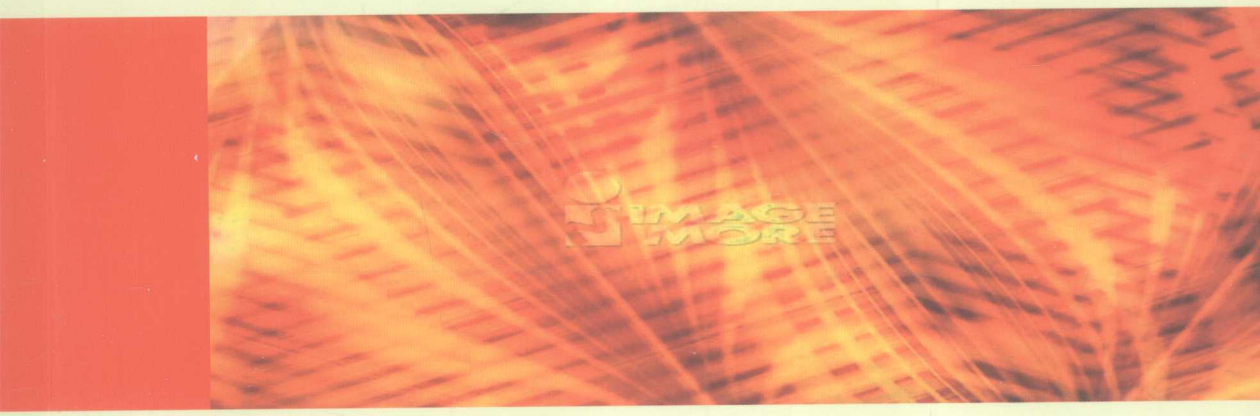
高校核心课程学习指导丛书

积分的方法与技巧

JIFEN DE
FANGFA YU JIQIAO

金玉明　顾新身　毛瑞庭／编著



中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

积分的方法与技巧

JIFEN DE
FANGFA YU JIQIAO

金玉明　顾新身　毛瑞庭 / 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书专门讲述积分方法，涵盖各种函数积分的方法，从初等函数到特殊函数，从实变函数到复变函数.本书以方法为中心、以算例为导向，读者可在算例的引导下，逐步掌握积分之方法.本书从易到难，由浅入深，适用不同层次、不同群体的人阅读，他们可以是初学微积分的大学生，可以是已经学过微积分的研究生，也可以是有工作经验的科学家、工程师.

图书在版编目(CIP)数据

积分的方法与技巧/金玉明，顾新身，毛瑞庭编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.1

（高校核心课程学习指导丛书）

ISBN 978-7-312-04051-1

Ⅰ. 积… Ⅱ. ①金… ②顾… ③毛… Ⅲ. 积分 Ⅳ. O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 211316 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 安徽联众印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 26
字数 554 千
版次 2017 年 1 月第 1 版
印次 2017 年 1 月第 1 次印刷
定价 48.00 元

前　言

这是一本专讲积分方法的书，可供大学生、研究生阅读，也可供科学家和工程师参考.

我们编纂了《实用积分表》《常用积分表》后，就萌发了编写一本如何做积分的书的想法.俗话说："授人以鱼，不如授人以渔."自己能捕鱼了，就不愁没有鱼了.当人们查阅积分表时，也许会想，这成千上万个积分公式是如何得来的呢？这正是本书要回答的问题.我们不能夸口说，读懂了本书，你就会做所有的积分了.我们只能说，读懂了本书，你就会做大部分的积分.

历经五年多时间的酝酿、资料搜集、撰写、编辑和修改，书稿最终完成.与大学教材不同的是，本书没有很多定理的严格证明，对于用到的定理，大部分情况只是引用，不做论证.我们认为读者在大学读"高等数学"或"微积分"课程时已经得到这方面的严格训练，而无需在此重复了.我们把重点放在做积分的方法与技巧上，花时间搜寻各种积分的方法，把它们汇聚在一起.我们尽量采用通俗易懂的语言，力避晦涩难懂的词句，采用规范化的符号、标准化的外文译名.

本书以大量的算例来阐明积分的方法与技巧，在对算例的演算中，推导十分详尽，使读者一目了然，不卖关子，不藏影子.许多方法与技巧是寓于算例的演算过程中的.

本书共分 8 章，第 1 章的不定积分和第 2 章的定积分为本书的主干，主要的积分方法都在这两章中叙述.第 3 章介绍定积分的应用，包括各种图形面积的计算、曲线长度的计算、立体体积的计算和表面积的计算等.第 4 章介绍重积分，包括二重积分、三重积分以及 n 重积分.第 5 章介绍曲线积分和曲面积分，并给出格林公式、斯托克斯公式和高斯公式及其应用.这 3 个公式描写的是函数在区域边界上的积分与区域内部积分的关系.第 6 章介绍积分变换，包括傅里叶变换和拉普拉斯变换.第 7 章为复数领域中的积分，主要是通过复变函数的留数定理来解实变量函数中难解的积分.第 8 章介绍特殊函数的积分，在物理学领域工作与学习的读者可能

对这一章更有兴趣.

作者在此对审阅了全部书稿并提出了很多宝贵意见的史济怀教授表示衷心的感谢,对绘制全书插图的博士研究生安宁表示诚挚的谢意.

由于水平所限,书中不足和错误之处难免,诚望读者批评指正.

作　　者

2016 年夏于合肥

目　录

前言 …… (ⅰ)

绪论 …… (1)

第 1 章　不定积分 …… (5)

1.1　不定积分中的原函数概念 …… (5)

1.2　分项积分法 …… (6)

1.3　分部积分法 …… (13)

1.3.1　分部积分法的基本公式 …… (13)

1.3.2　分部积分法的推广公式 …… (14)

1.4　换元积分法 …… (21)

1.5　三角替代法 …… (27)

1.6　欧拉替换法 …… (32)

1.7　三角函数积分中的倍角法 …… (36)

1.8　倍角法的应用 …… (43)

1.8.1　在函数 $\sin^p x, \cos^q x, \sin^p x\cos^q x$ 的积分中（p, q 为正整数，或奇整数，或偶整数） …… (43)

1.8.2　倍角法应用在含有三角函数与指数函数的积分 …… (46)

1.9　$\sec^n x$ 和 $\csc^n x$ 的积分 …… (48)

1.10　$\tan^n x$ 和 $\cot^n x$ 的积分 …… (51)

1.11　有理代数分式的积分法 …… (53)

1.12　无理代数函数的积分法 …… (59)

1.13　含有三角函数的有理式的积分法 …… (62)

1.13.1　一般的方法 …… (62)

1.13.2　微分积分法 …… (68)

1.13.3　万能替换法 …… (75)

1.14　含有双曲函数的有理式的积分法 …… (78)

1.15　配对积分法（组合积分法） …… (86)

第 2 章　定积分 …… (99)

2.1　定积分的定义 …… (99)

2.1.1 黎曼定义 …… (99)
2.1.2 面积求和法的定义——曲线下的面积 …… (100)
2.2 定积分的基本公式和常用法则 …… (101)
2.2.1 定积分的基本公式 …… (101)
2.2.2 定积分中的几个常用法则 …… (103)
2.3 欧拉积分、欧拉常数及其他常用常数 …… (104)
2.3.1 B 函数(Beta function) …… (105)
2.3.2 Γ 函数(Gamma function) …… (106)
2.3.3 几个重要常数 …… (110)
2.4 定积分中的分部积分法 …… (111)
2.5 定积分中的换元法 …… (117)
2.6 含参变量的积分法 …… (135)
2.7 无穷级数积分法 …… (144)
2.8 反常积分(Improper) …… (155)
2.8.1 反常积分的定义 …… (155)
2.8.2 反常积分存在的判别法 …… (157)
2.8.3 反常积分算例 …… (158)
2.8.4 伏汝兰尼(Froullani)积分 …… (160)
2.8.5 罗巴切夫斯基(Lobachevsky)积分法 …… (166)
2.8.6 一个通用的积分法则 …… (169)
2.8.7 有关欧拉常数 γ 的几个积分 …… (171)
2.9 定积分的近似计算 …… (176)
2.9.1 近似计算的方法 …… (176)
2.9.2 近似计算算例 …… (181)
2.9.3 近似计算的误差估算 …… (186)
第 3 章 定积分的应用 …… (190)
3.1 面积的计算 …… (190)
3.1.1 用定积分的定义来计算面积 …… (190)
3.1.2 几种常见曲线围成的面积的计算 …… (191)
3.2 曲线长度的计算 …… (200)
3.3 体积的计算 …… (207)
3.3.1 用逐次积分法计算体积 …… (207)
3.3.2 利用横截面计算体积 …… (208)
3.3.3 回旋体的体积 …… (209)
3.4 表面积的计算 …… (210)
3.4.1 投影法计算表面积 …… (210)

3.4.2　回旋体的侧面积计算法 …… (216)

第 4 章　重积分 …… (219)

4.1　二重积分 …… (219)

4.1.1　二重积分的定义及算例 …… (219)

4.1.2　二重积分上、下限的确定——穿线法 …… (222)

4.1.3　几个典型的积分次序及积分限变换的例子 …… (226)

4.1.4　两个一元函数乘积的积分 …… (232)

4.2　三重积分 …… (233)

4.2.1　三重积分的定义 …… (233)

4.2.2　三重积分的傅比尼定理 …… (233)

4.2.3　三重积分的算例 …… (234)

4.3　重积分的坐标变换 …… (240)

4.3.1　二重积分的坐标变换 …… (240)

4.3.2　三重积分的坐标变换 …… (244)

4.3.3　n 重积分的坐标变换 …… (248)

第 5 章　曲线积分和曲面积分 …… (253)

5.1　曲线积分 …… (253)

5.1.1　第一型曲线积分 …… (253)

5.1.2　第二型曲线积分 …… (256)

5.1.3　曲线积分的应用 …… (258)

5.2　格林(Green)公式 …… (262)

5.3　曲面积分 …… (266)

5.3.1　第一型曲面积分 …… (266)

5.3.2　第二型曲面积分 …… (274)

5.4　斯托克斯(Stokes)公式 …… (277)

5.5　高斯(Gauss)公式 …… (281)

5.6　高斯公式和斯托克斯公式在场论中的应用 …… (285)

5.6.1　高斯公式在场论中的应用 …… (285)

5.6.2　斯托克斯公式在场论中的应用 …… (287)

第 6 章　傅里叶积分和积分变换 …… (290)

6.1　傅里叶(Fourier)积分 …… (290)

6.1.1　傅里叶级数 …… (290)

6.1.2　傅里叶积分公式 …… (292)

6.2　傅里叶变换及其性质 …… (294)

6.2.1　傅里叶变换 …… (294)

6.2.2 傅里叶变换的性质 …… (294)
6.2.3 傅里叶余弦变换和正弦变换 …… (295)
6.2.4 傅里叶变换及傅里叶余弦变换和正弦变换算例 …… (297)
6.2.5 傅里叶变换的应用 …… (300)
6.3 拉普拉斯(Laplace)变换 …… (302)
6.3.1 拉普拉斯变换 …… (302)
6.3.2 拉普拉斯变换的性质 …… (303)
6.3.3 单项式的拉普拉斯变换算例 …… (304)
6.3.4 拉普拉斯逆变换 …… (306)
6.3.5 拉普拉斯变换的应用 …… (307)
第7章 复变函数的积分 …… (311)
7.1 复变函数的概念 …… (311)
7.1.1 复数和复平面 …… (311)
7.1.2 复数的四则运算 …… (312)
7.1.3 复变函数 …… (312)
7.2 复变函数的微商(导数) …… (313)
7.3 复变函数的积分 …… (314)
7.3.1 曲线积分 …… (314)
7.3.2 柯西积分定理 …… (316)
7.3.3 复变函数的不定积分 …… (317)
7.3.4 柯西积分公式 …… (319)
7.3.5 解析函数的高阶微商 …… (320)
7.3.6 无界区域的柯西积分公式 …… (321)
7.4 复变函数的无穷级数展开——泰勒级数与罗朗级数 …… (321)
7.4.1 泰勒(Taylor)级数 …… (321)
7.4.2 罗朗(Laurent)级数 …… (323)
7.5 留数定理及其在积分上的应用 …… (325)
7.5.1 留数定理 …… (325)
7.5.2 留数的计算方法 …… (326)
7.5.3 留数定理在定积分计算中的应用 …… (327)
第8章 特殊函数的积分法 …… (349)
8.1 特殊函数的积分法 …… (349)
8.1.1 特殊函数 …… (349)
8.1.2 积分中常用的一些公式 …… (349)
8.2 含有贝塞尔函数的积分 …… (353)
8.2.1 含有第一类贝塞尔函数的积分 …… (353)

8.2.2　含有第二类贝塞尔函数(诺伊曼函数)的积分 …… (358)
8.2.3　含虚自变量的贝塞尔函数的积分 …… (360)
8.2.4　双贝塞尔函数的积分 …… (363)
8.2.5　贝塞尔函数与幂函数组合的积分 …… (366)
8.2.6　贝塞尔函数与三角函数组合的积分 …… (372)
8.2.7　贝塞尔函数与双曲函数组合的积分 …… (378)
8.2.8　艾里(Airy)积分 …… (381)
8.3　含有勒让德函数的积分 …… (386)
8.4　含有超几何函数的积分 …… (399)
8.5　马蒂厄函数的积分 …… (402)
8.5.1　马蒂厄方程 …… (402)
8.5.2　马蒂厄函数积分算例 …… (403)
参考书目 …… (405)

绪　论

微积分的发明和创立是数学史上划时代的事件.它是继欧几里得几何之后,全部数学史中一个最伟大的创造.

微积分是17世纪由牛顿和莱布尼兹创立的.18世纪经过欧拉、拉格朗日等人系统化的努力,摆脱了原来几何或力学的语言和思想方法,形成以函数为中心,以代数运算为基础的数学分析体系.19世纪又经过柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯的严格化,进一步形成严谨的数学分析系统,微积分得到更大的发展.现在微积分已成为科学技术中不可或缺的有力工具了.

微积分的创立不仅推动了近代数学的发展,如微分方程、变分法、微分几何的发展,而且推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学的发展.

微积分的出现是初等数学向高等数学变化的重大转折,是常量数学向变量数学发展的里程碑.17世纪上半叶笛卡儿的解析几何把变量引入数学,使数学进入一个新的发展时期.解析几何在数学发展中起了推动作用,恩格斯曾说:"数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了."

但解析几何学的诞生还不是新时代的开始,它只是对旧数学做了总结,使代数与几何融为一体,并引出变量的概念.而微积分的创立和发展却开创了数学史上的新纪元.从此,数学进入自然科学的各个领域,并推动着自然科学的发展.在今天,可以毫不夸张地说,不掌握微积分就无法掌握现代任何一门自然科学和工程技术.

微积分的主要内容是极限理论、微分学和积分学.极限理论是微积分的基础,微分和积分是互逆运算.如果知道一个函数的微分,那么进行逆向运算,积分这个微分,结果就得到该函数了.例如,我们知道对函数 $\sin x$ 求微商的结果是

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

那么,它的逆运算则是

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

这样就得到原函数 $\sin x$ 了.这就是所谓求原函数的方法.本书的内容之一就是探讨用积分来求原函数的方法和技巧.

本书不讨论极限理论,也不论述微分学,对积分学也只是从积分的方法这个

角度来展开，探讨各种积分的方法，从初等函数到特殊函数，从实变函数到复变函数.

微积分经过了三百多年的发展历程，积分的方法已日臻成熟和完善，许多积分方法已成经典.如分项积分法是牛顿创立微积分之初在关于“无穷多项方程分析”的论文中首先论证并使用的[32][33]，换元积分法和分部积分法也早已在欧拉和伯努利的论著中用来求解许多困难的积分了[32].如今，分项积分法、分部积分法和换元积分法这三大方法已成为积分中最常用的方法，应用广泛，而且具有普遍意义.其中，换元积分法实际上就是承接莱布尼兹的复合函数微分积分的法则而来的.我们要讲的三角替代法、欧拉替换法以及万能替换法不过是换元法的延伸.倍角法只在特殊形态的三角函数的积分上适用，组合积分法也只对某些特殊形状的被积函数的积分有用.

在定积分中，除了在不定积分中能使用的方法外，还有一些特殊的方法和特别的技巧，如利用参变数的积分，利用把被积函数展开成无穷级数的积分，利用复变函数的回路积分，特别是应用复变函数的留数定理来计算实变函数的积分.这些方法都将在本书中详细论述.

至于积分的技巧，是指在积分过程中根据实际情况而采用的一些小方法和窍门，例如待定系数法、配方法、分部积分法中的分部法、重积分中的坐标变换法、回路积分中的回路选取法的技巧性都很强，我们管这些叫积分的技巧.实际上，方法和技巧有时也很难分辨，方法也好，技巧也罢，只要在实际的积分运算中起到积极作用就行.

本书的公式推导十分详尽，主要是因为许多方法和技巧是寓于推演的过程中的.有时，遇到一个很陌生的积分式子，在对这个公式外形进行改造，或用新的符号替换后，一下子就变成你所熟悉的式子了.在这种情况下，并不一定要特别说明用了什么方法和技巧，你只需要注意每一步的变化就明白了，其中的方法和技巧你也就掌握了.

我们从微分学中已经知道许多初等函数的微分结果，那么用相应的逆运算，积分结果也就可以得到了.现将常用的初等函数的微分公式及其对应的积分公式列于表 0.1.这些公式对于以后进行复杂的积分运算是很有用处的.如果你能把这些公式熟记于心，那么在你做积分计算时将会得心应手，顺风顺水了.

微分式用微商或导数表示，如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$.

表 0.1　常用的初等函数微商公式及其对应的积分公式表

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$	$\int \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x = x^{\mu}$
$(\sqrt[p]{x^m})' = \frac{m}{p}x^{\frac{m-p}{p}}$	$\int \frac{m}{p}x^{\frac{m-p}{p}}\mathrm{d}x = x^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{x^m}$
$(\ln \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln \lvert x \rvert$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x$
$(\sec x)' = \sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x$
$(\csc x)' = -\csc x\cot x$	$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\arccos x$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x$
$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\operatorname{arccot} x$
$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \operatorname{arcsec} x$
$(\operatorname{arccsc} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = -\operatorname{arccsc} x$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x$
$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \tanh x$

$(\coth x)' = \operatorname{csch}^2 x = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\mathrm{d}x = \coth x$
$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x\tanh x$	$\displaystyle\int \operatorname{sech} x\tanh x\mathrm{d}x = -\operatorname{sech} x$
$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x\coth x$	$\displaystyle\int \operatorname{csch} x\coth x\mathrm{d}x = -\operatorname{csch} x$
$(\operatorname{arsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x$
$(\operatorname{arcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh} x$
$(\operatorname{artanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{artanh} x$
$(\operatorname{arcoth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = -\operatorname{arcoth} x$
$(\operatorname{arsech} x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\operatorname{arsech} x$
$(\operatorname{arcsch} x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = -\operatorname{arcsch} x$
$(\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm b}\rvert)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm b}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm b}}\mathrm{d}x = \ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm b}\rvert$

表 0.1 右列的积分公式中，在等式的右边应该加上积分常数 C. 这里没有加常数 C 是为了在形式上看起来对称，并表明微分和积分是互逆的. 但在实际运算时，千万别忘了加上积分常数 C!

第1章　不定积分

1.1　不定积分中的原函数概念

大家知道在微积分中，微分学的基本问题是求给定函数的微分或微商；而积分学的基本问题则是一个反问题，是一个与求微分（或微商）的运算相反的过程，或者说是做微分的逆运算——积分.

如果在给定的区间里，$f(x)$是函数 $F(x)$的导数，或 $f(x)\mathrm{d}x$ 是$F(x)$的微分，即

$$F(x)' = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

那么，在给定的区间上，$F(x)$叫做**函数 $f(x)$的原函数**，或**$f(x)$的积分**. 求一个函数$f(x)$的原函数，称为求积分，我们用下式表示：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) \tag{1.1}$$

可以看到，求积分实际上是做微分的逆运算. 因此，对于单项式函数，只要你知道该函数在微分前的原函数，那么求积分的工作就完成了. 例如微分式

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

那么反过来，它的积分式就是

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}$$

但考虑到常数 C 在取微分时为零的情况，即

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$$

所以，积分后应加上常数 C，即

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$$

因此，积分式(1.1)中应该加上积分常数 C，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{1.2}$$

式中的这个 C 是任意常数，所以原则上讲，任何一个函数的原函数都有无穷多个，它们之间只差常数 C.

同理，因为 $(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$，所以就有

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

1.2 分项积分法

若干个微分式的和(或差)的不定积分，等于每个微分式各自积分的和(或差)．如

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x - \int h(x)\mathrm{d}x \quad (1.3)$$

这里的微分式 $f(x)\mathrm{d}x$，$g(x)\mathrm{d}x$，$h(x)\mathrm{d}x$ 等称为被积表达式，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 等称为被积函数．式(1.3)就是**分项积分法**的表达式．

一个多项式的积分，等于组成该多项式的各个单项式的积分之和．如

$$\int \left(5x^2 - 4x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 5\int x^2\mathrm{d}x - 4\int x\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

式中的 C 为积分常数．

如果一个分式的分母为多项式，则可把它化成最简单的分式再积分．如

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2}$$

因为被积函数的分母是一个二次函数，可分解为

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

所以可用部分分式法使被积函数分成如下两项：

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

其中 A，B 为待定系数．两边通分，得到等式

$$(x + a)A + (x - a)B = 1$$

在上式中，若令 $x = 0$，则 $A - B = \frac{1}{a}$；令 $x = a$，则 $A = \frac{1}{2a}$，因而得到 $B = -\frac{1}{2a}$，于是

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right)$$

因此，积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right)\\ &= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\end{aligned}$$

用同样的方法，可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}(-\ln|a-x| + \ln|a+x|) + C\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\end{aligned}$$

更一般的情况是分母、分子都是多项式，并且分子的幂次小于分母的幂次，即真分式的情况. 例如求积分

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

被积函数的分母为 x 的二次函数，虽然不能直接分解，但可以进行配方：

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

再设

$$t = x + \frac{p}{2}$$

则

$$x = t - \frac{p}{2}, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

并令

$$q - \frac{p^2}{4} = \pm a^2$$

等式右边取正号或负号，要看等式左边的符号. 再令

$$A = m, \quad B = n - \frac{1}{2}mp$$

则

$$mx + n = At + B$$

于是我们可以把积分写成

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{At+B}{t^2 \pm a^2}\mathrm{d}t = A\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2 \pm a^2} + B\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 \pm a^2}$$

其中

$$A\int \frac{t\,dt}{t^2 \pm a^2} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2 \pm a^2)}{t^2 \pm a^2} = \frac{A}{2}\ln|t^2 \pm a^2| + C$$

$$B\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$$

$$B\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C$$

最后，我们得到两个积分结果：

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln|t^2 + a^2| + \frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$$

$$= \frac{m}{2}\ln|x^2 + px + q| + \frac{2n - mp}{\sqrt{4q - p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$$\left(q > \frac{p^2}{4}\right) \qquad (\text{Ⅰ})$$

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln|t^2 - a^2| + \frac{B}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$= \frac{m}{2}\ln|x^2 + px + q| + \frac{2n - mp}{2\sqrt{p^2 - 4q}}\ln\left|\frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 + 4q}}\right| + C$$

$$\left(q < \frac{p^2}{4}\right) \qquad (\text{Ⅱ})$$

例 1 求积分$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$.

解 这个积分的被积函数是真分式，可用前面的公式来计算.

在这个积分里，$p = q = 1, m = n = 1, q > \frac{p^2}{4}$，该积分可用公式(Ⅰ)，把 $p = q = 1, m = n = 1$ 代入公式(Ⅰ)中，得到

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

例 2 求积分$\int \frac{5x+6}{x^2+3x+1}dx$.

解 在这个积分里，$p = 3, q = 1; m = 5, n = 6, q < \frac{p^2}{4}$，应用公式(Ⅱ)，得到

$$\int \frac{5x+6}{x^2+3x+1}dx = \frac{5}{2}\ln|x^2 + 3x + 1| - \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x + 3 - \sqrt{5}}{2x + 3 + \sqrt{5}}\right| + C$$

公式(Ⅰ)和(Ⅱ)对于被积函数的分母是二次式，而分子小于二次的真分式的积分具有普遍意义，如前面遇到的积分

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx$$

在被积函数中，$p = 0, q = -a^2; m = 0, n = 1$，因为 $q < \frac{p^2}{4}$，所以适用公式(Ⅱ)，把

$p=0, q=-a^2; m=0, n=1$ 代入公式(Ⅱ)中,得到

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{2\times 1-0}{2\sqrt{0-4(-a^2)}}\ln\left|\frac{2x+0-\sqrt{0-4(-a^2)}}{2x+0+\sqrt{0-4(-a^2)}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

同样,对于积分

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

在被积函数中,$p=0, q=a^2; m=0, n=1$,因为 $q>\frac{p^2}{4}$,所以适用式(Ⅰ),把 $p=0$, $q=a^2; m=0, n=1$ 代入式(Ⅰ)中,得到

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{2\times 1-0}{2\sqrt{4a^2-0}}\arctan\frac{2x+0}{\sqrt{4a^2-0}} + C = \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

对于被积函数中分母大于二次幂的情况,虽然还是真分数,也不能再用上述的式(Ⅰ)和(Ⅱ)了.但在有些情况下我们可用前面提到的待定系数法把被积函数分解成分母幂次不大于2的多项分式之和,然后再分项积分.如下面的例子:

例3 求积分 $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\mathrm{d}x$.

解 令被积函数

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+3}+\frac{C}{2x-5}$$

式中 A, B, C 为待定系数,由恒等式[两边乘上 $(2x-1)(2x+3)(2x-5)$]

$$4x^2+4x-11 = A(4x^2-4x-15)+B(4x^2-12x+5)+C(4x^2+4x-3)$$

$$= 4(A+B+C)x^2+4(-A-3B+C)x+(-15A+5B-3C)$$

两边同次幂的系数相等,得

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ A+3B-C=-1 \\ 15A-5B+3C=11 \end{cases}$$

解得

$$A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=\frac{3}{4}$$

因此积分为

$$\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{2x+3}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-5}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+3}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x-5}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{8}\ln|2x+3|+\frac{3}{8}\ln|2x-5|+C$$

例 4 求积分 $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\mathrm{d}x$.

解 被积函数的分母可分解为

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$$

因此,被积函数可写成

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

因为 $x-1$ 因子出现两次,所以在分母中有 $x-1$ 和 $(x-1)^2$ 两项. 两边乘 $(x+1)(x-1)^2$,得

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

我们当然可以按照前面的方法,把等式右边展开,再用两边 x 的同次幂的系数相等的方法求得待定系数 A,B,C. 但这样做显然比较麻烦. 此处我们通过给定 x 某些特定值来求 A,B,C,也许会快一点. 如若令 $x=1$,则 $8=2C$,得 $C=4$;再令 $x=-1$,那么 $2=4A$,得 $A=\frac{1}{2}$. 为了求 B,可比较两边 x^2 的系数,等式左边为 0,右边是 $A+B$,即 $A+B=0$,得到 $B=-A=-\frac{1}{2}$,这样,就有

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+4\frac{1}{(x-1)^2}$$

把它代入积分式,有

$$\begin{aligned}\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\mathrm{d}x&=\int\left[\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+4\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\\&=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C\end{aligned}$$

例 5 求积分 $\int\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-1}\mathrm{d}x$.

解 用部分分式法,使被积函数变成

$$\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

两边同时乘上 x^4-1,得到

$$\begin{aligned}x^3-x^2+2x=&(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2\\&+(A+B-C)x+(A-B-D)\end{aligned}$$

令方程两边同次幂的系数相等,得到联立方程

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ A-B+D=-1 \\ A+B-C=2 \\ A-B-D=0 \end{cases}$$

解得

$$A=\frac{1}{2},\quad B=1,\quad C=D=-\frac{1}{2}$$

因此

$$\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}$$

于是,用分项积分法得到

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-1}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\arctan x+C\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2(x+1)^4}{x^2+1}-\frac{1}{2}\arctan x+C\end{aligned}$$

例 6 求积分$\int\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}\mathrm{d}x$.

解 把被积函数分解为

$$\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}$$

其中 A,B,C,D,E 为待定系数.等式两边乘 $x^3(x-2)^2$,得

$$x+1=Ax^2(x-2)^2+Bx(x-2)^2+C(x-2)^2+Dx^3(x-2)+Ex^3$$

令 $x=0$,则有 $1=4C$,得到 $C=\frac{1}{4}$;令 $x=2$,则有 $3=8E$,得到 $E=\frac{3}{8}$;比较两边 x 的系数,则有 $1=4B-4C$,得到 $B=\frac{1}{2}$;比较两边 x^2 的系数,则有 $0=4A-4B+4C$,得到 $A=\frac{1}{4}$;比较两边 x^4 的系数,则有 $0=A+D$,得到 $D=-\frac{1}{4}$;把代定系数 A,B,C,D,E 的值代入后,得到

$$\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{8}\frac{1}{(x-2)^2}$$

因此,所求的积分结果为

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}\mathrm{d}x&=\int\left[\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{8}\frac{1}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}+\frac{3}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}\\&=\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{8(x-2)}+C\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{4x+1}{8x^2} - \frac{3}{8(x-2)} + C$$

如果被积函数的分式中，分子的幂次大于分母的幂次，那么，应该用分母去除分子，直到出现既约真分数，如下面的积分(例 7、例 8).

例 7 求积分$\int \frac{x^3}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x$.

解 这里，被积函数中的分子是 3 次方，而分母为 2 次方，因此应该用除法使其变成既约真分数：

$$\begin{array}{r|l} & x+(a+b) \\ \hline x^2-(a+b)x+ab & x^3 \\ & \underline{x^3-(a+b)x^2+abx} \\ & (a+b)x^2-abx \\ & \underline{(a+b)x^2-(a+b)^2x \quad +ab(a+b)} \\ & [(a+b)^2-ab]x-ab(a+b) \end{array}$$

所以被积函数可化成

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)} = x + (a+b) + \frac{[(a+b)^2 - ab]x - ab(a+b)}{(x-a)(x-b)}$$

我们看到，等式右边的第三项是真分式，可用以前用过的待定系数法把它分解. 令

$$\frac{[(a+b)^2 - ab]x - ab(a+b)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

两边乘上$(x-a)(x-b)$，得

$$\begin{aligned}[a^2 + b^2 + ab]x - ab(a+b) &= A(x-b) + B(x-a) \\ &= (A+B)x - (Ab + Ba)\end{aligned}$$

使等式两边 x 的同幂次的系数相等，则有

$$\begin{cases} A + B = a^2 + b^2 + ab \\ Ab + Ba = a^2 b + ab^2 \end{cases}$$

从上式可解得

$$A = \frac{a^3}{a-b}, \quad B = \frac{b^3}{b-a}$$

于是

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)} = x + (a+b) + \frac{a^3}{a-b}\frac{1}{x-a} + \frac{b^3}{b-a}\frac{1}{x-b}$$

因此，我们就能应用分项积分法来做积分了：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x &= \int\left[x + (a+b) + \frac{a^3}{a-b}\frac{1}{x-a} + \frac{b^3}{b-a}\frac{1}{x-b}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int x\mathrm{d}x + \int (a+b)\mathrm{d}x + \frac{a^3}{a-b}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \frac{b^3}{a-b}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-b}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + (a+b)x + \frac{a^3}{a-b}\ln|x-a| - \frac{b^3}{a-b}\ln|x-b| + C$$

例 8 求积分$\int \frac{x^4+x^3}{x+2}\mathrm{d}x$.

解 与前例一样,被积函数是一个假分式,分子的幂次大于分母,仍用除法把它化成既约真分式:

$$\begin{array}{r|l} & x^3-x^2+2x-4 \\ \hline x+2 & x^4+x^3 \\ & x^4+2x^3 \\ \hline & -x^3 \\ & -x^3-2x^2 \\ \hline & 2x^2 \\ & 2x^2+4x \\ \hline & -4x \\ & -4x-8 \\ \hline & 8 \end{array}$$

这样被积函数就可分解为

$$\frac{x^4+x^3}{x+2} = x^3 - x^2 + 2x - 4 + \frac{8}{x+2}$$

最后用分项积分法来做积分:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+x^3}{x+2}\mathrm{d}x &= \int\left(x^3 - x^2 + 2x - 4 + \frac{8}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int x^3\mathrm{d}x - \int x^2\mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{d}x - 4\int \mathrm{d}x + 8\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x + 8\ln|x+2| + C \end{aligned}$$

1.3 分部积分法

1.3.1 分部积分法的基本公式

根据乘积的微分法则

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u \tag{1.4}$$

式中 d(uv)的原函数显然是 uv,所以得到公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{1.5}$$

这个公式就是分部积分法则，也是**分部积分法的基本公式**.

如果 $u=f(x)$，$v=g(x)$都是 x 的函数，则式(1.5)可写成

$$\int f(x)g(x)'\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f(x)'\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

例如，求积分$\int x\cos x\mathrm{d}x$. 令 $u=x$，$\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x$，于是 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=\sin x$. 按照式(1.5)，就得到

$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x &= \int x\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x\\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

分部积分法把求 $x\cos x$ 的较难积分问题变为求 $\sin x$ 的较简单积分问题. 在求 v 时，必须求 $\cos x\mathrm{d}x$ 的积分，故称分部积分.

分部积分法的要点在于把积分$\int u\mathrm{d}v$ 变成比它更容易的积分$\int v\mathrm{d}u$. 如果不是这样，那就要重新考虑了. 因此，在应用分部积分法时，在被积函数中选取哪一部分作为 u，哪一部分作为 $\mathrm{d}v$ 是很重要的. 像上例中，如果取 $x\mathrm{d}x$ 作为 $\mathrm{d}v$，而把 $\cos x$ 作为u，显然就不合适了.

1.3.2 分部积分法的推广公式

重复使用分部积分法则，可以得到分部积分法的推广公式. 假定函数 $u(x)$和 $v(x)$在所考虑的区间上有直到 $n+1$ 阶的连续导数：

$$u',\quad u'',\quad u''',\quad \cdots,\quad u^{(n)},\quad u^{(n+1)}$$
$$v',\quad v'',\quad v''',\quad \cdots,\quad v^{(n)},\quad v^{(n+1)}$$

那么，在式(1.5)中若以 $v^{(n)}$代替 v，则有

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}\mathrm{d}u = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\mathrm{d}x$$

同样地，也有

$$\int u'v^{(n)}\mathrm{d}x = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x$$

$$\int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}\mathrm{d}x$$

$$\cdots$$

$$\int u^{(n)}v'\mathrm{d}x = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$$

将最后的公式逐步往前代入，就可得到

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots$$

$$+(-1)^n u^{(n)} v+(-1)^{(n+1)}\int u^{(n+1)} v\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

这就是**分部积分法的推广公式**.

当被积函数的因式之一是多项式时,利用这个公式是特别方便的.如果 u 是 n 次多项式,那么 $u^{(n+1)}$ 等于零.例如:

例 9 求积分 $\int(2x^3+3x^2+4x+5)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 令

$$u=2x^3+3x^2+4x+5,\quad \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x,\quad v=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$$

则

$$\begin{aligned} &u'=6x^2+6x+4, && u''=12x+6, && u'''=12\\ &v'=\mathrm{e}^x, && v''=\mathrm{e}^x, && v'''=\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\int(2x^3+3x^2+4x+5)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x\\ &=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-u'''v^{(n-3)}\\ &=(2x^3+3x^2+4x+5)\mathrm{e}^x-(6x^2+6x+4)\mathrm{e}^x\\ &\quad+(12x+6)\mathrm{e}^x-12\mathrm{e}^x+C\\ &=(2x^3-3x^2+10x-5)\mathrm{e}^x+C\end{aligned}$$

例 10 求积分 $\int\cos x(x^3+2x^2+3x+4)\mathrm{d}x$.

解 令

$$u=x^3+2x^2+3x+4,\quad \mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x,\quad v=\int\cos x\mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned} &u=x^3+2x^2+3x+4, && v^{(n+1)}=\cos x\\ &u'=3x^2+4x+3, && v^{(n)}=\sin x\\ &u''=6x+4, && v^{(n-1)}=-\cos x\\ &u'''=6, && v^{(n-2)}=-\sin x\\ &u^{(4)}=0 && v^{(n-3)}=\cos x\\ & && v^{(n-4)}=\sin x \end{aligned}$$

这样,可以得到

$$\begin{aligned}\int(x^3+2x^2+3x+4)\cos x\mathrm{d}x&=\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x\\ &=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-u'''v^{(n-3)}\\ &=(x^3+2x^2+3x+4)\sin x-(3x^2+4x+3)(-\cos x)\\ &\quad+(6x+4)(-\sin x)-6\cos x+C\end{aligned}$$

$$= (x^3 + 2x^2 - 3x)\sin x + (3x^2 + 4x - 3)\cos x + C$$

1. 从上述两个例子看到，重复应用分部积分法，可以计算下列形式的积分：

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin bx dx, \quad \int P(x)\cos bx dx$$

其中 $P(x)$ 是 x 的多项式. 使用分部积分法的推广公式(1.7)，可以得到以下几种形式的积分普遍表达式.

(ⅰ) 积分 $\int P(x)e^{ax}dx$.

若令 $v^{(n+1)} = e^{ax}$，则

$$v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}, \quad v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3}, \quad \cdots$$

并假设 $P(x)$ 是 x 的 n 次多项式，那么积分为

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(P \cdot \frac{1}{a} - P' \cdot \frac{1}{a^2} + P'' \cdot \frac{1}{a^3} - P''' \cdot \frac{1}{a^4} + \cdots\right) + C$$

(ⅱ) 积分 $\int P(x)\sin bx dx$.

同前法，令 $v^{(n+1)} = \sin bx$，则

$$v^{(n)} = -\frac{\cos bx}{b}, \quad v^{(n-1)} = -\frac{\sin bx}{b^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{\cos bx}{b^3}, \quad \cdots$$

仍假设 $P(x)$ 是 x 的 n 次多项式，因此有

$$\int P(x)\sin bx dx = \sin bx\left(P' \cdot \frac{1}{b^2} - P''' \cdot \frac{1}{b^4} + \cdots\right) - \cos bx\left(P \cdot \frac{1}{b} - P'' \cdot \frac{1}{b^3} + \cdots\right) + C$$

(ⅲ) 积分 $\int P(x)\cos bx dx$.

同前法，令 $v^{(n+1)} = \cos bx$，则

$$v^{(n)} = \frac{\sin bx}{b}, \quad v^{(n-1)} = -\frac{\cos bx}{b^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{\sin bx}{b^3}, \quad \cdots$$

这里，仍假设 $P(x)$ 是 x 的 n 次多项式，那么积分为

$$\int P(x)\cos bx dx = \sin bx\left(P \cdot \frac{1}{b} - P'' \cdot \frac{1}{b^3} + \cdots\right) + \cos bx\left(P' \cdot \frac{1}{b^2} - P''' \cdot \frac{1}{b^4} + \cdots\right) + C$$

2. 在求积分 $\int \ln x dx$，$\int \arctan x dx$，$\int \operatorname{arsinh} x dx$ 中应用分部积分法时，可把 1 作为被积函数的因式之一来帮助积分.

(ⅰ) $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$.

令

$$u = \ln x,\quad dv = 1 \cdot dx = dx,\quad du = \frac{dx}{x},\quad v = x$$

则

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \\ &= x\ln \frac{x}{e} + C\end{aligned}$$

(ⅱ) $\int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan x dx$.

令

$$u = \arctan x,\quad dv = 1 \cdot dx = dx,\quad du = \frac{dx}{1+x^2},\quad v = x$$

则

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(ⅲ) $\int \operatorname{arsinh} x dx = \int 1 \cdot \operatorname{arsinh} x dx$.

令

$$u = \operatorname{arsinh} x,\quad dv = 1 \cdot dx = dx,\quad du = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},\quad v = x$$

则

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arsinh} x dx &= x \cdot \operatorname{arsinh} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ &= x\operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

3. 求积分 $\int xe^{ax} dx, \int x\ln x dx, \int x\sin x dx$.

(ⅰ) $\int xe^{ax} dx$.

令

$$u = x,\quad dv = e^{ax} dx,\quad du = dx,\quad v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

则

$$\int xe^{ax} dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax} dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C$$

(ⅱ) $\int x\ln x dx$.

令

$$u = \ln x,\quad dv = x\,dx,\quad du = \frac{dx}{x},\quad v = \frac{x^2}{2}$$

则

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

(ⅲ) $\int x\sin x\,dx$.

令

$$u = x,\quad dv = \sin x\,dx,\quad du = dx,\quad v = -\cos x$$

则

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

4. 求积分 $\int x^2\ln x\,dx$, $\int x^2\sin x\,dx$, $\int x^2 e^{ax}\,dx$.

(ⅰ) $\int x^2\ln x\,dx$.

令

$$u = \ln x,\quad dv = x^2\,dx,\quad du = \frac{dx}{x},\quad v = \frac{1}{3}x^3$$

则

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

(ⅱ) $\int x^2\sin x\,dx$.

令

$$u = x^2,\quad dv = \sin x\,dx,\quad du = 2x\,dx,\quad v = -\cos x$$

则

$$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x - \int(-\cos x)2x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$$

(ⅲ) $\int x^2 e^{ax}\,dx$.

令

$$u = x^2,\quad dv = e^{ax}\,dx,\quad du = 2x\,dx,\quad v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

则

$$\int x^2 e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}2x\,dx = \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2}{a}\int x e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2}{a}\left(\frac{1}{a}x e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}\right) + C$$

$$= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} + C$$

5. $\int x^k (\ln x)^n dx$ 的递推公式.

例 11 求积分$\int x^3 (\ln x)^2 dx$.

解 设

$$u = (\ln x)^2, \quad dv = x^3 dx, \quad du = 2\ln x \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^4}{4}$$

则有

$$\int x^3 (\ln x)^2 dx = \frac{x^4}{4} (\ln x)^2 - \int \frac{x^4}{4} 2\ln x \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 (\ln x)^2 - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x dx \qquad (\text{Ⅰ})$$

再应用分部积分法于该式右边的第二项,令

$$u = \ln x, \quad dv = x^3 dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^4}{4}$$

得到

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C \qquad (\text{Ⅱ})$$

把式(Ⅱ)代入式(Ⅰ),于是求得

$$\int x^3 (\ln x)^2 dx = \frac{1}{4}x^4 (\ln x)^2 - \frac{1}{8}x^4 \ln x + \frac{1}{32}x^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \left[(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right] + C$$

从式(Ⅰ)可看出,应用一次分部积分法,就可使 $\ln x$ 的幂次降1.由此推断:对于被积函数为 $x^k (\ln x)^n$ 的积分,只要使用 n 次分部积分法,就可使 $\ln x$ 的幂次降到零.我们可据此推演出积分$\int x^k (\ln x)^n dx$ 的递推公式,其中 k 为任意实数,n 是正整数.

设

$$u = (\ln x)^n, \quad dv = x^k dx, \quad du = n (\ln x)^{n-1} \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$$

那么

$$\int x^k (\ln x)^n dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} (\ln x)^n - \frac{n}{k+1}\int x^k (\ln x)^{n-1} dx \qquad (\text{Ⅲ})$$

从公式(Ⅲ)知,每应用一次分部积分,可使 $\ln x$ 的幂次降1,多次连续地运用分部积分法,就可得到最后的积分结果.

6. 我们用分部积分法来研究积分 $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\sin bx dx$.

设

$$u = \cos bx(\text{或 } \sin bx),\quad dv = e^{ax}dx$$

$$du = -b\sin bx dx(\text{或 } b\cos bx dx),\quad v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

那么

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}(-b\sin bx dx)$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$$

由上面两式可解得

$$\begin{cases}\int e^{ax}\cos bx dx = e^{ax}\dfrac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C\\ \int e^{ax}\sin bx dx = e^{ax}\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C\end{cases} \tag{Ⅳ}$$

其中 C 是积分常数.

7. 用分部积分法求积分 $\int x^n e^{ax}\cos bx dx$, $\int x^n e^{ax}\sin bx dx$.

令

$$u = x^n,\quad dv = e^{ax}\cos bx dx(\text{或 } dv = e^{ax}\sin bx dx),\quad du = nx^{n-1}dx,$$

$$v = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\left(\text{或 } v = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\right)$$

则有

$$\int x^n e^{ax}\cos bx dx = x^n e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} - \int e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\cdot nx^{n-1}dx$$

$$= x^n e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx dx$$

$$- \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx dx$$

$$\int x^n e^{ax}\sin bx dx = x^n e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} - \int e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\cdot nx^{n-1}dx$$

$$= x^n e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx dx$$

$$+ \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx dx$$

该结果表明,每做一次分部积分,x 的幂次就降 1,当运用 n 次分部积分时,x 的幂次降到零,此时就可应用公式(Ⅳ),把最后的积分求出来.

8. 求积分 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

令

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\quad \mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}u=-2nx(x^2+a^2)^{-(n+1)}\mathrm{d}x,\quad v=x$$

则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x[-2nx(x^2+a^2)^{-(n+1)}\mathrm{d}x]\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中第二项的积分部分可表示为

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}-a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}-2na^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

或

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

当 $n+1$ 用 n 代替时，上式变成

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

这就是该积分的递推公式.

上式表明，每应用一次分部积分法，被积函数分母的幂次降1，当 n 降至 $n=2$ 时，可得到积分的最后结果，该结果的最后一项应包含 $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$.

1.4 换元积分法

换元积分法是函数的积分法中最有力的方法，其应用几乎遍及所有的函数. 换元法的本质是用新的变量(或函数)代替原来的变量(或函数)，使积分变成相对简单的我们熟悉的容易操作的积分形式，以便于进行积分计算.

例如在积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中，用新变量 t 代替 x，设

$$x=\varphi(t),\quad \mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

式(1.8)称为**积分换元公式**.

例 12 求积分$\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sin x$,$\mathrm{d}t=\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$,则

$$\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x=\int \sin^3 x\mathrm{d}\sin x=\int t^3\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^4+C$$

再把 t 换回到 $\sin x$,就得到

$$\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

在该积分中,因为有 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x=\mathrm{d}t$,所以令 $t=\sin x$ 是合适的.但下面的例子:

$$\int \sin^3 x\mathrm{d}x$$

若用替换 $t=\sin x$ 就不合适了.

如果从被积函数中分出因式 $\sin x\mathrm{d}x$,以 $-\sin x\mathrm{d}x$ 作为新变量的微分,并由此得到变换 $t=\cos x$,被积函数的剩余部分为 $-\sin^2 x=\cos^2 x-1$,那么就有

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\mathrm{d}x&=\int(-\sin^2 x)(-\sin x)\mathrm{d}x=\int(\cos^2 x-1)\mathrm{d}\cos x\\&=\int(t^2-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3-t+C\\&=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C\end{aligned}$$

从上面的例题中可看到,在换元法中选择合适的变换式非常重要.

例 13 求积分$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=a\sin t$,$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,则有

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}x\\&=a^2\int \cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\&=a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C\end{aligned}$$

现在要把变量从 t 变回到 x.因为 $\sin t=\frac{x}{a}$,所以 $t=\arcsin\frac{x}{a}$,于是积分变成

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C\end{aligned}$$

例 14 求积分$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $t=x^2$,$\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$,则有

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$$

例 15 求积分 $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解 令 $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, 则有

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$$

例 16 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

解 令 $t = \frac{x}{a}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{a}$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{a}\arctan t + C$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

例 17 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 设 $t = \frac{x}{a}$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$, 则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

例 18 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

解 令

$$x = t^6, \quad \sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = t^2, \quad \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t, \quad t = \sqrt[6]{x}$$

那么

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6\int \mathrm{d}t - 6\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 6t - 6\arctan t + C$$

$$= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}) + C$$

例 19 求积分 $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\mathrm{d}x$.

解 设 $t = x^3$, $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$, 则有

$$\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\int \sec^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\tan t + C$$

$$= \frac{1}{3}\tan x^3 + C$$

例 20 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)$.

解 设 $x=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi$,则

$$\mathrm{d}x=-2a\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+2b\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=2(b-a)\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$x-a=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-a(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=(b-a)\sin^2\varphi$$

$$b-x=b(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi)=(b-a)\cos^2\varphi$$

把它们代入积分式中,得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int\frac{2(b-a)\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}}=2\int\mathrm{d}\varphi=2\varphi+C$$

$$=2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$$

最后的公式推导,因为

$$\frac{x-a}{b-x}=\frac{(b-a)\sin^2\varphi}{(b-a)\cos^2\varphi}=\tan^2\varphi$$

所以

$$\tan\varphi=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}},\quad \varphi=\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

例 21 求积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$.

解 令 $\tan x=t$,$\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tan x=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}$,则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{b^2\cos^2x\left(\frac{a^2}{b^2}\tan^2x+1\right)}$$

$$=\int\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}}{b^2\left(\frac{a^2}{b^2}\tan^2x+1\right)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{b^2\left(\frac{a^2}{b^2}t^2+1\right)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}t\right)}{b^2\frac{a}{b}\left[\left(\frac{a}{b}t\right)^2+1\right]}=\frac{1}{ab}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\quad\left(u=\frac{a}{b}t\right)$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan u+C=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}t\right)+C$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C$$

例 22 求积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x}$.

解 令 $\tan x=t$,$\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tan x=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}$,于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C$$

例 23 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

解 令 $\tan\frac{x}{2} = t$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tan\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) \Big/ \cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\Big/\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

例 24 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 因为 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

例 25 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2}$.

解 令 $\frac{x}{a} = \tan t$, $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}\tan t = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 则

$$x^2 + a^2 = a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right) = a^2(\tan^2 t + 1) = a^2\sec^2 t$$

那么

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{a^4\sec^4 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{a^3\sec^2 t} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a^3}\left(\int \mathrm{d}t + \int \cos 2t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a} + \frac{ax}{x^2 + a^2}\right) + C$$

例 26 求积分 $\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

解 令 $e^x = t$，$dt = de^x = e^x dx$，则

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan e^x + C$$

例 27 求积分 $\int \frac{dx}{(ax + b)^n}$.

解 设 $ax + b = t$，则

$$\int \frac{dx}{(ax + b)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax + b)}{(ax + b)^n} = \frac{1}{a}\int t^{-n} dt = \frac{1}{a(1 - n)} t^{1-n} + C$$

$$= \frac{1}{a(1 - n)(ax + b)^{n-1}} + C$$

例 28 求积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.

解 设

$$\sqrt{x^2 + a} = t - x$$

两边平方得

$$x^2 + a = t^2 + x^2 - 2tx$$

得到

$$x = \frac{t^2 - a}{2t}$$

于是

$$\sqrt{x^2 + a} = t - \frac{t^2 - a}{2t} = \frac{t^2 + a}{2t}$$

$$dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt$$

最后得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{\frac{t^2 + a}{2t^2}}{\frac{t^2 + a}{2t}} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

本题所用的换元方法为**欧拉替换法**，我们将在 1.6 节中做更详细的介绍.

例 29 求积分 $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 令 $x = a\sec t$，$dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t} dt = a\frac{\tan t}{\cos t} dt$，则有

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2 t - a^2 = a^2\tan^2 t$$

于是

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\frac{a\tan t}{\cos t} dt}{(a^2\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos t \cdot \tan^2 t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \sin^{-2} t \mathrm{d}\sin t = -\frac{1}{a^2 \sin t} + C$$

$$= -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

1.5 三角替代法

三角替代法是利用直角三角形的边、角与三角函数的关系来替代被积函数代数式中的元素，以简化积分计算的方法. 它是换元法中经常使用的一种方法. 在上一节换元法中，我们已经多次使用过，本节将用图形更直观地叙述三角替代法.

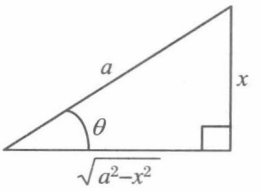


图 1.1

1. 如函数$\sqrt{a^2 - x^2}$的积分，可利用图 1.1 中的边、角关系求解.

设 $x = a\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x = a\cos\theta \mathrm{d}\theta$，$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$，于是积分变成对 θ 的积分.

由 $x = a\sin\theta$，得到 $\theta = \arcsin\dfrac{x}{a}$. 所以

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int a\cos\theta \cdot a\cos\theta \mathrm{d}\theta = a^2\int \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = a^2\int \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2\left(\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + C = a^2\left(\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}(a\sin\theta \cdot a\cos\theta + a^2\theta) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$$

2. 对于$\sqrt{a^2 + x^2}$的积分，可利用图 1.2 的三角形求解.

设

$$x = a\tan\theta, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$$

则

$$\mathrm{d}x = a\sec^2\theta \mathrm{d}\theta, \quad \theta = \arctan\frac{x}{a}$$

那么

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \int a\sec\theta \cdot a\sec^2\theta \mathrm{d}\theta = a^2\int \sec^3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\tan\theta\sec\theta + \frac{a^2}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

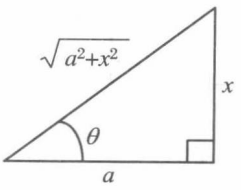


图 1.2

$$= \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right) + C$$

(关于积分$\int \sec^3\theta \mathrm{d}\theta$的推导见后.)

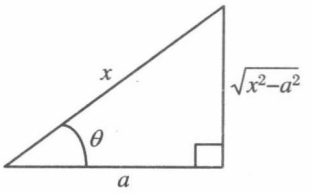


图 1.3

3. 对于包含$\sqrt{x^2-a^2}$的积分(如图 1.3 所示).

设 $x = a\sec\theta$,则有

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta$$

$$\mathrm{d}x = a\sec\theta\tan\theta\mathrm{d}\theta$$

于是

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \int a\tan\theta\cdot a\sec\theta\tan\theta\mathrm{d}\theta = a^2\int \sec\theta\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2\int \sec\theta(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta = a^2\int \sec^3\theta\mathrm{d}\theta - a^2\int \sec\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{a^2}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - a^2\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}a\sec\theta\cdot a\tan\theta - \frac{a^2}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right) + C \qquad (\mathrm{I})$$

[式中 $a\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = x+\sqrt{x^2-a^2}$的推导见后.]

例 30 求积分$\int \sqrt{x^2-4}\mathrm{d}x$.

解 式(Ⅰ)中令 $a=2$,则

$$\int \sqrt{x^2-4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-4} - 4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)^2 + C$$

4. 考虑积分$\int \sec\theta\mathrm{d}\theta$.

① 设 $\sec\theta = x$,$\tan\theta = \sqrt{x^2-1}$(如图 1.4 所示),于是有

$$\mathrm{d}x = \sec\theta\cdot\tan\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\sec\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}x}{\tan\theta} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

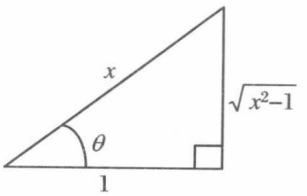


图 1.4

因此

$$\int \sec\theta \mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$$
$$= \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

②

$$\int \sec\theta \mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)/\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)/\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

③ 积分 $\int \sec^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right] + C$ 的推导.

由

$$\int \sec^3\theta \mathrm{d}\theta = \int \sec\theta \cdot \sec^2\theta \mathrm{d}\theta = \int \sec\theta \mathrm{d}\tan\theta$$
$$= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta \mathrm{d}\sec\theta$$
$$= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta\sec\theta\tan\theta \mathrm{d}\theta$$
$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)\mathrm{d}\theta$$
$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta \mathrm{d}\theta + \int \sec\theta \mathrm{d}\theta$$

得到

$$2\int \sec^3\theta \mathrm{d}\theta = \sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta \mathrm{d}\theta$$
$$= \sec\theta\tan\theta + \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

因此

$$\int \sec^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right] + C$$

④ 等式 $x + \sqrt{x^2-a^2} = a\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 的证明.

令

$$x = a\sec\theta, \quad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta$$

因此有

$$x + \sqrt{x^2-a^2} = a\sec\theta + a\tan\theta = a\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = a\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

另一方面

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}=\frac{(\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta})^2}{2\cos\theta}$$

$$=\frac{2+2\sin\theta}{2\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

因此证明了

$$x+\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

5. 万能替换法.

如果被积函数是由 $\sin x$ 或 $\cos x$ 组成的，可以考虑用 $t=\tan\frac{x}{2}$ 来替代，如图 1.5 所示.

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

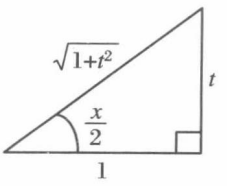


图 1.5

使用倍角公式

$$\sin x=\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

因为 $t=\tan\frac{x}{2}$，所以有

$$x=2\arctan t,\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

于是就有下面的代换：

$$\tan\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

这样，我们就能把所有的三角函数有理式转化为 t 的有理函数，三角函数的积分运算转化为 t 的有理函数的积分.

例 31 计算积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.

解 把 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 代入积分式，得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{1+2t-t^2}=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)}{1-\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{artanh}\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{t-1}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{t-1}{\sqrt{2}}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+t}{\sqrt{2}+1-t}\right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\tan\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\tan\dfrac{x}{2}}\right| + C$$

例 32 计算积分 $\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解 与上例相同，把 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 代入积分式，则有

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int\frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} = 2\int\frac{1-t}{(1+t^2)(1+t)}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\int\frac{\mathrm{d}(1+t)}{1+t} - \int\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2}$$

$$= 2\ln|1+t| - \ln|1+t^2| + C = \ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2} + C$$

$$= \ln\frac{\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)^2}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} + C$$

对于例 32 的积分还有更简便的方法：

$$\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int\frac{\mathrm{d}\sin x}{1+\sin x} = \int\frac{\mathrm{d}(1+\sin x)}{1+\sin x} = \ln(1+\sin x)+C$$

可以证明，上述两结果是相等的，只是形式不同罢了.

因为

$$\frac{\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)^2}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{\sec^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}} = \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$$= \cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1+\sin x$$

例 33 计算积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.

解 把 $\tan\frac{x}{2}=t$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 代入积分式，

则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2\mathrm{d}t}{2+2t}=\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

用半角的正切函数替换的方法来做三角函数的有理式的积分时，我们总能得到结果. 对于 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 这种类型的积分而言，它是一种普遍的方法，所以它有**“万能替换法”**之称.

1.6 欧拉替换法

在 $\int G(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 这种类型的积分中，如果根号内的二次式没有等根，则它不能用有理表达式替代，这时可使用欧拉替换法.

1. 第一种替换（$a>0$ 的情况）.

令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x$$

两边平方，并消去 ax^2 项后，得到

$$bx+c=t^2-2\sqrt{a}\cdot tx$$

则

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t+b}$$

$$\mathrm{d}x=2\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\cdot t+b)^2}\mathrm{d}t$$

例 34 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

解 把 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 和 $\mathrm{d}x$ 的替换式代入上式，则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{2\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\cdot t+b)^2}\mathrm{d}t}{\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t+b}}=\int \frac{2\mathrm{d}t}{2\sqrt{a}\cdot t+b}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\mathrm{d}(2\sqrt{a}\cdot t+b)}{2\sqrt{a}\cdot t+b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}\cdot t + b) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left[2\sqrt{a}\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x\right) + b\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left[2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} + 2ax + b\right] + C$$

2. 第二种情况($c>0$).

令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

(也可令$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$.)

两边平方,消去两端的 c,并约去 x,得到

$$ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}\cdot t$$

由此得到

$$x = \frac{2\sqrt{c}\cdot t - b}{a - t^2}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2\sqrt{c}\cdot t - b}{a - t^2}t + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}\cdot t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}$$

$$\mathrm{d}x = 2\frac{\sqrt{c}\cdot t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}\mathrm{d}t$$

例 35 求积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

解 令

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - 1$$

两边平方得

$$x^2 - x + 1 = t^2x^2 - 2tx + 1$$

由此得到

$$x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1},\quad \mathrm{d}x = -2\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}\mathrm{d}t$$

因此有

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1},\quad x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{2t - 1}{t^2 - 1} + \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1} = \frac{t}{t - 1}$$

于是积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{-2\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}\mathrm{d}t}{\frac{t}{t - 1}}$$

$$= -2\int \frac{(t^2 - t + 1)(t - 1)}{(t^2 - 1)^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t - 1)(t + 1)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{3}{2} \frac{1}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2} \right] \mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{t+1} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C$$

把 $t = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$ 代入上式，则得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1} + 2\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x} \right|$$

$$- \frac{1}{2}\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 1}{x} \right| - \frac{3}{2}\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1}{x} \right| + C$$

3. 第三种替换运用于这种情况：如果二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 有相异的实根 λ 和 μ，此时三项式可分解为

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu)$$

令

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$$

两边平方，得

$$ax^2 + bx + c = t^2 (x - \lambda)^2, \quad a(x - \lambda)(x - \mu) = t^2 (x - \lambda)^2$$

约去 $(x - \lambda)$ 后，得

$$t^2 x - ax = -a\mu + \lambda t^2$$

于是

$$x = \frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2 - a}, \quad t^2 = \frac{a(x - \mu)}{x - \lambda}$$

因此有

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2}\mathrm{d}t$$

例 36 求积分 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

解 对被积函数的分母中根号内的二次三项式进行因式分解得

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

当我们应用前面的公式时，可令 $a = 1, \lambda = 2, \mu = 3$，于是得到

$$x = \frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2 - a} = \frac{2t^2 - 3}{t^2 - 1}$$

$$t^2 = \frac{a(x - \mu)}{x - \lambda} = \frac{x - 3}{x - 2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2 - 1)^2}$$

$$\sqrt{x^2-5x+6}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}=-\frac{t}{t^2-1}$$

把相应的替换式代入积分式中,则有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-5x+6}}&=\int\frac{\dfrac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}}{\dfrac{2t^2-3}{t^2-1}-\dfrac{t}{t^2-1}}=\int\frac{2t}{(t^2-1)(2t^2-t-3)}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{2t}{(t-1)(2t-3)(t+1)^2}\mathrm{d}t\\&=\int\left[\frac{1}{50(t+1)}-\frac{1}{2(t-1)}+\frac{24}{25(t-3)}-\frac{2}{5(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{5}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{50}\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t-1)+\frac{12}{25}\ln(2t-3)+C\end{aligned}$$

将 $t=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 代入,得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-5x+6}}&=\frac{2}{5}(x-2-\sqrt{x^2-5x+6})+\frac{1}{50}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}+1\right)\\&\quad-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}-1\right)+\frac{12}{25}\ln\left(\frac{2\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}-3\right)+C\end{aligned}$$

例 37 求积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 令

$$\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$$

两边平方得

$$a^2-x^2=t^2(a-x)^2$$

约去$(a-x)$得到

$$t^2=\frac{a+x}{a-x},\quad x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad \mathrm{d}x=\frac{4at}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t,\quad x^2+a^2=\frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}$$

把有关式子代入积分中,得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}&=\int\frac{\dfrac{4at}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t}{\dfrac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}\cdot\dfrac{2at}{t^2+1}}\\&=\frac{1}{2a^2}\int\frac{2t^2+2}{t^4+1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a^2}\int\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}\cdot t+1}+\frac{1}{t^2-\sqrt{2}\cdot t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2}a^2}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\cdot t+1)}{(\sqrt{2}\cdot t+1)^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2}a^2}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\cdot t-1)}{(\sqrt{2}\cdot t-1)^2+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}a^2}\arctan(\sqrt{2}\cdot t+1)+\frac{1}{\sqrt{2}a^2}\arctan(\sqrt{2}\cdot t-1)+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}a^2}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{2(a+x)}{a-x}}+1\right)+\arctan\left(\sqrt{\frac{2(a+x)}{a-x}}-1\right)\right]+C$$

1.7 三角函数积分中的倍角法

1. 倍角法的思路.

诸如 $\sin^m x, \cos^m x$(m 为正整数)的一些函数的积分可应用倍角法. 它的主要思路是把高次幂的三角函数的积分化成一次幂的倍角三角函数的积分.

应用**棣莫弗公式**

$$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n = \cos nx+\mathrm{i}\sin nx \tag{1.9}$$

令

$$\cos x+\mathrm{i}\sin x = y$$

则

$$\cos x-\mathrm{i}\sin x = \frac{1}{y} \tag{1.10}$$

于是有

$$\cos nx+\mathrm{i}\sin nx = y^n,\quad \cos nx-\mathrm{i}\sin nx = \frac{1}{y^n} \tag{1.11}$$

$$2\cos x = y+\frac{1}{y},\quad 2\mathrm{i}\sin x = y-\frac{1}{y} \tag{1.12}$$

及

$$2\cos nx = y^n+\frac{1}{y^n},\quad 2\mathrm{i}\sin nx = y^n-\frac{1}{y^n} \tag{1.13}$$

2. 倍角法的算例.

例 38 求积分 $\int \sin^8 x\mathrm{d}x$.

利用式(1.12)和(1.13)把被积函数$\sin^8 x$ 化成正弦或余弦的倍角三角函数. 我们先用二项式公式展开,再用式(1.13)将其变成倍角函数:

$$2^8\mathrm{i}^8\sin^8 x = \left(y-\frac{1}{y}\right)^8$$

$$= \left(y^8+\frac{1}{y^8}\right)-8\left(y^6+\frac{1}{y^6}\right)+28\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)-56\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+70$$

$$= 2\cos 8x-16\cos 6x+56\cos 4x-112\cos 2x+70$$

因此

$$\sin^8 x = \frac{1}{2^7}(\cos 8x - 8\cos 6x + 28\cos 4x - 56\cos 2x + 35)$$

这样，正弦函数的8次幂的积分就变成下面的一次式倍角三角函数的积分：

$$\int \sin^8 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^7}\int(\cos 8x - 8\cos 6x + 28\cos 4x - 56\cos 2x + 35)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^7}\left(\frac{\sin 8x}{8} - 8\frac{\sin 6x}{6} + 28\frac{\sin 4x}{4} - 56\frac{\sin 2x}{2} + 35x\right) + C$$

由上式可推广到普遍情况$\sin^{2n}x$的积分：

$$\int \sin^{2n}x\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}\frac{\sin 2kx}{2k} + \frac{(2n)!}{2(n!)^2}x\right] + C \tag{1.14}$$

例39 求积分$\int \cos^8 x\mathrm{d}x$.

解 与前面的方法相同，被积函数用二项式展开得

$$2^8\cos^8 x = \left(y + \frac{1}{y}\right)^8$$

$$= \left(y^8 + \frac{1}{y^8}\right) + 8\left(y^6 + \frac{1}{y^6}\right) + 28\left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) + 56\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 70$$

$$= 2\cos 8x + 16\cos 6x + 56\cos 4x + 112\cos 2x + 70$$

因此

$$\cos^8 x = \frac{1}{2^7}(\cos 8x + 8\cos 6x + 28\cos 4x + 56\cos 2x + 35)$$

这样，余弦函数的8次幂的积分就变成下面的一次式倍角三角函数的积分：

$$\int \cos^8 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^7}\int(\cos 8x + 8\cos 6x + 28\cos 4x + 56\cos 2x + 35)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^7}\left(\frac{\sin 8x}{8} + 8\frac{\sin 6x}{6} + 28\frac{\sin 4x}{4} + 56\frac{\sin 2x}{2} + 35x\right) + C$$

由上式可推广到普遍的情况$\cos^{2n}x$的积分：

$$\int \cos^{2n}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \cdot \frac{\sin 2kx}{2k} + \frac{(2n)!}{2(n!)^2}x\right] + C \tag{1.15}$$

倍角法适用于偶数次幂的正、余弦函数的积分及奇次幂的余弦函数，但不适用于奇次幂的正弦函数，因为奇次幂正弦函数中所含的虚数i不能消除.

例40 求积分$\int \cos^5 x\mathrm{d}x$.

解 把被积函数用二项式展开得

$$2^5\cos^5 x = \left(y + \frac{1}{y}\right)^5$$

$$= \left(y^5 + \frac{1}{y^5}\right) + 5\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + 10\left(y + \frac{1}{y}\right)$$
$$= 2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x$$

因此

$$\cos^5 x = \frac{1}{2^4}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$$

于是

$$\int \cos^5 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2^4}\int (\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{\sin 5x}{5} + 5\frac{\sin 3x}{3} + 10\sin x\right) + C$$

例 41 求积分 $\int \sin^4 x \cos^4 x \mathrm{d}x$.

解 倍角法也适用于正、余弦函数乘积的积分.把被积函数化成倍角形式

$$2^4 \mathrm{i}^4 \sin^4 x \cdot 2^4 \cos^4 x = \left(y - \frac{1}{y}\right)^4 \left(y + \frac{1}{y}\right)^4$$
$$= \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^4$$
$$= (y^2)^4 - 4(y^2)^3 \frac{1}{y^2} + 6(y^2)^2 \frac{1}{(y^2)^2}$$
$$- 4y^2 \frac{1}{(y^2)^3} + \frac{1}{(y^2)^4}$$
$$= \left(y^8 + \frac{1}{y^8}\right) - 4\left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) + 6$$
$$= 2\cos 8x - 8\cos 4x + 6$$

因此

$$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{2^7}(\cos 8x - 4\cos 4x + 3)$$

于是

$$\int \sin^4 x \cos^4 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2^7}\int (\cos 8x - 4\cos 4x + 3)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2^7}\left(\frac{\sin 8x}{8} - \sin 4x + 3x\right) + C$$

例 42 求积分 $\int \sin^6 x \cos^2 x \mathrm{d}x$.

解 因为

$$2^6 \mathrm{i}^6 \sin^6 x \cdot 2^2 \cos^2 x = \left(y - \frac{1}{y}\right)^6 \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(y - \frac{1}{y}\right)^4 \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^2$$
$$= \left(y^8 + \frac{1}{y^8}\right) - 4\left(y^6 + \frac{1}{y^6}\right) + 4\left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) + 4\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 10$$

$$= 2\cos 8x - 8\cos 6x + 8\cos 4x + 8\cos 2x - 10$$

所以

$$\sin^6 x\cos^2 x = -\frac{1}{2^8}(2\cos 8x - 8\cos 6x + 8\cos 4x + 8\cos 2x - 10)$$

$$= \frac{1}{2^7}(-\cos 8x + 4\cos 6x - 4\cos 4x - 4\cos 2x + 5)$$

把这个式子代入积分式中，于是得到

$$\int \sin^6 x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^7}\int(-\cos 8x + 4\cos 6x - 4\cos 4x - 4\cos 2x + 5)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^7}\left(-\frac{\sin 8x}{8} + \frac{2\sin 6x}{3} - \sin 4x - 2\sin 2x + 5x\right) + C$$

3. 任何正弦函数和余弦函数的奇正次幂都可立即积分，例如 $\int \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x$.

因为

$$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cos x$$

所以

$$\int \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \int \sin^{2n} x(-\mathrm{d}\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^n \mathrm{d}\cos x$$

把被积函数按二项式展开，得

$$(1-\cos^2 x)^n = \binom{n}{0}1^n(\cos^2 x)^0 - \binom{n}{1}1^{n-1}(\cos^2 x)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}(\cos^2 x)^2 - \cdots$$

$$+ (-1)^n\binom{n}{n}1^{n-n}(\cos^2 x)^n$$

$$= 1 - n\cos^2 x + \frac{n(n-1)}{2!}\cos^4 x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^6 x + \cdots$$

$$+ (-1)^n\cos^{2n} x$$

把被积函数的展开式代入积分式中，并用分项积分法进行积分，得

$$\int \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^n \mathrm{d}\cos x$$

$$= -\int\left[1 - n\cos^2 x + \frac{n(n-1)}{2!}\cos^4 x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^6 x\right.$$

$$\left. + \cdots + (-1)^n\cos^{2n} x\right]\mathrm{d}\cos x$$

$$= -\cos x + n\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\cos^7 x}{7} - \cdots$$

$$- (-1)^n\frac{\cos^{2n+1} x}{2n+1} + C$$

我们把它写成普遍的形式

$$\int \sin^{2n+1}x\mathrm{d}x = -\binom{n}{0}\cos x + \binom{n}{1}\frac{\cos^3 x}{3} - \binom{n}{2}\frac{\cos^5 x}{5} + \binom{n}{3}\frac{\cos^7 x}{7} + \cdots - (-1)^n\frac{\cos^{2n+1}x}{2n+1} + C$$

或

$$\int \sin^{2n+1}x\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}\cos^{2k+1}x + C \tag{1.16}$$

相似地,因为

$$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$$

则有

$$\begin{aligned}\int \cos^{2n+1}x\mathrm{d}x &= \int (1-\sin^2 x)^n \mathrm{d}\sin x\\ &= \int\left[1 - n\sin^2 x + \frac{n(n-1)}{2!}\sin^4 x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin^6 x + \cdots + (-1)^n\sin^{2n}x\right]\mathrm{d}\sin x\\ &= \sin x - n\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\sin^7 x}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1} + C\end{aligned}$$

写成普遍的形式

$$\int \cos^{2n+1}x\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}\sin^{2k+1}x + C \tag{1.17}$$

4. $\sin^p x$,$\cos^q x$ 乘积的积分$\int \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x$.

(1) p 或 q 为奇整数,设 q 为奇整数,$q=2n+1$,求积分 $\int \sin^p x\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x$.

因为

$$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$$

所以

$$\int \sin^p x\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x = \int \sin^p x(1-\sin^2 x)^n\mathrm{d}\sin x$$

将$(1-\sin^2 x)^n$ 按二项式展开,得

$$(1-\sin^2 x)^n = 1 - n\sin^2 x + \frac{n(n-1)}{2!}\sin^4 x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin^6 x + \cdots + (-1)^n\sin^{2n}x$$

因此被积函数可表达成

$$\sin^p x\,(1-\sin^2 x)^n = \sin^p x - n\sin^{p+2} x + \frac{n(n-1)}{2!}\sin^{p+4} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin^{p+6} x + \cdots + (-1)^n \sin^{p+2n} x$$

把被积函数代入积分式中，并用分项积分法进行积分，得

$$\begin{aligned}
&\int \sin^p x \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sin^p x\,(1-\sin^2 x)^n \,\mathrm{d}\sin x \\
&= \int \left[\sin^p x - n\sin^{p+2} x + \frac{n(n-1)}{2!}\sin^{p+4} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin^{p+6} x\right. \\
&\quad \left. + \cdots + (-1)^n \sin^{p+2n} x\right] \mathrm{d}\sin x \\
&= \frac{\sin^{p+1} x}{p+1} - n\,\frac{\sin^{p+3} x}{p+3} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{\sin^{p+5} x}{p+5} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{\sin^{p+7} x}{p+7} \\
&\quad + \cdots + (-1)^n \frac{\sin^{p+2n+1} x}{p+2n+1} + C
\end{aligned}$$

写成通用形式

$$\int \sin^p x \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin^{p+2k+1} x}{p+2k+1} + C \tag{1.18}$$

(2) 当 $p+q$ 为负偶整数时，$\sin^p x \cos^q x$ 可化为含有 $\tan x$ 或 $\cot x$ 的多项式. 令 $\tan x = t$，则

$$\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

并令 $p+q=-2n$（n 为正整数），则

$$\begin{aligned}
\sin^p x \cos^q x &= \frac{\sin^p x}{\cos^p x}\cos^p x \cos^q x = \tan^p x \cos^{p+q} x = \tan^p x \cos^{-2n} x \\
&= \tan^p x \sec^{2n} x = \tan^p x\,(\sec^2 x)^n
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x &= \int \tan^p x\,(\sec^2 x)^n \,\mathrm{d}x = \int \tan^p x\,(1+\tan^2 x)^{n-1} \sec^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int t^p (1+t^2)^{n-1} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

把被积函数中的$(1+t^2)^{n-1}$按二项式展开，得

$$(1+t^2)^{n-1} = 1 + \binom{n-1}{1} t^2 + \binom{n-1}{2} t^4 + \binom{n-1}{3} t^6 + \cdots + (t^2)^{n-1}$$

那么

$$\begin{aligned}
t^p\,(1+t^2)^{n-1} &= t^p + \binom{n-1}{1} t^{p+2} + \binom{n-1}{2} t^{p+4} + \binom{n-1}{3} t^{p+6} \\
&\quad + \cdots + t^{p+2n-2}
\end{aligned}$$

代入积分式中,得

$$\begin{aligned}\int \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x &= \int t^p(1+t^2)^{n-1}\mathrm{d}t\\ &= \int\left[t^p+\binom{n-1}{1}t^{p+2}+\binom{n-1}{2}t^{p+4}+\binom{n-1}{3}t^{p+6}\right.\\ &\quad \left.+\cdots+t^{p+2n-2}\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{t^{p+1}}{p+1}+\binom{n-1}{1}\frac{t^{p+3}}{p+3}+\binom{n-1}{2}\frac{t^{p+5}}{p+5}+\binom{n-1}{3}\frac{t^{p+7}}{p+7}\\ &\quad +\cdots+\frac{t^{p+2n-1}}{p+2n-1}+C\\ &= \frac{\tan^{p+1}x}{p+1}+\binom{n-1}{1}\frac{\tan^{p+3}x}{p+3}+\binom{n-1}{2}\frac{\tan^{p+5}x}{p+5}\\ &\quad +\binom{n-1}{3}\frac{\tan^{p+7}x}{p+7}+\cdots+\frac{\tan^{p+2n-1}x}{p+2n-1}+C\end{aligned}$$

或写成普遍形式

$$\int \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\tan^{p+2k+1}x}{p+2k+1}+C\quad\left(\text{式中 } n=-\frac{p+q}{2}\right)\tag{1.19}$$

例 43 求积分$\int \sin^3 x\cos^{-7}x\mathrm{d}x$.

解 因为 $p=3,q=-7,p+q=3-7=-4=-2n,n=2$,所以

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^{-7}x\mathrm{d}x &= \binom{2-1}{0}\frac{\tan^{3+1}x}{3+1}+\binom{2-1}{1}\frac{\tan^{3+3}x}{3+3}+C\\ &= \frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^6 x}{6}+C\end{aligned}$$

在积分$\int \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x$ 中,也可以设 $\cot x=u$,那么 $-\csc^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,并令 $p+q=-2n$,于是被积函数可化成

$$\begin{aligned}\sin^p x\cos^q x &= \frac{\cos^q x}{\sin^q x}\sin^p x\sin^q x=\cot^q x\sin^{p+q}x=\cot^q x\sin^{-2n}x\\ &= \cot^q t\csc^{2n}x=\cot^q x\csc^{2n-2}x\csc^2 x\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x &= -\int \cot^q x\csc^{2n-2}x(-\csc^2 x)\mathrm{d}x=-\int u^q(1+u^2)^{n-1}\mathrm{d}u\\ &= -\frac{u^{q+1}}{q+1}-\binom{n-1}{1}\frac{u^{q+3}}{q+3}-\binom{n-1}{2}\frac{u^{q+5}}{q+5}-\binom{n-1}{3}\frac{u^{q+7}}{q+7}-\cdots\\ &\quad -\frac{u^{q+2n-1}}{q+2n-1}+C\end{aligned}$$

$$=-\frac{\cot^{q+1}x}{q+1}-\binom{n-1}{1}\frac{\cot^{q+3}x}{q+3}-\binom{n-1}{2}\frac{\cot^{q+5}x}{q+5}-\cdots$$
$$-\binom{n-1}{n-1}\frac{\cot^{q+2n-1}x}{q+2n-1}+C$$

把它写成普遍的形式

$$\int \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x=-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\cot^{q+2k+1}x}{q+2k+1} \tag{1.20}$$

例 44 求积分 $\int \sin^{-9}x\cos^3 x\mathrm{d}x$.

解 利用式(1.20),其中 $p=-9,q=3,p+q=-9+3=-6=-2n,n=3$,因此

$$\int \sin^{-9}x\cos^3 x\mathrm{d}x=-\binom{2}{0}\frac{\cot^{3+1}x}{3+1}-\binom{2}{1}\frac{\cot^{3+3}x}{3+3}-\binom{2}{2}\frac{\cot^{3+5}x}{3+5}+C$$
$$=-\frac{\cot^4 x}{4}-\frac{2\cot^6 x}{6}-\frac{\cot^8 x}{8}+C$$

式(1.19)、(1.20)不适用于 p,q 都是负的情况;也不适用于 $p+q=0$ 的情况.后者就是$\tan^p x$ 或$\cot^q x$ 的积分,另有公式可用.

1.8 倍角法的应用

1.8.1 在函数$\sin^p x,\cos^q x,\sin^p x\cos^q x$ 的积分中(p,q 为正整数,或奇整数,或偶整数)

当$\sin^p x,\cos^q x$ 中的 p 或 q 是偶整数时,可应用上节的式(1.14)或(式 1.15);当$\sin^p x,\cos^q x$ 中的 p 或 q 是奇整数时,可使用 $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$ 或 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$ 使$\sin^p x$ 变成$\sin^{p-1}x$,或使$\cos^q x$ 变成$\cos^{q-1}x$.而$\sin^{p-1}x$ 或$\cos^{q-1}x$ 是偶次幂,即$\sin^{2m}x,\cos^{2n}x$(m,n 为正整数).再把被积函数变成和微分元同名函数,并用二项式展开,然后用分项积分法积分,如上节的式(1.16)或式(1.17).在$\sin^p x\cos^q x$ 中,当 p 或 q 是奇整数时,可采用同样的方法处理.

因此,$\sin^p x,\cos^q x,\sin^p x\cos^q x$ 可展开成下面的形式:

$$\sum A_n\sin nx \quad 或 \quad \sum B_n\cos nx$$

其中,每项都可按单项式积分,并给出

$$\sum A_n\frac{\cos nx}{n} \quad 或 \quad \sum B_n\frac{\sin nx}{n}$$

例 45 求积分 $\int \cos^2 x\mathrm{d}x$，$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$.

解

$$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

例 46 求积分 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$，$\int \sin^3 x\mathrm{d}x$.

解

$$\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \int \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + C$$

或

$$= \int (1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

$$\int \sin^3 x\mathrm{d}x = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

或

$$= -\int (1-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

例 47 求积分 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$，$\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解

$$\int \cos^4 x\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

对于更高次幂的三角函数，我们可采用 1.7 节中的方法.

例 48 求积分 $\int \cos^9 x\mathrm{d}x$，$\int \sin^9 x\mathrm{d}x$.

解

$$\int \cos^9 x\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^4\mathrm{d}\sin x$$

$$= \int (1 - 4\sin^2 x + 6\sin^4 x - 4\sin^6 x + \sin^8 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$= \sin x - \frac{4\sin^3 x}{3} + \frac{6\sin^5 x}{5} - \frac{4\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C$$

$$\int \sin^9 x \mathrm{d}x = -\int (1-\cos^2 x)^4 \mathrm{d}\cos x$$

$$= -\int (1 - 4\cos^2 x + 6\cos^4 x - 4\cos^6 x + \cos^8 x)\mathrm{d}\cos x$$

$$= -\cos x + \frac{4\cos^3 x}{3} - \frac{6\cos^5 x}{5} + \frac{4\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C$$

例 49 求积分 $\int \sin^8 x \cos^2 x \mathrm{d}x$.

解 因为

$$2^8 \mathrm{i}^8 \sin^8 x \cdot 2^2 \cos^2 x$$

$$= \left(y - \frac{1}{y}\right)^8 \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$$

$$= \left(y^8 - 8y^6 + 28y^4 - 56y^2 + 70 - 56\frac{1}{y^2} + 28\frac{1}{y^4} - 8\frac{1}{y^6} + \frac{1}{y^8}\right)\left(y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}\right)$$

$$= y^{10} - 6y^8 + 13y^6 - 8y^4 - 14y^2 - 28 - 14\frac{1}{y^2} - 8\frac{1}{y^4} + 13\frac{1}{y^6} - 6\frac{1}{y^8} + \frac{1}{y^{10}}$$

$$= \left(y^{10} + \frac{1}{y^{10}}\right) - 6\left(y^8 + \frac{1}{y^8}\right) + 13\left(y^6 + \frac{1}{y^6}\right) - 8\left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) - 14\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 28$$

$$= 2\cos 10x - 12\cos 8x + 26\cos 6x - 16\cos 4x - 28\cos 2x - 28$$

所以

$$\sin^8 x \cos^2 x = \frac{1}{2^9}(\cos 10x - 6\cos 8x + 13\cos 6x - 8\cos 4x - 14\cos 2x - 14)$$

因此得到

$$\int \sin^8 x \cos^2 x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^9}\int (\cos 10x - 6\cos 8x + 13\cos 6x - 8\cos 4x - 14\cos 2x - 14)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^9}\left(\frac{\sin 10x}{10} - \frac{6\sin 8x}{8} + \frac{13\sin 6x}{6} - \frac{8\sin 4x}{4} - \frac{14\sin 2x}{2} - 14x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2^9}\left(\frac{\sin 10x}{10} - \frac{3\sin 8x}{4} + \frac{13\sin 6x}{6} - 2\sin 4x - 7\sin 2x - 14x\right) + C$$

例 50 求积分 $\int \sin^8 x \cos^3 x \mathrm{d}x$.

解

$$\int \sin^8 x \cos^3 x \mathrm{d}x = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C$$

1.8.2 倍角法应用在含有三角函数与指数函数的积分

例 51 求积分 $\int e^{2x}\sin^6 x\cos^2 x\,dx$.

解 因为

$$\begin{aligned}2^6 i^6\sin^6 x\cdot 2^2\cos^2 x &= \left(y-\frac{1}{y}\right)^6\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\\ &= \left(y^6-6y^4+15y^2-20+15\frac{1}{y^2}-6\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^6}\right)\left(y^2+2+\frac{1}{y^2}\right)\\ &= \left(y^8+\frac{1}{y^8}\right)-4\left(y^6+\frac{1}{y^6}\right)+4\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+4\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-10\\ &= 2\cos 8x-8\cos 6x+8\cos 4x+8\cos 2x-10\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sin^6 x\cos^2 x &= -\frac{1}{2^8}(2\cos 8x-8\cos 6x+8\cos 4x+8\cos 2x-10)\\ &= -\frac{1}{2^7}(\cos 8x-4\cos 6x+4\cos 4x+4\cos 2x-5)\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin^6 x\cos^2 x\,dx &= -\frac{1}{2^7}\int e^{2x}(\cos 8x-4\cos 6x+4\cos 4x+4\cos 2x-5)\,dx\\ &= -\frac{1}{2^7}\left(\int e^{2x}\cos 8x\,dx-4\int e^{2x}\cos 6x\,dx+4\int e^{2x}\cos 4x\,dx\right.\\ &\quad\left.+4\int e^{2x}\cos 2x\,dx-5\int e^{2x}\,dx\right)\end{aligned}$$

使用分部积分法的式[1.3 节第 6 条中的式(Ⅳ)],得

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+C$$

于是有

$$\int e^{2x}\cos 8x\,dx = e^{2x}\frac{2\cos 8x+8\sin 8x}{2^2+8^2}+C = e^{2x}\frac{2\cos 8x+8\sin 8x}{68}+C$$

$$\int e^{2x}\cos 6x\,dx = e^{2x}\frac{2\cos 6x+6\sin 6x}{2^2+6^2}+C = e^{2x}\frac{2\cos 6x+6\sin 6x}{40}+C$$

$$\int e^{2x}\cos 4x\,dx = e^{2x}\frac{2\cos 4x+4\sin 4x}{2^2+4^2}+C = e^{2x}\frac{2\cos 4x+4\sin 4x}{20}+C$$

$$\int e^{2x}\cos 2x\,dx = e^{2x}\frac{2\cos 2x+2\sin 2x}{2^2+2^2}+C = e^{2x}\frac{2\cos 2x+2\sin 2x}{8}+C$$

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}+C$$

把上面各式代入积分式中,得到

$$\int e^{2x}\sin^6 x\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{2^7}e^{2x}\left[\frac{\cos 8x + 4\sin 8x}{34} - \frac{\cos 6x + 3\sin 6x}{5} + \frac{2}{5}(\cos 4x + 2\sin 4x) + (\cos 2x + \sin 2x) - \frac{5}{2}\right] + C$$

例 52 求积分 $\int e^x \sin nx \cdot \cos^3 x \cdot \sin^2 x\,dx$.

解 首先将被积函数中的 $\cos^3 x \cdot \sin^2 x$ 用倍角法展开并相乘,得到

$$\begin{aligned} 2^3\cos^3 x \cdot 2^2 i^2 \sin^2 x &= \left(y + \frac{1}{y}\right)^3\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \\ &= \left(y^3 + 3y^2\frac{1}{y} + 3y\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)\left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right) \\ &= \left(y^5 + \frac{1}{y^5}\right) + \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) - 2\left(y + \frac{1}{y}\right) \\ &= 2\cos 5x + 2\cos 3x - 4\cos x \end{aligned}$$

于是有

$$\cos^3 x\sin^2 x = -\frac{1}{2^4}(\cos 5x + \cos 3x - 2\cos x)$$

再乘上被积函数中的 $\sin nx$,得

$$\begin{aligned} \sin nx\cos^3 x\sin^2 x &= -\frac{1}{2^4}\sin nx(\cos 5x + \cos 3x - 2\cos x) \\ &= -\frac{1}{2^4}(\sin nx\cos 5x + \sin nx\cos 3x - 2\sin nx\cos x) \\ &= -\frac{1}{2^4}\left\{\frac{1}{2}[\sin(nx + 5x) + \sin(nx - 5x)] + \frac{1}{2}[\sin(nx + 3x) + \sin(nx - 3x)] - \frac{2}{2}[\sin(nx + x) + \sin(nx - x)]\right\} \\ &= -\frac{1}{2^5}[\sin(n + 5)x + \sin(n - 5)x + \sin(n + 3)x + \sin(n - 3)x - 2\sin(n + 1)x - 2\sin(n - 1)x] \end{aligned}$$

把它代入积分式中,得到

$$\begin{aligned} &\int e^x\sin nx \cdot \cos^3 x \cdot \sin^2 x\,dx \\ &= -\frac{1}{2^5}\int[e^x\sin(n + 5)x + e^x\sin(n - 5)x + e^x\sin(n + 3)x + e^x\sin(n - 3)x - 2e^x\sin(n + 1)x - 2e^x\sin(n - 1)x]dx \end{aligned}$$

此处可运用分部积分法中 1.3 节第 6 条中的式(Ⅳ),得到

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + C$$

这里,$a = 1$,b 分别等于 $n + 5$,$n - 5$,$n + 3$,$n - 3$,$n + 1$,$n - 1$,于是得到

$$\int e^x \sin nx \cdot \cos^3 x \cdot \sin^2 x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2^5}\left[e^x \frac{\sin(n+5)x-(n+5)\cos(n+5)x}{1+(n+5)^2} + e^x \frac{\sin(n-5)x-(n-5)\cos(n-5)x}{1+(n-5)^2}\right.$$

$$+ e^x \frac{\sin(n+3)x-(n+3)\cos(n+3)x}{1+(n+3)^2} + e^x \frac{\sin(n-3)x-(n-3)\cos(n-3)x}{1+(n-3)^2}$$

$$\left. - 2e^x \frac{\sin(n+1)x-(n+1)\cos(n+1)x}{1+(n+1)^2} - 2e^x \frac{\sin(n-1)x-(n-1)\cos(n-1)x}{1+(n-1)^2}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{2^5}e^x\left[\frac{\sin(n+5)x-(n+5)\cos(n+5)x}{1+(n+5)^2} + \frac{\sin(n-5)x-(n-5)\cos(n-5)x}{1+(n-5)^2}\right.$$

$$+ \frac{\sin(n+3)x-(n+3)\cos(n+3)x}{1+(n+3)^2} + \frac{\sin(n-3)x-(n-3)\cos(n-3)x}{1+(n-3)^2}$$

$$\left. - 2\frac{\sin(n+1)x-(n+1)\cos(n+1)x}{1+(n+1)^2} - 2\frac{\sin(n-1)x-(n-1)\cos(n-1)x}{1+(n-1)^2}\right] + C$$

1.9 $\sec^n x$ 和 $\csc^n x$ 的积分

1. 当 n 为偶数时，如

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \sec^4 x \mathrm{d}x = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \mathrm{d}x = \int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}\tan x$$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

$$\int \sec^{2n+2} x \mathrm{d}x = \int (1+\tan^2 x)^n \mathrm{d}\tan x$$

$$= \int\left[1 + \binom{n}{1}\tan^2 x + \binom{n}{2}\tan^4 x + \binom{n}{3}\tan^6 x + \cdots + \binom{n}{n}\tan^{2n} x\right]\mathrm{d}\tan x$$

$$= \tan x + \binom{n}{1}\frac{\tan^3 x}{3} + \binom{n}{2}\frac{\tan^5 x}{5} + \binom{n}{3}\frac{\tan^7 x}{7} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{\tan^{2n+1} x}{2n+1} + C$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\tan^{2k+1} x}{2k+1} + C \tag{1.21}$$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \csc^4 x \mathrm{d}x = -\int (1+\cot^2 x)\mathrm{d}\cot x$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C$$

$$\int \csc^{2n+2}x\mathrm{d}x = -\int\left[1+\binom{n}{1}\cot^2 x+\binom{n}{2}\cot^4 x+\binom{n}{3}\cot^6 x+\cdots+\binom{n}{n}\cot^{2n}x\right]\mathrm{d}\cot x$$

$$= -\cot x-\binom{n}{1}\frac{\cot^3 x}{3}-\binom{n}{2}\frac{\cot^5 x}{5}-\binom{n}{3}\frac{\cot^7 x}{7}-\cdots-\binom{n}{n}\frac{\cot^{2n+1}x}{2n+1}+C$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\cot^{2k+1}x}{2k+1}+C \tag{1.22}$$

2. 当 n 为奇数时.

(1) $\sec^n x$ 的积分.

应用导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x\sec^n x)=(n+1)\sec^{n+2}x-n\sec^n x$$

得到

$$\sec^{n+2}x=\frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x\cdot\sec^n x)+\frac{n}{n+1}\sec^n x$$

两边同时积分

$$\int\sec^{n+2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\tan x\sec^n x+\frac{n}{n+1}\int\sec^n x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n+1}\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x\cdot\sec^n x)\mathrm{d}x+\frac{n}{n+1}\int\sec^n x\mathrm{d}x$$

将 $n+2$ 用 n 代替,则 n 变为 $n-2$,因此有

$$\int\sec^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}x\mathrm{d}x \tag{1.23}$$

这就是 $\sec^n x$ 的积分递推公式.

因为 n 是奇数,那么 $n-2$ 也是奇数,所以积分 $\int\sec^{n-2}x\mathrm{d}x$ 递推的结果,含有 $\int\sec x\mathrm{d}x$ 这样的项.

在三角替代法中已经知道

$$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

因此,可以通过递推公式算出

$$\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan x\sec x+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$\int\sec^5 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x+\frac{3}{4}\frac{\tan x\sec x}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x+\frac{3}{8}\tan x\sec x+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$\int\sec^7 x\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\tan x\sec^5 x+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\tan x\sec x$$

$$+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$=\tan x\left(\frac{1}{6}\sec^5 x+\frac{5}{24}\sec^3 x+\frac{5}{16}\sec x\right)+\frac{5}{16}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$\int\sec^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\tan x\sec^{n-4}x}{n-3}$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{\tan x\sec^{n-6}x}{n-5}+\cdots$$

$$+\frac{(n-2)(n-4)\cdots3\cdot1}{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

若令 $n=2m+1$,则

$$\int\sec^{2m+1}x\mathrm{d}x=\tan x\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{(2m-2r)!!}{(2m-2r-1)!!}\cdot\frac{1}{2m-2r}\sec^{2m-2r-1}x$$

$$+\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C \tag{1.24}$$

(2) $\csc^n x$ 的积分.

采用与前面相同的方法,应用导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x\cdot\csc^n x)=-(n+1)\csc^{n+2}x+n\csc^n x$$

得到

$$\csc^{n+2}x=-\frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x\cdot\csc^n x)+\frac{n}{n+1}\csc^n x$$

两边同时积分,得到

$$\int\csc^{n+2}x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n+1}\cot x\cdot\csc^n x+\frac{n}{n+1}\int\csc^n x\mathrm{d}x$$

将 $n+2$ 用 n 代替,则 n 变为 $n-2$,因此有

$$\int\csc^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\cot x\cdot\csc^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}\int\csc^{n-2}x\mathrm{d}x \tag{1.25}$$

这就是 $\csc^n x$ 积分的递推公式.

应用该公式,可以得到

$$\int\csc^3 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cot x\csc x+\frac{1}{2}\int\csc x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\cot x\csc x+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int\csc^5 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\cot x\csc^3 x+\frac{3}{4}\int\csc^3 x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\cot x\csc^3 x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cot x\csc x+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)+C$$

$$=-\frac{1}{4}\cot x\csc^3 x-\frac{3}{8}\cot x\csc x+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int \csc^7 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\cot x \csc^5 x + \frac{5}{6}\int \csc^5 x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{6}\cot x \csc^5 x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\cot x \csc^3 x - \frac{3}{8}\cot x\csc x + \frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right) + C$$

$$= -\cot x\left(\frac{1}{6}\csc^5 x + \frac{5}{24}\csc^3 x + \frac{15}{48}\csc x\right) + \frac{15}{48}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \csc^n x\mathrm{d}x = -\cot x\left[\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-3}\csc^{n-4} x + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{1}{n-5}\csc^{n-6} x + \cdots\right] + \frac{(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1}{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \quad (n \text{ 为奇数})$$

若令 $n = 2m+1$,则有

$$\int \csc^{2m+1} x\mathrm{d}x = -\cot x\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{(2m-2r)!!}{(2m-2r-1)!!}\cdot\frac{1}{2m-2r}\csc^{2m-2r-1} x + \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \quad (1.26)$$

1.10 $\tan^n x$ 和 $\cot^n x$ 的积分

1. $\tan^n x$ 的积分.

$$\int \tan^n x\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x\mathrm{d}\tan x - \int \tan^{n-2} x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\mathrm{d}x \quad (1.27)$$

这就是 $\tan^n x$ 积分的递推公式.

从微分积分表中,我们已经知道

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

从递推公式(1.27),可得到下面的积分:

$$\int \tan^3 x\mathrm{d}x = \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

$$\int \tan^4 x\mathrm{d}x = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

$$\int \tan^5 x\mathrm{d}x = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C$$

$$\int \tan^6 x\mathrm{d}x = \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$$

从以上诸式可以看到，当 n 为奇正整数时，积分结果的末项都是 $\pm\ln|\sec x|$；而当 n 为偶正整数时，积分结果的末项皆为 $\pm x$. 因此我们将分别推导出 n 为奇、偶正整数时 $\tan^n x$ 的积分.

(1) 当 n 为奇正整数时：

$$\int \tan^n x\mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \frac{\tan^{n-5} x}{n-5} - \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\tan^2 x}{2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \ln|\sec x| + C$$

若令 $n=2m+1$，则有

$$\int \tan^{2m+1} x\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^{r+2} \frac{\tan^{2m-2r} x}{2m-2r} + (-1)^m \ln|\sec x| + C \tag{1.28}$$

(2) 当 n 为偶正整数时：

$$\int \tan^n x\mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \frac{\tan^{n-5} x}{n-5} - \cdots + (-1)^{\frac{n+2}{2}} \tan x + (-1)^{\frac{n}{2}} x + C$$

若令 $n=2m$，则有

$$\int \tan^{2m} x\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \frac{\tan^{2m-2r-1} x}{2m-2r-1} + (-1)^m x + C \tag{1.29}$$

2. $\cot^n x$ 的积分.

$$\int \cot^n x\mathrm{d}x = \int \cot^{n-2} x(\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x = -\int \cot^{n-2} x\mathrm{d}\cot x - \int \cot^{n-2} x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\mathrm{d}x \tag{1.30}$$

这就是 $\cot^n x$ 积分的递推公式.

从微分积分表中，我们已经知道

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C$$

$$\int \cot^2 x\mathrm{d}x = \int (\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x = -\cot x - x + C$$

从递推公式(1.30)得到

$$\int \cot^3 x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^2 x}{2} + \ln|\csc x| + C$$

$$\int \cot^4 x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + C$$

$$\int \cot^5 x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\csc x| + C$$

$$\int \cot^6 x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^3 x}{3} - \cot x - x + C$$

从以上诸式可以推断，当 n 为奇正整数时，积分结果的末项都是 $\pm\ln|\csc x|$，而当 n 为偶正整数时，积分结果的末项皆为 $\pm x$. 因此我们可以得到以下结论.

(1) n 为奇正整数时：

$$\int \cot^n x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5} x}{n-5} + \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{\cot^2 x}{2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\ln|\csc x| + C$$

若令 $n=2m+1$，则有

$$\int \cot^{2m+1} x\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}\frac{\cot^{2m-2r} x}{2m-2r} + (-1)^m\ln|\csc x| + C \tag{1.31}$$

(2) n 为偶正整数时：

$$\int \cot^n x\mathrm{d}x = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5} x}{n-5} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}\cot x + (-1)^{\frac{n}{2}} x + C$$

若令 $n=2m$，则有

$$\int \cot^{2m} x\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}\frac{\cot^{2m-2r-1} x}{2m-2r-1} + (-1)^m x + C \tag{1.32}$$

1.11 有理代数分式的积分法

我们在分项积分法中作为范例已经讲过有理分式的积分，本节将系统地叙述有理分式的积分方法，包括待定系数法、配方法等.

1. 求 $\frac{1}{a^2-x^2}$，$\frac{1}{x^2-a^2}$，$\frac{1}{a^2+x^2}$ 的积分.

$$(1)\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2a}[\ln|a+x|-\ln|a-x|]+C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{artanh}\frac{x}{a} + C$$

$$(2)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\frac{x}{a} + C$$

$$(3)\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+C$$

同样我们可以得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+(x+b)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a}+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-(x+b)^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+(x+b)}{a-(x+b)}\right|+C=\frac{1}{a}\operatorname{artanh}\frac{x+b}{a}+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+b-a}{x+b+a}\right|+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\frac{x+b}{a}+C$$

2. 求积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$.

我们把 ax^2+bx+c 写成

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]\quad[\text{如同形式}(x+b)^2+a^2]$$

或

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\quad[\text{如同形式}(x+b)^2-a^2]$$

下面分三种情况来做积分：

(1) 当 $b^2<4ac$ 时：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C$$

(2) 当 $b^2>4ac$ 时：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{arcoth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$$

(3) 当 ax^2+bx+c 可以分解因式时：

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\quad(\lambda_1,\lambda_2\text{ 为常数})$$

那么

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}=\frac{1}{a(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\lambda_1}-\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\lambda_2}\right)$$

$$=\frac{1}{a(\lambda_1-\lambda_2)}[\ln(x-\lambda_1)-\ln(x-\lambda_2)]+C$$

$$=\frac{1}{a(\lambda_1-\lambda_2)}\ln\left|\frac{x-\lambda_1}{x-\lambda_2}\right|+C$$

3. 求积分 $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$.

把被积函数的分子做些变化，使

$$px+q=px+\frac{pb}{2a}+q-\frac{pb}{2a}=\frac{p}{2a}(2ax+b)+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)$$

那么

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{p}{2a}\int \frac{\mathrm{d}(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{p}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} \quad (\mathrm{I})$$

该式第二项中的积分可根据前式中的三种情况来决定采用何种方法积分.

例 53 求积分 $\int \frac{9-7x}{x^2+12x+38}\mathrm{d}x$.

解 使用式(Ⅰ)，代入：$p=-7, q=9, a=1, b=12, c=38$，则有

$$\int \frac{9-7x}{x^2+12x+38}\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\ln|x^2+12x+38|+\left[9-\frac{(-7)\times 12}{2}\right]\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+12x+38}$$

在公式右边第二项的积分中，由于 $b^2=144<4ac=152$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+12x+38}=\frac{2}{\sqrt{152-144}}\arctan\frac{2x+12}{\sqrt{152-144}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+6}{\sqrt{2}}+C$$

因此

$$\int \frac{9-7x}{x^2+12x+38}\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\ln|x^2+12x+38|+\left[9-\frac{(-7)\times 12}{2}\right]\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+12x+38}$$

$$=-\frac{7}{2}\ln|x^2+12x+38|+\frac{51}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+6}{\sqrt{2}}+C$$

例 54 求积分 $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x$.

解 应用待定系数法于被积函数，令

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

由该式求得

$$A=\frac{1}{2},\quad B=-2,\quad C=\frac{3}{2}$$

代入积分式中，得到

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-2\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x-3|+C\end{aligned}$$

4. 被积函数分式的分母中有重复因子的情形.

假如 $x-a$ 因子在被积函数的分母中重复 n 次，我们可以把被积函数的分式 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ 中的分母 $\varphi(x)$ 写成

$$\varphi(x)=(x-a)^n\psi(x)$$

令 $x-a=y$，则 $x=a+y$，被积函数表示为

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{y^n}\frac{f(a+y)}{\psi(a+y)}=\frac{1}{y^n}\frac{A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots}{B_0+B_1y+B_2y^2+\cdots}$$

运用除法得到

$$(A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots)\div(B_0+B_1y+B_2y^2+\cdots)=C_0+C_1y+C_2y^2+\cdots$$

其中 $A_0,A_1,A_2,\cdots;B_0,B_1,B_2,\cdots;C_0,C_1,C_2\cdots$ 都是常数. 让除法进行到一个剩余因子 y^n，并令余项为 $y^n\xi(y)$. 这样我们就可把被积函数表达成

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{\varphi(x)}&=\frac{1}{y^n}\frac{f(a+y)}{\psi(a+y)}=\frac{C_0}{y^n}+\frac{C_1}{y^{n-1}}+\frac{C_2}{y^{n-2}}+\cdots+\frac{C_{n-1}}{y}+\frac{\xi(y)}{\psi(a+y)}\\&=\frac{C_0}{(x-a)^n}+\frac{C_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{C_2}{(x-a)^{n-2}}+\cdots+\frac{C_{n-1}}{x-a}+\frac{\xi(x-a)}{\psi(x)}\end{aligned}$$

于是，我们就可以运用分项积分法进行积分了.

例 55 求积分 $\int\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}\mathrm{d}x$.

解 令 $x-1=y$，则有 $x=1+y$，及 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$，把被积函数改写成

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{(1+y)^2}{y^3(2+y)}=\frac{1+2y+y^2}{y^3(2+y)}$$

运用除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}+\frac{3y}{4}+\frac{y^2}{8} \\
\cline{2-2}
2+y & 1+2y+y^2 \\
 & 1+\frac{y}{2} \\
\cline{2-2}
 & \frac{3y}{2}+y^2 \\
 & \frac{3y}{2}+\frac{3y^2}{4} \\
\cline{2-2}
 & \frac{y^2}{4} \\
 & \frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{8} \\
\cline{2-2}
 & -\frac{y^3}{8}
\end{array}
$$

得到

$$
\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{1}{y^3}\left[\frac{1}{2}+\frac{3y}{4}+\frac{y^2}{8}-\frac{y^3}{8(2+y)}\right]=\frac{1}{2y^3}+\frac{3}{4y^2}+\frac{1}{8y}-\frac{1}{8(2+y)}
$$

$$
=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)}
$$

把它代入积分式，并进行分项积分，得到

$$
\int\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}\mathrm{d}x
$$

$$
=\int\left[\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)}\right]\mathrm{d}x
$$

$$
=-\frac{1}{4}(x-1)^{-2}-\frac{3}{4}(x-1)^{-1}+\frac{1}{8}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln|x+1|+C
$$

$$
=-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C
$$

例 56 求积分 $\int\frac{x^2+2x}{(x-1)^5(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

解 令 $x-1=y$，则有 $x=1+y$ 及 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$，则

$$
\frac{x^2+2x}{(x-1)^5(x^2+1)}=\frac{1}{y^5}\frac{3+4y+y^2}{2+2y+y^2}
$$

使用除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \dfrac{3}{2}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3y^2}{4}+\dfrac{y^3}{2}-\dfrac{y^4}{8} \\
2+2y+y^2 & 3+4y+y^2 \\
 & 3+3y+\dfrac{3y^2}{2} \\
\hline
 & y-\dfrac{y^2}{2} \\
 & y+y^2+\dfrac{y^3}{2} \\
\hline
 & -\dfrac{3y^2}{2}-\dfrac{y^3}{2} \\
 & -\dfrac{3y^2}{2}-\dfrac{3y^3}{2}-\dfrac{3y^4}{4} \\
\hline
 & y^3+\dfrac{3y^4}{4} \\
 & y^3+y^4+\dfrac{y^5}{2} \\
\hline
 & -\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^5}{2} \\
 & -\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^5}{4}-\dfrac{y^6}{8} \\
\hline
 & -\dfrac{y^5}{4}+\dfrac{y^6}{8}
\end{array}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2+2x}{(x-1)^5(x^2+1)} \\
&=\frac{1}{y^5}\left(\frac{3}{2}+\frac{y}{2}-\frac{3y^2}{4}+\frac{y^3}{2}-\frac{y^4}{8}-\frac{\frac{y^5}{4}-\frac{y^6}{8}}{2+2y+y^2}\right) \\
&=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{y^5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{y^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{8}\cdot\frac{2-y}{2+2y+y^2} \\
&=\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^4}-\frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} \\
&\quad-\frac{1}{8}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{8}\frac{x-3}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

代入积分式中,得到

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{x^2+2x}{(x-1)^5(x^2+1)}\mathrm{d}x \\
&=\int\left[\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^4}-\frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}\right. \\
&\quad\left.-\frac{1}{8}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{8}\frac{x-3}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^5}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^4}\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int \frac{1}{(x-1)^3}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$
$$- \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \frac{3}{x^2+1}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{3}{8(x-1)^4} - \frac{1}{6(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)}$$
$$- \frac{1}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{16}\ln|x^2+1| - \frac{3}{8}\arctan x + C$$
$$= -\frac{3}{8(x-1)^4} - \frac{1}{6(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)}$$
$$+ \frac{1}{16}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{3}{8}\arctan x + C$$

1.12 无理代数函数的积分法

在换元积分法中叙述欧拉替换、三角替换法时已经讲到了代数无理式的积分. 本节将系统地叙述无理代数函数的积分方法. 无理式的积分方法主要有两种,一种是有理化(如欧拉替换),另一种是使用其他各种替换或转换,如用三角函数或双曲函数转换,当然它们都属于换元法的范畴.

例如函数$\sqrt{a^2-x^2}$,可设 $x = a\sin t$,则$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$;

又如$\sqrt{x^2-a^2}$,可设 $x = a\sec t$,则$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$;

再如$\sqrt{a^2+x^2}$,可设 $x = a\tan t$,则$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t$.

这样,可以把对无理式$\sqrt{a^2-x^2}$,$\sqrt{x^2-a^2}$,$\sqrt{a^2+x^2}$的积分转变成我们熟悉的对三角函数 $\cos t$,$\tan t$,$\sec t$ 的积分. 待积分完成后,再把变量 t 还原成变量x的表达式.

对于函数$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$,$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$的积分,用双曲函数替换或许是最方便的.

例 57 求积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

解 令 $x = a\cosh t$,则

$$\mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2 t - a^2} = a\sinh t$$

于是得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t} = \int \mathrm{d}t = t + C$$
$$= \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C$$

例 58 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

解 令 $x=a\sinh t$,则

$$\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t,\quad \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2} = a\cosh t$$

于是得到

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t} = \int \mathrm{d}t = t + C\\ &= \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) + C\\ &= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C'\end{aligned}$$

例 59 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 令 $x=a\sin t$,则

$$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t,\quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t$$

于是得到

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\cos t} = \int \mathrm{d}t = t + C\\ &= \arcsin\frac{x}{a} + C\end{aligned}$$

上述诸例说明:用三角函数或双曲函数替换,使无理式变为有理式时,应当仔细选择替换函数.当替换函数选得恰当时,积分会非常方便;要是选得不好,也会麻烦不少.下面再举一些把无理式有理化的例子.

例 60 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

解 令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$,将其代入积分式中得到

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2t - 2\ln(1+t) + C\\ &= 2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})^2 + C\end{aligned}$$

例 61 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

解 设 $\sqrt[4]{x}=t$,则 $x=t^4$,$\mathrm{d}x=4t^3\,\mathrm{d}t$,把它们代入积分式中得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3} = 4\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t^2(1+t)^3} = 4\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t)^3} = 4\int\left[\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} + C$$

$$= \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C$$

例 62 求积分 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

解 令 $\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} = y$,则

$1+\sqrt[3]{x^2} = y^2$, $\sqrt[3]{x^2} = y^2-1$, $x = (y^2-1)^{\frac{3}{2}}$, $\mathrm{d}x = 3y(y^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$

把它们代入积分式中,得

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int \frac{(y^2-1)^{\frac{3}{2}} \cdot 3y(y^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y}{y} = 3\int (y^2-1)^2\mathrm{d}y$$

$$= 3\int (y^4 - 2y^2 + 1)\mathrm{d}y = \frac{3}{5}y^5 - 2y^3 + 3y + C$$

$$= \frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^5 - 2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} + C$$

上述各例,本质上都是换元法,使无理分式变化为有理分式后再积分,然后还原为初始的变量表达式.

下面四个无理代数函数的积分方法是约翰·伯努利曾经用过的.

例 63 求积分 $\int \sqrt{a^2x^2 + x^4}\mathrm{d}x$.

解 从根号中移出一个 x,得

$$\int \sqrt{a^2x^2 + x^4}\mathrm{d}x = \int \sqrt{a^2 + x^2} \cdot x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{a^2 + x^2}\mathrm{d}x^2$$

$$= \frac{1}{2}\int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2 + x^2)$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2} + C$$

例 64 求积分 $\int \sqrt{ax + x^2}(3ax^3 + 4x^4)\mathrm{d}x$.

解 把括弧中的一个 x 移进根号中,得

$$\int \sqrt{ax + x^2}(3ax^3 + 4x^4)\mathrm{d}x = \int \sqrt{ax^3 + x^4}(3ax^2 + 4x^3)\mathrm{d}x$$

$$= \int \sqrt{ax^3 + x^4}\mathrm{d}(ax^3 + x^4)$$

$$= \frac{2}{3}(ax^3 + x^4)\sqrt{ax^3 + x^4} + C$$

例 65 求积分 $\int \frac{a + x}{\sqrt{3a + 2x}}\mathrm{d}x$.

解 分子、分母同乘 x,得

$$\int \frac{a+x}{\sqrt{3a+2x}}\mathrm{d}x = \int \frac{ax+x^2}{\sqrt{3ax^2+2x^3}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(3ax^2+2x^3)}{\sqrt{3ax^2+2x^3}}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{3ax^2+2x^3}+C$$
$$= \frac{x}{3}\sqrt{3a+2x}+C$$

例 66 求积分 $\int \frac{ax^2}{\sqrt{a^2x^2+x^4}}\mathrm{d}x$.

解 分子、分母同除以 x,得

$$\int \frac{ax^2}{\sqrt{a^2x^2+x^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a\int \frac{\mathrm{d}(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$= a(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+C = a\sqrt{a^2+x^2}+C$$

上述四例中,都是平方根号的情形,要是遇到立方根号或更高次的根号,该方法同样适用.

1.13 含有三角函数的有理式的积分法

1.13.1 一般的方法

求下列积分:$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$,$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$,$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$,$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}$,$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$,$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x+c\sin x}$.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}\cos x$$
$$= \frac{1}{2}[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)]+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)]+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$.

分两种情况：$a>b$ 和 $a<b$.

① $a>b$.

把被积函数的分母 $a+b\cos x$ 改写成

$$a+b\cos x = a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= (a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}$$

$$= (a-b)\cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{a+b}{a-b}+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a-b)\cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{a+b}{a-b}+\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C \quad (a^2>b^2) \quad (\mathrm{I})$$

或

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}+C \quad (a^2>b^2)$$

② $a<b$.

$$a+b\cos x = a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= (b+a)\cos^2\frac{x}{2}-(b-a)\sin^2\frac{x}{2}$$

$$= (b-a)\cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{b+a}{b-a}-\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

于是积分变成

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{1}{b-a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{b+a}{b-a}-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{b-a}\int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\frac{b+a}{b-a}-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{b-a}\int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\tan\frac{x}{2}\right)+C\quad(a^2<b^2)\qquad(\text{Ⅱ})$$

或

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}+C\quad(a^2<b^2)$$

例 67 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+3\cos x}$.

解 在此积分中，$a=5,b=3,a>b$，用式(Ⅰ)得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5+3\cos x}=\frac{2}{\sqrt{5^2-3^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5-3}{5+3}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

或

$$=\frac{1}{4}\arccos\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}+C$$

例 68 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos x}$.

解 该题中，$a=3,b=5,a<b$，应用式(Ⅱ)得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos x}=\frac{2}{\sqrt{5^2-3^2}}\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{5-3}{5+3}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

或

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}+C$$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}$.

① 方法之一.

令 $x=\frac{\pi}{2}+y$，则 $\sin x=\cos y,\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$，那么

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}=\int \frac{\mathrm{d}y}{a+b\cos y}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{y}{2}\right)+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+C \quad (a^2>b^2) \qquad (\text{Ⅲ})$$

或 $$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}+C \quad (a^2>b^2)$$

或 $$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{artanh}\left[\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+C \quad (a^2<b^2) \qquad (\text{Ⅳ})$$

或 $$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+C \quad (a^2<b^2)$$

② 方法之二.

因为

$$a+b\sin x = a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= a\cos^2\frac{x}{2}\left[\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}\right]$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \int\frac{\mathrm{d}x}{a\cos^2\frac{x}{2}\left[\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}\right]}$$

$$= \frac{2}{a}\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{b}{a}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}+C \quad (a^2>b^2)$$

或 $$= -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcoth}\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{b^2-a^2}}+C \quad (a^2<b^2)$$

例 69 $\int\frac{\mathrm{d}x}{5+3\sin x}$.

解 该积分中，$a=5, b=3, a>b$，用式(Ⅲ)得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{5+3\sin x} = \frac{2}{\sqrt{5^2-3^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{5-3}{5+3}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left[\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+C$$

$$= \frac{1}{4}\arccos\frac{3+5\sin x}{5+3\sin x} + C$$

例 70 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\sin x}$.

解 该积分中，$a=3, b=5, a<b$，用式(Ⅳ)得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\sin x} = \frac{2}{\sqrt{5^2-3^2}}\operatorname{artanh}\left[\sqrt{\frac{5-3}{5+3}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left[\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{2+\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2-\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+C$$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x}$.

设 $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha, \quad b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+b^2}\sin x\cos\alpha + \sqrt{a^2+b^2}\cos x\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\alpha)} \tag{A}$$

在右端的积分中，令 $x+\alpha = y, \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\alpha)} = \int \frac{\sin y}{\sin^2 y}\mathrm{d}y = \int \frac{\sin y}{1-\cos^2 y}\mathrm{d}y = -\int \frac{\mathrm{d}\cos y}{(1-\cos y)(1+\cos y)}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\cos y} + \frac{1}{1+\cos y}\right)\mathrm{d}\cos y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos y}{1+\cos y}\right| + C$$

$$= \ln\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} + C = \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right| + C \tag{B}$$

把(B)代入(A)中，得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right| + C$$

其中 $\alpha = \arctan\frac{b}{a}$.

例 71 计算积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x}$.

解 此处 $a=4, b=3, \alpha = \arctan\frac{3}{4}$,所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} \ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{3}{4}}{2}\right| + C$$

$$\approx \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{x+37^\circ}{2}\right| + C$$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x + c\sin x}$.

如果把被积函数中的 $b\cos x + c\sin x$ 合成一项,或正弦函数,或余弦函数,那么就能使用前面的式(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅳ)求解积分了.

设 $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}, \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$,则

$$b = \sqrt{b^2+c^2}\cos\alpha, \quad c = \sqrt{b^2+c^2}\sin\alpha, \quad \tan\alpha = \frac{c}{b}, \quad \alpha = \arctan\frac{c}{b}$$

于是

$$\begin{aligned} b\cos x + c\sin x &= \sqrt{b^2+c^2}\cos\alpha\cos x + \sqrt{b^2+c^2}\sin\alpha\sin x \\ &= \sqrt{b^2+c^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x) \\ &= \sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha) \end{aligned}$$

把 $b\cos x + c\sin x = \sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)$代入积分式中,得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x + c\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(x-\alpha)}{a + \sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}$$

该等式右端的积分与前面积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ 相似,因此可应用式(Ⅰ),只是这里要用 $\sqrt{b^2+c^2}$ 代替 b,用$(x-\alpha)$代替x 罢了.所以

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x + c\sin x} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}(x-\alpha)}{a + \sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right) + C \quad (a^2 > b^2+c^2) \end{aligned}$$

(Ⅴ)

其中 $\alpha = \arctan\frac{c}{b}$.

当 $a^2 < b^2+c^2$ 时,则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x+c\sin x}$$
$$=\int \frac{\mathrm{d}(x-\alpha)}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{(b^2+c^2)-a^2}}\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{b^2+c^2}-a}{\sqrt{b^2+c^2}+a}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right)+C \quad (a^2<b^2+c^2) \tag{Ⅵ}$$

其中 $\alpha=\arctan\frac{c}{b}$.

例 72 计算积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{13+3\cos x+4\sin x}$.

解 这里，$a=13, b=3, c=4, \tan\alpha=\frac{4}{3}, \alpha=\arctan\frac{4}{3}$，因为 $a^2=169>b^2+c^2=25$，由式(Ⅴ)得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{13+3\cos x+4\sin x}=\frac{2}{\sqrt{13^2-(3^2+4^2)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{13-\sqrt{3^2+4^2}}{13+\sqrt{3^2+4^2}}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right)+C$$
$$=\frac{2}{12}\arctan\left(\sqrt{\frac{8}{18}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right)+C$$
$$=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2}{3}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right)+C$$

其中 $\alpha=\arctan\frac{4}{3}$.

例 73 计算积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{9+11\cos x+3\sin x}$.

解 此处，$a=9, b=11, c=3, \tan\alpha=\frac{3}{11}, \alpha=\arctan\frac{3}{11}$，因为 $a^2=81<b^2+c^2=130$，由式(Ⅵ)得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9+11\cos x+3\sin x}=\frac{2}{\sqrt{(11^2+3^2)-9^2}}\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{11^2+3^2}-9}{\sqrt{11^2+3^2}+9}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right)+C$$
$$=\frac{2}{7}\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{130}-9}{\sqrt{130}+9}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right)+C$$

其中 $\alpha=\arctan\frac{3}{11}$.

1.13.2 微分积分法

1. 求形如 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}, \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}, \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sin x)^n},$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{(b\cos x + c\sin x)^n}, \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}, \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$ 的积分.

(1) 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$.

设 $P = \frac{-b\sin x + c\cos x}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-1}}$,则

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{(-b\cos x - c\sin x)(a + b\cos x + c\sin x)^{n-1}}{(a + b\cos x + c\sin x)^{2(n-1)}}$$

$$- \frac{(-b\sin x + c\cos x)^2 (n-1)(a + b\cos x + c\sin x)^{n-2}}{(a + b\cos x + c\sin x)^{2(n-1)}}$$

$$= \frac{(-b\cos x - c\sin x)(a + b\cos x + c\sin x) - (n-1)(-b\sin x + c\cos x)^2}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$$

$$= \frac{-(b\cos x + c\sin x)(a + b\cos x + c\sin x)}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$$

$$- \frac{(n-1)[(b^2 + c^2) - (b\cos x + c\sin x)^2]}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$$

$$= \frac{(n-1)(a^2 - b^2 - c^2) - (2n-3)a(a + b\cos x + c\sin x)}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$$

$$+ \frac{(n-2)(a + b\cos x + c\sin x)^2}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$$

$$= \frac{(n-1)(a^2 - b^2 - c^2)}{(a + b\cos x + c\sin x)^n} - \frac{(2n-3)a}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{n-2}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-2}}$$

因为

$$P = \int \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{-b\sin x + c\cos x}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-1}}$$

$$= \int \left[\frac{(n-1)(a^2 - b^2 - c^2)}{(a + b\cos x + c\sin x)^n} - \frac{(2n-3)a}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-1}} \right.$$

$$\left. + \frac{n-2}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-2}} \right] \mathrm{d}x$$

$$= (n-1)(a^2 - b^2 - c^2) \int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$$

$$- (2n-3)a \int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-1}}$$

$$+ (n-2) \int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x + c\sin x)^{n-2}}$$

令

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x + c\sin x)^n}$$

$$I_{n-1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}}$$

$$I_{n-2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-2}}$$

则

$$\frac{-b\sin x+c\cos x}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}}=(n-1)(a^2-b^2-c^2)I_n-(2n-3)aI_{n-1}+(n-2)I_{n-2}$$

因此

$$I_n=\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2-c^2)}\frac{-b\sin x+c\cos x}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}}+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2-c^2)}I_{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2-c^2)}I_{n-2}\quad(\text{Ⅶ})$$

这是该积分的递推公式.

式(Ⅶ)的延伸:由式(Ⅶ)可以得到 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}$,$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sin x)^n}$,$\int\frac{\mathrm{d}x}{(b\cos x+c\sin x)^n}$ 积分的递推公式.

(2) 求积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}$.

当 $c=0$ 时,由式(Ⅶ)得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}=\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\cdot\frac{-b\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}}-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

(3) 求积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sin x)^n}$.

当 $b=0$ 时,由式(Ⅶ)得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sin x)^n}=\frac{1}{(n-1)(a^2-c^2)}\cdot\frac{c\cos x}{(a+c\sin x)^{n-1}}+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-c^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sin x)^{n-1}}-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-c^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sin x)^{n-2}}$$

(4) 求积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(b\cos x+c\sin x)^n}$.

当 $a=0$ 时,由式(Ⅶ)得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(b\cos x+c\sin x)^n}=\frac{1}{(n-1)(b^2+c^2)}\cdot\frac{b\sin x-c\cos x}{(a+c\sin x)^{n-1}}$$

$$+\frac{(n-2)}{(n-1)(b^2+c^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(b\cos x+c\sin x)^{n-2}}$$

当 $a=0,b=1,c=0$ 和 $a=0,b=0,c=1$ 时，还可得两个积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$ 和 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$ 的结果：

$$(5)\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2}x}.$$

$$(6)\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x}.$$

例 74 求积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^5}$.

解 把 $n=5,a=3,b=2,c=1$ 代入式(Ⅶ)中，则有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^5}&=\frac{1}{(5-1)(3^2-2^2-1^2)}\frac{-2\sin x+\cos x}{(3+2\cos x+\sin x)^{5-1}}\\&\quad+\frac{(2\times5-3)\times3}{(5-1)(3^2-2^2-1^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^{5-1}}\\&\quad-\frac{5-2}{(5-1)(3^2-2^2-1^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^{5-2}}\\&=\frac{1}{16}\frac{\cos x-2\sin x}{(3+2\cos x+\sin x)^4}+\frac{21}{16}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^4}\\&\quad-\frac{3}{16}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^3}\end{aligned}\tag{A}$$

对式(A)中的第二项继续做积分($n=4$)，得

$$\begin{aligned}\frac{21}{16}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^4}&=\frac{21}{16}\times\frac{1}{12}\frac{\cos x-2\sin x}{(3+2\cos x+\sin x)^3}\\&\quad+\frac{21}{16}\times\frac{15}{12}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^3}\\&\quad-\frac{21}{16}\times\frac{2}{12}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^2}\end{aligned}\tag{B}$$

把式(A)中的第三项与式(B)中的第二项合并(同为 $n=3$)，并继续做积分，得

$$\begin{aligned}\left(\frac{21}{16}\times\frac{15}{12}-\frac{3}{16}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^3}&=\left(\frac{21}{16}\times\frac{15}{12}-\frac{3}{16}\right)\frac{1}{8}\frac{\cos x-2\sin x}{(3+2\cos x+\sin x)^2}\\&\quad+\left(\frac{21}{16}\times\frac{15}{12}-\frac{3}{16}\right)\frac{9}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^2}\\&\quad-\left(\frac{21}{16}\times\frac{15}{12}-\frac{3}{16}\right)\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x+\sin x}\end{aligned}\tag{C}$$

把式(B)中的第三项与式(C)中的第二项合并(同为 $n=2$)，并继续做积分，得

$$\left[\left(\frac{21}{16}\times\frac{5}{4}-\frac{3}{16}\right)\frac{9}{8}-\frac{21}{16}\times\frac{1}{6}\right]\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+2\cos x+\sin x)^2}$$

$$= \frac{725}{512}\frac{1}{4}\frac{\cos x - 2\sin x}{3 + 2\cos x + \sin x} + \left[\left(\frac{21}{16}\times\frac{15}{12} - \frac{3}{16}\right)\frac{9}{8}\frac{3}{4}\right]\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + 2\cos x + \sin x} \tag{D}$$

把式(C)的第三项和式(D)中的第二项合并,并做积分,得

$$\left[\left(\frac{21}{16}\times\frac{15}{12} - \frac{3}{16}\right)\frac{9}{8}\frac{3}{4} - \left(\frac{21}{16}\times\frac{15}{12} - \frac{3}{16}\right)\frac{1}{8}\right]\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + 2\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{2239}{2048}\arctan\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right) + C$$

最后得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(3 + 2\cos x + \sin x)^5}$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{\cos x - 2\sin x}{(3 + 2\cos x + \sin x)^4} + \frac{7}{64}\cdot\frac{\cos x - 2\sin x}{(3 + 2\cos x + \sin x)^3}$$

$$+ \frac{93}{512}\cdot\frac{\cos x - 2\sin x}{(3 + 2\cos x + \sin x)^2} + \frac{725}{2048}\cdot\frac{\cos x - 2\sin x}{3 + 2\cos x + \sin x}$$

$$+ \frac{2239}{2048}\arctan\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}\tan\frac{x-\alpha}{2}\right) + C$$

其中 $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$.

2. 求形如 $\int \frac{\sin^m x}{(a + b\cos x)^n}\mathrm{d}x, \int \frac{\cos^m x}{(a + b\sin x)^n}\mathrm{d}x$ 的积分.

(1) $\int \frac{\sin^m x}{(a + b\cos x)^n}\mathrm{d}x$.

令 $P = \frac{\sin^{m+1} x}{(a + b\cos x)^{n-1}}$,则

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{(m+1)\sin^m x\cos x\,(a + b\cos x)^{n-1}}{(a + b\cos x)^{2(n-1)}}$$

$$- \frac{\sin^{m+1} x(n-1)\,(a + b\cos x)^{n-2}(-b\sin x)}{(a + b\cos x)^{2(n-1)}}$$

$$= \frac{(m+1)\sin^m x\cos x(a + b\cos x)(a + b\cos x)^{n-2}}{(a + b\cos x)^{2(n-1)}}$$

$$+ \frac{(n-1)b\sin^{m+2} x\,(a + b\cos x)^{n-2}}{(a + b\cos x)^{2(n-1)}}$$

$$= \frac{\sin^m x}{(a + b\cos x)^n}\left[(m+1)\cos x(a + b\cos x) + (n-1)b(1 - \cos^2 x)\right]$$

$$= \frac{\sin^m x}{(a + b\cos x)^n}\left[(n-1)b + (m+1)a\cos x + (m - n + 2)b\cos^2 x\right] \tag{E}$$

令

$$(n-1)b+(m+1)a\cos x+(m-n+2)b\cos^2 x=A+B(a+b\cos x)+C(a+b\cos x)^2$$

其中 A,B,C 为待定系数，解该方程得到

$$A=\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{b},\quad B=\frac{(2n-m-3)a}{b},\quad C=\frac{m-n+2}{b}$$

把 A,B,C 代入式(E)，得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin^m x}{(a+b\cos x)^n}\left[\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{b}+\frac{(2n-m-3)a}{b}(a+b\cos x)+\frac{m-n+2}{b}(a+b\cos x)^2\right]$$

因此有

$$\frac{\sin^{m+1}x}{(a+b\cos x)^{n-1}}=P=\int\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{b}\int\frac{\sin^m x}{(a+b\cos x)^n}\mathrm{d}x+\frac{(2n-m-3)a}{b}\int\frac{\sin^m x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\mathrm{d}x+\frac{m-n+2}{b}\int\frac{\sin^m x}{(a+b\cos x)^{n-2}}\mathrm{d}x$$

于是得到

$$\int\frac{\sin^m x}{(a+b\cos x)^n}\mathrm{d}x=\frac{b}{(n-1)(b^2-a^2)}\cdot\frac{\sin^{m+1}x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(m-2n+3)a}{(n-1)(b^2-a^2)}\int\frac{\sin^m x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\mathrm{d}x+\frac{n-m-2}{(n-1)(b^2-a^2)}\int\frac{\sin^m x}{(a+b\cos x)^{n-2}}\mathrm{d}x$$

这就是这个积分的递推公式，每递推一次，可使被积函数的分母的幂次降低 1，在 m 和 n 都是有限次数的情况下，最后会含有下面两个积分：

$$\int\frac{\sin^m x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x,\quad\int\sin^m x\mathrm{d}x$$

第二个积分，可用倍角法计算[式(1.14)]：

当 m 为偶数时，令 $m=2l$，则有

$$\int\sin^{2l}x\mathrm{d}x=(-1)^l\frac{1}{2^{2l-1}}\left[\sum_{k=1}^{l}(-1)^k\frac{1}{2k}\cdot\frac{(2l)!}{(l-k)!(l+k)!}\cdot\sin 2kx+\frac{(2l)!}{2(l!)^2}x\right]+C$$

当 m 为奇数时，令 $m=2l+1$，则有[式(1.16)]

$$\int\sin^{2l+1}x\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}\binom{l}{k}\frac{1}{2k+1}\cos^{2k+1}x+C$$

第一个积分可用下面的方法计算：

当 m 为奇数时，令 $m=2k+1$，设 $a+b\cos x=u$，则

$$\cos x = \frac{u-a}{b},\quad \sin x = \sqrt{1-\left(\frac{u-a}{b}\right)^2},\quad \mathrm{d}u = -b\sin x\mathrm{d}x$$

因此

$$\int \frac{\sin^{2k+1}x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\int \frac{\sin^{2k}x\cdot(-b\sin x)\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\int\left[1-\left(\frac{u-a}{b}\right)^2\right]^k\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

被积函数中的方括弧可用二项式展开公式展开成幂级数，然后用分项积分法积分之，得

$$-\frac{1}{b}\int\frac{1}{u}\left[1-\binom{k}{1}\left(\frac{u-a}{b}\right)^2+\binom{k}{2}\left(\frac{u-a}{b}\right)^4-\binom{k}{3}\left(\frac{u-a}{b}\right)^6+\cdots\right]\mathrm{d}u$$

最后不要忘了把 u 换回为 $a+b\cos x$；

当 m 为偶数时，令 $m=2k$，则

$$\int\frac{\sin^m x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x = \int\frac{\sin^{2k}x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x = \int\frac{(1-\cos^2 x)^k}{a+b\cos x}\mathrm{d}x$$

把被积函数的分子展开成 $\cos x$ 的幂级数，然后除以分母 $a+b\cos x$，可以得到下面形式的积分：

$$\int\left(h_1\cos^{2k-1}x+h_2\cos^{2k-2}x+h_3\cos^{2k-3}x+\cdots+h_{2k}+\frac{h_{2k+1}}{a+b\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

其中 $h_1,h_2,h_3,\cdots$ 是数值系数. 该积分可用分项积分法积分.

(2) $\int\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^n}\mathrm{d}x$.

令 $Q=\frac{\cos^{m+1}x}{(a+b\sin x)^{n-1}}$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} &= \frac{-(m+1)\cos^m x\sin x\,(a+b\sin x)^{n-1}}{(a+b\sin x)^{2(n-1)}}\\ &\quad-\frac{\cos^{m+1}x(n-1)\,(a+b\sin x)^{n-2}(b\cos x)}{(a+b\sin x)^{2(n-1)}}\\ &= \frac{-(m+1)\cos^m x\sin x\,(a+b\sin x)^{n-1}}{(a+b\sin x)^{2(n-1)}}\\ &\quad-\frac{(n-1)b\cos^{m+2}x\,(a+b\sin x)^{n-2}}{(a+b\sin x)^{2(n-1)}}\\ &= \frac{-(m+1)\cos^m x\sin x(a+b\sin x)-(n-1)b\cos^m x(1-\sin^2 x)}{(a+b\sin x)^n}\\ &= \frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^n}\left[-(m+1)\sin x(a+b\sin x)-(n-1)b(1-\sin^2 x)\right]\\ &= \frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^n}\left[-(n-1)b-(m+1)a\sin x+(n-m-2)b\sin^2 x\right]\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}A+B(a+b\sin x)+C(a+b\sin x)^2 &= -(n-1)b-(m+1)a\sin x\\ &\quad+(n-m-2)b\sin^2 x\end{aligned}$$

解此方程,得到

$$A=\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{b},\quad B=\frac{(m-2n+3)a}{b},\quad C=\frac{n-m-2}{b}$$

把 A,B,C 的值代入微商式中,得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^n}\left[\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{b}+\frac{(m-2n+3)a}{b}(a+b\sin x)+\frac{n-m-2}{b}(a+b\sin x)^2\right]$$

$$\frac{\cos^{m+1}x}{(a+b\sin x)^{n-1}}=Q=\int\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{b}\int\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^n}\mathrm{d}x+\frac{(m-2n+3)a}{b}\int\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^{n-1}}\mathrm{d}x+\frac{n-m-2}{b}\int\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^{n-2}}\mathrm{d}x$$

因此得到

$$\int\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^n}\mathrm{d}x=\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}\cdot\frac{\cos^{m+1}x}{(a+b\sin x)^{n-1}}+\frac{(2n-m-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^{n-1}}\mathrm{d}x+\frac{m-n+2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{\cos^m x}{(a+b\sin x)^{n-2}}\mathrm{d}x$$

这就是该积分的递推公式,递推的最后必然出现下面两个积分:

$$\int\frac{\cos^m x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x,\quad\int\cos^m x\mathrm{d}x$$

对于第二个积分,有

当 m 为偶数时,令 $m=2l$,则有

$$\int\cos^{2l}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2l-1}}\left[\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2k}\cdot\frac{(2l)!}{(l-k)!(l+k)!}\sin 2kx+\frac{(2l)!}{2(l!)^2}x\right]+C$$

当 m 为奇数时,令 $m=2l+1$,则有

$$\int\cos^{2l+1}x\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}\binom{l}{k}\frac{1}{2k+1}\sin^{2k+1}x+C$$

对于第一个积分,我们可用与前面同样的方法做积分.

1.13.3 万能替换法

对于被积函数为 $f(\sin x,\cos x)$ 的积分,万能替换法总是好用的,几乎是“无往不胜”的.如 1.12.1 小节的几个函数的积分,都可以使用万能替换法.

令 $t=\tan\frac{x}{2}$,则有

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

把它们代入下列诸式：$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\cos x + b\sin x}$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x + c\sin x}$，并做积分.

$$(1)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + C = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

$$(2)\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)}$$

$$= \int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \ln(1+t) - \ln(1-t) + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$(3)\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{a+b\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

$$= \frac{2}{a+b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot t\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot t\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot t\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot t\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

$$(4)\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{a+b\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{at^2+2bt+a}$$

该式右端被积函数的分母用配方法使它成为

$$at^2 + 2bt + a = a\left[\left(t+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{a^2-b^2}{a^2}\right]$$

因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{a^2-b^2}{a^2}+\left(t+\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int \frac{\mathrm{d}\frac{at+b}{\sqrt{a^2-b^2}}}{1+\left(\frac{at+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \frac{at + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \frac{a\tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C$$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a\cos x + b\sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{a(1 - t^2) + 2bt} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{at^2 - 2bt - a}$

根据1.11节有理代数分式积分法中的方法，得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\cos x + b\sin x} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{at^2 - 2bt - a} = 2\frac{2}{\sqrt{4b^2 + 4a^2}} \operatorname{arcoth} \frac{2at - 2b}{\sqrt{4b^2 + 4a^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arcoth} \frac{a\tan \frac{x}{2} - b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C \quad (a > 0, b > 0)$$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x + c\sin x} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1 + t^2}}{a + b\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + c\frac{2t}{1 + t^2}}$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(a - b)t^2 + 2ct + (a + b)}$$

根据1.11节有理代数分式积分法中的方法，得到

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(a - b)t^2 + 2ct + (a + b)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4(a - b)(a + b) - 4c^2}} \arctan \frac{2(a - b)t + 2c}{\sqrt{4(a - b)(a + b) - 4c^2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \arctan \frac{(a - b)t + c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + C \quad (a^2 > b^2 + c^2)$$

或

$$= -\frac{2}{\sqrt{4c^2 - 4(a - b)(a + b)}} \operatorname{arcoth} \frac{2(a - b)t + 2c}{\sqrt{4c^2 - 4(a - b)(a + b)}} + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \operatorname{arcoth} \frac{(a - b)t + c}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} + C \quad (a^2 < b^2 + c^2)$$

因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x + c\sin x} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(a - b)t^2 + 2ct + (a + b)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \arctan \frac{(a - b)t + c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \arctan \frac{(a - b)\tan \frac{x}{2} + c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + C \quad (a^2 > b^2 + c^2)$$

或

$$= -\frac{2}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \operatorname{arcoth} \frac{(a - b)t + c}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} + C$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\operatorname{arcoth}\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}+C\quad(a^2<b^2+c^2)$$

各种三角函数的有理函数通过万能替换法都可以变为单一自变量的有理代数函数,从而使积分简化.

1.14 含有双曲函数的有理式的积分法

1.14.1 形如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x}$,$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\sinh x}$,$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x+c\sinh x}$ 的积分

1. 求积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x}$.

当 $b^2>a^2$ 时,有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\left(\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{(b+a)\cosh^2\frac{x}{2}+(b-a)\sinh^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2}{b-a}\int\frac{\mathrm{d}\tanh\frac{x}{2}}{\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2+\tanh^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2}{b-a}\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\tanh\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\tanh\frac{x}{2}\right)+C\quad(b^2>a^2)$$

当 $a^2>b^2$ 时,有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\left(\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b)\cosh^2\frac{x}{2}-(a-b)\sinh^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{\mathrm{d}\tanh\frac{x}{2}}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2 - \tanh^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tanh\frac{x}{2}\right) + C$$

或

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tanh\frac{x}{2}}{1-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tanh\frac{x}{2}}\right| + C \quad (a^2 > b^2)$$

2. 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sinh x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sinh x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\left(\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}\right) + 2b\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2\frac{x}{2}\left(1 - \tanh^2\frac{x}{2} + \frac{2b}{a}\tanh\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\tanh\frac{x}{2} - \frac{b}{a}\right)}{\frac{a^2+b^2}{a^2} - \left(\tanh\frac{x}{2} - \frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{artanh}\left(\frac{a\tanh\frac{x}{2} - b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + C$$

或

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+b^2} - b + a\tanh\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2+b^2} + b - a\tanh\frac{x}{2}}\right| + C$$

3. 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x + c\sinh x}$.

(1) 方法之一,将其化成半角函数,得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x + c\sinh x}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{a\left(\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}\right) + 2c\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b)\cosh^2\frac{x}{2} - (a-b)\sinh^2\frac{x}{2} + 2c\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{\mathrm{d}\tanh\frac{x}{2}}{\frac{a^2-b^2+c^2}{(a-b)^2} - \left(\tanh\frac{x}{2} - \frac{c}{a-b}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2+c^2}}\operatorname{artanh}\frac{(a-b)\left(\tanh\frac{x}{2} - \frac{c}{a-b}\right)}{\sqrt{a^2-b^2+c^2}} + C \quad (a^2+c^2 > b^2)$$

或 $$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(b-a)\left(\tanh\frac{x}{2} + c\right)}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}} + C \quad (a^2+c^2 < b^2)$$

(2) 方法之二,把双曲函数化成指数函数,再积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x + c\sinh x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + c\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}$$

$$= \int \frac{2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{[(b+c)\mathrm{e}^x + (b-c)\mathrm{e}^{-x} + 2a]\mathrm{e}^x}$$

$$= \frac{2}{b+c}\int \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + \frac{2a}{b+c}\mathrm{e}^x + \frac{b-c}{b+c}}$$

$$= \frac{2}{b+c}\int \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x + \frac{a}{b+c}\right)}{\left(\mathrm{e}^x + \frac{a}{b+c}\right)^2 + \frac{b^2-c^2-a^2}{(b+c)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-c^2-a^2}}\arctan\frac{(b+c)\mathrm{e}^x + a}{\sqrt{b^2-c^2-a^2}} + C \quad (b^2 > c^2+a^2)$$

或 $$= -\frac{2}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}\operatorname{arcoth}\frac{(b+c)\mathrm{e}^x + a}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}} + C \quad (b^2 < c^2+a^2)$$

(3) 方法之三,换元法. 设 $y = \dfrac{1}{a+b\cosh x + c\sinh x}$,则

$$b\cosh x + c\sinh x = \frac{1}{y} - a \tag{Ⅰ}$$

两边对 x 取微商,得

$$b\sinh x + c\cosh x = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{Ⅱ}$$

(Ⅰ)、(Ⅱ)两式分别平方,得

$$b^2\cosh^2 x + c^2\sinh^2 x + 2bc\cosh x\sinh x = \frac{1}{y^2} + a^2 - \frac{2a}{y} \tag{Ⅲ}$$

$$b^2\sinh^2 x + c^2\cosh^2 x + 2bc\cosh x\sinh x = \frac{1}{y^4}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tag{Ⅳ}$$

(Ⅳ)-(Ⅲ),得

$$-b^2+c^2=\frac{1}{y^4}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\frac{1}{y^2}-a^2+\frac{2a}{y}$$

$$a^2+c^2-b^2-\frac{2a}{y}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{y^4}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

两边乘 y^2，得

$$(a^2+c^2-b^2)y^2-2ay+1=\frac{1}{y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

两边开方，得

$$\sqrt{(a^2+c^2-b^2)y^2-2ay+1}=\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

于是得到

$$y\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a^2+c^2-b^2)y^2-2ay+1}}$$

于是积分变为

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x+c\sinh x}\\
&=\int y\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(a^2+c^2-b^2)y^2-2ay+1}}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\sqrt{a^2+c^2-b^2}\,y-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{a^2+c^2-b^2}}\right)^2}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}\int\frac{\mathrm{d}\left[\dfrac{(a^2+c^2-b^2)y-a}{\sqrt{c^2-b^2}}\right]}{\sqrt{\left[\dfrac{(a^2+c^2-b^2)y-a}{\sqrt{c^2-b^2}}\right]^2+1}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}\operatorname{arsinh}\frac{(a^2+c^2-b^2)y-a}{\sqrt{c^2-b^2}}+C
\end{aligned}$$

把 $y=\dfrac{1}{a+b\cosh x+c\sinh x}$ 代入，最后得到

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cosh x+c\sinh x}\\
&=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}\operatorname{arsinh}\frac{(c^2-b^2)-a(b\cosh x+c\sinh x)}{\sqrt{c^2-b^2}(a+b\cosh x+c\sinh x)}+C
\end{aligned}$$

1.14.2 形如 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^n}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh x)^n}$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^n}$ 的积分

1. 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^n}$.

运用**微分积分法**:

设 $P=\frac{b\sinh x}{(a+b\cosh x)^{n-1}}$,则

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{b\cosh x(a+b\cosh x)^{n-1}-b\sinh x(n-1)(a+b\cosh x)^{n-2}b\sinh x}{(a+b\cosh x)^{2(n-1)}}$$

$$=\frac{b\cosh x(a+b\cosh x)-(n-1)b^2(\cosh^2 x-1)}{(a+b\cosh x)^n}$$

$$=\frac{(n-1)b^2+ab\cosh x-(n-2)b^2\cosh^2 x}{(a+b\cosh x)^n}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{A+B(a+b\cosh x)+C(a+b\cosh x)^2}{(a+b\cosh x)^n}$$

其中 A,B,C 为待定系数.那么就有

$$\frac{A+B(a+b\cosh x)+C(a+b\cosh x)^2}{(a+b\cosh x)^n}$$

$$=\frac{(n-1)b^2+ab\cosh x-(n-2)b^2\cosh^2 x}{(a+b\cosh x)^n}$$

及

$$A+B(a+b\cosh x)+C(a+b\cosh x)^2$$

$$=(n-1)b^2+ab\cosh x-(n-2)b^2\cosh^2 x$$

或

$$A+Ba+Ca^2+(Bb+2Cab)\cosh x+Cb^2\cosh^2 x$$

$$=(n-1)b^2+ab\cosh x-(n-2)b^2\cosh^2 x$$

让等式两边同类项的系数相等,得到方程组

$$\begin{cases}A+Ba+Ca^2=(n-1)b^2\\ Bb+2Cab=ab\\ Cb^2=-(n-2)b^2\end{cases}$$

解得

$$A=(n-1)(b^2-a^2),\quad B=(2n-3)a,\quad C=-(n-2)$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{(n-1)(b^2-a^2)+(2n-3)a(a+b\cosh x)-(n-2)(a+b\cosh x)^2}{(a+b\cosh x)^n}$$

及

$$P=\int\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{b\sinh x}{(a+b\cosh x)^{n-1}}$$
$$=(n-1)(b^2-a^2)\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^n}+(2n-3)a\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^{n-1}}$$
$$-(n-2)\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^{n-2}}$$

于是得到该积分的递推公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^n}=\frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)}\frac{b\sinh x}{(a+b\cosh x)^{n-1}}$$
$$-\frac{(2n-3)a}{(n-1)(b^2-a^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^{n-1}}$$
$$+\frac{n-2}{(n-1)(b^2-a^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x)^{n-2}}\qquad(\mathrm{I})$$

根据这个递推公式推演下去，n 会逐步减小，直到分母为一次方的积分式时，就能得到积分最后结果了.

2. 求积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh x)^n}$.

用前面所用的方法，推导出可以使被积函数的分母降阶的递推公式.

设 $Q=\frac{c\cosh x}{(a+c\sinh x)^{n-1}}$，则

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\frac{c\sinh x\,(a+c\sinh x)^{n-1}-c\cosh x(n-1)\,(a+c\sinh x)^{n-2}c\cosh x}{(a+c\sinh x)^{2(n-1)}}$$
$$=\frac{c\sinh x(a+c\sinh x)-(n-1)c^2(1+\sinh^2 x)}{(a+c\sinh x)^n}$$
$$=\frac{-(n-1)c^2+ac\sinh x-(n-2)c^2\sinh^2 x}{(a+c\sinh x)^n}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\frac{A+B(a+c\sinh x)+C(a+c\sinh x)^2}{(a+c\sinh x)^n}$$

则有

$$A+B(a+c\sinh x)+C(a+c\sinh x)^2$$
$$=-(n-1)c^2+ac\sinh x-(n-2)c^2\sinh^2 x$$

其中 A,B,C 为待定系数.

使等式两边的同类项系数相等时，得到方程组

$$\begin{cases}A+Ba+Ca^2=-(n-1)c^2\\Bc+2Cac=ac\\Cc^2=-(n-2)c^2\end{cases}$$

解得

$$A=-(n-1)(a^2+c^2),\quad B=(2n-3)a,\quad C=-(n-2)$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=\frac{-(n-1)(a^2+c^2)+(2n-3)a(a+c\sinh x)-(n-2)(a+c\sinh x)^2}{(a+c\sinh x)^n}$$

所以

$$\begin{aligned}Q&=\int\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{c\cosh x}{(a+c\sinh x)^{n-1}}\\&=-(n-1)(a^2+c^2)\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh x)^n}+(2n-3)a\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh)^{n-1}}\\&\quad-(n-2)\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh x)^{n-2}}\end{aligned}$$

这样,可以得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh x)^n}&=-\frac{1}{(n-1)(a^2+c^2)}\frac{c\cosh x}{(a+c\sinh x)^{n-1}}\\&\quad+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2+c^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh x)^{n-1}}\\&\quad-\frac{n-2}{(n-1)(a^2+c^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+c\sinh x)^{n-2}}\end{aligned}\qquad(\text{Ⅱ})$$

这就是该积分的递推公式.

3. 求积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^n}$.

设$R=\frac{b\sinh x+c\cosh x}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^{n-1}}$,则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}&=\frac{(b\cosh x+c\sinh x)(a+b\cosh x+c\sinh x)^{(n-1)}}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^{2(n-1)}}\\&\quad-\frac{(n-1)(b\sinh x+c\cosh x)^2(a+b\cosh x+c\sinh x)^{n-2}}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^{2(n-1)}}\\&=\frac{(b\cosh x+c\sinh x)(a+b\cosh x+c\sinh x)-(n-1)(b\sinh x+c\cosh x)^2}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^n}\\&=\frac{(n-1)(b^2-c^2)+a(b\cosh x+c\sinh x)-(n-2)(b\cosh x+c\sinh x)^2}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^n}\end{aligned}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}=\frac{A+B(a+b\cosh x+c\sinh x)+C(a+b\cosh x+c\sinh x)^2}{(a+b\cosh x+c\sinh x)^n}$$

其中A,B,C为待定系数,则有

$$\begin{aligned}&A+B(a+b\cosh x+c\sinh x)+C(a+b\cosh x+c\sinh x)^2\\&=(n-1)(b^2-c^2)+a(b\cosh x+c\sinh x)-(n-2)(b\cosh x+c\sinh x)^2\end{aligned}$$

使等式两边的同类项系数相等,得到方程组

$$\begin{cases} A + Ba + Ca^2 = (n-1)(b^2 - c^2) \\ B + 2Ca = a \\ C = -(n-2) \end{cases}$$

解方程组,得到

$$A = (n-1)(b^2 - a^2 - c^2), \quad B = (2n-3)a, \quad C = -(n-2)$$

这样,R 的微商可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} &= \frac{(n-1)(b^2 - a^2 - c^2) + (2n-3)a(a + b\cosh x + c\sinh x)}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^n} \\ &\quad - \frac{(n-2)(a + b\cosh x + c\sinh x)^2}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^n} \\ &= \frac{(n-1)(b^2 - a^2 - c^2)}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^n} + \frac{(2n-3)a}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}} \\ &\quad - \frac{n-2}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-2}} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R &= \int \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{b\sinh x + c\cosh x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}} \\ &= (n-1)(b^2 - a^2 - c^2)\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^n} \\ &\quad + (2n-3)a\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}} \\ &\quad - (n-2)\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-2}} \end{aligned}$$

最后,求得该积分的递推公式为

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^n} \\ &= \frac{1}{(n-1)(b^2 - a^2 - c^2)} \frac{b\sinh x + c\cosh x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}} \\ &\quad - \frac{(2n-3)a}{(n-1)(b^2 - a^2 - c^2)}\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}} \\ &\quad + \frac{n-2}{(n-1)(b^2 - a^2 - c^2)}\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^{n-2}} \end{aligned} \tag{Ⅲ}$$

我们可以把积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x)^n}$ 和 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + c\sinh x)^n}$ 看成是积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^n}$ 的两个特例. 当 $c = 0$ 时,得到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x)^n}$ 的结果;当 $b = 0$ 时,得到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + c\sinh x)^n}$ 的结果. 我们将会看到,$\int \frac{\mathrm{d}x}{(b\cosh x + c\sinh x)^n}$ 也是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cosh x + c\sinh x)^n}$ 的特例.

4. 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(b\cosh x + c\sinh x)^n}$.

设 $S = \frac{b\sinh x + c\cosh x}{(b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}}$，那么

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{(b\cosh x + c\sinh x)^n - (b\sinh x + c\cosh x)^2}{(b\cosh x + c\sinh x)^{2(n-1)}} \cdot \frac{(n-1)(b\cosh x + c\sinh x)^{n-2}}{(b\cosh x + c\sinh x)^{2(n-1)}}$$

$$= \frac{(b\cosh x + c\sinh x)^2 - (n-1)(b\sinh x + c\cosh x)^2}{(b\cosh x + c\sinh x)^n}$$

$$= \frac{(n-1)(b^2 - c^2) - (n-2)(b\cosh x + c\sinh x)^2}{(b\cosh x + c\sinh x)^n}$$

$$= \frac{(n-1)(b^2 - c^2)}{(b\cosh x + c\sinh x)^n} - \frac{(n-2)}{(b\cosh x + c\sinh x)^{n-2}}$$

于是有

$$S = \int \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{b\sinh x + c\cosh x}{(b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}}$$

$$= (n-1)(b^2 - c^2)\int \frac{\mathrm{d}x}{(b\cosh x + c\sinh x)^n} - (n-2)\int \frac{\mathrm{d}x}{(b\cosh x + c\sinh x)^{n-2}}$$

最后得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(b\cosh x + c\sinh x)^n} = \frac{1}{(n-1)(b^2 - c^2)} \frac{b\sinh x + c\cosh x}{(b\cosh x + c\sinh x)^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(b^2 - c^2)}\int \frac{\mathrm{d}x}{(b\cosh x + c\sinh x)^{n-2}} \quad (\mathrm{IV})$$

这是该积分的递推公式.

在式(Ⅲ)中令 $a = 0$，就得到式(Ⅳ)了. 因此，只要知道式(Ⅲ)，那么令 c, b, a 分别等于零，就能得到相应的式(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅳ)了.

1.15 配对积分法(组合积分法)

这种积分方法对于三角函数、指数函数、双曲函数中某些特定形式的函数的积分有其便捷之处，如：

1. 求积分 $\int \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x$.

可以用万能替换法(即用 $t = \tan\frac{x}{2}$ 替代)来做积分，但比较麻烦. 如果找一个

积分，如

$$\int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x$$

和它配对，一起做积分，那就容易多了.操作如下：

令

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x$$

把它们组合起来，得

$$\begin{aligned} bI_1 + aI_2 &= \int \frac{b\sin x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x + \int \frac{a\cos x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{b\sin x + a\cos x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C \qquad (\text{Ⅰ}) \\ -aI_1 + bI_2 &= \int \frac{-a\sin x + b\cos x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(a\cos x + b\sin x)}{a\cos x + b\sin x} \\ &= \ln|a\cos x + b\sin x| + C \qquad (\text{Ⅱ}) \end{aligned}$$

从(Ⅰ)、(Ⅱ)两式中消去 I_2，$b\times$(Ⅰ)$-a\times$(Ⅱ)，得

$$(a^2 + b^2)I_1 = bx - a\ln|a\cos x + b\sin x| + C$$

于是得到

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2 + b^2}(bx - a\ln|a\cos x + b\sin x|) + C$$

也可用 $a\times$(Ⅰ)$+b\times$(Ⅱ)，得到

$$I_2 = \int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2 + b^2}(ax + b\ln|a\cos x + b\sin x|) + C$$

这种积分方法首先见诸于菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》[2]和华罗庚教授的《高等数学引论》[4]，后来经朱永银教授等人的深入研究，发展了可能配对或组合的函数的积分，他们把这种方法称为组合积分法[13].这种方法适合于那些可以互导或自导的函数.

所谓互导函数是指

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

即 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是互导函数，它们互为对方的导数；$\sinh x$ 和 $\cosh x$ 也是互导函数.

所谓自导函数是指

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

它的导数是它自己.

由这些互导函数或自导函数构成的某些形式的被积函数可以配对做积分，有其方便之处.

2. 求积分 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

根据前面的思路，大家可想到一个和它配对的积分

$$\int \frac{e^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx$$

采用前面的方法，令

$$J_1=\int \frac{e^{x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx,\quad J_2=\int \frac{e^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx$$

把它们组合起来，得

$$a\times J_1+b\times J_2=\int \frac{ae^{x}+be^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx=\int dx=x+C \tag{Ⅲ}$$

$$\begin{aligned} a\times J_1-b\times J_2&=\int \frac{ae^{x}-be^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx=\int \frac{d(ae^{x}+be^{-x})}{ae^{x}+be^{-x}}\\ &=\ln|ae^{x}+be^{-x}|+C \end{aligned} \tag{Ⅳ}$$

(Ⅲ)+(Ⅳ)，得到

$$J_1=\int \frac{e^{x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx=\frac{1}{2a}(x+\ln|ae^{x}+be^{-x}|)+C$$

(Ⅲ)-(Ⅳ)，得到

$$J_2=\int \frac{e^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx=\frac{1}{2b}(x-\ln|ae^{x}+be^{-x}|)+C$$

J_2 虽然不是题意所要求的，但仍然把它写出来放在这里，以供参考. 这就是说当你要求 J_2 的积分时，可以找 J_1 来配对.

3. 求积分 $\int \frac{\cosh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx$.

如前法，找到与它配对积分式

$$\int \frac{\sinh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx$$

令

$$K_1=\int \frac{\cosh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx,\quad K_2=\int \frac{\sinh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx$$

把它们组合起来，得

$$\begin{aligned} aK_1+bK_2&=\int \frac{a\cosh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx+\int \frac{b\sinh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx\\ &=\int dx=x+C \end{aligned} \tag{Ⅴ}$$

$$\begin{aligned} bK_1+aK_2&=\int \frac{b\cosh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx+\int \frac{a\sinh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx\\ &=\int \frac{d(a\cosh x+b\sinh x)}{a\cosh x+b\sinh x}=\ln|a\cosh x+b\sinh x|+C \end{aligned} \tag{Ⅵ}$$

$a\times$(Ⅴ)$-b\times$(Ⅵ)，得到

$$K_1=\int \frac{\cosh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx=\frac{1}{a^{2}-b^{2}}(ax-b\ln|a\cosh x+b\sinh x|)+C$$

$b\times(\text{Ⅴ})-a\times(\text{Ⅵ})$,得到

$$K_2=\int\frac{\sinh x}{a\cosh x+b\sinh x}\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2-a^2}(bx-a\ln|a\cosh x+b\sinh x|)+C$$

K_2 虽然不是题意所要求的,但仍然把它写出来放在这里,以供参考.

4. 求积分 $\int\frac{\sin x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x$.

同前法,找到与它配对的积分式

$$\int\frac{\cos x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x$$

令

$$P_1=\int\frac{\sin x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x,\quad P_2=\int\frac{\cos x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x$$

把它们组合起来,得

$$\begin{aligned}-bP_1+cP_2&=\int\frac{-b\sin x+c\cos x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a+b\cos x+c\sin x)}{a+b\cos x+c\sin x}\\&=\ln|a+b\cos x+c\sin x|+C\end{aligned}\tag{Ⅶ}$$

$$\begin{aligned}cP_1+bP_2&=\int\frac{b\cos x+c\sin x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{a}{a+b\cos x+c\sin x}\right)\mathrm{d}x\\&=x-a\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x+c\sin x}\end{aligned}$$

等式右边的积分在 1.11.3 小节中给出,它是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x+c\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\arctan\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}+C\quad(a^2>b^2+c^2)$$

或

$$=-\frac{2}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\operatorname{arcoth}\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}+C\quad(a^2<b^2+c^2)$$

因此

$$cP_1+bP_2=x-\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\arctan\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}+C\tag{Ⅷ}$$

或

$$=x-\frac{2a}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\operatorname{arcoth}\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}+C$$

$c\times(\text{Ⅷ})-b\times(\text{Ⅶ})$,得到

$$\begin{aligned}P_1&=\int\frac{\sin x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{b^2+c^2}\left[cx-\frac{2ac}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\arctan\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\right.\end{aligned}$$

$$-b\ln|a+b\cos x+c\sin x|\Big]+C\quad(a^2>b^2+c^2)$$

或

$$=\frac{1}{b^2+c^2}\left[cx-\frac{2ac}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\operatorname{arcoth}\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\right.$$

$$\left.-b\ln|a+b\cos x+c\sin x|\right]+C\quad(a^2<b^2+c^2)$$

$b\times(Ⅷ)+c\times(Ⅶ)$,顺便得到与它配对的积分

$$P_2=\int\frac{\cos x}{a+b\cos x+c\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{b^2+c^2}\left[bx-\frac{2ab}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\arctan\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\right.$$

$$\left.+c\ln|a+b\cos x+c\sin x|\right]+C\quad(a^2>b^2+c^2)$$

或

$$P_2=\frac{1}{b^2+c^2}\left[bx-\frac{2ab}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\operatorname{arcoth}\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}+c}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\right.$$

$$\left.+c\ln|a+b\cos x+c\sin x|\right]+C\quad(a^2<b^2+c^2)$$

5. 求积分$\int\frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

找到与它配对的积分式

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$$

令

$$Q_1=\int\frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x,\quad Q_2=\int\frac{\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$$

组合并积分,得

$$Q_1+Q_2=\int\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x+\cos x}{1+\frac{1-(\sin x-\cos x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{artanh}\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} + C$$

$$Q_2 - Q_1 = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{1 + (\sin x + \cos x)^2}$$

$$= 2\arctan(\sin x + \cos x) + C$$

将上面两式相减，得到

$$Q_1 = \int \frac{\sin x}{1 + \sin x\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{artanh}\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \arctan(\sin x + \cos x) + C$$

6. 求积分 $\int \frac{\tan x}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x$.

找到与其配对的积分式

$$\int \frac{\cot x}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x$$

令

$$R_1 = \int \frac{\tan x}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x, \quad R_2 = \int \frac{\cot x}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x$$

把它们组合起来并积分，得

$$aR_1 + bR_2 = \int \frac{a\tan x + b\cot x}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C \qquad (\text{Ⅸ})$$

两式相加，并积分，得

$$R_1 + R_2 = \int \frac{\tan x + \cot x}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x = \int \frac{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x(a\tan x + b\cot x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{1 + \dfrac{a}{b}\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan x\right)}{1 + \left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan x\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right) + C \qquad (\text{Ⅹ})$$

两式相减，得(Ⅸ) $- b\times$(Ⅹ)，则有

$$(a - b)R_1 = x - \frac{b}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right) + C$$

最后得到

$$R_1 = \int \frac{\tan x}{a\tan x + b\cot x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\left[x - \sqrt{\frac{b}{a}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right)\right] + C$$

7. 求积分 $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$.

它的配对积分式

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

令

$$S_1 = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x, \quad S_2 = \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

在配对积分法中使用微分法,对被积函数取微商,得

$$(\mathrm{e}^{ax}\cos bx)' = a\mathrm{e}^{ax}\cos bx - b\mathrm{e}^{ax}\sin bx$$
$$(\mathrm{e}^{ax}\sin bx)' = a\mathrm{e}^{ax}\sin bx + b\mathrm{e}^{ax}\cos bx$$

等式两边积分,得

$$\mathrm{e}^{ax}\cos bx = a\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x - b\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = aS_1 - bS_2$$

$$\mathrm{e}^{ax}\sin bx = a\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x + b\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = aS_2 + bS_1$$

解联立方程,得到

$$S_1 = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

顺便得到它的配对积分

$$S_2 = \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

8. 求积分 $\int x\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$.

它的配对积分式是

$$\int x\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

令

$$T_1 = \int x\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x, \quad T_2 = \int x\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

对被积函数取微商,得

$$(x\mathrm{e}^{ax}\cos bx)' = \mathrm{e}^{ax}\cos bx + ax\mathrm{e}^{ax}\cos bx - bx\mathrm{e}^{ax}\sin bx$$
$$(x\mathrm{e}^{ax}\sin bx)' = \mathrm{e}^{ax}\sin bx + ax\mathrm{e}^{ax}\sin bx + bx\mathrm{e}^{ax}\cos bx$$

两边积分,得

$$x\mathrm{e}^{ax}\cos bx = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x + a\int x\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x - b\int x\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$= \int e^{ax}\cos bx\,dx + aT_1 - bT_2$$

$$xe^{ax}\sin bx = \int e^{ax}\sin bx\,dx + a\int xe^{ax}\sin bx\,dx + b\int xe^{ax}\cos bx\,dx$$

$$= \int e^{ax}\sin bx\,dx + aT_2 + bT_1$$

即

$$aT_1 - bT_2 = xe^{ax}\cos bx - \int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$bT_1 + aT_2 = xe^{ax}\sin bx - \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

这两个方程右端的积分在前面已经求得,代入后有

$$aT_1 - bT_2 = xe^{ax}\cos bx - \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

$$bT_1 + aT_2 = xe^{ax}\sin bx - \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

解联立方程,得到

$$T_1 = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx] + C$$

$$T_2 = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx + b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\sin bx] + C$$

或

$$T_1 = \int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos bx + \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\sin bx\right] + C$$

$$T_2 = \int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin bx - \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cos bx\right] + C$$

9. 求积分 $\int x^m e^{ax}\cos bx\,dx$.

它的配对积分式是

$$\int x^m e^{ax}\sin bx\,dx$$

令

$$U_1 = \int x^m e^{ax}\cos bx\,dx, \quad U_2 = \int x^m e^{ax}\sin bx\,dx$$

对积分中的被积函数取微商,得

$$(x^m e^{ax}\cos bx)' = mx^{m-1}e^{ax}\cos bx + ax^m e^{ax}\cos bx - bx^m e^{ax}\sin bx$$

$$(x^m e^{ax}\sin bx)' = mx^{m-1}e^{ax}\sin bx + ax^m e^{ax}\sin bx + bx^m e^{ax}\cos bx$$

等式两边积分,得

$$x^m e^{ax}\cos bx = m\int x^{m-1}e^{ax}\cos bx\,dx + a\int x^m e^{ax}\cos bx\,dx - b\int x^m e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$x^m e^{ax}\sin bx = m\int x^{m-1}e^{ax}\sin bx\,dx + a\int x^m e^{ax}\sin bx\,dx + b\int x^m e^{ax}\cos bx\,dx$$

或写成

$$aU_1 - bU_2 = x^m e^{ax}\cos bx - m\int x^{m-1}e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$bU_1 + aU_2 = x^m e^{ax}\sin bx - m\int x^{m-1}e^{ax}\sin bx\,dx$$

解联立方程,得到

$$U_1 = \frac{x^m e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{m}{a^2+b^2}\int x^{m-1}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\,dx$$

$$U_2 = \frac{x^m e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{m}{a^2+b^2}\int x^{m-1}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\,dx$$

这里得到的是递推公式.

10. 求积分 $\int \cosh x\sin x\,dx$.

配对积分法也可运用于双曲函数与三角函数乘积的积分.它的配对积分式是

$$\int \sinh x\cos x\,dx$$

令

$$V_1 = \int \cosh x\sin x\,dx,\quad V_2 = \int \sinh x\cos x\,dx$$

取微商(这里要注意用来取微商的函数不再是原来的被积函数,要考虑取微商后的函数应该分别是原积分及其配对积分中的被积函数):

$$(\cosh x\cos x)' = \sinh x\cos x - \cosh x\sin x$$

$$(\sinh x\sin x)' = \cosh x\sin x + \sinh x\cos x$$

两边积分,得

$$\cosh x\cos x = \int \sinh x\cos x\,dx - \int \cosh x\sin x\,dx = V_2 - V_1$$

$$\sinh x\sin x = \int \cosh x\sin x\,dx + \int \sinh x\cos x\,dx = V_1 + V_2$$

因此得到

$$V_1 = \int \cosh x\sin x\,dx = \frac{1}{2}(\sinh x\sin x - \cosh x\cos x) + C$$

$$V_2 = \int \sinh x\cos x\,dx = \frac{1}{2}(\sinh x\sin x + \cosh x\cos x) + C$$

11. 求积分 $\int \cosh ax\cos bx\,dx$.

它的配对积分式是

$$\int \sinh ax\sin bx\,dx$$

令

$$W_1 = \int \cosh ax \cos bx \mathrm{d}x, \quad W_2 = \int \sinh ax \sin bx \mathrm{d}x$$

取微商(与前一题相同,用来取微商的函数不再是原来的被积函数,要考虑取微商后的函数应该分别是原积分及其配对积分中的被积函数):

$$(\cosh ax \sin bx)' = a\sinh ax \sin bx + b\cosh ax \cos bx$$
$$(\sinh ax \cos bx)' = a\cosh ax \cos bx - b\sinh ax \sin bx$$

两边积分,得

$$\cosh ax \sin bx = a\int \sinh ax \sin bx \mathrm{d}x + b\int \cosh ax \cos bx \mathrm{d}x = aW_2 + bW_1$$

$$\sinh ax \cos bx = a\int \cosh ax \cos bx \mathrm{d}x - b\int \sinh ax \sin bx \mathrm{d}x = aW_1 - bW_2$$

解联立方程,得到

$$W_1 = \int \cosh ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2 + b^2}(a\sinh ax \cos bx + b\cosh ax \sin bx) + C$$

同时可得到它的配对积分

$$W_2 = \int \sinh ax \sin bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2 + b^2}(a\cosh ax \sin bx - b\sinh ax \cos bx) + C$$

12. 求积分 $\int \mathrm{e}^{ax} \cosh bx \mathrm{d}x$.

它的配对积分式是

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sinh bx \mathrm{d}x$$

令

$$X_1 = \int \mathrm{e}^{ax} \cosh bx \mathrm{d}x, \quad X_2 = \int \mathrm{e}^{ax} \sinh bx \mathrm{d}x$$

取微商,得

$$(\mathrm{e}^{ax} \cosh bx)' = a\mathrm{e}^{ax} \cosh bx + b\mathrm{e}^{ax} \sinh bx$$
$$(\mathrm{e}^{ax} \sinh bx)' = a\mathrm{e}^{ax} \sinh bx + b\mathrm{e}^{ax} \cosh bx$$

两边积分,得

$$\mathrm{e}^{ax} \cosh bx = a\int \mathrm{e}^{ax} \cosh bx \mathrm{d}x + b\int \mathrm{e}^{ax} \sinh bx \mathrm{d}x = aX_1 + bX_2$$

$$\mathrm{e}^{ax} \sinh bx = a\int \mathrm{e}^{ax} \sinh bx \mathrm{d}x + b\int \mathrm{e}^{ax} \cosh bx \mathrm{d}x = aX_2 + bX_1$$

解联立方程,得到

$$X_1 = \int \mathrm{e}^{ax} \cosh bx \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 - b^2}(a\cosh bx - b\sinh bx) + C$$

同时得到它的配对积分为

$$X_2 = \int \mathrm{e}^{ax} \sinh bx \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 - b^2}(a\sinh bx - b\cosh bx) + C$$

13. 求积分 $\int x\mathrm{e}^{ax} \cosh bx \mathrm{d}x$.

它的配对积分式是

$$\int x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x$$

令

$$Y_1=\int x\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\mathrm{d}x,\quad Y_2=\int x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x$$

对被积函数取微商,得

$$(x\mathrm{e}^{ax}\cosh bx)'=\mathrm{e}^{ax}\cosh bx+ax\mathrm{e}^{ax}\cosh bx+bx\mathrm{e}^{ax}\sinh bx$$

$$(x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx)'=\mathrm{e}^{ax}\sinh bx+ax\mathrm{e}^{ax}\sinh bx+bx\mathrm{e}^{ax}\cosh bx$$

两边积分,得

$$x\mathrm{e}^{ax}\cosh bx=\int\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\mathrm{d}x+a\int x\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\mathrm{d}x+b\int x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x$$

$$=\int\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\mathrm{d}x+aY_1+bY_2$$

$$x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx=\int\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x+a\int x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x+b\int x\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\mathrm{d}x$$

$$=\int\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x+aY_2+bY_1$$

即

$$aY_1+bY_2=x\mathrm{e}^{ax}\cosh bx-\int\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\mathrm{d}x$$

$$bY_1+aY_2=x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx-\int\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x$$

把$\int\mathrm{e}^{ax}\cosh bx\mathrm{d}x$和$\int\mathrm{e}^{ax}\sinh bx\mathrm{d}x$的积分结果代入,得到

$$aY_1+bY_2=x\mathrm{e}^{ax}\cosh bx-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2-b^2}(a\cosh bx-b\sinh bx)$$

$$bY_1+aY_2=x\mathrm{e}^{ax}\sinh bx-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2-b^2}(a\sinh bx-b\cosh bx)$$

解联立方程,得到

$$Y_1=\frac{x\mathrm{e}^{ax}}{a^2-b^2}(a\cosh bx-b\sinh bx)-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{(a^2-b^2)}[(a^2+b^2)\cosh bx-2ab\sinh bx]+C$$

$$Y_2=\frac{x\mathrm{e}^{ax}}{a^2-b^2}(a\sinh bx-b\cosh bx)-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{(a^2-b^2)^2}[(a^2+b^2)\sinh bx-2ab\cosh bx]+C$$

或

$$Y_1=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2-b^2}\left[\left(ax-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\cosh bx-\left(bx-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)\sinh bx\right]+C\quad(a\neq b)$$

$$Y_2=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2-b^2}\left[\left(ax-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\sinh bx-\left(bx-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)\cosh bx\right]+C\quad(a\neq b)$$

14. 求积分 $\int x^m e^{ax}\cosh bx\,dx$.

(1) 解法之一.

它的配对积分是

$$\int x^m e^{ax}\sinh bx\,dx$$

令

$$Z_1 = \int x^m e^{ax}\cosh bx\,dx,\quad Z_2 = \int x^m e^{ax}\sinh bx\,dx$$

对被积函数取微商,得

$$(x^m e^{ax}\cosh bx)' = mx^{m-1}e^{ax}\cosh bx + ax^m e^{ax}\cosh bx + bx^m e^{ax}\sinh bx$$

$$(x^m e^{ax}\sinh bx)' = mx^{m-1}e^{ax}\sinh bx + ax^m e^{ax}\sinh bx + bx^m e^{ax}\cosh bx$$

两边积分,得

$$\begin{aligned} x^m e^{ax}\cosh bx &= m\int x^{m-1}e^{ax}\cosh bx\,dx + a\int x^m e^{ax}\cosh bx\,dx + b\int x^m e^{ax}\sinh bx\,dx \\ &= m\int x^{m-1}e^{ax}\cosh bx\,dx + aZ_1 + bZ_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^m e^{ax}\sinh bx &= m\int x^{m-1}e^{ax}\sinh bx\,dx + a\int x^m e^{ax}\sinh bx\,dx + b\int x^m e^{ax}\cosh bx\,dx \\ &= m\int x^{m-1}e^{ax}\sinh bx\,dx + aZ_2 + bZ_1 \end{aligned}$$

即

$$aZ_1 + bZ_2 = x^m e^{ax}\cosh bx - m\int x^{m-1}e^{ax}\cosh bx\,dx$$

$$bZ_1 + aZ_2 = x^m e^{ax}\sinh bx - m\int x^{m-1}e^{ax}\sinh bx\,dx$$

解联立方程,得到

$$Z_1 = \frac{x^m e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\cosh bx - b\sinh bx) - \frac{m}{a^2 - b^2}\int x^{m-1}e^{ax}(a\cosh bx - b\sinh bx)\,dx$$

这是该积分的递推公式,同时可得到它的配对积分的递推公式

$$Z_2 = \frac{x^m e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\sinh bx - b\cosh bx) - \frac{m}{a^2 - b^2}\int x^{m-1}e^{ax}(a\sinh bx - b\cosh bx)\,dx$$

(2) 解法之二.

把 $\cosh bx$ 化成指数形式

$$\cosh bx = \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}$$

那么

$$\int x^m e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{1}{2}\int x^m e^{ax}(e^{bx}+e^{-bx})\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int x^m e^{(a+b)x}\,dx + \int x^m e^{(a-b)x}\,dx\right]$$

先来推导积分 $\int x^m e^{ax}\,dx$ 的计算公式，可多次使用分部积分法：

$$\int x^m e^{ax}\,dx$$
$$= \frac{1}{a}\int x^m\,de^{ax} = \frac{1}{a}\left(x^m e^{ax} - m\int x^{m-1}e^{ax}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{a}\left\{x^m e^{ax} - \frac{m}{a}\left[x^{m-1}e^{ax} - (m-1)\int x^{m-2}e^{ax}\,dx\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{a}\left\{x^m e^{ax} - \frac{m}{a}\left[x^{m-1}e^{ax} - \frac{m-1}{a}\left(x^{m-2}e^{ax} - (m-2)\int x^{m-3}e^{ax}\,dx\right)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{a}x^m e^{ax} - \frac{m}{a^2}x^{m-1}e^{ax} + \frac{m(m-1)}{a^3}x^{m-2}e^{ax} - \frac{m(m-1)(m-2)}{a^4}x^{m-3}e^{ax} + \cdots$$
$$= e^{ax}\left[\frac{x^m}{a} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{a^{k+1}}x^{m-k}\right] + C$$

用此式求出 $\int x^m e^{(a+b)x}\,dx$ 和 $\int x^m e^{(a-b)x}\,dx$.

$$\int x^m e^{(a+b)x}\,dx = e^{(a+b)x}\left[\frac{x^m}{a+b} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(a+b)^{k+1}}x^{m-k}\right] + C$$

$$\int x^m e^{(a-b)x}\,dx = e^{(a-b)x}\left[\frac{x^m}{a-b} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(a-b)^{k+1}}x^{m-k}\right] + C$$

$(a \neq b)$

把它们加起来，就得到

$$\int x^m e^{ax}\cosh bx\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int x^m e^{(a+b)x}\,dx + \int x^m e^{(a-b)x}\,dx\right] + C$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{e^{(a+b)x}}{a+b} + \frac{e^{(a-b)x}}{a-b}\right]x^m + \left[e^{(a+b)x}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(a+b)^{k+1}}x^{m-k}\right.\right.$$
$$\left.\left. + e^{(a-b)x}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(a-b)^{k+1}}x^{m-k}\right]\right\} + C$$

配对积分法(或组合积分法)在三角函数、指数函数和双曲函数的积分中有许多应用，关键是要找到能配对的函数，找对了，做积分非常便捷. 对组合积分法有兴趣的读者可参看朱永银教授等撰写的《组合积分法》一书[13].

第2章 定 积 分

2.1 定积分的定义

2.1.1 黎曼定义

德国数学家黎曼(G. F. B. Riemann)第一个提出关于定积分的严格定义:

设 $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的有界函数,在$[a,b]$中任意插入 $n-1$ 个点,把$[a,b]$分成 n 个子区间,即

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

称分点组 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\}$为$[a,b]$的一个划分,记

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

对$[a,b]$的每个划分 P,令

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\} \quad (\sup = \text{supremum},\text{上确界})$$

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\} \quad (\inf = \text{infimum},\text{下确界})$$

作

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{2.1}$$

及

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{2.2}$$

分别称它们为函数 $f(x)$ 关于划分 P 的达布(Darboux) 上和(2.1) 及达布下和(2.2).对于$[a,b]$ 的一切划分 P,$U(f,P)$ 的下确界称为 f 在$[a,b]$ 上的上积分,记为$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$;$L(f,P)$ 的上确界称为 f 在$[a,b]$ 上的下积分,记作$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.如果上积分与下积分相等,则称 f 在$[a,b]$ 上黎曼可积.上积分与下积分的共同值称为f 在$[a,b]$ 上的黎曼积分,记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 黎曼积分就是人们通常所说的

定积分.

2.1.2 面积求和法的定义——曲线下的面积

定积分也可用曲线下的面积来定义.我们来考虑一个曲边梯形,这个梯形是由直线 $x=a$,$x=b$,x 轴及曲线 $y=f(x)$所围成的图形(图 2.1).

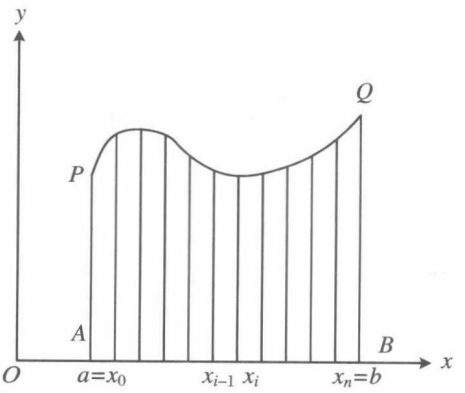


图 2.1

现在来求这个曲边梯形 $ABQP$ 的面积.不失一般性,假定 $f(x)>0$,表示曲线 $f(x)$在 x 轴的上面.把$[a,b]$分成 n 份(可以相等,也可以不相等),使得

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

在任何一个子区间$[x_{i-1},x_i]$中任选一点 ξ_i,使 $x_{i-1}<\xi_i<x_i$,则这个子区间上曲边梯形的面积近似值为 $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$,那么,这个曲边梯形 $ABQP$ 的面积为

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

令 $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$,上式可写成

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当插入$[a,b]$的分点越来越多(即 $n\uparrow$),也就是说$[a,b]$不断地被细分,使得最大的 $\Delta x_i = \lambda \to 0$ 时,则该曲边梯形 $ABQP$ 的面积为

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这时这个曲边梯形 $ABQP$ 的面积就是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分,把它记作

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

2.2 定积分的基本公式和常用法则

2.2.1 定积分的基本公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{2.3}$$

式(2.3)被称为**牛顿-莱布尼茨公式**,是积分学的基本公式.它表明,定积分的值可表示成任何一个原函数 $F(x)$ 在 $x=b$ 与 $x=a$ 的两值之差.

式(2.3)证明如下:若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的任意一个原函数,而 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 也是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数,因此 $F(x)$ 与 $\Phi(x)$ 两者之间最多相差一个常数 C,故

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x + C$$

令 $x=a$,得 $C=F(a)$,于是

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x + F(a)$$

再令 $x=b$,得到

$$F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + F(a)$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

但凡能求得原函数的积分,都可用这种方法求得定积分值.式(2.3)给出了计算连续函数 $f(x)$ 的定积分的简单而有效的方法.公式右端的差数通常写成符号 $F(x)\big|_a^b$ 的形式,所以式(2.3)又可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b \tag{2.4}$$

式中的 a 与 b 分别称为积分的下限与上限.例如:

(1) $\int_a^b x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$;

(2) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\big|_a^b = \ln b - \ln a\,(a>0, b>0)$;

(3) $\int_a^b \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\big|_a^b = \cos a - \cos b$;

(4) $\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \sin x\big|_a^b = \sin b - \sin a$;

(5) $\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\big|_a^b = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$;

(6) $\int_a^b \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x\big|_a^b = \cosh b - \cosh a$;

(7) $\int_a^b \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x\big|_a^b = \sinh b - \sinh a$;

(8) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\big|_a^b = \arctan b - \arctan a$;

(9) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x\big|_a^b = \operatorname{arsinh} b - \operatorname{arsinh} a$;

(10) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi(m \text{ 为正整数}).$$

不定积分求得的是一个新的函数(原函数),而定积分求得的是一个确定的数值.上述例题中的 a,b,π 等都属于已知数.如在(1)中,若给定 $a=1$,$b=2$,$n=2$,则积分结果为 $\frac{7}{3}$;又如在(3)中,若给定 $a=0$,$b=\frac{\pi}{2}$,则积分结果是 1.

牛顿-莱布尼茨公式对于能求得原函数的函数而言,是一种简便易行的方法.只要求出被积函数的原函数,把上、下积分限代入就能得到结果了.实际上它与2.1.2节中所述的求和法是一致的.

用求和法也可推导出牛顿-莱布尼茨公式.例如,用求和法计算 $\int_a^b \sin x\mathrm{d}x$ 时,把区间 $[a,b]$ 分割成 n 个相等的部分,令 $h = \frac{b-a}{n}(a<b)$,于是 $\sin x$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个积分和数为

$$\sigma_n = h\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh) \tag{2.5}$$

为了把等式右端变成简明的表达式,用 $\frac{2\sin(h/2)}{2\sin(h/2)}$ 乘右端,于是有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin(a+kh)\sin\frac{h}{2}$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left[a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right]-\cos\left[a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h\right]\right\}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left[a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right]-\cos\left[a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h\right]\right\}$$

$$= \cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) + \cos\left(a + \frac{3}{2}h\right) + \cos\left(a + \frac{5}{2}h\right) + \cdots$$
$$+ \cos\left[a + \left(n - \frac{1}{2}\right)h\right] - \cos\left(a + \frac{3}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{5}{2}h\right) - \cdots$$
$$- \cos\left[a + \left(n - \frac{1}{2}\right)h\right] - \cos\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right]$$
$$= \cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right]$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(a + kh) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b + \frac{h}{2}\right)\right] \tag{2.6}$$

把式(2.6)代入式(2.5),得到

$$\sigma_n = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b + \frac{h}{2}\right)\right]$$

当 $n \to \infty$, $h \to 0$ 时,得到

$$\int_a^b \sin x \mathrm{d}x = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b + \frac{h}{2}\right)\right] = \cos a - \cos b \tag{2.7}$$

式(2.7)右端就是被积函数 $\sin x$ 的原函数 $-\cos x$ 在 $x = b$ 与 $x = a$ 之间的差值 $-\cos x \big|_a^b$. 当把被积函数换成 $f(x)$时,就得到牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

2.2.2 定积分中的几个常用法则

1. 带有常系数的函数的积分,可以把常数提到积分号外:

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

其中 k 为常数.

2. 若 $a < c < b$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

3. 若干个函数之和的积分等于各个函数的积分之和:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)+h(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$$

4. 一个多项式的积分等于组成该多项式的各个单项式的积分之和：

$$\int_a^b (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b x^2\mathrm{d}x + \beta\int_a^b x\mathrm{d}x + \gamma\int_a^b \mathrm{d}x$$

3 与 4 两条法则就是定积分中的分项积分法，举例说明如下：

例 1 计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$.

解 根据分项积分法，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x\\ &= (-\cos x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

例 2 计算一个多项式的定积分$\int_1^2 \left(5x^2-4x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$(该例在不定积分中举过).

解 使用分项积分法，可得

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \left(5x^2-4x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= 5\int_1^2 x^2\mathrm{d}x - 4\int_1^2 x\mathrm{d}x + 3\int_1^2 \mathrm{d}x - 2\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{5}{3}x^3\Big|_1^2 - \frac{4}{2}x^2\Big|_1^2 + 3x\big|_1^2 - 2\ln x\big|_1^2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2\\ &= \frac{5}{3}(8-1)-2(4-1)+3(2-1)-2(\ln 2-\ln 1)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\\ &= 11.\dot{6}-6+3-2\times 0.693147\cdots+0.5\\ &= 7.780372\cdots\end{aligned}$$

关于定积分中的分项积分的方法仅举上面两例已够. 凡是在不定积分中举过的例子，其积分方法在定积分都可使用，只要把上、下积分限代入，便可算出积分结果.

2.3 欧拉积分、欧拉常数及其他常用常数

有些定积分，经过演绎和推导，常常会导向欧拉积分；有些定积分的积分结果会含有某些常数，如欧拉常数、卡塔兰常数、伯努利数等. 如果熟悉欧拉积分及这些常数，做定积分计算时常常会给我们带来意想不到的方便.

2.3.1 B 函数(Beta function)

B 函数为双变量函数,译称贝塔函数,它的定义为

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\,x>0,\mathrm{Re}\,y>0) \tag{2.8}$$

式(2.8)右端的积分称为第一类欧拉积分.

B 函数具有对称的特性,即

$$B(x,y)=B(y,x) \tag{2.9}$$

证明 在式(2.8)中,令 $t=1-s$,则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}s$,那么

$$B(x,y)=-\int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}\mathrm{d}s=\int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t=B(y,x)$$

由于这种对称的特性,可把它写成

$$B(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[t^{x-1}(1-t)^{y-1}+t^{y-1}(1-t)^{x-1}\right]\mathrm{d}t$$

当 x,y 两个量中的任何一个量为正整数时,该积分可表示成有限项.假定 y 是正整数,对

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

连续使用分部积分法,可得到

$$\begin{aligned}B(x,y)=&\left[\frac{t^x}{x}(1-t)^{y-1}+\frac{t^{x+1}}{x(x+1)}(y-1)(1-t)^{y-2}\right.\\&+\frac{t^{x+2}}{x(x+1)(x+2)}(y-1)(y-2)(1-t)^{y-2}+\cdots\\&\left.+\frac{t^{x+y-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+y-1)}(y-1)(y-2)\cdots2\cdot1\right]_0^1\\=&\frac{(y-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+y-1)}\end{aligned}$$

如果 x 是正整数,那么

$$B(x,y)=\frac{(x-1)!}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+x-1)}$$

若 x,y 都是正整数,令 $x=l,y=m$,则有

$$B(l,m)=\frac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!} \tag{2.10}$$

例 3 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta\cos^q\theta\mathrm{d}\theta$.

解 令 $\sin\theta=\sqrt{x}$,则

$$\mathrm{d}\sin\theta = \cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta\cos^q\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^1 x^{\frac{p}{2}}(1-x)^{\frac{q-1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p+1}{2}-1}(1-x)^{\frac{q+1}{2}-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$$

若设 $p=3,q=5$,则

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}(2,3)$$

运用式(2.10),代入 $l=2,m=3$,得到

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^5\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2-1)!(3-1)!}{(2+3-1)!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4!} = \frac{1}{24}$$

如果在欧拉积分(2.8)中用 $t=\dfrac{s}{1+s}$替换,其中 s 为新变量,它从 0 到 ∞,则有

$$\mathrm{B}(l,m) = \int_0^\infty \left(\frac{s}{1+s}\right)^{l-1}\left(1-\frac{s}{1+s}\right)^{m-1}\frac{\mathrm{d}s}{(1+s)^2} = \int_0^\infty \frac{s^{l-1}}{(1+s)^{l+m}}\mathrm{d}s$$

若令 $m=1-l$,并使 $0<l<1$,则得到

$$\mathrm{B}(l,1-l) = \int_0^\infty \frac{s^{l-1}}{1+s}\mathrm{d}s$$

公式右端积分中的被积函数,若用无穷级数展开,并逐项积分可得

$$\mathrm{B}(l,1-l) = \frac{\pi}{\sin l\pi} \tag{2.11}$$

当取 $l=1-l=\dfrac{1}{2}$时,则有

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$$

2.3.2 Γ 函数(Gamma function)

1. 定义.

Γ 函数,译称伽马函数,它的定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\,z>0) \tag{2.12}$$

式(2.12)右端的积分称第二类欧拉积分.

用分部积分法做积分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (-t^{z-1}\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^\infty + (z-1)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-2}\mathrm{d}t$$

$$= 0 + (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)\Gamma(z-1)$$

当 z 为有限值，并且 $z>1$ 或 $z>2$ 或 $z>3$ 时，对应的有下列关系式：

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$$
$$\Gamma(z-1) = (z-2)\Gamma(z-2)$$
$$\Gamma(z-2) = (z-3)\Gamma(z-3)$$
$$\cdots$$

2. 当 z 为正整数 n 时，有

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\Gamma(1)$$

而

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = (-e^{-t})\Big|_0^{\infty} = 1$$

因此有

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{2.13}$$

自变量为正整数的 Γ 函数值如下：

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1\cdot 1 = 1!$$
$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 1\cdot 2 = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 1\cdot 2\cdot 3 = 3!$$
$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 4!$$
$$\Gamma(6) = 5\Gamma(5) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5!$$
$$\cdots$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.14}$$

3. 当自变量 z(或 n)>0 时，Γ 函数是连续函数. 因此从正整数的 Γ 函数值可以看出：由于 $\Gamma(1)=\Gamma(2)$，因此 Γ 函数的最小值应该在 $n=1$ 和 $n=2$ 之间的某处.

方程 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ 提供了一种求自变量 n 大于 1 的 Γ 函数与自变量 n 小于 1 的 Γ 函数的归约数的方法. 例如

$$\Gamma\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{11}{2}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$$
$$= \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(11)!!}{2^6}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

这就是任何自变量大于 1 的 Γ 函数与自变量小于 1 的 Γ 函数的关系. 利用这个关系式，无论多么大 z 值的 Γ 函数，总可以化成 $0<z<1$ 的 Γ 函数来计算.

在这个例题里，因为 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，所以 $\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{(11)!!}{2^6}\sqrt{\pi}$.

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$的计算：

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

令 $x^n = y$，$x = y^{\frac{1}{n}}$，则

$$\mathrm{d}y = nx^{n-1}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{nx^{n-1}}\mathrm{d}y$$

因此

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}y$$

于是

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}y = n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$$

令 $n = \frac{1}{2}$，则有

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

那么

$$\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \times \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中的 x，y 是一个点的笛卡儿坐标. 做这个积分，实际上就是对所有的 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\delta x\delta y$ 元素求和，也就是通过第一象限的无穷大正方形，对两边是坐标轴 x，y 的区域来做积分. 令 $x = a$，$y = a$（$a \to \infty$），与其他两边（x，y 轴）构成正方形（图 2.2）. 圆形 $x^2 + y^2 = a^2$ 在正方形内，用极坐标表示的积分限，对于 θ 是 0 和 $\frac{\pi}{2}$，对于 r 是 0 和 ∞. 因此在第一象限内对 θ 和 r 的积分为

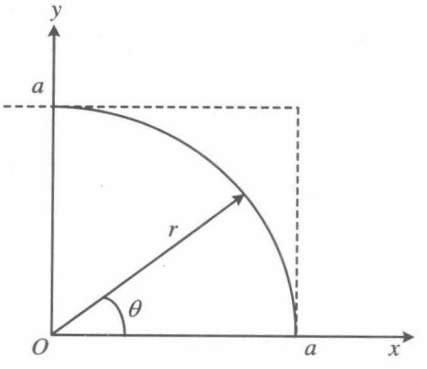


图 2.2

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

在圆周之外的正方形部分，其微分元不会大于 $\mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. 当 a 足够大时，它将变为高阶无穷小，在二重积分中不会出现. 因此圆和正方形之间的部分，对积分不会有贡献. 这样，我们就有

$$\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{4}$$

于是得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{2.15}$$

5. $\Gamma(0)$的值.

因为 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$,当保持 n 为正数时,有

$$\lim_{n\to 0}\Gamma(n)=\lim_{n\to 0}\frac{\Gamma(n+1)}{n}=\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}=\infty$$

即

$$\Gamma(0)=\infty$$

6. $\Gamma(x)$的最小值.

因为 $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$,根据罗尔(Rolle)定理,x 在 1 与 2 之间时,$\Gamma(x)$应该有最小值(图 2.3).在最小值的左边,$\Gamma(x)$的值随 x 增大而降低;在最小值的右边,$\Gamma(x)$的值则随 x 增加而上升.最小值的位置应在$\frac{\mathrm{d}\Gamma(x)}{\mathrm{d}x}=0$ 处,解这个方程比较复杂,此处不作讨论.

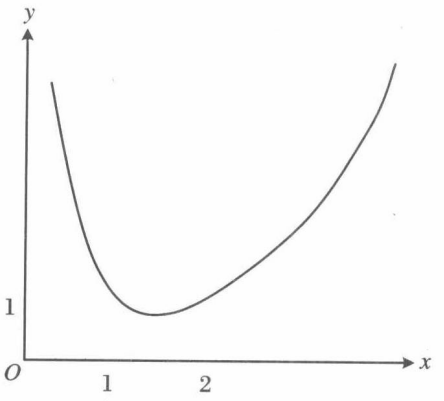


图 2.3

但赛雷特(Serret)给出了一个近似值

$$x=1.4616321\cdots$$

相应的 $\Gamma(x)$的最小值是

$$\Gamma(x)=0.8856032\cdots$$

7. Γ 函数与 B 函数的关系.

在讨论 B 函数时,曾得到式(2.10):

$$\mathrm{B}(l,m)=\frac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!}$$

此式的右端用 Γ 函数代替,则有

$$\mathrm{B}(l,m)=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \tag{2.16}$$

式(2.16)就是 $\Gamma(x)$ 函数与 B 函数的关系. 可以证明,只要 $l>0,m>0$,以上关系总是成立的.

在式(2.16)中,令 $m=1-l(0<l<1)$,则得到关系式[参看式(2.11)]

$$\Gamma(l)\Gamma(1-l)=\frac{\pi}{\sin l\pi}$$

这个公式被称为余元公式.

当 $l=\frac{1}{2}$ 时,有

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

这与前面的计算结果相同[式(2.15)].

2.3.3 几个重要常数

1. 欧拉(Euler)常数 γ.

欧拉常数被定义为

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

它的近似值为

$$\gamma=0.5772156649\cdots$$

2. 卡特兰(Catalan)常数.

卡特兰常数被定义为

$$G=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$$

它的近似值是

$$G=0.915965594\cdots$$

3. 伯努利(Bernoulli)数 B_n,B_{2n}.

前 13 个伯努利数 B_n 分别是

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

伯努利数 B_n 中,除 B_1 外,所有 n 是奇数的项均为 0. 因此公式中通常只使用偶数项的伯努利数 B_{2n}. 当 $n=0,1,2,3,\cdots$ 时,伯努利数分别为 $B_0,B_2,B_4,B_6,\cdots$.

4. 欧拉数 E_n,E_{2n}.

前 11 个欧拉数 E_n 分别是

E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
1	0	−1	0	5	0	61	0	1385	0	−50521

欧拉数 E_n 中的所有 n 为奇次的项皆为 0，只有偶次项才有数值. 因此公式中只使用偶次项的欧拉数 E_{2n}. 当 $n=0,1,2,3,\cdots$ 时，欧拉数分别为 $E_0, E_2, E_4, E_6, \cdots$.

欧拉常数、卡特兰常数、伯努利数、欧拉数经常出现在定积分中.

2.4 定积分中的分部积分法

定积分中分部积分的基本公式是

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u \tag{2.17}$$

这个公式与不定积分中的分部积分的公式是相似的，只是这里多了定积分中的上、下限而已. 下面举若干个例题来说明分部积分法的应用.

1. 计算积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）.

(1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$.

用分部积分公式，得

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\mathrm{d}(-\cos x) \\ &= (-\sin^{n-1} x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

因此，可得到递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

依照这个递推公式递推下去，I_n 的最后一项会依次化成 I_0 或 I_1，即

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x\mathrm{d}x = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

当 n 为偶数时，$n=2m$（n,m 皆为正整数），则有

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\mathrm{d}x=\frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots3\cdot1}{2m(2m-2)(2m-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2^m\cdot m!\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}\sqrt{\pi}\quad(2.18)$$

当 n 为奇数时，$n=2m+1$（n,m 皆为正整数），则有

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\mathrm{d}x=\frac{2m(2m-2)(2m-4)\cdots4\cdot2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots3\cdot1}=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

$$=\frac{2^m\Gamma(m+1)}{2^m(2m+1)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)}{(2m+1)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\quad(2.19)$$

这里顺便利用式(2.18)和(2.19)来推导著名的沃利斯(J. Wallis)公式.

假定 $0<x<\frac{\pi}{2}$，有不等式

$$\sin^{2m+1}x<\sin^{2m}x<\sin^{2m-1}x$$

那么

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\mathrm{d}x$$

由式(2.18)和(2.19)得到

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}<\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}$$

即

$$\frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2m}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2$$

不等式两端之差

$$\frac{1}{2m(2m+1)}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2<\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}$$

当 $m\to\infty$ 时，$\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\to0$，自然

$$\frac{1}{2m(2m+1)}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\to0$$

这就是说，当 $m\to\infty$ 时，两端的共同极限为 $\frac{\pi}{2}$，因此有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\quad(2.20)$$

这就是**沃利斯公式**. 它可用于 π 的近似计算.

(2) $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^nx\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）.

运用与上面相同的方法，有

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\mathrm{d}\sin x$$

$$= (\cos^{n-1} x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$$

因此得到递推公式

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

依照这个递推公式递推下去，J_n 的最后一项会依次化成 J_0 或 J_1，即

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

当 n 为偶数时，$n=2m$（n，m 皆为正整数），则有

$$J_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\mathrm{d}x = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

当 n 为奇数时，$n=2m+1$（n，m 皆为正整数），则有

$$J_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x\mathrm{d}x = \frac{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

它与 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$ 的积分结果是相同的，因此可把它们写成同样的形式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (\text{当 } n \text{ 是偶数时}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (\text{当 } n \text{ 是奇数时}) \end{cases}$$

上两式可合并写成

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \tag{2.21}$$

2. 计算积分 $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\mathrm{d}x$，$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\mathrm{d}x$.

(1) $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\mathrm{d}x$.

用分部积分法，有

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}\cos nx$$

$$= -\frac{1}{n}(\cos^n x\cos nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cdot n\cos^{n-1}x(-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\cos nx\sin x\mathrm{d}x$$

在等式两边分别加上 K_n，则

$$2K_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\cos nx\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x(\sin nx\cos x - \cos nx\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\sin(n-1)x\mathrm{d}x = \frac{1}{n} + K_{n-1}$$

因此有递推公式

$$K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right)$$

依照这个递推公式，会有

$$K_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + K_{n-2}\right)$$

$$K_{n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} + K_{n-3}\right)$$

$$K_{n-3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-3} + K_{n-4}\right)$$

$$\cdots$$

这样递推下去，就可得到

$$K_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin x\mathrm{d}x\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

(2) $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\mathrm{d}x$.

用同样的方法和步骤来计算：

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}\sin nx$$

$$= \frac{1}{n}(\cos^n x\sin nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \cdot n\cos^{n-1}x(-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\sin nx\sin x\mathrm{d}x$$

两边加 L_n，得

$$2L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\sin nx\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\cos nx\cos x + \sin nx\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\cos(n-1)x\mathrm{d}x = L_{n-1}$$

所以,从这个公式可得到它的递推公式

$$L_n = \frac{1}{2}L_{n-1}$$

以此类推,该式的最后一项是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos x\mathrm{d}x$$

因此得到该积分的结果

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

3. 计算积分 $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$.

用分部积分法,有

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\mathrm{d}x^2$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x)\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(\arctan x)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. 计算积分 $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

用分部积分法,有

$$\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\ln 2} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -(x\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - (\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$$

5. 计算积分 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

用分部积分法,有

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -\int_0^{\pi} x\,d\cos x = -(x\cos x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$= \pi + (\sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

6. 计算积分 $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$ 和 $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx\,(a>0)$.

使用两次分部积分法,可得到

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\cos bx\cdot de^{-ax}$$

$$= -\frac{1}{a}(e^{-ax}\cos bx)\Big|_0^{\infty} - \frac{b}{a}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\int_0^{\infty}\sin bx\cdot de^{-ax}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}(e^{-ax}\sin bx)\Big|_0^{\infty} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$$

移项得到

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}$$

最后得

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (a>0)$$

对于第二个积分,可采用同样应用分部积分法两次得到

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (a>0)$$

7. 计算积分 $\int_0^1 (1-x)^m x^n\,dx$ (m,n 皆为正整数).

用分部积分法,有

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n\,dx = -\frac{1}{m+1}\int_0^1 x^n\,d(1-x)^{m+1}$$

$$= -\frac{1}{m+1}\left\{\left[x^n(1-x)^{m+1}\right]_0^1 - n\int_0^1 (1-x)^{m+1}x^{n-1}\,dx\right\}$$

$$= \frac{n}{m+1}\int_0^1 (1-x)^m(1-x)x^{n-1}\,dx$$

$$= \frac{n}{m+1}\int_0^1 (1-x)^m x^{n-1}\,dx - \frac{n}{m+1}\int_0^1 (1-x)^m x^n\,dx$$

移项后,得到

$$\frac{m+n+1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x = \frac{n}{m+1}\int_0^1 (1-x)^m x^{n-1}\mathrm{d}x$$

因此有

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x = \frac{n}{m+n+1}\int_0^1 (1-x)^m x^{n-1}\mathrm{d}x$$

继续运用分部积分法:

$$\int_0^1 (1-x)^m x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{n-1}{m+n}\int_0^1 (1-x)^m x^{n-2}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 (1-x)^m x^{n-2}\mathrm{d}x = \frac{n-2}{m+n-1}\int_0^1 (1-x)^m x^{n-3}\mathrm{d}x$$

$$\cdots$$

得到

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m+n+1)(m+n)(m+n-1)\cdots(m+2)}\int_0^1 (1-x)^m \mathrm{d}x$$

等式右边的积分是

$$\int_0^1 (1-x)^m \mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{m+1}(1-x)^{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m+n+1)(m+n)\cdots(m+2)(m+1)} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m+n+1)(m+n)\cdots(m+2)(m+1)m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} = \mathrm{B}(m+1,n+1)
\end{aligned}$$

从积分的结果可以看出:该积分实际上是欧拉积分(第一类欧拉积分),所以也可直接写出

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x = \mathrm{B}(m+1,n+1)$$

2.5 定积分中的换元法

在定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$中,$f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数.令$x=\varphi(t)$,$\varphi(t)$在某区间$[\alpha,\beta]$上连续,且有连续的导数,当t在$[\alpha,\beta]$上变化时,$\varphi(t)$的值不超

出区间$[a,b]$的范围，并且$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$.在这些条件下，有公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{2.22}$$

这就是**定积分的换元公式**.

假定被积函数都是连续的，则不仅这些函数的定积分存在，而且相应的不定积分也存在.如果$F(x)$是第一个微分的一个原函数，那么函数$\Phi(t)=F[\varphi(t)]$就是第二个微分$f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$的一个原函数.因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

及

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t&=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]\\&=F(b)-F(a)\end{aligned} \tag{2.23}$$

在不定积分中运用换元法时，得到了用新变量t所表示的函数后，应当换回为原来的旧变量x.但在定积分中却不必这样做，因为在定积分中计算出来的乃是一个数值，自然不用变回去了.不过要指出的是在换元的同时，上、下积分限也要同时换成与新变量相应的积分限.

下面将用若干例题来阐明定积分中的换元法则.

1. 计算积分$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$.

使用替换$x=a\sin t$，则

$$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$$

当$x=0$时，$t=0$；当$x=a$时，$\sin t=1,t=\frac{\pi}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

2. 计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t}\mathrm{d}t$.

令$t=2\arctan x$，则

$$\mathrm{d}t=\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x,\quad x=\tan\frac{t}{2}$$

以及

$$\sin t=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=2\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\cos^2\frac{t}{2}=\frac{2\tan\frac{t}{2}}{\sec^2\frac{t}{2}}=\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}=\frac{2x}{1+x^2}$$

当 $t=0$ 时，$x=0$；当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=1$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2\arctan x}{\frac{2x}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$$

其中的 $\arctan x$ 用级数展开：

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x^2 < 1)$$

把 $\arctan x$ 的展开式代入，并逐项积分，得到

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n}\mathrm{d}x$$

根据积分号与求和号可以互换的原理，得到

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+1} (x^{2n+1}) \Big|_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} = G \tag{2.24}$$

因此得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\mathrm{d}t = 2G$$

此处 G 为卡塔兰常数.

3. 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \theta \mathrm{d}\theta$.

令 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$，则 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\varphi$，当 $\theta = 0$，$\varphi = \frac{\pi}{2}$；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$\varphi = 0$；及 $\sin \theta = \cos \varphi$.

因此

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \theta \mathrm{d}\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \cos \varphi \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \varphi \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \theta \mathrm{d}\theta$$

于是

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin \theta + \ln \cos \theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \theta \cos \theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin 2\theta - \ln 2)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2\theta \mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\mathrm{d}\theta$$

在右边的第一个积分中，令 $2\theta = u$，则 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$，当 $\theta = 0$，$u = 0$；而 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$u = \pi$.

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin u \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \theta \mathrm{d}\theta$$

这样，就有

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2\theta \mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\mathrm{d}\theta = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

最后得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \theta \mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \tag{2.25}$$

从式(2.25)可推导出下列积分：

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x - \ln \cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \mathrm{d}x = 0.$

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sec x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln 2.$

③ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \csc x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln 2.$

④ $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

若令 $x = \sin \theta$，则

$$\mathrm{d}x = \cos \theta \mathrm{d}\theta, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos \theta$$

当 $x = 0$ 时，$\theta = 0$；而当 $x = 1$ 时，$\theta = \frac{\pi}{2}$，因此得到

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \theta \mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

⑤ $\int_0^{\infty} \frac{y}{\sqrt{e^{2y}-1}}\mathrm{d}y.$

令 $y = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$，则

$$\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad e^{2y} = \frac{1}{x^2}$$

当 $y = 0$ 时，$x = 1$；而当 $y = \infty$ 时，$x = 0$，因此得到

$$\int_0^{\infty} \frac{y}{\sqrt{e^{2y}-1}}\mathrm{d}y = \int_1^0 \frac{-\ln x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\left(-\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \int_1^0 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \theta \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

4. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan x \mathrm{d}x, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x \mathrm{d}x$.

(1) 令 $\tan x = t$,则

$$x = \arctan t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}$$

当 $x = 0$ 时,$t = 0$;当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,$t = 1$,因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan x \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln t \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \int_0^1 \ln t \mathrm{d} \arctan t$$

$$= \left[\ln t \cdot \arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \arctan t \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= -\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} \mathrm{d}t = -G$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{1}{\tan x} \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan x \mathrm{d}x = G$.

此处 G 是卡塔兰常数.

5. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) \mathrm{d}x, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) \mathrm{d}x$.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) \mathrm{d}x$.

因为

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

也就是

$$1 + \cos x = \frac{\sin x}{\tan \frac{x}{2}}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{\tan \frac{x}{2}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan \frac{x}{2} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan y \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln 2 - 2(-G) = 2G - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

此处 G 是卡塔兰常数.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) \mathrm{d}x$.

令 $x=\frac{\pi}{2}-y$,则 $\sin x=\cos y$,可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos y)\mathrm{d}y=2G-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

6. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos x)\mathrm{d}x$,$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin x)\mathrm{d}x$.

(1) 用 $1-\cos x=\sin x\cdot\tan\frac{x}{2}$ 替换,得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin x\cdot\tan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi}{2}\ln 2-2G\end{aligned}$$

(2) 令 $x=\frac{\pi}{2}-y$,则 $\sin x=\cos y$,于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos y)\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}\ln 2-2G$$

此处 G 是卡塔兰常数.

7. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$,$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\ln(1+\cos x)\\&=-\left[x\ln(1+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi}{2}\ln 2+2G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\mathrm{d}(1+\sin x)}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\ln(1+\sin x)\\&=\left[x\ln(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2-\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2+2G\right)=\pi\ln 2-2G\end{aligned}$$

此处 G 是卡塔兰常数.

8. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$,$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\cot x)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}(1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

公式右端第二个积分中，令 $x+\frac{\pi}{4}=y$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$，当 $x=0$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$；当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y=\frac{\pi}{2}$，因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin y\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos y\mathrm{d}y$$

这样得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos y\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{8}\ln 2\end{aligned}$$

(2) 用同样方法，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\cot x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{1+\tan x}{\tan x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan x\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{8}\ln 2-(-G)=\frac{\pi}{8}\ln 2+G\end{aligned}$$

9. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$.

(1) 令 $x=\frac{y}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{2}$，当 $x=0$ 时，$y=0$；而当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y=\frac{\pi}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{y}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1-\cos y}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos y)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2-2G-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G\end{aligned}$$

(2) 用同样的方法，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{y}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\cos y}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos y)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2+2G-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}G\end{aligned}$$

10. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cot x)\mathrm{d}x$.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x$$

在等式右端第二个积分中，令 $x+\frac{\pi}{4}=y$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$，当 $x=0$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\frac{3\pi}{4}$，因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \ln\sin y\mathrm{d}y = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin y\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos y\mathrm{d}y$$

这样就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{2}\ln 2 + G + \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}\ln 2 + G$$

(2) 同法可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cot x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{2}\ln 2 + G + \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}\ln 2 + G$$

11. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(1) 对于第一个积分，令 $x=\tan y$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 y\mathrm{d}y$，当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=1$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$，因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan y)}{1+\tan^2 y}\sec^2 y\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan y)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

对于第一个积分，还有第二种解法：

令 $x=\frac{1-t}{1+t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=1$ 时，$t=0$，因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\int_1^0 \frac{\ln\left(1+\frac{1-t}{1+t}\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln 2}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \ln 2\cdot[\arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

移项后得到

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

(2) 对于第二个积分，仍令 $x=\tan y$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 y\mathrm{d}y$，当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=\infty$ 时，$y=\frac{\pi}{2}$，因此

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\tan y)}{1+\tan^2 y}\sec^2 y\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\tan y)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\ln 2 + G$$

12. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x, \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

这两个积分与前面的积分有相似之处，可仍仿前一题的替换：

(1) 令 $x=\tan y$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 y\mathrm{d}y$，当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=1$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan^2 y)}{1+\tan^2 y}\sec^2 y\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan^2 y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sec^2 y\mathrm{d}y = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos y\mathrm{d}y \\ &= -2\left(-\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}G\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2 - G\end{aligned}$$

(2) 在第二个积分中，上、下限与第一个积分不同，仍令 $x=\tan y$. 当 $x=1$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$；而 $x=\infty$，$y=\frac{\pi}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\tan^2 y)}{1+\tan^2 y}\sec^2 y\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\tan^2 y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sec^2 y\mathrm{d}y = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos y\mathrm{d}y = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin z\mathrm{d}z \\ &= -2\left(-\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}G\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2 + G\end{aligned}$$

若把这两个积分加起来，得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\ln 2 - G + \frac{\pi}{2}\ln 2 + G = \pi\ln 2\end{aligned}$$

13. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1-\tan x)\mathrm{d}x, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x - 1)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}(1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1-\tan x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \left(-\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}G\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}G\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 - G$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x - 1)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos x - \sin x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2$$

14. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan x\mathrm{d}x$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cot x\mathrm{d}x$.

(1) 对于第一个积分，令 $\tan x = y$，则

$$x = \arctan y, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2}$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$；当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时，$y = 1$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan x\mathrm{d}x = \int_0^1 \arctan y \cdot y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan y\mathrm{d}\ln(1 + y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\arctan y \cdot \ln(1 + y^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1 + y^2)}{1 + y^2}\mathrm{d}y\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}\ln 2 - \left(\frac{\pi}{2}\ln 2 - G\right)\right] = -\frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}G$$

(2) 对于第二个积分，令 $\cot x = y$，则

$$x = \operatorname{arccot} y, \quad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2}$$

当 $x = 0$ 时，$y = \infty$；当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时，$y = 1$，因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cot x\mathrm{d}x = \int_\infty^1 \operatorname{arccot} y \cdot y \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2}\right) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \operatorname{arccot} y\mathrm{d}\ln(1 + y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\operatorname{arccot} y \cdot \ln(1 + y^2)\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\ln(1 + y^2)}{1 + y^2}\mathrm{d}y\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{4}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{2}\ln 2 + G\right)\right] = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}G$$

15. 计算积分 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x$.

令 $x = \sin y$，$\mathrm{d}x = \cos y\mathrm{d}y$，当 $x = 0$ 时，$y = 0$；当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y = \frac{\pi}{4}$，因此

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \cdot \cos y \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin y \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}G$$

16. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\tan x\mathrm{d}x$.

(1) 对于第一个积分,因为

$$\frac{\mathrm{d}(\ln \sin x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}(\ln \sin x) = \left[x\ln \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

(2) 用同样的方法于第二个积分,由于

$$\frac{\mathrm{d}(\ln \cos x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\tan x\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}(\ln \cos x) = -\left[x\ln \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x\mathrm{d}x = \infty$$

17. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x)\mathrm{d}x$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x$.

(1) 对于第一个积分有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}G = -\frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}G$$

(2) 对于第二个积分有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}G = -\frac{\pi}{8}\ln 2 - \frac{1}{2}G$$

兹将含有三角函数的对数的部分积分结果总结如下:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cot x \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sec x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \csc x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + 2G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \cos x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \sin x) \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \ln 2 - 2G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \tan x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cot x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \ln 2 + G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \tan x \mathrm{d}x = -G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x \mathrm{d}x = G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x) \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{8} \ln 2 + \frac{1}{2} G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x - \sin x) \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \cos x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \ln 2 - 4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \cos x) \mathrm{d}x = -\frac{3\pi}{4} \ln 2 - G + 4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \sin x) \mathrm{d}x = -\frac{3\pi}{4} \ln 2 + 2G + 4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \ln 2 - G - 4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \cot x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \ln 2 + G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \tan x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \ln 2 - G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x - 1) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

其中 $L(x)$为罗巴切夫斯基函数

$$L(x)=-\int_0^x \ln\cos t\,\mathrm{d}t,\quad L\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\cos x\mathrm{d}x$$

为 $L(x)$在 $x=\frac{\pi}{8}$处的函数值.

定积分中的换元法是一种被广泛使用的强有力的方法.应用此法可把一些不熟悉的被积函数形式变化成很熟悉的形式,这样就很容易获得积分结果.如本节第15个例子,把被积函数中的 x 换成 $\sin y$(或 $\cos y$).这样,被积函数就变成 $\ln\sin y$(或 $\ln\cos y$),而 $\ln\sin y$(或 $\ln\cos y$)的积分在前面已经得到了.

在换元法中,最关键的是如何选择新变量元素(或函数),选对了,积分就很顺利;选错了,就会步履艰难.还有,在定积分中使用换元法,一定要考虑新变量所对应的积分的上、下限.下面我们要解一道较复杂的积分题,该题要经过多次换元,当然这并不是唯一的方法,但可作为一种参考算法.

18. 计算积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-1}\mathrm{d}x$.

第一步:把指数函数变成双曲函数,用替换 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2\cosh x$,得到

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{x}{2\cosh x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{x}{2\left(\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}\right)-\left(\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{x}{\cosh^2\frac{x}{2}+3\sinh^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{x\,\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{1+\left(\sqrt{3}\tanh\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

第二步:令 $\tanh\frac{x}{2}=y$,则 $x=2\operatorname{artanh}y$,$\mathrm{d}x=2\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}$.当 $x=0$ 时,$y=0$;当 $x=\infty$时,$y=1$.代入后,有

$$I=\int_0^1\frac{2\operatorname{artanh}y\cdot(1-y^2)}{1+(\sqrt{3}y)^2}2\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}=4\int_0^1\frac{\operatorname{artanh}y}{1+(\sqrt{3}y)^2}\mathrm{d}y$$

第三步:令 $\sqrt{3}y=z$,则 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}z$,$\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}z$.当 $y=0$ 时,$z=0$;当 $y=1$ 时,$z=\sqrt{3}$.因此

$$I=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{artanh}\frac{z}{\sqrt{3}}}{1+z^2}\mathrm{d}z=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\operatorname{artanh}\frac{z}{\sqrt{3}}\mathrm{d}\arctan z$$

第四步:令 $\arctan z=u$,则 $z=\tan u$,$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.当 $z=0$ 时,$u=0$;当 $z=\sqrt{3}$时,$u=\frac{\pi}{3}$.于是变成

$$I=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{artanh}\frac{\tan u}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u$$

利用公式 $\operatorname{artanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}(|x|<1)$，把被积函数化为对数形式：

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\tan u}{\sqrt{3}-\tan u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln(\sqrt{3}+\tan u)-\ln(\sqrt{3}-\tan u)\right]\mathrm{d}u$$

因 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，所以

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln\left(\tan\frac{\pi}{3}+\tan u\right)-\ln\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan u\right)\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos u+\cos\frac{\pi}{3}\sin u\right)-\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos u-\cos\frac{\pi}{3}\sin u\right)\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln\sin\left(\frac{\pi}{3}+u\right)-\ln\sin\left(\frac{\pi}{3}-u\right)\right]\mathrm{d}u$$

第五步：令 $\left(\frac{\pi}{3}+u\right)=\frac{\pi}{2}-\xi$ 或 $\frac{\pi}{6}-u=\xi$，则 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}\xi$.

当 $u=0$ 时，$\xi=\frac{\pi}{6}$；当 $u=\frac{\pi}{3}$ 时，$\xi=-\frac{\pi}{6}$.

又令 $\left(\frac{\pi}{3}-u\right)=\frac{\pi}{2}-\eta$，或 $\frac{\pi}{6}+u=\eta$，$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\eta$.

当 $u=0$ 时，$\eta=\frac{\pi}{6}$；当 $u=\frac{\pi}{3}$ 时，$\eta=\frac{\pi}{2}$.

作变量替代，得

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{3}+u\right)\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{3}-u\right)\mathrm{d}u\right]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[-\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\mathrm{d}\xi-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\mathrm{d}\eta\right]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\ln\cos\xi\mathrm{d}\xi-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\eta\mathrm{d}\eta\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\cos\xi\mathrm{d}\xi-\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\eta\mathrm{d}\eta-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\cos\eta\mathrm{d}\eta\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(3\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\cos\xi\mathrm{d}\xi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\eta\mathrm{d}\eta\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[3\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\cos\xi\mathrm{d}\xi-\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\right]$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\cos\xi\mathrm{d}\xi\right)$$

第六步：解出公式右端的积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\cos\xi\mathrm{d}\xi$.

可用**罗巴切夫斯基**(N. I. Lobachevsky)**函数**来解. 罗巴切夫斯基函数的

定义为

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\,\mathrm{d}t \tag{2.26}$$

其相关公式有

$$L(x) - L\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\ln 2 - \frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.27}$$

根据罗巴切夫斯基函数的定义有

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\cos\xi\,\mathrm{d}\xi = -L\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时，相关公式是

$$L\left(\frac{\pi}{6}\right) - L\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\ln 2 - \frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

即

$$L\left(\frac{\pi}{6}\right) - L\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{12}\ln 2 - \frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

也即

$$\frac{3}{2}L\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12}\ln 2 + L\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

因此

$$\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\cos\xi\,\mathrm{d}\xi = -\frac{3}{2}L\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}\ln 2 - L\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

把它代入，最后得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\cos\xi\,\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{12}\ln 2 - L\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}\ln 2 - L\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

上式中的 $L\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 用罗巴切夫斯基函数的级数表达式计算，其级数表达式是

$$L(x) = x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin 2kx}{k^2} \tag{2.28}$$

因此

$$L\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{2k\pi}{3}}{k^2}$$

把它代入，又可得到 I 的表达式

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{2k\pi}{3}}{k^2}$$

当取 $k=1$ 时，$I\approx 1$；当取 $k=2$ 时，$I\approx 1.25$；当取 $k=3$ 时，$I\approx 1.1875,\cdots$.

当 k 取足够大时，积分值就足够精确了，于是

$$I=\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}\ln 2-L\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{2k\pi}{3}}{k^2}=1.1719536193\cdots$$

即

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x+e^{-x}-1}dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}\ln 2-L\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=1.1719536193\cdots$$

19. 计算积分 $J_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\cos x)dx$，$J_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\cos x)dx$.

因为

$$1+\cos x=\frac{\sin x}{\tan\frac{x}{2}}$$

所以

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin x}{\tan\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan\frac{x}{2}dx$$

等式右边的第一个积分已经得到：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G$$

等式右边的第二个积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\tan y dy=2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\sin y dy-2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\cos y dy$$

在右边的第一个积分中，令 $y=\frac{\pi}{2}-z$，则 $dy=-dz$，$\sin y=\cos z$.

当 $y=0$ 时，$z=\frac{\pi}{2}$；当 $y=\frac{\pi}{8}$ 时，$z=\frac{3\pi}{8}$. 因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\sin y dy=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{8}}\ln\cos z dz=\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos z dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos z dz-\int_0^{\frac{3\pi}{8}}\ln\cos z dz$$

这样，所求积分变成

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan\frac{x}{2}dx&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos z dz-2\int_0^{\frac{3\pi}{8}}\ln\cos z dz-2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\cos y dy\\&=-\pi\ln 2-2\int_0^{\frac{3\pi}{8}}\ln\cos z dz-2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\ln\cos y dy\\&=-\pi\ln 2+2L\left(\frac{3\pi}{8}\right)+2L\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

式中的 $L\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ 与 $L\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 为罗巴切夫斯基函数在 $\frac{3\pi}{8}$ 与 $\frac{\pi}{8}$ 的函数值.

根据罗巴切夫斯基函数关系式(2.27)得

$$L(x)-L\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ln 2-\frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\quad\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{4}\right)$$

当 $x=\frac{\pi}{8}$ 时,有

$$L\left(\frac{\pi}{8}\right)-L\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)\ln 2-\frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

即

$$L\left(\frac{\pi}{8}\right)-L\left(\frac{3\pi}{8}\right)=-\frac{\pi}{8}\ln 2-\frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

或

$$L\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{4}\right)+L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

其中

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G$$

因此

$$L\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{\pi}{8}\ln 2-\frac{1}{4}G+L\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{4}G+L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

于是得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x&=-\pi\ln 2+2L\left(\frac{3\pi}{8}\right)+2L\left(\frac{\pi}{8}\right)\\&=-\pi\ln 2+\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{1}{2}G+2L\left(\frac{\pi}{8}\right)+2L\left(\frac{\pi}{8}\right)\\&=-\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{1}{2}G+4L\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

把这个式子代入,最后得到

$$\begin{aligned}J_1&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G+\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}G-4L\left(\frac{\pi}{8}\right)\\&=\frac{\pi}{4}\ln 2-4L\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

式中的 $L\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 为罗巴切夫斯基函数 $L(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{8}$ 的函数值.

再做积分 $J_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\cos x)\mathrm{d}x$,与前方法相同:

$$J_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sin x\cdot\tan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G-\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{1}{2}G+4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=-\frac{3\pi}{4}\ln 2-G+4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

式中的 $L\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 为罗巴切夫斯基函数 $L(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{8}$ 的函数值，可用式(2.28)计算.

20. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\sin x)\mathrm{d}x$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\sin x)\mathrm{d}x$.

(1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，则 $\sin x=\cos y$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y$.

当 $x=0$ 时，$y=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$. 因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\cos y)\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos y)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+2G-\left[\frac{\pi}{4}\ln 2-4L\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

最后得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\sin x)\mathrm{d}x=-\frac{3\pi}{4}\ln 2+2G+4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

(2) 对于第二个积分，用同样的方法，可得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\cos y)\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos y)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2-2G-\left[-\frac{3\pi}{4}\ln 2-G+4L\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

最后得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln 2-G-4L\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

其中 $L\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 为罗巴切夫斯基函数 $L(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{8}$ 的函数值，可用式(2.28)计算.

2.6 含参变量的积分法

若积分

$$I(y)=\int_a^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.29}$$

对于 y 在区间$[a,b]$上是一致收敛的,则表示 $I(y)$在该区间是一个参数 y 的连续函数.我们称 $\int_a^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 为含参变量 y 的积分,并且有

$$I(y_0)=\int_a^{\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$$

若积分 $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则积分 $\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{-kx}f(x)\mathrm{d}x$ 对于参数 $k\geqslant 0$ 是一致收敛的.在 $f(x)$ 是连续函数的情况下,该积分对于 $k\geqslant 0$ 是参数 k 的连续函数,特别是

$$\lim_{k\to 0}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-kx}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

在求式(2.29)的积分时,若 $c\leqslant y\leqslant \mathrm{d}$,则有

$$\int_c^{\mathrm{d}}I(y)\mathrm{d}y=\int_c^{\mathrm{d}}\mathrm{d}y\int_a^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{\infty}\mathrm{d}x\int_c^{\mathrm{d}}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{2.30}$$

这表明积分的顺序是可以交换的.

对于一些不是一致收敛的积分,可使用参数积分法.

1. 狄利克雷(Dirichlet)积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. (2.31)

这个积分非绝对收敛,就是说积分 $\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 是发散的.但我们可以引入一个参变量来做积分.

考虑在积分中引入收敛因子 e^{-ax},则

$$I(a)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \tag{2.32}$$

当 $a\geqslant 0$ 时,该积分是一致收敛的.被积函数在 $0\leqslant a<\infty$ 和 $0\leqslant x<\infty$ 中连续,故 $I(a)$ 在 $0\leqslant a<\infty$ 中连续,并有

$$\lim_{a\to 0}I(a)=I(0)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

将 $I(a)$对 a 取微商,得

$$I(a)'=\frac{\mathrm{d}I(a)}{\mathrm{d}a}=-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin x\mathrm{d}x\quad(a>0)$$

用分部积分法积分两次,得

$$
\begin{aligned}
I'(a) &= -\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty}\sin x\,de^{-ax} \\
&= \frac{1}{a}\left\{\left[e^{-ax}\sin x\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos x\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{a}\left(0 + \frac{1}{a}\int_0^{\infty}\cos x\,de^{-ax}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left\{\left[e^{-ax}\cos x\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(-1 + \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,dx
\end{aligned}
$$

于是得到

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{a^2}$$

或

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{1 + a^2} \tag{2.33}$$

即

$$I'(a) = -\frac{1}{1 + a^2}$$

对 a 求积分:根据可变限的定积分是被积函数的原函数的法则,有

$$
\begin{aligned}
I(a) &= -\int_{\infty}^{a} \frac{du}{1 + u^2} = \int_a^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u\,\Big|_a^{\infty} \\
&= \arctan\infty - \arctan a \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan a
\end{aligned}
$$

当 $a\to 0$ 时,有

$$I(0) = \lim_{a\to 0} I(a) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan a\right) = \frac{\pi}{2}$$

所以

$$I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \tag{2.34}$$

2. 欧拉-泊松(Euler-Poisson)积分 $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

这是一个见诸于概率论中的欧拉-泊松积分.

令 $x = ut$,$dx = u\,dt$,u 为任意正数,作为参变数.那么

$$J = u\int_0^{\infty} e^{-u^2t^2}dt \tag{2.35}$$

用 $e^{-u^2}du$ 乘式(2.35)的两边,并从 0 到 ∞ 积分,得

$$J \cdot \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = J^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt$$

交换积分次序,则

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du \\ &= \int_0^{\infty} dt \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{1+t^2} \right) e^{-(1+t^2)u^2} d[-(1+t^2)u^2] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt \left[-\frac{1}{1+t^2} e^{-(1+t^2)u^2} \right]_{u=0}^{u=\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2} (\arctan t) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

因此得到

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.36}$$

3. 菲涅尔(Fresnel)积分 $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$.

令 $x^2 = t$,则

$$2x dx = dt, \quad dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

于是

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \tag{2.37}$$

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \tag{2.38}$$

由式(2.36),得

$$\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

若令 $v = \sqrt{t}u$,则有

$$\sqrt{t} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \tag{2.39}$$

把$\frac{1}{\sqrt{t}}$的表达式(2.39)代入式(2.37)的右边积分式中,则有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin t dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t dt \end{aligned}$$

按照式(2.33),可把右边的$\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\sin t\,dt$ 表示成

$$\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\sin t\,dt = \frac{1}{1+u^4}$$

因此

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^4}$$

这里引用公式

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^n+x^n} = \frac{a\pi}{na^n\sin\frac{\pi}{n}}$$

当 $a=1, n=4$ 时,有

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

于是

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

用同样的方法,可得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

把此两式代入式(2.37)、(2.38),最后得到菲涅尔积分

$$\int_0^{\infty}\sin x^2dx = \int_0^{\infty}\cos x^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{2.40}$$

4. 拉普拉斯(Laplace)积分:$L = \int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx, K = \int_0^{\infty}\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}dx$.

在第一个积分中,令

$$\frac{1}{a^2+x^2} = \int_0^{\infty} e^{-t(a^2+x^2)}dt$$

其中 t 为参变量,把它代入 L 中,则

$$L = \int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx = \int_0^{\infty}\cos bxdx\int_0^{\infty} e^{-t(a^2+x^2)}dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-a^2t}dt\int_0^{\infty} e^{-tx^2}\cos bxdx \tag{2.41}$$

该式右边的第二个积分号下的余弦函数可用级数展开式,并逐项积分,把 $\cos bx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(bx)^{2n}}{(2n)!}$ 代入,得

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2}\cos bxdx = \int_0^{\infty} e^{-tx^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(bx)^{2n}}{(2n)!}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n} dx \tag{2.42}$$

其中

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n} dx = -\frac{1}{2t} \int_0^{\infty} x^{2n-1} de^{-tx^2} \\ &= -\frac{1}{2t} \left[(x^{2n-1} e^{-tx^2}) \Big|_0^{\infty} - (2n-1) \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n-2} dx \right] \\ &= \frac{2n-1}{2t} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n-2} dx = -\frac{2n-1}{(2t)^2} \int_0^{\infty} x^{2n-3} de^{-tx^2} \\ &= -\frac{2n-1}{(2t)^2} \left[(x^{2n-3} e^{-tx^2}) \Big|_0^{\infty} - (2n-3) \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n-4} dx \right] \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2t)^2} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n-4} dx \\ &\cdots \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2t)^n} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx \end{aligned}$$

在最后的一个积分中，令$\sqrt{t} \cdot x = u$，则

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

因此

$$I_n = \frac{(2n-1)!!}{(2t)^n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2t)^n}$$

把 I_n 代入式(2.42)，得

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos bx dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2t)^n} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \cdot \frac{b^{2n}}{(2t)^n} \quad [\text{其中}(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!!} \cdot \frac{b^{2n}}{(2t)^n} \quad [\text{其中}(2n)!! = 2^n n!] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{b^2}{4t} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4t}} \quad \left[\text{使用公式 } e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

把它代入式(2.41)，得

$$L = \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} dt \int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos bx dx = \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4t}} dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\infty} e^{-a^2t-\frac{b^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

令 $t=u^2$，$u=\sqrt{t}$，$dt=2udu$，那么

$$L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\infty} e^{-a^2t-\frac{b^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\infty} e^{-a^2u^2-\frac{b^2}{4u^2}} \cdot \frac{2udu}{u}$$

$$= \sqrt{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(au)^2-(\frac{b}{2u})^2} du$$

该式右边的积分可写成

$$\int_0^{\infty} e^{-(au)^2-(\frac{b}{2u})^2} du = e^{-ab}\int_0^{\infty} e^{ab} \cdot e^{-(au)^2-(\frac{b}{2u})^2} du = e^{-ab}\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2} du$$

并令 $au-\frac{b}{2u}=y$，则有

$$\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2} du = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \tag{2.43}$$

于是

$$\int_0^{\infty} e^{-(au)^2-(\frac{b}{2u})^2} du = e^{-ab} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

因此

$$L = \sqrt{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(au)^2-(\frac{b}{2u})^2} du = \sqrt{\pi} \cdot e^{-ab} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}$$

即

$$L = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ab} \tag{2.44}$$

其中式(2.43)中 $\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2} du = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$ 是需要证明的，兹证明如下：

令 $y=au-\frac{b}{2u}$，则

$$dy = \left(a+\frac{b}{2u^2}\right)du$$

当 $u=0$，$y=-\infty$；当 $u=\infty$，$y=\infty$. 因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2}\left(a+\frac{b}{2u^2}\right)du$$

$$= a\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2} du + \frac{b}{2}\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2} \frac{du}{u^2}$$

在该式右边第二个积分中：

令 $u=-\frac{b}{2at}$，则

$$du = \frac{b}{2a} \cdot \frac{dt}{t^2}$$

当 $u=0$ 时，$t=-\infty$；当 $u=\infty$ 时，$t=0$. 于是

$$\frac{b}{2}\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2}\frac{du}{u^2}=\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-(at-\frac{b}{2t})^2}\cdot\frac{2a}{b}dt=a\int_{-\infty}^{0} e^{-(at-\frac{b}{2t})^2}dt$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=a\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2}du+a\int_{-\infty}^{0} e^{-(at-\frac{b}{2t})^2}dt=a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2}du$$

最后得到

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy=a\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2}du$$

即

$$\int_0^{\infty} e^{-(au-\frac{b}{2u})^2}du=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$$

证毕.

对于第二个拉普拉斯积分 $K=\int_0^{\infty}\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}dx$，可以使用与第一个拉普拉斯积分 $L=\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx$ 相同的方法求解，但如果你注意到它是第一个拉普拉斯积分的微分时，那么计算它就更方便了. 因为

$$K=-\frac{dL}{db}=-\frac{d}{db}\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}dx$$

所以

$$K=-\frac{dL}{db}=-\frac{\pi}{2a}\frac{d}{db}e^{-ab}=-\frac{\pi}{2a}e^{-ab}(-a)=\frac{\pi}{2}e^{-ab}$$

这就是第二个拉普拉斯积分的结果：

$$K=\int_0^{\infty}\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab} \tag{2.45}$$

5. 欧拉(Euler)积分 $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx(0<a<1)$.

因为该积分不是一致收敛的，所以需要采用不一般的方法. 我们可把这个积分分成两部分：

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\int_0^{1}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx+\int_1^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=I_1+I_2 \tag{2.46}$$

对于积分

$$I_1=\int_0^{1}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

因为

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad(0<x<1)$$

所以有

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=x^{a-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{a+n-1}$$

于是

$$I_1=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{a+n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n x^{a+n-1}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a+n}(x^{a+n})\Big|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a+n}$$

对于式(2.46)中的第二个积分

$$I_2=\int_1^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

设 $x=\frac{1}{z}$,则

$$\mathrm{d}x=-\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$$

当 $x=1$ 时,$z=1$;当 $x=\infty$ 时,$z=0$.其被积函数变成

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\frac{z^{2-a}}{1+z}$$

因此有

$$I_2=\int_1^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=-\int_1^0\frac{z^{2-a}}{1+z}\cdot\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z=-\int_1^0\frac{z^{-a}}{1+z}\mathrm{d}z=\int_0^1\frac{z^{-a}}{1+z}\mathrm{d}z$$

这就是说,自变量经一番替换改造后,积分是在新变量 z 从 0 到 1 的范围内进行的 $(0<z<1)$,这样就可将被积函数展开成无穷级数:

$$\frac{z^{-a}}{1+z}=z^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{k-a}\quad(0<z<1,k\text{ 为正整数})$$

因此

$$I_2=\int_0^1\frac{z^{-a}}{1+z}\mathrm{d}z=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{k-a}\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^k z^{k-a}\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k-a+1}(z^{k-a+1})\Big|_0^1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k-a+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a-n}$$

把 I_1 和 I_2 加起来,得到

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a+n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a-n}$$

$$=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a+n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a-n}$$

$$= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right)$$

$$= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \tag{2.47}$$

到此,应该说积分已经做完了.但是要把结果中的无穷级数计算出来也非易事,那么可否寻找出更为简单的方法? 我们注意到展开式

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

把 x 换成 πx,得

$$\frac{1}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\pi x}{\pi^2 x^2 - n^2\pi^2}$$

两边乘上 π,得

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{\pi}{\pi x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\pi^2 x}{\pi^2 x^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

把 x 换成 a,得

$$\frac{\pi}{\sin \pi a} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2}$$

由此得到

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi a} \tag{2.48}$$

6. 求积分 $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \mathrm{d}x$(方法:在积分号下求积分).

因为

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-yx} \mathrm{d}x = -\frac{1}{y} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-yx} \mathrm{d}(-yx) = -\frac{1}{y} (\mathrm{e}^{-yx}) \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{y} \quad (y > 0)$$

其中 y 是参变量,当 $y \geqslant y_0 > 0$ 时,这个积分是一致收敛的.对 y 从 a 到 b 求积分,得

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-yx} \mathrm{d}y = -\frac{1}{x} \int_a^b \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{d}(-xy) = -\frac{1}{x} (\mathrm{e}^{-xy}) \Big|_{y=a}^{y=b} = \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}$$

所以

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}y \cdot \frac{1}{y} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y} = (\ln y) \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a}$$

2.7 无穷级数积分法

对有些定积分，把被积函数的全体或部分，用无穷级数展开式代入，并逐项积分，不失为一种有效的积分方法. 如前面第 2.5 节中的第 2 个例子和第 2.6 节中的第 4 个例子，我们都曾用过无穷级数展开式来做积分这种方法.

无穷级数积分法最先是被牛顿使用的，当他发现了二项式定理后，就放弃了用于求积分的插值法，而采用二项式定理把函数展开成无穷级数，并逐项积分的方法[33]. 例如为了确定双曲线 $y=\sqrt{a^2+x^2}$ 所围之面积，他把被积表达式展开成如下的无穷级数：

$$\begin{aligned} y &= a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^4}{8a^4}+\frac{x^6}{16a^6}-\frac{5x^8}{128a^8}+\cdots\right) \\ &= a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\cdots \end{aligned}$$

然后逐项积分，就得到该曲线下面的面积了：

$$\begin{aligned} \int y\mathrm{d}x &= \int\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\cdots\right)\mathrm{d}x \\ &= ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}+\cdots \end{aligned}$$

如果把积分的上、下限加上去，那就是定积分了，譬如说要求 x 从 0 到 a 的曲线下面的面积：

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^a\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\cdots\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}+\cdots\right)\Bigg|_0^a \\ &= a^2+\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{40}a^2+\frac{1}{112}a^2-\frac{1}{1152}a^2+\cdots \\ &= \left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{40}+\frac{1}{112}-\frac{1}{1152}+\cdots\right)a^2 \end{aligned}$$

有些无穷级数之和是我们熟知的常数，而这些常数对于做定积分是很有用的. 下面列出部分常用的无穷级数之和，供读者参考.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots \quad \text{（自然对数之底）}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma=0.5772156649\cdots \quad \text{（欧拉常数）}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}=G=0.915965594\cdots\quad(\text{卡塔兰常数})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2=0.69314718\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}=\ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=1-\ln 2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n}=\ln 2-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=1$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2m)^k}=\ln 2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4m+1)^{2k}}=\frac{1}{4}\ln 2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4m-2)^{2k}}=\frac{\pi}{8}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4m-1)^{2k+1}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\ln 2$$

…

只要积分结果是上述无穷级数之和的一个，那么立刻就能得到积分值了.

1. 计算积分$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$.

这个积分在换元法中遇到过，现在来重新认识一下. 我们把被积函数中的 $\arctan x$ 用无穷级数展开，因为在积分号下级数在 $x=1$ 处收敛，故能用逐项积分：

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\cdots\right)\mathrm{d}x\\&=\left[x-\frac{1}{3^2}x^3+\frac{1}{5^2}x^5-\frac{1}{7^2}x^7+\cdots\right]_0^1\\&=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

从无穷级数和的表中可看到这个无穷级数的和就是卡塔兰常数 G，所以

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x=G$$

2. 计算积分 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

把 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 代入积分式中，得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

得到的这无穷级数之和在常用无穷级数之和中没有，因此需要将它改变一下：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{2}{n}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\right]\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\\&=2\ln 2-\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right]\end{aligned}$$

等式右边方括弧中的两个无穷级数之和等于 1，兹证明如下：

把两个级数展开，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\cdots$$

可以看出来,第一个级数从第二项起与第二个级数从第一项起的每一项都是数值相等、符号向反,加起来就相互抵消掉.当 n 趋向 ∞ 时,就只剩下 1 了.因此

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right]=1$$

于是最后得到

$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1$$

3. 计算积分 $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x(0<x<1)$.

将该积分改写一下,得

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln 1\mathrm{d}x-\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

把被积函数 $\ln(1-x)$ 用级数展开,得

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(0<x<1)$$

把它代入积分式中,得

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x&=-\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}(x^{n+1})\Big|_0^1\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1\end{aligned}$$

4. 计算积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$.

把被积函数中的 $\ln(1+x)$ 用级数展开,代入积分式中,并逐项积分,得

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{1}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

5. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

把被积函数改变一下，并用级数展开，得

$$\frac{x}{e^x+1}=\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}=xe^{-x}(1-e^{-x}+e^{-2x}-e^{-3x}+e^{-4x}-\cdots)$$
$$=xe^{-x}-xe^{-2x}+xe^{-3x}-xe^{-4x}+xe^{-5x}-\cdots$$

再把级数展开式代入积分中，得

$$\int_0^\infty\frac{x}{e^x+1}dx$$
$$=\int_0^\infty(xe^{-x}-xe^{-2x}+xe^{-3x}-xe^{-4x}+xe^{-5x}-\cdots)dx$$
$$=\int_0^\infty xe^{-x}dx-\int_0^\infty xe^{-2x}dx+\int_0^\infty xe^{-3x}dx-\int_0^\infty xe^{-4x}dx+\int_0^\infty xe^{-5x}dx-\cdots$$

用分部积分法逐项积分，得

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx=-\int_0^\infty xde^{-x}=-(xe^{-x})\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}dx=1$$
$$\int_0^\infty xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^\infty xde^{-2x}=-\frac{1}{2}(xe^{-2x})\Big|_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}dx=\frac{1}{2^2}$$
$$\int_0^\infty xe^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\int_0^\infty xde^{-3x}=-\frac{1}{3}(xe^{-3x})\Big|_0^\infty+\frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-3x}dx=\frac{1}{3^2}$$
$$\cdots$$

把它们加起来，得

$$\int_0^\infty\frac{x}{e^x+1}dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

6. 计算积分 $\int_0^\infty\frac{x}{e^{2\pi x}-1}dx$.

把被积函数展开为无穷级数，然后逐项积分，得

$$\int_0^\infty\frac{x}{e^{2\pi x}-1}dx=\int_0^\infty\frac{xe^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}dx$$
$$=\int_0^\infty xe^{-2\pi x}(1+e^{-2\pi x}+e^{-4\pi x}+e^{-6\pi x}+\cdots)dx$$
$$=\int_0^\infty(xe^{-2\pi x}+xe^{-4\pi x}+xe^{-6\pi x}+xe^{-8\pi x}+\cdots)dx$$

用分部积分法逐项积分，得

$$\int_0^\infty xe^{-2\pi x}dx=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty xde^{-2\pi x}=-\frac{1}{2\pi}(xe^{-2\pi x})\Big|_0^\infty+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-2\pi x}dx=\frac{1}{(2\pi)^2}$$
$$\int_0^\infty xe^{-4\pi x}dx=-\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty xde^{-4\pi x}=-\frac{1}{4\pi}(xe^{-4\pi x})\Big|_0^\infty+\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-4\pi x}dx=\frac{1}{(4\pi)^2}$$
$$\int_0^\infty xe^{-6\pi x}dx=-\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty xde^{-6\pi x}=-\frac{1}{6\pi}(xe^{-6\pi x})\Big|_0^\infty+\frac{1}{6\pi}\int_0^\infty e^{-6\pi x}dx=\frac{1}{(6\pi)^2}$$
$$\cdots$$

逐项相加，得到

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{e^{2\pi x}-1}dx=\int_0^{\infty}\frac{xe^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}dx$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(4\pi)^2}+\frac{1}{(6\pi)^2}+\frac{1}{(8\pi)^2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{24}$$

7. 计算积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^x}$ 和 $\int_0^1 x^x dx$.

(1) 计算积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^x}$.

因为

$$\frac{1}{x^x}=x^{-x}=e^{-x\ln x}$$

把 $e^{-x\ln x}$ 展开为无穷级数,得

$$e^{-x\ln x}=1-x\ln x+\frac{1}{2!}x^2\ln^2 x-\frac{1}{3!}x^3\ln^3 x+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}x^n\ln^n x+\cdots$$

代入积分式中,得

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\int_0^1 e^{-x\ln x}dx$$

$$=\int_0^1\left(1-x\ln x+\frac{1}{2!}x^2\ln^2 x-\frac{1}{3!}x^3\ln^3 x+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{n!}x^n\ln^n x+\cdots\right)dx$$

$$=\int_0^1 dx-\int_0^1 x\ln x\,dx+\frac{1}{2!}\int_0^1 x^2\ln^2 x\,dx-\frac{1}{3!}\int_0^1 x^3\ln^3 x\,dx+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx+\cdots$$

用分部积分法逐项积分,得

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=1-\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{2^2}\right)\Big|_0^1+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}x^3\ln^2 x-\frac{2}{3^2}x^3\ln x+\frac{2}{3^2}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}x^4\ln^3 x-\frac{1}{4^2}x^4\ln^2 x+\frac{3!}{4^3}x^4\ln x-\frac{3!}{4^4}x^4\right)\Big|_0^1+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

这个无穷级数可表示为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^n}<1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

即

$$1<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}<\frac{3}{2}$$

对这个积分结果做近似计算，如果计算到第 9 项，略去第 10 以后各项，则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{9^9}+\cdots\\&=1+0.25+0.037037037+0.00390625+0.00032+0.000021433\\&\quad+0.000001214+0.00000006+0.000000003+\cdots\\&\approx 1.291285997\cdots\approx 1.3\end{aligned}$$

也就是说，这个积分的近似值为

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}\approx 1.3$$

(2) 计算积分 $\int_0^1 x^x\mathrm{d}x$.

因为 $x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$，把它展开成无穷级数

$$\begin{aligned}x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}&=1+\frac{x\ln x}{1!}+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln x)^n}{n!}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}\end{aligned}$$

对它进行逐项积分，得到

$$\int_0^1 x^x\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\mathrm{d}x$$

其中积分

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^n\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$$

(参看《常用积分表》第 155 页.)

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^x\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\\&=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^7}-\frac{1}{8^8}+\frac{1}{9^9}-\cdots\\&=1-0.25+0.037037037-0.00390625+0.00032-0.000021433\\&\quad+0.000001214-0.00000006+0.000000003-\cdots\\&=0.783430511\cdots\end{aligned}$$

这个积分在 300 年前，J. 伯努利研究指数曲线时，对曲线 $y=x^x$ 从 $x=0$ 到 $x=1$那段曲线下面的面积进行计算时，得到了这个无穷级数：

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots$$

伯努利就是通过写出 $x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$，并把它用指数的级数展开，再用分项积分法逐项积分得到的[33]，我们今天只是沿用他的方法罢了.

8. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x$.

把被积函数中的余切 $\cot x$ 展开为无穷级数，得

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}$$

其中 B_{2n} 是伯努利数. 把余切的无穷级数表达式代入积分式中，则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left[\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{2n}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\\&=\frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\right]\\&=\frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}B_{2n}\right]\end{aligned}$$

现在对括弧内的无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}B_{2n}$ 做近似计算，其中的 B_{2n} 是偶数项伯努利数，略去 $n=7$ 以后的各项，将 $n=1$ 以后的前 6 个列于下面：

B_2	B_4	B_6	B_8	B_{10}	B_{12}
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}B_{2n}\\&=-\frac{\pi^2}{3!}\cdot\frac{1}{6}+\frac{\pi^4}{5!}\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)-\frac{\pi^6}{7!}\cdot\frac{1}{42}+\frac{\pi^8}{9!}\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)-\frac{\pi^{10}}{11!}\cdot\frac{5}{66}\\&\quad+\frac{\pi^{12}}{13!}\cdot\left(-\frac{691}{2730}\right)\cdots\\&=-0.274155678-0.027058081-0.004541710-0.000871595\\&\quad-0.000177733-0.000037569\cdots\\&=-0.306842366\cdots\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}B_{2n}\right]$$

$$\approx \frac{\pi}{2}(1 - 0.306842366\cdots)$$

$$\approx 1.088809466\cdots$$

我们曾在2.5节的第16个例子中求出过这个积分，它是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln 2 = 1.088793045\cdots$$

比较两者，误差

$$\Delta = 1.088809466\cdots - 1.088793045\cdots \approx 0.000016421$$

两者相对误差

$$P = \frac{0.000016421}{1.088793045} \approx 1.5 \times 10^{-5}$$

因此小数点后的前4位是真值.

实际上，本例计算所得的结果与2.5节的第16个例子中求出的结果是完全相同的.亦即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}B_{2n}\right] = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}B_{2n} = \ln 2 - 1$$

从而导出这个无穷级数之和值，它的近似值为$-0.3068\cdots$.

9. 计算积分$\int_0^1 x\operatorname{sech} x\mathrm{d}x$.

当$x<\frac{\pi}{2}$时，$\operatorname{sech} x$可用下面的公式展开：

$$\operatorname{sech} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} \quad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$$

其中E_{2n}为欧拉数.把展开式代入积分式中，得

$$\int_0^1 x\operatorname{sech} x\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n+1}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}\int_0^1 x^{2n+1}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!(2n+2)}$$

对无穷级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!(2n+2)}$做近似计算，取前9项，略去第10项以后的部分，小数点后取9位.对应的欧拉数如下：

E_0	E_2	E_4	E_6	E_8	E_{10}	E_{12}	E_{14}	E_{16}
1	−1	5	−61	1385	−50521	2702765	−199360981	19391512145

把欧拉数代入,则此无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!(2n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\cdot 4}+\frac{5}{4!\cdot 6}+\frac{61}{6!\cdot 8}+\frac{1385}{8!\cdot 10}+\frac{50521}{10!\cdot 12}+\frac{2702765}{12!\cdot 14}+\frac{199360981}{14!\cdot 16}+\frac{19391512145}{16!\cdot 18}+\cdots$$

$$=0.5+0.125+0.034722222+0.010590278+0.00343502+0.001160186+0.000403035+0.000142926+0.000005149+\cdots$$

$$=0.675458816\cdots$$

这是一个收敛的无穷级数,第 9 项已经小于10^{-5}了,因此小数点后的前 4 位是真值.

10. 计算第一类完全椭圆积分 $K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}(k^2<1)$.

把$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$展开成无穷级数,得

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\theta+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta$$

把它代入积分式,并逐项积分,得

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$$

在 2.4 节的第 1 个例子中我们已知道

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

所以

$$K(k)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}\tag{2.49}$$

若令 $k=\frac{1}{2}$,则

$$K\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{1}{2^{2n}}\right\}$$

对括弧中代数和式做近似计算，取前面8项，略去后续各项，有效数字取小数点后9位，得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{8}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2^{2n}}\\&=\left(\frac{1!!}{2!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^2}+\left(\frac{3!!}{4!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^4}+\left(\frac{5!!}{6!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^6}+\left(\frac{7!!}{8!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^8}+\left(\frac{9!!}{10!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{10}}\\&\quad+\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{12}}+\left(\frac{13!!}{14!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{14}}+\left(\frac{15!!}{16!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{16}}\\&=0.0625+0.008789063+0.001525879+0.000292063+0.000059143\\&\quad+0.000012424+0.000002678+0.000000588\\&=0.073181838\cdots\end{aligned}$$

其误差小于10^{-6}，因此得到

$$\begin{aligned}K\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n-1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{1}{2^{2n}}\right\}\\&\approx\frac{\pi}{2}(1+0.073181838\cdots)\\&\approx1.685750089\cdots\end{aligned}$$

11. 计算第二类完全椭圆积分$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,(k^2<1)$.

因为

$$\begin{aligned}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}&=1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}k^4\sin^4\theta-\cdots-\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta-\cdots\\&=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}E(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{2}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)!!}{(2n-1)(2n)!!}k^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]\\&=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{(2n-1)}\right\}\end{aligned}\tag{2.50}$$

若设 $k=\frac{1}{2}$，计算 $E\left(\frac{1}{2}\right)$ 的近似值. 与前例一样，取 $n=8$ 以内的 8 项，略去 $n=9$ 以后的各项，取小数点后 9 位有效数字，计算方括号内的总和号下的式子.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{8}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{2n-1}\\
&\approx\left(\frac{1!!}{2!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^2}+\left(\frac{3!!}{4!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{5!!}{6!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{7!!}{8!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{7}\\
&\quad+\left(\frac{9!!}{10!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{1}{11}+\left(\frac{13!!}{14!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{14}}\cdot\frac{1}{13}\\
&\quad+\left(\frac{15!!}{16!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{16}}\cdot\frac{1}{15}\\
&=0.065784532
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{2}\right)&\approx\frac{\pi}{2}(1-0.065784532)\\
&\approx 1.467462225
\end{aligned}$$

以上有关无穷级数的近似计算，都是取级数的前面若干项，用普通的计算器就可以得到结果，因为所遇到的级数都是收敛的，而且收敛速度较快. 如果遇到收敛速度较慢的无穷级数，那只能编个程序用计算机计算了. 其中完全椭圆积分值可查数学手册[31]. 如我们计算的例题中，可从[31]查得：$K\left(\frac{1}{2}\right)=1.6858$；$E\left(\frac{1}{2}\right)=1.4675$.

把被积函数用无穷级数展开来做积分时，所得结果仍是无穷级数. 有些无穷级数的总和可以表达成非常简单的常数，如在第 1 个例子到第 6 个例子中遇到的，但是大多数情况下是不能表示成简单的常数的，那么做近似计算不失为一种可取的方法.

2.8 反常积分(Improper)

2.8.1 反常积分的定义

在讨论定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时，通常假定 $[a,b]$ 为有界区间，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界函数. 若不能满足这两个条件，则称相应的积分为反常积分.

反常积分有两种. 其中一种是无穷限反常积分，对于任何 $A>a$，$f(x)$ 在

$[a,A]$中可积,定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

如果上式右端的极限存在,并且它的值为 I,则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 I,记作

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{2.51}$$

否则就称它发散.

第二种是无界函数的反常积分.设 $f(x)$在$[a,b]$上的某点 $c(a\leqslant c\leqslant b)$附近无界,即对任何适当小的 $\varepsilon>0$,$f(c)$在$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$内无界,称 c 是$f(x)$的奇点.又设对任何足够小的正数 δ_1,δ_2,$f(x)$在$[a,c-\delta_1]$及$[c+\delta_2,b]$上可积,定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果上式右端的极限存在,并且极限值为 J,称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于J,记作

$$J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{2.52}$$

否则就称它发散(当 $c=a$ 时,右端只有第二项,$c=b$ 时只有第一项).

以前所讲的定积分的概念是对有限区间$[a,b]$与有界函数 $f(x)$说的,称它为常义积分.有别于常义积分,把**无限区间**$[a,\infty]$,**无界函数** $f(x)$**的积分叫反常积分**.反常积分亦称广义积分.

反常积分主值:设 $f(x)$在$[a,b]$上无界,但只有一个奇点 c,且 $a<c<b$,即对任意适当小的 $\varepsilon>0$,$f(x)$在$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$内无界.若对任意正数 δ,有

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

存在,就称它是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的积分主值,记为 $\mathrm{V.P.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

同样,对于无穷限反常积分,其主值定义为

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^A f(x)\mathrm{d}x \tag{2.53}$$

其中 A 为任意正数.

发散的反常积分,其主值也可能存在.这时称它在主值意义下收敛.例如 $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ 发散,但它的主值

$$\mathrm{V.P.}\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{1-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int_{1+\delta}^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\right) = \ln 2$$

在反常积分中,有些是收敛的,有些则是发散的.例如函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,它在任意有限区间$[0,A]$$(A>0)$上都是可积的,而且有

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^A = \arctan A$$

当 $A \to \infty$ 时，它的极限值为 $\frac{\pi}{2}$，因此 x 从 0 到 $+\infty$ 的积分收敛，并且

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

但对于反常积分 $\int_a^A \frac{\mathrm{d}x}{x^p} (a > 0)$，则

$$\int_a^A \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_a^A = \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - a^{1-p})$$

当 $p > 1, A \to +\infty$ 时，积分收敛，积分值为 $\frac{1}{p-1} a^{1-p}$；当 $p < 1, A \to +\infty$ 时，积分发散；当 $p = 1$ 时，则 $\int_a^A \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln A - \ln a$；当 $A \to \infty$ 时，积分发散.

2.8.2 反常积分存在的判别法

1. 柯西(Cauchy)判别法.

如果反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，那么当 $x \to +\infty$ 时，对于任何一个数 $\varepsilon > 0$，都有一个数 $A_0 > a$，只要使得 $A > A_0$，而且有 $A' > A_0$，就有不等式

$$\left| \int_a^{A'} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{2.54}$$

这就是说，只要这个不等式成立，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 就是收敛的. 这就是柯西判别法.

如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛；如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为条件收敛.

由柯西判别法可引导出比较判别法. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a, +\infty]$ 上连续，且对充分大的 x，满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，则：

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例如积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$ 和积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$，因为 $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$，及 $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$，而 $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 是收敛的，所以 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

2. 狄利克雷(Dirichlet)判别法.

如果函数 $f(x)$，$g(x)$满足：

(ⅰ) $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ $(a<A<\infty)$ 有界；

(ⅱ) 当 $x\to+\infty$ 时，函数 $g(x)$ 单调地趋于 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$，则积分 $\int_a^A f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例如积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，该积分是收敛的，但不是绝对收敛. 由狄利克雷判别法，取 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\frac{1}{x}$. 因为

(1) $\left|\int_0^A \sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos 0-\cos A|\leqslant 2$；

(2) $g(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)$ 单调趋于 0，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$，

所以该积分是收敛的，但非绝对收敛. 因为

$$\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\pi}[\cos x]_{(n-1)\pi}^{n\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

2.8.3 反常积分算例

1. 求积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}(a>0)$.

该积分 $x=0$ 是奇点，当 $a>0$ 时，则有

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1-2}x^{1-2}\right)\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}$$

2. 求积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

因为 $|x|=1$ 是奇点，所以可把它拆成两部分积分，于是可得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}[-\arcsin(-1+\varepsilon)]+\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(1-\varepsilon)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

它属于无穷限反常积分.对被积函数,用待定系数法分解:

令

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

用 x^3+1 乘方程两边,得

$$\begin{aligned}1&=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)\\&=(A+B)x^2+(B+C-A)x+(A+C)\end{aligned}$$

对照公式两边,使 x 的同次幂的系数相等,则有

$$\begin{aligned}x^2&:A+B=0\\x^1&:B+C-A=0\\x^0&:A+C=1\end{aligned}$$

解上面三个方程,得到

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=\frac{2}{3}$$

所以

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}+\frac{1}{2(x^2-x+1)}$$

把被积函数的分解式代入积分中,得

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}\\&=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{6}\int_0^b\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\right]\\&=\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left[\ln(x+1)\right]_0^b-\frac{1}{6}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^b+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^b\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right\}\\&=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^b\\&=\left\{\frac{1}{6}\ln 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}\\&=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

因此得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

4. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

这也是一个无穷限反常积分.

令

$$x = \tan t, \quad \mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\infty$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 因此

$$\lim_{a\to 0,b\to\infty}\int_a^b \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sec t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\mathrm{d}\sin t = (t\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2} + (\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

5. 计算积分 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$，$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$.

找原函数

$$\int \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\int \sin bx\mathrm{d}\mathrm{e}^{-ax} = -\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{-ax}\sin bx - b\int \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\left[\mathrm{e}^{-ax}\sin bx + \frac{b}{a}\left(\mathrm{e}^{-ax}\cos bx + b\int \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

由此得到

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}(a\sin bx + b\cos bx) + C$$

或其中一个原函数为

$$F(x) = \int \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{-ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

当 $x=0$ 时，$F(0) = -\frac{b}{a^2+b^2}$，当 $x=\infty$ 时，$F(\infty)=0$，因此

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = F(\infty) - F(0) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

用同样的方法，可得

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

2.8.4 伏汝兰尼(Froullani)积分

这是一类特殊形式的反常积分，它的形式如下：

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x \quad (a>0, b>0)$$

首先，假定 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 有定义，并且连续；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 具有有限的极

限,即

$$f(+\infty)=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

当$0<\delta<\Delta<\infty$时,存在积分

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x&=\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z\\&=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

因此得到

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z-\lim_{\Delta\to\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z$$

由中值公式

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z}=F(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad(a\delta\leqslant\xi\leqslant b\delta)$$

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=f(\eta)\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{\mathrm{d}z}{z}=F(\eta)\ln\frac{b}{a}\quad(a\Delta\leqslant\eta\leqslant b\Delta)$$

显然,当$\delta\to0,\xi\to0$;当$\Delta\to\infty$时,$\eta\to\infty$,所以由此推知

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=[f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a}\tag{2.55}$$

这个公式可以用来计算类似形状的积分,例如:

1. 计算积分$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$.

设$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$,则$f(0)=\mathrm{e}^0=1,f(\infty)=\mathrm{e}^{-\infty}=0$,于是

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=[f(0)-f(\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$$

2. 计算积分$\int_0^{\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x$.

令$f(x)=\arctan x$,则

$$f(0)=\arctan0=0,\quad f(\infty)=\arctan\infty=\frac{\pi}{2}$$

那么

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x&=[f(0)-f(\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}\\&=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}\end{aligned}$$

3. 计算积分$\int_0^{\infty}\ln\frac{p+q\mathrm{e}^{-ax}}{p+q\mathrm{e}^{-bx}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

把该积分改写为

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(p+qe^{-ax})-\ln(p+qe^{-bx})}{x}dx$$

因此有

$$f(x)=\ln(p+qe^{-x}),\quad f(0)=\ln(p+q),\quad f(\infty)=\ln(p)$$

于是得到

$$\int_0^{\infty}\ln\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\cdot\frac{dx}{x}=[f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a}=[\ln(p+q)-\ln p]\ln\frac{b}{a}$$

$$=\ln\frac{p+q}{p}\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\left(1+\frac{q}{p}\right)\ln\frac{b}{a}$$

4. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$.

在该题的情况下，$f(x)=\cos x$，$f(0)=\cos 0=1$，但 $f(\infty)=\cos(\infty)$ 没有有限的极限值.

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 没有有限的极限值，但积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz$ 存在. 此时积分的结果应该是

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}$$

因此该积分结果将是

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$$

同样的道理，若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性被破坏，但积分 $\int_0^A\frac{f(z)}{z}dz$ $(A<+\infty)$ 存在，那么

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(+\infty)\cdot\ln\frac{a}{b}$$

这种情况，也可用变换 $x=\frac{1}{t}$ 把它化成前一种情况.

5. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx(a^2\neq b^2)$.

因为

$$\sin ax\sin bx=-\frac{1}{2}[\cos(ax+bx)-\cos(ax-bx)]$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos(|a+b|x)-\cos(|a-b|x)]$$

所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos(|a+b|)x-\cos(|a-b|)x}{x}dx$$

公式右端为伏汝兰尼积分，$f(x)=\cos x$，$f(0)=\cos 0=1$，$f(+\infty)=\cos(+\infty)$ 没有有限极限值，因此

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(|a+b|)x-\cos(|a-b|)x}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\left|\frac{a-b}{a+b}\right|=\ln\left|\frac{a-b}{a+b}\right|$$

于是得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a-b}{a+b}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$$

$$=\ln\sqrt{\left|\frac{a+b}{a-b}\right|}\quad(a^2\neq b^2)$$

6. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos ax)\cos bx}{x}\mathrm{d}x(b\neq 0,a^2\neq b^2)$.

因为

$$(1-\cos ax)\cos bx=\cos bx-\cos ax\cos bx$$

$$=\cos bx-\frac{1}{2}[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos bx-\cos(a+b)x]+\frac{1}{2}[\cos bx-\cos(a-b)x]$$

所以

$$\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos ax)\cos bx}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos bx-\cos(a+b)x}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos bx-\cos(a-b)x}{x}\mathrm{d}x$$

等式右边的两个积分都是伏汝兰尼积分，$f(x)=\cos x$，$f(0)=1$，但 $f(+\infty)$ 没有有限的极限值，所以右边的两个积分分别为

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos bx-\cos(a+b)x}{x}\mathrm{d}x=f(0)\cdot\ln\left|\frac{a+b}{b}\right|=\ln\left|\frac{a+b}{b}\right|$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos bx-\cos(a-b)x}{x}\mathrm{d}x=f(0)\cdot\ln\left|\frac{a-b}{b}\right|=\ln\left|\frac{a-b}{b}\right|$$

于是得到

$$\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos ax)\cos bx}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{b}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a-b}{b}\right|=\ln\sqrt{\left|\frac{a+b}{b}\right|}+\ln\sqrt{\left|\frac{a-b}{b}\right|}$$

$$=\ln\left(\sqrt{\left|\frac{a+b}{b}\right|}\cdot\sqrt{\left|\frac{a-b}{b}\right|}\right)=\ln\frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{|b|}$$

7. 计算积分 $\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$.

令 $\ln x=-y$，则

$$x=\mathrm{e}^{-y},\quad \mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

当 $x=0$ 时，$y=\infty$；$x=1$ 时，$y=0$. 于是

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\mathrm{d}x=-\int_{\infty}^0\frac{\mathrm{e}^{-y(a-1)}-\mathrm{e}^{-y(b-1)}}{y}(-\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-by} - e^{-ay}}{y} dy$$

最后的积分为伏汝兰尼积分,因此有

$$f(y) = e^{-y}, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0$$

最后有

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-by} - e^{-ay}}{y} dy = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{a}{b}$$

8. 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2} dx (a > 0, b > 0)$.

用分部积分法把它变成伏汝兰尼积分的形状,于是得

$$\int_0^{\infty} \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2} dx$$

$$= \int_0^{\infty} (b\sin ax - a\sin bx) d(-x^{-1})$$

$$= \left[-\frac{1}{x} (b\sin ax - a\sin bx) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} (ba\cos ax dx - ab\cos bx dx)$$

$$= ab \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$$

$$= ab \ln \frac{b}{a}$$

9. 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2} dx (a > 0, b > 0)$.

先用分部积分法使被积函数的分母从 x^2 降到 x,再按伏汝兰尼积分计算:

$$\int_0^{\infty} \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2} dx$$

$$= \int_0^{\infty} [b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)] d(-x^{-1})$$

$$= \left\{ -\frac{1}{x} [b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)] \right\}_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(ba \frac{dx}{1+ax} - ab \frac{dx}{1+bx} \right)$$

$$= ab \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{1+ax} - \frac{1}{1+bx}}{x} dx$$

最后的积分式为伏汝兰尼积分

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0$$

因此得到

$$\int_0^{\infty} \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2} dx = ab[f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a} = ab \ln \frac{b}{a}$$

10. 计算积分 $\int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-bx})^2 \frac{dx}{x^2} (a > 0, b > 0)$.

与前面的方法相同，先用分部积分法使被积函数的分母从 x^2 变到 x，再用伏汝兰尼积分计算：

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\&=\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})^2\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\\&=\left[-\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})(b\mathrm{e}^{-bx}-a\mathrm{e}^{-ax})\mathrm{d}x\\&=2\left[a\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(a+b)x}-\mathrm{e}^{-2ax}}{x}\mathrm{d}x+b\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(a+b)x}-\mathrm{e}^{-2bx}}{x}\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

最后的积分式为伏汝兰尼积分，有

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x},\quad f(0)=1,\quad f(+\infty)=0$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}&=2\left(a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}\right)\\&=2a\ln\frac{2a}{a+b}+2b\ln\frac{2b}{a+b}\end{aligned}$$

11. 计算积分 $\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

利用恒等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)&=-\frac{1}{2x}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x})+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)\\&\quad-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right).\end{aligned}$$

把该积分分解成下列3个积分：

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&\quad-\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\end{aligned}$$

在等式右边的第三个积分中，令 $2x=y$，则

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^y-1}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

可以看出它与上式右边的第二个积分是相同的，故相互抵消. 因此

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\mathrm{d}x$$

此式右端为伏汝兰尼积分，有

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x},\quad f(0)=1,\quad f(+\infty)=0$$

于是得到

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{2}[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{2}{1}=-\frac{1}{2}\ln 2$$

12. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+(a-b)xe^{-bx}}{x^2}dx(a,b>0)$.

对于任意数 $\eta>0$,有

$$\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+(a-b)xe^{-bx}}{x^2}dx=\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}dx+(a-b)\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-bx}}{x}dx$$

右边第一个积分,用分部积分法,使被积函数的分母从 x^2 变到 x:

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}dx&=\int_{\eta}^{\infty}(e^{-ax}-e^{-bx})d\left(-\frac{1}{x}\right)\\&=-\left[\frac{1}{x}(e^{-ax}-e^{-bx})\right]_{\eta}^{\infty}+\int_{\eta}^{\infty}\frac{be^{-bx}-ae^{-ax}}{x}dx\\&=\frac{e^{-a\eta}-e^{-b\eta}}{\eta}+\int_{\eta}^{\infty}\frac{be^{-bx}-ae^{-ax}}{x}dx\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+(a-b)xe^{-bx}}{x^2}dx\\&=\frac{e^{-a\eta}-e^{-b\eta}}{\eta}+\int_{\eta}^{\infty}\frac{be^{-bx}-ae^{-ax}}{x}dx+(a-b)\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-bx}}{x}dx\\&=\frac{e^{-a\eta}-e^{-b\eta}}{\eta}-a\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx\end{aligned}$$

当 $\eta\to 0$ 时,右边第一项趋于 $b-a$:由洛必达(L'Hospital)法则,有

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{(e^{-a\eta}-e^{-b\eta})'}{(\eta)'}=\lim_{\eta\to 0}\frac{-ae^{-a\eta}+be^{-b\eta}}{1}=b-a$$

而第二项是伏汝兰尼积分,有

$$f(x)=e^{-x},\quad f(0)=1,\quad f(+\infty)=0$$

$$a\int_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx=a\ln\frac{a}{b}$$

因此最终得到

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+(a-b)xe^{-bx}}{x^2}dx=b-a+a\ln\frac{a}{b}$$

2.8.5 罗巴切夫斯基(Lobachevsky)积分法

罗巴切夫斯基积分法也是一种特殊类型的反常积分方法,可用公式表示为

$$\int_0^{\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx \tag{2.56}$$

这里假设函数 $f(x)$ 在 $0\leqslant x<\infty$ 范围内有 $f(x+\pi)=f(x)$ 及 $f(\pi-x)=f(x)$,并

且左端的积分存在.

证明如下:现在把式(2.56)左端表示成级数形式:

$$I=\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\nu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

令 $\nu=2n$,或 $\nu=2n-1$,相应地变量 x 变为 $x=n\pi+t$,或 $x=n\pi-t$.这样,就有

$$\int_{2n\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(n\pi+t)\frac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t$$

及

$$\int_{(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{2n\cdot\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(n\pi-t)\frac{\sin t}{n\pi-t}\mathrm{d}t$$

由 $f(\pi+t)=f(\pi-t)=f(t)$,可知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n f(t)\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\left[\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\right]\mathrm{d}t$$

公式右端方括弧中的表达式就是$\frac{1}{\sin t}$的无穷级数展开式.因此

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

当 $f(x)=1$ 时,则有

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

这是一个我们已经熟悉的积分.

应用实例:

1. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{x}\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin^{2n}x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

2. 计算积分 $\int_0^{\infty}\arctan(a\sin x)\frac{\mathrm{d}x}{x}(a>0)$.

将该积分改变一下,得

$$I=\int_0^{\infty}\arctan(a\sin x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^{\infty}\frac{\arctan(a\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\sin x)}{\sin x}\mathrm{d}x$$

令 $\sin x=t$,则

$$x = \arcsin t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\frac{\pi}{2}$，$t=1$. 因此

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(at)}{t\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

把积分表示为参数 a 的函数，并对 a 取微商，得

$$\frac{\mathrm{d}I(a)}{\mathrm{d}a} = \int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial a}(\arctan at) \cdot \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{t}{1+a^2t^2} \cdot \mathrm{d}t$$

令 $t=\cos\theta$，则

$$\mathrm{d}t = -\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

当 $t=0$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$；当 $t=1$ 时，$\theta=0$. 所以

$$I(a)' = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\sin\theta(1+a^2\cos^2\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+a^2\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta \mathrm{d}\theta}{\sec^2\theta + a^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\tan\theta}{1+a^2+\tan^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+a^2}}\right)}{1+\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+a^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

即

$$I(a)' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

对该式求积分

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\int \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{arsinh} a + C = \frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2}) + C$$

因为 $I(0)=0$，所以 $C=0$，于是得到

$$\int_0^\infty \arctan(a\sin x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})$$

应用罗巴切夫斯基积分法，在与式(2.56)相同的条件下，同样可证明

$$\int_0^\infty g(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x \tag{2.57}$$

把式(2.57)的左端展开成级数的形式，得

$$J = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_{\mu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(\mu+1)\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$

令 $\mu=2m$，或 $\mu=2m-1$；相应地 $x=m\pi+t$，或 $x=m\pi-t$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. 因此有

$$\int_{2m\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = (-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(m\pi+t)\frac{\sin^2 t}{(m\pi+t)^2}\mathrm{d}t$$

及

$$\int_{(2m-1)\frac{\pi}{2}}^{2m\cdot\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = (-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(m\pi-t)\frac{\sin^2 t}{(m\pi-t)^2}\mathrm{d}t$$

利用 $g(m\pi+t)=g(m\pi-t)=g(t)$，则有

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^m g(t)\left[\frac{1}{(t+m\pi)^2}+\frac{1}{(t-m\pi)^2}\right]\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin^2 t\left\{\frac{1}{t^2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\frac{1}{(t+m\pi)^2}+\frac{1}{(t-m\pi)^2}\right]\right\}\mathrm{d}t$$

等式右端方括号中的表达式就是$\frac{1}{\sin^2 t}$的无穷级数展开式. 因此得到

$$\int_0^{\infty} g(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x$$

当 $g(x)=1$ 时，有

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

3. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

将积分改变为罗巴切夫斯基积分的形式：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

右端的积分用分部积分法，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\mathrm{d}\cos x}{1+\cos x}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}\ln(1+\cos x)$$

$$=-\left[x\ln(1+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+2G$$

2.8.6 一个通用的积分法则

1. 如果 $F(x)$ 是 x 的任意一个函数，当 x 变成$\frac{1}{x}$时，它保持不变. 就是说，函数 $F(x)$ 在 x 和$\frac{1}{x}$处的函数值相等，那么，当 $x=0$ 到 $x=\infty$ 之间变化时，$\frac{F(x)}{x}$仍保持在有限范围内，这样就有

$$\int_0^{\infty}F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=2\int_0^{1}F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}\tag{2.58}$$

因为

$$\int_0^{\infty} F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^1 F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^{\infty} F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

在右端的第二个积分中，令 $x=\frac{1}{y}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$，当 $x=1$ 时，$y=1$；当 $x=\infty$ 时，$y=0$. 所以

$$\int_1^{\infty} F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^0 F\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right) = \int_0^1 F(y)\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_0^1 F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

因此有

$$\int_0^{\infty} F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\int_0^1 F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

例如：

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= 2(\arctan x)\Big|_0^1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

2. 如果 $F\left(\frac{1}{x}\right)=-F(x)$，并且 $I=\int_0^{\infty} F(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 已经找到，那么

$$J = \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{1+x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

也能立刻得到. 当用 $\frac{1}{y}$ 代替 x 时，有

$$J = \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{1+x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{\infty}^0 \frac{y^n F\left(\frac{1}{y}\right)}{1+y^n}\left(-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^n F(y)}{1+y^n}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_0^{\infty} \frac{x^n F(x)}{1+x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$2J = \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{1+x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_0^{\infty} \frac{x^n F(x)}{1+x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1+x^n}{1+x^n}\cdot F(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^{\infty} F(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = I$$

因此

$$J = \frac{1}{2}I$$

也就是

$$\int_0^{\infty} \frac{F(x)}{1+x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{2.59}$$

例如：

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\cdot\frac{1}{x+x^{-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

2.8.7 有关欧拉常数 γ 的几个积分

欧拉常数 γ 的定义：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln n\right) \tag{2.60}$$

1. 求证 $\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln n\right) = \gamma$.

证明如下：

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right)$$

在等式右端第一个积分中，令

$$\mathrm{e}^{-x} = 1-y, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{1-y}$$

当 $x=\varepsilon$ 时，$y=1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}$；$x=\infty$ 时，$y=1$. 因此

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}^{1}\frac{1-y}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int_{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

于是

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right)$$

因为

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\frac{\varepsilon}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}} = \ln\frac{\varepsilon}{1-[1-\varepsilon+0(\varepsilon)]} \to 0$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right) = \int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$

于是有

$$I = \int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$

将公式 $\mathrm{e}^{-x} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ 代入上面的积分式中，有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^n\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}$$

在右端第一个积分中,令

$$\frac{x}{n}=s,\quad x=ns,\quad \mathrm{d}x=n\mathrm{d}s$$

当 $x=0$ 时,$s=0$;当 $x=n$ 时,$s=1$.因此

$$I=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1[1-(1-s)^n]\frac{\mathrm{d}s}{s}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}$$

在第一个积分中,再令

$$1-s=t,\quad s=1-t,\quad \mathrm{d}s=-\mathrm{d}t$$

当 $s=0$ 时,$t=1$;当 $s=1$ 时,$t=0$.因此

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\int_1^0\frac{1-t^n}{1-t}(-\mathrm{d}t)-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t-\ln n\right)$$

在括号中的第一项,被积函数可看成是一个等比级数之和,即

$$S=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^{n+1}=\frac{1-t^n}{1-t}$$

把它写成代数和的形式,则

$$S=\sum_{\nu=1}^{n}t^{\nu-1}$$

因此

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\sum_{\nu=1}^{n}t^{\nu-1}\mathrm{d}t-\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^1t^{\nu-1}\mathrm{d}t-\ln n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\ln n\right)=\gamma$$

2. 求证 $\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}\gamma$.

证明如下:

$$J=\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^1(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_1^\infty(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x}\qquad(\mathrm{I})$$

由 e^u 的展开式 $\mathrm{e}^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$,有

$$\int_0^1\frac{2\mathrm{e}^{-x^2}-1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}-1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\int_0^1\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}-1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\int_0^1\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n} = 0$$

即

$$\int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^{-x^2} - 1 - \mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x}\mathrm{d}x = 0$$

因此式(Ⅰ)中右端的第一项为

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x}\mathrm{d}x$$

再令 $x^2 = t$，$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$，则

$$\int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x \quad (Ⅱ)$$

式(Ⅰ)中右端的第二项为

$$\int_1^{\infty}(\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{2t} - \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x \quad (Ⅲ)$$

把式(Ⅱ)和式(Ⅲ)代入式(Ⅰ)，则有

$$J = \int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\left[\int_0^1(1 - \mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right] = \frac{1}{2}\gamma$$

这就是要证明的.

其中方括弧中的式子

$$\int_0^1(1 - \mathrm{e}^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \gamma$$

是第1个例子中已证明过的.

3. 试证 $\int_0^{\infty}\left(\cos x - \dfrac{1}{1+x}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = -\gamma$.

证明如下：

利用公式

$\int_0^{+\infty}(\cos x - \mathrm{e}^{-x})\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = 0$ (将在7.5节留数定理及其在定积分上的应用中推导)

有

$$\int_0^{+\infty}\left(\cos x - \frac{1}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)$$

令 $1 + x = \mathrm{e}^y$，则

$$x = \mathrm{e}^y - 1, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$

当 $x = \varepsilon$ 时，$y = \ln(1 + \varepsilon)$，因此

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{y}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{y}-1}\mathrm{d}y=\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{1-\mathrm{e}^{-y}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{1-\mathrm{e}^{-y}}\mathrm{d}y+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{1-\mathrm{e}^{-y}}\mathrm{d}y$$

其中

$$\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{1-\mathrm{e}^{-y}}\mathrm{d}y=\ln(1-\mathrm{e}^{-y})\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon}=\ln\frac{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

$$=\ln\frac{(1+\varepsilon)(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon})}{\varepsilon}\to 0\quad(\text{当}\ \varepsilon\to 0^{+}\ \text{时})$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\left(\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x=-\gamma$$

最后的等式在第 1 个例子中已经证明过了,因此证明了:

$$\int_{0}^{+\infty}\left(\cos x-\frac{1}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x=-\gamma$$

4. 欧拉常数 γ 与 Γ 函数及 ψ 函数的关系.

拉阿伯(Raabe)积分.

考虑积分

$$R_0=\int_{0}^{1}\ln\Gamma(a)\mathrm{d}a\qquad(\text{Ⅰ})$$

因为

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$$

所以

$$\ln\Gamma(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln a$$

把式(Ⅰ)中的 a 换成 $1-a$,则有

$$R_0=\int_{0}^{1}\ln\Gamma(1-a)\mathrm{d}a\qquad(\text{Ⅱ})$$

把式(Ⅰ)和(Ⅱ)加起来,有

$$2R_0=\int_{0}^{1}\ln\Gamma(a)\mathrm{d}a+\int_{0}^{1}\ln\Gamma(1-a)\mathrm{d}a$$

$$=\int_{0}^{1}[\ln\Gamma(a)+\ln\Gamma(1-a)]\mathrm{d}a$$

$$=\int_{0}^{1}\ln[\Gamma(a)\Gamma(1-a)]\mathrm{d}a$$

根据式(2.11),有

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

所以

$$2R_0=\int_0^1\ln[\Gamma(a)\Gamma(1-a)]\mathrm{d}a=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin a\pi}\mathrm{d}a$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=\ln\pi+\ln 2=\ln(2\pi)$$

于是得到

$$R_0=\frac{1}{2}\ln(2\pi)=\ln\sqrt{2\pi}$$

当 $a>0$ 时,有

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(a)\mathrm{d}a=\int_0^{a+1}\ln\Gamma(a)\mathrm{d}a-\int_0^a\ln\Gamma(a)\mathrm{d}a$$

对上式取导数,得

$$\frac{\mathrm{d}R(a)}{\mathrm{d}a}=R'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln a$$

积分之,得

$$R(a)=\int\ln a\mathrm{d}a=a(\ln a-1)+C$$

其中 C 为积分常数.

当 $a=0$ 时,$R(0)=C$,因为 $R_0=\ln\sqrt{2\pi}$,故 $C=\ln\sqrt{2\pi}$,所以

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(a)\mathrm{d}a=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}$$

这就是拉阿伯积分公式.

现在再来看 Γ 函数的对数的导数,其表达式为

$$\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(a)}{\mathrm{d}a}=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

用下面的方法来推导这个公式:

$$\Gamma(b)-B(a,b)=\Gamma(b)-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{b\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$$

$$=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$$

当 $b\to 0$ 时,有

$$\Gamma(b)-B(a,b)=\frac{1}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$$

其中

$$\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\to\frac{\Gamma(a+\mathrm{d}a)-\Gamma(a)}{\mathrm{d}a}$$

所以

$$\Gamma(b) - B(a,b) \to \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\mathrm{d}\Gamma(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

把 $\Gamma(b) = \int_0^{\infty} x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 和 $B(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\mathrm{d}x$ 代入上式，则有

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} &= \lim_{b\to 0}[\Gamma(b) - B(a,b)] = \lim_{b\to 0}\left[\int_0^{\infty} x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\right] \\ &= \lim_{b\to 0}\int_0^{\infty} x^{b-1}\left[\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a}}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}\end{aligned}$$

当 $a=1$ 时，有

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{(1+x)}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

在右边第二个积分中，令 $1+x=\mathrm{e}^{y}$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y$，$x=\mathrm{e}^{y}-1$，因此

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{1-\mathrm{e}^{-y}}\mathrm{d}y$$

所以

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right)\mathrm{d}x$$

这就是我们在第 1 个例子中已经证明过的积分，它的值为欧拉常数，不过符号相反罢了. 故

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right)\mathrm{d}x = -\gamma$$

从 ψ 函数的定义得知

$$\psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

因此有

$$\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \tag{2.61}$$

2.9 定积分的近似计算

2.9.1 近似计算的方法

在前面讲定积分时，我们是用牛顿－莱布尼茨公式[式(2.3)]计算定积分的，

这是寻找原函数的方法.但这样做并非全部可行,因为有时原函数不是初等函数,或原函数求不出来,或计算十分复杂.这时定积分的近似计算就不失为一种可取的方法了.

近似计算中,常用的有**矩形法、梯形法和辛普森(Simpson)法**.所有的近似计算方法都是把定积分看成是求函数曲线下面的面积,也就是说它是定积分定义中的求和法的延伸.

在求和法中曾定义定积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

其中 λ 是 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 中的最大值,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{2.62}$$

在定积分的近似计算中,沿用求和法的概念.把积分区间$[a,b]$分为 n 等份,每一份的长度为 h(图 2.4),即 $h = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,于是有

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + ih \quad (i = 0,1,2,3,\cdots,n)$$

$$x_0 = a, \quad x_n = a + nh = b$$

当 $x = x_i$ 时,被积函数

$$y_i = f(x_i) = f(a + ih)$$

若 $f(x)$是由分析法给定的,则 $f(x)$可以直接计算得到;如果 $f(x)$是由图形给出的,那么 $f(x)$可以从图上量出来.

1. 矩形法.

所谓矩形法就是将曲线下面的以 h 为宽、以 y_i 为高的所有矩形的面积累加起来,替代曲线下面的面积的方法.当 n 不断增加时,这些矩形面积之和就会逐步逼近曲线下的面积.但在近似计算中,n 不可能,也没有必要取得非常大(也就是 h 很小),只要所取的 n 使计算得到的近似值符合误差的要求就行了.

令

$$\xi_i = x_{i-1} \quad 或 \quad x_i$$

相应地

$$f(\xi_i) = y_{i-1} \quad 或 \quad y_i$$

那么,可以得到两个求近似值的矩形公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) \tag{2.63}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n) \tag{2.64}$$

当 n 越大,h 越小,式(2.63)和(2.64)算得的值越精确.当 $n\to\infty$,或 $h\to 0$,取极限

时,(2.63)、(2.64)两式的值趋于同一个值,那就得到该积分的精确值了.

如果给定的 $f(x)$ 是单调增加(或单调减少)的,可由 n 值确定误差的大小,如图 2.4 所示,在曲线 $f(x)$ 上,包含每两个分点之间的小矩形面积的总和为

$$\frac{b-a}{n}(y_n - y_0) \quad 或 \quad h(y_n - y_0)$$

无论是式(2.63)还是式(2.64),它们可能的误差不会超过上式所表示的数值.

在实用上,常取横坐标 $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}(i = 0,1,2,\cdots,n-1)$,相应的纵坐标为 $f(\xi_i) = f(x_{i+\frac{1}{2}})$,或用 $y_{i+\frac{1}{2}}$ 表示(图 2.5),那么式(2.63)或式(2.64)可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + y_{\frac{5}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}) \tag{2.65}$$

式(2.65)也是矩形公式.

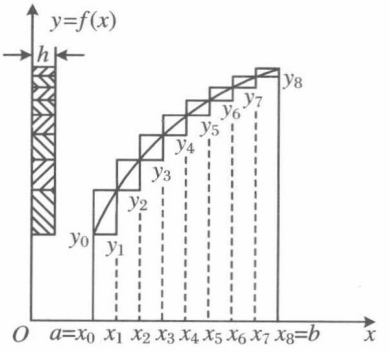


图 2.4

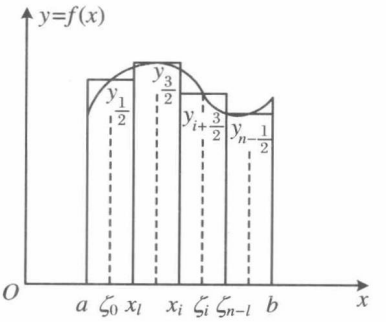


图 2.5

2. 梯形法.

(1) 用曲线的内接折线代替曲线来计算曲线下面积的近似方法称为梯形法.如图 2.6 所示,当 $x = x_i$ 时,它的纵坐标与曲线的纵坐标相同.也就是说,用这些内接的直边梯形代替原来的曲边梯形.当分点数目足够大时,误差能达到所要求的范围.梯形法的公式是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

$$= \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{2.66}$$

(2) 若把曲线的分点数目增加一倍,即把每一份再分成两半,那就得到 $2n$ 份(图2.7).这时,横坐标为

$$a = x_0, \quad x_{\frac{1}{2}} = a + \frac{h}{2}, \quad x_1 = a + h, \quad \cdots$$

$$x_i = a + ih, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h, \quad \cdots$$

$$x_{n-\frac{1}{2}} = a + \left(n - \frac{1}{2}\right)h, \quad x_n = b$$

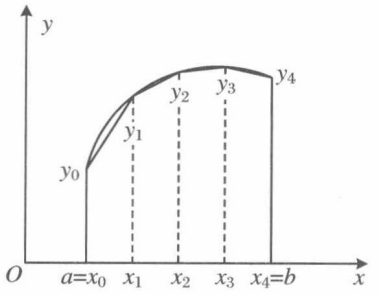


图 2.6

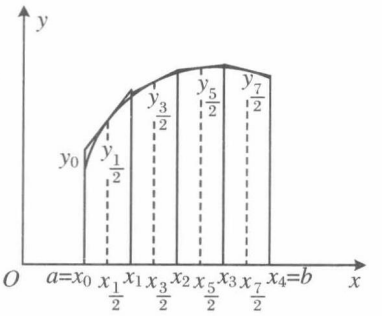


图 2.7

对应的纵坐标是：

$$y_0, \quad y_{\frac{1}{2}}, \quad y_1, \quad \cdots, \quad y_i, \quad y_{i+\frac{1}{2}}, \quad \cdots, \quad y_{n-\frac{1}{2}}, \quad y_n$$

我们把 $y_0, y_1, \cdots, y_i, \cdots, y_n$ 称为整分点纵坐标；把 $y_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{3}{2}}, \cdots, y_{n-\frac{1}{2}}$ 称为半分点纵坐标. 过每个半分点纵坐标的端点做该处的曲线的切线，并与相邻两个整分点的纵坐标相交. 用这样做成的各个梯形的面积替代相应的原曲边梯形的面积. 这是另一种梯形法，区别于内接梯形，我们称它为切线梯形，所得到的近似公式叫切线公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}\right) \tag{2.67}$$

无论是矩形公式(2.63)、(2.64)、(2.65)，还是梯形公式公式(2.66)、(2.67)，当分点数目 n 不断增大时，它们的误差会不断减小，当 n 充分大时，这些公式都能以任意程度的精确性得到所求积分的近似值.

3. 辛普森(Simpson)近似公式.

在一连串的整分点、半分点中，每过三个分点的纵坐标：

$$y_0, \quad y_{\frac{1}{2}}, \quad y_1; \quad y_1, \quad y_{\frac{3}{2}}, \quad y_2; \quad y_2, \quad y_{\frac{5}{2}}, \quad y_3; \quad \cdots; \quad y_{n-1}, \quad y_{n-\frac{1}{2}}, \quad y_n$$

的端点各做二次抛物线. 用一连串的抛物线代替原来给定的曲线，计算出每个抛物线下的面积，并把它们加起来，就得到辛普森近似公式了.

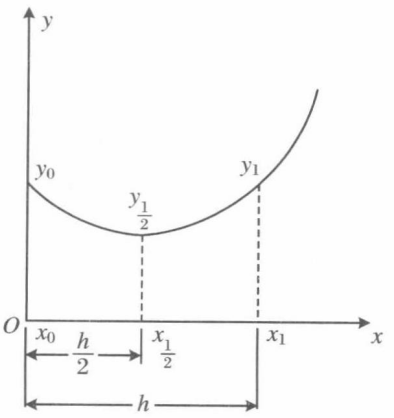


图 2.8

下面我们来推导这个辛普森公式：

令 $x_0 = 0$，相应的 y_0 在 y 坐标轴上，$y_0, y_{\frac{1}{2}}, y_1$ 的三个端点构成一条二次抛物线(图 2.8). 假设这条抛物线的方程为

$$y = ax^2 + bx + c$$

那么从 y_0 到 y_1 的端点构成的一段抛物线下的面积为

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^h (ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x \\ &= \left(a \cdot \frac{x^3}{3} + b \cdot \frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_0^h \\ &= a \cdot \frac{h^3}{3} + b \cdot \frac{h^2}{2} + ch \\ &= \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c) \end{aligned}$$

按照我们的记法，有

$$y_0 = (ax^2 + bx + c)\big|_{x=0} = c$$

$$y_{\frac{1}{2}} = (ax^2 + bx + c)\big|_{x=\frac{h}{2}} = \frac{1}{4}ah^2 + \frac{1}{2}bh + c$$

$$y_1 = (ax^2 + bx + c)\big|_{x=h} = ah^2 + bh + c$$

由此可推出

$$y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1 = 2ah^2 + 3bh + 6c$$

并且得到从 y_0 到 y_1 的端点构成的一段抛物线下的面积为

$$S_1 = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1)$$

同理可得到从 y_1 到 y_2 的端点构成的一段抛物线下的面积为

$$S_2 = \frac{h}{6}(y_1 + 4y_{\frac{3}{2}} + y_2)$$

及

$$S_3 = \frac{h}{6}(y_2 + 4y_{\frac{5}{2}} + y_3)$$

$$S_4 = \frac{h}{6}(y_3 + 4y_{\frac{7}{2}} + y_4)$$

$$\cdots$$

$$S_n = \frac{h}{6}(y_{n-1} + 4y_{n-\frac{1}{2}} + y_n)$$

最后，把上面这些小面积都加起来，就得到该曲线 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上积分的近似值：

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &\approx \frac{h}{6}\left[y_0 + 4(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n\right] \\ &= \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_n) + 4(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\right] \\ &= \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_n) + 4\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right] \end{aligned} \tag{2.68}$$

这就是辛普森近似公式.

2.9.2 近似计算算例

下面举例说明矩形法、梯形法和辛普森法的近似计算的方法、结果及误差.

1. 首先举出大家熟知的积分：$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1$.

把积分区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$分成9等份，即$n=9$.这里$a=0,b=\frac{\pi}{2}=1.5707963\cdots$，因此

$$\frac{b-a}{n}=0.1745329,\quad \frac{b-a}{2n}=0.0872665,\quad \frac{b-a}{6n}=0.0290888$$

$$y_0=\sin 0^\circ=0,\qquad y_{\frac{1}{2}}=\sin 5^\circ=0.08716$$

$$y_1=\sin 10^\circ=0.17365,\qquad y_{\frac{3}{2}}=\sin 15^\circ=0.25882$$

$$y_2=\sin 20^\circ=0.34202,\qquad y_{\frac{5}{2}}=\sin 25^\circ=0.42262$$

$$y_3=\sin 30^\circ=0.50000,\qquad y_{\frac{7}{2}}=\sin 35^\circ=0.57358$$

$$y_4=\sin 40^\circ=0.64279,\qquad y_{\frac{9}{2}}=\sin 45^\circ=0.70711$$

$$y_5=\sin 50^\circ=0.76604,\qquad y_{\frac{11}{2}}=\sin 55^\circ=0.81915$$

$$y_6=\sin 60^\circ=0.86603,\qquad y_{\frac{13}{2}}=\sin 65^\circ=0.90631$$

$$y_7=\sin 70^\circ=0.93969,\qquad y_{\frac{15}{2}}=\sin 75^\circ=0.96593$$

$$y_8=\sin 80^\circ=0.98481,\qquad y_{\frac{17}{2}}=\sin 85^\circ=0.99619$$

$$\sum_{i=1}^{8}y_i=5.21503,\qquad \sum_{i=1}^{9}y_{i-\frac{1}{2}}=5.73687$$

$$y_9=\sin 90^\circ=1.00000$$

$$\sum_{i=1}^{9}y_i=6.21503$$

把上面的数据代入相应的近似公式中：

按照矩形公式(2.63)，有

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}y_i=\frac{1.57079\cdots-0}{9}\times 5.21503=0.91019$$

按照矩形公式(2.64)，有

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1.57079\cdots-0}{9}\times 6.21503=1.08473$$

按照矩形公式(2.65)，有

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{i-\frac{1}{2}}=\frac{1.57079\cdots-0}{9}\times 5.73087=1.00127$$

使用梯形公式(2.66)，有

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2n}\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)$$

$$=\frac{1.57079\cdots-0}{18}(0+1+2\times5.21503)=0.99746$$

应用切线公式(2.67),有

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{i-\frac{1}{2}}=\frac{1.57079\cdots-0}{9}\times5.73087=1.00127$$

与矩形公式(2.65)同.

运用辛普森公式(2.68),有

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6n}\left[(y_0+y_n)+4\sum_{i=1}^{n}y_{i-\frac{1}{2}}+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right]$$

$$=\frac{1.57079\cdots-0}{6\times9}[(0+1)+4\times5.73687+2\times5.21503]$$

$$=0.0290888\times34.37754=1.000001386$$

我们知道,该积分的精确值是1,因此可以看出:在采用相同的原始数据的情况下,辛普森公式得到的近似值最接近真值.所以人们在做近似计算时都喜欢使用辛普森公式.

2. 用辛普森公式计算第二类完全椭圆积分 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2x}\mathrm{d}x$.

这个积分在本章2.7节无穷级数积分法中计算过,现在用辛普森公式计算,也许更方便.设 $k=\frac{1}{2}$,被积函数 $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2x}$.

取 $n=3$

$x_0=0(0^\circ)$, $y_0=1$

$x_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}(15^\circ)$, $y_{\frac{1}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot0.25882^2}=0.99159$

$x_1=\frac{\pi}{6}(30^\circ)$, $y_1=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0.96825$

$x_{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{4}(45^\circ)$, $y_{\frac{3}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot0.70711^2}=0.93541$

$x_2=\frac{\pi}{3}(60^\circ)$, $y_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=0.90139$

$$x_{\frac{5}{2}} = \frac{5\pi}{12}(75^\circ), \quad y_{\frac{5}{2}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0.96593^2} = 0.87564$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}(90^\circ), \quad y_3 = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1} = 0.86603$$

把相关数据代入辛普森公式,得到

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0+y_n)+4\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

$$= \frac{1.57079-0}{6\times 3}[(1+0.86603)+4\times(0.99159+0.93541+0.87564)$$

$$+2\times(0.96825+0.90139)]$$

$$= 0.087266\times 16.81587 = 1.46745$$

这个计算结果与2.8节无穷级数积分法中计算结果做比较,前5位有效数字是相同的.也就是说前5位有效数字是精确的.但用辛普森公式计算的工作量要小得多.

注:该积分的精确值是:$E\left(\frac{1}{2}\right) = 1.467462209\cdots$(采自《Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables》, Edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, 1966.)

3. 用公辛普森公式计算积分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$.

被积函数是

$$y = f(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

把积分区间从0到1分成5等份,即 $n=5$,所以 $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$.

x, $\arctan x$, $\frac{\arctan x}{x}$ 分别为:

x_i,	$x_{i-\frac{1}{2}}$,	$\arctan x_i$,	$\arctan x_{i-\frac{1}{2}}$,	$y_i = \frac{\arctan x_i}{x_i}$,	$y_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\arctan x_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i-\frac{1}{2}}}$
$x_0 = 0$,		0,		$y_0 = 1$	
$x_{\frac{1}{2}} = 0.1$,		0.09966865,		$y_{\frac{1}{2}} = 0.9966865$	
$x_1 = 0.2$,		0.19739556,		$y_1 = 0.9869778$	
$x_{\frac{3}{2}} = 0.3$,		0.29145679,		$y_{\frac{3}{2}} = 0.9715226$	
$x_2 = 0.4$,		0.38050638,		$y_2 = 0.9512659$	
$x_{\frac{5}{2}} = 0.5$,		0.46364761,		$y_{\frac{5}{2}} = 0.9272952$	
$x_3 = 0.6$,		0.54041950,		$y_3 = 0.9006992$	

$x_{\frac{7}{2}} = 0.7,\quad 0.61072596,\qquad y_{\frac{7}{2}} = 0.8724657$

$x_4 = 0.8,\quad 0.67474094,\qquad y_4 = 0.8434262$

$x_{\frac{9}{2}} = 0.9,\quad 0.73281510,\qquad y_{\frac{9}{2}} = 0.8142390$

$x_5 = 1.0,\quad 0.78539816,\qquad y_5 = 0.7853982$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 0.9869778 + 0.9512659 + 0.9006992 + 0.8434262$$
$$= 3.6823691$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_{i-\frac{1}{2}} = 0.9966865 + 0.9715226 + 0.9272952 + 0.8724657 + 0.8142390$$
$$= 4.582209$$

把上面的数据代入辛普森公式,得到

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0}{6\times 5}\left[(y_0 + y_5) + 4\sum_{i=1}^{5} y_{i-\frac{1}{2}} + 2\sum_{i=1}^{4} y_i\right]$$
$$= \frac{1}{30}[(1 + 0.7853982) + 4\times 4.582209 + 2\times 3.6823691]$$
$$= \frac{1}{30}(1.7853982 + 18.328836 + 7.3647382)$$
$$= \frac{27.4789724}{30} = 0.9159657$$

这个积分,我们在无穷级数积分中已经求得它的结果是卡塔兰常数 G,并已知这个常数值是 $G = 0.915965594\cdots$.用辛普森法计算得到的数值在小数点后 6 位都是精确的.

注:arctan x 的数值采自《Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables》, Edited by M. Abramowitz and Irene. A. Stegun, 1966.

4. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\ln 2 - G = 0.17282745\cdots$.

令

$n = 5,\quad \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2,\quad \frac{b-a}{2n} = 0.1,\quad \frac{b-a}{6n} = \frac{1}{30},\quad y = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$

$x_0 = 0,\quad y_0 = 0,\qquad x_{\frac{1}{2}} = 0.1,\quad y_{\frac{1}{2}} = 0.00985181$

$x_1 = 0.2,\quad y_1 = 0.03771222,\qquad x_{\frac{3}{2}} = 0.3,\quad y_{\frac{3}{2}} = 0.07906211$

$x_2 = 0.4,\quad y_2 = 0.12794828,\qquad x_{\frac{5}{2}} = 0.5,\quad y_{\frac{5}{2}} = 0.17851484$

$x_3 = 0.6,\quad y_3 = 0.22609169,\qquad x_{\frac{7}{2}} = 0.7,\quad y_{\frac{7}{2}} = 0.26763498$

$x_4 = 0.8,\quad y_4 = 0.30164405,\qquad x_{\frac{9}{2}} = 0.9,\quad y_{\frac{9}{2}} = 0.32780489$

$\sum_{i=1}^{4} y_i = 0.69339624,\qquad \sum_{i=1}^{5} y_{i-\frac{1}{2}} = 0.86286863$

$x_5 = 1,\quad y_5 = 0.34657359$

用矩形公式(2.65)得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{5}\sum_{i=1}^{5} y_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times 0.86286863 = 0.1725737$$

用梯形公式(2.66)得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{2\times 5}(y_0 + y_5 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i)$$

$$= \frac{1}{10} \times (0 + 0.34657359 + 2 \times 0.69339624) = 0.1733366$$

使用辛普森公式(2.68)得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{6\times 5}\left[(y_0 + y_5) + 4\sum_{i=1}^{5} y_{i-\frac{1}{2}} + 2\sum_{i=1}^{4} y_i\right]$$

$$= \frac{1}{30}[(0 + 0.34657359) + 4 \times 0.86286863 + 2 \times 0.69339624]$$

$$= \frac{1}{30} \times 5.18484059 = 0.17282802$$

该积分的计算结果也表明辛普森公式的近似值最好,小数点后的5位都是正确的.

5. 计算 $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 的近似值.

令 $n=5$,则

$$h = \frac{1-0}{5} = 0.2, \quad y = \frac{1}{1+x^2}$$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$; $x_{\frac{1}{2}} = 0.1$, $y_{\frac{1}{2}} = 0.99009901$

$x_1 = 0.2$, $y_1 = 0.96153846$; $x_{\frac{3}{2}} = 0.3$, $y_{\frac{3}{2}} = 0.91743119$

$x_2 = 0.4$, $y_2 = 0.86206897$; $x_{\frac{5}{2}} = 0.5$, $y_{\frac{5}{2}} = 0.8$

$x_3 = 0.6$, $y_3 = 0.73529412$; $x_{\frac{7}{2}} = 0.7$, $y_{\frac{7}{2}} = 0.67114094$

$x_4 = 0.8$, $y_4 = 0.60975610$; $x_{\frac{9}{2}} = 0.9$, $y_{\frac{9}{2}} = 0.55248619$

$\sum_{i=1}^{4} y_i = 3.16865765$; $\sum_{i=1}^{5} y_{i-\frac{1}{2}} = 3.93115733$

$x_5 = 1$, $y_5 = 0.5$

把上述数据代入辛普森公式,得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_n) + 4\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

$$= \frac{1}{6\times 5}[(1 + 0.5) + 4 \times 3.93115733 + 2 \times 3.16865765]$$

$$= \frac{1}{30} \times 23.56194462 = 0.78539815$$

因此有

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx 4 \times 0.78539815 = 3.14159262$$

结果显示,这个近似值的前 8 位都是精确的,说明它已经是相当好的近似了.

为什么所举的几个近似计算的算例都是已知精确值的呢? 因为有精确值可资比较,就会知道所进行的近似计算的精度如何,误差到底有多少? 这对做近似计算时采用哪种方法,如何进行区间的划分(决定 n)都是有用的.

2.9.3 近似计算的误差估算

无论是矩形法、梯形法,还是辛普森法,做近似计算的结果与真值之间都有一个差值,这个差值就是近似计算的误差.我们要使这个误差尽量小,并能满足要求.要想使误差减小,主要的办法是把区间划分得更细(即 n 增大);还有选择较好的方法(公式)也很重要.前面算例中的第 1 个例子和第 4 个例子,都对矩形法、梯形法和辛普森法进行了比较,在相同的区间划分的情况下,辛普森法具有明显的优势.下面我们来讨论这三种方法的误差估算.

1. 矩形法的误差.

下面以矩形公式(2.65)为例来推算它的误差.把积分区间$[a,b]$分成 n 等份,先计算其中任一份小区间$[x_i,x_{i+1}]$上的误差.

令 $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$,则

$$f(\xi_i) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

于是 $f(x)$在小区间$[x_i,x_{i+1}]$的积分近似为

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} f(\xi_i) \tag{2.69}$$

另一方面,当 x 在区间$[x_i,x_{i+1}]$变化时,把 $f(x)$按照 $x-\xi_i$ 用泰勒级数展开(到二阶导数),则有

$$f(x) = f(\xi_i) + \frac{x-\xi_i}{1!} f'(\xi_i) + \frac{(x-\xi_i)^2}{2!} f''(\xi_i) \tag{2.70}$$

对 $f(x)$在区间$[x_i,x_{i+1}]$上积分,有

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(\xi_i) + \frac{x-\xi_i}{1!} f'(\xi_i) + \frac{(x-\xi_i)^2}{2!} f''(\xi_i) \right] \mathrm{d}x$$

该式右边的第二个积分为零,所以

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x &= (x_{i+1}-x_i) f(\xi_i) + \frac{1}{2} f''(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-\xi_i)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{b-a}{n} f(\xi_i) + \frac{1}{2} f''(\xi_i) \cdot \frac{1}{12} (x_{i+1}-x_i)^3 \\ &= \frac{b-a}{n} f(\xi_i) + \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi_i) \end{aligned} \tag{2.71}$$

对于整个区间$[a,b]$的积分，要把每个子区间$[x_i,x_{i+1}]$的积分加起来，因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) + \frac{(b-a)^3}{24n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_i)}{n} \tag{2.72}$$

如果把近似公式(2.65)写成带有余项R_n的式子，那么有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) + R_n \tag{2.73}$$

比较式(2.72)、(2.73)两式，就得到矩形法的误差(即余项)为

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_i)}{n} \tag{2.74}$$

若用m和M分别表示连续函数$f''(x)$在区间$[a,b]$上的最小值和最大值，那么误差公式(2.74)中的表达式

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_i)}{n} = \frac{f''(\xi_0)+f''(\xi_1)+\cdots+f''(\xi_{n-1})}{n}$$

应在m和M之间，我们把它写成$f''(\xi)$，因此式(2.74)可写成

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b) \tag{2.75}$$

这就是矩形法的误差公式，$f''(\xi)$取最大值.

2. 梯形法的误差.

如图2.9所示，设$f(x)$是区间$[a,b]$的曲线$\overset{\frown}{AB}$的函数，则可把它写成

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(x) + \frac{x-a}{b-a}f(x) \tag{2.76}$$

对于描述$\overline{AB}$直线的函数$g(x)$而言，因为有

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{g(b)-g(x)}{b-x}$$

所以

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a}g(a) + \frac{x-a}{b-a}g(b)$$

由于在$x=a$处，$g(a)=f(a)$；在$x=b$处，$g(b)=f(b)$，因此有

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{2.77}$$

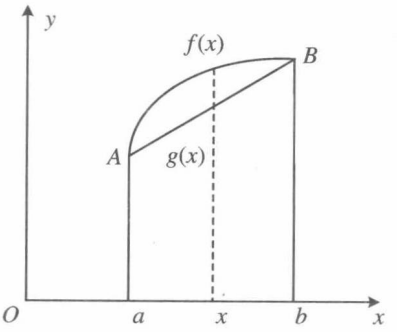


图 2.9

用式(2.76)减去式(2.77)，得

$$f(x)-g(x) = \frac{b-x}{b-a}[f(x)-f(a)] + \frac{x-a}{b-a}[f(x)-f(b)] \tag{2.78}$$

把式(2.78)的方括弧中的函数用泰勒级数展开，有

$$f(x)-f(a) = (x-a)f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant x) \tag{2.79-1}$$

$$f(x)-f(b)=(x-b)f'(x)+\frac{(x-b)^2}{2!}f''(\eta)\quad(x\leqslant\eta\leqslant b)\tag{2.79-2}$$

把式(2.79-1)和式(2.79-2)代入式(2.78),得

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\frac{b-x}{b-a}\left[(x-a)f'(x)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(\xi)\right]\\&\quad+\frac{x-a}{b-a}\left[(x-b)f'(x)+\frac{(x-b)^2}{2!}f''(\eta)\right]\\&=\frac{(b-x)(x-a)^2}{2(b-a)}f''(\xi)+\frac{(x-a)(b-x)^2}{2(b-a)}f''(\eta)\\&=\frac{(b-x)(x-a)}{2}\left[\frac{x-a}{b-a}f''(\xi)+\frac{b-x}{b-a}f''(\eta)\right]\\&=\frac{(b-x)(x-a)}{2}\left[\frac{x-a}{b-a}f''(\zeta)+\frac{b-x}{b-a}f''(\zeta)\right]\quad(a\leqslant\zeta\leqslant b)\\&=\frac{(b-x)(x-a)}{2}f''(\zeta)\end{aligned}\tag{2.80}$$

这就是在区间$[a,b]$上任一点x处原来的函数$f(x)$与作为梯形近似的取直线的函数$g(x)$的数值之差.把它积分起来就是梯形法近似计算的误差了:

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x&=\frac{f''(\zeta)}{2}\int_a^b(b-x)(x-a)\mathrm{d}x\\&=\frac{f''(\zeta)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6}=\frac{f''(\zeta)}{12}(b-a)^3\end{aligned}$$

当把积分区间$[a,b]$分割成n等份时,则有

$$R_n=\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)\tag{2.81}$$

这就是梯形公式的误差.

3. 辛普森公式的误差.

在辛普森近似公式的推导中,我们是用二次抛物线近似计算得到的.若把这个二次抛物线函数写成

$$P_2(x)=a_1x^2+a_2x+a_3$$

那么,对它积分后就得到辛普森近似公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\int_a^b P_2(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

若令

$$f(x)=P_2(x)+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\tag{2.82}$$

那么,式(2.82)右端的第二项的积分应该是辛普森近似公式的余项.但可惜它的积分值为零.如果函数$f(x)$存在直到四阶的导数,那么可利用带有余项的埃尔米特(Hermite)多项式,把函数$f(x)$写成

$$f(x)=P_2(x)+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

$$+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b) \tag{2.83}$$

式(2.83)右边的第三项为单结点 a,b 及二重结点$\frac{a+b}{2}$的埃尔米特多项式的余项.

当积分式(2.83)时,右端第一项为辛普森近似公式值,第二项积分为零,第三项就是辛普森近似公式的误差:

$$R_0=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x$$

其中的积分为

$$\begin{aligned}
&\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\left\{x^4-2(a+b)x^3+\left[ab+\frac{5}{4}(a+b)^2\right]x^2\right.\\
&\quad\left.-\left[ab(a+b)+\frac{1}{4}(a+b)^3\right]x+\frac{1}{4}ab(a+b)^2\right\}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{120}(b^5-5b^4a+10b^3a^2-10b^2a^3+5ba^4-a^5)\\
&=-\frac{1}{120}(b-a)^5
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
R_0&=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\cdot\frac{(b-a)^5}{120}=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180\times2^4}(b-a)^5
\end{aligned}$$

当区间$[a,b]$被分成 n 等份时,则应把每一部分的连续导数 $f^{(4)}(\xi_i)$考虑进来,那么辛普森近似公式的误差为

$$\begin{aligned}
R_n&=-\frac{(b-a)^5}{180\times2^4n^4}\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_0)+f^{(4)}(\xi_1)+\cdots+f^{(4)}(\xi_{n-1})}{n}\\
&=-\frac{(b-a)^5}{180\times(2n)^4}f^{(4)}(\zeta)\quad(a\leqslant\zeta\leqslant b)
\end{aligned}\tag{2.84}$$

导数 $f^{(4)}(\zeta)$在区间$[a,b]$上随 x 变化,可取其最大值.

式(2.84)表明,如果 $f(x)$是一个不超过三次的多项式,那么 $f^{(4)}(\zeta)=0$,表示辛普森公式(2.68)算出的值是准确值.

第 3 章　定积分的应用

本章将介绍定积分在计算面积、体积、曲线长度及物体的表面积等方面的应用.

3.1　面积的计算

在讲定积分的定义时,已经讲到用求和法来计算曲线下面的面积的计算方法.无论是黎曼的定义,还是求和法的定义,实际上都是用计算曲线下的面积来定义定积分的.因此现在也从计算曲线下的面积开始来讲定积分的应用.

3.1.1　用定积分的定义来计算面积

设曲线 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,则由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a$,$x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积(图 3.1)是

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

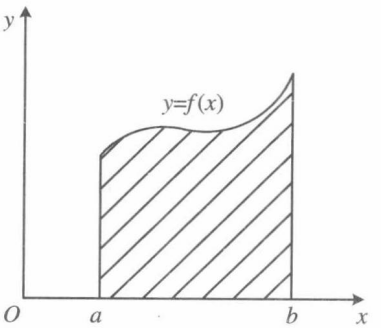


图 3.1

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上变号时(图 3.2),$f(x)$ 应取绝对值,即

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{3.2}$$

如果是由图 3.3 形状的封闭曲线围成的图形，那么由它包围的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\,dx \tag{3.3}$$

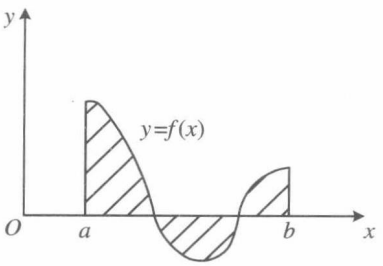


图 3.2

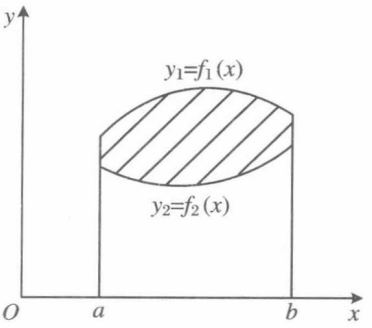


图 3.3

3.1.2　几种常见曲线围成的面积的计算

1. 椭圆的面积.

(1) 椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.4}$$

把椭圆的圆心置于坐标轴的原点处，由于椭圆关于两个坐标轴(x, y)都对称，所以它的面积 S 等于第一象限上的面积的 4 倍(图 3.4)，即

$$S = 4\int_0^a y\,dx \tag{3.5}$$

在第一象限上，根据方程(3.4)，得到

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

把它代入式(3.5)中，则有

$$S = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

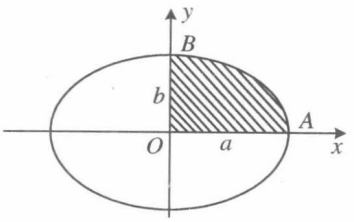


图 3.4

令 $\frac{x}{a} = t$，则 $dx = a\,dt$.

当 $x = 0$ 时，$t = 0$；当 $x = a$ 时，$t = 1$. 于是

$$S = 4ab\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt = 4ab \cdot \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t\right)\Big|_0^1$$

$$= 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

(2) 应用椭圆的参数方程计算椭圆的面积

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \tag{3.6}$$

用新变量 t 替换 x, y，用式(3.6)中的第二个方程表达. 当 x 从 0 变到 a 时，t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0. 因为在这种情况下，换元法的条件都满足，于是

$$S = 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t \cdot \mathrm{d}(a\cos t) = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2 t \cdot \mathrm{d}t$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t = 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ab$$

当 $a = b$ 时，该曲线就是一个圆，它的面积 $S = \pi a^2$.

2. 用极坐标求扇形面积.

由曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 和极点 O 构成的扇形，其矢径 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 与极轴 L（x 轴）构成的极角分别为 α 与 β（图 3.5）. 曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在极坐标中的方程是

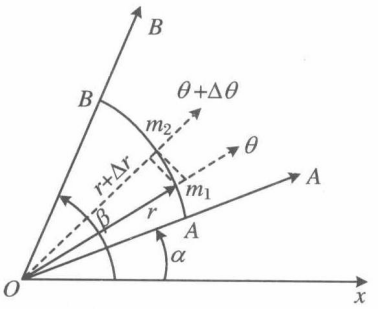


图 3.5

$$r = f(\theta) \tag{3.7}$$

矢径 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 与极轴构成的极角为

$$\theta_1 = \alpha, \quad \theta_2 = \beta$$

那么，两矢径与曲线构成的扇形 OAB 的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\mathrm{d}\theta \tag{3.8}$$

为求得这个公式，考虑介于 θ 与 $\theta + \Delta\theta$ 之间的小面积. 相应于 θ 的矢径为 r，它在曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上的端点是 m_1；相应于 $\theta + \Delta\theta$ 矢径为 $r + \Delta r$，它在曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上的端点是 m_2. 那么，这个小三角形 Om_1m_2 的面积是

$$\Delta S \approx \frac{1}{2}r \cdot r\Delta\theta = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

当 $\Delta\theta$ 趋向零时，就得到该扇形 OAB 的面积

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$

当 r 为常数时

$$S = \frac{1}{2}r^2\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}r^2(\beta - \alpha)$$

3. 三叶玫瑰的面积.

三叶玫瑰线的曲线方程是

$$r = a\cos 3\theta \quad (a > 0) \tag{3.9}$$

因为三叶玫瑰的每瓣叶子的面积是相等的，所以三瓣叶子的总面积为图中斜线部分的面积的6倍(图3.6).

图中斜线部分的面积对应于 θ 从0到 $\frac{\pi}{6}$. 由式(3.8)，得

$$S = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta \mathrm{d}\theta$$

令 $3\theta = t$，则 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$. 当 $\theta = 0$ 时，$t = 0$；当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$. 所以

$$S = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \frac{1}{3}\mathrm{d}t = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \mathrm{d}t$$

$$= a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\pi a^2$$

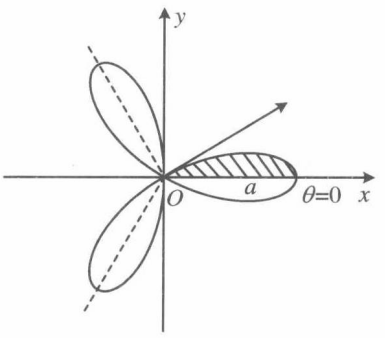


图 3.6

4. 旋轮线下的面积.

如图3.7所示，设有一个半径为 a、圆心为 C 的圆，在一条不动的直线上滚动. 圆周上的一点 M 所画出来的几何轨迹就叫旋轮线.

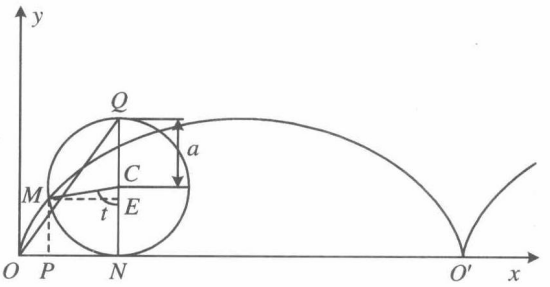


图 3.7

将圆滚动时所沿的直线取作 Ox 轴. 点 M 开始时的位置，就是圆与 Ox 的切点，作为原点 O. 圆周转动的角度记作 t. 在某一时刻，圆周与 Ox 轴的切点记作 N，M 点在 Ox 轴上的投影记作 P，过 N 点的圆的直径记作 NQ，$NQ = 2a$. 点 M 在 NQ 上的投影记作 E，$\angle MCN = t$ 为圆心角.

由于没有滑动，所以线段 $\overline{ON} = \overset{\frown}{MN} = at$. 利用参变量 t，旋轮线上的 M 点的坐标可表示为

$$\begin{cases} x = \overline{OP} = \overline{ON} - \overline{PN} = at - a\sin t = a(t - \sin t) \\ y = \overline{MP} = \overline{CN} - \overline{CE} = a - a\cos t = a(1 - \cos t) \end{cases} \tag{3.10}$$

这就是旋轮线的参变量方程.

旋轮转一圈后,点 M 与 Ox 轴上的 O' 重合. O' 是圆周上的 M 点与直线 Ox 轴第二次接触时的切点,所以 $\overline{OO'}=2\pi a$. 再转一圈时,得到的图形与弧 $\overset{\frown}{OO'}$ 相同,只是又向右平移了 $2\pi a$ 的距离.

现在我们来计算旋轮线 $\overset{\frown}{OO'}$ 与 Ox 轴构成的图形的面积 S:

$$S=\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x$$

用 $y=a(1-\cos t)$, $\mathrm{d}x=a(1-\cos t)\mathrm{d}t$ 代入,得

$$S=\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}4\sin^4\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

令 $\frac{t}{2}=\alpha$, $t=2\alpha$,则 $\mathrm{d}t=2\mathrm{d}\alpha$. 当 $t=0$ 时, $\alpha=0$;当 $t=2\pi$, $\alpha=\pi$. 因此

$$S=8a^2\int_0^{\pi}\sin^4\alpha\mathrm{d}\alpha=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\alpha\mathrm{d}\alpha$$

根据式(2.18)有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\alpha\mathrm{d}\alpha=\frac{(4-1)!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

因此,最后得到旋轮线的面积为

$$S=16a^2\cdot\frac{3\pi}{16}=3\pi a^2$$

5. 心脏线(圆外旋轮线)包围的面积.

若一个圆不在一条直线上滚动,而在另外一个不动的圆上滚动,则由滚动圆上的一个定点 M 可画出两类曲线:滚动的圆在不动圆的圆外滚动时得到圆外旋轮线;在不动圆的圆内滚动时得到圆内旋轮线.

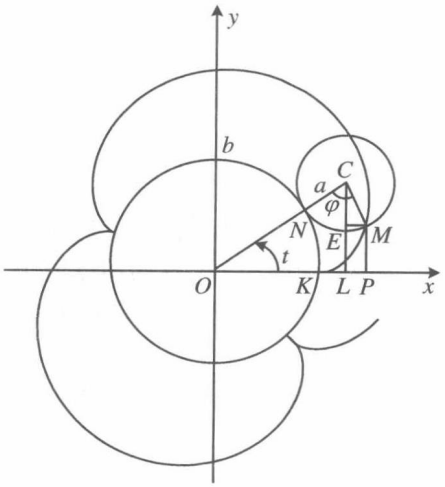


图 3.8

(1) 圆外旋轮线.

取不动圆的圆心 O 作为坐标原点. 坐标轴 Ox 与静止圆的交点为 K,设点 K 就是开始时滚动圆上点 M 的位置,是开始时两圆的切点(图 3.8). 设滚动圆的半径为 a,静止圆的半径为 b. 当滚动圆转了一个角度 φ 时,两圆的切点为 N,所以 $\varphi=\angle NCM$. 这时不动圆的半径 ON 与 Ox 轴的交角记作 t. 因为两圆之间没有滑动,所以有弧长 $\overset{\frown}{KN}=\overset{\frown}{MN}$,也就是

$$bt = a\varphi, \quad \varphi = \frac{bt}{a}$$

从图 3.8 可知 M 点的坐标

$$\begin{aligned} x &= \overline{OP} = \overline{OL} + \overline{LP} = \overline{OC}\cos\angle LOC + \overline{CM}\sin\angle ECM \\ &= (a+b)\cos t + a\sin\angle ECM \end{aligned}$$

因为

$$\angle NCM = \varphi = \frac{bt}{a}, \quad \angle NCE = \frac{\pi}{2} - t$$

而

$$\angle ECM = \angle NCM - \angle NCE = \frac{bt}{a} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{a+b}{a}t - \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\sin\angle ECM = \sin\left(\frac{a+b}{a}t - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{a}t\right) = -\cos\frac{a+b}{a}t$$

于是

$$x = (a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t$$

还有

$$\begin{aligned} y &= MP = CL - CE = OC\sin\angle COL - CM\cos\angle ECM \\ &= (a+b)\sin t - a\cos\angle ECM \end{aligned}$$

由于

$$\cos\angle ECM = \cos\left(\frac{a+b}{a}t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{a}t\right) = \sin\frac{a+b}{a}t$$

因此有

$$y = (a+b)\sin t - a\sin\frac{a+b}{a}t$$

于是我们得到圆外旋轮线的参数方程

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - a\cos\dfrac{a+b}{a}t \\ y = (a+b)\sin t - a\sin\dfrac{a+b}{a}t \end{cases} \tag{3.11}$$

这是圆外旋轮线的一般的参数方程.

(2) 心脏线.

在式(3.11)中,当 $a = b$ 时,即滚动的圆与不动的圆的半径相等时,得到的旋轮线就是**心脏线**(图 3.9).它的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \tag{3.12}$$

有了心脏线的参数方程,我们就可计算心脏线所包围的面积了.因为心脏线相对于

Ox 轴是对称的，只要求出位于 Ox 轴以上的部分面积，再乘以 2 就行了.

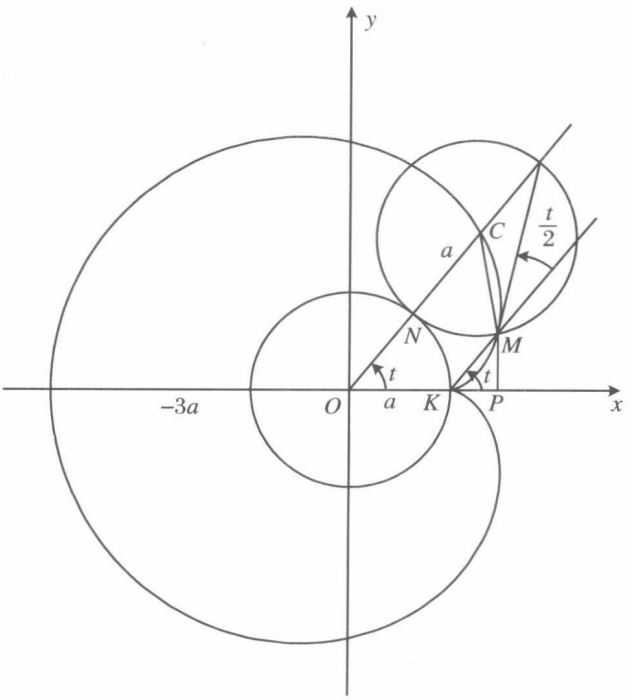


图 3.9

① 利用参数方程(3.12)，求得

$$\mathrm{d}x = -2a(\sin t - \sin 2t)\mathrm{d}t$$

并且当 $x=a$ 时，$t=0$；当 $x=-3a$ 时，$t=\pi$. 可以看出，从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的区间内，开始时 x 随 t 的增加而增加，但到达某一点后，x 随 t 的增加而减小，以至于走到 x 的负方向上去.

在这一点上 x 达到最大值，它就是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2a(\sin t - \sin 2t) = 0$$

也就是 $\sin t = \sin 2t$ 处.

不难算出这一点为 $t=\frac{\pi}{3}$. 当 $t<\frac{\pi}{3}$ 时，x 随 t 的增加而增加；当 $t>\frac{\pi}{3}$ 时，x 随 t 的增加而减小. 尽管 $\mathrm{d}x$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 前后符号有变化，但对于参变量 t 来说，滚动圆滚动过程中，t 一直是增加的，也就是说 $\mathrm{d}t$ 一直是正值. 因此积分号下的微分式应取绝对值. 于是心脏线所包围的面积是

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_a^{-3a} y\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\pi} a(2\sin t - \sin 2t)\cdot[2a(\sin t - \sin 2t)]\mathrm{d}t \\
&= 4a^2\int_0^{\pi}(2\sin^2 t - 3\sin t\cdot\sin 2t + \sin^2 2t)\mathrm{d}t \\
&= 4a^2\int_0^{\pi}(2\sin^2 t - 6\sin^2 t\cdot\cos t + 4\sin^2 t\cdot\cos^2 t)\mathrm{d}t \\
&= 4a^2\int_0^{\pi}[2(1-\cos^2 t) - 6(1-\cos^2 t)\cos t + 4(1-\cos^2 t)\cos^2 t]\mathrm{d}t \\
&= 4a^2\left(\int_0^{\pi} 2\mathrm{d}t - 6\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t + 6\int_0^{\pi}\cos^3 t\mathrm{d}t - 4\int_0^{\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t\right) \\
&= 4a^2\left(2\pi - 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - 4\cdot\frac{3!!}{4!!}\pi\right) = 6\pi a^2
\end{aligned}
$$

② 用极坐标计算心脏线所包围的面积.

令 K 点(心脏线的起始点)到 M 点的距离为 r. 因为 K 点的笛卡儿坐标为 $(a,0)$,所以要先求出 $x-a$ 及 y 的表达式:

$$
\begin{aligned}
x - a &= 2a\cos t - a\cos 2t - a = 2a\cos t - a(\cos^2 t - \sin^2 t) - a \\
&= 2a\cos t - 2a\cos^2 t = 2a\cos t(1-\cos t) \\
y &= 2a\sin t - a\sin 2t = 2a\sin t - 2a\sin t\cos t = 2a\sin t(1-\cos t) \\
r &= |\overline{KM}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\
&= \sqrt{4a^2\cos^2 t\,(1-\cos t)^2 + 4a^2\sin^2 t\,(1-\cos t)^2} \\
&= \sqrt{4a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)(1-\cos t)^2} \\
&= 2a(1-\cos t) \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

从图 3.9 可看出,$OKMC$ 为等腰梯形(因为 $OK = CM = a$,$\angle COK = \angle OCM = t$),所以$\overline{KM}$平行于$\overline{OC}$,$\angle MKP = \angle COK = t$.

引入角度 $\theta = \pi - t$,它是线段 KM 与 Ox 轴的负向交角. 把它代入式(3.13),得到

$$r = 2a(1+\cos\theta) \qquad (3.14)$$

这就是心脏线的极坐标方程. 其中极轴的方向与 Ox 轴的方向相反,K 点为极点,r 为矢径. 如果把图 3.9 的图形旋转 180°,则 θ 角指向逆时针的方向为正方向.

在 3.1.2 小节第 2 个例子中已知道在极坐标下求面积的公式(3.8),把式(3.14)代入式(3.8)中,得到

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} 4a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta \\
&= 4a^2\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2\mathrm{d}\theta = 16a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

令 $\frac{\theta}{2} = \varphi$,则 $\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{d}\varphi$. 当 $\theta = 0$ 时,$\varphi = 0$;而当 $\theta = \pi$ 时,$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

因此，最后得到心脏线所包围的面积是

$$S = 16a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 32a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= 32a^2\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 6\pi a^2$$

其结果与前面①计算的结果相同，但使用极坐标做积分要简便得多.

6. 星形线(圆内旋轮线)内的面积.

圆内旋轮线的方程可从圆外旋轮线方程(3.11)得到，只要把式(3.11)中的 a 用 $-a$ 代替就行了：

$$\begin{cases} x = (b-a)\cos t + a\cos\dfrac{b-a}{a}t \\ y = (b-a)\sin t - a\sin\dfrac{b-a}{a}t \end{cases} \tag{3.15}$$

方程中的符号与前面的相同，a，b 分别为滚动圆与不动圆的半径，t 为参变量.

如果令方程(3.15)中 $b=2a$，则得到

$$\begin{cases} x = a\cos t + a\cos t = 2a\cos t = b\cos t \\ y = a\sin t - a\sin t = 0 \end{cases}$$

该方程表明，若不动圆的半径是滚动圆的半径的 2 倍，则滚动圆上的点 M 在不动圆的某一直径上运动，轨迹是一条直线.

如果令方程(3.15)中 $b=4a$. 在这种情况下，圆内旋轮线由四支组成(图 3.10). 这种圆内旋轮线叫星形线. 把 $b=4a$ 代入方程(3.15)，则得到

$$\begin{aligned} x &= 3a\cos t + a\cos 3t \\ &= 3a\cos t + a(4\cos^3 t - 3\cos t) \\ &= 4a\cos^3 t = b\cos^3 t \\ y &= 3a\sin t - a\sin 3t \\ &= 3a\sin t - a(3\sin t - 4\sin^3 t) \\ &= 4a\sin^3 t = b\sin^3 t \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} x = b\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \tag{3.16}$$

这就是星形线的参变量方程.

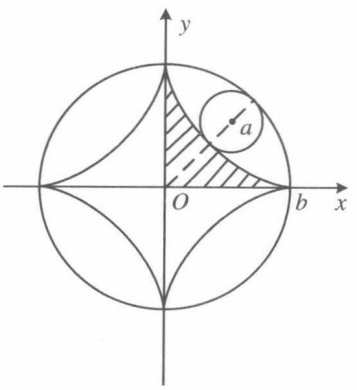


图 3.10

现在求星形线所包围的面积 S. 它是图 3.10 中画斜线部分的面积的 4 倍，即

$$S = 4\int_0^b y\mathrm{d}x$$

把 $y=b\sin^3 t$，$\mathrm{d}x = -3\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$ 代入上式. 当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，当 $x=b$ 时，$t=0$.

因此得到星形线所包围的面积是

$$S = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin^3 t(-3b\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t) = 12b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 12b^2 \cdot \frac{3!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}b^2\pi$$

这里我们用了下面的公式，当 m，n 皆为偶数时，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\theta\cos^n\theta\mathrm{d}\theta = \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

7. 双纽线围成的面积.

设动点 M 到两个定点(F_1，F_2)的距离的乘积是一个常数，即

$$\overline{F_1M} \cdot \overline{F_2M} = b^2 \tag{3.17}$$

$\overline{F_1F_2} = 2a$，O 是$\overline{F_1F_2}$的中点，以$\overline{F_1F_2}$为极轴，O 为极点，r 和 θ 为点 M 的极坐标(图 3.11).

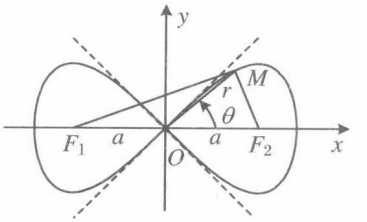


图 3.11

由$\triangle OMF_1$ 和$\triangle OMF_2$，可得到

$$\begin{cases} \overline{F_1M}^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta \\ \overline{F_2M}^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta \end{cases} \tag{3.18}$$

把式(3.18)代入式(3.17)，则有

$$\overline{F_1M}^2 \cdot \overline{F_2M}^2 = (r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta)(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)$$

$$= r^4 + a^4 + 2a^2r^2(1 - 2\cos^2\theta)$$

亦有

$$b^4 = r^4 + a^4 + 2a^2r^2(1 - 2\cos^2\theta) = r^4 + a^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta$$

当 $b = a$ 时，有

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta \tag{3.19}$$

这就是双纽线的极坐标方程.

在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处，$r = 0$，表示动点 M 在极点 O 处. 该曲线在 O 点处分为左、右两支，曲线在 O 点自交. 它所围成的面积为[用式(3.8)]

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot 2a^2\cos 2\theta \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta$$

令 $2\theta = \varphi$，则 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi$. 当 $\theta = 0$ 时，$\varphi = 0$；当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，$\varphi = \frac{\pi}{2}$. 因此

$$S = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\mathrm{d}\varphi = 2a^2(\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2$$

3.2 曲线长度的计算

1. 曲线的长度.

弧长:设 A,B 是给定轨迹曲线上的两个点,以这两点为端点做这曲线的内接折线(图 3.12).当这条折线的边数无限增加,每边的长度趋向零时,这条折线的周界长趋向的极限就是这曲线在 A,B 两点间的弧长.

在曲线上取一小段弧 $\overset{\frown}{PQ}=\mathrm{d}l$,它的长度为

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \tag{3.20}$$

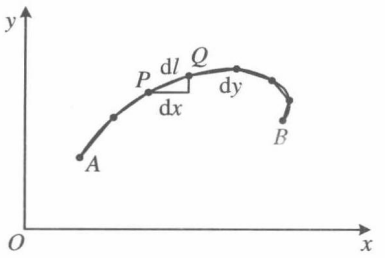


图 3.12

若曲线用直角坐标方程 $y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$ 给出,那么曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为

$$\begin{aligned} L &= \int_A^B \mathrm{d}l = \int_A^B \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_A^B \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_A^B \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.21}$$

若曲线用参变量方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$,$t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 给出,则曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \quad (t_1 < t_2) \tag{3.22}$$

式中的 t_1,t_2 是参变量 t 对应于曲线始点 A 及终点 B 的值.

如果用极坐标方程 $r=r(\theta),\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ 表述,那么曲线长度的一般公式是

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \quad (\theta_1 < \theta_2) \tag{3.23}$$

其中 θ_1 和 θ_2 是积分变量 θ 在曲线始点 A 及终点 B 的值.

例 1 求曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$,从 $x=0$ 到 $x=5$ 之间的长度.

解 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

所以该曲线的长度为

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^5 (4+9x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\int_0^5 (4+9x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(4+9x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} \left[(4+9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 = \frac{1}{27}(49^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{27}(343-8)$$

$$= \frac{335}{27} \approx 12.41$$

例 2　计算 $y = \frac{1}{2}\sin \pi x$ 的曲线长度，x 从 0 到 1(图 3.13).

解　由 $y = \frac{1}{2}\sin \pi x$，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\pi \cos \pi x$$

所以该曲线的长度为

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\pi \cos \pi x\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2 \pi x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{\frac{4+\pi^2}{4\pi^2}} \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{4+\pi^2}\sin^2(\pi x)}\,\mathrm{d}(\pi x)$$

令 $\pi x = \theta$，则 $\mathrm{d}(\pi x) = \mathrm{d}\theta$，当 $x = 0$ 时，$\theta = 0$；而当 $x = 1$ 时，$\theta = \pi$. 再令 $\frac{\pi^2}{4+\pi^2} = k^2$.

于是

$$L = \sqrt{\frac{4+\pi^2}{4\pi^2}} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{\frac{4+\pi^2}{4\pi^2}} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\,\mathrm{d}\theta$$

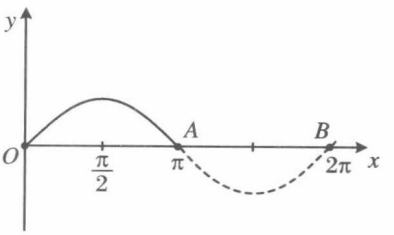


图 3.13

其中 $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\,\mathrm{d}\theta$ 为第二类完全椭圆积分，k 为椭圆积分之模数.

当模数 $k = \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} = 0.843564$ 时，可从数学手册[31]中查得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\,\mathrm{d}\theta = 1.2347$$

故此该积分为

$$L = \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{\pi} \cdot 1.2347 \approx 1.185447 \times 1.2347 \approx 1.4636\cdots$$

这就是这条正弦曲线在区间$[0, \pi]$的长度.

例 3　计算曲线 $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$ $(1 \leqslant y \leqslant 2)$，从 $A\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 到 $B\left(\frac{19}{12}, 2\right)$ 的

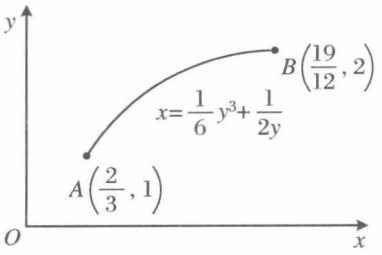


图 3.14

长度(图 3.14).

这里 y 是独立变量,因此应该用公式

$$L = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

从曲线方程可得到

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)$$

把它代入上式,得

$$L = \int_A^B \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)\right]^2}\, dy = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{y}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12}$$

这道题为什么用 y 作自变量? 第一,因为方程给出的是 $x = f(y)$,用 y 作自变量相对方便,并且上、下限均为整数,计算方便;第二,要把方程改成 $y = g(x)$ 比较麻烦,而且积分的上、下限是分数,计算起来自然复杂许多.

2. 极坐标下曲线长度的计算.

在极坐标下求曲线长度的公式已由式(3.23)给出,此处作详细推导.若曲线由极坐标方程 $r = f(\theta)$ 给定,假定极坐标轴 L 与 x 轴重合,极坐标的极点与 x 轴的原点相同,那么点 M 在直角坐标 x, y 与极坐标 θ, r 中的关系为(图 3.15)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{3.24}$$

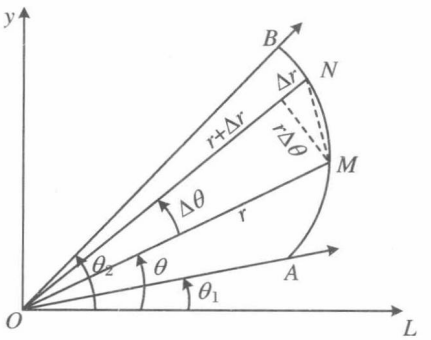


图 3.15

于是有

$$\begin{cases} dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{cases}$$

及

$$(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 = (\cos\theta \mathrm{d}r - r\sin\theta \mathrm{d}\theta)^2 + (\sin\theta \mathrm{d}r + r\cos\theta \mathrm{d}\theta)^2$$
$$= (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2$$

从图 3.15 可以看出，当 $\Delta\theta \to 0$ 时，弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的长度为

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2}$$

因此在极坐标下，曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 长度是

$$L = \int_A^B \mathrm{d}l = \int_A^B \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{3.25}$$

例 4　计算对数螺线的长度.

解　图 3.16 为对数螺线，它的极坐标方程是

$$r = b\mathrm{e}^{a\theta} \quad (a > 0, b > 0) \tag{3.26}$$

当 $\theta = 0$ 时，$r = b$；当 $\theta \to +\infty$ 时，$r \to +\infty$；而当 $\theta \to -\infty$ 时，$r \to 0$. 求 $\theta = \alpha$ 到 $\theta = \beta$ 之间的弧长.

由方程(3.26)，求得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = ab\mathrm{e}^{a\theta}$$

用曲线长度公式(3.25)，得

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{b^2\mathrm{e}^{2a\theta} + a^2b^2\mathrm{e}^{2a\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= b\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{a\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}\,(\mathrm{e}^{a\theta})\Big|_\alpha^\beta$$
$$= \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}(\mathrm{e}^{a\beta} - \mathrm{e}^{a\alpha})$$

这就是要求的对数螺线在 $\theta = \alpha$ 到 $\theta = \beta$ 之间的弧长. 这里把弧长表达成极角 θ 的函数，但也可以把它看成是矢径 r 的函数，于是

$$L = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(b\mathrm{e}^{a\beta} - b\mathrm{e}^{a\alpha}) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(r - r_0)$$

如果曲线的起点接近极点 O 时，则起点的极角趋于 $-\infty$，即 $\alpha \to -\infty$，那么该曲线的弧长为

$$L = \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}\cdot\mathrm{e}^{a\beta} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}r$$

这表明该曲线的弧长与矢径 r 成正比，比例系数为 $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$.

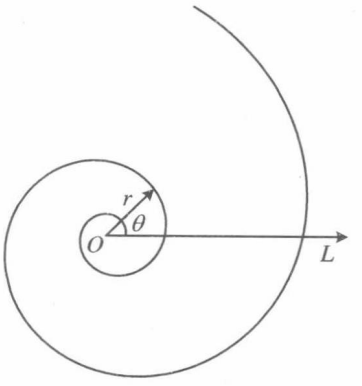


图 3.16

例 5　求椭圆的周长，假定长半轴 $a = 5$，短半轴 $b = 3$.

解　若曲线方程用参量形式给出，即

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

则曲线的长度为[式(3.22)]

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.27}$$

一个标准椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

取它的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = a\sin t \\ y = \psi(t) = b\cos t \end{cases}$$

所以有

$$\varphi'(t) = a\cos t, \quad \psi'(t) = -b\sin t$$

按照式(3.27),该椭圆的周长为

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\sin^2 t) + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

令 $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}$ 为椭圆离心率,则

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

因为椭圆的周长等于第一象限弧长的 4 倍,所以

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

公式右端的积分为第二类完全椭圆积分,把它记作 $E(\varepsilon)$,其中 ε 就是椭圆积分模数,因此

$$L = 4aE(\varepsilon) \tag{3.28}$$

若设 $a=5, b=3$,由于

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{5^2 - 3^2}{5^2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

那么,当模数(通常用 k 表示)为 0.8 时,可从数学手册查得 $E(0.8) = 1.2776$. 把它代入式(3.28)中,得到

$$L = 4aE(\varepsilon) = 4 \times 5 \times 1.2776 = 25.552$$

这就是该椭圆的周长.

当 $a=b$ 时，椭圆就变成圆了. 此时 $\varepsilon=0$，则

$$L = a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi a$$

例 6　计算曲线 $r=a\tanh\frac{\varphi}{2}$ 的长度.

解　取 r 对 φ 的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{a}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\varphi}{2}$$

把它代入式(3.25)，得

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\tanh^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2\operatorname{sech}^4\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(1-\operatorname{sech}^2\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{a^2}{4}\operatorname{sech}^4\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{4-4\operatorname{sech}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{sech}^4\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\operatorname{sech}^2\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi a - a\left(\tanh\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = a(2\pi-\tanh\pi) \quad (\tanh\pi = 0.996) \\
&= a(2\pi-0.996)\approx 5.2872a
\end{aligned}$$

例 7　计算旋轮线的长度(一个周期).

解　已知旋轮线的参数方程为[式(3.10)]

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$

取导数

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(1-\cos t), \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\sin t$$

那么，旋轮线(图 3.7)一个周期的弧长为

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2-2a^2\cos t}\mathrm{d}t = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

令 $\frac{t}{2}=\alpha$，则 $\mathrm{d}t=2\mathrm{d}\alpha$. 当 $t=0$ 时，$\alpha=0$；当 $t=2\pi$ 时，$\alpha=\pi$. 因此

$$L = 4a\int_0^{\pi}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha = 4a\,(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi} = 8a$$

其中 a 为旋轮的半径.

例 8 计算心脏线的长度.

解 已知心脏线的极坐标方程为[式(3.14)]

$$r = 2a(1+\cos\theta)$$

取导数

$$r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2a\sin\theta$$

因为心脏线是以极轴为对称轴的(图 3.9),所以只要计算$(0,\pi)$间的长度,再乘以 2 就行了.因此心脏线的长度为

$$L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2(1+\cos\theta)^2+4a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 16a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \quad \left(\varphi=\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 16a(\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16a$$

其中 a 为动圆或定圆的半径.

例 9 计算双纽线的长度,设两定点间的距离$\overline{F_1F_2}=2a=10$(见图 3.11).

解 已知双纽线的极坐标方程[式(3.19)]

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

取它的微商

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2a^2\sin 2\theta}{r}$$

应用极坐标下曲线的长度公式(3.25),得

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+\frac{4a^4\sin^2 2\theta}{r^2}}\,\mathrm{d}\theta$$

由于在极点 $r=0$ 处,$\theta=\frac{\pi}{4}$;而当 $r=\sqrt{2}a$ 时,$\theta=0$.因此积分只要在 θ 从 0 到$\frac{\pi}{4}$之间进行.因为曲线相对于极点对称,所以积分后要乘以 4.

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2a^2\cos 2\theta+\frac{4a^4\sin^2 2\theta}{2a^2\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 4\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= 4\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}$$

等式右端的积分是第一类椭圆积分.

在椭圆积分中,模数 $k^2<1$ 及 $k^2\sin^2\theta<1$,在当前的情况下,必须做自变量的变换.令 $2\sin^2\theta=\sin^2\psi$,则 $\sin\theta=\frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}$,两边取微分得

$$\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi$$

因此有

$$d\theta = \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{2}\cos\theta} = \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}}, \text{及} \sqrt{1-2\sin^2\theta} = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \cos\psi$$

当 $\theta=0$ 时，$\psi=0$；当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\psi=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$L = 4\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}} = 4\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}} = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}}$$

该式右端的积分是第一类完全椭圆积分，其模数为 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\sin^2\psi}} = K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$$

从数学手册[31]可查得，当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right)=1.8541$，连同 $a=5$ 代入，得到该双纽线的长度为

$$L = 4aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right) = 4\times 5\times 1.8541 = 37.082$$

3.3　体积的计算

3.3.1　用逐次积分法计算体积

设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\}$，则 Ω 的体积 V 可用逐次积分表示为

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \tag{3.29}$$

此外，还可以用1的三重积分来表示体积(参看第4章)

$$V = \iiint_{\Omega} 1 \cdot dv$$

例10　求椭球体的体积.

解　椭球体的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3.30}$$

式中的 a,b,c 分别为坐标轴 x,y,z 上的半轴长度. 该椭球相对于 O 点对称,因此只要求出第一象限的体积,然后乘以 8 就行了(图 3.17).

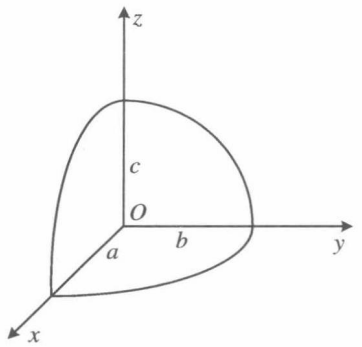


图 3.17

根据方程(3.30),我们知道积分的范围是:对于 z,从 $z=0$ 到 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$;对于 y,从 $y=0$ 到 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$;对于 x,从 $x=0$ 到 $x=a$.

因此该椭圆的体积是

$$V=8\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z$$

$$=8c\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y$$

令 $\frac{\eta^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$,则

$$V=8c\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\eta}\sqrt{\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y=8\frac{c}{b}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\eta}\sqrt{\eta^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=8\frac{c}{b}\int_0^a\frac{1}{2}\left(y\sqrt{\eta^2-y^2}+\eta^2\arcsin\frac{y}{\eta}\right)\Bigg|_0^{\eta}\mathrm{d}x$$

$$=4\frac{c}{b}\int_0^a\eta^2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{d}x=2\pi\frac{c}{b}\int_0^a\eta^2\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{c}{b}\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi bc\left(x-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=2\pi bc\cdot\frac{2a}{3}$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc \tag{3.31}$$

3.3.2 利用横截面计算体积

如果一个立体垂直于坐标轴 x 的截面积是 x 的函数 $S(x)$,那么该立体的体积可表示为

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x \tag{3.32}$$

其中 a,b 是该立体的两个端面所对应的 x 坐标的数值. 在式(3.32)中,只要知道 $S(x)$ 及 a,b,就可计算它的体积了.

例 11 计算一个圆柱体的楔形段的体积.

解 如图 3.18 所示,$ABCD$ 是一个正圆柱的楔形段. ABC 为一个正圆柱体的底面的一半,ABD 是过底面直径 AB 的一个斜平面;$\triangle OCD$ 过底面圆心 O,并垂直

于 AB，因此它是一个直角三角形. 取直径 AB 作为 x 轴，A 为坐标原点，$AB=2a$. 平面 ABD 与底面 ABC 的交角为 θ，且 $OC=a$ 为该圆柱底面半径，$CD=h$ 为圆柱体的楔形段之高. 取任一垂直于 AB 的断面 PQR，那么，$\triangle PQR$ 也是直角三角形，设 P 点的坐标为 x，则 $\triangle PQR$ 的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}\tan\theta\cdot\overline{PQ}^{2}$$

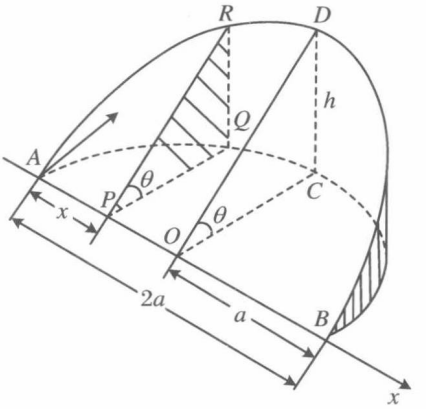


图 3.18

因为 Q 点在圆柱底面半圆的圆周上，所以 $\triangle ABQ$ 也是一个直角三角形，$PQ\perp AB$，因此 PQ 是线段 AP 与 BP 的等比中项，即

$$PQ^2=AP\cdot BP$$

由于 $AP=x$，所以 $PQ^2=x(2a-x)$，因此

$$S(x)=\frac{1}{2}x(2a-x)\tan\theta$$

应用式(3.32)，得到

$$V=\int_0^{2a}S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\theta\int_0^{2a}x(2a-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\tan\theta\left(ax^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{2a}=\frac{1}{2}\tan\theta\left(4a^3-\frac{8}{3}a^3\right)$$

$$=\frac{2}{3}a^3\tan\theta=\frac{2}{3}a^2h$$

其中 $h=a\tan\theta$.

3.3.3　回旋体的体积

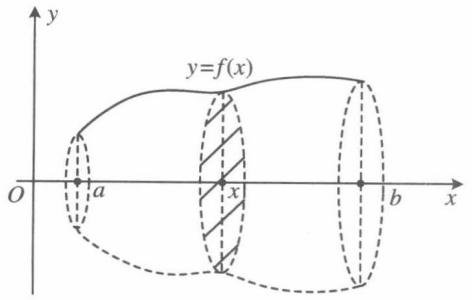


图 3.19

若一个立体是由一条给定的曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴回旋而成的(图 3.19)，那么它的横截面就是以 y 为半径的圆. 横截面的面积是

$$S(x)=\pi y^2$$

因此，在横坐标 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的回旋体的体积是

$$V=\int_a^b\pi y^2\mathrm{d}x=\int_a^b\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x \tag{3.33}$$

例 12 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$绕其长轴 a 旋转一周而成的椭球体的体积.

解

$$V=\int_{-a}^{+a}\pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

同样也可求得这个椭圆绕其短轴 b 回旋一周而成的椭球体的体积. 这时只要把 x, y 互换,同时用 b 换 a,就得到

$$V=\int_{-b}^{+b}\pi x^2\mathrm{d}y=\int_{-b}^{+b}\pi a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_{-b}^{+b}=\frac{4}{3}\pi a^2 b$$

当 $a=b$ 时,则两种椭球都变成半径为 a(或 b)的球体,其体积等于$\frac{4}{3}\pi a^3$.

3.4 表面积的计算

3.4.1 投影法计算表面积

1. 柱坐标系统.

在柱坐标系统中,表面微分元就是曲线平行四边形 $PQRS$(图 3.20). $PQRS$ 的四个顶点的坐标分别是

$$P:(r,\varphi,z)$$

$$Q:\left(r+\delta r,\varphi,z+\frac{\partial z}{\partial r}\delta r\right)$$

$$R:\left(r+\delta r,\varphi+\delta\varphi,z+\frac{\partial z}{\partial r}\delta r+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\delta\varphi\right)$$

$$S:\left(r,\varphi+\delta\varphi,z+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\delta\varphi\right)$$

这个微分元 $PQRS$ 在 x-y 平面上的投影 $ABCD$ 的面积为 $r\delta\varphi\delta r$. 在过 P 点的子午面上的投影 $PQUV$ 的面积为 $\delta r\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\delta\varphi$. 在平行 z 轴、垂直于过 P 点的子午面的投影 QRU 的面积为 $r\delta\varphi\frac{\partial z}{\partial r}\delta r$. 因此对微分元 $PQRS$ 的面积 $\mathrm{d}S$ 有

$$(\delta S)^2=(\delta r)^2(r\delta\varphi)^2+\left(\delta r\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\delta\varphi\right)^2+(r\delta\varphi\delta r)^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \tag{3.34}$$

取其平方根,得

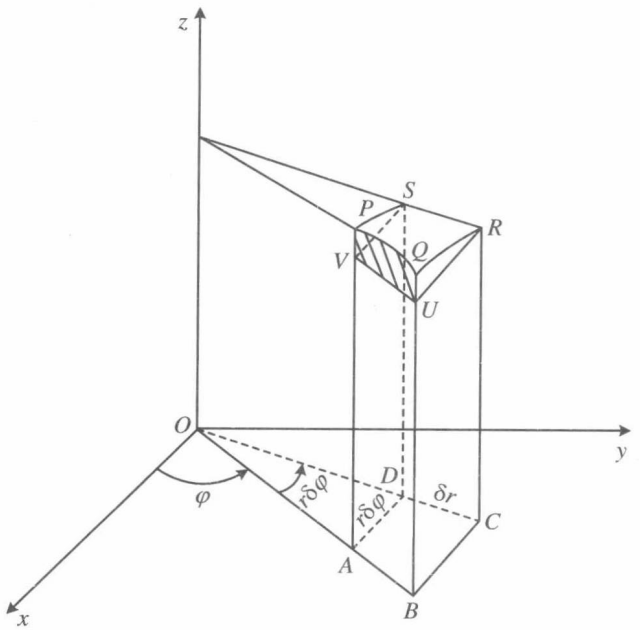


图 3.20

$$\delta S=\sqrt{(\delta r)^2\,(r\delta\varphi)^2+\left(\delta r\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\delta\varphi\right)^2+(r\delta\varphi\delta r)^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}$$

$$=\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}\cdot\delta r\cdot\delta\varphi$$

所以总的表面积为

$$S=\iint\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}\cdot\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \tag{3.35-1}$$

如果独立变量为 z 和 φ，则有

$$S=\iint\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}\cdot\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \tag{3.35-2}$$

若独立变量是 r 和 z，那么

$$S=\iint\sqrt{1+r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2}\cdot\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{3.35-3}$$

在式(3.35.2)中，投影到相同平面上的元素为

$$r\delta\varphi\delta r,\quad r\delta\varphi\frac{\partial r}{\partial z}\delta z,\quad \delta z\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\delta\varphi\right)$$

在式(3.35.3)中，投影到相同平面上的元素是

$$\delta r\delta z,\quad \left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)\delta r,\quad \left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\delta r\right)\delta z$$

例 13 计算半径为 a，高为 h 的圆柱体的表面积(图 3.21).

解 在计算圆柱体的表面积时，可把上、下底的面积和侧面积分开计算，然后相加：

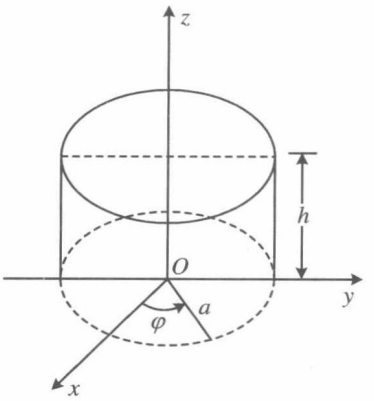


图 3.21

① 上、下底面积 S_1，使用式(3.35.1)，得

$$S_1 = 2\iint \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} \cdot \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$

因为在圆柱体的上、下底中有

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

所以

$$S_1 = 2\iint \sqrt{r^2} \cdot \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = 2\iint r \cdot \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a r \mathrm{d}r = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(\frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^a$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi a^2$$

② 圆柱的侧面积 S_2，用式(3.35.2)，得

$$S = \iint \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$$

因为圆柱的侧面

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0, \quad r = a$$

所以

$$S_2 = \iint \sqrt{r^2} \cdot \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \iint r\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h r\mathrm{d}z$$

$$= rh\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi rh = 2\pi ah$$

因此圆柱体的总表面积为

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi a^2 + 2\pi ah = 2\pi a(a + h)$$

2. 球坐标系统.

在球坐标系统中，$PQRS$ 是面积元(图 3.22). P, Q, R, S 各点的坐标分别为

$$P:(r, \theta, \varphi)$$

$$Q:\left(r + \frac{\partial r}{\partial \theta}\delta\theta, \theta + \delta\theta, \varphi\right)$$

$$R:\left(r + \frac{\partial r}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial r}{\partial \theta}\delta\theta, \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi\right)$$

$$S:\left(r + \frac{\partial r}{\partial \varphi}\delta\varphi, \theta, \varphi + \delta\varphi\right)$$

(1) 这个 $PQRS$ 面积元通过 P 点投影在垂直矢径的平面 $Pqrs$ 上的面积为

$$r\delta\theta \cdot r\sin\theta\delta\varphi$$

(2) $PQRS$ 面积元通过 P 点投影在子午面上的面积为

$$r\delta\theta \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\delta\varphi\right)$$

(3) $PQRS$ 面积元通过 P 点投影在垂直上述两个平面上的面积为

$$r\sin\theta\delta\varphi \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\delta\theta\right)$$

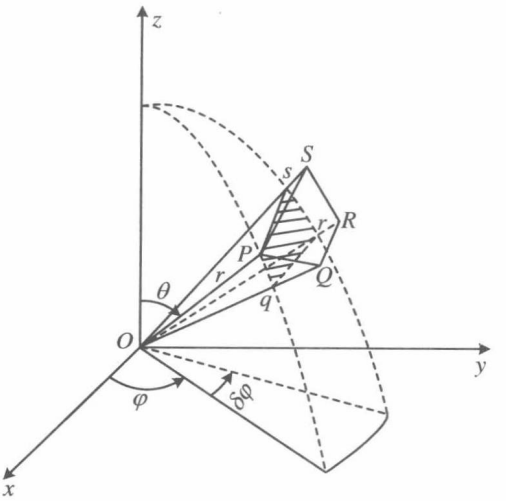


图 3.22

因此该面积元的平方为

$$(\delta S_r)^2 = (r\delta\theta \cdot r\sin\theta\delta\varphi)^2 + \left(r\delta\theta \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi}\delta\varphi\right)^2 + \left(r\sin\theta\delta\varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta}\delta\theta\right)^2$$

$$= \left[r^4\sin^2\theta + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right](\delta\theta)^2(\delta\varphi)^2 \qquad (3.36)$$

取其平方根，并积分之，就得到该物体的表面积为

$$S = \iint \sqrt{r^4\sin^2\theta + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \cdot \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \qquad (3.37\text{-}1)$$

如果取 r,θ 作为独立变量，如同前面的情况，$PQRS$ 在三个方向的平面上的投影分别为

$$\left(r\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial r}\delta r\right)\cdot r\delta\theta, \quad r\delta\theta \cdot \delta r, \quad \left(r\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\delta\theta\right)\cdot \delta r$$

那么，该面积的微分元的平方为

$$(\delta S_\varphi)^2 = \left[r^4\sin^2\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + r^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2\right](\delta\theta)^2(\delta r)^2$$

表面积是

$$S = \iint \sqrt{r^4 \sin^2\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + r^2 + r^2 \sin^2\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2} \cdot \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \qquad (3.37\text{-}2)$$

同理，若 r, φ 作为独立变量，那么 $PQRS$ 在三个方向的平面的投影分别为

$$(r\sin\theta\delta\varphi)\cdot\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\delta r\right), \quad \left(r\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\delta\varphi\right)\cdot\delta r, \quad (r\sin\theta\delta\varphi)\cdot\delta r$$

因此，该面积的微分元的平方为

$$(\delta S_\theta)^2 = \left[r^4\sin^2\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\right](\delta\varphi)^2(\delta r)^2$$

其表面积为

$$S = \iint \sqrt{r^4 \sin^2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2 \sin^2\theta} \cdot \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \qquad (3.37\text{-}3)$$

计算表面积的式(3.37-1)、(3.37-2)、(3.37-3)三个公式是等价的. 你可以选择其中的任何一个公式来计算表面积，主要是看在给定的条件下，应用哪一个公式最方便、最快捷.

投影公式(3.34)、(3.36)的说明：

为了说明式(3.34)、(3.36)的正确性. 我们考虑下面的例子：如图 3.23 所示，在直角坐标系中，有一个平面△ABC，三个顶点 A, B, C 分别在坐标轴 x, y, z 上，并有 $OA = OB = OC = 1$. 显然这个△ABC 三条边的长度是 $AB = BC = CA = \sqrt{2}$，三角形的高 CD 为 $\sqrt{\frac{3}{2}}$，因此，△ABC 的面积为

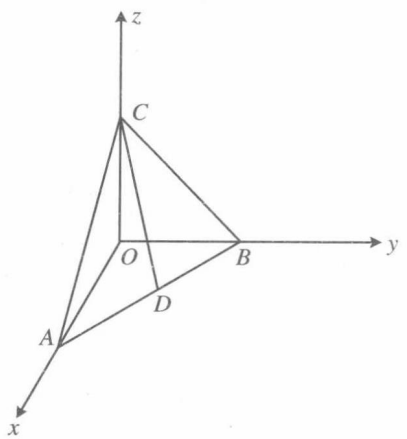


图 3.23

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

△ABC 在三个互相垂直的平面 xOy, yOz，及 zOx 上的投影，分别是△OAB，△OBC 及△OCA，它们的面积分别为 $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{2}$，把 S_1, S_2, S_3 各自平方并相加，得到

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{3}{4}$$

另一方面，△ABC 的面积的平方为

$$S^2 = \frac{3}{4}$$

所以

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \qquad (3.38)$$

以上是以△ABC 为平面的情形来说明式(3.38)的. 对于曲面的情况，取它的微分元 δS，相应的有 $\delta S_1, \delta S_2, \delta S_3$（其中 $\delta S_1, \delta S_2, \delta S_3$ 是 δS 在三个互相垂直的平面上的投影），令 δS 趋向无穷小时，可把它看成一个平面，那么就有类似式(3.38)的等式：

$$(\delta S)^2 = (\delta S_1)^2 + (\delta S_2)^2 + (\delta S_3)^2 \qquad (3.39)$$

式(3.39)与式(3.34)、(3.36)是一样的，只是式(3.34)是在柱坐标下得到的，式(3.36)是在球坐标下得到的.与直角坐标的情况相同，在柱坐标、球坐标的情形中，投影的三个平面也都是互相垂直的.由此可见，无论在什么坐标系中，空间的一个曲面(当然包括平面这种特殊情形)，它的微分元在任何坐标系中的互相垂直的三个平面上的投影都满足方程(3.39).这就间接说明了式(3.34)、(3.36)的正确性.

例 14　求一个球体的表面积，球的半径为 a.

解　设坐标原点在球心.

因为球的对称性，只要计算球体的$\frac{1}{8}$面积就行了，即积分范围是

$$r = a,\quad \theta:\text{从 } 0 \text{ 到}\frac{\pi}{2},\quad \varphi:\text{从 } 0 \text{ 到}\frac{\pi}{2}$$

选用式(3.37.1)得

$$S = \iint \sqrt{r^4 \sin^2\theta + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2 \sin^2\theta\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}\cdot \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

因为积分是在 $r = a$ 的球面上进行的，所以$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$，于是

$$\begin{aligned} S &= \iint \sqrt{r^4 \sin^2\theta}\cdot \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \iint r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\,(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = 8a^2\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

例 15　求锥体的表面积.如图 3.24 所示，有一个直立的圆锥体，其顶点在原点，母线 l 与 z 轴的夹角为 α，圆锥底的半径为 a，求该圆锥体的表面积.

解　采用式(2.37.3)，得

$$S = \iint \sqrt{r^4 \sin^2\theta\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2 \sin^2\theta}\cdot \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

因为这里 $\theta = \alpha$，是一个常数，所以

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0$$

于是

$$S = \iint \sqrt{r^2 \sin^2\theta}\cdot \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \iint r\sin\theta \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

由于 θ 是常数，r 沿母线 l 方向，积分范围是从 0 到 l，φ 的积分范围为 0 到 2π.因此圆锥体的侧面积为

$$S_{\text{侧}} = \sin\alpha\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\int_0^l r\mathrm{d}r = \sin\alpha\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\left(\frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^l$$

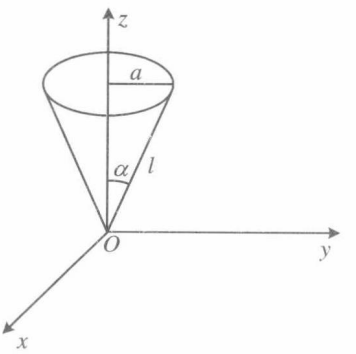


图 3.24

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot l^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot l^2 \cdot 2\pi$$

$$= \pi \cdot l\sin\alpha \cdot l = \pi a l$$

圆锥体的底面积为

$$S_{\text{底}} = \pi a^2$$

最后，该圆锥体的总面积是

$$S = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = \pi a l + \pi a^2 = \pi a(a + l)$$

3.4.2 回旋体的侧面积计算法

设在 xOy 平面上有一段曲线$\overset{\frown}{AB}$（如图 3.12 所示），求这段曲线绕 Ox 轴旋转而成的回旋体的侧面积. 作这条曲线的内接折线，当该折线的边数无限增加，各边的长度趋向零时，则该折线绕 Ox 轴旋转而成的回旋体的侧面积所趋向的极限，就是这段曲线绕 Ox 轴旋转而成的回旋体的侧面积.

若这段曲线在 A，B 两点之间，则这个回旋体的侧面积为

$$P = \int_A^B 2\pi y \mathrm{d}s \tag{3.40}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为该曲线的弧长的微分，它是

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x$$

因此，这个回旋体的侧面积为

$$P = 2\pi\int_A^B y\sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x \tag{3.41}$$

若曲线由参数方程 $x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$给定，而且点 A 与B 所对应的t 的值为α 与 β，则

$$P = \int_\alpha^\beta 2\pi\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t \tag{3.42}$$

例 16 求椭圆的回旋体的表面积.

解 设回旋轴是 x 轴，积分区间为$[-a, +a]$，根据式(3.41)，椭圆的回旋体的表面积是

$$P = 2\pi\int_{-a}^{+a} y\sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-a}^{+a}\sqrt{y^2 + (yy')^2}\mathrm{d}x \tag{3.43}$$

由椭圆方程$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，得到

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$yy' = -\frac{b^2 x}{a^2}，及(yy')^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4}$$

把它们代入式(3.43)，有

$$P = 2\pi\int_{-a}^{+a}\sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^4x^2}{a^4}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi b\int_{-a}^{+a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^4}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi b\int_{-a}^{+a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}\,\mathrm{d}x$$

令 $1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$，$\varepsilon$ 为该椭圆的离心率. 于是得到

$$P = 2\pi b\int_{-a}^{+a}\sqrt{1 - \varepsilon^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi b\int_0^a\sqrt{1 - \varepsilon^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.44}$$

令 $\frac{\varepsilon x}{a} = t$，则 $\mathrm{d}x = \frac{a}{\varepsilon}\mathrm{d}t$；当 $x = 0$ 时，$t = 0$；当 $x = a$ 时，$t = \varepsilon$. 式(3.44)变为

$$P = 4\pi b\int_0^{\varepsilon}\sqrt{1 - t^2}\,\frac{a}{\varepsilon}\mathrm{d}t = \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t$$

其中右端的积分可积出来，得

$$\int_0^{\varepsilon}\sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t\right)\Big|_0^{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arcsin\varepsilon\right)$$

因此

$$P = \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}\left(\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arcsin\varepsilon\right)$$

$$= 2\pi ab\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right) \tag{3.45}$$

这就是椭圆回旋体的表(侧)面积.

当 $a = b$，即 $\varepsilon = 0$ 时，椭圆就变成圆，它的回旋体就变成球. 此时式(3.45)仍适用. 不过这时括弧中的第二项是 $\frac{0}{0}$ 的未定式，可用洛必达法则求得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\arcsin\varepsilon)'}{\varepsilon'} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}}{1} = 1$$

因此，圆的回旋体(球)的表面积为

$$P_{球} = 2\pi a^2\cdot 2 = 4\pi a^2$$

例 17　求旋轮线(一个周期)绕 Ox 轴旋转一圈形成的回旋体的侧面积.

解　我们在前面已经在知道旋轮线的参数方程(3.10)是

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = a(t - \sin t) \\ y = \psi(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

它的微商为

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$$

$$\psi'(t) = a\sin t$$

应用式(3.42),积分从 0 到 2π,得

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} 2\pi\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{2a^2 - 2a^2\cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t \\
&= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

令 $\frac{t}{2} = w$,$\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}w$,当 $t=0$ 时,$w=0$;$t=2\pi$ 时,$w=\pi$,因此有

$$P = 8\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 w\cdot 2\mathrm{d}w = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 w\mathrm{d}w$$

等式右端的积分为

$$\int_0^{\pi}\sin^3 w\mathrm{d}w = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 w\mathrm{d}w = \frac{4}{3}$$

最后得到旋轮线的回旋体的侧面积为

$$P = 16\pi a^2\cdot\frac{4}{3} = \frac{64}{3}\pi a^2$$

第4章　重　积　分

4.1　二 重 积 分

4.1.1　二重积分的定义及算例

1. 二重积分的定义.

设有两个变量的函数 $z = f(x,y)$ 在 xOy 平面的有界区域 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant \mathrm{d}\}$ 上有定义. 它表示区域 D 上的一张曲面，以区域 D 的边界线为准线，而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z = f(x,y)$，当 $f(x,y) > 0$ 时这种立体称为曲顶柱体. 我们把 D 划分成互不重叠的 n 个小区域 $D_1, D_2, \cdots, D_n$，它们的面积分别为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$. 在任意一块小区域 D_i 中任取一点 (x_i, y_i)，那么 $f(x_i, y_i) \cdot \Delta\sigma_i$ 就是以 D_i 为底，以 $f(x_i, y_i)$ 为高的小柱体的体积. 如果把 D 区域的所有小柱体的体积都加起来，那么 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 就是这个曲顶柱体的体积的近似值了.

当把 D 分割得越来越细小，即让 n 趋向无穷大，并且让所有的 D_i 的直径 d_i 中的最大值 λ 趋向零时，就得到这个曲顶柱体的真正体积值了.

因此，如果极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

存在，就把这个极限称为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \tag{4.1}$$

其中 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$.

虽然在定义二重积分时，是用求柱体的体积引出的，但 $f(x,y)$ 也可以是其他意义的函数. 譬如说 $f(x,y)$ 是物质分布密度，那么积分结果就是质量；若 $f(x,y)$

是电荷密度分布函数，那么积分结果就是电量. 在往后的叙述中，我们将抽去任何几何的诠释和物理的意义，而只讨论二元函数 $f(x,y)$ 在积分区域中是否连续、是否可积以及如何做积分等.

2. 逐次积分法.

假设 $f(x,y)$ 是矩形区域 $D: a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ 上有定义的函数，并且在定义域中，$f(x,y)$ 是连续函数，那么对区间 $[a,b]$ 中的任一点 x，积分

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

存在，$F(x)$ 也是在 $[a,b]$ 上 x 的连续函数，并且积分

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

也存在，因此逐次积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

也会存在. 这就是说函数 $f(x,y)$ 的二重积分可用逐次积分法进行积分，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \tag{4.2}$$

这里是先对 y 积分，再对 x 积分. 为了说明相反的积分次序也是成立的，在这里引入**傅比尼(G. Fubini)定理**[6]：设 f 是两个变量 x 和 y 的函数，如果 f 在整个矩形区 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上是可积的，即对 $\forall x\in[a,b]$，积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在；对 $\forall y\in[c,\mathrm{d}]$，积分 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 也存在，那么就有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.3}$$

这里 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 这就是说积分次序是可以交换的，特别是 $f(x,y)$ 是连续函数的情况下. 或者把式(4.3)写成

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{4.4}$$

在这种表示法中，“外面的积分”与“外面的微分”相对应.

3. 几个算例.

例 1 计算积分 $\iint\limits_{(R)}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$，定义域 (R)：$3\leqslant x\leqslant 4, 1\leqslant y\leqslant 2$.

解 可以把这个二重积分写成

$$\iint_{(R)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^2}=\int_1^2\mathrm{d}y\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^2}=\int_1^2\left[\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^2}\right]\mathrm{d}y$$

先计算括弧内的积分，因为是对 x 的积分，可把 y 看成常量($y=$常数)，有

$$\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^2}=\int_3^4\frac{\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2}=\left[\frac{1}{-2+1}(x+y)^{-1}\right]_{x=3}^{x=4}$$

$$= \left(-\frac{1}{x+y}\right)\Big|_{x=3}^{x=4} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}$$

把该结果代入上式,得

$$\iint\limits_{(R)} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right)\mathrm{d}y = \left[\ln(y+3) - \ln(y+4)\right]_{y=1}^{y=2}$$

$$= (\ln 5 - \ln 6) - (\ln 4 - \ln 5) = \ln 5 + \ln 5 - \ln 6 - \ln 4$$

$$= \ln\frac{5\times 5}{6\times 4} = \ln\frac{25}{24}$$

例 2 计算积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 改写积分式

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{y\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

先做对 y 的积分,把 x 看成常量,即 $x=$常数,得

$$\int_0^1 \frac{y\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(y^2+x^2+1)}{(y^2+x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\left[-2(y^2+x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+x^2+1}}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

因此

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$$

等式右端的两个积分分别为

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$$

最后得到

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \left[\ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}\right]$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) + \ln\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{3})$$

$$= \ln\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

4.1.2 二重积分上、下限的确定——穿线法

在计算二重积分时，有时题目并没有给出明显的积分上、下限，而只是给出一个积分区域，这时就要自己去寻找二重积分的积分限.

寻找二重积分的积分限是计算二重积分最困难的部分，下面我们用实例来讲解寻找积分限的方法和步骤.

例 3 计算积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 D 是曲线 $x^2+y^2=1$ 和直线 $x+y=1$ 之间的区域. 先对 y 积分，再对 x 积分，采取如下步骤：

(1) 根据题意，画出积分区域的草图，并标明该积分区域 D 的边界曲线，如图 4.1 所示：

$$x^2+y^2=1 \quad 和 \quad x+y=1$$

(2) 确定 y 的积分限：画一条垂直于 x 轴的直线 L 通过积分区域 D，在 y 增加的方向，标示 L 直线进入 D 区域和离开 D 区域时的 y 值(图 4.2)，这些 y 值通常是 x 的函数，这里进入 D 区域时的 y 值是 $y=1-x$，离开 D 区域时的 y 值为 $y=\sqrt{1-x^2}$，它们分别是对 y 积分的下限和上限.

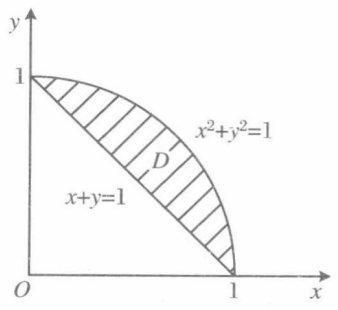


图 4.1

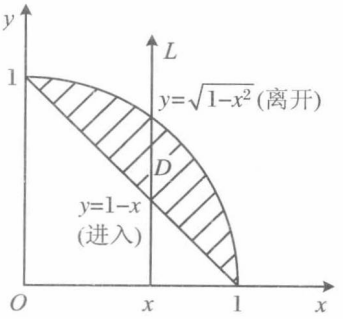


图 4.2

(3) 确定 x 的积分限：选择所有通过 D 区域的竖线(L 直线)的 x 的范围，从而确定 x 的积分限(图 4.3). 在这里：下限为 $x=0$；上限为 $x=1$.

于是该积分为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}x\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{4.5}$$

如果采用相反的积分次序，即先对 x 积分，再对 y 积分，那么可按如图 4.4 所示的方法，先画一条垂直 y 轴的直线 l 通过积分区域 D，标示进入区域 D 及离开 D 时的 x 值，这里是 $x=1-y$ 及 $x=\sqrt{1-y^2}$，这就是 x 的积分限. 然后定出 y 的积分

限：$y=0$ 和 $y=1$. 因此该积分为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}y\int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{4.6}$$

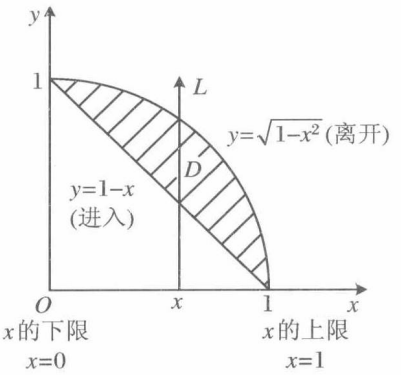


图 4.3

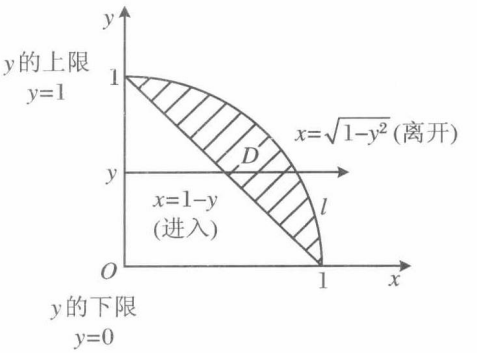


图 4.4

根据傅比尼定理，积分次序的改变并不影响积分值. 这就是说式(4.5)和式(4.6)是相等的.

下面用另一个例子来验证它.

例 4 求积分$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\mathrm{d}y$，积分区域由不等式给出：$x^2\leqslant y\leqslant 2x, 0\leqslant x\leqslant 2$. 写出相反次序的积分式，并计算它们的积分值. 积分区域是由 $y=x^2$ 和 $y=2x$ 包围的，并在 $x=0$ 和 $x=2$ 之间(图 4.5).

解 为了找到相反次序的积分式的积分限，可以作一条水平方向并垂直 y 轴的直线 l，从左到右穿过积分区域 D，它在 $x=\dfrac{y}{2}$ 处进入，在 $x=\sqrt{y}$ 处离开(图4.6). 包括所有这些在积分区域内的 l 线段，在 y 方向，积分则从 $y=0$ 到 $y=4$. 于是相反次序的积分为

$$\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(4x+2)\mathrm{d}x$$

毫无疑问，这两个次序相反的积分值是相等的，验证如下：

$$\begin{aligned}\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\mathrm{d}y &= \int_0^2(4xy+2y)\Big|_{y=x^2}^{y=2x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2(-4x^3+6x^2+4x)\mathrm{d}x\\ &= (-x^4+2x^3+2x^2)\Big|_0^2 = 8\end{aligned}$$

$$\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(4x+2)\mathrm{d}x = \int_0^4(2x^2+2x)\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{y^2}{2} + y + 2\sqrt{y}\right) dy$$

$$= \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{y=0}^{y=4} = 8$$

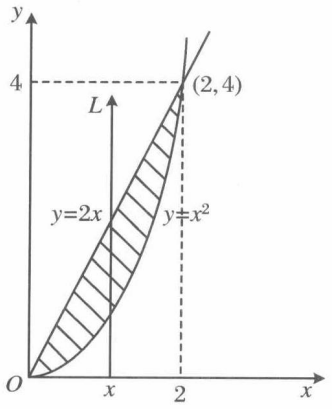


图 4.5

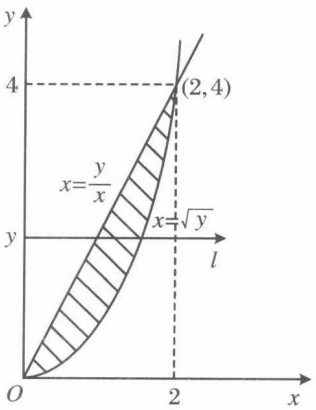


图 4.6

对二重积分来说，确定积分限是一个很重要的工作，另外还有积分次序问题，即先对 x 积分，还是先对 y 积分，大多数情况是无关紧要的，两种积分次序都行. 但也有例外，如：

例 5 求积分 $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$，其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$，直线 $x = 0, y = 2$ 围成的区域.

解 按照前面讲过的步骤，第一步画出积分区域草图(图 4.7)；第二步，确定 y 的积分限，画一条垂直 x 轴，并通过积分区域 D 的直线 L，标示进入区域 D 和离开区域 D 时的 y 值，它们分别为 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = 2$；第三步，确定 x 的积分限，包含所有通过 D 区域的竖线(L 线)的 x 的界限：下限 $x = 0$，上限 $x = 4$. 于是该积分为

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 e^{\frac{x}{y}} dy \tag{4.7}$$

这是先 y 后 x 的积分次序. 但因为 $\int e^{\frac{x}{y}} dy$ 不能积出来，所以要改变积分次序，即先对 x 积分，再对 y 积分. 这时可画一条垂直 y 轴的水平方向的直线 l，从左到右穿过区域 D，它在 $x = 0$ 处进入 D，在 $x = y^2$ 处离开(图 4.8). 包括所有这些在积分区域 D 中的 l 线段，从 $y = 0$ 到 $y = 2$. 于是积分变为

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \tag{4.8}$$

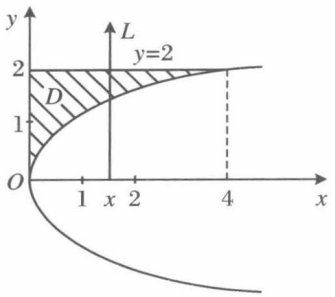


图 4.7

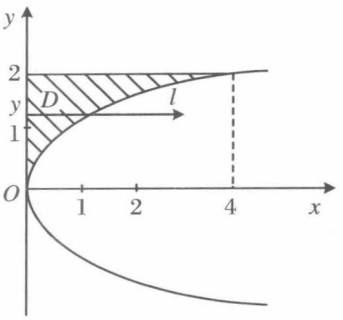


图 4.8

这个积分是可以计算的.以前曾说过,在二重积分计算中,当对 x 积分时,可把 y 当作常数,反之亦然.因此

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_0^2 dy\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx = \int_0^2 dy \cdot y\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,d\left(\frac{x}{y}\right)$$

这里应当注意的是,当积分变量从 x 变成 $\frac{x}{y}$ 时,积分限也要跟着变化.

令 $u=\frac{x}{y}$,当 $x=0$ 时,$u=0$;当 $x=y^2$ 时,$u=y$,则

$$\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx = y\int_0^y e^u\,du = y(e^u)\,|_0^y = (e^y-1)y$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy &= \int_0^2 dy\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx = \int_0^2 y(e^y-1)dy\\ &= \int_0^2 ye^y dy - \int_0^2 ydy = \int_0^2 yde^y - \int_0^2 ydy\\ &= (ye^y)\,|_0^2 - \int_0^2 e^y dy - \int_0^2 ydy = 2e^2 - e^2 + 1 - 2\\ &= e^2 - 1\end{aligned}$$

在二重积分中,凡是遇到 $\int e^{\frac{y}{x}}dx$,$\int e^{x^2}dx$,$\int e^{-x^2}dx$,$\int \sin^2 x dx$,$\int \cos^2 x dx$,$\int \frac{dx}{\ln x}$,$\int \frac{\sin x}{x}dx$ 等这样一些不能或不易得到初等函数表达式的积分时,可把它们放到后面去做积分,如上例.

下面的例子也是要考虑积分次序的:

例 6 计算积分 $\iint_D \sqrt{y^2-xy}\cdot dxdy$,其中 D 是由直线 $y=x$,$x=0$,和 $y=1$ 所围成的区域.

解 我们注意到被积函数是无理式,根号下有两项,两项中都含有变量 y,而

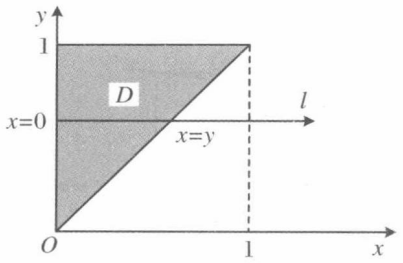


图 4.9

变量 x 只存在其中的一项中. 这样,自然会想到先对 x 积分是方便的,因为此时可把 y 当作常数来对待. 所以应该选择先 x 后 y 的积分步骤.

首先画出积分区域草图(图 4.9),再画一条垂直 y 轴的水平方向的直线 l,并标示 l 线进入和离开区域 D 时的 x 值分别为 $x=0$ 和 $x=y$,这就是 x 方向的积分限;而 y 方向的积分限是:$y=0$ 和 $y=1$. 于是该积分为

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{y^2-xy}\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y (y^2-yx)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}y\left(-\frac{1}{y}\right)\int_0^y (y^2-yx)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(y^2-yx)\\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{y}\cdot\frac{2}{3}(y^2-yx)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=y}\mathrm{d}y\\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

4.1.3 几个典型的积分次序及积分限变换的例子

(1) $$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^b \mathrm{d}y\int_{\frac{a}{b}y}^a f(x,y)\mathrm{d}x$$

积分区域:$y=\dfrac{b}{a}x$,$x=a$,及 $y=0$ 所包围的区域,如图 4.10 所示.

(2) $$\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^R \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

积分区域:$x^2+y^2=R^2$,及 $x=0$,$y=0$ 所包围的区域,如图 4.11 所示.

(3) $$\int_0^{2p}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{q}{p}\sqrt{2px-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^q \mathrm{d}y\int_{p\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{y}{q}\right)^2}\right]}^{p\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{y}{q}\right)^2}\right]} f(x,y)\mathrm{d}x$$

积分区域:$\dfrac{(x-p)^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ 和 $y=0$ 所包围的区域,如图 4.12 所示.

(4) $$\begin{aligned}\int_0^R \mathrm{d}x\int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{2R+x} f(x,y)\mathrm{d}y &= \int_0^R \mathrm{d}y\int_{\sqrt{R^2-y^2}}^R f(x,y)\mathrm{d}x + \int_R^{2R}\mathrm{d}y\int_0^R f(x,y)\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_{2R}^{3R}\mathrm{d}y\int_{y-2R}^R f(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

积分区域:由 $x=0$,$x^2+y^2=R^2$,$x=R$ 及 $y=2R+x$ 包围的区域,如图 4.13 所示.

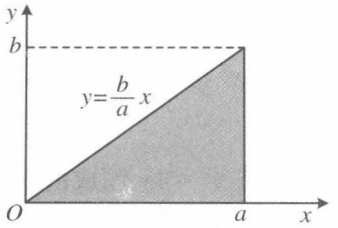


图 4.10

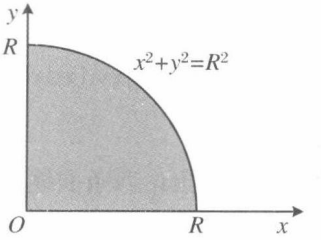


图 4.11

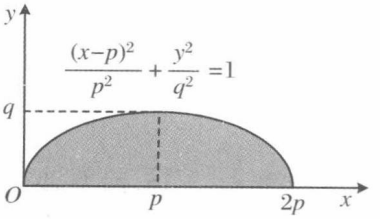


图 4.12

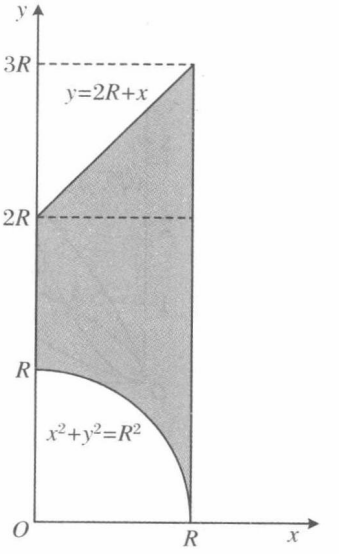


图 4.13

例 7 计算积分 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，积分区域 D 由曲线 $x^2=4y$ 和 $y^2=4x$ 围成.

解 首先画出积分区域草图(图 4.14)，并在图上画一条垂直 x 轴并穿过 D 的直线 L. 标定进入和离开区域 D 的 y 值：$y=\dfrac{x^2}{4}$，$y=2\sqrt{x}$，这就是 y 的积分限. 同时根据草图可确定 x 的积分限：$x=0$ 和 $x=4$. 于是积分为

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4 \mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^4 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^4\left(2x^2-\frac{x^5}{32}\right)\mathrm{d}x$$

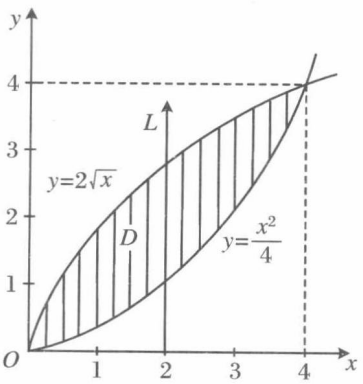


图 4.14

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^6}{192}\right)\Big|_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{64}{3} = \frac{64}{3}$$

例 8 计算积分 $\iint\limits_R xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，积分区域 R 由曲线 $y = x^2, y^2 = 4x, x = y^2$ 及 $x^2 = 4y$ 围成.

解 首先画出由四条曲线 $y = x^2, y^2 = 4x, x = y^2$ 及 $x^2 = 4y$ 围成的积分区域 R(图 4.15). 找到它们的交点 A, B, C, D，这四个交点构成 $ABCD$ 曲边四边形. 把这个曲边四边形分成三个子区 R_1, R_2, R_3. 以垂直 x 轴并穿过 R 的直线 L 经过

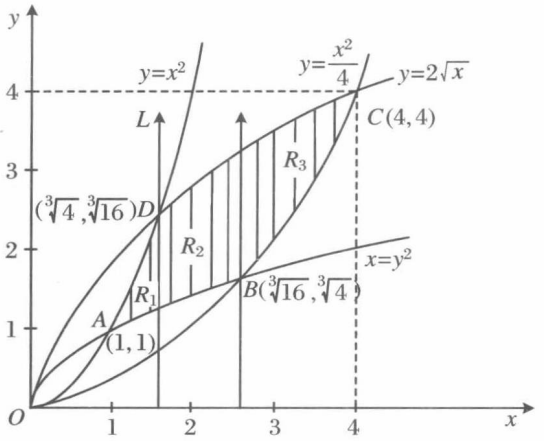


图 4.15

D, B 两点处作为划分点，它们的 x 坐标分别为 $x = \sqrt[3]{4}$ 和 $x = \sqrt[3]{16}$. 因为 A 点的坐标为(1,1)，C 点的坐标为(4,4)，所以从 x 方向看，三个积分子区域的积分区间分别是 R_1：从 $x = 1$ 到 $x = \sqrt[3]{4}$；R_2：从 $x = \sqrt[3]{4}$ 到 $x = \sqrt[3]{16}$；R_3：从 $x = \sqrt[3]{16}$ 到 $x = 4$. 相应的从 y 方向则看到，在子区域 R_1：直线 L 从 $y = \sqrt{x}$ 进入，到 $y = x^2$ 离开；子区域 R_2：直线 L 从 $y = \sqrt{x}$ 进入，到 $y = 2\sqrt{x}$ 离开；子区域 R_3：直线 L 从 $y = \frac{x^2}{4}$ 进入，到 $y = 2\sqrt{x}$ 离开，这就是 y 方向的积分限. 因此可写出积分

$$\iint\limits_R xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt[3]{4}} x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x^2} y\mathrm{d}y + \int_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[3]{16}} x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} y\mathrm{d}y + \int_{\sqrt[3]{16}}^{4} x\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} y\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^{\sqrt[3]{4}} x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{x^2}\mathrm{d}x + \int_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[3]{16}} x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int_{\sqrt[3]{16}}^{4} x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^{\sqrt[3]{4}} x\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[3]{16}} x\left(\frac{4x}{2} - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt[3]{16}}^{4} x\left(\frac{4x}{2} - \frac{x^4}{32}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt[3]{4}} (x^5 - x^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[3]{16}} 3x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\sqrt[3]{16}}^{4}\left(4x^2 - \frac{x^5}{16}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[3]{16}} + \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{16} \cdot \frac{x^6}{6}\right)\Big|_{\sqrt[3]{16}}^{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(\sqrt[3]{4})^6}{6} - \frac{(\sqrt[3]{4})^3}{3}\right] - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + (\sqrt[3]{16})^3 - (\sqrt[3]{4})^3 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{96} \cdot 4^6\right) - \left[\frac{4}{3} \cdot (\sqrt[3]{16})^3 - \frac{1}{96}(\sqrt[3]{16})^6\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{16}{6} - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{6} + (16 - 4) + \left(\frac{256}{3} - \frac{4096}{96}\right) - \left(\frac{64}{3} - \frac{256}{96}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{6} + \frac{1}{6} + 12 + \frac{128}{3} - \frac{56}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6} + \frac{72}{6} + \frac{144}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{225}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{75}{2} = \frac{75}{4}$$

这种按部就班的计算方法虽然看起来比较复杂，但其思路清晰、图像鲜明. 该题也可用坐标变换的办法来计算(见 4.3 节重积分的坐标变换).

例 9 计算积分 $\iint\limits_D (x^2 + 2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，积分区域 D 是由两个圆周 $x^2 + y^2 = 2ax$ 与 $x^2 + y^2 = 4ax(a > 0)$ 之间的部分.

解 画出积分区域 D 的草图(图 4.16). 因为区域的边界是圆，用极坐标会更方便些. 令 O 点为极坐标的极点，极轴与 x 轴重合. 从 O 点作一条极径 r 穿过小圆的 A 点和大圆的 B 点，令 r 与极轴的交角为 θ，小圆和大圆的直径分是 $2a$ 和 $4a$. 那么 A 点和 B 点的极径分别为 $r = 2a\cos\theta$ 和 $r = 4a\cos\theta$，这就是 r 方向的积分的下、上限. 另外，极径扫过整个积分区域 D 时，极角 θ 的变化范围为 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$，这就是 θ 的积分限. 因为该积分区域对 x 轴(也是极轴)是对称的，所以只要对 x 轴以上部分从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分，并乘以 2 就行了.

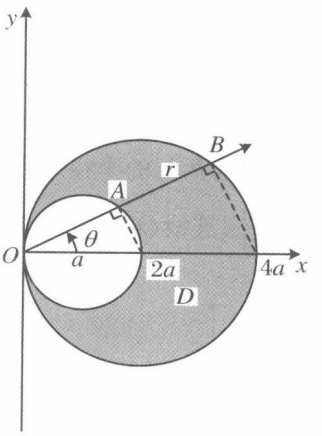


图 4.16

极坐标与直角坐标的关系是

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{4.9}$$

在极坐标中，微分元变为

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{4.10}$$

于是该积分为

$$\iint\limits_D (x + 2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (r\cos\theta + 2r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta} (r^2\cos\theta + 2r^3\sin^2\theta)dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\cos\theta + 2 \cdot \frac{r^4}{4}\sin^2\theta\right)\Big|_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 64a^3\cos^4\theta + \frac{1}{2}256a^4\cos^4\theta\sin^2\theta\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{3} \cdot 8a^3\cos^4\theta + \frac{1}{2} \cdot 16a^4\cos^4\theta\sin^2\theta\right)\right] d\theta$$

$$= 2\left(\frac{56a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta + 120a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\sin^2\theta d\theta\right)$$

$$= 2\left(\frac{56a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta + 120a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta - 120a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta\right)$$

$$= 2\left(\frac{56a^3}{3} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} + 120a^4 \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} - 120a^4 \cdot \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{7a^3\pi}{2} + \frac{45a^4\pi}{2} - \frac{75a^4\pi}{4}\right) = 7a^3\pi + \frac{15}{2}a^4\pi = \pi a^3\left(7 + \frac{15a}{2}\right)$$

例 10 计算积分 $\iint_D y dx dy$，其中 D 是两个圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 和 $x^2 + y^2 = 2ay(a > 0)$ 的共同部分.

解 画出两个圆的草图(图 4.17). 积分区域是两圆的交点 O 和 P 之间的部分，两圆的圆心分别在 x 轴和 y 轴上. 使用极坐标，O 点为极点，极坐标轴与 x 轴重合. 因为两圆的半径均为 a，所以两圆交点的连线 $\overline{OP} = \sqrt{2}a$，$\overline{OP}$ 与极坐标轴的交角 $\theta = \frac{\pi}{4}$. 连线 $\overline{OP}$ 把积分区域 D 分成两个相等的部分：$D_1\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 和 $D_2\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

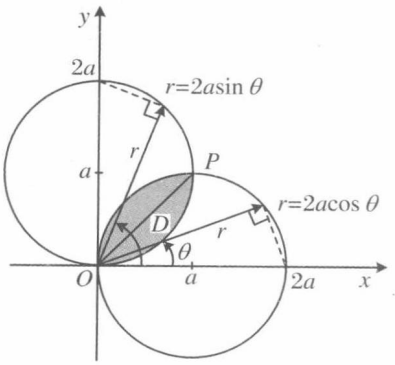


图 4.17

在 D_1 上：当极径 $\vec{r}$ 进入积分区域时，$r = 0$；离开积分区域时，$r = 2a\sin\theta$. 这就是 r 在 D_1 积分区域中的积分限. 计及所有穿过 D_1 的 r 线，得到 $\theta = 0$ 和 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 为 θ 角的下限和上限.

在 D_2 上：当极径 $\vec{r}$ 进入积分区域时，$r = 0$；离开积分区域时 $r = 2a\cos\theta$. 这就是 r 在 D_2 积分区域中的积分限. 计及所有穿过 D_2 的 r 线，得到 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 为 θ 角的下限和上限. 在极坐标中，$y = r\sin\theta$，微分元为 $rdrd\theta$，因此该积分为

$$\begin{aligned}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta} r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta} r^2\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^2\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta + \frac{8a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

在该式右端的第一个积分中，令 $\theta=\frac{\varphi}{2}$，则 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}$. 当 $\theta=0$ 时，$\varphi=0$；当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\right)^4\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-2+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{8}-1\right)\end{aligned}$$

该式右端的第二个积分为

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\cos\theta = -\left(\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}{4} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{8a^3}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{8}-1\right)+\frac{1}{16}\right]\\ &= \frac{8a^3}{3}\left(\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right) = \frac{8a^3}{3}\left(\frac{3\pi}{32}-\frac{3}{16}\right)\\ &= \frac{a^3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\end{aligned}$$

在极坐标的情况下，一般只要用从极点出发的极径 $\vec{r}$ 作为积分区域的穿透线就可以了. 从极径的进入和离开积分域，可定出极径方向的积分下限与上限；用极径在积分区的转动范围来确定极角 θ 的积分上、下限. 当然也可以用垂直于极轴的圆弧线穿过积分区域来确定极角 θ 的积分上、下限.

4.1.4 两个一元函数乘积的积分

从傅比尼定理还可引出下面的**定理**:两个函数乘积的积分等于两个函数各自积分的乘积.

如果 $f(x,y)=g(x)h(y)$,此处$(x,y)\in R=[a,b]\times[c,d]$,则

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\int_c^d h(y)\mathrm{d}y \tag{4.11}$$

证 根据傅比尼定理,有

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A&=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_c^d\left[\int_a^b g(x)h(y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=\int_c^d\left[h(y)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\quad(\text{把 }h(y)\text{ 当作常数})\\&=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\quad\left(\text{把}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\text{ 作为常数}\right)\end{aligned}$$

例 11 计算积分$\iint_R x\cos y\mathrm{d}A$,此处 $R=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{6}\right\}$.

解

$$\begin{aligned}\iint_R x\cos y\mathrm{d}A&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_1^2 x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_1^2 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos y\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2(\sin y)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

例 12 计算积分 $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\ln 3}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=(\mathrm{e}^y)\Big|_0^{\ln 3}\cdot(\mathrm{e}^x)\Big|_0^{\ln 2}\\&=(\mathrm{e}^{\ln 3}-1)(\mathrm{e}^{\ln 2}-1)=(3-1)(2-1)=2\end{aligned}$$

例 13 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin y\mathrm{d}y\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= (-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot (e^x)\Big|_0^{\ln 2} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(e^{\ln 2}-1)$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

4.2 三 重 积 分

4.2.1 三重积分的定义

假设有一个立体 V,已知在它的某点 $P(x,y,z)$处,其质量的密度分布为

$$\rho = \rho(P) = \rho(x,y,z)$$

那么该物体的总质量 M 等于

$$M = \iiint_{(V)} \rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

这个积分被称为三重积分.式中的 $\mathrm{d}v$ 为体积元,$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

如果抽去它的物理内容和几何解释,则三重积分可定义为:在某一空间区域 V 中,给定一个函数 $f(x,y,z)$,任意选取一点 $P(x,y,z)$,并将这点的函数值 $f(x,y,z)$乘上该点上的体积元 $\mathrm{d}v$ 并做积分,就得到三重积分了.因此上式可写成

$$I = \iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.12}$$

式(4.12)就是一般意义上的三重积分.其中体积元 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,式中的被积函数 $f(x,y,z)$,可以是质量的分布、电荷的分布或代表其他意义的分布函数.如果 $f(x,y,z)=1$,则积分的结果是该立体的体积.

4.2.2 三重积分的傅比尼定理[6]

如果 f 在整个矩形箱 $V=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant \mathrm{d}, e\leqslant z\leqslant f\}$ 中是可积的,那么式(4.12)可写成如下 6 种不同次序的逐次积分:

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^f\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b\int_e^f\int_c^d f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d\int_a^b\int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.13}$$

这就是三重积分的**傅比尼定理**.

其中任何一个积分式都可以写成这样的形式:

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y \int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{4.14}$$

或

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \tag{4.15}$$

积分应从内到外逐次完成.

不论积分次序如何变换,但有一点必须记住:积分号与相应的微分号的搭配不能改变,例如在式(4.13)或式(4.14)或式(4.15)中,积分号$\int_a^b$是与微分号$\mathrm{d}x$相对应的,积分号$\int_c^d$是与微分号$\mathrm{d}y$相对应的,以及积分号$\int_e^f$是与微分号$\mathrm{d}z$相对应的.这种对应关系不能因次序改变而变化.它们是固定搭配,具有伴随性质,跟着走.

4.2.3 三重积分的算例

1. 直角坐标.

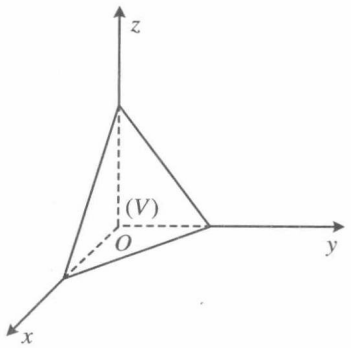


图 4.18

例 14 计算积分 $I = \iiint_{(V)} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$,它是一个由平面 $x=0, y=0, z=0$,及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体(V)(图 4.18).

解 该立体在 xOy 平面上的投影为直线 $x=0, y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的三角形. x 变化的界限是 0 和 1,而当 x 固定在 0 和 1 之间时,y 则由 0 变到 $1-x$. 如果 x, y 都固定,则点可以沿垂线自平面 $z=0$ 移动到 $x+y+z=1$. 因此 z 的变动范围为从 0 到 $1-x-y$.

由式(4.14),得到

$$I = \iiint_{(V)} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

积分从内层开始,逐次向外(或者说从右向左). 先对 z 做积分(可把 x, y 当作常

数),得

$$\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}(z+y+x+1)}{(z+y+x+1)^3}$$

$$=\left[\frac{1}{-3+1}(z+y+x+1)^{-2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(y+x+1)^2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(y+x+1)^2}-\frac{1}{4}\right]$$

再对 y 做积分(把 x 当作常数),得

$$\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(y+x+1)^2}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}(y+x+1)}{(y+x+1)^2}-\int_0^{1-x}\frac{1}{4}\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-2+1}\cdot\frac{1}{y+x+1}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}-\left(\frac{y}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{4}+\frac{x}{4}\right)$$

最后求对 x 的积分,得

$$I=\iiint_{(V)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{4}+\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\int_0^1\frac{3}{4}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x}{4}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

例 15 计算积分 $J=\iiint_{(V)}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$(V)$是椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分.

解 该立体在 xOy 平面上的投影是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,故 x 的变化范围在 $-a$ 到a 之间;当 x 固定时,变量 y 自 $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$变化到$+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$;当 x,y 固定时,z 的变化范围从 0 到 $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

运用式(4.14),得到

$$J=\iiint_{(V)}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}z\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\left(\frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$=\frac{c^2}{2}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= 2c^2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= 2c^2\int_0^a \mathrm{d}x\left(y-\frac{x^2}{a^2}y-\frac{1}{3b^2}y^3\right)\Big|_0^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= 2c^2\int_0^a \frac{2b}{3a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{4bc^2}{3a^3}\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)^3}\cdot \mathrm{d}x$$

$$= \frac{4bc^2}{3a^3}\cdot\frac{1}{4}\left[x\sqrt{(a^2-x^2)^3}+\frac{3a^2x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{bc^2}{3a^3}\cdot\frac{3a^4}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}abc^2$$

例 16 计算积分 $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 遵循积分从内层到外层的原则，并记住对某一积分变量积分时，把其他变量看成常数，因此

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\int_0^{2-x} xyz\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(xy\cdot\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_{z=0}^{z=2-x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{1-x} xy(2-x)^2\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[x(2-x)^2\cdot\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^2(2-x)^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1(4x-12x^2+13x^3-6x^4+x^5)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\cdot\frac{x^2}{2}-12\cdot\frac{x^3}{3}+13\cdot\frac{x^3}{4}-6\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(2-4+\frac{13}{4}-\frac{6}{5}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{13}{60} = \frac{13}{240}$$

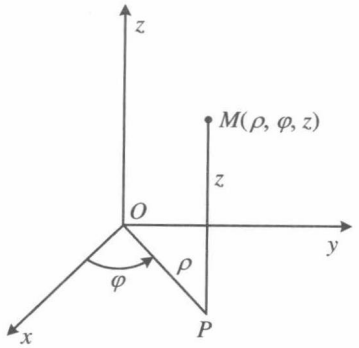


图 4.19

2. 柱坐标.

空间中的常用坐标除了直角坐标外，还有柱坐标和球坐标. 柱坐标是这样确定的：在空间直角坐标(x,y,z)中，用平面极坐标(ρ,φ)来代替(x,y)，保留 z，从而用(ρ,φ,z)作为空间点 M 的坐标. 在全空间中，ρ,φ,z 的变化范围是

$$0\leqslant\rho<\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad -\infty<z<+\infty$$

它与直角坐标的关系是(图 4.19)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{4.16}$$

直角坐标系与柱坐标系中的积分公式的变换关系为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(\rho,\varphi,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

其中

$$F(\rho,\varphi,z) = f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$$

例 17 计算积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，积分范围为 $0\leqslant z\leqslant c, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi$.

解 采用柱坐标计算该积分，微分元为 $\mathrm{d}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\varphi\cdot\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$（图 4.20），其中

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

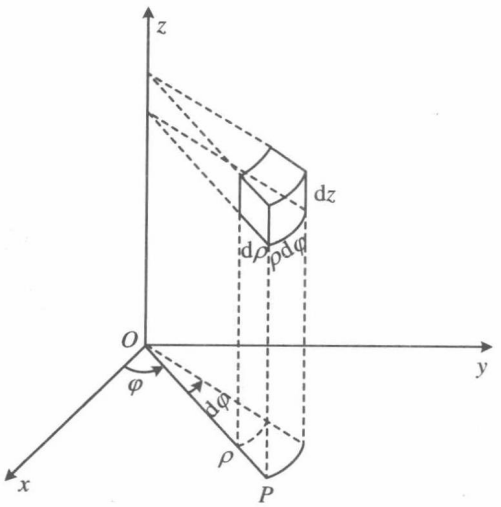


图 4.20

在这个柱体上的积分为

$$V = \iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} z\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} z\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^{c} z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{c^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{c^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^{2\cos\varphi}$$

$$= \frac{8c^2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{4c^2}{3}\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4c^2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8c^2}{9}$$

3. 球坐标.

在球坐标中,空间一点 M 用(r,θ,φ)来表示(图 4.21).(r,θ,φ)为 M 点的球坐标,或称空间极坐标,记作 $M(r,\theta,\varphi)$.在全空间中它的变化范围是

$$0 \leqslant r < \infty$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{4.17}$$

例如在求椭球体的体积时,在空间 M 点取一小体积元 $ABCDA'B'C'D'$(图 4.22),其中

$$OA = r, \quad AB = r\mathrm{d}\theta, \quad AD = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi, \quad AA' = \mathrm{d}r$$

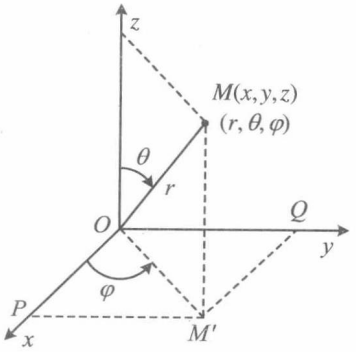


图 4.21

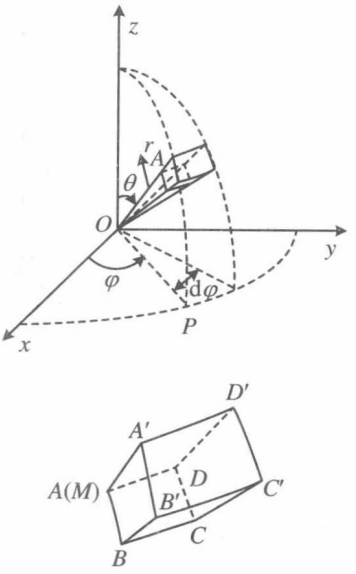


图 4.22

该体积元 $ABCDA'B'C'D'$ 的体积为

$$\mathrm{d}r \cdot r\mathrm{d}\theta \cdot r\sin\theta\mathrm{d}\varphi = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

因此在这个椭球体上的积分是

$$V = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \iiint_{\Omega} F(r,\theta,\varphi) r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

其中 $F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

例 18 计算一个半径为 a 的球体的体积.

解 以球体的中心 O 为坐标原点,积分的范围是

r:从 0 到 a; θ:从 0 到 π; φ:从 0 到 2π

该球体的体积为[$F(r,\theta,\varphi)=1$]

$$V = \iiint_{\Omega} F(r,\theta,\varphi) r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\,|_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3$$

例 19 计算积分 $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 zr^2\sin\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

解 把积分式写成分套结构形式,再从内到外地计算:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^2 zr^2\sin\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1\left(\int_0^2 r^2\sin\theta\cdot z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r^2\sin\theta\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{z=0}^{z=2}\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^2\sin\theta\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{2}{3}(\cos\theta)\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

例 20 计算由抛物面和 $z=0$ 平面包围的体积 $\iiint_{(R)} f(r,\varphi,z)\mathrm{d}v$(图 4.23).在区域$(R)$中,$f(r,\varphi,z)=1$,抛物面的方程为 $r^2=9-z$,或 $z=9-r^2$.

解 积分首先相对于 z,从 $z=0$ 到 $z=9-r^2$;相应的 r 则从 $r=3$ 到 $r=0$;最后对 φ 积分,积分区间是 $\varphi=0$ 到 $\varphi=2\pi$(这里使用的坐标是横坐标).因此

$$\iiint_{(R)}\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2}(r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi) = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3\left(\int_0^{9-r^2}\mathrm{d}z\right)r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3(9-r^2)r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3(9r-r^3)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{r=3} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} \mathrm{d}\varphi = \frac{81}{2}\pi$$

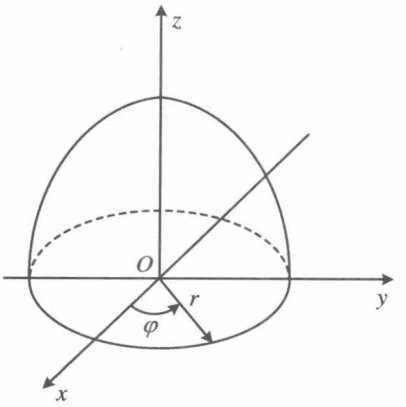


图 4.23

4.3 重积分的坐标变换

4.3.1 二重积分的坐标变换

可以把二重积分$\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$看成是平面网格上的面积$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$乘上该网格中一点$(x,y)$的函数值$f(x,y)$的总和的极限.$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为笛卡儿坐标的面积元.

假设另有一个曲线坐标(u,v)(图 4.24)与直角坐标(x,y)坐标有以下的变换关系:

$$\varphi(x,y) = u, \quad \psi(x,y) = v \tag{4.18}$$

并由方程(4.18)解出 x 与 y,就得到直角坐标(x,y)通过曲线坐标(u,v)的表达式

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u,v) \\ y = \psi_1(u,v) \end{cases} \tag{4.19}$$

由函数关系(4.19)建立起(x,y)坐标与(u,z)坐标的一一对应关系.

现在来确定曲线坐标(u,v)的面积元 $\mathrm{d}\sigma$.考虑两对邻近的坐标曲线:

$$\varphi(x,y) = u, \quad \varphi(x,y) = u + \Delta u$$

$$\psi(x,y) = v, \quad \psi(x,y) = v + \Delta v$$

计算这两组曲线所夹的四边形 $ABCD$ 的面积(图 4.24).

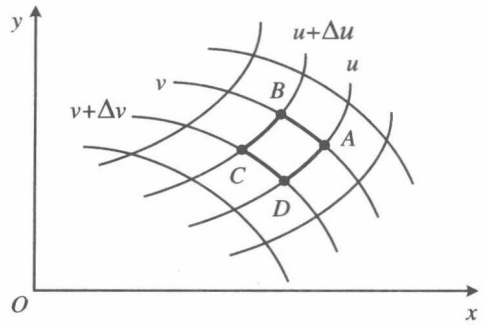


图 4.24

当忽略高阶无穷小时,A,B,C,D 各点的坐标为

$$A:\begin{cases}x_1 = \varphi_1(u,v)\\ y_1 = \psi_1(u,v)\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}x_2 = \varphi_1(u+\Delta u,v) = \varphi_1(u,v) + \dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u\\ y_2 = \psi_1(u+\Delta u,v) = \psi_1(u,v) + \dfrac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u\end{cases}$$

$$C:\begin{cases}x_3 = \varphi_1(u+\Delta u,v+\Delta v) = \varphi_1(u,v) + \dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v\\ y_3 = \psi_1(u+\Delta u,v+\Delta v) = \psi_1(u,v) + \dfrac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}x_4 = \varphi_1(u,v+\Delta v) = \varphi_1(u,v) + \dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v\\ y_4 = \psi_1(u,v+\Delta v) = \psi_1(u,v) + \dfrac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v\end{cases}$$

从上面各式可得到

$$\begin{cases}x_2 - x_1 = x_3 - x_4\\ y_2 - y_1 = y_3 - y_4\end{cases}$$

这说明 $ABCD$ 是一个平行四边形. 平行四边形 $ABCD$ 的面积为$\triangle ABC$ 面积的 2 倍. 所以只要求出$\triangle ABC$ 的面积(图 4.25),就知道平行四边形 $ABCD$ 的面积 $\mathrm{d}\sigma$ 了.

按照解析几何的方法,$\triangle ABC$ 的面积为

$$\mathrm{d}S = \left|\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot\overline{CB}\cdot\sin\theta\right| = \left|\frac{1}{2}d_1 d_2\sin\theta\right| = \left|\frac{1}{2}d_1 d_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}d_1 d_2(\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1)$$

$$= \frac{1}{2}(d_1\cos\alpha_1 \cdot d_2\sin\alpha_2 - d_2\cos\alpha_2 \cdot d_1\sin\alpha_1)$$

从图 4.25 可看出

$$\begin{cases} d_1\cos\alpha_1 = x_1 - x_3 \\ d_1\sin\alpha_1 = y_1 - y_3 \\ d_2\cos\alpha_2 = x_2 - x_3 \\ d_2\sin\alpha_2 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

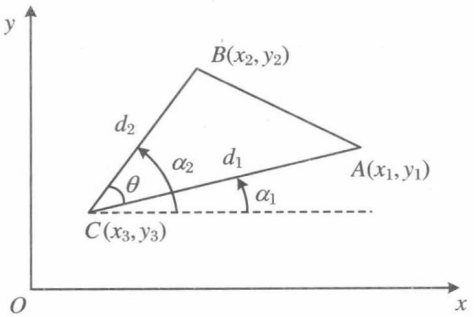


图 4.25

把它们代入 dS 的公式中,则有

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)]$$

把 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$各点用相应的$(u, v)$坐标表示,则有

$$x_1 - x_3 = -\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u} \cdot \Delta u - \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v} \cdot \Delta v$$

$$y_2 - y_3 = -\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v} \cdot \Delta v$$

$$x_2 - x_3 = -\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v} \cdot \Delta v$$

$$y_1 - y_3 = -\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u} \cdot \Delta u - \frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v} \cdot \Delta v$$

因此,平行四边形 $ABCD$ 的面积为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= 2\mathrm{d}S \\ &= \left[-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u - \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v\right]\left[-\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v\right] \\ &\quad - \left[-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v\right]\left[-\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u - \frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v\right] \\ &= \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u \cdot \frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v - \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v \cdot \frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}$$

把方括弧内的式子用行列式书写,则有

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

因此有

$$\mathrm{d}\sigma = |D|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{4.21}$$

于是二重积分的换元公式为

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\sigma)} F(u,v)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} F(u,v)\,|D|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{4.22}$$

此处 $F(u,v)$是(u,v)的函数,由 $f(x,y)$变换而来.式中 D 通常称为坐标变换的雅可比行列式.

我们知道直角坐标(x,y)与极坐标(r,θ)的关系是

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

仿照前面从直角坐标(x,y)变换到曲线坐标(u,v)的变换公式,令

$$\begin{cases} x = \varphi(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = \psi(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

于是就有

$$\frac{\partial \varphi(r,\theta)}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial \varphi(r,\theta)}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial \psi(r,\theta)}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \psi(r,\theta)}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

因此从(x,y)坐标到(r,θ)坐标变换的雅可比行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi(r,\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial \psi(r,\theta)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \varphi(r,\theta)}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \psi(r,\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

这就是说极坐标中的面积元是

$$\mathrm{d}\sigma = |D|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

因此这个二重积分的变换公式为

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\sigma)} F(r,\theta)\,|D|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint\limits_{(\sigma)} F(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{4.23}$$

例 21 计算积分 $\iint\limits_{(\sigma)} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,积分区域由 $x^2+y^2=a^2$ 给定.

解 把直角坐标变成极坐标,已知从(x,y)坐标到(r,θ)坐标的变换行列式值为 $D=r$,极坐标中的面积元是 $\mathrm{d}\sigma=|D|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,所以

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\sigma)} r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^3 \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi a^4}{2}$$

例 22 计算积分 $\iint\limits_{(D)} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，积分区域 D 由曲线 $y = x^2, y^2 = 4x, x = y^2$ 及 $x^2 = 4y$ 围成.

解 该题用坐标变换的办法来计算. 积分区域 D 的边界曲线方程可写成

$$\frac{x^2}{y} = 1, \quad \frac{x^2}{y} = 4 \quad 和 \quad \frac{y^2}{x} = 1, \quad \frac{y^2}{x} = 4$$

令 $u = \dfrac{x^2}{y}, v = \dfrac{y^2}{x}$，则被积函数 $xy = uv$，并有 $x^3 = u^2 v$ 和 $y^3 = uv^2$，因此

$$\begin{cases} x = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} = \varphi(u, v) \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} = \psi(u, v) \end{cases}$$

这样就有

$$\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} = \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} = \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}}$$

于是坐标变换的雅可比行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \dfrac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \dfrac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

坐标变换后的积分限，u：从 1 到 4；v：也是从 1 到 4. 因此该积分变成

$$\iint\limits_{(D)} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(R)} uv \mid D \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{(R)} uv \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^4 u\mathrm{d}u \int_1^4 v\mathrm{d}v = \frac{1}{3} \int_1^4 \left(\frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^4 \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^4 \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2} \right) u\mathrm{d}u = \frac{15}{6} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{2} = \frac{75}{4}$$

与穿线法的积分结果是相同的.

4.3.2 三重积分的坐标变换

若连续可微的函数

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \tag{4.24}$$

把(x,y,z)的空间三维有界区域 V 中的点，单值地映射到(u,v,w)空间闭区域 V'中. 若它的雅可比行列式不等于零，即

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{4.25}$$

则有

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{4.26}$$

其中 $\mathrm{d}V=|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$ 为曲面坐标下的体积元.

1. 球坐标.

在空间坐标中，用得最多的除直角坐标外，就是球坐标了. 它与直角坐标的关系是(图 4.26)

$$\begin{cases}x=\rho\sin\theta\cos\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\theta\end{cases} \tag{4.27}$$

其中 $\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. ρ 为 $M(x,y,z)$ 点的矢径长度；θ 是 ρ 与 z 轴的夹角；φ 是 OM 在 xOy 平面上的投影 OP 与 x 轴的夹角. 对式(4.27)取偏微商得到

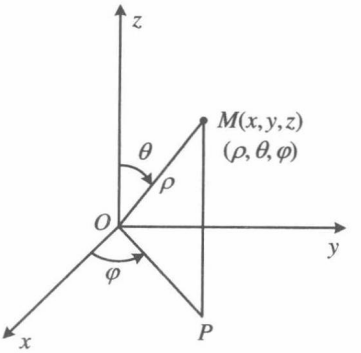


图 4.26

$$\frac{\partial x}{\partial\rho}=\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\rho}=\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial\rho}=\cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\rho\cos\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=\rho\cos\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=-\rho\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

因此可以得到从直角坐标到球坐标变换的雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta \tag{4.28}$$

球坐标下的积分元为

$$\mathrm{d}V=|J|\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\rho^2\sin\theta\cdot\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

球坐标下的积分变换公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{V'} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{4.29}$$

其中

$$F(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)$$

例 23 计算积分 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 (V) 是锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2$ 及球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 的公共部分 $(z\geqslant 0)$（图 4.27）.

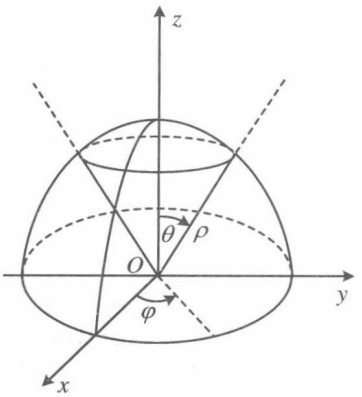


图 4.27

解 使用球坐标

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

根据题意有

$$x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = \rho^2\sin^2\theta$$

及

$$z^2 = \rho^2\cos^2\theta,\quad x^2+y^2\leqslant z^2$$

即有

$$\rho^2\sin^2\theta\leqslant\rho^2\cos^2\theta$$

或

$$\sin^2\theta\leqslant\cos^2\theta$$

进而有 $\sin\theta\leqslant\cos\theta$，因此 $\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$. 又

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2\leqslant R^2$$

即 $\rho\leqslant R$（ρ,R 皆为正值），因此，积分的区间是

$$0\leqslant\rho\leqslant R,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

被积函数

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = F(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2$$

按照球坐标的变换公式(4.17)，得

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{(V')} F(\rho,\theta,\varphi)\,|J|\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

把 $F(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2$ 和雅可比行列式 $|J|=\rho^2\sin\theta$ 代入，则有

$$\iiint_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{(V')} \rho^2\cdot\rho^2\sin\theta\cdot\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\sin\theta\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta\left(\frac{1}{5}\rho^5\right)\Big|_0^R$$

$$= \frac{1}{5}R^5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}R^5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{5}R^5\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{5}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}R^5\cdot 2\pi = \frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5$$

2. 柱坐标.

在空间坐标中,也常用柱坐标(如图 4.28 所示).它与直角坐标之间的关系为(M 点的坐标)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{4.30}$$

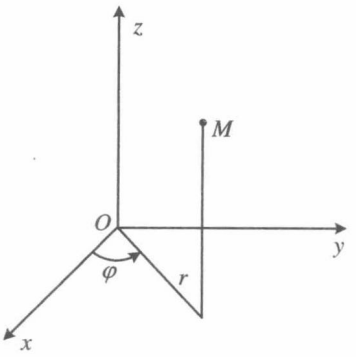


图 4.28

因为直角坐标各变量对柱坐标各变量的偏微商为

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

所以变换的雅可比行列式是

$$D = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

积分的体积元是

$$\mathrm{d}V = |D|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

因此,在柱坐标中的积分变换公式为

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{(V')} F(r,\varphi,z)\,|D|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{(V')} F(r,\varphi,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{4.31}$$

其中

$$F(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

例 24 计算积分 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,此处$(V)$是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所包围的区域.

解 把直角坐标系的变量转换到柱坐标系,得

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

在柱坐标系中,方程 $x^2+y^2=2z$ 的左边为 $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2$,右边

为 $2z$，所以有 $r^2=2z$，或 $z=\frac{r^2}{2}$. 又根据题设，$z\leqslant 2$，因此，可确定积分区域 V：

$$0\leqslant r\leqslant 2,\quad 0\leqslant \varphi\leqslant 2\pi,\quad \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2$$

坐标变换的雅可比行列式是

$$D=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=r$$

积分的体积元为

$$\mathrm{d}V=|D|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

因此积分为

$$\begin{aligned}\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint_{(V')}r^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\mathrm{d}r(z)\Big|_{\frac{r^2}{2}}^2\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\left(2r^3-\frac{r^5}{2}\right)\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{4}r^4-\frac{1}{12}r^6\right)\Big|_0^2\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\left(8-\frac{16}{3}\right)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{8}{3}\cdot 2\pi=\frac{16}{3}\pi\end{aligned}$$

4.3.3 n 重积分的坐标变换

记 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，设 $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$在一个$n$ 维空间的闭区域(P_n)上是连续函数，那么它的 n 重积分是

$$I=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(P_n)}f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n \tag{4.32}$$

若有另一个(Q_n)空间，它的坐标为$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n)$，假定它与$(P_n)$有下面的关系

$$\begin{cases}x_1=x_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n)\\x_2=x_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n)\\\cdots\\x_n=x_n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n)\end{cases}$$

则它们之间的坐标变换的雅可比行列式为

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n}\end{vmatrix} \tag{4.33}$$

因此多重积分的换元公式就有如下的形式：

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(P_n)}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(Q_n)}f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\,|J|\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n \tag{4.34}$$

它与二重积分及三重积分的公式相似.

例 25 求 n 维球体 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 的容积 V_n.

解 该球体以原点为球心，以 R 为半径. 这个问题是要计算积分

$$V_n=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

令

$$x_1=R\xi_1,\quad x_2=R\xi_2,\quad x_n=R\xi_n$$

若作具有相似系数 k 的相似变换，则任何次(n)方体的容积乘上 k^n 倍，相当于半径乘了 k 倍. 由此推知，只取决于 R 的函数 V_n 应具有下面的形状：

$$V_n=C_nR^n$$

其中 C_n 是一个常数，它随 n 变化. 它表示当 $R=1$ 时的 n 维球体的体积. 因此有

$$V_n=C_nR^n=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(R\xi_1)^2+(R\xi_2)^2\cdots(R\xi_n)^2\leqslant R^2}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n$$

$$=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\xi_1^2+\xi_2^2\cdots\xi_n^2\leqslant 1}R^n\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n$$

于是得到

$$C_n=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\xi_1^2+\xi_2^2\cdots\xi_n^2\leqslant 1}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\xi_n\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\xi_1^2+\xi_2^2\cdots\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}$$

$$=2\int_{0}^{1}\mathrm{d}\xi_n\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\xi_1^2+\xi_2^2\cdots\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}$$

右端的积分表示半径为 $\sqrt{1-\xi_n^2}$ 的 $n-1$ 维球体的体积. 该体积等于 $C_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$,由此可以得到一个递推公式

$$C_n = 2\int_0^1 C_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\xi_n$$

令

$$R\xi_n = R\cos\theta$$

则

$$(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} = (1-\cos^2\theta)^{\frac{n-1}{2}} = (\sin^2\theta)^{\frac{n-1}{2}} = \sin^{n-1}\theta$$

因为 $\xi_n=\cos\theta$,所以当 $\xi_n=0$ 时,$\theta=\frac{\pi}{2}$;而当 $\xi_n=1$ 时,$\theta=0$;及 $\mathrm{d}\xi_n=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

于是得到

$$C_n = 2C_{n-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{n-1}\theta\cdot(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2C_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta$$

在 2.4 节中已知[公式(2.20)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

由此得到递推公式

$$C_n = 2C_{n-1}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = C_{n-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \tag{4.35}$$

按照 C_n 递推公式(4.35),有下列公式:

$$C_n = C_{n-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

$$C_{n-1} = C_{n-2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+2}{2}\right)} = C_{n-2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$C_{n-2} = C_{n-3}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2+2}{2}\right)} = C_{n-3}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

…

$$C_{n-(n-2)} = C_2 = C_1\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+2}{2}\right)} = C_1\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} = C_1\sqrt{\pi}\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

因为 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(2)=1$，所以

$$C_2 = \frac{\pi}{2}C_1$$

$$C_1 = C_0\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+2}{2}\right)} = C_0\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = C_0\sqrt{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 2C_0$$

令 $C_0=1$，则有

$$C_1 = 2$$

$$C_2 = \pi$$

$$C_3 = C_2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+2}{2}\right)} = C_2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = C_2\sqrt{\pi}\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{4}{3}\pi$$

逐次地把后面的公式代入前面的公式，就会得到

$$C_n = (\sqrt{\pi})^n\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= (\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

因此，n 维球体的体积为

$$V_n = C_nR^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n \tag{4.36}$$

当 n 为偶数时，令 $n=2m$，则

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{\Gamma(m+1)}R^{2m} = \frac{\pi^m}{m!}R^{2m} \tag{4.37}$$

当 n 为奇数时，令 $n=2m+1$，则

$$V_{2m+1} = \frac{\pi^{\frac{2m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}+1\right)}R^{2m+1} = \frac{(\sqrt{\pi})^{2m+1}}{\Gamma\left(m+1+\frac{1}{2}\right)}R^{2m+1}$$

使用公式

$$(2n-1)!! = \frac{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

或

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}$$

若用 $m+1$ 替代式中的 n，那么就有

$$\Gamma\left(m+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{m+1}}$$

于是得到

$$V_{2m+1}=\frac{2^{m+1}(\sqrt{\pi})^{2m+1}}{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}R^{2m+1}=\frac{2^{m+1}(\sqrt{\pi})^{2m}}{(2m+1)!!}R^{2m+1}=\frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}R^{2m+1} \tag{4.38}$$

按照 $V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}R^{2m}$ 和 $V_{2m+1}=\frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}R^{2m+1}$，可得到

$$V_1=2R \quad \text{（一条长为 } 2R \text{ 的直线）}$$

$$V_2=\pi R^2 \quad \text{（半径为 } R \text{ 的平面圆）}$$

$$V_3=\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{（半径为 } R \text{ 的球体）}$$

$$V_4=\frac{1}{2}\pi^2 R^4$$

$$V_5=\frac{8}{15}\pi^2 R^5$$

$$\cdots$$

第 5 章　曲线积分和曲面积分

5.1　曲 线 积 分

5.1.1　第一型曲线积分

1. 第一型曲线积分的定义.

假设空间有一条曲线(l),它具有确定的方向.设 A 是这条曲线的起点,B 是终点(图 5.1).弧长由起点 A 算起.假定在这条曲线上定义了一个连续函数$f(M)$,于是对于曲线(l)的每一点 M,$f(M)$都有确定的数值.

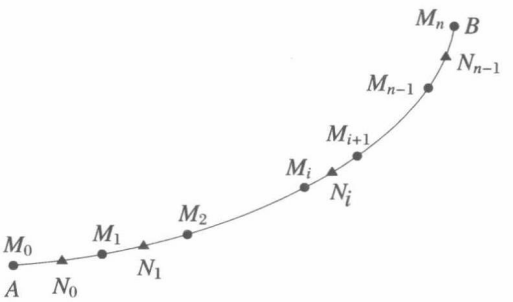


图 5.1

由点 $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n$,把$(l)$分成 n 段,其中 M_0 与 A 重合,M_n 与 B 重合.在任何一段曲线 $M_iM_{i+1}(i=1,2,3,\cdots)$上,任取一点 N_i,作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta s_i$$

其中 Δs_i 是曲线上弧$\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$的长度.当分割的数目 n 无限增加,而 Δs_i 无限变小时,这个和的极限,被称为函数 $f(M)$沿曲线(l)的积分,并记作

$$\int_{(l)} f(M)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(N_i)\Delta s_i \tag{5.1}$$

其中 $\lambda = \max\{\Delta s_i, i\}$.

如果曲线上的 M 点的位置,可由弧长 $s = \overset{\frown}{AM}$ 完全确定,那么函数 $f(M)$ 就是自变量 s 的函数,即 $f(M) = f(s)$,而且积分就是通常的定积分

$$\int_{(l)} f(M)\mathrm{d}s = \int_0^l f(s)\mathrm{d}s \tag{5.2}$$

其中积分上限 l 就是曲线 (l) 的弧长.

以上所定义的曲线积分称为第一型曲线积分. 曲线 (l) 是可以封闭的,就是说 B 可以与 A 重合.

如果 $f(s)$ 是线质量密度函数,则积分结果就是线型物质的质量;若 $f(s) = 1$,则积分结果就是该曲线的长度.

当曲线用直角坐标表示时,有

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}x$$

线积分的公式为

$$\int_{(l)} f(M)\mathrm{d}s = \int_{(l)} f(x,y,z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}x \tag{5.3}$$

若曲线用参变量 t 表达出来,则

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = \omega(t)$$

那么线积分公式是

$$\int_{(l)} f(M)\mathrm{d}s = \int_{(l)} f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}\mathrm{d}t \tag{5.4}$$

如果变量从 $t = t_A$ 变到 $t = t_B$,相应于曲线从 A 到 B,那么式(5.4)可写成

$$\int_{(l)} f(M)\mathrm{d}s = \int_{t_A}^{t_B} f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}\mathrm{d}t \tag{5.5}$$

2. 算例.

例 1 用曲线积分求曲线质量:若有一条曲线是由 $y = \ln x$ 表示的,假定这条曲线上每点的质量密度是 $f(x,y,z) = x^2$,求这条曲线从 $x = 0$ 到 $x = 3$ 的质量.

解 因为这是一条平面曲线,所以由式(5.3),得

$$\int_{(l)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_0^3 x^2\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^3 x\sqrt{1 + x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{1}{3}(10^{\frac{3}{2}} - 1) = 10.207592\cdots$$

例 2 用曲线积分求曲线长度:有空间曲线 $\overset{\frown}{AB}$,其方程是:$x = 3t$,$y = 3t^2$,$z = 2t^3$,$A(x,y,z)$ 点的坐标为 $(3,3,2)$,$B(x,y,z)$ 点的坐标是 $(6,12,16)$,求曲线

$\overset{\frown}{AB}$的长度.

解　在式(5.5)中,令 $f(x,y,z)=1$,则$\overset{\frown}{AB}$的长度为

$$s=\int_A^B \mathrm{d}s$$

其中

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$$

这里

$$\mathrm{d}x=3\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=6t\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}z=6t^2\mathrm{d}t$$

因此

$$\mathrm{d}s=\sqrt{9+36t^2+36t^4}\cdot\mathrm{d}t$$

当用变量 t 表示时,$A(t)=1$,$B(t)=2$,于是曲线$\overset{\frown}{AB}$的长度为

$$s=\int_1^2\sqrt{9+36t^2+36t^4}\cdot\mathrm{d}t=3\int_1^2\sqrt{1+4t^2+4t^4}\cdot\mathrm{d}t=3\int_1^2(2t^2+1)\mathrm{d}t$$

$$=3\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)\Big|_1^2=3\left[\left(\frac{16}{3}+2\right)-\left(\frac{2}{3}+1\right)\right]=3\left(\frac{22}{3}-\frac{5}{3}\right)=17$$

例3　求曲线积分 $\int_{(l)}(y^2+z)\mathrm{d}s$,设曲线$(l)$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=a$ 的交线,其中 $a>0$.

解　根据定积分的分项积分法,可把积分式写成

$$\int_{(l)}(y^2+z)\mathrm{d}s=\int_{(l)}y^2\mathrm{d}s+\int_{(l)}z\mathrm{d}s$$

由于该曲线关于 x,y,z 轮换对称,等式右边的两个积分分别为

$$\int_{(l)}y^2\mathrm{d}s=\int_{(l)}z^2\mathrm{d}s=\int_{(l)}x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_{(l)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_{(l)}a^2\mathrm{d}s=\frac{a^2l}{3}$$

及

$$\int_{(l)}z\mathrm{d}s=\int_{(l)}x\mathrm{d}s=\int_{(l)}y\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_{(l)}(x+y+z)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_{(l)}a\mathrm{d}s=\frac{al}{3}$$

其中 l 为曲线(l)的长度.因此有

$$\int_{(l)}(y^2+z)\mathrm{d}s=\int_{(l)}y^2\mathrm{d}s+\int_{(l)}z\mathrm{d}s=\frac{a^2l}{3}+\frac{al}{3}=\frac{a}{3}(a+1)l$$

现在要求曲线(l)的长度 l:因为 l 是球面与平面的交线,显然它是一个圆,这个圆在平面 $x+y+z=a$ 上,它的圆心到球心的距离 $d=\dfrac{|0+0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$,故圆周半径为

$$r=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

因此圆周的周长(即 l 的长度)为 $l=2\pi r=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$,于是得到

$$\int_{(l)}(y^2+z)\mathrm{d}s=\frac{a}{3}(a+1)l=\frac{1}{3}a(a+1)\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{2\pi\sqrt{6}}{9}a^2(a+1)$$

5.1.2 第二型曲线积分

虽然在第一型曲线积分定义之初就说空间曲线(l)是有确定方向的,但在前面求曲线积分时(第一型曲线积分),并未提到过曲线的方向.在以下的讨论中,要着重指明曲线的方向,这就是要探讨的第二型曲线积分.

引用空间坐标,设曲线(l)上的任一点 P 的位置是由坐标(x,y,z)确定的,设$P(x,y,z)$是沿这条曲线的一个连续函数.把曲线(l)上的点 N_i 的坐标记作(ξ_i,η_i,ζ_i),并用 Δx_i 记线段$\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$在 Ox 轴上的投影.Δx_i 可以是正的,也可以是负的,甚至可以为零.作 Δx_i 与$P(N_i)=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$的乘积之和,即

$$\sum_{i=0}^{n-1}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

令 $\lambda=\max\{\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}\text{弧长}\}$,当 $\lambda\to 0$ 时,这个和的极限也被称为 $P(x,y,z)$沿曲线(l)的积分,并记为

$$\int_{(l)}P(x,y,z)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

设 $Q(x,y,z)$和 $R(x,y,z)$也是曲线(l)上定义的连续函数,那么同样会有下面两个积分:

$$\int_{(l)}Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$$

$$\int_{(l)}R(x,y,z)\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$$

把这三个积分相加,就得到一般形状的积分,记为

$$\begin{aligned}&\int_{(l)}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i]\end{aligned}\tag{5.6}$$

式中 $\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i$ 分别为线段$\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$在 Ox,Oy,Oz 轴上的投影.

为建立积分式(5.6)与(5.1)之间的联系,假定曲线(l)上的点 M 是曲线弧长 $s=\overset{\frown}{AM}$的函数.我们可以求出曲线上任一点的方向余弦:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos(\vec{t},\vec{x}),\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\cos(\vec{t},\vec{y}),\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\cos(\vec{t},\vec{z})\tag{5.7}$$

其中 $\vec{t}$ 表示曲线(l)上任意一点 M 的切线方向,也就是曲线的方向.我们用记号

$(\vec{a},\vec{b})$来表示$\vec{a},\vec{b}$两个方向的夹角，用$\cos(\vec{a},\vec{b})$表示$\vec{a},\vec{b}$的夹角的方向余弦. 用$\vec{x},\vec{y},\vec{z}$表示相应坐标轴上的正方向，略去高阶无穷小，有

$$\Delta x_i = \cos(\vec{t}_i,\vec{x})\Delta s_i,\quad \Delta y_i = \cos(\vec{t}_i,\vec{y})\Delta s_i,\quad \Delta z_i = \cos(\vec{t}_i,\vec{z})\Delta s_i$$

式中的$\vec{t}_i$是N_i点的切线方向. 因此

$$\begin{aligned}\int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z &= \int_{(l)} P\cos(\vec{t},\vec{x})\mathrm{d}s + Q\cos(\vec{t},\vec{y})\mathrm{d}s + R\cos(\vec{t},\vec{z})\mathrm{d}s\\ &= \int_{(l)} [P\cos(\vec{t},\vec{x}) + Q\cos(\vec{t},\vec{y}) + R\cos(\vec{t},\vec{z})]\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中P,Q,R可看成是沿曲线(l)的s的函数.

设曲线(l)的参变量方程是

$$x = \varphi(\tau),\quad y = \psi(\tau),\quad z = \omega(\tau) \tag{5.9}$$

当参变量τ从α变化到β时，过点(x,y,z)画出由A到B的曲线. 设点M_i对应于参变量$\tau=\tau_i$，那么

$$\Delta x_i = \frac{\varphi(\tau_i)-\varphi(\tau_{i-1})}{\Delta\tau_i}\Delta\tau_i = \frac{\Delta\varphi(\tau_i)}{\Delta\tau_i}\Delta\tau_i$$

取极限(当$\Delta\tau_i\to 0$时)，则有

$$\mathrm{d}x_i = \varphi'(\tau_i)\mathrm{d}\tau_i$$

同样有

$$\mathrm{d}y_i = \psi'(\tau_i)\mathrm{d}\tau_i$$

$$\mathrm{d}z_i = \omega'(\tau_i)\mathrm{d}\tau_i$$

这样，积分式(5.6)就可化为普通的积分公式了：

$$\begin{aligned}\int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z &= \int_{\alpha}^{\beta} P\varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau + Q\psi'(\tau)\mathrm{d}\tau + R\omega'(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P\varphi'(\tau) + Q\psi'(\tau) + R\omega'(\tau)]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{5.10}$$

式中的P,Q,R应当按照式(5.9)通过变量τ表达.

第二型曲线积分具以下性质：

(1) 如果曲线(l)是由各部分$(l_1),(l_2),\cdots,(l_n)$组成的，则有

$$\begin{aligned}\int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z &= \int_{(l_1)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \int_{(l_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \cdots\\ &\quad + \int_{(l_n)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{5.11}$$

(2) 曲线积分的数值不仅由积分表达式与积分路线来确定，还与曲线(l)的方向有关，当改变积分路线的方向时，曲线积分也变号.

5.1.3 曲线积分的应用

1. 用曲线积分求力场做的功.

现在来应用曲线积分计算力学中的功:假设有一个力 F 作用在 P 点处,把一个质量为 m 的物体推移了 l 的位移,则该力所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{l}| \cdot \cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{l})$$

这里 $|\boldsymbol{F}|$ 是力的大小,$|\boldsymbol{l}|$ 是位移的长度,$\cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{l})$ 是力与位移的夹角的余弦. 当 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{l}) = 0$ 时,即力与运动方向相同时,功就等于力的大小与位移的乘积.

当某个物体在力 F 的作用下走了一条 (l) 曲线,而且 F 是曲线 (l) 上的点 M 的函数时,则必须分别考虑曲线上每个点的力之大小及运动方向. 我们把运动曲线 (l) 分成小的若干部分,考虑这些部分中的一段 $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$. 因为是一段很短的曲线,可以近似地把它看成直线,并用弦 $\overline{M_iM_{i+1}}$ 代替弧 $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$. 这样就可以把力在这一小段位移上所做的功写成

$$\Delta W_i \approx |F_i| \cdot |\overline{M_iM_{i+1}}| \cdot \cos(\vec{F}_i, \overrightarrow{M_iM_{i+1}})$$

其中 $|F_i|$ 表示在 M_i 点的力矢量 $\vec{F}$ 的长度,$|\overline{M_iM_{i+1}}|$ 表示线段 $\overline{M_iM_{i+1}}$ 的长度,而 $(\vec{F}_i, \overrightarrow{M_iM_{i+1}})$ 则是力与路径之间方向的夹角. 利用解析几何中关于两个方向的夹角的公式,可把上式写成

$$\begin{aligned}\Delta W_i \approx & |F_i| \cdot |\overline{M_iM_{i+1}}| \cdot [\cos(F_i, x)\cos(M_iM_{i+1}, x) \\ & + \cos(F_i, y) \cdot \cos(M_iM_{i+1}, y) + \cos(F_i, z)\cos(M_iM_{i+1}, z)]\end{aligned}$$

我们用 P, Q, R 分别表示力 $\vec{F}$ 在 x, y, z 三个坐标上的投影,则有

$$\Delta W_i \approx P_i\Delta x_i + Q_i\Delta y_i + R_i\Delta z_i$$

式中的 ΔW_i 是力 $\vec{F}$ 在点 M_i 处移动 $|\overline{M_iM_{i+1}}|$ 所做的功. 此处

$$\begin{aligned} P_i &= |F_i|\cos(F_i, x), \quad \Delta x_i = |\overline{M_iM_{i+1}}|\cos(M_iM_{i+1}, x) \\ Q_i &= |F_i|\cos(F_i, y), \quad \Delta y_i = |\overline{M_iM_{i+1}}|\cos(M_iM_{i+1}, y) \\ R_i &= |F_i|\cos(F_i, z), \quad \Delta z_i = |\overline{M_iM_{i+1}}|\cos(M_iM_{i+1}, z) \end{aligned}$$

把力 $\vec{F}$ 在沿曲线 (l) 各部分所做的功加起来,并取极限,就得到全部功的表达式

$$W = \int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

例 4 求一个质量为 m 的质点 M,在重力的作用下,由位置 $M_1(a_1, b_1, c_1)$ 沿任何曲线 (l) 移动到 $M_2(a_2, b_2, c_2)$ 时重力做的功.

解 因为重力(地心引力)的方向是垂直向下的,它平行于 z 轴,而与 z 方向向反,所以

$$(\vec{F}_i, x) = (\vec{F}_i, y) = \frac{\pi}{2}, (\vec{F}_i, z) = \pi$$

这表明 $\vec{F}$ 在 x,y,z 三个坐标上的投影分别为

$$P = Q = 0, \quad R = |F|\cos\pi = -mg$$

其中 g 为重力加速度. 于是重力对质点 M 做的功为

$$W = \int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{M_1}^{M_2} R\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} (-mg)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{c_2}^{c_1} mg\mathrm{d}z = (c_1 - c_2)mg$$

由此可见,这个功只依赖于起始位置与最终位置,而与路径无关.

例 5　一个质量为 1 的质点,受到一个质量为 m 的不动中心的引力作用,由位置 M_1 移动到 M_2,试求引力所做的功.

解　根据万有引力公式,该质点受到的引力为

$$|\vec{f}| = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

这里 f 为引力,m_1 为不动中心物体的质量 $m_1 = m$,m_2 为质点的质量 $m_2 = 1$,r 为质点到引力中心的距离,k 是引力常数. 所以引力公式又可写成

$$|\vec{f}| = -\frac{k \cdot m}{r^2}\frac{\vec{r}}{|r|}$$

式中的负号表示引力的方向与矢径 $\vec{r}$ 的方向相反,即矢径 $\vec{r}$ 是从引力中心指向质点的,而引力却是从质点指向引力中心的(因为引力中心是不动的).

把这个力 $\vec{f}$ 投影到 x,y,z 坐标轴上时,有

$$P = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{x}{r}, \quad Q = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{y}{r}, \quad R = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{z}{r}$$

因此可求出引力做的功为

$$W = \int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = -km\int_{(l)} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}x + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}y + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}z$$

$$= -km\int_{(l)} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{r^3} = -km\int_{(l)} \frac{r\mathrm{d}r}{r^3}$$

$$= -km\int_{(l)} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = km\int_{(l)} \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)$$

若用 r_1 与 r_2 分别记 M_1 和 M_2 到引力中心的距离,那么从 r_1 到 r_2 引力做的功可表示为

$$W = km\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

该式也说明引力所做的功,只取决于作用力的起点与终点,而与路径无关.

2. 用曲线积分求面积.

这里要讨论的是平面曲线所包围的面积. 考虑 xOy 平面上的一条封闭曲线 (l) 所包围的区域 (σ) 的面积 σ. 假设平行于 Oy 轴的直线与曲线 (l) 的交点不多于

两个(图 5.2).用 y_1 记平行 Oy 轴的进入区域(σ)的点的纵坐标,y_2 记它穿出区域(σ)的点的纵坐标.用 a 和 b 表示曲线(l)的两个极端点的横坐标,也就是说(σ)在 $x=a$ 与 $x=b$ 之间.根据定积分的定义,界于曲线(l_1),Ox 轴及在 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的面积为

$$\sigma_1 = \int_a^b y_1 \mathrm{d}x$$

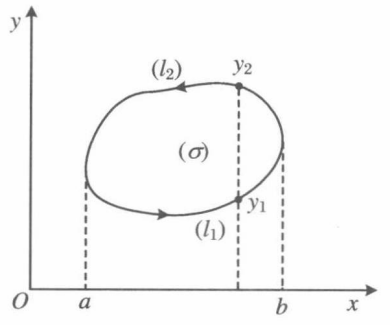


图 5.2

而由曲线(l_2),Ox 轴及在 $x=a$ 与 $x=b$ 所包围的面积则为

$$\sigma_2 = \int_a^b y_2 \mathrm{d}x$$

很明显,(σ)区域的面积,或称曲线(l)所包围的面积为上述两个面积之差,即

$$\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = \int_a^b y_2 \mathrm{d}x - \int_a^b y_1 \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b (y_2 - y_1)\mathrm{d}x \tag{5.12}$$

从图 5.2 可知,积分 $\int_a^b y_2 \mathrm{d}x$ 恰恰可写成曲线(l_2)的线积分 $\int_{(l_2)} y\mathrm{d}x$,但两者符号相反,因为后者的积分是从 $x=b$ 到 $x=a$ 的.同样 $\int_a^b y_1 \mathrm{d}x$ 也可写成曲线(l_1)的线积分 $\int_{(l_1)} y\mathrm{d}x$,路径由 $x=a$ 到 $x=b$,两者符号相同.因此就有

$$\sigma = \int_a^b y_2 \mathrm{d}x - \int_a^b y_1 \mathrm{d}x = -\int_{(l_2)} y\mathrm{d}x - \int_{(l_1)} y\mathrm{d}x = -\left(\int_{(l_2)} y\mathrm{d}x + \int_{(l_1)} y\mathrm{d}x\right) = -\int_{(l)} y\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

这里,曲线(l)取逆时针方向.

同样,可求得

$$\sigma = \int_{(l)} x\mathrm{d}y \tag{5.14}$$

因为式(5.13)或(5.14)都是表示(σ)区域的面积,它们是相等的,所以把它们相加,再除 2,就得到

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{(l)} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \tag{5.15}$$

在推导式(5.13)时,假设了平行于 Oy 轴的直线与曲线(l)的交点不多于 2 个,这个假设对于更普遍的情形,如图 5.3 所示,式(5.13)也是正确的.重复上面的讨论,仍然可得到

$$\sigma = -\left(\int_{(l_1)} y\mathrm{d}x + \int_{(l_2)} y\mathrm{d}x\right)$$

因为在线段 CD 和 BA 上，x 是常数，$\mathrm{d}x = 0$，所以沿这两个线段的积分 $\int y\mathrm{d}x$ 等于零. 在上式中加上两个等于零的积分，并带上负号，就得到式(5.13)了. 它可写成这样

$$\sigma = -\left(\int_{(l_1)} y\mathrm{d}x + \int_{(CD)} y\mathrm{d}x + \int_{(l_2)} y\mathrm{d}x + \int_{(BA)} y\mathrm{d}x\right) = -\left(\int_{(l_1)} y\mathrm{d}x + \int_{(l_2)} y\mathrm{d}x\right)$$

对于更具普遍形状的边界线的区域(图 5.4)，引平行于 Oy 轴的直线，把区域(σ)分成几个有限的部分，对每个部分使用式(5.13)，再把这些公式加起来，在左边就得到全部区域(σ)的面积，而等式右边就是沿边界线(l)的积分. 如前所述，其中沿平行于 Oy 轴的直线的积分为零，因为 $\mathrm{d}x = 0$. 如在图 5.4 中，沿 BF 的积分与沿 FD 和 DB 的积分，方向相反，互相抵消. 最后我们得到普遍形状的边界线的区域的面积仍可应用式(5.13)，(5.14)，(5.15).

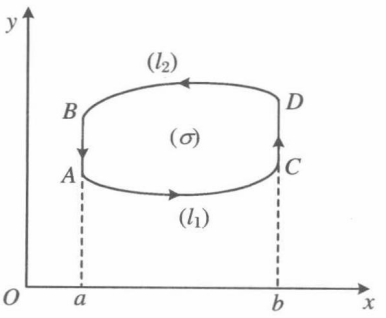


图 5.3

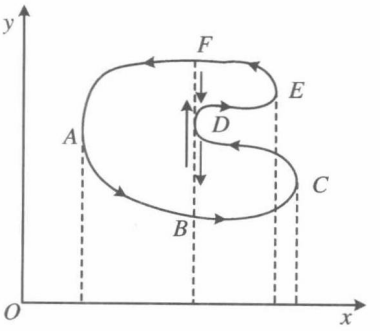


图 5.4

例 6　求椭圆的面积.

解　令 $x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，则 $\mathrm{d}x = -a\sin\theta\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}y = b\cos\theta\mathrm{d}\theta$.

应用式(5.15)，得到

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{(l)} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos\theta \cdot b\cos\theta\mathrm{d}\theta - b\sin\theta \cdot (-a\sin\theta\mathrm{d}\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

在求面积的积分中，当做曲线积分时，要沿曲线的逆时针方向进行.

例 7　求心脏线包围的面积.

解　心脏线是圆外旋轮线中的一种特殊曲线，滚动的圆和不动的圆的半径相等，即 $a = b$. 它的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta) \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{5.16}$$

由该方程可得

$$dx = -2a(\sin\theta - \sin 2\theta)d\theta, \quad dy = 2a(\cos\theta - \cos 2\theta)d\theta$$

应用式(5.15),得到心脏线包围的区域的面积为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}\int_{(l)} x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{(l)} [a(2\cos\theta - \cos 2\theta)\cdot 2a(\cos\theta - \cos 2\theta)d\theta \\ &\quad - a(2\sin\theta - \sin 2\theta)\cdot(-2a)(\sin\theta - \sin 2\theta)d\theta] \\ &= a^2\int_0^{2\pi}(2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 3\cos\theta\cos 2\theta - 3\sin\theta\sin 2\theta + \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi} 3d\theta - a^2\int_0^{2\pi} 3(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta)d\theta \\ &= 6\pi a^2 - 3a^2\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = 6\pi a^2 - 3a^2(\sin\theta)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi a^2 \end{aligned}$$

这个问题在3.1节中已经计算过,结果与此相同,只是方法不同罢了,可谓殊途同归.这里用曲线积分法,也许更简便些.

5.2 格林(Green)公式

格林公式是建立沿封闭曲线的线积分与面积分之间的关系的一个重要公式.现推演如下:

设(σ)是xOy平面上封闭曲线(l)围成的闭区域.函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在(σ)上连续,并存在偏导数.假定平行于y轴的直线与曲线(l)的交点不多于2个(图5.3),那么可以得到

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}d\sigma &= \iint_{(\sigma)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\,dy = \int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy \\ &= \int_a^b [P(x,y_2) - P(x,y_1)]dx = \int_a^b P(x,y_2)dx - \int_a^b P(x,y_1)dx \end{aligned}$$

式中$d\sigma$为(σ)平面上的面积元,$d\sigma = dx\,dy$.右端的积分$\int_a^b P(x,y_1)dx$和$\int_a^b P(x,y_2)dx$恰好是从$x=a$到$x=b$沿界线(l)中的(l_1)和(l_2)(图5.3)的线积分$\int_{(l)} P(x,y)dx$.

因为按规定，线积分是沿逆时针方向的，所以右端第一个积分应是负号，即

$$\int_a^b P(x,y_2)\mathrm{d}x = -\int_b^a P(x,y_2)\mathrm{d}x = -\int_{(l_2)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

并且有

$$\int_a^b P(x,y_1)\mathrm{d}x = \int_{(l_1)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

因此

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}\sigma = -\int_{(l_1)} P(x,y)\mathrm{d}x - \int_{(l_2)} P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{(l)} P(x,y)\mathrm{d}x$$

或

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}\sigma = -\int_{(l)} P(x,y)\mathrm{d}x \tag{5.17}$$

用同样的方法，可以得到

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}\sigma &= \iint_{(\sigma)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= \int_\alpha^\beta [Q(x_2,y)-Q(x_1,y)]\mathrm{d}y \\ &= \int_\alpha^\beta Q(x_2,y)\mathrm{d}y - \int_\alpha^\beta Q(x_1,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

最后的式子就是曲线(l)的线积分，所以有

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}\sigma = \int_{(l)} Q\mathrm{d}y \tag{5.18}$$

由方程(5.18)减去方程(5.17)，得

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \tag{5.19}$$

这就是**格林公式**，左端为面积分，右端是线积分.

当区域(σ)界于几条曲线之间时(图5.5)，格林公式仍然适用. 不过公式右端的线积分要对所有的边界曲线求积分. 当坐标轴如图5.5所示的取向时，沿外边界线的积分应取逆时针方向，而在里面的边界线应取顺时针方向. 就是说沿所有的边界线求积分时，区域(σ)总是保持在前进方向的左边.

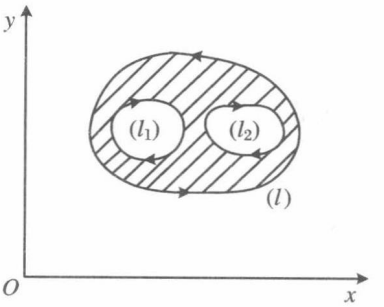


图5.5

当线积分在闭合曲线上循环一周时，可用环积分符号$\oint$，于是式(5.19)可写成

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{(l)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \tag{5.20}$$

这就是闭合曲线上的格林公式.

对于图 5.5 的情况,因为在曲线(l)内,还有(l_1)和(l_2),所以用格林公式时,可写成

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{(l)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{(l_1)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{(l_2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \tag{5.21}$$

其中曲线(l_1)和(l_2)的积分方向与曲线(l)上的积分方向相反.(l)上为逆时针方向,而(l_1)和(l_2)上是顺时针方向.这在几何上可理解为在面积(σ)中挖去了(σ_1)和(σ_2)两个洞.

例 8 用格林公式计算圆的面积.

解 圆的参数方程为

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

因此有

$$\mathrm{d}x=-a\sin t\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=a\cos t\mathrm{d}t$$

在格林公式中

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{(l)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

令 $P=-y,Q=0$,则该圆的面积为

$$A=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=-\oint_{(l)}y\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}a\sin t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=2a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi a^2$$

或令 $P=0,Q=x$,则

$$A=\oint_{(l)}x\mathrm{d}y=2a^2\int_0^{\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=\pi a^2$$

例 9 用格林公式计算积分 $\int_{(l)}xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$,其中$(l)$为圆周曲线:$x^2+y^2=a^2$.

解 在格林公式中

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{(l)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

令 $P=-x^2y,Q=xy^2$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$$

因此

$$\int_{(l)} xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x = \iint_{(\sigma)} (y^2 + x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{(\sigma)} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a^2\iint_{(\sigma)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a^2 \cdot \pi a^2 = \pi a^4$$

例 10　用格林公式计算积分 $\int_{(l)} (x + y)\mathrm{d}x - (x - y)\mathrm{d}y$，其中 (l) 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解　令 $P = x + y, Q = -(x - y) = y - x$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$\int_{(l)} (x + y)\mathrm{d}x - (x - y)\mathrm{d}y = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{(\sigma)} (-1 - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\iint_{(\sigma)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2 \cdot \pi ab$$

例 11　用格林公式计算星形线围成的区域的面积.

解　星形线的参数方程是

$$\begin{cases} x = b\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

在格林公式中

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \oint_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

令 $P = -y = -b\sin^3 t, Q = 0$，则

$$\mathrm{d}x = -3b\cos^2 t \cdot \sin t \cdot \mathrm{d}t$$

于是得到星形的面积为

$$A = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_{(l)} P\mathrm{d}x = \int_{(l)} -b\sin^3 t \cdot (-3b\cos^2 t \cdot \sin t \cdot \mathrm{d}t)$$

$$= 3b^2\int_0^{2\pi} \sin^4 t \cdot \cos^2 t \cdot \mathrm{d}t = 3b^2 \cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t \cdot \mathrm{d}t$$

$$= 12b^2 \frac{3!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi b^2$$

例 12　用格林公式计算笛卡儿叶形线围成的面积(图 5.6).

解　笛卡儿叶形线的方程是

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

其中

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases} \quad (t = \tan\theta)$$

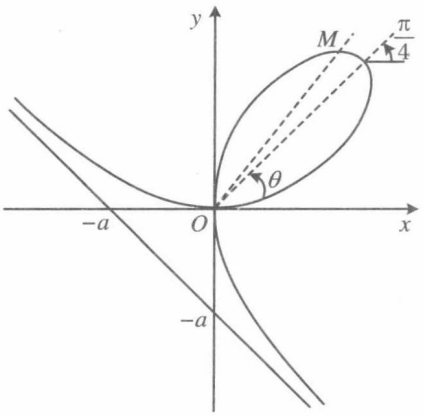


图 5.6

(θ 是叶形线上任一点和原点的连线与 x 轴的夹角.)

在格林公式中令 $P=-y=-xt$, $Q=0$,那么叶形线的面积为

$$A=-\oint_{(l)} y\mathrm{d}x=-\oint_{(l)} xt\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\oint_{(l)} t\mathrm{d}x^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left[(tx^2)\Big|_{\substack{x=0\\x=0}}^{t=\tan\theta}-\int_0^{t=\tan\theta} x^2\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{t=\tan\theta} x^2\mathrm{d}t \quad (\text{用分部积分法})$$

由于沿叶形线回转一周时,自变量从 $x=0$ 到 $x=0$,因此对 x 的积分为零.但分部积分后,积分变成对 t 积分.因为叶形线围成的区域相对于角度为 $\frac{\pi}{4}$ 的这条线对称,而且有 $\tan\frac{\pi}{4}=1$,所以积分可从 $\tan 0=0$ 到 $\tan\frac{\pi}{4}=1$,并乘以 2.于是得到

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$=9a^2\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t=9a^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t^3}{3(1+t^3)^2}=3a^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$=3a^2\left(-\frac{1}{1+t^3}\right)\Big|_0^1=3a^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}a^2$$

5.3 曲面积分

5.3.1 第一型曲面积分

第一型曲面积分类似于第一型曲线积分.假设有一个曲面(Σ),把 Σ 分割成 n 个小块曲面 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n$(图 5.7).当 n 趋向无穷大时,各小块曲面 Σ_i 的面积 ΔS_i 中最大的趋向于零,同时它们中最大的直径也趋于零.在 Σ_i 上任取一点 M_i,设 $f(M)$ 为 Σ 曲面的函数,定义

$$S=\iint_{(\Sigma)} f(M)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\infty} f(M_i)\Delta S_i \tag{5.22}$$

其中 λ 是 ΔS_i 的最大直径.称式(5.22)为第一型曲面积分.

假设曲面 Σ 的方程是

$$z = f(x,y) \tag{5.23}$$

令

$$p = \frac{\partial f}{\partial x},\quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{5.24}$$

若曲面 Σ 在 (x,y) 平面上的投影是区域 (σ)，曲面 Σ 上的小块曲面 ΔS 的投影为 $\Delta\sigma$（图 5.8）.那么在 $\Delta\sigma$ 中取一点 (x,y)，则 Σ 上有一点 $[x,y,f(x,y)]$ 相对应，在这点的切面的方程是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)=Z-z \tag{5.25}$$

或

$$p(X-x)+q(Y-y)=Z-z \tag{5.26}$$

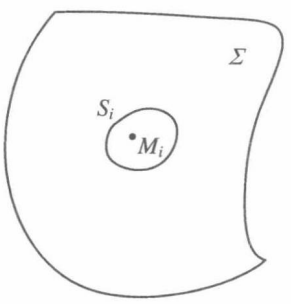


图 5.7

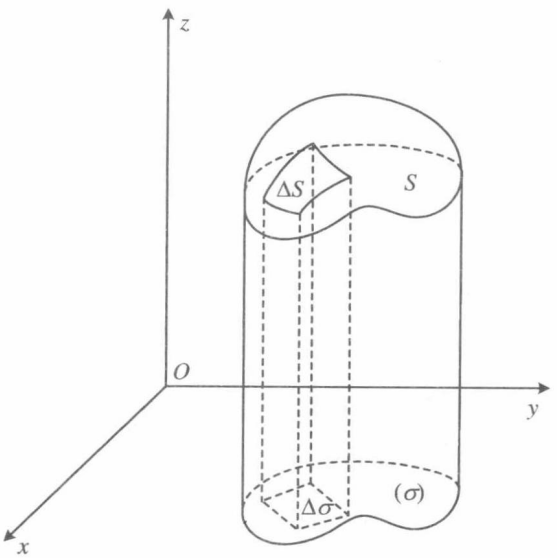


图 5.8

现在来推导式(5.25)，假设有一个空间曲面，由方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{5.27}$$

给定，要求它的切面方程.

设 $M(x,y,z)$ 是曲面上的一个点，L 是这个曲面上过 M 点的一条曲线.因为曲线 L 在这个曲面上，它当然满足方程(5.27).取方程(5.27)左边的微分，得到

$$F_x'(x,y,z)\mathrm{d}x+F_y'(x,y,z)\mathrm{d}y+F_z'(x,y,z)\mathrm{d}z=0 \tag{5.28}$$

我们知道，$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 与 M 点的曲线 L 的切线的方向余弦成比例.但过 M 点的曲线 L 的切线垂直于某一条确定的直线，而不依赖于曲线 L，这条确定的直线就是法线，它的方向余弦与 $F_x'(x,y,z),F_y'(x,y,z),F_z'(x,y,z)$ 成比例.如此，

可以看出，曲面(5.27)上经过 M 点的任何曲线的切线，都在同一个平面上：

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \tag{5.29}$$

这个平面称为这个曲面在 M 点的切平面.

从解析几何学知道，平面方程(5.29)中，系数 A,B,C 与这个平面的法线方向的余弦成比例. 在这种情况下，就是与 $F_x'(x,y,z),F_y'(x,y,z),F_z'(x,y,z)$ 成比例. 于是可把切面方程写成

$$F_x'(x,y,z)(X-x)+F_y'(x,y,z)(Y-y)+F_z'(x,y,z)(Z-z)=0 \tag{5.30}$$

其中 X,Y,Z 是变动坐标(在切平面上)，x,y,z 是切点 M 的坐标.

若所给的曲面方程为显示式

$$z=f(x,y)$$

则

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$$

于是得到

$$F_x'(x,y,z)=f_x'(x,y),\quad F_y'(x,y,z)=f_y'(x,y),\quad F_z'(x,y,z)=-1$$

习惯上用 p,q 分别记偏微商 $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$，因此，得到该平面的切面方程(5.30)为

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \tag{5.31}$$

以及切平面的法线方程

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1} \tag{5.32}$$

在一个一般的平面(也包括切平面)方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5.33}$$

中，用一个法式化因子

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5.34}$$

乘以式(5.33)[其中法式化因子的符号应与式(5.33)中 D 的符号相反，当 $D=0$ 时，因子的符号可以任意选择]，得到

$$MAx+MBy+MCz+MD=0 \tag{5.35}$$

它应该与该平面的法式方程

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-R=0 \tag{5.36}$$

重合. 因而得到

$$MA=\cos\alpha,\quad MB=\cos\beta,\quad MC=\cos\gamma,\quad MD=-R$$

把 M 的值代入，便得到

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$R = \mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5.37}$$

此处 α,β,γ 分别是切平面的法线与 x,y,z 坐标轴的夹角，其中 γ 在数值上等于切平面与 (x,y) 平面的夹角，当用 δ 表示切平面与 (x,y) 平面的夹角时，则有

$$|\cos\delta| = |\cos\gamma|$$

在切平面方程(5.31)中，$A=p,B=q,C=-1$，它的法式化因子是

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

所以切平面与 (x,y) 平面的夹角的余弦为

$$\cos\delta = -\cos\gamma = \mp\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

这样，就知道曲面 Σ 上的小块曲面 ΔS 的在 (x,y) 平面上的投影

$$\Delta\sigma = \Delta S\cos\delta = \Delta S\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

或

$$\Delta S = \Delta\sigma\sqrt{1+p^2+q^2}$$

因此得到该曲面的面积为

$$S = \iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.38}$$

积分号下的 $\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}\sigma$ 是曲面 Σ 的面积元素，即

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.39}$$

例 13　用式(5.38)计算球面的面积.

解　我们知道球面的方程是

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

其中 R 是球的半径.

从球面方程可解得

$$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

因此有

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z},\quad p^2 = \frac{x^2}{z^2}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z},\quad q^2 = \frac{y^2}{z^2}$$

把它们代入式(5.38),得

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(S)}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{(S)}\frac{R}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(S)}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

把球体的中心 O 作为坐标原点.球体在 xOy 平面上有方程 $x^2+y^2=R^2(z=0)$,因此对 x 来说,它的积分范围在 $-R$ 到 R.当 x 固定时,$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$,所以 y 的积分范围是 $-\sqrt{R^2-x^2}$ 到 $+\sqrt{R^2-x^2}$.为了方便,积分式中的 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 只取正号,表示积分是在 xOy 平面以上进行的,因此积分的结果只是球面积的 $\frac{1}{2}$.鉴于以上的分析,有

$$S_{\frac{1}{2}}=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y\quad(\text{在对 }y\text{ 积分时,可把 }x\text{ 看成常数})$$

$$=4R\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\mathrm{d}\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}}$$

$$=4R\int_0^R\mathrm{d}x\left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\Bigg|_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$=4R\int_0^R\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x=2\pi R^2$$

于是得到球面的面积为

$$S=2S_{\frac{1}{2}}=4\pi R^2$$

现在来推导用参变量表达的曲面积分公式.前面已经有计算曲面面积的公式

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$,$q=\frac{\partial z}{\partial y}$.设 $x=\varphi(u,v)$,$y=\psi(u,v)$,$z=\omega(u,v)$,那么

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

于是积分的面积元素为

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$$

$$\times\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

因为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\times\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\\
&\quad+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\\
&\quad+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\\
&=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]\\
&\quad-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}$$

令

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

因此得到

$$S=\iint\limits_{(\Sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(\Sigma)}\sqrt{EG-F^2}\cdot\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{5.40}$$

仍以计算球面的面积为例说明式(5.40)的用法.

球面方程是 $x^2+y^2+z^2=a^2$,其中 a 是球体的半径,把坐标原点放在球心,设 $x=\varphi(u,v)$,$y=\psi(u,v)$,$z=\omega(u,v)$,应用球坐标,则有

$$\begin{aligned}
x&=\varphi(u,v)=r\sin u\cos v\\
y&=\psi(u,v)=r\sin u\sin v\\
z&=\omega(u,v)=r\cos u
\end{aligned}$$

这里,u 是 r 与 z 轴的夹角,v 是 r 在 xOy 坐标平面上的投影与 x 轴的夹角.在球面上,$r=a$,$0\leqslant u\leqslant\pi$,$0\leqslant v\leqslant 2\pi$.

先求出 E,G,F,再代入式(5.40),得

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$= r^2\cos^2 u\cos^2 v + r^2\cos^2 u\sin^2 v + r^2\sin^2 u = r^2 = a^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$= r^2\sin^2 u\sin^2 v + r^2\sin^2 u\cos^2 v + 0 = r^2\sin^2 u = a^2\sin^2 u$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= r\cos u\cos v\cdot r\sin u(-\sin v) + r\cos u\sin v\cdot r\sin u\cos v + 0 = 0$$

因此球面的面积是

$$S = \iint\limits_{(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2}\cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{(\Sigma)} \sqrt{a^2\cdot a^2\sin^2 u - 0}\cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_0^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u = a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\,[-\cos u]_0^{\pi} = a^2\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}v = 4\pi a^2$$

下面再举一个使用式(5.40)求曲面积分的例子.

例 14 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{(S)} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\cdot \mathrm{d}S$,其中$(S)$表示椭球面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(a > b > c > 0)$.

解 采用球坐标,椭球面的表达式为

$$x = a\sin u\cos v$$

$$y = b\sin u\sin v$$

$$z = c\cos u$$

因此有

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = a^2\cos^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\sin^2 v + c^2\sin^2 u$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = a^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\cos^2 v$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= a\cos u\cos v\cdot a\sin u(-\sin v) + b\cos u\sin v\cdot b\sin u\cos v + 0$$

$$= (b^2 - a^2)\cos u\sin u\cos v\sin v$$

于是得到

$$EG - F^2 = (a^2\cos^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\sin^2 v + c^2\sin^2 u)(a^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\sin^2 u\cos^2 v) - [(b^2 - a^2)\cos u\sin u\cos v\sin v]^2$$

$$= a^2b^2\cos^2 u\sin^2 u + (b^2c^2\sin^4 u\cos^2 v + c^2a^2\sin^4 u)^2\sin^2 v$$

$$= (a^2b^2\cos^2 u + b^2c^2\sin^2 u\cos^2 v + c^2a^2\sin^2 u\sin^2 v)\sin^2 u$$

因此求得曲面的面积元素为

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \sqrt{a^2b^2\cos^2 u + b^2c^2\sin^2 u\cos^2 v + c^2a^2\sin^2 u\sin^2 v}\cdot\sin u\cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= abc\sqrt{\frac{\cos^2 u}{c^2} + \frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2}} \cdot \sin u \cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

注意根号里的函数

$$\sqrt{\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2\sin^2 u\cos^2 v}{a^4} + \frac{b^2\sin^2 u\sin^2 v}{b^4} + \frac{c^2\cos^2 u}{c^4}}$$

即

$$\sqrt{\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

这就是说有等式

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}}$$

$$= \frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}$$

因此该面积分为

$$I = \iint\limits_{(S)} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \cdot \mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{(S)} abc\left(\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}\right)\sin u\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

由于椭球面的对称性，计算时只要计算第一象限，然后乘以8，即

$$I = 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}\right)\sin u\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 v}{a^2}\cdot\sin^3 u + \frac{\sin^2 v}{b^2}\cdot\sin^3 u + \frac{\cos^2 u}{c^2}\sin u\right)\mathrm{d}u$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\left[\frac{\cos^2 v}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 u\mathrm{d}u + \frac{\sin^2 v}{b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 u\mathrm{d}u + \frac{1}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}(-\cos u)\right]$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 v}{a^2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{\sin^2 v}{b^2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}v$$

$$= 8abc\left(\frac{2}{3a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 v\mathrm{d}v + \frac{2}{3b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 v\mathrm{d}v + \frac{1}{3c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\right)$$

$$= 8abc\left(\frac{2}{3a^2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3b^2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3c^2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}abc\pi\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

5.3.2 第二型曲面积分

如同在第二型曲线积分中，认为曲线是有方向的一样，在第二型曲面积分中，认为曲面也是有方向的. 曲面单元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 是一个向量，它的长度等于 $\mathrm{d}S$ 的面积，而它的方向与这个面积单元所确定的法线方向相同. 在封闭曲面的情况下，限定取向外的法线方向作为曲面的正方向.

如果一个空间曲面 Σ，可以分出它有两个侧面，则称其为双侧曲面. 对于空间的双侧曲面，它有两个侧面，把其中的一个记为 A，另一个记作 B(图 5.9). 在曲面 Σ 上任何一点 $M(x,y,z)$ 作它的法线 $\vec{n}$，如果法线是从 A 指向 B 的，则规定它为正方向，那么从 B 指向 A 的法线方向就是负方向了.

假设点 M 处有函数 $f(M)=f(x,y,z)$，若点 M 处的法线与 x,y,z 坐标轴构成的角度分别为 α,β,γ，在 M 点处的面积元素为 $\mathrm{d}S$，那么 $\mathrm{d}S$ 在三个坐标平面 yOz,xOz,xOy 上的投影(图 5.10)分别为

$$\mathrm{d}S\cdot\cos\alpha=\pm\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}S\cdot\cos\beta=\pm\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}S\cdot\cos\gamma=\pm\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

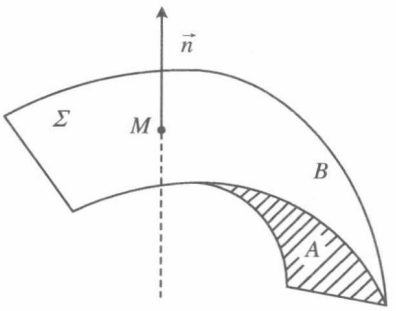


图 5.9

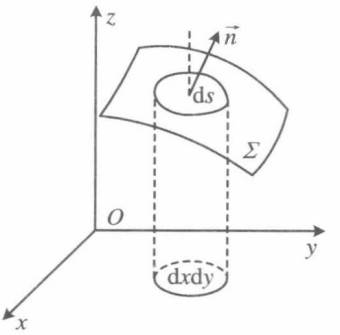


图 5.10

式中的符号是由 M 点上的法线的方向决定的. 于是可以定义

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(\Sigma)} f(M)\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{(\Sigma)} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{(\Sigma)} f(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S\\
\iint\limits_{(\Sigma)} f(M)\mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \iint\limits_{(\Sigma)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{(\Sigma)} f(x,y,z)\cos\beta\,\mathrm{d}S \qquad (5.41)\\
\iint\limits_{(\Sigma)} f(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{(\Sigma)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\Sigma)} f(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

这就是曲面函数 $f(x,y,z)$ 关于 yOz 平面、xOy 平面及 xOy 平面上的第二型曲面积分.

第二型曲面积分是曲面在坐标平面上的投影的积分，与直角坐标的选取有关.

第二型曲面积分是有方向性的，当认定曲面的法线方向是从 A 侧面指向 B 侧

面时，那么$\overrightarrow{AB}$就是正方向，$\overrightarrow{BA}$就是负方向了. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma_{\overrightarrow{AB}}} f(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\Sigma_{\overrightarrow{BA}}} f(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.42}$$

同样对于 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 的积分也有相应的公式.

若 P,Q,R 是定义在曲面 Σ 上的连续函数，把上面三个第二种曲面积分[式(5.41)]结合在一起，则有

$$\iint\limits_{(\Sigma)} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\Sigma)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S \tag{5.43}$$

注意，这里的曲面(Σ)是有方向的.

例 15　计算积分 $\iint\limits_{(S)} (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面. 这里被积函数是 $f(x,y,z)=x+y+z$. 求在第一象限的立方体的表面积. 该立方体由平面 $x=1, y=1, z=1$ 限定(图 5.11).

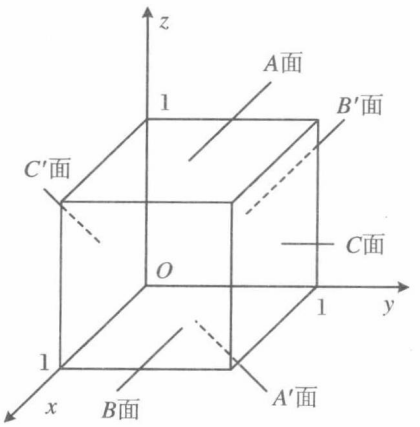


图 5.11

解　我们要对立方体的六个面中的每一个面进行积分，即

$$\iint\limits_{(S)} (x+y+z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{A} (x+y+z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{B} (x+y+z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{C} (x+y+z)\mathrm{d}S$$
$$+ \iint\limits_{A'} (x+y+z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{B'} (x+y+z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{C'} (x+y+z)\mathrm{d}S$$

在 A 面上，$z=1, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，它投影到 xOy 平面上的面积元是 $\mathrm{d}\sigma_{xy} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因此在 A 面上的积分为

$$\iint\limits_{A} (x+y+1)\mathrm{d}S = \iint\limits_{A} (x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (1+x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \left(y + xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{y=1} = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = 2$$

在 A' 平面上，$z=0, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, \mathrm{d}\sigma_{xy} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$\iint_{A'} (x+y)\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{y=1}$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$$

由于对称性，B 和 C 面的积分值也都是 2，而 B' 和 C' 的积分值也是 1. 于是得到

$$\iint_{(S)} (x+y+z)\mathrm{d}S = 2\times 3 + 1\times 3 = 9$$

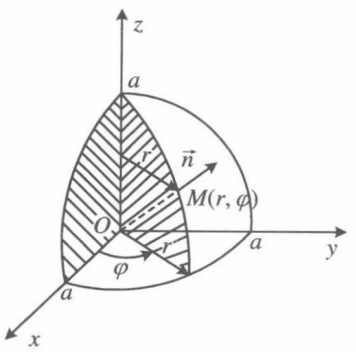


图 5.12

例 16 求曲面积分 $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中的 S 为球体 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面.

解 因为球体具有对称性(图 5.12)，所以只要计算积分 $\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 就行了. 另外两个积分具有相同值.

上半部球面有

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

下半部球面有

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

因此有

$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_{上}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S_{下}} \left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{S_{上}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中的 $\iint_{S_{下}}$ 取负值是因为曲面元素的法线 $\vec{n}$ 与 $\iint_{S_{上}}$ 的方向相反.

采用柱坐标时：$x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$z = z$，并有 $x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$. 面积元素为 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$，积分区域是：$r(0,a)$，$\varphi(0,2\pi)$. 所以有

$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{S_{上}} \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{S_{上}} \sqrt{a^2 - r^2}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}[-(a^2 - r^2)]$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left[-\frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^3 \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

同理可得

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi a^3$$

最后，把它们相加，得到

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3 \times \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

5.4　斯托克斯(Stokes)公式

设有一个非封闭的双侧曲面(S)，具有边界线(l)(图 5.13)．曲面(S)在 xOy 平面上的投影为σ_{xOy}，(l)在 xOy 平面上的投影为(λ)．设界线(l)的方向为逆时针方向，(λ)的方向与(l)相同．(S)的法线 $\vec{n}$ 的方向这样取：使它与 Oz 轴的夹角为锐角．于是 $\cos(n,z)>0$．假定平行 z 轴的直线与(S)只有一个交点，曲面(S)的方程为

$$z = f(x,y)$$

记

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q \tag{5.44}$$

我们知道曲面(S)上的点 $M(x,y,z)$处的法线的方向余弦与 $p,q,(-1)$成正比，也就是说，这些方向余弦可用下式表达：

$$\begin{cases} \cos(n,x) = \pm \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos(n,y) = \pm \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos(n,z) = \mp \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases} \tag{5.45}$$

从式(5.45)可推得

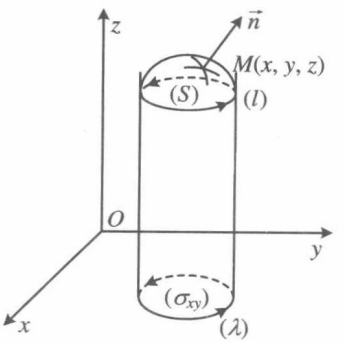


图 5.13

$$\begin{cases} p\cos(n,z) = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\cos(n,x) \\ q\cos(n,z) = -\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\cos(n,y) \end{cases} \tag{5.46}$$

从式(5.39)$\mathrm{d}S=\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 得到 $\mathrm{d}\sigma=\dfrac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$,因此有

$$\mathrm{d}\sigma_{xy} = \cos(n,z)\mathrm{d}S \tag{5.47}$$

此处 $\mathrm{d}S$ 是曲面的微分元素,取正值,$\mathrm{d}\sigma_{xOy}$ 是 $\mathrm{d}S$ 在 xOy 平面上的投影,与 $\cos(n,z)$同号.

假定 $P(x,y,z)$是曲面(S)上所定义的连续函数,并有一阶偏微商,考虑积分

$$\int_{(l)} P(x,y,z)\mathrm{d}x$$

曲线(l)在曲面(S)上,利用曲面方程 $z=f(x,y)$,在积分号下,用 $f(x,y)$代替 z.这时被积函数为 $P[x,y,f(x,y)]$,就只含有 x 与 y 了.并且曲线(λ)上变点的坐标(x,y)也就是曲线(l)上对应点的这两个坐标.所以沿曲线(l)的积分可用沿曲线(λ)的积分来替换:

$$\int_{(l)} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_{(\lambda)} P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x \tag{5.48}$$

公式右端的积分可用格林公式(5.19)替换,在给定的情况下,$P=P[x,y,f(x,y)]$,$Q=0$.在计算偏微商$\dfrac{\partial P}{\partial y}$时,需要求 P 直接对 y 的导数,及通过第三变量 z 对 y 求的导数.在这里,z 已经用$f(x,y)$替代了,所以有

$$\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y} = \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{z=f(x,y)}$$

于是得到

$$\begin{aligned} \int_{(l)} P(x,y,z)\mathrm{d}x &= \int_{(\lambda)} P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x \\ &= -\iint_{(\sigma_{xOy})}\left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{z=f(x,y)}\mathrm{d}\sigma_{xOy} \end{aligned}$$

根据式(5.47),$\mathrm{d}\sigma_{xOy}$可用 $\mathrm{d}S$ 表达,所以有

$$\begin{aligned} \int_{(l)} P(x,y,z)\mathrm{d}x &= -\iint_{(S)}\left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\cos(n,z)\mathrm{d}S \\ &= -\iint_{(S)}\left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\cdot\cos(n,z) + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot q\cdot\cos(n,z)\right]\mathrm{d}S \end{aligned}$$

从式(5.46)中知:$q\cos(n,z)=-\cos(n,y)$,代入上式,得到

$$\int_{(l)} P\mathrm{d}x = \iint_{(S)}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\cos(n,y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\cos(n,z)\right]\mathrm{d}S$$

若 $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 也是定义在 (S) 上的另外两个函数，则按坐标 x,y,z 的循环排列，可得到另外两个类似的积分公式：

$$\int_{(l)} Q\mathrm{d}y = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\cos(n,z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cdot\cos(n,x)\right]\mathrm{d}S$$

$$\int_{(l)} R\mathrm{d}z = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cdot\cos(n,x) - \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\cos(n,y)\right]\mathrm{d}S$$

把上面三个公式加起来，就得到**斯托克斯公式**：

$$\int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right]\mathrm{d}S \tag{5.49}$$

式(5.49)也可用行列式表示成

$$\oint_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S \tag{5.50}$$

其中

$$\cos\alpha = \cos(n,x),\quad \cos\beta = \cos(n,y),\quad \cos\gamma = \cos(n,z)$$

或

$$\oint_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{5.51}$$

式(5.49)说明了沿曲面的界线的曲线积分与沿这个曲面的曲面积分之间的关系.

格林公式是当 (S) 为平面时的斯托克斯公式的特殊情况. 这时，(l) 是平面 xOy 上的封闭曲线，$\mathrm{d}z=0$，n 与 Oz 的方向相同，因此 $\cos(n,x)=\cos(n,y)=0$，$\cos(n,z)=1$. 把这些条件用到式(5.49)上，就得到格林公式(5.19)了.

例 17　用斯托克斯公式计算积分 $\oint_{(l)} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$，其中 (l) 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=a$ 的交线.

解　在斯托克斯公式中

$$\oint_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

令 $P=y^2$，$Q=z^2$，$R=x^2$，那么

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y,\quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial R}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

因此

$$\oint_{(l)} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z = \iint_{(S)}\left(-2z\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 2y\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{(S)}(x+y+z)\mathrm{d}S = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{(S)} a\,\mathrm{d}S = -\frac{2a}{\sqrt{3}}\iint_{(S)}\mathrm{d}S$$

因为球面与平面的交线是一个圆周，它在平面 $x+y+z=a$ 上，它的半径是 $R=\sqrt{\frac{2}{3}}a$，面积为 $\iint_{(S)}\mathrm{d}S = S = \frac{2}{3}\pi a^2$，因此得到

$$\oint_{(l)} y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z = -\frac{2a}{\sqrt{3}}\iint_{(S)}\mathrm{d}S = -\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}\pi a^2 = -\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$$

例 18 求积分 $\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，式中的 C 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(x>0,h>0)$. 若从 Ox 轴正向看去，该椭圆是逆时针方向的.

解 如图 5.14 所示，平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上被椭圆包围的区域记为 S，S 的法线与 Oz 轴的夹角为锐角. 按照斯托克斯公式(5.49)

$$\int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n,y)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right]\mathrm{d}S$$

令

$$P = y - z, \quad Q = z - x, \quad R = x - y$$

于是有

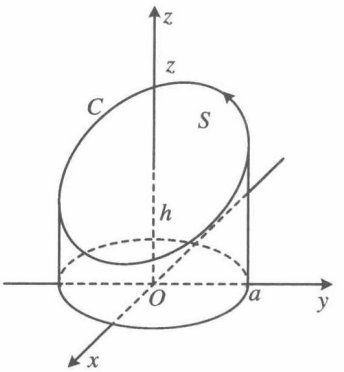


图 5.14

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

由于椭圆 S 在平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上，它不包含 y 这个量，因此 S 的法线一定垂直 Oy 轴，于是就有

$$\cos(n,x) = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \cos(n,y) = 0$$

$$\cos(n,z) = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

把它们代入斯托克斯公式，则有

$$\begin{aligned}&\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z\\&= \iint_{(S)}\left[(-1-1)\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} + 0 + (-1-1)\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]\mathrm{d}S\\&= -2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{(S)}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

由平面方程$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$知，当$x=a$时，$z=0$；而当$x=0$时，$z=h$. 所以椭圆$C$的长半轴为$\sqrt{a^2+h^2}$，短半轴为$a$，因此

$$\iint_{(S)}\mathrm{d}S = S = \pi a\sqrt{a^2+h^2}$$

最后得到积分结果是

$$\begin{aligned}\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z &= -2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot\pi a\sqrt{a^2+h^2}\\&= -2\pi a(a+h)\end{aligned}$$

5.5　高斯(Gauss)公式

高斯公式建立起沿容积(V)的三重积分与沿曲面(S)的曲面积分之间的关系，其中曲面(S)是容积(V)的外侧界面.

假设函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在(V)上有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{(S)} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.52}$$

或

$$\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iint_{(S)}[P\cos(n,X) + Q\cos(n,Y) + R\cos(n,Z)]\mathrm{d}S \tag{5.53}$$

这就是**高斯公式**. 兹证明如下：

如图5.15所示，有一个被封闭曲面(S)包围的容积(V)，(V)在xOy平面上的垂直投影为有界闭区域σ_{xOy}，设过σ_{xOy}内的任一点作平行于z轴的直线，与(S)的交点都不多于两个. 我们规定容积(V)向外的法线(n)的方向为正，并且在曲面的上半部(II)，法线的方向与z轴成锐角，在下部(I)，法线方向与z轴成钝角. 所以

$\cos(n,z)$在(Ⅰ)部是负值.显然有

$$\begin{cases} \mathrm{d}\sigma_{xOy} = \cos(n,z)\mathrm{d}S & (Ⅱ) \\ \mathrm{d}\sigma_{xOy} = -\cos(n,z)\mathrm{d}S & (Ⅰ) \end{cases} \tag{5.54}$$

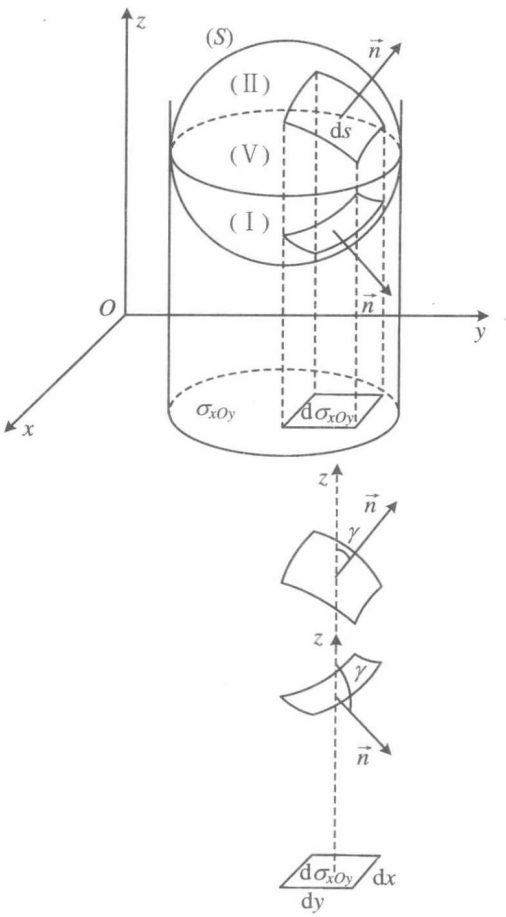


图 5.15

其中 $\mathrm{d}\sigma_{xOy}$ 是曲面的面积元 $\mathrm{d}S$ 在 σ_{xOy} 平面上的投影.利用三重积分公式,得

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \mathrm{d}\sigma_{xOy} \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{5.55}$$

考虑函数$\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$在$(V)$上的三重积分,则有

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}V = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \mathrm{d}\sigma_{xOy} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z$$

因为导数的积分等于原函数在上、下限的数值之差,故有

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \mathrm{d}V = \iint_{(\sigma_{xOy})} [R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)] \mathrm{d}\sigma_{xOy}$$

或

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \mathrm{d}V = \iint_{(\sigma_{xOy})} R(x,y,z_2) \mathrm{d}\sigma_{xOy} - \iint_{(\sigma_{xOy})} R(x,y,z_1) \mathrm{d}\sigma_{xOy} \tag{5.56}$$

用 $\mathrm{d}S$ 来替换 $\mathrm{d}\sigma_{xOy}$，把沿 σ_{xOy} 的积分化成沿 (S) 的积分. 在式(5.56)右端的第一个积分中，含有曲面 (S) 的部分(Ⅱ)的变动坐标是 z_2，利用式(5.54)中的第一个，就得到沿曲面(Ⅱ)的积分；在第二个积分中含有 z_1，利用式(5.54)中的第二个，就可得到沿曲面(Ⅰ)的积分. 于是就有

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \mathrm{d}V = \iint_{(\text{Ⅱ})} R(x,y,z)\cos(n,z)\mathrm{d}S + \iint_{(\text{Ⅰ})} R(x,y,z)\cos(n,z)\mathrm{d}S \tag{5.57}$$

这时 z 的附标可以不写了，因为积分号底下的符号已指明是沿哪一部分曲面积分的了. 式(5.57)右边沿曲面(Ⅱ)与(Ⅰ)的积分之和就是沿整个曲面积分. 因此有

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \mathrm{d}V = \iint_{(S)} R(x,y,z)\cos(n,z)\mathrm{d}S \tag{5.58-1}$$

在更普遍的情形中，还有平行于 z 轴的柱形侧面(Ⅲ)，但因它[侧面(Ⅲ)]的法线与 z 轴垂直，$\cos(n,z) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$，所以柱形侧面(Ⅲ)的积分不会出现在公式中. 因此，无论有无柱形侧面(Ⅲ)，式(5.57)和式(5.58-1)都是正确的.

用同样的方法，取 (V) 在 yOz 平面上的垂直投影 σ_{yOz}，则有 $\mathrm{d}\sigma_{yOz} = \cos(n,X)\mathrm{d}S$，考虑 $\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}$ 在 (V) 上的三重积分，以及 $P(x,y,z)$ 沿曲面 (S) 的积分，可得到

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} \mathrm{d}V = \iint_{(S)} P(x,y,z)\cos(n,X)\mathrm{d}S \tag{5.58-2}$$

类似地，取 (V) 在 xOz 平面上的垂直投影 σ_{zOx}，则有 $\mathrm{d}\sigma_{zOx} = \cos(n,y)\mathrm{d}S$，考虑 $\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}$ 在 (V) 上的三重积分，以及 $Q(x,y,z)$ 沿曲面 (S) 的积分，会得到

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} \mathrm{d}V = \iint_{(S)} Q(x,y,z)\cos(n,y)\mathrm{d}S \tag{5.58-3}$$

把式(5.58-1)、(5.58-2)、(5.58-3)相加，就得到高斯公式：

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \iint_{(S)} [P\cos(n,x) + Q\cos(n,y) + R\cos(n,z)]\mathrm{d}S \tag{5.59}$$

式中的 P,Q,R 都是变量 x,y,z 的函数，它们都是确定在容积 (V) 上的函数，假设它们的一阶偏导数都是连续的.

例 19　计算积分 $\iint_{(S)} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 式中的 (S) 是立方体 $0 < x$

$<a,0<y<a,0<z<a$ 的边界的外表面.

解 应用高斯公式(5.52)

$$\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{(S)}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (5.60)$$

式中的 $P=x^2,Q=y^2,R=z^2$;相应地,有$\frac{\partial P}{\partial x}=2x,\frac{\partial Q}{\partial y}=2y,\frac{\partial R}{\partial z}=2z$.因此有

$$\begin{aligned}&\iint_{(S)}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_{(V)}(2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(x+y+z)\mathrm{d}z=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\left(ax+ay+\frac{1}{2}a^2\right)\mathrm{d}y\\&=2\int_0^a\left(a^2x+\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a^3\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}a^4\right)\\&=3a^4\end{aligned}$$

(温馨提示:在多变量函数的逐次积分中,当对一个变量积分时,可把其他变量看成常数.)

例 20 计算积分 $\iint_{(S)}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$(S)$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解 在高斯公式(5.52)

$$\iint_{(S)}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

中,令 $P=x,Q=y,R=z$,则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial z}=1$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{(S)}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iiint_{(V)}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint_{(V)}\mathrm{d}V\\&=3V=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^3\end{aligned}$$

5.6　高斯公式和斯托克斯公式在场论中的应用

5.6.1　高斯公式在场论中的应用

我们考虑一个向量场 $\vec{A}(M)$，在给定的这个场的空间的每个点，向量 $\vec{A}(M)$ 都有确定的数值和方向. 例如当流体在一个管中流动时，在每个给定的时刻，都有一个速度 $\vec{v}$ 的向量场，设 (L) 是一条向量曲线，在它的每个点，它的切线方向就是向量 $\vec{A}$ 的方向[图 5.16(a)].

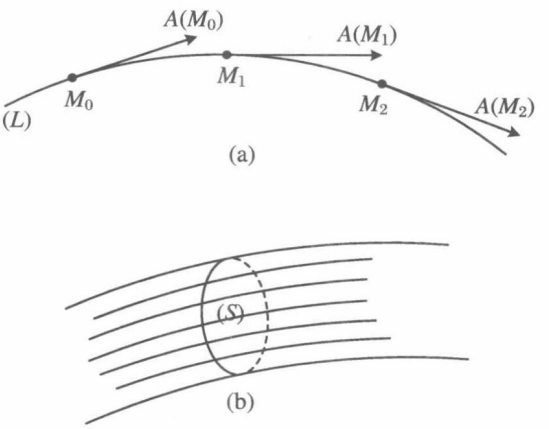


图 5.16

若作出通过某个曲面 (S) 上的所有点的向量曲线，那么它们全体组成一个向量管[图 5.16(b)].

在某一个向量场 $\vec{A}$ 中，取一块容积 (V)，设 (S) 是这个容积的界面，而 (n) 是 (S) 的法线. 对这个容积来讲，该法线是由里向外的. 把 A_x, A_y, A_z 记作向量 $\vec{A}$ 在 x, y, z 坐标轴上的分量，并令 $A_x = P, A_y = Q, A_z = R$. 当应用高斯公式(5.53)时，有

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}V = \iint\limits_{(S)} [A_x \cos(n,x) + A_y \cos(n,y) + A_z \cos(n,z)] \mathrm{d}S$$

或

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}V = \iint\limits_{(S)} A_n \mathrm{d}S \tag{5.61}$$

这个式子的右边的曲面积分通常称为这个场通过这个曲面的流量.

式中的 $A_n = A_x\cos(n,x) + A_y\cos(n,y) + A_z\cos(n,z)$. A_n 是向量 $\vec{A}$ 在法线(n)上的投影,它也是 $\vec{A}$ 的各个分量在法线上的投影之和.

式(5.61)左边的容积积分中的被积函数叫作这个向量场的发散量,记作

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{5.62}$$

因此式(5.61)可写成

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{(S)} A_n\,\mathrm{d}S \tag{5.63}$$

这个公式说明发散量的容积积分等于这个场通过这个容积的界面的流量.

从式(5.63)可推演出发散量的强度的定义:作一个围绕点 M 的一个很小的容积 V_1,设 S_1 是这个容积的界面,取容积 V_1 内任一点 M_1,利用中值定理,式(5.63)就变成

$$\mathrm{div}\vec{A}\,|_{M_1} \cdot V_1 = \iint\limits_{(S_1)} A_n\,\mathrm{d}S$$

因此得到 V_1 内的发散量的平均强度

$$\mathrm{div}\vec{A}\,|_{M_1} = \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n\,\mathrm{d}S}{V_1}$$

式中,$\mathrm{div}\vec{A}$ 取了容积 V_1 中的某个点 M_1 的值,而 V_1 是这个容积的大小. 当容积 V_1 无限缩小到一点 M 时,M_1 就趋向点 M. 由上式取极限,就得到点 M 的发散量的大小

$$\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{(M_1)\to M} \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n\,\mathrm{d}S}{V_1} \tag{5.64}$$

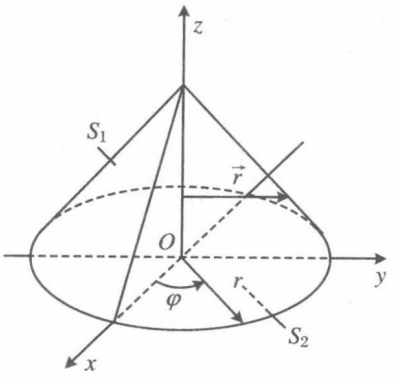


图 5.17

该式说明,一个场在点 M 的发散量是这个场通过围绕点 M 的很小的封闭曲面的流量与界于这个曲面的容积之比的极限. 在物理学中把发散量称为散度.

例 21　求向径 $\vec{r}$ 穿过曲面 $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的流量.

解　设 S 为给定的圆锥曲面,D 为圆锥的底面(即 xOy 平面,$x^2+y^2\leqslant 1$)(图 5.17).

采用柱坐标,它与直角坐标的关系是

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z$$

因此有

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - r$$

应用式(5.63)

$$\iint\limits_{(S)} A_n \mathrm{d}S = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

在柱坐标中,散度的公式是

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

在图 5.17 的情况下,A_φ 对 φ 来说是一个常数,所以$\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0$,因此

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} = \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{r}{r}\\ &= 1 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

又因为 $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z$,并用向量 $\vec{r}$ 代替 $\vec{A}$,则有

$$\iint\limits_{(S)} r_n \mathrm{d}S = \iint\limits_{(S_1)} r_n \mathrm{d}S + \iint\limits_{(S_2)} r_n \mathrm{d}S$$

其中(S_1)代表圆锥面,(S_2)为圆锥底面.

由于在圆锥底面(S_2)上,$\vec{r} \perp \vec{n}$,因此有 $\cos(n,x) = \cos(n,y) = 0$,以及 $r_z = 0$,于是 $A_n = r_n = r_x\cos(n,x) + r_y\cos(n,y) + r_z\cos(n,z) = 0$,以及 $\iint\limits_{(S_2)} r_n \mathrm{d}S = 0$.最后得到

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} r_n \mathrm{d}S &= \iint\limits_{(S_1)} r_n \mathrm{d}S = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\vec{r}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} 3 \cdot r\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z\\ &= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r}\mathrm{d}z = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 (r - r^2)\mathrm{d}r\\ &= 3\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 \mathrm{d}\varphi = 3\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}\mathrm{d}\varphi = \pi\end{aligned}$$

这就是说,向量 $\vec{r}$ 穿过曲面 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,(0 \leqslant z \leqslant 1)$的流量为 π.

5.6.2　斯托克斯公式在场论中的应用

设有一个向量场 $\vec{A}$,它在 x,y,z 轴上的分量为 A_x, A_y, A_z.若令 $P = A_x$,$Q = A_y$,$R = A_z$,则斯托克斯公式为

$$\begin{aligned}\int\limits_{(l)} A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z = \iint\limits_{(S)} \Big[&\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos(n,y)\\ &+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos(n,z)\Big]\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{5.65}$$

在公式的左端,设 $\mathrm{d}l$ 是曲线(l)的微分元,它的方向是曲线的切线方向.它在坐标

轴上的分量为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$. 因此曲线积分号下的表达式代表数量积,记作 $\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$,或 $A_l\mathrm{d}l$,A_l 是 $\vec{A}$ 在曲线(l)的切线上的投影. 在公式右端的重积分号下的被积函数是一个新的向量场,把它称为向量 $\vec{A}$ 的旋转量,记作 $\mathrm{rot}\vec{A}$,它的分量是

$$\begin{cases}\mathrm{rot}_x\vec{A}=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\ \mathrm{rot}_y\vec{A}=\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\ \mathrm{rot}_z\vec{A}=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{cases}\tag{5.66}$$

于是式(5.65)可改写成

$$\int_{(l)}A_l\mathrm{d}l=\iint_{(S)}[\mathrm{rot}_x\vec{A}\cos(n,x)+\mathrm{rot}_y\vec{A}\cos(n,y)+\mathrm{rot}_z\vec{A}\cos(n,z)]\mathrm{d}S$$

或

$$\int_{(l)}A_l\mathrm{d}l=\iint_{(S)}\mathrm{rot}_n\vec{A}\cdot\mathrm{d}S\tag{5.67}$$

其中 $\mathrm{rot}_n\vec{A}$ 是 $\mathrm{rot}\vec{A}$ 在曲面法线 n 上的分量.

式(5.67)左边的曲线积分通常叫作向量 $\vec{A}$ 沿曲线(l)的循环量. 因此,这里的斯托克斯公式(5.67)可表述如下:一个场沿某曲面的界线的循环量,等于该场的旋转量的法线分量沿这个曲面的积分,也就是等于旋转量通过该曲面的流量.

从式(5.67)可以导出向量场的旋转量(旋度)的定义:设(m)是通过点 M 某个方向的向量,(σ)是通过 M 点而垂直于的(m)的一块小平面,应用式(5.67)于这块小平面,再利用中值定理,得到

$$\int_{(\lambda)}A_l\mathrm{d}l=\mathrm{rot}_m\vec{A}_{M_1}\cdot\sigma$$

也就是

$$\mathrm{rot}_m\vec{A}_{M_1}=\frac{\displaystyle\int_{(\lambda)}A_l\mathrm{d}l}{\sigma}$$

其中(λ)是(σ)的界线,而 M_1 是该面积上的某一个点. 当这块小面积(σ)无限缩小趋于一个点 M 时取极限,就得到在点 M 的旋转量在任意给定的方向(m)上的分量值:

$$\mathrm{rot}_m\vec{A}=\lim_{(\sigma)\to M}\frac{\displaystyle\int_{(\lambda)}A_l\mathrm{d}l}{\sigma}\tag{5.68}$$

旋转量强度在物理学中称为旋度.

例 22 有一个圆柱体以角速度 ω 旋转,求圆柱上任一点速度 $\vec{v}$ 的旋转量强度(旋度).

解　设圆柱体以 z 轴为旋转轴，因此角速度矢量 $\vec{\omega}$ 与 z 轴一致. 旋转方向与矢量 $\vec{\omega}$ 组成右螺旋系统(图 5.18). 这样圆柱体上任一点 $M(x,y,z)$ 的线速度 $\vec{v}$ 的数值就等于

$$v = r\omega = \omega\sqrt{x^2+y^2}$$

写成矢量形式为

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

该矢量在 x,y,z 轴上的分量是

$$v_x = (\vec{\omega} \times \vec{r})_x = \omega_y \cdot r_z - \omega_z \cdot r_y = -\omega_z \cdot y = -\omega y$$

$$v_y = (\vec{\omega} \times \vec{r})_y = \omega_z \cdot r_x - \omega_x \cdot r_z = \omega_z \cdot x = \omega x$$

$$v_z = (\vec{\omega} \times \vec{r})_z = \omega_x \cdot r_y - \omega_y \cdot r_x = 0$$

因为 ω 与 z 同轴，所以

$$\omega_z = \omega, \quad \omega_x = \omega_y = 0$$

由于 $\omega = \dfrac{v}{\sqrt{x^2+y^2}}$，因此有

$$v_x = -\omega y = -\frac{vy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$v_y = \omega x = \frac{vx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

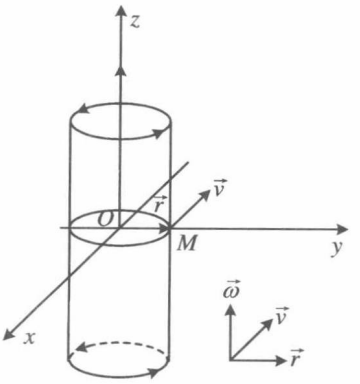


图 5.18

矢量 $\vec{v}$ 的旋转量 $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ 的各个分量是

$$\mathrm{rot}_x\vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

$$\mathrm{rot}_y\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

$$\mathrm{rot}_z\vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y} = \omega + \omega = 2\omega$$

因此，当记 $\vec{k}$ 为 z 轴正方向上的单位矢量时，最后得到矢量 $\vec{v}$ 旋转量强度为

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 2\omega\vec{k} \tag{5.69}$$

式(5.69)说明任一刚体内各点线速度的旋转量强度(旋度)具有同样的值，并等于该物体旋转角速度的两倍.

第 6 章　傅里叶积分和积分变换

6.1　傅里叶(Fourier)积分

6.1.1　傅里叶级数

1. 三角函数系及其正交性.

欧拉公式

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

或把它写成

$$\begin{cases} e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx \\ e^{-ikx} = \cos kx - i\sin kx \end{cases}$$

因此有

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

上面几个公式是表示指数函数与三角函数之间的关系的. 当一个函数能展开成指数函数时,也能把它展开成三角函数的形式.

我们知道,$1,\sin x,\cos x,\sin kx,\cos kx$($k$ 是正整数)是以 2π 为周期的函数. 一个以 2π 为周期的函数的线性组合,仍旧以 2π 为周期,如三角函数多项式

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \quad (k = 1,2,3,\cdots,n)$$

当 $n\to\infty$ 时,得三角级数

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \quad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{6.1}$$

$\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx$ 和 $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$ 是两两正交的,它们组成一个

正交系.

不难得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x = 0\quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x = \frac{\sin kx}{k}\bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x = -\frac{\cos kx}{k}\bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

利用三角公式

$$\sin kx\cdot\cos lx = \frac{1}{2}[\sin(k+l)x + \sin(k-l)x]$$

$$\sin kx\cdot\sin lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x]$$

$$\cos kx\cdot\cos lx = \frac{1}{2}[\cos(k+l)x + \cos(k-l)x]$$

其中 $l = 1,2,3,\cdots$; $k = 1,2,3,\cdots$.

同样可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x = 0\quad (k\neq l)\\ &\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x = 0\quad (k\neq l)\\ &\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x = 0\quad (k\neq l)\end{aligned}\tag{6.2}$$

另一方面

$$\cos^2 kx = \frac{1+\cos 2kx}{2},\quad \sin^2 kx = \frac{1-\cos 2kx}{2}$$

所以在式(6.2)中,当 $k = l$ 时,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x = \pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x = \pi\tag{6.3}$$

由此得到一个三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

它们组成一个正交系.其中任何两个函数相乘之积,从 0 到 2π(或 $-\pi$ 到 π)之间的积分为 0,每个函数自己的平方的积分为 1.前者称正交系,后者称就范正交系.

2. 傅里叶级数及其收敛性.

设 $f(x)$在区间$[-l,l]$上可积,令

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x,\quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad (n\text{ 为正整数})$$

则称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{6.4}$$

为 $f(x)$在$[-l,l]$上的傅里叶级数.

当 $f(x)$在区间$[-l,l]$上可微,且 $f(-l)=f(l)$时,其傅里叶级数在$[-l,l]$上一致收敛到$f(x)$.当 $f(x)$在$[-l,l]$上逐段光滑时,其傅里叶级数在 $f(x)$的连续点处收敛到 $f(x)$,在 $f(x)$的间断点处收敛到 $f(x)$在该点的左右极限的平均值.

函数系$\{e^{in\omega x},n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}\left(\omega=\frac{\pi}{l},l>0\right)$是周期为 $2l$ 的三角函数系的复数形式,它也是正交函数系,并且$\int_{-l}^{l}e^{in\omega x}\overline{e^{in\omega x}}dx=2l$.

因此,函数系$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{in\omega x},n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}\left(\omega=\frac{\pi}{l},l>0\right)$是周期为 $2l$ 的就范正交系的复数形式.

当 $f(x)$ 在$[-l,l]$上可积时,令 $F_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-in\omega t}dt\left(\omega=\frac{\pi}{l}\right)$,则级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{in\omega x}$ 为$f(x)$ 的傅里叶级数的复数形式.

当 $f(x)$ 在$[-l,l]$上可微,且 $f(-l)=f(l)$ 时,傅里叶级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{in\omega x}$ 在$[-l,l]$上一致收敛到$f(x)$;当$f(x)$在$[-l,l]$上逐段光滑时,$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{in\omega x}$ 在$f(x)$的连续点处收敛到 $f(x)$,在 $f(x)$ 的间断点处收敛到 $f(x)$ 在该点的左右极限的平均值.

6.1.2 傅里叶积分公式

把傅里叶级数(6.4)的离散数无限次求和化为连续的无限次求和就是傅里叶积分.

假设 $f(x)$在区域$[-l,l]$上可展开成傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{in\omega x},\quad \omega=\frac{\pi}{l} \tag{6.5}$$

其中

$$F_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-in\omega t}dt$$

令 $\alpha_n=n\omega=\frac{n\pi}{l}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,且

$$\Delta\alpha=\omega=\frac{\pi}{l}=\alpha_n-\alpha_{n-1}$$

那么

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega(t-x)}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-x)}\mathrm{d}t\right]\Delta\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-x)}\mathrm{d}t\right]\Delta\alpha \end{aligned}$$

当 $l\to\infty$，$\Delta\alpha\to 0$ 时，可把 $\Delta\alpha$ 看成定积分的无穷小区间，因此上式右端的求和公式，可以写成积分形式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-x)}\mathrm{d}t \tag{6.6}$$

这就是傅里叶积分的指数形式.

由于 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-x)} = \cos\alpha(t-x) - \mathrm{i}\sin\alpha(t-x)$，因此式(6.6)可化成三角函数的积分形式：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\alpha(t-x) - \mathrm{i}\sin\alpha(t-x)]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.7}$$

在上式右端第二个积分中，变量 α 出现在正弦函数号下，所以被积函数是 α 的奇函数，因此在区间$(-\infty,\infty)$上对 α 求积时，结果为 0. 右端第一个积分中被积函数是 α 的偶函数，在区间$(-\infty,\infty)$上的积分，可用区间$(0,\infty)$代替，再乘以 2. 因此式(6.7)变成

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.8}$$

这就是傅里叶积分公式的实形式.

使式(6.8)的积分收敛的条件是 $f(x)$在区间$(-\infty,\infty)$上绝对可积，逐段光滑，且 $f(x)$在 x 处连续.

6.2 傅里叶变换及其性质

6.2.1 傅里叶变换

把傅里叶积分式(6.8)写成如下形式：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t-x)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

令

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}t \tag{6.9}$$

则

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha \tag{6.10}$$

我们称式(6.9)中的 $F(\alpha)$ 是 $f(t)$ 的傅里叶变换，其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$ 为变换核. 在式(6.10)中 $f(x)$ 是 $F(\alpha)$ 的逆变换，或写成 $F^{-1}[F(\alpha)]$.

我们把式(6.9)、(6.10)用大家惯用的符号来写，并取对称形式，则有

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.11}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{6.12}$$

式(6.11)和(6.12)分别称为傅里叶正变换和傅里叶逆变换. $F(\omega)$ 被称为 $f(t)$ 的象函数，而 $f(t)$ 则是 $F(\omega)$ 的象原函数.

6.2.2 傅里叶变换的性质

1. 线性变换.

$$F[af_1(t) + bf_2(t)] = aF[f_1(t)] + bF[f_2(t)]$$

2. 相似特性.

$$F[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a > 0)$$

3. 时延特性.

$$F[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}F[f(t)]$$

4. 频移特性.

$$F[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]=F(\omega+\omega_0)$$

5. 微分关系一.

$$F[f'(t)]=-\mathrm{i}\omega F[f(t)]$$

当 $f(\pm\infty)=f'(\pm\infty)=f''(\pm\infty)=\cdots=f^{(n-1)}(\pm\infty)=0$ 时

$$F[f^{(n)}(t)]=(-\mathrm{i}\omega)^n F[f(t)]$$

6. 微分关系二.

$$F[\mathrm{i}tf(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)$$

7. 卷积的傅里叶变换.

$$F[f_1(t)*f_2(t)]=F[f_1(t)]\cdot F[f_2(t)]$$

其逆变换为

$$F^{-}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-t)f_2(t)\mathrm{d}t$$

8. 积分性质.

$$F\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F[f(t)]$$

9. 乘积定理.

设 $F_1(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}t$，$F_2(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}t$，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 都在$(-\infty,\infty)$上可积，且平方可积，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{F_1(\alpha)}F_2(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\,\overline{F_2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha$$

10. 完备性公式.

设 $f(t)$在$(-\infty,\infty)$上可积，且平方可积，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha$$

6.2.3　傅里叶余弦变换和正弦变换

把傅里叶积分式(6.8)写成下面的形式：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(\cos\alpha x\cos\alpha t+\sin\alpha x\sin\alpha t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\alpha x\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

如果 $f(t)$ 是偶函数，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha t \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos \alpha t \mathrm{d}t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \alpha t \mathrm{d}t = 0$$

那么，就得到只含有余弦的公式

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos \alpha x \mathrm{d}\alpha \int_{0}^{\infty} f(t)\cos \alpha t \mathrm{d}t \tag{6.13}$$

同样，在 $f(t)$ 为奇函数的情况下，得到只含有正弦的公式

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin \alpha x \mathrm{d}\alpha \int_{0}^{\infty} f(t)\sin \alpha t \mathrm{d}t \tag{6.14}$$

把式(6.13)写成

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} \cos \alpha x \mathrm{d}\alpha \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos \alpha t \mathrm{d}t$$

令

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos \alpha t \mathrm{d}t \tag{6.15}$$

则

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_c(\alpha)\cos \alpha x \mathrm{d}\alpha \tag{6.16}$$

式(6.15)和(6.16)分别称为傅里叶余弦的正变换和逆变换.

同样，从式(6.14)也能得到

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin \alpha t \mathrm{d}t \tag{6.17}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_s(\alpha)\sin \alpha x \mathrm{d}\alpha \tag{6.18}$$

式(6.17)和(6.18)分别称为傅里叶正弦的正变换和逆变换.

习惯上把傅里叶余弦变换和傅里叶正弦变换写成如下的对称形式：

傅里叶余弦变换对是

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos \xi x \mathrm{d}x \quad \text{(正变换)} \tag{6.19}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_c(\xi)\cos \xi x \mathrm{d}\xi \quad \text{(逆变换)} \tag{6.20}$$

傅里叶正弦变换对是

$$F_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin \xi x \mathrm{d}x \quad \text{(正变换)} \tag{6.21}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_s(\xi)\sin \xi x \mathrm{d}\xi \quad \text{(逆变换)} \tag{6.22}$$

6.2.4　傅里叶变换及傅里叶余弦变换和正弦变换算例

例 1　设函数 $f(x)=e^{-ax}(a>0,x\geqslant 0)$，求它的傅里叶余弦变换和正弦变换.

解　把 $f(x)=e^{-ax}$ 分别代入式(6.19)和式(6.21)，则得

$$F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos\xi x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\xi^2}$$

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin\xi x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\xi}{a^2+\xi^2}$$

其中

$$\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos\xi x\,dx=\frac{a}{a^2+\xi^2},\quad\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin\xi x\,dx=\frac{\xi}{a^2+\xi^2}$$

(请参看第 2 章 2.4 节中的第 6 个例子.)

由于 $f(x)$ 满足收敛条件，因此可得到

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\xi^2}\cos\xi x\,d\xi=e^{-ax}\quad(a>0,x\geqslant 0)$$

及

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{a^2+\xi^2}\sin\xi x\,dx=e^{-ax}\quad(a>0,x\geqslant 0)$$

或

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\xi x}{a^2+\xi^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-ax}\quad(a>0,x\geqslant 0)\tag{6.23}$$

以及

$$\int_0^{\infty}\frac{\xi\sin\xi x}{a^2+\xi^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ax}\quad(a>0,x\geqslant 0)\tag{6.24}$$

式(6.23)、(6.24)两式就是拉普拉斯积分.

例 2　证明函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的傅里叶余弦变换与这函数本身相同.

证　使用现有公式 $\int_0^{\infty}e^{-px^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\exp\left(-\frac{b^2}{4p}\right)$(见《常用积分表》第 139 页)能够得到 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的余弦变换为

$$F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos\xi x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{1}}\cdot e^{-\frac{2\xi^2}{4}}=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

例 3　证明函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的傅里叶正弦变换象函数与这函数本身相同.

证　应用式(6.21)，有

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}\sin\xi x\,dx$$

在右端的积分中运用公式

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\sin ax\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cdot\sin\frac{p\pi}{2}$$ （见《常用积分表》第 131 页）

其中 $p-1=-\frac{1}{2}$，$p=\frac{1}{2}$，$a=\xi$，因此有

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\sin\xi x\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\xi^{\frac{1}{2}}}\cdot\sin\frac{\frac{1}{2}\pi}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\xi}}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\xi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{\xi}}=\xi^{-\frac{1}{2}}$$

例 4 求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的傅里叶正弦变换.

解 应用式(6.21)，有

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\xi x\mathrm{d}x$$

利用公式 $\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-p^2x^2}\sin ax\mathrm{d}x=\frac{a\sqrt{\pi}}{4p^3}\exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right)$（见 I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik,《Table of Integrals, Series, and Products》第 497 页.）

令 $p^2=\frac{1}{2}$，$p=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$a=\xi$，则

$$\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\xi x\mathrm{d}x=\frac{\xi\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}\exp\left[-\frac{\xi^2}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]=\frac{\xi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

代入得到

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\xi x\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\xi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}=\xi\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

例 5 求函数 $f(t)=\begin{cases}2t\mathrm{e}^{-at} & (t>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ $(a>0)$ 的傅里叶变换.

解

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(1+1)}{(a-\mathrm{i}\omega)^{1+1}}$$

这里使用了公式 $\int_0^{\infty} x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}(a>0,n>-1)$（见《常用积分表》第 147 页.）

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a^2-\omega^2-2\mathrm{i}a\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{(a^2-\omega^2)+2\mathrm{i}a\omega}{(a^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{(a^2-\omega^2)+2\mathrm{i}a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2\mathrm{i}a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$$

函数 $f(t)$的变换结果分为实部和虚部. 实部是由偶函数 $f_1(t)=|t|\mathrm{e}^{-a|t|}$ 变来的，虚部由奇函数 $f_2(t)=t\mathrm{e}^{-a|t|}$ 变换而来，所以 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，即

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}\quad\text{对应偶函数}\quad f_1(t)=|t|\mathrm{e}^{-a|t|}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2\mathrm{i}a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}\quad\text{对应奇函数}\quad f_2(t)=t\mathrm{e}^{-a|t|}$$

例 6　求函数 $\delta(t)$的傅里叶变换.

解　$\delta(t)$函数在物理学和电子学中常用来表示点源和脉冲信号. 它并非是普通意义上的函数，因为它没有通常意义下的函数值. 它只有在积分号下通过积分运算后才能得到数值. 如图 6.1 所示，$\delta(t)$函数为函数 $\delta_h(t)$的极限（$h\to0^+$ 时），$\delta(t)=\lim\limits_{h\to0}\delta_h(t)$.

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \dfrac{1}{h} & (0<t<h)\\ 0 & (t>h)\end{cases}$$

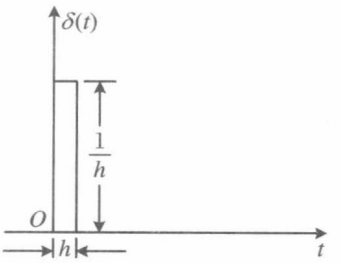


图 6.1

当 t 在$(0,h)$间，$h\to0$ 时，$\delta(t)$函数的积分值是

$$\lim_{h\to0}\int_0^h\frac{1}{h}\mathrm{d}t=1$$

当积分限扩展到$(-\infty,\infty)$时，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\delta(t)\mathrm{d}t+\int_0^h\delta(t)\mathrm{d}t+\int_h^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t$$

$$=0+\lim_{h\to0}\int_0^h\frac{1}{h}\mathrm{d}t+0=1$$

所以 $\delta(t)$函数的无穷限积分值仍为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

$\delta(t)$函数的运算性质：对于任何一个在 $t=0$ 处连续的函数 $f(t)$有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)\tag{6.25}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to0}\int_0^h\frac{1}{h}\cdot f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{h}\cdot f(\theta h)\cdot h\right]=f(0)\quad(|\theta|<1)$$

该式最后一个等号前运用了中值定理.

应用式(6.25)，可得 $\delta(t)$函数的傅里叶变换为

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

6.2.5 傅里叶变换的应用

1. 解常微分方程.

例 7 求解方程：$y'+2y=\mathrm{e}^{-x}(x>0)$.

解 设 $F[y(x)]=Y(\omega)$.对方程两边作傅里叶变换，得

$$\text{左边：}\quad F\left[\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+2y(x)\right]=-\mathrm{i}\omega F[y(x)]+2F[y(x)]$$

$$=-\mathrm{i}\omega Y(\omega)+2Y(\omega)=(2-\mathrm{i}\omega)Y(\omega)$$

$$\text{右边：}\quad F[\mathrm{e}^{-x}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}$$

因此有

$$(2-\mathrm{i}\omega)Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{(1-\mathrm{i}\omega)(2-\mathrm{i}\omega)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{2-\mathrm{i}\omega}\right)$$

取它的逆变换，就得到该微分方程的解

$$y(x)=F^{-}[Y(\omega)]=F^{-}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2-\mathrm{i}\omega}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$$

2. 解偏微分方程.

例 8 求一维的热传导方程的解，该方程是

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\quad(t>0,-\infty<x<\infty),\quad u|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}u(t,x)=\lim_{x\to\pm\infty}u'(t,x)=0$$

解 设该方程的解是 $u(t,x)$，对方程中的 x 作傅里叶变换，记 $F[u(t,x)]=U(t,\omega)$，$F[\varphi(x)]=\Phi(\omega)$，则 $U(t,\omega)|_{t=0}=\Phi(\omega)$，于是

$$U(t,\omega)=F[u(t,x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(t,\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi$$

$$F[u_{xx}''(t,x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u''(t,\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi=(-\mathrm{i}\omega)^2F[u(t,x)]=-\omega^2U(t,\omega)$$

$$F[\varphi(x)]=\Phi(\omega)$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,\omega)$$

因此，定解问题变成解常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}U(t,\omega)}{\mathrm{d}t}=-a^2\omega^2U(t,\omega)$$

此方程的通解为

$$U(t,\omega) = Ce^{-a^2\omega^2 t}$$

其中 C 为积分常数，使用初始条件

$$U(t,\omega)\big|_{t=0} = C = \Phi(\omega)$$

得到

$$U(t,\omega) = \Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}$$

取它的傅里叶逆变换，就得到该方程的解

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F^{-}\left[\Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}\right] \\ &= F^{-}\left[\Phi(\omega)\right] * F^{-}\left[e^{-a^2\omega^2 t}\right] \end{aligned}$$

其中

$$F^{-}\left[\Phi(\omega)\right] = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} F^{-}\left[e^{-a^2\omega^2 t}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t}e^{-i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t}\cos x\omega\,d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}e^{\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{\frac{x^2}{4a^2 t}} \end{aligned}$$

此处使用了积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-px^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-\frac{b^2}{4p}} \quad (p>0)$$

因此，得到该方程的解为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \varphi(x)\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi \end{aligned}$$

3. 解积分方程.

例 9　有积分方程 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t)\,dt}{(x-t)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2}$，求解 $y(x)$.

解　该方程的左边是函数 $y(x)$ 与 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 的卷积，记作 $y(x) * \frac{1}{x^2+a^2}$，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t)\,dt}{(x-t)^2+a^2} = y(x) * \frac{1}{x^2+a^2}$$

设 $F[y(x)] = Y(\omega)$，对方程两边作傅里叶变换，得

左边：$F\left[y(x) * \frac{1}{x^2+a^2}\right] = F[y(x)] \cdot F\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = Y(\omega) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{a\mathrm{e}^{a\omega}}$

右边：$F\left(\frac{1}{x^2+b^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{b\mathrm{e}^{b\omega}}$

此处我们已用了公式

$$F\left(\frac{1}{t^2+a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a\mathrm{e}^{a\omega}}$$

因此

$$Y(\omega)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{a\mathrm{e}^{a\omega}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{b\mathrm{e}^{b\omega}}$$

$$Y(\omega) = \frac{a\mathrm{e}^{a\omega}}{b\mathrm{e}^{b\omega}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{(b-a)\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a(b-a)}{b} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{(b-a)\mathrm{e}^{(b-a)\omega}}$$

取它的傅里叶逆变换，得到该积分方程的解

$$y(x) = F^{-}[Y(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a(b-a)}{b} \cdot F^{-}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{(b-a)\mathrm{e}^{(b-a)\omega}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a(b-a)}{b[x^2+(b-a)^2]}$$

6.3 拉普拉斯(Laplace)变换

6.3.1 拉普拉斯变换

设 $f(x)$ 在 $0 \leqslant x < \infty$ 上连续，且有正常数 A，σ 使 $|f(x)| \leqslant A\mathrm{e}^{\sigma t}$，则有积分

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x \tag{6.26}$$

$F(p)$ 在右半平面的 $\mathrm{Re}p > \sigma$ 上是 p 的解析函数，并称 $F(p)$ 是 $f(x)$ 的拉普拉斯变换. e^{-px} 为拉普拉斯变换核，$f(x)$ 称为原函数，而 $F(p)$ 为像函数. 式(6.26)也可写成 $F(p) = L[f(x)]$. σ 的下确界 σ_0 称为 $F(p)$ 的收敛指标.

拉普拉斯变换的反演公式是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{px}\mathrm{d}p \tag{6.27}$$

这就是拉普拉斯逆变换. 它的积分路径是任一直线 $\mathrm{Re}p = \sigma > \sigma_0$，$\sigma_0$ 是 $F(p)$ 的收敛指标.

6.3.2　拉普拉斯变换的性质

1. 拉普拉斯变换是线性变换.

$$L[af(x)+bg(x)]=aL[f(x)]+bL[g(x)]\quad(a,b\text{ 是常数})$$

拉普拉斯逆变换也是线性的:

$$\begin{aligned}L^{-}[\alpha F(p)+\beta G(p)]&=\alpha L^{-}F(p)+\beta L^{-}G(p)\\&=\alpha f(x)+\beta g(x)\quad(\alpha,\beta\text{ 是常数})\end{aligned}$$

2. 拉普拉斯变换的相似性.

若 $L[f(x)]=F(p)$,a 为正实数,则

$$L[f(ax)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

3. 导数的拉普拉斯变换可变为乘以 p:

$$L[f'(x)]=pL[f(x)]-f(0)$$

对高阶导数的拉普拉斯变换公式为

$$\begin{aligned}L[f^{(n)}(x)]=p^{n}L[f(x)]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots\\-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

4. 积分的拉普拉斯变换可变成除以 p:

$$L\left[\int_0^x f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{L[f(\tau)]}{p}=\frac{F(p)}{p}$$

5. 象函数的微分法:

$$F'(p)=L[-xf(x)]$$

更一般地,有

$$F^{(n)}(p)=L[(-x)^{n}f(x)]$$

6. 象函数的积分法:

$$\int_p^{\infty}F(p)\mathrm{d}p=L\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

7. 拉普拉斯变换延迟性质:

当 $f(x)$平移 x_0 时,有

$$L[f(x-x_0)]=\mathrm{e}^{-px_0}F(p)$$

8. 拉普拉斯变换的位移性质:

设 $L[f(x)]=F(p)$,则对任一个复常数 λ,有

$$L[\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)]=F(p-\lambda)$$

9. 两函数的卷积可变为它们的变换的乘积:

$$L\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]=L[f]\cdot L[g]$$

6.3.3 单项式的拉普拉斯变换算例

例 10 求 $f(x)=1$ 的拉普拉斯变换.

解 $F(p)=L[1]=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=\left(-\frac{\mathrm{e}^{-px}}{p}\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p}$.

例 11 求 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ 的拉普拉斯变换.

解 $F(p)=L[\mathrm{e}^{ax}]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{ax}\cdot\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p-a)x}\mathrm{d}x=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-(p-a)x}}{p-a}\right]_0^{\infty}$

$$=\frac{1}{p-a}.$$

例 12 求 $f(x)=x\mathrm{e}^{-ax}$ 的拉普拉斯变换.

解 $F(p)=L[x\mathrm{e}^{-ax}]=\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-ax}\cdot\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-(p+a)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p+a)^2}$.

例 13 求 $f(x)=x^n$ 的拉普拉斯变换.

解 公式

$$L[f^{(n)}(x)]=p^nL[f(x)]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

因为

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$$

又因

$$f^{(n)}(x)=(x^n)^{(n)}=n!$$

所以

$$L[f^{(n)}(x)]=L[(x^n)^{(n)}]=p^nL[x^n]=L[n!]$$

因此

$$L[x^n]=\frac{1}{p^n}L[n!]=\frac{1}{p^n}\cdot n!L[1]=\frac{1}{p^n}\cdot\frac{n!}{p}=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

例 14 求 $f(x)=\sin ax$, $f(x)=\cos ax$ 的拉普拉斯变换.

解

$$F(p)=L[\sin ax]=\int_0^{\infty}\sin ax\cdot\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=\frac{a}{p^2+a^2}$$

$$F(p)=L[\cos ax]=\int_0^{\infty}\cos ax\cdot\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=\frac{p}{p^2+a^2}$$

上面两式的拉普拉斯变换仔细推导如下:

把 $\sin ax=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中,有

$$F(p)=L[\sin ax]=\int_0^{\infty}\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})\cdot\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-(p-\mathrm{i}a)x} - \mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}a)x}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}a} - \frac{1}{p+\mathrm{i}a}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{2\mathrm{i}a}{p^2+a^2} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

用同样的方法，把 $\cos ax = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中，有

$$F(p) = L[\cos ax] = \frac{p}{p^2+a^2}$$

例 15　求 $f(x)=\sinh ax$，$f(x)=\cosh ax$ 的拉普拉斯变换.

解　把 $\sinh ax = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax})$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中，有

$$F(p) = L[\sinh ax] = \int_0^{\infty}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}) \cdot \mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p-a)x}\mathrm{d}x - \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+a)x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2-a^2}$$

用同样的方法，把 $\cosh ax = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax})$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中，有

$$F(p) = L[\cosh ax] = \frac{p}{p^2-a^2}$$

例 16　求 $f(x)=\mathrm{e}^{-bx}\sin ax$ 和 $f(x)=\mathrm{e}^{-bx}\cos ax$ 的拉普拉斯变换.

解　把 $\mathrm{e}^{-bx}\sin ax = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-bx}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中，有

$$F(p) = L[\mathrm{e}^{-bx}\sin ax] = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-bx}\sin ax \cdot \mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-bx}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+b-\mathrm{i}a)x}\mathrm{d}x - \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+b+\mathrm{i}a)x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{p+b-\mathrm{i}a} - \frac{1}{p+b+\mathrm{i}a}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{2\mathrm{i}a}{(p+b)^2+a^2} = \frac{a}{(p+b)^2+a^2}$$

用同样的方法，把 $\mathrm{e}^{-bx}\cos ax = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-bx}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中，有

$$F(p) = L[\mathrm{e}^{-bx}\cos ax] = \frac{p+b}{(p+b)^2+a^2}$$

例 17 求 $f(x)=e^{-bx}\sinh ax$ 和 $f(x)=e^{-bx}\cosh ax$ 的拉普拉斯变换.

解 把 $f(x)=e^{-bx}\sinh ax=e^{-bx}\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中,有

$$\begin{aligned}F(p)&=L[e^{-bx}\sinh ax]=\int_0^{\infty}e^{-bx}\sinh ax\cdot e^{-px}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-bx}(e^{ax}-e^{-ax})e^{-px}dx\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}e^{-(p+b-a)x}dx+\int_0^{\infty}e^{-(p+b+a)x}dx\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+b-a}-\frac{1}{p+b+a}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{(p+b)^2-a^2}=\frac{a}{(p+b)^2-a^2}\end{aligned}$$

用同样的方法,把 $e^{-bx}\cosh ax=\dfrac{1}{2}e^{-bx}(e^{ax}+e^{-ax})$ 代入拉普拉斯变换式(6.26)中,有

$$F(p)=L[e^{-bx}\cosh ax]=\frac{p+b}{(p+b)^2-a^2}$$

例 18 利用拉普拉斯变换的位移性质求下列函数的拉普拉斯变换:$e^{\lambda x}x^n$,$e^{\lambda x}\sin\omega x$,$e^{\lambda x}\cos\omega x$.

解 根据本章例 13、例 14 的结果,由位移性质得到

$$L[e^{\lambda x}x^n]=\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$$

$$L[e^{\lambda x}\sin\omega x]=\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$$

$$L[e^{\lambda x}\cos\omega x]=\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$$

6.3.4 拉普拉斯逆变换

前面已经讲了由函数 $f(x)$(原函数)求 $F(p)$(象函数)的方法,这就是拉普拉斯正变换.实际上也有相反的问题,即由象函数 $F(p)$ 求原函数 $f(x)$,即拉普拉斯逆变换.

求拉普拉斯逆变换的主要方法有:留数法、部分分式法和查表法,当然也还有别的方法.

1. 留数法.

用拉普拉斯逆变换公式 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{px}dp$ 做积分.但这是一个复变函数的积分,一般可用复变函数中的留数法求解(留数定理将在第 7 章中讲解).

2. 部分分式法.

当给定的象函数是有理函数时，可将该函数分解成几个简单的部分分式的代数和，再由拉普拉斯变换的性质求出每个分式的原函数. 这些原函数的代数和就是所给函数的原函数了.

例如求 $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)}$ 的逆变换.

用部分分式法把 $F(p)$ 分解成几个单项分式

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p+1}$$

再进行拉普拉斯逆变换，于是有

$$f(x)=L^{-}[F(p)]=L^{-}\left[-\frac{1}{p}\right]+L^{-}\left[\frac{1}{p^2}\right]+L^{-}\left[\frac{1}{p+1}\right]=-1+x+\mathrm{e}^{-x}$$

3. 查表法.

很多数学手册都有拉普拉斯变换表，列出了拉普拉斯变换对：原函数 $f(x)$ 和相应的象函数 $F(p)$. 既可以从中找到从 $f(x)$ 到 $F(p)$ 的拉普拉斯正变换，也可以查得从 $F(p)$ 到 $f(x)$ 的拉普拉斯逆变换. 对于单项式或简单的函数，也许可以直接得到结果；但对于较复杂的函数，如有理式或无理式，恐怕要经过适当的变形后才能从表中查到拉普拉斯逆变换了.

6.3.5　拉普拉斯变换的应用

1. 解微分方程.

例 19　求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\mathrm{e}^{-x}$ 的解，初始条件是 $y|_{x=0}=0$.

解　设 $L[y(x)]=Y(p)$，对方程两边作拉普拉斯变换，得

左边：$L[y'+2y]=L[y'(x)]+2L[y(x)]$

$$=pY(p)-y(0)+2Y(p)=(p+2)Y(p)$$

右边：$L[\mathrm{e}^{-x}]=\dfrac{1}{p+1}$

因此得到

$$(p+2)Y(p)=\frac{1}{p+1}$$

及

$$Y(p)=\frac{1}{(p+1)(p+2)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}$$

作上式的拉普拉斯逆变换，得

$$L^{-}[Y(p)]=L^{-}\left[\frac{1}{p+1}\right]-L^{-}\left[\frac{1}{L+2}\right]=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$$

这就得到该微分方程初值问题的解为

$$y(x) = L^{-}[Y(p)] = e^{-x} - e^{-2x}$$

例 20 求微分方程 $y''+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=-2, y'(0)=4$ 的解.

解 设 $L[y(x)]=Y(p)$.

对方程两边作拉普拉斯变换,并加入初始条件,则

$$\text{左边：}\quad L[y''+4y]=L[y''(x)]+4L[y(x)]$$

其中

$$\begin{aligned} L[y''(x)] &= p^2L[y(x)] - py(0) - y'(0) \\ &= p^2Y(p) + 2p - 4 \\ 4L[y(x)] &= 4Y(p) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} L[y'' + 4y] &= p^2Y(p) + 2p - 4 + 4Y(p) \\ &= (p^2 + 4)Y(p) + 2p - 4 \end{aligned}$$

右边 $=0$. 于是有

$$Y(p) = \frac{4-2p}{p^2+4} = 2\frac{2}{p^2+2^2} - 2\frac{p}{p^2+2^2}$$

作拉普拉斯逆变换,得到该方程的解

$$y(x) = L^{-}[Y(p)] = 2L^{-}\left[\frac{2}{p^2+2^2}\right] - 2L^{-}\left[\frac{p}{p^2+2^2}\right] = 2\sin 2x - 2\cos 2x$$

例 21 求微分方程 $y''-4y'+4y=e^x$ 的解,初始条件是: $y(0)=y'(0)=0$.

解 设 $L[y(x)]=Y(p)$,对方程两边作拉普拉斯变换,得

$$\begin{aligned} \text{左边：}\quad L[y''-4y'+4y] &= L[y''(x)] - 4L[y'(x)] + 4L[y(x)] \\ &= p^2Y(p) - 4pY(p) + 4Y(p) \\ &= (p^2 - 4p + 4)Y(p) = (p-2)^2Y(p) \end{aligned}$$

$$\text{右边：}\quad L[e^x] = \frac{1}{p-1}$$

因此有

$$(p-2)^2Y(p) = \frac{1}{p-1}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2}$$

作拉普拉斯逆变换,就得到方程的解

$$\begin{aligned} y(x) &= L^{-}\,Y(p) = L^{-}\left[\frac{1}{p-1}\right] - L^{-}\left[\frac{1}{p-2}\right] + L^{-}\left[\frac{1}{(p-2)^2}\right] \\ &= e^x - e^{2x} + xe^{2x} \end{aligned}$$

例 22 求高阶微分方程的解: $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = \delta(x)(x>0)$,其中 $\delta(x)$ 为狄拉克函数,初始条件: $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=y^{(4)}=0$.

解 设 $L[y(x)]=Y(p)$,对方程两边作拉普拉斯变换,得

左边：　$L[y^{(4)}+2y'''-2y'-y]$

$$=p^4L[y(x)]+2p^3L[y(x)]-2pL[y(x)]-L[y(x)]$$

$$=(p^4+2p^3-2p-1)Y(p)$$

右边：　$L[\delta(x)]=1$

因此

$$(p^4+2p^3-2p-1)Y(p)=1$$

于是有

$$Y(p)=\frac{1}{p^4+2p^3-2p-1}=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(p-1)}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(p+1)}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^3}$$

作它的拉普拉斯逆变换，得

$$L^{-}[Y(p)]=\frac{1}{8}e^{x}-\frac{1}{8}e^{-x}-\frac{1}{4}xe^{-x}-\frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

这样就得到该微分方程的解为

$$y(x)=L^{-}[Y(p)]=\frac{1}{8}e^{x}-\frac{1}{8}(2x^2+2x+1)e^{-x}$$

2. 解微分积分方程.

例 23　求解以下微分积分方程定解问题：在电工电子学中，常会遇到 RLC 电路，根据克希霍夫定理，可推导出该电路的微分积分方程

$$\mathscr{L}\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt=E$$

方程中的 $\mathscr{L}$，R，C 分别是电感、电阻、和电容，E 为电源，$i(t)$ 是随时间 t 变化的电流. 初始条件为 $i(0)=i'(0)=0$.

解　设 $L[i(t)]=I(p)$，对方程两边作拉普拉斯变换，得

左边：　$L\left[\mathscr{L}i'(t)+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt\right]=\mathscr{L}pI(p)+RI(p)+\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{p}I(p)$

$$=\left(p\mathscr{L}+R+\frac{1}{pC}\right)I(p)$$

右边：　$L[E]=EL[1]=\frac{E}{p}$

因此

$$\left(p\mathscr{L}+R+\frac{1}{pC}\right)I(p)=\frac{E}{p}$$

及

$$I(p)=\frac{E}{p\left(p\mathscr{L}+R+\frac{1}{pC}\right)}=\frac{E}{\mathscr{L}\left(p^2+\frac{pR}{\mathscr{L}}+\frac{1}{\mathscr{L}C}\right)}$$

$$= \frac{E}{\mathscr{L}} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2\mathscr{L}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mathscr{L}C} - \frac{R^2}{4\mathscr{L}^2}\right)}$$

当$\frac{1}{\mathscr{L}C} > \frac{R^2}{4\mathscr{L}}$时，令 $\frac{1}{\mathscr{L}C} - \frac{R^2}{4\mathscr{L}} = \omega^2$，$\frac{R}{2\mathscr{L}} = b$，则

$$I(p) = \frac{E}{\mathscr{L}} \cdot \frac{1}{(p+b)^2 + \omega^2} = \frac{E}{\omega\mathscr{L}} \cdot \frac{\omega}{(p+b)^2 + \omega^2}$$

取它的拉普拉斯逆变换，就得到该方程的解

$$i(t) = L^{-}[I(p)] = \frac{E}{\omega L} e^{-bt} \sin \omega t$$

其中

$$b = \frac{R}{2\mathscr{L}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\mathscr{L}C} - \frac{R^2}{4\mathscr{L}}}, \quad \frac{1}{\mathscr{L}C} > \frac{R^2}{4\mathscr{L}}$$

这表明，该电路的电流是随时间 t，以角频率 ω，作衰减正弦型振荡的.

当$\frac{1}{\mathscr{L}C} < \frac{R^2}{4\mathscr{L}}$时，令 $\frac{R^2}{4\mathscr{L}} - \frac{1}{\mathscr{L}C} = \beta^2$，则

$$I(p) = \frac{E}{\mathscr{L}} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2\mathscr{L}}\right)^2 - \left(\frac{R^2}{4\mathscr{L}^2} - \frac{1}{\mathscr{L}C}\right)} = \frac{E}{\beta\mathscr{L}} \cdot \frac{\beta}{(p+b)^2 - \beta^2}$$

作拉普拉斯逆变换，就得到该方程的另一个解为

$$i(t) = L^{-}[I(p)] = \frac{E}{\beta\mathscr{L}} e^{-bt} \sinh \beta t \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4\mathscr{L}} - \frac{1}{\mathscr{L}C}}\right)$$

这时表明该电路的电流不再是振荡的了，它随时间 t，或增长，或衰减，要看电路参数.

第 7 章　复变函数的积分

7.1　复变函数的概念

7.1.1　复数和复平面

一个复数总是可以表示为一个实数和一个纯虚数之和

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{7.1}$$

其中 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，分别记作 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$. 如果把 x，y 看成是平面上的直角坐标，那么就叫 x 为实轴，y 为虚轴. 这样，一个复数就和该平面上的一个点相对应. 这个平面叫复平面.

如果从坐标原点(O)到平面上某点 z 引一矢量 $\vec{r}$(如图 7.1)，若它的长度为 r，与 x 轴的夹角为 θ，那么就有

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

因此复数 z 可表示为

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{7.2}$$

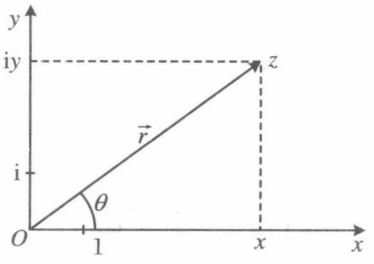


图 7.1

这就是复数的三角表示法. 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，r 就是复数 z 的模，$|z| = r$；θ 为 z 的一个辐角. 因为当 θ 是 z 的辐角时，对于任意整数 n，$\theta + 2n\pi$ 也是 z 的辐角. 我们常称在 $(-\pi,\pi]$ 内的辐角为复数辐角的一个主值，用 $\arg z$ 表示.

如果用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 中的指数代替三角函数，那么就有第三种复数的表示法：指数表示法

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{7.3}$$

一个复数的共轭复数 z^* 为

$$z^* = x - \mathrm{i}y = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = re^{-\mathrm{i}\theta} \tag{7.4}$$

7.1.2 复数的四则运算

设有复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则有

加法： $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$

减法： $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$

乘法： $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

若用三角函数或指数函数表示，则有

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

或

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}$$

除法： $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

当用三角函数或指数函数表示，则有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

或

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)}$$

复数的乘方和开方为

乘方： $z^n = r^n(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = r^n(\cos nx + \mathrm{i}\sin nx)$ （棣莫弗公式）

开方： $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{n}\right)$， 或 $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}$

由于 $\theta + 2n\pi$（n 是整数）也是 z 的辐角，故 $\sqrt[n]{z}$ 实际上是 n 值函数，分别是 $\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}$，$\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2\pi)}{n}}$，$\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\mathrm{i}(\theta+4\pi)}{n}}$，…，$\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2n\pi-2\pi)}{n}}$.

7.1.3 复变函数

当复变数 z 在复平面中的某个区域 G 上变动时，若复变数 w 由复变数 z 的值而定，就称 w 为区域 G 上的 z 的函数，记作

$$w = f(z) \tag{7.5}$$

其中 z 为复自变量.

复变函数可以是多项式、有理函数、无理函数、超越函数等各种形式.

区域与边界：满足一定条件的特殊点集称为区域，这些条件是：①由全体内点组成的开集；②具有连通性，即点集中的任何两点都可以用一条折线连接起来，折线上的的点全都属于这个点集. 边界点的全体称为区域的边界，边界的方向是这样

规定的：如果沿着边界向前走，区域始终在左方，则称这个方向为边界的正向(图7.2).

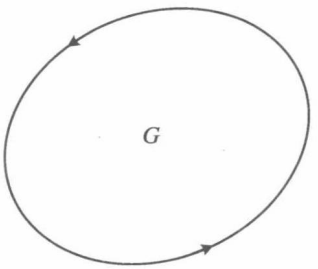


图7.2

7.2　复变函数的微商(导数)

设 $w=f(z)$ 是在区域 G 中定义的单值函数，即对于 G 中的每一个 z 值，都有而且只有一个 w 值与之对应. 如果在 G 内某点 z，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，并具有确定值，则称这个极限为 $f(z)$ 在 z 点的微商(或导数)

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

或

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \tag{7.6}$$

复变函数的微商定义类似于实变函数，因而在实变函数中关于微商的一些规则和方法也可应用于复变函数，例如：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(u\pm v)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\pm\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(uv)=u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}-u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}}{v^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n=nz^{n-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^z$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z=\cos z$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z=-\sin z$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z=\frac{1}{z}$$

复变函数微商的定义，虽然在形式上和实变函数微商定义类似，但实质上却有很大不同. 实变数 Δx 只能在实轴上趋于零，而复变数 Δz 却可以在复平面上以任意方式趋于零.

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，先令 Δz 沿着平行于实轴的方向趋于零，即

$\Delta y=0,\Delta z=\Delta x\to 0$，于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]\end{aligned}$$

即

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\tag{Ⅰ}$$

再令 Δz 沿着平行于虚轴的方向趋于零，即 $\Delta x=0,\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$，于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}-\mathrm{i}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}\right]\end{aligned}$$

即

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\tag{Ⅱ}$$

若复变函数 $f(z)$ 在定义域中是解析函数，又是单值函数，那么式(Ⅰ)与式(Ⅱ)的微商表达式应该相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\tag{7.7}$$

令这个等式的实部和虚部分别相等，就得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\tag{7.8}$$

式(7.8)称为柯西-黎曼方程. 式(7.8)也是复变函数在区域 G 中解析的充分必要条件.

7.3 复变函数的积分

7.3.1 曲线积分

设 C 是复数平面上的一条曲线，从 A 到 B. 复变函数 $f(z)$ 在曲线 C 上有定义

(图 7.3).把曲线 C 分成 n 段,依次有 $n-1$ 个分点:

$$A = z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n = B$$

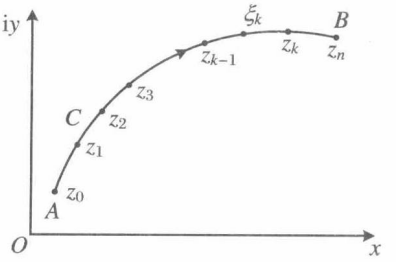


图 7.3

在任意一小段$\overline{z_{k-1}z_k}$上取任意一点 ξ_k,作和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \tag{7.9}$$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$,当 n 无限增大,使 Δz_k 无限缩小并趋向零时,这个和的极限称为函数 $f(z)$沿着曲线 C 从 A 到 B 的积分,写作

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \tag{7.10}$$

将 z 的实部和虚部分别记作 x, y,则 $f(z)$的实部和虚部可分别记为 $u(x,y)$与 $v(x,y)$.此时

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$$

有

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C [u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)](\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \\ &= \int_C [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + \mathrm{i}\int_C [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\end{aligned}$$

或写成

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \tag{7.11}$$

该式表明复变函数的线积分可用两个实变函数的积分表达出来.

复变函数的路线积分是有方向性的,如前所述,已经认定曲线 C 是从 A 到 B 的,即 $A\to B$ 是正向.如果积分要从 B 到 A 呢,那就是相反的路线积分了.把反方向的路线记作 C^-,因此有

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{7.12}$$

如果所研究的曲线不是整条光滑的曲线,而是分段光滑的曲线,那么可以分段积分再相加,有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.13}$$

7.3.2 柯西积分定理

如果 $f(z)$在单连通区域 G 中是一个解析函数,则在该区域中沿任何一条封闭曲线 C 的积分都为 0,即

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{7.14}$$

这就是柯西积分定理.符号$\oint$ 表示积分路线是一条封闭曲线.

式(7.14)证明如下:

在封闭曲线的情况下,式(7.11)可写成

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\oint_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \tag{7.15}$$

设$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$都是连续的,那么式(7.15)右边的两个积分可使用格林公式[式(5.19)]

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $P=u$,$Q=v$,则有

$$\oint_C u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

用这个式子把式(7.15)的线积分化成围道 C 所包围的面积S 上的二重积分,得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.16}$$

根据柯西-黎曼方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

式(7.16)右端的两个二重积分都为零.于是证明了式(7.14).

若在封闭曲线 C 所围的区域中,$f(z)$为解析函数,但在这个区域中有一个奇点 α,这样的点称为孤立奇点.在这种情况下,可以在孤立奇点的周围很小的区域内作一条封闭曲线 C_1 把它围起来,并把它挖去.这样就得到一个有孔的封闭区.若在两条边界线之间引一条割线(图 7.4),那么在曲线 C 和C_1 之间的环形区域形成一个连通区域.它同样适用柯西积分定理,即

$$\int_{ABDEAFGHA} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

或

$$\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{BA} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

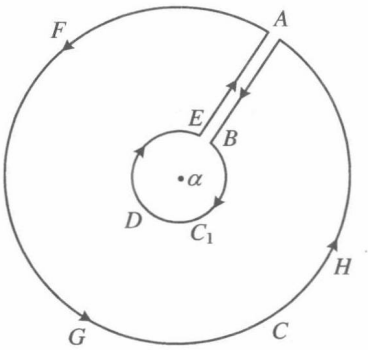


图 7.4

其中$\overline{AB}$和$\overline{BA}$上的线积分，因为方向相反，所以两者之和为 0，因此有

$$\oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{7.17}$$

我们已经规定逆时针方向为正方向，那么顺时针向就是负方向了. 上式中的曲线 C_1 上的积分是顺时针向的，所以写成 C_1^-，它与逆时针向的积分有如下关系：

$$\oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = -\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.18}$$

因此式(7.17)可写成

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.19}$$

这说明沿外边界线逆时针向积分等于沿内边界线逆时针向积分.

式(7.19)可以推广到 $f(z)$具有有限个孤立奇点的情况：

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.20}$$

式(7.20)中的所有积分路线都是逆时针的. 式(7.19)和式(7.20)都是从柯西积分定理推演而来的.

7.3.3　复变函数的不定积分

根据柯西定理，在单连通区域 G 内解析的函数 $f(z)$沿区域内任一分段光滑曲线的积分值只与起点和终点有关. 因此如果固定起点 z_0，而让终点 z 变化，那么不定积分

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(z) - F(z_0) \tag{7.21}$$

是 G 内的一个单值函数. 把 $F(z)$看成是 $f(z)$的原函数，$F(z_0)$为积分常数. 如同在实变函数中那样，会有

$$F'(z) = f(z)$$

而且还可以证明

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(z_2) - F(z_1) \tag{7.22}$$

就是说线积分值等于原函数的改变量.

原函数一般为多值函数. 特殊情况下，也可能是单值函数. 考虑积分

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z$$

其中 C 是一条封闭曲线，n 是整数. 当 $n \geqslant 0$ 时，原函数 $\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$ 为全平面上的单值解析函数，单值函数沿封闭曲线走一圈所得的改变为零，所以积分为 0；当 $n \leqslant -2$ 时，原函数 $\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$ 是除去 a 点外的封闭平面上的单值函数，所以积分也为 0；如果 $n=-1$，原函数 $\ln(z-a)$为多值函数，取主值

$$\ln(z-a) = \ln|z-a| + \mathrm{i}\arg(z-a) \quad (-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi)$$

如果 C 包围 a 点，则因为绕 a 点转一圈，$z-a$ 的模不变，而辐角 $\arg(z-a)$的改变量为 2π，所以积分等于 $2\pi\mathrm{i}$，即

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi\mathrm{i} \tag{7.23}$$

或者可以这样来证明式(7.23)：在封闭曲线 C 内，以 a 点为圆心画一个半径为 r 的小圆 C_1，则在 C_1 上有 $z-a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 r 为围绕 a 点的小圆的半径(图 7.5)，并且 $\mathrm{d}z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot \mathrm{i}\mathrm{d}\theta$，于是

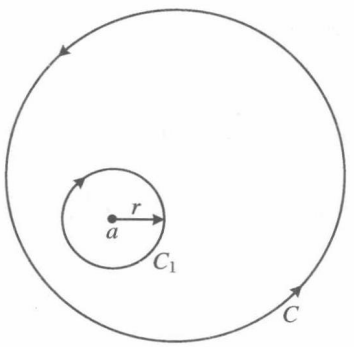


图 7.5

$$\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i} \tag{7.24}$$

因此有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \begin{cases} 0 & (C \text{ 不包围 } a) \\ 1 & (C \text{ 包围 } a) \end{cases}$$

并有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = 0 \quad (n \neq -1)$$

7.3.4　柯西积分公式

假设 $f(z)$是封闭的单连通区域 G 上的解析函数，C 为 G 的边界线，a 是区域 G 内的一个点，则有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{7.25}$$

这就是**柯西积分公式**. 该式表明解析函数 $f(z)$沿边界的积分值就是它在内点 a 的函数值 $f(a)$. 积分是沿 C 的正方向进行的，a 是 C 内的任何一个点. 现证明如下：

a 是区域 G 内的任意一点，考虑函数

$$\varphi(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \tag{7.26}$$

这个函数 $\varphi(z)$在闭区间 G 上除 $z=a$ 外的一切点都是解析的. 以点 a 为中心，以一个任意小的数 r 为半径画一个完全在区域 G 内的小圆 C_1(图 7.6). 于是 $\varphi(z)$在闭合曲线 C 与 C_1 之间的每一点，以及 C 与 C_1 上的每一点都是解析的. 因此，按照柯西定理[式(7.19)]，有

$$\oint_C \varphi(z)dz = \oint_{C_1} \varphi(z)dz \tag{7.27}$$

式(7.27)表明 $\oint_{C_1}\varphi(z)dz$ 的值并不依赖辅助圆 C_1 的半径 r，而恒等于常数值 $\oint_C \varphi(z)dz$.

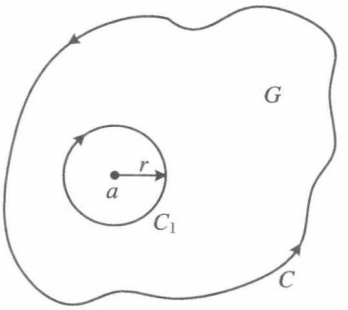


图 7.6

从式(7.26)注意到，当 z 趋向 a 时，$\varphi(z)$趋向一个确定的有限值，即

$$\lim_{z\to a}\varphi(z) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(z)$$

如果取 $f'(z)$作为 $\varphi(z)$在点 $z=a$ 的值，则 $\varphi(z)$在闭区域 G 上处处连续. 则必然存在一个常数 M，对 G 区域上任一点 z，都有 $|\varphi(z)|<M$，当围绕 a 点对 $\varphi(z)$积分一周时，就有

$$\left|\oint_{C_1}\varphi(z)dz\right| < M\cdot 2\pi r$$

因为 r 在这里可以取得随意小，以至于趋向零时，那么

$$\oint_{C_1}\varphi(z)dz = 0$$

根据式(7.27)，于是有

$$\oint_C \varphi(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{7.28}$$

把式(7.26)代入式(7.28),得到

$$\oint_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathrm{d}z = 0$$

或

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(a)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a)\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} \tag{7.29}$$

因为[式(7.23)]

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i$$

所以式(7.29)可写成

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi i f(a) \tag{7.30}$$

或

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

这就是我们要证明的柯西积分公式[式(7.25)].

7.3.5 解析函数的高阶微商

在推导柯西积分公式时,点 a 是任意选取的,因此可以把柯西积分公式改写成

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \tag{7.31}$$

其中 z 是区域 G 的内点,ξ 为边界 C 上的变点,因此 $\xi - z \neq 0$. 所以式(7.31)中的被积函数是连续函数,可以在积分号下对 z 求导,得到一阶微商

$$f'(z) = \frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\mathrm{d}\xi \tag{7.32}$$

同理,式(7.32)又可以在积分号下对 z 求导,得到二阶微商

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\mathrm{d}\xi \tag{7.33}$$

如此类推,可以求得 $f(z)$任意阶(n)的微商

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}}\mathrm{d}\xi \tag{7.34}$$

从式(7.32)到式(7.34),说明一个复变函数在一个闭区域上,只要有一阶微商,则它的任何阶微商都存在,并且都是该区域的解析函数. 式(7.34)也叫柯西积分公式. 注意:这里对被积函数求微商时,只对 z 变量求微商,可把变量 ξ 看成常数.

如果复变函数 $f(z)$是在封闭区域 G 上的解析函数，那么就要除去该区域内的有限个孤立奇点. 挖去这些奇点处的小邻域变成复连通区，柯西积分公式就可以推广到这样的复连通区. 不过这时沿边界 C 的积分应该理解为沿所有边界的正方向的积分.

7.3.6　无界区域的柯西积分公式

设 $f(z)$在闭合曲线 C 外是解析函数. 以 $z=0$ 点为圆心，以很大的半径 R 作圆周 C_R，并能把 C 包含在内，然后在 C 与 C_R 之间的环域上应用柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}z \tag{7.35}$$

上式右端的第一个积分是逆时针的，而第二个积分是顺时针的. 对第一个积分作估计，得

$$\oint_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}z\leqslant\frac{\max|f(\xi)|}{R-|z|}2\pi R=\max|f(\xi)|\cdot\frac{2\pi}{1-\dfrac{|z|}{R}}$$

其中 $\max|f(\xi)|$是指圆 C_R 上的$f(\xi)$的最大值.

如果$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，则 $\max|f(\xi)|\to 0$，所以

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}z=0$$

只要$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，柯西积分公式就可以推广到无界区域

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}z \tag{7.36}$$

7.4　复变函数的无穷级数展开——泰勒级数与罗朗级数

7.4.1　泰勒(Taylor)级数

假设 $f(z)$在圆$|z-b|=R$ 的内部是解析函数，那么在圆$|z-b|=R$ 的内部，$f(z)$可展开成一致收敛的幂级数，即所谓泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n \tag{7.37}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}}d\xi = \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \tag{7.38}$$

在$|z-b|=R$的圆内，以b为圆心，以$R_1(<R)$为半径作一圆C_{R_1}，并使z点在C_{R_1}圆内(图7.7).这样，z就是圆内的定点，而ξ为圆C_{R_1}上的动点.应用柯西积分公式，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{7.39}$$

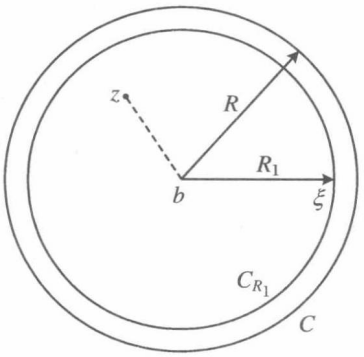


图7.7

在C_{R_1}圆上有$|\xi-b|=R_1$，因为z在C_{R_1}圆内，所以$|z-b|<R_1$.应用递减几何级数求和公式，可把$\frac{1}{\xi-z}$展开：

因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - b}\cdot\frac{\xi - b}{\xi - z}\\ &= \frac{1}{\xi - b}\cdot\frac{\xi - b}{(\xi - b)-(z - b)}\\ &= \frac{1}{\xi - b}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{z - b}{\xi - b}}\end{aligned}$$

等式右端的右乘分式用二项式展开，则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - b}\cdot\left[1 + \frac{z - b}{\xi - b} + \left(\frac{z - b}{\xi - b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - b}{\xi - b}\right)^n + \cdots\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - b)^n}{(\xi - b)^{n+1}}\end{aligned} \tag{7.40}$$

因为$|\xi-b|>|z-b|$，即$\left|\dfrac{z-b}{\xi-b}\right|<1$，所以该级数是收敛的.

把式(7.40)代入式(7.39)，并逐项积分，就有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z - b)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{n+1}}d\xi \tag{7.41}$$

或

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - b)^n \tag{7.42}$$

式中的a_n为

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{(n+1)}}d\xi = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}\quad[\text{见式(7.34)}] \tag{7.43}$$

于是式(7.42)可写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n \tag{7.44}$$

这就是复变函数 $f(z)$的泰勒级数展开式.

7.4.2　罗朗(Laurent)级数

假设 C_R 和 C_r 是以 b 为圆心的两个同心圆周，R 和 r 分别是这两个同心圆的半径(图 7.8).若 $f(z)$是以 C_R 和 C_r 为边界的圆环上的一个解析函数，那么可按照 $z-b$ 的正幂和负幂造一个级数，使得在圆环内的每一个点 z 上，这个级数都收敛于函数 $f(z)$.

在 C_R 和 C_r 之间的圆环内再选两个半径分别为 R_1 和 r_1 的圆，使得 $r<r_1<\rho<R_1<R$，其中 ρ 是 z 点到圆心 b 的距离，并令 C_{R_1} 和 C_{r_1} 分别代表这两个圆的圆周(虚线).

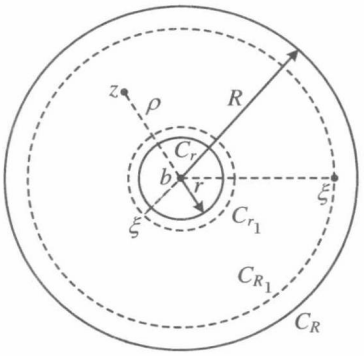


图 7.8

根据假设，函数 $f(z)$在 C_{R_1} 和 C_{r_1} 之间，以及在 C_{R_1} 和 C_{r_1} 圆上都是解析的.因此可用柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{7.45}$$

在 C_{R_1} 和 C_{r_1} 的积分路线都是按正向进行的.

和前面泰勒级数的情况一样，把式(7.40)代入式(7.45)右边的第一项，则有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{(z-b)^n}{(\xi-b)^{n+1}}f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{Ⅰ}$$

但在式(7.45)的第二个积分中，动点 ξ 在圆周 C_{r_1} 上，因此

$$\xi-z<0,\quad |\xi-b|<|z-b|,\quad \left|\frac{\xi-b}{z-b}\right|<1$$

于是

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{z-b}{\xi-z}=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{z-b}{(\xi-b)-(z-b)}=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{\dfrac{\xi-b}{z-b}-1}$$

$$=-\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\xi-b}{z-b}}=-\frac{1}{z-b}\left[1+\frac{\xi-b}{z-b}+\left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)^m\right]$$

或

$$\frac{1}{\xi-z}=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\xi-b)^m}{(z-b)^{m+1}}$$

把它代入式(7.45)的第二个积分中，于是

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{(\xi-b)^m}{(z-b)^{m+1}}f(\xi)d\xi \qquad (\text{Ⅱ})$$

把式(Ⅰ)和式(Ⅱ)代入式(7.45)，得到

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{(z-b)^l}{(\xi-b)^{l+1}}f(\xi)d\xi+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{(\xi-b)^m}{(z-b)^{m+1}}f(\xi)d\xi \qquad (7.46)$$

令

$$a_l=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{l+1}}d\xi \qquad (\text{Ⅲ})$$

$$c_m=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}f(\xi)\,(\xi-b)^{m-1}d\xi \qquad (\text{Ⅳ})$$

于是式(7.46)可写成

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\,(z-b)^l+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\,(z-b)^{-m} \qquad (7.47)$$

如果把式(Ⅳ)改写成

$$c_m=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}f(\xi)\,(\xi-b)^{m-1}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{-m+1}}d\xi$$

$$=c_{-m}\quad(m=1,2,3,\cdots)$$

这样，就可把(Ⅲ)、(Ⅳ)两式合并写成统一的公式：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}d\xi\quad(n=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots)$$

其中积分闭路 Γ 圆环中，以 b 为圆心的任意一个圆周.式(7.47)可改写成

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\,(z-b)^l+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\,(z-b)^{-m}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\,(z-b)^l+\sum_{m=-1}^{-\infty}c_{-m}\,(z-b)^m$$

或者写成统一格式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\,(z-b)^n\quad(n=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots) \qquad (7.48)$$

这就是罗朗级数.

7.5　留数定理及其在积分上的应用

7.5.1　留数定理

设 C 为一分段光滑的简单闭合曲线，函数 $f(z)$ 在 C 内除孤立奇点 b 以外是解析函数. 在以 b 为圆心内半径为任意小外圆周为 Γ 的圆环中作罗朗展开，有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \tag{7.49}$$

$f(z)$ 在曲线 C 上也是解析的，因此可沿 C 对 $f(z)$ 进行逐项积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_\Gamma (z-b)^n \mathrm{d}z$$

经果发现这个积分除 $n=-1$ 这一项外全为零，所以

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = a_{-1}\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}$$

a_{-1} 被称为 $f(z)$ 在孤立奇点 b 处的留数，记作 $\mathrm{Res}f(b)$，即

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}f(b) \tag{7.50}$$

因此，留数应被表示为

$$\mathrm{Res}f(b) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z \tag{7.51}$$

或者称 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 为 $f(z)$ 在点 b 的留数.

假设 $f(z)$ 在 C 内的闭区域中，除有限个奇点 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ 外，都是解析的. 那么可以以 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ 为圆心，分别作小圆，每个小圆只含一个奇点. 根据复连通区域的柯西定理，有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.52}$$

把式(7.50)代入式(7.52)的右边，得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}f(b_1) + 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}f(b_2) + \cdots + 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}f(b_n) \tag{7.53}$$

这就是留数定理.

对于无穷远点，留数定理也成立，不过在 C 上的曲线积分方向相反，即顺时针

方向，使得积分区域始终在前进方向的左侧. 这就有

$$\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(-a_{-1}) = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}f(\infty)$$

或者写成

$$\mathrm{Res}f(\infty) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.54}$$

7.5.2 留数的计算方法

留数就是函数 $f(z)$ 的罗朗展开式中负一次幂的系数 a_{-1}. 对于极点，有下面较直接的方法，而不需作罗朗展开.

设 b 是 $f(z)$ 的单极点，则在 b 点的邻域中有

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-b} + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots \quad (a_{-1} \neq 0)$$

两边乘 $(z-b)$，得

$$(z-b)f(z) = a_{-1} + a_0(z-b) + a_1(z-b)^2 + a_2(z-b)^3 + \cdots$$

在该式的右边，用 $z=b$ 代入，则右边除 a_{-1} 外的所有项皆为零，因此

$$\mathrm{Res}f(b) = a_{-1} = \lim_{z\to b}(z-b)f(z) \tag{7.55}$$

这就是求函数在单极点的留数的基本公式.

如果 $f(z)$ 可表示为 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，只要 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在点 b 上都是解析的，而且 $\varphi(b)\neq 0$；$\psi(b)=0$，但 $\psi'(b)\neq 0$. 那么，根据式(7.55)，函数 $f(z)$ 在 b 点的留数可以用下面的方法计算：

$$\mathrm{Res}f(b) = a_{-1} = \lim_{z\to b}(z-b)f(z) = \lim_{z\to b}\frac{\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}}{z-b} = \lim_{z\to b}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(b)}{z-b}}$$

因为根据假设 $\psi(b)=0$，所以 $\psi(z)-\psi(b)=\psi(z)$. 另一方面，由于

$$\lim_{z\to b}\varphi(z) = \varphi(b), \quad \lim_{z\to b}\frac{\psi(z)-\psi(b)}{z-b} = \psi'(b) \neq 0$$

因此得到

$$\mathrm{Res}f(b) = \frac{\varphi(b)}{\psi'(b)} \tag{7.56}$$

式(7.55)可以推广到任意的 n 级极点的情况. 在这种情况下罗朗展开式是

$$f(z) = a_0 + a_1(z-b) + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-b} + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-b)^n} \tag{7.57}$$

用 $(z-b)^n$ 乘展开式的两边时，得到

$$(z-b)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-b) + \cdots + a_{-1}(z-b)^{n-1}$$

$$+ a_0 (z-b)^n + a_1 (z-b)^{n+1} + \cdots \tag{7.58}$$

把式(7.58)的两边对 z 求微商 $n-1$ 次，令 $z \to b$，则有

$$\lim_{z \to b} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}[(z-b)^n f(z)]}{\mathrm{d}z^{(n-1)}} = (n-1)! a_{-1}$$

于是求得

$$\operatorname{Res} f(b) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to b} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}[(z-b)^n f(z)]}{\mathrm{d}z^{(n-1)}} \tag{7.59}$$

这就是 $f(z)$ 的 n 级极点 b 的留数公式.

例 1　求 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的一阶极点处的留数.

解　因为一阶极点是 $z=n\pi$(n 为整数)，根据单极点的留数公式(7.55)，有

$$\operatorname{Res} f(n\pi) = \lim_{z \to n\pi} (z-n\pi) \cdot \frac{1}{\sin z} = \left. \frac{z-n\pi}{\sin z} \right|_{z \to n\pi} = (-1)^n$$

或使用式(7.56)，令 $\varphi(z)=1$，$\psi(z)=\sin z$，于是有

$$\operatorname{Res} f(n\pi) = \left. \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} \right|_{z \to n\pi} = \left. \frac{1}{(\sin z)'} \right|_{z \to n\pi} = \left. \frac{1}{\cos z} \right|_{z \to n\pi} = (-1)^n$$

例 2　求 $f(z)=\cot z$ 在 $z=n\pi$($n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)处的留数.

解　因为 $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$，令 $\varphi(z)=\cos z$，$\psi(z)=\sin z$，代入式(7.56)，得到

$$\operatorname{Res} f(n\pi) = \left. \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} \right|_{z \to n\pi} = \left. \frac{\cos z}{(\sin z)'} \right|_{z \to n\pi} = \left. \frac{\cos z}{\cos z} \right|_{z \to n\pi} = 1$$

例 3　求 $f(z)=\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z^5+4z^3}$ 各极点处的留数.

解　因为 $\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z^5+4z^3} = \dfrac{z+2\mathrm{i}}{z^3(z^2+4)} = \dfrac{z+2\mathrm{i}}{z^3(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})} = \dfrac{1}{z^3(z-2\mathrm{i})}$，说明 $z=2\mathrm{i}$ 是极点，所以该极点的留数是

$$\operatorname{Res} f(2\mathrm{i}) = [(z-2\mathrm{i}) f(z)]_{z \to 2\mathrm{i}} = (z-2\mathrm{i}) \left. \frac{1}{z^3(z-2\mathrm{i})} \right|_{z \to 2\mathrm{i}}$$

$$= \left. \frac{1}{z^3} \right|_{z \to 2\mathrm{i}} = -\frac{1}{8\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{8}$$

另外还有 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点，按照式(7.59)，该有点在 $z=0$ 处的留数为

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^{(3-1)}}{\mathrm{d}z^{(3-1)}} \left[\frac{(z-0)^3}{z^3(z-2\mathrm{i})} \right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \left(\frac{1}{z-2\mathrm{i}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{2}{(z-2\mathrm{i})^3} \right|_{z \to 0} = \frac{1}{(-2\mathrm{i})^3} = -\frac{\mathrm{i}}{8\mathrm{i}^4} = -\frac{\mathrm{i}}{8}$$

7.5.3　留数定理在定积分计算中的应用

留数定理的重要应用之一是计算某些实变函数的定积分. 其原理是把要计算

的定积分与复变函数沿闭合路径的积分联系起来，用留数定理计算后者，从而获得前者实变函数定积分的结果.

1. 无穷积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的计算.

如果$(-\infty,\infty)$上的实函数可以解析开拓到上半平面(允许有有限个极点)，则 R 充分大时，实轴区间$[-R,R]$和上半圆周曲线 C_R 构成一个围道$C:-R\to R\to(C_R)\to -R$，记它的所围的区域为 B(图 7.9)，根据留数定理[式(7.53)]，有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res} f(z) \tag{7.60}$$

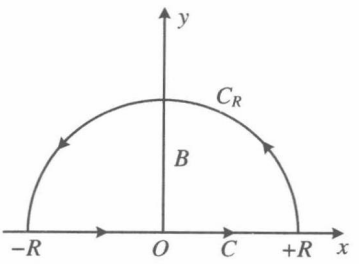


图 7.9

因为

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.61}$$

式(7.61)右端第一项，当 $R\to+\infty$时，就是所要求的积分，如果能把第二项算出来，那么问题就解决了.

如果 $f(z)$满足

$$\lim_{\substack{z\to+\infty \\ \mathrm{Re}z\geqslant 0}} z^2 f(z) = a$$

那么，R 充分大时

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_R} z^2 f(z)\cdot\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{C_R} |z^2 f(z)|\cdot\frac{1}{R^2}\mathrm{d}l$$

$$\leqslant \int_{C_R} (|a|+1)\cdot\frac{1}{R^2}\mathrm{d}l = \frac{|a|+1}{R^2}\cdot 2\pi R \to 0 \quad (R\to+\infty)$$

令 $R\to+\infty$，由式(7.60)与(7.61)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res} f(z) \tag{7.62}$$

其中 $\sum$ 是对 $f(z)$ 在上半平面上所有的极点的留数求和.

一种常用的情况是，$f(x)$是有理函数，$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $Q(x)$在实轴上无零点，且多项式 $Q(x)$至少比多项式 $P(x)$高两次时，式(7.62)成立.

例 4 计算积分$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 首先把被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的解析延拓到复平面闭区域(B)(图7.9)，这样就有一个与之对应的复变函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. 这个函数除了在点 $z=\mathrm{i}$ 有一个单极点 i 外，在上半平面到处都是解析的. 因此可以先求 $z=\mathrm{i}$ 点的留数. 最简单的

方法是用式(7.56)：

$$\operatorname{Res} f(b)=\left.\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}\right|_{z\to b}=\frac{1}{(1+z^2)'_{z\to b}}=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z\to \mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}$$

因为 $f(x)$ 在无穷远处还有一个二级零点，满足条件 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0$，再使用式(7.62)，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}=\pi$$

例5　计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}(n\geqslant 1)$.

解　如同上题的做法，把被积的实变函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ 延拓到复平面上，得到对应的复变函数 $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$. 可以看到，在复平面的上半平面上有一个 $(n+1)$ 级的极点 $z=\mathrm{i}$. 依照求留数的公式(7.59)，有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f(\mathrm{i}) &= \frac{1}{[(n+1)-1]!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^{[(n+1)-1]}[(z-\mathrm{i})^{n+1}f(z)]}{\mathrm{d}z^{[(n+1)-1]}}\\
&= \frac{1}{n!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left[(z-\mathrm{i})^{n+1}\cdot\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}\right]\\
&= \frac{1}{n!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left[\frac{(z-\mathrm{i})^{n+1}}{(z-\mathrm{i})^{n+1}(z+\mathrm{i})^{n+1}}\right]\\
&= \frac{1}{n!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z+\mathrm{i})^{-(n+1)}\\
&= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!}\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{2n+1}}\\
&= \frac{(\mathrm{i}^2)^n n!(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{(2\mathrm{i})^{2n+1}}\\
&= \frac{\mathrm{i}^{2n}\cdot(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}\cdot\mathrm{i}^{2n}\cdot 2\mathrm{i}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}\cdot 2\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

最后，根据式(7.62)，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{Res} f(\mathrm{i})=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n}\cdot 2\mathrm{i}}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi \tag{7.63}$$

应用式(7.63)，可算出 n 为任意正整数时的积分，如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{2}\quad(n=1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}=\frac{3\pi}{8}\quad(n=2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^4}=\frac{5\pi}{16}\quad(n=3)$$

…

2. 计算积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

这里设 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 是关于 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数，在 $[0,2\pi]$ 上连续.

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\quad \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}},\quad \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int_C R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

该式的右端积分中的被积函数是 z 的有理函数，记作

$$F(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$$

若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是该函数在 C 内的全部极点，则有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}\sum_C \mathrm{Res}F(z)$$

例 6 计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}(a>b\geqslant 0)$.

解 因为正弦、余弦函数是以 2π 为周期的周期函数，所以先把积分限从 π 扩展到 2π. 这样，积分变为

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则在复平面上 z 与 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 相对应的是一个以原点为圆心的单位圆 C，这样就可在复平面上对 z 沿围道 C 进行积分. 把自变量从 θ 变到 z，则有

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

于是

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{1}{2}\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left[a+b\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{bz^2+2az+b}=\frac{1}{\mathrm{i}b}\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^2+\frac{2a}{b}z+1}$$

对公式右端的积分中的被积函数的分母进行因式分解，得到

$$z^2+\frac{2a}{b}z+1=(z-z_1)(z-z_2)$$

$$=\left(z-\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\left(z-\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

代入积分式中，有

$$I = \frac{1}{ib}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\left(z - \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\left(z + \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)}$$

容易看出，$z_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ 是个一级极点，它的留数是

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_1) &= \lim_{z \to z_1}(z - z_1)f(z) = \lim_{z \to z_1}\left(z - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b}\right)\frac{1}{z^2 + \dfrac{2a}{b}z + 1} \\ &= \lim_{z \to z_1}\frac{1}{z + \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}} = \frac{1}{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} + \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \\ &= \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\end{aligned}$$

最后得到

$$I = \frac{1}{ib} \cdot 2\pi i \cdot \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

3. 计算积分 $\int_0^\infty F(x)\cos mx\mathrm{d}x$，$\int_0^\infty G(x)\sin mx\mathrm{d}x$.

要解这两个无穷积分，$F(z)$，$G(z)$ 应当满足下面两个条件：第一，在上半平面及实轴上，除了上半平面的极点外，它们是解析函数；第二，在 $\mathrm{Im}z \geqslant 0$ 的范围内，当 $z \to \infty$ 时，$F(z)$，$G(z)$ 一致地趋向零.

为了计算上述两个积分，先介绍一个重要的定理——若尔当(Jordan)辅助定理，也称若尔当引理.

若尔当引理：设 m 为正数，C_R 是以原点为中心，R 为半径，位于上半平面的半圆周(图 7.10). 当 $\lim\limits_{R \to +\infty}\max\limits_{z \in C_R}|f(z)| = 0$ 时，就有

$$\lim_{z \to \infty}\int_{C_R} F(z)\mathrm{e}^{imz}\mathrm{d}z = 0 \tag{7.64}$$

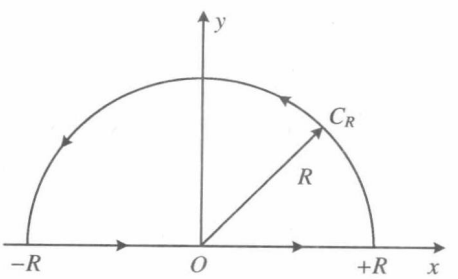


图 7.10

兹证明如下：

在 C_R 上，$z=Re^{i\theta}$（图 7.10），因而有

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz\right| &= \left|\int_{C_R}F(z)e^{imx-my}dz\right|\\ &= \left|\int_0^{\pi}F(Re^{i\theta})e^{imR\cos\theta-mR\sin\theta}Rie^{i\theta}d\theta\right|\\ &= \left|\int_0^{\pi}F(Re^{i\theta})Re^{-mR\sin\theta}\cdot(i\cdot e^{i\theta}\cdot e^{imR\cos\theta})d\theta\right|\end{aligned}$$

由于 $i,e^{i\theta},e^{imR\cos\theta}$ 各自的模分别都等于 1. 所以有

$$\left|\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz\right|\leqslant\int_0^{\pi}|F(Re^{i\theta})|e^{-mR\sin\theta}Rd\theta\leqslant\max_{z\in C_R}|F(z)|\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta$$

由假设 $\lim\limits_{R\to+\infty}\max\limits_{z\in C_R}\{|F(z)|=0$；因此只要证明：当 $R\to+\infty$ 时，积分 $\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta$ 是有界的就可以了.

首先，把积分变成

$$\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta$$

进一步，把等式右端的积分分成两段 $[0,\alpha]$ 和 $\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，于是

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta &= 2\int_0^{\alpha}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta+2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta\\ &< 2\int_0^{\alpha}e^{-mR\sin\theta}R\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}d\theta+2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\alpha}Rd\theta\\ &= \frac{2}{m\cos\alpha}\int_0^{\alpha}-e^{-mR\sin\theta}d(-mR\sin\theta)+2e^{-mR\sin\alpha}R\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\\ &= \frac{2}{m\cos\alpha}(-e^{-mR\sin\theta})\Big|_{\theta=0}^{\theta=\alpha}+2e^{-mR\sin\alpha}R\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta<\frac{2}{m\cos\alpha}(1-e^{-mR\sin\alpha})+2e^{-mR\sin\alpha}R\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

当 $R\to+\infty$ 时，不等式右端的第二项为零；而第一项则趋于一个有限值 $\frac{2}{m\cos\alpha}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. 这就证明了 $R\to+\infty$ 时，积分 $\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}Rd\theta$ 是有界的. 因此若尔当引理的结论，即式(7.64)

$$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz=0$$

成立，当 m 是负数时，若尔当引理应该是

$$\lim_{z\to\infty}\int_{C_R'}F(z)e^{imz}dz=0$$

其中 C_R' 是下半平面的半圆.

当 $F(z)$, $G(z)$ 满足无穷积分的两个条件时,对于积分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$ 可应用若尔当引理,及留数定理得

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum \mathrm{Res}[F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}] \quad (\text{上半平面各极点的留数和}) \tag{7.65}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum \mathrm{Res}[G(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}] \quad (\text{上半平面各极点留数和}) \tag{7.66}$$

因此,当 $m>0$ 时,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\sum \mathrm{Res}[F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}]\right\} \quad (\text{上半平面各极点留数和})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\sin mx\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\sum \mathrm{Res}[G(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}]\right\} \quad (\text{上半平面各极点留数和})$$

当 $F(x)$ 是偶函数, $G(x)$ 是奇函数时,有

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos mx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left\{\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res}[F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}]\right\} \quad (\text{上半平面各极点留数和}) \tag{7.67}$$

$$\int_0^{\infty} G(x)\sin mx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\sin mx\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res}[G(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}]\right\} \quad (\text{上半平面各极点留数和}) \tag{7.68}$$

例 7　计算积分 $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x\,(a\geqslant 0, \mathrm{Re}b>0)$.

解　按照用留数定理求定积分的一般方法,首先要把被积函数拓展到复平面中,即把被积函数 $F(x)=\frac{\cos ax}{x^2+b^2}$ 变成 $F(z)=\frac{\cos az}{z^2+b^2}$,它有两个极点 $z=\pm\mathrm{i}b$,其中 $+\mathrm{i}b$ 在上半平面,它的留数是

$$\mathrm{Res}F(\mathrm{i}b) = \lim_{z\to \mathrm{i}b}(z-\mathrm{i}b)F(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}b}(z-\mathrm{i}b)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z-\mathrm{i}b)(z+\mathrm{i}b)}$$

$$= \lim_{z\to \mathrm{i}b}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z+\mathrm{i}b} = \frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2\mathrm{i}b}$$

所以应用式(7.67),得到

$$I = \mathrm{Re}\left\{\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res}F(\mathrm{i}b)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2\mathrm{i}b}\right\} = \frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-ab}$$

例 8 计算积分 $J=\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x(a>0,\mathrm{Re}b>0)$.

解 把被积函数拓展到复平面时,得到复变函数 $G(z)=\frac{z}{z^2+b^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}$,它有两个单极点 $z=\pm\mathrm{i}b$,其中 $+\mathrm{i}b$ 在上半平面,它的留数为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}G(\mathrm{i}b)&=\lim_{z\to\mathrm{i}b}(z-\mathrm{i}b)G(z)=\lim_{z\to\mathrm{i}b}(z-\mathrm{i}b)\frac{z}{(z+\mathrm{i}b)(z-\mathrm{i}b)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\\&=\frac{\mathrm{i}b}{2\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{-ab}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ab}\end{aligned}$$

根据式(7.68),得到

$$J=\mathrm{Im}\{\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}G(\mathrm{i}b)\}=\pi\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ab}=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}$$

例 9 计算积分 $I_1=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x(a>0,\mathrm{Re}b>0)$.

解 被积函数 $F(z)=\frac{1}{(z^2+b^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}$ 有两个二级极点,$z=\pm\mathrm{i}b$,其中 $+\mathrm{i}b$ 在上半平面,按照计算留数的式(7.59),会有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}F(z)&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{\mathrm{d}^{2-1}[(z-\mathrm{i}b)^2F(z)]}{\mathrm{d}z^{2-1}}\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z-\mathrm{i}b)^2}{(z-\mathrm{i}b)^2(z+\mathrm{i}b)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\right]=\lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i}b)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\right]\\&=\left[\frac{\mathrm{i}a}{(z+\mathrm{i}b)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\frac{2}{(z+\mathrm{i}b)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\right]_{z=\mathrm{i}b}=\left[\frac{\mathrm{i}a}{(2\mathrm{i}b)^2}-\frac{2}{(2\mathrm{i}b)^3}\right]\mathrm{e}^{-ab}\\&=-\frac{(ab+1)\mathrm{i}}{4b^3}\cdot\mathrm{e}^{-ab}\end{aligned}$$

根据式(7.67),得到该积分

$$I_1=\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}F(z)=\pi\mathrm{i}\cdot\left[-\frac{(ab+1)\mathrm{i}}{4b^3}\right]\cdot\mathrm{e}^{-ab}=\frac{\pi}{4b^3}(ab+1)\mathrm{e}^{-ab}$$

例 10 计算积分 $J_1=\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$.

解 被积函数 $G(z)=\frac{z}{(z^2+b^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}$ 有两个二级极点:$z=\pm\mathrm{i}b$,其中 $+\mathrm{i}b$ 在上半平面,它的留数是

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}G(\mathrm{i}b)&=\frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-\mathrm{i}b)^2G(z)]\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z-\mathrm{i}b)^2\cdot z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z-\mathrm{i}b)^2(z+\mathrm{i}b)^2}\right]=\lim_{z\to\mathrm{i}b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i}b)^2}\right]\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}b}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i}b)^2}+\frac{\mathrm{i}az\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i}b)^2}-\frac{2z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{(z+\mathrm{i}b)^3}\right]\\&=\left[\frac{1}{(2\mathrm{i}b)^2}+\frac{-ab}{(2\mathrm{i}b)^2}-\frac{2\mathrm{i}b}{(2\mathrm{i}b)^3}\right]\mathrm{e}^{-ab}\end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{4b^2} + \frac{a}{4b} + \frac{1}{4b^2}\right)e^{-ab} = \frac{a}{4b}e^{-ab}$$

根据式(7.68),得到

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{(x^2 + b^2)^2}dx = \pi \cdot \mathrm{Res}G(ib) = \frac{\pi a}{4b}e^{-ab}$$

4. 多值函数的积分计算 $\int_0^{\infty} x^{a-1}Q(x)dx$.

其中 $Q(x)$是有理函数,a 为非整实数. 当 $z\to 0$,或 $z\to\infty$ 时,$z^aQ(z)\to 0$.

考虑围道积分$\int_C z^{a-1}Q(z)dz$,其中 C 是图 7.11 中的围道. 从正实轴上 $x = \varepsilon(\varepsilon > 0)$ 处出发,沿实轴正向行进到 $x = R$,再沿 C_R 走一圈,回到实轴 R 点,接着从 R 点沿实轴反方向到 $x = \varepsilon$,最后沿半径为 ε 的小圆C_ε 绕$z = 0$ 点一周后回到出发点.

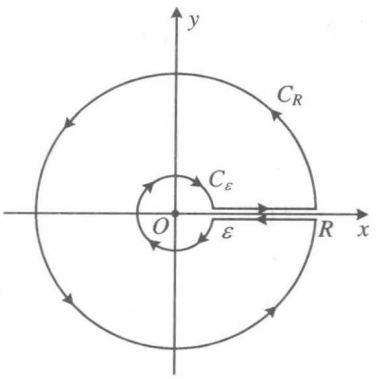


图 7.11

若沿一闭合线路绕原点走一周,那么 z 从割线$\varepsilon - R$ 的上岸移到割线的下岸,辐角增加了 2π,即割线上岸 $\arg z = 0$,割线下岸 $\arg z = 2\pi$. 被积函数 $z^{a-1}Q(z)$在围道上的积分是

$$\int_C z^{a-1}Q(z)dz$$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} x^{a-1}Q(x)dx + \int_{C_R} z^{a-1}Q(z)dz + \int_{R}^{\varepsilon} (xe^{2\pi i})^{a-1}Q(x)dx + \int_{C_\varepsilon} z^{a-1}Q(z)dz$$

$$= (1 - e^{2\pi i a})\int_{\varepsilon}^{R} x^{a-1}Q(x)dx + \int_{C_R} z^{a-1}Q(z)dz + \int_{C_\varepsilon} z^{a-1}Q(z)dz$$

上式右端的第二、第三两个积分趋向于零,因为

$$\left|\int_{C_R} z^{a-1}Q(z)dz\right| = \left|\int_{C_R} z^aQ(z)\frac{dz}{z}\right| \leqslant \max_{C_R}|z^aQ(z)|\frac{2\pi R}{R} = \max_{C_R} 2\pi|z^aQ(z)|$$

在题设中已经给出,当 $z\to\infty$(即 $R\to\infty$)时,$z^aQ(z)\to 0$,即$\int_{C_R} z^aQ(z)dz \to 0$.

同样,因为

$$\left|\int_{C_\varepsilon} z^{a-1}Q(z)dz\right| = \left|\int_{C_\varepsilon} z^aQ(z)\frac{dz}{z}\right| \leqslant \max_{C_\varepsilon}|z^aQ(z)|\frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} = \max_{C_\varepsilon} 2\pi|z^aQ(z)|$$

也是在题设中给出,当 $z\to 0$(即 $\varepsilon\to 0$)时,$z^aQ(z)\to 0$,即$\int_{C_\varepsilon} z^aQ(z)dz \to 0$. 因此

有

$$\int_C z^{a-1}Q(z)\mathrm{d}z = (1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a})\int_\varepsilon^R x^{a-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res}[z^{a-1}Q(z)] \quad (0<\arg z<2\pi)$$

令 $\varepsilon\to 0, R\to\infty$，于是得到

$$\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a}}\sum \mathrm{Res}[z^{a-1}Q(z)]$$

式中的 $1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a}$ 可化成三角函数形式：

$$1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi a}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}(-2\mathrm{i}\sin a\pi) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^a(-2\mathrm{i}\sin a\pi)$$

$$= (-1)^a(-2\mathrm{i}\sin a\pi) = (-1)^{a-1}(2\mathrm{i}\sin a\pi)$$

最后，得到

$$\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(-1)^{a-1}(2\mathrm{i}\sin a\pi)}\sum \mathrm{Res}[z^{a-1}Q(z)]$$

$$= \frac{\pi}{\sin a\pi}\sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^{a-1}}{(-1)^{a-1}}Q(z)\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sin a\pi}\sum \mathrm{Res}[(-z)^{a-1}Q(z)] \quad [-\pi<\arg(-z)<\pi] \tag{7.69}$$

例 11 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a+x}\mathrm{d}x (a>0, 0<\mathrm{Re}p<1)$.

解 对于函数 $z^{p-1}\cdot\frac{1}{a+z}$，当 $z\to 0$ 和 $z\to\infty$ 时，都趋向于 0，所以可使用式 (7.69). $z^{p-1}\cdot\frac{1}{a+z}$ 只有一个极点 $z=-a$，它的留数为

$$\mathrm{Res}[(-z)^{a-1}Q(z)] = \lim_{z\to -a}(z+a)\frac{(-z)^{p-1}}{a+z} = a^{p-1}$$

因此积分的结果为

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot a^{p-1} = \frac{\pi a^{p-1}}{\sin p\pi}$$

当 $a=1$ 时，有

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

例 12 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x (a>0, 0<p<1, a \text{ 为实数})$.

解 因为函数 $z^{p-1}\cdot\frac{1}{a-z}$ 在正实轴上有一个单极点 $z=+a$，在围道积分中应该绕过它(图 7.12)，所以积分路径是在正实轴 x 上从 $x=\varepsilon$ 出发，向右行进，绕过极点 $z=+a$，沿 l_1 继续向右到 $x=R$，再沿 C_R 转一圈，然后沿实轴 x 的反向，经 l_2 回到 $x=\varepsilon$ 点.

由于在围道内部没有奇点，因此闭合的围道积分应为零，即

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^{a-\delta} \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x + \int_{l_1} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z + \int_{a+\delta}^{R} \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x + \oint_{C_R} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z$$
$$+ \int_R^{a+\delta} \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x + \int_{l_2} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z + \int_{a-\delta}^{\varepsilon} \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x + \oint_{C_\varepsilon} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z = 0 \tag{7.70}$$

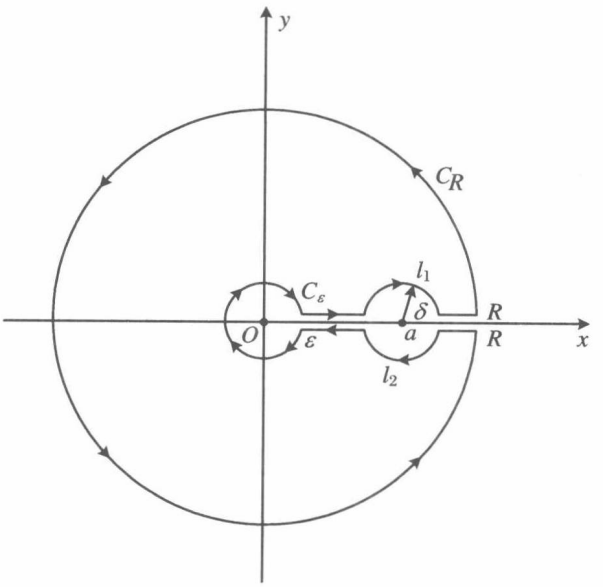


图 7.12

我们已经证明了其中的两个积分皆为零：

$$\oint_{C_R} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z = \oint_{C_\varepsilon} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z = 0 \tag{7.71}$$

其中在实轴 x 上的割线上岸的积分(辐角 $\arg z = 0$)

$$\int_\varepsilon^{a-\delta} \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{R} \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x \to \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x \quad (\text{当 } \varepsilon \to 0, \delta \to 0, R \to \infty \text{ 时})$$

是要求的积分.

而在实轴 x 上的割线下岸的积分(辐角 $\arg z = 2\pi$)

$$\int_R^{a+\delta} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z + \int_{a-\delta}^{\varepsilon} \frac{z^{p-1}}{a-z}\mathrm{d}z$$
$$\to -\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi p}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x \quad (\text{当 } \varepsilon \to 0, \delta \to 0, R \to \infty \text{ 时})$$

割线上、下岸的积分之和为

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi p}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x = (1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi p})\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}\mathrm{d}x \tag{7.72}$$

为了求得在绕极点 $z=a$ 上半圆弧 l_1 和下半圆弧 l_2 上的积分，要援引下面的引理：若 $f(z)$有单极点 $z=b$，T_R 是如图 7.13(a)所示圆弧，则有

$$z = b + re^{i\theta} \quad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$$

那么就有[图 7.13(b)]

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{T_R} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)\mathrm{Res}[f(b)]$$

因此，对图 7.13 所示的半圆周 K，有公式

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{K} f(z)dz = -i\pi\mathrm{Res}[f(b)]$$

(此引理本书不作证明，有兴趣者可看其他参考书.)

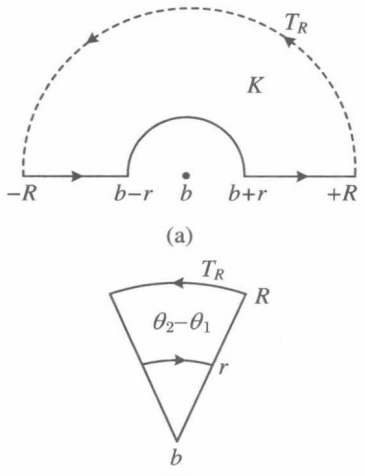


图 7.13

应用上面的引理，得到

$$\int_{l_1} \frac{z^{p-1}}{a-z}dz = -i\pi\mathrm{Res}[f(a)]$$

其中极点 $z=a$ 处的留数为

$$\mathrm{Res}f(a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{z^{p-1}}{a-z} = -a^{p-1}$$

于是

$$\int_{l_1} \frac{z^{p-1}}{a-z}dz = -i\pi\mathrm{Res}[f(a)] = i\pi a^{p-1}$$

而在下半圆周上，辐角已转了 2π，所以积分应为

$$\int_{l_2} \frac{z^{p-1}}{a-z}dz = i\pi a^{p-1}e^{2i\pi p}$$

上述两个积分之和

$$\int_{l_1} \frac{z^{p-1}}{a-z}dz + \int_{l_2} \frac{z^{p-1}}{a-z}dz = i\pi a^{p-1}(1+e^{2i\pi p}) \tag{7.73}$$

把式(7.71)、(7.12)及(7.73)代入式(7.70)中，有

$$(1-e^{2i\pi p})\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}dx + i\pi a^{p-1}(1+e^{2i\pi p}) = 0$$

于是得到

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}dx = -\frac{i\pi a^{p-1}(1+e^{2i\pi p})}{(1-e^{2i\pi p})}$$

在该式右端的分式中，分母分子同时乘上 $e^{-i\pi p}$，最后得到

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{a-x}dx = -\frac{i\pi a^{p-1}(e^{-i\pi p}+e^{i\pi p})}{(e^{-i\pi p}-e^{i\pi p})} = \frac{-i\pi a^{p-1}\cdot 2\cos p\pi}{-2i\sin p\pi} = \pi a^{p-1}\cot p\pi$$

当 $a=1$ 时，有

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x}\mathrm{d}x = \pi\cot p\pi$$

5. 求证：$\int_0^{\infty} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = 0$.

证明　令 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-z}}{z}$，它在全平面解析（$z=0$ 为可去奇点）. 取图 7.14 的积分回路，由留数定理有

$$\int_0^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_R^0 \frac{\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{y}\mathrm{d}y = 0$$

或

$$\int_0^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_0^R \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y = 0$$

或

$$\int_0^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-2\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

即

$$2\int_0^R \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-z}}{z}\mathrm{d}z = 0$$

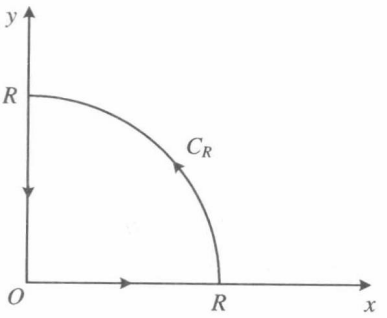


图 7.14

由若尔当引理知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = 0$$

若令 $\eta = \mathrm{i}z$，则 $\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\mathrm{d}z = \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta$，

当 $R\to+\infty$ 时，$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}{\eta}\mathrm{d}\eta = 0$，即

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-z}}{z}\mathrm{d}z = 0$$

因此，当 $R\to+\infty$ 时，得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = 0$$

6. 几个著名的积分计算.

(1) 狄利克雷(Dirichlet) 积分 $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

把积分改写成

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x\right)$$

在该式的右边第二个积分中，若令 $x=-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，当 $x=\infty$ 时，$t=-\infty$，那么该积分就成为

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\mathrm{d}t\right)=\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x\right)$$

把被积函数$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}$延拓到复平面时，被积函数变成$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$，它有一个单极点 $z=0$，出现在实轴上. 在做围道时要绕过这个极点，如图 7.15 所示，在实轴 x 的下方绕过零点.

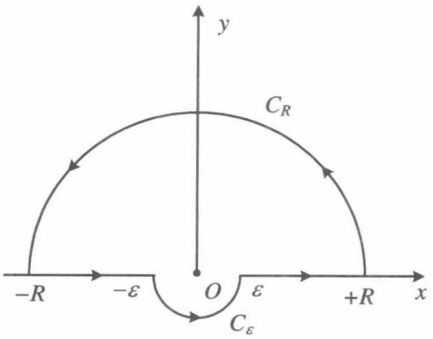


图 7.15

积分路径是从 $-R$ 出发，行进到 $-\varepsilon$，沿 C_ε 到达 ε，在从 ε 到 R，最后沿着 C_R 半圆弧回到 $-R$. 在这条封闭围道内有一个极点 $z=0$，按照留数定理有

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(0)\qquad(7.74)$$

其中留数是

$$\mathrm{Res}f(0)=\lim_{z\to0}(z-0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}=\lim_{z\to0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=1$$

在前面已证明过半圆弧 C_R 上的积分是

$$\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0\qquad(\mathrm{I})$$

在半圆弧 C_ε 上的积分，由于从 $-\varepsilon$ 到 ε，恰好是辐角 θ 从 π 到 2π，所以积分为

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\varepsilon(\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta)}\mathrm{d}\theta$$

其中 ε 是 $z=0$ 处的半圆的半径，当 $\varepsilon\to0$ 时，$\mathrm{e}^{-\varepsilon(\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta)}\to1$，因此

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{i}\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\varepsilon(\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta)}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}(2\pi-\pi)=\mathrm{i}\pi\qquad(\mathrm{II})$$

式(7.74)中的第一、第三两个积分，当 $\varepsilon\to0$，$R\to\infty$ 时，有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\R\to\infty}}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x\right)=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\qquad(\mathrm{III})$$

把(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)诸式代入式(7.74)，得到

$$2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\pi=2\pi\mathrm{i}\quad\text{或}\quad 2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}$$

最后得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

(2) 菲涅尔(Fresnel)积分 $I_1=\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$, $I_2=\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$.

因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}=\cos x^2+\mathrm{i}\sin x^2$,两边同时进行积分,就有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=I_2+\mathrm{i}I_1$$

考虑围道积分 $\oint_C\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z$,积分路线选用图 7.16 所示的走法,从 O 点出发,行进到 R 处,经圆弧 C_R,再折回到出发点 O. 由于围道内没有奇点,所以按照留数定理有

$$\oint_C\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=0$$

也就是说

$$\int_0^R\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z+\int_R^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=0\tag{7.75}$$

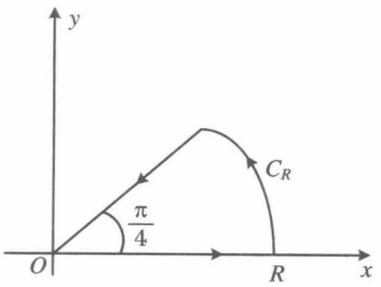


图 7.16

式(7.75)中的第一个积分,当 $R\to\infty$ 时有

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}(\cos x^2+\mathrm{i}\sin x^2)\mathrm{d}x=I_2+\mathrm{i}I_1\qquad(\mathrm{I})$$

式(7.75)中的第三个积分是沿辐角 $\frac{\pi}{4}$ 线上的积分,有 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}R$,以及

$$z^2=R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=R^2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{i}R^2$$

当 $R\to\infty$ 时,有

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}R^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}R=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-R^2}\mathrm{d}R$$

该式右端的积分是欧拉-泊松积分,在第 2 章中已经做过了,它是

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-R^2}\mathrm{d}R=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

因此

$$\int_R^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z\to-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) \qquad (\text{Ⅱ})$$

对于第二个积分 $\int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z$，它是圆弧 C_R 上的积分，因为 $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$，所以

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}| = \mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta} \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$$

当 $R \to \infty$ 时，有

$$\left|\int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}R\mathrm{d}\theta = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{4R}(1-\mathrm{e}^{-R^2}) \to 0 \qquad (\text{Ⅲ})$$

把上面的(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)三个式子代入式(7.75)中，便得

$$\int_0^{\infty}(\cos x^2 + \mathrm{i}\sin x^2)\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) = 0$$

即

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

令公式两边的实部和虚部分别相等，得到

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad \int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

(3) 泊松(Poisson)积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x\,(a>0)$.

因为在半径为 R 的半圆 C_R 上，无论在上半平面还是下半平面，e^{-az^2} 都不一致趋于零. 当 z 沿实轴 $z = x$ 移动至 ∞ 时，$\mathrm{e}^{-az^2} \to 0$，而当 z 沿虚轴 $z = \mathrm{i}y$ 趋向 ∞ 时，$\mathrm{e}^{-az^2} = \mathrm{e}^{ay^2} \to \infty$. 因此，积分围道不能选半圆或圆形路径，而可选取围道如图 7.17 所示的矩形路线.

首先把要求的积分作如下的变换：

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅰ})$$

把积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x$ 变成 $-\infty$ 到 0 之间的积分，即令 $x \to -x$，于是有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x = \int_0^{-\infty}\mathrm{e}^{-a(-x)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}(-x)$$

$$= -\int_0^{-\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x$$

把它代入式(Ⅰ)，得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{ib}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_C e^{-az^2}dz$$

其中 $z = x + \dfrac{ib}{2a}$.

按照柯西定理，在图 7.17 的围道内，被积函数是解析的，所以它沿围道的积分应为 0.

$$\oint_C e^{-az^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx + \int_{l_1} e^{-az^2}dz + \int_{l_2} e^{-az^2}dz + \int_{l_3} e^{-az^2}dz = 0 \qquad (\text{Ⅱ})$$

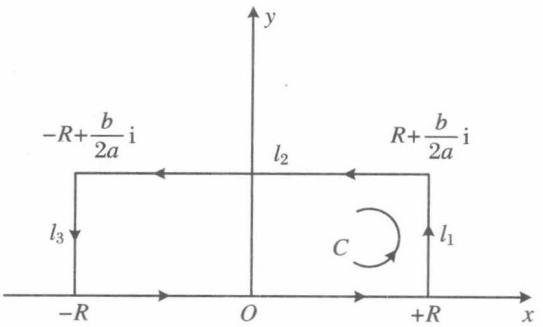


图 7.17

在 l_1 上，$z = R + iy$，$0 \leqslant y \leqslant \dfrac{b}{2a}$，所以有

$$\left|\int_{l_1} e^{-az^2}dz\right| \leqslant \int_0^{\frac{b}{2a}} \left|e^{-a(R+iy)^2}\right| dy \leqslant e^{-aR^2}\int_0^{\frac{b}{2a}} e^{ay^2}dy$$

$$\leqslant e^{-aR^2}e^{a\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\frac{b}{2a} \to 0 \quad (\text{当 } R \to \infty)$$

同理，在 l_3 上，也有

$$\int_{l_3} e^{-az^2}dz \to 0$$

在围道的 l_2 部分，因为 $z = x + \dfrac{ib}{2a}$，$-R \leqslant x \leqslant R$，因此有

$$\int_{l_2} e^{-az^2}dz = \int_R^{-R} e^{-a\left(x+\frac{ib}{2a}\right)^2}dx = -\int_{-R}^{R} e^{-a\left(x^2+\frac{ibx}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}dx$$

$$= -e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}e^{-ibx}dx = -e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

把 $\int_{l_1}$，$\int_{l_2}$，$\int_{l_3}$ 都代入式(Ⅱ)，那么当 $R \to \infty$ 时，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx - e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = 0$$

其中第一个积分为欧拉-泊松积分，已知

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

最后得到

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

(4) 狄拉克(Dirac)函数(δ-函数)和赫维赛德(Heaviside)函数 $H(t)$.

δ-函数是一个特殊的广义函数，是英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac)在陈述量子力学中某些数量关系时引入的一个函数. 物理学中一切点量和瞬时量，如点质量、点电荷、点偶极子、瞬时打击力、瞬时源等用它来描述，不仅方便，物理含义清楚，而且可当作普通函数来运算，如微分、积分等.

δ-函数是这样一种函数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \tag{7.76}$$

如图 7.18 所示.

它的积分值为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{7.77}$$

如果把 δ-函数看成一种分布函数(如图 7.19 所示)，例如考虑

$$P_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$$

当 $x=0, \sigma \to 0$ 时，$\lim\limits_{\sigma \to 0} P_\sigma(0) = \infty$，所以它的极限分布具有 δ-函数的性质：

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} = \delta(x)$$

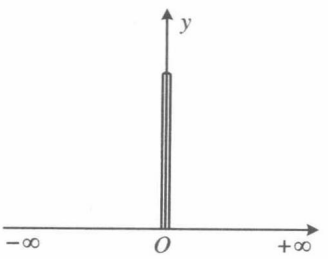


图 7.18

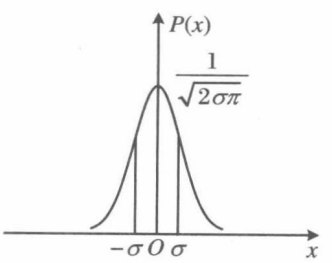


图 7.19

考虑积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}dx$，令 $\frac{x}{\sqrt{2\sigma}}=u$，则 $dx=\sqrt{2\sigma}du$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-u^2}\sqrt{2\sigma}du=2\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

其中 $\int_0^{\infty}e^{-u^2}du$ 是在前面已经推导过的欧拉-泊松积分，它等于 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

也就是说，式(7.77)是可以理解的.

δ-函数也是赫维赛德函数 H(t)的微商.因为

$$H(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}\tag{7.78}$$

赫维赛德函数又称阶跃函数，如图 7.20 所示.当 $t<0$ 时，它等于 0；当 $t=0$ 时，突然跃升至 1；当 $t>0$ 时，数值保持 1 不变.可以看出，它的微商为

$$H'(t)=\frac{dH(t)}{dt}=\begin{cases}0 & (t\neq 0)\\ \infty & (t=0)\end{cases}\tag{7.79}$$

它与 δ-函数式(7.76)相似.

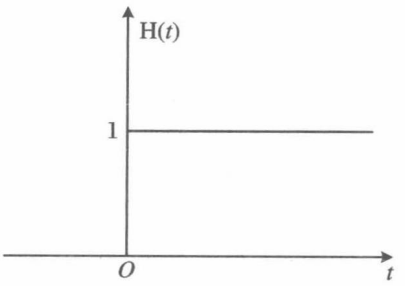


图 7.20

现在来讨论 H(t)函数，并证明它可用下面的路积分表示：

$$H(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\smile}\frac{e^{itz}}{z}dz\tag{7.80}$$

这里，t 是被积函数中的参变量.积分路线是全部实轴，但在原点 $z=0$ 处，要绕道经过以 O 为中心，以 ε 为半径，且位于下半平面中的半圆周 C_ε.在实轴的上半平面做一个以 O 为圆心，R 为半径的半圆周 C_R(图 7.21).

当 $t>0$ 时，在实轴与半圆周 C_R 及 C_ε 构成的围道内，原点 $z=0$ 是唯一的极点.因此，它的留数等于 1.当 $R\to\infty$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\smile}\frac{e^{itz}}{z}dz=1\tag{7.81}$$

当 $t<0$ 时，在实轴上，从 $-R$ 到 $+R$ 在原点附近要和前面一样绕道，但它却和位于下半平面的以原点为中心，R 为半径的半圆周 C_R' 构成围道(图 7.22).在这个围道内，$\frac{1}{z}$ 没有奇点，故其留数为 0.当 $R\to\infty$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\smile}\frac{e^{itz}}{z}dz=0\tag{7.82}$$

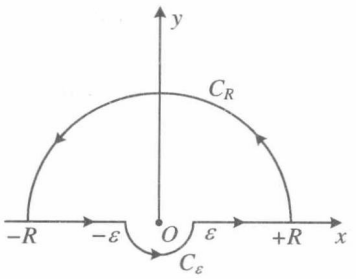


图 7.21

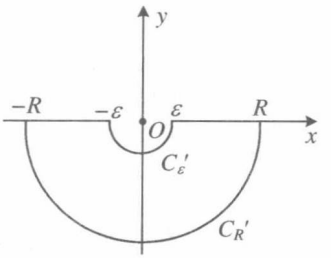


图 7.22

把式(7.81)和式(7.82)合在一起,就得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\smile}\frac{e^{itz}}{z}dz=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

也即证明了式(7.78):

$$H(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

(5) $\Gamma(z)$函数的路积分

$\Gamma(z)$函数可用一个路积分来表示.若 z 位于虚轴的右边,则

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\quad(\mathrm{Re}z>0)\tag{7.83}$$

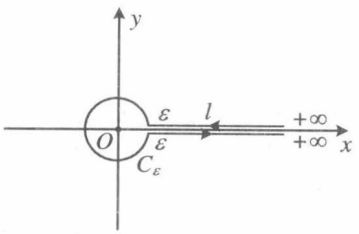


图 7.23

把被积函数

$$e^{-t}t^{z-1}=e^{-t}e^{(z-1)\ln t}=e^{-t+(z-1)\ln t}\tag{7.84}$$

看成是复变数 t 的函数.这个函数以 $t=0$ 为支点.

在 t 平面上沿正实轴作割线.积分线路是从 $+\infty$ 来,向左行进,绕过原点 O,然后向右回到 $+\infty$ 去(图 7.23).它的路积分为

$$\int_l e^{-t}t^{z-1}dt\tag{7.85}$$

积分路线 l 分为三个部分:割线上岸的线段$(+\infty,\varepsilon)$,以 $t=0$ 为中心,以 ε 为半径的圆周 C_ε 和割线下岸的线段$(\varepsilon,+\infty)$.在割线上岸,被积函数(7.84)中的 $\ln t$ 取实数值,当 l 从上岸绕到下岸时,$\ln t$ 得到改变量是 $2\pi i$,因此下岸的被积函数是

$$e^{(z-1)2\pi i}e^{-t+(z-1)\ln t}\tag{7.86}$$

其中 $\ln t$ 仍取实数值.这样式(7.85)就可表述为

$$\int_l e^{-t}t^{z-1}dt=\int_\infty^\varepsilon e^{-t}t^{z-1}dt+\int_{C_\varepsilon}e^{-t}t^{z-1}dt+\int_\varepsilon^\infty e^{(z-1)2\pi i}e^{-t+(z-1)\ln t}dt$$

$$= -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt + \int_{C_\varepsilon} e^{-t}t^{z-1}dt + e^{(z-1)2\pi i}\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \tag{7.87}$$

可以证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，C_ε 上的积分为 0. 因为在 C_ε 圆周上，$|e^{-t}|$ 是有界的，而且与 z 无关. 对 t^{z-1} 可作如下估算：

$$|t^{z-1}| = e^{(x-1)\ln|t| - y\arg t} = \varepsilon^{x-1}e^{-y\arg t} \quad (\text{当取 } t=\varepsilon \text{ 时})$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} |t|^{x-1}dt = 0$，因此

$$\int_{C_\varepsilon} e^{-t}t^{z-1}dt = 0$$

于是式(7.87)变为

$$\int_{l} e^{-t}t^{z-1}dt = [e^{(z-1)2\pi i} - 1]\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\int_{l} e^{-t}t^{z-1}dt = (e^{2i\pi z} - 1)\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = (e^{2i\pi z} - 1)\Gamma(z) \tag{7.88}$$

或写成

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}\int_{l} e^{-t}t^{z-1}dt \tag{7.89}$$

这就是 Γ 函数的路积分表示式.

虽然 Γ 函数的路积分公式(7.88)是假设 z 位于虚轴的右边推导出来的，但可以把它解析延拓到整个 z 平面.

当 z 取正整数或负整数时，式(7.89)的分母 $e^{2i\pi z} - 1 = 0$，其中 $z = 0$ 和负整数都是 $\Gamma(z)$ 的极点. 若 z 等于正整数时，则被积函数(7.84)在全部 t 平面上都是 t 的解析函数，由柯西定理知，沿 l 曲线的积分等于零，也就是说当 z 为正整数时，式(7.89)右端的分子、分母同时为零，与正整数的 z 不是 $\Gamma(z)$ 的极点不矛盾.

在式(7.88)中，用 $1-z$ 代替 z，则有

$$\int_{l} e^{-t}t^{-z}dt = (e^{-2i\pi z} - 1)\Gamma(1-z) \tag{7.90}$$

令 $t = e^{\pi i}\tau = -\tau$，则

$$\int_{l} e^{-t}t^{-z}dt = -\int_{l'} e^{\tau}(e^{\pi i}\tau)^{-z}d\tau$$

$$= -e^{-z\pi i}\int_{l'} e^{\tau}\tau^{-z}d\tau \tag{7.91}$$

它的积分线路如图 7.24 所示. τ 平面是由 t 平面绕原点旋转 $-\pi$ 角度得到的. t 平面上沿正实轴的割线变成 τ 平面上沿负实轴的割线，并且上岸变成下岸，下岸变成上岸. 在 τ 平面上割线的下岸应该有 $\arg(e^{\pi i}\tau) = 0$，即 $\arg\tau = -\pi$.

将式(7.91)代入式(7.90)，得

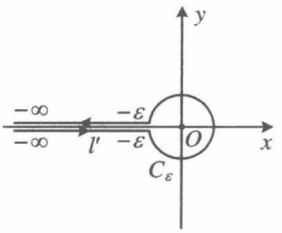


图 7.24

$$-e^{-i\pi z}\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-z}d\tau=(e^{-2i\pi z}-1)\Gamma(1-z)$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-z}d\tau&=-\frac{(e^{-2i\pi z}-1)}{e^{-i\pi z}}\Gamma(1-z)\\&=(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})\Gamma(1-z)\\&=2i\sin\pi z\Gamma(1-z)\end{aligned}\tag{7.92}$$

根据式(2.11):$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$,可得 $\sin\pi z\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\Gamma(z)}$,把它代入式(7.92),得到

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}e^{\tau}\tau^{-z}d\tau\tag{7.93}$$

这就是 $\Gamma(z)^{-1}$的路积分公式表达式.

第 8 章　特殊函数的积分法

8.1　特殊函数的积分法

8.1.1　特殊函数

在解数学物理方程中的偏微分方程时，用分离变量法得到了常微分方程. 这些常微分方程(多为二阶常微分方程)常常是一些特殊方程，如贝塞尔方程、勒让德方程、超几何方程、马蒂厄方程，等等. 解这些特殊方程，引出了一系列特殊函数，如贝塞尔函数、勒让德函数，等等.

特殊函数虽然有别于初等函数，但它的积分方法却并没有特殊之处，在初等函数中应用的一些积分方法，如分项积分法、分部积分法、换元积分法等都适用于特殊函数的积分. 不过在特殊函数的积分中，各特殊函数之间的变换与替代关系的复杂性却是非同寻常的. 如果特殊函数之间的变换与替代关系弄得很清楚，那么对特殊函数的积分就不会有太大困难了.

特殊函数的种类繁多，本章不可能将所有的特殊函数之积分法统统讲述，只能把几个最常用的特殊函数的积分方法以举例的形式叙述出来. 本章将用尽可能详细的推导和演绎过程把方法和技巧传递给读者.

贝塞尔函数是特殊函数中应用最广泛的一种函数，遍及物理学、力学及工程技术科学等各个领域，所以本章将着力讲授. 勒让德函数也应用很广，也会在本章中着墨，至于其他特殊函数那只能蜻蜓点水了.

8.1.2　积分中常用的一些公式

1. Γ 函数.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \tag{8.1}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{8.2}$$

$$\Gamma(n+1)=n!\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{8.3}$$

$$\Gamma(1)=0!=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\tag{8.4}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin z\pi}\tag{8.5}$$

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\frac{z\pi}{\sin z\pi}\tag{8.6}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos z\pi}\tag{8.7}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{8.8}$$

2. 双阶乘.

$$(2n)!!=2^n\cdot n!$$

$$(2n-1)!!=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

$$(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}$$

定义：$(-1)!!=0!!=1$

3. B 函数.

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\tag{8.9}$$

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\tag{8.10}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)+\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)\tag{8.11}$$

4. 超几何函数.

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n\tag{8.12}$$

超几何函数的符号${}_2F_1$ 的左、右脚标常被省去，写成 F，这时应理解为 $F={}_2F_1$. 但括弧中的逗号、分号可表明字符 α,β,γ,z 各自的位置及次序.

其中

$$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1)$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}\tag{8.13}$$

$$(\lambda)_0 = 1$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = F(\beta,\alpha;\gamma;z)$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;0) = 1$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{8.14}$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right) \tag{8.15}$$

5. 几个可以用初等函数表达的超几何函数.

$$F(-\alpha,\beta;\beta;-z) = (1+z)^{\alpha} \tag{8.16}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right) = \frac{\arcsin z}{z} \tag{8.17}$$

$$F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right) = \frac{\arctan z}{z} \tag{8.18}$$

$$F(1,1;2;\mp z) = \ln(1+z) \tag{8.19}$$

$$F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};\frac{1}{2};z\right) = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{z})^{-2\alpha}+(1-\sqrt{z})^{-2\alpha}\right] \tag{8.20}$$

$$F\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha;2\alpha;z\right) = \left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{1-2\alpha} \tag{8.21}$$

$$F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};2\alpha;z\right) = (1-z)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{1-2\alpha} \tag{8.22}$$

$$F(2\alpha,\alpha+1;\alpha;z) = (1+z)(1-z)^{-2\alpha-1} \tag{8.23}$$

6. 贝塞尔函数.

第一类贝塞尔函数：

$$J_{\pm\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\pm\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm\nu} \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{(-\mathrm{i})^n}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta}\cos n\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{8.25}$$

第二类贝塞尔函数（诺伊曼函数）：

$$N_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{8.26}$$

第三类贝塞尔函数(汉克尔函数)：

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z)+\mathrm{i}N_{\nu}(z) = \frac{\mathrm{i}}{\sin\nu\pi}\left[J_{\nu}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}-J_{-\nu}(z)\right] \tag{8.27}$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z)-\mathrm{i}N_{\nu}(z) = \frac{-\mathrm{i}}{\sin\nu\pi}\left[J_{\nu}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}-J_{-\nu}(z)\right] \tag{8.28}$$

第一类虚自变数贝塞尔函数：

$$I_{\pm\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\pm\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm\nu}\quad(|z|<\infty,|\arg z|<\pi)\tag{8.29}$$

$$I_{\nu}(z)=\begin{cases}e^{-i\frac{\nu\pi}{2}}J_{\nu}(ze^{i\frac{\pi}{2}}) & \left(-\pi<\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\ e^{i\frac{3\nu\pi}{2}}J_{\nu}(ze^{-i\frac{3\pi}{2}}) & \left(\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right)\end{cases}\tag{8.30}$$

第二类虚自变数贝塞尔函数：

$$K_{\nu}(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(z)-I_{\nu}(z)]\tag{8.31}$$

或

$$K_{\nu}(z)=\frac{i\pi}{2}e^{i\frac{\nu\pi}{2}}H_{\nu}^{(1)}(ze^{i\frac{\pi}{2}})=-\frac{i\pi}{2}e^{-i\frac{\nu\pi}{2}}H_{\nu}^{(2)}(ze^{-i\frac{\pi}{2}})\tag{8.32}$$

7. 勒让德函数.

第一类勒让德函数：

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\\&=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^nF\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{1}{2}-n;x^{-2}\right)\end{aligned}\tag{8.33}$$

其中$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$($n$ 为偶数)，$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$($n$ 为奇数).

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\quad(\text{罗德里格斯公式})\tag{8.34}$$

第一类勒让德函数的递推公式：

$$\begin{aligned}&(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\\&P_{n+1}'-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)\end{aligned}\tag{8.35}$$

第二类勒让德函数：

$$Q_n(x)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{-n-1}F\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+2}{2};n+\frac{3}{2};x^{-2}\right)\tag{8.36}$$

第一类连带勒让德函数［费瑞尔(Ferrer)定义］：

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\quad(l\geqslant m\geqslant 0,-1\leqslant x\leqslant 1)\tag{8.37}$$

第二类连带勒让德函数［费瑞尔定义］：

$$Q_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_l(x)\tag{8.38}$$

8.2　含有贝塞尔函数的积分

8.2.1　含有第一类贝塞尔函数的积分

例 1　计算积分 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x$.

解　零阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_0(bx)$ 的级数表示为

$$\mathrm{J}_0(bx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k+1)} \left(\frac{bx}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{bx}{2}\right)^{2k}$$

把它代入积分式中，并交换求和号与积分号的次序，得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{bx}{2}\right)^{2k} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} x^{2k} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{a^{2k+1}} \\
&= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \\
&= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \quad \left[\left(\frac{b}{a}\right) < 1\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{3!!}{4!!}\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \cdots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{a} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

（注意，其间已定义：$(-1)!! = 0!! = 1$.）

积分结果为

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{8.39}$$

例 2　汉克尔(Hankel)积分公式的证明.

汉克尔积分公式

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{a^{\mu+\nu}\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu F\left(\frac{\mu+\nu}{2},\frac{\mu+\nu+1}{2};\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$(\mathrm{Re}\,a>0,\ |a|>|b|)$

证明 把 $J_\nu(bt)=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{bt}{2}\right)^{2k+\nu}$ 代入积分 $\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt$ 中，交换求和号与积分号的次序，得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt &= \int_0^\infty e^{-at}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{bt}{2}\right)^{2k+\nu}t^{\mu-1}dt\\ &= \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu}\int_0^\infty e^{-at}t^{2k+\nu+\mu-1}dt\\ &= \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu}\frac{\Gamma(2k+\nu+\mu)}{a^{2k+\nu+\mu}}\\ &= \frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{2^{2k}k!}\frac{\Gamma(2k+\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\end{aligned}$$

其中，右式中的 $\Gamma(2k+\nu+\mu)$ 可用式(8.4)推演，得到

$$\begin{aligned}\Gamma(2k+\nu+\mu) &= \frac{2^{2k+\nu+\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}+k\right)\\ &= \frac{2^{2k+\nu+\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\cdot\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)_k\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k\\ &= 2^{2k}\Gamma(\nu+\mu)\cdot\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)_k\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k\end{aligned}$$

及

$$\Gamma(\nu+1+k)=\Gamma(\nu+1)\cdot(\nu+1)_k$$

将它们代入，于是得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt\\ &= \frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{2^{2k}k!}\frac{2^{2k}\Gamma(\nu+\mu)\cdot\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)_k\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k}{\Gamma(\nu+1)\cdot(\nu+1)_k}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\\ &= \frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)_k\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k}{(\nu+1)_k}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\\ &= \frac{1}{a^{\nu+\mu}}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\frac{\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)_k\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k}{(\nu+1)_k}\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)^k\end{aligned}$$

右端的求和符号下的式子用超几何函数符号表示，则有

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt = \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{a^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\right)\tag{8.40}$$

这就是汉克尔积分公式，右式中的 $F(\alpha,\beta;\lambda;z)$ 为超几何函数.

利用超几何函数的变换公式(8.15)：

$$F(\alpha,\beta;\lambda;z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)$$

有

$$F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\right)=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{\nu+\mu}{2}}\cdot F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

那么，汉克尔积分又可写成

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt=(a^2+b^2)^{-\frac{\nu+\mu}{2}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1)}\cdot F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\tag{8.41}$$

例 3　计算积分 $\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)dt$.

解　在汉克尔公式

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt=\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{a^{\nu+\mu}\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

中，令 $\mu=1$，则

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)dt&=\frac{\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu+2}{2};\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\right)\\&=\frac{1}{a^{\nu+1}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu+1}{2}+\frac{1}{2};\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\right)\end{aligned}$$

利用式(8.22)：$F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};2\alpha;z\right)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{1-2\alpha}$，有

$$\begin{aligned}F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu+1}{2}+\frac{1}{2};\nu+1;-\frac{b^2}{a^2}\right)&=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}{2}\right)^{1-(\nu+1)}\\&=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{2a}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)^\nu\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)dt&=\frac{1}{a^{\nu+1}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{2a}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)^\nu\\&=\frac{b^\nu}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{(a+\sqrt{a^2+b^2})^\nu}\\&=\frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^\nu}{b^\nu\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

或

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_{\nu}(bt)\,dt = \frac{b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad [\mathrm{Re}(a+ib)\geqslant 0] \tag{8.42}$$

当 $\nu=0$ 时，有

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

当 $a=0$ 时，有

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(bt)\,dt = \frac{1}{b}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(bt)\,dt = \frac{1}{b}$$

当 $b=1$ 时，有

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(t)\,dt = \int_0^{\infty} J_0(t)\,dt = 1$$

上面例 3 的积分结果是用汉克尔积分公式推演得到的，这是一种简便的方法. 但任何一个积分，都不会只有一种方法. 下面我们要用留数定理来做例 3 的积分.

把贝塞尔函数 $J_{\nu}(bt)$ 用它的积分形式来表达[式(8.25)，式中 $\nu=n$]，则

$$J_n(bt) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ibt\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta$$

把它代入例 3 的积分式中，得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-at} J_{\nu}(bt)\,dt &= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-at}\,dt\int_0^{\pi} e^{ib\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta \quad (\nu = n)\\
&= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\,d\theta\int_0^{\infty} e^{-at}e^{ibt\cos\theta}\,dt\\
&= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\,d\theta\int_0^{\infty} e^{-(a-ib\cos\theta)t}\,dt\\
&= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\,d\theta\,\frac{1}{-(a-ib\cos\theta)}\left[e^{-(a-ib\cos\theta)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}\\
&= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{a-ib\cos\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

用留数定理计算等式右边的积分，有

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{a-ib\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{a-ib\cos\theta}\,d\theta$$

按照留数定理求积分的一般方法，先要把被积函数拓展到复平面中，令 $z=e^{i\theta}$，则在复平面上，与 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 相对应的是一个以原点为圆心的单位圆 C. 这样我们就可以在复平面上沿围道 C 对 z 进行积分.

把自变量从 θ 变到 z，则有

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

及

$$dz = ie^{i\theta}d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$$

在复平面上有

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}, \quad i\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2}$$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = z^n$$

于是

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{a - ib\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{a - ib\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\oint_C \frac{z^n dz}{\left[a - \frac{ib}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]iz}$$

$$= \oint_C \frac{z^n dz}{2iaz + bz^2 + b} = \frac{1}{b}\oint_C \frac{z^n dz}{z^2 + 2\frac{ia}{b} + 1}$$

$$= \frac{1}{b}\oint_C \frac{z^n dz}{\left(z - i\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)\left(z + i\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b}\right)}$$

其中

$$z_1 = i\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}, \quad z_2 = -i\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b}$$

容易看出，$z_1 = i\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}$ 是单位圆内唯一的一个极点，它的留数是

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \lim_{z \to z_1}(z - z_1)\frac{z^n}{z^2 + 2\frac{ia}{b} + 1} = \lim_{z \to z_1}(z - z_1)\frac{z^n}{(z - z_1)(z + z_2)}$$

$$= \frac{\left(i\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)^n}{i\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b} + i\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b}} = \frac{i^n\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)^n}{2i\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}}$$

$$= \frac{bi^n}{2i\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)^n$$

根据柯西定理，得到

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{a - ib\cos\theta}d\theta = \frac{1}{b} \cdot 2\pi i \cdot \frac{bi^n}{2i\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)^n$$

$$= \frac{\pi i^n}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)^n$$

最后的积分结果是

$$\int_0^{\infty} e^{-at}J_\nu(bt)dt = \frac{(-i)^n}{\pi} \cdot \frac{\pi i^n}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)^n \quad (n = \nu)$$

$$= \frac{b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

8.2.2 含有第二类贝塞尔函数(诺伊曼函数)的积分

例 4 计算积分 $\int_0^{\infty} e^{-at} N_{\nu}(bt)\, t^{\mu-1}\,dt$.

解 把 $N_{\nu}(bt) = \cot \nu\pi J_{\nu}(bt) - \csc \nu\pi J_{-\nu}(bt)$[式(8.26)]代入积分式中,有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} e^{-at} N_{\nu}(bt)\, t^{\mu-1}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-at}\left[\cot \nu\pi J_{\nu}(bt) - \csc \nu\pi J_{-\nu}(bt)\right] \cdot t^{\mu-1}\,dt \\
&= \cot \nu\pi \int_0^{\infty} e^{-at} J_{\nu}(bt)\, t^{\mu-1}\,dt - \csc \nu\pi \int_0^{\infty} e^{-at} J_{-\nu}(bt)\, t^{\mu-1}\,dt \qquad (A)
\end{aligned}$$

该式右边第一个积分,已经在前面求得[式(8.41)]:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-at} J_{\nu}(bt)\, t^{\mu-1}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)^{\nu+\mu}}} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1)} \\
&\quad \cdot F\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \qquad (B)
\end{aligned}$$

下面求右边的第二个积分:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} e^{-at} J_{-\nu}(bt)\, t^{\mu-1}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-at} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{bt}{2}\right)^{2k-\nu} t^{\mu-1}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k-\nu} \int_0^{\infty} e^{-at} t^{2k+\mu-\nu-1}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{\Gamma(2k+\mu-\nu)}{a^{2k+\mu-\nu}} \\
&= \frac{1}{a^{\mu-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(2k+\mu-\nu)}{2^{2k}\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \\
&= \frac{1}{a^{\mu-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\frac{2^{2k+\mu-\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k+\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)}{2^{2k}\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \\
&= \frac{1}{a^{\mu-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2^{\mu-\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)_k \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)_k}{\Gamma(1-\nu)(1-\nu)_k} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \\
&= \frac{1}{a^{\mu-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2^{\mu-\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu-\nu-1}}\Gamma(\mu-\nu) \cdot \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)_k \left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)_k}{\Gamma(1-\nu)(1-\nu)_k} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^{\mu-\nu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)_k\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)_k}{(1-\nu)_k}\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{a^{\mu-\nu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\mathrm{F}\left(\frac{\mu-\nu}{2},\frac{\mu-\nu+1}{2};1-\nu;-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

利用式(8.15)：$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)$，得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{J}_{-\nu}(bt)t^{\mu-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a^{\mu-\nu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\mathrm{F}\left(\frac{\mu-\nu}{2},\frac{1-\mu-\nu}{2};1-\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)^{\mu-\nu}}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\mathrm{F}\left(\frac{\mu-\nu}{2},\frac{1-\mu-\nu}{2};1-\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)\text{(C)}$$

[式(C)相当于将式(B)中的 ν 换成 $-\nu$.]

将式(B)和式(C)代入式(A)，最后得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{N}_{\nu}(bt)t^{\mu-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\cot\nu\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)^{\mu+\nu}}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(1+\nu)}\mathrm{F}\left(\frac{\mu+\nu}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};1+\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$-\frac{\csc\nu\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)^{\mu-\nu}}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\mathrm{F}\left(\frac{\mu-\nu}{2},\frac{1-\nu-\mu}{2};1-\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

(8.43)

例 5　计算积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{N}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t$.

解　在式(8.43)中，令 $\mu=1$，得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{N}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\cot\nu\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)^{1+\nu}}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu)}\mathrm{F}\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2};1+\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$-\frac{\csc\nu\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)^{1-\nu}}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\mathrm{F}\left(\frac{1-\nu}{2},-\frac{\nu}{2};1-\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

使用式(8.21)，上式右边两个超几何函数可化为

$$\mathrm{F}\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2};1+\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{-\nu}$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{1-\nu}{2},-\frac{\nu}{2};1-\nu;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\nu}$$

把它们代入后，得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{N}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t=\frac{\cot\nu\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)^{\nu+1}}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{-\nu}$$

$$-\frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)^{1-\nu}}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\nu}$$

经整理后,最后得到

$$\int_0^{\infty} e^{-at}N_{\nu}(bt)dt=\frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\left[b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\cdot\cos \nu\pi-b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\right] \tag{8.44}$$

当 $a=0$ 时,有

$$\int_0^{\infty} N_{\nu}(bt)dt=-\frac{1}{b}\tan\frac{\nu\pi}{2}$$

8.2.3 含虚自变量的贝塞尔函数的积分

例 6 求积分 $\int_0^{\infty} e^{-ax}I_{\nu}(bx)x^{\mu-1}dx$.

解 把 $I_{\nu}(bx)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k+\nu}$[式(8.29)]代入积分式中,得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} e^{-ax}I_{\nu}(bx)x^{\mu-1}dx\\
&=\int_0^{\infty} e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k+\nu}x^{\mu-1}dx\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu}\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{2k+\nu+\mu-1}dx\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu}\frac{\Gamma(2k+\nu+\mu)}{a^{2k+\nu+\mu}}\\
&=\frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{2^{2k}}\frac{\Gamma(2k+\nu+\mu)}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\\
&=\frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{2^{2k}}\frac{2^{2k+\nu+\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(k+\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\\
&=\frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{2^{2k}}\frac{2^{2k+\nu+\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+\mu-1}}\Gamma(\nu+\mu)\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)_k\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k}{\Gamma(\nu+1)(\nu+1)_k}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\\
&=\frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)_k\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k}{(\nu+1)_k}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{k}\\
&=\frac{1}{a^{\nu+\mu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1)}F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right)
\end{aligned} \tag{8.45}$$

这就是该积分的结果. 当已知常数 ν,μ,a,b 的值时,就可算出具体数值了.

当 $\mu=1$ 时,有

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} I_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{a^{\nu+1}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu+2}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right)$$

根据式(8.22),该式右端的超几何函数可用初等函数表达,则

$$F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu+2}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right) = \left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1+\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}{2}\right]^{1-(\nu+1)}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{2a}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{\nu}$$

因此得到

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} I_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{a^{\nu+1}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{2a}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{\nu}$$

$$= \frac{b^{\nu}}{\sqrt{a^2-b^2}\,(a+\sqrt{a^2-b^2})^{\nu}}$$

$$= \frac{b^{-\nu}\,(a-\sqrt{a^2-b^2})^{\nu}}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (\mathrm{Re}a > |\mathrm{Re}b|) \tag{8.46}$$

当 $\nu=0$ 时,有

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} I_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

接着,当 $a=0$ 时,有

$$\int_0^{\infty} I_0(bx)\,dx = \frac{1}{ib}$$

例 7　求积分 $\int_0^{\infty} e^{-ax} K_\nu(bx)x^{\mu-1}\,dx$.

解　把 $K_\nu(bx)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(bx)-I_\nu(bx)}{\sin\nu\pi}$[式(8.31)]代入积分式中,有

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} K_\nu(bx)x^{\mu-1}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(bx)-I_\nu(bx)}{\sin\nu\pi}x^{\mu-1}\,dx$$

再把

$$I_\nu(bx) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$I_{-\nu}(bx) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k-\nu}$$

代入,得

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} K_\nu(bx)x^{\mu-1}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k-\nu}x^{2k-\nu+\mu-1}\,dx\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu} x^{2k+\nu+\mu-1} \mathrm{d}x \Big] \\
&= \frac{\pi}{2\sin \nu\pi} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k-\nu} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} x^{2k-\nu+\mu-1} \mathrm{d}x \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} x^{2k+\nu+\mu-1} \mathrm{d}x \Big] \\
&= \frac{\pi}{2\sin \nu\pi} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{\Gamma(2k-\nu+\mu)}{a^{2k-\nu+\mu}} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{\Gamma(2k+\nu+\mu)}{a^{2k+\nu+\mu}} \Big] \\
&= \frac{\pi}{2\sin \nu\pi} \Big[\frac{1}{a^{\mu-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{2k}} \frac{\Gamma(2k-\nu+\mu)}{\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \\
&\quad - \frac{1}{a^{\mu+\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{2k}} \frac{\Gamma(2k+\nu+\mu)}{\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \Big] \\
&= \frac{\pi}{2\sin \nu\pi} \Bigg[\frac{1}{a^{\mu-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)_k \left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)_k}{(1-\nu)_k} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \\
&\quad - \frac{1}{a^{\mu+\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)_k \left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)_k}{(\nu+1)_k} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \Bigg]
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{K}_{\nu}(bx) x^{\mu-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2\sin \nu\pi} \Big[\frac{1}{a^{\mu-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \mathrm{F}\left(\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{\mu-\nu+1}{2}; 1-\nu; \frac{b^2}{a^2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{a^{\mu+\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\nu+1)} \mathrm{F}\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2}\right) \Big]
\end{aligned} \tag{8.47}
$$

经过超几何函数的变换，还可把积分结果表示为

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{K}_{\nu}(bx) x^{\mu-1} \mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{\pi}\,(2b)^{\nu}}{(a+b)^{\mu+\nu}} \frac{\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\mu+1)} \\
&\quad \cdot \mathrm{F}\left(\mu+\nu, \nu+\frac{1}{2}; \mu+\frac{1}{2}; \frac{a-b}{a+b}\right)
\end{aligned} \tag{8.48}
$$

例 8 计算积分 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{K}_{\nu}(bx) \mathrm{d}x$.

解 在式(8.47)中，令 $\mu=1$，则有

$$
\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{K}_{\nu}(bx) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sin \nu\pi} \Big[\frac{1}{a^{1-\nu}} \left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \mathrm{F}\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{1-\nu+1}{2}; 1-\nu; \frac{b^2}{a^2}\right)
$$

$$-\frac{1}{a^{1+\nu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\nu+1)}\mathrm{F}\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{1+\nu+1}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Bigg[\frac{1}{a^{1-\nu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{-\nu}\mathrm{F}\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{2-\nu}{2};1-\nu;\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$-\frac{1}{a^{1+\nu}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\mathrm{F}\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{2+\nu}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right)\Bigg]$$

应用式(8.22),有

$$\mathrm{F}\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{1-\nu}{2}+\frac{1}{2};1-\nu;\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{1-b^2/a^2}}{2}\right)^{1-(1-\nu)}}{\sqrt{1-b^2/a^2}}=\frac{(a+\sqrt{a^2-b^2})^{\nu}}{2^{\nu}a^{\nu-1}\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{1+\nu}{2}+\frac{1}{2};1+\nu;\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{1-b^2/a^2}}{2}\right)^{1-(1+\nu)}}{\sqrt{1-b^2/a^2}}=\frac{(a+\sqrt{a^2-b^2})^{-\nu}}{2^{-\nu}a^{-\nu-1}\sqrt{a^2-b^2}}$$

把这两式代入积分式,得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\frac{b^{-\nu}(a+\sqrt{a^2-b^2})^{\nu}}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{b^{\nu}(a+\sqrt{a^2-b^2})^{-\nu}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$

改写一下,得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x=\frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left[b^{-\nu}(a+\sqrt{a^2-b^2})^{\nu}-b^{\nu}(a+\sqrt{a^2-b^2})^{-\nu}\right]$$

(8.49)

8.2.4　双贝塞尔函数的积分

例 9　求积分 $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{J}_{\mu}(at)\mathrm{J}_{\nu}(bt)}{t^{\lambda}}\mathrm{d}t$.

解　假定 $a>0,b>0,a>b$.选择新的常数 α,β,γ,并定义

$$\begin{cases}2\alpha=\mu+\nu-\lambda+1\\2\beta=\nu-\mu-\lambda+1,\\\gamma=\nu+1\end{cases}\qquad\begin{cases}\lambda=\gamma-\alpha-\beta\\\mu=\alpha-\beta\\\nu=\gamma-1\end{cases}$$

在积分式中加入积分参数 e^{-ct},那么

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{J}_{\mu}(at)\mathrm{J}_{\nu}(bt)}{t^{\lambda}}\mathrm{d}t=\lim_{c\to+0}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ct}\frac{\mathrm{J}_{\mu}(at)\mathrm{J}_{\nu}(bt)}{t^{\lambda}}\mathrm{d}t$$

从而有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ct}\frac{\mathrm{J}_{\mu}(at)\mathrm{J}_{\nu}(bt)}{t^{\lambda}}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ct}\frac{\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)}{t^{\gamma-\alpha-\beta}}\mathrm{d}t$$

该式右端的 $\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)$用无穷级数表示为

$$\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+\gamma)}\left(\frac{bt}{2}\right)^{2k+\gamma-1}$$

代入积分式,得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\frac{\mathrm{J}_\mu(at)\mathrm{J}_\nu(bt)}{t^\lambda}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\frac{\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)}{t^{\gamma-\alpha-\beta}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+\gamma)}\left(\frac{bt}{2}\right)^{2k+\gamma-1}t^{\alpha+\beta-\gamma}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+\gamma)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\gamma-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)t^{2k+\alpha+\beta-1}\mathrm{d}t$$

其中右端的积分,可用汉克尔积分公式得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)t^{2k+\alpha+\beta-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(2k+2\alpha)}{c^{2k+2\alpha}\Gamma(\alpha-\beta+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha-\beta}\cdot\mathrm{F}\left(k+\alpha,k+\alpha+\frac{1}{2};\alpha-\beta;-\frac{a^2}{c^2}\right)$$

利用超几何变换公式(8.15),有

$$\mathrm{F}\left(k+\alpha,k+\alpha+\frac{1}{2};\alpha-\beta+1;-\frac{a^2}{c^2}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)^{-(\alpha+k)}\mathrm{F}\left(k+\alpha,\frac{1}{2}-k-\beta;\alpha-\beta+1;\frac{a^2}{a^2+c^2}\right)$$

因此

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)t^{2k+\alpha+\beta-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(2k+2\alpha)}{c^{2k+2\alpha}\Gamma(\alpha-\beta+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha-\beta}\left(\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)^{\alpha+k}\cdot\mathrm{F}\left(\alpha+k,\frac{1}{2}-\beta-k;\alpha-\beta+1;\frac{a^2}{a^2+c^2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(2\alpha+2k)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha-\beta}\frac{1}{(c^2+a^2)^{\alpha+k}}\cdot\mathrm{F}\left(\alpha+k,\frac{1}{2}-\beta-k;\alpha-\beta+1;\frac{a^2}{a^2+c^2}\right)$$

于是得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\frac{\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)}{t^{\gamma-\alpha-\beta}}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+\gamma)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\gamma-1}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha-\beta}\frac{1}{(c^2+a^2)^{\alpha+k}}\times\frac{\Gamma(2k+2\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\mathrm{F}\left(\alpha+k,\frac{1}{2}-\beta-k;\alpha-\beta+1;\frac{a^2}{a^2+c^2}\right)$$

当 $c\to0$ 时,有

$$\lim_{c\to0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct}\frac{\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)}{t^{\gamma-\alpha-\beta}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \frac{\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)}{t^{\gamma-\alpha-\beta}}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{2k+\alpha-\beta+\gamma-1}} \frac{b^{2k+\gamma-1}}{a^{2k+\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(2k+2\alpha)}{\Gamma(k+\gamma)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$
$$\times \mathrm{F}\left(\alpha+k, \frac{1}{2}-\beta-k; \alpha-\beta+1; 1\right)$$

利用式(8.14):$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;1) = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$,右端的超几何函数可化为

$$\mathrm{F}\left(\alpha+k, \frac{1}{2}-\beta-k; \alpha-\beta+1; 1\right) = \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta-k)\Gamma\left(\alpha+k+\frac{1}{2}\right)}$$

于是得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{J}_{\alpha-\beta}(at)\mathrm{J}_{\gamma-1}(bt)}{t^{\gamma-\alpha-\beta}} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{2k+\alpha-\beta+\gamma-1}} \frac{b^{2k+\gamma-1}}{a^{2k+\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(2\alpha+2k)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(1-\beta-k)\Gamma\left(\alpha+k+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{2k+\alpha-\beta+\gamma-1}} \frac{b^{2k+\gamma-1}}{a^{2k+\alpha+\beta}} \frac{2^{2\alpha+2k-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma\left(\alpha+k+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(1-\beta-k)\Gamma\left(\alpha+k+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\beta}} \frac{b^{\gamma-1}}{a^{\alpha+\beta}} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(1-\beta-k)}$$

$$= \frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\beta}} \frac{b^{\gamma-1}}{a^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\alpha)(\alpha)_k}{\Gamma(\gamma)(\gamma)_k \Gamma(1-\beta)(1-\beta)_{-k}} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\beta}} \frac{b^{\gamma-1}}{a^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{(-1)^k}{(1-\beta)_{-k}} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\beta}} \frac{b^{\gamma-1}}{a^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\beta}} \frac{b^{\gamma-1}}{a^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)} F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{b^2}{a^2}\right)$$

把

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\mu+\nu-\lambda+1}{2} \\ \beta = \dfrac{\nu-\mu-\lambda+1}{2} \\ \gamma = \nu+1 \end{cases}$$

代入上式,得到

$$\int_0^{\infty}\frac{J_{\mu}(at)J_{\nu}(bt)}{t^{\lambda}}dt=\frac{b^{\nu}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^{\lambda}a^{\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\right)}\cdot F\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$(a>b>0) \tag{8.50}$$

当 $\lambda=0$ 时,有

$$\int_0^{\infty}J_{\mu}(at)J_{\nu}(bt)dt=\frac{b^{\nu}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{a^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)}\cdot F\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};\nu+1;\frac{b^2}{a^2}\right) \tag{8.51}$$

[$a>b>0$,$\mathrm{Re}(\mu+\nu)>-1$,当 $a<b$ 时,μ 和 ν 的位置应该颠倒过来,a 和 b 的位置也要对调.]

当 $a=b$ 时,有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{J_{\mu}(at)J_{\nu}(at)}{t^{\lambda}}dt\\&=\frac{a^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^{\lambda}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\right)}\times{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2};\nu+1;1\right)\\&=\frac{a^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^{\lambda}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\right)}\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right)}\\&=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right)}\end{aligned} \tag{8.52}$$

[$\mathrm{Re}(\mu+\nu+1)>\mathrm{Re}(\lambda)>0,a>0$),${}_2F_1=F$.]

8.2.5 贝塞尔函数与幂函数组合的积分

例 10 计算积分 $\int_0^{\infty}x^{\mu-1}J_{\nu}(ax)dx$.

解 把贝塞尔函数的积分表达式

$$J_{\nu}(ax)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{ax}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi}\cos(ax\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta$$

代入积分式中,则

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^{\mu-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{ax}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi}\cos(ax\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\infty} x^{\nu+\mu-1}\int_0^{\pi}\cos(ax\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}x$$

交换积分次序，得

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi}\sin^{2\nu}\theta\left[\int_0^{\infty} x^{\nu+\mu-1}\cos(ax\cos\theta)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\theta$$

该式右端中括弧内的积分，可利用公式

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\cos ax\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos\frac{p\pi}{2}$$

得到

$$\int_0^{\infty} x^{\nu+\mu-1}\cos(a\cos\theta\cdot x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{(a\cos\theta)^{\nu+\mu}}\cos\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}$$

代入后，则有

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi}\sin^{2\nu}\theta\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{a^{\nu+\mu}(\cos\theta)^{\nu+\mu}}\cos\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{2^{\nu}a^{\mu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cos\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^{2\nu}\theta(\cos\theta)^{-(\nu+\mu)}\mathrm{d}\theta$$

用公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\cdot\cos^{q-1}x\cdot\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$于右边的积分，有

$$\int_0^{\pi}\sin^{2\nu}\theta\cdot(\cos\theta)^{-(\nu+\mu)}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\nu}\theta\cdot(\cos\theta)^{-(\nu+\mu)}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{2\nu+1}{2},\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}$$

因此

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{2^{\nu}a^{\mu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cos\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{\frac{2^{\nu+\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}{2^{\nu}a^{\mu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\cos\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}$$

$$= \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}{\pi a^{\mu}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\cos\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}$$

使用式(8.7) $\cos\frac{s\pi}{2}=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}$,有

$$\Gamma\left(\frac{1-(\nu+\mu)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+(\nu+\mu)}{2}\right)\cos\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}=\pi$$

因此得到

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{a^{\mu}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \quad [\mathrm{Re}(\nu+\mu)>0,\mathrm{Re}a>0] \tag{8.53}$$

若用 λ 代替 $\mu-1$,则有

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda}\mathrm{J}_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = \frac{2^{\lambda}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+1}{2}\right)}{a^{\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+1}{2}\right)} \tag{8.54}$$

当 $\lambda=\mu-1=0$ 时,有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{J}_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$$

当 $\mu=0$ 时,有

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{J}_{\nu}(ax)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\nu}$$

例 11 求积分 $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\infty} t^{\mu-1}\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(at)\mathrm{d}t$.

解 把 $\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(at)=\frac{\mathrm{i}}{\sin\nu\pi}[\mathrm{J}_{\nu}(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}-\mathrm{J}_{-\nu}(at)]$代入 I_1 中,得

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\infty} t^{\mu-1}\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(at)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^{\mu-1}\frac{\mathrm{i}}{\sin\nu\pi}[\mathrm{J}_{\nu}(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}-\mathrm{J}_{-\nu}(at)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{\sin\nu\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\int_0^{\infty} t^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu}(at)\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} t^{\mu-1}\mathrm{J}_{-\nu}(at)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{\sin\nu\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\frac{2^{\mu-1}}{a^{\mu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} - \frac{2^{\mu-1}}{a^{\mu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{2^{\mu-1}}{\mathrm{i}a^{\mu}\sin\nu\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\nu+\mu}{2}\right)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)}\right]$$

利用式(8.5)：$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin z\pi}$，则有

$$\Gamma\left(1-\frac{\nu+\mu}{2}\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\sin\frac{(\nu+\mu)\pi}{2}} \tag{A}$$

$$\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}} \tag{B}$$

因此有

$$\begin{aligned}I_1=&\frac{2^{\mu-1}}{\mathrm{i}a^{\mu}\sin\nu\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\sin\frac{(\mu+\nu)\pi}{2}}{\pi}\right.\\&\left.-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}}{\pi}\right]\\=&\frac{2^{\mu-1}}{\pi\mathrm{i}a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\left[\frac{\sin\frac{(\mu+\nu)\pi}{2}}{\sin\nu\pi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\frac{\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}}{\sin\nu\pi}\right]\end{aligned}$$

该式右边括号部分推导如下：

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\pi}{\sin\nu\pi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\frac{\sin\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\pi}{\sin\nu\pi}\\&=\frac{\sin\frac{\mu\pi}{2}\cos\frac{\nu\pi}{2}+\cos\frac{\mu\pi}{2}\sin\frac{\nu\pi}{2}}{2\sin\frac{\nu\pi}{2}\cos\frac{\nu\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\frac{\sin\frac{\mu\pi}{2}\cos\frac{\nu\pi}{2}-\cos\frac{\mu\pi}{2}\sin\frac{\nu\pi}{2}}{2\sin\frac{\nu\pi}{2}\cos\frac{\nu\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\mu\pi}{2}}{\sin\frac{\nu\pi}{2}}+\frac{\cos\frac{\mu\pi}{2}}{\cos\frac{\nu\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\left(\frac{\sin\frac{\mu\pi}{2}}{\sin\frac{\nu\pi}{2}}-\frac{\cos\frac{\mu\pi}{2}}{\cos\frac{\nu\pi}{2}}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{\sin\frac{\mu\pi}{2}}{\sin\frac{\nu\pi}{2}}+(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{\cos\frac{\mu\pi}{2}}{\cos\frac{\nu\pi}{2}}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}}+(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}}{(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}}+(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}}{(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-\nu)\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(\mu+\nu)\pi}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}}+(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi})\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-\nu)\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(\mu+\nu)\pi}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-\nu)\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(\mu+\nu)\pi}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-\nu)\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(\mu+\nu)\pi}{2}}\right]\\&=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-\nu)\pi}{2}}\end{aligned}$$

因此求得积分

$$I_1 = \int_0^{\infty} t^{\mu-1} H_{\nu}^{(1)}(at)\mathrm{d}t = \frac{2^{\mu-1}}{\pi i a^{\mu}} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) e^{\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}} \tag{8.55}$$

若令 $\mu-1=\lambda$，则

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda} H_{\nu}^{(1)}(at)\mathrm{d}t = \frac{2^{\lambda}}{\pi i a^{\lambda+1}} \Gamma\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda-\nu+1}{2}\right) e^{\frac{i(\lambda-\nu+1)\pi}{2}} \tag{8.56}$$

例 12 求积分 $I_2 = \int_0^{\infty} t^{\mu-1} H_{\nu}^{(2)}(at)\mathrm{d}t$.

解 把 $H_{\nu}^{(2)}(at) = -\frac{i}{\sin \nu\pi}[J_{\nu}(at)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(at)]$ 代入 I_2 中，有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\infty} t^{\mu-1} H^{(2)}(at)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{\infty} t^{\mu-1} \frac{i}{\sin \nu\pi}[J_{\nu}(at)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(at)]\mathrm{d}t \\
&= -\frac{i}{\sin \nu\pi}\left[e^{i\nu\pi}\int_0^{\infty} t^{\mu-1} J_{\nu}(at)\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} t^{\mu-1} J_{-\nu}(at)\mathrm{d}t\right] \\
&= -\frac{i}{\sin \nu\pi}\left[e^{i\nu\pi}\frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{a^{\mu}\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)} - \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{a^{\mu}\Gamma\left(1-\frac{\mu+\nu}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{i2^{\mu-1}}{a^{\mu}\sin \nu\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\mu+\nu}{2}\right)} - e^{i\nu\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{i2^{\mu-1}}{a^{\mu}\sin \nu\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\sin\frac{(\mu+\nu)\pi}{2}}{\pi}\right. \\
&\quad \left. - e^{i\nu\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}}{\pi}\right] \quad [\text{利用了例 11 中(A)、(B) 两式}] \\
&= \frac{i2^{\mu-1}}{\pi a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\left[\frac{\sin\frac{(\mu+\nu)\pi}{2}}{\sin \nu\pi} - e^{i\nu\pi}\frac{\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}}{\sin \nu\pi}\right]
\end{aligned}$$

该式右边的中括号中的式子可用与例 11 相同的方法与步骤推得

$$\left[\frac{\sin\frac{(\mu+\nu)\pi}{2}}{\sin \nu\pi} - e^{i\nu\pi}\frac{\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}}{\sin \nu\pi}\right] = e^{-\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}}$$

因此得到

$$I_2 = \int_0^{\infty} t^{\mu-1} H^{(2)}(at)\mathrm{d}t = \frac{i2^{\mu-1}}{\pi a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)e^{-\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2^{\mu-1}}{\pi i a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)e^{-\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}} \tag{8.57}$$

令 $\mu-1=\lambda$，则

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda}H^{(2)}(at)\mathrm{d}t = -\frac{2^{\lambda}}{\pi i a^{\lambda+1}}\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu+1}{2}\right)e^{-\frac{i(\lambda-\nu+1)\pi}{2}} \tag{8.58}$$

例 13　求积分 $\int_0^{\infty} x^{\mu-1}N_{\nu}(ax)\mathrm{d}x$.

解　因为

$$N_{\nu}(ax) = \frac{1}{2i}[H_{\nu}^{(1)}(ax) - H^{(2)}(ax)]$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x^{\mu-1}N_{\nu}(ax)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} x^{\mu-1}\frac{1}{2i}[H_{\nu}^{(1)}(ax) - H^{(2)}(ax)]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2i}\left[\int_0^{\infty} x^{\mu-1}H_{\nu}^{(1)}(ax)\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} x^{\mu-1}H^{(2)}(ax)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{2^{\mu-1}}{\pi i a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)e^{\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}} + \frac{2^{\mu-1}}{\pi i a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)e^{-\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2^{\mu-1}}{\pi a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)[e^{\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}} + e^{-\frac{i(\mu-\nu)\pi}{2}}] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2^{\mu-1}}{\pi a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{(\mu-\nu)\pi}{2} \\
&= -\frac{2^{\mu-1}}{\pi a^{\mu}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\cdot\cos\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}
\end{aligned}$$

利用式(8.5)：$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin z\pi}$，有

$$\pi = \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{\mu-\nu}{2}\pi$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x^{\mu-1}N_{\nu}(ax)\mathrm{d}x &= -\frac{2^{\mu-1}}{a^{\mu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\cdot\cos\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}} \\
&= -\frac{2^{\mu-1}}{a^{\mu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\cdot\cos\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}}{\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)\sin\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}} \\
&= -2^{\mu-1}a^{-\mu}\cot\frac{(\mu-\nu)\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{8.59}$$

若令 $\mu-1=\lambda$,则

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda} N_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = -2^{\lambda}a^{-\lambda-1}\cot\frac{(\lambda-\nu+1)\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+1}{2}\right)} \tag{8.60}$$

当 $\mu=1$ 时,有

$$\int_0^{\infty} N_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}\right) = -\frac{1}{a}\tan\frac{\nu\pi}{2} \quad (|\mathrm{Re}\nu|<1, |a|>0)$$

例 14 求积分 $\int_0^{\infty} x^{\mu-1}K_{\nu}(ax)\mathrm{d}x$.

解 把式(8.32):$K_{\nu}(ax)=\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}H_{\nu}^{(1)}(ax\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}})$ 代入积分式,有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\mu-1}K_{\nu}(ax)\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} x^{\mu-1}\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}H_{\nu}^{(1)}(a\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}\int_0^{\infty} x^{\mu-1}H_{\nu}^{(1)}(a\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

右边的积分用式(8.55),可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\mu-1}K_{\nu}(ax)\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}\cdot\frac{2^{\mu-1}}{\mathrm{i}\pi(a\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}})^{\mu}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-\nu)\pi}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\\ &= \frac{2^{\mu-2}}{a^{\mu}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-\nu)\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mu\pi}{2}}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\end{aligned}$$

最后得到积分结果为

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}K_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = 2^{\mu-2}a^{-\mu}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \tag{8.61}$$

当 $\mu-1=\lambda$ 时,有

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda}K_{\nu}(ax)\mathrm{d}x = 2^{\lambda-1}a^{-\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu+1}{2}\right) \tag{8.62}$$

8.2.6 贝塞尔函数与三角函数组合的积分

例 15 求积分 $\int_0^{\infty} J_{\nu}(bt)\cos(ax)\mathrm{d}x$,$\int_0^{\infty} J_{\nu}(bt)\sin(ax)\mathrm{d}x$.

解 前面已得到式(8.42):

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}J_{\nu}(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}\right)^{\nu}$$

若在上式中用 $\mathrm{i}a$ 代替 a,则有

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}J_{\nu}(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}-\mathrm{i}a}{b}\right)^{\nu} \tag{I}$$

同样,若用 $-\mathrm{i}a$ 代替 a,又有

$$\int_0^{\infty} e^{iax} J_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+ia}{b}\right)^{\nu} \qquad (\text{Ⅱ})$$

把式(Ⅰ)和(Ⅱ)加起来,得

$$\int_0^{\infty} (e^{iax}+e^{-iax})J_\nu(bx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+ia}{b}\right)^{\nu}+\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}-ia}{b}\right)^{\nu}\right]$$

$$2\int_0^{\infty} \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2} J_\nu(bx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left\{\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}+i\frac{a}{b}\right]^{\nu}+\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}-i\frac{a}{b}\right]^{\nu}\right\}$$

令 $\frac{a}{b}=\sin\alpha\,(b>a)$,则

$$2\int_0^{\infty} \cos ax J_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}[(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{\nu}+(\cos\alpha-i\sin\alpha)^{\nu}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}(\cos\nu\alpha+i\sin\nu\alpha+\cos\nu\alpha-i\sin\nu\alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot 2\cos\nu\alpha$$

最后得到

$$\int_0^{\infty} J_\nu(bt)\cos(ax)\,dx = \frac{\cos\left(\nu\arcsin\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2-a^2}} \quad (b>a>0) \qquad (8.63)$$

当式(Ⅰ)和(Ⅱ)相减时,得到

$$\int_0^{\infty} (e^{iax}-e^{-iax})J_\nu(bx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+ia}{b}\right)^{\nu}-\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}-ia}{b}\right)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left\{\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}+i\frac{a}{b}\right]^{\nu}-\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}-i\frac{a}{b}\right]^{\nu}\right\}$$

仍旧设 $\frac{a}{b}=\sin\alpha\,(b>a)$,则

$$2\int_0^{\infty} i\sin ax J_\nu(bx)\,dx = \frac{2i\sin\nu\alpha}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

最后得到

$$\int_0^{\infty} J_\nu(bx)\sin(ax)\,dx = \frac{\sin\nu\alpha}{\sqrt{b^2-a^2}} = \frac{\sin\left(\nu\arcsin\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2-a^2}} \qquad (8.64)$$

例 16 求积分 $\int_0^{\infty} \mathrm{N}_{\nu}(bx)\cos(ax)\mathrm{d}x$，$\int_0^{\infty} \mathrm{N}_{\nu}(bx)\sin(ax)\mathrm{d}x$.

解 在前面已经知道式(8.44)：

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\cos \nu\pi - b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\right]$$

在式(8.44)中，用 $\mathrm{i}a$ 代替 a，得

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+\mathrm{i}a}{b}\right)^{-\nu}\cos \nu\pi - \left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+\mathrm{i}a}{b}\right)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}+\mathrm{i}\frac{a}{b}\right)^{-\nu}\cos \nu\pi - \left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}+\mathrm{i}\frac{a}{b}\right)^{\nu}\right]$$

令 $\frac{a}{b}=\sin\theta$，则

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x = \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{-\nu}\cos \nu\pi - (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\frac{\cos \nu\pi}{\cos \nu\theta+\mathrm{i}\sin \nu\theta} - (\cos \nu\theta+\mathrm{i}\sin \nu\theta)\right]$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\cos \nu\pi(\cos \nu\theta - \mathrm{i}\sin \nu\theta) - (\cos \nu\theta+\mathrm{i}\sin \nu\theta)\right]$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}(\cos \nu\pi\cos \nu\theta - \mathrm{i}\cos \nu\pi\sin \nu\theta - \cos \nu\theta - \mathrm{i}\sin \nu\theta) \tag{A}$$

若在式(8.44)中用 $-\mathrm{i}a$ 代替 a，并仍设 $\frac{a}{b}=\sin\theta$，则有

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}-\mathrm{i}a}{b}\right)^{-\nu}\cos \nu\pi - \left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}-\mathrm{i}a}{b}\right)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}-\mathrm{i}\frac{a}{b}\right)^{-\nu}\cos \nu\pi - \left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}-\mathrm{i}\frac{a}{b}\right)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^{-\nu}\cos \nu\pi - (\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{\csc \nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}(\cos \nu\pi\cos \nu\theta + \mathrm{i}\cos \nu\pi\sin \nu\theta - \cos \nu\theta + \mathrm{i}\sin \nu\theta) \tag{B}$$

(B)+(A)，得

$$\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x=\frac{\csc\nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}(2\cos\nu\pi\cos\nu\theta-2\cos\nu\theta)$$

$$2\int_0^{\infty}\cos(ax)\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x=\frac{2\csc\nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}[(\cos\nu\pi-1)\cos\nu\theta]$$

因此

$$\int_0^{\infty}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\cos(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\frac{\cos\nu\pi-1}{\sin\nu\pi}\cos\nu\theta$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\tan\frac{\nu\pi}{2}\cos\nu\theta$$

最后得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\cos(ax)\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\tan\frac{\nu\pi}{2}\cos\left(\nu\arcsin\frac{a}{b}\right)\quad(b>a>0)$$

(8.65)

(B)－(A)，得

$$\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x=\frac{\csc\nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}(2\mathrm{i}\cos\nu\pi\sin\nu\theta+2\mathrm{i}\sin\nu\theta)$$

$$2\int_0^{\infty}\mathrm{i}\sin(ax)\mathrm{N}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{i}\csc\nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}(\cos\nu\pi\sin\nu\theta+\sin\nu\theta)$$

$$=\frac{2\mathrm{i}\csc\nu\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}[(\cos\nu\pi+1)\sin\nu\theta]$$

所以

$$\int_0^{\infty}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\sin(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\frac{\cos\nu\pi+1}{\sin\nu\pi}\sin\nu\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cot\frac{\nu\pi}{2}\sin\nu\theta$$

最后得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{N}_{\nu}(bx)\sin(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cot\frac{\nu\pi}{2}\sin\left(\nu\arcsin\frac{a}{b}\right)\quad(b>a>0)$$

例 17　求积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\cos(ax)\mathrm{d}x$，$\int_0^{\infty}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\sin(ax)\mathrm{d}x$.

解　已经知道式(8.49)：

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x=\frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}[b^{-\nu}(a+\sqrt{a^2-b^2})^{\nu}-b^{\nu}(a+\sqrt{a^2-b^2})^{-\nu}]$$

如同前法，用 $\mathrm{i}a$ 代替 a，则有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{-a^2-b^2}}[b^{-\nu}(\mathrm{i}a+\sqrt{-a^2-b^2})^{\nu}-b^{\nu}(\mathrm{i}a+\sqrt{-a^2-b^2})^{-\nu}]$$

$$= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{-\nu}\left(\mathrm{i}a+\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\nu}-b^{\nu}\left(\mathrm{i}a+\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-\nu}\right]$$

$$= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{-\nu}\mathrm{i}^{\nu}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\nu}-b^{\nu}\mathrm{i}^{-\nu}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{-\nu}\right]\quad(\mathrm{I})$$

当用 $-\mathrm{i}a$ 代替 a 时，会有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{-a^2-b^2}}\left[b^{-\nu}\left(-\mathrm{i}a+\sqrt{-a^2-b^2}\right)^{\nu}-b^{\nu}\left(-\mathrm{i}a+\sqrt{-a^2-b^2}\right)^{-\nu}\right]$$

$$= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{-\nu}\mathrm{i}^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}-b^{\nu}\mathrm{i}^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{-\nu}\right]\quad(\mathrm{II})$$

把上述两式加起来，(Ⅱ)+(Ⅰ)，得

$$\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\left[\mathrm{i}^{\nu}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}}{b^{\nu}}-\mathrm{i}^{-\nu}\frac{b^{\nu}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}}\right.$$

$$\left.+\mathrm{i}^{\nu}b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}-\mathrm{i}^{-\nu}b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\right]$$

$$= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\left[\mathrm{i}^{\nu}\frac{b^{2\nu}}{b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}}-\mathrm{i}^{-\nu}\frac{b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}}{b^{2\nu}}\right.$$

$$\left.+\mathrm{i}^{\nu}b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}-\mathrm{i}^{-\nu}b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\right]$$

$$\int_0^{\infty}2\cos(ax)\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\left[\mathrm{i}^{\nu}b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}-\mathrm{i}^{-\nu}b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\right.$$

$$\left.+\mathrm{i}^{\nu}b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}-\mathrm{i}^{-\nu}b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\right]$$

即

$$\int_0^{\infty}\cos(ax)\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x = \frac{\pi\csc\nu\pi}{4\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\left\{(\mathrm{i}^{\nu}-\mathrm{i}^{-\nu})\cdot\left[b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\right.\right.$$

$$\left.\left.+b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\right]\right\}$$

其中

$$\mathrm{i}^{\nu}-\mathrm{i}^{-\nu} = \mathrm{e}^{\nu\ln\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-\nu\ln\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}} = 2\mathrm{i}\sin\frac{\nu\pi}{2}$$

因此

$$\int_0^{\infty}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\frac{2\mathrm{i}\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\sin\nu\pi}\left[b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\right.$$

$$+b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\Big]$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{\cos\frac{\nu\pi}{2}}\Big[b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}$$

$$+b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\Big]$$

或

$$\int_0^{\infty}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\cos(ax)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi\sec\frac{\nu\pi}{2}}{4\sqrt{a^2+b^2}}\Big[b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}+b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\Big]$$

$$(\mathrm{Re}a>0,b>0,|\mathrm{Re}\nu|<1) \tag{8.66}$$

两式相减，(Ⅱ)－(Ⅰ)，得

$$\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\Big[\mathrm{i}^{\nu}b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}-\mathrm{i}^{-\nu}b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{-\nu}$$

$$-\mathrm{i}^{\nu}b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}+\mathrm{i}^{-\nu}b^{\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\Big]$$

$$\int_0^{\infty}2\mathrm{i}\sin(ax)\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi\csc\nu\pi}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}\Big\{\mathrm{i}^{\nu}b^{-\nu}\Big[\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}-\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\Big]$$

$$-\mathrm{i}^{-\nu}b^{\nu}\Big[\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{-\nu}-\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{-\nu}\Big]\Big\}$$

$$\int_0^{\infty}\sin(ax)\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi\csc\nu\pi}{4\sqrt{a^2+b^2}}\Big\{\mathrm{i}^{\nu}b^{-\nu}\Big[\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}-\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\Big]$$

$$+\mathrm{i}^{-\nu}b^{-\nu}\Big[\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}-\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}\Big]\Big\}$$

$$\int_0^{\infty}\sin(ax)\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi\csc\nu\pi}{4\sqrt{a^2+b^2}}(\mathrm{i}^{\nu}+\mathrm{i}^{-\nu})b^{-\nu}\Big[\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu}-\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}\Big]$$

其中

$$\mathrm{i}^{\nu}+\mathrm{i}^{-\nu}=\mathrm{e}^{\nu\ln\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-\nu\ln\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu\pi}{2}}=2\cos\frac{\nu\pi}{2}$$

因此，得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\sin(ax)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{a^2+b^2}} \frac{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}{2\sin\frac{\nu\pi}{2}\cos\frac{\nu\pi}{2}} b^{-\nu}\left[(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu}-(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{a^2+b^2}} \frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{2}} b^{-\nu}\left[(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu}-(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}\right]$$

或

$$\int_0^{\infty} \mathrm{K}_{\nu}(bx)\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\pi\csc\frac{\nu\pi}{2}}{4\sqrt{a^2+b^2}} b^{-\nu}\left[(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu}-(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}\right]$$
$$(\mathrm{Re}a>0, b>0, |\mathrm{Re}\nu|<2, \nu\neq 0) \tag{8.67}$$

8.2.7 贝塞尔函数与双曲函数组合的积分

例 18 计算积分 $\int_0^{\infty} \mathrm{J}_{\nu}(bt)\cosh(at)\mathrm{d}t$, $\int_0^{\infty} \mathrm{J}_{\nu}(bt)\sinh(at)\mathrm{d}t$.

解 前面已经求得式(8.42):

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{J}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t = \frac{b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{A}$$

把 $-a$ 换成 a,则有

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{J}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t = \frac{b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{B}$$

上面两式相加,(A)+(B),得

$$\int_0^{\infty} (\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at})\mathrm{J}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t = \frac{b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

即

$$\int_0^{\infty} 2\cosh(at)\mathrm{J}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu} + b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}\right]$$

因此得到

$$\int_0^{\infty} \mathrm{J}_{\nu}(bt)\cosh(at)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu} + b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}\right] \quad (\mathrm{Re}a>0, b>0) \tag{8.68}$$

若上面两式相减,(B)-(A),得

$$\int_0^{\infty} (\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{-at})\mathrm{J}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t = \frac{b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b^{-\nu}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

即

$$\int_0^{\infty} 2\sinh(at)\mathrm{J}_{\nu}(bt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu} - b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}\right]$$

因此求得

$$\int_0^{\infty} \mathrm{J}_{\nu}(bt)\sinh(at)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\left[b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)^{\nu} - b^{-\nu}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^{\nu}\right] \quad (\mathrm{Re}a>0, b>0) \tag{8.69}$$

例 19　求积分 $\int_0^{\infty} \mathrm{K}_{\nu}(bx)\cosh(ax)\mathrm{d}x$，$\int_0^{\infty} \mathrm{K}_{\nu}(bx)\sinh(ax)\mathrm{d}x$.

解　因为有式(8.49)：

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x = \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^{\nu} - \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^{-\nu}\right] \tag{Ⅰ}$$

及

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ax}\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x = \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^{\nu} - \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^{-\nu}\right] \tag{Ⅱ}$$

上面两式相加，(Ⅰ)+(Ⅱ)，得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} (\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax})\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^{\nu} - \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^{-\nu}\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^{\nu} - \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^{-\nu}\right] \\
&= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left[\left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}-\frac{a}{b}\right)^{\nu} - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}-\frac{a}{b}\right)^{-\nu}\right. \\
&\qquad \left. + \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}+\frac{a}{b}\right)^{\nu} - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}+\frac{a}{b}\right)^{-\nu}\right]
\end{aligned}$$

令 $\frac{a}{b}=\sin\alpha$，则

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} 2\cosh(ax)\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi\csc\nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left[(\mathrm{i}\cos\alpha-\sin\alpha)^{\nu} - (\mathrm{i}\cos\alpha-\sin\alpha)^{-\nu}\right. \\
&\quad \left. + (\mathrm{i}\cos\alpha+\sin\alpha)^{\nu} - (\mathrm{i}\cos\alpha+\sin\alpha)^{-\nu}\right]
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{K}_{\nu}(bx)\cosh(ax)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2-b^2}}\left[\left(\frac{-\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha}{\mathrm{i}}\right)^{\nu}-\left(\frac{\mathrm{i}}{-\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha}\right)^{\nu}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}{\mathrm{i}}\right)^{\nu}-\left(\frac{\mathrm{i}}{-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}\right)^{\nu}\right]$$

$$= \frac{\pi\csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{(-1)^{\nu}}{\mathrm{i}^{\nu}}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^{\nu}+\frac{(-1)^{\nu}}{\mathrm{i}^{\nu}}(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)^{\nu}\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{i}^{\nu}}{(-1)^{\nu}}\frac{1}{(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^{\nu}}-\frac{\mathrm{i}^{\nu}}{(-1)^{\nu}}\frac{1}{(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)^{\nu}}\right]$$

$$= \frac{\pi\csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{(-1)^{\nu}}{\mathrm{i}^{\nu}}(\cos\nu\alpha+\mathrm{i}\sin\nu\alpha)+\frac{(-1)^{\nu}}{\mathrm{i}^{\nu}}(\cos\nu\alpha-\mathrm{i}\sin\nu\alpha)\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{i}^{\nu}}{(-1)^{\nu}}\frac{1}{(\cos\nu\alpha+\mathrm{i}\sin\nu\alpha)}-\frac{\mathrm{i}^{\nu}}{(-1)^{\nu}}\frac{1}{(\cos\nu\alpha-\mathrm{i}\sin\nu\alpha)}\right]$$

$$= \frac{\pi\csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2-b^2}}\left[\mathrm{i}^{\nu}(\cos\nu\alpha+\mathrm{i}\sin\nu\alpha)+\mathrm{i}^{\nu}(\cos\nu\alpha-\mathrm{i}\sin\nu\alpha)\right.$$

$$\left.-\mathrm{i}^{-\nu}(\cos\nu\alpha-\mathrm{i}\sin\nu\alpha)-\mathrm{i}^{-\nu}(\cos\nu\alpha+\mathrm{i}\sin\nu\alpha)\right]$$

$$= \frac{\pi\csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2-b^2}}(2\mathrm{i}^{\nu}\cos\nu\alpha-2\mathrm{i}^{-\nu}\cos\nu\alpha)$$

$$= \frac{\pi\csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2-b^2}}\left(\mathrm{i}^{\nu}-\frac{1}{\mathrm{i}^{\nu}}\right)2\cos\nu\alpha$$

$$= \frac{\pi}{4\mathrm{i}\sqrt{b^2-a^2}}\frac{1}{\sin\nu\pi}\cdot 2\mathrm{i}\sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot 2\cos\nu\alpha$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{b^2-a^2}}\frac{1}{\cos\frac{\nu\pi}{2}}\cdot\cos\nu\alpha$$

最后得到

$$\int_0^{\infty} \mathrm{K}_{\nu}(bx)\cosh(ax)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\sec\frac{\nu\pi}{2}}{2\sqrt{b^2-a^2}}\cdot\cos\left(\nu\arcsin\frac{a}{b}\right)\quad(\mathrm{Re}b>|\mathrm{Re}a|,|\mathrm{Re}\nu|<1)\quad(8.70)$$

上面两式相减，(Ⅱ)-(Ⅰ)，得

$$\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{-ax})\mathrm{K}_{\nu}(bx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi\csc \nu\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^{\nu}-\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^{-\nu}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^{\nu}+\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)^{-\nu}\right]$$

$$= \frac{\pi \csc \nu\pi}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} - \frac{a}{b}\right)^{\nu} - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} - \frac{a}{b}\right)^{-\nu}\right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} + \frac{a}{b}\right)^{\nu} + \left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} + \frac{a}{b}\right)^{-\nu}\right]$$

仍令 $\frac{a}{b} = \sin\alpha$，则

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{K}_{\nu}(bx)\sinh(ax)\mathrm{d}x &= \frac{\pi \csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\mathrm{i}^{\nu}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^{\nu} - \mathrm{i}^{\nu}(\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)^{\nu}\right. \\
&\quad \left. + \mathrm{i}^{-\nu}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^{-\nu} - \mathrm{i}^{-\nu}(\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)^{-\nu}\right] \\
&= \frac{\pi \csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\mathrm{i}^{\nu}(\cos\nu\alpha + \mathrm{i}\sin\nu\alpha) - \mathrm{i}^{\nu}(\cos\nu\alpha - \mathrm{i}\sin\nu\alpha)\right. \\
&\quad \left. + \mathrm{i}^{-\nu}(\cos\nu\alpha + \mathrm{i}\sin\nu\alpha) - \mathrm{i}^{-\nu}(\cos\nu\alpha - \mathrm{i}\sin\nu\alpha)\right] \\
&= \frac{\pi \csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2 - b^2}}(2\mathrm{i}^{\nu}\mathrm{i}\sin\nu\alpha + 2\mathrm{i}^{-\nu}\mathrm{i}\sin\nu\alpha) \\
&= \frac{\pi \csc \nu\pi}{4\sqrt{a^2 - b^2}}(\mathrm{i}^{\nu} + \mathrm{i}^{-\nu})2\mathrm{i}\sin\nu\alpha \\
&= \frac{\pi}{4\mathrm{i}\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{\sin\nu\pi} \cdot 2\cos\frac{\nu\pi}{2} \cdot 2\mathrm{i}\sin\nu\alpha \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{2}} \cdot \sin\nu\alpha
\end{aligned}$$

最后得到

$$\int_0^{\infty} \mathrm{K}_{\nu}(bx)\sinh(ax)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi \csc \frac{\nu\pi}{2}}{2\sqrt{b^2 - a^2}}\sin\left(\nu\arcsin\frac{a}{b}\right) \quad (\mathrm{Re}\,b > |\mathrm{Re}\,a|, |\mathrm{Re}\,\nu| < 2) \tag{8.71}$$

8.2.8　艾里(Airy)积分

例 20　求艾里积分.

解　艾里积分 $\int_0^{\infty} \cos(t^3 \pm xt)\mathrm{d}t$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} \mp \frac{1}{3}xu = 0 \tag{8.72}$$

的解，是艾里在研究关于“光在散焦线附近的强度”时出现的[26]. 人们在计算同步辐射光谱时也会遇到这个积分. 它可以用贝塞尔函数表达. 实际上艾里方程 8.72 就是一种特殊形式的贝塞尔方程.

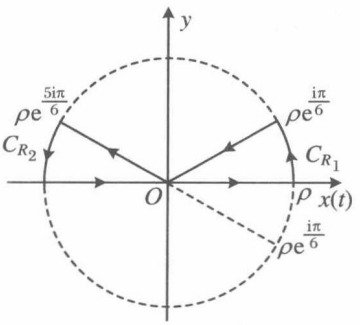


图 8.1

为了计算艾里积分，可以把它写成下面的形状：

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t \qquad (8.73)$$

现在来考虑函数 $\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)$ 在 t 平面上的围道积分. 作一个半径为 ρ 的圆. 围道从 $t=-\rho(\rho>0)$ 点出发，沿实轴经 $t=0$ 到 $t=\rho$ 处，再沿以原点($t=0$)为中心，ρ 为半径的圆弧行进到 $\rho e^{\frac{i\pi}{6}}$ 点，然后沿直线到 $t=0$，又再沿直线到达 $\rho e^{\frac{5i\pi}{6}}$ 处，最后沿圆弧回到 $-\rho$(图 8.1). 从图上可见两个圆弧的端点分别在 $\rho, \rho e^{\frac{i\pi}{6}}, \rho e^{\frac{5i\pi}{6}}, \rho e^{i\pi}(-\rho)$ 处. 当沿围道走一圈时，因为围道内无奇点，根据柯西定理，整个围路的积分应为零，即

$$\int_{-\rho}^{\rho}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t + \int_{C_{R_1}}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t + \int_{\rho e^{\frac{i\pi}{6}}}^{0}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t$$

$$+\int_{0}^{\rho e^{\frac{5i\pi}{6}}}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t + \int_{C_{R_2}}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t = 0$$

根据若尔当引理，围道内没有奇点，当 $\rho\to\infty$ 时，沿弧的积分为零，即

$$\int_{\substack{C_{R_1}\\ \rho\to+\infty}}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t = \int_{\substack{C_{R_2}\\ \rho\to+\infty}}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t = 0$$

因此有

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\rho}^{\rho}\underset{\rho\to\infty}{\exp}(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_{\rho e^{\frac{i\pi}{6}}}^{0}\underset{\rho\to\infty}{\exp}(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t - \int_{0}^{\rho e^{\frac{5i\pi}{6}}}\underset{\rho\to\infty}{\exp}(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\rho e^{\frac{i\pi}{6}}}\underset{\rho\to\infty}{\exp}(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t + \int_{\rho e^{\frac{5i\pi}{6}}}^{0}\underset{\rho\to\infty}{\exp}(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t\right]$$

在等式右边第一个积分 $\int_{0}^{\rho e^{\frac{i\pi}{6}}}\underset{\rho\to\infty}{\exp}(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt)\mathrm{d}t$ 中，令 $t=e^{\frac{i\pi}{6}}\tau$，$\mathrm{d}t=e^{\frac{i\pi}{6}}\mathrm{d}\tau$，那么，被积函数可写成

$$\exp(\mathrm{i}t^3 \pm \mathrm{i}xt) = \exp\left[\mathrm{i}\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\tau\right)^3 \pm \mathrm{i}xe^{\frac{i\pi}{6}}\tau\right]$$

$$= \exp\left(\mathrm{i}e^{\frac{i\pi}{2}}\tau^3 \pm e^{\frac{i\pi}{2}}xe^{\frac{i\pi}{6}}\tau\right)$$

$$= \exp\left(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\tau^3 \pm e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{6}}x\tau\right)$$

$$= \exp\left(-\tau^3 \pm e^{\frac{2i\pi}{3}}x\tau\right)$$

当 $t=0$ 时，$\tau=0$；$t=\rho e^{\frac{i\pi}{6}}$，$\tau=\rho$，因此第一个积分为

$$\int_0^{\rho e^{\frac{i\pi}{6}}} \exp(it^3 \pm ixt)\,dt \underset{\rho\to\infty}{=} \int_0^{\rho} e^{\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{\frac{2i\pi}{3}} x\tau)\,d\tau$$

在等式右边第二个积分 $\int_{\rho e^{\frac{5i\pi}{6}}}^{0} \exp(it^3 \pm ixt)\,dt$ 中，令 $t = e^{\frac{5i\pi}{6}}\tau$，$dt = e^{\frac{5i\pi}{6}}d\tau$，那么，被积函数可写成

$$\begin{aligned}\exp(it^3 \pm ixt) &= \exp\left[i\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\tau\right)^3 \pm ixe^{\frac{5i\pi}{6}}\tau\right] \\ &= \exp(ie^{\frac{5i\pi}{2}}\tau^3 \pm e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{5i\pi}{6}}x\tau) \\ &= \exp(i\cdot e^{2i\pi}e^{\frac{i\pi}{2}}\cdot\tau^3 \pm e^{\frac{4i\pi}{3}}x\tau) \\ &= \exp(-\tau^3 \pm e^{-\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，$\tau=0$；$t=\rho e^{\frac{5i\pi}{6}}$ 时，$\tau=\rho$，因此第二个积分为

$$\begin{aligned}\int_{\rho e^{\frac{5i\pi}{6}}}^{0} \exp(it^3 \pm ixt)\,dt &\underset{\rho\to\infty}{=} \int_{\rho}^{0} e^{\frac{5i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{-\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\,d\tau \\ &= \int_{\rho}^{0} -e^{-\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{-\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^{\rho} e^{-\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{-\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(it^3 \pm ixt)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\rho}^{\rho} \exp(it^3 \pm ixt)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\rho} e^{\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\,d\tau + \int_0^{\rho} e^{-\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{-\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\,d\tau\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[e^{\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{\frac{2i\pi}{3}}x\tau) + e^{-\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{-\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\right]d\tau \\ &= \mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{\pm\frac{i\pi}{6}} \exp(-\tau^3 \pm e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\,d\tau \\ &= \mathrm{Re}\left[e^{\pm\frac{i\pi}{6}}\int_0^{\infty} \exp(-\tau^3 \pm e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\,d\tau\right] \qquad (A)\end{aligned}$$

我们知道

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

那么合起来就有

$$e^{\pm x} = \sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{x^n}{n!}$$

由此有

$$\exp(\pm e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}x\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^k\frac{1}{k!}(e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}x\tau)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^k\frac{1}{k!}e^{\pm\frac{2}{3}ki\pi}x^k\tau^k$$

这样，式(A)右端的积分可写成

$$\int_0^{\infty}\exp(-\tau^3\pm e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\mathrm{d}\tau=\sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^k\frac{1}{k!}e^{\pm\frac{2}{3}ki\pi}x^k\int_0^{\infty}\tau^k\exp(-\tau^3)\mathrm{d}\tau \quad (B)$$

其中

$$\int_0^{\infty}\tau^k\exp(-\tau^3)\mathrm{d}\tau=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right)}{3}=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\left[\text{注意：这里利用了公式}\int_0^{\infty}x^n\exp(-ax^p)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right)}{pa^{\frac{n+1}{p}}}.\right]$$

把它代入式(B)后，有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\exp(-\tau^3\pm e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\mathrm{d}\tau&=\sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^k\frac{1}{k!}e^{\pm\frac{2}{3}ki\pi}x^k\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm x)^k\frac{1}{k!}e^{\pm\frac{2}{3}ki\pi}\Gamma\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right)\end{aligned}\quad (C)$$

再把式(C)代入式(A)，因此得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\cos(t^3\pm xt)\mathrm{d}t&=\mathrm{Re}\int_0^{\infty}e^{\pm\frac{i\pi}{6}}\exp(-\tau^3\pm e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}x\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm x)^k\frac{1}{k!}e^{\pm\left(\frac{2}{3}k+\frac{1}{6}\right)i\pi}\Gamma\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right)\right]\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm x)^k\frac{1}{k!}\cos\left[\left(\frac{2}{3}k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm x)^k\frac{1}{k!}\sin\left[\left(\frac{2}{3}k+\frac{2}{3}\right)\pi\right]\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm x)^k\frac{1}{k!}\sin\left[\frac{2}{3}(k+1)\pi\right]\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\pi\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\pm\frac{x}{3}\right)^{3k}}{k!\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}\mp\frac{x}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\pm\frac{x}{3}\right)^{3k}}{k!\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)}\right]\end{aligned}\quad (8.74)$$

这里，最后的式子是 De Morgan 得到的[26].

当式(8.74)用贝塞尔函数表达时，可得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\cos(t^3+xt)\mathrm{d}t&=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}\left[\mathrm{I}_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)-\mathrm{I}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\right]\\&=\frac{\sqrt{x}}{3}\mathrm{K}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\end{aligned}\quad (8.75\text{-}1)$$

$$\int_0^{\infty}\cos(t^3-xt)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}\left[\mathrm{J}_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)+\mathrm{J}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\right] \quad (8.75\text{-}2)$$

(8.75-1)和(8.75-2)两式就是我们得到的用分数阶贝塞尔函数表示的艾里积分.

关于式(8.74)最后一步,我们是这样推导的:

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm x)^k\frac{1}{k!}\sin\left[\frac{2}{3}(k+1)\pi\right]\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}\right)\quad(\text{令 } k=3m,3m+1,3m+2)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\sum_{\substack{k=3m\\m=0}}^{\infty}(\pm x)^{3m}\frac{1}{(3m)!}\sin\left[\frac{2}{3}(3m+1)\pi\right]\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\cdot 3m+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$+\sum_{\substack{k=3m+1\\m=0}}^{\infty}(\pm x)^{3m+1}\frac{1}{(3m+1)!}\sin\left[\frac{2}{3}(3m+2)\pi\right]\cdot\Gamma\left[\frac{1}{3}\cdot(3m+1)+\frac{1}{3}\right]$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=3m+2\\m=0}}^{\infty}(\pm x)^{3m+2}\frac{1}{(3m+2)!}\sin\left[\frac{2}{3}(3m+3)\pi\right]\cdot\Gamma\left[\frac{1}{3}\cdot(3m+2)+\frac{1}{3}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m}\frac{1}{(3m)!}\sin\left(2m\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\cdot\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m+1}\frac{1}{(3m+1)!}\sin\left(2m\pi+\frac{4}{3}\pi\right)\cdot\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)+0\right]$$

(括号内第三项的 0 是因为 $\sin 2(m+1)\pi=0$)

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m}\frac{1}{(3m)!}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cdot\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m+1}\frac{1}{(3m+1)!}\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\cdot\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m}\frac{1}{(3m)!}\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cdot\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\right.\quad\left(\text{用}\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\frac{1}{3}\pi\right)$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m+1}\frac{1}{(3m+1)!}\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cdot\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)\right]\quad\left(\text{用}\sin\frac{4}{3}\pi=-\sin\frac{1}{3}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m}\frac{1}{3^{3m}m!\left(m-\frac{1}{3}\right)!\left(m-\frac{2}{3}\right)!}\cdot\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}(\pm x)^{3m+1}\frac{1}{3^{3m+1}\left(m+\frac{1}{3}\right)!m!\left(m-\frac{1}{3}\right)!}\cdot\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\pm\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}\cdot\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\pm\frac{x}{3}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left(\pm\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!}\frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}\cdot\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\pm\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}\mp\frac{x}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\pm\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{4}{3}\right)}\right]$$

只要把 m 换成 k 就是式(8.73)的最后形式了,式中的 m 和 k 都是正整数.

8.3 含有勒让德函数的积分

勒让德函数是勒让德方程的解,而勒让德方程则是在球极坐标系中用分离变量法解拉普拉斯方程或其他方程时导出的.它在有心力场及点电荷的电场中有很好的应用.

例 21 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x$.

解 方法 1:被积函数 $\mathrm{P}_n(x)$ 为勒让德多项式,可表示为[式(8.33)]

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

把它代入积分式中得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\int_0^1 x^{n-2k}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\cdot\frac{1}{n-2k+1}\left(x^{n-2k+1}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}\\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k+1)!}\end{aligned}$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$($n$ 为偶数),$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$($n$ 为奇数).当 n 为偶数时,积分为零;而当 n 为奇数时,积分会有非零值.详情请看方法 2.

方法 2:利用勒让德函数的递推公式

$$(2n+1)\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{P}_{n+1}'(x) - \mathrm{P}_{n-1}'(x)$$

或

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_{n+1}(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_{n-1}(x)\right]$$

两边同时积分,得

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\left[\int_0^1 \frac{d}{dx}P_{n+1}(x)dx - \int_0^1 \frac{d}{dx}P_{n-1}(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]_0^1$$

当 n 为偶数时，令 $n=2m$，则

$$\int_0^1 P_{2m}(x)dx = \frac{1}{4m+1}\left[P_{2m+1}(x) - P_{2m-1}(x)\right]_0^1 = 0$$

因为

$$P_{2m+1}(1) = P_{2m-1}(1) = 1$$

$$P_{2m+1}(0) = P_{2m-1}(0) = 0$$

当 n 为奇数时，令 $n=2m+1$，则

$$\int_0^1 P_{2m+1}(x)dx = \frac{1}{4m+3}\left[P_{2m+2}(x) - P_{2m}(x)\right]_0^1$$

虽然

$$P_{2m+2}(1) - P_{2m}(1) = 1 - 1 = 0$$

但是

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$P_{2m+2}(0) = (-1)^{m+1} \frac{(2m+2)!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}$$

以上使用了勒让德多项式的几个特殊点的值：

$$P_n(1) = 1,\quad P_{2n+1}(0) = 0,\quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

因此得到

$$\int_0^1 P_{2m+1}(x)dx$$

$$= \frac{1}{4m+3}\left[P_{2m}(0) - P_{2m+2}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{4m+3}\left\{(-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} - (-1)^{m+1} \frac{(2m+2)!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4m+3}\left[(-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} - (-1)^1(-1)^m \frac{(2m+2)(2m+1)(2m)!}{2^2 2^{2m}(m+1)^2(m!)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4m+3}\left[1 + \frac{(2m+2)(2m+1)}{2^2(m+1)^2}\right](-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$= \frac{1}{4m+3}\left(1 + \frac{2m+1}{2m+2}\right)(-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$= \frac{1}{4m+3} \cdot \frac{4m+3}{2m+2} \cdot (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m+1)!m!}$$

$$= (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!} \quad (n = 2m+1) \tag{8.76}$$

例 22 计算积分 $\int_1^{\infty} Q_n(x)\mathrm{d}x$.

解 把

$$Q_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; n+\frac{3}{2}; x^{-2}\right)$$

代入积分式中,得

$$\int_1^{\infty} Q_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; n+\frac{3}{2}; x^{-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \int_1^{\infty} x^{-n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_k \left(\frac{n+2}{2}\right)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k} x^{-2k}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_k \left(\frac{n+2}{2}\right)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k} \int_1^{\infty} x^{-n-2k-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_k \left(\frac{n+2}{2}\right)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k} \cdot \frac{1}{n+2k}$$

$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k} \cdot \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)_k}{\frac{n}{2}+k}$$

$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!\, n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_k \left(\frac{n}{2}\right)_k}{k!\left(n+\frac{3}{2}\right)_k}$$

$$= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!\, n} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}; n+\frac{3}{2}; 1\right)$$

其中的超几何函数 F 为

$$F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}; n+\frac{3}{2}; 1\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

[应用公式 $8.14\ F(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$.]

上式右端分母可化为

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+2)}{2^{n+1}}$$

分子可化为

$$\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma(n+1)}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left(\frac{n+1}{2},\frac{n}{2};n+\frac{3}{2};1\right)&=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma(n+1)}\cdot\frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+2)}\\&=\frac{\Gamma(2n+2)}{2^{n}\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)}=\frac{(2n+1)!}{2^{n}n!(n+1)!}\\&=\frac{(2n+1)!}{2^{n}n!(n+1)!}=\frac{(2n+1)!}{2^{n}(n+1)\,(n!)^{2}}\end{aligned}$$

最后得到积分的结果是

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty}\mathrm{Q}_{n}(x)\mathrm{d}x&=\frac{2^{n}\,(n!)^{2}}{(2n+1)!n}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^{n}(n+1)\,(n!)^{2}}\\&=\frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}\tag{8.77}$$

例 23　求积分 $\int_{0}^{1}x^{\lambda}\mathrm{P}_{n}(x)\mathrm{d}x$.

解　把 $\mathrm{P}_{n}(x)=\dfrac{1}{2^{n}n!}\dfrac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}(x^{2}-1)^{n}$[式(8.34)]代入积分式中，先看积分

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}x^{\lambda}\mathrm{P}_{n}(x)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{1}x^{\lambda}\,\frac{1}{2^{n}n!}\,\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\,(x^{2}-1)^{n}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2^{n}n!}\int_{-1}^{1}x^{\lambda}\,\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\,(x^{2}-1)^{n}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

该式右边的积分使用分部积分法，得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}x^{\lambda}\,\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\,(x^{2}-1)^{n}\mathrm{d}x\\&=\left[x^{\lambda}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,(x^{2}-1)^{n}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,(x^{2}-1)^{n}\lambda x^{\lambda-1}\mathrm{d}x\\&=0-\lambda\int_{-1}^{1}x^{\lambda-1}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,(x^{2}-1)^{n}\mathrm{d}x\\&=-\lambda\left[x^{\lambda-1}\,\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,(x^{2}-1)^{n}\right]_{-1}^{1}+\lambda\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\,(x^{2}-1)^{n}(\lambda-1)x^{\lambda-2}\mathrm{d}x\\&=0+\lambda(\lambda-1)\int_{-1}^{1}x^{\lambda-2}\,\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\,(x^{2}-1)^{n}\mathrm{d}x\\&\cdots\\&=(-1)^{n}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)\int_{-1}^{1}(x^{\lambda})^{(n)}\,(x^{2}-1)^{n}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

使用分部积分法 n 次后，当 $\lambda<n$ 时，有

$$\int_{-1}^{1}x^{\lambda}\,\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\,(x^{2}-1)^{n}\mathrm{d}x=0$$

因为

$$(x^{\lambda})^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{\lambda} = 0$$

因此

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

当 $\lambda = n$ 时,有

$$(x^{\lambda})^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{\lambda} = \lambda! = n!$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} x^{n} P_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n n!}(-1)^n n!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\int_{-1}^{1}(-1)^n(1-x^2)^n\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{2^n}\int_{-1}^{1}(1+x)^n(1-x)^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{1+x}{2}$,则

$$x = 2t-1,\quad \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t,\quad 1+x = 2t,\quad 1-x = 2(1-t)$$

当 $x=-1$ 时,$t=0$;$x=1$ 时,$t=1$,所以有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^n}\int_{0}^{1}(2t)^n[2(1-t)]^n 2\mathrm{d}t \\ &= \frac{2^{2n+1}}{2^n}\int_{0}^{1} t^{n+1-1}(1-t)^{n+1-1}\mathrm{d}t \\ &= 2^{n+1}\mathrm{B}(n+1,n+1) \\ &= 2^{n+1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \\ &= \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (\lambda = n)\end{aligned}$$

当整数 $\lambda > n$ 时,有

$$(x^{\lambda})^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{\lambda} = \frac{\lambda!}{(\lambda-n)!}x^{\lambda-n}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda!}{(\lambda-n)!}x^{\lambda-n}(1-x^2)^n\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda!}{2^n n!(\lambda-n)!}\int_{-1}^{1} x^{\lambda-n}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

该式中,当 $\lambda-n$ 为奇数时,右端的被积函数为奇函数,积分为零;而当 $\lambda-n$ 为偶

数时，右端的被积函数为偶函数，积分可写成

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{\lambda!}{2^n n!(\lambda-n)!}\int_0^1 x^{\lambda-n}(1-x^2)^n \mathrm{d}x$$

令 $x^2 = t$，则

$$x = t^{\frac{1}{2}}, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

当 $x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时，$t=1$，于是得到

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x &= 2 \cdot \frac{\lambda!}{2^n n!(\lambda-n)!}\int_0^1 t^{\frac{\lambda-n}{2}}(1-t)^n \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda!}{2^n n!(\lambda-n)!}\int_0^1 t^{\frac{\lambda-n-1}{2}}(1-t)^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda!}{2^n n!(\lambda-n)!}\int_0^1 t^{\frac{\lambda-n+1}{2}-1}(1-t)^{n+1-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda!}{2^n n!(\lambda-n)!}\mathrm{B}\left(\frac{\lambda-n+1}{2}, n+1\right) \\
&= \frac{\lambda!}{2^n n!(\lambda-n)!}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda-n+1)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \quad (\lambda > n)
\end{aligned}$$

当被积函数是偶函数的情况下，最后得到

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1}\Gamma(\lambda-n+1)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \quad (\lambda > n) \qquad (8.78)
\end{aligned}$$

以及当 $\lambda = n$ 时，有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\lambda} P_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^n P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1}\Gamma(1)} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}0!} \cdot \frac{2^{2n+1}\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+2)} \\
&= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \quad (\lambda = n)
\end{aligned}$$

与前面的结果一样.

例 24　求积分 $\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P_{\nu}^{m}(x)\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\nu}^{m}(x)&=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{P}_{\nu}(x)\\&=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{1}{2^{\nu}\nu!}\frac{\mathrm{d}^{\nu}}{\mathrm{d}x^{\nu}}(x^2-1)^{\nu}\right]\\&=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2^{\nu}\nu!}\frac{\mathrm{d}^{\nu+m}}{\mathrm{d}x^{\nu+m}}(x^2-1)^{\nu}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\mathrm{P}_{\nu}^{m}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2^{\nu}\nu!}\frac{\mathrm{d}^{\nu+m}}{\mathrm{d}x^{\nu+m}}(x^2-1)^{\nu}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2^{\nu}\nu!}\int_0^1 x^{\sigma}\frac{\mathrm{d}^{\nu+m}}{\mathrm{d}x^{\nu+m}}(x^2-1)^{\nu}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{A}$$

当整数 $\sigma\geqslant\nu+m$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}^{\nu+m}}{\mathrm{d}x^{\nu+m}}x^{\sigma}=\frac{\sigma!}{(\sigma-\nu-m)!}x^{\sigma-\nu-m}$$

这时，对式(A)右端的积分运用分部积分法 $\nu+m$ 次后，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\mathrm{P}_{\nu}^{m}(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2^{\nu}\nu!}\int_0^1\frac{\sigma!}{(\sigma-\nu-m)!}x^{\sigma-\nu-m}(x^2-1)^{\nu}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sigma!}{2^{\nu}\nu!(\sigma-\nu-m)!}\int_0^1 x^{\sigma-\nu-m}(x^2-1)^{\nu}\mathrm{d}x\\&=(-1)^{\nu}\frac{\sigma!}{2^{\nu}\nu!(\sigma-\nu-m)!}\int_0^1 x^{\sigma-\nu-m}(1-x^2)^{\nu}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $x^2=t$，那么 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$；当 $x=0,t=0$；$x=1,t=1$，于是就有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\mathrm{P}_{\nu}^{m}(x)\mathrm{d}x\\&=(-1)^{\nu}\frac{\sigma!}{2^{\nu}\nu!(\sigma-\nu-m)!}\int_0^1 t^{\frac{\sigma-\nu-m}{2}}(1-t)^{\nu}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\&=(-1)^{\nu}\frac{\sigma!}{2^{\nu+1}\nu!(\sigma-\nu-m)!}\int_0^1 t^{\frac{\sigma-\nu-m+1}{2}-1}(1-t)^{\nu+1-1}\mathrm{d}t\\&=(-1)^{\nu}\frac{\sigma!}{2^{\nu+1}\nu!(\sigma-\nu-m)!}\mathrm{B}\left(\frac{\sigma-\nu-m+1}{2},\nu+1\right)\\&=(-1)^{\nu}\frac{\sigma!}{2^{\nu+1}\nu!(\sigma-\nu-m)!}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu-m+1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu-m+3}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$= (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\sigma+1)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu-m+1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma-\nu-m+1)\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu-m+3}{2}\right)}$$

$$= (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\sigma+1)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu-m+1}{2}\right)}{2^{\nu+1}\Gamma(\sigma-\nu-m+1)\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu-m+3}{2}\right)}$$

其中

$$\Gamma(\sigma-\nu-m+1) = \frac{2^{\sigma-\nu-m}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu-m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu-m+2}{2}\right)$$

$$\Gamma(\sigma+1) = \frac{2^{\sigma}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right)$$

因此得到

$$\int_0^1 x^{\sigma}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\mathrm{P}_{\nu}{}^{m}(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{\nu}2^{m-1}\Gamma\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu-m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu-m+3}{2}\right)} \tag{8.79}$$

例 25　求积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x$.

解　先看积分

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x$$

其中 $f_k(x)$为 k 次多项式，$\mathrm{P}_m(x)$为 m 次勒让德多项式：

$$\mathrm{P}_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m$$

因此

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1} f_k(x)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\mathrm{d}x$$

对该式右端的积分做 k 次分部积分，得

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{2^m m!}f_k^{(k)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m-k}}{\mathrm{d}x^{m-k}}(x^2-1)^m\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^m m!}f_k^{(k)}(x)\left[\frac{\mathrm{d}^{m-k-1}}{\mathrm{d}x^{m-k-1}}(x^2-1)^m\right]_{-1}^{1} \tag{A}$$

其中 $f_k{}^{(k)}(x)$是多项式 $f_k(x)$的 k 次微商，是一个常数.

当 $k<m$ 时，有

$$\left[\frac{\mathrm{d}^{m-k-1}}{\mathrm{d}x^{m-k-1}}(x^2-1)^m\right]_{-1}^{1} = 0$$

所以

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (k < m)$$

若 $f_k(x)$是另一个勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)$,则有

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (l \neq m) \tag{B}$$

这就是勒让德多项式之间的正交性.

当 $l = m$ 时,则式(A)为

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_m(x)]^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!}\mathrm{P}_m{}^{(m)}(x)\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{C}$$

其中 $\mathrm{P}_m{}^{(m)}(x)$为 $\mathrm{P}_m(x)$的 m 次微商,即

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_m{}^{(m)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\right] \\ &= \frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}(x^2-1)^m\end{aligned}$$

该式右端的$(x^2-1)^m$ 用牛顿二项式公式展开,有

$$(x^2-1)^m = x^{2m} - mx^{2m-1} + m(m-1)x^{2m-2} - \cdots$$

因为展开式的最高次幂为 $2m$,所以对它进行 $2m$ 次微分后,得到

$$\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}(x^2-1)^m = (2m)!$$

因此

$$\mathrm{P}_m{}^{(m)}(x) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \tag{D}$$

式(C)右边的积分

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\mathrm{d}x &= (-1)^m\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\mathrm{d}x \\ &= (-1)^m\int_{-1}^{1}(1+x)^m(1-x)^m\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $t = \dfrac{1+x}{2}$,那么 $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$;当 $x = -1$ 时,$t = 0$;当 $x = 1$ 时,$t = 1$,于是

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\mathrm{d}x &= (-1)^m\int_{0}^{1}(2t)^m[2(1-t)]^m 2\mathrm{d}t \\ &= (-1)^m 2^{2m+1}\int_0^1 t^m(1-t)^m\mathrm{d}t \\ &= (-1)^m 2^{2m+1}\mathrm{B}(m+1,m+1) \\ &= (-1)^m 2^{2m+1}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(2m+2)} \\ &= (-1)^m 2^{2m+1}\frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\end{aligned} \tag{E}$$

把式(D)和式(E)代入式(C)中,则有

$$\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_m(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m}{2^m m!}\cdot\frac{(2m)!}{2^m m!}\cdot\frac{(-1)^m 2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}$$

$$=\frac{2}{2m+1}\tag{F}$$

或

$$\int_{0}^{1}[\mathrm{P}_m(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2m+1}$$

(B)和(F)两式可合写为

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (l\neq m)\\ \dfrac{2}{2m+1} & (l=m)\end{cases}\tag{8.80}$$

勒让德多项式自乘的积分也可用另一方法来做 $\left\{\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_n(x)]^2\mathrm{d}x\right\}$:

把 $\mathrm{P}_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ 代入积分式中,则有

$$\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

对该式右边的积分运用分部积分法 n 次,得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$=0+(-1)^1\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$\cdots$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^{1}\left[\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^{1}(2n)!(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{2n}(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$$

令 $x=\cos\theta$,则

$$(1-x^2)^n=(1-\cos^2\theta)^n=\sin^{2n}\theta;\quad \mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

当 $x=-1$ 时，$\theta=\pi$；而当 $x=1$ 时，$\theta=0$，因此有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{0}\sin^{2n}\theta\cdot(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= -\int_{\pi}^{0}(\sin\theta)^{2n+1}\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi}(\sin\theta)^{2n+1}\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2n+1}\mathrm{d}\theta = 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_n(x)]^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\cdot(-1)^{2n}(2n)!\cdot 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\ &= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{2^n n!\cdot 2^n n!}{(2n+1)!}\\ &= \frac{2}{(2n+1)}\end{aligned}$$

后一种方法似乎更简便些.

例 26 计算积分 $\int_{-1}^{1}x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x$.

解 利用勒让德函数的递推公式(8.35)：

$$(2m+1)x\mathrm{P}_m(x)=(m+1)\mathrm{P}_{m+1}(x)+m\mathrm{P}_{m-1}(x)$$

两边乘以 $p_l(x)$，得

$$(2m+1)x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)=(m+1)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{m+1}(x)+m\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{m-1}(x)$$

把它写成

$$x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)=\frac{m+1}{2m+1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{m+1}(x)+\frac{m}{2m+1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{m-1}(x)$$

两边在区间[-1,1]上同时积分，得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{m+1}{2m+1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{m+1}(x)\mathrm{d}x+\frac{m}{2m+1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{m-1}(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{m+1}{2m+1}\cdot\frac{2}{2(m+1)+1}\delta_{l,m+1}+\frac{m}{2m+1}\cdot\frac{2}{2(m-1)+1}\delta_{l,m-1}\\ &=\frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)}\delta_{l,m+1}+\frac{2m}{(2m+1)(2m-1)}\delta_{l,m-1}\end{aligned}\tag{8.81}$$

其中

$$\delta_{l,m+1}=\begin{cases}1 & (l=m+1)\\ 0 & (l\neq m+1)\end{cases},\quad \delta_{l,m-1}=\begin{cases}1 & (l=m-1)\\ 0 & (l\neq m-1)\end{cases}$$

例 27 求积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x)\mathrm{d}x$.

解 把

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x),\quad P_k^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_k(x)$$

代入积分式中，得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx&=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_k(x)dx\\&=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\cdot\frac{d^m}{dx^m}P_k(x)dx\\&=\int_{-1}^{1}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right]\cdot\frac{d^mP_k(x)}{dx^m}dx\end{aligned}$$

用分部积分法得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx&=\int_{-1}^{1}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right]\cdot\frac{d^mP_k(x)}{dx^m}dx\\&=\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^{m-1}P_k(x)}{dx^{m-1}}\right]_{-1}^{1}\\&\quad-\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right]\cdot\frac{d^{m-1}P_k(x)}{dx^{m-1}}dx\\&=0+(-1)^1\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right]\cdot\frac{d^{m-1}P_k(x)}{dx^{m-1}}dx\\&=(-1)^2\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{dx^2}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right]\cdot\frac{d^{m-2}P_k(x)}{dx^{m-2}}dx\\&\cdots\end{aligned}$$

如此继续进行下去，直到 m 次后，得到

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx=(-1)^m\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right]\cdot P_k(x)dx\quad(A)$$

其中 $\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right]$ 也是一个 l 次多项式，当 $l\neq k$ 时，由于勒让德函数的正交性，右边的积分为 0，即

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx=0\qquad(B)$$

当 $l=k$ 时($m<k$)

$$\begin{aligned}&\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{2^kk!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\right]\right\}\text{的首项}\\&=\frac{1}{2^kk!}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x^2)^m\left[\frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}}(x^{2k}-kx^{2k-1}+k(k-1)x^{2k-2}-\cdots)\right]\right\}\text{的首项}\\&=\frac{1}{2^kk!}\frac{d^m}{dx^m}\left[(-1)^m(x^2-1)^m\frac{(2k)!}{(2k-m-k)!}(x^2-1)^{\frac{k-m}{2}}\right]\text{的首项}\\&=\frac{(-1)^m}{2^kk!}\frac{(2k)!}{(k-m)!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^{\frac{k+m}{2}}\text{ 的首项}\\&=\frac{(-1)^m}{2^kk!}\frac{(2k)!}{(k-m)!}\frac{d^m}{dx^m}\left(x^{k+m}-\frac{k+m}{2}x^{k+m-1}+\cdots\right)\text{的首项}\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^k k!} \frac{(2k)!}{(k-m)!} \frac{(k+m)!}{k!} x^k \tag{C}$$

由分部积分知，对低于 k 次的多项式 $f(x)$，总有 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0$. 把式(C)代入式(A)中，有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x &= (-1)^m \int_{-1}^{1} \frac{(-1)^m (2k)!(k+m)!}{2^k (k!)^2 (k-m)!} x^k \cdot \mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^{2m}(2k)!(k+m)!}{2^k (k!)^2 (k-m)!} \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(2k)!(k+m)!}{2^k (k!)^2 (k-m)!} \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} \\ &= \frac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot \frac{2}{(2k+1)} \end{aligned} \tag{D}$$

把(B)和(D)两式合起来，得到

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (l \neq k) \\ \dfrac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot \dfrac{2}{2k+1} & (l = k) \end{cases} \tag{8.82}$$

例 28 计算积分 $\int_{-1}^{1} x\mathrm{P}_l{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x)\mathrm{d}x$.

解 利用连带勒让德函数的递推公式

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l{}^m(x) = (l+m)\mathrm{P}_{l-1}{}^m(x) + (l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}{}^m(x)$$

两边乘以 $\mathrm{P}_k{}^m(x)$，得

$$\begin{aligned}(2l+1)x\mathrm{P}_l{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x) &= (l+m)\mathrm{P}_{l-1}{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x) \\ &\quad + (l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x)\end{aligned}$$

改写为

$$x\mathrm{P}_l{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x) = \frac{l+m}{2l+1}\mathrm{P}_{l-1}{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x) + \frac{l-m+1}{2l+1}\mathrm{P}_{l+1}{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x)$$

两边同时积分，并利用例 27 的结果，得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} x\mathrm{P}_l{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{l+m}{2l+1}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{l-1}{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x)\mathrm{d}x + \frac{l-m+1}{2l+1}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{l+1}{}^m(x)\mathrm{P}_k{}^m(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{l+m}{2l+1} \cdot \frac{(l-1+m)!}{(l-1-m)!} \cdot \frac{2}{2(l-1)+1}\delta_{l-1,k} \\ &\quad + \frac{l-m+1}{2l+1} \frac{(l+1+m)!}{(l+1-m)!} \cdot \frac{2}{2(l+1)+1}\delta_{l+1,k} \\ &= \frac{l+m}{2l+1} \cdot \frac{(l+m-1)!}{(l-m-1)!} \cdot \frac{2}{2l-1}\delta_{l-1,k} \\ &\quad + \frac{l-m+1}{2l+1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m+1)!} \cdot \frac{2}{2l+3}\delta_{l+1,k}\end{aligned} \tag{8.83}$$

其中

$$\delta_{l-1,k}=\begin{cases}1 & (l-1=k)\\ 0 & (l-1\neq k)\end{cases},\quad \delta_{l+1,k}=\begin{cases}1 & (l+1=k)\\ 0 & (l+1\neq k)\end{cases}$$

我们在做两个函数的乘积的积分时，曾多次应用迭次分部积分法. 这里把一般的迭次分部积分法的公式写出来，以资参照.

众所周知，基本的分部积分公式是

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

其中 u 和 v 是 x 的函数. 当 u 或 v 是以对 x 的高阶微商(导数)出现时，如 v 以 $v^{(n)}=\dfrac{\mathrm{d}^n v}{\mathrm{d}x^n}$ 的形式出现在积分的被积函数中，则

$$\int uv^{(n)}\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v^{(n-1)}=uv^{(n-1)}-\int v^{(n-1)}\mathrm{d}u=uv^{(n-1)}-\int u'v^{(n-1)}\mathrm{d}x$$

类似地有

$$\int u'v^{(n-1)}\mathrm{d}x=u'v^{(n-2)}-\int u''v^{(n-2)}\mathrm{d}x$$

$$\int u''v^{(n-2)}\mathrm{d}x=u''v^{(n-3)}-\int u'''v^{(n-3)}\mathrm{d}x$$

$$\cdots$$

$$\int u^{(n-1)}v'\mathrm{d}x=u^{(n-1)}v-\int u^{(n)}v\mathrm{d}x$$

用 $+1$ 和 -1 轮流地乘这些等式，并把它们左、右两边分别加起来，消去相同的项，就得到

$$\int uv^{(n)}\mathrm{d}x=uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+u''v^{(n-3)}-\cdots+(-1)^n\int u^{(n)}v\mathrm{d}x \tag{8.84}$$

在定积分的情况，则要加上积分的上、下限，如

$$\int_a^b uv^{(n)}\mathrm{d}x=\left[uv^{(n-1)}\right]_a^b-\left[u'v^{(n-2)}\right]_a^b+\left[u''v^{(n-3)}\right]_a^b-\cdots+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}v\mathrm{d}x \tag{8.85}$$

当被积函数的因式中之一是整多项式时，使用这个公式是特别方便的. 我们在前面的算例中多次使用的就是这个公式.

8.4　含有超几何函数的积分

例 29　计算积分 $\int_0^\infty z^{-s-1}\mathrm{F}(a,b;c;-z)\mathrm{d}z$.

解　使用公式(8.15)：$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\dfrac{z}{z-1}\right)$，有

$$F(a,b;c;-z)=(1+z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z+1}\right)$$

把它代入积分式中,得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty z^{-s-1}F(a,b;c;-z)\mathrm{d}z&=\int_0^\infty z^{-s-1}(1+z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z+1}\right)\mathrm{d}z\\&=\int_0^\infty\frac{z^{-s-1}}{(1+z)^a}\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(c-b)_n}{n!(c)_n}\left(\frac{z}{z+1}\right)^n\mathrm{d}z\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(c-b)_n}{n!(c)_n}\int_0^\infty\frac{z^{n-s-1}}{(1+z)^{a+n}}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

使用公式 $\int_0^\infty\frac{x^m}{(a+bx)^n}\mathrm{d}x=\frac{B(m+1,n-m-1)}{a^{n-m-1}b^{m+1}}$,得到该式右端的积分为

$$\int_0^\infty\frac{z^{n-s-1}}{(1+z)^{a+n}}\mathrm{d}z=B(n-s,a+s)=\frac{\Gamma(n-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(a+n)}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty z^{-s-1}F(a,b;c;-z)\mathrm{d}z&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(c-b)_n}{n!(c)_n}\cdot\frac{\Gamma(n-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(a+n)}\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(c-b)_n}{n!(c)_n}\cdot\frac{(-s)_n\Gamma(-s)\cdot\Gamma(a+s)}{(a)_n\Gamma(a)}\\&=\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-s)_n(c-b)_n}{n!(c)_n}\\&=\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}F(-s,c-b;c;1)\quad[\text{用式(8.14)}]\\&=\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(b)}\\&=\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c)\Gamma(-s)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+s)}\end{aligned}$$

例 30 计算积分 $\int_0^1x^{q-1}(1-x)^{\beta-q-1}F(\alpha,\beta;\gamma;x)\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}&\int_0^1x^{q-1}(1-x)^{\beta-q-1}F(\alpha,\beta;\gamma;x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1x^{q-1}(1-x)^{\beta-q-1}\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}\int_0^1x^{n+q-1}(1-x)^{\beta-q-1}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}B(n+q,\beta-q)\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}\cdot\frac{\Gamma(n+q)\Gamma(\beta-q)}{\Gamma(n+\beta)}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} \cdot \frac{(q)_n \Gamma(q) \cdot \Gamma(\beta - q)}{(\beta)_n \Gamma(\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(q)\Gamma(\beta - q)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (q)_n}{n!(\gamma)_n}$$

$$= \frac{\Gamma(q)\Gamma(\beta - q)}{\Gamma(\beta)} F(\alpha, q; \gamma; 1)$$

$$= \frac{\Gamma(q)\Gamma(\beta - q)}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - q)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - q)}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)\Gamma(\beta - q)\Gamma(\gamma - \alpha - q)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - q)}$$

$(\mathrm{Re}q > 0, \mathrm{Re}(\beta - q) > 0, \mathrm{Re}(\gamma - \alpha - q) > 0.)$

例 31　计算积分 $\int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{\gamma-1} e^{-\mu x} F(\alpha, \beta; \gamma; 1 - e^{-x}) dx$.

解　把 F 表示为求和形式代入积分式中，得到

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{\gamma-1} e^{-\mu x} F(\alpha, \beta; \gamma; 1 - e^{-x}) dx$$

$$= \int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{\gamma-1} e^{-\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!(\gamma)_k} (1 - e^{-x})^k dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!(\gamma)_k} \int_0^{\infty} e^{-\mu x} (1 - e^{-x})^{k+\gamma-1} dx$$

在右端的积分式中，令 $e^{-x} = y$，则 $dx = -\frac{dy}{y}$；当 $x = 0$ 时，$y = 1$；当 $x = \infty$ 时，$y = 0$，于是右端的积分式为

$$\int_0^{\infty} (e^{-x})^{\mu} (1 - e^{-x})^{k+\gamma-1} dx = -\int_1^0 y^{\mu} (1 - y)^{k+\gamma-1} \frac{dy}{y}$$

$$= \int_0^1 y^{\mu-1} (1 - y)^{k+\gamma-1} dy$$

$$= B(\mu, k + \gamma) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\mu + \gamma + k)}$$

因此得到

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{\gamma-1} e^{-\mu x} F(\alpha, \beta; \gamma; 1 - e^{-x}) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!(\gamma)_k} \cdot \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\mu + \gamma + k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!(\gamma)_k} \cdot \frac{\Gamma(\mu)(\gamma)_k \Gamma(\gamma)}{(\mu + \lambda)_k \Gamma(\mu + \gamma)}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\mu + \gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!(\mu + \gamma)_k} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\mu + \gamma)} F(\alpha, \beta; \mu + \gamma; 1)$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\mu + \gamma)} \cdot \frac{\Gamma(\mu + \gamma)\Gamma(\mu + \gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\mu + \gamma - \alpha)\Gamma(\mu + \gamma - \beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma)\Gamma(\mu + \gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\mu + \gamma - \alpha)\Gamma(\mu + \gamma - \beta)}$$

8.5 马蒂厄函数的积分

8.5.1 马蒂厄方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+(\lambda+2q\cos 2z)y=0 \tag{8.86}$$

的解称为马蒂厄函数.马蒂厄函数是指那些周期为 π 或 2π 的解.只有参数 λ 和 q 满足一定的关系时方程才有 π 或 2π 的周期解.周期解有 4 种,它们是全周期解 $ce_{2n}(z,q)$和$se_{2n+2}(z,q)$,半周期解$ce_{2n+1}(z,q)$ 和$se_{2n+1}(z,q)$. 因此马蒂厄函数分别为

$$ce_{2n}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}{}^{(2n)}\cos 2rz \tag{8.87-1}$$

$$ce_{2n+1}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}{}^{(2n+1)}\cos(2r+1)z \tag{8.87-2}$$

$$se_{2n+1}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}{}^{(2n+1)}\sin(2r+1)z \tag{8.87-3}$$

$$se_{2n+2}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+2}{}^{(2n+2)}\sin(2r+2)z \tag{8.87-4}$$

其中 $A_{2r}{}^{(2n)}$,$A_{2r+1}{}^{(2n+1)}$,$B_{2r+1}{}^{(2n+1)}$,$B_{2r+2}{}^{(2n+2)}$是 q 的函数.

马蒂厄函数可被归一化为

$$\int_0^{2\pi}y^2\mathrm{d}z=\pi \tag{8.88}$$

或

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y^2\mathrm{d}z=1$$

这里,y 代表$ce_{2n}(z,q)$,$se_{2n+2}(z,q)$,$ce_{2n+1}(z,q)$ 和 $se_{2n+1}(z,q)$中的任何一个函数.因此有

$$2[A_0{}^{(2n)}]^2+\sum_{r=1}^{\infty}[A_{2r}{}^{(2n)}]^2=\sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r+1}{}^{(2n+1)}]^2=\sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+1}{}^{(2n+1)}]^2$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+2}{}^{(2n+2)}]^2=1 \tag{8.89}$$

马蒂厄方程的来源之一是在柱坐标中用分离变量法解亥姆霍兹(Helmholtz)方程得到的.马蒂厄方程具有周期解时是一种振荡方程,当 $q\to 0$,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} + \lambda y = 0 \tag{8.90}$$

这就是希尔(Hill)方程.它也是一个具有周期性的振荡方程,它在粒子加速器的粒子动力学研究中是一个很重要的方程.

当 $q\to 0$ 时,有

$$\lim_{q\to 0} \mathrm{ce}_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{q\to 0} \mathrm{ce}_n(z) = \cos nz \quad (n \neq 0)$$

$$\lim_{q\to 0} \mathrm{se}_n(z) = \sin nz$$

8.5.2　马蒂厄函数积分算例

1. 由马蒂厄函数的周期性及其三角级数表达式可知,它是正交函数,即有

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_m(z,q)\,\mathrm{ce}_p(z,q)\mathrm{d}z = 0 \quad (m \neq p)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{se}_m(z,q)\mathrm{se}_p(z,q)\mathrm{d}z = 0 \quad (m \neq p)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_m(z,q)\mathrm{se}_p(z,q)\mathrm{d}z = 0 \quad (m = 1,2,3,\cdots, p = 1,2,3,\cdots)$$

2. 马蒂厄函数自乘的积分

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} [\mathrm{ce}_{2n}(z,q)]^2\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \Big[\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}{}^{(2n)} \cos 2rz\Big]^2\mathrm{d}z \\ &= \Big[\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}{}^{(2n)}\Big]^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 z\mathrm{d}z \\ &= \left\{2[A_0{}^{(2n)}] + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2r}{}^{(2n)}\right\} \cdot 2\int_0^{\pi} \cos z\mathrm{d}z \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

这里使用了公式 $\int_0^{\pi} \cos^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{2\pi} [\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q)]^2\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \Big[\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}{}^{(2n+1)} \cos(2r+1)z\Big]^2\mathrm{d}z$$

$$= \left[\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}\right]^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 z \mathrm{d}z = 1 \cdot \pi = \pi$$

同理,可得

$$\int_0^{2\pi} [se_{2n+1}(z,q)]^2 \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)z\right]^2 \mathrm{d}z = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} [se_{2n+2}(z,q)]^2 \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)z\right]^2 \mathrm{d}z = \pi$$

参 考 书 目

[1] Edwards J. A Treatise on the Integral Calculus with Applications, Example and Problems [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1954.

[2] 菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程[M]. 8 版. 北京:高等教育出版社,2009.

[3] 斯米尔诺夫 B H. 高等数学教程:一、二卷[M]. 北京:高等教育出版社,1956.

[4] 华罗庚. 高等数学引论:一、二册[M]. 北京:高等教育出版社,2009.

[5] 龚昇,张声雷. 简明微积分[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2005.

[6] Fong Yuen, Wang Yuan. Calculus[M]. Singapore: Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd.,2000.

[7] Thomas G B, Finney R L, et al. Thomas' Calculus[M]. 10 版. 北京:高等教育出版社,2004.

[8] Edwards C H, Penney D E. Calculus[M]. fifth edition. Prentice Hall Inc.,1998.

[9] 常庚哲,史济怀. 数学分析教程:上、下册[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2012.

[10] 中国科学技术大学高等数学教研室. 高等数学导论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2009.

[11] 王树禾,毛瑞庭. 简明高等数学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2002.

[12] 谢盛刚,李娟,陈秋桂. 微积分:上、下册[M]. 北京:科学出版社,2012.

[13] 朱永银,郭文秀,朱若霞. 组合积分法[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002.

[14] 龚昇. 微积分五讲[M]. 北京:科学出版社,2004.

[15] 普里瓦洛夫 H. 复变函数引论[M]. 北京:高等教育出版社,1956.

[16] 史济怀,刘太顺. 复变函数[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2011.

[17] 严镇军. 复变函数[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2010.

[18] 王竹溪. 特殊函数概论[M]. 北京:北京大学出版社,2000.

[19] 刘式适,刘式达. 特殊函数[M]. 北京:气象出版社,2002.

[20] 季孝达,薛兴恒,陆英,等. 数学物理方程[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2009.

[21] 严镇军. 数学物理方程[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1996.

[22] 郭敦仁.数学物理方法[M].北京:人民教育出版社,1979.
[23] 梁昆淼.数学物理方法[M].北京:人民教育出版社,1960.
[24] 吴崇试.数学物理方法[M].北京:北京大学出版社,2003.
[25] 奚定平.贝塞尔函数[M].北京:高等教育出版社,1998.
[26] Watson G N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions[M]. London: Cambridge University Press, 1995.
[27] Luke Y L. Integrals of Bessel Functions[M]. McGraw-Hill Book Company Inc, 1962.
[28] 《实用积分表》编委会.实用积分表[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2006.
[29] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products [M]. sixth edition. U. S.: Academic Press, 2000.
[30] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematic Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables[M]. U. S.: National Bureau of Standards, 1965.
[31] 《数学手册》编写组.数学手册[M].北京:高等教育出版社,1979.
[32] 李文林.数学史概论[M].北京:高等教育出版社,2011.
[33] 斯科特 J F.数学史[M].南京:译林出版社,2012.
[34] 博耶 C B. 数学史[M].北京:中央编译出版社,2012.

高校核心课程学习指导丛书

微积分学习指导（上册）
微积分学习指导（下册）
▶ 积分的方法与技巧
高等数学导论学习辅导（第2版）
数学物理方法习题全解
微分几何学习指导
线性代数学习指导
数学分析范例选解
量子力学学习指导
全新量子力学习题
应用光学试题与解析
综合化学——无机化学·分析化学·有机化学
物理化学——概念辨析·解题方法·应用实例（第4版）
无机化学——要点·例题·习题（第4版）
分析化学——要点·例题·习题·真题（第2版）
有机化学习题与考研练习题精解（第2版）
高分子物理重点难点释疑
物理化学思考题1100例
电路学习指导与考研题精解



选题编辑／项赟飚　责任编辑／张　灿　封面设计／刘俊霞

定价：48.00元

ISBN 978-7-312-04051-1

销售分类建议：数学类