何学过程中，英国数学家牛顿 (Newton) 和德国数学家莱布尼茨 (Leibniz) 各自独立奠定了微积分学的基础. 彼时与其研究相联系的典型背景有瞬时速度及切线斜率问题 (在后续课程中将给出一些例子), 导致人们讨论下述形式的极限:

$$\lim_{E\ni x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

### 4.1.1 导数和微分

我们从以下定义开始.

**定义 1** 设集 $E\subset\mathbb{R}$, $f:E\to\mathbb{R}$ 是定义在 $E$ 上的函数, $a\in E$ 是 $E$ 的极限点. 如果存在一个关于自变量的增量 $x-a$ 的线性函数 $A\cdot(x-a)$, 使得函数的增量 $f(x)-f(a)$ 表示成

$$f(x)-f(a)=A(x-a)+o(x-a),\quad x\to a,\ x\in E. \tag{4.1.1}$$

则称 $f$ 在 $a$ 处可微, 并称线性函数 $A(x-a)$ 为 $f$ 在点 $a$ 的微分.

观察: 从 (4.1.1) 推出

$$\lim_{E\ni x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{E\ni x\to a}\left(A+\frac{o(x-a)}{x-a}\right)=A,$$

而根据极限的唯一性, 数 $A$ 是单值确定的. 于是产生下述描述.

**定义 2** 设集 $E\subset\mathbb{R}$, $f:E\to\mathbb{R}$ 是定义在 $E$ 上的函数, $a\in E$ 是 $E$ 的极限点. 如果极限

$$\lim_{E\ni x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{4.1.2}$$

存在, 就称 $f$ 在点 $a$ 处是可导的, 并称该极限值为 $f$ 在 $a$ 处的导数，记其为

$$f'(a)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}.$$

若极限 (4.1.2) 不存在，则称 $f$ 在 $a$ 不可导.

由定义得关系式

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad x\to a,\ x\in E. \tag{4.1.3}$$

等价地,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+\alpha(x),$$

其中当 $x\to a, x\in E$ 时, $\alpha(x)\to 0$. 因此, **函数可微等价于在相应的点处它有导数存在**.

如果函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 在集 $E$ 的不同的点处可微, 那么当从一点移到另一点时, 在 (4.1.1) 中无论是量 $A$ 还是函数 $o(x-a)$ 都可能改变. 这种状况应该在可微函数的定义中表现出来.

**定义 3** 定义在集 $E\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 叫做在 $E$ 的极限点 $x\in E$ 处**是可微的**, 如果

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=A(x)h+\alpha(x;h)}, \tag{4.1.4}$$

其中 $h\to A(x)h$ 是关于 $h$ 的线性函数, 而 $\alpha(x;h)$ 当 $h\to 0, x+h\in E$ 时, 等于 $o(h)$. 当 $f$ 在 $x$ 处可微时, **称该线性函数 $h\to A(x)h$ 为 $f$ 在 $x$ 处的微分**, 并用符号 $\mathrm{d}f(x)$ 或 $Df(x)$ 来表示:

$$\mathrm{d}f(x)(h)=A(x)h.$$

记

$$\Delta x(h):=(x+h)-x=h \quad 及 \quad \Delta f(x;h):=f(x+h)-f(x),$$

分别称其为**自变量的增量及函数(相应于自变量的这个增量)的增量**. 这样一来, 说函数在一点处可微, 指的是它在这点处的增量作为自变量增量 $h$ 的函数近似于一个线性函数, 其误差与自变量增量的比当 $h\to 0$ 时是无穷小量. 即

$$\Delta f(x;h)-\mathrm{d}f(x)(h)=\alpha(x;h),$$

并且当 $h\to 0, x+h\in E$ 时, $\alpha(x;h)=o(h)$, 就是说, 由自变量的增量 $h$ 引起的函数增量与线性函数 $\mathrm{d}f(x)$ 在同一个 $h$ 处的值之间的差是关于 $h$ 的高于一阶的无穷小量. 由于这个缘故, **我们说微分是函数增量的线性 (主要) 部分**.

从关系式 (4.1.4) 和定义 2 可以推出

$$A(x)=f'(x)=\lim_{\substack{h\to 0\\ x+h,x\in E}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

因此微分可以写成

$$\mathrm{d}f(x)(h)=f'(x)h. \tag{4.1.5}$$

特别地, 如果 $f(x)\equiv x$, 则显然 $f'(x)\equiv 1$ 且

$$\mathrm{d}x(h)=1\cdot h=h,$$

因此有时也说, "自变量的微分就是它的增量".

注意到这个等式从 (4.1.5) 得到

$$\mathrm{d}f(x)(h)=f'(x)\mathrm{d}x(h), \tag{4.1.6}$$

即

$$\boxed{\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x}, \tag{4.1.7}$$

等式 (4.1.7) 须理解作 $h$ 的函数的等式. 根据 (4.1.6), 可用莱布尼茨的记号 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 来标记导数.

### 4.1.2　切线; 导数和微分的几何意义

设 $f:E\to\mathbb{R}$ 是定义在集 $E\subset\mathbb{R}$ 上的函数, 而 $x_0$ 是集 $E$ 的一个固定的极限点. 我们希望挑选一个常数 $c_0$, 使得它比别的任何常数都能更好地刻画函数在点 $x_0$ 的邻域内的性态. 精确地说, 我们希望差 $f(x)-c_0$ 当 $E\ni x\to x_0$ 时, 与任何非零常数相比都是无穷小量, 即

$$f(x)=c_0+o(1),\quad x\to x_0, x\in E. \tag{4.1.8}$$

这个关系式等价于

$$\lim_{E\ni x\to x_0} f(x)=c_0.$$

特别地, 如果函数在点 $x_0$ 处连续, 则

$$\lim_{E\ni x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

于是当然有 $c_0=f(x_0)$.

现在我们要求选择一个函数 $c_0+c_1(x-x_0)$, 使

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+o(x-x_0),\quad x\to x_0, x\in E. \tag{4.1.9}$$

显然, 这是前述问题的推广, 因为可以把公式 (4.1.8) 改写成

$$f(x)=c_0+o((x-x_0)^0),\quad x\to x_0, x\in E.$$

让 $x\to x_0, x\in E$, 从 (4.1.9) 式直接推出 $c_0=\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)$, 若函数在这点连续, 则 $c_0=f(x_0)$. 如果 $c_0$ 找到了, 那么从 (4.1.9) 式推出

$$c_1=\lim_{E\ni x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

(如果此极限存在). 这就证明了如下命题.

**命题 1** 在集 $E \subset \mathbb{R}$ 的极限点 $x_0$ 处连续的函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 使线性近似式 (4.1.9) 成立的充要条件是它在这个点处可微.

此外, 函数

$$\varphi(x) = c_0 + c_1(x - x_0), \tag{4.1.10}$$

当 $c_0 = f(x_0)$ 且 $c_1 = f'(x_0)$ 时, 是满足关系式 (4.1.9) 的唯一的函数. 于是函数 $\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 依下述意义给出了函数 $f$ 在点 $x_0$ 的邻域中的最佳线性近似: 对于任何其他形如 (4.1.10) 函数 $\varphi$, 当 $x \to x_0, x \in E$ 时, $\varphi(x) - f(x) \neq o(x - x_0)$. 基于此, 特别给出下述定义.

**定义 4** 如果函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 定义在集 $E \subset \mathbb{R}$ 且在点 $x_0 \in E$ 处可微, 那么, 直线 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 就叫做这个函数的图像在点 $x_0$ 处的**切线**.

图 6 解释了至此我们已经引入的与函数在一点处的可微性相关的所有基本概念: 自变量的增量和它相应的函数增量及微分的值; 在图上画出了函数的图像、图像在点 $P_0 = (x_0, f(x_0))$ 处的切线, 以及用以进行比较的任意的一条过 $P_0$ 和函数的图像上某点 $P \neq P_0$ 的直线 $PQ$ (通常叫做**割线**).

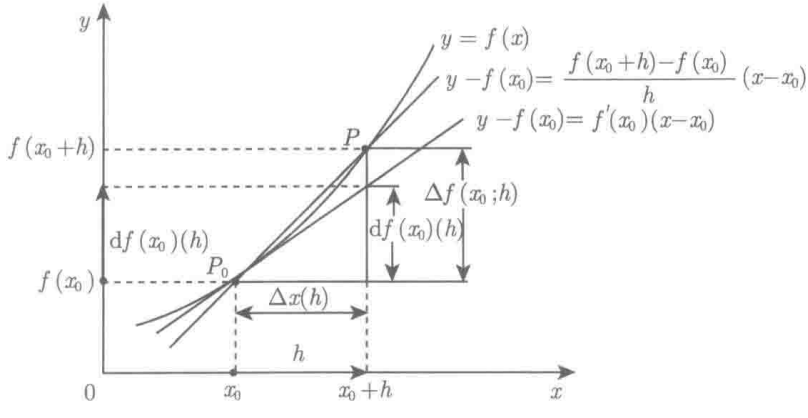


图 6

定义 4 的拓广如下.

**定义 5** 若映射 $f : E \to \mathbb{R}, g : E \to \mathbb{R}$ 在集 $E \subset \mathbb{R}$ 的极限点 $x_0 \in E$ 处连续且当 $x \to x_0, x \in E$ 时, $f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n)$, 则说 $f$ 和 $g$ 在点 $x_0$ 处 $n$ **阶相切** (或精确些说, **不低于** $n$ **阶相切**).

**注 1** (1) 可以把数 $h = x - x_0$, 即自变量的增量, 看做是一个从 $x_0$ 到 $x_0 + h$ 的位移的向量. 把这样的向量的全体记作 $T\mathbb{R}(x_0)$ 或者 $T\mathbb{R}_{x_0}$. 类似地, 用 $T\mathbb{R}(y_0)$ 或 $T\mathbb{R}_{y_0}$ 来表示从点 $y_0$ 沿 $y$ 轴的位移向量的全体. 那么, 从微分的定义看出, 由微

分 $h \mapsto f'(x_0)h = \mathrm{d}f(x_0)(h)$ 给出的映射

$$\mathrm{d}f(x_0) : T\mathbb{R}(x_0) \to T\mathbb{R}(f(x_0))$$

与可微函数的增量所给出的映射

$$h \mapsto f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0; h)$$

是相切的.

(2) 导数的物理意义是量 $f(x)$ 在时刻 $x_0$ 的变化速度; 导数的几何意义是函数 $y = f(x)$ 的图像在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的**切线的斜率**.

### 4.1.3　一些例子

**例 1**　证明:

(1) $\sin' x = \cos x$.

(2) $\cos' x = -\sin x$.

(3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$ $(0 < a \neq 1, x > 0)$, 特别地, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

(4) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

(5) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$.

**证**　(1) 使用关于乘积的极限的定理、函数 $\cos x$ 的连续性、当 $t \to 0$ 时的等价关系 $\sin t \sim t$ 以及关于复合函数的极限的定理, 得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\dfrac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = \cos x.\end{aligned}$$

(2) 类似地,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{h}{2}\cdot\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{h}\\ &= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = -\sin x.\end{aligned}$$

(3) 由于

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

所以

$$(\log_a x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$$

(4) 事实上, 当 $|h|<|x|$ 时,

$$\frac{1}{h}\big(\ln|x+h|-\ln|x|\big)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

故

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}.$$

(5) 事实上, 当 $|h|<x$ 时,

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}},$$

故

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

□

**例 2** (1) 若 $f(t)=r\cos\omega t$, 则 $f'(t)=-r\omega\sin\omega t$.

(2) 若 $f(x)=r\sin\omega t$, 则 $f'(t)=r\omega\cos\omega t$.

**证** (1) 根据定义,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{r\cos\omega(t+h)-r\cos\omega t}{h}&=r\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\omega\frac{h}{2}\right)\sin\omega\left(t+\frac{h}{2}\right)}{h}\\&=-r\lim_{h\to 0}\sin\omega\left(t+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\omega\frac{h}{2}\right)}{\left(\omega\frac{h}{2}\right)}\cdot\omega\\&=-r\omega\sin\omega t.\end{aligned}$$

(2) 类似于 (1) 之证明. □

**例 3** *质点的瞬时速度和瞬时加速度.* 设质点在平面上运动, 并且, 在固定的坐标系中它的运动规律是用时间的可微函数

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

来描述的. 亦即用向量 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$ 来描述. 点在时刻 $t$ 的速度向量

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t)),$$

其中 $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ 是函数 $x(t)$, $y(t)$ 关于时间 $t$ 的导数. 加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ 是向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 的变化速度, 因此

$$\boldsymbol{a}(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=(\ddot{x}(t),\ddot{y}(t)),$$

其中 $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ 是函数 $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ 关于 $t$ 的导数, 也叫函数 $x(t)$, $y(t)$ 的第二阶导数.

特别地, 我们来考察点沿着半径为 $r$ 的圆周的匀速运动. 设 $\omega$ 是点的角速度, 即点在单位时间内移过的圆周角的值. 在笛卡儿坐标系中 (根据函数 $\cos x$, $\sin x$ 的定义), 这个运动表示成

$$\boldsymbol{r}(t)=(r\cos(\omega t+\alpha),r\sin(\omega t+\alpha)),$$

而若 $\boldsymbol{r}(0)=(r,0)$ 则写成

$$\boldsymbol{r}(t)=(r\cos\omega t,r\sin\omega t).$$

为了简化记法, 不失一般性, 将认为 $\boldsymbol{r}(0)=(r,0)$. 根据例 2,

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=(-r\omega\sin\omega t,r\omega\cos\omega t).$$

不出所料, 从内积的计算

$$\langle\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{r}(t)\rangle=-r^2\omega\cos\omega t\sin\omega t+r^2\omega\cos\omega t\sin\omega t=0,$$

得知速度向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 与矢径 $\boldsymbol{r}(t)$ 正交且与圆周的切线同一指向.

其次对于加速度有

$$\boldsymbol{a}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=(-r\omega^2\cos\omega t,-r\omega^2\sin\omega t),$$

即 $\boldsymbol{a}(t)=-\omega^2\boldsymbol{r}(t)$, 因此, 加速度确实是指向中心的, 因为它与向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 反方向. 还有

$$|\boldsymbol{a}(t)|=\omega^2|\boldsymbol{r}(t)|=\omega^2 r=\frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{r}=\frac{v^2}{r},$$

其中 $v=|\boldsymbol{v}(t)|$.

从这个公式出发, 我们来计算, 例如, 地球的低卫星的速度值. 在这种情况下, $r$ 等于地球的半径, 即 $r\approx 6400$ 千米, 而 $|\boldsymbol{a}(t)|=g$, 其中 $g\approx 10$米/秒$^2$ 是地球表面自由落体的加速度. 于是 $v^2=|\boldsymbol{a}(t)|r\approx 10$米/秒$^2\times 64\times 10^5$米$=64\times 10^6$(米/秒)$^2$. 从而 $v\approx 8\times 10^3$米/秒.

**例 4** (抛物镜的光学性质) 考察 (图 7) 抛物线 $y=\dfrac{1}{2p}x^2(p>0)$, 并作它在点 $(x_0,y_0)=\left(x_0,\dfrac{1}{2p}x_0^2\right)$ 处的切线.

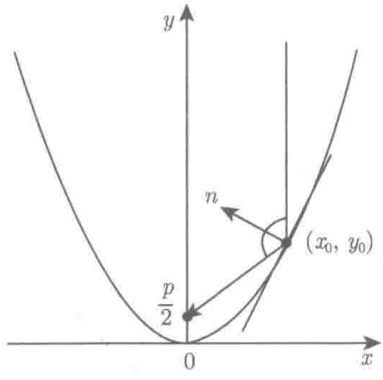


图 7

由于 $f(x)=\dfrac{1}{2p}x^2$, 所以

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{2p}x^2-\dfrac{1}{2p}x_0^2}{x-x_0}=\frac{1}{2p}\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=\frac{1}{p}x_0,$$

其切线的方程是

$$y-\frac{1}{2p}x_0^2=\frac{1}{p}x_0(x-x_0),$$

或

$$\frac{1}{p}x_0(x-x_0)-(y-y_0)=0,\quad \text{其中 } y_0=\frac{1}{2p}x_0^2. \tag{4.1.11}$$

由此方程见到, 向量 $\boldsymbol{n}=\left(-\dfrac{1}{p}x_0,1\right)$ 与直线 (4.1.11) 正交. 我们来证明向量 $\boldsymbol{e}_y=(0,1)$ 和 $\boldsymbol{e}_f=\left(-x_0,\dfrac{p}{2}-y_0\right)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 成相等的夹角. 向量 $\boldsymbol{e}_y$ 是轴 $Oy$ 方向的单位向量, 而 $\boldsymbol{e}_f$ 是从切点 $(x_0,y_0)=\left(x_0,\dfrac{1}{2p}x_0^2\right)$ 指向抛物线的焦点 $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ 的向量. 于是

$$\cos\widehat{\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{n}}=\frac{\langle\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{e}_y||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{n}|},$$

$$\cos\widehat{\boldsymbol{e}_f\boldsymbol{n}}=\frac{\langle\boldsymbol{e}_f,\boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{e}_f||\boldsymbol{n}|}=\frac{\dfrac{1}{p}x_0^2+\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2p}x_0^2}{|\boldsymbol{n}|\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2p}x_0^2\right)^2}}=\frac{\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{2p}x_0^2}{|\boldsymbol{n}|\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{2p}x_0^2\right)^2}}=\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}.$$

这样就证明了, 安放在抛物镜的焦点 $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ 处的波源给出平行于镜轴 $Oy$ 的光束, 而镜子使平行于 $Oy$ 轴射来的光束会聚到焦点处 (图 7).

**例 5**　下例表明, 切线只不过是函数图像在切点的邻域中的最佳线性近似, 它全然不必像在圆周的情形时那样, 与函数图像只有唯一的公共点.

设函数 $f(x)$ 给定如下

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

这个函数的图像用粗线画在图 8 上.

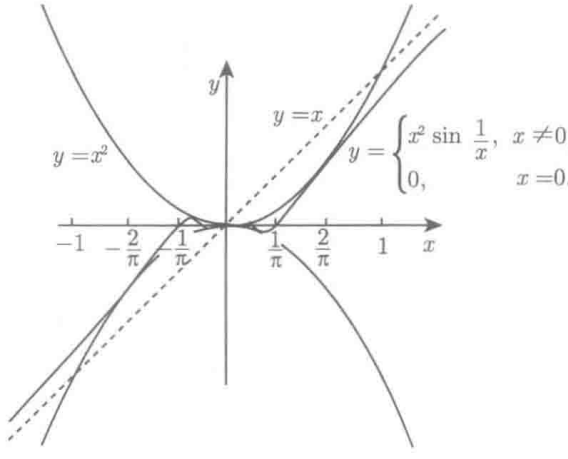


图 8

我们来求图像在点 $(0,0)$ 处的切线. 由于

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

所以, 切线的方程是 $y - 0 = 0(x - 0)$ 即 $y = 0$. 于是, 此例中, 切线与 $Ox$ 轴重合, 图像与切线在切点的任一邻域中都有无穷多个交点.

本段末我们指出可微与连续的关系.

**命题 2**　在一点处可微的函数必定在此点处连续, 反之则未必.

**证**　根据函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in E$ 点处可微的定义有

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,\ x \in E.$$

由于这个等式的右边当 $x \to x_0,\ x \in E$ 时趋于零, 那么

$$\lim_{E \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

因此, $f$ 在 $x_0$ 处连续. 例 6 表明反过来并不总是对的, 换言之, 连续未必可微. □

**例 6** 设 $f(x)=|x|$. 那么, 在点 $x_0=0$ 处, $f$ 是连续的, 但

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1,$$

因此, 在这点处, 函数没有导数, 也就是说它在这点处不可微.

## 练　习

1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $m\in\mathbb{N}$. 试问:

(1) $m$ 等于何值时, $f$ 在 $x=0$ 连续.

(2) $m$ 等于何值时, $f$ 在 $x=0$ 可导.

2. 设函数 $f$ 在点 $x_0$ 存在左右导数 (指 (4.1.2) 的左、右极限存在), 试证: $f$ 在点 $x_0$ 连续.

3. 设 $g(0)=g'(0)=0$,

$$f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

4. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的最大零点为 $x_0$. 证明: $f'(x_0)\geqslant 0$.

5. 证明:

(1) 椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

在点 $(x_0,y_0)$ 处的切线方程是

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

(2) 由置于半轴为 $a>b>0$ 的椭圆的两焦点 $F_1=(-\sqrt{a^2-b^2},0)$, $F_2=(\sqrt{a^2-b^2},0)$ 之一处的光源发出的光线被椭圆镜会聚在另一焦点处.

6. 处处不可导的连续周期函数例子, 置

$$\Psi_0(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

并以周期 1 延拓这个函数到全数轴. 延拓后的周期函数用 $\varphi_0$ 表示. 还设

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{4^n}\varphi_0(4^n x).$$

函数 $\varphi_n$ 周期为 $4^{-n}$, 且除了点 $x=\dfrac{k}{2^{n+1}}(k\in\mathbb{Z})$ 以外处处有导数, 导数等于 1 或 $-1$. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x).$$

证明: 函数 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且连续, 但处处没有导数 (这个例子属于现代著名的荷兰数学家范德瓦尔登. 没有导数的连续函数的最初的例子是由波尔察诺 (1830 年) 和魏尔斯特拉斯 (1860 年) 构造的).

## 4.2　微分的基本法则

### 4.2.1　微分法和算术运算

**定理 1**　若函数 $f:E\to\mathbb{R}$, $g:E\to\mathbb{R}$ 都在点 $x\in E$ 处可微, 则

(1) 它们的和在 $x$ 处可微, 且

$$(f+g)'(x)=(f'+g')(x).$$

(2) 它们的积在 $x$ 处可微, 且

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

(3) 若 $g(x)\neq 0$, 它们的比在 $x$ 处可微, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**证**　我们用可微函数的定义和在 2.2.7 小节建立的符号 $o(\cdot)$ 的性质来进行证明.

(1)
$$\begin{aligned}&(f+g)(x+h)-(f+g)(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))\\&=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))\\&=(f'(x)h+o(h))+(g'(x)h+o(h))\\&=(f'+g')(x)h+o(h).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)=(f(x+h)g(x+h))-(f(x)g(x))\\&=(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))\\&=(f'(x)h+o(h))(g(x)+g'(x)h+o(h))+f(x)(g'(x)h+o(h))\\&=f'(x)g(x)h+f(x)g'(x)h+o(h)\end{aligned}$$

$$= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h + o(h).$$

(3) 由于在点 $x \in E$ 处可微的函数在该点连续, 所以, 注意到 $g(x) \neq 0$, 根据连续函数的性质, 即可断言, 对于足够小的 $h$ 值, 同样有 $g(x+h) \neq 0$. 在下面的演算中, 假定 $h$ 是足够小的:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x+h)}(f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h))$$

$$= \left(\frac{1}{g^2(x)} + o(1)\right)[(f(x) + f'(x)h + o(h))g(x) - f(x)(g(x) + g'(x)h + o(h))]$$

$$= \left(\frac{1}{g^2(x)} + o(1)\right)[(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))h + o(h)]$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}h + o(h).$$

我们用到了: 由函数 $g$ 在点 $x$ 的连续性以及 $g(x) \neq 0$ 得出的

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} = \frac{1}{g^2(x)},$$

即

$$\frac{1}{g(x)g(x+h)} = \frac{1}{g^2(x)} + o(1),$$

这里, 当 $h \to 0$, $x + h \in E$ 时, $o(1)$ 是无穷小量. □

**推论 1**

(1) 可微函数的线性组合的导数等于这些函数的导数的线性组合.

(2) 若函数 $f_1, \cdots, f_n$ 皆在点 $x$ 处可微, 则

$$\begin{aligned}(f_1 \cdots f_n)'(x) =& f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\\ &+ f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + \cdots\\ &+ f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x).\end{aligned}$$

(3) 从导数和微分的相互关系推出, 定理 1 也可写成微分形式. 即

(i) $\mathrm{d}(f+g)(x) = \mathrm{d}f(x) + \mathrm{d}g(x)$.

(ii) $\mathrm{d}(f \cdot g)(x) = g(x)\mathrm{d}f(x) + f(x)\mathrm{d}g(x)$.

(iii) $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\mathrm{d}f(x) - f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}$, 若 $g(x) \neq 0$.

**证**　证 (1) 因为常值函数显然是可微的, 且它的导数处处等于零, 所以只要在定理 1 的结论 (2) 中认为 $f \equiv \text{const} = c$ 就有 $(cg)'(x) = cg'(x)$. 再用定理 1 的结论 (1), 可得 $(c_1 f + c_2 g)'(x) = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$. 据此, 用归纳法便可证得

$$(c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n)'(x) = c_1 f_1'(x) + \cdots + c_n f_n'(x).$$

证 (2) 对于 $n = 1$ 结论是显然的. 若命题对于某 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 则根据定理 1 的结论 (2), 它对于 $(n+1) \in \mathbb{N}$ 也成立. 根据归纳法原理, 断定所述公式对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都成立.

证 (3) 我们仅验证 (1)(其余类似). 从导数和微分的相互关系推得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f+g)(x)(h) &= (f+g)'(x)h = (f'+g')(x)h \\ &= (f'(x)+g'(x))h = f'(x)h + g'(x)h \\ &= \mathrm{d}f(x)(h) + \mathrm{d}g(x)(h) = (\mathrm{d}f(x) + \mathrm{d}g(x))(h), \end{aligned}$$

从而验证了 $\mathrm{d}(f+g)(x)$ 和 $\mathrm{d}f(x) + \mathrm{d}g(x)$ 是一样的. □

**例 1**　*速度定义的不变性*. 现在我们来验证 4.1.3 小节中定义的质点的瞬时速度向量不依赖于笛卡儿坐标系的选择. 甚至对于任意一个仿射坐标系也能证实这一点.

设 $(x^1, x^2)$ 和 $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ 是平面的同一个点在两个不同坐标系中的坐标, 这两个坐标系彼此之间的关系是

$$\begin{cases} \tilde{x}^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + b^1, \\ \tilde{x}^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + b^2. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

因为任一向量 (在仿射空间中) 都由一对点决定, 而向量的坐标是它的终点和起点的坐标之差, 所以, 同一个向量在这两个坐标系中的坐标应以关系式

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = a_1^1 v^1 + a_2^1 v^2, \\ \tilde{v}^2 = a_1^2 v^1 + a_2^2 v^2 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

相联系.

如果点的运动规律在一个坐标系 (4.2.1) 中由函数 $(x^1(t), x^2(t))$ 给出, 那么, 在另一个系中就由前面的关系式 (4.2.1) 相联系的函数 $(\tilde{x}^1(t), \tilde{x}^2(t))$ 来确定.

将关系式 (4.2.1) 关于时间 $t$ 求微分, 按微分法则求出

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}^1 = a_1^1 \dot{x}^1 + a_2^1 \dot{x}^2, \\ \dot{\tilde{x}}^2 = a_1^2 \dot{x}^1 + a_2^2 \dot{x}^2. \end{cases}$$

这样一来, 速度向量在第一个系中的坐标 $(v^1, v^2) = (\dot{x}^1, \dot{x}^2)$ 和它在第二个系中的坐标原来是以关系式 (4.2.2) 相联系的, 这就告诉我们, 我们遇到的是同一个向量的两种不同的写法.

**例 2** 设 $f(x) = \tan x$. 则在 $\cos x \neq 0$ 处, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 事实上, 从定理 1 的结论 (3) 得到, 当 $\cos x \neq 0$ 时, 有

$$\tan' x = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**例 3** 类似地可验证: 当 $\sin x \neq 0$ 时, 即在函数 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 的定义域中,

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**例 4** 若 $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ 是多项式, 则 $P'(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1}$. 事实上, 由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$, 根据推论 1 的结论 (2), $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$, 从而由推论 1 的结论 (1) 推出结论.

### 4.2.2 反函数的微分法

**定理 2** (反函数的导数) 设函数 $y = f(x) : X \to Y$ 和 $x = f^{-1}(y) : Y \to X$ 互为反函数, 且分别在点 $x_0 \in X$ 和 $f(x_0) = y_0 \in Y$ 处连续. 如果函数 $f$ 在点 $x_0$ 处可微且 $f'(x_0) \neq 0$, 那么, 函数 $f^{-1}$ 在点 $y_0$ 也可微且

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}.$$

**证** 因为函数 $f : X \to Y$ 和 $f^{-1} : Y \to X$ 互为反函数, 所以, 当 $x \neq x_0, y = f(x)$ 时, $f(x) - f(x_0)$ 和 $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$ 都不为零. 从 $f$ 在点 $x_0$ 的连续性和 $f^{-1}$ 在点 $y_0$ 的连续性还可以断定, 当 $x \to x_0, x \in X$ 时, 有 $y = f(x) \to y_0, y = f(x) \in Y$, 并且, 若 $x \neq x_0$, 则 $y = f(x) \neq y_0$. 现在使用关于复合函数的极限的定理和极限的算术性质, 求出

$$\lim_{Y \ni y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{X \ni x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \lim_{X \ni x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

这就证明, 在点 $y_0$ 处, 函数 $f^{-1} : Y \to X$ 有导数, 且 $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$. □

**注 1**　条件 $f'(x_0)\neq 0$ 显然等价于: 由微分

$$\mathrm{d}f(x_0):T\mathbb{R}(x_0)\to T\mathbb{R}(y_0)$$

实现的映射 $h\mapsto f'(x_0)h$ 具有由公式 $\tau\mapsto (f'(x_0))^{-1}\tau$ 确定的逆映射

$$[\mathrm{d}f(x_0)]^{-1}:T\mathbb{R}(y_0)\to T\mathbb{R}(x_0).$$

因此, 使用微分的术语, 定理 2 的叙述中的第二句话可写成下面的形式.

*如果函数 $f$ 在点 $x_0$ 处可微且在这点处它的微分 $\mathrm{d}f(x_0):T\mathbb{R}(x_0)\to T\mathbb{R}(y_0)$ 可逆, 那么 $f$ 的反函数 $f^{-1}$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 处存在微分且此微分就是映射 $\mathrm{d}f(x_0):T\mathbb{R}(x_0)\to T\mathbb{R}(y_0)$ 的逆映射*

$$\mathrm{d}f^{-1}(y_0)=[\mathrm{d}f(x_0)]^{-1}:T\mathbb{R}(y_0)\to T\mathbb{R}(x_0).$$

**例 5**　证明: $(a^x)'=a^x\ln a$ $(0<a\neq 1)$ (特别 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$).

事实上, 由于 $y=a^x$, $x\in\mathbb{R}$ 为对数函数 $x=\log_a y$, $y\in(0,\infty)$ 的反函数, 故由定理 2 得

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{y}{\log_a \mathrm{e}}=a^x\ln a.$$

**例 6**　证明: 当 $|y|<1$ 时, $\arcsin' y=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

事实上, 函数 $\sin:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ 和 $\arcsin:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$ 互为反函数且连续. 如果 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\sin' x=\cos x\neq 0$, 且对于值 $y=\sin x$ 有 $|y|<1$. 于是按定理 2

$$\arcsin' y=\frac{1}{\sin' x}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

根式前面的符号是根据当 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\cos x>0$ 来选取的.

**例 7**　像例 6 中那样进行讨论可以证明, 当 $|y|<1$ 时,

$$\arccos' y=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

实际上,

$$\arccos' y=\frac{1}{\cos' x}=-\frac{1}{\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

根式前面的符号是根据当 $0<x<\pi$ 时, $\sin x>0$ 来选取的.

**例 8** $\arctan' y = \dfrac{1}{1+y^2},\ y \in \mathbb{R}.$

实际上,

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

**例 9** $\operatorname{arccot}' y = -\dfrac{1}{1+y^2},\ y \in \mathbb{R}.$

实际上,

$$\operatorname{arccot}' y = \frac{1}{\cot' x} = \frac{1}{\dfrac{1}{-\sin^2 x}} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1+\cot^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

**例 10** 双曲、反双曲函数以及它们的导数.

**定义 1** 如圆函数 $\sin x$, $\cos x$ 那样, 下述函数自然地出现在许多问题中 (图 9):

双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ (奇函数),

双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ (偶函数),

双曲正切 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$,

双曲余切 $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$.

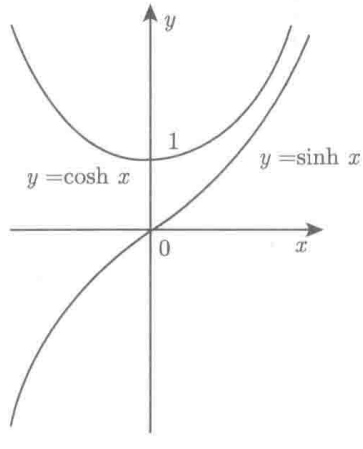


图 9

**命题 1** 关于上述函数有以下结论 (直接从定义可见).

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(2) $y=\sinh x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续的严格增的双方单值函数.

(3) $y=\cosh x$ 在区间 $\mathbb{R}_-(\mathbb{R}_+)$ 上严格减 (增).

(4) $\sinh' x=\cosh x,\quad \cosh' x=\sinh x.$

(5) $\tanh' x=\dfrac{1}{\cosh^2 x},\quad \coth' x=-\dfrac{1}{\sinh^2 x}.$

**命题 2**　由单调性知上述函数在相应定义域上具有反函数.

(1) 双曲正弦的反函数

$$\operatorname{arsinh} y=\ln(y+\sqrt{1+y^2}):\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

称作*面积正弦*[①]; 双曲余弦的反函数

$$\operatorname{arcosh}_{\pm} y=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right):(1,\infty)\to\mathbb{R},$$

分别是函数 $\cosh x$ 在 $\mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{R}_-$ 上的限制的反函数, 统称为*面积余弦*; 双曲正切的反函数

$$\operatorname{artanh} y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\quad |y|<1$$

称为*面积正切*; 双曲余切的反函数

$$\operatorname{arcoth} y=\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1},\quad |y|>1$$

称为*面积余切*.

(2) 这些反函数在相应的定义域内具有导数 (根据反函数的求导定理):

$$\operatorname{arsinh}' y=\frac{1}{\sinh' x}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\operatorname{arcosh}'_- y=\frac{1}{\cosh' x}=\frac{1}{\sinh x}=-\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x-1}}=-\frac{1}{\sqrt{y^2-1}},\quad y>1,$$

$$\operatorname{arcosh}'_+ y=\frac{1}{\cosh' x}=\frac{1}{\sinh x}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}},\quad y>1,$$

$$\operatorname{artanh}' y=\frac{1}{\tanh' x}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cosh^2 x}}=\frac{1}{1-\tanh^2 x}=\frac{1}{1-y^2},\quad |y|<1,$$

$$\operatorname{arcoth}' y=\frac{1}{\coth' x}=\frac{1}{-\dfrac{1}{\sinh^2 x}}=-\frac{1}{\coth^2 x-1}=-\frac{1}{y^2-1},\quad |y|>1.$$

①全称是 area sinus hyperbolici; 此处为什么用面积 (area) 而不像在圆函数时那样用弧 (arcus), 以后再作解释.

### 4.2.3 复合函数的微分法

为证复合函数的求导公式, 先给出下述引理.

**引理 1** 函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0$ 可导 $\Longleftrightarrow$ 在某 $U_X(x_0)$ 内, 存在一个在 $x_0$ 连续的函数 $H$, 使得

$$f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0), \quad \forall x \in U_X(x_0),$$

从而 $f'(x_0) = H(x_0)$.

**证** "⇒": 设 $f$ 在点 $x_0$ 可导, 则有

$$f'(x_0) = \lim_{X \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

令

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \in \mathring{U}_X(x_0), \\ f'(x_0), & x = x_0, \end{cases}$$

易见 $H$ 在点 $x_0$ 连续, 且 $f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$.

"⇐": 若 $f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0), \forall x \in U_X(x_0), H$ 在 $x_0$ 连续, 则有

$$\lim_{X \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{X \ni x \to x_0} H(x) = H(x_0),$$

可见 $f$ 在点 $x_0$ 可导, 且 $f'(x_0) = H(x_0)$. □

**定理 3** (复合函数的导数) 如果函数 $f: X \to Y \subset \mathbb{R}$ 在点 $x_0 \in X$ 处可导, 而函数 $g: Y \to \mathbb{R}$ 在点 $y_0 = f(x_0) \in Y$ 处可导, 那么这两个函数的复合 $(g \circ f): X \to \mathbb{R}$ 在点 $x_0$ 处可导, 并且

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0),$$

或表示成

$$\left.\frac{\mathrm{d}(g \circ f)(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=f(x_0)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

**证** 据假设, $g$ 在 $y_0$ 可导, $f$ 在 $x_0$ 可导, 由引理 1 知, 存在在 $y_0$ 连续的函数 $G(y)$ 与在 $x_0$ 连续的函数 $F(x)$, 使得

$$g(y) - g(y_0) = G(y)(y - y_0), \quad y \in U_Y(y_0), \quad g'(y_0) = G(y_0);$$

$$f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0), \quad x \in U_X(x_0), \quad f'(x_0) = F(x_0).$$

于是

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = G(f(x))(f(x) - f(x_0)) = G(f(x))F(x)(x - x_0).$$

因 $f, F$ 在点 $x_0$ 连续，$G$ 在点 $y_0 = f(x_0)$ 连续，故 $H(x) = G(f(x))F(x)$ 在点 $x_0$ 连续，进而由引理 1 知，$g \circ f$ 在点 $x_0$ 可导且

$$(g \circ f)'(x_0) = H(x_0) = G(f(x_0))F(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \qquad \square$$

**注 2**　(1) 定理 3 的微分形式表述为：*如果 $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ 在点 $x \in X$ 处可微，$g : Y \to \mathbb{R}$ 在点 $y = f(x) \in Y$ 处可微，那么这两个函数的复合 $(g \circ f) : X \to \mathbb{R}$ 在点 $x$ 处可微，并且复合函数的微分*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) : T\mathbb{R}(x) \to T\mathbb{R}(g(f(x)))$$

*等于两个微分*

$$\mathrm{d}f(x) : T\mathbb{R}(x) \to T\mathbb{R}(y = f(x)), \quad \mathrm{d}g(y)(y = f(x)) : T\mathbb{R}(y) \to T\mathbb{R}(g(y))$$

*的复合* $\mathrm{d}g(y) \circ \mathrm{d}f(x)$.

(2) 用归纳法易证：若有可微函数 $y_1 = f_1(x), \cdots, y_n = f_n(y_{n-1})$ 的复合 $(f_n \circ \cdots \circ f_1)(x)$，则

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)'(x) = f_n'(y_{n-1})f_{n-1}'(y_{n-2}) \cdots f_1'(x).$$

(3) 按莱布尼茨的记法，若 $z = z(y), y = y(x)$，就有所谓*链式法则*

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

如果不把记号 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看作是一个整体，而分别把它们看作是 $\mathrm{d}z$ 与 $\mathrm{d}y$ 的比，或 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的比，那么这个等式就是十分自然的了.

(4) 如果我们预先知道 $f^{-1}$ 在点 $y_0$ 处可微的话，那么从恒等式 $(f^{-1} \circ f)(x) \equiv x$，根据关于复合函数的微分法的定理就可立即求出 (定理 2 的结论) $(f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$.

**例 11**　当 $\alpha \in \mathbb{R}$ 时，在 $x > 0$ 的区域内有 $\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}$，即 $\mathrm{d}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$，且当 $h \to 0$ 时，有

$$(x+h)^\alpha - x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}h + o(h).$$

事实上，对 $x^\alpha = \mathrm{e}^{\ln x^\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$，使用刚证的定理 3. 令 $g(y) = \mathrm{e}^y$ 及 $y = f(x) = \alpha \ln x$，则 $x^\alpha = (g \circ f)(x)$ 且

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = \mathrm{e}^y \frac{\alpha}{x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**例 12**　可微函数模的对数的导数常常叫做*对数导数*.

由于 $F(x) = \ln|f(x)| = (\ln \circ |\ | \circ f)(x)$，则根据 4.1 节中例 1 的结果，$F'(x) = (\ln|f|)'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. 于是

$$\mathrm{d}(\ln|f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}.$$

**例 13** 由自变量的取值误差引起的可微函数的值的绝对误差和相对误差.

若函数 $f$ 在点 $x$ 处可微, 则

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\alpha(x;h),$$

其中, 当 $h\to 0$ 时, $\alpha(x;h)=o(h)$.

于是, 如果在计算函数值 $f(x)$ 时, 自变量 $x$ 确定具有足够误差 $h$, 那么, 当 $h$ 足够小时, 由这个误差引起的函数值的绝对误差 $|f(x+h)-f(x)|$, 可以用在平移 $h$ 上的微分的值的模 $|\mathrm{d}f(x)(h)|=|f'(x)h|$ 来代替. 此时, 可把比值

$$\frac{|f'(x)h|}{|f(x)|}=\frac{|\mathrm{d}f(x)(h)|}{|f(x)|},$$

或函数的对数导数与自变量的绝对误差的值的乘积的模 $\dfrac{|f'(x)|}{|f(x)|}|h|$ 算作相对误差.

**例 14** 我们来求函数 $u(x)^{v(x)}$ 的微分, 其中 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是可微函数, 并且 $u(x)>0$. 记 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$, 那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}}{\mathrm{d}x}&=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\\&=u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x).\end{aligned}$$

### 4.2.4 基本初等函数的导数表

现在我们列出在 4.1 节和 4.2 节中算出的基本初等函数的导数.

(1) $(C)'=0$ ($C$ 为常数).

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (当 $\alpha\in\mathbb{R}$ 时 $x>0$; 当 $\alpha\in\mathbb{N}$ 时 $x\in\mathbb{R}$).

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0,a\neq 1)$.

(4) $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 其中 $a>0,a\neq 1)$.

(5) $(\sin x)'=\cos x$.

(6) $(\cos x)'=-\sin x$.

(7) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right)$.

(8) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$.

(9) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

(10) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

(11) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(12) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

(13) $(\sinh x)' = \cosh x$.

(14) $(\cosh x)' = \sinh x$.

(15) $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

(16) $(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$ $(x \neq 0)$.

(17) $(\operatorname{arsinh} x)' = (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(18) $(\operatorname{arcosh} x)' = (\ln(x \pm \sqrt{x^2-1}))' = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$.

(19) $(\operatorname{artanh} x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$.

(20) $(\operatorname{arcoth} x)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| > 1)$.

### 4.2.5　高阶导数

如果函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在任何一点 $x \in E$ 都可微, 那么, 在集 $E$ 上就产生了一个新的函数 $f' : E \to \mathbb{R}$, 它在点 $x \in E$ 处的值等于函数 $f$ 在这点处的导数 $f'(x)$. 函数 $f'$ 本身可以在 $E$ 上有导数 $(f')' : E \to \mathbb{R}$, 这个导数叫做 $f$ 的二阶导数, 并以符号

$$f''(x), \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

之一表示, 而若想明确标出微分的变元, 则在第一种情况下还写作 $f''_{xx}(x)$.

**定义 2**　按照归纳法, 如果 $f$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}$ 已定义, 则其 $n$阶导数定义为

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

记为

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

约定 $f^{(0)}(x) := f(x)$.

一切在 $E$ 上具有 $n$ 阶连续导数的函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 的集合记为 $C^{(n)}(E)$ , 或 $C^n(E, \mathbb{R})$, 或 $C^n(E)$. 特别地, 根据约定, 记 $C^{(0)}(E) = C(E)$.

作为例子, 先来算几个函数的高阶导数.

**例 15**　$f(x)$ / $f'(x)$ / $f''(x)$ / $\cdots$ / $f^{(n)}(x)$.

**例 16**　$a^x$ / $a^x \ln a$ / $a^x \ln^2 a$ / $\cdots$ / $a^x \ln^n a$.

**例 17**　$\mathrm{e}^x$ / $\mathrm{e}^x$ / $\mathrm{e}^x$ / $\cdots$ / $\mathrm{e}^x$.

**例 18** $\sin x \ / \ \cos x \ / \ -\sin x \ / \ \cdots \ / \ \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $\left(\text{注 } \sin^{(n)} x = \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$.

**例 19** $\cos x \ / \ -\sin x \ / \ -\cos x \ / \ \cdots \ / \ \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $\left(\text{注 } \cos^{(n)} x = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$.

**例 20** $(1+x)^\alpha \ / \ \alpha(1+x)^{\alpha-1} \ / \ \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \ / \cdots / \ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

**例 21** $x^\alpha \ / \ \alpha x^{\alpha-1} \ / \ \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \ / \ \cdots \ / \ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

**例 22** $\log_a |x| \ / \ \dfrac{1}{\ln a}x^{-1} \ / \ \dfrac{-1}{\ln a}x^{-2} \ / \ \cdots \ / \ \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\ln a}x^{-n}$.

**例 23** $\ln|x| \ / \ x^{-1} \ / \ -x^{-2} \ / \ \cdots \ / \ (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

**例 24** **莱布尼茨公式**. 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 同在集 $E$ 上有直到 $n$ 阶导数, 则有下述莱布尼茨公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}. \tag{4.2.3}$$

莱布尼茨公式很像牛顿二项式公式而且真的和它有直接的联系.

**证** 当 $n=1$ 时, 公式 (4.2.3) 与已建立的乘积的微分法则一样.

如果函数有直到 $n+1$ 阶导数, 那么在假设公式 (4.2.3) 对于阶数 $n$ 成立条件下, 对 (4.2.3) 的左边和右边求微分之后得到

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_n^m u^{(n-m)} v^{(m+1)} \\ &= u^{(n+1)}v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}.\end{aligned}$$

其中合并了函数的导数的乘积的同类项, 并且使用了公式 $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \mathrm{C}_{n+1}^k$.

这样一来, 依归纳法得到了莱布尼茨公式. □

**例 25**　若 $P_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$, 则

$$\begin{aligned}
&P_n(0)=c_0,\\
&P_n'(x)=c_1+2c_2x+\cdots+nc_nx^{n-1},\quad \text{且}P_n'(0)=c_1,\\
&P_n''(x)=2c_2+3\times 2c_3x+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2},\quad \text{且}P_n''(0)=2!c_2,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 2c_n,\quad \text{且}P_n^{(n)}(0)=n!c_n,\\
&P_n^{(k)}(x)\equiv 0,\quad k>n.
\end{aligned}$$

于是多项式可以写成这样

$$P_n(x)=P_n^{(0)}(0)+\frac{1}{1!}P_n^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}P_n^{(2)}(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)x^n.$$

**例 26**　利用莱布尼茨公式以及多项式的导数, 当求导的阶数高于多项式的阶数时恒等于零这一事实, 可以求出例如函数 $f(x)=x^2\sin x$ 的 $n$ 阶导数:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)=&\sin^{(n)}x\cdot x^2+\mathrm{C}_n^1\sin^{(n-1)}x\cdot 2x+\mathrm{C}_n^2\sin^{(n-2)}x\cdot 2\\
=&x^2\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\\
&+\left[-n(n-1)\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
=&(x^2-n(n-1))\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)-2nx\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

**例 27**　设 $f(x)=\arctan x$. 求 $f^{(n)}(0)(n=0,1,2,\cdots)$ 的值.

由于 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 所以 $(1+x^2)f'(x)=1$.

对后一等式应用莱布尼茨公式, 就得递推公式

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0,$$

由此即可逐次求出函数的一切导数.

置 $x=0$, 得到

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0).$$

当 $n=1$ 时, 有 $f^{(2)}(0)=0$, 因此, 总有 $f^{(2m)}(0)=0$. 对于任意的奇阶数 (取 $n=2m$), 有

$$f^{(2m+1)}(0)=-2m(2m-1)f^{(2m-1)}(0).$$

又由于 $f'(0)=1$, 得到

$$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!.$$

**例 28** (加速度) 如果 $x = x(t)$是沿数轴运动的质点的坐标对时间的依赖关系, 那么, $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$ 是点的速度, 而 $\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}(t)$ 是点在时刻 $t$ 的加速度.

如果 $x(t) = \alpha t + \beta$, 那么 $\dot{x}(t) = \alpha$ 而 $\ddot{x}(t) = 0$, 也就是说在匀速直线运动中加速度等于零. 很快我们就会验证, 若函数的二阶导数等于零, 则函数本身有 $\alpha t + \beta$ 的形式. 这样一来, 在匀速直线运动中并且仅在匀速直线运动中加速度等于零.

但当我们从两个坐标系中来观察在真空中依惯性运动的物体时, 如果我们希望在每个坐标系中物体都做匀速直线运动, 那就必须使得从一个惯性系到另一个系的变换公式是线性的.

### 4.2.6 最简单的隐函数的微分法

设 $y = y(t)$ 和 $x = x(t)$ 是定义在点 $t_0 \in \mathbb{R}$ 的邻域 $U(t_0)$ 中的可微函数. 假定函数 $x = x(t)$ 有反函数 $t = t(x)$, 定义在点 $x_0 = x(t_0)$ 的邻域 $V(x_0)$ 中. 那么依赖于 $t$ 的量 $y = y(t)$ 也可以看作是以隐蔽形式依赖于 $x$ 的函数: $y = y(t(x))$, 称它为隐函数. 假定 $x'(t_0) \neq 0$, 我们来求这个函数关于 $x$ 在点 $x_0$ 处的导数. 使用关于复合函数的微分的定理和关于反函数的微分的定理, 得到

$$y'_x|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}y(t(x))}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0} \cdot \frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}}{\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

(此处, 使用了通用的记号 $f(x)|_{x=x_0} := f(x_0)$).

如果同一个量看作是不同的自变量的函数, 那么, 为了避免误解, 在求微分时就需明确标明是对哪个变量求微分.

下面, 在 $x'(t) \neq 0$ 的假定下求二阶导函数 $y''_{xx}$. 依照复合函数及反函数的微分法则, 有

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

我们注意到, 这里出现的每个函数, 包括 $y''_{xx}$ 在内, 它们的明显表达式都是依赖于 $t$ 的, 但是对于具体的点 $x$, 在把 $t$ 用对应于这个 $x$ 值的 $t = t(x)$ 的值代换后, 就能求得 $y''_{xx}$ 在点 $x$ 的值.

例如, 若 $y=\mathrm{e}^t, x=\ln t$, 则

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\mathrm{e}^t}{\frac{1}{t}}=t\mathrm{e}^t,\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t}{\frac{1}{t}}=t(t+1)\mathrm{e}^t.$$

在这个例子中可以通过 $x$ 明显地表示出 $t, t=\mathrm{e}^x$, 且在 $y=\mathrm{e}^t$ 中带入 $t=\mathrm{e}^x$ 之后, 就可求得对 $x$ 的明显的依赖关系 $y=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$. 对最后这个函数求微分, 就可以检验上面所得结果的正确性.

显然, 依次应用公式

$$y^{(n)}_{x^n}=\frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}$$

就可以求出任意阶的导数.

**例 29**　*速度的加法定律*. 考虑两个坐标系 $D:(x,t)$ 和 $\tilde{D}:(\tilde{x},\tilde{t})$. 两者间有坐标变换

$$\begin{aligned}\tilde{x}=&\alpha x+\beta t,\\ \tilde{t}=&\gamma x+\delta t,\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

设矩阵 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ 可逆, 其逆为 $\begin{pmatrix}\tilde{\alpha} & \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta}\end{pmatrix}$.

设点 (同一个物体) 在 $D$ 的运动规律为 $x=x(t)$, 在 $\tilde{D}$ 为 $\tilde{x}=\tilde{x}(\tilde{t})$. 则有联系

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)=&\alpha x(t)+\beta t,\\ \tilde{t}(t)=&\gamma x(t)+\delta t,\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

根据变换 (4.2.4) 的可逆性, 若知道 $\tilde{x}=\tilde{x}(\tilde{t})$ 就可求得

$$\begin{aligned}x(\tilde{t})=&\tilde{\alpha}\tilde{x}(\tilde{t})+\tilde{\beta}\tilde{t},\\ t(\tilde{t})=&\tilde{\gamma}\tilde{x}(\tilde{t})+\tilde{\delta}\tilde{t}.\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

现在来考察给定的点分别在 $D$ 和 $\tilde{D}$ 中的速度

$$V(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{x}_t(t)\quad 和\quad \tilde{V}(t)=\frac{\mathrm{d}\tilde{x}(t)}{\mathrm{d}\tilde{t}}=\dot{\tilde{x}}_{\tilde{t}}(\tilde{t})$$

之间的联系. 使用隐函数的微分法则及公式 (4.2.5), 有

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\tilde{t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t}}=\frac{\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\beta}{\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\delta},$$

即

$$\tilde{V}(\tilde{t}) = \frac{\alpha V(t) + \beta}{\gamma V(t) + \delta}, \tag{4.2.7}$$

其中, $t$ 和 $\tilde{t}$ 是同一个时刻在坐标系 $(x,t)$ 和 $(\tilde{x},\tilde{t})$ 中的坐标. 这一点在使用公式 (4.2.7) 的简略写法

$$\tilde{V} = \frac{\alpha V + \beta}{\gamma V + \delta} \tag{4.2.8}$$

的情况永远都要注意.

在伽利略变换

$$\begin{aligned} \tilde{x} =& x + vt, \\ \tilde{t} =& t \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

情形下, 得到经典的速度加法定律

$$\tilde{V} = V + v. \tag{4.2.10}$$

由足够精确的试验确定了, 在真空中, 光总以确定的速度 $c$ 传播而与发光物体的运动情形无关 (这已经成为狭义相对论的一条公设). 如果在时刻 $t = \tilde{t} = 0$ 在点 $x = \tilde{x} = 0$ 处突然闪光, 那么, 经过时间 $t$ 在坐标系 $(x,t)$ 中光达到的点的坐标 $x^2 = (ct)^2$, 而在坐标系 $(\tilde{x},\tilde{t})$ 中这个事件将对应于时间 $\tilde{t}$ 以及这个点的坐标 $\tilde{x}$, 它满足 $\tilde{x}^2 = (c\tilde{t})^2$.

根据某些补充的物理的理由, 应该认为, 一般地, 如果 $(x,t)$ 和 $(\tilde{x},\tilde{t})$ 在以关系式 (4.2.4) 相联系的不同的坐标系中对应于同一个事件的话, 则

$$x^2 - c^2t^2 = \tilde{x}^2 - c^2\tilde{t}^2. \tag{4.2.11}$$

条件 (4.2.11) 给出了变换 (4.2.4) 的系数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 的以下关系式:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1, \\ &\alpha\beta - c^2\gamma\delta = 0, \\ &\beta^2 - c^2\delta^2 = -c^2. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

由此容易推出, (4.2.12) 的通解有如下的形式

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & c\sinh\varphi \\ \dfrac{1}{c}\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}.$$

从而变换 (4.2.4) 可具体写作

$$\begin{aligned} \tilde{x} =& \cosh\varphi\, x + c\sinh\varphi\, t, \\ \tilde{t} =& \frac{1}{c}\sinh\varphi\, x + \cosh\varphi\, t. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

这就是洛伦兹变换.

为了搞清楚怎样来确定自由参数 $\varphi$, 假设 $\tilde{D}$ 的数轴相对于 $D$ 的数轴以速度 $-v$ 匀速运动. 置 $\tilde{x}=0$ 就求出物体在系统 $(x,t)$ 中的运动规律:

$$x=-\coth\varphi\, t.$$

于是

$$\tanh\varphi=\frac{v}{c}. \tag{4.2.14}$$

把速度变换的一般规律 (4.2.8) 和洛伦兹变换 (4.2.13) 相比较, 得到

$$\tilde{V}=\frac{\cosh\varphi V+c\sinh\varphi}{\dfrac{1}{c}\sinh\varphi V+\cosh\varphi},$$

考虑到 (4.2.14), 得

$$\tilde{V}=\frac{V+v}{1+\dfrac{vV}{c^2}}. \tag{4.2.15}$$

公式 (4.2.15) 就是相对论的速度加法定律. 当 $|v|\ll c^2$, 即当 $c\to\infty$ 时, 它就转化为公式 (4.2.10) 表示出的经典的速度加法定律.

注意到关系式 (4.2.14), 洛伦兹变换本身可以写成下面更自然的形式:

$$\tilde{x}=\frac{x+vt}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}},\quad \tilde{t}=\frac{t+\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}. \tag{4.2.16}$$

由此可见, 当 $|vV|\ll c^2$, 即当 $c\to\infty$ 时, 它就变成经典的伽利略变换 (4.2.9).

## 练　　习

1. 求下列函数的导函数.

(1) $y=\ln(\ln x)$.

(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(3) $y=2^{\sin x}$.

(4) $y=x^{x^x}$.

2. 求下列由参量方程所确定的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases}x=\cos^4 t,\\ y=\sin^4 t,\end{cases}$　$t=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t}, \\ y = \dfrac{1-t}{1+t}, \end{cases} \quad t > 0.$

3. 设曲线方程 $x = 1 - t^2$, $y = t - t^2$, 求它在下列点处的切线方程与法线方程.

(1) $t = 1$.

(2) $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

上任一点的法线到原点距离等于 $a$.

5. 设 $f$ 为二阶可导函数, 求下列各函数的二阶导数.

(1) $y = f(\ln x)$.

(2) $y = f(x^5)$.

(3) $y = f(f(x))$.

6. 求下列各函数的 $n$ 阶导数.

(1) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

(2) $y = \dfrac{x^n}{1-x}$.

7. 求下列由参量方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t, \\ y = \mathrm{e}^t \sin t. \end{cases}$

8. 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x$ 三阶可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x = f^{-1}(y)$, 试用 $f'(x)$, $f''(x)$ 以及 $f'''(x)$ 表示 $(f^{-1})'''(y)$.

9. (1) 举出一个连续函数, 它仅在已知点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不可导.

(2) 举出一个函数, 它仅在点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可导.

10. 设 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是给定的实数. 求出在固定的点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 有导数

$$P_n^{(k)}(x_0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

的 $n$ 阶多项式 $P_n(x)$.

11. 计算 $f'(x)$, 如果

(1) $f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(3) 验证问题 (1) 中的函数在 $\mathbb{R}$ 上任意次可微, 且 $f^{(n)}(0)=0$.

(4) 验证问题 (2) 中的函数的导数在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 但不是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(5) 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1-x)^2}\right), & -1<x<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上任意次可微.

12. 设 $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. 证明: 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

13. 设 $f$ 是在 $\mathbb{R}$ 上可微的函数. 证明:

(1) 若 $f$ 是偶函数, 则 $f'$ 是奇函数.

(2) 若 $f$ 是奇函数, 则 $f'$ 是偶函数.

14. 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微当且仅当 $f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0)$, 其中 $\varphi(x)$ 是在 $x_0$ 连续的函数 (并且在这种情况下 $\varphi(x_0)=f'(x_0)$).

(2) 若 $f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0)$ 且 $\varphi\in C^{(n-1)}(U(x_0))$, 其中 $U(x_0)$ 是点 $x_0$ 的邻域, 则函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$.

15. 设 $f_{ij}(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为可导函数, 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

## 4.3　微分学的基本定理

### 4.3.1　费马引理和罗尔定理

**定义 1**　如果 $x_0\in E$ 有一个邻域 $U_E(x_0)$ 使得函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 在任一点

$x \in \mathring{U}_E(x_0)$ 处都满足:

(1) $f(x) \leqslant f(x_0)$(或者 $f(x) \geqslant f(x_0)$), 那么就称点 $x_0$ 为函数 $f$ 的**局部极大(或极小)值点**, 而称函数在这点处的值为它的**局部极大(或极小)值**.

(2) 严格不等式 $f(x) < f(x_0)(f(x) > f(x_0))$, 那么就称 $x_0$ 为函数 $f$ 的**严格局部极大 (小) 值点**, 而函数在这点处的值称为它的**严格局部极大 (小) 值**.

局部极大值点和局部极小值点都叫做**局部极值点**, 而函数在这种点处的值叫做**局部极值**.

**例 1** 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x < 2, \\ 4, & 2 \leqslant x. \end{cases}$$

(图 10) 对于这个函数, $x = -1$ 是严格局部极大值点; $x = 0$ 是严格局部极小值点; $x = 2$ 是局部极大值点; $x > 2$ 是极值点, 既是局部极大值点, 也是局部极小值点, 因在这里函数局部为常数.

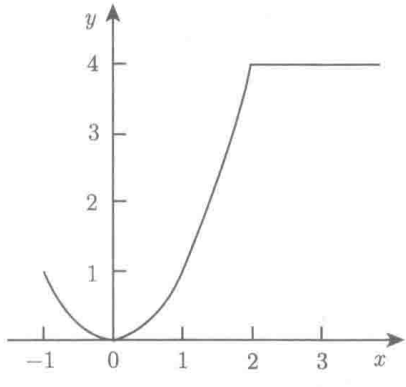


图 10

**例 2** 设 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 在集合 $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上. 点 $x = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}, k \in \mathbb{Z}$ 是 $f(x)$ 的严格局部极大值点, 而点 $x = \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}, k \in \mathbb{Z}$ 是 $f(x)$ 的严格局部极小值点 (图 5).

**定义 2** 函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 的极值点 $x_0 \in E$ 叫做**内极值点**, 如果 $x_0$ 既是集 $E_- = \{x \in E | x < x_0\}$ 的极限点也是集 $E_+ = \{x \in E | x > x_0\}$ 的极限点.

在例 2 中所有的极值点都是内极值点, 而在例 1 中点 $x = -1$ 不是内极值点.

**引理 1** (费马) 如果函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在内极值点 $x_0 \in E$ 处可微, 则它在这点处的导数等于 0:

$$f'(x_0) = 0.$$

**证**　根据函数在点 $x_0 \in E$ 处可微的定义

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\alpha(x_0;h)h,$$

其中, 当 $h \to 0, x_0+h \in E$ 时,$\alpha(x_0;h) \to 0$. 把这个关系式改写成

$$f(x_0+h)-f(x_0)=[f'(x_0)+\alpha(x_0;h)]h, \tag{4.3.1}$$

由于 $x_0$ 是极值点, 对于一切足够接近零且使 $x_0+h \in E$ 的 $h$ 的值, 等式 (4.3.1) 的左边或者同时是非负的或者同时是非正的.

倘若 $f'(x_0) \neq 0$, 那么, 当 $h$ 充分接近零时, 量 $f'(x_0)+\alpha(x_0;h)$ 与 $f'(x_0)$ 同号, 而 $h$ 本身的值, 则它既可以是正的也可以是负的, 因为 $x_0$ 是内极值点. 于是, 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则当 $h$ 的符号变化时 (如果 $h$ 足够接近于零), (4.3.1) 式的右边要改变符号, 而 (4.3.1) 式的左边不能变号 (如果 $h$ 足够接近于零). 这个矛盾就完成了证明. □

**费马引理之注**　(1) 费马引理给出了可微函数的内极值点的必要条件. 对于非内极值点 (像例 1 中的点 $x=-1$), 结论 $f'(x_0)=0$ 一般说来是不成立的.

(2) 引理在几何上是十分明显的, 它断定在可微函数的极值点处, 函数图像的切线是水平的 (须知 $f'(x_0)$ 是切线对 $Ox$ 轴的倾角的正切).

(3) 引理在物理上表示, 沿直线运动的物体, 在开始返回时 (极值) 的瞬时速度等于零.

从刚才证明的引理 1 和关于闭区间上连续函数的最大 (小) 值的定理, 推出下面的命题.

**命题 1** (罗尔①定理)　若函数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在开区间 $(a,b)$ 中可微, 并且 $f(a)=f(b)$, 那么存在点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

**证**　因为函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 所以存在点 $x_m$, $x_M \in [a,b]$, 在这两点函数分别取它在这个闭区间上的最小值和最大值. 如果 $f(x_m)=f(x_M)$, 那么函数在 $[a,b]$ 上是常数, 而此时 $f'(x) \equiv 0$, 故结论显然成立. 若 $f(x_m)<f(x_M)$, 则因 $f(a)=f(b)$, 点 $x_m$ 和 $x_M$ 中必有一个落在开区间 $(a,b)$ 中, 记它为 $\xi$. 根据费马引理 $f'(\xi)=0$. □

### 4.3.2　拉格朗日和柯西的微分中值定理

**定理 1**(拉格朗日中值定理)　如果函数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在开区间 $(a,b)$ 中可微, 那么存在点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)}. \tag{4.3.2}$$

①罗尔 (M. Rolle)(1652—1719)——法国数学家.

**证** 考察辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. 显然它在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 中可微, 且 $F(a)=F(b)=f(a)$. 对 $F$ 用罗尔定理, 得到点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

□

**拉格朗日定理的注** (1) 拉格朗日定理在几何上表示 (图 11) 在某一点 $(\xi,f(\xi))$ 处, 其中 $\xi\in(a,b)$, 函数图像的切线平行于联结点 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ 的弦, 因为后者的斜率等于 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

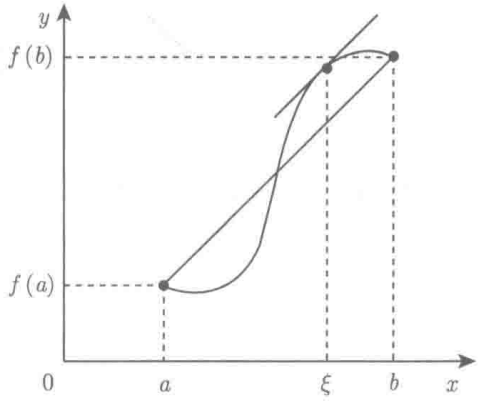


图 11

(2) 若把 $x$ 看作时间, 而把 $f(b)-f(a)$ 看作沿直线运动的质点在时间 $b-a$ 内的位移 (注意 $x\overset{f}{\mapsto}f(x)\in\mathbb{R}$), 则拉格朗日定理表示, 质点的速度 $f'(x)$ 在某个时刻 $\xi\in(a,b)$ 的量 $f'(\xi)$ 是在时间间隔 $[a,b]$ 中运动的平均速度.

(3) 但需指出, 当运动不是沿直线进行的时候, 注 (2) 意义下的平均速度可能不存在. 实际上, 例如, 设质点沿半径为 1 的圆周以常角速度 $\omega=1$ 运动. 我们知道, 它的运动规律可以写成

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\sin t).$$

那么

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{v}(t)=(-\sin t,\cos t).$$

于是 $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$. 在时刻 $t=0$ 和 $t=2\pi$, 质点位于平面的同一点 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}(2\pi)=(1,0)$ 处, 于是等式

$$\boldsymbol{r}(2\pi)-\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{v}(\xi)(2\pi-0)$$

应该表明 $\boldsymbol{v}(\xi)=\boldsymbol{0}$, 但这是不可能的.

对于一般的运动, 质点在某一段时间内通过的路程不可能超过速度的最大值与路上所花时间的乘积:

$$\boxed{|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|\leqslant \sup_{t\in(a,b)}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)||b-a|}. \tag{4.3.3}$$

这个不等式是永远成立的.

(4) 拉格朗日定理之所以重要, 在于它把函数在有限闭区间上的增量同函数在这个区间上的导数联系起来了. 在此之前我们还不曾有过这种关于有限增量的定理, 而只是通过在固定点处的导数或微分来刻画函数的局部 (无穷小) 的增量.

**拉格朗日定理的推论**

(1) (*函数单调性检验法*)　如果在开区间的每一点, 函数的导数都是非负的 (或总是正的), 那么, 函数在这个开区间上不减 (或递增).

(2) (*常值函数判断法*)　在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数在此区间上为常数当且仅当它的导数在闭区间 $[a,b]$ (或者甚至只要开区间 $(a,b)$) 的任一点都等于零.

**证**　(1) 实际上, 若 $x_1,x_2$ 是区间中的两点, 且 $x_1<x_2$, 即 $x_2-x_1>0$, 则根据公式 (4.3.2) 有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad x_1<\xi<x_2,$$

于是等式左边的差与 $f'(\xi)$ 同号.

(2) 只需证明, 当 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 上恒为零时, 对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$, 都有 $f(x_1)=f(x_2)$. 但此是从拉格朗日定理推出, 按此定理

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0,$$

这是由于 $\xi$ 位于 $x_1$ 和 $x_2$ 之间, 从而 $\xi\in(a,b)$, 于是 $f'(\xi)=0$. □

**注 1**　(1) 自然可以对具有非正 (或负的) 导数的函数的非增 (或递减) 性质叙述类似于推论之 (1) 的命题. 此外, 根据关于反函数的定理和推论之 (1), 特别地, 可以断定, 如果在某个区间 $I$ 上函数 $f(x)$ 有正的或负的导数的话, 那么, 函数 $f$ 在 $I$ 上连续、在 $I$ 上单调、有反函数 $f^{-1}$, 且 $f^{-1}$ 定义在区间 $I'=f(I)$ 上并在 $I'$ 上可微.

(2) 由推论之 (2) 可以做出下面的结论: 若两个函数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 的导数在某区间上重合, 即 $F_1'(x)=F_2'(x)$, 则在此区间上差 $F_1(x)-F_2(x)$ 是常值函数 (将会看到这个结论对于积分学是很重要的).

以下命题是拉格朗日定理的有益的推广, 它也基于罗尔定理.

**命题 2** (柯西中值定理) 设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 是在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续且在开区间 $(\alpha, \beta)$ 中可微的函数, 那么存在点 $\tau \in (\alpha, \beta)$, 使得

$$x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha)).$$

如果对于任意 $t \in (\alpha, \beta)$ 有 $x'(t) \neq 0$, 则 $x(\beta) \neq x(\alpha)$ 且成立等式

$$\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}. \tag{4.3.4}$$

**证** 函数 $F(t) = x(t)(y(\beta) - y(\alpha)) - y(t)(x(\beta) - x(\alpha))$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上满足罗尔定理的条件, 因此, 存在点 $\tau \in (\alpha, \beta)$ 使 $F'(\tau) = 0$, 它等价于要证的等式. 为了从它推出关系式 (4.3.4), 只要再注意, 如果在 $(\alpha, \beta)$ 上有 $x'(t) \neq 0$, 则仍根据罗尔定理得 $x(\beta) \neq x(\alpha)$. □

**柯西定理的注** (1) 如果把一对函数 $x(t), y(t)$ 看作质点运动的规律, 那么, $(x'(t), y'(t))$ 是它在时刻 $t$ 的速度向量, 而 $(x(\beta) - x(\alpha), y(\beta) - y(\alpha))$ 是它在时间间隔 $[\alpha, \beta]$ 内的位移向量, 从而由命题 2 断定, 在某时刻 $\tau \in (\alpha, \beta)$, 这两个向量共线.

(2) 在柯西公式中令 $x = x(t) = t, y(t) = y(x) = f(x), \alpha = a, \beta = b$, 即得到拉格朗日公式.

### 4.3.3 泰勒[①] 公式

从目前已经讲过的微分学的内容可以产生这样一个观念: 两个函数在某点处越是有更多的导数 (包括零阶导数) 相同, 它们在这点的邻域内就越近似. 我们曾经注意过函数在某点的邻域内用多项式

$$P_n(x) = P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)^n$$

来近似的问题, 现在我们再来讨论这个问题.

**定义 3** 由下述关系式 (4.3.5) 给出的多项式叫做函数$f(x)$ *在点* $x_0$ *处的* $n$ *阶泰勒多项式*:

$$P_n(x_0; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4.3.5}$$

我们感兴趣的是量

$$f(x) - P_n(x_0; x) = r_n(x_0; x), \tag{4.3.6}$$

即多项式 $P_n(x_0; x)$ 与函数 $f(x)$ 的偏差. 此量常被称为泰勒公式

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x)} \tag{4.3.7}$$

①泰勒 (Taylor)(1685—1731)——英国数学家.

的余式 或更确切地称为$n$ 阶余式或$n$ 阶泰勒多项式余项. 特别地, 泰勒公式 (4.3.7) 当 $x_0=0$ 时常叫做麦克劳林[①]公式.

下面的结果意在求关于余项的信息.

**定理 2**　如果在以 $x_0$, $x$ 为端点的闭区间上函数 $f$ 连同它的前 $n$ 阶导数连续, 而在这个区间的内点处它有 $n+1$ 阶导数, 那么对于任意一个在这个区间上连续且在它的内点处有异于零的导数的函数 $\varphi$, 都存在位于 $x_0$ 和 $x$ 之间的点 $\xi$ 使得

$$\boxed{r_n(x_0;x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}. \tag{4.3.8}$$

**证**　在以 $x_0$, $x$ 为端点的闭区间 $I$ 上考察辅助函数

$$\begin{aligned}F(t)=&f(x)-P_n(t;x)\\ =&f(x)-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right],\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

它是自变量 $t$ 的函数, 在闭区间 $I$ 上连续且在它的内点处可微, 同时

$$\begin{aligned}F'(t)=-\Bigg[&f'(t)-\frac{f'(t)}{1!}+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\\ &-\frac{f''(t)}{2!}\cdot 2(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots\\ &+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\Bigg]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.\end{aligned}$$

对于闭区间 $I$ 上的函数对 $F(t)$, $\varphi(t)$ 用柯西定理 (见关系式 (4.3.4)), 求介于 $x_0$ 和 $x$ 之间的点 $\xi$, 使得

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

把 $F'(\xi)$ 的表达式代进来, 并注意到从公式 (4.3.6) 和 (4.3.9) 推出的

$$F(x)-F(x_0)=0-F(x_0)=-r_n(x_0;x),$$

就得到公式 (4.3.8). □

**推论 1**　下述结论成立:

(1) (余项的柯西公式)

$$\boxed{r_n(x_0;x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)}. \tag{4.3.10}$$

①麦克劳林 (C. Maclaurin)(1698—1746)——英国数学家.

(2) (余项的拉格朗日公式)

$$\boxed{r_n(x_0;x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}. \tag{4.3.11}$$

**证** 在 (4.3.8) 中置 $\varphi(t)=x-t$ 就得到 (4.3.10), 置 $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$ 就得到 (4.3.11). □

看一些例子.

**例 3** 对于函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 当 $x_0=0$ 时, 泰勒公式表示为

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+r_n(0;x), \tag{4.3.12}$$

根据 (4.3.11) 有

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\xi}x^{n+1},\quad |\xi|<|x|.$$

于是

$$|r_n(0;x)|=\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\xi}|x^{n+1}|<\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|x|}. \tag{4.3.13}$$

但对于任意固定的 $x\in\mathbb{R}$, 当 $n\to\infty$ 时, 我们已知量 $\dfrac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$ 是趋于零的. 这就表明, 从估计式 (4.3.13) 及级数和的定义推出, 对于 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots. \tag{4.3.14}$$

**例 4** 类似地, 对于任意的 $0<a\neq 1$, 我们得到函数 $a^x$ 的展开式

$$a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+\cdots. \tag{4.3.15}$$

**例 5** 设 $f(x)=\sin x$. 已知 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right), n\in\mathbb{N}$, 因此, 从拉格朗日公式 (4.3.11), 对于 $x_0=0$ 和任意的 $x\in\mathbb{R}$, 求得

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{\pi}{2}(n+1)\right)\cdot x^{n+1}. \tag{4.3.16}$$

由此推出, 对于任意的固定的值 $x\in\mathbb{R}$, 当 $n\to\infty$ 时量 $r_n(0;x)$ 趋于零. 从而对于任意的 $x\in\mathbb{R}$, 展开式成立:

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots. \tag{4.3.17}$$

**例 6** 类似地, 对于函数 $\cos x$ 得到

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}\cos\left(\xi+\frac{\pi}{2}(n+1)\right)\cdot x^{n+1} \tag{4.3.18}$$

和

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots . \tag{4.3.19}$$

**例 7**　由于 $\sinh' x = \cosh x$, 而 $\cosh' x = \sinh x$, 所以, 对于函数 $f(x) = \sinh x$, 当 $x_0 = 0$ 时, 从公式 (4.3.11) 得到

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!}\varphi(\xi)x^{n+1},$$

其中当 $n$ 为偶数时, $\varphi(\xi) = \sinh\xi$, 而当 $n$ 为奇数时, $\varphi(\xi) = \cosh\xi$. 因为 $|\xi| < |x|$, 故总有

$$|\varphi(\xi)| \leqslant \max\{|\sinh x|, |\cosh x|\}.$$

这就表明, 对于任意固定的值 $x \in \mathbb{R}$, 当 $n \to \infty$ 时, $r_n(0;x) \to 0$. 于是 $\forall x \in \mathbb{R}$ 成立

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots . \tag{4.3.20}$$

**例 8**　类似地得到对于任意的值 $x \in \mathbb{R}$ 都成立的展开式

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots . \tag{4.3.21}$$

**例 9**　对于函数 $f(x) = \ln(1+x)$, 有

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

因此, 当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒公式 (4.3.7) 对于这个函数成为

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + r_n(0;x). \tag{4.3.22}$$

这次我们按柯西公式 (4.3.10) 来表示 $r_n(0;x)$:

$$r_n(0;x) = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}(x-\xi)^n x,$$

或

$$r_n(0;x) = (-1)^n \frac{x}{1+\xi}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n, \tag{4.3.23}$$

其中点 $\xi$ 在 0 和 $x$ 之间. 从而

$$|r_n(0;x)| = \left|\frac{x}{1+\xi}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n\right| \leqslant \begin{cases} \left|\dfrac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n x, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{|x|}{1+x}\left|\dfrac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n, & x < 0, \end{cases}$$

如果 $|x|<1$, 那么, 从 $\xi$ 在 0 和 $x$ 之间这个条件推出

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|=\frac{|x|-|\xi|}{|1+\xi|}\leqslant\frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|}=1-\frac{1-|x|}{1-|\xi|}\leqslant 1-\frac{1-|x|}{1-0}=|x|. \tag{4.3.24}$$

于是, 当 $|x|<1$ 时

$$|r_n(0;x)|\leqslant\max\left\{1,\frac{1}{1+x}\right\}|x|^{n+1}. \tag{4.3.25}$$

因此当 $|x|<1$ 时成立展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots. \tag{4.3.26}$$

显然, 在 $|x|\leqslant 1$ 外, (4.3.26) 右端的级数处处发散, 因为它的一般项当 $|x|>1$ 时不趋于零.

**例 10** 若 $f(x)=(1+x)^\alpha$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$, 则

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

因此当 $x_0=0$ 时, 这个函数的泰勒公式 (4.3.7) 有如下的形式:

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(0;x). \tag{4.3.27}$$

使用柯西公式 (4.3.10), 求得

$$r_n(0;x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}(x-\xi)^n x, \tag{4.3.28}$$

其中 $\xi$ 位于 0 和 $x$ 之间.

如果 $|x|<1$, 那么使用估计式 (4.3.24), 有

$$|r_n(0;x)|\leqslant\left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\xi)^{\alpha-1}|x|^{n+1}. \tag{4.3.29}$$

当 $n$ 增加 1 时, 不等式 (4.3.29) 的右边乘以 $\left|\left(1-\dfrac{\alpha}{n+1}\right)x\right|$. 但是, 因为 $|x|<1$, 所以, 如果 $|x|<q<1$, 则不管 $\alpha$ 的值如何, 对于足够大的 $n$, 将有 $\left|\left(1-\dfrac{\alpha}{n+1}\right)x\right|<q<1$.

由此推出, 对于任意的 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和开区间 $|x|<1$ 中的任意的 $x$, 当 $n\to\infty$ 时,$r_n(0;x)\to 0$; 因此在开区间 $|x|<1$ 上成立由牛顿得到的展开式 (牛顿二项式)

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{4.3.30}$$

我们注意到, 从达朗贝尔比较检验法 (见 2.1.4 小节) 可以看出, 当 $|x|>1$ 时, 只要 $\alpha\notin\mathbb{N}$, 级数 (4.3.30) 总是发散的.

现在我们单独讨论 $\alpha=n\in\mathbb{N}$ 的情形.

这时函数 $f(x)=(1+x)^\alpha=(1+x)^n$ 是 $n$ 次多项式, 因此它的一切高于 $n$ 阶的导数都是零. 于是, 我们从泰勒公式 (4.3.7), 以及拉格朗日公式 (4.3.11) 都得到等式

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots1}{n!}x^n, \tag{4.3.31}$$

这正是我们在读中学时就知道的具自然数指数的牛顿二项式公式:

$$(1+x)^n=1+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n.$$

这样, 我们已经定义了泰勒公式 (4.3.7), 并且得到了泰勒公式余项的表达式 (4.3.8), (4.3.10), (4.3.11). 我们所得到的关系式 (4.3.13), (4.3.16), (4.3.18), (4.3.25), (4.3.29) 可以用来估计按泰勒公式计算一些重要的初等函数时的误差. 最后, 我们还得到了这些函数的幂级数展开式.

**定义 4**　如果函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有任意阶导数, 那么级数

$$f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

叫做函数 $f$ 在点 $x_0$ 处的*泰勒级数*.

不应该认为每个无穷可微的函数的泰勒级数都在点 $x_0$ 的某个邻域内收敛, 因为对于任何一个数列 $c_0,c_1,\cdots,c_n,\cdots$ 都可以构造 (这并不是很简单的) 一个函数 $f(x)$, 使得 $f^{(n)}(x_0)=c_n, n\in\mathbb{N}$.

也不应该认为, 如果泰勒级数收敛, 它就一定收敛到产生它的函数. 泰勒级数收敛到产生它的函数, 此事只对于所谓*解析函数*成立.

下面就是一个柯西给出的非解析函数的例子:

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

从导数的定义出发, 由于当 $x\to0$ 时, 不管 $k$ 值如何总有 $x^k\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\to0$(见 2.2.7 小节的例 28), 可以验证对于 $n=0,1,2,\cdots,f^{(n)}(0)=0$. 于是, 在这种情况下泰勒级数的每一项都是零, 从而它的和恒为零, 同时, 当 $x\neq0$ 时, $f(x)\neq0$.

最后我们来详细研究一下泰勒公式的局部情形.

考虑用多项式局部逼近函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 的问题. 注意到, 如果多项式

$$P_n(x_0;x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n$$

使得

$$f(x)=P_n(x_0;x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,x\in E, \tag{4.3.32}$$

则必有

$$\begin{aligned}
c_0&=\lim_{E\ni x\to x_0} f(x),\\
c_1&=\lim_{E\ni x\to x_0}\frac{f(x)-c_0}{x-x_0},\\
&\vdots\\
c_n&=\lim_{E\ni x\to x_0}\frac{f(x)-[c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)^{n-1}]}{(x-x_0)^n}.
\end{aligned}$$

因此有如下的结论.

**命题 3** 如果满足条件 (4.3.32) 的多项式 $P_n(x_0;x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n$ 存在, 那么它是唯一的.

现在证明, 如下引理.

**命题 4** (局部泰勒公式) 设 $E$ 是以 $x_0\in\mathbb{R}$ 为端点的闭区间. 如果函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 在点 $x_0$ 处有直到 $n$ 阶的导数 $f'(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0)$, 那么下列表达式成立:

$$\begin{aligned}
f(x)=&f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\
&+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,x\in E.
\end{aligned}\tag{4.3.33}$$

观察, 对于泰勒多项式 $P_n(x_0;x)$, 成立 $f^{(k)}(x_0)-P_n^{(k)}(x_0;x_0)=0(k=0,1,\cdots,n)$. 从而公式 (4.3.33) 的正确性由引理 2 确立.

**引理 2** 若函数 $\varphi:E\to\mathbb{R}$ 定义在以 $x_0$ 为端点的闭区间上, 在点 $x_0$ 处有直到 $n$ 阶的导数 $\varphi'(x_0),\cdots,\varphi^{(n)}(x_0)$, 且 $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(n)}(x_0)=0$, 则当 $x\to x_0,x\in E$ 时, $\varphi(x)=o((x-x_0)^n)$.

**证** 首先指出, 由于

$$\varphi^{(k)}(x_0)=(\varphi^{(k-1)})'(x_0)=\lim_{E\ni x\to x_0}\frac{\varphi^{(k-1)}(x)-\varphi^{(k-1)}(x_0)}{x-x_0},$$

那么 $\varphi^{(k)}(x_0)$ 的存在是以 $\varphi^{(k-1)}(x_0)$ 在 $E$ 上 $x_0$ 的一个不管多么小的邻域中有定义为前提的. 若必要, 只要缩短闭区间 $E$, 就可以预先认为函数 $\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(k-1)}(x)$ 在以 $x_0$ 为端点的整个闭区间 $E$ 上有定义.

当 $n=1$ 时, 结论可从函数 $\varphi$ 在点 $x_0$ 处可微的定义推出:

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)=o(x-x_0),\quad x\to x_0,x\in E.$$

现在假定命题对阶数 $n=k-1\geqslant 1$ 已证实. 我们来证它对于阶数 $n=k\geqslant 2$ 也成立. 由于 $k\geqslant 2$, 所以函数 $\varphi(x)$ 在 $E$ 上有导数 $\varphi'(x)$, 且根据条件, 有

$$(\varphi')'(x_0)=\cdots=(\varphi')^{(k-1)}(x_0)=0.$$

这样一来, 根据归纳假设

$$\varphi'(x)=o((x-x_0)^{k-1}),\quad x\to x_0, x\in E.$$

此时, 用拉格朗日定理, 得到

$$\begin{aligned}\varphi(x)=&\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(\xi)(x-x_0)\\=&\alpha(\xi)(\xi-x_0)^{k-1}(x-x_0),\end{aligned}$$

其中 $\xi$ 是位于 $x_0$ 和 $x$ 之间的点, 即 $|\xi-x_0|<|x-x_0|$, 而当 $\xi\to x_0$, $\xi\in E$ 时, $\alpha(\xi)\to 0$. 这就意味着, 当 $x\to x_0$, $x\in E$ 时, 同时有 $\xi\to x_0$, $\xi\in E$ 且 $\alpha(\xi)\to 0$. 而由于

$$|\varphi(x)|\leqslant|\alpha(\xi)||x-x_0|^{k-1}|x-x_0|,$$

所以, 就证明了

$$\varphi(x)=o((x-x_0)^k),\quad x\to x_0, x\in E.$$

根据数学归纳法的原理引理 2 的结论得到了证明. □

关系式 (4.3.33) 之所以叫做**局部泰勒公式**, 是因为根据其中余项的形式 (所谓**佩亚诺形式**)

$$r_n(x_0;x)=o((x-x_0)^n),\tag{4.3.34}$$

只能对泰勒多项式和当 $x\to x_0, x\in E$ 时函数的渐近行为作出结论.

总结一下, 我们对于泰勒多项式

$$P_n(x_0;x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

写出了泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x_0;x),$$

并得到了它的下列重要的具体表达式:

如果 $f$ 在以 $x_0$, $x$ 为端点的开区间中有 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\tag{4.3.35}$$

其中 $\xi$ 是位于 $x_0$ 和 $x$ 之间的点.

如果 $f$ 在点 $x_0$ 处有直到 $n \geqslant 1$ 阶导数, 则

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (4.3.36)$$

关系式 (4.3.35) 称为**具有拉格朗日余项的泰勒公式**, 它显然是拉格朗日定理的推广, 后者是它当 $n = 0$ 时的特例.

关系式 (4.3.36) 称为**具有佩亚诺余项的泰勒公式**, 它显然是函数在一点处可微的定义的推广, 后者是它当 $n = 1$ 时的特例.

我们注意到, 公式 (4.3.35) 实际上含有更多的内容, 因为一方面如我们已见到的, 用它能够估计余项的绝对值, 而另一方面, 例如, 当 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内有界时, 从它还推出渐近公式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1}). \quad (4.3.37)$$

因此, 对于无穷可微的函数, 公式 (4.3.35) 包含着局部公式 (4.3.36).

特别地, 根据公式 (4.3.37) 和前面研究过的例 3 —例 10, 现在可以写出下面的当 $x \to 0$ 时的渐近公式表:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}),$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}).$$

现在再考察几个应用泰勒公式的例子.

**例 11** 写出计算函数 $\sin x$ 在闭区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上的值的多项式, 使绝对误差不超过 $10^{-3}$.

取函数 $\sin x$ 在点 $x_0 = 0$ 的邻域内展开所得适当次数的泰勒多项式作为这样的多项式. 因为

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 \cdot x^{2n+2} + r_{2n+2}(0; x),$$

其中余项按拉格朗日公式给出:

$$r_{2n+2}(0;x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{\pi}{2}(2n+3)\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3}.$$

所以当 $|x|\leqslant 1$ 时,

$$|r_{2n+2}(0;x)|\leqslant\frac{1}{(2n+3)!}.$$

但当 $n\geqslant 2$ 时, $\dfrac{1}{(2n+3)!}<10^{-3}$, 所以

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5,$$

它在闭区间 $|x|\leqslant 1$ 上具有所需的精确性.

**例 12**　我们证明当 $x\to 0$ 时, $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

我们有

$$\tan' x=\cos^{-2}x,\quad \tan'' x=2\cos^{-3}x\cdot\sin x,$$
$$\tan''' x=6\cos^{-4}x\cdot\sin^2 x+2\cos^{-2}x.$$

于是, $\tan 0=0,\tan' 0=1,\tan'' 0=0,\tan''' 0=2$, 从而由局部泰勒公式推出所需的关系式.

**例 13**　设 $\alpha>0$, 我们来研究级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{1}{n^\alpha}$ 的收敛性.

当 $\alpha>0,n\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{n^\alpha}\to 0$. 估计级数项的阶

$$\ln\cos\frac{1}{n^\alpha}=\ln\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)=-\frac{1}{2!}\frac{1}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

于是我们的级数是常号级数, 其项与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2!}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ 的项等价. 由于后者仅当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时收敛, 所以在所说的区域 $\alpha>0$ 中, 原来的级数仅当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时收敛 (见习题 19(2)).

**例 14**　我们证明: 当 $x\to 0$ 时,

$$\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

这次我们不去逐次计算六个导数, 而是使用已经知道的当 $x\to 0$ 时, $\cos x$ 的

展开式和当 $u \to 0$ 时, $\ln(1+u)$ 的展开式:

$$\begin{aligned}\ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+O(x^8)\right)\\ &= \ln(1+u) = u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+O(u^4)\\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+O(x^8)\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2!)^2}x^4-2\frac{1}{2!}\frac{1}{4!}x^6+O(x^8)\right)\\ &\quad +\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2^3}x^6+O(x^8)\right)\\ &= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+O(x^8).\end{aligned}$$

**例 15** 求函数 $\ln\cos x$ 在 $x_0=0$ 处的前六个导数的值.

$(\ln\cos x)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$. 于是在 $x_0=0$ 处, 由于 $\cos 0 \neq 0$, 所以这个函数显然有任意阶导数. 我们不从求这些导数的函数表达式着手, 而是使用泰勒多项式的唯一性和例 14 的结果.

若

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n), \quad x \to 0,$$

则

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad \text{即} f^{(k)}(0) = k!c_k.$$

于是, 在我们的情形, 有 $c_0 = c_1 = 0, c_2 = -\dfrac{1}{2}, c_3 = 0, c_4 = -\dfrac{1}{12}, c_5 = 0, c_6 = -\dfrac{1}{45}$,

$$(\ln\cos)(0) = 0, \quad (\ln\cos)'(0) = 0, \quad (\ln\cos)''(0) = -\frac{1}{2}\cdot 2!,$$

$$(\ln\cos)^{(3)}(0) = 0, \quad (\ln\cos)^{(4)}(0) = -\frac{1}{12}\cdot 4!,$$

$$(\ln\cos)^{(5)}(0) = 0, \quad (\ln\cos)^{(6)}(0) = -\frac{1}{45}\cdot 6!.$$

**例 16** 设 $f(x)$ 是在点 $x_0=0$ 处无穷可微的函数, 并已知它的导数在零的邻域内的展开式

$$f'(x) = c_0' + c_1'x + \cdots + c_n'x^n + O(x^{n+1}).$$

那么, 根据泰勒展开式的唯一性, 则有

$$(f')^{(k)}(0) = k!c'_k,$$

因此 $f^{(k+1)}(0) = k!c'_k$. 这样一来, 对于函数 $f(x)$ 本身, 有展开式

$$f(x) = f(0) + \frac{c'_0}{1!}x + \frac{1!c'_1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n!c'_n}{(n+1)!}x^{n+1} + O(x^{n+2}),$$

化简之后为

$$f(x) = f(0) + \frac{c'_0}{1}x + \frac{c'_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{c'_n}{n+1}x^{n+1} + O(x^{n+2}).$$

**例 17**　求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x_0 = 0$ 处的泰勒展开式.

由于

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + O(x^{2n+2}),$$

所以根据例 16 所说的理由,

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

即

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}).$$

**例 18**　类似地, 把函数 $(\arcsin)'x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 在 $x_0 = 0$ 的邻域内按泰勒公式展开, 逐次求出

$$\begin{aligned}(1+u)^{-\frac{1}{2}} =& 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}u + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2 + \cdots \\ &+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}u^n + O(u^{n+1}),\end{aligned}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + O(x^{2n+2}),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

或在经过一些初等变换后得

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{(3!!)^2}{5!}x^5 + \cdots + \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

这里 $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)$, $(2n)!!=2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)$.

**例 19** 利用例 5、例 12、例 17、例 18 的结果求得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)\right]-\left[x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^5)\right]}{\left[x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5)\right]-\left[x+\frac{1}{3!}x^3+O(x^5)\right]}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}=-1.\end{aligned}$$

## 练　习

1. 证明:

(1) 方程 $x^3-3x+c$(这里 $c$ 为常数) 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根.

(2) 方程 $x^n+px+q$($n$ 为正整数, $p$, $q$ 为实数) 当 $n$ 为偶数时至多有两个实根, 当 $n$ 为奇数时至多有三个实根.

2. 设 $f$ 为 $[a,b]$ 上二阶可导函数, $f(a)=f(b)=0$, 并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0$.

3. 设函数 $f$ 在 $(a,b)$ 上可导, 且 $f'$ 单调, 证明 $f'$ 在 $(a,b)$ 上连续.

4. 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

5. 利用泰勒公式求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

6. 选择数 $a$ 和 $b$ 使得函数 $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 当 $x\to 0$ 时是尽可能高阶的无穷小量.

7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\right]$.

8. 写出函数 $\mathrm{e}^x$ 在零点处的一个泰勒公式, 使能按它在闭区间 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 上计算 $\mathrm{e}^x$ 的值精确到 $10^{-3}$.

9. 设 $f$ 是在零点无穷可微的函数. 证明:

(1) 若 $f$ 是偶函数, 则它在零这点的泰勒级数只含有 $x$ 的偶次幂.

(2) 若 $f$ 是奇函数, 则它在零这点的泰勒级数只含有 $x$ 的奇次幂.

10. 证明: 若 $f \in C^{(\infty)}_{[-1,1]}$, $f^{(n)}(0)=0$, 当 $n=0,1,2,\cdots$, 并且存在常数 $C$ 使得

$$\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n)}(x)|\leqslant n!C,\quad n\in\mathbb{N},$$

那么, 在 $[-1,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

11. 证明: 若 $x>0$, 则

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\dfrac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

12. 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 上可导, 且 $a\cdot b>0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix}a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

13. 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$. 证明: 存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

14. 证明: 若函数 $f$ 在开区间 $I$ 上定义且可微, $[a,b]\subset I$, 则

(1) 函数 $f'(x)$(不必是连续的!) 在 $[a,b]$ 上取遍 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的一切值 (这是达布定理).

(2) 若还有 $f''(x)$ 在 $(a,b)$ 中存在, 则存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a).$$

15. 函数 $f(x)$ 在全数轴上可微且 $f'(x)$ 可以不连续.

(1) 证明: 函数 $f'(x)$ 只可能有第二类间断点.

(2) 指出下述对于 $f'(x)$ 的连续性的 "证明" 中的错误:

设 $x_0$ 是 $\mathbb{R}$ 中任意一点且 $f'(x_0)$ 是函数 $f$ 在点 $x_0$ 处的导数. 根据导数的定义和拉格朗日定理

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi),$$

其中 $\xi$ 是 $x_0$ 和 $x$ 之间的点, 从而当 $x\to x_0$ 时也趋于 $x_0$.

16. 证明: 若函数 $f$ 在点 $x_0$ 处有直到 $n+1$ 阶导数且 $f^{n+1}(x_0)\neq 0$, 则泰勒公式的拉格朗日型余项

$$r_{n-1}(x_0;x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^n,$$

其中的量 $\theta=\theta(x)$ 当 $x\to x_0$ 时趋于 $\dfrac{1}{n+1}$.

17. 证明:

(1) 在实系数多项式 $P(x)$ 的两个实根之间存在它的导数 $P'(x)$ 的根.

(2) 若多项式 $P(x)$ 有重根, 则多项式 $P'(x)$ 也有这个根, 但重数少 1.

(3) 若 $Q(x)$ 是多项式 $P(x)$ 和 $P'(x)$ 的最大公因式, 其中 $P'(x)$ 是多项式 $P(x)$ 的导数, 则多项式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 以多项式 $P(x)$ 的根为根, 且都是一重的.

18. 证明:

(1) 任一多项式 $P(x)$ 都可表成 $c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n$ 的形式.

(2) 存在唯一的 $n$ 阶多项式 $P(x)$ 使得当 $E\ni x\to x_0$ 时,

$$f(x)-P(x)=o\big((x-x_0)^n\big).$$

这里 $f$ 是定义在集 $E$ 上的函数, 而 $x_0$ 是 $E$ 的极限点.

19. (1) 将拉格朗日定理用于函数 $\dfrac{1}{x^\alpha}$, 其中 $\alpha>0$, 证明对于 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha>0$ 成立不等式

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}}<\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha}-\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

(2) 用问题 (1) 的结果证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}$ 当 $\sigma>1$ 时收敛.

## 4.4 用微分学的方法研究函数

### 4.4.1 函数单调的条件 (参看函数单调性检验法)

**命题 1** 开区间 $(a,b)=E$ 上可微的函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 在此区间内单调性与它的导数 $f'$ 在此区间的符号 (正、负) 彼此之间有下述关系.

(1) $f'(x)>0\Rightarrow$ $f$ 递增 $\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$.

(2) $f'(x)\geqslant 0\Rightarrow$ $f$ 不减 $\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$.

(3) $f'(x)\equiv 0\Rightarrow$ $f\equiv$ const (常数) $\Rightarrow f'(x)\equiv 0$.

(4) $f'(x)\leqslant 0\Rightarrow$ $f$ 不增 $\Rightarrow f'(x)\leqslant 0$.

(5) $f'(x)<0\Rightarrow$ $f$ 递减 $\Rightarrow f'(x)\leqslant 0$.

**证** 左边这栏的结论我们在讨论拉格朗日定理时已经知道了, 根据拉格朗日定理

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

其中 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $\xi$ 在 $x_1$ 和 $x_2$ 之间. 从这个公式见到, 当 $x_1<x_2$ 时, 差 $f(x_2)-f(x_1)$ 的正负与 $f'(\xi)$ 的正负一致.

右边那栏的结论直接由导数的定义得出. 例如, 我们来证明, 若在 $(a,b)$ 上可微的函数递增, 则在 $(a,b)$ 上 $f'(x)\geqslant 0$. 实际上

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

若 $h>0$, 则 $f(x+h)-f(x)>0$, 而若 $h<0$, 则 $f(x+h)-f(x)<0$; 因此极限号后面的分数是正的.

因此, 它的极限 $f'(x)$ 非负, 这就是所要的结论. □

**注 1**　从函数 $f(x)=x^3$ 这个例子见到, 可微函数的递增只蕴含导数的非负而不蕴含导数恒正. 在这个例子中, $f'(0)=3x^2|_{x=0}=0$.

**注 2**　在 $A\Rightarrow B$ 这个记号中, 如我们已经及时指出过的, $A$ 是 $B$ 的充分条件而 $B$ 是 $A$ 的必要条件. 这就意味着. 从命题 1 特别地可以得出下面的结论.

(1) 函数在开区间上为常数当且仅当它的导数在这个区间上恒等于零.

(2) 要使开区间上可微的函数在此区间上递减, 只需它的导数在此区间上处处都是负的.

(3) 为使开区间上可微的函数在此区间上递减, 它的导数在此区间上必须是非正的.

**例 1**　设在 $\mathbb{R}$ 上, $f(x)=x^3-3x+2$. 那么 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 并且, 由于当 $|x|<1$ 时, $f'(x)<0$, 以及当 $|x|>1$ 时, $f'(x)>0$, 所以可以断言, 函数在开区间 $(-\infty,-1)$ 上递增, 在开区间 $(-1,1)$ 上递减, 而在开区间 $(1,+\infty)$ 上重又递增.

### 4.4.2　函数内极值点条件

根据费马引理可以得到下面的命题.

**命题 2** (内极值点的必要条件)　要使点 $x_0$ 是定义在这点的邻域中的函数 $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ 的极值点, 必须成立下列两个条件之一: 或者函数在 $x_0$ 不可微, 或者 $f'(x_0)=0$.

简单的例子表明极值点的这些必要条件不是充分的.

**例 2**　设在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x)=x^3$. 那么 $f'(0)=0$, 但在点 $x_0=0$ 处没有极值.

**例 3**　设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0.\end{cases}$$

这个在零点发生转折的函数显然在这点既无导数亦无极值.

**例 4**　我们来求函数 $f(x)=x^2$ 在闭区间 $[-2,1]$ 上的最大值. 在这种情况下, 显然最大值在区间的一端 $-2$ 处达到. 但正规的求法是这样的. 求出 $f'(x)=2x$ 以及开区间 $(-2,1)$ 中一切使 $f'(x)=0$ 的点. 在我们的题目中, 这样的点只有一个, 就是点 $x=0$. $f(x)$ 的最大值或在这些点中达到, 或在一个端点处达到. 关于端点的情形, 命题 2 什么也没说. 因此, 在我们的情况下, 应当把函数值 $f(-2)=4, f(0)=0, f(1)=1$ 进行比较, 由此断定函数 $f(x)=x^2$ 在闭区间上的最大值等于 4, 它是在这个区间的一端 $-2$ 处达到的.

根据在 4.4.1 小节中建立的关于导数的符号和函数的单调性之间的联系, 我们得到下述在一点处存在局部极值或不存在局部极值的充分条件.

**命题 3** (用一阶导数表达的极值的充分条件) 设 $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ 是定义在点 $x_0$ 的邻域内的函数, 在点 $x_0$ 处连续且在它的空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 中可微. 记

$$\mathring{U}^-(x_0) = \{x \in U(x_0) | x < x_0\}, \quad \mathring{U}^+(x_0) = \{x \in U(x_0) | x_0 < x\}.$$

那么下列断语成立.

(1) $(\forall x \in \mathring{U}^-(x_0)(f'(x) < 0)) \wedge (\forall x \in \mathring{U}^+(x_0)(f'(x) < 0)) \Rightarrow (f$ 在 $x_0$ 处没有极值).

(2) $(\forall x \in \mathring{U}^-(x_0)(f'(x) < 0)) \wedge (\forall x \in \mathring{U}^+(x_0)(f'(x) > 0)) \Rightarrow (x_0$ 是 $f$ 的严格局部极小值点).

(3) $(\forall x \in \mathring{U}^-(x_0)(f'(x) > 0)) \wedge (\forall x \in \mathring{U}^+(x_0)(f'(x) < 0)) \Rightarrow (x_0$ 是 $f$ 的严格局部极大值点).

(4) $(\forall x \in \mathring{U}^-(x_0)(f'(x) > 0)) \wedge (\forall x \in \mathring{U}^+(x_0)(f'(x) > 0)) \Rightarrow (f$ 在 $x_0$ 处没有极值).

可以简单但不太确切地说, **如果经过一个点时导数变号, 则有极值, 而若导数不变号, 则没有极值**. 此外, 关于极值的这些条件是充分的, 但不是必要的. 下面的例 5 可以说明这一点.

**例 5** 设

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

由于 $x^2 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2$, 那么很明显, 函数在点 $x_0 = 0$ 处有严格局部极小值. 但无论在这点的哪个空心半邻域中, 它的导数 $f'(x) = 4x + 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ 都不保号.

**命题 3 之证** (1) 从命题 2 推出函数 $f$ 在 $\mathring{U}^-(x_0)$ 上严格递减. 由于 $f$ 在 $x_0$ 连续, 故

$$\lim_{\mathring{U}^-(x_0) \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

从而当 $x \in \mathring{U}^-(x_0)$ 时, $f(x) > f(x_0)$. 同理, 当 $x \in \mathring{U}^+(x_0)$ 时, $f(x_0) > f(x)$. 这样一来, 函数在整个邻域 $U(x_0)$ 中严格递减, 于是 $x_0$ 不是极值点.

(2) 首先, 像在 (1) 中那样, 由于 $f$ 在 $\mathring{U}^-(x_0)$ 递减和 $f$ 在 $x_0$ 连续, 我们断定, 当 $x \in \mathring{U}^-(x_0)$ 时, $f(x) > f(x_0)$. 从 $f$ 在 $\mathring{U}^+(x_0)$ 递增和 $f$ 在 $x_0$ 连续断定, 当 $x \in \mathring{U}^+(x_0)$ 时, $f(x_0) < f(x)$. 于是函数 $f$ 在 $x_0$ 有严格局部极小值.

断言 (3) 和 (4) 可类似地证明. □

**命题 4** (用高阶导数表达的极值的充分条件)　设函数 $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ 在 $x_0$ 有直到 $n$ 阶导数 $(n>1)$, 满足: $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ 而 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则

(1) 当 $n$ 为奇数时, 在 $x_0$ 处 $f$ 无极值.

(2) 当 $n$ 为偶数时, $f$ 有极值, 此时若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则有严格局部极小值, 而若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则有严格局部极大值.

**证**　利用局部泰勒公式得

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \alpha(x)(x-x_0)^n, \tag{4.4.1}$$

其中当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x) \to 0$. 把 (4.4.1) 改写成

$$f(x) - f(x_0) = \left( \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) \right) (x-x_0)^n. \tag{4.4.2}$$

因为 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 所以, 当 $x$ 充分接近 $x_0$ 时, 和式 $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ 的值与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号.

若 $n$ 是奇数, 则经过点 $x_0$ 时 $(x-x_0)^n$ 改变符号, 这时 (4.4.2) 式右端, 从而等式的左端都变号. 这就表明, 当 $n = 2k+1$ 时没有极值.

若 $n$ 为偶数, 则当 $x \neq x_0$ 时, $(x-x_0)^n > 0$, 因此在点 $x_0$ 的小邻域内, 由等式 (4.4.2) 可见差 $f(x) - f(x_0)$ 的符号是与 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号一样的. □

**例 6**　*几何光学中光的折射定律*(斯涅耳①定律). 根据费马原理, 在任意两点之间, 光线所走的实际路径是耗费时间最少的路径. 又, 两点间最短路径是以它们为端点的直线段. 这一事实推出, 在同一种均匀介质 (在每点和每个方向都有同样结构的介质) 中, 光是沿直线传播的.

现设有两种均匀介质且光从点 $A_1$ 传到点 $A_2$, 如图 12 所示.

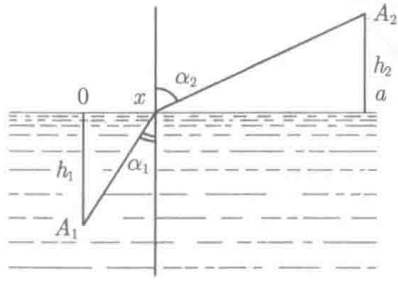


图 12

若 $c_1$, $c_2$ 是光在这两种介质中的速度, 则通过所示路径的时间是

$$t(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}.$$

①斯涅耳 (Snell 或 Snellius)(1580—1626)——荷兰天文学家和数学家.

我们来求函数 $t(x)$ 的极值:

$$t'(x)=\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}=0,$$

按照图上的记号, 此式给出

$$\frac{1}{c_1}\sin\alpha_1=\frac{1}{c_2}\sin\alpha_2.$$

从物理的考虑或者从 $x\to\infty$ 时函数 $t(x)$ 无限增长的情况, 都可以明白, 使 $t'(x)=0$ 的点是连续函数 $t(x)$ 的绝对极小值点. 于是从费马原理推出了折射定律

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

**例 7** 证明: 对于 $x>0$ 有

$$x^\alpha-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0,\quad 0<\alpha<1, \tag{4.4.3}$$

$$x^\alpha-\alpha x+\alpha-1\geqslant 0,\quad \alpha<0\text{或}1<\alpha. \tag{4.4.4}$$

**证** 对函数 $f(x)=x^\alpha-\alpha x+(\alpha-1)$ 求微分, 得到 $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$ 以及当 $x=1$ 时, $f'(x)=0$. 如果 $0<\alpha<1$, 则当点从 $x=1$ 处经过时, 导数从正值变到负值, 而若 $\alpha<0$ 或 $1<\alpha$, 则当点从 $x=1$ 处经过时, 导数从负值变为正值. 在第一种情形, 在点 $x=1$ 处有严格极大值, 而在第二种情形则有严格极小值 (并且根据 $f$ 在区间 $0<x<1$ 上的单调性知道这个极值不仅仅是局部的). 然而 $f(1)=0$, 于是不等式 (4.4.3)、(4.4.4) 都成立. 甚至还同时证明了, 如果 $x\neq 1$ 的话, 两个不等式都是严格的. □

借助于初等的代数变换, 从所证的不等式可以得到一系列在分析学中很重要的经典的不等式. 我们来推导这些不等式.

**定理 1** 三个经典不等式.

(1) **杨格①不等式** 如果 $a>0$ 且 $b>0$, 而数 $p$, $q$ 满足: $p\neq 0,\ 1,\ q\neq 0,\ 1,$ $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 那么

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b,\quad p>1, \tag{4.4.5}$$

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\geqslant\frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b,\quad p<1, \tag{4.4.6}$$

且 (4.4.5), (4.4.6) 中的等号仅当 $a=b$ 时成立.

①杨格 (Young)(1882—1946)——英国数学家.

(2) **赫尔德①不等式**　设 $x_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0\ (i = 1, \cdots, n)$ 且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 那么

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, \tag{4.4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p < 1, p \neq 0. \tag{4.4.8}$$

当 $p < 0$ 时, (4.4.8) 中假定 $x_i > 0\ (i = 1, \cdots, n)$. (4.4.7), (4.4.8) 中的等号仅当向量 $(x_1^p, \cdots, x_n^p)$ 和向量 $(y_1^q, \cdots, y_n^q)$ 共线时成立.

(3) **闵可夫斯基②不等式**　设 $x_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0\ (i = 1, \cdots, n)$. 那么

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, \tag{4.4.9}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p < 1, p \neq 0. \tag{4.4.10}$$

**证**　(1) 只要在 (4.4.3) 和 (4.4.4) 中置 $x = \dfrac{a}{b}$ 和 $\alpha = \dfrac{1}{p}$, 并引用记号 $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, 便可证明.

(2) 我们验证不等式 (4.4.7). 设 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p > 0, Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q > 0$. 在 (4.4.5) 中置 $a = \dfrac{x_i^p}{X}, b = \dfrac{y_i^q}{Y}$, 得到

$$\frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{Y}.$$

把这些不等式关于 $i$ 从 1 到 $n$ 加起来, 得到

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant 1,$$

这与 (4.4.7) 等价.

类似地从 (4.4.6) 得到 (4.4.8). 由于 (4.4.5) 和 (4.4.6) 中的等号仅当 $a = b$ 时成立, 所以我们判定 (4.4.7) 和 (4.4.8) 中的等号仅当 $x_i^p = \lambda y_i^q$ 或者 $y_i^q = \lambda x_i^p$ 时成立.

①赫尔德 (Hölder)(1859—1937)——德国数学家.

②闵可夫斯基 (Minkowski)(1864—1909)——德国数学家, 提出了狭义相对论的恰当的数学模型 (不定度量空间).

(3) 对恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i+y_i)^{p-1}$$

右端的两项用赫尔德不等式.

那么左端, 根据不等式 (4.4.7), (4.4.8), 相应地被量

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

从上方或从下方控制.

用 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ 去除所得的不等式之后就得到 (4.4.9) 和 (4.4.10).

由赫尔德不等式中等号成立的条件, 即可验证在闵可夫斯基不等式中等号仅当向量 $(x_1,\cdots,x_n)$, $(y_1,\cdots,y_n)$ 共线时成立. □

当 $n=3$, $p=2$ 时, 闵可夫斯基不等式 (4.4.9) 就是三维欧几里得空间中的三角形不等式.

**例 8** 再考虑一个用高阶导数求局部极值的最简单的例子. 设 $f(x)=\sin x$. 因为 $f'(x)=\cos x$ 和 $f''(x)=-\sin x$, 所以一切使 $f'(x)=\cos x=0$ 的点都是函数 $\sin x$ 的局部极值点, 因为在这些点上, $f''(x)=-\sin x\neq 0$. 并且若 $\sin x>0$ 则 $f''(x)<0$; 而若 $\sin x<0$ 则 $f''(x)>0$. 于是使 $\cos x=0$ 且 $\sin x>0$ 的点是函数的局部极大值点, 而使 $\cos x=0$ 且 $\sin x<0$ 的点是函数的局部极小值点.

### 4.4.3 函数凸的条件

**定义 1** 设 $f$ 为定义在区间 $I=(a,b)$ 上的函数, 若 $\forall x_1,x_2\in I$, 及 $\forall \alpha_1\geqslant 0,\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, 总有

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2), \tag{4.4.11}$$

则称 $f$ 为 $I$ 上的*凸函数*(又称下凸函数); 若总有

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\geqslant \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2), \tag{4.4.11'}$$

则称 $f$ 为 $I$ 上的*凹函数*(又称上凸函数). 若当 $x_1\neq x_2$, $\alpha_1\cdot\alpha_2\neq 0$ 时, (4.4.11), (4.4.11') 中的不等式改为严格不等式, 则称相应的函数为*严格凸函数*和*严格凹函数*.

**注 3** (1) 几何特性: *凸性* 意味着连接 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 的线段位于曲线的上方; *凹性*意味着该线段位于曲线的下方. 或者说, 对应于 (4.4.11), 平面

上位于函数图像上方的点的集合 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\in(a,b),f(x)<y\}$ 是凸集 (图 13).

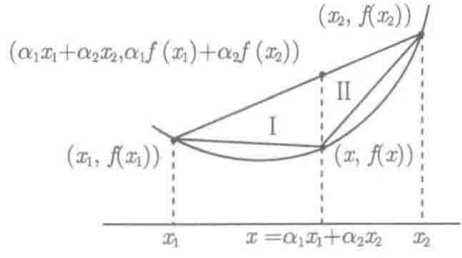


图 13

对应于 (4.4.11′), 平面上位于函数图像下方的点之集 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\in(a,b),f(x)>y\}$ 是凸集.

(2) $f$ 为 $I$ 上的凸函数 $\Leftrightarrow -f$ 为 $I$ 上的凹函数; $f$ 为 $I$ 上的严格凸函数 $\Leftrightarrow -f$ 为 $I$ 上的严格凹函数.

因下凸函数和上凸函数的进一步的构造都一样, 故我们只限于讨论 (下) 凸函数.

首先给出不等式 (4.4.11) 的另一个形式.

**引理 1**　$f$ 为 $I$ 上的凸函数 $\Leftrightarrow\forall x_1<x_2\in I, x_1\leqslant x\leqslant x_2$, 总有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{4.4.12}$$

**证**　不等式 (4.4.12) 等价于

$$f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2). \tag{4.4.12′}$$

"$\Rightarrow$" 取 $\alpha_1=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$, $\alpha_2=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, 代入 (4.4.11) 即得 (4.4.12′).

"$\Leftarrow$" 取 $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$, 联立 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 解得

$$\alpha_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\quad \alpha_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

则由 (4.4.12′) 推出 (4.4.11). □

**命题 5**　设 $f$ 在区间 $I$ 上可导, 则以下论断相互等价:

(1) $f$ 为 $I$ 上的 (严格) 凸函数.

(2) $f'$ 为 $I$ 上的 (严格) 增函数.

(3) $\forall x_1,x_2\in I$, 有

$$f(x_2)\geqslant f'(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1). \tag{4.4.13}$$

**证** (1)⇒(2) $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 取 $h > 0, x_1 - h, x_2 + h \in I$, 则 $x_1 - h < x_1 < x_2 < x_2 + h$, 由引理 1 得

$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h},$$

因 $f$ 可导, 故令 $h \to 0^+$ 得

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2).$$

(2)⇒(3) $\forall x_1, x_2 \in I$, 由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

当 $x_1 < x_2$ 时 $x_1 < \xi < x_2$, 故 $f'(\xi) \geqslant f'(x_1)$, 从而

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1).$$

当 $x_1 > x_2$ 时, 同理可证.

(3)⇒(1) $\forall x_1, x_2 \in I$, 令 $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. 由 $x_1 - x = \alpha_2(x_1 - x_2)$, $x_2 - x = \alpha_1(x_2 - x_1)$ 得

$$f(x_1) \geqslant f(x) + f'(x)(x_1 - x) = f(x) + \alpha_2 f'(x)(x_1 - x_2),$$

$$f(x_2) \geqslant f(x) + f'(x)(x_2 - x) = f(x) + \alpha_1 f'(x)(x_2 - x_1).$$

分别以 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 乘上列两式并相加, 得

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \geqslant f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

从而 $f$ 为 $I$ 上的凸函数。 □

**注 4** (1) 从推导易见, ($\forall\, x_1 < x_2$, $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$) 不等式 (4.4.13) 是严格的 $\Leftrightarrow$ $f$ 是严格凸的.

(2) 在几何方面, (4.4.13) 意味着 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 在 $(a, b)$ 上是 (下) 凸的当且仅当函数的图像的一切点都不位于此图像的任何一条切线的下方. 同时, 要使函数是严格凸的, 必须且只需图像上所有的点除了切点本身以外都严格地位于这条切线的上方.

对比命题 5 和命题 1, 得到如下推论.

**推论 1** 要使在开区间 $(a, b)$ 上有二阶导数的函数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 在这个区间上是 (下) 凸的, 必须且只需在 $(a, b)$ 上有 $f''(x) \geqslant 0$. 如果 $f''(x) > 0$ 在 $(a, b)$ 上成立的话, 那么这已充分保障函数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 是严格凸的.

**例 9**　考察 $f(x)=x^{\alpha}$ 在集合 $x>0$ 上的凸性. 由于 $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, 那么, 当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时, $f''(x)>0$, 所以对于幂指数 $\alpha$ 的这样的值, 幂函数 $x^{\alpha}$ 严格 (下) 凸. 当 $0<\alpha<1$ 时有 $f''(x)<0$, 因此, 对于这样的幂指数, 它严格上凸. 例如, 我们总把抛物线 $f(x)=x^2$ 画得向下凸. 剩下的情形 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 是平凡的: $x^0\equiv 1, x^1=x$. 在这两种情况, 函数的图像都是射线 (见图 20).

**例 10**　设 $f(x)=a^x, 0<a, a\neq 1$. 由于 $f''(x)=a^x\ln^2 a>0$, 所以, 对于任意许可的底数 $a$, 指数函数 $a^x$ 都是 $\mathbb{R}$ 上严格 (下) 凸的 (见图 14).

**例 11**　对于函数 $f(x)=\log_a x$ 有 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2\ln a}$, 因此, 当 $0<a<1$ 时, 函数严格 (下) 凸, 而当 $a>1$ 时严格上凸 (见图 15).

**例 12**　我们来研究函数 $f(x)=\sin x$ 的凸性 (见图 16).

因为 $f''(x)=-\sin x$, 所以, 在开区间 $\pi 2k<x<\pi(2k+1)$ 上 $f''(x)<0$, 而在开区间 $\pi(2k-1)<x<\pi 2k$ 上 $f''(x)>0$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$. 由此, 作为例子推出, 函数 $\sin x$ 的图像在闭区间 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 上的弧除端点外处处位于它所张的弦的上方; 因此当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

**例 13**　函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 严格凸. 直线 $y=x+1$ 是这个函数的图像在点 $(0,1)$ 处的切线, 因为 $f'(0)=\mathrm{e}^0=1$ 且 $f'(0)=\mathrm{e}^x|_{x=0}=1$. 据 (4.4.13) 断定, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x,$$

且若 $x\neq 0$, 则不等式是严格的.

**例 14**　类似地, 利用函数 $\ln x$ 的严格上凸性, 可以验证当 $x>0$ 时, 成立着不等式

$$\ln x\leqslant x-1,$$

并且当 $x\neq 1$ 时, 这个不等式是严格的.

在画函数的图像时, 把图像的 "拐点" 挑出来常常是有益的.

**定义 2**　设 $f: U(x_0)\to\mathbb{R}$ 是在 $x_0\in\mathbb{R}$ 的邻域中定义且可微的函数. 若在集

$$\mathring{U}^-(x_0)=\{x\in U(x_0)|x<x_0\}$$

上函数下 (上) 凸, 而在集

$$\mathring{U}^+(x_0)=\{x\in U(x_0)|x_0<x\}$$

上函数上 (下) 凸, 则图像的点 $(x_0, f(x_0))$ 叫做它的**拐点**.

换言之, 若曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线, 则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点 $\Leftrightarrow$ 在切点的近旁曲线在切线的两侧分别是严格凸与严格凹的.

对比命题 5 和命题 3, 容易看出拐点横坐标 $x_0$ 的分析特征. 即可以说, 若 $f$ 在点 $x_0$ 二次可微, 那么, 由于 $f'(x)$ 在点 $x_0$ 处有极值, 从而必须有 $f''(x_0)=0$.

若二阶导数 $f''(x)$ 在 $U(x_0)$ 中都有定义且在 $\mathring{U}^-(x_0)$ 中 $f''(x)$ 处处有同一符号, 但在 $\mathring{U}^+(x_0)$ 中处处有与它在 $\mathring{U}^-(x_0)$ 中相反的符号, 则这就足以使得 $f'(x)$ 在 $\mathring{U}^-(x_0)$ 中和在 $\mathring{U}^+(x_0)$ 中都是单调的, 但单调性质却不同. 那么根据命题 5, 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处图像凸的方向发生变化, 即 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点.

将上述讨论总结为如下引理.

**引理 2** (1) 设 $f$ 在点 $x_0$ 处二阶可导, 若点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0)=0$.

(2) 设 $f$ 在点 $x_0$ 处可导, 在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导. 若在某 $\mathring{U}^-(x_0)$ 与 $\mathring{U}^+(x_0)$ 上 $f''(x)$ 的符号相反, 则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

**例 15** 在例 12 中考察了函数 $f(x)=\sin x$, 求出了它的函数向上凸的区间和向下凸的区间. 现在我们证明图像上以 $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$ 为横坐标的点是拐点.

实际上, $f''(x)=-\sin x$; 当 $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$ 时,$f''(x)=0$. 此外, 当从这些点经过时 $f''(x)$ 变号, 这是拐点的充分条件 (见图 16).

**例 16** 不应该认为, 曲线在某点处从切线的一侧转到另一侧是判断此点为拐点的充分条件. 需知可以发生这样的情形, 在这点的无论是左邻域中还是右邻域中曲线都不保持确定的凸性. 例子是容易构造的, 只要把基于类似理由引入的例 5 做些改善即可.

设

$$f(x)=\begin{cases}2x^3+x^3\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

那么, 当 $0\leqslant x$ 时, $x^3\leqslant f(x)\leqslant 3x^3$, 而当 $x\leqslant 0$ 时, $3x^3\leqslant f(x)\leqslant x^3$. 因此, 函数的图像在点 $x=0$ 处与横轴相切并在这点从下半平面转到上半平面. 同时, 函数 $f(x)$ 的导数

$$f'(x)=\begin{cases}6x^2+3x^2\sin\dfrac{1}{x^2}-2\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的无论哪个半邻域中都不单调.

最后我们重新回到凸函数的定义 (4.4.11) 并证明下面的命题.

**命题 6** (詹生[①]不等式)　若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是凸函数, $x_1,\cdots,x_n$ 是开区间 $(a,b)$ 的点, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是非负实数使 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$, 则成立不等式

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n). \tag{4.4.14}$$

**证**　当 $n=2$ 时, (4.4.14) 与凸函数的定义 (4.4.11) 一样.

我们来证, 若 (4.4.14) 对于 $n=m-1$ 成立, 则它对于 $n=m$ 也成立.

为确定起见, 设在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 这组数中 $\alpha_n\neq0$. 那时,

$$\beta=\alpha_2+\cdots+\alpha_n>0 \text{ 且 } \frac{\alpha_2}{\beta}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta}=1.$$

用函数的凸性, 由于

$$\alpha_1+\beta=1 \quad \text{和} \quad \left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\in(a,b),$$

得

$$\begin{aligned}f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)&=f\left(\alpha_1x_1+\beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\right)\\&\leqslant\alpha_1f(x_1)+\beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right).\end{aligned}$$

其次, 按归纳假定

$$f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\leqslant\frac{\alpha_2}{\beta}f(x_2)+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta}f(x_n).$$

因此

$$\begin{aligned}f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)&\leqslant\alpha_1f(x_1)+\beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\\&\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n).\end{aligned}$$

根据归纳法原理断定, (4.4.14) 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$ 成立 (对于 $n=1$, (4.4.14) 是平凡的). □

我们指出, 如同在证明中见到的, 严格凸性对应于严格詹生不等式, 亦即, 若数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 异于零, 则 (4.4.14) 中的等号当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时成立.

当然, 对于上凸函数得到的是与不等式 (4.4.14) 相反的不等式

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\geqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n). \tag{4.4.15}$$

**例 17**　函数 $f(x)=\ln x$ 在正数集上严格上凸, 因此根据 (4.4.15), 对于 $x_i\geqslant$

①詹生 (Jensen)(1859—1925)——丹麦数学家.

$0, \alpha_i \geqslant 0 (i = 1, \cdots, n)$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,

$$\alpha_1 \ln x_1 + \cdots + \alpha_n \ln x_n \leqslant \ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

或

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{4.4.16}$$

特别地, 若 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, 则得到一个非负实数的几何平均值与算术平均值之间的经典不等式

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \tag{4.4.17}$$

在 (4.4.17) 中, 像前面曾指出的那样, 等号仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时成立. 如若在 (4.4.16) 中置 $n = 2, \alpha_1 = \dfrac{1}{p}, \alpha_2 = \dfrac{1}{q}, x_1 = a, x_2 = b$, 则将再次得到我们已经知道的不等式 (4.4.5).

**例 18** 设 $f(x) = x^p, x \geqslant 0, p > 1$. 由于这样的函数是凸的, 所以有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p.$$

于此置

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad \alpha_i = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}, \quad x_i = \frac{\alpha_i \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}{b_i^{\frac{1}{p-1}}},$$

就再次得到赫尔德不等式 (4.4.7)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 且 $p > 1$.

当 $p < 1$ 时, 函数 $f(x) = x^p$ 是上凸的, 因此, 经类似的讨论就可得到另一个赫尔德不等式 (4.4.8).

### 4.4.4 洛必达法则

现在我们来研究求函数之比的极限的一个特殊而有效的方法 —— 洛必达[①]法则.

①洛必达 (L' Hospital) (1661—1704)——法国数学家, 约翰 · 伯努利的高材生, 侯爵约翰 · 伯努利于 1691—1692 年为他写了第一本分析学教科书. 洛必达将书中关于微分学的部分以稍微不同的形式用自己的名义发表. 因此, 我们把 "洛必达法则" 归功于约翰 · 伯努利.

**命题 7** (洛必达法则)　设函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 和 $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在开区间 $(a,b)$ 上可微 $(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$, 并且在 $(a,b)$ 上 $g'(x)\neq 0$ 且

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}\to A,\quad x\to a+0,-\infty\leqslant A\leqslant+\infty.$$

那么, 只要下面两种情况有一种成立, 就有

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to A,\quad x\to a+0.$$

这两种情况是: 当 $x\to a+0$ 时,

(1) $(f(x)\to 0)\wedge(g(x)\to 0)$.

(2) $g(x)\to\infty$.

当 $x\to b-0$ 时类似的结论也成立.

简单 (但不十分确切) 地叙述洛必达法则为: *函数之比的极限等于它们的导数的比的极限, 只要后者存在.*

**证**　这里针对 $A,a\in\mathbb{R}$ 证之. 其他的可类似地加以证明.

考虑 (1). 补充定义 $f(a)=g(a)=0$, 则 $f,g$ 在 $a$ 连续. $\forall x\in(a,b)$, 在区间 $[a,x]$ 上应用柯西中值定理, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\text{ 介于 }a\text{ 与 }x\text{ 之间}.$$

当令 $x\to a+0$ 时, 也有 $\xi\to a+0$, 故得结论.

考虑 (2). $\forall\varepsilon>0,\exists x_1>a$ 使得

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\frac{\varepsilon}{2},\quad\forall x\in(a,x_1].$$

对 $f,g$ 在 $[x,x_1]$ 上应用柯西中值定理知, $\exists\xi\in(x,x_1)$ 使得

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 (2) 知

$$\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}=1.$$

由保号性, $\exists 0<\delta_1<x_1-a$ 使得

$$\frac{1}{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}>0,\quad\forall x\in(a,a+\delta_1),$$

于是

$$\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)}<\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

即

$$\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}.$$

从而,

$$\lim_{x\to a+0}\left(\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{x\to a+0}\left(\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, $\exists 0<\delta<\delta_1$ 使得

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon,\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

这就证明了

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

□

**注 5** (1) 常称命题 7 中的 (1) 为 $\frac{0}{0}$ 形式, (2) 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式. 其他形如: $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$ 等的不定式可转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 并不能说明 $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在; 不能对任何比式极限都按洛必达法则求解. 首先必须注意它是不是不定式极限, 是否满足洛必达法则的其他条件.

**例 19** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$

不应认为这是证明当 $x\to 0$ 时有 $\frac{\sin x}{x}\to 1$ 的一个新方法. 问题在于, 譬如说, 在导出关系式 $\sin' x=\cos x$ 时, 我们就已经应用了这里要计算的极限.

**例 20** 设 $f(x)=\cos x, g(x)=\sin x$. 那么 $f'(x)=-\sin x, g'(x)=\cos x$. 从而, 当 $x\to+0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)}\to+\infty$, 同时当 $x\to+0$ 时, $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to 0$.

**例 21** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$ 当 $\alpha>0$.

**例 22**　当 $a>1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\ln x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^{x}\ln^{n}a}=0.$$

这是因为当 $n>\alpha$ 时, 若 $x\to+\infty$, 由于 $a>1$ 时, 则显然有 $\dfrac{x^{\alpha-n}}{a^{x}}\to 0$. 我们看到, 最后这串等式直到我们得到可求其极限的表达式为止, 其中的每个比式都具有所要求的性质.

### 4.4.5　作函数的图像

为了直观地描述函数, 常常用到它的图像表示. 特别在讨论函数性状的定性问题时, 这种图像表示是很有用处的. 不过人们极少用图像来做精确的计算. 因此, 实践中重要的是做出能正确反映函数性状基本特征的函数图像草图.

1. *初等函数的图像*

首先我们要注意基本初等函数的图像是什么样子, 自如地掌握这些图像对于以后是必须的 (图 14–图 20).

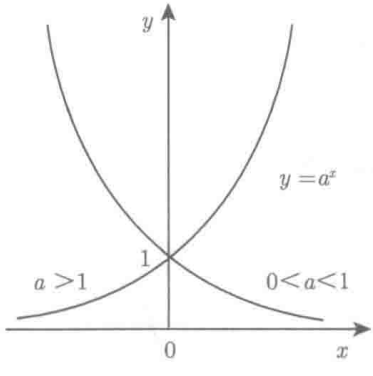


图 14

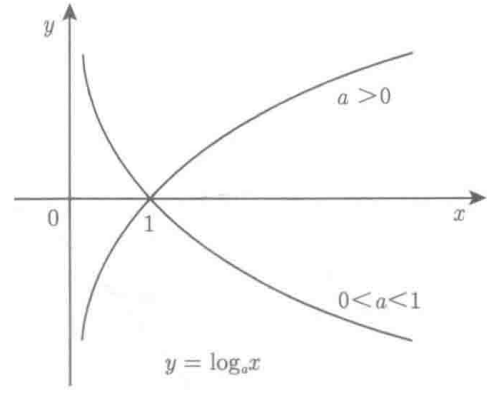


图 15

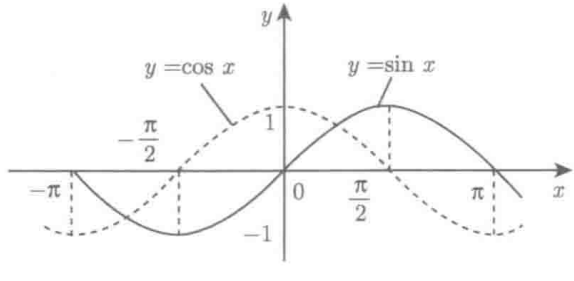


图 16

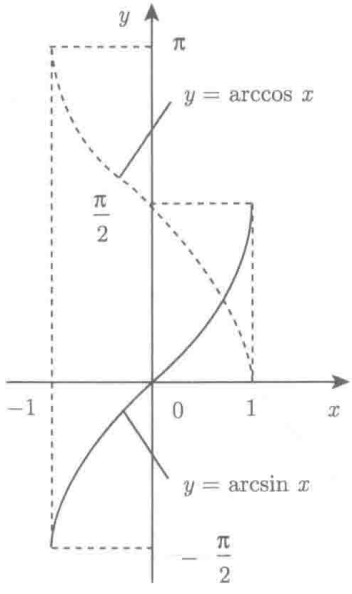


图 17

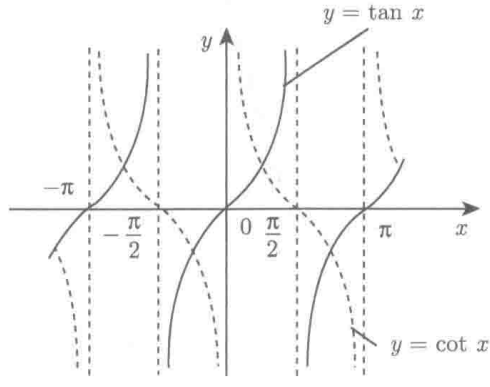


图 18

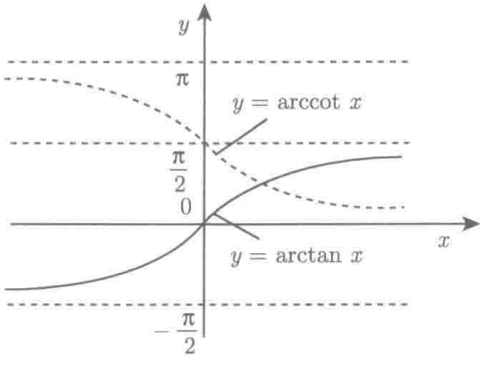


图 19

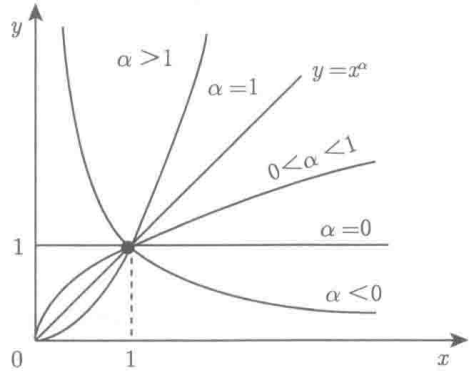


图 20

2. *微分学应用于函数的图像*

渐近线在研究函数图像时很有用.

**定义 3** 直线 $y = c_0 + c_1 x$ 叫做当 $x \to -\infty$(当 $x \to +\infty$) 时函数 $y = f(x)$ 的图像的渐近线, 如果当 $x \to -\infty$(当 $x \to +\infty$) 时 $f(x) - (c_0 + c_1 x) = o(1)$.

当所研究的函数的导数不十分复杂的时候, 可用微分学的工具大致画出很多函数的图像.

作函数图像的一般程序如下.

(1) 指出函数的定义域.

(2) 记下函数的明显特性 (例如, 偶性、奇性、周期性, 其图像经过最简单的坐标变换与已知函数图像重合).

(3) 查明函数在趋向定义域的边界点时的渐近性状, 特别地, 如果有渐近线的话, 把渐近线求出来.

(4) 求出函数单调的区间并标出函数的局部极值点.

(5) 明确表出图像的凸性特征并标出拐点.

(6) 标出图像的特殊点, 尤其是与坐标轴的交点, 若这样的点存在且能算出的话.

我们通过例子来示范.

**例 23**　讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的性态, 并作出其图像.

**解**　由于

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}=\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x+1},$$

可见此曲线与坐标轴交于 $(1,0),(-1,0),(0,1)$ 三点.

求出导数:

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{x+\dfrac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

由此得到稳定点$x=-\dfrac{1}{3}$, 不可导点 $x=\pm1$. 但因函数在 $x=\pm1$ 处连续, $y'|_{x=\pm1}=\infty$, 所以在 $x=\pm1$ 处有垂直切线.

再求二阶导数, 可得

$$f''(x)=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}}.$$

下面列表表示 $f'(x)$ 的变号区间 ($f(x)$ 的单调区间) 和 $f''(x)$ 的变号区间 (即凸性区间), 并说明函数的性态.

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ | $-\frac{1}{3}$ | $\left(-\frac{1}{3},1\right)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\infty$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | 不存在 | $-$ | $-$ | $-$ | 不存在 | $-$ |
| $f(x)$ | 凸增 ↗ | 拐点 $(-1,0)$ | 凹增 ↗ | 极大值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ | 凹减 ↘ | 极小值 0 | 凹增 ↗ |

另外, 曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 有渐近线

$$y=x-\frac{1}{3}.$$

这样我们就可以作出函数的图像 (图 21).

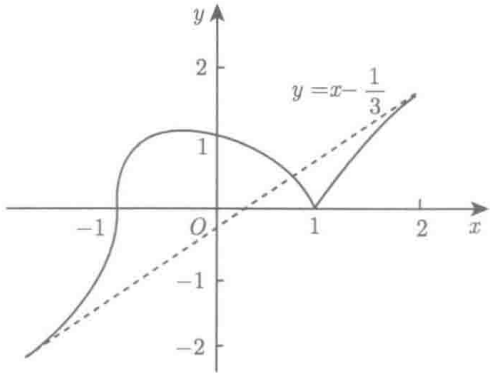


图 21

## 练　习

1. 应用函数的单调性证明下列不等式.

(1) $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. 求下列不定式极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x - 6}{\sec x + 5}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to +0} \sin x \ln x$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

(8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. 求下列函数的极值.

(1) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(2) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

4. 求下列函数在给定区间上的最大、最小值.

(1) $f(x) = 2\tan x - \tan^2 x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, $(0, +\infty)$.

5. 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短.

6. 证明:

(1) 若 $f$ 为凸函数, $\lambda$ 为非负实数, 则 $\lambda f$ 为凸函数.

(2) 若 $f, g$ 均为凸函数, 则 $f+g$ 为凸函数.

(3) 若 $f$ 为区间 $I$ 上凸函数, $g$ 为 $J \supset f(I)$ 上凸增函数, 则 $g \circ f$ 为 $I$ 上凸函数.

7. 设 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 且对于 $i=1,2, \cdots, n, x_i>0$, $\alpha_i>0$, 还有 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i=1$. 对于任意的数 $t \neq 0$, 我们考察数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 加权的 $t$ 阶平均

$$M_t(x, \alpha)=\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}}.$$

特别地, 当 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ 且 $t=-1,1,2$ 时, 分别得到调和平均、算术平均及二阶平均.

证明:

(1) $\lim\limits_{t \to 0} M_t(x, \alpha)=x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}$, 即几何平均可以作为极限而得到.

(2) $\lim\limits_{t \to +\infty} M_t(x, \alpha)=\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$.

(3) $\lim\limits_{t \to -\infty} M_t(x, \alpha)=\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$.

(4) $M_t(x, \alpha)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是 $t$ 的非减函数 ($M_0$ 由 (1) 中极限定义), 并且若 $n>1$, 所有的 $x_i$ 不同为一数, 则 $M_t(x, \alpha)$ 是严格递增的.

8. 证明:

$$|1+x|^p \geqslant 1+px+c_p \varphi_p(x),$$

其中 $c_p$ 是只依赖于 $p$ 的正的常数, 而当 $1<p \leqslant 2$ 时,

$$\varphi_p(x)=\begin{cases} |x|^2, & |x| \leqslant 1, \\ |x|^p, & |x|>1. \end{cases}$$

当 $2<p$ 时, 在 $\mathbb{R}$ 上 $\varphi_p(x)=|x|^p$.

9. 验证: 当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\cos x<\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3$.

10. 研究函数 $f(x)$ 并做出它的图像.

(1) $f(x)=\arctan \log_2 \cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(2) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{3}{2}-\sin x\right)$.

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x(x+3)^2}$.

(4) 做出在极坐标系中由方程 $\varphi=\dfrac{\rho}{\rho^2+1}$, $\rho \geqslant 0$ 给定的曲线, 并标出它的渐近线.

(5) 指出在知道了函数 $y=f(x)$ 的图像之后怎样得到函数 $f(x)+B$, $Af(x)$, $f(x+b)$, $f(ax)$, 特别是 $-f(x)$ 和 $f(-x)$ 的图像.

11. 证明：如果 $f \in C((a,b))$ 且对于任意的点 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 成立不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么，函数 $f$ 在 $(a,b)$ 上是凸的.

12. 证明：

(1) 若凸函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有界，则它是常值函数.

(2) 若对于凸函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0,$$

则 $f$ 是常值函数.

(3) 对于定义在区间 $a<x<+\infty$(或 $-\infty<x<a$) 上的任意的凸函数 $f$，比值 $\dfrac{f(x)}{x}$ 当 $x$ 沿着函数的定义域趋于无穷时趋于有限极限或趋于无穷.

13. 证明：若 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是凸函数，则

(1) 在任意点 $x\in(a,b)$ 处，它有左导数 $f'_-$ 和右导数 $f'_-$：

$$f'_-(x) = \lim_{h\to-0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

并且 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.

(2) 当 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 且 $x_1<x_2$ 时成立不等式 $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x)$.

(3) $f(x)$ 的图像的角点 (使 $f'_-(x) \neq f'_+(x)$ 的点) 是至多可数集.

14. 曲线在一点处的曲率、曲率半径和曲率中心. 设有一点在平面上运动. 其运动规律由一对关于时间二次可微的坐标函数 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 确定. 这时它描画出一条曲线，对此，我们说这条曲线是以参数形式 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 给定的. 由函数 $y=f(x)$ 的图像给出曲线的情形只是一种特殊参数形式，此时，可以认为 $x=t$ 而 $y=f(t)$. 我们想指出一个刻画曲线在一点处的弯曲程度的数，就像圆半径的倒数可以作为圆周弯曲程度的指标. 我们下边使用的正是这个对比.

(1) 求出点的加速度向量 $\boldsymbol{a}(t)=(\ddot{x}(t),\ddot{y}(t))$ 的切向分量 $\boldsymbol{a}_t$ 和法向分量 $\boldsymbol{a}_n$，即把 $\boldsymbol{a}$ 表成和式 $\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n$，其中向量 $\boldsymbol{a}_t$ 与速度向量 $\boldsymbol{v}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ 共线，也就是说，它的方向是沿轨迹切线的，而向量 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向是沿轨迹的法向的.

(2) 证明：当沿着半径为 $r$ 的圆周运动时成立关系式

$$r = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|}{|\boldsymbol{a}_n(t)|}.$$

(3) 当沿着任意的曲线运动时，考虑到 (2)，自然把量

$$r(t) = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|}{|\boldsymbol{a}_n(t)|}$$

叫做曲线在点 $(x(t),y(t))$ 处的曲率半径.

证明: 曲率半径按公式

$$r(t)=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}$$

来计算.

(4) 平面曲线在给定点 $(x(t),y(t))$ 处的曲率半径的倒数叫做绝对曲率. 与绝对曲率一道, 还考虑量

$$k(t)=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

这个量叫做曲率.

证明: 曲率的符号表示曲线相对切线旋转的方向. 分析曲率有怎样的量纲.

(5) 证明: 函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $(x,f(x))$ 处的曲率可按公式

$$k(x)=\frac{y''(x)}{[1+(y')^2(x)]^{\frac{3}{2}}}$$

来计算. 研究 $k(x)$ 的符号, 亦即 $y''(x)$ 的符号与图像凸的方向的对应关系.

(6) 选择常数 $a$, $b$, $R$ 使得圆周 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 与一条确定的以参数形式给出的曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 在点 $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$ 处以尽可能高的阶数相切. 假定 $x(t)$, $y(t)$ 二次可微且 $(\dot{x}(t_0),\dot{y}(t_0))\neq(0,0)$.

上述圆周叫做曲线在点 $(x_0,y_0)$ 处的密切圆周. 它的中心叫做曲线在点 $(x_0,y_0)$ 处的曲率中心. 验证它的半径与在 (3) 中定义的在这点处曲线的曲率半径相同.

(7) 静止的质点在重力作用下从具抛物形剖面的冰山顶上开始下滑, 剖面方程是 $x+y^2=l$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. 计算质点落地前的运动轨道.

## 4.5　复数　初等函数彼此间的联系

### 4.5.1　复数

与在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中代数方程 $x^2=2$ 没有解类似, 在实数域 $\mathbb{R}$ 中方程 $x^2=-1$ 也没有解. 同样类似的是, 我们引入了 $\mathbb{Q}$ 范围以外的符号 $\sqrt{2}$ 作为方程 $x^2=2$ 的解, 使它适合于 $\mathbb{Q}$ 中的运算, 并得到形如 $r_1+\sqrt{2}r_2$ 的新数, 其中 $r_1$, $r_2\in\mathbb{Q}$. 与此类似, 也可以引入符号 i 作为方程 $x^2=-1$ 的解, 并把这个 $\mathbb{R}$ 范围之外的数 i 和实数以及 $\mathbb{R}$ 中的算术运算联系起来.

实数域 $\mathbb{R}$ 的上述扩充有很多好处, 其中最大的优点是, 在所得的复数域 $\mathbb{C}$ 中, 任何实系数或复系数的代数方程再也不会没有解了.

1. 域 $\mathbb{R}$ 的代数扩充

(1) 虚单位 i: 满足 $\mathrm{i}^2=-1$ 的数.

(2) 复数: 形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数, 并分别称 $\Re z:=x$, $\Im z:=y$ 为 $z$ 的实部、虚部.

(3) 共轭复数: $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $\bar{z}:=x-\mathrm{i}y$ 称为互为共轭复数.

(4) **相等**: 称 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等, 如果 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

(5) **复数集** $\mathbb{C}$: 全体复数组成的集合, 即 $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y | x, y \in \mathbb{R}\}$.

(6) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: 视实数 $r \in \mathbb{R}$ 为复数 $r + \mathrm{i} \cdot 0$, 则 $\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{C}$ 的一部分 (子集).

**在复数集 $\mathbb{C}$ 中引入算术运算** 1) **复数加 (减) 法**: 定义为实部与实部相加 (减), 虚部与虚部相加 (减), 即

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2).$$

复数的加法遵守交换律与结合律, 而且减法是加法的逆运算.

2) **复数相乘**: 按多项式乘法法则进行, 即

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

称其为 $z_1$ 与 $z_2$ 的积. 易验证, 复数的乘法遵守交换律与结合律, 且遵守乘法对于加法的分配律.

3) **复数相除**: $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

称其为 $z_1$ 与 $z_2$ 的商. 除法是乘法的逆运算.

**引进上述运算后, $\mathbb{C}$ 成一个域, 称为复数域. 在复数域内**, 我们熟知的一切代数恒等式仍然成立, 如

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

与实数域不同, 在复数域中不能规定复数像实数那样的大小关系.

2. **域 $\mathbb{C}$ 的几何解释**

我们可以把复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与有序实数对 $(x, y)$ 等同起来, 换言之, 视 $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 即平面上的二维向量. 在这种向量解释中, 复数的依坐标的加法对应于向量的加法法则. 如是, 复数 $z$ 的**模** $|z|$ 就自然地定义为对应的向量 $(x, y)$ 的模或长度:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall\, z = x + \mathrm{i}y.$$

同样地, 也引导出以复数 $z_1$, $z_2$ 对应的平面上两点的距离作为这两个数之间的距离:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{4.5.1}$$

复数的集合, 解释作平面的点的集合, 叫做**复平面**, 仍用符号 $\mathbb{C}$ 表示.

因为平面的点还可以通过极坐标 $(r,\varphi)$ 给出, 极坐标 $(r,\varphi)$ 与笛卡儿坐标经变换公式

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi$$

相联系, 所以复数的*代数形式*:

$$z = x + \mathrm{i}y, \tag{4.5.2}$$

也可以表示成复数的*三角形式*:

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi). \tag{4.5.3}$$

在表示 (4.5.3) 中, 数 $r \geqslant 0$ 是 $z$ 的*模*, 而 $\varphi$ 叫做数 $z$ 的*辐角*. 辐角只当 $z \neq 0$ 时有意义. 根据函数 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 的周期性, 如果 $\varphi$ 是 $z$ 的辐角, 则 $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, 都是 $z$ 的幅角. 用符号

$$\arg z := \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};\ \text{其中 } \varphi \text{ 是某个满足关系式 (4.5.3) 的角度}\}$$

表示 $z$ 的所有辐角的集合. 要想使复数 $z \Longleftrightarrow$ 单值地确定某个辐角 $\psi \in \arg z$, 那就要预先说定辐角的取值的范围. 最常见的是取半开区间 $0 \leqslant \psi < 2\pi$ 或 $-\pi < \psi \leqslant \pi$ 来做这个限制范围. 如果做好了这样的选择, 就说选定了辐角的*分支*(或*主支*). 在选定的范围内, 辐角的值通常用 $\arg z$ 来表示.

三角公式 (4.5.3) 适合于做复数的乘法运算. 事实上, 若

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2),$$

则

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 =& (r_1\cos\varphi_1 + \mathrm{i}r_1\sin\varphi_1)(r_2\cos\varphi_2 + \mathrm{i}r_2\sin\varphi_2) \\ =& (r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &+ \mathrm{i}(r_1r_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + r_1r_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2), \end{aligned}$$

即

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{4.5.4}$$

于是, *当复数相乘时, 它们的模相乘而辐角相加*. 特别地, $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

我们实际上证明了, 若 $\varphi_1 \in \arg z_1$ 且 $\varphi_2 \in \arg z_2$, 则 $(\varphi_1 + \varphi_2) \in \arg(z_1 \cdot z_2)$. 但由于辐角之确定精确到 $2\pi k$, 所以有

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \tag{4.5.5}$$

这是一个集合等式, 右边是形如 $\varphi_1+\varphi_2$ 的数的全体, 其中 $\varphi_1\in\arg z_1$, $\varphi_2\in\arg z_2$. 因此, 按等式 (4.5.5) 的意义来理解辐角的和是有效的. 当如此理解辐角的等式的时候, 可以作出这样的断语: **两个复数相等当且仅当它们的模和辐角分别相等.**

从公式 (4.5.4) 按归纳法, 可以推出下列棣莫弗[①] 公式: 若 $z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, 则

$$\boxed{z^n=r^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)}. \tag{4.5.6}$$

可以用棣莫弗公式写出方程 $z^n=a$ 的全部复数解. 实际上, 如果

$$a=\rho(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi),$$

则据公式 (4.5.6) 知 $r=\sqrt[n]{\rho}$ 且 $n\varphi=\psi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, 由此 $\varphi_k=\dfrac{\psi}{n}+\dfrac{2\pi}{n}k$. 显然, 仅当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时得到不同的复数. 于是, 我们求得复数 $a$ 的 $n$ 个不同的根:

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

特别地, 若 $a=1$ 即 $\rho=1$ 且 $\psi=0$, 则有

$$z_k=\sqrt[n]{1}=\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这些点位于单位圆周上, 构成正 $n$ 角形的顶点.

与复数本身的几何解释相关, 特提一下:

(1) 对于固定的 $b\in\mathbb{C}$, 和式 $z+b$ 可以解释作由公式 $z\mapsto z+b$ 给出的 $\mathbb{C}$ 到自身的映射. 它是平面上平移向量 $b$ 的运算.

(2) 对于固定的 $a=|a|(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, 积 $a\cdot z$ 可以解释为 $\mathbb{C}$ 到自身的映射 $z\mapsto a\cdot z$. 它是伸长到 $|a|$ 倍并旋转一个角度 $\varphi\in\arg a$ 的复合. 这可从公式 (4.5.4) 看出来.

### 4.5.2 $\mathbb{C}$ 中的收敛及复数项级数

利用距离 (4.5.1) 把 $z_0\in\mathbb{C}$ 的 $\varepsilon$ 邻域定义为集合

$$\{z\in\mathbb{C}\mid|z-z_0|<\varepsilon\}.$$

如果 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 的话, 这个集合就是一个以点 $(x_0,y_0)$ 为中心以 $\varepsilon$ 为半径的 (不包括圆周的) 圆.

我们说复数序列 $\{z_n\}$ 收敛到 $z_0\in\mathbb{C}$ 指的是

$$\lim_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0.$$

①棣莫弗 (Abraham de Moivre)(1667—1754)——英国数学家, 生于法国.

复数序列收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的项的实部的序列和虚部的序列都收敛, 这从如下不等式可见:

$$\max\{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\} \leqslant |z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|, \tag{4.5.7}$$

其中第二个不等式由闵可夫斯基不等式推得.

与实数列的情形类似, 复数序列 $\{z_n\}$ 叫做**基本列或柯西列**, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使当 $m, n > N$ 时, $|z_m - z_n| < \varepsilon$ 成立. 从不等式 (4.5.7) 看到, 复数列是基本的 $\Longleftrightarrow$ 数列的项的实部列和虚部列都是基本的. 考虑到实数列的柯西准则, 我们根据 (4.5.7) 断定成立如下.

**命题 1** (柯西准则)　复数列收敛当且仅当它是基本列.

考虑复数级数 (即项为复数的级数):

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots. \tag{4.5.8}$$

定义它的部分和序列为 $S_n = z_1 + \cdots + z_n$. 若当 $n \to \infty$ 时, $\{S_n\}$ 有极限, 则称 (4.5.8) 收敛, 并称此极限为 (4.5.8) 的和. 于是得到复数级数收敛的柯西准则.

**命题 2**　级数 (4.5.8) 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得对于任意 $n > m > N$, 有

$$|z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n| < \varepsilon. \tag{4.5.9}$$

由此看出, 要使级数收敛, 必须当 $n \to \infty$ 时 $z_n \to 0$ (必要条件).

与实的情形一样, 级数 (4.5.8) 叫做**绝对收敛的**, 如果下述 (模) 级数收敛:

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots. \tag{4.5.10}$$

从柯西准则与不等式

$$|z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n| \leqslant |z_m| + |z_{m+1}| + \cdots + |z_n|, \quad m < n \tag{4.5.11}$$

推出, 若级数 (4.5.8) 绝对收敛, 则它收敛.

例如, 级数

(1) $1 + \dfrac{1}{1!}z + \dfrac{1}{2!}z^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}z^n + \cdots$;

(2) $z - \dfrac{1}{3!}z^3 + \dfrac{1}{5!}z^5 - \cdots$;

(3) $1 - \dfrac{1}{2!}z^2 + \dfrac{1}{4!}z^4 - \cdots$.

对于任意的 $z \in \mathbb{C}$ 都绝对收敛, 因为我们已经知道级数

(1′) $1 + \dfrac{1}{1!}|z| + \dfrac{1}{2!}|z|^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}|z|^n + \cdots$;

$(2')\ |z|+\dfrac{1}{3!}|z|^3+\dfrac{1}{5!}|z|^5+\cdots;$

$(3')\ 1+\dfrac{1}{2!}|z|^2+\dfrac{1}{4!}|z|^4+\cdots,$

对于任意的 $|z|\in\mathbb{R}$ 都收敛. 我们指出, 此处使用了等式 $|z|^n=|z^n|$.

**例 1** 级数 $1+z+z^2+\cdots$ 当 $|z|<1$ 时绝对收敛, 且它的和等于 $s=\dfrac{1}{1-z}$. 当 $|z|\geqslant 1$ 时它不收敛, 因为此时级数的一般项不趋于零.

形如

$$c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \tag{4.5.12}$$

的级数叫做**幂级数**.

应用柯西判别法于级数

$$|c_0|+|c_1(z-z_0)|+\cdots+|c_n(z-z_0)^n|+\cdots, \tag{4.5.13}$$

我们断定, 当

$$|z-z_0|<\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$$

时, 级数收敛, 当 $|z-z_0|>\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$ 时它的一般项不趋于零. 称数

$$R=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1} \tag{4.5.14}$$

为幂级数 (4.5.12) 的**收敛半径**.

由此得到如下命题.

**命题 3** (柯西–阿达马[①]公式) 幂级数 (4.5.12) 在以点 $z_0$ 为中心以 $R$ 为半径的圆 $|z-z_0|<R$ 内收敛; 在这个圆的任何点 (内点) 处都绝对收敛; 在这个圆的外部的任何点处都发散.

**注 1** 关于在周界 $|z-z_0|=R$ 上的收敛性, 命题 3 一无所述, 因为此处一切逻辑上容许的情况都可能发生.

例如, 级数

$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty}z^n,\quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n,\quad (7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n$$

都在单位圆 $|z|<1$ 中收敛. 但级数 (5) 在 $|z|=1$ 上处处发散; 级数 (6) 当 $z=1$ 时发散而当 $z=-1$ 时可以证明是收敛的; 级数 (7) 当 $|z|=1$ 时绝对收敛, 因为 $\left|\dfrac{1}{n^2}z^n\right|=\dfrac{1}{n^2}$.

①阿达马 (Hadamard)(1865—1963)——著名的法国数学家.

应该注意到在命题 3 的叙述中未加考虑但可能蜕化的情形, 即在公式 (4.5.14) 中 $R=0$ 的情形, 此时, 整个收敛圆 蜕化成级数 (4.5.12) 的唯一的收敛点$z_0$.

从命题 3 显然得到如下推论.

**推论 1** (关于幂级数的阿贝尔第一定理)　若幂级数 (4.5.12) 对于某个值 $z^*$ 收敛, 则它对于任意满足 $|z-z_0|<|z^*-z_0|$ 的 $z$ 都绝对收敛.

**证**　事实上, $\sum c_n(z^*-z_0)^n$ 收敛 $\Longrightarrow |z^*-z_0|\leqslant R$, 从而当 $|z-z_0|<|z^*-z_0|(\leqslant R)$ 时, $\sum c_n(z-z_0)^n$ 绝对收敛. □

目前得到的这些命题都可看作是我们已经知道的事实的简单推广. 现在我们来证明两个关于级数的一般的命题. 这两个命题我们以前不曾以任何形式论证过, 虽然曾部分地讨论过它们所涉及的问题.

**命题 4**　若复数级数 $z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$ 绝对收敛, 则重排它的项所得的级数 $z_{m_1}+z_{m_2}+\cdots+z_{m_k}+\cdots$ ① 同样绝对收敛, 且收敛到同一个和.

**证**　考虑到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 的收敛性, 对于数 $\varepsilon>0$, 我们找到号码 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|<\varepsilon.$$

另外, 找得到号码 $K\in\mathbb{N}$, 使当 $k>K$ 时, 在和式 $\tilde{s}_k=a_{n_1}+\cdots+a_{n_k}$ 的加数中包含着和式 $s_N=a_1+\cdots+a_N$ 的所有的加数. 如果 $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$, 那么, 我们得到当 $k>K$ 时

$$|s-\tilde{s}_k|\leqslant|s-s_N|+|s_N-\tilde{s}_k|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|<2\varepsilon.$$

这样就证明了当 $k\to\infty$ 时, $\tilde{s}_k\to s$. 若应用已证之事于级数 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|+\cdots$ 及级数 $|z_{m_1}|+|z_{m_2}|+\cdots+|z_{m_k}|+\cdots$, 则得知后一级数收敛. 这就完全证明了命题 4. □

下一个命题是关于级数的乘积

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots)(b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots)$$

的. 问题在于, 由此产生一切可能的两两乘积之集合 $\{a_jb_k\}$, 没有一个自然的求和次序, 不同的次序可能产生不同的和. 但在绝对收敛条件下, 则有下述结果.

①第二个级数号码为 $k$ 的项 (第 $k$ 项) 是原来级数的号码为 $m_k$ 的项. 映射 $\mathbb{N}\ni k\mapsto m_k\in\mathbb{N}$ 假定是自然数集 $\mathbb{N}$ 到自身的满单射.

**命题 5** 绝对收敛级数的乘积是绝对收敛的, 它的和等于作为乘数的级数的和的乘积.

**证** 先指出, 对任意一个其项形如 $a_ib_j$ 的有限和 $\sum a_ib_j$, 令 $I, J$ 分别记和式中 $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ 的最大指标, 对任何 $\max\{I, J\} \leqslant N \in \mathbb{N}$, 及

$$A_N = a_1 + \cdots + a_N \text{与} B_N = b_1 + \cdots + b_N,$$

$$\left|\sum a_ib_j\right| \leqslant \sum |a_ib_j| \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} |a_ib_j| = \sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{N} |b_j| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|,$$

由此推出级数 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_ib_j$ 的绝对收敛性, 从而由命题 4, 它的和是单值确定的, 与被加项的次序无关. 例如, 可以用和 $A_n = a_1+\cdots+a_n$, $B_n = b_1+\cdots+b_n$ 的乘积当 $n \to \infty$ 时的极限来得到它. 但当 $n \to \infty$ 时, $A_n \cdot B_n \to AB$ 其中 $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 这样就完成了命题 5 的证明. □

举一个重要的例子.

**例 2** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}a^n$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}b^m$ 都绝对收敛. 在计算这两个级数的积时, 我们把幂指数的和 $m+n$ 等于 $k$ 的项并在一起, 就得到级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n+m=k} \frac{1}{n!}a^n \cdot \frac{1}{m!}b^m \right).$$

然而

$$\boxed{\sum_{n+m=k} \frac{1}{n!m!}a^n \cdot b^m = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!}a^n b^{k-n} = \frac{1}{k!}(a+b)^k},$$

所以我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}a^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}b^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(a+b)^k. \tag{4.5.15}$$

### 4.5.3 欧拉[①] 公式以及初等函数彼此间的联系

函数 $\mathrm{e}^z$, $\sin z$, $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 中的定义如下:

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \exp z := 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots}, \tag{4.5.16}$$

①欧拉 (Euler)(1707—1783)——卓越的数学家和力学家, 按族系说是瑞士人, 一生大部分时间住在彼得堡. 按拉普拉斯的说法, "欧拉是 18 世纪后半叶全体数学家共同的导师".

$$\cos z := 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots, \tag{4.5.17}$$

$$\sin z := \frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots. \tag{4.5.18}$$

遵循欧拉的办法, 在 (4.5.16) 中代入 $z = \mathrm{i}y$, 以适当的方式把此时所得级数的部分和的被加项分组, 求得

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{1!}(\mathrm{i}y) + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}y)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}y)^3 + \frac{1}{4!}(\mathrm{i}y)^4 + \frac{1}{5!}(\mathrm{i}y)^5 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{1!}y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots\right), \end{aligned}$$

从而得到著名的**欧拉公式**:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y}. \tag{4.5.19}$$

在推导中我们用到了 $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$ 等. 在公式 (4.5.19) 中, 数 $y$ 既可以是实数也可以是任意的复数.

从定义 (4.5.17), (4.5.18) 见到

$$\cos(-z) = \cos z,$$

$$\sin(-z) = -\sin z.$$

即 $\cos z$ 是偶函数, $\sin z$ 是奇函数. 此外, 易见

$$\boxed{\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})}. \tag{4.5.20}$$

这样一来, 如果设 $\exp z$ 由关系式 (4.5.16) 确定, 则公式 (4.5.20) 等价于展开式 (4.5.17), (4.5.18). 另, 公式

$$\boxed{\cosh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z})} \tag{4.5.21}$$

相应地可以取作圆函数和双曲函数的定义. 从这些定义可以完全从逻辑上得出圆函数和双曲函数的性质. 例如, 基本恒等式

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

以及函数的奇偶性, 都可直接验证. 更深刻的性质, 如像和的余弦及正弦的公式, 可以从指数函数的特征性质

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2 \tag{4.5.22}$$

推出, 性质 (4.5.22) 显然可从定义 (4.5.16) 及公式 (4.5.15) 得出.

我们来推导和的余弦及正弦的公式. 一方面按欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} = \cos(z_1+z_2) + \mathrm{i}\sin(z_1+z_2); \tag{4.5.23}$$

另一方面, 按指数函数的性质及欧拉公式有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} = (\cos z_1 + \mathrm{i}\sin z_1)(\cos z_2 + \mathrm{i}\sin z_2)\\ &= (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2) + \mathrm{i}(\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2).\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

如果 $z_1$, $z_2$ 都是实数, 那么, 使公式 (4.5.23) 和 (4.5.24) 中的数的实部、虚部分别相等, 我们就得到所求的公式. 由于我们打算对任意的 $z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$ 来证明这些公式, 所以使用 $\cos z$ 的偶性和 $\sin z$ 的奇性, 再写下一个等式:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} = (\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2) - \mathrm{i}(\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2). \tag{4.5.25}$$

比较 (4.5.24) 和 (4.5.25) 求得

$$\begin{aligned}\cos(z_1+z_2) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)})\\ &= \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2,\\ \sin(z_1+z_2) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)})\\ &= \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2.\end{aligned}$$

完全类似地可以得到关于双曲函数 $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 的相应的公式. 顺便说一下, 从公式 (4.5.20), (4.5.21) 可见, 函数 $\cosh z$, $\sinh z$ 与函数 $\cos z$, $\sin z$ 通过下述简单的关系式联系着:

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cos \mathrm{i}z,\\ \sinh z &= -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z.\end{aligned}$$

下面我们来展示一个看来似乎完全不同的函数所具有的统一性 (这种统一性不进入复数域是发现不了的).

如果认为对于 $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$$

都是已知的, 那么从欧拉公式 (4.5.19) 得到关系式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0. \tag{4.5.26}$$

在这个式子里出现了不同数学领域里最重要的常数 (1 ——算术, π ——几何, e ——分析, i ——代数).

从 (4.5.22) 和 (4.5.26), 像从公式 (4.5.19) 一样看出

$$\exp(z + \mathrm{i}2\pi) = \exp z,$$

也就是说, 在 $\mathbb{C}$ 中指数函数原来是一个周期函数, 函数的周期 $T = \mathrm{i}2\pi$, 是纯常数.

注意到欧拉公式, 现在可以把复数的三角写法 (4.5.3) 表示成

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

其中 $r$ 是数 $z$ 的模, 而 $\varphi$ 是它的辐角.

棣莫弗公式现在变得十分简单:

$$\boxed{z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}. \tag{4.5.27}$$

### 4.5.4　函数的幂级数表示、解析性

定义在某个集 $E \subset \mathbb{C}$ 上的复变量 $z$ 的复值函数 $w = f(z)$ 是一个 $E$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射. 这种函数的图像是 $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 中的子集合, 因此不具有通常的直观性. 为了弥补这种损失, 通常取两张复平面, 在一张上标示定义域的点, 而在另一张上标示值域的点.

在下面的几个例子中, 标出了定义域 $E$ 和它在相应的映射下的像.

**例 3**

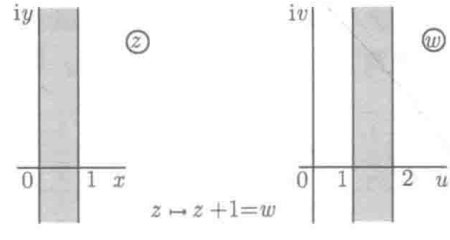


图 22

**例 4**

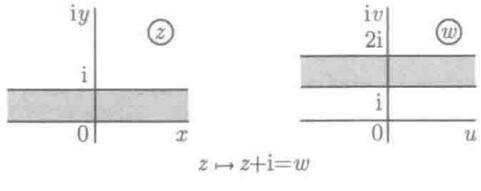


图 23

**例 5**

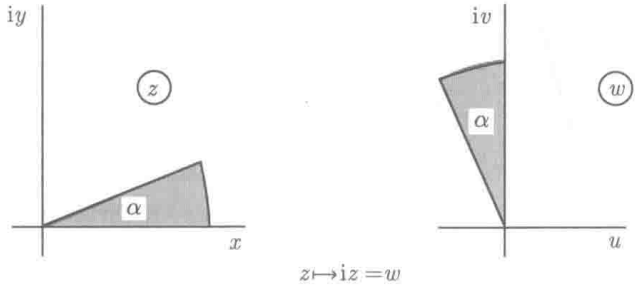


图 24

这从 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 从而 $\mathrm{i}z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\frac{\pi}{2})}$ 推知, 这也就是说旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 角得到.

**例 6**

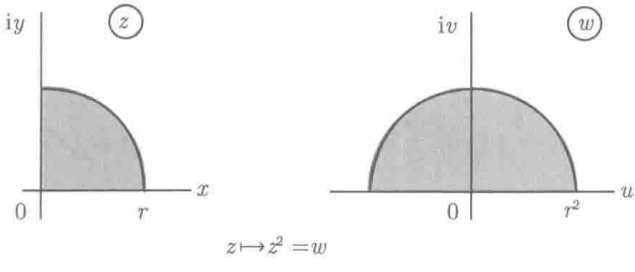


图 25

因为如果 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则 $z=r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}$.

**例 7**

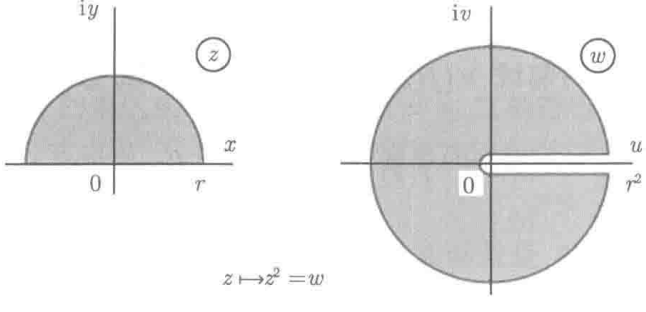


图 26

**例 8**

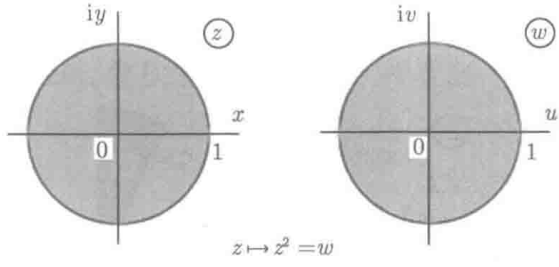


图 27

从例 7, 例 8 明白, 在这种情况下, 单位圆的像仍是单位圆, 只是叠成两层.

**例 9**

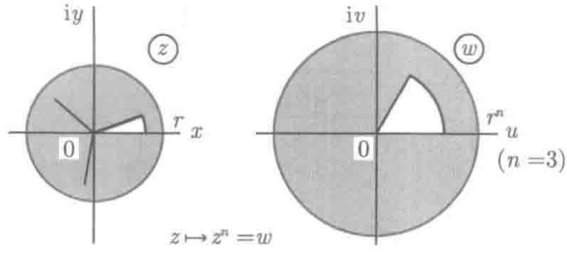


图 28

若 $z = re^{i\varphi}$, 则根据 (4.5.27)$z^n = r^n e^{in\varphi}$, 所以在我们的情况下, 半径为 $r$ 的圆的像是半径为 $r^n$ 的圆, 且后者的每个点都是原来的圆的 $n$ 个点的像 (顺便说一下, 这 $n$ 个点分布在一个正 $n$ 边形的顶点处). 这里例外的只是点 $w = 0$, 它的原像是点 $z = 0$. 不过, 当 $z \to 0$ 时, 函数 $z^n$ 是 $n$ 阶无穷小量, 因此说是函数的 $n$ 阶零点. 考虑到零的这个重数, 现在可以说, 在映射 $z \mapsto z^n = w$ 之下, 任一点 $w$ 的原像的数目都等于 $n$. 特别地, 方程 $z^n = 0$ 有 $n$ 个重叠的根 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$.

相应于连续性的一般定义, $f(z)$ 叫做在点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 的**连续复变函数**, 如果对于它的值 $f(z_0)$ 的任何邻域 $V(f(z_0))$, 存在这样的邻域 $U(z_0)$, 使得对于任意的 $z \in U(z_0)$, 有

$$f(z) \in V(f(z_0)),$$

简单地说就是

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

像对于实的情形那样, 把量

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{4.5.28}$$

叫做复变函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处的导数, 如果这个极限存在.

等式 (4.5.28) 等价于当 $z \to z_0$ 时

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0). \tag{4.5.29}$$

此等式相当于函数在点 $z_0$ 处可微的定义.

由于可微复变函数的定义与实函数的相应定义是一致的, 而域 $\mathbb{C}$ 的算术性质也与 $\mathbb{R}$ 一样, 所以, 一般的微分法则在复的情形下也都成立.

**例 10**

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$
$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

特别地, 若 $f(z) = z^2$, 则 $f'(z) = 1 \cdot z + 1 \cdot z = 2z$. 而若 $f(z) = z^n$, 则 $f'(z) = nz^{n-1}$. 又若

$$P_n(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n,$$

则

$$P_n'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1}.$$

下述定理给出了幂级数的微分法.

**定理 1** 幂级数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 的和是定义在其收敛圆内的无穷可微函数, 而且, 有

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(c_n(z - z_0)^n), \quad k = 0, 1, \cdots$$

以及

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

**证** 在 $f^{(k)}(z)$ 的表达式中令 $k = n$ 和 $z = z_0$ 立刻得出系数 $c_n$ 的表达式.

而 $f^{(k)}(z)$ 的公式本身, 只要对 $k = 1$ 的情形加以验证即可, 因为 $f'(z)$ 也是幂级数和的形式.

下边验证, 函数 $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ 实际就是 $f(z)$ 的导数.

首先, 我们注意到, 根据柯西 - 阿达马公式 (4.5.14), 最后这个级数的收敛半径与原来的 $f(z)$ 的幂级数的收敛半径相同. 事实上,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n|c_n||z - z_0|^{n-1}} = |z - z_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|c_n|} = \frac{|z - z_0|}{R}.$$

为了书写简单起见, 下边将认为 $z_0=0$, 即 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}$, 而且, 当 $|z|<R$ 时级数收敛.

由于对收敛圆内幂级数绝对收敛, 可以发现, 最重要的是, 当 $|z|\leqslant r<R$ 时成立估计 $|nc_nz^{n-1}|=n|c_n||z^{n-1}|\leqslant n|c_n|r^{n-1}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|c_n|r^{n-1}$ 是收敛的. 因此, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在号码 $N$, 使当 $|z|\leqslant r$ 时有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}nc_nz^{n-1}\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}n|c_n|r^{n-1}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $\varsigma$ 和 $z$ 是 $|z|<r$ 这个圆内的任意两点, 有

$$\frac{f(\varsigma)-f(z)}{\varsigma-z}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{\varsigma^n-z^n}{\varsigma-z}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\varsigma^{n-1}+\varsigma^{n-2}z+\cdots+\varsigma z^{n-2}+z^{n-1}),$$

$$\left|c_n(\varsigma^{n-1}+\varsigma^{n-2}z+\cdots+\varsigma z^{n-2}+z^{n-1})\right|\leqslant|c_n|nr^{n-1},$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}c_n\frac{\varsigma^n-z^n}{\varsigma-z}\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}n|c_n|r^{n-1}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 有

$$\left|\frac{f(\varsigma)-f(z)}{\varsigma-z}-\varphi(z)\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}c_n\frac{\varsigma^n-z^n}{\varsigma-z}-\sum_{n=1}^{N}nc_nz^{n-1}\right|+\frac{2}{3}\varepsilon.$$

固定 $z$ 并令 $\varsigma$ 趋于 $z$, 那么产生$\left(\text{导数定义、在有限和中取极限}\lim\limits_{\varsigma\to z}\dfrac{\varsigma^n-z^n}{\varsigma-z}=nz^{n-1}\right)$

$$|f'(z)-\varphi(z)|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon.$$

于是, 由 $r<R$ 的任意性, 证明了, 对于圆 $|z|<R$ 中任一点 $z$, 成立

$$f'(z)=\varphi(z).$$

□

这个定理标志了这样一个函数类, 它的每个函数的泰勒级数都收敛到这个函数本身.

说函数在点 $z_0\in\mathbb{C}$ 处解析, 指的是它在这点的某个邻域内可以表示成下述 ("解析的") 形式:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

即关于 $z-z_0$ 的幂级数的和.

不难验证, 幂级数的和在它的收敛圆的任意内点解析.

**推论 2** 从函数解析性的定义, 及已证过的定理得到:

(1) 函数如果在一点解析, 那么, 它在该点无穷次可微, 且其泰勒级数在该点的一个邻域中收敛于它.

(2) 定义在一点邻域中且在该点无穷次可微的函数的泰勒级数, 在该点的某邻域中收敛于这个函数, 当且仅当, 函数在该点解析.

在复变函数论中将证明一个极妙的事实, 即若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的邻域内可微, 则它就在这点解析. 对于实函数并无类似之事. 这确实是令人吃惊的, 因为根据上边已证的定理 1, 由此推出, 如果函数 $f(z)$ 在一点的邻域内有一阶导数 $f'(z)$, 那么, 在这个邻域内它同样有任意阶导数.

### 4.5.5 复数域 $\mathbb{C}$ 的代数封闭性

称数域 $\mathbb{Y}$ 具有*代数封闭性*, 如果任何 $\mathbb{Y}$ 系数多项式在 $\mathbb{Y}$ 中都有根. 已知 $x^2-2$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中无根、$x^2+1$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 中无根, 故它们都不具有代数封闭性. 于是人们将 $\mathbb{R}$ 扩充到域 $\mathbb{C}$.

但我们能证明任何复系数多项式

$$P(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n,\quad n\geqslant 1$$

在 $\mathbb{C}$ 中都有根, 换言之, 域 $\mathbb{C}$ *的代数封闭性*.

为什么在 $\mathbb{C}$ 中一下子任何多项式都有根, 而在 $\mathbb{R}$ 中却可以没有根呢? 为了对此有一个完全直观的概念, 我们使用复数和复变函数的几何解释.

注意到

$$P(z)=z^n\left(\frac{c_0}{z^n}+\frac{c_1}{z^{n-1}}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{z}+c_n\right),$$

可知, 当 $|z|\to\infty$ 时, $P(z)=c_nz^n+o(z^n)$. 由于使我们感兴趣的是方程 $P(z)=0$ 的根, 所以只要以 $c_n$ 除方程的两边, 就可以认为多项式 $P(z)$ 的系数 $c_n=1$, 因此

$$P(z)=z^n+o(z^n),\quad |z|\to\infty. \tag{4.5.30}$$

前面已见 (例 15) 在映射 $z\mapsto z^n$ 之下, 中心在点 $O$ 半径为 $r$ 的圆周变成中心在点 $O$ 半径为 $r^n$ 的圆周, 那么, 对于足够大的 $r$ 值, 根据 (4.5.30), 圆周 $|z|=r$ 的像将以甚小之相对误差重合于 $w$ 平面上的圆周 $|w|=r^n$(图 29). 在任何情况下, 像都是围住点 $w=0$ 的一条曲线, 这一点是重要的.

如果把圆 $|z|\leqslant r$ 看作是一个在圆周 $|z|=r$ 上的薄膜, 那么, 在由多项式 $w=P(z)$ 实现的连续映射下, 这个薄膜变成张在圆周的像上面的薄膜. 但由于这个像围住了点 $w=0$, 所以这个薄膜必有某点与 $w=0$ 重合, 这就意味着, 在圆 $|z|<r$ 内存在一点 $z_0$, 它在映射 $w=P(z)$ 下正好变成 $w=0$, 即 $P(z_0)=0$.

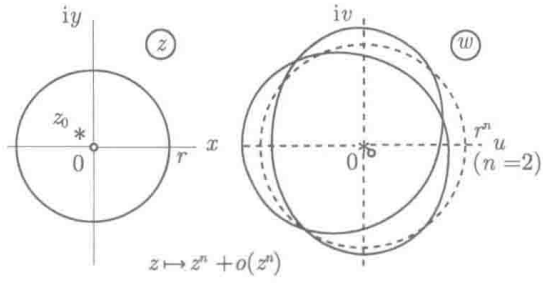


图 29

这个完全直观的思想导致一系列非常重要非常有用的拓扑概念 (关于点的路径指标、映射的级), 借助这些概念就可以做出完全的证明, 其正确性尽可能地不仅是对于多项式才成立.

**定理 2**　每个次数 $n \geqslant 1$ 的复系数多项式

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

在 $\mathbb{C}$ 中都有根.

**证**　不失一般性, 可以假设 $c_n = 1$. 令 $\mu = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$. 由于

$$P(z) = z^n \left[1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{c_0}{z^n}\right],$$

所以

$$|P(z)| \geqslant |z|^n \left[1 - \left(\frac{|c_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|c_0|}{|z|^n}\right)\right].$$

于是显然, 对于足够大的值 $R$, 当 $|z| > R$ 时, $|P(z)| > \max\{1, 2\mu\}$. 因此, 使

$$0 < |P(z_k)| - \mu < \frac{1}{k}$$

的一列点 $z_2, z_3, \cdots, z_k, \cdots$ 落在圆 $|z| \leqslant R$ 中.

可检验, 在 $\mathbb{C}$ 中 (甚至在圆 $|z| \leqslant R$ 中) 有使 $|P(z_0)| = \mu$ 的点 $z_0$. 事实上, 若 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, 则

$$\max\{|x_k|, |y_k|\} \leqslant |z_k| \leqslant R,$$

从而实数列 $\{x_k\}, \{y_k\}$ 都是有界的. 先从 $\{x_k\}$ 中抽出收敛的子列 $\{x_{k_l}\}$, 再从 $\{y_{k_l}\}$ 中抽出收敛的子列 $\{y_{k_{l_m}}\}$, 就得到 $\{z_k\}$ 的子列

$$z_{k_{l_m}} = x_{k_{l_m}} + \mathrm{i}y_{k_{l_m}},$$

它有极限

$$\lim_{m \to \infty} z_{k_{l_m}} = \lim_{m \to \infty} x_{k_{l_m}} + \mathrm{i} \lim_{m \to \infty} y_{k_{l_m}} = x_0 + \mathrm{i}y_0 = z_0,$$

且由于当 $m \to \infty$ 时 $|z_{k_{l_m}}| \to |z_0|$, 所以 $|z_0| \leqslant R$. 为避免写法累赘, 我们不转到子列, 而认为数列本身 $\{z_k\}$ 即已收敛. 从 $P(z)$ 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 的连续性推出

$$\lim_{k\to\infty} P(z_k) = P(z_0).$$

但这样一来, $|P(z_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} |P(z_k)| = \mu$.

现在假定 $\mu > 0$, 我们来引出矛盾. 若 $P(z_0) \neq 0$, 则考察多项式 $Q(z) = \dfrac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. 按其构成, $Q(0) = 1$, 且 $|Q(z)| = \dfrac{|P(z+z_0)|}{|P(z_0)|} \geqslant 1$.

由于 $Q(0) = 1$, 多项式 $Q(z)$ 有如下形式

$$Q(z) = 1 + q_k z^k + q_{k+1} z^{k+1} + \cdots + q_n z^n,$$

其中 $q_k \neq 0$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n$. 若 $q_k = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, 则对于 $\varphi = \dfrac{\pi - \psi}{k}$ 有

$$q_k (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^k = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\psi)} = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\rho = -|q_k|.$$

于是当 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 且 $r$ 充分接近于零时, 得到

$$\begin{aligned} |Q(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})| \leqslant & |1 + q_k z^k| + (|q_{k+1} z^{k+1}| + \cdots + |q_n z^n|) \\ = & |1 - r^k |q_k|| + r^{k+1}(|q_{k+1}| + \cdots + |q_n| r^{n-k-1}) \\ = & 1 - r^k (|q_k| - r|q_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|q_n|) < 1. \end{aligned}$$

但是当 $z \in \mathbb{C}$ 时 $|Q(z)| \geqslant 1$. 所得的矛盾表明 $P(z_0) = 0$. □

**注 2** 关于任意复系数代数方程在 $\mathbb{C}$ 中都可解的定理 (传统上常称之为代数基本定理) 的第一个证明是由高斯给出的.

**注 3** 我们知道, 实系数多项式 $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ 并不总有实根. 但与任意的复系数多项式相比它具有这样的特性, 若 $P(z_0) = 0$, 则亦有 $P(\bar{z}_0) = 0$. 实际上, 从共轭数的定义及复数的加法法则推出 $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, 从复数的三角式的写法及复数的乘法法则见到

$$\begin{aligned} \overline{(z_1 \cdot z_2)} &= \overline{(r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2})} = \overline{r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}} \\ &= r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \end{aligned}$$

因此

$$\overline{P(z_0)} = \overline{a_0 + \cdots + a_n z^n} = \bar{a}_0 + \cdots + \bar{a}_n \bar{z}_0^n = P(\bar{z}_0),$$

从而若 $P(z_0) = 0$, 则 $P(\bar{z}_0) = 0$.

**推论 3**　任何一个次数 $n \geqslant 1$ 的复系数多项式 $P(z) = c_0 + \cdots + c_n z^n$ 都可以表示成

$$P(z) = c_n(z - z_1)\cdots(z - z_n), \tag{4.5.31}$$

其中 $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$($z_1, \cdots, z_n$ 不必互不相同), 并且若不计较因子的次序, 则表达式 (4.5.31) 是唯一的.

**证**　根据多项式 $P(z)$ 除以次数 $m \leqslant n$ 的多项式 $Q(z)$ 的除法法则 (“欧几里得辗转相除法”), 求得 $P(z) = q(z)Q(z) + r(z)$, 其中 $q(z)$ 和 $r(z)$ 是多项式, 且 $r(z)$ 的次数小于 $Q(z)$ 的次数 $m$. 于是, 若 $m = 1$, 则 $r(z) = r$ 是常数.

设 $z_1$ 是多项式 $P(z)$ 的根. 那么 $P(z) = (z - z_1)q(z) + r$, 且由于 $P(z_1) = r$, 所以 $r = 0$. 就是说, 若 $z_1$ 是多项式的根, 则成立着表达式 $P(z) = (z - z_1)q(z)$. 多项式 $q(z)$ 的次数等于 $n - 1$, 并且对它可以重复同样的讨论. 根据归纳法我们得到 $P(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z^n)$. 由于应有 $cz^n = c_n z^n$, 所以 $c = c_n$. □

**推论 4**　任何实系数多项式

$$P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$$

都可以展开成一次和二次实系数多项式的乘积.

**证**　此命题从上述推论 3 和注 3 推出. 根据注 3, $z_k$ 是 $P(z)$ 的根, 则 $\bar{z}_k$ 也是 $P(z)$ 的根①. 于是在展开式 (4.5.31) 中把因子 $(z - z_k)$ 和 $(z - \bar{z}_k)$ 乘起来, 得到实系数二次多项式

$$z^2 + (-z_k - \bar{z}_k)z + |z_k|^2.$$

此时数 $c_n = a_n$ 是实数, 可以把它乘到展开式的一个括号里面去而不改变此因子的次数. □

把展开式 (4.5.31) 中相同的因子乘在一起, 可以把它改写成

$$P(z) = c_n(z - z_1)^{k_1}\cdots(z - z_p)^{k_p}, \tag{4.5.32}$$

数 $k_j$ 叫做根 $z_j$ 的**重数**.

由于 $P(z) = (z - z_j)^{k_j}Q(z)$, 其中 $Q(z_j) \neq 0$, 所以

$$P'(z) = k_j(z - z_j)^{k_j - 1}Q(z) + (z - z_j)^{k_j}Q'(z) = (z - z_j)^{k_j - 1}R(z),$$

其中 $R(z_j) = k_j Q(z_j) \neq 0$. 这样我们就得到下面的结论.

**推论 5**　多项式 $P(z)$ 的每个重数为 $k_j > 1$ 的根都是多项式 $P'(z)$ 的 $k_j - 1$ 重根.

①需要指出的是, 对于 $z_k \notin \mathbb{R}$, 作为根, $z_k$ 与 $\bar{z}_k$ 有相同的重数.

根据这个推论和展开式 (4.5.32), 我们不用求多项式 $P(z)$ 的根就可以求出形如 $(z-z_1)\cdots(z-z_p)$ 的多项式 $p(z)$, 它的根与 $P(z)$ 的根一样, 但都是一重的.

实际上, 按照欧几里得算法, 先求出 $P(z)$ 和 $P'(z)$ 的最大公因子——多项式 $q(z)$. 根据推论 3、展开式 (4.5.32) 以及定理 2, 多项式 $q(z)$ 与乘积 $(z-z_1)^{k_1-1}\cdots(z-z_p)^{k_p-1}$ 至多差一个常数因子, 因此, 用 $q(z)$ 去除 $P(z)$, 再除以 $z^p$ 项的系数就得到多项式 $p(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_p)$.

现在考察两个多项式的比 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $Q(x)\neq$const. 如果 $P(x)$ 的次数大于 $Q(x)$ 的次数, 那么, 用多项式的除法律, 把 $P(x)$ 表成

$$P(x)=p(x)\cdot Q(x)+r(x),$$

其中 $p(x)$ 和 $r(x)$ 是多项式且 $r(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数. 这样一来, 得到了 $R(x)$ 的表达式

$$R(x)=p(x)+\frac{r(x)}{Q(x)},$$

其中分式 $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ 依分子的次数小于分母的次数这个意义来说已是*真分式*了.

**推论 6** 下述推论是关于把真分式表示成所谓*最简分式*的和的.

(1) 若 $Q(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_p)^{k_p}$ 且 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是真分式, 则存在唯一的下述形式的表达式

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(z-z_j)^k}\right). \tag{4.5.33}$$

(2) 若 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是实系数多项式且

$$\begin{aligned}Q(x)=&(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\\&\cdots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n},\end{aligned}$$

则对于真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 存在唯一的下述形式的表达式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{jk}x+c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\right), \tag{4.5.34}$$

其中 $a_{jk}$, $b_{jk}$, $c_{jk}$ 都是实数.

推论 6 的证明通常以代数的语言载于高等代数教科书中或以分析的语言载于复变函数论的教科书中, 这里从略.

**注 4** (待定系数法)　实际寻求展开式 (4.5.33) 或 (4.5.34) 的方法是**待定系数法** (虽万能但不总是最简单的): 把 (4.5.33) 或 (4.5.34) 右端的和用公分母 $Q(x)$ 来通分, 然后将所得的分子的系数与多项式 $P(x)$ 的相应的系数对等, 得到一个线性方程组, 解之即可. 这里针对 (4.5.34) 简单描述一下真分式 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$($P$ 的次数 $n<Q$ 的次数 $m$) 的标准分解.

(1) **将 $Q(x)$ 进行标准分解**. 用欧几里得算法求出$Q(z)$ 和 $Q'(z)$ 的最大公因子 $d(x)$. 令 $q(x)=\dfrac{Q(x)}{d(x)}$, $q$ 与 $Q$ 有同样的根, 它们都是 $q$ 的一重根. 继求 $q(x)$ 的根、并展开 $q(x)$ 为一次和二次实系数多项式的乘积, 随后得到 $d(x)$ 从而 $Q(x)$ 之标准分解.

$$\begin{aligned}Q(x)=&x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m\\=&\Big[(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}\Big]\cdot\Big[(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}\Big],\end{aligned}$$

其中, $\lambda_i,\mu_j$ $(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,t)\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i+2\sum_{j=1}^{t}\mu_j=m;\quad p_j^2-4q_j<0,\quad j=1,2,\cdots,t.$$

(2) **写出 $R(x)$ 的部分分式的待定式**

$$\begin{aligned}R(x)=&\left[\left(\frac{A_{11}}{(x-a_1)^1}+\cdots+\frac{A_{1\lambda_1}}{(x-a_1)^{\lambda_1}}\right)+\cdots+\left(\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^1}+\cdots+\frac{A_{s\lambda_s}}{(x-a_s)^{\lambda_s}}\right)\right]\\&+\cdots+\left[\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^1}+\cdots+\frac{B_{1\mu_1}x+C_{1\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}\right)+\cdots\right.\\&\left.+\left(\frac{B_{t1}x+C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^1}+\cdots+\frac{B_{t\mu_t}x+C_{t\mu_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}}\right)\right].\end{aligned}$$

(3) **确定部分分式中的常数 (通分 (公分母 $Q(x)$)、对应项系数相等)**

$$A_{i1},\cdots,A_{i\lambda_i}\ (i=1,\cdots,s);\quad B_{j1},\cdots,B_{j\mu_j};C_{j1},\cdots,C_{j\mu_j}\quad(j=1,\cdots,t).$$

下面通过一个例子来说明.

**例 11**　设

$$\begin{aligned}P(x)&=2x^6+3x^5+6x^4+6x^3+10x^2+3x+2,\\Q(x)&=x^7+3x^6+5x^5+7x^4+7x^3+5x^2+3x+1.\end{aligned}$$

要求算出分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的展开式 (4.5.34).

首先, 求多项式 $Q(x)$ 的展开式. 求导

$$Q'(x) = 7x^6 + 18x^5 + 25x^4 + 28x^3 + 21x^2 + 10x + 3.$$

按欧几里得算法求出多项式 $Q(x)$ 和 $Q'(x)$ 的最大公因子

$$d(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

(通常取 $x$ 的最高次幂的系数为 1 的最大公因子). 用 $d(x)$ 除 $Q(x)$ 得多项式

$$q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

(它与 $Q(x)$ 有同样的根, 不过都是一重的). 容易猜出 $-1$ 是多项式 $q(x)$ 的根. 用 $x+1$ 除 $q(x)$ 后得到 $x^2+1$. 因此

$$q(x) = (x+1)(x^2+1).$$

逐次用 $x^2+1$ 和 $x+1$ 去除 $d(x)$, 而后求得 $d(x)$ 的展开式

$$d(x) = (x+1)^2(x^2+1),$$

随后就得到展开式

$$Q(x) = (x+1)^3(x^2+1)^2.$$

继而, 根据推论 6(2) 求得分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的如下形式的展开式:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{11}}{x+1} + \frac{a_{12}}{(x+1)^2} + \frac{a_{13}}{(x+1)^3} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2+1} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2+1)^2}.$$

最后, 将右端通分并比较分子中所得多项式的系数和多项式 $P(x)$ 的相应的系数, 得到七个七元方程, 解此方程组, 从而得到

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$

## 练　习

1. 使用复数的几何解释:

(1) 解释不等式 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ 和 $|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$.

(2) 指出平面 $\mathbb{C}$ 上满足关系式 $|z-1| + |z+1| \leqslant 3$ 的点的几何位置.

(3) 表出数 1 的所有的 $n$ 次根并求它们的和.

(4) 解释由公式 $z \mapsto \bar{z}$ 给出的平面 $\mathbb{C}$ 的变换的效用.

2. 求和.

(1) $1+q+\cdots+q^n$.

(2) $1+q+\cdots+q^n+\cdots$, $|q|<1$.

(3) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$.

(4) $1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\cdots+r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$.

(5) $1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\cdots+r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}+\cdots$, $|r|<1$.

(6) $1+r\cos\varphi+\cdots+r^n\cos n\varphi$.

(7) $1+r\cos\varphi+\cdots+r^n\cos n\varphi+\cdots$, $|r|<1$.

(8) $1+r\sin\varphi+\cdots+r^n\sin n\varphi$.

(9) $1+r\sin\varphi+\cdots+r^n\sin n\varphi+\cdots$, $|r|<1$.

3. 求出复数 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ 的模和辐角并证实这个数是 $\mathrm{e}^z$.

4. (1) 证明关于 $w$ 的方程 $\mathrm{e}^w=z$ 有解 $w=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$. 自然认为 $w$ 是数 $z$ 的自然对数. 因此 $w=\ln z$ 不是函数关系式, 因为 $\mathrm{Arg}z$ 是多值的.

(2) 求出 $\ln 1$ 和 $\ln\mathrm{i}$.

(3) 置 $z^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln z}$. 求 $1^\pi$ 和 $\mathrm{i}^\mathrm{i}$.

(4) 使用表达式 $w=\sin z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$, 求出对于 $z=\arcsin w$ 的表达式.

(5) 在 $\mathbb{C}$ 中有没有点能使 $|\sin z|=2$?

5. (1) 研究一下是不是在平面 $\mathbb{C}$ 的所有的点处函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 都连续.

(2) 在 $z_0=0$ 处把函数 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 展开成幂级数并求它的收敛半径.

(3) 对函数 $\dfrac{1}{1+\lambda^2z^2}$ 求解问题 (1) 和 (2), 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是参数. 关于平面 $\mathbb{C}$ 上什么样的点的相互位置决定收敛半径, 你有没有什么想法? 当限制在实轴上关于 $x\in\mathbb{R}$ 来展开函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\lambda^2x^2}(\lambda\in\mathbb{R})$ 时, 此事能明白否?

6. (1) 研究一下柯西函数

$$f(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{z^2}}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$$

在点 $z=0$ 处是否连续.

(2) 习题 (1) 中的函数 $f$ 在实轴上的限制 $f|_{\mathbb{R}}$ 是否连续?

(3) (1) 中的函数 $f$ 在点 $z_0=0$ 处有泰勒级数吗?

(4) 有没有在 $z_0\in\mathbb{C}$ 解析的函数, 它的泰勒级数只在点 $z_+0$ 处收敛?

(5) 想出一个只在点 $z_0$ 处收敛的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

7. (1) 在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n$ 中作形式的代换$z-a=(z-z_0)+(z_0-a)$ 并合并同类

项, 将得到一个级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 试用量 $A_k$, $(z_0-a)^k$, $k=0,1,\cdots$ 表示这个级数的系数.

(2) 试验证, 如果原级数在圆 $|z-a|<R$ 中收敛, 而 $|z_0-a|=r<R$, 则定义 $c_n(n=0,1,\cdots)$ 的那些级数绝对收敛, 而且, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 当 $|z-z_0|<R-r$ 时收敛.

(3) 试证, 如果在圆 $|z-a|<R$ 中有 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n$, 而 $|z_0-a|<R$, 那么, 在圆 $|z-z_0|<R-|z_0-a|$ 中函数 $f$ 有幂级数表示 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

8. 验证:

(1) 当点 $z\in\mathbb{C}$ 跑遍圆周 $|z|=r>1$, 点 $w=z+z^{-1}$ 跑遍以 0 为中心、点 $\pm2$ 为焦点的椭圆周.

(2) 当作复数平方时, 更准确地说, 在映射 $w\mapsto w^2$ 下这样的椭圆周将变成以 0 为焦点的跑遍两次的椭圆周.

(3) 在映射 $w\mapsto w^2$ 下, 任何以零为中心的椭圆周将变成以 0 为焦点的椭圆周.

## 4.6 自然科学中应用微分学的一些例子

这节我们将分析自然科学中的几个问题. 这些问题的出处, 彼此相差甚远, 但它们却有相当接近的数学模型——函数的最简单的微分方程.

### 4.6.1 齐奥尔科夫斯基公式

考察远离有引力的物体, 在开阔宇宙中直线运动的火箭 (图 30).

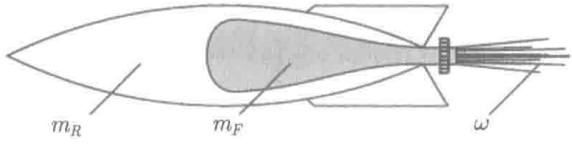


图 30

(1) **数学翻译**. 设 $M(t)$ 是火箭 (连同燃料) 在时刻 $t$ 的质量; $V(t)$ 是它在时刻 $t$ 的速度; $\omega$ 是燃料爆燃由火箭的管嘴喷出的 (相对于火箭的) 速度. 视火箭连同燃料为封闭系统, 则它的冲量 (或动量) 不随时间变化. 在时刻 $t$ 系统的冲量等于 $M(t)\cdot V(t)$; 在时刻 $t+h$ 火箭连同它所剩下的燃料的冲量等于 $M(t+h)\cdot V(t+h)$. 在这段时间内喷出的燃料质量是

$$|\Delta M|=|M(t+h)-M(t)|=-\big(M(t+h)-M(t)\big),$$

喷出的这些燃料的冲量 $\Delta I$ 由下式界定

$$(V(t)-\omega)|\Delta M|<\Delta I<(V(t+h)-\omega)|\Delta M|$$

或

$$\Delta I=(V(t)-\omega)|\Delta M|+\alpha(h)|\Delta M|,$$

且由 $V(t)$ 的连续性推知, 当 $h\to 0$ 时, $\alpha(h)\to 0$.

(2) **导出方程**. 对比系统在时刻 $t$ 和 $t+h$ 的冲量得

$$M(t)V(t)=M(t+h)V(t+h)+(V(t)-\omega)|\Delta M|+\alpha(h)|\Delta M|,$$

代入 $|\Delta M|=-\big(M(t+h)-M(t)\big)$ 并化简, 得

$$M(t+h)\big(V(t+h)-V(t)\big)=-\omega\big(M(t+h)-M(t)\big)+\alpha(h)\big(M(t+h)-M(t)\big).$$

以 $h$ 除此式并令 $h\to 0$ 取极限, 得到 $V(t), M(t)$ 和它们的导数间的关系式

$$M(t)V'(t)=-\omega M'(t). \tag{4.6.1}$$

(3) **求解方程**. 应用微分方程理论, 解 (4.6.1) 得到要找的所谓**齐奥尔科夫斯基公式**[①]

$$V(t)=V_0+\omega\ln\frac{M(0)}{M(t)}, \tag{4.6.2}$$

其中假设知道初始速度为 $V(0)=V_0$.

若 $m_k$ 是火箭本身的质量, $m_T$ 是燃料的质量, 而 $V$ 是燃料完全烧尽时火箭达到的终极速度, 那么, 把 $M(0)=m_k+m_T$ 和 $M(t)=m_k$ 代入 (4.6.2) 就求得

$$V=V_0+\omega\ln\left(1+\frac{m_T}{m_k}\right).$$

特别地, 由这个公式推出, 若 $V_0=0$, 则要使本身质量为 $m_k$ 的火箭得到速度 $V$, 必须开始时带够如下数量的燃料:

$$m_T=m_k(\mathrm{e}^{\frac{V}{\omega}}-1).$$

### 4.6.2　放射衰变、连锁反应及原子反应堆

重元素 (主要是超铀元素) 的原子核时时进行着自发的衰变. 这就是所谓的**自然辐射**.

(1) **放射衰变**. 以 $N(t)$ 记直到时刻 $t$ 尚未衰变的原子的总量, 按辐射的基本统计规律, 物质由时刻 $t$ 到时刻 $t+h$ 所衰减的量 $N(t+h)-N(t)$ 与 $h$ 及 $N(t)$ 成正比, 即

$$N(t+h)-N(t)\approx-\lambda N(t)\cdot h,$$

①这个公式有时冠以齐奥尔科夫斯基 (К. Э. Циодковский)(1857—1935) 的名字, 他是俄罗斯学者, 宇宙飞行理论的奠基人. 但是, 第一个得到这个公式的人大概是俄罗斯力学家米歇尔斯基 (И. В. Мещерский)(1859—1935), 发表在 1897 年他的关于变质量质点动力学的文章中.

其中 $\lambda > 0$ 是一个表征所说的化学元素的数值系数. 于是, 函数 $N(t)$ 满足已经熟知的微分方程

$$N'(t) = -\lambda N(t), \tag{4.6.3}$$

由此推出

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

其中 $N_0 = N(0)$ 是物质原子的初始总量.

从最初的原子数量衰减一半所经历的时间 $T$ 叫做*半衰期*. 因此可从方程 $\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$ 求得量 $T$, 即 $T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69}{\lambda}$. 例如, 对于钋 $\mathrm{Po}^{210}, T \approx 138$ 天; 对于镭 $\mathrm{Ra}^{226}, T \approx 1600$ 年; 对于铀 $\mathrm{U}^{235}, T \approx 7.1 \times 10^8$ 年, 而对于铀的同位素 $\mathrm{U}^{238}, T \approx 4.5 \times 10^9$ 年.

(2) *核反应*. 指的是核之间的相互作用或者核与基本粒子的相互作用, 产生出新类型的核. 这可以是核的聚变 (即一些较轻的元素的核合成较重的元素的核); 也可以是一个核衰变而形成一个或多个较轻的元素的核. 尤其是当中子与铀 $\mathrm{U}^{235}$ 的核相撞的时候, 大约在一半的情况下要发生这样的衰变. 当铀核分裂时, 形成二三个新的中子, 它们能继续参与核的相互作用, 引起核的分裂, 因而使中子增殖. 这种类型的核反应叫做*连锁反应*.

兹求中子数目 $N(t)$ 随时间变化的规律.

取半径为 $r$ 的球形物体 ($r$ 不太小), 则在由时刻 $t$ 算起的时间间隔 $h$ 中, 一方面要产生数量正比于 $h$ 和 $N(t)$ 的新中子, 另一方面要失去一部分跑到球外的中子.

如果 $v$ 是中子的速度, 那么, 能在时间 $h$ 后离开球体的中子只能是那些处在离球面距离不超过 $vh$ 的区域当中且速度方向基本上是径向的那些中子. 假如这个区域中经过时间 $h$ 后跑到球外的中子数与此区域中的中子总数的比不随时刻 $t$ 的变化而变化, 又设球中的中子是均匀分布的, 则经过时间 $h$ 后失去的中子数正比于 $N(t)$, 也正比于上述靠近边界的区域的体积与球的体积的比, 即

$$N(t+h) - N(t) \approx \alpha N(t)h - \frac{\beta}{r}N(t)h$$

$\left(\text{因所考虑的区域的体积约等于} 4\pi r^2 vh, \text{而球的体积是} \frac{4}{3}\pi r^3\right)$, 系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 仅与所考虑的放射性物质有关. 于是推得

$$N'(t) = \left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) N(t), \tag{4.6.4}$$

解得

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right)t}.$$

从所得的公式见到, 当 $\left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) > 0$ 时, 中子数目依指数律随着时间增长. 因

之, 不管初始条件 $N_0$ 如何, 在很短的时间内就会使物体实际上完全衰变, 并伴随着释放出极大的能量——这就是爆炸.

如果 $\left(\alpha-\dfrac{\beta}{r}\right)<0$, 那么反应很快就要终止, 因为失掉的中子比产生的多.

如果成立界于上边考虑的两种情形之间的条件 $\alpha-\dfrac{\beta}{r}=0$, 则反应中新生的中子和退出反应的中子达到平衡, 结果中子数目大致不变. 使 $\alpha-\dfrac{\beta}{r}=0$ 成立的量 $r$ 叫做临界半径, 而具有临界半径的球状物体的质量叫做所说物质的临界质量. 如, 对于铀 $\mathrm{U}^{235}$, 临界半径约等于 8.5cm, 而临界质量接近 50kg.

在依靠放射性物质的连锁反应来预热蒸汽的原子反应堆中, 设置有人工中子源, 它在单位时间内把确定的 $n$ 个中子送进裂变的物质. 因此, 对于原子反应堆, 方程式 (4.6.4) 要稍加改变:

$$N'(t)=\left(\alpha-\frac{\beta}{r}\right)N(t)+n. \tag{4.6.5}$$

解这个方程, 得

$$N(t)=\begin{cases} N_0\mathrm{e}^{\left(\alpha-\frac{\beta}{r}\right)t}-\dfrac{n}{\alpha-\dfrac{\beta}{r}}\left\{1-\mathrm{e}^{\left(\alpha-\frac{\beta}{r}\right)t}\right\}, & \alpha-\dfrac{\beta}{r}\neq 0, \\ N_0+nt, & \alpha-\dfrac{\beta}{r}=0. \end{cases}$$

由这个解看出, 若 $\left(\alpha-\dfrac{\beta}{r}\right)>0$(超过临界质量), 则发生爆炸. 若不足临界质量, 即 $\left(\alpha-\dfrac{\beta}{r}\right)<0$, 则很快就有

$$N(t)\approx\frac{n}{\dfrac{\beta}{r}-\alpha}.$$

因此, 如果把放射性物质的质量维持在不足而又接近临界的状态, 那么不管补充中子源的强弱如何, 即不管 $n$ 的值多大, 都可以得到很大的值 $N(t)$, 这就意味着得到很大的反应强度. 把过程保持在接近临界状态是一件奥秘且要由相当复杂的自动控制系统来实现的事情.

### 4.6.3　振动

如果挂在弹簧下面的物体偏离了平衡位置, 那么, 它就要在平衡位置附近振动.

设知道质量为 $m$ 的质点可沿数轴 $Ox$ 移动, 它被作用着与它和坐标原点的距离成正比的力 $F=-kx$[①]. 还知道质点的初始位置 $x_0=x(0)$ 和它的初始速度

①对于弹簧, 刻画它的弹性的系数 $k>0$, 叫做弹簧的弹性系数.

$v_0 = \dot{x}(0)$. 求质点的位置对时间的依赖关系 $x = x(t)$. 根据牛顿定律, 可把这个问题写成求方程

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \tag{4.6.6}$$

满足初始条件 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ 的解. 得知周期函数

$$x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

就是所求的解. 此经规格化的变换后可改写成

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + v_0^2\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right), \tag{4.6.7}$$

式中

$$\alpha = \arcsin\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2\frac{m}{k}}}.$$

因此, 当 $k > 0$ 时, 质点将作周期振动, 周期是 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, 也就是说, 频率 $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, 而振幅是 $\sqrt{x_0^2 + v_0^2\frac{m}{k}}$.

函数 (4.6.7) 所描述的运动叫做**简谐振动**, 而方程式 (4.6.6) 叫做**简谐振动方程**.

进一步的讨论可知, 当 $k < 0$ 时, 如果 $x_0$ 或 $v_0$ 不为零的话, 力 $F = -kx$ 不仅不驱使质点回到平衡位置 $x = 0$, 而是使它随着时间的推移无限地远离平衡位置. 亦即, 在这种情况下, $x = 0$ 是不稳定的平衡点.

最后, 研究方程 (4.6.6) 的一个十分自然的改进. 假设我们所考虑的质点是在介质 (在空气中或者液体中) 运动, 介质的阻力不容忽略. 设阻力与质点的速度成正比. 那么代替方程 (4.6.6) 我们应该得到方程

$$m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - kx(t).$$

此方程有如下形式的解:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t}\sin(\omega t + a),$$

式中 $A$ 和 $a$ 是初始条件决定的常数. 从这个公式看到, 由于有因子 $e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$, 其中 $\alpha > 0$, $m > 0$, 所以在所考察的情况下, 振动是**衰减**的, 叫阻尼振动, 其振幅衰减的速度依赖于比值 $\frac{\alpha}{m}$. 振动的频率

$$\frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$$

不随时间变化. 量 $\omega$ 也只依赖于比值 $\dfrac{k}{m}$ 和 $\dfrac{\alpha}{m}$. 当 $\alpha=0$ 时, 我们重新回到无阻尼的简谐振动 (4.6.7) 和方程 (4.6.6).

## 练　　习

1. 证明: 如果点的运动规律 $x=x(t)$ 满足简谐振动方程 $m\ddot{x}+kx=0$, 那么

(1) 量 $E=\dfrac{m\dot{x}^2(t)}{2}+\dfrac{kx^2(t)}{2}$ 是常数$\left(E=K+U\right.$ 是点在时刻 $t$ 的动能 $K=\dfrac{m\dot{x}^2(t)}{2}$ 与势能 $U=\dfrac{kx^2(t)}{2}$ 的和 $\left.\right)$.

(2) 如果 $x(0)=0$ 且 $\dot{x}(0)=0$, 那么 $x(t)\equiv 0$.

(3) 存在唯一的一个满足初始条件 $x(0)=x_0$ 且 $\dot{x}(0)=v_0$ 的运动

$$x=x(t).$$

(4) 验证: 如果点在有摩擦的介质中运动且 $x=x(t)$ 满足方程

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0,\quad \alpha>0,$$

那么, 量 $E$(见 (1)) 是递减的. 求出 $E$ 递减的速度, 并根据 $E$ 的物理意义解释所得结果的物理意义.

2. 在胡克中心力作用下的运动 (平面振子). 作为 4.6.3 小节中线性振子方程 (4.6.6) 的发展, 我们将考察 $m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=-k\boldsymbol{r}(t)$, 它是在中心力作用下质量为 $m$ 的质点的向径 $\boldsymbol{r}(t)$ 所满足的方程, 这个中心力与质点到中心点的距离 $|\boldsymbol{r}(t)|$ 成正比, 比例系数为 $k>0$. 如果质点与中心是胡克弹性联结, 譬如, 用一个弹性系数为 $k$ 的弹簧联结, 就产生这种力.

(1) 微分向量积 $\boldsymbol{r}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, 将证明, 质点是在过中心且包含向量 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$, 即质点的初始位置向量和初始速度向量的平面内运动 (平面振子). 如果向量 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ 共线, 则运动在包含中心和向量 $\boldsymbol{r}_0$ 的直线内进行 (4.6.6 节中研究的线性振子).

(2) 验证: 平面振子的轨道是椭圆, 而且, 质点沿它作周期运动. 试求回转周期.

(3) 试证: 量 $E=m\dot{\boldsymbol{r}}^2(t)+k\boldsymbol{r}^2(t)$ 守恒 (不随时间变化).

(4) 试证: 初始条件 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ 完全确定质点在随后时间的运动.

# 第5章 积 分 学

本章包含原函数与不定积分、定积分两个方面. 前者是微分法的逆运算, 即求一个未知函数, 它的导函数恰是某个已知函数, 换言之, 从函数的导数所满足的关系式求出原来的函数, 因此它与微分学紧密联系. 后者则研究从不定积分中通过牛顿–莱布尼茨公式选出一个特定的原函数, 故两者深刻相关.

## 5.1 原函数与不定积分

### 5.1.1 概念

**定义 1** 函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 在某个区间上的*原函数*, 如果在这个区间上函数 $F(x)$ 可微且满足方程 $F'(x)=f(x)$, 也就是说满足关系式 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$.

**例 1** 函数 $F(x)=\arctan x$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在全数轴上的原函数, 因为

$$\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}.$$

**例 2** 函数 $F(x)=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$ 既是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在正半轴上的原函数, 也是 $f(x)$ 在负半轴上的原函数, 因为当 $x\neq 0$ 时,

$$F'(x)=-\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}=f(x).$$

原函数是否存在? 已知函数的原函数的全体构成怎样的一个集合?

往后将证明: *任何在区间上连续的函数在此区间上都有原函数.*

下述命题由定义直接得到.

**命题 1** 如果 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是函数 $f(x)$ 在同一个区间上的原函数, 那么, 它们的差 $F_1(x)-F_2(x)$ 在这个区间上是常数.

**注 1** $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的比较必须在*连通区间*上进行, 这一点是很重要的. 这也可以从例 1 和例 2 的对比中看出来, 它们所讨论的两个函数

$$F_1(x)=\arctan x \quad 和 \quad F_2(x)=\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$$

的导数在同时有定义的区域 $\mathbb{R}\setminus 0$ 上相等, 但是

$$F_1(x)-F_2(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ -\pi, & x<0\end{cases}$$

$\Big($因为当 $x>0$ 时, $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}=\arctan x$, 而当 $x<0$ 时, $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}=\pi+\arctan x\Big)$.

求微分的运算有名称"微分法" 和数学记号 $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\mathrm{d}x$. 求原函数的运算也有名称 "不定积分法" 和数学记号 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

**定义 2**　若 $f$ 在区间 $I$ 上存在原函数, 则将 $f$ 的原函数全体称为 $f$ 的*不定积分*, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x,$$

其中称 $\int$ *为积分号*, $f(x)$ *为被积函数*, $f(x)\mathrm{d}x$ *为被积表达式*, $x$ *为积分变量*.

根据定义, 设 $F$ 是 $f$ 在区间 $I$ 上的一个原函数, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\big\{F(x)+c\,\big|\,c\in\mathbb{R}\big\},\quad \text{简记为 } \int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c,\quad c \text{ 为常数}. \tag{5.1.1}$$

通常又称"原函数"为"不定积分". 例: $\int x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+c$, $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+c$.

易见, $f$ 存在原函数 $\Leftrightarrow$ $f$ 存在不定积分; 此外, 微分法和不定积分法这两种运算之间的联系如下 (注意 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$).

(1) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$.

(2) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

(3) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+c$.

(4) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+c$.

### 5.1.2　求原函数的基本的一般方法

从定义出发, 考虑到微分法与不定积分法的联系, 可以断定下列关系式成立:

(1) (*线性性质*) 函数的线性组合的原函数是这些函数的原函数的线性组合:

$$\int(\alpha u(x)+\beta v(x))\mathrm{d}x=\alpha\int u(x)\mathrm{d}x+\beta\int v(x)\mathrm{d}x+c. \tag{5.1.2}$$

(2) (**分部积分**) 求 $u(x)v'(x)$ 的原函数, 可归结为求 $u'(x)v(x)$ 的原函数:

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x) + c \tag{5.1.3}$$

$$\left(\text{等价地 } \int (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x + c\right).$$

(3) (**变量替换**) 若在某区间 $I_x$ 上, $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$, 而 $\varphi : I_t \to I_x$ 是区间 $I_t$ 到 $I_x$ 的光滑 (即连续可微) 映射, 则

$$\int (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\circ\varphi(t) + c. \tag{5.1.4}$$

等式 (5.1.2)~(5.1.4) 可经直接对左边和右边求微分来验证. 其中, 在 (5.1.2) 中用到微分运算的线性性质, 在 (5.1.3) 中用到乘积的微分法则, 而在 (5.1.4) 中使用复合函数的微分法则.

关系式 (5.1.2)~(5.1.4) 使我们可以把求一些函数的原函数的运算归结为求更简单些的函数的原函数. 这里列出一个简单的不定积分表 (由基本初等函数的导数表改写得来):

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \ \ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c,$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + c \ \ (0 < a \neq 1), \qquad \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c, \qquad \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + c, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + \tilde{c}, \end{cases} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \arctan x + c, \\ -\operatorname{arccot} x + \tilde{c}, \end{cases}$$

$$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + c, \qquad \int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \tanh x + c, \qquad \int \frac{1}{\sinh^2 x}\mathrm{d}x = -\coth x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c, \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

这些公式中的每个式子都是在实轴 $\mathbb{R}$ 上相应的被积函数定义的区间上来考虑的. 如果这样的区间有好几个, 那么式子右端的常数可以在不同的区间上取不同的值.

现在来考察几个使用关系式 (5.1.2)~(5.1.4) 的例子. 因为只要求出了定义在区间上的函数的某一个原函数, 其他原函数就可由添加常数得到, 故为了简化写法, 下面各处只对作为已知函数的具体原函数所得到的最后结果添加任意常数.

1. 线性组合之例

**例 3**

$$\begin{aligned}&\int (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\mathrm{d}x\\ =&a_0\int 1\mathrm{d}x+a_1\int x\mathrm{d}x+\cdots+a_n\int x^n\mathrm{d}x\\ =&c+a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}.\end{aligned}$$

**例 4**

$$\begin{aligned}\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x=&\int\left(x^2+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\ =&\int x^2\mathrm{d}x+2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|+c.\end{aligned}$$

**例 5**

$$\begin{aligned}\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=&\int\frac{1}{2}(1+\cos x)\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 1\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+c.\end{aligned}$$

2. 分部积分之例

**例 6**

$$\begin{aligned}\int\ln x\mathrm{d}x=&x\ln x-\int x\mathrm{d}\ln x\\ =&x\ln x-\int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ =&x\ln x-\int 1\mathrm{d}x\\ =&x\ln x-x+c.\end{aligned}$$

**例 7**

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + c.\end{aligned}$$

3. 变量替换之例

公式 (5.1.4) 表明在求函数 $(f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)$ 的原函数时可如下处理:

$$\begin{aligned}\int (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t &= \int (f\circ\varphi)(t)\mathrm{d}\varphi(t) = \int f(x)\mathrm{d}x\\ &= F(x) + c = F(\varphi(t)) + c,\end{aligned}$$

也就是说, 先在积分号下进行替换 $\varphi(t) = x$ 而转到新变元 $x$, 然后作为 $x$ 的函数求原函数, 再经过替换 $x = \varphi(t)$ 回到原来的变元 $t$.

**例 8**

$$\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + c = \ln(t^2+1) + c.$$

**例 9**

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{\tan u\cos^2 u} = \int \frac{\mathrm{d}\tan u}{\tan u} = \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln|v| + c\\ &= \ln|\tan u| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.\end{aligned}$$

4. 混合利用之例

**例 10**

$$\begin{aligned}\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\int \sin 5x\mathrm{d}5x + \cos x\right)\\ &= \frac{1}{10}\int \sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{10}\cos u + \frac{1}{2}\cos x + c\\ &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + c.\end{aligned}$$

**例 11**

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\mathrm{d}x =& x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\\ =& x\arcsin x + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = x\arcsin x + u^{\frac{1}{2}} + c\\ =& x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

**例 12**

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x =& \frac{1}{a}\int \cos bx\mathrm{d}\mathrm{e}^{ax}\\ =& \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}\cos bx\\ =& \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x\\ =& \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\mathrm{d}\mathrm{e}^{ax}\\ =& \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}\sin bx\\ =& \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此推出

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax} + c.$$

**注 2**　这个结果也可以使用欧拉公式, 以及函数 $\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}\cos bx + \mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ 的原函数是

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} =& \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\\ =& \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{i}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\end{aligned}$$

这一事实得到. 只需对于函数 $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}$ 的实、虚部分别求导数, 即可验证前式. 特别地, 由此还得到

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax} + c.$$

下面举几个例子, 说明有许多对于应用很重要的特殊函数, 它们的原函数都不是初等的.

积分正弦

$$\mathrm{Si}\,x = \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$\left(\text{函数 } \dfrac{\sin x}{x} \text{ 的一个原函数}\right)$, 当 $x \to 0$ 时它趋于零. 这样的原函数是存在的, 但它们不是初等函数的复合.

**积分余弦** 是当 $x \to \infty$ 时趋于零的特定的函数

$$\operatorname{Ci} x = \int \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x.$$

**积分对数** 是函数 $\dfrac{1}{\ln x}$ 的原函数

$$\operatorname{li} x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},$$

它满足条件: 当 $x \to +0$ 时 $\operatorname{li} x \to 0$ (本章后面将更详细地谈及特殊函数 $\operatorname{Si} x$, $\operatorname{Ci} x$, $\operatorname{li} x$).

考虑到求原函数的这些困难, 人们编制了相当庞大的不定积分表.

下面研究几类特别的函数的求积问题, 这些函数的原函数都能表成初等函数的复合.

### 5.1.3 有理函数的原函数

考虑形如 $\int R(x)\mathrm{d}x$ 的积分, 其中 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是多项式的比.

在实数域中考虑, 任何这样的分式都可展开成和式 (见 4.5.5 小节)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\right), \tag{5.1.5}$$

其中 $p(x)$ 是多项式 (它仅当 $P(x)$ 的次数不小于 $Q(x)$ 的次数时出现), $a_{jk}$, $b_{jk}$, $c_{jk}$ 是单值确定的实数, 而 $Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n}$.

关于如何构作展开式 (5.1.5), 我们在 4.5 节已讨论过了. 作出展开式 (5.1.5) 后, 函数 $R(x)$ 的求积归结为单个被加项的求积. 在例 1 中我们已经求过多项式的积分, 因此剩下的只是考虑形如

$$\frac{1}{(x-a)^k} \text{ 和 } \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

的分式的求积.

关于第一个分式, 问题立即得到解决, 因为

$$\int (x-a)^{-k}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + c, & k \neq 1, \\ \ln|x-a| + c, & k = 1. \end{cases} \tag{5.1.6}$$

对于积分

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x,$$

我们做如下的处理. 表 $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, 其中 $p-\frac{p^2}{4}>0$, 因为 $x^2+px+q$ 没有实根. 置 $x+\frac{p}{2}=u$, $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, 得

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\int \frac{\alpha u+\beta}{(u^2+a^2)^k}\mathrm{d}u,$$

其中 $\alpha=b,\beta=c-\frac{bp}{2}$.

其次,

$$\begin{aligned}\int \frac{u}{(u^2+a^2)^k}\mathrm{d}u&=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-k)}(u^2+a^2)^{1-k}, & k\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}\ln(u^2+a^2), & k=1.\end{cases}\end{aligned}\tag{5.1.7}$$

于是剩下的是处理积分

$$I_k=\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^k}.\tag{5.1.8}$$

分部积分并做初等变换, 得

$$\begin{aligned}I_k&=\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+2k\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^{k+1}}\\&=\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+2k\int \frac{(u^2+a^2)-a^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}u\\&=\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+2kI_k-2ka^2I_{k+1},\end{aligned}$$

由此得到递推关系式

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}I_k.\tag{5.1.9}$$

它使我们能够降低积分 (5.1.8) 中的次数 $k$. 而易于算出:

$$I_1=\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+c,\tag{5.1.10}$$

从而使用 (5.1.9) 和 (5.1.10) 就可以算出原函数 (5.1.8).

关于有理函数积分法, 我们事实上证明了下面的命题.

**命题 2** 任何有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的原函数都可由有理函数以及超越函数 ln 和 arctan 表出. 如果将原函数的有理部分通分, 则其公分母是多项式 $Q(x)$ 分解出的全部因子的乘积, 只是幂次比在 $Q(x)$ 中少 1.

**例 13** 计算 $\displaystyle\int\frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\mathrm{d}x$.

由于被积函数是真分式且它的分母的乘积展开式 $(x-1)(x+1)(x+2)$ 也已知道, 所以我们一下子就求出它的最简分式的和的形式:

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}. \tag{5.1.11}$$

将 (5.1.11) 右端通分, 有

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)}{(x^2-1)(x+2)}.$$

于是, 让分子的相应的系数相等, 得到方程组

$$\begin{cases}A+B+C=2,\\ 3A+B=5,\\ 2A-2B-C=5,\end{cases}$$

从而求出 $(A,B,C)=(2,-1,1)$.

我们指出, 在所给的情况下, 这些数也可以心算出来. 实际上, 以 $(x-1)$ 遍乘 (5.1.11), 然后在所得等式中令 $x=1$, 右边得 $A$, 而左边是消去分母中的因子 $(x-1)$ 后的分式当 $x=1$ 时的值, 即 $A=\dfrac{2+5+5}{2\times 3}=2$. 类似地可以求出 $B$ 和 $C$.

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\mathrm{d}x&=2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}\\&=2\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln|x+2|+c\\&=\ln\left|\frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}\right|+c.\end{aligned}$$

**例 14** 计算函数 $R(x)$ 的原函数, 这里

$$R(x)=\frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

首先指出 $R(x)$ 不是真分式. 因此, 打开括弧求出它的分母 $Q(x)=x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1$, 用它来除分子, 得到

$$R(x)=x+\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

然后再求真分式 $\dfrac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ 的展开式

$$\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}. \tag{5.1.12}$$

当然, 可以用正规的办法写成六个未知数的六个方程来求出展开式. 但我们不这样做. 我们向大家演示另外一些可能用到的技巧.

我们这样求系数 $A$, 用 $(x-1)^2$ 遍乘 (5.1.12), 然后令 $x=1$, 得到 $A=-1$.

代入已知的值 $A=-1$, 把分式 $\dfrac{A}{(x-1)^2}$ 移到等式 (5.1.12) 的左边. 那时得到

$$\frac{x^4+x^3+2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}, \tag{5.1.13}$$

由此, 以 $(x-1)$ 遍乘 (5.1.13) 然后令 $x=1$, 求得 $B=1$.

现在把分式 $\dfrac{B}{x-1}$ 移到等式 (5.1.13) 的左边, 得

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+1)^2}=\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}. \tag{5.1.14}$$

将等式 (5.1.14) 通分, 让两边分子相等

$$x^2+x+2=Ex^3+Fx^2+(C+E)x+(D+F),$$

由此推出

$$\begin{cases} E=0, \\ F=1, \\ C+E=1, \\ D+F=2, \end{cases}$$

即 $(C,D,E,F)=(1,1,0,1)$. 这就得到等式 (5.1.12) 中的全部系数. 前两个分式求

积时分别给出 $\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\ln|x-1|$. 还有

$$\begin{aligned}\int \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-1}{2(x^2+1)} + I_2,\end{aligned}$$

其中

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\arctan x + c_1,$$

这是从 (5.1.9) 和 (5.1.10) 推出的.

最后

$$\int \frac{Ex+F}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \arctan x + c_2.$$

把所有的积分收拢起来, 最后有

$$\int R(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \ln|x-1| + \frac{3}{2}\arctan x - \frac{1}{2(x^2+1)} + c.$$

现在来考察一些常见的可以归结为有理函数的原函数的不定积分.

### 5.1.4 $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ 型的原函数

设 $R(u,v)$ 是 $u$ 和 $v$ 的有理函数, 即多项式 $P(u,v)$ 和 $Q(u,v)$ 的比, 其中 $P(u,v)$ 和 $Q(u,v)$ 是单项式 $u^m v^n (m,\ n = 0,1,2,\cdots)$ 的线性组合. 计算原函数 $\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ 有好几种方法, 其中有一种是完全万能的, 虽然并不总是最省事的.

(1) 做替换

$$\boxed{t = \tan\frac{x}{2}},$$

$$\boxed{\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}.$$

事实上,

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}},$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\dfrac{x}{2}}, \quad \text{即 } \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

做替换则得. 于是问题化为对有理函数求积分. 但是这样去做常常导致非常复杂的有理函数, 因此, 应该注意到在许多场合存在着将积分有理化的别的可行的办法.

(2) 对于 $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\mathrm{d}x$ 型或 $\int r(\tan x)\mathrm{d}x$ 型的积分, 其中 $r(u)$ 是有理函数, 用替换

$$\boxed{t = \tan x}.$$

则

$$\boxed{\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\int r(\tan x)\mathrm{d}x = \int r(t)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}.$$

事实上,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x},$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}, \quad \text{即 } \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 x}.$$

(3) 考虑 $\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x\mathrm{d}x$ 和 $\int R(\cos^2 x, \sin x)\cos x\mathrm{d}x$ 型的积分.

做替换 $t = \cos x$,

$$\boxed{\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x\mathrm{d}x = -\int R(\cos x, \sin^2 x)\mathrm{d}\cos x = -\int R(t, 1-t^2)\mathrm{d}t}.$$

做替换 $t = \sin x$,

$$\boxed{\int R(\cos^2 x, \sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int R(\cos^2 x, \sin x)\mathrm{d}\sin x = \int R(1-t^2, t)\mathrm{d}t}.$$

**例 15**

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x} &= \int \frac{1}{3+\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+3} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(t+\dfrac{1}{3}\right)}{\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{8}{9}} \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3u}{2\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3t+1}{2\sqrt{2}}+c$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}+c.$$

**例 16**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(\tan x+1)^2}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{(\tan x+1)^2}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{t+1}+c=-\frac{1}{1+\tan x}+c.$$

**例 17**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 3x-3\cos^2 3x+1}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x[2\tan^2 3x-3+(1+\tan^2 3x)]}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\tan 3x}{3\tan^2 3x-2}$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2-2}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{3}{2}}t}{\frac{3}{2}t^2-1}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=\frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}t-1}{\sqrt{\frac{3}{2}}t+1}\right|+c$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\tan 3x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\tan 3x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|+c.$$

**例 18**

$$\int\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{\sin^7 x}=\int\frac{\cos^2 x\mathrm{d}\sin x}{\sin^7 x}=\int\frac{1-t^2}{t^7}\mathrm{d}t$$
$$=\int(t^{-7}-t^{-5})\mathrm{d}t=-\frac{1}{6}t^{-6}+\frac{1}{4}t^{-4}+c$$
$$=\frac{1}{4\sin^4 x}-\frac{1}{6\sin^6 x}+c.$$

### 5.1.5 $\int R(x,y(x))\mathrm{d}x$ 型的原函数

如 5.1.4 小节, 设 $R(u,v)$ 是有理函数, 考察形如

$$\int R(x,y(x))\mathrm{d}x$$

的某些特殊的原函数, 其中 $y=y(x)$ 是 $x$ 的函数.

首先注意, 如果替换 $x=x(t)$ 使得 $x=x(t)$ 和 $y=y(x(t))$ 都是 $t$ 的有理函数, 则 $x'(t)$ 也是 $t$ 的有理函数, 从而问题归结为有理函数的求积:

$$\int R(x,y(x))\mathrm{d}x=\int R(x(t),y(x(t)))x'(t)\mathrm{d}t.$$

我们考虑给定函数 $y=y(x)$ 的特殊情形.

1. 如果 $y=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, 那么, 置 $t^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 得到 $x=\dfrac{t^nd-b}{a-ct^n}$, $y=t$, 从而被积表达式被有理化.

**例 19**

$$\begin{aligned}\int\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x&=\int t\mathrm{d}\left(\frac{t^3+1}{1-t^3}\right)\\&=t\frac{t^3+1}{1-t^3}-\int\frac{t^3+1}{1-t^3}\mathrm{d}t=t\frac{t^3+1}{1-t^3}-\int\left(\frac{2}{1-t^3}-1\right)\mathrm{d}t\\&=t\frac{t^3+1}{1-t^3}+t-2\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t+t^2)}\\&=t\frac{t^3+1}{1-t^3}+t-2\int\left(\frac{1/3}{(1-t)}+\frac{2/3+(1/3)t}{1+t+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{2t}{1-t^3}+\frac{2}{3}\ln|1-t|-\frac{2}{3}\int\frac{(t+1/2)+3/2}{(t+1/2)^2+3/4}\mathrm{d}t\\&=\frac{2t}{1-t^3}+\frac{2}{3}\ln|1-t|-\frac{1}{3}\ln\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\\&\quad-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)+c,\end{aligned}$$

其中 $t=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

2. 现在考察 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的情形, 即考虑下型的积分

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x.$$

通过配方并做适当的线性变量变换, 把一般情况化为下列三种简单情形之一:

$$\int R(t,\sqrt{t^2+1})\mathrm{d}t,\quad\int R(t,\sqrt{t^2-1})\mathrm{d}t,\quad\int R(t,\sqrt{1-t^2})\mathrm{d}t.\tag{5.1.15}$$

为把这些积分有理化, 只需分别令 (欧拉替换)

(1) $\sqrt{t^2+1}=tu+1$ 或 $\sqrt{t^2+1}=tu-1$ 或 $\sqrt{t^2+1}=t-u$.

(2) $\sqrt{t^2-1}=(t-1)u$ 或 $\sqrt{t^2-1}=(t+1)u$ 或 $\sqrt{t^2-1}=t-u$.

(3) $\sqrt{1-t^2}=u(1-t)$ 或 $\sqrt{1-t^2}=u(1+t)$ 或 $\sqrt{1-t^2}=ut\pm 1$.

这些替换也是由欧拉提出的 (见本小节末的习题 8).

作为例子我们来验证经第一个替换之后, 把第一个积分化为有理函数的积分.

事实上, 若 $\sqrt{t^2+1}=tu+1$, 则 $t^2+1=t^2u^2+2tu+1$, 由此,

$$t=\frac{2u}{1-u^2},$$

以及

$$\sqrt{t^2+1}=\frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

这样一来, $t$ 和 $\sqrt{t^2+1}$ 都通过 $u$ 有理表示出了, 因而积分化成了有理函数的积分.

积分 (5.1.15) 还可经替换 $t=\sinh\varphi$, $t=\cosh\varphi$, $t=\sin\varphi$(或 $t=\cos\varphi$) 分别化为三角形式

$$\int R(\sinh\varphi,\cosh\varphi)\cosh\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad \int R(\cosh\varphi,\sinh\varphi)\sinh\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

以及

$$\int R(\sin\varphi,\cos\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad -\int R(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

**例 20**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{t^2+1}}.$$

令 $\sqrt{t^2+1}=u-t$, 有 $1=u^2-2tu$, 由此 $t=\dfrac{u^2-1}{2u}$, $\mathrm{d}t=\dfrac{u^2+1}{2u^2}\mathrm{d}u$. 因此

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u-1}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u-1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2(u-1)}\\&=\frac{1}{2}\ln|u-1|+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\ln|u-1|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+\frac{1}{2u}+c.\end{aligned}$$

现在只要再做相反的替换 $u=t+\sqrt{t^2+1}$ 和 $t=x+1$ 即可.

3. 椭圆积分. 形如

$$\int R(x,\sqrt{P(x)})\mathrm{d}x \tag{5.1.16}$$

的原函数也是很重要的, 其中 $P(x)$ 是次数 $n>2$ 的多项式. 阿贝尔和刘维尔曾经证明, 这样的积分一般说来已不能用初等函数表示.

当 $n=3$ 和 $n=4$ 时, 积分 (5.1.16) 叫做**椭圆积分**, 而当 $n>4$ 时叫做**超椭圆积分**.

可以证明, 一般的椭圆积分经过初等替换, 在不计一个初等函数被加项的条件下, 可归结为下面三个标准椭圆积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{5.1.17}$$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{5.1.18}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{5.1.19}$$

其中 $h,k$ 是参数 $k\in(0,1)$. 经替换 $x=\sin\varphi$, 这些积分可化为下列积分或它们的线性组合:

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{5.1.20}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}\mathrm{d}\varphi, \tag{5.1.21}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-h^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{5.1.22}$$

积分 (5.1.20)~(5.1.22) 分别叫做 (拉格朗日形式的)**第一类、第二类和第三类椭圆积分**. 用 $F(k,\varphi)$ 和 $E(k,\varphi)$ 分别代表由条件 $F(k,0)=0$ 和 $E(k,0)=0$ 确定的第一类椭圆积分 (5.1.20) 和第二类椭圆积分 (5.1.21).

函数 $F(k,\varphi)$ 和 $E(k,\varphi)$ 常常被用到, 因此对于 $0<k<1$ 和 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, 为它们编制了相当详细的函数值表.

阿贝尔指出, 在复数域中很自然地看到椭圆积分与所谓椭圆函数的不可分割的联系. 椭圆函数与椭圆积分的关系, 举例来说, 就如同函数 $\sin\varphi$ 与积分 $\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}=\arcsin\varphi+c$ 的关系一样.

## 练　　习

1. 验证 $y=\dfrac{x^2}{2}\mathrm{sgn}x$ 是 $|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

2. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x.$　　(2) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

(3) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

(4) $\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x$.

(5) $\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$.

(6) $\int |\sin x|\mathrm{d}x$.

3. 应用换元积分法求下列不定积分:

(1) $\int (1+x)^n\mathrm{d}x$.

(2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

(3) $\int \csc x\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$.

(6) $\int \frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x$.

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3}}$.

(8) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(9) $\int x(1-2x)^{99}\mathrm{d}x$.

(10) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\mathrm{d}x$.

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

4. 应用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

(2) $\int \ln x\mathrm{d}x$.

(3) $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$.

(5) $\int (\ln x)^2\mathrm{d}$.

(6) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

(7) $\int \left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]\mathrm{d}x$.

(8) $\int \sqrt{x^2-5}\mathrm{d}x$.

(9) $\int \sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x$.

5. 证明: 若 $I(m,n)=\int \cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$, 则当 $m+n\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n) \\ &= \frac{\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2), \quad n,m=2,3,\cdots. \end{aligned}$$

6. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^3}{x-1}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$.

(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$.

(5) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

(6) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

(7) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.　　(8) $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$.

(9) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}$.　　(10) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(11) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

7. 设欲求原函数

$$\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x,$$

其中 $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ 是有理函数.

证明:

(1) 若 $R(-u,v)=R(u,v)$, 则 $R(u,v)$ 形如 $R_1(u^2,v)$.

(2) 若 $R(-u,v)=-R(u,v)$, 则 $R(u,v)=R_2(u^2,v)u$, 且替换 $t=\sin x$ 把上述积分有理化.

(3) 若 $R(-u,-v)=R(u,v)$, 则 $R(u,v)=R_3\left(\dfrac{u}{v},v^2\right)$, 且替换 $t=\tan x$ 把上述积分有理化.

8. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型积分:

(1) 验证: 经下列欧拉替换

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x,\quad \text{若}a>0,$$
$$t=\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}},\quad \text{若}x_1,x_2\text{是三项式}ax^2+bx+c\text{的实根},$$

积分

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$$

被化为有理函数的积分.

(2) 设 $(x_0,y_0)$ 是曲线 $y^2=ax^2+bx+c$ 上的点, 而 $t$ 是过点 $(x_0,y_0)$ 与曲线在点 $(x,y)$ 处相交的直线的斜率. 通过 $(x_0,y_0)$ 和 $t$ 来表示坐标 $(x,y)$ 并把这些公式与欧拉替换联系起来.

(3) 由代数方程 $P(x,y)=0$ 确定的曲线, 如果能借助于有理函数 $x(t)$, $y(t)$ 用参数形式 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 表示的话, 就叫做**有理曲线**. 证明: 若 $R(u,v)$ 是有理函数, $y(x)$ 是满足给出有理曲线的方程 $P(x,y)=0$ 的一个代数函数, 那么 $\int R(x,y(x))\mathrm{d}x$ 归结为有理函数的积分.

(4) 证明: 永远可以把积分 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 归结为计算下列三种类型的积分:

$$\int \frac{P(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^k\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int \frac{(Ax+B)\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

9. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x)}{g(y)}$$

的微分方程叫做分离变量的方程, 因为可以把它改写成

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x,$$

这里变量 $x$ 和 $y$ 已被分开. 分开变量之后就可以分别计算原函数而解出方程:

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + c.$$

试解方程:

(1) $2x^3yy' + y^2 = 2$.

(2) $xyy' = \sqrt{1+x^2}$.

(3) $y' = \cos(y+x)$, 令 $u(x) = y(x) + x$.

(4) $x^2y' - \cos 2y = 1$, 并挑出当 $x \to +0$ 时满足条件 $y(x) \to 0$ 的解.

## 5.2 定 积 分

### 5.2.1 积分定义和可积函数集的描述

上文涉及的求原函数和不定积分与下面讨论的求定积分的区别主要在于前者是求导数的逆运算, 而后者则是研究某种特殊和式的极限.

首先给出两个带启发性的例子.

(1) **曲边梯形的面积**. 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ 连续. 由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 $x$ 轴所围成的平面图形称为曲边梯形 (记作 $A$). 人们常用以直代曲方式求其面积: 取点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 以直线 $x = x_i, i = 1, \cdots, n$, 把 $A$ 分割成 $n$ 个小曲边梯形 (图 31), 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 作以 $f(\xi_i)$ 为高的小矩形 (显然其面积 $s_i = f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$), 于是可设想, $A$ 的面积

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} s_i, \text{ 且 } S = \lim_{\max\limits_i \Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{5.2.1}$$

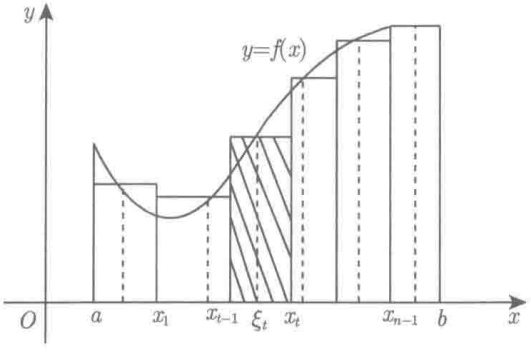


图 31

(2) **运动质点的坐标.** 设有一质点沿数轴运动, 它在时刻 $t$ 的坐标是 $s(t)$, 速度为 $v(t)=s'(t)$. 假定知道了它在时刻 $t_0$ 的位置是 $s(t_0)$, 及其速度的数据, 欲计算 $s(t)$, $t>t_0$. 假定 $v(t)$ 是连续变化的. 那么点在一小段时间内的位移将近似地等于该时间间隔内任一时刻 $\tau$ 的速度 $v(\tau)$ 与这一小段时间间隔的值 $\Delta t$ 的乘积 $v(\tau)\Delta t$. 于是指定一些时刻 $t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ 以分割区间 $[t_0,t]$. 设间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 都取得很小. 记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, 取 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$. 则有近似等式

$$s(t)-s(t_0)\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i.$$

可以想象, 如果对区间 $[t_0,t]$ 所作的分割越细, 这个近似等式就越精确. 这样一来, 可以设想, 在当分划的最大间隔长 $\lambda$ 趋于零的极限情形下, 我们将得到精确等式

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i=s(t)-s(t_0).\tag{5.2.2}$$

以上例子表明, 人们需要研究形如 (5.2.1) 或 (5.2.2) 的分割求和取极限的理论.

1. **黎曼积分的定义**

(a) **分划**

**定义 1**　给定闭区间 $[a,b]$ $(a<b)$, 引入下述概念:

(1) **分划 $P$:** 指有限多个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 做成的点组, 其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

(2) **分划 $P$ 的区间:** 指区间 $[x_{i-1},x_i],i=1,\cdots,n$.

(3) **分划 $P$ 的参数:** 指分划 $P$ 的最大区间长 $\lambda(P)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$.

(4) **带标志点的分划 $(P,\xi)$:** 指配备了数组 $\xi=\{\xi_i\}$ 的分划 $P$, 其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2\cdots,n$.

(b) **分划的基**

给定闭区间 $[a,b]$, 作集合

$$\mathcal{P}=\{p=(P,\xi)\,|\,(P,\xi)\text{ 是 }[a,b]\text{ 的带标志点的分划}\},$$

$$B_d=\{(P,\xi)\in\mathcal{P}\,|\,\lambda(P)<d\},\quad\mathcal{B}=\{B_d\,|\,d>0\}.$$

我们来验证 $\{B_d\}(d>0)$ 是 $\mathcal{P}$ 的基.

首先, $B_d\neq\varnothing$. 事实上, 对任何数 $d>0$, 显然存在区间 $[a,b]$ 的分划 $P$, 其参数 $\lambda(P)<d$(例如, 分成 $n$ 个全等区间的分划). 由此, 也存在带标志点的分划 $(P,\xi)$ 且 $\lambda(P)<d$.

其次, 如果 $0<d_1,0<d_2$ 及 $d=\min\{d_1,d_2\}$, 则显然有 $B_{d_1}\cap B_{d_1}=B_d\in\mathcal{B}$.

由此 $\mathcal{B}=\{B_d\}$ 确实是 $\mathcal{P}$ 的基.

(c) 积分和

**定义 2** 设 $f$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数. $\forall p=(P,\xi)\in\mathcal{P}$, 称和

$$\sigma(f;p)=\sigma(f;P,\xi):=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,\quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1} \tag{5.2.3}$$

为 $f$ 在 $[a,b]$ 上对应于 $(P,\xi)$ 的积分和.

这样, 对于确定的函数 $f$, 积分和 $\sigma(f;P,\xi)$ 是定义在集合 $\mathcal{P}$ 上的函数

$$\Phi:\mathcal{P}\to\mathbb{R},\quad p=(P,\xi)\mapsto\sigma(f;p).$$

由于在 $\mathcal{P}$ 中有基 $\mathcal{B}$, 所以可以提出函数 $\Phi(p)$ 关于这个基的极限的问题.

(d) 黎曼积分

**定义 3** 设 $f$ 是给定在闭区间 $[a,b]$ 上的函数. 称数 $I$ 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分, 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使对 $[a,b]$ 的任何带标志点的分划 $(P,\xi)$, 只要其参数 $\lambda(P)<\delta$, 就有

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon.$$

用下述符号记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分:

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$

数 $a,b$ 分别叫做积分的下限和上限; $f$ 叫做被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式, $x$ 叫做积分变量.

因为满足 $\lambda(P)<\delta$ 的那些分划 $p=(P,\xi)$ 组成了上面在带标志点的分划的集合 $\mathcal{P}$ 中引进的基 $\mathcal{B}$ 的元素 $B_\delta$, 所以定义 3 等价于

$$I=\lim_{\mathcal{B}}\Phi(p), \tag{5.2.4}$$

于是

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x:=\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i}. \tag{5.2.5}$$

**定义 4** 称函数 $f$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, 如果对于它, 公式 (5.2.5) 中的积分和当 $\lambda(P)\to0$ 时的极限存在.

以 $\mathcal{R}[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上的一切黎曼可积函数所成的集合.

因暂不研究黎曼积分以外的其他积分, 为简单记, 约定分别以 "积分" 和 "可积函数" 代替 " 黎曼积分" 和 "黎曼可积函数" 这两个术语.

2. 可积函数集

根据积分的形如 (5.2.4), (5.2.5) 的表述, 积分是一个特定的函数 $\Phi(p)=\sigma(f;P,\xi)$ 的极限, 这个极限是关于 $\mathcal{P}$ 的基 $\mathcal{B}$ 取的, 我们以 $\lambda(P)\to 0$ 表示它. 于是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的可积性取决于上述极限的存在性.

根据柯西准则, 这个极限存在 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists B_\delta\in\mathcal{B}$, 使得 $\forall p',p''\in B_\delta$ 都成立关系

$$|\Phi(p')-\Phi(p'')|<\varepsilon.$$

换言之: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使对区间 $[a,b]$ 上的任何带标志点的分划 $(P',\xi'),(P'',\xi'')$, 只要 $\lambda(P')<\delta$ 和 $\lambda(P'')<\delta$, 就有

$$|\sigma(f;P',\xi')-\sigma(f;P'',\xi'')|<\varepsilon$$

或

$$\left|\sum_{i=1}^{n'}f(\xi_i')\Delta x_i'-\sum_{i=1}^{n''}f(\xi_i'')\Delta x_i''\right|<\varepsilon. \tag{5.2.6}$$

由柯西准则可得到函数黎曼可积的必要条件及一些充分条件.

(a) 可积性的必要条件

**命题 1**　为使定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f$ 在这个区间上黎曼可积, 它必须在这个区间上有界, 即

$$(f\in\mathcal{R}[a,b])\Rightarrow(f\text{ 在 }[a,b]\text{ 上有界}).$$

**证**　反证法. 如果 $f$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对区间 $[a,b]$ 的任一分划 $P$, $f$ 至少在它的一个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界. 因此, 可以选出点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使 $|f(\xi_i)\Delta x_i|$ 任意大. 于是, 只需改变点 $\xi_i$ 在这个区间中的位置, 就能使积分和 $\sigma(f;P,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的绝对值任意大. 在这种情形下, 积分和显然没有有限极限. 此外, 易见这时对无论多么细的分划, 关系式 (5.2.6) 都不全成立. □

由这个必要条件, 我们今后只需研究有界函数.

(b) 可积性的充分条件和最重要的可积函数类

首先引入一些记号.

(1) 约定: 当给定了 $[a,b]$ 的任一分划 $P$: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 时, 用符号 $\Delta x_i$ 表示差 $x_i-x_{i-1}$, 用 $\Delta_i$ 表示区间 $[x_{i-1},x_i]$.

(2) 如果 $[a,b]$ 的分划 $\tilde{P}$ 是由分划 $P$ 添加一些新的分点得到的, 则说分划 $\tilde{P}$ 是分划 $P$ 的**开拓**. 当把分划 $P$ 开拓成 $\tilde{P}$ 时, 分划 $P$ 的某些 (可以是其全部) 区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ 被分割: $x_{i-1}=x_{i0}<\cdots<x_{in_i}=x_i$. 由于这个原因, 对 $\tilde{P}$ 的点用

两个指标编号比较方便. 在 $x_{ij}$ 中的第一个指标表示 $x_{ij} \in \Delta_i$, 而第二个指标是在区间 $\Delta_i$ 上点的顺序号码. 相应地记

$$\Delta_{ij} := [x_{ij-1}, x_{ij}] \text{ 和 } \Delta x_{ij} := x_{ij} - x_{ij-1},$$

从而, $\Delta_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \Delta_{ij}$, $\Delta x_i = \Delta x_{i1} + \cdots + \Delta x_{in_i}$. 由分划 $P'$ 和分划 $P''$ 的点的并得到的分划 $\tilde{P} = P' \cup P''$, 是同时是分划 $P'$ 和 $P''$ 的开拓的例子.

(3) 如同过去一样, 符号 $\omega(f; E)$ 表示函数 $f$ 在集合 $E$ 上的振幅, 即

$$\omega(f; E) := \sup_{x', x'' \in E} |f(x') - f(x'')|.$$

特别地, $\omega(f; \Delta_i)$ 是函数 $f$ 在区间 $\Delta_i$ 上的振幅. 如果 $f$ 是有界函数, 这个振幅显然是有限的.

**命题 2** 为使 $[a, b]$ 上的有界函数 $f$ 在这个区间上可积, 只要 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使对 $[a, b]$ 的参数 $\lambda(P) < \delta$ 的分划 $P$ 总成立关系

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

**证** 设 $P$ 是区间 $[a, b]$ 的一个分划, $\tilde{P}$ 是分划 $P$ 的开拓. 我们来估计积分和之差 $\sigma(f; \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P, \xi)$. 利用上面引进的符号, 有

$$\begin{aligned}
|\sigma(f; \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P, \xi)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_i) \Delta x_{ij} \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} (f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)) \Delta x_{ij} \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} |f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)| \Delta x_{ij} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i.
\end{aligned}$$

在这些计算中, 利用了 (因为 $\xi_{ij} \in \Delta_{ij} \subset \Delta_i, \xi_i \in \Delta_i$)

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij} \text{以及 } |f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)| \leqslant \omega(f; \Delta_i).$$

从得到的积分和之差的估计推出: 如果 $f$ 满足在命题 2 中说的充分条件, 则对每个 $\varepsilon>0$ 都能找到 $\delta>0$ 使得对于区间 $[a,b]$ 的参数 $\lambda(P)<\delta$ 的分划 $P$ 以及 $P$ 的开拓 $\tilde{P}$, 关于任意取的标志点 $\xi$ 和 $\tilde{\xi}$, 都有

$$|\sigma(f;\tilde{P},\tilde{\xi})-\sigma(f;P,\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如果 $(P',\xi')$ 和 $(P'',\xi'')$ 是 $[a,b]$ 的任意两个带标志点的分划, 且 $\lambda(P')<\delta,\lambda(P'')<\delta$, 考察分划 $\tilde{P}=P'\cup P''$, 它是两个分划 $P',P''$ 的开拓, 那么, 根据已经证明的事实, 有

$$|\sigma(f;\tilde{P},\tilde{\xi})-\sigma(f;P',\xi')|<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$|\sigma(f;\tilde{P},\tilde{\xi})-\sigma(f;P'',\xi'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此得出, 一旦 $\lambda(P')<\delta,\lambda(P'')<\delta$, 就有

$$|\sigma(f;P',\xi')-\sigma(f;P'',\xi'')|<\varepsilon.$$

这样一来, 根据柯西准则, 积分和的极限

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 亦即 $f\in\mathcal{R}[a,b]$. □

**推论 1**　命题 2 有下述推论.

(1) 如果闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数 $f$ 在该区间上至多有有限多个不连续点, 则 $f\in\mathcal{R}[a,b]$. 特别地, $(f\in C[a,b])\Rightarrow(f\in\mathcal{R}[a,b])$, 亦即闭区间上的任何连续函数在这个区间上可积.

(2) 闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数在该区间上可积.

**证**　(1) 先考虑闭区间上的连续函数 $f$. 则它在这个区间上有界, 从而可积性的必要条件成立. 但是, 闭区间上的连续函数也一致连续, 因此, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使在任何区间 $\Delta\subset[a,b]$ 上, 只要 $\Delta$ 的长小于 $\delta$, 就有 $\omega(f;\Delta)<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 于是, 对于任何分划 $P$, 只要其参数 $\lambda(P)<\delta$, 就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

根据命题 2 可以得到 $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

其次, 假设 $\omega(f;[a,b])\leqslant C<\infty$, 而 $f$ 在 $[a,b]$ 上有 $k$ 个间断点. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取数 $\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{8C\cdot k}$, 并做 $f$ 的每个间断点的 $\delta_1$-邻域. 这些邻域的并关于区间 $[a,b]$

的补集是由有限个闭区间组成的, 在每个这样的区间上 $f$ 都是连续的, 从而是一致连续的. 由于这种区间只有有限多个, 对 $\varepsilon>0$ 可以指定 $\delta_2>0$, 使在任何区间 $\Delta$ 上, 只要它的长小于 $\delta_2$, 且全部被包含在上面所说的使 $f$ 连续的一个区间内, 就有 $\omega(f;\Delta)<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 设 $P$ 是闭区间 $[a,b]$ 的任意一个分划且 $\lambda(P)<\delta$. 与分划 $P$ 相应的和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i$ 分成两部分:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=\sum{}'\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i+\sum{}''\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$

在和 $\Sigma'$ 中包含了那样的项, 与它相应的分划 $P$ 的区间 $\Delta_i$ 与所做的间断点的 $\delta_1$-邻域没有公共点. 对于这样的区间 $\Delta_i$, 有 $\omega(f;\Delta_i)<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, 因此

$$\sum{}'\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum{}'\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

又容易看出, 剩下来的分划 $P$ 的区间的长度和不超过 $(\delta+2\delta_1+\delta)k<4\dfrac{\varepsilon}{8C\cdot k}\cdot k=\dfrac{\varepsilon}{2C}$. 因此

$$\sum{}''\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<C\sum{}''\Delta x_i<C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\lambda(P)<\delta$ 时, 得到

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon.$$

亦即, $f$ 满足可积性的充分条件, 从而 $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

(2) 从函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的单调性推出

$$\omega(f;[a,b])=|f(b)-f(a)|.$$

设给定了 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}$. 我们假定 $f(b)-f(a)\neq0$, 因为在相反的情形 $f$ 是常数, 从而无疑是可积的. 设 $P$ 是区间 $[a,b]$ 的任意分划, 且其参数 $\lambda(P)<\delta$. 注意到 $f$ 的单调性, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i&<\delta\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)=\delta\sum_{i=1}^{n}|f(x_{i-1})-f(x_i)|\\&=\delta\left|\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1})-f(x_i))\right|=\delta|f(b)-f(a)|=\varepsilon.\end{aligned}$$

这样, $f$ 满足可积性的充分条件, 即 $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

单调函数可能是有无穷多个 (可数多个) 间断点的函数. 例如, 在闭区间 $[0,1]$ 上由关系

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2^n}, & 1-\dfrac{1}{2^n} \leqslant x < 1-\dfrac{1}{2^{n+1}}, n \in \mathbb{N}, \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

定义的函数是不减的, 而且在每个形如 $\dfrac{1}{2^n}(n \in \mathbb{N})$ 的点处间断.

**注 1**　值得指出, 虽然我们讨论的是在闭区间上的实函数, 但是无论是在积分的定义中, 还是在上述那些断言的证明中, 除去推论 1 之 (2), 实际上并没用到函数是实值而不是复值或向量值这样的假设条件.

但下面将要讨论的上积分和与下积分和的概念, 则是专对实值函数而言的.

**定义 5**　设 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的有界实函数; $P$ 是区间 $[a,b]$ 的一个分划; $\Delta_i (i=1,\cdots,n)$ 是分划 $P$ 的区间. 设

$$m_i=\inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad M_i=\sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i=1,\cdots,n.$$

和式

$$s(f;P)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

以及

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

分别叫做函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上对应于分划 $P$ 的**下积分和与上积分和**[①]. 和式 $s(f;P), S(f;P)$ 也叫做关于区间 $[a,b]$ 的分划 $P$ 的**下达布和与上达布和**.

如果 $(P,\xi)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的任一带标志点的分划, 显然有

$$s(f;P) \leqslant \sigma(f;P,\xi) \leqslant S(f;P). \tag{5.2.7}$$

**引理 1**　下述结论成立:

$$s(f;P)=\inf_{\xi} \sigma(f;P,\xi),$$

$$S(f;P)=\sup_{\xi} \sigma(f;P,\xi).$$

① 从形式上看, 这里使用 "积分和" 这一术语不太合理, 因为 $m_i$ 和 $M_i$ 并不总是函数 $f$ 在某个点 $\xi_i \in \Delta_i$ 的值.

**证** 我们来验证, 例如, 对应于闭区间 $[a,b]$ 的分划 $P$ 的上达布和, 是对应于闭区间 $[a,b]$ 的带标志点的分划 $(P,\xi)$ 的积分和之值的上确界. 这里的上确界是关于一切可能的标志点组 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 取的.

由 (5.2.7) 可见, 只要证明: 对任何 $\varepsilon>0$, 可以找到标志点组 $\bar{\xi}$, 使成立不等式

$$S(f;P)<\sigma(f;P,\bar{\xi})+\varepsilon. \tag{5.2.8}$$

根据数 $M_i$ 的定义, 对每个 $i\in\{1,\cdots,n\}$ 可以找到点 $\bar{\xi}_i\in\Delta_i$ 使 $M_i<f(\bar{\xi}_i)+\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 设 $\bar{\xi}=(\bar{\xi}_1,\cdots,\bar{\xi}_n)$. 那么

$$\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\left(f(\bar{\xi}_i)+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\bar{\xi}_i)\Delta x_i+\varepsilon.$$

这就证明了引理的第二部分. 它的第一部分的证明是类似的. □

从引理的证明和不等式 (5.2.7), 考虑到黎曼积分的定义, 可以推断出下面命题是正确的.

**命题 3** 有界实函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件是极限

$$\underline{I}=\lim_{\lambda(P)\to0}s(f;P),\quad \overline{I}=\lim_{\lambda(P)\to0}S(f;P) \tag{5.2.9}$$

存在且相等. 这时, 它们的公共值

$$I\,(=\underline{I}=\overline{I})=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证** 事实上, 如果 (5.2.9) 式中两个极限存在并相等, 则根据极限的性质, 从 (5.2.7) 式得到积分和的极限的存在性, 而且

$$\underline{I}=\lim_{\lambda(P)\to0}\sigma(f;P,\xi)=\overline{I}.$$

另一方面, 如果 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, 亦即存在极限 $\lim\limits_{\lambda(P)\to0}\sigma(f;P,\xi)=I$, 则从 (5.2.7) 和 (5.2.8) 推出存在极限

$$\lim_{\lambda(P)\to0}S(f;P)=\overline{I}\ \text{且}\ \overline{I}=I.$$

类似地, 可以验证

$$\lim_{\lambda(P)\to0}s(f;P)=\underline{I}=I.$$

□

据命题 3 可将命题 2 精确化.

**命题 2′**　为使闭区间 $[a,b]$ 上的有界实值函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在该区间上黎曼可积, 必须且只须满足关系

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0. \tag{5.2.10}$$

**证**　考虑到命题 2, 只需证明关系 (5.2.10) 是 $f$ 可积的必要条件. 确实, 因 $\omega(f;\Delta_i)=M_i-m_i$, 故

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=S(f;P)-s(f;P).$$

从而由命题 3 立刻从 $f\in\mathcal{R}[a,b]$ 导出 (5.2.10). □

(c) **向量空间 $\mathcal{R}[a,b]$**

称集合 $E$ 是 (域 $\mathbb{R}$ 上) 的**向量空间 (或线性空间)**, 如果 $\forall u,v\in E,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 推出

$$\alpha u+\beta v\in E.$$

下述命题中的断言 (1) 和 (2) 表明 $\mathcal{R}[a,b]$ 是一个向量空间.

**命题 4**　如果 $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$, 则

(1) $(f+g)\in\mathcal{R}[a,b]$.

(2) $(\alpha f)\in\mathcal{R}[a,b]$, 其中 $\alpha$ 是数因子.

(3) $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$.

(4) $f|_{[c,d]}\in\mathcal{R}[c,d]$, 如果 $[c,d]\subset[a,b]$.

(5) $(f\cdot g)\in\mathcal{R}[a,b]$.

目前我们只研究实值函数, 但性质 (1)~(4) 对于复值函数和向量值函数也是对的. 一般说来, 对向量值函数, 乘积 $f\cdot g$ 是不定义的, 因此对它们不研究性质 (5). 但这个性质对复值函数仍然有效.

**证**　(1) 这个结论是显然的. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i.$$

(2) 这个结论是显然的. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha f)(\xi_i)\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(3) 因为 $\omega(|f|;E)\leqslant\omega(f;E)$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i,$$

从而根据命题 $2'$ 得到: $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow (|f| \in \mathcal{R}[a,b])$.

(4) 我们要证明闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数在任何闭区间 $[c,d] \subset [a,b]$ 上的限制 $f|_{[c,d]}$ 是 $[c,d]$ 上的可积函数. 设 $\pi$ 是区间 $[c,d]$ 的一个分划. 给 $\pi$ 补充一些点使之成为区间 $[a,b]$ 的一个分划 $P$ 且 $\lambda(P) \leqslant \lambda(\pi)$. 显然, 这总是可以办到的. 于是产生

$$\sum_{\pi} \omega(f|_{[c,d]}; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{P} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i,$$

其中 $\Sigma_\pi$ 表示关于分划 $\pi$ 的全部区间取和, 而 $\Sigma_P$ 表示关于分划 $P$ 的全部区间取和. 当 $\lambda(\pi) \to 0$ 时, 根据 $P$ 的构造方式也有 $\lambda(P) \to 0$, 从而根据命题 $2'$, 由上边的不等式得到: 如果 $[c,d] \subset [a,b]$, 则

$$(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow (f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[c,d]).$$

(5) 首先验证: 如果 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 则 $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$.

如果 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界. 设在 $[a,b]$ 上 $|f(x)| \leqslant C < \infty$. 则

$$\begin{aligned} |f^2(x_1) - f^2(x_2)| =& |(f(x_1) + f(x_2))(f(x_1) - f(x_2))| \\ \leqslant& 2C|f(x_1) - f(x_2)|, \end{aligned}$$

因此 $\omega(f^2; E) \leqslant 2C\omega(f; E)$, 其中 $E \subset [a,b]$. 这样,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant 2C \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i,$$

从而根据命题 $2'$, 我们得到

$$(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow (f^2 \in \mathcal{R}[a,b]).$$

现在来证一般情形. 利用等式

$$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4}[(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)],$$

并注意到刚刚证明的结果和命题 4 的 (1) 和 (2) 就得出:

$$(f \in \mathcal{R}[a,b]) \wedge (g \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow (f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]). \qquad \square$$

(d) *函数黎曼可积性的勒贝格判别法*

最后, 我们不加证明地给出勒贝格定理, 它刻画了黎曼可积函数的内在本质. 为此, 引进以下概念 (它本身也是有用的).

**定义 6** 称集合 $E \subset \mathbb{R}$(在勒贝格意义下) 有*零测度*或称它是一个*零测度集*, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在集合 $E$ 的由最多可数个开区间组成的覆盖 $\{I_k\}$, 且这些区间的

长度和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|$ 不超过 $\varepsilon$.

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|$ 是绝对收敛的, 求和的顺序对结果没有影响, 因此上面的定义是合理的.

**引理 2**　(1) 一个点或有限多个点的集合是零测度集.

(2) 有限多个或可数多个零测度集的并是零测度集.

(3) 零测度集的子集本身也是零测度集.

(4) 当 $a<b$ 时, 区间 $[a,b]$ 不是零测度集.

**证**　(1) 点可以用一个长度小于事先指定的任意小的 $\varepsilon>0$ 的开区间覆盖, 因此点是零测度集. (1) 的其余部分可由 (2) 推出.

(2) 设 $E=\bigcup\limits_{n}E^n$ 是最多可数个零测度集 $E^n$ 的并. 对于每个 $E^n$, 关于 $\varepsilon>0$, 做 $E^n$ 的覆盖 $\{I_k^n\}_k$ 使 $\sum\limits_{k}|I_k^n|<\dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

由于有限或可数集的有限或可数并最多是可数的, 开区间 $I_k^n, k,n\in\mathbb{N}$ 所组成的 $E$ 的覆盖最多也只能是可数的, 而且

$$\sum_{n,k}|I_k^n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^n}+\cdots=\varepsilon.$$

在 $\sum\limits_{n,k}|I_k^n|$ 中关于指标 $n$ 和 $k$ 的求和顺序是无关紧要的, 因为该级数只要在某求和顺序下收敛于一个和, 那么它在任何求和顺序下收敛于同一个和. 由于我们的级数的部分和以 $\varepsilon$ 为上界, 因此级数在某一求和顺序下的收敛性是显然的.

于是, $E$ 是勒贝格意义下的零测度集.

(3) 这个断言显然可由零测度集的定义和覆盖的定义直接推出.

(4) 由于闭区间的任一个由开区间作成的覆盖有有限覆盖, 这个有限覆盖的开区间的长度和显然不超过原覆盖的开区间的长度和. 因此, 只要证明组成区间 $[a,b]$ 的任意一个有限覆盖的开区间的长度和不小于这个区间的长度 $b-a$ 即可.

我们关于覆盖的开区间数进行归纳证明.

当 $n=1$ 时, 也就是区间 $[a,b]$ 被一个开区间 $(\alpha,\beta)$ 包含的情形, 显然 $\alpha<a<b<\beta$, 从而 $\beta-\alpha>b-a$.

假设对于 $n=1,\cdots,k$ 我们的断言正确, 现在考察覆盖是由 $k+1$ 个开区间 $(\alpha_1,\beta_1),\cdots,(\alpha_k,\beta_k)$, $(\alpha_{k+1},\beta_{k+1})$ 组成的情形. 不妨设 $(\alpha_1,\beta_1)$ 覆盖点 $a$. 如果 $\beta_1\geqslant b$, 则 $\beta_1-\alpha_1>b-a$, 从而证明了我们的断言. 如果 $\beta_1<b$, 则区间 $[\beta_1,b]$ 就由

其余 $k$ 个开区间所组成系所覆盖, 根据归纳假定, 它的区间长度的和不小于 $b-\beta_1$. 但是

$$b-a=(b-\beta_1)+(\beta_1-a)<(b-\beta_1)+(\beta_1-\alpha_1),$$

从而, 区间 $[a,b]$ 原来的覆盖所含开区间的长度和大于 $b-a$. □

根据引理 2 的 (1) 和 (2), 可见数轴 $\mathbb{R}$ 上的全部有理点的集合 $\mathbb{Q}$ 是一个零测度集.

**定义 7** 在集合 $X$ 上, 如果除去零测度集合的点, 某一性质都成立, 则说该性质在集合 $X$ 上几乎处处成立, 或者说在集合 $X$ 的几乎所有点有该性质.

现在来叙述勒贝格定理 (判别法).

**定理 1** 定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f$, 当且仅当它在 $[a,b]$ 上有界且几乎处处连续时, 它在该区间上黎曼可积, 即

$$(f\in\mathcal{R}[a,b])\Leftrightarrow(f\text{在}[a,b]\text{上有界})\wedge(f\text{在}[a,b]\text{上几乎处处连续}).$$

显然, 命题 2 的推论 1 和命题 4 都可以从勒贝格判别法和引理 2 中所说的零测度集的性质推出.

我们现在不去证明勒贝格判别法.

命题 2′ 中的关系 (5.2.10) 包含了实值函数可积性判别准则. 为使和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i$ 很小, 首先考虑因子 $\omega(f;\Delta_i)$. 我们知道, 它在函数的连续点的小邻域中是很小的. 而对于那些含有函数的间断点的 $\Delta_i$, 不管对 $[a,b]$ 的分划 $P$ 多么细, $\omega(f;\Delta_i)$ 都不接近于零. 但是, $\omega(f;\Delta_i)\leqslant\omega(f;[a,b])<\infty$(因为 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界), 从而含有间断点的那些项的和还是可能很小的, 只要分划中覆盖间断点集合的那些区间的长度和充分小. 勒贝格判别准则正是这些直观东西的严格叙述和实现.

现在引入用以说明黎曼可积函数性质的两个经典例子.

**例 1** 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上不可积, 因为对区间 $[0,1]$ 的任何分划 $P$, 在其每个区间 $\Delta_i$ 中都能找到一个有理数 $\xi_i'$ 和一个无理数 $\xi_i''$. 因此

$$\sigma(f;P,\xi')=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1,$$

而

$$\sigma(f;P,\xi'')=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0.$$

故当 $\lambda(P)\to 0$ 时函数 $D(x)$ 的积分和不可能有极限.

从勒贝格判别法来看, 狄利克雷函数的不可积性也是明显的, 因为函数 $D(x)$ 在区间 $[0,1]$ 中的间断点的集合不是零测度集 (引理 2).

**例 2**　黎曼 (Riemann) 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}\text{且}\dfrac{m}{n}\text{是既约分数},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

我们曾经研究过这个函数, 而且知道, 函数 $R(x)$ 在一切无理点连续, 在一切有理点间断, 这表明 $R(x)$ 的间断点集合是可数的, 从而其测度为零. 根据勒贝格判别法, 尽管这个函数在积分区间的任何分划的任何区间都有间断点, 但它在任何区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上仍然是可积的.

**例 3**　现在再考察一个不太经典的问题和例子.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 它在区间 $[c,d]$ 中取值. 又设函数 $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ 是连续的. 因此复合函数 $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在整个区间 $[a,b]$ 上有定义并在使 $f$ 连续的那些点上连续. 由此, 根据勒贝格判别准则得到, $g\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$.

现在举例说明, 可积函数的复合函数未必可积.

考察函数 $g(x)=|\mathrm{sgn}|(x)$, 当 $x\neq 0$ 时这个函数取值为 1; 当 $x=0$ 时, 它取值为零. 设 $f$ 是例 2 所讲的黎曼函数. 可直接验证, 譬如在区间 $[1,2]$ 上, 复合函数 $(g\circ f)(x)$ 正好是狄利克雷函数 $D(x)$. 这样一来, 甚至 $g(x)$ 只有一个间断点, 也可导致复合函数 $g\circ f$ 不可积.

## 练　习

1. 试证: 如果 $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ 且 $f,g$ 是实的, 则 $\max\{f,g\}\in\mathcal{R}[a,b]$, $\min\{f,g\}\in\mathcal{R}[a,b]$.

2. 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界, $\{a_n\}\subset[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. 证明: 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上只有 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其间断点, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

3. 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 且对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的可积函数 $g$, 使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad x\in[a,b].$$

证明: $f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

4. 试证:

(1) 如果 $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$, 在 $[a,b]$ 上几乎处处有 $f(x)=g(x)$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 如果 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 在 $[a,b]$ 上几乎处处有 $f(x)=g(x)$, 则甚至当 $g$ 在 $[a,b]$ 上定义且有界时, 它也可能是黎曼不可积的.

5. 达布定理

(1) 设 $s(f;P)$ 和 $S(f;P)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上定义的有界实值函数对应于这个区间的分划 $P$ 的下达布和及上达布和. 试证: 对于闭区间 $[a,b]$ 的任两个分划 $P_1$, $P_2$, 成立

$$s(f;P_1) \leqslant S(f;P_2).$$

(2) 设分划 $\tilde{P}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的分划 $P$ 的开拓, 而 $\Delta_{i_1},\cdots,\Delta_{i_k}$ 是分划 $P$ 的那样一些区间, 它们包含着属于分划 $\tilde{P}$ 但不属于分划 $P$ 的点. 试证: 成立如下估计:

$$0 \leqslant S(f;P)-S(f;\tilde{P}) \leqslant \omega(f;[a,b])(\Delta x_{i_1}+\cdots+\Delta x_{i_k}),$$
$$0 \leqslant s(f;\tilde{P})-s(f;P) \leqslant \omega(f;[a,b])(\Delta x_{i_1}+\cdots+\Delta x_{i_k}).$$

(3) $\underline{I}=\sup\limits_{P} s(f;P)$, $\overline{I}=\inf\limits_{P} S(f;P)$ 分别叫做函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的下达布积分及上达布积分. 试证:$\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

(4) 试证达布定理

$$\underline{I}=\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f;P); \quad \overline{I}=\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f;P).$$

(5) 试证: $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Leftrightarrow (\underline{I}=\overline{I})$(达布判别法).

(6) 试证: $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 当且仅当对于任何 $\varepsilon>0$ 存在区间 $[a,b]$ 的分划 $P$ 使 $S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$.

### 5.2.2 积分的性质

按定积分的定义, 记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只有当 $a<b$ 时才有意义, 而当 $a=b$ 或 $a>b$ 时本来是没有定义的. 但为了运用上的方便, 对它作如下约定:

**约定 1** 当 $a=b$ 时, 令

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

**约定 2** 当 $a>b$ 时, 令

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

1. 基本性质

**定理 2** 定积分具有下述基本性质.

(1) (线性性) $\forall f,g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, 成立

$$\int_a^b \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.11}$$

(2) (**积分区间可加性**) $f\in\mathcal{R}[a,b]\Leftrightarrow\forall\, c\in(a,b),\ f|_{[a,c]}\in\mathcal{R}[a,c], f|_{[c,b]}\in\mathcal{R}[c,b]$, 此时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.12}$$

(3) (**积分不等式**) 设 $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$.

(i) 若 $f(x)\geqslant 0,\forall\, x\in[a,b]$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

(ii) 若 $f(x)\leqslant g(x),\forall\, x\in[a,b]$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(iii) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant C(b-a)$, 其中 $C\geqslant|f(x)|,\forall\, x\in[a,b]$.

**证**　(1) 由 5.2.1 小节命题 4 知 $\alpha f+\beta g\in\mathcal{R}[a,b]$. 考虑积分和

$$\sum_{i=1}^n(\alpha f+\beta g)(\xi_i)\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i+\beta\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i. \tag{5.2.13}$$

因为当分划的参数 $\lambda(P)$ 趋于零时, (5.2.13) 的右端趋于 (5.2.11) 右边的积分的线性组合, 所以 (5.2.13) 的左边当 $\lambda(P)\to 0$ 时也有极限, 而且这个极限与右边的极限相等, 即等式 (5.2.11) 成立.

(2) "$\Rightarrow$"　有界函数 $f$ 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的可积性由 5.2.1 小节命题 4 保证.

"$\Leftarrow$"　因 $f|_{[a,c]}\in\mathcal{R}[a,c], f|_{[c,b]}\in\mathcal{R}[c,b]$, 故 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,(P',\xi')$ ($[a,c]$ 的分划), $\exists\,(P'',\xi'')$($[c,b]$ 的分划) 使得

$$\sigma(f;P',\xi')<\varepsilon,\quad \sigma(f;P'',\xi'')<\varepsilon,$$

令 $P=P'\cup P''$, $\xi=\xi'\cup\xi''$, 则 $P$ 为 $[a,b]$ 的分划, 且有

$$\sigma(f;P,\xi)=\sigma(f;P',\xi')+\sigma(f;P'',\xi'')<2\varepsilon.$$

故 $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

剩下验证 (5.2.12). 在做积分和的极限进行计算时, 我们可以任意选取对我们方便的区间 $[a,b]$ 的分划, 它以 $c$ 为一个分点. 显然, 每一个这样的带标志点的分划 $(P,\xi)$ 都产生区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的相应的分划 $(P',\xi')$ 和 $(P'',\xi'')$, 而且 $P=P'\cup P''$ 及 $\xi=\xi'\cup\xi''$. 由此得到积分和之间的关系:

$$\sigma(f;P,\xi)=\sigma(f;P',\xi')+\sigma(f;P'',\xi'').$$

因为 $\lambda(P')\leqslant\lambda(P)$ 和 $\lambda(P'')\leqslant\lambda(P)$, 所以当 $\lambda(P)$ 充分小时, 上面的每个积分和就充分接近于 (5.2.12) 中相应的积分. 这样就证明了 (5.2.12) 成立.

(3) (i) 设 $f(x)\geqslant 0$. 则 $f$ 的任一积分和都非负,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0.$$

(ii) 设 $g(x)\geqslant f(x)$. 因 $g(x)-f(x)\geqslant 0,\forall\, x\in[a,b]$, 故

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\big(g(x)-f(x)\big)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

(iii) 当 $a=b$ 时, 定理的断言是显然的, 因此, 我们假定 $a<b$. 由 5.2.1 小节的命题 4 知 $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$. 又因 $|f(x)|\geqslant f(x)\geqslant -|f(x)|$ 及 $|f(x)|\leqslant C$, 应用 (ii) 即得所需估计. □

**注 2** 对定理 2 作下述说明.

(1) 此定理之 (1) 表明, 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是向量空间 $\mathcal{R}[a,b]$ 上的线性函数. 为避免混淆, 函数的函数通常叫做*泛函*. 于是, 我们证明了: *积分是可积函数向量空间上的线性泛函*.

(2) 结合定理 2 之 (2) 和前述约定可见: 若 $f\in\mathcal{R}[A,B]$, 则 $\forall\, a,b,c\in[A,B]$, 不论它们的大小顺序, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 定理 2 之 (3) 意味着积分关于被积函数是单调的.

积分区间可加性表明积分是定向区间的可加函数, 后者的定义如下:

**定义 8** 设每个由闭区间 $[a,b]$ 的点 $\alpha,\beta$ 组成的有序点对 $(\alpha,\beta)$ 对应于一个数 $I(\alpha,\beta)$, 而且对于任意三点 $\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$, 成立等式

$$I(\alpha,\gamma)=I(\alpha,\beta)+I(\beta,\gamma).$$

则函数 $I(\alpha,\beta)$ 就叫做在包含于闭区间 $[a,b]$ 中的区间上定义的*定向区间的可加函数*.

此外, 积分区间可加性让人们引入所谓变限积分的概念.

**定义 9** (变限积分) 设 $f$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数. 根据积分性质, $\forall\, x\in[a,b]$, $f$ 在 $[a,x]$ 上也可积. 于是, 由

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]\tag{5.2.14}$$

定义了一个以积分上限为自变量的函数, 称为**变上限的积分**. 类似地定义**变下限的积分**

$$F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

变上限和变下限的积分统称为**变限积分**.

由于 $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$, 下面只讨论变上限积分情形.

**引理 3**　设 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, 则变限积分 $F\in C[a,b]$.

**证**　从 $f\in\mathcal{R}[a,b]$ 知, $\exists C>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant C<\infty,\forall x\in[a,b]$. 设 $x\in[a,b]$ 和 $x+h\in[a,b]$, 则应用定理 2 产生

$$\begin{aligned}|F(x+h)-F(x)|&=\left|\int_a^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_x^{x+h}|f(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant C|h|.\end{aligned}$$

这里我们利用了绝对值不等式和以下事实: 当 $h<0$ 时, 有

$$\left|\int_x^{x+h}|f(t)|\mathrm{d}t\right|=\left|-\int_{x+h}^x|f(t)|\mathrm{d}t\right|=\int_{x+h}^x|f(t)|\mathrm{d}t.$$

这样, 我们证明了: 如果 $x,x+h\in[a,b]$, 则

$$|F(x+h)-F(x)|\leqslant C|h|.\tag{5.2.15}$$

故函数 $F$ 在 $[a,b]$ 的任意点连续. □

从定理 2 可以得到一系列有用的推论.

**推论 2**　定理 2 有下述推论:

(1) 若 $a\leqslant b, f\in\mathcal{R}[a,b]$ 且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 在 $x\in[a,b]$ 成立, 则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).\tag{5.2.16}$$

(2) 若 $f\in\mathcal{R}[a,b], m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x), M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 则存在 $\mu\in[m,M]$ 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mu(b-a).\tag{5.2.17}$$

(3) 若 $f\in C[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).\tag{5.2.18}$$

**证** (1) 对不等式 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 的每一项积并引用定理 2 就得到关系 (5.2.16).

(2) 如果 $a = b$, 结论是显然的. 如果 $a \neq b$, 则令

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

于是, 当 $a < b$ 时, 从 (5.2.16) 可以推出 $m \leqslant \mu \leqslant M$. 但是, 将 (5.2.17) 两端同时改变符号, 即可看出它对 $b < a$ 的情形也成立.

(3) 根据连续函数的中间值定理, 在区间 $[a,b]$ 上存在点 $\xi$ 使 $f(\xi) = \mu$, 如果 $\mu$ 满足条件

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x) = M.$$

这样一来, (5.2.18) 可由 (5.2.17) 导出. □

等式 (5.2.18) 常叫做积分的**第一中值定理**. 其实它有更一般的形式.

2. **积分的第一中值定理**

**定理 3** (积分的第一中值定理) 设 $f, g \in \mathcal{R}[a,b], m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 如果函数 $g$ 在区间 $[a,b]$ 上不变号, 则 $\exists \mu \in [m,M]$ 满足

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.19}$$

如果还有 $f \in C[a,b]$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.20}$$

**证** 因为在等式 (5.2.19) 两边调换积分上、下限将导致两边同时变号, 所以只要对 $a < b$ 的情形来证明这个等式就行了. 改变 $g(x)$ 的符号也同时使 (5.2.19) 两端变号, 所以不失一般性, 可以假定 $g(x) \geqslant 0$ 在 $x \in [a,b]$ 成立.

由于 $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ 和 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 因此当 $g(x) \geqslant 0$ 时就有

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

因为 $m\cdot g \in \mathcal{R}[a,b], f\cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$ 和 $M\cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$, 所以, 应用定理 2, 我们得到

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.21}$$

如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 很显然, 从这个不等式能导出关系 (5.2.19).

如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$, 令 $\mu = \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^{-1} \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 则从 (5.2.21) 得到 $m \leqslant \mu \leqslant M$, 从而证明了关系 (5.2.19).

最后, 为得到等式 (5.2.20), 只需利用 (5.2.19) 和关于函数 $f \in C[a,b]$ 的中间值定理, 并注意, 在 $f \in C[a,b]$ 的情形成立

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad 和 \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

□

我们指出, 如果 $g(x) \equiv 1$ 在 $[a,b]$ 上, 等式 (5.2.18) 由 (5.2.20) 得出.

3. 积分的第二中值定理

在黎曼积分理论中尤为微妙的是第二中值定理.

**定理 4** (积分的第二中值定理)　如果 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, 且 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在点 $\xi \in [a,b]$ 使

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.22}$$

等式 (5.2.22)(以及后面的等式 (5.2.25)) 常叫做**波内公式**①.

为了证明这个定理, 首先做一些准备, 它们本身也是很有趣的.

**阿贝尔变换**　阿贝尔变换是和式 $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ 的如下变换. 设 $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$, 置 $A_0 = 0$. 于是成立:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}), \tag{5.2.23}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1})b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=1}^n A_{i-1}b_i \\ &= \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}),\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = (A_n b_n - A_0 b_1) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}).$$

① 波内 (Bonnet)(1819—1892)——法国数学家和天文学家. 波内最主要的数学著作是关于微分几何方面的.

此即等价于 (5.2.23) 因为 $A_0 = 0$.

根据阿贝尔变换容易证明如下引理.

**引理 4** 如果 $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i (k = 1, \cdots, n)$满足不等式 $m \leqslant A_k \leqslant M$, 而数 $b_i (i = 1, \cdots, n)$ 是非负的且 $b_i \geqslant b_{i+1} (i = 1, \cdots, n-1)$, 则

$$mb_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant Mb_1. \tag{5.2.24}$$

**证** 利用 $b_n \geqslant 0$ 和 $b_i - b_{i+1} \geqslant 0 (i = 1, \cdots, n-1)$, 从 (5.2.23) 得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant Mb_n + \sum_{i=1}^{n-1} M(b_i - b_{i+1}) = Mb_n + M(b_1 - b_n) = Mb_1.$$

用类似的方法也可验证 (5.2.24) 中左边的不等式. □

**引理 5** 如果 $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, 而 $g$ 在 $[a, b]$ 上非负、不增, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b (f \cdot g)(x) \mathrm{d}x = g(a) \int_a^{\xi} f(x) \mathrm{d}x. \tag{5.2.25}$$

注意, 与第一中值定理中的关系 (5.2.20) 不同, (5.2.25) 中积分号下的函数是 $f$, 而不是单调函数 $g$.

**证** 为了证明公式 (5.2.25), 我们将设法估计相应的积分和. 设 $P$ 是闭区间 $[a, b]$ 的一个分划. 则

$$\begin{aligned}\int_a^b (f \cdot g)(x) \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f \cdot g)(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] f(x) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $f \in \mathcal{R}[a, b]$, 所以 $|f(x)| \leqslant C < \infty$ 在 $[a, b]$ 上成立. 于是, 利用证明了的积分的性质, 得到: 当 $\lambda(P) \to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] f(x) \mathrm{d}x \right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})| |f(x)| \mathrm{d}x \\ &\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})| \mathrm{d}x \\ &\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i) \Delta x_i \to 0,\end{aligned}$$

因为 $g \in \mathcal{R}[a,b]$(见本节推论 1). 这就证明了

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.26}$$

令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 根据引理 3, $\Phi\in C[a,b]$. 令

$$m=\min_{x\in[a,b]}\Phi(x),\quad M=\max_{x\in[a,b]}\Phi(x).$$

由于 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x=\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}[\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})]g(x_{i-1}). \tag{5.2.27}$$

考虑到函数 $g$ 在区间 $[a,b]$ 上的非负性, 而且是单调不增的, 记

$$a_i=\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1}),\quad b_i=g(x_{i-1}),$$

根据引理 4, 有

$$mg(a)\leqslant\sum_{i=1}^{n}[\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})]g(x_{i-1})\leqslant Mg(a), \tag{5.2.28}$$

因为

$$A_k=\sum_{i=1}^{k}a_i=\Phi(x_k)-\Phi(x_0)=\Phi(x_k)-\Phi(a)=\Phi(x_k).$$

这样, 我们证明了: 和式 (5.2.27) 满足不等式 (5.2.28). 因此, 利用关系 (5.2.26), 得

$$mg(a)\leqslant\int_a^b(f\cdot g)(x)\mathrm{d}x\leqslant Mg(a). \tag{5.2.29}$$

如果 $g(a)=0$, 如同 (5.2.29) 的证明, 要证明的关系 (5.2.25) 显然是对的.

如果 $g(a)>0$, 令

$$\mu=\frac{1}{g(a)}\int_a^b(f\cdot g)(x)\mathrm{d}x.$$

从 (5.2.29) 得 $m\leqslant\mu\leqslant M$; 而由函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a,b]$ 上的连续性可知, 存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $\Phi(\xi)=\mu$, 正是这个结果确定了等式 (5.2.25). □

现在给出定理 4 的证明.

**定理 4 的证明** 设 $g$ 是区间 $[a,b]$ 上的不减函数. 则 $G(x)=g(b)-g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负、不增、可积的函数. 利用公式 (5.2.25), 我们得到

$$\int_a^b (f\cdot G)(x)\mathrm{d}x = G(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.30}$$

但

$$\int_a^b (f\cdot G)(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x,$$

$$G(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

注意到这些关系式及积分的可加性, 从 (5.2.30) 即可得到待证的等式 (5.2.22).

如果 $g$ 是不增函数, 那么令 $G(x)=g(x)-g(b)$, 我们就得到 $G(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负、不增、可积的函数. 这样我们又得到公式 (5.2.30), 跟着也就得出公式 (5.2.22). □

## 练 习

1. 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{\pi}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

(2) $3\sqrt{\mathrm{e}} < \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{4\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x < 6.$

2. 试证: 如果 $f\in\mathcal{R}[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上有 $f(x)\geqslant 0$, 则

(1) 当在 $f(x)$ 的某一连续点 $x_0\in[a,b]$ 有 $f(x_0)>0$ 时, 必成立严格不等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

(2) 从条件 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 可推出在 $[a,b]$ 上几乎处处成立 $f(x)=0$.

3. 试证: 如果 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $m=\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, 则

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$, 其中 $\mu\in[m,M]$.

(2) 当 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续时, 存在点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

4. 试证: 如果 $f\in C[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上成立, 以及 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = M.$$

5. 试证:

(1) $\ln(1+n) < 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \ln n$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{\ln n} = 1$.

### 5.2.3　积分和导数

1. *原函数的存在定理*

在定理 3 证明第二积分中值定理过程中, 已经应用了变限积分的函数:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad f \in \mathcal{R}[a,b],\ x \in [a,b]. \tag{5.2.31}$$

之前已知 $F \in C[a,b]$(见 5.2.2 小节引理 3). 下面我们将对函数 (5.2.31) 进行更详细地研究.

**引理 6**　若 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 且 $f$ 在某点 $x \in [a,b]$ 连续, 则变限积分 $F$ 在这个点可微, 而且成立

$$F'(x) = f(x). \tag{5.2.32}$$

**证**　设 $x, x+h \in [a,b]$. 从 $f$ 在 $x$ 的连续性推出 $f(t) = f(x) + \Delta(t)$, 其中当 $t \to x$ 时有 $\Delta(t) \to 0, t \in [a,b]$. 如果 $x$ 是固定点, 则函数 $\Delta(t) = f(t) - f(x)$ 作为可积函数 $t \mapsto f(t)$ 和常数 $f(x)$ 之差是区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 以 $M(h)$ 表示量 $\sup\limits_{t\in I(h)} |\Delta(t)|$, 其中 $I(h)$ 是以 $x$ 和 $x+h \in [a,b]$ 为端点的区间. 根据假设条件, 当 $h \to 0$ 时, 有 $M(h) \to 0$.

记

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+h} [f(x) + \Delta(t)]\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} \Delta(t)\mathrm{d}t \\ &= f(x)h + \alpha(h)h, \end{aligned}$$

其中

$$\int_x^{x+h} \Delta(t)\mathrm{d}t = \alpha(h)h.$$

因为

$$\left|\int_x^{x+h} \Delta(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_x^{x+h} |\Delta(t)|\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_x^{x+h} M(h)\mathrm{d}t\right| = M(h)|h|,$$

所以 $|\alpha(h)| \leqslant M(h)$, 从而, 当 $h \to 0$ 时 (但 $x+h \in [a,b]$), 有 $\alpha(h) \to 0$.

于是, 我们证明了: 如果 $f$ 在点 $x \in [a,b]$ 连续, 则当位移 $h$ 使 $x+h \in [a,b]$ 时, 成立等式

$$F(x+h) - F(x) = f(x)h + \alpha(h)h, \tag{5.2.33}$$

其中 $\alpha(h) \to 0$, 当 $h \to 0$ 时. 这个结果说明函数 $F$ 在点 $x \in [a,b]$ 可微且 $F'(x) = f(x)$. □

引理 6 的最重要的直接推论是下面的定理.

**定理 5** (原函数的存在定理) 闭区间 $[a,b]$ 上的每个连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 在该区间上都有一个原函数, 而且区间 $[a,b]$ 上的函数 $f$ 的任一原函数都有

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + c \tag{5.2.34}$$

的形式, 其中 $c$ 是一个常数.

**证** $(f \in C[a,b]) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a,b])$, 因此, 根据引理 6, 函数 (5.2.31) 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的原函数. 但 $f$ 的任意两个原函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 只能相差一个常数, 因此,

$$G(x) = F(x) + c. \qquad \square$$

为了今后应用的方便, 我们把原函数概念做稍许推广, 采用如下定义.

**定义 10** 区间上的连续函数 $x \mapsto F(x)$ 叫做定义在该区间上的函数 $x \mapsto f(x)$ 的*原函数* (*广义原函数*), 如果最多除去有限多个点以外, 在该区间上成立关系:

$$F'(x) = f(x).$$

根据这个定义可以证明如下定理.

**定理 5′** 如果函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 有界且仅有有限多个间断点, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上有 (广义) 原函数, 而且 $f$ 在 $[a,b]$ 上的任一原函数都具有 (5.2.34) 的形式.

**证** 因为 $f$ 只有有限个间断点且有界, 所以 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 从而, 根据引理 6, 函数 (5.2.31) 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的广义原函数, 而且, 如已经指出的那样, 根据 (5.2.32), 函数 (5.2.31) 在 $[a,b]$ 上连续. 如果 $G(x)$ 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的另一个原函数, 则 $G(x) - F(x)$ 是连续的, 而且在由 $f$ 的间断点分割区间 $[a,b]$ 而成的每个开区间内是常数. 由此, 从 $G(x) - F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续性得出, 在 $[a,b]$ 上, $G(x) - F(x) \equiv \text{const}$. □

2. 牛顿–莱布尼茨公式

**定理 6** 如果 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是有界且仅有有限个间断点的函数, 则 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 且

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}, \tag{5.2.35}$$

其中 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的任一原函数.

**证**　在闭区间上定义的仅有有限个间断点的有界函数 $f\in\mathcal{R}[a,b]$ (见 5.2.1 小节推论 1). 根据定理 5′, $f$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 它有 (5.2.34) 的形式. 在 (5.2.34) 中令 $x=a$ 得 $F(a)=c$, 由此

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+F(a).$$

特别地,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a),$$

这与要证的 (5.2.35) 只是表示积分变量的字母不同而已. □

关系 (5.2.35) 对整个分析学具有基本的意义, 它叫做*牛顿–莱布尼茨公式*.

函数的差值 $F(b)-F(a)$ 常用符号 $F(x)\big|_a^b$ 表示, 于是可将牛顿–莱布尼茨公式写成:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b}.$$

由于当 $a$ 和 $b$ 调换时, 这个公式两端同时改变符号, 所以该公式对于任何关系的 $a$ 和 $b$, 也就是, 无论 $a\leqslant b$ 还是 $a\geqslant b$, 都是正确的.

牛顿–莱布尼茨公式在数学分析理论本身中占有关键地位, 它把积分学和微分学联系起来. 特别是, 它在分析中还进一步发展成一般的*斯托克斯*[①] *公式*.

这一节剩下的部分可以看作是牛顿–莱布尼茨公式在分析本身中应用的例子.

3. *定积分的分部积分法和泰勒公式*

**命题 5**　如果函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在以 $a$ 和 $b$ 为端点的闭区间上连续可微, 则成立关系

$$\int_a^b(u\cdot v')(x)\mathrm{d}x=(u\cdot v)(x)\Big|_a^b-\int_a^b(v\cdot u')(x)\mathrm{d}x.\tag{5.2.36}$$

习惯上常把这个公式写成以下简略形式:

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u,$$

称它为定积分的*分部积分公式*.

**证**　根据函数乘积的微分规则, 我们有

$$(u\cdot v)'(x)=(u'\cdot v)(x)+(u\cdot v')(x).$$

① 斯托克斯 (G. G. Stokes)(1819–1903)—— 英国物理学家和数学家.

由假设, 这个等式中的函数都是连续的, 从而在以 $a$ 和 $b$ 为端点的区间上可积. 利用积分的线性性和牛顿–莱布尼茨公式, 我们得到

$$(u\cdot v)(x)\Big|_a^b=\int_a^b(u\cdot v')(x)\mathrm{d}x+\int_a^b(v\cdot u')(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

作为推论, 我们将得到带积分余项的泰勒公式.

**命题 6** 如果函数 $t\mapsto f(t)$ 在以 $a$ 和 $x$ 为端点的闭区间上有直到 $n$ 阶连续导数, 则有泰勒公式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+r_n(a;x),$$

其中 $r_n(a;x)$ 是如下的积分形式泰勒余项:

$$\boxed{r_n(a;x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t}. \tag{5.2.37}$$

**证** 利用牛顿–莱布尼茨公式和公式 (5.2.36), 进行下面一串演算, 其中所有的微分和代入都是关于变量 $t$ 做的:

$$\begin{aligned}
f(x)-f(a)&=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=-\int_a^x f'(t)(x-t)'\mathrm{d}t\\
&=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)\mathrm{d}t\\
&=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)((x-t)^2)'\mathrm{d}t\\
&=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2\mathrm{d}t\\
&=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)((x-t)^3)'\mathrm{d}t\\
&\quad\vdots\\
&=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+r_n(a;x),
\end{aligned}$$

其中 $r_n(a;x)=\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$ $\square$

顺便指出, 在以 $a$ 和 $x$ 为端点的闭区间上函数 $(x-t)^{n-1}$ 不改变符号, 而函数

$t \mapsto f^{(n)}(t)$ 在这个区间上连续, 因此, 根据第一中值定理在这区间上存在点 $\xi$ 使

$$\begin{aligned} r_n(a;x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\int_a^x (x-t)^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\left(-\frac{1}{n}(x-t)^n\right)\Big|_a^x \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n. \end{aligned}$$

于是, 我们又导出了熟知的拉格朗日形式的泰勒公式余项 (根据 5.2.2 小节的练习 3(2), 可以认为 $\xi$ 在以 $a$ 和 $x$ 为端点的开区间内).

如果从 (5.2.37) 式的积分号下拿出 $f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-k}(1 \leqslant k \leqslant n)$, 上边的推理可照样进行. 同时, 与 $k=1$ 和 $k=n$ 相对应, 得到余项的柯西公式和拉格朗日公式.

4. 定积分中的变量替换

定积分中的变量替换公式是积分学中的基本公式之一.

**命题 7**　如果 $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 是从闭区间 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 到闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的连续可微映射, 且 $\varphi(\alpha)=a$ 和 $\varphi(\beta)=b$, 则 $\forall f \in C[a,b]$, 函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续且成立等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.38}$$

**证**　设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数, 则根据复合函数微分法定理知道, $F(\varphi(t))$ 是函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数. 因为函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数复合和乘积. 根据牛顿–莱布尼茨公式, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

和

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)).$$

再根据条件 $\varphi(\alpha)=a$ 和 $\varphi(\beta)=b$, 可得等式 (5.2.38) 成立. □

从公式 (5.2.38) 看出, 在积分号下不用函数符号而用微分表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 是有道理的, 它使得在经过变换 $x=\varphi(t)$ 后能自动地得到关于新变量的积分号下的表达式.

命题 7 要求 $f \in C[a,b]$, 这个条件可放宽为 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 仍能得到类似于 (5.2.38) 的公式.

**定理 7** 设 $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 是从闭区间 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 到闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的连续可微且严格单调映射, 而且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 或 $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$. 则 $\forall f \in \mathcal{R}[a,b]$, 函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可积且成立等式:

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t}. \tag{5.2.39}$$

**证** 由于 $\varphi$ 是从区间 $[\alpha,\beta]$ 到区间 $[a,b]$ 上的严格单调函数, 所以区间 $[\alpha,\beta]$ 的任意一个分划 $P_t(\alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta)$ 借助于分划 $P_t$ 的点的象 $x_i = \varphi(t_i)(i = 0,1,\cdots,n)$ 产生区间 $[a,b]$ 的一个相应的分划 $P_x$, 我们把它记作 $\varphi(P_t)$. 同时, 当 $\varphi(\alpha) = a$ 时有 $x_0 = a$, 而当 $\varphi(\alpha) = b$ 时有 $x_0 = b$. 由 $\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一致连续性得到, 如果 $\lambda(P_t) \to 0$, 则 $\lambda(P_x) = \lambda(\varphi(P_t))$ 也趋于零.

利用拉格朗日定理, 把积分和 $\sigma(f;P_x,\xi)$ 变成以下形式:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i.\end{aligned}$$

这里 $x_i = \varphi(t_i), \xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\xi_i$ 属于以 $x_{i-1}, x_i$ 为端点的区间, $\tau_i, \tilde{\tau}_i$ 属于以 $t_{i-1}, t_i$ 为端点的区间, $i = 1,\cdots,n$.

其次

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i &= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i))\Delta t_i.\end{aligned}$$

由于 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 从而有界. 设 $|f(x)| \leqslant C$ 在 $[a,b]$ 上成立. 于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i))\Delta t_i\right| \leqslant C \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega(\varphi';\Delta_i)\Delta t_i,$$

这里 $\Delta_i$ 表示以 $t_{i-1}, t_i$ 为端点的区间. 因为 $\varphi'$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 上式

右端的和式当 $\lambda(P_t)\to 0$ 时趋于零. 这就证明了:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i + \alpha,$$

其中 $\alpha$ 当 $\lambda(P_t)\to 0$ 时趋于零. 已经看到, 如果 $\lambda(P_t)\to 0$, 就有 $\lambda(P_x)\to 0$, 但 $f\in\mathcal{R}[a,b]$, 因此, 当 $\lambda(P_x)\to 0$ 时, 上面等式的左端趋于积分 $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$. 因此, 当 $\lambda(P_t)\to 0$ 时, 这个等式右端有相同的极限.

然而, 和 $\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$完全可以看作对应于带标志点 $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的分划 $P_t$ 的一个积分和, 这是因为由 $\varphi$ 的严格单调性, 任何点组 $\tau$ 都能从分划 $P_x=\varphi(P_t)$ 的区间中与之相应的标志点组 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 得到.

这样一来, 根据定义, 这个和式的极限是函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的积分, 这就证明了函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的可积性和公式 (5.2.9). □

5. 一些例子

考虑几个例子, 其中会用到刚讲过的这两节中所得到的公式和证明过的积分性质的定理.

**例 4**　求 $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

**解**　作变换 $x=\sin t:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, 则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}.$$

**例 5**　证明: 当 $m,n\in\mathbb{N}$ 时, 有

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0$,

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\mathrm{d}x=\pi$,

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi$.

**证**　(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n+m)x - \sin(n-m)x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x + \frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

其中 $n-m \neq 0$. 而当 $n-m=0$ 时可以单独计算, 显然这时也得到同样结果.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$ □

**例 6** (奇、偶函数的积分) 设 $f \in \mathcal{R}[-a,a]$. 证明:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f \text{ 是偶函数}, \\ 0, & f \text{ 是奇函数}. \end{cases}$$

**证** 如果 $f(-x) = f(x)$, 则

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^0 f(-t)\cdot(-1)\mathrm{d}t + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

如果 $f(-x) = -f(x)$, 仍然通过上面那些计算可以看出

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = \int_0^a 0\cdot\mathrm{d}x = 0.$$ □

**例 7** (周期函数的积分) 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的以 $T$ 为周期的周期函数, 即 $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

如果 $f$ 在每个有限区间上可积, 则对于任何 $a \in \mathbb{R}$ 成立等式

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

也就是说, 周期函数在长度等于它的周期的区间上的积分不依赖于积分区间在数轴

上的位置:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(t+T)\cdot 1\cdot \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在这里我们做了替换 $x = t + T$, 并应用了函数 $f(x)$ 的周期性.

**例 8**　假设需要计算积分 $\int_0^1 \sin x^2\mathrm{d}x$ 精确到 $10^{-2}$ 的值.

我们知道, 函数 $\sin x^2$ 的原函数 $\int \sin x^2\mathrm{d}x$(菲涅尔积分) 不能表示成初等函数, 因此, 像通常那样地应用牛顿–莱布尼茨公式, 在这里是不行的.

我们用另外的做法. 在微分学中研究泰勒公式时, 作为例子我们曾指出 (见 4.3.3 小节的例 11): 在区间 $[0,1]$ 上成立精确到 $10^{-3}$ 的等式

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = P(x).$$

然而, 如果在区间 $[0,1]$ 上有 $|\sin x - P(x)| < 10^{-3}$, 则成立

$$|\sin x^2 - P(x^2)| < 10^{-3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

因此,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \sin x^2\mathrm{d}x - \int_0^1 P(x^2)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 |\sin x^2 - P(x^2)|\mathrm{d}x \\ &< \int_0^1 10^{-3}\mathrm{d}x = 10^{-3}.\end{aligned}$$

这样一来, 为了以所需要的精确度计算出 $\int_0^1 \sin x^2\mathrm{d}x$ 的值, 只要计算 $\int_0^1 P(x^2)\mathrm{d}x$ 就够了. 但

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x^2)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3!7}x^7 + \frac{1}{5!11}x^{11}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{5!11} = 0.310 \pm 10^{-3}.\end{aligned}$$

因此,

$$\int_0^1 \sin x^2\mathrm{d}x = 0.310 \pm 2\cdot 10^{-3} = 0.31 \pm 10^{-2}.$$

**例 9**(平均函数的正则性) 称 $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分平均值.

设 $f$ 是在 $\mathbb{R}$ 上定义且在任何区间上都可积的函数. 用 $f$ 构造新函数

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t.$$

它在点 $x$ 处的值是 $f$ 在点 $x$ 的 $\delta$-邻域中的积分平均值. 称 $F_\delta(x)$ 为**$f$ 的平均函数**.

**命题 8** 如果 $f$ 在任何区间 $[a,b]$ 上都可积, 则 $F_\delta\in C(\mathbb{R})$; 而如果 $f\in C(\mathbb{R})$, 则 $F_\delta\in C^1(\mathbb{R})$.

**证** 首先检验函数 $F_\delta$ 的连续性:

$$\begin{aligned}|F_\delta(x+h)-F_\delta(x)|&=\frac{1}{2\delta}\left|\int_{x+\delta}^{x+\delta+h} f(t)\mathrm{d}t+\int_{x-\delta+h}^{x-\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{1}{2\delta}(C|h|+C|h|)=\frac{C}{\delta}|h|,\end{aligned}$$

这里假设 $|f(x)|\leqslant C$, 为此只要 $t$ 在 $x$ 的 $2\delta$-邻域中变动且 $|h|<\delta$ 即可. 显然, 从这个估计立刻推出函数 $F_\delta(x)$ 的连续性.

如果 $f\in C(\mathbb{R})$, 根据复合函数微分法, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\int_a^{\varphi} f(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

因此, 从

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_a^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\delta}\int_a^{x-\delta} f(t)\mathrm{d}t$$

得到

$$F'_\delta(x)=\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{2\delta}.$$

□

注意, 经过积分变量的替换 $t=x+u$ 之后, 函数 $F_\delta(x)$ 可以写成以下形式:

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\mathrm{d}u.$$

此外, 如果 $f\in C(\mathbb{R})$, 利用第一中值定理, 就得到

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}f(x+\tau)\cdot 2\delta=f(x+\tau),$$

其中 $|\tau|\leqslant\delta$. 由此推出很自然的结果:

$$\lim_{\delta\to+0}F_\delta(x)=f(x).$$

## 练　　习

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\mathrm{d}x$.　　(4) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

2. 利用积分求

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{n}{(2n)^2}\right]$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha\geqslant 0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

3. 设 $f$ 为连续函数, $u,v$ 均为可导函数, 且可实行复合 $f\circ u$ 与 $f\circ v$. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x).$$

4. 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$. 证明: $F''(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$.

5. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

6. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^{3/2}}$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.　　(4) $\int_0^1 x^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

7. 设 $f$ 为连续函数. 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

8. 设 $f$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数. 证明: 对任何正整数 $n$ 恒有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

9. (1) 试证: 开区间上的任何连续函数在该区间上都有原函数.

(2) 试证: 如果 $f \in C^{(1)}[a,b]$, 则 $f$ 可以表示成区间 $[a,b]$ 上的两个不减函数之差.

10. 试证: 如果 $f \in C(\mathbb{R})$, 则对于任意确定的区间 $[a,b]$, 根据给定的 $\varepsilon > 0$, 可以取 $\delta > 0$, 使在区间 $[a,b]$ 上成立不等式 $|F_\delta(x) - f(x)| < \varepsilon$, 其中 $F_\delta$ 是例 9 中的平均函数.

11. 试证: 如果 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是在每个闭区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上可积的周期函数, 则函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

可以表示成线性函数与周期函数之和的形式.

12. 若 $f$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $f(0) = 0$, 则

$$\int_0^1 |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

### 5.2.4 定积分的一些应用

在应用中经常是按照同一个格式运用积分, 因此, 单独地叙述一下这个格式是有益的.

1. *定向区间的可加函数和积分*

在前面讨论积分的性质时, 我们谈到了定向区间的可加函数的概念. 所谓定向区间的可加函数是形如 $(\alpha,\beta) \mapsto I(\alpha,\beta)$ 的函数, 它使由固定区间 $[a,b]$ 的任意两点 $\alpha,\beta \in [a,b]$ 构成的每个序对 $(\alpha,\beta)$ 对应于一个数 $I(\alpha,\beta)$, 而且对于任意三点 $\alpha,\beta,\gamma \in [a,b]$ 成立等式

$$I(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma). \tag{5.2.40}$$

当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时, 从 (5.2.40) 推出 $I(\alpha,\alpha) = 0$; 而当 $\alpha = \gamma$ 时, 我们得到 $I(\alpha,\beta) + I(\beta,\alpha) = 0$, 亦即 $I(\alpha,\beta) = -I(\beta,\alpha)$. 在这里可以看出点 $\alpha,\beta$ 的次序的影响.

令

$$F(x) = I(\alpha,x),$$

根据函数 $I$ 的可加性, 我们有

$$I(\alpha,\beta) = I(\alpha,\beta) - I(\alpha,\alpha) = F(\beta) - F(\alpha).$$

这样一来, 每个定向区间的可加函数都有

$$I(\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{5.2.41}$$

的形式, 其中 $x \mapsto F(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上点的函数.

容易验证, 上述断言的逆命题也对, 亦即: 定义在区间 $[a,b]$ 上的任意一个函数 $x \mapsto F(x)$, 按照公式 (5.2.41) 都产生一个定向区间的可加函数.

我们举两个典型例子.

**例 10**　如果 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 则函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 按公式 (5.2.41) 产生可加函数

$$I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t.$$

我们注意到, 在这种情形下, 函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

**例 11**　设区间 $[0,1]$ 是无重量的一条弦, 在 $x = 1/2$ 处系一个质量为 1 的珠子.

设 $F(x)$ 是位于区间 $[0,x]$ 一段弦的质量, 则由假设条件, 有

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

可加函数

$$I(\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

当 $\beta > \alpha$ 的物理意义是半开区间 $(\alpha,\beta]$ 中的质量.

由于函数 $F$ 间断, 在这种情形可加函数 $I(\alpha,\beta)$ 不可能表示成某个函数 —— 质量密度 —— 的黎曼积分(这个密度, 亦即区间的质量与区间长度之比, 在区间 $[0,1]$ 上任意点 $x \neq \dfrac{1}{2}$ 处应当等于 0, 而在 $x = \dfrac{1}{2}$ 处应当是无穷大).

现在来证明一个以后有用的命题, 它给出了可加函数能由积分产生的一个充分条件.

**命题 9**　设可加函数 $I(\alpha,\beta)$ 对于区间 $[a,b]$ 的点 $\alpha,\beta$ 有定义, 且存在函数 $f \in \mathcal{R}[a,b]$, 它与 $I$ 以下述方式相联系: 对于任意区间 $[\alpha,\beta], a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, 成立关系:

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \leqslant I(\alpha,\beta) \leqslant \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha).$$

那么,

$$I(a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证**　设 $P$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分划: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$;

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

对于分划 $P$ 的每个区间 $[x_{i-1},x_i]$, 根据假设条件, 我们有

$$m_i\Delta x_i \leqslant I(x_{i-1},x_i) \leqslant M_i\Delta x_i.$$

对这个不等式求和并利用函数 $I(\alpha,\beta)$ 的可加性, 得到

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leqslant I(a,b) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

我们知道, 这个不等式两头分别是函数 $f$ 相应于区间 $[a,b]$ 的分划 $P$ 的下积分和与上积分和. 当 $\lambda(P)\to 0$ 时, 它们有同样的极限, 即 $f$ 在 $[a,b]$ 上的积分. 这样一来, 取极限 $\lambda(P)\to 0$, 就得到

$$I(a,b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

现在, 我们以具体问题来说明命题 9 的作用.

2. 道路的长度

有一质点在空间 $\mathbb{R}^3$ 中运动. 设已知它的运动规律是 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 其中 $x(t),y(t),z(t)$ 是点在时刻 $t$ 的笛卡儿直角坐标. 我们要确定在时间间隔 $a\leqslant t\leqslant b$ 内质点所通过的道路的长度 $l[a,b]$.

**定义 11** 有关道路的几个概念.

(1) 设 $x(t),y(t),z(t)$ 是定义在区间上的连续函数, 则从这个区间到空间 $\mathbb{R}^3$ 的映射 $t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ 叫做 $\mathbb{R}^3$ 的一条*道路*.

(2) 如果 $t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ 是一条道路. 它的参数 $t$ 的变化范围是闭区间 $[a,b]$, 则称空间 $\mathbb{R}^3$ 中的点 $A=(x(a),y(a),z(a)),B=(x(b),y(b),z(b))$ 分别是该道路的*起点*和*终点*.

(3) 一条道路叫做*闭的*, 如果它有起点和终点而且它们是重合的.

(4) 设 $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$. 称它是*具某种光滑性的某某类的道路*, 如果确定这个道路的函数 $x(t),y(t),z(t)$ 属于相应的函数类 (例如, $C[a,b]$ 类, $C^{(1)}[a,b]$ 类及 $C^{(k)}[a,b]$ 类道路).

(5) 设 $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$. 称它是*分段光滑的*, 如果能把区间 $[a,b]$ 分成有限多个区间, 且在其中每一个上, 映射 $\Gamma$ 都由连续可微函数确定.

(6) 如果 $\Gamma:I\to\mathbb{R}^3$ 是一条道路, 则区间 $I$ 在空间 $\mathbb{R}^3$ 的像 $\Gamma(I)$ 叫做该道路的*承载子*.

抽象道路的承载子完全可能不像我们称之为曲线的几何图形. 譬如, 有这样的道路, 其承载子包含整个三维立方体 (佩亚诺 "曲线"). 但是, 如果函数 $x(t),y(t),z(t)$ 充分正规 (譬如, 机械运动的情形, 这时它们是可微的), 则可严格地证明它没有任何与我们的直观相抵触的东西.

**定义 12** 特殊的道路 —— 曲线.

(1) 设 $\Gamma: I \to \mathbb{R}^3$. 如果映射 $I \to \Gamma(I)$ 是双方单值的, 则 $\Gamma$ 叫做**简单道路或参数化曲线**, 其承载子叫做 $\mathbb{R}^3$ 中的**曲线**, 数 $t \in I$ 叫做**参数**, 而区间 $I$ 叫做参数的**变化区域**.

(2) 闭道路 $\Gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 叫做**简单闭道路或简单闭曲线**, 如果道路 $\Gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 是简单的.

注意, 根据定义, 简单道路与任意道路的区别在于当我们沿着它的承载子运动时不会回到曾经经过的任何点, 亦即在任何地方它都不与自己的轨迹相交, 除非是在终点 (此时, 给定的简单道路是闭的).

光滑道路, 也就是 $C^{(1)}$ 类道路, 以及分段光滑的道路正是我们现在要研究的对象.

我们的目的是: 试确定一光滑道路 $\Gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 的长度.

关于在时间间隔 $[\alpha,\beta]$ 内所通过的道路的长度的基本概念是:

第一, 如果 $\alpha < \beta < \gamma$, 则

$$l[\alpha,\gamma] = l[\alpha,\beta] + l[\beta,\gamma];$$

第二, 如果 $\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ 是点在时刻 $t$ 的速度, 则

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} |\boldsymbol{v}(t)|(\beta-\alpha) \leqslant l[\alpha,\beta] \leqslant \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |\boldsymbol{v}(t)|(\beta-\alpha).$$

如此一来, 若函数 $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则根据命题 9, 我们能定义

$$l[a,b] = \int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\mathrm{d}t, \tag{5.2.42}$$

我们就取它作为光滑道路 $\Gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 的长度的定义.

如果 $z(t) \equiv 0$, 则道路的承载子在一个平面内, 而公式 (5.2.42) 有如下形式:

$$l[a,b] = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{5.2.43}$$

**例 12**　我们做一些把公式 (5.2.43) 应用于已知对象的尝试. 设有一点按规律

$$\begin{aligned} x &= R\cos 2\pi t, \\ y &= R\sin 2\pi t \end{aligned} \tag{5.2.44}$$

在平面内运动. 在时间间隔 $[0,1]$ 内该点绕半径为 $R$ 的圆周一次, 根据公式 (5.2.43) 它通过的路程是

$$l[a,b] = \int_0^1 \sqrt{(-2\pi R\sin 2\pi t)^2 + (2\pi R\cos 2\pi t)^2}\mathrm{d}t = 2\pi R,$$

它正是圆周的周长.

一般地, 考察定义在区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图形的长. 这是计算具有特殊参数化形式 $x\mapsto(x,f(x))$ 的道路 $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 的长度的问题. 从这个参数化形式看出, 映射 $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是双方单值的. 因此, 根据定义 12, 函数的图形是 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线.

这时, 公式 (5.2.43) 可以简化, 因为在其中令 $x=t,y=f(t)$ 就得到

$$l[a,b]=\int_a^b\sqrt{1+|f'(x)|^2}\mathrm{d}x. \tag{5.2.45}$$

特别地, 如果考虑圆周 $x^2+y^2=1$ 的半圆周 $y=\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1$, 则得到

$$l=\int_{-1}^1\sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right]^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5.2.46}$$

在最后的积分中被积函数是无界的, 因此, 在前述常义积分意义下它是不存在的. 因此, 我们应当或者考虑推广积分的概念, 使 (5.2.46) 式中的积分有确定的意义 (见下一小节); 或者选取另外的参数化形式使之能满足保证公式 (5.2.45) 可用的条件. 比如, 作参数替换 $[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}^2$, $y=\cos t$, $x=\sin t$, 则得

$$l=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\pi.$$

计算半圆周长这个例子提出了一个很自然的问题: 当论及曲线长度时, 公式 (5.2.42) 确定的数是否依赖于 $x$, $y$, $z$ 坐标系和曲线的参数形式的选取?

为了说明问题, 观察到如果 $\Gamma:I\to\mathcal{L}$ 和 $\tilde{\Gamma}:\tilde{I}\to\mathcal{L}$ 是具有相同值域 $\mathcal{L}$ 的两个双方单值映射, 则显然可产生这两个映射的定义域间的两个双方单值映射 $\tilde{\Gamma}^{-1}\circ\Gamma:I\to\tilde{I}$ 和 $\Gamma^{-1}\circ\tilde{\Gamma}:\tilde{I}\to I$. 于是引入

**定义 13** 称道路 $\tilde{\Gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ 是从道路 $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 借助于*参数的容许替换*得出的, 如果存在光滑映射 $T:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 使 $T(\alpha)=a,T(\beta)=b$, 在 $[\alpha,\beta]$ 上有 $T'(\tau)>0$, 且 $\tilde{\Gamma}=\Gamma\circ T$.

现在来证明如下一般的命题.

**命题 10** 如果光滑道路 $\tilde{\Gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ 是从光滑道路 $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 借助于参数的容许替换得出的, 则这两条道路的长相等.

**证** 设 $\tilde{\Gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ 和 $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 分别由光滑函数组 $\tau\mapsto(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau),\tilde{z}(\tau))$ 和 $t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ 给出, 而 $t=t(\tau)$ 是参数的容许替换, 在这个变换下有 $\tilde{x}(\tau)=x(t(\tau))$, $\tilde{y}(\tau)=y(t(\tau))$, $\tilde{z}(\tau)=z(t(\tau))$.

利用定义 13、复合函数微分法以及积分变量替换规则, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\mathrm{d}t\\
=&\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t(\tau))+\dot{y}^2(t(\tau))+\dot{z}^2(t(\tau))}t'(\tau)\mathrm{d}\tau\\
=&\int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t(\tau))t'(\tau)]^2+[\dot{y}(t(\tau))t'(\tau)]^2+[\dot{z}(t(\tau))t'(\tau)]^2}\mathrm{d}\tau\\
=&\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2(\tau)+\dot{\tilde{y}}^2(\tau)+\dot{\tilde{z}}^2(\tau)}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

□

特别地, 我们也证明了曲线的长不依赖于它的光滑参数形式的选取.

分段光滑道路的长定义为组成它的诸光滑道路长之和. 因此, 容易验证, 分段光滑道路的长经过参数的容许替换仍然不变.

我们再研究一个例子.

**例 13**　求用标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5.2.47}$$

(其中 $a\geqslant b>0$) 给出的椭圆的周长.

取参数形式 $x=a\sin\psi, y=b\cos\psi, 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$. 我们得到

$$\begin{aligned}
l=&\int_0^{2\pi}\sqrt{(a\cos\psi)^2+(-b\sin\psi)^2}\mathrm{d}\psi\\
=&\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\psi}\mathrm{d}\psi\\
=&4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\psi}\mathrm{d}\psi\\
=&4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\mathrm{d}\psi,
\end{aligned}$$

其中 $k^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}$ 是椭圆的离心率的平方.

积分

$$E(k,\psi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\mathrm{d}\psi$$

不能表示成初等函数, 而且, 由于它与椭圆有上述关系, 所以叫做**椭圆积分**. 更准确地说, $E(k,\psi)$ 叫**第二类勒让德椭圆积分**. 当 $\varphi=\pi/2$ 时, 这个积分的值显然只依赖于 $k$, 记作 $E(k)$, 叫**第二类全椭圆积分**. 因此 $E(k)=E(k,\pi/2)$, 而椭圆的周长 $l=4aE(k)$.

3. 曲边梯形的面积

我们来研究曲边梯形 $aABb$(图 32), 它由垂直线段 $aA, bB$, 横轴上的线段 $[a,b]$ 和曲线 $\widetilde{AB}$ 围成, 其中 $\widetilde{AB}$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个可积函数 $y=f(x)$ 的图像.

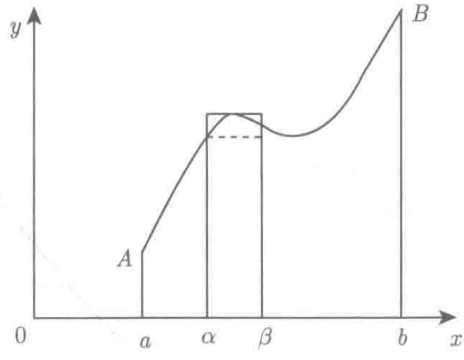


图 32

设 $[\alpha,\beta]$ 是包含在 $[a,b]$ 中的一个区间. 以 $S(\alpha,\beta)$ 表示与 $[\alpha,\beta]$ 相应的曲边梯形 $\alpha f(\alpha)f(\beta)\beta$ 的面积. 关于面积的概念是这样理解的: 如果 $a\leqslant\alpha<\beta<\gamma\leqslant b$, 则

$$S(\alpha,\gamma)=S(\alpha,\beta)+S(\beta,\gamma)$$

(面积的可加性), 以及

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)(\beta-\alpha)\leqslant S(\alpha,\beta)\leqslant\sup_{x\in[\alpha,\beta]}f(x)(\beta-\alpha)$$

(一个图形的面积不小于它所包含的图形的面积).

因此, 根据命题 9, 上述图形的面积应按公式计算:

$$S(a,b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.48}$$

**例 14** 用公式 (5.2.48) 计算由标准方程 (5.2.47) 给出的椭圆的面积.

根据图形的对称性和面积的可加性, 只要求出该椭圆位于第一象限的那一部分的面积然后将它四倍即可. 如是

$$\begin{aligned}S&=4\int_0^a\sqrt{b^2\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)}\mathrm{d}x=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}a\cos t\mathrm{d}t\\&=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t=2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\pi ab.\end{aligned}$$

在这个计算过程中我们作了变换 $x=a\sin t, 0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

因此, $S = ab\pi$. 特别地, 当 $a = b = R$ 时, 我们得到半径为 $R$ 的圆的面积公式 $\pi R^2$.

**注 3**　必须指出, 公式 (5.2.48) 是在条件 "在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$" 下给出曲边梯形面积的. 而如果是任意一个可积函数, 则积分 (5.2.48) 给出的显然是位于横轴上边和横轴下边的那些曲边梯形的面积的代数和. 这里在横轴上边的曲边梯形的面积带有正号, 而横轴下方的则带负号.

4. *旋转体的体积*

设图 32 上的曲边梯形绕区间 $[a, b]$ 旋转, 我们来确定所得立体的体积.

以 $V(\alpha, \beta)$ 表示曲边梯形 $\alpha f(\alpha) f(\beta) \beta$ 旋转所得立体 (图 32) 的体积, 其中相应的区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. 根据体积的概念, 应当成立以下关系: 如果 $a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b$, 则

$$V(\alpha, \gamma) = V(\alpha, \beta) + V(\beta, \gamma)$$

和

$$\pi \left( \inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) \right)^2 (\beta - \alpha) \leqslant V(\alpha, \beta) \leqslant \pi \left( \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) \right)^2 (\beta - \alpha).$$

在上式中, 我们用了内接和外切柱体的体积去估计 $V(\alpha, \beta)$, 还用了柱体体积公式 (如果已经知道了圆面积公式就不难得到它).

因此, 根据命题 9, 有

$$V(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x. \tag{5.2.49}$$

**例 15**　将由横轴上的区间 $[-R, R]$ 和圆弧 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \leqslant x \leqslant R)$ 所围成的半圆绕横轴旋转, 就得到半径为 $R$ 的三维球, 根据公式 (5.2.49) 容易算出它的体积

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

对线、面、体的度量的更详尽地讨论将在本教程第 II 卷中进行, 那时我们还将解决给出的定义的不变性问题.

5. *功与能*

物体在常力作用下沿着力的作用方向移动, 力对物体所做的功以力和位移的乘积 $F \cdot S$ 来度量. 这个量叫做力在给定位移上的*功*. 在一般情形, 给定力的方向与位移方向可能不共线 (譬如, 用绳子拖雪橇), 这时功是用力向量与位移向量的内积 $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{S} \rangle$ 来度量.

下面几个例子涉及功的计算并利用了与功相联系的能量的概念.

**例 16** 根据定义, 把质量 $m$ 的物体从离地面高度为 $h_1$ 的地方举到离地面 $h_2$ 的地方, 克服重力所做的功等于 $mg(h_2-h_1)$. 假定整个操作过程是在地面附近进行的, 从而重力 $mg$ 的变化可以忽略不计.

**例 17** 设有一理想的弹簧, 它的一端固定在负半轴上, 且使数轴的 $O$ 点与另一端的平衡位置重合. 众所周知, 当这个端点位于 $x$ 点时, 拉住它所需要的力等于 $kx$, 此处 $k$ 是弹簧的弹性系数.

现在来计算将弹簧的右端点从 $x=a$ 处移动到 $x=b$ 处所需之功 $A(a,b)$.

我们认为功 $A(\alpha,\beta)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 的可加函数并满足估计

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} kx(\beta-\alpha)\leqslant A(\alpha,\beta)\leqslant \sup_{x\in[\alpha,\beta]} kx(\beta-\alpha).$$

根据命题 9, 我们得到

$$A(a,b)=\int_a^b kx\mathrm{d}x=\left.\frac{kx^2}{2}\right|_a^b.$$

这是克服弹性力所需之功, 而弹性力本身在同一段位移上做的功与此只差一个符号.

我们求出来的函数 $U(x)=\dfrac{kx^2}{2}$ 可以用来计算改变弹簧状态时所要完成的功, 而这意味着, 当弹簧恢复到原来的状态时它将完成这些功. 这种只依赖于系统构形的函数叫做该系统的**势能**. 从势能的构成看出, 它的导数给出了弹性力, 但具有与弹性力相反的符号.

如果质点 $m$ 在上述弹性力的作用下沿 $x$ 轴运动, 则它的坐标 $x(t)$ 作为时间的函数满足:

$$m\ddot{x}=-kx. \tag{5.2.50}$$

我们曾验证了 (4.6.3 小节) 量

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=K(t)+U(x(t))=E \tag{5.2.51}$$

(即系统的动能和势能之和) 在运动过程中保持不变 (守恒性).

**例 18** 再考察一个例子, 在此例中将遇到一系列我们已经掌握的微分学和积分学的概念.

首先注意, 类似于为描述满足方程 (5.2.50) 的具体力学系统而引进的函数 (5.2.51), 对于形如

$$\ddot{s}(t)=f(s(t)) \tag{5.2.52}$$

的任意方程, 其中 $f(s)$ 是给定的函数, 只要取 $U(s)$ 满足 $U'(s)=-f(s)$, 就能得到和式

$$\frac{\dot{s}^2(t)}{2}+U(s)=E \tag{5.2.53}$$

不随时间变化.

事实上,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{s}^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U(s)}{\mathrm{d}t}=\dot{s}\ddot{s}+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}(\ddot{s}-f(s))=0.$$

从 (5.2.53) 求出 $\dot{s}=\pm\sqrt{2(E-U(s))}$ $\left(\text{这里根式的符号应与导数 }\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\text{ 的符号一致}\right)$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\pm\frac{1}{\sqrt{2(E-U(s))}}.$$

由此,

$$t=c_1\pm\int\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2(E-U(s))}},$$

其中 $E$ 是常数.

因此, 利用方程 (5.2.52) 的能量守恒律 (5.2.53), 原则上可以解出这个方程, 但求出的不是函数 $s(t)$, 而是它的反函数 $t(s)$.

方程 (5.2.52) 出现于, 譬如, 描述点沿着给定曲线运动的问题中. 设质点在重力作用下沿着一个狭窄的理想光滑槽子移动 (图 33). 设 $s(t)$ 是从某固定点 0——计算的起点, 沿着槽子到时刻 $t$ 质点所处位置的距离 (即路程的长). 显然, $\dot{s}(t)$ 是质点的速度, 而 $\ddot{s}(t)$ 是它的加速度切向分量, 它等于重力在小槽的给定点处的切线分量. 重力的切线分量只依赖于小槽的点, 也就是说它只依赖于 $s$(因为 $s$ 可以看作小槽所在曲线的参数①), 这是很明显的. 如果以 $f(s)$ 表示重力的这个分力, 则

$$m\ddot{s}=f(s).$$

对于这个方程, 有

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2+U(s)=E$$

保持不变, 其中 $U(s)$ 满足 $U'(s)=-f(s)$.

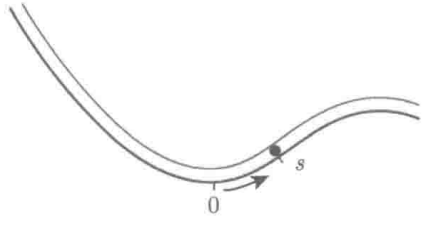


图 33

①借助于曲线的长对曲线做的参数化叫做自然参数化, 这时 $s$ 叫做自然参数.

由于 $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$ 这一项是点的动能, 而沿槽子运动假定没有摩擦, 因此, 无须计算就可猜到, 不计常数之差, 函数 $U(s)$ 应具有 $mgh(s)$ 的形式, 这里 $mgh(s)$ 是重力场中位于高度 $h(s)$ 处的点的势能.

如果在初始时刻 $t=0$ 有 $\dot{s}(0)=0, s(0)=s_0$ 和 $h(s_0)=h_0$, 则由关系

$$\frac{2E}{m}=\dot{s}^2+2gh(s)=C$$

可以求出, $C=2gh_0$. 因此, $\dot{s}^2=2g(h_0-h(s))$,

$$t=\int_{s_0}^{s}\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{2g(h_0-h(\tau))}}. \tag{5.2.54}$$

特别地, 如果点沿着半径为 $R$ 的圆周运动 (譬如, 摆的振动), 长度 $s$ 从圆周的最低点算起, 而初始条件如下: 当 $t=0$ 时 $\dot{s}(0)=0$ 并给出了初始倾角 $\varphi_0$(图 34), 那么, 容易验证, 以倾角 $\varphi$ 表示 $s$ 和 $h(s)$ 后, 有

$$t=\int_{-s_0}^{s}\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{2g(h_0-h(\tau))}}=\int_{-\varphi_0}^{\varphi}\frac{R\mathrm{d}\psi}{\sqrt{2gR(\cos\psi-\cos\varphi_0)}},$$

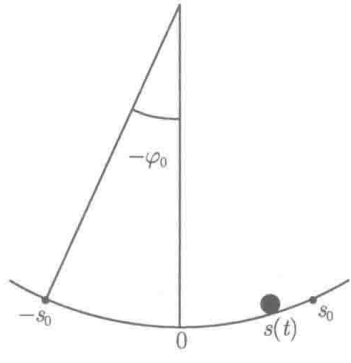


图 34

或

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{-\varphi_0}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}-\sin^2\dfrac{\psi}{2}}}. \tag{5.2.55}$$

这样一来, 我们得到摆的半周期

$$\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}-\sin^2\dfrac{\psi}{2}}}. \tag{5.2.56}$$

由此, 经过代换

$$\frac{\sin\dfrac{\psi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_0}{2}}=\sin\theta,$$

可以得到

$$T=4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\tag{5.2.57}$$

其中 $k^2=\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}$.

我们记得, 函数

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

叫做**第一类勒让德椭圆积分**. 当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 它只依赖于 $k^2$, 记作 $K(k)$, 叫做**第一类全椭圆积分**. 这样, 摆的振动周期等于

$$T=4\sqrt{\frac{R}{g}}K(k).\tag{5.2.58}$$

如果初始倾角很小, 则可令 $k=0$, 从而得到近似公式

$$T\approx 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.\tag{5.2.59}$$

在得到公式 (5.2.57) 后, 我们应当分析一下推导的全过程. 我们将发现, (5.2.54)~(5.2.56) 中被积函数在积分区间上是无界的. 类似的困难在讨论曲线长的时候就遇到过. 因此, 我们大体上已知道应当赋予积分 (5.2.54)~(5.2.56) 怎样的意义.

但是, 一次又一次的产生这个问题, 使我们认识到有必要仔细地研究一下它的精确数学提法. 这些将在下一节去做.

**例 19**　在地面上空将质量为 $m$ 的物体沿着轨线 $t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ 举起, 这里 $t$ 是时间, $a\leqslant t\leqslant b$, 而 $x,y,z$ 是点在空间中的笛卡儿坐标. 要求计算在时间间隔 $[a,b]$ 中克服重力所做的功.

功 $A(\alpha,\beta)$ 是区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 的可加函数.

当常力 $\boldsymbol{F}$ 作用于以常速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的物体时, 在时间 $h$ 内所做的功为 $\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}h\rangle=\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}\rangle h$. 因此, 可以想象, 成立以下估计

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]}\langle\boldsymbol{F}(p(t)),\boldsymbol{v}(t)\rangle(\beta-\alpha)\leqslant A(\alpha,\beta)\leqslant\sup_{t\in[\alpha,\beta]}\langle\boldsymbol{F}(p(t)),\boldsymbol{v}(t)\rangle(\beta-\alpha),$$

其中 $\boldsymbol{v}(t)$ 是物体在时刻 $t$ 的速度, $p(t)$ 是它在时刻 $t$ 在空间所处的位置, 而 $\boldsymbol{F}(p(t))$ 是在点 $p=p(t)$ 处作用于物体的力.

如果函数 $\langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle$ 可积, 则根据命题 9, 应当认为

$$A(a,b)=\int_a^b \langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

在上述具体情形, $\boldsymbol{v}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$. 如果记 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则根据万有引力定律, 得

$$\boldsymbol{F}(p)=\boldsymbol{F}(x,y,z)=G\frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}=\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

其中 $M$ 是地球的质量, 并将坐标原点放在地球的中心.

这样一来,

$$\langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{v}\rangle(t)=GmM\frac{x(t)\dot{x}(t)+y(t)\dot{y}(t)+z(t)\dot{z}(t)}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{3/2}},$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{v}\rangle(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{2}GmM\int_a^b \frac{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))'}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{3/2}}\mathrm{d}t\\&=-\frac{GmM}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{1/2}}\Big|_a^b=-\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(t)|}\Big|_a^b.\end{aligned}$$

于是

$$A(a,b)=\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(a)|}-\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(b)|}.$$

我们揭示了所求的功只依赖于 $|\boldsymbol{r}(a)|,|\boldsymbol{r}(b)|$ 这样一个事实, 即它只依赖于物体 $m$ 在所考察的时间间隔 $[a,b]$ 的初始时刻和结束时刻离地球中心的距离.

令

$$U(r)=\frac{GM}{r}.$$

我们得到, 将质量为 $m$ 的物体从半径为 $r_0$ 的球面上任一点移动到半径为 $r_1$ 的球面上任一点, 克服重力所做的功用公式

$$A_{r_0r_1}=m(U(r_0)-U(r_1))$$

计算.

函数 $U(r)$ 叫做**牛顿位势**. 如果以 $R$ 表示地球半径, 那么, 由于 $\dfrac{GM}{R^2}=g$, 所以可以把函数 $U(r)$ 写成如下形式

$$U(r)=\frac{gR^2}{r}.$$

由此可以得出为脱离地球重力场, 准确地说, 为使质量为 $m$ 的物体从地球表面飞到距地心无限远的地方, 所需要的功的表达式. 这个量显然是极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} A_{Rr}$.

因此, 脱出功为

$$A = A_{R\infty} = \lim_{r\to+\infty} A_{Rr} = \lim_{r\to+\infty} m\left(\frac{gR^2}{R} - \frac{gR^2}{r}\right) = mgR.$$

## 练　　习

1. 抛物线 $y^2 = 2x$ 把圆 $x^2 + y^2 \leqslant 8$ 分成两部分, 求这两部分面积之比.
2. 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$ 所围图形的面积.
3. 求二曲线 $r = \sin\theta$ 与 $r = \sqrt{3}\cos\theta$ 所围公共部分的面积.
4. 求下列平面曲线绕轴旋转所围成立体的体积:

(1) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, 绕 $x$ 轴.

(2) $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$, 绕极轴.

(3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 绕 $y$ 轴.

5. 导出曲边梯形 $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ 绕 $y$ 轴旋转所得立体的体积公式为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x.$$

6. 求下列曲线的弧长:

(1) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t(a > 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(2) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)(a > 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(3) $r = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}(a > 0)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi$.

7. 一个直径为 20m 的半球形容器内盛满了水. 试问把水抽尽需做多少功?
8. 半径为 $r$ 的球体沉入水中, 其比重与水相同. 试问将球体从水中捞出需做多少功?

### 5.2.5　反常积分

之前我们学的积分常称为**正常积分**(区间有限且函数有界). 在上一段讨论应用时我们看到有必要作某些推广 (适当解除这种限制). 本段讨论所谓**反常积分**, 包括两类: **无穷积分** (无穷限积分); **无界函数积分** (瑕积分). 其本质就是研究变限积分函数的极限 ($r = +\infty$ 或 $r \in \mathbb{R}$ 为瑕点, $a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{u\to r} F(u) = \lim_{u\to r} \int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

#### 1. 反常积分的定义、例题和基本性质

**定义 14**　设 $[a, \omega)$ 是有限 (即 $\omega \in \mathbb{R}$) 或无限区间 (即 $\omega = +\infty$), $x \mapsto f(x)$ 是定义在这个区间上的函数, 而且它在每个闭区间 $[a, b] \subset [a, \omega)$ 上可积. 那么, 如

果下式右端的极限存在, 则把

$$\int_a^{\omega} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{5.2.60}$$

叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\omega)$ 上的反常积分.

习惯上, 当 $\omega\in\mathbb{R}$ 时称 (5.2.60) 为瑕积分; 当 $\omega+\infty$ 时称 (5.2.60) 为无穷限积分.

符号 $\int_a^{\omega} f(x)\mathrm{d}x$ 本身也叫做反常积分. 当上边的极限存在时就说它是收敛的反常积分. 反之, 则说它是发散的反常积分. 于是, 反常积分的收敛性问题就等价于它是否有定义的问题.

(a) 无穷限积分

**例 20** 研究当 $\alpha$ 取什么值时, 反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} \tag{5.2.61}$$

收敛或有定义.

因为

$$\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b, & \alpha\neq 1,\\ \ln x\big|_1^b, & \alpha=1,\end{cases}$$

所以, 仅当 $\alpha>1$ 时, 极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ 存在. 因此,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1},\quad \alpha>1.$$

对于 $\alpha$ 的其他值, 积分 (5.2.60) 发散, 也就是无定义.

**注 4** (1) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的几何意义是: 若 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负, 则介于曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$ 及 $x$ 轴之间那一块向右无限延伸的区域有面积.

(2) 类似地, 如果函数 $x\mapsto f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上定义, 在任何闭区间 $[a,b]\subset(-\infty,b]$ 上可积, 则可给出定义:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

类似地处理 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义及收敛.

(3) 设函数 $f$ 定义在 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上. 定义 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上的无穷限反常积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $a$ 为任一实数, 当且仅当右边两个无穷积分都收敛时它才是收敛的. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性与收敛的值都与 $a$ 的选取无关; 必须 $f$ 在任何有限区间上可积.

**例 21**

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{x}\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}(1-\mathrm{e}^{a})=1.$$

(b) *瑕积分*

瑕积分的本质在于, 函数 $f$ 可能在有限点 $\omega$ 的任何邻域中都是无界的.

类似地, 如果函数 $x\mapsto f(x)$ 在区间 $(A,b]$ 上定义, 在任何闭区间 $[a,b]\subset(A,b]$ 上可积, 则可给出定义:

$$\int_{A}^{b} f(x)\mathrm{d}x:=\lim_{a\to A+0}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

**例 22**　研究参数 $\alpha$ 取什么值时, 下述积分收敛:

$$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}. \tag{5.2.62}$$

因为对于 $\alpha\in(0,1]$, 有

$$\int_{a}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{a}^{1}, & \alpha\neq 1,\\ \ln x\Big|_{a}^{1}, & \alpha=1,\end{cases}$$

所以, 仅当 $\alpha<1$ 时, 极限

$$\lim_{a\to+0}\int_{a}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}$$

存在. 这样, 积分 (5.2.61) 只对 $\alpha<1$ 的情形有定义.

(c) *反常积分的基本性质*

由于反常积分的收敛性问题, 无论说的是无界区间上的反常积分, 还是在区间的一个端点附近无界的函数的反常积分, 解决的方法是一样的, 故下面将把这两种情形放在一起讨论.

此外, 为确定起见, 假定积分的反常性只与积分上限联系. 对反常性与下限联系的情形可完全同样地去研究.

从定义、积分的性质和极限的性质, 可以得到关于反常积分的以下结论.

**命题 11** 设 $x \mapsto f(x)$ 和 $x \mapsto g(x)$ 是定义在区间 $[a,\omega)$ 上且在任何闭区间 $[a,b] \subset [a,\omega)$ 上可积的函数. 设对它们能定义反常积分

$$\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x, \tag{5.2.63}$$

$$\int_a^\omega g(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.64}$$

那么,

(1) 如果 $\omega \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}[a,\omega]$, 则积分 (5.2.63) 的值, 无论理解做反常积分还是常义积分都是一样的.

(2) 对于任何 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 函数 $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ 在反常积分意义下在 $[a,\omega)$ 上可积, 而且成立等式

$$\int_a^\omega (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^\omega g(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 如果 $c \in [a,\omega)$, 则

$$\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^\omega f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) (变量替换) 如果 $\varphi : [\alpha,\gamma) \to [a,\omega)$ 是光滑、严格单调映射, 且 $\varphi(\alpha) = a$, 当 $\beta \in [\alpha,\gamma)$ 且 $\beta \to \gamma$ 时有 $\varphi(\beta) \to \omega$, 那么, 函数 $t \mapsto (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\gamma)$ 上的反常积分存在且成立等式

$$\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(5) (分部积分) 如果 $f, g \in C^{(1)}[a,\omega)$, 且存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} (f\cdot g)(x)$, 则函数 $f\cdot g'$ 和 $f'\cdot g$ 在区间 $[a,\omega)$ 上反常积分意义下同时可积或不可积, 且当它们可积时成立等式

$$\int_a^\omega (f\cdot g')(x)\mathrm{d}x = (f\cdot g)(x)\Big|_a^\omega - \int_a^\omega (f'\cdot g)(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$(f\cdot g)(x)\Big|_a^\omega = \lim_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} (f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a).$$

**证** (1) 由函数

$$F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在区间 $[a,\omega]$ 上的连续性 (因为 $f \in \mathcal{R}[a,\omega]$) 即得证.

(2) 对于 $b \in [a, \omega)$, 有

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

由此即得证.

(3) 对于任何 $b, c \in [a, \omega)$, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由此即得证.

(4) 利用公式

$$\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

即定积分的变量替换公式, 即得证. □

(5) 为得到这个结果可利用常义积分的分部积分公式:

$$\int_a^b (f \cdot g')(x)\mathrm{d}x = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b - \int_a^b (f' \cdot g)(x)\mathrm{d}x.$$ □

**注 5**　从命题 11 的 (3) 看出, 反常积分

$$\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_c^\omega f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或发散. 这样一来, 在反常积分中跟在级数中一样, 收敛性与级数或积分的前段无关.

根据这条原理, 有时在提出反常积分的收敛性问题时, 干脆不写在其附近积分不具有奇性的那个积分限. 在这个约定下, 例 20, 例 22 所得到的结果可以写成:

积分 $\int^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 只在 $\alpha > 1$ 时收敛;

积分 $\int_{+0} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 只在 $\alpha < 1$ 时收敛.

后边这个积分中的记号 $+0$ 表示积分区间是 $x > 0$. 利用变量替换, 从它立刻推出积分 $\int_{x_0+0} \frac{\mathrm{d}x}{(x - x_0)^\alpha}$ 只在 $\alpha < 1$ 时收敛.

2. *反常积分收敛性的研究*

(a) *柯西判别法*

根据定义 14, 反常积分 (5.2.60) 的收敛性等价于函数

$$F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{5.2.65}$$

当 $b \to \omega, b \in [a, \omega)$ 时的极限的存在性.

因此, 下述断言成立.

**命题 12**(反常积分收敛性的柯西判别法) 如果函数 $x \mapsto f(x)$ 定义在区间 $[a, \omega)$ 上, 而且在任何闭区间 $[a, b] \subset [a, \omega)$ 上可积, 则当且仅当对任何 $\varepsilon > 0$ 存在 $B \in [a, \omega)$ 使对一切 $b_1, b_2 \in [a, \omega), B < b_1, B < b_2$, 成立关系

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

时, 积分 $\int_a^{\omega} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

**证** 事实上,

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{b_2} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{b_1} f(x)\mathrm{d}x = F(b_2) - F(b_1).$$

因此, 命题中的条件正是函数 $F(b)$ 当 $b \to \omega, b \in [a, \omega)$ 时极限存在性的柯西判别准则中的充分必要条件. □

(b) *反常积分的绝对收敛性*

**定义 15** 称反常积分是*绝对收敛的*, 如果积分 $\int_a^{\omega} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

根据不等式

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\mathrm{d}x \right|,$$

以及命题 12, 可以推出: 绝对收敛的反常积分必收敛.

绝对收敛性的研究归结为非负函数的积分的收敛性的研究. 而对于非负函数的情形我们有如下命题.

**命题 13** 设非负函数 $f : [a, \omega] \to \mathbb{R}$ 满足 $f \in \mathcal{R}[a, b] \forall b \in (a, \omega)$ 则当且仅当函数 (5.2.65) 在 $[a, \omega)$ 上有界时, 反常积分 (5.2.60) 存在.

**证** 事实上, 如果 $f(x) \geqslant 0$ 在 $[a, \omega)$ 上成立, 则函数 (5.2.65) 在 $[a, \omega)$ 上不减, 因此, 当且仅当这个函数有界时, 它当 $b \to \omega, b \in [a, \omega)$ 时有极限. □

作为应用命题 13 的例子, 我们考察它的下述推论.

**推论 3**(级数收敛性的积分准则) 如果 $x \mapsto f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的非负、不增且在每个闭区间 $[1, b] \subset [1, +\infty)$ 上可积的函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots$$

和积分

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或同时发散.

**证**　根据假设条件, 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立不等式

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(n).$$

对这个不等式求和, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{k} f(n+1) \leqslant \int_1^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{k} f(n)$$

或

$$s_{k+1} - f(1) \leqslant F(k+1) \leqslant s_k,$$

其中 $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f(n)$, 而 $F(b) = \int_1^b f(x)\mathrm{d}x$. 由于 $s_k$ 和 $F(b)$ 都是各自的自变量的不减函数, 所以由这些不等式即可导出我们的断言. □

特别地, 现在可以断定, 例 20 的结果等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

只在 $\alpha > 1$ 时收敛.

命题 13 的最常用的推论是下述定理.

**定理 8** (反常积分的比较定理)　设函数 $x \mapsto f(x), x \mapsto g(x)$ 在区间 $[a,\omega)$ 上有定义, 且在任何闭区间 $[a,b] \subset [a,\omega)$ 上可积. 如果在 $[a,\omega)$ 上有

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

则从积分 (5.2.64) 的收敛性可以导出积分 (5.2.63) 的收敛性, 而且成立不等式

$$\int_a^{\omega} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{\omega} g(x)\mathrm{d}x;$$

而积分 (5.2.63) 的发散性可以导出积分 (5.2.64) 的发散性.

**证**　从定理的条件, 以及对于任何 $b \in [a,\omega)$ 常义黎曼积分的不等式, 我们有

$$F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = G(b).$$

由于 $F, G$ 都是 $[a,\omega)$ 上的不减函数, 所以从上面的不等式和命题 13 就推出欲证的结论. □

**注 6** 如果代替定理中的不等式 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 假定它们在 $[a,\omega)$ 上非负且当 $x \to \omega, x \in [a,\omega)$ 时是同阶的, 亦即存在正常数 $c_1, c_2$ 使

$$c_1 f(x) \leqslant g(x) \leqslant c_2 f(x).$$

这时, 注意到反常积分的线性性质, 从上述定理推出: 积分 (5.2.63) 和 (5.2.64) 同时收敛或同时发散.

**例 23** 积分 $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$ 收敛, 因为 $\displaystyle\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ 当 $x \to +\infty$.

**例 24** 积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 因为 $\displaystyle\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ 当 $x \geqslant 1$, 从而

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1.$$

**例 25** 积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 因为 $0 < \mathrm{e}^{-x^2} < \mathrm{e}^{-x}$ 当 $x > 1$ 时成立, 从而

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

**例 26** 积分 $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散, 因为 $\displaystyle\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ 当 $x$ 充分大时成立.

**例 27** 欧拉积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛, 因为 $|\ln\sin x| \sim |\ln x| < 1/\sqrt{x}$ 当 $x \to +0$.

**例 28** 当 $0 \leqslant k^2 < 1$ 时, 椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

收敛, 因为 $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \sim \sqrt{2(1-k^2)}(1-x)^{1/2}$ 当 $x \to 1-0$.

**例 29** 积分 $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}}$ 收敛, 因为

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi} = \sqrt{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} \sim \sqrt{\sin\varphi}(\varphi-\theta)^{1/2}, \quad \theta \to \varphi - 0.$$

**例 30** 当 $0 < \varphi_0 < \pi$ 时, 积分

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2} - \sin^2\dfrac{\psi}{2}}} \tag{5.2.66}$$

收敛, 因为 $\psi \to \varphi_0 - 0$ 时, 有

$$\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}} = \sqrt{\frac{\cos\psi - \cos\varphi_0}{2}} \sim \sqrt{\sin\varphi_0}(\varphi_0 - \psi)^{1/2}. \tag{5.2.67}$$

关系 (5.2.66) 是数学摆的振动周期对其长 $L$ 和初始倾角的依赖关系. 所谓初始倾角即初始位置对穿过摆动轨迹最低点的半径的倾斜角. 公式 (5.2.66) 是上一节公式 (5.2.56) 的初等变形.

摆可以想象成, 譬如, 一根没有重量的杆, 它的一端是铰接固定的, 而另一端是自由的, 但系着一个质点.

这时, 关于初始角度 $\varphi_0 \in [0, \pi]$ 都可进行讨论. 当 $\varphi_0 = 0$ 和 $\varphi_0 = \pi$ 时, 摆根本不会振动. 在第一种情形, 摆处于稳定平衡状态; 而在第二种情形, 它处于不稳定平衡状态.

有趣的是, 从 (5.2.66) 和 (5.2.67) 不难得到, 当 $\varphi_0 \to \pi - 0$ 时, 有 $T \to \infty$, 也就是说, 摆的振动周期随着初始位置无限接近其上方 (不稳定) 平衡位置而无限地增大.

(c) *反常积分的条件收敛性*

**定义 16**　反常积分如果收敛, 但不绝对收敛, 则说它是*条件收敛的反常积分*.

**例 31**　利用命题 11(5), 根据反常积分的分部积分公式看出, 在

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_{\pi/2}^{+\infty} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

中, 如果最后的积分收敛, 则左边的积分也收敛. 但由例 24 知 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而积分

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \tag{5.2.68}$$

也收敛.

另外, 积分 (5.2.68) 不绝对收敛. 事实上, 对于 $b \in [\pi/2, +\infty)$, 我们有

$$\int_{\pi/2}^{b} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \int_{\pi/2}^{b} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b} \frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x. \tag{5.2.69}$$

可以用分部积分法验证积分 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{b} \frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ 是收敛的. 因此, 当 $b \to +\infty$ 时, (5.2.69) 右端的差趋于 $+\infty$. 这样, 根据估计式 (5.2.69), 积分 (5.2.68) 不绝对收敛.

现在引进反常积分收敛性的一个特殊准则, 它基于第二中值定理, 就是说, 它本质上是以分部积分公式为基础的.

**命题 14** (积分收敛性的阿贝尔–狄利克雷准则) 设 $x \mapsto f(x), x \mapsto g(x)$ 是定义在区间 $[a,\omega)$ 上并在任何闭区间 $[a,b] \subset [a,\omega)$ 上可积的函数. 设 $g$ 是单调函数.

那么, 为使反常积分

$$\int_a^\omega (f \cdot g)(x)\mathrm{d}x \tag{5.2.70}$$

收敛, 只需成立

(1) 积分 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 函数 $g$ 在 $[a,\omega)$ 上单调、有界.

或者成立

(3) 函数 $F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,\omega)$ 上有界.

(4) 函数 $g(x)$ 当 $x \to \omega, x \in [a,\omega)$ 时单调趋于零.

**证** 对于任何 $b_1, b_2 \in [a,\omega)$, 根据第二中值定理, 有

$$\int_{b_1}^{b_2} (f \cdot g)(x)\mathrm{d}x = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\xi$ 是 $b_1$ 和 $b_2$ 之间的一个点. 由此, 根据柯西判别法 (命题 12) 得到: 如果上述两组条件之一成立, 积分 (5.2.70) 就收敛. □

3. 具有多个奇异点的反常积分

我们已讨论了只有一个奇异点的反常积分, 它的被积函数在一个积分限附近无界, 或者一个积分限无界. 现在, 我们指出反常积分其他可能的类型.

如果两个积分限各是上述两种奇异类型中的一种, 则定义

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\mathrm{d}x =: \int_{\omega_1}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{\omega_2} f(x)\mathrm{d}x, \tag{5.2.71}$$

其中 $c$ 是区间 $(\omega_1,\omega_2)$ 中任一点. 我们假定 (5.2.71) 右边的每个反常积分都收敛. 如若不然, 则称 (5.2.71) 左边的积分发散.

根据注 5 和反常积分的可加性, 定义 (5.2.71) 在下述意义下是合理的: 它并不依赖于点 $c \in (\omega_1,\omega_2)$ 的选取.

**例 32**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x\Big|_{-1}^{0} + \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \pi.\end{aligned}$$

**例 33** (欧拉–泊松积分或称 高斯积分)　显然, 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

在上述意义下收敛. 稍后将证明它的值等于 $\sqrt{\pi}$.

**例 34**　积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

发散, 因为对于任何 $\alpha$, 在积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} 和 \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

中至少有一个是发散的.

**例 35**　积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

收敛, 如果积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x 和 \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

都收敛.

当 $\alpha < 2$ 时, 第一个积分收敛, 因为 $\dfrac{\sin x}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ 当 $x \to +0$. 而当 $\alpha > 0$ 时, 第二个积分收敛. 这可用分部积分法, 类似于例 31 中做的那样去直接验证; 也可以引用阿贝尔–狄利克雷判别法. 这样一来, 原来的积分当 $0 < \alpha < 2$ 时有意义.

当被积函数在积分区间 $[a, b]$ 的一个内点 $\omega$ 的邻域中无界时, 定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =: \int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x + \int_\omega^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{5.2.72}$$

这里要求右边的两个积分都存在.

**例 36**　在 (5.2.72) 的意义下

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} = 4.$$

**例 37**　积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 无定义.

关于在积分区间的内点 $\omega$ 的邻域中无界函数的积分, 还有与 (5.2.72) 不同的约定, 这就是

$$\mathrm{V.P.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =: \lim_{\delta\to+0}\left(\int_a^{\omega-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\omega+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right), \tag{5.2.73}$$

这里要求右边的极限存在. 沿用柯西的说法, 这个极限叫做主值意义下的积分. 积分号前边写上法文 Valeur Principal 这两个字开头的字母 V.P. 也使用英文记号 P.V.(源于 Principal Value).

**例 38** $\text{V.P.}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=0.$

还有如下定义:

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x:=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.74}$$

**例 39** $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x=0.$

最后, 如果在积分区间上有几个 (有限多个) 这种或那种奇异点, 它们位于区间内部或与区间端点重合, 则用这些奇异点把积分区间分成有限多个小区间, 其中每一个都只有一种奇异性的一个奇异点. 在原区间上的积分定义作分割后的诸小区间上的积分之和.

可以验证, 这样计算所得的结果不依赖于分割区间的方法.

**例 40** 现在可以把积分对数的精确定义写成如下形式:

$$\operatorname{li}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}, & 0<x<1,\\ \displaystyle\text{V.P.}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}, & 1<x.\end{cases}$$

在后一种情形, 符号 V.P. 涉及的是区间 $(0,x]$ 上唯一的内部奇异点 1. 我们注意到, 在定义 (5.2.72) 的意义下这个积分是不收敛的.

## 练 习

1. 讨论下列无穷积分是否收敛? 若收敛, 则求其值:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x$.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛? 若收敛, 则求其值:

(1) $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$.

3. 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则 $A=0$.

4. 证明: 若 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

5. 讨论下列无穷积分是绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(3) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$.

6. 讨论下列瑕积分的收敛性:

(1) $\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ln x}$.

(3) $\int_0^1 \dfrac{1}{x^{\alpha}}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

7. 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

8. 证明: 若 $f$ 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 且 $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\to+\infty$.

9. 证明: 若 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

10. 试证:

(1) 积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x,\quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$$

只当 $\alpha>0$ 时收敛, 而且只当 $\alpha>1$ 时绝对收敛.

(2) 菲涅尔积分

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2\mathrm{d}t,\quad S(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2\mathrm{d}t$$

在区间 $(0,+\infty)$ 上是无穷可微函数, 而且当 $x\to+\infty$ 时, 它们都有极限.

11. 试证:

(1) 函数

$$\mathrm{Fi}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

叫做概率误差积分, 常用符号 $\mathrm{erf}(x)$ 表示, 它是在 $\mathbb{R}$ 上定义的奇函数, 无穷可微且当 $x\to+\infty$ 时有极限.

(2) 如果 (1) 中所说的极限等于 1(确实如此), 则当 $x\to+\infty$ 时, 有

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4x^7}+o\left(\frac{1}{x^7}\right)\right).$$

( O-7417.31 )

中国科学院大学本科生教材系列(BJC0701001)

# 数学分析讲义(第一卷)

科学出版社互联网入口
科学数理分社
电 话：(010) 64001244
E-mail：huqingjia@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com
ISBN 978-7-03-058364-2
9 787030 583642 >
定 价：68.00 元