中国科学院大学本科生教材系列

# 数学分析讲义

（第二卷）

丁彦恒 刘笑颖 吴 刚 编

科学出版社

( O-7884.31 )

中国科学院大学本科生教材系列(BJC0701002)

# 数学分析讲义(第二卷)



科学出版社互联网入口
科学数理分社
电 话：(010) 64001244
E-mail：huqingjia@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等数学

www.scie
ISBN 978-7-
9 787030

定 价：(

中国科学院大学教材出版中心资助
中国科学院大学本科生教材系列

# 数学分析讲义

## (第二卷)

丁彦恒　刘笑颖　吴　刚　编

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书始于实数的基本理论. 接着进入一元微积分学, 包括极限、连续、级数、微分、复数、积分等, 重视它对现代数学的启迪, 适时介绍些抽象概念(如对基的极限), 以利于拓展到一般分析学. 其次探讨拓扑空间(特别是度量空间、欧氏空间 $\mathbb{R}^n$)的映射, 展开多元微积分学, 其中涉及隐函数定理、集合上的积分、流形(特别是 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面)及微分形式、流形(特别是曲线与曲面)上微分形式的积分、向量分析与场论. 继而研究线性赋范空间中的微分学、函数项级数与函数族的基本分析运算、含参变量的积分(特别是函数的卷积与广义函数等)、傅里叶变换、渐近展开等.

全书分 3 卷出版, 本书为第二卷. 第一、二卷大体上适合那些仅安排在 1 学年时间内学习“数学分析”课程的学生, 而全套则可用以安排 3 个或 4 个学期的“数学分析”课程.

**图书在版编目(CIP)数据**

数学分析讲义. 第二卷/丁彦恒, 刘笑颖, 吴刚编. —北京: 科学出版社, 2019.12

中国科学院大学本科生教材系列

ISBN 978-7-03-063297-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①丁… ②刘… ③吴… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 255519 号

责任编辑: 胡庆家 贾晓瑞 / 责任校对: 彭珍珍

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2019 年 12 月第一次印刷 印张: 17 1/4

字数: 350 000

**定价: 68.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前　言

本书是编者授课 “数学分析” 的讲义. 它形成于教学实践中, 特别是在与中国科学院大学 2014 级、2016 级、2017 级 (本科)、北京师范大学 2017 级 (励耘班) 的同学们一道学习由华东师范大学数学系[①]、卓里奇 B A[②] 分别编著的《数学分析》的过程中. 为了缓解同学们边听课边做笔记而引发的忙碌, 应他们的建议, 基本上沿用上述两书的框架和内容, 师生互动组稿成书.

全书分 3 卷出版. 第一、二卷大体上适合那些仅安排在 1 学年时间里学习 “数学分析” 的学生, 而全套则可用以安排 3 个或 4 个学期的 “数学分析” 课程. 本书由中国科学院大学教材出版中心资助.

丁彦恒

2018 年 1 月于北京

① 华东师范大学数学系. 数学分析. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

② 卓里奇 B A. 数学分析 (第一卷、第二卷). 第 4 版. 蒋铎, 王昆扬, 周美珂, 邝荣雨译, 周美珂校. 北京: 高等教育出版社, 2012.

# 目　录

前言
第 6 章　拓扑空间及映射的极限与连续性 ····· 279
6.1　拓扑空间 ····· 279
6.1.1　拓扑空间的基本概念 ····· 279
6.1.2　度量空间 ····· 284
6.1.3　有限维线性赋范空间 (欧氏空间 $\mathbb{R}^m$) ····· 294
6.2　拓扑空间的连续映射 ····· 299
6.2.1　映射的极限 ····· 299
6.2.2　连续映射 ····· 300
6.2.3　压缩映像原理 ····· 304
6.2.4　多变量函数和它的极限与连续性 ····· 308
第 7 章　多变量函数微分学 ····· 318
7.1　多变量函数的微分 ····· 318
7.1.1　函数在一点的微分 ····· 318
7.1.2　实值函数的偏导数与微分 ····· 319
7.1.3　映射的微分的坐标表示 • 雅可比矩阵 ····· 322
7.1.4　函数在一点的连续性、偏导数和可微性 ····· 322
7.2　微分法的基本定律 ····· 323
7.2.1　微分法运算的线性性质 ····· 323
7.2.2　复合映射的微分法 ····· 325
7.2.3　逆映射的微分法 ····· 329
7.3　多变量实值函数微分学的基本事实 ····· 332
7.3.1　中值定理 ····· 332
7.3.2　多变量函数可微性的充分条件 ····· 334
7.3.3　高阶偏导数 ····· 335
7.3.4　泰勒公式 ····· 338
7.3.5　多变量函数的极值 ····· 339
7.3.6　与多变量函数有关的某些几何形象 ····· 344
7.4　隐函数定理 ····· 349
7.5　隐函数定理的一些推论 ····· 357

7.5.1 反函数定理 ····· 357
7.5.2 局部地把光滑映射化为典则形式 ····· 361
7.5.3 函数的相关性 ····· 365
7.5.4 局部地分解微分同胚为最简形式的复合 ····· 367
7.5.5 莫尔斯引理 ····· 369
7.6 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面和条件极值理论 ····· 373
7.6.1 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维曲面 ····· 373
7.6.2 切空间 ····· 377
7.6.3 条件极值 ····· 381
**第 8 章 重积分** ····· 392
8.1 $n$ 维区间上的黎曼积分 ····· 392
8.1.1 积分定义 ····· 392
8.1.2 黎曼可积的勒贝格准则 ····· 394
8.1.3 达布准则 ····· 398
8.2 集合上的积分 ····· 400
8.2.1 (有界) 集上的积分 ····· 400
8.2.2 容许集 ····· 401
8.2.3 容许集的测度 (体积) ····· 402
8.3 积分的一般性质 ····· 403
8.3.1 积分的线性性质 ····· 403
8.3.2 积分的可加性 ····· 404
8.3.3 积分的估计 ····· 405
8.4 化重积分为累次积分 ····· 407
8.4.1 富比尼定理 ····· 407
8.4.2 一些推论 ····· 409
8.5 重积分中的变量替换 ····· 414
8.5.1 变量替换公式 ····· 414
8.5.2 预备知识 ····· 414
8.5.3 积分变量替换公式的证明 ····· 419
8.5.4 重积分变量替换公式的推广 ····· 420
8.6 反常重积分 ····· 424
8.6.1 基本定义 ····· 424
8.6.2 反常积分——控制收敛判别法 ····· 427
8.6.3 反常积分——变量替换 ····· 429

**第 9 章　流形 (曲面) 及微分形式** ····· 434
9.1　线性代数准备知识 ····· 434
9.1.1　形式代数 ····· 434
9.1.2　斜对称形式代数 ····· 435
9.1.3　线性空间中的线性映射及共轭空间中的共轭映射 ····· 438
9.2　流形 ····· 440
9.2.1　流形的定义 ····· 440
9.2.2　光滑 (无边) 曲面 ····· 441
9.2.3　带边流形 ····· 445
9.2.4　光滑流形与光滑映射 ····· 446
9.2.5　流形及其边界的定向 ····· 449
9.2.6　单位分解 ····· 454
9.2.7　流形在其一点的切空间和余切空间 ····· 457
9.3　流形上的微分形式 ····· 464
9.3.1　微分形式 ····· 464
9.3.2　外微分 ····· 467
**第 10 章　流形 (曲面) 上微分形式的积分** ····· 475
10.1　微分形式在流形上的积分 ····· 475
10.1.1　形式在流形上的积分 ····· 475
10.1.2　斯托克斯公式 ····· 476
10.2　曲线积分与曲面积分 ····· 478
10.2.1　曲面上微分形式的积分 ····· 478
10.2.2　体积形式 ····· 484
10.2.3　在笛卡儿坐标下体积形式的表示 ····· 485
10.2.4　参数曲面的面积 ····· 487
10.2.5　第一型与第二型积分 ····· 492
10.2.6　斯托克斯定理在曲面积分中的推论 ····· 493
10.3　流形上的闭形式与恰当形式 ····· 500
10.3.1　庞加莱定理 ····· 500
10.3.2　同调与上同调 ····· 502
**第 11 章　向量分析与场论初步** ····· 507
11.1　向量分析的微分运算 ····· 507
11.1.1　数量场与向量场 ····· 507
11.1.2　$\mathbb{R}^3$ 中的向量场与形式 ····· 507
11.1.3　微分算子 grad, rot, div 及 $\nabla$ ····· 509

11.1.4　向量分析的一些微分公式 ····· 511
11.1.5　曲线坐标下的向量运算 ····· 513
11.2　场论的积分公式 ····· 522
11.2.1　用向量表示的经典积分公式 ····· 522
11.2.2　一些进一步的积分公式 ····· 525
11.3　势场 ····· 528
11.3.1　向量场的势 ····· 528
11.3.2　势场的必要条件 ····· 529
11.3.3　向量场具有势的判别准则 ····· 530
11.3.4　区域的拓扑结构与势 ····· 532
11.3.5　向量势、恰当形式与闭形式 ····· 534
11.4　应用例子 ····· 537
11.4.1　热传导方程 ····· 537
11.4.2　连续性方程 ····· 539
11.4.3　连续介质动力学基本方程 ····· 540
11.4.4　波动方程 ····· 542

# 第 6 章　拓扑空间及映射的极限与连续性

## 6.1　拓 扑 空 间

### 6.1.1　拓扑空间的基本概念

1. 基本定义

**定义 1**　称集合 $X$ 装备了拓扑空间结构或装备了拓扑, 或者称 $X$ 是拓扑空间, 如果指定了 $X$ 的一个子集族 $\tau$, 它具有下列性质:

(1) $\varnothing \in \tau; X \in \tau$.

(2) $(\forall \alpha \in A; \tau_\alpha \in \tau) \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha \in \tau$.

(3) $(\tau_i \in \tau; i = 1, \cdots, n) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tau_i \in \tau$.

换句话说, 拓扑空间是由集合 $X$ 和 $X$ 的具有上述性质的子集族 $\tau$ 所组成的序对 $(X;\tau)$. $\tau$ 包含空集和整个集 $X$, 族 $\tau$ 中的任意多个集合的并集是族 $\tau$ 中的集合, 并且族 $\tau$ 中的有限个集合之交是族 $\tau$ 中的集合.

**定义 2**　如果 $(X,\tau)$ 是拓扑空间, 那么族 $\tau$ 中的集合 $G$ 称为开集, 而它关于 $X$ 的余集 $G^c := X \setminus G$ 称为 $(X,\tau)$ 的闭集.

一般而言, 不易用列出集族 $\tau$ 中的所有集合来给出集合 $X$ 的拓扑, 通常是只指出 $X$ 的一些子集组成的一个集类, 而族 $\tau$ 的任一集合可以由该集类中集合的并或交得到.

**定义 3**　$X$ 的开子集族 $\mathcal{B}$ 称为拓扑空间 $(X;\tau)$ 的基 (开基或拓扑基), 如果每个开集 $G \in \tau$ 是 $\mathcal{B}$ 中某些元素的并.

于是, 为了给出拓扑 $\tau$, 只要给出这个拓扑的基. 一个拓扑空间可以有许多不同的拓扑基.

**定义 4**　称拓扑空间的基的最小势为该拓扑空间的权.

我们通常涉及的是有可数拓扑基的拓扑空间.

**定义 5**　称子集 $V \subset X$ 为点 $x \in X$ 的邻域, 如果 $\exists G \in \tau$ 满足 $x \in G \subset V$. 称子集族 $\mathcal{U}_x = \{V_\alpha\}$ 为 $x$ 的邻域系, 如果各 $V_\alpha$ 是 $x$ 的邻域, 且对 $x$ 的任意邻域 $V$ 有 $\alpha$ 使 $V_\alpha \subset V$.

显然, 如果在 $X$ 上给出了拓扑 $\tau$, 那么就确定了每个点 $x \in X$ 的邻域系.

**注 1**　显然, 拓扑空间的所有点的邻域系合起来可以作为这个空间的拓扑基.

人们常基于此引进拓扑，即 $\forall x \in X$, 指定一个包含点 $x$ 的子集族 $\mathcal{U}_x$, 则 $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x$ 为拓扑基, 而 $\tau$ 便是由 $\mathcal{B}$ 的元素经 "任意并 (2)" 和 "有限交 (3)" 而得. 以后讨论度量空间时正是这样做的①.

**例 1**　设 $X$ 是一集合. 显然 $\{\varnothing, X\}$ 是 $X$ 的一个拓扑结构 (*平凡拓扑*); $X$ 的所有子集 (包括空集 $\varnothing$) 作成的族是 $X$ 的一个拓扑结构 (*最强拓扑*).

**例 2**　设 $X = \mathbb{R}^1$. $\tau_{\mathbb{R}}$ *是由* $\varnothing, \mathbb{R}$, *所有若干个开区间之并及所有有限多个开区间之交做成的子集族*, 则 $(\mathbb{R}^1; \tau_{\mathbb{R}})$ 是拓扑空间, 而 $\mathcal{U}_x := \{(x-r, x+r) \,|\, r > 0\}$ 是 $x$ 的一个邻域系, $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x$ 是 $\tau_{\mathbb{R}}$ 的一个基. 显然 $\mathcal{B} = \{(x-r, x+r) \,|\, x \in \mathbb{R}^1, 0 < r \in \mathbb{Q}\}$ 也是 $\tau_{\mathbb{R}}$ 的一个基, 故 $(\mathbb{R}^1; \tau_{\mathbb{R}})$ 的权是可数的.

**例 3**　考虑连续函数的*芽集*. 称函数 $f, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ 在点 $a \in \mathbb{R}$ 是等价的, 如果存在这点的邻域 $U(a)$, 使得

$$\forall x \in U(a), \quad f(x) = g(x).$$

所引进的关系确实是等价关系 (它是自反的、对称的和传递的). 在点 $a \in \mathbb{R}$ 彼此等价的连续函数类称为在这一点的*连续函数芽*. 如果 $f$ 是在点 $a$ 生成芽的函数之一, 那么芽本身将用记号 $f_a$ 表示. 现在我们定义芽的邻域. 设 $U(a)$ 是 $\mathbb{R}$ 中点 $a$ 的邻域, $f$ 是定义在 $U(a)$ 上并在点 $a$ 生成芽 $f_a$ 的一个函数. 这个函数 $f$ 在任意点 $x \in U(a)$ 生成自己的芽 $f_x$. 相应于一切点 $x \in U(a)$ 的芽的集 $\{f_x\}$ 称为*芽* $f_a$ *的邻域*. 把所有不同芽的这样的邻域组成的集取作拓扑基, 连续函数的芽集就成了拓扑空间. 值得注意的是, 在所得到的拓扑空间中, 两个不同点 (芽)$f_a, g_a$ 可以没有不相交的邻域 (图 35).

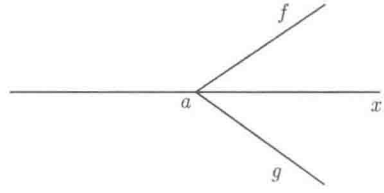



图 35

**定义 6**　称拓扑空间为*豪斯多夫空间*, 如果它满足*豪斯多夫空间公理*: 空间的任意两个不同点有不相交的邻域.

下节会看到任一度量空间都是豪斯多夫空间. 而具有最简单的拓扑 $\tau = \{\varnothing, X\}$

① 度量空间和拓扑空间的概念在20世纪初就给出了明确的陈述. 法国数学家弗雷歇 (M.R. Fréchet) (1878—1973) 在 1906 年引进了度量空间的概念, 德国数学家豪斯多夫 (F. Hausdorff)(1868—1942) 在 1914 年定义了拓扑空间.

的拓扑空间就是非豪斯多夫拓扑空间, 即便只有两个点, $(X;\tau)$ 也不是豪斯多夫拓扑空间. 此外, 在这个空间中, 点的补集 $X\backslash\{x\}$ 不是开集.

**定义 7** 称集合 $E\subset X$ 是拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的**处处稠密集**, 如果对任意点 $x\in X$ 和它的任一邻域 $U(x)$, 交集 $E\cap U(x)$ 都非空.

可以证明, 在每个拓扑空间中存在势不超过这个拓扑空间权的处处稠密集.

**定义 8** 具有可数处处稠密集的拓扑空间称为**可分空间**.

**例 4** 如果在 $\mathbb{R}$ 中考察标准拓扑 $\tau_{\mathbb{R}}$, 那么有理数集 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中处处稠密, 从而 $\mathbb{R}$ 是可分空间.

**定义 9** (点与子集间的关系) 称 $x\in X$ 是 $E\subset X$ 的:

- **内点**: 如果 $x$ 有某个邻域含在 $E$ 中. $E$ 的全体内点所成的集合称为 $E$ 的**内部**, 记为 $\mathring{E}$.
- **外点**: 如果 $x$ 是 $E$ 在 $X$ 中的余集的内点.
- **边界点**: 如果 $x$ 既不是 $E$ 的内点, 又不是 $E$ 的外点 (即点 $x$ 的任一邻域中既有属于 $E$ 的点, 也有不属于 $E$ 的点). $E$ 的全体边界点所成的集合称为 $E$ 的**边界**, 记为 $\partial E$.
- **极限点**: 如果对于点 $x$ 的任意邻域 $U(x)$, 集合 $(E\backslash\{x\})\cap U(x)\neq\varnothing$. 称集合 $E$ 和它在 $X$ 中所有极限点组成的集合之并集为 $E$ 在 $X$ 中的**闭包**, 用 $\overline{E}$ 表示.

**命题 1** 若 $X$ 是豪斯多夫空间, 则 ($F$是$X$中的闭集) $\Leftrightarrow$ (在$X$中有$F=\overline{F}$).

**证** 设 $F$ 是 $X$ 中的闭集, $x\in X, x\notin F$. 这时, 开集 $G=X\backslash F$ 是点 $x$ 的邻域, 它不含 $F$ 的点. 这就证明了, 如果 $x\notin F$, 则 $x$ 不是 $F$ 的极限点.

设 $F=\overline{F}$. 要证 $G=X\backslash\overline{F}$ 是 $X$ 中的开集. 如果 $x\in G$, 则 $x\notin\overline{F}$, 因此 $x$ 不是 $F$ 的极限点, 这意味着存在点 $x$ 的一个邻域, 它仅含 $F$ 的有限个点 $x_1,\cdots,x_n$. 因为 $x\notin F$, 所以可找到 $x$ 的邻域 $O_1(x),\cdots,O_n(x)$, 使得 $x_i\notin O_i(x)$. 这时 $O(x)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}O_i(x)$ 是点 $x$ 的邻域且不含 $F$ 的点, 即 $O(x)\subset X\backslash F$. 这就是说, $X\backslash F=X\backslash\overline{F}=G$ 是开集, 因而 $F$ 是 $X$ 中的闭集. □

**注 2** 此命题的豪斯多夫空间, 即 $\tau_2$ 要求可减弱为 $\tau_1$ 条件 (见练习题 3).

2. 拓扑空间的子空间

设 $(X;\tau_X)$ 是拓扑空间, 而 $Y$ 是 $X$ 的子集. 定义 $Y$ 的子集族

$$\tau_Y:=\{Y\cap G_X\,|\,G_X\in\tau_X\}.$$

不难验证, $Y$ 的子集族 $\tau_Y$ 满足拓扑结构公理. 通常称 $\tau_Y$ 是 $\tau_X$ 在 $Y$ 中的**诱导拓扑**或**相对拓扑**.

**定义 10** 称拓扑空间 $(X;\tau)$ 的子集 $Y\subset X$ 为 $(X;\tau)$ 的**子空间**, 如果在 $Y$ 中装备了诱导拓扑 $\tau_Y$.

显然, $(Y;\tau_Y)$ 中的开集不一定是 $(X;\tau_X)$ 中的开集.

3. 连通的拓扑空间

**定义 11**　称拓扑空间 $(X;\tau)$ 是连通的, 如果在 $(X;\tau)$ 中除了 $X$ 本身和空集以外没有别的开–闭集 (即同时是开的和闭的). 直观地说: 拓扑空间 $X$ 是连通的当且仅当 $X$ 不能表为它的两个非空不交的闭 (开) 子集的并.

**定义 12**　拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的集合 $E$ 称为是连通集, 如果它作为 $(X;\tau)$ 的拓扑子空间 (具有诱导拓扑) 是连通的.

从定义 12 和定义 11 推知, 集合 $E$ 连通的性质不依赖于包含它的空间. 更精确地说, 如果 $(X;\tau_X)$ 和 $(Y;\tau_Y)$ 是包含 $E$ 并且在 $E$ 上导出同一个拓扑的拓扑空间, 那么 $E$ 在 $X$ 和 $Y$ 中同时连通, 或者同时不连通.

4. 拓扑空间的直积

设 $(X_1;\tau_1)$ 和 $(X_2;\tau_2)$ 是两个拓扑空间, 我们来定义 $X_1\times X_2$ 上的拓扑基以引进拓扑.

**定义 13**　拓扑空间 $(X_1\times X_2;\tau_1\times\tau_2)$ 称为拓扑空间 $(X_1;\tau_1),(X_2;\tau_2)$ 的直积, 如果它的拓扑基由形如 $G_1\times G_2$ 的集所组成, 其中 $G_i$ 是拓扑空间 $(X_i;\tau_i), i=1,2$ 中的开集.

应当注意, 形如 $G_1\times G_2$ 的集合 (其中 $G_1\in\tau_1, G_2\in\tau_2$) 只组成 $(X_1\times X_2;\tau_1\times\tau_2)$ 的拓扑基, 但不是所有开集.

5. 紧集

**定义 14**　拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的集合 $K$ 称为紧集 (在拓扑学中有时称为紧致集或重紧致集), 如果能从 $X$ 的任一覆盖 $K$ 的开集族中选出 $K$ 的有限覆盖.

与拓扑空间中集合成为开集或闭集的相对性质不同, 集合成为紧集的性质在下述意义下是绝对的, 即不依赖于它作为哪个空间的子空间, 更确切地说, 成立以下的命题.

**命题 2**　拓扑空间 $(X;\tau)$ 的子集 $K$ 是 $X$ 中的紧集, 当且仅当 $K$ 是其本身作为 $(X;\tau)$ 的子空间中的紧集.

**证**　所述命题可以从紧集的定义和在 $K$ 中诱导拓扑 $\tau_K$ 的每个开集 $G_K$ 都是 $X$ 中的某个开集 $G_X$ 与 $K$ 的交推出. □

于是, 如果拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 与 $(Y;\tau_Y)$ 在集 $K\subset(X\cap Y)$ 上诱导出同一个拓扑, 那么无论 $K$ 是在 $X$ 中还是在 $Y$ 中同时是紧集, 或者同时不是紧集.

下面证明紧集的一些重要性质.

**命题 3**　紧集具有下述性质.

(1) (紧集的闭性引理) 如果 $K$ 是豪斯多夫空间 $(X;\tau)$ 中的紧集, 那么 $K$ 是 $X$ 的闭子集.

(2) (紧集套引理) 如果 $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ 是非空的紧集套, 那么 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ 非空.

(3) (紧集的闭子集引理) 紧集 $K$ 的闭子集 $F$ 是紧集.

**证** (1) 根据集合的闭性判别准则, 只要验证 $K$ 的任一极限点 $x_0 \in X$ 都属于 $K$. 假设 $x_0 \notin K$. 对于每个 $x \in K$, 作 $x$ 的开邻域 $G(x)$, 使它与 $x_0$ 的某邻域不相交. 所有这些邻域 $G(x), x \in K$ 组成 $K$ 的一个开覆盖, 从中选出有限覆盖 $G(x_1), \cdots, G(x_n)$. 如果点 $x_0$ 的邻域 $O_i(x_0)$ 使得 $G(x_i) \cap O_i(x_0) = \varnothing$, 那么集合

$$O(x_0) = \bigcap_{i=1}^{n} O_i(x_0)$$

也是点 $x_0$ 的邻域, 且有

$$G(x_i) \cap O(x_0) = \varnothing, \quad i = 1, \cdots, n.$$

所以 $K \cap O(x_0) = \varnothing$, 即点 $x_0$ 不可能是 $K$ 的极限点.

(2) 由 (1), 集合 $G_i = K_1 \backslash K_i, i = 1, 2, \cdots$ 是 $K_1$ 中的开集. 如果 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \varnothing$, 那么集列 $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$ 全体组成 $K_1$ 的覆盖. 从中选出有限覆盖, 必有某个元素 $G_m \supset K_1$, 这与条件

$$K_m = K_1 \backslash G_m \neq \varnothing$$

矛盾, (2) 得证.

(3) 设 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 $F$ 的开覆盖. 增加一个开集 $G = K \backslash F$, 得到紧集 $K$ 的开覆盖. 从中可以选出 $K$ 的有限覆盖. 因为 $G \cap F = \varnothing$, 这意味着从族 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 中选出了集 $F$ 的有限覆盖. □

## 练 习

1. (1) 在自然数集 $\mathbb{N}$ 中, 令公差 $d$ 与 $n$ 互质的等差序列为 $n \in \mathbb{N}$ 的邻域. 试问, 这样生成的拓扑空间是否是豪斯多夫空间?

(2) $\mathbb{N}$ 作为取标准拓扑的实数集 $\mathbb{R}$ 的子空间时具有怎样的拓扑?

(3) 写出 $\mathbb{R}$ 的所有开子集.

2. (1) 试用闭集的语言叙述拓扑空间的公理.

(2) 证明: $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$.

(3) 证明: 任一集合的边界是闭集.

(4) 证明: 如果 $F$ 是 $(X;\tau)$ 的闭集, $G$ 是 $(X;\tau)$ 的开集, 那么 $G\setminus F$ 是 $(X;\tau)$ 的开集.

(5) 证明: 如果 $(Y;\tau_Y)$ 是拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 的子空间, 集合 $E$ 满足: $E\subset Y\subset X$, 且 $E\in\tau_X$, 那么 $E\in\tau_Y$.

3. 给定拓扑空间 $(X;\tau)$, 如果其任意单点集都是闭集, 则称它是强意义下的拓扑空间或 $\tau_1$-空间. 试证:

(1) 任何豪斯多夫空间都是 $\tau_1$-空间 (豪斯多夫空间叫 $\tau_2$-空间);

(2) 并非所有 $\tau_1$-空间都是 $\tau_2$-空间;

(3) 两点集 $X=\{a,b\}$, 在其中定义开集族 $\tau=\{\varnothing,X\}$, 则它不是 $\tau_1$-空间;

(4) 在 $\tau_1$-空间中, 集合 $F$ 是闭集, 当且仅当它包含自己的一切极限点.

### 6.1.2　度量空间

1. 定义和例子

**定义 15**　设 $X$ 是个集合. 若 $\forall x,y\in X$, 都有唯一确定的实数 $d(x,y)$ 与之对应, 满足公理:

(1) (**唯一性**) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) (**对称性**) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) (**三角不等式**) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则称 $(X;d)$ 为**度量空间**, $d(\cdot,\cdot)$ 为 $X$ 上的**度量**, $X$ 中的元素为**点**(简记 $X=(X,d)$).

**注 3**　(1) 由 (1)—(3) 推出映射

$$d:X\times X\to\mathbb{R}^+\,(:=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant 0\}),\tag{6.1.1}$$

即 $d$ 是非负的: $0\leqslant d(x,y)$. 事实上, $0=d(x,x)\leqslant d(x,y)+d(y,x)=2d(x,y)$.

(2) 若以

(1′) (**非负性**) $d(x,y)\geqslant 0$

取代 (1), 则称满足 (1′), (2), (3) 的对应 $d(\cdot,\cdot)$ 为 $X$ 上的**半度量**.

**例 5**　实数集 $\mathbb{R}$ 是一个度量空间, 如果定义 $d(x,y)=|x-y|$ (称为 $\mathbb{R}$ 的标准度量).

**例 6**　以 $C[a,b]$ 记闭区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数组成的集合. 规定

$$d(f,g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|,\quad\forall f,g\in C[a,b].\tag{6.1.2}$$

易验证 $C[a,b]$ 是度量空间. 称 (6.1.2) 式为 $C[a,b]$ 中的**一致度量或切比雪夫度量**. 也可对 $p\geqslant 1$ 定义度量

$$d_p(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad\forall f,g\in C[a,b]\tag{6.1.3}$$

使得 $C[a,b]$ 为度量空间.

**例 7** 以 $C^{(k)}[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上有 $k$ 阶连续导数的函数集. 规定

$$d(f,g)=\max\{M_0,\cdots,M_k\},\quad \text{其中 } M_i:=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|,\quad i=0,1,\cdots,k, \tag{6.1.4}$$

则 $C^{(k)}[a,b]$ 是度量空间.

**例 8** 在集合 $\mathcal{R}[a,b]$ 中引进等价关系 " $\sim$ ": $f\sim g\Leftrightarrow$ 如果它们至多在一个零测集上不相等. 将这些等价类组成的集合记作 $\widetilde{\mathcal{R}}[a,b]$. 易验证由 (6.1.3) 式定义的 $d_p(\cdot,\cdot)$ 为 $\widetilde{\mathcal{R}}[a,b]$ 上的度量. 记这个度量空间为 $\widetilde{\mathcal{R}}_p[a,b]$.

2. *度量空间的拓扑结构*

下面总是设 $X$ 是一个度量空间.

首先注意: *度量空间是拓扑空间*. 为说明此事, 按 6.1.1 小节注 1, 只需注意到每一点 $a\in X$ 具有如下的邻域系

$$B(a;\delta):=\{x\in X\,|\,d(a;x)<\delta\},\quad \delta>0, \tag{6.1.5}$$

称 $B(a;\delta)$ *为以 $a$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的球*.

**注 4** 对于度量空间, 有关拓扑概念可用距离进一步描述.

• $E\subset X$ 是开集 $\Leftrightarrow\forall x\in E,\exists\delta>0$ 使得 $B(x;\delta)\subset E$. 特别 $B(x;\delta)$ 是开集.

• $x\in X$ 是子集 $E\subset X$ 的极限点 $\Leftrightarrow\exists\{x_n\}\subset E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x,x_n)=0$. 从而, $E\subset X$ 是闭集 $\Leftrightarrow$ 由 $\{x_n\}\subset E$, $\lim\limits_{n\to\infty}d(x,x_n)=0$ 推出 $x\in E$.

• 任一度量空间 $(X;d)$ 都是豪斯多夫空间, 因为对于任意不重合的两个点 $a,b\in X$, 有 $d(a,b)>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{2}d(a,b)$, 则 $B(a;\delta)\cap B(b;\delta)=\varnothing$.

• 如果 $(X_1;d_1)$ 和 $(X_2;d_2)$ 是两个度量空间, 那么它们的直积 $X_1\times X_2$ 也是度量空间. 可引进度量 $d$: $\forall(x_1,x_2)\in X_1\times X_2,(x_1',x_2')\in X_1\times X_2$,

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=\sqrt{d_1^2(x_1,x_1')+d_2^2(x_2,x_2')},$$

或者

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=d_1(x_1,x_1')+d_2(x_2,x_2'),$$

或者

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=\max\{d_1(x_1,x_1'),d_2(x_2,x_2')\}.$$

容易看出, 在上述每一种情形, 我们都得到 $X_1\times X_2$ 上的度量.

3. 度量紧性

首先给出度量空间中的有界集和收敛序列的概念.

• 设 $E \subset X$. $d(E) = \sup\limits_{x,y\in E} d(x,y)$ 称为$E$ 的直径. 若 $d(E) < +\infty$, 则说 $E$ 是有界集; 若 $d(E) = +\infty$, 则说 $E$ 是无界集.

• 设 $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 收敛于 $x$, 并称 $\{x_n\}$ 为收敛序列, $x$ 为 $\{x_n\}$ 的极限, 常记作 $x_n \to x$.

**定义 16**　称集合 $E \subset X$ 是度量空间 $(X;d)$ 的 $\varepsilon$-网, 如果对于任一点 $x \in X$, 有点 $e \in E$, 使得 $d(e,x) < \varepsilon$.

**命题 4** (有限 $\varepsilon$-网引理)　如果度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 在 $(K;d)$ 中 $K$ 有有限的 $\varepsilon$-网.

**证**　对每个点 $x \in K$, 取开球 $B(x;\varepsilon)$. 然后从这些球的开覆盖中选取有限覆盖 $B(x_1;\varepsilon), \cdots, B(x_n;\varepsilon)$. 显然, 点 $x_1, \cdots, x_n$ 组成所求的 $\varepsilon$-网. □

**推论 1**　如果度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 则它是有界的.

**证**　设 $B(x_1;1), \cdots, B(x_n;1)$ 是命题 4 的证明中出现的有限 1-网. $\forall x, y \in K$, $\exists x_i, x_j$ 使得 $d(x,x_i) < 1$, $d(y,x_j) < 1$. 于是

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) \leqslant 2 + \max\{d(x_i,x_j) \,|\, 1 \leqslant i,j \leqslant n\}.$$

这意味着 $d(K) < \infty$. □

**命题 5** (度量紧集的准则)　度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 当且仅当它的任一点列有子列收敛到 $K$ 中某个点.

在证明命题 5 之前, 先给出下述引理.

预备引理　如果从度量空间 $(K;d)$ 的任一点列中可以选出在 $K$ 中收敛的子列, 则

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $K$ 有有限 $\varepsilon$-网;

(2) $K$ 的任一非空闭子集套有非空的交集.

**证**　(1) 假如存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, 在 $K$ 中无有限 $\varepsilon_0$-网, 那么可构造 $K$ 中点列 $\{x_n\}$, 满足: $\forall n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, 均有 $d(x_n, x_i) > \varepsilon_0$. 显然, 这个序列中不能选出收敛子列.

(2) 如果 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ 是 $K$ 中的闭集列, 取 $x_n \in F_n, n = 1, 2, \cdots$, 得到 $K$ 中点列 $\{x_n\}$, 从中选出收敛子列 $\{x_{n_i}\}$. 根据作法, 它的极限 $a \in K$ 必定属于闭集列中的每一个 $F_i, i \in \mathbb{N}$. □

**命题 5 的证明**　"$\Rightarrow$". 设 $(K;d)$ 是紧的. $\forall \{x_n\} \subset K$, 兹证它有子列在 $K$ 中收敛. 如果序列 $\{x_n\}$ 只有有限个不同的点, 那么结论显然成立, 因此可以认为 $\{x_n\}$ 有无限个不同的点. 对于 $\varepsilon_1 = 1/1$, 构作有限 1-网, 并取包含序列无限多项的

闭球 $\tilde{B}(a_1;1)$. 根据 6.1.1 小节命题 3 (紧集的闭子集引理), $\tilde{B}(a_1;1)$ 本身是紧集, 在 $\tilde{B}(a_1;1)$ 存在有限 $\varepsilon_2 = 1/2$-网和包含序列无限多项的闭球 $\tilde{B}(a_2;1/2)$, 这就得到了一个紧集套

$$\tilde{B}(a_1;1) \supset \tilde{B}(a_2;1/2) \supset \cdots \supset \tilde{B}(a_n;1/n) \supset \cdots,$$

根据 6.1.1 小节命题 3(紧集套引理), 它们有公共点 $a \in K$. 在 $\tilde{B}(a_1;1)$ 中取序列的点 $x_{n_1}$, 然后在 $\tilde{B}(a_2;1/2)$ 中取序列的点 $x_{n_2}$, 且 $n_2 > n_1$, 等等. 如此我们得到了子序列 $\{x_{n_i}\}$, 根据作法, $\{x_{n_i}\}$ 收敛到 $a$.

"$\Leftarrow$". 设 $(K;d)$ 的任一点列有在 $K$ 中收敛的子列, 兹证 $(K;d)$ 是紧的. (反证) 事实上, 如果从 $(K;d)$ 的某个开覆盖 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 中不能选出有限覆盖, 那么由预备引理, 构作 $K$ 的有限 $\varepsilon_1 = 1$-网, 并且可以找到闭球 $\tilde{B}(a_1;1)$, 使 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 不含 $\tilde{B}(a_1;1)$ 的有限覆盖. 对 $\tilde{B}(a_1;1)$ 构作有限的 $1/2$-网, 从中可以找出闭球 $\tilde{B}(a_2;1/2)$, $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ 不含 $\tilde{B}(a_2;1/2)$ 的有限覆盖. 这样一来, 便得到了闭集套

$$\tilde{B}(a_1;1) \supset \tilde{B}(a_2;1/2) \supset \cdots \supset \tilde{B}(a_n;1/n) \supset \cdots,$$

由预备引理及作法可见, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{B}(a_n;1/n) = \{a\} \subset K$. 自然点 $a$ 被某个 $G_{\alpha_0}, \alpha_0 \in A$ 覆盖, 因为 $G_{\alpha_0}$ 是开集, 所以对于充分大的 $n$, $\tilde{B}(a_n;1/n) \subset G_{\alpha_0}$. 导致矛盾, 命题 5 得证. □

4. 度量完备性

a. 基本定义和例子

**定义 17** 度量空间 $(X;d)$ 的点列 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 叫做**基本列或柯西列**, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使当 $m, n \in \mathbb{N}$ 且 $m, n > N$ 时, 有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

现在我们给出完备度量空间的定义.

**定义 18** 称度量空间 $(X;d)$ 是**完备的**, 如果它的每个基本列是收敛列.

**例 9** 由数列的柯西收敛准则推出, 具有标准度量的实数集 $\mathbb{R}$ 是完备的度量空间.

显然度量空间的一切收敛列都是基本列, 所以在完备度量空间的定义中, 实质上是要求空间满足序列收敛性的柯西准则.

**例 10** 在标准度量下, 集合 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 不是完备度量空间. 事实上, $\left\{\dfrac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ 是基本列, 但在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 中没有极限.

**例 11** 考察定义在区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上具有度量

$$d(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)| \tag{6.1.6}$$

的实值连续函数集 $C[a,b]$(见本节例 5).

我们来证明度量空间 $(C[a,b];d)$ 是完备的.

**证**　设函数列 $\{f_n;n\in\mathbb{N}\}$ 是 $C[a,b]$ 中的基本列, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall m,n\in\mathbb{N}(m>N$ 且 $n>N)$, 有

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b]. \tag{6.1.7}$$

$\forall x\in[a,b]$, 由 (6.1.7) 式推出数列 $\{f_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 是基本列, 根据柯西准则, 它有极限, 记作 $f(x)$. 于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\quad x\in[a,b]. \tag{6.1.8}$$

我们来验证函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 即 $f\in C[a,b]$.

从 (6.1.7) 和 (6.1.8) 式推出, 当 $n>N$ 时有

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b]. \tag{6.1.9}$$

对于固定点 $x\in[a,b]$, 验证函数 $f$ 在这点的连续性. 对 $x+h\in[a,b]$, 由

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)=&f(x+h)-f_n(x+h)\\&+f_n(x+h)-f_n(x)+f_n(x)-f(x)\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|\leqslant&|f(x+h)-f_n(x+h)|\\&+|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|.\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

取定 $n>N$. 由 (6.1.9) 式, 不等式 (6.1.10) 右端的第一项和第三项都不超过 $\varepsilon$. 由于 $f_n\in C[a,b]$, 可取 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得对于 $|h|<\delta$, 有 $|f_n(x+h)-f_n(x)|<\varepsilon$. 从而当 $|h|<\delta$ 时有

$$|f(x+h)-f(x)|<3\varepsilon.$$

这说明函数 $f$ 在点 $x$ 连续. 由点 $x$ 在 $[a,b]$ 中的任意性, 即知 $f\in C[a,b]$.

最后, 根据 (6.1.9) 式得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(f,f_n)=0$. 故具有度量 (6.1.6) 的空间 $C[a,b]$ 是完备的度量空间. □

这是一个很重要的定理, 它在分析中有广泛的应用.

**例 12**　如果在同一个集合 $C[a,b]$ 上, 代替度量 (6.1.6), 考察积分度量

$$d(f,g)=\int_a^b|f-g|(x)\mathrm{d}x, \tag{6.1.11}$$

那么所产生的度量空间不完备.

**证** 为了记号简单起见, 不妨设 $[a,b]=[-1,1]$, 考察以下方式定义的函数列 $\{f_n\in C[-1,1];n\in\mathbb{N}\}$(图 36):

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x\leqslant -1/n,\\ nx, & -1/n<x<1/n,\\ 1, & 1/n\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

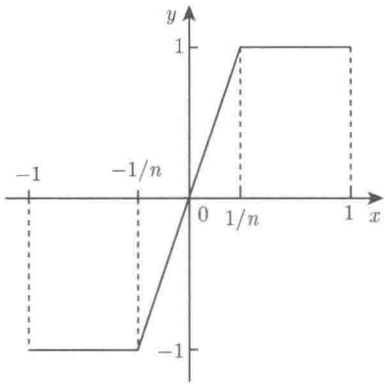



图 36

从积分性质直接推出这个序列在度量 (6.1.11) 下是空间 $C[-1,1]$ 的基本列 (从而也是 $L^1[-1,1]$ 中的基本列, 在 $L^1$ 中收敛), 但它在 $C[-1,1]$ 中没有极限, 因为如果连续函数 $f\in C[-1,1]$ 是该序列在度量 (6.1.11) 下的极限, 那么函数 $f$ 在区间 $-1\leqslant x<0$ 上应取 $-1$, 而在区间 $0<x\leqslant 1$ 上应等于 1, 这与 $f$ 在 $x=0$ 处的连续性不相容. □

**例 13** 证明定义在 $[a,b]$ 上的实值黎曼可积函数集 $\mathcal{R}[a,b]$ 在度量 (6.1.11) (参见本节例 8) 的意义下也不完备要困难些, 我们借助在黎曼意义下函数可积性的勒贝格准则来证明这个事实.

**证** 取闭区间 $[0,1]$ 作为 $[a,b]$, 并且在 $[0,1]$ 上构造测度不是零的康托尔集. 设 $\Delta\in(0,1/3)$. 在 $[0,1]$ 中去掉长度为 $\Delta$ 的中间部分, 更确切地说, 是去掉区间 $[0,1]$ 的中点的 $\Delta/2$-邻域. 在剩下的两个区间的每一个区间中去掉长度为 $\Delta\cdot 1/3$ 的中间部分. 再从剩下的四个区间的每一个区间中去掉长度为 $\Delta\cdot 1/3^2$ 的中间部分, 等等. 在这个过程中所有去掉的区间长度等于

$$\Delta+\Delta\cdot 2/3+\Delta\cdot 4/3^2+\cdots+\Delta\cdot(2/3)^n+\cdots=3\Delta.$$

因为 $0<\Delta<1/3$, 所以, $1-3\Delta>0$, 由此推出区间 $[0,1]$ 上剩下来的集合 $K$(康托尔集) 的勒贝格测度不是零.

定义序列 $\{f_n \in \mathcal{R}[0,1]; n \in \mathbb{N}\}$. 设 $f_n$ 是在前 $n$ 步删去的区间上等于零, 而在 $[0,1]$ 上其他点等于 1 的函数. 容易验证, 这个序列在度量 (6.1.11) 的意义下是基本列. 假如某个函数 $f \in \mathcal{R}[0,1]$ 是这个序列的极限, 那么在 $[0,1]$ 上 $f$ 应该与集合 $K$ 的特征函数几乎处处相同. 这样, $f$ 在集合 $K$ 的每个点间断. 可是, 由于 $K$ 不是零测度集, 从勒贝格准则推出 $f \notin \mathcal{R}[0,1]$. 这说明 $\mathcal{R}[a,b]$ 在度量 (6.1.11) 下不是完备的度量空间. □

b. 度量空间的完备化

我们将证明每个度量空间都有完备化空间.

**定义 19**　如果度量空间 $(X;d)$ 是完备度量空间 $(Y;d)$ 的子空间, 并且集合 $X \subset Y$ 在 $Y$ 中处处稠密, 那么就称空间 $(Y;d)$ 为度量空间 $(X;d)$ 的**完备化空间**.

为建立完备化空间的存在性, 引入下述概念.

**定义 20**　设 $(X_1;d_1)$ 与 $(X_2;d_2)$ 是两个度量空间. 称 $f: X_1 \to X_2$ 是**等距映射**, 如果 $f$ 是一一映射, 且 $\forall a,b \in X_1$ 有 $d_2(f(a),f(b)) = d_1(a,b)$. 称 $(X_1;d_1)$ 与 $(X_2;d_2)$ 是**等距**的, 如果存在等距映射 $f: X_1 \to X_2$.

显然, 所引进的等距关系是自反的、对称的和传递的, 也就是说, 它是度量空间之间的等价关系. 在研究度量空间性质的时候, 我们研究的不是个别的空间, 而是同时研究了与它等距的所有空间的性质. 由于这个原因, 等距的度量空间可以不加区分. 例如, 平面上两个全等的图形作为度量空间是等距的, 所以在研究图形的度量性质时, 我们完全不管像图形在平面中处于什么位置这种问题, 而把所有彼此全等的图形视为同一的.

采取了把等距的空间视为同一空间的约定后, 可以证明, 一个度量空间, 如果它有完备化空间, 那么必是唯一的. 为证明这一事实, 首先观察: 对于度量空间 $(X;d)$ 的任意四个点 $a,b,u,v$ 成立不等式

$$|d(a,b) - d(u,v)| \leqslant d(a,u) + d(b,v). \tag{6.1.12}$$

事实上, 根据三角不等式, 有

$$d(a,b) \leqslant d(a,u) + d(u,v) + d(b,v),$$

从而

$$d(a,b) - d(u,v) \leqslant d(a,u) + d(b,v).$$

类似地,

$$d(u,v) - d(a,b) \leqslant d(a,u) + d(b,v).$$

上两式合起来即推出 (6.1.12) 式.

现在证明如下命题.

**命题 6** 若度量空间 $(Y_1;d_1),(Y_2;d_2)$ 都是 $(X;d)$ 的完备化空间, 则 $Y_1$ 与 $Y_2$ 是等距的.

**证** 用以下的方法构造等距映射 $f:Y_1\to Y_2$. 对于 $x\in X$, 设 $f(x)=x$. 那么当 $x_1,x_2\in X$ 时, $d_2(f(x_1),f(x_2))=d(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)=d_1(x_1,x_2)$. 如果 $y_1\in Y_1\backslash X$, 那么因为 $X$ 在 $Y_1$ 中处处稠密, 所以 $y_1$ 是对于 $X$ 的极限点. 设 $\{x_n;n\in\mathbb{N}\}$ 是在度量 $d_1$ 意义下收敛于 $y_1$ 的 $X$ 中的点列. 这个点列在 $d_1$ 意义下是基本的. 但是因为在 $X$ 上度量 $d_1$ 和 $d_2$ 均与 $d$ 相同, 这个序列也是 $(Y_2;d_2)$ 的基本列. $(Y_2;d_2)$ 是完备的, 因此这个序列在 $Y_2$ 中有极限 $y_2\in Y_2$. 可以用常规的方法证明这个极限是唯一的. 现在设 $f(y_1)=y_2$. 因为任意点 $y_2\in Y_2\backslash X$ 和任意点 $y_1\in Y_1\backslash X$ 一样, 也是 $X$ 中某个基本列的极限, 于是所作的映射 $f:Y_1\to Y_2$ 是满射.

现在验证, 对于 $Y_1$ 中任意一对点 $y_1',y_1''$, 成立等式

$$d_2(f(y_1'),f(y_1''))=d_1(y_1',y_1''). \tag{6.1.13}$$

如果 $y_1',y_1''\in X$, 那么 (6.1.13) 式显然成立. 在一般的情况下, 取 $X$ 中收敛于 $y_1'$ 和 $y_1''$ 的两个点列 $\{x_n';n\in\mathbb{N}\},\{x_n'';n\in\mathbb{N}\}$. 从不等式 (6.1.12) 推出

$$d_1(y_1',y_1'')=\lim_{n\to\infty}d_1(x_n',x_n''),$$

或者

$$d_1(y_1',y_1'')=\lim_{n\to\infty}d(x_n',x_n''). \tag{6.1.14}$$

根据作法, 这两个点列在 $(Y_2;d_2)$ 中相应地收敛于 $y_2'=f(y_1')$ 和 $y_2''=f(y_1'')$, 所以

$$d_2(y_2',y_2'')=\lim_{n\to\infty}d(x_n',x_n''). \tag{6.1.15}$$

比较关系式 (6.1.14) 和 (6.1.15) 便得等式 (6.1.13). 这个等式同时说明映射 $f:Y_1\to Y_2$ 是单射. 这就完成了 $f$ 是等距映射的证明. □

在定义 19 中, $(Y;d)$ 是度量空间 $(X;d)$ 的完备化空间, 要求 $(X;d)$ 是 $(Y;d)$ 的子空间且 $X$ 在 $(Y;d)$ 中处处稠密. 根据把彼此等距的空间视为同一空间的观点, 现在可以将完备化概念推广如下.

**定义 19′** 完备度量空间 $(Y;d_Y)$ 称为度量空间 $(X;d_X)$ 的完备化, 如果在 $(Y;d_Y)$ 中有与 $(X;d_X)$ 等距的处处稠密的子空间.

现在证明下述命题.

**命题 7** 每个度量空间都有完备化空间.

**证** 如果原来的空间本身是完备的, 那么它本身就是自己的完备化空间.

一般地，考察空间 $(X;d_X)$ 中的基本序列的集合. 称其中的两个序列 $\{x'_n\},\{x''_n\}$ 等价或*共尾*, 如果当 $n\to\infty$ 时, 有

$$d_X(x'_n,x''_n)\to 0.$$

容易看出, 共尾关系实际上是等价关系. 设 $\{x_n\}$ 是 $X$ 中的基本列，令

$$[x_n]:=\Big\{\{x'_n\}\,\Big|\,\lim_{n\to\infty}d_X(x'_n,x_n)=0\Big\},$$

即所有与 $\{x_n\}$ 等价的基本列组成的集合 (注：若 $\{x'_n\}\in[x_n]$, 则 $[x_n]=[x'_n]$, 即类中的任一基本列均可作为代表元). 用 $S$ 记这种等价类的全体. 在 $S$ 中按照以下法则引进度量：如果 $s'=[x'_n]$ 和 $s''=[x''_n]$ 是 $S$ 的元, 则设

$$d(s',s'')=\lim_{n\to\infty}d_X(x'_n,x''_n). \tag{6.1.16}$$

从不等式 (6.1.12) 推出, 这个定义是合理的: 右端极限存在 (根据数列的柯西准则), 并且不依赖于 $s',s''$ 中的代表元的选取.

不难验证，函数 $d(s',s'')$ 满足度量的三条公理. 下面验证这样得到的度量空间 $(S;d)$ 就是所求的空间 $(X;d_X)$ 的完备化空间. 为此，$\forall x\in X$, 以 $[x]$ 记那些满足 $d_X(x_n,x)\to 0$ 的基本列 $\{x_n\}$ 组成的集合 (注：常项列 $\{x_n=x;n\in\mathbb{N}\}$, 显然是属于 $[x]$ ). 令 $S_X:=\{[x]\,|\,x\in X\}$，则 $(S_X;d)$ 是 $S$ 的子空间, 它与 $(X;d_X)$ 等距，这只需定义映射 (显然是等距的)

$$f:(X;d_X)\to(S_X;d),\quad x\mapsto[x].$$

兹验证 $(S_X;d)$ 在 $(S;d)$ 中的稠密性. 设 $s=[x_n]$ 是 $S$ 中的任一元. $\forall n\in\mathbb{N}$, 取 $\xi^n=f(x_n)\in S_X$, 即 $\xi^n=\{\xi^n_k;k\in\mathbb{N}\}$ 是 $X$ 中的基本列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}d_X(\xi^n_k,x_n)=0$. 从 (6.1.16) 式可见

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}d(\xi^n,s)&=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}d_X(\xi^n_k,x_k)\leqslant\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\big(d_X(\xi^n_k,x_n)+d_X(x_n,x_k)\big)\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}d_X(\xi^n_k,x_n)+\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}d_X(x_n,x_k)=0,\end{aligned}$$

即 $\xi^n$ 以 $s\in S$ 为极限.

最后证明空间 $(S;d)$ 完备. 设 $\{s_n\}$ 是空间 $(S;d)$ 的任一基本列. 对于每个 $n\in\mathbb{N}$, 选择 $(S_X;d)$ 中的元 $\xi_n$, 使得 $d(s_n,\xi_n)<1/n$, 那么序列 $\{\xi_n\}$ 与序列 $\{s_n\}$ 一样, 也是基本列. 但在这种情况下, 序列 $\{x_n=f^{-1}(\xi_n);n\in\mathbb{N}\}$ 也将成为 $(X;d_X)$ 中的基本列, 它定义一个元 $s\in S$, 而由 (6.1.16) 式知, 这个元是给定的序列 $\{s_n;n\in\mathbb{N}\}$ 的收敛极限. □

**注 5** 证明了命题 6 和命题 7 以后, 就容易明白在定义 19 的意义下, 度量空间的完备化实际上包含 (精确到等距) 给定度量空间的最小的完备空间.

**注 6** 从有理数集 $\mathbb{Q}$ 出发构造实数集 $\mathbb{R}$, 可以完全按照上面在一般形式下构造度量空间的完备化空间的方法进行. 这正是由康托尔完成的从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 的过渡.

**注 7** 在例 13 中我们证明了黎曼可积函数空间 $\mathcal{R}[a,b]$ 在原来的积分度量下是不完备的. 它的完备化是重要的勒贝格可积函数空间 $\mathcal{L}[a,b]$.

## 练 习

1. 验证: 若 $(X;d)$ 是度量空间, 则 $\left(X;\dfrac{d}{1+d}\right)$ 也是度量空间, 而且度量 $d$ 和 $\dfrac{d}{1+d}$ 在 $X$ 上导出同一个拓扑.

2. (1) "任意闭集族的并集是闭集" 对吗?

(2) 集合的一切边界点是否都是它的极限点?

(3) 集合的边界点的任意邻域是否总是既含有该集合的内点又含有该集合的外点?

3. 设 $(Y;d_Y)$ 是度量空间 $(X;d_X)$ 的子空间.

(1) 证明: 对于 $Y$ 中的任意开 (闭) 集 $G_Y(F_Y)$, 可以找到 $X$ 中的开 (闭) 集 $G_X(F_X)$ 使得 $G_Y = Y \cap G_X (F_Y = Y \cap F_X)$.

(2) 验证: 如果 $Y$ 中的开集 $G'_Y$, $G''_Y$ 互不相交, 那么可以选择 $X$ 中相应的集合 $G'_X$, $G''_X$, 使得它们也没有公共点.

4. 拓扑空间的子集称为相对紧的, 如果它的闭包是紧集. 举出 $\mathbb{R}^n$ 的相对紧子集的例子.

5. 拓扑空间称为局部紧集, 如果这个空间的每个点有相对紧的邻域. 举出局部紧但不紧的拓扑空间的例子.

6. 证明: 对任一局部紧但不紧的豪斯多夫拓扑空间 $(X;\tau_X)$, 存在紧拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$, 使得 $X \subset Y$, 而 $Y \setminus X$ 由一个点组成, 并且空间 $(X;\tau_X)$ 是拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 的子空间.

7. 度量空间的子集叫全有界集, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 它都有有限 $\varepsilon$-网.

(1) 验证: 集合全有界性定义与其叙述中的 $\varepsilon$-网的点是取自其本身还是其所在空间无关.

(2) 试证: 完备度量空间中的集合是紧集, 当且仅当它全有界而且是闭集.

(3) 举例说明, 度量空间中的闭有界集未必是全有界的, 因此, 也未必是紧集.

8. (1) 证明以下的闭球套引理. 设 $(X;d)$ 是度量空间, $\widetilde{B}(x_1;r_1) \supset \widetilde{B}(x_2;r_2) \supset \cdots \supset \widetilde{B}(x_n;r_n) \supset \cdots$ 是 $X$ 中的半径趋于零的闭球套. 那么, 空间 $(X;d)$ 完备, 当且仅当对于任意这样的序列, 存在唯一的点属于这个序列中的每一个球.

(2) 证明: 如果在上述引理的条件中, 去掉 $r_n \to 0$, $n \to \infty$ 的要求, 那么, 甚至当空间完备时, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}(x_n;r_n)$ 也可以是空集.

9. (1) 在度量空间 $(X;d)$ 中, 称集合 $E \subset X$ 是无处稠密的, 如果它在任一球内都不稠密, 即对于任一球 $B(x;r)$, 可以找到球 $B(x_1;r_1) \subset B(x;r)$, 使得 $B(x_1;r_1)$ 中没有集合 $E$ 的点. 集合 $E$ 称为 $X$ 中的第一纲集, 如果它可以表示为可数个无处稠密集的并. $X$ 中不是第一纲集的集称为第二纲集. 试证: 完备的度量空间是 (自身中的) 第二纲集.

(2) 试证: 如果函数 $f \in C^{\infty}[a,b]$, 且满足: $\forall x \in [a,b]$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall m > n$, 有 $f^{(m)}(x) = 0$, 那么函数 $f$ 是多项式.

### 6.1.3　有限维线性赋范空间 (欧氏空间 $\mathbb{R}^m$)

1. $\mathbb{R}^m$ 中的线性结构

我们约定用 $\mathbb{R}^m$ 表示由 $m$ 个实数 $x^i \in \mathbb{R}(i = 1, \cdots, m)$ 组成的所有有序数组 $(x^1, \cdots, x^m)$ 的集合. 每个这样的有序数组用一个字母 $x$ 表示, 即 $x = (x^1, \cdots, x^m)$, 称 $x^i$ 为点 $x$ 的第 $i$ 个坐标. 在 $\mathbb{R}^m$ 中引入下述线性运算:

$$cx = (cx^1, cx^2, \cdots, cx^m); \quad \forall c \in \mathbb{R},\ x = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m;$$

$$ax \pm by = (ax^1 \pm by^1, \cdots, ax^m \pm by^m), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^m.$$

那么 $\mathbb{R}^m$ 便成为实数域上的线性空间. 它的点现在可以称为向量. 向量

$$e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{6.1.17}$$

(这里数 1 仅在第 $i$ 个位置出现) 组成 $\mathbb{R}^m$ 的极大线性无关组, 因此称 $\mathbb{R}^m$ 为$m$ 维向量空间. $\mathbb{R}^m$ 中任一向量 $x$ 可以按照基底 (6.1.17) 式展开, 即表成形式

$$x = x^1 e_1 + \cdots + x^m e_m. \tag{6.1.18}$$

我们约定, 向量的指标记在向量的下方, 向量的坐标的指标记在它的上方, 使用它有很多方便的地方. 特别是按照爱因斯坦① 约定可把 (6.1.18) 式简写成如下形式

$$x = x^i e_i, \tag{6.1.19}$$

这里认为同一个指标在上方与下方都出现, 就意味着关于这个指标在它的变化范围内求和.

2. $\mathbb{R}^m$ 中的范数

称数值

$$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2} \tag{6.1.20}$$

为 $\mathbb{R}^m$ 中向量 $x = (x^1, \cdots, x^m)$ 的范数.

由这个定义及闵可夫斯基不等式得到:

1° $\|x\| \geqslant 0$;

2° $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow x = 0$;

① 爱因斯坦 (A. Einstein)(1879—1955) 是 20 世纪最伟大的物理学家, 他在量子学方面, 特别是相对论方面的工作给整个现代物理学以革命性的影响.

3° $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$;

4° $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$.

一般地, 向量空间 $X$ 上任何一个满足条件 1°—4° 的函数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 称为向量空间 $X$ 的*范数*. 有时为了明确所讲的向量范数是哪一个空间的范数, 在范数记号右下角标记空间的记号, 例如, 可以写成 $\|x\|_{\mathbb{R}^m}$ 或 $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$. 如果范数所属空间很明确, 则不必如此.

定义

$$d(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\|. \tag{6.1.21}$$

容易验证 $d(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的距离, 它使 $\mathbb{R}^m$ 成为度量空间. 从 (6.1.21) 式看出, 当 $x \to x_0$ 时, 条件 $d(x, x_0) \to 0$ 与条件 $\|x - x_0\| \to 0$ 等价. 特别地, 由 (6.1.21) 式知 $\|x\| = d(0, x)$.

范数的性质 4° 称为*三角形不等式*. 按照数学归纳法它可以推广到任意有限个向量相加的情形, 即有下面的不等式

$$\|x_1 + \cdots + x_k\| \leqslant \|x_1\| + \cdots + \|x_k\|.$$

**注 8** 距离 (6.1.21) 常称为 $\mathbb{R}^m$ 的*平均度量*. 在 $\mathbb{R}^m$ 中也可引入以下度量:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x^i - y^i|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\, x = (x^1, \cdots, x^m), y = (y^1, \cdots, y^m) \in \mathbb{R}^m, \tag{6.1.22}$$

其中 $p \geqslant 1$;

$$d_{\max}(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x^i - y^i|, \quad \forall\, x = (x^1, \cdots, x^m), y = (y^1, \cdots, y^m) \in \mathbb{R}^m. \tag{6.1.23}$$

它们都使 $\mathbb{R}^m$ 成为度量空间.

3. $\mathbb{R}^m$ 的欧几里得结构

从代数知道实向量空间中数量积的概念, 它是一个数值函数 $\langle x, y\rangle$, 具有性质

$$\begin{aligned}
&\langle x, x\rangle \geqslant 0;\\
&(\langle x, x\rangle = 0) \Leftrightarrow (x = 0);\\
&\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_2, x_1\rangle;\\
&\langle \lambda x_1, x_2\rangle = \lambda\langle x_1, x_2\rangle, \quad \text{其中}\lambda \in \mathbb{R};\\
&\langle x_1 + x_2, x_3\rangle = \langle x_1, x_3\rangle + \langle x_2, x_3\rangle.
\end{aligned}$$

特别地, 从这些性质得到, 如果在空间 $\mathbb{R}^m$ 中确定了基底 $\{e_1,\cdots,e_m\}$, 那么用向量 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 与 $y=(y^1,\cdots,y^m)$ 的坐标可以把数量积 $\langle x,y\rangle$ 写成双线性形式

$$\langle x,y\rangle = g_{ij}x^iy^j, \tag{6.1.24}$$

上式右端的简写式指的是关于指标 $i$ 与 $j$ 的求和式, 其中 $g_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle$.

两向量称为**正交的**, 如果它们的数量积为零.

基底 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 称为**正交规范的**, 如果 $g_{ij}=\delta_{ij}$, 其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

若 $\mathbb{R}^m$ 的基底为正交规范基底, 则向量 $x$ 与 $y$ 的数量积有很简单的形式:

$$\langle x,y\rangle = \delta_{ij}x^iy^j,$$

或

$$\langle x,y\rangle = x^1y^1+\cdots+x^my^m. \tag{6.1.25}$$

数量积具有这种形式的坐标称为**笛卡儿坐标**.

我们知道, 规定了数量积的空间 $\mathbb{R}^m$ 称为欧几里得空间.

数量积 (6.1.25) 与向量范数 (6.1.20) 之间有明显的关系:

$$\langle x,x\rangle = \|x\|^2.$$

从代数知道, 有下面的不等式:

$$\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

特别地, 由此可以证明, 对任意一对向量, 存在一个角 $\varphi\in[0,\pi]$, 使得

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\varphi.$$

这个角称为**向量 $x$ 与向量 $y$ 之间的夹角**. 正是由于这个原因, 当两个向量的数量积为零时, 我们自然地认为它们是正交的.

4. $\mathbb{R}^m$ **的完备性**

下面这些称谓是常见的:

• **开域 = 连通的开集; 闭域 = 开域连同边界; 区域 = 开域或闭域, 或开域连同其部分边界点所成的集合.**

• **$m$ 维区间 ($m$ 维长方体或 $m$ 维平行多面体)**

$$I=\{x\in\mathbb{R}^m|a^i\leqslant x^i\leqslant b^i,i=1,\cdots,m\}.$$

• **闭集套** $\mathbb{R}^m$ 中的闭集列 $\{D_n\}$ 称为闭集套，如果它满足

(i) $D_n\supset D_{n+1},\ n=1,2,\cdots$;

(ii) $d(D_n)\to 0\ (n\to\infty)$.

从定义 $d(x_1,x_2)=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}(x_1^i-x_2^i)^2\right)^{1/2}$ 可见，当 $i\in\{1,\cdots,m\}$ 时，有

$$|x_1^i-x_2^i|\leqslant d(x_1,x_2)\leqslant\sqrt{m}\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_1^i-x_2^i|,\tag{6.1.26}$$

也就是说，两点 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^m$ 之间的距离很小当且仅当对应的坐标之差很小. 易见

$$x_n=(x_n^1,\cdots,x_n^m)\to x=(x^1,\cdots,x^m)\ \Leftrightarrow\ x_n^k\to x^k,k=1,\cdots,m,$$

换言之，$\mathbb{R}^m$ 中的点收敛等价于各分量都收敛.

**定理 1** (完备性)　下述结论成立:

(1) (**柯西准则**) 点列 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^m$ 收敛 $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbb{N},\ d(x_n,x_{n+p})<\varepsilon$.

(2) (**闭集套定理**) 设 $\{D_n\}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中一闭集套，则存在唯一的 $x_0\in D_n,\ n=1,2,\cdots$.

(3) (**极限点定理**) 若 $E\subset\mathbb{R}^m$ 为有界无限点集，则 $E$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中至少有一个极限点. 特别，有界无限点列 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^m$ 必存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$.

(4) (**有限覆盖定理**) 设 $E\subset\mathbb{R}^m$ 为一个有界闭集，$\{\Delta_\alpha\}$ 为 $E$ 的一个开覆盖，则存在 $\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}\subset\{\Delta_\alpha\}$ 使得 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$.

**证**　(1) "⇒:" 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 则欲证结论可由下述不等式推出:

$$d(x_n,x_{n+p})\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_0,x_{n+p}).$$

"⇐:" 设 $x_n=(x_n^1,\cdots,x_n^m),\ \varepsilon>0$, 由条件知 $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbb{N},\ d(x_n,x_{n+p})<\varepsilon$, 于是, $\forall 1\leqslant k\leqslant m$,

$$|x_n^k-x_{n+p}^k|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}(x_n^i-x_{n+p}^i)^2\right)^{1/2}=d(x_n,x_{n+p})<\varepsilon,$$

由数列极限的柯西准则，$\{x_n^k\}$ 收敛, $k=1,\cdots,m$. 设 $x_n^k\to x_0^k$, 令 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$, 则 $x_n\to x_0$.

(2) $\forall x_n\in D_n$, 则 $x_{n+p}\in D_{n+p}\subset D_n$, 于是 $d(x_n,x_{n+p})\leqslant d(D_n)$, 由柯西准则知 $\exists x_0\in\mathbb{R}^m$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

固定 $n \in \mathbb{N}$. 由于 $x_{n+p} \in D_{n+p} \subset D_n$, 故 $\lim\limits_{p\to\infty} x_{n+p} = x_0$. 因 $D_n$ 是闭集, 所以 $x_0 \in D_n$.

再证 $x_0$ 的唯一性. 若还有 $x' \in D_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $d(x_0, x') \leqslant d(D_n) \to 0$, 从而 $x' = x_0$.

(3) 分两步.

(i) 构造闭集套. 因 $E$ 有界, 故存在 $m$ 维区间 $I = \{x \in \mathbb{R}^m | a^i \leqslant x^i \leqslant b^i, i = 1, \cdots, m\}$ 使得 $E \subset I$. 把 $I$ 的每个坐标区间

$$I_1^i = \{x^i \in \mathbb{R} | a^i \leqslant x^i \leqslant b^i\} \quad (i = 1, \cdots, m)$$

二等分, 就把 $I$ 分成了 $2^m$ 个 $m$ 维区间, 这些 $m$ 维区间中至少有一个, 记为 $I_1$, 使得 $E \cap I_1$ 为无限集; 对 $I_1$ 仍采取上面的做法, 又得到一个 $I_2$ 使得 $E \cap I_2$ 为无限集. 继续这个过程, 我们得到一个闭集套

$$I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,$$

其中任何一个都满足 $E \cap I_n$ 是无限集. 由闭集套定理, 存在唯一的 $x_0 \in I_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

(ii) $x_0$ 为 $E$ 的极限点. $\forall \varepsilon > 0, d(I_n) \to 0 \Rightarrow \exists I_N \subset U(x_0; \varepsilon)$. 这是因为 $\forall x \in I_N, d(x, x_0) \leqslant d(I_N) < \varepsilon \Rightarrow x \in U(x_0; \varepsilon)$. $I_N \cap E$ 为无限集 $\Rightarrow U(x_0; \varepsilon) \cap E$ 为无限集, 即 $x_0$ 为 $E$ 的极限点.

(4) 反证, 假设结论不成立. 因 $E$ 有界, 故存在 $m$ 维区间 $I$ 使得 $E \subset I$. 如上, 构造 $m$ 维闭区间列 $\{I_n\}$, 使得每个 $D_n := E \cap I_n$ 都不能被 $\{\Delta_\alpha\}$ 中的有限个覆盖, 从而得闭集套:

$$D_1 \supset \cdots \supset D_n \supset \cdots.$$

此闭集套产生极限点 $x \in D_n \subset E, \forall n$. 因此存在某 $\alpha'$ 使得 $x \in \Delta_{\alpha'}$. 于是 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $D_n \subset \Delta_{\alpha'}, \forall n > N$. 这与假设 $D_n$ 不能被有限多个 $\Delta_{\alpha'}$ 覆盖相矛盾. □

**注 9**　有限覆盖定理说明: $E \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集 $\Leftrightarrow E$ 是闭的有界集.

## 练　习

1. 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^m$, 量 $d(E_1, E_2) := \inf\limits_{x\in E_1, x_2 \in E_2} d(x_1, x_2)$ 称为集合 $E_1$ 与 $E_2$ 之间的距离. 举例说明: 在 $\mathbb{R}^m$ 中存在没有公共点的闭集 $E_1, E_2$ 使 $d(E_1, E_2) = 0$.

2. (1) 在空间 $\mathbb{R}^k$ 中, 二维球面 $S^2$ 和圆周 $S^1$ 能不能有那样的位置关系: 从球面上任意点到圆周上任意点的距离都是一样的.

(2) 对任意维球面 $S^m, S^n \subset \mathbb{R}^k$ 研究问题 (1): 试问, 当 $m, n, k$ 有什么关系时, 所说的位置关系成立.

## 6.2 拓扑空间的连续映射

从分析的观点来看, 这一节包含了本章的最重要的结果.

### 6.2.1 映射的极限

1. 基本定义和它的特殊情况

**定义 1** 设 $f: X \to Y$ 是从集合 $X$ 到拓扑空间 $Y$ 的映射, $X$ 中具有确定基底 $\mathcal{B} = \{B\}$. 称点 $A \in Y$ 是映射 $f: X \to Y$ 关于基 $\mathcal{B}$ 的极限, 并记作 $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$, 如果对于 $Y$ 中点 $A$ 的任一邻域 $V(A)$, 有基 $\mathcal{B}$ 的元素 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $B$ 在映射 $f$ 下的像含于 $V(A)$ 中. 用逻辑符号表示, 即

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y,\ \exists B \in \mathcal{B}(f(B) \subset V(A)).$$

我们最经常遇到的情况是 $X$ 和 $Y$ 都是拓扑空间, 而 $\mathcal{B}$ 是某个点 $a \in X$ 的邻域基或者去心邻域基. 对于点 $a$ 的去心邻域基 $\{\mathring{U}(a)\}$ 仍采用以前的记号 $x \to a$, 对这个基, 定义 1 可以具体化为

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y,\ \exists \mathring{U}(a) \subset X(f(\mathring{U}(a)) \subset V(A)).$$

如果 $(X; d_X)$ 和 $(Y; d_Y)$ 是两个度量空间, 那么后一个定义可以用 $\varepsilon$-$\delta$ 语言改述为

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X$$
$$(0 < d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

换言之

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a} d_Y(A, f(x)) = 0.$$

于是我们看到, 有了邻域的概念以后, 在拓扑空间或者度量空间 $Y$ 中, 就可以定义映射 $f: X \to Y$ 的极限概念.

定义于拓扑直积 $(X \times Y; \tau_X \times \tau_Y)$、取值于拓扑空间 $(Z; \tau_Z)$ 的映射 $f: X \times Y \to Z$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ 还有所谓关于 $Y$ 的极限. 任意固定 $x \in X$, 作映射 $f_x: Y \to Z$, $Y \ni y \mapsto z = f_x(y) = f(x, y) \in Z$, 称 $f_x$ 的极限为 $f$ 关于 $Y$ 的极限. 应用问题中常将 $X$ 视为参量空间, 而将 $x \in X$ 叫做参量. 类似地, 还有所谓 $f$ 关于 $X$ 的极限 (即映射 $f_y: X \to Z$, $X \ni x \mapsto z = f_y(x) = f(x, y)$ 的极限).

2. 关于映射极限的性质及存在性

首先指出, 以前所得到的极限的唯一性当 $Y$ 不是豪斯多夫空间时已不再成立. 但有下述结论 (其证明与特殊情况 $Y=\mathbb{R}$ 中所进行的没有什么区别):

**命题 1**　设 $X$ 是具有基 $\mathcal{B}$ 的集合, $Y$ 是豪斯多夫空间. 若 $f: X \to Y$ 的极限存在, 则其极限必是唯一的.

**定义 2**　设 $Y$ 是度量空间, $f: X \to Y$.

• 称 $f$ 是有界映射, 如果集合 $f(X) \subset Y$ 在 $Y$ 中有界.

• 设 $\mathcal{B}$ 是集合 $X$ 中的基. 称 $f$ 对基 $\mathcal{B}$ 是最终有界映射, 如果存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $f$ 在 $B$ 上有界.

• 称量

$$\omega(f, E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} d(f(x_1), f(x_2))$$

为映射 $f: X \to Y$ 在集合 $E \subset X$ 上的振幅.

从映射的极限定义本身推出, 如果从具有基 $\mathcal{B}$ 的集合 $X$ 到度量空间 $Y$ 的映射 $f: X \to Y$ 关于基 $\mathcal{B}$ 有极限, 那么它关于这个基底最终有界.

**命题 2** (复合映射的极限)　设 $X$ 是具有基 $\mathcal{B}_X$ 的集合, $Y$ 是具有基 $\mathcal{B}_Y$ 的集合, $Z$ 是拓扑空间. 考虑映射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. 假设 $\lim\limits_{\mathcal{B}_Y} g(y)$ 存在, 且 $\forall B_Y \in \mathcal{B}_Y, \exists B_X \in \mathcal{B}_X$ 使得 $f(B_X) \subset B_Y$. 则复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 有关于基 $\mathcal{B}_X$ 的极限, 并且

$$\lim_{\mathcal{B}_X} (g \circ f)(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y).$$

证明参看 2.2 节定理 5.

**命题 3** (映射极限的存在性的柯西准则)　设 $X$ 是具有基 $\mathcal{B}$ 的集合; $f: X \to Y$ 是从 $X$ 到完备度量空间 $(Y; d)$ 的映射. 为使映射 $f$ 关于基 $\mathcal{B}$ 有极限, 必须且只需对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $f$ 在 $B$ 上的振幅小于 $\varepsilon$. 简言之:

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}(\omega(f; B) < \varepsilon).$$

证明参看 2.2 节定理 4.

要指出的是, 空间 $Y$ 的完备性只在从最后的关系式的右边导出左边时需要. 另外, 如果 $Y$ 不是完备空间, 那么一般来说这样的推导是不可能的.

### 6.2.2　连续映射

1. 基本定义

**定义 3**　称从拓扑空间 $(X; \tau_X)$ 到拓扑空间 $(Y; \tau_Y)$ 的映射 $f: X \to Y$ 在点 $a \in X$ 连续, 如果对于点 $f(a) \in Y$ 的任意邻域 $V(f(a)) \subset Y$, 有点 $a \in X$ 的邻域 $U(a) \subset X$, 使 $U(a)$ 的像 $f(U(a))$ 含于 $V(f(a))$ 中.

因此

$$f: X \to Y在a \in X连续 := \forall V(f(a)), \exists U(a)(f(U(a)) \subset V(f(a))).$$

在 $X$ 和 $Y$ 是度量空间 $(X; d_X), (Y; d_Y)$ 的情形, 定义 1 自然可以用 $\varepsilon$-$\delta$ 语言叙述:

$f: X \to Y$ 在 $a \in X$ 连续 $:= \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X(d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon)$.

**定义 4** 称映射 $f: X \to Y$ 为**连续的**, 如果它在每个点 $x \in X$ 连续.

从 $X$ 到 $Y$ 的连续映射的集合用记号 $C(X; Y)$ 表示.

**注 1** 称定义于拓扑直积 $(X \times Y; \tau_X \times \tau_Y)$. 取值于拓扑空间 $(Z; \tau_Z)$ 的映射 $f: X \times Y \to Z, (x,y) \mapsto f(x,y)$ **是关于 $Y$ 连续的**, 如果 $\forall x \in X$, 映射 $f_x: Y \to Z$ 是连续的. 类似地, 定义 $f$ **关于 $X$ 连续**的概念. 易见, 若 $f$ 连续, 则它关于 $Y$ $(X)$ 也连续.

**定理 1** (映射连续性准则) 从拓扑空间 $(X; \tau_X)$ 到拓扑空间 $(Y; \tau_Y)$ 的映射 $f: X \to Y$ 连续, 当且仅当 $Y$ 的任何开 (闭) 子集的原像是 $X$ 中的开 (闭) 集.

**证** 因为余集的原像是原像的余集, 因此只需对开集证明定理.

首先证明, 如果 $f \in C(X; Y)$, 而 $G_Y \in \tau_Y$, 那么 $G_X = f^{-1}(G_Y) \in \tau_X$. 若 $G_X = \varnothing$, 则 $G_X \in \tau_X$ 是显然的. 若 $G_X \neq \varnothing$ 且 $a \in G_X$, 那么根据映射 $f$ 在点 $a$ 的连续性定义, 对于点 $f(a)$ 的邻域 $G_Y$, 有点 $a$ 在 $X$ 中的邻域 $U_X(a)$, 满足 $f(U_X(a)) \subset G_Y$. 也就是 $U_X(a) \subset f^{-1}(G_Y) = G_X$. 因为 $G_X = \bigcup\limits_{a \in G_X} U_X(a)$, 所以 $G_X$ 是开的, 即 $G_X \in \tau_X$.

现在证明, 如果 $Y$ 的任一开集的原像是 $X$ 中的开集, 那么 $f \in C(X; Y)$. 任取点 $a \in X$ 和 $f(a)$ 在 $Y$ 中的任意邻域 $V_Y(f(a))$, 我们发现, 集合 $U_X(a) = f^{-1}(V_Y(f(a)))$ 是点 $a$ 在 $X$ 中的开邻域, 且 $f(U_X(a)) \subset V_Y(f(a))$. 因此得到映射 $f: X \to Y$ 在任意点 $a \in X$ 连续. □

**定义 5** 称从一个拓扑空间 $(X; \tau_X)$ 到另一个拓扑空间 $(Y; \tau_Y)$ 的双射 $f: X \to Y$ **是同胚的**或者**同胚**, 如果它本身和它的逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 都是连续的.

**定义 6** 称两个拓扑空间**是同胚的**, 如果存在从其中一个空间到另一个空间上的同胚映射.

正像定理 1 所指出的那样, 对于从拓扑空间 $(X; \tau_X)$ 到拓扑空间 $(Y; \tau_Y)$ 上的同胚映射 $f: X \to Y$, 开集族 $\tau_X, \tau_Y$ 在下述意义下互相对应: $G_X \in \tau_X \Leftrightarrow f(G_X) = G_Y \in \tau_Y$.

因此, 从拓扑性质的观点来看, 同胚空间是完全相同的. 因而, 像度量空间的等距性是等价关系一样, 拓扑空间的同胚性同样是拓扑空间集合中的等价关系.

2. 连续映射的局部性质

我们将指出连续映射的局部性质. 它们可从极限的相应性质直接推出.

**命题 4** (连续映射的复合的连续性)　设 $(X;\tau_X),(Y;\tau_Y),(Z;\tau_Z)$ 是拓扑空间, 如果映射 $g:Y\to Z$ 在点 $b\in Y$ 连续, 映射 $f:X\to Y$ 在点 $a\in X$ 连续, 而且 $f(a)=b$, 那么这两个映射的复合 $g\circ f:X\to Z$ 在点 $a\in X$ 连续.

这可从映射连续性定义和 6.2.1 小节的命题 2 推出.

**命题 5** (映射在连续点邻域内的有界性)　如果拓扑空间 $(X;\tau)$ 到度量空间 $(Y;d)$ 的映射 $f:X\to Y$ 在某个点 $a\in X$ 连续, 那么它在这个点的某个邻域内有界.

命题从有极限的映射关于基底的最终有界性推出.

在叙述下面关于连续映射性质的结论之前, 对于 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{R}^n$ 中的映射, 我们先回忆一下量

$$\omega(f;a):=\lim_{r\to 0}\omega(f;B(a;r))=\lim_{r\to 0}\sup_{x,y\in B(a;r)}d(f(x),f(y)),$$

称之为映射 $f$ 在点 $a$ 的**振幅**.

因映射在集合上的振幅概念和球的概念在任何度量空间中都仍然有效, 故映射 $f$ 在点 $a$ 的振幅 $\omega(f;a)$ 的定义对于从度量空间 $(X;d_X)$ 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 的映射 $f:X\to Y$ 同样有效.

**命题 6**　从度量空间 $(X;d_X)$ 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 的映射 $f:X\to Y$ 在点 $a\in X$ 连续, 当且仅当 $\omega(f;a)=0$.

这个结论可从映射在一点的连续性定义直接推出.

3. 连续映射的整体性质

现在我们来讨论连续映射的最重要的整体性质.

**定理 2**　在连续映射下, 紧集的像是紧集.

**证**　设 $f:K\to Y$ 是从紧集 $(K;\tau_K)$ 到拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 的连续映射. 并且设 $\{G_Y^\alpha,\alpha\in A\}$ 是 $Y$ 中覆盖 $f(K)$ 的开集族. 由定理 1, 集合 $\{G_X^\alpha=f^{-1}(G_Y^\alpha),\alpha\in A\}$ 组成 $K$ 的开覆盖. 从中选出有限覆盖 $G_X^{\alpha_1},\cdots,G_X^{\alpha_n}$, 得到集合 $f(K)\subset Y$ 的有限覆盖 $G_Y^{\alpha_1},\cdots,G_Y^{\alpha_n}$. 因而, $f(K)$ 是 $Y$ 中的紧集. □

**推论 1**　紧集 $K$ 上的连续实函数 $f:K\to\mathbb{R}$ 在紧集的某个点取得最大 (最小) 值.

**证**　事实上, $f(K)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集, 也就是有界闭集. 这意味着 $\inf f(K)\in f(K)$ 和 $\sup f(K)\in f(K)$. □

特别地, 如果 $K$ 是区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$, 那么我们重新得到古典的魏尔斯特拉斯定理.

关于一致连续性的康托尔定理能逐字逐句地转移给在紧集上定义的连续映射. 在叙述它之前, 我们先引进必要的定义.

**定义 7** 称从度量空间 $(X;d_X)$ 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 的映射 $f:X\to Y$ 为**一致连续映射**, 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 使得在任意直径小于 $\delta$ 的集 $E\subset X$ 上, 映射 $f$ 的振幅 $\omega(f;E)$ 小于 $\varepsilon$.

**定理 3** (关于一致连续性) 从度量紧集 $K$ 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 的连续映射 $f:K\to Y$ 是一致连续的.

特别地, 如果 $K$ 是 $\mathbb{R}$ 上的闭区间, 而 $Y=\mathbb{R}$, 那么我们重新得到古典的康托尔定理.

为得到结论, 只需将 3.2 节定理 3 的证明移到上述一般情况上来.

现在研究连通空间上的连续映射.

**定理 4** 在连续映射下, 连通拓扑空间的像是连通的.

**证** 设 $f:X\to Y$ 是从连通拓扑空间 $(X,\tau_X)$ 到拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 上的连续映射. 设 $E_Y$ 是 $Y$ 的开–闭子集. 由定理 1, 集合 $E_Y$ 的原像 $E_X=f^{-1}(E_Y)$ 是 $X$ 中的开–闭集. 由 $X$ 的连通性得到, 或者 $E_X=\varnothing$, 或者 $E_X=X$. 这意味着, 或者 $E_Y=\varnothing$, 或者 $E_Y=Y=f(X)$. □

**推论 2** 设 $(X,\tau)$ 是连通的拓扑空间, $f:X\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $f$ 在 $a,b\in X$ 具有值 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$, 则对于任一介于 $A$ 和 $B$ 之间的数 $C$, 必存在点 $c\in X$, 使得 $f(c)=C$.

**证** 记 $E=f(X)$. 定理 4 推出 $E$ 是连通拓扑空间. 假设不存在 $c\in X$ 使得 $f(c)=C$, 则 $E_-:=E\cap(-\infty,C)$ 和 $E_+:=E\cap(C,\infty)$ 都是 $E$ 中的开集, 且 $E=E_-\cup E_+$. 又因 $C$ 介于 $A,B$ 之间, 故 $E_\pm\neq\varnothing$. 这与 $E$ 的连通性冲突. □

特别地, 如果 $X$ 是区间, 我们得到古典的连续实值函数的介值定理.

## 练 习

1. (1) 如果映射 $f:X\to Y$ 连续, 那么 $X$ 中的开集 (闭集) 的像是否为 $Y$ 中的开集 (闭集)?

(2) 如果在映射 $f:X\to Y$ 下, 不仅开集的原像是开集, 而且开集的像也是开集, 那么 $f$ 是否一定为同胚映射?

(3) 如果映射 $f:X\to Y$ 连续, 并且是满单射, 那么它是否总是同胚的?

(4) 同时满足条件 (2) 和 (3) 的映射是否是同胚的?

2. 试证:

(1) 从紧集到豪斯多夫空间的连续双射是同胚映射;

(2) 如果去掉值域空间的豪斯多夫性要求, 一般说来, 上述断言不成立.

3. 说明 $\mathbb{R}^n$ 的以下子集: 直线、直线上的开区间、直线上的闭区间、球面及环面, 作为拓扑空间是否 (两两) 同胚.

### 6.2.3　压缩映像原理

这里将建立一个原理, 它本身虽然很简单, 却是证明许多存在性定理的有效工具.

**定义 8**　称点 $a \in X$ 为映射 $f: X \to X$ 的**不动点**, 如果 $f(a) = a$.

**定义 9**　称从度量空间 $(X; d)$ 到自身中的映射 $f: X \to X$ 是**压缩映射**, 如果存在数 $q, 0 < q < 1$, 使得对于 $X$ 中的任意两点 $x_1, x_2$, 成立不等式

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant q d(x_1, x_2). \tag{6.2.1}$$

**定理 5** (皮卡①–巴拿赫② 不动点原理)　从完备度量空间 $(X; d)$ 到自身中的压缩映射 $f: X \to X$ 有唯一的不动点 $a$. 另外, 对于任意点 $x_0 \in X$, 迭代序列

$$x_0, x_1 = f(x_0), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots \tag{6.2.2}$$

收敛到 $a$. 收敛速度由如下估计式给出:

$$d(a, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \tag{6.2.3}$$

**证**　取任意点 $x_0 \in X$, 可证序列 (6.2.2) 是基本列. 事实上, 由 $f$ 的压缩性 (6.2.1) 得

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant q d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant q^n d(x_1, x_0)$$

和

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leqslant (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+k-1}) d(x_1, x_0) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

可见序列 (6.2.2) 是基本的. 由 $(X; d)$ 的完备性知此基本列有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in X$.

从定义看出压缩映射总是连续的, 因此

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a),$$

换言之, $a$ 是映射 $f$ 的不动点.

① 皮卡 (C. E. Picard)(1856—1941)——法国数学家, 在微分方程理论和解析函数理论中, 有一系列重要结果都属于他.

② 巴拿赫 (S. Banach)(1892—1945)——波兰数学家, 泛函分析创立者之一.

映射 $f$ 不可能有其他的不动点, 因为从 $a_i = f(a_i), i = 1, 2$, 考虑到 (6.2.1) 式, 推出

$$0 \leqslant d(a_1, a_2) = d(f(a_1), f(a_2)) \leqslant qd(a_1, a_2),$$

而这只有当 $d(a_1, a_2) = 0$, 即 $a_1 = a_2$ 时才能成立.

其次, 在关系式

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

中令 $k \to \infty$ 取极限, 就得到 $d(a, x_n) \leqslant \dfrac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$. □

作为这个定理的补充, 我们来证明以下的命题.

**命题 7** (不动点的稳定性) 设 $(X; d)$ 是完备度量空间; $(\Omega; \tau)$ 是拓扑空间 (参变量空间). 假设每个参变量 $t \in \Omega$ 对应一个压缩映射 $f_t : X \to X$, 它们满足以下条件:

(1) 族 $\{f_t, t \in \Omega\}$ 一致压缩, 即 $\exists q \in (0, 1)$, 使得对于每个映射 $f_t$ 是 $q$-压缩的;

(2) 对于每个 $x \in X$, 映射 $f_t(x) : \Omega \to X$ 作为 $t$ 的函数在某点 $t_0 \in \Omega$ 连续, 即 $\lim\limits_{t \to t_0} f_t(x) = f_{t_0}(x)$,

那么, 方程 $x = f_t(x)$ 的解 $a(t) \in X$ 在点 $t_0$ 连续地依赖于 $t$, 即 $\lim\limits_{t \to t_0} a(t) = a(t_0)$.

**证** 从定理 5 的证明看出, 方程 $x = f_t(x)$ 的解 $a(t)$ 可从任意点 $x_0 \in X$ 出发的序列 $\{x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, \cdots\}$ 的极限而得到. 取 $x_0 = a(t_0) = f_{t_0}(a(t_0))$.

根据估计式 (6.2.3) 和条件 (1) 得到

$$\begin{aligned} d(a(t), a(t_0)) = d(a(t), x_0) &\leqslant \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0) \\ &= \frac{1}{1-q} d(f_t(a(t_0)), f_{t_0}(a(t_0))). \end{aligned}$$

由条件 (2), 这个关系式中最后一项当 $t \to t_0$ 时趋于零. 因而证得

$$\lim_{t \to t_0} d(a(t), a(t_0)) = 0, \quad \text{即} \quad \lim_{t \to t_0} a(t) = a(t_0).$$ □

**例 1** 作为压缩映像原理应用的重要例子, 考虑下述常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.2.4}$$

其中, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ 任意给定. 我们将遵循皮卡的方法, 证明:

**结论** *假设函数 $f \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ 满足*

$$|f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leqslant M|v_1 - v_2|,$$

*其中 $M$ 是某个常数, 那么, 存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的邻域 $U(x_0)$ 和唯一的定义在 $U(x_0)$ 上的函数 $y = y(x)$, 满足方程 (6.2.4).*

**证**　函数 $y(x)$ 满足方程 (6.2.4) 当且仅当它满足下述积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t. \tag{6.2.5}$$

用 $A(y)$ 表示等式的右边部分, 我们得到, $A : C(V(x_0); \mathbb{R}) \to C(V(x_0); \mathbb{R})$ 是从定义在点 $x_0$ 的邻域 $V(x_0)$ 上的连续函数集到自身的映射. 把 $C(V(x_0); \mathbb{R})$ 看作具有一致度量 (见 6.1.2 小节中例 5) 的度量空间, 得到

$$\begin{aligned} d(Ay_1, Ay_2) &= \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant M|x - x_0| d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

如果 $|x - x_0| \leqslant \dfrac{1}{2M}$, 那么在相应的区间 $I$ 上成立不等式

$$d(Ay_1, Ay_2) \leqslant \frac{1}{2} d(y_1, y_2),$$

其中 $d(y_1, y_2) = \max\limits_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|$. 于是我们得到一个从完备度量空间 $(C(I; \mathbb{R}); d)$ 到自身的压缩映射

$$A : C(I; \mathbb{R}) \to C(I; \mathbb{R}),$$

根据压缩映像原理, $A$ 应该有唯一的不动点 $y = Ay$, 即 $y \in C(I; \mathbb{R})$ 就是唯一的那个定义在 $I \ni x_0$ 并且满足方程 (6.2.5) 的函数. □

**例 2**　作为上述方法的示例, 我们将根据压缩映像原理来求方程 $y' = y$ 在初始条件 $y(x_0) = y_0$ 下我们早已知道的解.

这时

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(t)\mathrm{d}t,$$

至少在 $|x - x_0| \leqslant q < 1$ 时可以应用这个原理.

从初始近似 $y(x)\equiv 0$ 出发, 构造逼近序列 $y_1 = A(0), \cdots, y_{n+1}(x) = A(y_n(x)), \cdots$:

$$
\begin{aligned}
&y_1(x) = y_0,\\
&y_2(x) = y_0[1 + (x - x_0)],\\
&y_3(x) = y_0\left[1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\right],\\
&\cdots\cdots\\
&y_{n+1}(x) = y_0\left[1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\right],\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

从中可以看出 $y(x) = y_0 \mathrm{e}^{x-x_0}$.

**例 3** 求方程 $f(x) = 0$ 的根有所谓的牛顿法 (或切线法). 下面介绍基于压缩映像原理的*改进的牛顿方法*.

假设在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上具有正导数的凸实值函数 $f(x)$ 在区间的端点上取不同符号的值. 这时, 它在这个区间上有且仅有一个点 $a$, 满足 $f(a) = 0$.

为求 $a$, 研究映射

$$x \mapsto A(x) = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x). \tag{6.2.6}$$

根据拉格朗日定理,

$$|A(x_2) - A(x_1)| = |1 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(\xi)| \cdot |x_2 - x_1|,$$

其中 $\xi$ 是位于 $x_1$ 和 $x_2$ 之间的某个点. 因此, 如果在某个区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上满足条件

$$A(I) \subset I \tag{6.2.7}$$

和

$$|1 - [f'(x_0)]^{-1} f'(x)| \leqslant q < 1, \tag{6.2.8}$$

那么由关系式 (6.2.6) 给出的映射 $A : I \to I$ 是这个区间上的压缩映射. 这时, 根据一般原理, 它在区间上有唯一的不动点 $a$. 而从 (6.2.6) 式看出, 条件 $A(a) = a$ 等同于关系 $f(a) = 0$.

因此, 当满足条件 (6.2.7) 和 (6.2.8) 时, 对于任意函数 $f$, 用基于压缩映像原理的改进的牛顿方法能求出方程 $f(x) = 0$ 的解 $a$.

## 练　习

1. 证明: 在压缩映像原理中条件 (6.2.1) 不能用更弱的条件 $d(f(x_1),f(x_2))<d(x_1,x_2)$ 来代替.

2. (1) 证明: 如果从完备的度量空间 $(X;d)$ 到自身的映射 $f:X\to X$ 的某次迭代 $f^n:X\to X$ 是压缩映射, 那么 $f$ 有唯一的不动点.

(2) 验证: 对于任意区间 $I\subset\mathbb{R}$, 例 2 中所研究的映射 $A:C(I;\mathbb{R})\to C(I;\mathbb{R})$ 的某次迭代 $A^n$ 是压缩映射.

(3) 从 (2) 推证: 例 2 中求得的局部解 $y=y_0\mathrm{e}^{x-x_0}$ 实际上是原来方程在整个数直线上的解.

3. 设从度量空间 $(X;d)$ 到自身的映射 $f:X\to X$ 是压缩映射, 求证 $f^n(n\in\mathbb{N})$ 也是压缩映射, 并说明逆命题不一定成立.

### 6.2.4　多变量函数和它的极限与连续性

对于映射 $f:X\to Y$, 我们已经讨论了 $Y$ 是一般拓扑空间, 特别 $Y$ 是度量空间的情形. 虽然 $\mathbb{R}^n$ 也是度量空间, 但它具有不少一般度量空间未必满足的特性.

映射 $f:X\to\mathbb{R}^n$ 的特征是: 由于点 $y\in\mathbb{R}^n$ 是由 $n$ 个实数组成的有序数组 $(y^1,\cdots,y^n)$, 因此, 函数 $f:X\to\mathbb{R}^n$ 等价于 $n$ 个实值函数 $f^i:X\to\mathbb{R}(i=1,\cdots,n)$, 其中 $f^i(x)=y^i(i=1,\cdots,n)$. 如果 $A=(A^1,\cdots,A^n),y=(y^1,\cdots,y^n)$, 那么, 成立不等式

$$|y^i-A^i|\leqslant d(y,A)\leqslant\sqrt{n}\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y^i-A^i|,$$

从它看出

$$\lim_{\mathcal{B}}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{\mathcal{B}}f^i(x)=A^i\ (i=1,\cdots,n),$$

也就是说, $\mathbb{R}^n$ 中的收敛是按坐标收敛.

直到现在, 我们考察的函数 $f:X\to\mathbb{R}^n$ 的定义域 $X$ 是一个抽象的集合. 下面, 首先使我们感兴趣的是 $X$ 为空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子集的情形.

1. 线性映射

**定义 10**　从一个向量空间 $X$ 到另一个向量空间 $Y$ 的映射 $L:X\to Y$ 称为 (实) 线性的, 如果对于任意的 $x_1,x_2\in X$ 和 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, 有

$$L(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1L(x_1)+\lambda_2L(x_2).$$

下面考虑 $X=\mathbb{R}^m$ 与 $Y=\mathbb{R}^n$. 由线性代数知道, 任何一个 $m\times n$(实) 矩阵 $A$ 都是从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射.

命 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 为 $m\times n$ (实数) 矩阵全体组成的集合, 则 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 是 $m\times n$ 维线性赋范空间:

• **基底**: 矩阵 $E_i^j := (a_k^l)_{mn}$, 其中 $a_i^j = 1, a_k^l = 0, \forall\,(k,l) \neq (i,j), i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n.$

• **线性**: $(\lambda_1 A_1 + \lambda A_2)(x) = \lambda_1 A_1(x) + \lambda_2 A_2(x), \forall\,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall\, A_1, A_2 \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$

• **范数**: $\|A\| := \sup\limits_{0\neq x\in\mathbb{R}^m} \dfrac{\|Ax\|_n}{\|x\|_m} = \sup\limits_{e\in\mathbb{R}^m,\|e\|_m=1} \|Ae\|_n (\|\cdot\|_m, \|\cdot\|_n$ 分别记 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ 的范数).

命 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ 为从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射全体组成的集合, 则$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ 是同构于 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 的线性赋范空间 (即存在从 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ 到 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 的一一的线性映射). 首先有

• **线性**: $(\lambda_1 L_1 + \lambda L_2)(x) = \lambda_1 L_1(x) + \lambda_2 L_2(x), \forall\,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall\, L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n);$

• **范数**: $\|L\| := \sup\limits_{0\neq x\in\mathbb{R}^m} \dfrac{\|Lx\|_n}{\|x\|_m} = \sup\limits_{e\in\mathbb{R}^m,\|e\|_m=1} \|Le\|_n.$

为讨论所说的同构性, 设 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 与 $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n\}$ 分别是 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中给定的 (标准) 基底. $\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, 令

$$a_i^j := (Le_i)^j \quad (\text{即向量 } Le_i \in \mathbb{R}^n \text{ 的第 } j \text{ 个坐标}), \quad i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n.$$

则依坐标和线性表示有

$$L(e_i) = (a_i^1,\cdots,a_i^n) = a_i^1\tilde{e}_1 + \cdots + a_i^n\tilde{e}_n, \quad i = 1,\cdots,m.$$

于是, $\forall\, h \in \mathbb{R}^m$,

$$h = (h^1,\cdots,h^m) = h^1e_1 + h^2e_2 + \cdots + h^me_m,$$

$$L(h) = \sum_{i=1}^m h^iLe_i = \left(\sum_{i=1}^m h^ia_i^1,\cdots,\sum_{i=1}^m h^ia_i^n\right).$$

把 $L$ 看作由 $n$ 个坐标映射 $L^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 构成的序组

$$L = (L^1,\cdots,L^n), \quad L^i(h) = (a_1^i,\cdots,a_m^i)\cdot(h^1,\cdots,h^m)^{\mathrm{T}}. \tag{6.2.9}$$

于是

$$L(h) = \begin{pmatrix} L^1(h) \\ \vdots \\ L^m(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}.$$

上面的讨论告诉我们, 在 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中给定基底以后, 可以建立线性映射

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad L \mapsto \Phi_L = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix},$$

即得如下结论.

**定理 6**　在 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中给定基底后, $\Phi$ 是从 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ 到 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ 的线性一一映射.

**注 2**　(1) 在欧几里得空间中, 任何一个线性函数 $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 都能表达成 $L(x)=\langle\xi,x\rangle$ 的形式, 其中 $\xi$ 是由函数 $L$ 唯一确定的 $\mathbb{R}^m$ 中的向量.

(2) 线性映射 $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 与 $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 的复合 $C=B\circ A$ 显然是线性映射, 它是用映射 $B$ 的矩阵左乘映射 $A$ 的矩阵得到的矩阵. 顺便指出, 我们已经知道的矩阵乘法规则, 就是为了适应线性映射的复合映射所对应的矩阵而作的规定.

2. 函数间值的比较

向量范数的存在, 使得能够对于函数 $f:X\to\mathbb{R}^m$ 与 $g:X\to\mathbb{R}^n$ 在空间 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的值进行比较.

设 $\mathcal{B}$ 是 $X$ 中的基, 如果 $\|f(x)\|_m=o(\|g(x)\|_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 下成立, 则记作 $f(x)=o(g(x))$ 或对于基 $\mathcal{B}$, $f=o(g)$.

如果把映射 $f:X\to\mathbb{R}^m$ 写成坐标形式 $f(x)=(f^1(x),\cdots,f^m(x))$, 那么由不等式

$$|f^i(x)|\leqslant\|f(x)\|_m\leqslant\sum_{i=1}^m|f^i(x)|,\tag{6.2.10}$$

可以得到以下的命题:

$$(\text{对于基}\mathcal{B},f=o(g))\Leftrightarrow(\text{对于基}\mathcal{B},f^i=o(g),i=1,\cdots,m).$$

还约定, 如果 $\|f(x)\|_m=O(\|g(x)\|_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 下成立, 则记作: 对于基 $\mathcal{B}$, $f=O(g)$. 这样, 由 (6.2.10) 式得到

$$(\text{对于基}\mathcal{B},f=O(g))\Leftrightarrow(\text{对于基}\mathcal{B},f^i=O(g),i=1,\cdots,m).$$

**例 4**　设 $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射, $h=h^1e_1+\cdots+h^me_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任一向量, 我们来估计 $\|L(h)\|_n$.

$$\|L(h)\|_n=\left\|\sum_{i=1}^m h^iL(e_i)\right\|_n\leqslant\sum_{i=1}^m\|L(e_i)\|_n|h^i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^m\|L(e_i)\|_n\right)\|h\|_m.\tag{6.2.11}$$

由此可以断定, 有

$$L(h)=O(h),\quad h\to0.$$

特别地, 从上式可以得到, 当 $x\to x_0$ 时, 有

$$L(x-x_0)=L(x)-L(x_0)\to0.$$

即线性映射 $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 在任一点 $x_0\in\mathbb{R}^m$ 都连续. (6.2.11) 式还推出线性映射是一致连续的.

3. 多变量函数的极限

像以前一样, 我们约定:

$U(a)$——点 $a \in \mathbb{R}^m$ 的邻域;

$\mathring{U}(a)$——点 $a \in \mathbb{R}^m$ 的去心邻域, 即 $\mathring{U}(a) := U(a)\backslash\{a\}$;

$U_E(a)$——点 $a$ 在集合 $E$ 中的邻域, 即 $U_E(a) := E \cap U(a)$;

$\mathring{U}_E(a)$——点 $a$ 在集合 $E$ 中的去心邻域, 即 $\mathring{U}_E(a) := E \cap \mathring{U}(a)$;

$x \to a$——点 $a$ 的去心邻域组成 $\mathbb{R}^m$ 中的基;

$x \to \infty$——无穷远点邻域组成的基, 即由集合 $\mathbb{R}^m\backslash B(a;r)$ 组成的基;

$x \to a, x \in E$(或 $E \ni x \to a$)——点 $a$ 在集合 $E$ 中的去心邻域组成的基, 且 $a$ 是 $E$ 的极限点;

$x \to \infty, x \in E$(或 $E \ni x \to \infty$)——无穷远点在集合 $E$ 中的邻域, 即 $E\backslash B(a;r)$ 组成的基, 且 $E$ 是无界集.

如果 $f : E \to \mathbb{R}^n$ 是从集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的映射, 那么, 利用上面的记号可以使 6.2.1 小节定义 1 表示的函数极限具体化:

$$\Big(\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A\Big) := (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathring{U}_E(a),\ \forall x \in \mathring{U}_E(a)\,(d(f(x), A) < \varepsilon)).$$

上式也可写成另外的样子:

$$\Big(\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A\Big) := (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E\,(0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), A) < \varepsilon)),$$

其中 $d(x, a)$ 与 $d(f(x), A)$ 分别是空间 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中所指的点之间的距离.

最后

$$\Big(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\Big) := (\forall \varepsilon > 0,\ \exists B(a;r),\ \forall x \in \mathbb{R}^m\backslash B(a;r)\,(d(f(x), A) < \varepsilon)).$$

我们还约定, 对于映射 $f : X \to \mathbb{R}^n$, 术语 "对于基 $\mathcal{B}$, $f(x) \to \infty$" 指的是: 对于任意的球 $B(A;r) \subset \mathbb{R}^n$, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $f(B) \subset \mathbb{R}^n\backslash B(A;r)$.

**例 5** 考虑投影函数

$$\pi^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \pi^i(x) = x^i, \quad \forall\, x = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m.$$

如果 $a = (a^1, \cdots, a^m)$, 那么, 当 $x \to a$ 时, 有 $\pi^i(x) \to a^i$.

如果 $m > 1$, 当 $x \to \infty$ 时, 函数 $x \mapsto \pi^i(x)$ 既不趋于有限数, 也不趋于无穷远. 同时, 当 $x \to \infty$ 时, 有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} (\pi^i(x))^2 \to \infty.$$

一般而言，多变量函数的极限不可以通过逐次按坐标求极限的方法来得到. 以二元函数为例.

设 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$. 以 $E_x, E_y \subset \mathbb{R}$ 分别记 $D$ 在 $x$- 轴、$y$- 轴上的投影. $x_0$ 为 $E_x$ 的极限点, $y_0$ 是 $E_y$ 的极限点. $\forall y \in E_y$, $y \neq y_0$, 若 $\lim\limits_{x \to x_0, x \in E_x} f(x,y) = \varphi(y)$ 存在, 且 $\lim\limits_{y \to y_0, y \in E_y} \varphi(y) = L_{xy}$ 也存在, 则称 $L_{xy}$ 为 $f$ 在 $(x_0, y_0)$ 处先对 $x$ 后对 $y$ 的累次极限, 简记作

$$L_{xy} = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y).$$

类似可定义先对 $y$ 求极限, 然后再对 $x$ 求极限

$$L_{yx} = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y)$$

(即先对变量 $y$ 求极限, 然后再对变量 $x$ 求极限). 另以 $L$ 记 $f$ 在 $(x_0, y_0)$ 处的极限:

$$L = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y).$$

兹以例说明: $L$, $L_{xy}$, $L_{yx}$ 的存在性是相互独立的, 其中任何一个或两个的存在都不能保证其他量的存在.

(1) $L\nexists$, $L_{xy}$ 与 $L_{yx}$ 均存在且 $L_{xy} = L_{yx}$. 例: $f(0,0) = 0, f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$. 在极限点 $(0,0)$ 处:

$L\nexists$, 事实上当 $(x,y)$ 沿 $y = mx$ 趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y) = \dfrac{m}{1+m^2}$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = \dfrac{0}{0^2+y^2} = 0$, 从而 $L_{xy} = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = 0$. 同理 $L_{yx} = 0$. 可见 $L_{xy} = L_{yx}$.

(2) $L\nexists$, $L_{xy}$ 与 $L_{yx}$ 均存在但 $L_{xy} \neq L_{yx}$. 例: $f(0,0) = 0, f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$. 在极限点 $(0,0)$ 处:

$L\nexists$, 事实上当 $(x,y)$ 沿 $y = mx$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \dfrac{1-m}{1+m}$.

$$L_{xy} = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2-y}{y} = -1;$$

$$L_{yx} = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \lim_{x \to 0} \frac{x+x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (1+x) = 1.$$

(3) $L\exists$, $L_{xy}$ 与 $L_{yx}$ 至少有一个不存在. 例: $f(x,y) = x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}$. 在 $(0,0)$ 处:

$L = 0$, 因为 $|f(x,y)| \leqslant |x| + |y|$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在, 即 $L_{xy}$ 与 $L_{yx}$ 都不存在.

(4) $L\nexists$, $L_{xy}$ 与 $L_{yx}$ 至少有一个不存在. 例: $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ 在 $(0,0)$ 处.

4. 多变量连续函数及其性质

设 $E$ 是空间 $\mathbb{R}^m$ 中的集合, $f: E\to\mathbb{R}^n$ 是定义在 $E$ 上在 $\mathbb{R}^n$ 中取值的函数, 则

$$(x^1,\cdots,x^m)=x\overset{f}{\mapsto}y=(y^1,\cdots,y^n)=(f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m)).$$

于是 $f$ 在某点连续当且仅当每个函数 $y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m)$ $(i=1,\cdots,n)$ 在这点连续.

特别地, 当 $I\subset\mathbb{R}$ 是区间, 函数 $f^1(x),\cdots,f^n(x)$ 在 $I$ 上连续时, 称由

$$x\mapsto y=(y^1,\cdots,y^n)=(f^1(x),\cdots,f^n(x))$$

定义的映射 $f: I\to\mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**道路**. 这就是说, $\mathbb{R}^n$ 中的道路是从实轴上的区间 $I\subset\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的连续映射.

设 $E\subset\mathbb{R}^m, a\in E, B_E(a;,r):=E\cap B(a;,r)$. 量

$$\omega(f;a):=\lim_{r\to+0}\omega(f;B_E(a;r))$$

称为函数 $f: E\to\mathbb{R}^n$ 在点 $a\in E$ 的**振幅**.

从连续函数的定义, 并注意柯西准则及极限性质, 推出下述常用的连续函数局部性质.

**命题 8** 连续函数具有如下的局部性质.

(1) 映射 $f: E\to\mathbb{R}^n$ 在点 $a\in E\subset\mathbb{R}^m$ 连续当且仅当 $\omega(f;a)=0$.

(2) 在点 $a\in E$ 连续的映射 $f: E\to\mathbb{R}^n$ 在此点的某个邻域 $U_E(a)$ 上有界.

(3) 若集合 $Y\subset\mathbb{R}^n$ 上的映射 $g: Y\to\mathbb{R}^k$ 在点 $y_0\in Y$ 连续, 集合 $X\subset\mathbb{R}^m$ 上的映射 $f: X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续, 且 $f(x_0)=y_0$, 则映射 $g\circ f: X\to\mathbb{R}^k$ 存在且在点 $x_0\in X$ 连续.

(4) 若 $f,g: E\to\mathbb{R}^n$ 都在点 $a\in E\subset\mathbb{R}^m$ 连续, 则它们的线性组合 $\alpha f+\beta g$ 和数量积 $f\cdot g:=\langle f,g\rangle$ 都在点 $a$ 连续.

对于实值函数, 除了上述性质外还有下面的性质.

(5) 若函数 $f,g: E\to\mathbb{R}$ 在点 $a\in E$ 连续, 则它们的商 $\left(\dfrac{f}{g}\right): E\to\mathbb{R}$(其中 $g(x)\neq 0, x\in E$) 在点 $a\in E$ 连续.

(6) 若函数 $f: E\to\mathbb{R}$ 在点 $a\in E$ 连续且 $f(a)>0(f(a)<0)$, 则存在点 $a$ 在 $E$ 中的邻域 $U_E(a)$, 使得对于一切 $x\in U_E(a)$, 有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

我们规定, 如果函数 $f: E \to \mathbb{R}^n$ 在 $E$ 的每一点连续, 则称*函数 $f$ 在 $E$ 上连续*.

集合 $E$ 上一切连续函数 $f: E \to \mathbb{R}^n$ 的集合记作 $C(E;\mathbb{R}^n)$. 如果按上下文意思函数值域很清楚, 则可简记作 $C(E)$. 通常这种省略记号是用在 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ 的情形.

**例 6**　从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}$ 的投影函数 $(x^1, \cdots, x^m) \overset{\pi^i}{\mapsto} x^i$ $(i = 1, \cdots, m)$ 显然在任一点 $a = (a^1, \cdots, a^m) \in \mathbb{R}^m$ 连续, 这是因为 $\lim\limits_{x \to a} \pi^i(x) = a^i = \pi^i(a)$.

**例 7**　对于任何定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $x \mapsto f(x)$, 例如 $x \mapsto \sin x$, 可以考察定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $(x, y) \overset{F}{\mapsto} f(x)$. 这时, 如果函数 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 那么, 新函数 $(x, y) \overset{F}{\mapsto} f(x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 这可以直接由连续的定义来验证, 也可以由函数 $F$ 是连续函数的复合函数 $(f \circ \pi^1)(x, y)$ 来证实.

特别地, 由此, 并注意到 (3), (4) 得到, 例如函数

$$f(x, y) = \sin x + \mathrm{e}^{xy}, \quad f(x, y) = \arctan(\ln(|x| + |y| + 1))$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

注意, 上述论证本质上是局部的, 而例子中的函数 $f$ 与 $F$ 分别在整个实轴 $\mathbb{R}$ 或平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义.

**例 8**　6.2.4 小节 3 的 (1) 中的函数 $f(x, y)$ 在空间 $\mathbb{R}^2$ 中除点 $(0, 0)$ 外在任一点连续. 注意, 虽然函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续, 但这个函数当其中一个变量固定时, 对另一个变量而言是连续的.

**例 9**　若函数 $f: E \to \mathbb{R}^n$ 在集合 $E$ 上连续, 而 $\tilde{E}$ 是 $E$ 的子集, 那么, 函数 $f$ 在这个子集上的限制 $f|_{\tilde{E}}$ 在 $\tilde{E}$ 上连续, 这可以由函数在一点的连续性定义直接得到证实.

现在转入连续函数的全局性质的研究.

**命题 9**　*连续函数具有下述整体性质.*

(1) 设 $K \subset \mathbb{R}^m$ 是有界闭集:

(i) 若 $f \in C(K;\mathbb{R}^n)$, 则 $f$ 在 $K$ 上一致连续;

(ii) 若 $f \in C(K;\mathbb{R}^n)$, 则 $f$ 在 $K$ 上有界;

(iii) 若 $f \in C(K;\mathbb{R})$, 则 $f$ 在 $K$ 上具有最大、最小值.

(2) 设 $E \subset \mathbb{R}^m$ 是连通集, 若 $f \in C(E;\mathbb{R})$, 且在 $a, b \in E$ 具有值 $f(a) = A, f(b) = B$, 则对 $A$ 与 $B$ 之间任意的数 $C$, 存在点 $c \in E$, 使得 $f(c) = C$.

参阅 6.2.2 小节相关内容的证明, 并注意到 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集是紧集之事实即得上述结论 (1), 而 (2) 即 6.2.2 小节之推论 2.

本章末我们提及对于 $\mathbb{R}^m$ 中的子集还有所谓路连通的概念, 它也常被用到.

**定义 11**　集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ 称为**路连通**的 (*也叫弧式连通的*), 如果对于 $E$ 中任

意一对点 $x_0$ 与 $x_1$, 总存在一条以 $x_0$ 与 $x_1$ 为两个端点的道路 $\Gamma: I \to E$, 并且它的承载子在 $E$ 中.

**注 3** 在 $\mathbb{R}^m$ 中, 一切路连通集是 (拓扑) 连通集, 而一切**连通开集**必是路连通集 (因此 $\mathbb{R}^m$ 中的开域 = 路连通开集). 但当 $m > 1$ 时, 并非所有连通集都是路连通的, 见本节末的习题 6.

**例 10** (关于 $\mathbb{R}$ 的连通子集) 非空集合 $E \subset \mathbb{R}$ 是连通的 $\Leftrightarrow$ $\forall x, z \in E$, 若 $x < y < z$, 则 $y \in E$. 可见, 在 $\mathbb{R}$ 中只有 (有限或无限) 区间: 开区间、半开区间、闭区间是连通的. 证明如下.

"$\Rightarrow$". 设 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通子集, 三个点 $a, b, c$ 满足 $a \in E, b \in E$ 而 $c \notin E, a < c < b$. 令

$$A = \{x \in E | x < c\}, \quad B = \{x \in E | x > c\},$$

则有 $a \in A, b \in B$, 即 $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$. 此外, $E = A \cup B$, 并且两个集 $A, B$ 是 $E$ 中的开集. 这与 $E$ 的连通性矛盾.

"$\Leftarrow$". 设 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 的具有下述性质的子空间: 任一对点 $a$ 和 $b$ 属于 $E$ 的同时, 区间 $[a, b]$ 中的一切点都属于 $E$. 我们来证 $E$ 是连通的.

假设 $A$ 是 $E$ 的开-闭子集, 并且 $A \neq \varnothing, B = E \backslash A \neq \varnothing$. 设 $a \in A, b \in B$. 为了确定起见, 设 $a < b$(因为 $A \cap B = \varnothing$, 所以 $a \neq b$). 考察点 $c_1 = \sup\{A \cap [a, b]\}$. 因为 $A \ni a \leqslant c_1 \leqslant b \in B$, 我们有 $c_1 \in E$. 由 $A$ 在 $E$ 中的闭性推出 $c_1 \in A$. 现在考察点 $c_2 = \inf\{B \cap [c_1, b]\}$, 类似地, 由 $B$ 的闭性推出 $c_2 \in B$. 于是, 因为 $c_1 \in A, c_2 \in B$ 和 $A \cap B = \varnothing$, 所以 $a \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b$. 但是从 $c_1$ 和 $c_2$ 的定义以及 $E = A \cup B$ 推出, 开区间 $(c_1, c_2)$ 的任一点不能属于 $E$. 这与已知的 $E$ 的性质不符, 可见, 集合 $E$ 不能有具有上述性质的子集 $A$, 从而, $E$ 的连通性得证.

**例 11** $\mathbb{R}^m$ 中的球 $B(a; r)(r > 0)$ 是区域. 我们已经知道 $B(a; r)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 现在证明: 球是连通的. 设 $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m), x_1 = (x_1^1, \cdots, x_1^m)$ 是球的两个点, 用函数 $x^i(t) = tx_1^i + (1-t)x_0^i$ $(i = 1, \cdots, m)$ 表示定义在闭区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上连接 $x_0$ 与 $x_1$ 的道路, 而且它的承载子在球中, 这是因为, 由闵可夫斯基不等式, 对任意的 $t \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} d(x(t), a) &= \left( \sum_{i=1}^{m} (x^i(t) - a^i)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^{m} (t(x_1^i - a^i) + (1-t)(x_0^i - a^i))^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \left( \sum_{i=1}^{m} (t(x_1^i - a^i))^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^{m} ((1-t)(x_0^i - a^i))^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t\left(\sum_{i=1}^{m}(x_1^i - a^i)^2\right)^{1/2} + (1-t)\left(\sum_{i=1}^{m}(x_0^i - a^i)^2\right)^{1/2} \\
&< tr + (1-t)r = r.
\end{aligned}
$$

**例 12**　用方程 $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$ $(r > 0)$ 给出的圆周 (一维球面) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的子集. 设 $x^1 = r\cos t, x^2 = r\sin t$, 我们看到, 圆周上任一对点都可用沿圆周的道路连接, 也就是说, 圆周是连通集. 但是, 这个集在 $\mathbb{R}^2$ 中不是区域, 因为它在 $\mathbb{R}^2$ 中不是开集.

**例 13**　在 $\mathbb{R}^m$ 中用方程 $(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2 = r^2$ 给出的球面 $S(0;r)$ 是紧集.

事实上, 从函数

$$(x^1, \cdots, x^m) \mapsto \sum_{i=1}^{m}(x^i)^2$$

的连续性得知球面是闭集, 而从球面上的点都满足 $|x^i| \leqslant r$ $(i = 1, \cdots, m)$ 得知它是有界的.

函数

$$(x^1, \cdots, x^m) \mapsto (x^1)^2 + \cdots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \cdots - (x^m)^2$$

在整个空间 $\mathbb{R}^m$ 上连续, 因此, 它在球面上的限制连续, 由连续函数的整体性质 (iii) 知道它在球面上取到最小值与最大值. 在球面上的两点 $(r, 0, \cdots, 0)$ 与 $(0, \cdots, 0, r)$ 处考察这个函数, 它分别取值 $r^2$ 与 $-r^2$. 因为球面是连通的 (参看本节末的习题 6), 根据连续函数的整体性质命题 9 之 (2) 可以断定, 在球面上存在一点, 使得上述函数在此点的值为零.

**例 14**　开集 $\mathbb{R}^m \backslash S(0;r)(r > 0)$ 不是区域, 因为它不是连通集. 事实上, 如果 $\Gamma : I \to \mathbb{R}^m$ 是道路, 它的一个端点是 $x_0 = (0, \cdots, 0)$, 另一个端点是 $x_1 = (x_1^1, \cdots, x_1^m)$, 且 $(x_1^1)^2 + \cdots + (x_1^m)^2 > r^2$, 设函数 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 由关系式 $(x^1, \cdots, x^m) \overset{f}{\mapsto} (x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2$ 确定, 则 $\Gamma$ 与 $f$ 的复合映射是区间 $I$ 上的连续函数, 而且它在两个端点处的值分别小于与大于 $r^2$, 因此在闭区间 $I$ 上存在一点 $\gamma$, 使得 $(f \circ \Gamma)(\gamma) = r^2$. 这样, 道路 $\Gamma$ 的承载子上的点 $x_\gamma = \Gamma(\gamma)$ 应处在球面 $S(0;r)$ 上. 我们证明了, 从球 $B(0;r) \subset \mathbb{R}^m$ 中一点出发不穿过它的边界 $S(0;r)$ 是走不出去的.

## 练　习

1. 设 $f \in C(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$. 证明:

(1) 集合 $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \big| f(x) < c\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集;

(2) 集合 $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \big| f(x) \leqslant c\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集;

(3) 集合 $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^m \big| f(x) = c\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集;

(4) 如果 $x \to \infty$ 时, $f(x) \to +\infty$; 则 $E_2$, $E_3$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集;

(5) 对任意的函数 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 集合 $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^m | \omega(f, x) \geqslant \varepsilon\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集.

2. 讨论下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$;

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{\sin(xy)}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$;

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$.

3. 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x\text{为无理数}, \\ y, & x\text{为有理数}. \end{cases}$

4. 设

$$f(x,y) = \frac{1}{1-xy}, \quad (x,y) \in D = [0,1) \times [0,1),$$

证明: $f$ 在 $D$ 上连续, 但不一致连续.

5. 拓扑空间称为是局部连通的, 如果它的每个点具有连通的邻域.

(1) 证明: 从局部连通性还不能推出拓扑空间的连通性.

(2) $\mathbb{R}^2$ 中的集合 $E$ 是函数 $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ 的图形加上纵轴上的区间 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \wedge |y| \leqslant 1\}$. 在 $E$ 上装备由 $\mathbb{R}^2$ 诱导出的拓扑. 证明, 这样得到的拓扑空间是连通的, 但不是局部连通的.

6. 称拓扑空间 $(X;\tau)$ 是弧式连通的, 如果对于它的任意两个点, 可以用位于 $X$ 中的一条路径连接. 更确切地说, 就是对于 $X$ 中的任意两个点 $A$ 和 $B$, 有从闭区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 到 $X$ 中的连续映射 $f : I = [a,b] \to X$, 使得 $f(a) = A$, $f(b) = B$.

(1) 证明: 一切弧式连通空间是连通的.

(2) 证明: $\mathbb{R}^n$ 中任一凸集是弧式连通的.

(3) 验证: $\mathbb{R}^n$ 中的连通开子集均弧式连通.

(4) 试证: 当 $n > 1$ 时, 不是所有 $\mathbb{R}^n$ 的连通子集都是弧式连通的.

(5) 证明: $\mathbb{R}^n$ 中的球面 $S(a;r)$ 是弧式连通的, 但在另外的度量空间中, 作为集合, 它装备了完全不同的拓扑, 一般来说, 可能不再是连通的.

(6) 验证: 在拓扑空间中不可能不穿过集合的边界用路径连接这个集合的内点和外点.

# 第 7 章　多变量函数微分学

## 7.1　多变量函数的微分

### 7.1.1　函数在一点的微分

**定义 1**　定义在 $E \subset \mathbb{R}^m$ 上的函数 $f : E \to \mathbb{R}^n$ 称为在极限点 $x \in E$ 是可微的, 如果在 $E$ 上有

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = L(x)h + \alpha(x;h),} \tag{7.1.1}$$

其中 $L(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是关于 $h$ 的线性函数①, 当 $h \to 0, x+h \in E$ 时, $\alpha(x;h) = o(h)$.

向量

$$\Delta x(h) := (x+h) - x = h,$$
$$\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x)$$

分别称为*自变量增量*与*函数增量*(与这个自变量增量相对应), 按照传统习惯, 分别简记作 $\Delta x$ 与 $\Delta f(x)$ (它们都是 $h$ 的函数).

(7.1.1) 式中的 $L(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 称为函数 $f : E \to \mathbb{R}^n$ 在点 $x \in E$ 处的*微分*、*切映射*或*导映射*, 记作 $\mathrm{d}f(x)$, $Df(x)$ 或 $f'(x)$.

根据引进的这些记号, 可将 (7.1.1) 式写成

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x;h),$$

或

$$\Delta f(x;h) = \mathrm{d}f(x)h + \alpha(x;h).$$

我们注意到微分实际上是对从点 $x \in \mathbb{R}^m$ 出发的位移 $h$ 定义的. 为了强调这点, 我们把一个向量空间 $\mathbb{R}^m$ 与点 $x \in \mathbb{R}^m$ 联系起来, 记作 $T\mathbb{R}^m(x)$ 或 $T\mathbb{R}^m_x$, 向量空间 $T\mathbb{R}^m_x$ 可以解释为紧贴在点 $x \in \mathbb{R}^m$ 上的向量全体所成的集合, 我们称 $T\mathbb{R}^m_x$ 为 $\mathbb{R}^m$ 在点 $x \in \mathbb{R}^m$ 的*切空间*. 这个术语的来源以后再作解释.

微分在向量 $h \in T\mathbb{R}^m_x$ 的值是紧贴在点 $f(x)$ 上的向量 $f'(x)h \in T\mathbb{R}^n_{f(x)}$, 这个向量可以逼近由自变量 $x$ 的增量引起的函数增量 $f(x+h) - f(x)$.

于是, $\mathrm{d}f(x)$ 或 $f'(x)$ 是线性映射 $f'(x) : T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$.

---

① 同一维情况一样, 我们允许用 $L(x)h$ 代替 $L(x)(h)$, 同时指出, 定义中的 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 都装备了 6.1.3 小节中所规定的范数.

我们看出, 在一点可微的多变量向量值函数与我们已研究过的单变量可微函数在下述性质上是完全一样的, 即如果它在这点的增量 $\Delta f(x;h)$ 作为自变量增量 $h$ 的函数, 在精确到一个比 $h\to 0$ 高阶的无穷小量 $\alpha(x;h)$ 的条件下, 是线性的.

**例 1** 考虑 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x)=|x|^2$(这里 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的范数). 则 $\forall h\in T\mathbb{R}^m_x$,

$$f(x+h)-f(x)=|x+h|^2-|x|^2=2x\cdot h+|h|^2=\langle 2x,h\rangle+|h|^2.$$

故 $\alpha(x;h)=|h|^2$, $f'(x)=2x$.

**例 2** 考虑 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^2, x\mapsto f(x)=(|x|^2,|x|^3)$. 则 $\forall h\in T\mathbb{R}^m_x$,

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=(|x+h|^2-|x|^2,\ |x+h|^3-|x|^3)\\&=(2x\cdot h+|h|^2,\ 3|x|x\cdot h+O(|h|^2))\\&=\begin{pmatrix}2\langle x,h\rangle\\3|x|\langle x,h\rangle\end{pmatrix}+O(|h|^2)=\begin{pmatrix}2x\\3|x|x\end{pmatrix}h+O(|h|^2),\end{aligned}$$

故 $\alpha(x;h)=O(|h|^2)$,

$$f'(x)=\begin{pmatrix}2x\\3|x|x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x^1&\cdots&2x^m\\3|x|x^1&\cdots&3|x|x^m\end{pmatrix}.$$

### 7.1.2 实值函数的偏导数与微分

如果把 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $f(x+h), f(x), L(x)h, \alpha(x;h)$ 写成坐标形式, 那么等式 (7.1.1) 等价于下面 $n$ 个实值函数的等式:

$$f^i(x+h)-f^i(x)=L^i(x)h+\alpha^i(x;h)\quad(i=1,\cdots,n),\tag{7.1.2}$$

由 (6.2.9) 式知, $L^i(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是线性函数, 而当 $h\to 0, x+h\in E$ 时, 有 $\alpha^i(x;h)=o(h), i=1,\cdots,n$.

这证明了下面的命题.

**命题 1** 集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ 上的映射 $f:E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 在极限点 $x\in E$ 可微当且仅当映射 $f$ 的每个坐标映射 $f^i:E\to\mathbb{R}(i=1,\cdots,n)$ 在点 $x\in E$ 可微.

由于关系式 (7.1.1) 与 (7.1.2) 是等价的, 因此为了求映射 $f:E\to\mathbb{R}^n$ 的微分 $L(x)$, 只要求出它的坐标函数 $f^i:E\to\mathbb{R}$ 的微分 $L^i(x)$ 就可以了.

现在我们考虑定义在集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ 上的实值函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 且设它在 $E$ 的内点 $x\in E$ 可微. 下面将主要研究 $E$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的区域的情形. 如果 $x$ 是 $E$ 的内点, 那么对于点 $x$ 的任意足够小的位移 $h$, 点 $x+h$ 都属于 $E$, 也就是说, 也在 $f:E\to\mathbb{R}$ 的定义域 $E$ 中.

如果用坐标形式来表示点 $x=(x^1,\cdots,x^m)$, 向量 $h=(h^1,\cdots,h^m)$ 和线性函数 $L(x)h=\alpha_1(x)h^1+\cdots+\alpha_m(x)h^m$, 那么条件

$$f(x+h)-f(x)=L(x)h+o(h),\quad h\to 0 \tag{7.1.3}$$

可改写成

$$\begin{aligned}&f(x^1+h^1,\cdots,x^m+h^m)-f(x^1,\cdots,x^m)\\&=a_1(x)h^1+\cdots+a_m(x)h^m+o(h),\quad h\to 0,\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

其中 $a_1(x),\cdots,\alpha_m(x)$ 是依赖于点 $x$ 的实数.

现在我们来求这些实数. 为此用特殊的位移

$$h_i=h^ie_i=0\cdot e_1+\cdots+0\cdot e_{i-1}+h^ie_i+0\cdot e_{i+1}+\cdots+0\cdot e_m$$

代替任意的位移 $h$, 显然, $h_i$ 与 $\mathbb{R}^m$ 的基底 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 中的向量 $e_i$ 共线.

当 $h=h_i$ 时, 显然有 $\|h\|=|h^i|$, 因此, 从 (7.1.4) 式得到

$$\begin{aligned}&f(x^1,\cdots,x^{i-1},x^i+h^i,x^{i+1},\cdots,x^m)-f(x^1,\cdots,x^i,\cdots,x^m)\\&=a_i(x)h^i+o(h^i),\quad h^i\to 0.\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

由此看出, 如果函数 $f(x^1,\cdots,x^m)$ 除第 $i$ 个自变量外, 其余自变量皆固定不变, 那么, 这时得出第 $i$ 个变量的函数在点 $x^i$ 是可微的.

这样一来, 从等式 (7.1.5) 可得

$$a_i(x)=\lim_{h^i\to 0}\frac{f(x^1,\cdots,x^{i-1},x^i+h^i,x^{i+1},\cdots,x^m)-f(x^1,\cdots,x^i,\cdots,x^m)}{h^i}. \tag{7.1.6}$$

**定义 2**　极限 (7.1.6) 式称为函数 $f$ 在点 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 关于变量 $x^i$ 的**偏导数**. 下面每个符号都可用来表示它:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x),\quad \partial_i f(x),\quad D_i f(x),\quad f'_{x^i}(x).$$

**例 3**　设 $f(u,v)=u^3+v^2\sin u$, 则

$$\begin{aligned}\partial_1 f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)&=3u^2+v^2\cos u,\\\partial_2 f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)&=2v\sin u.\end{aligned}$$

**例 4**　设 $f(x,y,z)=\arctan(xy^2)+\mathrm{e}^z$, 则

$$\partial_1 f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{y^2}{1+x^2y^4},$$
$$\partial_2 f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{2xy}{1+x^2y^4},$$
$$\partial_3 f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\mathrm{e}^z.$$

这样, 我们证明了下面的命题.

**命题 2** 如果定义在集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ 上的函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 在 $E$ 的内点 $x$ 可微, 那么函数 $f$ 在点 $x$ 关于每个变量有偏导数, 并且它的微分由这些偏导数唯一确定:

$$\mathrm{d}f(x)h=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)h^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^m}(x)h^m, \tag{7.1.7}$$

公式 (7.1.7) 按照爱因斯坦约定可以简写为

$$\mathrm{d}f(x)h=\partial_i f(x)h^i. \tag{7.1.8}$$

**例 5** 假如我们知道 (很快就会知道的) 例 4 中的函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(0,1,0)$ 可微, 那么立刻可以写出

$$\mathrm{d}f(0,1,0)h=1\cdot h^1+0\cdot h^2+1\cdot h^3=h^1+h^3.$$

由此有

$$f(h^1,1+h^2,h^3)-f(0,1,0)=\mathrm{d}f(0,1,0)h+o(h)\quad(h\to 0),$$

或

$$\arctan(h^1(1+h^2)^2)+\mathrm{e}^{h^3}=1+h^1+h^3+o(h)\quad(h\to 0).$$

**例 6** 函数 $x=(x^1,\cdots,x^m)\overset{\pi^i}{\mapsto}x^i$ 把点 $x\in\mathbb{R}^m$ 对应于它的第 $i$ 个坐标. 对于这个函数有

$$\Delta\pi^i(x,h)=(x^i+h^i)-x^i=h^i,$$

也就是说, 这个函数的增量本身是 $h$ 的线性函数 $h\overset{\pi^i}{\mapsto}h^i$, 因此 $\Delta\pi^i(x,h)=\mathrm{d}\pi^i(x)h$. 由于对任意的点 $x\in\mathbb{R}^m$ 有 $\mathrm{d}\pi^i(x)h=h^i$, 在这个意义上映射 $\mathrm{d}\pi^i(x)=\mathrm{d}\pi^i$ 实际上是不依赖于点 $x$ 的. 如果把 $\pi^i(x)$ 记作 $x^i(x)$, 则有 $\mathrm{d}\pi^i(x)h=\mathrm{d}x^ih=h^i$.

注意到这种状况以及公式 (7.1.8), 现在我们可以把任何函数的微分表示成它的自变量 $x\in\mathbb{R}^m$ 的坐标的微分的线性组合, 亦即有

$$\mathrm{d}f(x)=\partial_i f(x)\mathrm{d}x^i=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\mathrm{d}x^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^m}(x)\mathrm{d}x^m, \tag{7.1.9}$$

这是因为, 对于任意向量 $h\in T\mathbb{R}^m_x$ 有

$$\mathrm{d}f(x)h=\partial_i f(x)h^i=\partial_i f(x)\mathrm{d}x^ih.$$

### 7.1.3　映射的微分的坐标表示 • 雅可比矩阵

我们已经得到实值函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 的微分公式 (7.1.7). 而由此, 根据关系式 (7.1.1) 与 (7.1.2) 的等价性, 对于任意的定义在集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ 上的映射 $f: E \to \mathbb{R}^n$, 如果它在 $E$ 的内点 $x \in E$ 可微, 那么就可以把它在点 $x$ 的微分 $\mathrm{d}f(x)$ 表成坐标形式:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x)h &= \begin{pmatrix} \mathrm{d}f^1(x)h \\ \vdots \\ \mathrm{d}f^n(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f^1(x)h^i \\ \vdots \\ \partial_i f^n(x)h^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix} =: \frac{\partial(f^1, \cdots, f^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)} h. \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

**定义 3**　设映射 $f: E \to \mathbb{R}^n$ 在点 $x \in E \subset \mathbb{R}^m$ 可微, $f$ 的坐标函数在点 $x$ 的偏导数组成的 $(\partial_i f^j(x))(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$ 称为映射$f$ 在点 $x$ 的雅可比矩阵[①] 矩阵或 Jacobian[②].

当 $n = 1$ 时, 公式 (7.1.10) 归结为公式 (7.1.7), 当 $n = 1, m = 1$ 时, 公式 (7.1.10) 归结为一个实变量的实值函数的微分.

由关系式 (7.1.1) 与 (7.1.2) 的等价性及实值函数微分的唯一性得到下面命题.

**命题 3**　如果定义在集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ 上的映射 $f: E \to \mathbb{R}^n$ 在 $E$ 的内点 $x \in E$ 可微, 则它在点 $x$ 的微分是唯一的, 并且映射 $\mathrm{d}f(x): T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$ 的坐标表示用 (7.1.10) 式给出.

### 7.1.4　函数在一点的连续性、偏导数和可微性

本段将完成函数在一点可微性的讨论, 指出函数在一点的连续性、偏导数的存在性与可微性之间的相互关系.

• 若函数在一点可微, 则它在此点连续. 事实上, 因 $L(x)$ 是线性映射, 所以当 $h \to 0$ 时, $Lh \to 0$, 而当 $h \to 0, x + h \in E$ 时,

$$f(x + h) - f(x) = L(x)h + o(h),$$

固然. 上述命题之逆是不正确的, 这是因为, 我们知道, 在单变量情形这已经是错误的了. 这样, 函数在一点的可微性与连续性的关系在高维情形和一维情形是一样的.

① 雅可比 (J. Jacobi)(1804—1851)——著名的德国数学家.
② 又常称这个矩阵的行列式 (当它是方阵时) 为 Jacobian.

• 已知单个实变量的实值函数在一点存在微分与存在导数是等价的. 对于多变量而言, 命题 2 说明函数在定义域内点的可微性保证了它在此点关于每个变量的偏导数的存在性, 但是相反的命题是不对的, 即各偏导数都存在也不能保证可微性.

**例 7** 函数

$$f(x^1,x^2)=\begin{cases}0, & x^1x^2=0,\\ 1, & x^1x^2\neq 0\end{cases}$$

在坐标轴上等于零, 因此在点 $(0,0)$ 处, 它的两个偏导数是

$$\partial_1 f(0,0)=\lim_{h^1\to 0}\frac{f(h^1,0)-f(0,0)}{h^1}=\lim_{h^1\to 0}\frac{0-0}{h^1}=0,$$
$$\partial_2 f(0,0)=\lim_{h^2\to 0}\frac{f(0,h^2)-f(0,0)}{h^2}=\lim_{h^2\to 0}\frac{0-0}{h^2}=0.$$

但是这个函数在点 $(0,0)$ 不可微, 因为显然它在此点间断.

例 7 引进的这个函数, 除了原点 $(0,0)$ 外, 在坐标轴上任意点处, 它总有一个偏导数不存在. 但是函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在平面上所有点 $(x,y)$ 处存在偏导数, 但是它在坐标原点间断, 因而它在此点不可微.

这样, 虽然可以正确地写出 (7.1.7),(7.1.8) 式的右边部分, 但仍不能保证它是我们的函数的微分, 这是因为函数可能原本就不是可微的.

稍后将证明函数偏导数的连续性足以保证函数的可微性, 这为计算多变量函数的微分提供了方便.

## 7.2 微分法的基本定律

### 7.2.1 微分法运算的线性性质

**定理 1** 如果定义在集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ 上的映射 $f_1:E\to\mathbb{R}^n, f_2:E\to\mathbb{R}^n$ 在点 $x\in E$ 可微, 则它们的线性组合 $(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2):E\to\mathbb{R}^n$ 在点 $x$ 可微, 且有

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)'(x)=(\lambda_1 f_1'+\lambda_2 f_2')(x). \tag{7.2.1}$$

**证**　直接计算得

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x+h)-(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x)\\
=&(\lambda_1 f_1(x+h)+\lambda_2 f_2(x+h))-(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))\\
=&\lambda_1(f_1(x+h)-f_1(x))+\lambda_2(f_2(x+h)-f_2(x))\\
=&\lambda_1(f_1'(x)h+o(h))+\lambda_2(f_2'(x)h+o(h))\\
=&(\lambda_1 f_1'(x)+\lambda_2 f_2'(x))h+o(h).
\end{aligned}$$

□

等式 (7.2.1) 指出: 线性组合的微分等于微分的线性组合. 此定理表明微分是在 $x$ 处可微的映射 $f: E\to\mathbb{R}^n$ 组成的向量空间上的线性运算.

如果考察的是实值函数, 那么关于乘法运算与除法运算 (当分母不为零) 有下面的定理.

**定理 2**　如果定义在集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ 上的函数 $f: E\to\mathbb{R}, g: E\to\mathbb{R}$ 在点 $x\in E$ 可微, 则

(1) 它们的乘积在点 $x$ 可微, 且

$$(f\cdot g)'(x)=g(x)f'(x)+f(x)g'(x). \tag{7.2.2}$$

(2) 当 $g(x)\neq 0$ 时, 它们的商在点 $x$ 可微, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x)-f(x)g'(x)). \tag{7.2.3}$$

此定理的证明同一元微分学对应定理的证明完全一样, 这里从略.

关系式 (7.2.1)—(7.2.3) 可以用另外的微分记号改写成下面的形式:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x)&=(\lambda_1\mathrm{d}f_1+\lambda_2\mathrm{d}f_2)(x),\\
\mathrm{d}(f\cdot g)(x)&=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x),\\
\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(x)&=\frac{1}{g^2(x)}(g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)).
\end{aligned}$$

我们来考察如何用映射的坐标形式表示这些等式. 我们知道, 如果映射 $\varphi: E\to\mathbb{R}^n$ 在 $E\subset\mathbb{R}^m$ 上的内点 $x$ 可微, 把它写成坐标形式

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi^1(x^1,\cdots,x^m)\\ \vdots\\ \varphi^n(x^1,\cdots,x^m)\end{pmatrix},$$

那么与它在点 $x$ 的微分 $\mathrm{d}\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 相对应的是雅可比矩阵

$$\varphi'(x)=\begin{pmatrix}\partial_1\varphi^1 & \cdots & \partial_m\varphi^1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1\varphi^n & \cdots & \partial_m\varphi^n\end{pmatrix}(x)=(\partial_i\varphi^j)(x).$$

在 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中给定基底的情况下, 线性映射 $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 与它的 $m\times n$ 矩阵之间存在一一对应, 因此可以把线性映射 $L$ 与它的矩阵看成一回事.

对于雅可比矩阵的记号, 我们通常使用的是 $f'(x)$ 而不是 $\mathrm{d}f(x)$, 这是为了更符合一维情形下导数与微分概念的传统区别.

这样, 根据在集合 $E$ 的内点 $x$ 处的微分的唯一性, 我们得到用雅可比矩阵表示的 (7.2.1)—(7.2.3) 式的如下坐标形式:

$$(\partial_i(\lambda_1 f_1^j+\lambda_2 f_2^j))(x)=(\lambda_1\partial_i f_1^j+\lambda_2\partial_i f_2^j)(x)\quad(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n),\tag{7.2.1′}$$

$$(\partial_i(f\cdot g))(x)=g(x)\partial_i f(x)+f(x)\partial_i g(x)\quad(i=1,\cdots,m),\tag{7.2.2′}$$

$$\left(\partial_i\left(\frac{f}{g}\right)\right)(x)=\frac{1}{g^2(x)}(g(x)\partial_i f(x)-f(x)\partial_i g(x))\quad(i=1,\cdots,m).\tag{7.2.3′}$$

例如, 从上述矩阵的分量等式可以推出, 实值函数 $f(x^1,\cdots,x^m)$ 与 $g(x^1,\cdots,x^m)$ 的乘积关于变量 $x^i$ 的偏导数应是

$$\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x^i}=g(x^1,\cdots,x^m)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^m)+f(x^1,\cdots,x^m)\frac{\partial g}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^m).$$

我们注意到, 无论是这个等式还是矩阵等式 (7.2.1′)—(7.2.3′) 都是偏导数定义以及一个实变量的实值函数的微分法则的显然的推论. 但是偏导数的存在性还不能断定多变量函数的可微性. 因此, 除了重要的和完全显然的等式 (7.2.1′)—(7.2.3′) 之外, 在定理 1 与定理 2 中, 关于映射的微分的存在性假定也是必要的.

最后我们指出, 利用归纳法可将等式 (7.2.2) 推广为有限个可微实值函数乘积 $(f_1\cdot\cdots\cdot f_k)$ 的微分式

$$\mathrm{d}(f_1\cdot\cdots\cdot f_k)(x)=(f_2\cdot\cdots\cdot f_k)(x)\mathrm{d}f_1(x)+\cdots+(f_1\cdot\cdots\cdot f_{k-1})(x)\mathrm{d}f_k(x).$$

### 7.2.2 复合映射的微分法

1. 基本定理

**定理 3** 如果集合 $X\subset\mathbb{R}^m$ 到集合 $Y\subset\mathbb{R}^n$ 的映射 $f:X\to Y$ 在点 $x\in X$ 可微, 而映射 $g:Y\to\mathbb{R}^k$ 在 $y=f(x)\in Y$ 可微, 则复合映射 $g\circ f:X\to\mathbb{R}^k$

在点 $x \in X$ 可微, 且复合映射的微分 $\mathrm{d}(g \circ f)(x) : T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^k_{g(f(x))}$ 等于微分 $\mathrm{d}f(x) : T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_y$ 与微分 $\mathrm{d}g(y) : T\mathbb{R}^n_y \to T\mathbb{R}^k_{g(y)}$ 的复合 $\mathrm{d}g(y) \circ \mathrm{d}f(x)$.

**证**　利用映射 $f$ 与 $g$ 在点 $x$ 与 $y = f(x)$ 的可微性和微分 $g'(y)$ 的线性, 可得

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)\\
=&g(f(x+h)) - g(f(x))\\
=&g'(f(x))(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h) - f(x))\\
=&g'(y)(f'(x)h + o(h)) + o(f(x+h) - f(x))\\
=&g'(y)(f'(x)h) + g'(y)(o(h)) + o(f(x+h) - f(x))\\
=&(g'(y) \circ f'(x))h + \alpha(x;h).
\end{aligned}$$

其中 $g'(y) \circ f'(x)$ 是线性映射 (因为它是线性映射的复合), 而

$$\alpha(x;h) = g'(y)(o(h)) + o(f(x+h) - f(x)).$$

由于

$$g'(y)(o(h)) = o(h) \quad (h \to 0),$$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) = O(h) + o(h) = O(h) \quad (h \to 0)$$

和

$$o(f(x+h) - f(x)) = o(O(h)) = o(h) \quad (h \to 0),$$

故

$$\alpha(x;h) = o(h) + o(h) = o(h) \quad (h \to 0),$$

从而定理得证. □

现在我们把定理 3 写成坐标形式, 如果 $x$ 是集合 $X$ 的内点, 且

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) & \cdots & \partial_m f^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n(x) & \cdots & \partial_m f^n(x) \end{pmatrix} = (\partial_i f^j)(x),$$

而 $y = f(x)$ 是集合 $Y$ 的内点, 且

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 g^1(y) & \cdots & \partial_n g^1(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g^k(y) & \cdots & \partial_n g^k(y) \end{pmatrix} = (\partial_j g^l)(y),$$

那么

$$(g\circ f)'(x)=\begin{pmatrix}\partial_1(g^1\circ f)(x) & \cdots & \partial_n(g^1\circ f)(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1(g^k\circ f)(x) & \cdots & \partial_n(g^k\circ f)(x)\end{pmatrix}=(\partial_i(g^l\circ f))(x)$$

$$=\begin{pmatrix}\partial_1 g^1(y) & \cdots & \partial_n g^1(y)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 g^k(y) & \cdots & \partial_n g^k(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_1 f^1(x) & \cdots & \partial_m f^1(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f^n(x) & \cdots & \partial_m f^n(x)\end{pmatrix}$$

$$=(\partial_j g^l(y)\cdot\partial_i f^j(x)).$$

在等式

$$(\partial_i(g^l\circ f))(x)=(\partial_j g^l(f(x))\cdot\partial_i f^j(x)) \tag{7.2.4}$$

右边矩阵中的元素 $\partial_j g^l(f(x))\cdot\partial_i f^j(x)$ 是对指标 $j$ 从 1 到 $n$ 求和的简写记号.

我们下面考察定理的某些重要的特殊情形.

2. 复合实值函数的偏导数与微分

考虑复合映射

$$\mathbb{R}^m\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R},\quad (x^1,\cdots,x^m)\xmapsto{f}(y^1,\cdots,y^n)\xmapsto{g}z,$$

其中 $f=(f^1,\cdots,f^n)$, $y^j=f^j(x^1,\cdots,x^m)$, $j=1,\cdots,n$,

$$(g\circ f)(x)=g(f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m)).$$

根据公式 (7.2.4), 按我们的条件, 其中的 $l=1$, 得

$$\partial_i(g\circ f)(x)=\partial_j g(f(x))\cdot\partial_i f^j(x), \tag{7.2.5}$$

或者更详细地写作

$$\frac{\partial z}{\partial x^i}(x)=\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^m)=\frac{\partial g}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^i}+\cdots+\frac{\partial g}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}$$

$$=\partial_1 g(f(x))\cdot\partial_i f^1(x)+\cdots+\partial_n g(f(x))\cdot\partial_i f^n(x)$$

$$=g_1'(f(x))(f^1)_i'(x)+\cdots+g_n'(f(x))(f^n)_i'(x)\quad(i=1,\cdots,m).$$

3. 函数在一点沿向量的导数与梯度

**定义 1** 如果函数 $f$ 定义在点 $x_0\in\mathbb{R}^m$ 的邻域中, 而 $v\in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ 是在点 $x_0$ 的向量, 则称量

$$\boxed{D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}} \tag{7.2.6}$$

为函数 $f$ 在点 $x_0$ 沿向量 $v$ 的导数 (如果上述极限存在的话). 特别, 沿给定方向的单位向量的导数, 通常称为方向导数.

• 由定义看出, 如果函数 $f$ 在点 $x_0$ 可微, 那么成立

$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}f(x_0)tv + o(tv)}{t} = \mathrm{d}f(x_0)v, \tag{7.2.7}$$

其坐标形式为

$$D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)v^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)v^m. \tag{7.2.8}$$

• 特别地, 对于基底向量 $e_1 = (1,0,\cdots,0), \cdots, e_m = (0,\cdots,0,1)$, 从公式 (7.2.8) 得

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \quad (i = 1,\cdots,m).$$

因此, 关于 $x^i$ 的偏导数就是沿 $e_i$ 的方向导数 $(i = 1,\cdots,m)$.

• 由微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 的线性性, 根据等式 (7.2.7) 可以断定, 如果函数 $f$ 在点 $x_0$ 可微, 则对任意的 $v_1, v_2 \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ 和任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 函数 $f$ 在点 $x_0$ 沿方向 $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ 有导数, 且

$$D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} f(x_0) = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0). \tag{7.2.9}$$

因此, 求方向导数的运算是线性运算.

• 利用 $\mathbb{R}^m$ 的欧几里得空间结构 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $\exists!\, \xi = \xi(L)$ 使得

$$L(v) = \langle \xi, v\rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$$

(见 6.2.4 小节注 1). 于是, 存在唯一向量 $\xi \in T\mathbb{R}^m_{x_0} \equiv \mathbb{R}^m$, 使

$$\mathrm{d}f(x_0)v = \langle \xi, v\rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m. \tag{7.2.10}$$

**定义 2**　设函数 $f$ 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^m$ 可微, 如果向量 $\xi \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ 适合于函数 $f$ 在点 $x_0$ 的微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 所满足的等式 (7.2.10), 则称 $\xi$ 为函数 $f$ 在点 $x_0$ 的梯度, 且记作 $\mathrm{grad}f(x_0)$.

• 于是, 由定义有

$$\boxed{\mathrm{d}f(x_0)v = \langle \mathrm{grad}f(x_0), v\rangle.} \tag{7.2.11}$$

如果在 $\mathbb{R}^m$ 中选取笛卡儿坐标系, 那么比较 (7.2.7),(7.2.8) 与 (7.2.11) 式, 可以断定, 在这个坐标系下, 梯度有下面的坐标表示式:

$$\mathrm{grad}f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^m}\right)(x_0). \tag{7.2.12}$$

• 向量 $\mathrm{grad}f(x_0)$ 有如下的几何意义. 设 $e \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ 是单位向量. 由 (7.2.11) 式知

$$D_e f(x_0) = \|\mathrm{grad}f(x_0)\| \cos\varphi, \tag{7.2.13}$$

其中 $\varphi$ 是向量 $e$ 与 $\mathrm{grad}f(x_0)$ 的夹角. 因此, 如果 $\mathrm{grad}f(x_0) \neq 0$, 对于单位向量

$$e = \|\mathrm{grad}f(x_0)\|^{-1}\mathrm{grad}f(x_0),$$

$D_e f(x_0) = \langle \mathrm{grad}f(x_0), \|\mathrm{grad}f(x_0)\|^{-1}\mathrm{grad}f(x_0)\rangle = \|\mathrm{grad}f(x_0)\|$, 导致 $D_e f(x_0)$ 具有最大值. 当动点从定点 $x_0$ 沿着方向向量 $\mathrm{grad}f(x_0)$ 移动时, 函数 $f$ 的值的增长速度最快且等于 $\|\mathrm{grad}f(x_0)\|$. 当动点从定点 $x_0$ 沿着上述方向的相反方向移动时, 函数 $f$ 的值最急剧地减少. 当动点从定点 $x_0$ 沿着与方向 $\mathrm{grad}f(x_0)$ 垂直的方向移动时, 函数 $f$ 的值的变化速度等于零.

因为欧几里得空间中的单位向量可用方向余弦表示:

$$e = (\cos\alpha_1, \cdots, \cos\alpha_m),$$

其中 $\alpha_i$ 是向量 $e$ 与笛卡儿坐标系的基底向量 $e_i$ 之间的夹角, 所以

$$D_e f(x_0) = \langle \mathrm{grad}f(x_0), e\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\cos\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)\cos\alpha_m.$$

我们今后将常常遇到向量 $\mathrm{grad}f(x_0)$ , 并且它有很多应用, 例如, 根据以上叙述的梯度的几何性质建立的*梯度方法*, 它是 (利用电子计算机) 寻求多变量函数极值的数值搜索方法.

很多重要的向量场, 例如, 牛顿引力场或库仑静电场都是某个数量函数 (称为这个场的势或位) 的梯度.

很多物理定律在其陈述中都利用了向量 $\mathrm{grad}f(x)$, 例如, 连续介质力学中研究的无外力作用的理想液体或气体所满足的关系式

$$\rho a = -\mathrm{grad}\, p,$$

其中 $a = a(x,t)$ 是流体在点 $x$ 和时刻 $t$ 的加速度, 而 $\rho = \rho(x,t)$ 是介质密度, $p = p(x,t)$ 是压力. 这个关系式与质点动力学中的牛顿基本定律 $ma = F$ 相当.

关于向量 $\mathrm{grad}f$ 我们以后在向量分析与初等场论中还要研究.

### 7.2.3 逆映射的微分法

**定理 4** 设 $f : U(x) \to V(y)$ 是把点 $x$ 的邻域 $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ 映到点 $y = f(x)$ 的邻域 $V(y) \subset \mathbb{R}^m$ 上的映射, 它在点 $x$ 连续且存在逆映射 $f^{-1} : V(y) \to U(x)$, 而且逆映射在点 $y$ 也连续. 如果映射 $f$ 在点 $x$ 可微, 且它在点 $x$ 的切映射 $f'(x)$ :

$T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^m_y$ 有逆映射 $[f'(x)]^{-1} : T\mathbb{R}^m_y \to T\mathbb{R}^m_x$, 则映射 $f^{-1} : V(y) \to U(x)$ 在点 $y = f(x)$ 可微, 且

$$(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}.$$

(因此, 互逆的可微映射在对应的点处有互逆的切映射.)

**证**　设 $f(x) = y$, $f(x+h) = y+t$, $t = f(x+h) - f(x)$, 则

$$f^{-1}(y) = x, \quad f^{-1}(y+t) = x+h, \quad h = f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y).$$

假定 $h$ 足够小, 使得 $x+h \in U(x)$, 从而 $y+t \in V(y)$. 由 $f$ 在点 $x$ 和 $f^{-1}$ 在点 $y$ 的连续性得到

$$\text{当} h \to 0 \text{时}, \quad t = f(x+h) - f(x) \to 0, \tag{7.2.14}$$

$$\text{当} t \to 0 \text{时}, \quad h = f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) \to 0. \tag{7.2.15}$$

由 $f$ 在点 $x$ 的可微性得到

$$t = f'(x)h + o(h) \quad (h \to 0). \tag{7.2.16}$$

由此可以断定 $t = O(h)(h \to 0)$.

我们来证明, 如果 $f'(x)$ 有可逆的线性映射, 则 $h = O(t)(t \to 0)$.

事实上, 由 (7.2.16) 式得到

$$[f'(x)]^{-1}t = h + [f'(x)]^{-1}(o(h)) = h + o(h) \quad (h \to 0), \tag{7.2.17}$$

$$\|[f'(x)]^{-1}t\| \geqslant \|h\| - \|o(h)\| \quad (h \to 0),$$

$$\|[f'(x)]^{-1}t\| \geqslant \tfrac{1}{2}\|h\|, \quad \|h\| < \delta,$$

其中数 $\delta > 0$ 选得, 使当 $\|h\| < \delta$ 时, 有 $\|o(h)\| < \dfrac{1}{2}\|h\|$ 成立. 考虑到 (7.2.15) 式, 有

$$\|h\| \leqslant 2\|[f'(x)]^{-1}t\| = O(\|t\|) \quad (t \to 0),$$

它等价于关系式 $h = O(t)(t \to 0)$, 由此推出 $o(h) = o(t)(t \to 0)$. 这样, 从 (7.2.15) 与 (7.2.17) 式得到 $h = [f'(x)]^{-1}t + o(t)(t \to 0)$, 或

$$f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) = [f'(x)]^{-1}t + o(t) \quad (t \to 0). \qquad \square$$

由代数知识知道, 如果线性映射 $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 对应的矩阵是 $A$, 那么 $L$ 的逆线性映射 $L^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 对应的矩阵就是 $A$ 的逆阵 $A^{-1}$. 由代数知识我们还知道如何计算逆矩阵 $A^{-1}$ 的元素, 这就给出了一种构造映射 $(f^{-1})'(y)$ 的直接方法.

注意, 当 $m=1$, 即 $\mathbb{R}^m=\mathbb{R}$ 时, 映射 $f:U(x)\to V(y)$ 在点 $x$ 的雅可比行列式是一个数 $f'(x)$——函数 $f$ 在点 $x$ 的导数, 而线性映射 $f'(x):T\mathbb{R}_x\to T\mathbb{R}_y$ 是乘这个数的映射: $h\mapsto f'(x)h$. 这个线性映射有逆映射当且仅当 $f'(x)\neq 0$, 并且逆映射 $[f'(x)]^{-1}:T\mathbb{R}_y\to T\mathbb{R}_x$ 的矩阵同样由一个数 $[f'(x)]^{-1}$ 组成, 即数 $f'(x)$ 的倒数. 这就是说, 定理 4 包括了以前已经证明的反函数求导法则.

## 练　习

1. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

考察函数 $f$ 在原点 $(0,0)$ 的偏导数.

2. 求下列映射的微分:

(1) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;　　(2) $u=x^{y^z}$;

(3) $f(x,y)=(x\sin y,(x-y)^2,2y^2)$;　　(4) $f(x,y,z)=(x^2+y,y\mathrm{e}^{x+z})$.

3. 求下列复合函数的偏导数:

(1) 设 $z=x^2\ln y$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$;

(2) 设 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

4. 设 $f(x,y)$ 可微, 证明: 在坐标旋转变换

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\quad y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

之下, $(f'_x)^2+(f'_y)^2$ 是一个形式不变量, 即若

$$g(u,v)=f(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta),$$

则必有 $(f'_x)^2+(f'_y)^2=(g'_u)^2+(g'_v)^2$, 其中旋转角 $\theta$ 是常数.

5. 设函数 $u=\ln\dfrac{1}{r}$, 其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, 求 $u$ 的梯度, 并指出在空间哪些点上成立等式 $|\operatorname{grad}u|=1$.

6. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 试求:

(1) $\operatorname{grad}r$;　　(2) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}$.

7. 设 $f(x,y)$ 可微, $v_1$ 与 $v_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一组线性无关向量. 证明: 若 $D_{v_i}f(x,y)\equiv 0(i=1,2)$, 则 $f(x,y)\equiv$ 常数.

8. (1) 画出函数 $z=x^2+4y^2$ 的图像, 其中 $x$, $y$, $z$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的笛卡儿坐标.

(2) 设 $f:G\to\mathbb{R}$ 是定义在区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上的数值函数, 如果函数 $f$ 在集合 $E\subset G$ 上仅有一个值 $(f(E)=c)$, 精确地说, $E=f^{-1}(c)$, 则称集合 $E$ 是函数 $f$ 的等高集 ($c$-等高面). 在 $\mathbb{R}^2$ 中画出函数 $f(x,y)=x^2+4y^2$ 的等高集的图像.

(3) 求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2$ 的梯度, 并且证明: 在任一点 $(x,y)$ 处, 向量 $\operatorname{grad} f$ 与函数 $f$ 过此点的等高线垂直.

(4) 利用 (1)—(3) 的结果, 在曲面 $z=x^2+4y^2$ 上求出点 $(2,1,8)$ 到它的最低点 $(0,0,0)$ 的最短路径.

9. 我们说在空间 $\mathbb{R}^m$ 的区域 $G$ 中给定了一个向量场, 如果每一点 $x\in G$ 都对应于某个向量 $v(x)\in T\mathbb{R}^m_x$. 区域 $G$ 上的向量场 $v(x)$ 称为势场 (位场), 如果存在一个数值函数 $U:G\to\mathbb{R}$, 使得 $v(x)=\operatorname{grad}U(x)$. 函数 $U(x)$ 称为场 $v(x)$ 的势 (位)(在物理中, 通常称 $-U(x)$ 为势函数, 如果向量场是力场, 则称 $U(x)$ 为力函数).

(1) 设 $f_1(x,y)=x^2+y^2$; $f_2(x,y)=-(x^2+y^2)$; $f_3(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}(y>0)$; $f_4(x,y)=xy$. 在笛卡儿坐标平面上画出上面各个函数的梯度场.

(2) 根据牛顿定律, 位于点 $O\in\mathbb{R}^3$ 的质量为 $m$ 的质点对位于点 $x\in\mathbb{R}^3(x\neq 0)$ 的质量为 1 的质点的引力是 $\boldsymbol{F}=-\dfrac{m}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$, 其中 $\boldsymbol{r}$ 是向量 $\overrightarrow{Ox}$(我们省去了引力常数 $G$). 证明: 区域 $\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ 上的向量场 $\boldsymbol{F}(x)$ 是势场.

(3) 证明: 放在点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(i=1,\cdots,n)$ 处质量为 $m_i(i=1,\cdots,n)$ 的质点在这些点的外面所建立的牛顿力场的势函数是

$$U(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\sqrt{(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2+(z-\zeta_i)^2}}.$$

## 7.3　多变量实值函数微分学的基本事实

### 7.3.1　中值定理

**定理 1**　设 $f:G\to\mathbb{R}$ 是定义在区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上的实值函数, 闭区间 $[x,x+h]\subset G$. 如果 $f$ 在闭区间 $[x,x+h]$ 上连续, 在开区间 $(x,x+h)$ 上可微, 则存在点 $\xi\in(x,x+h)$, 使得下式成立

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=f'(\xi)h.} \tag{7.3.1}$$

**证**　考察定义在闭区间 $[0,1]$ 上的辅助函数

$$F(t)=f(x+th),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

函数 $F$ 满足拉格朗日定理所有的条件: 它是连续映射的复合, 因而在 $[0,1]$ 上连续, 而作为可微映射的复合, 在 $(0,1)$ 上可微, 因此存在点 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$F(1)-F(0)=F'(\theta)\cdot 1.$$

但是, $F(1)=f(x+h),F(0)=f(x),F'(\theta)=f'(x+\theta h)h$, 由此得证定理 1.　□

现在把关系式 (7.3.1) 写成坐标形式. 如果 $x=(x^1,\cdots,x^m), h=(h^1,\cdots,h^m)$, $\xi=(x^1+\theta h^1,\cdots,x^m+\theta h^m)$, 那么等式 (7.3.1) 可写为

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= f(x^1+h^1,\cdots,x^m+h^m)-f(x^1,\cdots,x^m) \\ &= f'(\xi)h=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^m}(\xi)\right)\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix} \\ &= \partial_1 f(\xi)h^1+\cdots+\partial_m f(\xi)h^m \\ &= \sum_{i=1}^{m}\partial_i f(x^1+\theta h^1,\cdots,x^m+\theta h^m)h^i. \end{aligned}$$

利用以前关于重复上、下指标求和的约定, 最后可将上式写成

$$\begin{aligned} & f(x^1+h^1,\cdots,x^m+h^m)-f(x^1,\cdots,x^m) \\ =& \partial_i f(x^1+\theta h^1,\cdots,x^m+\theta h^m)h^i, \end{aligned} \tag{7.3.1$'$}$$

其中 $0<\theta<1$, 且 $\theta$ 与 $x,h$ 有关.

**注 1** 由于能够找到满足等式 (7.3.1) 的某个 "中间点"$\xi\in(x,x+h)$, 因此称定理 1 为中值定理. 在拉格朗日定理的讨论中我们已经发现, 中值定理是*实值函数所特有*的. 关于映射的一般的有限增量定理, 将在以后给出.

由定理 1 得到有用的如下推论.

**推论 1** 如果函数 $f:G\to\mathbb{R}$ 在区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上可微, 并且在 $G$ 的任一点 $x$ 它的微分等于零, 则 $f$ 在 $G$ 上是常数.

**证** 注意, 区域是连通开集, 我们将利用这一点.

首先证明, $\forall x\in G$, 存在球 $B(x;r)\subset G$, 使得 $f$ 在球 $B(x;r)$ 上为常数. 事实上, 若 $x+h\in B(x;r)$, 则 $[x,x+h]\subset B(x;r)\subset G$. 应用关系式 (7.3.1) 或 (7.3.1$'$), 得到

$$f(x+h)-f(x)=f'(\xi)h=0\cdot h=0.$$

即 $f(x+h)=f(x)$, 也就是说, $f$ 在球 $B(x;r)$ 上的值皆等于 $f$ 在球心的值.

现在设 $x_0,x_1\in G$ 是区域 $G$ 中任意两点, 因 $G$ 是连通的, 所以存在一条连接 $x(0)=x_0$ 与 $x(1)=x_1$ 的道路 $t\mapsto x(t)\in G$. 我们假定连续映射 $t\mapsto x(t)$ 定义在闭区间 $[0,1]$ 上, 并设 $B(x_0;r)\subset G$, 因为 $x(0)=x_0$, 且映射 $t\mapsto x(t)$ 连续, 所以存在数 $0<\delta\leqslant 1$, 当 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时, 有 $x(t)\in B(x_0;r)\subset G$. 由上所证, 当 $t\in[0,\delta]$ 时, 有 $f\circ x(t)\equiv f(x_0)$. 设

$$l=\sup\{\delta_1|f\circ x(t)=f(x_0),0\leqslant t\leqslant\delta_1\leqslant 1\},$$

显然有 $0 < l \leqslant 1$, 由函数 $f(x(t))$ 在 $[0,1]$ 上的连续性有 $f(x(l)) = f(x_0)$. 但这时有 $l = 1$. 事实上, 若不然, 假设 $l < 1$, 则存在球 $B(x(l);r) \subset G$, 使得 $f$ 在此球上有 $f(x) = f(x(l)) = f(x_0)$, 因函数 $t \mapsto x(t)$ 连续, 则存在 $\Delta > 0$, 对一切满足 $l \leqslant t \leqslant l + \Delta$ 的 $t$, 有 $x(t) \in B(x(l);r)$, 且

$$f \circ x(t) = f(x(l)) = f(x_0), \quad l \leqslant t \leqslant l + \Delta,$$

这与 $l$ 的定义矛盾. 因此证明了, 对一切 $t \in [0,1]$, 有 $f \circ x(t) = f(x_0)$. 特别地, $f(x_1) = f \circ x(1) = f(x_0)$, 从而验明, 对任意两点 $x_0, x_1 \in G$, 函数 $f : G \to \mathbb{R}$ 的值是相同的. □

### 7.3.2　多变量函数可微性的充分条件

**定理 2**　设 $f : U(x) \to \mathbb{R}$ 是定义在点 $x = (x^1, \cdots, x^m)$的邻域 $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ 上的函数. 如果函数 $f$ 在邻域 $U(x)$ 上每一点的所有偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x^m}$ 都存在, 且它们在点 $x$ 连续, 则函数 $f$ 在此点可微.

**证**　不失一般性, 可以认为 $U(x)$ 是球 $B(x;r)$. 易知, 若点 $x = (x^1, \cdots, x^m)$ 与点 $x + h = (x^1 + h^1, \cdots, x^m + h^m)$ 属于球 $B(x;r)$, 则点 $(x^1, x^2 + h^2, \cdots, x^m + h^m), \cdots, (x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}, x^m + h^m)$ 以及连接它们的线段皆属于 $B(x;r)$. 利用一个变量的函数的拉格朗日定理有

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x)\\
=&f(x^1 + h^1, \cdots, x^m + h^m) - f(x^1, \cdots, x^m)\\
=&f(x^1 + h^1, \cdots, x^m + h^m) - f(x^1, x^2 + h^2, \cdots, x^m + h^m)\\
&+ f(x^1, x^2 + h^2, \cdots, x^m + h^m) - f(x^1, x^2, x^3 + h^3, \cdots, x^m + h^m)\\
&+ f(x^1, x^2, x^3 + h^3, \cdots, x^m + h^m) - \cdots\\
&+ f(x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}, x^m + h^m) - f(x^1, \cdots, x^m)\\
=&\partial_1 f(x^1 + \theta^1 h^1, x_2 + h^2, \cdots, x^m + h^m)h^1\\
&+ \partial_2 f(x^1, x^2 + \theta^2 h^2, x^3 + h^3, \cdots, x^m + h^m)h^2\\
&+ \cdots + \partial_m f(x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}, x^m + \theta^m h^m)h^m.
\end{aligned}$$

到此, 我们仅仅用到了函数在邻域 $U(x)$ 上偏导数的存在性. 下面要利用偏导数在点 $x$ 的连续性. 继续上面的计算, 得到

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) =& \partial_1 f(x^1, \cdots, x^m)h^1 + \alpha_1 h^1 + \partial_2 f(x^1, \cdots, x^m)h^2\\
&+ \alpha_2 h^2 + \cdots + \partial_m f(x^1, \cdots, x^m)h^m + \alpha_m h^m,
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 由于偏导数在点 $x$ 的连续性, 它们当 $h\to 0$ 时, 都趋于零. 但这意味着

$$f(x+h)-f(x)=L(x)h+o(h)\quad (h\to 0),$$

其中 $L(x)h=\partial_1 f(x^1,\cdots,x^m)h^1+\cdots+\partial_m f(x^1,\cdots,x^m)h^m$. □

从定理 2 推知, 如果函数 $f:G\to\mathbb{R}$ 的偏导数在区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上连续, 那么函数在区域 $G$ 的任一点都可微.

今后我们约定用记号 $C^{(1)}(G;\mathbb{R})$ 或更简单地用 $C^{(1)}(G)$ 表示区域 $G$ 上具有连续偏导数的函数的集合.

### 7.3.3 高阶偏导数

如果函数 $f:G\to\mathbb{R}$ 定义在区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上, 且对每个变量 $x^i(i=1,\cdots,m)$ 有偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x)$, 那么这个偏导数又是一个新函数 $\partial_i f:G\to\mathbb{R}$, 它同样关于某个 $x^j$ 可以有偏导数 $\partial_j(\partial_i f)(x)$.

函数 $\partial_j(\partial_i f)(x):G\to\mathbb{R}$ 称为**函数 $f$ 关于变量 $x^i,x^j$ 的二阶导数**, 并记作

$$\partial_{ji}f(x)\quad 或\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}.$$

记号中指标的次序指出了函数按怎样的顺序关于相应变量求偏导数.

上面我们定义了二阶偏导数, 如果已经定义了 $k$ 阶偏导数

$$\partial_{i_1\cdots i_k}f(x)=\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}(x),$$

那么可用归纳法定义 $k+1$ 阶偏导数:

$$\partial_{ii_1\cdots i_k}f(x):=\partial_i(\partial_{i_1\cdots i_k}f)(x).$$

对于多变量函数的高阶偏导数, 发生了一个特殊的问题, 即微分的顺序对要计算的偏导数有影响吗?

**定理 3** 设函数 $f:G\to\mathbb{R}$ 在区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上存在偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(x),$$

如果它们在点 $x\in G$ 连续, 则它们在这一点相等.

**证** 设 $x\in G$, 且函数 $\partial_{ij}f:G\to\mathbb{R}$ 与 $\partial_{ji}f:G\to\mathbb{R}$ 在点 $x$ 连续. 下面将在某个球 $B(x;r)\subset G, r>0$ (它是点 $x$ 的凸邻域) 上来考察此问题, 我们希望证明:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x^1,\cdots,x^m)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(x^1,\cdots,x^m).$$

由于在下面的研究中改变的仅仅是变量 $x^i$ 与 $x^j$, 因此, 为了简单, 可假定 $f$ 是两个变量 $x^1$ 与 $x^2$ 的函数 $f(x^1,x^2)$, 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}$ 在点 $(x^1,x^2)\in B(x;r)\subset G\subset\mathbb{R}^2$ 连续, 要证明

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}(x^1,x^2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}(x^1,x^2).$$

考察辅助函数

$$F(h^1,h^2)=f(x^1+h^1,x^2+h^2)-f(x^1+h^1,x^2)-f(x^1,x^2+h^2)+f(x^1,x^2),$$

其中假定增量 $h=(h^1,h^2)$ 足够小, 使得 $x+h\in B(x;r)$.

如果把函数 $F(h^1,h^2)$ 写成差的形式

$$F(h^1,h^2)=\varphi(1)-\varphi(0),$$

其中 $\varphi(t)=f(x^1+th^1,x^2+h^2)-f(x^1+th^1,x^2)$, 那么由拉格朗日定理有

$$F(h^1,h^2)=\varphi'(\theta_1)=(\partial_1 f(x^1+\theta_1h^1,x^2+h^2)-\partial_1 f(x^1+\theta_1h^1,x^2))h^1,$$

对这个差再次应用拉格朗日定理, 有

$$F(h^1,h^2)=\partial_{21}f(x^1+\theta_1h^1,x^2+\theta_2h^2)h^1h^2. \tag{7.3.2}$$

如果把 $F(h^1,h^2)$ 表成另一差的形式

$$F(h^1,h^2)=\tilde{\varphi}(1)-\tilde{\varphi}(0),$$

其中 $\tilde{\varphi}(t)=f(x^1+h^1,x^2+th^2)-f(x^1,x^2+th^2)$, 那么类似地有

$$F(h^1,h^2)=\partial_{12}f(x^1+\tilde{\theta}_1h^1,x^2+\tilde{\theta}_2h^2)h^1h^2. \tag{7.3.3}$$

比较等式 (7.3.2) 与 (7.3.3), 可以断定

$$\partial_{21}f(x^1+\theta_1h^1,x^2+\theta_2h^2)=\partial_{12}f(x^1+\tilde{\theta}_1h^1,x^2+\tilde{\theta}_2h^2), \tag{7.3.4}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2\in(0,1)$. 利用偏导数在点 $(x^1,x^2)$ 的连续性, 在 (7.3.4) 式中令 $h\to 0$, 就得到所需要的等式 $\partial_{21}f(x^1,x^2)=\partial_{12}f(x^1,x^2)$. □

注意, 如果两个偏导数 $\partial_{ij}f$ 与 $\partial_{ji}f$ 在点 $x$ 仅仅存在, 且对它不加任何补充假定, 一般来说, 不能断定等式 $\partial_{ij}f(x)=\partial_{ji}f(x)$ 成立 (参看本节末的习题 5).

我们约定用记号 $C^{(k)}(G;\mathbb{R})$ 或 $C^{(k)}(G)$ 表示定义在区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上具有直到 $k$ 阶连续偏导数的函数 $f:G\to\mathbb{R}$ 的集合.

作为定理 3 的推论, 有如下命题.

**命题 1** 如果 $f \in C^{(k)}(G;\mathbb{R})$, 则偏导数的值 $\partial_{i_1\cdots i_k} f(x)$ 不依赖于对 $x^{i_1},\cdots,x^{i_k}$ 微分的次序, 也就是说, 任意排列的指标 $i_1,\cdots,i_k$ 都不会改变偏导数的值.

**证** 当 $k=2$ 时, 此命题含于定理 3 中, 兹假定直到 $n$ 阶命题都成立, 证它对 $n+1$ 阶成立.

观察 $\partial_{i_1 i_2\cdots i_{n+1}} f(x) = \partial_{i_1}(\partial_{i_2\cdots i_{n+1}} f)(x)$. 由归纳假定, 指标 $i_2,\cdots,i_{n+1}$ 可以重新排列而不会影响函数 $\partial_{i_2\cdots i_{n+1}} f$ 在点 $x$ 的值, 从而也不会影响函数 $\partial_{i_1 i_2\cdots i_{n+1}} f$ 在点 $x$ 的值. 因此只要证明, 假如改变 $i_1$ 与 $i_2$ 的次序不会影响导数 $\partial_{i_1 i_2\cdots i_{n+1}} f(x)$ 就可以了.

因为

$$\partial_{i_1 i_2\cdots i_{n+1}} f(x) = \partial_{i_1 i_2}(\partial_{i_3\cdots i_{n+1}} f)(x),$$

那么由定理 3 直接得知 $i_1$ 与 $i_2$ 交换次序不会改变上述导数值. 于是根据归纳法, 证明了命题 1. □

**例 1** 设 $f(x) = f(x^1,x^2)$ 是函数类 $C^{(k)}(G;\mathbb{R})$ 中的函数. 任取 $h=(h^1,h^2)$, 使得闭区间 $[x,x+h]$ 含在区域 $G$ 中. 兹证闭区间 $[0,1]\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $\varphi(t) = f(x+th)$ 属于 $C^{(k)}[0,1]$, 并求它对于 $t$ 的 $k$ 阶导数.

据定义

$$\varphi'(t) = \partial_1 f(x^1+th^1, x^2+th^2)h^1 + \partial_2 f(x^1+th^1, x^2+th^2)h^2,$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) =& \partial_{11} f(x+th)h^1h^1 + \partial_{21} f(x+th)h^2h^1 + \partial_{12} f(x+th)h^1h^2 + \partial_{22} f(x+th)h^2h^2\\ =& \partial_{11} f(x+th)(h^1)^2 + 2\partial_{12} f(x+th)h^1h^2 + \partial_{22} f(x+th)(h^2)^2.\end{aligned}$$

这些关系式可以写成算子 $(h^1\partial_1 + h^2\partial_2)$ 作用于函数的形式:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (h^1\partial_1 + h^2\partial_2) f(x+th) = h^i\partial_i f(x+th),\\ \varphi''(t) &= (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^2 f(x+th) = h^{i_1}h^{i_2}\partial_{i_1 i_2} f(x+th).\end{aligned}$$

由归纳法得到

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(t) &= (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^k f(x+th)\\ &= h^{i_1}\cdot\cdots\cdot h^{i_k}\partial_{i_1\cdots i_k} f(x+th)\end{aligned}$$

(上式右边简记符号指的是关于各种可能的指标 $i_1,\cdots,i_k$ 的和式, 这些指标取数值 1 或 2).

**例 2** 设 $f(x) = f(x^1,\cdots,x^m)$, 且 $f\in C^{(k)}(G;\mathbb{R})$, 假定 $[x,x+h]\subset G$. 对于定义在闭区间 $[0,1]\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $\varphi(t) = f(x+th)$, 我们得到

$$\varphi^{(k)}(t) = h^{i_1}\cdot\cdots\cdot h^{i_k}\partial_{i_1\cdots i_k} f(x+th), \tag{7.3.5}$$

其中简记符号指的是关于各种可能的指标 $i_1,\cdots,i_k$ 的和式, 这些指标取从 1 到 $m$ 的所有可能的值.

公式 (7.3.5) 也可以写成下面的形式

$$\varphi^{(k)}(t)=(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^k f(x+th). \tag{7.3.6}$$

### 7.3.4　泰勒公式

**定理 4**　如果函数 $f:U(x)\to\mathbb{R}$ 在点 $x\in\mathbb{R}^m$ 的邻域 $U(x)\subset\mathbb{R}^m$ 上有定义, 并且属于函数类 $C^{(n)}(U(x);\mathbb{R})$, 而 $[x,x+h]\subset U(x)$, 则有

$$\begin{aligned}&f(x^1+h^1,\cdots,x^m+h^m)-f(x^1,\cdots,x^m)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^k f(x)+r_{n-1}(x;h),\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

其中

$$r_{n-1}(x;h)=\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^n f(x+th)\mathrm{d}t. \tag{7.3.8}$$

等式 (7.3.7) 与 (7.3.8) 一起称为*具积分形式余项的泰勒公式*.

**证**　泰勒公式 (7.3.7) 可立即从单变量函数的泰勒公式得到. 事实上, 考察辅助函数 $\varphi(t)=f(x+th)$, 由定理 4 的条件知道它定义在闭区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 并且属于 $C^{(n)}[0,1]$.

当 $\tau\in[0,1]$ 时, 由单变量函数的泰勒公式可以得到

$$\begin{aligned}\varphi(\tau)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)\tau+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\tau^{n-1}\\+\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t\tau)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

令 $\tau=1$, 有

$$\begin{aligned}\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\\+\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

把由公式 (7.3.6) 得到的

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(0)&=(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^k f(x)\quad(k=0,1,\cdots,n-1),\\\varphi^{(n)}(t)&=(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^n f(x+th),\end{aligned}$$

代入上式就得到定理 4 的结论. □

**注 2** 尚有具其他形式余项的泰勒公式.

在 (7.3.9) 式中用拉格朗日余项代替积分余项, 那么从等式

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta),$$

其中 $0<\theta<1$, 得到带有余项

$$r_{n-1}(x;h)=\frac{1}{n!}(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^n f(x+\theta h) \tag{7.3.10}$$

的泰勒公式 (7.3.7). 这个余项称为*具有拉格朗日形式的泰勒公式余项*.

• 既然 $f\in C^{(n)}(U(x);\mathbb{R})$, 那么从 (7.3.10) 式得到

$$r_{n-1}(x;h)=\frac{1}{n!}(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^n f(x)+o(\|h\|^n)\quad(h\to 0),$$

因此有

$$\begin{aligned}&f(x^1+h^1,\cdots,x^m+h^m)-f(x^1,\cdots,x^m)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(h^1\partial_1+\cdots+h^m\partial_m)^k f(x)+o(\|h\|^n)\quad(h\to 0),\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

叫做*具有佩亚诺形式余项的泰勒公式*.

### 7.3.5 多变量函数的极值

微分学的重要应用之一是利用它寻求和研究函数的极值.

**定义 1** 设函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 定义在集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ 上. 如果对于 $E$ 的内点 $x_0$, 存在邻域 $U(x_0)\subset E$, 当 $x\in U(x_0)$ 时, 有 $f(x)\leqslant f(x_0)(f(x)\geqslant f(x_0))$, 则称函数 $f$ 在 $E$ 的内点 $x_0$ 有*局部极大值 (局部极小值)*. 如果对 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 有严格不等式 $f(x)<f(x_0)(f(x)>f(x_0))$, 则称函数 $f$ 在 $x_0$ 有*严格局部极大值 (严格局部极小值)*. 函数的局部极小值与局部极大值统称为函数的*局部极值*.

**定理 5** 设函数 $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ 定义在 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 的邻域 $U(x_0)\subset\mathbb{R}^m$ 上, 并且它在点 $x_0$ 关于每个变量 $x^1,\cdots,x^m$ 存在偏导数, 如果函数 $f$ 在点 $x_0$ 有局部极值, 则有

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)=0,\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)=0. \tag{7.3.12}$$

**证** 考察一个变量的函数 $\varphi(x^1)=f(x^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)$, 由定理条件知, 它在实轴上的点 $x_0^1$ 的某个邻域上有定义, 并且它在 $x_0^1$ 有局部极值, 因此

$$\varphi'(x_0^1)=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)=0.$$

类似地可以证明 (7.3.12) 式中其余的等式. □

注意, (7.3.12) 式仅仅给出多变量函数极值的必要条件, 但不是充分条件, 为了证实这一点, 可以从单变量函数这方面的反例着手. 譬如, 如果以前我们知道函数 $x \mapsto x^3$ 在零点有零导数, 但它在此点无极值, 那么现在就可以考察函数

$$f(x_1^1, \cdots, x_1^m) = (x^1)^3.$$

它在点 $x_0 = (0, \cdots, 0)$ 的所有偏导数都等于零, 但是它在此点显然不存在极值.

定理 5 指出, 如果函数 $f : G \to \mathbb{R}$ 定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上, 那么在它的局部极值点或者 $f$ 不可微, 或者微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 等于零, 亦即切映射 $f'(x_0)$ 等于零.

我们知道, 如果定义在点 $x_0 \in \mathbb{R}^m$ 的邻域 $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ 上的映射 $f : U(x_0) \to \mathbb{R}^n$ 在点 $x_0$ 可微, 那么切映射 $f'(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x_0) & \cdots & \partial_m f^1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n(x_0) & \cdots & \partial_m f^n(x_0) \end{pmatrix}. \tag{7.3.13}$$

**定义 2**　点 $x_0$ 称为映射 $f : U(x_0) \to \mathbb{R}^n$ 的**临界点**, 如果映射在这点的雅可比矩阵 (7.3.13) 的秩小于 $\min\{m, n\}$, 也就是说, 比矩阵 (7.3.13) 可能的最大秩要小. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 如果满足条件 (7.3.12), 亦即函数 $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ 的所有偏导数都等于零, 则点 $x_0$ 为临界点.

实值函数的临界点同时也称为这个函数的**稳定点**.

我们通过解方程组 (7.3.12) 求得函数的临界点, 然后进一步分析它们是不是函数的极值点, 这个工作得以顺利进行是由于利用了由泰勒公式以及由它得到的下面的极值是否存在的充分条件.

**定理 6**　设 $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ 是定义在 $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m)$ 的邻域 $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ 上且属于 $C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$ 的函数, 点 $x_0$ 是函数 $f$ 的临界点. 如果函数在 $x_0$ 的泰勒展开式

$$\begin{aligned} &f(x_0^1 + h^1, \cdots, x_0^m + h^m) \\ &= f(x_0^1, \cdots, x_0^m) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j + o(\|h\|^2) \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

中的二次型

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j \equiv \partial_{ij} f(x_0) h^i h^j, \tag{7.3.15}$$

(1) 有确定的符号, 则函数 $f$ 在 $x_0$ 取得局部极值. 当二次型 (7.3.15) 是正定的时候, $f$ 在 $x_0$ 取得严格局部极小值; 当二次型 (7.3.15) 是负定的时候, $f$ 在 $x_0$ 取得严格局部极大值.

(2) 具有不同的符号, 则函数 $f$ 在 $x_0$ 没有极值.

**证** 设 $h \neq 0, x_0 + h \in U(x_0)$, 把 (7.3.14) 式写成如下形式

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left[ \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \frac{h^i}{\|h\|} \frac{h^j}{\|h\|} + o(1) \right], \tag{7.3.16}$$

其中 $o(1)$ 当 $h \to 0$ 时是无穷小量. 易见差式 $f(x_0+h) - f(x_0)$ 的符号完全由右端方括号内的量的符号决定.

向量 $e = \left( \dfrac{h^1}{\|h\|}, \cdots, \dfrac{h^m}{\|h\|} \right)$ 的范数显然是 1. 作为 $h$ 的函数, 二次型 (7.3.15) 在 $\mathbb{R}^m$ 上连续, 因此它在单位球面 $S(0;1) = \{x \in \mathbb{R}^m | \|x\| = 1\}$ 上连续且有界. 由于 $S$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集, 二次型 (7.3.15) 在 $S$ 上取得最小值 $m$ 与最大值 $M$.

如果二次型 (7.3.15) 是正定的, 那么有 $0 < m \leqslant M$, 并且可找到一个 $\delta > 0$, 使得当 $\|h\| < \delta$ 时有 $|o(1)| < m$. 这时 (7.3.16) 式右边方括号中的量保持正号, 也就是说, 当 $0 < \|h\| < \delta$ 时, 有 $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, 因此, 点 $x_0$ 是函数 $f$ 的严格局部极小值点.

类似地可以证明, 当二次型 (7.3.15) 是负定时, 函数 $f$ 在 $x_0$ 取得严格局部极大值.

这样定理 6 的 (1) 就证完了, 现在来证明结论 (2).

设 $e_m, e_M \in S$ 使得二次型 (7.3.15) 在 $e_m, e_M$ 分别取值 $m, M$, 而且 $m < 0 < M$. 令 $h = te_m$, 其中 $t > 0$ 充分小, 使得 $x_0 + h \in U(x_0)$, 从 (7.3.16) 式得到

$$f(x_0 + te_m) - f(x_0) = \frac{1}{2!}t^2(m + o(1)),$$

其中 $o(1) \to 0$ 当 $t \to 0$ 时. 当 $t$ 充分小时, $m + o(1)$ 与 $m$ 的符号相同, 即负号, 因而上式左边也取负号.

类似地, 令 $h = te_M$, 得

$$f(x_0 + te_M) - f(x_0) = \frac{1}{2!}t^2(M + o(1)),$$

从而, 当 $t$ 充分小时, 差式 $f(x_0 + te_M) - f(x_0)$ 是正的.

这样, 如果二次型 (7.3.15) 在单位球面上, 等价地, 在 $\mathbb{R}^m$ 上具有不同的符号, 那么在点 $x_0$ 的任一邻域内可以找到一个点, 使得函数在此点的值大于 $f(x_0)$, 同时又可找到另一个点, 使得函数在此点之值小于 $f(x_0)$. 因此, 点 $x_0$ 不是函数 $f$ 的局部极值点. □

**注 3**　若二次型 (7.3.15) 仅是半定 (非正或非负) 的情形, 点 $x_0$ 可以是也可以不是 $f$ 的局部极值点.

**例 3**　求定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2$ 的极值.

按照必要条件 (7.3.12) 写出方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-4x=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3=0, \end{cases}$$

求得三个临界点: $(-1,0),(0,0),(1,0)$. 因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\equiv 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2,$$

那么二次型 (7.3.15) 在上面三个临界点处分别有值

$$8(h^1)^2,\quad -4(h^1)^2,\quad 8(h^1)^2,$$

也就是说, 在所有三种情况它都是半定的 (非正的或非负的), 这时不能应用定理 6. 但是因为 $f(x,y)=(x^2-1)^2+y^4-1$, 显然看出, 函数 $f$ 在点 $(-1,0)$ 与 $(1,0)$ 处有严格极小值 $-1$(甚至不是局部的), 而在点 $(0,0)$ 它没有极值, 这是因为当 $x=0,y\neq 0$ 时, $f(0,y)=y^4>0$, 而当 $y=0,x$ 充分小但不为零时, $f(x,0)=x^4-2x^2<0$.

**注 4**　当二次型 (7.3.15) 得到以后, 可以利用代数教材中有名的西尔维斯特准则① 研究它的确定性. 根据这个准则, 具有对称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

的二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x^ix^j$ 正定, 当且仅当, 它的矩阵的所有主子式都大于零; 它负定, 当且仅当, $a_{11}<0$, 且每一主子式与下一阶主子式有相反的符号.

**例 4**　求 $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ 的极值.

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}=0, \end{cases}$$

① 西尔维斯特 (J. J. Sylvester)(1814—1897)——英国数学家, 他最有名的工作是在代数方面.

得到函数所有的临界点:

$$(0,\pm1),\quad (\pm1,0),\quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\pm\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right),\quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\mp\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right).$$

因为函数关于两个自变量中的每一个都是奇函数, 所以点 $(0,\pm1)$ 与 $(\pm1,0)$ 显然不是函数的极值点. 另外, 当两个变量 $x$ 与 $y$ 同时改变符号时, 函数值不会改变, 因此, 我们只要研究剩下来的临界点中的一个, 例如点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$, 就可以推断其他点的性质了. 因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{6xy}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\ln(x^2+y^2)+2-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{6xy}{x^2+y^2}-\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

所以二次型 $\partial_{ij}f(x_0,y_0)h^ih^j$ 在点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},$$

因此, 它是正定的, 从而, 函数在此点有局部极小值 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

由上面看到的所考察的函数的特点, 可以断定 $f\left(\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$ 也是函数的极小值, 而

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)=f\left(\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

是函数的局部极大值. 其实, 这些结论都可以直接由二次型的确定性来验证. 例如, 二次型 (7.3.15) 在点 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix},$$

由此看出二次型是负定的.

**注 5** 应当注意, 我们得到的关于函数极值的必要条件 (定理 5) 与充分条件 (定理 6) 仅仅适用于函数定义域中的内点. 这样, 在寻求函数的最大值或最小值时,

除了必须研究内部的临界点外, 还要研究定义域的边界点, 因为函数的最大值或最小值可能在边界点取到.

更详细地研究函数在非内点处极值的一般法则在以后叙述 (参看条件极值一节). 在寻求函数的极大值与极小值时, 除正式的作法外, 有时可利用与问题性质有关的一些简单的想法. 注意到这一点是有益的. 例如, 如果所考察的在 $\mathbb{R}^m$ 上可微的函数, 按问题的意义应当有极小值, 它在 $\mathbb{R}^m$ 上无上界, 且有唯一的临界点, 那么可以不作进一步研究就能断定函数在此点具有极小值.

### 7.3.6　与多变量函数有关的某些几何形象

1. 函数图像与曲线坐标

设 $x, y, z$ 是空间 $\mathbb{R}^3$ 中点的笛卡儿坐标, $z = f(x, y)$ 是定义在平面 $\mathbb{R}^2$ 的某个区域 $G$ 上的变量 $(x, y)$ 的连续函数. 函数 $f : G \to \mathbb{R}$ 的图像是空间 $\mathbb{R}^3$ 中的集合

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in G, z = f(x, y)\}.$$

用关系式 $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ 定义的映射 $G \xrightarrow{F} S$ 显然是连续的相互单值的从 $G$ 到 $S$ 上的映射. $S$ 上任一点 $(x, y, f(x, y))$ 都可通过指出与它对应的 $(x, y) \in G$ 而确定. 因此可以把数对 $(x, y)$ 看成 $S$ (即 $z = f(x, y)$ 的图像) 上点的一种**坐标**. 因为 $S$ 的点是用数对 $(x, y)$ 给出的, 故称 $S$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的**二维曲面**(曲面的一般定义以后再给出).

如果给出 $G$ 中的道路 $\Gamma : I \to G$, 那么自然得到曲面 $S$ 上的道路 $F \circ \Gamma : I \to S$, 如果道路 $\Gamma$ 用参数式 $x = x(t), y = y(t)$ 给出, 那么 $S$ 上的道路 $F \circ \Gamma$ 用三个函数 $x = x(t), y = y(t), z = f(x(t), y(t))$ 给出. 特别地, 如果设 $x = x_0 + t, y = y_0$, 那么我们得到曲面 $S$ 上的曲线 $x = x_0 + t, y = y_0, z = f(x_0 + t, y_0)$, 沿着这条曲线, 曲面 $S$ 上点 $(x, y, z)$ 的坐标 $y = y_0$ 保持不变. 类似地, 可以得到曲面 $S$ 上另一条曲线 $x = x_0, y = y_0 + t, z = f(x_0, y_0 + t)$, 沿着它, 曲面 $S$ 上点 $(x, y, z)$ 的第一个坐标 $x = x_0$ 保持不变. 曲面 $S$ 上的这些线, 类似于平面情况, 自然称为曲面 $S$ 上的坐标线. $G \subset \mathbb{R}^2$ 中的坐标线是一段直线, 曲面 $S$ 上的坐标线不同, 一般说是 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线. 由于这个原因, 曲面 $S$ 上点的坐标 $(x, y)$ 常称为 $S$ 上的**曲线坐标**.

因此, 定义在区域 $G \subset \mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $z = f(x, y)$ 的图像是 $\mathbb{R}^3$ 中的二维曲面, 它的点可以用曲线坐标 $(x, y) \in G$ 表示.

2. 函数图像的切平面

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0) \in G$ 可微, 它的图像 $S = \{(x, y, f(x, y)) \,|\, (x, y) \in G\}$ 在点 $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 的**切平面**定义为

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{7.3.17}$$

由于

$$f(x,y)=z+o\big(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\big), \tag{7.3.18}$$

可见函数图像上的点 $(x,y,f(x,y))$ 与平面 (7.3.17) 上的点 $(x,y,z(x,y))$ 的偏差与量 $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$ (即从点 $(x_0,y_0,z_0)$, $z_0=f(x_0,y_0)$ 的坐标 $(x_0,y_0)$ 到图像上点 $(x,y,z(x,y))$ 的曲线坐标 $(x,y)$ 的位移) 比较是一个无穷小量.

于是, 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的可微性与这个函数的图像在点 $P_0$ 存在切平面是等价的.

3. 法向量

把切平面方程 (7.3.17) 写成标准形式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-f(x_0,y_0))=0,$$

由此可知, 向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ -1\right) \tag{7.3.19}$$

是切平面的**法向量**. 它的方向看作曲面 $S$ (函数图像) 在点 $P_0$ 的法向或正交于 $S$ 的方向.

特别地, 如果点 $(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的临界点, 那么图像在点 $P_0$ 处的法向量为 $(0,0,-1)$, 从而, 函数图像在这个点的切平面是水平的 (平行于平面 $(x,y)$).

下面的三个函数图像可以说明上边所说的内容.

图 37 中的 (a) 与 (c) 描绘了在局部极值点邻域中函数的图像相对于它的切平面的位置. 在图 37 中的 (b) 画出了函数图像在所谓鞍形临界点邻域的情形.

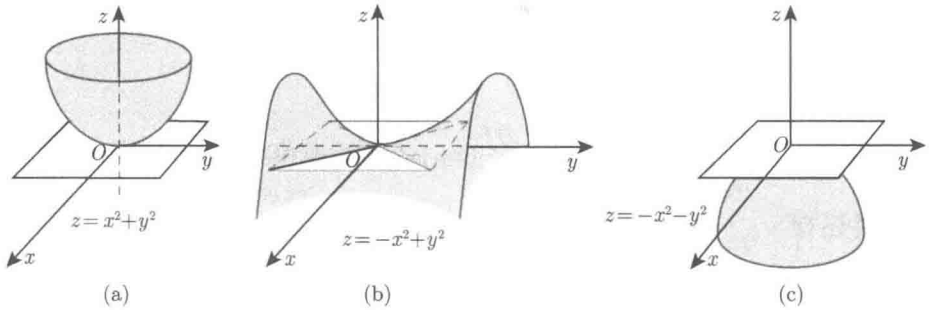



图 37

4. 切平面和切向量

我们知道, 如果 $\mathbb{R}^3$ 中的道路 $\Gamma: I\to\mathbb{R}^3$ 的表示式 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$

是可微函数, 那么向量 $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0))$ 是时刻 $t=0$ 的速度向量. 这个向量通过道路 $\Gamma$ 的承载子上的点 $x_0=x(0), y_0=y(0), z_0=z(0)$ 且与曲线相切.

现在考察函数 $z=f(x,y)$ 图像上的道路 $\Gamma: I \to S$, 它的表示式为 $x=x(t), y=y(t), z=f(x(t),y(t))$. 这时有

$$(\dot{x}(0),\ \dot{y}(0),\ \dot{z}(0)) = \left(\dot{x}(0),\ \dot{y}(0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\dot{x}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\dot{y}(0)\right),$$

此向量垂直于函数图像 $S$ 在点 $P_0$ 的法向量 (即 (7.3.19) 式). 这样, 我们证明了, 如果向量 $(\xi,\eta,\zeta)$ 在点 $P_0$ 与曲面 $S$ 上过此点的某曲线相切, 那么它垂直于向量 (7.3.19) 并且 (在这种意义下) 在平面 (7.3.17) 上, 这个平面在所指出的点与曲面 $S$ 相切. 更确切地可以说, 所有直线

$$x=x_0+\xi t, \quad y=y_0+\eta t, \quad z=f(x_0,y_0)+\zeta t$$

都在切平面 (7.3.17) 上.

相反的命题也是对的, 即若直线 $x=x_0+\xi t, y=y_0+\eta t, z=f(x_0,y_0)+\zeta t$, 或向量 $(\xi,\eta,\zeta)$ 位于函数 $z=f(x,y)$ 图像 $S$ 在点 $P_0$ 的切平面 (7.3.17) 上, 那么在 $S$ 上存在一条道路, 使得向量 $(\xi,\eta,\zeta)$ 是它在点 $P_0$ 的速度向量.

作为这样的道路, 可以取

$$x=x_0+\xi t, \quad y=y_0+\eta t, \quad z=f(x_0+\xi t, y_0+\eta t).$$

事实上, 对于它, 有

$$\dot{x}(0)=\xi, \quad \dot{y}(0)=\eta, \quad \dot{z}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\xi+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\eta,$$

由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\dot{x}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\dot{y}(0)-\dot{z}(0)=0,$$

且按条件还有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\xi+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\eta-\zeta=0,$$

我们断定 $(\dot{x}(0),\dot{y}(0),\dot{z}(0))=(\xi,\eta,\zeta)$.

于是, 曲面 $S$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面是由通过 $S$ 上的点 $(x_0,y_0,z_0)$ 且与曲面上过这个点的曲线相切的向量组成的(图 38).

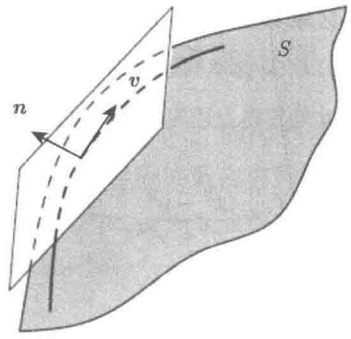



图 38

以上的一切叙述显然可以推广到一般的 $m \in \mathbb{N}$ 个变量的函数

$$y = f(x^1, \cdots, x^m) : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

- 其图像记为

$$S = \{(x^1, \cdots, x^m, f(x^1, \cdots, x^m)) \mid (x^1, \cdots, x^m) \in G\}.$$

- $S$ 在点 $P_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m, f(x_0^1, \cdots, x_0^m))$ 处的切平面是

$$y = f(x_0^1, \cdots, x_0^m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \cdots, x_0^m)(x^i - x_0^i).$$

- $S$ 在点 $P_0$ 处的法向量是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0), -1\right).$$

- $S$ 在点 $P_0$ 处的切平面是由 $m$ 维曲面 $S$ 上通过点 $P_0 \in S$ 的曲线的切向量组成的 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的超平面.

## 练　习

1. 求下列函数的所有二阶偏导数:

(1) $z = \mathrm{e}^x(\cos y + x \sin y)$;　　(2) $z = f(xy^2, x^2y)$;

(3) $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$;　　(4) $z = f\left(x + y, xy, \dfrac{x}{y}\right)$.

2. 求函数 $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的具有拉格朗日形式余项的泰勒公式.

3. 设函数 $f$ 在点 $(x_0, y_0)$ 可微, 且在该点给定了 $n$ 个单位向量 $v_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 相邻两个向量之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} D_{v_i} f(x_0, y_0) = 0.$$

4. 设 $z=f(x,y)$ 是定义在区域 $G\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续可微函数类 $C^{(1)}(G;\mathbb{R})$ 中的函数.

(1) 如果 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in G$, 那么可以判定函数 $f$ 在 $G$ 上不依赖于 $y$ 吗?

(2) 区域 $G$ 具备什么条件, 才能使得上述问题有肯定的回答?

5. (1) 证明: 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1\neq -1=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

(2) 证明: 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的邻域 $U$ 上有偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, 混合导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $\left(\text{或 }\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$ 在 $U$ 上存在且在点 $(x_0,y_0)$ 连续, 则混合导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\text{相应地 }\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)$ 在这点也存在且有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

6. (1) 设 $I^m=\{x=(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m\,|\,|x^i|\leqslant c^i,\ i=1,\cdots,m\}$ 是 $m$ 维区间, $I$ 是闭区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$. 证明: 如果函数 $f(x,y)=f(x^1,\cdots,x^m,y)$ 在集合 $I^m\times I$ 上有定义且连续, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in I^m$, $y_1,y_2\in I$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$.

(2) 证明: 函数

$$F(x)=\int_a^b f(x,y)dy$$

在区间 $I^m$ 上有定义且连续.

(3) 证明: 若 $f\in C(I^m;\mathbb{R})$, 则函数 $\mathcal{F}(x,t)=f(tx)$ 在 $I^m\times I^1$ 上有定义且连续, 其中 $I^1=\{t\in\mathbb{R}\,|\,|t|\leqslant 1\}$.

(4) 证明阿达马引理: 若 $f\in C^{(1)}(I^m;\mathbb{R})$ 且 $f(0)=0$, 则存在函数 $g_1,\cdots,g_m\in C(I^m;\mathbb{R})$, 使得在 $I^m$ 中成立

$$f(x^1,\cdots,x^m)=\sum_{i=1}^m x^i g_i(x^1,\cdots,x^m),$$

且

$$g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\quad(i=1,\cdots,m).$$

7. 证明下面的罗尔定理对于多变量函数的推广: 如果函数 $f$ 在闭球 $\overline{B}(0;r)$ 上连续, 在它的边界上等于零并且在球 $B(0;r)$ 的内点可微, 则这个球至少有一个内点是函数的临界点.

8. 证明: 函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$ 在坐标原点没有极值, 虽然它在任何一条通过坐标原点的直线上的限制在原点取得局部严格极小值.

9. 求函数 $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 在 $\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$ 内的最大值与最小值.

10. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中, 求出面积为最大的三角形.

# 7.4 隐函数定理

以往研究的函数形如 $y=f(x),\ x\in I$, 即因变量可用自变量的一个算式表达. 还有一类函数, 因变量与自变量的对应关系由方程确定.

**定义 1** 若 $n$ 元函数方程 $F(x,y)=0$ 在某个区域 $U\subset\mathbb{R}^m$ 内可以确定 $y$ 是 $x$ 的函数, 即

$$\forall x\in U,\ \exists!\ y\in\mathbb{R}^n \text{ 满足 } F(x,y)=0,$$

则称 $F(x,y)=0$ 确定了定义在 $U$ 上的**隐函数**: $y=f(x),\ F(x,f(x))\equiv 0,\ x\in U$.

如 $xy+1=0$ 能确定定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的隐函数 $y=-\dfrac{1}{x}$.

又如假定在平面 $\mathbb{R}^2$ 上点的坐标 $x,y$ 之间的一个关系式

$$x^2+y^2-1=0. \tag{7.4.1}$$

平面 $\mathbb{R}^2$ 上满足上述关系式的点的集合是单位圆周 (图 39).

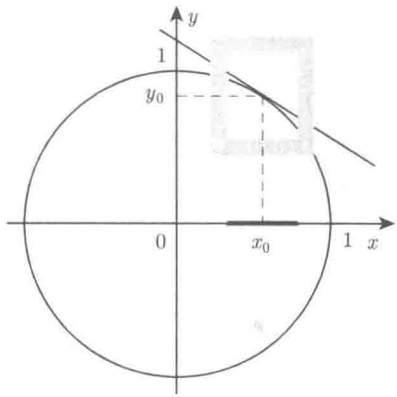



图 39

由 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 解出 $y$, 得到 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, 这就是说, 对每一个满足 $|x|<1$ 的 $x$, 事实上有两个可容许的 $y$ 值与它对应. 在构造满足关系式 $F(x,y)=0$ 的函数 $y=y(x)$ 时, 要添加一些补充条件才能从两个值中确定一个. 例如, 在 $[-1,1]$ 的有理点的值是 $\sqrt{1-x^2}$, 而在无理点的值是 $-\sqrt{1-x^2}$ 的函数显然满足关系式 (7.4.1). 很明显, 改变这个例子中的附加条件, 可以做出满足关系式 $F(x,y)=0$ 的无穷多个函数.

并非任一方程都能确定隐函数. 如 $x^2+y^2+1=0$ 不存在隐函数.

若 $F(x,y)=0$ 存在隐函数, 但 $y$ 未必能写成由 $x$ 表示的算式. 例如, $y-$

$x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 存在隐函数 $y=f(x)$ $\left(\text{因 } x=y-\frac{1}{2}\sin y \text{ 存在反函数, 事实上, } \mathrm{d}x/\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}\cos y>0, \text{严格单增}\right)$, 但 $f$ 不能用初等函数表示.

**我们感兴趣的问题是: 在何条件下, 方程 $F(x,y)=0$ 在给定的邻域内存在隐函数? 这个隐函数是否连续? 是否可微?**

• 此问题反映在几何上就是研究曲面 $z=F(x,y)$ 与平面 $z=0$ 的交截情况. 若两者相交, 则存在 $(x_0,y_0)\in xy$ 平面, 使得 $F(x_0,y_0)=0$. 只有如此, 方程 $F(x,y)=0$ 才有可能在点 $(x_0,y_0)$ 的邻域内存在隐函数. 即 $z=F(x,y), z=0$ 至少交于一点 $(x_0,y_0)$.

• 若曲面 $z=F(x,y)$ 与 $z=0$ 相交, 欲要交线连续, 只要假设 $z=F(x,y)$ 连续就有希望.

• 欲要求交线是某一函数的图像, 即要求对于 $x_0$ 附近的任一 $x$ 值, 有唯一的 $y$ 与之对应. 只要假设: 对于 $x_0$ 附近的任一固定的 $\bar{x}$, 函数 $F(\bar{x},y)$ 关于 $y$ 严格单调即可, 则设 $F_y>0$(或 $<0$) 就足够了.

• 欲进一步要求如上确定的隐函数 $y=f(x)$ 可微, 需要 $F$ 可微即可, 此时

$$0=\mathrm{d}F(x,y)=F_x(x,y)\mathrm{d}x+F_y(x,y)\mathrm{d}y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)},$$

要求 $F_x$, $F_y$ 连续 (从而 $F$ 可微), $F_y(x,y)\neq 0$.

下面我们在一般情形下探讨此问题. 考察方程

$$\begin{cases}F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0,\\ \cdots\cdots\\ F^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0,\end{cases}\tag{7.4.2}$$

将关于 $y^1,\cdots,y^n$ 求解它, 也就是说, 寻求局部等价于方程组 (7.4.2) 的函数组

$$\begin{cases}y^1=f^1(x^1,\cdots,x^m),\\ \cdots\cdots\\ y^n=f^n(x^1,\cdots,x^m).\end{cases}\tag{7.4.3}$$

为了书写简单、方便和叙述清晰, 记 $x=(x^1,\cdots,x^m), y=(y^1,\cdots,y^n)$, 则 (7.4.2) 式可写成 $F(x,y)=0$, 而映射 (7.4.3) 可写成 $y=f(x)$.

注意, 矩阵 $F'_y(x,y)$ 是方阵, 从而, 它有逆阵的充要条件是它的行列式不为零. 当 $n=1$ 时, 矩阵 $F'_y(x,y)$ 仅含一个元素, 它的可逆性等价于这个元素不等于零. 矩阵 $F'_y(x,y)$ 的逆阵通常记作 $(F'_y(x,y))^{-1}$.

现在叙述本节的基本结果.

**定理 1** (隐函数定理 I · 存在性) 设映射 $F: W \to \mathbb{R}^n$ 定义在点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$ 的邻域 $W$ 上, 并且满足下述条件:

1° $F(x_0, y_0) = 0$;

2° $F(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 连续;

3° $F'_y(x, y)$ 在 $W$ 有定义, 且在点 $(x_0, y_0)$ 连续;

4° $F'_y(x_0, y_0)$ 是可逆映射 (即 $\exists (F'_y(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$),

则存在 $\mathbb{R}^m$ 中点 $x_0$ 的邻域 $U = U(x_0)$, $\mathbb{R}^n$ 中点 $y_0$ 的邻域 $V = V(y_0)$, 以及映射 $f: U \to V$, 使得

(1) $U \times V \subset W$;

(2) $\big($在 $U \times V$ 中 $F(x, y) = 0\big) \Leftrightarrow \big(y = f(x)$, 其中 $x \in U$, 而 $f(x) \in V\big)$;

(3) $y_0 = f(x_0)$;

(4) $f$ 在点 $x_0$ 连续.

**证** 为书写方便, 均以 $|\cdot|$ 记 $X = \mathbb{R}^m$ 和 $Y = \mathbb{R}^n$ 的范数. 另外, 不失一般性, 假定 $x_0 = 0, y_0 = 0$,

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \,|\, |x| < \alpha \wedge |y| < \beta\} = B_X(0; \alpha) \times B_Y(0; \beta),$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$.

**第一步** 等价问题. 考虑依赖于参数 $x \in B_X(0; \alpha)$ 的辅助映射族

$$g_x(y) := y - (F'_y(0, 0))^{-1} \circ F(x, y) : B_Y(0; \beta) \to \mathbb{R}^n. \tag{7.4.4}$$

显然, 点 $y_x$ 是映射 $g_x$ 的不动点, 当且仅当 $F(x, y_x) = 0$, 即

$$g_x(y_x) = y_x \Leftrightarrow F(x, y_x) = 0. \tag{7.4.5}$$

如此一来, 寻求与研究隐函数 $y = y_x = f(x)$, 归结为寻求映射 (7.4.4) 的不动点并研究它与变量 $x$ 的相关性.

**第二步** 证明存在正数 $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$, 使得 $\forall x \in B_X(0; \gamma)$, $g_x : B_Y(0; \gamma) \to \mathbb{R}^n$ 是具有压缩系数不超过 $1/2$ 的压缩映射.

事实上, 对于任意固定的 $x \in B_X(0; \alpha)$, 从条件 3° 和复合映射的可微性定理推出映射 $g_x : B_Y(0; \beta) \to \mathbb{R}^n$ 是可微的, 而且

$$\begin{aligned} g'_x(y) &= e_Y - (F'_y(0, 0))^{-1} \circ (F'_y(x, y)) \\ &= (F'_y(0, 0))^{-1}(F'_y(0, 0) - F'_y(x, y)), \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

其中 $e_Y$ 记 $\mathbb{R}^n$ 的恒等映射. 由于 $F'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的连续性 (条件 3°), 可以找到点 $(0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 的邻域

$$B_X(0; \gamma) \times B_Y(0; \gamma),$$

使在其中成立

$$\|g_x'(y)\| \leqslant \|(F_y'(0,0))^{-1}\| \cdot \|F_y'(0,0) - F_y'(x,y)\| < \frac{1}{2\sqrt{n}}. \tag{7.4.7}$$

这里我们用到了 $(F_y'(0,0))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, 即 $\|(F_y'(0,0))^{-1}\| < \infty$. 注意 $g_x = (g_x^1, \cdots, g_x^n)$, $g_x^i : B_Y(0;\beta) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. 于是, 对于任意的 $x \in B_X(0;\gamma)$ 和任意的 $y_1, y_2 \in B_Y(0;\gamma)$, 根据中值定理和 (7.4.7), 可得

$$|g_x(y_1) - g_x(y_2)| \leqslant \sqrt{n} \sup_{\xi \in (y_1, y_2)} \|g'(\xi)\| |y_1 - y_2| < \frac{1}{2}|y_1 - y_2|. \tag{7.4.8}$$

**第三步** 验证: $\forall \varepsilon \in (0,\gamma)$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0,\gamma)$, 使对于任意的 $x \in B_X(0;\delta)$, 映射 $g_x$ 把闭球 $\overline{B}_Y(0;\varepsilon)$ 映入自身, 即 $g_x(\overline{B}_Y(0;\varepsilon)) \subset \overline{B}_Y(0;\varepsilon)$.

事实上, 首先根据 $\varepsilon$ 选取数 $\delta \in (0,\gamma)$ 使对 $|x| < \delta$ 有

$$\begin{aligned} |g_x(0)| &= |(F_y'(0,0))^{-1} \circ F(x,0)| \\ &\leqslant \|(F_y'(0,0))^{-1}\| \, |F(x,0)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned} \tag{7.4.9}$$

由条件 1° 和 2°, 根据 $F(0,0) = 0$ 且 $F(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续, 上述事情是可以做到的. 令

$$U := B_X(0;\delta(\varepsilon)), \quad V := B_Y(0;\varepsilon),$$

从 (7.4.8) 和 (7.4.9) 式推知 $\forall x \in U, y \in V$,

$$|g_x(y)| \leqslant |g_x(y) - g_x(0)| + |g_x(0)| < \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

而这意味着

$$\forall x \in U, \text{ 成立 } g_x(\overline{V}) \subset V, \tag{7.4.10}$$

注意, 作为完备度量空间 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集, 闭球 $\overline{V}$ 本身是完备度量空间. 上述讨论表明映射族 $\{g_x, x \in U\}$ 在完备度量空间 $\overline{V}$ 上是一致 $\frac{1}{2}$-压缩的.

**第四步** 作结.

根据不动点原理, (7.4.10) 式推出: 对每点 $x \in U$, $g_x : \overline{B}_Y(0;\varepsilon) \to \overline{B}_Y(0;\varepsilon)$ 有唯一的不动点

$$y = y_\varepsilon =: f(x) \in B_Y(0;\varepsilon) = V.$$

由关系式 (7.4.5) 知道所构造的函数 $f : U \to V$ 具有性质 (2), 而由 $F(0,0) = 0$(条件 1°) 得到性质 (3).

根据 $U \times V \subset B_X(0;\alpha) \times B_Y(0;\beta) = W$ 的构造推出邻域 $U$ 和 $V$ 的性质 (1).

最后, 从 (2) 和在证明的第三步中所指出的: 对于任意的 $\varepsilon > 0(\varepsilon < \gamma)$ 有 $\delta(\varepsilon) > 0(\delta(\varepsilon) < \gamma)$, 使对任意的 $x \in B_X(0;\delta(\varepsilon))$ 成立关系式 (7.4.10), 即当 $|x| < \delta(\varepsilon)$ 时, 映射 $g_x : \overline{B}_Y(0;\varepsilon) \to \overline{B}_Y(0;\varepsilon)$ 的唯一不动点 $y_\varepsilon = f(x)$ 满足条件 $|f(x)| < \varepsilon$, 可推出函数 $y = f(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性, 即证得性质 (4). □

我们证明了隐函数存在定理. 现在讨论它的连续性与可微性.

**定理 2** (隐函数定理 II · 连续性, 可微性) 假设隐函数定理的条件成立. 则

(5) 若还设 $F : W \to \mathbb{R}^n$ 在 $(x_0, y_0)$ 的某个邻域中连续, 则隐函数 $f$ 在 $x_0$ 的某个邻域中连续.

(6) 若还设在 $W$ 中也存在偏导数 $F'_x(x,y)$, 且 $F'_x(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 连续, 那么隐函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 可微, 而且

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0,y_0))^{-1} \circ (F'_x(x_0,y_0)). \tag{7.4.11}$$

(7) 若还设 $F \in C^{(k)}(W;\mathbb{R}^n), k \geqslant 1$, 那么隐函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^m$ 的某个邻域 $U$ 内属于 $C^{(k)}(U;\mathbb{R}^n)$. 此外,

$$f'(x) = -(F'_y(x,f(x)))^{-1} \circ (F'_x(x,f(x))). \tag{7.4.12}$$

**证** 先证在某邻域的连续性.

*第五步* 从定理的条件 3° 和 4°, 根据映射

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;R^n) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$$

的性质推出, 在点 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域的每一点 $(x,y)$, 算子 $F'_x(x,y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 是可逆的, 因此, 当 $F$ 的连续性具有所作的补充假设时, 在点 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域中形如 $(x,f(x))$ 的所有的点 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 都满足条件 (1)—(4), 而以前只在点 $(x_0,y_0)$ 满足.

在这些点 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 中任意点的邻域内的重复构造隐函数的过程, 我们就能得到在点 $\tilde{x}$ 连续的函数 $y = \tilde{f}(x)$, 又由于 (2), 它与函数 $y = f(x)$ 在点 $x$ 的某个邻域完全一样. 而这正说明函数 $f$ 在点 $\tilde{x}$ 连续. 这就完成了 (5) 的证明.

次证在一点的可微性, 再证连续可微性.

*第六步* 记

$$L = -(F'_y(x_0,y_0))^{-1} \circ (F'_x(x_0,y_0)),$$

兹验证 $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ 实际上是函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 的微分.

如前, 为书写简单计, 不妨认为 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 因此 $f(0) = 0$. 利用 $F(x,f(x)) \equiv$

0 以及 $F'_x, F'_y$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性得

$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(0)-Lx| = |f(x)-Lx| \\
=&|f(x)+(F'_y(0,0))^{-1}\circ(F'_x(0,0))x| \\
=&\big|(F'_y(0,0))^{-1}\big[F'_x(0,0)x+F'_y(0,0)f(x)\big]\big| \\
=&\big|(F'_y(0,0))^{-1}\big[(F(x,f(x))-F(0,0))-(F'_x(0,0)x+F'_y(0,0)f(x))\big]\big| \\
\leqslant&\|(F'_y(0,0))^{-1}\|\,|F(x,f(x))-F(0,0)-F'_x(0,0)x-F'_y(0,0)f(x)| \\
\leqslant&\|(F'_y(0,0))^{-1}\|\cdot\alpha(x,f(x))\,(|x|+|f(x)|),
\end{aligned}$$

其中当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $\alpha(x,y)\to 0$. 记 $a:=\|L\|$ 和 $b:=\|(F'_y(0,0))^{-1}\|$. 由

$$|f(x)| = |f(x)-Lx+Lx| \leqslant |f(x)-Lx|+|Lx| \leqslant |f(x)-Lx|+a|x|,$$

继续上面的推导得

$$|f(x)-Lx| \leqslant b\,\alpha(x,f(x))\,\big((a+1)|x|+|f(x)-Lx|\big),$$

或者

$$|f(x)-Lx| \leqslant \frac{(a+1)b}{1-b\alpha(x,f(x))}\alpha(x,f(x))|x|.$$

由 $f$ 在点 $x=0$ 的连续性和 $f(0)=0$, 当 $x\to 0$ 时也有 $f(x)\to 0$, 故当 $x\to 0$ 时 $\alpha(x,f(x))\to 0$. 所以, 当 $x\to 0$ 时有 $|f(x)-f(0)-Lx| = |f(x)-Lx| = o(|x|)$. 这就验证了 (6).

**第七步** 从公式 (7.4.11) 我们已经知道, 在使 $F'_y(x,f(x))$ 可逆的那个点 $x$, 导映射 $f'(x)$ 存在, 并可表为 (7.4.12) 式. 剩下的是验证在所作的假设条件下, 函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某个邻域内连续.

注意, 映射 $-F'_x(x,f(x))$, 作为连续函数的复合 $x\mapsto(x,f(x))\mapsto -F'_x(x,f(x))$, 连续地依赖于 $x$. 同样地, $(F'_y(x,f(x)))^{-1}$ 连续地依赖于 $x$.

于是, 由公式 (7.4.12) 给出的函数 $f'(x)$, 作为连续函数的复合, 在点 $x=x_0$ 的某个邻域内连续. $k=1$ 时命题已经得证.

注意到, 当微分等式 (7.4.12) 成立时, 右边总含有 $f$ 的比左边低一阶的导数, 那么从公式 (7.4.12) 用归纳法即可证明一般情况. 这样一来, 函数 $F$ 有几阶光滑性, 等式 (7.4.12) 就可微分多少次. (7) 得证. □

**例 1**　回过头来考察前边的关系式 (7.4.1), 并用此例验证隐函数定理.

这时, $F(x,y)=x^2+y^2-1$, 显然 $F\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, 且

$$F'_x(x,y)=2x,\quad F'_y(x,y)=2y,$$

因此, 若 $y \neq 0$, 则 $F'_y(x,y) \neq 0$. 于是, 根据隐函数定理, 对于圆周上任意一个不同于点 $(-1,0)$ 与 $(1,0)$ 的点 $(x_0,y_0)$, 可以找到一个邻域, 使得圆周落入这个邻域的一段弧可以表成 $y=f(x)$, 直接计算也可确认这一点, 而且 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 或 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

其次, 由隐函数定理, 有

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} = -\frac{x_0}{y_0}.$$

而直接计算, 知

$$\text{若} f(x)=\sqrt{1-x^2}, \text{则} f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\text{若} f(x)=-\sqrt{1-x^2}, \text{则} f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

可以把这两式合并成一个式子

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y},$$

由此得到 $f'(x_0) = -\dfrac{x_0}{y_0}$, 这与隐函数定理得到的公式是一致的.

重要的是, 利用公式 (7.4.12) 计算 $f'(x_0)$ 时, 甚至不需要知道显示式 $y=f(x)$, 只要知道 $f(x_0)=y_0$ 就可以了. 而给定条件 $y_0=f(x_0)$, 是选出水平线 $F(x,y)=0$ 中我们试图表成 $y=f(x)$ 的那一段曲线所必需的.

在圆周的例子中可以看出, 仅仅给定坐标 $x_0$ 还不能确定圆弧, 只能再确定了 $y_0$, 我们才能从两个可能的圆弧中选出一个.

**例 2** 假定函数 $F: G \to \mathbb{R}$ 定义在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上并且属于 $C^{(1)}(G;\mathbb{R})$. 设 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m) \in G, F(x_0)=F(x_0^1,\cdots,x_0^m)=0$. 如果 $x_0$ 不是函数 $F$ 的临界点, 那么, 函数 $F$ 在 $x_0$ 的偏导数中至少有一个不为零, 例如设 $\dfrac{\partial F}{\partial x^m}(x_0) \neq 0$.

这时, 由隐函数定理知道, 在点 $x_0$ 的某个邻域中, 满足方程 $F(x^1,\cdots,x^m)=0$ 的 $\mathbb{R}^m$ 中的点集可以表示成在点 $(x_0^1,\cdots,x_0^{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ 的一个邻域中定义的某个函数 $x^m=f(x^1,\cdots,x^{m-1})$ 的图像, 这个函数在这个邻域中连续可微且 $f(x_0^1,\cdots,x_0^{m-1})=x_0^m$.

这样, 在函数 $F$ 的非临界点 $x_0$ 的邻域中, 方程

$$F(x^1,\cdots,x^m)=0$$

给出 $m-1$ 维曲面.

特别地, 在 $\mathbb{R}^3$ 的情况, 方程 $F(x,y,z)=0$ 在非临界点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域内给

出二维曲面, 这个曲面在条件 $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 之下可以局部地表成 $z=f(x,y)$.

我们知道, 这个函数的图像在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

但是, 按公式 (7.4.12) 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)&=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)&=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},\end{aligned}$$

因此, 切平面方程可以改写成

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

它关于变量 $x,y,z$ 是对称的.

类似地, 在一般情况得到 $\mathbb{R}^m$ 中的超平面方程

$$\sum_{i=1}^{m}F'_{x^i}(x_0)(x^i-x_0^i)=0,$$

它在点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 与由方程 $F(x^1,\cdots,x^m)=0$ 所表示的曲面相切 (当然, 假设有条件 $F(x_0)=0$ 且 $x_0$ 不是 $F$ 的临界点).

由得到的方程可以看出, 如果在 $\mathbb{R}^m$ 中给定的是欧几里得结构, 那么可以断定, 向量

$$\operatorname{grad}F(x_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x^m}\right)(x_0)$$

在点 $x_0\in\mathbb{R}^m$ 处与函数 $F$ 的 $r$-等高集 $F(x)=r$ 所表示的曲面正交.

例如, 定义在 $\mathbb{R}^3$ 中的函数

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

的 $r$-等高集: 当 $r<0$ 时是空集; 当 $r=0$ 时是一点; 当 $r>0$ 时是椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r.$$

如果 $(x_0,y_0,z_0)$ 是这个椭球面上的一点, 那么, 根据已证结果, 向量

$$\operatorname{grad}F(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$$

在点 $(x_0, y_0, z_0)$ 处垂直于这个椭球面, 且在此点椭球面的切平面方程为

$$\frac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2}=0.$$

由于点 $(x_0, y_0, z_0)$ 在椭球面上, 它又可改写为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=r.$$

### 练　习

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(2) $z=f(x+y+z, xyz)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}$;

(3) $F(x, x+y, x+y+z)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

(4) $\begin{cases} x-u^2-yv=0, \\ y-v^2-xu=0, \end{cases}$ 求雅可比行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. 设 $F(x, y, z)=0$ 可以确定连续可微隐函数: $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$, $z=z(x,y)$. 试证:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3. 试证: 方程

$$z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n=0$$

的根, 当它们互不相同时光滑地依赖于方程的系数.

## 7.5 隐函数定理的一些推论

### 7.5.1 反函数定理

**定义 1** 从 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $U$ 到开集 $V$ 上的映射 $f: U\to V$ 称为 $C^{(p)}$ 类微分同胚或 $p$ 级光滑微分同胚 $(p=0,1,2,\cdots)$, 如果

(1) $f\in C^{(p)}(U;V)$;

(2) $f$ 是双射;

(3) $f^{-1}\in C^{(p)}(V;U)$.

$C^{(0)}$ 类微分同胚称为同胚.

通常我们只考虑光滑的情况, 即 $p\in\mathbb{N}$ 或 $p=\infty$ 的情况, 并统称为微分同胚.

以下经常用到的定理, 从原则上确立了, 如果一个映射在某点的微分可逆, 则这个映射本身在该点的某一邻域中也可逆.

**定理 1** (反函数定理)　如果映射 $f: G \to \mathbb{R}^m$ 定义在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上, 且具有下列条件

1° $f \in C^{(p)}(G; \mathbb{R}^m)$, $p \geqslant 1$;

2° $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in G$;

3° $f'(x_0)$ 有逆阵,

则存在点 $x_0$ 的邻域 $U(x_0) \subset G$ 和点 $y_0$ 的邻域 $V(y_0)$, 使得 $f: U(x_0) \to V(y_0)$ 是 $C^{(p)}$ 类微分同胚, 且当 $x \in U(x_0), y = f(x) \in V(y_0)$ 时, 有

$$(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}.$$

**证**　把关系式 $y = f(x)$ 改写成

$$F(x, y) = f(x) - y = 0 \tag{7.5.1}$$

的形式, 函数 $F(x, y) = f(x) - y$ 定义在点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 的邻域 $G \times \mathbb{R}^m$ 上.

我们希望在点 $(x_0, y_0)$ 的某个邻域内从方程 (7.5.1) 中解出 $x$. 由条件 1°—3° 知映射 $F$ 具有以下性质:

$$F \in C^{(p)}(G \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m), \quad p \geqslant 1,$$
$$F(x_0, y_0) = 0,$$
$$F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)\text{有逆阵}.$$

根据隐函数定理可以找到点 $(x_0, y_0)$ 的邻域 $U \times V$ 及映射 $g \in C^{(p)}(V; U)$, 使得对于任意点 $(x, y) \in U \times V$, 有

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x = g(y) \tag{7.5.2}$$

且

$$g'(y) = -[F'_x(x, y)]^{-1}[F'_y(x, y)].$$

由于 $F'_x(x, y) = f'(x), F'_y(x, y) = -E$, 其中 $E$ 是单位阵, 因此

$$g'(y) = [f'(x)]^{-1}. \tag{7.5.3}$$

关系式 (7.5.2) 证实了 $f: U \to V$ 与 $g: V \to U$ 互逆, 即在 $V$ 上有 $g = f^{-1}$.

到此, 我们验证了映射 $f: U \to V$ 满足定义 1 的所有条件和定理 1 的断言. □

反函数定理常常用于从一个坐标系到另一个坐标系的坐标转换. 最简单情形还在解析几何和线性代数中研究过的坐标变换: $A:\mathbb{R}_x^m\to\mathbb{R}_y^m$, 它有下面形式:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix},$$

或者简记作 $y^j=a_i^jx^i$. 线性变换 $A$ 有定义在整个 $\mathbb{R}_y^m$ 上的逆变换 $A^{-1}:\mathbb{R}_y^m\to\mathbb{R}_x^m$, 当且仅当, 矩阵 $(a_i^j)$ 有逆阵, 即 $\det(a_i^j)\neq 0$.

**例 1** 极坐标. 从半平面 $\mathbb{R}_+^2=\{(\rho,\varphi)\in\mathbb{R}^2|\rho\geqslant 0\}$ 到平面 $\mathbb{R}^2$ 的映射 $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}^2$ 由公式

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \tag{7.5.4}$$

给出, 见图 40.

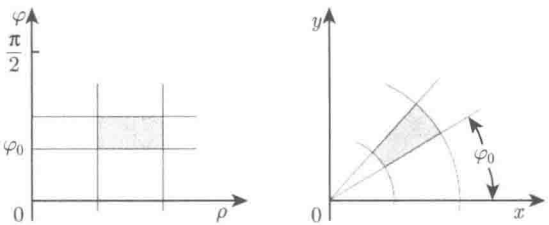



图 40

不难算出, 这个映射的雅可比行列式等于 $\rho$, 即在任何点 $(\rho,\varphi)$(其中 $\rho>0$) 的邻域内不为零. 这样, 公式 (7.5.4) 局部可逆, 也就是说, 在局部范围内, 数 $\rho,\varphi$ 可以作为点的新坐标, 代替以前的笛卡儿坐标 $x,y$.

坐标 $(\rho,\varphi)$ 是众所周知的平面上的曲线坐标——极坐标, 从图 40 可以看出它的几何意义. 注意, 由于函数 $\cos\varphi,\sin\varphi$ 的周期性, 映射 (7.5.4) 在 $\rho>0$ 时仅仅是局部微分同胚的, 而在整个区域上它不是双方单值的, 因此, 从笛卡儿坐标转到极坐标时常常需要选取角度 $\varphi$ 的分支 (即指出它的变化范围. 常根据情况选择 $\varphi$ 在 $[0,2\pi)$ 内的范围).

在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的极坐标 $(\rho,\psi,\varphi)$ 称为球坐标. 它们与笛卡儿坐标之间有下述关系:

$$\begin{cases} z=\rho\cos\psi, \\ y=\rho\sin\psi\sin\varphi, \\ x=\rho\sin\psi\cos\varphi. \end{cases} \tag{7.5.5}$$

参数 $\rho, \psi, \varphi$ 的几何意义如图 41 所示.

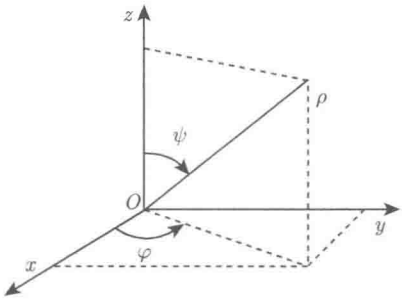



图 41

这时, 变换 (7.5.5) 的雅可比行列式等于 $\rho^2 \sin\psi$, 从而, 由定理 1 知, 变换 (7.5.5) 在任意一点 $(\rho, \psi, \varphi)$ (其中 $\rho > 0, \sin\psi \neq 0$) 的邻域内有逆变换.

在空间 $(x, y, z)$ 中, 满足 $\rho =$ 常数, $\varphi =$ 常数, $\psi =$ 常数的点集显然分别是半径为 $\rho$ 的球面, 通过 $z$ 轴的半平面和以 $z$ 轴为对称轴的圆锥面. 这样, 由坐标系 $(x, y, z)$ 转到坐标系 $(\rho, \psi, \varphi)$ 时, 例如, 球面和锥面可以局部抻平, 即它们分别对应于小块平面 $\rho =$ 常数与 $\psi =$ 常数. 类似的现象我们在二维情形也观察到了, 平面 $(x, y)$ 上的圆弧对应着平面 $(\rho, \varphi)$ 上的直线段 (这正是局部的展平, 参看图 40).

在 $m$ 维情形, 极坐标由关系式

$$\begin{cases} x^1 = \rho\cos\varphi_1, \\ x^2 = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ \cdots\cdots \\ x^{m-1} = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1}, \\ x^m = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1} \end{cases} \tag{7.5.5′}$$

确定. 这个变换的雅可比行列式等于

$$\rho^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}. \tag{7.5.6}$$

由定理 1 知这个变换在它的雅可比行列式不为零的地方也是局部可逆的.

**例 2**　**曲线局部抻直**. 新坐标的引入通常是为了简化问题所涉及的对象的解析表达式, 使它们在新坐标系中更加易于观察.

例如, 设在平面 $\mathbb{R}^2$ 上用方程

$$F(x, y) = 0$$

给出了一条曲线 $\ell$, $F$ 是光滑函数, 点 $(x_0, y_0) \in \ell$, 设它不是 $F$ 的临界点, 如 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

我们试图选取坐标 $\xi, \eta$, 使得在这个坐标系下, $\ell$ 上含点 $(x_0, y_0)$ 的一段弧变成坐标直线, 例如 $\eta = 0$ 上的一个线段. 为此, 令

$$\begin{cases} \xi = x - x_0, \\ \eta = F(x, y), \end{cases}$$

这个变换的雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix} (x, y)$$

的行列式是 $F'_y(x, y)$, 据假设条件, 它在点 $(x_0, y_0)$ 不为零, 因此, 由定理 1 知这个映射是从点 $(x_0, y_0)$ 的邻域到点 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 的邻域上的微分同胚. 这就是说, 在所指出的邻域范围内, 数 $\xi, \eta$ 可以作为点 $(x_0, y_0)$ 邻域内的点的新坐标. 在新坐标系下, 我们的曲线方程显然是 $\eta = 0$, 在这个意义上我们真的把曲线局部抻直了 (图 42).

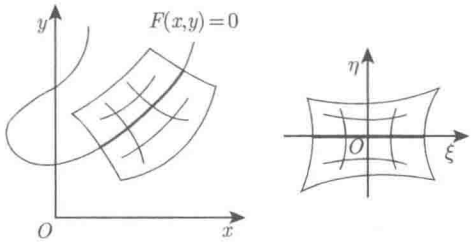



图 42

### 7.5.2 局部地把光滑映射化为典则形式

我们在这里考察的仅仅是这些类型中的一个问题, 这就是任意具有常数秩的光滑映射, 在适当选取的坐标系下, 均可化为一个确定的典则形式.

我们记得, 区域 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上的光滑映射 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 在点 $x \in U$ 的秩, 指的是, 它在这点的切映射的秩, 即矩阵 $f'(x)$ 的秩. 映射 $f$ 在点 $x$ 的秩通常记作 $\operatorname{rank} f(x)$.

**定理 2** (秩定理) 设 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 是定义在点 $x_0 \in \mathbb{R}^m$ 的邻域 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上的映射, $f \in C^{(p)}(U; \mathbb{R}^n), p \geqslant 1$, 且在每点 $x \in U$ 映射 $f$ 有同一秩 $k$, 即 $\operatorname{rank} f(x) \equiv k\,(\forall x \in U)$. 则存在点 $x_0$ 与点 $y_0 = f(x_0)$ 的邻域 $O(x_0)$ 与 $O(y_0)$ 以及定义在它们上面的 $C^{(p)}$ 类微分同胚:

$$\varphi : O(x_0) \to \varphi(O(x_0)) \subset \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto u, \quad u_0 = \varphi(x_0),$$
$$\psi : O(y_0) \to \psi(O(y_0)) \subset \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto v, \quad v_0 = \psi(y_0),$$

使得在点 $u_0$ 的邻域 $O(u_0)=\varphi(O(x_0))$ 内, 映射 $v=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 的坐标表示式如下:

$$(u^1,\cdots,u^k,\cdots,u^m)=u\mapsto v=(v^1,\cdots,v^n)=(u^1,\cdots,u^k,0,\cdots,0). \tag{7.5.7}$$

换句话说, 定理断定 (图 43), 可以选取坐标 $(u^1,\cdots,u^m)$ 代替 $(x^1,\cdots,x^m)$, 选取坐标 $(v^1,\cdots,v^n)$ 代替 $(y^1,\cdots,y^n)$, 使得映射 $f$ 在这些新坐标下局部地具有表达式 (7.5.7), 即 $k$ 秩线性映射的典则形式.

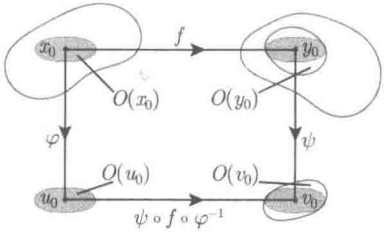



图 43

**证**　把映射 $f=(f^1,\cdots,f^n)$ 写成坐标形式, $x=(x^1,\cdots,x^m)\in U\subset\mathbb{R}^m$,

$$\begin{cases} y^1=f^1(x), \\ \cdots\cdots \\ y^k=f^k(x), \\ y^{k+1}=f^{k+1}(x), \\ \cdots\cdots \\ y^n=f^n(x). \end{cases} \tag{7.5.8}$$

为了不改变坐标的编号, 我们认为映射 $f:U\to\mathbb{R}^n_y$ 在任一点 $x\in U$ 的雅可比矩阵的左上角的 $k$ 阶主子式不为零.

考察定义在点 $x_0$ 的邻域 $U$ 上的用下面等式定义的映射: $u=\varphi(x)$ (即 $(u^1,\cdots,u^m)=(\varphi^1(x),\cdots,\varphi^m(x))$),

$$\begin{cases} u^1=\varphi^1(x)=f^1(x), \\ \cdots\cdots \\ u^k=\varphi^k(x)=f^k(x), \\ u^{k+1}=\varphi^{k+1}(x)=x^{k+1}, \\ \cdots\cdots \\ u^m=\varphi^m(x)=x^m, \end{cases} \qquad \text{雅可比矩阵}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(f^1,\cdots,f^k)}{\partial(x^1,\cdots,x^k)} & \dfrac{\partial(f^1,\cdots,f^k)}{\partial(x^{k+1},\cdots,x^m)} \\ 0_{m-k} & E_{m-k} \end{pmatrix}, \tag{7.5.9}$$

其中 $0_{m-k}$ 和 $E_{m-k}$ 分别是 $m-k$ 阶零矩阵和单位矩阵. 由假设知雅可比行列式在 $U$ 上不为零. 由反函数定理知, 映射 $u=\varphi(x)$ 是把点 $x_0$ 的某个邻域 $\tilde{O}(x_0)\subset U$ 变到点 $u_0=\varphi(x_0)$ 的邻域 $\tilde{O}(u_0)=\varphi(\tilde{O}(x_0))$ 的 $p$ 级光滑微分同胚.

比较 (7.5.8) 与 (7.5.9) 式看出, 复合映射 $g=f\circ\varphi^{-1}:\tilde{O}(u_0)\to\mathbb{R}^n_y$ 有下面的坐标表示式

$$\begin{cases} y^1=f^1\circ\varphi^{-1}(u)=u^1, \\ \cdots\cdots \\ y^k=f^k\circ\varphi^{-1}(u)=u^k, \\ y^{k+1}=f^{k+1}\circ\varphi^{-1}(u)=g^{k+1}(u), \\ \cdots\cdots \\ y^n=f^n\circ\varphi^{-1}(u)=g^n(u). \end{cases} \tag{7.5.10}$$

$$\text{雅可比矩阵}=\begin{pmatrix} E_k & 0_{k(m-k)} \\ \dfrac{\partial(g^{k+1},\cdots,g^n)}{\partial(u^1,\cdots,u^k)} & \dfrac{\partial(g^{k+1}\cdots,g^n)}{\partial(u^{k+1},\cdots,u^m)} \end{pmatrix}.$$

因为映射 $\varphi^{-1}:\tilde{O}(u_0)\to\tilde{O}(x_0)$ 在任一点 $u\in\tilde{O}(u_0)$ 有最大秩 $m$, 而映射 $f:\tilde{O}(x_0)\to\mathbb{R}^n_y$ 在任一点 $x\in\tilde{O}(x_0)$ 的秩为 $k$, 那么, 由线性代数知道, 矩阵 $g'(u)=f'(\varphi^{-1}(u))\cdot(\varphi^{-1})'(u)$ 在任一点 $u\in\tilde{O}(u_0)$ 的秩为 $k$.

进而由雅可比矩阵得到, 在任意点 $u\in\tilde{O}(u_0)$ 有 $\dfrac{\partial g^j}{\partial u^i}(u)=0(i=k+1,\cdots,m;j=k+1,\cdots,n)$. 可以认为邻域 $\tilde{O}(u_0)$ 是凸的 (例如可以缩小 $\tilde{O}(u_0)$ 为中心在 $u_0$ 的球), 由此可以断定, 函数 $g^j(j=k+1,\cdots,n)$ 实际上不依赖于变量 $u^{k+1},\cdots,u^m$.

于是映射 (7.5.10) 可以写成

$$\begin{cases} y^1=u^1, \\ \cdots\cdots \\ y^k=u^k, \\ y^{k+1}=g^{k+1}(u^1,\cdots,u^k), \\ \cdots\cdots \\ y^n=g^n(u^1,\cdots,u^k). \end{cases} \tag{7.5.11}$$

现在我们来定义映射 $\psi$, 令

$$\begin{cases} v^1 = y^1 & =:\psi^1(y), \\ \cdots\cdots & \\ v^k = y^k & =:\psi^k(y), \\ v^{k+1} = y^{k+1} - g^{k+1}(y^1, \cdots, y^k) & =:\psi^{k+1}(y), \\ \cdots\cdots & \\ v^n = y^n - g^n(y^1, \cdots, y^k) & =:\psi^n(y). \end{cases} \tag{7.5.12}$$

从函数 $g^j(j = k+1, \cdots, n)$ 的构造可以看出, 映射 $\psi$ 在点 $y_0$ 的某个邻域内有定义, 并且在这个邻域内属于 $C^{(p)}$ 类.

映射 (7.5.12) 的雅可比矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_k & 0_{k(n-k)} \\ -\dfrac{\partial(g^{k+1}, \cdots, g^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^k)} & E_{n-k} \end{pmatrix},$$

它的行列式等于 1, 由此, 由定理 1 知映射 $\psi$ 是从点 $y_0 \in \mathbb{R}^n_y$ 的某个邻域 $\tilde{O}(y_0)$ 到 $v_0 \in \mathbb{R}^n_v$ 的某个邻域 $\tilde{O}(v_0) = \psi(\tilde{O}(y_0))$ 上的 $p$ 级光滑微分同胚.

比较 (7.5.11) 与 (7.5.12) 式看出, 当点 $u_0$ 的邻域 $O(u_0) \subset \tilde{O}(u_0)$ 充分小, 以至 $g(O(u_0)) \subset \tilde{O}(y_0)$ 时, 映射 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : O(u_0) \to \mathbb{R}^n_v$ 是从点 $u_0$ 的邻域 $O(u_0)$ 到点 $v_0 \in \mathbb{R}^n_v$ 的某个邻域 $O(v_0) \subset \tilde{O}(v_0)$ 上的 $p$ 级光滑微分同胚, 并且具有典则形式

$$\begin{cases} v^1 = u^1, \\ \cdots\cdots \\ v^k = u^k, \\ v^{k+1} = 0, \\ \cdots\cdots \\ v^n = 0. \end{cases} \tag{7.5.13}$$

令 $\varphi^{-1}(O(u_0)) = O(x_0), \psi^{-1}(O(v_0)) = O(y_0)$, 我们得到定理所要求的点 $x_0, y_0$ 的邻域, 也就完成了定理的证明. □

定理 2 与定理 1 一样, 显然也是线性代数中相应定理的局部化变异形式.

**注 1**　如果定理 2 的映射 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 在点 $x_0$ 的邻域 $U \subset \mathbb{R}^m$ 中任一点的秩都是 $n$, 则点 $y_0 = f(x_0)$ 是集合 $f(U)$ 的内点, 即点 $y_0$ 和它的某个邻域都含在 $f(U)$ 中.

**证**　事实上, 映射 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : O(u_0) \to O(v_0)$, 这时有

$$(u^1, \cdots, u^n, \cdots, u^m) = u \mapsto v = (v^1, \cdots, v^n) = (u^1, \cdots, u^n)$$

的形式, 因此, 点 $u_0=\varphi(x_0)$ 的邻域的像包含点 $v_0=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(u_0)$ 的某个邻域.

但是映射 $\varphi: O(x_0)\to O(u_0)$ 与 $\psi: O(y_0)\to O(v_0)$ 都是微分同胚, 因此, 它们把内点变为内点. 现在我们把映射 $f$ 写成 $f=\psi^{-1}\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi$ 的形式, 可以断定, 点 $y_0=f(x_0)$ 是点 $x_0$ 的邻域的像的内点. □

**注 2** 如果映射 $f: U\to\mathbb{R}^n$ 在 $U\subset\mathbb{R}^m$ 中任一点的秩 $k<n$, 那么, 根据等式 (7.5.8), (7.5.12) 和 (7.5.13), 在点 $x_0\in U\subset\mathbb{R}^m$ 的某个邻域内有下面 $n-k$ 个关系式成立

$$f^i(x)=g^i(f^1(x),\cdots,f^k(x))\quad(i=k+1,\cdots,n). \tag{7.5.14}$$

关系式 (7.5.14) 显然是关系式 (7.5.8), (7.5.12), (7.5.13) 的推论.

以上所得之关系是在假定矩阵 $f'(x_0)$ 的 $k$ 阶主子式不为零的条件下成立的, 即是说, 我们要求函数组 $f^1,\cdots,f^k$ 的秩已经是 $k$. 不然的话, 可以改变函数 $f^1,\cdots,f^n$ 的编号归结为上述情况.

### 7.5.3 函数的相关性

设 $X$ 是一个向量空间, 点集 $\mathcal{S}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}\subset X$. 不妨设 $\mathcal{S}$ 的最大线性无关组为 $u_1,\cdots,u_k$, 换言之, 这子集线性无关, 且若 $k<n$, 则 $u_1,\cdots,u_\ell$ 线性相关, $\forall k<\ell\leqslant n$. 从代数学知

$$u_i=g^i(u_1,\cdots,u_k):=\lambda_1^iu_1+\cdots+\lambda_k^iu_k,\quad\forall k+1\leqslant i\leqslant n,$$

换言之, 其余 $n-k$ 个向量可以通过前 $k$ 个向量 (线性) 表示出来.

下面将这一结论推广到函数序列. 研究定义于 $X\subset\mathbb{R}^m$ 的函数组: $f^i: X\to\mathbb{R}\,(i=1,\cdots,n)$. 为方便计, 把它们视为向量映射 $f:=(f^1,\cdots,f^n): X\to\mathbb{R}^n$.

**定义 2** 连续函数组 $f^i(x^1,\cdots,x^m)\,(i=1,\cdots,n)$ 在点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 的邻域内称为**函数独立**, 如果对于定义在点

$$y_0=(y_0^1,\cdots,y_0^n)=(f^1(x_0),\cdots,f^n(x_0))=f(x_0)$$

邻域上的任何一个连续函数 $F(y^1,\cdots,y^n)$, 仅当 $F(y^1,\cdots,y^n)\equiv0$ 在点 $y_0$ 的邻域内成立时, 关系式

$$F(f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m))\equiv0$$

才在点 $x_0$ 的邻域内成立.

如果函数组不是函数独立的, 则称它**函数相关**.

**命题 1**　如果 $f^i(x)(i=1,\cdots,n)$ 是在点 $x_0\in\mathbb{R}^m$ 的邻域 $U(x_0)$ 上定义的一组光滑函数, 且矩阵

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}(x):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x)$$

在任一点 $x\in U$ 的秩都是 $k$, 则

(1) 当 $k=n$ 时, 函数组在点 $x_0$ 的邻域内是函数独立的.

(2) 当 $k<n$ 时, 存在点 $x_0$ 的邻域及 $k$ 个函数, 设为 $f^1,\cdots,f^k$, 使得其余 $n-k$ 个函数在这个邻域内可以表成如下形式

$$f^i(x)=g^i(f^1(x),\cdots,f^k(x))\quad(i=k+1,\cdots,n),$$

其中, $g^i(y^1,\cdots,y^k)$ 是定义在点 $y_0=(f^1(x_0),\cdots,f^n(x_0))$ 邻域上的光滑函数且仅依赖于动点 $y=(y^1,\cdots,y^n)$ 的 $k$ 个坐标.

**证**　事实上, 如果 $k=n$, 则由秩定理的注 1 知, 在映射

$$\begin{cases}y^1=f^1(x^1,\cdots,x^m),\\ \cdots\cdots\\ y^n=f^n(x^1,\cdots,x^m)\end{cases}\tag{7.5.15}$$

下, 点 $x_0$ 邻域的像包含点 $y_0=f(x_0)$ 的一个完整的邻域, 因此, 仅当 $F(y^1,\cdots,y^n)\equiv 0$ 在点 $y_0$ 的邻域内成立时, 关系式

$$F(f^1(x),\cdots,f^n(x))\equiv 0$$

才在 $x_0$ 邻域内成立, 这就证明了结论 (1).

如果 $k<n$ 且假设映射 (7.5.15) 的前 $k$ 个函数 $f^1,\cdots,f^k$ 的秩已经是 $k$, 则由秩定理的注 2 知存在点 $y_0=f(x_0)$ 的邻域及定义在它上面的 $n-k$ 个函数 $g^i(y)=g^i(y^1,\cdots,y^k)(i=k+1,\cdots,n)$, 它们与给定函数有同级的光滑性, 在 $x_0$ 的某个邻域中关系式 (7.5.14) 成立, 这就证明了结论 (2). □

我们证明了, 当 $k<n$ 时, 存在 $n-k$ 个特殊的函数

$$F^i(y)=y^i-g^i(y^1,\cdots,y^k)\quad(i=k+1,\cdots,n),$$

使得在点 $x_0$ 的邻域内函数组 $f^1,\cdots,f^k,\cdots,f^n$ 满足关系式

$$F^i(f^1(x),\cdots,f^k(x),f^i(x))\equiv 0 \quad (i=k+1,\cdots,n).$$

### 7.5.4 局部地分解微分同胚为最简形式的复合

在这里我们要利用反函数定理证明微分同胚可以局部地表示为这样一些微分同胚的复合, 这些微分同胚中的每一个仅仅改变一个坐标.

**定义 3** 定义在开集 $U\subset\mathbb{R}^m$ 上的微分同胚 $g:U\to\mathbb{R}^m$ 称为**最简微分同胚**, 如果它的坐标表示式为

$$\begin{cases} y^i=x^i, \quad i\in\{1,\cdots,m\},\ i\neq j,\\ y^j=g^j(x^1,\cdots,x^m). \end{cases}$$

即微分同胚 $g:U\to\mathbb{R}^m$ 仅仅改变被映点坐标中的一个.

**命题 2** 如果 $f:G\to\mathbb{R}^m$ 是开集 $G\subset\mathbb{R}^m$ 上的微分同胚, 则对任一点 $x_0\in G$, 都存在它的一个邻域, 在其中表示式 $f=g_1\circ\cdots\circ g_m$ 成立, 这里 $g_1,\cdots,g_m$ 是最简微分同胚.

(简言之: $\mathbb{R}^m$ 中的微分同胚可局部地分解为 $m$ 个最简微分同胚的复合.)

**证** 采用归纳法证明这个命题.

如果映射 $f$ 本身就是最简微分同胚, 那么, 命题是不证自明的.

我们假设命题对于改变的坐标不多于 $k-1$ 个 (其中 $k-1<m$, 换言之, 至少保持 $m-k+1$ 个坐标不动) 的微分同胚是正确的. 考察改变 $k$ 个坐标 (即另 $m-k$ 个坐标保持不动) 的微分同胚 $f:G\to\mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} y^1=f^1(x^1,\cdots,x^m),\\ \cdots\cdots\\ y^k=f^k(x^1,\cdots,x^m),\\ y^{k+1}=x^{k+1},\\ \cdots\cdots\\ y^m=x^m. \end{cases} \tag{7.5.16}$$

这里采取的是改变前 $k$ 个坐标的函数, 仅仅是为了简化写法而不会影响论证的一般性 (这从如下的证明过程可见).

因为 $f$ 是微分同胚, 它的雅可比矩阵 $f'(x)$ 在任一点 $x\in G$ 都是非退化的 (事实上, 有 $(f^{-1})'(f(x))=[f'(x)]^{-1}$). 固定 $x_0\in G$, 计算矩阵 $f'(x_0)$ 的行列式:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^k} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k} & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^m} \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{vmatrix}(x_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0.$$

于是, 这行列式中至少有一个 $k-1$ 阶子式不为零. 为了简化写法, 我们假定它的 $k-1$ 阶主子式不为零. 这时考察用下式定义的辅助函数 $g: G \to \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} u^1 = f^1(x^1, \cdots, x^m), \\ \cdots\cdots \\ u^{k-1} = f^{k-1}(x^1, \cdots, x^m), \\ u^k = x^k, \\ \cdots\cdots \\ u^m = x^m. \end{cases} \tag{7.5.17}$$

因为映射 $g: G \to \mathbb{R}^m$ 在 $x_0 \in G$ 雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{k-1}} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^k} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^{k-1}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^{k-1}}{\partial x^{k-1}} & \dfrac{\partial f^{k-1}}{\partial x^k} & \cdots & \dfrac{\partial f^{k-1}}{\partial x^m} \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{vmatrix}(x_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{k-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^{k-1}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0,$$

所以, $g$ 在点 $x_0$ 邻域内是微分同胚.

这时在点 $u_0 = g(x_0)$ 的某个邻域内存在 $g$ 的逆映射 $x = g^{-1}(u)$; 于是在点 $x_0$ 的邻域内的任一点 $x$ 都具有新坐标 $(u^1, \cdots, u^m)$.

设 $h = f \circ g^{-1}$. 换句话说, 映射 $y = h(u)$ 就是通过坐标 $u$ 写出的映射 (7.5.16)$y = f(x)$. 它作为微分同胚的复合, 在点 $u_0$ 的某个邻域内也是微分同胚.

显然它的坐标表示式为

$$\begin{cases} y^1 = f^1 \circ g^{-1}(u) = u^1, \\ \cdots\cdots \\ y^{k-1} = f^{k-1} \circ g^{-1}(u) = u^{k-1}, \\ y^k = f^k \circ g^{-1}(u), \\ y^{k+1} = u^{k+1}, \\ \cdots\cdots \\ y^m = u^m, \end{cases}$$

即 $h$ 是最简微分同胚.

但是 $f = h \circ g$, 而由归纳法假定知道由公式 (7.5.17) 定义的映射 $g$ 可以分解为最简微分同胚 $g_1, \cdots, g_{k-1}$ 的复合, 即 $g = g_1 \circ \cdots \circ g_{k-1}$. 因此, 改变 $k$ 个坐标的微分同胚 $f$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内也分解为 $k$ 个最简微分同胚的复合, 即 $f = h \circ g_1 \circ \cdots \circ g_{k-1}$, 由归纳法本命题证毕. □

### 7.5.5 莫尔斯 ① 引理

设 $f$ 是在点 $x \in \mathbb{R}^m$ 处二阶可微的函数. 其梯度映射 $f'(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x^m}\right)(x)$ 的微分

$$f''(x) = \frac{\partial(\partial_1 f, \cdots, \partial_m f)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \cdots & \partial_m\partial_1 f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1\partial_m f & \cdots & \partial_m\partial_m f \end{pmatrix}(x)$$

叫做 $f$ 在 $x$ 处的**黑塞矩阵**, 它导出 $\mathbb{R}^m$ 上的对称双线性函数: $\forall\, u = (u^1, \cdots, u^m), v = (v^1, \cdots, v^m) \in \mathbb{R}^m$,

$$H(x)[u, v] = u \cdot f''(x) \cdot v^{\mathrm{T}} = \sum_{i,j} u^i v^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x).$$

本小节考察在非退化临界点的邻域内局部地将光滑实值函数化为典则形式的莫尔斯引理.

**定义 4** 设 $x_0$ 是定义在点 $x_0$ 的邻域 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上属于 $C^{(2)}(U; \mathbb{R})$ 的函数 $f$ 的临界点. 如果 $f$ 在这点的黑塞矩阵的行列式 $\det(f''(x_0)) \neq 0$, 则称 $x_0$ 是函数 $f$ 的**非退化临界点**.

① 莫尔斯 (M. Morse)(1892—1977)——美国数学家, 他主要的贡献是把拓扑方法应用于分析学的不同领域.

如果 $x_0$ 是函数 $f$ 的临界点, 即 $f'(x_0)=0$, 由泰勒公式有

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0)(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)+o(\|x-x_0\|^2). \tag{7.5.18}$$

莫尔斯引理断定, 在局部范围内可以进行坐标变换 $x=g(y)$, 使得在坐标 $y$ 下函数 $f$ 能写成如下形式

$$f\circ g(y)-f(x_0)=-(y^1)^2-\cdots-(y^k)^2+(y^{k+1})^2+\cdots(y^m)^2.$$

假如等式 (7.5.18) 右边没有余项 $o(\|x-x_0\|^2)$, 那么, 差式 $f(x)-f(x_0)$ 就是通常的二次型, 由代数知道, 线性变换可以把它化为所指出的典则形式. 这样一来, 我们将要证明的命题就是代数中化二次型为典则形式的定理的局部变异形式. 在证明中将会用到证明这个代数定理的思想, 反函数定理以及下面的命题.

**阿达马引理**　设 $f:U\to\mathbb{R}$ 是定义在点 $0\in\mathbb{R}^m$ 的凸邻域 $U$ 上的 $C^{(p)}(U;\mathbb{R})$ $(p\geqslant 1)$ 类函数且 $f(0)=0$, 则存在函数 $g_i\in C^{(p-1)}(U;\mathbb{R})(i=1,\cdots,m)$, 使得在 $U$ 内下述等式成立

$$f(x^1,\cdots,x^m)=\sum_{i=1}^m x^i g_i(x^1,\cdots,x^m), \tag{7.5.19}$$

且 $g_i(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.

**证**　利用具有积分形式余项的泰勒公式得

$$f(x^1,\cdots,x^m)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(tx^1,\cdots,tx^m)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^m x^i\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1,\cdots,tx^m)\mathrm{d}t.$$

令

$$g_i(x^1,\cdots,x^m)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1,\cdots,tx^m)\mathrm{d}t\quad(i=1,\cdots,m)$$

则得 (7.5.19) 式. 此外, 显然有 $g_i(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(0)(i=1,\cdots,m)$, 且不难证明 $g_i\in C^{(p-1)}(U;\mathbb{R})$. 但是我们现在不去证明它们, 等将来证明了含参量积分的一般微分法则以后, 从它可以直接推出函数 $g_i$ 具有我们所需要的性质.

这样, 从这个意义上说, 我们证明了阿达马公式 (7.5.19). □

**莫尔斯引理**　设 $G$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f\in C^{(3)}(G;\mathbb{R})$, $x_0\in G$ 是 $f$ 的非退化临界点. 则存在从原点 $0\in\mathbb{R}^m$ 的某邻域 $V$ 到点 $x_0\in\mathbb{R}^m$ 的邻域 $U$ 的微分同胚 $g:V\to U$, 使得 $\forall y\in V$ 有

$$(f\circ g)(y)=f(x_0)-[(y^1)^2+\cdots+(y^k)^2]+[(y^{k+1})^2+\cdots+(y^m)^2].$$

**证** 用线性变换即可将问题归结为 $x_0 = 0$ 且 $f(x_0) = 0$ 的情形. 下面我们就认为这个条件已经满足.

因为 $x_0 = 0$ 是 $f$ 的临界点, 则公式 (7.5.19) 中的 $g_i(0) = 0 (i = 1 \cdots, m)$. 这时, 由阿达马引理有

$$g_i(x^1, \cdots, x^m) = \sum_{j=1}^{m} x^j h_{ij}(x^1, \cdots, x^m),$$

其中 $h_{ij}$ 是点 0 的邻域上的光滑函数, 于是

$$f(x^1, \cdots, x^m) = \sum_{i,j=1}^{m} x^i x^j h_{ij}(x^1, \cdots, x^m). \tag{7.5.20}$$

如果需要, 在上式中用 $\tilde{h}_{ij} = \dfrac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ 替换 $h_{ij}$, 因此可以认为 $h_{ij} = h_{ji}$.

我们注意到, 根据泰勒展开式的唯一性, 由函数 $h_{ij}$ 的连续性得知 $h_{ij}(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)$, 因此, 矩阵 $(h_{ij}(0))$ 是非退化的.

现在我们已经把函数 $f$ 写成类似于二次型的样子, 使得问题转化为将 (非退化二次型)(7.5.20) 式化为对角线形式. 由经典的二次型对角化方法可见存在非奇异坐标变换实现我们的目的. 下面简要地叙述其 (归纳法) 证明.

假设在点 $0 \in \mathbb{R}^m$ 的邻域 $U_1$ 中存在坐标 $u^1, \cdots, u^m$, 即存在用坐标 $u^1, \cdots, u^m$ 表示的微分同胚 $x = \varphi(u)$, 使得

$$f \circ \varphi(u) = \pm(u^1)^2 \pm \cdots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(u^1, \cdots, u^m), \tag{7.5.21}$$

其中 $r \geqslant 1$ 且 $H_{ij} = H_{ji}$.

注意, 当 $r = 1$ 时, 令 $H_{ij} = h_{ij}$, 从关系式 (7.5.20) 得知 (7.5.21) 式是成立的.

根据引理的条件, 二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{m} x^i x^j h_{ij}(0)$ 是非退化的, 即 $\det(h_{ij}(0)) \neq 0$. 变量替换 $x = \varphi(u)$ 是微分同胚, 因此 $\det \varphi'(0) \neq 0$. 于是, 用矩阵 $\varphi'(0)$ 及它的转置阵右乘与左乘二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{m} x^i x^j h_{ij}(0)$ 的矩阵, 所得到的矩阵是二次型

$$\pm(u^1)^2 \pm \cdots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(0)$$

的矩阵, 也是非退化的. 因此, 数 $H_{ij}(0)(i, j = r, \cdots, m)$ 之中至少有一个不为零. 可以用线性变换把二次型 $\sum\limits_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(0)$ 化为对角线形式, 因此可以认为, 在等式

(7.5.21) 中 $H_{rr}(0)\neq 0$. 由函数 $H_{rr}(u)$ 的连续性知, 在点 $u=0$ 的某个邻域内有 $H_{rr}(u)\neq 0$.

令 $\psi(u^1,\cdots,u^m)=\sqrt{|H_{rr}(u)|}$. 这时函数 $\psi$ 在点 $u=0$ 的某个邻域 $U_2\subset U_1$ 内属于 $C^{(1)}(U_2;\mathbb{R})$ 类. 现在按下式引进新坐标 $(v^1,\cdots,v^m)$:

$$\begin{cases} v^i=u^i, & i\neq r,\\ v^r=\psi(u^1,\cdots,u^m)\left[u^r+\displaystyle\sum_{i>r}\frac{u^iH_{ir}(u^1,\cdots,u^m)}{H_{rr}(u^1,\cdots,u^m)}\right]. \end{cases} \tag{7.5.22}$$

显然, 变换 (7.5.22) 在点 $u=0$ 的雅可比行列式 $\psi(0)\neq 0$, 因此, 由反函数定理可以断定, 在点 $u=0$ 的某个邻域 $U_3\subset U_2$ 内, 由 (7.5.22) 式定义的映射 $v=\psi(u)$ 是 $C^{(1)}(U_3;\mathbb{R}^m)$ 类微分同胚, 因此, 变量 $(v^1,\cdots,v^m)$ 可以作为 $U_3$ 内的点的坐标.

从等式 (7.5.21) 的右边取出所有含 $u^r$ 的项

$$u^ru^rH_{rr}(u^1,\cdots,u^m)+2\sum_{j=r+1}^{m}u^ru^jH_{rj}(u^1,\cdots,u^m). \tag{7.5.23}$$

在写 (7.5.23) 式中的和时, 我们用了 $H_{ij}=H_{ji}$.

比较 (7.5.22) 与 (7.5.23) 式可以看出, 表达式 (7.5.23) 可以改写成

$$\pm v^rv^r-\frac{1}{H_{rr}(u)}\left[\sum_{i>r}u^iH_{ir}(u^1,\cdots,u^m)\right]^2,$$

在 $v^rv^r$ 前面出现的正负号是由于 $H_{rr}=\pm(\psi)^2$ 的缘故, 并且当 $H_{rr}>0$ 时取正号, 当 $H_{rr}<0$ 时取负号.

这样一来, 表达式 (7.5.21) 在进行变量替换 $v=\psi(u)$ 以后, 化为等式

$$f\circ\varphi\circ\psi^{-1}(v)=\sum_{i=1}^{r}\pm(v^i)^2+\sum_{i,j>r}v^iv^j\tilde{H}_{rj}(v^1,\cdots,v^m),$$

其中 $\tilde{H}_{rj}$ 是某个关于指标 $i,j$ 对称的新的光滑函数, 而映射 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 是微分同胚. 这样, 我们完成了由 $r-1$ 到 $r$ 的归纳证明, 从而证明了莫尔斯引理. □

**注 3**　双线性型 $H$ 的负定空间

$$V^-:=\{u\in\mathbb{R}^m\mid H(x_0)[u,u]<0\}$$

的最大维数叫做 $f$ 的临界点 $x_0$ 的**指标**; 而 $H$ 的零空间

$$V^0:=\{u\in\mathbb{R}^m\mid H(x_0)[u,v]=0,\forall\, v\in\mathbb{R}^m\}$$

的最大维数叫做 $x_0$ 的**零性**. 它们常被用以刻画临界点.

## 练　习

1. 计算 $\mathbb{R}^m$ 中由极坐标到笛卡儿坐标的坐标变换

$$\begin{cases} x^1 = \rho\cos\varphi_1, \\ x^2 = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ \cdots\cdots \\ x^{m-1} = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1}, \\ x^m = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1} \end{cases}$$

的雅可比行列式.

2. (1) 设 $F: U \to \mathbb{R}$ 是定义在非临界点 $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$ 邻域 $U$ 上的光滑函数, 证明: 在点 $x_0$ 的某个邻域 $\tilde{U} \subset U$ 中存在曲线坐标 $(\xi^1, \cdots, \xi^m)$, 使得满足条件 $F(x) = F(x_0)$ 的 $x$ 的点集在这个新坐标下用方程 $\xi^m = 0$ 给出.

(2) 设 $\varphi, \psi \in C^{(k)}(D; \mathbb{R})$, 而且, 在区域 $D$ 中成立 $(\varphi(x) = 0) \Rightarrow (\psi(x) = 0)$, 试证: 如果 $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$, 则在 $D$ 中成立分解式 $\psi = \theta \cdot \varphi$, 这里 $\theta \in C^{(k-1)}(D; \mathbb{R})$.

3. 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是满足柯西–黎曼方程组

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^1} = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial f^2}{\partial x^1}$$

的光滑映射.

(1) 证明: 这个映射在某点的雅可比行列式等于零的充要条件是 $f'(x)$ 在这点是零矩阵.

(2) 证明: 如果 $f'(x) \neq 0$, 则 $f$ 在点 $x$ 的邻域内有确定的逆映射 $f^{-1}$ 且满足柯西–黎曼方程组.

4. (1) 对于函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 直接证明莫尔斯引理.

(2) 阐明下面函数在坐标原点是否适合莫尔斯引理: $f(x) = x^3$, $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\sin^2\dfrac{1}{x}$, $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $f(x, y) = x^2$.

(3) 证明: 函数 $f \in C^{(3)}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ 的非退化临界点是孤立的, 也就是说, 对每个这样的点存在一个邻域, 使得除该点本身外, 没有函数 $f$ 其他的临界点.

(4) 证明: 在莫尔斯引理中, 函数 $f$ 在非退化临界点邻域中典则形式的负数平方项的个数 $k$ 不依赖于引入变量替换的方式, 也就是说, 不依赖于使函数有典则形式的具体坐标. 这个数 $k$ 称为临界点的指标.

# 7.6 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面和条件极值理论

### 7.6.1 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维曲面

前面我们已有道路的概念.

$\mathbb{R}^n$ **中的道路**: 连续映射 $\Gamma: I=[a,b]\to\mathbb{R}^n$. 以 $\Gamma$ 的光滑程度定义道路的光滑程度. 道路的承载子 $\Gamma(I)\subset\mathbb{R}^n$ 可能是 $\mathbb{R}^n$ 中非常复杂的点集, 仅仅有时候可以很勉强地称为曲线, 譬如, 道路的承载子可以是单独的一个点.

类似地, $\mathbb{R}^n$ **中的** $k$**-道路** 定义为连续映射 $f: I^k=\{x\in\mathbb{R}^k\,|\,a^i\leqslant x\leqslant b^i,\ i=1,\cdots,k\}\to\mathbb{R}^n$, 它的像 $f(I^k)$ 可能完全不是我们想象的 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维曲面, 例如它也可能就是一个点.

现在引入所谓 $k$ 维曲面的概念.

**定义 1**　集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ **维光滑曲面**(或 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ **维子流形**), 如果每点 $x_0\in S$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中有邻域 $U(x_0)$ 以及微分同胚

$$\varphi: U(x_0)\to I^n:=\{t\in\mathbb{R}^n\,||t^i|\leqslant 1, i=1,\cdots,n\}\quad(\mathbb{R}^n\text{中的单位正方体}),$$

使得集合 $S\cap U(x_0)$ 在这个微分同胚下的像在 $I^n$ 中的部分是由关系式 $t^{k+1}=0,\cdots,t^n=0$ 确定的 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维平面 (图 44).

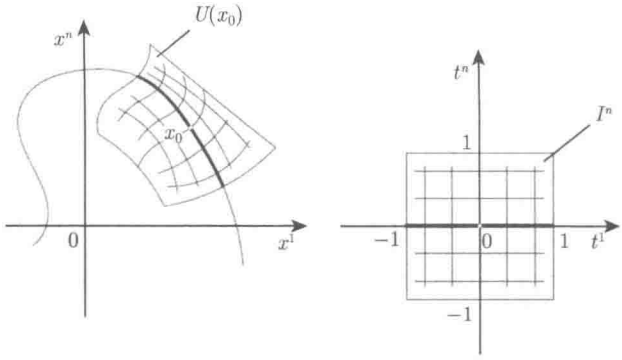



图 44

用微分同胚 $\varphi$ 的光滑程度来衡量曲面 $S$ 的光滑程度.

**注 1**　(1) 如果把变量 $t^1,\cdots,t^n$ 看成邻域 $U(x_0)$ 中点的新坐标, 那么, 定义 1 可以重新简述如下: **集合** $S\subset\mathbb{R}^n$ **称为** $\mathbb{R}^n$ **中的** $k$ **维曲面** ($k$ **维子流形**), **如果对于每点** $x_0\in S$, **可以指出一个邻域** $U(x_0)$ **和这样一组坐标** $t^1,\cdots,t^n$, **使得集合** $S\cap U(x_0)$ **的点能用关系式** $t^{k+1}=0=\cdots=t^n=0$ **给出**. 换言之, 在 $k$ 维曲面 $S$ 上任一点 $x_0\in S$ 邻域内的点可以用参数给出, 即利用映射

$$I^k\ni(t^1,\cdots,t^k)\mapsto(x^1,\cdots,x^n)\in S.\tag{7.6.1}$$

作为这样的映射可以取 $\varphi^{-1}: I^n\to U(x_0)$ 在 $k$ 维平面 $t^{k+1}=\cdots=t^n=0$ 上的限制 (图 44). 因为 $\varphi^{-1}$ 是微分同胚, 那么, 映射 $\varphi^{-1}: I^n\to U(x_0)$ 在立方体 $I^n$ 中的任一点的雅可比行列式不为零. 这时, 由 $\varphi^{-1}$ 在所指出的平面上的限制得到的映

射 (7.6.1) 在立方体 $I^k$ 中任一点的秩应当是 $k$. 这表明图 $U(x_0)$ 是用 $k$ 个独立参数 $(t^1,\cdots,t^k)\in I^k$ 描述的 $k$ 维图像.

(2) 定义 1 中的单位立方体的角色纯粹是约定的, 它大致上起着标准尺寸或者地图册中一页地图的作用. 立方体在坐标系 $t^1,\cdots,t^n$ 中的典型位置仅仅涉及区域的标准化问题, 并无更多意义, 因为 $\mathbb{R}^n$ 中任何一个立方体经过线性同胚总是可以变成标准的单位立方体.

考察一些例子.

**例 1** 空间 $\mathbb{R}^n$ 本身是 $C^{(\infty)}$ 类 $n$ 维曲面. 定义中的映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\to I^n$ 在这里可取作

$$\xi^i=\frac{2}{\pi}\arctan x^i\quad(i=1,\cdots,n).$$

**例 2** 例 1 中的映射同时建立了用条件 $x^{k+1}=\cdots=x^n=0$ 给出向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 它是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维曲面 (或 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维子流形).

**例 3** 在 $\mathbb{R}^n$ 中给定方程组 ($n-k$ 个方程)

$$\begin{cases}a_1^1x^1+\cdots+a_k^1x^k+a_{k+1}^1x^{k+1}+\cdots+a_n^1x^n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_1^{n-k}x^1+\cdots+a_k^{n-k}x^k+a_{k+1}^{n-k}x^{k+1}+\cdots+a_n^{n-k}x^n=0,\end{cases}$$

设它的秩等于 $n-k$, 则由它确定的点集是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维子流形.

事实上, 例如设行列式

$$\begin{vmatrix}a_{k+1}^1&\cdots&a_n^1\\ \vdots&&\vdots\\ a_{k+1}^{n-k}&\cdots&a_n^{n-k}\end{vmatrix}\neq 0,$$

这时线性变换

$$\begin{cases}t^1=x^1,\\ \cdots\cdots\\ t^k=x^k,\\ t^{k+1}=a_1^1x^1+\cdots+a_n^1x^n,\\ \cdots\cdots\\ t^n=a_1^{n-k}x^1+\cdots+a_n^{n-k}x^n\end{cases}$$

显然是非退化的. 在坐标系 $t^1,\cdots,t^n$ 中, 我们的集合用条件 $t^{k+1}=\cdots=t^n=0$ 给出, 这已经在例 2 中考察过了.

**例 4**　定义在某个区域 $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的光滑函数 $x^n = f(x^1, \cdots, x^{n-1})$ 的图像是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $(n-1)$ 维光滑曲面.

事实上, 设

$$\begin{cases} t^i = x^i \quad (i = 1, \cdots, n-1), \\ t^n = x^n - f(x^1, \cdots, x^{n-1}), \end{cases}$$

我们得到坐标系 $t^1, \cdots, t^{n-1}, t^n$, 在这个坐标系中, 函数的图像可用方程 $t^n = 0$ 描绘.

**例 5**　$\mathbb{R}^2$ 中的圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一维子流形. 这是由上一节得到的直角坐标 $(x, y)$ 到极坐标 $(\rho, \varphi)$ 的变换的局部可逆性确定的. 在极坐标系中, 上述圆周可用方程 $\rho = 1$ 描述.

**例 6** (例 3 的推广, $\mathbb{R}^n$ 空间中子流形的一般坐标形式)　设 $F^i(x^1, \cdots, x^n)(i = 1, \cdots, n-k)$ 是光滑函数组, 它的秩是 $n-k$, 则由关系式

$$\begin{cases} F^1(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ F^{n-k}(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{7.6.2}$$

确定的集合 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维子流形.

事实上, 设在点 $x_0 \in S$ 处有条件

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0, \tag{7.6.3}$$

这时由反函数定理知变换

$$\begin{cases} t^i = x^i \quad (i = 1, \cdots, k), \\ t^j = F^j(x^1, \cdots, x^n) \quad (j = k+1, \cdots, n) \end{cases}$$

在点 $x_0$ 的某个邻域内是微分同胚.

在坐标 $t^1, \cdots, t^n$ 中, 原来的方程组有 $t^{k+1} = \cdots = t^n = 0$ 的形式, 因此 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的中 $k$ 维光滑曲面.

**例 7**　平面 $\mathbb{R}^2$ 上满足方程 $x^2 - y^2 = 0$ 的点集 $E$ 是由通过坐标原点的两条直线组成的. 这个集合不是 $\mathbb{R}^2$ 中的一维子流形, 因为它有自身相交的点.

如果从 $E$ 中除去坐标原点 $0 \in \mathbb{R}^2$, 那么, 集合 $E \backslash \{0\}$ 显然满足定义 1. 注意, 集合 $E \backslash \{0\}$ 不是连通的, 它由四条没有公共点的射线组成.

此例表明, 满足定义 1 的 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维曲面可以是非连通的子集, 它们由一些连通分支组成 (这些分支是连通的 $k$ 维曲面). $\mathbb{R}^n$ 中的曲面常常理解为连通的 $k$ 维曲面. 但对于在给定的曲面上寻求函数的极值这类问题是局部性的问题, 并不要求曲面是连通的.

**例 8** 如果定义在区域 $G \subset \mathbb{R}^k$ 上的光滑映射 $f : G \to \mathbb{R}^n$ 的坐标形式为

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t^1, \cdots, t^k), \\ \cdots\cdots \\ x^n = f^n(t^1, \cdots, t^k), \end{cases}$$

并且它在点 $t_0 \in G$ 的秩为 $k$. 则存在 $t_0$ 的邻域 $U(t_0) \subset G$, 它的像 $S := f(U(t_0)) \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲面.

事实上, $x = (x^1, \cdots, x^n) \in S \Leftrightarrow x^i = f^i(t^1, \cdots, t^k)\,(i = 1, \cdots n)$. 不妨设函数组 $f^1, \cdots, f^k$ 的秩为 $k$, 从 7.5 节函数相关性之命题 1 知 (如必要可缩小 $U(t_0)$), $\forall i = 1, \cdots, n-k$,

$$x^{k+i} = g^{k+i}(f^1(t^1, \cdots, t^k), \cdots, f^k(t^1, \cdots, t^k)) = g^{k+i}(x^1, \cdots, x^k).$$

于是, 上面的关系式在 $U(t_0)$ 内能替换为与它等价的关系式

$$\begin{cases} x^{k+1} = g^{k+1}(x^1, \cdots, x^k), \\ \cdots\cdots \\ x^n = g^n(x^1, \cdots, x^k). \end{cases} \tag{7.6.4}$$

定义光滑函数组

$$F^i(x^1, \cdots, x^n) = x^{k+i} - g^{k+i}(x^1, \cdots, x^k) \quad (i = 1, \cdots, n-k),$$

它的秩是 $n-k$. 于是 (7.6.4) 式可写成 (7.6.2) 式, 从而 $S$ 由 (7.6.4) 式确定. 因为 (7.6.3) 式满足 $\left(\text{实际上, } \dfrac{\partial(F^1, \cdots, F^{n-k})}{\partial(x^{k+1}, \cdots, x^n)} \text{ 是 } n-k \text{ 阶单位阵}\right)$, 由例 6 知集合 $f(U(t_0))$ 实际上是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维光滑曲面.

**注 2** $\mathbb{R}^n$ 中的光滑 $k$-道路 $f : I^k \to \mathbb{R}^n$ 的像 $f(I^k)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维光滑曲面, 如果它的秩为 $k$.

### 7.6.2 切空间

从注 1(1) 知, 在 $k$ 维曲面 $S$ 上任一点 $x_0 \in S$ 邻域内的点可以用参数给出. 现在设 $(t^1, \cdots, t^k) \in I^k$ 且用 $x = x(t)$ 表示映射 $I^k \ni t \mapsto x \in S$, 我们得到曲面 $S$ 的局部参数表示式. 于是我们采用下面的定义.

**定义 2**　如果 $k$ 维曲面 $S \subset \mathbb{R}^n (1 \leqslant k \leqslant n)$ 在点 $x_0 \in S$ 的邻域内借助参数形式的光滑映射 $(t^1, \cdots, t^k) = t \mapsto x = (x^1, \cdots, x^n)$ 给出, $x_0 = x(0)$ 且矩阵 $x'(0)$ 的秩为 $k$, 那么, 称在 $\mathbb{R}^n$ 中用矩阵形式的参数式 $x - x_0 = x'(0)t$ 给出的 $k$ 维平面为*曲面 $S$ 在点 $x_0 \in S$ 的切平面或切空间*.

矩阵等式 $x - x_0 = x'(0)t$ 可写成坐标形式

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial t^1}(0)t^1 + \cdots + \dfrac{\partial x^1}{\partial t^k}(0)t^k, \\ \cdots\cdots \\ x^n - x_0^n = \dfrac{\partial x^n}{\partial t^1}(0)t^1 + \cdots + \dfrac{\partial x^n}{\partial t^k}(0)t^k. \end{cases} \tag{7.6.5}$$

曲面 $S$ 在 $x \in S$ 的切空间像以前一样用记号 $TS_x$ 表示①.

读者可以验证线性映射 $t \mapsto x'(0)t$, 它是局部定义曲面 $S$ 的映射 $t \mapsto x(t)$ 的切映射, 把空间 $\mathbb{R}^k = T\mathbb{R}_0^k$ 映成平面 $TS_{x(0)}$.

现在我们描述 $\mathbb{R}^n$ 中用方程组 (7.6.2) 给出的 $k$ 维曲面 $S$ 的切平面方程. 为了确定起见, 假定在考察的点 $x_0 \in S$ 的邻域内条件 (7.6.3) 是满足的.

令 $(x^1, \cdots, x^k) = u, (x^{k+1}, \cdots, x^n) = v, (F^1, \cdots, F^{n-k}) = F$, 则方程组 (7.6.2) 可写成

$$F(u, v) = 0, \tag{7.6.6}$$

而条件 (7.6.3) 可写成

$$\det F'_v(u, v) \neq 0. \tag{7.6.7}$$

在点 $(u_0, v_0) = (x_0^1, \cdots, x_0^k, x_0^{k+1}, \cdots, x_0^n)$ 的邻域内, 由隐函数定理知可把关系式 (7.6.6) 化成与它等价的关系式

$$v = f(u). \tag{7.6.8}$$

对 (7.6.8) 式补充恒等式 $u = u$, 我们得到曲面 $S$ 在点 $x_0 \in S$ 邻域内的参数表示式

$$\begin{cases} u = u, \\ v = f(u). \end{cases} \tag{7.6.9}$$

从定义 2 得到切平面的参数方程

$$\begin{cases} u - u_0 = E \cdot t, \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot t, \end{cases} \tag{7.6.10}$$

其中 $E$ 是单位阵, 而 $t = u - u_0$.

① 这个记号与最通用的记号 $T_xS$ 或 $T_x(S)$ 的差别是不大的.

为简单计, 我们仅留下方程组 (7.6.10) 中的非平凡方程

$$v - v_0 = f'(u_0)(u - u_0), \tag{7.6.11}$$

它刻画了切空间变量 $x^1, \cdots, x^k$ 与变量 $x^{k+1}, \cdots, x^n$ 之间的联系.

利用隐函数定理有

$$f'(u_0) = -[F'_v(u_0, v_0)]^{-1}[F'_u(u_0, v_0)],$$

于是 (7.6.11) 式可写成

$$F'_u(u_0, v_0)(u - u_0) + F'_v(u_0, v_0)(v - v_0) = 0.$$

由此, 重新回到变量 $(x^1, \cdots, x^n) = x$, 就得到要求的切空间 $TS_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ 的方程

$$F'_x(x_0)(x - x_0) = 0. \tag{7.6.12}$$

与方程 (7.6.12) 等价的坐标形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + \cdots + \dfrac{\partial F^1}{\partial x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + \cdots + \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0. \end{cases} \tag{7.6.13}$$

由条件知这个方程组的秩是 $n - k$, 由此它给出 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维平面.

仿射方程 (7.6.12) 等价于 (如果指定了点 $x_0$) 向量方程

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0, \tag{7.6.14}$$

其中 $\xi = x - x_0$.

这就是说, 如果曲面 $S$ 由方程 $F(x) = 0$ 定义, 而 $x_0 \in S$, 则向量 $\xi$ 在曲面 $S$ 的切平面 $TS_{x_0}$ 上, 当且仅当, 它满足条件 (7.6.14). 所以, 可以把 $TS_{x_0}$ 看成满足条件 (7.6.14) 的向量 $\xi$ 构成的向量空间.

现在来证明下面的命题, 我们已经遇到过它的特殊情形 (参看 7.3.6 小节).

**命题 1** 光滑曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 在点 $x_0 \in S$ 的切空间 $TS_{x_0}$ 是由曲面 $S$ 上过点 $x_0$ 的光滑曲线在点 $x_0$ 的切向量组成的.

**证** 设曲面 $S$ 在点 $x_0 \in S$ 的邻域内用方程组 (7.6.2) 表示, 它可用简短形式写成

$$F(x) = 0, \tag{7.6.15}$$

其中 $F=(F^1,\cdots,F^{n-k}), x=(x^1,\cdots,x^n)$. 设 $\Gamma: I=(-1,1)\to S$ 是任何一条承载子在曲面 $S$ 上的光滑道路. 令 $x(0)=x_0$. 在方程 (7.6.15) 中代入 $x(t)$ 得到

$$F(x(t))\equiv 0,\quad t\in I, \tag{7.6.16}$$

关于 $t$ 微分这个恒等式产生

$$F'_x(x(t))\cdot x'(t)\equiv 0.$$

于是 $\xi=x'(0)$ 满足方程 (7.6.14). 这表明在点 $x_0$(时刻 $t=0$) 与轨道相切的向量 $\xi$ 满足切空间 $TS_{x_0}$ 的方程 (7.6.14).

现在证明, 对任何一个满足方程 (7.6.14) 的向量 $\xi$, 必存在一条光滑道路 $\Gamma: I\to S$ 给出的 $S$ 上的曲线, $\Gamma(0)=x_0$, 使得 $\xi$ 是 $\Gamma$ 在时刻 $t=0$ 的速度向量.

事实上, 假设条件 (7.6.3) 是满足的. 这时, 从 (7.6.14) 式知道由向量 $\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^k,\xi^{k+1},\cdots,\xi^n)$ 的前 $k$ 个坐标 $\xi^1,\cdots,\xi^k$ 唯一地确定其余的坐标 $\xi^{k+1},\cdots,\xi^n$. 因此, 若能证明对于向量 $\tilde{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^k,\tilde{\xi}^{k+1},\cdots,\tilde{\xi}^n)$ 必满足 (7.6.14) 式, 则可以断定 $\tilde{\xi}=\xi$.

为证 $\tilde{\xi}$ 满足 (7.6.14) 式, 仍记 $u=(x^1,\cdots,x^k), v=(x^{k+1},\cdots,x^n), x=(x^1,\cdots,x^n)=(u,v), F(x)=F(u,v)$. 用 $\xi_u$ 表示方向向量 $(\xi^1,\cdots,\xi^k)$, 取直线方程

$$u=u_0+\xi_u t. \tag{7.6.17}$$

由隐函数定理解出 $v$, 得到 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲线

$$\begin{cases} u=u_0+\xi_u t, \\ v=f(u_0+\xi_u t), \end{cases}\quad t\in U(0)\subset\mathbb{R}.$$

显然这条曲线在曲面 $S$ 上, 因为 $F(u,f(u))\equiv 0$, 且当 $t=0$ 时, 曲线通过点 $(u_0,v_0)=x_0\in S$. 关于 $t$ 微分恒等式

$$F(u(t),v(t))=F(u_0+\xi_u t, f(u_0+\xi_u t))\equiv 0,$$

并令 $t=0$, 得到

$$F'_u(u_0,v_0)\xi_u+F'_v(u_0,v_0)\tilde{\xi}_v=0, \tag{7.6.18}$$

其中 $\tilde{\xi}_v=v'(0)=(\tilde{\xi}^{k+1},\cdots,\tilde{\xi}^n)$ . (7.6.18) 式表明 $\tilde{\xi}$ 满足 (7.6.14) 式. 于是完成了本命题的证明. □

### 7.6.3 条件极值

1. 问题的描述

条件极值问题即: 求 $n$ 个变量的实值函数

$$y = f(x^1, \cdots, x^n) \tag{7.6.19}$$

在变量满足方程组

$$\begin{cases} F^1(x^1, \cdots, x^n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ F^m(x^1, \cdots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{7.6.20}$$

的条件下的极值.

为获得极值的微分条件, 故假设所考察的函数都是可微的甚至是连续可微的. 如果函数组 $F^1, \cdots, F^m$ 的秩是 $n-k$, 则条件 (7.6.20) 给出 $\mathbb{R}^n$ 中某个 $k$ 维光滑曲面 $S$. 从几何观点看就是寻求函数 $f$ 在曲面 $S$ 上的极值. 更精确地, 就是考察函数 $f$ 在曲面 $S$ 上的限制 $f|_S$ 并寻求函数 $f|_S$ 的极值.

回忆局部极值点的概念. 点 $x_0 \in S$ 是函数 $f|_S$ 的局部极值点, 如果存在点 $x_0$ 在 $S \subset \mathbb{R}^n$ 中的邻域 $U_S(x_0) = S \cap U(x_0)$(其中 $U(x_0)$ 是 $x_0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域), 对其中任一点 $x$, 有不等式 $f(x) \geqslant f(x_0)$ (此时称 $x_0$ 为局部极小值点) 或 $f(x) \leqslant f(x_0)$(此时称 $x_0$ 为局部极大值点). 如果对任一 $x \in \mathring{U}_S(x_0)$, 上面不等式为严格不等式, 则极值点像以前一样称为严格局部极值点.

2. 条件极值的必要条件

**定理 1** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $f \in C^{(1)}(D; \mathbb{R})$, $S$ 是 $D$ 中的光滑曲面, $x_0 \in S$ 不是 $f$ 的临界点. 如果 $x_0$ 是函数 $f|_S$ 的局部极值点, 则有

$$\boxed{TS_{x_0} \subset TN_{x_0},} \tag{7.6.21}$$

其中 $TS_{x_0}$ 是曲面 $S$ 在 $x_0$ 的切空间, 而 $TN_{x_0}$ 是曲面 $N = \{x \in D | f(x) = f(x_0)\}$ 在 $x_0$ 的切空间.

**注 3** (1) 首先注意, 条件 "$x_0$ 不是函数 $f$ 的临界点" 不是本质的限制. 事实上, 如果 $x_0 \in S$ 已经是函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 的临界点或极值点, 那么, 显然它也是函数 $f|_S$ 的可疑点或极值点. 因此, 这里真正需要研究的新问题是, 函数 $f|_S$ 可能有那样的临界点和极值点, 它们不是函数 $f$ 的临界点和极值点.

(2) 由于 $f'(x_0) \neq 0$, 集合 $N$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n-1$ 维光滑曲面, 且 $TN_{x_0}$ 由下述方程表示:

$$f'(x_0) \cdot \xi = 0.$$

事实上, 令 $\tilde{F}(x)=f(x)-f(x_0)$, 则 $\tilde{F}'(x)=f'(x)$, $\operatorname{rank}\tilde{F}(x)=1$ (在 $x_0$ 的某邻域), 故然.

**定理 1 的证明**　设 $\xi\in TS_{x_0}$. 取 $S$ 上的光滑道路 $x=x(t)$, 它满足 $x(0)=x_0$, 且向量 $\xi$ 就是它在 $t=0$ 时的速度向量, 即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=\xi. \tag{7.6.22}$$

如果 $x_0$ 是函数 $f|_S$ 的极值点, 则光滑函数 $f(x(t))$ 当 $t=0$ 时应当有极值. 由极值必要条件知

$$f'(x_0)\cdot\xi=\big(f'(x(t))x'(t)\big)|_{t=0}=0, \tag{7.6.23}$$

其中

$$f'(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x_0),\quad \xi=(\xi^1,\cdots,\xi^n).$$

因为 $x_0$ 非 $f$ 的临界点, 条件 (7.6.23) 等价于 $\xi\in TN_{x_0}$. 这是因为关系式 (7.6.23) 正是切空间 $TN_{x_0}$ 的方程.

这就证明了 $TS_{x_0}\subset TN_{x_0}$. □

如果曲面 $S$ 在点 $x_0$ 邻域内用方程组 (7.6.20) 表示, 那么, 空间 $TS_{x_0}$ 正像我们知道的那样, 用下面的线性方程组表示:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0)\xi^1+\cdots+\dfrac{\partial F^1}{\partial x^n}(x_0)\xi^n=0,\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F^m}{\partial x^1}(x_0)\xi^1+\cdots+\dfrac{\partial F^m}{\partial x^n}(x_0)\xi^n=0,\end{cases} \tag{7.6.24}$$

空间 $TN_{x_0}$ 用下面的方程表示:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\xi^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\xi^n=0. \tag{7.6.25}$$

由于方程组 (7.6.24) 的所有解是方程 (7.6.25) 的解, 所以方程 (7.6.25) 是方程组 (7.6.24) 的推论.

从这些考虑推出, 与关系式 $TS_{x_0}\subset TN_{x_0}$ 等价的解析写法是: 向量 $\operatorname{grad}f(x_0)$ 是向量 $\operatorname{grad}F^i(x_0)(i=1,\cdots,m)$ 的线性组合, 即

$$\operatorname{grad}f(x_0)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\operatorname{grad}F^i(x_0). \tag{7.6.26}$$

这个公式是函数 (7.6.19) 在约束条件 (7.6.20) 下极值的必要条件.

基于 (7.6.26), 人们引入了求极值的**拉格朗日乘数法**, 介绍如下. 引入 $n+m$ 个变量 $(x,\lambda)=(x^1,\cdots,x^n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 的辅助函数 ( **拉格朗日函数**):

$$L(x,\lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F^i(x). \tag{7.6.27}$$

易见, 作为 $n+m$ 个变量 $x^1,\cdots,x^n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 的函数, $L$ 取极值的必要条件正与 (7.6.26) 和 (7.6.20) 一致. 事实上, 根据定义有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^j}(x,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial x^j}(x)-\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x)=0 \quad (j=1,\cdots,n), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda^i}(x,\lambda)=F^i(x)=0 \qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,\cdots,m). \end{cases} \tag{7.6.28}$$

**结论** 为寻求 $f|_S$ 的极值点, 可以写出含待定因子的拉格朗日函数 (7.6.27), 进而求 $L(x,\lambda)$ 的临界点, 再从 (7.6.28) 求出临界点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ (但不必解出 $\lambda$).

**注 4** 从关系式 (7.6.26) 可以看出, 只要向量 $\operatorname{grad}F^i(x_0)(i=1,\cdots,m)$ 线性无关, 因子 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ 是唯一确定的. 这些向量的无关性等价于方程组 (7.6.24) 的秩为 $m$, 也就是说, 这个方程组的所有方程是独立的. 这个要求通常是能满足的, 因为可以认为 (7.6.20) 式所有关系式是无关的, 且函数组 $F^1,\cdots,F^m$ 在任一点 $x\in S$ 的秩都是 $m$.

拉格朗日函数常常写成下面形式

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F^i(x),$$

这个形式不同于以前形式仅仅是作了一个非本质的替换, 即用 $\lambda_i$ 替换 $-\lambda_i$.

**例 9** 求对称二次型

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x^ix^j \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{7.6.29}$$

在球面

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2-1=0 \tag{7.6.30}$$

上的极值.

写出此问题的拉格朗日函数

$$L(x,\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x^ix^j-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2-1\right).$$

考虑到 $a_{ij}=a_{ji}$, 求出函数 $L(x,\lambda)$ 极值的必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x^i}(x,\lambda)=2\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x^j-\lambda x^i\right)=0 \quad (i=1,\cdots,n),\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,\lambda)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2-1\right)=0.\end{cases}\tag{7.6.31}$$

把第一个方程组中的每一个方程分别乘以 $x^i(i=1,\cdots,n)$ 然后相加, 并注意到第二个方程, 就得到极值点应满足等式

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x^ix^j-\lambda=0.\tag{7.6.32}$$

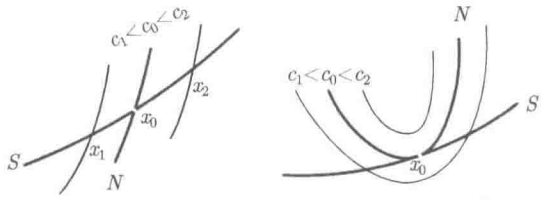
方程组 (7.6.31) 除去最后一个方程可以改写为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x^j=\lambda x^i \quad (i=1,\cdots,n).\tag{7.6.33}$$

由此得到, $\lambda$ 是由矩阵 $(a_{ij})$ 确定的线性变换 $A$ 的特征值, 而 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 是这个变换对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量.

因为连续函数 (7.6.29) 在紧集 $S=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2=1\right\}$ 上应当在某点具有最大值, 由此方程组 (7.6.31) 亦即方程组 (7.6.33) 应当有解, 这样我们顺便得到: 任何一个实对称矩阵 $(a_{ij})$ 至少有一个实特征值. 这是大家从线性代数中已经知道的结果, 这个结果在证明存在由对称算子的特征向量构成的基底时是基本的.

定理 1 得到的结果 (条件极值的必要条件) 可用图 45(a) 和 (b) 表示.




(a)　　(b)

图 45

图 45(a) 说明, 为什么当曲面 $S$ 与曲面 $N=\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)=f(x_0)=c_0\}$ 在点 $x_0$ 不相切时, 曲面 $S$ 上的点 $x_0$ 不可能是函数 $f|_S$ 的极值点. 这时假设了 $\operatorname{grad}f(x_0)\neq 0$, 这个条件保证了在点 $x_0$ 的邻域内既有函数 $f$ 较高的 $c_2$-等高集的点, 也有这个函数较低的 $c_1$-等高集的点.

因为光滑曲面 $S$ 与曲面 $N$(即光滑函数 $f$ 的 $c_0$-等高集) 相交, 那么, 在的 $x_0$ 的邻域内, $S$ 既与函数 $f$ 的较高等高集相交, 也与它的较低等高集相交. 而这意味着, 点 $x_0$ 不可能是函数 $f|_S$ 的极值点.

图 45(b) 说明, 为什么当曲面 $N$ 与 $S$ 在点 $x_0$ 相切时, 这个点可能是极值点. 图中点 $x_0$ 是函数 $f|_S$ 的局部极大值点.

就是这样一些思考, 使我们能画出图来, 而图的解析形式能证明条件极值的必要条件不是充分的.

事实上, 例如, 对应图 46, 设

$$f(x,y)=y,$$
$$F(x,y)=x^3-y=0.$$

这时, 曲线 $S\subset\mathbb{R}^2$ 显然用方程 $y=x^3$ 给出, 量 $y$ 在点 $(0,0)$ 不具极值, 虽然这条曲线与函数 $f$ 在这点的水平集 $f(x,y)=0$ 相切. 注意 $\operatorname{grad} f(0,0)=(0,1)\neq 0$.

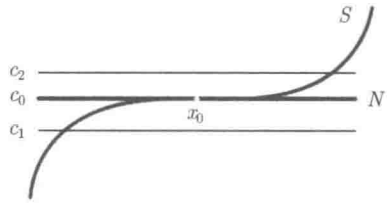



图 46

显然, 这个例子本质上就是我们在研究古典的函数内部极值点的充分条件与必要条件之间的差别时所使用的那个例子.

3. 条件极值的充分条件

现在我们证明下面的条件极值存在或不存在的充分条件.

**定理 2** 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $f\in C^{(2)}(D;\mathbb{R})$, $S$ 是用方程组 (7.6.20) 表示的 $D$ 中的曲面, 其中 $F^i\in C^{(2)}(D;\mathbb{R})(i=1,\cdots,m)$ 且函数组 $\{F^1,\cdots,F^m\}$ 在区域 $D$ 中任一点的秩等于 $m$. 设拉格朗日函数

$$L(x)=L(x,\lambda)=f(x^1,\cdots,x^n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F^i(x^1,\cdots,x^n)$$

中的参数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 已根据函数 $f|_S$ 在点 $x_0\in S$ 取极值的必要条件 (7.6.26) 选定①.

① $\lambda$ 确定后, 从 $L(x,\lambda)$ 得到只依赖于 $x$ 的函数, 从而可用 $L(x)$ 表示它.

• 如果二次型

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\xi^i\xi^j \tag{7.6.34}$$

对任意的向量 $\xi \in TS_{x_0}$ 有确定的符号, 则点 $x_0$ 是函数 $f|_S$ 的极值点.

• 如果 (7.6.34) 式在 $TS_{x_0}$ 上是正定的, 则 $x_0$ 是函数 $f|_S$ 的严格局部极小值点; 如果 (7.6.34) 式在 $TS_{x_0}$ 上是负定的, 则 $x_0$ 是函数 $f|_S$ 的严格局部极大值点.

• 如果 (7.6.34) 式在 $TS_{x_0}$ 上的值具有不同的符号, 则点 $x_0$ 不是函数 $f|_S$ 的极值点.

**证**　首先注意到, 对于 $x \in S, L(x) \equiv f(x)$, 因此, 如果我们证明了点 $x_0 \in S$ 是函数 $L|_S$ 的极值点, 也就同时证明了它是函数 $f|_S$ 的极值点.

由于函数 $f|_S$ 在点 $x_0 \in S$ 满足极值的必要条件 (7.6.26), 因此我们在这点有 $\operatorname{grad} L(x_0) = 0$, 这意味着函数 $L(x)$ 在点 $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 邻域内的泰勒展开式为

$$L(x)-L(x_0) = \frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)+o(\|x-x_0\|^2), \quad x \to x_0. \tag{7.6.35}$$

我们知道 $k$ 维光滑曲面 (此时 $k = n - m$) 在局部范围 (例如, 在点 $x_0 \in S$ 的邻域) 内可以写成参数形式, 即存在光滑映射

$$\mathbb{R}^k \ni (t^1, \cdots, t^k) = t \mapsto x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

它把点 $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k$ 的邻域双方单值地映成点 $x_0 \in S$ 的某个邻域且 $x_0 = x(0)$.

注意到关系式

$$x(t) - x(0) = x'(0)t + o(\|t\|), \quad t \to 0$$

等价于 $n$ 个坐标等式

$$x^i(t) - x^i(0) = \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}(0)t^\alpha + o(\|t\|) \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{7.6.36}$$

上式右边是关于指标 $\alpha$ 从 1 到 $k$ 求和.

由此推出

$$|x^i(t) - x^i(0)| = O(\|t\|), \quad t \to 0,$$

即

$$\|x(t) - x(0)\|_{\mathbb{R}^n} = O(\|t\|_{\mathbb{R}^k}), \quad t \to 0. \tag{7.6.37}$$

利用关系式 (7.6.36), (7.6.37), 从等式 (7.6.35) 得到

$$L(x(t)) - L(x(0)) = \frac{1}{2!}\partial_{ij}L(x_0)\partial_\alpha x^i(0)\partial_\beta x^j(0)t^\alpha t^\beta + o(\|t\|^2), \quad t \to 0. \tag{7.6.35'}$$

由此, 在二次型

$$\partial_{ij}L(x_0)\partial_\alpha x^i(0)\partial_\beta x^j(0)t^\alpha t^\beta \tag{7.6.38}$$

定号条件下, 得到函数 $L(x(t))$ 在 $t=0$ 有极值; 如果 (7.6.38) 式有不同的符号, 则 $L(x(t))$ 在 $t=0$ 没有极值. 但是, 因为映射 $t\mapsto x(t)$ 把点 $0\in\mathbb{R}^k$ 某个邻域变到曲面 $S$ 上点 $x(0)=x_0\in S$ 的邻域, 可以断定, 函数 $L|_S$ 在点 $x_0$ 或者有极值, 当函数 $L(x(t))$ 在 $t=0$ 有极值; 或者像函数 $L(x(t))$ 一样没有极值.

于是, 剩下来的是要验证: 对任何向量 $\xi\in TS_{x_0}$, 表达式 (7.6.34) 与 (7.6.38) 只是同一个量的不同表示.

事实上, 设 $\xi=x'(0)t$, 由此知向量 $\xi$ 在点 $x_0$ 与 $S$ 相切, 记

$$\xi=(\xi^1,\cdots\xi^n),\quad x(t)=(x^1,\cdots,x^n)(t),\quad t=(t^1,\cdots,t^k),$$

则

$$\xi^j=\partial_\beta x^j(0)t^\beta\quad(j=1,\cdots,n),$$

由此推出 (7.6.34) 式与 (7.6.38) 式是一样的. □

我们发现利用定理 2 的实际困难是: 在向量 $\xi=(\xi^1,\cdots\xi^n)\in TS_{x_0}$ 的坐标中只有 $k=n-m$ 个是无关的. 这是因为向量 $\xi$ 的坐标应当满足确定切空间 $TS_{x_0}$ 的方程组 (7.6.24). 因此, 在这种情况下, 对于公式 (7.6.34) 直接应用西尔维斯特准则, 一般来说, 是什么也得不到的: 二次型 (7.6.34) 在 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 上可能是不定的, 但在 $TS_{x_0}$ 上确是定的. 如果从 (7.6.24) 式中把向量 $\xi$ 的 $m$ 个坐标用其余的 $k$ 个独立坐标表示出来, 并将所得到的线性形式代入 (7.6.34) 式, 那么, 我们就得到具有 $k$ 个独立变量的二次型, 这个二次型的确定性问题已经可以利用西尔维斯特准则来研究了.

现在举出一些最简单的例子说明上边所讲的内容.

**例 10** 设在空间 $\mathbb{R}^3$ 中用坐标 $x$, $y$, $z$ 给出函数

$$f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2.$$

寻求这个函数在用方程

$$F(x,y,z)=2x-y-3=0$$

给出的平面 $S$ 上的极值.

写出拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=(x^2-y^2+z^2)-\lambda(2x-y-3)$$

和极值的必要条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2x - y - 3) = 0, \end{cases}$$

求出可疑点 $p = (2, 1, 0)$.

其次, 求出公式 (7.6.34):

$$\frac{1}{2}\partial_{ij} L \xi^i \xi^j = (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2, \tag{7.6.39}$$

我们看到, 在这里, 参数 $\lambda$ 没有在二次型中出现, 所以不必去计算它.

现在写出条件 $\xi \in TS_p$:

$$2\xi^1 - \xi^2 = 0, \tag{7.6.40}$$

从这个等式得到 $\xi^2 = 2\xi^1$, 代入 (7.6.39) 式, 使它化成

$$-3(\xi^1)^2 + (\xi^3)^2,$$

其中 $\xi^1$ 与 $\xi^3$ 是独立变量.

最后这个二次型显然可取不同的符号, 因此函数 $f|_S$ 在点 $p \in S$ 没有极值.

**例 11**　在例 10 中用 $\mathbb{R}^2$ 替换 $\mathbb{R}^3$, 函数 $f$ 换成

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

且保存条件

$$2x - y - 3 = 0,$$

现在它给出平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一条直线 $S$.

求出可疑点 $p = (2, 1)$. 代替 (7.6.39) 式得到二次型

$$(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2, \tag{7.6.41}$$

以及 $\xi^1$ 和 $\xi^2$ 之间的关系式 (7.6.40). 这样一来, 在 $TS_p$ 上 (7.6.41) 式可写成

$$-3(\xi^1)^2,$$

也就是说, 它是负定的. 由此断定点 $p = (2, 1)$ 是函数 $f|_S$ 的局部极大值点.

下面这些简单例子在许多方面都是非常有教益的, 在这些例子中可以清楚地看到极值必要条件、充分条件的作用机制, 也包括参数的作用和拉格朗日函数的非形式的作用.

**例 12** 在具笛卡儿坐标 $(x,y)$ 的平面上给出函数

$$f(x,y)=x^2+y^2.$$

我们来求这个函数在由

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad (0<a<b)$$

定义的椭圆周 $S$ 上的极值.

从几何上考虑, 显然有 $\min f|_S=a^2, \max f|_S=b^2$. 下面我们利用定理 1 和定理 2 导出这个结果.

写出拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

并求解方程 $\mathrm{d}L=0$, 亦即方程组 $\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0$, 找出它的解:

$$(x,y,\lambda)=(\pm a,0,a^2), \quad (0,\pm b,b^2).$$

按照定理 2, 现在写出二次形式 $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}^2L\xi^2$ 并研究它, 它是拉格朗日函数在相应点邻域中的泰勒展开式中的第二项:

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}^2L\xi^2=\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)(\xi^1)^2+\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)(\xi^2)^2.$$

在椭圆周 $S$ 的点 $(\pm a,0)$ 处, 切向量 $\xi=(\xi^1,\xi^2)$ 为 $(0,\xi^2)$, 而当 $\lambda=a^2$ 时, 二次型为

$$\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)(\xi^2)^2.$$

注意到条件 $0<a<b$, 得知, 这个二次型是正定的, 因此, 在点 $(\pm a,0)\in S$ 函数 $f|_S$ 有严格局部极小值 (而且, 也是整体最小值), 即 $\min f|_S=a^2$.

类似地, 求出二次型

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(\xi^1)^2,$$

它对应于点 $(0,\pm b)\in S$, 并得到 $\max f|_S=b^2$.

**注 5** 注意比较拉格朗日函数和函数 $f$ 的作用. 在点 $(\pm a,0),(0,\pm b)$ 函数

$f$(与函数 $L$ 一样) 沿相应切向量的微分都是零, 而二次型 $\frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f\xi^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2$, 无论在这些点的哪一个点算出来都是这样, 然而, 函数 $f|_S$ 在点 $(\pm a, 0)$ 有严格最小, 而在点 $(0, \pm b)$ 有严格最大.

为了弄明白, 这到底是怎么回事, 请再一次细细考察定理 2 的证明并且试着把 (7.6.35) 式中的 $L$ 换成 $f$, 得到关系式 (7.6.35′). 你会发现, 这时将出现一个包含 $x''(0)$ 的附加项. 有这样一项的原因是, 函数 $f$ 的微分与 $\mathrm{d}L$ 不同, 它在相应的点处不恒等于零, 虽然它沿切向量 (形如 $x'(0)$) 的值等于零.

**例 13**　求函数

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在由关系式

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (0 < a < b < c)$$

定义的椭球面 $S$ 上的极值.

写出拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = (x^2 + y^2 + z^2) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

根据极值的必要条件求出方程 $\mathrm{d}L = 0$, 亦即 $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ 的解:

$$(x, y, z, \lambda) = (\pm a, 0, 0, a^2), \quad (0, \pm b, 0, b^2), \quad (0, 0, \pm c, c^2).$$

二次型

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}^2 L\xi^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right)(\xi^1)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right)(\xi^2)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{c^2}\right)(\xi^3)^2$$

对每个可疑点在相应的切平面上分别有

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)(\xi^2)^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)(\xi^3)^2, \tag{a}$$

$$\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(\xi^1)^2 + \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)(\xi^3)^2, \tag{b}$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)(\xi^1)^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)(\xi^2)^2. \tag{c}$$

因为 $0 < a < b < c$, 根据给出条件极值存在性和不存在性的充分条件的定理 2, 在 (a) 和 (c) 两种情形, 分别有 $\min f|_S = a^2$ 和 $\max f|_S = c^2$, 而在点 $(0, \pm b, 0) \in S$, 相应于情形 (b), 函数 $f|_S$ 没有极值. 这与讨论条件极值的必要条件时所说的几何上的一些明显的想法是完全一致的.

## 练　习

1. 道路与曲面.

(1) 设 $f: I \to \mathbb{R}^2$ 是定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上且属于 $C^{(1)}(I;\mathbb{R}^2)$ 类的函数. 把这个映射看作 $\mathbb{R}^2$ 中的道路. 举例说明它的承载子 $f(I)$ 可能不是 $\mathbb{R}^2$ 中的子流形, 而它在 $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ 中的图像却总是 $\mathbb{R}^3$ 中的一维子流形, 这个子流形在 $\mathbb{R}^2$ 上的投影正是上面所指出的承载子 $f(I)$.

(2) 当 $I$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的区间, $f \in C^{(1)}(I;\mathbb{R}^n)$ 时, 证明: 映射 $f: I \to \mathbb{R}^n$ 的图像是 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维光滑曲面, 这个曲面在子空间 $\mathbb{R}^n$ 上的投影正是 $f(I)$.

(3) 证明: 如果 $f_1: I_1 \to S$, $f_2: I_2 \to S$ 是同一个 $k$ 维曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的两个光滑参数式, 并且无论 $f_1$ 在 $I_1$ 上或者 $f_2$ 在 $I_2$ 上都没有临界点, 则映射 $f_1^{-1} \circ f_2: I_2 \to I_1$ 与映射 $f_2^{-1} \circ f_1: I_1 \to I_2$ 是光滑的.

2. 在笛卡儿坐标 $x$, $y$ 的平面 $\mathbb{R}^2$ 上画出函数 $f(x,y) = xy$ 的等高集和曲线 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. 利用所得到的图形对函数 $f|_S$ 的极值问题进行充分的研究.

3. 在笛卡儿坐标 $x$, $y$ 的平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义了下面的 $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ 类函数:

$$f(x,y) = x^2 - y; \quad F(x,y) = \begin{cases} x^2 - y + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ x^2 - y, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 画出函数 $f(x,y)$ 的等高集 (等高曲线) 和由关系式 $F(x,y) = 0$ 给出的曲线 $S$.

(2) 研究函数 $f|_S$ 的极值.

(3) 证明: 二次型 $\partial_{ij} f(x_0)\xi^i\xi^j$ 在 $TS_{x_0}$ 上定型的条件, 与定理 2 中的二次型 $\partial_{ij} L(x_0)\xi^i\xi^j$ 在 $TS_{x_0}$ 上定型的条件不同, 并非判断函数 $f|_S$ 可疑点 $x_0 \in S$ 为极值点的充分条件.

(4) 试检验: 点 $x_0 = (0,0)$ 是不是函数 $f$ 的临界点, 以及能否像 (3) 中那样借助于泰勒公式的第二项 (即二次项) 研究函数 $f$ 在该点邻域的性态.

4. 设 $a^1, a^2, \cdots, a^n$ 为已知的 $n$ 个正数.

(1) 求函数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k x^k$ 在限制条件 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots (x^n)^2 \leqslant 1$ 下的最大值.

(2) 求函数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots (x^n)^2$ 在限制条件 $\sum\limits_{k=1}^{n} a^k x^k = 1$ 下的最小值.

# 第8章 重 积 分

## 8.1 $n$ 维区间上的黎曼积分

### 8.1.1 积分定义

1. $\mathbb{R}^n$ 中的区间和它的测度

回忆: 集合 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|a^i\leqslant x^i\leqslant b^i, i=1,\cdots,n\}$ 叫做 $\mathbb{R}^n$ 中的区间或坐标平行多面体. 有时为了指出区间是由点 $a=(a^1,\cdots,a^n)$ 和 $b=(b^1,\cdots,b^n)$ 确定的, 常用记号 $I_{a,b}$ 表示它, 或者记作 $a\leqslant x\leqslant b$. 称 $I_{a,b}$ 是非退化的, 如果 $a<b$ (i.e. $a^i<b^i$, $\forall i=1,\cdots,n$).

**定义 1** 称与区间 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|a^i\leqslant x^i\leqslant b^i, i=1,\cdots,n\}$ 对应的数 $|I|:=\prod\limits_{i=1}^{n}(b^i-a^i)$ 为该区间的体积或者测度, 常用记号 $\nu(I)$ 或者 $\mu(I)$ 表示.

容易从定义直接推出下面的断言.

**引理 1** $\mathbb{R}^n$ 中区间的测度

(1) 是齐次的, 即如果 $\lambda I_{a,b}:=I_{\lambda a,\lambda b}$, 其中 $\lambda\geqslant 0$, 那么

$$|\lambda I_{a,b}|=\lambda^n|I_{a,b}|;$$

(2) 是可加的, 即如果区间 $I, I_1,\cdots,I_k$ 满足 $I=\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$ 且区间 $I_1,\cdots,I_k$ 两两没有公共内点, 那么 $|I|=\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|$;

(3) 如果区间 $I$ 被有限的一组区间 $I_1,\cdots,I_k$ 覆盖, 即 $I\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$, 那么 $|I|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|$.

2. 区间的分划和分划集的基

给定区间 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|a^i\leqslant x^i\leqslant b^i, i=1,\cdots,n\}$. 用坐标线段 $[a^i,b^i](i=1,\cdots,n)$ 的分划导出 $I$ 的分划, 把 $I$ 分割成一些较小区间, 这些小区间由上述坐标线段的分划间隔的直积得出.

**定义 2** 与分划相关的一些概念和记号.

- 区间 $I$ 的分划, 用记号 $P$ 表示. 指区间 $I$ 的上述表达式(表成更小区间 $I_j$

的并集 $I=\bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j\Big)$.

• **分划 $P$ 的参数**. 指分划 $P$ 的区间直径之最大者, 即量 $\lambda(P):=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} d(I_j)$.

• **带"标志点"的分划 $(P,\xi)$**. 指在分划 $P$ 的每个区间 $I_j$ 中确定了一个点 $\xi_j\in I_j$, 符号 $\xi$ 表示点组 $(\xi_1,\cdots,\xi_k)$.

在区间 $I$ 的一切带标志点的分划之集 $\mathcal{P}=\{(P,\xi)\}$ 中引进基 $\lambda(P)\to 0$, 像一元的情况那样, 它的元素 $B_d(d>0)$ 由关系式 $B_d:=\{(P,\xi)\in\mathcal{P}|\lambda(P)<d\}$ 确定. 从参数 $\lambda(P)$ 任意接近于零的分划的存在性推出, $\mathcal{B}=\{B_d\}$ 满足基定义的条件.

3. 积分和与积分

设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是区间 $I$ 上的实值[①] 函数, 而 $P=\{I_1,\cdots,I_k\}$ 是该区间带标志点 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$ 的分划.

**定义 3** 称

• 下述和

$$\sigma(f,P,\xi):=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)|I_i|$$

为函数 $f$ 对应于区间 $I$ 带标志点的分划 $(P,\xi)$ 的**积分和**(黎曼);

• 下述量

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x:=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$$

为**函数 $f$ 在区间 $I$ 上的积分** (**黎曼**), 如果这里的极限存在.

这个定义, 以及构造区间 $I\subset\mathbb{R}^n$ 上积分的全部过程, 都与以前在 $\mathbb{R}$ 中的区间上定义黎曼积分的过程类似, 还保留了那时的被积表达式的形式 $f(x)\mathrm{d}x$. 人们常用如下等价的积分符号:

$$\int_I f(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^1\cdot\cdots\cdot\mathrm{d}x^n,$$

或者

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{n}_{I} f(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^1\cdot\cdots\cdot\mathrm{d}x^n.$$

为了强调这里所说的是在多维区域 $I$ 上的积分, 称它是**重积分**(与 $I$ 的维数相应称作二重积分、三重积分等).

由极限的柯西准则知道: **重积分存在** $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, **当** $(P',\xi'),(P'',\xi'')\in\mathcal{B}_\delta$ (**等价地**, $(\lambda(P')<\delta)\wedge(\lambda(P'')<\delta)$) **时就成立** $|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,p'',\xi'')|<\varepsilon$.

① 注意, 在以后的定义里, 可以认为 $f$ 取值于任意线性赋范空间, 例如, 可以是复数空间 $\mathbb{C}$, 空间 $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ 等.

4. 可积的必要条件

**定义 4**　对于函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 如果定义 3 中所指的有限极限存在, 就称它是区间 $I$ 上的(黎曼) 可积函数. 所有这样的函数组成的集合用记号 $\mathcal{R}(I)$ 表示.

首先有以下可积性的最简单的必要条件.

**命题 1**　$f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow f$ 在 $I$ 上有界.

**证**　设 $P$ 是区间 $I$ 的任一分划. 如果函数 $f$ 在 $I$ 上无界, 那么它在分划 $P$ 的某个区间 $I_{i_0}$ 上无界. 如果 $(P,\xi'),(P,\xi'')$ 是带有标志点 $\xi'$ 和 $\xi''$ 的分划, 其中 $\xi'$ 和 $\xi''$ 只在区间 $I_{i_0}$ 中取不同的点 $\xi'_{i_0},\xi'_{i_0}$, 那么

$$\sigma(f,P,\xi') - \sigma(f,P,\xi'') = |f(\xi'_{i_0}) - f(\xi''_{i_0})||I_{i_0}|.$$

由 $f$ 在 $I_{i_0}$ 中的无界性, 我们可以变动点 $\xi'_{i_0},\xi'_{i_0}$ 中的一个, 使最后一个等式的右边任意大. 由柯西准则推出, 当 $\lambda(P) \to 0$ 时, 函数 $f$ 的积分和没有极限. □

### 8.1.2　黎曼可积的勒贝格准则

在研究一维黎曼积分时, 我们已经不加证明地介绍了积分存在的勒贝格(Lebesgue)准则. 现在就 $n \geqslant 1$ 维情形来证明这个准则.

1. $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集

**定义 5**　称集合 $E \subset \mathbb{R}^n$(在勒贝格意义下) 有 ($n$ 维)零测度或称之为零测度集, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $E$ 的至多可数个 $n$ 维区间组成的覆盖 $\{I_i\}$, 且这些区间的体积之和 $\sum\limits_i |I_i|$ 不超过 $\varepsilon$.

根据定义并重复之前就一维形式的相关证明, 可得如下引理.

**引理 2**　$\mathbb{R}^n$ 中的零测度概念具有下述性质:

(1) 单点集和有限个点组成的集都是零测度集.

(2) 有限个或可数个零测度集的并是零测度集.

(3) 零测度集的子集也是零测度集.

(4) 非退化区间 $I_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ 不是零测度集.

**例 1**　$\mathbb{R}^n$ 中的有理点 (所有坐标为有理数的点) 集是可数集, 因而是零测度集.

**例 2**　设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是定义在 $n-1$ 维区间 $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的连续实值函数, 则它在 $\mathbb{R}^n$ 中的图形 $\{(x^1,\cdots,x^{n-1},f(x)) \,|\, x=(x^1,\cdots,x^{n-1}) \in I\}$ 是 $n$ 维零测度集.

**证**　因为 $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 是紧集, 从而 $f$ 在 $I$ 上一致连续, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使对任意点 $x_1,x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 现在, 若取区间 $I$ 带参数 $\lambda(p) < \delta$ 的分划 $P$, 那么在这个分划的每个区间 $I_i$ 上, 函数的振幅小于 $\varepsilon$. 所以, 如果 $x_i$ 是区间 $I_i$ 的任一确定点, 那么 $n$ 维区间 $\tilde{I}_i = I_i \times [f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon]$

显然包含函数 $f$ 在区间 $I_i$ 上的图形, 从而并集 $\bigcup\limits_i \tilde{I}_i$ 覆盖了函数 $f$ 在 $I$ 上的整个图形. 但

$$\sum_i |\tilde{I}_i| = \sum_i |I_i| \cdot 2\varepsilon = 2\varepsilon |I|$$

(这里 $|I_i|$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中 $I_i$ 的体积, $|\tilde{I}_i|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $\tilde{I}_i$ 的体积), 因此, 覆盖的总体积可以任意接近于零. □

**注 1** 比较引理 2 的论断 (2) 和例 2 可以推出, 一般地, 连续函数 $f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ 或连续函数 $f:M\to\mathbb{R}$ (其中 $M\subset\mathbb{R}^{n-1}$) 的图形是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n$ 维零测度集.

**引理 3** (1) 在定义 5 中把用区间族 $\{I_i\}$ 覆盖集合 $E$ 理解为通常意义的覆盖, 即 $E\subset\bigcup\limits_i I_i$, 也可以理解为更严格意义下的覆盖, 即要求 $E$ 的每一点至少是 $\{I_i\}$ 中某一区间的内点. 零测度集类不会因两种不同的理解有所改变, 换言之, 在定义 5 中的区间是闭的还是开的, 是无关紧要的.

(2) $\mathbb{R}^n$ 中的紧集 $K$ 是零测度集, 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, $K$ 能用有限多个区间覆盖, 而且这些区间的体积之和小于 $\varepsilon$.

**证** (1) 如果 $\{I_i\}$ 是 $E$ 的覆盖, 即 $E\subset\bigcup\limits_i I_i$, 且 $\sum\limits_i |I_i|<\varepsilon$, 那么取 $I_i$ 的同心相似区间 $\tilde{I}_i$ 代替每个 $I_i$, 得到区间族 $\{\tilde{I}_i\}$, 它满足条件 $\sum\limits_i |\tilde{I}_i|<\lambda^n\varepsilon$, 其中 $\lambda$ 是所有区间共同的相似系数. 如果 $\lambda>1$, 那么显然有 $\{\tilde{I}_i\}$ 也覆盖 $E$ 并使 $E$ 的任一点至少是 $\{\tilde{I}_i\}$ 中某一区间的内点.

(2) 可从 (1) 和紧集 $K$ 的任一开覆盖都包含它的有限覆盖推出 (可取 $\{\tilde{I}_i\setminus\partial\tilde{I}_i\}$ 作为这样的开覆盖, 其中 $\{\tilde{I}_i\}$ 为在 (1) 中所考察的区间组). □

2. 康托尔定理的一个推广

回忆: 函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 在集合 $E$ 上的振幅是

$$\omega(f;E):=\sup_{x_1,x_2\in E}|f(x_1)-f(x_2)|,$$

在点 $x\in E$ 的振幅是

$$\omega(f;x):=\lim_{\delta\to 0}\omega(f;U_E^\delta(x)),$$

其中 $U_E^\delta(x)$ 是点 $x$ 在集合 $E$ 中的 $\delta$-邻域.

**引理 4** 若对于函数 $f:K\to\mathbb{R}$ 在紧集 $K$ 的每一点都成立关系式 $\omega(f;x)\leqslant\omega_0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使对于任一点 $x\in K$ 满足不等式 $\omega(f;U_K^\delta(x))<\omega_0+\varepsilon$.

当 $\omega_0=0$ 时, 这个断言变为紧集上连续函数必一致连续的康托尔定理.

**证** $\forall\varepsilon>0$, 对每点 $x\in K$, 应有 $x$ 的 $\delta_x$ 邻域 $U^{\delta_x}(x)$, 使得 $\omega(f,U_K^{\delta_x}(x))<\omega_0+\varepsilon$. 由于 $K$ 是紧集, 所以可从它的开覆盖 $\{U^{\delta_x}(x)|x\in K\}$ 中选取有限子覆盖 $U^{\delta_1}(x_1),\cdots,U^{\delta_m}(x_m)$. 取 $\delta=\dfrac{1}{2}\min\{\delta_1,\cdots,\delta_m\}$, 那么这个 $\delta$ 满足要求.

事实上, 设 $x \in K$, 必有某个 $j$, 使得 $x \in U^{\delta_j}(x_j)$. 则对任意的 $x', x'' \in U_K^{\delta}(x)$, 必有 $x', x'' \in U_K^{\delta}(x_j)$, 于是 $|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(f; U_K^{\delta_j}(x_j))$, 从而有 $\omega(f; U_K^{\delta}(x)) < \omega_0 + \varepsilon$. □

3. 勒贝格准则

首先引入“几乎处处成立”的概念: 称某个性质几乎在集合 $M$ 的所有点成立, 或者说在 $M$ 上几乎处处成立, 如果使得这个性质不成立的 $M$ 的子集有零测度.

**定理 1** (勒贝格准则)　$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow (f$ 在 $I$ 上有界$) \wedge (f$ 在 $I$ 上几乎处处连续$)$.

**证**　必要性. 如果 $f \in \mathcal{R}(I)$, 则由命题 1, 函数 $f$ 在 $I$ 上有界. 设在 $I$ 上 $|f(x)| \leqslant M$. 现在验证 $f$ 在 $I$ 上几乎处处连续. 为此, 用 $E$ 记 $f$ 的间断点集, 并证明: 若 $E$ 不是零测度集, 则 $f \notin \mathcal{R}(I)$.

事实上, $x \in E \Leftrightarrow \omega(f; x) > 0$. 于是可表 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 其中 $E_n = \left\{ x \in I \,\middle|\, \omega(f; x) \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$. 据引理 2, 如果 $E$ 不是零测度集, 则有某个集合 $E_{n_0}$ 不是零测度集. 设 $P = \{I_i\}$ 是区间 $I$ 的任一分划. 把 $P$ 分为 $A$ 和 $B$ 两类, 其中

$$A = \left\{ I_i \in P \,\middle|\, I_i \cap E_{n_0} \neq \varnothing \wedge \omega(f; I_i) \geqslant \frac{1}{2n_0} \right\}, \quad B = P \setminus A.$$

区间集 $A$ 构成集合 $E_{n_0}$ 的一个覆盖. 事实上, $E_{n_0}$ 的每个点或者位于某个区间 $I_i \in P$ 的内部, 这时显然有 $I_i \in A$, 或者在分划 $P$ 的某些区间的边界上. 在后一种情况下, 至少在这些区间中的一个区间上, 函数的振幅 (由三角不等式) 不小于 $\dfrac{1}{2n_0}$, 从而该区间属于 $A$.

现在证明, 在分划 $P$ 的区间中用不同的方式选择标志点组 $\xi$, 便可明显地改变积分和的值.

我们选择这样的点组 $\xi', \xi''$, 在属于 $B$ 的区间里两个点组的标志点相同, 而在属于 $A$ 的区间 $I_i$ 中选择 $\xi_i', \xi_i''$ 使得 $|f(\xi_i') - f(\xi_i'')| > \dfrac{1}{3n_0}$. 那么

$$|\sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'')| = \left| \sum_{I_i \in A} (f(\xi_i') - f(\xi_i''))|I_i| \right| > \frac{1}{3n_0} \sum_{I_i \in A} |I_i| > c > 0.$$

这样的常数 $c$ 的存在性是从区间组 $A$ 覆盖 $E_{n_0}$ 和假设 $E_{n_0}$ 不是零测度集得到的.

因为 $P$ 是区间 $I$ 的任一分划, 由柯西基本原理推出当 $\lambda(P) \to 0$ 时, 积分和 $\sigma(f, P, \xi)$ 不可能有极限, 即 $f \notin \mathcal{R}(I)$.

充分性. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $E_\varepsilon = \{x \in I | \omega(f; x) \geqslant \varepsilon\}$. 按条件, $E_\varepsilon$ 是零测度集.

显然 $E_\varepsilon$ 是 $I$ 中的紧集. 从引理 3 知存在 $\mathbb{R}^n$ 中的有限区间组 $I_1,\cdots,I_k$ 使得 $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|<\varepsilon$. 记 $C_1=\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, 而用 $C_2$ 和 $C_3$ 分别表示以 $I_i$ 的中心为中心、相似系数分别为 2 和 3 的区间之并. 显然, $E_\varepsilon$ 严格地位于 $C_2$ 的内部. 又集合 $C_2$ 和 $C_3$ 的边界间的距离 $d=d(\partial C_2,\partial C_3)$ 是正数, 这是因为 $\partial C_2$ 和 $\partial C_3$ 都是紧集.

从集合 $C_3$ 的定义和区间测度的性质 (引理 1) 可见, 任意位于 $C_3$ 中且两两没有公共内点的有限区间组的体积之和不大于 $3^n\varepsilon$, 其中 $n$ 是空间 $\mathbb{R}^n$ 的维数.

此外, 注意到 $E_\varepsilon \subset C_1 \subset \mathring{C}_2 \subset C_2 \subset C_3$(这里 $\mathring{C}_2$ 是集合 $C_2$ 的内点的集合, 即 $\mathring{C}_2=C_2\setminus\partial C_2$), 故区间 $I$ 的任一直径小于 $d$ 的子集 $I_d$, 或者 $I_d\subset C_3$; 或者 $I_d\cap C_3^c\neq\varnothing$ ($C_3^c$ 记 $C_3$ 的余集), 从而因直径小于 $d$ 推出 $I_d\cap\mathring{C}_2=\varnothing$, 换言之, $I_d$ 含在紧集 $K=I\setminus\mathring{C}_2$ 中.

根据构造 $E_\varepsilon\subset I\setminus K$, 在任意点 $x\in K$ 都有 $\omega(f;x)<\varepsilon$. 由引理 4, 有 $\delta>0$ 使对任意的点对 $x_1,x_2\in K$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$ 就有 $|f(x_2)-f(x_1)|<2\varepsilon$.

现可用以下方法进行可积条件充分性的证明. 任取区间 $I$ 的两个分划$P'=\{I_i'\,|i=1,\cdots,r'\}, P''=\{I_j''\,|j=1,\cdots,r''\}$ 满足参数 $\lambda(P'),\lambda(P'')<\lambda=\min\{d,\delta\}$. 设 $P$ 是由分划 $P',P''$ 的区间之交所构成的分划, 即 $P=\{I_{ij}=I_i'\cap I_j''\}$. 比较积分和 $\sigma(f,P,\xi)$ 与 $\sigma(f,P',\xi')$, 注意到 $|I_i'|=\sum\limits_j|I_{ij}|$, 并记 $\Lambda=\{ij\,|i=1,\cdots r';j=1,\cdots r''\}$, 可得

$$\begin{aligned}
&|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P,\xi)|\\
=&\Big|\sum_{ij}(f(\xi_i')-f(\xi_{ij}))|I_{ij}|\Big|\\
\leqslant&\sum_{ij\in\pi_1}|f(\xi_i')-f(\xi_{ij})||I_{ij}|+\sum_{ij\in\pi_2}|f(\xi_i')-f(\xi_{ij})||I_{ij}|,
\end{aligned}$$

这里, $\pi_1=\{ij\in\Lambda\,|\exists\, I_{ij}\subset I_i'\subset C_3\}$, $\pi_2=\Lambda\setminus\pi_1$. 因为 $\lambda(P)<d$, 由前述讨论知, 当指标属于 $\pi_2$ 时, $I_i'\subset K$.

因为在 $I$ 上 $|f(x)|\leqslant M$, 在第一个和式中用 $2M$ 代替 $|f(\xi_i')-f(\xi_{ij})|$ 就推出第一个和式不超过 $2M\cdot 3^n\varepsilon$. 在第二个和式中考虑到$\xi_i',\xi_{ij}\in I_i'\subset K$, 而 $\lambda(P')<\delta$, 则有 $|f(\xi_i')-f(\xi_{ij})|<2\varepsilon$, 从而第二个和式不超过 $2\varepsilon|I|$.

这样一来, $|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P,\xi)|<(2M\cdot 3^n+2|I|)\varepsilon$. 以 $P''$ 替代 $P'$ 可得类似的估计. 于是, 利用三角不等式, 对参数充分小的任意分划 $P',P''$ 产生

$$|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P'',\xi'')|<4(3^nM+|I|)\varepsilon.$$

最后, 由柯西准则便知 $f\in\mathcal{R}(I)$. □

### 8.1.3　达布准则

这段研究只适用于实值函数的判断函数黎曼可积的一个有用的准则.

1. 下积分和与上积分和

设 $f$ 是区间 $I$ 上的有界实值函数, 而 $P=\{I_i\}$ 是 $I$ 的分划. 设

$$m_i=\inf_{x\in I_i} f(x),\quad M_i=\sup_{x\in I_i} f(x).$$

**定义 6**　下述量

$$s(f,P)=\sum_i m_i|I_i|,\quad S(f,P)=\sum_i M_i|I_i|$$

分别称为函数 $f$ 在区间 $I$ 上关于这个区间的分划 $P$ 的 (达布)下积分和与上积分和.

**引理 5**　函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 的积分和之间成立以下的关系:

(1) $s(f,P)=\inf\limits_{\xi}\sigma(f,P,\xi)\leqslant\sigma(f,P,\xi)\leqslant\sup\limits_{\xi}\sigma(f,P,\xi)=S(f,P)$;

(2) 如果区间 $I$ 的分划 $P'$ 是由分割分划 $P$ 的区间得到的, 那么

$$s(f,P)\leqslant s(f,P')\leqslant S(f,P')\leqslant S(f,P);$$

(3) 对于区间 $I$ 的任意一对分划 $P_1,P_2$, 成立不等式 $s(f,P_1)\leqslant S(f,P_2)$.

**证**　(1) 和 (2) 中的关系式可直接从定义 3 和定义 6 得到, 当然还要用到数集的上确界和下确界的定义.

为证关系 (3), 只需考察由分划 $P_1$ 和 $P_2$ 的区间之交构成的辅助分划 $P$. 分划 $P$ 可以看作分划 $P_1,P_2$ 中每一个分划的加细, 因此从 (2) 中的关系式推出

$$s(f,P_1)\leqslant s(f,P)\leqslant S(f,P)\leqslant S(f,P_2).$$　□

2. 下积分与上积分

**定义 7**　下述量

$$\underline{\mathcal{J}}=\sup_P s(f,P),\quad \overline{\mathcal{J}}=\inf_P S(f,P)$$

分别称为函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在区间 $I$ 上的 (达布)下积分与上积分, 其中上确界和下确界是对区间 $I$ 的所有分划 $P$ 取的.

从这个定义和引理 5 指出的达布和的性质可知, 对于区间的任意分划 $P$ 成立不等式

$$s(f,P)\leqslant \underline{\mathcal{J}}\leqslant \overline{\mathcal{J}}\leqslant S(f,P).$$

**定理 2** (达布定理) 对于任意的有界函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 成立如下断言:

$$\left(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)\right)\wedge\left(\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)=\underline{\mathcal{J}}\right);$$
$$\left(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)\right)\wedge\left(\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)=\overline{\mathcal{J}}\right).$$

**证** 我们验证下积分和的情况.

固定 $\varepsilon>0$ 和区间 $I$ 的分划 $P_\varepsilon$, 使得 $s(f,P_\varepsilon)>\underline{\mathcal{J}}-\varepsilon$. 设 $\Gamma_\varepsilon$ 是区间 $I$ 的位于分划 $P_\varepsilon$ 的区间的边界上的那些点的集合. 如例 2 可得, $\Gamma_\varepsilon$ 是零测度集. 由集合 $\Gamma_\varepsilon$ 的简单结构, 必存在正数 $\lambda_\varepsilon$, 使对于任意满足条件 $\lambda(P)<\lambda_\varepsilon$ 的分划 $P$, 它与 $\Gamma_\varepsilon$ 有公共点的那些区间的体积之和都小于 $\varepsilon$.

现任取参数 $\lambda(P)<\lambda_\varepsilon$ 的分划 $P$, 由分划 $P$ 和 $P_\varepsilon$ 的区间之交作成辅助分划 $P'$. 由分划 $P_\varepsilon$ 的选择和达布和的性质 (引理 5), 我们得到

$$\underline{\mathcal{J}}-\varepsilon<s(f,P_\varepsilon)\leqslant s(f,P')\leqslant\underline{\mathcal{J}}.$$

注意, 在和 $s(f,P')$ 与 $s(f,P)$ 中, 对应于分划 $P$ 中与 $\Gamma_\varepsilon$ 不交的那些区间的项是共同的. 事实上, 设 $I_{ij}=I_i\cap I_j\in P'$, 其中 $I_i\in P, I_j\in P_\varepsilon$, 若 $I_i\cap\Gamma_\varepsilon=\varnothing$, 则 $I_i\cap\partial I_j=\varnothing$, 换言之, $I_i$ 不碰到 $\partial I_j$, 从而 $I_{ij}=I_i$. 因此, 如果在 $I$ 上 $|f(x)|\leqslant M$, 那么

$$|s(f,P')-s(f,P)|<2M\varepsilon,$$

再结合上边的不等式就得到: 当 $\lambda(P)<\lambda_\varepsilon$ 时, 成立关系式

$$\underline{\mathcal{J}}-s(f,P)<(2M+1)\varepsilon.$$

比较定义 7 便推出极限 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$ 确实存在且等于 $\underline{\mathcal{J}}$.

对于上积分和也可进行类似的讨论. □

3. 实值函数可积性的达布准则

**定理 3** (达布准则) 定义在区间 $I\subset\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 $I$ 上可积当且仅当它在 $I$ 上有界且它的达布下积分与达布上积分相等. 换句话说

$$f\in\mathcal{R}(I)\Leftrightarrow(f\text{在}I\text{上有界})\wedge(\underline{\mathcal{J}}=\overline{\mathcal{J}}).$$

**证** 必要性. 如果 $f\in\mathcal{R}(I)$, 那么按命题 1, 函数 $f$ 在 $I$ 上有界. 从积分的定义 3, 量 $\underline{\mathcal{J}}$ 和 $\overline{\mathcal{J}}$ 的定义 7 和引理 5 推出 $\underline{\mathcal{J}}=\overline{\mathcal{J}}$.

充分性. 因为 $s(f,P) \leqslant \sigma(f,P,\xi) \leqslant S(f,P)$, 所以当 $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$ 时, 由定理 2, 当 $\lambda(P) \to 0$ 时, $\sigma(f,P,\xi)$ 有极限, 且极限值与上面的相同. □

**注 2**　从达布准则的证明中看到, 如果函数可积, 那么它的达布下积分与达布上积分一致, 且等于这个函数的积分值.

### 练　　习

1. (1) 证明: 零测度集没有内点.

(2) 证明: 说集合没有内点, 绝非意味着这个集合是零测度集.

(3) 构造一个零测度集, 使它的闭包等于整个空间 $\mathbb{R}^n$.

(4) 称集合 $E \subset I$ 有零体积, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以用满足 $\sum\limits_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$ 的有限区间组 $I_1, \cdots, I_k$ 覆盖它. 试问, 是否一切有界的零测度集都有零体积?

(5) 试证: 如果集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是直线 $\mathbb{R}$ 和 $n-1$ 维零测度集 $e \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 的直积 $\mathbb{R} \times e$, 那么 $E$ 是 $n$ 维零测度集.

2. (1) 在 $\mathbb{R}^n$ 中构造与狄利克雷函数类似的函数, 并证明: 有界函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 几乎在区间 $I$ 的所有点等于零, 这并不意味着 $f \in \mathcal{R}(I)$.

(2) 试证: 如果 $f \in \mathcal{R}(I)$ 且几乎在区间 $I$ 的所有点 $f(x) = 0$, 则 $\int_I f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. (1) 证明: 定义在区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $I$ 上可积, 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在区间 $I$ 的分划 $P$, 使得 $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

(2) 利用 (1) 的结果, 并假定研究的是实值函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 那么勒贝格准则的充分性部分的证明可以作某些简化. 试独立地完成这些简化.

## 8.2　集合上的积分

### 8.2.1　(有界) 集上的积分

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一子集, 记 $E$ 的特征函数为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

对于定义在集合 $E$ 上的函数 $f$, 约定用记号 $f\chi_E(x)$ 表示在点 $x \in E$ 等于 $f(x)$, 而在 $E$ 外等于零 (虽然 $f$ 在 $E$ 外没有定义) 的函数.

**定义 1**　设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一有界集合, 函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在 $E$ 上的积分由关系式

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x := \int_I f\chi_E(x)\mathrm{d}x$$

定义, 其中 $I$ 是任一包含集合 $E$ 的区间. 如果等式右边的积分不存在, 则说 $f$ 在集合 $E$ 上不 (黎曼) 可积. 否则就说 $f$ 在集合 $E$ 上 (黎曼) 可积. 由在集合 $E$ 上黎曼可积的一切函数组成的集合用记号 $\mathcal{R}(E)$ 表示.

为了说明定义 1 的合理性, 只需证明如下引理.

**引理 1** 如果 $I_1$ 和 $I_2$ 是两个分别包含集合 $E$ 的区间, 那么积分

$$\int_{I_1} f_{\chi_E}(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{I_2} f_{\chi_E}(x)\mathrm{d}x$$

同时存在或同时不存在, 而且在同时存在时它们的值相等.

**证** 考察区间 $I = I_1 \cap I_2$, 由条件, $I \supset E$. 函数 $f_{\chi_E}$ 的间断点或者与 $f$ 在 $E$ 上的间断点相同, 或者属于 $\partial E$. 无论是哪种情况, 所有间断点均属于 $I \cap I_1 \cap I_2$. 因此由勒贝格准则推出, $f_{\chi_E}$ 在区间 $I, I_1, I_2$ 上的积分同时存在或者同时不存在. 如果它们存在, 则我们可以根据自己的需要来选择 $I, I_1, I_2$ 的分划. 特别, 我们可将 $I = I_1 \cap I_2$ 的任一分划分别扩展成 $I_1, I_2$ 的分划. 此时, 因为所研究的函数在 $I$ 外等于零, 所以对应于 $I_1$ 和 $I_2$ 的上述分划的积分和就等于区间 $I$ 的相应分划的积分和. 由此取极限后便知所研究的函数在 $I_1$ 和 $I_2$ 上的积分都等于它在区间 $I$ 上的积分. □

### 8.2.2 容许集

**定义 2** 称集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是容许的, 如果它在 $\mathbb{R}^n$ 中有界, 且它的边界 $\partial E$ 是 (勒贝格意义下的) 零测度集 (简言之, $E$ 容许 $\Leftrightarrow$ $E$ 有界 + $\partial E$ 零测度).

**例 1** $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^n)$ 中的立方体、四面体和球都是容许集.

**例 2** 设定义在 $n-1$ 维区间 $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的函数 $\varphi_i : I \to \mathbb{R}, i = 1, 2$, 在任意点 $x \in I$, 满足 $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. 如果这两个函数连续, 那么由 8.1 节中例 2 可以断定, $\mathbb{R}^n$ 中由这两个函数的图形和位于区间 $I$ 的边界 $\partial I$ 上的侧柱面所围的区域是 $\mathbb{R}^n$ 中的容许集.

根据边界的定义, 对于集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \partial E$ 当且仅当它的任意邻域中既有 $E$ 的点, 又有 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 的点. 因此, 易见下述结论.

**引理 2** 对于任意集合 $E, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$:

(1) $\partial E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集;

(2) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;

(3) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;

(4) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

由此结合定义 2 可推出如下引理.

**引理 3** 有限个容许集的并或交是容许集; 容许集的差也是容许集.

**注 1**　容许集的边界不仅是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 而且是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, 也就是说, 容许集的边界是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集. 因此, 由 8.1 节引理 3, 它可以用体积之和任意接近于零的有限区间组来覆盖.

**注 2**　对于任意集合 $E$, 函数 $\chi_E(x)$ 在且仅在 $E$ 的边界点间断. 因此, 如果 $E$ 是容许集, 那么函数 $\chi_E(x)$ 就几乎在空间 $\mathbb{R}^n$ 的所有点连续.

从区间上积分存在性的勒贝格准则和定义 1可推出下面定理.

**定理 1**　函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在容许集 $E$ 上可积 $\Leftrightarrow$ $f$ 有界且在 $E$ 上几乎处处连续.

**证**　函数 $f_{\chi_E}$ 与函数 $f$ 相比, 只可能在集合 $E$ 的边界 $\partial E$ 上增加新的间断点, 而由条件, 这种间断点组成的集合是零测度集. □

### 8.2.3　容许集的测度 (体积)

**定义 3**　称量

$$\mu(E) := \int_E 1 \cdot \mathrm{d}x$$

为有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的(Jordan, *若尔当*, *若当*) *测度*或*体积*, 如果这里的 (黎曼) 积分存在.

因为

$$\int_E 1 \cdot \mathrm{d}x = \int_{I \supset E} \chi_E(x)\mathrm{d}x,$$

而函数 $\chi_E$ 的间断点集与 $\partial E$ 相同, 所以由勒贝格准则可知, 所引进的测度只对容许集有定义. 因而, *容许集且只有容许集才是定义 3 意义下的可测集*.

*量 $\mu(E)$ 的几何意义*. 设 $E$ 是容许集, 那么

$$\mu(E) = \int_{I \supset E} \chi_E(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\mathrm{d}x,$$

其中后两个积分是相应的达布下积分与达布上积分. 由积分存在的达布准则, 集合的测度 $\mu(E)$ 有定义, 当且仅当这里的下积分与上积分相等. 按达布定理, 它们是函数 $\chi_E$ 对应于区间 $I$ 的分划 $P$ 的下积分和与上积分和的极限. 但由函数 $\chi_E$ 的定义, 下积分和等于分划 $P$ 位于 $E$ 内的区间的体积 (这是内接于 $E$ 的多面体的体积) 之和, 而上积分和等于分划 $P$ 的与集合 $E$ 有公共点的那些区间的体积 (外切多面体的体积) 之和. 所以 $\mu(E)$ 是当 $\lambda(P) \to 0$ 时内接于 $E$ 的多面体体积和外切于 $E$ 的多面体体积的公共极限, 这与通常的关于简单区域 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的体积概念相吻合.

通常称 $n = 1$ 时的体积为长度, 而 $n = 2$ 时为面积.

**定义 4** 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为**若尔当意义下的零测度集**, 或者**零体积集**, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 它可以用满足 $\sum\limits_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$ 的有限区间组 $I_1, \cdots, I_k$ 覆盖.

与勒贝格零测度集相比较, 这里要求有限覆盖. 因此**若尔当零测度集类比勒贝格零测度集类小**. 比如有理点集是勒贝格零测度集但不是若尔当零测度集.

**定义 5** 集合 $E$ 称为**若尔当可测的**, 如果 $E$ 有界, 并且它的边界有若尔当零测度.

从注 1 可以看出, **若尔当可测集类就是由定义 2 所引进的容许集类**. 这也就是上面定义的测度 $\mu(E)$ 为什么可以称为 (若尔当可测) 集 $E$ 的若尔当测度的原因.

### 练 习

1. (1) 试证: 如果集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $\mu(E) = 0$, 那么对于这个集的闭包 $\overline{E}$ 也成立等式 $\mu(\overline{E}) = 0$.

(2) 试举出有界的勒贝格零测度集 $E$, 使 $E$ 的闭包 $\overline{E}$ 不是勒贝格零测度集的例子.

(3) 试说明: 是否应把 8.1 节中引理 3 的断言 (2) 理解为: 对于紧集来说, 若尔当零测度集概念和勒贝格零测度集概念是一致的.

(4) 证明: 如果有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 在超平面 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的射影有 $n-1$ 维零体积, 那么集合 $E$ 本身有 $n$ 维零体积.

(5) 试证: 没有内点的若尔当可测集有零体积.

2. (1) 如果 $E$ 不是容许集 (若尔当可测的), 定义 1 所引进的函数 $f$ 在有界集 $E$ 上的积分是否存在?

(2) 在有界但不若尔当可测的集 $E$ 上的常值函数是否可积?

(3) 断言 "如果函数 $f$ 在集合 $E$ 上可积, 那么这个函数在集合 $E$ 的任一子集 $A \subset E$ 上的限制 $f|_A$ 是 $A$ 上的可积函数" 是否正确?

(4) 对于定义在有界 (但不一定若尔当可测) 集 $E$ 上的函数 $f : E \to \mathbb{R}$, 指出它在 $E$ 上的黎曼积分存在的必要条件和充分条件.

3. (1) 设 $E$ 是勒贝格零测度集, 而 $f : E \to \mathbb{R}$ 是 $E$ 上的连续有界函数, $f$ 是否总在 $E$ 上可积?

(2) 对若尔当零测度集 $E$ 回答问题 (1).

(3) 如果 (1) 中所指的函数 $f$ 的积分存在, 积分值等于多少?

## 8.3 积分的一般性质

### 8.3.1 积分的线性性质

**命题 1** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界集.

(1) $\mathcal{R}(E)$ 关于通常的函数加法和函数与数的乘法运算是线性空间.

(2) 积分 $\int_E : \mathcal{R}(E) \to \mathbb{R}$ 是空间 $\mathcal{R}(E)$ 上的线性泛函.

**证**　考虑到有限多个零测度集的并也是零测度集, 则从函数在区间上积分存在性的勒贝格准则可直接推出论断 (1).

考虑到积分和的线性性, 由极限过程得到积分的线性性 (2). □

**注 1**　由于当 $\lambda(P) \to 0$ 时积分和的极限与标志点 $\xi$ 的选择无关, 可以推出

$$(f \in \mathcal{R}(E)) \wedge (\text{在 } E \text{ 上几乎处处有 } f(x) = 0) \Rightarrow \left( \int_E f(x)\mathrm{d}x = 0 \right)$$

(事实上, 对任一分划 $P = \{I_i\}$, 可取 $\xi_i \in I_i$ 使得 $f(\xi_i) = 0$). 因此, 如果两个可积函数在集合 $E$ 的几乎所有的点都相等, 那么它们在 $E$ 上的积分也相等. 所以, 如果把在集 $E$ 上几乎处处相等的函数作成一个等价类, 作线性空间 $\mathcal{R}(E)$ 的商空间, 那么, 由这些等价类组成一个线性空间 $\tilde{\mathcal{R}}(E)$, 积分也将是 $\tilde{\mathcal{R}}(E)$ 上的线性泛函.

**注 2**　若 $\mu(E) = 0$, 则对任一有界函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 成立 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

### 8.3.2　积分的可加性

以下讨论将只涉及容许集.

**命题 2**　设 $E_1, E_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的容许集, 而 $f$ 是定义在 $E_1 \cup E_2$ 上的函数.

(1) 成立关系式

$$\left(\exists \int_{E_1 \cup E_2} f(x)\mathrm{d}x\right) \Leftrightarrow \left(\exists \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x\right) \wedge \left(\exists \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\Rightarrow \exists \int_{E_1 \cap E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 如果还有 $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, 那么在积分存在的条件下成立等式

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

**证**　断言 (1) 可从容许集上黎曼积分存在性的勒贝格准则 (8.2 节定理 1) 推出, 这时只需注意容许集的并集和交集也是容许集 (8.2 节引理 3).

为证 (2), 观察

$$\chi_{E_1 \cup E_2}(x) = \chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) - \chi_{E_1 \cap E_2}(x).$$

因此, 取 $I \supset E_1 \cup E_2$, 利用它可得

$$\begin{aligned}\int_{E_1\cup E_2} f(x)\mathrm{d}x &= \int_I f_{\chi_{E_1\cup E_2}}(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_I f_{\chi_{E_1}}(x)\mathrm{d}x + \int_I f_{\chi_{E_2}}(x)\mathrm{d}x - \int_I f_{\chi_{E_1\cap E_2}}(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里利用了 $\mu(E_1\cap E_2)=0$ 及注 2, 得 $\int_{E_1\cap E_2} f(x)\mathrm{d}x = 0$. □

### 8.3.3 积分的估计

1. 一般估计

**命题 3** 如果 $f\in\mathcal{R}(E)$, 则 $|f|\in\mathcal{R}(E)$, 且

$$\Big|\int_E f(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_E |f|(x)\mathrm{d}x.$$

**证** $|f|\in\mathcal{R}(E)$ 从积分的定义和函数在区间上可积的勒贝格准则推出.
上述不等式从相应的积分和的不等式取极限即可得到. □

2. 非负函数的积分

以下断言仅涉及实值函数.

**命题 4** $(f\in\mathcal{R}(E))\wedge(\forall x\in E(f(x)\geqslant 0))\Rightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$

**证** 事实上, 因为在 $E$ 上, $f(x)\geqslant 0$, 所以在 $\mathbb{R}^n$ 中 $f_{\chi_E}(x)\geqslant 0$. 其次, 由定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{I\supset E} f_{\chi_E}(x)\mathrm{d}x.$$

因后一个积分是非负函数积分和的极限, 所以积分非负. □

**推论 1** 从命题 4 得到下述论断.

(1) $(f,g\in\mathcal{R}(E))\wedge(f\leqslant g,\ 在\ E\ 上)\ \Rightarrow\Big(\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x\Big)$.

(2) 如果 $f\in\mathcal{R}(E)$ 并在容许集 $E$ 的每一点满足不等式 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 那么

$$m\mu(E)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant M\mu(E).$$

(3) 如果 $f\in\mathcal{R}(E), m=\inf\limits_{x\in E} f(x), M=\sup\limits_{x\in E} f(x)$, 那么有数 $\theta\in[m,M]$ 使得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \theta\mu(E).$$

(4) (积分中值定理) 如果 $E$ 是连通的容许集, 函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 连续, 那么有点 $\xi \in E$ 使得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\mu(E).$$

(5) 如果对 (2) 补充假定: 有定义在 $E$ 上的非负函数 $g \in \mathcal{R}(E)$, 那么

$$m\int_E g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

论断 (4) 是一维积分中的积分中值定理的推广. 论断 (5) 可以从不等式 $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, 并考虑到积分的线性性以及论断 (1) 推出 (需要指出的是, 显然可从勒贝格准则推出函数 $f$ 和 $g$ 的乘积 $fg$ 的可积性).

现在我们利用所得到的关系式验证以下有用的引理, 以展示这些关系式的作用.

**引理 1**　(1) 如果在区间 $I$ 上非负函数 $f$ 的积分等于零, 则在 $I$ 上几乎处处有 $f(x) = 0$;

(2) 用任意容许集 (即若尔当可测集)$E$ 代替区间 $I$ 时, 论断 (1) 仍然成立.

**证**　由勒贝格准则, 函数 $f \in \mathcal{R}(E)$ 在区间 $I$ 上几乎处处连续, 因此, 如果我们能证明 $f$ 在任意连续点 $a \in I$ 有 $f(a) = 0$, 那么论断 (1) 便得到证明.

假设 $f(a) > 0$, 则在点 $a$ 的某个邻域 $U_I(a)$(邻域 $U_I(a)$ 可以认为是区间) 有 $f(x) \geqslant c > 0$, 所以, 由已证的积分性质

$$\begin{aligned}\int_I f(x)\mathrm{d}x &= \int_{U_I(a)} f(x)\mathrm{d}x + \int_{I\setminus U_I(a)} f(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_{U_I(a)} f(x)\mathrm{d}x \geqslant c\mu(U_I(a)) > 0.\end{aligned}$$

所得的矛盾说明论断 (1) 成立.

如果把这个结论用于函数 $f_{\chi_E}$ 并考虑到 $\mu(\partial E) = 0$ 便得到论断 (2). □

## 练　　习

1. 设 $E$ 是具非零测度的若尔当可测集, 而 $f: E \to \mathbb{R}$ 是 $E$ 上的连续非负可积函数, $M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$. 试证

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n} = M.$$

2. 设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当可测集, 而且 $\mu(E) > 0$. 验证: 如果 $\varphi \in C(E;\mathbb{R})$, 而 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是凸函数, 那么

$$f\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{\mu(E)}\int_E (f\circ\varphi)(x)\mathrm{d}x.$$

3. (1) 试证: 若 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当可测集, 而 $E$ 上的可积函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在它的内点 $a \in E$ 连续, 则

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\mu(U_E^\delta(a))} \int_{U_E^\delta(a)} f(x)\mathrm{d}x = f(a),$$

其中 $U_E^\delta(a)$ 表示点 $a$ 在集 $E$ 中的 $\delta$-邻域.

(2) 验证: 如果把条件 "$a$ 是 $E$ 的内点" 用条件 "对任意的 $\delta > 0$ 有 $\mu(U_E^\delta(a)) > 0$" 来代替, 上面的关系仍然成立.

## 8.4 化重积分为累次积分

### 8.4.1 富比尼[①] 定理

这里先证明一个与后面的变量替换定理同样重要的计算重积分的定理.

**定理 1**[②] 设 $X \times Y$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的区间, 它是区间 $X \subset \mathbb{R}^m$ 和区间 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 的直积. 如果函数 $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ 在 $X \times Y$ 上可积, 那么积分 $\int_X \mathrm{d}x \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分 $\int_Y \mathrm{d}y \int_X f(x,y)\mathrm{d}x$ 都存在, 且

$$\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \mathrm{d}x \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y = \int_Y \mathrm{d}y \int_X f(x,y)\mathrm{d}x.}$$

**注 1** 积分 $\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示关于变量 $x \in X, y \in Y$ 的函数 $f$ 在区间 $X \times Y$ 上的积分.

关于记号 $\int_X \mathrm{d}x \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$ 应作如下理解: 对于固定的 $x \in X$ 计算区间 $Y$ 上的积分 $F(x) = \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$, 再将所得的函数 $F: X \to \mathbb{R}$ 在区间 $X$ 上积分. 这时, 如果对于某个点 $x \in X$, 积分 $\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$ 不存在, 那么令 $F(x)$ 等于区间 $[\underline{J}(x), \overline{J}(x)]$ 中的任何一个数, 其中 $\underline{J}(x) = \underline{\int_Y} f(x,y)\mathrm{d}y$ (下积分), $\overline{J}(x) = \overline{\int_Y} f(x,y)\mathrm{d}y$ (上积分). 将证明 $F \in \mathcal{R}(X)$.

记号 $\int_Y \mathrm{d}y \int_X f(x,y)\mathrm{d}x$ 有类似的意义.

① 富比尼 (G. Fubini) (1879—1943)——意大利数学家. 他的主要著作是关于函数和几何理论的.

② 这个定理早在函数论中有名的富比尼定理出现以前就已经得到证明, 它是富比尼定理的特殊情况. 但通常把重积分的计算化为低维累次积分的定理称为富比尼型定理, 或为简单起见, 就称为富比尼定理.

在证明定理的过程中将会清楚, 使 $\underline{J}(x) \neq \overline{J}(x)$ 的点 $x \in X$ 的集合是 $X$ 中的 $m$ 维零测度集.

类似地, 使积分 $\int_X f(x,y)\mathrm{d}x$ 不存在的那些 $y \in Y$ 的集合是 $Y$ 中的 $n$ 维零测度集.

需指出, 与此前约定称为**重积分**的 $m+n$ 维区间 $X \times Y$ 上的积分不同, 通常称先计算函数 $f(x,y)$ 在 $Y$ 上后在 $X$ 上或先在 $X$ 上后在 $Y$ 上的积分为这个函数的**累次积分**.

所述定理的思想是简单的, 即研究把区间 $X \times Y$ 分为区间 $X_i \times Y_j$ 的分划所对应的积分和

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) \times |X_i| \cdot |Y_j|.$$

因为 $f$ 在 $X \times Y$ 上的积分存在, 所以标志点 $\xi_{ij} \in X_i \times Y_j$ 可以随意选择, 我们把它取作选择 $x_i \in X_i \subset X$ 和选择 $y_j \in Y_j \subset Y$ 的 "直积". 这时可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} f(x_i, y_j)|X_i| \cdot |Y_j| &= \sum_i |X_i| \sum_j f(x_i, y_j)|Y_j| \\ &= \sum_j |Y_j| \sum_i f(x_i, y_j)|X_i|,\end{aligned}$$

作为定理取极限前的形式.

**富比尼定理之证**　区间 $X \times Y$ 的任意分划 $P$ 由区间 $X$ 和 $Y$ 的相应分划 $P_X = \{X_i\}, P_Y = \{Y_j\}$ 导出, 于是分划 $P$ 的每个区间是形如 $X_i \times Y_j$ 的直积. 由区间体积的性质, 有 $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$, 其中每个体积是相应的区间在它们自己所属的空间 $\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ 中的体积.

利用下确界和上确界的性质、下积分和与上积分和的定义以及积分的定义, 得以下估计:

$$\begin{aligned}s(f,P) &= \sum_{i,j} \inf_{\substack{x \in X_i \\ y \in Y_j}} f(x,y)|X_i \times Y_j| \\ &\leqslant \sum_i \inf_{x \in X_i} \left( \sum_j \inf_{y \in Y_j} f(x,y)|Y_j| \right) |X_i| \\ &\leqslant \sum_i \inf_{x \in X_i} \left( \underline{\int}_Y f(x,y)\mathrm{d}y \right) |X_i| \leqslant \sum_i \inf_{x \in X_i} F(x)|X_i| \\ &\leqslant \underline{\int}_X F(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int}_X F(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} F(x)|X_i| \leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} \left(\overline{\int_Y} f(x,y)\mathrm{d}y\right)|X_i|$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} \left(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\right)|X_i|$$

$$\leqslant \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)|X_i\times Y_j| = S(f,P).$$

因为 $f\in\mathcal{R}(X\times Y)$, 所以当 $\lambda(P)\to 0$ 时, 这些不等式两端的项趋于函数 $f$ 在区间 $X\times Y$ 上的积分值. 于是从所得的估计中推出 $F\in\mathcal{R}(X)$, 从而 $F(x)$ 在 $X\subset\mathbb{R}^m$ 上几乎处处连续, 换言之, $\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$ 几乎处处存在, 且成立等式

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \mathrm{d}x\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y.$$

类似地, 可证 $\int_X f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $Y$ 上几乎处处存在, 且

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_Y \mathrm{d}y\int_X f(x,y)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

### 8.4.2 一些推论

**推论 1** 如果区间 $I\subset\mathbb{R}^n$ 是区间 $I_i=[a^i,b^i](i=1,\cdots,n)$ 的直积, 那么

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_{a^n}^{b^n}\mathrm{d}x^n\int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}}\mathrm{d}x^{n-1}\cdots\int_{a^1}^{b^1} f(x^1,x^2,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^1.$$

**证** 显然, 重复利用所证的定理便可得到这个公式. 右边的所有内层积分都像定理中那样理解. 例如, 处处可以置入上积分号或下积分号. $\square$

**例 1** 设 $f(x,y,z)=z\sin(x+y)$. 求这个函数在区间 $I\subset\mathbb{R}^3$ 上的积分, 其中 $I$ 由关系式 $0\leqslant x\leqslant\pi, |y|\leqslant\pi/2, 0\leqslant z\leqslant 1$ 确定, 即 $I=[0,\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$.

根据推论 1, 有

$$\iiint_I f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}z\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}y\int_0^{\pi} z\sin(x+y)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}z\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-z\cos(x+y)|_{x=0}^{\pi})\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}z\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2z\cos y\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1(2z\sin y|_{y=-\pi/2}^{\pi/2})\mathrm{d}z = \int_0^1 4z\mathrm{d}z = 2.$$

可以把所证的定理用于十分一般的集合上的积分的计算.

**推论 2**　设 $D$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有界集, 而 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n|(x\in D)\wedge(\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x))\}$. 若 $f\in\mathcal{R}(E)$, 则

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_D \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{8.4.1}$$

**证**　若 $x\in D$, 设 $E_x=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n|\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$. 而当 $x\notin D$ 时, 令 $E_x=\varnothing$. 我们看到, $\chi_E(x,y)=\chi_D(x)\cdot\chi_{E_x}(y)$. 回忆集合上积分的定义并利用富比尼定理, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{I\supset E} f_{\chi_E}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{I_x\supset D}\mathrm{d}x\int_{I_y\supset E_x} f_{\chi_E}(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{I_x}\Big(\int_{I_y} f(x,y)\chi_{E_x}(y)\mathrm{d}y\Big)\chi_D(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{I_x}\Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\chi_D(x)\mathrm{d}x\\&=\int_D\Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里, 内层积分也可能在点 $x\in D$ 组成的某个勒贝格零测度集上不存在, 这时它有像上边证明了的富比尼定理中一样的含义. □

**注 2**　在推论 2 的条件中, 如果集合 $D$ 若尔当可测, 而函数 $\varphi_i:D\to\mathbb{R}(i=1,2)$ 连续, 那么集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 若尔当可测.

**证**　集合 $E$ 的边界 $\partial E$ 由两个连续函数 $\varphi_i:D\to\mathbb{R}(i=1,2)$ 的图形 (由 8.1 节例 2, 它们是零测度集) 以及集合 $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 的边界与充分大的长为 $l$ 的一维闭区间的直积的一部分 $Z$ 组成. 按条件, $\partial D$ 可以用 $n-1$ 维区间组覆盖, 且这些区间的 $n-1$ 维体积之和小于 $\varepsilon/l$. 这些区间与所选 (长为 $l$ 的) 区间的直积给出了集合 $Z$ 的覆盖, 它们的体积之和小于 $\varepsilon$. □

根据这个注可知, 这种结构的可测集 (像任意可测集一样)$E$ 上的函数 $f:E\to 1\in\mathbb{R}$ 是可积的. 利用推论 2 和可测集的测度的定义可以推出下述推论.

**推论 3**　在推论 2 的条件中如果集合 $D$ 若尔当可测, 而函数 $\varphi_i:D\to\mathbb{R}(i=1,2)$ 连续, 那么集合 $E$ 可测, 且它的体积可以用公式

$$\mu(E)=\int_D(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\mathrm{d}x \tag{8.4.2}$$

计算.

**例 2** 我们对圆 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant r^2\}$ 应用这个公式, 得到

$$\begin{aligned}\mu(E)&=\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-y^2}-(-\sqrt{r^2-y^2})\right)\mathrm{d}y=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\mathrm{d}y\\&=4\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\mathrm{d}y=4\int_0^{\pi/2}r\cos\varphi\mathrm{d}(r\sin\varphi)\\&=4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\pi r^2.\end{aligned}$$

**推论 4** 设 $E$ 是区间 $I\subset\mathbb{R}^n$ 中的可测集. 把 $I$ 表为 $n-1$ 维区间 $I_x$ 和区间 $I_y$ 的直积 $I=I_x\times I_y$. 则对几乎所有的值 $y_0\in I_y$, 集合 $E$ 用 $n-1$ 维超平面 $y=y_0$ 所截得的截面 $E_{y_0}=\{(x,y)\in E|y=y_0\}$ 是这个超平面的可测子集, 而且

$$\mu(E)=\int_{I_y}\tilde{\mu}(E_y)\mathrm{d}y,\tag{8.4.3}$$

其中 $\tilde{\mu}(E_y)$ 当 $E_y$ 可测时是集合 $E_y$ 的 $n-1$ 维测度, 而当 $E_y$ 不可测时, 它表示数 $\underline{\int}_{E_y}1\cdot\mathrm{d}x$ 和 $\overline{\int}_{E_y}1\cdot\mathrm{d}x$ 之间的任意一个数.

**证** 设 $f=\chi_E$ 并考虑到 $\chi_E(x,y)=\chi_{E_y}(x)\cdot\chi_{I_x}(y)$, 利用所证的定理即得. □

特别地, 由此得到如下推论.

**推论 5** (卡瓦列里①原理) 设 $A$ 和 $B$ 是空间 $\mathbb{R}^3$ 中两个有体积 (即若尔当可测) 的物体. 设

$$A_c=\{(x,y,z)\in A|z=c\}\quad\text{和}\quad B_c=\{(x,y,z)\in B|z=c\}$$

是用平面 $z=c$ 分别截物体 $A$ 和 $B$ 所得的截面. 如果对于每个 $c\in\mathbb{R}$, 集合 $A_c,B_c$ 可测并有相同的面积, 那么物体 $A$ 和 $B$ 有相同的体积.

显然, 卡瓦列里原理可以推广到任意维空间 $\mathbb{R}^n$ 中.

**例 3** 利用公式 (8.4.3) 计算欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $r$ 的球 $B=\{x\in\mathbb{R}^n||x|\leqslant r\}$ 的体积 $V_n$.

显然, $V_1=2r$. 在例 2 中求得 $V_2=\pi r^2$. 我们将证明 $V_n=c_nr^n$, 其中 $c_n$ 是常数 (下面我们再计算它). 取球的任一直径 $[-r,r]$ 并对每个点 $x\in[-r,r]$, 研究用垂直于所取直径的超平面截球 $B$ 所得的截面 $B_x$. 因为 $B_x$ 是 $n-1$ 维球, 由毕达哥拉斯定理知其半径等于 $\sqrt{r^2-x^2}$, 用归纳法并利用公式 (8.4.3), 可得

$$V_n=\int_{-r}^{r}c_{n-1}(r^2-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x=\left(c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\varphi\mathrm{d}\varphi\right)r^n.$$

① 卡瓦列里 (B. Cavalieri) (1598—1647)——意大利数学家, 是确定面积和体积的所谓不可分元方法的作者.

(显然, 在导出后一个等式时作了变换 $x = r\sin\varphi$.)

于是证明了 $V_n = c_n r^n$, 而且

$$c_n = c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\varphi \mathrm{d}\varphi. \tag{8.4.4}$$

现在来求常数 $c_n$ 的显式. 我们看到, 当 $m \geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned} I_m &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^m\varphi \mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{m-2}\varphi(1-\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= I_{m-2} + \frac{1}{m-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\varphi \mathrm{d}\cos^{m-1}\varphi \\ &= I_{m-2} - \frac{1}{m-1}I_m, \end{aligned}$$

即有递推关系

$$I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2}. \tag{8.4.5}$$

特别地, $I_2 = \pi/2$. 从量 $I_m$ 的定义中直接看出 $I_1 = 2$. 考虑到 $I_1$ 和 $I_2$ 的这些值, 从递推公式 (8.4.5) 我们求得

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 2, \quad I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi. \tag{8.4.6}$$

回到公式 (8.4.4), 我们得到

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= c_{2k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 2 \\ &= c_{2k-1}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 2\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi \\ &= \cdots = c_1\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}, \\ c_{2k} &= c_{2k-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi \\ &= c_{2k-2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi\cdot\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cdot 2 \\ &= \cdots = c_2\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!}\cdot 2. \end{aligned}$$

但是, 如上所见, $c_1 = 2, c_2 = \pi$, 因此最终得到的体积 $V_n$ 的公式为

$$V_{2k+1} = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}r^{2k+1}, \quad V_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}r^{2k}, \tag{8.4.7}$$

其中 $k \in \mathbb{N}$, 而且这两个公式中第一个公式对 $k = 0$ 也成立.

## 练 习

1. 利用富比尼定理和正函数积分的正性, 在 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 是连续函数的假设下给出混合导数等式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 的简单证明.

2. 设 $f : I_{a,b} \to \mathbb{R}$ 是定义在区间

$$I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \cdots, n\}$$

上的连续函数, 而函数 $F : I_{a,b} \to \mathbb{R}$ 由等式

$$F(x) = \int_{I_{a,x}} f(t)\mathrm{d}t$$

所定义, 其中 $I_{a,x} \subset I_{a,b}$. 试求这个函数关于变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的偏导数.

3. 定义在矩形 $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 在 $I$ 有连续的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(1) 设 $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$. 从等式

$$F(y) = \int_a^b \left( \int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t + f(x,c) \right) \mathrm{d}x$$

出发, 验证莱布尼茨法则:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $G(x,y) = \displaystyle\int_a^x f(t,y)\mathrm{d}t$, 求 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial G}{\partial y}$.

(3) 设 $H(y) = \displaystyle\int_a^{h(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$, 其中 $h \in C^{(1)}[a,b]$. 求 $H'(y)$.

4. 研究积分序列

$$F_0(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y)\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N},$$

其中 $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(1) 验证: $F_n'(x) = F_{n-1}(x)$; $F_n^{(k)}(0) = 0$, 如果 $k \leqslant n$; $F_n^{(n+1)}(x) = f(x)$.

(2) 试证:

$$\int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y)\mathrm{d}y.$$

5. (1) 设 $f: E \to \mathbb{R}$ 是定义在集

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

上的连续函数. 试证:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x, y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x, y)\mathrm{d}x.$$

(2) 以累次积分 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} 1 \cdot \mathrm{d}y$ 为例说明为什么不能根据富比尼定理把每个累次积分写为二重积分.

## 8.5　重积分中的变量替换

### 8.5.1　变量替换公式

先回忆以下定义.

**定义 1**　给定区间 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 称 $D$ 中使 $f(x) \neq 0$ 的点组成的集合的闭包为 $f$ 的**支集**, 记作 $\mathrm{supp} f$, 即 $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}}$.

本节将证明如下定理.

**定理 1**　如果 $\varphi: D_t \to D_x$ 是有界开集 $D_t \subset \mathbb{R}^n$ 到有界开集 $D_x = \varphi(D_t) \subset \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 而 $f \in \mathcal{R}(D_x)$ 且 $\mathrm{supp} f$ 是 $D_x$ 中的紧集, 那么 $f \circ \varphi |\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t)$ 且有公式 (积分中的变量替换公式)

$$\boxed{\int_{D_x = \varphi(D_t)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{D_t} f \circ \varphi(t) |\det \varphi'(t)| \mathrm{d}t.} \tag{8.5.1}$$

### 8.5.2　预备知识

为证明定理 1 先做些准备工作.

1. 可测集和光滑映射

**引理 1**　设 $\varphi: D_t \to D_x$ 是开集 $D_t \subset \mathbb{R}^n$ 到开集 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 则成立以下的断言.

(1) 若 $E_t \subset D_t$ 是 (勒贝格) 零测度集, 则它的像 $\varphi(E_t) \subset D_x$ 也是零测度集.

(2) 设集合 $E_t \subset \overline{E}_t \subset D_t$. 若 $E_t$ 的 (若尔当) 体积为零, 则 $\varphi(E_t) = E_x \subset \overline{E}_x \subset D_x$, 且 $E_x$ 也有零体积.

(3) 如果 (若尔当) 可测集 $E_t \subset \overline{E}_t \subset D_t$, 那么它的像 $E_x = \varphi(E_t)$ 是可测集, 并且 $\overline{E}_x \subset D_x$.

**证** 首先指出:空间 $\mathbb{R}^n$ 的任一开子集 $D$ 可以表为可列个两两没有公共内点的闭区间的并集. 譬如, 首先把各坐标轴分成长为 $\Delta = 1$ 的区间, 将 $\mathbb{R}^n$ 分划成若干小方体的网, 用 $F_1$ 表示此分划中含于 $D$ 的那些小方体的并. 进而取 $\Delta = 1/2$ 作分划, 对 $F_1$ 增加新的分划中含于 $D \setminus F_1$ 的那些小方体, 得到集合 $F_2$, 等等. 继续这样的过程, 我们将得到集列 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$, 其中每个集均由有限个或可列个没有公共内点的区间组成, 从而, $\bigcup\limits_n F_n = D$.

因至多可列个零测度集的并是零测度, 故断言 (1) 只需对含于闭区间 $I \subset D_t$ 的集 $E_t$ 验证.

因 $\varphi \in C^{(1)}(I)$, 所以存在常数 $M$, 使得 $\|\varphi'(t)\| \leqslant M$ 在 $I$ 上成立. 根据有限增量定理, 对任意一对点 $t_1, t_2 \in I$ 以及它们的像 $x_1 = \varphi(t_1), x_2 = \varphi(t_2)$ 应当满足关系 $|x_2 - x_1| \leqslant M|t_2 - t_1|$.

现设区间集 $\{I_i\}$ 是集合 $E_t$ 的满足 $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$ 的覆盖. 不失一般性可以认为 $I_i = I_i \cap I \subset I$.

显然, 集 $\varphi(I_i)$ 组成的集类 $\{\varphi(I_i)\}$ 构成集合 $E_x = \varphi(E_t)$ 的覆盖. 如果 $t_i$ 是区间 $I_i$ 的中心, 那么由上边确立的在映射 $\varphi$ 下距离的可能变化的估计得知, 所有集合 $\varphi(I_i)$ 可以用以 $x_i = \varphi(t_i)$ 为中心的那样的区间 $\tilde{I}_i$ 覆盖, 其线元是区间 $I_i$ 的相应线元的 $M$ 倍. 因为 $|\tilde{I}_i| = M^n|I_i|$, 而 $\varphi(E_t) \subset \bigcup\limits_i \tilde{I}_i$, 所以我们得到了集合 $\varphi(E_t) = E_x$ 用区间组的覆盖, 这些区间的体积之和小于 $M^n\varepsilon$. 从而引理的主要断言 (1) 得证.

断言 (2) 可从断言 (1) 推出. 如果考虑到 $\overline{E}_t$ 是勒贝格零测度集, 从而由 (1), $\overline{E}_x = \varphi(\overline{E}_t)$ 也是勒贝格零测度集, 以及 $\overline{E}_t$ 是紧集, 从而 $\overline{E}_x$ 也是紧集. 根据 8.1 节的引理 3, 一切具勒贝格零测度的紧集本来都有零体积.

最后, 如果注意到可测集的定义, 以及微分同胚把集合 $E_t$ 的内点变为它的像集 $E_x = \varphi(E_t)$ 的内点, 从而有 $\partial E_x = \varphi(\partial E_t)$. 则断言 (3) 可直接从 (2) 推出. □

**推论 1** 在定理 1 的条件下, 公式 (8.5.1) 右端的积分存在.

**证** 因为在 $D_t$ 中 $|\det \varphi'(t)| \neq 0$, 所以 $\operatorname{supp} f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'| = \operatorname{supp} f \circ \varphi = \varphi^{-1}(\operatorname{supp} f)$ 是 $D_t$ 中的紧集. 因而函数 $f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'|\chi_{D_t}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的间断点是函数 $f$ 在 $D_x$ 中间断点的原像而与函数 $\chi_{D_t}$ 完全无关. 但是 $f \in \mathcal{R}(D_x)$, 因此函数 $f$ 在 $D_x$ 中的间断点集 $E_x$ 是勒贝格零测度集. 于是, 根据引理 1 的断言 (1), 集合 $E_t = \varphi^{-1}(E_x)$ 有零测度. 现在, 由勒贝格准则可以推出, 函数 $f \circ \varphi |\det \varphi'|\chi_{D_t}$ 在任意区间 $I_t \supset D_t$ 上可积. □

2. 一维情形

**引理 2** (1) 如果 $\varphi : I_t \to I_x$ 是区间 $I_t \subset \mathbb{R}^1$ 到区间 $I_x \subset \mathbb{R}^1$ 上的微分同胚, 而 $f \in \mathcal{R}(I_x)$, 那么 $f \circ \varphi \cdot |\varphi'| \in \mathcal{R}(I_t)$ 且

$$\int_{I_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{I_t} (f\circ\varphi\cdot|\varphi'|)(t)\mathrm{d}t. \tag{8.5.2}$$

(2) 公式(8.5.1)在 $\mathbb{R}^1$ 中成立.

**注 1**　这里没要求 $I_t$ 和 $I_x$ 是开的, $\mathrm{supp}f$ 未必含在 $\mathring{I}_x$ 中.

**证**　引理 2 的断言 (1) 虽然实际上是已经知道的, 这里, 我们将利用已经掌握的关于积分存在性的勒贝格准则, 独立于第一卷中对它的论述, 给出一个简短证明.

因为 $f\in\mathcal{R}(I_x)$, 而 $\varphi: I_t\to I_x$ 是微分同胚, 知函数 $f\circ\varphi|\varphi'|$ 在 $I_t$ 上有界, 这个函数的间断点只能是函数 $f$ 在 $I_x$ 上间断点的原像. 由勒贝格准则, 后者构成零测度集. 像我们在证明引理 1 时所看到的, 这个集在微分同胚 $\varphi^{-1}: I_x\to I_t$ 下的像也有零测度, 所以 $f\circ\varphi\cdot|\varphi'|\in\mathcal{R}(I_t)$.

设 $P_x$ 是区间 $I_x$ 的分划. 利用映射 $\varphi^{-1}$, 它导出区间 $I_t$ 的分划 $P_t$, 而且从映射 $\varphi$ 和 $\varphi^{-1}$ 的一致连续性推出, $\lambda(P_x)\to 0\Leftrightarrow\lambda(P_t)\to 0$. 对于带标志点 $\xi_i=\varphi(\tau_i)$ 的分划 $P_x$, 写出 $f$ 在 $I_x$ 上的相应的积分和

$$\begin{aligned}\sum_i f(\xi_i)|x_i-x_{i-1}| &= \sum_i f\circ\varphi(\tau_i)|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|\\ &= \sum_i f\circ\varphi(\tau_i)|\varphi'(\tau_i)||t_i-t_{i-1}|,\end{aligned}$$

而且设点 $\xi_i=\varphi(\tau_i)$ 是这样选定的, 其中 $\tau_i$ 是对差 $\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})$ 利用拉格朗日定理所得到的点, 即 $\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$.

因为关系式 (8.5.2) 中的两个积分存在, 所以积分和中标志点可以任意选择而不影响极限值. 因此, 从所写的积分和的等式对 $\lambda(P_x)\to 0(\lambda(P_t)\to 0)$ 取极限便得积分等式 (8.5.2).

引理 2 的断言 (2) 从证明了的等式 (8.5.2) 得出. 首先我们指出, 在一维的情况下有 $|\det\varphi'|=|\varphi'|$. 其次, 紧集 $\mathrm{supp}f$ 容易用含于 $D_x$ 中且两两没有公共内点的有限个区间覆盖. 因此, $f$ 在集 $D_x$ 上的积分与 $f$ 在这些区间上的积分之和相同, 而 $f\circ\varphi|\varphi'|$ 在 $D_t$ 上的积分化成在这些区间的原像 (也是区间) 上的积分之和. 把等式 (8.5.2) 用于在映射 $\varphi$ 下每一对互相对应的区间, 加起来即得公式 (8.5.1). □

**注 2**　我们以前证明的一元积分的变量替换公式有如下形式

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi\cdot\varphi')(t)\mathrm{d}t, \tag{8.5.3}$$

其中 $\varphi$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 到以 $\varphi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 为端点的区间上的任一光滑映射. 在公式 (8.5.3) 中不是导数的模 $|\varphi'|$, 而是导数本身. 这与公式 (8.5.3) 的左端可能出现 $\varphi(\beta)<\varphi(\alpha)$ 有关.

但是如果注意到对于以 $a$ 和 $b$ 为端点的区间 $I$ 成立关系式

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, & a \leqslant b, \\ -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, & a > b, \end{cases}$$

那么当 $\varphi$ 是微分同胚时, 所建立的公式 (8.5.2) 和 (8.5.3) 显然只在表面上不同而实质上是相同的.

**注 3** 我们指出 (并且一定会用到它们), 如果 $\varphi : I_t \to I_x$ 是区间上的微分同胚, 那么, 对实值函数的上积分与下积分总成立公式:

$$\overline{\int_{I_x}} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_{I_t}} (f \circ \varphi \cdot |\varphi'|)(t)\mathrm{d}t,$$
$$\underline{\int_{I_x}} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_{I_t}} (f \circ \varphi \cdot |\varphi'|)(t)\mathrm{d}t.$$

而由此, 就可以认为在一维的情况下已经证明了以下事实: 如果把 (8.5.1) 式中的积分理解为达布上积分或达布下积分, 那么对于任何有界函数, 它仍然成立.

**证** 我们暂时认为 $f$ 是以常数 $M$ 为界的非负函数.

像证明引理 2 的断言 (1) 时那样, 取区间 $I_x$ 和 $I_t$ 的在映射 $\varphi$ 下互相对应的分划 $P_x, P_t$, 并写出以下的估计, 其中 $\varepsilon$ 是函数 $\varphi$ 在分划 $P_t$ 的各个区间上的振幅之最大者:

$$\begin{aligned} \sum_i \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)|x_i - x_{i-1}| &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t)) \sup_{t\in\Delta t_i} |\varphi'(t)||t_i - t_{i-1}| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t)) \sup_{t\in\Delta t_i} |\varphi'(t)||\Delta t_i| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} (f(\varphi(t))(|\varphi'(t)| + \varepsilon))|\Delta t_i| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} (f(\varphi(t))|\varphi'(t)|)|\Delta t_i| + \varepsilon \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t))|\Delta t_i| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} (f(\varphi(t))|\varphi'(t)|)|\Delta t_i| + \varepsilon M|I_t|. \end{aligned}$$

考虑到 $\varphi$ 的一致连续性, 当 $\lambda(P_t) \to 0$ 时, 由上式得到

$$\overline{\int_{I_x}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_{I_t}} (f \circ \varphi|\varphi'|)(t)\mathrm{d}t.$$

把上述证明用于映射 $\varphi^{-1}$ 和函数 $f \circ \varphi|\varphi'|$, 就得到相反的不等式, 从而证明了注 3 的第一个等式对非负函数成立. 但因任一函数都可表为 $f = \max\{f, 0\} -$

$\max\{-f,0\}$(非负函数的差), 所以第一个等式对一般情况也成立. 第二个等式可类似地验证. □

自然, 从所证的这些等式, 对实值函数 $f$ 可以重新得到引理 2 的断言 (1).

3. $\mathbb{R}^n$ 中最简微分同胚的情形

设 $\varphi: D_t \to D_x$ 是区域 $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ 到区域 $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$ 上的微分同胚; $(t^1,\cdots,t^n)$, $(x^1,\cdots,x^n)$ 分别是点 $t \in \mathbb{R}^n_t$ 和 $x \in \mathbb{R}^n_x$ 的坐标.

回忆最简微分同胚仅仅改变被映点坐标中的一个.

**引理 3**　对于最简微分同胚 $\varphi: D_t \to D_x$, 公式 (8.5.1) 成立.

**证**　不计坐标编号, 可以认为, 我们的微分同胚 $\varphi$ 只有第 $n$ 个坐标改变.

为了书写方便起见, 我们引进以下的记号:

$$(x^1,\cdots,x^{n-1},x^n) =: (\tilde{x},x^n);\quad (t^1,\cdots,t^{n-1},t^n) =: (\tilde{t},t^n);$$

$$D_{x^n}(\tilde{x}_0) := \{(\tilde{x},x^n) \in D_x | \tilde{x} = \tilde{x}_0\};$$

$$D_{t^n}(\tilde{t}_0) := \{(\tilde{t},t^n) \in D_t | \tilde{t} = \tilde{t}_0\}.$$

这样一来, $D_{x^n}(\tilde{x}), D_{t^n}(\tilde{t})$ 是用平行于第 $n$ 个坐标轴的直线截相应集合 $D_x$ 和 $D_t$ 所得的一维截线. 设 $I_x$ 是 $\mathbb{R}^n_x$ 中包含 $D_x$ 的区间. 把 $I_x$ 表为 $n-1$ 维区间 $I_{\tilde{x}}$ 和第 $n$ 个坐标轴上的区间 $I_{x^n}$ 的直积 $I_x = I_{\tilde{x}} \times I_{x^n}$, 对在 $\mathbb{R}^n_t$ 中取定的包含 $D_t$ 的区间 $I_t$ 有类似的分解 $I_t = I_{\tilde{t}} \times I_{t^n}$.

利用集合上积分的定义、富比尼定理和注 3, 可得

$$\begin{aligned}
\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{I_x} f\cdot\chi_{D_x}(x)\mathrm{d}x = \int_{I_{\tilde{x}}}\mathrm{d}\tilde{x}\int_{I_{x^n}} f\cdot\chi_{D_x}(\tilde{x},x^n)\mathrm{d}x^n\\
&= \int_{I_{\tilde{x}}}\mathrm{d}\tilde{x}\int_{D_{x^n}(\tilde{x})} f(\tilde{x},x^n)\mathrm{d}x^n\\
&= \int_{I_{\tilde{t}}}\mathrm{d}\tilde{t}\int_{D_{t^n}(\tilde{t})} f(\tilde{t},\varphi^n(\tilde{t},t^n))\left|\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^n}\right|(\tilde{t},t^n)\mathrm{d}t^n\\
&= \int_{I_{\tilde{t}}}\mathrm{d}\tilde{t}\int_{I_{t^n}} (f\circ\varphi|\det\varphi'|\chi_{D_t})(\tilde{t},t^n)\mathrm{d}t^n\\
&= \int_{I_t}(f\circ\varphi|\det\varphi'|\chi_{D_t})(t)\mathrm{d}t\\
&= \int_{D_t}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

在这个计算中还用到了: 对于我们的微分同胚有 $\det\varphi' = \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial t^n}$. □

4. 映射的复合和变量替换公式

**引理 4** 若 $:D_\tau \xrightarrow{\psi} D_t \xrightarrow{\varphi} D_x$ 是两个微分同胚, 对其中每一个, 积分的变量替换公式 (8.5.1) 都成立, 则对这两个映射的复合 $\varphi\circ\psi : D_\tau \to D_x$, (8.5.1) 式也成立.

**证** 为了证明这个引理, 只需注意到 $(\varphi\circ\psi)' = \varphi'\circ\psi'$ 及 $\det(\varphi\circ\psi)'(\tau) = \det\varphi'(t)\det\psi'(\tau)$, 其中 $t=\psi(\tau)$. 事实上, 这时我们得到

$$\begin{aligned}\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{D_t}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_{D_\tau}((f\circ\varphi\circ\psi)|\det\varphi'\circ\psi||\det\psi'|)(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{D_\tau}((f\circ(\varphi\circ\psi))|\det(\varphi\circ\psi)'|)(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$ □

### 8.5.3 积分变量替换公式的证明

引理 3 和引理 4 使我们想到, 有可能把任一微分同胚局部地分解为最简微分同胚的复合 (见 7.5.4 小节的命题 2), 并用这种方法去证明一般情形下的公式 (8.5.1).

可以用不同的办法把集合上的积分化为它的点的小邻域上的积分. 例如, 可以利用积分的可加性. 我们正是这样进行的. 现在我们利用引理 1, 引理 3, 引理 4 进行关于重积分变量替换的定理 1 的证明.

**证** 对于紧集 $K_t = \mathrm{supp}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|) \subset D_t$ 的每个点 $t$, 构作 $t$ 的这样的 $\delta(t)$-邻域 $U(t)$, 在 $U(t)$ 中微分同胚 $\varphi$ 被分解为最简微分同胚的复合. 从点 $t\in K_t$ 的 $\dfrac{\delta(t)}{2}$-邻域 $\tilde{U}(t)\subset U(t)$ 选出紧集 $K_t$ 的有限覆盖 $\tilde{U}(t_1),\cdots,\tilde{U}(t_k)$. 设 $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\delta(t_1),\cdots,\delta(t_k)\}$. 那么, 任一直径小于 $\delta$ 且与 $K_t$ 相交的集合显然连同自己的闭包一起含于邻域组 $U(t_1),\cdots,U(t_k)$ 中的某一个邻域.

现设 $I$ 是包含集合 $D_t$ 的区间, 而 $P$ 是区间 $I$ 满足 $\lambda(P)<\min\{\delta,d\}$ 的分划, 其中数 $\delta$ 是上面求出的数, 而 $d$ 是从 $K_t$ 到集合 $D_t$ 边界的距离. 设 $\{I_i\}$ 是分划 $P$ 的与 $K_t$ 有非空交的那些区间. 显然, 如果 $I_i\in\{I_i\}$, 那么 $I_i\subset D_t$. 并且

$$\begin{aligned}\int_{D_t}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t &= \int_I((f\circ\varphi|\det\varphi'|)\chi_{D_t})(t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_i\int_{I_i}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{8.5.4}$$

由引理 1, 区间 $I_i$ 的像 $E_i=\varphi(I_i)$ 是可测集. 于是集合 $E=\bigcup\limits_i E_i$ 也可测, 且 $\mathrm{supp}f\subset E=\overline{E}\subset D_x$. 利用积分的可加性, 由此推出

$$\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{I_x \supset D_x} f_{\chi_{D_x}}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{I_x \setminus E} f_{\chi_{D_x}}(x)\mathrm{d}x + \int_E f_{\chi_{D_x}}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E f_{\chi_{D_x}}(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_i \int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.5.5}$$

由 $\{I_i\}$ 的构造方法, 任一区间 $I_i \in \{I_i\}$ 含于某个邻域 $U(t_j)$, 在这个邻域内微分同胚 $\varphi$ 可分解为最简微分同胚的复合. 所以, 根据引理 3 和引理 4 得

$$\int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x = \int_{I_i} (f \circ \varphi |\det \varphi'|)(t)\mathrm{d}t. \tag{8.5.6}$$

比较关系式(8.5.4)—(8.5.6), 就得到公式(8.5.1). □

### 8.5.4　重积分变量替换公式的推广

1. 可测集在映射下的变量替换

**命题 1**　设 $\varphi : D_t \to D_x$ 是有界开集 $D_t \subset \mathbb{R}^n$ 到有界开集 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 上的微分同胚; $E_t$ 和 $E_x$ 是 $D_t$ 和 $D_x$ 的相应子集, 而且有 $\overline{E}_t \subset D_t, \overline{E}_x \subset D_x$ 以及 $E_x = \varphi(E_t)$. 若 $f \in \mathcal{R}(E_x)$, 则 $f \circ \varphi |\det \varphi'| \in \mathcal{R}(E_t)$, 而且成立等式

$$\int_{E_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_t} (f \circ \varphi |\det \varphi'|)(t)\mathrm{d}t. \tag{8.5.7}$$

**证**　事实上, 利用集合上积分的定义、公式 (8.5.1) 和 $\chi_{E_t} = \chi_{E_x} \circ \varphi$, 我们有

$$\int_{E_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{D_x} (f_{\chi_{E_x}})(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{D_t} (((f_{\chi_{E_x}}) \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{D_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|\chi_{E_t})(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{E_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)\mathrm{d}t.$$ □

2. 积分的不变性

我们知道, 函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在集合 $E$ 上的积分可归结为计算函数 $f_{\chi_E}$ 在区间 $I \supset E$ 上的积分. 而按定义, 区间本身与 $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡儿坐标系有关. 现在我们能够证明如下命题.

**命题 2** 函数 $f$ 在集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的积分值与 $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡儿坐标系的选择无关.

**证** 事实上, 从 $\mathbb{R}^n$ 中的一个笛卡儿坐标系变到另一个笛卡儿坐标系时有模为 1 的雅可比行列式. 由命题 1, 推出等式

$$\int_{E_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_t} (f \circ \varphi)(t)\mathrm{d}t.$$

这意味着积分被唯一确定: 因为若 $p$ 是集合 $E$ 的点, $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 是它在第一个坐标系下的坐标, 而 $t = (t^1, \cdots, t^n)$ 是它在第二个坐标系下的坐标, $x = \varphi(t)$ 是从坐标中的一个变到另一个的函数, 那么

$$f(p) = f_x(x^1, \cdots, x^n) = f_t(t^1, \cdots, t^n),$$

其中 $f_t = f_x \circ \varphi$. 所以我们证明了

$$\int_{E_x} f_x(x)\mathrm{d}x = \int_{E_t} f_t(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $E_x$ 和 $E_t$ 是集合 $E$ 分别在 $x$ 和 $t$ 坐标系中的记号. □

从命题 2 和 8.2 节中集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的若尔当测度的定义 3 可以推出, 这个测度与 $\mathbb{R}^n$ 中笛卡儿坐标系的选择无关, 或者也可以说, 若尔当测度关于欧氏空间的运动群是不变的.

3. 可忽略集

实际中应用的变量替换或坐标变换公式, 有时有这样或那样的奇异性 (例如, 可能在某处破坏了双方的单值性, 雅可比行列式变为零或者没有可微性), 这些奇异性通常在零测度集上发生, 因此为了实际的需要, 以下的定理是十分有用的.

**定理 2** 设 $\varphi : D_t \to D_x$ 是若尔当可测集 $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ 到若尔当可测集 $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$ 上的映射. 如果在 $D_t$ 和 $D_x$ 中有这样的勒贝格零测度集 $S_t, S_x$, 它们使得 $D_t \setminus S_t$ 和 $D_x \setminus S_x$ 是开集, 而 $\varphi$ 是 $D_t \setminus S_t$ 到 $D_x \setminus S_x$ 上的微分同胚, 并且从第一个到第二个的变换有有界的雅可比行列式, 那么对任一函数 $f \in \mathcal{R}(D_x)$, 也有 $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t \setminus S_t)$, 并且

$$\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{D_t \setminus S_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)\mathrm{d}t. \tag{8.5.8}$$

此外, 若 $|\det \varphi'|$ 的值在 $D_t$ 有定义且有界, 则

$$\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{D_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)\mathrm{d}t. \tag{8.5.9}$$

**证**　由勒贝格准则, 函数 $f$ 只在 $D_x$ 中的零测度集上间断, 从而在 $D_x\setminus S_x$ 中也只在一个零测度集上间断, 由引理 1, 这个间断点集在映射 $\varphi^{-1}: D_x\setminus S_x\to D_t\setminus S_t$ 下的像是 $D_t\setminus S_t$ 中的零测度集. 于是, 如果我们能证明集合 $D_t\setminus S_t$ 可测, 那么从函数可积的勒贝格准则立即得到 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|\in\mathcal{R}(D_t\setminus S_t)$. 以下讨论的一个附带结果是证明了 $D_t\setminus S_t$ 是若尔当可测集.

由条件, $D_x\setminus S_x$ 是开集, 因此 $(D_x\setminus S_x)\cap\partial S_x=\varnothing$, 所以 $\partial S_x\subset\partial D_x\cup S_x$, 因而 $\partial D_x\cup S_x=\partial D_x\cup\overline{S}_x$, 其中 $\overline{S}_x=S_x\cup\partial S_x$ 是 $\mathbb{R}^n_x$ 中集合 $S_x$ 的闭包. 可见 $\partial D_x\cup S_x$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 它作为两个勒贝格零测度集的并集也是勒贝格零测度集. 从 8.1 节引理 3 我们知道, 这时集合 $\partial D_x\cup S_x$(同时还有 $S_x$) 有零体积, 亦即对任意的 $\varepsilon>0$, 存在这个集合用有限区间组 $I_1,\cdots,I_k$ 作成的覆盖, 这些区间满足 $\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|<\varepsilon$. 特别地, 由此推出集合 $D_x\setminus S_x$(类似地, 集合 $D_t\setminus S_t$) 若尔当可测, 因为

$$\partial(D_x\setminus S_x)\subset\partial D_x\cup\partial S_x\subset\partial D_x\cup S_x.$$

显然, 还可以把覆盖 $I_1,\cdots,I_k$ 选得使任一点 $x\in\partial D_x\setminus S_x$ 都至少是 $I_1,\cdots,I_k$ 中某一个的内点. 设 $U_x=\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$. 集合 $U_x$ 和集合 $V_x=D_x\setminus U_x$ 一样, 都是可测的. 由 $V_x$ 的构造知, 集合 $\overline{V}_x\subset D_x\setminus S_x$, 并且对于任意包含紧集 $\overline{V}_x$ 的可测集 $E_x\subset D_x$, 有估计

$$\Big|\int_{D_x}f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_x}f(x)\mathrm{d}x\Big|=\Big|\int_{D_x\setminus E_x}f(x)\mathrm{d}x\Big|\leqslant M\mu(D_x\setminus E_x)<M\cdot\varepsilon,\quad(8.5.10)$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in D_x}f(x)$.

紧集 $\overline{V}_x$ 的原像 $\overline{V}_t=\varphi^{-1}(\overline{V}_x)$ 是 $D_t\setminus S_t$ 中的紧集. 经像上面那样讨论, 可以构造满足条件 $\overline{V}_t\subset W_t\subset D_t\setminus S_t$ 的可测紧集 $W_t$, 并且对于任意满足 $W_t\subset E_t\subset D_t\setminus S_t$ 的可测集 $E_t$, 有估计

$$\Big|\int_{D_t\setminus S_t}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t-\int_{E_t}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t\Big|<\varepsilon.\quad(8.5.11)$$

现设 $E_x=\varphi(E_t)$. 由命题 1 对集合 $E_x\subset D_x\setminus S_x$ 和集合 $E_t\subset D_t\setminus S_t$ 成立公式 (8.5.7). 比较关系式 (8.5.7), (8.5.10), (8.5.11) 并考虑到 $\varepsilon>0$ 的任意性, 便得等式 (8.5.8).

现在证明定理 2 的最后的论断. 如果函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 定义在整个集 $D_t$ 上, 则因为 $D_t\setminus S_t$ 是 $\mathbb{R}^n_t$ 中的开集, 该函数在 $D_t$ 上整个间断点集合由函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'||_{D_t\setminus S_t}$(已知函数在集合 $D_t\setminus S_t$ 上的限制) 的间断点集 $A$, 可能还有集合 $S_t\cup\partial D_t$ 的某个子集 $B$ 组成.

我们知道, 集合 $A$ 是勒贝格零测度集 (因为等式 (8.5.8) 右端的积分存在), 而因 $S_t \cup \partial D_t$ 有零体积, 所以集合 $B$ 也有零体积. 于是, 只要知道函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 $D_t$ 上有界, 由勒贝格准则便可断定它在 $D_t$ 上可积. 但在 $D_t$ 上有 $|f\circ\varphi|(t)\leqslant M$. 因此既然按条件, 函数 $|\det\varphi'|$ 在 $S_t$ 上有界, 那么, 函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 $S_t$ 上也有界. 至于在集合 $D_t\setminus S_t$ 上, 因函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在该集上可积, 所以有界. 于是, 函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 $D_t$ 上可积. 但集合 $D_t$ 和 $D_t\setminus S_t$ 只相差一个可测集 $S_t$, 据假设条件, 它的体积为零. 所以由积分的可加性以及在 $S_t$ 上的积分为零可知, 在所研究的情况下等式 (8.5.8) 和 (8.5.9) 的右端确实相等. □

**例 1** 矩形 $I=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant r\leqslant R\wedge 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ 到圆 $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 上由公式

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \tag{8.5.12}$$

给出的映射不是微分同胚的: 在这个映射下, 矩形 $I$ 的 $r=0$ 的边整个地变为一个点 $(0,0)$; 点 $(r,0)$ 的像与 $(r,2\pi)$ 的像相同. 但是如果研究集合 $I\setminus\partial I$ 和 $K\setminus E$, 其中 $E$ 是圆 $K$ 的边界 $\partial K$ 和通过点 $(0,R)$ 的半径的并, 则映射 (8.5.12) 在 $I\setminus\partial I$ 上的限制是 $I\setminus\partial I$ 到 $K\setminus E$ 上的微分同胚映射. 所以由定理 2, 对任一函数 $f\in\mathcal{R}(K)$ 可得

$$\iint\limits_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_I f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,$$

或应用富比尼定理得

$$\iint\limits_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

关系式 (8.5.12) 是熟知的平面上从极坐标到笛卡儿坐标的变换公式.

自然, 可以把上述结果推广成适用于 $\mathbb{R}^n$ 中一般的极 (球) 坐标系的公式, 我们在 7.5 节中已研究过这种坐标系, 在那里也指出了任意维空间 $\mathbb{R}^n$ 中从极坐标到笛卡儿坐标变换的雅可比行列式.

## 练　习

1. (1) 验证: 在微分同胚 $\varphi$ 下可测集 $E$ 的测度和它的像集 $\varphi(E)$ 的测度满足关系式 $\mu(\varphi(E))=\theta\mu(E)$, 其中

$$\theta\in\left[\inf_{t\in E}|\det\varphi'(t)|,\sup_{t\in E}|\det\varphi'(t)|\right].$$

(2) 特别地, 如果 $E$ 是连通集, 那么可以找到点 $\tau\in E$, 使得 $\mu(\varphi(E))=|\det\varphi'(\tau)|\mu(E)$.

2. 计算下列重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x}\}$;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant x\}$;

(3) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2\}$;

(4) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x+y\leqslant \pi, 0\leqslant x-y\leqslant \pi\}$;

(5) $\iiint\limits_V \dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V$ 是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域;

(6) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V$ 是由 $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域;

(7) $\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V$ 是由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ 所确定;

(8) $\iiint\limits_V \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}\leqslant 1\right\}$.

## 8.6　反常重积分

### 8.6.1　基本定义

**定义 1**　称可测集列 $\{E_n\}$ 为集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的竭尽递增列, 如果对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $E_n\subset E_{n+1}\subset E$, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n=E$.

**引理 1**　若 $\{E_n\}$ 是可测集 $E$ 的竭尽递增列, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu(E)$;

(2) 对任意的函数 $f\in\mathcal{R}(E)$ 有 $f|_{E_n}\in\mathcal{R}(E_n)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

**证**　因为 $E_n\subset E_{n+1}\subset E$, 所以 $\mu(E_n)\leqslant\mu(E_{n+1})\leqslant\mu(E)$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)\leqslant\mu(E)$. 为了证明 (1), 只需证反向不等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)\geqslant\mu(E)$ 也成立.

集合 $E$ 的边界 $\partial E$ 有零体积, 因此它可以用有限个开区间覆盖, 且这些开区间的体积之和不超过预先给定的值 $\varepsilon>0$. 设 $\Delta$ 是所有这些开区间的并, 那么集合

$E \cup \Delta =: \tilde{E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 而且由它的构造知 $\tilde{E}$ 包含集 $E$ 的闭包 $\overline{E}$, 并有

$$\mu(\tilde{E}) \leqslant \mu(E) + \mu(\Delta) < \mu(E) + \varepsilon.$$

对于竭尽递增列 $\{E_n\}$ 的每个集 $E_n$ 及 $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$, 可以重复上述的作法, 那么我们得到开集列 $\tilde{E}_n = E_n \cup \Delta_n$, 满足 $E_n \subset \tilde{E}_n$,

$$\mu(\tilde{E}_n) \leqslant \mu(E_n) + \mu(\Delta_n) < \mu(E_n) + \varepsilon_n$$

和

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset E.$$

开集族 $\Delta, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \cdots$ 组成紧集 $\overline{E}$ 的开覆盖.

设 $\Delta, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \cdots, \tilde{E}_k$ 是从上述开覆盖中取出的紧集 $\overline{E}$ 的有限覆盖. 因为 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k$, 所以集合 $\Delta, \Delta_1, \cdots, \Delta_k, E_k$ 也组成 $\overline{E}$ 的覆盖, 从而

$$\mu(E) \leqslant \mu(\overline{E}) \leqslant \mu(E_k) + \mu(\Delta) + \mu(\Delta_1) + \cdots + \mu(\Delta_k) \leqslant \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$

由此推出 $\mu(E) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

(2) 从可测集上积分存在的勒贝格准则可知 $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$. 由于 $f \in \mathcal{R}(E)$, 所以存在常数 $M$ 使在 $E$ 上成立 $|f(x)| \leqslant M$, 从积分的可加性和积分的一般估计我们得到

$$\left| \int_E f(x)\mathrm{d}x - \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{E\setminus E_n} f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant M\mu(E \setminus E_n).$$

由此, 并注意已证明的 (1), 即可推出断言 (2) 成立. □

**定义 2** 设 $\{E_n\}$ 是集合 $E$ 的竭尽递增列, 而函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在集合 $E_n \in \{E_n\}$ 上可积, 则称量

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x$$

*为函数 $f$ 在集合 $E$ 上的反常积分*, 如果所指的极限存在且其值与集合 $E$ 的竭尽递增列的选择无关.

最后等式左端的积分记号通常是对任意在 $E$ 上的函数使用的, 但是, 在定义 2 中所指的极限存在时, 则说这个积分存在或收敛. 而如果那种对 $E$ 的所有竭尽递增列共同的极限不存在, 就说函数 $f$ 在集合 $E$ 上的*积分不存在*或*积分发散*.

定义 2 的目的是把积分概念推广到被积函数无界或积分区域无界的情况.

所引进的反常积分的记号与通常的常义积分的记号是一致的, 因此需要做如下说明.

**注 1**　若 $E$ 是可测集, $f \in \mathcal{R}(E)$, 则在定义 2 的意义下 $f$ 在 $E$ 上的积分存在, 且与函数 $f$ 在集合 $E$ 上的常义积分相等.

**证**　这正是上面所证引理 1 断言 (2) 所说的内容. □

任意一个些许丰富一点的集的所有竭尽递增列作成的集列族实际上是难以理清的无限集, 对它不能利用穷举方法. 下述命题常常便于用来验证反常积分的存在性.

**命题 1**　若函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 非负, 并设定义 2 中所指的极限对集合 $E$ 的某个竭尽递增列 $\{E_n\}$ 存在, 则函数 $f$ 在集合 $E$ 上的反常积分收敛.

**证**　设 $\{E'_k\}$ 是集合 $E$ 的另一个竭尽递增列, 函数 $f$ 在集合 $E'_k \in \{E'_k\}$ 上可积. 集合 $E^k_n := E'_k \cap E_n, n = 1, 2, \cdots$ 组成可测集 $E'_k$ 的竭尽递增列, 因此从引理 1 的论断 (2) 中推出

$$\int_{E'_k} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E^k_n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = A.$$

因为 $f \geqslant 0$, 而 $E'_k \subset E'_{k+1} \subset E$, 所以

$$\exists \lim_{k\to\infty} \int_{E'_k} f(x)\mathrm{d}x = B \leqslant A.$$

交换竭尽递增列 $\{E_n\}$ 和 $\{E'_k\}$ 的地位推出 $A \leqslant B$, 从而 $A = B$. □

**例 1**　求反常积分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

我们用圆 $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$ 的序列作为平面 $\mathbb{R}^2$ 的竭尽递增列, 化为极坐标以后容易得到

$$\iint_{E_n} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^n \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r = \pi(1 - \mathrm{e}^{-n^2}) \to \pi,$$

当 $n \to \infty$ 时.

由命题 1 可以推出所研究的积分收敛且等于 $\pi$.

如果现在我们改用正方形 $E'_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < n \wedge |y| < n\}$ 作为平面的竭尽递增列, 从上述结果可以引出一个有益的推论. 由富比尼定理

$$\iint_{E'_n} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-n}^n \mathrm{d}y \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x = \Big(\int_{-n}^n \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\Big)^2.$$

由命题 1, 最后这个量当 $n \to \infty$ 时应当趋于 $\pi$. 这样一来, 我们遵循欧拉和泊松的方法得到了

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

在下面注 3 里将指出反常重积分定义 2 的另外的一些乍看起来不十分明显的特性.

### 8.6.2 反常积分——控制收敛判别法

**命题 2** 设 $f$ 和 $g$ 是定义在集合 $E$ 上并在 $E$ 的同一些可测子集上可积的函数, 且在 $E$ 上成立 $|f|(x) \leqslant g(x)$. 则从反常积分 $\int_E g(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性能推出积分 $\int_E |f|(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性.

**证** 设 $\{E_n\}$ 是集合 $E$ 的竭尽递增列, 则函数 $f$ 和 $g$ 在集合 $E_n \in \{E_n\}$ 上可积. 由勒贝格准则得到 $|f|$ 在集合 $E_n (n \in \mathbb{N})$ 上的可积性, 因此有

$$\begin{aligned}
&\int_{E_{n+k}} |f|(x)\mathrm{d}x - \int_{E_n} |f|(x)\mathrm{d}x \\
=&\int_{E_{n+k}\setminus E_n} |f|(x)\mathrm{d}x \\
\leqslant&\int_{E_{n+k}\setminus E_n} g(x)\mathrm{d}x = \int_{E_{n+k}} g(x)\mathrm{d}x - \int_{E_n} g(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中 $k$ 和 $n$ 是任意自然数. 考虑到命题 1 和序列极限存在的柯西准则, 从这些不等式可以推出积分 $\int_E |f|(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

现在研究函数 $f_+ := \dfrac{1}{2}(|f| + f)$, $f_- := \dfrac{1}{2}(|f| - f)$. 显然, $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|, 0 \leqslant f_- \leqslant |f|$. 由已证的结果, 函数 $f_+$ 和 $f_-$ 在集合 $E$ 上的反常积分收敛. 但是 $f = f_+ - f_-$, 所以函数 $f$ 在 $E$ 上的反常积分收敛 (并等于函数 $f_+$ 和 $f_-$ 的积分的差). □

在研究反常积分的收敛性时, 为了能有效地利用命题 2, 收集一些标准函数作为比较函数是很有用的. 我们来研究这方面的问题.

**例 2** 在去掉中心 $O$ 的 $n$ 维单位球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 中, 研究函数 $1/r^\alpha$, 其中 $r = d(0,x)$ 是从点 $x \in B \setminus \{O\}$ 到点 $O$ 的距离. 则

$$\int_{B\setminus\{O\}} \frac{1}{r^\alpha(x)}\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{收敛}, & \alpha < n, \\ \text{发散}, & \alpha \geqslant n; \end{cases}$$

$$\int_{B^c} \frac{1}{r^\alpha(x)}\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{收敛}, & \alpha > n, \\ \text{发散}, & \alpha \leqslant n. \end{cases}$$

为了得到这些判别, 用环域 $B(\varepsilon) = \{x \in B | \varepsilon < d(0,x) < 1\}$ 构造 $B \setminus \{O\}$ 的竭尽递增列.

变换成以 $O$ 为中心的极坐标, 由富比尼定理得到

$$\int_{B(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}x}{r^{\alpha}(x)} = \int_S f(\varphi)\mathrm{d}\varphi \int_{\varepsilon}^{1} \frac{r^{n-1}\mathrm{d}r}{r^{\alpha}} = c\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}r}{r^{\alpha-n+1}},$$

其中 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi_1 \cdot \cdots \cdot \mathrm{d}\varphi_{n-1}, f(\varphi)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中极坐标变换的雅可比行列式中出现的角 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}$ 的正弦的乘积, 而 $c$ 是它在单位球面 $S$ 上的积分值, 它只依赖于 $n$ 而与 $\varepsilon$ 无关.

若 $\alpha < n$, 则当 $\varepsilon \to +0$ 时, 在 $B(\varepsilon)$ 上所得到的积分有有限极限. 在其他情况, 当 $\varepsilon \to +0$ 时最后的积分趋于无穷.

于是我们证明了只在 $\alpha < n$ 时, 函数 $\dfrac{1}{d^{\alpha}(0,x)}$ 在点 $O$ 的有界去心邻域上可积.

类似地, 可以证明, 只在 $\alpha > n$ 时, 这个函数在球 $B$ 的外部, 亦即在无穷远点的邻域上按反常积分意义可积.

**例 3**　设 $I = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leqslant x^i \leqslant 1, i = 1, \cdots, n\}$ 是 $n$ 维方体, 而 $I_k$ 是它的由条件 $x^{k+1} = \cdots = x^n = 0$ 给定的 $k$ 维边界. 在集合 $I \setminus I_k$ 上研究函数 $\dfrac{1}{d^{\alpha}(x)}$, 其中 $d(x)$ 是点 $x \in I \setminus I_k$ 到边界 $I_k$ 的距离. 我们将说明对于怎样的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 这个函数在集合 $I \setminus I_k$ 上的积分收敛.

我们指出, 如果 $x = (x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)$, 那么

$$d(x) = \sqrt{(x^{k+1})^2 + \cdots + (x^n)^2}.$$

设 $I(\varepsilon)$ 是从 $I$ 中去掉边界 $I_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\varepsilon$-邻域所得的 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 由富比尼定理,

$$\begin{aligned}\int_{I(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}x}{d^{\alpha}(x)} &= \int_{I_k} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^k \int_{I_{n-k}(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}x^{k+1} \cdots \mathrm{d}x^n}{((x^{k+1})^2 + \cdots + (x^n)^2)^{\alpha/2}} \\ &= \int_{I_{n-k}(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}u}{|u|^{\alpha}},\end{aligned}$$

其中 $u = (x^{k+1}, \cdots, x^n), I_{n-k}(\varepsilon)$ 是从 $I_{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ 中去掉点 $u = 0$ 在 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中的 $\varepsilon$-邻域所得的 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中的区域.

根据在例 2 中获得的经验, 显然, 只有在 $\alpha < n - k$ 时, 最后的积分才收敛. 因而我们所研究的反常积分只在 $\alpha < n - k$ 时收敛, 其中 $k$ 是边界的维数, 在边界近旁被积函数可以无限增加.

**注 2**　在证明命题 2 时, 验证了函数 $|f|$ 的积分收敛性蕴含函数 $f$ 的积分收敛性, 原来, 对于定义 2 意义下的反常积分这个命题的逆命题也成立, 而这种情况在我们以前研究直线上的反常积分时是没有的, 那时我们区分了反常积分的绝对收

敛性和非绝对 (条件) 收敛性. 为了尽快理解所产生的与定义 2 有关的新现象的实质, 我们来研究以下的例子.

**例 4** 设函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 定义在非负数集 $\mathbb{R}_+$ 上: $f(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 若 $n-1\leqslant x<n, n\in\mathbb{N}$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 所以容易看出当 $A\to+\infty$ 时, 积分 $\int_0^A f(x)\mathrm{d}x$ 的极限存在且等于这个级数的和. 但这个级数不绝对收敛. 例如, 重新排列它的项可以得到发散到 $+\infty$ 的新级数. 新级数的部分和可以理解为函数 $f$ 在实数轴中与级数的项相对应的那些区间的并集 $E_n$ 上的积分. 显然, 由集合 $E_n$ 作成的集列是函数 $f$ 的定义域 $\mathbb{R}_+$ 的竭尽递增列.

于是, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 的反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 在以前的理解下是存在的, 而在定义 2 的意义下不存在.

我们看到, 定义 2 中所要求的极限与竭尽递增列选取的无关性等价于级数的和与它的项的排列的无关性. 我们知道, 后者正好等价于绝对收敛性.

事实上, 在实践中总是不得不限于研究以下形式的特殊竭尽递增列. 设在区域 $D$ 上定义的函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在集合 $E\subset\partial D$ 的邻域中无界. 这时, 我们从 $D$ 中去掉那些包含在集 $E$ 的 $\varepsilon$-邻域中的点, 得到区域 $D(\varepsilon)\subset D$. 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 这些区域生成 $D$ 的竭尽递增列. 如果区域 $D$ 无界, 那么它的递增列可以用在 $D$ 中取无穷远点的邻域的余集的方法得到. 在一元的情形中, 我们研究过这样的特殊竭尽递增列, 正是这些特殊的递增列把我们在研究直线上反常积分时已讲过的反常积分的主值意义 (柯西意义) 下的收敛性概念直接推广到任意维空间的情形.

### 8.6.3 反常积分——变量替换

最后, 我们将得到反常积分的变量替换公式, 从而我们将对 8.5 节中定理 1 和定理 2 做出虽然很简单但很有价值的补充.

**定理 1** 设 $\varphi:D_t\to D_x$ 是开集 $D_t\subset\mathbb{R}_t^n$ 到开集 $D_x\subset\mathbb{R}_x^n$ 上的微分同胚映射, 而函数 $f:D_x\to\mathbb{R}$ 在集合 $D_x$ 的任何可测紧子集上都可积. 若反常积分 $\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则积分

$$\int_{D_t}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t$$

也收敛, 且它们的值相等.

**证** 开集 $D_t\subset\mathbb{R}_t^n$ 的竭尽递增列可以是含于 $D_t$ 的紧集列 $E_t^k, k\in\mathbb{N}$, 其中每个 $E_t^k$ 是空间 $\mathbb{R}_t^n$ 的有限个区间的并 (这方面可参看 8.5 节引理 1 证明的开头部分). 因为 $\varphi:D_t\to D_x$ 是微分同胚, 对应于集合 $D_t$ 的竭尽递增列 $\{E_t^k\}$ 有集合

$D_x$ 的竭尽递增列 $\{E_x^k\}$, 其中 $E_x^k=\varphi(E_t^k)$ 是 $D_x$ 中的可测紧集 (集 $E_x^k$ 的可测性从 8.5 节引理 1 得到). 由 8.5 节中命题 1 可得

$$\int_{E_x^k} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_t^k}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t.$$

由假设条件, 这个等式的左边当 $k\to\infty$ 时有极限, 所以当 $k\to\infty$ 时右边也有相同的极限. □

**注 3**　以上讨论验明了最后一个等式右端的积分对 $D_t$ 的任何具上述特殊形式的竭尽递增列均有相同的极限, 以后我们利用的正是定理的被证明了的这一部分. 但是, 为了完成所述断言的证明, 按定义 2 必须正式地验证所求极限对于 $D_t$ 的任意竭尽递增列都存在. 作为很好的练习, 我们把它 (并非十分初等的验证) 留给读者. 我们仅指出, 从证明了的结果已经可以推出函数 $|f\circ\varphi||\det\varphi'|$ 在集 $D_t$ 上反常积分的收敛性.

**定理 2**　设 $\varphi: D_t\to D_x$ 是开集 $D_t$ 到开集 $D_x$ 的映射, 又设在 $D_t$ 和 $D_x$ 中可以指出零测度集 $S_t, S_x$, 使 $D_t\setminus S_t, D_x\setminus S_x$ 是开集, 而 $\varphi$ 是 $D_t\setminus S_t$ 到 $D_x\setminus S_x$ 上的微分同胚. 如果在这些条件下, 反常积分 $\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则积分

$$\int_{D_t\setminus S_t}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t$$

也收敛, 且它们的值相等. 如果还设 $|\det\varphi'|$ 在 $D_t$ 的任何紧子集上都有定义且有界, 则函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 $D_t$ 上按反常积分意义可积, 且有等式

$$\int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{D_t}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)\mathrm{d}t.$$

**证**　所述论断是本节定理 1 和 8.5 节中定理 2 的直接推论, 只要注意在求开集上的反常积分时, 可以仅考虑由可测紧集组成的竭尽递增列 (见注 3). □

**例 5**　计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2<1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, 它对 $\alpha>0$ 是反常积分, 因为这时被积函数在圆周 $x^2+y^2=1$ 的邻域中无界.

化为极坐标, 由定理 2 得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^\alpha}=\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{(1-r^2)^\alpha}.$$

当 $\alpha>0$ 时最后的积分也是反常积分, 但因被积函数非负, 所以它可以看作关于由矩形

$$I_n=\left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\middle|0<\varphi<2\pi\wedge 0<r<1-\frac{1}{n}\right\},\quad n\in\mathbb{N}$$

构成的矩形

$$I=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2|0<\varphi<2\pi\wedge 0<r<1\}$$

的特殊竭尽递增列的极限. 利用富比尼定理, 当 $\alpha<1$ 时, 得到

$$\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{(1-r^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{r\mathrm{d}r}{(1-r^2)^\alpha}=\frac{\pi}{1-\alpha}.$$

根据同样的理由可以得出结论: 当 $\alpha\geqslant 1$ 时所求积分发散.

**例 6** 证明积分 $\iint\limits_{|x|+|y|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$ 只有在 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$ 时才收敛.

**证** 由明显的对称性, 只需在 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 且 $x+y\geqslant 1$ 的区域 $D$ 上研究积分即可.

显然, 为使积分收敛, 必须同时满足条件 $p>0$ 和 $q>0$. 事实上, 如果 $p\leqslant 0$, 那么对于含于 $D$ 的矩形

$$I_A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\leqslant x\leqslant A\wedge 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

上的积分, 我们就有估计

$$\iint\limits_{I_A}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\int_1^A\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$$

$$\geqslant\int_1^A\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^q}=(A-1)\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^q},$$

它说明当 $A\to+\infty$ 时, 这个积分无限增加. 因此, 在以后的研究中可以认为 $p>0$ 且 $q>0$.

在区域 $D$ 的有限部分内, 被积函数没有奇点, 因此所研究积分的收敛性等价于研究同一个函数在 $G$ 上积分的收敛性. 其中 $G$ 表示 $D$ 中满足 $x^p+y^q\geqslant a>0$ 的那部分. 为使曲线 $x^p+y^q=a$ 当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时含于 $D$, 假设数 $a$ 是充分大的数.

按如下公式引进广义极坐标 $(r,\varphi)$:

$$x=(r\cos^2\varphi)^{1/p},\quad y=(r\sin^2\varphi)^{1/q},$$

根据定理 2 我们得到

$$\iint\limits_G\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{2}{p\cdot q}\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\a<r<\infty}}(r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

利用由区间

$$I_{\varepsilon A}=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2|0<\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\pi/2-\varepsilon\wedge a\leqslant r\leqslant A\}$$

作成的区间

$$\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2|0<\varphi\leqslant\pi/2\wedge a\leqslant r<\infty\}$$

的竭尽递增列, 并应用富比尼定理, 我们得到

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\ a\leqslant r<\infty}}(r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\\ =&\Big(\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\Big)\cdot\Big(\lim_{A\to\infty}\int_a^A r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\mathrm{d}r\Big).\end{aligned}$$

因为 $p>0$ 且 $q>0$, 所以这两个极限中的第一个显然有限, 而第二个只有当 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}<1$ 时有限. □

## 练　　习

1. 指出对于怎样的参数 $p,q$, 积分

$$\iint\limits_{0<|x|+|y|\leqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$$

收敛.

2. (1) $\lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A\cos x^2\mathrm{d}x$ 是否存在?

(2) 积分 $\int_{\mathbb{R}^1}\cos x^2\mathrm{d}x$ 在定义 2 的意义下是否收敛?

(3) 验证

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{|x|\leqslant n}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant2n\pi}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

证明: $\sin(x^2+y^2)$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的积分发散.

3. (1) 计算积分 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^py^qz^r}$.

(2) 对反常积分 (其实, 对常义积分也一样) 用富比尼定理时应小心. 试证积分

$$\iint\limits_{x\geqslant1,y\geqslant1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

发散, 可是两个累次积分

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}y$$

和

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{d}y \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x$$

都收敛.

(3) 证明: 若 $f \in C(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, 且在 $\mathbb{R}^2$ 上有 $f \geqslant 0$, 则从两个累次积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

中任一个存在可推出积分 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛, 并且等于这个累次积分的值.

4. 证明: 若 $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 则

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\mathrm{d}x = f(0).$$

5. 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中带有光滑边界的有界区域, 而 $S$ 是含于 $D$ 的边界中的 $k$ 维光滑曲面. 证明: 如果 $f \in C(D;\mathbb{R})$ 有估计 $|f| < \dfrac{1}{d^{n-k-\varepsilon}}$, 其中 $d = d(S,x)$ 是从点 $x \in D$ 到 $S$ 的距离, 而 $\varepsilon > 0$, 则函数 $f$ 在 $D$ 上的积分收敛.

# 第 9 章　流形 (曲面) 及微分形式

## 9.1　线性代数准备知识

### 9.1.1　形式代数

设 $X$ 为线性空间, 以 $X^k$ 记 $k$ 个 $X$ 的直积. 映射 $F^k : X^k \to \mathbb{R}$ 称为 $X$ 上的实值 $k$-形式, 如果 $F^k(x_1, \cdots, x_k)$ 关于每个变量当取定其他变量的值时是线性的. 全体 $k$-形式之集记为 $\mathfrak{F}^k$ 或 $\mathcal{L}(X^k, \mathbb{R})$.

• $\mathfrak{F}^k$ 关于 $k$-形式的标准加法与数乘运算(即线性运算)构成线性空间:

$$(F_1^k + F_2^k)(x) := F_1^k(x) + F_2^k(x); \quad (\lambda F^k)(x) := \lambda F^k(x).$$

• 设 $F^k \in \mathfrak{F}^k$. 若 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $X$ 的基底, 则 $\forall x_1, \cdots, x_k \in X$, 有表示 $x_1 = x^{i_1} e_{i_1}, \cdots, x_k = x^{i_k} e_{i_k}$. 从而由 $F^k$ 对每个变量的线性性, 成立

$$F^k(x_1, \cdots, x_k) = a_{i_1 \cdots i_k} x^{i_1} \cdot \cdots \cdot x^{i_k}, \quad \text{其中 } a_{i_1 \cdots i_k} = F^k(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}). \tag{9.1.1}$$

事实上, $F^k(x_1, \cdots, x_k) = F^k(x^{i_1} e_{i_1}, \cdots, x^{i_k} e_{i_k}) = F^k(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) x^{i_1} \cdot \cdots \cdot x^{i_k}$. 因此, 在给定 $X$ 的基底后, 就能把 $k$-形式 $F^k$ 等同于一组数 $a_{i_1 \cdots i_k} = F^k(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$. 若 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n$ 是 $X$ 的另一基底, $\tilde{a}_{j_1 \cdots j_k} = F^k(\tilde{e}_{j_1}, \cdots, \tilde{e}_{j_k})$, $\tilde{e}_j = c_j^i e_i$ $(j = 1, \cdots, n)$, 则得到与 $F^k$ 对应的数组 $a_{i_1 \cdots i_k}$ 和 $\tilde{a}_{j_1 \cdots j_k}$ 之间的变换 (张量) 定律

$$\tilde{a}_{j_1 \cdots j_k} = F^k(c_{j_1}^{i_1} e_{i_1}, \cdots, c_{j_k}^{i_k} e_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k} c_{j_1}^{i_1} \cdot \cdots \cdot c_{j_k}^{i_k}. \tag{9.1.2}$$

对于任意的 $k$-形式和 $l$-形式 $F^k, F^l$, 定义其**张量积运算** $\otimes$ 如下:

$$(F^k \otimes F^l)(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+l}) := F^k(x_1, \cdots, x_k) F^l(x_{k+1}, \cdots, x_{k+l}). \tag{9.1.3}$$

据定义 $F^k \otimes F^l$ 是 $k+l$ 次的形式 $F^{k+l}$. 显然有以下诸关系:

$$(\lambda F^k) \otimes F^l = \lambda (F^k \otimes F^l), \tag{9.1.4}$$

$$(F_1^k + F_2^k) \otimes F^l = F_1^k \otimes F^l + F_2^k \otimes F^l, \tag{9.1.5}$$

$$F^k \otimes (F_1^l + F_2^l) = F^k \otimes F_1^l + F^k \otimes F_2^l, \tag{9.1.6}$$

$$(F^k \otimes F^l) \otimes F^m = F^k \otimes (F^l \otimes F^m). \tag{9.1.7}$$

这样, 线性空间 $X$ 上的形式之集 $\mathfrak{F}=\{\mathfrak{F}^k\}$ 关于新引入的运算, 是等级代数 $\mathfrak{F}=\bigotimes\limits_k \mathfrak{F}^k$, 其中, 在进入直和的每个空间 $\mathfrak{F}^k$ 的范围内能进行线性运算, 且当 $F^k\in\mathfrak{F}^k, F^l\in\mathfrak{F}^l$ 时, 有 $F^k\otimes F^l\in\mathfrak{F}^{k+l}$.

• 设 $X^*$ 是 $X$ 的共轭空间 (即由 $X$ 上的所有线性函数组成的空间), 而 $e^1,\cdots,e^n$ 是 $X^*$ 的基底, 它与 $X$ 的基底 $e_1,\cdots,e_n$ 是共轭的, 即 $e^i(e_j)=\delta^i_j$. 则

$$\boxed{F^k=a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k},\quad a_{i_1\cdots i_k}=F^k(e_{i_1},\cdots,e_{i_k}).} \tag{9.1.8}$$

事实上, 因为 $e^i(x)=e^i(x^je_j)=x^je^i(e_j)=x^j\delta^i_j=x^i$, 那么, 注意 (9.1.1) 和 (9.1.7) 式, 就能得到 (9.1.8) 式.

### 9.1.2 斜对称形式代数

$k$-形式 $\omega\in\mathfrak{F}^k$ 称为斜对称的, 如果将任二变量调换位置时其值变号:

$$\omega(x_1,\cdots,x_i\cdots,x_j\cdots,x_k)=-\omega(x_1,\cdots,x_j\cdots,x_i\cdots,x_k).$$

$\mathfrak{F}^k$ 中由一切斜对称 $k$-形式构成的子空间记作 $\Omega^k$ 或 $\mathcal{L}_s(X^k,\mathbb{R})$.

**例 1** 空间 $\mathbb{R}^3$ 内向量的向量积 $[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]$ 是在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 内取值的双线性斜对称形式.

**例 2** 对于由空间 $\mathbb{R}^k$ 内以向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 为棱的平行多面体, 有向体积 $V(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\det(\boldsymbol{\xi}^j_i)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 内的实值斜 $k$-形式.

从任何形式 $F^k\in\mathfrak{F}^k$, 借助于形式的斜对称化算子 $A:\mathfrak{F}^k\to\Omega^k$, 可得到斜对称形式. $A$ 由以下关系式确定:

$$AF^k(x_1,\cdots,x_k):=\frac{1}{k!}F^k(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})\delta^{i_1\cdots i_k}_{1\cdots k}, \tag{9.1.9}$$

这里

$$\delta^{i_1\cdots i_k}_{1\cdots k}=\begin{cases}1, & \begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_k\\1&\cdots&k\end{pmatrix}\text{为偶排列},\\ -1, & \begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_k\\1&\cdots&k\end{pmatrix}\text{为奇排列},\\ 0, & \begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_k\\1&\cdots&k\end{pmatrix}\text{不是排列}.\end{cases}$$

若 $F^k$ 是斜对称形式, 则由 (9.1.9) 式可知 $AF^k=F^k$. 因此, $A(AF^k)=AF^k$, 而且, 当 $\omega\in\Omega^k$ 时有 $A\omega=\omega$. 这就是说, $A:\mathfrak{F}^k\to\Omega^k$ 是 $\mathfrak{F}^k$ 到 $\Omega^k$ 上的映射. 此

外由定义 (9.1.9) 还得到

$$A(F_1^k + F_2^k) = AF_1^k + AF_2^k, \tag{9.1.10}$$

$$A(\lambda F^k) = \lambda A F^k. \tag{9.1.11}$$

**例 3**　注意到 (9.1.10) 和 (9.1.11) 式, 从分解式 (9.1.8) 得到

$$AF^k = a_{i_1\cdots i_k} A(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}),$$

所以需求出 $A(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k})$.

注意 $e^i(x) = x^i$, 从定义 (9.1.9) 就得到

$$\begin{aligned} &A(e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k})(x_1, \cdots, x_k) \\ &= \frac{1}{k!} e^{j_1}(x_{i_1}) \cdots e^{j_k}(x_{i_k}) \delta^{i_1\cdots i_k}_{1\cdots k} \\ &= \frac{1}{k!} x^{j_1}_{i_1} \cdot \cdots \cdot x^{j_k}_{i_k} \delta^{i_1\cdots i_k}_{1\cdots k} = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} x_1^{j_1} & \cdots & x_1^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_k^{j_1} & \cdots & x_k^{j_k} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{9.1.12}$$

在斜对称形式类中, 引入如下**外积运算** $\wedge$:

$$\omega^k \wedge \omega^l := \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\omega^k \otimes \omega^l). \tag{9.1.13}$$

因此, $\omega^k \wedge \omega^l$ 是 $k+l$ 次的斜对称形式 $\omega^{k+l}$.

**例 4**　根据例 3 的结果 (9.1.12) 式, 由定义 (9.1.13) 得到

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2}(x_1, x_2) = \frac{2!}{1!1!} A(e^{i_1} \otimes e^{i_2})(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & e^{i_2}(x_1) \\ e^{i_1}(x_2) & e^{i_2}(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} \end{vmatrix}. \tag{9.1.14}$$

类似地, 利用关系式 (9.1.12) 及定义 (9.1.9), (9.1.13), 可得

$$\begin{aligned} e^{i_1} \wedge (e^{i_2} \wedge e^{i_3})(x_1, x_2, x_3) &= \frac{(1+2)!}{1!2!} A(e^{i_1} \otimes (e^{i_2} \wedge e^{i_3}))(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{3!}{2!3!} e^{i_1}(x_{j_1})(e^{i_2} \wedge e^{i_3})(x_{j_2}, x_{j_3}) \delta^{j_1 j_2 j_3}_{1\ 2\ 3} \\ &= \frac{1}{2!} x^{i_1}_{j_1} \begin{vmatrix} x^{i_2}_{j_2} & x^{i_3}_{j_2} \\ x^{i_2}_{j_3} & x^{i_3}_{j_3} \end{vmatrix} \delta^{j_1 j_2 j_3}_{1\ 2\ 3} \\ &= x_1^{i_1} \begin{vmatrix} x_2^{i_2} & x_2^{i_3} \\ x_3^{i_2} & x_3^{i_3} \end{vmatrix} - x_2^{i_1} \begin{vmatrix} x_1^{i_2} & x_1^{i_3} \\ x_3^{i_2} & x_3^{i_3} \end{vmatrix} + x_3^{i_1} \begin{vmatrix} x_1^{i_2} & x_1^{i_3} \\ x_2^{i_2} & x_2^{i_3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & x_1^{i_3} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & x_2^{i_3} \\ x_3^{i_1} & x_3^{i_2} & x_3^{i_3} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

同样地能证明

$$e^{i_1}\wedge(e^{i_2}\wedge e^{i_3})=(e^{i_1}\wedge e^{i_2})\wedge e^{i_3}. \tag{9.1.15}$$

一般地，将行列式按行展开，根据归纳原理，即得

$$e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}(x_1,\cdots,x_k)=\begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & \cdots & e^{i_k}(x_1)\\ \vdots & & \vdots\\ e^{i_1}(x_k) & \cdots & e^{i_k}(x_k)\end{vmatrix}=\det\left(e^{i_j}(x_l)\right), \tag{9.1.16}$$

由所做的计算看到，公式 (9.1.16) 对于任何 1-形式 $e^{i_1},\cdots,e^{i_k}$(不必是空间 $X^*$ 的基底形式) 也正确.

注意到张量积以及形式的斜对称化的以上诸性质，即可得到斜对称形式的外积的下列性质:

$$(\omega_1^k+\omega_2^k)\wedge\omega^l=\omega_1^k\wedge\omega^l+\omega_2^k\wedge\omega^l, \tag{9.1.17}$$

$$(\lambda\omega^k)\wedge\omega^l=\lambda(\omega^k\wedge\omega^l), \tag{9.1.18}$$

$$\omega^k\wedge\omega^l=(-1)^{kl}\omega^l\wedge\omega^k, \tag{9.1.19}$$

$$(\omega^k\wedge\omega^l)\wedge\omega^m=\omega^k\wedge(\omega^l\wedge\omega^m). \tag{9.1.20}$$

**证** 显然，等式 (9.1.17), (9.1.18) 由关系式 (9.1.4)—(9.1.6) 及 (9.1.10), (9.1.11) 推出.

对每个斜对称形式 $\omega=a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}$，由关系式 (9.1.8)—(9.1.12) 及 (9.1.15)，得到

$$\omega=A\omega=a_{i_1\cdots i_k}A(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k})=\frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}.$$

为了证明等式 (9.1.19),(9.1.20)，利用已经证明了的等式 (9.1.17), (9.1.18)，只需对形如 $e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}$ 的形式验证即可.

关于这种形式的结合律 (9.1.20)，已经由等式 (9.1.15) 建立.

根据等式 (9.1.16) 及这里所讨论的特殊的形式的行列式的性质，可立刻得出 (9.1.19) 式. □

从上面的证明可见：任何形式 $\omega\in\Omega^k$ 能表成

$$\boxed{\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k},\quad a_{i_1\cdots i_k}=\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_k}).} \tag{9.1.21}$$

这样，向量空间 $X$ 上的斜对称形式之集 $\Omega=\{\Omega^k\}$，关于线性运算及外积 (9.1.13) 是等级代数 $\Omega=\bigotimes\limits_{k=0}^{\dim X}\Omega^k$. 在每个线性空间 $\Omega^k$ 的范围内可进行线性运

算, 而当 $\omega^k \in \Omega^k, \omega^l \in \Omega^l$ 时, 有 $\omega^k \wedge \omega^l \in \Omega^{k+l}$.

在直和 $\oplus\Omega^k$ 中, 求和是在 $k$ 从零到空间 $X$ 的维数间进行的, 因为斜对称形式 $\omega^k : X^k \to \mathbb{R}$, 当它的次数高于线性空间 $X$ 的维数时, 必然恒等于零, 这可由 (9.1.19) 式 (或由 (9.1.21) 及 (9.1.16) 式) 看出来.

### 9.1.3　线性空间中的线性映射及共轭空间中的共轭映射

设 $X, Y$ 为实数域 (或其他数域, 但对 $X, Y$ 是同样的域) 上的线性空间. 并设 $l : X \to Y$ 为 $X$ 到 $Y$ 内的线性映射, 即 $\forall x, x_1, x_2 \in X$ 及 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 成立

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2) \quad 和 \quad l(\lambda x) = \lambda(lx). \tag{9.1.22}$$

线性映射 $l : X \to Y$ 以自然的方式产生了一个与它共轭的映射 $l^* : \mathfrak{F}_Y \to \mathfrak{F}_X$, 使得对于任一 $k$ 有 $l^*(\mathfrak{F}_Y^k) \subset \mathfrak{F}_X^k$:

$$(l^* F_Y^k)(x_1, \cdots, x_k) := F_Y^k(lx_1, \cdots, lx_k), \quad \forall F_Y^k \in \mathfrak{F}_Y. \tag{9.1.23}$$

由 (9.1.22) 及 (9.1.23) 式看出, $l^* F_Y^k$ 是空间 $X$ 上的一个 $k$-形式 $F_X^k$, 即形式 $l^*(\mathfrak{F}_Y^k) \subset \mathfrak{F}_X^k$. 此外, 若形式 $F_X^k$ 是斜对称的, 那么形式 $l^* F_Y^k = F_X^k$ 也是斜对称的, 即 $l^*(\Omega_Y^k) \subset \Omega_X^k$. 在每个线性空间 $\mathfrak{F}_Y^k$ 或 $\Omega_Y^k$ 的范围内, 映射 $l^*$ 显然是线性的, 即

$$l^*(F_1^k + F_2^k) = l^* F_1^k + l^* F_2^k \quad 且 \quad l^*(\lambda F^k) = \lambda(l^* F^k). \tag{9.1.24}$$

将定义(9.1.23)与形式的张量积、斜对称化及外积的定义(9.1.3), (9.1.9), (9.1.13)相对照, 就推出

$$l^*(F^p \otimes F^q) = (l^* F^p) \otimes (l^* F^q), \tag{9.1.25}$$

$$l^*(AF^p) = A(l^* F^p), \tag{9.1.26}$$

$$l^*(\omega^p \wedge \omega^q) = (l^* \omega^p) \wedge (l^* \omega^q). \tag{9.1.27}$$

**例 5**　设 $e_1, \cdots, e_m$ 是 $X$ 的基底, $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n$ 是 $Y$ 的基底, 且 $l(e_i) = c_i^j \tilde{e}_j, i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\}$, 若 $k$-形式 $F_Y^k$ 在基底 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n$ 下的坐标表示为

$$F_Y^k(y_1, \cdots, y_k) = b_{j_1 \cdots j_k} y^{j_1} \cdot \cdots \cdot y_k^{j_k},$$

这里 $b_{j_1 \cdots j_k} = F_Y^k(\tilde{e}_{j_1}, \cdots, \tilde{e}_{j_k})$, 则

$$(l^* F_Y^k)(x_1, \cdots, x_k) = a_{i_1 \cdots i_k} x_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot x_k^{i_k},$$

这里 $a_{i_1 \cdots i_k} = b_{j_1 \cdots j_k} c_{i_1}^{j_1} \cdot \cdots \cdot c_{i_k}^{j_k}$, 因为

$$\begin{aligned} a_{i_1 \cdots i_k} &=: (l^* F_Y^k)(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) := F_Y^k(le_{i_1}, \cdots, le_{i_k}) \\ &= F_Y^k(c_{i_1}^{j_1} \tilde{e}_{j_1}, \cdots, c_{i_k}^{j_k} \tilde{e}_{j_k}) = F_Y^k(\tilde{e}_{j_1}, \cdots, \tilde{e}_{j_k}) c_{i_1}^{j_1} \cdot \cdots \cdot c_{i_k}^{j_k}. \end{aligned}$$

**例 6** 设 $e^1,\cdots,e^m$ 和 $\tilde{e}^1,\cdots,\tilde{e}^n$ 分别是 $X^*,Y^*$ 的与例 5 中所说的 $X,Y$ 的基底共轭的基底. 在例 5 的条件下得到

$$\begin{aligned}(l^*\tilde{e}^j)(x) &= (l^*\tilde{e}^j)(x^ie_i) = \tilde{e}^j(x^ile_i)\\ &= x^i\tilde{e}^j(c_i^k\tilde{e}_k) = x^ic_i^k\tilde{e}^j(\tilde{e}_k)\\ &= x^ic_i^k\delta_k^j = c_i^jx^i = c_i^je^i(x).\end{aligned}$$

**例 7** 仍用例 6 的记号, 并注意 (9.1.20), (9.1.27) 式, 现在得到

$$\begin{aligned}&l^*(\tilde{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{e}^{j_k}) = l^*\tilde{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge l^*\tilde{e}^{j_k}\\ &= (c_{i_1}^{j_1}e^{i_1})\wedge\cdots\wedge(c_{i_k}^{j_k}e^{i_k}) = c_{i_1}^{j_1}\cdot\cdots\cdot c_{i_k}^{j_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\begin{vmatrix} c_{i_1}^{j_1} & \cdots & c_{i_1}^{j_k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{i_k}^{j_1} & \cdots & c_{i_k}^{j_k}\end{vmatrix} e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}.\end{aligned}$$

注意等式 (9.1.24), 由此就能得出一般的结论

$$\begin{aligned}&l^*\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n} b_{j_1\cdots j_k}\tilde{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{e}^{j_k}\right)\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}} b_{j_1\cdots j_k}\begin{vmatrix} c_{i_1}^{j_1} & \cdots & c_{i_1}^{j_k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{i_k}^{j_1} & \cdots & c_{i_k}^{j_k}\end{vmatrix} e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m} a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}.\end{aligned}\tag{9.1.28}$$

## 练 习

1. 举例证明: 一般来说,

(1) $F^k\otimes F^l\neq F^l\otimes F^k$;

(2) $A(F^k\otimes F^l)\neq AF^k\otimes AF^l$;

(3) 对于 $F^k,F^l\in\Omega$, 并非总有 $F^k\otimes F^l\in\Omega$.

2. (1) 试证: 若 $e_1,\cdots,e_n$ 是线性空间 $X$ 的基底, 而 $e^1,\cdots,e^n$ 是 $X$ 上的线性函数 (即 $X$ 的共轭空间 $X^*$ 的元素), 且满足 $e^j(e_i)=\delta_i^j$, 则 $e^1,\cdots,e^n$ 是 $X^*$ 内的基底.

(2) 验证: 由形如 $e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}$ 的 $k$-形式能构成空间 $\mathfrak{F}^k=\mathfrak{F}^k(X)$ 的基底. 设 $\dim X=n$, 试求此空间 $\mathfrak{F}^k$ 的维数 $(\dim\mathfrak{F}^k)$.

(3) 验证: 由形如 $e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}$ 的形式, 能构成空间 $\Omega^k=\Omega^k(X)$ 的基底, 设已知 $\dim X=n$, 试求 $\dim\Omega^k$.

(4) 试证: 若 $\Omega=\bigoplus\limits_{k=0}^{n}\Omega^k$, 则 $\dim\Omega=2^n$.

## 9.2 流　　形

### 9.2.1 流形的定义

**定义 1**　关于流形的概念.

1° *$n$ 维流形*. 指这样的拓扑空间 $M$, 它具有豪斯多夫拓扑及可数拓扑基, 其上的每一点都有一个邻域 $U$, 或同胚于整个空间 $\mathbb{R}^n$, 或同胚于半空间 $H^n=\{x\in\mathbb{R}^n|x^1\leqslant 0\}$.

2° *局部图、参数域、有效域、局部坐标系*. 1° 中实现同胚的映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\to U\subset M$(或 $\varphi:H^n\to U\subset M$), 叫做*流形 $M$ 的局部图*, 并称 $\mathbb{R}^n$(或 $H^n$) 为*参数域*, 而 $U$ 为该图在流形 $M$ 上的*有效域*. 局部图赋予每个点 $x\in U$ 自己的对应点 $t\in\varphi^{-1}(x)\in\mathbb{R}^n$ 的坐标. 如此在图的有效域 $U$ 内导出了*局部坐标系*, 因此, 习惯上称映射 $\varphi$, 更完整的表示是序对 $(U,\varphi)$, 是有效域 $U$ 的图.

3° *图册*. 指这样的一组图 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, 它们的有效域之集能覆盖整个流形: $M=\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

4° *维数*. 在 1° 中的数 $n$ 叫做流形 $M$ 的维数, 通常记作 $\dim M$.

5° *$k$ 维曲面*. 若集合 $M=S\subset\mathbb{R}^n$ 是 $k$ 维流形, 则又称 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维曲面.

易见, 定义 1 所引入的对象 (流形 $M$), 不会因为把 $\mathbb{R}^n$ 及 $H^n$ 换成与 $\mathbb{R}^n$ 及 $H^n$ 同胚的 $\mathbb{R}^n$ 内的参数域而改变. 例如, 代替 $\mathbb{R}^n$, 人们常用 $\mathbb{R}^n$ 中开方体 $I^n=\{x\in\mathbb{R}^n||x^i|<1,i=1,\cdots,n\}$ (或 $I^n=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^i<1,i=1,\cdots,n\}$), 或开球 $B^n$ 作为局部图的标准参数域; 而代替 $H^n$ 以 $\tilde{I}^n=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^1\leqslant 1,\ \text{且}0<x^i<1,i=2,\cdots,n\}$.

特别地, 图

$$\varphi:I^k\to U\subset S \tag{9.2.1}$$

将局部地给出曲面 $S\subset\mathbb{R}^n$ 的参数方程 $x=\varphi(t)$, 这样一来, $k$ 维曲面本身就能局部地看成变了形的标准 $k$ 维区间 $I^k\subset\mathbb{R}^k$.

只用一张图就表示出来的流形通常称为*初等流形*. 例如, 连续函数 $f:I^k\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^{k+1}$ 内的图 $S=\{(t,f(t))\in\mathbb{R}^{k+1}|t\in I^k\}$ 是初等流形.

我们将着重研究 "光滑" 流形. 在定义何谓一般流形的 "光滑性" 之前. 下面先讨论一些曲面的例子 (因为对曲面而言, 谈论 $\mathbb{R}^n$ 中集合间的映射的可微性是清

楚明白的)，再研究一般流形.

### 9.2.2 光滑 (无边) 曲面

我们在 7.6 节中, 曾把 $\mathbb{R}^n$ 内的光滑 $k$ 维曲面定义作这样的集合 $S \subset \mathbb{R}^n$: $\forall x_0 \in S$, $\exists$ 邻域 $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ 及微分同胚

$$\psi : U(x_0) \to I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \big| |t^i| < 1, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

使集合 $U_S(x_0) := S \cap U(x_0)$ 变到方体 $I^k = I^n \cap \{t \in \mathbb{R}^n \big| t^{k+1} = \cdots = t^n = 0\}$ 内.

这种意义下的光滑曲面也是在定义 1 的意义下的曲面, 因为映射

$$x = \psi^{-1}(t^1, \cdots, t^k, 0 \cdots, 0) = \varphi(t^1, \cdots, t^k)$$

显然局部地将曲面参数化.

**命题 1**　若映射 (9.2.1) 属于 $C^{(1)}(I^k; \mathbb{R}^n)$ 类, 且在方体 $I^k$ 的每一点有最大秩 $k$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 及从 $n$ 维方体 $I^n_\varepsilon := \{t \in \mathbb{R}^n \big| |t^i| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\}$ 到空间 $\mathbb{R}^n$ 的微分同胚 $\varphi_\varepsilon : I^n_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$, 使得 $\varphi|_{I^k \cap I^n_\varepsilon} = \varphi_\varepsilon|_{I^k \cap I^n_\varepsilon}$. (换言之, 命题断定了在所给条件下, 局部映射 (9.2.1) 是 $n$ 维方体 $I^n_\varepsilon$ 的微分同胚在 $k$ 维方体 $I^k_\varepsilon := I^k \cap I^n_\varepsilon$ 上的限制.)

**证**　为确定起见, 设映射 $x = \varphi(t)$ 的 $n$ 个坐标函数 $x^i = \varphi^i(t^1, \cdots, t^k), i = 1, \cdots, n$ 中的前 $k$ 个已满足 $\det\left(\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}\right)(0) \neq 0, i, j = 1, \cdots, k$. 这时, 根据隐函数定理, 在 $(t_0, x_0) = (0, \varphi(0))$ 附近, 下列两关系式等价:

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(t^1, \cdots, t^k), \\ \cdots\cdots \\ x^k = \varphi^k(t^1, \cdots, t^k), \\ x^{k+1} = \varphi^{k+1}(t^1, \cdots, t^k), \\ \cdots\cdots \\ x^n = \varphi^n(t^1, \cdots, t^k) \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} t^1 = f^1(x^1, \cdots, x^k), \\ \cdots\cdots \\ t^k = f^k(x^1, \cdots, x^k), \\ x^{k+1} = f^{k+1}(x^1, \cdots, x^k), \\ \cdots\cdots \\ x^n = f^n(x^1, \cdots, x^k). \end{cases}$$

于是, 映射

$$\begin{cases} t^1 = f^1(x^1, \cdots, x^k), \\ \cdots\cdots \\ t^k = f^k(x^1, \cdots, x^k), \\ t^{k+1} = x^{k+1} - f^{k+1}(x^1, \cdots, x^k), \\ \cdots\cdots \\ t^n = x^n - f^n(x^1, \cdots, x^k) \end{cases}$$

是点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 $n$ 维邻域的微分同胚. 现在可以取它的逆微分同胚在某个方体 $I_\varepsilon^n$ 上的限制作为 $\varphi_\varepsilon$. □

当然, 改变坐标的尺度, 能使上面的微分同胚中的 $\varepsilon = 1$, 从而方体 $I_\varepsilon^n$ 成为单位方体.

这样就证明了对于 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲面, 可以采用与前面定义等价的下述定义.

**定义 2**　如果 (定义 1 所引入的)$\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维曲面的图册之每张局部图是光滑的 ($C^{(m)}$ 类, $m \geqslant 1$) 映射, 且在其定义域的每点的秩为 $k$, 就称它为 ($C^{(m)}$ 类, $m \geqslant 1$) **光滑曲面**.

注意, 映射 (9.2.1) 关于秩的条件很重要. 例如, 由式子 $x^1 = t^2, x^2 = t^3$ 给出的解析映射 $\mathbb{R} \ni t \mapsto (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 内确定一条在点 $(0,0)$ 处有尖点的曲线. 显然这条曲线不是 $\mathbb{R}^2$ 中的一维光滑曲面, 因为后者应在它的每一点有切面 (一维切面)①.

因此, 不要把 $C^{(m)}$ 类光滑道路与 $C^{(m)}$ 类光滑曲线这两个概念混淆了.

从 7.6 节的例 6 知道:

**例 1**　若 $F^i \in C^{(m)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), i = 1, \cdots, n-k$ 是一组光滑函数, 且方程组

$$\begin{cases} F^1(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ F^{n-k}(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{9.2.2}$$

在属于其解集 $S$ 的每一点处的秩为 $n-k$, 则此方程组或者没有解, 或者其解的集合 $S$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中构成 $C^{(m)}$ 类 $k$ 维光滑曲面 $S$.

**例 2**　特别地, 在 $\mathbb{R}^n$ 中用方程

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = r^2 \quad (r > 0) \tag{9.2.3}$$

给出的球面是 $\mathbb{R}^n$ 内的 $n-1$ 维光滑曲面, 因为方程 (9.2.3) 的解集 $S$ 显然不空, 并且在 $S$ 的任何点, 方程 (9.2.3) 左端的梯度不为零.

当 $n = 2$ 时, 得到 $\mathbb{R}^2$ 内的圆 $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$, 利用极坐标

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta, \\ x^2 = r\sin\theta, \end{cases}$$

容易用极角 $\theta$ 把它局部参数化.

对固定的 $r(>0)$ 值, 映射 $\theta \mapsto (x^1, x^2)(\theta)$ 在任何形如 $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ 的区间上都是微分同胚的, 而且, 为构成圆的图册, 两张图 (例如, 与 $\theta_0 = 0$ 及 $\theta_0 = -\pi$ 对

① 关于切平面, 参看7.6 节.

应的两张图) 就够了. 但是, 只用一张标准图 (9.2.1) 是不够的, 因为圆是紧的, 这一点与 $\mathbb{R}^1$ 或 $I^1 = B^1$ 不同, 而在拓扑空间中, 紧性是关于拓扑变换不变的性质.

对于 $\mathbb{R}^3$ 内的二维球面 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2$, 能用极 (球) 坐标把它参数化, 用 $\psi$ 表示向量 $(x^1, x^2, x^3)$ 与轴 $Ox^3$ 的正向之间的夹角 $(0 \leqslant \psi \leqslant \pi)$, 而用 $\varphi$ 表示向径 $(x^1, x^2, x^3)$ 在平面 $(x^1, x^2)$ 上射影的极角, 得到

$$\begin{cases} x^3 = r\cos\psi, \\ x^2 = r\sin\psi\sin\varphi, \\ x^1 = r\sin\psi\cos\varphi. \end{cases}$$

在一般情形, $\mathbb{R}^n$ 内的极坐标 $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ 用下述关系引入:

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta_1, \\ x^2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \cdots\cdots \\ x^{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x^n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{cases} \tag{9.2.4}$$

**例 3**　当 $k < n$ 时, 柱面

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^k)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

是 $\mathbb{R}^n$ 内的 $n-1$ 维曲面, 它是变量 $(x^1, \cdots, x^k)$ 的平面内的 $k-1$ 维球面与变量 $(x^{k+1}, \cdots, x^n)$ 的 $n-k$ 维平面的直积.

显然, 若把 $\mathbb{R}^k$ 内的 $k-1$ 维球面上点的极坐标 $\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}$ 取作 $n-1$ 个参量 $(t^1, \cdots, t^{n-1})$ 中的前 $k-1$ 个, 而令 $t^k, \cdots, t^{n-1}$ 分别等于 $x^{k+1}, \cdots, x^n$, 就能把这个曲面局部参数化.

**例 4**　设空间 $\mathbb{R}^3$ 的笛卡儿坐标为 $(x, y, z)$, 在平面 $x = 0$ 中取一条不与 $Oz$ 轴相交的曲线 (一维曲面), 并将它绕 $Oz$ 轴旋转, 就得到一个二维曲面. 可把这条曲线 (经线) 的局部坐标及 (比如) 旋转角 (纬线上的局部坐标) 作为此二维曲面的局部坐标.

特别地, 若平面 $x = 0$ 上的曲线取以点 $(0, b, 0)$ 为中心, 半径为 $a$ 的圆, 则当 $0 < a < b$ 时, 得到二维环面, 俗称轮胎曲面 (图 47). 它的参数方程能写成

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z = a\sin\psi \end{cases}$$

的形式, 其中 $\psi$ 是在原来的圆 (子午线) 上的角参数, 而 $\varphi$ 是纬线上的角参数.

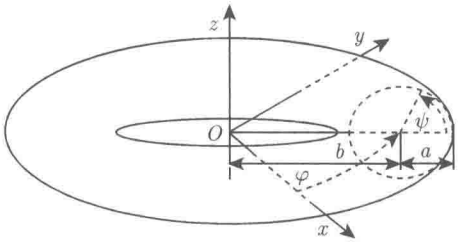



图 47

与上面所作的旋转环面同胚的任何曲面, 在拓扑学中都叫**环面**(确切地说是**二维环面**).

由此可见, 二维环面是两个圆的直积. 因为圆是把线段的两个端点粘在一起 (等同) 而得到的, 所以环面能够由线段的直积即矩形, 用把矩形对边按对应点粘接起来的方法得到 (图 48).

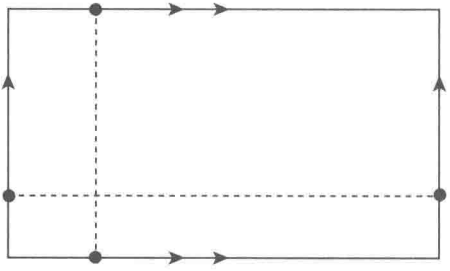


图 48

**例 5**　若把柔软的带子 (矩形) 按图 49(a) 的箭头粘接, 就得到环 (图 49(c)) 或柱面 (图 49(b)). 而按拓扑学的观点, 它们是一样的 (这些曲面彼此同胚).

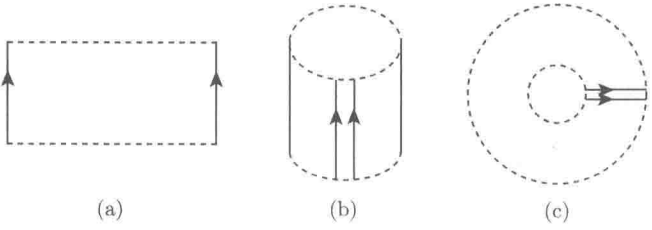
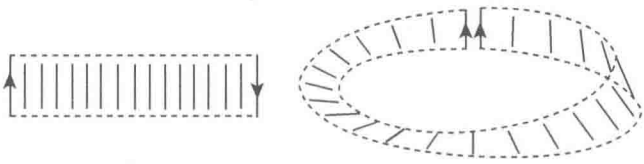



图 49

若按图 50(a) 上面的箭头粘接这条带子, 则得到 $\mathbb{R}^3$ 内的曲面 (图 50(b)), 即所谓**默比乌斯**[①] **带**.

① 默比乌斯 (A. F. Mobiüs)(1790—1868)——德国数学家与天文学家.

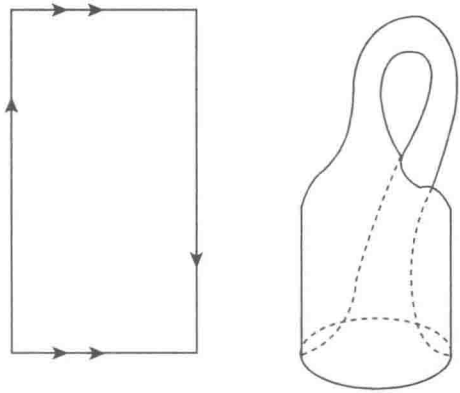


(a)　　(b)

图 50

自然是借助原来矩形所在的平面上的坐标引进此曲面上的局部坐标.

**例 6**　自然可以把将矩形粘接成环面的方法 (例 4) 与将矩形粘接成默比乌斯带的方法 (例 5) 合在一起, 成为一种新的粘接矩形的方法 (图 51(a)). 但是, 正像不撕破矩形或不使其自交, 也不超出 $\mathbb{R}^2$ 的范围, 就不可能粘成默比乌斯带一样, 在 $\mathbb{R}^3$ 内在类似条件下完成上述新粘接也是不可能的. 然而, 在 $\mathbb{R}^4$ 中就能做到, 结果得到 $\mathbb{R}^4$ 中的曲面, 叫做*克莱因*(Klein)[①]*瓶*. 图 51(b) 是绘制这种曲面的方法的示意.



(a)　　(b)

图 51

### 9.2.3　带边流形

**定义 3**　在定义 1 中所说的同胚 $\varphi : H^n \to U$ 下, 点 $x \in U$ 称为流形 $M$ *的边界点*如果 $\varphi^{-1}(x) \in \partial H^n$. 流形 $M$ 的所有边界点的集合叫做*流形的边界*, 通常用记号 $\partial M$ 表示.

根据内点的拓扑不变性 (布劳威尔定理[②]. 对于微分同胚而言, 这是反函数定

① 克莱因 (C. F. Klein)(1849—1925)——卓越的德国数学家, 他最先严格地确立了非欧几何的无矛盾性; 他精通数学史, 是《数学百科全书》的出版组织者之一.

② 定理断定, 在集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 到集 $\varphi(E) \subset \mathbb{R}^n$ 上的同胚映射 $\varphi : E \to \varphi(E)$ 下, 集合 $E$ 的内点变成集合 $\varphi(E)$ 的内点.

理的推论), 流形的维数与边界点概念的定义都是合理的, 亦即, 它们与定义中所使用的具体的局部图无关.

习惯上, 人们常常称流形 $M$ 为*无边流形*如果 $\partial M=\varnothing$, 称 $M$ 为*带边流形*如果 $\partial M\neq\varnothing$.

**例 7**　闭球 $\overline{B}^n=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|\leqslant 1\}$, 也常称为 $n$ 维圆盘, 是 $n$ 维流形, 它的边界是 $(n-1)$ 维球面 $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|=1\}$.

**命题 2**　$n$ 维带边流形 $M$ 的边界 $\partial M$ 是 $(n-1)$ 维无边流形.

**证**　实际上, $\partial H^n=\mathbb{R}^{n-1}$, 而流形 $M$ 的图册中, 形如 $\varphi_i: H^n\to U_i$ 的图在 $\partial H^n$ 上的限制, 构成了 $\partial M$ 的图册. □

### 9.2.4　光滑流形与光滑映射

下面定义一般流形的光滑性.

如果流形 $M$ 的两张图 $(U_i,\varphi_i),(U_j,\varphi_j)$ 的有效域 $U_i,U_j$ 相交, 即 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, 则在集合 $I_{ij}=\varphi_i^{-1}(U_j)$ 和 $I_{ji}=\varphi_j^{-1}(U_i)$ 间自然地建立了一个互逆的同胚 $\varphi_{ij}: I_{ij}\to I_{ji}$ 与 $\varphi_{ji}: I_{ji}\to I_{ij}$. 这里 $\varphi_{ij}=\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i|_{I_{ij}}$, $\varphi_{ji}=\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j|_{I_{ji}}$. 经常把这些同胚叫做*坐标替换函数*, 因为它们在有效域的公共部分 $U_i\cap U_j$ 内, 能实现从一个局部坐标系到另一个局部坐标系的转换 (图 52).

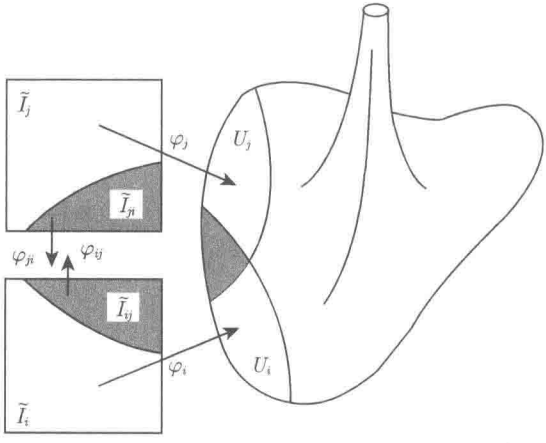



图 52

**定义 4**　称流形的图册是 ($C^{(k)}$ 类或解析) 光滑图册, 如果图册中所有坐标替换函数都是 (具相应光滑性的) 光滑函数.

称两个具相同光滑性的图册是*等价的*, 如果它们的并集构成具同样光滑性的图册.

**例 8**　只用一张图构成的图册, 可以认为它是要多光滑就多光滑的. 例如, $\mathbb{R}^1$

上由恒等映射 $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \varphi(x) = x \in \mathbb{R}^1$ 作成的图册, 及由映 $\mathbb{R}^1$ 到 $\mathbb{R}^1$ 上任意一个严格单调函数 $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \tilde{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^1$ 作成的另一个图册, 它们之并仍是一个图册. 该并的光滑度是函数 $\tilde{\varphi}$ 及 $\tilde{\varphi}^{-1}$ 的光滑度中的较小者.

但 $\tilde{\varphi}(x) = x^3$ 时, 由图$\{x, x^3\}$构成的图册不是光滑的, 因为 $\tilde{\varphi}^{-1}(x) = x^{1/3}$ 在 $x = 0$ 不光滑. 利用上面所说的, 可在 $\mathbb{R}^1$ 上建立不同的无限光滑的图册, 它们的并是具事先给定的 $C^{(k)}$ 光滑性的图册.

**定义 5**　流形 $M$ 连同在 $M$ 上给出的具已知光滑度的等价图册类, 叫做($C^{(k)}$ 类, 解析类) 光滑流形.

为了在流形 $M$ 上给出具光滑度的图册的整个等价类, 只要给出这个等价类中的任意一个图册就够了. 因此, 光滑流形是一个对 $(M, A)$, 其中 $M$ 是流形, 而 $A$ 是 $M$ 上具给定光滑度的图册.

流形上具给定光滑度的等价图册的集合, 常叫做该流形上具给定光滑度的光滑结构. 在具相同拓扑的流形上, 可能存在不同的光滑结构, 甚至有具相同光滑度的不同的光滑结构 (参看例 8 及练习 10).

**例 9**　考察平面双摆 (图 53), 它的臂 $a$ 大大小于臂 $b$, 且能自由摆动, 而臂 $b$ 的摆动范围被支撑物所限. 这样一个系统的构形, 在任何具体时刻由两个角度 $\alpha, \beta$ 所刻画. 假如没有限制, 则双摆的构形空间, 显然等同于二维环面 $T^2 = S^1_\alpha \times S^1_\beta$.

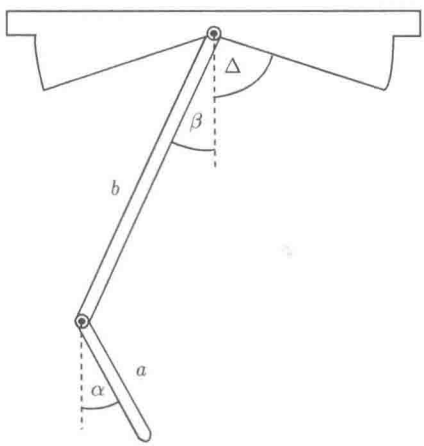



图 53

如果存在所说的限制, 双摆的构形空间可用柱形 $S^1_\alpha \times I^1_\beta$ 的点参数化, 这里 $S^1_\alpha$ 是圆周, 它与臂 $a$ 的可能位置相对应, 而 $I^1_\beta = \{\beta \in \mathbb{R} \,|\, |\beta| \leqslant \Delta\}$ 为一闭区间, 它刻画了杆 $b$ 位置的角 $\beta$ 的变动范围.

在这种情形下, 我们得到了带边流形. 此流形的边由两圆周 $S^1_\alpha \times \{-\Delta\}, S^1_\alpha \times \{\Delta\}$ 组成, 这两个圆周分别是 $S^1_\alpha$ 与线段 $I^1_\beta$ 的端点 $\{-\Delta\}, \{\Delta\}$ 的乘积.

**注 1**　从例 9 可见, 有时集 $M$ 上的坐标 (在例 9 中即 $\alpha, \beta$) 能很自然地产生出来, 而且它们本身就能在 $M$ 上导出拓扑. 这就是说, 在流形的定义 1 中, 不必要总是事先要求 $M$ 上已有拓扑. 流形概念的本质在于集合 $M$ 的点, 能用空间 $\mathbb{R}^n$ 的某组子域的点参数化. 同时, 在 $M$ 的局部上出现的坐标系间, 产生出一种自然的联系, 它表现为空间 $\mathbb{R}^n$ 的相应区域内的映射, 换言之, 可以认为 $M$ 是由空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组区域, 按指定的规律, 使它们的点等同起来而得到的; 或直白地说, 按指定的规律, 把它们彼此粘合起来. 这样, 给出流形, 实际上就是给出 $\mathbb{R}^n$ 的一组子区域以及这些子区域的点之间的对应规律.

**定义 6**　如果流形作为拓扑空间是紧的 (连通的), 就称它为*紧流形* (*连通流形*).

例 9 内出现的柱面 $S^1_\alpha \times I^1_\beta$ 的边界由两个独立的圆周组成, 是一维紧而不连通的流形. 例 7 中的 $n$ 维圆盘的边界 $S^{n-1} = \partial \overline{B}^n$ 是紧流形, 当 $n > 1$ 时, 它是连通的. 而当 $n = 1$ 时不连通 (由两点组成).

**例 10**　空间 $\mathbb{R}^n$ 本身显然是连通非紧无边流形, 而半空间 $H^n$ 是连通非紧带边流形的最简单例子. (在这些情况下, 可以取一张图组成图册, 且相应的映射是恒等映射.)

**命题 3**　如果流形 $M$ 是连通的, 那么它是线连通的.

**证**　固定一点 $x_0 \in M$ 后, 考察流形 $M$ 中的那些点的集 $E_{x_0}$, 它们能用在 $M$ 范围内的道路与点 $x_0$ 连接. 由流形的定义可知, 集合 $E_{x_0}$ 在 $M$ 内不空, 既开又闭. 因而 $E_{x_0} = M$. □

**例 11**　若使每个 $n$ 阶实方阵与空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的点对应, 点的坐标是把方阵的所有元素按照一定顺序写出得到的, 则*所有非退化 $n$ 阶方阵之群 $GL(n, \mathbb{R})$ 成为 $n^2$ 维的流形*. 该流形是非紧 (方阵的元素无界) 且不连通的. $GL(n, \mathbb{R})$ 的不连通性, 由它既含具正行列式又含具负行列式的方阵推出. $GL(n, \mathbb{R})$ 中与这样的两个方阵对应的点, 不可能用一条道路连接起来 (如若不然, 在此道路上, 将有一点, 使相应矩阵的行列式为零).

**例 12**　平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 其行列式为 1 的*正交变换群* $SO(2, \mathbb{R})$, 由形如

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

的方阵组成, 因此, 可把它认作是与圆周, 即角参数 $\alpha$ 的变动域等同的流形. 因此, $SO(2, \mathbb{R})$ 是一维紧连通流形. 如果关于平面 $\mathbb{R}^2$ 中 (过原点) 的直线的反射也是允许的, 则得到所有二阶实正交方阵之群$O(2, \mathbb{R})$. 记 $M_{2\times 2}$ 是二阶实矩阵全体, 则 $O(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2} \mid AA^* = I\} = \{A \in M_{2\times 2} \mid \det A = 1\} \cup \{A \in M_{2\times 2} \mid \det A = -1\}$. 它自然地等同于两个不同的圆周, 因此, $O(2, \mathbb{R})$ 也是一维紧但不连通的流形.

**例 13**　设 $\boldsymbol{a}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的向量, $T_{\boldsymbol{a}}$ 是由向量 $\boldsymbol{a}$ 产生的一个*平面运动群*. 群 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的元素是将 $\mathbb{R}^2$ 中的向量平移 $n\boldsymbol{a}$ 的平移运算, $n \in \mathbb{Z}$. 在群 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的元素 $g$ 的作用下, 平面上每个点 $x$ 被移到形如 $x + n\boldsymbol{a}$ 的的点 $g(x)$. 给定点 $x \in \mathbb{R}^2$, 在给定变换群的每个元素作用下所成的一切点的集合, 叫做*点的轨道*. "属于同一轨道" 这样一个 $\mathbb{R}^2$ 的点的性质, 显然是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系. 而轨道是在此意义下的等价点类. $\mathbb{R}^2$ 内的区域, 如果它恰含每个轨道的一个点, 就叫做给定的自同构群的*基本域*(确切含义见练习 12(4)).

在我们的情况下, 可取与 $\boldsymbol{a}$ 正交的间距为 $|\boldsymbol{a}|$ 的两条平行线所截的长条做为基本域. 应当注意的只是, 这两条平行线的每一条都能从另一条移动 $\boldsymbol{a}$ 或 $-\boldsymbol{a}$ 得到. 在与 $\boldsymbol{a}$ 正交宽度小于 $|\boldsymbol{a}|$ 的长条范围内, 没有彼此等价的点, 所以, 在这样的长条内有代表点的任何轨道都能单值地赋予其这种代表点的坐标. 这样, 给定的群 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的轨道的商集 $\mathbb{R}^2/T_{\boldsymbol{a}}$ 变成了流形, 由上面所说的基本域, 容易了解, 此流形与那样一个柱面同胚, 它是将宽为 $|\boldsymbol{a}|$ 的长条的两条边界直线上彼此等价的点粘在一起而成的.

**例 14**　设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 的一对正交向量, $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 是由这二向量产生的平移群. 在这种情形下, 基本域是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的矩形. 在此矩形范围内, 只有位于其对边上的点才能等价. 在将基本矩形的边对应地粘合之后, 可以断定, 所产生的流形 $\mathbb{R}^2/T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 与二维环面同胚.

**例 15**　我们再讨论平面 $\mathbb{R}^2$ 上由下列变换产生的运动群 $G_{a,b}$ : $a(x, y) = (x + 1, 1 - y), b(x, y) = (x, y + 1)$.

群 $G_{a,b}$ 的基本域是单位正方形, 其两水平边上的点等同于一条竖直线上的点. 而正方形的侧边上的点, 则等同于关于其中心对称的点. 因此, 产生的流形 $\mathbb{R}^2/G_{a,b}$ 与克莱因瓶同胚 (参看例 6).

**定义 7**　设 $M, N$ 都是 $C^{(k)}$ 类的光滑流形, $f : M \to N$ 为映射. 如果对于每一点 $x \in M$, 任给 $f(x)$ 的局部坐标图 $(V, \psi)$, 存在 $x$ 的局部坐标图 $(U, \varphi)$ 使得 $f(U) \subset V$ 且 $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \to \psi^{-1}(V)$ 是 $C^{(l)}$ 类的, 则称 $f$ 为 $M$ 到 $N$ 的 $C^{(l)}$ 映射.

当 $l \leqslant k$ 时, 所引入的定义有意义且是合理的 (与选用的局部图无关).

特别, $M$ 到 $\mathbb{R}^1$ 内的光滑映射是 $M$ 上的光滑函数, 而 $\mathbb{R}^1$(或 $\mathbb{R}^1$ 内的线段) 到 $M$ 内的光滑映射是 $M$ 上的光滑道路. 因此, 光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}^1$ 在流形 $M$ 上的次数不能超过该流形的光滑的次数.

### 9.2.5　流形及其边界的定向

**定义 8**　关于流形及其边界的定向.

• *相容图*. 光滑流形上的两张图的有效域或不相交, 或相交且在它们的公共有

效域内从一图的局部坐标到另一图的局部坐标的变换是处处有正的雅可比行列式的微分同胚, 就说这两张图是*相容的*.

• *定向图册*. 光滑流形 $(M, A)$ 的图册 $A$ 叫做流形 $M$ 的*定向图册*, 如果它的图是两两相容的.

• *可定向流形*. 如果流形 $M$ 具有定向图册, 就说它是*可定向流形*. 反之就说它是*不可定向流形*.

流形的两个定向图册之并, 如果仍是一个定向图册, 则称它们是*等价定向图册*.

**定义 9** (定向和定向流形)　流形 $M$ 的定向图册集按上述等价关系所得的等价类叫做它的*定向图册或定向*. 一个流形, 如果它有指定的定向图册类, 就叫做*定向流形*.

因此, 给流形定向, 就是 (不管用什么方法) 指定一个由它的图册构成的定向图册类. 为此, 显然, 只要指出这个特定的定向图册类中的任意一个定向图册即可.

**命题 4**　连通流形, 或者不可定向, 或者有两种不同的定向.

**证**　设 $A$ 和 $\tilde{A}$ 是给定的流形 $M$ 的两个定向图册, 并给出了从一个图册的图的局部坐标到另一个图册的图的局部坐标的微分同胚变换. 设 $p_0 \in M$, 而分别属于两个图册的两张图的有效域 $U_{i_0}, \tilde{U}_{j_0}$ 都包含点 $p_0$, 且这两张图的坐标变换的雅可比行列式在与点 $p_0$ 对应的参数域中的点处是正的. 我们来证明, 这时对于任何点 $p \in M$ 及图册 $A, \tilde{A}$ 中有效域含有 $p$ 的任何图, 坐标变换的雅可比在相应的坐标点处也是正的.

首先, 我们能明显地看到, 若在点 $p \in M$ 对图表 $A, \tilde{A}$ 的某一对包含 $p$ 的图, 变换的雅可比行列式是正的 (负的), 则它在 $p$ 对任何这样一对图也是正的 (负的), 因为在一个图册的范围内, 坐标变换都有正的雅可比行列式. 而复合映射的雅可比行列式等于它们的雅可比行列式之积.

今设 $E$ 是 $M$ 的子集, 它由那样一些点 $p \in M$ 组成: 在 $p$ 处, 一个图册的图到另一图册的图的坐标变换的雅可比行列式为正.

因 $p_0 \in E$, 故集合 $E$ 不空. $E$ 还是 $M$ 内的开集. 实际上, 对任何点 $p \in E$, 存在 $A$ 与 $\tilde{A}$ 的图册中的图, 它们有包含 $p$ 点的有效域 $U_i, \tilde{U}_j$. 集 $U_i$ 与 $\tilde{U}_j$ 是 $M$ 内的开集, 所以 $U_i \cap \tilde{U}_j$ 也是 $M$ 内的开集. 集 $U_i \cap \tilde{U}_j$ 的含有 $p$ 的连通分支, 既在 $U_i \cap \tilde{U}_j$ 开又在 $M$ 内开. 在这个连通分支上, 坐标变换的雅可比行列式不会变为零, 从而也不会变号. 因此, 在 $p$ 的某个邻域内, 雅可比行列式恒为正, 这就证明了 $E$ 是开集. 但集 $E$ 也是 $M$ 的闭集. 这可由微分同胚的雅可比行列式连续, 以及微分同胚的雅可比行列式不为零推得.

这样, $E$ 是连通集 $M$ 的不空的既开又闭的集. 因此, $E = M$, 且图册 $A, \tilde{A}$ 在 $M$ 上给出了相同的定向.

在图册 $A$ 的所有图内, 把坐标之一变号, 例如把 $t^1$ 换成 $-t^1$, 就得到属于另一定

向类的定向图册 $-A$. 因为从图册 $A$ 的任意图到 $-A$ 的图的坐标变换的雅可比行列式有相反的符号, 所以在 $M$ 上, 任何定向图册或者与 $A$ 等价, 或者与 $-A$ 等价. □

**命题 5**　定向光滑 $n$ 维流形的边界是定向 $n-1$ 维流形, 它与原流形具有同样的光滑度.

**证**　首先证明光滑性. 设 $n$ 维带边流形 $M$ 有图册

$$A(M)=\{(H^k,\varphi_i,U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^k,\varphi_j,U_j)\},$$

则 $A(\partial M)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\varphi_i|_{\partial H^k=\mathbb{R}^{k-1}},\partial U_i)\}$ 显然是边界 $\partial M$ 的同类光滑的图册. 这同时也说明 $\partial M$ 是 $n-1$ 维流形.

次证可定向性. 只需证明: 如果 $A(M)=\{(H^k,\varphi_i,U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^k,\varphi_j,U_j)\}$ 是 $M$ 的定向图册, 那么边界的图册 $A(\partial M)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\varphi_i|_{\partial H^k=\mathbb{R}^{k-1}},\partial U_i)\}$ 也是由两两相容的图组成的. 为此, 显然只需验证, 如果 $\tilde{t}=\psi(t)$ 是 $U_{H^k}(t_0)$ 到 $\tilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ 的微分同胚且有正的雅可比行列式, $U_{H^k}(t_0)$ 是 $t_0\in\partial H^k$ 在 $H^k$ 内的邻域, $\tilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ 是点 $\tilde{t}_0\in\partial H^k$ 在 $H^k$ 内的邻域, 则从 $U_{\partial H^k}(t_0)=\partial U_{H^k}(t_0)$ 到 $U_{\partial\tilde{H}^k}(\tilde{t}_0)=\partial\tilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ 上的映射 $\psi|_{\partial U_{H^k}(t_0)}$ 也具有正的雅可比行列式. 这里 $U_{\partial H^k}(t_0)$ 是 $t_0$ 在 $\partial H^k$ 内的邻域, $\tilde{U}_{\partial H^k}(\tilde{t}_0)$ 是 $\tilde{t}_0$ 在 $\partial H^k$ 内的邻域.

注意, 在任意点 $t_0=(0,t_0^2,\cdots,t_0^k)\in\partial H^k$ 处, 映射 $\psi$ 的雅可比行列式 $J$ 为

$$J(t_0)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial t^1} & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^1} & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^1} & \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^k}\end{vmatrix}=\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^k}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^k}\end{vmatrix},$$

因为当 $t^1=0$ 时, 应有 $\tilde{t}^1=\psi^1(0,t^2,\cdots,t^k)\equiv 0$(边界点在微分同胚下变为边界点). 还应注意, 当 $t^1<0$ 时,也应有 $\tilde{t}^1=\psi^1(t^1,t^2,\cdots,t^k)<0$(因为 $\tilde{t}=\psi(t)\in H^k$), 因此 $\dfrac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0,t^2,\cdots,t^k)$ 的值不能是负的. 根据条件 $J(t_0)>0$, 既然有 $\dfrac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0,t^2,\cdots,t^k)\geqslant 0$, 则由上面的行列式等式推知, 映射 $\psi|_{\partial U_{H^k}}=\psi(0,t^2,\cdots,t^k)$ 的雅可比行列式是正的. □

**定义 10**　若 $A(M)=\{(H^n,\varphi_i,U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^n,\varphi_j,U_j)\}$ 是流形 $M$ 的定向图册, 则图集 $A(\partial M)=\{(\mathbb{R}^{n-1},\varphi_i|_{\partial H^n=\mathbb{R}^{n-1}},\partial U_i)\}$ 是流形 $M$ 的边界 $\partial M$ 的定向图册. 用这个图册给出的边界定向, 叫做*与流形的定向和谐的边界定向*.

**注 2**　作为本段的结束, 介绍一些在实用上重要且经常使用的给 $\mathbb{R}^n$ 内的曲面定向的结论.

• *对 $\mathbb{R}^n$ 的标架定向*. 我们知道, 从空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标架 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到另一组标架 $\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{e}}_n$ 的变换, 由 $\tilde{\boldsymbol{e}}_j=a_j^i\boldsymbol{e}_i$ 产生的方阵 $(a_j^i)$ 来实现, 而 $\det(a_j^i)\neq 0$. $\mathbb{R}^n$ 的

所有标架分为两个等价类, 同一类中的标架, 它们相互变换的矩阵的行列式是正的. 这样的类叫做空间 $\mathbb{R}^n$ 的**定向标架类**. 所谓给出 $\mathbb{R}^n$ 的定向, 就是按照明确的定义从 $\mathbb{R}^n$ 的两个定向标架类中指定一个. 这样, **定向空间** $\mathbb{R}^n$ 就是空间 $\mathbb{R}^n$ 本身加上它的一个确定的定向标架类. 为了指出某个定向类, 只要取其中的任一个标架就行了. 因此, 可以认为定向空间 $\mathbb{R}^n$, 就是空间 $\mathbb{R}^n$ 连同它的一个固定的标架.

• **对 $\mathbb{R}^n$ 的坐标系定向**. $\mathbb{R}^n$ 内的标架产生出 $\mathbb{R}^n$ 内的坐标系, 而由这样的坐标系向另一坐标系的变换, 由方阵 $(a_i^j)$ 实现, 它是标架转换方阵 $(a_j^i)$ 的转置方阵. 当实现坐标系变换的方阵有正的雅可比行列式时, 就把这样的坐标系置于同一类中, 就得到 $\mathbb{R}^n$ 中**定向坐标系类**.

• **对区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 的曲线坐标定向**. 设 $G \subset \mathbb{R}_x^n$ 与 $D \subset \mathbb{R}_t^n$ 是两个微分同胚区域. 微分同胚 $\varphi : D \to G$, 可以看成在区域 $G$ 内按规则 $x = \varphi(t)$ 引进的**曲线坐标**, 即点 $x \in G$ 用点 $t = \varphi^{-1}(x) \in D$ 的笛卡儿坐标 $(t^1, \cdots, t^n)$ 来表示. 如果在每个点 $t \in D$ 处, 考虑切空间 $T\mathbb{R}_t^n$ 的由坐标方向的单位向量组成的标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 则在 $D$ 内产生了一个标架场, 这个标架场可以看成空间 $\mathbb{R}^n$ 单位标架平行移至 $D$ 的每一个点得到的. 因为切空间之间的映射 $\varphi'(t) : TD_t \to TG_{x=\varphi(t)}$ 在每点 $t$ 是切空间间的同构, 按规律 $TD_t \ni \boldsymbol{e} \mapsto \varphi'(t)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\xi} \in TG_x$ 实现的. 由 $TD_t$ 内的标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 能得到 $TG_x$ 内的标架 $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_n$, 同时, 在 $D$ 上的标架场变换成 $G$ 上的标架场 (图 54). 因为 $\varphi \in C^{(1)}(D; G)$, 所以, 如果向量场 $\boldsymbol{e}(t)$ 在 $D$ 内连续, 则向量场 $\boldsymbol{\xi}(x) = \boldsymbol{\xi}(\varphi(t)) = \varphi'(t)\boldsymbol{e}(t)$ 在 $G$ 内也连续. 这样, 任何连续标架场, 在微分同胚下变成连续标架场. 现在考虑满足条件 $x = \varphi_i(t)$ 的一对微分同胚 $\varphi_i : D_i \to G, i = 1, 2$, 它们在区域 $G$ 内产生出两个曲线坐标系 $(t_1^1, \cdots, t_1^n)$ 及 $(t_2^1, \cdots, t_2^n)$. 互逆的微分同胚 $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : D_1 \to D_2, \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : D_2 \to D_1$ 实现了这两个曲线坐标系的互相转换. 这些映射在区域 $D_1, D_2$ 的各对应点上是互逆的, 因此, 其雅可比行列式有相同的符号. 如果区域 $G$ (同时 $D_1$ 及 $D_2$) 是连通的, 那么, 由所讨论的函数行列式的连续性及非零性, 它们在区域 $D_1$ 及 $D_2$ 的所有点上将各有其确定的符号.

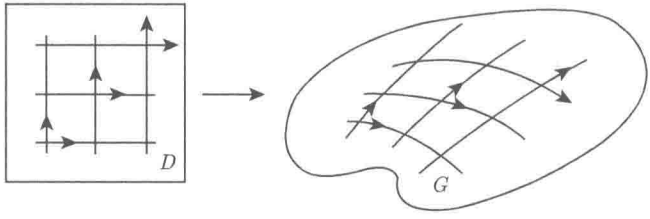



图 54

于是, 在连通域 $G$ 内引出的曲线坐标系, 恰好分成两个等价类; 同一类坐标系间的

变换具有正的雅可比行列式. 这样的等价类叫做区域 $G$ 的**定向曲线坐标系类**. 给区域 $G$**定向**, 就是在 $G$ 内指定它的一个定向曲线坐标系类.

• **对曲面 $S\subset\mathbb{R}^n$ 定向**. 如果把区域 $G$ 代以 $\mathbb{R}^n$ 内由一个图给出的光滑 $k$ 维曲面 $S$, 就能把上面所说的关于区域 $G\subset\mathbb{R}^n$ 的定向, 逐字逐句地重复 (图 55) 于 $S$ 的定向.

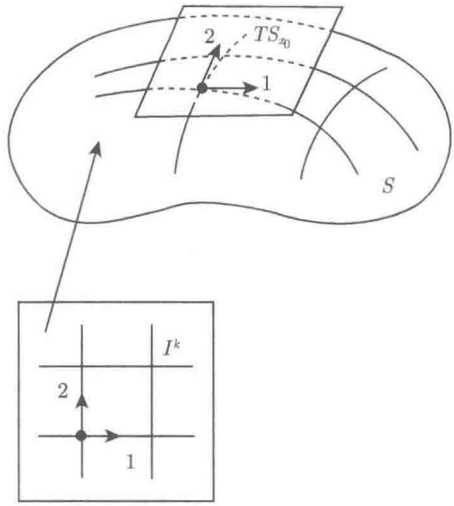



图 55

• **对已定向的空间中的曲面定向**. 设在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内有指定的定向标架 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中可定向 $n-1$ 维曲面. 又设 $TS_x$ 是 $S$ 在点 $x\in S$ 处的 $n-1$ 维切平面, $\boldsymbol{n}$ 为 $S$ 在点 $x$ 处的法向量. 如果对所给的向量 $\boldsymbol{n}$, 在 $TS_x$ 中选定标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$, 使得标架 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 与 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=(\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{e}}_n)$ 属于空间 $\mathbb{R}^n$ 的同一定向类, 则易见平面 $TS_x$ 上所有这种标架 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})$, 原本属于此平面的同一个定向类. 这就是说, 指定平面 $TS_x$ 的定向类, 从而给连通可定向的曲面定向, 只要给定法向量 $\boldsymbol{n}$ 就能实现 (图 56).

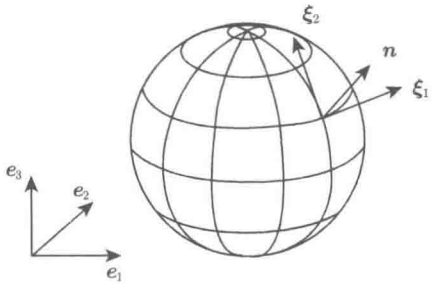



图 56

不难验证 (参看练习 5), 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中 $n-1$ 维曲面的可定向性, 等价于在曲面上存在非零连续法向量场.

• **曲面的侧**. 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的连通 $n-1$ 维曲面上, 如果存在 (单值) 连续单位法向量场, 就称此曲面为**双侧曲面**. 因此, 比如球面、环面、$\mathbb{R}^3$ 内的平面都是双侧曲面. 默比乌斯带则不一样, 在这样的意义下, 它是**单侧曲面**.

• 现在做几个与这个概念在分析中的应用有关的注释.

在与 $\mathbb{R}^n$ 内的定向曲面有关的分析学的计算中, 通常首先是找出曲面 $S$ 的某个局部参数化方程 (从而定义曲面的切平面), 然后在某个切平面 $TS_x$ 内, 构造一个由 (速度) 向量构成的标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$, 这些向量与选定的曲线坐标系线相切, 亦即建立由这个坐标系导出的定向标架.

如果空间 $\mathbb{R}^n$ 已定向, 而 $S$ 的定向是用法向量场定出的, 则取给定的场在点 $x$ 处的向量 $\boldsymbol{n}$, 并将标架 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 与确定空间定向的标架 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 比较. 如果它们属于同一个定向类, 则按照上面的约定, 局部图就给出了所需要的曲面定向; 而当这两个标架定向类不一致时, 所取的图给出的曲面定向与法线 $\boldsymbol{n}$ 给出的相反.

显然, 当 $n-1$ 维曲面存在某个局部图时, 只是需简单地调换一下坐标的次序, 就能得到所需定向的局部图 (这里的定向, 是由定向空间 $\mathbb{R}^n$ 中的双侧超曲面上指定的确定法向量 $\boldsymbol{n}$ 预先给出的).

在一维的情形, 曲面就成为曲线. 我们常常用曲线在某点的切向量, 来规定曲线的定向. 这时, 我们常常不说 "曲线的定向", 而说 "**沿曲线运动的方向**".

如果在平面 $\mathbb{R}^2$ 上取它的一个定向标架, 并且给定一条闭曲线, 设此曲线界定的区域为 $D$, $\boldsymbol{n}$ 为曲线的外法向量 (对 $D$ 来说), $\boldsymbol{v}$ 是环绕速度向量, 则认为当标架 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 的定向标架同类时, 曲线绕 $D$ 的方向为**正方向**.

这是说, 例如, 在平面上惯用的 (右手) 标架下, 对于曲线限定的区域来说, "反时针" 运动是正环绕方向, 当沿曲线正环绕方向运动时, 曲线所限定的区域始终位于 "左侧".

鉴于此, 对平面或平面区域的定向, 经常不用 $\mathbb{R}^2$ 中的标架, 而用环绕某个闭曲线 (通常用圆周) 的运动正方向来给出.

给定这样一个方向, 实质上就是指出了从标架的第一个向量最简捷地旋转到第二个向量的旋转方向, 这等价于在平面上给定了定向标架类.

### 9.2.6　单位分解

这里叙述一种专门的结构 ——**单位分解**, 这种结构常常成为把整体问题归结为局部问题的基本方法. 特别, 可利用它阐明: 任何流形都能以维数 $n$ 足够大的空间 $\mathbb{R}^n$ 内的曲面的形式实现.

**定义 11**　设 $M$ 是 $C^{(k)}$ 光滑类的流形, $X$ 是 $M$ 的子集. 称由函数 $e_\alpha\in$

$C^{(k)}(M;\mathbb{R})$ 构成的函数组 $E=\{e_\alpha,\alpha\in A\}$ 为集 $X$ 上的 $k$ 阶光滑或 $C^{(k)}$ 类单位分解, 如果

1° $0\leqslant e_\alpha(x)\leqslant 1$ 对任意函数 $e_\alpha\in E$ 及任意 $x\in M$ 成立;

2° $\forall x\in X$, 有 $x$ 在 $M$ 中的邻域 $U(x)$, 使得 $E$ 中只有有限多个函数在 $U(x)$ 上不恒等于零;

3° $\sum\limits_{e_\alpha\in E}\alpha(x)\equiv 1$ 在 $X$ 上成立.

**定义 12**　设 $\mathfrak{D}=\{o_\beta,\beta\in B\}$ 是集 $X\subset M$ 的开覆盖. 称 $E=\{e_\alpha;\alpha\in A\}$ 为 $X$ 的从属于覆盖 $\mathfrak{D}$ 的单位分解, 如果 $E$ 是 $X$ 的单位分解, 且每个函数 $e_\alpha\in E$ 的支集都包含在集族 $\mathfrak{D}$ 的某个集合内.

将证明下述命题.

**命题 6**　设 $\{(U_i,\varphi_i),i=1,\cdots,m\}$ 是流形 $M$ 的某个 $k$-阶光滑图册中的有限多个图构成的图组, 它们的有效域构成紧集 $K\subset M$ 的覆盖. 那么在 $K$ 上存在着从属于覆盖 $\{U_i,i=1,\cdots,m\}$ 的 $C^{(k)}$ 类单位分解.

为证此命题, 先给出一个辅助引理.

**引理 1**　存在 $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足: $\theta\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$; 在任何点 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立 $0\leqslant\theta\leqslant 1$; 在区间 $I(a)=\{x\in\mathbb{R}^n||x^i-a^i|\leqslant 1,i=1,\cdots,n\}$ 上有 $\theta(x)\equiv 1$, 且 $\theta$ 的支集 $\operatorname{supp}\theta$ 包含在区间 $\tilde{I}(a)=\{x\in\mathbb{R}^n||x^i-a^i|\leqslant 3,i=1,\cdots,n\}$ 内.

**证**　考虑函数 $g(x)$ 定义为 $g(0)=0$; $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},\forall x\neq 0$. 不难验证 (参看第一卷第 142 页) $g\in C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 且 $g^{(n)}(0)=0$ 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立. 因此, 非负函数

$$G(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{-(x+1)^2}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

也属于 $C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. 同样,

$$F(x)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x}G(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}G(t)\mathrm{d}t}$$

也属这个函数类, 因为有 $F'(x)=G(x)\Big/\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}G(t)\mathrm{d}t$. 显然, 函数 $F$ 在区间 $[-1,1]$ 上严格递增, 当 $x\leqslant -1$ 时, $F(x)\equiv 0$; 当 $x\geqslant 1$ 时, $F(x)\equiv 1$. 于是 $f(x)=F(x+2)+F(-x-2)-1$ 满足: $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 且 $f(x)=0,\forall|x|\geqslant 3$; $f(x)=1,\forall|x|\leqslant 1$; $0<f(x)<1,\forall 1<|x|<3$.

最后, 置

$$\theta(x^1,\cdots,x^n)=f(x^1-a^1)\cdot\cdots\cdot f(x^n-a^n),$$

则 $\theta\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, 满足引理 1 要求. □

**命题 6 的证明**　对任一点 $x_0 \in K$, 首先引入以下构造. 依次取含 $x_0$ 且与图 $\varphi_i : \mathbb{R}^n(H^n) \to U_i$ 对应的区域 $U_i$, 点 $t_0 = \varphi_i^{-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n(H^n)$, 函数 $\theta(t - t_0)$ 及其在图 $\varphi_i$ 的参数域上的限制 $\theta_{t_0}$(这里$\theta(t)$ 是引理 1 中的函数).

设 $I_{t_0}$ 是以 $t_0 \in \mathbb{R}^n$ 为中心的单位方体与图 $\varphi_i$ 的参数域的交集. 实际上, 仅当图 $\varphi_i$ 的参数域是半空间 $H^n$ 时, $\theta_{t_0}$ 才与 $\theta(t-t_0)$ 不同, 而 $I_{t_0}$ 才与相应的单位方体不同. 关于每点 $x \in K$, 每个容许值 $i = 1, 2, \cdots, m$ 和相应的点 $t = \varphi_i^{-1}(x)$ 建立的所有的 $M$ 内的开集 $\varphi_i(I_t)$ 构成紧集 $K$ 的开覆盖. 设 $\{\varphi_{i_j}(I_{t_j}), j = 1, 2, \cdots, l\}$ 是由这个开覆盖选出的紧集 $K$ 的有限覆盖. 显然 $\varphi_{i_j}(I_{t_j}) \subset U_{i_j}$. 我们在 $U_{i_j}$ 上定义一个函数 $\tilde{\theta}_j(x) = \theta_{t_j} \circ \varphi_{i_j}^{-1}(x)$. 把 $\tilde{\theta}_j(x)$ 延拓到整个流形 $M$ 上, 使它在 $U_{i_j}$ 之外为零. 这个延拓到 $M$ 上的函数仍记作 $\tilde{\theta}_j$. 据 $\tilde{\theta}_j \in C^{(k)}(M; \mathbb{R})$ 的作法, $\mathrm{supp}\tilde{\theta}_j \subset U_{i_j}$; 在 $M$ 上 $0 \leqslant \tilde{\theta}_j(x) \leqslant 1$, 在 $\varphi_{i_j}(I_{t_j}) \subset U_{i_j}$ 上 $\tilde{\theta}_j(x) \equiv 1$. 这时, 函数 $e_1(x) = \tilde{\theta}_1(x), e_2(x) = \tilde{\theta}_2(x)(1 - \tilde{\theta}_1(x)), \cdots, e_l(x) = \tilde{\theta}_l(x) \cdot (1 - \tilde{\theta}_{l-1}(x)) \cdot \cdots \cdot (1 - \tilde{\theta}_1(x))$ 组成所求的单位分解. 只需验证, 在 $K$ 上 $\sum\limits_{j=1}^{l} e_j(x) \equiv 1$ 成立, 因为对 $K$ 的单位分解、紧集 $K$ 的从属覆盖 $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_l}\} \subset \{U_i, i = 1, \cdots, m\}$ 的其他要求, 函数组 $\{e_1, \cdots, e_l\}$ 显然是满足的. 但是由于对每个点 $x \in K$, 总有某个集 $\varphi_{i_j}(I_{t_j})$ 包含它, 而在这集上对应的函数 $\tilde{\theta}_j$ 恒等于 1, 所以在 $K$ 上成立

$$1 - \sum_{j=1}^{l} e_j(x) = (1 - \tilde{\theta}_1(x)) \cdot \cdots \cdot (1 - \tilde{\theta}_l(x)) \equiv 0. \qquad \square$$

**推论 1**　命题 6 产生下述推断.

1° 若 $M$ 是紧流形, $A$ 是 $M$ 上的 $C^{(k)}$ 类图册, 则在 $M$ 上存在从属于图册 $A$ 的图的有效域的有限单位分解 $\{e_1, \cdots, e_l\}$.

2° 对流形 $M$ 中的任何紧集 $K$ 及任何包含 $K$ 的开集 $G \subset M$, 存在函数 $f : M \to \mathbb{R}$, 它与流形 $M$ 同样光滑, 在 $K$ 上, $f(x) \equiv 1$ 且 $\mathrm{supp}f \subset G$.

3° 每个紧光滑 $n$ 维流形 $M$, 微分同胚于维数 $N$ 足够大的空间 $\mathbb{R}^N$ 内的某个紧光滑曲面.

**证**　1° 因 $M$ 是紧的, 故可认为图册 $A$ 是有限的. 在命题 6 中令 $K = M$, 即得所证.

2° 对每点 $x \in K$, 覆盖上一个邻域 $U(x)$, 使 $U(x)$ 位于 $G$ 及流形 $M$ 的某个图的有效域的范围内. 从紧集 $K$ 的开覆盖 $\{U(x), x \in K\}$ 中选有限覆盖, 并做出 $K$ 上从属于它的单位分解 $\{e_1, \cdots, e_l\}$. 函数 $f = \sum\limits_{i=1}^{l} e_i$ 即为所求.

3° 为了凸显证明的基本思想, 我们只对无边紧流形的情况进行证明. 在此情形下, $M$ 上存在有限光滑图册 $A = \{\varphi_i : I \to U_i, i = 1, \cdots, m\}$, 其中 $I$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的 $n$ 维方体. 选一个稍小的方体 $I'$, 使得 $I' \subset I$ 而且 $\{U_i' = \varphi_i(I'), i = 1, \cdots, m\}$

仍然是 $M$ 的覆盖. 在推论 1 之 2° 中取 $K=I',G=I,M=\mathbb{R}^n$, 并作出函数 $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 使当 $t\in I'$ 时有 $f(t)\equiv 1$ 且 $\operatorname{supp} f\subset I$.

今考察映射 $\varphi_i^{-1}:U_i\to I(i=1,\cdots,m)$ 的坐标函数 $t_i^1(x),\cdots,t_i^n(x)$, 并借助它们在 $M$ 上引进下列函数:

$$y_i^k(x)=\begin{cases}(f\circ\varphi_i^{-1})(x)\cdot t_i^k(x), & x\in U_i,\\ 0, & x\notin U_i,\end{cases}\quad i=1,\cdots,m;\ k=1,\cdots,n.$$

在任一点 $x\in M$, 映射

$$M\ni x\mapsto y(x)=(y_1^1,\cdots,y_1^n,\cdots,y_m^1,\cdots,y_m^n)(x)\in\mathbb{R}^{mn}$$

的秩达到最大, 从而等于 $n$. 实际上, 若 $x\in U_i'$, 则 $\varphi_i^{-1}(x)=t\in I', f\circ\varphi_i^{-1}(x)=1$ 且 $y_i^k(\varphi_i(t))=t_i^k,k=1,\cdots,n$.

最后, 考察映射

$$M\ni x\mapsto Y(x)=(y(x),f\circ\varphi_1^{-1}(x),\cdots,f\circ\varphi_m^{-1}(x))\in\mathbb{R}^{mn+m},$$

令在 $U_i(i=1,\cdots,m)$ 之外, $f\circ\varphi_i^{-1}(x)\equiv 0$, 则一方面此映射与映射 $x\mapsto y(x)$ 显然有相同的秩 $n$, 另一方面, 它显然是 $M$ 到 $M$ 在 $\mathbb{R}^{mn+m}$ 内的像上的一一映射. 我们来验证最后这个断言. 设 $p,q$ 是 $M$ 的不同点. 从覆盖 $M$ 的组 $\{U_i',i=1,\cdots,m\}$ 中找出含有点 $p$ 的区域 $U_i'$. 这时 $f\circ\varphi_i^{-1}(p)=1$. 如果 $f\circ\varphi_i^{-1}(q)<1$, 则 $Y(p)\neq Y(q)$ 随之成立. 而如果 $f\circ\varphi_i^{-1}(q)=1$, 则 $p,q\in U_i, y_i^k(p)=t_i^k(p), y_i^k(q)=t_i^k(q)$, 且即使对于同一值 $k\in\{1,\cdots,n\}$ 也有 $t_i^k(p)\neq t_i^k(q)$. 这就是说, $Y(p)\neq Y(q)$. □

### 9.2.7 流形在其一点的切空间和余切空间

1. 切空间

设 $M$ 是一个 $n$ 维光滑流形, 具有图册 $A$, $p\in M$. 置

$$F_p:=\{(f,G_f)\,|\,p\in G_f\subset M, G_f\text{是 }M\text{ 的开集}; f:G_f\to\mathbb{R}\text{ 是光滑的}\}.$$

在 $F_p$ 中引入等价关系 "$\sim$":

$$(f_1,G_{f_1})\sim(f_2,G_{f_2}),\quad \text{若 }\exists\text{ 含 }p\text{ 的开集 }G\subset G_{f_1}\cap G_{f_2}\text{ 使得 }f_1|_G\equiv f_2|_G.$$

**定义 13** (切向量) 称映射 $\xi_p:F_p\to\mathbb{R}, f\mapsto\xi_p f$ 为 $p$ 点处的一个**切向量**, 如果它满足:

1° 若 $(f,G)\sim(f_1,G_1)$, 则 $\xi_p f=\xi_p f_1$;

2° (线性性) $\xi_p(af+bg)=a\xi_p f+b\xi_p g,\forall a,b\in\mathbb{R}$;

3° (**导性**) $\xi_p(f\cdot g)=g(p)\xi_p f+f(p)\xi_p g$.

**定义 14** (切空间)　置 $TM_p:=\{\xi_p\,|\,\xi_p$为 $p$ 点处的切向量$\}$. 定义运算:

$$(a\xi_1+b\xi_2)f=a\xi_1 f+b\xi_2 f,\quad \forall\,\xi_1,\xi_2\in TM_p,\,a,b\in\mathbb{R}.$$

于是, $TM_p$ 形成一个向量空间, 称其为 $p$ 点处的**切空间**.

设 $(U,\varphi)\in A$ 是含 $p$ 的一张图, 对应的局部坐标系为 $x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$, 即 $x(p)=(x^1(p),\cdots,x^n(p))$, 换言之, $x^j(p)=\varphi^{-1}\circ p$ 是 $\varphi^{-1}(p)$ 的第 $j$ 个坐标, $j=1,\cdots,n$. 于是有切映射: $j=1,\cdots,n$,

$$\frac{\partial}{\partial x^j}:F_p\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial}{\partial x^j}f=\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x^j}(\varphi^{-1}(p)).$$

**命题 7**　$TM_p$ 是 $n$ 维向量空间, $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ 构成它的一组基底.

**证**　根据定义易见$\dfrac{\partial}{\partial x^j}\in TM_p$. 兹证 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ 线性无关. 事实上, 取 $f=x^j$, 直接计算可得

$$0=\left(\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)x^j=\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial x^j}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^n\lambda^i\delta_i^j=\lambda^j.$$

最后, 证明任何 $\xi_p\in TM_p$ 可表为 $\xi_p=\sum\limits_{i=1}^n(\xi_p x^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. 为此, 对任何 $f\in F_p$, 在含 $p$ 的局部坐标系 $(U,\varphi),\{x^i\}$ 中, 我们把 $f\circ\varphi(x)$ 简记为 $f(x)$, $x=(x^1,\cdots.x^n)$, 而 $p=a=(a^1,\cdots,a^n)$. 于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(a+t(x-a))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\\&=f(a)+\int_0^1\sum_{i=1}^n(x^i-a^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t\\&=f(a)+\sum_{i=1}^n(x^i-a^i)f_i(x),\end{aligned}$$

其中

$$f_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t,\quad f_i(a)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

由线性性和导性,

$$\begin{aligned}\xi_p f&=\xi_p f(a)+\sum_{i=1}^n\xi_p(x^i-a^i)\cdot f_i(a)+\sum_{i=1}^n(a^i-a^i)\cdot\xi_p f_i\\&=\sum_{i=1}^n(\xi_p x^i)\cdot\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)=\left[\sum_{i=1}^n(\xi_p x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\right]f.\end{aligned}$$

这里的第二个等式成立是因为

$$\xi_p(1)=\xi_p(1\cdot 1)=1\cdot\xi_p(1)+1\cdot\xi_p(1)=2\xi_p(1),$$

从而 $\xi_p(1)=0$, $\xi_p(c)=\xi_p(c\cdot 1)=c\xi_p(1)=0$ $(\forall c\in\mathbb{R})$. 所以

$$\xi_p=\sum_{i=1}^{n}(\xi_p x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{9.2.5}$$

□

**注 3**　设有两个局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}$ 和 $(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}$, 由 (9.2.5) 式可得坐标基的变换

$$\frac{\partial}{\partial y^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i}\quad(i=1,\cdots,n).$$

从而对于 $\xi_p=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta^j\dfrac{\partial}{\partial y^j}=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in TM_p$ 成立变换

$$\begin{pmatrix}\beta^1\\ \vdots\\ \beta^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\dfrac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1}&\cdots&\dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \vdots\\ \alpha^n\end{pmatrix}. \tag{9.2.6}$$

**注 4**　关于切向量有几种等价的定义. 例如:

• 利用**芽**. 称商空间 $F_p/\sim$ 的元素 $\{f\}$ 为芽. 在 $F_p/\sim$ 中引入运算: $a\{f\}+b\{g\}=\{af+bg\}$ 及 $\{f\}\cdot\{g\}=\{f\cdot g\}$. $F_p/\sim$ 构成一个向量空间. 其对偶空间 $(F_p/\sim)^*$ 中的元素 $\xi_p$ 称作**切向量**, 如果它满足导性: $\xi_p(\{f\}\cdot\{g\})=g(p)\xi_p\{f\}+f(p)\xi_p\{g\}$.

• 利用**道路**. 令 $C_\gamma M:=\{(p,\sigma)\,|\,p\in M,\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M\text{光滑},\sigma(0)=p\}$. 在 $C_\gamma M$ 中引入等价关系:

$$(p,\sigma)\sim(p',\sigma')\Leftrightarrow p=p'\quad\text{和}\quad\left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\sigma')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\quad(i=1,\cdots,n).$$

如果 $\{y^i\}$ 是 $p$ 的另一局部坐标系, 则

$$\frac{\mathrm{d}(y^i\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^j\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}.$$

因此, 上述等价关系不依赖于局部坐标系的选取.

设 $TM$ 为 $C_\gamma M$ 的等价类 $[(p,\sigma)]$ 的全体. 称 $\xi\in TM$ 为一个**切向量**, 而说元素 $(p,\sigma)\in\xi$ 是切于 $(p,\sigma)$ 的.

令 $\pi: C_\gamma M \to M, \pi(p,\sigma)=p$. 它自然诱导出一个映射 $\pi: TM \to M$. 如果 $\xi \in TM$ 和 $\pi\xi = p$, 则称 $\xi$ 为 $p$ 点处的一个切向量, 而 $TM_p = \pi^{-1}(p)$ 称为 $p$ 点处的切空间.

**注 5**　回忆以前定义的在点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的切空间是集合

$$T\mathbb{R}^n_{x_0} := \{\xi = \dot{x}(t_0) \,|\, x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),\ x(t_0) = x_0\}$$

装备以线性运算:

$$(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\big)(t_0) = \lambda_1\dot{x}_1(t_0) + \lambda_2\dot{x}_2(t_0) = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2.$$

可以验证, 对于 $\mathbb{R}^n$ 的切空间, 这里的一般定义与以前的定义是等价的. 可以说, 形式上 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 是由点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和与之相关的那个线性空间 $\mathbb{R}^n$ 组成的对 $(x_0, \mathbb{R}^n)$.

2. 余切空间

现在, 我们来讨论与切空间 $TM_p$ 共轭的空间 $T^*M_p$, 亦即空间 $T^*M_p$ 是 $TM_p$ 上的实线性泛函的空间.

**定义 15**　与流形 $M$ 在点 $p \in M$ 处的切空间 $TM_p$ 共轭的空间 $T^*M_p$ 叫做流形 $M$ 在点 $p$ 的余切空间. $T^*M_p$ 具有与 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ 共轭的基底 $\{\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n\}$ $\left(\text{换言之, } \mathrm{d}x^i\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j\right)$.

若流形 $M$ 是 $C^{(\infty)}$ 类的, $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, 而 $l_\xi$ 是与向量 $\xi$ 对应的微分法 (即 $l_\xi$ 是具有线性性和导性的映射), 则对固定函数 $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, 映射 $\xi \mapsto l_\xi f$ 显然是空间 $T^*M_p$ 的元. 在 $M = \mathbb{R}^n$ 的情况, 得 $\xi \mapsto f'(p)\xi$, 所以, 所建立的映射 $\xi \mapsto l_\xi f$, 自然地被称为函数 $f$ 在点 $p$ 处的微分, 通常记作 $\mathrm{d}f(p)$.

如果 $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$(或 $TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, 当 $p \in \partial M$ 时) 是在流形 $M$ 的图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 内与切空间 $TM_p$ 相对应的空间, 则与 $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ 共轭的空间 $T^*\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, 自然认为在此局部图内描绘 (表现) 了 $T^*M_p$. 在局部图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 的坐标 $(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$ 下, 与空间 $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$(或 $TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, 当 $p \in \partial M$ 时) 的基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1_\alpha}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right\}$ 相对应在共轭空间内有与其共轭的基底 $\{\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n\}$. 因为 $\mathrm{d}x^i(\xi) = \xi^i$, 所以这些共轭基底在另外一个图 $(U_\beta, \varphi_\beta), \{y^i\}$ 内的表达式间有关系 (利用公式 (9.2.6))

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} \cdots \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} \cdots \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x^n \end{pmatrix}. \tag{9.2.7}$$

## 练　习

1. 对于每个由条件

$$E_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = \alpha\},$$
$$E_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y^2 = \alpha\},$$
$$E_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = \alpha\},$$
$$E_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z^2 - 1| = \alpha\}$$

确定的依赖参数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的集合 $E_\alpha$, 说明

(1) $E_\alpha$ 是不是曲面;

(2) 如果是, $E_\alpha$ 是多少维的曲面;

(3) $E_\alpha$ 是不是连通曲面.

2. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是满足条件 $f \circ f = f$ 的光滑映射,

(1) 证明集 $f(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的光滑曲面.

(2) 这个曲面的维数由映射 $f$ 的什么特征性质确定?

3. 设 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准正交基底, $x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + \cdots x^n e_n$, $\{x\}$ 是点 $(x^0, x^1, \cdots, x^n)$, $e_1, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内的基底. 公式

$$\psi_1 = \frac{x - x^0 e_0}{1 - x^0},\ x \neq e_0, \quad \psi_2 = \frac{x - x^0 e_0}{1 + x^0},\ x \neq -e_0$$

分别给出从点 $\{e_0\}$ 及 $\{-e_0\}$ 出发的球极平面射影:

$$\psi_1 : S^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n, \quad \psi_2 : S^n \setminus \{-e_0\} \to \mathbb{R}^n.$$

(1) 说明这些映射的几何意义.

(2) 验证: 若 $t \in \mathbb{R}^n$ 且 $t \neq 0$, 则 $(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(t) = \dfrac{t}{|t|^2}$, 这里

$$\psi_1^{-1} = (\psi_1|_{S^n \setminus \{e_0\}})^{-1}.$$

(3) 证明: 两个图 $\psi_1^{-1} = \varphi_1 : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{e_0\}$, $\psi_2^{-1} = \varphi_2 : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{-e_0\}$ 构成球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的图册.

(4) 证明: 球面的任何图册, 必定有不少于两张图.

4. (1) 验证: 属于区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 的同一定向类的曲线坐标系在 $G$ 内产生的连续标架场, 在每一点 $x \in G$ 分别给出的标架, 是空间 $TG_x$ 的同一定向类中的标架.

(2) 试证: 在连通区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 内, 连续标架场恰好分成两个定向类.

(3) 以球面为例说明, 即使在光滑曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上不存在连续切空间标架场, 光滑曲面 $S$ 仍可能是可定向的.

(4) 试证: 在连通的可定向曲面上, 恰好能给出两种不同的定向.

5. (1) 在空间 $\mathbb{R}^n$ 内指定一个子空间 $\mathbb{R}^{n-1}$, 取向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^{n-1}$, 及子空间 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的两个标架 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{n-1})$. 验证: 这两个标架属于空间 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的同一个定向类, 当且仅当 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})$, $(\boldsymbol{v},\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{n-1})$ 给出空间 $\mathbb{R}^n$ 的同一个定向.

(2) 试证: 光滑超曲面 $S\subset\mathbb{R}^n$ 可定向, 当且仅当在 $S$ 上存在 $S$ 的连续单位法向量场. 特别地, 由此产生双侧曲面的定向.

(3) 试证: 若 $\operatorname{grad}F\neq 0$, 则由方程 $F(x^1,\cdots,x^n)=0$ 给出的曲面是定向曲面 (假定方程有解).

(4) 将上面结果推广到由方程组给出的曲面的情形.

(5) 阐明为什么在 $\mathbb{R}^3$ 中不是每个二维光滑曲面都能用方程 $F(x,y,z)=0$ 给出, 这里 $F$ 是没有临界点 (亦即满足条件 $\operatorname{grad}F\neq 0$) 的光滑函数.

6. (1) 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 为一曲面, $\overline{S}$ 是 $S$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内的闭包. 试问, 集 $\overline{S}\setminus S$ 是不是 $S$ 的边界?

(2) 曲面 $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1<x^2+y^2<2\}$, $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<x^2+y^2\}$ 是否有边界?

(3) 求出曲面 $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1\leqslant x^2+y^2<2\}$, $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1\leqslant x^2+y^2\}$ 的边界.

7. 举出一个这样的例子: 曲面不可定向, 但其边界可定向.

8. (1) 立方体 $I^k=\{x\in\mathbb{R}^k\,|\,|x^i|<1,i=1,\cdots,k\}$ 的每个面平行于空间 $\mathbb{R}^k$ 中的相应的 $k-1$ 维坐标超平面. 所以能够把这个超平面的标架与坐标系看作立方体的界面上的标架与坐标系. 请指出, 在哪些界面上, 这样得到的定向与用 $\mathbb{R}^k$ 的定向导出的方体 $I^k$ 的定向和谐, 在哪些面上不和谐. 试依次研究 $k=2$, $k=3$ 及 $k=n$ 的情形.

(2) 在半球面 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\wedge z>0\}$ 的某区域内, 使用局部图 $(t^1,t^2)\mapsto(\sin t^1\cos t^2,\sin t^1\sin t^2,\cos t^1)$, 而在此半球面的边界 $\partial S$ 的某区域内, 使用局部图 $t\mapsto(\cos t,\sin t,0)$. 试说明这些图是否给出曲面 $S$ 与其边界 $\partial S$ 的和谐定向.

(3) 在半球面 $S$ 及其边界 $\partial S$ 上, 试建立由 (2) 中的局部图导出的标架场.

(4) 在半球面 $S$ 的边界 $\partial S$ 上, 给出一个标架, 使它确定的边界定向与在 (3) 内得到的给半球面定向的标架和谐.

(5) 借助 $S\subset\mathbb{R}^3$ 的法向量, 给出在 (3) 内所得到的半球面的定向.

9. 验证: 假如只要求每点 $x\in M$ 有邻域 $U(x)\subset M$ 同胚于半空间 $H^n$ 的开子集, 定义 1 所引入的对象 (流形) 并不改变.

10. 设 $(M,A)$ 与 $(\widetilde{M},\widetilde{A})$ 是具同样光滑度的两个 $C^{(k)}$ 流形. 称这两个光滑流形 (或它们的光滑结构) 是同构的, 如果在图册 $A,\widetilde{A}$ 下, 存在那样的 $C^{(k)}$ 类映射 $f:M\to\widetilde{M}$, 它有同一光滑类 $C^{(k)}$ 的逆映射 $f^{-1}:\widetilde{M}\to M$.

(1) 试证: $\mathbb{R}$ 上具同样光滑性的结构彼此同构.

(2) 验证例 8 中的命题, 并说明它们与习题 (1) 是否矛盾.

(3) 试证: 在圆周 $S^1$(一维球面) 上, 任意两个 $C^\infty$-结构是同构的. 注意, 这一断言对于维数不超过 6 的球面仍然正确, 而在 $S^7$ 上, 米尔诺[①]证明了, 存在不同构的 $C^\infty$-结构.

① 米尔诺 (J. Milnor)(1931—)——最卓越的美国现代数学家之一, 他的主要工作在代数拓扑与拓扑流形两个方面.

11. 设 $S$ 是 $n$ 维流形 $M$ 的子集. 如果对任意的点 $x_0 \in S$, 有流形 $M$ 的那样的图 $x=\varphi(t)$, 它的有效域 $U$ 包含 $x_0$, 而对于集 $S\cap U$, 在图 $\varphi$ 的参数 $t=(t^1,\cdots,t^n)$ 的变化区域内存在由关系 $t^{k+1}=0,\cdots,t^n=0$ 定义的 $k$ 维曲面与之对应, 则称 $S$ 为流形 $M$ 的 $k$ 维子流形.

(1) 试证: 由流形 $M$ 的结构在 $S$ 上自然地诱导出 $k$ 维流形结构, 它与流形 $M$ 的结构有同样的光滑度.

(2) 请自己证实 $\mathbb{R}^n$ 内的 $k$ 维曲面 $S$ 确实是 $\mathbb{R}^n$ 的 $k$ 维子流形.

(3) 试证: 从直线 $\mathbb{R}^1$ 到环面 $T^2$ 内的光滑同胚映射 $f:\mathbb{R}^1\to T^2$ 的像 $f(\mathbb{R}^1)$, 可能是 $T^2$ 的处处稠密的子集, 这时它将不是环面的一维子流形, 尽管它还是抽象一维子流形.

(4) 如果对 $n$ 维流形 $M$ 的子集 $S$ 中任一点 $x_0$, 都能找到流形 $M$ 的局部图, 其有效域 $U$ 含有 $x_0$, 且集合 $S\cap M$ 在图的参数域内对应于空间 $\mathbb{R}^n$ 的某个 $k$ 维曲面, 就认为 $S\subset M$ 是 $n$ 维流形 $M$ 的 $k$ 维子流形. 试验证, 这并没有改变原来的子流形概念的外延.

12. 设 $X$ 是豪斯多夫拓扑空间 (流形), 而 $G$ 是空间 $X$ 的同胚变换群. 称群 $G$ 为空间 $X$ 的离散变换群, 如果对于任意两点 $x_1,x_2\in X$(也可能重合), 总存在它们各自的邻域 $U_1,U_2$, 使得集 $\{g\in G\,|\,g(U_1)\cap U_2\neq\varnothing\}$ 是有限集.

(1) 由此推知, 对任何点 $x\in X$, 它的轨道 $\{g(x)\in X\,|\,g\in G\}$ 是离散的, 而它的稳定子 $G_x=\{g\in G\,|\,g(x)=x\}$ 是有限的.

(2) 验证: 若 $G$ 是距离空间 $X$ 的等距变换群, 且具有 (1) 中所给出的两个性质, 则 $G$ 是 $X$ 的离散变换群.

(3) 试在离散群 $G$ 的轨道的集合 $X/G$ 上, 引入自然拓扑空间 (流形) 结构.

(4) 具离散变换群 $G$ 的拓扑空间 (流形) 的闭子集 $F$ 叫做群 $G$ 的基本域, 如果它是 $X$ 的开子集的闭包, 而且, 形如 $g(F)$ 的集合 $(g\in G)$ 两两不相交, 并构成空间 $X$ 的局部有限的覆盖. 试说明: 在例 13— 例 15 中, 群 $G$ 的商空间 (轨道)$X/G$ 怎样借助 "粘合" 某些边界点从 $F$ 做出.

13. (1) 李群[①]是装备了那样的解析流形结构的群, 其中映射 $(g_1,g_2)\mapsto g_1\cdot g_2$, $g\mapsto g^{-1}$ 分别是 $G\times G$ 到 $G$ 和 $G$ 到 $G$ 内的解析映射. 试证例 11 和例 12 内所讨论的流形是李群.

(2) 拓扑群 (或连续群) 是装备了那样的拓扑的群, 群的乘法及求逆运算, 作为 $G\times G\to G$, $G\to G$ 的映射, 关于在 $G$ 中装备的拓扑连续. 以有理数群 $\mathbb{Q}$ 为例证明, 并非每个拓扑群都是李群.

(3) 试证每个李群, 在 (2) 中定义的意义下是拓扑群.

(4) 已经证明[②], 任何拓扑群 $G$, 如果它是一个流形, 则必是李群 (即 $G$ 作为流形, 有使群变成了李群的解析结构). 试证, 任何群流形 (即任何李群) 必是可定向的流形.

14. 拓扑空间的子集系叫做局部有限的, 假如空间的每个点, 都有一个只与集系中的有限多个集相交的邻域. 特别地, 可以谈论空间的局部有限覆盖.

---

① 李 (M. S. Lie)(1842—1899)——著名的挪威数学家, 连续群 (李群) 的鼻祖; 罗巴切夫斯基国际奖的得奖者之一 (因将群论应用于几何论证于 1897 年获的奖). 现在, 李群在几何、拓扑及物理的数学方法中, 有根本的意义.

② 这就回答了所谓希尔伯特第 5 问题.

称一集系内接在另一集系内, 假如第一个集系中的任意一个集, 至少包含在第二个集系的一个集中, 特别地, 可以谈论某集的一个覆盖内接在另一这样的覆盖中.

(1) 试证: 在 $\mathbb{R}^n$ 的任何开覆盖内, 可内接一个 $\mathbb{R}^n$ 的局部有限覆盖.

(2) 将 (1) 中 $\mathbb{R}^n$ 的换成任意流形 $M$, 解所得的问题.

(3) 试证: 在 $\mathbb{R}^n$ 上存在从属于它的任何给定开覆盖的单位分解.

(4) 验证: 断言 (3) 对任意流形仍然成立.

## 9.3　流形上的微分形式

### 9.3.1　微分形式

**定义 1**　设 $M$ 是 $n$ 维光滑流形. 称映射

$$\omega^m : M \ni p \mapsto \omega^m(p) \in \mathcal{L}_s((TM_p)^m, \mathbb{R})$$

为 $M$ 上的 $m$ *次微分形式*.

用流形 $M$ 的图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 描述, 即 $\forall p \in M$, $\omega^m(p)$ 对应一斜对称形式

$$\omega^m(x_\alpha) \in \mathcal{L}_s((T\mathbb{R}^n_{x_\alpha})^m, \mathbb{R}) \quad \big(\in \mathcal{L}_s((TH^n_{x_\alpha})^m, \mathbb{R})\big), \quad \text{其中 } x_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(p).$$

两个这样的形式 $\omega_\alpha(x_\alpha), \omega_\beta(x_\beta)$ 是同一形式 $\omega^m(p)$ 的表达式的事实, 用关系式

$$\omega_\alpha(x_\alpha)((\xi_1)_\alpha, \cdots, (\xi_m)_\alpha) = \omega_\beta(x_\beta)((\xi_1)_\beta, \cdots, (\xi_m)_\beta) \tag{9.3.1}$$

表示, 其中 $x_\alpha, x_\beta$ 分别在图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 $(U_\beta, \varphi_\beta)$ 内表示点 $p \in M$, 而 $(\xi_1)_\alpha, \cdots, (\xi_m)_\alpha, (\xi_1)_\beta, \cdots, (\xi_m)_\beta$ 分别在图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 $(U_\beta, \varphi_\beta)$ 内表示向量 $\xi_1, \cdots, \xi_m \in TM_p$.

把所说的这些形式化地写出来, 就是

$$x_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}(x_\beta), \quad x_\beta = \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha), \tag{9.3.2}$$

$$\xi_\alpha = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\beta)\xi_\beta, \quad \xi_\beta = \varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)\xi_\alpha, \tag{9.3.3}$$

这里, 像通常那样, $\varphi_{\beta\alpha}$ 及 $\varphi_{\alpha\beta}$ 分别是坐标变换函数 $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$, $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$, 而它们的切映射 $\varphi'_{\beta\alpha} =: (\varphi_{\beta\alpha})^*$, $\varphi'_{\alpha\beta} =: (\varphi_{\alpha\beta})^*$ 实现了 $\mathbb{R}^n(H^n)$ 在点 $x_\alpha, x_\beta$ 处的切空间的同构. 正如 9.1.3 小节所说, 这时共轭映射 $(\varphi'_{\beta\alpha})^* =: \varphi^*_{\beta\alpha}, (\varphi'_{\alpha\beta})^* =: \varphi^*_{\alpha\beta}$ 实现形式的转移, 而关系式 (9.3.1) 的确切表示是

$$\omega_\alpha(x_\alpha) = \varphi^*_{\alpha\beta}(x_\alpha)\omega_\beta(x_\beta), \tag{9.3.1$'$}$$

显然 $\alpha, \beta$ 可以互换位置.

已知映射 $\varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ 的矩阵 $(c_i^j),(c_i^j)=\left(\dfrac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}\right)(x_\alpha)$, 因此, 如果

$$\omega_\alpha(x_\alpha)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} a_{i_1\cdots i_m}\mathrm{d}x_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^{i_m},\tag{9.3.4}$$

且

$$\omega_\beta(x_\beta)=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n} b_{j_1\cdots j_m}\mathrm{d}x_\beta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\beta^{j_m},\tag{9.3.5}$$

则根据公式 (9.1.28) 得

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} a_{i_1\cdots i_m}\mathrm{d}x_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^{i_m}\\ =&\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}} b_{j_1\cdots j_m}\frac{\partial(x_\beta^{j_1},\cdots,x_\beta^{j_m})}{\partial(x_\alpha^{i_1},\cdots,x_\alpha^{i_m})}(x_\alpha)\mathrm{d}x_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^{i_m},\end{aligned}\tag{9.3.6}$$

这里 $\dfrac{\partial(\ )}{\partial(\ )}$ 照例是表示由相应的偏导数构成的矩阵的行列式.

这样, 同一形式 $\omega$ 的各种坐标表示, 可由变量的直接代换从一个得到另一个 (打开相应的坐标微分并根据外积规则进行后边的代数变换).

如果约定形式 $\omega_\alpha$ 是定义在流形上的形式 $\omega$ 到图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的参数域中的转移, 那么, 显然有 $\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\omega$, 并且认为 $\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\circ(\varphi_\beta^{-1})^*\omega_\beta=\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$, 这里, 在给定的情况下的复合映射 $\varphi_\alpha^*\circ(\varphi_\beta^{-1})^*$ 起着把映射 $\varphi_{\alpha\beta}^*=(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha)^*$ 在形式上加以具体化的作用.

**定义 2** 称 $n$ 维流形 $M$ 上的 $m$ 次微分形式 $\omega$ 属于 $C^{(k)}$ 光滑类 ($C^{(k)}$ 光滑微分形式), 如果在给出 $M$ 上光滑结构的图册的任何图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 内, 它的坐标表示

$$\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} a_{i_1\cdots i_m}(x_\alpha)\mathrm{d}x_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^{i_m}$$

的系数 $a_{i_1\cdots i_m}(x_\alpha)$ 都是 $C^{(k)}$ 类函数.

由公式 (9.3.6) 可见, 假如流形本身有 $C^{(k+1)}$ 类的光滑性, 例如, 当 $M$ 是 $C^{(\infty)}$ 流形时, 定义 2 是合理的.

对于在流形上给出的微分形式, 以自然的方式 (逐点地) 定义加法、数乘及外积运算 (特别地, 乘以函数 $f:M\to\mathbb{R}$, 按定义, 函数是零次形式). 其中前两种运算, 把 $M$ 上的 $C^{(k)}$ 类 $m$-形式的集合 $\Omega_k^m$ 变为线性空间. 当 $k=\infty$ 时, 通常把这个线性空间记作 $\Omega^m$. 显然, 形式 $\omega^{m_1}\in\Omega_k^{m_1}$ 和 $\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_2}$ 的外积是形式 $\omega^{m_1+m_2}=\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_1+m_2}$.

**例 1**　若 $f \in C^{(1)}(D;\mathbb{R}), D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的区域, 则函数 $f$ 在每点 $x \in D$ 处的微分 $\mathrm{d}f(x)$ 有定义. 由上面已知, $\mathrm{d}f(x)$ 是线性函数 : $TD_x \to T\mathbb{R}_{f(x)} \approx \mathbb{R}$, 这里 $TD_x$ 是 $D$ 在点 $x$ 处的切空间. 当 $x$ 由 $D$ 内某点变到另一点时, 一般地说, 形式 $\mathrm{d}f(x) = f'(x)$ 要改变. 因此, 光滑数值函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 在区域 $D$ 的每点都产生一个线性形式, 或说在 $D$ 内产生了一个线性*形式场*, 其中每点的线性形式定义在相应的切空间 $TD_x$ 上. 这表明光滑函数 $f$ 的微分场 $\mathrm{d}f$ 是区域 $D$ 内的 1-形式:

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n. \tag{9.3.7}$$

**例 2**　设在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内给定一个向量场, 即使每个点 $x \in D$ 联系一个向量 $\boldsymbol{F}(x)$. 当 $\mathbb{R}^n$ 具有欧氏结构时, 这个向量场就产生了 $D$ 内的如下的微分 1-形式 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$:

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}(x)}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{F}(x), \boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in TD_x.$$

由内积的性质知道, 在每点 $x$ 处, $\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot\rangle$ 实际是线性形式. 若 $\boldsymbol{F}$ 是区域 $D$ 内的连续力场, 由此产生的 $D$ 内的 1-形式 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$, 通常称作场 $\boldsymbol{F}$ *的功形式*. 它在笛卡儿坐标系内有分解式:

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot\rangle = \sum_{i=1}^{n} F^i(x)\mathrm{d}x^i. \tag{9.3.8}$$

注意, 在欧氏空间内, 区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内的光滑函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 的微分 $\mathrm{d}f$, 也可看成由向量场产生的 1-形式, 这时的向量场 $\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}f$. 实际上, 由 $\mathrm{grad}f(x)$ 的定义, 对于每个向量 $\boldsymbol{\xi} \in TD_x$, 等式 $\mathrm{d}f(x)(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathrm{grad}f(x), \boldsymbol{\xi}\rangle$ 成立.

**例 3**　在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 $D$ 内给定的向量场 $\boldsymbol{V}$, 也可用以下的方式产生 $n-1$ 次微分形式 $\omega^{n-1}_{\boldsymbol{V}}$. 若在每点 $x \in D$ 处, 取与 $x$ 对应的向量场中的向量 $\boldsymbol{V}(x)$ 及附在 $x$ 处的 $n-1$ 个向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1} \in TD_x$, 那么以 $\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 为棱构成的平行多面体的有向体积, 由于它等于由这 $n$ 个向量的坐标构成的矩阵的行列式, 显然是变元 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 的 $(n-1)$-形式.

当 $n = 3$ 时, 形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 即通常的向量混合积 $(\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, 当给定了其中的向量 $\boldsymbol{V}(x)$, 关于其余二变元, 得到斜对称 2-形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{V}, \cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) &= \begin{vmatrix} V^1(x) & V^2(x) & V^3(x) \\ \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \end{vmatrix} \\ &= V^1(x)\begin{vmatrix} \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^2_2 & \xi^3_2 \end{vmatrix} + V^2(x)\begin{vmatrix} \xi^3_1 & \xi^1_1 \\ \xi^3_2 & \xi^1_2 \end{vmatrix} + V^3(x)\begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

由此推知

$$\omega_{\boldsymbol{V}}^2(x)=V^1(x)\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3+V^2(x)\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1+V^3(x)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2. \tag{9.3.9}$$

类似地, 将 $n$ 阶行列式按行展开, 就得到 $\omega_{\boldsymbol{V}}^{n-1}$ 的如下的展开式:

$$\omega_{\boldsymbol{V}}^{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}V^i(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n, \tag{9.3.10}$$

这里, 微分上的记号 $\widehat{\ }$, 表示在这一项中应把该微分舍去.

例如, 设在区域 $D$ 内有液体流动, $\boldsymbol{V}(x)$ 是在 $x$ 处的流速向量, 则量 $(\boldsymbol{V}(x),\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$ 是在单位时间内, 流过以小向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\in TD_x$ 为边的平行四边形的流体体积, 称之为液体的*元体积*. 选取不同的向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$, 我们就得到形状和空间位置互不相同, 而一个顶点是 $x$ 的小平行四边形. 对于每个这样的小平行四边形, 一般来说, 将有形式 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2$ 的值 $(\boldsymbol{V}(x),\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$. 上面已指出, 它说明在单位时间内有多少液体流经给定的小面块, 这也就刻画了通过所选取的这个小面元散发了或流过了多少液体. 基于这种原因, 常把 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2$, 它的高维 $\omega_{\boldsymbol{V}}^{n-1}$ 也一样称为区域 $D$ *内向量场* $\boldsymbol{V}$ *的流形式*.

### 9.3.2 外微分

**定义 3** 把具有以下三条性质的线性算子 $\mathrm{d}:\Omega_k^m\to\Omega_{k+1}^{m+1}$ 叫做*外微分*:

1° $\mathrm{d}:\Omega_k^0\to\Omega_{k+1}^1$ 作用在任何函数 $f\in\Omega_k^0$ 上, 与将此函数作普通微分 $\mathrm{d}f$ 一样;

2° $\mathrm{d}(\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2})=\mathrm{d}\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2}+(-1)^{m_1}\omega^{m_1}\wedge\mathrm{d}\omega^{m_2}$, 这里 $\omega^{m_1}\in\Omega_k^{m_1},\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_2}$;

3° $\mathrm{d}^2:=\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$.

最后这个等式表示的是, 对任何形式 $\omega$, 形式 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$ 是零形式.

因此, 条件 3° 的存在, 表明将只考虑光滑度不能低于 $C^{(2)}$ 类的形式.

实际上, 这意味着考察的是 $C^{(\infty)}$ 流形, 而 d 是把 $\Omega^m$ 映入 $\Omega^{m+1}$ 内的算子.

在具体图的局部坐标下, 算子 d 的计算公式 (同时还有算子 d 的唯一性), 可由以下关系式得出:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}c_{i_1\cdots i_m}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_m}\right)\\=&\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\mathrm{d}c_{i_1\cdots i_m}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_m}\\&+\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}c_{i_1\cdots i_m}(x)\mathrm{d}(\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_m})=0\right).\end{aligned} \tag{9.3.11}$$

现在, 算子 d 的存在性, 可由以下事实推出: 在局部坐标系中用 (9.3.11) 式定义的算子, 满足定义 3 的条件 1°—3°.

特别地, 从上面所说的可以推知, 如果 $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^*\omega$, 及 $\omega_\beta = \varphi_\beta^*\omega$ 是同一个形式 $\omega$ 的坐标表示, 即 $\omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$, 那么, $\mathrm{d}\omega_\alpha$ 与 $\mathrm{d}\omega_\beta$ 也是同一形式 $(\mathrm{d}\omega)$ 的坐标表示, 即 $\mathrm{d}\omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^*\mathrm{d}\omega_\beta$. 因此, 关系式 $\mathrm{d}(\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta) = \varphi_{\alpha\beta}^*(\mathrm{d}\omega_\beta)$ 成立, 它的抽象写法就是算子 d 与形式的转移运算 $\varphi^*$ 的交换性:

$$\mathrm{d}\varphi^* = \varphi^*\mathrm{d}. \tag{9.3.12}$$

现在讨论几个以后要用到的具体例子.

**例 4**　设 0-形式 $\omega = f(x,y,z)$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内的可微函数, 则得

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

**例 5**　设

$$\omega(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

是具有坐标 $(x,y)$ 的空间 $\mathbb{R}^2$ 中区域内的微分 1-形式, $P,Q$ 为 $D$ 内的可微函数. 由定义 3 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(x,y) &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y\\ &= \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

**例 6**　设 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上的 1-形式, 则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

**例 7**　计算 2-形式

$$\omega = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

的微分, 这里 $P,Q,R$ 都是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内的可微函数. 得到

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

若 $(x^1,x^2,x^3)$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的笛卡儿坐标, 而

$$x\mapsto f(x),\quad x\mapsto \boldsymbol{F}(x)=(F^1,F^2,F^3)(x),\quad x\mapsto \boldsymbol{V}=(V^1,V^2,V^3)(x)$$

是区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 内的光滑数量场与光滑向量场, 在讨论它们的时候 (特别是物理问题中) 常要相应地讨论向量场

$$\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\text{—— 数量场}f\text{的梯度},\tag{9.3.13}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2}-\frac{\partial F^2}{\partial x^3},\frac{\partial F^1}{\partial x^3}-\frac{\partial F^3}{\partial x^1},\frac{\partial F^2}{\partial x^1}-\frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right)\text{—— 向量场}\boldsymbol{F}\text{的旋度},\tag{9.3.14}$$

以及数量场

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=\frac{\partial V^1}{\partial x^1}+\frac{\partial V^2}{\partial x^x}+\frac{\partial V^3}{\partial x^3}\text{—— 向量场}\boldsymbol{V}\text{的散度}.\tag{9.3.15}$$

关于数量场的梯度, 前面已经讨论过. 这里暂不讲向量场的旋度与散度的物理内容, 而只关心场论里的这些经典算子与微分形式的运算之间的关系.

在有向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 向量场与 1-形式及 2-形式间存在一一对应

$$\boldsymbol{F}\longleftrightarrow\omega^1_{\boldsymbol{F}}=\langle\boldsymbol{F},\cdot\rangle,\quad \boldsymbol{V}\longleftrightarrow\omega^2_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V},\cdot,\cdot).$$

还应注意, 在区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 内, 任意的 3-形式都有 $\rho(x^1,x^2,x^3)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$ 的形式. 考虑到这一点, 就能引进 $\mathrm{grad}f,\mathrm{rot}\boldsymbol{F},\mathrm{dir}\boldsymbol{V}$ 的如下定义:

$$f\mapsto\omega^0(=f)\mapsto\mathrm{d}\omega^0(=\mathrm{d}f)=\omega^1_{\boldsymbol{g}}\mapsto\boldsymbol{g}:=\mathrm{grad}f;\tag{9.3.13$'$}$$

$$\boldsymbol{F}\mapsto\omega^1_{\boldsymbol{F}}\mapsto\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{F}}\qquad=\omega^2_{\boldsymbol{r}}\mapsto\boldsymbol{r}:=\mathrm{rot}\boldsymbol{F};\tag{9.3.14$'$}$$

$$\boldsymbol{V}\mapsto\omega^2_{\boldsymbol{V}}\mapsto\mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{V}}\qquad=\omega^3_{\boldsymbol{\rho}}\mapsto\boldsymbol{\rho}:=\mathrm{div}\boldsymbol{V}.\tag{9.3.15$'$}$$

例 4, 例 6, 例 7 说明, 当时, 在笛卡儿坐标下我们就得到了上面所列的 $\mathrm{grad}f$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{F},\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ 的表示式 (9.3.13)—(9.3.15). 因此, 场论里所出现的运算能看成外形式微分运算的具体表现, 而对任意次的形式这种运算都一样地能施行. 有关梯度、旋度及散度的详情, 将在第 11 章里说明.

**注 1** *在映射下, 向量的转移与形式的转移.*

(1) 设 $\varphi:U\to V,U\ni t\mapsto x=\varphi(t)\in V$ 是区域 $U\subset\mathbb{R}^m$ 到区域 $V\subset\mathbb{R}^n$ 的映射. 利用它可得映射 $\varphi^*$ 将 $V$ 上的函数 $f$ 映为 $U$ 上的函数 $\varphi^*f$:

$$\varphi^*f(t)=f(\varphi(t)),\quad\forall t\in U.$$

换言之, 给出映射 $\varphi^*:\Omega^0(V)\to\Omega^0(U)$.

考虑任意次形式的转移的一般情形. 设 $\varphi: U \to V$ 是区域 $U \subset \mathbb{R}_t^m$ 到区域 $V \subset \mathbb{R}_x^n$ 的光滑映射, $\varphi'(t): TU_t \to TV_{x=\varphi(t)}$ 是 $\varphi$ 的切映射, 又设 $\omega$ 是区域 $V$ 上的一个 $p$-形式. 这时, 我们取区域 $U$ 上的 $p$-形式 $\varphi^*\omega$ 与形式 $\omega$ 对应, 它在点 $t \in U$ 处在向量组 $\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_p \in TU_t$ 上的值由下等式确定:

$$\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_p) := \omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_p). \tag{9.3.16}$$

于是, 对每个光滑映射 $\varphi: U \to V$, 有映射 $\varphi^*: \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$ 与之对应, 它把 $V$ 上定义的形式变成在区域 $U$ 上定义的形式 ($\varphi^*$ 通常称为 $\varphi$ 的**拉回**(pull back)**映射**). 由 (9.3.16) 式显然推知

$$\varphi^*(\omega' + \omega'') = \varphi^*(\omega') + \varphi^*(\omega''), \tag{9.3.17}$$

$$\varphi^*(\lambda\omega) = \lambda\varphi^*\omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{9.3.18}$$

注意到映射 $\varphi: U \to V$ 与映射 $\psi: V \to W$ 的复合映射的微分的规律 $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi'$, 从 (9.3.16) 式又能推出

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \tag{9.3.19}$$

(映射 $\psi^*: \Omega^p(W) \to \Omega^p(V)$, $\varphi^*: \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$ 按相反次序, 即先 $\psi^*$ 后 $\varphi^*$ 的复合).

(2) 在区域 $V \subset \mathbb{R}_x^n$ 内取 2-形式 $\omega = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2}$. 设 $x^i = x^i(t^1, \cdots, t^m), i = 1, \cdots, n$ 是映射 $\varphi$ 的坐标写法, $\varphi: U \to V$ 是映区域 $U \subset \mathbb{R}_t^m$ 到区域 $V \subset \mathbb{R}_x^n$ 内的映射.

我们希望求出 $U$ 内形式 $\varphi^*\omega$ 的坐标表示式.

取点 $t \in U$ 及向量 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in TU_t$. 它们对应于空间 $TV_{x=\varphi(t)}$ 内的向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\xi}_2 = \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 的坐标 $(\xi_1^1, \cdots, \xi_1^n), (\xi_2^1, \cdots, \xi_2^n)$ 用 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ 的坐标 $(\tau_1^1, \cdots, \tau_1^m), (\tau_2^1, \cdots, \tau_2^m)$ 借助于雅可比矩阵, 由公式

$$\xi_1^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\tau_1^j, \quad \xi_2^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\tau_2^j$$

表出, $i = 1, \cdots, n$(其中 $j$ 从 1 到 $m$ 求和).

于是

$$\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) := \omega(\varphi(t))(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_1^{j_1} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_1^{j_2} \\ \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_2^{j_1} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_2^{j_2} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j_1,j_2=1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \begin{vmatrix} \tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2} \\ \tau_2^{j_1} & \tau_2^{j_2} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j_1,j_2=1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \mathrm{d}t^{j_1} \wedge \mathrm{d}t^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \\
&= \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} - \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \right) \mathrm{d}t^{j_1} \wedge \mathrm{d}t^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \\
&= \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \\ \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \end{vmatrix} (t) \mathrm{d}t^{j_1} \wedge \mathrm{d}t^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2).
\end{aligned}
$$

因此, 我们证明了

$$
\varphi^*(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2}) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2})}{\partial(t^{j_1}, t^{j_2})}(t) \mathrm{d}t^{j_1} \wedge \mathrm{d}t^{j_2}.
$$

如果利用形式转移运算的性质 (9.3.17),(9.3.18)①, 并将上例使用的推导过程用于一般情形, 就得到下面的等式

$$
\begin{aligned}
&\varphi^* \left( \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p}(x) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant m}} a_{i_1 \cdots i_p}(x(t)) \cdot \frac{\partial(x^{i_1}, \cdots, x^{i_p})}{\partial(t^{j_1}, \cdots, t^{j_p})} \mathrm{d}t^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t^{j_p}.
\end{aligned} \tag{9.3.20}
$$

注意, 如果在记号 $\varphi^*$ 后面的括号里, 形式地作替换 $x = x(t)$, 将微分 $\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n$ 用微分 $\mathrm{d}t^1, \cdots, \mathrm{d}t^m$ 表出, 并用外积的性质将得到的式子化简, 那么, 正好得到 (9.3.20) 式的右端.

实际上, 对于每组固定指标 $i_1, \cdots, i_p$,

$$
\begin{aligned}
&a_{i_1 \cdots i_p}(x) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\
&= a_{i_1 \cdots i_p}(x(t)) \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \mathrm{d}t^{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}} \mathrm{d}t^{j_p} \right)
\end{aligned}
$$

① 如果逐点利用 (9.3.18) 式, 就得到

$$
\varphi^*(a(x)\omega) = a(\varphi(t))\varphi^*\omega.
$$

$$= a_{i_1\cdots i_p}(x(t))\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}\mathrm{d}t^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t^{j_p}$$

$$= \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant m} a_{i_1\cdots i_p}(x(t))\frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_p})}{\partial(t^{j_1},\cdots,t^{j_p})}\mathrm{d}t^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t^{j_p}.$$

对所有序组 $1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$ 将这些等式求和, 将得到 (9.3.20) 式的右端.

这样, 我们证明了以下的在计算技巧上很重要的关系.

**命题 1**　若在区域 $V\subset\mathbb{R}^n$ 内给定了微分形式 $\omega$, 而 $\varphi: U\to V$ 是区域 $U\subset\mathbb{R}^m$ 到 $V\subset\mathbb{R}^n$ 内的光滑映射, 则形式 $\varphi^*\omega$ 的坐标表示, 可以从形式 $\omega$ 的坐标表示

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}$$

直接经变量替换 $x=\varphi(t)$(并利用外积的性质) 得到.

(3) 当 $m=n=p$ 时, (9.3.20) 式化作

$$\varphi^*(\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n)=\det\varphi'(t)\mathrm{d}t^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t^n. \tag{9.3.21}$$

这表示, 如果把重积分号下的 $f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$ 改为 $f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$, 则当微分同胚保定向 (即 $\det\varphi'(t)>0$) 时, 重积分里的变量替换公式

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x)\mathrm{d}x=\int_U f(\varphi(t))\det\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

能用形式的替换 $x=\varphi(t)$ 自动地得到. 类似于一维的情况, 可赋予它下面的形式:

$$\int_{\varphi(U)}\omega=\int_U\varphi^*\omega. \tag{9.3.22}$$

**注 2**　*曲面上的形式.*

(1) 如果光滑曲面 $S$ 位于区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内, 在 $D$ 内定义了形式 $\omega$, 那么由于在每点 $x$ 处, $TS_x\subset TD_x$ 成立, 所以能够讨论 $\omega$ 在 $TS_x$ 上的限制. 于是在 $S$ 上产生了形式 $\omega|_S$, 自然把它叫做*形式 $\omega$ 在曲面 $S$ 上的限制*.

我们知道, 用参数形式可局部地或整体地给定曲面. 设 $\varphi: U\to S=\varphi(U)\subset D$ 是区域 $D$ 内的参数化光滑曲面, 而 $\omega$ 是 $D$ 内的形式. 这时, 可把形式 $\omega$ 转移到参数域 $U$ 内, 并根据上面建立的算法将 $\varphi^*\omega$ 写成坐标形式. 显然这时在 $U$ 内得到的形式 $\varphi^*\omega$ 与形式 $\varphi^*(\omega|_S)$ 一致.

注意, 一旦 $\varphi'(t): TU_t\to TS_x$ 在每点 $t\in U$ 都是 $TU_t$ 到 $TS_x$ 上的同构, 就能把形式从 $S$ 转移到 $U$ 上, 又能从 $U$ 转移到 $S$ 上, 所以, 正像曲面本身通常是局部地或整体地用参量表出, 曲面上的形式归根结底是在局部图的参变域上给出的.

(2) 设 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 是例 3 内讨论的流形式, 它是由定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的区域 $D$ 内流速向量场 $\boldsymbol{V}$ 产生的. 若 $S$ 是 $D$ 内的定向光滑曲面, 则能讨论形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 在 $S$ 上的限制. 这时, 所得的形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}|_S$ 刻画了通过 $S$ 的每个曲面元素的流量.

设 $\varphi: I \to S$ 是曲面 $S$ 的局部图, 则在形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 的坐标表示式 (9.3.9) 中做变量替换 $x = \varphi(t)$, 就将得到定义在正方形 $I$ 上的形式 $\varphi^*\omega^2_{\boldsymbol{V}} = \varphi^*(\omega^2_{\boldsymbol{V}}|_S)$ 在曲面给定的局部坐标内的坐标表示.

(3) 设 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ 是例 2 中所讨论的功形式, 它是由作用在欧氏空间的区域 $D$ 内的力场 $\boldsymbol{F}$ 产生的. 设 $\varphi: I \to \varphi(I) \subset D$ 是光滑路径 ($\varphi$ 不必是同胚). 这时, 根据区间 $I$ 上形式的限制与转移的一般原理, 产生了线段 $I$ 上的形式 $\varphi^*\omega^1_{\boldsymbol{F}}$, 它的坐标表示 $a(t)\mathrm{d}t$, 可从形式 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ 的坐标表示 (9.3.8), 经变量替换 $x = \varphi(t)$ 得到.

## 练　习

1. 计算下面的 $\mathbb{R}^n$ 内的微分形式 $\omega$ 在给定的向量组上的值.

(1) $\omega = x^2\mathrm{d}x^1$ 在向量 $\xi = (1,2,3) \in T\mathbb{R}^3_{(3,2,1)}$ 上的值.

(2) $\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + x^1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^4$ 在向量序对 $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbb{R}^4_{(1,0,0,0)}$ 上的值. 其中 $\xi_1 = (-1,0,1,1)$, $\xi_2 = (0,-1,0,1)$.

(3) $\omega = \mathrm{d}f$, 这里 $f = x^1 + 2x^2 + \cdots + nx^n$, 在 $\xi = (1,-1,\cdots,(-1)^{n-1}) \in T\mathbb{R}^n_{(1,1,\cdots,1)}$ 的值.

2. (1) 证明偶次形式 $\alpha$ 与任何次形式可交换, 即 $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

(2) 设 $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$ 且 $\omega^n = \omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega (n \text{ 次})$. 验证

$$\begin{aligned}\omega^n &= n!\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}q^n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{d}p_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^n.\end{aligned}$$

3. (1) 试将形式 $\omega = \mathrm{d}f$ 写成形式 $\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n$ 的组合, 这里 $f(x) = (x^1) + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^n$, 并求 $\omega$ 的微分.

(2) 验证: 对于任何函数 $f \in C^2(D,\mathbb{R})$, 必有 $\mathrm{d}^2 f \equiv 0$, 其中 $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d}$, 而 $\mathrm{d}$ 为外微分算子.

(3) 证明: 若形式 $\omega = a_{i_1 \cdots i_k}(x)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ 的系数 $a_{i_1 \cdots i_k}$ 属于 $C^2(D,\mathbb{R})$, 则在区域 $D$ 内 $\mathrm{d}^2\omega \equiv 0$.

(4) 在形式 $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$ 的定义域内, 求它的外微分.

4. 求以下各形式的限制:

(1) $\mathrm{d}x^i$ 在超平面 $x^i = 1$ 上的限制;

(2) $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 在曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a < t < b$ 上的限制;

(3) $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 在由 $x = c$ 定义的 $\mathbb{R}^3$ 的平面上的限制;

(4) $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准单位方体的边界上的限制;

(5) $\omega_i = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i-1} \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \mathrm{d}x^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准单位方体的界面上的限制, 这里位于微分 $\mathrm{d}x^i$ 上的记号 $\widehat{\ }$, 表示从所写的乘积中删去 $\mathrm{d}x^i$.

5. 在 $\mathbb{R}^3$ 的球面坐标下, 表出以下各形式在以原点为中心、$R$ 为半径的球面上的限制:

(1) $\mathrm{d}x$;

(2) $\mathrm{d}y$;

(3) $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

6. 映射 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 由 $(u, v) \mapsto (u \cdot v, 1) = (x, y)$ 给出. 试求:

(1) $\varphi^*(\mathrm{d}x)$;

(2) $\varphi^*(\mathrm{d}y)$;

(3) $\varphi^*(y\mathrm{d}x)$.

7. 试证: 光滑的 $k$ 维曲面可定向, 当且仅当在它上边存在无处退化的 $k$-形式.

# 第 10 章　流形 (曲面) 上微分形式的积分

## 10.1　微分形式在流形上的积分

### 10.1.1　形式在流形上的积分

**定义 1**　设 $M$ 是 $n$ 维光滑定向流形, 在它上边的局部坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 和定向由其参数域 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 的一个图 $\varphi_x : D_x \to M$ 确定. 设 $\omega$ 是 $M$ 上的 $n$-形式, 而 $a(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ 是它在区域 $D_x$ 上的坐标表示. 这时

$$\int_M \omega := \int_{D_x} a(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n, \tag{10.1.1}$$

其中左边是被定义的*形式 $\omega$ 沿定向流形 $M$ 的积分*, 而右端是函数 $a(x)$ 沿区域 $D_x$ 的积分.

若 $\varphi_t : D_t \to M$ 是另一个由一张图组成的 $M$ 的图册, 它在 $M$ 上给出的定向与由图册 $\varphi_x : D_x \to M$ 给出的定向是一样的, 则坐标变换函数 $x = \varphi(t)$ 的雅可比行列式 $\det \varphi'(t)$ 在区域 $D_t$ 内处处为正, $D_t$ 内与形式 $\omega$ 对应的形式是

$$\varphi^*(a(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n) = a(x(t)) \det \varphi'(t)\mathrm{d}t^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t^n,$$

根据重积分的变量替换定理, 等式

$$\int_{D_x} a(x)\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_{D_t} a(x(t)) \det \varphi'(t)\mathrm{d}t^1 \cdots \mathrm{d}t^n$$

成立. 它说明了关系式 (10.1.1) 的左端与在 $M$ 上所取的坐标系无关. 因此, 定义 1 合理.

为了给出沿由有限多个图确定的流形上的形式的积分，需要下述概念.

**定义 2**　设 $\omega$ 是流形 $M$ 上的形式.

- 把 $M$ 中使 $\omega(x) \neq 0$ 的点的集的闭包叫做*形式 $\omega$ 的支集*, 用 $\mathrm{supp}\omega$ 表示.
- $\omega$ 叫做*具紧支集的形式*, 假如 $\mathrm{supp}\omega$ 是 $M$ 中的紧集.

在 $\omega$ 是函数 (即 0-形式) 的情形, 我们曾遇到过这一概念. 在形式支集之外, 在任何局部坐标下, 形式的坐标表示是与给定形式次数相同的零形式.

**定义 3**　设 $\omega$ 是 $n$ 维光滑流形 $M$ 上的具紧支集的 $n$ 次形式, $M$ 由图册 $A$ 定向. 又设 $\varphi_i : D_i \to U_i$, $\{(U_i, \varphi_i), i = 1, \cdots, m\}$ 是图册 $A$ 的有限多个图构成的有限

图组, 其有效域 $U_1,\cdots,U_m$ 覆盖 $\mathrm{supp}\omega$, 而 $e_1,\cdots,e_k$ 是从属于这个覆盖的 $\mathrm{supp}\omega$ 上的单位分解. 把某些图重复若干次, 即可认为 $m=k$ 且 $\mathrm{supp}e_i\subset U_i, i=1,\cdots,m$. 称

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{m}\int_{D_i}\varphi_i^*(e_i\omega) \tag{10.1.2}$$

为具紧支集的形式 $\omega$ 沿定向流形 $M$ 的积分, 这里 $\varphi_i^*(e_i\omega)$ 是在相应的局部图的坐标变化区域 $D_i$ 内, 形式 $e_i\omega|_{U_i}$ 的坐标表示.

兹证明这定义的合理性.

**证**　设 $\tilde{A}=\{\tilde{\varphi}_j:\tilde{D}_j\to\tilde{U}_j\}$ 是在 $M$ 上给定的与图册 $A$ 具有同样的光滑结构及定向的另一个图册, 并设 $\tilde{U}_1,\cdots,\tilde{U}_{\tilde{m}},\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_{\tilde{m}}$ 是 $\mathrm{supp}\omega$ 的相应的覆盖以及从属于它的 $\mathrm{supp}\omega$ 上的单位分解. 引入函数 $f_{ij}=e_i\tilde{e}_j, i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,\tilde{m}$, 并令 $\omega_{ij}=f_{ij}\omega$.

注意, $\mathrm{supp}\omega_{ij}\subset W_{ij}=U_i\cap\tilde{U}_j$. 由此, 并根据沿由一个图给定的定向流形的积分定义 1 的合理性得到

$$\int_{D_i}\varphi_i^*(\omega_{ij})=\int_{\varphi_i^{-1}(W_{ij})}\varphi_i^*(\omega_{ij})=\int_{\tilde{\varphi}_j^{-1}(W_{ij})}\tilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij})=\int_{\tilde{D}_j}\tilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij}).$$

将这些等式关于 $i$ 从 1 到 $m$, 关于 $j$ 从 1 到 $\tilde{m}$ 求和, 并注意 $\sum\limits_{i=1}^{m}f_{ij}=\tilde{e}_j$, $\sum\limits_{j=1}^{\tilde{m}}f_{ij}=e_i$, 就能得到我们所需要的恒等式. □

### 10.1.2　斯托克斯公式

**定理 1**　设 $M$ 是定向光滑 $n$ 维流形, 而 $\omega$ 是 $M$ 上具紧支集的 $n-1$ 次光滑微分形式. 则成立

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M \mathrm{d}\omega, \tag{10.1.3}$$

其中流形 $M$ 的边界 $\partial M$ 的定向取得与 $M$ 的定向和谐. 若 $\partial M=\varnothing$, 则 $\int\limits_M \mathrm{d}\omega=0$.

**证**　不失一般性, 可以认为, 流形 $M$ 的所有局部图的坐标 (参数) 的变化区域, 或者是开的方体 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^i<1, i=1\cdots,n\}$, 或者是对方体 $I$ 加上一个 (确定的!) 面而成的方体 $\tilde{I}=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^1\leqslant 1,\ \text{且}0<x^i<1, i=2,\cdots,n\}$.

借助单位分解, 定理的论断可归结为 $\mathrm{supp}\omega$ 包含在一张形如 $\varphi: I\to U$ 或 $\varphi:\tilde{I}\to U$ 的图的有效域 $U$ 内. 形式 $\omega$ 在这张图的坐标下的表达式是

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n,$$

这里的符号 “ $\widehat{\ }$ ” 照例表示这个因子的空缺.

由于积分是线性的, 所以只要对和中的一项

$$\omega_i = a_i(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{10.1.4}$$

来证明我们的断言即可. 这个形式的微分是 $n$-形式

$$\mathrm{d}\omega_i = (-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{10.1.5}$$

对于形如 $\varphi : I \to U$ 的图, 形式 (10.1.4), (10.1.5) 在公式 (10.1.3) 内的两个积分都等于零: 第一个等于零是因为 $\mathrm{supp}a_i \subset I$; 而如果考虑富比尼定理及关系 $\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x^i}(x)\mathrm{d}x^i = a_i(1) - a_i(0) = 0$, 则根据同样的理由, 得到第二个积分也等于零. 这就把 $\partial M = \varnothing$ 的情况一并解决了.

因此, 剩下的是对图 $\varphi : \tilde{I} \to U$ 验证 (10.1.3) 式.

如果 $i > 1$, 则对于这样的图, 从上述推理得, 两个积分也都等于零. 而如果 $i = 1$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_M \mathrm{d}\omega_1 = \int_U \mathrm{d}\omega_1 = \int_{\tilde{I}} \frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)\mathrm{d}x^1 \right) \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n \\
&= \int_0^1 \cdots \int_0^1 a_1(1, x^2, \cdots, x^n)\mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n \\
&= \int_{\partial U} \omega_1 = \int_{\partial M} \omega_1.
\end{aligned}$$

因此, 在 $n > 1$ 的情况证明了公式 (10.1.3).

当 $n = 1$ 时, 只要把定向线段 $[\alpha, \beta]$ 的端点 $\alpha, \beta$ 表做 $\alpha_-$ 与 $\beta_+$, 并令 0-形式 $g(x)$ 沿此定向点的积分分别为 $-g(\alpha)$ 与 $+g(\beta)$, 那么, 这种情况就是牛顿–莱布尼茨公式. □

**注 1** 对于刚才证明的定理做几个注释.

(1) 在定理的叙述中, 未指明 $M$ 及 $\omega$ 的光滑程度. 在这种情况下, 通常就表示这些对象是 $C^{(\infty)}$ 的. 但从定理的证明显然可见, 当 $M$ 及 $\omega$ 的光滑度都是 $C^{(2)}$ 时, 定理就成立.

(2) 根据定理的证明, 还可从公式 (10.1.3) 本身看出, 如果 $\mathrm{supp}\omega$ 是严格位于 $M$ 内 (即 $\mathrm{supp}\omega \cap \partial M = \varnothing$) 的紧集, 则 $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$.

(3) 若 $M$ 是紧流形, 则对 $M$ 上的任何形式 $\omega$, 其支集 $\mathrm{supp}\omega$, 作为紧集 $M$ 的闭子集, 仍然是紧集. 因此, 这时 $M$ 上的任何形式都是具紧支集的, 且等式 (10.1.3) 成立. 特别地, 当 $M$ 是没有边界的紧流形时, 对于 $M$ 上的任何光滑形式, 必有等式 $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$ 成立.

(4) 设流形 $M$ 本身不是紧的, 则对于 $M$ 上的非紧支集的形式 $\omega$, 公式 (10.1.3) 一般来说不再成立. 例如, 在标准笛卡儿坐标下, 考察定义在圆环 $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 内的大家熟知的形式 $\omega=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 这时, $M$ 是紧的二维定向流形, 它的边界 $\partial M$ 由两个圆周 $C_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=i\}$ 组成, $i=1,2$. 因为 $\mathrm{d}\omega=0$, 所以据公式 (10.1.3) 得到

$$0=\int_M \mathrm{d}\omega=\int_{C_2}\omega-\int_{C_1}\omega,$$

这里圆周 $C_1$ 与 $C_2$ 都是沿着逆时针方向运行的. 我们知道

$$\int_{C_1}\omega=\int_{C_2}\omega=2\pi\neq 0,$$

这就是说, 如果代替 $M$ 而来考察 $\tilde{M}=M\backslash C_1$, 则 $\partial\tilde{M}=C_2$, 且

$$\int_{\tilde{M}}\mathrm{d}\omega=0\neq 2\pi=\int_{\partial\tilde{M}}\omega.$$

## 10.2　曲线积分与曲面积分

### 10.2.1　曲面上微分形式的积分

欧氏空间中的曲面是一类特殊流形, 这里对其做进一步的讨论.

**定义 1**(定向曲面上微分形式的积分)

(1) 若在区域 $D\subset\mathbb{R}^k$ 内给出了形式 $f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k$, 则

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k:=\int_D f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^k.$$

(2) 若 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是定向 $k$ 维光滑曲面, $\varphi:D\to S$ 是它的参数表示, 而 $\omega$ 是 $S$ 上的 $k$-形式, 则

$$\int_S\omega:=\pm\int_D\varphi^*\omega,$$

其中, 当 $\varphi$ 的参数表示与 $S$ 的给定方向和谐时取 $+$ 号, 否则取 $-$ 号.

(3) 若 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是分片光滑 $k$ 维定向曲面, $\omega$ 是 $S$ 上的 $k$-形式 (在 $S$ 有切平面的那些点上有定义), 则

$$\int_S\omega:=\sum_i\int_{S_i}\omega,$$

这里 $S_1,\cdots,S_m\cdots$ 是 $S$ 分解为光滑参数表示时的 $k$ 维光滑面片, 片与片之交至多只能是较低维的分片光滑曲面.

注意，根据定义, 改变曲面的定向将导致积分变号.

这个定义是10.1 节定义 1 的特别情形 (曲面替换一般流形). 当 $\varphi$ 是恒等映射时即表现为 (1). 而 (2) 中正负号的出现是因为这里没有明确 $S$ 的定向是由映射 $\varphi$ 确定的，从而参数给出的方向可能与曲面自身的方向不和谐. 至于 (3), 则是直接源自积分的区域可加性 (参见后面的定义 7)，避免了10.1 节定义 3 的抽象描述.

下面讨论两个来自物理背景的问题.

**例 1**(场做的功)　设 $G$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $\boldsymbol{F}(x)$ 是在 $G$ 内作用的力的连续向量场. 场内试验质点的位移与所做的功有关. 兹计算当单位试验质点沿着光滑路径 $\gamma: I \to \gamma(I) \subset G$ (由 $I = \{t \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant t \leqslant b\} \ni t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ 给出) 移动时, 场所做的功 $A$.

我们知道, 在定常场 $\boldsymbol{F}$ 中移动一个向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所做的功为 $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi} \rangle$.

细分 $[a,b]$ 为有限多个小区间，在每个小区间 $I_i = \{t \in I | t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$ 上, $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_i) \approx \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)(t - t_i)$. 平移向量 $\boldsymbol{\tau}_i = t_{i+1} - t_i$ 对应着 $\mathbb{R}^n$ 中的平移向量 $\Delta \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i$, 而后者可近似地被认为与轨道在点 $\boldsymbol{x}(t_i)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\xi}_i = \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\Delta t_i$ 一致, 从而，由 $\boldsymbol{F}(x)$ 的连续性, 可以认为它是局部常向量, 因此与间隔 $I_i$ 相对应的功 $\Delta A_i$ 能够按下式

$$\Delta A_i \approx \langle \boldsymbol{F}(x_i), \boldsymbol{\xi}_i \rangle = \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)), \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\Delta t_i \rangle$$

计算. 作近似和

$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)), \dot{\boldsymbol{x}}(t_i) \rangle \Delta t_i,$$

再令线段 $I$ 的分法无限地加细而取极限, 就得到

$$A = \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(x(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t) \rangle \mathrm{d}t. \tag{10.2.1}$$

把式子 $\langle \boldsymbol{F}(x(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t) \rangle \mathrm{d}t$ 改写成 $\langle \boldsymbol{F}(x), \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = F^1 \mathrm{d}x^1 + \cdots + F^n \mathrm{d}x^n$ 的形式, 则公式 (10.2.1) 变成

$$A = \int_\gamma F^1 \mathrm{d}x^1 + \cdots + F^n \mathrm{d}x^n \quad \text{或写成} \quad A = \int_\gamma \omega_{\boldsymbol{F}}^1. \tag{10.2.2}$$

作为特例, 我们考察几个具体问题.

1° 考察力场 $\boldsymbol{F} = \left( -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$, 它的定义域是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. 给定两曲线

$$\gamma_1 : x = \cos t,\ y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

$$\gamma_2 : x = 2 + \cos t,\ y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

计算此场沿 $\gamma_1$ 及 $\gamma_2$ 所做的功. 根据 (10.2.2) 式, 得

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\omega^1_{\boldsymbol{F}} &= \int_{\gamma_1} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin t\cdot(-\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}+\frac{\cos t\cdot\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t = 2\pi\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\omega^1_{\boldsymbol{F}} &= \int_{\gamma_2}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{-\sin t(-\sin t)+(2+\cos t)\cos t}{(2+\cos t)^2+\sin^2 t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{0}\frac{1+2\cos(2\pi-u)}{5+4\cos(2\pi-u)}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\pi}\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos u}{5+4\cos u}\mathrm{d}u = 0.\end{aligned}$$

2° 设 $\boldsymbol{r}$ 为点 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 的径向量, $r=|\boldsymbol{r}|$. 设在 $\mathbb{R}^3$ 除坐标原点 $O$ 外, 处处给出形如 $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$ 的力场 (所谓的**中心场**). 今求场 $\boldsymbol{F}$ 沿路径 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3\backslash\{O\}$ 所做的功. 利用 (10.2.2) 式得

$$\begin{aligned}&\int_\gamma f(r)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=\frac{1}{2}\int_\gamma f(r)\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)\\ =&\frac{1}{2}\int_0^1 f(r(t))\mathrm{d}r^2(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 f(\sqrt{u(t)})\mathrm{d}u(t)\\ =&\frac{1}{2}\int_{r_0^2}^{r_1^2} f(\sqrt{u})\mathrm{d}u=\Phi(r_0,r_1).\end{aligned}$$

我们看到, 在任何中心场内, 沿路径 $\gamma$ 所做的功, 只与从场的中心 $O$ 到路径的始点及终点的距离 $r_0,r_1$ 有关.

特别地, 对于位于坐标原点的单位质点所产生的重力场 $\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$, 得到

$$\Phi(r_0,r_1)=\frac{1}{2}\int_{r_0^2}^{r_1^2}\frac{1}{u^{3/2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}.$$

**例 2**(通过曲面的流量)　设在定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的区域 $G$ 中有稳定液 (或气) 流, 而 $x\mapsto\boldsymbol{V}(x)$ 是该流动在区域 $G$ 中的速度场. 在 $G$ 中取光滑定向曲面 $S$, 其定向由法向量场给出. 兹求在单位时间内, 液体通过 $S$ 流向曲面的法向量场指向的一方的体积.

注意, 如果流速场是常场且等于 $\boldsymbol{V}$, 则在单位时间内, 通过由一对向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 张成的平行四边形 $\Pi$ 的流量, 等于由向量 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 构成的平行六面体的体积. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\Pi$ 的法向量, 而液体通过 $\Pi$ 流向 $\boldsymbol{\eta}$ 指向的方向. 则当 $\boldsymbol{\eta}$ 与标架 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 给出与 $\Pi$ 同样的定向时, 此体积等于混合积 $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$; 而当 $\boldsymbol{\eta}$ 与标架 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 在 $\Pi$ 上的定向反向时, 则等于 $-(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$.

现在, 为简单计, 假定整个曲面 $S$ 能够光滑地参数化: $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset I \to S \subset G$ ($I$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的二维区间). 将 $I$ 分成许多小区间 $I_i$, 它们由沿坐标轴方向的位移向量 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ 张成. 每个 $\varphi(I_i)$ 可用 $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\xi}_2 = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_2$ 张成的平行四边形近似. 设 $\boldsymbol{V}(x)$ 在曲面片 $\varphi(I_i)$ 的范围内变动很小, 从而可以近似地认为通过 $\varphi(I_i)$ 的流量 $\Delta F_i$ 与以常速通过这个平行四边形的流量是一样的. 如果在 $S$ 上给出的标架 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 的定向与 $\boldsymbol{\eta}$ 同方向, 则

$$\Delta F_i \approx (\boldsymbol{V}(x_i), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2).$$

将这些元流量求和, 就得到

$$F = \sum_i \Delta F_i \approx \sum_i \omega^2_{\boldsymbol{V}}(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2),$$

这里 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x) = (\boldsymbol{V}(x), \cdot, \cdot)$ (见 9.3 节例 3) 是流量 2-形式. 再经无限细分取极限得

$$F = \int_S \omega^2_{\boldsymbol{V}}. \tag{10.2.3}$$

此外, 利用形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 在笛卡儿坐标中的坐标表示, 我们能把 $F$ 写成

$$F = \int_S V^1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + V^2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + V^3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2. \tag{10.2.4}$$

计算流量的公式可用在 (10.2.4) 式中直接代入曲面的参数方程的方法得到. 实际上,

$$\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \omega^2_{\boldsymbol{V}}(\varphi(t_i))(\varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1, \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_2) = (\varphi^* \omega^2_{\boldsymbol{V}})(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2),$$

从而

$$\sum_i \omega^2_{\boldsymbol{V}}(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \sum_i (\varphi^* \omega^2_{\boldsymbol{V}})(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2).$$

形式 $\varphi^* \omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 定义在二维区间 $I \subset \mathbb{R}^2$ 上. 在 $I$ 中具有 $f(t)\mathrm{d}t^1 \wedge \mathrm{d}t^2$ 的形式 (这里 $f$ 是 $I$ 上依赖于形式的函数), 所以

$$\varphi^* \omega^2_{\boldsymbol{V}}(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = f(t_i)\mathrm{d}t^1 \wedge \mathrm{d}t^2(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2).$$

但 $\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)=\tau_1^1\cdot\tau_2^2$ 是正交向量 $\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2$ 所张成的矩形 $I_i$ 的面积. 因此,

$$\sum_i f(t_i)\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)=\sum_i f(t_i)|I_i|.$$

细分并取极限得到

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2=\int_I f(t)\mathrm{d}t^1\mathrm{d}t^2, \tag{10.2.5}$$

此式左边是 2-形式 $\omega^2=f(t)\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2$ 沿定向曲面 $I$ 的积分, 而右端是函数 $f$ 在矩形 $I$ 上的积分.

特别, 当 $x=\varphi(t)=(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)(t^1,t^2)$ 是曲面 $S$ 的图时, 给它的定向就是 $S$ 的法向量场指示的定向, 从 (10.2.4) 式出发, 施行这个替换, 就得到

$$\begin{aligned}
F&=\int_{S=\varphi(I)}\omega_{\boldsymbol{V}}^2=\int_I\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2\\
&=\int_I\left(V^1(\varphi(t))\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^2}{\partial t^1}&\dfrac{\partial x^3}{\partial t^1}\\[2mm]\dfrac{\partial x^2}{\partial t^2}&\dfrac{\partial x^3}{\partial t^2}\end{vmatrix}+V^2(\varphi(t))\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^3}{\partial t^1}&\dfrac{\partial x^1}{\partial t^1}\\[2mm]\dfrac{\partial x^3}{\partial t^2}&\dfrac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right.\\
&\quad\left.+V^3(\varphi(t))\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial t^1}&\dfrac{\partial x^2}{\partial t^1}\\[2mm]\dfrac{\partial x^1}{\partial t^2}&\dfrac{\partial x^2}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2\\
&=\int_I\begin{vmatrix}V^1(\varphi(t))&V^2(\varphi(t))&V^3(\varphi(t))\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi^1}{\partial t^1}(t)&\dfrac{\partial\varphi^2}{\partial t^1}(t)&\dfrac{\partial\varphi^3}{\partial t^1}(t)\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi^1}{\partial t^2}(t)&\dfrac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}(t)&\dfrac{\partial\varphi^3}{\partial t^2}(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t^1\mathrm{d}t^2.
\end{aligned}\tag{10.2.6}$$

注意, 如果图 $\varphi:I\to S$ 在 $S$ 上给出了相反的定向, 则等式 (10.2.6) 左、右两端相差一个符号.

我们已讨论了由一张图给出的曲面的情况, 在一般情况下, 曲面 $S$ 可以分成实质上不相交的一些光滑曲面片 $S_i$, 并把通过 $S$ 的流量作为通过各片的流量之和去求解.

现在计算几个例题.

1° 设介质以常速 $\boldsymbol{V}=(1,0,0)$ 做平移运动. 若在流体所在空间区域内任取闭曲面, 则因介质密度不变, 所取闭曲面包围的体积内的物质的量应当不变. 这就是说, 介质流经曲面的总量应为零.

现在, 我们取球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 作为 $S$, 来检验公式 (10.2.6).

在球面 $S$ 上有一个零面积的集, 从而在我们讨论的问题中可把它忽略, 并用参数式

$$x = R\cos\psi\cos\varphi,$$
$$y = R\cos\psi\sin\varphi,$$
$$z = R\sin\psi$$

表示这个球面, 这里 $0 < \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \psi < \pi/2$.

将这些式子和 $\boldsymbol{V} = (1,0,0)$ 代入 (10.2.6) 式后, 得到

$$F = \int_I \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \psi} & \dfrac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \mathrm{d}\psi \int_0^{2\pi} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = 0.$$

由于积分为零, 所以无须考虑沿什么方向 (即流入还是流出) 进行流量的计算.

2° 设在空间 $\mathbb{R}^3$ 内有运动着的介质, 它的速度场用笛卡儿坐标表示是

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (V^1, V^2, V^3)(x,y,z) = (x,y,z).$$

试求通过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 而进入球内的介质量.

取上例中所用的球面参数式, 并在 (10.2.6) 式右端做替换, 得到

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} R\cos\psi\cos\varphi & R\cos\psi\sin\varphi & R\sin\psi \\ -R\cos\psi\sin\varphi & R\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -R\sin\psi\cos\varphi & -R\sin\psi\sin\varphi & R\cos\psi \end{vmatrix} \mathrm{d}\psi$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3\cos\psi \mathrm{d}\psi = 4\pi R^3.$$

容易判定, 用曲线坐标 $(\varphi,\psi)$ 给出的球面的定向, 与用内法线给出的定向不一致, 因此所求的流量 $F = -4\pi R^3$.

在这种情况所得的这个结果容易予以验证: 因为在球面的每一点处, 流速向量 $\boldsymbol{V}$ 的大小是 $R$, 而方向垂直于球面且向外, 所以从内向外的流量等于球面面积 $4\pi R^2$ 乘以 $R$, 因而所要的沿反方向的流量就等于 $-4\pi R^3$.

## 练　习

1. (1) 设 $x, y$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的笛卡儿坐标. 试说明: 形式

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

是怎样的向量场的功形式.

(2) 试求 (1) 中的形式 $\omega$ 沿下列路径 $\gamma_i$ 的积分: $[0,\pi]\ni t\xrightarrow{\gamma_1}(\cos t,\sin t)\in\mathbb{R}^2$; $[0,\pi]\ni t\xrightarrow{\gamma_2}(\cos t,-\sin t)\in\mathbb{R}^2$; 路径 $\gamma_3$ 由诸点 $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$ 依次用线段连接而成; 路径 $\gamma_4$ 由诸点 $(1,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,0)$ 依次用线段连接而成.

2. 设 $f$ 是在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内定义的光滑函数, $\gamma$ 为 $D$ 内以 $p_0\in D$ 为始点, $p_1\in D$ 为终点的光滑路径. 试求形式 $\omega=\mathrm{d}f$ 沿路径 $\gamma$ 的积分.

3. (1) 求形式 $\omega=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 沿 $\mathbb{R}^3$ 内标准单位方体的边界的积分, 边界用外法向定向.

(2) 指出一个速度场, 使得 (1) 中的形式 $\omega$ 是它的流量形式.

4. (1) 设 $x,y,z$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内的笛卡儿坐标. 试求速度场, 使形式

$$\omega=\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

是它的流量形式.

(2) 求 (1) 中的形式沿球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的积分, 球面按外法向定向.

(3) 试证: 场 $\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ 通过球面 $(x-2)^2+y^2+z^2=1$ 的流量为零.

(4) 验证: (3) 中的场, 通过环面

$$\begin{cases}x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\psi,\end{cases}\qquad 0<a<b$$

的流量也等于零.

5. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f(x)}{g(y)}$ 叫做可分离变量的方程. 通常把它写成形如

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$$

的 "变量分离" 形式, 然后使它们的原函数相等

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

以 "解" 它. 试用微分形式语言给这一算法一个具有更广泛意义的数学论证.

### 10.2.2　体积形式

**定义 2**(定向 $\mathbb{R}^k$ 的体形式)　设 $\mathbb{R}^k$ 为具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的定向欧氏空间. 称斜对称 $k$-形式 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^k$ 上与给定的定向和内积相应的*体形式*, 如果它在 $\mathbb{R}^k$ 的给定定向类的*标准正交标架*上的值为 1.

显然, 形式 $\Omega$ 不是由个别的标准正交标架确定, 而是由它的定向类来确定. 事实上, 如果 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 及 $\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{e}}_k$ 是同一定向类中的两个标架, 则从第二组基底变到第一组基底的变换 $O$ 是正交矩阵, 且 $\det O=1$. 因此,

$$\Omega(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k)=\det O\cdot\Omega(\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{e}}_k)=1.$$

如果在 $\mathbb{R}^k$ 中固定一个正交标准基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$, 则相应的体形式是唯一的. 事实上, 设 $\pi^1,\cdots,\pi^k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中向相应坐标轴的射影, 则显然有

$$\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^k(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k)=1,$$

且 $\Omega=\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^k$. 因此,

$$\Omega(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\begin{vmatrix}\xi_1^1 & \cdots & \xi_1^k\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_k^1 & \cdots & \xi_k^k\end{vmatrix}.$$

这是由有序的诸向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 所张成的平行多面体的体积.

**定义 3** (定向曲面的体形式) 设 $S$ 为位于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑 $k$ 维定向曲面, 则在 $S$ 的每个切平面 $TS_x$ 上, 存在着与 $S$ 的定向和谐的定向, 以及由 $\mathbb{R}^n$ 中的数量积诱导出的数量积, 而这表明, 也存在体形式 $\Omega(x)$. 这时在 $S$ 上产生的微分 $k$-形式 $\Omega$ 叫做 $S$ 上由 $S$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的嵌入诱导出的*体形式*(或*体元素*).

**定义 4**(用形式语言) *定向光滑曲面的面积*是与曲面上选定的定向相应的体形式沿此曲面的积分.

在后面 10.2.4 小节定义 6 中, *针对参数曲面*, 我们将用分割求和取极限的方式给出较直接的面积定义.

注意, 体形式只对定向曲面有定义, 所以, 例如, 对 $\mathbb{R}^3$ 中的默比乌斯带谈体形式就没有意义, 虽然能在此曲面的每个有向小块内讨论这种形式.

**定义 5** 设 $S$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k$ 维分片光滑 (定向或不定向) 曲面, $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 是 $S$ 的有限个或可数个光滑参数化的小曲面, 任二者如果相交, 只能是不高于 $k-1$ 维的曲面, 且 $S=\bigcup\limits_i S_i$. 称所有曲面 $S_i$ 的面积之和为*曲面 $S$ 的面积*(或 $k$ *维体积*).

在这种意义下, 我们能够谈 $\mathbb{R}^3$ 中默比乌斯带的面积, 或同样地也可求其质量, 假定这个物质曲面具有单位密度的话.

如此定义的正确性 (即所得面积值与 $S$ 分为 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 的分法的无关性) 可用传统的论证方法去检验.

### 10.2.3 在笛卡儿坐标下体积形式的表示

设 $S$ 为定向欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑超曲面 ($n-1$ 维). 以它的连续单位法向量场 $\boldsymbol{\eta}(x)(x\in S)$ 作为 $S$ 的定向. 设 $V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 ($n$ 维) 体形式, $\Omega$ 是 $S$ 上的 ($n-1$ 维) 体形式.

如果在切空间 $TS_x$ 中从由 $TS_x$ 的单位法向量 $\boldsymbol{\eta}(x)$ 给定的定向类中取标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$, 则显然可得下面等式:

$$V(x)(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}).\tag{10.2.7}$$

**证**　因为, 在所设条件下, 两边都非负, 而它们在数量上相等的原因在于, 由向量 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 张成的平行体的体积等于底面积 $\Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1})$ 乘以高 $|\boldsymbol{\eta}| = 1$. □

但是

$$V(x)(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) = \begin{vmatrix} \eta^1 & \cdots & \eta^n \\ \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \cdots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \eta^i(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}).$$

这里 $x^1, \cdots, x^n$ 是 $x$ 关于定向标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的笛卡儿坐标, 而微分 $\mathrm{d}x^i$ 上方的 " $\frown$ " 表示在这一项中不出现 $\mathrm{d}x^i$.

这样, 定向超曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的体形式有以下坐标表达式:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \eta^i(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}). \tag{10.2.8}$$

从几何方面考虑得知, 对于固定的 $i \in \{1, \cdots, n\}$, 有

$$\langle \boldsymbol{\eta}(x), \boldsymbol{e}_i \rangle \Omega(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) = V(x)(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}). \tag{10.2.9}$$

最后这个等式说明

$$\eta^i(x)\Omega(x) = (-1)^{i-1} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}). \tag{10.2.10}$$

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的二维曲面 $S$, 常用 $\mathrm{d}\sigma$ 或 $\mathrm{d}S$ 表示它的体元素. 不应把它理解为某个形式 $\sigma$ 或 $S$ 的微分, 这只是一个记号. 如果 $x, y, z$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的笛卡儿坐标, 则用这些记号, (10.2.8) 与 (10.2.10) 式可写成

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\sigma = \cos\alpha_1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \cos\alpha_2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \cos\alpha_3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\ &\cos\alpha_1 \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \\ &\cos\alpha_2 \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \quad (\text{在坐标平面上的射影的面积}). \\ &\cos\alpha_3 \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

这里 $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)(x)$ 是 $S$ 在 $x \in S$ 处单位法向量的方向余弦 (坐标). 在这些等式中 (及在等式 (10.2.8) 和 (10.2.9) 中), 为了避免误解, 最好是在右方置以记号 $|_S$, 表明相应的形式在曲面 $S$ 上的限制.

### 10.2.4 参数曲面的面积

首先回忆, 若 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^k$ 内的 $k$ 个向量, 它们在 $\mathbb{R}^k$ 的某个标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 下的坐标表示为 $\boldsymbol{\xi}_i=(\xi_i^1,\cdots,\xi_i^k), i=1,\cdots,k$, 那么, 以这些向量为棱的平行多面体的体积 $V(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)$ 可用矩阵 $J=(\xi_i^j)$ 的行列式计算:

$$V(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\det(\xi_i^j). \tag{10.2.11}$$

公式 (10.2.11) 给出的是所谓的**有向体积**: 若 $V>0$, 则标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 属于 $\mathbb{R}^k$ 的相同的定向类; 若 $V<0$, 则它们不属于 $\mathbb{R}^k$ 的相同的定向类.

注意, 矩阵 $J$ 与其转置阵 $J^*$ 之积 $G:=JJ^*$ 是向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 的格拉姆 (Gram) 矩阵, 即 $G=(g_{ij})$, 其中 $g_{ij}=\langle\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j\rangle$. 因此,

$$\det G=\det(JJ^*)=\det J\cdot\det J^*=(\det J)^2. \tag{10.2.12}$$

于是, 非负体积值 $V(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)$ 可以写成

$$V(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\sqrt{\det(\langle\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j\rangle)}. \tag{10.2.13}$$

今设 $\boldsymbol{r}:D\to S\subset\mathbb{R}^n$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的 $k$ 维光滑曲面 $S$, 它用参数形式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t^1,\cdots,t^k)$, 即定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^k$ 上的光滑向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=(x^1,\cdots,x^n)(t)$ 的形式给定. 设 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 内的正交标准基底, 它产生坐标系 $(t^1,\cdots,t^k)$. 固定一点 $\boldsymbol{t}_0=(t_0^1,\cdots,t_0^k)\in D$, 取一组充分小的正数 $h^1,\cdots,h^k$, 使以从 $\boldsymbol{t}_0$ 出发的向量 $h^i\boldsymbol{e}_i\in TD_{t_0}(i=1,\cdots,k)$ 为棱的平行多面体 $I$ 完全位于区域 $D$ 内. 由映射 $D\to S$ 将 $I$ 映成曲面 $S$ 上的图形 $I_S$ (称为**曲线平行体**). 因为

$$\boldsymbol{r}(\cdots,t_0^{i-1},t_0^i+h^i,t_0^{i+1},\cdots)-\boldsymbol{r}(\cdots,t_0^{i-1},t_0^i,t_0^{i+1},\cdots)=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t^i}(t_0)h^i+o(h^i),$$

故当 $h^i$ 很小时, $i=1,\cdots,k$, $I_S$ 与以在点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 切于曲面 $S$ 的向量 $\boldsymbol{\xi}_1=h^1\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k=h^k\dot{\boldsymbol{r}}_k$ 为棱的平行多面体相差很小. 由此认为 $I_S$ 的体积 $\Delta V$ 应该接近于所说的标准平行多面体的体积:

$$\Delta V\approx\sqrt{\det(\langle\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j\rangle)}=\sqrt{\det(\langle\dot{\boldsymbol{r}}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_j\rangle(h^1\cdots h^k)^2}=\sqrt{\det(g_{ij}(t_0))}\Delta t^1\cdot\cdots\cdot\Delta t^k, \tag{10.2.14}$$

这里 $g_{ij}(t_0)=\langle\dot{\boldsymbol{r}}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_j\rangle(t_0),\Delta t^i=h^i,i,j=1,\cdots,k$ (参见 (10.2.13) 式).

如果将参数域 $D$ 所在的整个空间 $\mathbb{R}^k$ 用标准方式分成直径为 $d$ 的一些小平行体, 并取其中包含在 $D$ 中的那些小平行体, 按照公式 (10.2.14) 计算它们的像的 $k$ 维体积的近似值, 然后相加, 得到量

$$\sum_\alpha\sqrt{\det(g_{ij}(t_\alpha))}\,\Delta t^1\cdot\cdots\cdot\Delta t^k,$$

视之为曲面 $S$ 的 $k$ 维体积或 $k$ 维面积的近似值. 随着 $d \to 0$, 这一近似值变得更加精确.

于是, 我们特地给出参数曲面面积的另一定义.

**定义 6**　在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内, 用参数形式 $D \ni t \to \boldsymbol{r}(t) \in S$ 给定的 $k$ 维光滑曲面 $S$ 的面积(或 $k$ 维体积) 是形式 $\omega = \sqrt{\det(\langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_j \rangle(t))}\,\mathrm{d}t^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t^k$ 在 $D$ 上的积分:

$$V_k(S) := \int_S \omega = \int_D \sqrt{\det(\langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_j \rangle(t))}\,\mathrm{d}t^1 \cdots \mathrm{d}t^k. \tag{10.2.15}$$

这个定义和前面用形式语言给出的定义 4 是一致的. 事实上, 因为曲面的参数表示确定了曲面的定向和曲面的一切平面 $TS_x$ 的定向. 如果 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 是 $TS_x$ 的标架, 且属于 $TS_x$ 内固定的定向类, 那么, 由体形式 $\Omega$ 的定义 3, 得 $\Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) > 0$. 但这时由 (10.2.13) 式有 $\Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \sqrt{\det(\langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j \rangle)}$.

我们来看 (10.2.15) 式在某些特殊情况下的形式.

当 $k = 1$ 时, 区域 $D \subset \mathbb{R}^1$ 是以直线 $\mathbb{R}^1$ 上两点 $a, b (a < b)$ 为端点的区间, 这时 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的曲线. 所以当 $k = 1$ 时, 公式 (10.2.15) 变为计算曲线长度的公式

$$V_1(S) = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + \cdots + (\dot{x}^n)^2}(t)\mathrm{d}t.$$

若 $k = n$, 则 $S$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ 内的 $n$ 维区域 $D$. 在此情况下, 映射 $D \ni (t^1, \cdots, t^n) = t \to \boldsymbol{r}(t) = (x^1, \cdots, x^n)(t) \in S$ 的雅可比矩阵 $J = x'(t)$ 是方阵. 现在, 利用关系式 (10.2.12) 及重积分中的变量替换公式, 可得

$$V_n(S) = \int_D \sqrt{\det G(t)}\mathrm{d}t = \int_D |\det x'(t)|\mathrm{d}t = \int_S \mathrm{d}x = V(S),$$

于是我们又得到了 $\mathbb{R}^n$ 内的区域 $S$ 的体积.

注意, 当 $k = 2, n = 3$ 时, 即当 $S$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内的二维曲面时, 经常把 $t^1, t^2$ 写成 $u, v$ 并记 $\sigma := V_2(S), E := g_{11} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1 \rangle, F := g_{12} = g_{21} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2 \rangle, G := g_{22} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_2, \dot{\boldsymbol{r}}_2 \rangle$. 这时, 公式 (10.2.15) 有形式

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别地, 若 $u = x, v = y$, 而曲面 $S$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的光滑实值函数 $z = f(x, y)$ 的图像, 则容易得到

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**注 1**　关于定义 6 作些注释.

(1) 定义 6 只在公式 (10.2.15) 中的积分存在时才是正确的. 例如, 当 $D$ 是若尔当可测区域, 而 $\boldsymbol{r}\in C^{(1)}(\overline{D};\mathbb{R}^n)$ 时, 它显然是存在的.

(2) 若定义 6 中的曲面 $S$ 能分成有限多个具有分片光滑边界的曲面 $S_1,\cdots,S_m$, 则与 $S$ 的这个分解相对应, $D$ 将分解成区域 $D_1,\cdots,D_m$. 如果曲面 $S$ 在等式 (10.2.15) 的意义下有面积, 则对每个 $\alpha=1,\cdots,m$, 有值

$$V_k(S_\alpha)=\int_{D_\alpha}\sqrt{\det\langle\dot{\boldsymbol{r}}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_j\rangle(t)}\mathrm{d}t.$$

根据积分的可加性, 由此得到

$$V_k(S)=\sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

于是, 我们确立了, $k$ 维曲面的面积与普通重积分一样, 也是可加的.

(3) 上面的 (2) 能推广到区域 $D$ 的竭尽递增列, 即可把公式 (10.2.15) 里的积分理解成反常积分.

(4) 更重要的是, 面积的可加性也适用于任意的 (不只限于一张图给出的曲面) 光滑, 甚至分片光滑的曲面面积.

**定义 7** 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的任意分片光滑 $k$ 维曲面. 若从 $S$ 上去掉有限个或可数个分片光滑的维数不超过 $k-1$ 的曲面后, 它被分割成有限个或可数个能光滑参数化的曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$, 则令

$$V_k(S):=\sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

重积分的可加性, 保证了这样定义的量 $V_k(S)$ 与把曲面 $S$ 分解成 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 的分法无关, 其中每个 $S_m$ 都包含在曲面 $S$ 的某个局部图的有效域内.

还要注意, 由光滑曲面及分片光滑曲面的定义, 容易推知, 在定义 7 中如果还要求把 $S$ 分成若干块参数化光滑曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 的分割是局部有限分割也是可以的. 最后这一点的意思是, 任何紧集 $K\subset S$, 只能与曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 中的有限多个有公共点. 更直观地说, 曲面 $S$ 上的任何点, 必有只与 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 中的有限个相交的邻域.

**注 2** 在公式 (10.2.15) 中出现了曲线坐标系 $t^1,\cdots,t^k$. 所以, 自然要验证用公式 (10.2.15) 定义的量 $V_k(S)$, 关于变成在相应的新区域 $\tilde{D}\subset\mathbb{R}^k$ 内变化的新曲线坐标 $(\tilde{t}^1,\cdots,\tilde{t}^k)$ 的微分同胚 $\tilde{D}\ni(\tilde{t}^1,\cdots,\tilde{t}^k)=\tilde{t}\mapsto t=(t^1,\cdots,t^k)\in D$ 是不变的.

**证** 为了验证它, 只需注意在区域 $D$ 与 $\tilde{D}$ 的对应点, 矩阵

$$G=(g_{ij})=\left(\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t^i},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t^j}\right\rangle\right)\quad\text{与}\quad\tilde{G}=(\tilde{g}_{ij})=\left(\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{t}^i},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{t}^j}\right\rangle\right)$$

满足关系 $\tilde{G}=J^*GJ$, 这里 $J=\left(\dfrac{\partial t^j}{\partial \tilde{t}^i}\right)$ 是变换 $\tilde{D}\ni\tilde{t}\mapsto t\in D$ 的雅可比矩阵, 而 $J^*$ 是 $J$ 的转置矩阵. 因此, $\det\tilde{G}(\tilde{t})=\det G(t)\cdot(\det J)^2(t)$, 由此推出

$$\int_D\sqrt{\det G(t)}\mathrm{d}t=\int_{\tilde{D}}\sqrt{\det G(t(\tilde{t}))}|J(\tilde{t})|\,\mathrm{d}\tilde{t}=\int_{\tilde{D}}\sqrt{\det\tilde{G}(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t}.\qquad\square$$

这样, 定义 7 所叙述的 $k$ 维分片光滑曲面的 $k$ 维体积或面积是与坐标系选择无关的.

**定义 8**　设集 $E$ 位于 $k$ 维分片光滑曲面 $S$ 上. 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 能用有限个或可列个可能彼此相交的曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots(S_\alpha\subset S)$ 覆盖 $E$, 使得 $\sum\limits_\alpha V_k(S_\alpha)<\varepsilon$, 就说 $E$ 是 $k$ 维零测度集或勒贝格零面积集.

这不过是逐字逐句地重复位于 $\mathbb{R}^k$ 内的零测度集的定义.

**注 3**　易见, 在分片光滑曲面 $S$ 的任意局部图 $\varphi:D\to S$ 的参数域 $D$ 内, 与 $E$ 对应的是 $k$ 维零测度集 $\varphi^{-1}(E)\subset D\subset\mathbb{R}^k$. 甚至还能证明, 这是零面积集的特征性质.

在实际计算面积时, 最好记住, 如果分片光滑曲面 $\tilde{S}$ 是由分片光滑曲面 $S$ 去掉一个零面积集得到的, 那么, 曲面 $\tilde{S}$ 与曲面 $S$ 面积一样.

这个注之所以有用, 是因为常能从分片光滑曲面中去掉一个零面积集, 使所得到的分片光滑曲面 $\tilde{S}$ 只用一张图就能给出. 而这时 $\tilde{S}$ 的面积, 亦即 $S$ 的面积, 能直接用 (10.2.15) 式计算.

举两个例子.

**例 3**　映射 $(0,2\pi)\ni t\mapsto(R\cos t,R\sin t)\in\mathbb{R}^2$ 是圆周 $S(x^2+y^2=R^2)$ 去掉一个点 $E=(R,0)$ 所得到的圆弧的图. 因为 $E$ 是 $S$ 上的长度为零的集, 所以

$$V_1(S)=V_1(\tilde{S})=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2t+R^2\cos^2t}\mathrm{d}t=2\pi R.$$

**例 4**　在 9.2 节例 4 中, 给出了 $\mathbb{R}^3$ 内的二维环面的参数表达式

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)=((b+a\cos\psi)\cos\varphi,(b+a\cos\psi)\sin\varphi,a\sin\psi).$$

在区域 $D=\{(\varphi,\psi)|0<\varphi<2\pi,0<\psi<2\pi\}$ 中, 映射 $(\varphi,\psi)\mapsto\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)$ 是微分同胚. 区域 $D$ 在这个微分同胚下的像 $\tilde{S}$ 与环面 $S$ 相差一个由坐标线 $\varphi=2\pi$ 及 $\psi=2\pi$ 组成的集合 $E$. 于是集 $E$ 由一条经线和一条纬线组成, 从而易知其面积为零. 因此, 可在定义域 $D$ 的范围内, 根据给出的参数表达式, 按公式 (10.2.15) 求环面的面积.

事实上，

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{r}}_\varphi = (-(b+a\cos\psi)\sin\varphi, (b+a\cos\psi)\cos\varphi, 0),\\
&\dot{\boldsymbol{r}}_\psi = (-a\sin\psi\cos\varphi, -a\sin\psi\sin\varphi, a\cos\psi),\\
&g_{11} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi, \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi\rangle = (b+a\cos\psi)^2,\\
&g_{12} = g_{21} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi, \dot{\boldsymbol{r}}_\psi\rangle = 0,\\
&g_{22} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\psi, \dot{\boldsymbol{r}}_\psi\rangle = a^2,\\
&\det G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = a^2(b+a\cos\psi)^2,
\end{aligned}$$

因此，

$$V_2(S) = V_2(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} a(b+a\cos\psi)\mathrm{d}\psi = 4\pi^2 ab.$$

## 练　习

1. (1) 设 $P$ 与 $\widetilde{P}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的两个超平面, $D$ 是 $P$ 的子域, $\widetilde{D}$ 是 $D$ 在超平面 $\widetilde{P}$ 上的正交投影. 试证 $D$ 与 $\widetilde{D}$ 的 $n-1$ 维面积之间有关系: $\sigma(\widetilde{D}) = \sigma(D)\cos\alpha$, 这里 $\alpha$ 是超平面 $P$ 与 $\widetilde{P}$ 之间的夹角.

(2) 据 (1) 的结果, 指出三维欧氏空间内光滑函数 $z = f(x,y)$ 的图像面积元公式 $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的几何意义.

(3) 设 $S$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的曲面, 它用光滑向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 表示, 其定义域为 $D \subset \mathbb{R}^2$, 则曲面面积公式为

$$\sigma(S) = \iint_D |[\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v]|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $[\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v]$ 是向量 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ 的向量积.

(4) 设曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 由方程 $F(x,y,z) = 0$ 表示, 而曲面 $S$ 的定义域 $U$ 双方单值地正交投影于平面 $(x,y)$ 的区域 $D$ 上. 试证以下公式成立

$$\sigma(U) = \iint_D \frac{|\mathrm{grad}F|}{|F'_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 试求球面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 上由两条经线和两条纬线构成的球面矩形的面积.

3. (1) 设 $(r,\varphi,h)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 内的柱坐标. 将位于平面 $\varphi = \varphi_0$ 上, 由方程 $r = r(s)$ 给定的曲线, 绕 $h$ 轴旋转, 这里 $s$ 是自然参数. 试证: 相应于参变量 $s \in [s_1, s_2]$ 的那段曲线旋转所成的曲面的面积为

$$\sigma = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r(s)\mathrm{d}s.$$

(2) 设 $y = f(x)$ 是定义在线段 $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ 上的光滑非负函数. 将其图形绕 $x$ 轴及绕 $y$ 轴旋转. 试用在 $[a,b]$ 上的积分的形式表出这两种旋转曲面的面积公式.

4. (1) 设半径为 1 的球的球心在一条长为 $L$ 的平面闭曲线上滑动. 试证: 由此所得筒状体的侧面积为 $2\pi \cdot 1 \cdot L$.

(2) 将半径为 $a$ 的圆周, 绕着圆周所在平面中的轴旋转, 此轴距圆心的距离为 $b > a$, 试根据 (1) 的结果求旋转所得二维环面的面积.

5. 在空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 按笛卡儿坐标给出螺旋面:

$$y - x\tan\frac{z}{h} = 0, \quad |z| \leqslant \frac{\pi}{2}h.$$

试作出它的图形, 并求它的满足 $r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$ 的那一部分的面积.

这可能显得很离奇: 按照我们的观念, 曲面面积不应与曲面的定向有关!

### 10.2.5　第一型与第二型积分

**定义 9**　称微分形式 $\rho\Omega$ 的积分

$$\int_S \rho\Omega \tag{10.2.16}$$

*为函数 $\rho$ 沿定向曲面 $S$ 的积分*, 其中 $\Omega$ 是 $S$ 上 (与计算积分时所选的 $S$ 的定向相应) 的体形式.

显然, 这样定义的积分 (10.2.16) 与 $S$ 的定向无关, 因为 $S$ 的定向的改变已反映在相应的体形式的替换中了.

我们要强调, 实质上这里说的不是函数的积分, 而是一种特殊的形式沿着定义了体形式的曲面 $S$ 的积分.

**定义 10**　设 $S$ 是分片光滑的 (定向或无定向) 曲面, $\rho$ 是 $S$ 上的函数. 将 $S$ 做定义 5 中所描述的分解: $S = \bigcup\limits_i S_i$. 则称函数 $\rho$ 沿各个 $S_i$ 积分之和 $\sum\limits_i \int_{S_i} \rho\Omega$ *为函数 $\rho$ 沿曲面 $S$ 的积分* (10.2.16). *通常称它为第一型曲面积分*.

**定义 11**(为了把第一型积分具有与曲面定向无关的特点标识出来)　*常称形式沿定向曲面的积分为第二型曲面积分*.

注意, 因为在线性空间上, *次数等于空间的维数的诸斜对称形式都成比例*, 所以在 $k$ 维定向曲面 $S$ 上给定的任何 $k$-形式 $\omega$ 与 $S$ 上的体形式 $\Omega$ 满足关系 $\omega = \rho\Omega$, 其中 $\rho$ 是 $S$ 上与 $\omega$ 有关的函数. 因此,

$$\int_S \omega = \int_S \rho\Omega,$$

亦即任何第二型积分都能写成相应的第一型积分的形式.

**例 5**　力场 $\boldsymbol{F}$ 在路径 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 上所做的功, 可以写成第一型积分

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}\rangle \mathrm{d}s, \tag{10.2.17}$$

这里 $s$ 是 $\gamma$ 上的自然参数, $\mathrm{d}s$ 是长度元素 (1-形式), 而 $\boldsymbol{e}$ 是单位速度向量, 其本身并没有 $\gamma$ 定向的任何信息.

**例 6** 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是用单位法向量 $\boldsymbol{n}(x)$ 定向的曲面. 速度场 $\boldsymbol{V}$ 通过 $S$ 的流量, 能写成第一型曲面积分

$$\int_S\langle\boldsymbol{V},\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}\sigma, \tag{10.2.18}$$

这里 $S$ 定向的信息包含在法向场 $\boldsymbol{n}$ 的方向之中.

注意, 经常遇到 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}:=\boldsymbol{e}\mathrm{d}s, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}:=\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$ 这两种记号, 这里引入了长度向量元素与面积向量元素. 用这种表示法, 积分 (10.2.17) 与 (10.2.18) 就可写成

$$\int_\gamma\langle\boldsymbol{F},\mathrm{d}\boldsymbol{s}\rangle \quad 与 \quad \int_\gamma\langle\boldsymbol{F},\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\rangle.$$

从物理的角度来说, 这是最合适的写法. 为了简单, 向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的内积 $\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$, 经常写作 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

观察第一型积分与第二型积分, 这两个术语的差别非常有限. 实际上, 如果积分确与用以计算它的坐标系的选择无关的话, 我们能积分而且只积分微分形式. 此外并没有什么其他东西的积分.

### 10.2.6 斯托克斯定理在曲面积分中的推论

我们知道, 牛顿–莱布尼茨公式是分析学的最重要的公式. 本节将陈述 $\mathbb{R}^n$ 中的格林公式、高斯–奥斯特罗格拉德斯基公式以及斯托克斯公式. 这些公式, 一方面是牛顿–莱布尼茨公式的推广, 另一方面, 它们合在一起构成积分学中最有用的部分.

1. 格林公式[①]

**命题 1**(格林公式) 设 $\mathbb{R}^2$ 是建立了 $x,y$ 坐标系的平面, $\overline{D}$ 是这平面内的紧区域, 它的边界是一条分段光滑曲线; 又设 $P,Q$ 是闭区域 $\overline{D}$ 上的光滑函数. 这时, 成立以下关系

$$\iint\limits_{\overline{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial\overline{D}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \tag{10.2.19}$$

其中右端是沿区域 $\overline{D}$ 的边界 $\partial\overline{D}$ 的积分, $\partial\overline{D}$ 的方向与区域 $\overline{D}$ 本身的方向和谐.

**证** 设 $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 则它是具有坐标 $(x,y)$ 的空间 $\mathbb{R}^2$ 中区域内的微分 1-形式. 在第 9 章算得

$$\mathrm{d}\omega(x,y)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

① 格林 (G. Green) (1793—1841) 英国数学家和数学物理学家. 在威斯敏斯特的牛顿墓被五个小墓碑环抱着, 上边写着五个光辉的名字: 法拉第、汤姆孙 (开尔文勋爵)、格林、麦克斯韦、狄拉克.

据斯托克斯定理即得欲证. □

**注 4**　设 $C$ 是用正方形 $I$ 上的光滑映射 $\varphi: I \to C$ 得到的区域. 如果 $\omega$ 是 $C$ 上的光滑 1-形式, 就有

$$\int_C \mathrm{d}\omega := \int_I \varphi^* \mathrm{d}\omega = \int_I \mathrm{d}\varphi^* \omega \overset{!}{=} \int_{\partial I} \varphi^* \omega =: \int_{\partial C} \omega, \tag{10.2.20}$$

其中 "!" 是表示我们已证明过这个等式 (参看 10.1 节的斯托克斯公式). (10.2.20) 中两头的两个等式是定义或定义的直接推论; 余下的就是左边第二个等式涉及外微分关于坐标系的无关性.

这就是说, 格林公式对区域 $C$ 也成立.

最后, 如果定向区域 $\overline{D}$ 能分成有限多个 $C$ 型域, 那么, 根据上面已知, 验证区域 $C_i$ 的边界上的积分中, 包含在 $D$ 内的部分上的积分必互相抵消, 就得到

$$\int_{\overline{D}} \mathrm{d}\omega = \sum_i \int_{C_i} d\omega = \sum_i \int_{\partial C_i} \omega = \int_{\partial \overline{D}} \omega. \tag{10.2.21}$$

亦即, 对于区域 $\overline{D}$, 格林公式也成立.

能够证明, 任何具分片光滑边界的区域必属于上述这类区域, 但我们不去证它, 因为 10.1 节已叙述了一种行之有效的技巧, 避免与之类似的几何上的困难, 而代之以解较简单的分析问题.

我们给出几个使用格林公式的例子.

**例 7**　设在 (10.2.19) 式中 $P = -y, Q = x$, 则得

$$\int_{\partial D} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 2\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\sigma(D),$$

其中 $\sigma(D)$ 表示区域 $D$ 的面积. 于是, 利用格林公式即可得到我们曾经遇到过的用沿着区域的定向边界的线积分来表示该区域面积的公式

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} y\mathrm{d}x + \int_{\partial D} x\mathrm{d}y.$$

**例 8**　设 $\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 是平面上的闭圆盘. 试证: 闭圆盘到自身的任何光滑映射 $f: \overline{B} \to \overline{B}$, 至少有一个不动点 (即使得 $f(p) = p$ 的点 $p \in \overline{B}$).

**证**　假如映射 $f$ 没有不动点. 则对于任何 $p \in \overline{B}$, 恰好存在一条以 $f(p)$ 为顶点并且过 $p$ 的射线, 它与圆盘 $\overline{B}$ 的边界交于点 $\varphi(p) \in \partial B$. 由此得到一个映射 $\varphi: \overline{B} \to \partial\overline{B}$. 易见它在圆的边界 $\partial\overline{B}$ 上是个恒等映射, 而在整个圆盘上, 它与映射 $f$ 有相同的光滑性. 下面证明这样的映射 $\varphi$ 不可能存在.

在区域 $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 中研究形式 $\omega = \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$ (参见 10.1 节注 1 之 (4)). 直接验证即知 $\mathrm{d}\omega = 0$. 因为 $\partial\overline{B} \subset \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, 所以当存在映射 $\varphi: \overline{B} \to \partial\overline{B}$ 时, 就能得到

$\overline{B}$ 上的形式 $\varphi^*\omega$, 并且有 $\mathrm{d}\varphi^*\omega = \varphi^*\mathrm{d}\omega = \varphi^*0 = 0$. 因此根据格林公式就有

$$\int_{\partial\overline{B}} \varphi^*\omega = \int_{\overline{B}} \mathrm{d}\varphi^*\omega = 0.$$

但是, $\varphi$ 在 $\partial\overline{B}$ 上的限制是恒等映射, 所以

$$\int_{\partial\overline{B}} \varphi^*\omega = \int_{\partial\overline{B}} \omega,$$

但据 10.1 节注 1 之 (4), 最后这个积分不是零. 所得的矛盾说明上边陈述的命题成立. □

当然, 这个命题对于任意维数的球 $\overline{B}$ 都正确. 此外, 它不只是对光滑映射正确, 对任何连续映射 $f : \overline{B} \to \overline{B}$ 也正确. 在这种普遍情况下, 它叫做**布劳威尔**[①]**不动点定理**.

2. **高斯–奥斯特罗格拉德茨基公式**

格林公式把沿平面区域边界的积分与沿该区域的积分联系了起来. 类似地, 下面的高斯–奥斯特罗格拉德茨基公式 (高–奥公式) 把沿着空间区域边界的积分与沿着该区域的积分联系起来.

**命题 2**(高–奥公式) 设 $\mathbb{R}^3$ 是具坐标系 $x, y, z$ 的空间; $\overline{D}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内的紧区域, 它的边界是分片光滑的曲面; $P, Q, R$ 是闭域 $\overline{D}$ 上的光滑函数. 那么, 成立下面关系:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint_{\partial\overline{D}} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{10.2.22}$$

**证** 设 0-形式 $\omega = f(x, y, z)$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内的可微函数, 则得

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

据斯托克斯定理即得欲证. □

**例 9** (命题: 阿基米德定律) 兹计算均匀液体对浸入其中的物体 $D$ 的压力所产生的合力.

在 $\mathbb{R}^3$ 中选取笛卡儿坐标使 $xy$ 平面与液体的表面一致, 而 $z$ 轴指向液体的外面. 设物体 $D$ 的表面 $S$ 的面积元素为 $\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}\sigma$ 的深度为 $z$, 则作用于 $\mathrm{d}\sigma$ 的压力为

① 布劳威尔 (L. E. Brouwer) (1881—1966)——著名的荷兰数学家. 他的名字与拓扑学的一系列基本定理, 以及导致所谓直觉主义数学哲学概念的数学基础的分析联系在一起.

$\rho g z \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$, 其中 $\rho$ 为液体密度, $g$ 是重力加速度, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $S$ 在曲面元素 $\mathrm{d}\sigma$ 处的单位外法向量. 于是要求的合力可表示为积分

$$\boldsymbol{F} = \iint\limits_S \rho g z \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma.$$

设 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x \cos\alpha_x + \boldsymbol{e}_y \cos\alpha_y + \boldsymbol{e}_z \cos\alpha_z$, 则

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \boldsymbol{e}_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

(见10.2.3小节). 这样, 利用高–奥公式 (10.2.22) 就得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{e}_x \rho g \iint\limits_S z \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_y \rho g \iint\limits_S z \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_z \rho g \iint\limits_S z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \boldsymbol{e}_x \rho g \iiint\limits_D 0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_y \rho g \iiint\limits_D 0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_z \rho g \iiint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \rho g V \boldsymbol{e}_z,\end{aligned}$$

这里 $V$ 是 $D$ 的体积, 而这表示 $P = \rho g V$ 是物体排开的液体的重量. 我们得到了阿基米德定律: $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{e}_z$.

**例 10**　利用高–奥公式 (10.2.22), 可得以曲面 $\partial D$ 为边界的物体 $D$ 的体积 $V(D)$ 的公式:

$$\begin{aligned}V(D) &= \frac{1}{3} \iint\limits_{\partial D} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\partial D} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial D} y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \iint\limits_{\partial D} z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

3. $\mathbb{R}^3$ 中的斯托克斯公式

**命题 3**　设 $S$ 是位于区域 $G \subset \mathbb{R}^3$ 内以 $\partial S$ 为边界的定向分片光滑紧二维曲面, 在 $G$ 内给定了 1-形式 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$. 这时, 成立下面的关系式

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = &\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\end{aligned}} \tag{10.2.23}$$

其中边界 $\partial S$ 的定向取得与曲面 $S$ 的定向和谐.

**证** 设 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$, 则

$$\mathrm{d}\omega = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

据斯托克斯定理即得欲证. □

我们指出, 形式的现代语言起源于 E. J. 嘉当①, 而对于 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面的形如

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial S} \omega \tag{10.2.24}$$

的一般的斯托克斯公式, 看来首先是由庞加莱提出的. 对 $n$ 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域的公式, 奥斯特罗格拉德茨基已经知道, 而莱布尼茨写出了第一批微分形式.

因此, 当时把一般的斯托克斯公式 (10.2.24) 叫做**牛顿–莱布尼茨–格林–高斯–奥斯特罗格拉德茨基–斯托克斯–庞加莱公式**并不是偶然的. 由上面所说的可以知道, 即便这样写也远没有把它的名称写完全.

现在我们利用这一公式推广例 8 中得到的结果.

**例 11** (定理) 试证, 闭球 $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ 到自身的任何光滑映射 $f : \overline{B} \to \overline{B}$, 至少有一个不动点.

**证** 假如映射 $f$ 没有不动点, 于是像例 8 中那样, 可以作一个光滑映射 $\varphi : \overline{B} \to \partial\overline{B}$, 它在球面 $\partial\overline{B}$ 上是恒等映射. 在区域 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 中考察向量场 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}$ (这里 $\boldsymbol{r}$ 是点 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ 的向径), 以及与这个场对应的流量形式

$$\omega = \Big\langle \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}, \boldsymbol{n} \Big\rangle \Omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-1} x^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m}{((x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2)^{m/2}}$$

(参看公式 (10.2.8)). 记球 $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^m \,||x| \leqslant 1\}$, $\partial\overline{B}$ 表示它的边界. 于是这个场 $\omega$ 通过球面沿外法线方向的流量显然等于球面 $\partial\overline{B}$ 的面积, 这说明 $\displaystyle\int_{\partial\overline{B}} \omega \neq 0$. 但是, 用直接计算很容易验证, 在 $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ 内 $\mathrm{d}\omega = 0$. 由此, 就像例 8 那样, 利用一般的斯托克斯公式推知

$$\int_{\partial\overline{B}} \omega = \int_{\partial\overline{B}} \varphi^*\omega = \int_{\overline{B}} \mathrm{d}\varphi^*\omega = \int_{\overline{B}} \varphi^*\mathrm{d}\omega = \int_{\overline{B}} \varphi^* 0 = 0.$$

这导致了矛盾, 从而完成了定理的证明. □

## 练 习

1. 设 $\gamma$ 是光滑曲线, $\mathrm{d}s$ 是 $\gamma$ 上的长度元素.

① 嘉当 (E. J. Cartan) (1869—1951) 杰出的法国几何学家.

(1) 试证 $\left|\int_\gamma f(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_\gamma |f(s)|\mathrm{d}s$, 这里 $f$ 是定义在 $\gamma$ 上并且使不等式两端都有意义的函数;

(2) 设在 $\gamma$ 上 $|f(s)| \leqslant M$, 而 $l$ 是曲线 $\gamma$ 的长. 试证 $\left|\int_\gamma f(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant Ml$;

(3) 关于沿着 $k$ 维光滑曲面的第一型积分, 叙述并证明类似于问题 (1), (2) 的一般性命题.

2. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_L xy\mathrm{d}s$, 其中 $L$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的部分;

(2) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中 $L$ 为螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段;

(3) $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s$, 其中 $L$ 是 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x=y$ 相交的圆周;

(4) $\int_L x\mathrm{d}s$, 其中 $L$ 为对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{k\theta}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分.

3. 计算下列第二型曲线积分:

(1) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$, 其中 $L$ 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 沿 $t$ 增加方向的一段;

(2) $\oint_L y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$, 其中 $L$ 为 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 与 $x$ 轴所围的闭曲线, 依顺时针方向;

(3) $\int_L xyz\mathrm{d}z$, 其中 $L$ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相交的圆, 其方向按曲线依次经过 1, 2, 7, 8 卦限;

(4) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 $L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界曲线, 其方向按曲线依次经过 $xy$ 平面部分, $yz$ 平面部分和 $zx$ 平面部分.

4. 计算下列第一型曲面积分:

(1) $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$, 其中 $S$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geqslant 0$;

(2) $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$, 其中 $S$ 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界曲面;

(3) $\iint_S \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2}$, 其中 $S$ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被平面 $z=0$, $z=1$ 所截取的部分;

(4) $\iint_S xyz\mathrm{d}S$, 其中 $S$ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分.

5. 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是以原点为中心, 边长为 2 的立方体表面并取外侧为正向;

(2) $\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是由平面 $x=y=z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围的四面体表面并取外侧为正向;

(3) $\iint\limits_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分并取外侧为正向;

(4) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 并取外侧为正向.

6. 应用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oiint\limits_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧;

(2) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 表面的外侧;

(3) $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=h$ 所围空间区域 $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的表面, 方向取外侧;

(4) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

7. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$, 其中 $L$ 为 $x+y+z=1$ 与三坐标面的交线, 它的走向使所围平面区域上侧在曲线的左侧;

(2) $\oint_L (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$, 其中 $L$ 为以 $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向.

8. (1) 试证: 如果格林公式中的函数 $P,Q$ 满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, 则区域 $D$ 的面积 $\sigma(D)$, 可用公式 $\sigma(D)=\displaystyle\int_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 求得.

(2) 设 $x,y$ 是平面上的笛卡儿坐标, $\gamma$ 是平面上一条曲线 (可能不闭). 说明积分 $\displaystyle\int_\gamma y\mathrm{d}x$ 的几何意义. 由此出发, 重新解释公式 $\sigma(D)=-\displaystyle\int_{\partial D} y\mathrm{d}x$.

(3) 利用这个公式求区域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ 的面积, 以验证 (2) 中的公式.

9. 重积分中的分部积分法. 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的具正则 (光滑或分片光滑) 边界面的有界区域, 边界面由外单位法向量 $\boldsymbol{n}=(n^1,\cdots,n^m)$ 定向. 设 $f,g$ 是 $\overline{D}$ 中的光滑函数.

(1) 试证:

$$\int_D \partial_i f\mathrm{d}v=\int_{\partial D} fn^i\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 试证以下分部积分公式:

$$\int_D (\partial_i f)g\mathrm{d}v=\int_{\partial D} fgn^i\mathrm{d}\sigma-\int_D f(\partial_i g)\mathrm{d}v.$$

## 10.3　流形上的闭形式与恰当形式

### 10.3.1　庞加莱定理

本节将补充介绍闭微分形式与恰当微分形式的知识. 像前面一样, 用 $\Omega^p(M)$ 记光滑流形 $M$ 上所有光滑实值 $p$ 次形式的空间, 而 $\Omega(M)=\bigcup\limits_p \Omega^p(M)$.

**定义 1**　考虑形式 $\omega\in\Omega^p(M)$.

• (闭) 称 $\omega$ 是闭形式, 若 $\mathrm{d}\omega=0$.

• (恰当) 当 $p>0$ 时, 如果存在形式 $\alpha\in\Omega^{p-1}(M)$ 使 $\omega=\mathrm{d}\alpha$, 则称 $\omega$ 是恰当形式.

引入记号:

▷ $Z^p(M)$ —— 记流形 $M$ 的所有闭 $p$-形式之集;

▷ $B^p(M)$ —— 记 $M$ 上所有恰当 $p$-形式之集.

对于任何形式 $\omega\in\Omega^p(M)$, 关系式[①]$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$ 成立, 它说明 $Z^p(M)\supset B^p(M)$. 一般地说, 这个包含关系是严格的.

**定义 2**　称流形 $M$ 为可缩(对于一点 $x_0\in M$) 的, 或单点同伦的, 假如存在光滑映射 $h: M\times I\to M$, 这里 $I=\{t\in\mathbb{R}|0\leqslant t\leqslant 1\}$, 使 $h(x,1)=x$, 而 $h(x,0)=x_0$.

**例 1**　空间 $\mathbb{R}^n$, 借助于映射 $h(x,t)=tx$ 收缩于一点.

**定理 1** (庞加莱)　设流形 $M$ 可缩于一点, 则 $M$ 上的任何闭 $(p+1)$-形式 $(p\geqslant 0)$ 都是恰当形式.

**证**　证明的非平凡部分, 由下面的对于任何流形都适用的 "柱" 结构组成.

考察 "柱" $M\times I$($M$ 与单位线段 $I$ 的直积) 及使 $M$ 分别等同于柱 $M\times I$ 的两底的映射 $j_i: M\to M\times I, j_i(x)=(x,i), i=0,1$. 这时, 自然产生相应的两个映射 $j_i^*:\Omega^p(M\times I)\to\Omega^p(M)$, 它们是把 $\Omega^p(M\times I)$ 的形式中的变量 $t$ 代之以相应的 $i$ 的值 $(=0,1)$ 的运算, 这时, 当然 $\mathrm{d}i=0$.

作线性算子 $K:\Omega^{p+1}(M\times I)\to\Omega^p(M)$, 它在单项式上的取值如下定义:

$$K(a(x,t)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{p+1}}):=0,$$

$$K(a(x,t)\mathrm{d}t\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}):=\left(\int_0^1 a(x,t)\mathrm{d}t\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}.$$

我们所需要算子 $K$ 的基本性质是, 对任何 $\omega\in\Omega^{p+1}(M\times I)$ 成立以下关系式:

$$K(\mathrm{d}\omega)+\mathrm{d}(K\omega)=j_1^*\omega-j_0^*\omega. \tag{10.3.1}$$

① 由于算子 d 引入的方法不同, 这一性质或为需要证明的断言, 这时, 常把它叫做庞加莱引理, 或把它放到算子 d 的定义中去.

只要对单项式验证这一性质就够了, 因为所有算子 $K, \mathrm{d}, j_1^*, j_0^*$ 都是线性的.

如果 $\omega = a(x,t)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+1}}$, 则 $K\omega = 0, \mathrm{d}K\omega = 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \frac{\partial a}{\partial t}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+1}} + [\text{不含}\mathrm{d}t\text{的项}],\\ K(\mathrm{d}\omega) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+1}}\\ &= (a(x,1) - a(x,0))\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+1}} = j_1^*\omega - j_0^*\omega,\end{aligned}$$

从而关系式 (10.3.1) 成立.

如果 $\omega = a(x,t)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$, 则 $j_1^*\omega = j_0^*\omega = 0$. 此外,

$$\begin{aligned}K(\mathrm{d}\omega) &= K\left(-\sum_{i_0}\frac{\partial a}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_0} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}\right)\\ &= -\sum_{i_0}\left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^{i_0} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(K\omega) &= \mathrm{d}\left(\left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}\right)\\ &= \sum_{i_0}\frac{\partial a}{\partial x^{i_0}}\left(\int_0^1 a(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^{i_0} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}\\ &= \sum_{i_0}\left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^{i_0} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}.\end{aligned}$$

因此, 在这种情况下, (10.3.1) 式也成立.

今设 $M$ 是可缩于点 $x_0 \in M$ 的流形. $h : M \times I \to M$ 是定义 2 中指出的映射, $\omega$ 是 $M$ 上的 $(p+1)$-形式. 这时, 显然 $h \circ j_1 : M \to M$ 是恒等映射, 而 $h \circ j_0 : M \to x_0$ 是 $M$ 到一点 $x_0$ 的映射, 所以 $(j_1^* \circ h^*)\omega = \omega$, 而 $(j_0^* \circ h^*)\omega = 0$. 因此这时由 (10.3.1) 式推出

$$K(\mathrm{d}(h^*\omega)) + \mathrm{d}(K(h^*\omega)) = \omega. \tag{10.3.2}$$

于是, 闭形式 $\omega$ 是形式 $\alpha = K(h^*\omega) \in \Omega^p(M)$ 的外微分, 亦即 $\omega$ 是 $M$ 上的恰当形式. □

**例 2** 设 $A, B, C$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内变量 $x, y, z$ 的光滑实函数. 要从方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = A,\\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = B,\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = C\end{cases} \tag{10.3.3}$$

求出函数 $P, Q, R$.

要使方程组 (10.3.3) 相容, 显然函数 $A, B, C$ 必须满足关系

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0,$$

它与形式

$$\omega = A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

在 $\mathbb{R}^3$ 内的闭性等价.

如果能找到形式 $\alpha = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 使 $\mathrm{d}\alpha = \omega$, 则方程组 (10.3.3) 可解.

根据定理 1 的证明中叙述的方案, 再考虑到例 1 内所建立的映射 $h$, 经过简单的计算, 就得到

$$\begin{aligned}\alpha = K(h^*\omega) = &\left(\int_0^1 A(tx,ty,tz)t\mathrm{d}t\right)(y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y)\\ &+\left(\int_0^1 B(tx,ty,tz)t\mathrm{d}t\right)(z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z)\\ &+\left(\int_0^1 C(tx,ty,tz)t\mathrm{d}t\right)(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

直接验证即知 $\mathrm{d}\alpha = \omega$.

**注 1**　选取满足条件 $\mathrm{d}\alpha = \omega$ 的形式 $\alpha$ 通常具有很大的任意性. 例如, 当用任何形如 $\alpha + \mathrm{d}\eta$ 的形式代替形式 $\alpha$ 时, 显然也满足这个方程.

根据定理 1, 在可缩流形 $M$ 上, 满足条件 $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\beta = \omega$ 的任意两个形式 $\alpha, \beta$, 其差是一个恰当形式. 实际上, $\mathrm{d}(\alpha-\beta) = 0$, 即形式 $(\alpha-\beta)$ 在 $M$ 上是闭的, 因此, 根据定理 1, 它是恰当的.

### 10.3.2　同调与上同调

据庞加莱定理, 流形上的任何闭形式是局部恰当的. 要把这些局部的原像粘成整个流形上的一个形式, 并不是总能做到的, 这与流形的拓扑结构有关 $\left(\text{参见 11.3 节内关于 } \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \text{ 的形式 } \omega = \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \text{ 的讨论}\right)$. 流形作为拓扑空间的结构, 流形上的闭形式和恰当形式的相互关系, 这两个问题之间的联系是用所谓流形的 (上) 同调群来描述的.

流形 $M$ 上的闭实形式与恰当实形式, 分别构成线性空间 $Z^p(M)$ 与 $B^p(M)$, 并且 $Z^p(M) \supset B^p(M)$.

**定义 3** (上同调群)　称商空间

$$H^p(M) := Z^p(M)/B^p(M) \tag{10.3.4}$$

为流形 $M$ 的 (实系数)$p$ 维上同调群. 形式 $\omega \in Z^p(M)$ 所属的上同调类记作 $[\omega]$.

根据定义, $[\omega_1]=[\omega_2]$ (即 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 位于同一个上同调类, 或说它们是上同调的) $\Leftrightarrow \omega_1-\omega_2 \in B^p(M)$ (即它们只相差一个恰当形式).

因为 $Z^p(M)$ 是算子 $\mathrm{d}^p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ 的核, 而 $B^p(M)$ 是算子 $\mathrm{d}^{p-1}$ : $\Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)$ 的像, 所以经常把 (10.3.4) 式写成

$$H^p(M)=\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^p/\mathrm{Im}\,\mathrm{d}^{p-1}.$$

计算上同调通常是一件困难的事情. 这里做一些简单明显的观察.

由定义 3 推知, 若 $p>\dim M$, 则显然 $H^p(M)=0$.

由庞加莱定理知, 如果 $M$ 是可缩的, 则当 $p>0$ 时, $H^p(M)=0$.

在任何连通流形 $M$ 上, 群 $H^0(M)$ 与 $\mathbb{R}$ 同构, 因为 $H^0(M)=Z^0(M)$, 而当在连通流形 $M$ 上定义的函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 满足关系 $\mathrm{d}f=0$ 时, 有 $f=$ 常数.

特别: 当 $p>0$ 时, 有 $H^p(\mathbb{R}^n)=0$, 而 $H^0(\mathbb{R}^n) \sim \mathbb{R}$. 这一断言 (除最后这种平凡的关系) 等价于当 $M=\mathbb{R}^n$ 时的定理 1, 并且也叫做庞加莱定理.

所谓同调群与流形 $M$ 有更直观的几何联系.

**定义 4** 将 $p$ 维方体 $I^p \subset \mathbb{R}^n$ 映入流形 $M$ 的光滑映射 $c: I^p \to M$, 叫做流形 $M$ 上的奇异方体.

这是光滑道路概念往任意维数 $p$ 的情况的直接推广. 特别地, 奇异方体可能是将方体 $I^p$ 变为一点的变换.

**定义 5** 任意有限个流形 $M$ 上的奇异 $p$ 维方体的形式的实系数线性组合 $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ 叫做流形 $M$ 上的 $p$ 维(奇异方体的)链.

像道路那样, 两个奇异方体, 如果能用具正雅可比行列式的参变量微分同胚变换从一个得出另一个, 则说它们是等价的, 而且视两个等价的奇异方体是等同的. 如果这种参变量的变换是具负雅可比行列式的, 则称这两个 (定向相反的) 奇异方体 $c$ 和 $c_-$ 是相反的, 并记作 $c_-=-c$.

流形 $M$ 上的 $p$ 维链, 关于标准的加法及乘以实数的运算, 显然构成线性空间. 我们用 $C_p(M)$ 表示这个空间.

**定义 6** 称 $\mathbb{R}^p$ 中的 $p-1$ 维链

$$\partial I := \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}c_{ij} \tag{10.3.5}$$

为 $\mathbb{R}^p$ 内的 $p$ 维方体 $I^p$ 的边界, 这里 $c_{ij} : I^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ 是从 $p-1$ 维方体到 $\mathbb{R}^p$ 内的映射, 它是由方体 $I^p$ 的相应边界往 $\mathbb{R}^p$ 内的典型嵌入诱导出的映射. 确切地说, 若 $I^{p-1}=\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{p-1} | 0 \leqslant \tilde{x}^m \leqslant 1, m=1,\cdots,p-1\}$, 则 $c_{ij}(\tilde{x})=\{\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^{j-1},i,\tilde{x}^{j+1},\cdots,\tilde{x}^p\} \in \mathbb{R}^p$.

容易验证, 这样定义的方体边界, 与取标准定向方体 $I^p$ 的边界的运算是完全一致的 (参看 9.2 节).

**定义 7**　关于流形 $M$ 上的链有下述边界概念.

- $p$ 维奇异方体 $c$ 的边界 $\partial c$ 是 $p-1$ 维链

$$\partial c := \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}c\circ c_{ij}.$$

- $p$ 维链 $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ 的边界是 $p-1$ 维链

$$\partial\left(\sum_k \alpha_k c_k\right) := \sum_k \alpha_k \partial c_k.$$

因此, 在任何 $p$ 维链空间 $C_p(M)$ 上, 定义了线性算子

$$\partial = \partial_p : C_p(M) \to C_{p-1}(M).$$

根据关系式 (10.3.5), 对任何方体可以验证 $\partial(\partial I) = 0$. 因此 $\partial\circ\partial = \partial^2 = 0$ 普遍成立.

**定义 8**　利用算子 $\partial$ 可引入"闭"性以区分流形 $M$ 上的链.

- 设 $z \in C_p(M)$. 如果 $\partial z = 0$, 就称它是 $p$ 维闭链或 $p$-闭链.
- 设 $b \in C_p(M)$. 如果 $\exists a \in C_{p+1}(M)$, 使 $\partial a = b$, 则称 $b$ 为流形 $M$ 上的 $p$ 维边界闭链.

引入记号:

▷ $Z_p(M)$——记流形 $M$ 上所有 $p$ 维闭链之集;

▷ $B_p(M)$——记流形 $M$ 上所有 $p$ 维边界闭链之集.

显然, $Z_p(M)$ 与 $B_p(M)$ 都是域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 并且 $Z_p(M) \supset B_p(M)$.

**定义 9**(同调群)　商空间

$$H_p(M) := Z_p(M)/B_p(M) \tag{10.3.6}$$

叫做流形 $M$ 的 $p$ 维(实系数)同调群.

因此, 如果两个闭链 $z_1, z_2 \in Z_p(M)$ 的差 $z_1 - z_2 \in B_p(M)$, 即它们只相差某个链的边界, 则称 $z_1, z_2$ 位于同一个同调类中, 或说它们同调. 闭链 $z \in Z_p(M)$ 的同调类记作 $[z]$.

如同上同调的情形, 我们又可把 (10.3.6) 式改写成

$$H_p(M) = \operatorname{Ker}\partial_p/\operatorname{Im}\partial_{p+1}.$$

**定义 10**　设 $c : I \to M$ 是奇异 $p$ 维方体, $\omega$ 是流形 $M$ 上的 $p$-形式. 就称

$$\int_c \omega := \int_I c^*\omega \tag{10.3.7}$$

为形式 $\omega$ 沿此奇异方体 $c$ 的积分.

**定义 11** 设 $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ 是 $p$ 维链, 而 $\omega$ 是流形 $M$ 上的 $p$-形式. 就把 $\omega$ 沿着这些奇异方体积分的线性组合 $\sum\limits_k \alpha_k \int\limits_{c_k} \omega$ 叫做形式 $\omega$ 沿着该链的积分.

由定义 4 — 定义 7 及定义 10, 定义 11 推知, 对于沿着奇异方体的积分, 斯托克斯公式

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega \tag{10.3.8}$$

成立 (这里 $c$ 的维数是 $p$, $\omega$ 的次数为 $p-1$); 而且对于沿链的积分, 公式 (10.3.8) 仍然有效.

**定理 2** (1) 恰当形式沿闭链的积分为零.

(2) 闭形式沿链的边界的积分为零.

(3) 闭形式沿闭链的积分, 只与闭链的同调类有关.

(4) 闭形式沿闭链的积分, 只与形式的上同调类有关.

(5) 如果 $p$ 次闭形式 $\omega_1, \omega_2$ 与 $p$ 维闭链 $z_1, z_2$ 满足 $[\omega_1] = [\omega_2], [z_1] = [z_2]$, 那么

$$\int_{z_1} \omega_1 = \int_{z_2} \omega_2.$$

**证** (1) 因为 $\partial z = 0$, 所以由斯托克斯公式, $\int_z \mathrm{d}\omega = \int_{\partial z} \omega = 0$.

(2) 因为 $\mathrm{d}\omega = 0$, 所以由斯托克斯公式, $\int_{\partial c} \omega = \int_c \mathrm{d}\omega = 0$.

(3) 由 (2) 推知.

(4) 由 (1) 推知.

(5) 由 (3) 和 (4) 推知. □

**推论 1** 由公式 $(\omega, c) \mapsto \int_c \omega$ 给出的双线性映射 $\Omega^p(M) \times C_p(M) \to \mathbb{R}$, 诱导出双线性映射 $Z^p(M) \times Z_p(M) \to \mathbb{R}$ 及双线性映射 $H^p(M) \times H_p(M) \to \mathbb{R}$, 后者由公式

$$([\omega], [z]) \mapsto \int_z \omega \tag{10.3.9}$$

给出, 这里 $\omega \in Z^p(M), z \in Z_p(M)$.

**定理 3** (德拉姆[①]) 由公式 (10.3.9) 给出的双线性映射 $H^p(M) \times H_p(M) \to \mathbb{R}$ 是非退化的[②].

我们不去证明德拉姆定理, 只给出它的一些变形, 使它能够对于分析提供一些有用的推论.

① 德拉姆 (de Rham)(1903—1969)——瑞士数学家, 其基本工作在代数拓扑学方面.

② 双线性形式 $L(x, y)$ 叫做非退化的, 如果任意固定它的一个变量于非零值, 所得关于另一变量的线性形式不恒等于零.

首先注意, 根据 (10.3.9) 式, 每个上同调类 $[\omega] \in H^p(M)$, 可以解释成线性函数 $[\omega]([z]) = \int_z \omega$. 于是, 自然地产生了一个映射 $H^p(M) \to H_p^*(M)$, 这里 $H_p^*(M)$ 是 $H_p(M)$ 的共轭空间. 德拉姆定理断定, 这个映射是同构映射. 在这种意义下, $H^p(M) = H_p^*(M)$.

**定义 12**　如果 $\omega$ 是 $p$ 次闭形式, $z$ 是流形 $M$ 上的 $p$ 维闭链, 则称量 $\mathrm{per}(z) := \int_a \omega$ 为形式 $\omega$*在闭链* $z$ *上的周期*(或者叫做*闭链常数*).

特别地, 当闭链 $z$ 同调于零时, 则由定理 2 的断言 (2) 应推出 $\mathrm{per}(z) = 0$. 据此原因, 周期之间具有以下关系:

$$\left[\sum_k \alpha_k z_k\right] = 0 \Longrightarrow \sum_k \alpha_k \mathrm{per}(z_k) = 0. \tag{10.3.10}$$

这就是说, 如果闭链的线性组合构成边界闭链, 或者说它同调于零, 那么其相应周期的线性组合也等于零.

还有以下两个德拉姆定理, 它们合起来等价于定理 3.

**定理 4** (德拉姆第一定理)　闭形式为恰当形式的充要条件是它的所有周期都是零.

**定理 5** (德拉姆第二定理)　如果把流形 $M$ 上的每个 $p$ 闭链 $z \in Z_p(M)$ 对应于一个数 $\mathrm{per}(z)$, 且保持条件 (10.3.10), 则在 $M$ 上存在闭 $p$-形式 $\omega$, 使得对于任何闭链 $z \in Z_p(M)$, 有 $\int_z \omega = \mathrm{per}(z)$.

## 练　　习

1. 用直接计算验证例 2 中所得的形式 $\alpha$ 确实满足方程 $\mathrm{d}\alpha = \omega$.

2. (1) 试证: $\mathbb{R}^2$ 内的任何单连通域可收缩于一点.

(2) 试证: 对 $\mathbb{R}^3$ 来说, 上面的断言一般不成立.

3. 分析一下庞加莱定理的证明, 并证明: 如果把光滑映射 $h : M \times I \to M$ 看作一族依赖于参数 $t \in I$ 的映射 $h_t : M \to M$, 那么对于 $M$ 上的任何闭形式 $\omega$, 所有闭形式 $h_t^*\omega$, $t \in I$, 将属于同一个上同调类.

4. (1) 利用定理 4 直接证明: 如果球面 $S^2$ 上的闭 2-形式满足 $\int_{S^2} \omega = 0$, 则 $\omega$ 是恰当形式.

(2) 试证: 群 $H^2(S^2)$ 同构于 $\mathbb{R}$.

(3) 试证: $H^1(S^2) = 0$.

5. 求群 $H^0(M)$, $H^1(M)$, $H^2(M)$, 如果:

(1) $M = S^1$—— 圆周;

(2) $M = T^2$—— 二维环面;

(3) $M = K^2$—— 克莱因瓶.

# 第 11 章　向量分析与场论初步

## 11.1　向量分析的微分运算

### 11.1.1　数量场与向量场

在场论中研究那样的映射 $x \mapsto T(x)$, 其像 $T(x)$ 是所谓的张量. 当 $x$ 在区域 $D$ 上变化时, 就形成所谓 $D$ 上的一个张量场. 一般的张量理论是代数及微分几何中研究的对象. 本章考虑在许多应用分析数学的自然科学中起着重要作用的特殊张量场:

| | |
|---|---|
| *数量场* | $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$; |
| *向量场* | $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \mapsto V(x) \in T\mathbb{R}^n_x \approx \mathbb{R}^n$; |
| *$p$-次形式场* | $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \mapsto \omega(x) \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^n)^p, \mathbb{R})$. |

下面, 我们主要关心的是 $\mathbb{R}^3$ 中的数量场与向量场.

### 11.1.2　$\mathbb{R}^3$ 中的向量场与形式

—— *在 $\mathbb{R}^3$ 内.*

我们知道, 在具有数量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 每个线性函数 (1-形式) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 对应唯一的向量 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^3$, 其对应关系为 $A(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\xi} \rangle$.

若空间还是定向的, 则每个双线性函数 (2-形式) $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 对应唯一的 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^3$, 其对应关系为 $B(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ (后者表示 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 的混合积, 或说它是这些向量的体积形式的值).

故在定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 给定线性形式或双线性形式, 就等价于在 $\mathbb{R}^3$ 中给出相应的向量.

—— *在切空间 $TD_x$ 内.*

如果在 $\mathbb{R}^3$ 内有数量积, 则在任一切空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 中, 也以自然的方式产生出内积. 因此, 在 $T\mathbb{R}^3_x$ 内给出 1-形式 $\omega^1(x)$ 或 2-形式 $\omega^2(x)$, 等价于在 $T\mathbb{R}^3_x$ 内给出了与形式 $\omega^1(x)$ 对应的向量 $\boldsymbol{A}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, 或给出了与形式 $\omega^2(x)$ 对应的向量 $\boldsymbol{B}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$.

于是, 在 $\mathbb{R}^3$ 的区域 $D$ 内给出了 1-形式 $\omega^1$ 或 2-形式 $\omega^2$, 等价于在 $D$ 中给出与这些形式对应的向量场 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$. 明确地有

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{\xi} \rangle, \tag{11.1.1}$$

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2), \tag{11.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in TD_x$.

此前已见过向量场 $\boldsymbol{A}$ 的功形式 $\omega^1 = \omega^1_{\boldsymbol{A}}$, 及向量场 $\boldsymbol{B}$ 的流量形式 $\omega^2 = \omega^2_{\boldsymbol{B}}$.

数量场 $f : D \to \mathbb{R}$ 可用下述方法使 $D$ 内的 0-形式或 3-形式与之对应:

$$\omega^0_f = f, \tag{11.1.3}$$

$$\omega^3_f = f\mathrm{d}V, \tag{11.1.4}$$

其中 $\mathrm{d}V$ 是定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的体积元素 (体积形式).

**命题 1**　在笛卡儿坐标 $x^1, x^2, x^3$ 下, 可表示:

$$\omega^0_f = f, \tag{11.1.3$'$}$$

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A^1\mathrm{d}x^1 + A^2\mathrm{d}x^2 + A^3\mathrm{d}x^3, \tag{11.1.5}$$

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}} = B^1\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + B^2\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + B^3\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2, \tag{11.1.6}$$

$$\omega^3_\rho = \rho\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3. \tag{11.1.4$'$}$$

**证**　(11.1.3$'$) 和 (11.1.4$'$) 式是已知的.

据 (11.1.1) 式, $\omega^1_{\boldsymbol{A}}(x)(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum\limits_{i=1}^{3} A^i(x)\xi^i = \sum\limits_{i=1}^{3} A^i(x)\mathrm{d}x^i(\boldsymbol{\xi})$ 对一切 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ 成立, 即得 (11.1.5) 式.

又据 (11.1.2) 式, 对一切 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{R}^3$ 成立

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{vmatrix} B^1(x) & B^2(x) & B^3(x) \\ \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \end{vmatrix}$$

$$= (B^1(x)\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + B^2(x)\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + B^3(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2).$$

由此推出 (11.1.6) 式. □

根据对应关系 (11.1.1)—(11.1.4), 形式地运算有确定的向量场或数量场的运算与之对应.

下面用 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 内的向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的数量积与向量积.

**命题 2**　(1) 同次形式的线性组合, 对应于这些形式所对应的场的线性组合.

(2) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的向量场, 则有

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}_1} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{A}_2} = \omega^2_{\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2}, \tag{11.1.7}$$

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} \wedge \omega^2_{\boldsymbol{B}} = \omega^3_{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}. \tag{11.1.8}$$

**证**　(1) 以 1-形式为例, 成立

$$\alpha_1\omega^1_{\boldsymbol{A}_1} + \alpha_2\omega^1_{\boldsymbol{A}_2} = \alpha_1\langle \boldsymbol{A}_1, \cdot\rangle + \alpha_2\langle \boldsymbol{A}_2, \cdot\rangle$$

$$= \langle \alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2, \cdot\rangle = \omega^1_{\alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2}.$$

其他结论可类似地证明.

(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 内固定一个正交标准基底及与之相应的笛卡儿坐标 $x^1, x^2, x^3$. 考虑到 (11.1.5) 与 (11.1.6) 式就得到

$$\begin{aligned}\omega^1_{\boldsymbol{A}_1} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{A}_2} &= (A^1_1 \mathrm{d}x^1 + A^2_1 \mathrm{d}x^2 + A^3_1 \mathrm{d}x^3) \wedge (A^1_2 \mathrm{d}x^1 + A^2_2 \mathrm{d}x^2 + A^3_2 \mathrm{d}x^3) \\ &= (A^2_1 A^3_2 - A^3_1 A^2_2)\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + (A^3_1 A^1_2 - A^1_1 A^3_2)\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \\ &\quad + (A^1_1 A^2_2 - A^2_1 A^1_2)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 = \omega^2_{\boldsymbol{B}},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$.

类似地, 将 (11.1.5) 与 (11.1.6) 式相乘, 就得到

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} \wedge \omega^2_{\boldsymbol{B}} = (A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \omega^3_\rho.$$

在笛卡儿坐标下, $\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内的体积形式, 而在体积形式前面的括号里的内容, 是向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 位于定义域相应点 $x$ 处的向量 $\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(x)$ 的数量积. 比较 (11.1.4′)推知 $\rho(x) = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{B}(x)$. □

由命题 2 之 (1) 的证明可见, 可把 $\alpha_1$ 及 $\alpha_2$ 看成定义在给定的形式或场的定义域 $D$ 内的函数 (不必是常数). 命题 2 之 (2) 表示, 由场 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ 产生的 1-形式的外积, 有这些场的向量积 $\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$ 与之对应. 同样, 由向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别产生的 1-形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ 与 2-形式 $\omega^2_{\boldsymbol{B}}$ 的外积, 有这些场的数量积 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 与之对应.

### 11.1.3 微分算子 grad, rot, div 及 $\nabla$

**定义 1** 定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 0-形式 (函数)、1-形式、2-形式的外微分分别与求数量场的梯度 (grad)、向量场的旋度 (rot) 与散度 (div) 的运算相对应, 它们分别定义如下:

$$\mathrm{d}\omega^0_f =: \omega^1_{\mathrm{grad}f}, \tag{11.1.9}$$

$$\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}} =: \omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}, \tag{11.1.10}$$

$$\mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{B}} =: \omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}. \tag{11.1.11}$$

根据等式 (11.1.1)—(11.1.4) 建立的形式与 $\mathbb{R}^3$ 内的数量场及向量场之间的对应关系, 关系式 (11.1.9)—(11.1.11) 分别是作用于数量场及向量场的运算 grad, rot 及 div 的正确定义. 这些运算, 或通常说的场论中的算子, 都是作用于 (不同次数的) 形式的某个外微分运算.

**命题 3** 在 $\mathbb{R}^3$ 空间的笛卡儿坐标 $x^1, x^2, x^3$ 下:

$$\mathrm{grad}f = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \tag{11.1.9′}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_1\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2}-\frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right)+\boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3}-\frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right)+\boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1}-\frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)$$

$$\triangleq \text{(常写成)}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ A^1 & A^2 & A^3\end{vmatrix}, \tag{11.1.10′}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=\frac{\partial B^1}{\partial x^1}+\frac{\partial B^2}{\partial x^2}+\frac{\partial B^3}{\partial x^3}. \tag{11.1.11′}$$

这里 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内固定的正交标准基底.

**证**　因为

$$\omega^1_{\mathrm{grad}f}:=\mathrm{d}\omega^0_f=\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial f}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3,$$

所以由 (11.1.5) 得知 (11.1.9′) 成立.

因为

$$\begin{aligned}\omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}:=&\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{d}(A^1\mathrm{d}x^1+A^2\mathrm{d}x^2+A^3\mathrm{d}x^3)\\ =&\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2}-\frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3+\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3}-\frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right)\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1\\ &+\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1}-\frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2,\end{aligned}$$

所以由 (11.1.6) 式得知 (11.1.10′) 式成立.

另外, 因为

$$\begin{aligned}\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}:=&\mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\mathrm{d}(B^1\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3+B^2\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1+B^3\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2)\\ =&\left(\frac{\partial B^1}{\partial x^1}+\frac{\partial B^2}{\partial x^2}+\frac{\partial B^3}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3,\end{aligned}$$

所以由 (11.1.4′) 式推得 (11.1.11′) 式. □

由上面得到的公式 (11.1.9′)—(11.1.11′) 看到, grad, rot 与 div 都是线性微分运算 (算子). 算子 grad 定义在可微数量场上, 并把它们对应到向量场. 算子 rot 也是向量值的, 但它定义在可微向量场上. 算子 div 定义在可微向量场上, 但它的值域是数量场.

注意, 向量场 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 一般叫做 $\boldsymbol{A}$ 的*旋量*, $\boldsymbol{A}$ 的*旋量场*或*旋转量场*. 在最后这种情形, 有时代替记号 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 用记号 $\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$.

在数学物理文献中, 常用所谓哈密顿符号向量微分纳布拉算子 (哈密顿[①]算子)

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}. \tag{11.1.12}$$

若把 $\nabla$ 看成在笛卡儿坐标下给定的向量场, 则由 (11.1.12), (11.1.9′)—(11.1.11′) 式有

$$\mathrm{grad} f = \nabla f, \tag{11.1.13}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{11.1.14}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \nabla \cdot \boldsymbol{B}. \tag{11.1.15}$$

作为应用上边所考虑的算子的例子, 我们用这些算子写出著名的[②] 麦克斯韦方程组.

**例 1** (真空中电磁场的麦克斯韦方程组)

$$\begin{aligned} &(1)\ \mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \qquad (2)\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0; \\ &(3)\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \qquad (4)\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{11.1.16}$$

其中 $\rho(x,t)$ 是电荷密度 (单位体积中的电量), $\boldsymbol{j}(x,t)$ 是电流密度向量 (电荷通过单位面积之流动速度), $\boldsymbol{E}(x,t)$ 及 $\boldsymbol{B}(x,t)$ 分别是电场与磁场强度向量, $\varepsilon_0$ 及 $c$ 是有量纲的常数 (其中 $c$ 是真空中之光速).

**例 2** 利用算子 $\nabla$, 可将麦克斯韦方程组写成下面的形式:

$$\begin{aligned} &(1)\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \qquad (2)\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0; \\ &(3)\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \qquad (4)\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{11.1.16′}$$

### 11.1.4 向量分析的一些微分公式

利用前面建立的形式与数量场、向量场之间的对应, 可以得到向量分析的一系列基本微分公式. 例如, 我们有如下命题.

**命题 4** 以下诸关系式成立:

$$\mathrm{rot}(f\boldsymbol{A}) = f\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \mathrm{grad} f, \tag{11.1.17}$$

① 哈密顿 (W R Hamilton) (1805—1865)——著名的爱尔兰数学家及力学家, 他陈述了变分原理 (哈密顿原理), 创立了几何光学理论; 他还是四元数理论的创始人及向量分析的鼻祖 (顺便指出, 向量这个术语是他首先使用的).

② 关于这一点, 著名的美国现代物理学家费曼 (R. P. Feynman, 1918—1988) 在其物理讲义中以其特有的气质写道:"在人类历史中 (比如, 一万年内), 19 世纪最重要的事件无疑是麦克斯韦电磁定律之发现. 以这一重要科学发现为背景, 同一个十年内的美国国内战争, 就显得不过是一个很小的州际事件罢了".

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad} f + f\operatorname{div}\boldsymbol{A}, \tag{11.1.18}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}. \tag{11.1.19}$$

**证**　我们来验证最后这个等式:

$$\begin{aligned}\omega^3_{\operatorname{div}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}} &= \mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}} = \mathrm{d}(\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}}) = \mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}} - \omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{B}}\\ &= \omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}} - \omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{B}} = \omega^3_{\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}} - \omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}}\\ &= \omega^3_{\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}}.\end{aligned}$$

前两个式子可类似地去验证. 当然, 所有这些等式, 都能用关于坐标微分的办法直接验证. □

注意到, 如果对算子 grad, rot, div 中的任两个逐次实施运算将产生出二阶微分算子. 例如, $\Delta := \operatorname{div}\operatorname{grad}$, 称之为**拉普拉斯算子**①, 或**调和算子**. 由公式 (11.1.9′), (11.1.11′) 推知, 在 $\mathbb{R}^3$ 中以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为正交标准基的笛卡儿坐标下, 对任何数值函数 $f$,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^3)^2}; \tag{11.1.20}$$

而对任何向量场 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1A^1 + \boldsymbol{e}_2A^2 + \boldsymbol{e}_3A^3$ (规定),

$$\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1\Delta A^1 + \boldsymbol{e}_2\Delta A^2 + \boldsymbol{e}_3\Delta A^3. \tag{11.1.21}$$

**命题 5**　对于这些运算的组合形式成立以下诸等式:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \tag{11.1.22}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0, \tag{11.1.23}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}. \tag{11.1.24}$$

**证**　实际上, 利用 $\mathrm{d}^2\omega = 0$ 可得

$$\begin{aligned}\omega^2_{\operatorname{rot}\operatorname{grad} f} &= \mathrm{d}\omega^1_{\operatorname{grad} f} = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^0_f) = \mathrm{d}^2\omega^0_f = 0,\\ \mathrm{d}\omega^3_{\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}} &= \mathrm{d}\omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{A}} = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}) = \mathrm{d}^2\omega^1_{\boldsymbol{A}} = 0.\end{aligned}$$

最后可根据定义, 例如, 在笛卡儿坐标 $x,y,z$ 下验证 (11.1.24). 置 $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C} = \operatorname{rot}\boldsymbol{B}$, 则由 (11.1.10′) 可得

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

① 拉普拉斯 (P. S. Laplace)(1749—1827)——著名的法国天文学家、数学家及物理学家, 他在天体力学、概率的数学理论、实验物理及数学物理的发展中做出了重大贡献.

$$C_x = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}.$$

再令 $\hat{\boldsymbol{C}} = \operatorname{grad}\operatorname{div} A$, 则

$$\hat{C}_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}.$$

两式相减得

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_x - (\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A})_x = C_x - \hat{C}_x = -\Delta A_x.$$

类似地,

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_y - (\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A})_y = C_y - \hat{C}_y = -\Delta A_y.$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_z - (\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A})_z = C_z - \hat{C}_z = -\Delta A_z.$$

于是, $-\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} - \hat{\boldsymbol{C}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}$. □

注意, 在不必正交的坐标系中, 等式 (11.1.24) 可作为 $\Delta \boldsymbol{A}$ 的定义.

**命题 6** 利用向量代数的语言及 (11.1.13)—(11.1.15) 式, 前面提到的那些二阶算子都能用 $\nabla$ 表示出来:

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = 0, \\
\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0, \\
\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}), \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}), \\
\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f.
\end{gathered}$$

最后那个等式说明, 在哈密顿算子 $\nabla$ 与拉普拉斯算子 $\Delta$ 之间, 有一种简单关系: $\Delta = \nabla^2$.

### 11.1.5 曲线坐标下的向量运算

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在球坐标下的方程 $R = a$ 特别简单; 与此类似, $\mathbb{R}^3$ 中的向量场 $x \mapsto \boldsymbol{A}(x)$ 也常在某一坐标系中, 具有最简单的记法. 我们希望找到一个公式, 根据它, 能在足够广泛的一类曲线坐标下, 求出 grad, rot 及 div 的表达式.

为减少过多的麻烦, 本段总是假设 $\mathbb{R}^3$ 为 (定向) 欧氏空间, 具有数量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 和笛卡儿坐标系 $x = (x^1, x^2, x^3)$, 虽然涉及的某些结论对一般的向量空间也对.

1. 黎曼度量

设 $D$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域. 又设 $\mathbb{R}^3_t$ 是欧氏参数空间, 以 $t = (t^1, t^2, t^3)$ 记其坐标, 区域 $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$, $\varphi : D_t \to D$ 是微分同胚. 通过 $\varphi$, 每点 $x \in D$ 获得它的曲线坐标 $t : x = \varphi(t)$.

因为 $\varphi$ 是微分同胚, 所以切映射 $\varphi'(t): T\mathbb{R}^3_t \to T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ 是向量空间之间的同构. 空间 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的标准基底 $\boldsymbol{\xi}_1(t)=(1,0,0), \boldsymbol{\xi}_2(t)=(0,1,0), \boldsymbol{\xi}_3(t)=(0,0,1)$ 对应到空间 $T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ 中, 由坐标方向向量 $\boldsymbol{\xi}_i(x)=\varphi'(t)\boldsymbol{\xi}_i(t)=\dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t^i}, i=1,2,3$, 构成的基底. $T\mathbb{R}^3_x$ 中的任意向量 $\boldsymbol{A}(x)$ 关于这组基底的分解式

$$\boldsymbol{A}(x)=\alpha_1\boldsymbol{\xi}_1(x)+\alpha_2\boldsymbol{\xi}_2(x)+\alpha_3\boldsymbol{\xi}_3(x),$$

对应着向量 $\boldsymbol{A}(t)=(\varphi')^{-1}\boldsymbol{A}(x)$ 关于 $T\mathbb{R}^3_t$ 中的标准基底 $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \boldsymbol{\xi}_3(t)$ 的分解式

$$\boldsymbol{A}(t)=\alpha_1\boldsymbol{\xi}_1(t)+\alpha_2\boldsymbol{\xi}_2(t)+\alpha_3\boldsymbol{\xi}_3(t).$$

注意, 一般来说, $\langle\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_i\rangle(x)\neq 1$, 所以空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 中的基底 $\boldsymbol{\xi}_1(x), \boldsymbol{\xi}_2(x), \boldsymbol{\xi}_3(x)$, 虽然是由坐标方向向量组成的, 却未必是由单位向量组成. 于是在 $T\mathbb{R}^3_t$ 引进所谓的黎曼度量: $\forall\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2\in T\mathbb{R}^3_t$, 令

$$\langle\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2\rangle_t:=\langle\varphi'\boldsymbol{\tau}_1,\varphi'\boldsymbol{\tau}_2\rangle=\sum_{i,j}\langle\partial_i\varphi,\partial_j\varphi\rangle\tau_1^i\tau_2^j=\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t^i},\frac{\partial\varphi}{\partial t^j}\right\rangle\tau_1^i\tau_2^j.$$

由此即可把 $T\mathbb{R}^3_x$ 的欧氏结构转移于 $T\mathbb{R}^3_t$ 中. 事实上, 它产生向量长的平方的表达式:

$$\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}\rangle_t=\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t^i},\frac{\partial\varphi}{\partial t^j}\right\rangle(t)\tau^i\tau^j=\langle\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j\rangle(x)\tau^i\tau^j=g_{ij}(t)\mathrm{d}t^i(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}t^j(\boldsymbol{\tau}).$$

其中, 二次形式

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}(t)\mathrm{d}t^i\mathrm{d}t^j \tag{11.1.25}$$

的系数 $g_{ij}(t)=\langle\partial_i\varphi,\partial_j\varphi\rangle(t)=\langle\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j\rangle(x)$ 是标准基底向量的两两数量积, 并且它完全确定了 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的数量积.

如果在某区域 $D_t\subset\mathbb{R}^3_t$ 内的每一点上给出了这个形式, 就说在这区域上给出了**黎曼度量**. 依旧是在空间 $\mathbb{R}^3_t$ 的直线坐标 $t^1,t^2,t^3$ 下, 黎曼度量能在每个切空间 $T\mathbb{R}^3_t(t\in D_t)$ 内引入自己的欧氏结构, 它对应于区域 $D_t$ 向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的 "弯曲" 嵌入 $\varphi: D_t\to D$.

如果向量 $\boldsymbol{\xi}_i(x)\,(i=1,2,3)$ 在 $T\mathbb{R}^3_x$ 内正交, 则当 $i\neq j$ 时, $g_{ij}(t)=0$. 就说我们遇到的是**三正交坐标网**. 这就表示, 作为标准基底的向量 $\boldsymbol{\xi}_i(t)(i=1,2,3)$, 按 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的数量积二次型 (11.1.25) 的意义, 是正交的. 为了简单, 后面我们将只讨论三正交曲线坐标系.

对于三正交曲线坐标系, 二次形式 (11.1.25) 具有下面特定的形式:

$$\mathrm{d}s^2=E_1(t)(\mathrm{d}t^1)^2+E_2(t)(\mathrm{d}t^2)^2+E_3(t)(\mathrm{d}t^3)^2, \tag{11.1.26}$$

其中 $E_i(t)=g_{ii}(t), i=1,2,3$.

**例 3** 在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的笛卡儿坐标 $(x,y,z)$、柱坐标 $(r,\varphi,z)$ 及球坐标 $(R,\varphi,\theta)$ 下, 二次形式 (11.1.25) 分别为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2 && (11.1.26') \\ &= \mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2 && (11.1.26'') \\ &= \mathrm{d}R^2+R^2\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+R^2\mathrm{d}\theta^2. && (11.1.26''') \end{aligned}$$

因此, 这三种坐标系在各自的定义域内都是三正交坐标系.

$T\mathbb{R}^3_t$ 内的标准基底 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 的向量 $\boldsymbol{\xi}_1(t),\boldsymbol{\xi}_2(t),\boldsymbol{\xi}_3(t)$, 与它们对应的向量 $\boldsymbol{\xi}_i(x)\in T\mathbb{R}^3_x$ 一样, 具有模[①] $|\boldsymbol{\xi}_i|=\sqrt{g_{ii}}$. 因此, 坐标方向的单位向量 (即按向量内积意义下的单位向量) 在三正交系 (11.1.26) 下, 在 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的坐标表示为

$$\boldsymbol{e}_1(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}},0,0\right),\quad \boldsymbol{e}_2(t)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{E_2}},0\right),\quad \boldsymbol{e}_3(t)=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{E_3}}\right). \tag{11.1.27}$$

**例 4** 由公式 (11.1.27) 及例 3 的结果可知, 对于笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系, 三个坐标方向的单位向量分别为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_x=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_y=(0,1,0),\quad \boldsymbol{e}_z=(0,0,1), && (11.1.27') \\ &\boldsymbol{e}_r=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_\varphi=\left(0,\frac{1}{r},0\right),\quad \boldsymbol{e}_z=(0,0,1), && (11.1.27'') \\ &\boldsymbol{e}_R=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_\varphi=\left(0,\frac{1}{R\cos\theta},0\right),\quad \boldsymbol{e}_\theta=\left(0,0,\frac{1}{R}\right). && (11.1.27''') \end{aligned}$$

由于向量场是关于沿坐标方向的单位向量所构成的基底来分解的, 因此, 与向量 $\boldsymbol{A}(x)\in T\mathbb{R}^3_x$ 对应的向量场 $\boldsymbol{A}(t)\in T\mathbb{R}^3_t$, 不应按标准基底 $\boldsymbol{\xi}_1(t),\boldsymbol{\xi}_2(t),\boldsymbol{\xi}_3(t)$ 来分解, 而是按照单位坐标方向向量组成的基底 $\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t)$ 来分解.

这样, 脱离原来的空间 $\mathbb{R}^3$, 可以认为在区域 $D_t\subset\mathbb{R}^3_t$ 内给定了黎曼度量 (11.1.25) 或 (11.1.26) 及向量场 $t\to\boldsymbol{A}(t)$, 此场在每点 $t\in D_t$ 处的坐标表示为 $(A^1,A^2,A^3)(t)$, 即 $\boldsymbol{A}(t)=A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$.

2. 曲线坐标下的运算

在微分同胚 $\varphi: D_t\to D$ 下, $D$ 内的任何形式转移到了区域 $D_t$ 内. 这一转移发生于每个点 $x\in D$ 处, 从空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 到空间 $T\mathbb{R}^3_t$ 内. 因为我们已把 $T\mathbb{R}^3_x$ 的欧氏结构转移到 $T\mathbb{R}^3_t$ 内, 从而把 $T\mathbb{R}^3_x$ 中的形式与向量的对应转移到了 $T\mathbb{R}^3_t$ 上. 于是以

① 在正交系 (11.1.26) 内, $|\boldsymbol{\xi}_i|=\sqrt{E_i}=H_i, i=1,2,3$. $H_1,H_2,H_3$ 通常叫做拉梅系数或拉梅参数. 拉梅 (G. Lamé) (1795—1870) 是法国工程师、数学家、物理学家.

后的讨论就可以只在 $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$ 中进行了，认为在 $D_t$ 内给定了黎曼度量 (11.1.25)，给定了数量场 $f, \rho$ 及向量场 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，以及形式 $\omega^0_f, \omega^1_{\boldsymbol{A}}, \omega^2_{\boldsymbol{B}}, \omega^3_\rho$，它们在每点 $t \in D_t$ 处，由所给的黎曼度量给出的 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的欧氏结构来确定.

**例 5**　如我们所知 (10.2 节的 (10.2.13), (10.2.14) 式)，在曲线坐标 $t^1, t^2, t^3$ 下的体积形式 $\mathrm{d}V$ 具有以下形式

$$\mathrm{d}V = \sqrt{\det g_{ij}}(t)\mathrm{d}t^1 \wedge \mathrm{d}t^2 \wedge \mathrm{d}t^3.$$

对于三正交坐标系，有

$$\mathrm{d}V = \sqrt{E_1\, E_2\, E_3}(t)\mathrm{d}t^1 \wedge \mathrm{d}t^2 \wedge \mathrm{d}t^3. \tag{11.1.28}$$

特别地，对于笛卡儿坐标、柱坐标、球坐标，分别有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z && (11.1.28') \\ &= r\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}z && (11.1.28'') \\ &= R^2 \cos\theta \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\theta. && (11.1.28''') \end{aligned}$$

标量在各种曲线坐标系下都能写成形式 $\omega^3_\rho = \rho \mathrm{d}V$.

- 现在我们面对如下的问题：已知向量 $\boldsymbol{A}(t) \in T\mathbb{R}^3_t$ 沿单位向量 $\boldsymbol{e}_i(t) \in T\mathbb{R}^3_t$ 的分解 $\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$，要求形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}(t)$ 及 $\omega^2_{\boldsymbol{A}}(t)$ 分别按标准 1-形式 $\mathrm{d}t^i$ 及 2-形式 $\mathrm{d}t^i \wedge \mathrm{d}t^j$ 的分解，其中 $\boldsymbol{e}_i(t)(i = 1, 2, 3)$ 是用黎曼度量 (11.1.26) 确定的三正交坐标系的坐标方向单位向量.

因为所有的讨论都是对于任意但固定的点 $t$ 进行的，所以，为简单计，把标志所研究的向量和形式都是属于 $t$ 点处的切空间的符号 $t$ 省略.

因此 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是 $T\mathbb{R}^3_t$ 内由坐标方向的单位向量 (11.1.27) 组成的基底，$\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ 是向量 $\boldsymbol{A} \in T\mathbb{R}^3_t$ 关于此基底的分解式.

首先，我们注意到，由公式 (11.1.27) 可得

$$\mathrm{d}t^j(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}\delta^i_j, \quad \text{其中 } \delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{11.1.29}$$

$$\mathrm{d}t^i \wedge \mathrm{d}t^j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{E_i E_j}}\delta^{ij}_{kl}, \quad \text{其中 } \delta^{ij}_{kl} = \begin{cases} 0, & (i,j) \neq (k,l), \\ 1, & (i,j) = (k,l). \end{cases} \tag{11.1.30}$$

- 因此，如果 $\omega^1_{\boldsymbol{A}} := \langle \boldsymbol{A}, \cdot \rangle = a_1\mathrm{d}t^1 + a_2\mathrm{d}t^2 + a_3\mathrm{d}t^3$，则一方面有

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{e}_i) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_i \rangle = A^i;$$

另一方面, 由 (11.1.29) 式可知

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{e}_i) = (a_1\mathrm{d}t^1 + a_2\mathrm{d}t^2 + a_3\mathrm{d}t^3)(\boldsymbol{e}_i) = a_i \cdot \frac{1}{\sqrt{E_i}},$$

从而 $a_i = A^i\sqrt{E_i}$. 于是我们找到了与向量 $\boldsymbol{A}$ 的分解式

$$\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$$

相对应的形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ 的分解式

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A^1\sqrt{E_1}\mathrm{d}t^1 + A^2\sqrt{E_2}\mathrm{d}t^2 + A^3\sqrt{E_3}\mathrm{d}t^3. \tag{11.1.31}$$

**例 6** 因为在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z\\ &= A_r\boldsymbol{e}_r + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_z\boldsymbol{e}_z\\ &= A_R\boldsymbol{e}_R + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta,\end{aligned}$$

所以从例 4 的结果推知

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z \tag{11.1.31$'$}$$

$$= A_r\mathrm{d}r + A_\varphi r\mathrm{d}\varphi + A_z\mathrm{d}z \tag{11.1.31$''$}$$

$$= A_R\mathrm{d}R + A_\varphi R\cos\theta\mathrm{d}\varphi + A_\theta R\mathrm{d}\theta. \tag{11.1.31$'''$}$$

- 今设 $\boldsymbol{B} = B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3$, 而

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}} = b_1\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3 + b_2\mathrm{d}t^3\wedge\mathrm{d}t^1 + b_3\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2.$$

这时, 一方面有

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) &:= \mathrm{d}V(\boldsymbol{B},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\\ &= \sum_{i=1}^{3} B^i\mathrm{d}V(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = B^1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = B^1,\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}V$ 为 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的体积形式 (参看 (11.1.27) 与 (11.1.28) 式).

另一方面, 由 (11.1.30) 式得

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) &= (b_1\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3 + b_2\mathrm{d}t^3\wedge\mathrm{d}t^1 + b_3\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2)(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\\ &= b_1\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = \frac{b_1}{\sqrt{E_2E_3}}.\end{aligned}$$

比较所得结果即知 $b_1 = B^1\sqrt{E_2E_3}$. 类似地可推知

$$b_2 = B^2\sqrt{E_3E_1}, \quad b_3 = B^3\sqrt{E_1E_2}.$$

这样, 我们求出了与向量 $\boldsymbol{B} = B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3$ 相应的形式 $\omega^2_{\boldsymbol{B}}$ 的坐标表示式

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{B}} &= B^1\sqrt{E_2E_3}\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3 + B^2\sqrt{E_3E_1}\mathrm{d}t^3\wedge\mathrm{d}t^1 + B^3\sqrt{E_1E_2}\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2\\ &= \sqrt{E_1E_2E_3}\left(\frac{B^1}{\sqrt{E_1}}\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3 + \frac{B^2}{\sqrt{E_2}}\mathrm{d}t^3\wedge\mathrm{d}t^1 + \frac{B^3}{\sqrt{E_3}}\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2\right). \qquad (11.1.32)\end{aligned}$$

**例 7**　利用例 6 中引入的记法及公式 (11.1.26′), (11.1.26″), (11.1.26‴), 在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别得到

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{B}} &= B_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + B_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + B_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y &(11.1.32')\\ &= B_r r\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}z + B_\varphi\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}r + B_z r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi &(11.1.32'')\\ &= B_R R^2\cos\theta\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta + B_\varphi R\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}R + B_\theta R\cos\theta\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}\varphi. &(11.1.32''')\end{aligned}$$

- 此外, 根据公式 (11.1.28), 还能得到

$$\omega^3_\rho = \rho\sqrt{E_1\,E_2\,E_3}\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3. \qquad (11.1.33)$$

**例 8**　特别地, 公式 (11.1.33) 在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别有

$$\begin{aligned}\omega^3_\rho &= \rho\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &(11.1.33')\\ &= \rho r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}z &(11.1.33'')\\ &= \rho R^2\cos\theta\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta. &(11.1.33''')\end{aligned}$$

现在, 既已得到公式 (11.1.31)—(11.1.33), 从算子 grad, rot 及 div 的定义 (11.1.9)—(11.1.11) 出发, 就能容易地得出它们在三正交曲线坐标系下的坐标表示式.

设 $\mathrm{grad}f = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$. 根据定义得到

$$\omega^1_{\mathrm{grad}f} := \mathrm{d}\omega^0_f := \mathrm{d}f := \frac{\partial f}{\partial t^1}\mathrm{d}t^1 + \frac{\partial f}{\partial t^2}\mathrm{d}t^2 + \frac{\partial f}{\partial t^3}\mathrm{d}t^3.$$

根据公式 (11.1.31), 由此得到

$$\mathrm{grad}f = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\boldsymbol{e}_3. \qquad (11.1.34)$$

**例 9** 在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别得到

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}f =&\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z &(11.1.34')\\ =&\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z &(11.1.34'')\\ =&\frac{\partial f}{\partial R}\boldsymbol{e}_R+\frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta. &(11.1.34''')\end{aligned}$$

给定场 $\boldsymbol{A}(t)=(A^1\boldsymbol{e}_1+A^2\boldsymbol{e}_2+A^3\boldsymbol{e}_3)(t)$, 我们来求旋量场

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{B}(t)=(B^1\boldsymbol{e}_1+B^2\boldsymbol{e}_2+B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$$

的坐标 $B^1,B^2,B^3$.

从定义 (11.1.10) 及公式 (11.1.31) 出发得到

$$\begin{aligned}\omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}:=&\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{d}(A^1\sqrt{E_1}\mathrm{d}t^1+A^2\sqrt{E_2}\mathrm{d}t^2+A^3\sqrt{E_3}\mathrm{d}t^3)\\ =&\left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2}-\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right)\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3\\ &+\left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3}-\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right)\mathrm{d}t^3\wedge\mathrm{d}t^1\\ &+\left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1}-\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2.\end{aligned}$$

据 (11.1.32) 式得

$$\begin{aligned}B^1=&\frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2}-\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right),\\ B^2=&\frac{1}{\sqrt{E_3E_1}}\left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3}-\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right),\\ B^3=&\frac{1}{\sqrt{E_1E_2}}\left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1}-\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right),\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix}\sqrt{E_1}\boldsymbol{e}_1 & \sqrt{E_2}\boldsymbol{e}_2 & \sqrt{E_1}\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial t^1} & \dfrac{\partial}{\partial t^2} & \dfrac{\partial}{\partial t^3}\\ \sqrt{E_1}A^1 & \sqrt{E_2}A^2 & \sqrt{E_3}A^3\end{vmatrix}. \tag{11.1.35}$$

**例 10** 在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别有

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=&\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z &(11.1.35')\\ =&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial rA_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z &(11.1.35'')\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi \cos\theta}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial R A_\theta}{\partial R}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial R A_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{11.1.35'''}$$

• 今设给定了场 $\boldsymbol{B}(t) = (B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$. 要求 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}$ 的表示式.

根据定义 (11.1.11) 及公式 (11.1.32), 我们得到

$$\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}} := \mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{B}} = \mathrm{d}(B^1\sqrt{E_2E_3}\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3 + B^2\sqrt{E_3E_1}\mathrm{d}t^3\wedge\mathrm{d}t^1 + B^3\sqrt{E_1E_2}\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2)$$
$$= \left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}B^1}{\partial t^1} + \frac{\partial\sqrt{E_3E_1}B^2}{\partial t^2} + \frac{\partial\sqrt{E_1E_2}B^3}{\partial t^3}\right)\mathrm{d}t^1\wedge\mathrm{d}t^2\wedge\mathrm{d}t^3.$$

据公式 (11.1.33) 推知

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}B^1}{\partial t^1} + \frac{\partial\sqrt{E_3E_1}B^2}{\partial t^2} + \frac{\partial\sqrt{E_1E_2}B^3}{\partial t^3}\right). \tag{11.1.36}$$

由此, 在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{11.1.36'}$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{11.1.36''}$$
$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial R^2\cos\theta B_R}{\partial R} + \frac{\partial R B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R\cos\theta B_\theta}{\partial \theta}\right). \tag{11.1.36'''}$$

• 可利用 (11.1.34), (11.1.36) 式求拉普拉斯算子 $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ 在任何三正交坐标系下的表示式:

$$\Delta f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} f = \mathrm{div}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\boldsymbol{e}_3\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{\frac{E_2E_3}{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\right) + \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{\frac{E_3E_1}{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{\frac{E_1E_2}{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\right)\right). \tag{11.1.37}$$

**例 11**　特别地, 根据公式 (11.1.37), 在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别有

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{11.1.37'}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{11.1.37''}$$

$$=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial f}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{R^2\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right). \qquad (11.1.37''')$$

## 练　习

1. 算子 grad, rot, div 及代数运算. 验证以下各式, 并用符号 grad, rot, div 把它们表出.

关于 grad:

(1) $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$;

(2) $\nabla(f\cdot g)=f\nabla g+g\nabla f$;

(3) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$;

(4) $\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$.

关于 rot:

(5) $\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla f\times\boldsymbol{A}$;

(6) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$.

关于 div:

(7) $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=\nabla f\cdot\boldsymbol{A}+f\nabla\cdot\boldsymbol{A}$;

(8) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$.

提示: $\boldsymbol{A}\cdot\nabla=A^1\frac{\partial}{\partial x^1}+A^2\frac{\partial}{\partial x^2}+A^3\frac{\partial}{\partial x^3}$, $\boldsymbol{B}\cdot\nabla\neq\nabla\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$.

2. (1) 将命题 6 中 5 个等式左端内的算子用笛卡儿坐标写出.

(2) 用直接计算的方法验证 (11.1.22) 及 (11.1.23) 式.

(3) 用算子 $\nabla$ 写出公式 (11.1.24), 并用向量代数验证它.

3. 试在: (1) 笛卡儿坐标下, (2) 柱坐标下, (3) 球坐标下分别写出场 $\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(4) 设场 $\boldsymbol{A}$ 如上, 试求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 及 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

4. 设函数 $f$ 在柱坐标下有 $\ln\frac{1}{r}$ 的形式. 试分别在: (1) 笛卡儿坐标下, (2) 柱坐标下, (3) 球坐标下, 写出场 $\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}f$.

(4) 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 及 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

5. 设空间 $\mathbb{R}^3$ 做为刚体, 绕某轴以不变的角速度 $\omega$ 旋转. 设 $\boldsymbol{v}$ 是在固定的瞬间, 点的线速度场.

(1) 在柱坐标下写出场 $\boldsymbol{v}$.

(2) 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$.

(3) 指出场 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 关于旋转轴的方向.

(4) 验证: 在空间的任何点处, $|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}|=2\omega$.

(5) 说明 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 的几何意义及 (4) 中揭示出的这个向量在空间每一点是常向量这一性质的几何意义.

6. 在固定的切空间 $T\mathbb{R}^3_p$, $p\in\mathbb{R}^3$, 试求当从 $\mathbb{R}^3$ 内的笛卡儿坐标系变到: (1) 柱坐标, (2) 球坐标, (3) 任意三正交坐标系时的坐标变换的公式.

(4) 应用 (3) 中所得公式及公式 (11.1.34)—(11.1.37), 直接验证向量场 $\mathrm{grad}f$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 及数量场 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$, $\Delta f$ 关于为计算它们选取的坐标系是不变的.

## 11.2　场论的积分公式

### 11.2.1　用向量表示的经典积分公式

1. 形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}, \omega^2_{\boldsymbol{B}}$ 的向量写法

在 10.2.5 小节的例 5 和例 6, 我们已经看到, 场 $\boldsymbol{F}$ 的功形式 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ 在有向光滑曲线 (路径)$\gamma$ 上的限制, 或场 $\boldsymbol{V}$ 的流量形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 在定向曲面 $S$ 上的限制分别是

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}|_\gamma = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}\rangle \mathrm{d}s, \quad \omega^2_{\boldsymbol{V}}|_S = \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}\sigma,$$

这里 $\boldsymbol{e}$ 是确定 $\gamma$ 方向的单位向量, 与沿 $\gamma$ 运动的速度向量共向, $\mathrm{d}s$ 是 $\gamma$ 上的长度元素 (形式), $\boldsymbol{n}$ 是确定曲面 $S$ 的方向的单位法线向量, 而 $\mathrm{d}\sigma$ 是曲面 $S$ 的面积元素 (形式).

在向量分析中, 常用曲线长向量元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} := \boldsymbol{e}\mathrm{d}s$ 及曲面面积向量元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$:

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}|_\gamma = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}\rangle \mathrm{d}s = \langle \boldsymbol{A}, \mathrm{d}\boldsymbol{s}\rangle = \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{11.2.1}$$

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}|_S = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}\sigma = \langle \boldsymbol{B}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\rangle = \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{11.2.2}$$

2. 牛顿–莱布尼茨公式

设 $f \in C^{(1)}(D;\mathbb{R})$, 而 $\gamma : [a,b] \to D$ 是区域 $D$ 中的道路. 将斯托克斯公式用于 0-形式 $\omega^0_f$

$$\int_{\partial\gamma} \omega^0_f = \int_\gamma \mathrm{d}\omega^0_f,$$

一方面它表示的是等式

$$\int_{\partial\gamma} f = \int_\gamma \mathrm{d}f,$$

这公式与古典的牛顿–莱布尼茨公式

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \mathrm{d}f(\gamma(t))$$

一致, 另一方面, 据梯度的定义, 它又意味着

$$\int_{\partial\gamma} \omega^0_f = \int_\gamma \omega^1_{\mathrm{grad}f}. \tag{11.2.3}$$

因此, 利用 (11.2.1) 式, 即可把牛顿–莱布尼茨公式重新写成

$$\boxed{f(\gamma(b))-f(\gamma(a))=\int_{\gamma}(\mathrm{grad}f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}} \tag{11.2.3'}$$

的形式. 在这样的写法下, 它表示:

函数在道路上的增长, 等于此函数的梯度场沿该道路做的功.

从此记法可明显看出: 梯度场 $\mathrm{grad}f$ 沿路径 $\gamma$ 所做的功只与路径的起点、终点有关; 当沿函数 $f$ 的等值面 $f=c$ 运动时, 场 $\mathrm{grad}f$ 不做任何的功, 因为这时 $\mathrm{grad}f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$; 场 $\mathrm{grad}f$ 所做的功, 与其说与路径的起点与终点有关, 倒不如说与这些点在 $f$ 的哪些等值面上有关.

3. 斯托克斯公式

通常称场在闭路上做的功为场在该闭路上的环流量. 为了强调积分是沿闭路进行的, 常常用 $\oint_{\gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 代替传统的记法 $\int_{\gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$. 有时在谈到沿有限多个闭路组成的路径积分时, 也使用环流量这个词. 例如, 在沿某个带边紧曲面的边界积分时, 就使用这个术语.

设 $\boldsymbol{A}$ 是定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的区域 $D$ 内的光滑向量场, 而 $S$ 是 $D$ 中有边 (分片) 光滑定向紧曲面, 将斯托克斯公式应用于 1-形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$, 并考虑到向量场旋度的定义, 就得到等式

$$\int_{\partial S}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=\int_{S}\omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}. \tag{11.2.4}$$

利用关系式 (11.2.2), 即把公式 (11.2.4) 改写为经典形式的斯托克斯公式

$$\boxed{\oint_{\partial S}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{S}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}} \tag{11.2.4'}$$

(在 $\partial S$ 上选与 $S$ 的定向和谐的定向). 这种写法表示:

向量场在曲面边界上的环流量, 等于此场的旋量通过该曲面的流量.

4. 高斯–奥斯特罗格拉德茨基公式

设 $V$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的紧区域, 其边界 $\partial V$ 是有界 (分片) 光滑曲面. 若 $\boldsymbol{B}$ 是 $V$ 的光滑场, 则根据场的散度的定义 $\mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}$, 斯托克斯公式就给出了等式

$$\int_{\partial V}\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\int_{V}\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}. \tag{11.2.5}$$

借助 (11.2.2) 式, 并用 $\mathbb{R}^3$ 中的体积形式 $\mathrm{d}V$ 取代形式 $\omega_\rho^3$ 的记法 $\rho\mathrm{d}V$, 可把等式 (11.2.5) 改写成经典的高–奥公式的形式

$$\boxed{\iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V.} \tag{11.2.5′}$$

在这种写法下, 它表示的是

向量场通过区域边界的流量, 等于此场的散度在该区域的积分.

5. 经典积分公式摘要

我们把分析的三个经典积分公式的向量写法总结如下:

$$\int_{\partial\gamma} f = \int_{\gamma} (\nabla f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad (\text{牛顿–莱布尼茨公式}), \tag{11.2.3″}$$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{S} (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{斯托克斯公式}), \tag{11.2.4″}$$

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{V} (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V \quad (\text{高–奥公式}). \tag{11.2.5″}$$

**注 1**　关于 div, rot, grad 有如下一些物理解释.

• div —— 散度. 考虑向量场 $\boldsymbol{B}:\mathbb{R}^3\supset D\to\mathbb{R}^3$. 任给 $x\in D$, 取以 $x$ 为心、$d$ 为半径的球 $V(x)$, 令 $m(V(x))$ 记其体积. 根据三重积分的中值定理, 得

$$\iint\limits_{\partial V(x)} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{div}\boldsymbol{B}(x')m(V(x)),$$

其中 $x'$ 是邻域 $V(x)$ 的某个点. 如果 $d\to 0$, 则 $x'\to x$, 从而当 $\boldsymbol{B}$ 光滑时, 有 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}(x')\to\mathrm{div}\boldsymbol{B}(x)$. 这就是说

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}(x) = \lim_{d\to 0} \frac{\displaystyle\iint\limits_{\partial V(x)} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{m(V(x))}. \tag{11.2.6}$$

当 $\boldsymbol{B}$ 是 (液体或气体的) 流速场时, 根据质量守恒定律, 场通过区域 $V(x)$ 的边界的流量 (或者说, 介质通过此区域边界的体积扩散量), 产生于区域内存在的汇或源 (其中包括介质密度的变化), 且其量等于所有这些因素的强度之和. (11.2.6) 式右端的分数是源在区域 $V(x)$ 中 (单位体积) 的平均强度, 而这个量的极限, 即 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}(x)$ 是在点 $x$ 处源的单位体积的强度, 通常称它做该量在这点处的密度, 而密度作为点的函数, 通常叫做该量在空间给定部分上的分布密度. 因此, 向量场 $\boldsymbol{B}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}$ 可解释为源在流动的区域内的分布密度.

• rot —— 旋量. 我们知道, 空间的任何线性变换都是由在三个互相正交方向的伸缩、空间作为刚体的平移, 以及空间作为刚体的旋转 (三种变换) 复合而成的变换. 任何的旋转可作为绕某个轴的旋转而实现. 介质的任何光滑变形 (液体或气体的流动、泥土坍塌或钢条的弯曲) 都是局部线性的. 从而可得到一个结论: 若有描写介质运动的向量场 (介质质点速度场), 则这个场在每个点的旋度给出点的邻域旋转的瞬时轴、绕瞬时轴旋转的瞬时角速度的大小及旋转的方向. 就是说, 旋量完全刻画了介质运动的旋转部分.

• grad —— 梯度. 关于数量场的梯度, 此前已经讲得足够详细了, 这里只提一下要点. 因为 $\omega^1_{\mathrm{grad}f}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathrm{grad}f, \boldsymbol{\xi}\rangle = \mathrm{d}f(\boldsymbol{\xi}) = D_{\boldsymbol{\xi}}(f)$, 这里 $D_{\boldsymbol{\xi}}(f)$ 是函数 $f$ 沿向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的微分, 所以向量 $\mathrm{grad}f$ 与函数 $f$ 的等值面正交. 它指示出在每个点处函数值增长最快的方向, 而它的值 $|\mathrm{grad}f|$ 给出了这一增长 (相对于用以度量自变元在空间中的位移的单位长度) 的速度.

### 11.2.2 一些进一步的积分公式

1. 高–奥公式的向量形式

将旋量与梯度解释成某种密度, 类似于将散度解释为密度 (参看 (11.2.6) 式), 能从下面与高–奥公式有关的经典向量分析公式得到

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \quad (\text{散度定理}), \tag{11.2.7}$$

$$\int_V \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{A} \quad (\text{旋度定理}), \tag{11.2.8}$$

$$\int_V \nabla f\mathrm{d}V = \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} f \quad (\text{梯度定理}), \tag{11.2.9}$$

其中第一个公式 (除记号不同外) 与等式 (11.2.5′) 一致, 从而它就是高–奥公式. 将公式 (11.2.7) 用于公式 (11.2.8) 与 (11.2.9) 中相应向量场的每个分量上, 就得出公式 (11.2.8) 与 (11.2.9).

保留等式 (11.2.6) 中的那些记号 $V(x), m(V(x)), d$ 等, 从公式 (11.2.7)—(11.2.9) 用同一方式得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x) = \lim_{d\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\partial V(x)}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}}{m(V(x))}, \tag{11.2.6′}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(x) = \lim_{d\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\partial V(x)}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{A}}{m(V(x))}, \tag{11.2.10}$$

$$\nabla f(x)=\lim_{d\to 0}\frac{\int_{\partial V(x)}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} f}{m(V(x))}. \tag{11.2.11}$$

等式 (11.2.7)—(11.2.9) 的右边, 可分别解释为: 向量场 $\boldsymbol{B}$ 通过区域 $V$ 的界面 $\partial V$ 的标量流, 向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过 $\partial V$ 的向量流, 及数量场 $f$ 通过 $\partial V$ 的向量流. 这时位于 (11.2.6′), (11.2.10), (11.2.11) 式左边的量 $\mathrm{div}\boldsymbol{B},\mathrm{rot}\boldsymbol{A},\mathrm{grad}f$, 可分别解释为相应的这些场源的分布密度.

注意, (11.2.6′), (11.2.10), (11.2.11) 诸式右边与坐标系无关. 由此又重新推出了梯度、旋度与散度的不变性.

2. 斯托克斯公式的向量形式

公式 (11.2.7)—(11.2.9) 是高-奥公式与向量场及标量场上的代数运算相结合而得的结果. 类似地, 将这些运算与经典的斯托克斯公式 (下面三公式中的第一个) 结合起来就得到下面的三个公式.

设 $S$ 是 (分片) 光滑的紧定向曲面, $\partial S$ 是它的具和谐定向的边界, $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是曲面 $S$ 上的面积向量元素, $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是 $\partial S$ 上的长度向量元素. 这时, 对于光滑场 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},f$, 成立以下关系

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\int_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{11.2.12}$$

$$\int_S(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}=\int_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}, \tag{11.2.13}$$

$$\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla f=\int_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{s}f. \tag{11.2.14}$$

公式 (11.2.13), (11.2.14) 从斯托克斯公式 (11.2.12) 推出, 这里略去它们的证明.

3. 格林公式

设 $S$ 是某个曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 $S$ 的单位法向量, 则函数 $f$ 沿向量 $\boldsymbol{n}$ 的导数 $D_{\boldsymbol{n}}f$ 在场论中经常用符号 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ 表示. 例如

$$\langle\nabla f,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\rangle=\langle\nabla f,\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}\sigma=\langle\mathrm{grad}f,\boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}\sigma=D_{\boldsymbol{n}}f\mathrm{d}\sigma=\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma.$$

因此, $\dfrac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$ 是梯度场 $\mathrm{grad}f$ 通过面元素 $\mathrm{d}\sigma$ 的流量.

利用这些记号可将在向量分析与场论中有相当广泛应用的格林公式写成:

$$\int_V\nabla f\cdot\nabla g\mathrm{d}V+\int_V g\nabla^2 f\mathrm{d}V=\int_{\partial V}(g\nabla f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\left(=\int_{\partial V}g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\right), \tag{11.2.15}$$

$$\int_V (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)\mathrm{d}V = \int_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \left(= \int_{\partial V} \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma\right). \tag{11.2.16}$$

特别地, 若在 (11.2.15) 式中令 $f = g$, 在 (11.2.16) 式中置 $g \equiv 1$, 则相应地得到

$$\int_V |\nabla f|^2 \mathrm{d}V + \int_V f\nabla f \mathrm{d}V = \int_{\partial V} f\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \left(= \int_{\partial V} f\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\right), \tag{11.2.15'}$$

$$\int_V \Delta f \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \left(= \int_{\partial V} \frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\right). \tag{11.2.16'}$$

最后这个等式常被称为**高斯定理**. 作为例子, 我们来推导等式(11.2.15), (11.2.16)中的第二个:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla\cdot(g\nabla f - f\nabla g)\mathrm{d}V \\
=&\int_V (\nabla g\cdot\nabla f + g\nabla^2 f - \nabla f\cdot\nabla g - f\nabla^2 g)\mathrm{d}V \\
=&\int_V (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)\mathrm{d}V = \int_V (g\Delta f - f\Delta g)\mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

在这里我们利用了高–奥公式以及等式 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A}) = \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A} + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$.

## 练　习

1. 设电磁场是稳定的, 即不随时间而变. 于是麦克斯韦方程组 (11.1.16) 就分成了两个独立的部分 —— 静电学方程组 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ 及静磁学方程组 $\nabla\times\boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$.

据高–奥公式, 方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ ($\rho$ 是电荷分布密度) 能化成关系式 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\sigma = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, 这里左端是闭曲面 $S$ 上的电通量, 右端是位于曲面 $S$ 所限区域内的电荷之和 $Q$ 除以有量纲常数 $\varepsilon_0$. 在静电学中通常把这个关系叫做高斯定律. 试利用高斯定律在以下诸情况分别求出电场 $\boldsymbol{E}$.

(1) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的球面生成的. 这时, 并证明: 在球外, 它与把这样多的电荷安置在球心上生成的电场是一样的.

(2) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的直线生成的.

(3) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的平面生成的.

(4) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的两平行板生成的, 它们所带电量相等, 而电荷符号相反.

(5) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电球体生成的.

2. (1) 设 $r(p,q) = |p-q|$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中二点 $p$, $q$ 间的距离. 将 $p$ 点固定, 得到点 $q\in\mathbb{R}^3$ 的函数 $r_p(q) = r(p,q)$. 试证 $\Delta r_p^{-1}(q) = -4\pi\delta(p;q)$, 其中 $\delta$ 是 $\delta$-函数.

(2) 设 $g$ 是区域 $V$ 中的调和函数. 假定公式 (11.2.16) 中 $f=\dfrac{1}{r_p}$, 再考虑到上述结果就得到

$$-4\pi g(p)=\int_S\left(g\nabla\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_p}\nabla g\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

给出这个等式的严格证明.

(3) 如果 $S$ 是以 $p$ 点为中心, 以 $R$ 为半径的球面, 试根据上面的公式, 推导出下面等式

$$g(p)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_S g\mathrm{d}\sigma.$$

这就是所谓的调和函数平均值定理.

(4) 试根据以上结论证明, 若 $B$ 是由球面 $S$ 所界的球, 而 $V(B)$ 是它的体积, 那么等式

$$g(p)=\frac{1}{V(B)}\int_B g\mathrm{d}V$$

也成立.

(5) 设 $p,q$ 是欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点, 把 (1) 中所考察的函数 $\dfrac{1}{r_p}$(这函数对应着安放在 $p$ 点的点电荷的势) 取成 $\ln\dfrac{1}{r_p}$(该函数对应着空间中均匀带电直线的势). 试证 $\Delta\ln\dfrac{1}{r_p}=-2\pi\delta(p;q)$ 其中 $\delta(p;q)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 $\delta$-函数.

(6) 重复 (1)—(4) 中的论证, 证明平面区域内的调和函数的平均值定理.

3. 多维柯西中值定理.

经典的积分中值定理 ("拉格朗日定理") 断言, 如果函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在可测连通紧集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上连续, 则存在点 $\xi\in D$ 使

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot|D|,$$

其中 $|D|$ 是 $D$ 的测度 (体积).

(1) 现设 $f,g\in C(D;\mathbb{R})$, 亦即, $f$ 和 $g$ 是在 $D$ 中定义的连续实值函数. 试证成立以下 "柯西定理": 存在点 $\xi\in D$ 使

$$g(\xi)\int_D f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_D g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $D$ 是具光滑边界 $\partial D$ 的紧区域, 而 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 是 $D$ 中的两个光滑向量场. 试证: 存在点 $\xi\in D$ 使

$$\mathrm{div}\boldsymbol{g}(\xi)\cdot\operatorname*{Flux}_{\partial D}\boldsymbol{f}=\mathrm{div}\boldsymbol{f}(\xi)\cdot\operatorname*{Flux}_{\partial D}\boldsymbol{g},$$

其中 $\operatorname*{Flux}_{\partial D}$ 是向量场通过曲面 $\partial D$ 的流量.

## 11.3　势　　场

### 11.3.1　向量场的势

**定义 1**　设 $\boldsymbol{A}$ 是区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内的向量场, 称函数 $U:D\to\mathbb{R}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的势, 如果 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}U$ 在 $D$ 内成立. 具有势的场叫做势场.

显然，在连通区域里，一个向量场的势场在不计一个常数项的情况下被完全确定.

注意，在物理中，通常说函数 $U$ 是场 $\boldsymbol{F}$ 的势，是指 $\boldsymbol{F}=-\mathrm{grad}U$ （与这里的定义差一个符号）.

**例 1**　据牛顿定律，位于坐标原点的质点 $M$ 所产生的引力场在向径为 $\boldsymbol{r}$ 的点处的强度可用公式

$$\boldsymbol{F}=-GM\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{11.3.1}$$

计算（这是场作用在位于空间相应点处的单位质量上的力）. 引力场 (11.3.1) 是个势场. 在定义 1 的意义下，它的势是函数

$$U=GM\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}. \tag{11.3.2}$$

**例 2**　按照库仑定律，位于坐标原点的点电荷 $q$ 的电场在向径为 $\boldsymbol{r}$ 的点处的强度是

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}.$$

这个电场像重力场一样也是势场. 在物理术语意义下，它的势由下式确定：

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}.$$

### 11.3.2　势场的必要条件

**命题 1**　场 $\boldsymbol{A}:\mathbb{R}^n\supset D\to\mathbb{R}^n$ 成为势场的必要条件是：在 $D$ 内成立

$$\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=0. \tag{11.3.3}$$

**证**　设 $A$ 有势 $U$，即 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}U$. 按照微分形式的说法就是 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{d}\omega^0_U=\mathrm{d}U$. 因此，由 $\mathrm{d}^2\omega^0_U=0$ 而推知 $\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=0$. □

**注 1**　不难验证，在笛卡儿坐标下，场 $\boldsymbol{A}=(A^1,\cdots,A^n)$ 成为势场 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}U$（假设 $U$ 足够光滑，例如二阶偏导数连续）的必要条件是：$\forall i,j=1,\cdots,n$，

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j}=\frac{\partial A^j}{\partial x^i}. \tag{11.3.3$'$}$$

这又等价于

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^j\partial x^i}$$

在 $D$ 内成立. 事实上，$A^i=\dfrac{\partial U}{\partial x^i},i=1,\cdots,n$；并且当势 $U$ 足够光滑时必有

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j}=\frac{\partial A^j}{\partial x^i},\quad i,j=1,\cdots,n.$$

而在 $\mathbb{R}^3$ 中, 据旋量定义有 $\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}} = \omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}$, 所以场 $\boldsymbol{A}$ 成为势场的必要条件 (11.3.3) 能够写成

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0$$

的形式. 这与我们已经知道的关系 $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}U = 0$ 是一致的.

**例 3**　在空间 $\mathbb{R}^3$ 的笛卡儿坐标下, 场 $\boldsymbol{A} = (x, xy, xyz)$ 不是势场, 因为, 比如有

$$\frac{\partial(xy)}{\partial x} \neq \frac{\partial x}{\partial y}.$$

**例 4**　我们来考察场 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$, 它在平面笛卡儿坐标系中除原点之外的一切点上有定义, 用式子

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \tag{11.3.4}$$

给出. 这里, 场成为势场的必要条件 $\dfrac{\partial A_x}{\partial y} = \dfrac{\partial A_y}{\partial x}$ 成立. 然而我们很快就能判定, 这个场在其定义域内并不是势场.

此例表明, 一般来说, 必要条件 (11.1.3) 或条件 (11.1.3′), 并不是场成为势场的充分条件.

### 11.3.3　向量场具有势的判别准则

**命题 2**　设向量场 $\boldsymbol{A}$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内连续, 那么 $\boldsymbol{A}$ 在 $D$ 内成为势场的充分且必要条件是它在 $D$ 内的任何闭路 $\gamma$ 上的环流量等于零:

$$\oint_\gamma \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0. \tag{11.3.5}$$

**证**　必要性. 设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}U$. 由此, 据牛顿–莱布尼茨公式 (公式 (11.2.3′)) 有

$$\oint_\gamma \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)),$$

这里 $\gamma : [a, b] \to D$. 如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 即当 $\gamma$ 为闭路时, 上式右端显然为零, 因而左端也是零.

充分性. 设条件 (11.3.5) 已被满足. 由此, 沿区域 $D$ 内的任何道路 (不一定闭) 的积分, 只与道路的起点与终点有关, 而与道路上的其他点无关. 实际上, 如果 $\gamma_1$ 与 $\gamma_2$ 是有共同起点与共同终点的两条道路, 那么, 先沿着 $\gamma_1$ 积分, 再沿着 $-\gamma_2$ 积分 (即沿着 $\gamma_2$ 的反向道路积分), 所得到的就是沿着一条闭路 $\gamma$ 的积分. 一方面由 (11.3.5) 式知这积分为零, 另一方面, 它又是沿着 $\gamma_1$ 与沿着 $\gamma_2$ 的积分之差. 因此, 这两个积分实际是相等的.

现在, 在 $D$ 内固定一个点 $x_0$, 并令

$$U(x)=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},\tag{11.3.6}$$

其中右端是沿着一条位于 $D$ 内从 $x_0$ 出发到达 $x$ 的道路的积分. 我们来验证, 这样定出的函数 $U$ 就是场 $\boldsymbol{A}$ 的势. 为了方便, 我们假定在 $\mathbb{R}^n$ 内用的是笛卡儿坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$. 这时

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=A^1\mathrm{d}x^1+\cdots+A^n\mathrm{d}x^n.$$

如果从点 $x$ 沿直线移动一个向量 $h\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i$ 是相应坐标轴上的单位向量, 那么 $U$ 得到一个增量

$$U(x+h\boldsymbol{e}_i)-U(x)=\int_{x^i}^{x^i+h}A^i(x^1,\cdots,x^{i-1},t,x^{i+1},\cdots,x^n)\mathrm{d}t,$$

它等于形式 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 沿着从 $x$ 到 $x+h\boldsymbol{e}_i$ 的这个指定道路的积分. 由 $\boldsymbol{A}$ 的连续性, 据中值定理得

$$U(x+h\boldsymbol{e}_i)-U(x)=A^i(x^1,\cdots,x^{i-1},x^i+\theta h,x^{i+1},\cdots,x^n)h,$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$. 将此等式除以 $h$, 并令 $h$ 趋于零就得到

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}(x)=A^i(x).$$

这实际上就是 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}U$. □

**注 2**　从这个证明可以看到, 为使场 $\boldsymbol{A}$ 成为势场, 只要条件 (11.3.5) 对于光滑道路成立就够了, 或者, 即使只要对于由平行于坐标轴的线段组成的折线成立就够了.

现在来看看例 4. 在 10.2 节例 1 曾算出场 (11.3.4) 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上按逆时针方向转一周的环流量为 $2\pi(\neq0)$. 根据命题 2, 场 (11.3.4) 不是区域 $\mathbb{R}^2\backslash\{O\}$ 内的势场. 另一方面, 易见

$$\mathrm{grad}\arctan\frac{y}{x}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

似乎函数 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 应该是场 (11.3.4) 的势. 两者并不矛盾, 因为函数 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 并非在整个区域 $\mathbb{R}^2\backslash\{O\}$ 内有定义, 例如, 在 $Oy$ 轴上的点就没有定义.

例 4 告诉人们: 场 $\boldsymbol{A}$ 为势场的必要条件 (11.3.3) 或 (11.3.3′) 并不是充分的.

**注 3**　但局部地说, 必要条件 (11.3.3) 或 (11.3.3′) 也能保证场 $\boldsymbol{A}$ 为势场. 这和区域的拓扑结构有关. 例如, 作为下一小节命题 4 的推论, 我们看到: 如果场为势场的必要条件在某个球内成立, 那么在这个球内, 场是势场.

### 11.3.4　区域的拓扑结构与势

我们已从例 4 与注 3 中看到, 当场是势场的必要条件 (11.3.3) 满足时, 它是不是一定是势场的问题, 与这个场的定义域的 (拓扑) 结构有关. 下面将对能保证这样的场都是势场的区域的特征做一个初步的描述.

**定义 2**　同伦概念.

• 同伦. 设在区域 $D$ 内有两条闭路 $\gamma_0:[0,1]\to D$ 及 $\gamma_1:[0,1]\to D$. 如果存在从正方形 $I^2=\{(t^1,t^2)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant t^i\leqslant 1,i=1,2\}$ 到区域 $D$ 内的连续映射 $\Gamma:I^2\to D$, 使对任何 $t^1,t^2\in[0,1]$ 成立: $\Gamma(t^1,0)=\gamma_0(t^1),\Gamma(t^1,1)=\gamma_1(t^1)$, 以及 $\Gamma(0,t^2)=\Gamma(1,t^2)$, 就说在区域 $D$ 内有闭路 $\gamma_0$ 到闭路 $\gamma_1$ 的同伦(或变形) 映射.

• 道路的同伦. 称两条闭路在一个区域内是同伦的, 如果能在该区域内使它们彼此同伦, 亦即, 能在该区域内建立从一条道路到另一条道路的同伦.

这样, 同伦就是映射 $\Gamma:I^2\to D$(图 57). 如果把变量 $t^2$ 看作时刻 $t$, 则据定义 2, 在每个瞬时 $t=t^2$, 我们有闭路 $\Gamma(t^1,t)=\gamma_t(t^1),\forall t^1\in[0,1]$ (图 57①). 该道路随时间 $t$ 变化, 在初始瞬间 $t=t^2=0$, 它与道路 $\gamma_0$ 重合, 而在瞬间 $t=t^2=1$, 它变成道路 $\gamma_1$.

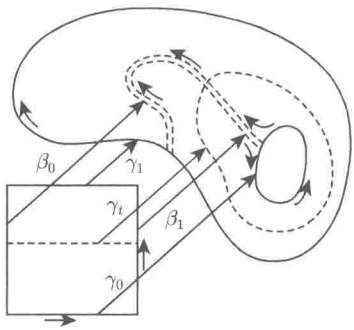



图 57

因为在任何瞬时 $t\in[0,1]$, 关系 $\gamma_t(0)=\Gamma(0,t)=\Gamma(1,t)=\gamma_t(1)$ 总成立, 这就是说道路 $\gamma_t$ 是闭路. 因此, 映射 $\Gamma:I^2\to D$ 在正方形 $I^2$ 的一双对边上诱导出了同一个映射 $\beta_0(t^1):=\Gamma(t^1,0)=\Gamma(t^1,1)=:\beta_1(t^1)$.

显然时间也可以让它按反方向进行, 那时, 我们就从道路 $\gamma_1$ 得到道路 $\gamma_0$.

**注 4**　今后将只讨论光滑的或分片光滑的道路, 以及它们的光滑的或分片光滑的同伦. 可以验证, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的区域中彼此连续同伦的 (分片) 光滑道路, 必存在它们的 (分片) 光滑同伦.

**命题 3**　如果区域 $D$ 内的 1-形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ 能使 $\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=0$, 而闭路 $\gamma_0$ 与 $\gamma_1$ 在 $D$ 内

① 图 57 里, 沿着某些曲线画了给它们定向的箭头, 这在后面有用, 读者暂时不必去管它们.

同伦, 则

$$\int_{\gamma_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1=\int_{\gamma_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1.$$

**证**　设 $\Gamma: I^2\to D$ 是 $\gamma_0$ 到 $\gamma_1$ 的同伦 (图 57). 如果 $I_0, I_1$ 是正方形 $I^2$ 的底边, 而 $J_0, J_1$ 是它的侧边, 则根据闭路同伦的定义, $\Gamma$ 在 $I_0$ 与 $I_1$ 的限制分别同 $\gamma_0$ 与 $\gamma_1$ 重合, 而 $\Gamma$ 在 $J_0$ 与 $J_1$ 上的限制给出了 $D$ 内的两条道路 $\beta_0$ 与 $\beta_1$, 又因 $\Gamma(0,t^2)=\Gamma(1,t^2)$, 所以道路 $\beta_0$ 与 $\beta_1$ 完全重合. 由变量替换 $x=\Gamma(t)$, 形式 $\omega_{\boldsymbol{A}}^1$ 就变成了正方形 $I^2$ 中的一个 1-形式 $\omega=\Gamma^*\omega_{\boldsymbol{A}}^1$. 这时 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\Gamma^*\omega_{\boldsymbol{A}}^1=\Gamma^*\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{A}}^1=0$, 因为 $\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{A}}^1=0$. 因此, 根据斯托克斯公式有

$$\int_{\partial I^2}\omega=\int_{I^2}\mathrm{d}\omega=0.$$

但是

$$\begin{aligned}\int_{\partial I^2}\omega&=\int_{I_0}\omega+\int_{J_1}\omega-\int_{I_1}\omega-\int_{J_0}\omega\\&=\int_{\gamma_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1+\int_{\beta_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1-\int_{\gamma_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1-\int_{\beta_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1=\int_{\gamma_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1-\int_{\gamma_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1,\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\gamma_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1=\int_{\gamma_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1.$$　□

**定义 3**　一个区域叫做**单连通区域**, 如果其中的任何闭路都与点同伦 (参见 10.3 节).

形象地, 在单连通区域$D$内, 任何闭路能收缩成一点, 而在收缩过程中闭路不超出 $D$ 的范围.

**命题 4**　若单连通区域 $D$ 内的场 $\boldsymbol{A}$ 满足势场的必要条件 (11.3.3) 或 (11.3.3′), 那么它就是 $D$ 内的势场.

**证**　由命题 2 及对它的注 2, 只要验证对 $D$ 内的任何光滑道路 $\gamma$, 等式 (11.3.5) 成立即可. 由题设, 道路 $\gamma$ 同伦于一个不变道路, 即由一个点构成的道路. 沿着这样的单点道路的积分显然为零. 但根据命题 3, 在同伦下积分不变, 这就是说, 等式 (11.3.5) 对于道路 $\gamma$ 也成立.　□

球是单连通的 (因之注 3 成立), 而打了洞的平面 $\mathbb{R}^2\backslash\{O\}$ 不是单连通的, 因为环绕坐标原点的路径, 不能收缩成这区域内的一点而不超出区域的范围. 这就是为什么并非在 $\mathbb{R}^2\backslash\{O\}$ 中的满足条件 (11.3.3′) 的每个场都是区域 $\mathbb{R}^2\backslash\{O\}$ 的势场的原因, 例如, 例 4 就是这样的场.

### 11.3.5　向量势、恰当形式与闭形式

**定义 4**　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 内的向量场. 如果在 $D$ 内关系 $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 成立, 就说$\boldsymbol{A}$ *是* $\boldsymbol{B}$ *在* $D$ *内的向量势*.

**定义 5**　我们称场 $\boldsymbol{B}$ *是管量场*, 如果它满足条件:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0. \tag{11.3.7}$$

**命题 5**　如果向量场 $\boldsymbol{B}:\mathbb{R}^3\supset D:\to\mathbb{R}^3$ 在 $D$ 内有向量势, 则它必是 $D$ 内的管量场.

**证**　由向量场与定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的形式之间的联系, 以及向量场的旋量的定义, 关系 $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 能写成 $\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}=\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}$. 因此 $\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}=\mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\mathrm{d}^2\omega^1_{\boldsymbol{A}}=0$. 于是, 我们得到了等式 (11.3.7). □

**例 5**　在11.1节中列出了麦克斯韦方程组, 其中的第二个方程恰好满足(11.3.7)式. 因此, 自然希望把磁场 $\boldsymbol{B}$ 看作某个向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度, 即 $\boldsymbol{A}$ 是场 $\boldsymbol{B}$ 的向量势. 在解麦克斯韦方程组时, 就是要找出这样的向量势来.

从 10.3 节我们知道:

- 称 $D$ 内的微分形式 $\omega$ 是 $D$ 内的*闭形式*, 如果在区域 $D$ 内满足 $\mathrm{d}\omega=0$;
- 称微分形式 $\omega^p$ 是区域 $D$ 内的*恰当微分形式*, 如果在区域 $D$ 内存在形式 $\omega^{p-1}$ 使 $\omega^p=\mathrm{d}\omega^{p-1}$.

此外, 有*庞加莱引理*的下述特殊情形 (见 10.3 节定理 1):

**定理 1**　球内的闭形式是恰当形式.

这里所说的是 $\mathbb{R}^n$ 内的任意球及任意阶的形式.

庞加莱引理可以这样理解: 若 $\omega$ 是闭形式, 则对于区域内的任何点, 必定存在它的一个邻域, 使得形式 $\omega$ 在此邻域内是恰当的.

特别地, 当向量场 $\boldsymbol{B}$ 满足条件 (11.3.7) 时, 则由庞加莱引理推知, 这个场 $\boldsymbol{B}$ 至少局部地是某个向量场的旋度. 事实上, $(11.3.7)\Rightarrow\mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}=0\Rightarrow\omega^2_{\boldsymbol{B}}$ 是闭形式 $\Rightarrow\exists$ 向量场 $\boldsymbol{A}$ 使得 $\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=\omega^2_{\mathrm{B}}$, 而 $\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{A}}=\omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}$, 故 (局部地) $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$.

**例 6**　考察去掉两个点 $p_1,p_2$ 的平面 $\mathbb{R}^2$(图 58) 和在图上画出的道路 $\gamma_0,\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 的支集. 设道路 $\gamma_2$ 能够在所讨论的区域的范围内收缩成一点, 所以, 如果在 $D$ 内给出一个闭形式 $\omega$, 那么 $\omega$ 沿 $\gamma_2$ 的积分为零. 设道路 $\gamma_0$ 不能在 $D$ 内缩成一点, 然而这条道路能与道路 $\gamma_1$ 同伦, 而不改变形式 $\omega$ 的积分值, 显然, $\omega$ 沿 $\gamma_1$ 的积分可以归结为沿着环绕 $p_1$ 顺时针行进的一个回路的积分及两倍的沿环绕 $p_2$ 点逆时针行进的回路的积分. 如果用 $T_1,T_2$ 分别表示形式 $\omega$ 沿着围绕 $p_1$ 及 $p_2$ 的小圆周按逆时针方向的积分, 即知形式 $\omega$ 沿区域 $D$ 中任何闭路的积分将等于 $n_1T_1+n_2T_2$, 其中 $n_1,n_2$ 都是整数, 它们指示的是我们绕平面 $\mathbb{R}^2$ 中的小洞 $p_1,p_2$ 是沿什么方向及所绕的圈数.

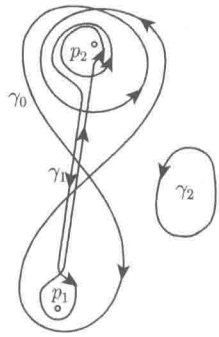



图 58

环绕 $p_1, p_2$ 的圆周 $c_1, c_2$ 可用做为闭路 $\gamma \subset D$ 之集合的基底. 如果把两条彼此同伦且 $\omega$ 沿着它们的积分值相等的闭曲线等同看待, 则在这个基底下, 任何闭路 $\gamma$, 都能表成 $\gamma = n_1c_1 + n_2c_2$ 的形式. 量 $\int_{c_i} \omega = T_i$ 叫做**循环常数**或**积分周期**. 如果区域更复杂些, 比如其中有 $k$ 个独立的简单回路, 则根据分解式 $\gamma = n_1c_1 + \cdots + n_kc_k$ 得到 $\int_\gamma \omega = n_1T_1 + \cdots + n_kT_k$. 有这样的结果, 对任给的一组数 $T_1, \cdots, T_k$, 一定存在着这个区域的闭 1-形式, 正好有这样一组周期 (这是德拉姆定理的特殊情况, 参看 10.3 节).

虽然上面讨论限制在平面区域情形, 但这里所说的一切对 $\mathbb{R}^n$ 的任何区域也都对.

**例 7**　在镯形区域 ($\mathbb{R}^3$ 内由环面所界的区域) 内, 所有非点化闭路 (即在区域内不能缩成一点的闭路), 显然都与绕小洞若干次的圆周同伦. 就是这个圆构成了这里的唯一非点化的基回路 $c$.

此外, 以上所说的一切对高维道路也都适合. 一维闭路是圆周映像, 或者说是一维球面的映像. 如果取 $k$ 维球面的映像代替一维闭路, 对它们引入同伦概念, 并在给定区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内考察 $k$ 维球面有多少个互不同伦的映像, 就得到区域 $D$ 的某种特征, 它在拓扑学中形成了所谓区域 $D$ 的 **$k$-同伦群**, 记作 $\pi_k(D)$. 如果在 $D$ 内 $k$ 维球面的所有映像都同伦于常映像, 我们就认为 $\pi_k(D)$ 是平凡的 (它只包含一个元素). 有这种可能: $\pi_1(D)$ 平凡, 而 $\pi_2(D)$ 不平凡.

**例 8**　如果把空间 $\mathbb{R}^3$ 去掉点 $O$ 后作为 $D$, 那么在此区域内的任何闭路都能缩成一点, 而 $\mathbb{R}^3$ 内包围点 $O$ 的球面, 在此区域之内则不能缩成一个点.

原来, 对于闭 $k$-形式的周期有重要意义的不完全是同伦群 $\pi_k(D)$, 还有所谓同调群 $H_k(D)$(参看第 10 章).

**例 9**　上面所述产生这样的结论, 例如, 在区域 $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$ 内, 每个闭 1-形式是恰当的 ($\mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$ 是单连通的), 但并非每个闭的 2-形式都是恰当的. 用语

言表示就是 $\mathbb{R}^3\backslash\{O\}$ 内的任何无旋场 $\boldsymbol{A}$ 是某函数的梯度, 但是并非每个无源场 $\boldsymbol{B}(\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0)$ 一定是这个区域内某个场的旋度.

**例 10**　与例 9 正好相反, 我们取镯形区域作为 $D$. 对于镯形域来说, 群 $\pi_1(D)$ 不是平凡的 (参看例 7), 而 $\pi_2(D)$ 是平凡的, 因为把二维球面嵌入 $D$ 内的任何映射, 在 $D$ 的范围内能收缩成常映射 (球面的像可缩成一点). 在这个区域内并不是每个无旋场都是势场, 但是每个无源场必定是某个场的旋度.

## 练　习

1. 试证任何中心场 $\boldsymbol{A}=f(r)\boldsymbol{r}$ 是势场.

2. 设 $\boldsymbol{F}=-\,\mathrm{grad}U$ 是有势力场. 试证在这种场内, 质点的稳定平衡位置在这个场的势 $U$ 的极小点处.

3. 检查以下各区域是不是单连通域:

(1) 圆 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2<1\}$;

(2) 空心圆 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<x^2+y^2<1\}$;

(3) 空心球 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0<x^2+y^2+z^2<1\}$;

(4) 圆环 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{2}<x^2+y^2<1\right\}$;

(5) 球环 $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<1\right\}$;

(6) $\mathbb{R}^3$ 内的镯形域.

4. (1) 给出具固定端点道路的同伦的定义.

(2) 试证一个区域是单连通域的充要条件是, 具共同起点与终点的任意两条道路, 在 (1) 的定义之下同伦.

5. 试证:

(1) 圆周 $S^1$(一维球) 到二维球面 $S^2$ 内的任何连续映射 $f:S^1\to S^2$, 沿着 $S^2$ 可缩成一点 (即缩成不变映射);

(2) 任何连续映射 $S^2\to S^1$ 也与映成一点的映射同伦;

(3) 任何连续映射 $f:S^1\to S^1$ 同伦于某映射 $\varphi\mapsto n\varphi$, 其中 $n$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的某个数, $\varphi$ 是圆周上点的极角;

(4) 球面 $S^2$ 到镯形区域内的任何连续映射同伦于映成一点的映射;

(5) 圆周 $S^1$ 到镯形区域的任何连续映射, 同伦于一个绕着镯的洞跑过 $n$ 次的闭路, 其中 $n\in\mathbb{Z}$.

6. 众所周知以下的亥姆霍兹[①] 定理: 在欧氏定向空间 $\mathbb{R}^3$ 的区域 $D$ 内, 任何光滑场 $\boldsymbol{F}$ 能分解为无旋场 $\boldsymbol{F}_1$ 与管量场 $\boldsymbol{F}_2$ 之和 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$. 试证: 这种分解法的建立可归结为解某个泊松方程.

① 亥姆霍兹 (Helmholtz)(1821—1894)—— 德国物理学家与数学家. 他是首先发现一般的能量守恒原理者之一. 顺便指出, 正是他首先确切地区分了力与能量的概念.

7. 在区域 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$(即去掉点 $O$ 的空间 $\mathbb{R}^3$) 内做一个

(1) 闭且非恰当的 2-形式;

(2) 无源向量场, 使它不是此区域内任何向量场的旋度.

8. (1) 在区域 $D = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$(空间 $\mathbb{R}^n$ 去掉点 $O$) 内有闭而不恰当的 $p < n-1$ 形式吗?

(2) 在区域 $D = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ 内建立一个闭而不恰当的 $p = n-1$ 形式.

9. 如果 $\omega$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内的闭 1-形式, 则根据命题 2, 任何点 $x \in D$ 有邻域 $U(x)$, 使 $\omega$ 在其内是恰当的. 下设 $\omega$ 是闭形式.

(1) 试证: 如果两条道路 $\gamma_i : [0,1] \to D$, $i = 1, 2$ 有共同的起点和终点, 并且只在闭区间 $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ 上不一样, 而且它们的像位于同一个邻域 $U(x)$ 之内, 则 $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

(2) 试证: 对于任意一条道路 $[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in D$, 都存在数 $\delta > 0$, 使得当道路 $\tilde{\gamma}$ 与 $\gamma$ 有相同的起点与终点, 且偏离 $\gamma$ 不超过 $\delta$, 亦即 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| \leqslant \delta$ 时, 恒有 $\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega$.

(3) 试证: 如果具有共同起点与终点的二道路 $\gamma_1$, $\gamma_2$ 作为固定端点道路, 在区域 $D$ 内同伦, 那么, 对于 $D$ 内的闭形式 $\omega$ 有 $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

## 11.4 应用例子

为了具体展示上面所引入的概念的作用, 并阐明高–奥–斯公式作为守恒律的物理意义, 在这里, 作为例证, 我们将研究某些重要的数学物理方程的推导.

### 11.4.1 热传导方程

可观察的物体的温度 $T = T(x, y, z, t)$, 作为物体中的点 $(x, y, z)$ 及时刻 $t$ 的函数是一个数量场. 由于物体各部分进行热交换, 场 $T$ 就可能依一定的规律有所改变, 我们希望把这种规律明确地表示出来.

设 $D$ 是所考察的物体以曲面 $S$ 所限定的部分. 如果在 $D$ 内没有热源, 那么含在 $D$ 内的物质的内能, 只能通过热交换来改变, 即只有通过 $D$ 的边界 $S$ 进行能量转移. 我们分别计算在体积 $D$ 内的内能变化及通过曲面的能流, 根据能量守恒定律, 列出这些量的等式, 并得到所需要的关系式.

大家都知道, 要使均匀物质 $m$ 的温度升高 $\Delta T$, 所需要的热量为 $cm\Delta T$, 这里 $c$ 是该物质的比热. 因此, 如果在时间间隔 $\Delta t$ 内, 场 $T$ 的增长量为 $\Delta T = T(x, y, z, t + \Delta t) - T(x, y, z, t)$, 则区域 $D$ 内的内能增加

$$\iiint_D c\rho \Delta T \mathrm{d}V, \tag{11.4.1}$$

这里 $\rho = \rho(x, y, z)$ 是物质密度.

由经验知道, 在温度变化的相当大的范围内, 因热交换, 在单位时间内流过物体中的小面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$ 的热量, 与场 $-\mathrm{grad}\, T$ 通过这个面元的流量 $-\mathrm{grad}\, T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

成正比 (梯度是关于空间变量 $x, y, z$ 取的). 比例系数 $k$ 与物质有关, 叫做**热传导系数**. $\operatorname{grad} T$ 前面的负号表示能量从温度高处向低处流动. 这样一来, 在时间 $\Delta t$ 内, 通过区域 $D$ 的边界 $S$ 沿外法线方向流出的能量 (精确到 $o(\Delta t)$) 是

$$\Delta t \iint\limits_S -k\operatorname{grad} T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{11.4.2}$$

将 (11.4.2) 式表示的量变号并除以 $\Delta t$ 后, 令 $\Delta t \to 0$ 取极限, 并使之与 (11.4.1) 式相等, 就得到

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}V = \iint\limits_S k\operatorname{grad} T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{11.4.3}$$

这个等式就是函数 $T$ 的方程. 设 $T$ 足够光滑, 并对 (11.4.3) 式右端利用高–奥公式, 等式 (11.4.3) 就变成

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}V = \iiint\limits_D \operatorname{div}(k\operatorname{grad} T) \mathrm{d}V.$$

由此, 根据区域 $D$ 的任意性, 显然可得

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad} T). \tag{11.4.4}$$

这样我们得到了积分等式 (11.4.3) 的微分形式.

假如在区域 $D$ 内有热源 (或热汇), 其强度具有密度 $F(x, y, z, t)$, 那么等式 (11.4.3) 应该换成

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}V = \iint\limits_S k\operatorname{grad} T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \iiint\limits_D F \mathrm{d}V. \tag{11.4.3$'$}$$

这时, 代替公式 (11.4.4), 我们得到方程

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad} T) + F. \tag{11.4.4$'$}$$

如果假定物体的热传导是各向同性且均匀的, 则系数 $k$ 是常数, 而方程 (11.4.4$'$) 就变成下面的标准形式:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \tag{11.4.5}$$

其中 $f = \dfrac{F}{c\rho}$, 而 $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ 为温度传导系数, 也称之为热扩散系数. 通常称 (11.4.5) 为**热传导方程**.

在稳定热交换状态, 场 $T$ 与时间无关, 这时方程变成了**泊松方程**

$$\Delta T = \varphi, \tag{11.4.6}$$

其中 $\varphi = -\dfrac{1}{a^2}f$. 如果还设物体内无热源, 就得到*拉普拉斯方程*

$$\Delta T = 0. \tag{11.4.7}$$

我们已说过, 拉普拉斯方程的解叫做*调和函数*. 调和函数在热物理学里的解释是: 它对应于在物体内部建立的那样的温度场, 其中热流的运行既没有汇也没有源, 亦即热源 (广义的, 也包括汇) 不在物体体内. 例如, 在物体 $V$ 的表面 $\partial V$ 上, 保持给定的热状态 $T|_{\partial V} = \tau$ 不变, 那么, 在体 $V$ 内的温度场, 就稳定成某个调和函数的形式. 拉普拉斯方程 (11.4.7) 的解的这种解释, 使得能预见到调和函数的许多性质. 例如, 在区域 $V$ 内的调和函数, 在这个区域内必定没有严格的局部极值, 如若不然, 则热量只能从 (向) 那些较热 (较冷) 的部分流出 (入) 而变冷 (热), 这与所说的场的稳定性矛盾.

### 11.4.2 连续性方程

设在所考察的空间内充满某种介质, $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 是介质的密度, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ 是介质运动的速度场, 它们是空间内的点 $(x, y, z)$ 与时间 $t$ 的函数.

我们将从质量守恒定律出发, 利用高–奥公式, 建立这些量之间的关系.

设 $D$ 是所考察的空间中的区域, 其边界为 $S$. 在一段时间 $\Delta t$ 之内, $D$ 内的物质质量增加了

$$\iiint\limits_D (\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t))\mathrm{d}V.$$

在这很短一段时间 $\Delta t$ 内, 物质经曲面 $S$ 流向 $S$ 的外法线一侧的流量等于 (不计高阶无穷小 $o(\Delta t)$ 的误差)

$$\Delta t \iint\limits_S \rho\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

如果在区域 $D$ 内没有源与汇, 则由质量守恒定律得到

$$\iiint\limits_D \Delta\rho \mathrm{d}V = -\Delta t \iint\limits_S \rho\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

除以 $\Delta t$, 并令 $\Delta t \to 0$ 取极限, 就得

$$\iiint\limits_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V = -\iint\limits_S \rho\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

对此等式的右边应用高–奥公式, 并注意到 $D$ 是任意区域, 就得到, 对于足够光滑的函数 $\rho, \boldsymbol{v}$, 应成立以下关系式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}), \tag{11.4.8}$$

它叫做连续介质的**连续性方程**.

连续性方程的向量记法是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{11.4.8'}$$

或将第二项拆开, 写成如下的形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{11.4.8''}$$

如果介质是不可压缩的 (液体), 则通过闭曲面 $S$ 流出的介质体积应为零:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

由此 (仍据高–奥公式) 得到, 对于不可压缩介质成立

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{11.4.9}$$

因此, 对于变密度不可压缩介质 (水及油) 来说, 方程 (11.4.8″) 变成如下形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = 0. \tag{11.4.10}$$

如果介质又是均匀的, 则 $\nabla \rho = 0$, 因而 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

### 11.4.3　连续介质动力学基本方程

现在引入连续介质在空间中运动的动力学方程. 除上面已讨论过的函数 $\rho, \boldsymbol{v}$ 以外, 它们在这里仍表示介质在时刻 $t$ 及空间点 $(x, y, z)$ 处的密度与速度, 我们还将考察压力 $p = p(x, y, z, t)$, 它也是空间点及时刻 $t$ 的函数.

在充满介质的空间中分出一个区域 $D$, 设 $D$ 的边界为 $S$. 今考察在固定时刻作用于分出来的这一部分介质的体积上的力.

某些力场 (例如重力场) 能作用于介质的每个质量元素 $\rho \mathrm{d}V$ 上. 这种场提供了所谓**质量力**. 设 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ 是由一些外场产生的质量力密度. 这时, 这些场作用在质量元 $\rho \mathrm{d}V$ 上的力为 $\boldsymbol{F}\rho \mathrm{d}V$. 如果这个质量元在所考察的瞬间具有加速度 $\boldsymbol{a}$, 则根据牛顿定律, 这就等于说还存在惯性质量力 $-\boldsymbol{a}\rho \mathrm{d}V$.

最后在曲面 $S$ 的每个面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$ 上, 有由压力引起的面力 $-p\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 作用, 它来自与 $D$ 内的介质粒子毗邻那些粒子 (这里 $\boldsymbol{n}$ 是 $S$ 的外法线).

根据达朗贝尔原理, 任何物质系统, 在其运动的每一瞬间, 作用在它上面的全部的力, 包括惯性力在内, 是互相平衡的, 亦即它们的合力应为零. 在我们的情况下, 就是

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a})\rho \mathrm{d}V - \iint\limits_S p\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{11.4.11}$$

此和的第一项是质量力与惯性力的合力, 第二项是作用在所考察的体积的界面 $S$ 上的压力的合力. 为了简单起见, 我们认为所处理的是理想的 (无黏性的) 液体或气体, 其中作用在面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 上的压力是 $-p\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$, 这里的数 $p$ 与空间内面元的方向无关.

应用公式 (11.2.9), 根据等式 (11.4.11) 得到

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F}-\boldsymbol{a})\rho \mathrm{d}V - \iiint\limits_D \operatorname{grad} p \mathrm{d}V = 0.$$

由此并注意区域 $D$ 的任意性, 显然推出

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p. \tag{11.4.12}$$

在这种局部形式下的介质运动方程, 与物质质点运动的牛顿方程完全相当.

介质质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是这个质点速度 $\boldsymbol{v}$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$. 如果 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 是空间中粒子运动的规律, 而 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ 是介质的速度场, 那么, 对任何单个的质点得到

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

这样一来, 运动方程 (11.4.12) 变成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{11.4.13}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{11.4.14}$$

通常把方程 (11.4.14) 叫做*流体动力学的欧拉方程*.

向量方程 (11.4.14) 等价于由三个标量方程组成的方程组, 这些方程中包含着向量 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量以及两个函数 $\rho, p$.

因此, 欧拉方程还不能完全确定理想连续介质的运动. 诚然, 对它再补充上连续性方程 (11.4.8) 是自然的事. 然而, 即使这样, 方程组仍然是不定的.

要想完全确定介质的运动, 还得对方程 (11.4.8) 及 (11.4.14) 补充关于介质的热力学状态的有关信息 (例如, 状态方程 $f(p, \rho, T) = 0$ 及热交换方程). 在本节的最后一段里, 读者将能得到能够给出这些关系的有关知识.

### 11.4.4　波动方程

现在研究在其中有声波传播的介质的运动. 显然这种运动也服从方程 (11.4.14), 但由所研究的现象的特殊性, 这方程在给定情况下还可以化简.

声音是介质状态的疏密交替, 并且在音波中, 压力偏离其平均值的量非常小——比率约为 1%. 所以声音是介质的体元素偏离其平衡位置很小的小速度运动. 然而, 按照介质的分子运动的平均速度来衡量时, 激发 (也就是波) 在介质中的扩散速度可与介质分子运动的平均速度相比拟, 大大地高于所考察的介质的各个部分之间的热交换速度. 因此, 我们能把气体中的声音的运动看作在其平衡位置附近的完全没有热交换的 (绝热的) 小振动.

由于宏观速度 $\boldsymbol{v}$ 本身很小, 将运动方程 (11.4.14) 内的 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 舍去就得到等式

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p.$$

如果根据同样的理由把 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{v}$ 这样的项也忽略掉, 那么上面的等式就可化作方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p.$$

把 (关于坐标 $x,y,z$ 的) 算子 $\nabla$ 作用在上式两端, 就得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\rho\boldsymbol{F}-\Delta p.$$

利用连续性方程 (11.4.8′), 并引用记号 $\nabla\cdot\rho\boldsymbol{F}=-\Phi$, 就得方程

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\Phi+\Delta p. \tag{11.4.15}$$

如果外场的影响可以忽略, 那么方程 (11.4.15) 就归结为发声介质内的密度与压力的关系式

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\Delta p. \tag{11.4.16}$$

由于过程是绝热的, 状态方程 $f(p,\rho,T)=0$ 就归结为 $\rho$ 与 $p$ 之间的某个关系式 $\rho=\psi(p)$, 由此推出

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\psi'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\psi''(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2.$$

又由于声波中压力的振动很小, 可以认为 $\psi'(p)\equiv\psi'(p_0)$, 其中 $p_0$ 是平衡压力. 由此, $\psi''=0$ 且 $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\approx\psi'(p)\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. 由此, 最终从 (11.4.16) 式得到

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\Delta p, \tag{11.4.17}$$

其中 $a=(\psi'(p_0))^{-1/2}$. 这个方程刻画的是在声音运动状态下, 介质中的压力的变化. 方程 (11.4.17) 刻画了连续介质内的最简单的波动方程. 它叫做*齐次波动方程*. 量 $a$ 有很简单的物理意义: 它是在给定的介质内声激励的传播速度, 也就是其中的声速.

在受迫振动情形, 有某种力作用于介质的每个体元素; 其密度分布是已知的. 这时方程 (11.4.17) 就换成了与方程 (11.4.15) 相应的关系式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\Delta p+f, \tag{11.4.18}$$

当 $f\neq 0$ 时, 称它为*非齐次波动方程*.

## 练　习

1. 设连续介质运动的速度场 $\boldsymbol{v}$ 是势场. 试证当介质不可压缩时, 场 $\boldsymbol{v}$ 的势 $\varphi$ 是调和函数, 即 $\Delta\varphi=0$(参看 (11.4.9) 式).

2. 如果流动的速度场 $\boldsymbol{v}$ 具有 $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,0)$ 的形式, 很自然, 称它为平行平面流, 或者简称为平面流.

(1) 试证: 对于平面流, 不可压缩性的条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$ 及势性的条件 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=0$ 分别有如下形式

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}=0.$$

(2) 试证: 至少在局部, 这些等式能够保证满足条件 $(-v_y,v_x)=\mathrm{grad}\psi$ 和 $(v_x,v_y)=\mathrm{grad}\varphi$ 的函数 $\psi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ 存在.

(3) 试验证这些函数的等高线 $\varphi=c_1$, $\psi=c_2$ 正交, 并证明在稳定流动中, 曲线 $\psi=c$ 是介质质点运动的轨道. 这正是把函数 $\psi$ 叫做流函数, 以区别于速度势函数 $\varphi$ 的原因.

(4) 试证: 在函数 $\varphi$ 与 $\psi$ 足够光滑的假定下, 它们都是调和函数, 并且满足柯西–黎曼方程:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

满足柯西–黎曼方程组的一对调和函数叫做共轭调和函数.

(5) 验证函数 $f(z)=(\varphi+\mathrm{i}\psi)(x,y)$ 是复变量 $z$ 的可微函数, 其中 $z=x+\mathrm{i}y$. 这就决定了平面流体力学问题与复变函数论的联系.