高等数学
强化与考研教程

第一册　一元微积分

张志强　编著

兰州大学数学与统计学院

2007 年 8 月

前　　言

本套书是作者编《高等数学》的习题解答，可用作高等数学的习题课教程、强化提高教程、考研辅导教程和独具特色的高数复习资料.

原教材是为了将教学与考研相结合，全面提高教学质量和考研率而编写的. 在编写过程中特意将作者多年从事高数考研辅导的教学经验、典型题和研究成果融入例题和 B 类习题中，希望更多的学生能够早动手，早准备，争取有更多的机会和条件全方位、更系统、更深入地接近考研，在时间上做到抢占先机，在资源上做到拥有优势，在题型上做到穷尽可能，在方法上做到知变应变.

错误和不足在所难免，希望使用者多提批评意见，以便不断完善和改进.

编　者

2007 年 8 月于兰州大学

目 录

第一章 极限理论 **5**

§1.1 函数与数列 5

习题 1.1 A 5

习题 1.1 B 8

§1.2 数列的极限 12

习题 1.2 A 12

习题 1.2 B 16

§1.3 函数的极限 19

习题 1.3 A 19

习题 1.3 B 24

§1.4 无穷小与无穷大 28

习题 1.4 A 28

习题 1.4 B 31

§1.5 连续函数 40

习题 1.5 A 40

习题 1.5 B 43

总习题一 47

第二章 导数与微分 **55**

§2.1 导数的概念 55

习题 2.1 A 55

习题 2.1 B 59

§2.2 求导法则 63

习题 2.2 A 63

习题 2.2 B 66

§2.3 高阶导数与隐式导数 69

习题 2.3 A 69

习题 2.3 B 75

§2.4 函数微分 90

习题 2.4 A 90
习题 2.4 B 96
总习题二 104

第三章 中值定理及其应用 114
§3.1 微分中值定理 114
习题 3.1 A 114
习题 3.1 B 118
§3.2 罗必达法则 125
习题 3.2 A 125
习题 3.2 B 128
§3.3 泰勒公式 135
习题 3.3 A 135
习题 3.3 B 140
§3.4 导数的应用 146
习题 3.4 A 146
习题 3.4 B 155
总习题三 171

第四章 定积分与不定积分 180
§4.1 定积分概念 180
习题 4.1 A 180
习题 4.1 B 183
§4.2 微积分基本定理 188
习题 4.2 A 188
习题 4.2 B 192
§4.3 积分方法 198
习题 4.3 A 198
习题 4.3 B 208
§4.4 变限积分与分段积分 214
习题 4.4 A 214
习题 4.4 B 220
总习题四 228

第五章 分类积分与积分应用 237
§5.1 可有理类积分 237
习题 5.1 A 237
习题 5.1 B 245
§5.2 定积分的应用 255
习题 5.2 A 255
习题 5.2 B 261
§5.3 广义积分 275
习题 5.3 A 275
习题 5.3 B 277
总习题五 284

第六章 无穷级数 299
§6.1 数项级数 299
习题 6.1 A 299
习题 6.1 B 306
§6.2 函数项级数 314
习题 6.2 A 314
习题 6.2 B 317
§6.3 幂级数 324
习题 6.3 A 324
习题 6.3 B 333
§6.4 傅立叶级数 340
习题 6.4 A 340
习题 6.4 B 347
总习题六 352

第七章 微分方程 I 361
§7.1 微分方程的基本概念 361
习题 7.1 A 361
习题 7.1 B 365
§7.2 一阶微分方程 368
习题 7.2 A 368

习题 7.2 B 373
§7.3 高阶微分方程 383
习题 7.3 A 383
习题 7.3 B 393
总习题七 403

参考试题 **411**
试题 1. 期末考试样题一 411
试题 2. 期末考试样题二 414
试题 3. 期末考试样题三 416
试题 4. 期末考试样题四 418
试题 5. 期末考试样题五 421
试题 6. 兰大一类数学考研样题 423
试题 7. 统考一类数学考研样题 425

第一章　极限理论

§1.1　函数与数列

习 题 1.1 A

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$;　　(2) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$;

(3) $f(x+3)$;　　(4) $f(2x)$.

其中 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ -2, & 1<x\le 2\end{cases}$.

解　(1)　解不等式组 $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ 1-x^2\ne 0\end{cases}$　可得函数的定义域为

$$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(2)　解不等式组 $\begin{cases}x-1>0,\\ x-1\ne 1,\\ 16-x^2>0\end{cases}$　可得函数的定义域为 $(1,2)\cup(2,4)$.

(3)　解不等式组 $0\le x+3\le 2$ 可得函数的定义域为 $[-3,-1]$.

(4)　解不等式组 $0\le 2x\le 2$ 可得函数的定义域为 $[0,1]$.

2. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;　　(2) $y=\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$;

(3) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$; (4) $y=F(x)\Big(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\Big)$.

其中 $F(x)$ 为奇函数.

解 (1) 由于

$$\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{-x^2+x^2+1}=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

所以 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为偶函数.

(2) 由于 $x\sin x,\cos x$ 为偶函数，所以 $\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$ 为偶函数.

(3) 由于 2^x-2^{-x} 为奇函数， 2^x+2^{-x} 为偶函数，所以 $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ 为奇函数.

(4) 令 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}$, 则 $f(-x)=-\dfrac{2^x}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}$. 由此可知

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{2^x}{2^x-1}+\frac{1}{2}=0.$$

因此 $f(x)$ 为奇函数，于是 $F(x)\Big(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\Big)$ 为偶函数.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内 _____.

(A) 有上界无下界 ; (B) 有下界无上界 ;

(C) 有界且 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$; (D) 有界且 $-2\le f(x)\le 2$.

解 由于 $2|x|\le 1+x^2$, 所以 $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}$, 选 C.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在定义区间 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上 _____.

(A) 有上界无下界 ; (B) 有下界无上界 ;

(C) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 0$; (D) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\le f(x)\le-\dfrac{1}{4}$.

解 1 由于 $\dfrac{\lg 1/2}{x}\le f(x)\le\dfrac{\lg 1}{x}=0$ 且 $f(\dfrac{1}{2})=2\lg\dfrac{1}{2}$, $f(1)=0$, 所以排除 A,B,D 选 C.

解 2　由于 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时，$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\lg \mathrm{e} - \lg x) > 0$, 所以 $f(\frac{1}{2}) \le f(x) \le f(1)$, 因此选 C.

5. 函数 $y = \dfrac{ax-b}{cx-d}$ 的反函数是 _____.

$(A)\ y = \dfrac{ax-b}{cx-d}$;　　$(B)\ y = \dfrac{ax-d}{cx-b}$;

$(C)\ y = \dfrac{cx-d}{ax-b}$;　　$(D)\ y = \dfrac{dx-b}{cx-a}$.

解　由 $y = \dfrac{ax-b}{cx-d}$ 可得 $x = \dfrac{dy-b}{cy-a}$, 故选 D.

6. 设 $f_n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(x)$, 若 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解　根据

$$f_2(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

依次类推可得

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

7. 设 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$,　$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$, 求 $f[g(x)]$.

解　由于 $f(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} f(\mathrm{e}^{-x}), & x < 0 \\ f(x^2), & x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \ge 0. \end{cases}$$

8. 设 $x_n = \dfrac{1}{n}$, 当 $\varepsilon > 0$ 时，证明区间 $(0, \varepsilon)$ 必包含 $\{x_n\}$ 的一个截断子列.

证 若 $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$, 则 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. 令 $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 则

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+n}, \cdots \in (0, \varepsilon).$$

9. 设 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 证明区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 必包含 $\{x_n\}$ 的一个截断子列.

证 若 $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \geq \varepsilon$, 则 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. 令 $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 则

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+n}, \cdots \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

10. 设 $x_n = (-1)^n$, 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时, 证明区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 不包含 $\{x_n\}$ 的任何截断子列.

证 由于 $0 < \varepsilon < 1$, 所以 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 或者不含 $\{x_n\}$的偶数项, 或者不含 $\{x_n\}$的奇数项, 因而 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 不含 $\{x_n\}$的任何截断子列.

习 题 1.1 B

1. 设对一切实数 x, 有 $f(\frac{1}{2}+x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

解 由于

$$\begin{aligned} f[\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2}+x)] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(\tfrac{1}{2}+x) - f^2(\tfrac{1}{2}+x)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = f(x), \end{aligned}$$

所以 1 是 $f(x)$ 的周期.

2. 设 $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = (x+1)(x-2)$, 则函数 $f[g(x)]$ 的单调递增区间是

(A) $[-1, 2]$; (B) $[-2, 0]$; (C) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$; (D) $[0, 2]$.

解 1　由于

$$\begin{aligned}
&f\circ g(-1)=f\circ g(2)=1,\\
&f\circ g(-2)=33>f\circ g(0)=9,\\
&f\circ g(-1)=1<f\circ g(\frac{1}{2})=2\cdot(\frac{9}{4})^2+1,\\
&f\circ g(0)>f\circ g(2),
\end{aligned}$$

所以选 C.

解 2　根据

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=8(x+1)(x-2)(2x-1)$$

可知，$[-1,\frac{1}{2}]$ 是 $f[g(x)]$ 的单调递增区间，所以选 C.

3. 证明没有最大项的数列必有严格增子列.

证　设数列 $\{x_n\}$ 没有最大项, 则对 $x_{k_1}=x_1$, 截断子列 $x_{k_1+1},x_{k_1+2},\cdots$, $x_{k_1+n},\cdots$ 存在项 x_{k_2}, 使得 $x_{k_2}>x_{k_1}$. 同理截断子列 $x_{k_2+1},x_{k_2+2},\cdots,x_{k_2+n}$, $\cdots$ 存在项 x_{k_3}, 使得 $x_{k_3}>x_{k_2}$. 依次类推即可得到一个严格增子列 x_{k_1},x_{k_2}, $\cdots,x_{k_n},\cdots$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无上界，试证明存在数列 $x_n\in[a,b]$, 使得 $f(x_n)>n$ 对一切 n 成立.

证　由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无上界, 所以对任意的 n, 不等式 $f(x)>n$ 必有一个解，可记为 x_n. 否则 n 为 $f(x)$ 的上界.

5. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界当且仅当对每个数列 $x_n\in[a,b]$, 复合数列 $\{f(x_n)\}$ 都有界.

证　由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无界 $\iff$ 存在数列 $x_n\in[a,b]$, 使得 $|f(x_n)|>n$ 对一切 n 成立，所以否命题成立，即函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界当且仅当对每个数列 $x_n\in[a,b]$, 复合数列 $\{f(x_n)\}$ 都有界.

6. 设 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 证明当 $0<x_1\le\sqrt{3}$ 时，$\{x_n\}$ 递增; 当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，$\{x_n\}$ 递减.

证 假设 $x_n > 0$, 则有 $0 < x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n} < 3$. 根据

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n},$$

有

(1) 当 $x_1 < \sqrt{3}$ 时, $x_2 > x_1$, 且

$$x_2 = \frac{3(1+x_1)}{3+x_1} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

于是 $x_3 > x_2$ 且

$$x_3 = \frac{3(1+x_2)}{3+x_2} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

依次类推必有 $\{x_n\}$ 单调增.

(2) 当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时, 类似地可证 $\{x_n\}$ 单调减.

[注] 可根据 $x_{n+1} = 3 - \dfrac{6}{3+x_n}$, 利用归纳法证明 $\{x_n\}$ 的单调性.

7. 设 $x_1 \geq \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1+x_n}$. 试证 $\{x_{2n}\}$ 递增, $\{x_{2n-1}\}$ 递减.

证 设 $f(x) = \dfrac{2+x}{1+x}$, 则由 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ 可知, $f(x)$ 递减. 由 $x_1 \geq \sqrt{2}$ 可得,

$$x_2 = f(x_1) \leq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2};$$

由 $x_2 \leq \sqrt{2}$ 可得,

$$x_3 = f(x_2) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

依次类推, 有

$$x_{2n} \leq \sqrt{2} \leq x_{2n-1}.$$

于是, 根据

$$x_{n+2} - x_n = \frac{2(2-x_n^2)}{3+2x_n}$$

可知, $\{x_{2n}\}$ 递增, $\{x_{2n-1}\}$ 递减.

[注] 可根据 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x_n}$, 利用归纳法证明 $\{x_n\}$ 的单调性.

8. 证明下列不等式：

(1) $2^n < n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ $(n>4)$; (2) $n! \geq n^{n/2}$.

证 (1) 用归纳法. 当 $n=5$ 时，有 $32=2^5<5!=100$. 若 $n>4, 2^{n-1}<(n-1)!$, 则有 $2^n<(n-1)!\cdot 2<n!$.

根据平均不等式，有

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

由此可知，当 $n>1$ 时， $n!<(\dfrac{n+1}{2})^n$.

(2) 当 $n<4$ 时，直接验证可知结论成立. 根据平均不等式，有

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}.$$

令 $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\sqrt{n}$, 则有 $x_4<0$, 并当 $n>3$ 时，有

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \frac{1}{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &< \frac{1}{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{2-\sqrt{n+1}}{2(n+1)} < 0. \end{aligned}$$

由此可知，当 $n>3$ 时， $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\sqrt{n}$, 因此，当 $n>3$ 时，$\sqrt[n]{n!} > \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. 这表明 $n! \geq n^{n/2}$.

9. 设 $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 证明 $\{x_n\}$ 为递增数列.

证 由平均不等式，有

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是 $x_n < x_{n+1}$.

10. 如果数列 $\{x_n\}$ 可以重排为单调增数列，证明 $\{x_n\}$ 的每个截断子列都有最小项.

证 由于 $\{x_n\}$ 可以重排为单调增数列，所以 $\{x_n\}$ 不含严格减子列，由此可知 $\{x_n\}$ 的每个截断子列都有最小项.

§1.2 数列的极限

习 题 1.2 A

1. 考察数列 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的变化趋势和极限 A, 并按要求填写下表.

要 $\lvert x_n - A\rvert <$	0.1	0.0001	0.000001
只要 $n >$			

解 $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. 当 $\varepsilon = 0.1,\ 0.0001,\ 0.000001$ 时，可取

$$N = 10^2,\ 10^8,\ 10^{12}.$$

2. 用定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n+1} = 1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}) = 1$.

证 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|\dfrac{n-2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{3}{\varepsilon} + 1$. 取 $N = \dfrac{3}{\varepsilon} + 1$, 则当 $n > N$ 时，必有 $\left|\dfrac{n-2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n+1} = 1$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$, 根据

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)} < \frac{1}{n},$$

只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n > N$ 时, 必有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n+1} = 1$.

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}) - 1\right| < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{4}{\varepsilon^2}$. 取 $N = \dfrac{4}{\varepsilon^2}$, 则当 $n > N$ 时, 必有 $\left|(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}) - 1\right| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})\sqrt{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \dfrac{1}{2^2})(1 - \dfrac{1}{3^2}) \cdots (1 - \dfrac{1}{n^2})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)})$.

(6) 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}, (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(7) 设 $x_{n+1} = \sin x_n, (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n^2 + n + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{n^{3/2}}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = 1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \dfrac{1}{2^2})(1 - \dfrac{1}{3^2}) \cdots (1 - \dfrac{1}{n^2})$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \dfrac{2\cdot 4}{3^2} \cdots \dfrac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[(1 - \dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + \cdots + (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

(6) 如果 $x_n>0$, 则 $0<x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}<2$. 如果 $x_n>x_{n-1}$, 则

$$x_{n+1}=2-\frac{1}{1+x_n}>2-\frac{1}{1+x_{n-1}}=x_n.$$

故 x_n 为单调增有上界数列. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则有 $A=1+\dfrac{A}{1+A}$. 由此可知, $A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(7) 不妨设 $x_2>0$, 则当 $n>1$ 时, 必有 $0\leq x_{n+1}=\sin x_n\leq x_n$. 因此 $\{x_n\}$ 为单调减非负数列, 故可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 于是 $x=\sin x$. 由此可知 $x=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

4. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\iff\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\iff\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\iff\forall\,\varepsilon\in(0,1),\ \exists N$, 当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-A|<3\sqrt{\varepsilon}$.

证 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\iff\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-0|=||x_n|-0|<\varepsilon\iff\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\iff\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-A|<\varepsilon\iff\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_{2n}-A|<\varepsilon$, $|x_{2n-1}-A|<\varepsilon\iff\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$.

(3) 由于 $\forall\varepsilon>0$, 集合 $\{n:|x_n-A|\geq\varepsilon\}$ 为有限集 $\iff\forall\,\varepsilon\in(0,1)$, 集合 $\{n:|x_n-A|\geq3\sqrt{\varepsilon}\}$ 为有限集, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\iff\forall\,\varepsilon\in(0,1),\ \exists N$, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-A|<3\sqrt{\varepsilon}$.

5. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 假设 $x_n>0$, 则有 $0<x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}<3$. 根据

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n},$$

有

(1) 当 $x_1 < \sqrt{3}$ 时， $x_2 > x_1$, 且

$$x_2 = \frac{3(1+x_1)}{3+x_1} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

于是 $x_3 > x_2$ 且

$$x_3 = \frac{3(1+x_2)}{3+x_2} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

依次类推必有 $\{x_n\}$ 单调增.

(2) 当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时，类似地可证 $\{x_n\}$ 单调减.

综上所述， $\{x_n\}$ 为收敛数列. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则有 $A = \dfrac{3(1+A)}{3+A}$. 解之可得 $A = \sqrt{3}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

6. 设 $x_1 \geq \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1+x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 易知 $0 < x_n < 2$. 设 $f(x) = \dfrac{2+x}{1+x}$, 则由 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ 可知， $f(x)$ 递减. 由 $x_1 \geq \sqrt{2}$ 可得，

$$x_2 = f(x_1) \leq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2};$$

由 $x_2 \leq \sqrt{2}$ 可得，

$$x_3 = f(x_2) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

依次类推，有

$$x_{2n} \leq \sqrt{2} \leq x_{2n-1}.$$

于是，根据

$$x_{n+2} - x_n = \frac{2(2-x_n^2)}{3+2x_n}$$

可知， $\{x_{2n}\}$ 递增， $\{x_{2n-1}\}$ 递减. 于是 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均为收敛数列. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = B$, 则有

$$A = \frac{2+B}{1+B}, \quad B = \frac{2+A}{1+A}.$$

解之可得 $A = B = \sqrt{2}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

7. 思考题

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 而数列 $\{y_n\}$ 发散, 问数列 $\{x_n \pm y_n\}$ 与数列 $\{x_n y_n\}$ 是否收敛?

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{y_n\}$ 均发散, 问数列 $\{x_n \pm y_n\}$ 与数列 $\{x_n y_n\}$ 是否也发散?

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 发散, 问该数列是否一定无界?

(4) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 0, 而 $\{y_n\}$ 为任意数列, 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$?

解 (1) $\{x_n \pm y_n\}$ 必发散. 如果 $\{x_n + y_n\}$ 收敛, 则有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n,$$

从而 $\{y_n\}$ 收敛, 矛盾.

$\{x_n y_n\}$ 可以收敛也可以发散. 例如 $x_n = 0,\ y_n = (-1)^n$ 时, $\{x_n y_n\}$ 收敛; 而 $x_n = 1,\ y_n = (-1)^n$ 时, $\{x_n y_n\}$ 发散.

(2) 不确定. 当 $y_n = \mp x_n$ 时, $\{x_n \pm y_n\}$ 收敛; 当 $x_n = 0,\ y_n = (-1)^n$ 时, $\{x_n y_n\}$ 收敛.

(3) 不一定.

(4) 不一定. 例如 $x_n = \dfrac{1}{n},\ y_n = n$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$.

习 题 1.2 B

1. 试定义数集的有界性和无界性, 并证明

(1) 非空有上界数集必有最小上界, 非空有下界数集必有最大下界;

(2) 若数集 E 非空有上界, 则存在 E 的上界 ξ 及 $x_n \in E$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

(3) 若 E 为有无界数集, 则存在 $x_n \in E$, 使得 $\{x_n\}$ 为单调无界数列.

解 称非空数集 E 是有界的, 如果存在实数 $M > 0$, 使当 $x \in E$ 时, 恒有 $|x| \le M$; 称非空数集 E 是无界的, 如果 $\forall M > 0,\ \exists x \in E$, 使得 $|x| > M$.

(1) 设 E 为非空有上界数集，则对每个自然数 n, 都存在 $x_n \in E$, 使得 $x_n + \dfrac{1}{n}$ 为 E 的上界. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$, 则 A 必是 E 的最小上界.

(2) 对每个自然数 n, 取 $x_n \in E$, 使得 $x_n + \dfrac{1}{n}$ 为 E 的上界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

(3) 对每个自然数 n, 取 $x_n \in E$, 使得 $x_n > n$, 则 $\{x_n\}$ 的单调子列必为无界数列.

2. 若 $n \to \infty$ 时，恒有 $x_n \le x_{n+1} \le y_{n+1} \le y_n$ 及 $x_n - y_n \to 0$, 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在且相等.

证 根据题设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 为单调有界数列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在. 根据 $x_n - y_n \to 0$ 可知， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. 若 $m, n \to \infty$ 时, 恒有 $x_n \le y_m$ 及 $x_n - y_n \to 0$, 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在且相等.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$, 则由 $x_n - y_n \to 0$ 可知， $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = A$, 而由 $x_n \le y_m$ $(m, n \to \infty)$ 可知， $x_n \le A \le y_n$. 于是由 $0 \le A - x_n \le y_n - x_n \to 0$ 可知， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

4. 设 A, B 为非空数集，若 $x \in A, y \in B$ 时，恒有 $x \le y$, 证明存在实数 ξ, 使当 $x \in A, y \in B$ 时，恒有 $x \le \xi \le y$.

证 由于 A 为非空有上界数集，所以可设 ξ 为 E 的最小上界. 直接验证可知当 $x \in A, y \in B$ 时，恒有 $x \le \xi \le y$.

5. 证明收敛数列的重排数列仍为收敛数列.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

如果 $\{x_{k_n}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的重排数列，则可设 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 在 $\{x_{k_n}\}$ 中的最大足标为 N_1, 于是当 $n > N_1$ 时，必有 $|x_{k_n} - A| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$.

6. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \iff$ 对 $\{x_n\}$ 的任意单调子列 x_{k_n}, 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$.

证 根据子列性, 必要性成立. 下证充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{l_n} = B$, 又设 $\{x_{k_n}\}$ 是 $\{x_{l_n}\}$ 的单调子列，则有 $B = \lim\limits_{n\to\infty} x_{l_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

7. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \iff$ 存在单调数列 α_n, β_n, 使得 $\alpha_n \le x_n \le \beta_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = A$.

证 只需证必要性. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 所以数列

$$A, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots,$$

必有最大项和最小项, 记其最大项为 β_n, 最小项为 α_n, 则 $\{\beta_n\}$ 为递减数列, $\{\alpha_n\}$ 为递增数列且

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = A, \quad \alpha_n \le x_n \le \beta_n.$$

8. 设 $x_1 > 0,\ a > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{a + x_n}{1 + x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 如果 $\{x_n\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

令 $f(x) = \dfrac{a + x}{1 + x}$, 则当 $a \ge 1$ 时, $f(x)$ 递增; 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 递减.

(1) 当 $a \ge 1$ 时, 如果 $x_1 \ge \sqrt{a}$, 则可证

$$1 < x_{2n} \le \sqrt{a} \le x_{2n-1}$$

且由

$$x_{n+2} - x_n = \frac{2(a - x_n^2)}{1 + a + 2x_n}$$

可知, $\{x_{2n}\}$ 递增, $\{x_{2n-1}\}$ 递减. 由此可知 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛.

(2) 当 $a \ge 1$ 时, 如果 $x_1 < \sqrt{a}$, 则可证

$$1 < x_{2n-1} \le \sqrt{a} \le x_{2n}$$

且 $\{x_{2n-1}\}$ 递增, $\{x_{2n}\}$ 递减. 由此可知 $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛.

(3) 当 $0 < a < 1,\ n > 1$ 时, 则有 $0 < x_n < x_{n+1} < 1$. 故 $\{x_n\}$ 收敛.

9. 设 $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $A = 2 + \dfrac{1}{A}$, 解之可得 $A = 1 + \sqrt{2}$. 由于

$$|x_n - A| = \left|\left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{A}\right)\right|$$

$$= \frac{|x_{n-1}-A|}{x_{n-1}A} < \frac{|x_{n-1}-A|}{2}$$

$$< \cdots < \frac{|x_1-A|}{2^{n-1}} \to 0 \ (n \to \infty),$$

所以 $\{x_n\}$ 收敛.

§1.3 函数的极限

习 题 1.3 A

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} (2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2})$;

(3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \Big(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\Big)$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \cot^2 x \cdot (1-\cos x)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \sin \dfrac{x}{3^n}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$;

(13) $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(\dfrac{1+x}{x}\Big)^{3x}$;

(14) $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(1-\dfrac{1}{x}\Big)^{5x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$;

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^3}}{1+x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(18) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$;

(19) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$; (20) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2})=2.$

(3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}.$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\Big(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\Big)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1.$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\cot^2 x\cdot(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\tan^2 x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot3=3.$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}.$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{4}{1}=2.$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot x=x.$

(11) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to0}[(1-x)^{-1/x}]^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

(12) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{3/x}=\lim\limits_{x\to0}[(1+2x)^{1/(2x)}]^6=\mathrm{e}^6.$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{1+x}{x}\Big)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\Big[\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^{x}\Big]^3=\mathrm{e}^3.$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(1-\dfrac{1}{x}\Big)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\Big[\Big(1-\dfrac{1}{x}\Big)^{-x}\Big]^{-5}=\mathrm{e}^{-5}.$

(15) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{n\to\infty}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)=n.$

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^3}}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{3/4}}{x}\cdot\dfrac{x}{1+x}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x^{3/4}}=0.$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}.$

(18) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{1-\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

(19) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1.$$

(20) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to0}[(1+3\tan^2 x)^{(\cot^2 x)/3}]^3=\mathrm{e}^3$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x\le 1\\ \dfrac{2}{x}, & x>1\end{cases}$, 分别讨论 $x\to0$ 和 $x\to1$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在?

解 由于

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0}(3x+2)=2,$$
$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0}(x^2+1)=1,$$
$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2,$$
$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2}{x}=2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$, 求 a,b 的值.

解 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$ 可知, $x^2+ax+b=(1-x)(6-x)$. 因此 $a=-7,\ b=6$.

4. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$, 求 a,b 的值.

解 由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0$$

可得, $1-a=0,\ a+b=0$. 故 $a=1,\ b=-1$.

5. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}-ax+b\right)=3$, 求 a,b 的值.

解 由

$$3=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-2a)x^2+(2b-a)x+b+1}{2x+1}$$

可得,

$$1-2a=0,\ \frac{2b-a}{2}=0.$$

故 $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{4}$.

6. 用函数极限的定义，证明函数极限的加法法则.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 则 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可知， $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)|\le|f(x)-A|+|g(x)-B|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}[\,f(x)+g(x)\,]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A=B$.

7. 用函数极限的定义，证明函数极限的局部有界性.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 则存在 $\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<1$. 由此可知,

$$0<|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)|<|A|+1.$$

8. 用函数极限的定义，证明函数极限的单调性.

证 设 $x\to x_0$ 时， $f(x)\ge g(x)$, 即存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)\ge g(x)$. 又设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to0}g(x)=B$.

如果 $B>A$, 则对正数 $\varepsilon_0=\dfrac{B-A}{2}$, 存在 $\delta_1\in(0,\delta)$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon_0,\quad |g(x)-B|<\varepsilon_0.$$

特别有

$$f(x)<A+\varepsilon_0=\frac{A+B}{2}<B-\varepsilon_0<g(x).$$

这是一个矛盾. 因此必有 $A \geq B$.

9. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff f(x_0-) = f(x_0+) = A$.

证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, 使得

$$0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\iff f(x_0-) = f(x_0+) = A$.

10. 填空题

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + 3\sin x}{3x - 2\cos x} =$ _____.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \ln \dfrac{\sin x}{x} =$ _____.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x + x^2 \cos \dfrac{1}{x}}{(1 + \cos x)\ln(1 + x)} =$ _____.

(4) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x + 2a}{x - a}\right)^x = 8$, 则 $a =$ _____.

(5) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{2/\sin x} =$ _____.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2 - 1}} =$ _____.

(7) 设 a 为非 0 常数, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x + a}{x - a}\right)^x =$ _____.

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \sin x^2} - 1}{1 - \cos x} =$ _____.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + 3\sin x}{3x - 2\cos x} = \dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \ln \dfrac{\sin x}{x} = \ln \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=\dfrac{3}{2}.$

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8,$

所以 $a=\ln 2$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{2/\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^6.$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{2a}.$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin x^2}+1}=-1.$

习 题 1.3 B

1. 思考题

若 $x\to x_0$ 时，恒有 $f(x)>g(x)$, 问 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ 时，是否必有 $A>B$?

解 不必. 例如 $f(x)=x^2$, $g(x)=0$, 当 $x\to 0$ 时， $f(x)>g(x)$ 但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\ln(1+x+x^2)}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$;

(10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 由于

$$0\le|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}|\le|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(5) 令 $x^2+x=t$, 则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\ln(1+x+x^2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t+1}-1}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

(6) 令 $\sin^2 x=t$, 则

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=2.$$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}$.

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a$.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-(\sqrt{1-x}-2)^2}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+2)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-2+2\sqrt{1-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^2-4(1-x)}{x^2(x-2-2\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-2-2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{4}.$$

(10) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a} = \cos a.$

3. 设 α 为常数，且当 $x \to x_0$ 时，函数 $\omega(x) \to, \neq 0$, 证明

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(1+\omega(x))^\alpha - 1}{\omega(x)} = \alpha.$$

证 不妨设 $\alpha \neq 0$ 并记 $u(x) = \alpha\ln(1+\omega(x))$, 则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(1+\omega(x))^\alpha - 1}{\omega(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{e}^{u(x)}-1}{u(x)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+\omega(x))}{\omega(x)} = \alpha.$$

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增且有界，则 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 存在; 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增且有界，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

证 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增且有界，所以存在 $x_n \in (a,b) \to a$, 使得 $\{f(x_n)\}$ 为收敛数列. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, 则 $\forall\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 当 $n \geq N$ 时，恒有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

由于存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < x - a < \delta$ 时，恒有 $x < x_N$. 于是根据 $f(x)$ 的单调性，有

$$0 \leq f(x) - A \leq |f(x_N) - A| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$. 同理可证其它结论.

5. 用函数极限的定义，证明函数极限的除法法则.

证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, 则对任意的 $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{|B|}{2}\right)$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,\ |g(x) - B| < \varepsilon,\ |g(x)| > \frac{|B|}{2}.$$

于是

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right| = \frac{|B(f(x)-A)-A(g(x)-B)|}{|B|\cdot|g(x)|}$$

$$\leq \frac{2}{B^2}(|B|\cdot|f(x)-A|+|A|\cdot|g(x)-B|) < \frac{2(|A|+|B|)}{B^2}\,\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

6. 用函数极限的定义，证明函数极限的两边夹法则.

证 假设对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow \alpha(x,\varepsilon)\leq f(x)\leq \beta(x,\varepsilon).$$

又设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x,\varepsilon)=A-\varepsilon$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x,\varepsilon)=A+\varepsilon$, 则有

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

7. 用函数极限的定义，证明函数极限的局部保号性.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<A.$$

由此可知,

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow f(x)>A-A=0.$$

8. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \iff \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

证 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \iff \forall\,\varepsilon>0,\ \exists X>0$, 使得

$$|x|>X \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

$\iff \forall\,\varepsilon>0,\ \exists X>0$, 使得

$$x>X \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon, \quad -x>X \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

$\iff \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有上界，证明存在 $x_n \in [a,b]$ 及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上界 M, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

证 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上界，所以存在 $y_n \in [a,b]$, 使得 $f(y_n) + \dfrac{1}{n}$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上界. 令 $\{x_n\}$ 为 $\{y_n\}$ 的子列且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$, 则 M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上界.

§1.4 无穷小与无穷大

习 题 1.4 A

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$, 能否断定

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ 至少有一个成立;

(3) $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 一个为无穷大，另一个无界;

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

解 只能断定 (4). 取

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{n 为偶数} \\ 1, & \text{n 为奇数} \end{cases}, \quad y_n = \begin{cases} 1, & \text{n 为偶数} \\ n, & \text{n 为奇数} \end{cases},$$

可说明 (1), (2), (3) 均不对.

2. 当 $x \to +\infty$ 时，确定下列无穷大量关于 x 的阶数:

(1) $\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2}$; (2) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$; (3) $\sqrt{x+\sqrt{x^3}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = -1, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 1, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}{\sqrt[4]{x^3}} = 1,$$

故所求阶数依次为 $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$.

3. 当 $x\to 1$ 时，确定下列无穷大量关于 $\dfrac{1}{x-1}$ 的阶数：

(1) $\dfrac{x}{x^3-1}$; (2) $\dfrac{1}{\sin \pi x}$; (3) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; (4) $\dfrac{1}{\ln x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^3-1}\Big/\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+x+2}=\frac{1}{3},$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin \pi x}\Big/\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin(x-1)\pi}=\frac{1}{\pi},$$
$$\lim_{x\to 1-}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Big/\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{2},$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}\Big/\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]}=1,$$

故所求阶数依次为 $1, 1, \frac{1}{2}, 1$.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{p\,x^2-2}{x^2+1}+3qx+5$. 当 $x\to\infty$ 时， p,q 取何值 $f(x)$ 为无穷小量？又 p,q 取何值 $f(x)$ 为无穷大量？

解 由于

$$f(x)=\frac{3qx^3+(p+5)x^2+3qx+3}{x^2+1},$$

所以 $q=0,\ p=-5$ 时， $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$; 而 $q\neq 0$ 时， $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5. 证明： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \iff x_n\to\infty$ 时，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

6. 在 $x\to 0$ 时，确定下列无穷小量关于 x 的阶数：

(1) $\dfrac{1}{1+x}-(1+x)$; (2) $x^2(1-\cos x)$;

(3) $\sqrt{1+x^2}-\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)$; (4) $2\sin x-\sin 2x$.

解 由于 $x\to 0$ 时，

$$\frac{1}{1+x}-(1+x)=\frac{-2-x}{1+x}\cdot x\sim -2x,$$

$$x^2(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^4,$$
$$\sqrt{1+x^2}-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1+x^2-(1+\frac{1}{2}x^2)^2}{\sqrt{1+x^2}+(1+\frac{x^2}{2})}\sim-\frac{1}{8}x^4,$$
$$2\sin x-\sin 2x=2\sin x(1-\cos x)\sim x^3,$$

故所求阶数依次为 $1,4,4,3$.

7. 设 $x\to 0$, 证明:

(1) $x^3+x^2=o(x)$; (2) $x\sin x\sim x^2$;

(3) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$; (4) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

证 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{3/4}+\sqrt{x^{1/2}+1}}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{x^2}=\frac{1}{2}n(n-1),$$

所以结论成立.

8. 设 $x\to+\infty$, 证明:

(1) $x^3+x^2=o(x^4)$; (2) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$;

(3) $x^2\cos\dfrac{1}{x}+x=O(x^2)$; (4) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

证 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{x^4}=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}+x}{x^2}=1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\Big/\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2},$$

所以结论成立.

9. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 (1) 由于 $x\to+\infty$ 时,

$$0\le|\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})|\ \le|\sqrt{1+x}-\sqrt{x}|=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\to0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})=0$.

(2) 由于 $x\to+\infty$ 时,

$$0\le|\sin\ln(1+x)-\sin\ln x|\ \le|\ln(1+x)-\ln x|=\ln(1+\frac{1}{x})\to0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\ln(1+x)-\sin\ln x)=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

习 题 1.4 B

1. 如果用 $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数，试求下列极限，其中 $a,b>0$.

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{a}\lfloor\frac{b}{x}\rfloor$; (3) $\lim\limits_{x\to0+}\lfloor\frac{x}{a}\rfloor\frac{b}{x}$.

解 (1) 由于 $\frac{1}{x}-1<\lfloor\frac{1}{x}\rfloor\le\frac{1}{x}$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=1$.

(2) 由于 $\frac{x}{a}-1<\lfloor\frac{x}{a}\rfloor\le\frac{x}{a}$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{a}\lfloor\frac{b}{x}\rfloor=\frac{b}{a}$.

(3) 由于 $x\to0+$ 时, $\lfloor\frac{x}{a}\rfloor=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to0+}\lfloor\frac{x}{a}\rfloor\frac{b}{x}=0$.

2. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(\mathrm{e}^{-x^2}-1)}{x^2\ln(1-2x)}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\mathrm{e}^2-(1+\dfrac{1}{n})^{2n}]$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin2\sqrt[3]{x^2-1}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin^2x}-1}{1-\cos x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sqrt{1-x^2}\cos x)}{\tan x\ln(1+x)}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$;

(10) $\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{3/\sin x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3x}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\Big)^n$;

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{n/\ln n}$;

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$;

(16) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{1/x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\ln(1+x^2)}$;

(18) $\lim\limits_{x\to0}\Big(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\Big)^{1/x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\mathrm{e}^{-x^2}-1)}{x^2\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(-x^2)}{x^2\cdot(-2x)}=\dfrac{1}{2}.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big[\mathrm{e}^2-(1+\dfrac{1}{n})^{2n}\Big]=\lim\limits_{n\to\infty} n\Big[\mathrm{e}-(1+\dfrac{1}{n})^{n}\Big]\cdot\Big[\mathrm{e}+(1+\dfrac{1}{n})^{n}\Big]$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\Big[1-\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}\Big]\cdot 2\mathrm{e}^2=\lim\limits_{n\to\infty} n\Big[1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\Big]\cdot 2\mathrm{e}^2$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Big[\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})\Big]\cdot 2\mathrm{e}^2=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\dfrac{1}{2n^2}\cdot 2\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^2.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(e^{\frac{1}{n}\ln n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}\cdot\dfrac{1}{n}\ln n=1.$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{5}\sin^2 x}{\frac{1}{2}x^2}=\dfrac{2}{5}.$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sqrt{1-x^2}\cos x)}{\tan x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}\cos x-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-1.$

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}\cdot\dfrac{\tan x+\sqrt{3}}{\cos x}\cdot\tan x=-24.$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}}$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=\mathrm{e}^{2-0}=\mathrm{e}^2.$

(11)

$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{3/\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\dfrac{3\ln(1-2x)}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\dfrac{3(-2x)}{x}}=\mathrm{e}^{-6}.$

(12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\dfrac{1}{6}.$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\Big)^n=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(\frac{2^x+3^x}{2})}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\frac{2^x+3^x}{2}-1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{2^x-1}{2x}+\frac{3^x-1}{2x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}\ln3}=\sqrt{6}.$

(14) 令 $u(n)=\dfrac{2n}{n-\ln n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=2$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{n/\ln n}=\lim_{n\to\infty}\Big[(1+u(n))^{1/u(n)}\Big]^{\frac{2n}{n-\ln n}}=\mathrm{e}^2.$$

(15) 令 $t=1/x$, 则

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(\sin2t+\cos t)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\mathrm{e}^{\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}=\mathrm{e}^2.$$

(16) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{\mathrm{e}^x+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^x+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}^x-1}{nx}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^{nx}-1}{nx}}$

$=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}.$

(17) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$

$$=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-1/2}.$$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\Big)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x+3^x+4^x}{3}-1}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{2^x-1}{3x}+\frac{3^x-1}{3x}+\frac{4^x-1}{3x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{3}}=2\sqrt[3]{3}.$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=c$ 且 $c\neq 0$, 求常数 a 与 b, 使当 $x\to 0$ 时, $f(x)\sim ax^b$.

解 由于

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=\frac{f(x)}{2x^3},$$

即 $f(x)\sim 2cx^3$ $(x\to 0)$, 所以 $a=2c$, $b=3$.

4. 选择题

(1) 当 $x\to 1$ 时, 函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是

(A) 等于 2; (B) 等于 0; (C) 为 ∞; (D) 不存在但不为 ∞.

(2) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$, 则当 $x\to 0$ 时,

(A) $f(x)$ 是 x 的等价无穷小; (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小;
(C) $f(x)$ 是 x 的低阶无穷小; (D) $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小.

(3) 设 $a_n\,,b_n\,,c_n$ 均为非负数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$, 则必有

(A) $a_n<b_n$对任意 n 成立; (B) $a_n<c_n$对任意 n 成立;
(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$存在; (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

(4) 设当 $x\to 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则正数 n 等于

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(5) 已知系数 a,b 使下式成立： $\mathrm{e}^x=\dfrac{1+ax}{1+bx}+o(x^2)$ ($x\to 0$ 时), 则有

$(A)\ a=b=\dfrac{1}{2}$; $\quad(B)\ a=b=-\dfrac{1}{2}$; $\quad(C)\ a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$; $\quad(D)$ 其它.

(6) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$, 其中 $a^2+c^2\neq 0$, 则必有

$(A)\ b=4d$; $\qquad(B)\ b=-4d$; $\qquad(C)\ a=4c$; $\qquad(D)\ a=-4c$.

解 (1) 由于

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

所以选 D.

(2) 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}=\ln 6,$$

所以选 B.

(3) A 应改为 “ $a_n<b_n$ 对充分大的 n 成立”； B 应改为 “ $a_n<c_n$ 对充分大的 n 成立”; 取 $a_n=\dfrac{1}{n}$, $c_n=n^2$ 可说明 C 不成立. 应选 D.

(4) 由于 $x\to 0$ 时,

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4,\ x\sin x^n\sim x^{n+1},\ \mathbf{e}^{x^2}-1\sim x^2,$$

所以 $2<n<4$, 故选 C.

(5) 由于

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}+\frac{1+x-\dfrac{1+ax}{1+bx}}{x^2}\right]=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\Big(\frac{b-a+1}{x}+b\Big),\end{aligned}$$

所以选 C.

(6) 由于 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a\tan x}{x}+\dfrac{b(1-\cos x)}{x}}{\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x}}=\frac{a}{-2c},$$

所以选 D.

5. 填空题：

(1) 若 $x\to 0$ 时, $(1-ax^2)^{1/4}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小, 则 $a=$ _____.

(2) 已知当 $x\to 0$ 时, $(1+a\sin^2 x)^{1/3}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小, 则常数 $a=$ _____.

(3) 当 $x\to 0$ 时, $\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k=$ _____.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\Big(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\Big)=$ _____.

解 (1) 由于 $x\to 0$ 时,

$$(1-ax^2)^{1/4}-1\sim-\frac{1}{4}\,ax^2,\ \ x\sin x\sim x^2,$$

所以 $a=-4$.

(2) 由于 $x\to 0$ 时,

$$(1+a\sin^2 x)^{1/3}-1\sim\frac{1}{3}\,ax^2,\ \ \cos x-1\sim-\frac{1}{2}\,x^2,$$

所以 $a=-\dfrac{3}{2}$.

(3) 由于 $x\to 0$ 时,

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2\cdot(\sqrt{1+\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{kx^2} + \frac{\arcsin x}{kx} = \frac{3}{2k},$$

所以 $k = \dfrac{3}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \cot x \cdot \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{x - \sin x}{x \sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

6. 证明 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷大量.

解 取 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, 则 $x_n, y_n \to, \neq 0$ 且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (2n\pi + \frac{\pi}{2}) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0,$$

所以 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷大量.

7. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff x_n \to \infty$ 时，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

证 必要性 由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 可知，对任意的 $M > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|f(x)| > M.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, 则存在 N, 使当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| > X$. 于是

$$n > N \Longrightarrow |f(x_n)| > M.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

充分性 反证，假设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq \infty$, 则存在 $M > 0$, 使对任意的自然数 n, 都有 x_n 满足

$$|x_n| > n, \ |f(x_n)| < M.$$

由此可知，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \infty.$$

这与题设矛盾. 故充分性成立.

8. 设 A 为实数，$\{x_n\}$ 为数列. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A,$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0.$

证 设 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-s_{n-1}}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right]=A-A=0.\end{aligned}$$

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n(n-1)}$.

证 根据 Stolz 定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n(n-1)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n}{[n^2-n]-\big[(n-1)^2-(n-1)\big]}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n}{2n-2}=\frac{A}{2}.\end{aligned}$$

10. 求下列数列的极限：

(1) $x_n=\dfrac{1^3+4^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+\cdots+(3n-2)]^2}$; (2) $x_n=\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}}$.

解 (1) 根据 Stolz 定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)^2}{2\left[1+4+\cdots+(3n-5)+\dfrac{3n-2}{2}\right]}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)^2}{(n-1)(3n-4)+3n-2}=3.\end{aligned}$$

(2) 根据平均值极限定理，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=1.$$

§1.5 连续函数

习 题 1.5 A

1. 设 α,β 为常数, 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ \mathrm{e}^{x}+\beta, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解 当 $\alpha<0$ 时, $x=0$ 是 $x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}$ 的无界振荡间断点, 因而也是 $f(x)$ 的无界振荡间断点; 当 $\alpha=0$ 时, $x=0$ 是 $x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}$ 的有界振荡间断点, 因而也是 $f(x)$ 的有界振荡间断点; 当 $\alpha>0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}=0$. 又 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^{x}+\beta)=1+\beta$, 所以当 $1+\beta=0$, 即 $\beta=-1$ 时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点, 否则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

2. 求下列函数的间断点并判别类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$;

(2) $f(x)=\dfrac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$;

(3) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \\ |x-1|, & |x|>1 \end{cases}$.

解 (1) 当 $x=0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, 由此可知 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点; 当 $x=k\pi\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$, 由此可知 $x=k\pi$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点; 当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=0$, 由此可知 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(3) 由于

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1}|x-1|=2,$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1}|x-1|=0,$$

所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点.

3. 讨论复合函数 $f(g(x))$ 的间断点及类型, 其中

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ x+4, & x>1\end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\ne 1\\ 0, & x=1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ 5, & x>1\end{cases}$.

解 (1) 计算 $f(g(x))$ 可得,

$$f(g(x))=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ -2-x, & x>1\end{cases}.$$

由 $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=1$ 可知, $x=1$ 是跳跃间断点.

(2) 计算 $f(g(x))$ 可得,

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & x\ne 1\\ 0, & x=1\end{cases}.$$

由此可知, $x=1$ 是可去间断点.

4. 证明方程 $x^5-6x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

证 令 $f(x)=x^5-6x-1$, 则 $f(1)<0$, $f(2)>0$ 且 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续. 因此 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少存在一个零点.

5. 证明方程 $x^5-6x+2=0$ 在 $(-3,0),(0,1)$ 和 $(1,3)$ 内各有一个实根.

证 令 $f(x)=x^5-6x+2$, 则 $f(-3)<0,\ f(0)>0,\ f(1)<0,\ f(3)>0$ 且 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上连续. 因此 $f(x)=0$ 在 $(-3,0),(0,1)$ 和 $(1,3)$ 内各有一个实根.

6. 设 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 若

$$F(x)=\max(f(x),g(x)),\ \ G(x)=\min(f(x),g(x)),$$

则 $F(x),G(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证 设 $x_0\in[a,b]$. (1) 若 $f(x_0)\neq g(x_0)$, 不妨设 $f(x_0)<g(x_0)$, 则 $\exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)<g(x)$. 此时 $F(x)=g(x)$, 故连续. (2) 若 $f(x_0)=g(x_0)$, 则 $F(x_0)=f(x_0)=g(x_0)$ 且 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-F(x_0)|<\varepsilon,\ |g(x)-F(x_0)|<\varepsilon$. 因此 $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$. 即 $F(x)$ 在 x_0 点连续. 同理可证 $G(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

7. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}$, 则 _____.

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点;

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点;

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点;

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

解 由于

$$\lim_{x\to0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to1+}f(x)=0,\ \lim_{x\to1-}f(x)=-1,$$

所以选 D.

8. 证明连续函数的复合函数是连续函数.

证 设 $y=g(x),\ f(x)$ 为连续函数且 $y_0=f(x_0)$. 由于 $\lim\limits_{y\to y_0}f(y)=f(y_0)$, 所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, 使当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时, 恒有 $|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$.

根据 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=y_0$ 可知, $\exists\,\delta>0,$ 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|g(x)-y_0|=|g(x)-g(x_0)|<\delta_1$, 从而

$$|f(g(x))-f(y_0)|=|f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0) = f(g(x_0))$.

习 题 1.5 B

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 存在，证明函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一致连续.

证 令 $f(a) = \lim\limits_{x\to a+} f(x), f(b) = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$, 则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 特别在 (a,b) 内一致连续.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对任意的 $x,y\in I$, 都有 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$, 其中 L 为正常数，则 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

证 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$, 则当 $x,y\in I$, $|x-y|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 因此 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在数列 $x_n, y_n\in I$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0,\ \lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))\neq 0,$$

则 $f(x)$ 在 I 上不一致连续.

证 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))\neq 0$, 存在 $\varepsilon_0>0$ 及 k_n, 使当 $n\to\infty$ 时, $|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})|>\varepsilon_0$. 于是对任意的 $\delta>0$, 存在 $x,y\in I$, 使得

$$|x-y|<\delta,\ |f(x)-f(y)|>\varepsilon_0.$$

故 $f(x)$ 在 I 上不一致连续.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一致连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界，则存在 $x_n\in(a,b)$, 使得 $x_n\to\xi$, $|f(x_n)|>n$. 由此可知 $\forall\delta>0$, $\exists x_m, x_n$, 使得

$$|x_m-x_n|<\delta,\ |f(x_m)-f(x_n)|\ge 1.$$

因此 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内不一致连续，矛盾. 故 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

5. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一致连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且 $f(a+), f(b-)$ 存在.

证 设 $x_n, y_n \in (a,b) \to a$ 且 $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to B$. 由于 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一致连续, 所以 $x_n - y_n \to 0 \Longrightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$. 由此可知 $A = B$, 因此 $f(a+)$ 存在，同理 $f(b-)$ 存在.

6. 证明 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续，但 $g(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不一致连续.

证 由于 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续. 由于 $x_n = \sqrt{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$, $y_n = \sqrt{2n\pi}$ 时,

$$x_n - y_n \to 0,\ g(x_n) - g(y_n) = 1,$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不一致连续.

7. 证明 $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1,0)$ 及 $(0,1)$ 内都一致连续，但在 $(-1,0) \cup (0,1)$ 内不一致连续.

证 由于

$$f(0-) = -1,\ f(0+) = 1,$$

所以 $f(x)$ 分别在 $(-1,0)$ 及 $(0,1)$ 内一致连续. 由于 $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = -\dfrac{1}{n}$ 时, 恒有

$$x_n - y_n \to 0,\ f(x_n) - f(y_n) \to 2,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0) \cup (0,1)$ 内不一致连续.

8. 证明函数 $f(x)$ 在 x_0 点局部无界的充要条件是存在 $x_n \to x_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

证 只需证必要性. 由于 $f(x)$ 在 x_0 点局部无界时，必有 $x_n \to x_0$, 使得 $|f(x_n)| \geq n$, 所以有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

9. 指出下列函数的所有不连续点及其间断类型：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$; (2) $f(x)=(-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin \dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$; (4) $f(x)=\begin{cases}x\lfloor \dfrac{1}{x} \rfloor + x\lfloor x \rfloor, & x \neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$.

解 (1) 当 $x \notin \mathbb{Z}$ 时, x 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(2) 由于

$$f(x)=\begin{cases}1, & \sqrt{2n} \leq x < \sqrt{2n+1} \\ -1, & \sqrt{2n+1} \leq x < \sqrt{2n+2}\end{cases},$$

所以 $\pm sqrtn$ 是 $f(x)$ 的全体间断点, 为第一类.

(3) 设 $A=\{\pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 由于

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \in \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}\right),\ n \in A \\ 0, & x=0, \dfrac{1}{n},\ n \in A \\ -1, & x \in \left(\dfrac{1}{2n+2}, \dfrac{1}{2n+1}\right),\ n \in A\end{cases},$$

所以 $\{0, \dfrac{1}{n} : n \in A\}$ 是 $f(x)$ 的全体间断点. 其中 0 是第二类间断点, 其它都是第一类间断点.

(4) 只需讨论 $x=0, \pm n, \pm\dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 处的连续性.

当 $x=0$ 时, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0=f(0)$, 故连续.

当 $x=1$ 时, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=1 \neq f(1)=2$, 故为可去间断点.

当 $x=n>1$ 时, $f(n+)=n^2 \neq f(n-)=n(n-1)$, 故为跳跃间断点.

当 $x=-1$ 时, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=3 \neq f(-1)=2$, 故为可去间断点.

当 $x=-n<-1$ 时, $f(-n-)=n^2 \neq f(-n+)=n(n+1)$, 故为跳跃间断点.

对 $x=\pm\dfrac{1}{n}$ 可类似讨论.

10. 设定义在 $[a,b]$ 上的函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$, 问:

(1) $f(x)$ 一定严格单调吗?

(2) 若 $f(x)$ 还在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 一定严格单调吗?

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f^{-1}(x)$ 在其定义域必连续吗？

(4) 若 $f^{-1}(x)$ 在其定义域连续，则 $f(x)$ 在其定义域必连续吗？

解 (1) 否. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{为有理数}\\ -x, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上非单调，但有反函数.

(2) 是.

(3) 是.

(4) 否. 例如不连续函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0\le x\le 1\\ -x^2-1, & -1\le x<0\end{cases}$$

的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x\ge 1\\ -\sqrt{-x-1}, & x<-1\end{cases}$$

存在且连续.

11. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域有定义且值域包含在 $g(u)$ 的邻域内，在下列情形下能否断定 $g\circ f(x)$ 在 x_0 点间断？

(1) $f(x)$ 在 x_0 点连续， $g(u)$ 在 $f(x_0)$ 点不连续；

(2) $f(x)$ 在 x_0 点不连续， $g(u)$ 在 $f(x_0)$ 点连续；

(3) $f(x)$ 在 x_0 点不连续， $g(u)$ 在 $f(x_0)$ 点不连续.

解 均不能判定. 反例如下，其中 $D(x)$ 为 Direchlet 函数.

(1) $f(x)=1,\ g(u)=D(u),\ x_0$ 任意.

(2) $f(x)=D(x),\ g(u)=1,\ x_0$ 任意.

(3) $f(x)=D(x),\ g(u)=D(u),\ x_0$ 任意.

12. 举例说明，存在函数 $f(u),\ g(x)$, 使得

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0}f(u)=A,$$

但 $\lim\limits_{x\to x_0} f\circ g(x)\neq A$.

解 令

$$g(x)=0,\ f(u)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

则有

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

其中 $x_0=0,\ u_0=0,\ A=1$. 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f\circ g(x)=0\neq A$.

13. 设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, 则

(1) 当 n 为偶数时，存在 ξ, 使得 $f(\xi)\leq f(x)$ 对一切 x 成立;

(2) 当 n 为奇数时，存在 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

证 (1) 由于 n 为偶数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. 于是存在 $a>0$, 使得

$$|x|>a\Longrightarrow f(x)>f(0).$$

由于 $f(x)$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上连续，所以根据最值定理存在 $\xi\in[-a,a]$, 使得

$$|x|\leq a\Longrightarrow f(x)\geq f(\xi).$$

由于 $f(0)\geq f(\xi)$, 所以对一切 x 都有 $f(\xi)\leq f(x)$.

(2) 由于 n 为奇数，所以

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

于是存在 $a>0$, 使得 $f(-a)<0,\ f(a)>0$. 从而根据介值定理存在 $\xi\in[-a,a]$, 使得 $f(\xi)=0$.

总 习 题 一

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=a$, 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$.

证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}{n}=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=a.$$

2. 设

$$f(x-1)=\begin{cases}x, & x>1\\ x-2, & x\le 1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^x, & x>0\\ \mathrm{e}^x, & x\le 0\end{cases},$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x-1)\lim_{x\to 0+}g(x)=1\cdot(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x-1)\lim_{x\to 0-}g(x)=(-1)\cdot 1=-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=-1$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n-1}}=2.$$

4. 用定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\dfrac{1}{2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$.

证 (1) 根据

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\le\frac{1}{n},$$

$\forall\varepsilon>0$, 要 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时，必有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

(2) 根据 $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}\right|\le\dfrac{1}{\ln n}$, $\forall\varepsilon>0$, 要 $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}-0\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{\ln n}<\varepsilon$, 取 $N=\mathrm{e}^{1/\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时, 必有

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}-0\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}=0.$

(3) 当 $x<-1$ 时, $x+1>2x$, 因此 $\dfrac{x^2}{x+1}<\dfrac{x^2}{2x}=\dfrac{x}{2}$. $\forall M>0$, 要 $\dfrac{x^2}{x+1}<-M$, 只要 $\dfrac{x}{2}<-M$, 取 $X=\min(-2M,-1)$, 则当 $x<X$ 时, 必有

$$\frac{x^2}{x+1}<-M.$$

因此 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty.$

(4) 当 $x>0$ 时,

$$\left|\sqrt{x^2+x}-x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}<\frac{1}{4x}.$$

于是 $\forall\varepsilon>0$, 要 $\left|\sqrt{x^2+x}-x-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{4x}<\varepsilon$, 取 $X=\dfrac{1}{4\varepsilon}$, 则当 $x>X$ 时, 必有

$$\left|\sqrt{x^2+x}-x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\forall\ >0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M^n}{n!}=0$ 可知, $\exists N>0$, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $\dfrac{M^n}{n!}<1$, 即 $\sqrt[n]{n!}>M$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty.$

(6) 当 $x>0$ 时,

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|\le|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$, 要 $|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} < \varepsilon$, 取 $X = \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$, 则当 $x > X$ 时, 必有

$$|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0.$

5. 设 $a > 0$, $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_n = \sqrt[3]{ax_{n-1}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 由 $a > 0$ 可知, $x_n > 0$. 如果 $x_2 \le x_1$, 则有 $x_{n+1} \le x_n$. 因此 $\{x_n\}$ 单调减有界. 如果 $x_2 > x_1$, 则有 $a > 1$, $a \ge x_{n+1} > x_n$. 因此 $\{x_n\}$ 单调增有界. 故可设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 于是有 $A = \sqrt[3]{aA}$, 由此可知 $A = \sqrt{a}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

6. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 若 $f(a) < a, f(b) > b$, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

证 令 $g(x) = f(x) - x$, 则有 $g(a)g(b) < 0$. 于是根据零点定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $g(\xi) = 0$. 此即 $f(\xi) = \xi$.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 则存在 $X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < 1$. 由于 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续, 所以存在 $M > 0$, 使当 $|x| \le X$ 时, 恒有 $|f(x)| \le M$. 于是对任意的 $x \in (-\infty,+\infty)$, 都有 $|f(x)| \le \max(M, |A|+1)$.

8. 设 $x > 0$, 求 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x(1+\sin\pi x)^n + \sin\pi x}{1 + (1+\sin\pi x)^n}$.

解

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sin\pi x}{2}, & x \in \mathbb{Z} \\ x, & x \in (2k, 2k+1),\ k \in \mathbb{Z} \\ \sin\pi x, & x \in (2k+1, 2k+2),\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

9. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + \mathrm{e}^x)^{1/x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}(2\sin x + \cos x)^{1/x}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0+}x^x$;

(5) $\lim\limits_{x\to0+}x\ln x$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0+}(\cot x)^{\sin x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$;　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{1/x}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+x\mathrm{e}^{-x}\right)^{\frac{1}{x\mathrm{e}^{-x}}}\right]^{\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^0=1$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln[\,1+(2\sin x+\cos x-1)\,]}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=\mathrm{e}^2.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\tan\frac{1}{n}\right)^n}=\mathrm{e}^2.$$

(4) 设 $\dfrac{1}{n+1}\le x<\dfrac{1}{n}$, 则

$$1\leftarrow\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\le x^x\le\frac{1}{\sqrt[n+1]{n}}\to1.$$

故 $\lim\limits_{x\to0+}x^x=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to0+}x\ln x=\ln\lim\limits_{x\to0+}x^x=0$.

(6) $\lim\limits_{x\to0+}(\cot x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(\cos x)^{\sin x}}{(\sin x)^{\sin x}}=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1+x}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\arcsin x}{x}\Big)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{\arcsin x}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\arcsin x}{x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\arcsin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{1/6}.$$

10. 设

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)],$$

且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 α,β 的值.

解 由 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点可知,

$$\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)\Big|_{x=0}=0.$$

因此, $\alpha=1$. 于是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\beta)\sin x+(1-\beta)\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(\alpha+\beta\sin x))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\beta)\sin x+(1-\beta)\sin^2 x}{x^2(1+\alpha)}.$$

由此可知, $1-2\beta=0$, 即 $\beta=\dfrac{1}{2}$.

11. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b,\ b\neq 0$, 求 a,b 的值.

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b\neq 0$ 可知,

$$1=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^5+7x^4+2)^a}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{5a-1}\cdot\Big(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}\Big)^a=\lim_{x\to+\infty}x^{5a-1}.$$

由此可知 $a=\dfrac{1}{5}$. 于是

$$b=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\Big[\Big(1+\frac{7x^4+2}{x^5}\Big)^{1/5}-1\Big]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(7x^4+2)}{5x^5}=\frac{7}{5}.$$

12. 求常数 a, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\\ \mathrm{e}^{2ax}-\mathrm{e}^{ax}+1, & x\geq 1\end{cases}$$

在点 $x=1$ 连续.

解 计算单侧极限有

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3\sin(x-1)}{x-1}=3,$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1}(\mathrm{e}^{2ax}-\mathrm{e}^{ax}+1)=\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^{a}+1.$$

根据 $f(1-)=f(1+)$, 有 $\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^{a}+1=3$. 解之可得 $a=\sqrt{2}$.

13. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数，求 $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\Big)^{1/x}$.

解 令 $y=\Big(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\Big)^{1/x}$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln y &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\Big(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\Big)\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{nx}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{n}=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0} y=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

14. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$, 证明存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

解 由于

$$\min_{1\le i\le n} f(x_i)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le\max_{1\le i\le n} f(x_i),$$

所以根据介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

15. 试求函数 $f(x)$ 的差商极限：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

其中 $f(x)$ 分别为

(1) $f(x)=x^{\mu}$; (2) $f(x)=\sin x$;

(3) $f(x)=\cos x$; (4) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$;

(5) $f(x)=\ln x$; (6) $f(x)=\tan x$.

解 (1) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}$

$$=x^{\mu}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\Delta x}=x^{\mu}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\mu\,x^{\mu-1}.$$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x.$$

(3) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\sin x.$$

(4) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathrm{e}^{x}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\mathrm{e}^{x}$.

(5) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-\ln x}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$.

(6) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\cos(x+\Delta x)\sin x}{\cos(x+\Delta x)\cos x\cdot\Delta x}$$

$$=\frac{1}{\cos^{2}x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\cos x-\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\sin x\right]$$

$$=\frac{1}{\cos^{2}x}\cdot\left[\cos^{2}x+\sin^{2}x\right]=\frac{1}{\cos^{2}x}.$$

第二章　导数与微分

§2.1　导数的概念

习 题 2.1 A

1. 选择题

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导且 $f'(x_0)=-2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=$

(A) $\dfrac{1}{2}$;　　(B) 2;　　(C) $-\dfrac{1}{2}$;　　(D) -2.

(2) 设 $f(x)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为

(A) 2;　　(B) -2;　　(C) $\dfrac{1}{2}$;　　(D) -1.

(3) 设 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=$

(A) 一定不存在;　(B) $2f'(x_0)$;　(C) $3f'(x_0)$;　(D) $f'(x_0)$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}h\Big[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\Big]$存在;　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在;　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{2h}$存在.

解　(1) 选 D.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=-f'(x_0)=-2.$$

(2) 选 B.

$$-1=\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=\frac{1}{2}f'(1).$$

(3) 选 C.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[2\cdot\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=3f'(x_0).$$

(3) 选 D. A 错在 $h\to 0$, 改为 $h\to\infty$ 时, 结论成立. C 可取反例 $f(x)=|x|,\ a=0$.

2. 讨论下列函数在分段点的可导性.

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 0\\ x, & x<0\end{cases}$; (2) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$.

解 (1) 由于

$$f'_+(0)=\cos 0=1,\ f'_-(0)=1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点可导.

(2) 由于 $f'_+(1)=-1,\ f'_-(1)=1$, 所以 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 点不可导.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0\\ x^2+bx+c, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 求常数 a,b 的值.

解 由于

$$f(0+)=c,\ f(0-)=1,\ f'_+(0)=b,\ f'_-(0)=1,$$

所以 $b=1,\ c=1$.

4. 求曲线 $xy=1$ 在 $(1,1)$ 点的切线方程与法线方程.

解 由于 $y'|_{x=1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1}}{x-1}=1$, 所以所求切线方程为 $y-1=x-1$, 法线方程为 $y-1=-(x-1)$.

5. 计算下列函数的导数，其中 $a>0,\ a\neq 1$.

(1) $y=x^4$;

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$;

(3) $y=x^2+3x+4$;

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=\dfrac{1}{x^2}$;

(6) $y=|\sin x|$;

(7) $y=a^x$;

(8) $y=\log_a x$.

解 (1)
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^4-x^4}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x^3\cdot\Delta x+6x^2\cdot\Delta x^2+4\Delta x^3}{\Delta x}=4x^3. \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\Delta x}\\ &= \sqrt[3]{x^2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{2/3}-1}{\Delta x}\\ &= \sqrt[3]{x^2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2\Delta x}{3x}}{\Delta x}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+4]-(x^2+3x+4)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2x+3)\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+3. \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{-\Delta x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2-(x+\Delta x)^2}{\Delta x\cdot(x+\Delta x)^2\cdot x^2}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\cdot\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x\cdot x^4}=-\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

(6) $$y'=\begin{cases}(\sin x)', & \sin x>0\\ (-\sin x)', & \sin x<0\end{cases}=\begin{cases}\cos x, & \sin x>0\\ -\cos x, & \sin x<0\end{cases}.$$

(7) $(a^x)'=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^{x+t}-a^x}{t}=a^x\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{t\ln a}-1}{t}=a^x\ln a.$

(8) $(\log_a x)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}.$

6. 计算函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的左右导数.

解
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}-0}{x-0}=0,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}-0}{x-0}=1,$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导.

证 由于
$$0\le\frac{f(x)-0}{x-0}\le\frac{x^2-0}{x-0}\le x\to 0\ (x\to 0),$$
所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导且 $f'(0)=0$.

8. 求下列函数的指定导数:

(1) $f(x)=\arcsin x\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, 求 $f'(0)$.

(2) 设 $g(x)$ 在 $x=a$ 处可导且 $f(x)=g(a+bx)-g(a-bx)$, 求 $f'(0)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$, 又恒有 $f(3+x)=3f(x)$, 求 $f'(3)$.

解 (1) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=1.$

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(a+bx)-g(a-bx)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\left[b\cdot\frac{g(a+bx)-g(a)}{bx}+b\cdot\frac{g(a-bx)-g(a)}{-bx}\right]=2bf'(0).$$

(3) $f'(3)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(3+t)-f(3)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{3f(t)-3f(0)}{t}=1.$

习 题 2.1 B

1. 选择题

(1) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是

(A) 3; (B) 2; (C) 1; (D) 0.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点

(A) 极限不存在; (B) 极限存在, 但不连续;

(C) 连续, 但不可导; (D) 可导.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 又函数 $g(x)$ 可导, 则 $F(x)=g[f(x)]$ 在 $x=0$ 点为

(A) 不连续; (B) 不可导; (C) 可导且导数为$g'(0)$; (D) 可导且导数为零.

(4) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导; (B) 恰有一个不可导点;

(C) 恰有两个不可导点; (D) 至少有三个不可导点.

解 (1) 由于 $f(x)=(x+1)|x+1|\cdot(x-2)\cdot|x|\cdot|x-1|$, 所以 $f(x)$ 的不可导点为 $x=0,\ x=1$. 因此选 B.

(2) 由于

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^{3/2}}=0,\ f'_-(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2g(x)}{x}=0,$$

所以选 D.

(3) 由于

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{g(x^2\sin\frac{1}{x})-g(0)}{x-0}\\&=\lim_{t\to0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=g'(0)\cdot0=0,\end{aligned}$$

所以选 D.

(4) 由于

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le1\\ |x|, & |x|>1\end{cases},$$

所以 $f(x)$ 恰有两个不可导点 $x=-1,\ x=1$, 故选 C.

2. 证明双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

证 计算函数 $y=\dfrac{a^2}{x}$ 的导数有,

$$y'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{a^2}{x+\Delta x}-\frac{a^2}{x}}{\Delta x}=-\frac{a^2}{x^2}.$$

切线方程为

$$Y-\frac{a^2}{x}=-\frac{a^2}{x^2}(X-x)$$

即

$$\frac{X}{2x}+\frac{Y}{2a^2/x}=1.$$

由此可知, 所求面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot2x\cdot\dfrac{2a^2}{x}=2a^2$.

3. 设 $f(x)$ 在 c 点右可导且 $f'_+(c)>0$. 证明存在 $\delta>0$, 使当 $c<x<c+\delta$ 时，恒有 $f(x)>f(c)$.

证 由于 $f'_+(c)>0$, 所以存在 $\delta>0$, 使当 $0<x-c<\delta$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

由此可知,

$$c<x<c+\delta \Longrightarrow f(x)>f(c).$$

4. 证明偶函数的导函数是奇函数；奇函数的导函数是偶函数.

5. 证明周期函数的导函数是周期函数，并且两者有相同的周期.

6. 试证椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在其上 (x_0,y_0) 点的切线方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{a^2}=1$.

证 由椭圆方程可得 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 计算导数有

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x+\Delta x)^2}-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{b}{2a\sqrt{a^2-x^2}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}. \end{aligned}$$

椭圆在 (x_0,y_0) 点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}(x-x_0).$$

注意到 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, 有

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{a^2}=1.$$

7. 试证明

(1) $(\tan x)'=\sec^2 x$;　　(2) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(3) $(\sec x)'=\tan x\cdot\sec x$;　　(4) $(\csc x)'=-\cot x\cdot\csc x$.

证 (1)

$$(\tan x)'= =\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x \cdot \cos(x+\Delta x)\cdot \cos x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

其它证明类似.

8. 设函数 $u(x), v(x)$ 均在 (a,b) 内可导, 试证明函数 $u(x), v(x)$ 的和、差、积、商 (分母不为零) 均在 (a,b) 内可导，并且有

$$(u(x)\pm v(x))' = u'(x)\pm v'(x);$$

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x);$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

9. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \dfrac{1}{|x|^\beta}, & x\neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 点的可导性.

解 (1) 当 $\alpha > 1$ 时,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha \sin \dfrac{1}{|x|^\beta} - 0}{x-0} = 0.$$

(2) 当 $\beta < 0$ 时,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha \sin \dfrac{1}{|x|^\beta} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha-\beta}}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha-\beta > 1 \\ \text{不存在}, & \alpha-\beta \le 1 \end{cases}.$$

10. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时，比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim\limits_{x\to 0}[8x+\alpha(x)]$ 可得, $f(1)-3f(1)=0$, 即 $f(1)=0$. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\cdot\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}\right]=4f'(1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x+\alpha(x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+\alpha(x)}{x}=8,$$

所以 $4f'(1)=8$, 即 $f'(1)=2$.

由于 $f(x+5)=f(x)$, 所以 $f(6)=f(1)=0,\ f'(6)=f'(1)=2$. 故所求切线方程为

$$y=2(x-6).$$

§2.2 求导法则

习 题 2.2 A

1. 证明下列求导公式

(1)$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (2) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

(3) $(\operatorname{arch} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

证 (1) 令 $y=\arccos x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\cos' y}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) 令 $y=\operatorname{arccot} x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}==1\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\cot' y}=\frac{1}{-\csc^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(3) 令 $y=\operatorname{arch}x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}==1\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\operatorname{ch}'y}=\frac{1}{\operatorname{sh}y}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2. 求下列函数的导数

(1) $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\tan x$;

(2) $y=\dfrac{ax^3+bx+c}{ax+c}$;

(3) $y=\dfrac{3}{5-t}+\dfrac{t^2}{5}$;

(4) $y=\dfrac{1}{(1+x)^2(1-2x^3)}$;

(5) $y=x\sin x\ln x$;

(6) $y=x\sec x-\cot x$;

(7) $y=\dfrac{x^3}{\arctan x}$;

(8) $y=7\operatorname{arsh}x+\dfrac{1}{\arccos x}$;

(9) $y=\log_a x+\arctan a^x$;

(10) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}+\sqrt{1+\ln^2 x}$;

(11) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$;

(12) $y=\arctan\dfrac{a}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}+\sec^2 x$.

(2) $y'=\dfrac{3ax^2+b}{ax+c}-\dfrac{a(ax^3+bx+c)}{(ax+c)^2}$.

(3) $y'=-\dfrac{3}{(5-t)^2}+\dfrac{2t}{5}$.

(4) $y'=-\dfrac{2}{(1+x)^3(1-2x^3)}+\dfrac{6x^2}{(1+x)^2(1-2x^3)^2}$.

(5) $y'=\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$.

(6) $y'=\sec x+x\tan x\sec x+\csc^2 x$.

(7) $y'=\dfrac{3x^2}{\arctan x}-\dfrac{x^3}{(1+x^2)\arctan^2 x}$.

(8) $y'=\dfrac{7}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$.

(9) $y'=\dfrac{1}{x\ln a}-\dfrac{a^x\ln a}{1+a^{2x}}$.

(10) $y'=-\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-2^2}}+\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

(11) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\Big(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\Big)-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\Big(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\Big)$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

(12) $y'=-\dfrac{a}{x^2+a^2}+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\Big)$.

3. 求下列函数的导数

(1) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; (2) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;

(3) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$; (4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(5) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}$; (6) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$;

(7) $y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$; (8) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;

(9) $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$; (10) $y=\big(\dfrac{a}{x}\big)^x\big(\dfrac{b}{x}\big)^a\big(\dfrac{x}{a}\big)^b$;

(11) $y=(\sin x)^{\cos x}$; (12) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

(2) $y'=\arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

(3) $y'=\dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$.

(4) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

(5) $y'=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(6) $y'=0$.

(7) $y'=\dfrac{1}{1+\cos x}$.

(8) $y'=\sec x$.

(9) $y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(10) $y' = y \cdot \Big(\ln \dfrac{a}{x} - 1 + \dfrac{b-a}{x} \Big)$.

(11) $y' = (\sin x)^{\cos x} \Big(-\sin x \cdot \ln \sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} \Big)$.

(12) $y' = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{x \cos x}{\sin^2 x}$.

4. 已知 $f(x)$ 可导, $y = f(\ln x + \sqrt{a^2 + x^2})$, 求 y'.

证

$$\begin{aligned} y' &= f'(\ln(x) + \sqrt{a^2 + x^2}) \cdot (\ln x + \sqrt{a^2 + x^2})' \\ &= f'(\ln(x) + \sqrt{a^2 + x^2}) \cdot \Big(\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Big). \end{aligned}$$

5. 已知 $f(x)$ 可导, $y = [\, f(\sin x)\,]^{f(\cos x)}$, 求 y'.

证

$$\begin{aligned} y' &= [\, f(\sin x)\,]^{f(\cos x)} \cdot (\, f(\cos x) \ln f(\sin x)\,)' \\ &= [\, f(\sin x)\,]^{f(\cos x)} \cdot \Big(-f'(\cos x) \sin x \, \ln f(\sin x) \\ &\qquad + \frac{f(\cos x) f'(\sin x)}{f(\sin x)} \cdot \cos x \Big). \end{aligned}$$

习 题 2.2 B

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的某邻域内具有连续的导数, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, 若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b 的值.

解 由于 $h \to 0$ 时, $af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h)$, 所以

$$af(0) + bf(0) - f(0) = 0,$$

由 $f(0) \neq 0$ 可知, $a + b = 1$. 又

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[a\,\frac{f(h)-f(0)}{h} + 2b\,\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\right] = (a+2b)f'(0),$$

于是由 $f'(0)\neq 0$ 可知， $a+2b=0$. 故 $a=2,\ b=-1$.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^x-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$， (1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续； (2) 求 $f'(x)$.

解 (1)

$$a=\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^x-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x} = 0.$$

(2) 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{[\,(1+x)^x-\cos x\,]'}{x} - \frac{(1+x)^x-\cos x}{x^2}$$

$$= \frac{(1+x)^x[\,x\ln(1+x)\,]'+\sin x}{x} - \frac{(1+x)^x-\cos x}{x^2}$$

$$= (1+x)^x\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{1}{1+x}\right]+\frac{\sin x}{x}-\frac{(1+x)^x-\cos x}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^x-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}+\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}}$; (2) $y=\ln\cos \mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$;

(1) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}$; (2) $y=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}}}}$;

(3) $y=x^{2}\cdot\sqrt{a^{2}-x^{2}}+a^{2}\arctan\dfrac{x}{a}$;

(4) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^{2}-a^{2}}-\dfrac{a^{2}}{2}\ln|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}|$;

(5) $y=\arctan\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\right)$;

(6) $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^{2}}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^{2}}+1}{\sqrt{1+x^{2}}-1}$.

4. 设 $g(x)=\begin{cases}\sin^{3}x\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 又 $f(x)$ 为可导函数, 求函数 $f(g(x))$ 的导数.

解 当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= f'[\,g(x)\,]\cdot g'(x)=f'[\,g(x)\,]\cdot\left[\sin^{3}x\cdot\cos\frac{1}{x}\right]'\\ &= f'[\,g(x)\,]\cdot\left[3\sin^{2}x\cos x\cdot\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}\,\sin^{3}x\cdot\sin\frac{1}{x}\right].\end{aligned}$$

当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= (f\circ g)'(0)=f'[\,g(0)\,]\cdot g'(0)\\ &= f'[\,g(0)\,]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{3}x\cdot\cos\dfrac{1}{x}-0}{x-0}\\ &= f'[\,g(0)\,]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{3}x}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}=0.\end{aligned}$$

5. 讨论 α,β 取何值时, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在定义域上连续, 可导, 导数连续?

解 (1) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续 $\iff x\to 0+$ 时，x^{α} 或 $x^{\alpha-\beta}$ 是无穷小 $\iff \alpha>0$ 或 $\alpha-\beta>0$.

(2) 由于

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}},$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导 $\iff \alpha>1$ 或 $\alpha-\beta\geq 1$.

(3) 由于

$$f'(0+)=\lim_{x\to 0+}\Big[\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}\Big],$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导 $\iff \alpha-\beta-1>0$ 或 $\beta=\alpha-1\leq 0$.

§2.3 高阶导数与隐式导数

习 题 2.3 A

1. 计算高阶导数：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 求 $y^{(20)}$; (2) $y=x^3\sin^2 x$, 求 $y^{(50)}$;

(3) $y=\mathrm{e}^x\sin x$, 求 $y^{(5)}$; (4) $y=x^4\ln x$, 求 $y^{(30)}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}y^{(20)}&=\Big(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\Big)^{(20)}\\&=\big[(x-2)^{-1}\big]^{(20)}-\big[(x-1)^{-1}\big]^{(20)}\\&=(-1)^{20}\cdot 20!\cdot(x-2)^{-21}-(-1)^{20}\cdot 20!\cdot(x-1)^{-21}.\end{aligned}$$

(2) 根据莱布尼兹公式，有

$$y^{(50)}=x^3(\sin^2 x)^{(50)}+50\cdot(x^3)'(\sin^2 x)^{(49)}$$

$$+\frac{50\cdot 49}{2!}(x^3)''(\sin^2 x)^{(48)}+\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3!}(x^3)'''(\sin^2 x)^{(47)}.$$

由于

$$\begin{aligned}(\sin^2 x)^{(n)} &= \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^{(n)} = -\frac{1}{2}\cdot(\cos 2x)^{(n)}\\ &= -\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos\Big(2x+\frac{n\pi}{2}\Big).\quad (\text{导一次，加半 }\pi)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}y^{(50)} &= -\frac{1}{2}\cdot x^3\cos\Big(2x+\frac{50\pi}{2}\Big)-\frac{1}{2}\cdot 50\cdot(3x^2)\cos\Big(2x+\frac{49\pi}{2}\Big)\\ &\quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{50\cdot 49}{2!}(6x)\cos\Big(2x+\frac{48\pi}{2}\Big)-\frac{1}{2}\cdot\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3!}\cdot 6\cos\Big(2x+\frac{47\pi}{2}\Big).\end{aligned}$$

(3) 根据莱布尼兹公式，有

$$\begin{aligned}y^{(5)} &= \mathrm{e}^x(\sin x)^{(5)}+5\mathrm{e}^x(\sin x)^{(4)}+10\mathrm{e}^x(\sin x)^{(3)}\\ &\quad +10\mathrm{e}^x(\sin x)''+5\mathrm{e}^x(\sin x)'+\mathrm{e}^x\sin x\\ &= \mathrm{e}^x\cos x+5\mathrm{e}^x\sin x-10\mathrm{e}^x\cos x-10\mathrm{e}^x\sin x+5\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x\\ &= -4\mathrm{e}^x\cos x-4\mathrm{e}^x\sin x.\end{aligned}$$

(4) 根据莱布尼兹公式及 $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$, 有

$$\begin{aligned}y^{(30)} &= x^4(\ln x)^{(30)}+30\cdot 4x^3(\ln x)^{(29)}+\frac{30\cdot 29}{2}12x^2(\ln x)^{(28)}\\ &\quad +\frac{30\cdot 29\cdot 28}{6}\cdot 24x(\ln x)^{(27)}+\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{24}\cdot 24(\ln x)^{(26)}\\ &= -29!\,x^{-26}+28!\cdot 30\cdot x^{-26}-28!\cdot\frac{30\cdot 29}{2}\cdot 12x^{-26}\\ &\quad +27!\cdot\frac{30\cdot 29\cdot 28}{6}\cdot 24x^{-26}-26!\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27x^{-26}.\end{aligned}$$

2. 求下列隐函数的导数 y'.

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$;　　(2) $y=\tan(x+y)$;

(3) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (4) $(\cos x)^y=(\sin y)^x$.

解 (1) 两端关于 x 求导，有

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0.$$

由此可知

$$y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

(2) 两端关于 x 求导，有

$$y'=\sec^2(x+y)\cdot(1+y').$$

由此可知

$$y'=\cot^2(x+y)\cdot\sec^2(x+y)=\csc^2(x+y).$$

(3) 两端关于 x 求导，有

$$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由此可知

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

(4) 两端关于 x 求导，有

$$(\cos x)^y(y\ln\cos x)'_x=(\sin y)^x(x\ln\sin y)'_x.$$

化简得

$$(y\ln\cos x)'_x=(x\ln\sin y)'_x.$$

由此可知

$$y'\ln\cos x-y\cdot\tan x=\sin y+x\cot y\cdot y'.$$

因此

$$y'=\frac{\ln\sin y+y\tan x}{\ln\cos x-x\cot y}.$$

3. 求下列参数方程所确定函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$;　　(2) $\begin{cases} x=\ln\sin(t+1) \\ y=\tan(\mathrm{e}^{-t}+1) \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{t}\sin t \\ y=\mathrm{e}^{t}\cos t \end{cases}$;　　(4) $\begin{cases} x=2t+|t| \\ y=5t^{2}+4t|t| \end{cases}$.

解　(1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t.$$

(2) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sin(t+1)}\cdot\cos(t+1),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sec^{2}(\mathrm{e}^{-t}+1)\cdot(-\mathrm{e}^{-t}),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^{-t}\cdot\sec^{2}(\mathrm{e}^{-t}+1)\cdot\tan(t+1).$$

(3) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{t}\sin t+\mathrm{e}^{t}\cos t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{t}\cos t-\mathrm{e}^{t}\sin t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}.$$

(4) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2+\operatorname{sgn} t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=10t+8|t|,$$

所以当 $t\neq 0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{10t+8|t|}{2+\operatorname{sgn} t}.$$

4. 验证函数 $y=\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ 满足微分方程:

$$4xy''+2y'-y=0.$$

解 由于

$$y = 2\mathrm{ch}\sqrt{x},$$
$$y' = \mathrm{sh}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$y'' = \mathrm{ch}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2x} - \mathrm{sh}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}},$$

所以

$$4xy'' + 2y' - y = \left(2\mathrm{ch}\sqrt{x} - \mathrm{sh}\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \mathrm{sh}\sqrt{x} - 2\mathrm{ch}\sqrt{x} = 0.$$

5. 设 $f(x) = \begin{cases} -1 + 2x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, 求 $f''(x)$.

解 当 $x \neq 1$ 时,

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}, \qquad f''(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}.$$

由于

$$f''_+(1) = f''(1+) = 2,\ f''_-(1) = f''(1-) = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点的二阶导数不存在.

6. 求曲线 $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 5t + \ln(2 + t) \end{cases}$ 在 $(0, -5)$ 点的切线方程.

解 当 $(x, y) = (0, -5)$ 时, 有 $t = -1$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{5 + \frac{1}{2+t}}{-2t},$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=-1} = 3$, 于是所求切线方程为

$$y + 5 = 3(x - 0).$$

7. 设 $f(x)$ 二阶可导, $y = f(\ln^2 x + \mathrm{e}^{-2x})$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解

$$y' = f'(\ln^2 x + \mathrm{e}^{-2x}) \cdot \Big(2\ln x \cdot \frac{1}{x} - 2\mathrm{e}^{-2x}\Big),$$

$$y'' = f''(\ln^2 x + \mathrm{e}^{-2x}) \cdot \Big(2\ln x \cdot \frac{1}{x} - 2\mathrm{e}^{-2x}\Big)^2$$

$$+ f'(\ln^2 x + \mathrm{e}^{-2x}) \cdot \Big(\frac{2 - 2\ln x}{x^2} + 4\mathrm{e}^{-2x}\Big).$$

8. 证明曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ 上任一点处的切线在坐标轴上的截距之和恒为常数.

解 根据隐函数求导法则，有

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} y' = 0.$$

由此可知 $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 于是切线方程为 $Y - y = \sqrt{\dfrac{y}{x}}(X - x)$. 写为截距式，有

$$\frac{X}{\sqrt{x}} - \frac{Y}{\sqrt{y}} = 1.$$

故截距之和为常数，即 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

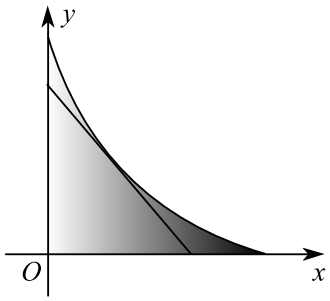


图 2.1

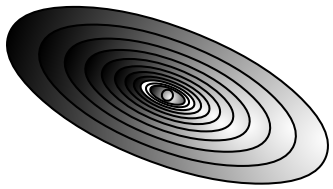


图 2.2

9. 落在平静水面上的石头，产生同心圆形波纹. 若波的最外圈半径的增大率为 6 米 / 秒，问在 2 秒末时波动水面面积的增大率是多少？

解 设 t 时刻波的外圈半径为 $r(t)$, 则

$$r'(t) = 6,\ r(2) = r'(t) \times t\Big|_{t=2} = 6 \times 2 = 12.$$

由于波动域的面积为 $S(t)=\pi r^2(t)$, 所以

$$S'(2)=2\pi r(2)r'(2)=144\pi.$$

习 题 2.3 B

1. 求下列参数方程所确定函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$;　　(2) $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t} \\ y=\sqrt{1-t} \end{cases}$;　　(4) $\begin{cases} x=at\cos t \\ y=at\sin t \end{cases}$.

解 (1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\Big(1-\frac{1}{1+t^2}\Big)\Big/\frac{2t}{1+t^2}=\frac{t}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big/\frac{2t}{1+t^2}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{f''(t)}.$$

(3)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}\Big/\frac{1}{2\sqrt{1+t}}=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\Big)\Big/\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

$$=\Big(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\cdot\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}\Big)\cdot\frac{1}{1-t}\cdot\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

$$= \frac{1}{1-t^2}.$$

(4)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}\Big)\cdot\frac{1}{\cos t - t\sin t}$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{(2\cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) + (\sin t + t\sin t)(2\sin t + t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^3}$$

$$= \frac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}.$$

2. 用对数求导法计算下列函数的导数

(1) $y = \Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x$;

(2) $y = (\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$;

(3) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(4) $y = \dfrac{(3-x)^4\sqrt{x+2}}{(x+1)^5}$;

(5) $y = \Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)^x$;

(6) $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}}$

(7) $y = \dfrac{(x+2)^2(x-3)^{1/3}}{(x-4)^5(x-2)^{1/3}}$;

(8) $y = \left(\dfrac{x+\ln x}{x+\sin x}\right)^{\cos x}$.

解 (1) 两端取对数，有

$$\ln y = x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big).$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$= \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{1+x}.$$

因此

$$y' = y\Big[\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{1+x}\Big].$$

(2) 两端取对数，有

$$\ln y = \cot\frac{x}{2}\cdot\ln\tan 2x.$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \csc^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\tan 2x + \cot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\cdot 2.$$

因此

$$y' = y\Big[\frac{1}{2}\cdot\csc^2\frac{x}{2}\cdot\ln\tan 2x + 2\cot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\Big].$$

(3) 两端取对数，有

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|x-5| - \frac{1}{15}\ln(x^2+2).$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{3(x-5)} - \frac{2x}{15(x^2+2)}.$$

因此

$$y' = y\Big[\frac{1}{3(x-5)} - \frac{2x}{15(x^2+2)}\Big].$$

(4) 两端取对数，有

$$\ln y = 4\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + 5\ln|x+1|.$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{4}{x-3} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{5}{x+1}.$$

因此

$$y' = y\Big[\frac{4}{x-3} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{5}{x+1}\Big].$$

(5) 两端取对数，有

$$\ln y = x(\ln|\sin x| - \ln|x|).$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln\frac{\sin x}{x} + x\Big(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\Big).$$

因此

$$y' = y\Big[\ln\frac{\sin x}{x} + x\Big(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\Big)\Big].$$

(6) 两端取对数，有

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x-4|.$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x-4)}.$$

因此

$$y' = \frac{y}{2}\Big[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4}\Big].$$

(7) 两端取对数，有

$$\ln|y| = 2\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - 5\ln|x-4| - \frac{1}{3}\ln|x-2|.$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{3(x-3)} - \frac{5}{x-4} - \frac{1}{3(x-2)}.$$

因此

$$y' = y\Big[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{3(x-3)} - \frac{5}{x-4} - \frac{1}{3(x-2)}\Big].$$

(8) 两端取对数，有

$$\ln y = \cos x\cdot(\ln|x+\ln x| - \ln|x+\sin x|).$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = -\sin x\cdot\ln\frac{x+\ln x}{x+\sin x} + \cos x\cdot\Big(\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x} - \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\Big).$$

因此

$$y' = y\Big[-\sin x \cdot \ln \frac{x+\ln x}{x+\sin x} + \cos x \cdot \Big(\frac{x+1}{x(x+\ln x)} - \frac{1+\cos x}{x+\sin x} \Big) \Big].$$

3. 求下列极坐标方程所确定函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

(1) $\rho = \theta \sin\theta + \cos\theta$; (2) $\rho = a(1+\cos\theta)$;

(3) $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$; (4) $\rho = a\cos 3\theta$.

解 (1) 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (\theta \sin\theta + \cos\theta)\cos\theta, \\ y = (\theta \sin\theta + \cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \theta\cos 2\theta - \sin\theta\cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \theta\sin 2\theta + \cos^2\theta,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\theta\sin 2\theta + \cos^2\theta}{\theta\cos 2\theta - \sin\theta\cos\theta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\theta\sin 2\theta + \cos^2\theta}{\theta\cos 2\theta - \sin\theta\cos\theta}\Big) \cdot \frac{1}{\theta\cos 2\theta - \sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{2\theta\cos 2\theta}{(\theta\cos 2\theta - \sin\theta\cos\theta)^2} + \frac{2\theta\sin 2\theta(\theta\sin 2\theta + \cos^2\theta)}{(\theta\cos 2\theta - \sin\theta\cos\theta)^3}. \end{aligned}$$

(2) 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -a\sin 2\theta - a\sin\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\cos 2\theta + a\cos\theta,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\cos 2\theta+\cos\theta}{\sin 2\theta+\sin\theta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\cos 2\theta+\cos\theta}{\sin 2\theta+\sin\theta}\Big)\cdot\frac{1}{a\sin 2\theta+a\sin\theta}\\&=-\frac{2\sin 2\theta+\sin\theta}{a(\sin 2\theta+\sin\theta)^2}-\frac{(\cos 2\theta+\cos\theta)(2\cos 2\theta+\cos\theta)}{a(\sin 2\theta+\sin\theta)^3}.\end{aligned}$$

(3) 曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,\\y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta.\end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}&=-\frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta-a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta=-\frac{a\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}&=-\frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin\theta+a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta=\frac{a\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\cot 3\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\cot 3\theta\Big)\cdot\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{a\sin 3\theta}=-\frac{3\sqrt{\cos 2\theta}}{a\sin^3 3\theta}.$$

(4) 曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos 3\theta\cos\theta=\dfrac{a}{2}\cos 4\theta+\dfrac{a}{2}\cos 2\theta,\\y=a\cos 3\theta\sin\theta=\dfrac{a}{2}\sin 4\theta-\dfrac{a}{2}\sin 2\theta.\end{cases}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-2a\sin 4\theta-a\sin 2\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 2a\cos 4\theta - a\cos 2\theta,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\cos 2\theta - 2\cos 4\theta}{\sin 2\theta + 2\sin 4\theta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\\ &= -\frac{1}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\cos 2\theta - 2\cos 4\theta}{\sin 2\theta + 2\sin 4\theta}\Big)\cdot\frac{1}{\sin 2\theta + 2\sin 4\theta}\\ &= \frac{2\sin 2\theta - 8\sin 4\theta}{a(\sin 2\theta + 2\sin 4\theta)^2} + \frac{(\cos 2\theta - 2\cos 4\theta)(2\sin 2\theta + 8\sin 4\theta)}{a(\sin 2\theta + 2\sin 4\theta)^3}.\end{aligned}$$

4. 求下列隐函数的二阶导数 y'':

(1) $x^2 - y^2 = 1$; (2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(3) $y = 1 + x\mathrm{e}^y$; (4) $xy + \ln y = 1$;

(5) $\mathrm{e}^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$; (6) $y = x^5\arctan\sqrt{x+y}$.

解 (1) 两端关于 x 求导可得

$$2x - 2y\cdot y' = 0, \quad y' = \frac{x}{y}.$$

由此可知

$$y'' = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\cdot y' = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

(2) 两端关于 x 求导可得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\cdot y' = 0, \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

由此可知

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{b^2x}{a^2y^2}\cdot y' = -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{b^2x}{a^2y^2}\cdot\frac{b^2x}{a^2y}.$$

(3) 两端关于 x 求导可得

$$y' = \mathrm{e}^y + x\mathrm{e}^y\cdot y', \quad y' = \frac{\mathrm{e}^y}{1 - x\mathrm{e}^y}.$$

由此可知

$$y'' = \frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}\cdot y' - \frac{\mathrm{e}^y}{(1-x\mathrm{e}^y)^2}\cdot\Big(1+\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}\Big).$$

(4) 两端关于 x 求导可得

$$y + xy' + \frac{1}{y}\cdot y' = 0, \quad y' = -\frac{y}{x+\frac{1}{y}}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{y'}{x+\frac{1}{y}} + \frac{y}{(x+\frac{1}{y})^2}\cdot\Big(1-\frac{1}{y^2}\cdot y'\Big) \\ &= \frac{1}{x+\frac{1}{y}}\cdot\frac{y}{x+\frac{1}{y}} + \frac{y}{(x+\frac{1}{y})^2}\cdot\Big(1-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{x+\frac{1}{y}}\Big). \end{aligned}$$

(5) 两端关于 x 求导可得

$$\mathrm{e}^y\cdot y' + 6xy + 6xy' + 2x = 0, \quad y' = -\frac{6xy+2x}{\mathrm{e}^y+6x}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{6y+2+6xy'}{\mathrm{e}^y+6x} + \frac{6xy+2x}{(\mathrm{e}^y+6x)^2}\cdot(\mathrm{e}^y\cdot y'+6) \\ &= \frac{-1}{\mathrm{e}^y+6x}\Big(6y+2-6x\cdot\frac{6xy+2x}{\mathrm{e}^y+6x}\Big) + \frac{6xy+2x}{(\mathrm{e}^y+6x)^2}\cdot\Big(-\mathrm{e}^y\cdot\frac{6xy+2x}{\mathrm{e}^y+6x}+6\Big). \end{aligned}$$

(6) 两端关于 x 求导可得

$$y' = 5x^4\arctan\sqrt{x+y} + x^5\cdot\frac{1+y'}{1+x+y}.$$

整理得

$$y' = \frac{5x^4(1+x+y)\arctan\sqrt{x+y}+x^5}{1+x+y-x^5}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{20x^3(1+x+y)\arctan\sqrt{x+y}+5x^4(1+y')+5x^4}{1+x+y-x^5} \\ &\quad -\frac{5x^4(1+x+y)\arctan\sqrt{x+y}+x^5}{(1+x+y-x^5)^2}\cdot(1+y'-5x^4). \end{aligned}$$

5. 设 $y=y(x)$ 三阶可导，且 $y'\neq 0$, 证明：

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\frac{3y''^2-y'y'''}{y'^5}.$$

解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\left(\frac{1}{y'}\right)'\cdot\frac{1}{y'}\right]\\&=\left[\left(\frac{1}{y'}\right)'\cdot\frac{1}{y'}\right]'\cdot\frac{1}{y'}=\left[-\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}\right]'\cdot\frac{1}{y'}\\&=-\left[\frac{y''}{y'^3}\right]'\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y'''y'-3y''^2}{y'^5}.\end{aligned}$$

6. 已知曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$, 试推导切线与极半径的夹角公式，并计算心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的切线与极半径的夹角.

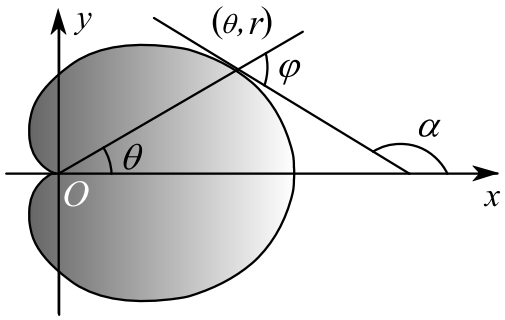


图 2.3

解 根据极坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 曲线 $r=r(\theta)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta,$$

所以

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r'(\theta)\tan\theta + r(\theta)}{r'(\theta) - r(\theta)\tan\theta}.$$

设 α, φ 分别为切线倾角和切线与极半径的夹角，则由 $\varphi = \alpha - \theta$ 可知

$$\tan\varphi = \tan(\alpha - \theta) = \frac{y' - \tan\theta}{1 + y'\tan\theta} = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$

如果 $r(\theta) = a(1 + \cos\theta)$, 则有

$$\tan\varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{1 + \cos\theta}{-\sin\theta} = -\tan\frac{\theta}{2}.$$

7. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y = \ln(1 + x)$;

(2) $y = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$;

(3) $y_n = x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;

(4) $y = \mathrm{e}^{x}\cos x$;

(5) $y = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$;

(6) $y = x\mathrm{e}^{-x} + \sin^3 x$;

(7) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x}}$;

(8) $y = a^x \sin x$.

解 (1) 根据

$$y' = \frac{1}{1 + x},\ y'' = -\frac{1}{(1 + x)^2},\ y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1 + x)^2},$$

归纳可得

$$\big[\ \ln(1 + x)\ \big]^{(n)} = y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n - 1)!}{(1 + x)^n}.$$

(2) 令 $\varphi = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 则有

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{e}^{ax}(a\sin bx + b\cos bx) \\ &= (a^2 + b^2)^{1/2}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx + \varphi) \\ y'' &= (a^2 + b^2)^{2/2}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx + 2\varphi) \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{n/2}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+n\varphi).$$

(3) 根据

$$y_1' = (\mathrm{e}^{1/x})' = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x},$$

$$y_2'' = (x\mathrm{e}^{1/x})'' = x''\mathrm{e}^{1/x} + 2x'(\mathrm{e}^{1/x})' + x(\mathrm{e}^{1/x})''$$

$$= \mathrm{e}^{1/x}\Big(-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\Big) = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{1/x},$$

归纳可得

$$y_n^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{1/x}.$$

(4) 根据

$$y' = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$y'' = (\sqrt{2})^2\mathrm{e}^x\cos\Big(x+\frac{2\pi}{4}\Big),$$

归纳可得

$$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n\mathrm{e}^x\cos\Big(x+\frac{n\pi}{4}\Big).$$

(5) 由于

$$y = \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3},$$

所以

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(x+2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(x+3)^{n+1}}.$$

(6) 根据

$$(x\mathrm{e}^{-x})' = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x},\ (x\mathrm{e}^{-x})'' = -2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},$$

归纳可得

$$(x\mathrm{e}^{-x})^{(n)} = (-1)^{n-1}2\mathrm{e}^{-x} + (-1)^n x\mathrm{e}^{-x}.$$

由于

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

所以

$$(\sin^3 x)^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\Big(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{3^n}{4}\sin\Big(3x + n\cdot\frac{\pi}{2}\Big).$$

故

$$y^{(n)} = (-)^{n-1}2\mathrm{e}^{-x} + (-1)^n x\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{4}\sin\Big(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{3^n}{4}\sin\Big(3x + n\cdot\frac{\pi}{2}\Big).$$

(7) 由于

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{1+x-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{2/3} - (1+x)^{-1/3},$$

所以

$$y^{(n)} = \frac{2}{3}\cdot\Big(\frac{2}{3}-1\Big)\cdots\Big(\frac{2}{3}-n+1\Big)(1+x)^{\frac{2}{3}-n}$$
$$-(-1)^n\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1}{3}-1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{3}-n+1\Big)(1+x)^{-\frac{1}{3}-n}.$$

(8) 根据

$$y' = \ln a\cdot \mathrm{a}^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\ln a\cdot \mathrm{a}^x\sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$y'' = (\sqrt{2}\ \ln a)^2\mathrm{a}^x\sin\Big(x+\frac{2\pi}{4}\Big),$$

归纳可得

$$y^{(n)} = (\ln a\sqrt{2})^n\mathrm{a}^x\sin\Big(x+\frac{n\pi}{4}\Big).$$

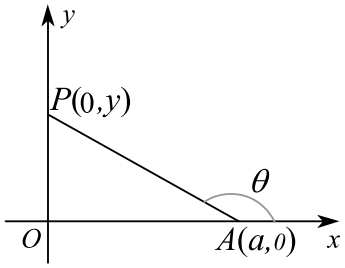


图 2.4

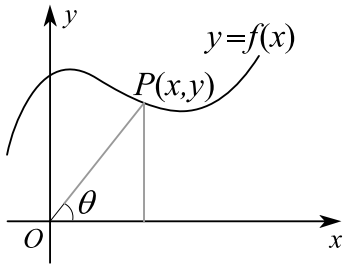


图 2.5

8. (1) 质点 P 在 y 轴上匀速运动， A 是 x 轴上一定点. 证明 AP 的角速度与 $|AP|^2$ 成反比 (图 2.4);

(2) 质点 $P(x,y)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上运动，证明 OP 的角速度 (图 2.5) 为

$$\omega=\frac{xy'(t)-x'(t)y}{|OP|^2}.$$

解 (1) 由于 $y=-a\tan\theta$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-a\sec^2\theta\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{\cos^2\theta}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{a}{|AP|^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

(2) 由于 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$, 所以

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sec^2\theta\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)}{x^2(t)}.$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)}{|OP|^2}.$$

9. 设 $f(x)=2x^3+x^2|x|$, 试求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n.

解 由于

$$f'(x)=6x^2+3x|x|,$$

$$f''(x)=12x+6|x|,$$

所以使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 2.

10. 设有一倒置圆锥形容器，深 10 米，顶口直径 6 米，今以每分钟 8 立方米之速率注入水，问当水深 4 米时，其液面上升之速率是多少？此时液面面积的增长率是多少？

解 设油高为 h 时油的体积为 V, 则 $r=\dfrac{3}{10}h$, $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{3\pi h^3}{100}$. 两端关于 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{9}{100}\pi h^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

将 $h=4,\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8$ 代入，得 $8=\dfrac{9}{100}\pi\cdot 4^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. 由此可知,

$$\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=4}=\frac{50}{9\pi}=1.77\ (\text{米 / 分}).$$

由于液面的面积为 $S=\pi(\dfrac{3}{10}\cdot h)^2=0.09\pi h^2$, 所以

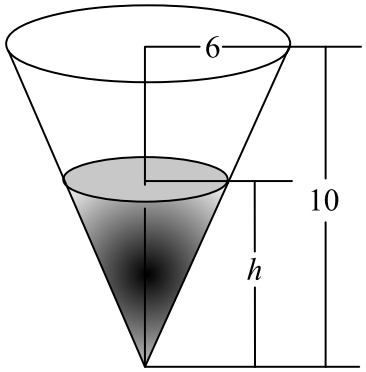


图 2.6

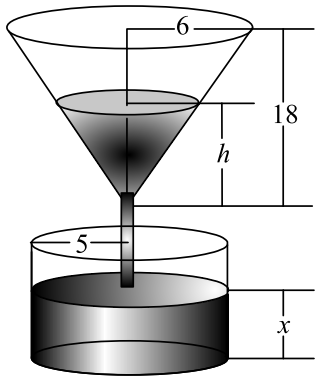


图 2.7

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{h=4}=0.72\pi h\cdot\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=4}=16\ (\text{米}^2/\text{ 分}).$$

11. 溶液自一深 18cm, 口径 12cm 的圆锥漏斗中漏入一直径为 12cm 的圆柱筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液, 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为 1cm/min. 问此时圆柱筒中溶液表面上升的速率为多少？

解 设溶液在漏斗中高为 h 时在圆柱筒中高为 x, 则溶液在圆柱筒中的体积为

$$\frac{1}{3}\pi\Big[6^2-\Big(\frac{6}{18}\cdot h\Big)^2\Big]\cdot h=\pi\cdot 5^2\cdot x.$$

解之可得

$$x=\frac{12}{25}\cdot h-\frac{1}{27\cdot 25}\cdot h^3.$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{12}{25}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{9\cdot 25}\cdot h^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

将 $h=12, \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-1$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{h=12}=-\frac{12}{25}+\frac{1}{9\cdot 25}\cdot 12^2=0.16\mathrm{cm/min}.$$

12. 已知圆柱体底半径 R 以每秒 3 厘米的速度增加，同时圆柱体的高 h 以每秒 4 厘米的速度减少，求圆柱体在半径为 5 厘米高为 10 厘米时体积 V 的变化速度.

解 由 $V=\pi R^2 h$ 可知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2\pi Rh\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+\pi R^2\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

将 $R=5,\ h=10,\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=3,\ \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-4$ 代入可得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{R=5,h=10}=2\pi\cdot 5\cdot 10\cdot 3-\pi 5^2\cdot 4=200\pi.$$

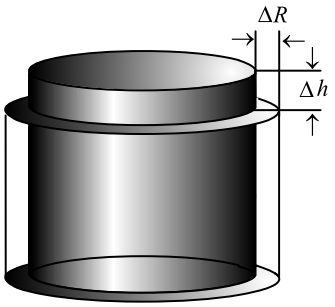


图 2.8

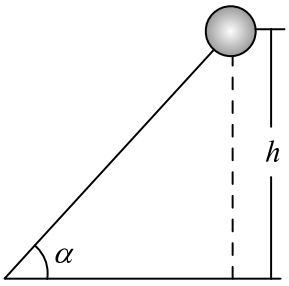


图 2.9

13. 一气球从离开观察员 500 米处离地面铅直上升，其速率为 140 米 / 分钟. 当气球高度为 500 米时，观察员视线的仰角增加率是多少？

解 设气球上升 t 分钟时，其高度为 $h=h(t)$, 观察员视线的仰角为 $\alpha=\alpha(t)$, 则

$$\tan\alpha=\frac{h}{500}.$$

两端关于 t 求导，有

$$\sec^2\alpha\cdot\alpha'(t)=\frac{1}{500}h'(t).$$

由于 $h'(t)=140$ 米 / 分钟, 且当 $h=500$ 米时, $\tan\alpha=1$, 从而 $\sec\alpha=\sqrt{2}$, 所以

$$2\alpha'(t)=\frac{1}{500}\cdot 140.$$

由此可知 $\alpha'(t)=0.14$ 弧度 / 分钟.

§2.4 函数微分

习 题 2.4 A

1. 选择题

(1) 设函数 $f(u)$ 可导, 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时, 函数 $y=f(x^2)$ 相应的增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1)=$

(A) -1; (B) 0.1; (C) 1; (D) 0.5

(2) 设 $f'(x)<0, f''(x)<0, \Delta x>0, \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x), \mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$, 则

(A) $\Delta y>\mathrm{d}y>0$; (B) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$;

(C) $\mathrm{d}y>\Delta y>0$; (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导, 当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时, 记 Δy 为 $f(x)$ 的增量, $\mathrm{d}y$ 为 $f(x)$ 的微分, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}$ 等于

(A) -1; (B) 0; (C) 1; (D) ∞.

解 (1) 将 $x=-1,\ \mathrm{d}x=-0.1,\ \mathrm{d}y=0.1$ 代入

$$\mathrm{d}y=2xf(x^2)\mathrm{d}x$$

可得 $f(1)=0.5$, 故选 D.

(2) (解法一) 考察 $f(x)=-x^2,\ x>0$, 则有 $f'(x)<0,\ f''(x)<0$ 且

$$\Delta x>0 \Longrightarrow \Delta y<\mathrm{d}y<0.$$

故选 B.

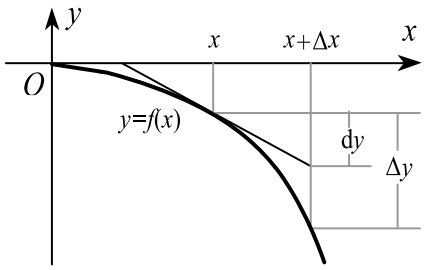


图 2.10

(解法二) 由 $f'(x)<0,\ f''(x)<0$ 可知, 曲线 $y=f(x)$ 上凸递减, 故

$$\Delta y<\mathrm{d}y<0.$$

(3) 根据微分的定义选 B.

2. 填空题:

(1) $\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;

(2) $\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;

(3) $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}(\quad)$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\mathrm{d}(\quad)$;

(6) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{d}(\quad)$;

(7) $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{d}(\quad)$;

(8) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}=\mathrm{d}(\quad)$.

解

(1) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$. (2) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x$. (3) $x-\dfrac{1}{x}$. (4) $2\sqrt{x}$.

(5) $-\cot x$. (6) $\arcsin x$. (7) $\arctan x$. (8) $2\sqrt{x-1}$.

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$；　(2) $y=x^{\sqrt{x}}+\sin\sqrt{x}$；

(3) $y=x^x\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arctan\dfrac{x}{2}$；

(5) $y=\cos^2 x-x\sin x$；　(6) $y=\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；

(7) $y=\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$；　(8) $y=\Big(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)^{\cos x}$；

(9) $y=(1+\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$；　(10) $y=\dfrac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$.

解　(1) 由于

$$y=\frac{1}{2}\ln|x-a|-\frac{1}{2}\ln|x+a|,$$

所以

$$\mathrm{d}y=\Big(\frac{1}{2(x-a)}-\frac{1}{2(x+a)}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}x^{\sqrt{x}}+\mathrm{d}\sin\sqrt{x}\\&=x^{\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sqrt{x}\ln x)+\cos\sqrt{x}\cdot\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=x^{\sqrt{x}}\Big(\ln x\cdot\mathrm{d}\sqrt{x}+\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\mathrm{d}x\Big)\\&=x^{\sqrt{x}}\Big(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\Big)\cdot\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\mathrm{d}x^x+x^x\mathrm{d}\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\\&=x^x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\mathrm{d}(x\ln x)+x^x\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{x}}\\&=\Big[x^x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\ln x+1)-\frac{2}{3}\cdot x^{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}\Big]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(4)

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{2}{4+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \Big[\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \Big(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big) + \frac{2}{4+x^2}\Big]\mathrm{d}x$$

$$= \Big(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2}{4+x^2}\Big)\mathrm{d}x.$$

(5)

$$\mathrm{d}y = 2\cos x\ \mathrm{d}\cos x - \sin x\ \mathrm{d}x$$

$$= (-\sin 2x - \sin x - x\cos x)\ \mathrm{d}x.$$

(6)

$$\mathrm{d}y = \frac{1+x}{2} \cdot \mathrm{d}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{(1+x)^{3/2}}{4\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}\frac{1-x}{1+x} = \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

(7)

$$\mathrm{d}y\ = \frac{1}{x-1}\mathrm{d}(x^2+\sqrt[3]{x}+1) - \frac{x^2+\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \Big[\frac{1}{x-1}\Big(2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Big) - \frac{x^2+\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}\Big]\mathrm{d}x.$$

(8)

$$\mathrm{d}y = \Big(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^{\cos x}\mathrm{d}\Big(\cos x \cdot \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$$

$$= \Big(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^{\cos x}\Big(-\sin x \cdot \ln\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \frac{\cos x}{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \mathrm{d}\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$$

$$= \Big(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^{\cos x}\Big(-\sin x \cdot \ln\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

(9)

$$\mathrm{d}y\ = (1+\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}\mathrm{d}\frac{\ln(1+\sin x)}{\cos x}$$

$$= (1+\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}\Big(\frac{\mathrm{d}(1+\sin x)}{\cos x\cdot(1+\sin x)} - \frac{\ln(1+\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x\Big)$$

$$= (1+\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}\Big(\frac{1}{1+\sin x} - \frac{\sin x\ln(1+\sin x)}{\cos^2 x}\Big)\mathrm{d}x.$$

(10)

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})}{\sin x+\cos x} - \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)$$

$$= \Big[\frac{\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x})}{\sin x+\cos x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}\Big]\,\mathrm{d}x.$$

4. 求下列函数的二阶微分：

(1) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; (2) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(1-x)}}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sin x}+\ln(1+\cos x)$;

(5) $y=x^{\sin x}+x^{\cos x}$; (6) $y=\tan\sqrt{1-x^2}$.

解 (1)

$$\mathrm{d}y = -\frac{x}{\sqrt{x^2-x^4}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}^2y = \frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x^4}}\mathrm{d}x^2.$$

(2)

$$\mathrm{d}y = \frac{1+x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}^2y = \frac{1-3x-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}\mathrm{d}x^2$$

(3)

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{2(1-x)[\ln(1-x)]^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}^2y = \frac{3+2\ln(1-x)}{4(1-x)^2[\ln(1-x)]^{5/2}}\mathrm{d}x^2$$

(4)

$$\mathrm{d}y = (-\cot x\csc x-\tan\frac{x}{2})\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}^2y = \Big(\cot^2 x\csc x+\csc^2 x-\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\Big)\mathrm{d}x^2$$

(5)

$$\mathrm{d}y = [x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})+x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x}-\ln x\sin x)]\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}^2y = \Big\{\frac{1}{x^2}\Big[\cos^2 x(x^{\cos x}+x^{2+\sin x}\ln^2 x)$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad -\cos x(x^{\cos x}-2x^{1+\sin x})\ln x\sin x\Big]\\
&+\sin x\Big[-2x^{1+\cos x}-x^{\sin x}-x^{2+\sin x}\ln x\\
&\qquad\qquad +(x^{\sin x}+x^{2+\cos x}\ln^2 x)\sin x\Big]\Big\}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\mathrm{d}y=-\frac{x\sec^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x
$$

$$
\mathrm{d}^2y=\frac{\sec^2\sqrt{1-x^2}(-1+2x\sqrt{1-x^2}\tan\sqrt{1-x^2})}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x^2
$$

5. 利用微分求近似值：

(1) $\sqrt[3]{1.02}$;　　(2) $\lg 11$;

(3) $\sin 29^\circ$;　　(4) $\cos 149^\circ$;

(5) $\tan 45^\circ 10'$;　　(6) $\arcsin 0.5002$.

解　根据近似公式 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, 有

(1) $\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\dfrac{1}{3}\cdot 0.02$.　　(2) $\lg 11\approx 1+\dfrac{1}{10\cdot\ln 10}\cdot 1$.

(3) $\sin 29^\circ\approx\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}$.　　(4) $\cos 149^\circ\approx-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}$.

(5) $\tan 45^\circ 10'\approx\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\dfrac{10}{60}\cdot\dfrac{\pi}{180}$.　(6) $\arcsin 0.5002\approx\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{0.0002}{\sqrt{1-0.5^2}}$.

6. 如图 2.11 所示的电缆 $\overset{\frown}{AOB}$ 的长为 s, 跨度为 $2l$, 电缆的最底点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 h, 则电缆长可按公式

$$
s=2l\Big(1+\frac{2h^2}{3l^2}\Big)
$$

计算. 问当 h 变化了 Δh 时, 电缆长的变化约为多少？

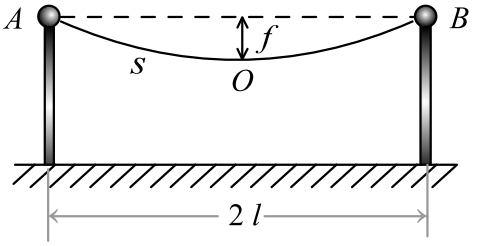


图 2.11

解 由 $s = 2l\left(1 + \dfrac{2h^2}{3l^2}\right)$ 可得

$$\mathrm{d}s = \frac{8h}{3l}\,\mathrm{d}h = \frac{8h}{3l}\,\Delta h.$$

7. 有一圆柱形插头，截面半径 r 为 0.15cm, 长度 l 为 4cm, 为了提高它的导电性能，要在圆柱的侧面渡上一层厚为 0.001cm 的纯铜，问大约需要多少克纯铜 (铜的密度为 $8.9\mathrm{g/cm}^3$)?

解 根据插头的质量

$$M = \rho \cdot \pi r^2 l,$$

有

$$\mathrm{d}M = \rho \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}l.$$

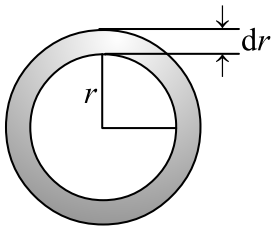


图 2.12

将 $r = 0.15,\ l = 4,\ \mathrm{d}r = 0.001,\ \rho = 8.9$ 代入有

$$\mathrm{d}M = 8.9 \times 2\pi \times 0.15 \times 4 \times 0.001 = 0.034.$$

习 题 2.4 B

1. 设 $u = u(x), v = v(x)$ 是可微函数，求

(1) $\mathrm{d}\sqrt{\dfrac{u}{v}}$;

(2) $\mathrm{d}\dfrac{1 - \sin\sqrt{u+v}}{1 + \sin(uv)}$;

(3) $\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\sin(uv^2)}$;

(4) $\mathrm{d}\ln(\mathrm{e}^u+\tan\dfrac{v}{u})$;

(5) $\mathrm{d}^2\arcsin(uv)$;

(6) $\mathrm{d}^2\sqrt{uv}$;

(7) $\mathrm{d}^2\arctan\sqrt{u^2+v^2}$;

(8) $\mathrm{d}^2\arctan\sqrt{\dfrac{u}{v}}$.

解 (1)

$$\mathrm{d}\sqrt{\frac{u}{v}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}\cdot\mathrm{d}\frac{u}{v}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}\cdot\frac{u'v-uv'}{v^2}\,\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\frac{1-\sin\sqrt{u+v}}{1+\sin(uv)}\\
&=\frac{1}{1+\sin(uv)}\cdot\mathrm{d}(1-\sin\sqrt{u+v})+(1-\sin\sqrt{u+v})\cdot\mathrm{d}\frac{1}{1+\sin(uv)}\\
&=\frac{\cos\sqrt{u+v}}{1+\sin(uv)}\cdot\mathrm{d}\sqrt{u+v}-\frac{1-\sin\sqrt{u+v}}{(1+\sin(uv))^2}\cdot\mathrm{d}(1+\sin(uv))\\
&=\left[\frac{\cos\sqrt{u+v}\cdot(u'+v')}{(1+\sin(uv))\cdot\sqrt{u+v}}-\frac{(1-\sin\sqrt{u+v})\cdot\cos(uv)\cdot(u'v+uv')}{(1+\sin(uv))^2}\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\sin(uv^2)}&=\mathrm{e}^{\sin(uv^2)}\mathrm{d}\sin(uv^2)\\
&=\mathrm{e}^{\sin(uv^2)}\cos(uv^2)\mathrm{d}(uv^2)\\
&=\mathrm{e}^{\sin(uv^2)}\cos(uv^2)(u'v^2+2uvv')\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ln(\mathrm{e}^u+\tan\frac{v}{u})&=\frac{1}{\mathrm{e}^u+\tan\dfrac{v}{u}}\cdot\mathrm{d}(\mathrm{e}^u+\tan\frac{v}{u})\\
&=\frac{1}{\mathrm{e}^u+\tan\dfrac{v}{u}}\cdot\Big(\mathrm{e}^u u'+\sec^2\frac{v}{u}\cdot\frac{v'u-vu'}{u^2}\Big)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(5)

$$\mathrm{d}\arcsin(uv)=\frac{u'v+uv'}{\sqrt{1-(uv)^2}}\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\arcsin(uv) &= \frac{1}{\sqrt{1-(uv)^2}}\,\mathrm{d}(u'v+uv')\mathrm{d}x-(u'v+uv')\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{1-(uv)^2}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{u''v+2u'v'+uv''}{\sqrt{1-(uv)^2}}\,(\mathrm{d}x)^2-\frac{u'v+uv'}{1-(uv)^2}\cdot\mathrm{d}(1-(uv)^2)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{u''v+2u'v'+uv''}{\sqrt{1-(uv)^2}}+\frac{(u'v+uv')^2\cdot 2uv}{1-(uv)^2}\right](\mathrm{d}x)^2.\end{aligned}$$

(6)

$$\mathrm{d}\sqrt{uv}=\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot(u'v+uv')\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\sqrt{uv} &= \frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot\mathrm{d}(u'v+uv')\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(u'v+uv')\,\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{uv}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{u''v+2u'v'+uv''}{2\sqrt{uv}}+\frac{(u'v+uv')^2}{4(uv)^{3/2}}\right](\mathrm{d}x)^2.\end{aligned}$$

(7)

$$\mathrm{d}\arctan\sqrt{u^2+v^2}=\frac{2uu'+2vv'}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^2\arctan\sqrt{u^2+v^2}\\ &= \frac{2(uu''+2u'^2+vv''+2v'^2)}{1+u^2+v^2}(\mathrm{d}x)^2+2(uu'+vv')\mathrm{d}\frac{1}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{2(uu''+2u'^2+vv''+2v'^2)}{1+u^2+v^2}-\frac{4(uu'+vv')^2}{(1+u^2+v^2)^2}\right](\mathrm{d}x)^2.\end{aligned}$$

(8)

$$\mathrm{d}\arctan\sqrt{\frac{u}{v}}=\frac{v^2}{u^2+v^2}\cdot\mathrm{d}\frac{u}{v}=\frac{u'v-uv'}{u^2+v^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\arctan\sqrt{\frac{u}{v}} &= \left[\frac{(u'v-uv')'}{u^2+v^2}-\frac{(u'v-uv')(u^2+v^2)'}{(u^2+v^2)^2}\right](\mathrm{d}x)^2\\ &= \left[\frac{u''v-2u'v'+uv''}{u^2+v^2}-\frac{2(u'v-uv')(uu'+vv')}{(u^2+v^2)^2}\right](\mathrm{d}x)^2.\end{aligned}$$

2. 在半径为 1cm 的铁球表面上镀一层厚度为 0.01cm 的铜. 试用微分计算大约需要多少克铜 (铜的密度为 $8.9\mathrm{g/cm}^3$).

解 根据球的质量

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

可知

$$\mathrm{d}M = \rho \cdot 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r.$$

将 $\rho = 8.9,\ r = 1,\ \mathrm{d}r = 0.001$ 代入可得

$$\mathrm{d}M = 8.9 \times 4\pi \times 1^2 \times 0.001 = 0.356\pi \ (\mathrm{g}).$$

3. 为了使计算出的球体体积准确到 1%, 问量度半径 R 时所允许发生的相对误差至多是多少？

解 根据球的体积

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

可知

$$\frac{|\mathrm{d}R|}{R} = \frac{|\mathrm{d}V|}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{|\mathrm{d}V|}{4\pi R^3}.$$

由于 $\dfrac{|\mathrm{d}V|}{V} = 0.01$, 所以量度半径 R 时所允许发生的相对误差至多是

$$\frac{|\mathrm{d}R|}{R} = \frac{0.01}{3}.$$

4. 要检验一个半径为 2 米，中心角为 55° 的扇形工件，可以直接量其中心角或者直接量这个角所对的弦长，设量度角的最大误差为 0.5°, 量弦长时的最大误差为 3 毫米，问用哪一种方法检验比较准确？

解 扇形的中心角 θ, 半径 R 与弦长 l 的关系为

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{l/2}{R} = \frac{l}{2R}.$$

由此可知

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2R\cos\frac{\theta}{2}} \cdot \mathrm{d}l.$$

将 $R = 2000, \theta = 55^\circ, |\mathrm{d}l| = 3$ 代入可得

$$|\mathrm{d}\theta| = \frac{1}{2 \times 2000 \times \cos 22.5^\circ} \times 3 < \frac{0.5\pi}{180}.$$

所以量弦长比较准确.

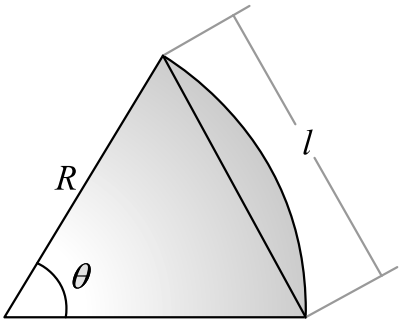


图 2.13

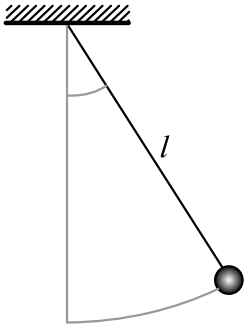


图 2.14

5. 单摆的周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, 为使 T 增大 0.05 秒, 问摆长在 $l=20\text{cm}$ 基础上要修改多少 (其中 $g=981\text{cm/s}^2$) ?

解 由 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 可得

$$\mathrm{d}T=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\cdot\mathrm{d}l.$$

将 $\mathrm{d}T=0.05$, $l=20$, $g=98$ 代入可得

$$\mathrm{d}l=\frac{\sqrt{98\times 20}}{\pi}\times 0.05=\frac{7}{\pi}.$$

6. 设 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x)=\mathrm{e}^{-f(x)}$, $f(0)=1$, 求 $\mathrm{d}^n f(0)$.

解 根据

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-f(x)},$$

$$f''(x)=-\mathrm{e}^{-f(x)}f'(x)=-\mathrm{e}^{-2f(x)},$$

$$f'''(x)=2\mathrm{e}^{-2f(x)}f'(x)=2\mathrm{e}^{-3f(x)},$$

归纳可得

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,\mathrm{e}^{-nf(x)}.$$

由此可知

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,\mathrm{e}^{-n}.$$

故 $\mathrm{d}^n f(0) = f^{(n)}(0)\,(\mathrm{d}x)^n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\mathrm{e}^{-n}\,(\mathrm{d}x)^n$.

7. 设 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, 若 $c \neq 0$, 求 $\mathrm{d}^n f(x)$.

解 由于

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\Big(x + \frac{d}{c}\Big)^{-1},$$

所以

$$f^{(n)}(x) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot (-1)^n n!\,\Big(x + \frac{d}{c}\Big)^{-1-n}.$$

由此可知

$$\mathrm{d}^n f(x) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot (-1)^n n!\,\Big(x + \frac{d}{c}\Big)^{-1-n}\,(\mathrm{d}x)^n.$$

8. 设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x$, 求 $\mathrm{d}^n f(0)$.

解 由

$$f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \cdot \arcsin x - \frac{1}{1-x^2}$$

可知

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) + 1 = 0.$$

进一步，有

$$(1-x^2)f''(x) - 3xf'(x) + f(x) = 0,$$

$$(1-x^2)f'''(x) - 5xf''(x) + 4f'(x) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) + 4^n f^{(n-1)}(x) = 0.$$

于是有

$$f'(0) = -1,\ f'(0) = 0,\ f'''(0) = -4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ -4^n(n!)^2, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

故

$$\mathrm{d}f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ -4^n(n!)^2(\mathrm{d}x)^n, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

9. 设函数 $f(t)$ 二阶可导且 $f'(t)\neq 0$, 若 $y=y(x)$ 是由方程组

$$\begin{cases}x=f(t)\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$$

确定的隐函数，求 $\mathrm{d}^2y(x)$.

解 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(t),\ (\mathrm{e}^y\sin t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^y\cos t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{2-y},\quad y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)f'(t)}.$$

方程 $(2-y)\mathrm{e}^{-y}y'=\dfrac{\cos t}{f'(t)}$ 两端关于 t 求导，有

$$(2-y)\mathrm{e}^{-y}y''-\mathrm{e}^{-y}y'^2-(2-y)\mathrm{e}^{-y}y'^2=-\frac{f'(t)\sin t+f''(t)\cos t}{f'^3(t)}.$$

于是

$$y''=\frac{(3-y)y'^2}{2-y}-\frac{\mathrm{e}^y(f'(t)\sin t+f''(t)\cos t)}{f'^3(t)(2-y)}.$$

由此可知

$$\mathrm{d}^2y=\left[\frac{(3-y)}{2-y}\Big(\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)f'(t)}\Big)^2-\frac{\mathrm{e}^y(f'(t)\sin t+f''(t)\cos t)}{f'^3(t)(2-y)}\right]\mathrm{d}x^2.$$

10. 设函数 $f(x)$ 处处可导，$g(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 求 $\mathrm{d}^2(f\circ g)(x)$.

解 由于

$$g'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases}12x^2\sin\dfrac{1}{x}-6x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\[2ex] 0, & x=0,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}(f\circ g)''(x) &= \Big[f'(g(x))g'(x)\Big]'=f''(g(x))g'^2(x)+f'(g(x))g''(x)\\ &=\begin{cases}\Big[4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}\Big]^2 f''(g(x))\\ \qquad\quad +\Big[12x^2\sin\dfrac{1}{x}-6x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}\Big]f'(g(x)), & x\neq 0,\\[2ex] 0, & x=0.\end{cases}\end{aligned}$$

由此可知,

$$\mathrm{d}^2y=\begin{cases}\Big[\Big(4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}\Big)^2 f''(g(x))\\ \qquad\quad +\Big(12x^2\sin\dfrac{1}{x}-6x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}\Big)f'(g(x))\Big]\,\mathrm{d}x^2, & x\neq 0,\\[2ex] 0, & x=0.\end{cases}$$

11. 设函数 $f(x)$ 存在二阶导数，且 $f'(xy)\neq\dfrac{1}{x}$. 若 $y=y(x)$ 是由方程 $y=f(xy)$ 确定的隐函数，求 $\mathrm{d}^2y(x)$.

解 方程 $y=f(xy)$ 两端关于 x 求导可得

$$y'=f'(xy)(y+xy').$$

由此可得

$$y''=f''(xy)(y+xy')^2+f'(xy)(2y'+xy'').$$

联立两式解之可得

$$y''=\frac{y^2f''(xy)+2yf^2(xy)(1-xf'(xy))}{(1-xf'(xy))^3}.$$

由此可知,

$$\mathrm{d}^2y=\frac{y^2f''(xy)+2yf^2(xy)(1-xf'(xy))}{(1-xf'(xy))^3}\,\mathrm{d}x^2.$$

12. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^y+xy=1+\sin y$ 确定的隐函数，求 d^2y.

解 原式两端关于 x 求导得

$$\mathrm{e}^y\cdot y'+y+xy'=\cos y\cdot y'.$$

解之得

$$y'=\frac{y}{\cos y-x-\mathrm{e}^y}.$$

于是

$$y''=\frac{y'}{\cos y-x-\mathrm{e}^y}-\frac{y(-\sin y\cdot y'-1-\mathrm{e}^y\cdot y')}{(\cos y-x-\mathrm{e}^y)^2}.$$

由此可知,

$$\mathrm{d}^2y=\left[\frac{1}{\cos y-x-\mathrm{e}^y}-\frac{y(-\sin y-1-\mathrm{e}^y)}{(\cos y-x-\mathrm{e}^y)^2}\right]\cdot\frac{y}{\cos y-x-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x^2.$$

总 习 题 二

1. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$, 并判定 $f'(0)$ 的存在性:

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geq 0\end{cases};\qquad (2)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

解 (1) 由于

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0}{x-0}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1,$$

所以 $f'(0)=1$.

(2) 由于

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}-0}{x-0}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}-0}{x-0}=0,$$

所以 $f'(0)$ 不存在.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=a$ $(a\neq 0)$, 又对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 恒有

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},$$

求 $f'(x)$ 及 $f(x)$.

解 在 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 中，令 $y=0$ 可得

$$f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)}.$$

解 $f(0)$ 可得 $f(0)=0$. 按照导数的定义，有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\left[1+f^2(x)\right]=f'(0)\cdot\left[1+f^2(x)\right].\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)\,\mathrm{d}x.$$

两端积分可得

$$\arctan f(x)=f'(0)x+C.$$

根据 $f(0)=0$ 可知， $C=0$. 因此

$$f(x)=\tan f'(0)x.$$

3. 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解 1　由 $(1-x^2)f(x)=x^2$ 可得

$$(1-x^2)f'(x)-2xf(x)=2x,$$

$$(1-x^2)f''(x)-4xf'(x)-2f(x)=2,$$

$$(1-x^2)f'''(x)-6xf''(x)-6f'(x)=0,$$

$$(1-x^2)f^{(4)}(x)-8xf'''(x)-12f''(x)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)-2nxf^{(n-1)}(x)-n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0.$$

于是有

$$f'(0)=0,\ f''(0)=2,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=4!$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ n!, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

解 2　由于 $|x|<1$ 时，有

$$f(x)=x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots,$$

所以根据泰勒级数，有

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ n!, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

4. 证明 Legendre 多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\Big[(x^2-1)^n\Big]^{(n)}$ 满足方程

$$(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0.$$

解　令 $f(x)=(x^2-1)^n$, 则有

$$(x^2-1)\,f'(x)=2nx\,f(x).$$

由此可得

$$(x^2-1)\,f''(x)-2(n-1)xf'(x)-2nf(x)=0,$$

$$(x^2-1)\,f'''(x)-2(n-2)xf''(x)-2(2n-1)f'(x)=0,$$

$$(x^2-1)\,f^{(4)}(x)-2(n-3)xf'''(x)-2(3n-3)f''(x)=0,$$

$$(x^2-1)\,f^{(5)}(x)-2(n-4)xf^{(4)}(x)-2(4n-6)f'''(x)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x^2-1)\,f^{(k+2)}(x)+2(n-k-1)xf^{(n+1)}(x)-(2n-k)(k+1)f^{(n)}(x)=0.$$

特别有

$$(x^2-1)\,f^{(n+2)}(x)+2xf^{(n+1)}(x)-n(n+1)f^{(n)}(x)=0.$$

此即

$$(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0.$$

5. 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{\arcsin(\sin x)}{x}$；　　(2) $y=\mathrm{e}^x\arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$；

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})$；　　(4) $y=\ln\cot\sqrt{\dfrac{x}{2}}+\cos x\cdot\ln\tan x$.

解　(1) 函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图象为

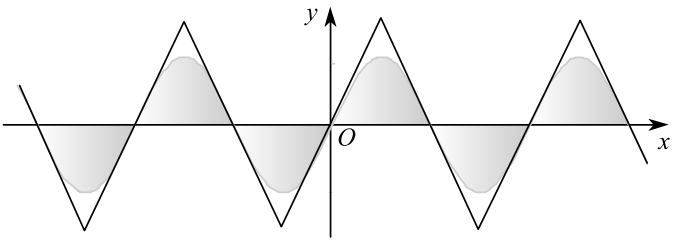


图 2.15

$$y'=\frac{\cos x}{x\sqrt{1-\sin^2 x}}-\frac{\arcsin(\sin x)}{x^2}.$$

(2)

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{e}^x \arctan\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^2 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^2}\cdot 2\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\cdot\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)' \\ &= \mathrm{e}^x \arctan\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^2 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\cdot\frac{2(1+x)}{1-x}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\Big(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\,\Big)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\Big(x+\sqrt{x}\Big)'\right] \\ &== \frac{1}{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\Big(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\right]. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cot\sqrt{\frac{x}{2}}}\cdot\Big(\cot\sqrt{\frac{x}{2}}\,\Big)' - \sin x\cdot\ln\tan x + \frac{\cos x}{\tan x}\cdot(\tan x)' \\ &= -\frac{\csc^2\sqrt{\frac{x}{2}}}{\cot\sqrt{\frac{x}{2}}}\cdot\Big(\sqrt{\frac{x}{2}}\,\Big)' - \sin x\cdot\ln\tan x + \frac{\cos x}{\tan x}\cdot\sec^2 x \\ &= -\frac{\csc\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} - \sin x\cdot\ln\tan x + \csc x. \end{aligned}$$

6. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y = 2^{\sin x}\cos\dfrac{1}{x}$; (2) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) 原式两端取对数，有

$$\ln|y| = \ln 2\cdot\sin x + \ln\left|\cos\frac{1}{x}\right|.$$

两端关于 x 求导得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln 2\cdot\cos x + \tan\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}.$$

两端关于 x 求导得

$$-\frac{1}{y^2}\cdot y'^2+\frac{1}{y}\cdot y''=-\ln 2\cdot\sin x-\sec\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^4}-2\tan\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^3}.$$

(2) 原式两端取对数，有

$$\ln|y|=\ln|\ln x|-\frac{1}{2}\ln(1-x^2).$$

两端关于 x 求导得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{x\ln x}+\frac{x}{1-x^2}.$$

两端关于 x 求导得

$$-\frac{1}{y^2}\cdot y'^2+\frac{1}{y}\cdot y''=-\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}+\frac{1}{1-x^2}+\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

7. 求下列由参数方程所确定函数的二阶导数：

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}\,),\\ y=t-\tan t.\end{cases}$

解 (1) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3a\sin^2 t\cos t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\tan t}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sec^2 t}{3a\cos^2 t\sin t}.$$

(2) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\sec^2 t=-\tan^2 t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\tan^2 t\cdot\sqrt{1+t^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(-\tan^2 t\cdot\sqrt{1+t^2})}{\mathrm{d}t}\cdot\sqrt{1+t^2}\\ &= -2\tan t\cdot\sec^2 t\cdot(1+t^2)-t\tan^2 t.\end{aligned}$$

8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A) 充分必要条件; (B) 充分条件但非必要条件;

(C) 必要条件但非充分条件; (D) 既非充分条件又非必要条件.

解 由于

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x-0}=f'(0)+f(0),$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x-0}=f'(0)-f(0),$$

所以

$$F'(0)\text{存在}\iff F'_+(0)=F'_-(0)\iff f(0)=0.$$

故选 A.

9. 求经过原点且与曲线 $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ 相切的直线方程.

解 由 $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ 可得

$$y'=\frac{-4}{(x+5)^2}.$$

根据斜率关系，有

$$\frac{-4}{(x+5)^2}=\frac{y}{x}.$$

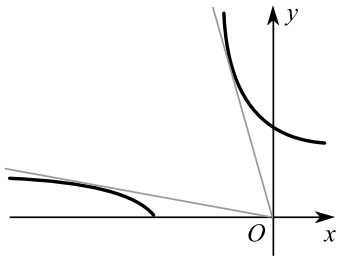


图 2.16

解之可得 $x=-3$, $x=-15$. 故所求切线方程为

$$y=-3x\text{ 或 }y=-15x.$$

10. 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(x)>0$, n 为自然数，求

$$\lim_{n\to\infty}\Big[f(a+\frac{1}{n})/f(a)\Big]^n.$$

解 令 $x_n=\Big[f(a+\frac{1}{n})/f(a)\Big]^n$, 则

$$\ln x_n=\frac{\ln\Big(a+\frac{1}{n}\Big)-\ln f(a)}{1/n}.$$

两端取极限，有

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\Big[\ln f(x)\Big]'_{x=a}=\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}^{f'(a)/f(a)}.$$

11. 已知当 $x\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 有定义且二阶可导，问 a,b,c 为何值时，函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\le 0\\ ax^2+bx+c, & x>0\end{cases}$$

二阶可导.

解 由于 $F(0-)=F(0+)$, 所以 $c=f(0)$; 由于 $F'(0-)=F'(0+)$, 所以 $b=f'(0)$; 由于 $F''_-(0)=F''_+(0)$, 所以 $2a=f''(0)$.

12. 设 $y=\operatorname{arccot}x$, 则 $y^{(n)}=(-1)^n(n-1)!\,\sin^n y\sin ny$.

证 由 $x=\cot y$ 可得 $y'=-\sin^2 y$. 由此可知

$$y''=-2\sin x\cos x\cdot y'=\sin^2 y\cdot\sin 2y;$$

$$y'''=(2\sin y\cos y\sin 2y+2\sin^2 y\cos 2y)\cdot y'=-2\sin^3 y\sin 3y;$$

$$y^{(4)}=-2(3\sin^2 y\cos y\sin 3y+3\sin^3 y\cos 3y)\cdot y'=3\cdot 2\sin^4 y\sin 4y;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=(-1)^n(n-1)!\,\sin^n y\sin ny.$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(1)=a$ $(a\neq 0)$, 又对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$, 恒有

$$f(xy)=f(x)+f(y),$$

求 $f'(x)$ 及 $f(x)$.

解 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，令 $y=1$ 可得

$$f(x)=f(x)+f(1),$$

因此 $f(1)=0$.

根据导数的定义，有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+xy)-f(x)}{xy}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x(1+y))-f(x)}{xy}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{[\,f(x)+f(1+y)\,]-f(x)}{xy}=\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)}{xy}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\cdot\frac{1}{x}=f'(1)\cdot\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

于是有

$$\mathrm{d}f(x)=f'(1)\cdot\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x.$$

两端积分可得

$$f(x)=f'(1)\ln x+C.$$

根据 $f(1)=0$, 有 $C=0$. 故 $f(x)=f'(1)\ln x$.

14. 设 $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$, 证明

$$a_0=f(x_0),\ a_1=f'(x_0),\ a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\cdots,a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

解 将 $x=x_0$ 代入

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

可得 $a_0=f(x_0)$; 将 $x=x_0$ 代入

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$

可得 $a_1 = f'(x_0)$; 依次类推即可得到所求结论.

15. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ 且满足

$$\lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\Big)^{1/h} = \mathrm{e}^{1/x},$$

求 $f(x)$.

解 令 $y=\Big(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\Big)^{1/h}$, 则

$$\ln y = \frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}.$$

令 $h\to 0$, 则

$$\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0}\ln y = x[\ln f(x)]'.$$

于是 $\ln f(x) = -\dfrac{1}{x}+C$. 根据 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ 可知, $C=0$. 故

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}.$$

第三章　中值定理及其应用

§3.1　微分中值定理

习 题 3.1 A

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $f(a)=f(b)=0,\ f'(a)\cdot f'(b)>0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

证　不妨设 $f'(a)>0$. 由 $f'(a)\cdot f'(b)>0$ 可知，$f'(b)>0$. 由 $f'(a)>0,\ f'(b)>0$, 根据保号性可知，存在 $a_1,b_1\in(a,b)$, 使得

$$f(a_1)>f(a)=0,\ f(b_1)<f(b)=0.$$

于是根据连续函数的介值定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试利用面积函数

$$S(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1\\ a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\end{vmatrix}$$

证明拉格朗日中值公式.

证　根据行列式的性质，有 $S(a)=S(b)=0$. 于是根据 Roll 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$S'(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0\\ a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\end{vmatrix}=0.$$

由此可知，$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

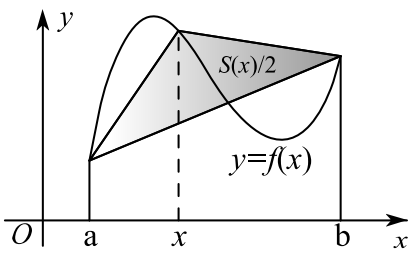


图 3.1

3. 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

据此证明柯西中值公式.

证 令

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix},$$

则根据行列式的性质, 有 $F(a) = F(b) = 0$. 于是根据 Roll 定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

令 $h(x) = 1$, $g'(x) \neq 0$, 则由 $F'(\xi) = 0$ 可知,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证 令

$$F(x) = (x-a) \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} - (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix},$$

则 $F(a) = F(b) = 0$. 于是根据 Roll 定理，存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. 由此可知,

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

5. 证明下列恒等式或不等式

(1) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $|\arctan x - \arctan y| \le |x - y|$;

(3) 当 $0 < a < b$ 时，$\dfrac{b-a}{b} < \ln \dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$;

(4) 当 $x > 1$ 时，$\mathrm{e}^x > \mathrm{e}x$;

(5) 当 $x \ge 0$ 时，$\ln(1+x) \ge \dfrac{\arctan x}{1+x}$;

(6) 设 $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, 证明

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} < \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\cos^2 \beta};$$

(7) 设 $0 < a < b, n > 1$, 证明

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a).$$

证 (1) 设 $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，并且有

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

故恒有 $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, 即 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) 根据 Lagrange 定理，有

$$|\arctan x - \arctan y| = \left|\frac{1}{1+\xi^2} \cdot (x-y)\right| \le |x-y|.$$

(3) 根据 Lagrange 定理，存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{\xi}.$$

由此可知

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}.$$

(4) 根据 Lagrange 定理，存在 $\xi \in (1, x)$, 使得

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{\xi}(x-1) > \mathrm{e}(x-1).$$

由此可知 $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}x$.

(5) 根据 Cauchy 定理，存在 $\xi \in (1, x)$, 使得

$$\frac{\ln(1+x)}{\arctan x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{\arctan x - \arctan 0} = \frac{1}{1+\xi} \Big/ \frac{1}{1+\xi^2} > \frac{1}{1+x}.$$

(6) 根据 Lagrange 定理，存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$, 使得

$$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta - \alpha} = \sec^2\xi.$$

由于 $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, 所以 $\sec^2\alpha < \sec^2\xi < \sec^2\beta$.

(7) 根据 Lagrange 定理，存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$, 使得

$$\frac{b^n - a^n}{b-a} = n\xi^{n-1}(b-a).$$

由于 $0 < a < b$, 所以

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a).$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f^2(b) - f^2(a)}{b-a} = 2f(\xi)f'(\xi).$$

证 由于 $\left[f^2(x)\right]' = 2f(x)f'(x)$, 所以根据 Lagrange 定理，存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$, 使得

$$\frac{f^2(b) - f^2(a)}{b-a} = 2f(\xi)f'(\xi).$$

7. 设 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}.$$

证 令 $g(x) = x^2$, 则由 Cauchy 定理有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}.$$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.

证 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$, 则有 $F(a)=F(b)=0$. 于是根据 Roll 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 由此可知 $f'(\xi)=f(\xi)$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{1}{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b}\begin{vmatrix}\mathrm{e}^a & \mathrm{e}^b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-f'(\xi).$$

证 根据 Cauchy 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b}\begin{vmatrix}\mathrm{e}^a & \mathrm{e}^b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}&=\frac{f(b)\mathrm{e}^{-b}-f(a)\mathrm{e}^{-a}}{\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-a}}\\ &=\frac{(f(x)\mathrm{e}^{-x})'}{(\mathrm{e}^{-x})'}\bigg|_{x=\xi}=f(\xi)-f'(\xi).\end{aligned}$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义, 若 $f'(x_0+)=f'(x_0-)=A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点可导且 $f'(x_0)=A$.

证 根据 Lagrange 定理, 有

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\xi\to x_0-}f'(\xi)=f'(x_0-)=A.$$

同理有 $f'_+(x_0)=f'(x_0+)=A$. 故 $f(x)$ 在 x_0 点可导且 $f'(x_0)=A$.

习 题 3.1 B

1. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数, 若 $a<c<b$, $f(a)=f(b)=f(c)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

证 根据 Roll 定理, 存在 $\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$, 使得

$$f'(\xi_1)=0,\ f'(\xi_2)=0.$$

因此由 Roll 定理可知, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 若 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 则对任意 $a,b>0$, 都存在不同的 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

证 由于

$$f(0)=0<\frac{b}{a+b}<1=f(1),$$

所以根据介值定理，存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=\dfrac{b}{a+b}$.

根据 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{b}{c(a+b)},$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{a}{(1-c)(a+b)},$$

由此可知

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=c(a+b)+(1-c)(a+b)=a+b.$$

3. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证 令 $f(x)=x^5+x-1$, 则 $f(0)=-1,\ f(1)=1$. 根据介值定理，方程 $f(x)=0$ 有解. 由于

$$f'(x)=5x^4+1>0,$$

所以当 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1\neq x_2$ 时，根据 Lagrange 中值定理，必有矛盾关系

$$0=f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)\neq 0.$$

因此方程 $f(x)=0$ 有解且解唯一.

4. 设常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0,$$

证明方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证 令

$$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

则 $f(0)=f(1)=0$. 根据 Roll 定理，存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 即

$$a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=0.$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，且 $x_1\cdot x_2>0$, 证明存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

证 根据 Cauchy 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}&=\frac{f(x_2)\cdot x_2^{-1}-f(x_1)\cdot x_1^{-1}}{x_2^{-1}-x_1^{-1}}\\ &=\frac{(f(x)\cdot x^{-1})'}{(x^{-1})'}\bigg|_{x=\xi}=f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi).\end{aligned}$$

6. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 若恒有

$$f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x),$$

证明在 (a,b) 内 $f(x)$ 的两个相邻零点之间 $g(x)$ 至少有一个零点.

证 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的两个相邻零点且 $x_1<x_2$. 则由 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$ 可知， $g(x)=0$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有解 $\Longleftrightarrow$ 在 (x_1,x_2) 内有解.

如果 $g(x)=0$ 在 $[x_1,x_2]$ 上无解，则函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导且

$$F(x_1)=F(x_2)=0.$$

根据 Roll 定理，必有 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$\frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0.$$

这与 $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ 矛盾. 故 $g(x) = 0$ 在 (x_1, x_2) 内必有解.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

证 (1) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 则 $F(0) = -1,\ f(1) = 1$. 因此根据介值定理，存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. 由此可知 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(2) 根据 Lagrange 中值定理，存在 $\eta \in (0,\xi), \zeta \in (\xi,1)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1-\xi}{\xi},$$

$$f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1-\xi}.$$

由此可知 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导且 $f'(x)$ 有界，则

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 内有界;

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续;

(3) $f(a-)$ 和 $f(a+)$ 存在.

证 (1) 设 $|f'(x)| \leq M,\ x_0 \in (a,b)$, 则根据 Lagrange 中值定理，有

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)(x - x_0)| \leq M(b-a).$$

故 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

(2) 设 $|f'(x)| \leq M$, 则根据 Lagrange 中值定理，有

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leq M|x-y|.$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(3) 由于 $f(x)$ 有界，所以存在 $x_n \in (a,b)$, 使得

$$x_n \to a,\ f(x_n) \to A.$$

于是由

$$|f(x) - f(x_n)| \leq M|x - x_n|$$

可知，当 $n \to \infty$ 时，有

$$|f(x) - A| \leq M|x - a|.$$

由此可知 $f(a-) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$. 同理可证 $f(a+)$ 存在.

9. (单侧极值定理) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极值，且 $f'_+(x)$ 在 x_0 点连续，则 $f'_+(x_0) = 0$.

证 不妨设 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点，则

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

假设 $f'_+(x_0) < 0$, 则由 $f'_+(x)$ 在 x_0 点的连续性可知，存在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使得

$$\begin{aligned} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) &\implies f'_+(x) < 0 \\ &\implies \text{当 } t \to x + \text{时, } f(x) > f(t). \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内严格递减，这与 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾. 故必有 $f'_+(x_0) = 0$.

10. (单侧中值定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内有连续的右导数，则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'_+(\xi)(b - a).$$

证 令

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a),$$

则 $F(a) = F(b) = 0$ 且 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 因此 $F(x)$ 在 (a, b) 内存在极值点 x_0. 根据单侧极值定理，必有 $F'_+(x_0) = 0$. 由此可知

$$f(b) - f(a) = f'_+(\xi)(b - a).$$

11. (单侧光滑定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty]$ 上连续，且有连续的右导数 $f'_+(x)$, 则 $f'(x)$ 存在.

证 根据单侧中值定理，有

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{\xi\to x}f'_+(\xi)=f'_+(x).$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，严格单调减，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=a<f(b)=b$, 则存在 $\xi_k\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_k)}=1$.

证 设

$$a=f(a)=y_0<y_1<\cdots<y_n=f(b)=b,\quad y_k-y_{k-1}=\frac{b-a}{n},$$

则根据 $f(x)$ 的连续性和单调性，存在

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得 $f(x_k)=y_k$.

根据 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_k\in(y_{k-1},y_k)$, 使得

$$\frac{b-a}{n}=\frac{f(b)-f(a)}{n}=f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

于是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-x_{k-1}}{b-a}=1.$$

13. 若 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $g'(x)\neq0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 令

$$F(x)=f(x)g(x)-f(a)g(x)-g(b)f(x),$$

则 $F(a)=F(b)=-f(a)g(b)$. 根据 Roll 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 由此可知

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0, f(\dfrac{1}{2})=1$, 则

(1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f(\eta) = \eta$;

(2) $\forall \lambda$, $\exists \xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda[\, f(\xi) - \xi\,] = 1$.

证 (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $F(1) = -1$. 根据介值定理, 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $F(\eta) = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.

(2) 令 $G(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}(f(x) - x)$, 则 $G(0) = 0$, $G(\eta) = 0$. 根据 Roll 定理, 存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $G'(\eta) = 0$. 由此可知

$$f'(\xi) - \lambda\,[\, f(\xi) - \xi\,] = 1.$$

15. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶连续可微, $|\, f(x)\,| \leq 1$ 且 $|\, f(0)\,|^2 + |\, f'(0)\,|^2 = 4$, 则存在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使得

$$f(\xi) + f''(\xi) = 0.$$

证 令 $F(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$, 则 $F(0) = 4$,

$$F'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)].$$

现证存在 ξ, 使得 $F'(\xi) = 0$ 但 $f'(\xi) \neq 0$.

根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1 \in (-2, 0)$, 使得

$$|f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(0) - f(-2)}{-2}\right| \leq \frac{|f(0)| + |f(-2)|}{2} \leq 1.$$

存在 $\xi_2 \in (0, 2)$, 使得

$$f'(\xi_2) = \left|\frac{f(2) - f(0)}{2}\right| \leq 1.$$

由于

$$F(\xi_1) = f^2(\xi_1) + [f'(\xi_1)]^2 \leq 1 + 1 = 2, \quad F(\xi_2) = f^2(\xi_2) + [f'(\xi_2)]^2 \leq 2,$$

$F(x) \in C[\xi_1, \xi_2]$, 且在端点处的函数值满足:

$$\max(F(\xi_1), F(\xi_2)) \leq 2 < F(0),$$

故最大值一定在内点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 达到，即

$$F(\xi) = \max_{\xi_1 \le x \le \xi_2} F(x).$$

又 ξ 是 $F(x)$ 的可导极值点，故 $F'(\xi) = 0$. 由于

$$[f'(x)]^2 = F(\xi) - f^2(\xi) \ge F(0) - 1 = 4 - 1 \ne 0,$$

即 $f'(\xi) \ne 0$, 故存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ，使得 $f'(\xi) + f''(\xi) = 0$.

16. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可微，在点 a 右连续. 若

$$\lim_{x \to a+} f'(x) = A,$$

则 $f'_+(a) = A$, 且 $f'(x)$ 在点 $x = a$ 右连续.

证 根据拉格朗日定理，有

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi \to a+} f'(\xi) = f'(a+) = A.$$

由此可知， $f'_+(a) = A$ 且 $f'(x)$ 在点 $x = a$ 右连续.

§3.2 罗必达法则

习 题 3.2 A

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x}{\cos x - 1}$;

(4) $\lim\limits_{x \to \pi} (\pi - x) \tan \dfrac{x}{2}$;

(5) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$;

(6) $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1})$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln x$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to \infty} (1+x^2)^{1/x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$;;

(13) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln \cot x}{\ln x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$;

(17) $\lim\limits_{x\to 0+} |\ln x|^{x}$;

(18) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

(19) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos x}\right)$;

(20) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^{\tan x}$;

(21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+x)\ln(1-x)}$;

(22) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\sin(x-1)}\right)$;

(23) $\lim\limits_{x\to 0+} (\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$;

(24) $\lim\limits_{x\to 0+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解

(1) 1;

(2) 2;

(3) 1;

(4) 2;

(5) $a^2(\ln a - 1)$;

(6) $\dfrac{1}{2}$;

(7) 0;

(8) 0;

(9) 1;

(10) 1;

(11) 1;

(12) 1;

(13) 1;

(14) 1;

(15) -1;

(16) 0;

(17) 1;

(18) 0;

(19) $-\dfrac{1}{3}$;

(20) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

(21) 1;

(22) $-\dfrac{1}{2}$;

(23) 0;

(24) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2. 说明下列极限不能用罗必达法则：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}}$.

证 (1) 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\text{不存在},$$

所以不能用罗必达法则.

(2) 由于

$$\lim_{x\to 0}(1+x+\sin x\cos x)=1\neq 0,$$

所以不能用罗必达法则.

3. 若在 a 的邻域内 $f''(x)$ 存在且连续，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证 根据罗必达法则，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(a+2h)-2f'(a+h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2f''(a+2h)-f''(a+h)=f''(a).$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 a 点存在二阶导数，证明

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2}=f''(a).$$

证 根据罗必达法则，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(a+t)-f'(a-t)}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f'(a+t)-f'(a)}{2t}-\frac{f'(a-t)-f'(a)}{2t}\right]=f''(a).$$

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax-x^2)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=2$, 试确定常数 a.

证 令 $y=(1+ax-x^2)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$, 两端取对数，有

$$\ln y=\frac{\ln(1+ax-x^2)}{\ln(1+x)}.$$

根据罗必达法则，有

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \lim_{x\to 0}\ln y=\frac{\ln(1+ax-x^2)}{\ln(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a-2x}{1+ax-x^2}\Big/\frac{1}{1+x}=a.\end{aligned}$$

6. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,0)$ 内可导，若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证 根据罗必达法则，有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0.$$

习 题 3.2 B

1. 设 $f(0)=0, f'(x)$ 在 $x=0$ 点某个邻域内连续，且 $f'(0)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{f(x)}=1$.

证 令 $y=x^{f(x)}$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\ln y &= \lim_{x\to 0+}f(x)\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{1/\ln x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{1/(-x\ln^2 x)}=-f'(0)\lim_{x\to 0+}x\ln^2 x=0.\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{f(x)}=1$.

2. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\Big[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{\mathrm{e}}\Big]^{1/x}, & x>0\\ \mathrm{e}^{-1/2}, & x\leq 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

证 由于

$$\lim_{x\to 0+}\ln f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{-1}{2(x+1)} = -\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\mathrm{e}^{-1/2}$. 由此可知，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 点的邻域内有一阶连续的导数，且 $f(x)>0, f(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{1/x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln f(x)}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = \mathrm{e}^{f'(0)}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 点具有二阶导数，且 $f''(0)=4, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{1/x}$.

解 令 $y=\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{1/x}$, 则

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x+f(x)|-\ln|x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1+f'(x)}{x+f(x)}-\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x+xf'(x)-x-f(x)}{x(x+f(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0).$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{1/x}=\mathrm{e}^{f''(0)/2}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的二阶导数， $f(0)=0$, 令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}.$$

求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$g'(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{x^2}.$$

由于 $g(x)$ 在 $x = 0$ 点连续且

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-xf''(x)}{2x} = -\frac{1}{2}f''(0),$$

所以 $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\dfrac{1}{2}f''(0)$ 且 $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, $f(0+) = 1$ 且满足

$$\lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\Big)^{1/h} = \mathrm{e}^{x\sin x},$$

求 $f(x)$.

解 令 $y = \Big(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\Big)^{1/h}$, 两端取对数, 有

$$\ln y = \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{h}.$$

根据罗必达法则, 有

$$\begin{aligned} x\sin x &= \lim_{h\to 0} \ln y = \lim_{h\to 0} \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+hx)x}{f(x+hx)} = \frac{f'(x)x}{f(x)}. \end{aligned}$$

由此可知 $\sin x = [\ln f(x)]'$. 于是 $f(x) = C\mathrm{e}^{-\cos x}$. 根据 $f(0+) = 1$ 可知

$$f(x) = \mathrm{e}^{1-\cos x}.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有连续的二阶导数, 且

$$f(0) \neq 0,\ f'(0) \neq 0,\ f''(0) \neq 0.$$

求常数 a, b, c, 使得

$$\lim_{h\to 0} \frac{af(\sin h) + bf(4\sin h) + cf(\sin 2h) - f(0)}{1 - \cos x} = 0.$$

证 由于原式分子必为无穷小，所以有

$$a+b+c=1.$$

假设可用罗必达法则，则有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af'(\sin h)\cos h+4bf'(4\sin h)\cos h+2cf'(\sin 2h)\cos 2h}{\sin x}.$$

由此可知

$$a+4b+2c=0.$$

假设还可用罗必达法则，则有

$$0=\lim_{h\to 0}[\,af''(\sin h)\cos^2 h+14bf''(4\sin h)\cos^2 h+4cf''(\sin 2h)\cos^2 2h\,].$$

由此可知

$$a+16b+4c=0.$$

解联立方程可得 $a=\dfrac{8}{3},\ b=\dfrac{1}{3},\ c=-2.$

8. 设 $g(x)$ 有连续的二阶导数，$g(0)=1, g'(0)=2, g''(0)=3$, 又设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}.$$

试讨论 $f'(x)$ 的连续性.

证 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\Big(\frac{g(x)-\cos x}{x}\Big)=\frac{xg'(x)+x\sin x-g(x)+\cos x}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时,

$$\begin{aligned}f'(x)\ &=f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-2x}{x^2}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{g''(0)+1}{2}=2.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}f'(x)\ =\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)+x\sin x-g(x)+\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) + xg''(x) + \sin x + x\cos x - g'(x) - \sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xg''(x) + x\cos x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0}[\, g''(x) + \cos x\,] = \frac{g''(0)+1}{2} = 2,$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续. 故 $f(x)$ 处处连续.

9. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x - \ln x \cdot \sin x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - \mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{a^x - 1}{a-1}\Big)^{1/x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{(\pi - 2x)^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x \cdot \sin x} - 1}{\mathrm{e}^{x^2} - 1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{\arcsin x}{x}\Big)^{\frac{1}{x^2}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^x - \tan x - 1}{1 - \cos x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x - \frac{1}{3}x^3}{x^5}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \Big[\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\Big]$;

(13) $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2}{\pi}\arctan x)^x$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e} - (1+x)^{1/x}}{x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$;

(16) $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4}\big[\ln(1 + \sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2 - \cos x} - 1)\big]$.

解

(1) $\dfrac{\pi}{2}$; (2) 0; (3) $-\dfrac{1}{12}$; (4) $\ln|a|$;

(5) $-\dfrac{1}{8}$; (6) $\dfrac{1}{2}$; (7) $\mathrm{e}^{1/6}$; (8) 1;

(9) $\dfrac{1}{15}$; (10) $\dfrac{5}{24}$; (11) 2; (12) $\dfrac{1}{2}$;

(13) $\mathrm{e}^{-2/\pi}$; (14) $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$; (15) $\dfrac{2}{3}$; (16) 1;

(17) $-\dfrac{7}{12}$.

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}-\cot x, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$.

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续;

(2) 求 $f'(x)$.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} f(x)\Big[\frac{g(x)}{x}-\cot x\Big] = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin x - x\cos x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)\sin x + g(x)\cos x - \cos x + x\sin x}{2x}\\ &= \frac{1}{2}g'(0)+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x} = g'(0),\end{aligned}$$

所以当 $a=g'(0)$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{g'(x)x-g(x)}{x^2}+\csc^2 x.$$

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}-\cot x - g'(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin x - x\cos x - x\sin x g'(0)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)\sin x + g(x)\cos x - \cos x - (\sin x + x\cos x)g'(0)}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{[g''(x)-g(x)-1+x\sin x]\sin x + 2[g'(x)-g'(0)]\cos x}{6x}\\ &= \frac{1}{2}g''(0)-\frac{1}{6}g(0)-\frac{1}{6} = \frac{1}{2}g''(0)-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

11. 设 $f^{(n)}(0)$ 存在且

$$P(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n,$$

证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-P(x)}{x^n}=0.$

证 由于 $k\le n\Longrightarrow f^{(k)}(0)=P^{(k)}(0)$, 所以反复应用罗必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-P(x)}{x^n}&=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-P'(x)}{nx^{n-1}}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-P^{(n)}(x)}{n!}=0.\end{aligned}$$

12. 设函数 $f(x)$ 具有 $n+1$ 阶连续导数. 若

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\,f^{(n)}(x+\theta h),\ (0<\theta<1)$$

且 $f^{(n+1)}(x)\ne0$, 则 $\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

证 反复应用罗必达法则，有

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{n!\Big[f(x+h)-f(x)-\cdots-\dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(x)-\dfrac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x)\Big]}{h^{n+1}}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)}{(n+1)h}=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}=\lim_{h\to0}\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\lim_{h\to0}\theta\cdot f^{(n+1)}(x).$$

故 $\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

§3.3 泰勒公式

习 题 3.3 A

1. 写出下列函数的马克劳林展式到指定的次数：

(1) $\tan x$到含 x^7 项；　　(2) $\ln\dfrac{\sin x}{x}$到含 x^6 项；

(3) e^{2x-x^2}到含 x^5 项；　　(4) $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$到含 x^4 项.

解　(1) 根据

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5),$$

有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2x^5}{15}}{x^7} = \frac{17}{315}.$$

由此可知,

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7).$$

(2) 由于 $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 时无定义，所以不能直接套用马克劳林公式.

由于

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7),$$

所以

$$\begin{aligned}\ln\frac{\sin x}{x} &= \ln\Big[1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + o(x^6)\Big]\\ &= \Big[-\frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6\Big]\\ &\qquad -\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4\Big]^2 + \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{3!}x^2\Big]^3 + o(x^6)\end{aligned}$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2635} + o(x^6).$$

(3) $\mathrm{e}^{2x-x^2} = 1 + 2x + x^2 - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{5x^4}{6} - \dfrac{x^5}{15} + o(x^5)$.

(4) 虽然 $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ 在 $x = 0$ 时无定义，但泰勒展式

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_4 x^4 + o(x^4)\ (x \to 0)$$

存在，并且可用除法得到

$$\begin{aligned}\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} &= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2!}\,x + \dfrac{1}{3!}\,x^2 + \dfrac{1}{4!}\,x^3 + \dfrac{1}{5!}\,x^4} + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).\end{aligned}$$

2. 利用泰勒公式计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \cot x\right)$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \ln\cos x}{1 - \cos x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x^4}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\cos x - 2x^2}{x^5}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

解　(1) $\dfrac{1}{3}$；　(2) $\ln^2 a$；　(3) $\dfrac{1}{3}$；　(4) 3；

(5) $\dfrac{1}{4!}$；　(6) 0；　(7) $-\dfrac{13}{36}$.

3. 利用泰勒公式近似计算，并估计误差：

(1) $\sqrt[3]{30}$；　(2) $\sqrt[5]{250}$；　(3) $\sin 18^\circ$；　(4) $\ln 1.2$.

解　(1) 将 $x = 3$ 代入

$$\sqrt[3]{27 + x} = 3\left(1 + \frac{x}{27}\right)^{1/3} = 3 + \frac{x}{27} - \frac{x^2}{2187} + o(x^2).$$

可得 $\sqrt[3]{30}=3.107\pm0.001$. 截断误差限不大于 $\dfrac{3^2}{2187}$.

(2) 将 $x=7$ 代入

$$\sqrt[5]{3^5+x}=3\Big(1+\frac{x}{3^5}\Big)^{1/5}=3+\frac{x}{405}-\frac{2x^2}{492075}+o(x^2).$$

可得 $\sqrt[5]{250}=3.017\pm0.001$. 截断误差限不大于 $\dfrac{2\times7^2}{492075}$.

(3) 将 $x=-\dfrac{2\pi}{30}$ 代入

$$\sin(\frac{\pi}{6}+x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4\sqrt{3}}+o(x^3)$$

可得 $\sin\dfrac{\pi}{10}=0.309\pm0.001$. 截断误差不大于 $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\times\Big(\dfrac{2\pi}{30}\Big)^3$.

(4) 将 $x=0.2$ 代入

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$$

可得 $\sin\dfrac{\pi}{10}=0.182\pm0.001$. 截断误差限不大于 $\dfrac{0.2^5}{5}$.

4. 求下列函数在指定点的泰勒展式：

(1) x^4-3x^3-4x+1在 $x_0=1$ 点; (2) $\ln(x^2+3)$在 $x_0=2$ 点;

(3) $\sqrt{x}$在 $x_0=4$ 点; (4) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$在 $x_0=4$ 点.

解 (1) 令 $x=t+1$, 则

$$\begin{aligned}x^4-3x^3-4x+1&=(t+1)^4-3(t+1)^3-4(t+1)+1\\&=-5-9t-3t^2+t^3+t^4\\&=-5-9(x-1)-3(x-1)^2+(x-1)^3+(x-1)^4.\end{aligned}$$

(2) 令 $x=t+2$, 则

$$\ln(x^2+3)=\ln6+\ln\Big[1+\frac{t^2+4t}{7}\Big]$$

$$= \ln 7 + \left[\frac{t^2+4t}{7}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2+4t}{7}\right]^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{t^2+4t}{7}\right]^3 + o(t^3)$$

$$= \ln 7 + \frac{4}{7}(x-2) - \frac{1}{49}(x-2)^2 - \frac{524}{147}(x-2)^3 + o((x-2)^3).$$

(3) 利用二项式展开公式，有

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 2\left[1+\frac{x-4}{4}\right]^{1/2}\\ &= 2\left[1+\frac{1}{2}\Big(\frac{x-4}{4}\Big) - \frac{1}{2\cdot 4}\Big(\frac{x-4}{4}\Big)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\Big(\frac{x-4}{4}\Big)^3 + o((x-4)^3)\right]\\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + o((x-4)^3).\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{1+\frac{x-4}{2}} - \frac{3}{1+\frac{x-4}{3}}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{3^{k-1}}\Big)(x-4)^k + o((x-4)^n)\end{aligned}$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导且恒有 $f''(x) \geq 0$, 则当 $x,\ x_0 \in (a,b)$ 时，必有 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

证 根据泰勒展式及 $f''(x) \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2\\ &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).\end{aligned}$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶连续可导. 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) - 2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证 根据泰勒展式，有

$$f(a) = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(a - \frac{a+b}{2}\Big) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\Big(a - \frac{a+b}{2}\Big)^2,$$

$$f(b)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)^2.$$

两式相加，有

$$\begin{aligned}f(a)-2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\ &=\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\\&=f''(\xi)\cdot\frac{(b-a)^2}{4}.\end{aligned}$$

其中

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$$

按照介值定理确定.

7. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶连续可导，证明 $\forall\, x\in(a,b)$, 恒有 $f''(x)\geq 0 \iff \forall\, x_1,\ x_2\in(a,b),\ t\in[0,1]$, 恒有

$$f[\,(1-t)x_1+tx_2\,]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

证 必要性 记 $\overline{x}=(1-t)x_1+tx_2$. 根据泰勒公式，在 x_1,x_2 之间存在 ξ_1,ξ_2, 使得

$$\begin{aligned}f(x_1)\ &=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_1-\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-\overline{x})^2\\&\geq f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_1-\overline{x});\\f(x_2)\ &=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_2-\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-\overline{x})^2\\&\geq f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_2-\overline{x}).\end{aligned}$$

由此可知,

$$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq f(\overline{x})=f((1-t)x_1+tx_2).$$

充分性 反证，如果存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f''(x_0)<0$, 则由二阶导数的连续性，存在 $a<a_1<x_0<b_1<b$, 使得

$$x\in[a_1,b_1]\Longrightarrow f''(x)<0.$$

据此根据必要性的证法可知，当 $a_1<x_1<x_2<b_1,\ t\in[0,1]$ 时，必有

$$f[\,(1-t)x_1+tx_2\,]>(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

这与题设矛盾. 故原结论成立.

习 题 3.3 B

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=f'(1)=0$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $|f''(\xi)|\geq 4$.

证 根据泰勒展式, 有

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=f(0)+f'(0)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{1}{8}f''(\xi_1),$$

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=f(1)+f'(1)\Big(\frac{1}{2}-1\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\Big(\frac{1}{2}-1\Big)^2=1+\frac{1}{8}f''(\xi_2).$$

于是

$$1=\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{8}\leq\frac{1}{4}\,|f''(\xi)|.$$

其中 $|f''(\xi)|=\max(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 又已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在. 证明当 $x\neq0$ 时, $f(x)>0$.

证 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在可知,

$$f(0)=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0.$$

根据 $f''(x)>0$ 可知, $f(x)$ 为下凸函数, 按照 “切在下” 有

$$f(x)>f(0)+f'(0)x=0\ (x\neq0).$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶连续可导, 且 $f''(x)<0$, 又已知 $f(0)=0$. 证明对任意 $x\in(0,1)$, 都有 $f(x)<2f\Big(\dfrac{x}{2}\Big)$.

证 令

$$F(x)=f(x)-2f\Big(\frac{x}{2}\Big),$$

则有

$$F'(x)=f'(x)-f'\Big(\frac{x}{2}\Big)=f''(\xi)\cdot\frac{x}{2}<0.$$

由此可知， $F(x)$ 严格单调减，故有

$$x\in(0,1)\Longrightarrow F(x)<F(0)=0.$$

此即 $f(x)<2f\Big(\dfrac{x}{2}\Big)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，在 (a,b) 内三阶可导且 $f(a)=f'(a)=0,f(b)=0$. 证明 $\forall\,x\in(a,b)$, 恒有 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-a)^2(x-b).$$

证 对固定的 $x\in(a,b)$, 令

$$F(t)=f(x)-\frac{f(x)}{(x-a)^2(x-b)}\cdot(t-a)^2(t-b),$$

则

$$F(a)=F(b)=F(x)=0,\ F'(a)=0.$$

根据 Roll 定理，存在 $\xi_1\in(a,x),\ \xi_2\in(x,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

同理存在 $\eta_1\in(a,\xi_1),\ \eta_2\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得

$$F''(\eta_1)=F''(\eta_2)=0.$$

因此存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'''(\xi)=0$. 由此可知

$$f(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-a)^2(x-b).$$

5. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有 $f''(x)>0$, 则当 $x_1,\cdots,x_n\in(a,b)$ 时，必有

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

其中 $\lambda_i>0$ 且 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$.

证 记 $\overline{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, 则 $\overline{x}\in(a,b)$, 根据泰勒展式, 有

$$f(x_i)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_i-\overline{x})+\frac{f''(\xi_i)}{2}(x_i-\overline{x})^2,$$

其中, $\xi_i\in(a,b)$. 由于 $f''(\xi)>0$, 所以

$$f(x_i)\geq f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_i-\overline{x}),$$

且仅当 $x_i=\overline{x}$ 时等号成立 $(i=1,2,\cdots,n)$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\overline{x})+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(\overline{x})(x_i-\overline{x})=f(\overline{x}).$$

且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\overline{x}$ 时等号成立.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微, 且对任意的 x 及 h 均成立

$$f(x+h)-f(x)=hf'\Big(x+\frac{1}{2}h\Big)$$

证明 $f(x)$ 必为二次多项式.

证 由

$$f(x+h)-f(x)=hf'\Big(x+\frac{1}{2}h\Big)$$

两端求导, 得

$$f'(x+h)=\frac{1}{2}hf''\Big(x+\frac{h}{2}\Big)+f'\Big(x+\frac{1}{2}h\Big).$$

令 $x=-\dfrac{h}{2}$, 则有

$$f'\Big(\frac{h}{2}\Big)=\frac{1}{2}hf''(0)+f'(0).$$

将上式代入 $f(0+h)-f(0)=hf'\Big(0+\dfrac{1}{2}h\Big)$ 可得

$$f(h)=\frac{f''(0)}{2}h^2+f'(0)h+f(0).$$

由 h 的任意性即知 $f(x)$ 必为二次多项式.

7. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$. 设 $F(x)=x^3f(x)$, 则存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'''(\xi)=0$.

证 1　根据泰勒展式，有

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\frac{1}{6}F'''(\xi)\quad(0<\xi<1).$$

由

$$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x),$$

$$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$$

可知,

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=F(1)=0.$$

于是 $F'''(\xi)=0$.

证 2　由

$$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x),$$

$$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$$

可知,

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=F(1)=0.$$

于是由 Roll 定理可知，存在 $\xi_1\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi_1)=0$. 对 $F'(x)$ 应用 Roll 定理，存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$, 使得 $F''(\xi_2)=0$. 由此可知，存在 $\xi\in(0,\xi_2)$, 使得 $F''(\xi)=0$.

8. 证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 都存在，则

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

证　根据泰勒公式有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1),$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2),$$

其中 $x<\xi_1<x+1,\ x-1<\xi_2<x$. 于是

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\Big[f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)-\frac{1}{2}f''(\xi_1)\Big]=0,$$

$$0=\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x f'(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to\infty}[f'(x)+f''(x)]=\lim_{x\to\infty} f''(x).$$

9. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，$f'\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)=0$, 试证存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 由泰勒公式可知，存在 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$, 使得

$$\begin{aligned} f(a) &= f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(a-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\Big(a-\frac{a+b}{2}\Big)^2\\ &= f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2;\\ f(b) &= f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)^2\\ &= f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2. \end{aligned}$$

于是，有

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2\leq\frac{1}{4}|f''(\xi)|(b-a)^2.$$

其中 $|f''(\xi)|=\max\limits_{i=1,2}|f''(\xi_i)|$.

10. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的二阶导数，且 $f(0)=1,\ f'(0)=2,\ f''(0)=3$, 证明唯一存在实数组 a,b,c, 使当 $h\to0$ 时，$af(h)+bf(3h)+cf(-h)-1$ 是 h^2 的高阶无穷小.

证 根据泰勒展式，有

$$f(h)=1+2h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2),$$

$$f(3h)=1+6h+\frac{27}{2}h^2+o(h^2),$$

$$f(-h)=1-2h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2).$$

于是有

$$\begin{aligned}&af(h)+bf(3h)+cf(-h)-1\\&=(a+b+c-1)+(2a+6b-2c)h+\frac{1}{2}(3a+27b+3c)h^2+o(h^2).\end{aligned}$$

根据

$$\lim_{x\to 0}\frac{af(h)+bf(3h)+cf(-h)-1}{h^2}=0$$

必有

$$\begin{cases}a+b+c-1=0,\\2a+6b-2c=0,\\3a+27b+3c=0.\end{cases}$$

解之可得

$$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{8},\ c=-\frac{3}{8}.$$

故 a,b,c 唯一存在.

11. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,++\infty)$ 上二阶导数，且 $|f(x)|,|f'(x)|,|f''(x)|$ 分别有上界 M_0,M_1,M_2, 证明

$$M_1\le\sqrt{2M_0M_2}.$$

证 根据泰勒展式，有

$$f(x+t)=f(x)+tf'(x)+\frac{1}{2}t^2\,f''(\xi_1),$$

$$f(x-t)=f(x)-tf'(x)+\frac{1}{2}t^2\,f''(\xi_2).$$

其中 ξ_1 介于 $x,x+t$ 之间， ξ_2 介于 $x,x-t$ 之间. 由此可得

$$2|tf'(x)|=\left|f(x+t)-f(x-t)-\frac{1}{2}t^2\Big[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\Big]\right|\le 2M_0+t^2M_2.$$

因此有 $2t\le 2M_0+t^2M_2$, 即

$$M_2\,t^2-2M_1\,t+2M_0\ge 0.$$

由于上列不等式对任意的 t 成立，所以有

$$(-2M_1)^2 - 4M_2 \cdot 2M_0 \leq 0.$$

故 $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

§3.4 导数的应用

习 题 3.4 A

1. 选择题

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点；
(B) 两个极小值点和一个极大值点；
(C) 两个极小值点和两个极大值点；
(D) 三个极小值点和一个极大值点.

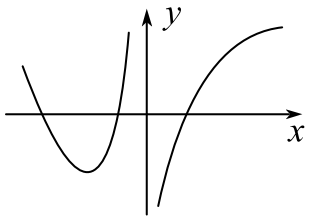


图 3.1

(2) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y = f(x)$ 的图形如右图所示，则导函数 $y = f'(x)$ 的图形为

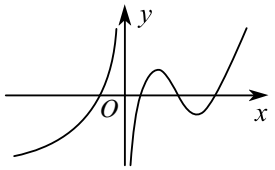
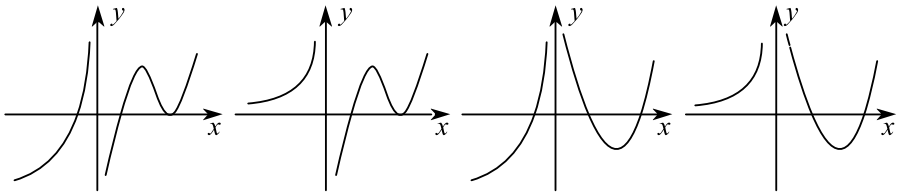


图 3.2



(A) (B) (C) (D)

图 3.3

(3) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=2$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(4) 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线; (B) 仅有水平渐近线; (C) 仅有铅直渐近线;

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(5) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处

(A) 不可导; (B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$;

(C) 取得极大值; (D) 取得极小值.

解 (1) 由于 $f'(x)$ 在其零点和 $x=0$ 点附近的符号依次为

$$(+,-),(-,+),(+,-),(-,+),$$

所以 $f(x)$ 有两个极小值点和两个极大值点.

(2) 由于 $x<0$ 时，原函数严格增，所以导函数为正. 故 A,C 错. 由于函数 $f(x)$ 在极大值点 x_0 处左增右减，所以导函数 $f'(x)$ 在 x_0 点左 $+$ 右 $-$ 且 $f'(x_0)=0$. 由此可知，应选 D.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=2$ 可知, 当 $x\to,\neq 0$ 时，$f''(x)>0$. 因此由 $f'(0)=0$ 可知，$f'(x)$ 在 $x=0$ 点左 $-$ 右 $+$. 这表明 (严格下凸的临界点必为极小值点，即)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 故选 B.

(4) 由于

$$\lim_{x\to\infty} y=1,\ \lim_{x\to 0} y=\infty,$$

所以选 D.

(5) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ 可知,

$$f(x)=2(1-\cos x)+o(x^2)=x^2+o(x^2)\ (x\to 0).$$

由此可知

$$f'(0)=0,\ f''(0)=1.$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

2. 证明下列不等式:

(1) 当 $\mathrm{e}<x_1<x_2$ 时, $\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<\dfrac{x_2}{x_1}$;

(2) 当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$;

(3) 当 $x>0$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$;

(4) 当 $0<a<b$ 时, $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2b-2a}{a+b}$;

(5) $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\le\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}$;

(6) 当 $x>0,\ y>0$ 时, $\ln\dfrac{x+y}{2}\ge\dfrac{\ln x+\ln y}{2}$.

(7) 设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$, 证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

证 (1) 由 $\mathrm{e}<x_1<x_2$ 可知, $\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<1<\dfrac{x_2}{x_1}$. 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. 故当 $x>\mathrm{e}$ 时, $f'(x)<0$. 因此

$$\mathrm{e}<x_1<x_2\Longrightarrow\frac{\ln x_1}{x_1}>\frac{\ln x_2}{x_2}.$$

即 $\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}$.

(2) 令 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$, 则

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}=\frac{\sec^2 x}{2x^2}\cdot(2x-\sin 2x)>0.$$

故 $\dfrac{\tan x_1}{x_1}<\dfrac{\tan x_2}{x_2}$.

(3) 令

$$f(x)=\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}-\mathrm{e},$$

则有

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x\Big[x\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]' \\ &= -\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x\Big[\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)+\frac{1}{1+x}\Big]<0, \\ g'(x) &= \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x+1}\Big[(x+1)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]' \\ &= \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x+1}\Big[\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)-\frac{1}{x}\Big]<0. \end{aligned}$$

于是

$$f(x)>\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\ g(x)>\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

故 $\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x<\mathrm{e}<\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^{x+1}$.

(4) 令

$$f(x)=\ln\frac{x}{a}-\frac{2x-2a}{a+x},$$

则 $x>a$ 时,

$$f'(x)=\frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2}>0.$$

故有 $f(b)>f(a)=0$, 由此可知

$$\ln\frac{b}{a}>\frac{2b-2a}{a+b}.$$

(5) 令 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 则由 $f''(x)=\mathrm{e}^x>0$ 可知, $f(x)$ 为下凸函数, 所以

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

由此可知 $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\le\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}$.

(6) 令 $f(x)=\ln x$, 则由 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ 可知, $f(x)$ 为上凸函数, 所以

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\ge\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

由此可知 $\ln\dfrac{x+y}{2}\ge\dfrac{\ln x+\ln y}{2}$.

(7) 令 $f(x)=\ln^2 x$, 则当 $x>\mathrm{e}$ 时，有

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x},\ f''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}<0.$$

于是

$$\mathrm{e}<x<\mathrm{e}^2\Longrightarrow f'(x)>f'(\mathrm{e}^2).$$

根据 Lagrange 定理，有

$$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)>f'(\mathrm{e}^2)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}.$$

3. 计算下列曲线的斜渐近线方程：

(1) $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$,　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$.

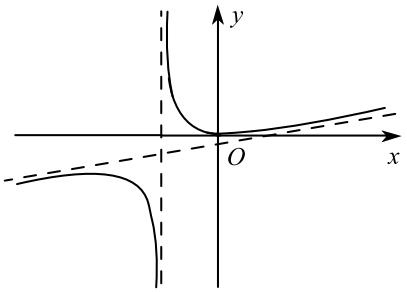


图 3.2

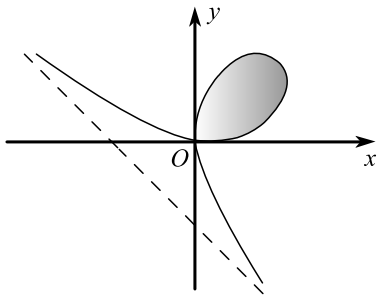


图 3.3

解　(1) 由于

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2x+1}-\frac{x}{2}\right]=-\frac{1}{2},$$

所以曲线的斜渐近线方程为 $y=kx+b=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $x^3+y^3-3axy=0$ 可知，

$$1+\frac{y^3}{x^3}-3a\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=0.$$

令 $x \to \infty$ 并将 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = k$ 代入，有 $1 + k^3 = 0$. 故 $k = -1$. 根据

$$x + \frac{y^3}{x^2} - 3a \cdot \frac{y}{x} = 0,$$

令 $x \to \infty$, 则由 $\dfrac{y}{x} \to -1$ 可知,

$$x + y \to -3a = b.$$

所以曲线的斜渐近线方程为 $y = kx + b = -x - 3a$.

4. 设某银行总存款量与银行付给储户的利率的平方成正比. 若银行以 10% 的年利率把总存款的 90% 贷出，问银行给储户支付的年利率为多少时才能获得最大利润？

解 设 x 为银行给储户支付的年利率， y 为银行存款总量，以 L 表示银行获得的利润，则有 $y = kx^2$ 且

$$L = 0.9 \times 0.1 \times y - xy = 0.09kx^2 - kx^3.$$

由

$$L' = 0.18kx - 3kx^2 = 0$$

可得 $x = 0.06$. 由于 $0 < x < 0.06$ 时， $L'(x) > 0$; 而 $0.06 < x < 0.09$ 时，$L'(x) < 0$. 因此函数 L 在 $x = 0.06$ 点取得最大值，即银行支付给储户的 6% 的年利率时，能够获得最大利润.

5. 从一条宽为 a 米的河垂直修建一条宽为 b 米的运河，问能从一条河驶入另一条河的船，其最大长度是多少？

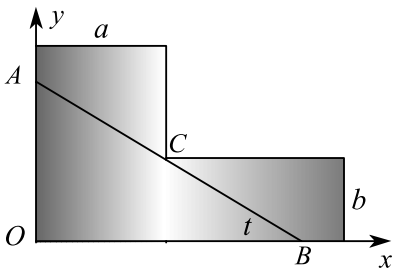


图 3.4

解 建立坐标系如图，设坐标为 (a,b) 的点为 C, 则船的最大长度应为过 C 点的线段 AB 长度 l 的最小值. 设 $\angle OAB=t$, 则

$$l=\frac{a}{\cos t}+\frac{b}{\sin t}.$$

由

$$l'=\frac{b\sin t}{\cos^2 t}\Big(\frac{a}{b}-\cot^3 t\Big)=0,\ 0<t<\frac{\pi}{2}$$

可得唯一临界点 $t_0=\operatorname{arccot}\sqrt[3]{a^{-1}b}$. 由于 l' 在 t_0 点左 $-$ 右 $+$, 所以 l 有最小值

$$l(t_0)=\frac{a}{\cos t_0}+\frac{b}{\sin t_0}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}.$$

6. 今欲生产一个容积为 V 的有盖圆柱形铁桶，问桶的底半径和高为何值时，用料最省？

解 用料最省意即表面积最小. 设圆柱的底半径为 r, 高为 h, 则 $\pi r^2=V$ 且表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

由

$$S'=\frac{4\pi r^3-2V}{r^2}=0.$$

可得唯一临界点 $r_0=\sqrt[3]{V/(2\pi)}$. 由于 S' 在 r_0 点左 $-$ 右 $+$, 所以 S 有最小值 $S(r_0)$, 即当 $r_0=\sqrt[3]{V/(2\pi)}, h_0=2r_0$ 时用料最省.

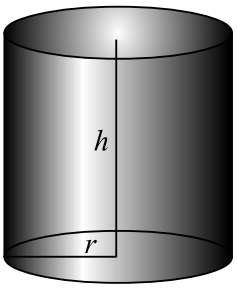


图 3.5

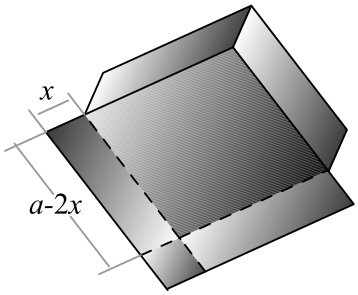


图 3.6

7. 将边长为 a 的一块正方形铁皮的四角各剪去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起来做成一个无盖的方盒. 问剪去的小正方形的边长为多少时，所得方盒的容积最大？

解 设剪去的小正方形的边长为 x, 则方盒盒底的边长为 $a-2x$, 方盒的高为 x. 因此方盒的容积为

$$V = x(a-2x).$$

由

$$V' = (a-2x)(a-6x) = 0, \quad 0 < x < \frac{a}{2}.$$

可得唯一临界点 $x_0 = \dfrac{a}{6}$. 由于 V' 在 x_0 点左 $+$ 右 $-$, 所以 V 有最大值 $V(x_0)$, 即当 $x_0 = \dfrac{a}{6}$ 时所得方盒的容积最大.

8. 一飞机沿抛物线路径 $y = \dfrac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为米) 作俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 200 米 / 秒. 飞行员的体重为 70 千克. 求飞机俯冲至最底点即原点 O 处时坐椅对飞行员的反力.

解 设飞机俯冲至最底点即原点 O 处时坐椅对飞行员的反力为 N, 则飞行员受到的外力为 $N-mg$. 由于飞行员在 $x=0$ 点的瞬时运动等价于沿密切圆的匀速圆周运动, 所以有

$$N - mg = m \cdot \frac{v^2}{R}.$$

其中 $\dfrac{1}{R}$ 为抛物线 $y = \dfrac{x^2}{10000}$ 在 $x=0$ 点的曲率, 即

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{10000}.$$

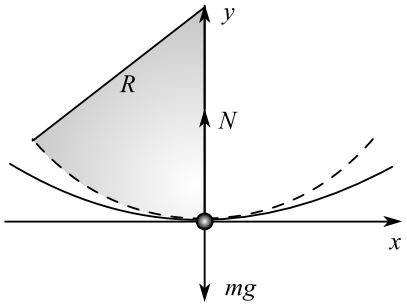


图 3.7

因此

$$N = 70 \times 9.8 + 70 \times 200^2 \times \frac{2}{10000} = 1246(\mathrm{N}).$$

9. 铁路上 AB 段的距离为 100km. 工厂 C 距 A 处为 20km,AC 垂直于 AB. 已知铁路每公里货运的运费与公路每公里货运的运费之比为 3:5. 为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省, 问 D 点应选在何处?

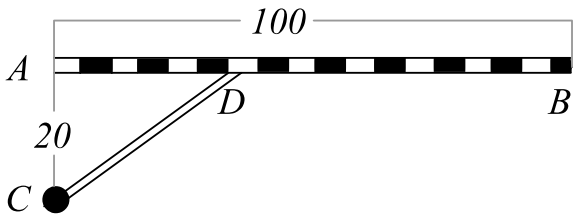


图 3.8

解 设 $AD = x$ km, 则

$$DB = 100 - x,\ CD = \sqrt{20^2 - x^2}.$$

设铁路每公里货运的运费为 $3m$, 则公路每公里货运的运费为 $5m$. 于是货物从供应站 B 运到工厂 C 的总运费为

$$y = 5m\sqrt{20^2 - x^2} + 3m(100 - x).$$

由

$$y'(x) = m\Big(\frac{5x}{\sqrt{20^2 - x^2}} - 3\Big) = 0$$

可得唯一临界点 $x_0 = 15$. 由于 y' 在 x_0 点左 $-$ 右 $+$, 所以 y 有最小值 $y(x_0)$, 即当 $x_0 = 15$ km 时运费最省.

10. 把一个直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的梁. 问矩形截面的高 h 和宽 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量 $W = \dfrac{1}{6}\,bh^2$ 最大?

解 根据勾股定理 $h^2 = d^2 - b^2$, 因此

$$W = \frac{1}{6}\,b(d^2 - b^2).$$

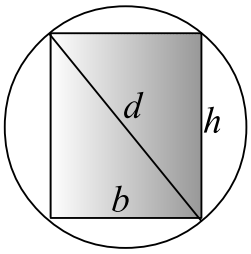


图 3.9

由

$$W'(b) = \frac{1}{6}\,(d^2 - 3b^2) = 0,\ b > 0$$

可得唯一临界点 $b_0 = d/\sqrt{3}$. 由于 w' 在 b_0 点左 $+$ 右 $-$, 所以 w 有最大值 $w(b_0)$, 即当 $b_0 = d/\sqrt{3}$ km 或 $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$ 时梁的抗弯截面模量最大.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且 $f''(x)\geq 0$, 证明 $x,y\in[a,b]$ 时, 必有

$$f\big(\frac{x+y}{2}\big)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

证 根据泰勒展式, 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f\big(\frac{x+y}{2}\big)+f'\big(\frac{x+y}{2}\big)\Big(x-\frac{x+y}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\Big(x-\frac{x+y}{2}\Big)^2\\&\geq f\big(\frac{x+y}{2}\big)+f'\big(\frac{x+y}{2}\big)\Big(x-\frac{x+y}{2}\Big),\\f(y)&=f\big(\frac{x+y}{2}\big)+f'\big(\frac{x+y}{2}\big)\Big(y-\frac{x+y}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\Big(y-\frac{x+y}{2}\Big)^2\\&\geq f\big(\frac{x+y}{2}\big)+f'\big(\frac{x+y}{2}\big)\Big(y-\frac{x+y}{2}\Big),\end{aligned}$$

由此可知

$$f(x)+f(y)\geq 2f(x)+2f(y).$$

习 题 3.4 B

1. 过曲线 $y=x^2+1$ $(x>0)$ 上的点 P 作该曲线的切线, 求 P 点的坐标, 使得切线与两个坐标轴围成三角形的面积最小?

解 设 (X,Y) 为切线上的流动点, 则曲线的切线方程为

$$Y-y=2x(X-x),\ y=x^2+1.$$

整理得

$$\frac{X}{x-\frac{y}{2x}}+\frac{Y}{y-2x^2}=1.$$

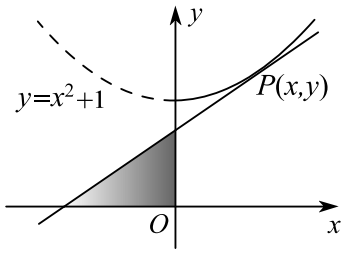


图 3.10

于是切线与两个坐标轴围成三角形的面积为

$$S=-\frac{1}{2}\Big(x-\frac{y}{2x}\Big)\cdot(y-2x^2)=\frac{1}{2x}\cdot(x^2-1)^2.$$

由

$$S' = \frac{1}{2x^2} \cdot (x^2-1)(3x^2+1) = 0,\ x > 0$$

可得唯一临界点 $x = 1$. 由于 S' 在 $x = 1$ 点左 $-$ 右 $+$, 所以 S 在 $P(1,2)$ 点取最小值.

2. 设 $0 < \alpha < \beta,\ x > 0,\ y > 0$, 试证

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

证 令 $a = \dfrac{y}{x}$ 且

$$f(t) = (1+a^t)^{1/t},$$

则当 $t > 0$ 时, 有

$$f'(t) = \frac{y}{t^2(1+a^t)} \cdot \left[a^t \ln a^t - (1+a^t)\ln(1+a^t)\right] < 0.$$

由此可知 $f(\alpha) > f(\beta)$, 故

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 且 $f(0)\cdot f'(0) \geq 0$. 试证存在 $\xi \in [0,+\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 不妨设 $f'(0) > 0$, 则 $f(0) > 0$. 如果 $f'(x) = 0$ 无解, 则必有

$$x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) > 0.$$

由此可知

$$x > 0 \Longrightarrow f(x) > f(0).$$

于是可推出矛盾

$$0 < f(0) < f(x) \to 0\ (x \to +\infty).$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有连续的 n 阶导数, 且

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

证明:

(1) 当 n 为奇数时，点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点；

(2) 当 n 为偶数时，若 $f'(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点取极小值；

(3) 当 n 为偶数时，若 $f'(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值.

证 (1) 根据泰勒展式，当 $x \to x_0$ 时有

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + o(|x - x_0|^{n-2}).$$

由此可知，当 n 为奇数且 $f'(x_0) \neq 0$ 时，$f''(x)$ 在 x_0 点的两侧反号. 故 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(2) 根据泰勒展式，当 $x \to x_0,\ f'(x_0) = 0$ 时有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x^n).$$

由此可知，当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0,\ x \to x_0$ 时，$f(x) - f(x_0) > 0$. 故 $f(x)$ 在 x_0 点取极小值.

(3) 同 (2) 类似, 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0,\ x \to x_0$ 时，$f(x) - f(x_0) < 0$. 故 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值.

5. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的曲率中心.

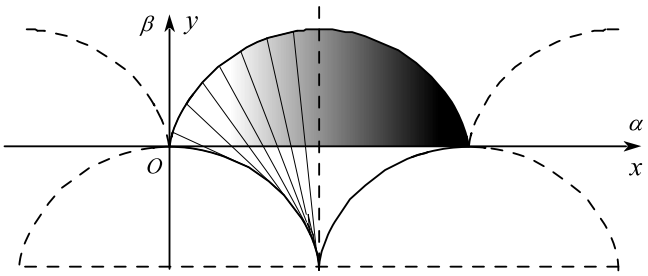


图 3.11

解 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(1-\cos t),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\sin t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2.}$$

将上式代入曲率中心公式

$$\alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

有

$$\begin{cases}\alpha=a(t+\sin t),\\ \beta=a(\cos t-1).\end{cases}$$

6. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的曲率中心.

解 根据椭圆参数方程 $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ 有

$$x'(t)=-a\sin t,\qquad y'=b\cos t,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b}{a}\cot t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b}{a^2}\csc^3 t.$$

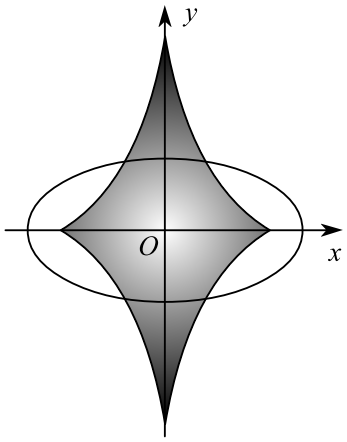


图 3.12

将上式代入曲率中心公式

$$\alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

有

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\\ \beta=-\dfrac{a^2-b^2}{a}\sin^3 t.\end{cases}$$

7. 测量某个量 A, 由于仪器的精度和测量的技术等原因，对 A 做了 n 次测量，测量的数值分别是

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

取数 x 作为 A 的近似值，问 x 取何值时，才能使 x 与 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 之差的平方和为最小？

解 设

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2,$$

则由

$$f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \cdots + 2(x - a_n) = 0$$

可得唯一临界点

$$\overline{x} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由于 $f'(x)$ 在 $\overline{x}$ 左 $-$ 右 $+$, 所以当 $x = \overline{x}$ 时， $f(x)$ 取最小值.

8. 求下列曲线在某一点的曲率：

(1) $y = \ln \sec x$;

(2) $x^3 + y^3 = 3xy$;

(3) $y = \sqrt{x} + \tan x$;

(4) $y = \ln(x + \sin x)$;

(5) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$;

(6) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

解 (1) 由于

$$y' = \tan x,\ y'' = \sec^2 x,$$

所以

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan^2 x)^{3/2}} = |\cos x|.$$

(2) 由于

$$3x^2 + 3yy' = 3y + 3x, ,$$

$$2x + y'^2 + yy'' = y' + 1,$$

所以 $y'=\dfrac{x-x^2+y}{y}$,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1-2x+y'-y'^2}{y}=\frac{1-2x}{y}+\frac{x-x^2+y}{y^2}-\frac{(x-x^2+y)^2}{y^3}\\ &=\frac{1-2x}{y}-\frac{x-x^2}{y^2}-\frac{(x-x^2)^2}{y^3}. \end{aligned}$$

因此 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

$$\begin{aligned} &=\left[1+\Big(\frac{x-x^2+y}{y}\Big)^2\right]^{-3/2}\cdot\left|\frac{1-2x}{y}-\frac{x-x^2}{y^2}-\frac{(x-x^2)^2}{y^3}\right|\\ &=\frac{|(1-2x)y^2-(x-x^2)y-(x-x^2)^2|}{[\,y^2+(x-x^2+y)^2\,]^{3/2}}. \end{aligned}$$

(3) 由于

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sec^2 x,\ y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}+2\sec^2 x\tan x,$$

所以

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|1-8\sqrt{x^3}\sec^2 x\tan x|}{[\,4x+(1+2\sqrt{x}\sec^2 x)^2\,]^{3/2}}.$$

(4) 由于

$$y'=\frac{1+\cos x}{x+\sin x},\ y''=-\frac{2+x\sin x+2\cos x}{(x+\sin x)^2},$$

所以

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|2+x\sin x+2\cos x|}{[\,(x+\sin x)^2+(1+\cos x)^2\,]^{3/2}}.$$

(5) 由于

$$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad x''(t)=6a\cos t\sin^2 t-3a\cos^3 t,$$

$$y'(t)=3a\sin^2 t\cos t,\qquad y''(t)=6a\sin t\cos^2 t-3a\sin^3 t,$$

所以

$$x'^2+y'^2=9a^2\sin^2 t\cos^2 t,\ x'y''-y'x''=-9a^2\sin^2 t\cos^2 t.$$

因此

$$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{3|a\sin t\cos t|}.$$

(6) 由于

$$x'(t)=-a\sin t,\qquad x''(t)=-a\cos t,$$

$$y'(t)=b\cos t,\qquad y''(t)=-b\sin t,$$

所以

$$x'^2+y'^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t,\ x'y''-y'x''=ab.$$

因此

$$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{|ab|}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

9. 证明曲线 $y=f(x)$ 在曲线上任意一点 M 处的曲率等于

$$K=|y''\cos^3\theta|=\left|\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}x}\right|,$$

其中 θ 是 M 点切线的倾角.

证 将 $y'=\tan\theta$ 代入曲率公式可得

$$\begin{aligned}K&=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|y''|}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\\&=|y''\cos^3\theta|=\left|(\tan\theta)'\cos^3\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}x}\right|.\end{aligned}$$

10. 证明极坐标曲线 $r=r(\theta)$ 的曲率公式为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

据此证明双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 的曲率半径与对应点的极半径成反比.

证 曲线 $r=r(\theta)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\y=r(\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

求导可得

$$x'(\theta)=r'\cos\theta-r\sin\theta,\qquad x''(\theta)=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta,$$

$$y'(\theta)=r'\sin\theta+r\cos\theta,\qquad y''(\theta)=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta.$$

由此可知

$$x'(\theta)y''(\theta)-y'(\theta)x''(\theta)=r^2+2r'^2-rr'',\quad x'^2(\theta)+y'^2(\theta)=r^2+r'^2.$$

故由参数曲线的曲率公式有

$$K=\frac{|x'(\theta)y''(\theta)-y'(\theta)x''(\theta)|}{[\,x'^2(\theta)+y'^2(\theta)\,]^{3/2}}=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

由 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 求导可得

$$2rr'=-2a^2\sin 2\theta,\quad rr''+r'^2=-2\cos 2\theta.$$

于是由极坐标曲率公式有

$$K=\frac{3}{a^2}\sqrt{\cos 2\theta}=\frac{3r}{|a|^3}.$$

11. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)+4f\Big(-\dfrac{1}{x}\Big)=\dfrac{1}{x}$, 求函数 $f(x)$ 的极值.

解 令 $t=-\dfrac{1}{x}$, 则由原方程可得

$$f\Big(-\frac{1}{t}\Big)+4f(t)=-t.$$

于是解方程组

$$\begin{cases}f(x)+4f\Big(-\dfrac{1}{x}\Big)=\dfrac{1}{x}\\[2mm] f\Big(-\dfrac{1}{x}\Big)+4f(x)=-x,\end{cases}$$

可得

$$f(x)=-\frac{1}{15}\Big(\frac{1}{x}+4x\Big).$$

由

$$f'(x)=-\frac{1}{15}\Big(-\frac{1}{x^2}+4\Big)=0$$

可得临界点 $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=-\dfrac{1}{2}$. 由于 $f'(x)$ 在 x_1 点左 $+$ 右 $-$, 在 x_2 点左 $-$ 右 $+$, 所以 $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=-\dfrac{4}{15}$ 为 $f(x)$ 的极大值; $f\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{4}{15}$ 为 $f(x)$ 的极小值.

12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上存在二阶连续导数, $|f''(x)|\leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值, 证明 $|f'(0)|+|f'(1)|\leq M$.

证 设 $f(x)$ 在 $\xi\in(0,1)$ 点取最大值, 则根据极值定理有 $f'(\xi)=0$. 于是由 Lagrange 中值定理, 有

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)| &=|f'(0)-f'(\xi)|+|f'(1)-f'(\xi)|\\ &=|f''(\xi_1)|\xi+|f''(\xi_2)|(1-\xi)\leq M(\xi+1-\xi)=M.\end{aligned}$$

13. 设 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的下凸函数, 若 $a<x<y<z<b$, 则

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1\\ y & f(y) & 1\\ z & f(z) & 1\end{vmatrix}\geq 0.$$

证 令 $t=\dfrac{y-x}{z-x}$, 则 $y=(1-t)x+tz$. 由 $x<y<z$ 可知, $0<t<1$. 于是, 有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x & f(x) & 1\\ y & f(y) & 1\\ z & f(z) & 1\end{vmatrix} &=(y-x)(f(z)-f(x))-(z-x)(f(y)-f(x))\\ &=(z-x)[(1-t)f(x)+tf(z)-f(y)]\geq 0.\end{aligned}$$

几何意义: 如果 $f(x)$ 是 (a,b) 内的下凸函数且 $a<x<y<z<b$, 则以 $(x,f(x)),(y,f(y)),(z,f(z))$ 为顶点的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & f(x) & 1\\ y & f(y) & 1\\ z & f(z) & 1\end{vmatrix}.$$

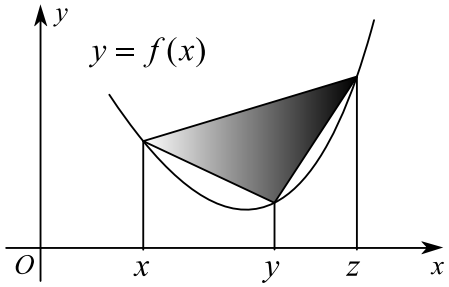


图 3.13

14. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 内的下凸函数，若 $a<x<y<z<b$, 则有三弦斜率不等式

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

证 由于

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} = (y-x)(f(z)-f(x))-(z-x)(f(y)-f(x))$$

$$=(z-x)(f(z)-f(y))-(z-y)(f(z)-f(x))\geq 0.$$

所以原不等式成立.

15. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 内的下凸函数，若 $a<x<b$, 则有单侧斜率不等式

$$f'_-(x)\leq f'_+(x).$$

证 设 $y<x<z$, 则由上题的结论可知，差商

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\ \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

分别是 y,z 的增函数且

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

故 $f'_-(x),f'_+(x)$ 存在并且有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq f'_-(x)\leq f'_+(x)\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

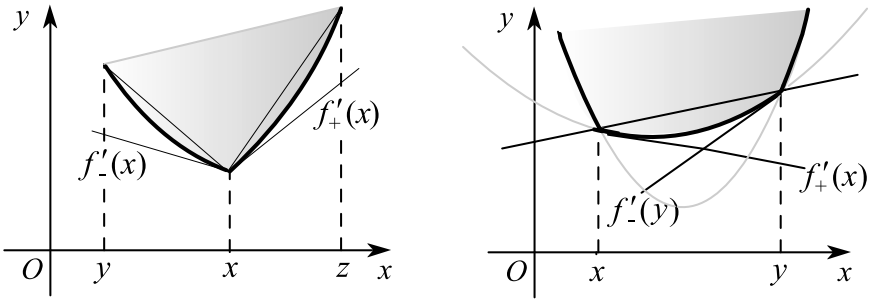


图 3.14

16. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 内的下凸函数，若 $a<x<y<b$, 则有弦切斜率不等式

$$f'_+(x)\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq f'_-(y).$$

证 由于

$$y\mapsto\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\ x\mapsto\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

分别是 (x,b) 上的递增函数和 $[a,y)$ 上的递减函数，所以有

$$f'_+(x)=\lim_{y\to x+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\lim_{x\to y-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'_-(y).$$

17. 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, 其中 a_k,b_k 为常数. 证明

(1) $f(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 必有两个不同的零点;

(2) $f^{(m)}(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 必有两个不同的零点.

证 (1) 令

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{k}\sin kx-\frac{b_k}{k}\cos kx\Big),$$

则 $F(x)$ 是周期为 2π 可导函数且

$$F'(x)=f(x),\quad F(0)=F(2\pi).$$

因此可设 $x_1,x_2\in[0,2\pi)$ 分别为 $F(x)$ 的最大值点和最小值点且 $x_1\neq x_2$, 由此可知

$$0=F'(x_1)=f(x_1),\quad 0=F'(x_2)=f(x_2).$$

(2) 令

$$\begin{aligned}F(x) &= f^{(m-1)}(x)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big[k^{m-1}a_k\sin\Big(kx+\frac{(m-1)\pi}{2}\Big)+k^{m-1}b_k\cos\Big(kx+\frac{(m-1)\pi}{2}\Big)\Big],\end{aligned}$$

则 $F(x)$ 是周期为 2π 可导函数且

$$F'(x)=f^{(m)}(x),\quad F(0)=F(2\pi).$$

因此可设 $x_1,x_2\in[0,2\pi)$ 分别为 $F(x)$ 的最大值点和最小值点且 $x_1\neq x_2$. 由此可知

$$0=F'(x_1)=f^{(m)}(x_1),\quad 0=F'(x_2)=f^{(m)}(x_2).$$

18. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可导且有界，证明必存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

证 反证，假设恒有 $f''(x)>0$, 则存在 x_0, 使得 $f'(x_0)\neq 0$. 根据下凸函数的“切在下”性质，有

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

由此可知, 当 $f'(x_0)>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; 当 $f'(x_0)<0$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. 这与 $f(x)$ 的有界性矛盾. 因此必存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

19. 设

$$f(x)=\lim_{u\to x}\Big(\frac{x-1}{u-1}\Big)^{u/(x-u)},$$

讨论 $f(x)$ 的单调性，极值，凹凸性及拐点，并求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

解 (1) 极限计算 令 $y=\Big(\dfrac{x-1}{u-1}\Big)^{u/(x-u)}$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{u\to x}\ln y &= \lim_{u\to x}\frac{u(\ln|x-1|-\ln|u-1|)}{x-u}\\ &= \lim_{u\to x}\frac{(\ln|x-1|-\ln|u-1|)-\dfrac{u}{u-1}}{-1}=\frac{x}{x-1}.\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\mathrm{e}^{x/(x-1)}.$$

(2) 单调性与极值 由

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{x/(x-1)}<0$$

可知, $f(x)$ 在 $(-\infty,1),\ (1,+\infty)$ 内单调减且无极值.

(3) 凹凸性与拐点 由

$$f''(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^4}\cdot\mathrm{e}^{x/(x-1)}=0$$

可知, $x=\dfrac{1}{2}$ 且当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时, $f''(x)<0$; 而当 $x<\dfrac{1}{2}, x\neq 1$ 时, $f''(x)>0$. 因此 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ 上凸, 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right),\ (1,+\infty)$ 内下凸, 拐点为 $x=\dfrac{1}{2}$.

(4) 渐近线方程 由

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 1+}f(x)=\infty$$

可知, 曲线 $y=f(x)$ 的渐近线方程为 $y=\mathrm{e},\quad x=1$.

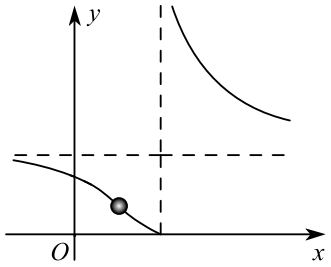


图 3.15

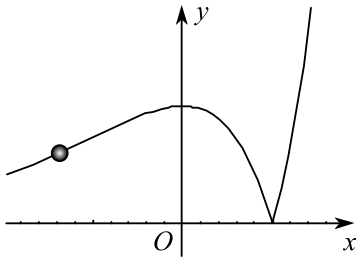


图 3.16

20. 设 $f(x)=|x-1|\,\mathrm{e}^{x-1}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性, 极值, 凹凸性及拐点, 并求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

解 (1) 单调性与极值 函数 $f(x)$ 可分段表示为

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\,\mathrm{e}^{x-1}, & x\leq 1\\ (x-1)\,\mathrm{e}^{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

由于

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1,\ f'_-(1)=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1,$$

所以 $f'(1)$ 不存在. 当 $x\neq 1$ 时，有

$$f'(x)=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^{x-1}, & x>1,\\ -x\,\mathrm{e}^{x-1}, & x<1.\end{cases}$$

由此可知，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,0),(1,+\infty)$, 单调减区间为 $(0,1)$. 极小值为 $f(1)=0$, 极大值为 $f(0)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) 凹凸性与拐点 由

$$f''(x)=\begin{cases}(x+1)\,\mathrm{e}^{x-1}, & x>1\\ -(x+1)\,\mathrm{e}^{x-1}, & x<1\end{cases}$$

可知，当 $|x|>1$ 时， $f''(x)>0$, 曲线下凸；当 $|x|<1$ 时， $f''(x)<0$, 曲线上凸. 因此 $x=-1$ 和 $x=1$ 为拐点.

(3) 渐近线方程 由

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

可知，曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=0$.

21. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^{1/x}+x, & x<0\\ \arctan\sqrt[3]{(x-1)^2}, & x>0\end{cases},$$

讨论 $f(x)$ 的单调性，极值，并求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

解 由

$$f'(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}+1, & x<0\\ \dfrac{1}{1+(x-1)^{4/3}}\cdot\dfrac{2}{3(x-1)^{1/3}}, & x>0\end{cases}$$

可知，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,0),(1,+\infty)$, 单调减区间为 $(0,1)$. 极小值为 $f(1)=0$, 无极大值.

由

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan \sqrt[3]{(x-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

可知，曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = \dfrac{\pi}{2}$; 由

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2,\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = 1$$

可知，曲线 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = 2x + 1$. 因函数 $f(x)$ 不存在无穷间断点，所以曲线 $y = f(x)$ 无垂直渐近线.

22. 假设光在介质 1 中和介质 2 中的速度分别为 $v_1,\ v_2$, 如果光线从介质 1 的 A 点出发经过界面折射到介质 2 的 B 点时，入射角和折射角分别为 $\alpha,\ \beta$, 试用光行最速原理证明光的折射定律，即

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

证 不妨设 $A(0,a), B(b,c)$ $(a>0,\ b>0,\ c<0)$ 且 $y=0$ 为介质界面. 又设光线与界面 $y=0$ 的交点为 x, 则光从 A 到 B 需要的时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}.$$

求导得

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-b}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}.$$

由 $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\ \dfrac{x-b}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$ 严格增可知，$T'(x)$ 严格增. 由

$$\lim_{x\to-\infty} T'(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} T'(x) = +\infty$$

可知，唯一存在 ξ, 使得 $T'(\xi) = 0$. 由于

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+a^2}} = \sin\alpha,\ \frac{\xi-b}{\sqrt{(b-\xi)^2+c^2}} = \sin\beta,$$

所以有 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

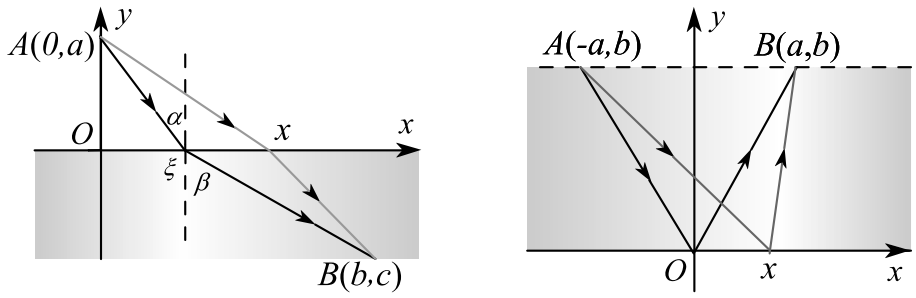


图 3.17

23. 试用光行最速原理证明光的反射定律，即当光线从 A 点出发经过镜子反射到 B 点时，入射角等于反射角.

证 不妨设 $A(-a,b), B(a,b)$ $(a>0,\ b>0)$ 且 $y=0$ 为介质界面. 又设光线与界面 $y=0$ 的交点为 x, 则光从 A 到 B 需要的时间为

$$T(x)=\frac{1}{v}\cdot\left[\sqrt{(x+a)^2+b^2}+\sqrt{(x-a)^2+b^2}\right].$$

其中 v 为光速. 求导得

$$T'(x)=\frac{x+a}{v\sqrt{(x+a)^2+b^2}}+\frac{x-a}{v\sqrt{(x-a)^2+b^2}}.$$

由 $\dfrac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+b^2}},\ \dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$ 严格增可知， $T'(x)$ 严格增. 因此 $x=0$ 是 $T(x)$ 的唯一临界点. 由此可知，入射角等于反射角.

24. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，则对任意的 $x_0, x\in(a,b)$, 恒有

$$f(x)\geq f(x_0)+f'_+(x_0)(x-x_0),$$

$$f(x)\geq f(x_0)+f'_-(x_0)(x-x_0).$$

证 对于下凸函数来说，单侧切线总是存在的，并且单侧切线总是在曲线的下方，这一性质可称为“切在下”性质. 本题旨在证明下凸函数的“切在下”性质.

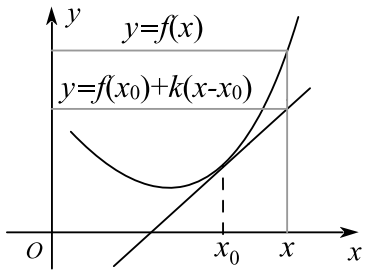


图 3.18

根据三弦斜率不等式，当 $u < x_0 < v$ 时，有

$$\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} \le f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \le \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0}.$$

由此可知，对任意的 $x_0, x \in (a,b)$, 恒有

$$f(x) \ge f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0),$$

$$f(x) \ge f(x_0) + f'_-(x_0)(x-x_0).$$

总 习 题 三

1. 设 $f''(x) \le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上处处成立，且 $f(1)=2$, $f'(1)=-3$, 证明 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内仅有一实根.

证 根据上凸函数的“切在上”性质，有

$$f(x) \le f(1) + f'(1)(x-1) = 5-3x.$$

取 $x_0 > \dfrac{5}{3}$, 则有 $f(x_0) < 0$. 于是由介值定理可知，存在 $\xi \in \left(0, \dfrac{5}{3}\right)$, 使得 $f(\xi)=0$.

由 $f''(x) \le 0$ 可知， $f'(x) \le f'(1) = -3$. 因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内严格递减，故 $f(x)=0$ 最多只有一个实根.

2. 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x) \ne 0, f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 试证：

(1) 在开区间 (a,b) 内， $g(x)\neq 0$;

(2) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证 (1) 若存在 $c\in(a,b)$, 使得 $g(c)=0$, 则由 Roll 定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$, 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$. 同理存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $g''(\xi)=0$. 这与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾，故在开区间 (a,b) 内， $g(x)\neq 0$.

(2) 设 $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$, 则 $F(a)=F(b)=0$. 于是根据 Roll 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 由此可知

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

3. 设 $0<a<b$, 证明

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}.$$

证 根据 Lagrange 中值定理，有

$$\arctan b-\arctan a=\arctan'\xi\cdot(b-a)=\frac{b-a}{1+\xi^2}.$$

其中 $a<\xi<b$. 由于

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\frac{b-a}{1+\xi^2}<\frac{b-a}{1+a^2},$$

所以 $\dfrac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{1+a^2}$.

4. 设 $0<x_1<x_2<x_3<\pi$, 证明

$$\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}<\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}.$$

证 根据 Lagrange 中值定理，有

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=\cos\xi_1,\quad \frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}=\cos\xi_2.$$

其中 $0<x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3<\pi$. 由 $\cos\xi_1>\cos\xi_2$ 可知,

$$\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}<\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}.$$

5. 选择题

(1) 当 a 取下列哪个值时，函数 $2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

(A) 2; (B) 4; (C) 6; (D) 8.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$;

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$;

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=0$;

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=0$.

证 (1) 令 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$, 则

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2).$$

由此可知，$f(x)$ 分别在 $(-\infty,1),(1,2),(2,+\infty)$ 严格递增，严格递减，严格递增. 由于

$$f(1)=5-a,\ f(2)=4-a,$$

所以 $a=4$ 时，$f(x)=0$ 恰有两个根. 故选 B.

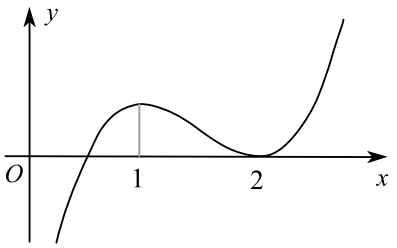


图 3.19

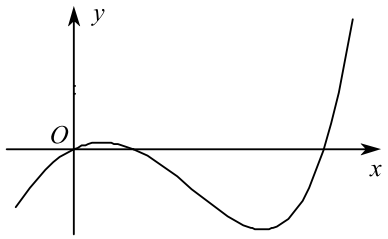


图 3.20

(2) 根据 $f(x)$ 的有界性和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 的存在性，应用罗必达法则，有

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x).$$

故选 B.

6. 证明方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 在整个数轴上仅有三个不同的实根.

证 令 $f(x) = 2^x - x^2 - 1$. 由于

$$f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = -1,\ f(5) = 6,$$

所以 $f(x) = 0$ 有三个不同的实根.

由于

$$f''(x) = 2^x \ln^2 x - 2 = 0$$

最多只有一个解，所以 $f'(x) = 0$ 最多只有两个解，从而 $f(x) = 0$ 最多只有三个解.

7. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} = 1,\ (x \geq 0, y \geq 0)$ 上求一点 $P(x, y)$, 使该点的切线与椭圆弧及两坐标轴所围成的图形面积最小，并求最小面积.

解 椭圆的切线方程为

$$\frac{X}{8/x} + \frac{Y}{18/y} = 1.$$

所求图形的面积为

$$S = \frac{a^2b^2}{2xy} - \frac{\pi ab}{4} = \frac{8 \times 18}{2xy} - \frac{\sqrt{8 \times 18}\pi}{4}.$$

将 $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{8 - x^2}$ 代入可得

$$S = \frac{48}{x\sqrt{8 - x^2}} - 3\pi.$$

由

$$S' = \frac{48}{x^2(8 - x^2)} \cdot \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8 - x^2}}\right)$$
$$= 0.$$

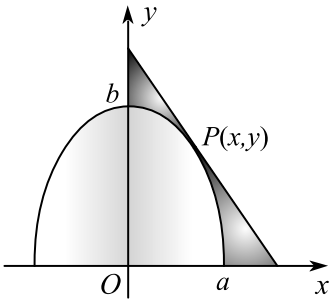


图 3.21

可得唯一临界点 $x = 2$. 由于 S' 在 $x = 2$ 点左 $-$ 右 $+$, 所以当 $(x, y) = (2, 3)$ 时所求图形的面积最小且最小面积为 $12 - 3\pi$.

8. 最初质量为 m_0 的雨滴在重力作用下下落. 由于蒸发而减少质量, 并且减少的速度与时间成正比 (比例系数为 k). 从它下落经过多少时, 动能达到最大? 最大的动能是多少?

解 设 t 时刻雨滴的质量为 m, 速度为 v, 则有

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -kt,\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg.$$

由此可知

$$m = m_0 - \frac{1}{2}kt^2,\ v = gt.$$

于是 t 时刻雨滴的动能为

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m_0 - \frac{1}{2}kt^2)\cdot g^2t^2.$$

由

$$E' = g^2t(m_0 - kt^2) = 0,\ t > 0$$

可得唯一临界点 $t_0 = \sqrt{\dfrac{m_0}{k}}$. 由于 E' 在 t_0 点左 $+$ 右 $-$, 所以动能 t_0 时达到最大且最大动能为 $E = \dfrac{m_0^2g^2}{4k}$.

9. 在半径是 a 的圆桌中央上空安装电灯, 桌面上的照度是 $J = k\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, 这里 r 是灯和被照明点的距离, φ 是光线与桌面的夹角, k 为常数. 为使桌面边缘照度尽可能地大, 应把电灯安在离桌面多高的地方?

解 设电灯到桌面的距离为 h, 则 $r = a$ 时, $\sin\varphi = \dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$. 于是桌面边缘的照度为

$$J = \frac{kh}{a\sqrt{a^2+h^2}}.$$

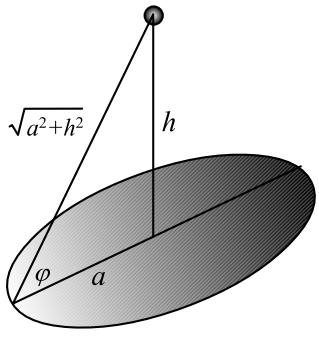


图 3.22

由

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}h} = \frac{k}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{h^2}{\sqrt{(a^2+h^2)^3}}\right)$$
$$= 0$$

可得唯一临界点 $h_0=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. 由于 $\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}h}$ 在 h_0 点左 $+$ 右 $-$, 所以 $h=h_0$ 时桌面边缘的照度最大.

10. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f''(x)>0$, 证明 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

证 令 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, 则

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}\\ &= \frac{f'(x)(x-a)-f'(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f''(\eta)(x-\xi)}{x-a}>0.\end{aligned}$$

其中 $a<\xi<\eta<x$. 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

11. 设 $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\pi$, 则

$$\sin\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{n}>\frac{1}{n}(\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_n).$$

证 由于 $f(\theta)=\sin\theta$ 是 $(0,\pi)$ 上的严格上凸函数, 所以当 $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\pi$ 时, 有

$$f\Big(\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{n}\Big)>\frac{f(\theta_1)+\cdots+f(\theta_n)}{n}.$$

12. 讨论方程 $x^3+px+q=0$ 具有一个实根和三个实根的条件.

解 令 $f(x)=x^3+px+q$, 则

$$f'(x)=3x^2+p,\ f''(x)=6x.$$

(1) 当 $p>0$ 时, $f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 严格递增. 由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

所以 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内只有一个实根.

(2) 当 $p<0$ 时, 由 $f'(x)=0$ 可得临界点

$$x_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}},\ x_2=\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

若 $f(x_1)f(x_2)<0$, 则

$$f(x_1)=q-\frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}>0,\ f(x_2)=q+\frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}<0.$$

因此 $f(x)=0$ 有三个实根，分别位于区间 $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),(x_2,+\infty)$; 若 $f(x_1)f(x_2)>0$, 则当 $f(x_1)>0$ 时， $f(x)=0$ 在 $(-\infty,x_1)$ 内只有一个实根，而在 $(x_1,+\infty)$ 内无实根. 当 $f(x_1)<0$ 时， $f(x)=0$ 在 $(x_2,+\infty)$ 内只有一个实根，而在 $(-\infty,x_1)$ 内无实根.

(3) 当 $p=0,q<0$ 时， $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根.

13. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微， $f''(x)>0$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=B<0,$$

又设 $f(x_0)<0$, 证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且只有两个实根.

证 由

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=B<0$$

可知，存在 $a>|x_0|$, 使得 $f'(-a)<0,\ f'(a)>0$. 由于

$$f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a),\ f(x)\geq f(-a)+f'(-a)(x-a),$$

所以存在 $b>a$, 使得 $f(-b)>0,\ f(b)>0$. 因此存在 $x_1\in(-b,x_0),\ x_2\in(x_0,b)$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

又因 $f''(x)>0$, 所以存在 c, 使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,c)$ 内严格递减, 在 $(c,+\infty)$ 内严格递增，故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且只有两个实根.

14. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且 $f'(0)=0,\ f''(0)$ 存在，证明

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(x-x^2)}{x^3}=f''(0).$$

证 根据罗必达法则和导数定义，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(x-x^2)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(x-x^2)(1-2x)}{3x^2}\\&=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(x-x^2)}{x-(x-x^2)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{f'(x-x^2)-f'(0)}{x}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot f''(0) + \frac{2}{3} \cdot f''(0).$$

15. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二次连续可微，$f(0) = f'(0) = 0$ 且 $f''(x) > 0$，若 $u(x)$ 为曲线 $y = f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 点的切线在横轴上的截距，则

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x\, f(u(x))}{u(x)\, f(x)} = \frac{1}{2}.$$

证 设曲线 $y = f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 点的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

则有

$$u(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

根据泰勒展式，有

$$f(x) = \frac{1}{2} f''(0)x^2 + o(x^2),\ f'(x) = f''(0)x + o(x)\ (x \to 0).$$

于是有

$$u(x) = \frac{1}{2}\, x + o(x),\ f(u(x)) = \frac{1}{8} f''(0)x^2 + o(x^2)\ (x \to 0).$$

故

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x\, f(u(x))}{u(x)\, f(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x \cdot \frac{1}{8} f''(0)x^2}{\frac{1}{2}\, x \cdot \frac{1}{2} f''(0)x^2} = \frac{1}{2}.$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内二阶可导. 若 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对任意的 $x \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{1}{2!}\, f''(\xi)(x - a)(x - b).$$

证 对固定的 $x \in (a, b)$, 令

$$F(t) = f(x) - \frac{f(x)}{(x - a)(x - b)}(t - a)(t - b),$$

则 $F(a)=F(b)=F(x)=0$. 根据 Roll 定理，存在 $\xi_1\in(a,x)$, $\xi_2\in(x,b)$, 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$. 于是存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $F''(\xi)=0$. 由此可得

$$f(x)=\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)(x-b).$$

17. 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，若

$$x\,y''+3x\,y'^{\,2}=1-\mathrm{e}^{-x},$$

则 $f(x)$ 的极值点必为极小值点.

证 设 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则当 $x_0\neq 0$ 时，由

$$f'(x_0)=0,\ x\,y''+3x\,y'^{\,2}=1-\mathrm{e}^{-x}$$

可知,

$$f''(x_0)=\frac{1-\mathrm{e}^{-x_0}}{x_0}>0.$$

当 $x_0=0$ 时，由

$$y''+3\,y'^{\,2}=\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\ (x\neq 0)$$

可知， $f''(0)=1$. 因此 $f(x)$ 的极值点必为极小值点.

18. 证明严格下凸函数的临界点存在时唯一且必为最小值点.

证 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格下凸函数且 x_0 是 $f(x)$ 的临界点，则由切在下性质

$$x\in[a,b],\ x\neq x_0\Longrightarrow f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

可知， x_0 是 $f(x)$ 的最小值点且 $f(x)$ 的临界点唯一.

第四章　定积分与不定积分

§4.1　定积分概念

习 题 4.1 A

1. 比较下列定积分值的大小：

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 x \,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x) \,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_1^2 \sqrt{x} \ln x \,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 (1+x+\dfrac{x^2}{2}) \,\mathrm{d}x$.

解　按照被积函数的大小进行估计，有

(1) $>$;　　(2) $<$;　　(3) $>$;

(4) $<$;　　(5) $>$;　　(6) $>$.

2. 估计下列积分值：

(1) $\int_1^4 (x^2+1) \,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{5\pi/4}^{\pi/4} (\sin^2 x + 1) \,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} x \arctan x \,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_2^{-1} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x$.

解　按照被积函数的最值进行估计，有

(1) $(6, 51)$;　　(2) $(-2\pi, -\dfrac{3\pi}{2})$;

(4) $(-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{9})$;　　(5) $(-\mathrm{e}^{-4}, -\mathrm{e}^{-1})$.

3. 选择题 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$, 令

$$S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad S_2=f(b)\,(b-a),\quad S_3=\frac{1}{2}\,[\,f(a)+f(b)\,]\cdot(b-a),$$

则

(A) $S_1<S_2<S_3$; (B) $S_2<S_1<S_3$;

(C) $S_3<S_1<S_2$; (D) $S_2<S_3<S_1$.

解 根据 $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$, 由函数 $f(x)$ 产生的曲边梯形的面积 S_1 介于小矩形面积 S_2 和大梯形面积 S_3 之间，故选 B.

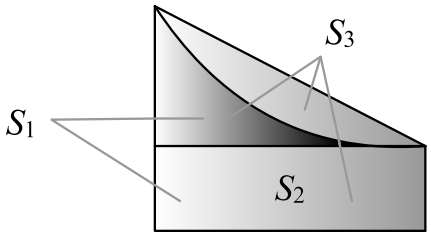


图 4.1

4. 证明不等式 $\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时,

$$f'(x)=\frac{\cos x\,(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

因此

$$\frac{2}{\pi}=f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\le f(x)\le f\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

故有

$$\frac{1}{2}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}x<\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x<\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. 试用定积分表示下列图形的面积：

(1) 由两条抛物线 $y^2=x$, $y=x^2$ 围成的图形;

(2) 由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 围成的图形.

解 (1) 所围图形的上边界为 $y=\sqrt{x}$, 下边界为 $y=x^2$. 两式消去 y 可得 $\sqrt{x}=x^2$, 由此可知积分区间为 $[0,1]$, 故所求图形的面积为

$$S=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 椭圆片的上边界为 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 下边界为 $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 两式消去 y 可得积分区间为 $[-a,a]$, 故所求面积为

$$S=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

6. 试将下列极限表示为定积分.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(2-\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(2-\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(2-\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}+\dfrac{2^p}{n^{p+1}}+\cdots+\dfrac{n^p}{n^{p+1}}\right)\quad(p>0)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(2-\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(2-\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(2-\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(2-x^2)\,\mathrm{d}x}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}+\dfrac{2^p}{n^{p+1}}+\cdots+\dfrac{n^p}{n^{p+1}}\right)=\displaystyle\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

习 题 4.1 B

1. 汽车以 $v_0 = 10\text{m/s}$ 的速度行驶，到某处需要减速停车. 设汽车在 t 时刻的刹车速度为 $v = v_0 - 10t^2\,\text{m/s}$, 问汽车从开始刹车到停车走了多长？

解 令 $10 - 10t^2 = 0$, 则可得汽车刹车用时为 1s. 于是汽车刹车路程为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (10 - 10t^2)\mathrm{d}t \\ &= 10\int_0^1 \mathrm{d}t - 10\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 10 - 10\times\frac{1}{3} = \frac{20}{3}(\text{m}). \end{aligned}$$

2. 有一直杆长为 a, 密度为 $\rho = m_0\sqrt{x}$. 已知 $\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$, 试求该直杆的质量.

解 直杆的质量为

$$m = \int_0^a \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a m_0\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = m_0\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2m_0}{3}\sqrt{a^3}.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则在 $[a,b]$ 上，恒有 $f(x) = 0$.

证 反证. 若存在 $f(x) \neq 0$, 则存在 $[A,B] \subset [a,b]$, 使得

$$x \in [A,B] \Longrightarrow f(x) > 0.$$

由于 $f(x)$ 连续，所以可设 m 是 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 最小值. 根据上式必有 $m > 0$, 于是

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_A^B m\,\mathrm{d}x = m(B-A) > 0,$$

这是一个矛盾，因此必有 $f(x) \equiv 0$.

4. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明柯西不等式和闵可夫斯基不等式：

(1) $\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2 \le \Big(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)$;

(2) $\Big(\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \le \Big(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + \Big(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$.

证 (1) 由于对任意的 t, 都有

$$\int_a^b [tf(x)+g(x)]^2\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

即

$$t^2\int_a^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2t\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

所以必有

$$\Big[2\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\Big]^2 - 4\int_a^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \le 0,$$

此即

$$\Big[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 利用 Cauchy 不等式，有

$$\begin{aligned}
&\left[\Big(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + \Big(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\right]^2\\
&= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\Big(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\\
&\ge \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b \Big[f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

5. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0$.

证 (1) 对任意小的 $\varepsilon>0$, 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\begin{aligned}0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x&\leq\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_0^{1-\varepsilon}(1-\varepsilon)^n\,\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1 1\cdot\mathrm{d}x\\&=(1-\varepsilon)^{n+1}+\varepsilon\to\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=0.$

(2) 对任意小的 $\varepsilon>0$, 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\begin{aligned}0\leq\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x&\leq\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\mathrm{d}x+\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2}1\cdot\mathrm{d}x\\&=\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon\to\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$

6. 证明下列不等式

(1) 若 $x\in[a,b]$ 时, 恒有 $f(x)>0$, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geq(b-a)^2;$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 (1) 根据 Cauchy 不等式, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geq\left(\int_a^b\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

$$= \left(\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x \right)^2 = (b-a)^2.$$

(2) 根据 Cauchy 不等式，有

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b 1^2 \cdot \mathrm{d}x = (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ 及直线 $l : x + y = t\ (t \ge 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t\ (x \ge 0)$.

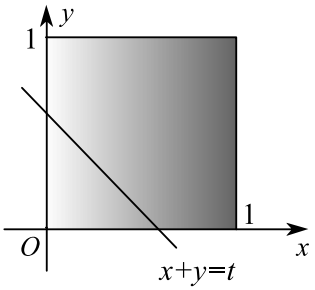


图 4.2

解 由题设知

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2, & 0 \le t \le 1 \\ -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \le 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}.$$

所以，当 $0 \le x \le 1$ 时，

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}x^3.$$

当 $1 < x \le 2$ 时，

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x S(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}.$$

当 $x>2$ 时,

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 S(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^x S(t)\,\mathrm{d}t=x-1.$$

因此

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3, & 0\le x\le 1\\ -\dfrac{1}{6}x^3+x^2-x+\dfrac{1}{3}, & 1<x\le 2\\ x-1, & x>2\end{cases}.$$

8. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，且 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 证明 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证 由于 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，所以存在 $M>0$, 使当 $x\in[a,b]$ 时，恒有 $|f(x)|\le M$. 于是当 $x,x+\Delta x\in[a,b]$ 时，有

$$\begin{aligned}|\Delta F(x)| &=|F(x+\Delta x)-F(x)|\\ &=\left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|\,\mathrm{d}t\right|\le M|\Delta x|.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta F(x)=0$, 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续且单调递减，证明

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^n f(k)\le f(1)+\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 根据单调性，有

$$x\in[i,i+1]\Longrightarrow f(i+1)\le f(x)\le f(i).$$

因此，有

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_1^2 f(1)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(2)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x \\
&= f(1) + f(2) + \cdots + f(n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x &= f(1) + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq f(1) + \int_1^2 f(2)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(3)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n f(n)\,\mathrm{d}x \\
&= f(1) + f(2) + \cdots + f(n).
\end{aligned}$$

10. 证明不等式

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

证 令 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以有

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq 1 + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

由此可知,

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

§4.2 微积分基本定理

习 题 4.2 A

1. 求下列各导数:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^b \sin x^2\ \mathrm{d}x\right)$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \sin x^2\ \mathrm{d}x$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\cos x}^{\sin x} \sin t^2\ \mathrm{d}t$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_a^b \sin x^2\ \mathrm{d}x\right)=0.$ (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\ \mathrm{d}x=\sin b^2.$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot(x^2)'==\frac{1}{\sqrt{1+x^8}}\cdot 2x.$

(4) $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\cos x}^{\sin x}\sin t^2\ \mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sin x}\sin t^2\ \mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos x}\sin t^2\ \mathrm{d}t\\&=\sin(\sin x)^2\cdot\cos x+\sin(\cos x)^2\cdot\sin x.\end{aligned}$$

2. 求下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$；

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\ \mathrm{d}t}$；

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x+x^2}}\int_0^x \arctan\sqrt{t}\ \mathrm{d}t$；

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t\right)^{1/x^3}$；

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$；

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x \sin t\cdot\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

解 (1) 利用罗必达法则和面积函数求导定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\ \mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\ \mathrm{d}t}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{1}=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

(2) 利用罗必达法则和面积函数求导定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\ \mathrm{d}t}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t\cdot\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2}}\\&=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x}=0.\end{aligned}$$

(3) 利用罗必达法则和面积函数求导定理，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x+x^2}}\int_0^x \arctan\sqrt{t}\ \mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \arctan\sqrt{t}\ \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\sqrt{x}}{1} = \frac{\pi}{2}.$$

(4) 利用罗必达法则和面积函数求导定理，有

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/x^3} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{3x^2}} = +\infty.$$

(5) 利用罗必达法则和面积函数求导定理，有

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

(6) 利用罗必达法则和面积函数求导定理，有

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\int_0^x \sin t\cdot\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to0} \sin x\cdot\cos\frac{1}{x} = 0.$$

3. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$;

(2) $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}$;

(5) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int (x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x$;

(8) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\int 3^x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

(10) $\int \mathrm{e}^x\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

(11) $\int \sec x(\sec x-\tan x)\,\mathrm{d}x$;

(12) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;

(13) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$;

(14) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}+C$.

(2) $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{5}\,x^{5/2} + C.$

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}} = -\dfrac{2}{3}x^{-3/2} + C.$

(5) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{10}\,x^{10/3} + C.$

(6) $$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int (x^{-1/2} - 2x^{1/2} + x^{3/2})\,\mathrm{d}x$$
$$= 2x^{1/2} - \frac{4}{3}\,x^{3/2} + \frac{2}{5}\,x^{5/2} + C.$$

(7) $\int (x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\,x^3 - \dfrac{3}{2}\,x^2 + 2x + C.$

(8) $\int \dfrac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + \dfrac{1}{x^2 + 1}\right)\,\mathrm{d}x = x^3 + \arctan x + C.$

(9) $\int 3^x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x \mathrm{e}^x}{1 + \ln 3} + C.$

(10) $\int \mathrm{e}^x\Big(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\Big)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x - x^{-1/2})\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2\sqrt{x} + C.$

(11) $\int \sec x(\sec x - \tan x)\,\mathrm{d}x = \tan x - \sec x + C.$

(12) $\int \cos^2\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1 + \cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin x + C.$

(13) $\int \dfrac{1}{1 + \cos 2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\tan x + C.$

(14) $$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C.$$

(15) $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$= \int (\csc^2 x - \sec^2 x)\,\mathrm{d}x = -\cot x - \tan x + C.$$

(16) $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int(x^{3/4}-x^{-5/4})\,\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-1/4}+C.$

4. 验证下列积分公式：

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}\,\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2\pm1})+C;$

(2) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$

证 由于

$$(\ln(x+\sqrt{x^2\pm1})+C)'=\sqrt{x^2+a^2},$$

$$\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C\right)'=\sqrt{x^2+a^2},$$

所以结论成立.

5 求由方程

$$\int_0^y\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t=0$$

所确定的隐函数 y 关于 x 的二阶导数.

解 由于

$$\mathrm{e}^y\cdot y'+\cos x=0,$$

所以

$$y'=-\mathrm{e}^{-y}\cdot\cos x,$$

$$y''=\mathrm{e}^{-y}\cdot y'\cdot\cos x+\mathrm{e}^{-y}\sin x=-\mathrm{e}^{-2y}\cdot\cos x+\mathrm{e}^{-y}\sin x.$$

习 题 4.2 B

1. 计算下列各题：

(1) 设 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^t\sin u\,\mathrm{d}u\\ y=\displaystyle\int_0^t\cos u\,\mathrm{d}u\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{x^4}$；

(3) 设 $\begin{cases} x=\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ y=\int_0^{t^2}\dfrac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^{3/2}t\,\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\,\mathrm{d}t}$.

解　(1) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\cos t}{\sin t}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2\cdot 2x}{4x^3}=\dfrac{1}{2}.$

(3) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-t^2},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(t^2)}\cdot\frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{\sin t^2}{t^2}\cdot 2t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2\sin t^2}{t\,\mathrm{e}^{-t^2}}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^{3/2}t\,\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\,\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{3/2}x^2\cdot 2x}{x(x-\sin x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos x}=12.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增，讨论

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 (a,b) 内的单调性.

解　由于 $t\in(a,b)$ 时，$f(x)-f(t)\geq 0$, 所以

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{f(x)}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f(x)}{(x-a)^2}\int_a^x \big[\, f(x) - f(t) \,\big]\, \mathrm{d}t \geq 0.$$

因此 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且恒正，讨论函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\, \mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t}$$

在 $[0,+\infty)$ 上的单调性.

解 由于

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{x f(x)}{\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t} - \frac{f(x)}{\left(\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t\right)^2}\int_a^x t f(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{f(x)}{\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t}\cdot \int_0^x (\, x - t\,) f(t)\, \mathrm{d}t \geq 0. \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增.

4. 求参数方程

$$x = \int_0^t \sin^2 \mathrm{s}\, \mathrm{d}s,\ y = \int_0^t \cos^2 s\, \mathrm{d}s$$

所表示函数 y 关于 x 的二阶导数.

解 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sin^2 t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos^2 t,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cot^2 t, \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cot^2 t)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2\cot t \cdot csct}{\sin^2 t}. \end{aligned}$$

5. 设 $f(x)$ 为连续可微函数，证明

$$y(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x f(t)\sin\omega(x-t)\, \mathrm{d}t$$

满足微分方程 $y''+\omega^2 y=f(x)$ 和初始条件 $y(0)=y'(0)=0$.

证 由于

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\omega}\int_0^x f(t)\sin\omega(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega x\cdot\int_0^x f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\omega}\cdot\cos\omega x\cdot\int_0^x f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

所以 $y(0)=0$ 且

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos\omega x\cdot\int_0^x f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\omega}\cdot\sin\omega x\cdot f(x)\cos\omega x \\ &\quad +\sin\omega x\cdot\int_0^x f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\omega}\cdot\cos\omega x\cdot f(x)\sin\omega x \\ &= \cos\omega x\cdot\int_0^x f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t+\sin\omega x\cdot\int_0^x f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由此可知 $y'(0)=0$. 继续求导，有

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\omega\sin\omega x\cdot\int_0^x f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t+\cos\omega x\cdot f(x)\cos\omega x \\ &\quad +\omega\cos\omega x\cdot\int_0^x f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t+\sin\omega x\cdot f(x)\sin\omega x \\ &= -\omega\Big[\sin\omega x\cdot\int_0^x f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\cos\omega x\cdot\int_0^x f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\Big]+f(x) \\ &= -\omega^2 y(x)+f(x). \end{aligned}$$

6. 证明下列各题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1/2}\dfrac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

证 (1) 由于 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 时，$0\le\dfrac{x^n}{1+x^2}\le\dfrac{1}{2^n}$, 所以

$$0\le\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2^n}\to 0.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1/2}\dfrac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=0.$

(2) 由于对任意小的 $\varepsilon>0$, 有

$$0\le\int_0^1\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\le\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\int_0^{1-\varepsilon}x^n\,\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$<(1-\varepsilon)^{n+1}+\varepsilon\to\varepsilon\ (n\to\infty),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=0.$

(3) 由于

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\le\int_n^{n+p}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\le\ln\frac{n+p}{n}\to 0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\arctan nx\,\big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}.$

7. 求函数 $f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的极值点.

解 由

$$f'(x)=(x-1)(x-2)\mathrm{e}^{-x^2}=0$$

可得临界点 $x_1=1,\ x_2=2$. 由于

当 $x<1$ 时, $f'(x)>0$;

当 $1<x<2$ 时, $f'(x)<0$;

当 $x>2$ 时, $f'(x)>0$,

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

8. 设 $f(x)=-2a+\int_0^x(t^2-a^2)\,\mathrm{d}t$, 试求 $f(x)$ 的极大值 $M(a)$; 又问 a 为何值时, $M(a)$ 有最小值.

解 由

$$f'(x)=x^2-a^2=0,\ f''(x)=2x$$

可知, $f(x)$ 有临界点 $x_1=a,\ x_2=-a$ 且 $f''(a)=2a,\ f''(-a)=-2a$. 于是

$$M(a)=\begin{cases}f(-a), & a>0\\ f(a), & a<0\end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2a + \int_0^{-a} (t^2 - a^2)\,\mathrm{d}t, & a > 0 \\ -2a - \int_0^{a} (t^2 - a^2)\,\mathrm{d}t, & a < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2a + \dfrac{2}{3}a^3, & a > 0 \\ -2a - \dfrac{2}{3}a^3, & a < 0 \end{cases}.$$

由

$$M'(a) = \begin{cases} 2(a^2 - 1), & a > 0 \\ -2(a^2 + 1), & a < 0 \end{cases}$$

及 $M'(a) = 0$ 可知， $a = 1$. 由于 $M''(1) > 0$, 所以 $a = 1$ 时， $M(a)$ 有最小值.

9. 证明下列不等式：

(1) $1 < \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \dfrac{\pi}{2}$;

(2) 当 $p > 0$ 时， $\dfrac{p}{p+1} < \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^p} < 1$;

(3) $\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-R} < \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin x}\,\mathrm{d}x < \dfrac{\pi}{2R}(1 - \mathrm{e}^{-R})$.

证 (1) 由于 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时， $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$, 所以

$$1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x < \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}.$$

(2) 由于 $1 - x^p < \dfrac{1}{1 + x^p} < 1$, 所以

$$1 > \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^p} > \int_0^1 (1 - x^p)\,\mathrm{d}x > \frac{p}{p+1}.$$

(3) 由于 $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$, 所以

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-R} < \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin x}\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\frac{2R}{\pi}x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2R}(1 - \mathrm{e}^{-R}).$$

10. 选择题

(1) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于

$(A)\ 2\pi$; $(B)\ \pi$; $(C)\ \mathrm{e}^{\pi/4}$; $(D)\ \pi\mathrm{e}^{\pi/4}$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 内存在原函数, 则 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上

(A) 不一定有界; (B) 必有界但不一定可积;

(C) 必可积但不一定连续; (D) 必连续但不一定可导.

解 (1) 由 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha\ (\Delta x \to 0)$ 可知, $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$. 于是

$$\mathrm{d}\ln y = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

两端积分, 有

$$\ln y(1) - \ln y(0) = \ln y(x)\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

由此可知, $y(1) = \pi\mathrm{e}^{\pi/4}$.

(2) 令 $F(x) = \begin{cases} x^{4/3}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $F'(x)$ 在 $(-2,2)$ 内存在原函数且在区间 $[-1,1]$ 上无界, 不可积, 不连续, 不可导. 故选 A.

§4.3 积分方法

习 题 4.3 A

1. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \dfrac{x^3}{x+3}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$;

(6) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int \dfrac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\int \dfrac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\int \tan^3 x\sec x\,\mathrm{d}x$;

(10) $\int \dfrac{\mathrm{e}^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(11) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

(12) $\int \dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 (1) $\int \dfrac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$

(2) $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = -2\cos\sqrt{x} + C.$

(3) $$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x+3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3+3^3-3^3}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int (x^2-3x+3^2)\,\mathrm{d}x - 9\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}\\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 9\ln|x+3| + C.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \tan\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}\\ &= -\ln|\cos\sqrt{1+x^2}| + C.\end{aligned}$$

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} = \int \dfrac{\mathrm{d}(2x)}{\sin 2x} = \ln|\csc 2x - \cot 2x| + C.$

(6) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}(-x^2) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} = C.$

(7) $\int \dfrac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{6}\int \dfrac{\mathrm{d}(2-3x^2)}{\sqrt{2-3x^2}} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{2-3x^2} + C.$

(8) $\int \dfrac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$

(9) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}\sec x = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C.$

(10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2\arccos x}\,\mathrm{d}\arccos x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\arccos x} + C.$

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\arcsin x}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

(12) $$\begin{aligned}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} &= -\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{a^2}\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= -\frac{x}{2a^2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

2. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x;$

(2) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x;$

(3) $\displaystyle\int \arccos x\,\mathrm{d}x;$

(4) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x;$

(5) $\displaystyle\int x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x;$

(6) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x;$

(7) $\displaystyle\int x^2 \sin x\cos x\,\mathrm{d}x;$

(8) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x;$

(9) $\displaystyle\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x;$

(10) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x;$

(11) $\displaystyle\int (\arccos x)^2\,\mathrm{d}x;$

(12) $\displaystyle\int x^2 \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x;$

(13) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x;$

(14) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x;$

(15) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x;$

(16) $\displaystyle\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x;$

(17) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x;$

(18) $\displaystyle\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x;$

(19) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;　　(20) $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$;

(21) $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;　　(22) $\int \frac{x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

(2) $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \ln x\,\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}\ln x\cdot x^3 - \int x^2\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}\ln x\cdot x^3 - \frac{1}{3}x^3 + C.$$

(3) $\int \arccos x\,\mathrm{d}x = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

(4) $\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$

$$= -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C.$$

(5) $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \arctan x\,\mathrm{d}x^3$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

(6) $$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = -\int x^2 \,\mathrm{d}\cos x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x \,\mathrm{d}x$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x \,\mathrm{d}\sin x$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x \,\mathrm{d}x$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

(7) $$\int x^2 \sin x\cos x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int x^2 \,\mathrm{d}\cos 2x$$
$$= -\frac{1}{4}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int x\cos 2x \,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}\int x \,\mathrm{d}\sin 2x$$
$$= -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x \,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

(8) $$\int \mathrm{e}^x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\cos 2x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 2x - \int \sin 2x \,\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 2x - \mathrm{e}^x\sin 2x - 2\int \mathrm{e}^x\cos 2x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{10}\mathrm{e}^x\cos 2x - \frac{1}{5}\mathrm{e}^x\sin 2x + C.$$

(9) $$\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) \,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\sqrt{1+x^2} + 2x + C.$$

(10) $$\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

(11) 令 $t = \arccos x$, 则

$$\int (\arccos x)^2\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}\cos t = t^2\cos t + 2\int t\,\mathrm{d}\sin t$$

$$= t^2\cos t + 2t\sin t - 2\int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t + C$$

$$= \arccos^2 x + 2\arccos x \sin\arccos x + 2x + C.$$

(12) $$\int x^2\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int x^2\frac{1-\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\sin x - \int x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\sin x - x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\sin x - x\cos x + \sin x + C.$$

(13) $$\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}\sin x = \mathrm{e}^{2x}\sin x + 2\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= \mathrm{e}^{2x}\sin x + 2\mathrm{e}^{2x}\cos x - 4\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\sin x + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x}\cos x + C.$$

(14) $$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x\,\mathrm{d}x^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

(15) $$\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln(1+x^2) - 2x + \arctan x + C.$$

(16) $$\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\tan x = x\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}x$$
$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

(17) $$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \ln x\,\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

(18) $$\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x$$
$$= x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x\cos\ln x + \frac{1}{2}x\sin\ln x + C.$$

(19) $$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - 2\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - 4\int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4\arctan\sqrt{x} + C.$$

(20) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}\sqrt{1+x}$

$$= 2\sqrt{1+x}\ln(1+x) - 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{1+x}\ln(1+x) - 4\sqrt{1+x} + C.$$

(21) $\displaystyle\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \ln\cos x\,\mathrm{d}\tan x$

$$= \tan x\ln\cos x + \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x\ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x\ln\cos x + \tan x - x + C.$$

(22) $\displaystyle\int \frac{x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\frac{x}{2} = \int x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C.$$

3. 求下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x+\frac{\pi}{6})\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} (1-\sin^3 x)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_{0}^{2}x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}x\arctan x\,\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{e}^{3x}\sin x\,\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\sin\ln x\,\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\,\mathrm{d}x$;

(16) $\displaystyle\int_{0}^{1}x\arcsin x\,\mathrm{d}x$;

解 (1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos(x+\frac{\pi}{6})\,\mathrm{d}x=\sin(x+\frac{\pi}{6})\Big|_{0}^{\pi}=-1.$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3 x)\,\mathrm{d}x=\pi-\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}\cos x$

$$=\pi-\left[\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_{0}^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}.$$

(3) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}.$$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_{0}^{\pi/2}=\frac{1}{4}.$

(5) 令 $x=\sin t$, 则

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot^2 t\,\mathrm{d}t=\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\csc^2 t-1)\,\mathrm{d}t$$

$$=\Big[-\cot t-t\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}=1-\frac{\pi}{4}.$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3\pi}{4}.$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\pi} = \pi.$

(8) $\displaystyle\int_0^{2} x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{9}(1+x^3)\sqrt{1+x^3}\right]_0^{2} = \frac{52}{9}.$

(9) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{12}.$$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}(2x^2-1)\sin 2x\right]_0^{\pi}$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

(11) $\displaystyle\int_1^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{4} \ln x\,\mathrm{d}\sqrt{x} = \left[-4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{4} = 4\ln 4 - 4.$

(12) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{3x}\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}\cos x + \frac{3}{10}\mathrm{e}^{3x}\sin x\right]_0^{\pi/2}$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3\mathrm{e}^{3\pi/2}}{10}.$$

(13) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1+\mathrm{e}^2}{4}.$

(14) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \sin\ln x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x\cos\ln x + \frac{1}{2}x\sin\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}$

$$= \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}\cdot\cos 1 + \mathrm{e}\cdot\sin 1).$$

(15) $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x - \int_{1/\mathrm{e}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$

(16) $\displaystyle\int_0^{1} x\arcsin x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}.$

习 题 4.3 B

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{1-x^2}}$;　　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;　　(8) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} = \arccos\frac{1}{x} + C.$

或令 $x = \sec t$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \mathrm{d}t = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C.$$

(2) 令 $x = \tan t$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

(3) 令 $x = 2\sec t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int \tan^2 t\,\mathrm{d}t = 2\tan t - 2t + C\\ &= \sqrt{x^2-4} - 2\arccos\frac{2}{x} + C.\end{aligned}$$

(4) 令 $\sqrt{2x} = t$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}} = \int (1 - \frac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t = \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C.$$

(5) 令 $x=\sin t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{1-x^2}} &= \int \left(\frac{1}{1-\cos t}-1\right)\,\mathrm{d}t\\ &= -\cot\frac{t}{2}-t+C=-\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+c.\end{aligned}$$

(6) 由于

$$\Big[\ \ln(x+\sqrt{1-x^2})\ \Big]'=\frac{2}{x+\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1-x^2})+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

或令 $x=\sin t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{\cos^2 t-\cos t\sin t}{\cos^2 t-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos 2t}+1-\tan 2t\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\ln|\sec 2t+\tan 2t|+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\ln|\cos 2t|+C.\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int \frac{\mathrm{d}(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\sqrt{1+\ln x}+C.$

(8) 令 $x+1=t^2$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t-1}{t+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int\left(t-2+\frac{2}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= t^2-4t+4\ln|1+t|+C\\ &= x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln(1+\sqrt{x+1})+C.\end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可积, 证明:

(1) 若 $f(a-x)=f(x)$, 则 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 若 $f(a-x)=-f(x)$, 则 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$;

证 当 $x\in\left[\dfrac{a}{2},a\right]$ 时, 令 $x=a-t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{a/2}^a f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{a/2}^0 f(a-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{a/2}[\,f(x)+f(a-x)\,]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此可知, 结论成立.

3. 求下列定积分:

(1) $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{(3x+2)^2}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{\pi/4}\tan^3 x\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$, 则有

$$\begin{aligned}I_n &= -\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}\cos x\\ &= -\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= 0+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\\ &= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.\end{aligned}$$

由此可知,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} I_0, & \text{n为偶数} \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} I_1, & \text{n为奇数} \end{cases}.$$

其中 $I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$.

(2) 由于 $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x$, 所以结论同 (1).

(3) $$\begin{aligned} \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \, \mathrm{d}x &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} \, \mathrm{d}x \\ &= \pi - \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \mathrm{d}\sqrt{x} \\ &= \pi - \sqrt{3} + \arctan \sqrt{x} \Big|_0^3 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos(nx) \, \mathrm{d} \sin x - \int_0^\pi \sin^n x \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) \, \mathrm{d} \sin^n x - \int_0^\pi \sin^n x \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n} \sin^n x \cos(nx) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(3x+2)^2} \, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{3} \int_0^1 \ln(1+x) \, \mathrm{d} \frac{1}{3x+2} \\ &= -\frac{3 \ln(1+x)}{3x+2} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{(3x+2)(x+1)} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln 2}{15} + \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{3}{3x+2} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln 2}{15} + \frac{1}{3} \Big[\ln(3x+2) - \ln(x+1) \Big]_0^1 \\ &= -\frac{\ln 2}{15} + \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^3 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\tan x(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4}=\frac{1+\ln 2}{2}.$$

4. 证明下列递推公式：

(1) 设 $I_n=\displaystyle\int x^n\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ $(a\neq 0)$, 则

$$I_n=\frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1};$$

(2) 设 $I_n=\displaystyle\int x^n\sin ax\,\mathrm{d}x$ $(a\neq 0)$, 则

$$I_n=-\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{nx^{n-1}}{a^2}\sin ax-\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2};$$

(3) 设 $I_n=\displaystyle\int(\arcsin x)^n\,\mathrm{d}x$, 则

$$I_n=x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2};$$

(4) 设 $I_{n,m}=\displaystyle\int x^n(\ln x)^m\,\mathrm{d}x$, 则

$$I_{n,m}=\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m-\frac{m}{n+1}I_{n,m-1};$$

(5) 设 $I_n=\displaystyle\int\tan^n x\,\mathrm{d}x$, 则

$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2};$$

(6) 设 $I_n=\displaystyle\int\cos^n x\,\mathrm{d}x$, 则

$$I_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}I_{n-2};$$

(7) 设 $I_{m,n}=\displaystyle\int\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$, 则

$$I_{m,n}=\frac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}.$$

证 (1)

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a}\int x^n \,\mathrm{d}\mathrm{e}^{ax} = \frac{1}{a}\,x^n\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\cdot nx^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\,x^n\mathrm{e}^{ax} - \frac{n}{a}I_{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2)\ I_n &= -\frac{1}{a}\int x^n \,\mathrm{d}\cos ax = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a^2}\int x^{n-1}\,\mathrm{d}\sin ax \\ &= -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a^2}x^{n-1}\sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2}\int x^{n-2}\sin ax\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a^2}x^{n-1}\sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3)\ I_n &= x(\arctan x)^n - n\int(\arctan x)^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x(\arctan x)^n + n\int(\arctan x)^{n-1}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2} \\ &= x(\arctan x)^n + n\sqrt{1-x^2}\arctan x)^{n-1} \\ &\quad - n(n-1)\int(\arctan x)^{n-2}\,\mathrm{d}x \\ &= x(\arctan x)^n + n\sqrt{1-x^2}\arctan x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4)\ I_{n,m} &= \frac{1}{n+1}\int(\ln x)^m\,\mathrm{d}x^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}x^{x+1}(\ln x)^m - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\cdot(\ln x)^{m-1}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}x^{x+1}(\ln x)^m - \frac{1}{n+1}I_{n,m+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5)\ I_n &= \int\tan^{n-2}x\cdot(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\tan x - \int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(6)\ I_n &= \int \cos^{n-1} x \,\mathrm{d}\sin x \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x (1-\cos^2 x) \,\mathrm{d}x \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \\
&= \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(7)\ I_{m,n} &= \frac{1}{m+1}\int \cos^{n-1} x \,\mathrm{d}\sin^{m+1} x \\
&= \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x \\
&\quad + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m} x \cos^{n-2} x (1-\cos^2 x) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1}(I_{m,n-2} - I_{m,n}) \\
&= \frac{1}{m+n}\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.
\end{aligned}
$$

§4.4 变限积分与分段积分

习 题 4.4 A

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$;

(2) $\int \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \cos^2(3x) \,\mathrm{d}x$;

(5) $\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x$;

(6) $\int \sin^3(3x)\cos^5(3x) \,\mathrm{d}x$;

(7) $\int \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x$;

(8) $\int \cos^2 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x$;

(9) $\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$;

(10) $\int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$;

(11) $\int \sin^4(3x)\cos^2(3x) \,\mathrm{d}x$;

(12) $\int \sin 3x \cos 2x \,\mathrm{d}x$;

(13) $\int \sin 3x \cos 5x \,\mathrm{d}x$;

(14) $\int \cos 4x \cos 2x \,\mathrm{d}x$;

(15) $\int \tan^4 x \,\mathrm{d}x$;

(16) $\int \tan^5 x \,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\displaystyle\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}\sin x$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

(2) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x) \,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

(4) $\displaystyle\int \cos^2(3x) \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 6x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.$

(5) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}\sin x$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

(6) $\displaystyle\int \sin^3(3x)\cos^5(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin^3 3x(1-\sin^2 3x)^2\,\mathrm{d}\sin 3x$

$$= \frac{1}{3}\int (\sin^3 3x - 2\sin^5 3x + \sin^7 3x)\,\mathrm{d}\sin 3x$$

$$= \frac{1}{12}\sin^4 3x - \frac{1}{9}\sin^6 3x + \frac{1}{24}\sin^8 3x + C.$$

(7) $\displaystyle\int \cos^3\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x = 3\int \left(1-\sin^2\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}\sin\frac{x}{3}$

$$= 3\sin\frac{x}{3} - \sin^3\frac{x}{3} + C.$$

(8) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^4 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + C.$$

(9) $\displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

(10) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

(11) $\displaystyle\int \sin^4(3x)\cos^2(3x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 12x + \frac{1}{32}\cos 18x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{192}\sin 12x + \frac{1}{576}\sin 18x + C.$$

(12) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin x + \sin 5x)\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.$$

(13) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\sin 8x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

(14) $\displaystyle\int \cos 4x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\cos 2x + \cos 6x)\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

(15) $\displaystyle\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$

$$= \int \tan^2 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

注意：$\displaystyle\int \tan^n x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^n x\,\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x + C.$

(16) $\displaystyle\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$

$$= \int \tan^3 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \tan x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C.$$

2. 求下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$；

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}}{\sqrt{x^2+\ln x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{\ln x}\arctan t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{x^2+1}}$.

解 (1) 根据罗必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Big(\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\Big)^2}{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\Big(\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\Big)\cdot 2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\mathrm{e}^{2x}\cdot 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x-\sqrt{x}}\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\mathrm{e}^{2x-\sqrt{x}}\cdot x(2-\frac{1}{2\sqrt{x}})-\mathrm{e}^{2x-\sqrt{x}}}=0.$$

(2) 根据罗必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}}{\sqrt{x^2+\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}+1}{1}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}=1.$$

(3) 根据罗必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\ln x}\arctan t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\ln x}\arctan t^2\,\mathrm{d}t}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

(4) 令 $y=\Big(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{x^2+1}}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}\mathrm{e}^{x^2}}{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}=1.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{x^2+1}}=\mathrm{e}$.

3. 确定正数 a 和 b, 使

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,\mathrm{d}t=2.$$

解 由于

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}\cdot\frac{1}{b-\cos x},$$

所以必有 $b=1,\ a=1$.

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ _____.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}=0,$$

所以必有 $a=0$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 由于

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2}(1-\cos x)=1=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\cos x^2=1=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由于

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - 2x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2}{6x} = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 \,\mathrm{d}t - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 \,\mathrm{d}t - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{2x} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$.

6. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明

$$\int_0^x f(t)\,(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right]\,\mathrm{d}t.$$

证 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\,(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x)$$

$$= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right]\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^x f(t)\,(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right]\,\mathrm{d}t + C.$$

令 $x=0$, 则有 $C=0$.

习 题 4.4 B

1. 求下列分段函数的积分：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & -\infty<x<0\\ x+1, & 0\le x\le 1\\ 2x, & 1<x<+\infty\end{cases}$, 求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ \dfrac{1}{2}x^2, & x>1\end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$;

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0\end{cases}$, 求 $\int_{1/2}^2 \dfrac{f(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

解 (1) 当 $-\infty<x<0$ 时，有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x=x+C_1.$$

当 $0\le x\le 1$ 时，有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int (x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+C_2.$$

当 $1<x<+\infty$ 时，有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C_3.$$

根据 $f(x)$ 的连续性，有

$$0+C_1=0+C_2,\ \frac{1}{2}+1+C_2=1+C_3.$$

因此

$$f(x)=\begin{cases}x+C, & -\infty<x<0\\ \dfrac{1}{2}x^2+x+C, & 0\le x\le 1\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & 1<x<+\infty\end{cases}.$$

(2) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x$

$$= \Big[\frac{1}{2}x^2 + x\Big]_0^1 + \frac{1}{6}x^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

(3) 令 $\sqrt{x}-1=t$, $\mathrm{e}^t = u$, 则

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^2 \frac{f(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{1/\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{1/\sqrt{2}-1}^{0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}-1}^{1} \Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\Big)\,\mathrm{d}u + \ln 2 \\ &= \Big[\ln|u| - \ln|u+1|\Big]_{\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}-1}^{1} + \ln 2 = 1.\end{aligned}$$

2. 设 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f(x)$ 具有连续的导数且 $f(0) = 0$, 试确定 c 使 $F(x)$ 连续, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)}{2x} = \frac{1}{2}f(0) = 0,\end{aligned}$$

所以 $c=0$ 时 $F(x)$ 连续.

由于 $c=0$ 时,

$$\begin{aligned}F'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)}{3x^2} = \frac{1}{3}f'(0),\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{xf(x)}{x^2} - \frac{2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^3}\right)$$

$$= f'(0) - \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x^2} = \frac{1}{3}f'(0),$$

所以 $c=0$ 时, $F'(x)$ 连续.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}(1-\cos\sqrt{2}x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\sin x}\cos t^2\,\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 由于

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-\cos\sqrt{2}x) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{\sin x}\cos t^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos(\sin x)^2 = 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

又因为

$$f'(0-) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}(1-\cos\sqrt{2}x)-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{2}x-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x-2x}{3x^2} = 0,$$

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^{\sin x}\cos t^2\,\mathrm{d}t-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\cos t^2\,\mathrm{d}t - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)^2-1}{2x} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导.

4. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\Big(1+\dfrac{2\sin x}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}x$.

解 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\Big(1+\frac{2\sin x}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(1+\frac{2\sin x}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}\Big(1+\frac{2\sin x}{n}\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}\left[\Big(1+\frac{2\sin x}{n}\Big)^{n+1}\right]_0^{\pi/2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}\left[\Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{n+1}-1\right]=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1).\end{aligned}$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A(\cos 2x-\cos 3x)}{x^2}, & x<0\\ 4, & x=0\\ \dfrac{B\sin x+\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，试确定 A,B.

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{A(\cos 2x-\cos 3x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{A(-2\sin 2x+3\sin 3x)}{2x}=\frac{5A}{2}=4,\\\lim_{x\to0+}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{B\sin x+\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}\\&=B+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t=B+1=4,\end{aligned}$$

所以 $A=\dfrac{8}{5}$, $B=3$.

6. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，令 $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(xt)\,\mathrm{d}t, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\displaystyle\int_0^{x}\ln(1+2t)\,\mathrm{d}t}{x}, & x<0\end{cases}$，

求 $F'(0)$.

解 由于

$$\begin{aligned}F'(0+) &= \lim_{x\to 0+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(xt)\,\mathrm{d}t-0}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x} f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'(0-) &= \lim_{x\to 0-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\displaystyle\int_0^{x}\ln(1+2t)\,\mathrm{d}t}{x}-0}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x}\ln(1+2t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{\ln(1+2x)}{2x}=1,\end{aligned}$$

所以 $F'(0)=1$.

7. 求由方程

$$\int_0^{y}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=1$$

所确定的隐函数 y 关于 x 的导数和二阶导数.

解 原式两端求导，有

$$\mathrm{e}^{y^2}\cdot y'+\frac{\sin x^2}{x}\cdot 2x=0.$$

由此可得，

$$y'=-\frac{2\sin x^2}{\mathrm{e}^{y^2}}.$$

于是，

$$y''=-\frac{2\cos x^2\cdot 2x}{\mathrm{e}^{y^2}}+\frac{2\sin x^2}{\mathrm{e}^{y^2}}\cdot 2yy'$$

$$= -\frac{4x\cos x^2}{\mathrm{e}^{y^2}} - \frac{8y(\sin x^2)^2}{\mathrm{e}^{2y^2}}.$$

8. 设当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 可导且满足方程

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

求 $f(x)$.

解 由 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可得

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x}\left[\,f(x)-1\,\right] + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}.$$

于是 $f(x) = \ln x + C$. 注意到 $f(1)=1$, 有 $C=1$ 及 $f(x) = \ln x + 1$.

9. 设 $g(t)$ 是非负连续函数，证明函数

$$f(x) = \int_{-a}^{a} |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

是区间 $[-a,a]$ 上的下凸函数.

证 由于

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-a}^{x}(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{a}(t-x)\,g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_{-a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-a}^{x} t\,g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{a} t\,g(t)\,\mathrm{d}t - x\int_{x}^{a} g(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

所以

$$f'(x) = \int_{-a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{a} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$f''(x) = 2g(x) \geq 0.$$

故 $f(x)$ 是区间 $[-a,a]$ 上的下凸函数.

10. 试确定常数 a,b, 使极限

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{d}t\Big).$$

存在，并求该极限值.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,dt\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\Big(ax^3+x+b\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{d}t\Big)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^4}\Big(3ax^2+1+b\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\Big),$$

所以根据 $\Big[3ax^2+1+b\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\Big]_{x=0}=0$ 可知， $b=-1$.

由于

$$\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^4}\Big(3ax^2+1-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{20x^3}(6ax+2x\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2})$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{10x^2}(3a+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}),$$

所以根据 $\Big[3a+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\Big]_{x=0}=0$ 可知， $a=-\dfrac{1}{3}$. 故

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^2}(-1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2})=-\frac{2}{5}.$$

11. 当 $x\geq 0$ 时， $f_0(x)>0$. 若令 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

证 由 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ 可知,

$$f_n'(x)=f_{n-1}(x),\ f_n(0)=0.$$

于是

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f_0(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f_1'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}f_1(t)\Big|_0^x+\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f_1(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f_2'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}f_2(t)\Big|_0^x + \frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (x-t)^{n-3}f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (x-t)^{n-3}f_3'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \cdots = \int_0^x (x-t)f_{n-2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)f_{n-1}'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= xf_{n-1}(x)\Big|_0^x + \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x).$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的导函数非负连续，若 n 为自然数，证明

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{2\,[\,f(2\pi)-f(0)\,]}{n}.$$

证 分部积分并应用积分中值定理，有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= -\frac{\cos nx}{n}\cdot f(x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(0)-f(2\pi)}{n} + \frac{\cos n\xi}{n}\cdot\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(0)-f(2\pi)}{n} + \frac{\cos n\xi}{n}\cdot[\,f(2\pi)-f(0)\,].\end{aligned}$$

由此可知

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| = \frac{f(2\pi)-f(0)}{n}\cdot(1-\cos n\xi) \le \frac{2\,[\,f(2\pi)-f(0)\,]}{n}.$$

总 习 题 四

1. 选择题

(1) 设 $f(x)$ 有连续导数,且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0, F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\,\mathrm{d}t$, 当 $x\to 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k=$ _____.

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(2) 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t,\ g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 _____.

(A) 低阶无穷小; (B) 高阶无穷小;

(C) 等价无穷小; (D) 同阶但非等价无穷小.

(3) 设 $F(x)=\int_0^x (2t-x)f(t)\,\mathrm{d}t$, $f(x)$ 可导,且 $f'(x)>0$, 则_____.

(A) $F(0)$ 是极大值; (B) $F(0)$ 是极小值;

(C) $F(0)$ 不是极值, 但 $(0,F(0))$ 是曲线 $y=F(x)$ 的拐点坐标;

(D) $F(0)$ 不是极值, $(0,F(0))$ 也不是曲线 $y=F(x)$ 的拐点坐标.

(4) 设 $f(x)=\int_0^{\sqrt{1+x}-1}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t, g(x)=\int_0^{x/2}\arcsin t\,\mathrm{d}t$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 _____.

(A) 低阶无穷小; (B) 高阶无穷小;

(C) 等价无穷小; (D) 同阶无穷小.

(5) 设 $f(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$, 则 $f(x)$

(A) 为正常数; (B) 为负常数

(C) 恒为零; (D) 不为常数.

解 (1) 由于 $F(x)=x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^k}=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{k-1}}$$

$$= \frac{2}{k-1}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{k-2}} = \frac{2}{(k-1)(k-2)}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{k-3}},$$

所以 $k=3$, 故选 C.

(2) 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3} = 0,$$

所以选 B.

(3) 由于

$$F(x) = 2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2xf(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) \\ &= xf(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \\ F''(x) &= f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x). \end{aligned}$$

又因 $f'(x)>0$, 所以当 $x<0$ 时, $F''(0)<0$; 当 $x>0$ 时, $F''(0)>0$. 由此可知, $x=0$ 是 $f(x)$ 的拐点. 故选 C.

(4) 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{1+x}-1}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x/2}\arcsin t\,\mathrm{d}t} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\arctan\frac{x}{2}} = 1, \end{aligned}$$

所以选 C.

(5) 由于

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi) - \mathrm{e}^{\sin x}\sin x = 0, \\ f(0) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\,\mathrm{d}\cos t \\ &= -\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\cos^2 t\,\mathrm{d}t > 0, \end{aligned}$$

所以选 A.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}}{\ln x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\displaystyle\int_0^x \sin^2 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$;

(3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} t\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t}{x^6\mathrm{e}^x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{x+2004} \frac{\sin(\mathrm{e}^{1/t^2}-1)}{\ln(1+\frac{1}{t^2})}\,\mathrm{d}t$;

(6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}} \Big/ \dfrac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3}} = 1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\displaystyle\int_0^x \sin^2 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\mathrm{e}^{x^2}}\displaystyle\int_0^x \sin^2 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 x\cdot \mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}} = 0.$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} te^t\sin t\,\mathrm{d}t}{x^6e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{x^2}\sin x^2\cdot 2x}{6x^5e^x+x^6e^x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{6x^5+x^6}=\frac{1}{3}.$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor\frac{x}{\pi}\rfloor\cdot\int_0^\pi|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{2}{\pi}.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2004}\frac{\sin(e^{1/t^2}-1)}{\ln(1+\frac{1}{t^2})}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(e^{1/\xi^2}-1)}{\ln(1+\frac{1}{\xi^2})}\cdot 2004$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/\xi^2}-1}{\frac{1}{\xi^2}}\cdot 2004=2004.$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=0.$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内为可导函数, 且 $\lim\limits_{x\to 12}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 12}f'(x)=1000$, 求极限

$$\lim_{x\to 12}\frac{\int_{12}^x\Big[t\int_t^{12}f(u)\,\mathrm{d}u\Big]\,\mathrm{d}t}{(12-x)^3}.$$

解 反复应用罗比达法则, 有

$$\lim_{x\to 12}\frac{\int_{12}^x\Big[t\int_t^{12}f(u)\,\mathrm{d}u\Big]\,\mathrm{d}t}{(12-x)^3}=\lim_{x\to 12}\frac{x\int_x^{12}f(u)\,\mathrm{d}u}{-3(12-x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{\int_x^{12}f(u)\,\mathrm{d}u-xf(x)}{6(12-x)}$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{-f(x)-f(x)-xf'(x)}{-6}=2000.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, $f(0)=f(1)=0$, 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证 利用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\Big(x-\frac{1}{2}\Big)\\ &= f(x)\Big(x-\frac{1}{2}\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此可知

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot|f'(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 |\,f'(x)\,|\,\mathrm{d}x.$$

5. 已知两曲线 $y=f(x)$与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$处的切线重合，写出切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\dfrac{2}{n})$.

解 由 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 可得，

$$y'(x)=\mathrm{e}^{-(\arctan x)^2}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad y'(0)=1.$$

于是所求切线方程为 $y=x$ 且

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n}) = 2f'(0) = 2.$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $|f'(x)|\le M$, 试证

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \le \frac{M}{2n}.$$

证 由于 $\Big|\,f(x)-f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\,\Big| = \Big|f'(\xi)\Big(x-\dfrac{k}{n}\Big)\Big| \le M\Big|x-\dfrac{k}{n}\Big|$, 所以

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big|\,f(x)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)\,\Big|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right) \mathrm{d}x = \frac{M}{2n}.$$

7. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}} \right)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1+1^2} + \dfrac{n}{n^2+1+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+1+n^2} \right)$.

证 (1) 由于

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i}{n}\pi \leq \left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i}{n}\pi,$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}} \right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i}{n}\pi \\ &= \int_0^1 \sin\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i+1}{n})^2} &\leq \left(\frac{n}{n^2+1+1^2} + \frac{n}{n^2+1+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+1+n^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1+1^2} + \frac{n}{n^2+1+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+1+n^2} \right) \\ = &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

8. 设 $f(x^2-1) = \ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$, $f\circ\varphi(x) = \ln x$, 计算 $\int \varphi(x) \, \mathrm{d}x$.

解 令 $\dfrac{x^2}{x^2-2}=t$, 则 $x^2=\dfrac{2t}{t-1}$ 且

$$\ln t=f\Big(\frac{2t}{t-1}-1\Big)=f\Big(\frac{t+1}{t-1}\Big).$$

由此可知,

$$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

于是

$$\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C.$$

9. 设 $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$, 证明 I_n 满足递推公式

$$I_n=\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\,I_{n-2}\ (n\geq 3),$$

并求出 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$.

证

$$\begin{aligned}
I_n &=-\int\frac{\mathrm{d}\cot x}{\sin^{n-2}x}=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+(n-2)\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+(n-2)\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+(n-2)I_n-(n-2)I_{n-2}\\
&=\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\,I_{n-2}.\\
I_3 &=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\,\ln|\csc x-\cot x|+C.
\end{aligned}$$

10. 求函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{3x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ 在 [0,1] 上的最值和最值点.

解 由

$$f'(x)=\frac{3x+1}{x^2-x+1}=0$$

可知， $x=-\dfrac{1}{3}$ 是唯一临界点. 由于 $x>-\dfrac{1}{3}$ 时， $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 [0,1] 上严格递增. 故 $f(0)=0$ 及 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 [0,1] 上的最小值和最小值点，而 $f(1)$ 及 $x=1$ 是 $f(x)$ 在 [0,1] 上的最大值和最大值点，并且

$$f(1)=\left[\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{10\pi}{3\sqrt{3}}.$$

第五章　分类积分与积分应用

§5.1　可有理类积分

习 题 5.1 A

1. 求下列有理函数的不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$;　　(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2}$;　　(4) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-3x+2)^2}$;　　(6) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{2+x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$;　　(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-7x+10}$;

(9) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$;　　(10) $\displaystyle\int \frac{2x+x}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$;　　(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

(13) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$;　　(14) $\displaystyle\int \Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^2\,\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int \frac{x^5-2x^3-1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(16) $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+1)}$;

(17) $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$;　　(18) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)^2}$;

(19) $\displaystyle\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$;　　(20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

解

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} = \int \left[\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1-x}{2(x^2+1)}\right] \mathrm{d}x$$
$$= \frac{\arctan x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \int \left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{2}{(2x+1)^2+3}\right] dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + C.$$

(3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2} = \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}\right] \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{x+2} + \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C.$$

(4) $$\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{10}{3(x-3)} - \frac{5}{2(x-2)} + \frac{1}{6x}\right] \mathrm{d}x$$
$$= \frac{10}{3}\ln|x-3| - \frac{5}{2}\ln|x-2| + \frac{\ln|x|}{6} + C.$$

(5) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-3x+2)^2} = \int \left[\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right] \mathrm{d}x$$
$$= 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C.$$

(6) $$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}\right] \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - 2\ln|x-1| - \ln|x| + C.$$

(7) $$\int \frac{2+x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left[-\frac{2}{3(x^2+4)} + \frac{2}{3(x^2+1)} + \frac{x}{3(x^2+1)} - \frac{x}{3(x^2+4)} \right] \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\arctan x + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+4) + C.$$

(8) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-7x+10} = \int \left[\frac{1}{3(x-5)} - \frac{1}{3(x-2)} \right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-5| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + C.$$

(9) $$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \int \left[1 - \frac{3}{x-1} + \frac{8}{x} + x + x^2 - \frac{1}{x+4} \right] \mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln|x-1| + 8\ln|x+1| + C.$$

(10) $$\int \frac{2x+x}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x = \int \left[2 + \frac{10}{7(x-2)} - \frac{45}{7(x+5)} \right] \mathrm{d}x$$

$$= 2x + \frac{10}{7}\ln|x-2| - \frac{45}{7}\ln|x+5| + C.$$

(11) $$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} \right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

(12) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \int \left[-\frac{x}{x^2+1} + \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} + \frac{2}{(2x+1)^2+3} \right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + C.$$

(13) 解法 1 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \int \left[\frac{2x-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)} + \frac{2x+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)} \right.$$

$$+\frac{1}{(2x-\sqrt{2})^2+2}+\frac{1}{(2x+\sqrt{2})^2+2}\Big]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|x^2-\sqrt{2}x+1)|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|x^2+\sqrt{2}x+1)|+C.$$

解法 2 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)+C.$$

(14) $\displaystyle\int\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^2\,\mathrm{d}x=\int\left[1+\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{4}{x+1}\right]\,\mathrm{d}x$

$$=x-\frac{4}{x+1}-4\ln|x+1|+C.$$

(15) $\displaystyle\int\frac{x^5-2x^3-1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left[-1-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+x+x^2\right]\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{x}-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln|x-1|+\ln|x|+C.$$

(16) $\displaystyle\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\int\left[\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x}{2(x^2+1)}\right]\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

(17) $\displaystyle\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}=\int\left[-\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{1}{(x+1)^2+1}\right]\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)+C.$$

(18) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)^2}$

$$= \int \left[-\frac{1}{4(x+1)} - \frac{(x-1)x}{2(x^2+1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)}\right]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x-1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln(x^2+1) + C.$$

(19) $\displaystyle\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[-\frac{2}{x^3} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}\right]\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

(20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \int \left[\frac{1}{8(x+1)} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2}\right.$

$$\left. -\frac{1}{2(x+3)^3} - \frac{5}{4(x+3)^2} - \frac{17}{8(x+3)}\right]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)}$$

$$+ \frac{1}{8}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C.$$

2. 求下列三角有理式的不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$;

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}$;

(6) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x-\tan x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \sin x\cos 6x\,\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int \cos 4x\cos 7x\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$;

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}$;

(13) $\displaystyle\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x+1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-\cos x}$;

(17) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$;

(18) $\displaystyle\int \frac{\tan x\cos^6 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$;

(19) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

解

(1) $$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)\,\mathrm{d}\cos x$$
$$=\ln(1+\cos x)-\ln|\cos x|+C.$$

(2) $$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\frac{x}{2}=x-\tan\frac{x}{2}+C.$$

(3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2}$$
$$=-\int\frac{1}{(t-1)^2-2}=-\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C.$$

(4) $$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C.$$

(5) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}=\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

(6) $$\int \frac{\cos x}{\sin x-\tan x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)(1-\cos x)}\quad(\text{令 } t=\cos x)$$

$$= \int \left(\frac{1}{4(1+t)} - \frac{3}{4(1-t)} + \frac{1}{2(1-t)^2} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4} \ln(1+\cos x) + \frac{3}{4} \ln(1-\cos x) + \frac{1}{2(1-\cos x)} + C.$$

(7) $\displaystyle\int \sin x \cos 6x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{14} \cos 7x + C.$

(8) $\displaystyle\int \cos 4x \cos 7x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{22} \sin 11x + C.$

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1 + 2\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} + C.$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \tan x (\sec^2 x - 1) \, \mathrm{d}x = \int \sec x \, \mathrm{d}\sec x - \int \tan x \, \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

(11) $\displaystyle\int \frac{\cot x}{1+\sin x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x \cdot (1+\sin x)}$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1+\sin x} \right) \mathrm{d}\sin x$$

$$= \ln|\sin x| - \ln(1+\sin x) + C.$$

(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos^4 x} = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos^4 x}$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1+\cos x) + \frac{1}{2} \ln(1-\cos x) + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

(13) $\displaystyle\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1+\tan x} - \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \right) \mathrm{d}\tan x$

$$= \ln|1+\tan x| - \frac{1}{2} \ln(1+\tan^2 x) + C.$$

(14) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int (1+\frac{1}{\cot x})\,\mathrm{d}\cot x = -\cot x - \ln|\cot x| + C.$

(15) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x+1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int (2\tan^2 x+1)\,\mathrm{d}\tan x = \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$

(16) $$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-\cos x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ &= \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

(17) $$\begin{aligned}\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x &= -\int (1-\frac{1}{\cos^2 x)} + \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}\cos x\\ &= -\cos x - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.\end{aligned}$$

(18) $$\begin{aligned}\int \frac{\tan x\cos^6 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}\sin x\\ &= \int\left(\sin x - \frac{2}{\sin x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\,\mathrm{d}\sin x\\ &= \frac{1}{2}\sin^2 x - 2\ln|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.\end{aligned}$$

(19) $$\begin{aligned}\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-\cos x} - x\\ &= 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) - x + C.\end{aligned}$$

(20) 令 $\tan x = t$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$

习 题 5.1 B

1. 求下列无理函数的不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}$;

(6) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-1}}$;

(9) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$;

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$;

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}$;

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}$;

(15) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;

(17) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

(19) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$;

(20) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

解 (1) 令 $x=t^{12}$, 则有

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 12\int \frac{t^{10}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\left(-\sqrt[12]{x} + \frac{1}{3}\sqrt[4]{x} - \frac{1}{5}\sqrt[12]{x^5} + \frac{1}{7}\sqrt[12]{x^7}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{9}\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{11}\sqrt[12]{x^{11}} + \arctan\sqrt[12]{x} + C.\right)$$

(2) 令 $x = t^6$, 则有

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{t^2-1}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\left(x^{1/6} + \frac{x^{1/2}}{3} + \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{7/6}}{7} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}\right| + C\right).$$

(3) 令 $\sqrt[3]{3-x} = t$, 则有

$$\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2+3-t^3}{t}\cdot(-3t^2)\,\mathrm{d}t = -3\left(\frac{5x^{2/3}}{2} - \frac{x^{5/3}}{5}\right) + C.$$

(4) 令 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = t$, 则有

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int t\cdot(\frac{1+t^2}{1-t^2})^2\cdot\mathrm{d}\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}\,\ln|x|}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(1+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x}} + C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2-9}| + C.$

(6) 令 $\sqrt{x-1} = t$, 则有

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C.$$

(7) 令 $\sqrt{x^2-1} = t$, 则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.$$

(8) 令 $\sqrt{2x-1} = t$, 则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2\arctan\sqrt{2x-1} + C.$$

(9) 令 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t$, 则有

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x&=\int t\,\mathrm{d}\frac{1-t^2}{1+t^2}=\int\frac{-4t^2}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2t}{1+t^2}-2\arctan t+C\\&=\sqrt{1-x^2}+\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.\end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}&=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(-x^2+x+1)}{\sqrt{-x^2+x+1}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\\&=-\sqrt{1+x-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}+C.\end{aligned}$$

(11) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}=\arcsin(2x-1)+C.$$

(12) 令 $\sqrt[3]{3-x}=t$, 则有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}&=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-x^2}{x^4}-\frac{1}{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{3x^3}+\frac{1}{x}\right)+\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{-1}{3x^3}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}\\&=\left(-\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3x}\right)\sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

(13) 令 $\sqrt[6]{x}=t$, 则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}=-6x^{1/6}-3\ln(x^{1/6}-1)+3\ln(x^{1/6}+1)+C.$$

(14) 令 $\sqrt[6]{1+x}=t$, 则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}=6\left(-\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\ln(1+\sqrt[6]{x}\,)\right)+C.$$

(15) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}}$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^4+1} + \ln(x^2-1+\sqrt{x^4+1}) - 2\ln|x| + C.$$

(16) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

(17) 令 $\sqrt[6]{x} = t$, 则有

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = -6x^{1/6} - 2\sqrt{x} + 3\ln\left|\frac{x^{1/6}+1}{x^{1/6}-1}\right| + C.$$

(18) 令 $t = x+\sqrt{x^2+x+1}$, 则 $x = \dfrac{t^2-1}{2t+1}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{4(1+2t)} + \ln t - \frac{3}{4}\ln(1+2t) + C.$$

(19) 分母有理化可得

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int (x-\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x-\sqrt{x^2-1}) + C.$$

(20) 分母有理化可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}} = \int (x+\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x-\sqrt{x^2-1}\,) + C$$

2. 求下列无理函数的不定积分 ($a>0$):

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}$;　　(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$;

(3) $\int \dfrac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-x+2}}$;

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-3+4x-x^2}}$;

(6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(2ax-x^2)^{3/2}}$;

(7) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}$;

(8) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$;

(9) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$;

(10) $\int \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt[6]{x}=t$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})} = -6x^{1/6}+3\ln\left|\frac{1+x^{1/6}}{1-x^{1/6}}\right|+C.$$

(2) 令 $\sqrt{1+x}=t$, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}} = 2\arctan\sqrt{1+x}+C.$$

(3)

$$\int \frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1+x^4}} + \int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}}$$

$$= \arctan x^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^4+1} + \ln(x^2-1+\sqrt{x^4+1}) - 2\ln|x| + C.$$

(4) 令 $\sqrt{x^2-x+2}=t+x$, 则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-x+2}} = \int \frac{2t+1}{2-t^2}\cdot\frac{1}{t+\frac{2-t^2}{2t+1}}\,\mathrm{d}\frac{2-t^2}{2t+1}$$

$$= \frac{\ln|x|}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|4-x+2\sqrt{2(x^2-x+2)}\,| + C.$$

(5)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-3+4x-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{-3+2x}{\sqrt{3(-x^2+4x-3)}} + C.$$

(6) 由于

$$\Big(\frac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}}\Big)'=\frac{a^2}{(2ax-x^2)^{3/2}},$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2ax-x^2)^{3/2}}=\frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+C.$$

(7) 由于

$$\Big(\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\Big)'=\frac{1}{(1+x^2)^{4/3}},$$

所以 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}+C.$

(8) 令 $\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}=t$, 则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=\frac{5}{4}t^4+\frac{9}{5}t^9+C.$$

(9) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a^2}\int(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{a^2-x^2})\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}\frac{1}{x}+\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C.$$

(10) 令 $\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-2}=u$, 则有

$$\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-2}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}x}+C.$$

3. 求下列不定积分 $(a>0)$:

(1) $\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int\Big(\frac{\ln x}{x}\Big)^3\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int x\arctan x\,\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\int (x\ln x)^{3/2}(\ln x+1)\,\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,\mathrm{d}x$;

(11) $\int \sqrt{(x^2+x)\mathrm{e}^x}\,(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

(12) $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^{x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x$;

(13) $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

(14) $\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x\cdot(1+\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x})}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$;

(17) $\int \frac{\ln x+2}{x\ln x\cdot(1+x\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$;

(18) $\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$;

(19) $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$;

(20) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)\,\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)$

$= \frac{1}{2}(\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)^2+C.$

(2) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} - \int x\cdot\frac{\sqrt{a}}{2(x+a)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

$= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} - \frac{\sqrt{a}}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{x+a}\,\mathrm{d}x$

$= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} - \sqrt{ax} + a\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} + C.$

(3) $\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x$

$= x\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) + \int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$

$$= x\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})+2\ln(1+\sqrt{1-x^2})+C.$$

(4) $$\int\Big(\frac{\ln x}{x}\Big)^3\,\mathrm{d}x = -\int \ln^3 x\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2} = -\frac{\ln^3 x}{2x^2}-\frac{3}{4}\int \ln^2\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{2x^2}-\frac{3\ln^2 x}{4x^2}-\frac{3}{4}\int \ln\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{2x^2}-\frac{3\ln^2 x}{4x^2}-\frac{3\ln x}{4x^2}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{2x^2}-\frac{3\ln^2 x}{4x^2}-\frac{3\ln x}{4x^2}-\frac{3}{8x^2}+C.$$

(5) $$\int x\arctan x\,\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \arctan x\,\mathrm{d}\,[\,(x^2+1)\ln(1+x^2)\,]-\frac{1}{2}\int\arctan x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)\arctan x-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}x\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)\arctan x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}x\arctan x+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)\arctan x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+x$$

$$-\arctan x-\frac{1}{2}x\arctan x+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C.$$

(7)

$$\int\frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2}+5)}\,\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5$$

$$= \frac{2}{3}[\,\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5\,]^{2/3}+C.$$

(8) 令 $u=\arcsin \mathrm{e}^x$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x &= -\int u\,\mathrm{d}\frac{1}{\sin u} = -\frac{u}{\sin u}+\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}\\ &= -\frac{u}{\sin u}+\ln|\csc u-\cot u|+C\\ &= -\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}\right|+C.\end{aligned}$$

(9)

$$\int (x\ln x)^{3/2}(\ln x+1)\,\mathrm{d}x = \int (x\ln x)^{3/2}\,\mathrm{d}(x\ln x) = \frac{2}{5}(x\ln x)^{5/2}+C.$$

(11)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(x^2+x)\mathrm{e}^x}\,(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{(x^2+x)\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,[\,(x^2+x)\mathrm{e}^x\,]\\ &= \frac{2}{3}[\,(x^2+x)\mathrm{e}^x\,]^{3/2}+C.\end{aligned}$$

(12) 令 $\mathrm{e}^{x/2}=t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan \mathrm{e}^{x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{\arctan t}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\arctan t\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int \arctan t\,\mathrm{d}\frac{1}{t}-\arctan^2 t\\ &= \frac{2\arctan t}{t}-2\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t-\arctan^2 t\\ &= 2\mathrm{e}^{-x/2}\arctan \mathrm{e}^{x/2}-x+\ln(1+\mathrm{e}^x)-\arctan^2 \mathrm{e}^{x/2}+C.\end{aligned}$$

(13)

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}+C.$$

(14)

$$\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \arctan\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\arctan\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\Big(\arctan\frac{1}{x}\Big)^2 + C.$$

(15)

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x\cdot(1+\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x})}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}(\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x})}{(\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x})(1+\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x})}\\ &= \int\left(\frac{1}{\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x}} - \frac{1}{1+\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x}}\right)\mathrm{d}(\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x})\\ &= \ln\left|\frac{\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x}}{1+\cos x\cdot \mathrm{e}^{\sin x}}\right| + C.\end{aligned}$$

(16)

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)^2\mathrm{d}\left(\frac{x-\ln x}{x}\right) = \frac{x}{x-\ln x} + C.$$

(17)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x + 2}{x\ln x\cdot(1+x\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{x\ln^2 x} - \frac{1}{1+x\ln^2 x}\right)\mathrm{d}(x\ln^2 x)\\ &= \ln\left|\frac{x\ln^2 x}{1+x\ln^2 x}\right| + C.\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= -\int \arccos x\,\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= -\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\\ &= -\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.\end{aligned}$$

(19) 令 $\sqrt{x-1}=t$, 则

$$\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{t^2\arctan t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \arctan t \,\mathrm{d}t - 2\int \arctan t \,\mathrm{d}\arctan t$$

$$= 2t\arctan t - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \arctan^2 t$$

$$= 2t\arctan t - \ln(1+t^2) - \arctan^2 t + C.$$

(20)

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \ln x \,\mathrm{d}\sqrt{3x-2}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\ln x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{3x-2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{3x-2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2}} + C.$$

§5.2 定积分的应用

习 题 5.2 A

1. 求由曲线 $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$ 及 $y = 0$ 所围成的图形绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

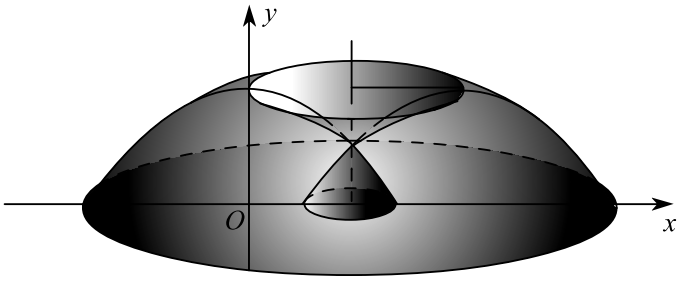


图 5.1

解 令 $x=t+2$, 则 $y=3-\dfrac{1}{3}(t+2)^2$. 由此可知, 所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{-5}^{0}ty(t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_{-5}^{0}t\cdot\left[3-\frac{1}{3}(t+2)^2\right]\,\mathrm{d}t=\frac{350}{9}\pi.$$

2. 求介于二椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 之间图形面积, 其中 $a>b>0$.

解 将 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ 代入 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 可得

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}.$$

故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=4ab\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\Big(\frac{b}{a}\tan\theta\Big)=4ab\arctan\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

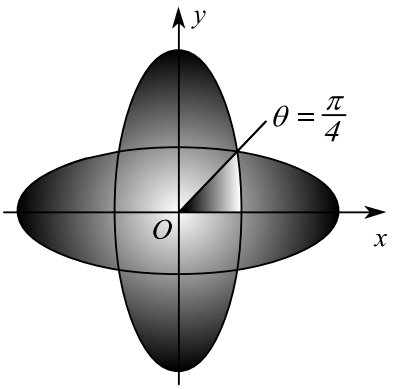


图 5.2

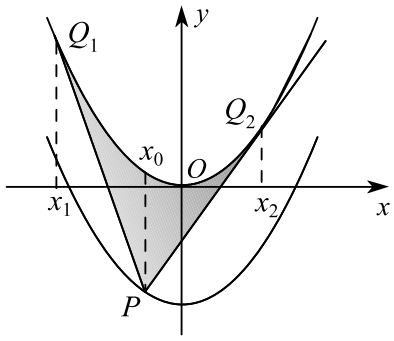


图 5.3

3. 从抛物线 $y=x^2-1$ 上的点 P 引抛物线 $y=x^2$ 的切线, 证明该切线与 $y=x^2$ 所围成的图形面积与 P 点的位置无关.

解 设 P 点坐标为 (x_0,y_0), 又设从 P 向抛物线 $y=x^2$ 引出的切线切点为 $Q(x_1,y_1)$, 则切线方程为

$$y-y_0=2x_1(x-x_0).$$

根据 $y_0 = x_0^2 - 1,\ y_1 = x_1^2$ 可得 $x_1 = x_0 \pm 1$. 于是切线方程为

$$y = 2(x_0 \pm 1)x - (x_0 \pm 1)^2.$$

由两切线与 $y = x^2$ 所围图形的面积为

$$\begin{aligned} S \ &= \int_{x_0-1}^{x_0} \left[x^2 - 2(x_0-1)x + (x_0-1)^2\right] \mathrm{d}x \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+1} \left[x^2 - 2(x_0+1)x + (x_0+1)^2\right] \mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4. 求双纽线 $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta\ (a > 0)$ 所围图形的面积.

解 由于 $\cos 2\theta$ 在第一象限的最小值点为 $\dfrac{\pi}{4}$, 最大值点为 0, 所以所求面积为

$$S = 2\int_0^{\pi/4} 2a^2 \cos 2\theta \ \mathrm{d}\theta = 2a^2.$$

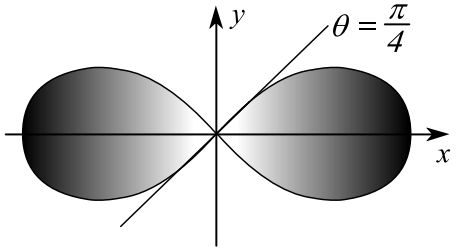


图 5.4

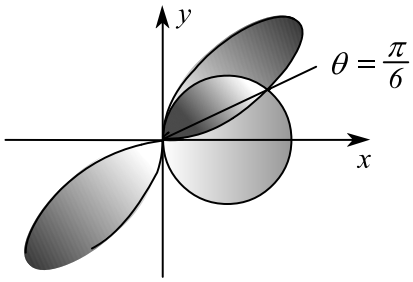


图 5.5

5. 求两曲线 $\rho = \sqrt{2}\cos\theta$ 及 $\rho^2 = \sqrt{3}\sin 2\theta$ 所围图形公共部分的面积.

解 由 $\rho = \sqrt{2}\cos\theta$ 和 $\rho^2 = \sqrt{3}\sin 2\theta$ 可得 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 即 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. 故所求面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \sqrt{3}\sin 2\theta \ \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\cos^2\theta \ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}.$$

6. 一几何体以椭圆面 $\dfrac{x^2}{10^2} + \dfrac{y^2}{5^2} \le 1$ 为底, 且垂直于 x 轴的截面都为等边三角形, 试计算该几何体的体积.

解 由于几何体沿 x 轴的垂直截面的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\sqrt{3}y=\frac{\sqrt{3}}{4}(10^2-x^2),$$

所以所求几何体的体积为

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-10}^{10}(10^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{10^3}{\sqrt{3}}.$$

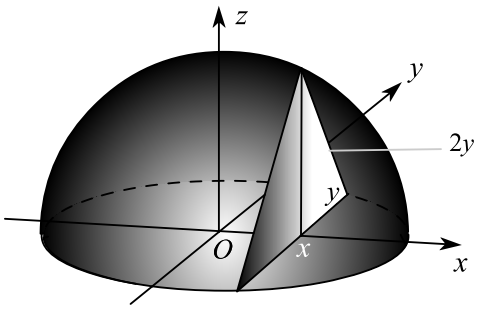


图 5.6

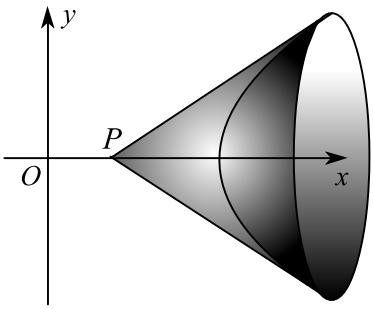


图 5.7

7. 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积.

解 设 $Q(x_0,y_0)$ 是给定切线与抛物线的切点，则切线方程为

$$y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0).$$

将 $(x,y)=(1,0)$ 代入上式可得 $x_0=3$. 于是切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$. 故所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^3\left[\frac{1}{2}(x-1)\right]^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(x-2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$$

8. 由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=4x^2$ 绕 y 轴旋转一周构成一个高为 H 的容器. 现于其中盛满水，问要将水全部抽出，外力需作多少功？

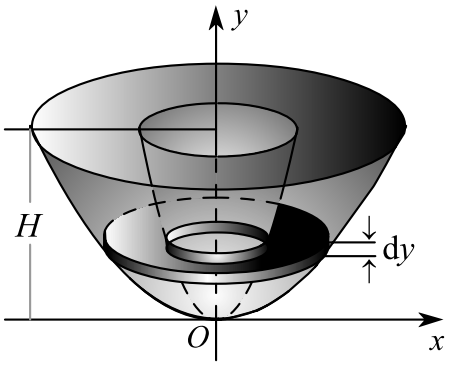


图 5.8

解 用微元法，容器中水在 $[y, y+\mathrm{d}y]$ 部分的重量为

$$\pi(y-\frac{1}{4}y)\,\mathrm{d}y\cdot\mu=\frac{3}{4}\mu\pi y\,\mathrm{d}y.$$

其中 μ 为水的密度. 抽出微元中的水需要作的功为 $\dfrac{3}{4}\mu\pi y\,\mathrm{d}y\cdot(H-y)$. 因此将水全部抽出时外力作的功为

$$W=\frac{3}{4}\mu\pi\int_0^H y(H-y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\mu\pi H^3.$$

9. 计算介于圆 $\rho=4\sin\theta$ 之内和双纽线 $\rho^2=8\cos 2\theta$ 之外图形的面积.

解 所求图形的面积为

$$S\ =2\left[\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}(4\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta-\pi\int_{\pi/6}^{\pi/4}(8\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\right]=\frac{8}{3}\,\pi+4\sqrt{3}-4.$$

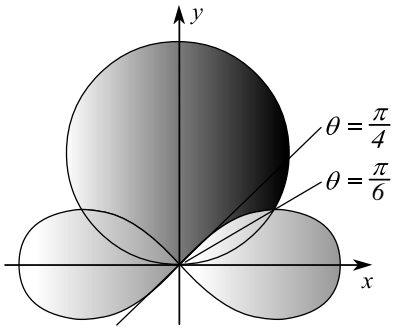


图 5.9

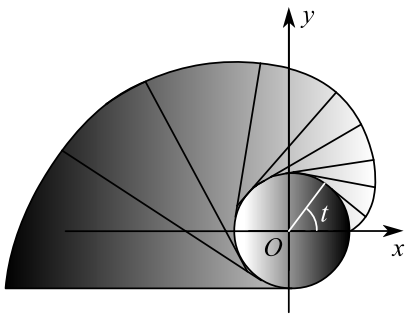


图 5.10

10. 将绕在半径为 R 的圆上的细线绽开拉直，使细线与圆周始终相切，则细线端点的运动轨迹称为圆的绽开线，它的方程为

$$x = R(\cos t + t\,\sin t),\ y = R(\sin t - t\,\cos t).$$

求 t 从 0 到 2π 时绽开线的弧长.

解 根据弧长公式，所求曲线的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} Rt\,\mathrm{d}t = 2\pi^2 R.$$

11. 有一等腰梯形闸门，其上底长为 10 米，下底长为 6 米，高为 20 米. 该闸门与水面垂直，且上底恰好位于水平面上. 求该闸门一侧所受到的水压力.

解 建立坐标系如图，取闸门的 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 部分为微元. 如果微元的宽度用 $2y$ 表示，则

$$\frac{5-y}{x} = \frac{5-3}{20}.$$

由此可知 $2y = 10 - \dfrac{x}{5}$, 于是微元所受到的水压力为

$$\mathrm{d}F = \mu g \cdot x \cdot \left(10 - \frac{x}{5}\right)\,\mathrm{d}x.$$

其中 μ 为水的密度. 因此闸门所受到的水压力为

$$F = \int_0^{20} \mu g \cdot x \left(10 - \frac{x}{5}\right)\,\mathrm{d}x = 14373\mu g.$$

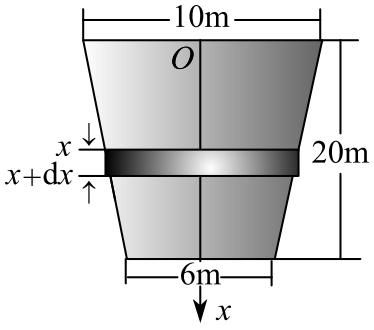


图 5.11

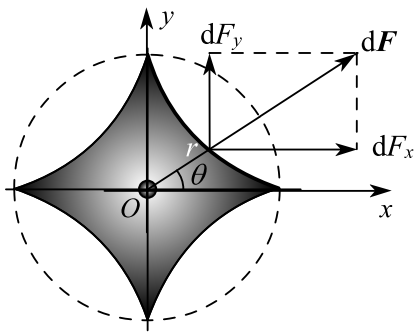


图 5.12

12. 设星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在原点 O 处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

解 建立坐标系如图，取 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 对应的曲线弧为微元，则微元的弧长为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = 3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}t.$$

由于 $x = r\cos\theta = a\cos^3 t, y = r\sin\theta = a\sin^3 t$, 所以微元对原点质点的引力为

$$\mathrm{d}F_x = k\,\frac{m\cdot r^3\mathrm{d}s}{r^2}\cdot\cos\theta = 3ka^2\cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}F_y = k\,\frac{m\cdot r^3\mathrm{d}s}{r^2}\cdot\sin\theta = 3ka^2\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t.$$

其中 k 为引力常数. 故所求引力为

$$F_x = \int_0^{\pi/2} 3ka^2\cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{5}\,ka^2,$$

$$F_y = \int_0^{\pi/2} 3ka^2\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{5}\,ka^2.$$

习 题 5.2 B

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0) = f(2) = 1$, 且 $|f'(x) \le 1|$, 试证

$$1 \le \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \le 3.$$

证 由于

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (f(x)-f(2))\,\mathrm{d}x + 2\\ &= \int_0^1 f'(\xi_1)(x-0)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f'(\xi_2)(x-2)\,\mathrm{d}x + 2,\end{aligned}$$

所以根据 $|f'(x)| \le 1$, 有 $1 \le \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \le 3$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $|f'(x) \le M|, f(a) = 0$, 试证

$$M \ge \frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

证

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)-f(a)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f'(\xi)|(x-a)\,\mathrm{d}x$$

$$\le M\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}M(b-a)^2.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且

$$f(0) = f(\frac{1}{2}), \quad 2\int_{1/2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(2).$$

证明存在 $\xi \in (0,2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

证 由于 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, 所以根据 *Roll* 定理，存在 $\xi_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 使得 $f'(\xi_1) = 0$.

根据积分中值定理，存在 $\xi_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 使得

$$f(2) = 2\int_{1/2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(\xi_2)\cdot\frac{1}{2} = f(\xi_2).$$

于是存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 2)$, 使得 $f'(\xi_3) = 0$.

因此，存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

4. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负递减的连续函数，且 $0 < a < b < 1$, 则

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 1 令

$$F(a) = b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned} F'(a) &= bf(a) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + af(a) \\ &\geq bf(a) - \int_a^b f(b)\,\mathrm{d}x + af(a) = 2af(a) \geq 0. \end{aligned}$$

所以 $F(a)$ 在 $[0,b]$ 上递增. 根据 $F(0)=0$ 可知,

$$F(a) \geq F(0) = 0.$$

证 2　根据积分中值定理，存在 $\xi \in (0,a)$, 使得

$$b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = abf(\xi).$$

同理存在 $\eta \in [a,b]$, 使得

$$a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = a(b-a)f(\eta) < abf(\eta).$$

由于 $\xi < \eta$ 且 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(\xi) > f(\eta)$. 因此 $abf(\xi) > abf(\eta)$, 即

$$b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，则当 $x \in [0,1]$ 时，有

$$|f(x)| \leq \int_0^1 \left(\,|f(t)| + |f'(t)|\,\right)\mathrm{d}t.$$

证　根据积分中值定理，存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = |f(\xi)|$. 于是

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|f(\xi) + \int_\xi^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq |f(\xi)| + \left|\int_\xi^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\,|f(t)| + |f'(t)|\,\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

6. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证

$$\max_{a\leq x\leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证 根据积分中值定理，存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$. 于是

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(\xi) + \int_\xi^x f'(x)\,\mathrm{d}x \right| \le |f(\xi)| + \left| \int_\xi^x f'(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\le \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

7. 设 $x \in [a,b]$ 时， $f(x) \ge 0, f''(x) \le 0$, 试证

$$f(x) \le \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 根据 $f''(x) \le 0$ 可知， $f(x)$ 为上凸函数，所以“切在上”，即

$$f(x) \le f(t) + f'(t)(x-t).$$

于是由 $f(x) \ge 0$, 有

$$\begin{aligned} f(x)(b-a) &\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b (x-t)\,\mathrm{d}f(t) \\ &= 2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + (x-t)f(t)\Big|_{t=a}^{t=b} \le 2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

8. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0$, $f'(x) \ge 0$, $g'(x) \ge 0$. 证明对任何 $a \in [0,1]$, 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \ge f(a)g(1).$$

证 令

$$F(a) = \int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x - f(a)g(1),$$

则 $F(a)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续且

$$F'(a) = g(a)f'(a) - f'(a)g(1) = f'(a)[\,g(a) - g(1)\,].$$

由于 $x \in [0,1]$ 时，$f'(x) \geq 0$, $g'(x) \geq 0$, 所以 $F'(x) \leq 0$, 即 $F(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递减函数.

注意到

$$F(1) = \int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x - f(1)g(1),$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}f(x) = g(x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(1)g(1) - \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $F(1) \geq 0$. 因此 $x \in [0,1]$ 时，$F(x) \geq 0$. 由此可知，$a \in [0,1]$ 时，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \geq f(a)g(1).$$

9. 用铁锤将铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度平方成正比，在铁锤击第一次时，能将铁钉击入木板内 1cm, 如果铁锤每次打击所做的功相等，问铁锤第二次能把铁钉又击入多少 cm?

解 设铁钉击入木版的深度为 x, 则木板对铁钉的阻力为 $f(x) = kx^2$. 按照两次做功相等的给定条件有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{1+h} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中 h 为第二次铁钉击入木板的长度. 直接计算可得 $h = \sqrt[3]{2} - 1$.

10. 求星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ 绕 x 旋转所得旋转体的体积与表面积.

解 星形线的参数方程为

$$x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta.$$

于是所求旋转体的体积为

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} (a\sin^3\theta)^2\,\mathrm{d}(a\cos^3\theta) = \frac{32}{35}\pi a^3.$$

所求旋转体的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} y(\theta)\sqrt{[\,x'(\theta)\,]^2+[\,y'(\theta)\,]^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} (a\sin^3\theta)\sqrt{[\,(a\cos^3\theta)'\,]^2+[\,(a\sin^3\theta)'\,]^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\sqrt{3}}{5}\,a^2\pi. \end{aligned}$$

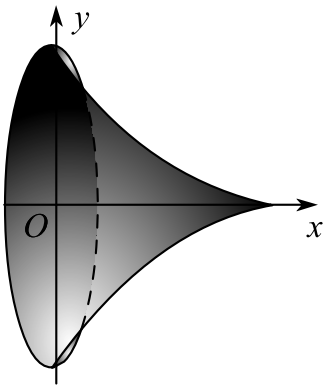


图 5.13

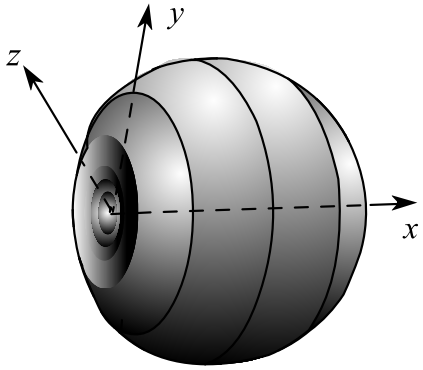


图 5.14

11. 求心脏线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转所得旋转面的面积.

解 由于心脏线的微弧长为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{r^2(\theta)+\left[r'(\theta)\right]^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

故所求旋转体的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} r(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}s(\theta) \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} [a(1+\cos\theta)\sin\theta]\cdot\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -2\sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^{3/2}\,\mathrm{d}(1+\cos\theta) = \frac{32}{5}a^2. \end{aligned}$$

12. 将抛物线 $y=ax-x^2$ 在横坐标 0 与 c $(0<c<a)$ 之间的弧段绕 x 轴旋转，问 c 为何值时，所得旋转体体积 V 等于弦 OP (P 为抛物线与 $x=c$ 的交点) 绕 y 轴旋转所得锥体体积 $V_{锥}$.

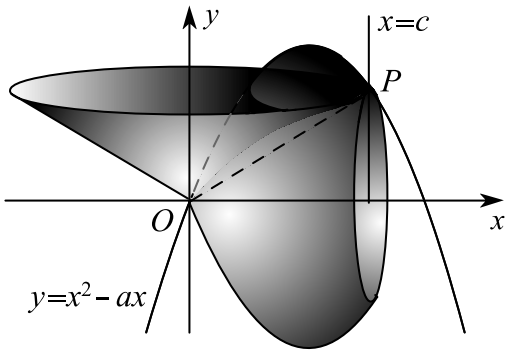


图 5.15

解 圆锥的体积为

$$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi c^2(ac-c^2).$$

抛物线对应的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^c y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^c (ax-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}c^5-\frac{a}{2}c^4+\frac{a^2}{3}c^3\right).$$

根据 $V=V_{锥}$, 有

$$\frac{1}{5}\,c^2-\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)c+\frac{a^2-a}{3}=0.$$

解得

$$c=\frac{5}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{5}\cdot\frac{a^2-a}{3}}\right).$$

13. 设 $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha<\beta\le\dfrac{\pi}{2}$, 则由非负连续曲线 $r=r(\theta)$ 与射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 围成的极扇形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\cos\theta\;\mathrm{d}\theta.$$

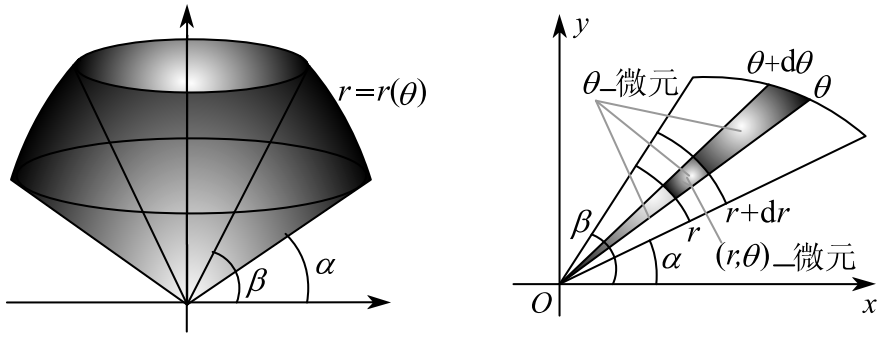


图 5.16

证 在 xOy 平面上，取极扇形的对应于区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的部分为 $\theta-$ 微元，取极扇形的对应于矩形 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta;r,r+\mathrm{d}r]$ 的部分为 $(r,\theta)-$ 微元.

由于 $(r,\theta)-$ 微元可视为长宽为 $r\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}r$ 的矩形，所以 $(r,\theta)-$ 微元的面积为 $r\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r$. 于是由 $(r,\theta)-$ 微元产生的旋转体的体积为

$$r\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r\cdot 2\pi\, r\cos\theta=(2\pi\, r^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}r.$$

其中 $2\pi\, r\sin\theta$ 为旋转周长. 由此可知，由 $\theta-$ 微元产生的旋转体的体积为

$$\int_0^{r(\theta)}(2\pi\, r^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\,r^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

故由极扇形产生的旋转体的体积为

$$V=\int_\alpha^\beta\frac{2\pi}{3}\,r^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\cos\theta\ \ \mathrm{d}\theta.$$

14. 计算由双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积和表面积.

解 (1) 双纽线绕 x 轴的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V\ &=2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\left(\sqrt{a^2\cos 2\theta}\right)^3\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\\&=-\frac{4\sqrt{2}}{3}\,\pi\, a^3\int_0^{\pi/4}(2\cos^2\theta-1)^{3/2}\,\mathrm{d}\cos\theta=\left[\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}\right]\pi\, a^3.\end{aligned}$$

(2) 由于双纽线在第一象限的弧长为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{a^2\cos 2\theta + a^2\cdot\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

所以双纽线绕 x 轴的旋转体的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} y(\theta)\,\mathrm{d}s(\theta) \\ &= 4\pi\int_0^{\pi/4}(\sqrt{a^2\cos 2\theta}\cdot\sin\theta)\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\pi a^2. \end{aligned}$$

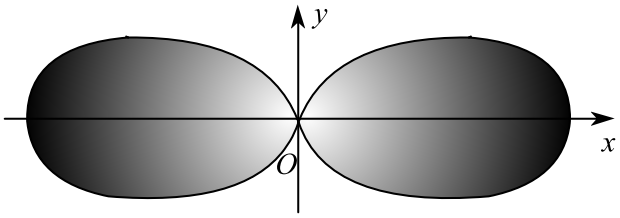


图 5.17

(3) 双纽线绕 y 轴的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\Big(\sqrt{a^2\cos 2\theta}\Big)^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3\int_0^{\pi/4}(1-2\sin^2\theta)^{3/2}\,\mathrm{d}\sin\theta = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(4) 双纽线绕 y 轴的旋转面的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x(\theta)\,\mathrm{d}s(\theta) \\ &= 4\pi\int_0^{\pi/4}(\sqrt{a^2\cos 2\theta}\cdot\cos\theta)\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = 4\Big(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\pi a^2.$$

其中

$$\int (x^2 \pm a^2)^{3/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x(x^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{3a^2}{4} \int (x^2 \pm a^2)^{1/2} \, \mathrm{d}x.$$

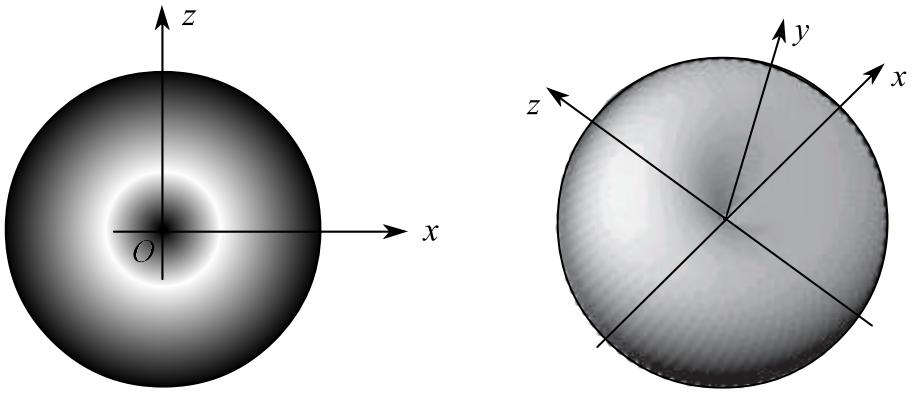


图 5.18

15. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递减函数， $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) \ \mathrm{d}x = f(a) \int_a^{\xi} g(x) \ \mathrm{d}x.$$

证 设 $A = \min\limits_{a\le t\le b} \int_a^t g(x)\mathrm{d}x$, $B = \max\limits_{a\le t\le b} \int_a^t g(x)\mathrm{d}x$, $G(t) = \int_a^t g(x)\mathrm{d}x$, 且 M 是 $|g(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的上界. 对自然数 n, 记 $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$, 并设 $x_{i-1} \le x < x_i$ 时， $f_n(x) = f(x_{i-1})$, 则 $f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负减函数, $f_n(x) \ge f(x)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由于

$$\Big|\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big| \le M\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[G(x_{i-1}) - G(x_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]G(x_i) + f(x_{n-1})G(x_n).$$

所以 $f(a)A \le \int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x \le f(a)B$. 于是

$$f(a)A \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le f(a)B.$$

故根据连续函数介值定理，存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)G(\xi).$$

16. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数， $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\ \mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

证 不妨设 $f(x)$ 是递减的，则 $f(x) - f(b)$ 是非负递减的，于是根据上题结论，存在存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b (f(x) - f(b))g(x)\ \mathrm{d}x = (f(a) - f(b))\int_a^\xi g(x)\ \mathrm{d}x.$$

由此可知,

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\ \mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

17. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且恒正，若 $d_n = \int_a^b g(x)\big[f(x)\big]^n\ \mathrm{d}x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$.

证 根据 Cauchy 不等式，有

$$d_n^2 = \left(\int_a^b \left[\sqrt{g(x)}\cdot f^{\frac{n-1}{2}}(x)\right]\cdot\left[\sqrt{g(x)}\cdot f^{\frac{n+1}{2}}(x)\right]\ \mathrm{d}x\right)^2$$

$$\leq \int_a^b g(x)\big[f(x)\big]^{n-1}\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\big[f(x)\big]^{n+1}\,\mathrm{d}x = d_{n-1}d_n.$$

由此可知， $\dfrac{d_n}{d_{n-1}} \leq \dfrac{d_{n+1}}{d_n}$. 又因为 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} \leq \max\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$, 所以 $\left\{\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 是单调有上界数列，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{d_3}{d_2}\cdots\frac{d_{n+1}}{d_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n} = \max\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\ \,\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\ \,\mathrm{d}x = 0.$$

证 根据广义黎曼定理 (证明见课本例题), 即若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数， $g(x)$ 是 T 周期函数且在 $[0,T]$ 上可积，则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(p\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可知,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\ \,\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\ \,\mathrm{d}x = 0.$$

19. 某水坝中有一三角形的闸门, 这闸门笔直地竖立在水中, 它的底边与水平面相齐，已知三角形底边长为 a 米，高为 h 米，求闸门所受的水压力.

解 建立坐标系如图，取闸门的 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 部分为微元. 如果微元的宽度用 $2y$ 表示，则

$$\frac{a/2-y}{x}=\frac{a/2}{h}.$$

由此可知 $2y=a-\dfrac{ax}{h}$, 于是微元所受到的水压力为

$$\mathrm{d}F=\mu g\cdot x\cdot\left(a-\frac{ax}{h}\right)\,\mathrm{d}x.$$

其中 μ 为水的密度. 因此闸门所受到的水压力为

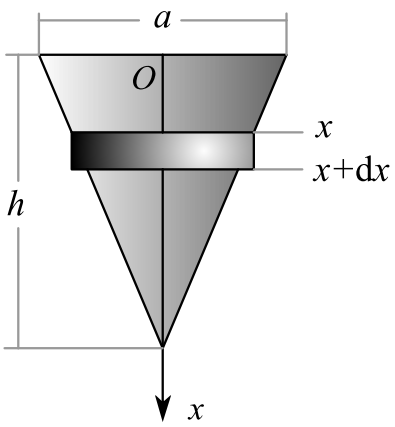


图 5.19

$$F=\int_0^h \mu g\cdot x\cdot\left(a-\frac{ax}{h}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mu gah.$$

20. 边长为 a 的正方形薄板垂直沉没水中，其一顶点位于水面，一条对角线平行于水面，试求薄板所受的压力 P.

解 建立坐标系如图， x 轴过正方形的一对角线垂直向下， y 轴位于水面. 根据对称性，薄板所受压力为三角板 OAB 的 2 倍.

在三角板 OAB 中，当 $[x, x+\mathrm{d}x]\subset\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,a\right]$ 时， $[x, x+\mathrm{d}x]$ 微元所受压力为

$$\mathrm{d}P=x\cdot x\,\mathrm{d}x.$$

当 $[x, x+\mathrm{d}x]\subset\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,a,\sqrt{2}\,a\right]$ 时， $[x, x+\mathrm{d}x]$ 微元所受压力为

$$\mathrm{d}P=x\cdot(\sqrt{2}\,a-x)\,\mathrm{d}x.$$

因此正方形薄板所受的压力为

$$P=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} x\cdot x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\sqrt{2}\,a}(\sqrt{2}\,a-x)\cdot x\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\,a^3.$$

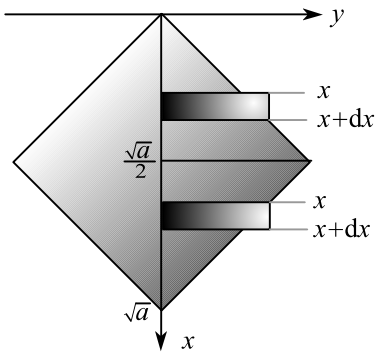


图 5.20

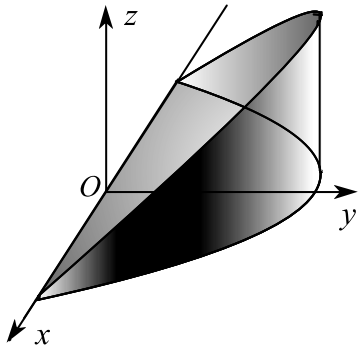


图 5.21

21. 求椭圆柱 $4x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=my$ 部分的体积.

解 垂直于 x 轴的截面为直角三角形，其面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\,yz=\frac{1}{2}\,my^2=\frac{1}{2}\,(a^2-4x^2).$$

由此可知，所求体积为

$$V=\int_{-a/2}^{a/2}S(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{a/2}\frac{1}{2}\,(a^2-4x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{ma^3}{3}.$$

22. 设有一质量均匀的细直杆 AB, 其长为 l, 质量为 M.

(1) 在 AB 的延长线上与端点 B 的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 N_1, 试求细杆对 N_1 处质点的引力;

(2) 在 AB 的过 B 端垂线上与 B 的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 N_2, 试求细杆对 N_2 处质点的引力.

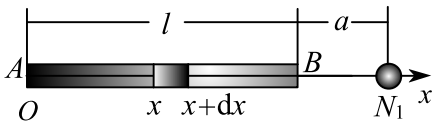


图 5.22

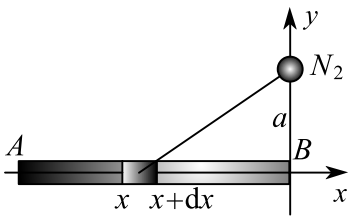


图 5.23

解 (1) 建立坐标系如图 5.22, 微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的质量为 $\dfrac{M}{l}\,\mathrm{d}x$, 微元对 N_1 质点的引力为

$$\mathrm{d}F = k \cdot \frac{\dfrac{M}{l}\,\mathrm{d}x \cdot m}{(l+a-x)^2},$$

其中 k 为引力常数. 于是细直杆 AB 对 N_1 质点的引力为

$$F = k\int_0^l \frac{mM}{(l+a-x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{kmM}{a(l+a)}.$$

(2) 建立坐标系如图 5.23, 微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的质量为 $\dfrac{M}{l}\,\mathrm{d}x$, 微元对 N_2 质点的引力为

$$\mathrm{d}F_x = k \cdot \frac{\frac{M}{l}\,\mathrm{d}x \cdot m}{a^2+(l-x)^2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{a^2+(l-x)^2}},$$

$$\mathrm{d}F_y = k \cdot \frac{\frac{M}{l}\,\mathrm{d}x \cdot m}{a^2+(l-x)^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+(l-x)^2}}.$$

于是细直杆 AB 对 N_2 质点的引力为

$$F_x = \frac{kmM}{l}\int_0^l \frac{l-x}{\left[\,a^2+(l-x)^2\,\right]^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{kmM}{a}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

$$F_y = \frac{kmM\cdot a}{l}\int_0^l \frac{1}{\left[\,a^2+(l-x)^2\,\right]^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{kmM}{l\sqrt{a^2+l^2}}.$$

§5.3 广义积分

习 题 5.3 A

1. 计算下列广义积分:

(1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$; (4) $\int_1^{+\infty}x^{\alpha}\ln x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{(\ln x)^{\alpha}}{x}\,\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 (1) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_0^{+\infty}=+\infty.$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^{+\infty}=\mathrm{e}^{-1}.$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}=\ln\frac{x+1}{x+2}\,\Big|_0^{+\infty}=\ln 2.$

(4) $$\int_1^{+\infty}x^{\alpha}\ln x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big(\ln x-\dfrac{1}{\alpha+1}\Big)\right]_1^{+\infty}, & \alpha<-1\\ +\infty, & \alpha\geq -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}, & \alpha<-1\\ +\infty, & \alpha\geq -1\end{cases}.$$

(5) $$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{(\ln x)^{\alpha}}{x}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}+\infty, & \alpha\geq -1\\ \dfrac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}, & \alpha<-1\end{cases}=\begin{cases}+\infty, & \alpha\geq -1\\ 0, & \alpha<-1\end{cases}.$$

(6) $$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{a^2+b^2}\Big[(a\sin bx+b\cos bx)\,\mathrm{e}^{-ax}\Big]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

2. 判断下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty}\sin\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$; (4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}}$.

解 (1) 由于 $x \to +\infty$ 时,

$$\sin \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2},$$

所以 $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由于 $x \to +\infty$ 时,

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{1}{x^{5/2}},$$

所以 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

(3) 由于 $x \to +\infty$ 时,

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1} \sim \frac{1}{x^2},$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$ 收敛.

(4) 由于 $x \to 1$ 时,

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} \sim \frac{2}{1-x},$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}}$ 发散.

习 题 5.3 B

1. 判断下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_{1/2}^{2} \frac{\ln x}{|1-x|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha > 0)$;　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$;

(3) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{\alpha} x}$ $(\alpha > 0)$;　　(4) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x \cos^q x}$ $(p > 0, q > 0)$;

(5) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$;　　(6) $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(9) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{3/2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(10) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(11) $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)x^2}}$;　　(12) $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 由于 $x=1$ 是唯一瑕点且 $x\to 1-$ 时, $\dfrac{\ln x}{|1-x|^\alpha} \sim -\dfrac{1}{|1-x|^{\alpha-1}}$, 而 $x\to 1+$ 时,

$$\frac{\ln x}{|1-x|^\alpha} \sim \frac{1}{|1-x|^{\alpha-1}},$$

所以 $0<\alpha<2$ 时, 积分收敛, 而 $\alpha\geq 2$ 时, 积分发散.

(2) 由于当 $x\to 0+$ 时, 有

$$x^p + x^q \sim x^{\min(p,\,q)};$$

当 $x\to +\infty$ 时, 有

$$x^p + x^q \sim x^{\max(p,\,q)},$$

所以当且仅当 $\min(p,q)<1<\max(p,q)$ 时积分收敛.

(3) 由于当 $x\to 0+$ 时,

$$\sin^\alpha x \sim x^\alpha;$$

当 $x\to \pi-$ 时,

$$\sin^\alpha x \sim (\pi-x)^\alpha,$$

所以 $\alpha<1$ 时, 积分收敛, 而 $\alpha\geq 1$ 时, 积分发散.

(4) 由于当 $x\to 0+$ 时,

$$\sin^p x\cos^q x \sim x^p;$$

当 $x\to \pi/2-$ 时,

$$\sin^p x\cos^q x \sim (\frac{\pi}{2}-x)^q,$$

所以当且仅当 $p<1,\ q<1$ 时, 积分收敛.

(5) 由于当 $x \to 0+$ 时, $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 所以积分收敛.

(6) 由于 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{2/3} \cdot \dfrac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} = 0$, 所以积分收敛.

(7) 由于 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = 0$, 所以积分收敛.

(8) 由于当 $x \to +\infty$ 时,

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^2},$$

所以积分收敛.

(9) 由于当 $x \to +\infty$ 时,

$$\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{1/2}},$$

所以积分发散.

(10) 取 $1 < s < p$, 则当 $x \to +\infty$ 时,

$$\lim_{x\to +\infty} x^s \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^p} = 0,$$

所以积分收敛.

(11) 由于当 $x \to 0+$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)x^2}} \sim \frac{1}{x^{2/3}};$$

当 $x \to 1-$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)x^2}} \sim \frac{1}{(1-x)^{1/3}},$$

所以积分收敛.

(12) 由于

$$\lim_{x\to 0+} x^{1/2} \cdot \frac{\ln x}{1-x^2} = 0, \ \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2},$$

所以积分收敛.

2. 利用 $\Gamma-$函数和 $\beta-$函数求下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} \,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^2 x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{4-x^2} \,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x$.

解 (1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} B\Big(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\Big) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3}{2^9}\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\, B\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{1} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(3) 令 $x^2 = 4t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^{-1/2} \sqrt{4-x^2} \,\mathrm{d}x &= \sqrt{2} \int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{1/2} \,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\, B\Big(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{2}\, \Gamma(\frac{7}{4})}.\end{aligned}$$

(4) 令 $2x = t$, 则

$$\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{16} \int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\, \Gamma(3) = \frac{1}{8}.$$

3. 证明：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \,\mathrm{d}t = B(y, x)$;

(2) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x} \,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{1+x} \,\mathrm{d}x \ (p > 0)$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{1+x} \,\mathrm{d}x \ (0 < p < 1)$.

证 (1) 令 $\dfrac{1}{1+t}=u$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,\mathrm{d}t &= -\int_1^0\Big(\frac{1-u}{u}\Big)^{x-1}u^{x+y}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\ &=\int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,\mathrm{d}u=B(y,x).\end{aligned}$$

(2) 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^1\frac{\frac{1}{t^{p-1}}}{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-p}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(3) 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^0\frac{\frac{1}{t^{p-1}}}{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{x^{-p}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 D 是由曲线 $y=\ln x\ (0<x\le 1)$, $x=0$, $y=0$ 所围成的平面图形, 求 D 分别绕 x 轴和 y 轴所得旋转体的体积.

解 D 绕 x 轴所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V &=\pi\int_0^1(\ln x)^2\,\mathrm{d}x\\ &=\pi x(\ln x)^2\Big|_0^1-\pi\int_0^1 x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-2\pi\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=2\pi.\end{aligned}$$

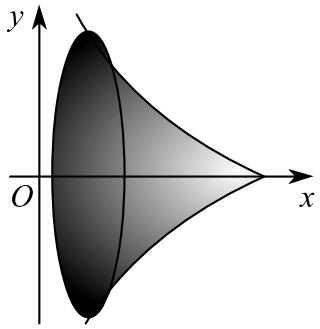


图 5.24

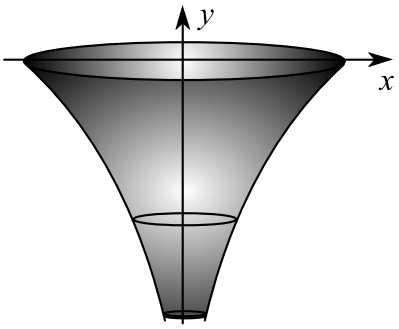


图 5.25

D 绕 y 轴所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x \cdot |\ln x| \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x^2 = -\pi x^2 \ln x \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5. 设 D 是由追踪线 $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ $(a > 0)$ 与 $x = 0$ 所围成的平面图形，求 D 绕 x 轴所得旋转体的体积.

解 D 绕 x 轴所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a yx \,\mathrm{d}y \\ &= 2\pi \int_0^a y\Big(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\Big) \,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^a \big[\, a \ln(a + \sqrt{a^2 - y^2}) - \sqrt{a^2 - y^2} - \ln y \,\big] \,\mathrm{d}y^2 \\ &= \pi \int_0^a \big[\, a \ln(a + t) - t \,\big] \,\mathrm{d}t^2 - a\pi \int_0^a \ln y \,\mathrm{d}y^2 = \frac{\pi}{3}\, a^3. \end{aligned}$$

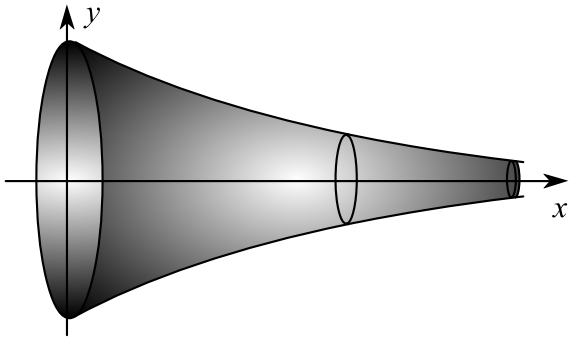


图 5.26

6. 设 $a > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则下列等式在广义积分存在时成立：

$$\int_0^{+\infty} f\Big(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\Big) \cdot \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x = \ln a \int_0^{+\infty} f\Big(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\Big) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

证 令

$$I=\int_0^{+\infty} f\Big(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\Big)\cdot\frac{\ln x-\ln a}{x}\,\mathrm{d}x.$$

作变量代换 $u=\dfrac{a^2}{x}$, 有

$$I=\int_{+\infty}^0 f\Big(\frac{u}{a}+\frac{a}{u}\Big)\cdot\frac{\ln a-\ln x}{a^2/u}\cdot\Big(-\frac{a^2}{u^2}\Big)\,\mathrm{d}x=-I.$$

由此可知 $I=0$.

7. 设 $u(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 到 $[u(a),b)$ 的连续可微函数, $f(u)$ 是 $[u(a),b)$ 上的连续函数, 若 $u'(x)\neq 0$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f\circ u(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{u(a)}^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

证 若 $\int_{u(a)}^b f(u)\,\mathrm{d}u$ 存在, 则有

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f\circ u(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x &=\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f\circ u(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\lim_{B\to+\infty}\int_{u(a)}^{u(B)} f(u)\,\mathrm{d}u=\int_{u(a)}^b f(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

若 $\int_a^{+\infty} f\circ u(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则由 $u'(x)\neq 0$ 有

$$\begin{aligned}\int_{u(a)}^b f(u)\,\mathrm{d}u &=\lim_{\beta\to b-}\int_{u(a)}^{\beta} f(u)\,\mathrm{d}u=\lim_{\beta\to b-}\int_a^{u^{-1}(\beta)} f\circ u(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f\circ u(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f\circ u(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

8. 设 $u(x),v(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的连续可微函数, 当 $x\to+\infty$ 时, (1) $u(x)$ 或 $v(x)$ 单调; (2) $u(x)$ 有界且 $v(x)\to 0$, 则 $\int_a^{+\infty}u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证 设 $|u(x)|\leq M$, 则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=0$ 可知, 存在 $A>a$, 使当 $x\geq A$ 时, 恒有

$$\Big|v(x)\Big|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

若 $v(x)$ 单调，则 $v'(x)\geq 0$. 于是根据积分中值定理，当 $B>A$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_A^B u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|u(\xi)\cdot\int_A^B v'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \Big|\,u(\xi)\cdot[\,v(B)-v(A)\,]\,\Big| < \varepsilon.\end{aligned}$$

若 $u(x)$ 单调，则 $u'(x)\geq 0$. 于是根据积分中值定理，当 $B>A$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \Big|u(x)v(x)\Big|_A^B + \left|\int_A^B v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq M\cdot\Big(|v(A)|+|v(B)|\Big) + \left|v(\xi)\cdot\int_A^B u'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |v(\xi)|\cdot\Big(|u(A)|+|u(B)|\Big) < \varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

总 习 题 五

1. 求两条抛物线 $y=x^2$ 与 $y=k(x^2-1)$ $(k>1)$ 所围成图形的面积 S. 当 k 为何值时，面积 S 取最小值？

解 由 $y=x^2$, $y=k(x^2-1)$可得所围成图形的区间为 $\Big[-\sqrt{\dfrac{k}{k-1}},\sqrt{\dfrac{k}{k-1}}\Big]$. 于是所围成图形的面积为

$$\begin{aligned}S &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}\Big[x^2-k(x^2-1)\Big]\,\mathrm{d}x \\ &= 2\Big[(1-k)\frac{x^3}{3}+kx\Big]_0^{\sqrt{\frac{k}{k-1}}} = \frac{4}{3}\,k\sqrt{\frac{k}{k-1}}.\end{aligned}$$

根据

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Big(\frac{9}{16}\,S^2\Big) = \Big(\frac{k^3}{k-1}\Big)' = \frac{(2k-3)k^2}{(k-1)^2} = 0$$

可知 $k=\dfrac{3}{2}$. 故当 $k=\dfrac{3}{2}$ 时，面积 S 取最小值 $2\sqrt{3}$.

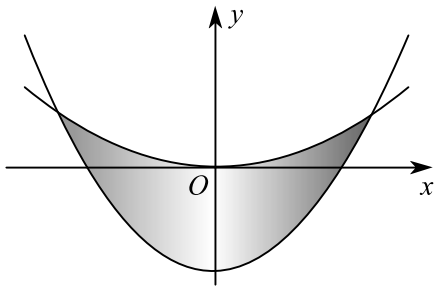


图 5.27

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0.$$

试证在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证 令

$$F(x)=\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,\quad 0\le x\le\pi.$$

由于 $F(0)=F(\pi)=0$, 所以

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}F(x)\\ &= F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $F(\xi)\sin\xi=0$. 于是 $F(\xi)=0$.

由于 $0<\xi<\pi$ 且 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0$, 所以存在 $\xi_1\in(0,\xi)$, $\xi_2\in(\xi,\pi)$, 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 此即

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

3. 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$, 使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积;

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x) > -\dfrac{2f(x)}{x}$, 证明 (1) 中的 x_0 是唯一的.

证 (1) 按照题意，只需证存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得

$$x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

令 $F(x) = x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 所以由 Roll 定理，存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $F'(x_0) = 0$. 由此可知,

$$x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) 由于

$$F'(x) = xf(x) - \int_x^2 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$F''(x) = xf'(x) + f(x) + f(x) > 0,$$

所以 $F'(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内只有一个解 x_0.

4. 设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域; D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域，其中 $0 < a < 2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1; D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当为 a 何值时， $V_1 + V_2$ 取得最大值？试求此最大值.

解 (1) D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为

$$V_1 = \pi\int_a^2 (2x^2)^2\,\mathrm{d}x = 4\pi(\frac{32}{5} - \frac{a^5}{5}).$$

D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积为

$$V_2 = 2\pi\int_0^a x\cdot(2x^2)\,\mathrm{d}x = \pi a^4.$$

(2) 根据 (1) 有

$$V(a)=V_1+V_2=4\pi(\frac{32}{5}-\frac{a^5}{5})+\pi a^4.$$

由

$$V'(a)=-4\pi a^4+4\pi a^3=4\pi a^3(1-a)=0,\ V''(1)>0$$

可知， $a=1$ 时 V_1+V_2 取得最大值且最大值为 $V(1)=\dfrac{129}{5}\pi$.

$0<a<2$ 时,

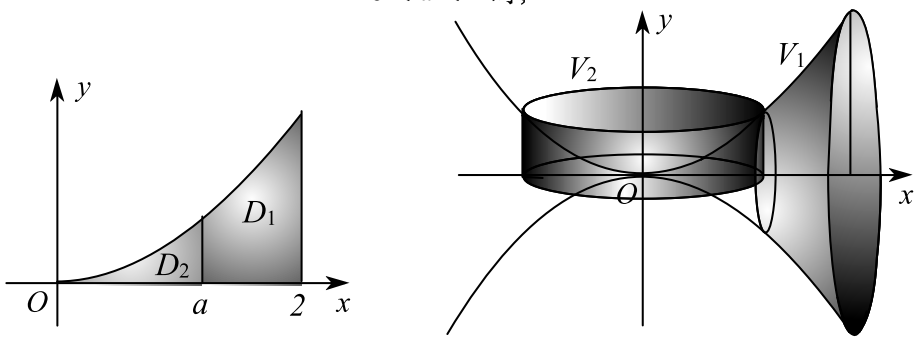


图 5.28

5. 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 $P(a,a^2)$ 作切线，问 a 为何值时所作切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的图形面积最小.

解 所作切线的方程为

$$y=a^2+2a(x-a)=2ax-a^2.$$

该切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 的交点可由

$$2ax-a^2=-x^2+4x-1$$

确定，解之可得 $x_{1,2}=2-a\pm\sqrt{2a^2-4a+3}$. 于是所围图形的面积为

$$\begin{aligned}S(a)\ &=\int_{x_1}^{x_2}\left[\,(-x^2+4x-1)-(2ax-a^2)\,\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{3}\,(\,3-4a+2a^2\,)^{3/2}=\frac{4}{3}\left[(\sqrt{2}\,a-\sqrt{2})^2+1\right]^{3/2}.\end{aligned}$$

所以当 $a=1$ 时所围图形的面积最小，其最小值为 $S(1)=\dfrac{4}{3}$.

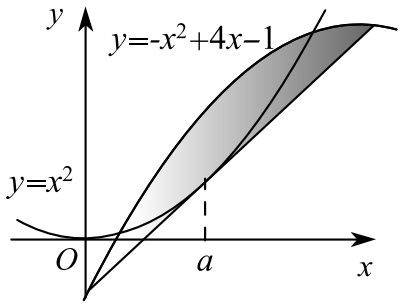


图 5.29

6. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且 $f(x)>1$, 证明方程

$$\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=0$$

在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一的实根.

证 令

$$F(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

则

$$F'(x)=\sqrt{1+x^2}-\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot\sin x>1-\sin x\geq 0,$$

即 $F(x)$ 为严格增函数. 由于 $F(0)<0,\ F(\dfrac{\pi}{2})>0$, 所以 $F(x)=0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一的实根.

7. 分别求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴所围成的封闭图形绕 x 轴与直线 $y=3$ 旋转所得旋转体的体积.

解 所围图形绕 x 轴的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^2(3-|x^2-1|)^2\,dx\\&=2\pi\int_0^1(2+x^2)^2\,\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{275}{15}\,\pi.\end{aligned}$$

所围图形绕直线 $y=3$ 的旋转体的体积为

$$V=\pi\cdot 3^2\cdot 4-2\pi\int_0^2\left[3-(3-|x^2-1|)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\,\pi.$$

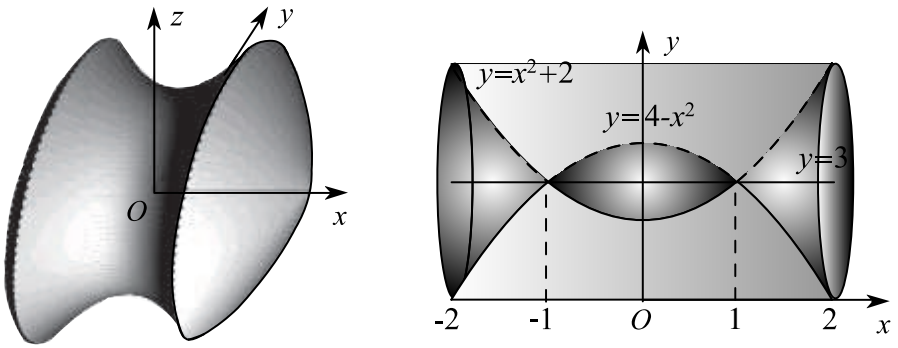


图 5.30

8. 设曲线 $y=\cos x\ \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴、 y 轴所围图形面积被曲线 $y=a\sin x, y=b\sin x\ \ (a>b>0)$ 三等分，试确定 a,b 的值.

解 三块图的面积分别为

$$S_1=\int_0^{\operatorname{arccot} b} b\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\operatorname{arccot} b}^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=b+1-\sqrt{b^2+1};$$

$$\begin{aligned}S_2&=\int_0^{\operatorname{arccot} a}\left[\,a\sin x-b\sin x\,\right]\mathrm{d}x+\int_{\operatorname{arccot} a}^{\operatorname{arccot} b}\left[\,\cos x-b\sin x\,\right]\mathrm{d}x\\&=a-b+\sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1};\end{aligned}$$

$$S_3=\int_0^{\operatorname{arccot} a}\left[\,\cos x-a\sin x\,\right]\mathrm{d}x=\sqrt{a^2+1}-a.$$

根据 $S_1=S_2=S_3=\dfrac{1}{3}$ 可得， $a=\dfrac{4}{3},\ b=\dfrac{5}{12}$.

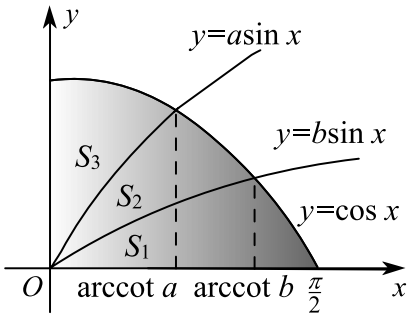


图 5.31

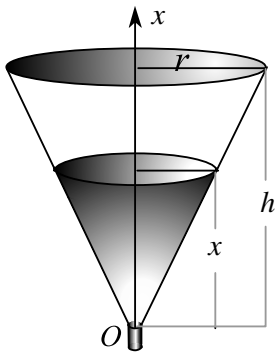


图 5.32

9. 在底半径为 r cm, 高为 h cm 的直圆锥形容器中注满了水 (尖端朝下), 在顶点处有一面积为 A cm^2 的小孔，水从孔中流出．水深为 x cm 时，水流出的速度是 $\sqrt{2gx}$ cm/s. 问需多少时间才能把水流尽？

解 水从小孔流出的流量为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A\sqrt{2gx}.$$

在时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内，水面从 x 下降到 $x+\mathrm{d}x$, 下降的体积为

$$\mathrm{d}V = -\pi\Big(\frac{r}{h}\,x\Big)^2\mathrm{d}x.$$

于是 $\mathrm{d}V = A\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t = -\pi\Big(\dfrac{r}{h}\,x\Big)^2\mathrm{d}x$, 即

$$\mathrm{d}t = -\frac{\pi r^2}{Ah^2}\,x^{3/2}\,\mathrm{d}x$$

故水流完所需时间为

$$t = -\int_h^0 \frac{\pi r^2}{Ah^2}\,x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi r^2\sqrt{h}}{5A}.$$

10. 求下列平面图形 G 的面积：

(1) G由曲线 $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ 围成；

(2) G介于心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 和圆 $r = 2a\cos\theta$ 之间；

(3) G是双纽线 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 之内与圆 $r = a$ 之外的部分;

(4) G是圆 $r = a$ 之外与心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 之内的部分.

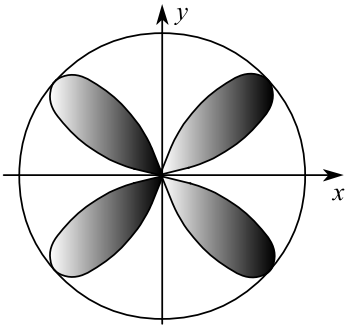


图 5.33

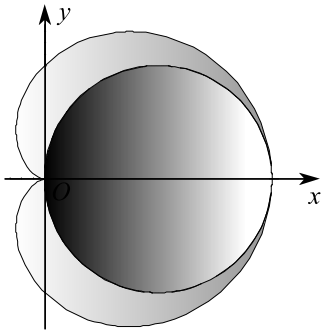


图 5.34

解 (1) 曲线 $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ 的极坐标方程为 $r = a\sin 2\theta$, 故所求面积为

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\,a\sin 2\theta\,]^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$$

(2) G 的面积为

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\,a(1+\cos\theta)\,]^2\,\mathrm{d}\theta - 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\,2a\cos\theta\,]^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$$

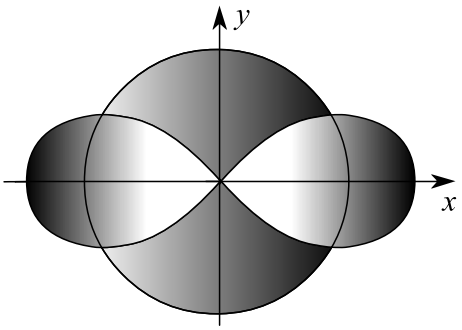


图 5.35

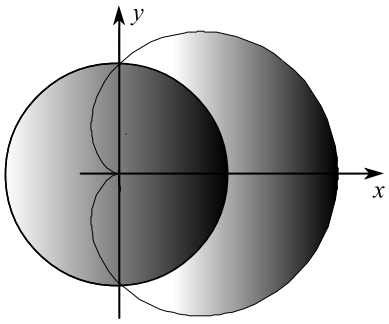


图 5.36

(3) 由 $a^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 可知，两曲线在第一象限的交点坐标为 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. 于是所求面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \left[(2a^2\cos 2\theta) - a^2 \right] \mathrm{d}\theta = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)a^2.$$

(4) G 的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\big(a(1+\cos\theta)\big)^2 - a^2 \right] \mathrm{d}\theta = \left(2 + \frac{\pi}{4}\right)a^2.$$

11. 求下列平面曲线 L 的弧长：

(1) L为抛物叶形线 $9ay^2 = x(x-3a)^2$ $(a>0)$ 的叶形部分 $0 \le x \le 3a$;

(2) L是心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$.

(3) L是 $\theta = \dfrac{1}{2}\big(r + \dfrac{1}{r}\big)$ 在 $1 \le r \le 3$ 之间的弧段.

解 (1) 由 $9ay^2 = x(x-3a)^2$, $y \ge 0$ 可得

$$y = \frac{1}{3\sqrt{a}}\,(3a-x)\sqrt{x}, \qquad y' = \frac{a-x}{2\sqrt{ax}}.$$

由此可知，抛物叶形线的叶形部分的弧长为

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^{3a} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{3a} \sqrt{1+\left[\frac{a-x}{2\sqrt{ax}}\right]^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{3a} \frac{x+a}{\sqrt{ax}}\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{3}a. \end{aligned}$$

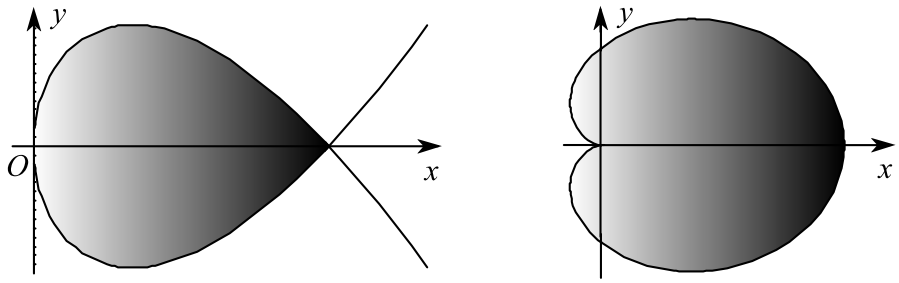


图 5.37

(2) 按照弧长的极坐标公式，曲线 L 的弧长为

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{[a(1+\cos\theta)]^2+[-a\sin\theta]^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 8a. \end{aligned}$$

(3) 曲线 L 的参数方程为

$$x = r\cos\left[\frac{1}{2}\Big(r+\frac{1}{r}\Big)\right], \quad y = r\sin\left[\frac{1}{2}\Big(r+\frac{1}{r}\Big)\right].$$

由此可知 L 的弧长为

$$s = \int_1^3 \sqrt{[x'(r)]^2+[y'(r)]^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(r+\frac{1}{r}\right)\,\mathrm{d}r = 2+\frac{1}{2}\ln 3.$$

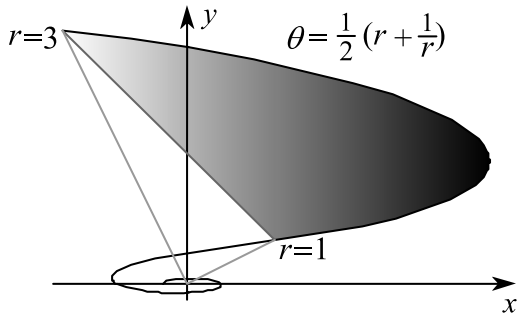


图 5.38

12. 对一切实数 t, 函数 $f(t)$ 是连续的正函数且可导，又 $f(-t)=f(t)$, 令

$$g(x) = \int_{-a}^{a} |x-t|f(t)\,\mathrm{d}t,\ (-a\le x\le a,\ a>0).$$

(1) 证明 $g'(x)$ 是单调增加的;

(2) 求出使函数 $g(x)$ 取最小值的 x 值;

(3) 将函数 $g(x)$ 的最小值作为 a 的函数，它等于 $f(a)-a^2-1$ 时，求 $f(t)$.

解 (1) $g(x) = \displaystyle\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{a}(t-x)f(t)\,\mathrm{d}t$

$$= x\int_{-a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-a}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{a} tf(t)\,\mathrm{d}t - x\int_{x}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于

$$g'(t) = \int_{-a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t,\ g''(x) = 2g(x) > 0,$$

所以 $g'(x)$ 是单调增加的.

(2) 令 $g'(x) = 0$, 则有

$$\int_{-a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $f(-t) = f(t)$, 所以当 $t = -u$ 时，有

$$\int_{-a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

于是 $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. 根据 $f(t) > 0$ 可知， $-x = x$. 由此可知， $g(x)$ 取最小值时必有 $x = 0$.

(3) 由

$$g(0) = \int_{-a}^{a} |t|\, f(t)\,\mathrm{d}t = f(a) - a^2 - 1$$

两端关于 a 求导可知， $2a\, f(a) = f'(a) - 2a$, 即

$$\frac{f'(a)}{f(a)+1} = 2a.$$

故 $\ln(f(a)+1) = a^2 + C$. 根据 $f(0) = 1$ 可知， $C = \ln 2$. 于是

$$f(t) = 2\mathrm{e}^{t^2} - 1.$$

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数 $f''(x)$, 试证明

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 反复应用分步积分法，有

$$\int_0^1 x(1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}f'(x)$$

$$= f'(x)(1-x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x(1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -(1-2x)f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -(f(0)+f(1)) - 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，$f(0)=1$ 且

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(1) 求 $f'(x)$; (2) 证明当 $x\geq 0$ 时，有 $\mathrm{e}^{-x}\leq f(x)\leq 1$.

解 (1) 原等式变形可得

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

两端求导可得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0.$$

令 $u(x)=f'(x)$, 则有

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{x+2}{x+1},$$

两端积分，有

$$\ln u(x) = -x-\ln(x+1)+C,$$

即 $u(x)=\dfrac{C}{x+1}\,\mathrm{e}^{-x}$. 由 $f(0)=1$ 可知 $C=-1$, 于是有

$$f'(x)=u(x)=\frac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

(2) 由 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{-x}$ 和 $x\geq 0$ 可知,

$$-\mathrm{e}^{-x}\leq \frac{1}{x+1}\,\mathrm{e}^{-x}\leq 0,$$

两端积分有 $\mathrm{e}^{-x}-1\leq f(x)-f(0)\leq 0$. 由此可知 $\mathrm{e}^{-x}\leq f(x)\leq 1$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3f''(\xi).$$

证 根据泰勒公式及连续函数介值定理，有

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2,$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=f(a)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi_1)(x-a)^2\,\mathrm{d}x\\&=f(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)\int_a^b(x-a)^2\,\mathrm{d}x\\&=f(a)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\eta_1)(b-a)^3.\end{aligned}$$

同理有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b)(b-a)-\frac{1}{6}f''(\eta_2)(b-a)^3.$$

由于存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}$, 所以有

$$f(x)=[\,f(a)+f(b)\,]\,\frac{b-a}{2}+\frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3.$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$. 证明

$$\ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 令 $x_0=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 根据泰勒公式，有

$$\begin{aligned}\ln x\ &=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2}(x-x_0)^2\\&\leq\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).\end{aligned}$$

于是，有

$$\ln f(x)\leq\ln x_0+\frac{1}{x_0}(f(x)-x_0).$$

由此可知,

$$\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \le \ln x_0\,(b-a) + \frac{1}{x_0}\int_a^b (f(x)-x_0)\,\mathrm{d}x$$

$$= (b-a)\ln x_0 + 0 = (b-a)\ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的导数，且 $f(1)-f(0)=1$. 证明

$$\int_0^1 [\,f'(x)\,]^2\,\mathrm{d}x \ge 1.$$

证 根据 Cauchy 不等式，有

$$\left[\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x$$

由于 $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1)-f(0)=1$, 所以

$$\int_0^1 [\,f'(x)\,]^2\,\mathrm{d}x \ge 1.$$

18. 设有一半径为 R, 中心角为 φ 的圆弧形细杆，其线密度为常数 ρ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 M, 试求这细杆对质点 M 的引力.

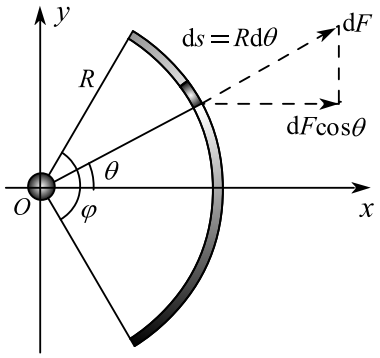


图 5.39

解 建立坐标系如图，取圆弧的圆心为坐标原点，圆弧的中点在 x 轴上. 取圆弧的 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 段为微元, 则微元的长度为 $R\,\mathrm{d}\theta$, 微元的质量为 $\rho R\,\mathrm{d}\theta$,

微元对质点 M 的引力为

$$\mathrm{d}F = k\,\frac{\rho R\,\mathrm{d}\theta \cdot m}{R^2}.$$

由于 $\mathrm{d}F$ 在 x 方向的投影为 $\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F \cdot \cos\theta$, 所以圆弧对质点的引力为

$$F_x = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} k\,\frac{\rho R m}{R^2} \cdot \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{k\rho m}{R} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}.$$

第六章　无穷级数

§6.1　数项级数

习 题 6.1 A

1. 计算下列级数：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$.

解　(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1.$$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big)$$

$$=1-\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}\Big).$$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\Big)$

$$=\frac{1}{2}\left[\Big(1-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big)+\cdots\right]=\frac{1}{4}.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{17}{6}.$$

2. 用比较法判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2^n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{3^n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}\arctan\frac{\pi}{n}$;

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$;

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 由于
$$\frac{1}{n^2+2^n}<\frac{1}{2^n},$$
所以原级数收敛.

(2) 由于
$$\frac{\sin^2 n}{3^n}<\frac{1}{3^n},$$
所以原级数收敛.

(3) 由于 $n\to+\infty$ 时,
$$\frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}\sim\frac{1}{n},$$
所以原级数发散.

(4) 由于

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1},$$

所以原级数发散.

(5) 由于

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}} < \frac{1}{n},$$

所以原级数发散.

(6) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n},$$

所以原级数发散.

(7) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n^{3/2}},$$

所以原级数收敛.

(8) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{\pi}{n}\arctan\frac{\pi}{n} \sim \left(\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

所以原级数收敛.

(9) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2},$$

所以原级数收敛.

(10) 由于

$$\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x < \int_0^{1/n}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{1/n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^{3/2}},$$

所以原级数收敛.

3. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{2\sqrt{n}+1}{2n+1}\Big)^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{n^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\dfrac{\pi}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(\arcsin\dfrac{1}{n}\big)^n$;

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}\ln n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\ln\dfrac{n+2}{2}$;

(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n-2^n}$;

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{\ln^n n}$.

解 (1) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Big(\frac{2\sqrt{n}+1}{2n+1}\Big)^n}=0,$$

所以原级数收敛.

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\,2(n+1)\,]!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{(2n)!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty,$$

所以原级数发散.

(3) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}}=\frac{1}{2},$$

所以原级数收敛.

(4) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2},$$

所以原级数收敛.

(5) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n}=0,$$

所以原级数收敛.

(6) 取 $\frac{1}{3}<s<1$, 则当 $n\to+\infty$ 时，必有

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\ln n}>\frac{1}{n^s},$$

所以原级数发散.

(7) 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}}\ln\frac{n+2}{2}>\sqrt{\frac{1}{n+1}},$$

所以原级数发散.

(8) 由于

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$$

收敛，所以原级数收敛.

(9) 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\frac{3^n}{4^n-2^n}\sim\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

收敛，所以原级数收敛.

(10) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{\ln^n n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n}=0,$$

收敛，所以原级数收敛.

4. 判断下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散：

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n \sin\dfrac{\pi}{4^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{4^n}\sin\dfrac{n\pi}{3}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{2}-1)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$.

解 (1) 按照莱布尼兹判别法，原级数收敛. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ 发散，所以原级数条件收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\neq 0$, 所以原级数发散.

(3) 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\left|(-2)^n\sin\frac{\pi}{4^n}\right|\sim\left(\frac{2}{4}\right)^n\pi,$$

所以原级数绝对收敛.

(4) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^4}{4^n}\sin\frac{n\pi}{3}\right|}=\frac{1}{4},$$

所以原级数绝对收敛.

(5) 按照莱布尼兹判别法，原级数收敛. 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right|\sim\frac{1}{n},$$

所以原级数条件收敛.

(6) 按照莱布尼兹判别法，原级数收敛. 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}\right|\sim\frac{1}{n},$$

所以原级数条件收敛.

(7) 按照莱布尼兹判别法，原级数收敛. 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sin\dfrac{1}{n}}\right| \sim \frac{1}{n},$$

所以原级数条件收敛.

(8) 按照莱布尼兹判别法，原级数收敛. 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\left|(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)\right| \sim \frac{\ln 2}{n},$$

所以原级数条件收敛.

(9) 令 $u_n = n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)!\left|\frac{x}{n+1}\right|^{n+1} \Big/ \left(n!\left|\frac{x}{n}\right|^n\right) = \frac{|x|}{\mathrm{e}},$$

所以当 $|x| < \mathrm{e}$ 时，原级数绝对收敛.

当 $|x| \geq \mathrm{e}$ 时，由于

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. 故原级数发散.

(10) 按照莱布尼兹判别法，原级数收敛. 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

所以原级数条件收敛.

习 题 6.1 B

1. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(1-\cos\dfrac{1}{n}\big)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\ (a\geq 1)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\sin nx|$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[\mathrm{e}-\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^n\big]^p$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^2$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}-2}{n^2-n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{n^2}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\Big)$.

解 (1) 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\big(1-\cos\frac{1}{n}\big)\sim\frac{1}{2n^2},$$

所以原级数收敛.

(2) 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\sqrt[n]{a}-1\sim\frac{1}{n}\ln a,$$

所以原级数发散.

(3) 由于

$$\lim_{n\to\infty}|\sin nx|\neq 0,$$

所以原级数发散.

(4) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\Big[\mathrm{e} - \big(1+\frac{1}{n}\big)^n\Big]^p &= \mathrm{e}^p\Big[1 - \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}\Big]^p \\ &\sim \mathrm{e}^p\Big[-n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)+1\Big]^p \\ &\sim \Big(\frac{\mathrm{e}}{2}\Big)^p \cdot \frac{1}{n^{2p}},\end{aligned}$$

所以当 $p > \dfrac{1}{2}$ 时，原级数收敛；当 $p \le \dfrac{1}{2}$ 时，原级数发散.

(5) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$(\sqrt[n]{n}-1)^2 \sim \Big(\frac{\ln n}{n}\Big)^2,$$

所以原级数收敛.

(6) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\sqrt[n]{n} - 1 \sim \frac{\ln n}{n},$$

所以原级数发散.

(7) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^{1/n} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x < \int_0^{1/n} \sqrt{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^{3/2}},$$

所以原级数收敛.

(8) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{\sqrt{n}-2}{n^2-n} \sim \frac{1}{n^{3/2}},$$

所以原级数收敛.

(9) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n^2} = \Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-n}\Big]^{-n} \sim \mathrm{e}^{-n},$$

所以原级数收敛.

(10) 由于 $n \to +\infty$ 时,

$$n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1},$$

所以原级数收敛.

2. 设 $u_n \neq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \Big)$$

条件收敛.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}} \Big)$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则当 $n \to +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \Big(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \Big) - \Big(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \Big) + \cdots - \Big(\frac{1}{u_{2n}} + \frac{1}{u_{2n+1}} \Big) \\ &= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{2n+1}} \to \frac{1}{u_1}, \\ S_{2n+1} &= \Big(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \Big) - \Big(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{u_{2n+1}} + \frac{1}{u_{2n+2}} \Big) \\ &= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_{2n+2}} \to \frac{1}{u_1}. \end{aligned}$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}} \Big)$ 收敛.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$ 可知,

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \sim \frac{2}{n},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}} \Big)$ 条件收敛.

3. 设 $\{x_n\}$ 是递增有界的正数列, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 的敛散性.

解 由于 $\{x_n\}$ 是递增有界的正数列, 所以 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则 $A>0$ 且当 $x\to+\infty$ 时,

$$1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\sim\frac{x_{n+1}-x_n}{A}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=A-x_1,$$

所以根据比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛.

4. 设 $a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x$,

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证: 对任意的常数 $\lambda>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2}) &=\frac{1}{n}\int_0^{\pi/4}\tan^2 x(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{n}\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\sec^2 x)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{n}\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\,\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n(n+1)},\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1.$$

(2) 令 $\tan x=t$, 则

$$a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t<\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}.$$

于是

$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

由 $1+\lambda>1$ 可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda+1}}$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

5. 设数列 $\{u_n\}$ 严格单调减, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n+1})$ 收敛;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

证 (1) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $u_n+u_{n+1}+\cdots<\varepsilon$. 根据 $\{u_n\}$ 严格单调减趋于 0 可知

$$0\le nu_{2n}\le u_n+u_{n+1}+\cdots,$$
$$0\le nu_{2n+1}\le u_n+u_{n+1}+\cdots,$$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

(2), (3) 由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n(u_n-u_{n+1}) &= (u_1-u_2)+2(u_2-u_3)+\cdots+n(u_n-u_{n+1})+\cdots\\ &= u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,\end{aligned}$$

所以原结论成立.

6. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 证明下列级数也收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nv_n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n})^2$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n-\frac{1}{n}\right)^2$.

证 (1) 由于

$$\sqrt{u_nv_n}\le\frac{u_n+v_n}{2},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nv_n}$ 收敛.

(2) 由于

$$(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n})^2\le 2(u_n+v_n),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n})^2$ 收敛.

(3) 由于

$$\frac{\sqrt{u_n}}{n}\le\frac{1}{2}\Big(u_n+\frac{1}{n^2}\Big),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ 收敛.

(4) 由于 $n\to+\infty$ 时, $u_n^2\le u_n$, 所以当 $n\to+\infty$ 时, 有

$$\Big(u_n-\frac{1}{n}\Big)^2\le u_n^2+\frac{1}{n^2}\le u_n+\frac{1}{n^2}.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(u_n-\dfrac{1}{n}\Big)^2$ 收敛.

7. 若偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $f(0)=1$, 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(f(\dfrac{1}{n})-1\Big)$ 绝对收敛.

证 1 由于偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 所以 $f'(0)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^2\Big|f\Big(\frac{1}{n}\Big)-1\Big| &= \lim_{x\to0}\Big|\frac{f(x)-1}{x^2}\Big|\\ &= \lim_{x\to0}\Big|\frac{f'(x)}{2x}\Big|=\lim_{x\to0}\Big|\frac{f''(x)}{2}\Big|=\frac{1}{2}\,|f''(0)|.\end{aligned}$$

由此可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(f(\dfrac{1}{n})-1\Big)$ 绝对收敛.

证 2 由于偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶连续可导, 所以 $f'(0)=0$ 且 $x\to0$ 时, $|f''(x)|\le M$. 根据

$$\Big|f\Big(\frac{1}{n}\Big)-1\Big|=\Big|f'(0)\cdot\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\Big|=\frac{|f''(\xi)|}{2n^2}\le\frac{M}{2n^2}$$

可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(\frac{1}{n})-1\right)$ 绝对收敛.

8. 设 $a_n>0,\ b_n>0$ 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

证 由 $a_n>0,\ b_n>0,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 可知,

$$\begin{aligned}
&a_2\le\frac{a_1}{b_1}\,b_2,\\
&a_3\le\frac{a_2}{b_2}\,b_3\le\frac{a_1}{b_1}\,b_3,\\
&\cdots,\\
&a_{n+1}\le\frac{a_n}{b_n}\,b_{n+1}\le\cdots\le\frac{a_1}{b_1}\,b_{n+1}.
\end{aligned}$$

于是根据比较判别法, 有

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

9. 证明下列命题:

(1) 若 $a_n>0$ 且 na_n 有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=C>0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(3) 若 $b_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=C>0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nb_n$ 收敛;

(4) 若 a_n 单调减且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛.

证 (1) 设 $na_n\le M$, 则 $a_n^2\le\dfrac{M}{n^2}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=C>0$ 可知, $a_n\sim\dfrac{C}{n^2}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(3) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=C>0$ 可知，$b_n>b_{n+1}$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B>0$, 则当 $n\to+\infty$ 时，必有

$$b_n-b_{n+1}\sim\frac{BC}{n}.$$

于是 $b_1-B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=$ 发散. 这是一个矛盾. 故必有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. 根据莱布尼兹判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛;

(4) 记 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则有

$$\begin{aligned} b_n-b_{n+1} &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}}{n(n+1)}\\ &= \frac{(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+1})+\cdots+(a_n-a_{n+1})}{n(n+1)}\geq 0. \end{aligned}$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 所以根据莱布尼兹判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛.

10. 设 $f(x)$ 单调下降且非负， $a>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n f(a^n)$ 有相同的敛散性.

证 根据积分中值定理，存在 $\xi_n\in(a^n,a^{n+1})$, 使得

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{a^n}^{a^{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(\xi_n)(a^{n+1}-a^n)=(a-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi_n)a^n. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 单调下降且非负，所以

$$0\leq f(a^{n+1})\leq f(\xi_n)\leq f(a^n).$$

于是

$$\frac{a-1}{a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(a^{n+1})\,a^{n+1}\leq\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\leq(a-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(a^n)\,a^n.$$

这表明 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n f(a^n)$ 有相同的敛散性. 另一方面, 由积分判别法可知, $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 有相同的敛散性. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n f(a^n)$ 有相同的敛散性.

§6.2 函数项级数

习 题 6.2 A

1. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ 的收敛域及和函数.

解 由于 $x \neq 0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}\right|} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

所以原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛.

根据等比级数的求和方法, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} &= x\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{-1}{1+x^2}\Big)^n \\ &= x\cdot \frac{1}{1-\dfrac{-1}{1+x^2}} = \frac{x(1+x^2)}{2+x^2}.\end{aligned}$$

2. 求下列函数级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$.

解 (1) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \Big/ \left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0,$$

所以原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛.

(2) 由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

所以原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛.

(3) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x|,$$

所以当 $|x|<1$ 时，原级数收敛.

由于 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 不存在，所以原级数发散. 当 $x=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 所以发散. 当 $x=-1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, 所以收敛.

(4) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right|} = |x|,$$

所以当 $|x|<1$ 时，原级数收敛.

由于 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ 不存在，所以原级数发散. 当 $x=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 所以发散. 当 $x=-1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 所以收敛.

3. 讨论下列级数在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2}$, $|x|<+\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $|x|<1$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$, $0<x<+\infty$.

解 (1) 由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

所以原级数一致收敛.

(2) 由于

$$\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

所以原级数一致收敛.

(3) 由于 $x \neq 0,\ n \to +\infty$ 时,

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \sim \frac{1}{nx},$$

所以原级数在 $x \neq 0$ 时发散, 因此不一致收敛.

(4) 令 $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-nx}$, 则

$$f'(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-nx}.$$

由于 $x < 2$ 时, $f'(x) > 0$; 而 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$, 所以

$$0 \leq f(x) \leq f(2) = 2^2\mathrm{e}^{-2n}.$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^2\mathrm{e}^{-2n}$ 收敛可知, 原级数一致收敛.

4. 证明函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续.

证 由于 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 的每个闭子区间上一致收敛, 所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 的每个闭子区间上连续. 因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续.

5. 证明函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且有连续的导数.

证 由于

$$\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3},$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛, 根据连续守恒定理, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续. 由于

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\cos nx}{n^3}\Big)\right| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

所以根据逐项微分定理, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导数.

6. 证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 满足微分方程

$$f''(x)+f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{x}.$$

解 由于 $k=0,1,2,\ |x|\leqslant M$ 时,

$$\left|\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}x^{k}}\Big(\frac{x^{3n}}{(3n)!}\Big)\right|\leqslant\frac{M^{3n-k}}{(3n-k)!}.$$

根据比值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M^{3n-k}}{(3n-k)!}$ 收敛. 因此根据控制判别法和逐项微分定理，有

$$\begin{aligned}f''(x)+f'(x)+f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=\mathrm{e}^{x}.\end{aligned}$$

习 题 6.2 B

1. 证明函数列 $S_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $S(x)$ 的充要条件是存在数列 $\{a_n\}$, 使得

$$|S_n(x)-S(x)|\leqslant a_n\to 0$$

对一切 n 及 $x\in I$ 都成立.

证 只需证必要性. 如果 $S_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 则当 $n\to+\infty$ 时，有 $|S_n(x)-S(x)|\leqslant 1$. 因此 $|S_n(x)-S(x)|$ 在 I 上的最小上界存在，记其为 a_n. 于是根据 $S_n(x)$ 在区间 I 上的一致收敛性，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2. 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n}$ 在 $[0,a]$ $(a<1)$ 上一致收敛，但在 $[0,1)$ 上非一致收敛.

证 由于 $0 \leq x \leq a$ 时，$|x^n| \leq a^n$, 所以根据控制判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛.

令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} x^n,\ S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, 则

$$S_n(x)=\frac{x-x^{n+1}}{1-x},\ S(x)=\frac{x}{1-x}.$$

取 $x_n=1-\dfrac{1}{n}$, 则当 $n\to+\infty$ 时,

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|=n\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n+1}\not\to 0.$$

由此可知，原级数在 $[0,1)$ 上非一致收敛.

3. 证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\sin nx}{n}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\Big)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

证 令

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\sin kx}{k}-\frac{\sin(k+1)x}{k+1}\Big),$$

则当 $n\to+\infty$ 时

$$S_n(x)=\sin x-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\to\sin x.$$

由于 $n\to+\infty$ 时,

$$|S_n(x)-\sin x|\leq\frac{1}{n}\to 0,$$

所以 $S_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 $\sin x$.

4. 已知数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

证 由于

$$\left|a_n \frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \leq |a_n|,$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，所以根据控制定理，原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

5. 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\ln(1+nx^2)$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛.

证 由于

$$\left|\frac{1}{n^3}\ln(1+nx^2)\right| \leq \frac{\ln(1+na^2)}{n^3} \leq \frac{a^2}{n^2},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{n^2}$ 收敛，所以根据控制定理，原级数在 $[0,a]$ 上一致收敛.

6. 证明：若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在区间 I 上一致收敛，则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也在 I 上一致收敛.

证 由于

$$\Big|\sum_{k>n}^{m} u_k\Big| \leq \sum_{k>n}^{m} \Big|u_k\Big|,$$

所以根据柯西准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

7. 证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足微分方程 $f^{(4)}(x)=f(x)$.

证 由于 $k=0,1,2,3,4$ $|x|\leq M$ 时，

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big(\frac{x^{4n}}{(4n)!}\Big)\right| \leq \frac{M^{4n-k}}{(4n-k)!}.$$

根据比值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M^{4n-k}}{(4n-k)!}$ 收敛. 因此根据控制判别法和逐项微分定理，有

$$f^{(4)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = f(x).$$

8. 证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n!)^2}$ 满足微分方程

$$xf''(x)+f'(x)-f(x)=0.$$

证 根据逐项微分定理，有

$$\begin{aligned}xf''(x)+f'(x) &= x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!}\\ &=\left(\frac{x}{2!\cdot 0!}+\frac{x^2}{3!\cdot 1!}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{1!\cdot 0!}+\frac{x}{2!\cdot 1!}+\cdots\right)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=f(x).\end{aligned}$$

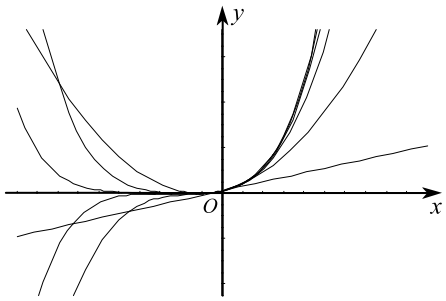


图 6.1

9. 证明函数列 $f_n(x)=nx(1-x)^n$ 在闭区间 $[0,1]$ 上收敛且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

但不一致收敛.

证 设 $f(x)=0$, 则 $f_n(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上点点收敛于 $f(x)$. 由于

$$f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n})\to\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0,$$

所以 $f_n(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上不一致收敛.

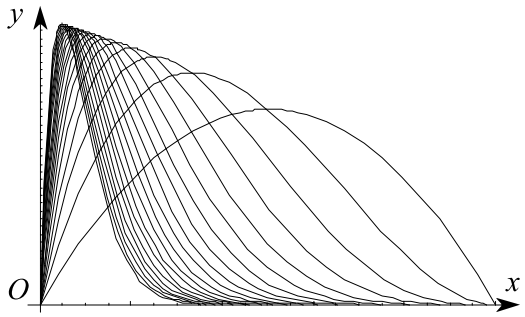


图 6.2

对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$, 由于 $x \in [\varepsilon, 1]$ 时，恒有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq n(1-\varepsilon)^n \to 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是 $n \to \infty$ 时,

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\varepsilon} n(1-\varepsilon)^n\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, 且当 $n > 1$ 时，恒有

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

证明当 $|x| < \dfrac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 收敛，并求其和函数.

证 由 $a_1 = a_2 = 1$ 和 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 可知， $0 < a_n < a_{n+1}$. 又

$$a_3 = 2,\ a_4 = a_3 + a_2 < 2a_3 = 2^2, \cdots, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < 2a_n < 2^{n-1},$$

因此当 $|x| < \dfrac{1}{2}$ 时,

$$|a_n x^{n-1}| \leq 2^{n-2} x^{n-1} = \frac{1}{2}\,(2x)^{n-1} < \frac{1}{2}.$$

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 收敛.

由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + a_{n-1}) x^n \\ &= 1 + (x + x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1},\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1 - x - x^2}, \ \left(|x| < \frac{1}{2} \right).$$

11. 设函数 $f_0(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上连续，且

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x) \, \mathrm{d}x \ \ (x \in [0, a], \ n = 1, 2, \cdots)$$

证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, a]$ 上绝对收敛.

证 设 M 是 $|f_0(x)|$ 在区间 $[0, a]$ 上的最大值，则

$$\begin{aligned}&|f_1(x)| \leq \int_0^x |f_0(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_0^x M \, \mathrm{d}x \leq Mx, \\ &|f_2(x)| \leq \int_0^x |f_1(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_0^x Mx \, \mathrm{d}x \leq \frac{M}{2!} x^2, \\ &\cdots\cdots \\ &|f_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |f_n(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_0^x \frac{M}{n!} x^n \, \mathrm{d}x \leq \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1}.\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{M}{(n)!} x^n$ 收敛，所以根据比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[0, a]$ 上收敛，此即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, a]$ 上绝对收敛.

12. 已知 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1} \mathrm{e}^x$$

且 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和.

证 由 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 可知,

$$\big(\mathrm{e}^{-x}f_n(x)\big)'=x^{n-1}=\big(\frac{x^n}{n}\big)'.$$

因此

$$\mathrm{e}^{-x}f_n(x)=\frac{x^n}{n}+C.$$

根据 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$ 可知, $C=0$. 于是

$$f_n(x)=\frac{x^n\,\mathrm{e}^x}{n}.$$

由此可知, 当 $x\in[-1,0)$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t\\ &=\mathrm{e}^x\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right]\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^x\ln(1-x).\end{aligned}$$

13. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$, $x\in[0,1]$, 则当 $x\in(0,1)$ 时, 恒有

$$S(x)+S(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=S(1).$$

证 根据控制判别法, 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

在 $[0,1)$ 的每个闭子区间上一致收敛, 所以根据逐项微分定理, 有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^n}{n^2}\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},$$

$$(xS'(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^n}{n}\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

由此可知,

$$xS'(x) = -\ln(1-x), \quad S'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

进而有

$$S'(1-x) = -\frac{\ln x}{1-x}.$$

因此，有

$$S'(x) - S'(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}.$$

这表明

$$S(x) + S(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = C.$$

令 $x \to 0$, 则有 $C = S(1)$. 故

$$S(x) + S(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = S(1).$$

§6.3 幂级数

习 题 6.3 A

1. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,x^n}{n^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(n!)^2}\,x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2+1}x^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2x^n}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

解 (1) 由于

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

所以收敛半径为 $R = \mathrm{e}$.

(2) 由于

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{\big[3(n+1)\big]!}{\big[(n+1)!\big]^2}\Big/\frac{(3n)!}{(n!)^2}=+\infty,$$

所以收敛半径为 $R=0$.

(3) 由于

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2+1}}=2,$$

所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{2}$.

(3) 由于

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}}=\frac{1}{2},$$

所以收敛半径为 $R=2$.

2. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}\,x^n$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n(n+1)}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\,x^{2n-1}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-1)^n}{\sqrt{n}}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$.

解 (1) 由于

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2},$$

所以收敛半径为 $R=2$. 由于

$$\sin\frac{\pi}{2^n}\,(\pm2)^n\not\to 0,$$

所以收敛域为 $(-2,2)$.

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}=1,$$

所以 $(x+2)^2 \in (-1,1)$, 即 $x \in (-2,-1)$ 时级数收敛. 由于 $x=-2, x=-1$ 时级数收敛, 所以收敛域为 $[-2,-1]$.

(3) 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

所以 $x^2 \in (-1,1)$, 即 $x \in (-1,1)$ 时级数收敛. 由于 $x=-1, x=1$ 时, $\sqrt[n]{n}\, x^n \not\to 0$, 所以收敛域为 $(-1,1)$.

(4) 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

所以 $4x-1 \in (-1,1)$, 即 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时级数收敛. 由于 $x=0$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

收敛; 而 $x=\frac{1}{2}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

发散, 所以收敛域为 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$.

(5) 由于

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n+(-2)^n} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

所以收敛半径为 $R=3$. 当 $x=3$ 时, 由于

$$\frac{1}{3^n+(-2)^n} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n \sim \frac{1}{n},$$

所以原级数发散; 当 $x=-3$ 时, 由于

$$\frac{1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} < \frac{1}{3^n+(-2)^n},$$

从而

$$\frac{1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{3^n+(-2)^n} \cdot \frac{1}{n},$$

所以根据莱布尼兹判别法可知，原级数收敛．故原级数的收敛域为 $[-3,3)$.

3. 求下列幂级数或数项级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}\,x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$.

解　(1) 原级数的收敛半径为 1. 记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$, 则在 $(-1,1)$ 内有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1},$$

$$(x^2S'(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

$$x^2S'(x)=\int_0^x\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x)-1,$$

$$S(x)=-\int\frac{\ln(1-x)+1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\Big(\frac{1}{x}-1\Big)\ln(1-x)+C\ (x\neq 0).$$

根据 $\lim\limits_{x\to 1}S(x)=S(1)=1$ 可知，$C=1$. 因此

$$S(x)=\begin{cases}\Big(\dfrac{1}{x}-1\Big)\ln(1-x)+1, & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}.$$

(2) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}$, 则在 $(-1,1)$ 内，有

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x}{1-x}.$$

于是

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n=x^2S(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

(3) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}\,x^{n-1}$, 则在 $(-\infty,\infty)$ 内，有

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\,x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\,\mathrm{e}^x.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\,x^n=xS(x)=x(x\,\mathrm{e}^x)'=x(x+1)\,\mathrm{e}^x.$$

(4) 当 $x\in[-1,1)$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}&=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Big)'\right]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}\right]\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\big(x^2\big)^n\right]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.\end{aligned}$$

(5) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)'\\&=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\\S(x)&=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}S\Big(\frac{1}{2}\Big)=4.$$

(6) 根据 (3) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\,x^n=x(x+1)\,\mathrm{e}^x.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\,\mathrm{e}.$$

(7) 根据 (1) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\big(\frac{1}{x}-1\,\big)\ln(1-x)+1.$$

由此可知,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=-2\,\ln 2+1.$$

(8) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}\,x^n$, 则当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时, 有

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x\;=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,x^{n+1}=x(\mathrm{e}^x-1),$$

$$S(x)\;=\big[x(\mathrm{e}^x-1)\,\big]'=\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x.$$

由此可知,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=S(2)=\mathrm{e}^2-1+2\mathrm{e}^2.$$

4. 将下列函数展成 x 的幂级数:

(1) $\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$;

(2) $\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$;

(3) $\sin^2 x$;

(4) $\dfrac{x^2}{1+x}$.

解 (1) 由于

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}\,t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{1}{(2n-1)!}\,t^{2n-1} + \cdots,$$

所以 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \Big(1 - \frac{1}{3!}\,t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{1}{(2n-1)!}\,t^{2n-2} + \cdots\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= x - \frac{1}{3\cdot 3!}\,x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}\,x^{2n-1} + \cdots.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \Big[1 - t^2 + \frac{1}{2!}\,t^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\,t^{2n} + \cdots\Big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{d}t - t^2 + \frac{1}{2!}\int_0^x t^4\,\mathrm{d}t + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t + \cdots \\ &= x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2!}\,x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{n!}\,x^{2n+1} + \cdots.\end{aligned}$$

(3) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2!}\,(2x)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(2x)^{2n} + \cdots\Big).$$

(4) $\dfrac{x^2}{1+x} = x^2(1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \cdots)$.

5. 求下列函数在 x_0 点的泰勒级数：

(1) $4 - 2x + 3x^2 + 5x^3$, $\quad x_0 = 1$;　　(2) $\cos x$, $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

(3) $\ln(\,x^2 + 2x - 3\,)$, $\quad x_0 = 3$;　　(4) $\ln x$, $\quad x_0 = 2$.

解 (1) 利用除法，配方法或求导法可得，

$$4 - 2x + 3x^2 + 5x^3 = 10 + 19(x-1) + 18(x-1)^2 + 5(x-1)^3.$$

(2) 令 $t = x - \dfrac{\pi}{4}$, 则

$$\cos x = \sin\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(1-\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\,t^{2n}+\cdots\right)-\right.$$

$$\left.\left(t-\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\,t^{2n+1}+\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\cdots\right].$$

(3) $\ln(\,x^2+2x-3\,) = \ln 12+\ln\left(1+\dfrac{x-3}{6}\right)+\ln\left(1+\dfrac{x-3}{2}\right)$

$$= \ln 12+\left[\frac{x-3}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{6}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-3}{6}\right)^n+\cdots\right]$$

$$+\left[\frac{x-3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n+\cdots\right].$$

(4) $\ln x = \ln 2+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)$

$$= \ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+\cdots.$$

6. 利用幂级数展开式求下列积分的近似值，精确到 0.001:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 由于

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = x-\frac{1}{3\cdot 3!}\,x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}\,x^{2n-1}+\cdots,$$

且

$$\frac{1}{7\cdot 7!}<0.001,$$

所以

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0.946.$$

(2) 由于

$$\int_0^x \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n_1}}{2n-1}\,x^{2n-2} + \cdots\right)\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n_1}}{(2n-1)^2}\,x^{2n-1} + \cdots,$$

且

$$\frac{1}{(2n-1)^2} \leq 0.001 \Longrightarrow n \geq 51,$$

所以

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{101^2}.$$

(3) 由于

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \left(1 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{3n} + \cdots\right)\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3n+1}\,x^{3n+1} + \cdots,$$

且

$$\frac{1}{3n+1} \leq 0.001 \Longrightarrow n \geq 333,$$

所以

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{1000}.$$

(4) 由于

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \,x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{n!}\,x^{2n+1} + \cdots.$$

且

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} < 0.001,$$

所以

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2!} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4!}.$$

习 题 6.3 B

1. 求下列级数的和.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n-1)\,4^n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

解　(1) 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\,x^n$, 则当 $0<|x|<1$ 时，有

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\Big)x^n\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\\ &= \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}\right]\\ &= -\frac{x}{2}\,\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1}{2x}\,\ln(1-x).\end{aligned}$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$, 则 $S\big(\dfrac{1}{2}\big)=\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}\ln 2$.

(2) 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$, 则当 $|x|<1$ 时，有

$$\begin{aligned}S(x) &= x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\\ &= x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x x^{2n-2}\,\mathrm{d}x = x\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}\Big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= x\int_0^x \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = x\,\ln(1+x).$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n-1)\,4^n} = S\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ln\big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\big).$$

(3) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$, 则当 $|x|<1$ 时, 有

$$\begin{aligned} S(x) &= 2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} - \frac{x}{1-x} = 2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' - \frac{x}{1-x} \\ &= 2x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)' - \frac{x}{1-x} = 2x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' - \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n} = S\big(\frac{1}{2}\big) = 3.$$

(4) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$, 则当 $|x|<1$ 时, 有

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{3n}\,\mathrm{d}x = \int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^x\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(1-x+x^2) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = S(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2.$$

2. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases},$$

试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和及导数 $f^{(n)}(0)$.

解 由于 $x\in[-1,1]$ 时，有

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}f(x) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}.\end{aligned}$$

由此可知,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}\big[\,f(1)-1\,\big]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

根据幂级数展开的唯一性，有

$$f^{(2n-1)}(0)=0,\quad f^{(2n)}(0)=(2n)!\cdot\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}.$$

3. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+2)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)(x+1)^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)x^{2n-2}}{3^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$;

(6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n\,n!}\,x^n$.

解 (1) 当 $0<|x|<1$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big)x^n\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\Big)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2x^2}\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2x^2}\int_0^x\frac{x^2}{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \Big(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\Big)\ln(1-x)+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(2) 当 $|x|<1$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n-2}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\arctan x.\end{aligned}$$

(3) 当 $|x|<1$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(x+1)^n &= \frac{1}{x+1}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+1)(x+1)^n\Big]'\\ &= \frac{1}{x+1}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x+1)^n\Big]'=\frac{1}{x+1}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big((x+1)^{n+1}\Big)'\Big]'\\ &= \frac{1}{x+1}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^{n+1}\Big]''=-\frac{1}{x+1}\Big[\frac{(x+1)^2}{x+2}\Big]''\\ &= -\frac{2}{(x+1)(x+2)^3}.\end{aligned}$$

(4) 当 $|x|<\sqrt{3}$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\Big(\frac{x}{\sqrt{3}}\Big)^{2n-2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{x}{\sqrt{3}}\Big)^{2n-1}\Big]'$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1}\right]' = \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1}\right]'$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{1+\frac{x^2}{3}}\right]' = \frac{3-x^2}{\sqrt{3}(3+x^2)^2}.$$

(5) 由于

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

(6) 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\,n!}\,x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n\,n!}\,x^n\right)' + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= x\Big(x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n\,n!}\,x^n\right)'\Big)' + \mathrm{e}^{x/2} = x\Big(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\Big)'' + \mathrm{e}^{x/2}$$

$$= x\Big(x\Big(\mathrm{e}^{x/2}-1\Big)\Big)'' + \mathrm{e}^{x/2} = \Big(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\Big)\mathrm{e}^{x/2}.$$

4. 求函数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ 的马克劳林级数.

解 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos 2t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{2^2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\,t^{2n-2} + \cdots\right)\mathrm{d}t$$

$$= x - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}\,x^{2n-1} + \cdots.$$

5. 试将级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,2^{2n-2}}\,x^{2n-1}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,2^{2n-2}}\,x^{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}\right)$$

$$=2\Big(\sin\frac{1}{2}\cos\frac{x-1}{2}+\cos\frac{1}{2}\sin\frac{x-1}{2}\Big)$$

$$=2\sin\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^{2n}+2\cos\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^{2n-1}.$$

6. 按指定形式将下列函数 $f(x)$ 展为函数级数：

(1) $f(x)=\sqrt{x^3}$, 按 $(x-1)$ 的幂形式;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 按 $\dfrac{1}{x}$ 的幂形式;

(3) $f(x)=\ln x$, 按 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂形式;

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, 按 $(x+4)$ 的幂形式.

解 (1) 由于

$$f'(1)=\frac{3}{2},\ f''(1)=\frac{3}{4},$$

$$f^{(n)}(1)=(-1)^n\frac{3}{4}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-5)}{2^{n-2}}\ (n>2),$$

所以

$$f(x)\ =1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{8}(x-1)^2$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\,(x-1)^n.$$

(2) 当 $|x|>1$ 时，有

$$f(x)=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{x}\Big)^n.$$

(3) 令 $t=\dfrac{x-1}{x+1}$, 则 $x=\dfrac{1+t}{1-t}$ 且当 $|t|<1$, 即 $x>0$ 时, 有

$$\ln x=\ln(1+t)-\ln(1-t),$$

$$\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^n,$$

$$\ln(1-t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^n,$$

所以

$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{x}\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^{2n-1}.$$

(4) $$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x+4}{2}\Big)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x+4}{3}\Big)^n.$$

7. 将 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+x\sin t}{1-x\sin t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ 展为马克劳林级数.

解 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+x\sin t}{1-x\sin t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$

$$=\int_0^{\pi/2}\Big[\ln(1+x\sin t)-\ln(1-x\sin t)\Big]\,\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\Big[x\sin t+\frac{1}{3}(x\sin t)^3+\cdots+\frac{1}{2n-1}(x\sin t)^{2n-1}+\cdots\Big]\,\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$$

$$=2\Big(x\,I_0+\frac{x^3}{3}\,I_2+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,I_{2n-2}+\cdots\Big).$$

其中

$$I_{2n}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

§6.4 傅立叶级数

习 题 6.4 A

1. 写出函数 $f(x)=\sin^4 x$ 的 Fourier 系数.

解 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{4}\cos^2 2x$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

2. 证明三角多项式 $p_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的 Fourier 级数就是其本身.

证 由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x\right)=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\cos mx\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mx\,\mathrm{d}x\right)=\pi a_m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\sin mx\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin mx\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mx\,\mathrm{d}x\right)=\pi b_m,$$

所以 $p_n(x)$ 的 Fourier 级数就是其本身.

3. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数，证明对任何实数 T 和自然数 n, 都有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_T^{T+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_T^{T+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

其中 a_n, b_n 为 Fourier 系数.

证 由于

$$\int_{2\pi}^{T+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(2\pi+t)\cos n(2\pi+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_T^{T+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_T^0 + \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{T+2\pi} = \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

由此可知,

$$\int_T^{T+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \pi a_n.$$

同理，有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_T^{T+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

4. 将下列函数展成 Fourier 级数：

(1) $f(x) = x^2,\ -\pi \le x \le \pi$;　　(2) $f(x) = \left|\sin\dfrac{x}{2}\right|,\ -\pi \le x \le \pi$;

(3) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2},\ -\pi \le x \le \pi$;　　(4) $f(x) = \mathrm{e}^{2x},\ -\pi \le x \le \pi$;

(5) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \mathrm{e}^x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$.

解 (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n = 0$, 又

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = (-1)^n\frac{4}{n^2},$$

故当 $-\pi \le x \le \pi$ 时，有

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx.$$

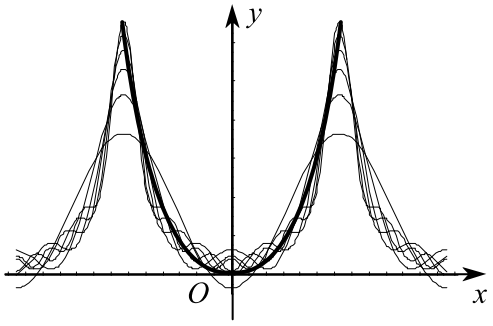


图 6.3

(2) 由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n = 0$, 又

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{4}{(4n^2-1)\pi},$$

故当 $-\pi \le x \le \pi$ 时，有

$$f(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{15}\cos 2x - \cdots - \frac{1}{4n^2-1}\cos nx - \cdots\Big).$$

(3) 由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n = 0$, 又

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi},$$

故当 $-\pi \le x \le \pi$ 时，有

$$f(x) = \cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx.$$

(4) 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n(\mathrm{e}^{4\pi}-1)}{\pi(n^2+4)},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{n(-1)^n(1-\mathrm{e}^{4\pi})\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi(n^2+4)},$$

所以当 $-\pi < x < \pi$ 时，有

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi} + \sum_{n+1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{4\pi}-1)}{\pi(n^2+4)}(2\cos nx - n\mathrm{e}^{-2\pi}\sin nx).$$

(5) 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{x}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi(n^2+1)},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{x}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}n\mathrm{e}^{\pi}+n}{\pi(n^2+1)},$$

所以当 $-\pi < x < \pi$ 时，有

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}n\mathrm{e}^{\pi}+n}{n^2+1}\sin nx\right].$$

5. 将下列函数在 $[0,\pi]$ 上展为正弦级数：

(1) $f(x) = x-1$;　　(2) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$;

(3) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$; (4) $f(x)=2x^2$.

解 (1) 由于

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big(-\frac{1}{n}+\frac{\pi-1}{n}(-1)^{n-1}\Big),$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=x-1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{1}{n}+\frac{\pi-1}{n}(-1)^{n-1}\Big)\sin nx.$$

(2) 由于

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}-x\Big)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n}(-1)^{n}\Big),$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}\sin nx.$$

(3) 由于

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{8n}{\pi(4n^2-1)},$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=x-1=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx.$$

(4) 由于

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(2-n^2\pi^2)(-1)^n-2}{n^3},$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=x-1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-n^2\pi^2)(-1)^n-2}{n^3}\sin nx.$$

6. 将下列函数在 $[0,\pi]$ 上展为余弦级数：

(1) $f(x)=x+1$; (2) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$;

(3) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$; (4) $f(x)=x^2-1$.

解 (1) 由于

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x=\pi+2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2},$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=x-1=\frac{\pi+2}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx.$$

(2) 由于

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2},$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

(3) 由于

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1-4n^2},$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos nx.$$

(4) 由于

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{\pi^2}{3}-1\Big),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-1)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

所以当 $0<x<\pi$ 时，有

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}=\frac{\pi^2}{3}-1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

7. 选择题：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$,

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x, (n=0,1,2,\cdots)$, 则 $S(-\frac{5}{2})$ 等于

$(A)\ \dfrac{1}{2}$; $(B)\ -\dfrac{1}{2}$; $(C)\ \dfrac{3}{4}$; $(D)\ -\dfrac{3}{4}$.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$, 则其在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数 b_{30} 是

$(A)\ \dfrac{1}{2}$; $(B)\ -1$; $(C)\ 0$; $(D)\ \pi$.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned} S\Big(-\frac{5}{2}\Big) &= S\Big(2-\frac{5}{2}\Big)=S\Big(-\frac{1}{2}\Big)=S\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(f\big(\frac{1}{2}-\big)+f\big(\frac{1}{2}+\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+\big(2-2\cdot\frac{1}{2}\big)\Big)=\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

所以选 C.

(2) 由于

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\pi+t)\sin n(\pi+t)\,\mathrm{d}(\pi+t) \\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

所以 $b_{30}=0$, 故选 C.

习 题 6.4 B

1. 将下列函数在给定区间上展为 Fourier 级数:

(1) $f(x)=x^2+1,\ -2\le x\le 2$; (2) $f(x)=-x^2+x,\ -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$;

(3) $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{3}, -\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}$.

解 (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $b_n=0$. 又

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2+1)\,\mathrm{d}x=\frac{14}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2+1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

所以

$$f(x)=\frac{7}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

(2) 由于

$$a_0 = 2\int_{-1/2}^{1/2}(-x^2+x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6},$$

$$a_n = 2\int_{-1/2}^{1/2}(-x^2+x)\cos\frac{n\pi x}{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2},$$

$$b_n = 2\int_{-1/2}^{1/2}(-x^2+x)\sin\frac{n\pi x}{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi},$$

所以 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$f(x) = -\frac{1}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x+\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin 2n\pi x\Big).$$

(3) 由于由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0$. 又

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{3/2}\cos\frac{\pi x}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{3/2}\cos\frac{\pi x}{3}\cos\frac{2n\pi x}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi},$$

所以 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$f(x) = \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{3}.$$

2. 将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0,\\ k, & 0<x\le 2\end{cases}$ (k为非 0 常数) 在区间 $[-2,2]$ 上展开成 Fourier 级数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 k\,\mathrm{d}x = k,\quad a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{2k}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4.6,\cdots \end{cases},$$

所以 $0 < |x| < 2$ 时，有

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\Big(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\Big).$$

3. 将下列周期函数展成 Fourier 级数：

(1) $f(x) = \arcsin(\sin x)$;　　(2) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

(3) $f(x) = |\sin x|$;　　(4) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

解　(1) 由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，所以 $a_n = 0$ 且

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\sin x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

于是

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx.$$

(2) 由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数，所以 $b_n = 0$ 且

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

于是

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx.$$

(3) 由于 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数，所以 $b_n = 0$ 且

$$a_0 = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{(n^2-1)\pi}\Big(n\sin\frac{n\pi}{2} - 1\Big).$$

于是

$$f(x)=|\sin x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\Big(n\sin\frac{n\pi}{2}-1\Big)\cos nx.$$

(4) 由于 $f(x)$ 的周期为 1, 所以

$$a_0=\frac{1}{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(x-\lfloor x\rfloor)\,\mathrm{d}x=1,$$

$$a_0=\frac{1}{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(x-\lfloor x\rfloor)\cos\frac{n\pi x}{1/2}\,\mathrm{d}x=0,$$

$$a_0=\frac{1}{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(x-\lfloor x\rfloor)\sin\frac{n\pi x}{1/2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}.$$

于是当 x 不为整数时, 有

$$f(x)=x-\lfloor x\rfloor=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\pi x.$$

4. 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\pi/4, & -\pi<x<0\\ \pi/4, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成 Fourier 级数, 并由它推出:

(1) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}+\cdots$;

(3) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

解 由于 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $a_n=0$ 且

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\cdot\sin n\pi\,\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{2n},$$

于是 $0<|x|<\pi$ 时, 有

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x+\cdots.$$

令 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 可得

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

令 $x=\dfrac{\pi}{6}$, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots\Big)+\frac{1}{3}\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots\Big)+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

由此可知,

$$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots.$$

令 $x=\dfrac{\pi}{3}$, 可得

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots.$$

5. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & 1\le x<2\end{cases}$ 分别展成正弦级数和余弦级数.

解 由于

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{2-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi},$$

所以

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

由于

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2}\int_0^1\,\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi},$$

所以

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

总 习 题 六

1. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\sqrt[n]{n}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n^p})$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 由于 $n\to+\infty$ 时,

$$\frac{1}{n^p\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n^p},$$

所以 $p>1$ 时，原级数收敛，而 $p\le 1$ 时，原级数发散.

(2) 根据积分判别法，当 $p>1$ 时，原级数收敛；当 $p\le 1$ 时，原级数发散.

(3) 由于 $p>0,\ n\to+\infty$ 时,

$$\ln(1+\frac{1}{n^p})\sim\frac{1}{n^p},$$

所以 $p>1$ 时，原级数收敛，而 $p\le 1$ 时，原级数发散.

(4) 由于

$$\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\le\mathrm{e}^{-n},\ \lim_{n\to\infty}n^2\cdot\mathrm{e}^{-n}=0,$$

所以原级数收敛.

2. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln\dfrac{n-1}{n+1}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n!}{n^n}$.

解 (1) 当 $0<p\le 1$ 时，原级数条件收敛；当 $p>1$ 时，原级数绝对收敛.

(2) 由于

$$\left|(-1)^n \frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{3^n}\right| \le \frac{1}{3^n},$$

所以原级数绝对收敛.

(3) 由于 $\ln\dfrac{n-1}{n+1}\nearrow 0$ 且

$$\ln\frac{n-1}{n+1} \sim -\frac{2}{n-1},$$

所以原级数条件收敛.

(4) 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

所以原级数绝对收敛.

3. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{n}x^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n x^{2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}x^n$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n+3^n}{n}}=3$, 所以级数的收敛半径为 $\dfrac{1}{3}$. 当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$$

条件收敛，由此可知原级数的收敛域为 $\Big[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\Big)$.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=1$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n x^{2n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$, 由此可知原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

(3) 收敛域为 $(-1,1)$.

(4) 收敛域为 $[-1,1)$.

4. 设

$$a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n}), (n=1,2,\cdots),$$

证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在; (2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

证 (1) 由于

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1,$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leq 0,$$

所以 $\{a_n\}$ 递减且有下界. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 计算可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2)(方法一) 由 (1) 知,

$$0\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a_1-1,$$

所以由比较判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

(方法二) 令 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1$, 则当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n^2+1}{a_{n+1}^2+1}\cdot\frac{a_n^2-1}{a_n}\to 0<1.$$

由比值判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

5. 将下列函数展成 x 的幂级数:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$.

解 (1) 根据二项式展开定理, 当 $|x|<1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) &= \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x (1+x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^x\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^{2n}\Big]\,\mathrm{d}x\\ &=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

(2) 根据二项式展开定理, 当 $|x|<2$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2-x)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\frac{x}{2})^{-1/2}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n\Big].\end{aligned}$$

(2) 当 $|x|<1$ 时, 有

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}.\end{aligned}$$

6. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases},$$

若 $S_n=\int_{2n}^{2n+2}f(x-2n)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n$.

解 令 $t=x-2n$, 则有

$$S_n = \int_0^2 f(t)\mathrm{e}^{-x-2n}\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{-2n}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-2n}\int_1^2 (2-x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-2-2n}.$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2-2n} = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}.$$

7. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{1}{a_n+1}\Big)^n$ 收敛.

证 由 $\{a_n\}$ 为单调减少的正项数列可知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \geq 0$ 存在. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散可知，$A > 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Big(\frac{1}{a_n+1}\Big)^n} = \frac{1}{A+1} < 1.$$

根据根值判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{1}{a_n+1}\Big)^n$ 收敛.

8. 选择题：

(1) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$;　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$;　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

(2) 设 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，常数 $\lambda \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$

(A) 绝对收敛;　　(B) 条件收敛;

(C) 发散;　　(D) 敛散性与 λ 有关.

(3) 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛; (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散; (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

(4) 设常数 $\lambda>0$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散; (B) 条件收敛;

(C) 绝对收敛; (D) 敛散性与 λ 有关.

(5) 设 $u_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A) 发散; (B) 绝对收敛;

(C) 条件收敛; (D) 敛散性不确定.

(6) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;

(C) 发散; (D) 敛散性不确定.

(7) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于

(A) 3; (B) 7; (C) 8; (D) 9.

(8) 设函数 $f(x)=x^2$, $0\le x<1$, 而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\ -\infty<x<+\infty,$$

其中

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots,$$

则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于

(A) $-\frac{1}{2}$; (B) $-\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{2}$.

(9) 设 $a>0$ 为常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{a}{n})$

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;

(C) 发散; (D) 敛散性与 a 有关.

解 (1) 选 D. 取 $u_n=\frac{1}{\ln n}$ $(n>1)$ 可说明 A,B 不成立, 取 $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$ 可说明 C 不成立.

(2) 由于 $\left|(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})\right|\sim\lambda\, a_{2n}$, 所以选 A.

(3) 根据莱布尼兹判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 因为

$$u_n^2\sim\frac{1}{n}\ (n\to+\infty),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散. 故选 C.

(4) 由于

$$\left|(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|\le a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda},$$

所以选 C.

(5) 设部分和数列为 S_n, 则

$$S_{2n}=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{2n+1}},\ S_{2n-1}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_{2n+1}}.$$

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$ 可知 S_n 收敛. 又因

$$\left|(-1)^n\Big(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\Big)\right|\sim\frac{2}{n}\ (n\to+\infty),$$

所以选 C.

(6) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (-2)^n$ 收敛可知，$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n |a_n| = 0$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. 故选 B.

(7) 由于

$$\text{级数 } 3 = 2 \times \text{级数 } 2 - \text{级数 } 1 = 2 \times 5 - 2 = 8,$$

所以选 C.

(8) 由于

$$S(-\frac{1}{2}) = -S(\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4},$$

所以选 B.

(9) 由于

$$\left|(-1)^n(1-\cos\frac{a}{n})\right| \sim \frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2,$$

所以选 B.

9. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

证 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ 可知，$f(0) = f'(0) = 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left|n^2 f(\frac{1}{n})\right| = \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(t)}{t^2}\right| = \frac{1}{2}\left|f''(0)\right|.$$

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

10. 将函数 $f(x) = 2 + |x|$, $(-1 \le x \le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数，并求此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

解 由于

$$b_n = 0,\ a_0 = 2\int_0^1 (2+x)\,\mathrm{d}x = 5,$$

$$a_n = 2\int_0^1 (2+x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}, (n = 1, 2, \cdots)$$

于是 $|x| \leq 1$ 时，有

$$f(x) = 2 + |x| = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$$

根据

$$f(0) = 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

可知，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

第七章　微分方程 I

§7.1　微分方程的基本概念

习　题 7.1 A

1. 确定下列微分方程的阶数：

(1) $y''^2+(x^2+y^2)y'-xy=0$;

(2) $f(x,y'^4)\,y'''+3y'y''=g(x,y)$;

(3) $\sin^2 x\,\mathrm{d}y+(x\cos x+y^2)\,\mathrm{d}x=0$.

解　(1) 二阶.　　(2) 三阶.　　(3) 一阶.

2. 验证下列函数是相应微分方程的解：

(1) $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt,\quad \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$;

(2) $y=\mathrm{e}^x,\quad y'\mathrm{e}^{-x}+y^2-2y\mathrm{e}^x=1-\mathrm{e}^{2x}$;

(3) $y=\sin x,\quad y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0$;

(4) $y=-\dfrac{1}{x},\quad x^2y'=x^2y^2+xy+1$;

(5) $y=x^2+1,\quad y'=y^2-(x^2+1)y+2x$;

(6) $y=-\dfrac{g(x)}{f(x)},\quad y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}\cdot y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$.

解　(1) 由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt,\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt,$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k^2x.$

其它证略.

3. 验证函数 $y=-6\cos 2x+8\sin 2x$ 是微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y''+y'+\dfrac{5}{2}y=25\cos 2x \\ y(0)=-6 \\ y'(0)=16 \end{cases}$$

的解.

解 由于

$$\begin{aligned} y''+y'+\frac{5}{2}y \ &=-2^2(-6\cos 2x+8\sin 2x)+2(6\sin 2x+8\cos 2x) \\ &\quad +\frac{5}{2}(-6\cos 2x+8\sin 2x)=25\cos 2x, \end{aligned}$$

且 $y(0)=-6,\ y'(0)=16$, 所以结论成立.

4. 设降落伞从跳伞塔下落后, 所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时的速度为 0. 试写出降落伞下落速度与时间满足的微分方程.

解 设降落伞的下落速度为 $v=v(t)$, 则由牛顿第二运动定律可得

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv \\ v\big|_{t=0}=0 \end{cases}.$$

5. 求下列曲线族所满足的微分方程:

(1) $y=C(x-C)^2$; (2) $(x-C)^2+y^2=1$;

(3) $y=\sin(x+C)$; (4) $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$.

解 (1) 从 $\begin{cases} y=C(x-C)^2 \\ y'=2C(x-C) \end{cases}$ 中消去 C 可得

$$\left(\frac{2y}{y'}+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2-y'}{2}.$$

(2) 从 $\begin{cases}(x-C)^2+y^2=1\\ 2(x-C)+2yy'=0\end{cases}$ 中消去 C 可得 $(yy')^2+y^2=1$.

(3) 由 $x+C=\arcsin y$ 可得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

(4) 通过求导消去 C_1, C_2 可得 $y''=(1+y'^2)^{3/2}$.

6. 建立下列曲线方程:

(1) 曲线上任意一点的切线与切点向径的夹角为 α;

(2) 曲线上任意一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l;

(3) 曲线上任意一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2;

(4) 曲线上任意一点的切线介于两坐标轴之间的部分被切点等分;

(5) 曲线上任意一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方;

(6) 曲线上任意一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项;

(7) 曲线上任意一点的切线斜率与切点的横坐标成正比.

解 (1) 设曲线为 $y=y(x)$ 且曲线在 x 点的切线倾角为 θ, 则有

$$\begin{cases}y'=\tan\theta\\ \tan(\theta-\alpha)=\dfrac{y}{x}\end{cases}.$$

由此可得曲线的微分方程为

$$\frac{y'-\tan\alpha}{1+y'\tan\alpha}=\frac{y}{x}.$$

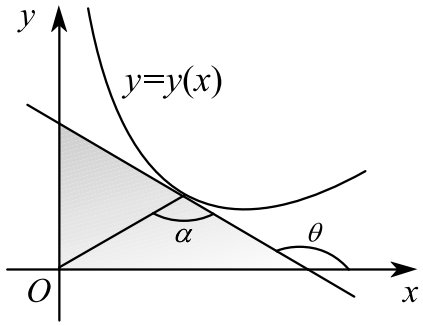


图 7.1

(2) 设曲线为 $y=y(x)$, 则切线方程为 $Y-y=y'\cdot(X-x)$, 其截距方程为

$$-\frac{y'X}{y-y'x}+\frac{Y}{y-y'x}=1.$$

由此可得曲线的微分方程为

$$\left(\frac{y-y'x}{y'}\right)^2+(y-y'x)^2=l^2.$$

(3) 设曲线为 $y=y(x)$, 则切线方程为 $Y-y=y'\cdot(X-x)$, 其截距方程为

$$-\frac{y'X}{y-y'x}+\frac{Y}{y-y'x}=1.$$

由此可得曲线的微分方程为

$$\frac{(y-y'x)^2}{2|y'|}=a^2.$$

(4) 设曲线为 $y=y(x)$, 则切线方程为 $Y-y=y'\cdot(X-x)$, 其截距方程为

$$-\frac{y'X}{y-y'x}+\frac{Y}{y-y'x}=1.$$

由此可得曲线的微分方程为

$$\begin{cases}x=-\dfrac{y-y'x}{2y'}\\ y=\dfrac{y-y'x}{2}\end{cases}.$$

即 $xy'+y=0$.

(5) 设曲线为 $y=y(x)$, 则切线方程为 $Y-y=y'\cdot(X-x)$, 其截距方程为

$$-\frac{y'X}{y-y'x}+\frac{Y}{y-y'x}=1.$$

由此可得曲线的微分方程为

(6) 设曲线为 $y=y(x)$, 则切线方程为 $Y-y=y'\cdot(X-x)$, 其截距方程为

$$-\frac{y'X}{y-y'x}+\frac{Y}{y-y'x}=1.$$

由此可得曲线的微分方程为

$$y-y'x=x^2.$$

(7) $y'=kx$.

习 题 7.1 B

1. 行船在水的阻力作用下不断变慢, 其变慢的速度与船行的速度成正比. 设船开始时的速度 10 米 / 秒, 过了 5 分钟后, 它的速度减为 8 米 / 秒. 问何时它的速度减少到 1 米 / 秒?

解 设船在 t 时刻的速度为 v, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv,\\ v\big|_{t=0}=10,\ v\big|_{t=5\times60}=8.\end{cases}$$

解之得

$$\ln v=-\frac{\ln 5-\ln 4}{300}\,t+\ln 10.$$

将 $v=1$ 代入可得

$$t\big|_{v=1}=\frac{300\ln 10}{\ln 5-\ln 4}.$$

2. 一质量为 m 的质点，以初速度 v_0 铅直上抛，空气阻力等于 $k\,v^2$ (k 为正常数， v 为速度), 试求质点到达最高点的时间.

解 按照牛顿定律，有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - k\,v^2 \\ v\big|_{t=0} = v_0 \end{cases}.$$

分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg - k\,v^2} = \frac{\mathrm{d}t}{m}.$$

解得

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \ln \left| \frac{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v} \right| = \frac{t}{m} + C.$$

根据 $v\big|_{t=0} = v_0$, 有

$$C = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \left| \frac{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v_0}{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v_0} \right|.$$

于是 $v = 0$ 时，有

$$0 = \frac{1}{m} t\big|_{v=0} + C,$$

故

$$t\big|_{v=0} = \frac{m}{\sqrt{k}} \ln \left| \frac{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v_0}{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v_0} \right|.$$

3. 列车在平直线路段以速度 v m/s 行驶, 当制动时列车获得加速度 $-a\,\mathrm{m/s^2}$ ($a > 0$), 问开始制动后多长时间列车才能停住，以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解 设列车制动 t 时的滑行路程为 x, 则有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v - at.$$

由此可知， $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ 时， $t = \dfrac{v}{a}$. 于是列车制动后滑行的总路程为

$$x\big|_{t=v/a} = \int_0^{v/a} (v - at)\,\mathrm{d}t = \frac{v^2}{2a}.$$

4. 已知曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q, 且线段 PQ 被 y 轴平分，试确定曲线所满足的方程.

解 曲线的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

当 $Y=0$ 时，有 $X=yy'+x$. 根据 $\dfrac{x+X\big|_{Y=0}}{2}=0$, 有

$$yy'+2x=0.$$

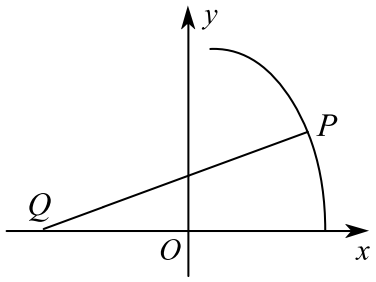


图 7.2

上式可变为 $y\ \mathrm{d}y=-2x\ \mathrm{d}x$. 两端积分，有

$$\frac{1}{2}\,y^2=-x^2+C.$$

5. 在过原点和 $(2,3)$ 的单调光滑曲线上任取一点, 作两坐标轴的平行线, 其中一条平行线与 x 轴及曲线围成的面积是另一条平行线与 y 轴及曲线所围成面积的两倍，求此曲线所满足的微分方程和定解条件.

解 根据面积关系，有

$$\int_0^x y\ \mathrm{d}x=2\Big(xy-\int_0^x y\ \mathrm{d}x\Big).$$

由此可得

$$\begin{cases}2xy'=y\\ y(2)=3\end{cases}.$$

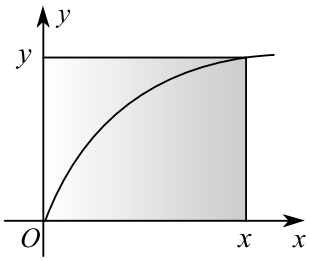


图 7.3

6. 已知某养鱼池最多可养 1000 条鱼, 鱼的存池数 $y(t)$ 是时间 t 的函数, 且变化率与 y 以及 $1000-y$ 成正比，现在养鱼数为 100 条，三个月后变为 250 条，试求 $y(t)$ 以及六个月后的养鱼数.

解 根据题意可建立微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky(1000-y)\\ y(0)=100,\ y(3)=250\end{cases}$$

分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(1000-y)} = k\,\mathrm{d}t.$$

两端积分可得

$$\frac{y}{1000-y} = C\mathrm{e}^{1000kt}.$$

根据 $y(0)=100,\ y(3)=250$ 可知

$$C=\frac{1}{9},\ k=\frac{\ln 3}{3000}.$$

于是

$$y(t)=\frac{1000}{9+3^{t/3}}\ 3^{t/3} \text{ 及 } y(6)=500.$$

§7.2 一阶微分方程

习 题 7.2 A

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\sqrt{xy}=y\ (x<0)$；　(2) $(x^2+1)(y^2-1)\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y=0$；

(3) $y'=y\ln x$；　(4) $\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$；

(5) $y'=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$；　(6) $y'=\dfrac{x+2y+1}{2x+4y-1}$；

(7) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x-y^2}$；　(8) $y'=\dfrac{2}{x+1}\,y+(x+1)^{5/2}$；

(9) $\dfrac{1}{2}(x^2+y)\,\mathrm{d}y-xy\,\mathrm{d}x=0$；　(10) $(x+1)y'-ny=\mathrm{e}^x(x+1)^{n+1}$.

解　(1) 原方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$$

这是一个齐次方程，令 $z=\dfrac{y}{x}$, 则有 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2\sqrt{z}}{x}$. 分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分可得 $\sqrt{z}=\ln(-x)+C$. 即

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln(-x)+C.$$

(2) 分离变量可得

$$-\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2-1}=\frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分可得

$$-\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\frac{1}{2}x^2+\ln|x|+C.$$

(3) 分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln x\,\mathrm{d}x.$$

两端积分可得

$$\ln|y|=x\ln|x|-x+C.$$

(4) 分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

两端积分可得

$$\arcsin y=\arcsin x+C.$$

(5) 与 (1) 类似，结论为

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln|x|+C.$$

(6) 令 $x+2y=z$, 则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}=\frac{z+1}{2z-1}.$$

整理得

$$\mathrm{d}x = \frac{4z+1}{2z-1}\,\mathrm{d}z.$$

两端积分可得

$$x = 2z + \frac{3}{2}\ln|2z-1| + C = 2(x+2y) + \frac{3}{2}\ln|2(x+2y)-1| + C.$$

(7) 原方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{2}{y}\,x = -y.$$

利用公式 $x = \mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}y}\Big(\int \mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}y} Q\,\mathrm{d}y + C\Big)$ 可得

$$x = y^2(-\ln|y| + C).$$

$$(8)\ y = \mathrm{e}^{-\int(-\frac{2}{x+1})\,\mathrm{d}x}\Big(\int \mathrm{e}^{\int(-\frac{2}{x+1})\,\mathrm{d}x}(x+1)^{5/2}\,\mathrm{d}x + C\Big)$$

$$= (x+1)^2\Big(\int (x+1)^{1/2}\,\mathrm{d}x + C\Big) = (x+1)^2\Big(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\Big).$$

(9) 原方程可变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{2y}\,x = \frac{1}{2}\,x^{-1}.$$

这是 $n=-1$ 时的贝努里方程，按照 “贝努里， $1-n$, 作代换，变线性”，令 $z = x^2$, 则原方程可变为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}\,z = 1.$$

解之可得

$$x^2 = z = y(\ln|y| + C).$$

$$(10)\ y = \mathrm{e}^{-\int(-\frac{n}{x+1})\,\mathrm{d}x}\Big(\int \mathrm{e}^{\int(-\frac{n}{x+1})\,\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x}(x+1)^n\,\mathrm{d}x + C\Big)$$

$$= (x+1)^n\Big(\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + C\Big) = (x+1)^n(\mathrm{e}^x + C).$$

2. 求下列微分方程的特解：

(1) $y' = \mathrm{e}^{2x-y},\ y\big|_{x=0} = 0$;　　(2) $y = \mathrm{e}^x + \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$

(3) $\begin{cases}\cos y\,\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\,\mathrm{d}y=0,\\ y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ (4) $\begin{cases}y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},\\ y\big|_{x=1}=1;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}y\sqrt{1+x^2}\,y'+x\sqrt{1+y^2}=0,\\ y\big|_{x=0}=1;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}y'+x\sin 2y=x\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 y,\\ y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}\ (\text{令}z=\tan y).\end{cases}$

解 (1) 分离变量可得

$$\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

两端积分可得

$$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}+C.$$

根据 $y\big|_{x=0}=0$ 可得, $C=\dfrac{1}{2}$. 故所求特解为

$$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}.$$

(2) 原方程可变为

$$\begin{cases}y'-y=\mathrm{e}^{x},\\ y\big|_{x=0}=1.\end{cases}$$

解之可得 $y=\mathrm{e}^{x}(x+C)$. 根据 $y\big|_{x=0}=1$ 可得, $C=1$. 故所求特解为

$$y=\mathrm{e}^{x}(x+1).$$

(3) 分离变量可得

$$\tan y\,\mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x.$$

两端积分可得

$$-\ln|\cos y|=\ln(1+\mathrm{e}^{x})+C.$$

根据 $y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$ 可得, $C=-\dfrac{1}{2}\ln 2$. 故所求特解为

$$-\ln|\cos y|=\ln(1+\mathrm{e}^{x})-\frac{1}{2}\ln 2.$$

(4) 令 $z=\dfrac{y}{x}$, 则原方程变为 $z\,\mathrm{d}z=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 解之可得

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{y}{x}\Big)^2=\frac{1}{2}\,z^2=\ln|x|+C.$$

根据 $y\big|_{x=1}=1$ 可得, $C=\dfrac{1}{2}$. 故所求特解为

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{y}{x}\Big)^2=\ln|x|+\frac{1}{2}.$$

(5) 分离变量可得

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}}=-\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

两端积分可得

$$\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+C.$$

根据 $y\big|_{x=0}=1$ 可得, $C=1+\sqrt{2}$. 故所求特解为

$$\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+1+\sqrt{2}.$$

(6) 将 $z=\tan y$ 代入原方程可得

$$z'+2xz=x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

解之可得

$$\tan y=z=\mathrm{e}^{-x^2}\Big(\frac{1}{2}\,x^2+C\Big).$$

根据 $y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$ 可得, $C=1$. 故所求特解为

$$\tan y=\mathrm{e}^{-x^2}\Big(\frac{1}{2}\,x^2+1\Big).$$

3. 求满足方程 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-f(t)}\,\mathrm{d}t$ 的连续可微函数 $f(x)$.

解 令 $y=f(x)$, 原方程两端求导可得

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\\ y\big|_{x=0}=0.\end{cases}$$

解之可得 $\mathrm{e}^y = x + 1$.

4. 已知方程 $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ 有一个特解 $y_1 = \dfrac{1}{x}$, 试求该方程的通解 (提示：令 $y = y_1 + z$).

解 将 $y = \dfrac{1}{x} + z$ 代入原方程可得

$$z' - \frac{2}{x}\, z = z^2.$$

这是 $n = 2$ 时的贝努里方程，按照“贝努里, $1 - n$, 作代换，变线性”，令 $z = x^{-1}$, 则原方程可变为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}\, z = -1.$$

解之可得

$$y - \frac{1}{x} = z = \frac{1}{x^2}(-\frac{x^3}{3} + C).$$

习 题 7.2 B

1. 用适当变换求解下列方程的通解：

(1) $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$;　　(2) $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$;

(3) $y'^2 + 4y^2(\ln y - 1) = 0$;　　(4) $2yy' \sin^2 x + y^2 \sin 2x = 2$;

(5) $(y^2 + 4\sin x)y' = \cos x$;　　(6) $y' + x \sin 2y = x\mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 y$.

解 (1) 令 $xy = z$, 则 $z' = \dfrac{z}{x} \ln z$. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}z}{z \ln z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分得 $\ln|\ln z| = \ln|x| + C$. 由此可知, $\ln xy = Cx$.

(2) 令 $x-y=z$, 则 $z'=\dfrac{1}{z}$. 故

$$\frac{1}{2}(x-y)^2=\frac{1}{2}z^2=x+C.$$

(3) 令 $\ln y=z$, 则

$$z'=2\sqrt{1-z}.$$

解之可得 $\sqrt{1-\ln y}=\sqrt{1-z}=-x+C$.

(4) (解法一) 令 $y^2=z$, 则

$$z'+2\cot x\ z=\frac{2}{\sin^2 x}.$$

解之可得

$$y^2=z=\frac{1}{\sin^2 x}\ (2x+C).$$

(解法二) 原方程可变为 $(y^2\sin^2 x)'=2$. 由此可知 $y^2\sin^2 x=2x+C$.

(5) 令 $\sin x=z$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-4z=y^2.$$

解之可得

$$\begin{aligned}\sin x=z\ &=\mathrm{e}^{4y}\Big(\int \mathrm{e}^{-4y}\cdot y^2\ \mathrm{d}y+C\Big)\\ &=C\mathrm{e}^{4y}-\frac{y^2}{4}-\frac{y}{8}-\frac{1}{32}.\end{aligned}$$

(6) 令 $z=\tan y$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+2x\cdot z=x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

解之可得

$$\begin{aligned}\tan y=z\ &=\mathrm{e}^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\Big[\int \mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\cdot(-x)\mathrm{e}^{-x^2}+C\Big]\\ &=\mathrm{e}^{-x^2}\Big[\frac{1}{2}\,x^2+C\Big].\end{aligned}$$

2. 用给定变量代换求解下列方程的通解:

(1) $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}$, 令 $y=\dfrac{1}{x}+z$;

(2) $y'+\sin y+x\cos y+x=0$, 令 $z=\tan\dfrac{y}{2}$;

(3) $x^2yy''=(y-xy')^2$, 令 $y=\mathrm{e}^{\int z\,\mathrm{d}x}$;

(4) $x(x^2+y^2-a)y'-y(x^2+y^2+a)=0$, 令 $u=xy, v=y/x$.

解 (1) 将 $y=\dfrac{1}{x}+z$ 代入原方程可得

$$z'-\frac{2}{x}\,z=z^2.$$

按照贝努里解法, 令 $u=z^{-1}$, 则

$$u'+\frac{2}{x}\,u=-1.$$

解之可得

$$1\Big/\Big(y-\frac{1}{x}\Big)=\frac{1}{z}=u=\frac{1}{x^2}\Big(-\frac{1}{3}x^3+C\Big).$$

(2) 原方程可变为

$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{y}{2}\,y'+\tan\frac{y}{2}+x=0.$$

将 $z=\tan\dfrac{y}{2}$ 代入可得 $z'+z=-x$. 解之可得

$$\tan\frac{y}{2}=z=1-x+C\mathrm{e}^{-x}.$$

(3) 将 $y=\mathrm{e}^{\int z\,\mathrm{d}x}$ 代入原方程可得

$$z'+\frac{2}{x}\,z=\frac{1}{x^2}.$$

解之可得 $z=\dfrac{1}{x^2}(x+C)$. 由此可知 $y=C_1x\mathrm{e}^{-C_2/x}$.

(4) 将 $u=xy,\ v=y/x$ 代入原方程可得

$$\frac{a}{u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{1}{v}\Big(1-\frac{1}{v^2}\Big).$$

解之可得 $y^2-x^2+a=Cxy$.

3. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n,\ f(0)=0$, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big[\,(n+1)a_{n+1}-a_n\,\big]x^n=\mathrm{e}^x,$$

求 $f(x)$ 及 a_n.

解 根据已知条件, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=f(x)+\mathrm{e}^x.$$

两端积分可得

$$f(x)=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x-1.$$

即 $f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^x,\ f(0)=0$. 解之可得 $f(x)=x\mathrm{e}^x$. 于是由

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

可得 $a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$.

4. 已知函数 $f_n(x)$ 满足微分方程 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x,\ n$ 为正整数, 且 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

解 由方程 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x,\ f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$ 可得 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^xx^n$. 于是 $x\in[-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,x^n=-\mathrm{e}^x\ln(1-x).$$

5. 某不溶性物质中含有 2 千克食盐, 把它放入 30 升的水中, 5 分钟后溶解掉 1 千克食盐. 假设食盐的溶解速度与未溶解的食盐量成正比, 与指定时刻的溶液浓度和溶液饱和度 (每 3 升中溶解 1 千克) 之差成正比, 问经过多少时间, 食盐可溶解掉 99%?

解 设 t 时刻食盐的溶解量为 x, 则溶液浓度为 $x/30$. 于是有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(2-x)\Big(\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{30}\Big) \\ x\big|_{t=5} = 1 \end{cases}.$$

其中 k 为比例常数. 解之可得

$$\frac{1}{8}\ln\frac{10-x}{2-x} = \frac{k}{30}\,t + \frac{\ln 9}{8} - \frac{k}{6}.$$

将 $x = 2\times 99\% = 1.98$ 代入可得

$$t\big|_{x=1.98} = \frac{k}{30}\Big(\frac{1}{8}\ln 401 - \frac{\ln 9}{8} + \frac{k}{6}\Big).$$

6. 有高为 1m 的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔面积为 $1\mathrm{cm}^2$. 开始时容器盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度 h 的变化规律.

解 水从小孔流出的流量公式为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0.62\,S\sqrt{2gh}.$$

其中 0.62 为流量系数, S 为小孔面积.

在时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内, 水面从 h 下降到 $h+\mathrm{d}h$, 下降的体积为

$$\mathrm{d}V = -\pi r^2 \mathrm{d}h.$$

其中 $r = \sqrt{100^2 - (100-h)^2} = \sqrt{200h - h^2}$. 于是有

$$\begin{cases} -\pi(200h - h^2)\,\mathrm{d}h = 0.62\times 1\times\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t \\ h\big|_{t=0} = 100 \end{cases}.$$

解之可得

$$t = -\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\Big(\frac{400}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2}\Big) + \frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\cdot\frac{14}{15}\cdot 10^5.$$

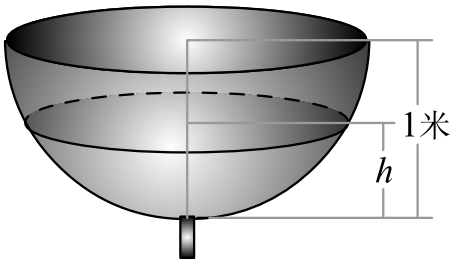


图 7.4

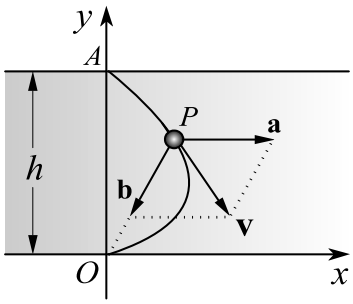


图 7.5

7. 有一船欲从河的渡口 A 驶向正对岸渡口 O, 河宽 $OA = h$, 两岸为平行线, 河中任一点的水流速度与该点到两岸距离之积成正比 (比例系数为 k), 船的指向 O 的速度为常数 b. 试求船的运行轨迹方程.

解 取 O 为原点, 水流方向为 x 轴, OA 方向为 y 轴, 则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ky(h-y) - b \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -b \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}t$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{k}{b}(h-y)\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x}{y}.$$

令 $z = \dfrac{x}{y}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{k}{b}(h-y)\sqrt{1+z^2}.$$

分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{k}{b}(h-y)\,\mathrm{d}y.$$

两端积分可得

$$\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = \frac{k}{2b}(h-y)^2 + C.$$

由此可知

$$\ln \frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{k}{2b}(h-y)^2 + C.$$

根据 $y\big|_{x=0}=h$ 可知， $C=0$. 于是

$$\ln\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{k}{2b}(h-y)^2.$$

8. 有一平底容器,其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)$ $(y\geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面 (如图), 容器的底面圆的半径为 2 m. 根据设计要求, 当以 3 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 π $\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前，容器内无液体).

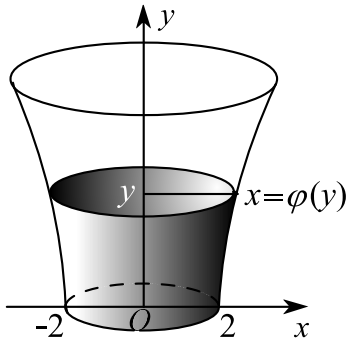


图 7.6

(1) 根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

(其中 m 表示长度单位米， min 表示时间单位分.)

解 (1) 设在 t 时刻，液面的高度为 y, 则由题设可知此时液面的面积为 $\pi\varphi^2(y)=4\pi+\pi\, t$, 从而 $t=\varphi^2(t)-4$.

(2) 液面的高度为 y 时，液体的体积为

$$\pi\int_0^y\varphi^2(u)\,\mathrm{d}u=3t=3\varphi^2(y).$$

两端对 y 求导，得

$$\pi\varphi^2(y)=6\varphi(y)\varphi'(y).$$

解之可得

$$\varphi(y)=C\mathrm{e}^{\pi/6}.$$

根据 $\varphi(0)=2$ 知 $C=2$, 故所求曲线方程为

$$x=2\mathrm{e}^{\pi/6}.$$

9. 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内， L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A. 已知 $MA=OA$, 且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, 求 L 的方程.

解 设点 M 的坐标为 (x,y), 则切线 MA 的方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

令 $X=0$, 则 $Y=y-xy'$, 故点 A 的坐标为 $(0,y-xy')$, 由 $|MA|=|OA|$ 可知,

$$|y-xy'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2}.$$

化简得

$$2yy'-\frac{1}{x}\,y^2=-x.$$

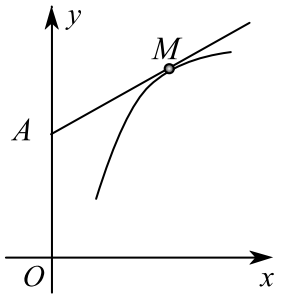


图 7.7

令 $z=y^2$, 得

$$z'-\frac{1}{x}\,z=-x.$$

解之可得

$$y^2=z=x(-x+C).$$

根据 $y(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$, 有

$$y=\sqrt{3x-x^2}\ (0<x<3).$$

10. 一个质量为 m 的质点在一个与时间成正比的外力作用下作直线运动, 假设质点受到的介质阻力与速度成正比且质点的初始速度为 0, 求质点的速度函数.

解 根据牛顿运动定律, 有

$$\begin{cases} m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=at-bv,\\ v(0)=0. \end{cases}$$

其中 a,b 为正常数. 解之可得

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{a}{m}\,\mathrm{d}t}\Big(\int\mathrm{e}^{-\int\frac{a}{m}\,\mathrm{d}t}\cdot\frac{b}{m}t\,\mathrm{d}t\Big)=C\mathrm{e}^{-\frac{a}{m}\,t}-\frac{b}{a^2}(m-at).$$

11. 如图 2.7 所示 R–C 电路, 开始时电容 C 上没有电荷, 电容两端的电压为零. 当开关合向 1 时, 电池 E 便对电容 C 充电, 电容 C 两端的电压 u_C

逐渐升高. 经过相当时间后, 电容充电完毕, 再把开关 K 合向 2, 这时电容开始放电. 试求充、放电过程中, 电容 C 两端电压 u_C 随时间 t 的变化规律.

解 对于充电过程, 根据回路电压定律, 有

$$u_C + RI = E.$$

电容充电时, 电容上的电量 Q 逐渐增加, 由 $Q = Cu_C$, $I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 可得 u_C 满足的微分方程为

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E.$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{u_C - E} = -\dfrac{1}{RC}\,\mathrm{d}t$. 两边积分得 $\ln|u_C - E| = -\dfrac{1}{RC}\,t + C_1$, 即

$$u_C = E + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}.$$

将初始条件 $u_C(0) = 0$ 代入可得

$$u_C = E\Big(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\Big).$$

对于放电过程, 根据回路电压定律, 有 $u_C = RI$. 电容放电时, 电容上的电量 Q 逐渐减少, 由 $Q = Cu_C$, $I = -\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 可得 u_C 满足的微分方程为

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0.$$

解之可得 $u_C = E_0\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$.

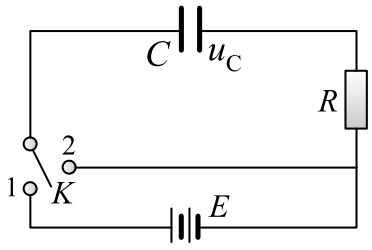


图 7.8

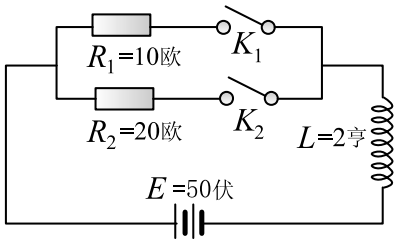


图 7.9

12. 如图 2.8 所示 $R-L$ 电路，试求 (1) 当开关 K_1 合上 10 秒后，电感 L 上的电流； (2) 当 K_1 合上 10 秒后再合上 K_2, 求 K_1 合上 20 秒后，电感 L 上的电流.

解 (1) 当开关 K_1 合上 t 秒时，根据回路电压定律，有

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+R_1I=E.$$

解之可得

$$I=\mathrm{e}^{-\int\frac{R_1}{L}\,\mathrm{d}t}\Big(\int\frac{E}{L}\,\mathrm{e}^{\int\frac{R_1}{L}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+C\Big)=\frac{E}{R_1}+C\,\mathrm{e}^{-\frac{R_1}{L}\,t}.$$

根据 $I(0)=0$, 有

$$I=\frac{E}{R_1}\Big(1-\mathrm{e}^{-\frac{R_1}{L}\,t}\Big).$$

由此可知， $I(10)=5$ 安.

(2) 当开关 K_2 合上 $t-10$ 秒时，根据回路电压定律，有

$$\begin{cases}L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+R_1I_1=E,\\ R_1I_1+R_2I_2=I,\\ I_1+I_2=I,\\ I(10)=5.\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI=E,\\ I(10)=5.\end{cases}$$

其中 $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\dfrac{20}{3}$. 解之可得

$$I=\frac{E}{R}+C\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t}$$

将 $I(10)=5$ 代入可得

$$I=\frac{E}{R}+\Big(5-\frac{E}{R}\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,(t-10)}.$$

故

$$I(20)=50\times\frac{3}{20}+\left(5-50\times\frac{3}{20}\right)^{-\frac{20}{2\times3}\cdot(20-10)}=7.5\text{ 安}.$$

§7.3 高阶微分方程

习 题 7.3 A

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$;　　(2) $y''-\dfrac{1}{x}y'=x$;

(3) $y''-2y'+5y=0$;　　(4) $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$;

(5) $y''-2y'-3y=3\sin x+x\mathrm{e}^{-x}$;　　(6) $y''+y=x\cos 2x$.

解　(1) 由特征方程 $r^2+1=0$ 可知，齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

根据常数变易法，即“常数变导右变零，同时变导右原形”，有

$$\begin{cases}u'\cos x+v'\sin x=0\\-u'\sin x+v'\cos x=\dfrac{1}{\sin x}\end{cases}.$$

解得

$$\begin{cases}u'=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ 1/\sin x & \cos x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=-1,\\[2ex] v'=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & 1/\sin x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cot x,\end{cases}$$

于是原方程的通解为

$$y=Y(x)+u\cos x+v\sin x$$

$$= (-x + C_1)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x.$$

(2) 令 $y' = z$, 则

$$z' - \frac{1}{x}\, z = x.$$

解之可得

$$y' = z = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} \cdot x\,\mathrm{d}x + C\right) = x(x + C).$$

$$y = \frac{1}{3}\, x^3 + C_1 x^2 + C_2.$$

(3) 解特征方程 $r^2 - 2r + 5 = 0$ 可得 $r_{1,2} = 2 \pm 2i$. 由此可知原方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{2x}\cos 2x + C_2 \mathrm{e}^{2x}\sin 2x.$$

(4) 根据特征方程 $r^2 - 5r + 6 = 0$ 可知, 原方程的齐次通解为

$$Y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}.$$

将形式特解

$$y^* = x(Ax + B)\mathrm{e}^{2x}.$$

代入原方程可得 $A = -\dfrac{1}{2},\ B = -1$. 故原方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

(5) 根据特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$ 可知, 原方程的齐次通解为

$$Y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}.$$

将形式特解

$$y^* = A\cos x + B\sin x.$$

代入方程 $y'' - 2y' - 3y = 3\sin x$ 可得 $A = \dfrac{3}{10},\ B = -\dfrac{1}{5}$.

将形式特解

$$y^* = x(Ax + B)\mathrm{e}^{-x}.$$

代入方程 $y'' - 2y' - 3y = x\mathrm{e}^{-x}$ 可得 $A = 0,\ B = -\dfrac{1}{4}$.

故原方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{4}\, x\mathrm{e}^{-x}.$$

(6) 根据特征方程 $r^2 + 1 = 0$ 可知，原方程的齐次通解为

$$Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

将形式特解

$$y^* = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$$

代入原方程可得 $A = 0,\ B = -\dfrac{1}{3},\ C = 0,\ D = \dfrac{4}{9}$, 故原方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{4}{9}\sin 2x - \frac{1}{3}x\cos 2x.$$

2. 求下列微分方程的特解：

(1) $y'' + y = -\sin 2x,\ y\big|_{x=\pi} = 1,\ y'\big|_{x=\pi} = 1$;

(2) $y'' + y = \mathrm{e}^x + \cos x,\ y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 0$;

(3) $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{3x},\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 0$;

(4) $yy'' - y'^{\,2} = 0,\ y\big|_{x=0} = 2,\ y'\big|_{x=0} = 1$;

(5) $y'' + \dfrac{1}{x}\, y' = x^2,\ y\big|_{x=1} = 1,\ y'\big|_{x=1} = 1$.

解 (1) 根据特征方程 $r^2 + 1 = 0$ 可知，原方程的齐次通解为

$$Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

将形式特解

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$$

代入原方程可得 $A = 0,\ B = \dfrac{1}{3}$, 故原方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

将 $y\big|_{x=\pi} = 1,\ y'\big|_{x=\pi} = 1$ 代入通解可得 $C_1 = -1,\ C_2 = -\dfrac{1}{3}$. 故所求特解为

$$y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2) 根据特征方程 $r^2+1=0$ 可知，原方程的齐次通解为

$$Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

将形式特解

$$y^*=A\mathrm{e}^x$$

代入方程 $y''+y=\mathrm{e}^x$ 可得 $A=\dfrac{1}{2}$.

将形式特解

$$y^*=x(A\cos x+B\sin x)$$

代入方程 $y''+y=\cos x$ 可得 $A=0,\ B=\dfrac{1}{2}$.

故原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\,x\,\sin x.$$

将 $y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=0$ 代入通解可得 $C_1=\dfrac{1}{2},\ C_2=-\dfrac{1}{2}$. 故所求特解为

$$y=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\,x\,\sin x.$$

(3) 根据特征方程 $r^2-3r+2=0$ 可知，原方程的齐次通解为

$$Y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

将形式特解

$$y^*=A\mathrm{e}^{3x}$$

代入原方程可得 $A=1$, 故原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}.$$

将 $y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=0$ 代入通解可得 $C_1=1,\ C_2=-2$. 故所求特解为

$$y=\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}.$$

(4) 令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0.$$

分离变量解得 $y' = p = Cy$. 由此可知

$$y = C_1 \mathrm{e}^{C_2 x}.$$

故所求特解为 $y = 2\mathrm{e}^{x/2}$.

(5) 令 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则

$$p' + \frac{1}{x}\, p = x^2.$$

解得

$$y' = p = e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\Big(\int e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\Big) = x\Big(\frac{1}{4}\,x^4 + C\Big).$$

原方程的通解为

$$y = \frac{1}{20}\,x^5 + C_1\,x^2 + C_2.$$

故所求特解为 $\dfrac{1}{20}\,x^5 + \dfrac{3}{8}\,x^2 + \dfrac{23}{40}$.

3. 用降阶法求下列方程的通解或特解:

(1) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$;

(2) $y'' - \dfrac{1}{x}\,y' + y'^2 = 0$;

(3) $\begin{cases} (x^2+1)y'' - xy' = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$;

(4) $x^3 y'' = (y - xy')^2$. (提示: 令 $x = \mathrm{e}^v,\ y = u\mathrm{e}^v$)

解 (1) 令 $y' = p$, 则

$$\frac{\mathrm{d}p}{p(1-p)} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两端积分可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{p} = \frac{C_1}{y} + 1.$$

于是

$$x = C_1 \ln|y| + y + C_2.$$

(2) 令 $y' = p$, 则

$$p' - \frac{1}{x}\,p = -p^2.$$

令 $z = p^{-1}$, 则

$$z' + \frac{1}{x}\,z = 1.$$

解之可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= z = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\Big(\int \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\cdot 1\,\mathrm{d}x + C\Big)\\ &= \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{2}\,x^2 + C\Big).\end{aligned}$$

于是

$$y = \int \frac{\mathrm{d}x^2}{x^2 + C_1} = \ln|x^2 + C_1| + C_2.$$

(3) 令 $y' = p$, 则

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

两端积分可得

$$y' = p = C_1\sqrt{x^2+1}.$$

于是通解为

$$y = C_1\Big(\frac{x}{2}\,\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big) + C_2.$$

根据 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ 有 $C_1 = 1,\ C_2 = 0$, 故所求特解为

$$y = \frac{x}{2}\,\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

(4) 将 $x = \mathrm{e}^v,\ y = u\mathrm{e}^v$ 代入原方程可得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\Big)^2.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = p$, 则

$$p = 0 \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} - p = 1.$$

解 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u} - p = 1$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = p = 1 + C_1\mathrm{e}^u.$$

由此可知

$$u = \ln\frac{\mathrm{e}^v}{C_1\mathrm{e}^v + C_2}.$$

因此

$$y = x \ln \frac{x}{C_1 x + C_2}.$$

当 $p = 0$ 时得 $u = C$ 或 $y = Cx$, 此解可归于通解.

4. 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} + (y + \sin x)\Big(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{3}{2}$ 的解.

解 (1) 由于

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(1 \Big/ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) \Big/ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \Big/ \Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^3,$$

$$\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^3 \Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big)^3 = \Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big)^3 = 1,$$

所以原方程可变为

$$-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y + \sin x = 0 \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y = \sin x.$$

(2) 由特征方程 $r^2 - 1 = 0$ 可知, 齐次方程的通解为

$$Y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{x}.$$

将形式特解

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

代入方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y = \sin x$ 可得 $A = 0,\ B = -\dfrac{1}{2}$. 于是通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

将 $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{3}{2}$ 代入通解可得 $C_1 = -1,\ C_2 = 1$. 故所求特解为

$$y = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

5. 一平面曲线 $y=y(x)$ 的曲率半径与法线长 $|y|\sqrt{1+y'^2}$ 成正比，求曲线方程.

解 根据题意，有

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=ky\sqrt{1+y'^2}.$$

其中 k 为比例常数. 整理得

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2}=\frac{2y'}{ky}.$$

两端积分可得

$$\ln(1+y'^2)=\frac{2}{k}\ \ln(Cy)\ \text{或}\ y'=\sqrt{(Cy)^{2/k}-1}.$$

解之可得

$$x=\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(Cy)^{2/k}-1}}.$$

考虑几种特殊情况

(1) 当 $k=-1$ 时，通解为

$$(x+C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

所求曲线为圆心在 x 轴上半径任意的圆.

(2) 当 $k=-2$ 时，通解为

$$\begin{cases}x=C_1(t-\sin t)+C_2,\\ y=C_1(1-\cos t).\end{cases}$$

所求曲线为半径任意的圆沿 x 轴滚动的摆线.

(3) 当 $k=1$ 时，通解为

$$y=C_1\mathrm{ch}\frac{x+C_2}{C_1}.$$

所求曲线为旋链线.

(4) 当 $k=2$ 时，通解为

$$(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1).$$

所求曲线为对称轴平行于 y 轴的抛物线.

6. 设对任意 $x>0$, 曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 建立 $f(x)$ 满足的微分方程.

解 曲线在 $(x,f(x))$ 点的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x).$$

由此可知, $Y\big|_{X=0}=f(x)-xf'(x)$. 于是有

$$f(x)-xf'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

写成微分方程, 有

$$xf''(x)+f'(x)=0.$$

即 $(xf'(x))'=0$. 积分得 $xf'(x)=C$. 因此

$$f(x)=C_1\ln x+C_2.$$

7. 在 R、L、C 含源串联电路中, 电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E=20V, C=0.2\mu F, L=0.1H, R=1000\Omega$, 试求合上开关 K 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_{_C}$.

解 根据回路电压定律有

$$E-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-u_{_C}-R\,i=0.$$

由于

$$i=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{Q}{C}=C\frac{\mathrm{d}u_{_C}}{\mathrm{d}t},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2u_{_C}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}u_{_C}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}\,u_{_C}=\frac{E}{LC}.$$

将 $R=1000,\ C=0.2\times10^{-6},\ L=0.1$ 代入可得,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u_{_C}}{\mathrm{d}t^2}+10000\dfrac{\mathrm{d}u_{_C}}{\mathrm{d}t}+5\times10^7u_{_C}=10^9,\\ u_{_C}(0)=0,\ u'_{_C}(0)=0.\end{cases}$$

解之可得

$$u_C = 20 - 20\mathrm{e}^{-5000t}(\cos 5000t + \sin 5000t).$$

由此可知

$$i(t) = 0.04\mathrm{e}^{-5000t}\sin 5000t.$$

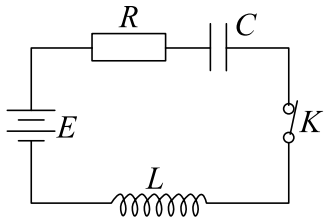


图 7.10

8. 设 $y'' + p(x)y' = f(x)$ 有一特解 $\dfrac{1}{x}$, 对应齐次方程有一特解 x^2, 试求 (1) $p(x)$ 和 $f(x)$ 的表达式, (2) 此方程的通解.

解 将 $y = x^2$ 代入 $y'' + p(x)y' = 0$ 可得 $p(x) = -\dfrac{1}{x}$. 将 $y = \dfrac{1}{x}$, $p(x) = -\dfrac{1}{x}$ 代入 $y'' + p(x)y' = f(x)$ 可得, $f(x) = \dfrac{3}{x^3}$. 于是原方程为

$$y'' - \frac{1}{x}\,y' = \frac{3}{x^3}.$$

令 $y' = p$, 解 $p' - p = 0$ 可得

$$y' = p = Cx.$$

于是 $y'' - \dfrac{1}{x}\,y' = 0$ 的通解为 $y = C_1 + C_2x^2$. 故原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{1}{x}.$$

习 题 7.3 B

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''-2y=2\tan^3 x$;

(2) $y''-2y'+y=\ln x-\dfrac{1+2x}{x^2}$;

(3) $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3$;

(4) $x^2y''+xy'+4y=2(\cos\ln x)^2$;

(5) $x^2y''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$;

(6) $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$.

解 (1) 由特征方程 $r^2-2=0$ 可知，对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}.$$

根据常数变易法，有

$$\begin{cases}u'\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}+v'\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}=0,\\ -\sqrt{2}u'\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}+\sqrt{2}v'\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}=2\tan^3 x.\end{cases}$$

解之可得通解

$$\begin{aligned}y&=u\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}+v\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\\ &=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}+\tan x.\end{aligned}$$

(2) 由特征方程 $r^2-2r+1=0$ 可知，对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2xe^x.$$

根据常数变易法，有

$$\begin{cases}u'\mathrm{e}^x+v'x\mathrm{e}^x=0,\\ u'\mathrm{e}^x+v'(x+1)\mathrm{e}^x=\ln x-\dfrac{1+2x}{x^2}.\end{cases}$$

解之可得通解 $y = C_1e^x + C_2xe^x + \ln x$.

(3) 由特征方程

$$r(r-1)(r-2) - r(r-1) + 2r - 2 = 0$$

可知特征根为 $r_1 = 1,\ r_2 = 1,\ r_3 = 2$. 故齐次方程的通解为

$$Y = C_1x + C_2x\ln x + C_2x^2.$$

将形式特解 $y^* = Ax^3$ 代入原方程可得 $A = \dfrac{1}{6}$. 故所求通解为

$$y = C_1x + C_2x\ln x + C_2x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

(4) 令 $x = \mathrm{e}^t$, 则原方程可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 4y = 1 + \cos 2t.$$

解之可得

$$y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{1}{4}(1 + t\sin 2t).$$

故所求通解为

$$y = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x) - \frac{1}{4}\left[1 + (\ln x)\sin(2\ln x)\right].$$

(5) 令 $x = \mathrm{e}^t$, 则原方程可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y = t\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^t.$$

解之可得

$$y = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^t + \Big(\frac{t}{4} - \frac{5}{16}\Big)\mathrm{e}^{2t} + \Big(t - \frac{1}{3}\Big)\mathrm{e}^t.$$

故所求通解为

$$y = C_1x^{-2} + C_2x + \Big(\frac{\ln x}{4} - \frac{5}{16}\Big)x^2 + \Big(\ln x - \frac{1}{3}\Big)x.$$

(6) 令 $x = \mathrm{e}^t$, 则由特征方程 $r(r-1) - r + 2 = 0$, 即

$$r^2 - 2r^2 + 2 = 0$$

可知原方程等价于 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=t\mathrm{e}^t$. 解之可得

$$y=C_1x\cos\ln x+C_2x\sin\ln x+x\ln x.$$

2. (1) 验证函数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$$

满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$;

(2) 利用 (1) 的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 (1) 由于

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以

$$y''+y'+y=\mathrm{e}^x.$$

(2) 由特征方程 $r^2+r+1=0$ 可得齐次方程 $y''+y'+y=0$ 的通解为

$$Y(x)=\mathrm{e}^{-x/2}\Big(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big).$$

将形式特解 $y^*=A\,\mathrm{e}^x$ 代入方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 可得 $A=\dfrac{1}{3}$. 于是通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x/2}\Big(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)+\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^x.$$

根据

$$\begin{cases}y(0)=1=C_1+\dfrac{1}{3}\\ y'(0)=0=-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2+\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

可知, $C_1=\dfrac{2}{3},\ C_2=0$. 故幂级数 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x/2}\Big(\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x+\frac{1}{3}\Big).$$

3. 已知齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=0$ 的通解为 $y=C_1x+C_2x\ln|x|$, 求非齐次线性方程 $x^2y''-xy'+y=\dfrac{1}{x\ln x}$ 的通解.

解 根据常数变易法, 有

$$\begin{cases}u'x+v'x\ln x=0,\\ u'+v'\cdot(\ln x+1)=\dfrac{1}{x\ln x}.\end{cases}$$

解之可得

$$u'=\begin{vmatrix}0 & x\ln x\\ \frac{1}{x\ln x} & 1+\ln x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}x & x\ln x\\ 1 & 1+\ln x\end{vmatrix}=-\frac{1}{x},$$

$$v'=\begin{vmatrix}x & 0\\ 1 & \frac{1}{x\ln x}\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}x & x\ln x\\ 1 & 1+\ln x\end{vmatrix}=\frac{1}{x\ln x}.$$

于是

$$u=C_1-\ln x,\ v=C_2+\ln|\ln x|.$$

故非齐次方程的通解为

$$y=(C_1-\ln x)\,x+(C_2+\ln|\ln x|)\,x\ln x.$$

4. 求方程 $yy''-y'^{\,2}=6xy^2$ 的通解.

解 用 ky 代替 y, 原方程结构不变, 此类方程可用变量代换 $y=\mathrm{e}^{\int z\,\mathrm{d}x}$ 化减. 将此代换代入, 有

$$z''=6x.$$

解之可得

$$z=x^3+C_1x+C_2.$$

于是

$$y=\mathrm{e}^{\int(x^3+C_1x+C_2)\,\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x}.$$

5. 已知 $y_1 = \mathrm{e}^x$ 是齐次线性方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的一个解，求此方程的通解.

解 对于齐次线性方程，知道一个特解 y_1 时可用变量代换 $y = y_1 z$ 化减. 将 $y = \mathrm{e}^x z$ 代入原方程，有

$$(2x-1)z'' - 3z' = 0.$$

解之可得

$$z = C_1(2x-1)^4 + C_2.$$

故原方程的通解为

$$y = (C_1(2x-1)^4 + C_2)\mathrm{e}^x.$$

6. 长为 l 米的均匀链条放置在一光滑桌面上，链条在桌边挂下来的长度为 b 米，问链条全部滑落桌面需多长时间？

解 设 t 时刻链条在左面下部的长度为 x, 则由牛顿运动定律有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{x}{l}\,mg, \\ x(0) = b,\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

解之可得通解为

$$x = C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{l^{-1}g}\,t} + C_2\mathrm{e}^{\sqrt{l^{-1}g}\,t}.$$

由此可知特解为

$$x = \frac{b}{2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{l^{-1}g}\,t} + \frac{b}{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{l^{-1}g}\,t}.$$

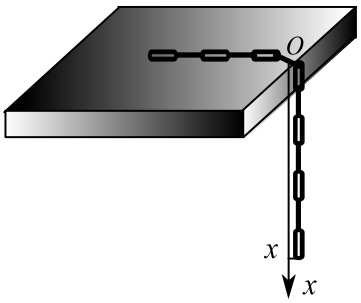


图 7.11

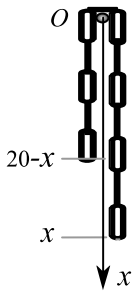


图 7.12

令 $x=l$ 可得

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\ln\frac{l+\sqrt{l^2-1}}{b}.$$

7. 一链条悬挂在一钉子上，开始时一端离开钉子 8m, 另一端离开钉子 12m. 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需时间.

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

(2) 若摩擦力为链条 1m 长的重量.

解 (1) 设链条两端的位置差为 x, 则根据牛顿运动定律有

$$\begin{cases}m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{2x-20}{20}\,mg,\\ x(0)=12,\ x'(0)=0.\end{cases}$$

解之可得通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{10^{-1}g}\,t}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{10^{-1}g}\,t}+10.$$

由此可知特解为

$$x=\mathrm{e}^{-\sqrt{10^{-1}g}\,t}+\mathrm{e}^{\sqrt{10^{-1}g}\,t}+10.$$

令 $x=20$ 可得

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\,\ln(5+2\sqrt{6}).$$

(2) 由于钉子对链条的摩擦力为 $\dfrac{mg}{8+12}$, 所以链条的运动方程为

$$\begin{cases}m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{2x-20}{20}\,mg-\dfrac{mg}{20},\\ x(0)=12,\ x'(0)=0.\end{cases}$$

解之可得通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{10^{-1}g}\,t}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{10^{-1}g}\,t}+\frac{21}{2}.$$

由此可知特解为

$$x=\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{10^{-1}g}\,t}+\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\sqrt{10^{-1}g}\,t}+\frac{21}{2}.$$

令 $x=20$ 可得

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ \ln\frac{19+4\sqrt{22}}{3}.$$

8. 设圆柱形浮筒直径为 0.5 米, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 秒钟, 求浮筒的振动方程及浮筒的质量.

解 设浮筒在水下的深度为 x 米, 则浮筒受到的浮力为 $\pi\times\left(\frac{0.5}{2}\right)^2\times xg$. 于是根据牛顿运动定律有

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=mg-\pi\times\left(\frac{0.5}{2}\right)^2\times xg.$$

由特征方程 $r^2+\dfrac{0.25^2\pi g}{m}=0$ 可知, 浮筒振动的频率为

$$\omega=0.25\sqrt{\frac{\pi g}{m}}.$$

根据周期 $=2=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 可知,

$$m=\frac{0.25^2g}{\pi},\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\pi^2x=g.$$

解之可得

$$x=C_1\cos\pi t+C_2\sin\pi t+\frac{g}{\pi^2}.$$

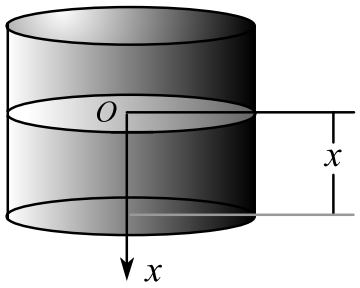


图 7.13

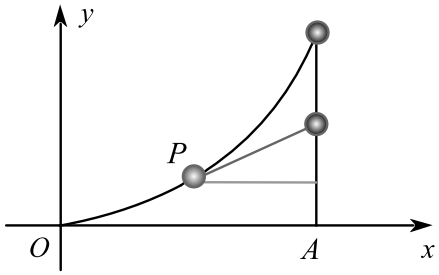


图 7.14

9. 位于坐标原点的我舰向位于 Ox 轴上 $A(1,0)$ 点处的敌舰发射制导鱼雷, 使鱼雷永远对准敌舰. 设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 Oy 轴的直线行

驶，又设鱼雷的速度大小为 $6v_0$, 求鱼雷的航行轨迹方程. 又敌舰行驶多远时将被击中？

解 设 t 时刻鱼雷的位置为 $P(x,y)$. 由于鱼雷的速度方向是切线方向, 所以有

$$(x'(t),y'(t))=k(1-x,v_0t-y).$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_0t-y}{1-x}.$$

由于 $\overset{\frown}{OP}=6v_0t$, 所以

$$t=\frac{1}{6v_0}\int_0^x\sqrt{1+\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$(1-x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{6}\int_0^x\sqrt{1+\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2}\,\mathrm{d}x-y.$$

由此可知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0$ 且两端求导可得

$$(1-x)\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{6}\sqrt{1+\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2}.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$, 则

$$(1-x)p'=\frac{1}{6}\sqrt{1+p^2}.$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{6(1-x)}.$$

两端积分得

$$p+\sqrt{1+p^2}=\frac{C}{\sqrt[6]{1-x}}.$$

根据 $p\big|_{x=0}=0$ 可知, $C=1$. 由此可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\frac{1}{2\sqrt[6]{1-x}}-\frac{1}{2}\sqrt[6]{1-x}.$$

于是

$$y=-\frac{3}{5}(1-x)^{5/6}+\frac{3}{7}(1-x)^{7/6}+C.$$

根据 $y\big|_{x=0}=0$ 可知， $C=\dfrac{6}{35}$. 故

$$y=-\frac{3}{5}(1-x)^{5/6}+\frac{3}{7}(1-x)^{7/6}+\frac{6}{35}.$$

10. 设有质量为 1 千克的物体，从水面上方 0.1 m 处自由落下 (不计空气阻力), 恰好落在水面上质量为 0.4 千克的物体上，结合成一体后在水中下沉，下沉阻力与速度成正比，比例系数 $k=0.7$, 试建立结合体在水中下沉的距离与时间的关系.

解 设结合体在水中下沉的距离为 $x(t)$, 则由牛顿运动定律，有

$$1.4\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=1.4g-0.7\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

于是，有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g,\\ x(0)=0,\ x'(0)=v_0.\end{cases}$$

其中 v_0 是结合体的初速度，根据动量守恒定律，有

$$1\cdot v_1=1.4\cdot v_0.$$

由此可得 $v_0=1$ 米 / 秒.

根据特征方程 $r^2+\dfrac{1}{2}\,r=0$ 可得齐次方程的通解为

$$X=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

进一步可得非齐次方程的通解为

$$x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+2gt.$$

将 $x(0)=0,\ x'(0)=1$ 代入可得

$$x(t)=-2(2g-1)+2(2g-1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+2gt.$$

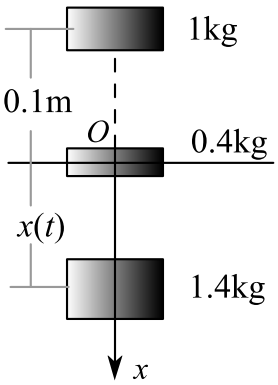


图 7.15

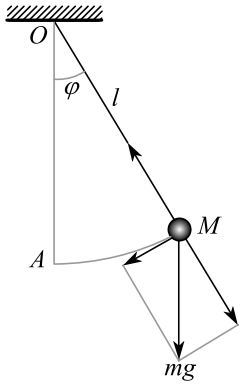


图 7.16

11. 有一个质量 m 的质点 M 用长为 l 的细线悬挂于固定点 O, 在重力作用下沿圆周在平衡位置 A 点附近作摆动. 如果质点受到的空气阻力与质点的速度 v 成正比，试建立质点的摆动方程.

解 设质点离开平衡位置 A 的张角为 φ, 方向按逆时针确定，则质点的速度为 $v = l\,\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. 由于重力 mg 沿 OM 垂向分力为 $-mg\sin\varphi$, 所以根据牛顿运动定律，有

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\varphi - kv.$$

将 $v = l\,\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ 代入可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

于是质点的摆动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\,\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0, \\ \varphi\big|_0 = \varphi_0,\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \omega_0. \end{cases}$$

当 φ_0 比较小时，根据 $\sin\varphi \approx \varphi$, 上述方程可简化为振动方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\,\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \dfrac{g}{l}\varphi = 0, \\ \varphi\big|_0 = \varphi_0,\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \omega_0. \end{cases}$$

12. 一条曲线通过坐标原点，其上任意一点的切线和过这点的纵坐标线及 Ox 轴所构成的三角形的面积，与过这点的纵坐标线和曲线及 Ox 轴围成的曲边梯形的面积成正比，求曲线方程.

解 由于三角形的面积为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{y'}\cdot y$, 曲边梯形的面积为 $\int_0^x y\,\mathrm{d}x$, 所以有

$$\frac{y^2}{2y'}=k\int_0^x y\,\mathrm{d}x.$$

由此可知，曲线的微分方程为

$$yy''+2(k-1)y'^2=0.$$

令 $y'=p$, 则

$$y\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+2(k-1)p=0.$$

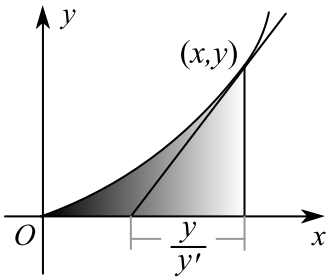


图 7.17

解之可得

$$y'=p=Cy^{-2(k-1)}.$$

根据 $y(0)=0$, 有 $k>\frac{1}{2}$ 及 $y^{2k-1}=Cx$.

总 习 题 七

1. 填空题：

(1) 微分方程 $yy''-y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是 _____.

(2) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为 _____.

(3) 微分方程 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 _____.

(4) 微分方程 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x$ 的通解为 _____.

(5) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 _____.

(6) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $x(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为 _____.

(7) 设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ (C_1,C_2 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次方程的通解，则该方程为 _____.

解 (1) 令 $y'=p$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

解得 $y'=p=C_1y$, 由此可知 $y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$. 故答案为

$$y=\mathrm{e}^{x/2}.$$

(2) 令 $y'=p$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x.$$

解之可得

$$y'=p=C_1x^{-3}$$

于是

$$y=-\frac{C_1}{2}\,x^{-2}+C_2.$$

(3) $y=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{1}{4}\,t\,\mathrm{e}^{2t}$.

(4) $y=\mathrm{e}^t(C_1\cos t+C_2\sin t)+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}$.

(5) $y=(x+C)\cos x$.

(6) $y=\dfrac{1}{9}\,t\,(3\ln t-1)$.

(7) 由通解可知，特征方程为

$$(r-1+i)(r-1-i)=0.$$

由此可知所求方程为

$$y''-2y'+2y=0.$$

2. 一质量为 m 的船以速度 v_0 行驶，在 $t=0$ 时，动力关闭. 假设水的阻力正比于 v^n, 其中 n 为一常数， v 为瞬时速度，求速度与滑行距离的函数关系.

解 根据牛顿运动定律，有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^n, \\ v\big|_0 = v_0. \end{cases}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, 所以有

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kv^n.$$

分离变量得

$$mv^{1-n}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

当 $n \neq 2$ 时，两端积分可得 $\dfrac{mv^{2-n}}{2-n} = kx + C$, 将 $v\big|_{t=0} = v_0,\ x\big|_{t=0} = 0$ 代入可得 $C = \dfrac{mv_0^{2-n}}{2-n}$, 故

$$v^{2-n} = -\frac{k(2-n)}{m}\,x + v_0^{2-n}.$$

当 $n = 2$ 时，两端积分可得 $v = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x}$, 将 $v\big|_{t=0} = v_0,\ x\big|_{t=0} = 0$ 代入可得 $C = v_0$, 故

$$v = v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x}.$$

3. 求满足方程 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x + \int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t$ 的连续可微函数 $f(x)$.

解 令 $x - t = u$, 则原方程可变为

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= x + \int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x + x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

两端求导可得

$$f(x) = x + \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

由此可知

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) + 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

解之可得

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

4. 设函数 $f(x)$ 连续且满足 $f(x) = \mathrm{e}^x + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$.

解 原方程两端求导可得

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

继续求导，有

$$f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x.$$

由此可知

$$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x.$$

由积分方程可知

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1.$$

于是

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\cos x + \frac{1}{2}\,\sin x + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x.$$

5. 一池内原有 100 公升盐水，其中含有 10 公升盐，现以匀速每分钟注入 2 公升的清水，又流出 2 公升的盐水，求 t 时刻池内的含盐量.

解 设 t 时刻盐的含量为 x, 则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\cdot\dfrac{x}{100}, \\ x(0) = 10. \end{cases}$$

解之可得

$$x = 10\,\mathrm{e}^{-t/50}.$$

6. 有一房间容积为 $100m^3$, 开始时房间空气中含有二氧化碳 0.12%, 为了改善房间的空气质量，用一台风量为 $10m^3/$ 分的排风扇通入含 0.04% 二氧化碳的新鲜空气，同时以相同的风量将混合均匀的空气排出，求排出 10 分钟后，房间中二氧化碳的含量的百分比.

解 设 t 时刻二氧化碳的含量为 x, 则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(0.04\% - \dfrac{x}{100}\right) \cdot 10, \\ x(0) = 0.12\% \cdot 100. \end{cases}$$

解之可得

$$x = 0.08\,\mathrm{e}^{-0.1t} + 0.04.$$

7. 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 k=6.0×10^6). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

解

$$\begin{cases} 9000\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -6.0\times10^6\,v, \\ v(0) = 700 \end{cases}$$

解之可得

$$v = 700\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\times10^3 t}.$$

飞机滑行的最长距离是

$$s = \int_0^{+\infty} v\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 700\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\times10^3 t}\,\mathrm{d}t = 1.05\,\mathrm{km}.$$

8. 在一个生物种群中，其生长率是平均出生率与平均死亡率之差. 设某生物种群的平均出生率为正的常数 β, 由于拥挤以及对食物的竞争加剧等原因，平均死亡率与种群的大小成正比，其比例常数为 $\delta > 0$. 求该种群数量 N 与时间 t 的函数关系式.

解

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N}\,\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \beta - \delta N, \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

分离变量得

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{\delta}{\beta - \delta N}\right)\mathrm{d}N = \beta\,\mathrm{d}t.$$

解之可得通解

$$N = \frac{C\beta\,\mathrm{e}^{\beta t}}{1 + C\delta\,\mathrm{e}^{\beta t}}.$$

由 $N(0) = N_0$ 可知 $C = \dfrac{N_0}{\beta - \delta N_0}$. 于是

$$N = \frac{N_0\beta\,\mathrm{e}^{\beta t}}{\beta + N_0\delta\,(\mathrm{e}^{\beta t} - 1)}.$$

9. 摩托艇以 5 米 / 秒的速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20 秒钟后，艇的速度减至 $v_1 = 3$ 米 / 秒. 确定发动机停止 2 分钟后艇的速度. 假定水的阻力与艇的运动速度成正比.

解 根据牛顿运动定律，有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv, \\ v(0) = 5,\ v(120) = 3. \end{cases}$$

解之可得通解

$$v = C\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

根据 $v(0) = 5,\ v(120) = 3$ 可知， $C = 5,\ k = \dfrac{1}{120}\ln\dfrac{5}{3}$. 于是

$$v = 5\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{120}\ln\frac{5}{3}\right)t}.$$

10. 一曲线的曲率半径为常数，求此曲线方程.

解 根据曲率半径为常数，有

$$\frac{y''}{(1 + y'^{\,2})^{3/2}} = \frac{1}{R}.$$

令 $y' = p$, 则

$$\frac{p\,\mathrm{d}p}{(1 + p^2)^{3/2}} = \frac{\mathrm{d}y}{R}.$$

解之可得

$$y' = p = \frac{\sqrt{R^2 - (y + C_1)^2}}{y + C_1}.$$

分离变量可得

$$\frac{(y+C_1)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-(y+C_1)^2}}=\mathrm{d}x.$$

由此可知，曲线方程为

$$(x+C_2)^2+(y+C_1)^2=R^2.$$

11. 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成正比，如果物体在 20 分钟内由 $100°C$ 冷至 $60°C$, 那么在多久的时间内，这个物体的温度达到 $30°C$? 假设空气的温度为 $20°C$.

解 设 t 时刻物体的温度为 $x(t)$, 则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-k(x-20),\\ x(0)=100,\ x(20)=60.\end{cases}$$

解之可得通解

$$x=C\mathrm{e}^{-k\,t}+20.$$

根据 $x(0)=100,\ x(20)=60$ 有

$$C=80,\ k=\frac{1}{20}\ \ln 2.$$

因此，有

$$x=80\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{20}\ \ln 2\right)t}+20.$$

令 $x=30$, 则有

$$t=60(\text{分钟}).$$

12. 有一子弹以 $v_0=200$ 米秒的速度射入厚度为 $h=10$ 厘米的木板，穿过木板后仍有速度 80 米 / 秒. 假设木板对子弹的阻力与其速度的平方成正比，求子弹通过木板所需要的时间.

解 根据牛顿运动定律，有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-k\ v^2,\\ v(0)=200.\end{cases}$$

解之可得

$$v = \frac{200}{200kt + 1}.$$

解

$$10 = \int_0^t v(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{200}{200kt + 1}\ \mathrm{d}t$$

可得

$$t = \frac{\mathrm{e}^{10k} - 1}{200k}.$$

解方程组

$$\begin{cases} t = \dfrac{\mathrm{e}^{10k} - 1}{200k} \\ 80 = \dfrac{200}{200kt + 1} \end{cases}$$

可得

$$k = \frac{1}{10}\ \ln\frac{5}{2}, \quad t = \frac{3}{40\ln 2.5}.$$

参考试题

试题 1. 期末考试样题一

一. 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中必为偶函数的是（　）

(A) $\displaystyle\int_0^x f(t^2)\,\mathrm{d}t$;　　(B) $\displaystyle\int_0^x t\,[f(t)-f(-t)]\,\mathrm{d}t$;

(C) $\displaystyle\int_0^x t\,[f(t)+f(-t)]\,\mathrm{d}t$;　　(D) $\displaystyle\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2\,g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点（　）

(A) 极限不存在;　　(B) 极限存在，但不连续;

(C) 连续，但不可导;　　(D) 可导.

3. 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数（　）

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都收敛;　　(B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都发散;

(C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散;　　(D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛.

4. 设 a,b 为常数且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,\mathrm{d}t=2$，则（　）

(A) $a=b=1$;　　(B) $a=b=\dfrac{1}{2}$;

(C) $a=1,\ b=0$; (D) $a=0,\ b=1$.

5. 设 $f(x)$ 为可导函数， $y=f(x)$ 的图形如下所示，

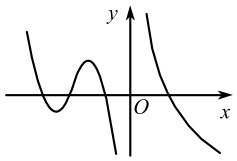


图 1

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 (　　)

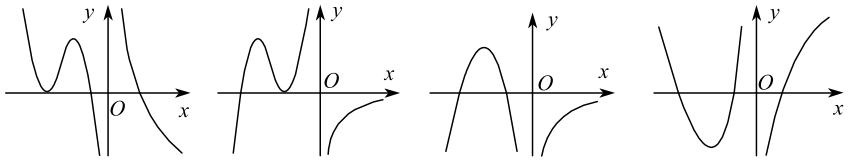


图 2

二. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知当 $x\to 0$ 时， $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ _____.

2. 设 a 为非 0 常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ _____.

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(x-2)^{2n}$ 的收敛域为 _____.

4. 当 p,q 满足 _____ 时，广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

5. 函数 $y=x+\operatorname{arccot}x$ 的斜渐近线方程是 _____.

三. 计算下列极限（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln^2 x$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\,e^{2t^2}\mathrm{d}t}$;　　4. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$.

四. 计算下列导数（ 1 小题 5 分， 2 小题 10 分，共 15 分）

1. 设 $\begin{cases} x = a(\ln\tan\dfrac{t}{2} + \cos t) \\ y = a\sin t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $y = y(x)$ 三阶可导且 $y' \neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}$.

五. 计算下列积分（ 1 小题 5 分， 2 小题 10 分，共 15 分）

1. $\int \sin\ln x\ \mathrm{d}x$;

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_{1/2}^2 \dfrac{f(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.

六. 选做题（ 8 分）下列两题中任选一题.

(1) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和.

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和函数.

七. 证明题（ 7 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，证明

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\,f''(x)dx.$$

八. 应用题（ 9 分）设 $0 < a < 2$ 且抛物线 $y = 2x^2$ 在区间 $[0,a]$ 和 $[a,2]$ 上对应的曲边梯形分别为 D_1, D_2.

1. 求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1;

2. 求 D_2 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V_2;

3. 问 a 为何值时， $V_1 + V_2$ 取得最小值？

试题 2. 期末考试样题二

一. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x<0\\ b+\sin 2x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点可导,则 $a=$ _____, $b=$ _____.

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{\sqrt{n+1}}\cdot(x+1)^n$ 的收敛域为 _____.

3. 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____.

4. 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅立叶级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+\sin nx)$, 则 $b_3=$ _____.

5. 若 x,y 满足方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $\mathrm{d}y=$ _____.

二. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $x_n\leq z_n\leq y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ (　　).

(A) 存在且等于零; (B) 存在但不一定等于零;

(C) 不一定存在; (D) 一定不存在.

2. 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 (　　).

(A) 无穷大量; (B) 无穷小量;

(C) 有界量; (D) 无界量但不是无穷大量.

3. 设在 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,\ f'(x)>0,\ f''(x)<0$, 若 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ S_2=f(b)\,(b-a),\ S_3=\dfrac{1}{2}[\,f(a)+f(b)\,](b-a)$, 则 (　　).

(A) $S_3<S_1<S_2$; (B) $S_2<S_1<S_3$;

(C) $S_1<S_2<S_3$; (D) $S_2<S_3<S_1$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是 (　　).

(A) $\dfrac{1}{8}\ln 2+3$; (B) $-\dfrac{1}{8}\ln 2+3$;

(C) $-8\ln 2+3$; (D) $8\ln 2+3$.

5. 设连续函数 $f(x),\ g(x)$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小，若 $F(x)=\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t,\ G(x)=\int_0^1 xg(xt)\,\mathrm{d}t$, 则当 $x\to 0$ 时 $F(x)$ 是 $G(x)$ 的 (　　)

(A) 高阶无穷小; (B) 低阶无穷小;

(C) 同阶但非等价无穷小; (D) 等价无穷小.

三. 计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\tan x)^{2x-\pi}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\int_0^x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x$;

3 求 $\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$;

4 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0\end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

5 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}\sin(xt)=x+t\\ y=\cos(t+y)\end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

四. 证明题（ 8 分 ）若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

五. （ 6 分 ）过点 $(-1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x}$ 的切线，该切线与抛物线及 x 轴围成平面图形，求该平面图形的面积.

六.（ 10 分 ）对一切实数 t, 函数 $f(t)$ 是连续的正函数且可导，又 $f(-t)=f(t)$, 令

$$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\,\mathrm{d}t,\ (-a\le x\le a,\ a>0).$$

(1) 证明 $g'(x)$ 是单调增加的；

(2) 求出使函数 $g(x)$ 取最小值的 x 值；

(3) 将函数 $g(x)$ 的最小值作为 a 的函数，它等于 $f(a)-a^2-1$ 时，求 $f(t)$.

七.（ 8 分 ）求函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 在 $x=0$ 点的 n 阶泰勒展式.

八.（ 8 分 ）用变量代换 $x=\cos t\ (0<t<\pi)$ 化简微分方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0.$$

试题 3. 期末考试样题三

一. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 在某极限过程下，无穷大量与有界量的乘积 (　　).

(A) 一定是无界量但不是无穷大量；　　(B) 一定是无穷大量；

(C) 一定是有界量但不是无穷小量；　　(D) 可能是无穷小量.

2. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)\right]=$(　　).

(A) 0;　　(B) $f'(0)$;　　(C) ∞;　　(D) 1.

3. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增且可导，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 内 (　).

(A) 点点为正; (B) 点点为负;

(C) 可正可负; (D) 可以为零.

4. 若 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 内存在原函数，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上 (　).

(A) 不一定有界; (B) 必有界但不一定可积;

(C) 必可积但不一定连续; (D) 必连续但不一定可导.

5. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处 (　).

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;

(C) 发散; (D) 敛散性不确定.

二. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则常数 $k=$ _____.

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t=$ _____.

3. 设 $y=(1+\sin x)^x$, 则 $\mathrm{d}y(\pi)=$ _____.

4. 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$, 则其在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数 b_{30} 是 _____.

5. 当且仅当 α,β 满足关系式 _____ 时，暇积分

$$\int_0^1 \frac{(\arcsin x)^{\alpha}}{(\mathrm{e}^x-1)\cdot\big[\,\ln(1+x^2)\,\big]^{\beta}}\,\mathrm{d}x$$

收敛.

三. 计算下列极限（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$.

四. 计算下列导数（每小题 6 分，共 12 分）

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\sin x$ 所确定的隐函数，求 y''.

2. 设 $y=y(x)$ 是由极坐标方程 $r=\theta\sin\theta+\cos\theta$ 确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五. 计算下列积分（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}, & x\le 0 \end{cases}$，求 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. 设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x$, 求 $I_{10}+I_{12}$.

六. 选做题（ 10 分）下列两题中任选一题.

(1) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\,x^n$ 的和函数.

(2) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a_n+1}\Big)^n$ 收敛.

七. 证明题（ 10 分）设函数 $x_2>x_1>0$, 证明存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$x_1\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_1}=(1-\xi)\,\mathrm{e}^{\xi}\,(x_1-x_2).$$

八. 应用题（ 10 分）求两条抛物线 $y=x^2$ 与 $y=k(x^2-1)$ $(k>1)$ 所围成图形的面积 S. 当 k 为何值时，面积 S 取最小值？

试题 4. 期末考试样题四

一. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$, $g(x)=x^3+x^4$, 则当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

(A) 等价无穷小; (B) 同阶但非等价无穷小;

(C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小.

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (　).

(A) 不可导; (B) 可导, 且 $f'(0)\neq 0$;

(C) 取得极大值; (D) 取得极小值.

3. 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为 (　).

(A) $2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$; (B) $4\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$;

(C) $2\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$; (D) $\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\cos 2\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$.

4. 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在; (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在; (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

5. 设 a 为常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{\sin na}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$ (　).

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;

(C) 发散; (D) 敛散性与 a 有关.

二. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x>0$ 时, 函数 $F(x)=\int_1^x\Big(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)\,\mathrm{d}t$ 的单调减少区间是_____.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$_____.

3. 设 $u=u(x)$, $v=v(x)$, $f(x)$ 为可导函数且 $u(x)>0$, 则 $\mathrm{d}f(u^v)=$_____.

4. 设函数 $f(x)=x^2,\ 0\le x<1$, 而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\ -\infty<x<+\infty$, 其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $S\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=$_____.

5. 设 $\lim\limits_{x\to0}(1+ax-x^2)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=2$, 则 $a=$_____.

三. 计算下列极限（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\Big[\Big(\dfrac{2+\cos x}{3}\Big)^x-1\Big]$;　　2. $\lim\limits_{x\to0+}(\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$.

四. 计算下列导数（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设 $y=y(x)$ 是由极坐标方程 $r=a(1+\cos\theta)$ 确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}\sin(xt)=x+t\\ y=\cos(t+y)\end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

五. 计算下列积分（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\displaystyle\int\frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\le x<0\\ \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}, & 0\le x\le1\end{cases}$, 求 $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$.

六. 选做题（ 6 分）下列两题中任选一题.

(1) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\ne0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数.

七. 证明题（ 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

八. 应用题（ 12 分）设抛物线 $y=x^2$ 与 $y=k(x^2-1)\ (k>1)$ 所围平面图形为 D, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V. 当 k 为何值时，体积 V 取最小值？

试题 5. 期末考试样题五

一. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}}{x^k}=c\neq 0$, 则 $k=$ _____.

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导且 $f'(x_0)=A$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)}{h}=$ _____.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)x^n}$ 的收敛域是 _____.

4. $\int_{-5}^{5}\dfrac{x^2+\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$_____.

5. 设 $y(x)$ 在点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$, 且 $y(0)=\mathrm{e}$, 则 $y(2)=$ _____.

二. 单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列结论正确的是（ ）.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$;　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=1$;　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

2. 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$ 的极限（ ）.

(A) 为 0;　(B) 为 1;　(C) 不存在;　　(D) 存在.

3. 下列说法正确的是（ ）.

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$, 则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;

(B) 任意两个无穷小均可以比较大小;

(C) 若 α 为无穷小，则 $\dfrac{1}{\alpha}$ 为无穷小;

(D) 有界变量乘无穷大未必是无穷大量.

4. 设 $f(x)=\int_0^x|x^2-1|\,\mathrm{d}x+(x^2-x-2)|x^3-x|$, 则 $f(x)$ 有几个不可导点 (　).

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 3.

5. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^q(x-1)^p}\,\mathrm{d}x$ 当 (　) 收敛.

(A)　$p>1,q>1$;　　(B)　$p<1,q>1$;

(C)　$p<1,q<1$;　　(D)　$p>1,q<1$.

三. 计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 设 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^2+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$, $x>0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3+x}-\sqrt{4x^2-x})$.

3 求方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数.

5. 设 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x^2}, & x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0\end{cases}$, 求 $\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

四. 证明与讨论题（ 1 题 8 分， 2 题 7 分， 3 题 7 分，共 22 分）

1. 证明 $\mathrm{e}^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，且 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明至少存在一个 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

3. 设 $f(x)$ 连续， $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

试题 6. 兰大一类数学考研样题

一. 填空题(每小题 4 分, 共 24 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=$_____.

(2) 设方程 $x\mathrm{e}^{x-y-z}-x+y-z=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$, 则 $\mathrm{d}z=$_____.

(3) 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 且 $f(x,y)=x\iint_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=$_____.

(4) 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$, $y(\pi)=1$ 的特解为 _____.

(5) 设 $\alpha,\beta,\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}$ 都是 4 维列向量, $A=(\alpha,\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3})$, $B=(\beta,\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3})$ 均为 4 阶方阵, 并且 $|A|=-1$, $|B|=1$, 则 $A+2B=$_____.

(6) 设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, 用 Y 表示对 X 的 3 次独立重复观测中事件 $\left\{x\le\dfrac{1}{2}\right\}$ 的出现次数, 则 $P\{Y=2\}=$_____.

二. 单选题(每小题 4 分, 共 24 分)

(1) 设 $f(x)=a^x+b^x-2$, $(a>b>1,\ ab\ne \mathrm{e})$, 则当 $x\to 0$ 时, 正确的是

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小;

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小;

(D) $f(x)$ 是比 x 比底阶的无穷小.

(2) 设广义积分 $I_1=\displaystyle\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 和 $I_2=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$, 则有

(A) I_1 与 I_2 均收敛; (B) I_1 与 I_2 均发散;

(C) I_1 发散 I_2 收敛; (D) I_1 收敛 I_2 发散.

(3) 一直线过点 $M(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交，该直线的方向向量 $\mathbf{s}$ 为

(A) $(3,-4,1)$; (B) $(1,1,2)$; (C) $(16,19,28)$; (D) $(16,19,-28)$.

(4) 由球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的立体的体积为

(A) $\dfrac{1}{2}\pi a^3$; (B) πa^3; (C) $2\pi a^3$; (D) $\dfrac{2}{3}\pi a^3$.

(5) 设 A 是 n 阶反对称矩阵，且 A 可逆，则有

(A) $AA^T=-E$; (B) $A^{-1}=A^T$;

(C) $A^TA^{-1}=-E$; (D) $|A^T|=-|A|$.

(6) 设随机变量 X 与 Y 独立，且均服从正态分布 $N(0,1)$, 则有

(A) $P\{\min\{X,Y\}\geq 0\}=\dfrac{1}{4}$; (B) $P\{\max\{X,Y\}\geq 0\}=\dfrac{1}{4}$;

(C) $P\{X+Y\geq 0\}=\dfrac{1}{4}$; (D) $P\{X-Y\geq 0\}=\dfrac{1}{4}$.

三. (10 分) 在底半径为 R, 高为 h 的正圆锥体内，内接一个体积最大的长方体，问这长方体的长、宽、高各应等于多少？

四. (10 分) 试确定幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ 的收敛区间，并求其和函数.

五. (10 分) 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，已知曲线积分 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意的 t 下式恒成立

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

求 $Q(x,y)$.

六. (12 分) 计算曲面积分

$$\iint_S(1+z)(x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为半球面 $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$ 朝 y 轴正向的一侧.

七. (12 分) 求微分方程 $y''+7y'+10y=20x+18\mathrm{e}^{x}-3\mathrm{e}^{-5x}$ 的通解.

八. (12 分) 设向量

$$\beta=(1,1,1)^T,\ \alpha_1=(1,1,k)^T,\ \alpha_2=(1,k,1)^T,\ \alpha_3=(k,1,1)^T,$$

问 k 取何值时, β 能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出、唯一线性表出? k 取何值时, β 不能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出?

九. (12 分) 设矩阵 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n>2)$ 阶实方阵, 并且

$$A_{ij}=-a_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n,\ a_{11}\neq 0,$$

证明 A 为正交矩阵.

十. (12 分) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

其中 α 是未知参数, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一样本, 试求: (1) 参数 α 的矩估计量; (2) 参数 α 的最大似然估计量.

十一. (12 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可微, $|f(x)|\leq 1$ 且

$$|f(0)|^2+|f'(0)|^2=4,$$

则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

试题 7. 统考一类数学考研样题

一、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ _____.

(2) 微分方程 $y' = \dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____.

(3) 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \le z \le 1)$ 的下侧, 则 $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$_____.

(4) 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d =$_____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| =$_____.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\} \le 1\} =$_____.

二、单选题 (每小题 4 分，共 32 分)

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量， Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量与微分，若 $\Delta x > 0$, 则

(A) $0 < \mathrm{d}y < \Delta x$; (B) $0 < \Delta y < \mathrm{d}y$;

(C) $\Delta y < \mathrm{d}y < 0$; (D) $\mathrm{d}y < \Delta x < 0$. 【 】

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$ 等于【 】

(A) $\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$; (B) $\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(C) $\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$; (D) $\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛; (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$收敛; (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$收敛. 【 】

(10) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x), C$ 为任意常数，则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$; (B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$;

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$; (D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$. 【 】

(11) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$, 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$;

(B) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$;

(C) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$;

(D) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 【 】

(12) 设 $\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\alpha_{\mathbf{s}}$均为 n维列向量， A是 $m\times n$矩阵，下列选项正确的是

(A) 若$\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\alpha_{\mathbf{s}}$线性相关，则 $\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{1}},\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{s}}$线性相关;

(B) 若$\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\alpha_{\mathbf{s}}$线性相关，则 $\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{1}},\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{s}}$线性无关;

(C) 若$\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\alpha_{\mathbf{s}}$线性无关，则 $\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{1}},\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{s}}$线性相关;

(D) 若$\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\alpha_{\mathbf{s}}$线性无关，则 $\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{1}},\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\mathbf{A}\alpha_{\mathbf{s}}$线性无关. 【 】

(13) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B, 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列的 C, 记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则

(A) $C=P^{-1}AP$; (B) $C=PAP^{-1}$;

(C) $C=P^TAP$; (D) $C=PAP^T$. 【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$; (B) $\sigma_1 > \sigma_2$;

(C) $\mu_1 < \mu_2$; (D) $\mu_1 > \mu_2$. 【 】

三、解答题 (应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

15.(10 分) 设区域 $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$, 计算二重积分

$$D = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

16.(12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi,\ x_{n+1} = \sin x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1/x_n^2}$.

17.(12 分) 将 $\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

18.(12 分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(1) 验证 $f''(u) + \dfrac{f'(u)}{u} = 0$;

(2) 若 $f(1) = 0,\ f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

19.(12 分) 设在上半平面 $D = \{(x,y)\,|\,y > 0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，且对任意的 $t > 0$, 都有 $f(tx,ty) = t^{-2}f(x,y)$, 证明对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x - xf(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

20.(9 分) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = -1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$;

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

21. (9 分) 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量

$$\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\ \alpha_2=(0,-1,1)^T$$

是线性方程组 $A\mathbf{x}=0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ, 使得 $Q'AQ=\Lambda$.

22.(9 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

令 $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数. 求

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F(-\dfrac{1}{2},4)$.

23.(9 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数. 求 θ 的最大似然估计.