

高等数学引论

（第二册）

华罗庚 著

王元 校

高等教育出版社

高等数学引论

（第二册）

华罗庚 著
王元 校

高等教育出版社

内容提要

《高等数学引论》是我国著名数学家华罗庚在上世纪60年代编写的教材，曾在中国科学技术大学讲授．全书共分四册，包含了微积分、高等代数、常微分方程、复变函数论等内容．全书反映了作者的“数学是一门有紧密内在联系的学问，应将大学数学系的基础课放在一起来讲”的教学思想，还包括了作者的“要埋有伏笔”、“生书熟讲，熟书生温”等教学技巧，书中还介绍了数学理论的不少应用．这使得本套书不同于许多现行的教科书，是一套有特色、高水平的高等数学教材．

第一册包括实数极限理论、微分和积分及其应用、级数理论、方程的近似解等内容；第二册包括多元函数的微积分、多重级数理论、曲线及曲面、场论、Fourier级数、常微分方程组等内容；第三册主要介绍复变函数论的一般理论；第四册主要介绍代数矩阵论的基本理论及其应用．

本书再版时得到王元院士的认真修订．

本书可作为高等院校理工科各专业学习高等数学的系统教科书或教学参考书，也可供自学者使用参考．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学引论．第2册/华罗庚著．—北京：高等教育出版社，2009.2

ISBN 978-7-04-025838-7

Ⅰ.高… Ⅱ.华… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第011122号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 刘晓翔

责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	**版 次**	2009年2月第1版
印 张	26.25	**印 次**	2009年2月第1次印刷
字 数	560 000	**定 价**	49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 25838-00

华罗庚与“高等数学引论”

王　元

(中国科学院数学与系统科学研究院)

一

1958 年秋, 中国科学技术大学成立. 按照“全院办校, 所系结合”的方针, 华罗庚与中科院的著名学者吴有训、严济慈、钱学森等均到科大兼职或亲自授课.

华罗庚出任应用数学系 (后改为数学系) 主任. 他倡导了数学系的所谓“一条龙”教学法. 他始终认为数学是一门有紧密内在联系的学问, 所以将大学数学系的基础课分成微积分、高等代数、复变函数论等分科来讲授是将数学人为地割裂开来了. 因此, 华罗庚决定将所有的基础课放在一起来教三至四年.

说实在话, 要写出这样一部“一条龙”教科书就必须由一位对数学有相当全面与深刻理解的数学家来承担. 华罗庚无疑是很适当的人选, 这是由于他对很多数学领域都有过卓越的贡献, 从而他对数学的一些内在联系有独到的洞察与理解.

就已经出版的四册书来看, 有以下特点:

首先, 作为大学数学基础课中的重要基本概念, 华罗庚是反复多次由浅入深地加以讲述的. 他形象地描述道: “我也喜欢生书熟讲, 熟书生温的方法. 似乎是在温熟书, 但把新东西讲进去了, 这是因为一般讲来, 生书比旧课, 真正原则性的添加并不太多的缘故, 找另一条线索把旧的东西重新贯穿起来, 这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透”. “‘数’与‘形’的‘分’和‘合’, ‘抽象’与‘具体’的‘分’和‘合’都是反复又反复的过程中不断提高的”.

第二, 在数学工具足够的情况下, 凡是可能讲的内容, 不论属于哪个领域, 都尽可能地放在一起加以讲述.

第三, 华罗庚是一位非常勤奋的数学家. 他不轻视所谓容易的东西. 他积累了不少这类“练拳”式的研究, 将它们放在教材里构成了很好地灵活运用数学理论的材料, 使读者感到数学的灵活, 有趣与有力, 但又不是高不可攀的.

第四, 华罗庚的数学风格是他的“直接法”, 即用简单初等的工具解决困难的数学问题. 他不从抽象的定义出发, 而是从具体的例子入手, 再得出一般的结论. 在这部书的写作中, 他都贯穿了这个风格. 定理的证明都不长, 基本上是一、二页而已. 这对读者来说是易于接受的.

二

第一册和第二册[①]以普通微积分或高等微积分 (高等分析) 为其基本内容. 第一章就讲到实数理论. 华罗庚用十进位无穷小数来定义实数, 虽带有描述性, 但却是严格的. 然后引进传统的 ε-N 概念讲法及柯西 (Cauchy) 序列的定义. 在第一章的“补充”里, 华罗庚除了讲电脑里用的二进位制外, 还证明了有理数的充要条件为它是一个循环小数, 更讲到实数的有理逼近论中的“连分数”方法. 这些通常是“初等数论”的内容. 他还将连分数法用于计算闰年、闰月、月蚀及火星大冲等天文学的计算.

由于“极限”是由中学的直观数学进入大学数学教育首先碰到的一个难关, 所以华罗庚在第四章又一次讲到数列的极限, 再进一步讲到上极限、下极限的概念, 并进一步延伸到连续趋限的问题, 即 ε-δ 理论. 关于极限的概念以后还要再讲. 总之, 通过这样逐步地讲解, 读者应该较易于接受.

第二章讲述了向量代数. 这里主要讲欧氏空间的一些几何量的向量表示, 并在该章的“补充”中讲述了球面三角学及向量表示在牛顿 (Newton) 力学中的应用.

有了连续趋限的讲述之后, 微分学与积分学的讲述就是很自然的应用了. 在第十章中讲述了欧拉 (Euler) 求和公式:

命 $\varphi(x)$ 为 $[a,b]$ 内有连续微商的函数. 则

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

华罗庚首先由欧拉公式推出斯特林 (Stirling) 公式, 然后由欧拉公式导出普通书上关于近似计算定积分的矩形法、梯形法与辛普森 (Simpson) 法的误差估计, 这与通常的讲法不同, 除了用欧拉公式将上述内容都统一起来外, 读者可以看到欧拉公式的优点在于将余项用积分形式表示了出来.

作者在第十三章带变量的序列中, 再一次将极限的概念加以深入讲解. 他讲到一致收敛的概念与一些判别法则及应用、无穷乘积、积分号下求微分及交换积分次

[①]本书新版的第一册和第二册即为老版第一卷的一、二分册, 第三册为第二卷第一分册, 第四册为余篇.

序等. 在这里顺带讲述了一些微分方程与积分方程的知识, 包括压缩映像原理及用幂级数求解常微分方程与偏微分方程 (柯西–柯瓦列夫斯卡娅 (Kovalewskaya) 定理) 等, 通常属于微分方程课的内容.

在第十五章重积分的 “补充” 中, 作者讲述了求面积、求容积与求表面积的一些实用方法. 这些方法来自于地理学家与矿业学家的书 “矿体几何学”, 在那里, 他们是用初等几何来表述各种计算方法的, 十分繁琐. 作者将这些方法用柱面坐标来表述并得到一些理论分析结果, 只用了十几页篇幅.

第十四章与第十八章为微分几何学. 由于已经讲了微分方程, 所以可以讲微分几何的局部性质, 包括高斯 (Gauss) 的第一、第二微分型, 曲率, 张量, 高斯方程与科达齐 (Codazzi) 方程等, 就是通常微分几何课的内容.

第十九章的傅里叶 (Fourier) 级数, 相当于通常傅里叶级数课的内容.

第二十章为常微分方程组. 作者介绍了人造卫星的轨道方程, 第一、二、三宇宙速度的计算, 及质点组——多体问题. 这些材料来自前苏联发射第一颗地球人造卫星之后, 作者做的一个有趣的练习.

三

第三册主要讲述 “复变函数论”, 但内容也不止于此. 作者首先讲了复平面的几何, 其中引进了默比乌斯 (Möbius) 变换群、广义线性群、诺依曼 (Neumann) 球、交比、调和点列等概念. 最后, 证明了射影几何的基本定理, 即冯 · 施陶特 (von Staudt) 定理:

将一维射影 (复) 空间一一连续地变为自身, 并使调和点列变为调和点列的变换必为广义线性变换.

这一重要定理在矩阵空间之类似的研究就是作者关于矩阵几何学的研究内容.

第二章为非欧几何学. 作者介绍了抛物几何学 (欧氏几何)、球面几何学 (椭圆几何) 与双曲几何学 (罗巴切夫斯基 (Lobachevskiĭ) 几何). 在这里, 读者可以看到有各种不同的 “距离” 定义.

第三章为解析函数与调和函数. 作者引入了极为重要的黎曼 (Riemann) 映射定理:

任何一个单连通域 D, 其边界多于一点, z_0 是其一内点, 并且在此点有一方向向量, 则存在唯一的保角变换将 D 一一变为单位圆内部, 将 z_0 变为原点, 方向向量变为 x-轴的正方向.

华罗庚写道:“因为它把一般单连通域的问题一变而为单位圆的问题了”. “这告诉我们, 如果单位圆研究清楚了, 更一般的定理也就在望了”.

这是由于在单位圆内, 函数往往可以展开成收敛的幂级数, 所以多了一个强有

力的工具. 在本册书的讲述中, 我们看到作者在不停地发挥这一优势.

嘉当 (Cartan) 曾证明过:

在解析映射之下, 只有六类不可约、齐性、有界对称域, 其中四类称为典型域, 两类称为例外域.

典型域可以看作单位圆在多复变空间的类似, 所以其重要性是不言而喻的. 华罗庚建立了典型域的调和分析 (完整正交系), 从而他得到了典型域的柯西核、泊松 (Poisson) 核等. 这就构成了他关于多复变函数论的研究, 其背景即在于他对单位圆之深刻理解.

应用黎曼定理, 使复变函数论中很多重要定理的证明变得简单易懂了.

第五章中, 作者引入了距离函数及用它定义极限的定义. 这就再一次将极限的概念推得更广. 诚如他在第一、二册的序言中所说的 “生书熟温”.

这一册除复变函数论外, 作者还讲了不少其他东西. 第十一章的求和法, 讲了某些发散级数可求和的途径, 如切萨罗 (Cesàro) 法、赫尔德 (Hölder) 法、博雷尔 (Borel) 法及阿贝尔 (Abel) 求和法. 本章还讲了一些陶伯 (Tauber) 型定理. 这些材料通常属于傅里叶级数的高级教程内容.

第十二章讲了一些偏微分方程的求解问题, 如黎曼–希尔伯特 (Hilbert) 问题与混合型偏微分方程等.

第十三章魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 椭圆函数论与第十四章雅可比 (Jacobi) 椭圆函数论的内容在近代数论研究中的重要性已是众所周知的了. 在大学数学教程里就包括这些内容应该是很难得的.

四

第四册主要讲代数矩阵论, 但内容不止于此.

第四章为常系数差分方程与常微分方程, 第五章为解的渐近性质, 即将矩阵方法用于常微分方程求解, 其中包括李亚普诺夫 (Lyapunov) 方法的讲述.

第八章为体积. 作者讲述了 m 维流形的体积元素, 特别地, 作者算出了正交群的总体积等. 这些材料是作者典型域研究中有独立兴趣且不涉及较多知识的结果.

第九章为非负矩阵. 这是作者研究计量经济学的一些数学背景知识与结果, 一般教材基本不涉及这个方面.

这一册尚未写完, 作者指出以后接下去的三章应该是讲 n 维空间的微分几何学. 作者指出应以第二册中空间曲线的微分几何为模型, 运用正交群下斜对称方阵的分类而获得 n 维空间曲线的微分性质.

五

在第一、二册的序言里, 作者写道, 这两本书“既是急就章, 又是拖沓篇”. “读者可能发现一些其他书上所没有的材料, 也可能发现一些稍有不同的处理方法, 但毕竟太少了”. “感到空虚, 并且诚恐会错误百出”. “辗转传抄的已经成熟的材料, 错误还有时难免, 何况第一次写下来的东西, 那更使人担心了”. “特别是一些高的内容放低了, 繁的内容化简了的部分更希望大家指正”.

这些话充分反映了华罗庚一贯的严谨学风. 第一、二册还是写得比较详细的. 第三、四册中就有不少地方, 作者用了“类似地, 不难证明 $\cdots$”这一类的话. 对于像作者这样具有高度数学功底与洞察力的数学家来说, 这是可以做得到的. 但对于一般初学读者, 即使像我这样在他身边工作多年的人来说, 亦非轻而易举. 所以在学习的时候, 应特别注意自己多做些推演工作.

这四册书共一千多页. 作为教材, 对于一般学生来说, 材料显然是多了一些, 老师宜根据具体情况作些取舍. 作者也指出过这一点. 但对于教师本人, 我觉得通读一遍还是很有好处的. 对于程度很好的学生, 他们可以在老师的指导下, 选读一些章节.

除第一册的第四章 §3 的定理 7 作了改写外, 每次重印这部书时, 都只作笔误与印刷错误之改正. 这样做当然可以更好地保持原著的风貌. 但另一方面, 要作较多改写, 需有认真的论证, 及较多教学实践的积累才行. 现在也做不到.

例如, 第三册第十章讲到了单叶函数中著名的比贝巴赫 (Bieberbach) 猜想:

单位圆中的单叶函数 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots, |z|<1$, 其系数满足估计:

$$|a_n|\leqslant n, \quad n=2,3,\cdots.$$

书上讲了李特尔伍德 (Littlewood) 的估计 $|a_n|\leqslant en$, 及奈凡林那 (Nevanlinna)、迪厄内 (Dieudonné)、罗戈森斯基 (Rogosinski) 在某些附加条件下, 对于比贝巴赫猜想的证明. 但这一猜想已由德·布朗基 (L. de Branges) 于 1985 年完全解决了. 这部分材料应如何处理, 就值得商榷.

更为重要的是, 华罗庚曾有一个雄心勃勃的写作计划, 即写一部六、七卷的书, 但他从未向他身边工作的人讲过他的计划纲要, 似乎也没有人询问过这件事. 现在看来, 抽象代数、代数拓扑、勒贝格 (Lebesgue) 测度与积分论及在此基础上的概率理论等, 似乎都应包括在他的这部著作之中.

早在上世纪五十年代初, 华罗庚就曾多次向我们讲到狄利克雷 (Dirichlet) 与戴德金 (Dedekind) 的师生关系. 十九世纪, 狄利克雷写过一本数论书. 以后每次再版, 戴德金都为他写一些附录, 后来附录的篇幅比原著还要厚.

华罗庚鼓励我们要不停地对他的著作进行修改与补充. 他生前, “数论导引” 的几次重印时, 萧文杰 (P. Shiu) 与我曾为该书写过附录, 这得到了华罗庚本人的认可.

但“高等数学引论”这部书涉及的面要广得多, 按我的学术水平与健康状况, 要撰写附录已无能为力了.

随着时光的流逝, 最早听他讲课的大学生现在都已是古稀老人, 早已退休, 已无力做这件事了. 如果要作修改及续写, 只能等待下一代或再下一代了. 但我对前途仍充满了信心, 我深信在中国总会有有志的年轻数学家会把华罗庚的香火继续下去.

2010 年是华罗庚百年华诞及仙逝二十五周年, 承高等教育出版社热心再版重印这部书, 并且做了很好的排版与编辑校订工作. 与此同时, 他们正在积极地筹备出版英文版, 这是十分有眼光及令人激动的一件大好事.

回想起五十年前, 我作为学生与助手, 有幸协助华罗庚老师在科大讲授与撰写这部书的第一、二册. 当时的一切情景, 还清晰地历历在目, 令人永铭于心. 在这部书重印之际, 我愿意借这个机会, 衷心祝愿这部书的出版将为我国的数学发展与人才培养作出新的重要贡献.

序　言

这部书的第一卷终于交印了, 它既是急就章, 又是拖沓篇. 1958 年匆匆上马, 现想现写现印现讲, 有时写稿不过三遍, 仅仅经过起草、修改、誊正三道手续便拿去付印. 所以说这是急就章. 如果能专心一志地连续地干下去, 那还可能比较好些, 但又经常为其他工作所打断, 因而写一段停一停, 改一章放一放的情况又经常出现, 所以说是拖沓篇. 情况是如此, 虽然经过同志们的帮助和修改重写, 但还可能留下不少后遗症. 这样的草率工作本来不该交印的, 但不少同志热情鼓励, 几经踌躇终于把它出版了, 希望经过读者的帮助, 人多、眼多、想法多, 多提意见将来可以改写得更好些.

这个课自始至终是和王元同志合开的, 他对原稿的形成与改写都提了不少意见, 并且有不少章节都是出自他的手笔. 在共同教学中一些心得已经吸收入我们合著的 "积分的近似计算" 一书中, 1961 年龚升、吴方等同志又用这讲义教了一遍, 修改了不少. 最后定稿又经过曾肯成、许以超、史济怀、邓诗涛、李炯生、刘碧梧等同志的细心校阅, 提了不少意见. 个别章节还获得了戴元本、陆汝钤、韩京清、周永佩、罗祥钰、曹传书、吴松林、江嘉禾、李培信、邵秀民、陈志华、石赫、殷慰萍等同志的帮助, 有关这些我在这儿表示谢意. 特别应该一提的是: 在最后定稿的时候, 获得了中山大学吴兹潜、林伟二同志的帮助, 他们一字不苟地校阅推敲, 使本书避免不少错误.

在写作的过程中参考过熊庆来的 "高等算学分析" (1934); 苏步青的 "微分几何学" (1947); 赵访熊的 "高等微积分" (1949); 孙光远、孙叔平的 "微积分学" (1952); 陈建功的 "实函数论" (1958); 杨宗磐的 "数学分析入门" (1958); 樊映川等的 "高等数学讲义" (1958); 陈荩民的 "高等数学教程" (1958); 关肇直的 "高等数学教程 (第一卷)" (1959); 江泽坚的 "数学分析" (1960); 北京大学、复旦大学、南京大学及高等数学教科书编审委员会的 "高等数学教程", 我在此致谢. 其他作为参考的外文书籍不在此一一列举了.

在写作的过程中, 曾经有过一些努力, 企图能更好地体现教学改革的方针. 读者可能发现一些其他书上所没有的材料, 也可能发现一些稍有不同的处理方法, 都是一种尝试, 作为引玉之砖, 作为试矢之的. 希望得到大家的指正.

大学教书不是照本讲, 因此本书也准备了一些可教可不教的材料, 教师们可以灵活掌握, 余下的材料可以作为学有余力的同学的课外读物. 习题应当做, 并且适当地要多做些. 本书没有组织好习题, 希望老师们自己设法组织. 习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西; 其二是初步启发大家会灵活运用, 独立思考; 其三是融会贯通, 出些综合性的习题把不同部门的数学沟通起来.

在教学过程中深得教学相长的益处, 其中不少是由于同学所提意见的影响, 我把所得到的一些不成熟的看法写在下面供同志们参考. 我讲书喜欢埋些伏笔, 把有些重要概念、重要方法尽可能早地在具体问题中提出, 并且不止一次地提出. 目的在于将来进一步学习的时候会较易接受高深的方法, 很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已. (有些深化了些, 有些并没有深化而仅仅是另一形式而已.) 我也喜欢生书熟讲, 熟书生温的方法, 似乎是在温熟书, 但把新东西讲进去了, 这是因为一般讲来, 生书比旧课, 真正原则性的添加并不太多的缘故. 找另一条线索把旧东西重新贯穿起来, 这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透. 有时分讲合温, 或合讲分温, 先把一个机器的零件一一搞清, 再看全局, 或先看全部机器的作用和目的, 再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明. "数" 与 "形" 的 "分" 和 "合", "抽象" 与 "具体" 的 "分" 与 "合" 都是在反复又反复的过程中不断提高的. 同学也要求讲讲 "人家怎样想出来的", 因而在讲书时也曾作过尝试, 主观地推测一下, 这很可能并不是原来的想法, 但给出一条 "这一步看下步并不难, 连看几步就达到目的" 的途径, 作为同学们的参考.

以上一些肤浅的看法在讲课时都尝试过, 但绝大部分写不下来, 或者写下来就走了样, 因此, 同是一部书, 可以多样讲, 讲义作参考, 结合同学的实际情况能灵活掌握才好. 拉杂地写了这些意见, 与其说是对教师讲的, 还不如说是对同学 (或自学的人) 讲的.

总之, 由于水平的限制, 虽然黾勉从事, 但缺点一定不少, 我诚挚地希望读者们多提意见, 更希望教师们多多指教.

最后, 特别需要提起的是: 由于中国科学院数学研究所的支持, 才使我有机会讲授基础课和编写讲义; 在编写过程中, 自始至终得到了中国科学技术大学的支持, 这都是我要衷心感激的. 中国科技大学教务处、数学系与数学教研室的同事们, 在我从事这项工作的时候, 一直给我方便与帮助, 也在此表示感谢. 对科学出版社的感谢, 那就更应当在此一提了, 他们花了大量的劳动, 在制图、编辑加工、排版印刷、校对等方面都做了细致而深入的工作.

华罗庚

1962 年 6 月 11 日

目　录

华罗庚与“高等数学引论”

序　言

第十一章　积分学的应用 **1**

§1. 曲线的长度 1
§2. 面积 6
§3. 利用横断面算体积法 9
§4. 旋转面的侧面积 11
§5. 柱面的侧面积 14
§6. 求重心 16
§7. 转动惯量 (或平方矩) 19
§8. 流体压力 20
§9. 功 22

第十二章　多个变量的函数 **24**

§1. 变量 24
§2. n 维空间 25
§3. 邻域 27
§4. 域 29
§5. 极限与连续 30

§6. 域内的连续函数 · · · · · 34
§7. 偏微商与全微分 · · · · · 35
§8. 齐次函数 · · · · · 38
§9. 切平面 · · · · · 39
§10. 沿一定方向的微商 · · · · · 41
§11. 高阶偏微商 · · · · · 42
§12. 隐函数 · · · · · 46
§13. Taylor 展开 · · · · · 48
§14. 极大与极小 · · · · · 49
§15. 隐函数求极值法 · · · · · 55
§16. 坐标变换 · · · · · 57
§17. 三维空间的几个坐标系 · · · · · 60

第十三章 带变量的序列, 级数及积分 · · · · · 64

§1. 一致收敛序列 · · · · · 64
§2. 序列的微分积分 · · · · · 67
§3. 闱收敛 · · · · · 70
§4. 级数的一致收敛性 · · · · · 73
§5. 一致收敛的一些判别条件 · · · · · 77
§6. 一致收敛的 Abel 及 Dirichlet 判别法 · · · · · 79
§7. Abel 定理及 Tauber 定理 · · · · · 81
§8. 求隐函数的逐渐逼近法 · · · · · 83
§9. 无穷乘积 · · · · · 86
§10. 无穷乘积的收敛条件 · · · · · 88
§11. 无穷乘积的对数 · · · · · 89
§12. 无穷乘积的一致收敛 · · · · · 92
§13. 带参数的积分 · · · · · 96
§14. 积分号下求微分 · · · · · 100
§15. 积分号下求积分 · · · · · 102
§16. 上下限依赖于参变量的积分 · · · · · 109
§17. 重序列 · · · · · 111
§18. 二重级数 · · · · · 112
§19. 级数的乘积 · · · · · 119
§20. 多变量的幂级数 · · · · · 122
§21. 利用级数解隐函数 · · · · · 123
§22. 常微分方程的解的存在性与唯一性 · · · · · 128

§23. 积分方程解的存在性与唯一性 131
§24. 微分方程组的解的存在性与唯一性 132
§25. 压缩映像原理 135
§26. 利用幂级数解微分方程 136
§27. 微分方程组 138
§28. 偏微分方程 139

第十四章　曲线的微分性质 143
§1. 向量的微商 143
§2. 平面上的运动 146
§3. 平面曲线的曲率 147
§4. 曲线的本性方程 149
§5. 曲率圆与渐屈线 153
§6. 一般的一阶微分方程 155
§7. 包络线 159
§8. 追踪问题 161
§9. 空间曲线的基本元素 164
§10. 原坐标表示法 166
§11. 螺旋线 169
§12. 空间曲线的唯一性定理 170
§13. 曲率圆与曲率球 173
§14. 曲面族与空间曲线族的包络 174

第十五章　重积分 178
§1. 重积分的定义 178
§2. 可求面积的域 182
§3. 重积分换坐标 184
§4. 重积分的基本性质 188
§5. 三重积分 191
§6. 矩 194
§7. 曲面的面积 197
§8. 物质对一点的引力 201
补充 206
§9. 求面积 206
§10. 求容积 209
§11. 求表面积 217

第十六章 线积分, 面积分 **225**
§1. 曲线积分的定义 (第一型) 225
§2. 曲线积分 (第二型) 228
§3. 曲线积分求面积 232
§4. Green 公式与 Ostrogradskiĭ 公式 234
§5. Stokes 公式 237
§6. 与途径无关的曲线积分 242
§7. 多连通域 245
§8. 空间与路径无关的曲线积分 247
§9. 流体的稳定流动 248

第十七章 纯量场与向量场 **251**
§1. 定义 251
§2. 三种算子的性质 253
§3. 三种算子的迭用 254
§4. 梯度的几何意义 255
§5. Ostrogradskiĭ-Gauss 公式、Stokes 公式的向量表达形式 258
§6. Nabla 算子 261
§7. 曲线坐标及换变量 263
§8. 平面场 269
补充 274
§9. 在流体力学上的应用 274
§10. 声的传播 281
§11. 热的传导 282

第十八章 曲面的微分性质 **284**
§1. 代数工具 284
§2. Gauss 第一微分型 286
§3. Gauss 第二微分型 290
§4. 曲面上曲线的曲率 292
§5. 点的分类 293
§6. 曲率线 294
§7. Euler 公式 297
§8. Olinde Rodrigues 公式 298
§9. Dupin 定理 299
§10. Gauss 曲率的几何意义 301

§11. 曲率中值的几何意义 302
§12. 活动标架 303
§13. 曲面的可展性 306
§14. 曲面族与偏微分方程 307
补充　用张量分析来处理曲面论 311
§15. 第一基本型 311
§16. 张量 312
§17. 基本方程之一 —— Gauss 方程 315
§18. 基本方程之一 —— Weingarten 方程 318
§19. Gauss 与 Codazzi 方程 319
§20. 曲率张量 320

第十九章　Fourier 级数 323

§1. 三角函数的正交性 323
§2. 几个三角级数的和 325
§3. Dirichlet 积分 327
§4. 平方中值误差及 Bessel 不等式 328
§5. 收敛判别条件 331
§6. 在区间 $(0,\pi)$ 上的展开式 335
§7. Gibbs 现象 338
§8. 均值求和 340
§9. Parseval 等式 343
§10. Fourier 级数可以逐项求积分 345
§11. Fourier 系数的性质 347
§12. Fourier 级数的其他形式 348
§13. 实用调和分析 —— 有限调和分析 349
§14. Fourier 积分 355
§15. Fourier 变换 357
§16. Poisson 公式 358
§17. Fourier 变换的复数形式 361
§18. 其他变换 362

第二十章　常微分方程组 364

§1. 化任意的微分方程组为一阶微分方程组 364
§2. 常微分方程组 366
§3. 质点的运动方程 369

§4. 人造卫星的轨道方程 · · ·

第十一章　积分学的应用

§1. 曲线的长度

弧长的定义　假定 A, B 是给定的曲线上的两点, 以这两点为端点作这曲线的内接折线, 当这折线的边数无限增加, 而且每边的长度都趋向于 0 时, 这折线的周界长趋向的极限 (如果这极限存在的话) 叫做这曲线在 A, B 两点之间的弧长.

假定所给的曲线的参变量表示是

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{C}$$

当 $t = \alpha$ 及 β 时所给出的点就是 A 点与 B 点. 假定 $\alpha < \beta$, 当 t 由 α 变到 β 时, (x, y) 就沿着曲线 (C) 由点 A 变到点 B. 又假定 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都有连续的微商, 在弧上取 $(n+1)$ 个点 (图 1)

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

各对应于

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

把 M_ν 的坐标记作

$$x_\nu = \varphi(t_\nu), \quad y_\nu = \psi(t_\nu),$$

则 $M_{\nu-1}$ 与 M_ν 之间的距离等于

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}.$$

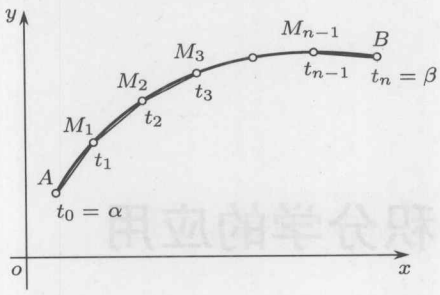


图 1

因此折线的总长度等于

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2} = \sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})]^2 + [\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})]^2}.$$

依定义, A, B 间的弧长 s 等于

$$s = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1}))^2 + (\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1}))^2}.$$

由 Lagrange 公式, 我们有

$$\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1}) = (t_\nu - t_{\nu-1})\varphi'(\tau'_\nu),$$
$$\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1}) = (t_\nu - t_{\nu-1})\psi'(\tau''_\nu),$$

这里 τ'_ν, τ''_ν 都是 $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ 之间的值. 所以

$$\sqrt{(\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1}))^2 + (\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1}))^2} = (t_\nu - t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)}.$$

命

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)} = \sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau'_\nu)} + \eta_\nu,$$

则得

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau'_\nu)} + \eta_\nu\right)(t_\nu - t_{\nu-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau'_\nu)}(t_\nu - t_{\nu-1}) + \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu - t_{\nu-1}). \end{aligned}$$

前者等于

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

再证后者的极限等于 0. 由不等式

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}|\leqslant|b-b_1|$$

(这不等式的证明是:

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}=\frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}(b-b_1))$$

可知

$$|\eta_\nu|<|\psi'(\tau_\nu'')-\psi'(\tau_\nu')|.$$

根据 $\psi'(t)$ 的一致连续性, 给了任意 $\varepsilon>0$, 可找到一个 δ, 使当 $|t''-t'|<\delta$ 时

$$|\psi'(t'')-\psi'(t')|<\varepsilon.$$

即当 $\max|t_\nu-t_{\nu-1}|<\delta$ 时,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu-t_{\nu-1})\right|<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

因得所证.

A,B 两点间的弧长可由公式

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

表出来.

如果 t 是一变点, 则

$$s(t)=\int_\alpha^t\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

对积分的上限求微商得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},$$

再由

$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt},\quad\psi'(t)=\frac{dy}{dt}$$

得出

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

所以求弧长的公式可以写成为

$$s=\int_{(A)}^{(B)}ds=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

这里 (A), (B) 各表依照积分变量对应于曲线上点 A, 点 B, 这积分所应当取的上下限.

特别是, 如果曲线由

$$y = f(x)$$

表示, 并且 A, B 各对应于 $x = a$, $x = b$, 则弧长公式变为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

又如果是极坐标形式

$$r = f(\theta),$$

由直角坐标 x, y 与极坐标的关系

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

可得 (这就可以看成为以 θ 为参变量的方程)

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,$$
$$dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta.$$

及

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

所以

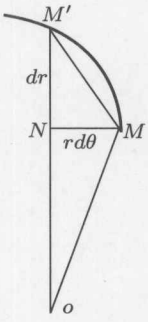


图 2

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}.$$

如果 A 与 B 各对应于角 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 的点, 则极坐标所表出的弧长是

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

ds 的极坐标表达式也可以由图 2 得到. 当弧 MM' 非常小时, 可以用 M, M' 间的弦代替这段弧. 这弦恰好是直角三角形 MNM' 的弦, 而其他边各与 $rd\theta, dr$ 近似相等.

注意, 曲线的长度是有方向的, 如果我们假定了正向是由 A 到 B, 则由 B 到 A 的度量就是以上的长度加一负号, 在用参变量表示法时, 也请注意这点, 要看准由 α 变到 β 是否就是 A 到 B 的方向.

例 1 求 $(0,0)$ 与 (a,a^2) 之间抛物线 $y=x^2$ 的弧长 s.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sqrt{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{4}\left[2a\sqrt{1+4a^2}+\log\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

例 2 求对数螺线

$$r = Ce^{a\theta}(C>0)$$

在 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之间的弧长, 这里 C 为常数.

$$\begin{aligned} s &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta = C\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}d\theta \\ &= \frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\beta}-e^{a\alpha}). \end{aligned}$$

例 3 设有一个半径是 a 的圆在一条直线上滚动, 这圆上一个固定点 M 的轨迹称为旋轮线, 求 M 与直线相交的两点之间的弧长.

命固定直线为 x 轴, M 与直线两邻接的交点是 o 与 o', 圆心是 C, $\angle MCN=t$ (图 3), 则可知旋轮线有如下的参数表示:

$$\begin{aligned} x &= a(t-\sin t), \\ y &= a(1-\cos t), \end{aligned}$$

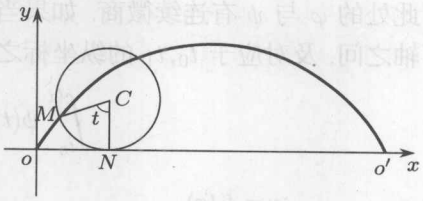


图 3

故弧 $\overset{\frown}{oo'}$ 的长度为

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a. \end{aligned}$$

习题 1 求星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的周长.

习题 2 求圆的渐伸线

$$x = a(t\sin t+\cos t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

当 $t=0$ 至 $t=\theta$ 时的弧长.

习题 3　求心脏线 $r = a\cos\theta + a$ 的周长.

习题 4　一条有重量的链子, 两端悬起, 链的方程可以写为

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

求当 $x = 0$ 至 $x = b$ 之间的弧长.

§2. 面积

我们已经证明过在曲线

$$y = f(x)$$

与 x 轴, $x = a, x = b$ 之间的面积等于

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x)dx.$$

我们现在研究参变量表示下的情况, 仍假定

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

此处的 φ 与 ψ 有连续微商. 如果当 t 由 t_0 变到 t_1 时, x 是增函数, 则在此曲线与 x 轴之间, 及对应于 t_0, t_1 的纵坐标之间的面积等于

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\varphi'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt.$$

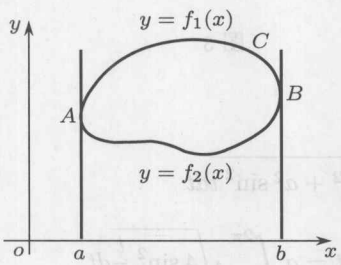


图 4

如果我们有一条闭的曲线 C, 它是一个单圈形式的曲线, 即任一平行于 x 轴或 y 轴的直线至多和它交于两点. 假定 C 上的点可以由参变量表示, 并且当 t 由 t_0 变到 t_1, P 依一定方向走完一圈. 我们假定 P 取这样的走向, 使当 P 按这方向沿 C 运动时, 由 C 所围成的面积的点总在 P 的左边. 我们现在来研究这个曲线 C 所包的面积.

假定这曲线在 $x = a, x = b$ 之间, 且这两直线与 C 有公共点, 曲线的上一部分的方程为 $y = f_1(x)$, 下一部分为 $y = f_2(x)$ (图 4).

不妨假定当 t 由 t_0 变为 t' 时, 曲线由 A 沿 $y = f_2(x)$ 到 B. 由 t' 变为 t_1 时, 曲线由 B 沿 $y = f_1(x)$ 到 A. 如此则得所求的面积是

$$\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = -\int_{t'}^{t_1} \psi(t)\varphi'(t)dt$$
$$-\int_{t_0}^{t'} \psi(t)\varphi'(t)dt = -\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt.$$

同样可以证明, 这面积也等于

$$\int_{t_0}^{t_1} x\frac{dy}{dt}dt$$

及

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

例 1　求椭圆

$$x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=b\frac{2t}{1+t^2}$$

所包的面积.

当 t 由 $-\infty$ 变至 ∞ 时, 图线走了一圈, 故面积为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt\\&=\frac{ab}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt\\&=ab\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=ab\,\mathrm{tg}^{-1}t\Big|_{-\infty}^{\infty}=ab\pi.\end{aligned}$$

即椭圆面积等于长半轴和短半轴的乘积的 π 倍, 特别当 $a=b$ 时, 便得到圆的面积.

例 2　求 $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$ 所包的面积.

$$\begin{aligned}\text{所求的面积}&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+3a\cos^2 t\sin t\cdot b\sin^3 t)dt\\&=\frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{3}{16}ab\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi ab.\end{aligned}$$

例 3　求曲线

$$x^3+y^3=3axy$$

的围线部分的面积.

我们已知参变量表示法:

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

当 t 由 0 到 ∞ 时, 沿这围线走了一圈, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{9a^2t^2dt}{(1+t^3)^2}=-\frac{3a^2}{2(1+t^3)}\Big|_0^{\infty}=\frac{3a^2}{2}.\end{aligned}$$

于是面积等于 $\frac{3}{2}a^2$.

现在考虑极坐标的情况. 由

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

及

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta, \quad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta$$

可知

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

因此面积公式的极坐标表示法是

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\theta.$$

如果要求角 $\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ 之间曲线 $r = r(\theta)$ 所围成的扇形面积 (图 5), 就是

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

例 4　求 Archimedes 螺线 $r = a\theta$ 一环的面积 (图 6).

所求的面积为

$$\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2 d\theta = \frac{a^2\theta^3}{6}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

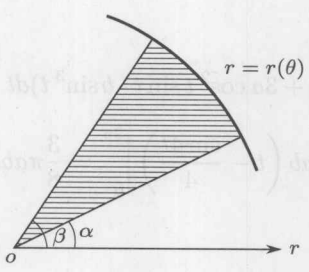


图 5

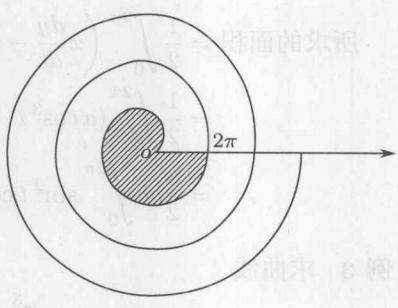


图 6

例 5　求蜗线

$$r = a\cos\theta + b \quad (b \geqslant a)$$

所围成的面积.

所求的面积为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta + b)^2 d\theta &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2).\end{aligned}$$

例 6 求双纽线 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 所围成的面积.

总面积是右边一块的面积的两倍, 故所求的面积为

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta = 2a^2.$$

习题 求旋轮线的一支:

$$x = a(t-\sin t),\quad y = a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

与 x 轴所围成的面积.

§3. 利用横断面算体积法

用 V 代表一个立体的体积, 我们取一条直线作为坐标轴, 其上取一点作为原点. 在离原点 x 处作这轴的一个垂直平面, 如果知道所求立体在这垂直平面上所截得的面积等于 $A(x)$, 则可由定积分来计算这立体的体积.

再假定这立体在 $x=a$ 与 $x=b$ 二点所作的垂直平面之间, 我们在 a,b 间作若干断面把立体分为若干个单元. 考虑这样的一个单元, 它界于两断面 x 与 $x+\Delta x$ 之间. 以 Δx 作高, 以 x 的断面作底做出的正柱体的体积 (图 7) 等于

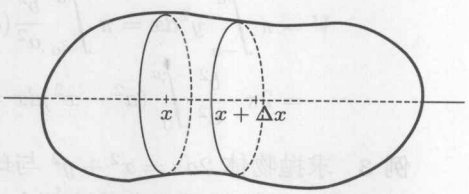


图 7

$$A(x)\Delta x.$$

于是我们得到所要求的体积 V 的近似表达式:

$$\sum A(x)\Delta x.$$

当断面无限增加, Δx 的最大值趋向于 0 时, 取极限, 得一定积分, 此即体积. 因而得出以下的结论:

如果已知一个给定的立体的垂直于一定方向所有的横断面的面积, 取这些横断面的垂直方向作为 x 轴的方向, 则这立体的体积由公式

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

表达, 其中 $A(x)$ 是横坐标为 x 的横断面的面积, a,b 为这立体的两端断面的横坐标.

如果我们的立体是一个旋转体, 即先给定一条曲线 $y=f(x)$, 绕 x 轴旋转所得出的体, 我们的横断面就是以 y 为半径的圆, 所以

$$A(x) = \pi y^2,$$

而体积就等于

$$V=\pi\int_a^b y^2dx.$$

例 1　求底半径为 r, 高为 h 的圆锥体的体积 V.

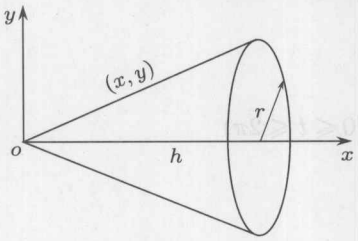


图 8

命锥体的轴为 x 轴, 锥体的顶为原点, 以垂直于 x 轴的平面去截这个圆锥体, 得一个圆 (图 8), 半径为

$$y=\frac{r}{h}x.$$

因此圆锥体的体积为

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

即高乘底面积的 1/3.

例 2　设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转, 求此回转椭圆体的体积 V:

$$V=\pi\int_{-a}^a y^2dx=\pi\int_{-a}^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$
$$=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 3　求抛物体 $2az=x^2+y^2$ 与球 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 的公共部分的体积.

以垂直于 z 轴的平面来截这两个立体. 当用 $z=a$ 这张平面去截时, 截下来的面积相等, 称为截口.

当用平面 $z=\alpha(\alpha<a)$ 去截它们的公共部分时, 得半径为 $\sqrt{2a\alpha}$ 的圆. 但当 $\alpha>a$ 时, 就得到半径为 $\sqrt{3a^2-\alpha^2}$ 的圆. 因此体积等于

$$2\pi a\int_0^a zdz+\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(3a^2-z^2)dz=\frac{\pi\alpha^3}{3}(6\sqrt{3}-5).$$

例 4　以通过圆柱体底的直径的平面去截这圆柱体, 由它切下来的几何形体, 称为圆柱弓形体. 试求以与底面成角 α 的平面去截底的半径为 a 的圆柱体时, 所得的圆柱弓形体的体积.

取截面通过的直径所在的直线为 x 轴和底面的圆心为原点. 以垂直于 x 轴的平面去截时, 得一个三角形 (图 9), 其面积为

$$\frac{1}{2}y^2\operatorname{tg}\alpha,$$

因此弓形体积等于

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_{-a}^a(a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}a^2h,$$

此处 h 是圆柱弓形体的高.

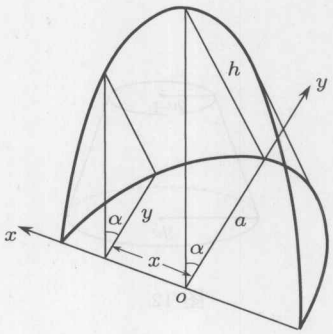


图 9

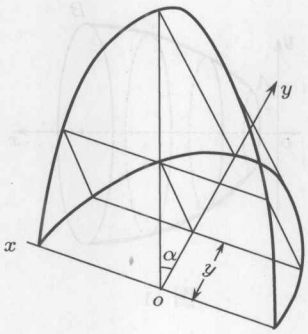


图 10

若以垂直于 y 轴的平面去截时, 得到的是矩形 (图 10), 其面积等于

$$2xy\mathrm{tg}\,\alpha = 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot y\sqrt{a^2-y^2}.$$

所以圆柱弓形体的体积等于

$$2\mathrm{tg}\,\alpha \int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}dy = \frac{2}{3}a^3\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}a^2h.$$

习题 1 试求对应于 $x=0$ 及 $x=b$ 的一段悬链线

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

绕 x 轴旋转所得的体积.

习题 2 求旋轮线的一支:

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

绕 x 轴旋转所得的体积.

习题 3 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转所得的体积.

习题 4 求球 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 与圆锥 $x^2 = y^2+z^2 (x \geqslant 0)$ 的公共部分的体积.

§4. 旋转面的侧面积

假定在 x, y 平面上有由参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

所定义的曲线, 当 t 由 α 变到 β 时, 曲线由 A 到 B. 我们现在要求出这一曲线绕 x 轴旋转所得出的旋转体的侧面积.

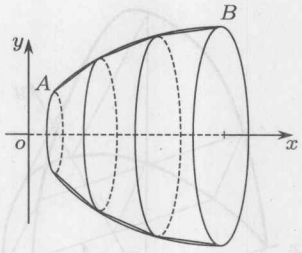


图 11

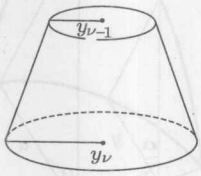


图 12

先作折线 (图 11)

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B.$$

对应的点是

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

我们先算出这折线旋转所得出的侧面积, 由线段 $M_{\nu-1}M_\nu$ 绕 x 轴经旋转所得出的截锥的两底的半径 (图 12) 各为

$$y_{\nu-1} = \psi(t_{\nu-1}), \quad y_\nu = \psi(t_\nu),$$

斜高等于

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2},$$

这截锥的侧面积等于

$$\begin{aligned} &\pi[\psi(t_{\nu-1}) + \psi(t_\nu)]\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2} \\ &= \pi[\psi(t_{\nu-1}) + \psi(t_\nu)](t_\nu - t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)} \end{aligned}$$

(用 Lagrange 公式), 此处 τ'_ν, τ''_ν 是 $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ 中的数值. 我们现在要考虑的是

$$\pi \sum_{\nu=1}^{n} (\psi(t_\nu) + \psi(t_{\nu-1}))\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu) + \psi'^2(\tau''_\nu)}(t_\nu - t_{\nu-1})$$

的极限. 与处理弧长的原则一样, 我们不妨在第一、第二因子中把 $t_{\nu-1}, \tau'_\nu, \tau''_\nu$ 都换为 t_ν (这样的变化仅相差一个无穷小), 改变后得

$$2\pi \sum_{\nu=1}^{n} \psi(t_\nu)\sqrt{\varphi'^2(t_\nu) + \psi'^2(t_\nu)}(t_\nu - t_{\nu-1}).$$

在趋于极限时, 就得到总面积的公式

$$F = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

也就是

$$F = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} y ds.$$

例 1 求球面 (即半径为 r 的圆, 绕直径旋转而成的立体的表面) 的面积, 取这个圆为

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

而旋转轴为 x 轴, 则球面的面积为

$$2\pi \int_{-r}^{r} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r^2.$$

例 2 求星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转的立体的表面积 P.
只要将星形线在第一象限的弧所划出的曲面的面积加一倍即可, 故

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t\cos t dt$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t dt = 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

例 3 求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 绕极轴旋转所产生的曲面的面积 P:

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} y ds = 2\pi \int_0^{\pi} r\sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} 4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \cdot 2a\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\pi \cdot 8a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2} d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

习题 1 求对应于 $x = 0$ 及 $x = b$ 的一段悬链线

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

的弧绕 x 轴旋转所得的曲面的表面积.

习题 2 求双纽线 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 绕极轴旋转所得的曲面的表面积.

习题 3 求回转椭圆体的表面积, 即椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

绕 x 轴旋转所得的曲面的表面积.

习题 4 求旋轮线一支

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

绕 x 轴旋转所得的曲面的表面积.

§5. 柱面的侧面积

在 x, y 平面上有一曲线

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

过这曲线上的点作平行于 z 轴的直线, 这些直线成一柱面.

再加一个方程 $z = \chi(t)(\chi > 0)$, 我们要求在 $z = 0$ 平面和 $z = \chi(t)$ 之间的柱面的面积. 我们把 A, B 间的曲线分成为

$$A = M_0, M_1, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它们对应于

$$\alpha = t_0, t_1, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

作梯形, 这个梯形以经过 $M_{\nu-1}, M_\nu$ 的二直线为边, 它的面积 (图 13) 等于

$$\frac{z_{\nu-1} + z_\nu}{2}\sqrt{[\varphi(t_{\nu-1}) - \varphi(t_\nu)]^2 + [\psi(t_{\nu-1}) - \psi(t_\nu)]^2}.$$

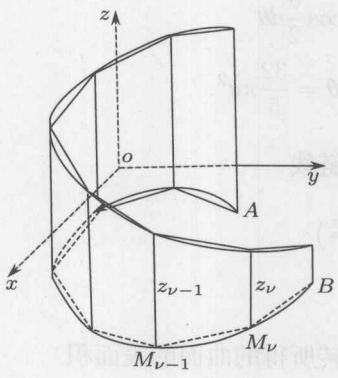


图 13

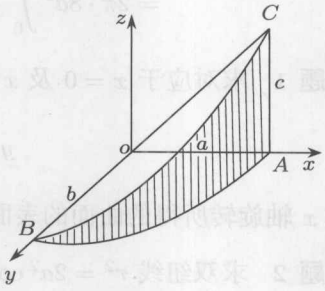


图 14

用与上节相同的方法, 我们的问题可以化为求和数

$$\sum_{\nu=1}^{n} \chi(t_\nu)\sqrt{\varphi'^2(t_\nu) + \psi'^2(t_\nu)}(t_\nu - t_{\nu-1})$$

的问题, 所趋的极限是

$$\int_{\alpha}^{\beta} \chi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

例 1 求 x,y 平面上曲线

$$y=b-\frac{bx^2}{a^2}$$

对应于 $x=0$ 及 $x=a$ 的一段弧上建立的柱面与平面

$$z=\frac{c}{a}x$$

相截后所得的柱面的面积 P (图 14):

$$\begin{aligned} P&=\int_0^a z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\frac{c}{a}\int_0^a x\sqrt{1+\left(\frac{2bx}{a^2}\right)^2}dx \\ &=\frac{c}{a^3}\int_0^a x\sqrt{a^4+4b^2x^2}dx=\frac{c}{12b^2}[(a^2+4b^2)^{3/2}-a^3]. \end{aligned}$$

例 2 如果将上例中曲线段换为在第一象限中的圆周, 即 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$, 则由于当 $x\to a$ 时 $\dfrac{dy}{dx}\to\infty$, 所以上面的公式不能无条件的使用. 采用参数表示法

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

故

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=ac\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=ac.$$

例 3 求曲线

$$x=R\sin^2 t,\quad y=R\sin t\cos t$$

在第一象限内的一段上, 与高

$$z=R\cos t$$

所构成的柱面的面积 P:

$$\begin{aligned} P&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\sqrt{(2R\sin t\cos t)^2+(-R\sin^2 t+R\cos^2 t)^2}dt \\ &=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=R^2. \end{aligned}$$

(曲线与 $z=R\cos t$ 所构成的空间曲线, 正好是柱面 $x^2+y^2=Rx$ 与球 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的截口, 称为 Viviani 曲线.)

习题 1 求将例 1 中的曲线段换为椭圆在第一象限中的一段

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

时的柱面积.

习题 2 求半径为 r, 轴相交成直角的两圆柱体的公共部分的表面积.

§6. 求重心

给定 n 个质点:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \cdots, M_n(x_n, y_n, z_n),$$

它们的质量各等于

$$m_1, m_2, \cdots, m_n.$$

用

$$M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$$

表示总质量, 则

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu, \quad \overline{z} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu$$

称为这质点系的重心.

不难验证, 把这一系任意地分为若干组, 每一组有一重心. 把这一组的质量完全集中在这些重心上, 作出一个新质点组, 这新质点组的重点就是原质点组的重心.

我们不讨论质点系, 讨论充满平面上某一个区域或某一条线段的物质. 为简单起见, 只考虑均匀分布的物质的情况. 取密度为 1, 这样, 一条线段总的质量就可以用这线段的长度来表示它, 一块平面区域的质量可以用面积来表示, 也可以用体积来表示质量.

先求一条曲线弧 AB 的重心. 假定它的长是 s, 把弧 AB 分为 n 份, $\Delta m = \Delta s$ (图 15), 则

$$\overline{x} = \frac{1}{s}\sum x\Delta s, \quad \overline{y} = \frac{1}{s}\sum y\Delta s.$$

求极限可知

$$\overline{x} = \frac{1}{s}\int_{(A)}^{(B)} x ds, \quad \overline{y} = \frac{1}{s}\int_{(A)}^{(B)} y ds,$$

而

$$s = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

由此推出

定理 1 (Guldin Pappus) 由平面上一段已知弧, 绕这平面上一条不穿过这弧的直线作轴, 回转而成的立体的侧面积等于这段弧的长度与这段弧的重心旋转时经过的路程的长度之积.

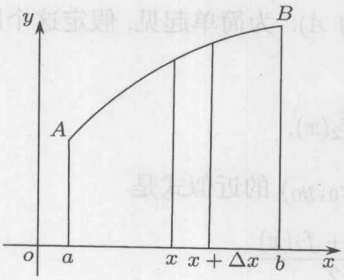


图 15

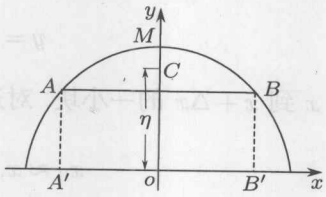


图 16

证 取旋转轴为 x 轴. 由弧 AB 旋转所成立体的侧面积等于

$$2\pi\int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s = 2\pi\bar{y}\cdot s.$$

例 1 试求半径为 r 的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的重心位置.

因为这弧对称于通过它的中点 M 的半径 oM, 所以重心在这半径上. 为了要确定重心, 仅须求出它与圆心 o 的距离 η. 取轴如图 16 所示, 并以 s 表 $\overset{\frown}{AB}$ 弧的长度, d 表示弦 AB 的长, 我们所研究的弧绕 x 轴旋转, 得出球带, 它的面积 P 等于 $2\pi rd$. 依 Guldin 定理, 这表面积又等于 $2\pi\eta s$, 所以 $s\eta = rd$, 即 $\eta = \dfrac{rd}{s}$.

取 $\overset{\frown}{AB}$ 为半圆, 即 $d = 2r, s = \pi r$, 则得

$$\eta = \frac{2}{\pi}r.$$

例 2 求旋轮线的一支:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

的重心.

由于对称性, 所以重心 (ξ, η) 的横坐标 ξ 立刻可以求出

$$\xi = \frac{2\pi a}{2} = \pi a.$$

已知旋轮线一支的周长为 $8a$, 又知这一支绕 x 轴旋转的表面积为 $\dfrac{64}{3}\pi a^2$(见 §1 例 3 及 §4 习题 4), 故由 Guldin 定理可知

$$\frac{64}{3}\pi a^2 = 2\pi\eta\cdot 8a.$$

因此 $\eta = \dfrac{4}{3}a$.

再考虑一块平面区域 A (它的面积也记之为 A). 为简单起见, 假定这个区域是在两条曲线之间, 这两条曲线各为

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x).$$

取 x 到 $x + \Delta x$ 的一小块. 对这一块重心 (x_0, y_0) 的近似式是

$$x_0 \approx x, \quad y_0 = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2},$$

而 $\Delta m \approx (f_2(x) - f_1(x))\Delta x$ (图 17).

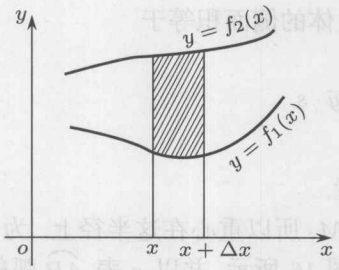


图 17

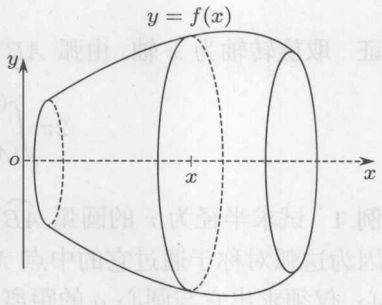


图 18

因此整个面积的重心等于

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\lim_{n\to\infty}\sum x_0\Delta m = \frac{1}{A}\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\lim_{n\to\infty}\sum y_0\Delta m = \frac{1}{A}\lim\sum\frac{f_2(x) + f_1(x)}{2}(f_2(x) - f_1(x))\Delta x$$

$$= \frac{1}{2A}\int_a^b (f_2(x)^2 - f_1(x)^2)dx.$$

由此推出

定理 2 (Guldin Pappus) *由一块平面图形, 绕这平面上一条不穿过这图形的直线为轴, 旋转而成的立体的体积, 等于这块图形的面积与它的重心在旋转时所经过路程的长度的乘积.*

证 取旋转轴为 x 轴, 旋转体的体积 V 等于由曲线 $y = f_2(x)$ 与曲线 $y = f_1(x)$ 旋转而成的两个旋转体的体积的差, 所以

$$V = \pi\int_a^b f_2^2(x)dx - \pi\int_a^b f_1^2(x)dx = 2\pi\overline{y}A.$$

现在再讨论旋转体的重心. 旋转体的重心一定在轴上, 因之, 仅需确定其在旋转轴上的地位即可.

在 x 与 $x+\Delta x$ 间的一截旋转体的体积 $\approx \pi\Delta x(f(x))^2$, 其重心 $\approx x$, 所以旋转体的重心

$$\overline{x}=\frac{1}{V}\lim_{n\to\infty}\pi\sum x(f(x))^2\Delta x=\frac{\pi}{V}\int_a^b x(f(x))^2dx,$$

此处 V 是旋转体的体积 (图 18).

例 3 求抛物线

$$y^2=4ax,\quad 0\leqslant x\leqslant a$$

绕 x 轴旋转出来的立体的重心.

现在有

$$V=\pi\int_0^a(f(x))^2dx=\pi\int_0^a 4axdx=2\pi a^3.$$

又

$$V\overline{x}=\pi\int_0^a x(f(x))^2dx=\pi\int_0^a 4ax^2dx=\frac{4}{3}\pi a^4,$$

因此得

$$\overline{x}=\frac{\frac{4}{3}\pi a^4}{2\pi a^3}=\frac{2}{3}a.$$

§7. 转动惯量 (或平方矩)

一质量为 m 的质点对一轴的转动惯量定义为

$$I=mr^2,$$

这 r 是这一质点与轴的距离.

一批质量为 $m_1,\cdots,m_n$ 的质点 $P_1,\cdots,P_n$ 的转动惯量就是

$$I=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu r_\nu^2,$$

这里 r_ν 是质点 P_ν 到轴的距离.

取轴为 x 轴, 这转动惯量以 I_x 表示它, 因为由点 (x,y,z) 到 x 轴的距离等于 $\sqrt{y^2+z^2}$, 所以

$$I_x=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu(y_\nu^2+z_\nu^2).$$

同法对 y 轴, z 轴的转动惯量各为

$$I_y=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu(z_\nu^2+x_\nu^2),$$

$$I_z=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu(x_\nu^2+y_\nu^2).$$

必须注意, 一质点对一固定轴的转动惯量与这一点的位置无关, 而仅依赖于这一点对这轴的距离.

例如, $(5,0,0)$, $(0,5,2)$ 与 $(3,-4,6)$ 点虽不同, 但它们对 z 轴的转动惯量都是相等的. 实质上, 所有的适合于 $x^2+y^2=5^2$ 的点都有相等的转动惯量. 这些点都是在同一以旋转轴为中心轴的圆柱面上的.

命 $M=\sum_{\nu=1}^{m} m_\nu$ 是总质量. 由 $\dfrac{I}{M}=R^2$ 定义 R, 称为惯性半径, 也就是如果把总质量 M 集中在距轴 R 的点, 所得的转动惯量与原质点系的转动惯量相等.

我们现在也是仅仅考虑均匀物质的转动惯量.

一个平面积对 y 轴的转动惯量. 取一小条, 其宽为 dx, 曲线则由 $y=f(x)$ 到 $f(x+\Delta x)$, 这一小条的质量 $\approx y\,dx$, 其惯性半径 $\approx x$ (图 19). 所以

$$I_y=\int_a^b x^2\cdot y\,dx.$$

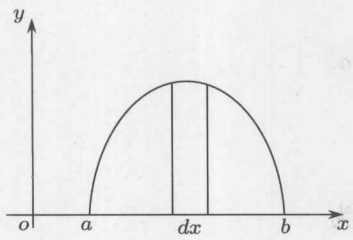


图 19

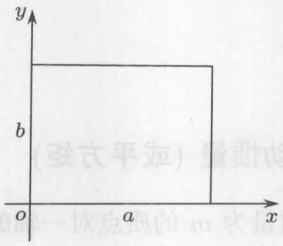


图 20

例 1 求长方形对其一边的转动惯量, 在上式中 $y=b$ (图 20), 所以

$$I_y=\int_0^a bx^2dx=\frac{a^3b}{3}=\frac{1}{3}a^2(ab).$$

有时候我们要处理这样的问题: 求一个平面积对一条垂直于这平面的轴的转动惯量. 我们假定原图形在 (x,y) 平面上, 轴就是 z 轴, 在 (x,y) 平面上的一点 (x,y) 与 z 轴的距离就是 $\sqrt{x^2+y^2}$, 即与原点的距离. 这种情况, 我们也称为对原点的转动惯量:

$$I_z=I_0=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2)=I_x+I_y.$$

读者试自己处理一个旋转体对其旋转轴的转动惯量.

§8. 流体压力

以前曾经涉及过一个力或几个力作用在一个质点上的情况, 我们经常遇到这样的问题: 并不是一力作用在一个点上, 而是分布在一块面积或一块体积上, 例如: 载

沙土的车子, 对车旁边的压力; 如两个带电的盘子的吸引, 如两个球体或其他形状的物体互相吸引的问题, 如果我们把物体看成为质点的总和, 问题也可以把物体受力的情况看成为诸质点各个受力的总和.

最简单的例子就是流体的压力, 一个平面垂直地插进均匀的流体中去, 为了确切起见, 我们把 x 轴放在流体面, 而把 y 轴的正向向下, 插进流体之中.

把面积分为矩形, 其长为 x_i, 其宽为 Δy. 在水下的深度等于 y_i (图 21). 如这一片并不是垂直的, 而是水平方向的, 那么在这一片上面的流体的压力就等于在这一片上所承担的流体柱的重量, 即 $w \cdot y_i x_i \Delta y$, 此处 w 表单位体积流体的重量. 由流体的性质, 在这一片上的旁压力也 $\approx w y_i x_i \Delta y$, 所以

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum wyx\Delta y = w\int_a^b yxdy.$$

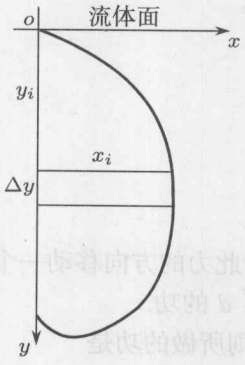


图 21

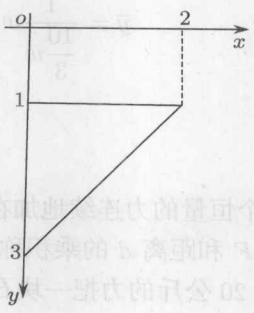


图 22

定理 1 *垂直插进流体的平面积的旁压力等于单位体积流体的重量乘以插进去的面积再乘以重心的深度.*

例 1 把一块三角板插进水内, 这三角板的三顶点各为 (0,1), (0,3), (2,1) (图 22), 斜边方程是

$$x + y = 3,$$

所以

$$F = w\int_1^3 yxdy = w\int_1^3 y(3-y)dy = w\left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_1^3 = \frac{10}{3}w.$$

核对: 三角形的面积是 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$. 重心的深度是 $1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. 由定理 1 可知 $w\cdot 2\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{3}w$.

压力中心. 以上的情况看成为一批平行力压在一个垂直面上, 即大小如

$$\Delta F_i = w y_i x_i \Delta y$$

的垂直力压在所对应的小片上, 这一小片的重心之坐标近似于 $\left(\frac{x_i}{2}, y_i\right)$, 这些力可以算出重心. 它的坐标就是

$$F\overline{x} = \frac{1}{2}w\int_a^b yx^2dy,$$

$$F\overline{y} = w\int_a^b y^2xdy,$$

这个 $(\overline{x}, \overline{y})$ 也称为压力中心.

例 2 上例中的压力中心的坐标是

$$\overline{x} = \frac{1}{\frac{10}{3}w}\frac{1}{2}w\int_1^3 yx^2dy = \frac{3}{20}\int_1^3 y(3-y)^2dy$$

$$= \frac{3}{20}\left[\frac{9y^2}{2} - 2y^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_1^3 = \frac{3}{5},$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\frac{10}{3}w}w\int_1^3 y^2xdy = \frac{9}{5}.$$

§9. 功

命一个恒量的力连续地加在一个物体上, 使它沿此力的方向移动一个距离 d, 则力的大小 F 和距离 d 的乘积称为使这物体移动距离 d 的功.

例如, 20 公斤的力把一块石头推进了 10 公尺, 则所做的功是

$$W = (20\text{ 公斤})(10\text{ 公尺}) = 200(\text{公斤}\cdot\text{公尺}).$$

我们现在把这一概念推广到变化的力上去.

例 1 一个圆柱形的水桶, 其底的半径是 5 公尺, 其高是 20 公尺. 注满了水. 求把所有的水抽出水桶所做的功.

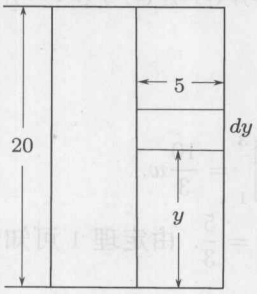


图 23

水桶的纵剖面如图 23. 现在考虑离桶底 y 公尺的情况. 这是一个圆片, 体积等于 $\pi\cdot 5^2\cdot dy$ (立方公尺), 水的重量是每立方公尺的水重一吨, 所以, 这圆片的水重等于 $25\pi dy$ (吨), 这需要升高 $(20-y)$ 公尺.

把这圆片的水升到桶口所做的功等于

$$25\pi(20-y)dy,$$

所以总功等于

$$W = 25\pi\int_0^{20}(20-y)dy = 25\pi\left[-\frac{(20-y)^2}{2}\right]_0^{20} = 5000\pi(\text{吨}\cdot\text{公尺}).$$

例 2 求将弹簧伸长 S 所作的功 P. 设张力 $p=Cs$, 此处 C 是常数, 则

$$P=\int_0^s pds=C\int_0^s sds=\frac{Cs^2}{2}.$$

例 3 设活塞的面积为 Q, 单位面积上承受的气体膨胀的压力是 p, 求气体膨胀时, 将活塞由距气缸底 S_1 处推至距汽缸底 S_2 所作的功 P:

$$P=Q\int_{s_1}^{s_2} pds.$$

由于 Boyle-Mariotte 定律

$$pv=C,$$

而 $v=Qs$. 作变换 $s=\dfrac{v}{Q}$, 则得

$$P=\int_{v_1}^{v_2}\frac{C}{v}dv=C\log\frac{v_2}{v_1}=C\log\frac{p_1}{p_2}=p_1v_1\log\frac{p_1}{p_2},$$

此处 $v_1=QS_1$, $v_2=QS_2$, p_1 与 p_2 分别表示过程开始与过程终了时的压力.

假定在膨胀时, 气体与周围没有热流通, 这称为绝热过程. 这时 p 与 v 之间有次之关系:

$$pv^k=C,$$

此处 $k>1$ 与 C 都是常数. 因此

$$P=\int_{v_1}^{v_2}C_v^{-k}dv=\frac{C}{k-1}\left(\frac{1}{v_1^{k-1}}-\frac{1}{v_2^{k-1}}\right).$$

第十二章　多个变量的函数

§1. 变量

一直到现在所讨论的变量有两种: 一种是取自然数值的 (或者是取整数值的), 这种变量称为离散性的. 例如, 序列 $\{a_n\}$ 就是离散变量 n 的函数. 另一种是取实数值的或连续地取一部分实数的, 这种变量称为连续性的. 一般平面上的图形 $y=f(x)$ 就是代表连续变量 x 的函数. 我们已往所讨论的都是仅有一个变量的情况, 但是客观事物的变化不一定只有一个因素. 往往是在突出地考虑一个因素的作用和影响时, 才会出现单变量的情况. 一般讲来, 我们经常遇到的是多种因素的情况, 表现成为数学问题也就是多个变量的函数. 有时还可能出现无穷个变量的情况. 我们现在暂不讨论无穷个变量的情况. 假定变量的个数是一个定数 n, n 可能是 1,2,3, 也可以是大于 3 的自然数, 当 $n=1,2,3$ 时, 可以用线, 面, 体上的点来说明. 当然, 当 $n>3$ 时, 不可能有几何空间的明确意义, 但是我们仍将保留几何名称.

为了叙述方便, 我们用一般的 n, 有时仅叙述 $n=2$ 或 $n=3$ 的情况.

在讲一般的 n 时, 读者最好举出 $n=2$ 或 $n=3$ 的情况来细看一下. 又在讲 $n=2$ 或 $n=3$ 时, 读者最好思考一下推到一般 n 有什么困难. 这是一个帮助自己复习的方法.

变量既然有两类, 我们自然也就有以下几种不同情况:

1° 有多个离散变量的情况. 如重序列

$$a_{lm}, \quad l,m=0,1,2,\cdots$$

及重级数

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{lm}$$

就是有两个离散变量的情况.

2° 多个连续变量的情况. 如两个变量 x, y 的函数

$$f(x, y)$$

在 (x, y) 平面上的一个范围内变化, 又如

$$w = xyz, \quad w = x^2 + y^2 + z^2$$

在整个三维空间 (x, y, z) 上定义, 而

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

仅在单位球内或表面上定义, 即

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1.$$

又如

$$w = \arcsin \frac{x}{a} + \log y + e^z$$

仅在 $|x| \leqslant a, y > 0, -\infty < z < \infty$ 的范围内定义.

3° 混合的情况. 也就是有一部分变量是离散的, 而另一部分是连续的. 例如, 在 $[a, b]$ 中定义的函数序列

$$a_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

就属于这种情形.

这几章的目的就是在于研究多变量的情况. 我们先从 2° 型的多变量情况说起.

§2. n 维空间

n 维空间与普通的二维、三维空间相似, 我们取 n 个互相垂直的轴: $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 空间的点用 n 个实数 (有时也用 n 个复数)

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

来表示它.

如果这 n 个数 $x_1, \cdots, x_n$ 是一个参变量 t 的函数, 即

$$x_1 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

这样所定义出来的轨迹称为 n 维空间的曲线.

命

$$A = (a_1, \cdots, a_n)$$

及

$$B=(b_1,\cdots,b_n)$$

代表两点, 则

$$x_\nu=a_\nu+t(b_\nu-a_\nu),\quad 1\leqslant\nu\leqslant n,0\leqslant t\leqslant 1$$

代表一个线段, 即由 A 到 B 的线段; 又当 $-\infty<t<\infty$ 时, 则代表过 A,B 二点的直线.

两点

$$P=(x_1,\cdots,x_n),$$
$$Q=(y_1,\cdots,y_n)$$

的距离定义为

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

对任意三点 P,Q,R, 我们有不等式

$$\overline{PQ}+\overline{QR}\geqslant\overline{PR},$$

也就是“三角形的两边之和大于第三边”的性质. 明确些, 我们有:

定理 1

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+\cdots+(y_n-z_n)^2}$$
$$\geqslant\sqrt{(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2}.$$

上式仅当三点 $P=(x_1,\cdots,x_n),Q=(y_1,\cdots,y_n),R=(z_1,\cdots,z_n)$ 在一直线上时取等号.

证 命

$$x_\nu-y_\nu=a_\nu,\quad y_\nu-z_\nu=b_\nu,$$

则定理 1 转变为

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2}+\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2}\geqslant\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^2}.$$

平方此式, 得

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2+\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2+2\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2}\geqslant\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+2a_\nu b_\nu+b_\nu^2),$$

于是只要证明

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2\geqslant\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\right)^2.$$

现在考虑

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu^2 - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu b_\mu = \sum_{\nu<\mu} (a_\nu^2 b_\mu^2 + a_\mu^2 b_\nu^2 - 2a_\nu b_\nu a_\mu b_\mu) = \sum_{\nu<\mu} (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2.$$

这当然是 $\geqslant 0$ 的. 因而得出定理 1 的不等式.

如果取等号, 则得

$$a_\nu b_\mu = a_\mu b_\nu,$$

即

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{a_\mu}{b_\mu},$$

亦即

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

命之为 t, 则得 $a_\nu = tb_\nu$. 所以

$$x_\nu = a_\nu + y_\nu = tb_\nu + y_\nu, y_\nu = b_\nu + z_\nu,$$

从而

$$x_\nu = tb_\nu + b_\nu + z_\nu,$$

即三点都在直线

$$(\lambda b_1 + z_1, \cdots, \lambda b_n + z_n), \quad -\infty < \lambda < \infty$$

之上.

§3. 邻域

我们今后将常用以下的一些区域:

1) 闭区域

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \cdots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

是一个长方体, 我们把它记之为

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n].$$

略去所有的等号, 即得开区域

$$a_1 < x_1 < b_1, \cdots, a_n < x_n < b_n.$$

我们以

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n)$$

表示它. 长方体的边长各为 $b_1-a_1,\cdots,b_n-a_n$, 体积等于 $(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)$. 这个长方体的中心是

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\cdots,\frac{a_n+b_n}{2}\right).$$

定义 1　以一点 $A=(a_1,\cdots,a_n)$ 为中心的任一开长方体:

$$|x_\nu-a_\nu|<\delta_\nu,\quad \nu=1,2,\cdots,n$$

称为这点 A 的邻域.

2) 适合于

$$x_\nu\geqslant 0,\quad \nu=1,2,\cdots,n,$$
$$x_1+\cdots+x_n\leqslant h\quad (h>0)$$

的点所成的集合称为闭单纯体. 当 $n=1$ 时, 这是一线段; 当 $n=2$ 时, 这是一个三角形; $n=3$ 时, 这是一个四面体.

去掉所有的等号, 我们得出开单纯体.

3) 适合于

$$\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-a_\nu)^2\leqslant r^2\quad (\text{或}<r^2)$$

的点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 所成的集合称为以点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 为中心、以 r 为半径的闭球 (或开球).

我们有时也把以 $(a_1,\cdots,a_n)$ 为中心的开球作为点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的邻域. 为了区别起见, 称这样的邻域为球形邻域.

定理 1　*一点 A 的邻域中一定包有一个 A 的球形邻域; 反之, 在一个 A 的球形邻域内, 也一定包有一个 A 的邻域.*

证　给了一个长方体邻域

$$|x_\nu-a_\nu|<\delta_\nu,\quad \nu=1,2,\cdots,n,$$

其中显然包有球形邻域

$$\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-a_\nu)^2<\min(\delta_1^2,\cdots,\delta_n^2).$$

反之, 在球形邻域

$$\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-a_\nu)^2<r^2$$

中, 也显然包有长方体邻域

$$|x_\nu-a_\nu|<\frac{r}{\sqrt{n}},\quad \nu=1,2,\cdots,n.$$

定义 2 命 M 表一个点集. 如果一点 P (不一定属于 M) 的任一邻域都包有 M 中的点, 则 P 称为集 M 的聚点.

定义 3 包有所有的聚点的集合 M 称为闭集.

例如, 闭长方体、闭球、闭单纯体都是闭集.

§4. 域

定义 1 命 M 表一点集. A 为 M 的某一个点, 如果点 A 有一个充分小的邻域亦在 M 中, 则 A 点称为 M 的内点.

仅有内点的集称为开域.

由上面的定理可知, 内点的定义并不因球形邻域还是长方体邻域而变. 开域的定义也如此.

例如, 开长方体, 开单纯体, 开球都是开域.

定义 2 开域 M 的聚点, 不在 M 中的称为边界点, 边界点的全体称为 M 的边界.

开域加上边界称为闭域.

例如, 开长方体

$$a_\nu < x_\nu < b_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n$$

的边界是由 $2n$ 个 "面" 所组成的 $(x_\nu = a_\nu, x_\nu = b_\nu)$. 而闭长方体是闭域.

球 $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 < r^2$ 的边界是 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. 闭球是闭域.

定理 1 闭域是闭集, 也就是闭域包有一切聚点.

证 命 A 为闭域 $\overline{D}$ 的一个聚点, 则 A 的任一邻域一定包有 $\overline{D}$ 的点. 如果任一邻域都包有 $\overline{D}$ 的内点, 则 A 一定是 $\overline{D}$ 的内点或边界点. 如果 A 的邻域

$$|x_\nu - a_\nu| < \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

仅包有 $\overline{D}$ 的边界点. 命 $B = (b_1, \cdots, b_n)$ 为这样的一点. 在 (1) 式内, 我们可以做 B 的邻域, 由于 B 是边界点, 所以其中一定包有 $\overline{D}$ 的内点, 也就是 (1) 式中有 $\overline{D}$ 的内点, 因而 A 是 $\overline{D}$ 的边界点. 定理证毕.

定义 3 如果一个点集 M 的所有点都可以包在一个长方体内, 就称这个点集为有界点集.

定义 4 如果域中任二点都可以用完全在这域内的折线连起来, 就称这域为连通域.

如图 24 和图 25 中的域是平面上的连通域, 又如球 (图 26) 与环 (图 27) 也是连通的, 图 28 中的域也是连通的, 但图 29 中的域是不连通的.

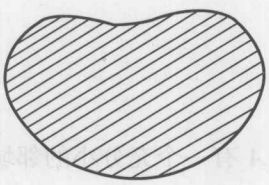


图 24

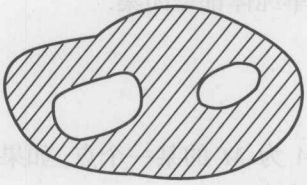


图 25

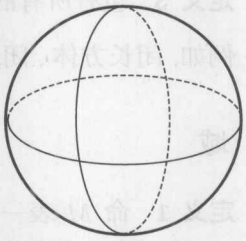
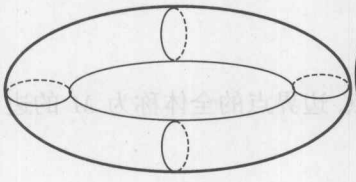
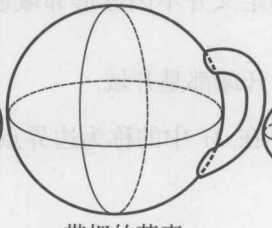


图 26



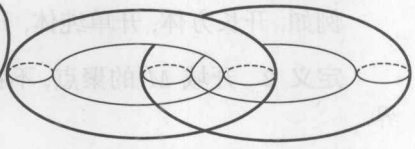
环

图 27



带把的茶壶

图 28



玉连环

图 29

§5. 极限与连续

假定函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)$$

在一点 $A=(a_1,\cdots,a_n)$ 的一个邻域内定义 (或者更一般些, 在一个以 A 为聚点的点集 M 上定义), 但在 A 点可能并没有定义.

定义　如果存在有限数 L, 给了任意 $\varepsilon>0$, 可以找出 $\delta>0$, 使当

$$|x_\nu-a_\nu|<\delta,\quad \nu=1,\cdots,n \tag{1}$$

时有

$$|f(x_1,\cdots,x_n)-L|<\varepsilon,$$

则称为当点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 趋于点 $A=(a_1,\cdots,a_n)$ 时 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 趋于极限 L (有时在条件 (1) 外我们更加上 x 属于 M 这一条件). 记为

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,\cdots,x_n)=L.$$

有时为了简单起见, 也写作

$$\lim_{x\to A} f(x) = L.$$

不难证明, 如果把邻域 (1) 换为球形邻域, 结果也是一样的.

仿此可以建立函数的无穷极限的概念. 在 $L = \infty, +\infty$ 和 $-\infty$ 的情况, 不等式

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - L| < \varepsilon$$

各换为不等式

$$|f(x_1, \cdots, x_n)| > E, \quad f(x_1, \cdots, x_n) > E$$

或

$$f(x_1, \cdots, x_n) < -E,$$

此处 E 是预给的任意正数.

也可以定义 $x_1 \to +\infty, \cdots, x_n \to +\infty$ 的情况, 即对任一 $\varepsilon > 0$, 有 $\Delta > 0$ 存在, 使 $x_1 > \Delta, \cdots, x_n > \Delta$ 时

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - L| < \varepsilon.$$

记为

$$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots \\ x_n \to +\infty}} f(x_1, \cdots, x_n) = L.$$

现在所谈极限的情况比一个变量复杂得多了. 就二维空间来说, 就有各种线路来接近一点. 例如, 函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

当沿线 $y = \lambda x$ 接近于 (0,0) 时, 得

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

可见每一个直线方向的极限都存在, 但是数值随着方向而改变,

又如

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2},$$

则由于先后求极限的次序不同, 而结果各异. 如

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)] = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2 + y^3}{y^2} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} = 1.$$

这说明了处理多变量函数的极限时必须小心, 很可能

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}},\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0},\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}$$

所代表的是不同的东西. 以上例言, 第一种极限不存在, 第二第三各异.

由此可见, 任意地交换两个极限号会造成严重错误. 但有了以下的定理, 就能保证极限的交换.

定理 1 假定 1°

$$L=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

存在; 2° 函数

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x,y)$$

存在, 则得

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y);$$

又如果 3°

$$\psi(x)=\lim_{y\to b} f(x,y)$$

存在, 则两个极限手续可交换.

证 由定义, 给了 $\varepsilon>0$, 必有 $\delta>0$, 使

$$|x-a|<\delta,\quad |y-b|<\delta$$

时

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon.$$

使 $x\to a$, 则得当 $|y-b|<\delta$ 时

$$|\varphi(y)-L|<\varepsilon,$$

即得定理.

定义 如果

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1'\\ \cdots\\ x_n\to x_n'}} f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1',\cdots,x_n'),$$

就说 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1',\cdots,x_n')$ 处连续, 也就是给了 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$ 存在, 使

$$|x_1-x_1'|<\delta,\cdots,|x_n-x_n'|<\delta$$

时

$$|f(x_1,\cdots,x_n)-f(x_1',\cdots,x_n')|<\varepsilon.$$

已经讨论过的函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2>0,\quad f(0,0)=0$$

除原点以外无处不连续. 但在 $x=0,y=0$ 这一点并不连续. 对任何一个固定的 $x,f(x,y)$ 是 y 的连续函数, 而对一个固定的 $y,f(x,y)$ 也是 x 的连续函数. 这现象告诉我们对各变数的连续函数, 并不一定是对两个变量的连续函数. 原因是前者仅考虑沿平行于 x 轴或 y 轴方向的趋于极限法, 而全面趋于极限法却是各种不同的趋于极限法都要考虑

定理 2 假定

$$\varphi_1(t_1,\cdots,t_m),\cdots,\varphi_n(t_1,\cdots,t_m)$$

是在点 $(t_1',\cdots,t_m')$ 附近的连续函数, 并且命

$$x_\nu'=\varphi_\nu(t_1',\cdots,t_m'),\quad \nu=1,\cdots,n.$$

假定

$$u=f(x_1,\cdots,x_n)$$

是在点 $(x_1',\cdots,x_n')$ 附近的连续函数, 则

$$u=f[\varphi_1(t_1,\cdots,t_m),\cdots,\varphi_n(t_1,\cdots,t_m)]$$

是在 $(t_1',\cdots,t_m')$ 附近的连续函数.

证 对任一 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 使

$$|x_\nu-x_\nu'|<\delta,\quad \nu=1,\cdots,n$$

时

$$|f(x_1,\cdots,x_n)-f(x_1',\cdots,x_n')|<\varepsilon.$$

又有 $\eta>0$ 存在, 使当

$$|t_\mu-t_\mu'|<\eta,\quad \mu=1,\cdots,m$$

时

$$|\varphi_\nu(t_1,\cdots,t_m)-\varphi_\nu(t_1',\cdots,t_m')|<\delta,\quad \nu=1,\cdots,n,$$

即

$$|x_\nu-x_\nu'|<\delta.$$

因而得出本定理.

§6. 域内的连续函数

与一个变量相仿, 我们有以下的一批定理 (证明从略).

定理 1 假定 $f(x,y)$ 是在某一连通域 D 中的连续函数, 如果 D 中有二点使 $f(x,y)$ 值异号, 即

$$f(x_0,y_0)f(x_1,y_1)<0,$$

则此域中必有一点 (x',y') 使

$$f(x',y')=0.$$

定理 2 (Bolzano-Weierstrass) 从任一有界序列

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\cdots$$

中一定能够选出一个趋于极限的子序列

$$(x_{n_1},y_{n_1}),(x_{n_2},y_{n_2}),\cdots,(x_{n_k},y_{n_k}),\cdots$$
$$(n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots,n_k\to\infty).$$

定理 3 函数 $f(x,y)$ 在一个有界闭域中定义且连续, 则它一定有有限的上界 M 及下界 m, 即

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M.$$

定理 4 在一个有界闭域上定义且连续的函数 $f(x,y)$, 一定在其上取最大值与最小值.

定理 5 (Heine-Borel) 若平面上的有界闭集 M 能被开域 σ 的无穷组 $\Sigma=\{\sigma\}$ 所遮盖, 则恒能从其中选出有限个开域

$$\sigma_1,\cdots,\sigma_n,$$

它也能遮盖 M 的全部.

定理 6 在有界闭域 D 上连续的函数 $f(x,y)$, 一定在其上一致连续, 换言之, 对任一 $\varepsilon>0$, 可以找到 $\delta>0$, 使 D 中的任意二点 $(x,y),(x',y')$ 之适合于

$$|x-x'|<\delta,\quad |y-y'|<\delta$$

者, 有

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon.$$

这些定理证明的原则都和一个变量的情形一样, 读者试自己证明. 这些定理还有更一般的抽象形式, 为抽象空间的基本性质.

§7. 偏微商与全微分

定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}=D_xf$$

为 $f(x,y,z)$ 对 x 的偏微商. 类似地, 可以定义 D_yf, D_zf.

这函数的偏微分的和

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

称为函数 $f(x,y,z)$ 的全微分.

全微分的意义也可以用下面的方法得出:

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)\\&=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y+\Delta y,z+\Delta z)\\&\quad+f(x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z+\Delta z)+f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z).\end{aligned}$$

改变量的主要部分就是全微分.

假定 x,y,z 不是自变量而是参变量 t 的函数, 则得公式

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.\tag{1}$$

全微分显然有以下的法则:

$$\begin{aligned}d(u\pm v)&=du\pm dv,\\d(uv)&=\frac{\partial}{\partial x}(uv)dx+\frac{\partial}{\partial y}(uv)dy\\&=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\\&=udv+vdu,\\d\left(\frac{u}{v}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)dy=\frac{vdu-udv}{v^2}.\end{aligned}$$

这虽然仍然是旧形式, 但是有了新的更广泛的内容.

又如果 x,y,z 是 u,v 的函数, 即

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v),$$

则

$$f(x,y,z)=f[\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)].$$

对 u, v 的偏微商等于

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

证法与公式 (1) 的证明完全相同.

乘以 du, dv 而相加, 得

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

例 1 $u = x^y (x > 0)$ 的偏微商是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \log x.$$

而

$$du = yx^{y-1}dx + x^y \log x dy.$$

如果 $y = \sin x$, 则

$$\frac{du}{dx} = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x}\cos x \log x = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right).$$

例 2 命

$$z = y \cdot f(x^2 - y^2),$$

此处 $f(u)$ 是一个有微商的任意函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xyf'(x^2 - y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x^2 - y^2) - 2y^2 f'(x^2 - y^2).$$

由此得

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y}f(x^2 - y^2) - 2yf'(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2},$$

所以函数 z 适合于

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

这是偏微分方程.

例 3 理想气体的体积 V, 压力 p 及绝对温度 T 之间有关系式

$$pV = RT \ (R\text{是常数}).$$

如果把 T 看作为 pV 的函数, 则有

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{R}.$$

把 V 看为 p,T 的函数, 即 $V=\dfrac{RT}{p}$, 则有

$$\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}.$$

把 p 看为 V,T 的函数又有

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},\quad \frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}.$$

由此得出热力学上的重要公式

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1$$

注意, 异于

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt},$$

我们现在并没有公式

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}.$$

例 4 由

$$d\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},$$

我们也可以求出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

例 5 由

$$d\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(y^2+z^2-x^2)dx-2xydy-2xzdz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

可以求出

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.
\end{aligned}$$

§8. 齐次函数

函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 之适合于

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^{\lambda}f(x_1,\cdots,x_n) \tag{1}$$

者, 称为 λ 次齐次函数.

例如, $x^2+7xy+9y^2$ 是二次齐次函数, 而

$$\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x(x+y)}\operatorname{tg}\frac{x}{y}$$

就是 0 次齐次式.

把 (1) 式的两边对 t 微商得

$$x_1\frac{\partial f(tx_1,\cdots,tx_n)}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f(tx_1,\cdots,tx_n)}{\partial x_n}=\lambda t^{\lambda-1}f(x_1,\cdots,x_n).$$

命 $t=1$, 即得

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda f(x_1,\cdots,x_n). \tag{2}$$

这就是关于齐次函数的 Euler 公式.

定理 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 λ 次齐次式, 且有连续偏微商, 则有

$$\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu}=\lambda f.$$

反之, 任何有连续偏微商的函数, 如果适合上式, 则是 λ 次齐次式.

证 我们现在证明其逆. 命

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)}{t^{\lambda}}.$$

当 $t>0$ 时这函数是有定义且连续的, 求 $\varphi'(t)$, 其分子等于

$$\begin{aligned}&t^{\lambda}\frac{d}{dt}f(tx_1,\cdots,tx_n)-\lambda t^{\lambda-1}f(tx_1,\cdots,tx_n)\\&=t^{\lambda}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(tx_1,\cdots,tx_n)-\lambda t^{\lambda-1}f(tx_1,\cdots,tx_n).\end{aligned}$$

由假定这等于 0, 即 $\varphi'(t)=0$. 由此 $\varphi(t)$ 与 t 无关. 命 $\varphi(t)=c$, 再命 $t=1$, 可见 $c=f(x_1,\cdots,x_n)$. 因此

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^{\lambda}f(x_1,\cdots,x_n).$$

§9. 切平面

命

$$S: \quad z = f(x, y)$$

代表一曲面. 如果

$$C: \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

则当 t 变化时, x, y, z 就在曲面上画出一条曲线 C. 由第十四章 §1 可知, 这曲线在 (x, y) 点的切线方程是

$$\frac{X - x}{\varphi'} = \frac{Y - y}{\psi'} = \frac{Z - z}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\varphi' + \dfrac{\partial f}{\partial y}\psi'} = \tau.$$

由此得出

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi'\tau + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'\tau = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y). \tag{1}$$

这称为切面方程. 这当然假定了曲面上任何光滑曲线都有微商, 而其切线都在平面 (1) 上.

如果曲面是用参变量法表出的:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

把 v 看成为常数, 则得一曲线, 这曲线在 (u, v) 的切线已知其为

$$\frac{X - x}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} = \frac{Y - y}{\dfrac{\partial \psi}{\partial u}} = \frac{Z - z}{\dfrac{\partial \chi}{\partial u}}.$$

同法, 如果把 u 看成常数, 则有切线

$$\frac{X - x}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}} = \frac{Y - y}{\dfrac{\partial \psi}{\partial v}} = \frac{Z - z}{\dfrac{\partial \chi}{\partial v}}.$$

这两条切线定一平面, 这平面经过点 (x, y, z), 所以是

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

的形式. 又因为它经过两条直线, 所以

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B\frac{\partial \psi}{\partial u} + C\frac{\partial \chi}{\partial u} = 0,$$
$$A\frac{\partial \varphi}{\partial v} + B\frac{\partial \psi}{\partial v} + C\frac{\partial \chi}{\partial v} = 0.$$

因此得出

$$A:B:C=\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\chi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\chi}{\partial v}\end{matrix}\right|:\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\chi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\chi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\end{matrix}\right|:\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right|.$$

这样得出平面是

$$\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\chi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\chi}{\partial v}\end{matrix}\right|(X-x)+\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\chi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\chi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\end{matrix}\right|(Y-y)+\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right|(Z-z)=0.$$

特别取 $\varphi(u,v)=u,\psi(u,v)=v,\chi(u,v)=f(u,v)$, 这就是刚才得出的切面方程, 是切面方程的参变量表示法形式. 但须注意, 三个行列式同为零的情况必须除外.

习题 试取三点 $(u,v),(u+\Delta u,v),(u,v+\Delta v)$ 作一平面且命 $\Delta u\to 0,\Delta v\to 0$ 的方法而求出切面方程.

隐函数表达法的切面方程. 方程

$$F(x,y,z)=0$$

也表示曲面, 把 z 看成 x,y 的函数, 求偏微商

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}&=0.\end{aligned}$$

所以得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},$$

因而切面方程是

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0.$$

例 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上一点 (x,y,z) 的切面方程是

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0,$$

即

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

§10. 沿一定方向的微商

在一点 (x_0, y_0, z_0) 函数 $f(x, y, z)$ 可能有各个不同方向的微商. 命

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma,$$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是方向余弦, 则

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

就定义为函数 $f(x, y, z)$ 沿方向 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的微商, 记为

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l},$$

而 $\boldsymbol{l}$ 表示方向 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

立刻得出

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

在许多物理问题中, 函数 $f(x, y, z)$ 的方向变化率是有用的. 例如, 温度场就是: 如果给定了所考察物体的每点 (x, y, z) 的温度 $f(x, y, z)$, 则热的分布和转移的规律自然地依赖于温度沿着一切方向升降的速度.

我们现在提出这样的问题: 函数在哪一个方向增加得快, 并且快得怎样? 我们用以下前已证过的不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ 时取等号, 即得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|^2 \leqslant \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

这是因为 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. 故最大大不过

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

且仅当

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\cos\beta} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\cos\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

时最大, 即取方向

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \text{ 等等}$$

增大得最快. 又最小小不过

$$-\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

且仅当

$$\cos\alpha=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},\ \text{等等}$$

时最小.

我们定义向量

$$\boldsymbol{g}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

为函数 f 的梯度, 有时用 $\operatorname{grad} f$ 或 ∇f 表它, 其长度

$$|\boldsymbol{g}|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

如此得出

$$\frac{\partial f}{\partial l}=|\boldsymbol{g}|\cos(\boldsymbol{g},\boldsymbol{l}).$$

也就是 f 对方向 l 的微商等于 f 的梯度在向量 $\boldsymbol{l}$ 上的投影.

§11. 高阶偏微商

偏微商还可以再求偏微商, 因而得出高阶偏微商. 例如, 函数 $f(x,y)$ 的二阶偏微商有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

或

$$f''_{xx},f''_{xy},f''_{yx},f''_{yy}.$$

有时候也写成为

$$f_{xx},f_{xy},f_{yx},f_{yy}.$$

f''_{xy} 与 f''_{yx} 是由不同次序求微商而得来的, 其结果是否相等需要研究. 例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{当 } x=y=0\end{cases}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],\quad 当\quad x^2+y^2>0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=0.$$

当 x 取 0 时, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|_{x=0}=-y$, 所以 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\Big|_{x=0}\right]=-1$, 即

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=-1.$$

但另一方面可证

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=+1.$$

这例子说明了求微商的次序不同, 所求出的结果各异, 但是幸亏这种情况并不经常遇到. 在以下的条件下, 求微商的次序是可以交换的.

定理 1 假定 1° 函数 $f(x,y)$ 在开域 D 中定义; 2° $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ 都存在; 且 3° 作为 x,y 的函数, f''_{xy}, f''_{yx} 在某点 (x_0,y_0) 是连续的, 则

$$(f''_{xy})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=(f''_{yx})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

证 考察

$$W=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk},$$

式中 h,k 都异于 0 且充分小, 使点 (x_0+h,y_0+k) 在 D 之中.

命

$$\varphi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}.$$

由 2° 可知

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x,y_0+k)-f'_x(x,y_0)}{k}$$

存在且连续.

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}.$$

由 Lagrange 定理得

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)}{k},$$

$$0<\theta<1.$$

由于 f''_{xy} 存在, 所以再用一次 Lagrange 公式得

$$W = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k), \quad 0 < \theta' < 1.$$

同样方法可得

$$W = f''_{yx}(x_0 + \tau h, y_0 + \tau' k), \quad 0 < \tau, \tau' < 1,$$

即得

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) = f''_{yx}(x_0 + \tau h, y_0 + \tau' k).$$

命 $h, k \to 0$, 由 3° 可知

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

上例失败的原因是

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left[1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right], \quad x^2 + y^2 > 0$$

在 $x = 0, y = 0$ 并不连续.

更一般些

$$f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{yxx}$$

等等都可以在交换两个的基础上推出它们相等的条件. 因而有

定理 2 *假定 $f(x, y)$ 定义于一开域中. 在这域中有一切 k 阶连续偏微商, 则任一 k 阶偏微商的求得与微分运算的次序无关.*

以后我们不再为偏微商的次序操心, 经常假定是可以交换次序的情况, 常写成为

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}, \quad \alpha + \beta + \gamma = k,$$

而不编其次序了.

再研究高阶微分. 由

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

可得

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = dx\left(d\frac{\partial f}{\partial x}\right) + dy\left(d\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= dx\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right) + dy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

同样

$$d^3u = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

我们引进微分记号

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\partial^n f}{\partial x^l \partial y^{n-l}}dx^l dy^{n-l},$$

这里 $\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ 是二项式系数, 这可以用归纳法证明. 因为

$$\begin{aligned}
d^{n+1}u &= d\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^l \partial y^{n-l}}\right)dx^l dy^{n-l}\right)\\
&= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{l+1}\partial y^{n-l}}dx + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^{n-l+1}}dy\right)dy^{n-l}dx^l\\
&= \sum_{l=1}^{n}\left[\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right]\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^{n+1-l}}dx^l dy^{n+1-l} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}dx^{n+1} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}dy^{n+1}\\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^{n+1-l}}dx^l dy^{n+1-l}.
\end{aligned}$$

这是在把 dx 与 dy 作为自变量的微分的情况下进行的, 即把 dx 与 dy 当作常量. 如果 dx 与 dy 不算作常量, 结论必须修改, 我们有

$$\begin{aligned}
d^2u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\\
&= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y.
\end{aligned}$$

例如, 在求函数

$$u = u(x,y), \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

的 $\frac{d^2u}{dt^2}$ 时, 可以发现

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)$$

及

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi'^2(t) + 2\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}\varphi'(t)\psi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\psi'^2(t) + \frac{\partial u}{\partial x}\varphi''(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\psi''(t).$$

但如果错误地运用公式

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot dy^2,$$
$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt,$$

则所得出来的结果将与事实不符了.

§12. 隐函数

在什么条件之下, 可以保证由

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

决定的函数 z, 作为 x,y 的函数的连续性和可微分性, 我们有以下的定理.

定理 1 假定 $F(x,y,z)$ 为一个三变量的函数, 且适合以下的条件: 1° $F(x_0,y_0,z_0)=0$; 2° 在以 (x_0,y_0,z_0) 为中心的一邻域

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,\quad |z-z_0|<\delta \tag{2}$$

中 $F(x,y,z)$ 是连续的; 3° 当 x,y 固定时, $F(x,y,z)$ 是 z 的单调函数 (在以下证明中, 我们假定它随 z 增加而单调增加), 则有以下的结论: 在 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内, (1) 式确定了 z 是 x,y 的单值连续函数 $z=f(x,y)$ 且 $z_0=f(x_0,y_0)$.

证 1) 单值性.

先考虑函数 $F(x_0,y_0,z)$. 由 1° 及 3° 可知, 当 $z<z_0$ 时 $F(x_0,y_0,z)<0$, 且当 $z>z_0$ 时 $F(x_0,y_0,z)>0$. 所以有 δ 存在, 使

$$F(x_0,y_0,z_0-\delta)<0,\quad F(x_0,y_0,z_0+\delta)>0.$$

再考虑函数

$$F(x,y,z_0-\delta),\quad F(x,y,z_0+\delta).$$

一定有一个邻域

$$|x-x_0|<\delta_0,\quad |y-y_0|<\delta_0, \tag{3}$$

在其中 (由性质 2°)

$$F(x,y,z_0-\delta)<0,\quad F(x,y,z_0+\delta)>0. \tag{4}$$

在区间 (3) 中任一点 $(\overline{x},\overline{y})$, 我们考虑单变量 z 的函数

$$F(\overline{x},\overline{y},z).$$

由 (4) 式显然有

$$F(\overline{x},\overline{y},z_0-\delta)<0,\quad F(\overline{x},\overline{y},z_0+\delta)>0,$$

从 3° 可以推得有唯一的 $\overline{z}$ 使

$$F(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=0,\quad z_0-\delta<\overline{z}<z_0+\delta,$$

也就是在

$$|x-x_0|<\delta_0,\quad |y-y_0|<\delta_0,\quad |z-z_0|<\delta$$

之中, 由 (1) 式定义了一个单值函数 $z=f(x,y)$.

2) 连续性

如果取 $\overline{x}=x_0,\overline{y}=y_0$, 则得 $z_0=f(x_0,y_0)$. 如果取 δ 是任给的 $\varepsilon>0$, 我们一定有 $\delta_0>0$ 存在, 使在

$$|x-x_0|<\delta_0,\quad |y-y_0|<\delta_0$$

中

$$|z-z_0|<\varepsilon,$$

即

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

这证明了在 (x_0,y_0) 处, $f(x,y)$ 的连续性.

又对 (3) 式中任一点 $(x,y),f(x,y)$ 的连续性也可以类似地证明.

定理 2 假定 $F(x,y,z)$ 为一个三变量的函数, 且适合以下的条件: 1° $F(x_0,y_0,z_0)=0$; 2° 在以 (x_0,y_0,z_0) 为中心的一邻域

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,\quad |z-z_0|<\delta$$

中, $F(x,y,z)$ 及 $\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}$ 是存在且连续的; 3° $\left.\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}}\neq 0$. 除去定理 1 中的一切结论外, 还可以证明在 $x=x_0,y=y_0$ 附近 $f(x,y)$ 有连续偏微商 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

证 由 3° 不妨假定 $\left.\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}}>0$, 因而可以假定有 $\delta'>0$ 存在, 使

$$|x-x_0|<\delta',\quad |y-y_0|<\delta',\quad |z-z_0|<\delta'$$

时, $F'_z(x,y,z)>0$. 由此推出 $F(x,y,z)$ 适合于定理 1 的所有的条件, 因而得出定理 1 所有的结论. 以下证明 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 的连续性.

给 $x,\Delta x$ 及 y. 命 $f(x+\Delta x,y)=z+\Delta z$. 由

$$F(x+\Delta x,y,z+\Delta z)=0\quad 及\quad F(x,y,z)=0$$

显然可见

$$\Delta F=F(x+\Delta x,y,z+\Delta z)-F(x,y,z)=0.$$

由全增量公式可知

$$0=\Delta F=\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\Delta z+\alpha\Delta x+\beta\Delta z,$$

此处 α,β 随 $\Delta x\to 0,\Delta z\to 0$ 时而趋于零, 即得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x,y,z)+\alpha}{F'_z(x,y,z)+\beta}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{F'_x[x,y,f(x,y)]}{F'_z[x,y,f(x,y)]}.$$

分子分母都是连续函数, 且分母非零, 因而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是 x,y 的连续函数, 同法 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 也是 x,y 的连续函数.

定义 一个函数 $F(x,y,z)$ 如果有 n 阶连续偏微商, 则称为属于 C^n 类.

以上的定理证明了, 如果在某点附近 $F(x,y,z)$ 属于 C^1 类, 则由 $F(x,y,z)=0$ 决定的函数 z 也属于 C^1 类 $\left(\text{如果}\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0\right)$.

更一般些有

定理 3 如果在某点附近 $F(x,y,z)$ 属于 C^n 类, 而且在该点 $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, 则由 $F(x,y,z)$ 所定义的函数 $z=f(x,y)$ 也属于 C^n 类.

我们将不证明这一定理, 而仅指出 $n=2$ 的情况:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\right) \\
&= \left(-F'_z \frac{\partial}{\partial x} F'_x + F'_x \frac{\partial}{\partial x} F'_z\right) \Big/ F'^2_z \\
&= \left[-F'_z\left(F''_{xx} + F''_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_x\left(F''_{xz} + F''_{zz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] \Big/ F'^2_z \\
&= \frac{2F'_x F'_z F''_{xz} - F'^2_z F''_{x^2} - F'^2_x F''_{z^2}}{F'^3_z}.
\end{aligned}$$

§13. Taylor 展开

命 $f(x,y)$ 表 x,y 的函数, 以下需要多少阶偏微商就假定它有多少阶偏微商.

命

$$\varphi(t) = f(a+th, b+tk),$$

所以

$$\varphi(0) = f(a,b), \quad \varphi(1) = f(a+h, b+k).$$

由带余项的 Maclaurin 公式可知

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^n(0)}{n!} + \frac{\varphi^{n+1}(\theta)}{(n+1)!},$$
$$0 < \theta < 1,$$

另一方面

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f,$$

因而得出

$$\varphi^{(p)}(t)=\frac{d^p\varphi}{dt^p}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f=\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}h^r k^{p-r}\frac{\partial^p f}{\partial x^r\partial y^{p-r}}.$$

故

$$\varphi^{(p)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}$$

及

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}.$$

代入原式, 即得 Taylor 公式

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=&f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\\&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}.\end{aligned}$$

在公式中如果以 x 替 a,y 替 b, 自变量的改变量 h,k 各以 dx 及 dy 表示, 且命

$$\Delta f(x,y)=f(x+dx,y+dy)-f(x,y).$$

如此得

$$\Delta f(x,y)=df(x,y)+\frac{d^2f(x,y)}{2!}+\cdots+\frac{d^nf(x,y)}{n!}+\left[\frac{d^{n+1}f(x,y)}{(n+1)!}\right]_{\substack{x+\theta dx\\y+\theta dy}}.$$

与 Lagrange 公式相仿, 我们有

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf'_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf'_y(x+\theta h,y+\theta k),$$
$$0<\theta<1.$$

§14. 极大与极小

假定 $f(x,y)$ 在域 D 内定义, 并且 (a,b) 是 D 的内点. 如果 (a,b) 有一个邻域, $f(a,b)$ 常不小于邻域中的其他的 $f(x,y)$, 则 $f(a,b)$ 称为极大. 同法定义极小.

我们现在假定 $f(x,y)$ 有连续偏微商存在, 以下用到 r 次, 就假定它有 r 次存在.

考虑函数

$$\varphi(t)=f(a+\lambda t,b+\mu t),\quad \lambda^2+\mu^2>0,$$

这是 t 的函数, 且当 $t=0$ 时取极大值. 因此可知, 极值的必要条件为

$$\varphi'(0)=0,$$

即对任意的 λ,μ 有

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\mu\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=0.$$

特别取 $\lambda=1,\mu=0$ 及 $\lambda=0,\mu=1$, 可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=0.$$

由此可见, 一个多变量函数在某点 (内点) 为极大值或极小值, 只有当在该点的每个偏微商等于 0 或不存在时才有可能. 又

$$\varphi''(0)=\left(\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}.$$

如果对所有的 $\lambda,\mu(\lambda^2+\mu^2>0)$ 有

$$\varphi''(0)<0,$$

对取任何方向而言, 则 $f(x,y)$ 在 (a,b) 点所取的值是极大值, 也就是如果用 Lagrange 公式

$$f(x,y)-f(a,b)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\lambda^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\lambda\mu+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mu^2,$$

此处 $\lambda=x-a,\mu=y-b$, 而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

中的 x,y 都代以 $a+\theta(x-a),b+\theta(y-b),0<\theta<1$, 则当 x,y 充分接近于 a,b 时, $f(x,y)<f(a,b)$, 因而 $f(a,b)$ 是极大值.

因此问题一变而为怎样的 A,B,C 可以对任意的不全为 0 的 λ,μ

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2<0.$$

显然需要 $A<0$. 又由

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2=A\left(\lambda+\frac{B}{A}\mu\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\mu^2 \tag{1}$$

可知, 也需要 $C-\dfrac{B^2}{A}<0$. 不然, 我们可以取 $\mu=1$ 及 $\lambda=-\dfrac{B}{A}$, 而使 $A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2$ 为非负.

反之, 如果

$$A<0,\quad C-\frac{B^2}{A}<0,$$

则由 (1) 式可知, 常有 ($\lambda^2+\mu^2=0$ 除外)

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2<0.$$

因而得出:

如果在 $x=a, y=b$ 这一点

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)<0,$$

则 $f(x,y)$ 在这一点取极大值.

总之, 求两个变量的函数 $f(x,y)$ 的极值的方法如下:

1° 先解出方程

$$f'_x(x,y)=0,\quad f'_y(x,y)=0.$$

2° 命 a,b 是以上的解的一个, 命

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}=A,\quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}=B,\quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}=C,$$

则可用下表来得到解答.

B^2-AC	−		+	0
A	−	+		
	极大值	极小值	不是极大极小	可 疑

这个表上的第一个结论 (取极大值) 如上; 第二个结论的证法也相仿; 关于第三个结论, 即

$$B^2-AC>0$$

的情况, 则由

$$A\lambda^2+2B\mu+C\mu^2=0$$

可以得实数解答:

$$\lambda=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}\mu.$$

对这样的 $\lambda,\mu,\varphi''(0)=0$. 并可取 λ,μ 使有时 $\varphi''(0)>0$, 有时 $\varphi''(0)<0$, 所以在 a,b 点不可能取极值.

对于最后一个结论, 我们可以依一个变量的方法, 再看 $\varphi'''(0),\varphi^{(4)}(0)$ 等.

如果 D 是一个闭域. 假定 $f(x,y)$ 在其中连续, 我们已知 $f(x,y)$ 在 D 的内点或周界上取最大值, 因此求最大值的方法是找出一切的 $f'_x=f'_y=0$ 的内点, 算出这些点的函数值. 然后与周界上的函数值相比较, 最大的就是域 D 的函数最大值.

例 1 求

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

的最大值, 此处 x 与 y 适合 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 2\pi$.

由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y) = 0,$$

得 $x = y = \dfrac{2\pi}{3}$. 此时 $u = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 而在区域的周界 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 2\pi$ 上, $u = 0$. 故在 $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ 函数达到最大值.

例 2 求

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \quad (a > b > c > 0)$$

的最大值及最小值, 其中 x, y, z 适合

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

以 $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ 代入 u, 则

$$u = (a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)y^2 + c^2 - [(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c]^2,$$

此处 x 与 y 适合 $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x(a-c)\{(a+c) - 2[(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c]\} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y(b-c)\{(b+c) - 2[(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c]\} = 0$$

得出

$$x = y = 0 \text{ (此时 } u = 0); x = 0, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u = \frac{1}{4}(b-c)^2\right);$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = 0\left(u = \frac{1}{4}(a-c)^2\right).$$

现在转而考虑周界 $x^2+y^2=1$ 上的函数值. 以 $y^2=1-x^2$ 代入 u,

$$u=(a^2-b^2)x^2+b^2-[(a-b)x^2+b]^2,$$

此处 $x\in[-1,1]$. 由

$$\frac{du}{dx}=2(a-b)^2x(1-2x^2)=0$$

得

$$x=0\ (u=0);\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(u=\frac{1}{4}(a-b)^2\right),$$

而对应于 $x=\pm1$ 时 $u=0$.

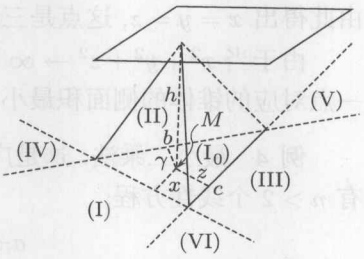


图 30

因此函数在 $(0,0,\pm1),(0,\pm1,0)$ 及 $(\pm1,0,0)$ 达到最小值, 最小值为零; 而在 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 达到最大值, 最大值为 $\frac{1}{4}(a-c)^2$.

例 3 在平面上给一边长为 a,b,c 的三角形, 在它上面作无数个定高 h 的锥体, 求侧面积最小的锥体.

命锥体顶点在三角形所在平面的投影是 M, x,y,z 分别表示点 M 至三个边 a,b,c 的垂线之长. 它们按图 30 所示的区域取下列符号:

	I_0	I	II	III	IV	V	VI
x	+	−	+	+	−	+	−
y	+	+	−	+	−	−	+
z	+	+	+	−	+	−	−

命三角形的面积是 P, 则

$$ax+by+cz=2P.$$

侧面积 S 为

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{x^2+h^2}+\frac{b}{2}\sqrt{y^2+h^2}+\frac{c}{2}\sqrt{z^2+h^2}.$$

以

$$z=\frac{2P-ax-by}{c}$$

代入 S, 得

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{x^2+h^2}+\frac{b}{2}\sqrt{y^2+h^2}+\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2P-ax-by}{c}\right)^2+h^2}.$$

由

$$2\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{ax}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{a}{c}=0,$$

$$2\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{by}{\sqrt{y^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{b}{c}=0$$

得

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}=\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}.$$

由此得出 $x=y=z$, 这点是三角形的内切圆的中心.

由于当 $x^2+y^2+z^2\to\infty$ 时, $S\to\infty$. 故最小值不可能在边界点上取得, 因此这一点对应的锥体的侧面积最小.

例 4 最小二乘法. 这是广泛用以修正观测的方法, 确定 x,y 的数值, 对于它们有 $n>2$ 个线性方程:

$$a_ix+b_iy=d_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

其中 a_i,b_i,d_i 是由经验方法得来的, 假定

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

从前两个方程解出的 x,y, 一般并不能满足其余的方程. 我们是要求 x,y 使

$$W=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_iy-d_i)^2$$

最小.

$$\frac{\partial W}{\partial x}=2\sum_{i=1}^{n}a_i(a_ix+b_iy-d_i)=0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{n}b_i(a_ix+b_iy-d_i)=0.$$

用 Gauss 的记号, 记 $[a,b]=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i,[a,a]=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$, 等等. 则上式变为

$$[a,a]\,x+[a,b]\,y=[a,d]\,,$$

$$[a,b]\,x+[b,b]\,y=[b,d]\,.$$

由于

$$\Delta=\begin{vmatrix}[a,a] & [a,b]\\ [a,b] & [b,b]\end{vmatrix}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ c_j & b_j\end{vmatrix}^2\geqslant\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2>0$$

(此式读者不难证明), 故方程有解.

不难证明这一解确使 W 达到最小值.

§15. 隐函数求极值法

命

$$u = f(x, y, z).$$

我们现在研究在条件

$$g(x, y, z) = 0$$

的情况下, u 的极大与极小.

为了明确起见, 假定 x, y 是自变量, 而 z 是由 $g(x, y, z) = 0$ 所定义的函数.

由 u 取极值的条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

再从条件 $g(x, y, z) = 0$ 出发算得

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

在这四个方程中消去 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

从这两个方程与 $g(x, y, z) = 0$ 解出 x, y, z 的数值, 这就是找出可能的极大值与极小值的方法.

如法, 由 (1) 式可见

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}} (= -\lambda),$$

即有 λ 使

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

如是我们也可以把 x, y, z, λ 都看成未知数, 而从这三个方程与 $g = 0$ 中解出 x, y, z, λ. 这方法的优点是 x, y, z 都处于同等地位.

同时, 我们也可从另一角度来看问题, 即考虑函数

$$w = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

这函数的极值当然适合于

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial \lambda} = g(x,y,z) = 0,\\
&\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

由于 $g(x,y,z)=0$, 所以也得出了 $f(x,y,z)$ 有条件的极值.

这一方法称为 Lagrange 乘子法. 这不是另外一个方法, 而是把 w 看成为四变量 λ, x, y, z 的函数, 我们就可以运用固有的方法了.

例 1 求点 (a,b) 到直线

$$Ax + By + C = 0$$

的最短距离.

设 (a,b) 至直线上动点 (x,y) 的距离为 r, 则

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

作

$$w = (x-a)^2 + (y-b)^2 + \lambda(Ax + By + C).$$

由

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial x} = 2(x-a) + \lambda A = 0,\\
&\frac{\partial w}{\partial y} = 2(y-b) + \lambda B = 0
\end{aligned}$$

得

$$x = a - \frac{1}{2}\lambda A, \quad y = b - \frac{1}{2}\lambda B. \tag{2}$$

于是

$$\lambda = \frac{2(Aa + Bb + C)}{A^2 + B^2}. \tag{3}$$

由于 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时, $r \to \infty$, 故最短距离是存在的. 因此 (a,b) 至 (x,y) 的距离最短, 此处 (x,y) 由 (2) 式定义而 λ 由 (3) 式定义.

例 2 命 m, n 是给定的正数, 求

$$f(x,y) = x^m y^n$$

的最大值, 而 x 与 y 满足: $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y = a$ $(a > 0)$.

对于 $f(x,y)$, 求对数得

$$\varphi(x,y)=\log f(x,y)=m\log x+n\log y.$$

作函数

$$w=m\log x+n\log y+\lambda(x+y-a).$$

由

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{m}{x}+\lambda=0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{n}{y}+\lambda=0$$

得

$$x=-\frac{m}{\lambda},\quad y=-\frac{n}{\lambda}.$$

故

$$\lambda=-\frac{m+n}{a}.$$

于是

$$x=\frac{ma}{m+n},\quad y=\frac{na}{m+n}.$$

与例 1 类似的讨论可知, 这一点使 $\varphi(x,y)$ [同样使$f(x,y)$] 达到最大值.

§16. 坐标变换

我们已经知道了两种坐标系——笛卡儿坐标与极坐标. 现在将这概念扩充一下, 得所谓曲线坐标系. 实质上, 极坐标可以看成为由两族曲线交织而成的: (i) 以原点为心的同心圆:

$$x^2+y^2=\rho^2,\quad \rho>0;$$

(ii) 通过原点的射线:

$$y=x\mathrm{tg}\,\theta,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

这两族曲线有以下的性质: 通过平面上的任一点 (非原点) 一定有一条且仅有一条族 (i) 的曲线, 也仅有一条族 (ii) 的曲线. 对应于这两条曲线, 有二数值 ρ,θ. 这 ρ 和 θ 就称为点的极坐标.

如此就得出平面上的点和 (ρ,θ) 的一一对应关系 (但原点例外).

笛卡儿坐标也是如此, 是由两族直线 $x=a$ 及 $y=b$ 交织而成的.

我们现在把这一概念加以扩充. 如果两组曲线:

$$\varphi(x,y)=u,$$
$$\psi(x,y)=v,$$

都有这样的性质, 对应平面上的一点 (x,y), 两组曲线各有唯一的一条通过 (x,y). 这样一来, 两个曲线族就成为一个曲线坐标系 (u,v), 称为 (x,y) 的曲线坐标.

如果在平面上有些例外部分, 我们就说是对不例外部分的曲线坐标系.

除常见的笛卡儿坐标与极坐标之外, 我们还有下面的几种坐标.

例 1 (椭圆坐标系) 命 $e_1>e_2$. 对应于 x,y (x 与 y 都非零), 我们从

$$\frac{x^2}{q-e_1}+\frac{y^2}{q-e_2}=1 \tag{1}$$

可以得出两个根 $q_1,q_2(q_1>e_1>q_2>e_2)$. 这 q_1,q_2 也就成一坐标系. 现在来求出曲线族.

当 $q=q_1$ 是常数时, (1) 式表示一个椭圆; 当 $q=q_2$ 是常数时, (1) 式表示一个双曲线. 换言之, 一个曲线族是共焦点的椭圆族, 而另一个是共焦点的双曲线族. 通过平面上的一点, 有唯一的一个椭圆 [属于 (1) 式的], 也有唯一的一个双曲线.

例 2 取

$$x=\operatorname{ch}\lambda_1\cos\lambda_2,\quad y=\operatorname{sh}\lambda_1\sin\lambda_2.$$

当 λ_1 是常数时, 有椭圆

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\lambda_1}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\lambda_1}=1.$$

当 λ_2 是常数时, 有双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2\lambda_2}-\frac{y^2}{\sin^2\lambda_2}=1.$$

在例 1 中取 $e_1=1,e_2=0$, 则得

$$\frac{x^2}{q-1}+\frac{y^2}{q}=1.$$

它有两个根 q_1,q_2, 适合于 $q_1>1>q_2>0$. 我们取 $q=\operatorname{ch}^2\lambda_1$ 及 $q_2=\cos^2\lambda_2$, 这完全适合于要求了. 因此, 如此得出的坐标系也就是例 1 的椭圆坐标系.

例 3 取

$$x=\frac{1}{2}(q_1^2-q_2^2),\quad y=q_1q_2.$$

当 $q_1=$ 常数, 得出一族抛物线, 以原点为焦点, 开向左方. 而 $q_2=$ 常数, 也得一族以原点为焦点, 开向右方的抛物线.

我们现在介绍换变量的方法. 如果

$$F(x,y)$$

是 x,y 的函数, 换了变量

$$x=g(u,v),\quad y=h(u,v)$$

之后, 得函数

$$G(u,v)=F(g,h).$$

现在有

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

由此得出的行列式

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

称为 Jacobian 或函数行列式.

在 (x,y) 平面上有长度的微分. 经过变换之后就得到

$$\begin{aligned}dx^2+dy^2&=\left(\frac{\partial g}{\partial u}du+\frac{\partial g}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}du+\frac{\partial h}{\partial v}dv\right)^2\\&=\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2\right]du^2+2\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}\right)du\,dv\\&\quad+\left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]dv^2.\end{aligned}$$

这便是在曲线坐标中的长度元素.

例 4 极坐标.

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\quad(r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta<2\pi),$$

则

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

例 5 考虑变换

$$x=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad y=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

由于

$$x^2+y^2=\frac{1}{\xi^2+\eta^2},\quad \frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta},$$

故将 x 轴与 y 轴分别与 ξ 轴及 η 轴重合, 即可知对应点在同一射线上, 且对应点与原点的距离的平方的乘积为 1.

这一变换是可逆的, 逆变换是

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

故称这变换为反演.

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = -\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^2}.$$

§17. 三维空间的几个坐标系

与平面上曲线坐标系相类似, 现在把这一概念扩充到空间去. 设有三组曲面:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x,y,z), \\ v &= \psi(x,y,z), \\ w &= \chi(x,y,z), \end{aligned} \tag{1}$$

都有这样的性质, 对于空间中的一点 (x,y,z), 有唯一的 u 使

$$u = \varphi(x,y,z),$$

也就是说, 有唯一的一张曲面通过 (x,y,z); 亦有唯一的 v 及 w 使

$$v = \psi(x,y,z), \quad w = \chi(x,y,z).$$

这样一来, 三组曲面族 (1) 就构成一个曲面坐标系 (u,v,w). 称为 (x,y,z) 的曲面坐标.

如果空间中有些例外部分, 我们就说, 这是对不例外部分的曲面坐标.

常用的笛卡儿坐标就是三族平面 $x=a, y=b, z=c$ 交织而成的.

如果 $F(x,y,z)$ 是 x,y,z 的函数, 换了变量

$$x = g(u,\nu,w), \quad y = h(u,\nu,w), \quad z = k(u,\nu,w)$$

之后得函数

$$G(u,v,w) = F(g,h,k),$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial G}{\partial w} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}. \end{aligned}$$

因此得出行列式

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix},$$

称为 Jacobian 或函数行列式.

例 1 球坐标 (或称空间极坐标). 它与笛卡儿坐标的关系是

$$\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z&=r\cos\theta,\end{aligned}$$

其中

$$r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

r,φ,θ 的几何意义是 (图 31): r 是连接原点与已知点 $M(x,y,z)$ 的向量的长度, θ 是这一向量与 oZ 轴的交角, φ 是 oM 在 xy 平面上的投影 oP 与 x 轴的交角.

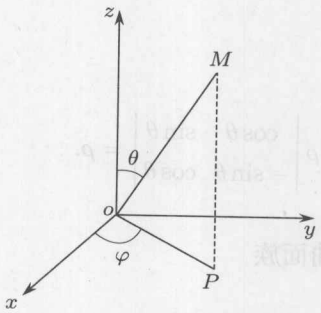


图 31

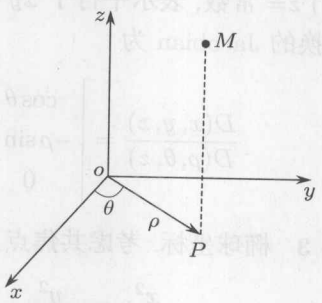


图 32

这个变换不是一对一的.(r,φ,θ) 空间中的平面 $r=0$ 与原点 $x=y=z=0$ 相对应. 而直线 $\theta=0$ (或 π), $r=$ 常数 $\neq 0$, 则被映于一点 $x=y=0,z=r$ 或 $-r$. 除此而外, 则是一对一的对应了.

坐标曲面形成三族:

(i) $r=$ 常数, 表示中心在原点的同心球面;

(ii) $\theta=$ 常数, 表示以 z 轴为轴的圆锥面;

(iii) $\varphi=$ 常数, 表示通过 z 轴的半平面.

这一变换的 Jacobian 为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

例 2 圆柱坐标. 这是 x,y 平面上的极坐标与变量 z 相联合而成的 (图 32):

$$\begin{aligned}x&=\rho\cos\theta,\\ y&=\rho\sin\theta,\\ z&=z,\end{aligned}$$

其中

$$\rho\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\infty<z<\infty.$$

除 (ρ,θ,z) 空间的直线 $\rho=0,z=c$ (常数) 被映射到一个点 $x=y=0,z=c$ 之外, 其余的点都是一一对应的.

坐标曲面形成三族:

(i) $\rho=$ 常数, 表示母线平行于 z 轴的圆柱面, 准线则是 xy 平面上以原点为中心, ρ 为半径的圆周;

(ii) $\theta=$ 常数, 则是过 z 轴的半平面;

(iii) $z=$ 常数, 表示平行于 xy 平面的平面.

变换的 Jacobian 为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

例 3 椭球坐标. 考虑共焦点且共轴的二次曲面族

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-k^2}=1\quad(0<h<k).\tag{2}$$

固定一点 (x,y,z), 此点不在坐标平面上. 将上式看成 λ^2 的方程时, 有三正根 λ_1^2,λ_2^2 与 λ_3^2, 满足

$$\lambda_1>k>\lambda_2>h>\lambda_3>0.$$

又由根与系数的关系可知

$$\begin{aligned}&\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=x^2+y^2+z^2+h^2+k^2,\\ &\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2=(h^2+k^2)x^2+k^2y^2+h^2z^2+h^2k^2,\\ &\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=h^2k^2x^2.\end{aligned}$$

于是得出

$$x=\pm\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{hk},$$
$$y=\pm\frac{\sqrt{(\lambda_1^2-h^2)(\lambda_2^2-h^2)(h^2-\lambda_3^2)}}{h\sqrt{k^2-h^2}},$$
$$z=\pm\frac{\sqrt{(\lambda_1^2-k^2)(k^2-\lambda_2^2)(k^2-\lambda_3^2)}}{k\sqrt{k^2-h^2}}.$$

如果限制 x,y,z 在第一卦限, 则这些式子都只取正号, 数 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 就是第一卦限内点的椭球坐标.

三坐标曲面族是: 当 $\lambda=$ 常数 $>k$ 时, (2) 式表示椭球面; 当 $k>\lambda>h$ 时, (2) 式表示单叶双曲面; 当 $0<\lambda<h$ 时, (2) 式是双叶双曲面.

变换的 Jacobian 是

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}=\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\lambda_1^2-\lambda_3^2)(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}{\sqrt{(\lambda_1^2-h^2)(\lambda_1^2-k^2)(\lambda_2^2-h^2)(k^2-\lambda_2^2)(h^2-\lambda_3^2)(k^2-\lambda_3^2)}}.$$

第十三章　带变量的序列，级数及积分

§1. 一致收敛序列

命 D 代表 m 维空间的一个域，我们所讨论的函数乃指在 D 上变化的 m 个变量 $x_1,\cdots,x_m$ 的函数. 为简单计，就用 x 来代表 $x_1,\cdots,x_m$，换一句话说，$f(x)$ 就是指 $x_1,\cdots,x_m$ 的函数，且这 m 个变量都在 D 上变化，函数值可能是实数也可能是复数.

如果对任一 $x\in D$，函数序列

$$a_n(x)\quad n=1,2,3,\cdots$$

都收敛，这个序列就称为 D 上的收敛序列，以 $[a_n(x)]$ 表之. 它的极限也是在 D 上定义的一个函数 $a(x)$.

一般讲来，对 D 中的一点 x，当我们给了一个 $\varepsilon>0$，有一正数 N 存在，使当 $n>N$ 时，

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

这 N 不但和 ε 有关而且和点 x 有关. 换言之，当 x 变化时，我们所选的 N 也变化.

我们现在讨论一个十分重要的情况，就是 N 并不与点 x 有关，而仅与 ε 有关的情况，这一概念称为一致收敛. 定义如下:

定义　在 D 中定义的一个函数序列

$$a_n(x)\quad n=1,2,3,\cdots$$

称为一致收敛于 $a(x)$，如果它适合以下的条件: 任给一 $\varepsilon>0$，我们可以选得 N 仅与

ε 有关而不与 x 有关, 使当 $n > N$ 时,

$$|a_n(x) - a(x)| < \varepsilon.$$

由定义立刻看出, 函数序列 $[a_n(x)]$ 一致收敛于 $a(x)$ 的充要条件是

$$\sup_x |a_n(x) - a(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定理 1 (Gauchy 判别条件) 一个函数序列

$$a_n(x) \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

一致收敛的必要且充分条件是: 任给一个 $\varepsilon > 0$, 可以找到仅依赖于 ε 而不依赖于 x 的 N, 使当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m(x) - a_n(x)| < \varepsilon.$$

证 必要性. 如果 $a_n(x)$ 一致收敛于 $a(x)$, 我们有 N, 使当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$|a_m(x) - a_n(x)| \leqslant |a_m(x) - a(x)| + |a_n(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性. 由关于收敛性的 Cauchy 判别条件知道, 对任一 $x, a_n(x)$ 收敛, 假设它的极限是函数 $a(x)$.

任给 $\varepsilon > 0$, 有 N 存在, 使

$$|a_m(x) - a_n(x)| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

固定 m, 命 $n \to \infty$, 则因 $a_n(x) \to a(x)$, 所以当 $m > N$ 时,

$$|a_m(x) - a(x)| < \varepsilon.$$

即得一致收敛性.

定理 2 连续函数的一致收敛序列的极限也是连续函数.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 有 N 存在, 使

$$|a_n(x) - a(x)| < \varepsilon \quad (n > N),$$

这 N 与 x 无关. 考虑

$$\begin{aligned} |a(x+h) - a(x)| &\leqslant |a_n(x+h) - a(x+h)| + |a_n(x) - a(x)| \\ &\quad + |a_n(x+h) - a_n(x)| < 2\varepsilon + |a_n(x+h) - a_n(x)|. \end{aligned}$$

由于 $a_n(x)$ 连续, 故对已给的 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$ 存在, 使当 $|h| < \delta$ 时,

$$|a_n(x+h) - a_n(x)| < \varepsilon.$$

因此

$$|a(x+h) - a(x)| < 3\varepsilon.$$

(注意, 本证明虽然是一个变量的形式, 但是却具 m 个变量的实质.)

例 1 函数序列

$$a_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是一个收敛序列, 它的极限是

$$a(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{如果} \quad x = 0. \end{cases}$$

由于 $a(x)$ 不连续, 所以这个序列在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中不一致收敛.

例 2 函数序列

$$a_n(x) = x\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}, \quad x \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

也是一个收敛序列, 它的极限是

$$a(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-e^{-x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

由于 $a(x)$ 不连续, 所以 $a_n(x)$ 不一致收敛.

例 3 函数序列

$$a_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

的极限是 $a(x) = 0$, 虽然 $a(x)$ 连续, 但 $[a_n(x)]$ 仍不一致收敛. 原因是

$$a_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

它并不趋于 0. 由此可见, 不一致收敛的连续函数序列的极限也可能连续, 也就是说, 极限函数连续只是连续函数序列为一致收敛的必要条件, 但并非充分条件.

定理 3 如果对 D 上一点 a, 有

$$\lim_{x \to a} a_n(x) = c_n,$$

并且 $a_n(x)$ 一致收敛于 $a(x)$, 则 c_n 的极限 c 存在, 且

$$\lim_{x \to a} a(x) = \lim_{n \to \infty} c_n = c.$$

证 由定义, 对任一 $\varepsilon>0$, 有 N 存在, 使

$$|a_n(x)-a_m(x)|<\varepsilon,\quad n,m>N,$$

这 N 与 x 无关. 命 $x\to a$, 则得

$$|c_n-c_m|<\varepsilon.$$

因此 c_n 有极限 c 存在.

由不等式

$$|a(x)-c|\leqslant|a_n(x)-c_n|+|a(x)-a_n(x)|+|c_n-c|$$

出发, 我们可以取 N, 使当 $n>N$ 时,

$$|c_n-c|<\varepsilon,\quad |a(x)-a_n(x)|<\varepsilon.$$

又可以取 $\delta>0$, 使当 $|x-a|<\delta$ 时,

$$|a_n(x)-c_n|<\varepsilon.$$

故当 $|x-a|<\delta$ 时,

$$|a(x)-c|<3\varepsilon.$$

即得定理.

定理也可以改述为: 等式

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a}a_n(x)$$

当 $a_n(x)$ 一致收敛时成立. 注意非一致收敛的情况, 两个极限的求取不能任意互换.

§2. 序列的微分积分

定理 1 如果在 $[a,b]$ 上 $a_n(x)$ 连续, 而且一致收敛于 $a(x)$, 则

$$\int_a^b a(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx,$$

也就是

$$\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}a_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

证 给了任一 $\varepsilon > 0$, 有 N 存在, 使当 $n > N$ 时,

$$|a_n(x) - a(x)| < \varepsilon.$$

因此

$$\left| \int_a^b a(x)dx - \int_a^b a_n(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |a(x) - a_n(x)|dx < \varepsilon(b-a).$$

故有定理.

例 1 不一致收敛, 有时结果不真, 如

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 2n^2 x \cdot e^{-n^2x^2} dx = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n^2}) = 1,$$

而

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} (2n^2 x e^{-n^2x^2}) dx = 0.$$

例 2 不一致收敛, 结果有时也正确, 如

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} dx.$$

定理 2 如果 $a_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 而且 $a_n(x)$ 一致收敛于 $a(x)$, 则 $a(x)$ 也可积, 而且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b a_n(x)dx = \int_a^b a(x)dx.$$

证 我们来讨论函数 $a(x)$ 的可积性.

由于一致收敛性, 任给 $\varepsilon > 0$, 有 N 存在, 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$|a_n(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$a_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < a(x) < a_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $[a,b]$ 的任意部分 $[\alpha,\beta]$, 并且命 m 与 M 是函数 $a_n(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的上确界与下确界, 而 $\omega = M - m$ 是它的振幅; 又用 Ω 表示函数 $a(x)$ 的振幅, 因在 $[\alpha,\beta]$ 上,

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < a(x) < M + \frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\Omega \leqslant \omega + \varepsilon.$$

把区间 $[a,b]$ 分成部分区间 $[x_i, x_{i+1}]$, 在这区间内,$a_n(x), a(x)$ 的振幅各记以 ω_i, Ω_i, 则 $\Omega_i \leqslant \omega_i + \varepsilon$, 并且

$$\sum \Omega_i \Delta x_i \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i + \varepsilon(b-a).$$

因为 $\varepsilon(b-a)$ 可以任意小, 而当 $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$ 时 $\sum\omega_i\Delta x_i$ 趋于 0, 所以左边也趋于 0, 于是 $a(x)$ 可积. 定理后半部分的证明与定理 1 完全相同.

定理 3 假定 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 而微商序列 $[a'_n(x)]$ 在整个区间上连续并且一致收敛. 如果已知函数序列 $[a_n(x)]$ 在 a 点收敛, 则 $[a_n(x)]$ 在整个区间上一致收敛, 并且极限 $a(x)$ 是可微的, 且

$$a'(x)=\lim_{n\to\infty}a'_n(x),$$

也就是

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}a_n(x).$$

证 我们先证明序列 $[a_n(x)]$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛. 由

$$a_n(x)=a_n(a)+\int_a^x a'_n(x)dx$$

得

$$|a_m(x)-a_n(x)|\leqslant|a_m(a)-a_n(a)|+\int_a^x|a'_m(x)-a'_n(x)|dx.$$

任给 $\varepsilon>0$, 因 $[a'_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 故存在 N_1 使当 $m,n>N_1$ 时

$$|a'_m(x)-a'_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

由序列 $[a_n(x)]$ 在 $x=a$ 的收敛性, 有 N_2 使当 $m,n>N_2$ 时

$$|a_m(a)-a_n(a)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $m,n>N=\max(N_1,N_2)$ 时

$$|a_m(x)-a_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x-a)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此序列 $[a_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

命

$$a^*(x)=\lim_{n\to\infty}a'_n(x).$$

由定理 2, 可知

$$\int_a^x a^*(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x a'_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}[a_n(x)-a_n(a)]=a(x)-a(a).$$

因为被积函数 $a^*(x)$ 连续, 左边积分的微商等于 $a^*(x)$, 它和 $a(x)$ 的微商相等.

§3. 囿收敛

对于一致收敛的连续函数序列, 有积分号下取极限的定理 (§2 定理 1). 如果在 $[a,b]$ 间有些例外的点, 这些例外点的来源或出之于不一致收敛, 或出于瑕积分, 也有一些结果. 先引进

定义 如果函数序列 $[a_n(x)]$ 在区间 $[a,b]$ 上处处收敛, 且有一与 n,x 都无关的常数 M, 使

$$|a_n(x)| \leqslant M,$$

则称 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上囿收敛.

定理 1 *如果 $[a,b]$ 中有一点 c, 对任意 $\delta>0, a_n(x)$ 在 $[a,c-\delta],[c+\delta,b]$ 上一致收敛, 又若 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上囿收敛, 则有*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx.$$

证 命 $a(x)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$, 由

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b [a_n(x)-a(x)]dx\right| &\leqslant \left|\int_a^{c-\delta}[a_n(x)-a(x)]dx\right|+\left|\int_{c+\delta}^b [a_n(x)-a(x)]dx\right| \\ &\quad +\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} a_n(x)dx\right|+\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} a(x)dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^{c-\delta}[a_n(x)-a(x)]dx\right|+\left|\int_{c+\delta}^b [a_n(x)-a(x)]dx\right|+4\delta M,\end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 可先取 δ, 使 $4\delta M<\varepsilon$. 又在 δ 固定之后, 可取 n 充分大, 使其前二项也都小于 ε. 因而得出本定理.

这定理中的例外点, 可以推广为不止一点, 而有有限个例外点的情况. 又此定理可以推广为

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)\varphi(x)dx=\int_a^b [\lim_{n\to\infty} a_n(x)]\varphi(x)dx,$$

只须假定

$$\int_a^b |\varphi(x)|dx<\infty.$$

以后将述及 Lebesgue 积分, 在考虑 Lebesgue 积分时, 这定理将以更完整的形式出现, 如 Arzéla 定理等.

例 1 函数序列

$$a_n(x)=\frac{1}{1+nx},\quad a_n(x)=nx(1-x)^n,\quad (0<x<1),\quad n=1,2,\cdots$$

都是囿收敛.

一个更重要的例子是

例 2 函数序列

$$a_n(x)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin mx}{m},\quad n=1,2,\cdots.$$

我们将证明它在任何区间上都囿收敛. 因为 $a_n(x)$ 为奇函数, 且有周期 2π, 所以只须证明它在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上囿收敛便已足够.

因为

$$\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

所以

$$\begin{aligned}a_n(x)&=\int_0^x(\cos t+\cdots+\cos nt)dt=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt\\&=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt+\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt-\frac{1}{2}x\\&=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}du+\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt-\frac{1}{2}x.\end{aligned}\tag{1}$$

因为 $\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$ 收敛 (见第十章 §10 例 1), 所以 $\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}du$ 有界. 又因 $\sin u\leqslant u$, 所以

$$\left|\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt\right|\leqslant\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)dt$$

也有界. 所以存在一个与 n 与 x 都无关的常数 M, 使

$$|a_n(x)|\leqslant M.$$

下面再证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x\quad(0<x\leqslant\pi).\tag{2}$$

极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}du=\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

存在. 又

$$\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt=-\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{x}\right)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^x\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt,$$

易证上式最后一个积分有界, 故当 $n\to\infty$ 时, 最后一项趋于 0, 而得

$$\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}t\right)dt\to 0.$$

于是由 (1) 式得出

$$\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du-\frac{1}{2}x\quad(0<x\leqslant\pi),$$

特别当 $x=\pi$ 时, 因为 $a_n(\pi)=0$, 所以得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{1}{2}\pi. \tag{3}$$

(2) 式得证, 同时也得到了 Dirichlet 积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的值.

又因极限函数

$$a(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x & (0<x<2\pi)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

在 0 处不连续, 所以 $a_n(x)$ 在任何包含 $2m\pi$ 的区间中不一致收敛, 但它是囿收敛的.

再研究瑕积分的情况.

定理 2 如果 $a_n(x)$ 非负, 且对固定的 x, 它是 n 的非减函数. 又对任一 $c(<b)$, 有

$$\int_a^c\left(\lim_{n\to\infty}a_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^c a_n(x)dx,$$

则在下式有一方存在时, 有

$$\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}a_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx$$

(注意, 这里的 b 可为有限, 也可以是 ∞).

证 假定右边收敛, 命

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx = S.$$

由 $a_n(x)$ 的非负性可知, 对任一 $c(<b)$,

$$\int_a^c \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c a_n(x)dx \leqslant S.$$

所以

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx = I$$

存在, 即左边也收敛, 而且

$$I \leqslant S.$$

另一方面,

$$\int_a^b a_N(x)dx \leqslant \int_a^b (\lim a_n(x))dx = I,$$

命 $N\to\infty$, 可知 $S\leqslant I$. 所以 $S=I$.

同法可从左边出发来证明等式.

§4. 级数的一致收敛性

现在考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{1}$$

命

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^{n} u_m(x),$$

于是级数的问题就变为序列 $S_n(x)$ 的问题, 而从序列的性质立刻可以推出级数的性质. x 仍然在 m 维的域 D 中变化.

定义 如果序列 $S_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则称级数一致收敛于 $S(x)$.

定理 1 级数 (1) 一致收敛的必要且充分条件是: 给了任一 $\varepsilon>0$, 有不依于 x 的 N 存在, 使当 $n>N$ 时,

$$|S_{n+l}-S_n|<\varepsilon, \quad l>0.$$

例 设幂级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则对任何 $r(<R)$, 幂级数在 $|x| \leqslant r$ 中一致收敛. 命 r' 表适合 $r < r' < R$ 的任一实数, 则因 $\sum a_n r'^n$ 收敛, 故必有正数 K, 使 $|a_n r'^n| < K$ (对所有 n 都成立), 于是在 $|x| \leqslant r$ 中,

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+l} a_m x^m\right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{n+l} |a_n r'^m| \cdot \left|\frac{x}{r'}\right|^m \leqslant K \sum_{m=n+1}^{n+l} \left(\frac{r}{r'}\right)^m < K \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1}}{1-\frac{r}{r'}},$$

由此不难获得结果.

定理 2 如果对 D 上一点 a, 有

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n,$$

又 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛, 则

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

且这级数收敛.

定理 3 连续函数的一致收敛级数的和也是连续函数.

以下二定理虽然是一个变量的形式, 但实质上不难推广到多变量函数的情形.

定理 4 可积函数的一致收敛级数可以逐项积分, 即

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

定理 5 如果微分后的级数一致收敛, 则级数可以逐项微分, 更具体地说, 如果 $\sum u_n(x)$ 收敛, $u_n'(x)$ 连续, $\sum u_n'(x)$ 一致收敛, 则

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

故若命 R 为幂级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径, 则在 $|x| < R$ 中, $f(x) = \sum a_n x^n$ 可逐项积分与逐项微分.

我们还有

定理 6 如果对任何 $\delta > 0$, $\sum u_n(x)$ 在 $[a+\delta, b]$ 上一致收敛, 并且 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿收敛. 又设

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\varphi(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\varphi(x) dx.$$

定理 7 设 $u_n(x) \geqslant 0$, 且对任一 $c(<b)$, 常有

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c u_n(x)dx,$$

则在下式有一方为收敛时, 有

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \tag{2}$$

(b 可以为有限也可以为 ∞).

若 $u_n(x)$ 可正可负, 在将收敛的条件换成绝对收敛后, 定理仍然成立. 详细言之, 我们有

定理 8 若对任一 $c(<b)$, 有

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c u_n(x)dx,$$
$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c |u_n(x)|dx,$$

则在

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|dx \quad 与 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |u_n(x)|dx \tag{3}$$

有一为收敛时, 等式 (2) 仍成立.

证 由定理 7 知道, (3) 式中任一式的收敛保证另一式也收敛, 并且两者相等. 所以这两种假定是等价的. 于是因为

$$0 \leqslant |u_n(x)| \pm u_n(x) \leqslant 2|u_n(x)|,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx$$

也收敛. 再由定理的假定及定理 7 得到

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx,$$

由此导得结果.

如果 $u_n(x)$ 是复函数, 如

$$u_n(x) = a_n(x) + i\beta_n(x),$$

通过讨论 $|u_n(x)| \pm a_n(x), |u_n(x)| \pm \beta_n(x)$, 这四个函数都是非负的, 我们也能得到类似的定理.

例 1 试将 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx$ 展成级数形式.

级数

$$\frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{x^3}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^{m-3/2}}{m!}$$

在 $[0,1]$ 中一致收敛, 故可逐项积分得

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^1 x^{m-3/2} dx = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!(2m-1)}.$$

例 2 试将 $\displaystyle\int_0^1 e^x \log\ x\ dx$ 展成级数形式.

级数 $\displaystyle e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 又

$$\int_0^1 |\log\ x| dx = 1 < \infty,$$

故由定理 6 得到

$$\int_0^1 e^x \log\ x\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \log\ x\ dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)}.$$

例 3 求证

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx = 1.$$

我们有级数

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

这个级数在 1 的邻近并不一致收敛, 甚至也不囿收敛. 但因 $\dfrac{x^n}{n} \geqslant 0$, 并且

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx < \infty,$$

又对任何 $c < 1$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $[0,c]$ 中一致收敛, 所以

$$\int_0^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^c \frac{x^n}{n} dx.$$

于是由定理 7 得到

$$\int_0^1 \log\frac{1}{1-x}dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

例 4 命 $u_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}(0 < a < b)$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

但因函数 $\dfrac{u}{e^u-1}$ 当 $u > 0$ 时是严格单调下降的, 故

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx = \int_0^{\infty}\left(\frac{a}{e^{ax}-1}-\frac{b}{e^{bx}-1}\right)dx > 0,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} u_n(x)dx \neq \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx.$$

其所以不能交换, 是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}|u_n(x)|dx$$

发散. 事实上, $u_n(x)$ 在 $x < \dfrac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}$ 时为负, 在 $x > \dfrac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}$ 时为正, 于是

$$\int_0^{\infty}|u_n(x)|dx = \left(\int_0^{\frac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}} - \int_{\frac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}}^{\infty}\right)(be^{-nbx}-ae^{-nax})dx = \frac{2}{n}\left(e^{-\frac{a\log\frac{b}{a}}{b-a}} - e^{-\frac{b\log\frac{b}{a}}{b-a}}\right).$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}|u_n(x)|dx$ 发散.

§5. 一致收敛的一些判别条件

现在再介绍几个判别条件

定理 1 (Weierstrass) 命 $\sum a_n$ 是一正项的收敛级数, 如果对充分大的 n, 有

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad x \in D,$$

则级数 $\sum u_n(x)$ 一致收敛.

证 由比较原则, 对任一 $x \in D$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

是收敛的, 命其和为 $s(x)$.

由

$$|s(x) - s_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

可以获得定理.

我们还可以推广定理 1.

定理 2 如果 $\sum v_n(x)$ 一致收敛, 并且

$$|u_n(x)| \leqslant v_n(x) \quad x \in D,$$

则 $\sum u_n(x)$ 也一致收敛.

立刻可以推出

定理 3 如果有一与 x 无关的常数 $r(<1)$, 使对充分大的 n,

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < r,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

一致收敛.

定理 4 如果有一与 x 无关的常数 $r(<1)$, 使对充分大的 n,

$$|u_n(x)|^{\frac{1}{n}} < r,$$

则级数 $\sum u_n(x)$ 一致收敛.

例 1 三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

是一致收敛的.

例 2 命 $1 < a < b$, Dirichlet 级数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

在区间 $a \leqslant \sigma \leqslant b$ 中一致收敛.

这是有名的 Riemann ζ 函数.

例 3 级数

$$[1-(1-x^2)]^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(1-x^2)^n$$

在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中一致收敛.

§6. 一致收敛的 Abel 及 Dirichlet 判别法

任何一个检验收敛性的判别法, 只要它的条件与区域 D 中的 x 无关, 都能成为检验一致收敛性的判别法. 例如, 与第四章 §4 定理 2 及定理 3 对应的是

定理 1 (Abel 判别法) 假定

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$$

在 D 中一致收敛, 又设对每一 $x,a_n(x)$ 成一单调序列, 且有一与 n,x 无关的常数 K, 使

$$|a_n(x)|\leqslant K,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$$

在 D 中一致收敛.

定理 2 (Dirichlet 判别法) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的部分和

$$|B_n(x)|\leqslant M,$$

而 M 与 n,x 无关, 又对任一 $x,a_n(x)$ 单调一致地趋于 0, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$$

也一致收敛.

这两定理的证明与第四章 §4 定理 2 及定理 3 完全类似. 因为没有困难, 我们把它留给读者自证.

例 1 命 a_n 是单调趋向于 0 的序列. 在任何一个不包有 $2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的闭区间内, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{inx}$$

都一致收敛.

理由如下:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|},$$

在所讨论的区间内, $\sin\frac{1}{2}x\neq 0$, 所以得出一个与 n,x 都无关的上界.

它的一个重要特例是: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ nx}{n}$$

在任何一个不包含 $2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的闭区间上都一致收敛. 关于这个级数, §3 中已经证明, 这级数在整个直线上面收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ nx}{n}=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x\quad(0<x<2\pi).$$

例 2 若 a_n 是递减的正数列, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

在任何区间上都一致收敛的充要条件是: $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 也即 $na_n\to 0$.

证 1) 必要性. 命 $p\geqslant 4$, 考虑 $x=\frac{\pi}{2p}$ 及 $n=\left[\frac{1}{2}p+1\right]$[①], 我们有

$$\begin{aligned}&a_n\sin nx+a_{n+1}\sin(n+1)x+\cdots+a_p\sin px\\ &>a_p(\sin nx+\cdots+\sin px)>a_p\left(\frac{1}{2}p-1\right)\sin\frac{1}{4}\pi>\frac{\sin\frac{1}{4}\pi}{4}pa_p\end{aligned}$$

$\left(\text{因为现在有 }\frac{\pi}{2}>mx>\frac{1}{4}\pi\right)$. 由于所考虑的级数在一包含原点的区间中一致收敛, 故当 $p\to\infty$ 时, 上面不等式的左方趋向于零, 因此 $pa_p\to 0$, 也即 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) 充分性. 由于周期性及奇函数性, 不妨假定 $0\leqslant x\leqslant\pi$. 命 $\mu_n=\max\limits_{m\geqslant n}(ma_m)$, 则由假定 $\mu_n\to 0$. 又命

$$S_{n,m}=a_n\sin nx+\cdots+a_m\sin mx,$$

[①]此处 $[x]$ 表 x 的整数部分.

我们将证明

$$|S_{n,m}| \leqslant (\pi+1)\mu_n.$$

由此不难得出结果.

若 $x \geqslant \dfrac{\pi}{n}$, 由于

$$|\sin nx + \cdots + \sin rx| = \left| \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} \right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} \leqslant \frac{\pi}{x}$$

$\left(\text{因为在 } 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{1}{2}\pi \text{ 中, } \dfrac{\theta}{\sin\theta} \leqslant \dfrac{1}{2}\pi\right)$, 故由 Abel 引理 (第十章 §6) 可知,

$$|S_{n,m}| \leqslant \frac{a_n\pi}{x} < na_n \leqslant \mu_n.$$

又若 $x \leqslant \dfrac{\pi}{m}$, 因为 $\sin\theta \leqslant \theta$, 故有

$$|S_{n,m}| \leqslant a_n nx + \cdots + a_m mx \leqslant m\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.$$

今若 $\dfrac{\pi}{m} < x < \dfrac{\pi}{n}$, 我们将这两种方法结合起来用. 有

$$|S_{n,m}| \leqslant \left|S_{n,\left[\frac{\pi}{x}\right]}\right| + \left|S_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1,m}\right|.$$

对于 $S_{n,\left[\frac{\pi}{x}\right]}$, 因为 $x \leqslant \pi \Big/ \left[\dfrac{\pi}{x}\right]$, 所以用第二种方法得到

$$\left|S_{n,\left[\frac{\pi}{x}\right]}\right| \leqslant \pi\mu_n;$$

又因 $x > \dfrac{\pi}{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1}$, 所以用第一种方法得到

$$\left|S_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1,m}\right| \leqslant \mu_{\left[\frac{\pi}{x}\right]+1} \leqslant \mu_n,$$

所以又得到

$$|S_{n,m}| \leqslant (\pi+1)\mu_n.$$

而得到所要证明的结果.

§7. Abel 定理及 Tauber 定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径等于 1, 则在区间 $|x| \leqslant \rho(<1)$ 中, 幂级数一致收敛, 今若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 问幂级数的一致收敛区间能否向右一直伸展到 1. 回答是肯定的, 这就是有名的 Abel 定理.

定理 1 (Abel) 设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中一致收敛, 且有

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

证 在上节的定理 1 中, 取 $a_n(x) = x^n, b_n(x) = a_n$, 立得定理的前半部分. 定理的后半部分由 §4 定理 2 导出.

Abel 定理告诉我们, 如果 (1) 式右方收敛, 则左方的极限也存在, 并且与它相等. 它的逆定理未必正确, 即若 (1) 式左方存在, 右方未必与它相等, 甚至还不一定收敛. 例如

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},$$

当 $x \to 1$ 时, $f(x) \to \dfrac{1}{2}$, 但 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 不收敛.

如果我们给系数 a_n 的阶以一定的限制, 逆定理便有可能成立. 我们有

定理 2 (Tauber) 若 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 且当 $x \to 1$ 时, (1) 式左方的极限存在, 则 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 也收敛, 并且 (1) 式成立.

证 我们只须证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \to 0 \quad (x \to 1),$$

此处 $N = \left[\dfrac{1}{1-x}\right]$ 为 $\dfrac{1}{1-x}$ 的整数部分, 或证明

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - x^n) \to 0.$$

因为 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 所以给定 $\varepsilon > 0$, 可取 N 很大, 使 $|na_n| < \varepsilon (n > N)$, 于是

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n \cdot \frac{x^n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} < \varepsilon.$$

又由 $na_n \to 0$ 可以推出 (平均值的极限等于原序列的极限)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n|a_n| \to 0 \quad (N \to \infty).$$

所以

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n)\right| < (1-x)\sum_{n=0}^{N} n|a_n| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n|a_n| \to 0.$$

由此得出定理.

这两个定理可作种种推广, 例如将 x 推广到复变量 z 的情形, 又 Tauber 定理中关于 a_n 阶的限制可作一定程度的放宽, 例如将 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ 换成 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ 等. 这些定理统称之为 Abelian 与 Tauberian 定理, 它构成了数学分析中的一个重要部分, 在这里不再详细介绍了.

§8. 求隐函数的逐渐逼近法

我们假定 $F(x,y)$ 及其微商 $F'_y(x,y)$ 在以 (x_0,y_0) 为中心的正方形

$$(D):\ |x-x_0| \leqslant \Delta, \quad |y-y_0| \leqslant \Delta$$

中连续, 并且

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad F'_y(x_0,y_0) \neq 0.$$

前已证明在 (x_0,y_0) 附近, 可由

$$F(x,y) = 0 \tag{1}$$

解出 y 来, 换言之, 有一个单变量连续函数

$$y = f(x)$$

适合于 $y_0 = f(x_0)$, 而且有恒等式

$$F[x, f(x)] = 0.$$

我们现在可以利用一致收敛的原则来具体的定出 $y = f(x)$ 来.

首先让我们讨论一个比较简单的问题, 就是方程 (1) 具有

$$y = y_0 + \varphi(x,y) \tag{2}$$

的特殊形式, 此处 $\varphi(x_0,y_0) = 0$,

$$|\varphi'_y(x_0,y_0)| < 1. \tag{3}$$

注意, 这样做并不失去普遍性, 原因是可以把一般方程 (1) 改写成

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)} \right],$$

而命

$$\varphi(x,y) = y - y_0 - \frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

如此, 则 $\varphi(x_0,y_0) = 0, \varphi'_y(x_0,y_0) = 1 - 1 = 0.$

我们现在来解方程 (2), 由 φ'_y 及 φ 的连续性, 可以取 Δ 足够小, 使在 D 中

$$|\varphi'_y(x,y)| < \lambda \quad (<1),$$

又取 δ 很小, 使在 $|x - x_0| \leqslant \delta$ 中, 有不等式

$$|\varphi(x,y_0)| < (1-\lambda)\Delta. \tag{4}$$

现在我们在

$$(D^*): \ |x - x_0| \leqslant \delta, \quad |y - y_0| \leqslant \Delta$$

中来作进一步的讨论.

把 $y = y_0$ 代入 (2) 式右边, 则得 x 的函数

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x,y_0).$$

再把 $y = y_1$ 代入 (2) 式右边, 又得出一个 x 的函数

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x,y_1).$$

同此得

$$\begin{aligned} y_3 &= y_3(x) = y_0 + \varphi(x,y_2), \\ &\cdots \\ y_n &= y_n(x) = y_0 + \varphi(x,y_{n-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

如此得出一个函数序列

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), \cdots,$$

我们说, 这个序列的极限 $y(x)$ 存在.

先证明这样的 $y_n(x)$ 都在区间

$$|y - y_0| \leqslant \Delta$$

中. 显然 $|y_1 - y_0| < (1-\lambda)\Delta \leqslant \Delta$. 今若

$$|y_{n-1} - y_0| \leqslant \Delta,$$

则由 (5) 式可知,

$$y_n - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}).$$

但

$$|\varphi(x, y_{n-1})| \leqslant |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|.$$

由中值定理, 右边的第一部分为

$$|\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| = |\varphi'_y(x, y)||y_{n-1} - y_0| < \lambda\Delta,$$

对第二部分, 由 (4) 式可知其 $< (1-\lambda)\Delta$, 所以

$$|y_n - y_0| < \lambda\Delta + (1-\lambda)\Delta = \Delta.$$

即得所断言者.

其次, $y_n(x)$ 都是 x 的连续函数. 显然 $y_1(x)$ 连续. 假定 $y_{n-1}(x)$ 也连续, 则当 x 与 x' 充分接近时, $y_{n-1}(x)$ 与 $y_{n-1}(x')$ 可以任意小. 故由

$$y_n(x) - y_n(x') = \varphi[x, y_{n-1}(x)] - \varphi[x', y_{n-1}(x')]$$

与 $\varphi(x, y)$ 的连续性, 推出 $y_n(x)$ 为连续.

现在进一步讨论函数序列 (y_n) 的收敛问题. 我们考虑级数

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1}). \tag{6}$$

利用中值定理,

$$|y_n - y_{n-1}| = |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2})| < \lambda|y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

连续应用得

$$\begin{aligned} |y_n - y_{n-1}| &< \lambda|y_{n-1} - y_{n-2}| < \lambda^2|y_{n-2} - y_{n-3}| \\ &< \cdots < \lambda^{n-1}(1-\lambda)\Delta, \end{aligned}$$

而几何级数

$$(1-\lambda)\Delta\sum_{1}^{\infty}\lambda^{n-1}$$

收敛, 因此级数 (6) 在 $|x - x_0| \leqslant \delta$ 中一致收敛, 所以

$$y = y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

在指定的区域内连续.

由 (5) 式可知 $y = y(x)$ 是方程 (1) 的一个解, 现在我们进一步证明唯一性.

如果有另一解 $\tilde{y}$, 则

$$\tilde{y} = y_0 + \varphi(x, \tilde{y}).$$

与原解相减得

$$|y - \tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda |y - \tilde{y}|.$$

因 $\lambda < 1$, 所以 $y \neq \tilde{y}$ 不可能.

这是一个值得注意的方法, 请读者熟读.

§9. 无穷乘积

现在讨论无穷乘积

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots .$$

我们用符号

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{1}$$

来表示它, 并假定 a_n 中没有一个等于 -1.

命 P_n 表部分积

$$P_n = \prod_{m=1}^{n} (1 + a_m).$$

如果当 $n \to \infty$ 时, P_n 趋于一个非 0 的极限, 则无穷乘积称为收敛.

这里不将 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ 的情况定义为收敛, 完全是为了以后的方便.

不收敛的无穷乘积称为发散, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, 则称发散于 0.

例 1 乘积

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots$$

是收敛的.

显然, 如果 (1) 式收敛, 则 $a_n \to 0$.

先从几个简单的情况开始

1) 如果 $a_n \geqslant 0$, 无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

同为收敛或同为发散.

证 P_n 是一非减序列, 所以这序列或者收敛或者趋向正无穷, 因为

$$a_1+\cdots+a_n\leqslant(1+a_1)\cdots(1+a_n)\leqslant e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

由此得出结果.

2) 如果 $a_n\leqslant 0$, 命 $a_n=-b_n$, 我们研究乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n).$$

i) 如果 $b_n\geqslant 0, b_n\neq 1(n=1,2,\cdots), \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ 也收敛.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 故能取 N 充分大, 使

$$b_N+b_{N+1}+\cdots<\frac{1}{2};$$

特别有 $b_n<1(n\geqslant N)$. 于是

$$\begin{aligned}(1-b_N)(1-b_{N+1})&\geqslant 1-b_N-b_{N+1},\\ (1-b_N)(1-b_{N+1})(1-b_{N+2})&\geqslant(1-b_N-b_{N+1})(1-b_{N+2})\\ &\geqslant 1-b_N-b_{N+1}-b_{N+2},\end{aligned}$$

一般说来, 有

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})\cdots(1-b_n)\geqslant 1-b_N-\cdots-b_n>\frac{1}{2}.$$

当 $n\geqslant N$ 时 P_n/P_{N-1} 单调下降, 且有一正下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n/P_{N-1}$ 有极限存在, 且大于 0. 因 $P_{N-1}\neq 0$, 所以得到所说的结论.

ii) 若 $0\leqslant b_n<1$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ 发散于 0.

若 $0\leqslant b<1$, 则 $1-b\leqslant e^{-b}$, 所以

$$0<(1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n)\leqslant e^{-b_1-b_2\cdots-b_n}.$$

右边趋于 0, 所以得出结论.

于是得到: 若 $0\leqslant b_n<1$, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同为收敛或同为发散.

§10. 无穷乘积的收敛条件

现在 a_n 可能是实数或复数, 但 $\neq -1$.

定义 如果乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

收敛, 则乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

称为绝对收敛.

由前已知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的收敛是乘积绝对收敛的必要且充分条件.

现在证明

定理 1 绝对收敛的乘积一定收敛.

证 命

$$p_n=\prod_{m=1}^{n}(1+a_m),\quad P_n=\prod_{m=1}^{n}(1+|a_m|).$$

由

$$p_n-p_{n-1}=(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})a_n$$

及

$$P_n-P_{n-1}=(1+|a_1|)\cdots(1+|a_{n-1}|)|a_n|,$$

显然有

$$|p_n-p_{n-1}|\leqslant P_n-P_{n-1},$$

今若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛, 则 P_n 有极限, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(P_n-P_{n-1})$ 收敛. 由比较法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n-p_{n-1})$ 收敛, 即 p_n 有极限.

现在证明这极限不能为 0, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的收敛导出 $1+a_n\to 1$, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|$$

也收敛. 再由以上证明了的结果, 乘积

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{a_m}{1+a_m}\right)$$

也有极限, 但此乘积等于 $1/p_n$, 故 p_n 的极限 $\neq 0$.

不难证明, 绝对收敛乘积各因子的次序可以任意变换而不改变乘积的数值.

例 1

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

这是由于

$$p_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}.$$

例 2 由 π 的 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots=2\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

及例 1 得到

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]}=\frac{2}{\pi}.$$

§11. 无穷乘积的对数

若

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=p.$$

是否有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)=\log p,$$

此处 $\log z$ 表示 z 的对数的主值, 即其虚数部分在 $-\pi$ 与 π 之间者.

如果 a_n 都是正实数, 则所有的对数都取普通的实数值. 以上的等式是对的, 但在一般的情况下, 却不一定相等而需要作些说明.

仍命 p_n 表前 n 个部分乘积, 且命

$$p_n=\rho_n e^{i\varphi_n},$$

当 $n\to\infty$ 时, ρ_n 趋于极限并且如果适当的取 φ_n, 则 φ_n 也趋于极限.

命

$$1+a_n=\gamma_n e^{i\theta_n},\quad -\pi<\theta_n\leqslant\pi.$$

由于 $a_n\to 0$, 所以当 $n\to\infty$ 时 $\theta_n\to 0$.

命

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \log(1 + a_m) = \log p_n + 2k_n i\pi,$$

此处 k_n 是一整数, 现在有

$$2k_n\pi = \theta_1 + \cdots + \theta_n - \varphi_n,$$

故

$$2\pi(k_{n+1} - k_n) = \theta_{n+1} - (\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

右方趋向于 0. 故当 n 充分大时,

$$2\pi|k_{n+1} - k_n| < 2\pi,$$

即得 $k_{n+1} = k_n$. 因此, 当 n 充分大时, $k_n = k$ 是一常数, 即

$$s_n = \log p_n + 2ki\pi \quad (n > N).$$

命 $n \to \infty$, 则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \log p + 2ki\pi.$$

此级数的和是乘积的对数, 但不一定是主值.

又可注意者在证明中也可得, 当 N 充分大时,

$$\sum_{N+1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \log p - \log p_N.$$

如果我们由对数的级数出发, 且假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = s,$$

则得

$$e^{s_n} = p_n.$$

故

$$p_n \to p = e^s,$$

即乘积收敛于和的指数.

根据以上的讨论, 我们得到

定理 1 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

收敛的必要且充分条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$$

的收敛.

例 1 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

由

$$\log(1+a_n)=a_n+O(|a_n|^2)$$

可以推出这结果.

例 2 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2,\cdots,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{k-1}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^k$ 都收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

例 3 若 a_n 为实数且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛时, 乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 而当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散时, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于零.

由

$$\log(1+a_n)=a_n-a_n^2/2+o(a_n^2)$$

可以推出这结果. 由此可知, 乘积

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots$$

发散于零.

例 4 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$, 故乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$ 收敛.

但另一方面, 由

$$1+\frac{i}{n}=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}e^{i\theta_n}$$

可知,

$$\theta_n=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

因此乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

发散.

习题 1 命

$$a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

则乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散.

习题 2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)e^{a_n}$ 收敛; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$ 收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)e^{a_n+\frac{1}{2}a_n^2}$ 收敛.

习题 3 试求

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

习题 4 试求

$$\frac{1}{e}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

的值.

§12. 无穷乘积的一致收敛

如果序列

$$P_n(x)=\prod_{m=1}^{n}[1+u_m(x)],\quad n=1,2,3,\cdots$$

一致收敛并且极限永不为零, 则称这无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1+u_n(x)]$$

一致收敛.

最简单的判别法是

定理 1 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在某一域内一致收敛, 且 $u_n(x)\neq -1$, 则乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n(x))$ 也在该域内一致收敛.

证明并无新原则, 只须注意 "一致" 性. 命 M 为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$$

在这域中的上界, 则

$$[1+|u_1(x)|]\cdots[1+|u_n(x)|]<e^{|u_1(x)|+\cdots}\leqslant e^M.$$

命

$$P_n(x)=\prod_{m=1}^{n}[1+|u_m(x)|],$$

则

$$P_n(x)-P_{n-1}(x)=[1+|u_1(x)|]\cdots[1+|u_{n-1}(x)|]|u_n(x)|<e^M|u_n(x)|.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[P_n(x)-P_{n-1}(x)]$ 一致收敛. 于是与第十三章 §9 同样地得出结果.

例 1 当 $|x|<1$ 时

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

由

$$(1-x)P_n=1-x^{2^n}\to 1\quad(n\to\infty)$$

即得所证. 将等式左右双方都展成 x 的幂级数, 即可证明任一正整数可用二进位唯一地表出来.

例 2 当 $|x|<1$ 时,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

可由左边等于

$$\frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots$$

推出之.

例 3 当 $\varphi\neq 0$ 时, 由

$$2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi$$

可知

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

取 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, 即得

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots.$$

由于

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

等等, 故得 Vieta 公式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

例 4 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ 当 $x>1$ 时绝对收敛, 当 $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时条件收敛; 当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 发散于零.

例 5

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),\quad \cos\pi x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right].$$

由于

$$(\cos z+i\sin z)^m=\cos mz+i\sin mz,$$

得

$$\sin mz=m\cos^{m-1}z\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}z\sin^3 z+\cdots.$$

以 $m=2n+1$ 代入, 并注意 $\cos^{2k}z=(1-\sin^2 z)^k$, 故得

$$\sin(2n+1)z=\sin z\cdot P(\sin^2 z),$$

此处 $P(u)$ 是 u 的 n 次多项式, 命其根为 $u_1,u_2,\cdots,u_n$. 则

$$P(u)=A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

若 z 满足

$$\sin z\neq 0,\quad \sin(2n+1)z=0,$$

则 $\sin^2 z$ 就是 $P(u)=0$ 的根. 故得

$$u_1=\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\quad u_2=\sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\cdots,u_n=\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

又可知

$$A=P(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}=2n+1,$$

故

$$\sin(2n+1)z=(2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

命 $z=\dfrac{x}{2n+1}$, 则

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

假定 $x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$, 则 $\sin x\neq 0$. 将上式改写成

$$\sin x=U_k^{(n)}V_k^{(n)},$$

此处

$$U_k^{(n)}=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

$$V_k^{(n)}=\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

固定 k, 命 $n\to\infty$, 则得

$$U_k=\lim_{n\to\infty}U_k^{(n)}=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

因此极限

$$\lim_{n\to\infty}U_k^{(n)}=U_k$$

存在.

现在来研究 $V_k=\lim\limits_{n\to\infty}V_k^{(n)}$. 当 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\frac{2}{\pi}\varphi<\sin\varphi<\varphi.$$

故得

$$\sin^2\frac{x}{2n+1}<\frac{x^2}{(2n+1)^2},$$

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1}>\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2}\quad(h=k+1,\cdots,n).$$

因此

$$1>V_k^{(n)}>\left(1-\frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)>\bar{V}_k,$$

此处

$$\bar{V}_k=\prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right).$$

命 $n \to \infty$, 得

$$1 > V_k \geqslant \bar{V}_k.$$

因为

$$\lim_{k\to\infty} \bar{V}_k = 1,$$

故得

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n\pi^2}\right).$$

于是

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2x \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)}{2x \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

因此

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \cos \pi x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right].$$

习题 1

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

习题 2

$$\operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right].$$

§13. 带参数的积分

我们现在把一致收敛的概念推广到积分上.

假定 $f(x, y)$ 在方条

$$a \leqslant x \leqslant \infty, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta$$

上定义, 且对任一固定的 y, 积分

$$\phi(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)dx \tag{1}$$

恒存在.

定义 如果任给 $\varepsilon > 0$, 可以找到依赖于 ε 但不依赖于 y 的 x_0, 使当 $x > x_0$ 时,

$$|\phi(y) - \int_a^x f(x, y)dx| < \varepsilon,$$

则积分 (1) 称为一致收敛.

与以往相仿, 有一批定理:

定理 1 如果有函数 $g(x)$ 存在, 使

$$|f(x,y)| \leqslant g(x) \quad 及 \quad \int_a^{\infty} g(x)dx < \infty,$$

则积分 (1) 一致收敛.

定理 2 (Dirichlet) 如果 $\phi(x,y)$ 有连续偏微商 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$; 又当 $x \to \infty$ 时, $\phi(x,y)$ 单调递降 (对于固定的 y), 并且关于 y 一致地趋向于零. 命

$$F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt,$$

若 $|F(x,y)|$ 小于一个与 x,y 都无关的常数 M, 则积分

$$\int_a^{\infty} \phi(x,y)f(x,y)dx$$

一致收敛.

证 分部积分得

$$\int_{x'}^{x} \phi(x,y)f(x,y)dx = \phi(x,y)F(x,y) - \phi(x',y)F(x',y) + \int_{x'}^{x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) F(x,y)dx.$$

已积出的部分当 x,x' 充分大时小于任何给定的 ε. 又因

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} > 0.$$

及 $|F(x,y)|$ 小于 M, 所以

$$\left|\int_{x'}^{x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) F(x,y)dx\right| \leqslant M \int_{x'}^{x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx = M[\phi(x',y) - \phi(x,y)],$$

它当 x,x' 充分大时也小于 ε, 所以积分一致收敛.

定理 3 (Abel) 若积分

$$\int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

对于 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 一致收敛, $\phi(x,y)$ 为 x 的单调函数 (对于固定的 y), 它有连续偏微商 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$, 且一致有界 (即存在常数 L, 使 $\phi(x,y) < L$ 对适合 $x \geqslant a, \alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 的一切 (x,y) 都成立), 则

$$\int_a^{\infty} f(x,y)\phi(x,y)dx$$

一致收敛.

这定理的证明不难, 读者试自证之.

与上面相类似, 我们还可以定义另一种瑕积分的一致收敛.

假定 $f(x,y)$ 在 $a \leqslant x < b$ (或 $a < x \leqslant b$), $c \leqslant y \leqslant d$ 上定义, 且对 $c \leqslant y \leqslant d$ 中的任何 y, 积分

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

恒存在; 若对任何 $\varepsilon > 0$, 存在仅依赖于 ε 而不依赖于 y 的 $\eta > 0$ 使

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \quad 或 \quad \left|\int_a^{a+\eta} f(x,y)dx\right| < \varepsilon,$$

则称积分 (2) 是一致收敛的.

我们也有类似于上面关于判别一致收敛的定理.

附记 可以将上面的定义及定理条件中的 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 换为某一实数集合.

例 1 积分

$$I(y) = \int_0^{\infty} ye^{-xy}dx$$

在 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 中不一致收敛.

因为

$$\int_A^{\infty} ye^{-xy}dx = \int_{yA}^{\infty} e^{-t}dt = e^{-Ay} \to 1 \quad (y \to 0),$$

所以 $I(y)$ 不一致收敛.

例 2 积分

$$\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}dx$$

在 $y \leqslant y_0 (< 2)$ 中一致收敛, 但在 $y < 2$ 中并不一致收敛.

当 $y \leqslant y_0 (< 2)$ 时, 对于 $\varepsilon > 0$, 可取 $\eta > 0$ 使

$$\frac{\eta^{2-y_0}}{2-y_0} < \varepsilon.$$

故

$$\left|\int_{1-\eta}^{1} \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}dx\right| \leqslant \int_{1-\eta}^{1} \frac{1}{(1-x)^{y_0-1}}dx = \int_0^{\eta} \frac{dz}{z^{y_0-1}} = \frac{\eta^{2-y_0}}{2-y_0} < \varepsilon.$$

故积分在 $y \leqslant y_0 < 2$ 中一致收敛, 但对 $y < 2$, 可取 η 适当小, 使当 $1-\eta \leqslant x < 1$ 时

$$\frac{\sin(1-x)}{1-x} > \frac{1}{2}.$$

故

$$\left|\int_{1-\eta}^{1} \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}dx\right| > \frac{1}{2}\int_0^{\eta} \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\eta^{2-y}}{2-y} \to \infty \text{ (当 } y \to 2).$$

故在 $y < 2$ 中, 积分不一致收敛.

例 3 证明积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha > 0)$$

在 $\beta \geqslant \beta_0 (> 0)$ 中一致收敛.

当 $\beta \geqslant \beta_0$ 时,

$$\left| \int_0^A \sin \beta x dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \beta A}{\beta} \right| \leqslant \frac{2}{\beta_0},$$

而 $\dfrac{x}{\alpha^2 + x^2}$ 与 β 无关, 当 $x \geqslant \alpha$ 时单调减少, 且当 $x \to \infty$ 时趋于零. 故由定理 2 可知

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$$

在 $\beta \geqslant \beta_0 (> 0)$ 中一致收敛.

定理 4 假定 $f(x, y)$ 在长方形

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta$$

中连续, 则在 $[\alpha, \beta]$ 中,

$$\phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

是 y 的连续函数, 换言之, 如果 $\alpha \leqslant y_0 \leqslant \beta$, 则

$$\lim_{y \to y_0} \phi(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx.$$

证 由

$$\phi(y + k) - \phi(y) = \int_a^b \{f(x, y + k) - f(x, y)\} dx,$$

给了 $\varepsilon > 0$, 由一致连续性, 我们能选取 k_0, 使当 $|k| < k_0$ 时, 对所有的 x, y,

$$|f(x, y + k) - f(x, y)| \leqslant \varepsilon,$$

故

$$|\phi(y + k) - \phi(y)| \leqslant \varepsilon (b - a).$$

即得定理.

例 4 不用求出下面的积分

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \quad \int_0^1 \log (x^2 + y^2) dx,$$

便可看出它们是 y 的连续函数 $(y \geqslant \alpha > 0)$.

定理 5 若 $f(x,y)$ 在

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant c$$

中连续. 设 $y_0 \geqslant c$ (y_0 可以为 ∞), 假设 $f(x,y)$ 于 $y \to y_0$ 时在 x 的任何有限区间中一致趋于某可积函数 $\varphi(x)$, 又

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

在 $y \geqslant c$ 中一致收敛, 则

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \int_a^{\infty} \varphi(x)dx.$$

证 由于 $I(y)$ 的一致收敛性及 $\varphi(x)$ 的可积性, 对任何 $\varepsilon > 0$, 可取 N 充分大, 使

$$\left|\int_N^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}(y > c), \quad \left|\int_N^{\infty} \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因在区间 $[a,N]$ 中, $f(x,y)$ 一致趋于 $\varphi(x)$, 故存在 δ, 使当 $|y-y_0| < \delta$ 时 (若 $y_0 = \infty$, 则存在 M, 使当 $y > M$ 时),

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(N-a)}.$$

于是

$$\left|\int_a^N f(x,y)dx - \int_a^N \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (|y-y_0| < \delta \quad 或 \quad y > M).$$

因此当 $|y-y_0| < \delta$ (或 $y > M$) 时,

$$\left|\int_a^{\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\infty} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon.$$

定理证完.

注意 当 y_0 为一有限数时, $f(x,y)$ 趋于 $\varphi(x)$ 的一致性条件可以略去, 而在证明中, 可用 $f(x,y)$ 的一致连续性代替.

§14. 积分号下求微分

定理 1 如果

$$f(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

在 $a \leqslant x \leqslant b, y_0 - \eta \leqslant y \leqslant y_0 + \eta (\eta > 0)$ 上连续, 则

$$\left(\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx\right)_{y=y_0} = \left(\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx\right)_{y=y_0}.$$

证 命

$$\phi(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\quad g(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\phi(y_0+k)-\phi(y_0)}{k}&=\frac{1}{k}\int_a^b[f(x,y_0+k)-f(x,y_0)]dx\\&=\int_a^b g(x,y_0+\theta k)dx,\quad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

由于 $g(x,y)$ 是一致连续, 所以

$$\lim_{k\to 0}\int_a^b g(x,y_0+\theta k)dx=\int_a^b g(x,y_0)dx.$$

定理 2 如果

$$f(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

在 $x\geqslant a, y_0-\eta\leqslant y\leqslant y_0+\eta$ 中连续, 又若积分

$$\int_a^\infty f(x,y)dx$$

收敛, 并且

$$\int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

在 $[y_0-\eta,y_0+\eta]$ 中一致收敛, 则在 $y=y_0$ 处

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

证 命

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,y)dx=u_n(y),$$

则

$$\int_a^\infty f(x,y)dx=\sum_{n=1}^\infty u_n(y).$$

由定理 1 可知

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx&=\sum_{n=1}^\infty\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx\\&=\sum_{n=1}^\infty\frac{d}{dy}\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,y)dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{d}{dy}u_n(y).\end{aligned}$$

由级数的一致收敛性, 可得以上的结论.

例如, 当 $y>0$ 时,

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx=\int_0^1 D_y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx=-\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1+y^2},$$

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \log(x^2+y^2)dx=\int_0^1 D_y\log(x^2+y^2)dx=\int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

这些结果也可以通过直接计算积分

$$I_1(y)=\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx=\operatorname{arctg}\frac{1}{y}+\frac{1}{2}y\log\frac{y^2}{1+y^2},$$

$$I_2(y)=\int_0^1 \log(x^2+y^2)dx=\log(1+y^2)-2+2y\operatorname{arctg}\frac{1}{y},$$

然后对 y 取微商而得.

当 $y=0$ 时, 定理的条件不能满足; 另一方面, 当 $y\to 0$ 时,

$$\frac{I_1(y)-I_1(0)}{y}=\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1+y^2}-\frac{\operatorname{arctg} y}{y}\to-\infty,$$

所以在 $y=0$ 处, 不存在有限微商. 又当 $y\to 0$ 时,

$$\frac{I_2(y)-I_2(0)}{y}=\frac{\log(1+y^2)}{y}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\to\pi,$$

即 $I_2'(0)=\pi$. 但被积函数对 y 的微商在 $y=0$ 处等于零, 所以积分也等于 0. 定理不正确.

§15. 积分号下求积分

定理 1 *如果函数 $f(x,y)$ 在矩形*

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d$$

上连续, 则

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

证 我们证明更普遍一些的公式. 如果 $c\leqslant\eta\leqslant d$, 则

$$\int_c^\eta\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^\eta f(x,y)dy\right)dx. \tag{1}$$

上式的左方和右方都是参数 η 的两个函数. 现在计算它们对 η 的微商.

左方外层积分具有被积函数

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx.$$

由 §13 定理 4, 它是 y 的连续函数, 所以左方对上限的微商就等于

$$I(\eta)=\int_a^b f(x,\eta)dx.$$

(1) 式右方积分就是

$$\int_a^b \varphi(x,\eta)dx,\quad \varphi(x,\eta)=\int_c^\eta f(x,y)dy.$$

函数 $\varphi(x,\eta)$ 适合于 §14 定理 1 的条件, 因由 §13 定理 4 可知, $\varphi(x,\eta)$ 是 x 的连续函数. 再取微商得

$$\varphi'_\eta(x,\eta)=f(x,\eta),$$

把 $\varphi'_\eta(x,\eta)$ 看成二个变量函数, 它是连续的, 所以得出

$$\frac{d}{d\eta}\int_a^b \varphi(x,\eta)dx=\int_a^b \varphi'_\eta(x,\eta)dx=\int_a^b f(x,\eta)dx=I(\eta).$$

所以如果把 (1) 式的左方与右方都看成 η 的函数, 那么它们有相等的微商. 因此, 它们仅相差一个常数. 但当 $\eta=c$ 时, 左、右方都等于 0, 因而 (1) 式对所有的 η 恒成立.

例 1 命 $f(x,y)=x^y$, 当 $0\leqslant x\leqslant 1, a\leqslant y\leqslant b$ $(0<a<b)$ 时定理的条件适合, 所以

$$\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy.$$

由左方容易得出

$$\int_a^b \frac{dy}{1+y}=\log\frac{1+b}{1+a},$$

而右方等于

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}dx,$$

因此得到

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}dx=\log\frac{1+b}{1+a}.$$

例 2 函数

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

在矩形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上不适合定理的条件, 因为 $x = 0, y = 0$ 是一间断点, 我们有

$$\int_0^1 f dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \quad (y > 0),$$
$$\int_0^1 dy \int_0^1 f dx = \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4};$$

但另一方面,

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f dy = -\frac{\pi}{4}.$$

定理 2 若 $f(x,y)$ 在

$$x \geqslant a, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上连续, 又若积分

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$$

在 $c \leqslant y \leqslant d$ 上一致收敛, 则

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

证 对于任何 $A \geqslant a$, 由定理 1 可知

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

记

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y)dx,$$

则当 $A \to \infty$ 时,$F(A,y)$ 在 $c \leqslant y \leqslant d$ 一致收敛于 $I(y)$. 故由 §13 定理 5 可知,

$$\lim_{A\to\infty} \int_c^d F(A,y)dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx,$$

故得定理.

定理 3 若 $f(x,y)$ 在

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant c$$

上连续, 并且积分

$$\int_a^\infty f(x,y)dx \quad 与 \quad \int_c^\infty f(x,y)dy$$

分别在 $y \geqslant c$ 与 $x \geqslant a$ 的任意有限区间上一致收敛; 若

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x,y)|dx \quad 与 \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x,y)|dy$$

中至少有一个存在, 则

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y)dx \quad 与 \quad \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x,y)dy$$

都存在, 并且相等, 也即

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x,y)dy = \int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y)dx.$$

证 不妨假定

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} |f(x,y)|dy$$

存在. 由于

$$\int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

在 y 的任何有穷区间上一致收敛, 故由定理 2 可知, 对任何 $C > c$, 有

$$\int_c^{C} dy \int_a^{\infty} f(x,y)dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{C} f(x,y)dy.$$

又因

$$\left| \int_c^{C} f(x,y)dy \right| \leqslant \int_c^{\infty} |f(x,y)|dy,$$

命 $F(x,C) = \int_c^{C} f(x,y)dy, g(x) = \int_c^{\infty} |f(x,y)|dy$, 由假设则有 $\int_a^{\infty} g(x)dx < \infty$. 故由 §13 定理 1 可知

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{C} f(x,y)dy$$

对于 $C \geqslant c$ 一致收敛. 于是由 §13 定理 5 可知,

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y)dx = \lim_{C\to\infty} \int_a^{\infty} dx \int_c^{C} f(x,y)dy = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x,y)dy.$$

定理证完.

定理 4 若 $f(x,y)$ 是

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant c$$

中的非负连续函数; 若

$$I(x) = \int_c^{\infty} f(x,y)dy \quad 与 \quad I_1(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

都是连续函数, 那么在下面两个二重积分

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x,y)dy \quad 与 \quad \int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

中有一个存在时, 另一个也存在, 而且二者相等.

在证明以前先证明

定理 5 (Dini) 若 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上非负的连续函数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 级数的余式

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=f(x)-f_n(x)$$

是两个连续函数之差, 故仍为连续函数. 由于 $u_n(x)\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$, 故

$$\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\varphi_n(x)\geqslant\cdots.$$

固定 x, 由于级数的收敛性, 故

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

若级数非一致收敛, 则对某一 $\varepsilon>0$, 存在 x_n, 使

$$\varphi_n(x_n)\geqslant\varepsilon.$$

由 Bolzano-Weierstrass 定理可知, 在 $\{x_n\}$ 中可以找出一个子序列 $\{x_{n_k}\}$, 以 $[a,b]$ 上一点 x_0 为极限. 故

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0).$$

当 $n_k\geqslant m$ 时

$$\varphi_m(x_{n_k})\geqslant\varphi_{n_k}(x_{n_k})\geqslant\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon,$$

故

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon.$$

由此得到矛盾, 故得定理.

定理 4 的证明 取 $\{y_n\}$ 为递增且趋向于 ∞ 的序列, 命

$$F(x,y_n)=\int_c^{y_n}f(x,y)dy,$$

则

$$I(x)=F(x,y_1)+\sum_{n=2}^{\infty}[F(x,y_n)-F(x,y_{n-1})].$$

由定理 5 可知,$I(x)$ 在 $x\geqslant a$ 中的任何有限区间上一致收敛. 同理可知,$I_1(y)$ 在 $y\geqslant c$ 中的任何有限区间上一致收敛. 故由定理 3 得定理 4.

例 3 在 §3 中已经算出 Dirichlet 积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2},$$

现在再用另一方法证明之.

考虑

$$J = \int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx \quad (a>0, k>0).$$

因为

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos axdx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

当 $a \geqslant 0$ 时一致收敛, 故由 §14 定理 2, 对于 $a>0$,

$$\frac{dJ}{da} = \frac{k}{a^2+k^2},$$

因此

$$J = \operatorname{arctg}\frac{a}{k} + c.$$

当 $a=0$ 时,$J=0$, 故得

$$J = \operatorname{arctg}\frac{a}{k}.$$

由 Abel 定理 (§13. 定理 3) 可知, 当 $k \geqslant 0$ 时, J 一致收敛. 故由 §13, 定理 5 得到

$$\lim_{k\to 0^+} J = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \lim_{k\to 0^+}\operatorname{arctg}\frac{a}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

特别取 $a=1$, 就得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 4 求

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

作代换 $x=ut$, 则

$$J = u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt.$$

各边都乘以 $e^{-u^2}du$ 并积分之, 则得

$$J\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}du = J^2 = \int_0^\infty e^{-u^2}udu\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt.$$

由于

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}udt = e^{-u^2}J$$

及

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2},$$

前者是 u 的连续函数, 而后者是 t 的连续函数, 故由定理 4 可知,

$$J^2 = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

因此

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 5 求

$$y = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad z = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0).$$

当 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 时, z 是一致收敛的, 故

$$\frac{dy}{d\beta} = -z.$$

因为

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\beta > 0),$$

所以

$$\frac{dy}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = \alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx.$$

现在又能在积分号下取微商了, 故得

$$\frac{d^2 y}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \alpha^2 y.$$

因此

$$y = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta}.$$

由于

$$|y| \leqslant \int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha},$$

故必须 $C_1 = 0$, 否则命 $\beta \to \infty$, 将得出矛盾. 又当 $\beta \to 0$ 时, 可在积分号下取极限, 于是得出 $C_2 = \dfrac{\pi}{2\alpha}$. 故得

$$y = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta},$$

$$z = -\frac{dy}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}.$$

例 6 求 Fresnel 积分 $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ 与 $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$.

命 $x^2 = t$, 则

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du,$$

故

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-kt} \sin t dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du.$$

由定理 3 可知, 上面的积分可以交换, 故

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + (k+u^2)^2}.$$

由 Abel 定理, 左方的积分关于 $k \geqslant 0$ 一致收敛, 故可在积分号下令 $k \to 0$ 而取极限. 又对右方的积分, 也能在积分号下取极限, 于是得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

所以

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

同法可得

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

§16. 上下限依赖于参变量的积分

定理 1 仍假定 $f(x,y)$ 在

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上连续, 并且假定

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

是二条连续曲线, 并且 $a \leqslant \alpha(y) \leqslant b, a \leqslant \beta(y) \leqslant b$, 则积分

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) dx$$

是在 $[c,d]$ 上的 y 的连续函数.

这定理看来复杂, 但已无实质上的困难. 我们取一个特殊值 $y = y_0$, 则积分可以分为三部分:

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx.$$

第一个积分, 由于它的上下限都是常数, 所以可知

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx.$$

又由

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right| \leqslant M|\beta(y) - \beta(y_0)|$$

及

$$\left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx \right| \leqslant M|\alpha(y) - \alpha(y_0)|,$$

此处 $M = \max|f(x,y)|$, 由 $\alpha(y)$ 与 $\beta(y)$ 的连续性可知, 当 $y \to y_0$ 时, 这两积分趋于 0. 定理证毕.

定理 2 仍有定理 1 的假定, 且假定有连续偏微商 $f'_y(x,y)$, 又设微商 $\alpha'(y)$ 与 $\beta'(y)$ 都存在, 则积分 $I(y)$ 的微商等于

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y)\cdot f[\beta(y),y] - \alpha'(y)f[\alpha(y),y].$$

仍如定理 1 的证明方法, 对于第一个积分有

$$\left(\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx\right)_{y=y_0} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)dx.$$

另一方面, 由中值定理有

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = \frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0} f(\bar{x},y),$$

此处 $\bar{x}$ 是 $\beta(y)$ 与 $\beta(y_0)$ 之间的一个数值. 因此当 $y \to y_0$ 时, 这积分趋于

$$\beta'(y_0)f[\beta(y_0),y_0].$$

另一项也容易得出.

§17. 重序列

有两个自然数做足码的数列

$$a_{m,n} \quad (m = 1, 2, \cdots, n = 1, 2, \cdots)$$

称为重序列.

如果有一数量 A 存在, 它有以下性质, 就称它为重序列的极限: 给了任意 $\varepsilon > 0$, 有一个正整数 N 存在, 使当 $m > N, n > N$ 时

$$|a_{m,n} - A| < \varepsilon.$$

用符号

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{m,n} = A$$

来代表它, 或者称为重序列 $a_{m,n}$ 收敛于 A. 与积分的方法相同, 我们可以证明

定理 1 假定 1)

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{m,n} = A$$

存在, 2)

$$P_n = \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$$

也存在, 则得

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n} \right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_{m,n}.$$

如果 3)

$$Q_m = \lim_{n\to\infty} a_{m,n}$$

也存在, 则两个求极限的手续可以交换, 即

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n} \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n} \right).$$

定理 2 如果对固定的 n, a_{mn} 是 m 的一个递增序列, 又对固定的 m, a_{mn} 是 n 的一个递增序列, 则

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{m,n} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$$

或存在或都等于 ∞.

习题 试尽量多地把序列的性质推广到重序列.

§18. 二重级数

给定由两个自然数足码决定的无穷数集

$$a_{m,n}, \quad m,n=1,2,3,\cdots.$$

我们可以想像它们是排成无穷矩阵的:

$$\begin{gathered} a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots,a_{1n},\cdots, \\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots,a_{2n},\cdots, \\ \cdots \\ a_{m1},a_{m2},a_{m3},\cdots,a_{mn},\cdots, \\ \cdots \end{gathered}$$

把这些数量加在一起就是二重级数, 问题在于如何把这一批数量加起来.

首先进入我们考虑的是一行一行地加起来, 然后再总加起来, 也就是

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\right).$$

另一方法是一列一列地加起来, 然后再总加起来:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}\right).$$

这两种加法结果是否相等. 不但如此, 还可以有像

$$S_N=\sum_{m+n\leqslant N}a_{m,n}, \quad \lim_{N\to\infty}S_N$$

这样的三角求和法, 也可以有像

$$T_N=\sum_{m^2+n^2\leqslant N^2}a_{m,n}, \quad \lim_{N\to\infty}T_N$$

这样的圆求和法.

求和方法很多, 所得结果是否相同? 从后面例 4、例 5 可以看到, 它们未必相同. 但在最简单的情形, 即 $a_{m,n}\geqslant 0$ 的情形中, 有以下的

定理 1 *对于正项二重级数, 各种求和法的结果都一样. 也即或者有有限和, 由任何方法所得出的结果都相同, 或者按各种求和方法都得到 $+\infty$ 的结果.*

证 我们将依次考虑各种可能性. 用 (m,n) 表示第一象限中的整点 (坐标都是整数的点). 用 $\Delta_p(p=1,2,\cdots)$ 表示一列具有以下性质的有限域: $\Delta_p\subset\Delta_{p+1}$, 也即前一域都套在后一域中, 又第一象限中的任一整点必属于某一 Δ_p. 将足标属于 Δ_p 的诸项之和记为 $\sum\limits_{\Delta_p}$.

从级数中任意选出有限多项, 并作它们的和:

$$a_{m_1,n_1}+a_{m_2,n_2}+\cdots+a_{m_k,n_k}.$$

所有这种和数成一数集, 它或者有有限的上确界 G, 或者无界. 在前一种情形中, 显然

$$\sum_{\Delta_p}\leqslant G$$

对全体 p 都成立; 但另一方面, 必有一有限和 $>G-\varepsilon$, 但当 p 很大时, $\sum\limits_{\Delta_p}$ 含有此有限和的每一项, 所以

$$\sum_{\Delta_p}>G-\varepsilon.$$

又因 $\sum\limits_{\Delta_p}$ 非减, 所以

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\Delta_p}=G.$$

这也就是说, 按这种特殊方法求和, 级数是收敛的, 并且它的和就等于 G. 在这种情形中, 称重级数为收敛, 显然, 它与 Δ_p 的选择无关.

在后一种情形中, 对于任给的正数 H, 必有有限和

$$a_{m_1,n_1}+a_{m_2,n_2}+\cdots+a_{m_k,n_k}>H,$$

所以存在 p_0, 使当 $p>p_0$ 时

$$\sum_{\Delta_p}>H.$$

因此

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\Delta_p}=\infty.$$

在此情形中, 称重级数为发散, 并且它也与 Δ_p 的选取无关.

所以如果求和方法仅限于有限部分和的话, 那么定理已经证明. 但是我们的定理应当包含容许无限部分和的求和方法, 所以还须继续证明.

先假定重级数收敛. 用 D 表一区域, 它可能有限也可能无限. 当 (m,n) 属于 D 时, 命 $b_{m,n}=a_{m,n}$, 否则命 $b_{m,n}=0$. 显然, 当 $\sum a_{m,n}$ 收敛时, $\sum b_{m,n}$ 也收敛. 记

$$\sum_D=\sum_D a_{m,n}=\sum b_{m,n},$$

并以此作为左方的定义, 则显然有

$$\sum_D\leqslant G.$$

现在命 $D_p(p=1,2,\cdots)$ 为任意一列具有 Δ_p 的特征性质的域, 但现在 D_p 容许为无限域, 则有

$$\sum_{D_p} \leqslant G.$$

另一方面, 与前面相同地可以证明: 存在 p_0, 使当 $p>p_0$ 时,

$$\sum_{D_p} > G-c.$$

因此

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{D_p} = G.$$

最后若重级数发散, 则或者有一 p, 使 $\sum\limits_{D_p}$ 发散, 对此情形, 定理已得: 或者对一切 p, $\sum\limits_{D_p}$ 都收敛, 对此情形, 又与前面同样可以证明, 对于充分大的 p,

$$\sum_{D_p} > H,$$

此处 H 为任意给定的正数. 所以

$$\sum_{D_p} \to \infty,$$

于是定理得证.

最有用的特例是

定理 2 如果 $a_{m,n} \geqslant 0$, 则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \tag{1}$$

此式的意义是: 如果等式 (1) 的一方收敛, 则另一方也收敛, 并且二者相等.

我们将另外给它二个证明

证明一 不妨假设 (1) 式左方收敛, 这意味着

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}(m=1,2,\cdots) \quad 及 \quad S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m$$

都收敛. 于是因为 $a_{m,n} \leqslant A_m$, 所以

$$A^{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$$

也都收敛. 因为

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}a_{m,n}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}A_m=S_1,$$

而左方是 N 的单调增加序列, 所以 (1) 式右方收敛, 并且不大于 S_1.

现在重复上面的证明, 但将 m,n 互换, 我们又得到 (1) 式左方不大于右方. 联合这两结果, 便得定理.

证明二 仍旧假设 (1) 式左方收敛. 因为

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}a_{m,n},$$

所以需要证明

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}a_{m,n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}.$$

为此, 只须证明

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}a_{m,n}\to 0\quad(N\to\infty).\tag{2}$$

记 $u_m(N)=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_{m,n}$, 则因 $0\leqslant u_m(N)\leqslant A_m$, 而 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$ 收敛, 所以 (2) 式的左方关于 N 一致收敛. 于是由 §4 定理 2 得到

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}a_{m,n}\right)=0.$$

定理证毕.

对于能取正、负值的 $a_{m,n}$,(1) 式有时成立, 有时不成立. 对此情形, 在需要证明它成立时, 我们往往像证明 (二) 那样, 把问题先化成 (2) 式的证明, 然后再用各种特殊方法证明它成立.

定理 3 设 $0\leqslant a_{m,n}\leqslant b_{m,n}$, 又 $\sum b_{m,n}$ 收敛, 则 $\sum a_{m,n}$ 也收敛.

证 从定理 1 的证明可以看到, 正项重级数在它的有限部分和数的集合有有限上界时收敛. 今 $\sum b_{m,n}$ 收敛, 所以它的有限部分和数有上界, 又因 $0\leqslant a_{m,n}\leqslant b_{m,n}$, 所以 $\sum a_{m,n}$ 的有限部分和数也有上界, 因此 $\sum a_{m,n}$ 收敛.

下面再来讨论 $a_{m,n}$ 能取正、负值或复数值的重级数.

定义 如果 $\sum|a_{m,n}|$ 收敛, 则称 $\sum a_{m,n}$ 为一绝对收敛级数.

定理 4 对于一个绝对收敛的重级数, 各种求和方法所得的结果也都相同. 或者说, 绝对收敛的重级数必定收敛.

证 我们只讨论 $a_{m,n}$ 为实数的情形, 对于 $a_{m,n}$ 能取复数值的情形, 读者试自证明之.

当 $a_{m,n} \geqslant 0$ 时, 命 $\alpha_{m,n} = a_{m,n}, \beta_{m,n} = 0$; 而当 $a_{m,n} < 0$ 时, 命 $\alpha_{m,n} = 0, \beta_{m,n} = -a_{m,n}$. 于是有 $a_{m,n} = \alpha_{m,n} - \beta_{m,n}$, 及

$$0 \leqslant \alpha_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|, \quad 0 \leqslant \beta_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|.$$

由假定及定理 3 可见, $\sum \alpha_{m,n}, \sum \beta_{m,n}$ 都是收敛的正项重级数, 而命 α 与 β 分别为它们的和. 于是采用定理 1 中的记号, 可有

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} = \sum_{\Delta_p} \alpha_{m,n} - \sum_{\Delta_p} \beta_{m,n} \to \alpha - \beta.$$

当 Δ_p 换成可以是无限域的 D_p 时, 上述关系仍旧真确. 但在此时, 等式被取作左方的定义. 显然, 重级数的和 $\alpha - \beta$ 与 Δ_p 及 D_p 的选取无关.

定理 5 命 $s_{m,n} = \sum\limits_{p=1}^{m} \sum\limits_{q=1}^{n} a_{p,q}$, 如果

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} s_{m,n} = s$$

且 $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{p,q}, \sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{p,q}$, 都收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) = s.$$

例 1 当 $\alpha > 1, \beta > 1$ 时,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{-\beta}$$

收敛.

例 2 当 $\alpha > 1$ 时,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha}}$$

收敛.

由

$$m^2 + n^2 > 2mn$$

及例 1 即得.

例 3 (Epstein ζ 函数) 命 $a>0, b^2<ac$, 则当 $\alpha>1$ 时,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^{\alpha}}$$

收敛

利用

$$\frac{am^2+2bmn+cn^2}{m^2+n^2}$$

有极小值的性质, 可得结果.

例 4 命

$$a_{m,n}=\begin{cases}1, & \text{若 } m=n+1\ (n\geqslant 1),\\ -1, & \text{若 } m=n-1\ (n\geqslant 2),\\ 0, & \text{不然,}\end{cases}$$

则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\neq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}.$$

例 5 若 $m,n\geqslant 1$ 及

$$a_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{m^2-n^2}, & \text{若 } m\neq n,\\ 0, & \text{若 } m=n.\end{cases}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\left(=\frac{\pi^2}{8}\right),$$

而

$$(a_{11})+(a_{12}+a_{21})+(a_{13}+a_{22}+a_{31})+\cdots=0.$$

例 6

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\dfrac{1}{m^2}}{1-\dfrac{1}{m}}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}=1.$$

例 7 证明

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\left(m+n+\dfrac{1}{2}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\left(m+n+\dfrac{1}{2}\right)},\tag{3}$$

并由此与

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

推出

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{4}$$

证 因为 a_{mn} 有正有负, 所以 (3) 式无法从前面的定理推出, 而需特殊的证明. (3) 式左方显然等于 (命 $r=m+n$)

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}}&=\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\frac{3}{2}}+\frac{2}{\frac{5}{2}}-\cdots\right)^2\\&=16\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)^2=\pi^2.\end{aligned}$$

又对每一 $n\neq 0$,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{(-1)^n}{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\right)=0,$$

所以如果 (3) 式成立, 则得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}=\pi^2,$$

由此不难推出 (4) 式.

对于任何 N, 有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-N}^{N}=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty},$$

所以我们只须证明当 $N\to\infty$ 时, 有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\to 0,\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{-N-1}\to 0.$$

这里只证明前一个和趋于 0, 另一个和趋于 0 的事实可同样证明之.

当 $m\geqslant -N-1$ 时, 有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}\right|<\frac{1}{m+N+\frac{3}{2}}.$$

所以

$$\left|\sum_{m=-N-1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\right| \leqslant \sum_{m=-N-1}^{\infty}\frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right|\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\leqslant \sum_{-N-1\leqslant m\leqslant -\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}$$

$$+\sum_{-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}<m\leqslant N}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left|m+\frac{1}{2}\right|}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2},$$

它显然趋向于 0. 又对任何 m, 有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}-\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}$$

$$=(-1)^m\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}}-\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}$$

$$=(-1)^m\pi-\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}},$$

所以

$$\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=N+1}^{\infty}=\pi\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}-\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=+\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}.$$

右方前一项显然趋向于 0, 而后一项可与前面同样处理, 而证明它也趋于 0, 于是 (3) 式成立.

§19. 级数的乘积

设

$$a_0+a_1+a_2+\cdots,\quad b_0+b_1+b_2+\cdots$$

为二个级数, 命 $c_n=\sum_{p+q=n}a_pb_q=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$, 称级数

$$c_0+c_1+c_2+\cdots$$

为这两级数的乘积.

若级数 $\sum a_n, \sum b_n$ 都绝对收敛, 则乘积 $\sum c_n$ 也绝对收敛, 并且它的和 c 也就是该二级数之和 a, b 的乘积 ab.

这可由上节结果立刻推出, 因为重级数 $\sum a_n b_m$ 绝对收敛, 先依行加起, 再依列加起的结果等于 ab. 而

$$\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{m+n \leqslant N} a_m b_n,$$

这也是一种求和方法, 所以它的极限也是 ab. 实际讲来, 我们还有进一步的结果

定理 1 如果 $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ 各收敛于 a, b, c, 则 $c = ab$.

证 已知, 当 $|r| < 1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$$

绝对收敛, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

也绝对收敛. 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛, 所以用 Abel 定理得到

$$\lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a, \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = b, \quad \lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

级数乘法的定义并不唯一, 以上的一种称为 Cauchy 乘法.

还有一种称为 Dirichlet 乘法, 定义如下:

$$c'_n = \sum_{pq=n} a_p b_q, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

可以证明如果 $\sum a_p, \sum b_q$ 都绝对收敛于 a, b, 则

$$\sum c'_n$$

也绝对收敛于 ab.

Cauchy 乘法的定义导源于幂级数的乘法, 而 Dirichlet 乘法的定义导源于 Dirichlet 级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

的乘法:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{(mn)^s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{nm=l} a_n b_m.$$

例 1 (Lambert 级数) 考虑级数

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{x^k}{1-x^k}. \tag{1}$$

假定

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

当 $0<x<\rho(<1)$ 时收敛, 则 Lambert 级数 (1) 也收敛.

因此

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{l=1}^{\infty}x^{lk}=\sum_{m=1}^{\infty}x^m\sum_{lk=m}a_k$$

分别取 $a_k=1$ 及 $a_k=k$, 则得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}d(n)x^n$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n,$$

此处 $d(n)$ 表示 n 的因子个数, 而 $\sigma(n)$ 表示 n 的各个因子之和.

例 2 命

$$\varphi(x,z)=e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})},\quad z\neq 0.$$

由

$$e^{\frac{x}{2}z}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^m\frac{z^m}{m!},\quad e^{-\frac{x}{2}z^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^k\frac{z^{-k}}{k!}$$

可知

$$\varphi(x,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k}\frac{(-1)^k}{m!k!}z^{m-k}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(x)z^n.$$

此处

$$J_n(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & \text{若 } n\geqslant 0,\\ \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & \text{若 } n<0.\end{cases}$$

易见

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x).$$

函数 $J_n(x)$ 称为 Bessel 函数.

例 3 命

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n,\quad g(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_mx^m$$

是两个在 $|x|<1$ 内绝对收敛的级数.

由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_nb_mx^{nm}=\sum_{m=1}^{\infty}b_mf(x^m)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ng(x^n),$$

取 $a_m=\alpha^m,b_m=1$, 即得

$$f(x)=\frac{\alpha x}{1-\alpha x},\quad g(x)=\frac{x}{1-x},$$

即得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha x^m}{1-\alpha x^m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^nx^n}{1-x^n}.$$

§20. 多变量的幂级数

依变量 x,y 的正整数幂次排列的形如

$$\sum_{l,k=0}^{\infty}a_{lk}x^ly^k\quad(x,y\text{ 为复数或实数})\tag{1}$$

的重级数, 叫做两变量 x,y 的幂级数. 我们现在来讨论重幂级数的收敛范围. 收敛范围的研究有很多地方不与单变量的相同, 但仍有

定理 1 *如果在 $x=x_0,y=y_0$ 时级数收敛, 则当*

$$|x|<|x_0|,\quad |y|<|y_0|$$

时级数也收敛.

证 由于重级数收敛, 所以有一数 L 存在, 使

$$|a_{lk}x_0^ly_0^k|<L.$$

而如果 $|x|<|x_0|,|y|<|y_0|$, 则

$$|a_{lk}xy^k|\leqslant|a_{lk}x_0^ly_0^k|\left|\frac{x}{x_0}\right|^l\cdot\left|\frac{y}{y_0}\right|^k.$$

即得

$$\sum|a_{lk}x^ly^k|\leqslant L\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^l\cdot\left|\frac{y}{y_0}\right|^k.$$

右边是收敛的, 所以得到定理.

从这里也许有人会推测两变量的幂级数的收敛范围可能是 $|x|<R_1,|y|<R_2$. 这一猜测是错误的.

定义 如果 $\mathscr{M}$ 是两个复数 x,y 的区域, 在其中各点上, 幂级数 (1) 都收敛, 而在其外各点上, 重级数发散, 在边界点上可能发散也可能收敛. 这样的区域称为重级数 (1) 的收敛范围.

例 1 级数

$$\sum_{l,k=0}^{\infty}x^ly^k$$

的收敛范围是 $|x|<1,|y|<1$.

例 2

$$\sum_{l,k=0}^{\infty}\frac{x^ly^k}{l!k!}$$

无处不收敛.

例 3

$$\begin{aligned}\sum_{l\geqslant k}^{\infty}x^ly^k&=1+x+x^2+\cdots+x^m+\cdots+xy+x^2y+x^3y\\&\quad+\cdots+x^my+\cdots+x^2y^2+x^3y^3+\cdots\\&=(1+x+x^2+\cdots)[1+xy+(xy)^2+\cdots]\\&=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-xy}.\end{aligned}$$

这级数的收敛范围是 $|x|<1,|xy|<1$.

§21. 利用级数解隐函数

我们再研究隐函数的解出问题: 假定

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

的左方在 (x_0,y_0) 点的一邻域内能依 $x-x_0$ 与 $y-y_0$ 的幂次展成为绝对收敛级数, 并假定其常数项 $=0$, 而 $y-y_0$ 项的系数不为 0, 这两条件相当于 $F(x_0,y_0)=0,F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 于是被方程 (1) 所确定了的函数 $y=y(x)$ 也能在 $x-x_0$ 的某一邻域内展成为 $x-x_0$ 的幂级数.

证 并不失去普遍性, 我们可以假定 $x_0=y_0=0$. 由于幂级数中 y 的系数 $\neq 0$, 所以方程 (1) 可以改写成为

$$y=c_{10}x+c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2+c_{30}x^3+c_{21}x^2y+c_{12}xy^2+c_{03}y^3+\cdots. \tag{2}$$

我们所寻求的是找出

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots, \tag{3}$$

使其适合于 (2) 式.

首先假定 (3) 式的绝对收敛性, 并把 (3) 式代入 (2) 式得

$$\begin{aligned} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = {} & c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ & + c_{02}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ & + c_{12}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{03}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

再比较系数得

$$\begin{aligned} & a_1 = c_{10}, \\ & a_2 = c_{20} + c_{11}a_1 + c_{02}a_1^2, \\ & a_3 = c_{11}a_2 + 2c_{02}a_1a_2 + c_{30} + c_{21}a_1 + c_{12}a_1^2 + c_{03}a_1^3, \\ & \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

(2) 式右边有一特点, 其中含有 y 的项或者是 y 的高于 1 次的项, 或者 1 次的 y, 此时其对应系数都含有 $x^l(l \geqslant 1)$, 因此在方程组 (5) 的第 n 个方程中, 左边一定是 a_n, 而右边则是 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 的函数. 由此保证能够依次地逐个确定系数 a_n :

$$\begin{aligned} & a_1 = c_{10}, \\ & a_2 = c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2, \\ & a_3 = (c_{11} + 2c_{02}c_{10})(c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2) + c_{30} + c_{21}c_{10} + c_{12}c_{10}^2 + c_{03}c_{10}^3, \cdots. \end{aligned} \tag{6}$$

顺便提一下, (4) 式中破除括弧时, 字母 a, c 只用了加、乘的计算, 所以如果把 (5) 式右边看成 c, a 多项式, 它的系数都是正的 (并且还是自然数). 于是 (6) 式中右边的系数也是正的, 这一注解后面有用.

现在的问题归结为去证明: 系数为由 (6) 式定义的 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的幂级数 (3), 在 $x = 0$ 的某一邻域中绝对收敛. 因此这个幂级数适合于 (2) 式.

与研究 (2) 式的同时, 我们研究

$$y = r_{10}x + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2 + r_{30}x^3 + r_{21}x^2y + r_{12}xy^2 + r_{03}y^3 + \cdots, \tag{2'}$$

其中所有的系数 r_{ij} 都是正的, 且

$$|c_{ij}| \leqslant r_{ij}.$$

对应的定义

$$\begin{aligned} & \alpha_1 = r_{10}, \\ & \alpha_2 = r_{20} + r_{11}r_{10} + r_{02}r_{10}^2, \\ & \alpha_3 = (r_{11} + 2r_{02}r_{10})(r_{20} + r_{11}r_{10} + r_{02}r_{10}^2) \end{aligned}$$

$$+r_{30}+r_{21}r_{10}+r_{12}r_{10}^2+r_{03}r_{10}^3,\cdots \tag{6'}$$

及幂级数

$$y=\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\cdots. \tag{3'}$$

由于系数都是正的, 所以

$$|a_n|\leqslant\alpha_n,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

如果能够找到 (2′) 式, 使 (3′) 式有非零收敛半径, 定理就证明了.

由假定, 有 r 与 ρ 存在, 使当

$$|x|<r,\quad |y|<\rho$$

时,(2) 式收敛, 所以有 M 使

$$|c_{ij}x^iy^j|\leqslant M,$$

即得

$$|c_{ij}|\leqslant\frac{M}{r^i\rho^j}.$$

就命 $r_{ij}=M/r^i\rho^j$, 则 (2) 式就是

$$\begin{aligned}y&=\frac{M}{r}x+\frac{M}{r^2}x^2+\frac{M}{r\rho}xy+\frac{M}{\rho^2}y^2+\cdots\\&=\frac{M}{\left(1-\dfrac{x}{r}\right)\left(1-\dfrac{y}{\rho}\right)}-M-\frac{M}{\rho}y.\end{aligned}$$

即得

$$y^2-\frac{\rho^2}{\rho+M}y+\frac{M\rho^2}{\rho+M}\cdot\frac{x}{r-x}=0.$$

这方程的函数可以实际解出, 但我们仅需使 $x=0,y=0$ 的那一个根, 即

$$y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1-\sqrt{1-\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\frac{x}{r-x}}\right].$$

引进

$$r_1=\frac{r\rho^2}{\rho^2+4M(\rho+M)}$$

来化简表达式, 则得

$$y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1-\left(1-\frac{x}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

由此可以看出, 如果利用二项函数的级数,y 可依 x 的幂次展开, 且当 $|x|<r_1<r$ 时绝对收敛. 也就是说, (3′) 式收敛, 因而 (3) 式绝对收敛.

以上的方法称为 "优函数法", 在微分方程论中常用到.

这结果的一个重要特例是逆函数, 如果

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \cdots$$

且 $a_1 \neq 0$, 则依以上的方法可以得出一幂级数

$$x - x_0 = b_0(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2 + \cdots .$$

这也是一个在某确定范围内收敛的幂级数, 详细算法已见第七章. 而现在说明了所求出的级数在 y_0 附近收敛.

这些结果都是所谓 "局部" 性的, 仅知道在某一点附近, 而不知确是多么近, 或多么远.

例 1 (Lagrange 级数) 讨论方程

$$y = a + x\varphi(y), \tag{7}$$

此处 $\varphi(y)$ 在 $y = a$ 点附近能展开为收敛的幂级数.

当 $x = 0$ 时,$y = a$. 可以用幂级数解出 y 来. 更一般地, 我们研究下面的问题.

若 $u = f(y)$ 在 $y = a$ 附近有收敛的幂级数, 将 y 在 $x = 0$ 处的幂级数代入, 则 u 在 $x = 0$ 附近有收敛的幂级数. 现在来求 u 依照 x 的幂次的展开式.

将 (7) 式分别对 x 及 a 求微商, 得

$$[1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y),$$
$$[1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a} = 1.$$

由此得到

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}. \tag{8}$$

故对于 $u = f(y)$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a} = \varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{9}$$

于是对于任何可微函数 $F(y)$, 由 (8) 式, (9) 式不难推出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{10}$$

现在我们用归纳法来证明

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right], \tag{11}$$

当 $n=1$ 时, 此即 (9) 式. 假定对于不超过 n 的自然数, (11) 式正确. 当 $n+1$ 时, 由 (9) 式, (10) 式可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]\\ &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right].\end{aligned}$$

故 (11) 式成立.

现在将 u 展成以 x 为幂的 Taylor 级数:

$$u = u_0 + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 + \cdots.$$

由 (11) 式可知,

$$\left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_0 = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)f'(a)],$$

故得

$$\begin{aligned}f(y) = f(a) &+ x\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{2!}\frac{d}{da}[\varphi^2(a)f'(a)] + \cdots\\ &+ \frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(\varphi^n(a)f'(a)) + \cdots,\end{aligned} \tag{12}$$

此即 Lagrange 级数.

取 $f(y)=y$, 即得

$$y = a + x\varphi(a) + \frac{x^2}{2!}\frac{d}{da}[\varphi^2(a)] + \cdots + \frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)] + \cdots. \tag{13}$$

例 2 在第六章 §1 例 4 中已经讨论过确定行星在它轨道上的位置的 Kepler 方程

$$x = q\sin x + \alpha,$$

此处 x 是行星的偏近角点, α 是平均近角点, 而 q 是行星轨道离心率, 由 (13) 式可知

$$x = \alpha + q\sin\alpha + \frac{q^2}{2!}\frac{d\sin\alpha}{d\alpha} + \cdots + \frac{q^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}(\sin^n\alpha) + \cdots.$$

Laplace 首先证明了当 $q < 0.6627\cdots$ 时, 上面的级数收敛.

习题 1 试证

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k &= 1 - k\cdot\frac{x}{4} + \frac{k(k+3)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2\\ &\quad - \frac{k(k+4)(k+5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots.\end{aligned}$$

提示 取 $a=1, \varphi(y)=\dfrac{1}{4y}, f(y)=y^{-k}$.

习题 2 求证

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}}=1+aX_1+a^2X_2+\cdots+a^nX_n+\cdots.$$

此处 $X_n=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ 为 n 次 Legendre 多项式 (见第六章 §13).

提示 取 $\varphi(y)=\dfrac{y^2-1}{2}$.

§22. 常微分方程的解的存在性与唯一性

定理 1 (Cauchy) 假定 $f(x,y)$ 在区域

$$(D):\ |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b\quad (a>0,b>0)$$

上连续, 且满足 Lipschtz 条件

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1|,$$

此处 K 为正常数, 则微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

有唯一的解 $y=\varphi(x)$, 确定于区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 中, 其中

$$h=\min\left(a,\frac{1}{2K},\frac{b}{M}\right),\quad M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|,$$

且 $y_0=\varphi(x_0)$.

证 方程 (1) 的任何解 $y=y(x)$ 皆满足

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi. \tag{2}$$

反之, (2) 式的任何连续解都满足方程 (1) 及初始条件 $y_0=y(x_0)$. 因此我们就来讨论积分方程 (2).

把 $y(\xi)\equiv y_0$ 代入 (2) 式右方, 得

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_0)d\xi.$$

显然, $y_1(x)$ 当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时是连续的, 且 $y_1(x_0)=y_0$. 由于

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant\max_{|\xi-x_0|\leqslant h}|f(\xi,y_0)|h\leqslant Mh\leqslant b,$$

y_1 也没有超越 D 之外, 仿此依次做出

$$\begin{cases} y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))d\xi, \\ \cdots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi, \\ \cdots \end{cases} \tag{3}$$

于是得到函数序列

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), \cdots, \tag{4}$$

其中每一函数 $y_n(x)$ 都具有上述性质.

我们来证明: 当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时, 函数序列 (4) 一致收敛. 为此, 先证明

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{MK^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n. \tag{5}$$

当 $n = 1$ 时,

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right| \leqslant M|x - x_0|.$$

用归纳法, 假定 (5) 式当 $n = k$ 时成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, y_k(\xi)) - f(\xi, y_{k-1}(\xi))]d\xi\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_k) - f(\xi, y_{k-1})|d\xi\right| \\ &\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} |y_k - y_{k-1}|d\xi\right| \leqslant \frac{MK^k}{k!}\left|\int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|^k d\xi\right| \\ &= \frac{MK^k}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1}. \end{aligned}$$

故得 (5) 式.

由于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{MK^{k-1}}{k!}h^k$$

收敛, 所以级数

$$Y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

在 $|x - x_0| \leqslant h$ 中一致收敛, 即函数序列 (4) 在 $|x - x_0| \leqslant h$ 中一致收敛于 $Y(x)$.

又由于

$$\left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, Y) - f(\xi, y_n)]d\xi\right| \leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} |Y - y_n|d\xi\right|,$$

故当 $n \to \infty$ 时,

$$Y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi\right] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, Y(\xi))d\xi,$$

即 $Y(x)$ 适合 (2) 式及初始条件 $Y(x_0) = y_0$. 若有另一连续解 $Z(x)$, 则

$$Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, Z)d\xi,$$

故得

$$\begin{aligned}\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x) - Z(x)| &= \max_{|x-x_0|\leqslant h}\left|\int_{x_0}^{x}(f(\xi, Y) - f(\xi, Z))d\xi\right| \\ &\leqslant K\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x) - Z(x)|h \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x) - Z(x)|,\end{aligned}$$

因此必须 $Y(x) \equiv Z(x)$. 定理证完.

附记 由

$$|Y(x) - y_m(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\frac{MK^k}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1}$$

可以估计第 m 次近似值 $y_m(x)$ 与准确解之间的误差.

例 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1)$$

过 $(0,0)$ 的近似解.

显然函数 $x^2 + y^2$ 适合 Lipschtz 条件, 积分一下得

$$y(x) = \int_0^x [t^2 + y^2(t)]dt = \frac{x^3}{3} + \int_0^x y^2(t)dt.$$

以 $y_0(x) = 0$ 代入, 则得

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \frac{x^3}{3}, \\ y_2(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x \frac{1}{9}t^6 dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7, \\ y_3(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x \left(\frac{1}{9}t^6 + \frac{2}{189}t^{10} + \left(\frac{1}{63}\right)^2 t^{14}\right)dt \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{11\cdot 189}x^{11} + \frac{1}{15\cdot 63^2}x^{15},\end{aligned}$$

可以继续算出诸 $y_4(x), y_5(x), \cdots$.

§23. 积分方程解的存在性与唯一性

定理 1 假定 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,$K(x,\xi)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant \xi\leqslant b$ 上连续, 则当 λ 充分小时, 积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的连续解 $\varphi(x)$.

证 任取 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi_0(x)$, 则由

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi$$

所确定的函数 $\varphi_1(x)$ 亦是 $[a,b]$ 上的连续函数. 依此类推, 作出

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi,$$
$$\cdots,$$
$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi\ ,$$
$$\cdots,$$

于是我们得到 $[a,b]$ 上的连续函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$. 命

$$M=\max_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant \xi\leqslant b}}|K(x,\xi)|,\quad N=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|, \tag{1}$$

则得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant[\lambda M(b-a)]^{n-1}N. \tag{2}$$

因当 $n=1$ 时, (2) 式已成立. 由归纳法, 假定 $n=k$ 时 (2) 式成立, 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|&\leqslant\lambda\int_a^b|K(x,\xi)||\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi)|d\xi\\&\leqslant\lambda M(b-a)[\lambda M(b-a)]^{k-1}N=[\lambda M(b-a)]^kN.\end{aligned}$$

故得 (2) 式.

取 λ 充分小. 使 $0<\lambda M(b-a)<1$, 则由于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda M(b-a))^k$$

收敛, 可知级数

$$\varphi_1(x)+(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))+\cdots+(\varphi_n(y)-\varphi_{n-1}(x))+\cdots=\varphi(x)$$

一致收敛, 即函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收敛于连续函数 $\varphi(x)$. 因此

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi\right]$$
$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

若还有另一连续函数 $\psi(x)$ 适合积分方程, 则

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi,$$

故得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|=\lambda\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^b K(x,\xi)[\varphi(\xi)-\psi(\xi)]d\xi\right|$$
$$\leqslant\lambda M(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|.$$

因此必须 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 定理证完.

§24. 微分方程组的解的存在性与唯一性

定理 1 给定一组原始值 $x_0,y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)}$, 又假定 1) 函数 $f_i(x_1,y_1,\cdots,y_n)(1\leqslant i\leqslant n)$ 在闭区域

$$(D):\ |x-x_0|\leqslant a,\quad |y_i-y_i^{(0)}|\leqslant b\quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

上连续, M 为诸函数在 (D) 中绝对值的最大值, 即对于 D 中的点有 $|f_i|\leqslant M(1\leqslant i\leqslant n)$; 2) 在区域 D 内, 这些函数适合 Lipschtz 条件, 即

$$|f_i(x_1,y_1',\cdots,y_n')-f_i(x_1,y_1'',\cdots,y_n'')|\leqslant K(|y_1'-y_1''|+\cdots+|y_n'-y_n''|),$$

此处 K 为一正常数, 则微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x_1,y_1,\cdots,y_n)\quad (1\leqslant i\leqslant n)\tag{1}$$

有唯一的一组解

$$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x),$$

它们确定于区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 中, 此处 $h=\min\left(a,\dfrac{1}{2nK},\dfrac{b}{M}\right)$ 且满足

$$y_1(x_0)=y_1^{(0)},y_2(x_0)=y_2^{(0)},\cdots,y_n(x_0)=y_n^{(0)}.$$

证 1) 作一次逼近函数

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)})d\xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2}$$

诸 $y_i^{(1)}(x)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是连续函数, 又当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时,

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)})d\xi\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

因此一次逼近函数不会超出区域 D. 类似地, 逐步定义

$$\begin{aligned} y_i^{(2)}(x) &= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(1)}, \cdots, y_n^{(1)})d\xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \\ &\cdots, \\ y_i^{(m)}(x) &= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(m-1)}, \cdots, y_n^{(m-1)})d\xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \\ &\cdots. \end{aligned}$$

用归纳法可以证明, 当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时, $|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}| \leqslant b(m = 1, 2, \cdots)$.

2) 证明

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| \leqslant M(nK)^{m-1}\frac{|x - x_0|^m}{m!} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{3}$$

当 $m = 1$ 时

$$\left|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)})d\xi\right| \leqslant M|x - x_0| \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

假定 (3) 式当 $m = k$ 时成立, 则当 $m = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} \left|y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}\right| &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} [f_i(\xi, y_1^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}) - f_i(\xi, y_1^{(k-1)}, \cdots, y_n^{(k-1)})]d\xi\right| \\ &= M(nK)^k\frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \end{aligned}$$

故得 (3) 式. 又因级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nK)^{m-1}\frac{h^m}{m!}$$

收敛, 所以级数

$$y_i^{(0)} + (y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}) + \cdots + (y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)) + \cdots = Y_i(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

在 $|x - x_0| \leqslant h$ 上一致收敛, 即序列 $\{y_i^{(m)}(x)\}$ 一致收敛于 $Y_i(x)(1 \leqslant i \leqslant n)$.

由于

$$\left|\int_{x_0}^{x}\{f_i(\xi,y_1^{(m)},\cdots,y_n^{(m)})-f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)\}d\xi\right|$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\{|y_1^{(m)}-Y_1|+\cdots+|y_n^{(m)}-Y_n|\}d\xi\right|,$$

所以

$$Y_i=\lim_{m\to\infty}y_i^{(m)}=\lim_{m\to\infty}\left[y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,y_1^{(m-1)},\cdots,y_n^{(m-1)})d\xi\right]$$
$$=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)d\xi\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

将两边对 x 求微商, 得

$$\frac{dY_i}{dx}=f_i(x,Y_1(x),\cdots,Y_n(x))\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

且

$$y_i(x_0)=y_i^{(0)}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

若方程组 (1) 还有另一组解 $Z_1,\cdots,Z_n$, 则

$$Z_i=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,Z_1,\cdots,Z_n)d\xi\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

命

$$\max_{|x-x_0|\leqslant h}[|Y_1(x)-Z_1(x)|+\cdots+|Y_n(x)-Z_n(x)|]=\theta,$$

则得

$$|y_i-Z_i|=\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)-f_i(\xi,Z_1,\cdots,Z_n)]d\xi\right|$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{l=1}^{n}|Y_l(\xi)-Z_l(\xi)|\right|d\xi\leqslant h\theta K\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

将这 n 个不等式相加, 则得

$$\theta\leqslant nhK\theta.$$

此不可能, 除非 $\theta=0$, 即 $Z_i(x)\equiv y_i(x)(1\leqslant i\leqslant n)$. 故得定理.

考虑一般的 n 阶微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).\tag{4}$$

这与以下的微分方程组是等价的:

$$y_1=y,\quad\frac{dy_1}{dx}=y_2,\quad\frac{dy_2}{dx}=y_3,\cdots,\frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n,$$
$$\frac{dy_n}{dx}=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

所以由定理 1 得到

定理 2 若 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 对于所有的变量连续, 而对于 $y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 适合 Lipschtz 条件, 则微分方程 (4) 有唯一的解适合原始条件, 当 $x=x_0$ 时, $y=y_0,y'=y_0',\cdots,y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$.

§25. 压缩映像原理

定理 1 假定 $\{\varphi\}$ 为集合 $\mathfrak{M}$ 上的函数族, 满足:

1) 每一函数 φ 都在 $\mathfrak{M}$ 上有界, 即

$$|\varphi|\leqslant M_\varphi,$$

此处 M_φ 是与 φ 有关的常数;

2) $\{\varphi\}$ 中任何一个一致收敛的函数序列的极限, 亦是这函数族中的函数;

3) $\{\varphi\}$ 上有一运算 $A,A(\varphi)$ 将 φ 变为 $\{\varphi\}$ 中某一函数;

4) 存在适合 $0\leqslant m<1$ 的常数 m, 使 $\{\varphi\}$ 中任意二函数 φ_1,φ_2 都满足条件

$$|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)|\leqslant m\sup_{\mathfrak{M}}|\varphi_2-\varphi_1|,$$

则方程

$$\varphi=A(\varphi)$$

在 $\{\varphi\}$ 中有唯一的解.

证 在 $\{\varphi\}$ 中任取一个函数 φ_0, 作出

$$\varphi_1=A(\varphi_0).$$

由 3) 可知, $\varphi_1\in\{\varphi\}$. 依次类推, 作出 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots$, 由 4) 知, $\{\varphi_i\}$ 一致收敛, 由 2) 知, 其极限即为所要求的 φ.

由压缩映像原理立刻可以推出与唯一性有关的结果.

例如, 命 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, $K(x,\xi)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b$ 上连续, 命 $\mathfrak{M}$ 为闭区间 $[a,b]$, $\{\varphi\}$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数的全体:

$$A(\varphi)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

则当 λ 充分小时, 由压缩映像原理可知, 积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的连续解.

习题 1 试由压缩映像原理推出 §7 定理 1 与 §8 定理 1.

习题 2 假定 $f(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 上定义, 且对任何实数 x_1, x_2, 皆满足

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

此处 $K < 1$ 为常数, 则方程

$$x = f(x)$$

有唯一的解.

习题 3 试推广压缩映像原理, 使之能包含 §10 定理 1.

§26. 利用幂级数解微分方程

§21 的优函数法可以用来证明微分方程解的存在性.

定理 1 (Cauchy) *假定 $f(x,y)$ 在 $x = x_0, y = y_0$ 的一个邻域内可以展开为收敛的幂级数, 则微分方程*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

有一个解 $y = y(x)$, 它适合于 $y_0 = y(x_0)$, 而且在 x_0 的邻域内 y 可以展开为幂级数 (这是通过 (x_0, y_0) 的唯一解).

具体些, 取 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 我们的假定是

$$f(x,y) = \sum_{l,m=0}^{\infty} a_{l,m} x^l y^m, \quad |x| \leqslant r \quad |y| \leqslant \rho, \tag{2}$$

在此假定下, 微分方程 (1) 有唯一的解

$$y = \sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l, \tag{3}$$

这级数当

$$|x| < r(1 - e^{-\rho/2Mr})$$

时收敛, 此处 M 是一个与 $f(x,y)(|x| \leqslant r, |y| \leqslant \rho)$ 有关的常数.

证 以 (3) 式代入 (1) 式得

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{\infty} l c_l x^{l-1} &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots \\ &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\right) + a_{20}x^2 + a_{11}x\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\right) + a_{02}\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\right)^2 + \cdots .\end{aligned}$$

比较系数得

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{00}, \\ 2c_2 &= a_{10} + a_{01}c_1, \\ 3c_3 &= a_{01}c_2 + a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2, \\ &\cdots . \end{aligned}$$

这是一种算法, 经过 "加"、"乘", 可以逐个地算出 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ 来.

由于

$$\sum_{l,m=0}^{\infty} a_{l,m} r^l \rho^m$$

收敛, 故有 M 存在, 使

$$|a_{l,m}| r^l \rho^m \leqslant M, \quad \text{或即} \quad |a_{l,m}| \leqslant \frac{M}{r^l \rho^m}.$$

因此得出函数 $f(x,y)$ 的优函数

$$\sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{M}{r^l \rho^m} x^l y^m = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{y}{\rho}\right)}.$$

微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{y}{\rho}\right)}$$

有解

$$y - \frac{y^2}{2\rho} = -rM \log\left(1 - \frac{x}{r}\right) + c,$$

由于当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 所以得出 $c = 0$. 解这二次方程得

$$y = \rho \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2Mr}{\rho} \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)}\right].$$

又因 $x = 0$ 时, $y = 0$, 得一根

$$y = \rho \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2Mr}{\rho} \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)}\right]. \tag{4}$$

当 $\dfrac{2Mr}{\rho} \left|\log\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\right| < 1$, 也就是当

$$|x| < r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right)$$

时, (4) 式可以展成 x 的幂级数, 而这幂级数是方程 (1) 的解的优函数.

§27. 微分方程组

现在考虑

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

假定在点 $(x_0, (y_1)_0, \cdots, (y_n)_0)$ 的一个邻域内, f_i 都可以表为收敛的幂级数, 则此微分方程组有一个解, 当 $x = x_0$ 时, 有

$$y_1 = (y_1)_0, \cdots, \quad y_n = (y_n)_0,$$

且在 $x = x_0$ 的某一邻域中, 它表成为幂级数.

不妨假定 $x_0 = 0, (y_1)_0 = 0, \cdots, (y_n)_0 = 0$, 命

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{l, m_1, \cdots, m_n = 0}^{\infty} a^{(i)}_{l, m_1, \cdots, m_n} x^l y_1^{m_1}, \cdots, y_n^{m_n}$$

在 $|x| \leqslant r, |y_i| \leqslant \rho$ 中收敛.

以

$$y_i = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(i)} x^l$$

代入 (1) 式, 比较系数, 易见这也是可以仅用加、乘就能逐步定出 $c_l^{(1)}, \cdots, c_l^{(n)}, \cdots (l = 1, 2, \cdots)$ 的计算方法.

与上节同法, 有 M 存在, 使

$$|a^{(i)}_{l, m_1, \cdots, m_n}| r^l \rho^{m_1 + \cdots + m_n} \leqslant M.$$

因此 f_i 有优函数

$$\sum_{l, m_1, \cdots, m_n = 0}^{\infty} \frac{M}{r^l \rho^{m_1 + \cdots + m_n}} x^l y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{y_1}{\rho}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{y_n}{\rho}\right)}.$$

求方程

$$\frac{dy_1}{dx} = \cdots = \frac{dy_n}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{y_1}{\rho}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{y_n}{\rho}\right)}$$

的解. 因当 $x = 0$ 时, $y_1 = \cdots = y_n = 0$, 故显见 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$, 所以得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{y}{\rho}\right)^n}.$$

解此方程得

$$y=\rho-\rho\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)},$$

当 $|x|<r(1-e^{-\rho/(n+1)Mr})$ 时, 它可以展开为幂级数. 这是方程 (1) 的解答的优函数.

附记 考虑一般性的微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

这与以下的方程组等价:

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}=y_2,\cdots,\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$
$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}).$$

所以得以下的

定理 如果 F 在 $x=x_0,y=y_0,y'=(y')_0,\cdots,y^{(n-1)}=(y^{(n-1)})_0$ 的附近可以展开为幂级数, 则该微分方程有一个解: 当 $x=x_0$ 时, 有 $y=y_0,y'=(y')_0,\cdots,y^{(n-1)}=(y^{(n-1)})_0$, 且在 $x=x_0$ 的某一邻域内可以表为幂级数.

§28. 偏微分方程

定理 1 (Cauchy-Kovalevskaya) 假定 $\varphi(y)$ 在 y_0 附近有收敛的幂级数, 且 $\varphi(y_0)=z_0,\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=y_0}=q_0$, 函数

$$f(x,y,z,q)$$

在 x_0,y_0,z_0,q_0 附近有收敛的幂级数, 则方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

有一解 $z=z(x,y)$, 它在 (x_0,y_0) 附近可以展开成收敛的幂级数, 而且 $z(x_0,y)=\varphi(y)$.

证 1) 简化. 作代换 $X=x-x_0,Y=y-y_0$, 故我们可以假定 $x_0=y_0=0$. 又命 $Z=z-\varphi(y)$, 故可以假定 $\varphi(y)\equiv0$. 作了这些代换之后, $Z(0,y)=z(0,y)-\varphi(y)\equiv0$. 我们还可以假定 $f(0,0,0,0)=0$, 否则, 假若 $f(0,0,0,0)=a$, 那么命 $Z=z-ax$ 即可. 这样一来, 就化为解下面的问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=f\left(x,y,z,\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\displaystyle\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}a_{i,j,k,l}x^iy^jz^k\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^l;\\ a_{0,0,0,0}=0,|x|\leqslant r,|y|\leqslant r,|z|\leqslant r,\\ \left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|\leqslant\rho,\\ z(0,y)\equiv0.\end{cases}\tag{1}$$

2) 幂级数展开. 命

$$z=\sum_{s=1}^{\infty}c_s(y)x^s,$$

代入 (1) 式得

$$\sum_{s=1}^{\infty}sc_s(y)x^{s-1}=\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}a_{ijkl}x^iy^j\left(\sum_{s=1}^{\infty}c_s(y)x^s\right)^k\left(\sum_{t=1}^{\infty}c_t'(y)x^t\right)^l.$$

比较 x 的乘方的系数得

$$c_1(y)=\sum_{j=1}^{\infty}a_{0j00}y^j,$$

$$2c_2(y)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{1j00}y^j+\sum_{j=0}^{\infty}a_{0j10}c_1(y)y^j+\sum_{j=0}^{\infty}a_{0j01}c_1'(y)y^j,$$

$$\cdots$$

由于左边 x^s 的系数为 $(s+1)c_{s+1}(y)$, 而右边 x^s 的系数则为 a_{ijkl} 与 $c_1(y),\cdots,c_s(y)$; $c_1'(y),\cdots,c_s'(y)$ 的正系数的多项式, 故仅用加、乘运算就可以逐步决定诸 $c_s(y)$. 由于 $c_1(y)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{0j00}y^j$, 用归纳法可知级数 $c_s(y)$ 的系数也是 a_{ijkl} 的正系数多项式.

3) 优函数. 由于级数

$$\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}a_{ijkl}r^ir^jr^k\rho^l$$

的收敛性, 得知有 M 存在, 使

$$|a_{ijkl}|\leqslant\frac{M}{r^{i+j+k}\rho^l},$$

因此

$$|a_{ijkl}|\leqslant\frac{(i+j+k)!M}{i!j!k!\alpha^ir^{i+j+k}\rho^l},$$

此处 α 是一小于 1 的正数. 于是我们得到 $f(x,y,z,q)$ 的优函数

$$\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}\frac{(i+j+k)!M}{i!j!k!\alpha^ir^{i+j+k}\rho^l}x^iy^jz^kq^l-M$$

$$=M\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+y+z}{r}\right)\left(1-\dfrac{q}{\rho}\right)}-1\right]$$

(请注意引进 α 的作用). 因此问题就在于求证

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+y+z}{r}\right)\left(1-\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\rho}\right)} - M, \\ z(0,y) \equiv \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m y^m, \quad a_m \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

有一解, 使它在 $(0,0)$ 附近可以展为 x,y 的幂级数, 也就是如果给了一个非负系数的幂级数 $\sum a_m y^m$, 而 (2) 式在 $(0,0)$ 附近有一个 x,y 的幂级数的解, 那么这个解就是 (1) 式的解的优函数. 因而证明了 (1) 式的解的存在性.

我们暂且不去解偏微分方程 (2), 而先考虑以下的常微分方程的问题, 然后从下面的问题中给出 (2) 式中的 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m y^m$, 并且给出 (2) 式的一特解.

求出具有正系数的幂级数

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^m$$

(在 $t=0$ 附近收敛), 适合于

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{df}{dt} = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{f+t}{r}\right)\left(1-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{df}{dt}\right)} - M, \\ f(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

将 (3) 式改写成为

$$\frac{1}{\alpha\rho}\left(\frac{df}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)\left(\frac{df}{dt}\right) + \frac{M}{1-\dfrac{f+t}{r}} - M = 0,$$

解得

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\alpha\rho}{2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)^2 - \frac{4M}{\alpha\rho}\left(\frac{t+f}{r}\right)\Big/\left(1-\frac{t+f}{r}\right)}\right] \\ &= \frac{\alpha\rho}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)\left(1-\sqrt{1-w}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

这里

$$w = \frac{4M\alpha\rho}{(\rho-\alpha M)^2}\left(\frac{t+f}{r}\right)\Big/\left(1-\frac{t+f}{r}\right).$$

由于当 $|w|<1$ 时

$$1-\sqrt{1-w}=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2\cdot 4}w^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}w^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}w^4+\cdots.$$

因此当 α 充分小时, 可使

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}>0$$

及 (4) 式右边可以展开为

$$t+f$$

的正系数幂级数. 由 §26 的处理方法可知, (3) 式有一个幂级数

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^m,\quad a_m\geqslant 0$$

的解.

再回到原来的问题. 取

$$z=f\left(\frac{x}{\alpha}+y\right),$$

则方程 (3) 变为方程 (2), 而且

$$z(0,y)=f(y)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m y^m.$$

即得所证.

至于深刻地理解幂级数的各种应用, 必须有复变函数论的知识. 这里所讲的, 仅仅是个开头而已.

第十四章　曲线的微分性质

§1. 向量的微商

我们现在推广微分法到依赖于某一参变量 τ 的变向量 $\boldsymbol{a}(\tau)$, 也就是

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\tau)=(a_1,a_2,a_3)$$

的对 x,y,z 轴的三个支量 a_1,a_2,a_3 都是 τ 的函数的情况. 我们确定某一点 o 作为所有的这些向量的起点, 当参变量 τ 改变时, 变向量 $\boldsymbol{a}(\tau)$ 的另一端在空间画一条曲线 (C).

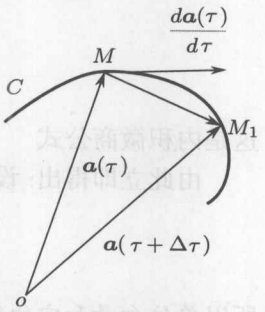


图 33

假定当参数取值 τ 与 $\tau+\Delta\tau$ 时, 变向量对应的位置是 oM 与 oM_1, 线段 MM_1 对应于向量差

$$\boldsymbol{a}(\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{a}(\tau).$$

关系式

$$\frac{\boldsymbol{a}(\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{a}(\tau)}{\Delta\tau}$$

所得出的向量是平行于 MM_1 的向量, 当 $\Delta\tau\to 0$ 时, 如果极限存在, 即得向量 $\boldsymbol{a}(\tau)$ 的微商

$$\frac{d\boldsymbol{a}(\tau)}{d\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{a}(\tau)}{\Delta\tau}.$$

显然, 这微商是一个向量, 它的方向是沿曲线 (C) 在点 M 的切线方向 (图 33).

再求微商得二阶微商 $\dfrac{d^2}{d\tau^2}\boldsymbol{a}(\tau)$, 余类推.

如果

$$\boldsymbol{a}(\tau)=[a_1(\tau),a_2(\tau),a_3(\tau)],$$

可得

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{a}(\tau)=[a_1'(\tau),a_2'(\tau),a_3'(\tau)]$$

及

$$\frac{d^m}{d\tau^m}\boldsymbol{a}(\tau)=[a_1^{(m)}(\tau),a_2^{(m)}(\tau),a_3^{(m)}(\tau)],$$

即向量的微商是支量微商所成的向量.

立即得出一个函数乘一个向量的微商公式

$$\frac{d}{d\tau}[f(\tau)\boldsymbol{a}(\tau)]=\frac{df(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{a}(\tau)+f(\tau)\frac{d\boldsymbol{a}(\tau)}{d\tau}.$$

又由于

$$\boldsymbol{a}(\tau)\cdot\boldsymbol{b}(\tau)=a_1(\tau)b_1(\tau)+a_2(\tau)b_2(\tau)+a_3(\tau)b_3(\tau),$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}[\boldsymbol{a}(\tau)\cdot\boldsymbol{b}(\tau)]&=a_1'(\tau)b_1(\tau)+a_2'(\tau)b_2(\tau)+a_3'(\tau)b_3(\tau)\\&\quad+a_1(\tau)b_1'(\tau)+a_2(\tau)b_2'(\tau)+a_3(\tau)b_3'(\tau)\\&=\frac{d\boldsymbol{a}(\tau)}{d\tau}\cdot\boldsymbol{b}(\tau)+\boldsymbol{a}(\tau)\cdot\frac{d\boldsymbol{b}(\tau)}{d\tau}.\end{aligned}$$

这是内积微商公式

由此立即得出: 设 $\boldsymbol{a}(\tau)$ 为单位向量, 即 $\boldsymbol{a}(\tau)\cdot\boldsymbol{a}(\tau)=1$, 则

$$\boldsymbol{a}(\tau)\cdot\frac{d\boldsymbol{a}(\tau)}{d\tau}=0.$$

所以单位向量和它的微商垂直.

又由

$$\boldsymbol{a}(\tau)\times\boldsymbol{b}(\tau)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1),$$

可知

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}[\boldsymbol{a}(\tau)\times\boldsymbol{b}(\tau)]&=(a_2'b_3-a_3'b_2,a_3'b_1-a_1'b_3,a_1'b_2-a_2'b_1)\\&\quad+(a_2b_3'-a_3b_2',a_3b_1'-a_1b_3',a_1b_2'-a_2b_1')\\&=\frac{d\boldsymbol{a}(\tau)}{d\tau}\times\boldsymbol{b}(\tau)+\boldsymbol{a}(\tau)\times\frac{d\boldsymbol{b}(\tau)}{d\tau}.\end{aligned}$$

这是向量积的微商公式.

如果把参数 τ 看为时间 t, 则以原点为起点的向量

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]$$

的另一端所成的轨迹: $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t)$ 可以看作一个质点的运动曲线, 它对 t 的微商

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

就是这点的运动的速度向量, 而

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

就是这一质点加速度向量.

在曲线 (C) 上取一点作为出发点, 用从这点沿曲线 (C) 长度 s 来表出这曲线上的点, 即以 s 为参变量. 前已证明, 由 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 所对应的点 M_1, M_2 之间的弧长等于

$$\int_{(M_1)}^{(M_2)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt.$$

弧的微分表达式

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}.$$

如果弧长 s 为参变量, 则微商 $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ 各等于曲线切线的方向余弦, 就是等于这切线的正方向与坐标轴交角的余弦. 更确切些, 速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度是

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

而速度的方向余弦是

$$\cos(\widehat{vx})=\frac{dx}{ds}=\frac{\dfrac{dx}{dt}}{v},$$

$$\cos(\widehat{vy})=\frac{dy}{ds}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{v},$$

$$\cos(\widehat{vz})=\frac{dz}{ds}=\frac{\dfrac{dz}{dt}}{v}.$$

我们把这切线方向余弦定义为曲线在点 (x,y,z) 的方向余弦, 它们与 dx, dy, dz 成比例, 因此切线方程可以写成为

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

或

$$\frac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)}=\frac{Z-\chi(t)}{\chi'(t)},$$

这里 (X,Y,Z) 是切线上点的坐标.

§2. 平面上的运动

命 $\boldsymbol{r}$ 表示平面上一点 M 的位置的向量, 我们可以把 $\boldsymbol{r}$ 表成为

$$r\boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{R}=(\cos\theta,\sin\theta).$$

这就是极坐标表示法, $\boldsymbol{R}$ 是一单位向量, 我们可以立刻看到

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{d\theta}=(-\sin\theta,\cos\theta) \quad (\text{定义为 } \boldsymbol{P}),$$

这是和 $\boldsymbol{R}$ 垂直的向量.

微分 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{R}$, 则得

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{R}+r\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{R}+r\frac{d\boldsymbol{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{R}+r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{P}.$$

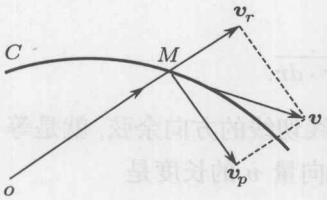


图 34

这公式把一点的速度分解成为两部分, 前者 $\boldsymbol{v}_r=\dfrac{dr}{dt}\boldsymbol{R}$ 表示速度沿向径的分量, 而后者

$$\boldsymbol{v}_p=r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{P}$$

表示沿垂直于向径的方向的分量 (图 34). $\dfrac{d\theta}{dt}$ 称为角速度, 在圆周上运动时, 即 $\dfrac{dr}{dt}=0$, 可知

$$\boldsymbol{v}=r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{P},$$

即

$$v=\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}.$$

加速度向量等于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{R}+\frac{dr}{dt}\frac{d\boldsymbol{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{P}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{P}+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{P}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\\&=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{R}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{P},\end{aligned}$$

这里用了

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{d\theta}=(-\cos\theta,-\sin\theta)=-\boldsymbol{R}.$$

如果运动是由于一个向心力所引起的, 即 $\boldsymbol{F}=f\boldsymbol{R}$. 由公式 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ (力等于质量乘加速度), 则与以上的公式相比较就可以看出

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0,$$

也就是

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\text{常数}=h.$$

而 $\frac{1}{2}r^2d\theta$ 就等于向径所扫过的面积元素 dA. 所以

$$\frac{dA}{dt}=h,$$

即如果经过的时间相等, 则向径所扫过的面积也相等.

这就是著名的 Kepler 行星运行第一规律.

§3. 平面曲线的曲率

把 s 作为参变量, 则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right)=\boldsymbol{t}$$

就成为一个单位切向量. 这个单位切向量的微商

$$\boldsymbol{n}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

垂直于单位切向量, 它称为*曲率向量*. 曲率向量的长度

$$|\boldsymbol{n}|=\frac{1}{\rho}$$

的倒数 ρ 称为*曲率半径*.

命

$$\boldsymbol{t}=(\cos\alpha,\sin\alpha),$$

其中 α 就是切向量 $\boldsymbol{t}$ 与 x 轴所成的角度. 因此

$$\boldsymbol{n}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=(-\sin\alpha,\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds}.$$

角度 α 对弧长 s 的微商 $k=\frac{d\alpha}{ds}$ 称为平面曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率. 今

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|,$$

故曲率绝对值的倒数就是曲率半径①.

①一般微分几何教科书中, 定义曲率向量 n 的长度为曲率, 因此曲率恒大于零或等于零. 我们这样的定义, 即可正可负, 当确定了弧长的计算起点和曲线的方向后, 这个正负符号就反映了曲线上凹或下凹的几何特性.

易知

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}$$

及

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}&=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{ds/dt}\right)\frac{dt}{ds}\\&=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\\&=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\\&=\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^4.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{r}=(\varphi(t),\psi(t))$ 及

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2&=\varphi'^2+\psi'^2,\\\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}&=\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{(\varphi'^2+\psi'^2)^2}(-\psi',\varphi'),\end{aligned}$$

因而得出

$$\begin{aligned}k=\frac{d\alpha}{ds}&=\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}},\\\frac{1}{\rho}=|k|&=\frac{|\varphi'\psi''-\varphi''\psi'|}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

如果用显函数表示法, 即 $x=x,y=f(x)$, 此处 x 是参变量, 则得

$$\begin{aligned}k=\frac{d\alpha}{ds}&=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},\\\frac{1}{\rho}=|k|&=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

又如果用极坐标表示法, 即 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,r=r(\theta),\theta$ 是参数, 得

$$\begin{aligned}\varphi'&=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad&\varphi''&=\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta.\\\psi'&=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta,\quad&\psi''&=\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta.\end{aligned}$$

即得

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}},$$
$$\frac{1}{\rho}=|k|=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

关于曲率 k 的正负号可以作如下的说明: 在 $y''>0$ 时, 曲率 $k>0$, 这时曲线向上凹; 在 $y''<0$ 时, 曲率 $k<0$, 这时曲线向上凸.

例 圆 $x^2+y^2=R^2$ 的参数表示式是 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$, 所以

$$k=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}.$$

所以曲率半径就是圆的半径 R, 曲率也是常数 $\dfrac{1}{R}$.

§4. 曲线的本性方程

用坐标系统来表示曲线的性质, 倒底具有人为的性质, 这个人用这个坐标系, 那个人用那个坐标系, 得出来的表示法可以是很不同的. 其原因在于坐标系统并不是曲线的基本性质, 而我们仅仅借用坐标系统来表达曲线的性质而已.

曲线的基本因素应当是弧长 s (不管坐标系统如何, 只要在其上取一起点, 定一确定的方向, 取一单位长度, 则曲线的弧长便完全确定) 及曲率 $k=\dfrac{d\alpha}{ds}$.

对每一条曲线, 都可以在这两个因素之间建立起依从关系

$$k=g(s), \tag{1}$$

这个方程称为曲线的本性方程.

定理 具有同一本性方程的诸曲线, 只能在平面上的位置有所不同, 换言之, 如果有两条曲线都适合 (1) 式, 则可经过平移

$$(x,y)\to(x+h,y+k)$$

与旋转

$$(x,y)\to(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta).$$

把一条搬到另一条.

证 先经过平移, 把两条曲线计算弧长的起点重合起来, 再绕这点旋转一下, 使它们在这点的切线重合起来. 这两条曲线的动点坐标各为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$; 切线与 x 轴的交角各为 α_1,α_2; 曲率各为 k_1,k_2.

由 (1) 式可知, 对所有的 s 都有

$$k_1 = k_2,$$

也就是

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha_2}{ds}.$$

因此 $\alpha_1 = \alpha_2 + c, c$ 是一常数. 但当 $s = 0$ 时, 已知 $\alpha_1 = \alpha_2$, 所以 $c = 0$.

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{dx_2}{ds},$$
$$\frac{dy_1}{ds} = \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{dy_2}{ds}.$$

所以 x_1, x_2 相差一个常数, y_1, y_2 相差一个常数. 但当 $s = 0$ 时, $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, 因此

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

所以二曲线重合起来了.

这个证法也说明了根据本性方程还原为坐标表示法的方法: 先从

$$\frac{d\alpha}{ds} = g(s) \quad [\text{对任意的连续函数 } g(s)]$$

得

$$\alpha = \alpha(s) = \int_0^s g(u)du + \alpha_0,$$

此处 α_0 是常数, 再从等式

$$dx = \cos\alpha ds, \quad dy = \sin\alpha ds$$

得出

$$x = \int_0^s \cos\alpha ds + x_0, \quad y = \int_0^s \sin\alpha ds + y_0,$$

此处 x_0, y_0 也是常数.

不难看出, 曲线的平行移动会影响 x_0, y_0, 而旋转会影响 α.

注意 1. 曲线长度的起算点的选择, 方向的选择, 可能引起本性方程的变化.

2. 两条处于轴对称位置的曲线, 它们的本性方程仅在右边差一符号, 即

$$k = g(s)$$

与

$$k = -g(s).$$

实际上, 对称地选择两条曲线弧长的起算点与方向时, 它们的曲率符号相反, 如图 35. 反之, 分别具有上两式的曲线, 可借平行移动使它们处于对称的位置.

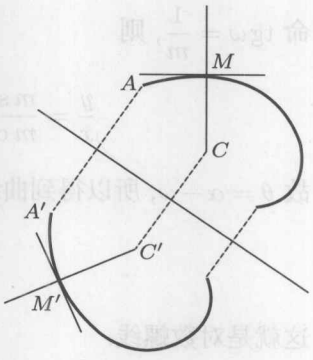


图 35

例 1 求对应于本性方程 $R^2 = 2as$ 的曲线.

因为我们只要求出一条曲线即可, 所以在选择积分常数的时候, 可以依照对我们最便利的方法选择.

由

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}$$

得

$$s = \frac{a}{2}\alpha^2, \quad ds = a\alpha d\alpha.$$

因此

$$dx = \cos\alpha ds = a\alpha\cos\alpha d\alpha,$$
$$dy = \sin\alpha ds = a\alpha\sin\alpha d\alpha,$$

故

$$x = a(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \quad y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

例 2 求对应于本性方程 $R = ms$ 的曲线.

由

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{ms}$$

得

$$s = e^{m\alpha},$$
$$ds = me^{m\alpha}d\alpha,$$
$$dx = \cos\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha,$$
$$dy = \sin\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha.$$

因此

$$x = \frac{m}{1+m^2}(m\cos\alpha + \sin\alpha)e^{m\alpha},$$
$$y = \frac{m}{1+m^2}(m\sin\alpha - \cos\alpha)e^{m\alpha}.$$

现在将直角坐标化为极坐标:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\alpha}.$$

命 $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{1}{m}$, 则

$$\frac{y}{x} = \frac{m\sin\alpha - \cos\alpha}{m\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega).$$

故 $\theta = \alpha - \omega$, 所以得到曲线的极坐标表达式

$$r = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\theta} e^{m\omega}.$$

这就是对数螺线.

例 3 试求悬链线 $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 的本性方程.

由

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}$$

得

$$R = \frac{\left(\dfrac{y}{a}\right)^3}{\dfrac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

另一方面,

$$s = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2},$$

故得本性方程

$$R = a + \frac{s^2}{a}.$$

例 4 试求星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 的本性方程.

取第一象限的那支的中点 $\left(\text{对应 } t = \dfrac{\pi}{4}\right)$ 为弧长的起算点, 则

$$s = \frac{3a}{2}\sin^2 t - \frac{3a}{4}.$$

故

$$R = \frac{ds}{dt} = 3a\sin t\cos t.$$

因此本性方程为

$$R^2 = 4\cdot\frac{3a}{2}\sin^2 t\frac{3a}{2}\cos^2 t = 4\left(\frac{3a}{4} + s\right)\left(\frac{3a}{4} - s\right) = \frac{9a^2}{4} - 4s^2.$$

§5. 曲率圆与渐屈线

在曲线上取参数为 $t, t+\Delta t, t+2\Delta t$ 的三个点, 对这三点作一圆. 当 $\Delta t \to 0$ 时, 这圆的极限位置称为曲率圆, 也称密切圆.

命圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

即得

$$[\varphi(t)-a]^2+[\psi(t)-b]^2=R^2, \tag{1}$$

$$[\varphi(t+\Delta t)-a]^2+[\psi(t+\Delta t)-b]^2=R^2, \tag{2}$$

$$[\varphi(t+2\Delta t)-a]^2+[\psi(t+2\Delta t)-b]^2=R^2. \tag{3}$$

由 (2) 式减 (1) 式再除以 Δt, 并令 $\Delta t \to 0$, 可知

$$[\varphi(t)-a]\varphi'(t)+[\psi(t)-b]\psi'(t)=0. \tag{4}$$

由 (1) 式加 (3) 式减去两倍的 (2) 式, 再除以 Δt^2, 并命 $\Delta t \to 0$, 可知

$$[\varphi(t)-a]\varphi''(t)+[\psi(t)-b]\psi''(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)=0. \tag{5}$$

解出 (4) 式与 (5) 式, 可知

$$\varphi(t)-a=\frac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''},$$

$$\psi(t)-b=\frac{-\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}.$$

所以圆的圆心是

$$\left.\begin{aligned} a&=\varphi-\frac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''},\\ b&=\psi+\frac{\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

而圆的半径平方等于

$$R^2=\left(\frac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}\right)^2+\left(\frac{\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}\right)^2=\frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^3}{(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')^2}.$$

这就是曲线在 t 这一点曲率半径的平方. 我们取

$$R=\frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}}{|\varphi'\psi''-\psi'\varphi''|}=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|.$$

在曲线由函数 $y=f(x)$ 表示的情况下,

$$a=x-\frac{1+y'^2}{y''}y',\quad b=y+\frac{1+y'^2}{y''},\quad R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

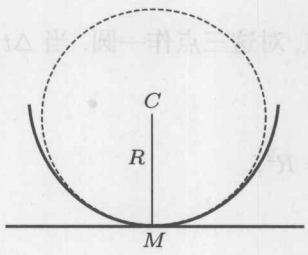


图 36

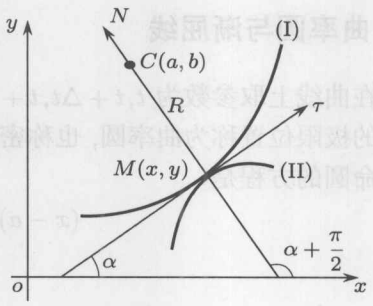


图 37

由图 37 知

$$x-a=-R\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y-b=-R\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

故圆心也可以表为

$$a=x-R\sin\alpha,$$
$$b=y+R\cos\alpha.$$

曲率圆显然有以下的一些性质 (参考图 36, 37):

1) 与曲线在 t 点相切;

2) 它的凹向与曲线在这一点的凹向相同;

3) 它的半径与曲线在这一点的曲率半径相同.

定义　(a,b) 称为曲率中心, 曲率中心的轨迹称为原曲线的渐屈线, 而原曲线称为这渐屈线的渐伸线.

例 1　求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线.

由 $yy'_x=p$ 得 $yy''_{x^2}+y'^2_x=0$, 即 $y^3y''_{x^2}=-p^2$.
因此曲率中心的坐标 (ξ,η) 为

$$\xi=x-yy'_x\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=3x+p=\frac{3y^2}{2p}+p,$$
$$\eta=y+y\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=y-\frac{y}{p^2}(y^2+p^2)=-\frac{y^3}{p^2}.$$

从以上两个方程中消去 y, 得渐屈线方程

$$\eta^2=\frac{8}{27p}(\xi-p)^3.$$

例 2 求椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的渐屈线.

由于

$$x'_t=-a\sin t,\quad x''_{t^2}=-a\cos t,$$
$$y'_t=b\cos t,\quad y''_{t^2}=-b\sin t,$$

代入 (6) 式就得曲率中心 (ξ,η) 的坐标为

$$\xi=a\cos t-\frac{b\cos t(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$
$$\eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

由此消去 t, 就得到椭圆的渐屈线

$$(a\xi)^{2/3}+(b\eta)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}.$$

例 3 求对数螺线 $r=ae^{m\theta}$ 的渐屈线.

因为

$$\frac{dr}{d\theta}=mae^{m\theta}=mr,$$

故

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{1}{m},$$
$$R=\frac{(r^2+m^2r^2)^{3/2}}{r^2+2m^2r^2-m^2r^2}=r\sqrt{1+m^2}=\frac{r}{\sin\omega}.$$

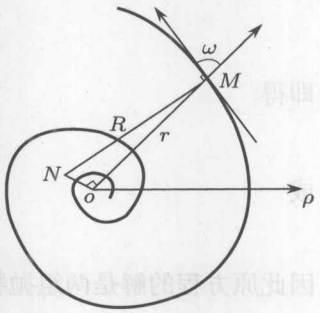


图 38

命 $N(r_1,\theta_1)$ 为曲率中心, 则 $oN\perp oM$ (图 38), 故

$$r_1=r\operatorname{ctg}\omega=mr,\quad \theta_1=\frac{\pi}{2}+\theta.$$

故得渐屈线

$$r_1=mae^{m\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)}=a_1e^{m\theta_1}\quad (\text{这里 } a_1=mae^{-\frac{m\pi}{2}}).$$

§6. 一般的一阶微分方程

一般的一阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y')=0. \tag{1}$$

如果易于解出 y', 虽然不止一个解:

$$y'=\varphi_1(x,y),\quad y'=\varphi_2(x,y),\cdots,y'=\varphi_r(x,y), \tag{2}$$

则我们可以逐步解出 (2) 式来, 这些解当然都是原方程的解.

例 1 求方程

$$xy'^3 - (x^2 + 2y)y'^2 + 2x(y+2)y' - 4x^2 = 0$$

的解.

分解因子得

$$y' - x = 0, \quad y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}.$$

第一式的解是 $y = \frac{1}{2}x^2 + c$, 第二式是 0 次齐次的, 因此换变量 $y = ux$, 得出

$$\frac{du}{\pm\sqrt{u^2 - 4}} = \frac{dx}{x}.$$

积分之, 得

$$u \pm \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{k},$$

这里 k 是常数. 有理化得

$$\left(u - \frac{x}{k}\right)^2 - (u^2 - 4) = 0,$$

即得

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{2y}{k} + 4 = 0$$

或

$$x^2 = 2k(y - 2k).$$

因此原方程的解是两组抛物线

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c$$

与

$$x^2 = c'(y - c').$$

如果 (1) 式并不容易 (或在初等函数范围内不可能) 解出 y' 来, 我们可以用以下的几何方法:

命 $\frac{dy}{dx} = p$, 把解方程 (1) 的问题看成为在曲面

$$F(x, y, p) = 0 \tag{3}$$

上求适合于条件

$$dy = pdx \tag{4}$$

的曲线的问题.

如果 (3) 式有参变量表示法

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad p = \omega(u, v), \tag{5}$$

则由 (4) 式可知

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\omega(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right). \tag{6}$$

因此, 解微分方程 (1) 的问题一变而为解

$$\frac{dv}{du}=-\frac{\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-\dfrac{\partial\psi}{\partial v}} \tag{7}$$

的问题了. 如果能解出 (7) 式,

$$v=g(u,c),$$

则

$$x=\varphi(u,g(u,c)),\quad y=\psi(u,g(u,c)).$$

这就是方程 (1) 的解.

但一般讲来, 求参数表达式 (5) 与解方程 (7) 都并不容易, 甚至不可能用初等函数表出来.

例 2 求

$$p^3-4xyp+8y^2=0 \tag{8}$$

的解.

把 (8) 式看成为 (x,y,p) 所定义的曲面, 把 y,p 看成为参数, 则得

$$x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p}. \tag{9}$$

由 $dx=\dfrac{1}{p}dy$ 得

$$\frac{1}{p}dy=\left(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2}\right)dp-\left(\frac{p^2}{4y^2}-\frac{2}{p}\right)dy,$$

即得

$$dp\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}dy.$$

除去因子

$$\frac{p^3-4y^2}{2yp}, \tag{10}$$

得出

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}.$$

解得 $p=cy^{\frac{1}{2}}$. 因而代入 (9) 式,

$$x=\frac{c^2}{4}+\frac{2}{c}y^{\frac{1}{2}},$$

就是方程 (8) 的解. 引进新常数 $c_1 = \frac{1}{4}c^2$, 得出更整齐的形式:

$$y = c_1(x - c_1)^2. \tag{11}$$

注意我们消去了因子 (10), 这个因子的分子

$$p^3 - 4y^2 = 0$$

给出另一解来. 代进 (8) 式, 可以获得

$$27y = 4x^3,$$

它也是 (8) 式的解. 又由 (10) 式的分母, $y = 0$ 也是一个解.

带一个参变量的一阶微分方程的解称为通解, 以上的讨论说明了, 通解之外还有两个特解:

$$y = 0, \quad y = \frac{4}{27}x^3.$$

这是怎样得来的?

例 3 Clairaut 方程

$$y = xy' + f(y') \tag{12}$$

考虑曲面

$$y = xp + f(p). \tag{13}$$

取 x 与 p 为参数, 利用 $dy = pdx$, 求 (13) 式的微分, 可得

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx},$$

即得

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

由 $\frac{dp}{dx} = 0$ 得 $p = c$, 代入 (13) 式得 (12) 式的解答

$$y = cx + f(c).$$

但由另一因子 $x + f'(p) = 0$ 得

$$x = -f'(p), \quad y = -pf'(p) + f(p).$$

把 p 看为参变量, 这也是 (12) 式的解.

总之, 这里有这样的现象: 给了一个微分方程 (1), 我们在它的通解

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{14}$$

之外 (即带有一个参变量的解之外), 还可能有解. 其他解的出现是由于曲线族的一种几何性质: 存在一条曲线 L, 其上任一点都和 (14) 式中的某一线相切. 这样的曲线的切线显然与 Φ 的某一切线相同, 即 y' 相同. 因此也适合于 (1) 式. 这种性质的曲线称为曲线族 (14) 的包络线.

§7. 包络线

命

$$\Phi(x,y,c)=0 \tag{1}$$

是一个曲线族, 在 (x,y) 平面上某区域内每一点至少有曲线族的一条曲线通过.

现在想找到曲线 L, 使 L 的每一点都与族 (1) 的某一曲线相切, 而且曲线 L 的每一段都与族 (1) 的无穷多条曲线相切 (不同的 c 对应于不同的曲线), 这样的 L 称为族 (1) 的包络或包络线.

如果包络存在, 则包络上每一点 (x,y) 必与族 (1) 中之一条曲线

$$\Phi(x,y,c_0)=0$$

相切, 这 c_0 是由点 (x,y) 所决定的, 命之为 $c_0=c(x,y)$, 即包络上的点一定适合于

$$\Phi(x,y,c(x,y))=0.$$

在包络上, y 又是 x 的函数. 不妨把 $c(x,y)$ 看成为 x 的函数 $c(x)$, 也就是

$$\Phi(x,y,c(x))=0. \tag{2}$$

对 x 微分 (2) 式得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0,$$

这式所得出的 $\dfrac{dy}{dx}$ 是包络线上的切线方向.

从另一方面看, 曲线族 (1) 中经过 (x,y) 的曲线 L_c 一定适合于

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

此处所得出的 $\dfrac{dy}{dx}$ 是曲线 L_c 的切线方向. 由假定可知, 两个切线方向是一致的, 所以

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0.$$

这就是在一点包络 (2) 与通过该点的 L_c 有公共切线的必要条件.

如果 $\dfrac{dc}{dx}=0$, 即 c 为常数, 所得出的曲线 (2) 就是族 (1) 中的曲线. 如果 $\dfrac{dc}{dx}\neq 0$, 则在包络线上常有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c}=0. \tag{3}$$

曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 上的点, 如果适合

$$\frac{\partial\Phi(x,y,c)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\Phi(x,y,c)}{\partial y}=0,$$

则称为奇点. 曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 过奇点的曲线, 在奇点没有确定的切线.

上面证明了: 包络线 $y=y(x)$ 适合 (2) 式和 (3) 式, 其中 $c=c(x)$ 不是常数. 反之, 并不是 (2) 式和 (3) 式的解 $y=y(x)$ 都是包络.

容易证明, 适合方程 (2) 式和 (3) 式的曲线 $y=y(x)$, 如果不包含曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 的奇点, 则必为包络线.

例 1 求

$$y=c(x-c)^2$$

的包络.

对 c 求微商, 得

$$(x-c)^2-2c(x-c)=0,$$

即得 $c=x, c=\dfrac{1}{3}x$. 代入原式得

$$y=0,\quad y=\frac{4}{27}x^2.$$

这就是上节的特解.

例 2 求

$$y=cx+f(c)$$

的包络.

对 c 微商, 得

$$x+f'(c)=0,$$

即得上节例 2 的特解.

例 3 仰角为 α 的弹道曲线是

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2,$$

这里 g 是引力常数, v_0 是初速. 对 α 来说, 这成一族曲线, 求这族曲线的包络.

对 α 微分得

$$x\sec^2\alpha-\frac{g\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}x^2=0,$$

得 $x=0$ 及

$$4gv_0^2y=2v_0^4-2g^2x^2.$$

这就是包络线.

这包络线就是所谓的安全抛物线, 也就是炮弹打不到这抛物线以外去 (图 39).

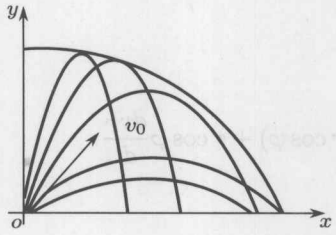


图 39

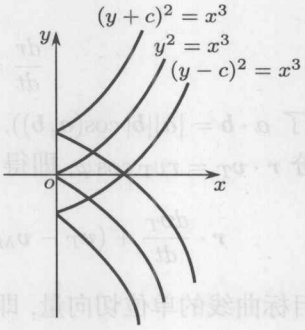


图 40

例 4 半立方抛物线族

$$(y+c)^2=x^3.$$

对 c 微分得

$$2(y+c)=0.$$

消去 c 得 $x=0$. y 轴不是包络线, 而是奇点 $y=-c, x=0$ 的轨迹 (图 40).

§8. 追踪问题

我们现在考虑一个导弹 M 追踪一个目标的问题. 为了简单起见, 假定这样的一个追踪是在一平面内进行的. 这平面假定就是 (x,y) 平面. 目的物可能经常改变它的速度和方向, 而我们的导弹也经常改变速度和方向. 假定目的物经常以角度 φ 来避开导弹的方向, 而导弹经常以角度 θ 来迎击目标.

命 $\boldsymbol{r}_T$ 与 $\boldsymbol{v}_T$ 表示目标的位置向量与速度向量, 命 $\boldsymbol{r}_M$ 与 $\boldsymbol{v}_M$ 表示导弹的位置向量与速度向量, 命 ψ 表示图 41 所示的角度.

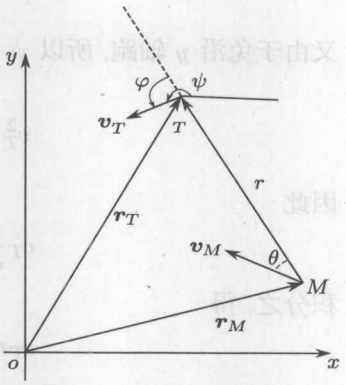


图 41

显然有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_T-\boldsymbol{r}_M.$$

这代表导弹与目的物的相对位置向量. 由

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}_T-\boldsymbol{v}_M$$

得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_T-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_M.$$

这就是

$$r\frac{dr}{dt}=rv_T\cos\varphi-rv_M\cos\theta,$$

即

$$\frac{dr}{dt} = v_T \cos\varphi - v_M \cos\theta \tag{1}$$

(这里用了 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$).

微分 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_T = rv_T\cos\varphi$, 即得

$$\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}_T}{dt} + (\boldsymbol{v}_T - \boldsymbol{v}_M)\cdot\boldsymbol{v}_T = v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi) + r\cos\varphi\frac{dv_T}{dt}. \tag{2}$$

命 $\boldsymbol{t}$ 表目标曲线的单位切向量, 即 $\boldsymbol{v}_T = v_T\boldsymbol{t}$, 及

$$\frac{d\boldsymbol{v}_T}{dt} = \frac{dv_T}{dt}\boldsymbol{t} + v_T\frac{d\boldsymbol{t}}{dt},$$

所以

$$\frac{d\boldsymbol{v}_T}{dt} = \frac{dv_T}{dt}\boldsymbol{t} + v_T\frac{d\psi}{dt}\boldsymbol{n},$$

$\left(\text{因 } \dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt} = \dfrac{d\psi}{dt}\boldsymbol{n}\right)$. 方程 (2) 变成

$$-rv_T\frac{d\psi}{dt}\cdot\sin\varphi + v_T^2 - v_Mv_T\cos(\theta-\varphi) = v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi). \tag{3}$$

这就是追踪者与被追踪者之间的速度与方向的关系式.

例 1 狗逐兔问题. 当 $t=0$ 时兔在原点, 沿着 y 轴以常速率 v_T 向正方向跑去. 狗在 x 轴上 $(a,0)$ 处开始逐兔的速度也是常数速 v_M. 追逐的情况是狗总是面对着兔子追去, 即 $\theta = 0$: 现在由 (1) 式及 (3) 式得

$$\frac{dr}{dt} = v_T\cos\varphi - v_M,$$

又由于兔沿 y 轴跑, 所以 $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, 即由 (3) 式得

$$v_T^2 - v_Mv_T\cos\varphi = v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi).$$

因此

$$v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi) + v_M\frac{dr}{dt} = v_T^2 - v_M^2.$$

积分之, 得

$$v_Tr\cos\varphi + v_Mr = (v_T^2 - v_M^2)t + c.$$

当 $t=0$ 时, $r=a, \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, 所以 $c = v_Ma$, 即

$$(v_T\cos\varphi + v_M)r = (v_T^2 - v_M^2)t + v_Ma.$$

在狗追上兔子的时候, $r=0$, 所以知道所需要的时间等于

$$t=\frac{av_M}{v_M^2-v_T^2}.$$

例 2 设目的物在半径为 a 的圆周上以等速 v 运动, 导弹从圆心出发追踪. 当 $t=0$ 时, 目的物在 $(a,0)$, 导弹在圆心. 若导弹的速度也是 v, 且圆心、导弹、目的物常在一条直线上, 求证当目的物行至 $(0,a)$ 时, 导弹正好追上它 (图 42).

设时间 t 时, 目的物在 $[r(t),\theta(t)]$, 导弹在 $[r_1(t),\theta_1(t)]$, 则

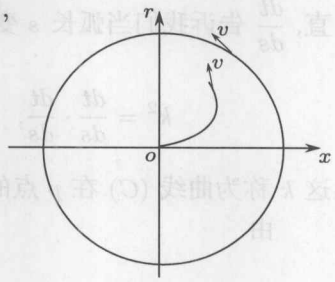


图 42

$$v^2=a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{a},\quad \theta=\frac{v}{a}t+c.$$

因 $t=0$ 时 $\theta=0$, 所以 $c=0$,

$$\theta_1=\theta=\frac{v}{a}t. \tag{4}$$

又由

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2=v^2-\left(\frac{r_1d\theta_1}{dt}\right)^2=v^2\left[1-\left(\frac{r_1}{a}\right)^2\right],$$

$$\frac{dr_1}{\sqrt{1-\left(\frac{r_1}{a}\right)^2}}=vdt,$$

得

$$a\arcsin\frac{r_1}{a}=vt+c_1.$$

由 $t=0$ 时 $r_1=0$, 得 $c_1=0$, 因此

$$a\arcsin\frac{r_1}{a}=vt.$$

当导弹追到目的物时, $r=r_1=a$, 故

$$vt=a\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

由 (4) 式, (5) 式可知

$$\theta=\frac{\pi}{2},$$

即当目的物行至 $(0,a)$ 时被导弹追上.

§9. 空间曲线的基本元素

空间曲线 (C) 也是可以用原点 o 到变点 p 的变向量 $\boldsymbol{r}(s)$ 来表示它的. 命 s 表示弧长, 则

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\quad \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

是一单位向量. 这称为曲线在点 p 的切线向量. 由于 $\boldsymbol{t}$ 是单位向量, 所以 $\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 垂直, $\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ 告诉我们当弧长 s 变化时, 方向 $\boldsymbol{t}$ 的变化情况. 我们定义

$$k^2=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds},\quad \text{即}\quad k=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

这 k 称为曲线 (C) 在 p 点的曲率, k 是随着点而变的.

由

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k\boldsymbol{n}$$

所定义的单位向量 $\boldsymbol{n}$ 称为曲线 (C) 在 p 点的主法线的单位向量. $\rho=\dfrac{1}{k}$ 称为曲率半径. 在任一点 $p,\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 是互相垂直的.

命

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n},$$

$\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$, 这样的 $\boldsymbol{b}$ 称为次法线方向的单位向量 (由于 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 是垂直的单位向量, 所以 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量).

这三个与坐标轴有相同的定转向的单位向量 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 组成一个在曲线 (C) 上 p 点的活动坐标架, 而空间曲线 (C) 在 p 点的其他任何向量都可以在这坐标架上分解.

我们现在确定 $\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 与 $\dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ 的分解情况.

由 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}=0$ 可得

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=0.$$

又因为 $\boldsymbol{b}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=0$, 所以知道

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\cdot\boldsymbol{t}=0,$$

也就是 $\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 是垂直于 $\boldsymbol{t}$ 的向量. 又因为 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量, 所以 $\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 也垂直于 $\boldsymbol{b}$. $\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 既然垂直于 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 它的方向就一定与 $\boldsymbol{n}$ 相同. 因此

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\boldsymbol{n}.$$

$\dfrac{1}{\tau}$ 称为这曲线的挠率, τ 称为挠率半径 (或第二曲率半径).

注意 $\frac{1}{\tau}$ 是可正可负的, 这与 $\frac{1}{\rho}$ 总是非负的性质不同. 当然, 这些向量的存在是基于它们的微商存在性的.

再考虑 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$. 由 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times t$ 可知

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t}=\boldsymbol{b}\times k\boldsymbol{n}+\frac{1}{\tau}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}=-k\boldsymbol{t}-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}.$$

这样我们得出了著名的 Frenet-Serret 公式:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n},\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t}+\frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}\right),\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\boldsymbol{n}.$$

回到原来出发的坐标, 假定单位向量 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 对 x,y,z 轴的方向余弦如下表:

	x	y	z
$\boldsymbol{t}$	α	β	γ
$\boldsymbol{n}$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{b}$	α_2	β_2	γ_2

则 Frenet-Serret 公式可以写成为

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho},\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{\rho},\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{\rho}.$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\beta_1}{ds}=-\frac{\beta}{\rho}-\frac{\beta_2}{\tau},\quad \frac{d\gamma_1}{ds}=-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau},$$

及

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\alpha_1,\quad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\beta_1,\quad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\gamma_1.$$

试考察曲率 $\frac{1}{\rho}$ 恒等于 0 的情况, 即得

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}=0.$$

这说明了 α,β,γ 是常数. 由

$$\frac{dx}{ds}=\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\gamma$$

可知, (C) 是一条直线, 即曲率等于 0 的曲线是直线.

再考虑挠率恒等于 0 的情况, 即

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=0,$$

即 $\boldsymbol{b}=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ 是一常数向量. 由于 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 垂直, 故

$$\alpha_2\frac{dx}{ds}+\beta_2\frac{dy}{ds}+\gamma_2\frac{dz}{ds}=0.$$

积分之, 应得

$$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta.$$

这说明挠率等于 0 的曲线 (C) 是一条平面曲线.

由向量 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所确定的平面称为曲线的密切平面, $\boldsymbol{b}$ 是这平面的法线方向.

§10. 原坐标表示法

命

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z),$$

则

$$\boldsymbol{t}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right),\quad \boldsymbol{n}=\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right)=\rho\frac{d\boldsymbol{t}}{ds},$$

此处

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

又挠率

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}&=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}=\left(\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\left[\boldsymbol{t}\times\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right)\right]\cdot\rho\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\\&=\rho\left(\boldsymbol{t}\times\frac{d\rho}{ds}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}+\boldsymbol{t}\times\rho\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\rho^2\left(\boldsymbol{t}\times\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\end{aligned}$$

$\left(\text{因为 }\boldsymbol{t}\times\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}\text{ 与 }\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}\text{ 垂直}\right)$, 也就是

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\left(\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\times\boldsymbol{t}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=-\rho^2\left(\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}.$$

注意 $(-\rho^2)$ 的系数是由三向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$$

所成的平行六面体的体积. 即

$$\left(\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\begin{vmatrix}x''' & y''' & z'''\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}.$$

以上的表达法是用弧长 s 来表达的, 我们现在回到一般的参变量 t, 即

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2.$$

可知

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^{1/2}},$$

所以

$$\frac{d^2t}{ds^2}=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^{3/2}}\frac{dt}{ds}=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}.$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2}&=\frac{d}{ds}\left(\varphi'(t)\frac{dt}{ds}\right)=\varphi''(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\varphi'(t)\frac{d^2t}{ds^2}\\&=\frac{\varphi''}{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}-\varphi'\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}.\end{aligned}$$

同理得到 $\dfrac{d^2y}{ds^2},\dfrac{d^2z}{ds^2}$, 因而得出

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\frac{\varphi''^2+\psi''^2+\chi''^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}\\&-2\frac{(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}+\frac{(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}\\&=\frac{(\varphi''^2+\psi''^2+\chi''^2)(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}.\end{aligned}$$

再由恒等式

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2\\&=(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2\end{aligned}$$

或

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$$

可知

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\bar{A}^2+\bar{B}^2+\bar{C}^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3},$$

而

$$\bar{A}=\psi'\chi''-\psi''\chi',\quad \bar{B}=\chi'\varphi''-\varphi'\chi'',\quad \bar{C}=\varphi'\psi''-\psi'\varphi''.$$

密切平面的公式可由它垂直于 $\boldsymbol{b}$ 得之. 由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$, 即

$$\boldsymbol{b}=\rho\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\times\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right),$$

所以 $\boldsymbol{b}$ 的三个分量与

$$A=\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2},$$
$$B=\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2},$$
$$C=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

成比例, 所以密切平面的方程是

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

我们已经知道

$$\frac{dx}{ds}=\varphi'\frac{dt}{ds},$$
$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\varphi''}{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}-\varphi'\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2},$$

等等, 所以

$$\begin{aligned}A=&\{\psi'[\chi''(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-\chi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')]\\&-\chi'[\psi''(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-\psi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')]\}\\&\cdot\frac{\dfrac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}=(\psi'\chi''-\chi'\psi'')\frac{\dfrac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)}.\end{aligned}$$

同样得出

$$B=(\chi'\varphi''-\varphi'\chi'')\frac{\dfrac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)},$$
$$C=(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')\frac{\dfrac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)}.$$

因此得出

$$A:B:C=(\psi'\chi''-\chi'\psi''):(\chi'\varphi''-\varphi'\chi''):(\varphi'\psi''-\psi'\varphi''),$$

即密切平面方程是

$$\begin{vmatrix}X-\varphi & Y-\psi & Z-X\\ \varphi' & \psi' & \chi'\\ \varphi'' & \psi'' & \chi''\end{vmatrix}=0.$$

现在容易证明: 在曲线上取三点 $t, t+\Delta t, t+2\Delta t$, 过这三点作一平面, 当 $\Delta t \to 0$ 时, 即得密切面.

§11. 螺旋线

设有一柱面, 其母线平行于 z 轴, xy 平面截取柱面所得的曲线是

$$(l) \qquad x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma),$$

此处 σ 是 (l) 的弧长, 它的起点是 A. 在 (l) 上取某点 N, 作线段 NM 平行于 z 轴. 若

$$NM = k\sigma,$$

此处 k 为常数, σ 为 (l) 弧的长度, 点 M 的轨迹 (L) 就被称为螺旋线 (图 43).

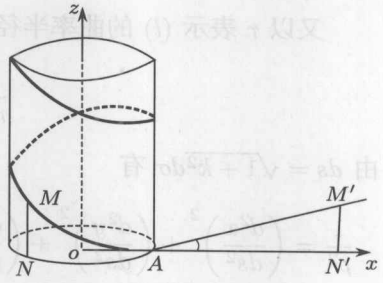


图 43

以下我们将讨论螺旋线的若干性质:

1) 螺旋线的切线与某一确定的方向成定角.

证 (L) 的参数表示是

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad z = k\sigma.$$

以 A 作为 (L) 的起算点, s 为 (L) 的弧长. 由于 (l) 上切线的方向余弦是 $[\varphi'(\sigma), \psi'(\sigma)]$, 所以

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) + k^2]d\sigma^2 = (1+k^2)d\sigma^2,$$
$$ds = \sqrt{1+k^2}d\sigma, \quad s = \sqrt{1+k^2}\sigma.$$

我们来考察 (L) 上切线与 z 轴所成的角度的余弦 γ:

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

即得所证.

2) 螺旋线上任一点的主法线与母线垂直.

证 由 Frenet-Serret 定理可知

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{\rho} = 0,$$

即 $\gamma_1 = 0$. 故得所证.

3) 沿螺旋线、曲率半径与挠率半径之比为常数, 特别当柱面是圆柱面时, 曲率与挠率都是常数.

证 螺旋线的活动标架与 z 轴所成的角度的余弦 $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$. 因 $\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$ 及 γ, γ_1 为常数, 故 γ_2 亦为常数, 故由 Frenet-Serret 公式可知

$$-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau}=0.$$

因此 $\dfrac{\rho}{\tau}$ 是个常量.

又以 r 表示 (l) 的曲率半径, 则

$$\frac{1}{r^2}=\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma).$$

由 $ds=\sqrt{1+k^2}d\sigma$ 有

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right]\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^4$$

$$=\frac{\varphi'^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}+\frac{\psi'^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}=\frac{1}{(1+k^2)^2r^2},$$

即

$$\rho=(1+k^2)r.$$

若 (l) 是圆周, 则 r 为常数. 因此 ρ 与 τ 都为常数.

连接曲面上两点, 使距离最短的曲面上的曲线称为曲面上的短程线. 平面上的短程线就是直线.

4) 柱面上的短程线就是螺旋线.

证 绕着通过 A 的母线, 把柱面在 xz 平面上铺平, 则 AN 与 NM 之比为 $\dfrac{1}{R}$, 故螺旋线就是 xz 平面上的直线, 而将柱面铺平时, 柱面上曲线的距离是不变的. 故得所证.

§12. 空间曲线的唯一性定理

定理 1 *具有相同弧长 s, 曲率 $f(s)>0$ 及挠率 $g(s)$ 的曲线, 可以经过运动 (坐标轴的平移及转动) 使一条搬到另一条.*

证 设 c 与 c' 是具有相同弧长、曲率及挠率的二曲线, 设这二曲线弧长的起算点各为 o, o'. 先行一个运动, 使 o' 变到 o、c' 上的点 o' 的活动标架变为 c 上的点 o 的活动标架. 若经过运动后, c' 变为 $\bar{c}$, 而 c 与 $\bar{c}$ 在弧长 s 对应的点的活动标架各向量的方向余弦各为

	x	y	z
$\boldsymbol{t}$	α	β	γ
$\boldsymbol{n}$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{b}$	α_2	β_2	γ_2

与

	x	y	z
$\boldsymbol{t}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$
$\boldsymbol{n}$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\gamma}_1$
$\boldsymbol{b}$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\gamma}_2$

由 Frenet-Serret 公式得

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho},\quad \frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{\tau},$$
$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds}=\frac{\bar{\alpha}_1}{\rho},\quad \frac{d\bar{\alpha}_1}{ds}=-\frac{\bar{\alpha}}{\rho}-\frac{\bar{\alpha}_2}{\tau},\quad \frac{d\bar{\alpha}_2}{ds}=\frac{\bar{\alpha}_1}{\tau},$$

此处

$$\rho=\frac{1}{f(s)},\quad \tau=\frac{1}{g(s)}.$$

所以

$$\frac{d}{ds}(\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2)=0.$$

于是

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2=c\quad (c\text{ 为常数}).$$

当 $s=0$ 时, $\alpha=\bar{\alpha},\alpha_1=\bar{\alpha}_1,\alpha_2=\bar{\alpha}_2$ 且 $\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ (此乃由于 α,α_1,α_2 可以看作是沿 x 轴的单位向量在活动标架上的投影). 因此

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2=1,$$

故

$$(\alpha-\bar{\alpha})^2+(\alpha_1-\bar{\alpha}_1)^2+(\alpha_2-\bar{\alpha}_2)^2=0.$$

所以

$$\alpha=\bar{\alpha},\quad \alpha_1=\bar{\alpha}_1,\quad \alpha_2=\bar{\alpha}_2.$$

同样得到

$$\beta=\bar{\beta},\quad \beta_1=\bar{\beta}_1,\quad \beta_2=\bar{\beta}_2,$$
$$\gamma=\bar{\gamma},\quad \gamma_1=\bar{\gamma}_1,\quad \gamma_2=\bar{\gamma}_2.$$

又两曲线在对应点有同一弧长 s, 故

$$\frac{dx}{ds}=\alpha=\bar{\alpha}=\frac{d\bar{x}}{ds},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{d\bar{y}}{ds},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{d\bar{z}}{ds},$$
$$x=\bar{x}+c_1,\quad y=\bar{y}+c_2,\quad z=\bar{z}+c_3,$$

此处 c_1,c_2 与 c_3 都是常数. 当 $s=0$ 时, $x=\bar{x},y=\bar{y},z=\bar{z}$. 因此 $c_1=c_2=c_3=0$. 故得定理.

关于空间曲线的存在性问题, 即任意给了两个连续函数 $f(s)>0$ 及 $g(s)$, 问是否存在一条空间曲线以 s 为弧长, $f(s)$ 为曲率, $g(s)$ 为挠率?

我们可以从第十三章 §24 的定理 1 中推出

定理 2 *已给连续函数 $f(s)>0$ 及 $g(s)$, 设 $p_0(p=p_0)$ 为空间任意点, $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0$ 为任意三个右旋的彼此垂直的单位向量, 则一定存在一条空间曲线以 s 为弧长, $f(s)$ 为曲率, $g(s)$ 为挠率, 而且它的始点是 s_0 即*

$$\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{r}_0$$

在 p_0 点的活动坐标架的基本分量是

$$\boldsymbol{\alpha}(s_0)=\boldsymbol{\alpha}_0,\quad \boldsymbol{\beta}(s_0)=\boldsymbol{\beta}_0,\quad \boldsymbol{\gamma}(s_0)=\boldsymbol{\gamma}_0.$$

证 解方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}=f(s)\boldsymbol{\beta},\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=-f(s)\boldsymbol{\alpha}-g(s)\boldsymbol{\gamma},\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}=+g(s)\boldsymbol{\beta},\end{cases}$$

其初始条件为

$$\boldsymbol{\alpha}(s_0)=\boldsymbol{\alpha}_0,\quad \boldsymbol{\beta}(s_0)=\boldsymbol{\beta}_0,\quad \boldsymbol{\gamma}(s_0)=\boldsymbol{\gamma}_0.$$

由第十三章 §24 得到一组唯一的解.

命

$$\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma},\quad \boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\gamma}^*=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\alpha}^*}{ds}&=\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\times\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\times\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}=f(s)\boldsymbol{\beta}^*,\\ \frac{d\boldsymbol{\beta}^*}{ds}&=\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\times\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\times\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}=-f(s)\boldsymbol{\alpha}^*-g(s)\boldsymbol{\gamma}^*,\\ \frac{d\boldsymbol{\gamma}^*}{ds}&=\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=+g(s)\boldsymbol{\beta}^*,\end{aligned}$$

且可以证明

$$\boldsymbol{\alpha}^*(s_0)=\boldsymbol{\alpha}_0,\quad \boldsymbol{\beta}^*(s_0)=\boldsymbol{\beta}_0,\quad \boldsymbol{\gamma}^*(s_0)=\boldsymbol{\gamma}_0.$$

故由解的唯一性定理知,

$$\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{\alpha}\quad \boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\gamma}^*=\boldsymbol{\gamma},$$

即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$, 组成彼此垂直的右旋单位向量.

从

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\alpha}$$

解出

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{\alpha}(s)ds,$$

这就是我们所要求的曲线. 事实上, 如果这条曲线的曲率为 $\bar{f}(s)$, 挠率为 $\bar{g}(s)$, 其基本向量为 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(s),\bar{\boldsymbol{\beta}}(s),\bar{\boldsymbol{\gamma}}(s)$, 则

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\alpha}(s),$$

而

$$\bar{f}(s)\bar{\boldsymbol{\beta}}=\frac{d\bar{\boldsymbol{\alpha}}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}=f(s)\boldsymbol{\beta}.$$

但

$$\bar{f}(s)>0,\quad f(s)>0,$$

故

$$\bar{f}(s)=f(s),\quad \bar{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\beta}.$$

于是

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}=\bar{\boldsymbol{\alpha}}\times\bar{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}.$$

而

$$\bar{g}(s)\bar{\boldsymbol{\beta}}=\frac{d\bar{\boldsymbol{\gamma}}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}=g(s)\boldsymbol{\beta}.$$

故

$$\bar{g}(s)=g(s).$$

证毕.

事实上, 定理 2 的唯一性就是定理 1, 但定理 1 的证明更直接些.

§13. 曲率圆与曲率球

设曲线的参数表示是

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad z=z(s),$$

此处 s 为弧长. 过曲线上三点 $P(s),Q(s+\Delta s),R(s+2\Delta s)$ 作球①, 当 $\Delta s\to 0$ 时, 此球的极限位置满足以下三关系式 (参看 §5):

$$[x(s)-a]^2+[y(s)-b]^2+[z(s)-c]^2=R^2, \tag{1}$$

$$[x(s)-a]\alpha(s)+[y(s)-b]\beta(s)+[z(s)-c]\gamma(s)=0, \tag{2}$$

$$[x(s)-a]\alpha_1(s)+[y(s)-b]\beta_1(s)+[z(s)-c]\gamma_1(s)=-\rho. \tag{3}$$

①过三点可作无穷多个球, 而今为其中之任一个.

故由 (2) 式可知, 球心在垂直于切线的平面上. 由 (3) 式可知, 球心至曲线上点的线段在主法线上的投影长度为曲率半径.

特别当球心在密切平面上时, 则中心坐标应为

$$a = x(s) + \rho\alpha_1(s), \quad b = y(s) + \rho\beta_1(s), \quad c = z(s) + \rho\gamma_1(s).$$

此点称为曲率中心, 这一球的球面与密切平面的交线是一圆, 称为曲率圆或密切圆. 此圆的半径为 ρ, 曲率中心的轨迹称之为曲线的渐屈线.

现在决定一个球, 通过曲线点 $P(s)$ 及其三邻近点 $Q(s+\Delta s), R(s+2\Delta s), T(s+3\Delta s)$, 当 $\Delta s \to 0$ 时, 这球的极限位置除满足 (1) 式, (2) 式, (3) 式外, 还满足

$$[x(s) - a]\alpha_2(s) + [y(s) - b]\beta_2(s) + [z(s) - c]\gamma_2(s) = \tau\rho'. \tag{4}$$

由 (2) 式, (3) 式, (4) 式可以决定球心 (a, b, c). 现在引入局部坐标 (A, B, C), 即满足方程组的三数:

$$a = x(s) + A\alpha(s) + B\alpha_1(s) + C\alpha_2(s), \tag{5}$$

$$b = y(s) + A\beta(s) + B\beta_1(s) + C\beta_2(s), \tag{6}$$

$$c = z(s) + A\gamma(s) + B\gamma_1(s) + C\gamma_2(s). \tag{7}$$

将 (5) 式, (6) 式, (7) 式三式分别乘以 $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$, 然后相加得

$$A = [a - x(s)]\alpha(s) + [b - y(s)]\beta(s) + [c - z(s)]\gamma(s) = 0.$$

同理得

$$B = \rho, \quad C = -\rho'\tau.$$

故得球心的坐标为

$$\begin{aligned} a &= x(s) + \rho\alpha_1(s) - \tau\rho'\alpha_2(s), \\ b &= y(s) + \rho\beta_1(s) - \tau\rho'\beta_2(s), \\ c &= z(s) + \rho\gamma_1(s) - \tau\rho'\gamma_2(s). \end{aligned}$$

球的半径为

$$\rho^2 + \left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)^2,$$

这一球称为曲率球或密切球.

§14. 曲面族与空间曲线族的包络

把 §7 所讲的推广到空间

1) 先研究带一个参变量的曲面族

$$S_a:\ \Phi(x,y,z,a)=0. \tag{1}$$

曲面族中一曲面 $\Phi(x,y,z,a_0)=0$ 上, 如果有一点 (x_0,y_0,z_0), 向量

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

是零向量, 则点 (x_0,y_0,z_0) 称为曲面族 $\Phi(x,y,z,a)=0$ 的奇点. 在奇点上该曲面没有确定的切平面.

对 a 微分得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=0. \tag{2}$$

从 (1) 式与 (2) 式消去 a 得一曲面 S, 假设曲面 S 不包含曲面族 (1) 的奇点. 对一个固定的数值 a_0, 曲面族中有一曲面 S_{a_0}, 与 S 交于一条曲线 l_0. 现在证明, 沿着 l_0, S 与 S_{a_0} 有公共切面.

在 S_{a_0} 上 a 是常量 a_0, 所以

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=0.$$

在曲面 S 上 a 是变量, 应当写成

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial a}da=0.$$

由 (2) 式, 这两个关系全同, 因此 S_{a_0} 与 S 上公共点的无穷小改变 $[dx,dy,dz]$ 与向量

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

垂直, 所以 S_{a_0} 与 S 沿 l_0 相切.

因此, 由 (1) 式与 (2) 式消去 a 所得出的方程, 只要奇点不适合这个方程, 那么它就是包络, 这里相切性是沿某一曲线相切的.

例 1 球心在 z 轴上, 半径为常数 r 的球面族

$$x^2+y^2+(z-a)^2=r^2.$$

对 a 求微商, 得

$$-2(z-a)=0.$$

消去 a, 得柱面

$$x^2+y^2=r^2.$$

而相切的线是一个圆周.

2) 考虑有两个参变量的曲面族

$$F(x,y,z,a,b)=0. \tag{3}$$

从

$$\frac{\partial F}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial b}=0 \tag{4}$$

中消去 a,b, 得出曲面 S. 不难证明, 它与曲面族 (3) 相切, 现在是点相切, 而不是线相切. 实际上, 对固定的 $a=a_0,b=b_0$, 一方面我们得到 (3) 式中的一确定曲面 S_0, 而另一方面, 把 $a=a_0$ 及 $b=b_0$ 代入 (3) 式和 (4) 式, 一般得出 S 上的一点 M_0, 而点 M_0 就是 S 与 S_0 的公共点.

例 2 球心在 (x,y) 平面上、半径为常数 r 的球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2.$$

对 a,b 求偏微商得

$$-2(x-a)=0,\quad -2(y-b)=0.$$

消去 a 与 b 得 $z^2=r^2$, 就是说, 平面 $z=\pm r$ 是包络. 包络和每一个球都于一点相切.

附记 与曲线的情况相同, 从 (3) 式, (4) 式消去所得出来的曲面可能不是包络, 而是奇异点的轨迹.

3) 考虑一个参变量的空间曲线族

$$F_1(x,y,z,a)=0,\quad F_2(x,y,z,a)=0 \tag{5}$$

能否有包络? 即能否找出曲线 Γ, 在它所有点与 (5) 式中的各曲线相切?

我们可以把 (5) 式作为 Γ 的定义方程及其中 a 非常数而是变量. 沿 (5) 式得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0,\\&\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0.\end{aligned}$$

而沿 Γ, 则

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0,\\&\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0.\end{aligned}$$

如果相切, 则

$$\frac{\delta x}{dx}=\frac{\delta y}{dy}=\frac{\delta z}{dz}.$$

因而得出

$$\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a = 0.$$

当 a 非常量, 即 $\delta a \neq 0$, 有

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a} = 0. \tag{6}$$

一般说来, 四个方程不能确立一条曲线, 也就是说, 空间的曲线族没有包络.

但如果四个方程中的一个可由其他三个推出来, 则我们可以确立一条空间曲线, 即把 x, y, z 表为参变量 a 的函数. 这样, 就具有包络了. 当然, 这条空间曲线也可能是曲线族 (5) 的奇异点的轨迹.

第十五章　重积分

§1. 重积分的定义

假定 $f(x,y)$ 是一个在矩形

$$(R):\ a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d$$

上定义了的函数. 对区间 $[a,b]$ 中的任一点 x, 假定积分

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)dy,\quad a\leqslant x\leqslant b \tag{1}$$

存在, 并且假定积分

$$\int_a^b F(x)dx \tag{2}$$

也存在, 如此我们可以算出

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx. \tag{3}$$

这数值被称为 $f(x,y)$ 在矩形 (R) 上的迭次积分, 先对 y 求积分, 再对 x 求积分而得出的迭次积分.

如果 $f(x,y)$ 在 R 上是连续的, 则 (1) 式的存在性是没有问题的, 而所定义的 $F(x)$ 也是在 $[a,b]$ 上的连续函数, 因此 (2) 式也是存在的. 所以任何一个连续函数的迭次积分是存在的. 但是我们这里并没有说明, 这个数值是否也就是先对 x 求积分, 再对 y 求积分所得出的数值, 即

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\quad 与\quad \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

是否相等的问题.

由单变量的情况可知, 我们所用的连续性是可以减弱的.

现在回顾一下积分 (3) 的意义, 利用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d,$$

把矩形 R 分成为 mn 个小矩形

$$(R_{ij}):\ x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\quad y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}.$$

积分 (2) 等于

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i')\Delta x_i$$

的极限, 此处 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 及 x_i' 是区间 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 中的任一点. 而所谓极限是指当 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} \Delta x_i \to 0$ 的情况而言. 但是为了简便起见, 我们用以下的符号:

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i')\Delta x_i\right).$$

又

$$F(x_i') = \int_c^d f(x_i', y)dy$$

是

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')\Delta y_j,\quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

的极限, 而 y_j' 是 $y_j \leqslant y \leqslant y_{i+1}$ 中的任一点. 总之, 迭次积分

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')\Delta x_i\Delta y_j\right).$$

这样很明显地指出, 两个迭次积分是否相等的问题便是两个极限交换的问题. 重积分的概念便与重极限的概念相仿, 可以述之如下:

假定 $f(x,y)$ 是 R 中的有界函数. 考虑和

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')R_{ij}, \tag{4}$$

此处 R_{ij} 是矩形 (R_{ij}) 的面积, (x_i', y_j') 是 R_{ij} 中的任一点. 如果 "网眼" 无限变小, 即 $\max|\Delta x_i| \to 0, \max|\Delta y_j| \to 0$, 并且对 R_{ij} 中的任一 (x_i', y_j'), (4) 式的极限是存在

的, 而且是唯一的, 则 $f(x,y)$ 在 (R) 上称为可求积的, 而以

$$\iint_{(R)} f(x,y)dR$$

表示这极限的数值. 这数值被称为 $f(x,y)$ 过 (R) 的积分.

与单变量相仿, 定义

$$S=\sum M_{ij}R_{ij},\quad M_{ij}=\sup_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y)$$

及

$$s=\sum m_{ij}R_{ij},\quad m_{ij}=\inf_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y).$$

与单变量相仿, 我们能证明: 对任一有界函数, S 与 s 的极限是一定唯一存在的, 因而有

定理 1 *$f(x,y)$ 在 (R) 上的重积分存在的必要且充分条件是*

$$\sum (M_{ij}-m_{ij})R_{ij} \tag{5}$$

的极限等于 0, 极限的意义是指网眼无限分细而言.

显然有以下的一批可积函数.

1) 在 (R) 上连续的函数一定是可积的.

2) 如果 $f(x,y)$ 在 R 上有有限个间断点, 或者 $f(x,y)$ 的间断点出现在有限多条简单曲线上, 则 $f(x,y)$ 也是可积的. 什么叫做简单曲线? 这曲线有一个参变量表示法

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{6}$$

此处 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 是 t 的有连续微商的函数, 且仅有有限个极大极小.

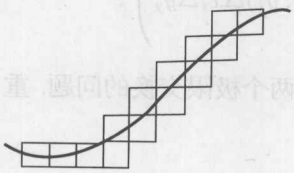


图 44

我们讨论仅有一条简单曲线上有间断点的情况, 一般的情况也不难推得.

我们可以把曲线 (σ) 分成为有限份, 其中每一份所对应的 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是单调的 (由于 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 仅有有限个极大极小). 我们不妨假定 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是不下降的函数. 在网格 (R_{ij}) 中考虑这条曲线所穿过的情况. 如果曲线从一个格子中穿出, 仅有两个可能性, 一是向上穿出, 一是向右穿出, 如图 44 (由右上角穿出的情况也不难处理). 这些被曲线所穿过的矩形的总面积一定不大于

$$\Delta x_0(d-c)+\Delta y_0(b-a)$$

(也就是把这些 "砖" 向左平移, 移到 $x=a$, 如果已有 "砖" 在, 则向上平移, 结果不超过最左一条及最上一条的面积), 此处

$$\Delta x_0=\max(\Delta x_i),\quad \Delta y_0=\max(\Delta y_j).$$

由于 $f(x,y)$ 是有界的, 即有 M, 使 $|f(x,y)|\leqslant M$. 作和

$$T=\sum f(x_i',y_j')R_{ij}',$$

此处 (R_{ij}') 过那些被曲线所穿过的方格, 显然有

$$|T|\leqslant M[\Delta x_0(d-c)+\Delta y_0(b-a)].$$

当格子无限变细后, $T\to 0$. 由此得证.

这证明不但对一条简单曲线对, 也可以证明对有限条简单曲线也对. 同时, 也证明了: 如果在有限条简单曲线上改变 $f(x,y)$ 的数值, 并不影响原来积分的数值.

与重极限及迭次求极限相似的方法, 可以证明: 如果 $f(x,y)$ 在 (R) 上可求积, 而且 (1) 式与 (2) 式存在, 则

$$\iint\limits_{(R)}f(x,y)dR=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

命 (σ) 是 (x,y) 平面上的一个有界域, $F(x,y)$ 是在 (σ) 上定义了的有界函数, 我们不妨假定 (σ) 就包在一个矩形 (R) 之中, 在 (R) 上定义

$$f(x,y)=\begin{cases}F(x,y), & \text{当 } (x,y) \text{ 属于 } (\sigma),\\ 0, & \text{当 } (x,y) \text{ 不属于 } (\sigma).\end{cases}$$

如果 $f(x,y)$ 在 (R) 上是可积函数, 则我们称 $F(x,y)$ 在 (σ) 是可积函数, 而且定义

$$\iint\limits_{(\sigma)}F(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(R)}f(x,y)dR.$$

如果 (σ) 的边界是一条闭曲线 C, 任一平行于 y 轴的直线至多交这曲线于两点, 这曲线在 $x=a$ 与 $x=b$ 之间, 并且 $x=a$ 及 $x=b$ 都与 C 有公共点, 上一部分的曲线方程是 $y=\varphi_1(x)$, 下一部分的曲线方程是 $y=\varphi_2(x)$ (图 45).

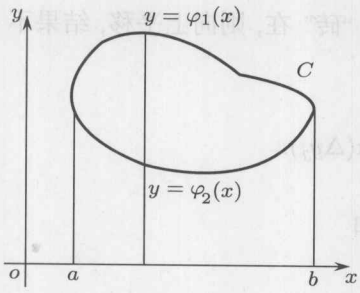


图 45

由前已证明的结果

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dR=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x,y)dy\right)dx,$$

可知, 如果对任一 x,

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x,y)dy(a\leqslant x\leqslant b)$$

存在, 而且

$$\int_a^b \Phi(x)dx$$

存在, 则

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(x,y)d\sigma=\int_a^b\left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x,y)dy\right)dx.$$

§2. 可求面积的域

命 (σ) 代表平面上的一个有限域. 不妨假定它是在一个矩形 (R) 之中, 定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{如果 } (x,y) \text{ 属于 } (\sigma),\\ 0, & \text{如果 } (x,y) \text{ 不属于 } (\sigma).\end{cases}$$

如果 $f(x,y)$ 在 (R) 上是一个可积函数, 则 (σ) 称为可求面积的域, 而积分

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dR$$

就定义为域 (σ) 的面积.

依照重积分的定义, S 就等于与 (σ) 有公共点的长方形 (R_{ij}) 的总面积, 而 s 就等于完全处于 (σ) 内的长方形 (R_{ij}) 的总面积, 而 $S-s\to 0$ 的意义便是与 (σ) 边界相交的长方形 (R_{ij}) 的总面积趋于零, 而这也就是 (σ) 可求面积的必要且充分的条件.

S 所趋的极限我们也称为 (σ) 的外面积, 而 s 所趋的极限称为 (σ) 的内面积, 因此, 外面积与内面积相等也是一域 (σ) 可求面积的必要且充分的条件.

如果 (σ) 的边界是可度长的, 而且长度是有限的曲线, 则 (σ) 是可求面积的. 因此, 正方形 (任意位置的正方形), 圆, 椭圆等都是可求面积的图形. 但是必须指出, 我

们并没有证明, 现在所定义的面积并不因坐标系的选择而变化, 即如: 一个斜放了的单位正方形的面积是否也等于 1, 我们并没有证明.

但是我们知道, 两个没有公共部分的区域如果都可求面积, 则这两个面积的和也就等于这两个区域拼成的域的面积. 如果一个区域在另一个区域之内, 则前者面积不大于后者的面积.

为了要证明所定义的面积是和坐标系的选择无关, 我们先证明一个最简单的特例.

定理 1 *边平行于坐标轴的正方形绕原点旋转和平移后, 它的面积保持不变.*

证 正方形显然有平移不变的性质.

其次我们以原点为中心, 作一单位圆, 依 $x, y = \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots$ 作平行于 x, y 轴的网格. 命 I 代表完全在圆内的方块数, E 代表与圆有公共点的方块数, 则

$$qI < \text{圆面积} < qE,$$

此处 q 代表平行于 x, y 轴边长等于 $1/n$ 的正方形的面积, 并且已知

$$\text{圆面积} = \lim_{n\to\infty} q \cdot I = \lim_{n\to\infty} q \cdot E.$$

依中心旋转, 旋转后的这样方形的面积命之为 q', 则我们也有

$$q' \cdot I < \text{圆面积} < q' \cdot E,$$
$$\text{圆面积} = \lim_{n\to\infty} q' \cdot I = \lim_{n\to\infty} q' \cdot E.$$

命 $q/q' = \delta$, 则立刻得出 $\delta = 1$, 即正方形的面积不因旋转而变.

现在我们可以证明, 面积与坐标轴无关这一性质, 即证明, 先固定两条互相垂直的线, 平行于这两直线作网格, 这样得出的面积是不因选择原来的二线而变的. 实际上, 我们将证明更一般的定理.

定理 2 *把平面分为可求面积的区域 (Δv), 其中每一个区域的直径[①]都不超过某一数 d, 并且平面上任一个有界区域只与有限个这样的区域有公共点, 这样定义了较一般的网格. 我们考虑一个区域 (P), 都在 (P) 的内部的 (Δv) 区域的面积之和, 记为 $\mathscr{I}$, 那些与 (P) 有公共点的 Δv 区域的面积之和, 记为 $\mathscr{E}$, 如此则当 $d \to 0$ 时, $\mathscr{I}$ 趋向内面积, 而 $\mathscr{E}$ 趋于外面积.*

这说明了, 任意的网, 只要 $d \to 0$, 都可以用来量面积, 而且算出来的结果是一样.

证 如果 (Δv) 就是平行于两轴距离等于 d 的正方形的网所对应的 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{I}$ 用 E 及 I 表它们. 前已证明过 E 趋于外积分 A, 而 I 趋于内积分 a.

[①]有界区域的直径是指域内任两点的距离的上确界.

由 a 的定义, 对任一 $\varepsilon>0$, 可以有一种正方形的网, 使 $I>a-\varepsilon$, 命 λ 代表 (I) 的边界与 (P) 边界的距离 (即各取一点的最短的距离, 由于 (Δv) 是 P 的内点集, 而且 (Δv) 是闭的. 所以 $\lambda>0$), 如果取 $d<\frac{1}{2}\lambda$, 则与 (I) 有公共点的 (Δv) 一定位于 (P) 的内部, 同时 (I) 也在 $(\mathscr{T})$ 之中, 所以 (当 $d\to 0$ 时) $\mathscr{T}>a-\varepsilon$.

再证 $\mathscr{T}\leqslant a$, 取任一个 $(\mathscr{T})$, 命 λ' 代表 $(\mathscr{T})$ 的边界与 (P) 的边界的距离, 作出具有 $\delta=\frac{1}{2}\lambda'$ 为边长的正方形网格, 任何这样的与 $(\mathscr{T})$ 有公共点的正方形是由 (P) 的内点所组成的, 就是

$$\mathscr{T}\leqslant I\leqslant a.$$

由不等式 $a-\varepsilon<\mathscr{T}\leqslant a$ 及其中 ε 的任意性, 可知 $\mathscr{T}\to a$.

同法可证, 当 $d\to 0$ 时, $\mathscr{E}\to A$.

定理 3 *面积不因旋转而变化.*

这定理是定理 1 与定理 2 的推论.

§3. 重积分换坐标

重积分

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy$$

可以视为网格的面积 $\Delta x\Delta y$ 乘上在这网格中一点 (x,y) 的函数值 $f(x,y)$ 的总和的极限, 而 $dxdy$ 称为在笛卡儿坐标下的面积元素.

在极坐标中, 网格的面积 (图 46) 等于

$$\frac{1}{2}[(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\rho^2\Delta\theta]\doteq\rho\Delta\rho\Delta\theta$$

(略去高阶项), 所以 $\rho d\rho d\theta$ 也可以称为极坐标下的面积元素, 因而得出

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(\sigma)} F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta,$$

这里 $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

特别, 当 $f(x,y)=1$ 的情况, 有

$$\int_\alpha^\beta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho d\rho d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\rho_2^2-\rho_1^2)d\theta.$$

取 $\rho_2=\rho$ 及 $\rho_1=0$, 即得我们前所已知的极坐标求面积的公式.

更一般些, 依照

$$\varphi(x,y)=u,\quad \psi(x,y)=v \tag{1}$$

引进新变量 u 与 v 来代替 x 与 y, 并且假定由方程 (1) 可以解出

$$x=\varphi_1(u,v),\quad y=\psi_1(u,v), \tag{2}$$

而且成一一对应的关系.

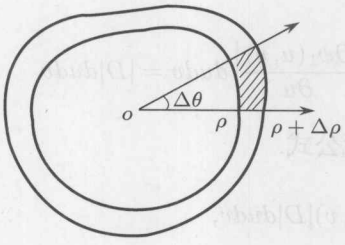


图 46

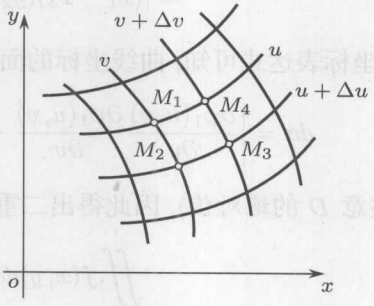


图 47

我们现在来确定用曲线坐标 (u,v) 时的面积元素 $d\sigma$.

我们考虑两对邻近的坐标曲线

$$\varphi(x,y)=u,\quad \varphi(x,y)=u+\Delta u,$$
$$\psi(x,y)=v,\quad \psi(x,y)=v+\Delta v,$$

计算这些曲线之中的面积, 也就是要求出 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积 (图 47).

不计高阶无穷小, 四点 M_1,M_2,M_3,M_4 坐标各等于:

$$x_1=\varphi_1(u,v),\quad y_1=\psi_1(u,v),$$

$$\begin{cases} x_2=\varphi_1(u+\Delta u,v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u, \\ y_2=\psi_1(u+\Delta u,v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\varphi_1(u+\Delta u,v+\Delta v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v, \\ y_3=\psi_1(u+\Delta u,v+\Delta v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v, \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} x_4=\varphi_1(u,v+\Delta v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v, \\ y_4=\varphi_1(u,v+\Delta v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v. \end{cases}$$

由这些公式直接推出

$$x_2-x_1=x_3-x_4,\quad y_2-y_1=y_3-y_4.$$

即得 $M_1M_2M_3M_4$ 是一个平行四边形, 这平行四边形的面积等于三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积的两倍; 因此可知

$$\begin{aligned} d\sigma &= |x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)| \\ &= |(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)|, \end{aligned}$$

代入坐标表达式可知, 曲线坐标的面积元素

$$d\sigma = \left|\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\right|dudv = |D|dudv$$

(请注意 D 的绝对值), 因此得出二重积分的换元公式.

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} F(u,v)|D|dudv,$$

此处 $F(u,v)$ 是 (u,v) 的函数, 由 $f(x,y)$ 经变换而得出的.

在变换 (1) 式中, 我们也可以把 u,v 看成为直角坐标, 这样便把 (x,y) 平面上的区域 (σ) 变为 (u,v) 平面上的区域 (σ'), 而积分公式改变成为

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{(\sigma')} F(u,v)|D|dudv.$$

由此也可以看出, 当区域 (σ) 变为区域 (σ') 时, $|D|$ 是 (σ) 中的无穷小面积与 (σ') 中对应的无穷小面积的比.

例 1 以极坐标为例.

如果把 (r,θ) 看成为直角坐标, 则由

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

得出一个由 (x,y) 平面到 (r,θ) 平面的变换, 但一长条

$$0 < r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

就变为 (x,y) 的原点除外的全平面, 而且其间有一一对应的关系 (图 48 及图 49). 但对应于原点 $x=0,y=0$, 在 (θ,r) 平面上是一条线段 $r=0, 0\leqslant\theta<2\pi$, 这变换的函数行列式等于

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

即得前所证明的极坐标面积元素 $rdrd\theta$.

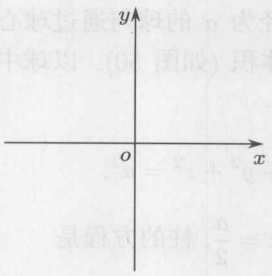


图 48

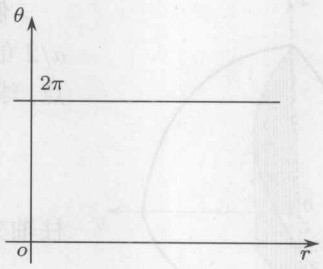


图 49

在 (x,y) 平面上的单位圆 $0<x^2+y^2\leqslant 1$, 经极坐标变换后变为

$$0<r\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

在 (r,θ) 平面上是一长方形.

例 2 再引进一变换

$$x+y=u,\quad y=vu,\quad [x=u(1-v)].$$

如此则

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x+y}.$$

函数行列式等于

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u.$$

现在考虑区域

$$x>0,\quad y>0,\quad x+y<1.$$

经变换后的情况, 即得

$$u=x+y<1,\quad u(1-v)>0,\quad uv>0.$$

化简得

$$1>u>0,\quad 1>v>0,$$

即 (x,y) 平面上的三角形 $x>0,y>0,x+y<1$, 经变换后得到 (u,v) 平面上的正方形, 而且是一一对应的. 因而

$$\iint\limits_{\substack{x>0\\ y>0\\ x+y<1}} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 F(u,v)ududv.$$

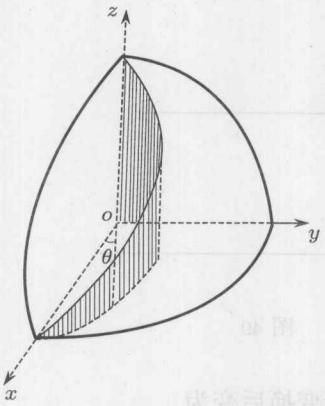


图 50

例 3 求界于半径为 a 的球与通过球心的半径为 $a/2$ 的正圆柱之间的体积 (如图 50). 以球中心作为原点, 球的方程是

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

柱轴交 x 轴, 即经过 $x=\frac{a}{2}$, 柱的方程是

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

即

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

所求的体积显然是第一个卦限中的体积的四倍.

积分的区域是圆柱的半个底, 它的界线由半圆周

$$r=a\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

及 x 轴上的线段所组成.

由 $z=\sqrt{a^2-r^2}$ 可知, 所求的体积等于

$$\begin{aligned}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\cdot rdr&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}a^3\left[\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

§4. 重积分的基本性质

1) 常数因子可由积分号下提出来, 即

$$\iint\limits_{(\sigma)}af(P)d\sigma=a\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma.$$

2) 函数的代数和的积分等于各项积分的代数和, 即

$$\iint\limits_{(\sigma)}[f(P)+g(P)]d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma+\iint\limits_{(\sigma)}g(P)d\sigma.$$

这两性质合并后得出, 对任二实数 a 与 b 常有线性关系

$$\iint\limits_{(\sigma)}(af(P)+bg(P))d\sigma = a\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma + b\iint\limits_{(\sigma)}g(P)d\sigma.$$

3) 把区域 (σ) 分为有限多个部分区域, 且它们没有公共内点, 则过整个区域的积分等于过各区域的积分的和.

例如, 把 (σ) 分为 (σ_1) 与 (σ_2), 且 (σ_1) 与 (σ_2) 没有公共内点, 则

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)}f(P)d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)}f(P)d\sigma$$

(可加性).

4) 如果在 (σ) 上, $f(P)\leqslant g(P)$, 则

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma \leqslant \iint\limits_{(\sigma)}g(P)d\sigma.$$

特别是

$$\left|\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_{(\sigma)}|f(P)|d\sigma.$$

5) 如果 $\varphi(P)$ 在 (σ) 上不变号, 则有下面的中值公式, 即在 (σ) 中有某一点 P_0, 使

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(P)\varphi(P)d\sigma = f(P_0)\iint\limits_{(\sigma)}\varphi(P)d\sigma$$

($f(P)$ 是连续函数).

特别, 当 $\varphi(P)=1$ 时有

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma = f(P_0)\sigma,$$

此处 σ 是区域 (σ) 的面积.

多重积分的瑕积分 (或称反常积分), 我们不再详细讨论 (仅于 §8 中举列说明), 我们仅请大家注意二点, 1. 如果因为函数值而反常, 则先作小域包有那些反常点, 然后再看当域变小时的极限; 2. 如果反常是由于域的无穷. 则先作不反常的域, 然后命不反常的域趋于该域.

例如: 在求

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

时, 可以从

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N}f(x,y)dxdy$$

出发, 但现在的可能性比一个变量的情况多得多了, 因为我们还可以考虑

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty\\M_1\to\infty\\M_2\to\infty}}\int_{-N_1}^{N_2}\int_{-M_1}^{M_2}f(x,y)dxdy \quad 及 \quad \lim_{N\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant N^2}f(x,y)dxdy$$

等等.

例 1 考虑定积分

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}},\quad \alpha\neq 1,$$

此处 (σ) 是整个平面, 先考虑积分

$$I(R)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$$

换极坐标得

$$I(R)=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^{\alpha}}=\frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(1+R^2)^{\alpha-1}}-1\right]$$

若 $\alpha<1$, 则当 $R\to\infty$ 时, 右边无限上升, 所以原积分发散: 若 $\alpha>1$, 则 $\lim\limits_{R\to\infty}I(R)=\dfrac{\pi}{\alpha-1}$, 所以证明这积分的收敛性.

例 2 由于

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\iint\limits_{(\sigma)}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta=-\pi e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty}=\pi,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

例 3 考虑重积分

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}\frac{ydxdy}{\sqrt{x}}.$$

我们先求

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}\int_0^1 ydy=1-\sqrt{\varepsilon}.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, 得原积分的数值为 1.

§5. 三重积分

抽象的三重 (及多重) 积分的定义与性质不难由与前相仿的方法获得.

以上所讲的二重积分, 固然可以理解为体积, 但也可以理解为分布在平面区域 (σ) 上的质量. 如果区域 $\Delta\sigma$ 上的总质量等于 Δm, 则当 $\Delta\sigma$ 趋于一点 P 时,

$$\lim_{\Delta\sigma\to P}\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}=\rho(P)$$

存在, 那么, 我们称 $\rho(P)$ 是 P 点的密度, (σ) 上全部质量可以写成为渐近式

$$m\sim\sum_{(\sigma)}\rho(P)\Delta\sigma.$$

当网眼无穷精密时, 即得这物质的总质量等于

$$\iint_{(\sigma)}\rho(P)d\sigma.$$

我们可以用相似的方法来研究空间的质量问题.

命 $\rho(x,y,z)$ 是该物质分布的密度, 则在域 (v) 上的总质量等于

$$\iiint_{(v)}\rho(x,y,z)dv,$$

它是

$$\sum_{(v)}\rho(x,y,z)\Delta v$$

的极限, 当网眼无穷精密时的极限; 这便是三重积分. 这样积分的计算可以分为三次一重积分算出 (关于可求积分及可以由迭次积分求出的条件, 一如以前所说过的).

在实际计算

$$\iiint_{(v)}f(x,y,z)dv$$

时, 我们用以下的步骤: 首先把区域 (v) 的界面 (s) 投影在 (x,y) 平面上, 得区域 (σ_{xy}), 再通过 (σ_{xy}) 上的一点作一平行于 z 轴的直线, 穿入与穿出区域 (v) 的纵坐标以 z_1 与 z_2 来表它. 作单积分 (把 x,y 看为常数)

$$F(x,y)=\int_{z_1}^{z_2}f(x,y,z)dz.$$

这单积分对 (σ_{xy}) 中的点定义, 然后再求二重积分

$$\iint_{(\sigma_{xy})}F(x,y)d\sigma_{xy}.$$

这就是三重积分的数值.

以上的积分还可以化为迭次单积分, 即得

$$\iiint_{(v)} f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz.$$

这也可以写成为

$$\iiint_{(v)} f(x,y,z)dxdydz$$

的形式, 而 $dxdydz$ 也称为直角坐标的单位元素, 也就是以 dx, dy, dz 为边长的无穷小长方体的体积.

注意 以上的讨论是指平行于 z 轴的直线与 (v) 的交点不多于 2 的情况, 但是对一般的情况的研究, 并无特殊困难, 只须分割成块, 逐一求积分, 再求总和即得.

用同样的方法, 我们可以得出换变量的公式

$$\iiint_{(v)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{(v)} F(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw,$$

此处 $F(u,v,w)$ 是经变换由 $f(x,y,z)$ 变出来的, 而 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ 是该变换的函数行列式.

在换变量的时候, 我们必须注意, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ 在积分区域内是不变号的.

特别有

1) 柱坐标

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

的变换的函数行列式等于

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

从而有

$$\iiint_{(v)} f(x,y,z)dv = \iiint_{(v)} F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$$

这里 $F(r,\theta,z)$ 是 r,θ,z 的函数, 它是由 $f(x,y,z)$ 经坐标变换而得到的.

2) 球坐标

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \quad z = \rho\cos\theta.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta,$$

所以有球坐标的积分公式

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{(v)} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi,$$

这里 $F(\rho,\theta,\varphi)$ 是 ρ,θ,φ 的函数, 它是由 $f(x,y,z)$ 经坐标变换而得到的.

例 1 求充满有不均匀物质的球段的质量, 其密度正比于到这球段的底的距离 (如图 51).

以球心作为原点, 用 a 记球的半径, h 记球段的高, r_0 记球段的底半径.

在柱坐标系中球面的方程是

$$r^2+z^2=a^2.$$

密度的改变率由下面公式来表达:

$$f(r,\varphi,z)=b+cz,$$

其中 b 与 c 是已知的常数.

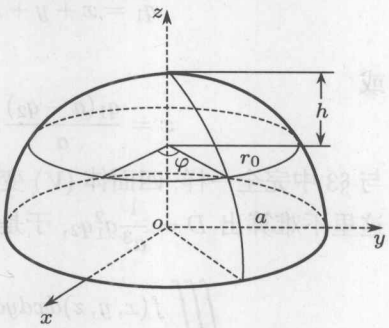


图 51

应用 1) 的公式得到

$$m=\iiint\limits_{(v)}(b+cz)rdrd\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0}rdr\int_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}}(b+cz)dz$$

$$=2\pi\int_0^{r_0}\left[bz+\frac{c}{z}z^2\right]_{z=a-h}^{z=\sqrt{a^2-r^2}}rdr.$$

代入 z 的值再求积分, 就得到

$$m=bv+c\pi\frac{r_0^4}{4},$$

其中 v 是这球段的容积.

例 2 求一个密度不均匀的球的质量, 设在同心球层上密度相同. 在这情形下, 依照条件, 可以算作密度只依赖于 ρ 而由函数 $f(\rho)$ 来表达, 这就给出

$$m=\iiint\limits_{(V)}f(\rho)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^a f(\rho)\rho^2d\rho$$

$$=4\pi\int_0^a f(\rho)\rho^2d\rho.$$

若密度是常数而等于 1, 就得到球的容积的表达式

$$V=4\pi\int_0^a\rho^2d\rho=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

例 3 设有界于坐标平面与平面 $x+y+z=a$ 之间的四面体 (V), 它由下列的不等式来确定:

$$x>0;\quad y>0;\quad z>0;\quad x+y+z<a.$$

引用新的变量

$$x+y+z=q_1;\quad a(y+z)=q_1q_2;\quad a^2z=q_1q_2q_3.$$

我们把 (q_1,q_2,q_3) 解释作为直角坐标. 由上面的公式推知:

$$q_1=x+y+z;\quad q_2=\frac{a(y+z)}{x+y+z};\quad q_3=\frac{az}{y+z}$$

或

$$x=\frac{q_1(a-q_2)}{a};\quad y=\frac{q_1q_2(a-q_3)}{a^2};\quad z=\frac{q_1q_2q_3}{a^2}.$$

与 §3 中完全一样, 四面体 (V) 变换为立方体 $(V_1):0<q_1<a;0<q_2<a;0<q_3<a$. 这里不难算出 $D=\dfrac{1}{a^3}q_1^2q_2$, 于是变换公式就是

$$\iiint\limits_{(V)}f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V_1)}F(q_1,q_2,q_3)\frac{1}{a^3}q_1^2q_2dq_1dq_2dq_3,$$

这里 $F(q_1,q_2,q_3)$ 是由 $f(x,y,z)$ 经上述的坐标变换而得到的; 或者, 如果确定出积分限的话,

$$\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{a-x-y}f(x,y,z)dz=\frac{1}{a^3}\int_0^a q_1^2dq_1\int_0^a q_2dq_2\int_0^a F(q_1,q_2,q_3)dq_3.$$

§6. 矩

现在考虑有几个质点

$$M_1,M_2,\cdots,M_n$$

的质点系, 它们的质量各等于 $m_1,m_2,\cdots,m_n$, 系中每质点到平面 (Δ), 或线 (l) 或点 (P) 的距离的 k 次方幂与该点的质量的乘积之和

$$\sum_{i=1}^n r_i^km_i,$$

称为这个质点系对 (Δ), 对 (l) 或对点 (P) 的 k 级矩.

零级矩就是这个系统的总质量

$$m=\sum_{i=1}^n m_i.$$

一级矩就是这个系对 (Δ), 对 (l) 或对 (P) 的静力矩, 而

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{m},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{m},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{m},$$

称为这个系的重心. 二级矩则称为惯性矩. 例如,

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2m_i,\quad \sum_{i=1}^{n}(y_i^2+z_i^2)m_i,\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)m_i$$

分别表示对 (y,z) 平面, x 轴及原点的惯性矩, 而

$$\sum_{i=1}^{n}y_iz_im_i$$

表示对 x 轴的离心矩.

如果考虑的不是有限多个点系, 而是连续分布的质点, 那么依照质点是按直线, 平面或空间的分布, 分别将上面的和换为单重, 二重或三重积分. 而以点 M 的密度 $f(M)$ 乘以单位长度, 单位面积或单位体积来代替因子 m_i.

例如, 三维空间区间 (v) 关于原点的惯性矩为

$$\iiint_{(v)}(x^2+y^2+z^2)f(M)dv.$$

例 1 求均匀球底锥的重心, 如图 52 所示, 重心落在轴上, 这时只须求

$$z_g=\frac{\iiint_{(V)}zdv}{V}.$$

这里我们有

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\sin\theta d\theta\int_0^{a}\rho^2d\rho=\frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha),\\ \iiint_{(V)}zdV&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\sin\theta d\theta\int_0^{a}\rho\cos\theta\rho^2d\rho\\ &=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{a}\rho^3d\rho=\frac{\pi}{8}a^4(1-\cos2\alpha),\\ z_g&=\frac{3}{16}a\frac{1-\cos2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)=\frac{3}{8}(2a-h),\end{aligned}$$

其中 a 是球半径.

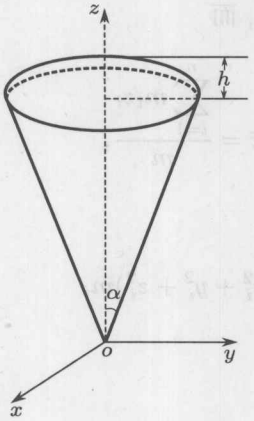


图 52

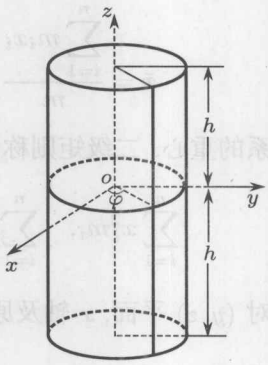


图 53

例 2 若重心与坐标原点重合, 则所有的静力矩等于零, 这可以由下列关系式直接推出来:

$$\iiint\limits_{(V)} xf dV = mx_g, \quad \iiint\limits_{(V)} yf dV = my_g, \quad \iiint\limits_{(V)} zf dV = mz_g.$$

例 3 求均匀正圆柱体 (如图 53) 对于圆柱的轴以及它的正中断面的直径的惯性矩. 密度算作是常量且等于 f_0, 我们有

$$J_z = f_0 \iiint\limits_{(V)} r^3 dr d\varphi dz = 2f_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr \int_0^h dz = \pi a^4 h f_0 = m\frac{a^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} J_x &= f_0 \iiint\limits_{(V)} (z^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi dz \\ &= 2f_0 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (z^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr \\ &= 2f_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z^2 dz \int_0^a r dr + 2f_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^h dz \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{2}{3}\pi h^3 a^2 f_0 + \frac{\pi}{2} h a^4 f_0 = m\left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right). \end{aligned}$$

其中 $2h$ 是柱体的高, a 是它的底半径, m 是它的质量.

例 4 求均匀椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的惯性矩.

$$J_{xy} = f_0 \iiint\limits_{(V)} z^2 dxdydz = f_0 \int_{-c}^{+c} z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz$$
$$= 2\pi ab f_0 \left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{5}\right) = m\frac{1}{5}c^2,$$

此处 m 为椭球体的质量. 置换字母, 不难求出:

$$J_{yz} = m \cdot \frac{1}{5}a^2; \quad J_{zx} = m \cdot \frac{1}{5}b^2,$$
$$J_x = J_{xy} + J_{xz} = \frac{m}{5}(b^2 + c^2),$$
$$J_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2); \quad J_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2),$$
$$J_0 = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx} = \frac{m}{5}(a^2 + b^2 + c^2).$$

例 5 求刚体绕 (δ) 轴转动时的动能.

我们知道, 当物体以角速度 ω 绕 (δ) 转动时, 物体每一点速度 $v = \omega r_\delta$ (r_δ 为这点到转动轴的距离), 把物体分成质量单元 Δm. 以 ΔT 表对应于该单元的功能, 于是就有

$$T = \sum \Delta T.$$

由于 Δm 的微小性, 可以看成它的全部质量集中于它的任何一点 M, 这时单元 Δm 的动能 ΔT 就等于

$$\Delta T = \frac{1}{2}v^2 \Delta m = \frac{1}{2}\omega^2 r_\delta^2 f(M)\Delta V.$$

因此

$$T = \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{2}\omega^2 r_\delta^2 f(M) dV = \frac{1}{2}\omega^2 J_\delta,$$

其中

$$J_\delta = \iiint\limits_{(v)} r_\delta^2 f(M) dV$$

是物体对于转动轴 (δ) 的惯性矩.

§7. 曲面的面积

我们假定曲面 S 的方程是

$$z = f(x, y),$$

且命

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

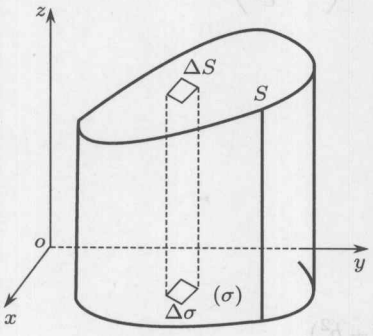


图 54

曲面 (S) 在 (x,y) 平面上的射影是区域 (σ). 我们把区域进行分割, 命 $\Delta\sigma$ 是其上的一小块, 并且假定它是 S 上的一小块 ΔS 的投影. 我们研究 $\Delta\sigma$ 与 ΔS 的关系 (如图 54). 在 $\Delta\sigma$ 中取一点 (x,y), 在 S 上有一点 $(x,y,f(x,y))$, 在这点的切平面是

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=Z-z.$$

这切平面与 (x,y) 平面的夹角命之为 ν, 则

$$\cos\nu=\frac{1}{\mp\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

命 $\Delta S'$ 是切平面上的一块, 它的投影是 $\Delta\sigma$, 所以

$$\Delta\sigma=\Delta S'\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

如果我们定义 S 的面积为这样的 $\Delta S'$ 的和的极限, 则

$$S=\lim\sum\Delta S'=\lim\sum_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\Delta\sigma.$$

因而得出

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy.$$

积分号下表达式称为曲面 S 的面积元素, 以

$$dS=\sqrt{1+p^2+q^2}d\sigma_{xy}$$

表它.

在这些公式里, 假定 p 与 q 是 x,y 的连续函数.

这公式的缺点在于: 定义是与 (x,y) 平面有关的, 换言之, 如果另选一组坐标, 这数值变否?

又如果通过 σ_{xy} 的一点平行于 z 轴的直线, 交曲面于一点以上, 可以把曲面切开来算.

例 1 计算半径为 a, 中心在原点的球面, 在第一卦限中, 被圆柱

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

截取的部分的面积 (图 55). 由球面方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

有

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

$$p=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z};\quad q=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{y}{z};$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}=\frac{a}{z};$$

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{a}{z}rdrd\varphi=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sqrt{a^2-r^2})\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

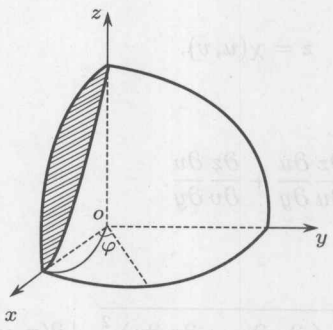


图 55

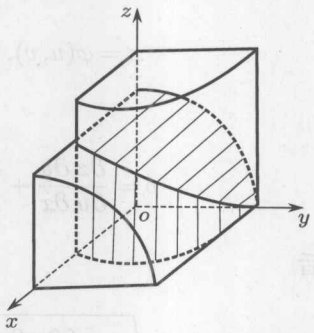


图 56

例 2 求柱面

$$x^2+y^2=a^2$$

被柱面

$$y^2+z^2=a^2$$

截下的一部分的面积 (如图 56).

本题以 y 与 z 作为自变量比较方便. 图上画出的面积等于所考虑的全部面积的 $\frac{1}{8}$, 所以就有

$$S=8\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dydz,$$

其中

$$p=\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{x};\quad q=\frac{\partial x}{\partial z}=0;$$
$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{a}{x}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}S&=8a\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=8a\int_0^a \arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}dz\\&=8a\left[z\arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\Big|_{z=0}^{z=a}+\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}dz\right]\\&=-8a\sqrt{a^2-z^2}\Big|_{z=0}^{z=a}=8a^2.\end{aligned}$$

我们现在研究由参变量表出的曲面的面积公式. 假定

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v).$$

如此则

$$p=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

换变量后

$$\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}\times\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

由于

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial v}&-\dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm]-\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial x}{\partial u}\end{pmatrix}\Bigg/\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,$$

可知

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,\quad\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,\quad\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.$$

因此

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$
$$+\left(-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$$
$$=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$
$$-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

命

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

则曲面积的公式变为

$$\iint_s\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

所可注意者, $EG-F^2$ 是微分二次型

$$dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

的判别式.

§8. 物质对一点的引力

假定该点为 $c(x,y,z)$, 它的质量等于 1, 物质为 v, 我们现在考虑这一物质 v 对 c 点的引力.

把物质 v 分为小块, 命 Δm 为其中一块的质量, 在这一块中任取一点 $M(\xi,\eta,\zeta)$, 命 r 代表 c 与 M 的距离, 即

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

假定这一块的质量集中 M 点, 则这一块与点 c 的引力大小等于

$$\frac{\Delta m}{r^2}$$

(我们假定引力常数等于 1), 这力成一向量, 它在 x, y, z 三轴上的投影等于

$$\frac{\Delta m}{r^2}\frac{\xi - x}{r}, \quad \frac{\Delta m}{r^2}\frac{\eta - y}{r}, \quad \frac{\Delta m}{r^2}\frac{\zeta - z}{r}.$$

所以全部引力的三轴投影的近似式是

$$X \sim \sum \frac{\xi - x}{r^3}\Delta m, \quad Y \sim \sum \frac{\eta - y}{r^3}\Delta m, \quad Z \sim \sum \frac{\zeta - z}{r^3}\Delta m.$$

命 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 表物质在 M 点的密度, 所以 $\Delta m \sim \mu \Delta v$, 当分法无限精密时, 得极限

$$X = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\xi - x}{r^3} dv, \quad Y = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\eta - y}{r^3} dv, \quad Z = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\zeta - z}{r^3} dv. \tag{1}$$

积分中 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 过物质所占有的地位 v, 而 X, Y, Z 是 x, y, z 的函数.

这三个积分是重瑕积分的例子, 当然, 如果 (x, y, z) 在 v 外, 它们并不是瑕积分, 但当 (x, y, z) 在 v 中, 被积函数有时变为 ∞, 因而是瑕积分了. 当然从物理性质我们知道这瑕积分是存在的, 实质上, 我们也可用数学严格证明如下: 假定 μ_0 是函数 $\mu(x, y, z)$ 在 v 上的上界, 如此

$$\left|\mu \frac{\xi - x}{r^3}\right| \leqslant \mu_0 \frac{1}{r^2}.$$

我们考虑

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{1}{r^2} dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\substack{(v) \\ (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 > \varepsilon^2}} \frac{dv}{r^2},$$

用以 (x, y, z) 为中心的球坐标:

$$\xi = x + \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad \eta = y + \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad \zeta = z + \rho \cos\theta,$$

则得

$$\iiint\limits_{\substack{(v) \\ (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 > \varepsilon^2}} \frac{dv}{r^2} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\varepsilon}^{f(\theta,\varphi)} \sin\theta d\rho,$$

这里 $r = f(\theta, \varphi)$ 是物质 v 的表面的球坐标方程. 当 $\varepsilon \to 0$ 时极限显然存在, 也就是表达 X, Y, Z 的瑕积分都是存在的.

由于

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - \xi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - \eta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - \zeta}{r},$$

及

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{x-\xi}{r}\right)=\frac{\xi-x}{r^3},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\eta-y}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\zeta-z}{r^3},$$

所以关于 X,Y,Z 的积分可以改写成为

$$X=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv,$$
$$Y=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dv,$$
$$Z=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dv. \tag{2}$$

引进物质在 c 点的势量的积分

$$U=\iiint\limits_{(v)}\frac{\mu dv}{r} \tag{3}$$

如果允许积分号下求微分可以立即得

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4}$$

可以证明, 当 $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ 连续时, 在整个空间积分 X,Y,Z 是 (x,y,z) 的连续函数, U 是连续函数而且有一阶偏微商, 并可由 (4) 式表出来.

如果允许我们再一次积分号下求微商, 则得

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv,$$
$$\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv,$$
$$\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv. \tag{5}$$

这些公式仅当点 $c(x,y,z)$ 在吸引物质之外时正确, 就是在 (v) 之外时正确. 如果 c 在 (v) 内, 则由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\xi-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},$$

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 的积分表达式不再收敛, 即势量 U 的二阶微商不能在积分号下求微商两次得之.

由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]}{r^5}-\frac{3}{r^3}=0,$$

所以当 c 在 (v) 之外, U 适合于

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{6}$$

这方程称为 Laplace 方程. 所以, 占有容积的物质的势量, 在出现于这物质之外的点 $c(x,y,z)$ 满足 Laplace 方程.

我们再研究点 $c(x,y,z)$ 在 v 内的情况.

取一密度均匀 (μ 是常数) 及半径为 a. 球心在原点的球, 取 oc 为 z 轴, 取球坐标 (ρ,θ,φ) 得

$$U=\mu\iiint_{(v)}\frac{dv}{r}=\mu\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho^2\sin\theta}{r}d\varphi d\theta d\rho, \tag{7}$$

此处显然有

$$r^2=\rho^2+z^2-2\rho z\cos\theta.$$

先求对 θ 的积分

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{r}.$$

在这积分中把 ρ 与 φ 视为常数, 把变量 r 代替 θ, 则得

$$rdr=\rho z\sin\theta d\theta,\quad \frac{\sin\theta d\theta}{r}=\frac{dr}{\rho z}.$$

分两种情况来定出积分的区域. 若 $z>\rho$, 则当 θ 由 0 变到 π 时, r 由 $z-\rho$ 变到 $z+\rho$; 若 $z<\rho$, 则 r 由 $\rho-z$ 变到 $\rho+z$. 所以

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{r}=\begin{cases}\displaystyle\int_{z-\rho}^{z+\rho}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{z} & (z>\rho)\\ \displaystyle\int_{\rho-z}^{\rho+z}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{\rho} & (z<\rho).\end{cases}$$

代入 (7) 式中, 而分两种情形来讨论.

首先是 c 在球外或球表面上, 这是 $a\leqslant z$, 于是所有的区间 $(0,a)$ 上 ρ 的值 $\leqslant z$, 所以有

$$U=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}\frac{2\rho^2 d\rho}{z}=\frac{4\pi a^3\mu}{3z}=\frac{m}{z}, \tag{8}$$

其中 m 是球的全部质量.

再讨论 c 在球内的情况: 把这区间 $(0,a)$ 分为两份: $(0,z)$ 与 (z,a), 于是得

$$U=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\int_0^z\frac{2\rho^2d\rho}{z}+\int_z^a\frac{2\rho^2d\rho}{\rho}\right]=2\pi\mu\left(a^2-\frac{1}{3}z^2\right),\tag{9}$$

当 $z=a$ 时, 即 c 在球表面上时, 两公式所给的数值相等, 所以 U 是连续函数.

再来计算引力, 这引力是沿 z 轴方向的, 所以仅需计算

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

当 c 在球外, 则

$$Z=-\frac{m}{z^2},\tag{10}$$

而 c 在球内时, 则

$$Z=-\frac{4}{3}\pi\mu z.\tag{11}$$

当 $z=a$ 时, (10) 式与 (11) 式是一致的, 所以引力 Z 有连续性.

公式 (8), (10), (11) 说明: 均匀球对外一点的势量与引力可以由集中球的全部质量于球心得来, 对于球内一点的引力与被引点到球心的距离成比例.

以上是为了计算简单起见, 而取了特殊的坐标轴, 即 z 轴就是 oc 的方向, 在以上的公式中, z 是点 c 与球心的距离. 在以 o 为原点的任一坐标系中, 以 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 代表 z, 如此

$$U=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad(c\text{ 在球外}),$$

$$U=2\pi\mu\left[a^2-\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\right]\quad(c\text{ 在球内}).$$

前者适合 Laplace 方程是显而易见的, 而后者适合于

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=-4\pi\mu\quad(c\text{ 在球内}).$$

将来我们将看到, 对任何密度的容积, 如果 c 在 (v) 内, 则适合此方程.

再者, 假定吸引的物在一曲面 S 上, 具有密度 $\mu(M)$, 像上面一样, 用 $c(x,y,z)$ 表被吸引的质量为 1 的质点, r 表 cM 的距离, 我们有势量

$$U=\iint\limits_{(S)}\frac{\mu(M)}{r}dS$$

及引力的投影:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

$$Y=\frac{\partial U}{\partial y}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dS,$$

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

这样的势量称为单层势量. 因这例中 c 取在曲面 S 之外, 所以所有的积分都是正常的.

补 充

§9. 求面积

我们可以借助于求积仪以求面积. 如果不用求积仪, 我们介绍以下两个简而易行的方法.

1. 平行线法

作一批等矩离的平行线, 假定距离是 d. 这一批平行线被图形所截取的长度是 $l_1, l_2, \cdots$. 这些长度的总和乘以 d 就可以用来作为图 57 的面积. 在这里一条的面积是用 $\frac{1}{2}(l_1+l_2)d$ 来计算的. 这实际上就是梯形公式的应用.

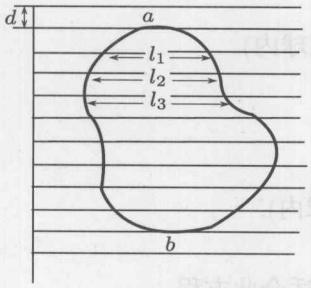


图 57

当然还可以用 $\frac{1}{3}(l_1+4l_2+l_3)d$ 来代表两条的面积. 这对应于 Simpson 公式.

如果预先具备一张印有等距离 d 的平行线的透明纸, 那就更方便了, 将透明纸蒙在图纸上, 使透明纸的某两条线切于欲求面积的图形的边界. 例如图 57 中切于 a 点与 b 点, 我们就可以在透明纸的上面, 用尺或曲线仪等来量这一批平行线被图形截取的线段的长度了.

为了减少误差, 把平行线法按几种不同的方向, 算出结果, 再把这些结果求平均值, 这样就能得到较为可靠的结果.

当面积不大, 而边界又相当复杂时, 用这一方法是不够好的.

这一方法可以用来求图形的重心. 作平行于 oy 轴的一批等距离 d 的直线, 这些直线将图形截成 n 条 (图 58). 用上面的方法求出每一条的面积, 设它们的面积依次

为 $s_1, s_2, \cdots, s_n$. 设 s_i 所在的条带的中线至 oy 轴的距离为 x_i, 则图形的重心至 oy 轴的距离等于

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}.$$

同法可以求出图形的重心至 ox 轴的距离 y_0.

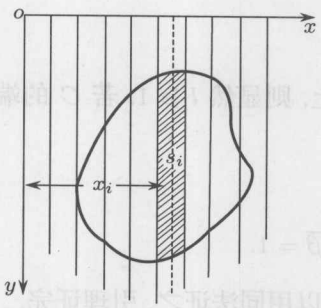


图 58

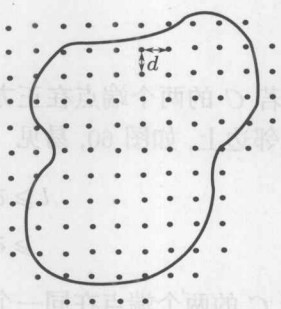


图 59

2. 方格法

打以边长为 d 的方格, 格子点落在图形内的个数乘以 d^2, 就可以用来作为面积的近似值 (图 59). 我们当然也可以在图形上按等距离摆上一批棋子, 然后计算一下棋子数, 便可以得出面积.

如果预先具备一张印有边长为 d 的正方形角点的透明纸, 就更加方便了, 将透明纸蒙在图形上, 然后数一下落在图中的点数即可.

为了减少误差, 可以按不同的方向, 计算几次, 然后取其算术平均.

这个方法虽然简单, 但其精确度往往是比较高的, 所以用得也颇广泛, 用这个方法算出的面积的误差, 与图形的周界有关, 在平面上引入直角坐标, 我们有以下定理.

定理 1 (M. V. Jarnik) *命 l 表示一可求长的简单的闭曲线的长度, 而以 A 表示曲线所围成的区域的面积, N 为曲线内部所含的整点的个数, 则当 $l \geqslant 1$ 时*

$$|A - N| < l.$$

所谓整点是指坐标为整数的点.

在证明之前, 先证下面两个引理.

引理 1 在边长为 1 的正方形中, 任作一连续曲线 C, C 的两个端点在正方形的周界上, 若 C 与正方形的两对角线相交, 则曲线 C 的长度 l 必不小于 1.

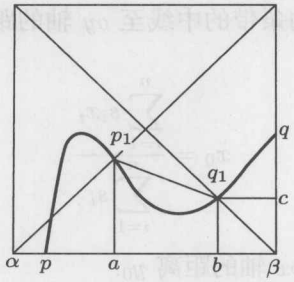


图 60

证 若 C 的两个端点在正方形的一对对边上, 则显然 $l \geqslant 1$. 若 C 的端点在正方形的二邻边上, 如图 60, 易见

$$\begin{aligned} l &\geqslant \overline{ap_1} + \overline{p_1q_1} + \overline{q_1c} \\ &\geqslant \overline{\alpha a} + \overline{ab} + \overline{b\beta} = \overline{\alpha\beta} = 1. \end{aligned}$$

至于 C 的两个端点在同一个边上的情形, 可以用同法证之. 引理证完.

引理 2 在边长为 1 的正方形中, 任作一不通过正方形中心的连续曲线 C, C 的两端点在正方形的周界上. 曲线 C 将正方形分为两部分, 命 Δ 为其中不包含正方形中心的一部分, 则 Δ 的面积必小于 C 的长度.

证 今分别考虑以下各种情形 (如图 61).

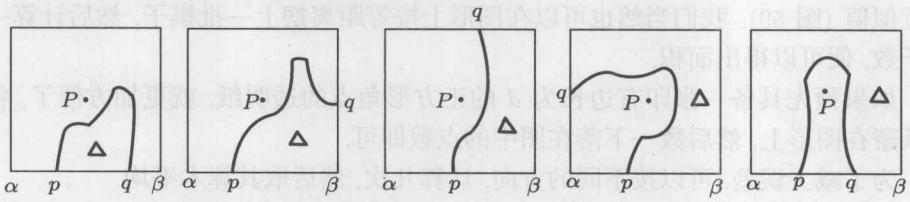


图 61

命 p, q 表示曲线 C 的端点, P 为正方形的中心, A, l 各表 Δ 的面积及曲线 C 的长度, 则在前两种情形中, 从 C 上任何一点到直线 $\alpha\beta$ 的距离必不能大于 l, 故 Δ 完全落在一个边长为 1 与 l 的矩形中, 因此 $A < l$. 在后三种情形中, 由引理 1 可知 $l \geqslant 1$, 所以有 $A < 1 \leqslant l$. 故得引理.

定理 1 的证明 以 I 表示曲线所围成的区域. 在平面上作网, 以直线

$$x = m + \frac{1}{2}, \quad y = n + \frac{1}{2} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

为经纬, 则网眼是边长为 1 的正方形; 又各正方形的中心就是整点. 以 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 表示所有这些小正方形之含有 I 的一部分周界者, 而以 C_i 表示有长曲线之在 Q_i 中

的部分, 以 Q_i 表示 Q_i 与 I 的共通部分, 而定义

$$N_i=\begin{cases}1, & \text{若 } Q_i \text{ 中有整点},\\ 0, & \text{若 } Q_i \text{ 中无整点}.\end{cases}$$

又以 A_i 表示 Q_i 的面积, I_i 表示 C_i 的长度, 于是若能证明

$$|A_i-N_i|<l_i,$$

便得定理.

首先我们考虑整个 I 都在某一 Q 中的情形, 因为 $l\geqslant 1$, 故易见定理成立. 因此我们可以不失普遍性地假定 I 并不整个地处在某一 Q 中, 此时 C_i 为若干段曲线之和, 而这些曲线段又将 Q_i 分为若干个部分 $D_i^{(s)}$.

若整点不在任何 $D_i^{(s)}$ 中, 亦即当整点在 C_i 上时, 有 $N_i=0, 0<A_i<1$, 此时 C_i 过正方形的中心. 由引理 1 有 $l_i\geqslant 1$. 故得定理.

若整点在某一 $D_i^{(s)}$ 中, 以 $A_i^{(s)}$ 表示 $D_i^{(s)}$ 的面积, 若 $D_i^{(s)}$ 不在 I 中, 此时 $N_i=0, A_i\leqslant 1-A_i^{(s)}$; 若 $D_i^{(s)}$ 在 I 中, 则 $N_i=1$, 而 $1-A_i\leqslant 1-A_i^{(s)}$, 而面积 $(1-A_i^{(s)})$ 所对应的区域不含正方形的中心, 故由引理 2 即得

$$1-A_i^{(s)}<l_i,$$

于是得到定理.

§10. 求容积

我们常常会碰到计算容积的问题, 例如求水库容积, 估算矿藏储量等等, 以下介绍一些常用的方法.

1. 简易方法

这一段我们介绍一些不借助于等高线图来估计容积的方法, 例如计算某一水库的容积. 我们一共测得水库 N 个点的深度 $h_1, h_2, \cdots, h_N$, 又测出水库的水平面的面积 B. 则它的容积 V 可以用 B 乘以平均高度来计算, 即

$$V=B\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}h_i}{N}. \tag{1}$$

有时公式 (1) 需要作适当的修正, 例如我们一共测得了 N 个点的深度, 其中有 K 个点位于水库边上 (如图 62), 那么就用

$$V=B\frac{\sum h-\frac{1}{2}\sum h_k}{(N-K)+\frac{1}{2}K}=B\frac{2\sum h-\sum h_k}{2N-K} \tag{2}$$

来计算容积, 此处 $\sum h$ 为全部 N 个点的深度之和, $\sum h_k$ 为沿着水库边上各点的深度之和.

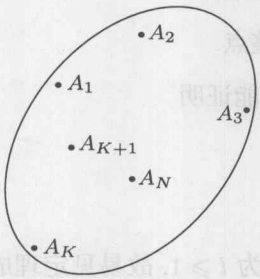


图 62

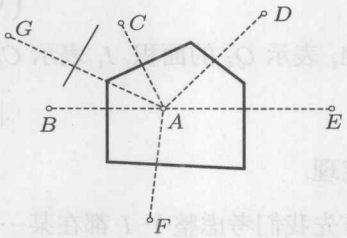


图 63

这种修正的想法在于认为水库边上的点的影响范围只有中间的点的一半.

更精确地考虑到每一点的影响范围问题, 在估算矿藏储量时, 有下面的 Болдырев 最近地区法.

将每个勘探点与其相邻近的勘探点用直线连接起来, 这些直线段的中垂线相交而成的多边形就叫做这个勘探点的影响圈. 圈内任一点至该勘探点的距离都比至其他勘探点的距离近, 如图 63 所示. 这样就把矿藏的水平投影面积划分成了若干个多边形之和, 如图 64 所示. 容积 V 就可以用下式

$$V=\sum_{i=1}^{N} B_i h_i \tag{3}$$

来计算, 此处 h_i 为第 i 个勘探点所采得的厚度, 而 B_i 则为第 i 个勘探点的影响圈的面积.

为了简易地划出诸线段的中点和中垂线起见, 常常采用图 65 所示的模板.

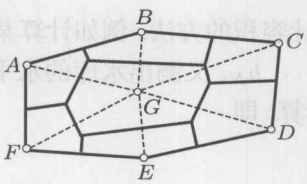


图 64

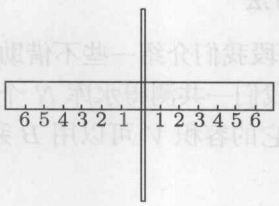


图 65

2. 借助于等高线图的方法

假定没有修水库前, 我们有一幅画了等高线的地形图, 高程差是 h, 地图上的一圈, 实际上便是一定高程的水平面 (图 66). 下面我们介绍几种借助于等高线图来估计容积的方法.

(i) Соболевский 体积方格法. 在等高线图上, 打上边长为 d 的方格. 利用等高线图估计一下, 该方格中心的深度, 例如图 67 中有限影的一格的中心的深度为 2.6, 则水库的容积 V 可以用所有落在等高线图中的方格的中心的深度之和乘以 d^2 来计算, 即

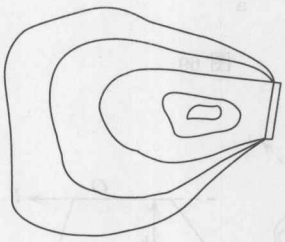


图 66

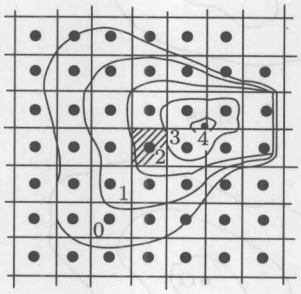


图 67

$$V=\left(\sum h\right)d^2, \tag{4}$$

此处 $\sum h$ 为落在等高线图中的方格的中心的深度之和.

(ii) 截锥公式、梯形公式及 Бауман 公式. 我们首先来估算水库在相邻两等高线所表示的水位之间的容积. 以 A,B 各表示上, 下两个等高线所包围的截面 (它们的面积亦记为 A,B), 它们之间的距离为 h (图 68). 常用下面三个公式来近似计算水库在这两个水位间的容积.

$$\text{截锥公式}: \quad v_1=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}), \tag{5}$$

$$\text{梯形公式}: \quad v_2=\frac{h}{2}(A+B), \tag{6}$$

$$\text{Бауман 公式}: \quad v=h\left[\frac{1}{2}(A+B)-\frac{T(A,B)}{6}\right]. \tag{7}$$

通常当 $\dfrac{A-B}{A}>40\%$ 时, 用公式 (5), 而当 $\dfrac{A-B}{A}<40\%$ 时, 用公式 (6). 公式 (7) 中的 $T(A,B)$ 是用以下方法所画出的图形的面积, 称它为 Бауман 改正数.

从制高点 O 出发, 作放射线 OP. 这射线在地图上 A,B 之间的长度是 l. 另作一图, 取一点 O'. 与 OP 同方向, 取 $O'P'=l$. 当 P 沿着 A 的周界走一圈时, P' 也得一图形 (如图 69). 这图形的面积就称为 Бауман 改正数. 因为它依赖于两截面 A 与 B, 所以我们用 $T(A,B)$ 来表示它.

把算出来的体积一片一片地加起来, 就得到水库的容积. 换言之, 设水库的等高线图的 $n+1$ 条等高线所围成的截面依次为 $S_0,S_1,\cdots,S_n,S_n$ 即最低点 O (它们的

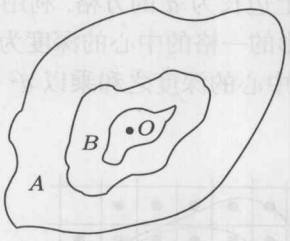


图 68

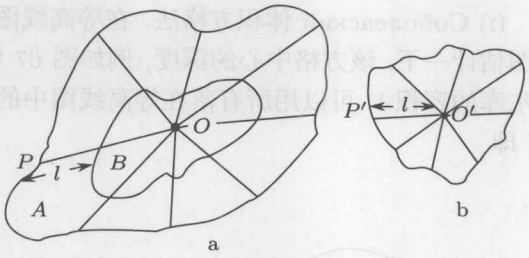


图 69

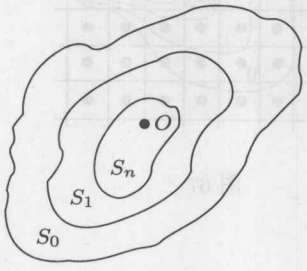


图 70

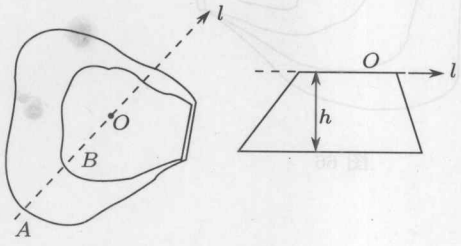


图 71

面积亦分别记为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$ 如图 70), 则水库的容积分别可以用下面的公式来计算:

$$\text{截锥公式：}\quad V_1 = \left(\frac{S_0+S_n}{3} + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n-1} S_i + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{S_i S_{i+1}}\right) h \tag{8}$$

$$\text{梯形公式：}\quad V_2 = \left(\frac{S_0+S_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\right) h \tag{9}$$

$$\text{Бауман 公式：}\quad V = \left(\frac{S_0+S_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\right) h - \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1} T(S_i, S_{i+1}). \tag{10}$$

关于 Бауман 公式, 有下面定理.

定理 1 (Бауман)　已知物体的下底 A 与上底 B (其面积亦记为 A, B) 均为平面, 且 A 平行于 B, h 为它们之间的高, O 为 B 上的某一点. 若用任意通过 O 而垂直于 B 的平面来截物体, 所得的截面都是四边形 (图 71), 则物体的体积 v 恰如公式 (7) 所示.

证　以 O 为中心引进极坐标. 命高度为 z 的等高线的极坐标方程为

$$\rho = \rho(z, \theta)\quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z,0)=\rho(z,2\pi)$. 今后常假定 $\rho(z,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant z\leqslant h)$ 是连续的. 我们不妨假定 A,B 的高程各为 0 及 h 如图 72. 记

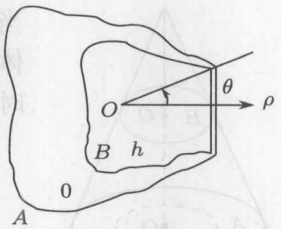


图 72

$$\rho_1(\theta)=\rho(0,\theta),\quad \rho_2(\theta)=\rho(h,\theta).$$

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\quad(0\leqslant z\leqslant h),$$

因此物体的体积 v 为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)d\theta\,dz&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\right)^2dz\,d\theta\\&=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)}{3}\right)d\theta\\&=\frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta\right]\\&\quad-\frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2d\theta\right]\\&=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{6}T(A,B).\end{aligned}$$

定理证完.

关于截锥公式、梯形公式及 Бауман 公式的关系, 有下面结果

定理 2 不等式

$$v\leqslant v_1\leqslant v_2 \tag{11}$$

恒成立. 当且仅当物体为截锥, 且此锥体的顶点至底面 A 的垂线通过点 O 时, $v=v_1$; 当且仅当 $A=B$ 时, $v_1=v_2$.

证 如 Бауман 定理证明中的假定. 由 Бауман 公式及 Bunyakovskiĭ-Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}v&=\frac{h}{6}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2(\theta)+\rho_2^2(\theta)+\rho_1(\theta)\rho_2(\theta))d\theta\\&\leqslant\frac{h}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta}\right]\\&=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB})=v_1.\end{aligned}$$

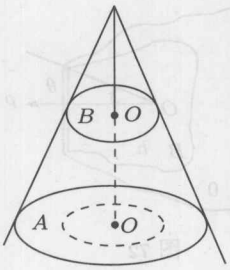


图 73

当且仅当 $\rho_1(\theta)=c\rho_2(\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ c$ 为常数) 时, 即当这物体为一个截头锥体, 而此锥体的顶点至底面 A 的垂线通过点 O 时, 才会取等号 (图 73).

又由于

$$\begin{aligned} v_2-v_1&=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB})\\ &=\frac{h}{6}(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2\geqslant 0, \end{aligned}$$

所以

$$v_1\leqslant v_2,$$

当且仅当 $A=B$ 时取等号. 定理证完.

关于这三个公式的比较问题, 我们认为主要应该从量纲来看. 面的量纲为 2, 所以把面的量纲考虑为 1 所得出的公式, 局限性往往是比较大的.

梯形公式是将中间截面看成上底与下底的算术平均而得到的, 所以把面的量纲当作 1.

Бауман 公式则是将中间截面作为量纲 2 来考虑的. 详言之, 它是假定了 $\rho(z,\theta)$ 为 $\rho(0,\theta)$ 与 $\rho(h,\theta)$ 关于 z 的线性关系而得到的 (见定理 1).

截锥公式亦是将中间截面的量纲考虑为 2, 但比 Бауман 公式还多假定了 $\rho(0,\theta)=c\rho(h,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 此处 c 为一常数.

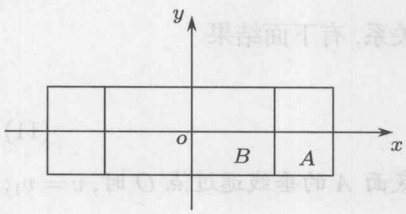


图 74

因此我们认为 Бауман 公式更具有普遍性, 所以用它来近似计算物体的体积, 一般说来, 应该比较精确. 但这并不排斥对于某些个别物体, 用其他两个公式更恰当些的可能性. 例如有一梯形, 其上底与下底的宽度相等 (图 74). 用梯形公式反而能获得它的真正体积, 而用 Бауман 公式与截锥公式来计算, 结果就偏低了. 不过我们注意此时这梯形的截面的量纲为 1 (由于延 y 轴未变).

附记 相对于 Бауман 公式, 我们还可以估计用梯形公式与截锥公式的相对偏差. 例如当 $\dfrac{A-B}{A}<40\%$ 时, 容易算出

$$\Delta=\frac{v_2-v}{v}\leqslant\frac{1}{11}<10\%.$$

(iii) 建议一个估计储量的公式. Бауман 公式是假定 $\rho(z,\theta)$ 为 $\rho(0,\theta)$ 与 $\rho(h,\theta)$ 关于 z 的线性关系而得到的. 如果将两相邻分层放在一起估计, 即已知相邻三等高线, 我们用通过 $\rho(0,\theta),\rho(h,\theta)$ 与 $\rho(2h,\theta)$ 的抛物线所形成的曲面 $\rho=\rho(z,\theta)$ 来逼近物体这二分层的表面, 因此我们建议如下的计算方法:

命 A,B,C 分别表示连续三等高线所围成的截面 (面积亦记为 A,B,C), A 与 B 及 B 与 C 之间的距离都是 h, 则这二片在一起的体积可以用以下公式来近似计算:

$$v_3=\frac{h}{3}(A+4B+C)-\frac{h}{15}(2T(A,B)+2T(B,C)-T(A,C)). \tag{12}$$

如果不计 (12) 式右边的第二项, 就是熟知的 Соболевский 公式 (亦即 Simpson 公式).

把算出来的体积二片二片地加起来, 就得到水库的容积. 换言之, 设水库的等高线图的 $2n+1$ 条等高线所围成的截面依次为 $S_0,S_1,\cdots,S_{2n},S_{2n}$ 即制高点 O, 它们的面积亦依次记为 $S_0,S_1,\cdots,S_{2n}$ 而高程差为 h 如图 75, 则水库的容积由下式来近似计算.

$$V_4=\frac{h}{3}\left[S_0+S_{2n}+4\sum_{i=0}^{n-1}S_{2i+1}+2\sum_{i=1}^{n-1}S_{2i}\right]-\frac{h}{15}\left[2\sum_{i=0}^{n-1}T(S_{2i},S_{2i+1})\right.$$
$$\left.+2\sum_{i=0}^{n-1}T(S_{2i+1},S_{2i+2})-\sum_{i=0}^{n-1}T(S_{2i},S_{2i+2})\right]. \tag{13}$$

注意 如果等高线图含有偶数条等高线, 则最上面的一片可以单独估计, 而其余的用公式 (13).

定理 3 *已知物体的上底 C 与下底 A 均为平面, B 为中间的截面 (面积亦分别记为 C,A,B), 且 A,C 都与 B 平行, A 与 B 之间及 B 与 C 之间的距离都是 h,O 为 C 上一点, 若用任意通过 O 而垂直于 C 的平面截物体, 所得的截面的周界均由两条直线及两条抛物线所构成如图 76, 则物体的体积 v_3 恰如公式 (12) 所示.*

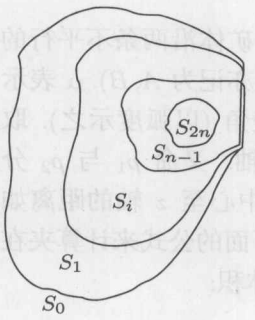
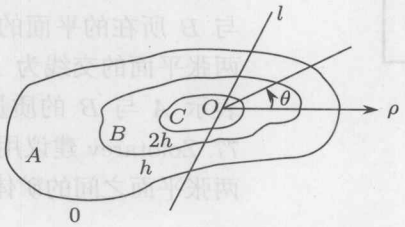


图 75



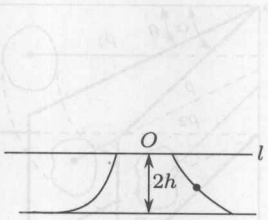


图 76

证 以 O 为中心引进极坐标, 命高度为 z 的等高线的极坐标方程为

$$\rho=\rho(z,\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\rho(z,0)=\rho(z,2\pi)).$$

不妨假定 A,B,C 的高程分别为 $0,h,2h$ 如图 76, 并且记

$$\rho_1(\theta)=\rho(0,\theta),\quad \rho_2(\theta)=\rho(h,\theta),\quad \rho_3(\theta)=\rho(2h,\theta).$$

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta).$$

因此物体的体积 v_3 为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2h}\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)d\theta\,dz&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2h}\left[\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)\right.\\&\left.-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\right]^2dz\\&=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{15}\rho_1^2(\theta)+\frac{16}{15}\rho_2^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_3^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)\right.\\&\left.+\frac{4}{15}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta)-\frac{2}{15}\rho_1(\theta)\rho_3(\theta)\right]d\theta\\&=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{4\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_3^2(\theta)}{3}-\frac{2}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2\right.\\&\left.-\frac{2}{15}(\rho_2(\theta)-\rho_3(\theta))^2+\frac{1}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_3(\theta))^2\right]d\theta\\&=\frac{h}{3}(A+4B+C)-\frac{h}{15}(2T(A,B)+2T(B,C)-T(A,C)).\end{aligned}$$

定理证完.

(iv) Zolotarev 方法. 在估计矿藏储量时, 当勘探线不平行时, 我们所得到的是矿体的不平行剖面.

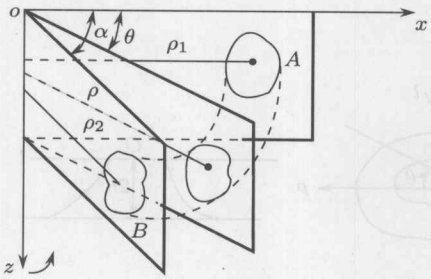


图 77

命 A,B 分别表示矿体沿两条不平行的勘探线的垂直剖面 (面积亦记为 A,B). α 表示 A 与 B 所在的平面的交角 (以弧度示之). 取这两张平面的交线为 z 轴. 又命 ρ_1 与 ρ_2 分别表示 A 与 B 的质量中心至 z 轴的距离如图 77. Zolotarev 建议用下面的公式来计算夹在这两张平面之间的矿体体积:

$$v_4=\frac{\alpha}{6}[\rho_1(2A+B)+\rho_2(A+2B)]. \tag{14}$$

定理 4 (Zolotarev) 依反时针方向, 任意通过 z 轴的半平面皆对应于一个角度 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$. 记该半平面为 (θ). 若有物体夹在 (0) 与 (α) 之间, 它在半平面 (θ) 上的截面为 $S(\theta)$ (面积亦记为 $S(\theta)$), $S(\theta)$ 的质量中心至 z 轴的距离为 $\rho(\theta)$, 而且满足 $S(\theta)=A+\dfrac{B-A}{\alpha}\theta$, $\rho(\theta)=\rho_1+\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\alpha}\theta$, 此处 $A=S(0)$, $B=S(\alpha)$, $\rho_1=\rho(0)$, $\rho_2=\rho(\alpha)$,则物体的体积 v_4 恰如公式 (14) 所示.

证 在空间引进直角坐标, 以 x 轴的正向过半平面 (0). 命物体所占的区域为 (V), 则其体积 v_4 为

$$v_4 = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

变换成柱面坐标 (r,θ,z). 因为

$$\rho(\theta) = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz}{\iint\limits_{S(\theta)} dr\,dz} = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz}{S(\theta)},$$

所以

$$\begin{aligned} v_4 &= \int_0^\alpha d\theta \iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz = \int_0^\alpha S(\theta)\rho(\theta)d\theta \\ &= \int_0^\alpha \left(A + \frac{B-A}{\alpha}\theta\right)\left(\rho_1 + \frac{\rho_2-\rho_1}{\alpha}\theta\right) d\theta \\ &= \frac{\alpha}{6}[\rho_1(2A+B) + \rho_2(A+2B)]. \end{aligned}$$

定理证完.

§11. 求表面积

现在先介绍矿学家和地理学家所常用的方法, 假定地图上以 Δh 为高程差画出等高线, 今后我们常假定有一制高点及等高线成圈的情况来讨论 (其他情况也可以十分容易地被推导出来). 我们假定由制高点向外一圈一圈地画等高线 $(l_{n-1}), (l_{n-2}), \cdots, (l_0)$. 取 (l_0) 的高度为 0, 而制高点用 (l_n) 表之, 它的高度是 h. (l_i) 与 (l_{i+1}) 之间的面积用 B_i 表示如图 78 (即投影的面积).

1. 矿体几何学上常用的方法的步骤如下:

a) $C_i = \dfrac{1}{2}(l_i + l_{i+1})\Delta h$ (中间直立隔板的面积);

b) $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 就是所求的斜面积的渐近值 (Бауман 方法).

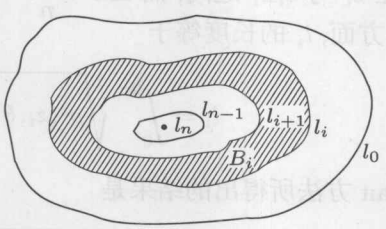


图 78

2. 地理学上常用的方法的步骤如下:

a) $l=\sum_{i=0}^{n} l_i$ 为等高线的总长度. $B=\sum_{i=0}^{n-1} B_i$ 为总投影面积, 由

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta h\cdot l}{B}$$

得出平均倾角 α;

b) $B\sec\alpha=\sqrt{B^2+(\Delta h\cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的渐近值 (Волков 方法).

附记 $\sqrt{a^2+b^2}$ 可以借商高定理, 用图解法很快求得.

这两个方法哪一个更好一些? 这些方法给出的结果在怎样的程度上迫近斜面积? 换句话说, 当等高线的分布趋向无限精密时 (也就是 $\Delta h\to 0$ 时), 这些方法所给出的结果是什么? 是否就是真的斜面积呢? 一般说来, 答案是否定的. 仅仅是一些十分特殊的曲面, 答案才是肯定的 (图 79). 我们将定出这些曲面来, 还将给出这些方法和实际结果的相差比例, 并指出避免较大偏差的计算步骤.

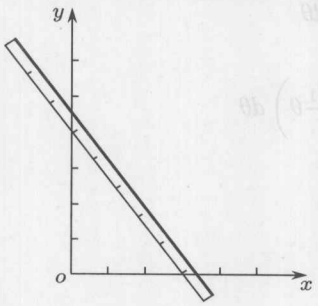


图 79

以制高点为中心引进极坐标. 命高度为 z 的等高线方程是

$$\rho=\rho(z,\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

其中 $\rho(z,0)=\rho(z,2\pi)$. 我们在今后常假定 $\dfrac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial\theta}$ 与 $\dfrac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial z}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant z\leqslant h)$ 都是连续的. 命 $z_i=\dfrac{h}{n}i$, 则 l_i 所围绕的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(z_i,\theta)d\theta.$$

所以由中值公式可知

$$\begin{aligned}B_i&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\rho^2(z_i,\theta)-\rho^2(z_{i+1},\theta)]d\theta\\&=-\int_0^{2\pi}\rho(z_i',\theta)\frac{\partial\rho(z_i',\theta)}{\partial z_i'}d\theta\Delta h,\end{aligned}$$

此处 z_i' 在 z_i 与 z_{i+1} 之间, 而 $\Delta h=\dfrac{h}{n}$.

另一方面, l_i 的长度等于

$$l_i=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i,\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}d\theta.$$

由 Бауман 方法所得出的结果是

$$C_i=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i'',\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i'',\theta)}{\partial\theta}\right)^2}d\theta\Delta h,$$

这里又用了中值公式, z_i'' 在 z_i 与 z_{i+1} 之间. 因而当 $\Delta h \to 0$ 时, $\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Ба} = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} dz. \tag{1}$$

这便是用 Бауман 方法算出的斜面积, 当 $\Delta h \to 0$ 时所趋向的数值.

又易见

$$B = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta) d\theta,$$

及 $\Delta h \cdot l$ 的极限应当等于

$$\lim_{n\to\infty} \Delta h \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i, \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta.$$

因此用 Волков 方法算出的斜面积, 当 $\Delta h \to 0$ 时, 所趋的极限是

$$\begin{aligned} \text{Во} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta) d\theta\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

(注意 $\rho(h, \theta) = 0$).

由于

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2\right] d\theta^2 + 2 \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta\, dz + \left(1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2\right) dz^2,$$

所以曲面的面积 S 为 (参看 §7)

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2} d\theta\, dz. \tag{3}$$

为了比较 Ба, Во 与 S 我们引进一个复值函数

$$f(z, \theta) = -\rho \frac{\partial \rho}{\partial z} + i \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2}, \tag{4}$$

则

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z, \theta)| d\theta\, dz, \tag{5}$$

$$\text{Ба} = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z, \theta) d\theta \right| dz, \tag{6}$$

及

$$\mathrm{Bo}=\left|\int_0^h\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta dz\right|. \tag{7}$$

由此可见

$$\mathrm{Bo}\leqslant \mathrm{Ba}\leqslant S. \tag{8}$$

结论 (i) Бауман 方法比 Волков 方法好; (ii) 所求出的结果比真实的结果常偏低一些; (iii) Бауман 方法既然偏低, 因此可以作如下的修改, 即取 $C_i=l_i\Delta h$. 这样既化简了算法, 又增大了数值.

现在再来考虑 $\mathrm{Bo}=S$ 及 $\mathrm{Ba}=S$ 的曲面. 先讲下面的引理

引理 在区间 $[a,b]$ 中, 如果 $f(x)$ 是一个实变量的复值函数, 则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\int_a^b|f(x)|dx \tag{9}$$

成立的必要且充分的条件是 $f(x)$ 的虚实部分之比是常数.

证 命 $f(x)=\rho(x)e^{i\theta(x)},\rho(x)>0$ 而 $\theta(x)$ 是实的. 显然如果 $\theta(x)$ 与 x 无关, 则等式 (9) 成立. 反之, 由等式 (9) 可知

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b f(x)\overline{f(y)}dxdy&=\int_a^b\int_a^b\rho(x)\rho(y)e^{i[\theta(x)-\theta(y)]}dxdy\\&=2\iint\limits_{a\leqslant x<y\leqslant b}\rho(x)\rho(y)\cos[\theta(x)-\theta(y)]dxdy\\&=2\iint\limits_{a\leqslant x<y\leqslant b}\rho(x)\rho(y)dxdy,\end{aligned}$$

即

$$\iint\limits_{a\leqslant x<y\leqslant b}\rho(x)\rho(y)\{1-\cos[\theta(x)-\theta(y)]\}dxdy=0.$$

因而得出

$$\cos[\theta(x)-\theta(y)]=1,$$

即

$$\theta(x)=\theta(y).$$

此即引理所需.

易知对于多重积分, 引理亦真 (请读者自证).

由引理可知

$$\mathrm{Bo}=\left|\int_0^{2\pi}\int_0^h f(z,\theta)dz\,d\theta\right|=\int_0^{2\pi}\int_0^h|f(z,\theta)|dz\,d\theta=S$$

成立的必要且充分的条件是 $f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数. 于是得偏微分方程

$$\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2=c^2\left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2. \tag{10}$$

换言之, 仅有适合于微分方程 (10) 的函数 $\rho=\rho(z,\theta)$, Волков 方法才能给出正确答案. 当然还要适合以下的条件: $\rho(h,\theta)=0$ (这是制高点), 及 $\rho(0,\theta)=\rho_0(\theta)$ (这是底盘 l_0 的曲线方程).

我们并不解微分方程 (10), 而从方程 (10) 的几何意义入手. 把 θ 与 z 看成参变量, 即

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z,$$

而 ρ 是 θ 与 z 的函数. 由

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0,\\&\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial z}=1\end{aligned}$$

得知在曲面上点 (θ,z) 的法线方向是

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,-\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta+\rho\sin\theta,-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

它与 z 轴的交角 α (即点 (θ,z) 的倾角) 的余弦 $\left(\text{由方程 (10) 及 }\dfrac{\partial\rho}{\partial z}<0\right)$

$$\cos\alpha=\frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \tag{11}$$

是一常数, 也就是说这曲面的切平面与 xy 平面成一固定的角度 α. 我们来说明这样的曲面的几何性质.

从制高点向 (x,y) 平面作一垂直平面, 这平面与该曲面的交线有以下性质, 这曲线上的每一点的切线与 (x,y) 平面的夹角等于 α, 所以它是一条直线.

从任一平面封闭曲线 (l_0) 作底盘, 以任一投影在盘内的点 (l_n) 作为制高点. 通过制高点与底盘垂直的直线称为轴. 通过 l_0 上任一点 A 作一直线, 它在 A 与轴所成的平面上, 与底盘的交角是 α, 这样直线所成的图形便是适合于 $\mathrm{Bo}=S$ 的图形.

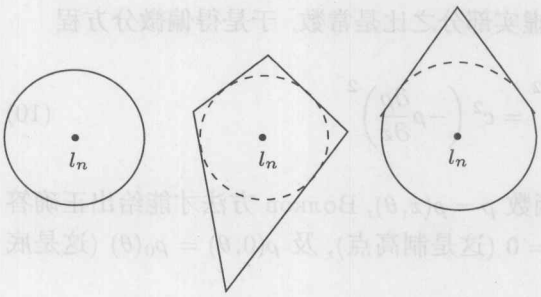


图 80

如果有最高峰, 并且向下看没有陡峭的角度, 则仅有以下的曲面才能 Во $= S$: 底盘是圆或圆的若干切线形成的多角形, 或一些圆弧及一些切线所成的图形, 轴的尖端在通过圆心垂直于底盘的直线上 (见图 80).

通俗些说, 只有蒙古包、金字塔和一些由此复合出来的图形, 才能由 Волков 的方法来无限逼近.

但什么时候 Ба $= S$ 呢? 当然当 Во $= S$ 的时候, Ба $= S$. 除掉上面所求出的一些曲面外, 还有其他曲面否? 答案: 有. 证明如下: 从

$$\text{Ба} = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \right| dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| d\theta dz = S$$

得出

$$\int_0^h \left(\int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| d\theta - \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \right| \right) dz = 0.$$

积分号下的函数是非负的, 因此对任一 z 常有

$$\int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| d\theta = \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \right|.$$

因此当固定 z 时, $f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数. 也就是说, 仅有下面的曲面才能 Ба $= S$: 高程相等之处, 曲面有相同的倾角. 用通俗的话说, 只有天坛顶, 北海白塔及葫芦式的图形才能由 Бауман 的方法来无限逼近.

怎样来估计误差呢? 假定有二常数使

$$0 < \xi \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta,$$

即

$$\xi \leqslant \frac{-\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2}} \leqslant \eta.$$

由此可得

$$\frac{\rho^2 + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2}{\left(\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2} \geqslant 1 - \eta^2.$$

因而

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h \sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\,dz\,d\theta$$
$$\geqslant \sqrt{1-\eta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h \sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}dz\,d\theta=\sqrt{1-\eta^2}S.$$

又

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)dzd\theta\geqslant\xi\int_0^{2\pi}\int_0^h\sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}dz\,d\theta=\xi S,$$

因此

$$\mathrm{Bo}\geqslant\sqrt{\xi^2S^2+(1-\eta^2)S^2}=\sqrt{1+\xi^2-\eta^2}S.$$

又因为 $1>\eta>\xi>0$, 所以

$$\frac{\xi}{\eta}\leqslant\sqrt{1+\xi^2-\eta^2}$$

(将两边平方, 此式即 $(\eta^2-\xi^2)(1-\eta^2)\geqslant 0$). 故得

$$\mathrm{Bo}\geqslant\frac{\xi}{\eta}S.$$

总而言之, 我们证明了下面的结果

定理 1 *若曲面 $\rho=\rho(z,\theta)(0\leqslant z\leqslant h,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 上任意点的倾角 α 的余弦都满足 $0<\xi\leqslant\cos\alpha\leqslant\eta$, 则不等式*

$$\frac{\xi}{\eta}S\leqslant\mathrm{Bo}\leqslant\mathrm{Ba}\leqslant S \tag{12}$$

成立. $\mathrm{Bo}=S$ 的充要条件是曲面的任意点都有相同的倾角, $\mathrm{Ba}=S$ 的充要条件是曲面在高程相等处的点有相同的倾角.

由此可见, 只有当曲面上的点的倾角变化不大时, Волков 方法才能得到精确结果, 而只有当曲面在相邻两高程间的点的倾角相差不大时, Бауман 方法才能给出精确的结果. 然而在其他情况下, 用这种方法的误差就可能比较大了.

因此我们建议如下的算法: 在等高线图上, 通过制高点 (l_n) 引进若干条放射线 $(\theta_0),(\theta_1),\cdots,(\theta_{m-1})$, 此处 (θ_j) 的幅角为 $\frac{2\pi}{m}j$. 放射线 $(\theta_j),(\theta_{j+1})$ 与等高线 $(l_i),(l_{i+1})$ 所围成的面积记为 d_{ij}. (l_i) 被 (θ_j) 与 (θ_{j+1}) 所截取的一段的长度记之为 l_{ij} 如图 81.

方法 (i)

a) $D_i=\sum_{i=0}^{n-1}d_{ij}$ (等高线图在放射线 (θ_j) 与 (θ_{j+1}) 间的面积).

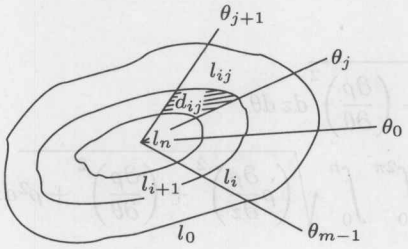


图 81

b) $E_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{ij}\right)\Delta h$ (中间隔板在两直立墙壁之间的面积之和).

c) $\sigma_1 = \sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{D_j^2 + E_j^2}$ 就是所求曲面的渐近值.

方法 (ii)

a) $c_{ij} = l_{ij}\Delta h$ (中间隔板在两直立墙壁之间的面积).

b) $\sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{c_{ij}^2 + d_{ij}^2}$ 就是所求曲面的渐近值.

用同样的方法, 可知当 $\Delta h \to 0, m \to \infty$ 时, σ_1 与 σ_2 所趋近的值分别为

$$K = \int_0^{2\pi}\int_0^h |f(z,\theta)dz|d\theta \tag{13}$$

及

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^h |f(z,\theta)|dzd\theta,$$

显然 $\mathrm{Bo} \leqslant K \leqslant S$. 同样可知 $K = S$ 的充要条件为曲面为直纹面. 由于 σ_2 趋于真面积, 所以用方法 (ii) 最为精密可靠.

第十六章　线积分, 面积分

§1. 曲线积分的定义 (第一型)

假定空间有一条曲线 (l), 它具有确定的方向, 并且假定 A 是它的起点而 B 是终点. 这曲线的弧长从 A 算起如图 82. 假设在这曲线上定义了一个函数 $f(P)$, P 是曲线上的一点, 我们在曲线上依次取分点

$$P_0 = A, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n = B.$$

在 P_iP_{i+1} 中任取一点 P_i', 作和

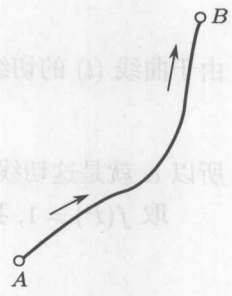


图 82

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(P_i')\Delta S_i,$$

此处 ΔS_i 是 P_iP_{i+1} 间的弧长, 当分割无限精密时, 即 $n \to \infty$, 且所有 ΔS_i 都 $\to 0$ 时, 如果极限存在, 则称为函数 $f(P)$ 沿曲线 (l) 的积分, 并且记之为

$$\int_{(l)} f(P)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(P_i')\Delta S_i. \tag{1}$$

由于 (l) 上的变点 P 的位置完全可以用由 A 点算起的弧长 s 来确定, 所以 $f(P) = f(s)$, 因而积分 (1) 便是通常的积分

$$\int_{(l)} f(P)ds = \int_0^l f(s)ds,$$

此处 l 是 (l) 的弧长. 注意, 曲线 (l) 可以是封闭的, 就是说, B 可以与 A 重合.

如果曲线是由参变量 t 表达出来的:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),$$

如果当 $t=t_0$ 变到 $t=t_1$ 时, 曲线由 (A) 变到 (B), 则

$$\int_{(l)} f(P)ds=\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt.$$

如果 $t_0<t_1$, 则用正号, 反之用负号.

再假定 t 就是 x, 因此

$$\begin{aligned}\int_{(l)} f(P)ds&=\int_{x_0}^{x_1} f(x,\psi(x),\chi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)+\chi'^2(x)}dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}\frac{f(x,\psi(x),\chi(x))}{|\cos\alpha|}dx,\end{aligned}$$

这里

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2(x)+\chi'^2(x)}}.$$

由于曲线 (l) 的切线方向是

$$(1,\psi'(x),\chi'(x)),$$

所以 α 就是这切线与 x 轴的夹角.

取 $f(P)=1$, 我们特别有曲线的长度

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{|\cos\alpha|}.$$

对于平面上的曲线, 也有这些相同的结果.

例 1 在第一象限内沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 求积分 $l=\displaystyle\int_{(l)} xyds$. 由于

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}},$$

可知

$$\begin{aligned}\int_{(l)} xyds&=\int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}dx=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}xdx\\&=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\frac{2}{3}[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.\end{aligned}$$

例 2 沿曲线

$$x=t,\quad y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3},\quad z=\frac{1}{2}t^2$$

求 t 由 0 到 1 的积分

$$\int_{(l)}xyzds.$$

它等于

$$\int_0^1 t\cdot\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\cdot\frac{1}{2}t^2\sqrt{1+2t+t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

例 3 在极坐标下, 求线积分的公式. 由于

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2,$$

所以有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}d\theta.$$

在球坐标下, 求线积分的公式. 由于

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi d\theta^2,$$

所以有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\sqrt{r'^2+r^2\varphi'^2+r^2\sin^2\varphi}d\theta.$$

曲线积分的最好的应用之一, 便是求出质量不均匀的线型物质的质量.

仍如以上的符号, 但假定 $\rho(x,y,z)$ 是物质在点 (x,y,z) 的密度, 如此在曲线 (l) 上由 (A) 到 (B) 的总质量便等于

$$\int_{(l)}\rho(x,y,z)ds.$$

例 4 命 (l) 表 $y=\log x$, 假定这曲线在每点的密度等于该点横坐标的平方, 求从 x_1 到 x_2 这曲线的质量

$$\int_{x_1}^{x_2}x^2ds=\int_{x_1}^{x_2}x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\frac{1}{3}[(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}].$$

曲线积分还可以用来求分布在不均匀的曲线 (l) 上的质点对一已给质量为 m 的质点 M 的吸引力. 设将 (l) 分成许多小段 (σ_i), 其长度仍记为 σ_i. 先让每一段的质量都集中在它上面的某一点 M_i, 则吸引力在坐标轴上的投影可以近似地表示为

$$X\doteq\sum_i\frac{m\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\quad Y\doteq\sum_i\frac{m\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

此处 $\rho(M_i)\sigma_i$ 表示 M_i 所在的小段的质量的近似值, r_i 表示向量 $\overrightarrow{MM_i}$ 的长度, 而 θ_i 表示向量 $\overrightarrow{MM_i}$ 与 x 轴的夹角. 当 $\max\sigma_i \to 0$ 时, 则得

$$X = m\int_{(l)} \frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}ds, \quad Y = m\int_{(l)} \frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}ds.$$

例 5 求星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 在第一象限的弧对于位于坐标原点的单位质量的吸引力. 假定曲线上每一点的密度等于这一点到原点的距离的立方,

$$X = \int_{(l)} \frac{r^3\cos\theta}{r^2}ds = \int_{(l)} xds = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^4 t\,dt = -3a^2\frac{\cos^5 t}{5}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5},$$

$$Y = \int_{(l)} \frac{r^3\sin\theta}{r^2}ds = \int_{(l)} yds = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\,dt = 3a^2\frac{\sin^5 t}{5}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}.$$

§2. 曲线积分 (第二型)

命 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 是三个函数, 在曲线 (l) 上定义, 我们考虑积分

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{1}$$

这积分的意义便是

$$\sum_{i=0}^{n-1}(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i)$$

的极限, 即把曲线 (l) 分为 n 份 $\widehat{M_iM}_{i+1}(i = 0,1,\cdots,n-1)$, 在每份中取一任意点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 把 $P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δx_i, $Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 $\Delta y_i, R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δz_i. 加之, 命 $\widehat{M_iM}_{i+1}$ 的长度都趋于零, 这和的极限便是 (1) 式, 此处 $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ 分别表示曲线段 $\widehat{M_iM}_{i+1}$ 在 x 轴, y 轴及 z 轴上的投影的长度.

用参数表示式

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

则 (1) 式的表达如下:

$$\int_A^B [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]dt.$$

命 t 表示在 (ξ,η,ζ) 的切线, 则

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{z}),$$

此处 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦. 所以

$$\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(l)}(P\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})+Q\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})+R\cos(\boldsymbol{t},\boldsymbol{z}))ds.$$

显然有以下的一些性质:

1) 如果 (l) 是由各部分 $(l_1),(l_2),\cdots,(l_n)$ 组成的, 则

$$\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(l_1)} Pdx+Qdy+Rdz$$
$$+\int_{(l_2)} Pdx+Qdy+Rdz+\cdots+\int_{(l_n)} Pdx+Qdy+Rdz.$$

2) 曲线积分的数值不仅是由被积函数与积分曲线来确定的, 它与曲线 (l) 的方向也有关系, 并当改变积分路线的方向时, 曲线积分值亦变号.

例 1 沿椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

上半部求出

$$\int_{(l)}(x^2+2xy)dy.$$

用参变量表达式 $x=a\cos t, y=b\sin t$, 如此则得

$$\int_{(l)}(x^2+2xy)dy=\int_0^{\pi}(a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)b\cos tdt$$
$$=a^2b\int_0^{\pi}\cos^3 tdt+2ab^2\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin tdt=\frac{4}{3}ab^2.$$

例 2 沿星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$, 由 $(a,0)$ 到 $(0,a)$ 求积分

$$\int_{(l)}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}.$$

这积分等于

$$3a^{4/3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 tdt=\frac{3}{16}\pi a^{4/3}.$$

说明本节所定义的线积分的最好的例子, 是力学中关于功的计算, 原则是:

已知在点 P 处有一个力 $\boldsymbol{F}$. 如果要把 P 点的质量为 m 的物质移一位移 $\boldsymbol{l}$, 则所得的功等于

$$|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{l}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{l}),$$

这里 $|\boldsymbol{F}|$ 是力的大小, $|\boldsymbol{l}|$ 是位移的长短, $\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{l})$ 是它们的夹角余弦.

考虑一个力场, 即每一点有一个力, 我们研究一个单位质量的点依一条曲线 (l) 运动所作的功.

把这曲线分为 n 份:

$$A = A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n = B.$$

在 A_iA_{i+1} 一段所做的功等于

$$\begin{aligned}\Delta E_i &\sim |\boldsymbol{F}_i|\overline{A_iA_{i+1}}\cos(\boldsymbol{F}_i, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})\\ &= |\boldsymbol{F}_i|\overline{A_iA_{i+1}}(\cos(\boldsymbol{F}_i, x)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, x)\\ &+ \cos(\boldsymbol{F}_i, y)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, y) + \cos(\boldsymbol{F}_i, z)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, z)).\end{aligned}$$

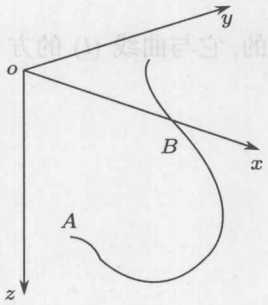


图 83

去掉括号, 并用 P, Q, R 记 $\boldsymbol{F}$ 在 x, y, z 轴上的投影. 所以有近似式

$$\Delta E_i \sim P_i\Delta x_i + Q_i\Delta y_i + R_i\Delta z_i,$$

此处用了 $P_i = F_i\cos(\boldsymbol{F}_i, x), \Delta x_i = \overline{A_iA_{i+1}}\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, x)$ 等等, 因而全部功为

$$E = \int_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

例 3 试求质量为 m 的质点 M, 由 A 到 B 时地心引力所产生的功.

取坐标轴 z 轴垂直向下如图 83, 在任一点的引力向量是

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg.$$

功的全部等于

$$\int_{(l)} mgdz = mg(z_B - z_A),$$

即 B 点与 A 点的 z 轴坐标之差乘以 mg.

由此可知, 功仅与开始点与最终点的位置有关, 而与所经过的曲线无关.

例 4 求当一质量为 1 的质点 M 由 M_1 移动到 M_2 时, 向着质量为 m 的不动质点所作的功.

以不动质点为原点, r 代表向量半径, 我们看出力与 $\overline{OM}$ 的方向相反, 而大小等于 $\frac{fm}{r^2}$, 此处 f 是引力常数, 如此求出

$$P = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}, \quad Q = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}, \quad R = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{z}{r}.$$

所以

$$E=-fm\int_{(l)}\frac{xdx+ydy+zdz}{r^3}=-fm\int_{(l)}\frac{rdr}{r^3}$$
$$=fm\int_{(l)}d\left(\frac{1}{r}\right)=fm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right),$$

此处 r_1 与 r_2 是起点与终点对原点的距离.

若引用质点的势量

$$U=\frac{fm}{r},$$

则

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=R,$$

而且功等于 $U(M_2)-U(M_1)$, 即等于势量差. 用向量的语言, U 的梯度是力 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, 而功是力对微分向量 $(d\boldsymbol{r})=(dx,dy,dz)$ 的内积的积分, 即功

$$E=\int_{(l)}\boldsymbol{F}\cdot(d\boldsymbol{r}).$$

例 5 气体在绝热过程中, 体积 V, 压力 P 及绝对温度 T 之间满足 Clapeyron 公式

$$PV=RT.$$

此处 R 为常数.

我们来确定气体从状态 (P,V,T) 变为与其无限接近的状态 $(P+dP,V+dV,T+dT)$ 时, 所需消耗的热能 dU.

将转变过程设想为: 第一步, 气体体积膨大 dV; 第二步在固定体积之下, 温度改变 dT. 为简单起见, 假定气体在一圆筒内, 一面是面积为 Q 的活塞, 当气体膨胀时, 将活塞推动了 ds, 作用于活塞上的力为 PQ, 因此所作的功为 $PQds=PdV$, 故消耗在这功上的热为 $APdV\left(A=\dfrac{1}{427}\text{ 卡/克米}\right)$. 当温度变化 dT 时, 需热 C_vdT, 其中 C_v 为固定体积下的气体热容量. 因此

$$dU=C_vdT+APdV,$$

由于

$$dT=\frac{1}{R}(PdV+VdP),$$

故得

$$dU=\frac{C_v}{R}VdP+\frac{C_v+AR}{R}PdV=\frac{C_v}{R}VdP+\frac{C_P}{R}PdV.$$

因此当气体状态经过曲线 (l), 由 (A) 变到 (B) 时, 所传得的总热量为

$$U=\int_{(l)}\frac{C_v}{R}VdP+\frac{C_P}{R}PdV.$$

例 6 一导体上通过的电流为 I, 它上面一元素 ds 作用于与它相距 r 的磁量为 m 的一点 M 上的力如图 84, 按照 Biot 与 Savat 定律, 应为

$$dF = \frac{Im\sin\varphi ds}{r^2},$$

此处 ds 延着电流行进的方向, $\boldsymbol{r}$ 是连接电流元素与磁极的向量, φ 是 $\boldsymbol{ds}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角, $d\boldsymbol{F}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}$ 一致. 因此

$$d\boldsymbol{F} = \frac{mI}{r^3}(\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}).$$

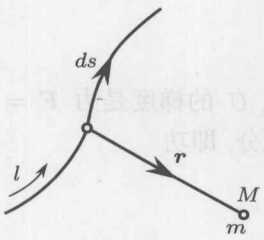


图 84

以 (ξ,η,ζ) 表 M 的坐标, (x,y,z) 表 ds 起点的坐标, 而 ds 在坐标轴上的投影分别为 dx,dy,dz, 则得

$$F_x = mI\int_{(l)}\frac{(\eta-y)dz-(\zeta-z)dy}{r^3},$$

$$F_y = mI\int_{(l)}\frac{(\zeta-z)dx-(\xi-x)dz}{r^3},$$

$$F_z = mI\int_{(l)}\frac{(\xi-x)dy-(\eta-y)dx}{r^3}.$$

§3. 曲线积分求面积

现在考虑平面上一区域 (σ) 的面积, 我们假定它是被封闭曲线 (l) 所包围的, 为简单起见, 假定平行于 y 轴的直线最多只和它交于两点. y_1 表示由下向上方向第一次交得的坐标, 而 y_2 表示第二次交得的坐标, 并且假定其间 y 都在域 (σ) 中, 并且 a,b 表示两个极端点的横坐标, 区域 (σ) 在 $x=a, x=b$ 之间, 而这长条不能再狭.

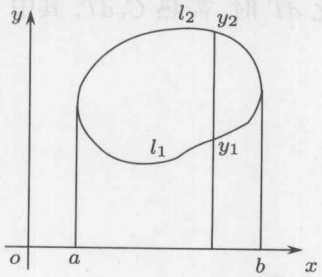


图 85

前已知道这区域的面积等于

$$\sigma = \int_a^b (y_2-y_1)dx. \tag{1}$$

把曲线 (l) 分为两部分 (l_1) 与 (l_2) : (l_1) 是下部, (l_2) 是上部如图 85, 显然可见

$$\int_a^b y_2dx,$$

恰好是沿 (l_2) 的曲线积分

$$\int_{(l_2)} ydx.$$

如果把它的方向改为由 b 到 a, 便应当取负号, 同样 $\int_a^b y_1 dx$ 是沿曲线 (l_1) 从 a 到 b 的积分.

把 (l) 表示为循 (l_1) 由 a 到 b, 再循 (l_2) 由 b 到 a, 则过此曲线的线积分等于

$$\sigma = \int_a^b y_2 dx - \int_a^b y_1 dx = -\left[\int_{(l_2)b}^{a} y dx + \int_{(l_1)a}^{b} y dx\right] = -\int_{(l)} y dx. \tag{2}$$

这曲线 (l) 取逆时针的方向, 即如果人沿边走, 左手在域内.

同法求出

$$\sigma = \int_{(l)} x dy. \tag{3}$$

相加得

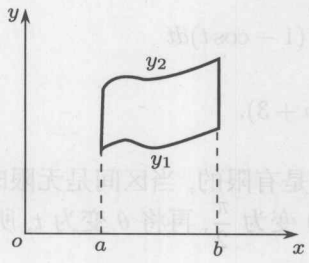


图 86

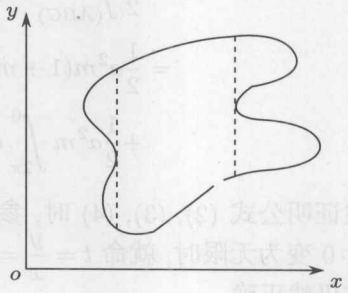


图 87

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{(l)} x dy - y dx. \tag{4}$$

我们求出 (2) 式时, 是用了以下的假设的, 平行于 y 轴的直线顶多与 (l) 交于两点. 我们现在来减轻这一假定, 先考虑以下的特殊情况, (σ) 是界于二平行于 y 轴的直线和两曲线 (l_1) 与 (l_2) 之间的 (图 86). 重复上面的讨论依然得到

$$\sigma = -\left[\int_{(l_1)} y dx + \int_{(l_2)} y dx\right].$$

在直线 $x = a$ 与 $x = b$ 上 $dx = 0$, 所以 $\int y dx = 0$. 因此得到 (2) 式, 其中 (l) 是先走 (l_1) 再走 b 直线, 然后 (l_2), 最后是 a 直线.

对于有更一般的边界的区域 (图 87), 我们可以引垂直于 x 轴的直线把它分成为有限个如上所讨论的图形, 由于沿垂直于 x 轴的直线的积分等于 0, 因此对这些图形的线积分的和便定义了原来图形的线积分, 换言之, (2) 式, (3) 式及 (4) 式对普遍形状的界线也正确.

例 1 取椭圆

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

则得面积

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\theta \cdot b\cos\theta + b\sin\theta \cdot a\sin\theta)d\theta = \pi ab.$$

例 2 取外摆线

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t],$$
$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t] \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

它与对应的圆弧 $x = a\cos mt, y = a\sin mt$ (t 由 2π 变为 0) 之间的面积 D (图 88) 为

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\int_{(ABC)} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{(CDA)} xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2}a^2 m(1+m)(1+2m)\int_0^{2\pi} (1-\cos t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2}a^2 m\int_{2\pi}^{0} dt = \pi a^2 m^2(2m+3). \end{aligned}$$

在证明公式 (2), (3), (4) 时, 参数的变化区间是有限的, 当区间是无限时, 例如当 t 由 0 变为无限时, 就命 $t = \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, 而 θ 由 0 变为 $\dfrac{\pi}{2}$, 再将 θ 变为 t, 所以以上诸公式仍然正确.

例 3 求曲线

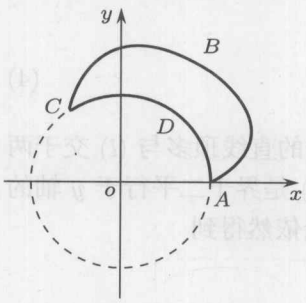


图 88

$$x = \frac{3at}{1+t^3},$$
$$y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (t \in (0,\infty))$$

所围范围的面积 D.

$$D = \frac{1}{2}\int_{(l)} xdy - ydx = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

§4. Green 公式与 Ostrogradskiĭ 公式

Green 公式是一个基本公式, 它表达出闭曲线积分和它所围绕着的面积分的关系. 这公式也是上节公式的推广.

先从计算积分

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy$$

谈起. 为简单起见, 我们还是先假定平行于 y 轴的直线至多与 (σ) 的边界 (l) 交于二点, 如此, 则得

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = \int_a^b (P(x,y_2) - P(x,y_1))dx.$$

用与上节相同的方法知道

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_{(l)} P(x,y)dx,$$

这里 (l) 是取逆时针方向.

同样

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{(l)} Q(x,y)dy.$$

由此得 Green 公式

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{(l)} Pdx + Qdy. \tag{1}$$

如果取 $Q = x, P = -y$, 即得上节的公式 (4). 与上节一样, 我们可以证明, 这一公式对更普遍的区域也适用.

即使于非连通的, 或非单连通的区域都对, 但须注意边界的走向, 我们经常假定所积分的区域在边界的左边 (图 89).

由于

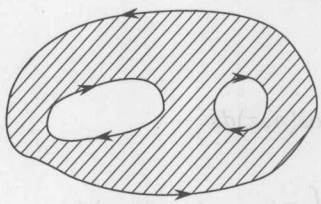


图 89

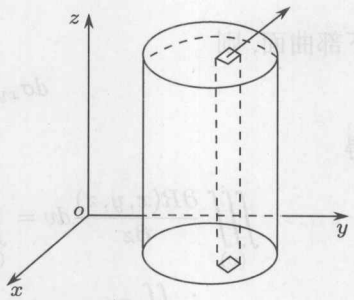


图 90

$$dx = ds\cos(t,X), \quad dy = ds\cos(t,Y),$$

其中 (t,X) 表示在该点切线方向 t 与 X 轴的夹角, 命 n 代表法线方向, 由 $(t,X) = \pi - (n,Y)$ 与 $(t,Y) = (n,X)$, 所以

$$dx = -ds\cos(n,Y), \quad dy = ds\cos(n,X),$$

因而在 (1) 式中以一 Q 代 P, P 代 Q, 则得

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_{(l)}(P\cos(n,X)+Q\cos(n,Y))ds. \tag{2}$$

这是 Green 公式的又一形式.

这是 "面" 与 "线" 的关系, 我们再考虑 "体" 与 "面" 的关系, 即就是 Ostrogradskii 公式, 它的形式是

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_{(s)}(P\cos(n,X)$$
$$+Q\cos(n,Y)+R\cos(n,Z))ds, \tag{3}$$

这里 (s) 是体 (v) 的边界, ds 是 (s) 上的面积元素.

证明的方法也是先考虑平行于 z 轴的直线只交 (v) 于两点的情况. 命 σ_{xy} 是这个体在 xy 平面上的射影 (图 90). 如此, 则

$$\iiint\limits_{(v)}\frac{\partial R}{\partial z}dv=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}d\sigma_{xy}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(R(x,y,z_2)-R(x,y,z_1))d\sigma_{xy}.$$

引进 (s) 的法线方向 (n). 在曲面上部这方向是由容积向外的方向, 与 z 轴成锐角, 但下部的法线方向与 z 轴成钝角, 由投影关系可知在上部曲面

$$d\sigma_{xy}=\cos(n,z)ds.$$

而在下部曲面, 则

$$d\sigma_{xy}=-\cos(n,z)ds.$$

由此得

$$\iiint\limits_{(v)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dv=\iint\limits_{(s_2)}R(x,y,z)\cos(n,z)ds$$
$$+\iint\limits_{(s_1)}R(x,y,z)\cos(n,z)ds=\iint\limits_{(s)}R(x,y,z)\cos(n,z)ds.$$

由此, 不难证出公式 (3) 来.

我们可以和 Green 公式一样来减弱关于边界面 (s) 的条件, 原因是: (1) 在母线平行于 z 轴的柱体上对 z 积分等于 0; (2) 其他的图形可用添加柱面法隔成适合于原来条件的图形, 若在多个曲面为界的情况下, 必须注意, 法线的指向是在求积分的区域的外面.

何谓外面, 有时并不明确. 有这样的情况存在, 一法线指向外面, 把这法线连续移动, 走了一些路回到原来的位置后, 这法线指向另一面了, 有这样性质的图形, 称为单侧曲面. 而我们一般研究的将是双侧曲面. 单侧曲面的著名例子是 Möbius 带.

把一矩形纸条 $ABCD$ 的对边拧转粘上 (图 91, 图 92), 这样的曲面就分不出两侧来了.

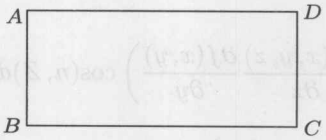


图 91

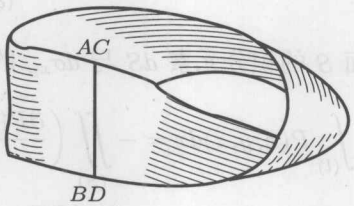


图 92

§5. Stokes 公式

Green 公式的另一推广是把平面推广为曲面, 即曲面 S (非封闭面) 以曲线 (l) 为边界的情况.

假定 S 在 (x,y) 平面上的投影是 σ_{xy}. 并假定通过 σ_{xy} 上的一点平行于 z 轴的直线仅与 S 有一个交点, (λ) 是 (σ_{xy}) 的边界线, 也就是 (l) 在 (x,y) 平面上的投影. S 的法线方向是取与 z 轴成锐角的, 如此则得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos(n,Z) = -\cos(n,X). \quad \frac{\partial z}{\partial y}\cos(n,Z) = -\cos(n,Y),$$

由此

$$d\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dS = \cos(n,Z)dS.$$

假定 $P(x,y,z)$ 是在曲面 S 附近所定义的连续函数, 并有一阶连续偏微商, 先考虑积分

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx.$$

曲线 (l) 在 S 上, 利用曲面方程 $z=f(x,y)$, 在积分号下, 用 $f(x,y)$ 代 z, (λ) 上变点 x,y 的坐标也就是 (l) 上对应点的这两个坐标, 所以 (l) 积分可以用 (λ) 积分来代替, 即

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx = \int_{(\lambda)} P(x,y,f(x,y))dx.$$

在右边用 Green 公式, $P = P(x, y, f(x, y)), Q = 0$, 则得

$$\int_{(\lambda)} P(x, y, f(x, y))dx = -\iint_{(\sigma_{xy})} \frac{\partial}{\partial y}(P(x, y, f(x, y)))d\sigma_{xy}$$
$$= -\iint_{(\sigma_{xy})} \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) d\sigma_{xy}.$$

由曲面 S 的积分元素 dS 与 $d\sigma_{xy}$ 的关系可知

$$\int_{(l)} P(x, y, z)dx = -\iint_{(S)} \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) \cos(n, Z)dS$$
$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos(n, Y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(n, Z)\right) dS. \tag{1}$$

假定 Q 与 R 是另外两个函数, 同样可以得以下的两个公式

$$\int_{(l)} Q(x, y, z)dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(n, Z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(n, X)\right) dS,$$
$$\int_{(l)} R(x, y, z)dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos(n, X) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(n, Y)\right) dS.$$

三式相加, 得

$$\int_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n, X)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n, Y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n, Z)\right] dS, \tag{2}$$

这是 Green 公式的推广, 因为在 xy 平面上 $dz = 0, \cos(n, Z) = 1, \cos(n, X) = 0$, $\cos(n, Y) = 0$, 所以得出

$$\int_{(l)} Pdx + Qdy = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma.$$

前所假定的: 平行于 z 轴的直线与 (S) 只交一点是可以减弱的. 如果不这样, 就用辅助曲线把 S 分成几部分, 使每一部分都满足上述的条件. 而每一部分都可用 (2) 式, 然后把结果总加起来. 因为辅助界线在相反方向各算了一次, 而且符号相反, 所以 (2) 式是在普遍情况下也是成立的. 而须要注意的是对于 (l) 及法线方向 (n) 要合乎以下的条件: 依法线方向直立, 沿 (l) 走时, 曲面 S 在我们的左边.

公式 (2) 也可写成为

$$\int_{(l)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这就是 Stokes 公式.

例 1 若一坚硬的曲面在各方面承受的压力都相等, 则必平衡.

取曲面元素为 $\mathrm{d}S$. P 为单位面积的压力, 它为常量, 则沿 $\mathrm{d}S$ 法线方向作用在元素 $\mathrm{d}S$ 上的力在坐标轴上的投影的长度分别为

$$-P\cos\lambda \mathrm{d}S, \quad -P\cos\mu \mathrm{d}S, \quad -P\cos\nu \mathrm{d}S,$$

此处由于法线方向与压力方向相反, 故取负号. 因此合力的三个分量为

$$X = -P\iint_{(S)} \cos\lambda \mathrm{d}S, \quad Y = -P\iint_{(S)} \cos\mu \mathrm{d}S, \quad Z = -P\iint_{(S)} \cos\nu \mathrm{d}S.$$

在 Ostrogradskiĭ 公式中取 $P = 1, Q = R = 0$, 则得

$$X = 0.$$

同样可得

$$Y = Z = 0.$$

作用在元素 $\mathrm{d}S$ 上的压力对原点的力矩的三个分量为

$$P(z\cos\mu - y\cos\nu)\mathrm{d}S, \quad P(x\cos\nu - z\cos\lambda)\mathrm{d}S, \quad P(y\cos\lambda - x\cos\mu)\mathrm{d}S.$$

因此压力对原点的力矩的三个分量为

$$M_x = P\iint_{(S)} (z\cos\mu - y\cos\nu)\mathrm{d}S,$$

$$M_y = P\iint_{(S)} (x\cos\nu - z\cos\lambda)\mathrm{d}S,$$

$$M_z = P\iint_{(S)} (y\cos\lambda - y\cos\nu)\mathrm{d}S.$$

在 Ostrogradskiĭ 公式中取 $P = 0, Q = Pz, R = -Py$, 则得

$$M_x = 0.$$

同样可得

$$M_y = M_z = 0.$$

因此曲面是平衡的.

例 2 取 (x, y) 平面为液体的表面, z 轴向下, 液体给浸入其内的一小平面块物体的压力是向着这块物体的法线的. 现在设浸入密度均匀, 体积为 (V), 表面为 (S) 的物体, 又设液体的比重为 ρ, 设元素 dS 浸入的深度为 z, 则这元素承受的压力为

$$\rho z\, dS.$$

它在坐标轴上的分量为

$$-\rho z\cos\lambda dS, \quad -\rho z\cos\mu dS, \quad -\rho z\cos\nu dS.$$

故压力的三个分量各为

$$X = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\lambda dS, \quad Y = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\mu dS, \quad Z = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\nu dS.$$

由 Ostrogradskiĭ 公式得

$$\begin{aligned} X &= Y = 0, \\ Z &= -\rho\iiint\limits_{(V)} dV = -\rho V. \end{aligned}$$

因此压力朝着垂直向上的方向, 而等于物体排出的液体的重量.

现在考虑这些元素力, 对物体重心 $C(\xi, \eta, \zeta)$ 的力矩, 它的三个分量各为

$$\begin{aligned} &\rho z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS, \\ &\rho z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS, \\ &\rho z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} M_x &= \rho\iint\limits_{(S)} z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS, \\ M_x &= \rho\iint\limits_{(S)} z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS, \\ M_z &= \rho\iint\limits_{(S)} z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS. \end{aligned}$$

由 Ostrogradskii 公式可知,

$$M_x = \rho \iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right] dV = \rho \iiint\limits_{(V)} (\eta - y) dV$$

$$= \rho \left(\eta V - \iiint\limits_{(V)} y dV\right) = 0.$$

类似可得

$$M_y = M_z = 0.$$

故得著名的 Archimedes 原理, 液体对浸入液体的物体作用一力, 该力等于立体排出的液体的重量, 这一力作用于立体的重心且垂直向上.

例 3 取 (l) 为圆周 $x^2+y^2=a^2, z=0$, 依逆时针而行, 曲面为 $x^2+y^2+z^2=a^2(z>0)$ 的上侧, $P=x^2y^3, Q=1, R=z$. 试验证 Stokes 公式.

一方面

$$\int_{(l)} x^2y^3dx + dy + zdz = \int_{(l)} x^2y^3dx = -a^6 \int_0^{2\pi} \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta = -\frac{\pi}{8}a^6,$$

另一方面

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx = -3 \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2y^2 dxdy = -\frac{\pi}{8}a^6,$$

结果相同.

例 4 取 (l) 是圆周

$$x = a\cos^2 t, \quad y = a\sqrt{2}\sin t\cos t, \quad z = a\sin^2 t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

而 S 是它范围的圆, $P=y, Q=z, R=x$.

实际这一圆就是平面 $x+z=a$ 与球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 相交的部分, 其半径为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

一方面

$$\int_{(l)} ydx + zdy + xdz = a^2 \int_0^{\pi} (-\sqrt{2}\sin^2 t + 2\cos^3 t\sin t) dt = \frac{-1}{2}\sqrt{2}\pi a^2,$$

另一方面

$$-\iint\limits_{(S)} dxdy + dydz + dzdx$$

等于这个圆在各个坐标平面的投影之和, 但取负号. 因此等于

$$-2 \cdot \pi \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi a^2.$$

结果一致.

§6. 与途径无关的曲线积分

在所谓与途径无关的曲线积分乃指: 在某一域 (σ) 内取两点 A, B, 由 A 到 B 在 (σ) 内作一曲线 (l), 如果积分

$$\int_{(l)} (Pdx + Qdy + Rdz)$$

仅与起点 A 及终点 B 有关, 而与怎样取曲线无关, 这样的情况, 称为与途径无关的线积分.

十分显然, 在讨论这问题之前, 我们必须弄清以下几件对象: 首先 (σ) 的性质, 其次怎样的曲线 (l), 最后, 函数 P 与 Q 应当有些什么限制.

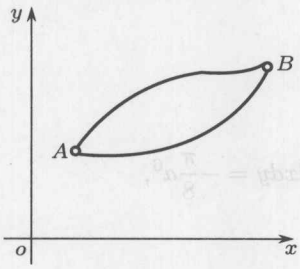


图 93

我们先讨论平面上的情况, 域 (σ) 是单连通域, 即如果在 σ 内有两个途径由 A 到 B, 则这两个途径所围绕的部分也在 (σ) 中如图 93.

曲线 (l) 是指可度量的曲线, 即有参变量表示法, $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 此处 φ, ψ 有连续微商.

并将假定 P, Q 在 (σ) 内是连续的, 且有连续偏微商的函数, 我们将证明

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{1}$$

与途径无关的必要且充分条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

这一条件被称为全微分条件.

首先证明, (1) 与途径无关的必要且充分条件是在 (σ) 中作任一封闭曲线 (l), 则

$$\int_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

如果由两条途径 (l_1) 与 (l_2) 都从 A 到 B 如图 94, 则有

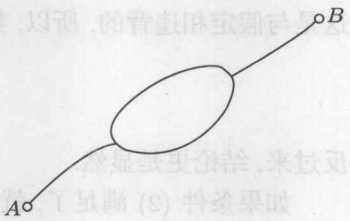


图 94

$$\int_{(l_1)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(l_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

由此可得

$$\int_{(l_1)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{(l_2)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$

命 (l) 是这样的一条闭线, 先沿 (l_1) 从 A 到 B, 再沿 (l_2) 从 B 到 A, 如此则得

$$\int_{(l)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$

由此可知, 沿任何封闭线 (l) 的积分应当等于 0.

反之, 也容易证明: 如果沿 (σ) 内任何封闭线 (l) 的积分等于 0, 则线积分 (1) 仅与端点有关.

现在再证明: 一线积分沿任何在 (σ) 内的闭曲线等于 0 的必要且充分条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

由 Green 公式

$$\int_{(l)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

所以沿封闭线积分为 0 的条件又等价于

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0$$

(对任意域 σ). 如果

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\neq 0$$

及假定 $\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 是连续的, 这样, 我们可以找到一点 (x_0,y_0) 在这点 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq 0$. 假定在这点 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}>0$, 我们可以作一以 (x_0,y_0) 为中心的小圆 (σ_0), 使在 (σ_0) 中, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\geqslant c(>0)$. 如此, 则

$$\iint_{(\sigma_0)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\geqslant c\sigma_0.$$

这是与假定相违背的, 所以, 如果积分与途径无关, 则一定有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2}$$

反过来, 结论更是显然.

如果条件 (2) 满足了, 就有

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P dx + Q dy = U(x,y). \tag{3}$$

保持 y 不变, 作为 x 的函数, 则

$$U(x+\Delta x, y) - U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P dx + Q dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P dx + Q dy.$$

由于积分是和途径无关的, 所以

$$U(x+\Delta x, y) - U(x,y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P dx + Q dy = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y) dx.$$

即得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} = P(x,y). \tag{4}$$

同法, 可证

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y). \tag{5}$$

所以

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = P dx + Q dy.$$

这说明了, 满足了条件 (2), 则 $P dx + Q dy$ 是一个函数 $U(x,y)$ 的全微分. 不难证明 $P dx + Q dy$ 的积分的一般形式是 $U(x,y) + c$. 其证明是, 如果

$$dU = dU_1 = P dx + Q dy,$$

则 $d(U_1 - U) = 0$. 但如果一函数的微分恒等于 0, 则这函数对所有的自变量的偏微商都等于 0. 所以这函数是常数. 当然

$$\int_{(A)}^{(B)} P dx + Q dy = \int_{(A)}^{(B)} dU = U(B) - U(A).$$

反之, 如果有一函数 U_1, 使

$$dU_1 = P dx + Q dy,$$

则

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = Q.$$

显然

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

所以使表达式 $Pdx+Qdy$ 是某一函数 U 的全微分的必要且充分条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

如此, 则 U 由公式

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy+C$$

给出.

§7. 多连通域

如果 (σ) 并不适合上节的条件, 由上节的推理可见, 我们不能利用 Green 公式, 因为闭曲线所范围的域可能不在 (σ) 中.

关于 (σ) 的条件也可以述为, 在这区域 (σ) 上画出的任何一个封闭曲线, 可以连续地收缩成一点而不出这区域. 换言之, 就是这个区域没有洞, 如图 95 阴影所指出的区域便是有洞的区域, 为简单起见, 现在研究一个有两个洞的区域 (σ), 如图 96, 即在一个单连通区域中挖去两块 (I) 与 (II) 的情况. 假定在这个区域 (σ) 上也满足全微分条件, 在这样的区域上取一封闭曲线 (l_1). 如果其内没有洞, 则 Green 公式还是适用的, 即它的积分等于 0. 现在取另一封闭曲线 (l_2), 其中包有 (I), 则 Green 公式不适用. 所以并不能得出结论, 沿 (l_2) 的积分等于 0, 并且以后将看到的确有时非 0.

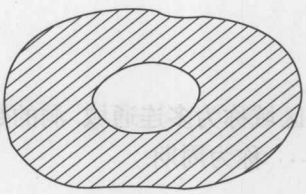


图 95

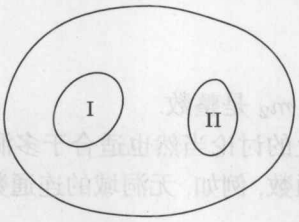


图 96

但是如果 (l_1) 与 (l_2) 都是绕包有 (I), 而不包有 (II) 的闭曲线 (图 97), 则我们可以用辅助线段 $\overline{ab}$, 把这两曲线连在一起, 如此我们得到一个闭曲线, 先从 b 点起沿 (l_1) 走 (正向) 一圈, 再由 b 到 a, 再沿 (l_2) 走 (反向) 一圈, 再由 a 到 b, 在这样的区域上 Green 公式可用, 所以

$$\int_{(l_1)}+\int_{(ba)}-\int_{(l_2)}+\int_{(ab)}=0,$$

这里沿 (a,b) 与沿 (b,a) 的积分是取方向相反的, 可以抵消掉的, 因而得出

$$\int_{(l_1)} = \int_{(l_2)}.$$

换言之, 如果 (l_1) 与 (l_2) 都仅包有一洞 (I), 则其积分数值相等.

所以, 洞 (I) 对应于一个确定的常数 ω_1, 它等于沿任何绕洞 (I) 而不绕洞 (II), 在 (σ) 内的封闭曲线的积分, 称 ω_1 为循环常数.

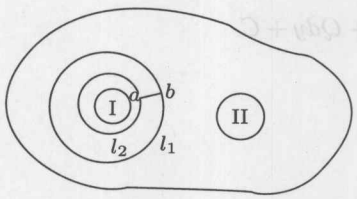


图 97

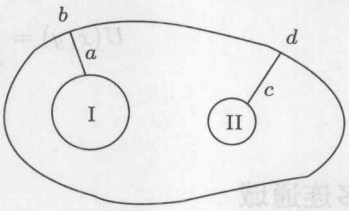


图 98

同理, 洞 (II) 也对应于另一常数 ω_2.

如图 98, 我们作两割线 (a,b) 与 (c,d), 如此所得出的新区域是没有洞的, 因而

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

但是在割线 (a,b) 的相对两侧这函数相差一个数值 ω_1, 而在 (c,d) 的两侧函数相差一个数值 ω_2, 如果去掉割线, 回到原来的区域, 则 $U(x,y)$ 不是一单值函数, 而是一多值函数. 绕 (I) 一周多加一个 ω_1, 绕 (II) 一周多加一个 ω_2, 所以函数含有不定项

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

这里 m_1, m_2 是整数.

以上的讨论当然也适合于多洞的情况, 这样的区域称为多连通域. 洞的数目加 1 称为连通数, 例如, 无洞域的连通数等于 1. $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 称为周期.

例 取定义于两个以原点为中心的同心圆之间的区域 (σ) 上的函数

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

命

$$P = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

则得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

取 (l) 为以原点为中心, a 为半径的圆周 $x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, 则

$$\int_{(l)} Pdx+Qdy=\int_{(l)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi.$$

因此在所给区域 (σ) 上有一个洞, 循环常数为 2π, 注意洞的半径可以是一个任意小的数. 事实上, 在 $(0,0)$ 这一点, P,Q 都是不定的.

§8. 空间与路径无关的曲线积分

我们现在考虑

$$\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz, \tag{1}$$

也是先假定在一单连通区域 (v), 而 (l) 是其中的一条封闭曲线. 现在求出对任意 (l), 这积分等于 0 的条件.

前用 Green 定理, 现在用 Stokes 定理, 可得充分且必要的条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{2}$$

如果这些条件满足了, 这定义出一个函数 $U(x,y,z)$,

$$U(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz.$$

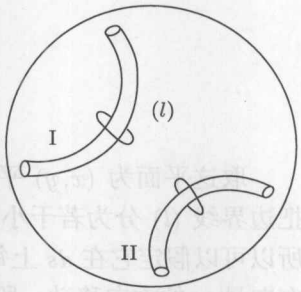


图 99

完全与以前一样, 推得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=R.$$

而

$$dU=Pdx+Qdy+Rdz$$

及

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy+Rdz=U(B)-U(A).$$

关于空间多连通域有以下的说明.

首先两个同心球之间的部分是单连通而不是多连通, 一个环是多连通而不是单连通.

我们考虑一个区域 (v), 它由一个球的内部组成, 其中挖去两个管子 (I) 与 (II), 这两个管穿通球面, 如图 99 所示. 若取一绕管 (I) 的封闭曲线 (l_1), 则不可能在 (v) 内连续地收缩成为一点. 一般说来, 沿绕管子 (I) 的任意封闭的曲线的积分不等于 0,

命之为 ω_1, 沿绕管子 (II) 的任意封闭的曲线的积分命之为 ω_2; 如此则得 $U(x,y,z)$ 是一个多值函数, 它们的值的差等于

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

此处 m_1, m_2 是整数.

§9. 流体的稳定流动

我们现在假定流体是均匀的不可压缩的, 并且假定它的流动是平面性的, 也就是有一平面, 其上每一点的流向都在这平面上, 而且在垂直于这平面的直线上, 每一点的流速和流向都是相同的. 这样, 我们就可以把这问题看做一个平面问题. 我们又假定是没有时间因素的, 即在一点的流速流向仅与此点有关, 而与时间无关.

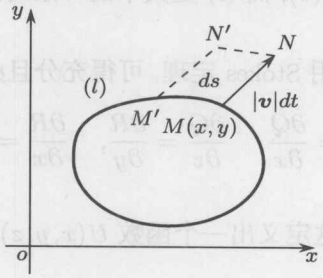


图 100

取这平面为 (x,y) 平面, 在一点 $M(x,y)$ 的流体质点的速度向量是 $\boldsymbol{v} = (u,v)$, 把边界线 (l) 分为若干小段, 命 $MM' = ds$ 为其中的一段. 由于我们取得 ds 很小, 所以可以假定它在 ds 上每一点的流速是近似的, 在非常短的时间中, ds 上所有的点在向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向移动一段 $|\boldsymbol{v}|dt$. 而达到的位置是 NN', 平行四边形 $MNN'M'$ 的面积 (如图 100) 等于

$$|\boldsymbol{v}|dt \cdot ds\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}), \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 代表 (l) 的外向法线方向, 用 $\boldsymbol{s}$ 记曲线 (l) 逆时针方向的切线方向, 就有

$$(\boldsymbol{n},x) = (\boldsymbol{s},y); \quad (\boldsymbol{n},y) = \pi - (\boldsymbol{s},x)$$

(所用的符号 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是指由向量 $\boldsymbol{a}$ 到向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角), 所以

$$\cos(\boldsymbol{n},x) = \cos(\boldsymbol{s},y), \quad \cos(\boldsymbol{n},y) = -\cos(\boldsymbol{s},x).$$

从余弦和角公式得

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}) &= \cos(\boldsymbol{v},x)\cos(\boldsymbol{n},x) + \cos(\boldsymbol{v},y)\cos(\boldsymbol{n},y)\\ &= \cos(\boldsymbol{v},x)\cos(\boldsymbol{s},y) - \cos(\boldsymbol{v},y)\cos(\boldsymbol{s},x),\end{aligned}$$

并且注意

$$|\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{v},x)=u,\quad |\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{v},y)=v$$

是速度向量在 x,y 轴上的投影, 由 (1) 式可知

$$\begin{aligned}MNN'M'\text{ 的面积}&=|\boldsymbol{v}|ds\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})dt\\&=|\boldsymbol{v}|(\cos(\boldsymbol{v},x)\cos(\boldsymbol{s},y)-\cos(\boldsymbol{v},y)\cos(\boldsymbol{s},x))dsdt\\&=(u\cos(\boldsymbol{s},y)ds-v\cos(\boldsymbol{s},x)ds)dt\\&=(-vdx+udy)dt.\end{aligned}$$

如果 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})$ 是钝角, 面积 $MNN'M'$ 是负的, 这便代表流入曲线 (l) 的情形. 在时间 dt 内, 流过界线 (l) 的全部流量是

$$\sum(-vdx+udy)dt\to\left(\int_{(l)}-vdx+udy\right)dt.$$

在单位时间中的总量等于

$$\int_{(l)}(-vdx+udy),$$

式中 (l) 是封闭的, 而且沿逆时针方向求积分. 当流向沿外法线方向时, 流量为正; 反向时, 流量为负.

如果界线 (l) 内没有泉源, 也没有渗井 (即 (l) 内不会流出水量或减少水量), 则得

$$\int_{(l)}(-vdx+udy)=0.$$

因此, 在一个区域 (σ) 内, 既无泉源又无渗井, 则对其中任一闭曲线 (l), 常有

$$\int_{(l)}-vdx+udy=0. \tag{2}$$

由全微分的条件可知,

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

这是不可压缩流的特征. 表达式

$$-vdx+udy$$

也应是一个函数 $\psi(M)$ 的全微分, 且

$$\psi(B)-\psi(A)=\int_A^B(-vdx+udy).$$

这个函数 $\psi(M)$ 叫做流函数, 它的物理意义是: 单位时间沿一曲线由 A 到 B 的流量, 这是与曲线无关的.

如果有一个泉源存在, 则除去这一洞外, 以上的条件依然适合. 积分绕洞一周便是这泉源放出的流量 $q>0$, 因而 $\psi(M)$ 是多值的. 有渗井的情况也是一样, 仅须注意渗井吸入的流量 $q<0$.

除积分 (2) 以外, 我们还考虑积分

$$\int_{(l)} udx+vdy.$$

这个量称为沿界线 (l) 的速度环流. 假设沿任何封闭曲线速度环流都等于 0, 这表示没有涡流的流动. 在这样的情况下, 有函数 $\varphi(M)$ 存在, 使

$$\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx+vdy,$$

而

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

由函数 $\varphi(x,y)$ 可求出速度的支量, 因此这函数称为速度势, 如果有涡旋中心, 则 φ 不是单值的. 以上的积分表示涡旋的强度.

把流函数与速度势函数的关系合拼起来,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{3}$$

这方程称为 Cauchy-Riemann 方程.

由这方程立刻可以看出

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0,$$

所以速度势函数适合于 Laplace 方程.

第十七章　纯量场与向量场

§1. 定义

在空间或空间的某一区域中的每一点 (x,y,z) 都定义的函数 $\varphi(x,y,z)$ 称为该点的纯量, 整个定义一个纯量场.

例如, 每一点有一定的温度, 所以温度就定义一个纯量场; 电场中每一点有一定的电位. 因此, 电位场也是一个纯量场; 地图上每一点都有它的高度, 因此, 高度便定义一个平面上的纯量场.

实质上, 纯量场并不是什么新东西, 而是三个 (或两个) 变量的函数而已.

如果不特别声明, 我们常假定函数 φ 是有连续偏微商的, 并且假定没有使三个偏微商同时等于 0 的点 (如有则称为奇点). 由方程

$$\varphi(x,y,z)=c \quad (c \text{ 常数}) \tag{1}$$

所确定的曲面称为等量面 (等温面, 等电位面, 等高线等都是例子). 显然, 在所考察的区域内的每一点, 有一个而且仅有一个等量面通过, 也就是 $\varphi(x,y,z)$ 是点 (x,y,z) 的单值函数. 因此等量面与另一等量面是无交点的.

若在空间或空间的某一区域中的每一点都定义一向量, 则这些向量的总合定义一向量场, 也就是依赖于 x,y,z 的向量函数

$$\boldsymbol{R}(x,y,z)=[X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)]. \tag{2}$$

如果不另外声明, 我们假定 X,Y,Z 都是有连续偏微商的. 有时, 以 $\boldsymbol{r}$ 表 (x,y,z), 则得向量 $\boldsymbol{r}$ 为变量的向量函数, 而 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{R}(x,y,z)$.

通过一点的等量面的法线方向是

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{3}$$

这向量称为纯量场 $\varphi(x,y,z)$ 在该点的*梯度*, 以

$$\operatorname{grad}\varphi \quad 或 \quad \operatorname{del}\varphi$$

表之. 因此, 从一个纯量场 $\varphi(x,y,z)$ 可以作出一个向量场 $\operatorname{grad}\varphi$ 来.

反之, 并非任何一个向量场 (X,Y,Z) 都可以看成为一纯量场的梯度. 如果如此, 则必有一函数 φ 使

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = Z. \tag{4}$$

由第十六章 §8 的结果知道, 有 φ 存在的必要且充分条件是

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{5}$$

由纯量场求梯度所得出的向量场称为*守恒向量场*, 而 $\varphi(x,y,z)$ 称为这向量场的*势函数* (或位函数). 条件 (5) 是向量场 $\boldsymbol{R}$ 守恒的必要且充分条件.

由条件 (5) 引出一向量

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

这向量称为向量 $\boldsymbol{R}$ 的*涡度*或*旋量*, 以

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} \quad 或 \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{R}$$

表之. 因此, 向量场 $\boldsymbol{R}$ 守恒的必要且充分的条件是涡度为零; 也易见由纯量场求梯度所获得的向量场的涡度处处为 0. 涡度所表的向量也成一向量场.

我们还定义一个向量 (X,Y,Z) 的*散度*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{R} = \operatorname{div}(X,Y,Z) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

例 (刚体运动) 在刚体上取一点 O. 在运动学中已经证明 (或由第二章补充的结论), 任何时刻刚体上一点 M 的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 可以从公式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

求出, 其中 $\boldsymbol{v}^0$ 是 O 点的前进速度, $\boldsymbol{\omega}$ 是瞬时 "角速度", 而 $\boldsymbol{r}$ 是 O 与 M 的位置向量如图 101. 这向量成一向量场, 它的支量是

$$v_x^0+\omega_y z-\omega_z y,\quad v_y^0+\omega_z x-\omega_x z,\quad v_z^0+\omega_x y-\omega_y x.$$

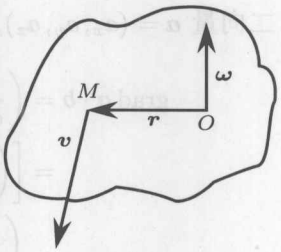


图 101

它的涡度是

$$\left[\frac{\partial(v_z^0+\omega_x y-\omega_y x)}{\partial y}-\frac{\partial(v_y^0+\omega_z x-\omega_x z)}{\partial z},\frac{\partial(v_x^0+\omega_y z-\omega_z y)}{\partial z}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial(v_z^0+\omega_x y-\omega_y x)}{\partial x},\frac{\partial(v_y^0+\omega_z x-\omega_x z)}{\partial x}-\frac{\partial(v_x^0+\omega_y z-\omega_z y)}{\partial y}\right]. \tag{6}$$

如果 $\boldsymbol{v}^0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 与 x,y,z 无关, 则 (6) 式取值 $2(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$, 即涡度为 "角速度" 的倍数. 这就是涡度也称为旋量的道理.

§2. 三种算子的性质

散度, 梯度, 涡度都是线性算子, 也就是把它们运用在一线性组合上, 仍然得出相仿的线性组合, 即

$$\operatorname{div}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\mu\operatorname{div}\boldsymbol{b}, \tag{1}$$
$$\operatorname{grad}(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda\operatorname{grad}\varphi+\mu\operatorname{grad}\psi, \tag{2}$$
$$\operatorname{rot}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{b}, \tag{3}$$

这里 λ,μ 是任意的常数.

又关于各种乘积有以下的公式:

首先两函数之积的梯度

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\left[\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x},\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y},\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z}\right]=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi. \tag{4}$$

函数 φ 的函数 F 的梯度等于

$$\operatorname{grad}F(\varphi)=\left[\frac{\partial F(\varphi)}{\partial x},\frac{\partial F(\varphi)}{\partial y},\frac{\partial F(\varphi)}{\partial z}\right]=F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi. \tag{5}$$

二向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 的内积的梯度等于

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\right)\\&=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{b}\right),\left(\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{b}\right),\right.\\&\quad\left.\left(\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{b}\right)\right]=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{b}\\&\quad+\left(b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{a}.\end{aligned}\tag{6}$$

函数 φ 乘向量 $\boldsymbol{a}$ 的散度是

$$\operatorname{div}\varphi\boldsymbol{a}=\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial z}=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{a}.\tag{7}$$

两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的外积的散度为

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)\\&=-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_v}{\partial z}\right)-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\\&\quad+b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\&=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}.\end{aligned}\tag{8}$$

函数乘向量的涡度是

$$\operatorname{rot}\varphi\boldsymbol{a}=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}.\tag{9}$$

二向量之外积的涡度是

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\left(b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}\\&\quad-\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{b}\\&\quad+(\operatorname{div}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\operatorname{div}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.\end{aligned}\tag{10}$$

§3. 三种算子的迭用

运算 $\operatorname{grad}\varphi$ 把一纯量场变为向量场, 运算 $\operatorname{div}\boldsymbol{R}$ 把一向量场变为纯量场, 而运算 $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}$ 复把一向量场变为向量场. 这三种运算的迭用可得以下的一些公式.

首先易证

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=0\tag{1}$$

及

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=\mathbf{0}. \tag{2}$$

其次,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi\quad(\text{Laplace 算子}). \tag{3}$$

最后由于

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{R}=\Bigg[&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\\&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}&=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y\partial x},\right.\\&\left.\frac{\partial^2 X}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z\partial y}\right),\end{aligned}$$

相减可得

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{R}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=\Delta\boldsymbol{R}. \tag{4}$$

§4. 梯度的几何意义

命 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 代表一单位向量, 它与 x,y,z 轴的夹角各为 α,β,γ. 函数 $\varphi(x,y,z)$ 在某一点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的微商是

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{l}}&=\left[\frac{d}{dt}\varphi(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta,z+t\cos\gamma)\right]_{t=0}\\&=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{t=0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{t=0}\cos\beta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{t=0}\cos\gamma=\boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad}\varphi,\end{aligned} \tag{1}$$

即等于向量 $\boldsymbol{l}$ 与 φ 的梯度的内积, 有时还记之为 $\operatorname{grad}_l\varphi$.

由 Schwarz 不等式

$$\boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad}\varphi\leqslant\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}, \tag{2}$$

上式仅当 $\boldsymbol{l}$ 与梯度 $\operatorname{grad}\varphi$ 平行且同向时取等号, 也就是纯量 $\varphi(x,y,z)$ 增长最快的方向与梯度所指的方向一致, 而且增长率等于梯度向量的长度, 即

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

也就是沿等量面的法线方向, 纯量 $\varphi(x,y,z)$ 增长得最快, 而与之相反的方向, 降得最快.

可以把一个线积分写成为

$$\begin{aligned}&\int_{(\Gamma)} X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz\\&=\int_{(\Gamma)}(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)ds\\&=\int_{(\Gamma)}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{l}ds,\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{l}$ 是曲线 Γ 的切线方向.

如果 $(X,Y,Z)=\operatorname{grad}\varphi$. 则积分仅与曲线的两端点 A,B 有关, 即

$$\int_{(\Gamma)}\operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{l}ds=\int_{(\Gamma)}\operatorname{grad}_l\varphi ds=\varphi(B)-\varphi(A).$$

若 Γ 为闭曲线, 则积分为零.

例 1 命

$$\boldsymbol{R}=(xy,z,-xyz),$$

则沿积分途径

$$\Gamma_1: x=t,\quad y=t^2,\quad z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

的线积分之值为

$$\int_0^1(t^3dt+tdt^2-t^4dt)=\frac{43}{60},$$

沿

$$\Gamma_2: x=t,\quad y=t,\quad z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

的线积分之值为

$$\int_0^1(t^2+t-t^3)dt=\frac{7}{12}.$$

上述都是由点 $(0,0,0)$ 到点 $(1,1,1)$ 的积分, 但因路线不同, 故而数值不等. 其原因在于

$$\frac{\partial X}{\partial y}=x\quad 与\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=0$$

不等. 因此, $\boldsymbol{R}$ 所定义的向量场不是守恒的.

例 2 假定在原点有一质量为 m 的质点, 研究由这一质点所产生的引力场.

在 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 处有一单位质量, 以上质点对这点的引力是

$$\boldsymbol{F}=-\frac{m}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

$\left(\text{Newton 定理: 引力大小是 } \dfrac{m}{|\boldsymbol{r}|^2}, \text{ 方向是 } -\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right)$, 这里 $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 显然有

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{|\boldsymbol{r}|},$$

即

$$\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

是这引力场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数.

更广泛些, 不难证明: 如果 $\varphi(x,y,z)$ 是 $|\boldsymbol{r}|$ 的函数, 即球面是等量面, 则梯度

$$\operatorname{grad}\varphi(|\boldsymbol{r}|) = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

与半径同向或反向, 视 $\varphi'(|\boldsymbol{r}|) > 0$ 或 < 0 而定.

例 3 如果 n 个质点各在 $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 处, 且各有质量 $m_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则作用于 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 点的单位质量的力是

$$\boldsymbol{F} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i).$$

这引力场也是守恒的, 其势函数等于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|}.$$

例 4 更一般些, 如有物质以密度 $\rho(x,y,z)$ 分布于空间的一部分 V, 这批物质作用于 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 点的单位质量的力等于

$$\boldsymbol{F} = -\iiint_{(V)} \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3} dV,$$

这里积分的变量是 $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 过空间的一部分 V.

这样定义的引力场也是守恒的, 其势函数为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \iiint_{(V)} \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} dV.$$

单位质量由 A 到 B 沿一曲线运动所做出的功等于

$$\int_{(A)}^{(B)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \varphi(B) - \varphi(A).$$

§5. Ostrogradskiĭ-Gauss 公式、Stokes 公式的向量表达形式

上章所讲的 Ostrogradskiĭ-Gauss 公式是:

命 S 是包有空间的一部分 V 的周界曲面, 在 V 及其周界 S 上都假定 $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ 有连续偏微商, 在 S 上的一点, 命 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 表曲面 S 在该点的向外的法线方向单位向量, 则有

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_{(S)}(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)dS.$$

这公式显然可以表成为

$$\iiint\limits_{(V)}\operatorname{div}\boldsymbol{R}dV=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{R}\cdot d\sigma, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{R}=(X,Y,Z)$ 而 $d\sigma=\boldsymbol{n}dS$.

Stokes 公式的原来形式是:

命 S 表一定向曲面的一侧, l 表曲面的闭周界曲线. 假定 S 的每一点有切平面, 其方向连续地依赖于曲面上的点 (或更广泛些, S 可以划分为有限片这样的曲面); 并假定周界线 l 上的每一点皆有切线方向 (或者可以分为有限段这样的曲线), 又 $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ 在曲面 S 上所有的点以及与 S 足够靠近的点都是有连续偏微商的连续函数, 如此则

$$\begin{aligned}&\int_{(l)}Xdx+Ydy+Zdz\\&=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy\\&=\iint\limits_{(S)}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是曲面 S 的法线方向. 注意曲面 S 是单侧的, 法线方向是在同侧的.

这个公式用向量符号表示如下:

$$\int_{(l)}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint\limits_{(S)}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS. \tag{2}$$

Ostrogradskiĭ 公式最常用的一个特例是

$$\boldsymbol{R}=\varphi\operatorname{grad}\psi.$$

由 §2 公式 (7) 及 §3 公式 (3) 可知,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{R} &= \varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi\\ &= \varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi,\end{aligned}$$

即得

$$\iiint_{(V)}(\varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)dV = \iint_{(S)}\varphi\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{n}dS.$$

由于 $\operatorname{grad}\psi\cdot\boldsymbol{n}$ 是函数 ψ 沿外法向的微商, 即 $\dfrac{d\psi}{dn}$, 所以得出

$$\iint_{(S)}\varphi\frac{d\psi}{dn}dS = \iiint_{(V)}\varphi\Delta\psi dV + \iiint_{(V)}\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi dV. \tag{3}$$

交换 φ,ψ 而相减得

$$\iint_{(S)}\left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right)dS = \iiint_{(V)}(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV \tag{4}$$

或

$$\iint_{(S)}(\varphi\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\sigma = \iiint_{(V)}(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV.$$

例 1 取原点有质量为 m 的引力场

$$\boldsymbol{R} = m\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3.$$

求积分

$$\iint_{(S)}\boldsymbol{R}\cdot d\sigma.$$

由 Ostrogradskiĭ 公式可知, 我们应当计算

$$\iiint_{(V)}\operatorname{div}\boldsymbol{R}dV,$$

这里

$$\operatorname{div}\boldsymbol{R} = m\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = 0.$$

由此并不能说明这积分等于 0, 因为上式当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时正确, 但在原点, $\boldsymbol{R}$ 并不连续, 因而 $\operatorname{div}\boldsymbol{R}$ 在原点无定义. 由此只能证明: 如果 S 不包有原点, 则

$$\iint_{(S)}\boldsymbol{R}\cdot d\sigma = \iiint_{(V)}\operatorname{div}\boldsymbol{R}dV = 0.$$

如果 S 包有原点, 以原点为中心作一以 ε 为半径的小球, 球面以 Σ 表之. 从 V 中挖去小球所余的部分以 V' 表之, 因此, 公式仍然可用, 因而

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{R}\cdot d\sigma + \iint\limits_{(\Sigma)} \boldsymbol{R}\cdot d\sigma = \iiint\limits_{(V')} \operatorname{div}\boldsymbol{R}dV = 0,$$

即得

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{R}\cdot d\sigma = -\iint\limits_{(\Sigma)} \boldsymbol{R}\cdot d\sigma.$$

在 Σ 上

$$d\sigma = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}dS,$$

如此则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\Sigma)} \boldsymbol{R}\cdot d\sigma &= m\iint\limits_{(\Sigma)} \left(-\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right)dS \\ &= -\frac{m}{\varepsilon^2}\iint\limits_{(\Sigma)} dS = -4\pi m.\end{aligned}$$

即得

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{R}\cdot d\sigma = 4\pi m.$$

例 2 (Laplace 方程解的唯一性) 命 V 是一区域, 在 V 上 φ,ψ 是 Laplace 方程

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

的两个解, 而且在包有 V 的边界 S 上 $\varphi = \psi$. 求证: 在 V 的内部也有 $\varphi \equiv \psi$ (假定解在 V 及 S 上是有两阶偏微商的连续函数).

命 $\theta = \varphi - \psi$, 则 θ 仍然是 Laplace 方程的解, 并且在 S 上 $\theta = 0$. 问题变为求证在 V 的内部 $\theta \equiv 0$. 在公式 (3) 中取 $\varphi = \psi = \theta$, 则得

$$0 = \iiint\limits_{(V)} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right]dV.$$

积分号下是非负的连续函数, 因此在 V 中

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

所以 θ 是常数. 由 θ 在 S 上等于 0 及其连续性可知 $\theta \equiv 0$.

例 3 (解 Laplace 方程的一个方法) 求出函数 φ, 使其在 V 内适合 Laplace 方程

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

而在 V 的边界 S 上, φ 及其外法向微商 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ 是已知函数.

在公式 (4) 中取 $\psi = \dfrac{1}{r}$, 而 r 是由一定点 P (V 内的) 到任意点 $Q = (x, y, z)$ 的距离. 但注意这函数在定点 P 不连续, 因此不能直接运算公式 (4). 以 P 为中心, ε 为半径作一小球, 以 Σ 表此球面, 以 V' 表 V 挖去此小球后的区域. 由于在 V' 中 φ 与 $\psi = \dfrac{1}{r}$ 都适合 Laplace 方程, 因此由公式 (4) 可知

$$\iint\limits_{(S)} \left(\varphi \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\mathrm{grad}\,\varphi\right)\cdot d\sigma = \iint\limits_{(\Sigma)} \left(\frac{1}{r}\mathrm{grad}\,\varphi - \varphi\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right)\cdot d\sigma.$$

读者自证, 当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{1}{r}\mathrm{grad}\,\varphi d\sigma \to 0$$

及

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \varphi\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} d\sigma \to -4\pi\varphi(x, y, z).$$

因此得出

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \left(\varphi(x_1, y_1, z_1)\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\mathrm{grad}\,\varphi(x_1, y_1, z_1)\right)\cdot d\sigma,$$

这里 $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$. 这就是说, 如果在 S 上给了 φ 及 $\dfrac{d\varphi}{dn}$ 的函数值, 则 Laplace 方程的解答由以上的积分表出 (不难证明, 它适合于 Laplace 方程. 但并未证明, 当 (x, y, z) 趋于边界 S 时, φ 及 $\dfrac{d\varphi}{dn}$ 恰好就是所给的函数值).

习题 用 Ostrogradskiĭ 公式算出

$$\iint\limits_{(S)} (xydydz + y^2dzdx + yzdxdy),$$

此处 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = n^2$.

§6. Nabla 算子

我们仍用

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{j} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$$

代表三个相互垂直的向量. 显然有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0;$$

及

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0.$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

任一向量可以写成为

$$(a,b,c)=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}.$$

Nabla 算子或称 Hamilton 算子, 记之为

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

∇ 也可以看成为以微分符号 $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}$ 为分量的向量.

利用这个符号, 我们可以算出

$$\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla U; \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{v}&=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\\&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{i}v_x+\boldsymbol{j}v_y+\boldsymbol{k}v_z)=\nabla\cdot\boldsymbol{v};\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}&=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\&=\nabla\times\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{3}$$

及

$$\Delta U=\nabla\cdot(\nabla U)(=\nabla^2U). \tag{4}$$

又已知

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\mathbf{c}\times\boldsymbol{a})=\mathbf{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, 则行列式等于 0. 我们也有

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})=0. \tag{5}$$

又 $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{a})=0$, 我们也有

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=\nabla\times(\nabla U)=0. \tag{6}$$

Nabla 算子的运用法则如下:

i) 线性的, 也就是如果 $a_1,\cdots,a_n$ 是常数, 则

$$\nabla(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)=a_1\nabla X_1+\cdots+a_n\nabla X_n;$$

ii) 如果把 ∇ 用在乘积上 (乘积的因子可以是函数或向量, 乘法可以是普通的乘, 内乘和外乘, 只要乘出来有意义), 其结果等于在每一因子上各作用一次然后再求总和, 即如

$$\nabla(XYZ)=\nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ)+\nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z)+\nabla(XY\overset{\downarrow}{Z})$$

这里 $\downarrow$ 表示 ∇ 用在指定的因子上. 在实际计算时, 不加此符号.

例 1

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(U\boldsymbol{v})&=\nabla\cdot(U\boldsymbol{v})\\&=\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{U}\boldsymbol{v})+\nabla\cdot(U\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}})=\nabla U\cdot\boldsymbol{v}+U\nabla\cdot\boldsymbol{v}\\&=\operatorname{grad}U\cdot\boldsymbol{v}+U\operatorname{div}\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)&=\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)\\&=\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}_1\times\boldsymbol{v}_2)+\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}_2)=\boldsymbol{v}_2\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}_1)-\boldsymbol{v}_1\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}_2)\\&=\boldsymbol{v}_2\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_1\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_2\end{aligned}$$

例 3

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)&=\nabla(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)\\&=\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+\nabla(\boldsymbol{v}_1\cdot\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}_2)\\&=(\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\times(\nabla\times\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1\times(\nabla\times\boldsymbol{v}_2)\\&=(\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_2.\end{aligned}$$

(这里用了 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\mathbf{c}+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})$).

§7. 曲线坐标及换变量

假定

$$x=f(\xi,\eta,\zeta),\quad y=g(\xi,\eta,\zeta),\quad z=h(\xi,\eta,\zeta) \tag{1}$$

把 (ξ,η,ζ) 空间的一个区域 $\mathfrak{D}$ 一一地且连续地变为 (x,y,z) 空间的一个区域 D, 并且假定 f,g,h 都有连续偏微商. 因为是一一对应, 则由 (1) 式可解得

$$\xi=\varphi(x,y,z),\quad \eta=\psi(x,y,z),\quad \zeta=\chi(x,y,z); \tag{2}$$

再假定 φ,ψ,χ 也有连续偏微商, 微分 (1) 式得

$$\begin{aligned}
dx&=\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta,\\
dy&=\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta,\\
dz&=\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta,
\end{aligned}$$

或逆变换

$$\begin{aligned}
d\xi&=\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy+\frac{\partial\xi}{\partial z}dz,\\
d\eta&=\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\frac{\partial\eta}{\partial y}dy+\frac{\partial\eta}{\partial z}dz,\\
d\zeta&=\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx+\frac{\partial\zeta}{\partial y}dy+\frac{\partial\zeta}{\partial z}dz.
\end{aligned}$$

沿 dx,dy,dz 方向的单位向量就是 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 从而沿 $d\xi,d\eta,d\zeta$ 方向的单位向量应当是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\xi&=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2},\\
\boldsymbol{e}_\eta&=\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2},\\
\boldsymbol{e}_\zeta&=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}.
\end{aligned}$$

如此, 可以把一个由 (x,y,z) 坐标系所表达的向量用 (ξ,η,ζ) 坐标系来表达, 即

$$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=v_\xi\boldsymbol{e}_\xi+v_\eta\boldsymbol{e}_\eta+v_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta.$$

这是由 (ξ,η,ζ) 坐标系所表达的形式, 也就是

$$v_x=\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}v_\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}v_\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}}$$
$$+\frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}v_\zeta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}},$$

$$v_y=\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}v_\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial y}v_\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}}$$
$$+\frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}v_\zeta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}},$$

$$v_z=\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial z}v_\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial z}v_\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}}$$
$$+\frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}v_\zeta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}}.$$

以柱坐标

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z$$

为例 (图 102), 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\rho&=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{e}_\theta&=-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{e}_z&=\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

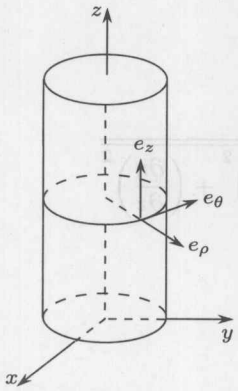


图 102

由此即得从柱坐标到直角坐标的变换公式:

$$\begin{aligned} v_x &= v_\rho \cos\theta - v_\theta \sin\theta, \\ v_y &= v_\rho \sin\theta + v_\theta \cos\theta, \\ v_z &= v_z. \end{aligned}$$

反之, 由直角坐标到柱坐标的公式是

$$\begin{aligned} v_\rho &= v_x \cos\theta + v_y \sin\theta, \\ v_\theta &= -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta, \\ v_z &= v_z. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\theta, & \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-\sin\theta}{\rho}, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\theta, & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \nabla &= \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \boldsymbol{i}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \boldsymbol{j}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} = \widetilde{\nabla}, \end{aligned}$$

这里 $\widetilde{\nabla}$ 是柱坐标的 Nabla 算子.

又因 $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ 是活动坐标架的单位向量, 它们是点 (ρ, θ, z) 的函数, 而

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_\rho, \frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \rho} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \rho} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \theta} = 0,$$

则得

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U &= \widetilde{\nabla} U = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial U}{\partial z}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} &= \widetilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (v_\rho \boldsymbol{e}_\rho + v_\theta \boldsymbol{e}_\theta + v_z \boldsymbol{e}_z) \\ &= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} &= \widetilde{\nabla}\times\boldsymbol{v}\\ &= \left(\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_\rho\boldsymbol{e}_\rho+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_z\boldsymbol{e}_z)\\ &= \left(-\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_z\right)+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\rho+\left(\frac{1}{\rho}v_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_z\right)\\ &\quad+\left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\partial v_\rho}{\partial z}\boldsymbol{e}_\theta\right)=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho\\ &\quad+\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

及

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}.$$

以球坐标

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta$$

为例 (图 103), 我们有

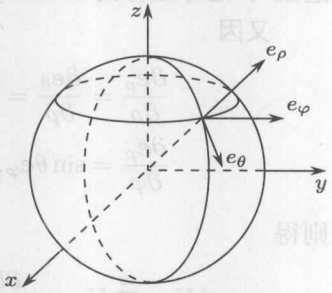


图 103

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\rho&=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{e}_\theta&=\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}-\sin\theta\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{e}_\varphi&=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

于是得出由球坐标到直角坐标的公式:

$$\begin{aligned}v_x&=v_\rho\sin\theta\cos\varphi+v_\theta\cos\theta\cos\varphi-v_\varphi\sin\varphi,\\ v_y&=v_\rho\sin\theta\sin\varphi+v_\theta\cos\theta\sin\varphi+v_\varphi\cos\varphi,\\ v_z&=v_\rho\cos\theta-v_\theta\sin\theta.\end{aligned}$$

又由直角坐标到球坐标的公式是

$$\begin{aligned}v_\rho&=v_x\sin\theta\cos\varphi+v_y\sin\theta\sin\varphi+v_z\cos\theta,\\ v_\theta&=v_x\cos\theta\cos\varphi+v_y\cos\theta\sin\varphi-v_z\sin\theta,\\ v_\varphi&=-v_x\sin\varphi+v_y\cos\varphi.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi, & \dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta},\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta},\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial z}=\cos\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial z}=-\dfrac{\sin\theta}{\rho}, & \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}\nabla &= \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\\ &= \boldsymbol{i}\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ &\quad +\boldsymbol{j}\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ &\quad +\boldsymbol{k}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &= \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}=\tilde{\tilde{\nabla}},\end{aligned}$$

这里 $\tilde{\tilde{\nabla}}$ 是球坐标的 Nabla 算子.

又因

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\rho}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\rho}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\rho}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\theta}=\boldsymbol{e}_\theta,\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{e}_\rho,$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}=\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi}=\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi,\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-(\sin\theta\boldsymbol{e}_\rho+\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta),$$

则得

$$\operatorname{grad}U=\tilde{\tilde{\nabla}}U=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\tilde{\tilde{\nabla}}\cdot\boldsymbol{v}&=\left[\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\cdot[v_\rho\boldsymbol{e}_\rho+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi]\\ &=\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2v_\rho)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\tilde{\tilde{\nabla}}\times\boldsymbol{v}&=\left[\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\times[v_\rho\boldsymbol{e}_\rho+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi]\\ &=\left[\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi)-\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\varphi)\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

及

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}.$$

习题 1 试求出

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$$

的柱坐标形式.

习题 2 试求出

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$$

的球坐标形式.

§8. 平面场

我们将平面场作为例子, 复习已有的结果.

定义 一个场称为平面场, 如果它适合以下的两个条件: (i) 所有的向量平行于一个固定的平面 P; (ii) 在垂直于这平面 P 的任一直线上, 每一点的向量都相等 (长短, 方向).

这样的场可以用平面 P 上的向量所成的场来表达. 在讲到平面场的一个点时, 我们记住, 这是指通过这点与 P 垂直的直线. 讲到平面上一个区域时, 就是指以这区域为正交截面的一个柱体.

把平面 P 作为 (x,y) 平面, 场中一切向量都取 $(v_x,v_y,0)$ 的形式, 其中 v_x,v_y 与 z 无关. 今后还假定它与 t 无关, 简单地用 (v_x,v_y) 来代表. 如此, 则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y},\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

在 (x,y) 平面上取一闭曲线 C, 它包有一个区域 $\mathfrak{D}$. 现在在对应的柱体上研究 Stokes 与 Ostrogradskiĭ-Gauss 公式所取的形式.

首先讨论 Stokes 公式

$$\int_{(C)}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_{(\mathfrak{D})}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot d\sigma.$$

现在

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\left(0,0,\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

而底面的法线方向是 $(0,0,1)$, 因此

$$d\boldsymbol{\sigma}=(0,0,dxdy).$$

从而 Stokes 公式变为

$$\int_{(C)}v_xdx+v_ydy=\iint_{(\mathfrak{D})}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dxdy, \tag{1}$$

这就是 Green 公式.

习题 求出柱面上一闭曲线的 Stokes 公式.

再看 Ostrogradskiĭ-Gauss 公式

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\boldsymbol{v}dV, \tag{2}$$

这里 S 表柱体的表面 (包括柱面和上底 $z=h$ 及下底 $z=0$), 而 V 表柱体. 在上底及下底上

$$\boldsymbol{n} = (0,0,1),$$

而 $v=(v_x,v_y,0)$, 因此 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=0$. 在柱面上, 积分元素等于 $dsdz$, 这里 ds 是曲线 C 的长度微分, 而 $\boldsymbol{n}$ 正好是曲线 C 的外法线方向, 即 $\left(\dfrac{dy}{ds},-\dfrac{dx}{ds}\right)$. 因此得

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = v_x\frac{dy}{ds} - v_y\frac{dx}{ds},$$

即 (2) 式的左边等于

$$-\int_0^h dz\int_{(C)} v_ydx - v_xdy = -h\int_{(C)} v_ydx - v_xdy,$$

而 (2) 式的右边显然等于

$$\int_0^h dz\iint\limits_{(\mathfrak{D})}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dxdy.$$

因之得出

$$-\int_{(C)} v_ydx - v_xdy = \iint\limits_{(\mathfrak{D})}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dxdy, \tag{3}$$

这就是 Green 公式.

附记 特别提请注意, 有时把 (2) 式写成

$$\iint\limits_{(s)} v_xdydz + v_ydzdx + v_zdxdy = \iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dxdydz.$$

一不小心就会导致以下的错误: 在柱面上, 当 $v_z=0$ 时, 左边等于

$$\int_0^h dz\left(\int_{(C)} v_xdy + v_ydx\right),$$

因而得出荒谬的结论:

$$\int_{(C)} v_xdy + v_ydx = \iint\limits_{(\mathfrak{D})}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dxdy.$$

其错误的根源在于把 "三维空间中面积元素 $dydz$" 等同于 "重积分的面积元素". 在三维空间中, $dydz$ 代表由 dy 旋转 $90°$ 到 dz 的面积元素, 因之, 与 $dzdy$ 适差一符号. 因而有时用 $[dy, dz]$ 来区别于普通的 $dydz$. 最简单的例子是: 如果如图 104 所示的方向为三角形的正面积, 则 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 都是正向. 至于高维的情况, 将来再谈.

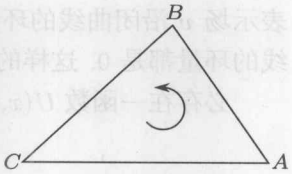


图 104

(1), (3) 二式可以写成为

$$\int_{(C)} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} ds = \iint_{(\mathfrak{D})} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\sigma, \tag{1}$$

$$\int_{(C)} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} ds = \iint_{(\mathfrak{D})} \operatorname{div} \boldsymbol{v} d\sigma, \tag{3}$$

这里 s 是曲线上的长度度量, 切向 $\boldsymbol{t}$ 与曲线的走向一致, $\boldsymbol{n}$ 是法线方向. 由 $\boldsymbol{n}$ 正向转 $90°$ 到 $\boldsymbol{t}$, 即 $\boldsymbol{t} = (\cos\theta, \sin\theta) = \left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}\right)$ 而 $\boldsymbol{n} = (\sin\theta, -\cos\theta) = \left(\dfrac{dy}{ds}, -\dfrac{dx}{ds}\right)$.

积分

$$N = \int_{(C)} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} ds = \int_{(C)} v_x dy - v_y dx$$

表示场 $\boldsymbol{v}$ 经过曲线 C 的流量. 当法线方向取定后, 顺法线方向的为正, 反之为负. 由 (3) 式, 也可以写成为

$$N = \iint_{(\mathfrak{D})} \operatorname{div} \boldsymbol{v} d\sigma.$$

在某一区域内 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ 处处为 0 的场, 称为管量场, 即经过任何一条封闭曲线的流量都是 0. 又由 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ 可知

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

因而有一函数 V 存在, 使

$$\frac{\partial V}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -v_y.$$

这 V 称为流函数, $V =$ 常数的线称为流线. 由 $\dfrac{\partial V}{\partial x}dx + \dfrac{\partial V}{\partial y}dy = 0$ 可知流线的方向 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_y}{v_x}$ 也就是向量 v 的方向, 并已知在 $\mathfrak{D}$ 内对任意一条由 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的曲线 C, 常有

$$N = \int_{(C)} -v_y dx + v_x d_y = \int_{(C)} dV = V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1).$$

积分

$$\Gamma = \int_{(C)} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} ds = \int_{(C)} v_x dx + v_y dy$$

表示场 $\boldsymbol{v}$ 沿闭曲线的环量. 由 (1) 式可知, 如果 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 处处为 0, 则 $\mathfrak{D}$ 中沿任一闭曲线的环量都是 0. 这样的场称为守恒场 (或称无涡场).

必存在一函数 $U(x,y)$, 称之为势函数, 使

$$\frac{\partial U}{\partial x}=v_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=v_y.$$

U 等于常数的曲线称为等势线. 易见等势线与流线正交.

如果一个场既守恒又管量, 则得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}.$$

这就是 Cauchy-Riemann 方程, 也称 Euler-d'Alembert 方程.

例 1 研究仅有一泉源 (或渗井) ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}\neq 0$ 的点称为泉源) 所产生的向量场 (注意, 现在是平面场, 因此就是在空间一直线上处处有相等强度的源泉的场).

假定产生源泉的点是原点, 则 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$, 当 $(x,y)\neq 0$. 由于对称关系, 不妨假定这个场是由

$$\boldsymbol{v}=\varphi(r)\boldsymbol{r}^0 \tag{4}$$

所定义的, 这里 $\boldsymbol{r}=(x,y), r=|\boldsymbol{r}|, \boldsymbol{r}^0=\dfrac{1}{r}\boldsymbol{r}$.

过圆周 $r=\rho$ 的流量等于

$$N=\int_{r=\rho}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds=\int_{r=\rho}\varphi(r)ds=2\pi\rho\cdot\varphi(\rho);$$

另一方面, 在环 $(0<)\rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2$ 中并无泉源, 即 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$. 因此

$$\left(\int_{r=\rho_2}-\int_{r=\rho_1}\right)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iint\limits_{\rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2}\operatorname{div}\boldsymbol{v}dxdy=0,$$

即 N 是一常数, 因而得出

$$\varphi(r)=\frac{N}{2\pi r}.$$

这 N 定义为泉源强度, 代入 (4) 式得

$$\boldsymbol{v}=\frac{N}{2\pi r}\boldsymbol{r}^0=\frac{N}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

易见流函数与势函数各为

$$V=\frac{N}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+C_1,\quad U=\frac{N}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}+C_2.$$

图 105 中虚线表示等位线, 箭头表示流线.

例 2 同法, 如果涡点 ($\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \neq 0$ 的点) 在原点, 仅由涡点所产生的向量场的流函数与势函数各为

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2} + C_1, \quad U = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + C_2.$$

图 106 虚线表等位线而实线表流线, Γ 称为涡点强度.

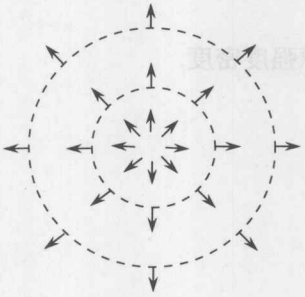


图 105

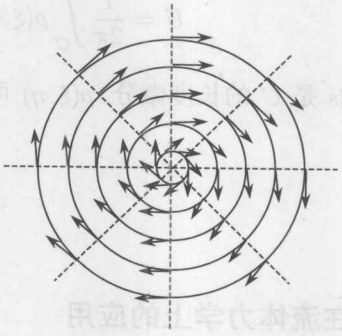


图 106

例 3 假定在原点有一强度为 N 的源泉, 它同时也是强度为 Γ 的涡点, 因它所产生的场的势函数与流函数各为

$$U = \frac{N}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + C_1,$$
$$V = \frac{N}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + \frac{\Gamma}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2} + C_2.$$

用极坐标得

$$U = \frac{N}{2\pi} \log \rho - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C_1,$$
$$V = \frac{N}{2\pi} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \log \rho + C_2,$$

因此

$$U + iV = \frac{N}{2\pi}(\log \rho + i\theta) + \frac{i\Gamma}{2\pi}(\log \rho + i\theta)$$
$$+C_1 + iC_2 = \frac{N + i\Gamma}{2\pi} \log z + C, z = \rho e^{i\theta}.$$

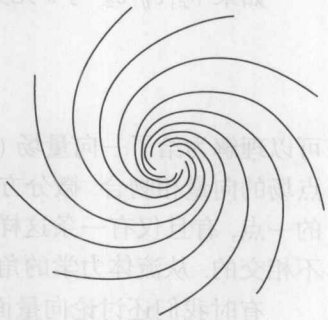


图 107

其等位线与流线各为

$$\Gamma \log \rho + N\varphi = C_1, \quad N \log \rho - \Gamma\varphi = C_2$$

这是正交的对数螺线族图 107.

例 4 在 n 点处, 每处 (ξ_i, η_i) 各有一强度为 N_i 的泉源, 则

$$U = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} N_i \log \sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2}.$$

例 5 如果泉源在一条曲线上, 可相仿得出

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_C \rho(\xi, \eta) \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} ds,$$

这里 ds 是 C 的长度微分. $\rho(\xi, \eta)$ 可以定义为泉源强度密度.

补 充

§9. 在流体力学上的应用

在流体力学中, 向量分析有着重要的应用. 在研究流体运动时, 出现各种各样的场, 如密度场, 速度场与加速度场. 第一个是纯量场, 后两个是向量场.

1) 速度场

速度向量 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 与位置 (x, y, z) 及时间 t 有关, 微分方程

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt$$

的解代表一族曲线, 称为流线族. 流线族是随 t 而变化的.

如果 v_x, v_y, v_z 与 t 无关, 则流线也就是质点运动的轨迹. 微分方程组

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

可以理解为给了一向量场 (v_x, v_y, v_z), 求一族曲线, 其上每一点的切线方向都与在该点场的向量相吻合. 微分方程的存在性与唯一性定理也可以理解为过所讨论范围内的一点, 有且仅有一条这样的曲线, 这样的曲线也称为向量线. 由此可见, 向量线是不相交的. 从流体力学的角度来看, 这是显然的事实.

有时我们还讨论向量面, 即对曲面上每一点, 场中的向量一定在曲面的切面上.

从一条异于向量线的曲线出发, 通过其上的每一点作一向量线, 这些向量线上的点演成一曲面显然是一向量面, 原曲线称为这向量面的准线.

当准线是一闭曲线时, 得一管状闭曲面, 这称为向量管.

2) 散度

命 S 是一定向曲面的一侧, 即法向向量肯定在 S 的一侧, 称为外面.

在无穷小时间 dt 内, 通过曲面元素 dS 的流量可以看成为以 dS 为底、以 v_n 为高的水柱的体积, 这里 v_n 是向量 $\boldsymbol{v}$ 在 S 的法线上的投影. 命 $\rho=\rho(x,y,z,t)$ 表示流体密度, 则在时间 dt 内, 通过 dS 的流量等于

$$\rho v_n dS dt.$$

因此在单位时间内流过 S 面的流量等于

$$\iint\limits_{(S)} \rho v_n dS.$$

由于

$$v_n = v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma,$$

命 $\boldsymbol{R}=\rho\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)$, 可知单位时间内流过 S 面的流量等于

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是 S 面的法向.

当 S 是一包有区域 V 的闭曲面, 这积分就是流体从这区域流出的流量 (注意 "负" 流出就是流进). 这也就是 Ostrogradskiĭ 公式的一边. 如果将 S 缩小, 最后使 V 缩成一点 (x,y,z), 则极限

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS \Big/ V \quad (V \text{ 表区域 } V \text{ 的体积})$$

可以定义为散度, 它等于

$$\lim_{V\to(x,y,z)} \frac{\iiint\limits_{(V)} \left(\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right) dV}{\iiint\limits_{(V)} dV} = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{2}$$

散度的流体力学的意义很明显, 它是用来研究在一点液体 "散" 出的比率的.

$\operatorname{div}\boldsymbol{R}=0$ 表示这点既非源泉也非渗井.

3) 向量管

假定所讨论的曲面是向量管, 命 S_1 与 S_2 是向量管的两断面, S_3 表示管壁, 并且假定管内既无源泉又无渗井, 即 $\operatorname{div}\boldsymbol{R}=0$ 如图 108.

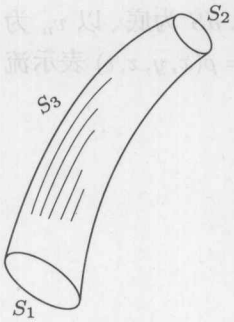


图 108

由 Ostrogradskiĭ-Gauss 公式得

$$\left(\iint\limits_{(S_1)}+\iint\limits_{(S_2)}+\iint\limits_{(S_3)}\right)\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS=0,$$

这里法线方向都是向外的. 由于向量管的性质, 在 S_3 上 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}=0$ (也就是流体不能过管壁外流), 亦即

$$\iint\limits_{(S_3)}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS=0.$$

把 S_1 处的法线方向改为内向, 则得公式

$$\iint\limits_{(S_1)}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint\limits_{(S_2)}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dS,$$

即通过向量管的流量对任一横断面都是一样的 (注意, "管" 并不一定指真的在一根管子内流动, 而是指具有此性质的一部分流体).

4) 涡度 (或旋量)

命 l 是一条封闭曲线, 线积分

$$\int_{(l)}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{(l)}v_xdx+v_ydy+v_zdz$$

称为按一定方向绕曲线 l 一周的速度环量. Stokes 公式

$$\int_{(l)}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint\limits_{(S)}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

可以理解为 S 涡度向量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 通过 S 面的 "流量" 等于沿这曲面的界线 l 的速度环量. 由于 S 是定向的曲面的一侧, l 的正向也由之而定义了.

从一点 M 出发, 作一单位向量 $\boldsymbol{m}$. 在垂直于 $\boldsymbol{m}$ 的平面上作一绕 M 的闭曲线 l, 如是得

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{m}=\lim_{S\to M}\frac{\displaystyle\int_{(l)}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}}{S},\tag{3}$$

这里 S 也代表 S 的面积, 即当面积无穷缩小时, 绕一点的环流量与面积之比的极限等于涡度向量在 $\boldsymbol{m}$ 上的投影长度.

一般地讲, 曲面 S 上绕一点的环流量与曲面积之比的极限等于涡度向量与曲面的法线的内积.

5) 连续性方程

假定某流体连续地充满空间某一区域 V, 并假定在其中既无泉源又无渗井. 一般说来, 流体密度可以是依赖于时间地点而变化的 (即可压缩的流体).

假定曲面 S 是 V 的界面, 在单位时间内向外流出的流量等于

$$Q = \iint\limits_{(S)} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

这里 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 是流体的密度, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线单位向量.

另一方面, 从 V 内流体的总质量来考虑. 在时间 dt 内, 密度的改变量是 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} dt$, 体积元素 dV 的质量 ρdV 的改变量等于

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV,$$

因而整个 V 的流体量的改变量等于

$$dt \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

这就是 dt 时间内流进的流量. 改变符号, 在单位时间内流出的流量等于

$$Q = -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

即

$$\iint\limits_{(S)} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS + \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0. \tag{4}$$

用 Ostrogradskiĭ 公式可知

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

这对于 V 内任何一块都成立, 因此得出流体力学上著名的连续性方程:

$$\operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{5}$$

如果有泉源或渗井, 假定流体物质增长的速度是 $k\rho(x, y, z, t)$, 则我们必须添上单位时间内所增加的质量

$$\iiint\limits_{(V)} k \rho dV,$$

因而连续性方程变为

$$\operatorname{div}\rho v+\frac{\partial\rho}{\partial t}=k\rho, \tag{6}$$

比例常数 k 称为增长因子.

由于流体的密度 $\rho(x,y,z,t)$ 与时间 t 及位置 (x,y,z) 有关, 而位置 (x,y,z) 又依时间而变化, 因此

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{7}$$

这里 $\dfrac{d\rho}{dt}$ 是密度 ρ 在运动中的变更率, 而 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ 表示在一定点密度 ρ 的变更率. 这式子也可以写成

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho, \tag{8}$$

这里

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right).$$

代入 (5) 式得

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}, \tag{9}$$

即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{10}$$

亦即散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ 等于流体在该点的密度 ρ 的相对改变率, 所以无源泉 (或渗井) 而且不可压缩流体的向量场 (速度) 可由

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0 \tag{11}$$

来刻画.

如果也没有涡度, 即

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},$$

则有 Φ 存在, 使

$$\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\Phi.$$

代入 (11) 式得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi=0,$$

即

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \tag{12}$$

这里 Φ 称为速度势函数, 即依不可压缩的流体而言, 速度势适合于 Laplace 方程 (12). 同法可证, 在可压缩的情况下, 方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{13}$$

6) 理想流体的运动方程

所谓理想流体, 是指无粘滞性的流体而言.

一般说来, 物体的运动取决于外力与内力. 我们考虑一极简单的情况: 外力与质量成比例. 命 $\boldsymbol{F}$ 是作用在一单位质量上的力, 在体积元素 dV 上作用的力等于 $\rho dV\boldsymbol{F}$.

至于内力, 也就是流体中一块 V 所受到其余部分的力. 对理想流体来说, 这等于朝向流体内部的压力. 命 S 是体积 V 的界面, 这也就是曲面 S 上所受的压力. 以 $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ 表曲面 S 的向外法线的方向余弦, 曲面元素 dS 上所作用的力在坐标轴上的投影等于

$$-p\cos\lambda dS, \quad -p\cos\mu dS, \quad -p\cos\nu dS,$$

这里 p 代表单位面积上所受的压力. 因此, 作用在 V 上的力等于向量

$$\left(-\iint\limits_{(S)} p\cos\lambda dS, -\iint\limits_{(S)} p\cos\mu dS, -\iint\limits_{(S)} p\cos\nu dS\right).$$

用 Ostrogradskiĭ-Gauss 公式 (例如, 在第一分量上取 $\boldsymbol{R}=(p,0,0)$) 得

$$\left(-\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial x}dV, -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial y}dV, -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial z}dV\right),$$

也就是加于 dV 上的力是

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}dV, \frac{\partial p}{\partial y}dV, \frac{\partial p}{\partial z}dV\right) = -dV\,\mathrm{grad}\,p.$$

由 Newton 定律

$$\rho dV\boldsymbol{a} = \rho dV\boldsymbol{F} - dV\mathrm{grad}\,p,$$

这里 $\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ 是加速度, 也就是

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p, \tag{14}$$

这就是理想流体的运动方程, 也是流体力学及空气动力学中的基本公式.

在流体力学中, 常用 u,v,w 表示速度向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 的分量. 由于位置 (x,y,z) 与速度 (u,v,w) 都与 t 有关, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w, \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w.
\end{aligned}$$

把 $\boldsymbol{F}$ 写为 (F_x, F_y, F_z), 则 (14) 式变为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}$$

这称为 Euler 公式.

这公式也可以改写为向量形式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

如果以 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ 表算符 $u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}+w\dfrac{\partial}{\partial z}$, 则得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

7) 总而言之, 流体的速度 $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$, 压力 p 及密度 ρ 适合于

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0 \quad (\text{连续方程}),\\
&\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \quad (\text{运动方程}),
\end{aligned}$$

这里有五个未知函数, 但仅有四个方程, 余下的一个是压力 p 与密度 ρ 关系的物态方程

$$p=f(\rho),$$

这样便得出流体动力学的完全方程组.

8) 现在来说明公式

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=0$$

在流体力学上的意义. 我们考虑涡度向量所成的场, 上式说明这样的场永远是管量场, 这场当然有向量曲线, 向量管等等. 这样的向量管称为转动管, 也有所谓 "流量" 通过转动管的任一断面都相等的现象.

§10. 声的传播

我们现在把流体动力学的方程应用到声的传播过程. 我们作以下一些假定: (i) 声的传播过程是绝热的, 也就是假定物态方程是 Poisson 绝热线

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},\quad \gamma=c_p/c_v,$$

这里 ρ_0, p_0 是初始密度与压力, 而 c_p 与 c_v 是定压比热与定容比热; (ii) 气体振动是微小的, 也就是可以把速度, 速度的梯度, 密度 ρ 的梯度这些数量的高次项略去不计.

引进密度的相对变化

$$s=s(x,y,z,t)=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0},$$

即得

$$\rho=(1+s)\rho_0.$$

在这些假定下, 流体动力学的方程变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}&=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p,\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}&=-\rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\ p&=p_0(1+s)^{\gamma}\doteq p_0(1+\gamma s)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

(这是因为$\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\dfrac{1}{\rho_0}(1+s)^{-1}\operatorname{grad} p\doteq\dfrac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p$, $\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}\doteq\rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v}$).

命 $a^2=\gamma p_0/\rho_0$, 则得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}&=\boldsymbol{F}-a^2\operatorname{grad} s,\\ \frac{\partial s}{\partial t}&=-\operatorname{div}\boldsymbol{v}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

交换微分次序, 并消去 $\boldsymbol{v}$, 得

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\operatorname{div}(-a^2\operatorname{grad} s+\boldsymbol{F})=\operatorname{div}\boldsymbol{F}-a^2\Delta s,$$

即得波动方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=a^2\Delta s-\operatorname{div}\boldsymbol{F}.\tag{3}$$

如果没有外力, 即 $\boldsymbol{F}=0$, 则得波动方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=a^2\Delta s=a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right).$$

注意 s 是压缩或膨胀现象的量的刻画, 因此这方程所代表的是声的传播律, $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ 代表声源.

§11. 热的传导

一个物体在不同点与不同时间有不同的温度 $\varphi(x,y,z,t)$, 这样定义一个纯量场, 即温度场. 向量

$$-k\mathrm{grad}\,\varphi$$

称为热流向量, 其中 $k>0$ 是比热系数. 我们所以用负号, 是根据 "热向低处流" 而取定的. $\mathrm{grad}\,\varphi$ 的方向是 φ 增长得最快的方向 (§4), 因此取负号表示热向低处流.

取一曲面元素 dS, 在时间 dt 通过 dS 的热量与 $dtdS$ 及温度法向微商 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ 成比例, 也就是说,

$$\Delta Q = kdtdS\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = -kdtdS\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\boldsymbol{n}.$$

因此, 如果闭曲面 S 包有 V, 则通过 S 的全部热量等于

$$-dt\iint\limits_{(S)} k\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\boldsymbol{n}dS. \tag{1}$$

假定无热源, 则单位时间内物体 V 通过界面 S 流出的热量等于

$$Q=-\iint\limits_{(S)} k\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\boldsymbol{n}dS=-\iint\limits_{(S)} k\mathrm{grad}\,\varphi\cdot d\sigma.$$

用 Ostrogradskiĭ-Gauss 公式并改变符号, 可知流入的热量等于

$$\iiint\limits_{(V)}\mathrm{div}(k\mathrm{grad}\,\varphi)dV. \tag{2}$$

再用另一方法来计算 V 的热量. 在时间 dt 内, 温度增加

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt,$$

则 dV 需要输入的热量是

$$cd\varphi\rho dV=c\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\rho dV,$$

这里 c 是一比例系数, 叫做物质的热容量, 而 ρ 是物质密度. 在时间 dt 内整个立体 V 要吸收的热量, 等于

$$dt\iiint\limits_{(V)} c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV.$$

单位时间内吸收的热量等于

$$\iiint\limits_{(V)} c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV. \tag{3}$$

由于 (2) 式, (3) 式相等, 因此

$$\iiint\limits_{(V)} \left\{ c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi) \right\} dV = 0.$$

这对所考察的区域内的任何一部分都对, 所以有方程

$$c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi), \tag{4}$$

这是有名的热传导方程.

在均匀介质中, 命 $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, 则得方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right).$$

当温度稳定分布时, 即 φ 仅依赖于位置 x, y, z 而不依赖于时间 t 时, 则温度 φ 适合于 Laplace 方程

$$\Delta \varphi = 0.$$

以上所论, 是在假定无热源的情况. 如果有热源, 则有以下的式子:

$$\iiint\limits_{(V)} \left[c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi) \right] dV = \iiint\limits_{(V)} e dV.$$

最后一项表示在单位时间内由 V 放出的热量.

被积函数 $e = e(x, y, z, t)$ 给出连续分布于 V 中的热源强度, 因此得出

$$c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k\operatorname{grad} p) = e.$$

在均匀介质的情况下,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi + \frac{e}{c\rho}.$$

第十八章　曲面的微分性质

§1. 代数工具

我们现在先叙述一下本章所要用到的代数工具, 有些是已经有过的, 有些是新的. 不必查书, 读者试补出没有证明的公式的证明.

1) $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 是二向量, 则

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \tag{1}$$

第二章 §5, 2.

2) 任意四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 之间有以下恒等式:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{2}$$

第二章 §6 定理 3.

3) 做二次型

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2,$$

其行列式

$$EG-F^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2. \tag{3}$$

作

$$(\lambda\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{d})\cdot(\lambda\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{d})=E_0\lambda^2+2F_0\lambda\mu+G_0\mu^2 \tag{4}$$

及

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{d})=L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2. \tag{5}$$

如果

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\text{ 及 }\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\text{ 平行于 }\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\text{ 则}$$
$$(LN-M^2)^2=(EG-F^2)(E_0G_0-F_0^2). \tag{6}$$

由 (5) 式及 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 得

$$\begin{aligned}LN-M^2&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}).\end{aligned}$$

再由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, 故得

$$((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|^2=(EG-F^2)(E_0G_0-F_0^2).$$

4) 假定 $a>0, ac-b^2>0$. 命 λ_1,λ_2 是

$$(a\lambda-a')(c\lambda-c')-(b\lambda-b')^2=0 \tag{7}$$

的两个根, $\lambda_1\leqslant\lambda_2$, 则

$$\lambda_1\leqslant\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{ax^2+2bxy+cy^2}\leqslant\lambda_2. \tag{8}$$

证 由于齐次性, 函数

$$\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{ax^2+2bxy+cy^2} \tag{9}$$

的最大、最小值等于在椭圆

$$ax^2+2bxy+cy^2=1$$

上函数 $a'x^2+2b'xy+c'y^2$ 的最大、最小值, 所以存在性是没有问题的. 由

$$a'x^2+2b'xy+c'y^2-\lambda_1(ax^2+2bxy+cy^2)=(a'-\lambda_1a)\left(x+\frac{b'-\lambda_1b}{a'-\lambda_1a}y\right)^2 \tag{10}$$

可知, 如果 $a'-\lambda_1a>0$, 则

$$\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{ax^2+2bxy+cy^2}\geqslant\lambda_1.$$

如果 $a'-\lambda_1a<0$, 则

$$\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{ax^2+2bxy+cy^2}\leqslant\lambda_1,$$

即 λ_1 不是最大值, 就是最小值; λ_2 也是如此. 但 λ_2 比 λ_1 大, 所以得出 (8) 式.

由 (10) 式可见, 当

$$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}=-\frac{b'-\lambda_1 b}{a'-\lambda_1 a} \tag{11}$$

时, 函数 (9) 确取下界 λ_1, 而当

$$\frac{x}{y}=\frac{x_2}{y_2}=-\frac{b'-\lambda_2 b}{a'-\lambda_2 a} \tag{12}$$

时, 函数 (9) 确取上界 λ_2.

5) 方程 (7) 可以写成为

$$(ac-b^2)\lambda^2-(ac'+a'c-2bb')\lambda+a'c'-b'^2=0, \tag{13}$$

所以

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{a'c'-b'^2}{ac-b^2} \tag{14}$$

及

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{ac'+a'c-2bb'}{ac-b^2}. \tag{15}$$

因此

$$\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}=\frac{b'^2-(\lambda_1+\lambda_2)bb'+\lambda_1\lambda_2 b^2}{a'^2-(\lambda_1+\lambda_2)aa'+\lambda_1\lambda_2 a^2}=\frac{b'c-c'b}{a'b-b'a}$$

及

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=-\frac{2a'b'-(ab'+a'b)(\lambda_1+\lambda_2)+2\lambda_1\lambda_2 ab}{a'^2-(\lambda_1+\lambda_2)aa'+\lambda_1\lambda_2 a^2}=-\frac{a'c-c'a}{a'b-b'a}.$$

因此 $x_1:y_1$ 与 $x_2:y_2$ 是以下的二次型的两根:

$$(ab'-ba')x^2-(a'c-c'a)xy+(bc'-cb')y^2=0. \tag{16}$$

6) 极易推得

$$ax_1x_2+b(x_1y_2+x_2y_1)+cy_1y_2=0. \tag{17}$$

§2. Gauss 第一微分型

我们现在考虑由参数 u,v 表达的曲面 S:

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\omega(u,v), \tag{1}$$

或者用向量符号

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v) \tag{2}$$

表之.

如果 u,v 又是参变量 t 的函数, 则当 t 变时, 我们就得出 S 上的一条曲线 c, 这条曲线的切线方向是

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dt},\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{dt},\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

命

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\omega}{\partial u}\right),\\ \boldsymbol{r}_v&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\omega}{\partial v}\right),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

则曲线 c 的切向量等于

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{du}{dt}\boldsymbol{r}_u+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{r}_v.\tag{5}$$

因此曲线 c 的切方向由 $\dfrac{du}{dt}$ 和 $\dfrac{dv}{dt}$ 唯一地决定.

特别, 当 u 或 v 取常数值时, 在曲面上我们得出两族曲线, 这两族曲线称为曲面上的坐标线, 坐标线上曲面的切线方向各为 $\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_u$.

今后我们只考虑曲面 S 上的这类点: 在这些点上, 向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 互不平行. 特别, 两个都不是零向量.

这个条件告诉我们, 二阶行列式

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}&\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}&\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}&\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v}&\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\omega}{\partial u}&\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v}&\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}$$

当中至少有一个不为零. 例如, 第一个行列式不为零, 那么由隐函数存在定理, 我们可以反解出

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

因此曲面 S 在这点附近可以写成显函数的形式:

$$z=\omega(u,v)=\omega[u(x,y),v(x,y)]$$

(注意, 这不等于说整个曲面可以用一个显式表示. 例如, 球面 $x^2+y^2+z^2-1=0$).

例 以原点为中心、R 为半径的球面:

$$x=R\sin u\cos v,\quad y=R\sin u\sin v,\quad z=R\cos u$$

当 $u=c_1$ 时, 得出球面上的纬线; 而 $v=c_2$ 时, 得出球面上的经线, 经线、纬线合成球面上的坐标线. 沿纬线的切方向是

$$(-R\sin c_1\sin v,\quad R\sin c_1\cos v,0).$$

它是和 (x,y) 平面平行的向量.

曲线 c 的弧长的微分的平方等于

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2+dy^2+dz^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}\\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}du+\frac{\partial\omega}{\partial v}dv\right)^2\\ &= E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2, \end{aligned}\tag{6}$$

此处

$$\left.\begin{aligned} E(u,v) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2,\\ F(u,v) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v},\\ G(u,v) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\}\tag{7}$$

用向量符号

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v,\tag{8}$$

(6) 式称为 Gauss 第一微分型.

坐标线 $u=c_1$ 及 $v=c_2$, 相互正交的必要且充分条件是 $F=0$. 在这样的情况下, 曲面上的坐标系称为正交坐标系.

由 §1, (1) 式可知, 第一微分型的判别式等于

$$EG-F^2=|\boldsymbol{r}_u|^2|\boldsymbol{r}_v|^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2,$$

即二向量 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 的向量积长度的平方. 前已知道它等于以 $\boldsymbol{r}_u$ 及 $\boldsymbol{r}_v$ 为边的平行四边形面积的平方.

从一点 $A(=(u,v))$ 出发, 沿 $v=c_2$ 作一微分向量 $\boldsymbol{r}_u du$, 沿 $u=c_1$ 作一微分向量 $\boldsymbol{r}_v dv$, 这二向量所定义的平行四边形的面积用 dS 表之, 称为曲面上的面积元素. 由

$$(\boldsymbol{r}_u du)\times(\boldsymbol{r}_v dv)=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)dudv$$

可知,

$$dS=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv.\tag{9}$$

注意, $EG-F^2$ 总是正的, 这是因为在我们所考虑的点上, 向量 $\boldsymbol{r}_u$, 和 $\boldsymbol{r}_v$ 互不平行.

给了两个方向 (du, dv) 与 $(\delta u, \delta v)$, 有两个切向量

$$\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv, \quad \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v.$$

这两个向量的夹角余弦等于

$$\begin{aligned} &\frac{(\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv) \cdot (\boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v)}{|\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv||\boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v|} \\ &= \frac{E du\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + G dv\delta v}{\sqrt{(E du^2 + 2F dudv + G dv^2)(E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2)}}. \end{aligned} \tag{10}$$

如果过一点有二曲线, 它们在这点的切线方向各为 $(du, dv), (\delta u, \delta v)$, (10) 式也称为这两曲线的夹角余弦.

习题 这些习题应随着课程的进展而逐步完成. 以下给一批曲面, 现求出它们的第一微分式; 学了 §3 就求出它们的第二微分式; 学了 §5 就看点的分类; 学了 §6 就计算曲率网、主曲率等等. 总之, 这些习题与本章相始终.

1. 球:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2. 曲面

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

3. 环面

$$4b^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2.$$

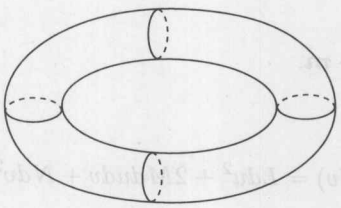


图 109

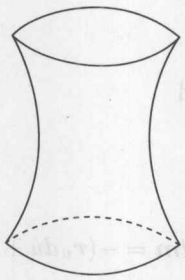


图 110

它是一个球族所占有的空间部分的表面 (这个球族的半径为 a, 而球心在半径为 b 的圆, 上如图 109), 利用参数方程

$$\boldsymbol{r} = [(b + a\cos\psi)\cos\varphi, (b + a\cos\psi)\sin\varphi, a\sin\psi].$$

解答 第一微分型 $ds^2 = a^2 d\psi + (b + a\cos\psi)^2 d\varphi^2$.

4. 悬链面 (由悬链线绕基线旋转而得的). (图 110) 悬链面的方程是

$$\boldsymbol{r} = \left(a\operatorname{ch}\frac{t}{a}\cos\varphi, a\operatorname{ch}\frac{t}{a}\sin\varphi, t \right).$$

解答 第一微分型: $ds^2 = a^2 \operatorname{ch} u(du^2 + dv^2)$.

5. 螺旋面. 平面曲线绕同平面上的一直线旋转, 并沿此直线的方向前进, 使所行距离与旋转角度成比例, 即得螺旋面. 它的方程是

$$\boldsymbol{r} = (\eta(t)\cos\varphi, \quad \eta(t)\sin\varphi, \quad \xi(t) + a\varphi)$$

(当 $a = 0$ 时螺旋面化为旋转曲面).

解答 第一微分型 $ds^2 = (\eta'^2 + \xi'^2)dt^2 + 2a\xi dt d\varphi + (\eta^2 + a^2)d\varphi^2$.

§3. Gauss 第二微分型

向量积

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$$

是曲面的法线方向, 则

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

为单位法线方向, 即

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{1}$$

显然有

$$d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{m} = 0, \tag{2}$$

微分此式得出

$$-d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{m} = d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{m}. \tag{3}$$

微分型

$$-d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{m} = -(\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)(\boldsymbol{m}_u du + \boldsymbol{m}_v dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{4}$$

称为 Gauss 第二微分型, 此处

$$\left.\begin{aligned} L &= -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{m}_u, \\ M &= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{m}_v + \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{m}_u), \\ N &= -\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{m}_v. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(3) 式右边等于

$$(\boldsymbol{r}_{uu}du^2+2\boldsymbol{r}_{uv}dudv+\boldsymbol{r}_{vv}dv^2)\cdot\boldsymbol{m},$$

因此

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{m},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{m},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{m},\tag{6}$$

由 (1) 式可知,

$$\left.\begin{aligned}
L&=\frac{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2x}{\partial u^2}&\dfrac{\partial^2y}{\partial u^2}&\dfrac{\partial^2z}{\partial u^2}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial y}{\partial v}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\\
M&=\frac{\boldsymbol{r}_{uv}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2x}{\partial u\partial v}&\dfrac{\partial^2y}{\partial u\partial v}&\dfrac{\partial^2z}{\partial u\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial y}{\partial v}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\\
N&=\frac{\boldsymbol{r}_{vv}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2x}{\partial v^2}&\dfrac{\partial^2y}{\partial v^2}&\dfrac{\partial^2z}{\partial v^2}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial x}{\partial v}&\dfrac{\partial y}{\partial v}&\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

在显式表达形式

$$z=f(x,y)$$

时, 用符号

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

则得

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2$$

及

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

§4. 曲面上曲线的曲率

c 是曲面 S 上的任意一条曲线, M 是这曲线上的一点, 在曲线 c 上的长度微分是 ds. 由上节公式 (3) 可知,

$$\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=-\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{m}. \tag{1}$$

由于 $\boldsymbol{t}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 是曲线上的单位切向量, 由 Frenet-Serret 公式

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{\rho}, \tag{2}$$

这里 ρ 是曲线 c 的曲率半径, $\boldsymbol{n}$ 是曲线 c 的单位主法线向量. (2) 式可以写成为

$$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{\rho}=-\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}. \tag{3}$$

命 φ 表曲面法向量 $\boldsymbol{m}$ 与曲线主法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角, 则得

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=-\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}. \tag{4}$$

如果给了 $\dfrac{du}{dv}$ 与 φ, 则 ρ 唯一地决定了, 因此有

定理 1 *在曲面上某一点具有相同切线及主法线的曲线一定有相同的曲率半径.*

当 $\varphi=0$ 时, 则曲线的主法线与曲面的法线同向, 通过法向与 c 的切向作平面, 这平面交曲面于曲线 c_0, 曲线 c 与 c_0 的切线与主法线都同向, 因而它们的曲率半径也都相等. c_0 是平面曲线, 这样的曲线称为法截线, 就是通过曲面的法向做平面所截出的曲线.

因此主法线与曲面法线同向的曲线的曲率的研究, 一变而为法截线的曲率的研究了 (定理 1).

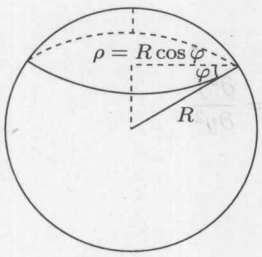


图 111

过法线的平面有无穷多, 因而法截线也有无穷多. 在曲面的切面上给予任何一个切线方向, 我们可以截出一条法截线来, 也就是给了 $\dfrac{du}{dv}$, 就有一条法截线.

但这样做出的法截线的主法线方向, 可能与 $\boldsymbol{m}$ 同向, 也可能与 $\boldsymbol{m}$ 反向, 也就是 $\varphi=0$ 或 π, 即 $\cos\varphi=\pm1$.

曲面 S 上的任何一条曲线 c, 其上一点 M, 过点 M, 切曲线 c 的法截线 c_0 称为对应于 c 的法截线. ρ 是 c 的曲率半径, R 是 c_0 的曲率半径, 由于切向相同, 即 $\dfrac{du}{dv}$ 的数值相同, 所以

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{\pm1}{R},\quad \rho=\pm R\cos\varphi. \tag{5}$$

这里 φ 是曲线 c 的主法线与曲面法线的夹角 (图 111). 因此得

定理 2 (Meusnier) 曲面上任何曲线在某点的曲率半径等于对应的法截线在这点的曲率半径乘以曲面的法线与曲线的主法线之间的夹角的余弦.

定理也可以叙述为

曲面上任何曲线的曲率半径等于在曲面的法线上所截取的对应的法截线的曲率半径在这曲线的主法线上的投影.

例 以球面为例, 法截线是大圆. 命 c 是球面上的任意圆, 公式 (2) 变为两个圆半径的关系. 这显然是正确的.

由 Meusnier 定理, 曲面上曲线的曲率的研究, 化为过这定点曲面上法截线的曲率的研究.

法截线的曲率等于

$$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}. \tag{6}$$

但必须加以解释, 如果右边为正, 则法截线的主法线与 $\boldsymbol{m}$ 的方向相同, 曲率半径等于 R; 如果右边为负, 则方向相反, 曲率半径等于 $-R$.

§5. 点的分类

由 §4 的公式 (6) 可知, 给了比值 $\frac{du}{dv}$, 曲率 $\frac{1}{R}$ 就唯一地确定了. 我们有三种情况:

1. 如果在 M 点 $M^2-LN<0$, 则所有的法截线的曲率 $\frac{1}{R}$ 都有相同的符号, 也就是说, 所有的法截线的主法线方向在曲面的同一侧. 这样的点称为*椭圆性点*.

2. 如果在 M 点 $M^2-LN>0$, 则曲率 $\frac{1}{R}$ 可以不同号, 有时与法向同侧, 有时异侧. 这样的点称为*双曲性点*.

3. 如果 $M^2-LN=0$, 则 §4 的 (6) 式的分子为一完全平方乘以 N (或 L), 曲率不变号, 但有某一法截线曲率为 0. 这样的点称为*抛物性点*. 严格地说, $L=M=N=0$ 的点必须除外, 这样的点称为凝聚点.

注意, 在椭圆性点, $\frac{1}{R}$ 决不为 0, 而其他两种情况都有使 $\frac{1}{R}$ 为 0 的方向存在. 它就是二次多项式 $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$ 的实根.

例 (旋转曲面) 在 (ξ,η) 平面上有一条曲线 c:

$$\xi=\xi(t),\quad \eta=\eta(t).$$

把 $o\xi$ 轴做为 z 轴, 曲线 c 绕 z 轴旋转, 得出来的曲面称为旋转面, 而 z 轴称为旋转轴 (图 112), 显然有

$$z=\xi(t),\quad x^2+y^2=\eta^2(t).$$

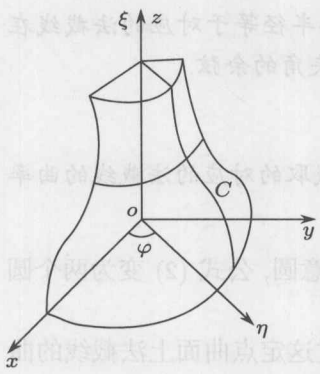


图 112

参变量表达式是

$$\boldsymbol{r}=(\eta\cos\varphi,\eta\sin\varphi,\xi),$$

由此得

$$d\boldsymbol{r}=(\eta'\cos\varphi,\eta'\sin\varphi,\xi')dt+(-\eta\sin\varphi,\eta\cos\varphi,0)d\varphi,$$

$$d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\eta^2d\varphi^2+(\eta'^2+\xi'^2)dt^2,$$

即

$$E=\eta^2,\quad F=0,\quad G=\eta'^2+\xi'^2.$$

又作

$$\boldsymbol{r}_{tt}=(\eta''\cos\varphi,\eta''\sin\varphi,\xi''),\quad \boldsymbol{r}_{t\varphi}=(-\eta'\sin\varphi,\eta'\cos\varphi,0),$$

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}=(-\eta\cos\varphi,-\eta\sin\varphi,0),$$

推得第二微分型

$$\frac{(\eta'\xi''-\xi'\eta'')dt^2+\eta\xi'd\varphi^2}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}.$$

因此

$$LN-M^2=(\eta'\xi''-\xi'\eta'')\eta\xi'.$$

现在来看旋转面上点的类别, 取显示表达式 $\eta=f(\xi)$, 则得

$$LN-M^2=-f''(\xi)f(\xi).$$

假定曲线都在 $\eta>0$ 的一方, 即 $f(\xi)>0$, 如此则 M^2-LN 与 $f''(\xi)$ 同号, 也就是当 $f''(\xi)<0,>0,=0$ 时各为椭圆, 双曲, 抛物性点, 也就是如果曲线凹向着旋转轴时, 得椭圆性点. 几何上看来也是直觉的, 因为这时候, 切面在旋转体之外.

曲线凸向着旋转轴时, 得双曲性点. 从几何上看来, 曲线的切线方向在体内, 而这点经旋转所成的圆的切线方向则在体外, 因此有内有外.

曲线的扭转点是曲面的抛物性点.

§6. 曲率线

从法截线的曲率公式出发,

$$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}. \tag{1}$$

由 §4, 有两个方向 (d_1u,d_1v) 及 (d_2u,d_2v) 存在, 使 $\frac{1}{R}$ 取 $\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}$, 而且

$$\frac{1}{R_2}\leqslant\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\leqslant\frac{1}{R_1}, \tag{2}$$

这里 R_1, R_2 是方程

$$(LN - M^2)R^2 + (2FM - EN - GL)R + (EG - F^2) = 0 \tag{3}$$

的二根, 而 $(d_1u, d_1v), (d_2u, d_2v)$ 是

$$(EM - FL)du^2 + (EN - GL)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0 \tag{4}$$

的二个解. 但需注意, 如果

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G},$$

则任意方向 (du, dv) 都是 (4) 式的解, 这时由 (2) 式可知 $R_1 = R_2$, 这样的点称为圆点. 我们可以证明, 处处是圆点的曲面, 一定是球面 (这里不证). 在今后的讨论中, 把圆点除外. (4) 式的根不会重叠的, 其原因是, 由 §1 中 (11) 式, (12) 式得

$$\frac{d_1u}{d_1v} = -\frac{F - R_1M}{E - R_1L}, \frac{d_2u}{d_2v} = -\frac{F - R_2M}{E - R_2L}. \tag{5}$$

如果相等, 则 $R_1 = R_2$, 即是圆点了.

由 $(d_1u, d_1v), (d_2u, d_2v)$ 所定义出来的两个向量

$$(\boldsymbol{r}_u d_1u + \boldsymbol{r}_v d_1v), \quad (\boldsymbol{r}_u d_2u + \boldsymbol{r}_v d_2v)$$

是互相正交的, 其理由是

$$(\boldsymbol{r}_u d_1u + \boldsymbol{r}_v d_1v) \cdot (\boldsymbol{r}_u d_2u + \boldsymbol{r}_v d_2v) = Ed_1ud_2u + F(d_1ud_2v + d_2ud_1v) + Gd_1vd_2v.$$

由 §1 中 (17) 式可知, 此式为 0.

方向 (5) 式称为主方向, $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ 称为主曲率, 又 R_1, R_2 称为主曲率半径. 由 (5) 式所定义的两族曲线称为曲率线, 在曲面上成正交坐标网.

如果把它们作为坐标线, 则 $F = 0$; 如果 $u = c_1, v = c_2$ 是曲率线, 它一定适合微分方程 (4), 即得

$$EM = GM = 0.$$

但 $EG > 0$, 因此 $M = 0$.

反之, 如果 $F = M = 0$, 则方程 (4) 变为

$$dudv = 0.$$

因而 $u = c_1, v = c_2$ 是曲率线, 因得

定理 3 *坐标网是曲率网的必要且充分条件是: 在整个曲面上, Gauss 的两个二次型缺中间项, 即 $F = M = 0$.*

现在

$$M^2 - LN = -\frac{EG}{R_1 R_2},$$

由于 $EG > 0$, 因此得:

在椭圆性点处, R_1 与 R_2 同号, 但在双曲性点处, R_1 与 R_2 异号. 由 $\frac{1}{R_1}$ 变到 $\frac{1}{R_2}$ 必定经过 0 值, 这时候所对应的方向称为渐近方向. 对应于渐近方向的曲率为 0, 曲率半径为 ∞.

定义 两曲率的乘积

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

称为 Gauss 曲率, 而其和的平均数

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

称为曲率中值.

由 (3) 式可知,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{6}$$

例 1 扁回旋椭圆面的方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

的参数表达式是

$$x = a\cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = c\cos v.$$

不难得出

$$E = a^2 \sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v,$$
$$L = \frac{ac \sin^2 v}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v}}.$$

由于 $F = M = 0$, 所以 $u =$ 常数, $v =$ 常数都是曲率线. 实质上, 由于 (7) 式是回旋面, 它的经线 ($v = c_1$), 纬线 ($u = c_2$) 是曲率线, 因而 $F = M = 0$, 可不待计算而知之. 而 Gauss 曲率

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v)^2}.$$

例 2 二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

的显示式

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

不难求得

$$p=\frac{c^2x}{a^2z},\quad q=\frac{c^2y}{b^2z},\quad r=\frac{c^4y^2}{a^2b^2z^3},\quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad t=\frac{c^4x^2}{a^2b^2z^3}.$$

由于 $rt-s^2=0$, 所以所有的点都是抛物点, 并且有一个主曲率半径等于 ∞. 显然, 对应的主方向与锥面的母直线重合.

§7. Euler 公式

假定我们已经以曲率线网为坐标网, 则

$$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+Ndv^2}{Edu^2+Gdv^2}. \tag{1}$$

取 $v=c_2$ 得主曲率

$$\frac{1}{R_1}=\frac{L}{E}.$$

取 $u=c_1$ 得

$$\frac{1}{R_2}=\frac{N}{G}.$$

因此

$$\frac{Ldu^2+Ndv^2}{Edu^2+Gdv^2}=\frac{1}{R_1}\frac{Edu^2}{Edu^2+Gdv^2}+\frac{1}{R_2}\frac{Gdv^2}{Edu^2+Gdv^2}.$$

命 θ 是方向 dv/du 与曲率线 $v=c_2$ 的交角, 则

$$\frac{Edu^2}{Edu^2+Gdv^2}=\cos^2\theta,\quad \frac{Gdv^2}{Edu^2+Gdv^2}=\sin^2\theta.$$

因而得出 Euler 公式

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{2}$$

因此得

定理 4 *在曲面上每一点的切面存在有两个相互垂直的方向, 在这两个方向, 曲率 $\frac{1}{R}$ 达到最大与最小值, 并且 $\frac{1}{R_1}$ 与 $\frac{1}{R_2}$ 就是对应于这两个方向的曲率值. 任何法截线的曲率可以由 Euler 公式 (2) 表之, 其中 θ 是法截线的切线与给出曲率 $\frac{1}{R_1}$ 的方向所作成的角度.*

§8. Olinde Rodrigues 公式

在空间具有一个参变量的直线族一般没有包络, 也就是说, 不一定有一条曲线 (即所说的包络) 以这些直线为切线. 在曲面 s 上任取一曲线 c, 在 c 上每一点做曲面 s 的法线, 法线也成一直线族, 这样的直线族不一定有包络. 问题: 怎样的 c, 其上各点作曲面的法线, 这法线族有包络. 回答是, 必要且充分条件是 c 为曲率线.

假定包络是 c_1, 用 $\boldsymbol{r}$ 表 c 的径矢, 而 $\boldsymbol{r}_1$ 表 c_1 的径矢, M 表示 c 上的一点. 作法线, 这法线与 c_1 的切点是 M_1. 命 MM_1 的长度等于 a, 如此则得

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} + a\boldsymbol{m}, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{m}$ 是单位法向向量 (图 113).

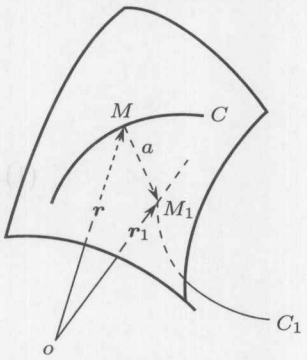


图 113

c_1 如果是法线的包络, 则它的切线方向一定与 $\boldsymbol{m}$ 平行, 即 $d\boldsymbol{r}_1 = b\boldsymbol{m}$, 此处 b 是一数量由 (1) 式求微商得

$$b\boldsymbol{m} = d\boldsymbol{r}_1 = d\boldsymbol{r} + ad\boldsymbol{m} + (da)\boldsymbol{m},$$

即

$$d\boldsymbol{r} + ad\boldsymbol{m} = e\boldsymbol{m},$$

这里 e 是某一数量. 与 $\boldsymbol{m}$ 求数量积, 得

$$e = d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m} + ad\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}, \tag{2}$$

切向量 $d\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 正交, 单位向量 $\boldsymbol{m}$ 与其微分向量 $d\boldsymbol{m}$ 正交, 因此 $e = 0$. 即得

$$d\boldsymbol{r} + ad\boldsymbol{m} = 0. \tag{3}$$

所以, 如果所考虑的包络存在, 则 (3) 式一定成立; 反之, 如果沿 c, (3) 式成立, 则由 (1) 式确定一条曲线 c_1, 微分之, 得 $d\boldsymbol{r}_1 = d\boldsymbol{r} + ad\boldsymbol{m} + (da)\boldsymbol{m} = (da)\boldsymbol{m}$. 也就是 $\boldsymbol{m}$ 与 c_1 的切向平行, 因此沿 c 的曲面法线是 c_1 的切线. 因此公式 (3) 是曲线 c 上曲面法线具有包络的必要且充分的条件, 注意, 包络可以蜕化为一个点, 那时法线成锥面或柱面, 但 (3) 式仍然成立.

我们现在进一步算出 (3) 式中的 a 就是主曲率半径之一.

展开 (3) 式得

$$\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv + a(\boldsymbol{m}_u du + \boldsymbol{m}_v dv) = 0. \tag{4}$$

与向量 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 求内积得

$$\left.\begin{aligned} Edu + Fdv + a(-Ldu - Mdv) = 0, \\ Fdu + Gdv + a(-Mdu - Ndv) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

消去 du, dv 得

$$(LN - M^2)a^2 + (2FM - EN - GL)a + EG - F^2 = 0,$$

这就是 §6 中 (3) 式. 因此 a 是 R_1, R_2 之一. 因此

$$d\boldsymbol{m} = -\frac{1}{R}d\boldsymbol{r}. \tag{6}$$

这称为 Olinde Rodrigues 公式, 由 (5) 式确定出来的方向是主方向.

定理 5 *曲面的曲率线上每点作曲面的法线, 这些法线有一包络, 界于曲面与包络之间的法线的长度等于主曲率半径之一.*

某一平面曲线绕着位于这平面上一直线旋转所产生的曲面的曲率线就是它的经线与纬线. 纬线是指这曲线上一点的轨迹, 其上的曲面法线成一锥面, 其顶点就是平面曲线的法线与轴的交点. 而经线是指过轴平面所截出的线, 法线在一平面上, 所以有包络, 这与定理 5 所论证的结论相同.

§9. Dupin 定理

在空间有三族互相垂直的曲面:

$$\varphi(x, y, z) = q_1, \quad \psi(x, y, z) = q_2, \quad \omega(x, y, z) = q_3, \tag{1}$$

它们形成空间的一个正交曲面坐标网, 也就是可以解出成为

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \psi_1(q_1, q_2, q_3), \quad z = \omega_1(q_1, q_2, q_3). \tag{2}$$

沿坐标线的切线向量各为

$$\boldsymbol{r}_{q_1}, \boldsymbol{r}_{q_2}, \boldsymbol{r}_{q_3}. \tag{3}$$

正交的条件可以写成为

$$\boldsymbol{r}_{q_2} \cdot \boldsymbol{r}_{q_3} = 0, \quad \boldsymbol{r}_{q_3} \cdot \boldsymbol{r}_{q_1} = 0, \quad \boldsymbol{r}_{q_1} \cdot \boldsymbol{r}_{q_2} = 0. \tag{4}$$

第一式对 q_1 求微商, 第二式对 q_2 求微商, 第三式对 q_3 求微商, 得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{q_1q_2} \cdot \boldsymbol{r}_{q_3} + \boldsymbol{r}_{q_2} \cdot \boldsymbol{r}_{q_1q_3} = 0, \\ \boldsymbol{r}_{q_2q_3} \cdot \boldsymbol{r}_{q_1} + \boldsymbol{r}_{q_3} \cdot \boldsymbol{r}_{q_1q_2} = 0, \\ \boldsymbol{r}_{q_1q_3} \cdot \boldsymbol{r}_{q_2} + \boldsymbol{r}_{q_1} \cdot \boldsymbol{r}_{q_2q_3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

三式总加, 减第一、第二、第三式得

$$\boldsymbol{r}_{q_1q_2} \cdot \boldsymbol{r}_{q_3} = \boldsymbol{r}_{q_2q_3} \cdot \boldsymbol{r}_{q_1} = \boldsymbol{r}_{q_3q_1} \cdot \boldsymbol{r}_{q_2} = 0. \tag{6}$$

由 (4) 式及 (6) 式得

$$\boldsymbol{r}_{q_1}\cdot\boldsymbol{r}_{q_3}=\boldsymbol{r}_{q_2}\cdot\boldsymbol{r}_{q_3}=\boldsymbol{r}_{q_1q_2}\cdot\boldsymbol{r}_{q_3}=0.$$

可知, $\boldsymbol{r}_{q_1},\boldsymbol{r}_{q_2},\boldsymbol{r}_{q_1q_2}$ 都垂直于 $\boldsymbol{r}_{q_3}$. 因而在同一平面上即得

$$\boldsymbol{r}_{q_1q_2}\cdot(\boldsymbol{r}_{q_1}\times\boldsymbol{r}_{q_2})=0. \tag{7}$$

现在考虑曲面 $q_3=$ 常数, 而 q_1,q_2 作为参变量, 得

$$F=\boldsymbol{r}_{q_1}\cdot\boldsymbol{r}_{q_2}=0,\quad M=\frac{\boldsymbol{r}_{q_1q_2}\cdot(\boldsymbol{r}_{q_1}\times\boldsymbol{r}_{q_2})}{\sqrt{EG-F^2}}=0.$$

因此坐标线 q_1 与 q_2 是曲面 $q_3=$ 常数的曲率线, 因此得

定理 6 (Dupin) *如果空间有三族互相正交的曲面, 在不同的两族中的任何两个曲面的交线是这两个曲面的曲率线.*

例 椭球坐标. 考虑含参数 ρ 的二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1,\quad a^2>b^2>c^2. \tag{8}$$

对一固定的点 $M(x,y,z)$, 得出 ρ 的三次方程. 不难证明, 有三个实根 u,v,w, 而且适合于

$$\infty>u>-c^2,\quad -c^2>v>-b^2,\quad -b^2>w>-a^2. \tag{9}$$

这样三个数 (u,v,w) 称为点 $M(x,y,z)$ 的椭球坐标. 以上讨论, 我们假定 x,y,z 中无一为 0. 不然, (2) 式化为 ρ 的二次方程了.

我们研究椭球坐标系中的坐标曲面, 以 u 代 ρ, 则得椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1. \tag{10}$$

以 v 代 ρ 得单叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1\quad\begin{pmatrix}c^2+v<0,\\ a^2+v>0,\quad b^2+v>0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

以 w 代 ρ 得双叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1\quad\begin{pmatrix}b^2+w<0,\quad c^2+w<0,\\ a^2+w>0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

现在证明 (10) 式, (11) 式, (12) 式正交, 曲面 (10), (11) 的法线方向, 各为

$$\frac{x}{a^2+u},\frac{y}{b^2+u},\frac{z}{c^2+u};\quad \frac{x}{a^2+v},\frac{y}{b^2+v},\frac{z}{c^2+v}.$$

两法向的夹角余弦之分子等于

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}$$
$$=\frac{1}{v-u}\left(\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-\frac{x^2}{a^2+v}-\frac{y^2}{b^2+v}-\frac{z^2}{c^2+v}\right)=0.$$

故得所证.

§10. Gauss 曲率的几何意义

把法线单位向量的始点移到坐标中心, 其末端 M^* 就在以原点为中心的单位球面上. 当 M 在曲面 s 上移动, M^* 便在球面上移动, 这样的表达方法, 称为曲面的球面写像. M^* 的位置由 u,v 唯一决定.

在球面上 M^* 点的参数表达式是 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}(u,v)$, 因此球面的 Gauss 第一微分型等于

$$d\boldsymbol{m}\cdot d\boldsymbol{m}=E_0du^2+2F_0dudv+G_0dv^2, \tag{1}$$

此处

$$E_0=\boldsymbol{m}_u\cdot\boldsymbol{m}_u,\quad F_0=\boldsymbol{m}_u\cdot\boldsymbol{m}_v,\quad G_0=\boldsymbol{m}_v\cdot\boldsymbol{m}_v.$$

其面积元素等于

$$dS_0=\sqrt{E_0G_0-F_0^2}dudv. \tag{2}$$

微分型 (1) 也称为原曲面的 Gauss 第三微分型.

引用 §1 的 3), 取

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_u,\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_v,\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}_u,\quad \boldsymbol{d}=\boldsymbol{m}_v.$$

首先由于 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m}=0$, 得

$$0=(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m})_v=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m}_v,$$

即得 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m}_v=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{m}_u=-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{m}$, 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 再由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=1$ 可知, $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}_u=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}_v=0$, 即 $\boldsymbol{m}$ 垂直于 $\boldsymbol{m}_u,\boldsymbol{m}_v$. 故 $\boldsymbol{m}_u\times\boldsymbol{m}_v$ 与 $\boldsymbol{m}$ 平行, 故与 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 平行, 因此 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ 平行. 故由 §1 的 3), 得

$$(LN-M^2)^2=(EG-F^2)(E_0G_0-F_0^2).$$

由此推得

$$K=\sqrt{\frac{E_0G_0-F_0^2}{EG-F^2}}, \tag{3}$$

也就是

$$dS_0=KdS.$$

因此有

定理 7 Gauss 曲率的绝对值等于曲面一点的面积元素与其球面映像的对应点的面积元素之比.

非常值得注意的事实是: Gauss 曲率的表达式

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

仅依赖于第一微分型, 而不依赖于第二微分型, 切实些说, 有恒等式

$$4(EG-F^2)(LN-M^2)=\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

要证明这个恒等式并不难. 例如, 取显示式, 这恒等式就是

$$4pq(rt-s^2)=\frac{\partial}{\partial x}(1+p^2)\frac{\partial}{\partial y}(1+q^2)-\frac{\partial}{\partial y}(1+p^2)\frac{\partial}{\partial x}(1+q^2),$$

而这是显然的.

因此, Gauss 曲率可以仅用 E,F,G 及其对 u,v 的微商表达出来. 这是一个深刻的内在的现象. 这是发现 Riemann 几何的原始根源之一. 所谓 Riemann 几何者, 乃是从一个微分二次型出发, 研究与之有关的几何性质的学问也. 结合现在的情况来说, 那些几何现象只与 E,G,F 有关, 在曲面论的研究中, 就是曲面互相可展的性质.

§11. 曲率中值的几何意义

在曲面 s:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

上任一点 M 处, 沿法向 $\boldsymbol{m}$ 截一段长为 $n(n=n(u,v))$ 的线段 MM_1, M_1 画一新曲面 s_1, 其间的关系是

$$\boldsymbol{r}^{(1)}=\boldsymbol{r}+n\boldsymbol{m}. \tag{1}$$

对 u,v 求微商得

$$\boldsymbol{r}_u^{(1)}=\boldsymbol{r}_u+n_u\boldsymbol{m}+n\boldsymbol{m}_u,\quad \boldsymbol{r}_v^{(1)}=\boldsymbol{r}_v+n_v\boldsymbol{m}+n\boldsymbol{m}_v.$$

s_1 的 Gauss 第一微分型的系数是 E_1,F_1,G_1. 假定 $n=n(u,v)$ 及 n_u,n_v 都很小, 可以略去二次项, 则得

$$\begin{aligned}E_1&=\boldsymbol{r}_u^{(1)}\cdot\boldsymbol{r}_u^{(1)}=(\boldsymbol{r}_u+n_u\boldsymbol{m}+n\boldsymbol{m}_u)\cdot(\boldsymbol{r}_u+n_u\boldsymbol{m}+n\boldsymbol{m}_u)\\&=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u+2n_u(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m})+2n(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m}_u).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m}=0$ 推得

$$E_1=E-2nL.$$

同理, 不难得到

$$F_1 = F - 2nM, \quad G_1 = G - 2nN.$$

由此推得

$$E_1G_1 - F_1^2 = EG - F^2 - 2n(EN - 2FM + GL).$$

仍然略去高次项.

由于曲率中值等于

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)},$$

所以

$$E_1G_1 - F_1^2 = (EG - F^2)(1 - 4nH).$$

开平方, 依二项式定理展开 $(1 - 4nH)^{\frac{1}{2}}$, 并略去高次项得

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2} \quad (1 - 2nH).$$

乘以 $du \cdot dv$ 并积分, 得到曲面 s 与曲面 s_1 很近时, 面积的差额

$$\iint\limits_{(s_1)} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}dudv - \iint\limits_{(s)} \sqrt{EG - F^2}dudv = -\iint\limits_{(s)} 2nH\sqrt{EG - F^2}dudv,$$

即

$$\delta S = -\iint\limits_{(s)} 2nHdS. \tag{2}$$

这个公式可直接联系于著名的 Plato 问题: "给已知的界线 L, 求以 L 为边界的面积最小的曲面". 现在去证明, "*在这样曲面上曲率中值应当等于 0*".

如果在曲面上有某一块 σ, 其上 $H > 0$, 选择 n, 使其在 σ 上是正的, 而曲面上其余部分等于 0, 则

$$\delta s = -\iint\limits_{(\sigma)} 2nHds < 0,$$

即以 L 为周界的曲面 s_1 的面积小于 s 的面积, 与假定相违背. 如果有一块其上 $H < 0$, 则选 n, 使在 σ 上为负, 而其余部分为 0. 同样, s 的面积不是最小, 因此, 曲率中值等于 0 的曲面称为最小曲面.

§12. 活动标架

假定已经取了正交坐标线, 也就是假定了 $F = 0$, 即

$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = E, \quad \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0, \quad \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = G,$$
$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{m}_u = -L, \quad \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{m}_v + \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{m}_u = -M, \quad \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{m}_v = -N.$$

三单位向量:

$$\boldsymbol{m},\quad \boldsymbol{t}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{t}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}.$$

称为活动标架. 活动标架是互相正交的三个单位向量. 每一点有一个活动标架, 任何一个向量都可以分解为这三坐标向量的和, 如 Frenet-Serret 公式一样我们可以研究这三坐标向量对 u, 对 v 的微商对这三坐标向量的分解式.

由于正交及单位性质, 我们知道

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dv}&=\qquad\qquad q\boldsymbol{t}_2+s_1\boldsymbol{m},\\ \frac{d\boldsymbol{t}_2}{dv}&=-q\boldsymbol{t}_1\qquad\quad +s_2\boldsymbol{m},\\ \frac{d\boldsymbol{m}}{dv}&=-s_1\boldsymbol{t}_1-s_2\boldsymbol{t}_2\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{t}_1}{du}&=\qquad\qquad p\boldsymbol{t}_2+r_1\boldsymbol{m},\\ \frac{d\boldsymbol{t}_2}{du}&=-p\boldsymbol{t}_1\qquad\quad +r_2\boldsymbol{m},\\ \frac{d\boldsymbol{m}}{du}&=-r_1\boldsymbol{t}_1-r_2\boldsymbol{t}_2.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

现在定出 p,q,r_1,r_2,s_1,s_2, 首先 (1) 式中第一式与向量 $\boldsymbol{t}_2$ 作内积, 得

$$q=\boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{t}_{1v}.$$

由于

$$\boldsymbol{t}_{1v}=\left(\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}\right)_v=\frac{\boldsymbol{r}_{uv}}{\sqrt{E}}+\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_v\boldsymbol{r}_u,$$

$\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{t}_2$ 正交, 所以

$$q=\frac{\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv}}{\sqrt{EG}}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v)=\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}.\tag{3}$$

同法,

$$p=-\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}.\tag{4}$$

又

$$\boldsymbol{r}_1=\left(\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{t}_1\right)\cdot\boldsymbol{m}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}\right)\cdot\boldsymbol{m}=\frac{\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{m}}{\sqrt{E}}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{m}=\frac{L}{\sqrt{E}}.$$

同法得

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{L}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{r}_2=\frac{M}{\sqrt{G}},\quad \boldsymbol{s}_1=\frac{M}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{s}_2=\frac{N}{\sqrt{G}}.$$

即得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t}_{1u} &= -\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{t}_2 + \frac{L}{\sqrt{E}}\boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{t}_{2u} &= \frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{t}_1 + \frac{M}{\sqrt{G}}\boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{m}_u &= -\frac{L}{\sqrt{E}}\boldsymbol{t}_1 - \frac{M}{\sqrt{G}}\boldsymbol{t}_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

及

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t}_{1v} &= \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{t}_2 + \frac{M}{\sqrt{E}}\boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{t}_{2v} &= -\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{t}_1 + \frac{N}{\sqrt{G}}\boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{m}_v &= -\frac{M}{\sqrt{E}}\boldsymbol{t}_1 - \frac{N}{\sqrt{G}}\boldsymbol{t}_2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

命

$$\omega = p\mathrm{d}u + q\mathrm{d}v, \quad \omega_1 = r_1\mathrm{d}u + s_1\mathrm{d}v, \quad \omega_2 = r_2\mathrm{d}u + s_2\mathrm{d}v,$$

则活动标架的全微分表示形式有

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{t}_1 &= -\omega\boldsymbol{t}_2 + \omega_1\boldsymbol{m}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}_2 &= -\omega\boldsymbol{t}_1 + \omega_2\boldsymbol{m}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{m} &= -\omega_1\boldsymbol{t}_1 - \omega_2\boldsymbol{t}_2, \end{aligned}\right\}$$

这里

$$\omega = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v\mathrm{d}u - G_u\mathrm{d}v), \quad \omega_1 = \frac{L}{\sqrt{E}}\mathrm{d}u + \frac{M}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v, \quad \omega_2 = \frac{M}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u + \frac{N}{\sqrt{G}}\mathrm{d}v.$$

附记 如果有对应关系的二曲面为

$$s:\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),$$

$$s_1:\ \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(u,v),$$

并且如果它们有相同的第一、第二微分二次型, 那么它们所对应的活动标架适合相同的微分方程 (5) 与 (6). 从曲线论中处理 Frenet-Serret 公式的方法出发, 我们能够证明, 经过平移、旋转可以把 s 与 s_1 互变.

更本质的问题是: 寻求条件判断任何二曲面能否经平移, 旋转互变, 也就是在变形

$$u_1 = \varphi(u,v), \quad v_1 = \psi(u,v)$$

下一对二次型

$$E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2, \quad L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2$$

是否能同时变为另一对:

$$E_1du_1^2+2F_1du_1dv_1+G_1dv_1^2,\quad L_1du_1^2+2M_1du_1dv_1+N_1dv_1^2$$

的问题. 本书不作答复.

§13. 曲面的可展性

平放着的红旗象征着一个平面, 而一面迎风飘扬的红旗, 在每一时刻, 就是一个曲面. 两个曲面具有这样的关系, 称为互相可展关系. 确切些说:

如果有二曲面 s 与 s_1, 其间建立了以下的点点对应关系: 由参变量 u,v 定义

$$s:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),$$

$$s_1:\ \boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(u,v).$$

当 u,v 取值时 s,s_1 上各有一点 M,M_1, 它们称为对应点. 当

$$u=\varphi(t),\quad v=\psi(t)$$

时, s,s_1 上各画一条曲线. 如果对应曲线段的长度相等时, 这两曲面称为彼此可展, 也就是说, s 与 s_1 所定义的第一微分式的系数互等, 即

$$E=E_1,\quad F=F_1,\quad G=G_1.$$

上节的结果说明了, 可展曲面的 Gauss 曲率相等.

关于可展曲面的本质问题是: 给了两个曲面, 我们是否可以引进合适的参变量, 使它们成为可展关系; 或者这样说, 给了两个微分二次型

$$E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2$$

及

$$E_1(u_1,v_1)du_1^2+2F_1(u_1,v_1)du_1dv_1+G_1(u_1,v_1)dv_1^2,$$

我们能否找到一变形:

$$u_1=\varphi(u,v),\quad v_1=\psi(u,v),$$

把其一变为其他.

现在, 我们不深入讨论这一问题.

§14. 曲面族与偏微分方程

从一个一阶常微分方程

$$\phi(x,y,p)=0,\quad p=\frac{dy}{dx} \tag{1}$$

可以解得

$$f(x,y,c)=0. \tag{2}$$

这代表一个曲线族.

反之, 从一个曲线族 (2), 求微商得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p=0, \tag{3}$$

与 (2) 式. 消去 c, 即得原来的微分方程 (1). 不仅如此, 如果把 c 也看成 x 的函数, 则微商 (2) 式得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0. \tag{4}$$

如果

$$\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0, \tag{5}$$

则 (4) 式与 (3) 式完全一致, 因此也得出同样的微分方程 (1) 来.

(5) 式说明

$$\frac{dc}{dx}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial c}=0.$$

第一式说明 c 是常数, 这就是曲线族. 第二式与 (2) 式联立, 消去 c, 即得曲线族 (2) 的包络, 也得出方程 (1) 的奇异解.

我们现在试将这个处理方法推广到曲面的情形, 即考虑一个有二参变量的曲面族

$$f(x,y,z;a,b)=0. \tag{6}$$

命

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

则由 (6) 式及

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

消去 a,b, 可得一个偏微分方程:

$$\phi(x,y,z,p,q)=0. \tag{8}$$

如果把 a,b 也看成 x,y 的函数, 则得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

与 (7) 式相比较, 如果

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0,\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

则 (9) 式与 (7) 式完全一样. 因而也适合于偏微分方程 (8), 从 (10) 式可以解得

$$J\frac{\partial f}{\partial a}=0,\quad J\frac{\partial f}{\partial b}=0,$$

这里

$$J=\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}.$$

如果 $J\neq 0$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial b}=0,\tag{11}$$

也就是函数 f 与 a,b 无关. 如果

$$J=0,$$

这说明 a 与 b 是函数相关的, 也就是 $b=\varphi(a),\varphi$ 是任意函数. 代入 (6) 式, 对 a 微分得出

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=0.\tag{12}$$

(6) 式与 (12) 式联立仍得一解.

因此偏微分方程 (8), 既可能有 (6) 式作为解答, 称为完全解; 也可以从 (6) 式与 (11) 式中消去 a,b 而得出解答, 称为奇异解. 更可以引进一个任意函数 $a=\varphi(b)$, 由 (6) 式及 (12) 式消去 a, 也得一解答, 称为一般解.

几何的说法是: 完全解定义一族有两个参数的曲面族, 而奇异解是其包络面. 在曲面族中, 任取一个一参数的分族, 而分族的包络是一般解.

例 1 考虑与原点距离为 1 的平面族:

$$ax+by+cz=(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}=1.\tag{13}$$

由

$$a+cp=0,\quad b+cq=0$$

可知, 这曲面族适合于偏微分方程:

$$(xp+yq-z)^2=1+p^2+q^2. \tag{14}$$

(13) 式当然是 (14) 式的完全解. 曲面族 (13) 的包络是单位球

$$x^2+y^2+z^2=1. \tag{15}$$

这是奇异解, 而球面上的一点只与 (13) 式中的一个平面相切.

一般解可由

$$ax+y\varphi(a)+z[1-a^2-\varphi^2(a)]^{\frac{1}{2}}=1 \tag{16}$$

及

$$x+y\varphi'(a)-z\frac{a+\varphi(a)\varphi'(a)}{(1-a^2-\varphi^2(a))^{1/2}}=0 \tag{17}$$

得知, 这里 $\varphi(a)$ 是任意一个函数, 这是平面族 (16) 的包络. 对应一个 a, 代表一条直线. 因此 (16) 式, (17) 式所代表的曲面是由直线的移动所成的. 在点

$$x=a,\quad y=\varphi(a),\quad z=(1-a^2-\varphi^2(a))^{1/2},$$

(16) 式,(17) 式重合, 即 (16) 式, (17) 式表示切于此点的直线. 因此球面上一曲线其上每一点有一切线, 这些切直线所成的面就是一个一般解. 特别取函数 $\varphi(a)=0$, 则由 (16) 式, (17) 式得

$$\frac{a}{x}=\frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}{z}=\frac{1}{x^2+z^2}.$$

因而得圆柱

$$x^2+z^2=1.$$

例 2 方程

$$pq=4xy$$

有完全解

$$z=\frac{1}{a}x^2+ay^2+b.$$

对 a,b 微分得

$$0=-\frac{1}{a^2}x^2+y^2,\quad 0=1.$$

故无奇异解, 命 $b=\varphi(a)$, 而一般解是

$$z=\frac{1}{a}x^2+ay^2+\varphi(a),\quad 0=-\frac{1}{a^2}x^2+y^2+\varphi'(a).$$

特别, 取 $\varphi(a)=c$ (常数), 解得 $a=\dfrac{x}{y}$, 即一般解的特例.

$$z=2xy+c.$$

例 3 微分方程

$$px - qy = (z - xy)^2$$

有完全解

$$xe^{\frac{1}{z-xy}} = \frac{xy + a}{xy + b},$$

也有完全解

$$f = \log x + \frac{1}{z - xy} - \log(xy + a) + \log(xy + b) = 0.$$

无奇异解.

命 $b = \varphi(a)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{1}{xy + a} + \frac{b'}{xy + b} = 0, \quad \frac{xy + b}{xy + a} = b'.$$

因而

$$\frac{1}{z - xy} = -\log x - \log b', \quad z - xy = \frac{-1}{\log x + \log b'}.$$

如取 $b = \lambda a$, 则 $b' = \lambda, \lambda$ 是常数. 命 $\lambda \to \infty$, 则

$$z - xy = 0$$

也是一解.

习题 1 $z = pq$ 有一完全积分是

$$4z = \left(ax + \frac{y}{a} + b\right)^2,$$

问解

$$4z - 2xy = (x^2 + y^2)\sec\alpha + (x^2 - y^2)\mathrm{tg}\,\alpha$$

是怎样的解?

习题 2 $z = px + qy$ 的一个完全积分是

$$\log z = a\log x + (1 - a)\log y + b,$$

问

$$z = y\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

是怎样的解?

习题 3 $z = px + qy + pq$ 的一个完全积分是 $z = ax + by + ab$, 问

$$z + 3xy = 0$$

是怎样的解?

习题 4 $xp+2yq=2\left(z-\dfrac{x^2}{y}\right)^2$ 有一个完全积分

$$e^{\frac{1}{z-x^2/y}}=a\frac{x^2}{y^2}+\frac{b}{y},$$

问

$$yz=x^2$$

是怎样的解?

习题 5 $3px+qy+q^3x^2=0$ 有两个完全解

$$z=a-\frac{1}{3}b^3x+byx^{-\frac{1}{3}},\quad z=a'+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}(x^2+2b'x)^{-\frac{1}{2}},$$

求证其一是另一一般解的特例.

补充 用张量分析来处理曲面论

我们把已经讲过的曲面论用张量分析的符号重新讲一下, 其目的是较具体地介绍张量分析, 为将来正式学习 Riemannian 几何作一准备.

§15. 第一基本型

我们还是用符号

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z),\quad x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \tag{1}$$

代表一个曲面. 我们已往的研究, 主要是从以下的三个向量

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_v=\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

及

$$\boldsymbol{m}=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v| \tag{3}$$

出发.

我们将符号略加改变, 把变量 u,v 改写为 u^1,u^2 (注意, 并不是 u 的一次方与二次方). 命

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\partial}{\partial u^1}\boldsymbol{r}=\partial_1\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_2=\frac{\partial}{\partial u^2}\boldsymbol{r}=\partial_2\boldsymbol{r},$$

而

$$ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j du^i du^j.$$

我们用 Einstein 约定, 把和号略去, 以后如果一项中同一指标出现二次, 约定其意义是对此指标求和. 例如, a_ib^i 就是代表 $a_1b^1+a_2b^2$. 如此, 则可以写成为

$$ds^2=g_{ij}du^idu^j,\quad g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j.$$

用老符号, 则有

$$g_{11}=E,\quad g_{12}=g_{21}=F,\quad g_{22}=G.$$

由 g_{ij} 所组成的行列式等于 $EG-F^2$, 当然不等于 0, 所以有满足于

$$g^{hi}g_{ji}=\delta^h_j$$

的 g^{hi} 存在, 此处

$$\delta^h_j=\begin{cases}0, & \text{若 } h\neq j,\\ 1, & \text{若 } h=j.\end{cases}$$

这称为 Kronecker 符号. 不难算出

$$g^{11}=\frac{G}{EG-F^2},\quad g^{12}=g^{21}=\frac{-F}{EG-F^2},\quad g^{22}=\frac{E}{EG-F^2}.$$

曲面的切向量 $\boldsymbol{a}$ 可以写成为

$$\boldsymbol{a}=a^h\boldsymbol{r}_h,$$

其长度的平方等于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a^h\boldsymbol{r}_h)\cdot(a^l\boldsymbol{r}_l)=\boldsymbol{r}_h\cdot\boldsymbol{r}_la^ha^l=g_{hl}a^ha^l.$$

两个向量 $\boldsymbol{a}=a^h\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{b}=b^l\boldsymbol{r}_l$ 的夹角的余弦等于

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})}}=\frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{(g_{ij}a^ia^j)(g_{st}b^sb^t)}}.$$

单位法向量等于

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v),$$

这里 $g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=EG-F^2.$

§16. 张量

换变量

$$u^i=u^i(u'^1,u'^2),\quad i=1,2. \tag{1}$$

仍用 Einstein 约定不写和号, 则显然有

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} du'^j \tag{2}$$

及任一函数 φ 的梯度适合

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} \frac{\partial \varphi}{\partial u'^j}. \tag{3}$$

又如

$$g_{ij} du^i du^j = g'_{st} du'^s du'^t = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^s} \frac{\partial u^j}{\partial u'^t} du'^s du'^t,$$

即得

$$g'_{st} = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^s} \frac{\partial u^j}{\partial u'^t}. \tag{4}$$

从 (2) 式, (3) 式, (4) 式极易推得

$$du'^j = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u'^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}$$

及

$$g_{ij} = g'_{st} \frac{\partial u'^s}{\partial u^i} \frac{\partial u'^t}{\partial u^j}. \tag{4'}$$

现在求证

$$g'^{st} = g^{ij} \frac{\partial u'^s}{\partial u^i} \frac{\partial u'^t}{\partial u^j}. \tag{5}$$

由

$$g^{lk} g_{hk} = \delta^l_h$$

及 (4′) 式得

$$g^{kl} g'_{st} \frac{\partial u'^s}{\partial u^k} \frac{\partial u'^t}{\partial u^h} = \delta^l_h.$$

乘以 $\dfrac{\partial u'^j}{\partial u^l}$ 及对 l 加之得

$$g^{kl} g'_{st} \frac{\partial u'^s}{\partial u^k} \frac{\partial u'^t}{\partial u^h} \frac{\partial u'^j}{\partial u^l} = \frac{\partial u'^j}{\partial u^h}.$$

由于 $\dfrac{\partial u'^j}{\partial u^h} = \delta^j_t \dfrac{\partial u'^t}{\partial u^h}$, 故得

$$\left(g^{kl} \frac{\partial u'^s}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u'^j}{\partial u^l} g'_{st} - \delta^j_t \right) \frac{\partial u'^t}{\partial u^h} = 0.$$

由于 $\dfrac{\partial (u'^1, u'^2)}{\partial (u^1, u^2)} \neq 0$, 所以

$$\left(g^{kl} \frac{\partial u'^s}{\partial u^k} \frac{\partial u'^j}{\partial u^l} \right) g'_{st} = \delta^j_t,$$

即

$$g'^{sj} = g^{kl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}.$$

这证明了 (5) 式.

由 (2) 式, (3) 式, (4) 式, (5) 式可以概括出一个概念.

如果有如下的关系:

$$T'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n} = T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}}, \tag{6}$$

T 是 u^1, u^2 的函数, T' 是 u'^1, u'^2 的函数, 则 $T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}$ 称为 m 阶逆变 n 阶协变的张量.

上面的例子说明, 向量 (du^1, du^2) 是一阶逆变张量, 一函数 φ 的梯度 $\left(\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^2}\right)$ 是一阶协变张量, g_{ij} 是二阶协变张量, g^{ij} 是二阶逆变张量.

关于张量有以下的一些代数运算.

1) 二同一类型的张量的和、差仍为张量, 其理由是, 如果

$$T'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n} = T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}},$$

$$S'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n} = S^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}},$$

则 $T'+S'$ 与 $T+S$ 也适合同样的关系式.

2) 二张量的乘积定义为

$$T^{r_1\cdots r_m s_1\cdots s_l}_{p_1\cdots p_n t_1\cdots t_h} = T^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}\cdot T^{s_1\cdots s_l}_{t_1\cdots t_h}.$$

这是一个 $l+m$ 阶逆变 $n+h$ 阶协变的张量.

3) 缩合. 把一个张量的上标与一个下标等同而加之, 得出的结果仍然是一个张量.

例如,

$$K^{s_2\cdots s_m}_{q_2\cdots q_n} = T^{s_1 s_2\cdots s_m}_{q_1 q_2\cdots q_n}$$

是一个 $m-1$ 阶逆变 $n-1$ 阶协变的张量. 最简单的例子是一个逆变向量 u^i 与一个协变张量 v_j 的乘积

$$u^i v_j,$$

经过缩合得内积 $u^i v_i$. 张量积 $g_{ij}u^s u^t$ 可以经过两次缩合成为 $g_{ij}u^i u^j$. 如果经过几次缩合之后, 并无自由指标, 则结果是一纯量. $u^i v_i$ 及 $g_{ij}u^i u^j$ 都是例子.

在应用中经常出现, 用 g_{ij} 来 "降低" 张量的高标和用 g^{ij} 来 "提高" 张量的低标的方法. 例如, 张量 T_{ijk} 就可由 g^{ij}, g_{ij} 升降, 如下法:

$$\begin{aligned} &g^{il}T_{ijk} = T^l_{jk}; \quad g^{jl}T_{ijk} = T^l_{ik}; \quad g^{kl}T_{ijk} = T^l_{ij}, \quad g^{il}g^{jm}T_{ijk} = T^{lm}_k, \\ &g^{il}g^{km}T_{ijk} = T^{lm}_j, \quad g^{il}g^{jm}g^{kp}T_{ijk} = T^{lmp}. \end{aligned} \tag{7}$$

同样

$$T_l^{jk} = g_{il}T^{ijk};\quad T_{lm}^{k} = g_{il}g_{jm}T^{ijk},\quad T_{lmp} = g_{il}g_{jm}g_{kp}T^{ijk}.$$

注意. 以上的规则是可逆的, 如由 (7) 式的第一式可得

$$g_{lm}T_{jk}^{l} = g_{lm}(g^{il}T_{ijk}) = \delta_m^i T_{ijk} = T_{mjk}.$$

有时为了表示被 "提升" "下降" 后的原空位, 用点表示之, 例如 (7) 式第一式可以记为 $T_{\cdot jk}^{l}$.

4) 张量的求商法则.

命 $T_{p_1\cdots p_n}^{r_1\cdots r_m}$ 及 $T_{q_1\cdots q_n}^{\prime s_1\cdots s_m}$ 各为一组 x^i 及 x'^i 的函数. 如果对任意逆变向量 λ^i 与 λ'^i 及任一足标 p_h, q_h 常使

$$T_{p_1\cdots p_h\cdots p_n}^{r_1\cdots r_m}\lambda^{p_h},\quad T_{q_1\cdots q_h\cdots q_n}^{\prime s_1\cdots s_m}\lambda'^{q_h}$$

成为张量, 则原来的 T 就是张量.

例如, T_{klm}^{ij} 与 $T_{rst}^{\prime pq}$ 各为 x^i 与 x'^i 的函数, 而且

$$T_{rst}^{\prime pq}\lambda'^s = T_{klm}^{ij}\lambda'^l\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t},$$

则

$$T_{rst}^{\prime pq}\lambda'^s = T_{klm}^{ij}\lambda'^s\frac{\partial u^l}{\partial u'^s}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t},$$

即

$$\left(T_{rst}^{\prime pq} - T_{klm}^{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^l}{\partial u'^s}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t}\right)\lambda'^s = 0$$

对所有的 λ' 都对, 所以其括弧中的表式等于 0, 即 T_{klm}^{ij} 是张量.

张量的特点是: 从一个坐标系变为另一个坐标系, 张量的变化是十分明显的. 例如, 我们证明了, 在一特定的坐标系中张量的所有支量都等于 0, 则在任何坐标系中都对. 也极易看出, $a^ib_i, g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ 等都是不因坐标而变化的不变量.

§17. 基本方程之一 —— Gauss 方程

在 §1 中已经将三向量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{m}$ 作为我们研究曲面性质的出发点, 现在研究它们的偏微商. 把向量 $\partial_j\boldsymbol{r}_i$ 按 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{m}$ 分解, 得

$$\partial_j\boldsymbol{r}_i = \Gamma_{ji}^h\boldsymbol{r}_h + H_{ji}\boldsymbol{m} \tag{1}$$

现在算出 Γ_{ji}^h 与 H_{ji} 的表示式. 由于 $\partial_j\boldsymbol{r}_i = \partial_j(\partial_i\boldsymbol{r}) = \partial_i(\partial_j\boldsymbol{r}) = \partial_i\boldsymbol{r}_j$, 可得对称性

$$\Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h,\quad H_{ji} = H_{ij}. \tag{2}$$

求 (1) 式与 $\boldsymbol{m}$ 的内积, 得出

$$\partial_j \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{m} = H_{ji}. \tag{3}$$

微商 $\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{m} = 0$ 得 $\partial_j \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{r}_i \partial_j \boldsymbol{m}$, 因此

$$H_{ji} = -\boldsymbol{r}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{m}. \tag{4}$$

所以

$$H_{ij} du^i du^j = -(\boldsymbol{r}_i du^i)(\partial_j \boldsymbol{m} du^j) = -d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{m},$$

这就是第二基本型, 即

$$H_{11} = L, \quad H_{12} = H_{21} = M, \quad H_{22} = N.$$

H_{ij} 也是二阶协变张量.

再求 Γ_{ji}^h, 求

$$g_{ia} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_a$$

对 u^j 的微商. 再以 (1) 式代入得

$$\partial_j g_{ia} = (\partial_j \boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{r}_i \cdot (\partial_j \boldsymbol{r}_a) = \Gamma_{ji}^h \boldsymbol{r}_h \cdot \boldsymbol{r}_a + \Gamma_{ja}^b \boldsymbol{r}_b \cdot \boldsymbol{r}_i,$$

即得

$$\partial_j g_{ia} = \Gamma_{ji}^b g_{ba} + \Gamma_{ja}^b g_{ib}. \tag{5}$$

交换 i, j 得

$$\partial_i g_{ja} = \Gamma_{ij}^b g_{ba} + \Gamma_{ia}^b g_{jb}. \tag{6}$$

再交换 i, a 得

$$\partial_a g_{ji} = \Gamma_{aj}^b g_{bi} + \Gamma_{ai}^b g_{jb}. \tag{7}$$

(5) 式, (6) 式相加, 减去 (7) 式, 得出

$$\partial_j g_{ia} + \partial_i g_{ja} - \partial_a g_{ji} = 2\Gamma_{ij}^b g_{ba}.$$

由 $g_{ba} g^{la} = \delta_b^l$ 得

$$2\Gamma_{ij}^l = (\partial_j g_{ia} + \partial_i g_{ja} - \partial_a g_{ji}) g^{la}.$$

命

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}\right)$$

及

$$\begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} = \{ij, k\} g^{hk}.$$

这各称为 Christoffel 第一类、第二类符号, 而得

$$\Gamma_{ij}^{l}=\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix},$$

因此有

$$\partial_j \boldsymbol{r}_i=\begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix}\boldsymbol{r}_h+H_{ji}\boldsymbol{m}. \tag{8}$$

这称为 Gauss 方程.

用原符号 E,F,G 及 u,v 写出

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}.$$

我们的问题是: Christoffel 符号是否成一张量. 答案是否定的.

从

$$g'_{pq}=g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}$$

得出

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial u'^r}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}+g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q\partial u'^r}+\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p\partial u'^r}\right),$$

交换指标易得

$$\frac{\partial g'_{rq}}{\partial u'^p}=\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}+g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^r}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q\partial u'^p}+\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p\partial u'^r}\right),$$

$$\frac{\partial g'_{pr}}{\partial u'^q}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\frac{\partial u^i}{\partial u'^q}\frac{\partial u^j}{\partial u'^p}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}+g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q\partial u'^r}+\frac{\partial u^j}{\partial u'^r}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p\partial u'^q}\right).$$

此二式之和减去前式除 2 得

$$[pq,r]'=[ij,k]\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}+g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^r}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^p\partial u'^q}, \tag{9}$$

这里 $[pq,r]'$ 是由张量 g'_{ij} 所换成的 Christoffel 符号.

又由

$$g'^{rs}=g^{hl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^h}\frac{\partial u'^r}{\partial u^l}$$

推得

$$g'^{rs}\frac{\partial u^h}{\partial u'^s}=g^{hl}\frac{\partial u'^r}{\partial u^l}.$$

以此乘 (9) 式的两边, 再对 r 求和得

$$\left\{\begin{matrix}s\\pq\end{matrix}\right\}'\frac{\partial u^h}{\partial u'^s}=[ij,k]\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}g^{hl}\delta^k_l+g_{ij}g^{hl}\delta^i_l\frac{\partial^2u^j}{\partial u'^p\partial u'^q},$$

即得

$$\frac{\partial^2u^h}{\partial u'^p\partial u'^q}+\left\{\begin{matrix}h\\ij\end{matrix}\right\}\frac{\partial^2u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}=\left\{\begin{matrix}s\\pq\end{matrix}\right\}'\frac{\partial u^h}{\partial u'^s}.\tag{10}$$

(9) 式与 (10) 式说明了, $[ij,h]$ 与 $\left\{\begin{matrix}h\\ij\end{matrix}\right\}$ 都非张量.

§18. 基本方程之一 —— Weingarten 方程

再求 $\partial_i\boldsymbol{m}$, 我们也可以写成为

$$\partial_i\boldsymbol{m}=K^h_i\boldsymbol{r}_h+L_i\boldsymbol{m}.\tag{1}$$

由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=1$, 所以 $\partial_i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=0$, 因此 $L_i=0$. 又微分 $\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{m}=0$, 得

$$\partial_i\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{r}_j\cdot\partial_i\boldsymbol{m}=0.$$

以 Gauss 方程代入此式, 得

$$H_{ij}+\boldsymbol{r}_j\cdot\partial_i\boldsymbol{m}=0.$$

因此, 由 (1) 式得

$$H_{ij}=-K^h_i\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{r}_h=-K^h_ig_{jh}.$$

因此

$$K^l_i=-H_{ij}g^{jl}=-H_i{}^l.$$

因此得 Weingarten 方程

$$\partial_i\boldsymbol{m}=-H_i{}^l\boldsymbol{r}_l.\tag{2}$$

命

$$(\partial_j\boldsymbol{m})\cdot(\partial_i\boldsymbol{m})=N_{ji},$$

则得

$$N_{ji}du^jdu^i.$$

称为第三基本型,

$$N_{11}=E_0,\quad N_{12}=N_{21}=F_0,\quad N_{22}=G_0.$$

不难证明, N_{ij} 也是二阶协变张量. 利用 Weingarten 方程, 可以求出

$$\begin{aligned}N_{ji}&=(\partial_j\boldsymbol{m})\cdot(\partial_i\boldsymbol{m})=(-H_j^{\cdot b}\boldsymbol{r}_b)(-H_i^{\cdot a}\boldsymbol{r}_a)\\&=H_j^{\cdot b}H_i^{\cdot a}\boldsymbol{r}_b\cdot\boldsymbol{r}_a=g_{ba}H_j^{\cdot b}H_i^{\cdot a}.\end{aligned}$$

或

$$N_{ji}=H_{jb}H_{ia}g^{ba}.$$

上节及本节之结果可以概括成为矩阵形式:

$$\partial_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\\boldsymbol{r}_2\\\boldsymbol{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1&\Gamma_{11}^2&H_{11}\\\Gamma_{12}^1&\Gamma_{12}^2&H_{12}\\-H_1^{\cdot 1}&-H_1^{\cdot 2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\\boldsymbol{r}_2\\\boldsymbol{m}\end{pmatrix},\quad\partial_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\\boldsymbol{r}_2\\\boldsymbol{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_{21}^1&\Gamma_{21}^2&H_{21}\\\Gamma_{22}^1&\Gamma_{22}^2&H_{22}\\-H_2^{\cdot 1}&-H_2^{\cdot 2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\\boldsymbol{r}_2\\\boldsymbol{m}\end{pmatrix},$$

即三向量 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{m}$ 的一阶偏微商公式. 下节的问题在于二阶偏微商, 并注意

$$\partial_1\partial_2=\partial_2\partial_1.$$

§19. Gauss 与 Codazzi 方程

由 Gauss 方程

$$\begin{aligned}\partial_k\partial_j\boldsymbol{r}_i&=\partial_k\left(\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\boldsymbol{r}_h+H_{ji}\boldsymbol{m}\right)=\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\boldsymbol{r}_h+\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\partial_k\boldsymbol{r}_h+\partial_kH_{ji}\boldsymbol{m}+H_{ji}(\partial_k\boldsymbol{m})\\&=\left[\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-H_k^{\cdot h}H_{ji}\right]\boldsymbol{r}_h+\left[\partial_kH_{ji}+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}\right]\boldsymbol{m}.\end{aligned}$$

在这式子里交换 h 与 j, 然后相减得

$$\begin{aligned}0=&\left[\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_j\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}-H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki}\right]\boldsymbol{r}_h\\&+\left[\partial_kH_{ji}-\partial_jH_{ki}+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja}\right]\boldsymbol{m}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{r}_h$ 与 $\boldsymbol{m}$ 线性无关, 所以

$$\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_j\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}=H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki},$$

$$\partial_kH_{ji}-\partial_jH_{hi}+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja}=0.$$

因此, 如果命

$$R_{kji}^{\cdots h}=\partial_k\left\{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}\right\}-\partial_j\left\{\begin{matrix}h\\ki\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}h\\ka\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}a\\ji\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}h\\ja\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}a\\ki\end{matrix}\right\} \tag{1}$$

及

$$\nabla_k H_{ji}=\partial_k H_{ji}-\left\{\begin{matrix}a\\kj\end{matrix}\right\}H_{ai}-\left\{\begin{matrix}a\\ki\end{matrix}\right\}H_{ja}, \tag{2}$$

则上两式可以写成为

$$R_{kji}^{\cdots h}=H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki} \tag{3}$$

及

$$\nabla_k H_{ji}=\nabla_j H_{ki}. \tag{4}$$

这两式子分别称为 Gauss 方程与 Codazzi 方程.

Gauss 与 Codazzi 方程可以看成为 Gauss, Weingarten 方程的求解条件, 说得更具体些, 给了两组函数 E,F,G 与 L,M,N. 如果 $EG-F^2>0$ 及它们适合 Gauss 及 Codazzi 方程, 则有一个曲面以此为第一、第二微分型. 除去一个位移这曲面是唯一决定的, 我们不证明这个定理, 但是可以把它说得更明确些: 存在函数

$$x=x(u^1,u^2),\quad y=y(u^1,u^2),\quad z=z(u^1,u^2)$$

使 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 适合于

$$\partial_i\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i,\quad \partial_j\boldsymbol{r}_i=\left\{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}\right\}\boldsymbol{r}_h+H_{ji}\boldsymbol{m},\quad \partial_i\boldsymbol{m}=-H_i^{\cdot l}\boldsymbol{r}_l$$

及

$$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{ij},\quad \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=1,\quad \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_i=0.$$

§20. 曲率张量

命

$$R_{kjih}=R_{kji}^{\cdots a}g_{ah}.$$

这 R_{kjih} 有以下的性质:

$$R_{kjih}=-R_{jkih},\quad R_{kjih}=-R_{kjhi},\quad R_{kjih}=R_{ihkj}, \tag{1}$$

$$R_{kjih}+R_{jikh}+R_{ikjh}=0. \tag{2}$$

最后一式称为 Bianchi 恒等式. 由 §19 的 (3) 式,

$$R_{kjih}=H_{kh}H_{ji}-H_{jh}H_{ki}. \tag{3}$$

这称为 Riemann 第一类曲率张量, 而 R^a_{kij} 称为第二类曲率张量. 现在直接证明, 它确是一个张量.

前已算得

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^p \partial u'^q} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} = \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\}' \frac{\partial u^h}{\partial u'^s}. \tag{4}$$

对 u'^r 求偏微商, 再减去将此式经 q, r 互换而得出的式子, 则

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^j} \left\{ \begin{matrix} h \\ i_k \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u^k} \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} \right) \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^q} \frac{\partial u^j}{\partial u'^r} - \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^r} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u'^q} \left\{ \begin{matrix} s \\ pr \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial u'^r} \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\}' \right) \frac{\partial u^h}{\partial u'^s} + \left\{ \begin{matrix} s \\ pr \end{matrix} \right\}' \frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^s \partial u'^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\}' \frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^s \partial u'^r}.$$

此式中的二阶偏微商用 (4) 式代入, 则得

$$R^h_{ijk} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} = R'^s_{pqr} \frac{\partial u^h}{\partial u'^s}.$$

我们为什么再给一个直接证明? 表达式 (3) 与第二基本微分型有关. 但无论是对 Christoffel 符号与 Riemann 张量来说, 都只与第一基本微分型有关. 因此, 开了一扇门, 单从第一基本微分型出发可能进行不少深入的研究 —— 这样就诞生了 Riemannian 几何学.

现在举一个例来说明张量的好处. 从最简单的 $z = 0$ 平面出发, 它的第一微分二次型是

$$dx^2 + dy^2.$$

换变量 $x = x(u, v), y = y(u, v)$, 得出一个直觉上很不清楚的东西. 对原来的表达式来说, Christoffel 符号等于 0, 但换了变量之后却并无保证. 用张量来说, 那就可以知道了, 不管你用什么参变量, Riemann 张量总是等于 0 的.

由 (3) 式可知

$$R_{1212} = H_{12}H_{21} - H_{11}H_{22} = M^2 - LN.$$

经过关系式 (1) 所得出的另一些支量可能非 0, 但其他的支量一定等于 0. 因此, 在曲面论中 R_{1212} 占特别重要的地位. 如果回到本章中的符号, Gauss 曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{K_{1212}}{g}, \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},$$

而平均曲率

$$H = \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} g^{ij} H_{ij}.$$

又

$$H_{ij}=H_{ia}H_{jb}g^{ab}=(H_{ia}H_{jb}-H_{ij}H_{ab})g^{ab}+H_{ij}H_{ab}g^{ab}=-Kg_{ij}+2HH_{ij}$$

$\left(\text{由于 } g^{11}=\dfrac{g_{22}}{g},g^{12}=g^{21}=-\dfrac{g_{12}}{g},g^{22}=\dfrac{g_{11}}{g}\right)$. 这样就建立起第一, 第二, 第三基本型的关系式

$$K\boldsymbol{dr}\cdot\boldsymbol{dr}-2H\boldsymbol{dr}\cdot\boldsymbol{dm}+\boldsymbol{dm}\cdot\boldsymbol{dm}=0.$$

第十九章　Fourier 级数

§1. 三角函数的正交性

我们已经知道

$$\sin x,\ \cos x$$

是以 2π 为周期的函数, 又任一以 ω 为周期的函数 $f(x)$ (即 $f(x+\omega)=f(x)$) 可以用换变量法变为

$$g(x)=f\left(\frac{\omega}{2\pi}x\right).$$

这是一个以 2π 为周期的函数. 我们的问题是要研究一般的以 2π 为周期的函数. 我们知道, 对任一整数 k,

$$\sin kx,\ \cos kx$$

都是以 2π 为周期的函数. 又显然可知, 以 2π 为周期的函数的线性组合

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

仍以 2π 为周期. 这便自然地引出了研究收敛级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

所代表的函数 $f(x)$.

为了研究函数 $f(x)$ 与系数 a_k, b_k 的关系, 我们要用到三角函数的正交关系.

首先, 不难证明

$$\int_0^{2\pi} \cos kx dx = 0, \int_0^{2\pi} \sin kx dx = 0, \quad k = 1, 2, \cdots;$$

其次, 由已知的三角公式

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}[\sin(k+l)x + \sin(k-l)x],$$
$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x],$$
$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}[\cos(k+l)x + \cos(k-l)x],$$

可以证明

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = 0$$

及当 $k \neq l$ 时

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = 0.$$

也由于

$$\cos^2 kx = \frac{1 + \cos 2kx}{2}, \quad \sin^2 kx = \frac{1 - \cos 2kx}{2},$$

可知

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi.$$

总括这些结果, 可知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \cdots$$

是一系列函数, 其中任意两个之积由 0 到 2π 求积分得 0, 自己的平方的积分得 1. 前者称为一个函数系的正交性, 后者称为就范性. 根据这个性质, 如果级数 (1) 一致收敛于函数 $f(x)$, 即

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

逐项求积分可知

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi a_0.$$

乘以 $\cos lx$ 而逐项求积分, 可得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos lx dx = \pi a_l.$$

又乘以 $\sin lx$ 而逐项求积分, 可得

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin lx dx = \pi b_l.$$

因而得出

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \\ a_l &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos lx dx, b_l = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin lx dx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这些系数称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 而级数 (1) 称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

由此可见, 一个一致收敛的 Fourier 级数代表一个函数 $f(x)$, 而 $f(x)$ 也可以由 (2) 式得出它的 Fourier 级数来. 对于任意一个可以求积分的函数 $f(x)$, 我们都可以由 (2) 式造出 Fourier 级数来, 但问题在于, 这 Fourier 级数在怎样程度上代表原函数 $f(x)$.

附记 1. 如果不假定一致收敛, 而仅假定囿收敛, 以上的叙述仍为正确.

2. 以上的区间 $(0, 2\pi)$ 若换为任意一个长度是 2π 的区间也真, 即 $(c, c+2\pi)$. 特别, 如 $(-\pi, \pi)$.

§2. 几个三角级数的和

如果注意三角级数是幂级数的实数部分或虚数部分这一点, 我们容易计算出三角级数的和来.

例如, 当 $|z|<1$, 我们有

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

如果以 $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$ 及 $z = re^{-i\theta}$ 代入相加, 并分出实数与虚数部分, 立得

$$2 + 2r\cos\theta + 2r^2\cos 2\theta + \cdots = \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{1}{1-re^{-i\theta}} = \frac{2-2r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

及

$$i(2r\sin\theta + 2r^2\sin 2\theta + \cdots) = \frac{1}{1-re^{i\theta}} - \frac{1}{1-re^{-i\theta}} = \frac{2ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

由此立得, 当 $0<r<1$ 时, 有

$$P_r(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos kx = \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \tag{1}$$

及

$$Q_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k\sin kx = \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}. \tag{2}$$

同法, 由 $-\log(1-z)=z+\dfrac{z^2}{2}+\cdots$ 立得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}r^k=\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-2r\cos x+r^2} \tag{3}$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}r^k=\operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1-r\cos x}, \tag{4}$$

此处 $0<r<1$, $\operatorname{arctg}0=0$.

又从

$$1+z+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

可得

$$\begin{aligned}2+2\cos x+\cdots+2\cos nx&=\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}+\frac{1-e^{-ix(n+1)}}{1-e^{-ix}}\\&=\frac{2-2\cos x-2\cos(n+1)x+2\cos nx}{2-2\cos x}=\frac{4\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2+4\sin\dfrac{x}{2}\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{4\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}\\&=\frac{\sin\dfrac{x}{2}+\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{\sin\dfrac{x}{2}}.\end{aligned}$$

因此得

$$p_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}. \tag{5}$$

同法可证

$$q_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\dfrac{1}{2}x-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}. \tag{6}$$

由此可见, 当 $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时,

$$|p_n(x)|<\frac{1}{2\sin\dfrac{1}{2}\varepsilon},\quad |q_n(x)|<\frac{1}{\sin\dfrac{1}{2}\varepsilon}.$$

现在再考虑 $p_n(x)$ 的平均值

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}p_n(x)=\frac{1}{2N\sin\dfrac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=\frac{\sin^2\dfrac{1}{2}Nx}{2N\left(\sin\dfrac{1}{2}x\right)^2}. \tag{7}$$

此式之证明可用下法

$$\sin\frac{1}{2}x\left[\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(\cos nx-\cos(n+1)x)=\frac{1}{2}(1-\cos Nx)=\sin^2\frac{Nx}{2}.$$

最值得注意的一点是, $p_n(x)$ 的平均值永远是正的.

又从正交性立刻得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p_n(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=1, \tag{8}$$

$$\int_0^{2\pi}q_n(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=0, \tag{9}$$

还有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}Nxdx}{2N\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^2}=1. \tag{10}$$

这些式子以后都很有用.

§3. Dirichlet 积分

我们考虑函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和

$$s_n=s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

此处

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos ktdt,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin ktdt.$$

以此代入 (1) 式, 可知

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kx\int_0^{2\pi}f(t)\cos ktdt+\sin kx\int_0^{2\pi}f(t)\sin ktdt\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)dt.$$

命 $t=x+u$, 则得

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)du. \tag{2}$$

由于被积函数是以 2π 为周期的, 所以

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)du.$$

此称为 Dirichlet 积分. 又可以把以上的积分分为两部分:

$$s_n=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0},$$

后者以 $-u$ 代 u, 则得

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u))du. \tag{3}$$

由上节已知, 当 $f(x)=1$ 时, $s_n=1$, 即

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}2du.$$

乘以 $f(x)$ 再在 (3) 式中减之, 可得

$$s_n-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))du, \tag{4}$$

所以 s_n 是否收敛于 $f(x)$ 的问题, 一变而为以上的积分是否收敛于 0 的问题了.

今后我们将研究怎样的函数在那些点 x, s_n 收敛于 $f(x)$. 在讲收敛之前, 先讲逼近.

§4. 平方中值误差及 Bessel 不等式

假定 $f(x)$ 是 $(0,2\pi)$ 上的一个函数, 问题是怎样的三角多项式

$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \tag{1}$$

使平方中值误差

$$\int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|^2 dx \tag{2}$$

最小, 即定出系数 α_l, β_l 来使 (2) 式最小.

我们把 (2) 式写成为

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left[f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2 dx=\int_0^{2\pi} f(x)^2dx\\
&-2\int_0^{2\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right]f(x)dx\\
&+\int_0^{2\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2 dx\\
=&\int_0^{2\pi} f(x)^2dx-2\pi\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)\right]+\pi\left[2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right]\\
=&\int_0^{2\pi} f(x)^2dx+\pi\left[2\left(\frac{\alpha_0-a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]\\
&-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\geqslant\int_0^{2\pi} f(x)^2dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],
\end{aligned}$$

即 (2) 式的最小值等于

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],$$

且仅当 $a_k=\alpha_k, b_k=\beta_k$ 时取这最小值.

总起来一句话, 如果三角多项式的系数就是 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 那么原函数和这多项式的平方中值误差最小.

又因积分 (2) 总是 $\geqslant 0$ 的, 所以得不等式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2dx\geqslant\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

现在看一下, 在 $f(x)$ 上已经用了些什么假定, 我们要的是

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2dx,\ \int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx,\ \int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx \tag{A}$$

都存在. 如果假定 $f(x)$ 是 Riemann 可积的 (注意并不是广义可积), 则 $f(x)$ 有界而且 (A) 中各积分都存在 (这里用了两个 Riemann 可积函数的乘积仍是 Riemann 可积). 在这假定下, 命 $n\to\infty$, 可知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2dx\geqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \tag{3}$$

右边的收敛性可由单调递增有界 (即左边) 这些性质得之, 不等式 (3) 称为 Bessel 不等式.

由此立刻得出

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \to 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx \to 0.$$

我们现在证明更普遍些的

定理 1 (Riemann-Lebesgue) *对任一有限区间 $[a,b]$ 及其上任意一个 Riemann 可积函数 $f(x)$, 常有*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

证 先将 $[a,b]$ 分成 n 个部分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \tag{4}$$

分别用 M_i 及 m_i 来表示 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的上确界及下确界. 因此

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x)-m_i)\sin\lambda x dx + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x dx.$$

由于

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x dx\right| \leqslant \frac{2}{\lambda},$$

故得

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 为一 Riemann 可积函数, 所以选取 $[a,b]$ 的分法 (4), 使

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1}-x_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

分法确定后, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}|m_i|$ 为一确定的数. 取 $\Lambda = \dfrac{4}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|m_i|$, 故当 $\lambda > \Lambda$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right| < \varepsilon.$$

同理, 当 $\lambda > \Lambda$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| < \varepsilon.$$

定理证完.

§5. 收敛判别条件

我们再回到 §3, 仍旧保留 §4 的假定 (A), 考虑在什么条件下, $s_n \to s$. 当然趋向可以有多种意义, 例如, 在某一点 $s_n \to s$ 或在某一区域内, s_n 一致趋向 s 等.

为了简便起见, 命

$$\phi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s. \tag{1}$$

这样 §3 的收敛条件就变为

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\phi(u)du = 0. \tag{2}$$

由 Riemann-Lebesgue 定理可知, 对任一 $\delta > 0$, 常有

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u \frac{\phi(u)}{\sin\frac{1}{2}u}du = 0, \tag{3}$$

原因是 $\phi(u)/\sin\frac{1}{2}u$ 在 $[\delta,\pi]$ 上 Riemann 可积适合于条件 (A).

由 (2) 式减 (3) 式可知, 收敛条件变为

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\phi(u)du = 0. \tag{4}$$

再由 Riemann-Lebesgue 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u \left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u} - \frac{1}{\frac{1}{2}u}\right)\phi(u)du = 0, \tag{5}$$

所以收敛条件又变为

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{\phi(u)}{u}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu = 0. \tag{6}$$

如果把

$$\lim_{u\to 0}\frac{\phi(u)}{u} \tag{7}$$

的存在性作为条件, 则又由 Riemann-Lebesgue 定理可知 (6) 式是正确的, 因而得出

定理 1 *如果 $f(x)$ 适合于条件 (A), 而且在 $x = x_0$ 这一点极限*

$$\lim_{u\to 0}\frac{\phi(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2s}{u} \tag{8}$$

存在, 则当 $n \to \infty$ 时

$$s_n \to s.$$

如果 $f(x)$ 在这一点连续, s_n 就趋于 $s = f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时是一第一类间断点, 则由 (8) 式可知

$$s = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)),$$

即

$$s_n \to \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)).$$

这也同样证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u} f(u)du = \frac{1}{2}(f(+0) + f(-0)).$$

处理积分 (6) 还有其他的方法. 例如, $\phi(u)$ 是单调函数, 则由第二中值公式可知 (如果 $\phi(u)$ 正的单调上升)

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u \frac{\phi(u)}{u} du &= \phi(\delta) \int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{u} du \\ &= \phi(\delta) \int_{(n+\frac{1}{2})\eta}^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin u}{u} du.\end{aligned}$$

但积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ 是收敛的, 所以获得结论 (6) 式仍为正确.

由此可推得

定理 2 *如果 $f(x)$ 仅有有限个极大极小及有限个第一类间断点, 则它的 Fourier 级数对所有的 x 都收敛于 $\frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0))$.*

现在再研究在区间上收敛的问题. 有这样的可能性, 对每一 x, Fourier 级数都收敛于这个函数, 但该级数并不一致收敛于这个函数.

定理 3 *如果在 (a, b) 中 $f(x)$ 是两个单调增加连续函数的差, 则在任一处于 (a, b) 内部的闭区间中, 它的 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$.*

假定 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, 此处 f_1 与 f_2 都是单调增加的连续函数, 由一致连续性可知, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有 η, 使

$$|f_1(x + h) - f_1(x)| < \varepsilon \quad (|h| < \eta),$$

这 η 的选择仅与 ε 有关而与 x 无关.

由以上的证明就可以得出积分的一致收敛性.

例 1 在区间 $(-\pi,\pi)$ 中把函数 x 展开为 Fourier 级数.

因为 x 是奇函数, 所以

$$\pi a_k=\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx dx=0,$$

而

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin kx dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right)=\frac{2(-1)^{k-1}}{k},$$

因而 x 在 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 级数等于

$$2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}+\cdots\right].$$

由定理 1 可知, 当 $-\pi<x<\pi$ 时, 上级数的和就是 x. 把 x 视作为周期函数, 即在 $(-\pi,\pi)$ 中用此定义, 但出了这个区间之外, 则用周期性获得函数的数值, 如此则这个函数在 $x=\pi$ 这一点并不连续, 该级数应当等于 $\frac{1}{2}(f(\pi+0)+f(\pi-0))=0$ (图 114). 所以

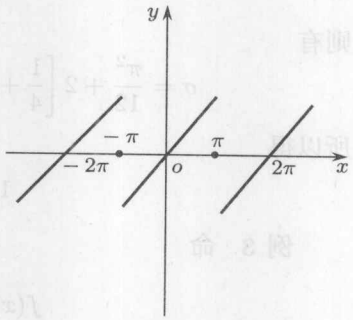


图 114

$$\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}+\cdots=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & \text{若 } -\pi<x<\pi,\\ 0, & \text{若 } x=\pm\pi.\end{cases}$$

在这个式子里, 取 $x=\frac{\pi}{2}$, 立得公式

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

例 2 求 x^2 在 $(-\pi,\pi)$ 间的 Fourier 级数. 由于 x^2 是偶函数, 所以

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin kx dx=0,\\ a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3},\\ a_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{k}\int_0^{\pi}x\sin kx dx\right)\\ &=\frac{4}{k\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right)=(-1)^k\frac{4}{k^2}.\end{aligned}$$

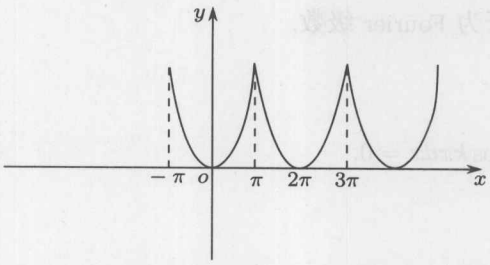


图 115

由于 $f(\pi+0)=f(\pi-0)$, 所以

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2},\quad -\pi<x<\pi.$$

它所表示的函数如图 115.

命 $x=0$, 则得

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

若设

$$\sigma=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots,$$

则有

$$\sigma=\frac{\pi^2}{12}+2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{(2k)^2}+\cdots\right]=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\sigma.$$

所以得

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

例 3 命

$$f(x)=\begin{cases}C_1, & \text{若 } -\pi<x<0,\\ C_2, & \text{若 } 0<x<\pi,\end{cases}$$

求它的 Fourier 级数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}C_1dx+\int_{0}^{\pi}C_2dx\right)=C_1+C_2,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}C_1\cos kxdx+\int_{0}^{\pi}C_2\cos kxdx\right)=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}C_1\sin kxdx+\int_{0}^{\pi}C_2\sin kxdx\right)=(C_1-C_2)\frac{(-1)^k-1}{\pi k},$$

所以

$$\frac{C_1+C_2}{2}-\frac{2(C_1-C_2)}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right)$$

$$=\begin{cases}C_1, & -\pi<x<0,\\ C_2 & 0<x<\pi,\\ \dfrac{C_1+C_2}{2}, & x=0.\end{cases}$$

它的图形如图 116.

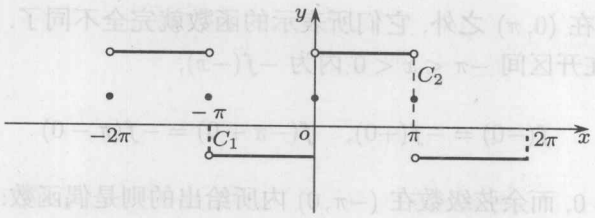


图 116

§6. 在区间 $(0,\pi)$ 上的展开式

由上节的例 1 与例 2 已经看出来, 对于 $(-\pi,\pi)$ 中的奇函数 $f(x)$ 如图 117, 有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx, \tag{1}$$

故奇函数的 Fourier 级数只含正弦项, 即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \tag{2}$$

同样, 若 $f(x)$ 是偶函数如图 118, 则

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0. \tag{3}$$

因此偶函数的 Fourier 级数只含余弦项, 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \tag{4}$$

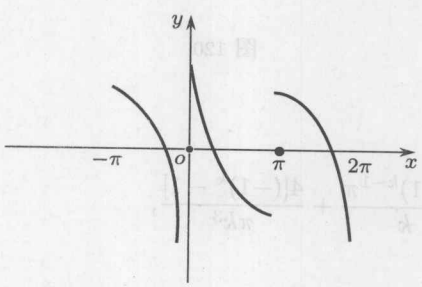


图 117

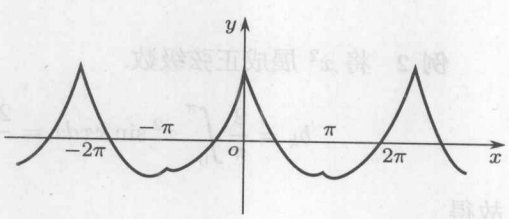


图 118

如果给出区间 $(0,\pi)$ 上的任一函数 $f(x)$, 则这个函数可以展开成只含正弦项的级数 (2), 其系数 b_n 由 (1) 式来定义. 也可以展成只含余弦项的级数 (4), 其系数由

(3) 式定义, 不过在 $(0,\pi)$ 之外, 它们所表示的函数就完全不同了. 正弦级数给出的函数是奇函数: 在开区间 $-\pi<x<0$ 内为 $-f(-x)$,

$$f(-0)=-f(+0),\quad f(-\pi+0)=-f(\pi-0)$$

且 $f(0)=f(\pi)=0$, 而余弦级数在 $(-\pi,0)$ 内所给出的则是偶函数:

$$f(-0)=f(+0)=f(0),\quad f(-\pi+0)=f(\pi-0)=f(\pi).$$

例 1 将 x 展开为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos kx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1],$$

因此

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\cdots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\cdots\right],\quad(0<x<\pi).$$

在区间 $(-\pi,0)$ 上, 右边的级数和就是 $-x$, 因此, 在 $(-\pi,\pi)$ 上, 这一级数与 $|x|$ 完全相同 (图 119).

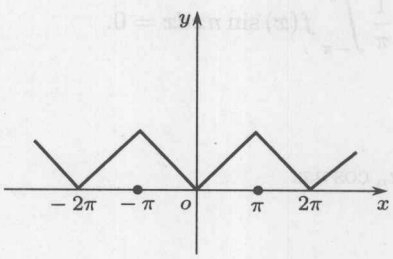


图 119

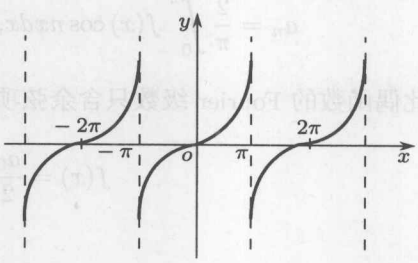


图 120

例 2 将 x^2 展成正弦级数.

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin kx\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{k-1}\pi}{k}+\frac{4[(-1)^k-1]}{\pi k^3},$$

故得

$$x^2=2\pi\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right)-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right)$$

(图 120).

例 3 $\cos zx$ 是 x 的偶函数, 故可以在 $(-\pi,\pi)$ 上展开为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos zx dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin zx}{z}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\sin\pi z}{\pi z},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos zx\cos kx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(z+k)x+\cos(z-k)x]dx$$

$$=(-1)^k\frac{2z\sin\pi z}{\pi(z^2-k^2)},$$

因此

$$\cos zx=\frac{2z\sin\pi z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{\cos x}{1^2-z^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-z^2}+\frac{\cos 3x}{3^2-z^2}+\cdots\right).$$

以 $x=\pi$ 代入, 得

$$\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{k^2-z^2}\right). \tag{5}$$

这称为 $\operatorname{ctg}\pi z$ 的分式展开式. 对 z 求微商, 即得 $\dfrac{1}{\sin^2\pi z}$ 的分式展开式:

$$\frac{1}{\sin^2\pi z}=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{z^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+z^2}{(k^2-z^2)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z+k)^2}+\frac{1}{(z-k)^2}\right]\right\}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k)^2}.$$

在 (5) 式中以 $\dfrac{z}{\pi}$ 代 z, 则得

$$z\operatorname{ctg}z=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z^2}{k^2\pi^2-z^2}.$$

当 $|z|<\pi$ 时, 由于

$$\frac{2z^2}{k^2\pi^2-z^2}=\frac{2z^2}{k^2\pi^2\left(1-\dfrac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}=2\frac{z^2}{k^2\pi^2}\left(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}+\cdots+\frac{z^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}}+\cdots\right),$$

故得

$$z\operatorname{ctg}z=1-2\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-2\frac{z^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-\cdots-2\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}-\cdots.$$

再以 $\dfrac{z}{2}$ 代 z, 得

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right]z^{2n}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n}, \tag{6}$$

此处

$$B_n = \frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}, \tag{7}$$

称之为 Bernoulli 数. 用幂级数直接展开 $\cos\frac{z}{2}\Big/\left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)$, 可知诸 B_n 都是有理数, 例如

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{5}{66},\cdots,$$

因此也算出了 Riemann ζ 函数在偶数所取的值

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2\cdot(2n)!}\quad (n=1,2,\cdots).$$

在 (6) 式中以 $\frac{t}{i}$ 代 z, 则得

$$\frac{t}{2i}\operatorname{ctg}\frac{t}{2i} = \frac{t}{2i}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2i}}{\sin\frac{t}{2i}} = \frac{t}{2}\cdot\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}.$$

由此推出

$$\frac{t}{e^t-1} = 1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\cdots = A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots, \tag{8}$$

此处

$$A_0 = 1, A_1 = -\frac{1}{2}, A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}, A_{2k+1} = 0\quad (k=1,2,\cdots) \tag{9}$$

称为 Euler 数.

§7. Gibbs 现象

以上为了保持 Fourier 级数的收敛性, 我们在 $f(x)$ 上加了两个条件: 在连续性之外又添了另一个性质. 我们可以举出例子, 仅仅连续性并不能保证 Fourier 级数的收敛性, 这样的例子是 P. Du Bois-Reymond 首先举出的, 即一个 Fourier 级数在一点是发散的, 虽然对应的函数在那一点是连续的.

关于不连续函数的 Fourier 级数的情况, 更有所谓 Gibbs 现象.

已知

$$f(x) = 2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin(2r-1)x}{2r-1} = \begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{若 } 0<x<\pi,\\ -\frac{1}{2}\pi, & \text{若 } -\pi<x<0,\\ 0, & \text{若 } x=0,-\pi,\pi.\end{cases}$$

命

$$s_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin(2r-1)x}{2r-1},$$

则

$$\frac{d}{dx}s_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)x=\frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

所以

$$s_n(x)=\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt,$$

因此

$$s_n(x)-\int_0^x\frac{\sin 2nt}{t}dt=\int_0^x\sin 2nt\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)dt,$$

即

$$s_n(x)-\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sin 2nt\frac{t}{\sin t}\left(\frac{t}{3!}-\frac{t^3}{5!}+\cdots\right)dt.$$

因为当 t 由 0 增加至 $\frac{1}{2}\pi$ 时, $\frac{t}{\sin t}$ 连续地由 1 增加至 $\frac{\pi}{2}$; 又当 $0<t\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 时,$0<\frac{t}{3!}-\frac{t^3}{5!}+\cdots<\frac{t}{3!}$. 所以, 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\left|s_n(x)-\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\frac{\pi}{12}\int_0^x tdt=\frac{x^2}{24}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<x<\delta$ 时, 对任意正整数 n, 皆有

$$\left|s_n(x)-\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

命

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt.$$

由于

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{\pi}\frac{(-1)^k\sin u}{k\pi+u}du,$$

所以当 $k=0,1,2,\cdots$ 时, 正负相间且绝对值单调递减, 故函数 $y=\varphi(x)$ 在 $x=\pi,3\pi,5\pi,\cdots$ 有极大值 $M_1>M_3>M_5>\cdots$, 而在 $x=2\pi,4\pi,6\pi,\cdots$ 有极小值 $m_2<m_4<m_6<\cdots$.

选取 $n>\frac{\pi}{2\delta}$, 则由 (1) 式可得

$$\left|s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\varphi(\pi)>\frac{\pi}{2}.$$

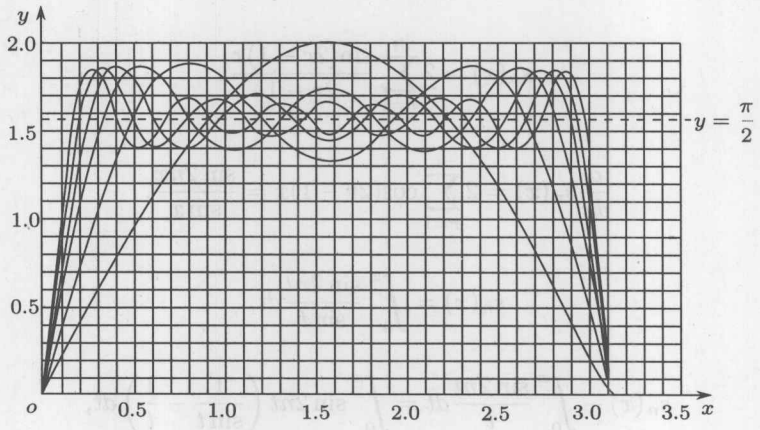


图 121

因此尽管对每一固定的 $x(0<x<\pi)$, 当 $n\to\infty$ 时, $s_n(x)$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$. 但是 $x=0, 0\leqslant y\leqslant\varphi(\pi)$ 中的所有的点, 都是曲线 $y=s_n(x)$ 上面的点的极限点, 而区间 $0\leqslant y\leqslant\varphi(\pi)$ 的长度是 $(0, f(+0))$ 的长度的

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=1.1789795\cdots$$

倍.

由于 $s_n(x)$ 为奇函数, 故在 $x=0$ 的左边亦有类似的情况, 即在 $x=0$ 的附近, 曲线充满了区间 $-\varphi(\pi)\leqslant y\leqslant 0$. 这一现象叫 Gibbs 现象 (图 121).

一般言之, 命函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $x_0<x<x_0+h$ 中收敛于函数 $f(x)$, 若当 n 及 $\dfrac{1}{x-x_0}$ 彼此独立地趋于 $+\infty$ 时, 有

$$\overline{\lim}f_n(x)>f(x_0+0)$$

或

$$\underline{\lim}f_n(x)<f(x_0+0),$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 的右方有 Gibbs 现象. 同样可以定义在 x_0 左方的 Gibbs 现象.

§8. 均值求和

定理 1 命

$$s_n=a_0+\cdots+a_n$$

表示一级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

的部分和, 又

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

表示平均和. 如果

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

则也有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

证 由假定可知, 给任一 $\varepsilon > 0$, 则存在一 $N > 0$, 使 $n > N$ 时, $|s_n - s| < \varepsilon$. 命 $\bar{s}$ 为

$$|s_0 - s|, |s_1 - s|, \cdots, |s_N - s|,$$

的上界, 如此则

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &\leqslant \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n} \\ &\leqslant \frac{N\bar{s} + (n - N)\varepsilon}{n} = \frac{N}{n}(\bar{s} - \varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon \end{aligned}$$

(当 n 充分大时). 所以定理得证.

反之, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s,$$

并不一定可以得出

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

例如,

$$a_n = (-1)^n,$$

则 $s_{2n} = 1, s_{2n+1} = 0$, 故没有极限, 但 σ_n 的极限等于 $1/2$.

定义 如果一个级数的 σ_n 的极限存在, 则称为平均收敛, 或称 $(C, 1)$ 收敛. σ_n 的极限 s 称为该级数的 $(C, 1)$ 和.

我们现在运用平均求和法到 Fourier 级数.

命

$$s_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

及

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n},$$

如此则

$$\sigma_n = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{u}{2}+\sin\frac{3}{2}u+\cdots+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u))du$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 (f(x+u)+f(x-u))du.$$

这公式称为 Fejér 积分, 其重要性在于 $\left(\sin\frac{1}{2}nu \Big/ \sin\frac{1}{2}u\right)^2$ 是定正的. 在公式中取 $f(x)=1$, 则得

$$1 = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 2du,$$

因此得出

$$\sigma_n - s = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 (f(x+u)+f(x-u)-2s)du.$$

故 $f(x)$ 的 Fourier 级数的 $(C,1)$ 和是 $s(x)$ 的必要且充分条件是这积分 $\to 0$.

依旧引进

$$\phi(u) = f(x+u)+f(x-u)-2s.$$

由于

$$\left|\frac{1}{n}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\phi(u)du\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_{\delta}^{\pi}\frac{|\phi(u)|}{\sin^2\frac{1}{2}u}du$$

显然趋于 0, 所以 $(C,1)$ 收敛的条件一变而为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\phi(u)du = 0.$$

又由于

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\sin^2\frac{1}{2}nu\left(\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right)\phi(u)du\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\delta}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right)|\phi(u)|du \to 0,$$

所以该条件又变为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\phi(u)du=0.$$

定理 2 (Fejér) 假如 $f(x)$ 仅有第一类间断点, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数的 $(C,1)$ 和是

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

特别是对 $f(x)$ 的连续的点, $f(x)$ 的 Fourier 级数的 $(C,1)$ 和就是 $f(x)$.

证 在上公式中命

$$s=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)),$$

则当 $u\to 0$ 时 $\phi(u)\to 0$, 故有 η 存在, 使 $u<\eta$ 时, $|\phi(u)|\leqslant\varepsilon$. 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\phi(u)du\right|&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\eta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varepsilon du\\&+\frac{1}{n}\int_{\eta}^{\delta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}|\phi(u)|du\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\int_0^{\eta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du+\frac{1}{n}\int_{\eta}^{\delta}\frac{|\phi(u)|}{u^2}du=I_1+I_2\quad(\text{定义}).\end{aligned}$$

现在

$$\frac{1}{n}\int_0^{\eta}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}n\eta}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv<\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv$$

是一常数, 故 $I_1<A\varepsilon$. 对固定的 η, 当 $n\to\infty$ 时显然 $I_2\to 0$. 定理证毕.

定理 3 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中连续, 则对其所包有的任何一个闭子区间 $f(x)$ 的 Fourier 级数的平均和 σ_n 一致收敛于 $f(x)$.

证明完全与定理 2 相仿, 但须注意, η 的选择仅与 ε 相关而与 x 无关.

§9. Parseval 等式

我们已经知道 Bessel 不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx.$$

现在要进一步证明

定理 1 如果 $f(x)$ 是连续函数, 则

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx.$$

证 由上节已知, $\sigma_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-\sigma_n(x))f(x)dx=0,$$

而

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)&=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)\\&=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\left(1-\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

以此代入且逐项求积分, 可知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{k}{n}\right)\to 0.$$

由 Bessel 不等式知道

$$S_m=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2)$$

收敛于 A, 由 §8 定理 1 可知

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}S_m=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

也收敛于 A, 即得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

这式子称为 Parseval 等式.

命另一连续函数 $g(x)$ 的 Fourier 展开式是

$$\frac{1}{2}a_0'+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos kx+b_k'\sin kx),$$

则由

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[(f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)]dx\\=&\frac{1}{2}[(a_0+a_0')^2-a_0^2-a_0'^2]\\&+\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k+a_k')^2-a_k^2-a_k'^2+(b_k+b_k')^2-b_k^2-b_k'^2]\end{aligned}$$

可得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}a_0a_0'+\sum_{k=1}^{\infty}(a_ka_k'+b_kb_k').$$

这称为 Plancherel 关系式.

这些公式在很普遍的假定下仍然正确. 但为了简单计, 我们不赘述了.

§10. Fourier 级数可以逐项求积分

定理 1 任何一个 Fourier 级数, 不管它是收敛或发散, 我们可以在两限之间逐项求积分. 积出后的级数的和等于该函数的积分的 Fourier 级数.

命 $f(x)$ 的 Fourier 系数是 a_n, b_n, 现在考虑函数

$$F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{1}{2}a_0\right)dt.$$

如此则 $F(x)$ 是周期的, 连续的.

又命

$$f_1(t)=\begin{cases}f(t)-\dfrac{1}{2}a_0, & \text{当 } f(t)-\dfrac{a_0}{2}\geqslant 0,\\ 0, & \text{当 } f(t)-\dfrac{a_0}{2}<0,\end{cases}$$

$$f_2(t)=\begin{cases}f(t)-\dfrac{1}{2}a_0, & \text{当 } f(t)-\dfrac{a_0}{2}<0,\\ 0, & \text{当 } f(t)-\dfrac{a_0}{2}\geqslant 0,\end{cases}$$

因此

$$f(t)-\frac{a_0}{2}=f_1(t)+f_2(t).$$

因为

$$\int_0^x f_1(t)dt,\int_0^x -f_2(t)dt$$

都是递增函数, 而

$$F(x)=\int_0^x f_1(x)dt-\int_0^x(-f_2(t))dt,$$

因此 $F(x)$ 是递增函数的差. 由 §5 定理 3, 所以有收敛的 Fourier 级数

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),$$

此处

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}$$
$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}a_0\right)\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{b_n}{n}$$

及

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-F(x)\frac{\cos nx}{n}\right)_0^{2\pi}+$$
$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}a_0\right)\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{a_n}{n}$$

(注意 $F(2\pi)=F(0)=0$). 所以

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

命 $x=0$, 即得

$$\frac{1}{2}A_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

合计

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)}{n},$$

即得定理.

由此也顺便证明了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收敛.

本定理还有另一个有趣的证明. 已知

$$\frac{\sin(x-t)}{1}+\frac{\sin 2(x-t)}{2}+\cdots=\phi(t),$$

$$\left(\text{这里 }\phi(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\pi-(x-t)], & \text{若 } 0<x-t<2\pi,\\ 0, & \text{若 } x-t=0,2\pi,\end{cases}\right)$$

囿收敛, 故可乘以 $f(t)/\pi$ 且逐项积分. 由 0 到 2π 积分, 左边等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin n(x-t)f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n},$$

而右边等于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-2\pi}^{x}\phi(t)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-2\pi}^{x}\frac{1}{2}(\pi-x+t)f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[(\pi-x+t)F(t)\right]_{x-2\pi}^{x}-\frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x}F(t)dt=F(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)dt$$

(用了 $F(x-2\pi)=F(x)$ 和 $\dfrac{a_0}{2}\displaystyle\int_{x-2\pi}^{x}\frac{1}{2}[\pi-(x-t)]dt=0$). 定理证毕.

§11. Fourier 系数的性质

由前已知

$$a_k\to 0,\quad b_k\to 0.$$

我们现在加强条件来证明更明确的结果, 例如, $f(x)$ 是单调上升有界函数, 则由第二中值公式

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cos kxdx=f(\beta)\int_\zeta^\beta\cos kxdx=O\left(\frac{1}{k}\right),$$

即得

$$a_k=O\left(\frac{1}{k}\right),\quad b_k=O\left(\frac{1}{k}\right).\tag{1}$$

如果区间 $(0,2\pi)$ 可以分为有限段, 而每一段都是单调的, 以上的结果 (1) 式仍然成立.

如果 $f(x)$ 的微商有以上的性质, 则由分部积分法可知

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx=f(x)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin kxdx$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin kxdx=O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

所以有

$$a_k=O\left(\frac{1}{k^2}\right)\quad 及\quad b_k=O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

同法可以证明, 如果 $f(x)$ 的 l 阶微商有以上的性质, 则

$$a_k=O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right),\quad b_k=O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right).$$

l 愈大, Fourier 级数收敛得愈快. 当 $l=1$ 时,

$$\left|\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|a_0|+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)\leqslant\frac{1}{2}|a_0|+O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right),$$

所以 Fourier 级数一致收敛, 且绝对收敛.

如果一个函数仅有有限个间断点, 我们可以用下法来做出一个没有间断点的函数.

由 §5 例 1 已知

$$f(x)=\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}+\cdots$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & \text{若 } -\pi<x<\pi,\\ 0, & \text{若 } x=\pm\pi\end{cases}$$

仅在点 $x=\pi$ 有间断点, 而且 $f(\pi-0)=\frac{1}{2}\pi, f(\pi+0)=-\frac{1}{2}\pi$, 考虑函数

$$g(x)=af(x+\pi-x_0)+b.$$

这是一个在 $x=x_0$ 时有间断点的函数, 而

$$g(x_0+0)=-\frac{1}{2}a\pi+b.\quad g(x_0-0)=\frac{1}{2}a\pi+b,$$

解得

$$b=\frac{1}{2}(g(x_0+0)+g(x_0-0)),\quad a=\frac{1}{\pi}(g(x_0-0)-g(x_0+0)),$$

即如果 $g(x)$ 是一个仅在 $x=x_0$ 时有间断点的函数, 而且 $g(x_0+0)$ 与 $g(x_0-0)$ 都存在, 它的 Fourier 级数等于

$$g(x)=a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin k(x+\pi-x_0)}{k}+b$$
$$=b+a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}[\cos k(\pi-x_0)\sin kx+\sin k(\pi-x_0)\cos kx].$$

如果一个函数有有限个间断点, 并且在这些间断点的左右极限都存在, 则我们可以减掉有限个上述的函数使它变为连续的.

所减去的这些函数是 "直线周期函数", 因而在计算时可以先减去几个直线周期函数, 使得所剩下的函数的 Fourier 级数一致收敛.

这个方法当然可以用来处理有以下性质的函数: 可以把区间分为有限段, 在每一段中都有 l 阶微商 (参考 Euler 求和公式).

§12. Fourier 级数的其他形式

先讨论复数形式的 Fourier 级数, 现在是

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},$$

此处

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

读者试证出与前相仿的结果.

又如果周期是 $2\pi\lambda$, 则我们有

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{kx}{\lambda} + b_k \sin\frac{kx}{\lambda}\right),$$

此处

$$a_k = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\cos\frac{kx}{\lambda}dx, b_k = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\sin\frac{kx}{\lambda}dx.$$

命

$$a_k = \rho_k \sin\varphi_k, \quad b_k = \rho_k\cos\varphi_k,$$

则得

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k \sin\left(\frac{kx}{\lambda} + \varphi_k\right).$$

独项

$$y_k = \rho_k \sin\left(\frac{kx}{\lambda} + \varphi_k\right)$$

在物理上代表调和振动, 振幅就是 ρ_k, 而 $2\pi\lambda$ 是周期, φ_k 是初位相.

§13. 实用调和分析 —— 有限调和分析

把已知函数展开成 Fourier 级数的运算叫做调和分析. 如果 $f(x)$ 是由分析方法定义出来的, 而刚好又不难算出定积分 $C_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx$ 的数值来, 则这个函数的 Fourier 展开式便立刻得到. 但如果 $f(x)$ 仅是由若干实验数据所给定的, 或者即使 $f(x)$ 由分析方法所定义, 而 C_m 不易算出, 那时就出现了如何去找 Fourier 系数的问题了. 解这样问题的运算称为实用调和分析. 人们往往容易产生这样的错觉: 当取定若干分点后, 愈多算几项, 就会得到愈精密的结果. 我们将着重指出, 事实上并不然, 过多的计算不仅浪费人力, 而且会导致愈来愈大的误差. 我们在这里所介绍的有限调和分析的着眼点也就在于此. 本节用的方法是 "从有限到有限", 并研究了由有限多个数据所应计算的最恰当的项数.

先从复数形式的 Fourier 级数讲起. 假定在 $[-\pi,\pi]$ 中给定函数 $f(x)$ 的 $n(=2n'+1)$ 个数据

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad l = 0, \pm 1, \cdots, \pm n' \tag{1}$$

利用

$$\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi ilm/n}=\begin{cases}0, & \text{若 } n\nmid m;\text{①}\\ 1, & \text{若 } n|m,\end{cases} \tag{2}$$

可以从

$$y_l=\sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{2\pi ilm/n} \quad |l|\leqslant n' \tag{3}$$

中定出 C'_m 来. 定出 C'_m 的方法是乘 (3) 式以 $e^{-2\pi ilq/n}$, 而对 l 加之, 由 (2) 式得出

$$\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilq/n}=\sum_{m=-n'}^{n'} C'_m \sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i(m-q)l/n}=nC'_q. \tag{4}$$

因此, 我们建议用

$$S_n(x)=\sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx}, C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilm/n} \tag{5}$$

来逼近 $f(x)$. 现在来估计 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的误差.

定理 1 假如 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶连续微商, 各阶微商均有周期 2π, 且 $|f^{(r)}(x)|<C$, 则

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{6}$$

证 已知

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx}, \quad C_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx, \tag{7}$$

分部积分 r 次得

$$C_m=\frac{1}{2\pi(im)^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x)e^{-imx}dx,$$

所以

$$|C_m|<\frac{C}{|m|^r}.$$

因此

$$\begin{aligned}|f(x)-\sum_{m=-n'}^{n'} C_m e^{imx}|&\leqslant \sum_{|m|>n'}|C_m|\\ &<2\sum_{m=n'+1}^{\infty}\frac{C}{m^r}<2C\int_{n'}^{\infty}\frac{dx}{x^r}=\frac{2C}{(r-1)n'^{r-1}}.\end{aligned} \tag{8}$$

①$a|b$ 表示 a 能整除 b, $a\nmid b$ 表示 a 不能整除 b.

当 $|m| \leqslant n'$ 时

$$\begin{aligned} C_m - C'_m &= C_m - \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \\ &= C_m - \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} e^{-2\pi i l m/n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{2\pi i q l/n} \\ &= C_m - \frac{1}{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-n'}^{n'} C_q e^{2\pi i (q-m) l/n} \\ &= C_m - \sum_{\substack{q=-\infty \\ n|(q-m)}}^{\infty} C_q, \end{aligned}$$

因此

$$|C_m - C'_m| \leqslant \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}|,$$

此处 $\sum'$ 表示除去 $t=0$ 这一项. 因此

$$\begin{aligned} \left|\sum_{m=-n'}^{n'} (C_m - C'_m) e^{imx}\right| &\leqslant \sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}| \\ &\leqslant \sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' \frac{C}{|m+nt|^r} = 2C\sum_{l=n'+1}^{\infty}\frac{1}{l^r} \\ &\leqslant \frac{2C}{(r-1)n'^r} \end{aligned} \tag{9}$$

(任一整数 l 可以唯一地表成为 $nt+m(|m| \leqslant n')$ 的形式, 但 $t \neq 0$, 所以从所有的整数中除去适合于 $|l| \leqslant n'$ 之诸整数, 故得所说).

因此, 由 (7) 式, (8) 式, (9) 式可得

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

定理证完.

有时为了减少计算量, 在有了 n 个数据 $y_l = f\left(\dfrac{2\pi l}{n}\right)$ $(|l| \leqslant n')$ 之后, 我们只希望计算 $2k+1$ 个系数 $C'_m(|m| \leqslant k)$, 此处 $k < n'$. 算法如下: 定出 $C'_m(|m| \leqslant k)$ 来使

$$\sum_{l=-n'}^{n'} \left| y_l - \sum_{m=-k}^{k} C'_m e^{2\pi i l m/n}\right|^2$$

取最小值.

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=-n'}^{n'}\left|y_l-\sum_{m=-k}^{k}C'_m e^{2\pi ilm/n}\right|^2\\
&=\sum_{l=-n'}^{n'}\left(y_l-\sum_{q=-k}^{k}C'_q e^{2\pi ilq/n}\right)\left(\bar{y}_l-\sum_{r=-k}^{k}\bar{C}'_r e^{-2\pi ilr/n}\right)\\
&=\sum_{l=-n'}^{n'}|y_l|^2+n\sum_{m=-k}^{k}|C'_m|^2-\sum_{q=-k}^{k}\sum_{l=-n'}^{n'}\bar{y}_l C'_q e^{2\pi ilq/n}\\
&\quad-\sum_{r=-k}^{k}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\bar{C}'_r e^{-2\pi ilr/n}\\
&=n\sum_{m=-k}^{k}\left(C'_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\right)\left(\bar{C}'_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}\bar{y}_l e^{2\pi ilm/n}\right)\\
&\quad+\sum_{l=-n'}^{n'}|y_l|^2-\frac{1}{n}\sum_{m=-k}^{k}\left|\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\right|^2\\
&\geqslant\sum_{l=-n'}^{n'}|y_l|^2-\frac{1}{n}\sum_{m=-k}^{k}\left|\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\right|^2,
\end{aligned}$$

此处等号成立之充要条件为

$$C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}.$$

因此仍用

$$S_{2k+1}(x)=\sum_{m=-k}^{k}C'_m e^{imx},\quad C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\tag{10}$$

来逼近 $f(x)$.

在定理 1 的条件下, 与定理 1 相仿可得

$$|f(x)-S_{2k+1}(x)|<\frac{2C}{(r-1)}\left(\frac{1}{n'^{r-1}}+\frac{1}{k^{r-1}}\right).$$

这建议我们, 如果只计算 $2k+1$ 项, 可以少用一些数据.

在实际计算的时候, $S_n(x)$ 有以下的表达式:

$$S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}-\pi l\right)}{\sin\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{2\pi l}{n}\right)}.\tag{11}$$

这个式子的证明如下:

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilm/n} e^{imx} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \sum_{m=-n'}^{n'} e^{im(x-2\pi l/n)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(n'+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}-\pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的实函数, 则

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx} \\
&= C'_0 + \sum_{m=1}^{n'} (C'_m e^{imx} + C'_{-m} e^{-imx}),
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
C'_0 &= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l = a'_0/2, \\
C'_m &= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilm/n} \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2\pi lm}{n} - i \sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi lm}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2}(a'_m - b'_m i), \\
C'_{-m} &= \frac{1}{2}(a'_m + b'_m i).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&C'_m e^{imx}+C'_{-m}e^{-imx}\\=&\frac{1}{2}(a'_m-b'_m i)(\cos mx+i\sin mx)\\&+\frac{1}{2}(a'_m+b'_m i)(\cos mx-i\sin mx)\\=&a'_m\cos mx+b'_m\sin mx.\end{aligned}$$

因此

$$S_n(x)=\frac{a'_0}{2}+\sum_{m=1}^{n'}(a'_m\cos mx+b'_m\sin mx), \tag{12}$$

此处

$$a'_0=\frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l,\ a'_m=\frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l\cos\frac{2\pi lm}{n},$$

$$b'_m=\frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l\sin\frac{2\pi lm}{n}. \tag{13}$$

这就是实数形式的有限 Fourier 级数.

定理 2 如果 $f(x)$ 为在 $[0,2\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶连续微商的实函数, 各阶微商都有周期 2π, 且 $|f^{(r)}(x)|<C$, 则

$$\left|f(x)-\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l\frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx-\pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}\right|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{14}$$

如果分点不是等距离的, 即已知

$$y_i=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n\quad(=2n'+1),$$

则可由联立方程组

$$y_i=\frac{a'_0}{2}+\sum_{l=1}^{n'}(a'_l\cos lx_i+b'_l\sin lx_i),\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$y=f(x)=\frac{a'_0}{2}+\sum_{l=1}^{n'}(a'_l\cos lx+b'_l\sin lx)$$

中消去 a'_0,a'_l,b'_l 而得出 y 与 $y_1,\cdots,y_n$ 的关系. 因而问题归结为解联立方程组的问题了.

习题 研究分点个数 n 为偶数的情况.

附记 有些书上利用矩形公式来近似计算定义 a'_m 与 b'_m 的积分, 因此得出

$$a_m \doteq a'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2\pi lm}{n}, b_m \doteq b'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi lm}{n},$$

然后用

$$S_{2r+1}(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{r}(a'_m \cos mx + b'_m \sin mx)$$

来逼近 $f(x)$. 虽然用这一方法得出的 $S_{2r+1}(x)$ 的表达式仍无两样, 但由于

$$a'_m = a'_{m+n}, \quad b'_m = b'_{m+n},$$

所以级数

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a'_m \cos mx + b'_m \sin mx)$$

是发散的 (除非 $a'_1 = \cdots = a'_{n'} = b'_1 = \cdots = b'_{n'} = 0$). 因此取 Fourier 级数的项数愈多, 变化亦愈大. 如果原来的函数 $f(x)$ 有一定的光滑性 (例如有连续的高阶微商等), 用这个方法来处理, 当项数算多了, 偏差反而会更大, 换言之, 这个方法容易使人产生引入迷途的可能性 —— 谬以为项数愈多愈精密. 另一方面, 当给了几个离散的数据时, 亦不必用连续性的方法来处理.

关于实用调和分析进一步的讨论, 请读者看华罗庚与王元的《数值积分及其应用》一书.

§14. Fourier 积分

把 §12 的公式写成为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos\frac{n(x-t)}{\lambda}dt. \tag{1}$$

现在使 $\lambda \to \infty$, 如果命 $u_n = \dfrac{n}{\lambda}$, 则该级数等于

$$\frac{\varphi(u_0)}{2\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)\varphi(u_n), \tag{2}$$

此处

$$\varphi(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos u(x-t)dt. \tag{3}$$

如果我们且不管 $\varphi(u)$ 与 λ 的关系, 则 (2) 式就相似于 Riemann 积分的和, 所以当 $\lambda \to \infty$ 时, 得出

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x-t)u f(t)dt. \tag{4}$$

这称为 Fourier 积分公式. 如同 Fourier 级数在有限范围内表示一个函数, Fourier 积分在无限范围内表示一个函数.

要把以上方法严格化并不简单, 我们现在用另一方法来处理公式 (4).

假定

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

是存在的, 则积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t)f(t)dt$$

对 u 在任一有限区间内一致收敛, 故可由 0 到 U 对 u 积分, 且交换符号, 即得

$$\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)dt.$$

给与 $\varepsilon > 0$, 可取 T 充分大, 使

$$\int_{-\infty}^{-T} |f(t)|dt < \varepsilon, \quad \int_{T}^{\infty} |f(t)|dt < \varepsilon.$$

取固定的 x, 并假定 $T > |x| + 1$, 则对所有的 U,

$$\left| \int_{-\infty}^{-T} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)dt \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_{T}^{\infty} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

固定 T, 由 Riemann-Lebesque 定理可知, 当 $U \to \infty$ 时, 积分

$$\int_{-T}^{x-\delta} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)dt, \quad \int_{x+\delta}^{T} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)dt$$

都 $\to 0$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t)f(t)dt &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin U(x-t)}{x-t} f(t)dt + o(1) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\sin Ut}{t}\{f(x+t)+f(x-t)\}dt + o(1). \end{aligned}$$

如此, 把我们的问题一变而为前所讨论过的 Dirichlet 积分相仿的问题了, 即如果假定

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$$

存在以及在 $t = x$ 附近 $f(x)$ 是两递增函数之差, 则

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^U du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t)f(t)dt = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

§15. Fourier 变换

如果 $f(x)$ 是偶函数, 则由 §14 Foureir 积分公式 (4) 变为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} (\cos xu \cos tu + \sin xu \sin tu) f(t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos xudu \int_0^{\infty} \cos tuf(t)dt, \end{aligned} \tag{1}$$

这称为 Fourier 余弦公式. 又如果 $f(t)$ 是奇函数, 则得 Fourier 正弦公式

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin xudu \int_0^{\infty} \sin tuf(t)dt. \tag{2}$$

如果我们命

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \cos xtf(t)dt,$$

则由 (1) 式得出

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \cos xtg(t)dt,$$

即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 处于互逆的关系. 如此所关联着的一对函数, 彼此称为 Fourier 余弦变换.

当然这是仅就形式言之, 严格些说, 在我们常遇到的条件下, 必须修改 $f(x)$ 的数值为

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

同样

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \sin xtf(t)dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \sin xth(t)dt$$

被称为 Fourier 正弦变换. 注意, 这也须修改 $f(x)$ 的数值为 $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. 在 $x = 0$ 时, 更必须注意, 我们是假定了 $f(x)$ 是奇函数才获得这公式的, 所以 $f(0)$ 的数值是 0.

例 1 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leqslant x < 1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

的 Fourier 余弦变换是

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos uxdu\int_0^{\infty}f(t)\cos utdt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos uxdu\int_0^{1}\cos utdt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ux\sin u}{u}du=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } x=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

例 2 取

$$f(x)=e^{-\beta x},\quad \beta>0.$$

它的 Fourier 正弦变换等于

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\sin utdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{u^2+\beta^2},$$

所以

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{u^2+\beta^2}\sin uxdu=\begin{cases}e^{-\beta x}, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

同样可证

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{u^2+\beta^2}du=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta x}.$$

例 3 函数

$$x^{-\frac{1}{2}},\ e^{-\frac{1}{2}x^2},\ \operatorname{sech}x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

是它们自己的 Fourier 余弦变换, 而函数

$$x^{-\frac{1}{2}},\ xe^{-\frac{1}{2}x^2},\ \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1}-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$$

是它们自己的 Fourier 正弦变换.

§16. Poisson 公式

假定 $f(x)$ 是一个在 $(0,\infty)$ 中定义了的函数, 它连续而且当 $x\to\infty$ 时单调递减趋近于 0, 并假定

$$\int_0^{\infty}f(x)dx$$

存在, 命 $\alpha>0,\alpha\beta=2\pi$, 且 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变换, 则得

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right)=\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g(n\beta)\right).\tag{1}$$

这公式称为 Poisson 公式.

证 由 $g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos txdt$ 可得

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}g(0)+\sum_{m=1}^{n}g(m\beta)\right)\\
&=\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(t)dt+\sum_{m=1}^{n}\int_0^{\infty}f(t)\cos m\beta t dt\right)\\
&=\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m\beta t\right)dt\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi\beta}}\int_0^{\infty}f\left(\frac{x}{\beta}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mx\right)dx\ (\text{换变量 }\beta t=x)\\
&=\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\int_0^{\infty}f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx\\
&=\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi}f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx\right]. \quad (2)
\end{aligned}$$

用第二中值公式到积分上, 则得

$$\begin{aligned}
a_m&=\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi}f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx\\
&=f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{(-1)^m}{x-2m\pi}\right]dx\right|\\
&\leqslant\int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{(-1)^m}{x-2m\pi}\right|dx=O(1)
\end{aligned}$$

及

$$\left|\int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x-2m\pi}dx\right|=\left|\int_{-\pi}^{(\xi-2m)\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{y}dy\right|$$
$$=\left|\int_{-\pi(n+\frac{1}{2})}^{(\xi-2m)(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin z}{z}dz\right|=O(1),$$

这里用了 $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz$ 是收敛的, 因而得出

$$a_m=O\left(f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\right).$$

从而

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m=O\left(\sum_{m=1}^{\infty}f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\right)=O\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{(2m-1)\pi}{\beta}}^{\frac{(2m+1)}{\beta}}f(t)dt+f\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right)$$
$$=O\left(\int_0^\infty f(t)dt\right)=O(1),$$

换言之, 公式 (2) 是一个对 n 一致收敛的级数. 命 $n\to\infty$, 并且每一项如此取极限, 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=\frac{1}{2}f(0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi}f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=f\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)=f(m\alpha),$$

得出最后结论

$$\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g(n\beta)\right)=\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right).$$

例 1 取 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4n^2\pi^2}.$$

例 2 证明: 若 $x>0$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi^2/x^2}. \tag{3}$$

在 Poisson 公式中取 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则 $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. 又取 $\beta=\sqrt{2}x, \alpha=\frac{\sqrt{2}\pi}{x}$, 则得

$$\sqrt{\sqrt{2}x}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x^2}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{x}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2}{x^2}}\right).$$

故得公式 (3).

§17. Fourier 变换的复数形式

函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{itx}dt \tag{1}$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换, 由此得出

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty}f(t)e^{itx}dt+\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{itx}dt\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(f(t)e^{itx}+f(-t)e^{-itx})dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\{[f(t)+f(-t)]\cos tx+i[f(t)-f(-t)]\sin tx\}dt.\end{aligned} \tag{2}$$

命

$$G(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{f(t)+f(-t)}{2}\cos txdt \tag{3}$$

及

$$H(x)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{2}\sin txdt, \tag{4}$$

显然可见 $G(-x)=G(x), H(-x)=-H(x)$. 用反转公式可知,

$$\frac{f(t)+f(-t)}{2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}G(x)\cos xtdx.$$

由于 $G(x)$ 是偶函数, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(x)\cos xtdx=2\int_0^{\infty}G(x)\cos xtdx$$

及

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(x)\sin xtdx=0.$$

因此得到

$$f(t)+f(-t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)(\cos xt-i\sin xt)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{-ixt}dx. \tag{5}$$

又由于 $H(x)$ 是奇函数, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\cos xtdx = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\sin xtdx = 2\int_{0}^{\infty} H(x)\sin xtdx.$$

因而由反转公式得出

$$f(t)-f(-t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-iH(x))\sin xtdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}H(x)e^{-ixt}dx. \tag{6}$$

(5) 式, (6) 式相加得

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(G(x)+H(x))e^{-ixt}dx.$$

由 (2) 式, (3) 式, (4) 式即得 (1) 式的反转公式

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ixt}dx. \tag{7}$$

也可以由 (7) 式推出 (1) 式来, 读者试举出在怎样的条件下, 反转公式 (7) 能够成立.

§18. 其他变换

在常用的变换中, 我们介绍以下的两种, 而不给出这些公式成立的条件.

命

$$\phi(s)=\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-sx}dx,$$

这称为函数 $f(x)$ 的 Laplace 变换. 把变量 s 写成为 $\sigma+it$, 则得

$$\phi(\sigma+it)=\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-\sigma x}e^{-itx}dx.$$

当固定 t 为变量, 则

$$\phi(\sigma+it)$$

是函数

$$F(x)=\begin{cases}\sqrt{2\pi}f(x)e^{-\sigma x} & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

的 Fourier 变换

$$\phi(\sigma+it)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-itx}dx.$$

由反转公式得

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma+it)e^{itx}dt,$$

即得

$$F(x)e^{\sigma x}=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\phi(s)e^{sx}ds.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\phi(s)e^{sx}ds=\begin{cases}f(x) & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

(当 $x=0$ 时, 这积分的数值等于 $\frac{1}{2}f(0)$), 这公式称为 Laplace 的反转公式.

又有 Mellin 变换

$$\mathfrak{F}(s)=\int_0^{\infty}f(x)x^{s-1}dx,$$

即

$$\mathfrak{F}(s)=\int_0^{\infty}f(x)x^{\sigma+it-1}dx.$$

换变量 $y=\log x$, 则得

$$\mathfrak{F}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(e^y)e^{\sigma y}e^{ity}dy,$$

即 $\mathfrak{F}(s)$ 是函数 $\sqrt{2\pi}f(e^y)e^{\sigma y}$ 的 Fourier 变换, 因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}(s)e^{-ity}dt=2\pi f(e^y)e^{\sigma y},$$

即得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}(s)e^{-(\sigma+it)y}dt=f(e^y),$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds=f(x).$$

这称为 Mellin 变换的反转公式.

第二十章　常微分方程组

§1. 化任意的微分方程组为一阶微分方程组

假定有方程组

$$\Phi_i\left(x; y_1, \frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}; \cdots; y_n, \frac{dy_n}{dx}, \cdots, \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

我们可以如下引进新变量 $y_i^{(k)}$ (及命 $y_i = y_i^{(0)}$):

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} = y_i^{(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, m_i - 2; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

因而得出新的方程组: (2) 式与

$$\Phi_i\left(x; y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \cdots, y_1^{(m_1-1)}, \frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx}; \cdots; y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \cdots, y_n^{(m_n-1)}, \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}\right) = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

如果方程组 (1) 有解, 则能从 $y_i(x)$ 得出 $y_i(x)$ 的微商来, 使它们适合于 (2) 式与 (3) 式. 反之, 如果有一组函数 $y_i^{(k)}$ 适合于 (2) 式与 (3) 式, 亦易证函数 $y_i^{(0)}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 一定适合于 (1) 式, 也就是在方程组 (2) 中的 k 按次取 $0, 1, 2, \cdots, m_i - 2$, 即得出

$$y_i^{(k+1)} = \frac{d^{(k+1)}y_i^{(0)}}{dx^{k+1}}.$$

因此方程组 (1) 与方程组 (2), (3) 是等价的.

对

$$\frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx}, \cdots, \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}$$

来说, (3) 式是 n 个方程 n 个未知数的方程组. 我们假定它们已经解出, 即

$$\frac{dy_i^{(m_i-1)}}{dx}=\varphi_i(x;y_1^{(0)},\cdots,y_1^{(m_1-1)};\cdots;y_n^{(0)},\cdots,y_n^{(m_n-1)}),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

连同 (2) 式在内得出一方程组, 它是方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=\varphi_i(x;y_1,\cdots,y_N),\quad 1\leqslant i\leqslant N \tag{5}$$

的特例. 今后我们仅讨论形如 (5) 式的方程组.

在处理方程组 (5) 时, 最好有些矩阵论的知识作为工具. 我们现在假定已经知道了以下的最简单的结果.

定义 1 假定

$$\left.\begin{aligned}u_1&=u_1(x_1,\cdots,x_n),\\&\cdots\\u_m&=u_m(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

是 n 个变量的 m 个连续函数, 而且有一阶连续偏微商. 如果有一非零函数

$$F(u_1,\cdots,u_m)$$

存在, 当 (6) 式代入此函数时, 得出一个对 $x_1,\cdots,x_n$ 恒等于 0 的式子, 则这 m 个函数称为函数相关, 不然, 则称为函数无关.

主要的结果是

定理 1 命 $m=n$, (6) 所定义的函数是函数相关的必要且充分条件是函数行列式 (或 Jacobian)

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1},&\cdots,&\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}\\\vdots&&\vdots\\\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1},&\cdots,&\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

如果在某一点函数行列式之值 $\neq 0$, 则由

$$y_i=u_i(x_1,\cdots,x_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

可以解得在该点附近有

$$x_i=g_i(y_1,\cdots,y_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

现在的讨论, 实质上是限定在某一给定区域内的. 引用这个结果不难找出 (3) 可以解成为 (4) 的条件.

§2. 常微分方程组

在第十三章 §27 中已证明了以下的结果

n 个未知函数的 n 个一阶方程所组成的微分方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x; y_1, \cdots, y_n), \\ &\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x; y_1, \cdots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在给了初始条件

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^{(0)}, \quad \cdots, \quad y_n|_{x=x_0} = y_n^{(0)} \tag{2}$$

之后, 有一个解而且仅有一个解 $y_i = \omega_i(x)$ 满足

$$\omega_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

当然, 对 $f_1, \cdots, f_n$ 在 $x = x_0, y_1 = y_1^{(0)}, \cdots, y_n = y_n^{(0)}$ 的近旁需作些假定. 为了方便起见, 我们用比第十三章 §27 更强些的条件: 假定 f_i 在这点近旁是连续的, 而且对 $y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 有连续偏微商, 这样所得出的结论也是关于在点 x_0 的近旁的.

我们改变初始条件中 $y_i^{(0)}$ 的值, 则方程组 (1) 的一般解含有 n 个任意常数. 这些常数当然可以作为初始值 $y_i^{(0)}$ 在解中出现, 但也可以以更一般的形式

$$y_i = \psi_i(x, c_1, \cdots, c_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

出现.

给了 $c_1, \cdots, c_n$ 的特定值及 $x = x_0$, 则得出一组 y_i 的初始值. 反之, 对任何初始值 $y_i^{(0)}$, 我们也希望由 (3) 式能解出 $c_1, \cdots, c_n$ 的数值来, 也就是希望从

$$y_i^{(0)} = \psi_i(x_0, c_1, \cdots, c_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3'}$$

中可以解出 $c_1, \cdots, c_n$. 因此要求 ψ_i 对变量 $c_1, \cdots, c_n$ 而言是函数无关的. 带有这样常数 $c_1, \cdots, c_n$ 的解是一般解, 例如

$$y_1 = (c_1 + c_2)x + c_3, \quad y_2 = c_3 x^2, \quad y_3 = x^2 + c_3 x + c_1 + c_2$$

并不是一般解, 因为命 $c_1 + c_2 = c$, 实质上只有两个任意常数.

从 (3′) 式解出

$$c_i = \varphi_i(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{4}$$

这就得方程组的一般解的另一形式.

(4) 式中的任意一个叫做方程组 (1) 的一个积分. 于是, 要作成 (1) 式的一般积分, 就需要有 n 个这样的积分, 并且它们对 $y_1,\cdots,y_n$ 的函数行列式不为零. 这样我们便可由 (4) 式解出 $y_1,\cdots,y_n$ 来.

方程组 (1) 可以写成为下面的连比形式:

$$dx=\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,\cdots,y_n)}=\cdots=\frac{dy_n}{f_n(x,y_1,\cdots,y_n)}. \tag{5}$$

如果用 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 来代替 $x,y_1,\cdots,y_n$, 我们不难得出完全对称的形式

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}, \tag{6}$$

这里 $X_1,\cdots,X_{n+1}$ 都是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 的函数. 在新记号下, 方程组的积分也变成

$$\varphi_i(x_1,\cdots,x_{n+1})=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

假定方程组 (6) 有 k 个积分

$$\varphi_i(x_1,\cdots,x_{n+1})=c_i,\quad i=1,2,\cdots,k. \tag{8}$$

有时我们说方程组的积分不是指等式 (8), 而是指其左边的函数 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_{n+1})$, 也就是说, 如果把方程组的任何解代入函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 中, 它变为常数, 这样的函数 φ 就称为方程组的一个积分, 这里当然假定 $\varphi(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 本身不是常数.

一个非常重要的性质是: 方程组 (1) 的若干积分的函数仍然是方程组 (1) 的积分, 也就是, 如果 $F(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$ 是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 的函数, 则对变量 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 来说, 函数 $F(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$ 也是方程组 (1) 的积分. 原因很简单, 把方程组 (1) 的值代入, 既然 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 都是常数, 当然 $F(\varphi_1,\cdots,\varphi_k)$ 也是常数了.

也可以直接证明: 由于等式 (8) 是积分, 所以

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}X_j=0.$$

由此

$$dF=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial F}{\partial x_j}dx_j=\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)X_j=0,$$

即得

$$F=C.$$

假定 (6) 式有 n 个积分 (7), 而从 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 这 $n+1$ 个变量中可以解出 n 个来, 这样解出后, 一个变量为自变量, 其他的是这个自变量的函数, 也就是从方程组 (1) 的 n 个函数无关的积分 (7) 可以给出方程组 (1) 的一般积分.

例 1

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}. \tag{9}$$

由

$$\frac{dy}{yz}=\frac{dx}{xz}$$

得

$$y=c_1x.$$

又在

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}.$$

中代入 $y=c_1x$, 即得

$$(1+c_1^2)xdx+zdz=0.$$

因而

$$(1+c_1^2)x^2+z^2=c_2,$$

也就是

$$x^2+y^2+z^2=c_2.$$

从而两个积分是

$$y=c_1x,\quad x^2+y^2+z^2=c_2. \tag{10}$$

不难证明, 函数 $u=\dfrac{y}{x},v=x^2+y^2+z^2$ 是函数无关的, 即 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$.

第一个方程代表通过 z 轴的平面族, 而第二个方程代表球心在原点的球面族. 这方程组的一般积分是

$$F\left(\frac{y}{x},x^2+y^2+z^2\right)=0,$$

这里 $F=F(u,v)$ 是两个变量 u,v 的任意函数.

习题 1 通过直线 $x=0,y=0$ 外的一点, 方程组 (9) 一定有唯一解. 通过此直线上的一点的解的情况如何?

习题 2 解出

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z},$$

此处

$$X=ax+by+cz+d,$$

$$Y=a'x+b'y+c'z+d',$$

$$Z=a''x+b''y+c''z+d''.$$

建议： 引进变量 t, 考虑

$$\frac{dt}{\lambda t}=\frac{ldx+mdy+ndz}{lX+mY+nZ}\left(=\frac{dx}{X}\right).$$

求 l,m,n,λ 使

$$lX+mY+nZ=\lambda(lx+my+nz)+r.$$

根据 λ 的三值解方程组.

习题 3 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+T(ax+by)=T_1,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}+T(a'x+b'y)=T_2,\end{cases}$$

此处 T,T_1,T_2 是 t 的函数.

习题 4 解方程组

(i)
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{2}{t}(x-y)=1,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{t}(x+5y)=t,\end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases}lt\dfrac{dx}{dt}=mn(y-z),\\[2ex]mt\dfrac{dy}{dt}=nl(z-x),\\[2ex]nt\dfrac{dz}{dt}=lm(x-y).\end{cases}$$

(iii) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$,

此处 $\boldsymbol{r}=(x,y,z),\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt},\boldsymbol{a}=(a,b,c)$.

§3. 质点的运动方程

用 t 代表时间, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 代表一质点在空间的位置, m 代表它的质量. $\boldsymbol{r}$ 是 t 的向量函数, 速度向量是

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),\tag{1}$$

加速度向量是

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2}\right).\tag{2}$$

Newton 的基本定律是: 质量乘加速度等于力, 用方程表出为

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F} = (X, Y, Z), \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{F}$ 是力, 也就是如果在空间每一点有一力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$ 作用于这质点, 则这质点在空间的运动方程是 (3).

分成分量写出得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

命 $\dfrac{dx}{dt} = u, \dfrac{dy}{dt} = v, \dfrac{dz}{dt} = w$, 则得六个方程所形成的微分方程组:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, \quad & m\frac{du}{dt} &= X, \\ \frac{dy}{dt} &= v, \quad & m\frac{dv}{dt} &= Y, \\ \frac{dz}{dt} &= w, \quad & m\frac{dw}{dt} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

因此给了在 $t = t_0$ 时 x, y, z, u, v, w 的值, 就可以唯一地解出 (4) 式来, 也就是如果在 $t = t_0$ 时, 给了

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{v} = (u, v, w)$$

的数值, 则可以得出方程 (3′) 的解来, 也就是知道了初始位置 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ 及初始速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$, 我们就知道质点的运动规律了.

最简单的例子是自由落体, 即仅仅由于地心吸力把一物体向 "下" 拉. 取 y 轴的负方向为这方向, 则力的三分量是

$$X = 0, \quad Y = -g, \quad Z = 0,$$

即得

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{5}$$

如果在 $t = 0$ 时, 静止物体在高度 h 向下落, 则得初始条件

$$\boldsymbol{r}_0 = (0, h, 0), \quad \boldsymbol{v}_0 = (0, 0, 0).$$

因而解得

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + h, \quad z = 0.$$

稍复杂的例子是无空气阻力的弹道: 从高度 h 发射, 仰角为 α, 初速为 $\boldsymbol{v}_0$. 仍取 y 轴为垂直方向. 在 y 轴与初速向量所决定的平面上, 取定 x 轴如图 122.

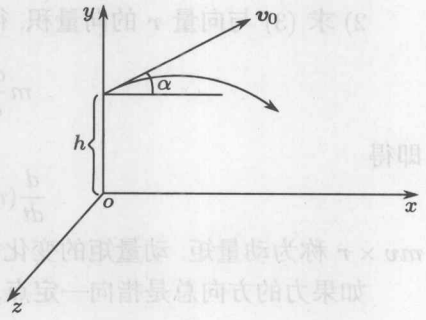


图 122

如果测得初始位置 $\boldsymbol{r}_0=(0,h,0)$ 及初速为

$$\boldsymbol{v}_0=(v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, 0),$$

不难求出方程组 (5) 的解答是

$$\begin{cases} x=(v_0\cos\alpha)t, \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t+h, \\ z=0. \end{cases}$$

一般讲来, 解方程组 (3) 常借助于以下一些考虑:

1) 求 (3) 式与向量 $\boldsymbol{v}$ 的内积, 得

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v},$$

即得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

即

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}, \tag{6}$$

此处

$$v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

(6) 式就是力学上的动能定理: "动能 $\dfrac{1}{2}mv^2$ 的增加等于沿质点轨道移动 $d\boldsymbol{r}$, 力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功".

如果力 $\boldsymbol{F}$ 是某一个依赖于 x,y,z 的函数 U 的偏微商, 这个函数 U 称为这个力的位势函数, 而 $-U$ 称为这一点的位能, 即

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

由 (6) 式可知

$$\frac{m}{2}v^2-U=c, \tag{7}$$

即在运动的整个过程中, 动能与位能之和恒为常数.

2) 求 (3) 与向量 $\boldsymbol{r}$ 的向量积, 得

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r},$$

即得

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}, \tag{8}$$

$m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ 称为动量矩. 动量矩的变化等于力矩.

如果力的方向总是指向一定点, 取这点为原点, 得

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z},$$

由 (8) 式得

$$\begin{aligned}
m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&=c_1,\\
m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)&=c_2,\\
m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)&=c_3.
\end{aligned}$$

由此立刻看出

$$c_1x+c_2y+c_3z=0,$$

即轨迹在一平面上.

§4. 人造卫星的轨道方程

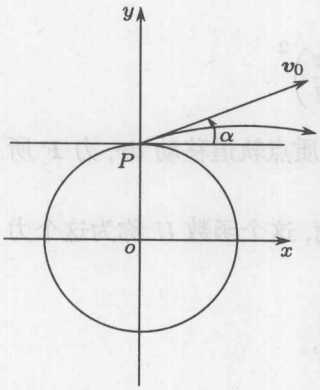


图 123

从地球表面上一点 P 依水平角 α, 速度 v_0 射出一个质量为 m 的物体 (体积比起地球来相对地很小, 不妨看作一个质点), 求这物体的运动轨道.

这是上节结果的一个具体的例子, 我们把它讲得较详尽些, 而且计算到底.

以通过发射点和地心 o 的直线作为 y 轴, 这轴和投射方向所成的平面作为 (x,y) 平面. 在这平面上通过 o 点的垂直于 y 轴的垂线作为 x 轴, 取其正向使发射方向在第一象限内如图 123.

用 t 表示时间, 取发射时刻为 $t=0$, 物体运动的坐标用 (x,y) 表示. 由万有引力定律知道有一力

$$f\cdot\frac{mM}{x^2+y^2}$$

把物体拉向球心, 其二分量是

$$\frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{1}$$

这里

$$M=5.98\times10^{27}\ \text{克} \tag{2}$$

是地球质量, 而引力常数

$$f=6.685\times10^{-23}\ [\text{公里}]^3/[\text{克}][\text{秒}]^2 \tag{3}$$

(福里斯、季莫列娃著,《普通物理学》, 114 页).

因此得出物体的运动方程:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{f\cdot mMx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \end{cases} \tag{4}$$

这就是人造卫星的运动方程. 现在解方程 (4).

由方程 (4) 可知

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0 \tag{5}$$

及

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]&=2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\\&=-\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{fM}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{d(x^2+y^2)}{dt}.\end{aligned} \tag{6}$$

积分 (5) 式, (6) 式, 立刻得出

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1 \tag{7}$$

及

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{1/2}}+c_2. \tag{8}$$

换为极坐标: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 得

$$\begin{aligned}dx&=dr\cdot\cos\theta-r\sin\theta\cdot d\theta,\\dy&=dr\cdot\sin\theta+r\cos\theta\cdot d\theta.\end{aligned}$$

代入 (7) 式, (8) 式得

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=c_1 \tag{9}$$

及

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2fM}{r}+c_2. \tag{10}$$

消去 $\dfrac{d\theta}{dt}$ 得

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}.$$

在开始发射时, 距离是与时俱增的, 所以

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}.$$

与 (9) 式联立, 消去 dt 得

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2}{c_1}\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}.$$

换变量 $r=\dfrac{1}{u}$, 则

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{u^2c_1}\sqrt{c_2+2fMu-c_1^2u^2},$$

即

$$d\theta=\frac{-c_1du}{\sqrt{c_2+2fMu-c_1^2u^2}}=\frac{-du}{\sqrt{\dfrac{c^2}{c_1^2}+\left(\dfrac{fM}{c_1^2}\right)^2-\left(u-\dfrac{fM}{c_1^2}\right)^2}}.$$

解得

$$\theta=\arccos\left\{\left(u-\frac{fM}{c_1^2}\right)\Big/\left[\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}+c,$$

也就是

$$\frac{1}{r}=u=\frac{fM}{c_1^2}+\left[\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2\right]^{1/2}\cos(\theta-c). \tag{11}$$

注意, 当

$$\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2<0 \tag{12}$$

时, (11) 式无意义.

命

$$p=\frac{c_1^2}{fM}\quad(\text{参数}), \tag{13}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{c_2c_1^2}{(fM)^2}}\quad(\text{离心率}). \tag{14}$$

得出轨道方程

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}. \tag{15}$$

这里有三个常数 c_1,c_2,c, 可由开始发射时的情况决定: 当 $t=0$ 时, 假定发射点是地面, 即

$$x=0,\quad y=R\quad (\text{地球半径}),$$

也就是 $\theta=\frac{\pi}{2}, r=R$. 再由初速得

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha.$$

由 (7) 式及 (8) 式给出 c_1,c_2 的数值:

$$\left.\begin{aligned} c_1&=-Rv_0\cos\alpha,\\ c_2&=v_0^2-\frac{2fM}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

再由 (15) 式得出

$$R=\frac{p}{1+e\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)}=\frac{p}{1+e\sin c},$$

解得

$$\sin c=\frac{\frac{p}{R}-1}{e}. \tag{17}$$

由 (14) 式, (16) 式得

$$\begin{aligned} e^2&=1+\left(v_0^2-\frac{2fM}{R}\right)R^2v_0^2\frac{\cos^2\alpha}{(fM)^2}\\ &=\left(1-\frac{Rv_0^2\cos^2\alpha}{fM}\right)^2+\frac{R^2v_0^4\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{(fM)^2}\\ &=\left(1-\frac{p}{R}\right)^2+\frac{p^2}{R^2}\mathrm{tg}^2\alpha\geqslant\left(\frac{p}{R}-1\right)^2. \end{aligned} \tag{18}$$

因此 (17) 式中的 c 是一定存在的.

§5. 轨道讨论 —— 第一、第二宇宙速度

再进一步研究 §4 中轨道方程 (15) 的性质. 特别应当注意的是 $e=0$ 及 $e=1$ 这两个数值.

首先, 当 $e=0$ 时, 由 §4 中 (18) 式可以看到

$$\frac{p}{R}=1,\quad \mathrm{tg}\,\alpha=0,$$

即可以得出 $\alpha=0, p=R$. 由 §4 中 (16) 式的第一式及 §4 中 (13) 式得

$$v_0^2=\frac{fM}{R}. \tag{1}$$

把地球半径 R 及质量 M 的数值代入, 即得

$$v_0^2=\frac{6.685\times10^{-23}\times5.98\times10^{27}}{6370}\ [\text{公里/秒}]^2=62.76\ [\text{公里/秒}]^2,$$

所以

$$v_0=7.9\ \text{公里/秒}.$$

这是第一宇宙速度.

再当 $e=1$ 时, 可以算出

$$v_0^2=\frac{2fM}{R}. \tag{2}$$

所求出的 v_0 是第一宇宙速度的 $\sqrt{2}$ 倍, 即得

$$v_0=11.2\ \text{公里/秒}.$$

这是第二宇宙速度.

当 $e<1$ 时, 即初速小于第二宇宙速度时, §4 中轨道方程 (15) 是一椭圆, 这是一个经过 P 点的椭圆, 在 P 点的切线斜率是 $\operatorname{tg}\alpha$. 如果轨道上有一点与地球中心的距离小于 R, 则物体便落在地球上而不能完成椭圆轨道, 也就是函数

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}$$

的最小数应当是 R (因为开始时是 $r=R$). 易见这一函数的最小值等于 $\frac{p}{1+e}$, 因此

$$\frac{p}{1+e}=R,\quad e=\frac{p}{R}-1.$$

由 §4 中 (18) 式可知, 这仅当 $\alpha=0$, 换言之, 仅当沿地平方向发射才有可能.

另一方面, 又由 $e\geqslant0$ 可知 $p\geqslant R$, 即

$$R\leqslant\frac{c_1^2}{fM}\leqslant\frac{R^2v_0^2}{fM},$$

即

$$v_0\geqslant\left(\frac{fM}{R}\right)^{1/2}\quad(\text{第一宇宙速度}).$$

这就说明了, 当初速度在第一、第二宇宙速度之间, 沿地平方向发射, 我们才可以获得椭圆轨道.

在实际进行的时候, 我们并不用在地面上沿水平方向发射的方法, 而是用先垂直向上然后倾斜进入轨道的方法, 其原因是空气阻力大, 不但要消耗大量能量, 而且

时间长了还可能使火箭因摩擦生热而烧毁. 所以需要尽快地离开大气层. 而垂直向上飞行时, 在大气层中停留的时间最短. 不但这样, 发射方向即使稍许偏离了水平方向, 也不致于卫星落地. 当然, 速度可能比第一宇宙速度要稍许大一些.

习题 1 在离地 200 公里处依水面方向前进的物体, 需要怎样的速度才能不落回地面? 才能形成圆形轨道 (即 $e=0$)? 若把形成圆形轨道的速度命之为 v_0, 依此 v_0 但角度偏离水平, 在怎样的限度内, 才不致于落回地球?

前已讲过轨道的最低点为 $R=\dfrac{p}{1+e}$, 而最高点与球心的距离是 $\dfrac{p}{1-e}$.

再研究速度 v, 由 §4 中 (8) 式得

$$v^2-\frac{2fM}{r}=c_2=v_0^2-\frac{2fM}{R}\quad (r>R).$$

由此可见, 速度是不均匀的, 因为由

$$v^2=\frac{2fM}{r}+v_0^2-\frac{2fM}{R},\quad R\leqslant r\leqslant\frac{p}{1-e}$$

可知

$$v_0^2-\frac{4fMe}{p}\leqslant v^2\leqslant v_0^2.$$

由于

$$v_0^2-\frac{4fMe}{p}=v_0^2-4fM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{p}\right)=v_0^2+\frac{4f^2M^2}{R^2v_0^2}-\frac{4fM}{R}=\left(v_0-\frac{2fM}{Rv_0}\right)^2,$$

因此

$$\frac{2fM}{Rv_0}-v_0\leqslant v\leqslant v_0.$$

这再次说明了, 初速度应当在第一、第二宇宙速度之间, 同时也说明了最低点速度最快, 最高点最慢. 轨道上每一点的速度不比初速快.

如果 v_0 大于第二宇宙速度, 即 $e>1$, 轨道方程是一股双曲线

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)},$$

假定 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$.

我们现在证明, 随时间增大, r 永远增大, 而且趋向于 ∞.

在开始发射时, r 显然是一个时间的增函数. 如果它并不是永远增加的, 则一定有一个值使 r 极大, 即使 $1+e\cos(\theta-c)$ 极小. 这是一个连续函数, 极小值是 $1-e<0$. 这是不可能的, 所以这一物体一定沿轨道离地愈来愈远. 但并不是真的飞向无穷, 因为此时虽然地球不能自主, 但太阳的引力可能使它不能远离.

这物体的速度平方

$$v^2=\frac{2fM}{r}+v_0^2-\frac{2fM}{R}>v_0^2-\frac{2fM}{R},$$

也就是速度永远大于 $\sqrt{v_0^2-\dfrac{2fM}{R}}$, 并且愈远愈接近于这个速度.

2. 读者自己讨论以下两种情况:

(i) 恰好是第二宇宙速度时,

(ii) 垂直发射时, 即 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,

3. 以上的研究, 不仅对地球是这样, 概括起来, 可以有以下的结论:

一个质量为 M 克的天体, 在离中心 R 公里处发射一物体, 对这个天体来说, 第一宇宙速度等于 $\sqrt{\dfrac{fM}{R}}$, 第二宇宙速度等于 $\sqrt{\dfrac{2fM}{R}}$.

例如, 月球半径是 1750 公里, 质量是 7.25×10^{25} 克, 因此月球上造成卫星的速度是

$$\left(\frac{6.685\times10^{-23}\times7.25\times10^{25}}{1750}\right)^{\frac{1}{2}}=1.66,$$

冲出月球引力的速度等于 $\sqrt{2}\times1.66=2.34$.

读者试根据以下数据算出各行星上的第一、第二宇宙速度:

	质量 (以地球为单位)	直径 (以地球为单位)
水 星	0.07	0.37
金 星	0.81	0.97
地 球	1.00	1.00
火 星	0.11	0.52
木 星	318	10.97
土 星	95	9.4
天 王 星	15	3.8
海 王 星	17	3.4
冥 王 星	0.03?	0.46

§6. 第三宇宙速度

数据:

太阳质量: 1.983×10^{33} 克,

太阳和地球的距离: 1.495×10^{8} 公里,

地球绕太阳旋转的速度: 29.76 公里/秒.

第一步. 在离太阳 1.495×10^{8} 公里处发射物体, 怎样的速度可以逃出太阳引力. 由 §5 可知, 速度的平方应当大于或等于

$$\frac{2f\times\text{太阳质量}}{1.495\times10^{8}}=\frac{2\times6.685\times10^{-23}\times1.983\times10^{33}}{1.495\times10^{8}}=1773.43=42.11^2.$$

第二步. 地球绕太阳的速度是 29.76, 所以如果地球上发射时的速率恒超过 $42.11-29.76=12.35$ 公里/秒, 就可以达到目的.

第三步, 命 v_0 是从地球上发射的初速, 则由 §5 知, 这物体的速度

$$v^2 = \frac{2fM}{r} + v_0^2 - \frac{2fM}{R} > v_0^2 - \frac{2fM}{R} = v_0^2 - 125.5.$$

如果 v_0 取得使

$$v_0^2 - 125.5 \geqslant 12.35^2,$$

即

$$v_0^2 \geqslant 278.1 = 16.7^3,$$

即得所求. 如果取

$$v_0 \geqslant 16.7 \text{ 公里/秒},$$

就保证了脱离太阳的引力而一去不复返了. 这就是第三宇宙速度.

这就是说, 当我们在地球上顺着地球前进的方向发射 (例如, 在下弦的时候向月球方向射去), 如果初速是 16.7 公里/秒, 则在出地球引力范围的时候, 它对地球的速度将大于 12.3 公里/秒, 加之地球前进的速度 29.8 公里/秒, 所以对太阳来说, 这物体获得了 42.1 公里/秒的速度. 因而可能逸出太阳系.

必须注意, 如果不依照顺着地球轨道方向发射, 情况就完全不同了.

这也同时说明了苏联发射宇宙火箭为什么取顺着地球前进方向发射的道理, 也说明了为什么成了 "外" 行星, 而不是 "内" 行星.

习题 读者试根据下列数据算出行星上的第三宇宙速度, 水, 金, 火, 木, 土, 天王, 海王, 冥王诸星与太阳的距离各为 58, 108, 228, 780, 1430, 2880, 4500, 5900 百万公里, 它们绕太阳的平均速度是 47.83, 34.99, 24.11, 13.05, 9.64, 6.36, 5.43, 4.73 公里/秒.

§7. 质点组 —— 多体问题

在空间取定一个坐标系, 有 n 个质点, 它们的坐标是

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1), \\ &\cdots \\ \boldsymbol{r}_n &= (x_n, y_n, z_n). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

n 个质点间有内力, 即其中任意二质点间的互相作用的力. 例如, 第一质点对第二质点的作用力 $\boldsymbol{J}_{21}$ 与第二质点对第一质点的作用力 $\boldsymbol{J}_{12}$ 数值相等, 但方向相反, 加之

第 i 质点所受的外力以 $\boldsymbol{F}_i$ 来代表, 如此得出运动方程组

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} &= \boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{J}_{12}+\boldsymbol{J}_{13}+\cdots+\boldsymbol{J}_{1n},\\ m_2\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} &= \boldsymbol{J}_{21}+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{J}_{23}+\cdots+\boldsymbol{J}_{2n},\\ &\cdots\\ m_n\frac{d\boldsymbol{v}_n}{dt} &= \boldsymbol{J}_{n1}+\boldsymbol{J}_{n2}+\boldsymbol{J}_{n3}+\cdots+\boldsymbol{J}_{nn-1}+\boldsymbol{F}_n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

最有名的例子是天体力学上的 n 体问题. 假定有 n 个天体, 质量各为 $m_1,\cdots,m_n$, 并不添加外力, 求出仅靠万有引力而得出的轨道, 即 $\boldsymbol{F}_i=0$ 及

$$\boldsymbol{J}_{ij}=f\frac{m_im_j}{\rho_{ij}^2}\left(\frac{x_i-x_j}{\rho_{ij}},\frac{y_i-y_j}{\rho_{ij}},\frac{z_i-z_j}{\rho_{ij}}\right), \tag{3}$$

这里 $\rho_{ij}^2=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|^2$, 即第 i 个天体与第 j 个天体的距离, f 是引力常数. 方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}&=\boldsymbol{v}_i,\\ m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}&=-f\sum_{j\neq i}\frac{m_im_j}{\rho_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j),\quad 1\leqslant i\leqslant n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

称为 n 体天体方程, 共有 $6n$ 个一次方程. 求解 $6n$ 个以 t 为变量的函数 $x_i,y_i,z_i,\dfrac{dx_i}{dt},\dfrac{dy_i}{dt},\dfrac{dz_i}{dt}$.

$n=2$ 时, 基本上就是我们以上几节所讨论过的问题; $n=3$ 就是历史上没有解决的有名的三体问题; $n>3$ 更不必说了.

但我们还是可以给出以下 10 个积分:

1) 重心积分.

将 (4) 式总加起来, 得

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=0. \tag{5}$$

积分得

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}. \tag{6}$$

分成支量写一共是 3 个方程. (6) 式说明了这 n 个质点的重心依等速运动, 共有 6 个常数 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 因此可以作为 6 个积分.

2) 扫面积积分 (图 124).

求方程 (4) 与 $\boldsymbol{r}_i$ 的向量积, 得

$$m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\times\boldsymbol{r}_i=-f\sum_{j\neq i}\frac{m_im_j}{\rho_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{r}_i=-f\sum_{j\neq i}\frac{m_im_j}{\rho_{ij}^3}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{r}_j.$$

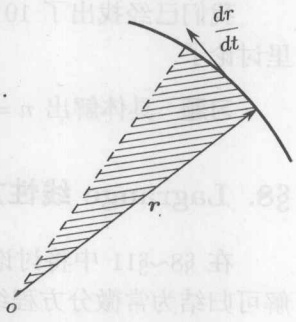


图 124

由于

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\times\boldsymbol{r}_i=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{r}_i),$$

所以

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{r}_i)=0,$$

即得

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{r}_i)=\alpha. \tag{7}$$

读者试自己回答何谓扫面积积分.

3) 能量积分.

命

$$U=f\sum_{i<j}\frac{m_im_j}{\rho_{ij}}, \tag{8}$$

则

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f\sum_{i<k}\frac{m_im_k}{\rho_{ik}}+f\sum_{k<j}\frac{m_km_j}{\rho_{kj}}\right)=-f\sum_{j\neq k}\frac{m_km_j}{\rho_{kj}^3}(x_k-x_j).$$

因此 (4) 式可以改写成为

$$m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=\left(\frac{\partial U}{\partial x_i},\frac{\partial U}{\partial y_i},\frac{\partial U}{\partial z_i}\right)\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

求此式与向量 $\boldsymbol{v}_i$ 的内积, 得

$$m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{v}_i=\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right),$$

求和得

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_id(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=dU.$$

因此积分得

$$T-U=h, \tag{10}$$

这里 h 是常数, $-U$ 是位能, 而

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i \tag{11}$$

是动能. (10) 式称为能量积分.

我们已经找出了 10 个已知积分, 进一步的研究属于天体力学范围, 我们不在这里讨论了.

习题 具体解出 $n=2$ 的情况, 并且与 §3~§4 的结果相比较.

§8. Lagrange 线性方程

在 §8~§11 中将讨论一些一阶偏微分方程, 这些偏微分方程的特点是它们的求解可归结为常微分方程组的求解问题.

先从一个最简单的情况出发, 假定

$$\varphi(u,v)=0, \tag{1}$$

其中 φ 是任意函数, 而 u,v 是 x,y,z 的函数. 我们来消去这任意函数 φ. 对 x,y 求微商, 得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}, q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 因此

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

整理一下得

$$Pp+Qq=R, \tag{3}$$

此处

$$\frac{P}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial y}&\frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Q}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z}&\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z}&\frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{R}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}, \tag{4}$$

或与之等价的形式

$$\left.\begin{aligned}P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0,\\ P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在求解偏微分方程 (3) 的时候, 我们主要的困难是找出 u,v 来.

我们现在考虑

$$u=a,\quad v=b, \tag{6}$$

这里 a, b 是常数, 微分则得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0,\\ \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0.\end{aligned}\right\}$$

因此

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \tag{7}$$

这个常微分方程组以 $u=a, v=b$ 为解答, 因此得出解题法则.

为了求偏微分方程

$$Pp+Qq=R \tag{3}$$

的解答, 先写下常微分方程

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{7}$$

来, 求出此常微分方程的两个函数无关的解答

$$u=a,\quad v=b, \tag{6}$$

则偏微分方程 (3) 有一解

$$\varphi(u,v)=0, \tag{1}$$

这里 φ 是任意函数.

反过来看, 如果偏微分方程有一解

$$z=f(x,y),$$

以此代入常微分方程的解答 (6), 则得

$$u=u(x,y,z)=u[x,y,f(x,y)]=u^*(x,y)=u^*,$$
$$v=v(x,y,z)=v[x,y,f(x,y)]=v^*(x,y)=v^*.$$

由此

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial v^*}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial v^*}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}.$$

由此 u^*, v^* 对 x, y 的 Jacobian 是

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{\partial u^*}{\partial y}\frac{\partial v^*}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

另一方面, (6) 式是 (7) 式的解, 因此

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0,$$

也就是

$$\frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial u}{\partial z}R = 0.$$

同法得

$$\frac{\partial v}{\partial x}P + \frac{\partial v}{\partial y}Q + \frac{\partial v}{\partial z}R = 0.$$

因此

$$\frac{P}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{R}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = M, \tag{9}$$

这里 M 是公比. 代入 (8) 式可知,

$$J = \frac{1}{M}(R - Pp - Qq). \tag{10}$$

由于 $R - Pp - Qq = 0$, 因此, 如果 $M \neq 0$, 则可知

$$J = 0,$$

也就是 u^*, v^* 是函数相关的, 也就是有一函数 φ 使

$$\varphi(u^*, v^*) = 0,$$

也就是把偏微分方程的解代入

$$\varphi(u, v)$$

时, 它变为零, 即在

$$\varphi(u, v) = 0$$

中包含了解 $z=f(x,y)$.

因此, 以上所提出的解题法则并不一定得出所有的解来, 还有那些使

$$M=M(x,y,z)=M(x,y,f(x,y))=0$$

的 $z=f(x,y)$ 可能是例外. 但由 $M=0$ 得出来的解是不含有任意函数的, 因此含有任意函数的解一定可以由以上的解题法则推算出来.

但请注意, 偏微分方程还可能包有一些特解 —— 并不包有任意函数的解.

例 1 解方程

$$xp+yq=z.$$

由

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

解得 $z=ay, z=bx$, 因此得

$$\varphi\left(\frac{z}{y},\frac{z}{x}\right)=0.$$

例 2 解方程

$$(mz-ny)p+(nx-lz)q=ly-mx.$$

由

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}$$

得出

$$xdx+ydy+zdz=0,$$

即

$$x^2+y^2+z^2=a$$

及

$$ldx+mdy+ndz=0,$$

亦即

$$lx+my+nz=b.$$

因而得

$$lx+my+nz=\varphi(x^2+y^2+z^2).$$

例 3 解方程

$$[1+(z-x-y)^{1/2}]p+q=2.$$

由

$$\frac{dx}{1+(z-x-y)^{1/2}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

可得

$$zy - z = a, \quad y + 2(z - x - y)^{1/2} = b.$$

但特解

$$z = x + y$$

却不能表成为

$$\varphi(2y - z, y + 2(z - x - y)^{1/2}) = 0$$

的形式, 要证明这点, 以 $z = x + y$ 代入 u, v 得

$$u = 2y - z = y - x,$$
$$v = y + 2(z - x - y)^{1/2} = y,$$

因此 u, v 是不相关的函数.

这个解是从

$$M = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = (z - x - y)^{1/2} = 0$$

得来的.

例 4 求方程

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} + 5 = 0$$

的解之经过直线

$$x = a_1 v, \quad y = a_2 v, \quad z = a_3 v$$

者, 这里 a_1, a_2, a_3 是常数, 而 $3a_1 - 2a_2 \neq 0$.

先由

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{-5}$$

得解

$$u = 3x - 2y, \quad v = 5x + 2z.$$

因而得一般解

$$5x + 2z = \varphi(3x - 2y),$$

这里 φ 是任意函数. 以直线代入, 得

$$(5a_1 + 2a_3)v = \varphi((3a_1 - 2a_2)v),$$

所以

$$\varphi(t)=\frac{5a_1+2a_3}{3a_1-2a_2}t.$$

因而得出所求的解答

$$(3a_1-2a_2)(5x+2z)=(5a_1+2a_3)(3x-2y).$$

例 5 求

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$$

的解答之适合于

$$z(1,y)=\varphi(y)$$

者.

先解

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{ydz}{x^3},$$

由前二项得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+a,$$

又由一, 三项得

$$dz=\frac{x}{y}dx=x\left(\frac{1}{x}-a\right)dx=(1-ax)dx,$$

即得

$$z=x-\frac{1}{2}ax^2+b=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}+b.$$

因而得一般解

$$z-\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2y}=\chi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

这里 χ 是任意函数. 利用 $z(1,y)=\varphi(y)$, 定出

$$\varphi(y)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\chi\left(1-\frac{1}{y}\right),$$

算得

$$\chi(t)=\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)-1+\frac{1}{2}t.$$

因而解答

$$\begin{aligned}z&=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\varphi\left(\frac{xy}{xy-y+x}\right)\\&=(x-1)\left[1+\frac{(x+1)(x-y)}{2xy}\right]+\varphi\left(\frac{xy}{xy-y+x}\right).\end{aligned}$$

§9. 线性方程的一般解

以上的解题法则可以推广成为 n 个变量的情形. 求

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z \tag{1}$$

的一般解, 可以先解

$$\frac{dx_1}{X_1}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Z}. \tag{2}$$

命其 n 个函数无关的解是

$$\varphi_1(z,x_1,\cdots,x_n)=c_1,$$

$$\cdots$$

$$\varphi_n(z,x_1,\cdots,x_n)=c_n,$$

这里 $c_1,\cdots,c_n$ 是常数, 则偏微分方程 (1) 的通解是

$$\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=0,$$

这里 Φ 是任意函数.

例 1 求解

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mz,$$

这里 m 是常数. 先解

$$\frac{dx_1}{x_1}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{dz}{mz},$$

得出

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},\frac{z}{x_n^m}=c_n.$$

因此

$$\frac{z}{x_n^m}=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

这里 Φ 是一任意函数, 即得

$$z=x_n^m\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

这是齐次函数的 Euler 定理的逆定理.

如果方程 (1) 中 $Z=0$, 则方程组显然有一积分

$$z=c\quad(\text{常数}).$$

命 $u_1, \cdots, u_{n-1}$ 是

$$\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

的 $n-1$ 个积分, 则方程 (1) 的解是

$$z = \Phi(u_1, \cdots, u_{n-1}),$$

这里 Φ 是一任意函数.

§10. 一般一阶偏微分方程的解法 —— Charpit 法

我们现在考虑一般的一阶偏微分方程

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

如果方程 (1) 的解答还适合于另一个一阶偏微分方程

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \tag{2}$$

则可由方程 (1) 与方程 (2) 解出

$$p = \psi(x, y, z), \quad q = \chi(x, y, z).$$

但 Φ 不能是任意的, 它必须使

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{3}$$

如果这条件适合了, 则我们可由解

$$dz = pdx + qdy \tag{4}$$

来找出方程 (1) 的解. 因而解方程 (1) 的问题一变而为寻求适合于条件 (3) 的函数 Φ 的问题.

对 x, y 求偏微商, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}p + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}q + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

从前一对方程中消去 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$, 得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+\frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)=0.$$

从后一对方程中消去 $\dfrac{\partial q}{\partial y}$, 得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)=0.$$

由于 $\dfrac{\partial q}{\partial x}=\dfrac{\partial p}{\partial y}$, 上两式相加后, 这两项消去整理之得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\left(-\frac{\partial F}{\partial p}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\left(-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\left(-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0. \tag{5}$$

(5) 式是一个函数 Φ 的线性方程, 因而由上节的结果可知, 问题化为求解下列线性方程组的问题了.

$$\frac{dp}{\dfrac{\partial F}{\partial x}+p\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\dfrac{\partial F}{\partial y}+q\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dz}{-p\dfrac{\partial F}{\partial p}-q\dfrac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dx}{-\dfrac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{-\dfrac{\partial F}{\partial q}}=\frac{d\Phi}{0}.$$

这说明了 $d\Phi=0$, 即 Φ 是常数. 这是 (5) 式的显然解答, 不必多论.

将这方程的解答与方程 (1) 联立, 作为 x,y 的函数解出 p,q, 然后积分 (4) 式得出解答来, 即为所求.

例 1 解微分方程

$$p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0,$$

其对应的常微分方程组是

$$\frac{dp}{2y-2p}=\frac{dq}{2x-2q}=\frac{dx}{-2p+2x}=-\frac{dy}{2q+2y},$$

故

$$dp+dq=dx+dy,$$

即得

$$p-x+q-y=a.$$

与原方程

$$(p-x)^2+(q-y)^2=(x-y)^2$$

联立, 解答

$$2(p-x)=a+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$
$$2(q-y)=a-[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}.$$

因此, $dz=pdx+qdy$ 变为

$$2dz=(2x+a)dx+(2y+a)dy+(dx-dy)[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$

即得

$$2z-b=x^2+ax+y^2+ay+\frac{x-y}{2}[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}$$
$$-\frac{a^2}{2^{3/2}}\log(2^{1/2}(x-y)+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}).$$

这是一个完全解, 不难推导出一般解来. 但注意, 并无奇异解.

习题 求解

i) $p^2+q^2-2px-2qy+1=0$,

ii) $2(pq+py+qx)+x^2+y^2=0$.

§11. 上节方法的特例

1) Lagrange 方程

$$R-Pp-Qq=0,$$

此时由

$$F=R-Pp-Qq$$

得

$$-\frac{\partial F}{\partial p}=P,\quad -\frac{\partial F}{\partial q}=Q,$$
$$-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}=pP+qQ=R.$$

因此得线性方程组

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

即为前所谈过的方程.

2) 解方程

$$\psi(p,q)=0,$$

此时

$$F = \psi(p, q),$$

其中 x, y, z 都不出现, 故

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

所以

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \frac{dx}{-\dfrac{\partial \psi}{\psi p}} = \frac{dy}{-\dfrac{\partial \psi}{\partial q}},$$

故得 $p = a, q = b$ 都是常数. 由原方程可知

$$\psi(a, b) = 0,$$

因此

$$dz = pdx + qdy = adx + bdy.$$

因而

$$z = ax + by + c, \quad \psi(a, b) = 0.$$

3) 解方程

$$\psi(z, p, q) = 0,$$

其中 x, y 不出现. 命 $F = \psi(z, p, q)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

因此

$$\frac{dp}{p\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dq}{q\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

故得 $q = ap$. 与 $\psi(z, p, q) = 0$ 联立, 我们可以解出 p 与 q 来, 即 $p = f(z)$ 与 $q = af(z)$. 代入

$$dz = pdx + qdy,$$

得

$$\frac{dz}{f(z)} = dx + ady.$$

因此

$$\int \frac{dz}{f(z)} + c = x + ay.$$

4) 解

$$F = \varphi(x, p) - \psi(y, q) = 0,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial \varphi}{\partial p},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial q}=-\frac{\partial \psi}{\partial q},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

故

$$\frac{dp}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}=\frac{dx}{-\dfrac{\partial \varphi}{\partial p}}$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}dp+\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx=0,$$

即

$$\varphi(x,p)=a,$$

故

$$\psi(y,q)=a.$$

解出 p 与 q 得

$$p=\theta_1(x,a),\quad q=\theta_2(y,a).$$

因此

$$dz=\theta_1(x,a)dx+\theta_2(y,a)dy,$$

而

$$z+c=\int \theta_1(x,a)dx+\int \theta_2(y,a)dy.$$

例 1 求偏微分方程

$$p^2+q^2=1$$

的解之过圆周 $x^2+y^2=1, z=0$ 者.

由 2) 已知, 这方程有一完全解

$$z=ax+by+c,\quad a^2+b^2=1.$$

命 $a=\cos\theta, b=\sin\theta, c=c(\theta)$, 求其一般解

$$\begin{aligned}z&=x\cos\theta+y\sin\theta+c(\theta),\\0&=-x\sin\theta+y\cos\theta+c'(\theta).\end{aligned}$$

当 $z=0$ 时,

$$\begin{aligned}1=x^2+y^2&=(x\cos\theta+y\sin\theta)^2+(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2\\&=(c(\theta))^2+(c'(\theta))^2.\end{aligned}$$

这个微分方程的一般解是 $c(\theta)=\cos(\theta+k), k$ 是常数, 而奇异解是 $c(\theta)=\pm 1$. 由奇异解得

$$(z\pm 1)^2=x^2+y^2.$$

从一般解

$$z^2=(x+\cos k)^2+(y-\sin k)^2,$$

这并非所求之解, 当 $z=0$ 时得出一点 $x=-\cos k, y=\sin k$, 而不是整个圆周 $x^2+y^2=1, z=0$.

名词索引

Abel 定理, 82
Abel 判别法, 79
Archimedes 螺线, 8

Bernoulli 数, 338
Bessel 不等式, 328
Bessel 函数, 121
Bianchi 恒等式, 320
Bolzano-Weierstrass 定理, 34
Bunyakovskiĭ-Schwarz 不等式, 213

$(C,1)$ 和, 341
C^n 类, 48
Cauchy 乘法, 120
Cauchy 判别法, 65
Cauchy-Kovalevskaya 定理, 139
Cauchy-Riemann (Euler-d'Alembert) 方程, 250, 272
Charpit 法, 389
Christoffel 第二类符号, 317
Christoffel 第一类符号, 317
Clairaut 方程, 158
Clapeyron 公式, 231

Dini 定理, 106
Dirichlet 乘法, 120
Dirichlet 积分, 72, 327
Dirichlet 级数, 120
Dirichlet 判别法, 79
Dupin 定理, 299

Einstein 约定, 312
Epstein ζ 函数, 117
Euler 公式, 280
Euler-d'Alembert (Cauchy-Riemann) 方程, 250, 272

Fejér 定理, 343
Fejér 积分, 342
Fourier 变换, 357
Fourier 变换的反转公式, 361
Fourier 级数, 323
Fourier 系数, 325
Fourier 余弦公式, 357
Fourier 正弦变换, 357
Fourier 正弦公式, 357
Frenet-Serret 公式, 165
Fresnel 积分, 109

Gauss 第二微分型, 290
Gauss 第三微分型, 301
Gauss 第一微分型, 286
Gauss 方程, 315

Gauss 曲率, 296
Gauss 与 Codazzi 方程, 319
Gibbs 现象, 338
Green 公式, 235, 269, 270
Guldin Pappus 定理, 16, 18

Hamilton (Nabla) 算子, 262
Heine-Borel 定理, 34

Jacobian, 59

Kepler 方程, 127
Kepler 行星运行第一规律, 147
Kronecker 符号, 312

Lagrange 乘子法, 56
Lagrange 方程, 391
Lagrange 级数, 126
Lagrange 线性方程, 382
Lambert 级数, 121
Laplace 变换, 362
Laplace 的反转公式, 363
Laplace 方程, 204, 260, 261
Laplace 算子, 255
Lipschtz 条件, 128

Möbius 带, 237
M. V. Jarnik 定理, 207
Mellin 变换, 363
Mellin 变换的反转公式, 363
Meusnier 定理, 293

Nabla (Hamilton) 算子, 262

Olinde Rodrigues 公式, 298
Ostrogradskiĭ-Gauss 公式, 258
Ostrogradskiĭ 公式, 236

Parseval 等式, 343
Plancherel 关系式, 345
Plato 问题, 303
Poisson 公式, 358

Riemann 第二类曲率张量, 321
Riemann 第一类曲率张量, 321
Riemann 几何, 302
Riemann 可积, 329
Riemann-Lebesgue 定理, 330
Riemann ζ 函数, 79

Stokes 公式, 237, 239

Tauber 定理, 82
Taylor 公式, 49
Taylor 展开, 48

Vieta 公式, 94
Viviani 曲线, 15

Wallis 公式, 89
Weingarten 方程, 318

Zolotarev 方法, 216

Бауман 改正数, 211
Бауман 公式, 211
Болдырев 最近地区法, 210
Соболевский 体积方格法, 211
Волков 方法, 218, 220

A

安全抛物线, 160

B

半立方抛物线族, 161
包络, 298
包络面, 308
包络线, 158
闭单纯体, 28
闭集, 29
闭球, 28
闭域, 29
边界, 29
边界点, 29
扁回旋椭圆面, 296

不可压缩流, 249
部分积, 86

C
常微分方程, 128, 307
常微分方程组, 366
初始条件, 366
纯量, 251
纯量场, 251

D
带参数的积分, 96
单侧曲面, 237
单层势量, 206
单连通域, 242
单位法线方向, 290
单位切向量, 147
单位向量, 144
单叶双曲面, 300
等高线, 210
等量面, 251
第二基本型, 316
第二宇宙速度, 376
第二中值公式, 332
第三基本型, 319
第三宇宙速度, 378
第一基本型, 311
第一类间断点, 332
第一宇宙速度, 376
迭次积分, 178
动量矩, 372
动能定理, 371
短程线, 170
对数螺线, 5, 152, 155, 274
多变量的幂级数, 122
多个变量的函数, 24
多连通域, 245
多体问题, 379

E
二次型, 284
二次锥面, 297
二重级数, 112

F
法截线, 292
反常积分 (瑕积分), 72, 189
反演, 60
方格法, 207
方向, 41
方向变化率, 41
方向余弦, 145

G
刚体, 197
高程差, 210
高阶偏微商, 42
惯性半径, 20
惯性矩, 195

H
函数无关, 365
函数系的就范性, 324
函数系的正交性, 324
函数相关, 365
函数行列式, 59, 186, 365
函数序列, 25, 64
弧长, 1, 145
环面, 289
回旋面, 296
回转椭圆体, 10, 13
活动坐标架, 164

J
基本向量, 173
积分, 64
积分方程, 131
积分号下求积分, 102
积分号下求微分, 100
极大, 49
极限, 30
极小, 49

极坐标, 57
级数的乘积, 119
加速度向量, 145, 369
渐近方向, 296
渐屈线, 153, 174
渐伸线, 5
角速度, 146
精确度, 207
经纬, 208
静力矩, 195
聚点, 29
绝对收敛, 75, 88
绝热过程, 23, 231
均值求和, 340

K
开单纯体, 28
开球, 28
开域, 29
可积函数, 180
可加性, 189
空间曲线, 15, 164
空间曲线族, 174

L
离散性变量, 24
理想流体的运动方程, 279
力场, 229
连通域, 29
连续, 30
连续性变量, 24
连续性方程, 276
量纲, 214
邻域, 27
流函数, 250
流体, 21
流体压力, 20
流线族, 274
螺旋面, 290
螺旋线, 169

M
密切平面, 166
密切球 (曲率球), 174
密切圆 (曲率圆), 153, 174
幂级数, 81
面积, 6
面积元素, 184
母线, 169

N
挠率, 164
挠率半径, 164
内点, 29
内积分, 183
内面积, 182
能量积分, 381
逆变张量, 314
凝聚点, 293
扭转点, 294

P
抛物性点, 293
偏微分方程, 36, 139, 307
偏微商, 35
平方中值误差, 328
平均和, 341
平均收敛 ($(C,1)$ 收敛), 341
平面场, 269
平面曲线, 292

Q
奇点, 160
奇异解, 307, 308
齐次函数, 38
齐次函数的 Euler 公式, 38
齐次性, 285
切平面, 39, 198
切线, 39, 145
切线方程, 145

切线方向, 226, 287
切向量, 287
球面, 287
球面映像, 302
球形邻域, 28
球坐标, 61, 192
求积仪, 206
区域的直径, 183
曲率, 147, 292
曲率半径, 147, 292
曲率球 (密切球), 174
曲率网, 295
曲率线, 294
曲率向量, 147
曲率圆 (密切圆), 153, 174
曲率张量, 320
曲率值, 297
曲率中值, 296
曲面的可展性, 306
曲面的球面写像, 301
曲面上曲线的曲率, 292
曲面族, 174, 307
曲线的本性方程, 149
曲线的长度, 1
曲线的夹角余弦, 289
曲线积分 (第二型), 228
曲线积分 (第一型), 225
曲线仪, 206
曲线族, 158, 307
曲线坐标, 58
泉源 (渗井), 249, 272
泉源强度, 272
泉源强度密度, 274
全微分, 35
全微分条件, 242

R

热容量, 282
人造卫星的运动方程, 373

S

三角函数的正交性, 323
三角求和法, 112
三体问题, 380
三重积分, 191
散度, 252
扫面积积分, 381
商高定理, 218
上确界, 68
渗井 (泉源), 249, 272
实用调和分析, 349
势函数, 252
势量, 203
收敛半径, 74
收敛范围, 122
收敛序列, 64
守恒向量场 (守恒场, 无涡场), 252, 272
双纽线, 9
双曲性点, 293
双叶双曲面, 63, 300
速度环量, 276
速度环流, 250
速度势, 250
速度向量, 145, 248
缩合, 314

T

梯度, 42, 252
体积, 9
椭球面, 40
椭球坐标, 62, 300
椭圆, 7
椭圆性点, 293
椭圆坐标系, 58

W

外摆线, 234
外积分, 183
外面积, 182
完全积分, 310

完全解, 308
微分二次型, 201
微分二次型的判别式, 201
微分方程组, 132
微分向量, 288
微商序列, 69
位能, 371
位势函数, 371
蜗线, 8
涡点强度, 273
涡度 (旋量), 252
涡流, 250
涡旋强度, 250
无穷乘积, 86
误差, 206

X

瑕积分 (反常积分), 72, 189
下确界, 68
相对偏差, 214
向径, 147
向量场, 251
向量的微商, 143
向量管, 274, 275
向量积, 288
向量面的准线, 274
协变张量, 314
心脏线, 6
星形线, 5, 152, 228
序列, 64
序列的微分积分, 67
悬链面, 290
悬链线, 11, 152, 290
旋量 (涡度), 252
旋轮线, 5
旋转面, 11, 293
旋转曲面, 293
旋转轴, 293
循环常数, 246

Y

压缩映像原理, 135
沿一定方向的微商, 41
一般积分, 367
一般解, 308, 366
一次逼近函数, 133
一阶微分方程, 155
一阶微分方程组, 364
一致连续性, 100
一致收敛, 64, 73, 324
引力, 201
引力常数, 230
隐函数, 46, 83
隐函数存在定理, 287
隐函数求极值法, 55
优函数法, 126
有界点集, 29
囿收敛, 70, 325
原坐标表示法, 166
圆点, 295
圆求和法, 112
圆柱坐标, 62

Z

张量, 312
张量分析, 311
振幅, 68, 349
整点, 112, 207
正交坐标网, 295
正交坐标系, 288
正交坐标线, 303
直纹面, 224
直线周期函数, 348
直线族, 298
重积分, 178
重级数, 24
重心, 16, 195
重心积分, 380
重序列, 111

周期, 246
逐渐逼近法, 83
逐项积分, 74
主法线, 164
主法线向量, 292
主方向, 295
主曲率, 295
主曲率半径, 295
柱面, 14, 199
柱坐标, 192
转动惯量 (平方矩), 19
追踪问题, 161
自由落体, 370
最大值, 285
最小二乘法, 54
最小曲面, 303
最小值, 285
坐标系统, 149
坐标线, 287