高 等 数 学

强化与考研教程

第二册　多元微积分

张志强　编著

兰州大学数学与统计学院

2008 年 9 月

前　　言

本书是作者编著的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》微积分部分的习题解答，也是高等数学习题课教程、强化提高教程、考研辅导教程和独具特色的高等数学复习资料.

原教材是为了将教学与考研相结合，全面提高教学质量和考研率而编写的. 在编写过程中特意将作者多年从事高等数学考研辅导班的教学经验、典型题和研究成果一部分融入例题中，另一部分列入 B 类习题，希望大多数学生能够早动手、早准备，有更多的机会和条件全方位、更系统、更深入地接近考研，在时间上做到抢占先机，在资源上做到拥有优势，在题型上做到穷尽可能，在方法上做到知变应变.

原教材在使用中受到了广大学生的热烈欢迎和高度肯定，通过与其它多种教材和考研资料的反复比较，一致认为独具特色，十分难得，特别是题型的典型性、全面性、系统性和层次性都是其它同类教材无法媲美的，一本书的含金量远远超过了十几本高等数学教材和考研资料的综合. 许多优秀学生非常认真地将 B 类习题从头至尾地做了一遍，极大地增加了考研的自信心并且取得了十分理想的考研效果. 由于多数学生在做 B 类习题时会遇到不少困难，所以强烈要求再出版配套的习题指导，以节省学习时间和提高学习效率.

本书既可以配合原教材使用，也可以独立用于考研复习. 作为习题解答，善用之则有益；依赖之则有害. 希望初学高等数学者坚持在独立思考的基础上使用本书，切不可抄袭以应付作业.

作为强化和考研教程，拥有本书就拥有考研资料优势，精通本书就掌握考研规律. 本书对于考研的各种热点问题作了深入分析和研究、有效拓展和强化；对于考研题型的变化和发展作了科学预测和探索、成功开发和设计；对于考研的历史用题作了系统总结和分类、合理取舍和安排. 本书后面的参考试题是为考研自测和期末复习设计的，期末考试样题的难度高于实际试题.

本书错误和不足在所难免，希望使用者多提批评意见，以便不断完善和改进.

编　者

2008 年 9 月于兰州大学

目　录

第八章　空间解析几何 **5**
§8.1　向量代数 5
习题 8.1 A 5
习题 8.1 B 9
§8.2　平面与直线 12
习题 8.2 A 12
习题 8.2 B 17
§8.3　曲线与曲面 27
习题 8.3 A 27
习题 8.3 B 32
总习题八 44

第九章　多元函数的微分 54
§9.1　多元函数的极限 54
习题 9.1 A 54
习题 9.1 B 59
§9.2　多元函数的偏导数 64
习题 9.2 A 64
习题 9.2 B 70
§9.3　多元函数的全微分 75
习题 9.3 A 75
习题 9.3 B 80
§9.4　多元函数的微分法 88
习题 9.4 A 88
习题 9.4 B 100
§9.5　偏导数的应用 124
习题 9.5 A 124
习题 9.5 B 135
总习题九 152

第十章 多元函数的微分 166
§10.1 黎曼积分与微元法 166
习题 10.1 A 166
习题 10.1 B 169
§10.2 重积分的计算 176
习题 10.2 A 176
习题 10.2 B 186
§10.3 常用坐标变换 203
习题 10.3 A 203
习题 10.3 B 212
§10.4 线面积分的计算 226
习题 10.4 A 226
习题 10.4 B 232
§10.5 黎曼积分的应用 242
习题 10.5 A 242
习题 10.5 B 250
总习题十 255

第十一章 有向域上的积分 266
§11.1 有向曲线上的积分 266
习题 11.1 A 266
习题 11.1 B 269
§11.2 有向曲面上的积分 272
习题 11.2 A 272
习题 11.2 B 278
§11.3 定向类积分关系 284
习题 11.3 A 284
习题 11.3 B 286
§11.4 积分公式的应用 289
习题 11.4 A 289
习题 11.4 B 292
总习题十一 298

第十二章 场的微分与积分 306
§12.1 数量场与梯度场 306
习题 12.1 A 306
习题 12.1 B 311
§12.2 场的通量与散度 319
习题 12.2 A 319
习题 12.2 B 322
§12.3 场的环量与旋度 326
习题 12.3 A 326
习题 12.3 B 330
总习题十二 341

第十三章 常微分方程 II 346
§12.1 一阶微分方程 346
习题 12.1 A 346
习题 12.1 B 352
§12.2 常微分方程组 364
习题 12.2 A 364
习题 12.2 B 366

参考试题 **374**
试题 1 期末考试样题一 374
试题 2 期末考试样题二 376
试题 3 期末考试样题三 379
试题 4 期末考试样题四 382
试题 5 期末考试样题五 385
试题 6 兰州大学高数考研样题 388
试题 7 统考一类数学考研样题 391

第八章　空间解析几何

§8.1　向量代数

习　题 8.1 A

1. 填空：

(1) 设 $\boldsymbol{a}=(3,2,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,\frac{4}{3},k)$, 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $k=$_____; 若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 则 $k=$_____.

(2) 设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$_____.

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,5)$, 若 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})=10$, 则 $\boldsymbol{c}=$_____.

(4) 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$_____.

(5) 设 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2}{3}\pi$, 则 $\lambda=$_____ 时，向量 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直.

(6) 设 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$, 则 $|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=$_____.

(7) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$_____.

(8) 设向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$, 与 $\boldsymbol{c}=(2,0,2)$ 的内积为 -10, 则 $\boldsymbol{x}=$_____.

(9) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$|\boldsymbol{b}|=1$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=$_____.

解 (1) $-\dfrac{26}{3}$, $\dfrac{2}{3}$. (2) 24.

(3) (方法一) 令 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 则有

$$\begin{cases} 2c_1-3c_2+c_3=0, \\ c_1-2c_2+5c_3=0, \\ c_1+2c_2-7c_3=10. \end{cases}$$

解之得 $\boldsymbol{c}=\left(\dfrac{65}{12},\dfrac{15}{4},\dfrac{5}{12}\right)$.

(方法二) 按题意，可设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\lambda(-13,-9,-1)$, 因此有

$$\lambda=\frac{10}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})}=-\frac{5}{12}.$$

于是 $\boldsymbol{c}=\left(\dfrac{65}{12},\dfrac{15}{4},\dfrac{5}{12}\right)$.

(4) 4. (5) 40. (6) $11\sqrt{3}$. (7) $-\dfrac{3}{2}$. (8) $(-10,5,5)$.

(9) 由于 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)} \\ &= \lim_{x\to0}\frac{2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2|\boldsymbol{b}|^2}{x\cdot2|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.\end{aligned}$$

2. 设 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2,1)$, $\boldsymbol{c}=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{m}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, 求 $|\boldsymbol{m}|$.

解 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=(-1,2,-1)$, $|\boldsymbol{m}|=\sqrt{6}$.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(11,10,12),\boldsymbol{b}=(4,0,3)$, 求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的长度，方向余弦， $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角以及 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影与投影向量.

解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{365}$, $|\boldsymbol{b}|=5$.

$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\dfrac{11}{\sqrt{365}},\dfrac{10}{\sqrt{365}},\dfrac{12}{\sqrt{365}}\right)$.

$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为 $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\left(\dfrac{4}{5},0,\dfrac{3}{5}\right)$.

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角： $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{16}{\sqrt{365}}$.

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影： $\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = 16$.

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量： $\left(\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \left(\dfrac{64}{5},0,\dfrac{48}{5}\right)$.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标为 $A(1,2,0), B(3,0,-3), C(5,2,6)$, 求此三角形的面积， AB 边上的高以及 $\sin\angle A$.

解 $\overrightarrow{AB} = (2,-2,-3), \overrightarrow{AC} = (4,0,6), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}, |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{13}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-12,-24,8).$$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = 28$.

三角形面积 $= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = 14$.

所求高 $= |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|/|\overrightarrow{AB}| = \dfrac{28}{\sqrt{17}}$.

$$\sin\angle A = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}.$$

5. 试证 $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 共面，并将 $\boldsymbol{c}$ 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示出来.

解 由于 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$, 所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 根据 $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 可得

$$\begin{cases} 1 = -\lambda + 2\mu \\ 3 = 3\lambda - 3\mu \\ -2 = 2\lambda - 4\mu \end{cases}.$$

解之得 $\lambda = 3,\ \mu = 2$. 由此可得 $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

6. 若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, 并且向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 由 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}) = 0, (\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) = 0$ 可得

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

因此 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \dfrac{1}{2}$.

7. 求与向量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = -18$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

解 由于 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 所以根据 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}$ 共线可设, $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} = (2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$. 代入 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = -18$ 可得 $\lambda = -2$. 故 $\boldsymbol{x} = (-4, 2, -4)$.

8. 化简下列各式:

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]$; (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(3) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解 (1)

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})] = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) = 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

(2)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$$

$$= (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|)^2\sin^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|)^2\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|)^2.$$

(3)

$$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

9. 一向量与 x 、 y 轴成等角, 与 z 轴所构成的角是它们的 2 倍, 试确定该向量的方向.

解 设该向量与 x 、 y 轴的夹角为 α, 则与 z 轴的夹角为 2α. 根据

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1,$$

可知, $\cos\alpha = 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故该向量的方向为

$$(\cos\alpha, \cos\alpha, \cos 2\alpha) = (0, 0, -1) \text{ 或 } \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\Big).$$

10. 设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 证明向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是惟一存在实数 m, 使得 $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$.

证 由于 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线 $\iff$ $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = 0$ 有解使得 $\mu \neq 0$. 令 $m = -\dfrac{\lambda}{\mu}$ 可得所求结论.

习 题 8.1 B

1. 填空：

(1) 设 $\boldsymbol{x}=(1,k,k^2)$ 能由 $\boldsymbol{a}=(1-k,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,1+k,1)$, $\boldsymbol{c}=(1,1,k)$ 惟一地线性表示，则 $k\neq$ _____.

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(t,2,t)$, $\boldsymbol{c}=(2,3,t)$, 当 $t=$ _____ 时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关.

(3) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性无关，若 $l\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $m\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ 也线性无关，则 l,m 的关系是 _____.

(4) 若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 则 $m=$ _____.

解 (1) 根据 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\neq 0$ 可得 $k\neq 0$.

(2) 根据 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$ 可知 $t=2$.

(3) 根据 $(l\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},m\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix} l & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & m\end{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\neq\boldsymbol{0}$, 有

$$lm+1\neq 0.$$

(4) $m=-2$.

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 证明 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 可知,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}.$$

于是由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线可知, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

3. 证明向量 $\boldsymbol{c}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的方向.

证 由于

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的方向，所以

$$\boldsymbol{c}=\frac{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{v}$$

也为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的方向.

4. 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, 证明向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

证 根据 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ 可知,

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}.$$

故 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

5. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，证明向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是惟一存在实数 m,n, 使得 $\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$.

证 设 $\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 蕴涵 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{r},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性无关. 因此 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\lambda\neq0$, 使得 $\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 故令 $m=-\mu/\lambda, n=-\nu/\lambda$ 即可.

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角为 α,β,γ, 证明 $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=-1$.

证 由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 所以

$$\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=-1.$$

7. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，问在什么条件下，向量 $\boldsymbol{u}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}=\mu_1\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$ 共线.

解 由于 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 所以 $\lambda_1\mu_2=\lambda_2\mu_1$ 时，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 共线.

8. 求同时满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=m,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}$ 的向量 $\boldsymbol{r}$.

解 由于 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, 所以

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}.$$

9. 解释下列等式的几何意义：

(1) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

解 (1) 体积计算具有单边齐次性.

(2) 体积计算具有单边可加性.

(3) 同底等高平行六面体具有相同的体积.

10. 证明下列恒等式：

(1) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$;

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$;

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{p})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{q})=0$.

证 (1) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))=\boldsymbol{a}\times\Big[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\Big]$

$$=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}).$$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\Big[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\Big]$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\Big[(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\Big]=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$$

(3) 由于

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{p},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}),$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{r},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{r},\boldsymbol{q})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}),$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}),$$

所以原式成立。

11. 设点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4)$ 不共面. 试求四面体 $ABCD$ 的重心坐标.

解 设 CD 中点为 E, 则 E 的坐标为 $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{r}_3+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{r}_4$, 于是四面体 $ABCD$ 的重心为三角形 ABE 的重心，故有

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{3}\boldsymbol{r}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{r}_2+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_4\Big)=\frac{\boldsymbol{2r_1+2r_2+r_3+r_4}}{6}.$$

同理有 $\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}+\boldsymbol{2r_3}+\boldsymbol{2r_4}}{6}$. 于是四面体 $ABCD$ 的重心坐标为

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}+\boldsymbol{r_3}+\boldsymbol{r_4}}{4}.$$

§8.2 平面与直线

习 题 8.2 A

1. 填空：

(1) 与两条直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是 _____.

(2) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2,\\ y=3t-4,\\ z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是 _____.

(3) 已知两直线方程是 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行 L_2 的平面方程是 _____.

解 (1) $x-y+z=0$.

(2) $x-3y-z+4=0$.

(3) $x-3y+z+2=0$.

2. 化直线方程 $L:\begin{cases}2x+y+3z=0\\ 3x+2y+z-4=0\end{cases}$ 为点向式方程和参数式方程.

解 令 $z=0$, 解 $\begin{cases}2x+y=0\\3x+2y-4=0\end{cases}$ 可得 $x=-4, y=8$. 给定直线的方向为

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&3\\3&2&1\end{vmatrix}=(-5,7,1).$$

点向式方程: $\dfrac{x+4}{-5}=\dfrac{y-8}{7}=\dfrac{z}{1}$, 参数式方程: $\begin{cases}x=-4-5t\\y=8+7t\\z=t\end{cases}$.

3. 求过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且垂直于平面 $3x+2y-z-5=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&2\\3&2&-1\end{vmatrix}=(-1,8,13).$$

所求平面方程为 $-(x-1)+8(y+2)+13(z-2)=0$, 即 $x-8y-13z+9=0$.

4. 求直线 $\begin{cases}3x+y-z+1=0\\2x-y+4z-2=0\end{cases}$ 与平面 $x-8y+3z-4=0$ 的夹角正弦.

解 直线方向为

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&1&-1\\2&-1&4\end{vmatrix}=(3,-14,-5).$$

设所求夹角为 θ, 则有

$$\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{(3,-14,-5)}{\sqrt{230}}\cdot\frac{(1,-8,3)}{\sqrt{74}}=\frac{100}{\sqrt{230\times74}}.$$

5. 求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$, 而与三坐标面所构成的四面体体积为一个单位的平面.

解 设所求平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, 则有

$$\frac{abc}{6}=1,\quad \left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)=t(6,1,6).$$

联立解得 $t=\frac{1}{6}, a=1, b=6, c=1$. 故所求平面方程为

$$6x+y+6z=6.$$

6. 求点 $P(3,-1,3)$ 到直线 $L:\begin{cases}2x-y+z+5=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 的距离.

解 令 $z=0$, 解 $\begin{cases}2x-y+5=0\\ x+y+1=0\end{cases}$ 的直线上一点 $(-2,1,0)$ 。两点连线向量为 $(-2-3,1+1,0-3)=(-5,2,-3)$ 。 L 的方向向量为

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 2&-1&1\\ 1&1&-1\end{vmatrix}=(0,3,3).$$

于是 P 到 L 的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{0^2+3^2+3^2}}\left\|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ -5&2&-3\\ 0&3&3\end{vmatrix}\right\|=\frac{5}{2}\sqrt{6}.$$

7. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{1}$ 的距离.

解 P 到 L 的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}\left\|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 1-1&2-2&-2-3\\ 2&-3&1\end{vmatrix}\right\|=5\sqrt{\frac{13}{14}}.$$

8. 求通过下列两平面 $\pi_1: 2x+y-z-2=0$ 和 $\pi_2: 3x-2y-2z+1=0$ 的交线, 且与平面 $\pi_3: 3x+2y+3z-6=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$\lambda(2x+y-z-2)+\mu(3x-2y-2z)=0.$$

根据垂直条件有

$$3(2\lambda+3\mu)+2(\lambda-2\mu)+3(-\lambda-2\mu)=0.$$

由此可得， $\mu=5\lambda$. 于是所求平面方程为

$$17x-9y-11z+3=0.$$

9. 求过点 $(-1,-4,3)$ 并与下列两直线

$$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\ x+3y=-5\end{cases}\quad \text{和 } L_2:\begin{cases}x=2+4t,\\ y=-1-t,\\ z=-3+2t\end{cases}$$

都垂直的直线方程.

解 L_1 的方向为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(-3,1,10).$$

所求直线的方向为

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 1 & 10\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=(12,-46,-1).$$

于是所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{-46}=\frac{z-3}{-1}.$$

10. 求直线 $L_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{9}=\dfrac{z-1}{6}$ 与 $L_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$ 所成的角.

解

$$\cos\langle L_1, L_2\rangle = \frac{(2,9,6)}{\sqrt{2^2+9^2+6^2}} \cdot \frac{(3,6,2)}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{72}{77}.$$

11. 求直线 $\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$ 与平面 $x+y+z=9$ 的交点与夹角.

解 解三联立方程可得交点 $\left(\frac{9}{7}, \frac{8}{7}, \frac{46}{7}\right)$. 直线的方向为

$$\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,-5).$$

设所求夹角为 θ, 则有

$$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{|(1,-3,-5)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{1^2+3^2+5^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{\frac{7}{15}}.$$

12. 求点 $P(4,3,10)$ 关于直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ 的对称点.

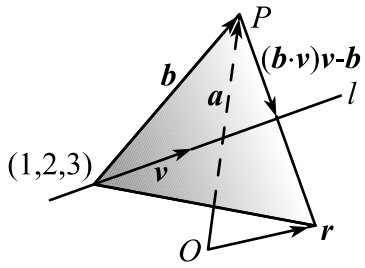

图 8.1

解 令 $\boldsymbol{a} = (4,3,10), \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - (1,2,3) = (3,1,7)$,

$$\boldsymbol{v} = \frac{(2,4,5)}{\sqrt{2^2+4^2+5^2}} = \frac{(2,4,5)}{\sqrt{45}},$$

则对称点为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{a} + 2\left[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} - \boldsymbol{b}\right] \\ &= (4,3,10) + 2\left[(2,4,5) - (3,1,7)\right] = (2,9,6). \end{aligned}$$

习 题 8.2 B

1. 求过 $A(1,2,1)$ 点且与直线

$$L_1:\begin{cases}x+2y-3z+2=0\\ x-y+z-1=0\end{cases}\quad \text{和 } L_2:\begin{cases}2x-y+z=0\\ x-y+2z+1=0\end{cases}$$

平行的平面方程.

解 L_1 的方向为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 1&2&-3\\ 1&-1&1\end{vmatrix}=(-1,-4,-3).$$

L_2 的方向为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 2&-1&1\\ 1&-1&2\end{vmatrix}=(-1,-3,-1).$$

所求平面的法向为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{v_2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ -1&-4&-3\\ -1&-3&-1\end{vmatrix}=(-5,2,-1).$$

所求平面的方程为

$$-5(x-1)+2(y-2)-(z-1)=0.$$

2. 直线过点 $(-3,5,-9)$, 且与两直线

$$L_1:\begin{cases}y=3x+5\\ z=2x-3\end{cases}\quad \text{和 } L_2:\begin{cases}y=4x-7\\ z=5x+10\end{cases}$$

相交，求此直线方程.

解 将 $(-3,5,-9)$ 代入过 L_1 平面：

$$\lambda(3x-y+5)+\mu(2x-z-3)=0,$$

可得 $\lambda=0$. 故过 $(-3,5,-9)$ 和 L_1 的平面方程为 $2x-z-3=0$.

将 $(-3,5,-9)$ 代入过 L_2 平面：

$$\lambda(4x-y-7)+\mu(5x-z+10)=0,$$

可得 $\mu=6\lambda$. 故过 $(-3,5,-9)$ 和 L_2 的平面方程为 $34x-y-6z+53=0$.

联立可得所求直线方程为 $\begin{cases}2x-z-3=0\\34x-y-6z+53=0\end{cases}$.

3. 求过点 $(-1,0,4)$, 平行于平面 $3x-4y+z=10$, 且与直线 $x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解 过点 $(-1,0,4)$ 以 $(3,-4,1)$ 为法向量的平面方程为

$$3(x+1)-4y+z-4=0.$$

过点 $(-1,0,4)$ 和直线 $x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix}x+1 & y & z-4\\ 1 & 1 & 2\\ -1+1 & 3-0 & 0-4\end{vmatrix}=0.$$

化减联立可得所求直线方程为 $\begin{cases}3x-4y+z-1=0\\-10x+4y+3z-22=0\end{cases}$.

4. 设直线 L_1 过点 $(7,3,5)$ 且方向余弦等于 $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}$, 另有一直线 L_2 与 L_1 相交， L_2 过点 $(2,-3,-1)$ 且与 x 轴成 60° 角，求直线 L_2 的方程.

解 令 $\boldsymbol{v}_1=(1,2,2),\boldsymbol{u}=(7,3,5)-(2,-3,-1)=(5,6,6)$. 又设 $\boldsymbol{v}_2=(\cos 60^\circ,t,s)$ 是 L_2 的单位向量，则 $t^2+s^2=\dfrac{3}{4}$, 且 $\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{u}$ 共面，即

$$\begin{vmatrix}1/2 & t & s\\ 1 & 2 & 2\\ 5 & 6 & 6\end{vmatrix}=0.$$

联立解得 $t=s=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. 故 L_2 方程为

$$\frac{x-2}{\pm 2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}.$$

5. 试确定 λ 值，使得直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 相交.

解 根据共面条件

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+1 & -1-1 & 1-0 \end{vmatrix}=0,$$

解得 $\lambda=\dfrac{5}{4}$ 时相交.

6. 试确定 λ 值，使得直线 $L_1:\dfrac{x-1}{\lambda}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-3}$ 与 $L_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+14}{7}$ 相交，并求出交点和由这两个相交直线所确定的平面方程.

解 根据共面条件

$$\begin{vmatrix} \lambda & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1+3 & -4-9 & 3+14 \end{vmatrix}=0,$$

解得 $\lambda=2$ 时相交.

L_1 的参数方程为：$x=1+2t, y=-4+5t, z=3-3t$, 代入 L_2 方程可解得交点为 $(x,y,z)=(3,1,0)$. 所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}=0.$$

7. 求直线 $L_1:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 之间的距离.

解 令 $y=0$, 解 $\begin{cases} x-z-1=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$ 得 $\boldsymbol{r}_1=(1,0,0)$; 解 $\begin{cases} x-z-2=0 \\ x+2z+4=0 \end{cases}$ 得 $\boldsymbol{r}_2=(0,0,-2)$. L_1, L_2 的方向向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(0,1,-1),\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(6,-3,0).$$

两异面直线间的距离为

$$d=\frac{|(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})|}{|\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{v_2}|}=\frac{5}{3}.$$

8. 判断直线 $L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ 是否共面，如果共面求其交点，否则求其公垂线的长度.

解 $(-1,0,1)$ 到 $(0,-1,2)$ 的连接向量为 $(1,-1,1)$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=2,$$

所以 L_1 与 L_2 为异面直线. 公垂线方向为

$$(1,1,2)\times(1,3,4)=2(-1,-1,1),$$

连接向量 $(1,-1,1)$ 在 $(-1,-1,1)$ 上的投影长为

$$(1,-1,1)\cdot\frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

故公垂线的长度为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

9. 判断直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 是否共面，如果共面求其交点，否则求其公垂线的长度.

解 $(0,-3,0)$ 到 $(1,-2,2)$ 的连接向量为 $(1,1,2)$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

所以 L_1 与 L_2 为共面直线. 解得交点为 $(0,-3,0)$.

10. 过直线 $\begin{cases} x+2y-2z+5=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$ 作与单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的平面.

解 设所求平面方程为

$$L:(x+2y-2z+5)+\lambda(2x+y-z+1)=0,$$

则点 $(0,0,0)$ 到 L 的距离为

$$1=\frac{|5+\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(2+\lambda)^2+(-2-\lambda)^2}}.$$

整理得 $5\lambda^2+2\lambda-16=0$, 解得 $\lambda_1=\dfrac{8}{5},\lambda_2=-2$. 故所求平面方程为

$$(x+2y-2z+5)+\frac{8}{5}(2x+y-z+1)=0$$

和

$$(x+2y-2z+5)-2(2x+y-z+1)=0.$$

11. 试证直线 $L_1:\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ 和直线 $L_2:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{2}$ 相交, 并求出交点和由这两个相交直线所确定的平面方程.

解 $(-3,-1,2)$ 到 $(3,1,6)$ 的连接向量为 $(6,2,4)$. 由于

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

所以 L_1 与 L_2 为共面直线. 由于 $(5,2,4)$ 与 $(3,1,2)$ 不平行, 所以 L_1 与 L_2 有惟一交点. 解得交点为 $(-3,-1,2)$.

所求平面的法向量为

$$(5,2,4)\times(3,1,2)=(0,2,-1).$$

于是可得所求平面方程为

$$2(y+1)-(z-2)=0.$$

12. 通过平面 $\pi: x+y+z=1$ 与直线 $L_1: \begin{cases} y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ 的交点，在平面 π 内作直线 L, 使得 L 垂直于 L_1, 求 L 的方程.

解 平面 π 与直线 L_1 的交点为 $(1,1,-1)$. 直线 L_1 的方向为 $(1,0,0)$. 过 $(1,1,-1)$ 点和直线 L_1 的平面方程为 $x-1=0$. 于是所求直线的方程为

$$L: \begin{cases} x-1=0, \\ x+y+z=1. \end{cases}$$

13. 选择题 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3), \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 则三条直线 L_1, L_2, L_3 相交于一点的充要条件是 _____.

(A) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性相关; (B) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性无关;

(C) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$可用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性表示; (D) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性相关, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$线性无关.

其中

$$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$L_3: a_3x+b_3y+c_3=0$$

且 $a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3.$

解 三条直线 L_1, L_2, L_3 相交于一点的充要条件是

$$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$L_3: a_3x+b_3y+c_3=0$$

具有惟一解 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$线性相关, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$线性无关.

(A),(C) 可能多解, (B) 无解, (D) 具惟一解.

14. 分别确定 a,b 的值，使得三个平面

$$2x-y+3z-1=0,\ x+2y-z+b=0,\ x+ay-6z+10=0$$

(1) 有惟一公共点； (2) 通过同一直线； (3) 有三条互相平行的交线.

解 解

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & -6 \end{vmatrix} = 0$$

得 $a=7$. 解

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & b \\ 1 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

得 $b=17$.

(1) 当 $a\neq 7$ 时，三平面有惟一交点.

(2) 当 $a=7, b=17$ 时，三平面通过同一直线.

(3) 当 $a=7, b\neq 17$ 时，三平面有三条互相平行的交线.

15. 试用向量运算证明三角形面积的海伦 (Heron) 公式：

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

其中 S 为三角形面积， a,b,c 为三角形边长， $2p=a+b+c$.

证 按照向量运算，有三角形的面积关系：

$$\begin{aligned} S^2 &= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = a^2b^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2 \\ &= a^2b^2-\Big|\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\Big|^2 \\ &= \frac{1}{4}(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2) \\ &= \frac{1}{4}\Big[c^2-(a-b)^2\Big]\Big[(a+b)^2-c^2\Big] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c).$$

16. 问 λ, μ 取何值时，三平面

$$\lambda x + y + z = 1,\ x + \mu y + z = 2,\ x + 2\mu y + z = 3$$

相交.

解 解

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = 0$$

得 $\lambda = 1$ 或 $\mu = 0$.

当 $\lambda \neq 1, \mu \neq 0$ 时，三平面有惟一交点. 当 $\lambda = 1$ 时，

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

当 $\mu = 0$ 时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & 1 & 2 \\ \mu & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以当 $\lambda = 1$ 或 $\mu = 0$ 时，三平面无交.

17. 问 λ 取何值时，三平面

$$(1-\lambda)x - 2y + 4z = 0,\ 2x + (3-\lambda)y + z = 0,\ x + y + (1-\lambda)z = 0$$

有惟一交点.

解 由

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

可得 $(\lambda^2-2\lambda+6)(\lambda-3)=0$. 由此可知，当且仅当 $\lambda\neq 3$ 时，三平面有惟一交点.

18. 问 λ 取何值时，三平面

$$\begin{aligned}&\lambda x+y+z=1,\\&x+\lambda y+z=\lambda,\\&x+y+\lambda z=\lambda^2\end{aligned}$$

(1) 有惟一交点； (2) 无交点； (3) 通过同一直线.

解 由

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0$$

可得 $(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$. 由此可知,

(1) 当且仅当 $\lambda\neq 1,-2$ 时，三平面有惟一交点.

(2) 当且仅当 $\lambda=-2$ 时，三平面无交点. 因为

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix}\neq 0.$$

(3) 当且仅当 $\lambda=1$ 时，三平面通过同一直线.

19. 问 λ 取何值时，三平面

$$\begin{aligned}&(2-\lambda)x+2y-2z=1,\\&2x+(5-\lambda)y-4z=2,\\&-2x-4y+(5-\lambda)z=-\lambda-1\end{aligned}$$

(1) 有惟一交点； (2) 无交点； (3) 通过同一直线.

解 由

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

可得 $(\lambda-10)(\lambda-1)^2=0$. 由此可知,

(1) 当且仅当 $\lambda\neq 1,10$ 时, 三平面有惟一交点.

(2) 当且仅当 $\lambda=10$ 时, 三平面无交点. 因为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & -4 & -\lambda-1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

(3) 当且仅当 $\lambda=1$ 时, 三平面通过同一直线.

20. 设 $\boldsymbol{a}=(\lambda,2,10)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1,5)$, $\boldsymbol{c}=(-1,1,4)$, $\boldsymbol{r}=(1,\mu,-1)$, 问 λ,μ 为何值时

(1) $\boldsymbol{r}$ 不能被 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{r}$ 可被 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 惟一线性表示;

(3) $\boldsymbol{r}$ 可被 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性表示并写出表示关系式.

解 由

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 10 \\ -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$$

可得 $\lambda=-4$. 由

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & \mu & -1 \end{vmatrix}=0$$

可得 $\mu=0$.

(1) 当 $\lambda=-4,\mu\neq 0$ 时, $\boldsymbol{r}$ 不能被 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性表示.

(2) 当 $\lambda\neq -4$ 时, $\boldsymbol{r}$ 可被 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 惟一线性表示;

(3) 当 $\lambda\neq -4$ 或 $\lambda=-4,\mu=0$ 时, $\boldsymbol{r}$ 可被 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性表示.

当 $\lambda\neq -4$ 时,

$$\boldsymbol{r}=\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{a}+\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{r})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{c}.$$

当 $\lambda=-4,\mu=0$ 时,

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}.$$

21. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性无关，若

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_1=\lambda_{11}\boldsymbol{a}+\lambda_{12}\boldsymbol{b}+\lambda_{13}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{r}_2=\lambda_{21}\boldsymbol{a}+\lambda_{22}\boldsymbol{b}+\lambda_{23}\boldsymbol{c},\\ \boldsymbol{r}_3=\lambda_{31}\boldsymbol{a}+\lambda_{32}\boldsymbol{b}+\lambda_{33}\boldsymbol{c}\end{cases}$$

问在什么条件下， $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 线性相关？

解 由于

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=\begin{vmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}&\lambda_{13}\\ \lambda_{21}&\lambda_{22}&\lambda_{23}\\ \lambda_{31}&\lambda_{32}&\lambda_{33}\end{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

所以在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性无关的前提下，当且仅当

$$\begin{vmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}&\lambda_{13}\\ \lambda_{21}&\lambda_{22}&\lambda_{23}\\ \lambda_{31}&\lambda_{32}&\lambda_{33}\end{vmatrix}=0$$

时， $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 线性相关.

§8.3 曲线与曲面

习 题 8.3 A

1. 求曲线 $\begin{cases}z=2-x^2-y^2\\ z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 (1) 消 z 得

$$2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2.$$

(2) 消 x 得

$$z = 2 - (1 \pm \sqrt{z - (y-1)^2})^2 - y^2.$$

(3) 消 y 得

$$z = 2 - x^2 - (1 \pm \sqrt{z - (x-1)^2})^2.$$

2. 求直线 $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$ 在平面 $4x - y + z = 1$ 上的投影直线的方程.

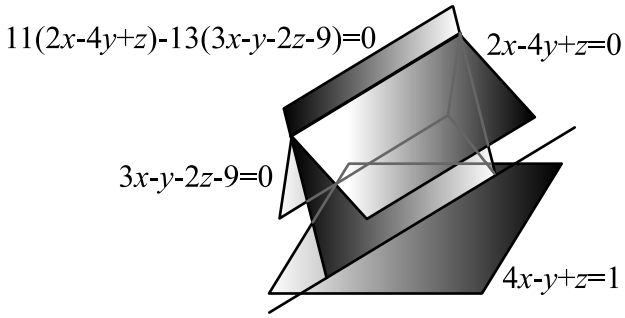

图 8.2

解 令

$$(2x - 4y + z) + \lambda(3x - y - 2z - 9) = 0,$$

则有法向量 $(2 + 3\lambda, -4 - \lambda, 1 - 2\lambda)$. 由

$$(2 + 3\lambda, -4 - \lambda, 1 - 2\lambda) \cdot (4, -1, 1) = 0$$

解得 $\lambda = -\dfrac{13}{11}$. 于是投影直线的方程为

$$\begin{cases} 11(2x - 4y + z) - 13(3x - y - 2z - 9) = 0, \\ 4x - y + z = 1. \end{cases}$$

3. 求球面方程，该球面内切于由平面 $x + y + z - 1 = 0$ 及三坐标平面所围成的四面体.

解 设球心坐标为 (t,t,t), 则 (t,t,t) 到平面 $z=0$ 和 $x+y+z-1=0$ 距离相等，即

$$t=\frac{|3t-1|}{\sqrt{3}}.$$

由此可得， $t=\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}$. 于是所求球面方程为

$$\Big(x-\frac{1}{3-\sqrt{3}}\Big)^2+\Big(y-\frac{1}{3-\sqrt{3}}\Big)^2+\Big(z-\frac{1}{3-\sqrt{3}}\Big)^2=\frac{1}{(3-\sqrt{3})^2}.$$

4. 求直线 $\begin{cases}3x+y-z+1=0\\2x-y+4z-2=0\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 (1) 消 z 得投影曲线

$$\begin{cases}5y-14z+8=0,\\x=0.\end{cases}$$

(2) 消 y 得投影曲线

$$\begin{cases}5x+3z-1=0,\\y=0.\end{cases}$$

(3) 消 z 得投影曲线

$$\begin{cases}14x+3y+2=0,\\z=0.\end{cases}$$

5. 一动点与点 $A(0,0,1)$ 的距离为与平面 $z=4$ 的距离之半，求动点轨迹的方程.

解 按照题意，有

$$x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}(z-4)^2.$$

6. 求准线为 $f(x,z)=0, y=0$, 母线方向数为 l,m,n 的柱面方程.

解 所求柱面方程为

$$\begin{cases} \dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z}{n}, \\ f(x,z)=0. \end{cases}$$

消去 x,y 可得

$$f\Big(X-\frac{l}{n}\,Z, Y-\frac{m}{n}\,Z\Big)=0.$$

7. 求准线为 $x^2+y^2=R^2, z=0$, 母线平行于 $(1,2,3)$ 的柱面方程.

解 所求柱面方程为

$$\begin{cases} \dfrac{X-x}{1}=\dfrac{Y-y}{2}=\dfrac{Z}{3}, \\ x^2+y^2=R^2. \end{cases}$$

消去 x,y 可得

$$\Big(X-\frac{1}{3}\,Z\Big)^2+\Big(Y-\frac{2}{3}\,Z\Big)^2=R^2.$$

8. 求准线为 $f(x,y)=0, z=4$, 顶点为原点的锥面方程.

解 所求锥面方程为

$$\begin{cases} \dfrac{X-0}{0-x}=\dfrac{Y-0}{0-y}=\dfrac{Z-0}{0-4}, \\ f(x,z)=0. \end{cases}$$

消去 x,y 可得

$$f\Big(\frac{4X}{Z}, \frac{4Y}{Z}\Big)=0.$$

9. 求抛物线 $\begin{cases} z^2=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴所生成的旋转面方程和参数方程.

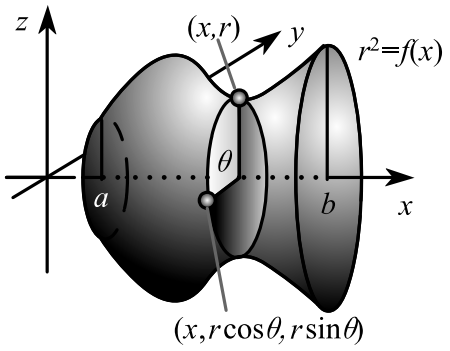

图 8.3

解 由于旋转半径为 $\sqrt{f(x)}$, 所以绕 x 轴得到的旋转面方程为

$$y^2 + z^2 = f(x).$$

引入旋转角 θ, 可得到旋转面的参数方程

$$x = x,\ y = \sqrt{f(x)}\ \cos\theta,\ z = \sqrt{f(x)}\ \sin\theta.$$

10. 设 $\Gamma:\ x = x(t),\ y = y(t)\ (a \le t \le b)$ 为一平面参数曲线, 如果 $y(t)$ 为非负函数, 试求 Γ 绕 x 轴得到的旋转面方程.

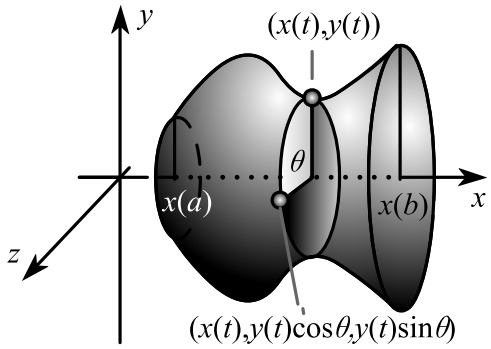

图 8.4

解 由于 $y(t)$ 为旋转半径, 所以绕 x 轴得到的旋转面方程为

$$\Gamma:\ x = x(t),\ \sqrt{y^2 + z^2} = y(t).$$

引入旋转角 θ, 可得到旋转面的参数方程

$$\Gamma:\ x=x(t),\ y=y(t)\cos\theta,\ z=y(t)\sin\theta.$$

其中 $a\le t\le b,\ 0\le\theta\le 2\pi$.

习 题 8.3 B

1. 求直线 $\begin{cases}2x-3y+4z-12=0\\ x+4y-2z-10=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z-1=0$ 上的投影直线方程.

解 令

$$(2x-3y+4z-12)+\lambda(x+4y-2z-10)=0,$$

则得法向量 $(2+\lambda,-3+4\lambda,4-2\lambda)$. 由

$$(2+\lambda,-3+4\lambda,4-2\lambda)\cdot(1,1,1)=0$$

解得 $\lambda=-1$. 于是投影直线的方程为

$$\begin{cases}(2x-3y+4z-12)-(x+4y-2z-10)=0,\\ x+y+z-1=0.\end{cases}$$

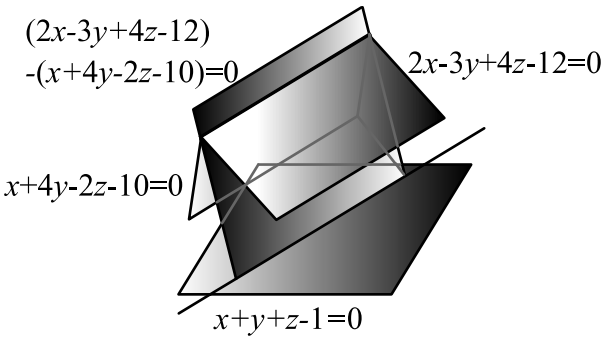

图 8.5

2. 若锥面的顶点在 $A(0,0,6)$, 而其母线与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切, 求锥面方程.

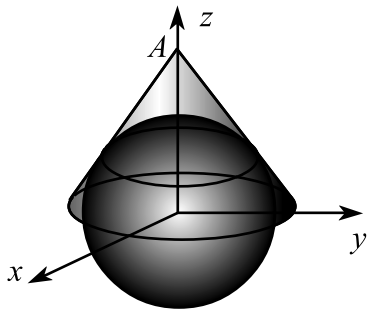

图 8.6

解 所求锥面方程为

$$\begin{cases} \dfrac{X-0}{0-x}=\dfrac{Y-0}{0-y}=\dfrac{Z-6}{6-z}, \\ x^2+y^2+z^2=4, \\ (0-x,0-y,6-z)\cdot(x,y,z)=0. \end{cases}$$

消去 x,y,z 得

$$25X^2+25Y^2=3Z^2.$$

3. 光线沿直线 $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$ 投射到平面 $x+y+z+1=0$ 上, 求反射线所在的直线方程.

解 解联立方程组

$$\begin{cases} x+y-3=0, \\ x+z-1=0, \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$$

得反射点 $(x,y,z)=(5,-2,-4)$. 光线方向为

$$\boldsymbol{v}=(1,1,0)\times(1,0,1)=(1,-1,-1).$$

反射方向为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v} - 2\Big(\boldsymbol{v}\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\Big)\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\\ &= (1,-1,-1)+\frac{2}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(5,-1,-1).\end{aligned}$$

由此可知，反射线方程为

$$5(x-5)-(y+2)-(z+4)=0.$$

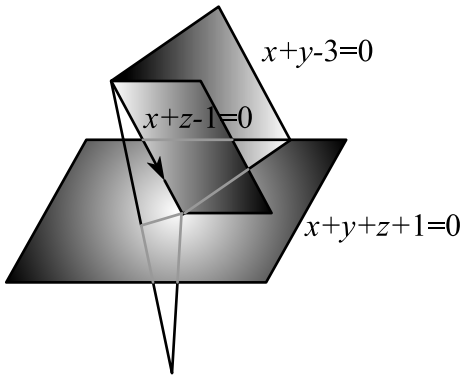

图 8.7

4. 求椭圆 $\begin{cases}9x^2+z^2=4\\ y=0\end{cases}$ 分别绕 x 轴和 z 轴所得旋转曲面的方程.

解 由于绕 x 轴的旋转半径为 $\sqrt{y^2+z^2}$, 所以绕 x 轴的旋转面方程为

$$9x^2+y^2+z^2=4.$$

由于绕 y 轴的旋转半径为 $\sqrt{x^2+z^2}$, 所以绕 y 轴的旋转面方程为

$$9(x^2+z^2)+y^2=4.$$

5. 求双曲线 $\begin{cases}4x^2-9y^2=36\\ z=0\end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴所得旋转曲面的方程.

解 由于绕 x 轴的旋转半径为 $\sqrt{y^2+z^2}$, 所以绕 x 轴的旋转面方程为

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

由于绕 y 轴的旋转半径为 $\sqrt{x^2+z^2}$, 所以绕 y 轴的旋转面方程为

$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

6. 求母线方向为 $(1,1,1)$, 准线为 $y^2=2z,\ x=0$ 的柱面方程.

解 所求柱面方程为

$$\begin{cases}\dfrac{X-0}{1}=\dfrac{Y-y}{1}=\dfrac{Z-z}{1},\\[2ex] y^2=2z.\end{cases}$$

消去 y,z 得

$$(Y-X)^2=2(Z-X).$$

7. 求母线方向为 $(1,2,3)$, 准线为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\ z=0$ 的柱面方程.

解 所求柱面方程为

$$\begin{cases}\dfrac{X-x}{1}=\dfrac{Y-y}{2}=\dfrac{Z-0}{3},\\[2ex] \dfrac{x^2}{4}+y^2=1.\end{cases}$$

消去 x,y 得

$$(Y-X)^2=2(Z-X).$$

8. 求顶点为 $(1,2,3)$, 准线为 $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的锥面方程.

解 所求锥面方程为

$$\begin{cases}\dfrac{X-1}{1-x}=\dfrac{Y-2}{2-y}=\dfrac{Z-3}{3-z},\\[2ex] 2x^2+3y^2+z^2=1,\\[2ex] x+y+z=0.\end{cases}$$

消去 x,y,z 得

$$2\Big(1-\frac{6(X-1)}{X+Y+Z-6}\Big)^2+3\Big(2-\frac{6(Y-2)}{X+Y+Z-6}\Big)^2+\Big(3-\frac{6(Z-3)}{X+Y+Z-6}\Big)^2=1.$$

9. 求直线 $\dfrac{x-\alpha}{0}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面方程并讨论其类型.

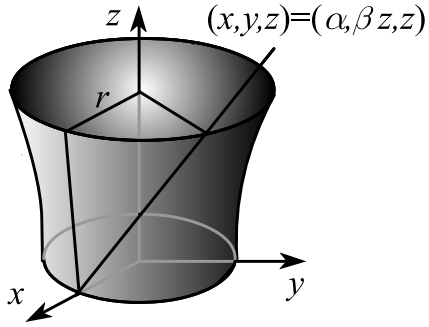

图 8.8

解 直线方程的等价形式为

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = \beta z. \end{cases}$$

由此可得，绕 z 轴的旋转半径为

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 z^2}.$$

于是，旋转面方程为

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2 z^2.$$

当 $\beta \neq 0$ 时，旋转面为锥面．当 $\beta = 0$ 时，旋转面为柱面．

10. 求由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z - 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面在平面 $z = 3$ 与平面 $z = 8$ 之间的部分在 xOy 平面上的投影区域 D.

解 旋转面方程为

$$x^2 + y^2 = 2z - 1.$$

交线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z - 1, \\ z = 8 \end{cases}$$

的投影曲线为

$$x^2 + y^2 = 15.$$

交线

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z-1, \\ z=3 \end{cases}$$

的投影曲线为

$$x^2+y^2=5.$$

于是，投影域为

$$D=\{(x,y):5\leq x^2+y^2\leq 15\}.$$

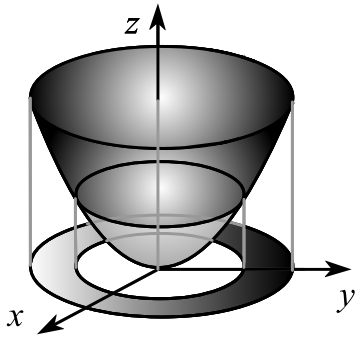

图 8.9

11. 求下列曲线的参数方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ y=x \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} 2x^2+y^2+2z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$；　(4) $\begin{cases} x-2y-z-4=0 \\ 3x+5y+2z+1=0 \end{cases}$.

解 (1) 消 x 得投影曲线

$$2y^2+z^2=4.$$

引入角度得其参数方程

$$y=\sqrt{2}\cos\theta,\ z=2\sin\theta.$$

由此可得，空间曲线的参数方程为

$$x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sqrt{2}\cos\theta,\ z=2\sin\theta.$$

(2) 消 z 得投影曲线

$$2x^2+y^2+2(1-x-y)^2=1.$$

配方得

$$2(2x+y-1)^2+(2y-1)^2=1.$$

令

$$2x+y-1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ 2y-1=\sin\theta.$$

由此可得，空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}\sin\theta+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\theta+\dfrac{1}{4}, \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\theta, \\ z=-\dfrac{3}{4}\sin\theta+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\theta+\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

(3) 记 $\boldsymbol{e}_1=(1,2,-1)$, 任取 $\boldsymbol{e}_2=(1,-1,-1)$, 使得 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$. 记 $\boldsymbol{e}_3=\dfrac{-1}{3}\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=(1,0,1)$. 令

$$(x,y,z)=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2+Z\boldsymbol{e}_3.$$

则

$$x=X+Y-\frac{1}{3}Z,\ y=2X-Y,\ z=-X-Y-\frac{1}{3}Z.$$

消去 x,y,z 并令 $Z=0$ 可得，所求曲线方程为

$$(X+Y-1)^2+(2X-Y+2)^2+(X+Y)^2=9.$$

配方得

$$6(X+\frac{1}{6})^2+3(Y-1)^2=\frac{43}{6}.$$

令

$$X=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{43}}{6}\cos\theta,\ Y=1+\frac{\sqrt{43}}{3\sqrt{2}}\sin\theta,$$

则可得所求曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{6} + \dfrac{\sqrt{43}}{6}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{43}}{3\sqrt{2}}\sin\theta, \\ y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{\sqrt{43}}{3}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{43}}{3\sqrt{2}}\sin\theta, \\ z = -\dfrac{5}{6} - \dfrac{\sqrt{43}}{6}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{43}}{3\sqrt{2}}\sin\theta. \end{cases}$$

(4) 交线方向为

$$\boldsymbol{v} = (1,-2,-1)\times(3,5,2) = (1,-5,11).$$

令 $y=0$, 则由原方程可得

$$\begin{cases} x - z - 4 = 0 \\ 3x + 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$

解之得 $x = \dfrac{7}{5}$, $z = -\dfrac{13}{5}$. 由此可知，原曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{5} + t, \\ y = -5t, \\ z = -\dfrac{13}{5} + 11t \end{cases}.$$

12. 求匀速圆周运动 $\boldsymbol{r} = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)$ 的线速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

解 由于 ω 为常数，所以有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-R\omega\sin t, R\omega\cos t),$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = (-R\omega^2\cos t, -R\omega^2\sin t).$$

13. 若 $\boldsymbol{r}(t)$ 的大小恒为常数，试证 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t)$ 垂直.

证 由于 $\boldsymbol{r}(t)$ 的大小恒为常数，所以

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}^2)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

于是，有

$$2\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=0.$$

此即 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t)$ 垂直.

14. 试证 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)]=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$.

证 由于 $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)]=\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}''(t)=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}''(t).$$

15. 设 m 为一常数，若参数曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 满足 $m\boldsymbol{r}''(t)=f(r)\boldsymbol{r}$, 试证 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=$ 常向量，其中 $r=|\boldsymbol{r}(t)|$, $f(r)$ 为可微函数.

证 由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)\Big)&=\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\\&=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{r}(t)\times\frac{f(r)}{m}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=$ 常向量.

16. 求曲线 $x=a\sin^2 t,\ y=a\sin 2t,\ z=a\cos t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切向量与切线方程.

解 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处，切向量为

$$\boldsymbol{r}'\Big(\frac{\pi}{4}\Big)=(2a\sin t\cos t,2a\cos 2t,-a\sin t)\Big|_{\pi/4}=\Big(2a,0,-\frac{a}{\sqrt{2}}\Big).$$

由于

$$\boldsymbol{r}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)=\Big(\frac{a}{2},a,\frac{a}{\sqrt{2}}\Big),$$

所以切线方程为

$$\frac{x-\dfrac{a}{2}}{2a}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\dfrac{a}{\sqrt{2}}}{-\dfrac{a}{\sqrt{2}}}.$$

17. 证明圆柱螺旋线 $\boldsymbol{r}=a\cos t\,\boldsymbol{i}+a\sin t\,\boldsymbol{j}+bt\,\boldsymbol{k}$ 的切线与 z 轴的夹角为常数.

证 由于

$$\frac{\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以结论成立.

18. 设 $\boldsymbol{r}=-a\sin t\,\boldsymbol{i}+a\cos t\,\boldsymbol{j}+b\,\boldsymbol{k}$, 求 $\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))\,\mathrm{d}t$.

解 由于

$$(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))=\begin{vmatrix}-a\cos t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=ba^2,$$

所以

$$\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))\,\mathrm{d}t=2\pi ba^2.$$

19. 狗追兔问题. 当 $t=0$ 时兔在原点, 沿着 y 轴以常速率 v_{T} 向正北方向跑去. 狗在 x 轴上 $(a,0)$ 处开始追兔, 其速率为常数 v_{M}, 方向朝着兔子. 求狗追上兔子的时间.

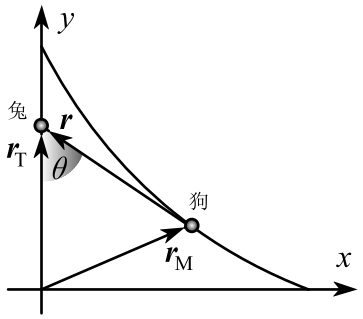

图 8.10

解 设 $\boldsymbol{r}_{_M}$ 为狗的位置向量, $\boldsymbol{r}_{_T}$ 为兔子的位置向量, 并记

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{_T}-\boldsymbol{r}_{_M},\varphi=<\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{_T}>,\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_M}}{\mathrm{d}t}\right|=v_{_M},\ \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_T}}{\mathrm{d}t}\right|=v_{_T}.$$

由于

$$r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_T}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_M}}{\mathrm{d}t} = rv_{_T}\cos\varphi - rv_{_M}.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_{_T}\cos\varphi - v_{_M}.$$

微分 $\boldsymbol{r} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_T}}{\mathrm{d}t} = rv_{_T}\cos\varphi$ 可得

$$(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_T}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_M}}{\mathrm{d}t}) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{_T}}{\mathrm{d}t} = v_{_T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\varphi).$$

此即

$$v_{_T}^2 - v_{_T}v_{_M}\cos\varphi = v_{_T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\varphi).$$

前后消去 $\cos\varphi$ 可得

$$\begin{aligned} v_{_T}^2 - v_{_M}^2 &= v_{_M}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + v_{_T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\varphi) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{_M}r + v_{_T}r\cos\varphi). \end{aligned}$$

积分得

$$v_{_M}r + v_{_T}r\cos\varphi = (v_{_T}^2 - v_{_M}^2)t + C.$$

当 $t = 0$ 时，$r = a,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, 所以 $C = av_{_M}$. 因此

$$v_{_M}r + v_{_T}r\cos\varphi = (v_{_T}^2 - v_{_M}^2)t + av_{_M}.$$

当 $r = 0$ 时，$t = \dfrac{av_{_M}}{v_{_M}^2 - v_{_T}^2}$, 此即狗追上兔子的时间.

20. 设坦克在半径为 a 的圆周上以等速 v 运动，导弹从圆心出发追踪. 当 $t = 0$ 时，坦克在 $(r, 0)$, 导弹在圆心. 若导弹的速度也是 v, 且圆心，导弹和坦克常在一条直线上，则坦克到达 $(0, r)$ 时，导弹正好追上坦克.

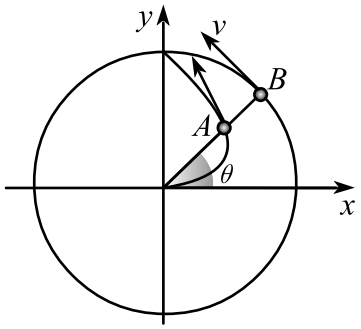

图 8.11

证 设 $\boldsymbol{r}_A = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 为导弹的位置向量,则可设 $\boldsymbol{r}_B = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ 为坦克的位置向量.

由 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}\right| = v$ 可得, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v}{a}$, 即 $\theta = \dfrac{vt}{a}$.

由 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}\right| = v$ 可得

$$\begin{aligned} v^2 &= \Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta - \frac{vr}{a}\sin\theta, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta + \frac{vr}{a}\cos\theta\Big)^2 \\ &= \Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + r^2\Big(\frac{v}{a}\Big)^2. \end{aligned}$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\big(\frac{r}{a}\big)^2}} = v\mathrm{d}t.$$

积分得

$$a\arcsin\frac{r}{a} = vt + C.$$

当 $t = 0$ 时, $r = 0$, 所以 $C = 0$. 因此

$$a\arcsin\frac{r}{a} = vt.$$

当导弹追上坦克时, $r = a$, 因此

$$vt = \frac{a\pi}{2}.$$

于是

$$\theta = \frac{vt}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

即坦克到达 $(0, r)$ 时，导弹正好追上坦克.

21. 试证包含三条坐标轴的二次锥面方程为 $axy + byz + czx = 0$, 其中 a, b, c 为常数.

证 设二次锥面方程为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + axy + byz + czx + Dx + Ey + Fx + G = 0.$$

由于 $(0, 0, 0)$ 满足锥面方程，所以 $G = 0$. 由于任意 $(x, 0, 0)$ 都是锥面方程的解，所以

$$Ax^2 + Dx = 0$$

蕴含 $A = D = 0$, 同理 $B = E = 0, C = F = 0$. 故二次锥面方程为

$$axy + byz + czx = 0.$$

总 习 题 八

1. 求直线 $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ 与 $L_2 : \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$ 之间的距离.

解 $(1, -1, 0)$ 到 $(1, -3, 0)$ 的连接向量为 $(0, -2, 0)$, 故 L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d = \left| (0, -2, 0) \cdot \left(\frac{(2, 1, 3)}{\sqrt{14}} \times \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

2. 求直线 $L : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面的方程.

解 由直线方程可得

$$x = z,\ y = 2z - 2.$$

于是旋转半径为 $r=\sqrt{z^2+(2z-2)^2}$. 故旋转面方程为

$$x^2+y^2=z^2+(2z-2)^2.$$

3. 证明直线 $\begin{cases}x+2y-z=7\\-2x+y+z=7\end{cases}$ 与 $\begin{cases}3x+6y-3z=8\\2x-y-z=0\end{cases}$ 平行.

证 由于两直线的方向为

$$(1,2,-1)\times(-2,1,1)=(3,1,5),$$
$$(3,6,-3)\times(2,-1,-1)=-3(3,1,5),$$

且线性相关，故两直线平行.

4. 求过 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

解 $(3,1,-2)$ 到 $(4,-3,0)$ 的连接向量为 $(1,-4,2)$, 所求平面的法向量为

$$(1,-4,2)\times(5,2,1)=(-8,9,22).$$

故所求平面方程为

$$-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0.$$

5. 求过 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 所求平面的法向量为

$$(1,0,2)\times(0,1,-3)=(-2,3,1).$$

故所求平面方程为

$$-2(x-0)+3(y-2)+(z-4)=0.$$

6. 求过 $(1,2,1)$ 且与两直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面方程.

解 两直线的方向为

$$(1,2,-1)\times(1,-1,1)=(1,-2,-3),$$

$$(2,-1,1)\times(1,-1,1)=(0,-1,-1).$$

所求平面的法向量为

$$(1,-2,-3)\times(0,-1,-1)=(-1,1,-1).$$

故所求平面方程为

$$-(x-1)+(y-2)-(z-1)=0.$$

7. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y-z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解 令 $x=0$, 解

$$\begin{cases}y-z+1=0\\-y-z-4=0\end{cases}$$

得 $y=-\dfrac{5}{2}$, $z=-\dfrac{3}{2}$. 点 $(3,-1,2)$ 到 $(0,-\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2})$ 的连接向量为 $(-3,-\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{2})$. 给定直线的方向为

$$(1,1,-1)\times(2,-1,-1)=(-2,-1,-3).$$

故所求距离为

$$d=\left|(-3,-\frac{3}{2},-\frac{7}{2})\times\frac{(-2,-1,-3)}{\sqrt{14}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}.$$

8. 四面体的三条棱从点 $O(0,0,0)$ 连至点 $A(2,3,1), B(1,2,2)$ 和 $C(3,-1,4)$, 求四面体的体积.

解 四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&2\\3&-1&4\end{vmatrix}=\frac{19}{6}.$$

9. 判断下列直线是否相交:

(1) $\begin{cases} 5x-2y-28=0 \\ y+1=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$;

(2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ 与 $\dfrac{x-9}{6}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{1}$.

解 (1) 由于

$$\begin{cases} 5x-2y-28=0, \\ y+1=0, \\ x=-3+5t, \\ y=2t \end{cases}$$

无解，所以两直线不相交.

(2) 由于

$$\begin{vmatrix} 1-9 & -2-2 & 2+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 32 \neq 0,$$

所以两直线不相交.

10. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量且不平行，证明 $2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，并说明几何意义.

解 由内积运算可得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 \\ &= (\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)+(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2) \\ &= 2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2. \end{aligned}$$

其几何意义是：平行四边形的对角线平方和 = 四边平方和.

11. 已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，证明 A,B,C,D 共面.

解 由于

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2,3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2))=0,$$

所以 A,B,C,D 共面.

12. 求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解 直线 l 与 π 的交点为 $(2,1,0)$, 投影直线 l_0 的方向为

$$\boldsymbol{v}=(1,1,-1)-\Big((1,1,-1)\cdot\frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}\Big)\frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}=\frac{1}{3}(4,2,-1).$$

于是投影直线 l_0 的方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{-1}.$$

由于 $x=2y,\ z=\dfrac{1-y}{2}$, 所以旋转面方程为

$$x^2+z^2=(2y)^2+\frac{1}{4}(1-y)^2.$$

13. 选择题

(1) 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$_____.

(A) $2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{r})$; (B) $-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{r})$; (C) 0; (D) $\boldsymbol{0}$.

(2) 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$, 则直线 L_____.

(A) 平行于 π; (B) 在 π 上; (C) 垂直于 π; (D) 与 π 斜交.

(3) 直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为_____.

(A) $\dfrac{\pi}{6}$; (B) $\dfrac{\pi}{4}$; (C) $\dfrac{2}{3}\pi$; (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 在曲线 $x=t,\ y=-t^2,\ z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线 _____.

(A) 只有一条； (B) 只有两条； (C) 至少三条； (D) 不存在.

解 (1) 选 (C).

(2) 由于直线 L 的方向为

$$(1,3,2)\times(2,-1,-10)=-7(4,2,1),$$

所以 L 为 π 的法线，故选 (C).

(3) 由于

$$\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}\cdot\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{2},$$

所以选 (C).

(4) 由于

$$(1,-2t,3t^2)=(1,2,1)$$

无解，所以选 (D).

14. 填空题

(1) 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为 _____.

(2) 过 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$ 两点的直线绕 z 轴旋转所得旋转面的方程为 _____.

(3) 过直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 且平行于 $l_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程是 _____.

(4) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $x=-t+2,\ y=3t+4,\ z=t-1$ 垂直的平面方程是 _____.

(5) 与直线 $x=1,\ y=-1+t,\ z=2+t$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程为 _____.

(6) 向量 $\boldsymbol{r}=(2,0,0)$ 在向量组 $\boldsymbol{a}=(1,1,0),\ \boldsymbol{b}=(1,0,1),\ \boldsymbol{c}=(0,1,1)$ 下的坐标是 _____.

解 (1) 所求平面的法向量为

$$(6,-3,2)\times(4,-1,2)=-2(2,2,-3),$$

故所求平面方程为

$$2x+2y-3z=0.$$

(2) $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$ 两点的直线为

$$\frac{x-1}{1-0}=\frac{y}{0-1}=\frac{z}{0-1}.$$

即 $x=1-z,\ y=z$. 故所求旋转面方程为

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2.$$

(3) 所求平面的法向量为

$$(1,0,-1)\times(2,1,1)=(1,-3,1),$$

故所求平面方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0.$$

(4) 所求平面方程为 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0.$

(5) 所求平面的法向量为

$$(0,1,1)\times(1,2,1)=(-1,1,-1),$$

故所求平面方程为

$$-x+y-z=0.$$

(6) 解方程组

$$\begin{cases}x+y=2,\\ x+z=0,\\ y+z=0\end{cases}$$

可得所求坐标为 $(1,1,-1)$.

15. 试写出曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

的参数方程.

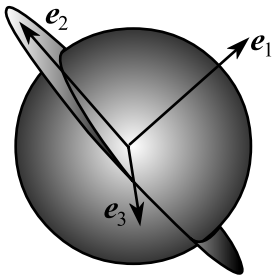

图 8.18

解 作比例变换

$$x_1=\frac{x}{a},\ \ y_1=\frac{y}{b},\ \ z_1=\frac{z}{c},$$

则椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 化为圆

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=1 \\ ax_1+by_1+bz_1=0 \end{cases}.$$

取法向正交基

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1&=(a,b,c),\\ \boldsymbol{e}_2&=(b,-a,0),\\ \boldsymbol{e}_3&=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=(ac,bc,-a^2-b^2). \end{aligned}$$

令

$$(x_1,y_1,z_1)=(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c})=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2+Z\boldsymbol{e}_3,$$

则

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = aX + bY + acZ, \\ \dfrac{y}{b} = bX - aY + bcZ, \\ \dfrac{z}{c} = cX - (a^2 + b^2)Z. \end{cases}$$

带入椭球方程，并令 $X = 0$ 可得

$$(a^2 + b^2)Y^2 + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)Z^2 = 1.$$

令

$$Y = \frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ Z = \frac{\sin\theta}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

则可以得到所求椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{ab\cos\theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \dfrac{a^2 c\sin\theta}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}, \\ y = \dfrac{-ab\cos\theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \dfrac{b^2 c\sin\theta}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}, \\ z = -\dfrac{c\sqrt{a^2 + b^2}\ \sin\theta}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}. \end{cases}$$

16. 求曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - y)^2}{c^2} = 1$$

的参数方程.

解 所求曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\theta, \\ y = a\sin\varphi\sin\theta, \\ z = a\sin\varphi\sin\theta + c\cos\theta. \end{cases}$$

17. 试写出曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ z = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \end{cases}$$

的参数方程.

解 消 z 得投影曲线

$$x^2+y^2+x^2+(y-1)^2=3.$$

配方得

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

令

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,$$

则可得到所求椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \\ z=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

第九章　多元函数的微分

§9.1　多元函数的极限

习　题 9.1 A

1. 设 $f(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan x)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, 求 $f(x,y)$.

解　令

$$u=\sqrt{x^2+y^2},\ v=\arctan x,$$

解 x,y 可得

$$x=\tan v,\ y=\pm\sqrt{u^2-\tan^2 v}.$$

代入可得

$$f(u,\,v)=\pm\frac{\tan v\cdot\sqrt{u^2-\tan^2 v}}{u^2}.$$

2. 求下列函数的定义域:

(1) $z=\ln(x^2+y^2-1)+\sqrt{2-x^2-y^2}$;

(2) $z=\arcsin 2x+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

(3) $z=\ln(y-x^2)+\dfrac{\sqrt{x}}{1-x^2-y^2}$.

解　(1) 解不等式组

$$\begin{cases}x^2+y^2-1>0\\ 2-x^2-y^2\geq 0\end{cases}$$

可得函数的定义域为 $\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2\leq 2\}$.

(2) 解不等式组

$$\begin{cases} -1 \le 2x \le 1 \\ 4x - y^2 \ge 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \ne 1 \end{cases}$$

可得函数的定义域为

$$\Big\{(x,y)\,|\,0 < x^2 + y^2 < 1,\ y^2 \le 4x,\ |x| \le \frac{1}{2}\Big\}.$$

(2) 解不等式组

$$\begin{cases} y - x^2 > 0 \\ x^2 + y^2 \ne 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

可得函数的定义域为 $\{(x,y)\,|\,y > x^2,\ x \ge 0,\ x^2 + y^2 \ne 1\}$.

3. 若函数 $z = f(x,y)$ 恒满足关系式 $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$, 则称 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数.

(1) 证明 k 次齐次函数 $z = f(x,y)$ 可以化成 $z = x^k F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 之形式;

(2) 证明 $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4} - 2xy$ 为 2 次齐次函数;

(3) 证明 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^x$ 为 1 次齐次函数.

证 (1) 根据齐次性, 有

$$f(x,y) = x^k f\Big(1,\ \frac{y}{x}\Big).$$

(2) 由于

$$f(tx,ty) = t^2\Big[\sqrt{x^4 + y^4} - 2xy\Big] = t^2 f(x,y),$$

所以 $f(x,y)$ 为 2 次齐次函数.

(3) 由于 $t > 0$ 时,

$$f(tx,ty) = t\Big[\sqrt{x^2 + y^2} + \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^x\Big] = t f(x,y),$$

所以 $f(x,y)$ 为正齐次函数.

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2, & y=x^2,\\ 0, & y\neq x^2,\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证 由于 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$0\leq f(x,y)\leq x^2\to 0,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

5. 设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$, 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证 由于 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$0\leq\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right|\leq|x+y|\to 0,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

6. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{|x|+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 (1) 由于 $|x|<1$ 时,

$$\begin{aligned}|x^3+y^3| &\leq|x+y|\cdot|x^2-xy+y^2|\\ &\leq 2|x+y|\cdot(x^2+y^2)\leq 2|x+y|\cdot(|x|+y^2),\end{aligned}$$

所以 $|x|<1$ 时,

$$0\leq\left|\frac{x^3+y^3}{|x|+y^2}\right|\leq|x+y|.$$

由此可知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{|x|+y^2}=0.$

(2) 令 $u=x^2+y^2,\ v=x^2y^2$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{u}\cdot\lim_{v\to0}\frac{1}{\mathrm{e}^v}=0.$$

(3) 由于

$$0\le\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le2|x+y|.$$

由此可知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0.$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sqrt{t+1}-1}=2.$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln2.$

(6)

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left[\frac{(x+y)^2}{\mathrm{e}^{x+y}}-2\cdot\frac{x}{\mathrm{e}^x}\cdot\frac{y}{\mathrm{e}^y}\right]=0.$$

(7) 令 $u=x^2+y^2$, 则 $(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$0\le x^2y^2\ln(x^2+y^2)\le\frac{u^2}{4}\ln u\to0.$$

因此，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}=1.$

(8)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}=\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}.$$

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x^2+y^2}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

证 对于此类题，应该按照一元化方法去做.

(1) 由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}\Big|_{y=x^2-x} = -1 \neq 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}\Big|_{y=0},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

(2) 由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y}\Big|_{y=x^2-x} = -\frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y}\Big|_{y=0},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y}$ 不存在.

(3) 由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{x^2+y^2}\Big|_{y=0} = 0 \neq \frac{1}{4} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{x^2+y^2}\Big|_{y=x},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x^2+y^2}$ 不存在.

(4) 令 $u = x^2+y^2$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) = \text{不存在}.$$

8. 确定函数 $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\tan(x^2+y^2)}$ 在点 $(0,0)$ 处的值 $f(0,0)$, 使函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

解 由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos\sqrt{u}}{\tan u} = \frac{1}{2},$$

所以取 $f(0,0) = \dfrac{1}{2}$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

9. 证明函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在原点不连续.

证 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^2)=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$, 所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

习 题 9.1 B

1. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\sin(x^2y^2)}$.

解 (1) 令 $u=x^2+y^2$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot u\ln u=0.$$

(2) 令 $u=x^2+y^2$, 则由 $|x+y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}$ 可得,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{u}\ln u=0.$$

(3) 令 $u=x^2+y^2$, 则由 $\dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}$ 有界可知,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\sin(x^2y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\mathrm{e}^{\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}\cdot u\ln u}=0.$$

2. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内 (a,b) 点连续，且 $f(a,b)>0$, 证明存在 (a,b) 点邻域 U, 使得 $(x,y)\in U$ 时，恒有 $f(x,y)>0$.

证 令 $\varepsilon_0=|f(a,b)|$, 则 $\varepsilon_0>0$. 于是根据 $f(x,y)$ 在区域 D 内 (a,b) 点连续可知，存在 $\delta>0$, 使当 $0<(x-a)^2+(y-b)^2<\delta$ 时，恒有

$$|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon_0.$$

令 $U=\{(x,y)\,|\,0<(x-a)^2+(y-b)^2<\delta\}$, 则当 $x\in U$ 时，必有

$$f(x,y)>\varepsilon_0-|f(a,b)|=0.$$

3. 若函数 $f(x,y)$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续且 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)$ 存在，证明 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界.

证 记 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=A$, 则存在 $R>0$, 使当 $x^2+y^2>R$ 时，恒有

$$|f(x,y)-A|<1.$$

由于 $f(x,y)$ 在闭区域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R\}$, 所以存在 $M>0$, 使当 $x^2+y^2\le R$ 时，恒有

$$|f(x,y)|<M.$$

于是，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 时，恒有 $|f(x,y)|\le\max(M,\,|A|+1)$.

4. 讨论下列函数在点 $(0,0)$ 的二重极限和二次极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$; (2) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

解 (1)

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0.$$

由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=0\ne1=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x),$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

(2)

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}\left[x\sin\frac{1}{x}\cdot\lim_{y\to0}\sin\frac{1}{y}\right]=\text{不存在}$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\cdot y\sin\frac{1}{y}\right]=\text{不存在.}$$

由于 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\le1$, 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

5. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内关于 x 连续，证明：

(1) 若 $f(x,y)$ 关于 y 一致连续，即对任意的 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使当 $(x,y_i)\in D$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$ 时，恒有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$, 则 $f(x,y)$ 在 D 内连续;

(2) 若 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 L, 使当 $(x,y_i)\in D$ 时, 恒有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$, 则 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

证 (1) 由于 $f(x,y)$ 关于 y 一致连续, 所以 $(x,y)\to(x_0,y_0)\in D$ 时, 恒有

$$\begin{aligned}0 &\leq |f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\ &\leq |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\to 0.\end{aligned}$$

由此可知, $f(x,y)$ 在 D 内连续.

(2) 根据 Lipschitz 条件, 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)\in D$ 时, 恒有

$$\begin{aligned}0 &\leq |f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\ &\leq |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ &\leq L|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\to 0.\end{aligned}$$

由此可知, $f(x,y)$ 在 D 内连续.

6. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点附近有定义, 则下列说法不等价于 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 的是 _____.

(A) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<\max(|x-x_0|,|y-y_0|)<\delta$ 时, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$;

(B) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|+|y-y_0|<\delta$ 时, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$;

(C) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|^5+|y-y_0|^5<\delta$ 时, $|f(x,y)-A|<\varepsilon$;

(D) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta, 0<|y-y_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

解 应选 (D).

(A) 因为集合

$$D_1=\{(x,y):0<\max(|x-x_0|,|y-y_0|)<\delta\}$$

包含 (x_0,y_0) 点的空心邻域, 故为等价定义.

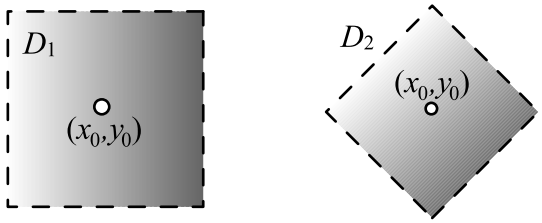

图 9.1

(B) 因为集合

$$D_2 = \{(x,y) : 0 < |x-x_0| + |y-y_0| < \delta\}$$

包含 (x_0, y_0) 点的空心邻域，故为等价定义.

(C) 因为集合

$$D_3 = \{(x,y) : 0 < |x-x_0|^5 + |y-y_0|^5 < \delta\}$$

包含 (x_0, y_0) 点的空心邻域，故为等价定义.

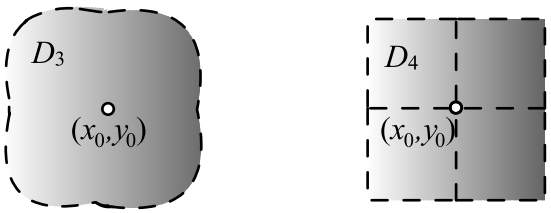

图 9.2

(D) 因为集合

$$D_4 = \{(x,y) : 0 < |x-x_0| < \delta, 0 < |y-y_0| < \delta\}$$

不含 (x_0, y_0) 点的空心邻域，故不等价于极限定义.

7. 下列条件中，可以推出 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$ 的是 _____,

(A) $\forall \varepsilon > 0$ 和 $\forall \theta \in [0, 2\pi], \exists \delta > 0$, 当 $0 < r < \delta$ 时，恒有

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - A| < \varepsilon;$$

(B) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < r < \delta, \theta \in [0, 2\pi]$ 时，$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - A| < \varepsilon$;

(C) 当 $x = x(t), y = y(t)$ 为连续曲线且 $x(t) = 0,\ y(t) = 0$ 只有解 $t = 0$ 时，恒有

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = A;$$

(D) 对每个实数 k, 都有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x, kx) = \lim\limits_{y\to 0} f(ky, y) = A$.

解 应选 (B) 、 (C).

(A) 由于 ε, θ 在 δ 之前给定，所以集合

$$D_{\varepsilon,\theta,\delta} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < \delta\}$$

是线段，不是 $(0,0)$ 的空心邻域. 反例有 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

(B) 由于

$$D_{\varepsilon,\delta} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < \delta,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

是原点的空心邻域，所以 (B) 等价于极限定义.

(C) 此说法与海因定理等价，二元极限存在当且仅当一元化极限存在且相等.

(D) 反例有 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

8. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上关于 x, y 分别连续且关于 y 单调，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证 由于 $f(x,y)$ 关于 y 单调，所以当

$$\delta > 0,\ \{(x,y) \,|\, |x - x_0| \le \delta, |y - y| \le \delta\} \subset D$$

时，有

$$\begin{aligned} 0 &\le |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \\ &\le |f(x, y_0 + \delta) - f(x_0, y_0)| + |f(x, y_0 - \delta) - f(x_0, y_0)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le |f(x,y_0+\delta)-f(x_0,y_0+\delta)|+|f(x_0,y_0+\delta)-f(x_0,y_0)|\\
&\quad +|f(x,y_0-\delta)-f(x_0,y_0-\delta)|+|f(x_0,y_0-\delta)-f(x_0,y_0)|\\
&\to |f(x_0,y_0+\delta)-f(x_0,y_0)|+|f(x_0,y_0-\delta)-f(x_0,y_0)|\ ((x,y)\to(x_0,y_0))\\
&\to 0\ \ (\delta\to 0).
\end{aligned}$$

因此， $f(x,y)$ 在 D 上连续.

§9.2 多元函数的偏导数

习 题 9.2 A

1. 求下列函数的一阶偏导数：

(1) $f(x,y)=x^2y+\sin(xy^2)$;　　(2) $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^3$;

(3) $f(x,y,z)=xz+\mathrm{e}^{yz}+\sqrt{xyz}$;　　(4) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;

(5) $u=x^{y^z}$;　　(6) $f(x,y)=\dfrac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$;

(7) $z=\dfrac{x\mathrm{e}^y}{y^2}$;　　(8) $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$.

解　(1) $f'_x(x,y)=2xy+y^2\cos(xy^2)$, $f'_y(x,y)=x^2+2xy\cos(xy^2)$.

(2) $f'_x(x,y)=6x(1+x^2+y^2)^2$, $f'_y(x,y)=6y(1+x^2+y^2)^2$.

(3) $f'_x(x,y,z)=z+\dfrac{yz}{2\sqrt{xyz}}$,

$$f'_y(x,y,z)=z\mathrm{e}^{yz}+\frac{xz}{2\sqrt{xyz}},\quad f'_z(x,y,z)=x+y\mathrm{e}^{yz}+\frac{xy}{2\sqrt{xyz}}.$$

(4) $z'_x=\dfrac{1}{y\tan\dfrac{x}{y}\cos^2\dfrac{x}{y}}$, $z'_y=-\dfrac{x}{y^2\tan\dfrac{x}{y}\cos^2\dfrac{x}{y}}$.

(5) $u'_x=y^zx^{y^z-1}$,　$u'_y=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$,　$u'_y=y^zx^{y^z}\ln x\cdot\ln y$.

(6)

$$f'_x(x,y)=\frac{\cos y+y\sin x}{1+\sin x+\sin y}-\frac{x\cos y-y\cos x}{(1+\sin x+\sin y)^2}\cdot\cos x,$$

$$f'_x(x,y)=\frac{-x\sin y-\cos x}{1+\sin x+\sin y}-\frac{x\cos y-y\cos x}{(1+\sin x+\sin y)^2}\cdot\cos y.$$

(7) $z'_x=\dfrac{\mathrm{e}^y}{y^2},\ \ z'_y=\dfrac{x\mathrm{e}^y}{y^2}-2\cdot\dfrac{x\mathrm{e}^y}{y^3}.$

(8) $z'_x=\dfrac{1}{1+x^2},\ \ z'_y=\dfrac{1}{1+y^2}.$

2. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

证明 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ 但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

证

$$f'_x(0,0)=[f(x,0)]'_{x=0}=0,\ \ f'_y(0,0)=[f(0,y)]'_{y=0}=0.$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x,x)=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

3. 已知 f 为可导函数，化简下列各式：

(1) 设 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$, 化简 $\sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $z=yf(x^2-y^2)$, 化简 $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 (1) 将

$$z'_x=\cos x\cdot f'_x,\ \ z'_y=\cos y-\cos y\cdot f'_y$$

代入可得,

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

(2) 将

$$z'_x = 2xy \cdot f'(x^2 - y^2),\ \ z'_y = f(x^2 - y^2) - 2y^2 \cdot f'(x^2 - y^2)$$

代入可得,

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyf(x^2 - y^2).$$

4. 求下列曲面在给定点的法线和切面方程:

(1) $z = x^3y^5$ 在点 $M(2, 1, 8)$;

(2) $\sin(xy) - 2\cos(yz) = 0$ 在点 $M(\frac{\pi}{2}, 1, \frac{\pi}{3})$;

(3) $\mathrm{e}^{xyz} = 5$ 在点 $M(1, 1, \ln 5)$;

(4) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$.

解 (1) 记 $f(x, y) = x^3y^5$, 则

$$f'_x(2, 1) = x^3y^5|_{(2,1)} = 12, \quad f'_y(2, 1) = 5x^3y^4|_{(2,1)} = 40.$$

代入切平面方程 $f'_x(2, 1)(x - 2) + f'_y(2, 1)(y - 1) - (z - 8) = 0$ 可得,

$$12x + 40y - z - 56 = 0.$$

代入法线方程可得

$$\frac{x - 2}{12} + \frac{y - 1}{40} = \frac{z - 8}{-1}.$$

(2) 记 $F(x, y, z) = \sin(xy) - 2\cos(yz)$, 则

$$\begin{aligned}\nabla F(\frac{\pi}{2}, 1, \frac{\pi}{3}) &= (y\cos(xy), x\cos(xy) + 2z\sin(yz), 2y\sin(yz))\Big|_{(\frac{\pi}{2},1,\frac{\pi}{3})} \\ &= (0, \frac{\sqrt{3}\pi}{3}, \sqrt{3}).\end{aligned}$$

代入切平面方程 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ 可得,

$$\pi y + 3z - 2\pi = 0.$$

代入法线方程可得

$$\frac{x - \frac{\pi}{2}}{0} = \frac{y - 1}{\frac{\sqrt{3}\pi}{3}} = \frac{z - \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}}.$$

(3) 记 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{xyz}-5$, 则

$$\nabla F(1,1,\ln 5)=(5\ln 5,5\ln 5,5)$$

切平面方程为

$$x\ln 5+y\ln 5+z-3\ln 5=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{\ln 5}=\frac{y-1}{\ln 5}=\frac{z-\ln 5}{1}.$$

(4) 记 $\boldsymbol{r}=(u\cos v,u\sin v,av)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}&=(\cos v,\sin v,0),\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}&=(-u\sin v,u\cos v,a).\end{aligned}$$

代入切平面方程

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

可得

$$a\sin v\cdot(x-x_0)+a\cos v\cdot(y-y_0)+u(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{a\sin v}=\frac{y-y_0}{a\cos v}=\frac{z-z_0}{u}.$$

5. 求由 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

解 两端关于 x 求导, 有

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\dfrac{y}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{y}{x}}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}.$$

化简得

$$y'=\frac{y(x^2+y^2)+2x(x+y)\sqrt{xy}}{x(x^2+y^2)-2y(x+y)\sqrt{xy}}.$$

6. 验证函数 $y=\mathrm{e}^{-k\,n^2t}\sin nx$ 满足微分方程 $\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

证 由于

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -kn^2 \mathrm{e}^{-k\,n^2 t}\sin nx,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -n^2 \mathrm{e}^{-k\,n^2 t}\sin nx,$$

所以

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

7. 设 f 为可导函数，验证函数 $z = \dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$ 满足微分方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

证 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{f^2(x^2-y^2)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y^2}{f^2(x^2-y^2)} + \frac{1}{f(x^2-y^2)},$$

所以 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

8. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$;

(2) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$;

(3) $z = y^x$;

(4) $z = (1+xy)^y$

(5) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$;

(6) $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$;

(7) $z = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -16xy$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -16xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=xy^{x-1}\ln y+y^{x-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y+y^{x-1},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}.$$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1},\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^3(y-1)(1+xy)^{y-2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y(1+xy)^{y-2}\big[2+xy+xy^2+y(1+xy)\ln(1+xy)\big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(1+xy)^{y-1}\big[x(1+xy)+2xy\ln(1+xy)+(1+xy)\ln^2(1+xy)\big].$$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-y(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-y(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x(2y^2-x^2)}{y^2(y^2-x^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^4+y^4}{x^4y^2}\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{2}{x^2}\cos\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}-\frac{2y}{x^3}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^4+y^4}{x^2y^4}\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{2x}{y^3}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1+x}{xy^2}\cos\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{x^4+y^4}{x^3y^3}\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$$

$$-\frac{2}{xy}\cos\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(按 $x>0, y>0$ 计算)

9. 设 $u=\dfrac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{r^3}$.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{r^3}$.

习 题 9.2 B

1. 验证下列两个函数

(1) $u = x^{y^2} + x^{2^y}$; (2) $u = \arccos\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

证 (1) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2x^{y^2-1}+2^yx^{2^y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2}\cdot\ln x\cdot 2y+x^{2^y}\cdot\ln x\cdot 2^y\ln 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2yx^{y^2-1}+2y^3\cdot c^{y^2-1}\ln x+2^y\ln 2\cdot x^{2^y-1}+4^y\cdot\ln 2\cdot x^{2^y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2y^3\cdot c^{y^2-1}\ln x+2yx^{y^2-1}+4^y\cdot\ln 2\cdot x^{2^y-1}\ln x+2^y\ln 2\cdot x^{2^y-1},$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

(2) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{(y-x)x}}+\frac{y}{2y\sqrt{(x-y)y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2\sqrt{(x-y)y}}-\frac{x}{2y\sqrt{(y-x)x}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{4}x\big[(y-x)x\big]^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x\big[(x-y)y\big]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{4}x\big[(y-x)x\big]^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x\big[(x-y)y\big]^{-\frac{3}{2}},$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

2. 证明下列两个函数

(1) $u=\mathrm{e}^x\sin y$; (2) $u=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy)$

都满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

证 (1) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{e}^x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^x \sin y,$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

(2) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 8xy\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy) + (4x^2-4y^2+2)\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8xy\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy) + (4y^2-4x^2-2)\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy),$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

3. 设 f, g 均有连续的二阶偏导数，证明函数 $u = f(x+at) + g(x-at)$ 满足微分方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解 由于

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(x+at) - ag'(x-at), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+at) + f'(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x+at) + a^2 f''(x-at), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+at) + f''(x-at),$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. 设函数 f 具有二阶导数，求函数 $z = f(x^2+y^2) + f(xy)$ 的二阶偏导数.

解 记 $u = x^2+y^2,\ v = xy$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(u) + yf'(v), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(u) + xf'(v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'(u) + 4x^2 f''(u) + y^2 f''(v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4xyf''(u) + f'(v) + xyf''(v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'(u) + 4y^2 f''(u) + x^2 f''(v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xyf''(u) + f'(v) + xyf'(v).$$

5. 设 $z = x\ln(xy)$, 求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

6. 设 $u = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{r^3} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

7. 设函数 f, g 为可导函数，若 $z = f\Big(xy, \dfrac{x}{y}\Big)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1'\Big(xy, \frac{x}{y}\Big) + \frac{1}{y} f_2'\Big(xy, \frac{x}{y}\Big),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xf_1'\Big(xy, \frac{x}{y}\Big) - \frac{x}{y^2} f_2'\Big(xy, \frac{x}{y}\Big).$$

8. 设函数 f 具有二阶导数，函数 g 具有连续的二阶偏导数，若 $z = f(2x-y)+g(x,xy)$, 求函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -f'(2x-y)+xg_2'(x,xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -2f''(2x-y)+g_2'(x,xy)+xg_{21}''(x,xy)+xyg_{22}''(x,xy).$$

9. 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足关系式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(2) 若 $f(1)=0,\ f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (1) 记 $u=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\cdot\frac{x}{u},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot\frac{y}{u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2}{u^2}f''(u)+\frac{f'(u)}{u}-\frac{x^2}{u^3}f'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{u^2}f''(u)+\frac{f'(u)}{u}-\frac{y^2}{u^3}f'(u).$$

根据 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 有

$$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$$

(2) 由于上述微分方程等价于

$$(uf'(u))'=0,\ f(1)=0,\ f'(1)=1,$$

所以有 $f(u)=\ln u$.

§9.3 多元函数的全微分

习 题 9.3 A

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；
(2) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；
(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；
(4) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

则有

(A) (3) ⇒ (2) ⇒ (1);　　(B) (2) ⇒ (3) ⇒ (1);
(C) (2) ⇒ (4) ⇒ (1);　　(D) (2) ⇒ (1) ⇒ (4).

解　选 (A). 光滑 ⇒ 可微 ⇒ 连续.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=3,\ f'_y(0,0)=1$, 则

(A) $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=3\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$;

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$;

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$;

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$.

解 选 (C). 交面曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=f(t,0) \end{cases}$，按照参数化求导方法可得切向量.

3. 求下列函数的全微分：

(1) $u=\ln(x^2+2y+3z)$,　　(2) $z=x^y+y^x$;

(3) $u=\mathrm{e}^{x+y}\cos x\sin y$;　　(4) $u=z\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$;

(5) $u=\sqrt{\ln(xy)}$;　　(6) $u=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(7) $z=xy+\dfrac{y}{x}$;　　(8) $z=\mathrm{e}^x y\ln x$;

(9) $z=\arctan\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;　　(10) $u=(x+y)\sin(xyz)$.

解 (1) $\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+2y+3z}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{x^2+2y+3z}\mathrm{d}y+\dfrac{3}{x^2+2y+3z}\mathrm{d}z$.

(2) $\mathrm{d}z=(yx^{y-1}+y^x\ln y)\mathrm{d}x+(x^y\ln x+xy^{x-1})\mathrm{d}y$.

(3) $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{x+y}(\cos x-\sin x)\sin y\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x+y}\cos x\cdot(\sin y+\cos y)\mathrm{d}y$.

(4) $\mathrm{d}u=\dfrac{zx-1}{2\sqrt{x^3y}}\,\mathrm{d}x-\dfrac{zx+1}{2\sqrt{xy^3}}\,\mathrm{d}y+\sqrt{\dfrac{x}{y}}\,\mathrm{d}z$.

(5) $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}\,\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}\,\mathrm{d}y$.

(6) $\mathrm{d}u=y[\,\cos(xy)-\sin(2xy)\,]\,\mathrm{d}x+x[\,\cos(xy)-\sin(2xy)\,]\,\mathrm{d}y$.

(7) $\mathrm{d}z=y\Big(1-\dfrac{1}{x^2}\Big)\,\mathrm{d}x+\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}y$.

(8) $\mathrm{d}z=y\mathrm{e}^x\Big(\ln x+\dfrac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\ln x\,\mathrm{d}y$.

(9) $\mathrm{d}z=-\dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x+-\dfrac{2yx^2}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}y$.

(10) $\mathrm{d}z=\big[\sin(xyz)+yz(x+y)\cos(xyz)\big]\,\mathrm{d}x$
$\qquad+\big[\sin(xyz)+zx(x+y)\cos(xyz)\big]\,\mathrm{d}y$

$$+\left[\sin(xyz)+xy(x+y)\cos(xyz)\right]\mathrm{d}z.$$

4. 求下列函数在指定点 P 的全微分：

(1) $z=x^2y+xy^2,\ P(1,1)$; (2) $z=\mathrm{e}^{xy}+\dfrac{y-x}{x+y},\ P(1,2)$;

(3) $u=\sqrt{1+\ln(xy)},\ P(4,2)$; (4) $z=\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2-y^2},\ P(1,1)$;

(5) $z=\dfrac{1}{xy}\sin(x+y)-\mathrm{e}^{x+y},\ P(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4})$.

解 (1) $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=(2xy+y^2)\mathrm{d}x+(x^2+2xy)\mathrm{d}y\Big|_{(1,1)}=3\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y.$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}&=\Big[y\mathrm{e}^{xy}-\frac{2y}{(x+y)^2}\Big]\mathrm{d}x+\Big[x\mathrm{e}^{xy}+\frac{2x}{(x+y)^2}\Big]\mathrm{d}y\Big|_{(1,2)}\\&=\Big(2\mathrm{e}^2-\frac{4}{9}\Big)\mathrm{d}x+\Big(\mathrm{e}^2+\frac{2}{9}\Big)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\mathrm{d}z\Big|_{(4,2)}&=\frac{1}{2x\sqrt{1+\ln(xy)}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2y\sqrt{1+\ln(xy)}}\,\mathrm{d}y\Big|_{(1,2)}\\&=\frac{1}{8\sqrt{1+\ln 8}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4\sqrt{1+\ln 8}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(4) 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}&=-\frac{x^3+3xy^2}{(x^2-y^2)^2+x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{(1,1)}=-\sqrt{2},\\\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}&=\frac{y^3+3yx^2}{(x^2-y^2)^2+x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{(1,1)}=\sqrt{2},\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=-\sqrt{2}\,\mathrm{d}x+\sqrt{2}\,\mathrm{d}y.$

(5) 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}&=\Big[-\frac{\sin(x+y)}{x^2y}+\frac{\cos(x+y)}{xy}-\mathrm{e}^{x+y}\Big]_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}=-\frac{64}{\pi^3}-\mathrm{e}^{\pi/2},\\\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}&=\Big[-\frac{\sin(x+y)}{xy^2}+\frac{\cos(x+y)}{xy}-\mathrm{e}^{x+y}\Big]_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}=-\frac{64}{\pi^3}-\mathrm{e}^{\pi/2},\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} = -\Big(\dfrac{64}{\pi^3} + \mathrm{e}^{\pi/2}\Big)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$.

5. 设 f 为可微函数，求函数 $z = f(x, \sin(xy), \mathrm{e}^{xy})$ 的偏导数.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + y\cos(xy)f_2' + y\mathrm{e}^{xy}f_3',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)f_2' + x\mathrm{e}^{xy}f_3'.$$

6. 求下列函数的二阶微分：

(1) $z = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$;

(2) $z = xy\ln(xy)$;

(3) $z = \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$;

(4) $z = \cos\dfrac{y^2}{1+x}$;

(5) $z = x^{\sin y} + y^{\cos x}$;

(6) $z = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sin x + \sin y}$;

(7) $u = x + x^2 + \sin\dfrac{y}{2} + e^{yz}$.

解 (1) $\mathrm{d}^2z = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\Big(\dfrac{y^2+2xy}{x^4}\,\mathrm{d}x^2 - \dfrac{2(x+y)}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}y^2\Big)$.

(2) $\mathrm{d}^2z = \dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x^2 + 2(2 + \ln(xy))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}y^2$.

(3) $\mathrm{d}^2z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2$, 其中

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}\left[1 + \frac{x^2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{x^2+y^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}\left[1 + \frac{y^2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{x^2+y^2}\right].$$

(4) $\mathrm{d}^2z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2$, 其中

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(1+x)y^2}{(1+x)^3}\sin\frac{y^2}{1+x} - \frac{y^4}{(1+x)^4}\cos\frac{y^2}{1+x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(1+x)^2}\sin\frac{y^2}{1+x}+\frac{2y^3}{(1+x)^3}\cos\frac{y^2}{1+x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{1+x}\sin\frac{y^2}{1+x}-\frac{4y^2}{(1+x)^2}\cos\frac{y^2}{1+x}.$$

(5) $\mathrm{d}^2z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2$, 其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=(\sin^2 y-\sin y)x^{\sin y-2}+y^{\cos x}\cdot(\sin x\cdot\ln y)^2\\&\quad -y^{\cos x}\cdot\cos x\cdot\ln y,\\\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\cos y\cdot x^{\sin y-1}-\sin y\cdot x^{\sin y-1}\cdot\cos y\cdot\ln x\\&\quad -\cos x\cdot y^{\cos x-1}\cdot\sin x\cdot\ln y-y^{\cos x-1}\cdot\sin x,\\\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=x^{\sin y}(\cos y\cdot\ln x)^2-x^{\sin y}\cdot\sin y\cdot\ln x\\&\quad +(\cos^2 x-\cos x)y^{\cos x-1}.\end{aligned}$$

(6) $\mathrm{d}^2z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2$, 其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{2\mathrm{e}^{x^2}+4x^2\mathrm{e}^{x^2}}{\sin x+\sin y}+\frac{2(\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{y^2})\cos^2 x}{(\sin x+\sin y)^3}\\&\quad -\frac{4x\mathrm{e}^{x^2}\cos x-(\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{y^2})\sin x}{(\sin x+\sin y)^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}\cos y+2y\mathrm{e}^{y^2}\cos x}{(\sin x+\sin y)^2}+\frac{2(\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{y^2})\cdot\cos x\cdot\cos y}{(\sin x+\sin y)^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{2\mathrm{e}^{y^2}+4y^2\mathrm{e}^{y^2}}{\sin x+\sin y}+\frac{2(\mathrm{e}^{y^2}+\mathrm{e}^{x^2})\cos^2 y}{(\sin x+\sin y)^3}\\&\quad -\frac{4y\mathrm{e}^{y^2}\cos y-(\mathrm{e}^{y^2}+\mathrm{e}^{x^2})\sin y}{(\sin x+\sin y)^2}.\end{aligned}$$

(7) $\mathrm{d}^2u=2\mathrm{d}x^2+(z^2\mathrm{e}^{yz}-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{y}{2})\mathrm{d}y^2+y^2\mathrm{e}^{yz}\mathrm{d}z^2+2(1+yz)\mathrm{e}^{yz}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

7. 利用全微分，计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值.

解 记 $u=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$, 则

$$\mathrm{d}u\Big|_{(1,1)}=\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\,\mathrm{d}y.$$

于是

$$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)\doteq 0+\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\,\mathrm{d}y\Big|_{(0.03,-0.02)}=0.005.$$

8. 利用全微分，证明 $z=\arctan\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ 满足方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$.

证 对 $(x^3+y^3)\cos z=(x-y)\sin z$ 两端取微分可得,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(3x^2\cos z-\sin z)\cos z}{x-y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(3y^2\cos z+\sin z)\cos z}{x-y},$$

由此可知， $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$.

习 题 9.3 B

1. 若 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在, $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续,则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微.

证 记 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. 根据已知条件，存在 $0<\theta<1$, 使得

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x,y)-f(x_0,y_0)\\ &=\big[\,f(x,y)-f(x,y_0)\,\big]+\big[\,f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\,\big]\\ &=f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y+\big[\,f'_x(x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon_2\Delta x\,\big]\\ &=\big[\,f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta y\,\big]+\big[\,f'_x(x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon_2\Delta x\,\big]\\ &=f'_y(x_0,y_0)\Delta y+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+o(\rho),\quad(\rho\to 0).\end{aligned}$$

2. 讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的可微性及偏导连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

解 (1) 由于

$$f'_x(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f'_x(0,0)=0,$$

且 $\lim\limits_{y\to0}f(0,y)\neq0$, 所以 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续. 同理 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

由于 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 有

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-(f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\to\text{不存在},$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

(2) 由于 $f(x,0)=x\sin\dfrac{1}{x}, f(0,0)=0$ 在 $x=0$ 不可导, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可导.

(3) 由于 $f(x,0)=0,\ f(0,y)=0$, 所以

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0.$$

由于 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 有

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-(f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2} \not\to 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微. 于是，根据

$$f(x,y) = f(y,x)$$

可知， $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

(4) 由于 $f(x,0)=0,\ f(0,y)=0$, 所以

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0.$$

由于 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有

$$f'_x(x,y) = y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0,$$

所以 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. 同理 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. 于是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

3. 已知 $(axy^3 - y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y$ 为某一函数的全微分，则 a 和 b 的值分别是 (　).

(A) -2 和 2; (B) 2 和 -2; (C) -3 和 3; (D) 3 和 -3.

解 1　若

$$\mathrm{d}u = (axy^3 - y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y,$$

则由

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

可知,

$$\frac{\partial}{\partial y}(axy^3 - y^2\cos x) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + by\sin x + 3x^2y^2).$$

由此可知， $a=2,\ b=-2$. 所以选 (B).

解 2　由于 $a=2$ 时，有

$$axy^3\mathrm{d}x + 3x^2y^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2y^3),$$

由于 $b=-2$ 时，有

$$-y^2\cos x\mathrm{d}x+by\sin x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(-y^2\sin x),$$

所以 $a=2,b=-2$ 时，有

$$(axy^3-y^2\cos x)\,\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2y^3+y-y^2\sin x).$$

故选 (B).

4. 已知 $\dfrac{(x+ay)\,\mathrm{d}x+4y\,\mathrm{d}y}{(x+2y)^2}$ 是某函数的全微分，则 $a=$_____.

证 若

$$\mathrm{d}u=\frac{(x+ay)\,\mathrm{d}x+4y\,\mathrm{d}y}{(x+2y)^2},$$

则由

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}$$

可知,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x+ay}{(x+2y)^2}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{4y}{(x+2y)^2}\right].$$

由此可知， $a=4$.

5. 设有一无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为 0.1cm, 内高为 20cm, 内半径为 4cm, 求容器外壳的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V=\pi r^2h$. 圆管的体积近似公式为

$$\mathrm{d}V=2\pi rh\,\mathrm{d}r.$$

由此可得，圆管的体积为 $\mathrm{d}V\doteq 50.3$. 容器底面体积为 $\pi\cdot 4^2\cdot 0.1=5.02$. 故容器外壳的近似值为 $55.3\mathrm{cm}^3$.

6. 设 f 为可微函数，求函数 $z=f(xy,\dfrac{y}{x})$ 的二阶全微分.

解 计算一阶微分，有

$$\mathrm{d}z=\Big(yf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'\Big)\mathrm{d}x+\Big(xf_1'+\frac{1}{x}f_2'\Big)\mathrm{d}y.$$

计算二阶微分，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 z &= \mathrm{d}\Big(yf_1' - \frac{y}{x^2}f_2'\Big)\mathrm{d}x + \mathrm{d}\Big(xf_1' + \frac{1}{x}f_2'\Big)\mathrm{d}y \\ &= \Big(y^2 f_{11}'' - \frac{2y}{x^2}f_{12}'' + \frac{y^2}{x^4}f_{22}'' + \frac{2y}{x^3}f_2'\Big)\mathrm{d}x^2 \\ &\qquad + 2\Big(xyf_{11}'' - \frac{y}{x^3}f_{22}'' + f_1' - \frac{1}{x^2}f_2'\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\qquad + \Big(x^2 f_{11}'' + 2f_{12}'' + \frac{1}{x^2}f_{22}''\Big)\mathrm{d}y^2.\end{aligned}$$

7. 设 f 为可微函数，求函数 $z = f(\cos(x+y), \sqrt{x^2+y^2})$ 的偏导数.

解

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}z = f_1' \,\mathrm{d}\sin(x+y) + f_2' \,\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2} \\ &= \left[-\cos(x+y)f_1' + \frac{xf_2'}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\mathrm{d}x + \left[-\cos(x+y)f_1' + \frac{yf_2'}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\cos(x+y)f_1' + \frac{xf_2'}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\cos(x+y)f_1' + \frac{yf_2'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

8. 设 f, g, h 为可微函数，求函数 $z = f(g(x,y), h(x,y))$ 的一阶全微分.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= f_1' \,\mathrm{d}g + f_2' \,\mathrm{d}h \\ &= f_1' \cdot (g_x' \,\mathrm{d}x + g_y' \,\mathrm{d}y) + f_2' \cdot (h_x' \,\mathrm{d}x + h_y' \,\mathrm{d}y) \\ &= (f_1' g_x' + f_2' h_x') \,\mathrm{d}x + (f_1' g_y' + f_2' h_y') \,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

9. 试求复合函数 $z = f(x, g(x,y))$ 的二阶微分.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= (f_1' + f_2' g_x') \,\mathrm{d}x + f_2' g_y' \,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}^2 z &= [\mathrm{d}f_1' + \mathrm{d}f_2' \cdot g_x' + f_2' \,\mathrm{d}g_x'] \,\mathrm{d}x + [\mathrm{d}f_2' \cdot g_y' + f_2' \,\mathrm{d}g_y'] \,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[f''_{11}\mathrm{d}x + f''_{12}(g'_x\mathrm{d}x + g'_y\mathrm{d}y) + \big(f''_{21}\mathrm{d}x + f''_{22}(g'_x\mathrm{d}x + g'_y\mathrm{d}y)\big)g'_x \\
&\quad + f'_2\cdot(g''_{xx}\mathrm{d}x + g''_{xy}\mathrm{d}y)\Big]\mathrm{d}x + \Big[\big(f''_{21}\mathrm{d}x + f''_{22}\cdot(g'_x\mathrm{d}x + g'_y\mathrm{d}y)\big)g'_y \\
&\quad + f'_2\cdot(g''_{yx}\mathrm{d}x + g''_{yy}\mathrm{d}y)\Big]\,\mathrm{d}y \\
&= \Big(f''_{11} + 2f''_{12}g'_x + f''_{22}g'^2_x\Big)\mathrm{d}x^2 + 2\Big(f''_{12}g'_y + f''_{22}g'_xg'_y + f'_2g''_{xy}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \Big(f''_{22}g'^2_y + f'_2g''_{yy}\Big)\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}
$$

10. 设 $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，证明 $u\pm v,\ u\cdot v,\ \dfrac{u}{v}$ 也在点 (x,y) 可微，并且有 $\mathrm{d}(u\pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$,

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}\Big(\frac{u}{v}\Big) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}.$$

解 记 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 则

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta(uv) - (u\Delta v + v\Delta u)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\rho} = 0.$$

故 $u\cdot v$ 在点 (x,y) 可微. 其它情况类似.

11. 证明 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点连续且可导，但不可微.

证 由于 $x, y\to 0$ 时，有

$$0 \le f(x,y) \le \max(|x|,|y|) \to 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. 由于

$$f'_x(0,0) = \Big[f(x,0)\Big]'_{x=0} = 0,\ \ f'_y(0,0) = 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可导.

由于 $f(x,x) = |x|$ 在 0 点不可微，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

12. 设 $f,\ g$ 是可微函数, 且 $\begin{cases} u = f(u,x,v+y) \\ v = g(u-x, v^2y) \end{cases}$, 试用微分法计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解 原方程两端微分可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = f_1\mathrm{d}u + f_2\mathrm{d}x + f_3\cdot(\mathrm{d}v+\mathrm{d}y) \\ \mathrm{d}v = g_1\cdot(\mathrm{d}u-\mathrm{d}x) + g_2\cdot(2vx\mathrm{d}v + 2v^2\mathrm{d}y) \end{cases}.$$

消去 $\mathrm{d}v$ 可得,

$$\mathrm{d}u = \frac{f_2\cdot(1-2vyg_2)+g_1^2}{(1-f_1)(2vyg_2-1)+f_3g_1}\,\mathrm{d}x + \frac{f_3\cdot(2vgg_2-1)-v^2g_1g_2}{(1-f_1)(2vyg_2-1)+f_3g_1}\,\mathrm{d}y.$$

由此可知,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f_2\cdot(1-2vyg_2)+g_1^2}{(1-f_1)(2vyg_2-1)+f_3g_1},\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f_3\cdot(2vgg_2-1)-v^2g_1g_2}{(1-f_1)(2vyg_2-1)+f_3g_1}.$$

消去 $\mathrm{d}u$ 可得,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g_1(1-f_1)-f_2f_3}{(1-f_1)(2vyg_2-1)+f_3g_1},\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v^2g_2(f_1-1)-f_3^3}{(1-f_1)(2vyg_2-1)+f_3g_1}.$$

13. 设 $f(x,y)$ 为二次可微函数, 验证 $\mathrm{d}^3f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^3 f$.

证 直接计算微分可得

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2,$$

$$\mathrm{d}^3f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\mathrm{d}x^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3.$$

由此可知,

$$\mathrm{d}^3f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^3 f.$$

14. 设 $f,\ g$ 为可微函数且 $\begin{cases} f(x,y,u,v)=0 \\ g(x,y,u,v)=0 \end{cases}$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 原方程两端微分可得

$$\begin{cases} f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_u\mathrm{d}u + f_v\mathrm{d}v = 0 \\ g_x\mathrm{d}x + g_y\mathrm{d}y + g_u\mathrm{d}u + g_v\mathrm{d}v = 0 \end{cases}.$$

消去 $\mathrm{d}v$ 可得,

$$\mathrm{d}u = -\left[\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right]\mathrm{d}x - \left[\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right]\mathrm{d}x.$$

由此可知,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}.$$

消去 $\mathrm{d}u$ 可得,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}.$$

15. 设 f 为二阶可微函数, 求 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 的二阶微分.

解 一阶微分为

$$\mathrm{d}z = (f_1\cos\theta + f_2\sin\theta)\mathrm{d}r + (-r\sin\theta f_1 + r\cos\theta f_2)\mathrm{d}\theta.$$

二阶微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z = &\Big[f_{11}\cos^2\theta + sf_{12}\cos\theta\sin\theta + f_{22}\sin^2\theta\Big]\mathrm{d}r^2 \\ &-\Big[r\sin\theta\cos\theta f_{11} + rf_{12} - r\sin\theta\cos\theta f_{22} + \sin\theta f_1 - \cos\theta f_2\Big]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &+\Big[r^2\sin^2\theta f_{11} - r^2\sin 2\theta f_{12} + r^2\sin^2\theta f_{22} - r\cos\theta f_1 - r\sin\theta f_2\Big]\mathrm{d}\theta^2.\end{aligned}$$

§9.4 多元函数的微分法

习 题 9.4 A

1. 设 f 具有二阶连续偏导数，求函数 $z = f(xy, \frac{y}{x})$ 的二阶偏导数.

解 按照复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(xy, \frac{y}{x}) \cdot y - f_2'(xy, \frac{y}{x}) \cdot \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'(xy, \frac{y}{x}) \cdot x + f_2'(xy, \frac{y}{x}) \cdot \frac{1}{x}.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_1'(xy, \frac{y}{x})\Big] \cdot y - \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_2'(xy, \frac{y}{x})\Big] \cdot \frac{y}{x^2} - f_2'(xy, \frac{y}{x}) \cdot \frac{-2y}{x^3}$$

$$= f_{11}'' \cdot y^2 - 2f_{12}'' \cdot \frac{y^2}{x^2} + f_{22}'' \cdot \frac{y^2}{x^4} + f_2' \cdot \frac{2y}{x^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_1'(xy, \frac{y}{x})\Big] \cdot y + f_1' - \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2'(xy, \frac{y}{x})\Big] \cdot \frac{y}{x^2} - f_2' \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= f_{11}'' \cdot xy - f_{22}'' \cdot \frac{y}{x^3} + f_1' - f_2' \cdot \frac{1}{x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_1'(xy, \frac{y}{x})\Big] \cdot x + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2'(xy, \frac{y}{x})\Big] \cdot \frac{1}{x}$$

$$= f_{11}'' \cdot x^2 + 2f_{12}'' + f_{22}'' \cdot \frac{1}{x^2}.$$

2. 设 f 二阶连续可微，求函数 $z = f(\sin(x+y), x-y)$ 的二阶偏导数.

解 按照复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(\sin(x+y), x-y)\cos(x+y) + f_2'(\sin(x+y), x-y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'(\sin(x+y), x-y)\cos(x+y) - f_2'(\sin(x+y), x-y).$$

计算二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_1'(\sin(x+y), x-y)\Big]\cos(x+y) - f_1' \cdot \sin(x+y) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_2'(\sin(x+y), x-y)\Big] \\ &= f_{11}'' \cdot \cos^2(x+y) + 2f_{12}'' \cdot \cos(x+y) + f_{22}'' - f_1' \cdot \sin(x+y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_1'(\sin(x+y), x-y)\Big]\cos(x+y) - f_1' \cdot \sin(x+y) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2'(\sin(x+y), x-y)\Big] \\ &= f_{11}'' \cdot \cos^2(x+y) - f_{22}'' - f_1' \cdot \sin(x+y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_1'(\sin(x+y), x-y)\Big] \cdot \cos(x+y) - f_1' \cdot \sin(x+y) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2'(\sin(x+y), x-y)\Big] \\ &= f_{11}'' \cdot \cos^2(x+y) - 2f_{12}'' \cdot \cos(x+y) + f_{22}'' - f_1' \cdot \sin(x+y).\end{aligned}$$

3. 设 $u = z \arctan \dfrac{y}{x}$, 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-yz}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \arctan \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

4. 设 $\begin{cases} u=f(ux,\sqrt{v^2+y^2}) \\ v=g(u-x,v^2y) \end{cases}$, 其中 f,g 具有一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解 两端关于 x 求导，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)+f_2'\cdot\frac{v}{\sqrt{v^2+y^2}}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=g_1'\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)+g_2'\cdot 2vy\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(1-2vyg_2')uf_1'-\dfrac{vf_2'\cdot g_1'}{\sqrt{v^2+y^2}}}{(1-2vyg_2')(1-xf_1')-\dfrac{vf_2'\cdot g_1'}{\sqrt{v^2+y^2}}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'}{1-2vyg_2'}\cdot\frac{(1-2vyg_2')uf_1'-\dfrac{vf_2'\cdot g_1'}{\sqrt{v^2+y^2}}}{(1-2vyg_2')(1-xf_1')-\dfrac{vf_2'\cdot g_1'}{\sqrt{v^2+y^2}}}-\frac{g_1'}{1-2vyg_2'}.$$

5. 设 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数，证明 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=kf$.

证 由于 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数，所以有

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z).$$

两端关于 t 求导，有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(tx,ty,tz)}=kt^{k-1}(x,y,z).$$

令 $t=1$, 则有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf.$$

6. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\sin y - \mathrm{e}^x - xy^2 = 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\mathrm{e}^{x+y+z} - xyz = 1$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $x^3 - 3xyz = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}) = \arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$;

(5) $z = \sqrt{x^2+y^2}\tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 (1) 两端关于 x 求导，有

$$\cos y \cdot y' - \mathrm{e}^x - y^2 - 2xyy' = 0.$$

解得

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x + y^2}{\cos y - 2xy}.$$

(2) 两端关于 x 求导，有

$$\mathrm{e}^{x+y+z}\Big(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\Big) - yz - xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{e}^{x+y+z} - yz}{xy - \mathrm{e}^{x+y+z}}.$$

两端关于 y 求导，有

$$\mathrm{e}^{x+y+z}\Big(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\Big) - xz - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^{x+y+z} - xz}{xy - \mathrm{e}^{x+y+z}}.$$

(3) 两端关于 x 求导，有

$$3x^2 - 3yz - 3xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2-yz}{xy}.$$

两端关于 y 求导，有

$$-3xz-3xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{y}.$$

(4) 两端关于 x 求导，有

$$\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}.$$

解得

$$y'=\left(y+\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg/\left(x-\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{y+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}}{x+(x-y)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

计算二阶导数，有

$$y''=\frac{y'+(1+y')\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{(x+y)(1+y')}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+(x-y)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$-\frac{y+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}}{(x+(x-y)\sqrt{x^2+y^2})^2}\cdot\left(1+(1-y')\sqrt{x^2+y^2}+\frac{(x-y)(1+y')}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

(5) 两端关于 x 求导，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\tan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sec^2\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{xz}{x^2+y^2}\right).$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2+y^2}.$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{z+\dfrac{x^2 z}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}-\frac{2x^2 z}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2 z}{(x^2+y^2)^2}.$$

7. 求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+2y^2+3z^2=20, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\begin{cases} x=v\sin u+u\cos v \\ y=v\cos u-u\sin v, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

(3) 设 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v, \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 令

$$\begin{aligned} F(x,y,z)&=z-x^2-y^2, \\ G(x,y,z)&=x^2+2y^2+3z^2-20, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \\ &=-\begin{vmatrix} -2y & -2x \\ 4y & 2x \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} -2y & 1 \\ 4y & 6z \end{vmatrix}=\frac{x}{3z-1}. \end{aligned}$$

(2) 令

$$\begin{aligned} F(x,y,z)&=x-v\sin u-u\cos v, \\ G(x,y,z)&=y-v\cos u+u\sin v, \end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -\sin u + u\sin v \\ 0 & -\cos u + u\cos v \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} -v\cos u - \cos v & -\sin u + u\sin v \\ v\sin u + \sin v & -\cos u + u\cos v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\cos u - u\cos v}{v - u + (1-uv)\cos(u+v)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \Bigg/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -\sin u + u\sin v \\ 1 & -\cos u + u\cos v \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} -v\cos u - \cos v & -\sin u + u\sin v \\ v\sin u + \sin v & -\cos u + u\cos v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\sin u + u\sin v}{v - u + (1-uv)\cos(u+v)}.$$

(3) 令

$$F(x,y,z) = x - \mathrm{e}^u - u\sin v,$$
$$G(x,y,z) = y - \mathrm{e}^u + u\cos v,$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Bigg/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -u\cos v \\ 0 & -u\sin v \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u - \sin v & -u\cos v \\ -\mathrm{e}^u + \cos v & -u\sin v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin v}{1 - \mathrm{e}^u(\sin v - \cos v)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \Bigg/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -u\cos v \\ 1 & -u\sin v \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u - \sin v & -u\cos v \\ -\mathrm{e}^u + \cos v & -u\sin v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\cos v}{1 - \mathrm{e}^u(\sin v - \cos v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u - \sin v & 1 \\ -\mathrm{e}^u + \cos v & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u - \sin v & -u\cos v \\ -\mathrm{e}^u + \cos v & -u\sin v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\mathrm{e}^u + \cos v}{u - u\mathrm{e}^u(\sin v - \cos v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u - \sin v & 0 \\ -\mathrm{e}^u + \cos v & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u - \sin v & -u\cos v \\ -\mathrm{e}^u + \cos v & -u\sin v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^u + \sin v}{u - u\mathrm{e}^u(\sin v - \cos v)}.$$

8. 设 $z = f(x - y, y\sin x)$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 按照复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x - y, y\sin x) + f_2'(x - y, y\sin x) y\cos x.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_1'(x - y, y\sin x)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2'(x - y, y\sin x)\Big] y\cos x + f_2' \cdot \cos x$$

$$= -f_{11}'' + (\sin x - 1) f_{12}'' + f_{22}'' \cdot \sin x + f_2' \cdot \cos x.$$

9. 设 $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, 求 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) + f_2'(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2x.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_1'(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)\Big]$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big[f_2'(x+y+z,x^2+y^2+z^2)\cdot 2x\Big]+2f_2'$$

$$=f_{11}''+4xf_{12}''+4x^2f_{22}''+2f_2'.$$

同理，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{11}''+4yf_{12}''+4y^2f_{22}''+2f_2'.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f_{11}''+4zf_{12}''+4z^2f_{22}''+2f_2'.$$

故

$$\Delta u=3f_{11}''+4(x+y+z)f_{12}''+4(x^2+y^2+z^2)f_{22}''+6f_2'.$$

10. 设由方程 $f(x+y,y+z)=0$ 所确定的函数为 $z=z(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 计算一阶偏导数，有

$$f_1'(x+y,y+z)+f_2'(x+y,y+z)\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1'(x+y,y+z)}{f_2'(x+y,y+z)}.$$

计算二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f_1'(x+y,y+z)\Big]}{f_2'}+\frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big[f_2'(x+y,y+z)\Big]\\&=-\frac{f_{11}''+f_{12}''\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{f_2'}+\frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\Big[f_{12}''+f_{22}''\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\Big]\\&=-\frac{f_{11}''-f_{12}''\cdot\dfrac{f_1'}{f_2'}}{f_2'}+\frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\Big[f_{12}''-f_{22}''\cdot\frac{f_1'}{f_2'}\Big].\end{aligned}$$

11. 设 $z=f(u)$ 为可微函数， $\varphi'(u),p(u)$ 为连续函数且 $\varphi'(u)\neq 1$, 若 $u=\varphi(u)+\displaystyle\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$, 求 $p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}+p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解 由 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y).$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}.$$

由 $z=f(u)$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p(x)f'(u)}{1-\varphi'(u)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-p(y)f'(u)}{1-\varphi'(u)}.$$

因此

$$p(x)\frac{\partial z}{\partial y}+p(y)\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

12. 设 $u=f(x,y),\ v=g(x,y,u),\ w=h(x,u,v)$, 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}$.

解 令

$$F(x,y,u,v,w)=u-f(x,y),$$
$$G(x,y,u,v,w)=v-g(x,y,u),$$
$$H(x,y,u,v,w)=w-h(x,u,v),$$

则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)}\Big/\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&0&-f'_x\\-g'_u&1&-g'_x\\-h'_u&-h'_v&-h'_x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}1&0&0\\-g'_u&1&0\\-h'_u&-h'_v&1\end{vmatrix}$$

$$= h'_x + g'_u h'_v f'_x + h'_u f'_x + h'_v g'_x.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f'_y \\ -g'_u & 1 & -g'_y \\ -h'_u & -h'_v & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -g'_u & 1 & 0 \\ -h'_u & -h'_v & 1 \end{vmatrix}$$

$$= g'_u h'_v f'_y + h'_u f'_y + h'_v g'_y.$$

13. 设 $u = f(x,y,z),\ v = g(x,y,u),\ w = h(x,u,v)$, 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dfrac{\partial w}{\partial z}$.

解 令

$$F(x,y,z,u,v,w) = u - f(x,y,z),$$
$$G(x,y,z,u,v,w) = v - g(x,y,u),$$
$$H(x,y,z,u,v,w) = w - h(x,u,v),$$

则

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f'_x \\ -g'_u & 1 & -g'_x \\ -h'_u & -h'_v & -h'_x \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -g'_u & 1 & 0 \\ -h'_u & -h'_v & 1 \end{vmatrix}$$

$$= h'_x + g'_u h'_v f'_x + h'_u f'_x + h'_v g'_x.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f'_y \\ -g'_u & 1 & -g'_y \\ -h'_u & -h'_v & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -g'_u & 1 & 0 \\ -h'_u & -h'_v & 1 \end{vmatrix}$$

$$= g'_u h'_v f'_y + h'_u f'_y + h'_v g'_y.$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,z)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f'_z \\ -g'_u & 1 & 0 \\ -h'_u & -h'_v & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -g'_u & 1 & 0 \\ -h'_u & -h'_v & 1 \end{vmatrix}$$

$$= h'_u f'_z + h'_v g'_u f'_z.$$

14. 设 f 具有二阶连续偏导数且 $z = xf(\frac{y}{x}) + (x-1)y\ln x$, 证明

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x+1)y.$$

证 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}f'(\frac{y}{x}) + y\ln x + \frac{(x-1)y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(\frac{y}{x}) + (x-1)\ln x.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^3}{x^2}f'' + \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}f''.$$

由此可知

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x+1)y.$$

习 题 9.4 B

1. 在微分表达式 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ 中，作变量代换 $x=uv,\ y=\frac{1}{2}\,(u^2-v^2)$, 求变换后的表达式.

解 按照复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=v\frac{\partial z}{\partial x}+u\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=u\frac{\partial z}{\partial x}-v\frac{\partial z}{\partial y}.$$

联立解之得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{u^2+v^2}\Big(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\Big),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v^2}\Big(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\Big).$$

因此

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{u^2+v^2}\Big[\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial v}\Big)^2\Big].$$

2. 在方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 中作代换 $u=x+y,\ v=x-y,\ w=xy-z$, 将 w 看作 u,v 的函数，求代换后的方程.

解 由 $w=xy-z$ 得 $z=xy-w$, 按照复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

代入原方程，有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}.$$

3. 通过代换 $x = \mathrm{e}^u \cos\theta,\ y = \mathrm{e}^u \sin\theta$, 变换方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

解 由于

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2),\ \theta = \arctan\frac{y}{x},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2 + y^2}\Big[\frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\Big]$$

$$+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{y}{x^2+y^2}\Big[\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\Big]$$

$$=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{x^2+y^2}\Big[\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\Big]$$

$$-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{x}{x^2+y^2}\Big[\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\Big]$$

$$=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}\Big[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\Big].$$

故原方程变为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

4. 设 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，若 $x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha,\ y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha$, 证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

证 (1) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$=\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ &= -\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \cos\alpha\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\alpha\Big) \\ &\quad + \sin\alpha\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\alpha\Big) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= -\sin\alpha\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-\sin\alpha) + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\Big) \\ &\quad + \cos\alpha\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(-\sin\alpha) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos\alpha\Big) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\alpha.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

5. 设 $u = u(x, y, z),\ x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta$, 证明

(1) 当 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ 时, u 仅是 $\theta,\ \varphi$ 的函数;

(2) 当 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 时, u 仅是 r 的函数.

证 (1) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

所以 u 仅是 θ, φ 的函数.

(2) 记 $k = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}$. 由于

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot r\cos\varphi\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\sin\varphi\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot r\sin\theta \\
&= kr(x\cos\varphi\cos\theta + y\sin\varphi\cos\theta - z\sin\theta) \\
&= kr^2(\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\frac{\partial u}{\partial x}\cdot r\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\cos\varphi\sin\theta \\
&= kr(-x\sin\varphi\sin\theta + y\cos\varphi\sin\theta) \\
&= kr^2(-\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta) = 0,
\end{aligned}$$

所以 u 仅是 r 的函数.

6. 设 $u = f(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 若 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

证 对复合函数

$$\begin{cases} u = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z), \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

应用链法则并将 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ 代入，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{y}{r^2}\\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{x}{r^2}\\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.\end{aligned}$$

再求二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\Big)\cdot\cos\theta\\ &\qquad -\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\Big)\cdot\frac{\sin\theta}{r}\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\\ &\qquad +\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}\\ &\qquad -\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}.\end{aligned}$$

两式相加，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

7. 证明由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数为

$$y'' = -\frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}.$$

解 利用隐函数定理，有

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

继续求导，有

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[F'_x(x,y)\Big]\cdot F'_y - F'_x\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[F'_y(x,y)\Big]}{F'^2_y} \\ &= -\frac{\Big[F''_{xx}+F''_{xy}\cdot y'\Big]\cdot F'_y - F'_x\cdot\Big[F''_{xy}+F''_{yy}\cdot y'\Big]}{F'^2_y} \\ &= -\frac{\Big[F''_{xx}-F''_{xy}\cdot\dfrac{F'_x}{F'_y}\Big]\cdot F'_y - F'_x\cdot\Big[F''_{xy}-F''_{yy}\cdot\dfrac{F'_x}{F'_y}\Big]}{F'^2_y} \\ &= -\frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}.. \end{aligned}$$

8. 设 g 是二次可微函数， f 具有连续的二阶偏导数，若 $u=g(f(x,y))$，证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

证 由于 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 的连续性未知，所以不能直接套用相等定理. 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g'(f(x,y))f'_x(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g'(f(x,y))f'_y(x,y).$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g'' \cdot f'_x \cdot f'_y + g' \cdot f''_{yx};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = g'' \cdot f'_y \cdot f'_x + g' \cdot f''_{xy}.$$

由于 f''_{yx}, f''_{xy} 连续，所以 $f''_{yx} = f''_{xy}$. 从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

9. 设 $u = f(g(x), h(y))$, 其中 g, h 是二次可微函数， f 具有连续的二阶偏导数，证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

证 由于 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 的连续性未知，所以不能直接套用相等定理. 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(g(x), h(y))g'(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(g(x), h(y))h'(y).$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{yx} \cdot g'(x)h'(y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f''_{xy} \cdot h'(y)g'(x).$$

由于 f''_{yx}, f''_{xy} 连续，所以 $f''_{yx} = f''_{xy}$. 从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

10. 利用变量代换 $u = xy,\ v = x - y$, 化简微分方程

$$\frac{1}{(x+y)^2}\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big) - \frac{1}{(x+y)^3}\Big(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big) = 0.$$

解 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v},$$

计算二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y\Big[y\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\Big] + \Big[y\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\Big]\\ &= y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} + x\Big[y\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\Big] - \Big[y\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\Big]\\ &= xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + (x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x\Big[x\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\Big] - \Big[x\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\Big]\\ &= x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2x\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{(x+y)^2}\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big) - \frac{1}{(x+y)^3}\Big(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

故原方程变为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{v^2+4u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

11. 设 $\varphi(u)$ 是二阶可导函数，若 $z = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 证明

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(\frac{y}{x})\,\frac{-y}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(\frac{y}{x})\frac{1}{x^2},$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi'' \cdot \frac{y^2}{x^4} + \varphi' \cdot \frac{2y}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi'' \cdot \frac{-y}{x^3} + \varphi' \cdot \frac{-1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'' \cdot \frac{1}{x^2}.$$

因此

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

12. 设 f, g 具有二阶连续偏导数且 $z = f(g(xy, x^2+y^2), x)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 计算一阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f_1'(g(xy, x^2+y^2), x) \cdot (g_1'(xy, x^2+y^2) \cdot y + g_2'(xy, x^2+y^2) \cdot 2x) \\ &\quad + f_2'(g(xy, x^2+y^2), x).\end{aligned}$$

计算二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_1'(g(xy, x^2+y^2), x)\Big] \cdot (g_1' \cdot y + g_2' \cdot 2x) \\ &\quad + f_1' \cdot \Big[\frac{\partial}{\partial x}(g_1'(xy, x^2+y^2)) \cdot y + \frac{\partial}{\partial x}(g_2'(xy, x^2+y^2)) \cdot 2x + 2g_2'\Big] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_2'(g(xy, x^2+y^2), x)\Big] \\ &= \Big[f_{11}'' \cdot (g_1' \cdot y + g_2' \cdot 2x) + f_{12}''\Big] \cdot (g_1' \cdot y + g_2' \cdot 2x) \\ &\quad + f_1' \cdot \Big[g_{11}'' \cdot y^2 + 4xyg_{12}'' + 4x^2 g_{22}'' + 2g_2'\Big] \\ &\quad + f_{12}'' \cdot (g_1' \cdot y + g_2' \cdot 2x) + f_{22}''\end{aligned}$$

$$= f''_{11}\cdot(g'_1\cdot y+g'_2\cdot 2x)^2+2f''_{12}\cdot(g'_1\cdot y+g'_2\cdot 2x)+f''_{22}$$

$$+f'_1\cdot(y^2\cdot g''_{11}+4xyy''_{12}+4x^2g''_{22}+2g'_2).$$

13. 设 $\begin{cases}u=f(ux,\cos(v+y)),\\ v=g(\sin(u-x),vy),\end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数，计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 关于 x 求导，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\cdot\Big(u+x\frac{\partial u}{\partial x}\Big)-f'_2\cdot\sin(v+y)\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=g'_1\cdot\Big[\cos(u-x)\cdot\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-1\Big)\Big]+g'_2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

联立解之得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(1-g'_2)uf'_1-f'_2\cdot g'_1\cdot\sin(v+y)\cos(u-x)}{(1-g'_2)(1-xf'_1)+f'_2\cdot g'_1\cdot\sin(v+y)\cos(u-x)}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{uf'_1-(f'_1+1)g'_1\cdot\cos(u-x)}{(1-g'_2)(1-xf'_1)+f'_2\cdot g'_1\cdot\sin(v+y)\cos(u-x)}.$$

关于 y 求导，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_1\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-f'_2\cdot\sin(v+y)\cdot\Big(\frac{\partial v}{\partial y}+1\Big),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=g'_1\cdot\cos(u-x)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+g'_2\cdot\Big(y\frac{\partial v}{\partial y}+v\Big).$$

联立解之得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(yg'_2-vg'_2-1)f'_2\cdot\sin(v+y)}{(1-f'_1)(1-yg'_2)+f'_2\cdot g'_1\cdot\sin(v+y)\cos(u-x)}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(1-f'_1)g'_2-f'_2\cdot g'_1\cdot\sin(v+y)\cos(u-x)}{(1-f'_1)(1-yg'_2)+f'_2\cdot g'_1\cdot\sin(v+y)\cos(u-x)}.$$

14. 设 $z=f(x,y)$, 而 y是由方程 $\dfrac{x}{y}=\ln\dfrac{y}{z}$ 所确定的 x,z 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 令

$$F(x,y,z)=z-f(x,y),$$
$$G(x,y,z)=\frac{x}{y}-\ln\frac{y}{z},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\\&=-\begin{vmatrix}-f'_y & -f'_x\\ \dfrac{-x}{y^2}-\dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{y}\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}-f'_y & 1\\ \dfrac{-x}{y^2}-\dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z}\end{vmatrix}\\&=\frac{z\big[yf'_y+(x+y)f'_x\big]}{(x+y)z-y^2f'_y}.\end{aligned}$$

15. 设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，且函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 确定，求 $\mathrm{d}u$.

解 微分 $u=f(x,y,z)$ 得

$$\mathrm{d}u=f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y+f'_z\mathrm{d}z.$$

微分 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 得

$$(1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=(1+z)\mathrm{e}^z\mathrm{d}z.$$

消去 $\mathrm{d}z$ 得

$$\mathrm{d}u=\frac{[(1+z)\mathrm{e}^zf'_x+(1+x)\mathrm{e}^xf'_z]\mathrm{d}x+[(1+z)\mathrm{e}^zf'_y+(1+y)\mathrm{e}^yf'_z]\mathrm{d}y}{(1+z)\mathrm{e}^z}.$$

16. 设 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-uv=0\\ xy-u^2+v^2=0\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 令

$$F(x,y,u,v)=\sqrt{x^2+y^2}-uv,$$

$$G(x,y,u,v)=xy-u^2+v^2,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\\&=-\begin{vmatrix}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -u\\ x & 2v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}-v & -u\\ -2u & 2v\end{vmatrix}\\&=\frac{\dfrac{2yv}{\sqrt{x^2+y^2}}+xu}{2(u^2+v^2)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\\&=-\begin{vmatrix}-v & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -2u & x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}-v & -u\\ -2u & 2v\end{vmatrix}\\&=\frac{xv-\dfrac{2yu}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2(u^2+v^2)}.\end{aligned}$$

17. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x+y,y+z)=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 关于 x 求导，有

$$f_1'(x+y,y+z)+f_2'(x+y,y+z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

解之得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1'(x+y,y+z)}{f_2'(x+y,y+z)}.$$

求二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f_1'(x+y,y+z)\Big]}{f_2'} + \frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big[f_2'(x+y,y+z)\Big]\\ &= -\frac{f_{11}''+f_{12}''\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{f_2'} + \frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\Big[f_{12}''+f_{22}''\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\Big]\\ &= -\frac{f_{11}''-f_{12}''\cdot\dfrac{f_1'}{f_2'}}{f_2'} + \frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\Big[f_{12}''-f_{22}''\cdot\frac{f_1'}{f_2'}\Big].\end{aligned}$$

关于 y 求导，有

$$f_1'(x+y,y+z)+f_2'(x+y,y+z)\cdot\Big(1+\frac{\partial z}{\partial y}\Big)=0.$$

解之得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=1-\frac{f_1'(x+y,y+z)}{f_2'(x+y,y+z)}.$$

求二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f_1'(x+y,y+z)\Big]}{f_2'} + \frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2'(x+y,y+z)\Big]\\ &= -\frac{f_{11}''+f_{12}''\cdot\Big(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big)}{f_2'} + \frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\Big[f_{12}''+f_{22}''\cdot\Big(1+\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big]\\ &= -\frac{f_{11}''-f_{12}''\cdot\dfrac{f_1'}{f_2'}}{f_2'} + \frac{f_1'}{f_2'^2}\cdot\Big[f_{12}''-f_{22}''\cdot\frac{f_1'}{f_2'}\Big].\end{aligned}$$

18. 设 $z=f(2x+3y,\dfrac{x}{y})$, 其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1'(2x+3y,\frac{x}{y})+\frac{f_y'(2x+3y,\dfrac{x}{y})}{y}.$$

计算二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= 2\frac{\partial}{\partial y}\Big[f_1'(2x+3y,\frac{x}{y})\Big]+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\Big[f_2'(2x+3y,\frac{x}{y})\Big]-\frac{f_2'}{y^2}\\ &= 6f_{11}''-\frac{2xf_{12}''}{y^2}+\frac{3f_{12}''}{y}-\frac{xf_{22}''}{y^3}-\frac{f_2'}{y^2}.\end{aligned}$$

19. 已知方程组 $\begin{cases}x=u+v+w\\ y=u^2+v^2+w^2\\ z=u^3+v^3+w^3\end{cases}$ 确定 u,v,w 为 x,y,z 的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

解 令

$$\begin{aligned}F(x,y,z,u,v,w)&=x-u-v-w,\\ G(x,y,z,u,v,w)&=y-u^2-v^2-w^2,\\ H(x,y,z,u,v,w)&=z-u^3+v^3+w^3,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}\Big/\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}\\ &= -\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&-2v&-2w\\0&-3v^2&-3w^2\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-2u&-2v&-2w\\-3u^2&-3v^2&-3w^2\end{vmatrix}\\ &= \frac{vw(v-w)}{(u-v)(u-w)(w-v)}=\frac{vw}{(u-v)(w-u)}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}\Big/\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2u & 1 & -2w \\ -3u^2 & 0 & -3w^2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2u & -2v & -2w \\ -3u^2 & -3v^2 & -3w^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{u^2 - w^2}{(u-v)(u-w)(w-v)} = \frac{u+w}{(u-v)(w-v)}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,z)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2u & -2v & 0 \\ -3u^2 & -3v^2 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2u & -2v & -2w \\ -3u^2 & -3v^2 & -3w^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{u-v}{(u-v)(u-w)(w-v)} = \frac{1}{(u-w)(w-v)}.$$

20. 视 w 为 u, v 的函数，利用变量代换

$$u = yz - x,\ v = xz - y,\ w = xy - z$$

变换方程

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz.$$

解 令

$$F(x,y,z,u,v) = u - yz + x,$$

$$G(x,y,z,u,v) = v - xz + y,$$

$$H(x,y,z,u,v) = w(u,v) - xy + z,$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,u,v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \\ -y & \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} -y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{y + \dfrac{\partial w}{\partial u} - z\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1 + y\dfrac{\partial w}{\partial u} + x\dfrac{\partial w}{\partial v}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(y, u, v)} \Big/ \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(z, u, v)}$$

$$= -\begin{vmatrix} -z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} -y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x + \dfrac{\partial w}{\partial v} - z\dfrac{\partial w}{\partial u}}{1 + y\dfrac{\partial w}{\partial u} + x\dfrac{\partial w}{\partial v}}.$$

代入原方程，化简可得新方程为

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

21. 通过代换 $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan\dfrac{y}{x}$ 变换方程

$$(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解 利用复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简可得新方程为

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

22. 设 $z = x\,f(x+y) + y\,g(x+y)$, 其中 f, g 都是二次可微函数，证明：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x+y) + x\,f'(x+y) + y\,g'(x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\,f'(x+y) + g(x+y) + y\,g'(x+y).$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + x\,f'' + y\,g'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f' + x\,f'' + g' + y\,g'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\,f'' + 2g' + y\,g''.$$

由此可知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

23. 设 $f(x,t) = \displaystyle\int_0^{g(x,t)} \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u$, 其中 $g(x,t) = \dfrac{x}{2\sqrt{kt}}$ (k 为正常数), 试证 $f(x,t)$ 满足热传导方程 $k\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

证 对 $g(x,t)$ 求偏导数，有

$$g'_x = \frac{1}{2\sqrt{kt}},\ g''_{xx} = 0,\ g'_t = -\frac{x}{z\sqrt{k}t^{3/2}}.$$

对 $f(x,t)$ 求偏导数，有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{g^2(x,t)} \cdot g'_x(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{g^2} \cdot 2g'^2_x + \mathrm{e}^{g^2} \cdot g''_{xx} = \mathrm{e}^{g^2} \cdot \frac{x}{4(kt)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{e}^{g^2} \cdot g'_t = -\mathrm{e}^{g^2} \cdot \frac{x}{2\sqrt{k}\, t^{3/2}},$$

由此可知

$$k\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial f}{\partial t}.$$

24. 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $F\big(x + \dfrac{z}{y},\ y + \dfrac{z}{x}\big) = 0$ 确定，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

证 两端关于 x 求导，有

$$F'_1 \cdot \Big(1 + \frac{1}{y}\,\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + F'_2 \cdot \Big(\frac{1}{x}\,\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2}\Big) = 0.$$

解之得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{z\,F'_2}{x^2} - F'_1}{\dfrac{F'_1}{y} + \dfrac{F'_2}{x}}.$$

两端关于 y 求导，有

$$F'_1 \cdot \Big(\frac{1}{y}\,\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2}\Big) + F'_2 \cdot \Big(1 + \frac{1}{x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\Big) = 0.$$

解之得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{z\,F'_1}{y^2} - F'_2}{\dfrac{F'_1}{y} + \dfrac{F'_2}{x}}.$$

因此

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

25. 通过代换 $u=x^2+y^2,\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\ w=\ln z-(x+y)$ 变换方程 (视 w 为 u,v 的函数)

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x}-x\,\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z.$$

解 令

$$F(x,y,z,u,v)=u-x^2-y^2,$$

$$G(x,y,z,u,v)=v-\frac{1}{x}-\frac{1}{y},$$

$$H(x,y,z,u,v)=w(u,v)-\ln z+x+y,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,v)}\Big/\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,u,v)}\\&=-\begin{vmatrix}-2x&1&0\\\dfrac{1}{x^2}&0&1\\1&\dfrac{\partial w}{\partial u}&\dfrac{\partial w}{\partial v}\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\dfrac{1}{z}&\dfrac{\partial w}{\partial u}&\dfrac{\partial w}{\partial v}\end{vmatrix}\\&=z\Big(1+2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,u,v)}\Big/\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,u,v)}\\&=-\begin{vmatrix}-2y&1&0\\\dfrac{1}{y^2}&0&1\\1&\dfrac{\partial w}{\partial u}&\dfrac{\partial w}{\partial v}\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\dfrac{1}{z}&\dfrac{\partial w}{\partial u}&\dfrac{\partial w}{\partial v}\end{vmatrix}\\&=z\Big(1+2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\Big).\end{aligned}$$

代入原方程，化简可得新方程为

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

26. 设函数 $u(x,y)$ 有连续的二阶导数，要使方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

(A,B,C 都不是 0 且 $B^2-AC>0$) 在线性变换 $\xi=x+\alpha y,\ \eta=x+\beta y$ 下变为方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, 问应如何选取常数 $\alpha,\ \beta$?

解 计算一阶导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial z}{\partial\eta}.$$

计算二阶导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}.$$

代入原方程，有

$$(A+2B\alpha+C\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2[A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta]\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$+(A+2B\beta+C\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0.$$

由于 $B^2-AC>0$, 所以 $A+2Bt+Ct^2=0$ 有两个不同解，当 α,β 是这两个不同解时， $A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta\neq 0$. 于是原方程变为等价方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

27. 设函数 $u(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明当 $\xi=\dfrac{y}{x},\ \eta=y$ 时，方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

可化为标准形式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$.

证 计算一阶导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\ \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}\ \frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

计算二阶导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}\ \frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}\ \frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^3}\ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{2}{x}\ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

代入原方程可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

28. 若对任意的点 (x,y) 有 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right|=2$, 变量代换

$$x=uv,\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$$

将函数 $f(x,y)$ 变换成函数 $g(u,v)$, 试求常数 a,b, 使

$$a\Big(\frac{\partial g}{\partial u}\Big)^2-b\Big(\frac{\partial g}{\partial v}\Big)^2=u^2+v^2.$$

解 按照题意，有

$$f_1'^2+f_2'^2=4$$

并且有

$$g(u,v)=f\Big(uv,\frac{1}{2}(u^2-v^2)\Big).$$

由此可知

$$\frac{\partial g}{\partial u}=f_1'\cdot v+f_2'\cdot u,$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=f_1'\cdot u-f_2'\cdot v.$$

由于

$$\begin{aligned}u^2+v^2 &=a\Big(\frac{\partial g}{\partial u}\Big)^2-b\Big(\frac{\partial g}{\partial v}\Big)^2\\ &=(af_1'^2-bf_2'^2)v^2+(af_2'^2-bf_1'^2)u^2+2(a+b)uvf_1'f_2',\end{aligned}$$

所以

$$a+b=0,\ af_1'^2-bf_2'^2=1.$$

因此 $a=\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{1}{4}$.

29. 设函数 $u(x,y)$ 有连续的二阶导数，证明 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充要条件是

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\ (u\neq 0).$$

证 必要性 由 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x)g(y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f(x)g'(y).$$

进一步可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(x).$$

由此可知

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

充分性 由于

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=-\frac{1}{u^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

于是，可设 $\dfrac{1}{u}\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x)$, 解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\varphi(x)u=0,$$

可得

$$u=g(y)\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x}.$$

记 $f(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x}$, 则有

$$u=f(x)g(y).$$

30. 设 a,b,c 为常数且 $b^2=ac,\ c\neq 0$, 问 α,β 取何值时，变量代换 $u=x+\alpha y,\ v=x+\beta y$ 可使方程

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

化为标准形式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$

解 利用复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算二阶导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，有

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$
$$+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

由于 $b^2=ac$, 所以 $a+2b\alpha+c\alpha^2=0$ 有解 $\alpha=-\dfrac{b}{c}$. 由此可知,

$$a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=0.$$

如果取 $\alpha=-\dfrac{b}{c}$, $\beta\neq\alpha$, 则 $a+2b\beta+c\beta^2\neq 0$, 于是原方程可化为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

§9.5 偏导数的应用

习 题 9.5 A

1. 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

解 平面 π 在 $(1,-2,5)$ 点的法向量为

$$\nabla(z-x^2-y^2)\Big|_{(1,-2,5)}=(1,-2x,-2y)\Big|_{(1,-2,5)}=(1,-2,4).$$

设平面 π 的方程为

$$(x+y+b)+\lambda(x+ay-z-3)=0,$$

则有

$$(1+\lambda,1+a\lambda,-\lambda)=t(1,-2,4).$$

由此可得方程组

$$\begin{cases} 1+\lambda = t, \\ 1+a\lambda = -2t, \\ -\lambda = 4t, \\ (x+y+b)+\lambda(x+ay-z-3)\Big|_{(1,-2,5)} = 0. \end{cases}$$

解之得 $a=\dfrac{7}{4},\ b=-\dfrac{37}{5}$.

2. 有一球面与一柱面，其方程为

$$x^2+y^2+z^2=4r^2,\ x^2+y^2=2rx,$$

求其相交曲线在 $(r,r,\sqrt{2}r)$ 点处的切线与法平面方程及二曲面在此点处的交角.

解 球面 $x^2+y^2+z^2=4r^2$ 在 $(r,r,\sqrt{2}r)$ 点的法向量为

$$\nabla(x^2+y^2+z^2-4r^2)\Big|_{(r,r,\sqrt{2}r)} = (2x,2y,2z)\Big|_{(r,r,\sqrt{2}r)} = 2r(1,1,\sqrt{2}).$$

柱面 $x^2+y^2+z^2=4r^2$ 在 $(r,r,\sqrt{2}r)$ 点的法向量为

$$\nabla(x^2+y^2-2rx)\Big|_{(r,r,\sqrt{2}r)} = (2x-2r,2y,0)\Big|_{(r,r,\sqrt{2}r)} = 2r(0,1,0).$$

交线在 $(r,r,\sqrt{2}r)$ 点的切向量为

$$(1,1,\sqrt{2})\times(0,1,0)=(-\sqrt{2},0,1).$$

对应的切线与法平面方程为

$$\frac{x-r}{-\sqrt{2}} = \frac{y-r}{0} = \frac{z-\sqrt{2}\,r}{1},$$

$$-\sqrt{2}(x-r)+(z-\sqrt{2})=0.$$

二曲面在 $(r,r,\sqrt{2}r)$ 点的交角为

$$\arccos\frac{(1,1,\sqrt{2})\cdot(0,1,0)}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

3. 在曲面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上求一点，使曲面在此点的切平面与下列直线平行：

$$L_1:\frac{x-3}{4}=\frac{y-6}{5}=\frac{z+1}{8},\quad L_2:x=y=z.$$

解 所求切平面的法向量为

$$(4,5,8)\times(1,1,1)=(-3,4,-1).$$

函数 $3x^2+y^2+z^2$ 的梯度为

$$\nabla(3x^2+y^2+z^2)=2(3x,y,z).$$

按照

$$(3x,y,z)=t(-3,4,-1)$$

有方程组

$$\begin{cases}3x=-3t,\\ y=4t,\\ z=-t,\\ 3x^2+y^2+z^2=16.\end{cases}$$

解之可得所求点为 $\pm\Big(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\Big)$.

4. 求过 $(1,1,1)$ 点的直线方程，使得该直线与交线

$$\begin{cases}x^2+y^2+3z^2=32,\\ 2x^2+y^2-z^2=0\end{cases}$$

在 $(2,1,3)$ 点的切线平行.

解 曲面 $x^2+y^2+3z^2=32$ 在 $(2,1,3)$ 点的法向量为

$$\nabla(x^2+y^2+3z^2)\Big|_{(2,1,3)}=(2x,2y,6z)\Big|_{(2,1,3)}=2(2,1,9).$$

曲面 $2x^2+y^2-z^2$ 在 $(2,1,3)$ 点的法向量为

$$\nabla(2x^2+y^2-z^2)\Big|_{(2,1,3)}=(4x,2y,-2z)\Big|_{(2,1,3)}=2(4,1,-3).$$

交线在 $(2,1,3)$ 点的切向量为

$$(2,1,9)\times(4,1,-3)=-2(6,-21,1).$$

故所求直线为

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-21}=\frac{z-1}{1}.$$

5. 当 $t\in(0,2\pi)$ 为何值时，曲线

$$L: x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\frac{t}{2}$$

在相应点的切线垂直于平面 $x+y+\sqrt{2}z=0$, 并写出相应的切线方程和法平面方程.

解 曲线 L 的切向量为

$$(x'(t),y'(t),z'(t))=(1-\cos t,\sin t,2\cos\frac{t}{2}).$$

按照题意，有

$$(1-\cos t,\sin t,2\cos\frac{t}{2})=m(1,1,\sqrt{2}).$$

解之得 $t=\dfrac{\pi}{2}$, 对应点为 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$. 故所求切线和法平面方程为

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$(x-\frac{\pi}{2}+1)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0.$$

6. 求 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 在 $(0,0)$ 点的泰勒展式到二阶项.

解 利用

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\quad(x\to 0),$$

有

$$f(x,y)\ =\frac{1-\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{2}y^2}+o(x^2+y^2)$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{2}x^2\Big)\Big(1 + \frac{1}{2}y^2\Big) + o(x^2 + y^2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2) \quad (x \to 0).$$

7. 求 $f(x, y) = x^y$ 在 $(1, 1)$ 点的泰勒展式到三阶项，并计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解 利用

$$\ln x = \ln[1 + (x - 1)] = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + o[(x - 1)^2],$$

有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{(y-1)\ln x} \\ &= \mathrm{e}\Big(1 + (y - 1)\ln x + \frac{1}{2}[(y - 1)\ln x]^2 + o(\rho^3)\Big) \\ &= \mathrm{e}\Big(1 + (y - 1)[(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2] + o(\rho^3)\Big) \\ &= \mathrm{e}\Big(1 + (y - 1)(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)(x - 1)^2 + o(\rho^3)\Big). \end{aligned}$$

其中 $\rho = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$. 由此可知

$$f(1.1, 1.02) \approx \mathrm{e}(1 + 0.02 \times 0.1 - \frac{1}{2} \times 0.02 \times 0.1^2).$$

8. 试在由 x 轴， y 轴和直线 $x + y = 2\pi$ 围成的三角形区域上求函数 $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 的最大值.

解 按照极值的必要条件，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y) = 0. \end{cases}$$

解之可得惟一临界点 $(x, y) = \Big(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\Big)$.

由于在三角域的边界上 $z = 0$, 所以 $\Big(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\Big)$ 是所求的最大值点，其最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. 求抛物线 $y^2=4x$ 上的点，使它与直线 $x-y+4=0$ 的距离最小.

解 抛物线 $y^2=4x$ 上的点 (x,y) 到直线 $x-y+4=0$ 的距离为

$$d=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}.$$

令

$$L(x,y,\lambda)=(x-y+4)^2+\lambda(y^2-4x).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2(x-y+4)-4\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-2(x-y+4)+2\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=y^2-4x=0\end{cases}$$

可得临界点 $(x,y)=(1,2)$.

由于

$$\begin{cases}(x-y+4)^2\to\min,\\ y^2-4x=0\end{cases}$$

在内点存在最小值, 所以 $(1,2)$ 是最小值点, 即抛物线 $y^2=4x$ 到直线 $x-y+4=0$ 的距离最小点为 $(1,2)$.

10. 求内接于椭圆 $x^2+3y^2=12$, 其底平行于长轴的最大等腰三角形的面积.

解 由于所求三角形为底平行于长轴的等腰三角形，所以可设其顶点为

$$(0,2),(x,y),(-x,y).$$

由此可知，三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x(2-y)=2x-xy.$$

对于极值问题

$$\begin{cases} 2x - xy \to \max, \\ x^2+3y^2=12, \end{cases}$$

令

$$L(x, y, \lambda) = 2x - xy + \lambda(x^2 + 3y^2 - 12).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 - y + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -y + 6\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

可得临界点 $(x, y) = (3, -1)$ 和 $(x, y) = (0, 2)$.

由于 $(0, 2)$ 不合题意，所以 $(x, y) = (3, -1)$ 时，三角形的面积最大，其最大值为 $S_{\max} = 9$.

11. 求椭圆 $x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y = 0$ 与直线 $x + y - 8 = 0$ 之间的最短距离.

解 椭圆上的点 (x, y) 到直线的最短距离问题等价于

$$\begin{cases} d^2 = \dfrac{1}{2}(x + y - 8)^2 \to \min, \\ x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y = 0. \end{cases}$$

令

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x + y - 8)^2 + \lambda(x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = x + y - 8 + 2\lambda(x + y) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + y - 8 + 2\lambda(x + 5y - 8) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y = 0 \end{cases}$$

可得临界点 $(x,y)=(2,2)$ 和 $(x,y)=(-6,2)$.

由于 $d^2(2,2)=8,\ d^2(-6,2)=72$, 所以所求最短距离为 $2\sqrt{2}$.

12. 求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的最大内接长方体的体积.

解 根据对称性, 内接长方体的边应平行于坐标轴, 于是原问题等价于

$$\begin{cases} V=8xyz\to\min, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

令

$$L(x,y,\lambda)=8xyz+\lambda\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\Big).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=8yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=8xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=8xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

可得临界点 $(x,y,z)=(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}})$. 由此可知, 最大内接长方体的体积为 $V_{\max}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc$.

13. 求经过点 $(2,1,\dfrac{1}{3})$ 且与坐标面围成的四面体具有最小体积的平面.

解 设所求平面的截距式方程为

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=1.$$

根据点 $(2,1,\dfrac{1}{3})$ 在平面假设, 有

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3z}=1.$$

于是所求问题等价于

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{6}\, xyz \to \min, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{3z} = 1. \end{cases}$$

令

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{6}\, xyz + \lambda(6yz + 3xz + xy - 6xyz).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1}{6}\, yz + \lambda(3z - 6yz) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{1}{6}\, xz + \lambda(6z + x - 6xz) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{1}{6}\, xy + \lambda(6y + 3x - 6xy) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 6yz + 3xz + xy - 6xyz = 0 \end{cases}$$

可得临界点 $(x, y, z) = (6, 3, 1)$. 由此可知，所求平面方程为

$$\frac{X}{6} + \frac{Y}{3} + Z = 1.$$

14. 设曲线 L 的方程是 $f(x, y) = 0$ 且 f 有连续的偏导数. 若 P 是曲线外一点， PQ 是 P 到曲线 L 的最短距离且 Q 在 L 上，证明 PQ 位于 L 在 Q 点的法线上.

解 设 $P(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, 则有

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \to \min, \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

令

$$L(x, y, \lambda) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda f(x, y).$$

由临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x - x_0) + \lambda f'_x(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2(y - y_0) + \lambda f'_y(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = f(x, y) = 0 \end{cases}$$

可得 PQ 的斜率为

$$k_1 = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f'_y(x, y)}{f'_x(x, y)}.$$

由于曲线 $L : f(x, y) = 0$ 在 $Q(x, y)$ 点的切线斜率为

$$k_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

所以

$$k_1 k_2 = -1.$$

这表明， PQ 位于 L 在 Q 点的法线上.

15. 求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在约束条件 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 下的极值.

解 令

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 3xy).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda x^2 - 3\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 3\lambda y^2 - 3\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases}$$

可得临界点 $(x, y) = (0, 0)$ 和 $(x, y) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

由于 $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$, 所以 $(0, 0)$ 是原问题的最小值点. 由于

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

是封闭曲线，从而是有界闭集，所以 $f(x,y)$ 在此曲线上必有最大值．由此可知 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ 是原问题的最大值点．

16. 作一长方体的箱子，给定总楞长为 10 米，总表面积为 3.5 米 ^{2}，问各边如何选取其容积最大？

解 设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，则原问题等价于

$$\begin{cases} V=xyz\to\max, \\ 4x+4y+4z=10, \\ 2(xy+yz+zx)=3.5. \end{cases}$$

令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz+\lambda\Big(x+y+z-\frac{10}{4}\Big)+\mu\Big(xy+yz+zx-\frac{3.5}{2}\Big).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=yz+\lambda+\mu(y+z)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=xz+\lambda+\mu(x+z)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=xy+\lambda+\mu(x+y)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y+z-\dfrac{10}{4}=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=xy+yz+zx-\dfrac{3.5}{2}=0, \end{cases}$$

可得临界点为 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ 和 $(x,y,z)=\left(\frac{7}{6},\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$.

由于

$$V\Big(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\Big)=\frac{3}{8},\ V\Big(\frac{7}{6},\frac{1}{6},\frac{7}{6}\Big)=\frac{49}{216},$$

所以 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，长方体的容积最大．

17. 求曲线 $18x^2+8y^2=144$ 的切线使之与坐标轴所围图形的面积最小.

解 椭圆 $18x^2+8y^2=144$ 在 (a,b) 点的切线方程为

$$18ax+8by=144.$$

于是原问题等价于

$$\begin{cases} S=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{144}{18a}\Big)\Big(\dfrac{144}{8b}\Big)\to\min, \\ 18a^2+8b^2=144. \end{cases}$$

令

$$L(a,b,\lambda)=\frac{72}{ab}+\lambda(9a^2+4b^2-72).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a}=-\dfrac{72}{a^2b}+\lambda\cdot 18a=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial b}=-\dfrac{72}{ab^2}+\lambda\cdot 8b=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=9a^2+4b^2-72=0, \end{cases}$$

可得临界点为 $(a,b)=(2,3)$. 故当 $(a,b)=(2,3)$ 时，所求图形的面积最小.

习 题 9.5 B

1. 设计断面面积为定值 S 的等腰梯形渠道，问倾角 θ, 高度 h, 上底边长 b 各等于多少时，才能使断面与水接触部分的边界长最小？

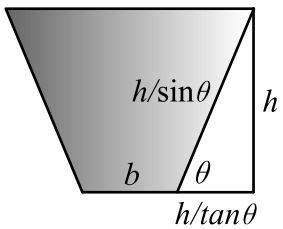

图 9.3

解 原问题等价于极值问题：

$$\begin{cases} b+\dfrac{2h}{\sin\theta}\to\min, \\ S=\dfrac{1}{2}\Big(2b+\dfrac{2h}{\tan\theta}\Big)h. \end{cases}$$

令

$$L(b,h,\theta,\lambda)=b+\frac{2h}{\sin\theta}+\lambda\Big(bh+\frac{h^2}{\tan\theta}-S\Big).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial b}=1+\lambda h=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial h}=\dfrac{2}{\sin\theta}+\lambda\Big(b+\dfrac{2h}{\tan\theta}\Big)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta}=-\dfrac{2h\cos\theta}{\sin^2\theta}-\dfrac{\lambda h^2}{\sin^2\theta}=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=bh+\dfrac{h^2}{\tan\theta}-S=0, \end{cases}$$

可得惟一临界点为 $(b,h,\theta)=\Big(\dfrac{2\sqrt{S}}{3},\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}},\dfrac{\pi}{3}\Big)$，此时断面与水接触部分的边界长最小.

2. 求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使之与坐标面所围四面体的体积最小.

解 由于椭球的切平面方程为

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1,$$

所以原问题可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}\,\dfrac{a^2}{x}\cdot\dfrac{b^2}{y}\cdot\dfrac{c^2}{z}\to\min, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

令

$$L(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{xyz}+\lambda\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\Big).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2yz}+\dfrac{2}{a^2}\lambda x=0,\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y}=-\dfrac{1}{xy^2z}+\dfrac{2}{b^2}\lambda y=0,\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z}=-\dfrac{1}{xyz^2}+\dfrac{2}{c^2}\lambda z=0,\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

可得 $(x,y,z)=\Big(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}}\Big)$, 此时所围四面体的体积最小.

3. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 平面的最远点和最近点.

解 原问题可表示为:

$$\begin{cases}z^2\to\text{极值},\\ x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5.\end{cases}$$

令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = x + y + 3z - 5 = 0, \end{cases}$$

可得 $(x, y, z) = (1, 1, 1), (-5, -5, 5)$. 因此曲线 C 距离 xOy 平面的最远点为 $(-5, -5, 5)$, 最近点为 $(1, 1, 1)$.

4. 若 x, y, z 为满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 的正数，则

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

证 考察极值问题

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 \to \min, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8. \end{cases}$$

令

$$L(x, y, z, \lambda) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 8),$$

则有临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 3x^2 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 3y^2 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 3z^3 + 2\lambda z = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

解得 $(x,y,z)=\Big(2\sqrt{\frac{2}{3}},2\sqrt{\frac{2}{3}},2\sqrt{\frac{2}{3}}\Big)$. 由此可知

$$x^3+y^3+z^3\geq f\Big(2\sqrt{\frac{2}{3}},2\sqrt{\frac{2}{3}},2\sqrt{\frac{2}{3}}\Big)=16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5. 求椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的长半轴和短半轴之长.

解 原问题等价于极值问题：

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2\to\text{极值},\\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1,\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda\Big(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2-1\Big)+\mu(x+y+z),$$

则有临界点方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\dfrac{2}{3}\,\lambda x+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda y+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2z+2\lambda z+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}+z^2-1=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=x+y+z=0.\end{cases}$$

前三个方程分别乘以 x,y,z 再相加，可得

$$2(x^2+y^2+z^2)+2\lambda\Big(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2-1\Big)+\mu(x+y+z)=0.$$

根据约束方程，有

$$x^2+y^2+z^2=-\lambda.$$

由前三个方程可得

$$(2+\frac{2}{3}\lambda)x=(2+\lambda)y=(2+2\lambda)z=t(\text{记为}).$$

代入 $x+y+z=0$ 可得

$$\Big(\frac{1}{2+\frac{2}{3}}+\frac{1}{2+\lambda}+\frac{1}{2+2\lambda}\Big)t=0.$$

于是

$$3\lambda^2+11\lambda+9=0.$$

解得 $\lambda=\dfrac{-11\pm\sqrt{13}}{6}$. 故所求椭圆长半轴、短半轴分别为

$$\sqrt{\frac{11+\sqrt{13}}{6}},\ \sqrt{\frac{11-\sqrt{13}}{6}}.$$

6. 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在约束条件 $x+y+z=0$ 和 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值和最小值.

解 令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z),$$

则有临界点方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=yz+2\lambda x+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=zx+2\lambda y+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=xy+2\lambda z+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=x+y+z=0.\end{cases}$$

解得临界点为

$$(x,y,z)=\Big(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\Big),\Big(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

由此可知，原问题的最大值为 $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$，最小值为 $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

7. 求函数 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$ 在单位球面上的最大值.

解 原问题为

$$\begin{cases} f(x,y,z)\to\max, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

设 (x_0,y_0,z_0) 是 $f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大值点，则 (x_0,y_0,z_0) 是方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=(2Ax+2Ez+2Fy)+2\lambda x=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=(2By+2Dz+2Fx)+2\lambda y=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=(2Cz+2Dy+2Ex)+2\lambda z=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

的解，亦即

$$\begin{cases} (A+\lambda)x_0+Fy_0+Ez_0=0, \\ Fx_0+(B+\lambda)y_0+Dz_0=0, \\ Ex_0+Dy_0+(C+\lambda)z_0=0, \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=1. \end{cases}$$

由此可知，

$$\lambda=f(x_0,y_0,z_0).$$

并且 λ 是三次方程

$$\begin{vmatrix} A+\lambda & F & E \\ F & B+\lambda & D \\ E & D & C+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

的最大根.

8. 设定点 A 和 B 位于以平面分开的不同光介质中, 从 A 点射出的光线折射后到达 B 点. 已知光在介质中的传播速度分别为 v_1 和 v_2. 求需时最短的传播方式.

解 原问题可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{a}{v_1\cos\alpha}+\dfrac{b}{v_2\cos\beta}\to\min, \\ a\tan\alpha+b\tan\beta=d. \end{cases}$$

令

$$L(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}+\lambda(a\tan\alpha+b\tan\beta-d),$$

则有临界点方程组

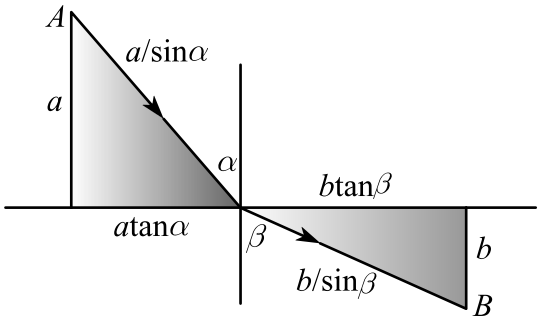

图 9.4

令

$$L(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}+\lambda(a\tan\alpha+b\tan\beta-d),$$

则有临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = \dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha} + \lambda\,\dfrac{a}{\cos^2\alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \beta} = \dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta} + \lambda\,\dfrac{b}{\cos^2\beta} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = a\tan\alpha + b\tan\beta - d = 0. \end{cases}$$

由此可得光的折射定律，即光线的入射角与折射角满足：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

9. 求用平面 $Ax + By + Cz = 0$ 与圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 相交所成椭圆的面积.

解 1　考察极值问题：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \to \text{极值}, \\ Ax + By + Cz = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(Ax + By + Cz) + \mu\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\Big),$$

则有临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + A\lambda + \dfrac{2}{a^2}\,\mu x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + B\lambda + \dfrac{2}{b^2}\,\mu y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + C\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = Ax + By + Cz = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

由此可得

$$x^2+y^2+z^2=-\mu,$$

$$\mu^2+\Big(a^2+b^2+\frac{a^2A^2}{C^2}+\frac{b^2B^2}{C^2}\Big)\mu+\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2}=0.$$

故所求椭圆的面积为

$$S=\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}=\pi\Big[\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2}\Big]^{1/2}$$

$$=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}.$$

解 2　按照面积投影定理，有

$$S\cos\gamma=\pi ab.$$

其中

$$\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

由此可知

$$S=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}.$$

10. 求坐标原点到椭圆 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的最长和最短距离.

解　原问题可表示为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2\to\min,\\ z=x^2+y^2,\\ x+y+z=1.\end{cases}$$

令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1),$$

则有临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = z - x^2 - y^2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

由此可得

$$(x, y, z) = \Big(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{2}\Big), \Big(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{2}\Big).$$

故原点到椭圆的最长距离为 $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$, 最短距离为 $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

11. 某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x(万尾), 乙种鱼放养 y(万尾), 收获时两种鱼收获量分别为 $(3-\alpha x-\beta y)x$ 和 $(4-\beta x-2\alpha y)y$ $(\alpha > \beta > 0)$, 求使产鱼总量最大的放养数.

解 设产鱼总量为 z, 则

$$z = 3x + 4y - \alpha x^2 - 2\alpha y^2 - 2\beta xy.$$

由极值的必要条件，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3 - 2\alpha x - 2\beta y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2\alpha y - 2\beta x = 0. \end{cases}$$

解得惟一零点

$$x_0 = \frac{3\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 - \beta^2},\ y_0 = \frac{4\alpha - 3\beta}{2(2\alpha^2 - \beta^2)}.$$

记 $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\alpha,\ B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\beta,\ C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4\alpha$, 则

$$B^2 - AC = 4\beta^2 - 8\alpha^2 = -4(2\alpha^2 - \beta^2).$$

由于 $B^2 - AC < 0$ 且 $A < 0$, 所以 z 在 (x_0, y_0) 点有极大值，进一步可知，有最大值，并且 x_0, y_0 分别为所求的甲和乙两种鱼的放养数.

12. 设生产某种产品必须投入两种要素， x_1 和 x_2 分别为两种要素的投入量， Q 为产出量; 若生产函数为 $Q = 2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, 其中 α, β 为正常数，且 $\alpha + \beta = 1$, 假设两种要素的价格分别为 P_1 和 P_2, 试问当产出量为 12 时，两要素各投多少可使投入总费用最小?

解 原问题可表示为

$$\begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 \to \min, \\ 2x_1^{\alpha}x_2^{\beta} = 12. \end{cases}$$

构造拉格朗日函数

$$L(x_1, x_2, \lambda) = P_1x_1 + P_2x_2 + \lambda(\alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 - \ln 6).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = P_1 + \dfrac{\lambda\alpha}{x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = P_2 + \dfrac{\lambda\beta}{x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 - \ln 6 = 0. \end{cases}$$

可得

$$x_1 = 6\Big(\frac{P_2\alpha}{P_1\beta}\Big)^{\alpha},\ x_2 = 6\Big(\frac{P_1\beta}{P_2\alpha}\Big)^{\beta}.$$

由于临界点惟一, 依题意存在最小值, 故两要素分别投入 $x_1 = 6\Big(\dfrac{P_2\alpha}{P_1\beta}\Big)^{\alpha}$, $x_2 = 6\Big(\dfrac{P_1\beta}{P_2\alpha}\Big)^{\beta}$ 时，总费用最小.

13. 某厂投入产出函数为 $y = 6K^{1/3}L^{1/2}$, 产品售价为 2, 资本 K 的价格为 4, 投入劳动力 L 的价格为 3, 求

(1) 该厂取得最大利润时的投入水平和最大利润;

(2) 如果产出水平维持在 36 个单位，使生产成本最小的投入水平.

解 (1) 利润函数可表示为

$$f(K,L)=12K^{1/3}L^{1/2}-4K-3L.$$

解临界点方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial K}=4K^{-2/3}L^{1/2}-4=0,\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial L}=6K^{1/3}L^{-1/2}-3=0.\end{cases}$$

可得 $K=8,\ L=16$. 由于

$$\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}=-\frac{8}{3}K^{-5/3}L^{1/2}<0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial K\partial L}=2K^{-2/3}L^{-1/2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}=-3K^{1/3}L^{-3/2},$$

且 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial K\partial L}\right)^2-\dfrac{\partial^2 f}{\partial K^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial L^2}<0$, 所以 $K=8,\ L=16$ 为最大利润时的投入水平.

(2) 最小成本问题可表示为

$$\begin{cases}4K+3L\to\min,\\ 6K^{1/3}L^{1/2}=36.\end{cases}$$

构造拉格朗日函数

$$l(K,L,\lambda)=4K+3L+\lambda(\frac{1}{3}\ln K+\frac{1}{2}\ln L-\ln 6).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial l}{\partial K}=4+\dfrac{\lambda}{3K}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial l}{\partial L}=3+\dfrac{\lambda}{2L}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial l}{\partial \lambda}=\dfrac{1}{3}\ln K+\dfrac{1}{2}\ln L-\ln 6=0.\end{cases}$$

可得

$$K=3\sqrt[5]{24},\ L=6\sqrt[5]{24}.$$

由于最小成本是存在的，所以当资本投入为 $K = 3\sqrt[5]{24}$, 劳动力投入为 $L = 6\sqrt[5]{24}$ 时，生产成本最小.

14. 两种产品 A_1, A_2, 其年需要量分别为 1200 件和 2000 件, 分批生产, 其每批生产准备费分别为 40 元和 70 元, 每年每件产品的库存费为 0.15 元. 若两种产品的每批总生产能力为 1000 件, 试确定最优批量 Q_1 和 Q_2, 以使生产准备费和库存费之和最小.

解 总费用为

$$C = \frac{40 \times 1200}{Q_1} + \frac{0.15Q_1}{2} + \frac{70 \times 2000}{Q_2} + \frac{0.15Q_2}{2}.$$

因此原问题可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{48000}{Q_1} + \dfrac{14000}{Q_2} + 0.0715(Q_1 + Q_2) \to \min, \\ Q_1 + Q_2 = 1000. \end{cases}$$

构造拉格朗日函数

$$L(Q_1, Q_2, \lambda) = \frac{48000}{Q_1} + \frac{14000}{Q_2} + 0.0715(Q_1 + Q_2) + \lambda(Q_1 + Q_2 - 1000).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = -\dfrac{48000}{Q_1^2} + 0.075 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_2} = -\dfrac{14000}{Q_2^2} + 0.075 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = Q_1 + Q_2 - 1000 = 0. \end{cases}$$

可得

$$Q_1 = 369,\ Q_2 = 631.$$

由于最小费用是存在的，所以当两种产品的批量分别为 $Q_1 = 369$, $Q_2 = 631$ 时，生产总费用最小.

15. 已知产品 A 的单价为 11 元，产品 B 的单价为 23 元，生产产品 C 需用 A, B 两种产品作原料，而且用 x 单位 A 产品和 y 单位 B 产品可产出

$-3x^2+10xy-3y^2$ 单位 C 产品，现打算以最低成本生产 80 单位产品 C, 各需要多少单位 A,B 产品？

解 原问题可表示为

$$\begin{cases} 11x+23y \to \min, \\ -3x^2+10xy-3y^2=80. \end{cases}$$

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=11x+23y+\lambda(-3x^2+10xy-3y^2-80).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=11+\lambda(-6x+10y)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=23+\lambda(10x-6y)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-3x^2+10xy-3y^2-80=0. \end{cases}$$

可得

$$x=\frac{37}{2\sqrt{14}},\ y=\frac{31}{2\sqrt{14}}.$$

由于最小成本是存在的,所以当 A,B 两种原料的产量分别为 $x=\dfrac{37}{2\sqrt{14}},\ y=\dfrac{31}{2\sqrt{14}}$ 时，生产总费用最小.

16. 设某厂生产甲、乙两种产品，产量分别为 x,y 千只，其利润函数为 $z=-x^2-4y^2+8x+24y-15$. 如果现有原料 15000kg(不要求用完), 生产两种产品每千只都要消耗原料 2000kg. 求

(1) 使利润最大时的产量 x,y 和最大利润；

(2) 如果原料现有总量降至 12000kg, 求这时利润最大时的产量.

解 (1) 对 $z=-x^2-4y^2+8x+24y-15$ 应用极值必要条件，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x+8=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-8y+24=0. \end{cases}$$

解得 $x=4,\ y=3$.

由于消耗原料为 $(4+3)\times 2000<15000$, 所以惟一极值点在内部达到. 这表明甲、乙两种产品的产量分别为 $x=4,\ y=3$ 千只时，利润最大. 此时最大利润为 37 个单位.

(2) 由于原料降至 12000, 所以原问题变为

$$\begin{cases} -x^2-4y^2+8x+24y-15\to \max, \\ 2000(x+y)=12000. \end{cases}$$

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=-x^2-4y^2+8x+24y-15+\lambda(x+y-6).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=-2x+8+\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-8y+24+\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-6=0. \end{cases}$$

可得

$$x=3.2,\ y=2.8.$$

这表明在原料为 12000kg 的条件下，甲、乙两种产品的产量分别为 $x=3200,\ y=2800$ 只时，利润最大. 此时最大利润为 36.2 个单位.

17. 设某商品的生产函数为 $Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$, 成本函数为 $C(K,L)=P_KK+P_LL$. 总成本预算为常数 C_1, 其中 α,β 为正常数， K,L 分别表示资本投入和劳动力投入， P_K,P_L 分别为资本投入和劳动力投入价格. 证明当

$$K=\frac{\alpha C_1}{(\alpha+\beta)P_K},\quad L=\frac{\beta C_1}{(\alpha+\beta)P_L}$$

时，产量最高.

证 原问题等价于

$$\begin{cases} AK^{\alpha}L^{\beta} \to \max, \\ P_K K + P_L L = C_1. \end{cases}$$

构造拉格朗日函数

$$l(x, y, \lambda) = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \lambda(P_K K + P_L L - C_1).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial K} = \dfrac{\alpha}{K} + \lambda P_K = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial L} = \dfrac{\beta}{L} + \lambda P_L = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \lambda} = P_K K + P_L L - C_1 = 0. \end{cases}$$

可得

$$K = \frac{\alpha C_1}{(\alpha+\beta)P_K}, \quad L = \frac{\beta C_1}{(\alpha+\beta)P_L}.$$

由于临界点惟一, 最大产量存在, 所以当 $K = \dfrac{\alpha C_1}{(\alpha+\beta)P_K}$, $L = \dfrac{\beta C_1}{(\alpha+\beta)P_L}$ 时, 产量最高.

18. 设可微函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 所确定的隐函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

解 两端关于 x 求导, 有

$$4x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + 8z + 8x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x + 8z}{2z + 8x - 1}.$$

两端关于 y 求导, 有

$$4y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 8x\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4y}{2z+8x-1}.$$

解临界点方程组

$$\begin{cases}-\dfrac{4x+8z}{2z+8x-1}=0,\\[2ex] -\dfrac{4y}{2z+8x-1}=0,\\[2ex] 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0\end{cases}$$

得

$$(x,y,z)=(-2,0,1),\Big(\frac{16}{7},0,-\frac{8}{7}\Big).$$

由于 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 为封闭曲面，所以 $z=z(x,y)$ 有最大值和最小值，其最大值为 1, 最小值为 $-\dfrac{8}{7}$.

总 习 题 九

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $f(x,y)=x^2y+\sin(xy^2)$; (2) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;

(3) $z=\dfrac{\mathrm{e}^{\sin(xy)}}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (4) $z=f\Big(\ln x+\dfrac{1}{y}\Big)$;

(5) $z=\dfrac{x-y}{x+y}\ln\dfrac{y}{x}$; (6) $z=-\sin\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{1+\cos(xy)}{1-x^2-y^2}$.

解 (1)

$$f'_x(x,y)=2xy+y^2\cos(xy^2),$$

$$f'_y(x,y)=x^2+2xy\cos(xy^2).$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\dfrac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{-2x}{y^2\sin\dfrac{x}{y}}.$$

(3)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{e}^{\sin(xy)}\cdot\cos(xy)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\sin(xy)}}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{e}^{\sin(xy)}\cdot\cos(xy)\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\sin(xy)}}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(4)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\Big(\ln x+\frac{1}{y}\Big)\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\Big(\ln x+\frac{1}{y}\Big)\cdot\frac{-1}{y^2}.$$

(5)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\Big(\frac{1}{x+y}-\frac{x-y}{(x+y)^2}\Big)\ln\frac{y}{x}-\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\Big(\frac{-1}{x+y}-\frac{x-y}{(x+y)^2}\Big)\ln\frac{y}{x}+\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{1}{y}.$$

(6)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y\sin(xy)}{1-x^2-y^2}+\frac{2x(1+\cos(xy))}{(1-x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x\sin(xy)}{1-x^2-y^2}+\frac{2y(1+\cos(xy))}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

2. 化简下列各式 (f 为可微函数):

(1) 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$, 化简 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $z=\dfrac{y^2}{3x^2}+f(xy)$, 化简 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 (1)

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\Big(\frac{-2xyf'}{f^2}\Big)+\frac{1}{y}\Big(\frac{1}{f}+\frac{2y^2f'}{f^2}\Big)=\frac{1}{yf(x^2-y^2)}.$$

(2)

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\Big(-\frac{2y^2}{3x^3}+yf'\Big)-xy\Big(\frac{2y}{3x^3}+xf'\Big)=\frac{-4y^2}{3x}.$$

3. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿与 Ox 轴的正向成 α 角的方向上的方向导数，并问在怎样的方向上此方向导数有 (1) 最大值；(2) 最小值；(3) 等于 0.

解 由于 α 角对应的射线方向为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$, 所以所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,1)}=\nabla(x^2-xy+y^2)\Big|_{(1,1)}\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha.$$

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，方向导数有最大值 $\sqrt{2}$; 当 $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$ 时，方向导数有最小值 $-\sqrt{2}$; 当 $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，方向导数等于 0.

4. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(1,1,1)$ 沿 $l:(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 方向的方向导数，并求 $|\nabla u|_{(1,1,1)}$.

解 所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,1)}=\nabla(xyz)\Big|_{(1,1,1)}\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

所求梯度模为

$$|\nabla u|_{(1,1,1)}=\sqrt{3}.$$

5. 将方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 变为极坐标形式.

解 由于

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-y}{r^2}=\frac{-\sin\theta}{r},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r},$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta.$$

由此可知

$$x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{r}{2}\Big[\frac{\partial u}{\partial r}\cos 2\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin 2\theta\Big].$$

6. 求下列曲线在给定点的切线与法平面方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$;

(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\ x^2+y^2=2ax\end{cases}$ 在点 $(a,a,\sqrt{2}a)$.

解 (1) 由于曲线在给定点的切向量为

$$\begin{aligned}\nabla(x^2+y^2+z^2-3x)\Big|_{(1,1,1)}\times(2,3,5)&=(-1,2,2)\times(2,3,5)\\&=(4,9,-7),\end{aligned}$$

所以所求切线和法平面方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-7},$$

$$4(x-1)+9(y-1)-7(z-1)=0.$$

(2) 由于曲线在给定点的切向量为

$$\nabla(x^2+y^2+z^2)\times\nabla(x^2+y^2-2ax)\Big|_{(a,a,\sqrt{2}a)}$$

$$=2(a,a,\sqrt{2}a)\times(0,2a,0)=4a^2(-\sqrt{2},0,1),$$

所以所求切线和法平面方程为

$$\frac{x-a}{-\sqrt{2}}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\sqrt{2}a}{1},$$

$$-\sqrt{2}(x-a)+(z-\sqrt{2}a)=0.$$

7. 求下列曲面在给定点的法线与切平面方程：

(1) $\mathrm{e}^{x/z}+\mathrm{e}^{y/z}=4$ 在点 $(\ln 2,\ln 2,1)$;

(2) $x=u-v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3$ 在点 $u=1,\ v=1$.

解 (1) 由于曲面在给定点的法向量为

$$\begin{aligned}\nabla(\mathrm{e}^{x/z}+\mathrm{e}^{y/z})\Big|_{(\ln 2,\ln 2,1)} &= \Big(\frac{1}{z}\mathrm{e}^{x/z},\frac{1}{z}\mathrm{e}^{y/z},-\frac{x}{z^2}\mathrm{e}^{x/z}-\frac{y}{z^2}\mathrm{e}^{x/z}\Big)\Big|_{(\ln 2,\ln 2,1)}\\ &= (2,2,-4\ln 2)=2(1,1,-2\ln 2),\end{aligned}$$

所以所求法线和切平面方程为

$$\frac{x-\ln 2}{1}=\frac{y-\ln 2}{1}=\frac{z-1}{-2\ln 2},$$

$$(x-\ln 2)+(y-\ln 2)-2\ln 2(z-1)=0.$$

(2) 由于曲面在给定点的法向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v\Big|_{(1,1)} &= (1,2u,3u^2)\times(-1,2v,3v^2)\Big|_{(1,1)}\\ &= (1,2,3)\times(-1,2,3)=(0,6,4),\end{aligned}$$

所以所求法线和切平面方程为

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{2},$$

$$3(y-2)+2(z-2)=0.$$

8. 求下列函数的全微分：

(1) $u=\ln(x+2y+3z)$;　　(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}+\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$;

(3) $z=(3x-2y)^{3x-2y}$;　　(4) $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$;

(5) $u=\mathrm{e}^{x+y}\cos x\cos y$;　　(6) $u=(x^2+y^2+z^2)^{\sin(x+y+z)}$.

解 (1)

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x+2y+3z} + \frac{2\mathrm{d}y}{x+2y+3z} + \frac{3\mathrm{d}z}{x+2y+3z}.$$

(2)

$$\mathrm{d}z = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= (3x-2y)^{3x-2y}\mathrm{d}\Big[(3x-2y)\ln(3x-2y)\Big] \\ &= (3x-2y)^{3x-2y}(1+\ln(3x-2y))(3\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

(4)

$$\mathrm{d}u = f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \cdot \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(5)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= (\mathrm{e}^{x+y}\cos x\cos y(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) \\ &\quad -\mathrm{e}^{x+y}(\cos x\sin y\mathrm{d}x + \sin x\cos y\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= (x^2+y^2+z^2)^{\sin(x+y+z)}\mathrm{d}\Big[\sin(x+y+z)\ln(x^2+y^2+z^2)\Big] \\ &= z\Big[\cos(x+y+z)\ln(x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z) \\ &\quad +\frac{2\sin(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)\Big].\end{aligned}$$

9. 求下列函数指定阶的偏导数：

(1) $u = f(x+y, xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$;

(2) $u = x^3\sin y + y^3\sin x$, 求 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$;

(3) $z = x^2\arctan\dfrac{y}{x} - y^2\arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'(x+y, xy) + yf_2'(x+y, xy),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + (x+y)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'.$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \sin y + y^3 \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \sin y - y^3 \sin x,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 6x \cos y - 3y^2 \sin x,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -6x \sin y - 6y \sin x.$$

(3)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \arctan \frac{y}{x} - y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

10. 设 f, g 为二阶连续可微函数，求下列函数的二阶全微分：

(1) $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$; (2) $u = f(x, xy, xyz)$;

(3) $z = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$; (4) $z = f(xy, g(x^2+y^2))$;

(5) $z = f(\sin(x+y), xy)$.

解 (1) 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xf'}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yf'}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2 f''}{x^2+y^2} + \frac{y^2 f'}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2 f''}{x^2+y^2}+\frac{x^2 f'}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyf''}{x^2+y^2}-\frac{xyf'}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 z\ =&\Big(\frac{x^2 f''}{x^2+y^2}+\frac{y^2 f'}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big)\mathrm{d}x^2\\&+2\Big(\frac{xyf''}{x^2+y^2}-\frac{xyf'}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\Big(\frac{y^2 f''}{x^2+y^2}+\frac{x^2 f'}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big)\mathrm{d}y^2.\end{aligned}$$

(2) 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+zxf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_3'.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''+2yf_{12}''+y^2f_{22}''+2yzf_{13}''+2y^2zf_{23}''+y^2z^2f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f_{22}''+2x^2zf_{23}''+x^2z^2f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xf_{12}''+xzf_{13}''+f_2'+xyf_{22}''+2xyzf_{23}''+zf_3'+xyz^2f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x^2yf_{23}''+xf_3'+zx^2yf_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=xyf_{13}''+xy^2f_{23}''+yf_3'+xy^2zf_{33}''.$$

将二阶偏导数代入下式可得二阶微分

$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\frac{\partial^2z}{\partial y\partial u}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

(3) 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'+g-\frac{y}{x}g',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f-\frac{x}{y}f'+g'.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''+\frac{y^2}{x^3}g'',$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^3}f''+\frac{1}{x}g'',$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}g''.$$

$$\mathrm{d}^2z=\Big(\frac{1}{y}f''+\frac{y^2}{x^3}g''\Big)\mathrm{d}x^2+2\Big(-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}g''\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\Big(\frac{x^2}{y^3}f''+\frac{1}{x}g''\Big)\mathrm{d}y^2.$$

(4) 计算一阶偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+2xf_2'\cdot g',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'+2yf_2'\cdot g'.$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=y^2f_{11}''+4xyf_{12}''\cdot g'+2f_2'\cdot g'+4x^2f_{22}''\cdot g'^2+4x^2f_2'\cdot g'',$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=x^2f_{11}''+4xyf_{12}''\cdot g'+2f_2'\cdot g'+4y^2f_{22}''\cdot g'^2+4y^2f_2'\cdot g'',$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+2(x^2+y^2)f_{12}''\cdot g'+4xyf_{22}''\cdot g'^2+4xyf_2'\cdot g''.$$

将二阶偏导数代入下式可得二阶微分

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(5) 计算一阶偏导数，有

$$z = f(\sin(x+y), xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+y)\, f_1' + y f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x+y)\, f_1' + x f_2', .$$

计算二阶偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x+y)\, f_1' + \cos^2(x+y)\, f_{11}'' + 2y\cos(x+y)\, f_{12}'' + y^2 f_{22}',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin(x+y)\, f_1' + \cos^2(x+y)\, f_{11}'' + 2x\cos(x+y)\, f_{12}'' + x^2 f_{22}',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)\, f_1' + \cos^2(x+y)\, f_{11}'' + xy\cos(x+y)\, f_{12}'' + xy f_{22}'.$$

将二阶偏导数代入下式可得二阶微分

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

11. 设 $z = uv, x = \mathrm{e}^{u+v}, y = \mathrm{e}^{u-v}$, 求 $\mathrm{d}z$.

解 由于

$$u = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y),\ v = \frac{1}{2}(\ln x - \ln y),$$

所以

$$\mathrm{d}z = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v = \frac{\ln x}{2x}\mathrm{d}x - \frac{\ln y}{2y}\mathrm{d}y.$$

12. 设 $z = u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, 试确定常数 a, b, 使

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+au\mathrm{e}^{ax+by},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by}+bu\mathrm{e}^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=b\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+a\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by}+abu\mathrm{e}^{ax+by},$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=\Big[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u\Big]\mathrm{e}^{ax+by}.$$

故当 $a=b=1$ 时，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

13. 证明球坐标系 r,θ,φ 中的三个坐标面

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad y=x\tan\theta,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\tan^2\varphi$$

两两正交.

证 由于 $r-$ 曲线， $\theta-$ 曲线， $\varphi-$ 曲线的切向量为

$$\boldsymbol{a}=\nabla(x^2+y^2+z^2-r^2)=2(x,y,z),$$

$$\boldsymbol{b}=\nabla(y-x\tan\theta)=(-\tan\theta,1,0),$$

$$\boldsymbol{c}=\nabla(z-\sqrt{x^2+y^2}\tan^2\varphi)=\Big(-\frac{x\tan^2\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y\tan^2\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}},1\Big),$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2(y-x\tan\theta)=0,$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{\tan^2\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\tan\theta-y)=0,$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=z-\sqrt{x^2+y^2}\tan^2\varphi=0.$$

故 $r-$ 曲线， $\theta-$ 曲线， $\varphi-$ 曲线两两正交.

14. 证明曲面 $f\Big(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\Big)=0$ 的切平面通过一定点.

证 曲面的切向量为

$$\nabla f\Big(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\Big)=\Big(\frac{f_1'}{z-c},\frac{f_2'}{z-c},\frac{(a-x)f_1'+(b-y)f_2'}{(z-c)^2}\Big).$$

曲面在 (x,y,z) 点的切平面方程为

$$\begin{cases} f_1'\cdot(X-x)+f_2'\cdot(Y-y)+\Big[\dfrac{(a-x)f_1'+(b-y)f_2'}{z-c}\Big](Z-z)=0,\\ f\Big(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\Big)=0. \end{cases}$$

由于 $(X,Y,Z)=(a,b,c)$ 在 (x,y,z) 点的切平面上，所以结论成立.

15. 证明方程 $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 的解为 $u=f(x^2-y^2)$, 其中 f 为任一可微函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf',\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2yf',$$

所以

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=2xyf'-2xyf'=0.$$

16. 从方程组 $\begin{cases} x+y+u+v=1\\ x^2+y^2+u^2+v^2=2 \end{cases}$ 中求出 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

解 令

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=x+y+u+v-1,\\ G(x,y,u,v)=x^2+y^2+u^2+v^2-2, \end{cases}$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{v-x}{u-v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{v-y}{u-v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{x-u}{u-v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{y-u}{u-v}.$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x+v-2u}{(u-v)^2}-\frac{(v-x)(u+v-2x)}{(u-v)^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y+v-2u}{(u-v)^2}-\frac{(v-y)(u+v-2y)}{(u-v)^3},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{x+u-2v}{(u-v)^2}-\frac{(x-u)(u+v-2x)}{(u-v)^3},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{y+u-2v}{(u-v)^2}-\frac{(y-u)(u+v-2y)}{(u-v)^3}.$$

17. 把正数 a 分成三个正数之和, 使它们的乘积最大, 并由此结果证明:

$$\sqrt[3]{xyz}\ \le\ \frac{x+y+z}{3}\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0).$$

证 考察极值问题

$$\begin{cases} f(x,y,z)=\sqrt[3]{xyz}-\dfrac{x+y+z}{3}\to\min, \\ x+y+z=a. \end{cases}$$

其中 $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda(x+y+z-a).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \sqrt[3]{\dfrac{yz}{x^2}} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \sqrt[3]{\dfrac{xz}{y^2}} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \sqrt[3]{\dfrac{xy}{z^2}} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

得 $x = y = z = \dfrac{a}{3}$. 因此 $f(x,y,z) \le f\Big(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\Big) = 0$, 此即

$$\sqrt[3]{xyz} \ \le \ \frac{x+y+z}{3}.$$

18. 求 $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \{\,(x,y) :\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1\,\}$ 上的最大值和最小值.

解 由于 $f(x,y)$ 在 D 上的极值就是在 ∂D 上的最大值和极小值，所以原问题等价于

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2 \to \text{极值}, \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1. \end{cases}$$

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$

解临界点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + \dfrac{1}{2}\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

得 $(x^2, y^2) = (1,0), (0,4)$. 故 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

第十章　多元函数的微分

§10.1　黎曼积分与微元法

习　题 10.1 A

1. 设 xOy 平面的区域 D 上有一平面板，该平面板上分布有面密度为 $\mu(x,y)$ 的电荷，如果 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表示该平面板上的电荷总量.

解　在平面板上取一面积为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的微元，在微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 上视连续函数 $\mu(x,y)$ 为常数，则微元的电荷量为 $\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 将所有微元的电荷量 $\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 沿平面板 D 加起来，可得平面板上的电荷总量为

$$Q=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. (三维积分域的体积) 设 Ω 是一个三维积分区域，试用三重积分表示该积分区域的体积.

解　在积分域 Ω 内取一长、宽、高分别为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的小长方体，则此微元的体积为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 将所有微元的体积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 沿积分域 Ω 加起来，可得 Ω 的体积为

$$V=\iiint_\Omega \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. 分别用定积分、二重积分和三重积分表示椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积.

解　(1) 椭球的 z 切片为椭圆片

$$\frac{x^2}{a^2\Big(1-\dfrac{z^2}{c^2}\Big)}+\frac{y^2}{b^2\Big(1-\dfrac{z^2}{c^2}\Big)}\leq 1,$$

其面积为

$$\pi ab\Big(1-\frac{z^2}{c^2}\Big).$$

故椭球的体积为

$$V=\int_{-c}^{c}\pi ab\Big(1-\frac{z^2}{c^2}\Big)\,\mathrm{d}z.$$

(2) 椭球的上、下边界为

$$z_{\text{上}}=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad z_{\text{下}}=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

故椭球的体积为

$$V=\iint\limits_{D_{\text{投}}}(z_{\text{上}}-z_{\text{下}})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 记椭球为 Ω, 则椭球的体积为

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

4. 分别用定积分、曲面积分表示椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的面积.

解 (1) 椭球面由曲线

$$x(z)=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

绕 z 轴旋转而成，根据旋转面的面积计算公式，有

$$S=2\pi\int_{-c}^{c}a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1+[x'(z)]^2}\,\mathrm{d}z$$

(2) 椭球面的面积为

$$S=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\mathrm{d}S.$$

5. 比较下列积分的大小：

(1) $\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中积分区域 D 由 x 轴、 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;

(2) $\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中积分区域 D 由圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

所围成;

(3) $\iint_D \ln(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是三角形闭区域, 三顶点分别为 $(1,0),(1,1),(2,0)$;

(4) $\iint_D \ln(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是矩形闭区域:

$$3 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 1.$$

解 (1) 由于 $(x,y) \in D$ 时, $(x+y)^2 \geq (x+y)^3$, 所以

$$\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 由于

$$\begin{cases} (x+y)^2 = (x+y)^3 \\ (x-2)^2+(y-1)^2 \leq 2 \end{cases}$$

无解, 且 $(x,y)=(3,0)$ 时, $(x+y)^2 < (x+y)^3$, 所以 $(x,y) \in D$ 时,

$$(x+y)^2 < (x+y)^3.$$

因此

$$\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 由于 $(x,y) \in D$ 时, $\ln(x+y) \geq [\ln(x+y)]^2$, 所以

$$\iint_D \ln(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4) 由于 $(x,y) \in D$ 时, $\ln(x+y) < [\ln(x+y)]^2$, 所以

$$\iint_D \ln(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

习 题 10.1 B

1. 设 xOy 平面的区域 D 上有一平面板，该平面板的质量密度为 $\rho(x,y)$，如果 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表示该平面板的重心坐标.

解 微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的质量为 $\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 仿照质点系的重心计算方法，平面板的重心坐标为

$$\overline{x}=\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \overline{y}=\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 设 xOy 平面的区域 D 上有一平面板，该平面板的质量密度为 $\rho(x,y)$，如果 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分和定积分分别表示该平面板的质量.

解 (1) 按照二重积分，平面板的质量为

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

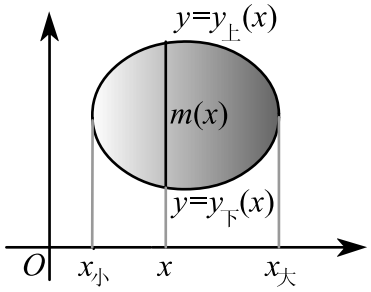

图 10.1

(2) 设平面板的上边界为 $y_{上}(x)$, 下边界为 $y_{下}(x)$. 则直线杆 $[y_{下}(x),y_{上}(x)]$ 的质量为

$$m(x)=\int_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)}\rho(x,y)\ \mathrm{d}y.$$

平面板的质量 m 就是全体直线杆的质量 $m(x)$ 之和，故有

$$m=\int_{x_{小}}^{x_{大}}m(x)\ \mathrm{d}x=\int_{x_{小}}^{x_{大}}\Big(\int_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)}\rho(x,y)\ \mathrm{d}y\Big)\ \mathrm{d}x.$$

3. 设 V 是以平面区域 D 为底、以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体，试用三重积分、二重积分和定积分分别表示 V 的体积.

解 (1) 曲顶柱体的三重积分表示体积为

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中 $\Omega=\{(x,y,z):z=f(x,y),(x,y)\in D\}$.

(2) 曲顶柱体的二重积分表示体积为

$$V=\iint_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

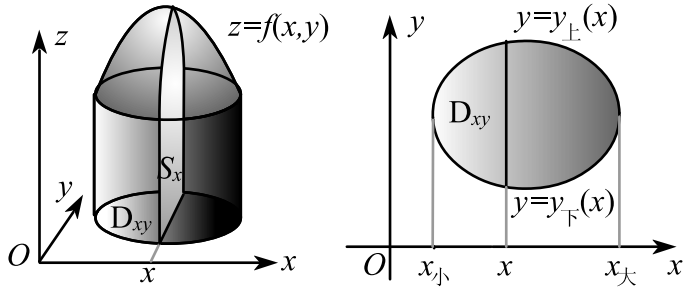

图 10.2

(3) 定义在区间 $[y_{下}(x),y_{上}(x)]$ 上的曲边梯形

$$S_x=\{(y,z):z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

的面积为

$$S(x)=\int_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

曲顶柱体的体积 V 是所有曲边梯形 S_x 的面积和，即

$$V=\int_{x_{小}}^{x_{大}}S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_{小}}^{x_{大}}\Big(\int_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 xOy 平面的区域 D 上有一平面板，该平面板的质量密度为 $\rho(x,y)$，如果 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表示该平面板对位于 $M(0,0,a)$ $(a>0)$ 点的单位质点的引力.

解 微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 对 M 处单位质点的引力为

$$\frac{G\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}(x,y,-a).$$

由此可知，平面板对位于 M 处单位质点的引力 (F_x,F_y,F_z) 为

$$F_x=\int_D \frac{G\rho(x,y)x}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$F_y=\int_D \frac{G\rho(x,y)y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$F_z=-\int_D \frac{G\rho(x,y)a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. 试用二重积分表示一均匀球壳对不在该球壳上一单位质点的引力.

解 设球面方程为 $S:\ x^2+y^2+z^2=R^2$, 质点坐标为 $(0,0,a)$. 根据对称性，有 $F_x=F_y=0$. 按照引力公式，微元 $\mathrm{d}S$ 对 $(0,0,a)$ 单位质点的引力为

$$\frac{G\rho\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\cdot(z-a).$$

于是均匀球壳对 $(0,0,a)$ 单位质点的引力为

$$F_z=G\rho\iint_S \frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}S.$$

6. 试用分割，近似，求和，取极限的方法给出二重积分的定义.

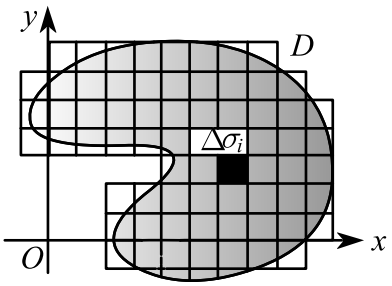

图 10.3

解 设 $f(x,y)$ 是平面有界闭区域 D 上的有界函数. 将区域 D 任意分割成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n.$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 个小区域, 同时也表示它的面积, 并且任意两个小区域 $\Delta\sigma_i$ 与 $\Delta\sigma_j (i \neq j)$ 除边界外无公共点. 任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

以 Δ_i 表示 $\Delta\sigma_i$ 的直径, 记 $\Delta = \max_{1\leq i\leq n}\{\Delta_i\}$. 如果当 $\Delta \to 0$ 时, 和的极限

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在, 并且这个极限与区域的分割方法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 则称函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上是可积的, 并称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

即

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

7. 试用分割, 近似, 求和, 取极限的方法给出曲面积分的定义.

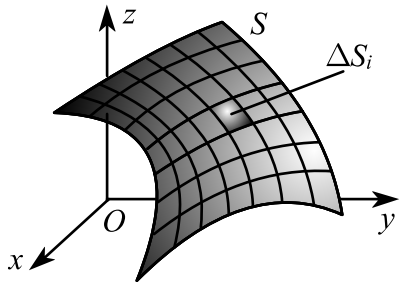

图 10.4

解 设 $f(x,y,z)$ 是定义在有界光滑曲面 Σ 上的有界函数. 将 Σ 分割成 n 块小曲面

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n.$$

其中 ΔS_i 既表示第 i 块小曲面，同时也表示它的面积，并且任意两块小曲面 ΔS_i 与 $\Delta S_j (i \neq j)$ 除边界外无公共点．任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

以 Δ_i 表示 ΔS_i 的直径，记 $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n}\{\Delta_i\}$．如果当 $\Delta \to 0$ 时，和的极限

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

存在，并且这个极限与曲面的分割方法及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关，则称函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上是可积的，并称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上的第一型曲面积分，记为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, \mathrm{d}S,$$

即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, \mathrm{d}S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

8. 试用定积分表示曲面板的面积和质量.

解 设平面板的上边界为 $y_{上}(x)$, 下边界为 $y_{下}(x)$. 则直线杆 $[y_{下}(x), y_{上}(x)]$ 的质量为

$$m(x) = \int_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)} \rho(x, y) \, \mathrm{d}y.$$

平面板的质量 m 就是全体直线杆的质量 $m(x)$ 之和，故有

$$m = \int_{x_{小}}^{x_{大}} m(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x_{小}}^{x_{大}} \Big(\int_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)} \rho(x, y) \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x.$$

令 $\rho(x, y) = 1$，则可得曲面板的面积为

$$S = \int_{x_{小}}^{x_{大}} \Big(\int_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)} \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x.$$

9. 试用二重积分表示由抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 和椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 围成区域的体积.

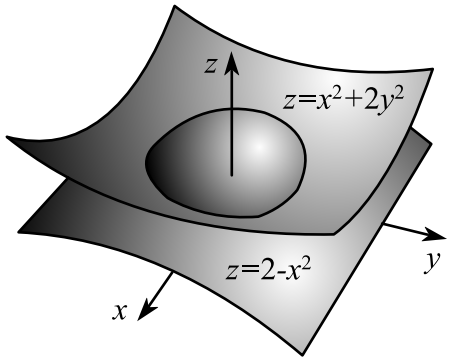

图 10.5

解 设抛物柱面 $z=2-x^2$ 和椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 围成的区域为 Ω. 由 $z=2-x^2$ 和 $z=x^2+2y^2$ 消 z 可得 Ω 的投影域 D 的边界方程为

$$2-x^2=x^2+2y^2, \text{ 即 } x^2+y^2=1.$$

由此可知，投影域 D 为

$$D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}.$$

由于 $(0,0)\in D$ 且 $2-x^2\Big|_{(0,0)}>x^2+2y^2\Big|_{(0,0)}$, 所以

$$z_{上}=2-x^2,\quad z_{下}=x^2+2y^2.$$

于是 Ω 的体积为

$$V=\iint\limits_D (z_{上}-z_{下})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\Big[(x^2+2y^2)-(2-x^2)\Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10. 试用三重积分表示 $x^2+y^2+z^2\leq a^2$ 在 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 内部部分的体积.

解 设

$$\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq a^2, z\geq\sqrt{x^2+y^2}\},$$

则所求体积为

$$V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

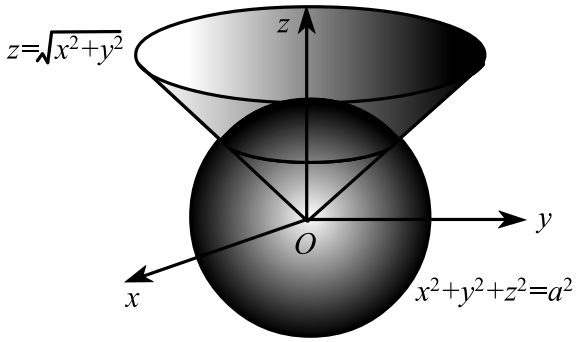

图 10.6

11. 设曲面板 S 是半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之内的部分，其面密度为 $\rho=z^3$, 试用面积分表示 S 的质量.

解

$$m=\iint_S z^3\,\mathrm{d}S.$$

12. 计算下列累次积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y;$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 (x^2+y^2)\mathrm{d}y;$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1+x^2}}^{1+\sqrt{1+x^2}} (4-x-y)\mathrm{d}y;$ (4) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x.$

解 (1)

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \Big[xy+\frac{1}{2}y^2\Big]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x=\int_0^1 \Big[x+\frac{1}{2}\Big]\mathrm{d}x=1.$$

(2) $$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 (x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1 \Big[x^2y+\frac{1}{3}y^3\Big]_{y=x^2}^{1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \Big[x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{1}{3}x^6\Big]\mathrm{d}x=\frac{44}{105}.$$

(3) $$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1+x^2}}^{1+\sqrt{1+x^2}} (4-x-y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 \Big[4y-xy-\frac{1}{2}y^2\Big]_{1-\sqrt{1+x^2}}^{1+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[6\sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{1+x^2}\right] \mathrm{d}x$$

$$= 6\sqrt{2} + 6\ln(1+\sqrt{2}).$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2)\mathrm{d}y = 1 - \sin 1.$

§10.2 重积分的计算

习 题 10.2 A

1. 计算下列分段函数的二重积分：

(1) 计算 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x, y) |\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$;

(2) 计算 $F(t) = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

区域 D 由 $x = 0,\ y = 0,\ x + y \le t$ 围成;

(3) 计算 $I = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $f(x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x-y}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 区域 D 由 $x + y = a,\ x + y = b,\ y = 0,\ y = a + b$ 围成 $(b > a > 0)$;

(4) 计算 $I = \iint_{|x|+|y|\le 1} |xy| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(5) 计算 $\iint_D \sqrt{|x| - |y|}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x, y) |\ 0 \le x \le 2,\ |y| \le 1\}$;

(6) 计算 $I = \iint_D \sin x \sin y \cdot \max(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D:\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi;$$

(7) 计算 $I=\iint_D \mathrm{e}^{\max(x^2,y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D:\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1$.

解 (1)

$$\begin{aligned}\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y - \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad +2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\\ &= \frac{2}{3}-1+2\pi-8\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \pi-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

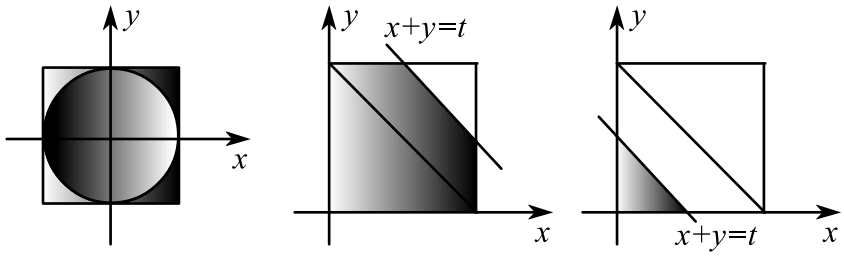

图 10.7

(2)

$$F(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y, & t\geq 2\\ \displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y-\int_{t-1}^1\mathrm{d}x\int_{t-x}^1\mathrm{d}y, & 1\leq t<2\\ \displaystyle\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^{t-x}\mathrm{d}y, & 0\leq t<1\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & t \geq 2 \\ -1 + 2t - \frac{1}{2}t^2, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^b \mathrm{d}x \int_0^{b-x} \mathrm{e}^{-x-y}\mathrm{d}y - \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \mathrm{e}^{-x-y}\mathrm{d}y \\ &= (a-b)(\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b}). \end{aligned}$$

(4)

$$I = 4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 xy \,\mathrm{d}y = 1.$$

(5)

$$\iint_D \sqrt{|x| - |y|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \sqrt{x-y}\mathrm{d}y = \frac{15}{8}(2\sqrt{2} - 1).$$

(6)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^x \sin x \sin y \cdot x\mathrm{d}y + \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_x^\pi \sin x \sin y \cdot y\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi x(1+\cos x)\sin x \,\mathrm{d}x + \int_0^\pi (\pi + x\cos x - \sin x)\sin x\mathrm{d}x = 2\pi. \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^2 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1. \end{aligned}$$

2. 更换下列积分次序：

(1) $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y;$

(2) $I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_x^4 f(x,y)\mathrm{d}y$;

(3) $I=\int_0^{2a} \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y\ (a>0)$;

(4) $I=\int_1^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

解 (1)

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

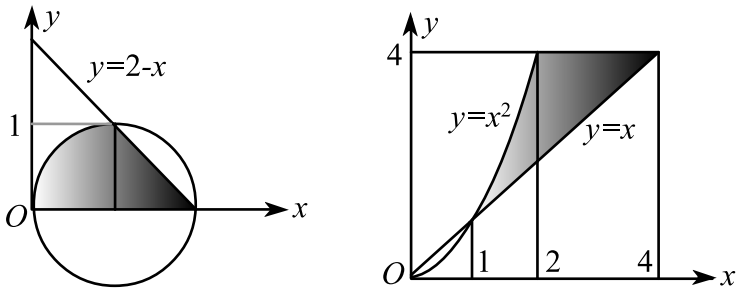

图 10.8

(2)

$$I=\int_1^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3)

$$I=\int_0^a \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^a \mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_a^{4a^2} \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

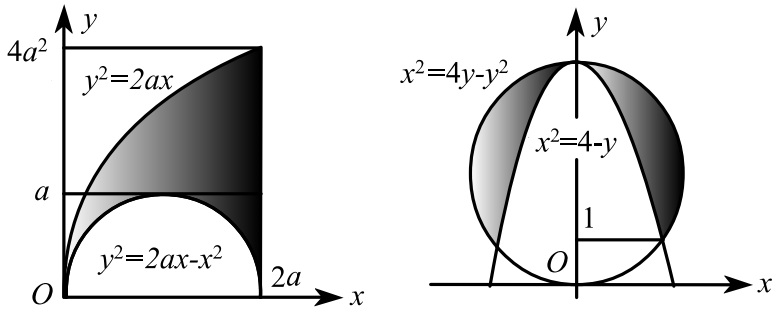

图 10.9

(4)

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{4-x^2}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

3. 计算下列二重或二次积分：

(1) $\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 是以 $(0,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的三角形;

(2) $\iint_D \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域.

(3) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$;

(4) $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2}\mathrm{d}y\int_{1/2}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{y/x}\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{y/x}\mathrm{d}x$.

解 (1)

$$\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\cdot y^3\mathrm{d}y=\frac{1}{6}-\frac{1}{3\mathrm{e}}.$$

(2)

$$\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\sin x\cdot(x-1)\mathrm{d}x=\sin 1-1.$$

(3)

$$\text{原积分}=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y=\frac{4(2+\pi)}{\pi^3}.$$

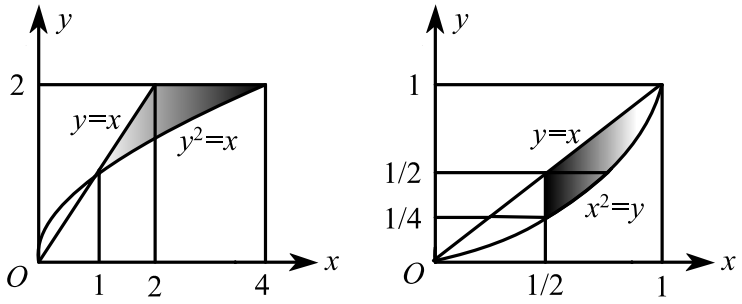

图 10.10

(4)

$$\text{原积分} = \int_{1/2}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \mathrm{e}^{y/x}\mathrm{d}y = \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x}}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}\ln 2 - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{1/2}.$$

4. 求由马鞍面 $z = xy$ 和平面 $z = x + y,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$ 所围空间区域的体积.

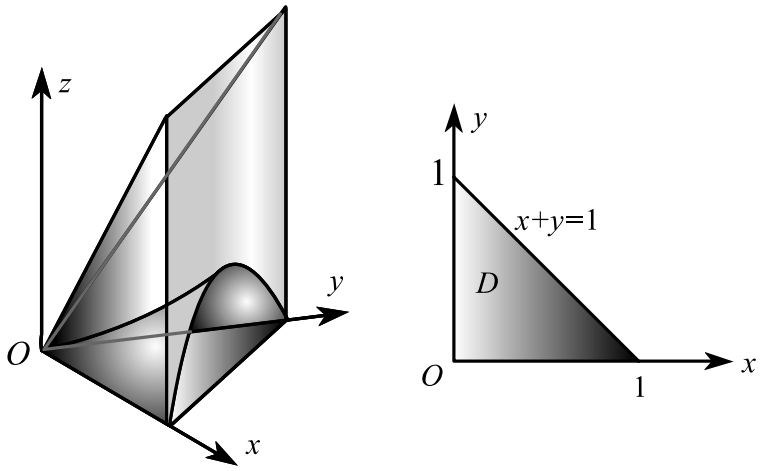

图 10.11

解 所求空间区域的体积为

$$V = \iint_{D} (z_{\text{上}} - z_{\text{下}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (x+y-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x+y-xy)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x) + (1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{7}{24}.$$

5. 计算 $\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x$,$x=-1$ 和 $y=1$ 所围成的区域.

解 由于

$$y_{下} = x, y_{上} = 1, x_{小} = -1, x_{大} = 1,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x_{小}}^{x_{大}} \mathrm{d}x \int_{y_{下}}^{y_{上}} y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{1} y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^3)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

6. 计算 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 和直线 $y=x-2$ 所围成的区域.

解 由于

$$x_{左} = y^2, x_{右} = y, y_{小} = -1, y_{大} = 2,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y_{小}}^{y_{大}} \mathrm{d}y \int_{x_{左}}^{x_{右}} xy\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} \mathrm{d}y \int_{y}^{y^2} xy\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(y^5-y^3)\mathrm{d}y = \frac{27}{8}.\end{aligned}$$

7. 求由抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=2x+3$ 所围图形的面积.

解 由于

$$y_{下} = x^2, y_{上} = 2x+3, x_{小} = -1, x_{大} = 3,$$

所以所求图形的面积为

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_{小}}^{x_{大}} \mathrm{d}x \int_{y_{下}}^{y_{上}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{3} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2x+3} \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\mathrm{d}x = \frac{32}{3}.$$

8. 求由抛物线 $y^2 = 4 - x$ 和 $y^2 = 4 - 4x$ 所围图形的面积.

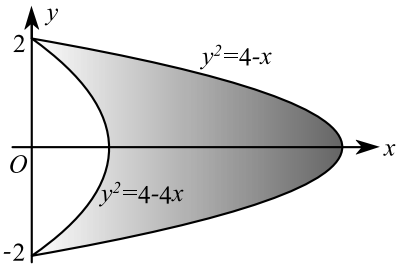

图 10.12

解 所围图形的面积为

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}(3 - \frac{3}{4}y^2)\mathrm{d}y = 8.$$

9. 设 D 为平面积分域，若 D 是上下对称的，则 $f(x,y)$ 是 y 的奇函数时，即 $f(x,-y) = -f(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

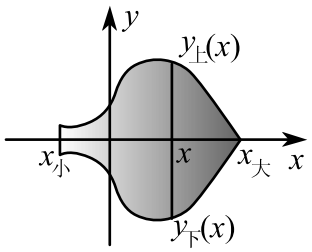

图 10.13

证 由于 D 是上下对称的，所以 $y_{下}=-y_{上}$. 于是

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x_{小}}^{x_{大}}\mathrm{d}x\int_{y_{下}}^{y_{上}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{x_{小}}^{x_{大}}0\,\mathrm{d}x=0.$$

10. 设 Ω 为空间积分域，若 Ω 是前后对称的，则 $f(x,y,z)$ 是 x 的奇函数时，即 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

证 由于 Ω 是前后对称的，所以 $x_{后}=-x_{前}$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_{后}}^{x_{前}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_{yz}}0\,\mathrm{d}x=0.$$

11. 计算下列三重积分：

(1) $I=\iiint_{\Omega}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; 其中 Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 围成;

(2) $I=\iiint_{\Omega}y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; 其中 Ω 由 $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成.

解 (1) 由于

$$y_{左}=-\sqrt{1-x^2-z^2},y_{右}=1,D_{投}=\{(x,z):x^2+z^2\leq 1\},$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{D_{投}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_{左}}^{y_{右}}y\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+z^2\leq 1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+z^2\leq 1}\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[2x^2(1-x^2)+\frac{1}{3}(1-x^2)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{4}{9}.$$

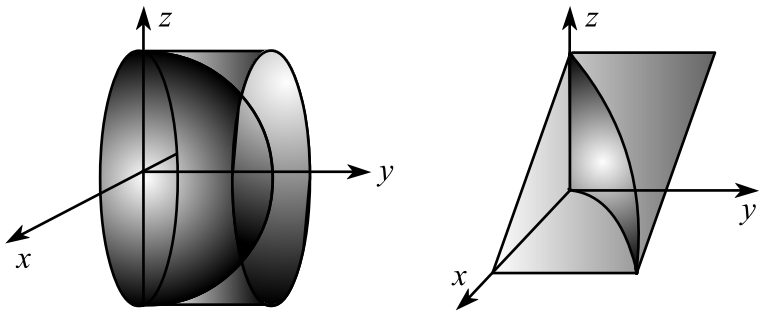

图 10.14

(2) 由于

$$y_{左}=0, y_{右}=\sqrt{x}, D_{投}=\{(x,z): x+z\le\frac{\pi}{2}, z\ge 0\},$$

所以

$$I = \iint\limits_{D_{投}}\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_{左}}^{y_{右}} y\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_{投}}\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{0}^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+z)\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}.$$

12. 计算 $I=\iint_D \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $x+y=1,\ x=0,\ y=0$ 所围成的区域.

解 令 $u=x-y, v=x+y$, 则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$D=\{(u,v): 0\le v\le 1, -v\le u\le v\}.$$

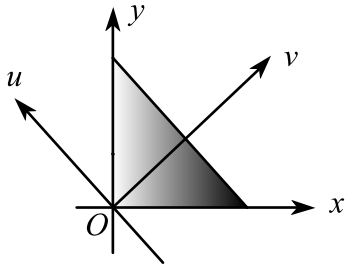

图 10.15

于是

$$I = \frac{1}{2}\iint\limits_D \cos\left(\frac{u}{v}\right)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos\left(\frac{u}{v}\right)\,\mathrm{d}u = \sin 1\int_0^1 v\,\mathrm{d}v = \frac{\sin 1}{2}.$$

习 题 10.2 B

1. 设平面板所占的区域 D 由直线 $x+y=2, y=x$ 和 x 轴所围成, 它的质量密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$, 求该平面板的质量.

解 所求平面板的质量为

$$m = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{2}}\left[(2-y)^3+3y^2(2-y)-4y^3\right]\mathrm{d}y = \frac{19}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

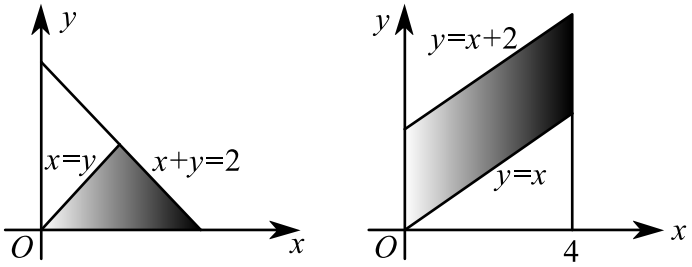

图 10.16

2. 设平面板所占的区域 D 由直线 $y=x, y=2+x, x=0, x=4$ 围成, 它的电荷密度为 $\rho(x,y)=2x^2+y^2$, 求该平面板的总电荷.

解 所求平面板的总电荷为

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D (2x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_x^{2+x} (2x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 \left(\frac{8}{3}+4x+6x^2\right)\mathrm{d}y = \frac{512}{3}. \end{aligned}$$

3. 求由平面 $z=0$,$z=x+y+2$ 和曲面 $x^2+y^2=10$ 所围成的立体的体积.

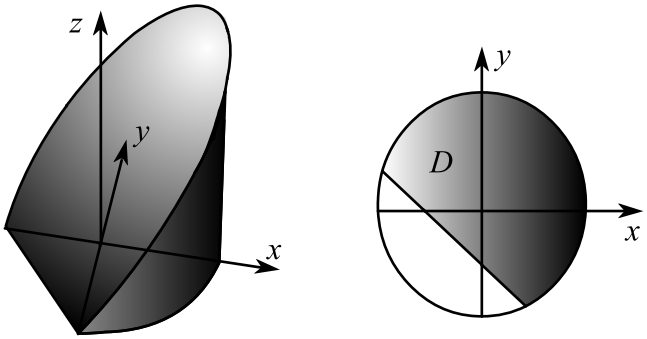

图 10.17

解 所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (z_{\text{上}} - z_{\text{下}})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (x+y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-3}^{1}\mathrm{d}x \int_{-2-x}^{\sqrt{10-x^2}} (x+y+2)\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{1}^{\sqrt{10}}\mathrm{d}x \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} (x+y+2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-3}^{1} (7+2x+2\sqrt{10-x^2}+x\sqrt{10-x^2})\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{1}^{\sqrt{10}} (4\sqrt{10-x^2}+2x\sqrt{10-x^2})\mathrm{d}x = \frac{95}{3}+5\pi+20\mathrm{arcsec}\sqrt{10}. \end{aligned}$$

4. 求由平面 $z=0$, 抛物面 $x^2+y^2=4z$ 和柱面 $x^2+y^2=4y$ 所围成的立体的体积.

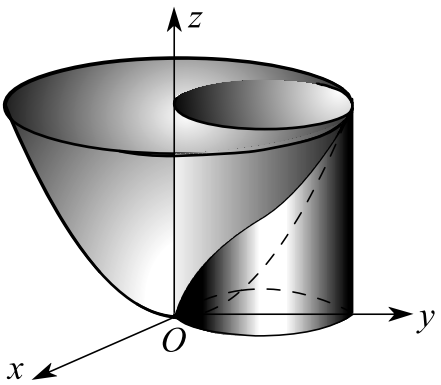

图 10.18

解 所求立体的体积为

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2\le 4y} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^4 (2y+y^2)\sqrt{4y-y^2}\mathrm{d}y = 6\pi. \end{aligned}$$

5. 求由抛物柱面 $z=2-x^2$ 和椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 所围成的立体的体积.

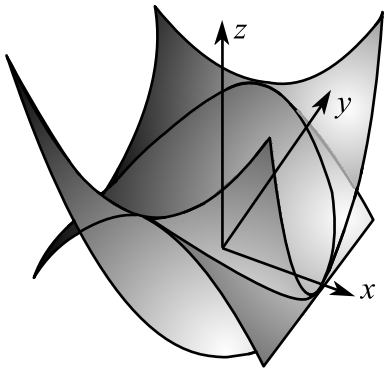

图 10.19

解 消 z 可得投影域

$$D: x^2+y^2 \leq 1.$$

于是所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (z_{上}-z_{下})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \Big[(2-x^2)-(x^2+2y^2)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big[(2-x^2)-(x^2+2y^2)\Big]\mathrm{d}y \\ &= \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x = \pi. \end{aligned}$$

6. 在曲线族 $y=a(1-x^2)$ 中试确定一条曲线，使得该曲线与它在 $(-1,0),(1,0)$ 两点处的法线所围成图形的面积最小.

解 所求法线方程为

$$y=-\frac{1}{2a}\,(x+1), \quad y=\frac{1}{2a}\,(x-1)$$

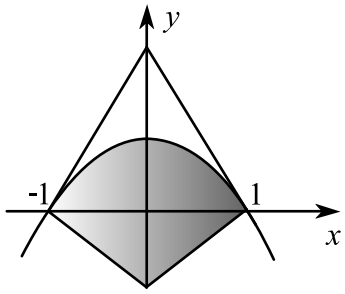

图 10.20

于是，所围成图形的面积为

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2a}(x-1)}^{a(1-x^2)} \mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 \left[a(1-x^2) - \frac{1}{2a}(x-1)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{a} + \frac{4a}{3}.$$

由此可知，当 $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，所围成图形的面积最小，其最小面积为 $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

7. 在过原点和点 $(2,3)$ 的单调光滑曲线上任取一点作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴和曲线围成的面积是另一条平行线与 y 轴和曲线围成的面积的两倍，求此曲线的方程.

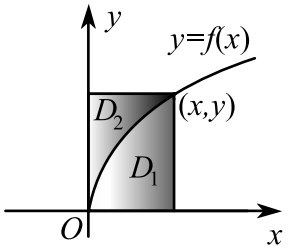

图 10.21

解 设所求曲线为 $y = f(x)$. 根据面积关系，有

$$\iint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由此可知,

$$\int_0^x \mathrm{d}t \int_0^{f(t)} \mathrm{d}y = 2\int_0^x \mathrm{d}t \int_{f(t)}^{f(x)} \mathrm{d}y.$$

整理，得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^x (f(x)-f(t))\mathrm{d}t.$$

两端求导，得

$$2xf'(x) = f(x).$$

解得 $f(x) = C\sqrt{x}$. 根据 $f(2)=3$ 可知， $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$.

8. 计算 $I = \iiint_\Omega (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 与三坐标轴所围之区域.

解 化为累次积分，有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \Big[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}\Big]\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \Big[\frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6}\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

9. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ 上有定义，$f(0,0)=0$, 且在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 可微，求

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}.$$

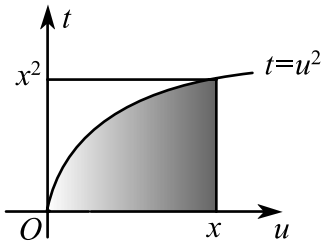

图 10.22

解 交换积分次序，并利用罗必达法则，有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^{u^2} f(t,u)\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2} f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}\quad (\text{利用积分中值定理})\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{f(\overline{t},x)}{x}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t}{x^2} = f_2'(0,0).\end{aligned}$$

其中 $0<\overline{t}<x^2$.

10. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调减且恒大于 0 的连续函数，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

证 设 $D=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$, 则不等式等价于

$$\iint_D xf^2(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\iint_D yf(y)f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

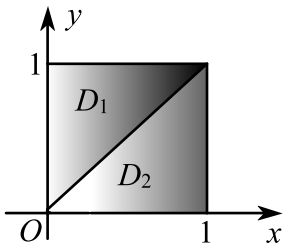

图 10.23

由于 $f(x)$ 单调减，所以

$$(f(x)-f(y))(y-x)\ge 0.$$

于是，有

$$\iint_D yf(y)f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D xf^2(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_D f(y)f^2(x)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_1} f(y)f^2(x)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(y)f^2(x)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_1} f(y)f^2(x)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_1} f(x)f^2(y)(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_1} f(y)f(x)(f(x)-f(y))(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0.
\end{aligned}
$$

则原不等式成立。

11. 求由抛物面 $z = 2x^2 + y^2$ 和柱面 $z = 4 - y^2$ 所围图形的体积.

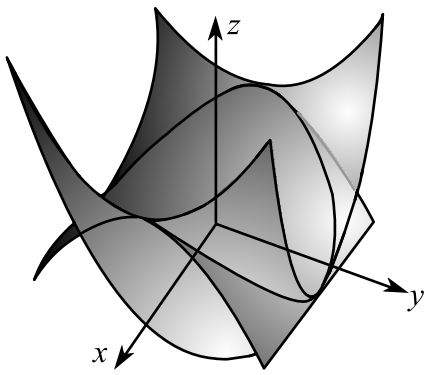

图 10.24

解 消 z 可得投影域

$$D : x^2 + y^2 \leq 2.$$

于是所求立体的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (z_{上} - z_{下})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 2} \Big[(4-y^2) - (2x^2+y^2)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \Big[(4-y^2)-(2x^2+y^2)\Big]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x = 4\pi.$$

12. 利用坐标变换 $x = u(1+v), y = v(1+u)$ 计算二次积分

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2-2xy+2x+2y+1}}.$$

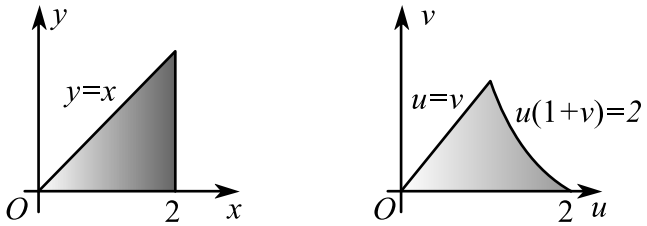

图 10.25

解 由于

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1+u+v,$$

所以

$$I = \iint_D \frac{1+u+v}{\sqrt{(u+v)^2+2(u+v)+1}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}v \int_v^{\frac{2}{1+v}} \mathrm{d}u = \int_0^1 \Big(\frac{2}{1+v}-v\Big)\mathrm{d}v$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

13. 设 D 是由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,\ \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2\ (a>0,\ b>0)$ 与直线 $bx-ay=0,\ 4bx-ay=0$ 围成的平面区域，试求 D 的面积.

解 令

$$\begin{cases} u=\sqrt{bx}+\sqrt{ay} \\ v=\dfrac{y}{x} \end{cases},$$

则

$$D=\{(u,v):\sqrt{ab}\le u\le 2\sqrt{ab},\quad \frac{b}{a}\le v\le\frac{4b}{a}\}.$$

由于

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| =\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=\begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x}} & \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{y}} \\ \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{2x^2}{u}=\frac{2u^3}{(\sqrt{b}+\sqrt{av})^4},$$

所以平面区域 D 的面积为

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_D\frac{u^3}{(\sqrt{b}+\sqrt{av})^4}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=2\int_{\sqrt{ab}}^{2\sqrt{ab}}u^3\mathrm{d}u\int_{\frac{b}{a}}^{\frac{4b}{a}}(\sqrt{b}+\sqrt{av})^{-4}\,\mathrm{d}v=\frac{65ab}{108}.$$

14. 计算 $I=\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=ay^2,\ z=by^2\ (y>0,\ 0<a<b)$ 与平面 $z=\alpha x,\ z=\beta x,\ z=h\ (0<\alpha<\beta,\ h>0)$ 围成的区域.

解 令

$$u=\frac{z}{y^2},\quad v=\frac{z}{x},\quad z=z,$$

则

$$\Omega=\{(u,v,z):a\le u\le b,\quad \alpha\le v\le\beta,\quad 0\le z\le h\}.$$

由于

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}\right| =\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=-\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{2z}{y^3} & \dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{-z}{x^2} & 0 & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{x^2y^3}{2z^2} = \frac{z^{3/2}}{2v^2u^{3/2}},$$

所以

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{z^2}{v^2} \cdot \frac{z^{3/2}}{2v^2u^{3/2}} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^h z^{7/2}\mathrm{d}z \int_a^b u^{-3/2}\mathrm{d}u \int_\alpha^\beta v^{-4}\mathrm{d}v$$

$$= \frac{2}{27}h^{9/2}(a^{-1/2} - b^{-1/2})(\alpha^{-3} - \beta^{-3}).$$

15. 设 f 为连续函数，证明

$$\iint_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c)\mathrm{d}u,$$

其中 D 为 $x^2+y^2 \le 1$, 且 $a^2+b^2 \neq 0$.

证 令 $\begin{cases} ax+by = \sqrt{a^2+b^2}\,u \\ bx-ay = v \end{cases}$, 则

$$D = \{(u,v) : (a^2+b^2)u^2 + v^2 \le a^2+b^2\},$$

由于 $$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以

$$\iint_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{(a^2+b^2)u^2+v^2 \le a^2+b^2} f(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c)\mathrm{d}u \int_{-\sqrt{(a^2+b^2)(1-u^2)}}^{\sqrt{(a^2+b^2)(1-u^2)}} \mathrm{d}v$$

$$= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c)\mathrm{d}u.$$

16. 设有一容器是由抛物线 $y = ax^2$ 绕 y 轴旋转而成的抛物面，其中盛有高度为 H 厘米的液体，现将由抛物线 $y = bx^2 + c$ 绕 y 轴旋转而成的抛物面浸没其中 h 厘米，问液面上升多少？

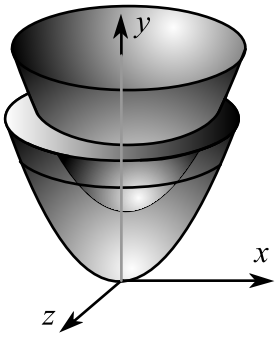

图 10.26

解 设液面上升 u 厘米，则有体积关系

$$\iint\limits_{a(x^2+z^2)\le H}\Big[H-a(x^2+z^2)\Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{a(x^2+z^2)\le H+u}\Big[(H+u)-a(x^2+z^2)\Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$-\iint\limits_{b(x^2+z^2)\le h}\Big[h-b(x^2+z^2)\Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

令 $x=r\cos\theta,\ z=r\sin\theta$, 则

$$\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)}\right|=r.$$

于是

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{H/a}}(H-ar^2)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{(H+u)/a}}(H+u-ar^2)r\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h/b}}(h-br^2)r\mathrm{d}r.$$

积分，得

$$\frac{H^2}{a}-\frac{H^2}{2a}=\frac{(H+u)^2}{a}-\frac{(H+u)^2}{2a}-\frac{h^2}{b}+\frac{h^2}{2b}.$$

整理，得

$$u^2+2Hu-\frac{b}{a}\,h^2=0.$$

解得 $u=\sqrt{H^2+\dfrac{a}{b}\,h^2}-H$.

17. 设曲线 $y=ax^2\ (a>0,\ x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A, 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体最大？最大体积是多少？

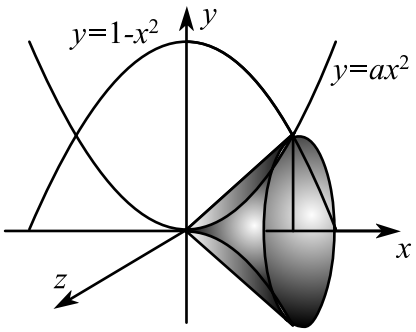

图 10.27

解 A 点的坐标为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}},\dfrac{a}{1+a}\right)$. 给定旋转体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi(\frac{a}{a+1})^2\cdot\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\pi\int_0^{1/\sqrt{a+1}}(ax^2)^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi a^2}{15(a+1)^{5/2}}.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{2\pi a(2a-3)}{15(a+1)^{7/2}}=0,\quad a>0$$

时，$a=\dfrac{3}{2}$, 所以当 $a=\dfrac{3}{2}$ 时，给定旋转体的体积有最大值 $\dfrac{6\sqrt{2}\pi}{5^{7/2}}$.

18. 求曲面 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=ax\ (a,b,c>0)$ 所围区域的体积.

解 令

$$\begin{cases}x=ar\cos\varphi\sin\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\theta,\end{cases}$$

则 $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq \sqrt[3]{a^2 \cos\varphi \sin\theta}$. 由于

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\varphi,r)}\right| = abcr^2 \sin\theta,$$

所以所求区域 V 的体积为

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt[3]{a^2\cos\varphi\sin\theta}} abcr^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{a^3bc}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{a^3bc}{3}.$$

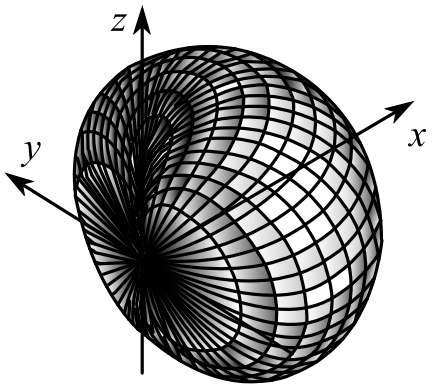

图 10.28

19. 作适当的变量代换求重积分：

$$\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是平行四边形，它的四个顶点为 $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$.

解 令

$$\begin{cases} u = x - y, \\ v = x + y, \end{cases}$$

则 D 变为

$$-\pi \leq u \leq \pi, \quad \pi \leq v \leq 3\pi.$$

由于

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}u \int_{\pi}^{3\pi} v^2 \sin^2 u\,\mathrm{d}v = \frac{2\pi^4}{3}.$$

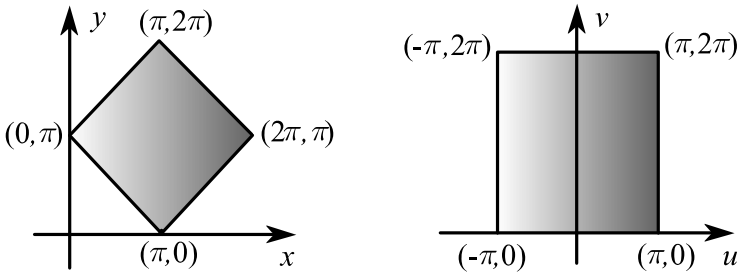

图 10.29

20. 设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x|+|y| \le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1 < |x|+|y| \le 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y) : |x|+|y| \le 2\}$.

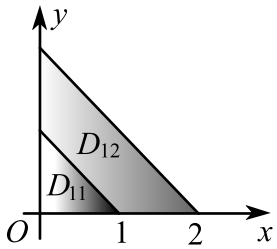

图 10.30

解 由区域的对称性和被积函数的奇偶性，有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D_1 为 D 在第一象限的部分，而

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 $D_{11} = \{(x,y) : 1 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}$,

$$D_{12} = \{(x,y) : 1 \le x+y \le 2,\ x \ge 0, y \ge 0\}.$$

令 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

由于 D_{12} 变为

$$\{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \le r \le \frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}\},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} \mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_{11}} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12},\end{aligned}$$

所以

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

21. 令 $x = u\cos^4 v,\ y = u\sin^4 v$, 变换积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$ 和坐标轴所围区域.

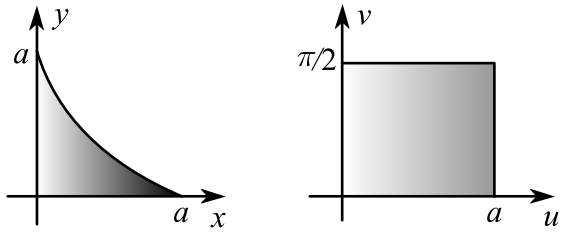

图 10.31

解 由于

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 4u\sin^3 v\cos^3 v,$$

所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^a \mathrm{d}u\int_0^{\pi/2} f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)u\sin^3 v\cos^3 v\,\mathrm{d}v.$$

22. 令 $u=x+y,\ v=x-y$, 变换积分 $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

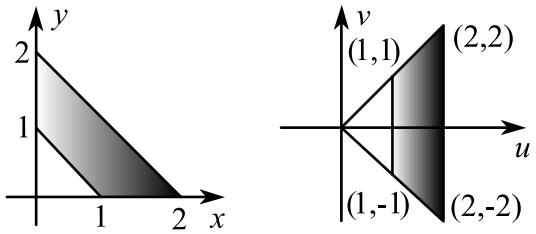

图 10.32

解 由于

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;= \int_1^2 \mathrm{d}u\int_{-u}^{u} f\Big(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\Big)\,\mathrm{d}v$$

23. 设 $f(u)$ 为连续函数，证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(u)\sqrt{2-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

证 令 $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases}$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{u^2+v^2\le 2} f(u)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(u)\mathrm{d}u \int_{-\sqrt{2-u^2}}^{\sqrt{2-u^2}} \mathrm{d}v \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(u)\sqrt{2-u^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

§10.3 常用坐标变换

习 题 10.3 A

1. 把下列积分化为极坐标形式，并计算积分值：

(1) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$；　(2) $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-1/2}\mathrm{d}y$；　(4) $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

解 (1) 在极坐标下，不等式组

$$0\le x\le 2a,\quad 0\le y\le\sqrt{2ax-x^2}$$

变为

$$0\le r\cos\theta\le 2a,\quad 0\le r\sin\theta\le\sqrt{2ar\cos\theta-r^2\cos^2\theta},$$

整理，得

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2a\cos\theta.$$

故有

$$\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 \,\mathrm{d}r$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

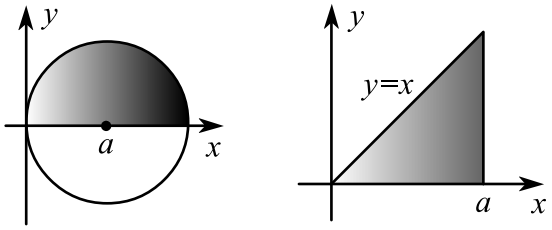

图 10.33

(2) 在极坐标下，不等式组

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le x$$

变为

$$0 \le r\cos\theta \le a, \quad 0 \le r\sin\theta \le r\cos\theta,$$

整理，得

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le r \le \frac{a}{\cos\theta}.$$

故有

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r^2 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3\theta} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

(3) 在极坐标下，不等式组

$$0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le x$$

变为

$$0 \le r\cos\theta \le 1, \quad r^2\cos^2\theta \le r\sin\theta \le r\cos\theta,$$

整理，得

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le r \le \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-1/2}\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} \mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}-1.\end{aligned}$$

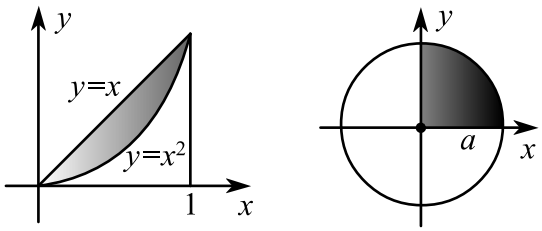

图 10.34

(4) 在极坐标下，不等式组

$$0 \le y \le a, \quad 0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$$

变为

$$0 \le r\sin\theta \le a, \quad 0 \le r\cos\theta \le \sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta},$$

整理，得

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le a.$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^3\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^4}{8}.\end{aligned}$$

2. 更换下列积分次序：

(1) $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r\ (a\geq 0)$;

(2) $I=\int_{-\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r\ (a\geq 0)$;

解 (1) 由于积分区域

$$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\quad 0\leq r\leq a\cos\theta$$

等价于

$$0\leq r\leq a,\quad -\arccos\frac{r}{a}\leq\theta\leq\arccos\frac{r}{a},$$

所以

$$I=\int_0^a\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

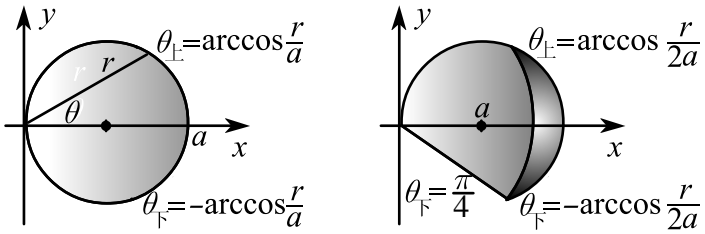

图 10.35

(2) 由于积分区域

$$-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\quad 0\leq r\leq 2a\cos\theta$$

等价于

$$0\leq r\leq 2a\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)=\sqrt{2}a,\quad -\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\arccos\frac{r}{2a}$$

与

$$\sqrt{2}a\leq r\leq 2a,\quad -\arccos\frac{r}{2a}\leq\theta\leq\arccos\frac{r}{2a}$$

两部分，所以

$$I=\int_0^{\sqrt{2}a}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r,\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\sqrt{2}a}^{2a}\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

3. 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的区域;

(2) $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是圆环形区域 $\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$;

(3) $\iint_D \arctan\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$, $y=0$, $y=x$ 所围成的在第一象限内的区域;

(4) $\iint_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的在第一象限内的区域;

(5) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是圆环形区域 $a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2$.

解 (1) 利用极坐标，有

$$\begin{aligned}\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \ln(1+r^2)r\,\mathrm{d}r\\ &= (2\ln 2-1)\pi.\end{aligned}$$

(2)

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}(\sin r)\,r\,\mathrm{d}r = 2\pi(1-\pi).$$

(3)

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\,\mathrm{d}r = \frac{3\pi}{8}.$$

(4)

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi(\pi-2)}{16}.$$

(5)

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}(b^3-a^3).$$

4. 计算下列三重积分：

(1) 计算 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由 $x^2+y^2\leq z^2,\ 0\leq z\leq h$ 围成;

(2) 计算 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由曲线 $\begin{cases}z=a^y\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面与平面 $z=a^2$ 所围成的几何体.

(3) 计算 $\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 其中 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 围成.

解 (1) 根据奇偶性，有

$$I=\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h\mathrm{d}z\iint_{D_z}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^h z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi h^4}{4}.$$

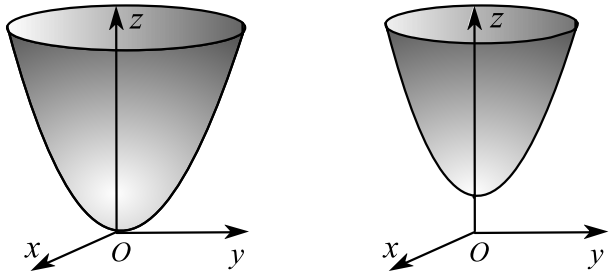

图 10.36

(2) 旋转面方程为

$$z=a^{\sqrt{x^2+y^2}},\quad (0\leq z\leq a^2).$$

利用柱坐标，有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_0^{a^r}r^3\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^2 r^3a^r\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \cdot \frac{6 + a^a(-6 + a\ln a\,(6 + a\ln a\,(-3 + a\ln a)))}{(\ln a)^4}.$$

(3) 利用切片法，有

$$\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\le 3z} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\le 4-z^2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\pi\int_0^1 z^3\mathrm{d}z + \pi\int_1^2 z^2(4-z^2)\mathrm{d}z = \frac{3\pi}{4} + \frac{47\pi}{15}.$$

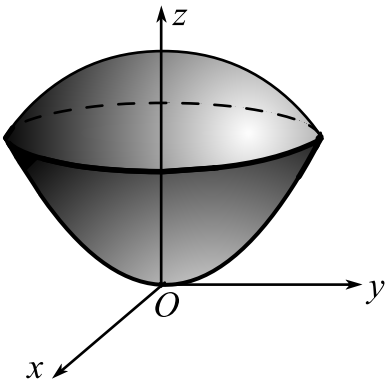

图 10.37

5. 设平面板所占的区域 D 由螺线 $r = 2\theta$ 上的段弧 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ 与直线 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 所围成，已知其质量密度为 $\rho(x, y) = x^2 + y^2$. 试求该平面板的质量.

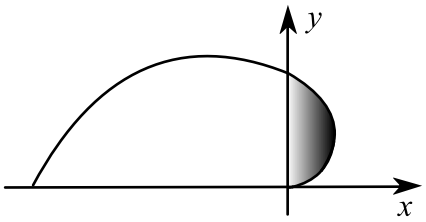

图 10.38

解 所求平面板的质量为

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi^5}{40}.$$

6. 计算以 $x^2+y^2 \leq ax, z=0$ 为底，以 $z=x^2+y^2$ 为高的曲顶柱体的体积.

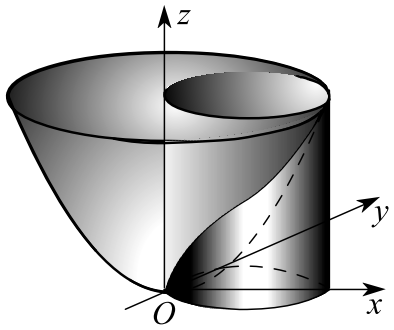

图 10.39

解 所求曲顶柱体的体积为

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq ax} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi a^4}{32}.$$

7. 试求第一卦限内，在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 之外及圆柱面 $x^2+y^2-2x=0$ 以内，而以双曲抛物面 $z=xy$ 为顶的曲顶柱体的体积.

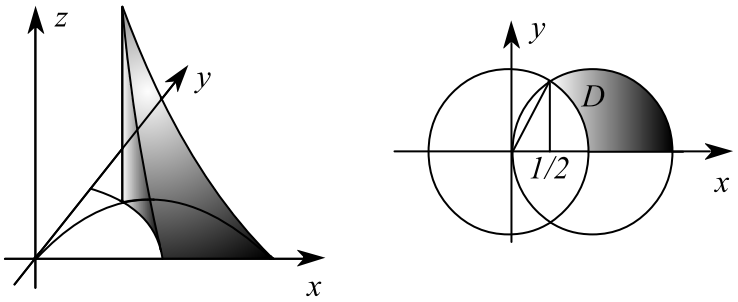

图 10.40

解 所求曲顶柱体的体积为

$$V = \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi/6} \mathrm{d}\theta \int_1^{2\cos\theta} r^3 \sin\theta\cos\theta \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} (16\cos^4\theta - 1)\sin\theta\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{17}{48}.$$

8. 求心脏线 $r = 2(1+\cos\theta)$ 之内，圆周 $r = 2$ 之外部分的面积.

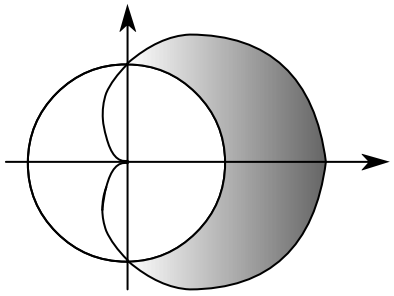

图 10.41

解 所求图形的面积为

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r \, \mathrm{d}r$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[(1+\cos\theta)^2 - 1\Big]\mathrm{d}\theta = \frac{8+\pi}{2}.$$

9. 求圆周 $r = 4\sin\theta$ 之内，双纽线 $r^2 = 8\cos 2\theta$ 之外部分的面积.

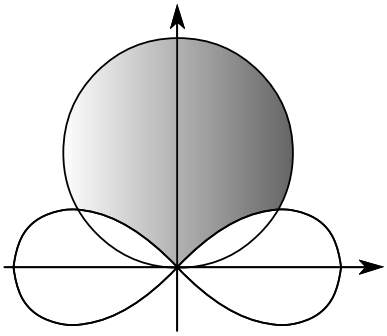

图 10.42

解 由 $(4\sin\theta)^2 = 8\cos 2\theta$ 可得 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. 于是所求图形的面积为

$$S = = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{\sqrt{8\cos 2\theta}}^{4\sin\theta} r\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \Big[(4\sin\theta)^2 - 8\cos 2\theta\Big]\mathrm{d}\theta = 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$$

10. 求圆周 $r = \sin\theta$ 之内，心脏线 $r = 1 - \cos\theta$ 之外部分的面积.

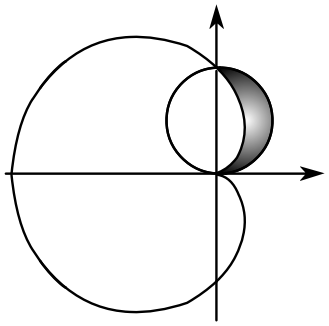

图 10.43

解 所求图形的面积为

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \Big[\sin^2\theta - (1-\cos\theta)^2\Big]\mathrm{d}\theta = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

习 题 10.3 B

1. 求由球面 $r^2 + z^2 = 16$ 和柱面 $r = 4\cos\theta$ 所围图形的体积.

解 所求曲顶柱体的体积为

$$V = \iint\limits_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{4\cos\theta} \sqrt{16 - r^2}\, r\mathrm{d}r = \frac{4^3\pi}{3}.$$

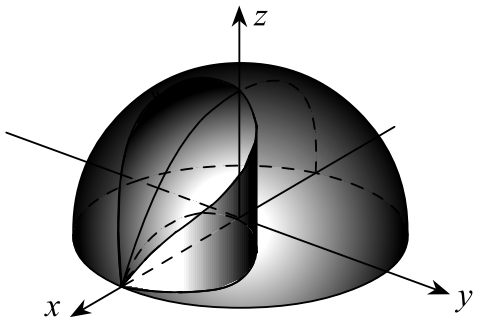

图 10.44

2. 求由抛物面 $z = r^2$, 柱面 $r = 2\cos\theta$ 和平面 $z = 0$ 所围图形的体积.

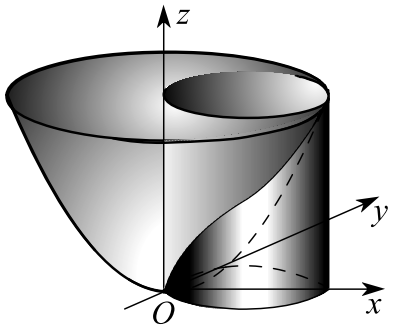

图 10.45

解 所求曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_D z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3\, \mathrm{d}r = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{32}.$$

3. 求由锥面 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 和球面 $r = 2a\cos\theta$ 所围图形的体积.

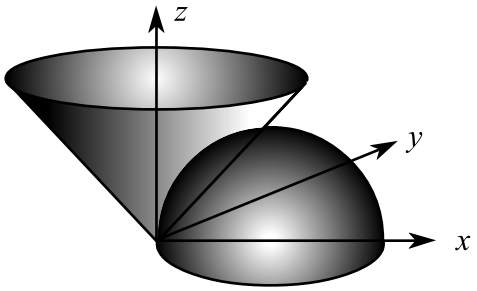

图 10.46

解 利用球坐标，所求图形的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{8\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

4. 设函数 $f(x)$ 连续， $f(0) = 1$, 令

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le t^2} f(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求 $F''(0)$.

解 利用极坐标，有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^t f(r^2)t \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^t f(r^2)t \, \mathrm{d}r.$$

由此可知

$$F'(t) = 2\pi f(t^2)t.$$

于是

$$F''(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F'(t) - F'(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\pi f(t^2)t - 0}{t} = 2\pi f(0) = 2\pi.$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且满足

$$f(t) = 2 \iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} (x^2+y^2) f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + t^4,$$

求 $f(x)$.

解 利用极坐标，有

$$f(t) = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^t f(r) r^3 \,\mathrm{d}r + t^4 = 4\pi \int_0^t f(r) r^3 \,\mathrm{d}r + t^4.$$

求导，得

$$f'(t) = 4\pi f(t) t^3 + 4t^3.$$

由此可知

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{e}^{\int 4\pi t^3 \mathrm{d}t}\Big[\int \mathrm{e}^{-\int 4\pi t^3 \mathrm{d}t} \cdot 4t^3 \,\mathrm{d}t + C\Big] \\ &= C\mathrm{e}^{\pi t^4} - \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

根据 $f(0) = 0$ 可知， $f(t) = \dfrac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4} - 1)$.

6. 设函数 $f(u)$ 连续， Ω 由 $0 \le z \le h$, $x^2 + y^2 \le t^2$ 围成. 若

$$F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$, $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{F(t)}{t^2}$.

解 利用柱坐标，有

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^t \mathrm{d}r \int_0^h [z^2 + f(r^2)] r \,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^t \Big[\frac{1}{3}h^3 + f(r^2)h\Big] r \,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

求导，得

$$F'(t)=2\pi\Big[\frac{1}{3}h^3+f(t^2)h\Big]t.$$

由此可知

$$\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{2\pi\Big[\frac{1}{3}h^3+f(t^2)h\Big]t}{2t}=\pi\Big[\frac{1}{3}h^3+f(0)h\Big].$$

7. 求曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球 $x^2+y^2+z^2\leq 4az$ 分成两部分的体积比 $(a>0)$.

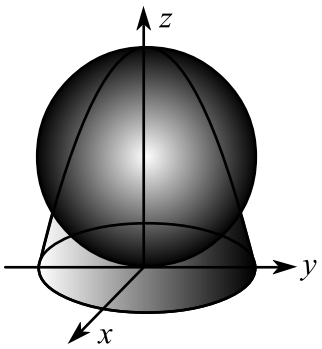

图 10.47

解 1　消 x^2+y^2 得

$$4az-z^2+az=4a^2.$$

解得 $z=a$. 由此可知，相交部分的体积为

$$\begin{aligned}V_{\text{内}}&=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^a\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leq 4az-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{4a}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leq 4a^2-az}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^a(4az-z^2)\,\mathrm{d}z+\int_a^{4a}(4a^2-az)\,\mathrm{d}z\\&=\frac{37\pi a^3}{6}.\end{aligned}$$

于是所求体积比为

$$V_{内}/V_{外}=\frac{37\pi a^3}{6}\Big/\Big(\frac{4\pi(2a)^3}{3}-\frac{37\pi a^3}{6}\Big)=\frac{37}{27}.$$

解 2　相交部分的投影域为

$$x^2+y^2\le 3a^2.$$

于是

$$\begin{aligned}V_{内}&=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3a^2}\Big[\frac{4a^2-x^2-y^2}{a}-(2a-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a}\Big[\frac{4a^2-r^2}{a}-(2a-\sqrt{4a^2-r^2}\,)\Big]\,r\mathrm{d}r=\frac{37\pi a^3}{6}.\end{aligned}$$

8. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{r\to 0+}\dfrac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $f(x,y)$ 为连续函数;

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\iint_{\varepsilon\le x^2+y^2\le 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) 利用极坐标，有

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0+}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\lim_{r\to 0+}\frac{1}{r^2}\int_0^r\mathrm{d}t\int_0^{2\pi}f(t\cos\theta,t\sin\theta)\,t\mathrm{d}\theta\\&=\lim_{r\to 0+}\frac{1}{2r}\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\lim_{r\to 0+}f(\overline{r}\cos\theta,\overline{r}\sin\theta)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\\&=\pi f(0,0).\end{aligned}$$

其中 $0<\overline{r}<r$.

(2) 利用极坐标，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\iint\limits_{\varepsilon\le x^2+y^2\le 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^r \ln t^2\cdot t\mathrm{d}t$$

$$= \pi\lim_{\varepsilon\to 0+}(r^2\ln r-\frac{1}{2}r^2-\varepsilon^2\ln\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2)$$

$$= \pi(r^2\ln r-\frac{1}{2}r^2).$$

9. 计算积分 $\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 其中 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 围成.

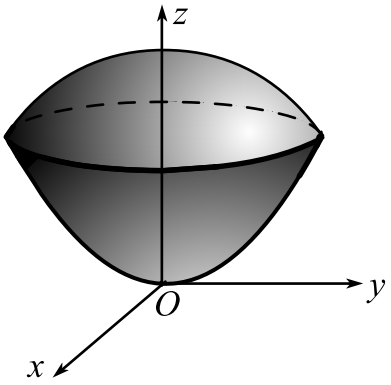

图 10.48

解 消 x^2+y^2 得

$$3z+z^2=4.$$

解得 $z=1$. 利用切片法，所求体积为

$$V = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 3z} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\pi\int_0^1 z^2\,\mathrm{d}z+\int_1^2 z(4-z^2)\,\mathrm{d}z=\pi+\frac{9}{4}.$$

10. 求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的立体体积最小，试写出切平面方程并求出最小的体积.

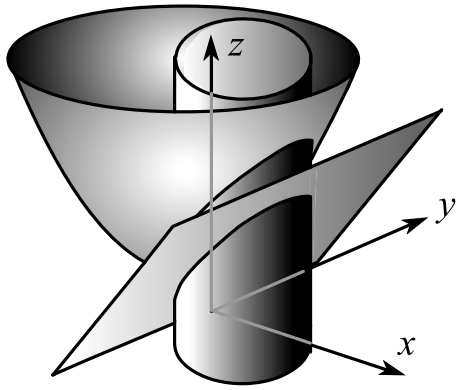

图 10.49

解 抛物面在 (x_0,y_0) 点的法向量为 $(2x_0,2y_0,-1)$, 切平面为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

整理得

$$z=2x_0x+2y_0y-z_0+2.$$

所围立体的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (z_{上}-z_{下})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big[(1+x^2+y^2)-(2x_0x+2y_0y-z_0+2)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\mathrm{d}r - \int_0^2 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}(2z_0x-z_0+1)\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta - 2\int_0^2 (2z_0x-z_0+1)\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{2}-2(1+2x_0-z_0)\Big(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}\,)\Big).
\end{aligned}$$

由于条件极值问题

$$\begin{cases} 1+2x-z \to \max \\ z = 1+x^2+y^2 \end{cases}$$

的极大值点为 $(1,0,2)$, 所以所求切平面方程为 $z=2x$, 所求最小的体积为

$$V_{\min} = \frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

11. 设 $a,b,c>0$, 求几何体 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 在第一卦限的体积.

解 所求几何体的体积为

$$V = c\iint\limits_D \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中

$$D = \{(x,y) : \frac{x}{a}+\frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

令 $\begin{cases} u = \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \\ v = \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} \end{cases}$, 则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{ab}{2},$$

并且 D 变为

$$0 \leq u \leq 1, \quad -u \leq v \leq u.$$

于是

$$V = \frac{ab}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u \int_{-u}^{u} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}v = \frac{abc}{3}.$$

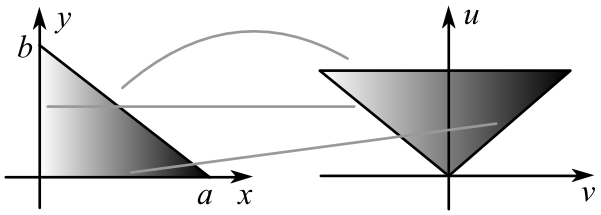

图 10.50

12. 计算 $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 其中 Ω 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=a$ 围成的区域.

解 利用柱坐标，有

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^z r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{8}.$$

13. 计算 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 其中 Ω 由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成的区域.

解 消 x^2+y^2 解得 $z=R/\sqrt{2}$, 利用柱坐标，有

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{R/\sqrt{2}} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^z (r^2+z^2) r\,\mathrm{d}r \\ &\quad + \int_{R/\sqrt{2}}^R \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (r^2+z^2) r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^{R/\sqrt{2}} \frac{3z^4}{4}\mathrm{d}z + 2\pi \int_{R/\sqrt{2}}^R \left(\frac{R^2}{4}+\frac{R^2z^2}{2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{3\pi R^5}{40\sqrt{2}} + \frac{\pi R^3}{2} - \frac{\pi R^3}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi R^5}{3} - \frac{\pi R^5}{6\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

14. 求椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积.

解 令

$$x = ar\cos\varphi\sin\theta,\ y = br\sin\varphi\sin\theta,\ z = c\cos\theta,$$

则

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = abcr^2\sin\theta.$$

于是，椭球体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi abc}{3}.$$

15. 计算 $I=\iiint_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leq 4$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\leq 4$ 的公共部分.

解 由于积分域左右对称，根据 y 奇偶性有 $I=0$.

16. 求两球 $x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2\leq\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\leq b^2$ $(b<a)$ 相交部分的体积.

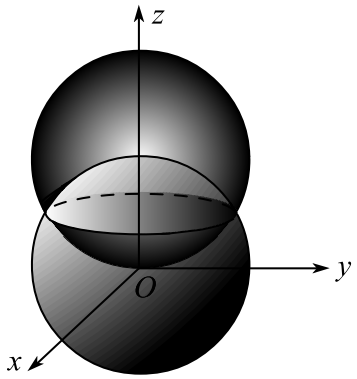

图 10.51

解 消 x^2+y^2 解得 $z=\dfrac{b}{a}$, 利用柱坐标，相交部分的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{b/a}\mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leq b^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{b/a}^{a}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leq az-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi\int_0^{b/a}(b^2-z^2)\,\mathrm{d}z+\pi\int_{b/a}^{a}(az-z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi b^3}{a}+\frac{\pi a^3}{6}-\frac{\pi b^2}{2a}. \end{aligned}$$

17. 求由球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的质量，已知其质量密度与到球心的距离的平方成正比，且在球面处为 1.

解 按照题意，质量密度为

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

由于锥面张角为 $\frac{\pi}{4}$，所以相交部分的质量为

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^4\sin\theta\,\mathrm{d}r = \frac{16\sqrt{2}\,\pi}{5}. \end{aligned}$$

18. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3 = 3xyz$ 与三坐标面在第一卦限内围成的立体的体积.

解 曲面的球坐标方程为

$$r^3 = 3\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta.$$

根据球坐标，所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[3]{3\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

19. 设函数 $f(x,y)$ 在单位圆上有连续的偏导数，且在边界上取值为零，证明：

$$f(0,0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D_ε 为环形域 $\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1$.

解 在极坐标下，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}$$

根据极坐标，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\Big]\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\,0-f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\Big]\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}f(\varepsilon\cos\overline{\theta},\varepsilon\sin\overline{\theta})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon\cos\overline{\theta},\varepsilon\sin\overline{\theta})=f(0,0).$$

其中 $0<\overline{\theta}<2\pi$.

20. 求三重积分

$$I=\iiint\limits_D z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 D 是由上半球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geq 0)$ 和抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围的区域.

解 消 x^2+y^2 解得 $z=1$, 利用切片法，相交部分的体积为

$$V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leq 3z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^1 3z\,\mathrm{d}z+\int_1^2(4-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{14\pi}{3}.$$

21. 求球面 $x^2+y^2+z^2=2rz(r>0)$ 和锥面所围区域的体积 V, 其中锥面是以 z 轴为轴，顶角为 2α 的锥面.

解 利用球坐标变换

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta$$

及

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2\sin\theta,$$

所求区域的体积为

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^{2r\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{16\pi r^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi r^3}{3}(1-\cos^4\alpha).$$

22. 求曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(a,b,c>0)$ 所围区域的体积 V.

解 令

$$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta,\ z = cu,$$

则

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,u)}\right| = abcr,$$

并且几何体变为

$$r^2+u^2 \le r.$$

于是，所求几何体的体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{r-r^2}}^{\sqrt{r-r^2}} r\,\mathrm{d}u$$

$$= 4abc\pi\int_0^1 r\sqrt{r-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{abc\pi^2}{4}.$$

23. 求三重积分

$$I = \iiint_D \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $D = \left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$.

解 令

$$x = ar\cos\varphi\sin\theta,\ y = br\sin\varphi\sin\theta,\ z = c\cos\theta,$$

则

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = abcr^2\sin\theta.$$

于是

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = \frac{5\pi^2}{32}.$$

24. 求三重积分 $\iiint_D z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 D 是两个球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2az$ 的公共部分.

解 两球相交于 $z=\dfrac{a}{2}$. 利用切片法，有

$$\begin{aligned}\iiint_D z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{a/2} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le a^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad+\int_{a/2}^{a} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 2az-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \pi\int_0^{a/2} z^2(a^2-z^2)\,\mathrm{d}z+\pi\int_{a/2}^{a} z^2(2az-z^2)\,\mathrm{d}z\\ &= \Big(\frac{2}{15}+\frac{11}{40}\Big)\pi\,a^5.\end{aligned}$$

§10.4 线面积分的计算

习 题 10.4 A

1. 计算曲线积分 $\int_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 与平面 $z=y$ 相交的圆周.

解 消 z 得投影曲线 $x^2+2y^2=a^2$, 由此可得交线的参数方程

$$x=a\cos\theta,\quad y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta,\quad z=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}\\ &= \sqrt{a^2\sin^2\theta+\frac{a^2}{2}\cos^2\theta+\frac{a^2}{2}\cos^2\theta}=a\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

利用参数化方法，有

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+\frac{a^2}{2}\sin^2\theta}\,a\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta=6a^2.\end{aligned}$$

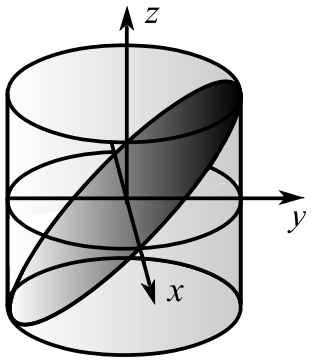

图 10.52

2. 计算曲线积分 $\int_L y\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是

(1) 抛物线 $y^2=4x$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,2)$ 的一段弧;

(2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在 x 轴上方的部分.

解 (1) 以 y 为参数，由于

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{\frac{1}{2}y^2+1}\,\mathrm{d}y,$$

所以

$$\int_L y\,\mathrm{d}s = \int_0^2 y\sqrt{\frac{1}{2}y^2+1}\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}.$$

(2) 椭圆的参数方程为

$$x = 5\cos\theta,\quad y = 3\sin\theta.$$

由于

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \sqrt{(5\sin\theta)^2+(3\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$\int_L y\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} 3\sin\theta\,\sqrt{(5\sin\theta)^2+(3\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 9+\frac{75}{4}\arctan\frac{4}{3}.$$

3. 计算曲线积分 $\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ 在第一象限的一段弧，即 $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$

解 由于

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,\mathrm{d}s = 3a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = a^{7/3}.$$

4. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面的面积.

解 按照旋转面的面积公式：微面积 = 周长 × 微弧长，有

$$\begin{aligned} S &= \int_L 2\pi y\,\mathrm{d}s = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \frac{64\pi a^2}{3}. \end{aligned}$$

5. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 所截部分的面积.

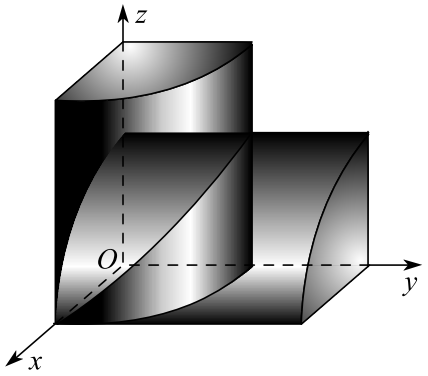

图 10.53

解 按照柱面的侧面积公式：微面积 = 微弧长 × 高，有

$$\begin{aligned} S &= \int_{x^2+y^2=R^2} z \,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \cdot \sqrt{1+\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{R^2-x^2}\Big)^2}\,\mathrm{d}x = 2R^2. \end{aligned}$$

6. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 夹在平面 $z=\dfrac{a}{4}, z=\dfrac{a}{2}$ 之间部分的面积.

解 设 L 为曲线 $x=\sqrt{R^2-z^2},\ \dfrac{a}{4}\le z\le \dfrac{a}{2}$. 按照旋转面的面积公式：微面积 = 周长 × 微弧长，有

$$\begin{aligned} S &= \int_L 2\pi\sqrt{R^2-z^2}\,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi\int_{a/4}^{a/2} \sqrt{R^2-z^2}\cdot\sqrt{1+\Big(\frac{\mathrm{d}\sqrt{R^2-z^2}}{\mathrm{d}z}\Big)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi a R}{2}. \end{aligned}$$

7. 求由曲面 $x^2+y^2=az$ 及 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$ 所围成的封闭区域的表面积.

解 消 x^2+y^2 得 $z=a$, 由此可得投影域为

$$x^2+y^2\le a^2.$$

于是，上部曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 的面积为

$$S_{\text{上}} = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z_{\text{上}}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{\text{上}}}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi a^2.$$

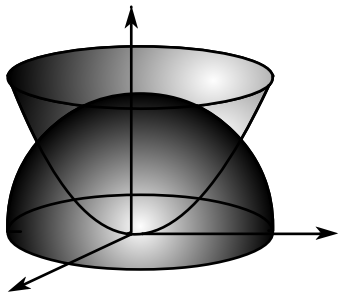

图 10.54

下部曲面 $x^2+y^2=az$ 的面积为

$$S_{\text{下}} = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z_{\text{下}}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{\text{下}}}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi a^2}{3}.$$

由此可知，所求封闭区域的表面积为

$$S_{\text{表}} = S_{\text{上}} + S_{\text{下}} = 2\pi a^2 + \frac{4\pi a^2}{3}.$$

8. 求椭球面 $x^2+y^2+\dfrac{1}{2}z^2=1$ 的表面积.

解 椭球面的参数方程为

$$x=\cos\varphi\sin\theta,\ y=\sin\varphi\sin\theta,\ z=\sqrt{2}\cos\theta.$$

记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 则

$$\boldsymbol{r}'_\theta\times\boldsymbol{r}'_\varphi = \sin\theta(\sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta,\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta),$$

于是椭球面的表面积为

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2+\frac{z^2}{2}=1} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} |\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi| \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, \sqrt{2\sin^2\theta + \cos^2\theta} \, \mathrm{d}\theta = 2\pi + \pi^2.$$

9. 计算 $I = \iint_S \dfrac{1}{(1+x+y)^2} \mathrm{d}S$, 其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面所围成的四面体的表面.

解 按照投影方法, 分片计算面积分:

$$I = I_{上} + I_{下} + I_{左} + I_{后}.$$

(1) 由于 $z = 1-x-y$ 时,

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{3},$$

所以

$$I_{上} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3}\ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 由于 $z = 0$ 时,

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = 1,$$

所以

$$I_{下} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

(3) 由于 $y = 0$ 时,

$$\sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = 1,$$

所以

$$I_{左} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2} = 1 - \ln 2.$$

(4) 由于 $x=0$ 时,

$$\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}=1,$$

所以

$$I_{\text{后}}=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}=1-\ln 2.$$

故 $I=(\sqrt{3}-1)\ \ln 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}$.

10. 计算 $\iint_S|xyz|\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是曲面 $z=x^2+y^2$ 被 $z=0$ 和 $z=1$ 所截得的部分.

解 由于 $z=x^2+y^2$ 时,

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S|xyz|\,\mathrm{d}S&=\iint_{x^2+y^2\leq 1}|xy(x^2+y^2)|\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\cos\theta\sin\theta\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.\end{aligned}$$

习 题 10.4 B

1. 已知螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ 的每一点的密度等于该点径矢模的平方, 试求 t 从 0 到 2π 部分的质量.

解 质量密度为

$$\rho=x^2+y^2+z^2=a^2+b^2t^2.$$

由于

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

所以螺杆质量为

$$m=\int_L \rho\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t=(2\pi a^2+2\pi^3b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. 求半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 和柱面 $x^2+y^2=Rx$ 的交线长度 (结果用定积分表示即可).

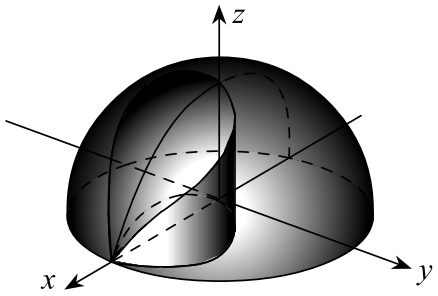

图 10.55

解 交线的参数方程为

$$x=R\cos^2\theta,\ y=R\sin\theta\cos\theta,\ z=R|\sin\theta|.$$

其中 $|\theta|\leq\dfrac{\pi}{2}$. 由于

$$\sqrt{x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2}=\sqrt{1+\cos^2\theta},$$

所以交线长度为

$$s=\int_L \mathrm{d}s=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2}\,\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

3. 求柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 介于平面 $z=0,\ z=y$ 之间的面积.

解 令 $x=\sqrt{5}\cos\theta,\ y=3\sin\theta$，按照柱面的侧面积公式，有

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1}|z|\,\mathrm{d}s=2\int_0^{\pi}y\sqrt{x_\theta'^2+y_\theta'^2}\,\mathrm{d}\theta\\&=2\int_0^{\pi}3\sin\theta\sqrt{5\sin^2\theta+9\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=18+\frac{15\ln 5}{2}.\end{aligned}$$

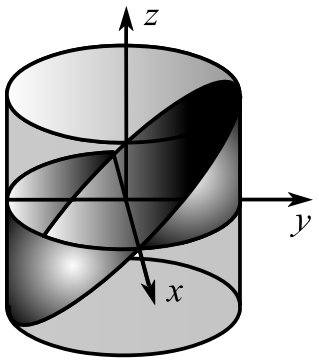

图 10.56

4. 计算 $\int_L y\mathrm{e}^{-x/a}\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $x=a\ln(1+t^2),\ y=2a\arctan t-at$ 对应于 $(0\leq t\leq 1)$ 的一段弧 $(a>0)$.

解 由于

$$x'(t)=\frac{2at}{1+t^2},\ y'(t)=\frac{2a}{1+t^2}-a,$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_L y\mathrm{e}^{-x/a}\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{2a\arctan t-at}{1+t^2}\,a\mathrm{d}t=a^2\Big(\frac{\pi^2}{16}-\frac{\ln 2}{2}\Big).$$

5. 计算 $\iint_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的部分.

解 由于锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的面积膨胀率为

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S&=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leq 2ax}(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leq 2ax}zx\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2ax} x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^3\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

6. 曲线 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t\ (t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(1) 求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值; (2) 计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

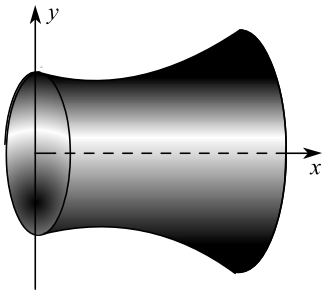

图 10.57

解 (1) 由于

$$\begin{aligned} S(t) &= 2\pi\int_0^t y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^t \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\sqrt{1+\frac{\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^t \Big(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$V(t) = \pi\int_0^t \Big(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x,$$

所以 $\dfrac{S(t)}{V(t)}=2$.

(2) 由于 $F(t)=\pi y^2\big|_{x=t}=\pi\Big(\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\Big)^2$, 所以

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\displaystyle\int_0^t\Big(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x}{\pi\Big(\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\Big)^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\Big(\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\Big)^2}{2\Big(\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\Big)\Big(\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\Big)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}=1.$$

7. 设曲面 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ay$ 所截得的部分，其面密度 $\rho(x,y,z)=xy+yz+zx$, 求该曲面的质量.

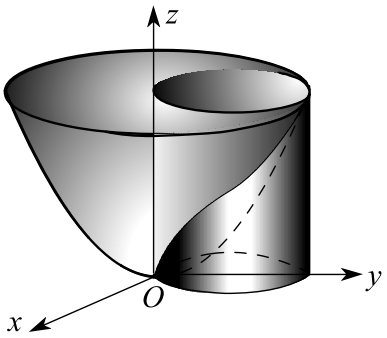

图 10.58

解 由于抛物面 $z=x^2+y^2$ 的面积膨胀率为

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=2\sqrt{x^2+y^2},$$

所以所求曲面的质量为

$$\iint_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=2\iint_{x^2+y^2\le 2ay}(xy+yz+zx)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le 2ax}y(x^2+y^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^5 \sin\theta \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{64a^6}{3}\int_0^{\pi} \cos^6\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{128a^6}{21}.$$

8. 求抛物面壳 $z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0 \le z \le 1)$ 的质量，此面壳的面密度为 $\rho = z$.

解 抛物面壳 $z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 的面积膨胀率为

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

由此可知，抛物面壳的质量为

$$m = \iint_S \rho \, \mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\le 2} z \cdot \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 2} (x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{2(1+6\sqrt{3})\pi}{15}.$$

9. 曲面 $z = 13 - x^2 - y^2$ 将球面 $x^2+y^2+z^2 = 25$ 分成三部分，求这三部分曲面的面积比.

解 消 x^2+y^2 可得 $z^2 - z - 12 = 0$, 解得 $z = -3, 4$. 设球面的三个部分为 $S_{上}, S_{下}, S_{侧}$，则

$$S_{上} = \iint_{x^2+y^2\le 9} \sqrt{1+\Big(\frac{\partial z_{上}}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z_{上}}{\partial y}\Big)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 9} \sqrt{1+\Big(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\Big)^2+\Big(\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\Big)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 9} \frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 5\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^3 \frac{r}{\sqrt{25-r^2}}\,\mathrm{d}r = 10\pi.$$

$$S_{\text{下}} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \sqrt{1+\Big(\frac{\partial z_{\text{下}}}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z_{\text{下}}}{\partial y}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \sqrt{1+\Big(\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\Big)^2+\Big(\frac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 5\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^4 \frac{r}{\sqrt{25-r^2}}\,\mathrm{d}r = 20\pi.$$

$$S_{\text{侧}} = 4\pi\times 5^2 - S_{\text{上}} - S_{\text{下}} = 70\pi.$$

因此，三部分曲面的面积比为 $S_{\text{上}} : S_{\text{下}} : S_{\text{侧}} = 1 : 2 : 7$.

10. 求曲线 $y = \dfrac{a}{2}(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a})$ 由 $x = 0$ 至 $x = a$ 的一段弧绕 y 轴旋转所得旋转面面积.

解 利用旋转面面积公式，有

$$S = 2\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\int_0^a (\mathrm{e}^{x/a}+\mathrm{e}^{-x/a})^2\mathrm{d}x = \pi a^3\Big(4+\frac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}}{2}\Big).$$

11. 求星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转所得旋转面的面积.

解 利用旋转面面积公式，有

$$S = 4\pi\int_{\pi/2}^0 y^2(t)x'(t)\mathrm{d}t$$

$$= 12\pi a^3\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi^2 a^3}{8}.$$

12. 求心脏线 $x=2\cos\theta-\cos 2\theta,\ y=2\sin\theta-\sin 2\theta$ 绕 x 轴旋转所得旋转面的面积.

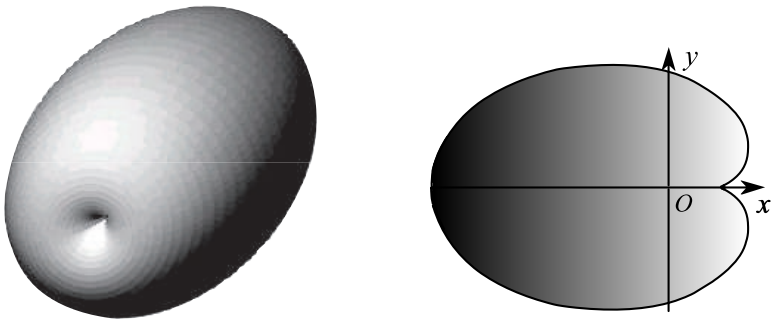

图 10.59

解 利用旋转面面积公式，有

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{\pi}^{0} y^2(\theta)x'(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_{0}^{\pi}(2\sin\theta-\sin 2\theta)^2(2\sin\theta-2\sin 2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{64\pi}{3}. \end{aligned}$$

13. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被 $y=h\ (0<h<a)$ 截出的右部.

解 记所求曲面为 Σ, 消 y 可得 Σ 在 xoz 平面的投影域为

$$D=\{(x,z):x^2+z^2\le a^2-h^2\}.$$

由 $y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$ 可得,

$$\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}.$$

因此

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{D}\frac{\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D}\frac{a}{a^2-x^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$= a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{r\mathrm{d}r}{a^2-r^2} = 2\pi a \ln\frac{a}{h}.$$

14. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是由平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的表面.

解 设

$$\Sigma_{上}: x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.$$

由于 $(x,y,z)\in \Sigma\backslash\Sigma_{上}$ 时，$xyz=0$, 所以

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_{上}} xyz\,\mathrm{d}S.$$

又因 $z=1-x-y$ 的面积膨胀率为

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{3},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{\Sigma_{上}} xyz\,\mathrm{d}S \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{120}.\end{aligned}$$

15. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1,\ z=2$ 所围成的立体的表面.

解 积分曲面 Σ 由 $\Sigma_{上}, \Sigma_{下}, \Sigma_{侧}$ 三部分构成，投影与依次为

$$D_{上}: x^2+y^2\leq 4,\quad D_{下}: x^2+y^2\leq 1,\quad D_{侧}: 1\leq x^2+y^2\leq 4.$$

由于 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=1, z=2$ 对应的面积膨胀率 $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}$ 依次为 $\sqrt{2}, 1, 1$, 所以

$$\iint\limits_{\Sigma_{上}} \mathrm{d}S = \sqrt{2}\iint\limits_{D_{上}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{15\sqrt{2}\,\pi}{2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_{下}} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{下}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_{侧}} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{侧}} 2^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16\pi.$$

因此 $\iint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}S = \Big(17 + \dfrac{15\sqrt{2}}{2}\Big)\pi.$

16. 求球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 在抛物面 $2x^2+2y^2+z=3$ 之外部分的面积.

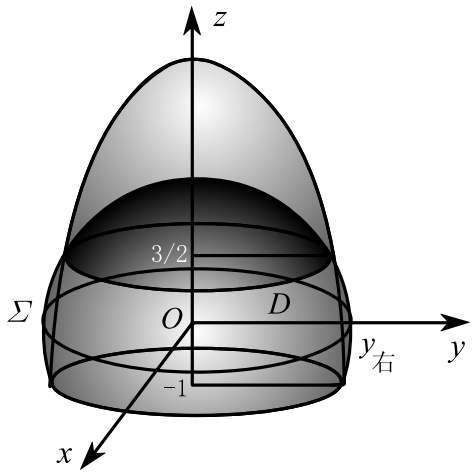

图 10.60

解 消 x^2+y^2 得 $2z^2-z=3$, 解得 $z_{小}=-1, z_{大}=\dfrac{3}{2}$. 记所求曲面为 Σ 且

$$D=\{(y,z)\,|\,(x,y,z)\in\Sigma,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}.$$

由 $x=\sqrt{3-y^2-z^2}$ 可得,

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{-y}{x},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{-z}{x}.$$

因此

$$1+\Big(\frac{\partial x}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial x}{\partial z}\Big)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2}$$

$$= \frac{3}{3-y^2-z^2}.$$

故

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S &= 4\iint_{D} \sqrt{1+\Big(\frac{\partial x}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial x}{\partial z}\Big)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 4\int_{-1}^{3/2}\mathrm{d}z\int_{0}^{\sqrt{3-z^2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-y^2-z^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= 4\sqrt{3}\int_{-1}^{3/2}\Big[\arcsin\frac{y}{\sqrt{3-z^2}}\Big]_0^{\sqrt{3-z^2}}\,\mathrm{d}z = 4\sqrt{3}\int_{-1}^{3/2}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{3}\pi.\end{aligned}$$

§10.5 黎曼积分的应用

习 题 10.5 A

1. 求下列曲线围成平面图形的重心. 其中密度为常数, 并且 $a,b>0$.

(1) $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 和 x 轴, y 轴;

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和 x 轴, y 轴;

(3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 和 x 轴, y 轴;

(4) $r^2=2a^2\cos 2\theta$ $(-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4})$;

(5) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ 和 x 轴.

解 设密度常数为 ρ.

(1) 平面板的质量为

$$m = \iint_{\sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}\le 1} \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b(1-\sqrt{x/a})^2}\mathrm{d}y$$

$$= \rho b \int_0^a \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho a b}{6}.$$

平面板的重心为

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \iint\limits_{\sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}\le 1} x\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{m}\rho \int_0^a x\mathrm{d}x \int_0^{b(1-\sqrt{x/a})^2} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{m}\rho b \int_0^a x\Big(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\Big)^2 \mathrm{d}x = \frac{a}{5}.$$

同理，有 $\overline{y} = \dfrac{b}{5}$.

(2) 平面板的质量为

$$m = \rho \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\rho \pi a b}{4}.$$

利用广义极坐标 $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$, 平面板 D 的重心为

$$\overline{x} = \frac{\rho}{m} \iint\limits_D x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\rho}{m} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^1 a^2 b r^2 \cos\theta \,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3\pi}.$$

同理，有 $\overline{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$.

(3) 令 $x = r\cos^3\theta,\ y = r\sin^3\theta$, 则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 3r\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

于是平面板 D 的质量为

$$m = \rho \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\rho \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^a r\cos^2\theta\sin^2\theta \,\mathrm{d}r = \frac{3\rho a^2 \pi}{32}.$$

平面板的重心为

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\rho}{m}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{3\rho}{m}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cos^5\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r = \frac{256a}{315\pi}.\end{aligned}$$

同理，有 $\overline{y}=\dfrac{256a}{315\pi}$.

(4) 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则平面图形 D 为

$$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le r\le a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

于是平面板的质量为

$$\begin{aligned}m &= \rho\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \rho\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r = 2\rho a^2.\end{aligned}$$

平面板的重心为

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{\rho}{m}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{\rho}{m}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r = \frac{a\pi}{8}.\\ \overline{y} &= \frac{\rho}{m}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{\rho}{m}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = 0.\end{aligned}$$

(5) 令 $x=ar(t-\sin t),\ y=ar(1-\cos t)$. 由于

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}\right| = a^2r(2-2\cos t-t\sin t),$$

所以平面板的质量为

$$\begin{aligned} m &= \rho \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \rho a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^1 r(2-2\cos t - t\sin t)\,\mathrm{d}r = 3\rho\pi a^2. \end{aligned}$$

平面板的重心为

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\rho}{m} \iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\rho a^3}{m} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^1 r^2(t-\sin t)(2-2\cos t - t\sin t)\,\mathrm{d}r = \pi a. \\ \overline{y} &= \frac{\rho}{m} \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\rho a^3}{m} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^1 r^2(1-\cos t)(2-2\cos t - t\sin t)\,\mathrm{d}r = \frac{5a}{6}. \end{aligned}$$

2. 设圆柱螺线 $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ (0\le t\le \dfrac{\pi}{2})$ 的密度分布与 x,y 无关而与 z 成正比，求其重心.

解 质量密度为 $kz=kt$. 螺线杆的长度膨胀率为

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{2},$$

螺线杆的质量为

$$m=\sqrt{2}k\int_0^{\pi/2} t\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}k\pi^2}{8}.$$

螺线杆的重心为

$$\overline{x}=\frac{k}{m}\int_L xz\,\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{2}k}{m}\int_0^{\pi/2} t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{4(\pi-2)}{\pi^2},$$

$$\overline{y}=\frac{k}{m}\int_L yz\,\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{2}k}{m}\int_0^{\pi/2} t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{8}{\pi^2},$$

$$\overline{z}=\frac{k}{m}\int_L z^2\,\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{2}k}{m}\int_0^{\pi/2} t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}.$$

3. 有一段空间金属线由方程 $x=\dfrac{3}{4}\sin 2t,\ y=\cos^3 t,\ z=\sin^3 t,\ 0\le t\le \dfrac{\pi}{4}$ 确定，其线密度函数 $\rho(x,y,z)=x$, 求它的质量.

解 由于长度膨胀率为

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\frac{3}{2},$$

所以金属线 L 的质量为

$$m=\int_L x\,\mathrm{d}s=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{3}{4}\sin 2t\,\mathrm{d}t=\frac{9}{16}.$$

4. 求平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ 围成的四面体关于 z 轴的转动惯量.

解 四面体关于 z 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}J_z &=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b(1-x/a)}\mathrm{d}y\int_0^{c(1-x/a-y/b)}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\ &=\frac{abc(a^2+b^2)}{60}.\end{aligned}$$

5. 求边界为双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta\ (-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{4})$ 的均匀平面板绕 z 轴的转动惯量.

解 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则平面图形 D 为

$$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le r\le a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

于是平面板 D 绕 z 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}J_z &=\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^3\,\mathrm{d}r=a^4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^4}{4}.\end{aligned}$$

6. 求均匀物体 $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2-x^2-y^2$ 关于直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

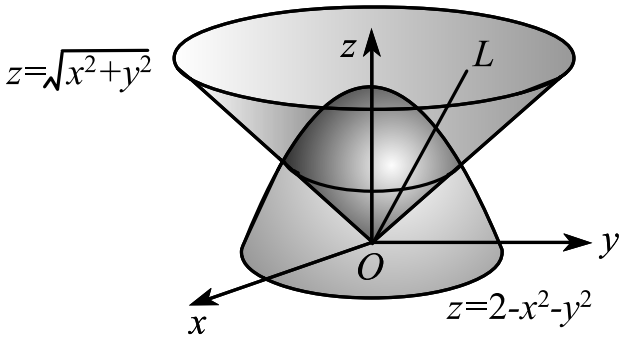

图 10.61

解 设物体上的点 $P(x,y,z)$ 到 L 的距离为 s, 并设 P 在 L 上的投影点为 $\Big(\frac{t}{\sqrt{3}},\frac{t}{\sqrt{3}},\frac{t}{\sqrt{3}}\Big)$, 则由三角形的面积关系, 有

$$s^2t^2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ \dfrac{t}{\sqrt{3}} & \dfrac{t}{\sqrt{3}} & \dfrac{t}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}^2.$$

由此可知

$$s^2=\frac{1}{3}\Big[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\Big].$$

于是, 所求转动惯量为

$$\begin{aligned} J_L &= \rho\iiint_V s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{3}\rho\iint_{x^2+y^2\leq 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2}\left[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right]\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{3}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^{2-r^2}2(r^2+z^2)\,\mathrm{d}z \quad \text{(利用奇偶性)} \\ &= \frac{4\rho\pi}{3}\int_0^1\Big(\frac{8}{3}-2r^2-\frac{4r^3}{3}+r^4-\frac{r^6}{3}\Big)\mathrm{d}r=\frac{191}{105}\times\frac{4\rho\pi}{3}. \end{aligned}$$

7. 求由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 包围的均匀物体对 z 轴的转动惯量.

解 所求转动惯量为

$$\begin{aligned} J_z &= \rho \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^4 \sin^3\theta\,\mathrm{d}r = \frac{8(\sqrt{2}-1)\rho\pi}{5}. \end{aligned}$$

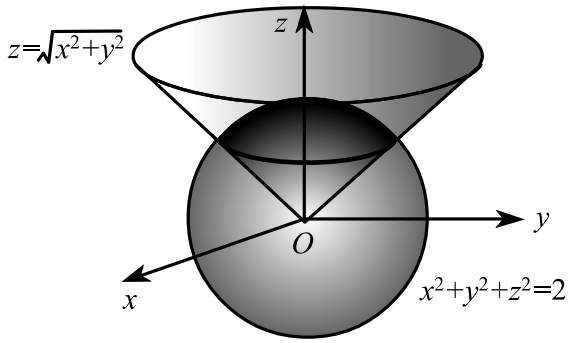

图 10.62

8. 设球 $x^2+y^2+z^2 \le az$ 中各点的密度与该点到原点的距离成反比，试求这球的重心.

解 球的质量密度为

$$\rho(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

球的质量为

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{x^2+y^2+z^2\le az} \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{k}{r}\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi k a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi k a^2}{6}. \end{aligned}$$

球的重心为 $\overline{x}=\overline{y}=0$ 且

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le az}\frac{kz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{kr\cos\theta}{r}\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{2k\pi a^3}{3m}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{k\pi a^3}{6m}=a.\end{aligned}$$

9. 求均匀曲线杆 $x=\mathrm{e}^t\cos t,\ y=\mathrm{e}^t\sin t,\ z=\mathrm{e}^t\ (-\pi\le t\le\pi)$ 的重心.

解 曲线的伸缩率为

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{3}\,\mathrm{e}^t.$$

曲线杆的质量为

$$m=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}).$$

曲线杆的重心为

$$\overline{x}=\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^t\cos t\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{4(\mathrm{e}^{-\pi}-\mathrm{e}^{\pi})}{5},$$

$$\overline{y}=\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^t\sin t\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}{5},$$

$$\overline{z}=\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=2(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}).$$

10. 求均匀球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 关于直径的转动惯量.

解 所求转动惯量为

$$\begin{aligned}J_z &= \rho\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}r^4\sin^3\theta\,\mathrm{d}r=\frac{8\rho\pi a^5}{15}.\end{aligned}$$

习 题 10.5 B

1. 求抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 在 xOy 平面上方部分绕 Oz 轴旋转的转动惯量.

解 所求转动惯量为

$$\begin{aligned} J_z &= \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2-z}} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

2. 证明：平面图形 D 绕位于同一平面而与 D 不相交的直线 L 旋转一周所成的旋转体的体积 V 等于 D 的重心绕 L 旋转一周所得的圆周长和 D 的面积 S 的乘积.

证 取直线 L 为 x 轴，设图形 D 由上边界 $y=y_{\text{上}}(x)$ 和下边界 $y=y_{\text{下}}(x)$ 围成. 令 $(\overline{x},\overline{y})$ 为 D 的重心，则

$$\begin{aligned} \overline{y}\cdot S &= \iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_{\text{小}}}^{x_{\text{大}}}\mathrm{d}x\int_{y_{\text{上}}(x)}^{y_{\text{下}}(x)} y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_{x_{\text{小}}}^{x_{\text{大}}}\left[y_{\text{上}}^2(x)-y_{\text{下}}^2(x)\right]\mathrm{d}x = \frac{V}{2\pi}. \end{aligned}$$

于是 $V=2\pi\overline{y}\cdot S$.

3. 假设静电荷分布在球面 $S:x^2+y^2+z^2=R^2$ 上，其分布密度为 $\rho=k\cos^2\theta$，求球面上的总电荷. 其中 θ 是向径 $\overrightarrow{OP}$ 与 z 轴的夹角，$P(x,y,z)$ 为 S 上的点.

解 任取 S 上的微元，则其电荷量为 $\rho\,\mathrm{d}S=k\cos^2\theta\,\mathrm{d}S$. 由此可知，球面上的总电荷为

$$Q=\iint_S k\cos^2\theta\,\mathrm{d}S.$$

球面 S 的参数方程为

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\theta.$$

记 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 则 S 的面积膨胀率为

$$|\boldsymbol{r}'_\varphi \times \boldsymbol{r}'_\theta| = R^2\sin\theta.$$

由此可知

$$Q = k\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \cdot R^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{4k\pi R^2}{3}.$$

4. 设质量为 m 的物体关于直线 L, L_C 的转动惯量分别为 J, J_C, 如果 $L // L_C$ 且 L_C 过物体的重心，试证明移轴定理，即

$$J = J_C + d^2 \cdot m.$$

其中 d 为 L, L_C 之间的距离.

证 取 L 为 z 轴，物体 Ω 的重心为 $(\overline{x}, 0, 0)$, 则 $d^2 = \overline{x}^2$, 且物体关于 L 的转动惯量为

$$J = \iiint_\Omega \rho(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

物体关于 L_C 的转动惯量为

$$J_C = \iiint_\Omega \rho\big[(x - \overline{x})^2 + y^2\big]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

由于物体的质量为 $m = \iiint_\Omega \rho\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 所以

$$\begin{aligned} J_C &= J - 2\overline{x}\iiint_\Omega x\rho\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \overline{x}^2\iiint_\Omega \rho\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= J - 2\overline{x}(m\overline{x}) + \overline{x}^2 m = J - \overline{x}^2 m = J - d^2 \cdot m. \end{aligned}$$

5. 求区域 $x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 上的均匀物体对原点单位质点的引力.

解 根据对称性, $F_x = F_y = 0$. 根据引力公式，有

$$F_z = \iiint_\Omega \frac{G\rho z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= G\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\rho \int_0^1 \frac{1-r}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi G\rho}{\sqrt{2}}.$$

6. 求区域 $x^2+y^2 \le R^2, y \ge 0, z = 0$ 上的均匀平面板对 $(0,0,a)$ 点单位质点的引力.

解 $(0,0,a)$ 点到平面板 D 上 $(x,y,0)$ 点的连接向量为 $(x,y,-a)$. 根据引力公式, 有

$$F_x = 0,$$

$$F_y = \iint_D \frac{G\rho y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= G\rho \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2G\rho\Big[\ln(R+\sqrt{a^2+R^2}) - \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\Big],$$

$$F_z = \iint_D \frac{G\rho(-a)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -aG\rho \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{r}{(r^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi aG\rho\Big(\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}} - \frac{1}{2}\Big).$$

7. 求形状为 $x^2+y^2 \le R^2, 0 \le z \le h$ 的均匀柱体对 $(0,0,a)$ 点单位质点的引力 $(a > h)$.

解 根据对称性, $F_x = F_y = 0$. 由于 $(0,0,a)$ 点到柱体 Ω 上 (x,y,z) 点的连接向量为 $(x,y,z-a)$. 所以有

$$F_z = \iiint_\Omega \frac{G\rho(z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= G\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R r\mathrm{d}r \int_0^h \frac{z-a}{(r^2+(z-a)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\rho \int_0^R \Big(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(a-h)^2}}\Big)\, r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi G\rho(\sqrt{a^2+R^2} - \sqrt{(a-h)^2+R^2} - h).$$

8. 求均匀半圆杆对圆心单位质点的引力.

解 设半圆杆曲线 L 为 $x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta$, 则所求引力为

$$F_x = 0,$$

$$F_y = \int_L \frac{G\rho y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s$$

$$= G\rho \int_0^{\pi} \frac{R\sin\theta}{R^3}\cdot R\mathrm{d}\theta = \frac{2G\rho}{R}.$$

9. 半径为 R, 密度为 δ 的均匀球壳，以角速度 ω 绕其直径旋转，求此球的动能.

解 所求动能为

$$E = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{1}{2}\delta(\omega\sqrt{x^2+y^2+z^2})^2\,\mathrm{d}S = 2\pi\delta\omega^2R^4.$$

10. 求柱体 $r = 2\cos\theta$ 介于平面 $z = 0$ 与抛物面 $z = r^2$ 之间部分的重心.

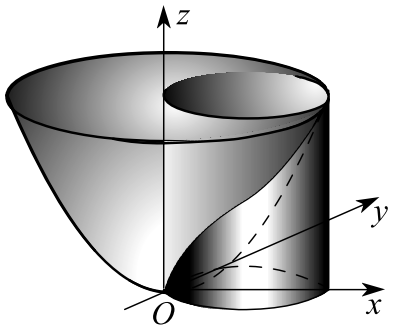

图 10.63

解 根据对称性 $\overline{y}=0$. 给定物体 Ω 的质量为

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\Omega} \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}r \int_0^{r^2} r \,\mathrm{d}z = \frac{3\pi\rho}{2}, \\ \overline{x} &= \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} \rho x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{\rho}{m} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}r \int_0^{r^2} r^2\cos\theta \,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}, \\ \overline{z} &= \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} \rho z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{\rho}{m} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}r \int_0^{r^2} zr \,\mathrm{d}z = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

11. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, f 是连续函数，证明：

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u.$$

其中 a,b,c 是常数.

证 不妨设 a,b,c 不全为 0, 则存在单位正交向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$, 使得

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

令 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3$, 则

$$ax+by+cz = u\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

并且 $u^2+v^2+w^2=1$ 也是球面 S 的方程. 因此

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}S.$$

按照球面参数方程

$$u = u,\ v = \sqrt{1-u^2}\cos\theta,\ w = \sqrt{1-u^2}\sin\theta,$$

面积膨胀率为

$$|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_\theta| = 1.$$

故有

$$\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u.$$

总 习 题 十

1. 求位于两圆 $x^2+y^2=ax$ 和 $x^2+y^2=bx$ $(0<a<b)$ 之间的均匀薄片的重心.

解 根据对称性，$\overline{y}=0$. 按照重心公式，有

$$\overline{x} = \iint\limits_D x\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{a/2}^{b/2} r\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\rho\pi(b^2-a^2).$$

2. 根据对称性计算曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

解 根据对称性和奇偶性，有

$$I = a^2\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S + b^2\iint\limits_S y^2\mathrm{d}S + c^2\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S + d^2\iint\limits_S \mathrm{d}S$$

$$= (a^2+b^2+c^2)\iint_S x^2\mathrm{d}S + 4\pi R^2 d^2$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S + 4\pi R^2 d^2$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint_S R^2\mathrm{d}S + 4\pi R^2 d^2$$

$$= \frac{4\pi R^4(a^2+b^2+c^2)}{3} + 4\pi R^2 d^2.$$

3. 计算曲面积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & z \geq \sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & z < \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}.$$

解 由于非 0 投影域为

$$D_t = \{(x,y) : x^2+y^2+z^2 = t^2,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

$$= \{(x,y) : \frac{t^2}{2} \leq x^2+y^2 \leq t^2\},$$

所以

$$F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_{|t|/\sqrt{2}}^{|t|} r^3\mathrm{d}r = \frac{3\pi t^4}{8}.$$

4. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ 三点为顶点的球面三角形 ($\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ 均为大圆弧), 若球面密度为 $\rho = x^2+z^2$, 求此球面三角形块的质量.

解 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的参数化为

$$x = \cos\varphi\sin\theta,\ y = \sin\varphi\sin\theta,\ z = \cos\theta.$$

球面三角形 S 的参数范围为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

记 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 则

$$|\boldsymbol{r}'_\varphi \times \boldsymbol{r}'_\theta| = \sin\theta.$$

于是球面三角球面三角形块 S 的质量为

$$\begin{aligned} m &= \iint_S (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/4} (\cos^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{\pi/2} \left[4 - \sqrt{2} + (8 - 5\sqrt{2})\cos^2\varphi\right]\mathrm{d}\varphi = \frac{(16 - 7\sqrt{2})\pi}{48}. \end{aligned}$$

5. 计算 $\iint_S (xy^3 + \sin y\cos z + zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得部分.

解 由于 S 是左右对称的, 函数 $xy^3 + \sin y\cos z$ 关于 y 是奇函数, 所以

$$\iint_S (xy^3 + \sin y\cos z + zx)\,\mathrm{d}S = \iint_S zx\,\mathrm{d}S.$$

由于锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的面积膨胀率为

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S zx\,\mathrm{d}S &= \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} x\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3\cos\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4. \end{aligned}$$

6. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $x^2+y^2=z$ 所包围均匀物体关于直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

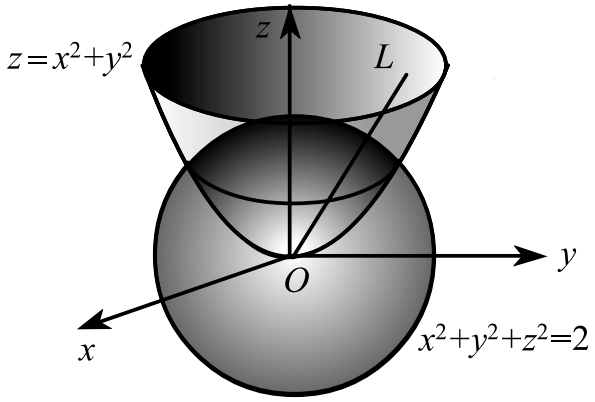

图 10.64

解 设物体上的点 $P(x,y,z)$ 到 L 的距离为 s, 并设 P 在 L 上的投影点为 $\left(\frac{t}{\sqrt{3}},\frac{t}{\sqrt{3}},\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$, 则由三角形的面积关系，有

$$s^2t^2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ \frac{t}{\sqrt{3}} & \frac{t}{\sqrt{3}} & \frac{t}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}^2.$$

由此可知

$$s^2=\frac{1}{3}\Big[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\Big].$$

于是，所求转动惯量为

$$\begin{aligned} J_L &= \rho\iiint_V s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{3}\rho\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\left[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right]\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{3}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}2(r^2+z^2)\,\mathrm{d}z \quad (\text{利用奇偶性}) \end{aligned}$$

$$= \frac{4\rho\pi}{3}\int_0^1 \Big(- r^4 - \frac{r^6}{3} - \frac{2\sqrt{2-r^2}}{3} + r^4 - \frac{2r^2\sqrt{2-r^2}}{3}\Big)\mathrm{d}r$$

$$= \Big(\frac{3}{35} + \frac{\pi}{4}\Big) \times \frac{4\rho\pi}{3}.$$

7. 求曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 夹在两曲面 $x^2+y^2 = y,\ x^2+y^2 = 2y$ 之间的部分的面积.

解 曲面 $z = x^2+y^2$ 的参数化为

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = r.$$

参数的范围为

$$0 \le \theta \le \pi, \quad \sin\theta \le r \le 2\sin\theta.$$

记 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 则

$$|\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_r| = r.$$

于是所求曲面 S 的面积为

$$S = \iint_S \mathrm{d}S = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_{\sin\theta}^{2\sin\theta} r\ \mathrm{d}r$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^\pi \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

8. 有一半径为 R, 高为 H 的均匀圆柱体，其中心轴上低于下底 a 单位处有一质量为 m 的质点，试求此柱体对该点的引力.

解 设圆柱体为

$$x^2+y^2 = R^2,\ 0 \le z \le H,$$

则质点 m 为 $(0,0,-1)$. 由于 $(0,0,-1)$ 到圆柱体的 (x,y,z) 点的连接向量为 $(x,y,z+1)$, 所以所求引力为 $F_x = F_y = 0$ 且

$$F_z = \iiint_\Omega \frac{G\rho(z+1)}{[x^2+y^2+(z+1)^2]^{3/2}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= G\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^H \frac{z+1}{[r^2+(z+1)^2]^{3/2}}\ \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\rho \int_0^R \Big(\frac{1}{\sqrt{r^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(1+H)^2}}\Big) r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi G\rho(\sqrt{R^2+1} - \sqrt{R^2+(1+H)^2} + H).$$

9. 已知球上任一点的密度与该点到球心的距离成正比, 求球关于切线的转动惯量.

解 设球为 $\Omega : x^2+y^2+z^2 \le R^2$, 切线为 $l : \begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}$, 则 (x,y,z) 到 l 的距离为 $\sqrt{(x-R)^2+y^2}$, 所求转动惯量为

$$J = \iiint_\Omega k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,[(x-R)^2+y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= k\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,[x^2+y^2+R^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ (奇偶性)}$$

$$= k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3(r^2\sin^2\theta + R^2)\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi kR^6\int_0^{\pi}\Big(\frac{1}{4}+\frac{\sin^2\theta}{6}\Big)\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi^2 kR^6}{3}.$$

10. 求半圆环 $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$ $(0<a<b,\ y\ge 0)$ 薄板对原点 $(0,0)$ 处质量为 M 的质点的引力, 设板的面密度为 $\rho = \mu y$, 其中 μ 为常数.

解 根据对称性, $F_x = 0$. 记半圆环 D, 则

$$F_y = \iint_D \frac{G\mu y\cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= G\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b \frac{r^2\sin^2\theta}{r^3}\cdot r\mathrm{d}r = \frac{G\mu(b-a)\pi}{2}.$$

11. 计算 $I = \iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=1$ 所围成的区域.

解 Ω 的投影域为 $x^2+y^2\leq 2$. 因此

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^1 r^2\mathrm{d}z=\frac{4\sqrt{2}\,\pi}{3}.$$

12. 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leq 2x$ 内的部分.

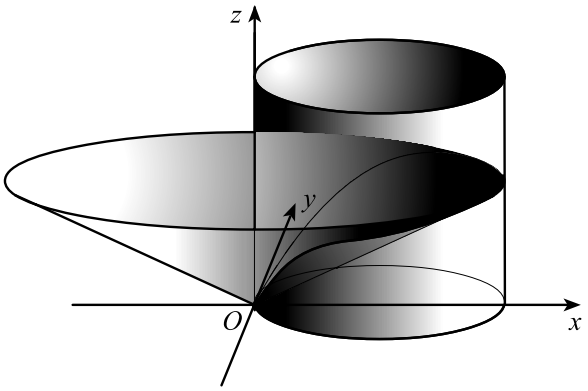

图 10.65

解 由于锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的面积膨胀率为

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2},$$

所以

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2x}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{32\sqrt{2}}{9}.$$

13. 已知 A 与 B 的直角坐标分别为 (1,0,0) 与 (0,1,1). 线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S. 求由 S 及两平面 $z=0,z=1$ 所围立体的体积和表面积.

解 由于 AB 所在直线方程为 $\begin{cases}x=1-z\\ y=z\end{cases}$, 所以旋转曲面 S 的方程为

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2.$$

于是，所求立体 Ω 的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\le(1-z)^2+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi\int_0^1 ((1-z)^2+z^2)\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

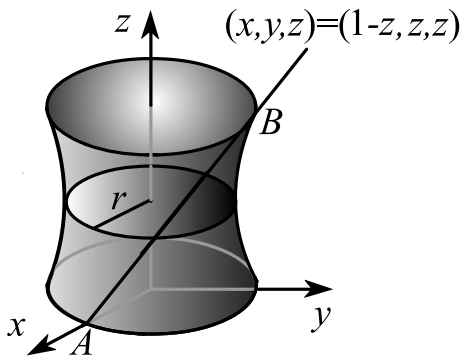

图 10.66

由于平面曲线

$$L:\begin{cases} x^2+y^2=(1-z)^2+z^2 \\ x=0 \end{cases}, \quad (0\le z\le 1)$$

的微弧长为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z)^2+z^2}},$$

所以所求面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi+2\pi\int_L \sqrt{(1-z)^2+z^2}\,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi+2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z = 4\pi. \end{aligned}$$

14. 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 上, 问当 R 为何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

解 设球面 Σ 为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$, 则面积膨胀率为

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

所求部分 S 的投影域为

$$x^2+y^2\leq R^2-\frac{R^4}{4a^2}.$$

S 的面积为

$$S=\iint\limits_S \mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2-\frac{R^4}{4a^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R^2\Big(1-\frac{R}{2a}\Big).$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}=0$ 可得, $R=\dfrac{4a}{3}$. 故当 $R=\dfrac{4a}{3}$ 时, S 的面积最大.

15. 将抛物线 $y=ax-x^2$ 在横坐标 0 与 c $(0<c<a)$ 之间的弧段绕 x 轴旋转, 问 c 为何值时, 所得旋转体体积 V 等于弦 OP (P 为抛物线与 $x=c$ 的交点) 绕 y 轴旋转所得锥体体积 $V_{锥}$.

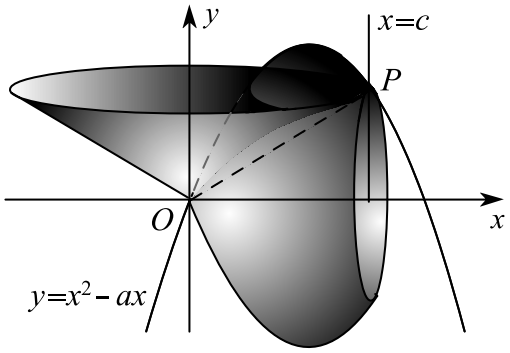

图 10.67

解 圆锥的体积为

$$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi c^2(ac-c^2).$$

抛物线对应的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^c y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^c(ax-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}c^5-\frac{a}{2}c^4+\frac{a^2}{3}c^3\right).$$

根据 $V=V_{\text{锥}}$, 有

$$\frac{1}{5}\,c^2-\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)c+\frac{a^2-a}{3}=0.$$

解得

$$c=\frac{5}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{5}\cdot\frac{a^2-a}{3}}\right).$$

16. 求椭圆柱面 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 位于 xOy 平面上方和平面 $z=y$ 下方那部分侧面的面积.

解 (1) 利用弧长法，所求面积为

$$S=\int_\Gamma z\mathrm{d}s=\int_0^\pi 2\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+4\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=4+\frac{2\ln(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

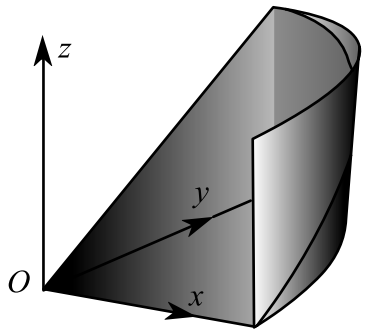

图 10.68

(2) 利用 x 向投影法，所求面积为

$$S=\iint_S\mathrm{d}S=2\iint_D\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{1+\frac{y^2}{4(4-y^2)}}\,\mathrm{d}z=4+\frac{2\ln(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

17. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = kt$, 其中 $0 \le t \le 2\pi$, 它的线密度为 $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, 求

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 J_z;

(2) 它的重心.

解 (1) 由于 $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$, 所以弹簧的转动惯量为

$$\begin{aligned} J_z &= \int_L (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)\mathrm{d}s \\ &= \sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)(a^2)\mathrm{d}t = a^2\sqrt{a^2+k^2}\Big(2\pi a^2+\frac{8k^2\pi^3}{3}\Big). \end{aligned}$$

(2) 弹簧的质量为

$$m = \int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \sqrt{a^2+k^2}\Big(2\pi a^2+\frac{8k^2\pi^3}{3}\Big).$$

弹簧的重心为

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{m}\int_L (x^2+y^2+z^2)x\mathrm{d}s \\ &= \frac{\sqrt{a^2+k^2}}{m}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)a\cos t\mathrm{d}t = \frac{4ak^2\pi}{2\pi a^2+\dfrac{8k^2\pi^3}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{m}\int_L (x^2+y^2+z^2)y\mathrm{d}s \\ &= \frac{\sqrt{a^2+k^2}}{m}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)a\sin t\mathrm{d}t = -\frac{4ak^2\pi^2}{2\pi a^2+\dfrac{8k^2\pi^3}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{m}\int_L (x^2+y^2+z^2)z\mathrm{d}s \\ &= \frac{\sqrt{a^2+k^2}}{m}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)kt\mathrm{d}t = \frac{2a^2k\pi^2+4k^3\pi^4}{2\pi a^2+\dfrac{8k^2\pi^3}{3}}. \end{aligned}$$

第十一章　有向域上的积分

§11.1　有向曲线上的积分

习 题 11.1 A

1. 设 z 轴与重力的方向一致，试求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿铅直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力所做的功.

解

$$W = \int_L (mg\boldsymbol{k}) \cdot \mathrm{d}(z\boldsymbol{k}) = mg(z_2 - z_1).$$

2. 一力场由沿横轴上方的常力 $\boldsymbol{F}$ 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所做的功.

解 由于 $\boldsymbol{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, 所以

$$W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = R\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{F} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

3. 试求变力 $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ 沿着曲线 $\boldsymbol{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 所做的功.

解

$$W = \int_L \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} (a\cos t, a\sin t, bt) \cdot (-a\sin t, a\cos t, b)\, \mathrm{d}t = 2b^2\pi^2.$$

4. 试计算曲线积分 $I = \displaystyle\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x + y - 1)\mathrm{d}z$, 其中 L 为从点 $A(1, 1, 1)$ 到点 $B(2, 3, 4)$ 的线段.

解 线段 AB 的参数方程为 $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$ ，按增参数定向.

$$I = \int_0^1 (6 + 14t)\mathrm{d}t = 13.$$

5. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第 IV 卦限部分的上侧，$f(x,y,z)$ 是连续函数.

解 利用投影方法，记投影域为 D, 则

$$I=\iint_{D}(f+x,2f+y,f+z)\cdot(1,-1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

6. 计算曲线积分

$$I=\int_{L}(z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z,$$

其中曲线 L 是平面 $x+y+z=2$ 与三个坐标面的交线，方向按 $(2,0,0)\to(0,2,0)$ 确定.

解 记 $A(2,0,0),B(0,2,0),C(0,0,2)$, 则

$$\begin{aligned}I&=\int_{AB}-y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+\int_{BC}-z^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}z+\int_{CA}z^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}z\\&=\int_{2}^{0}[-(2-x)^2+x^2]\mathrm{d}x+\int_{2}^{0}[-(2-y)^2+y^2]\mathrm{d}y+\int_{2}^{0}[z^2-(2-z)^2]\mathrm{d}z\\&=0.\end{aligned}$$

7. 计算曲线积分

$$I=\int_{L}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1\end{cases}$ $(a>0,h>0)$, 从 x 轴正向看去 L 为逆时针定向.

解 积分曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta,\quad(0\le\theta\le2\pi.)\\ z=h-h\cos\theta\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} [Px'_\theta + Qy'_\theta + Rz'_\theta]\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[(a\sin\theta - h + h\cos\theta)(-a\sin\theta) + (h - h\cos\theta - a\cos\theta)\cdot a\cos\theta \\
&\quad + (a\cos\theta - a\sin\theta)\cdot h\cos\theta\Big]\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-a^2 - ah + ha\sin\theta + ah\cos\theta]\mathrm{d}\theta = -(a^2 + ah)\cdot 2\pi.
\end{aligned}
$$

8. 试计算曲线积分 $I = \int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 为

(1) 沿圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的上半圆周从点 O 到点 $B(2,0)$ 的弧段;

(2) 沿 x 轴从 O 到点 B 的线段;

(3) 沿曲线 $y = 1 - |1-x|$, 当 x 从 0 变到 2 的折线.

解 (1) 积分曲线的参数方程为 $x = 1 + \cos\theta, y = \sin\theta$.

$$
I = \int_{\pi/2}^{0} \Big[(2 + 2\cos\theta)(-\sin\theta) + (2\cos\theta + 2\cos^2\theta)\cos\theta\Big]\mathrm{d}\theta = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}.
$$

(2) 积分曲线的参数方程为 $x = x, y = 0$.

$$
I = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.
$$

(3) 积分曲线的参数方程为 $x = x, y = x (0 \le x \le 1)$ 和 $x = x, y = 2 - x (1 \le x \le 2)$.

$$
I = \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 \Big[(x^2 + (2-x)^2) - (x^2 - (2-x)^2)\Big]\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.
$$

习 题 11.1 B

1. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点处有一质量为 M 的固定质点，另一质点 m 沿该椭圆正向由点 $A(a,0)$ 到点 $B(0,b)$ 运动，试求引力对质点 m 所做的功.

解 不妨设 $M(c,0)$, 则 $\boldsymbol{r}=(x-c,y)$,

$$\boldsymbol{f}=\frac{GMm}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}(x-c,y).$$

于是所求积分为

$$\begin{aligned}W &= \int_L \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ &= \int_L \frac{GMm}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}\,[(x-c)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y]\\ &= \frac{1}{2}\int_L \frac{GMm}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}[(x-c)^2+y^2]\\ &= -\frac{GMm}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}\Big|_{(a,0)}^{(0,b)}=\frac{GMm}{a-c}-\frac{GMm}{a}.\end{aligned}$$

注：曲线的参数化方程可由

$$\begin{cases}(x-c)^2+y^2=t\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$$

得到 (不必解出)，由此可知

$$\begin{aligned}&\int_L \frac{GMm}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}\,[(x-c)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y]\\ &= \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B}\frac{GMm}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{GMm}{\sqrt{t}}\Big|_{t_A}^{t_B}\end{aligned}$$

$$= -\frac{GMm}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}\Big|_{(a,0)}^{(0,b)} = \frac{GMm}{a-c} - \frac{GMm}{a}.$$

一般地，如果 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \mathrm{d}u$, 则可用全微分方法

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = u\Big|_{\text{初}}^{\text{终}}.$$

2. 试计算曲线积分

$$I = \int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}x + (x^2+y^4)\mathrm{d}y,$$

其中 L 是从 (0,0) 点到 (1,1) 点的曲线 $y = \sin\dfrac{\pi}{2}x$.

解 由于 $\mathrm{d}\Big[\dfrac{1}{3}x^3 + x^2y + \dfrac{1}{5}y^5\Big] = (x^2+2xy)\mathrm{d}x + (x^2+y^4)\mathrm{d}y$, 所以用全微分方法可得

$$\begin{aligned} I &= \int_L \mathrm{d}\Big[\frac{1}{3}x^3 + x^2y + \frac{1}{5}y^5\Big] \\ &= \Big[\frac{1}{3}x^3 + x^2y + \frac{1}{5}y^5\Big]_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

3. 设 $f(u)$ 为连续函数， $L: x = x(t), y = y(t),\ a \le t \le b$ 为光滑曲线且 $x(a) = x(b), y(a) = y(b)$. 证明

$$\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0.$$

证 按 $x^2+y^2 = u, (x,y) \in L$ 确定的参数方程计算线积分，有

$$I = \frac{1}{2}\int_{\text{初}}^{\text{终}} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{\text{初}}^{\text{初}} f(u)\mathrm{d}u = 0.$$

4. 计算曲线积分

$$I = \int_L (y+1)\mathrm{d}x + (z+2)\mathrm{d}y + (x+3)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是柱面 $x^2+y^2 = R^2$ 和平面 $x+y+z = 0$ 的交线，若从 z 轴的正向看去，交线 L 按逆时针定向.

解 曲线的参数化方程为 $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = -R\cos\theta - R\sin\theta \end{cases} (0 \le \theta \le 2\pi).$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [Px'_\theta + Qy'_\theta + Rz'_\theta]\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[(R\sin\theta + 1)(-R\sin\theta) + (-R\cos\theta - R\sin\theta + 2)(R\cos\theta) \\ &\quad +(R\cos\theta + 3)(R\sin\theta - R\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-R^2 + 2R\sin\theta - R\cos\theta)\mathrm{d}\theta = -2\pi R^2. \end{aligned}$$

5. 试计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$, 其中 L 为

(1) 沿圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 从点 O 到点 $B(1,1)$ 的圆弧;

(2) 沿抛物线 $y = \frac{3}{2}x^2$ 从 O 到点 $B\Big(1, \frac{3}{2}\Big)$ 的弧段;

(3) 沿 $(0,0) \to \Big(0, \frac{3}{2}\Big) \to \Big(1, \frac{3}{2}\Big)$ 从 O 到点 $B\Big(1, \frac{3}{2}\Big)$ 的折线.

解 (1) 由于 $3x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^3y)$ ，以积分曲线的参数方程可由 $x^3y = t, (x-1)^2 + y^2 = 1$ 确定，于是有

$$I = \int_{t_O}^{t_B} \mathrm{d}t = t\Big|_{t_O}^{t_B} = x^3y\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1.$$

(2) $I = \int_0^1 \Big[3x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 + x^3 \cdot 3x\Big]\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$

(3) 积分曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases} (0 \le y \le 1), \quad \begin{cases} x = x \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} (0 \le x \le 1).$$

于是所求积分为

$$I = \int_0^{3/2} 0\mathrm{d}y + \int_0^1 3x^2 \cdot \frac{3}{2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

6. 计算曲线积分

$$I=\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是由 $A(a,0,0)$ 沿螺线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=\dfrac{h}{2\pi}\theta, (0\leq\theta\leq 2\pi)$ 到 $B(a,0,h)$ 的弧段.

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [Px'_\theta+Qy'_\theta+Rz'_\theta]\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[(a^2\cos^2\theta-\frac{ah}{2\pi}\theta\sin\theta)(-a\sin\theta)+(a^2\sin^2\theta-\frac{ah}{2\pi}\theta\cos\theta)\cdot a\cos\theta \\ &\quad +(\frac{a^2h}{4\pi^2}\theta^2-a^2\sin\theta\cos\theta)\cdot\frac{h}{2\pi}\Big]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{a^2h^2}{8\pi^3}\theta^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2h^2}{3}. \end{aligned}$$

§11.2 有向曲面上的积分

习 题 11.2 A

1. 设有向曲面 M 是以原点为中心的球面外侧，用参数化方法计算曲面积分

$$I=\iint_M x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 球面的参数化为

$$x=R\cos\varphi\sin\theta, y=R\sin\varphi\sin\theta, z=R\cos\theta,$$

定向为 $\boldsymbol{r}'_\theta\times\boldsymbol{r}'_\varphi$. 由于

$$\boldsymbol{r}'_\theta\times\boldsymbol{r}'_\varphi=(A,B,C)=R\sin\theta(x,y,z),$$

所以

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} (x, y, z) \cdot (A, B, C) \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} R^3 \sin\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi R^3.$$

2. 设有向曲面 M 是柱面

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad 0 \leq z \leq h$$

的外侧，用参数化方法计算曲面积分

$$I = \iint_M yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 柱面的参数化为

$$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, z = z,$$

定向为 $\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_z$. 由于

$$\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_z = (A, B, C) = R(\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

所以

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{h} (yz, zx, xy) \cdot (A, B, C) \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 \sin 2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{h} z\mathrm{d}z = 0.$$

3. 计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma x^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 分别是

(1) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的上半部上侧;

(2) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的下半部上侧;

(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

解 (1) 球面 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定向为 $(-z'_x,-z'_y,1)$.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(0,0,x^2z)\cdot(-z'_x,-z'_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\ (\text{令 } r=\sin t) \\ &= \pi\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t-\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t=\frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$

(2) 球面 $\Sigma: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定向为 $(-z'_x,-z'_y,1)$.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(0,0,x^2z)\cdot(-z'_x,-z'_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$

(3) 上半球面 $\Sigma: z_1=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定向为 $(-(z_1)'_x,-(z_1)'_y,1)$，下半球面 $\Sigma: z_2=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定向为 $((z_2)'_x,(z_2)'_y,-1)$.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(0,0,x^2z_1)\cdot(-(z_1)'_x,-(z_1)'_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad+\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(0,0,x^2z_2)\cdot((z_2)'_x,(z_2)'_y,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

4. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 分别是

(1) 圆锥上底面 $\Sigma_1 : x^2+y^2 \le z^2,\ z=H>0$ 的上侧;

(2) 圆锥侧面 $\Sigma_2 : x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le H$ 的上侧;

(3) 整个圆锥面 $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 的外侧.

解 (1) Σ_1 的定向为 $(0,0,1)$.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\le H^2} (y^2,z^2,x^2)\cdot(0,0,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le H^2} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^H r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi H^4}{4}. \end{aligned}$$

(2) Σ_2 的定向为 $(-\dfrac{x}{z},-\dfrac{y}{z},1)$.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\le H^2} (y^2,z^2,x^2)\cdot(-\frac{x}{z},-\frac{y}{z},1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le H^2} \Big(\frac{-xy^2-yz^2}{z}+x^2\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\text{令}x=z\cos\theta, y=z\sin\theta) \\ &= \int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta\cos\theta-\sin\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^H z^3\,\mathrm{d}z = \frac{\pi H^4}{4}. \end{aligned}$$

(3) $I=\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}=0$.

5. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是以棱长为 a 且每个棱都平行于坐标轴的正方体外侧.

解 由于

$$I=I_{上}+I_{下}+I_{左}+I_{右}+I_{前}+I_{后}.$$

且

$$I_{上}=\int_0^a\int_0^a(x^3-ay,-2x^2,a)\cdot(0,0,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^3,$$

$$I_{下}=\int_0^a\int_0^a(x^3,-2x^2,0)\cdot(0,0,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$I_{左}=\int_0^a\int_0^a(x^3,0,z)\cdot(0,-1,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0,$$

$$I_{右}=\int_0^a\int_0^a(x^3-az,-2x^2a,z)\cdot(0,1,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=-\frac{2a^5}{3},$$

$$I_{前}=\int_0^a\int_0^a(a^3-yz,-2a^2y,z)\cdot(1,0,0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$I_{后}=\int_0^a\int_0^a(-yz,0,z)\cdot(-1,0,0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$I_{前}+I_{后}=\int_0^a\int_0^a a^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=a^5.$$

所以 $I=\dfrac{1}{3}a^5+a^3$.

6. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧.

解 Σ 的定向为 $(z'_x,z'_y,-1)=(x,y,-1)$.

$$\begin{aligned}I&=\iint_{x^2+y^2\leq 4}(z^2+x,0,-z)\cdot(x,y,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\leq 4}(z^2x+x^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(\frac{1}{4}r^5\cos\theta+r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}(4\cos^2\theta+2)\mathrm{d}\theta=8\pi.\end{aligned}$$

7. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由平面 $x+y+z=2$ 与坐标面围成的四面体的外表面.

解 由于

$$I = I_{上} + I_{下} + I_{左} + I_{后} = I_{上} + 3I_{下}.$$

且

$$\begin{aligned} I_{上} &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (xy, yz, zx) \cdot (1,1,1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} (2x + 2y - x^2 - y^2 - xy) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 (\frac{4}{3} + 2x - 3x^2 - \frac{5}{6}x^3) \mathrm{d}x = 2. \\ I_{下} &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (xy, 0, 0) \cdot (0,0,-1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

所以 $I = 2 + 3 \times 0 = 2$.

8. 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解 记 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (yz, xz, xy) \times (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-yz, -xz, xy) \times (\frac{-x}{z}, \frac{-y}{z}, -1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 4 \iint_{x^2+y^2 \le 1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.(\text{根据奇偶性}) \end{aligned}$$

9. 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(0\leq z\leq 1)$ 的上侧.

解 Σ 的定向为 $(-z'_x,-z'_y,1)=(-2x,-2y,1)$.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(2x+z,0,z)\times(-2x,-2y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(-4x^2-2xz+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{令}x=z\cos\theta,y=z\sin\theta) \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(-4z^2\cos^2\theta-2z^2\cos\theta+z)z\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}(-\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2})\mathrm{d}\theta=0. \end{aligned}$$

习 题 11.2 B

1. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}}$ 与平面 $z=0$ 围成的空间区域的表面外侧.

解 按投影方法可化为二重积分,

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\Big(x+y+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4\cos\theta+4\sin\theta+\sqrt{1-r^2})r\mathrm{d}r \\ &= \pi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(1+z)(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (y\geq 0)$, 朝 y 轴正向的一侧.

解 记 $D=\{(x,y)\mid (x,y,z)\in\Sigma\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (1+\sqrt{1-x^2-y^2})(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad - \iint_D (1-\sqrt{1-x^2-y^2})(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\cdot(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot(r\cos\theta+r\sin\theta)^2 r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^3\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

3. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geq 0,\ y\geq 0$ 部分的外侧.

解 记 $D=\{(x,y)\mid (x,y,z)\in\Sigma\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

4. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

解 Σ 的参数方程为 $x=a\cos\varphi\sin\theta, y=a\sin\varphi\sin\theta, z=a\cos\theta$, 其定向为 $a\sin\theta(x,y,z)$.

$$I=\iint_D\Big(\frac{ax}{a\sin\theta},0,\frac{(z+a)^2}{a\sin\theta}\Big)\cdot a\sin\theta(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} (ax^2 + (z+a)^2 z)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos^2\varphi \sin^2\theta + (\cos\theta + 1)^2 \cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} (-\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2} + \cos\varphi)\mathrm{d}\varphi = a^3(\pi^2 - \frac{10\pi}{3}).$$

5. 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

其中 Σ 是由曲面 $x^2 + z^2 = R^2$ 及两平面 $y = R,\ y = -R\ (R > 0)$ 所围立体表面的外侧.

解 令 $I = I_{右} + I_{左} + I_{前} + I_{后}$，由于

$$I_{右} = \iint_{x^2+z^2\le R^2} \frac{R^2}{\sqrt{x^2+z^2+R^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

$$I_{左} = -\iint_{x^2+z^2\le R^2} \frac{R^2}{\sqrt{x^2+z^2+R^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -I_{右},$$

$$I_{前} = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} \Big(\frac{\sqrt{R^2-z^2}}{\sqrt{R^2+y^2}}, \frac{y^2}{\sqrt{R^2+y^2}}, 0\Big)\cdot(1, 0, -x'_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2-z^2}}{\sqrt{R^2+y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi R^2 \ln(\sqrt{2}+1),$$

$$I_{后} = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} \Big(\frac{-\sqrt{R^2-z^2}}{\sqrt{R^2+y^2}}, \frac{y^2}{\sqrt{R^2+y^2}}, 0\Big)\cdot(-1, 0, x'_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = I_{前},$$

所以 $I = 2\pi R^2 \ln(\sqrt{2}+1)$.

6. 试求向量场 $\boldsymbol{v} = (yz, zx, xy)$ 穿过在第一卦限中球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧的流量.

解 球面 Σ 的参数方程为 $x=\cos\varphi\sin\theta, y=\sin\varphi\sin\theta, z=\cos\theta$，其定向为 $\sin\theta(x,y,z)$.

$$\begin{aligned} Q &= \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}(yz,zx,xy)\cdot\sin\theta(x,y,z)\mathrm{d}\theta \\ &= 3\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}xyz\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 3\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

7. 试计算曲面积分 $I=\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解 椭球面 S 的参数方程为 $x=a\cos\varphi\sin\theta, y=b\sin\varphi\sin\theta, z=c\cos\theta$，其定向为 $abc\sin\theta(x,y,z)$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(x^3,0,0)\cdot abc\sin\theta(x,y,z)\mathrm{d}\theta \\ &= abc\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4\pi abc}{5} \end{aligned}$$

8. 试求向量场 $\boldsymbol{v}=(yz,zx,xy)$ 的流量,

(1) 穿过圆柱 $x^2+y^2\le a^2$ $(0\le z\le h)$ 的侧表面外侧;

(2) 穿过该圆柱的全表面外侧.

解 (1) 柱面 Σ 的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=z$，其定向为 $(x,y,0)$, 侧流量为

$$\begin{aligned} Q &= \iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{h}(yz,zx,xy)\cdot(x,y,0)\mathrm{d}z \\ &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{h}xyz\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{h}z\mathrm{d}z=0. \end{aligned}$$

(2) 全流量为

$$\begin{aligned} Q &= Q_{侧} + Q_{上} + Q_{下} \\ &= 0 + \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (yz, zx, xy)\cdot(0,0,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (yz, zx, xy)\cdot(0,0,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

9. 设空间立体 Ω 由三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成. 在 Ω 内有一水源, 在点 $M(x,y,z)$ 处的流速为 $\boldsymbol{v}=(x,y,2z)$, 试求在单位时间内通过 Ω 的边界曲面向外流出的水流量.

解 流量 $Q = Q_{上} + Q_{下} + Q_{左} + Q_{后} = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. 由于

$$\begin{aligned} Q_{上} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x, y, 2(1-x-y))\cdot(1,1,1)\mathrm{d}y = \frac{2}{3}, \\ Q_{下} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x, y, 0)\cdot(0,0,-1)\mathrm{d}y = 0, \\ Q_{左} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x, 0, 2z)\cdot(0,-1,0)\mathrm{d}z = 0, \\ Q_{后} &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} (0, y, 2z)\cdot(-1,0,0)\mathrm{d}z = 0, \end{aligned}$$

所以 $Q = \dfrac{2}{3}$.

10. 试将曲面积分 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_S f(y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 化为直角坐标系下的二重积分, 其中 S 是由柱面 $x^2+y^2=1$, 平面 $z=0$ 及 $z=4$ 所围成立体表面外侧.

解

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \Big[f(x,y,4) - f(x,y,0)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_S f(y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_0^4 \int_{-1}^1 (0, f(\sqrt{1-x^2}, z), 0)\cdot(-y'_x, 1, -y'_z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^4\int_{-1}^1(0,f(-\sqrt{1-x^2},z),0)\cdot(y'_x,-1,y'_z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4\int_{-1}^1\Big[f(\sqrt{1-x^2},z)-f(-\sqrt{1-x^2},z)\Big]\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

11. 设有空间流速场 $\boldsymbol{v}=(xy,0,0)$, 试求 $\boldsymbol{v}$ 通过曲面 $z=x^2+y^2$ 位于 $z=1$ 以下部分的下侧流量.

解 所求流量为

$$Q=\iint_S\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leq1}(xy,0,0)\cdot(2x,2y,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leq1}2x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

12. 试求向量场 $\boldsymbol{v}=(x-2y,x+3y+z,5x+y)$ 通过以 $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ 为顶点的三角形 ABC 上侧的流量.

解 曲面方程为 $z=1-x-y$, 所求流量为

$$Q=\iint_S\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(x-2y,x+3y+z,5x+y)\cdot(1,1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(6x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{3}.$$

13. 试求向量场 $\boldsymbol{v}=(1,-1,xyz)$ 通过由平面 $y=x$ 截球面 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ 所得圆面 S 朝 x 轴正向一侧的流量.

解 投影域为 $2y^2+z^2\leq R^2$, 所求流量为

$$Q=\iint_S\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_{2y^2+z^2\leq R^2}(1,-1,xyz)\cdot(1,-1,0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\sqrt{2}\pi R^2.$$

§11.3 定向类积分关系

习 题 11.3 A

1. 试用 Green 公式计算曲线积分

$$\int_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x,$$

其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的边界正向.

解

$$\begin{aligned}\int_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\Big[\frac{\partial(-x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -4\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

2. 试用 Green 公式计算曲线积分

$$I=\int_L (1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}y + (x^2\mathrm{e}^{2y}-y)\mathrm{d}x,$$

其中 L 是椭圆 $2x^2+3y^2=6$ 且按逆时针定向.

解

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{2x^2+3y^2\le 6}\Big[\frac{\partial(x^2\mathrm{e}^{2y}-y)}{\partial x} - \frac{\partial(1+x\mathrm{e}^{2y})}{\partial y}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

3. 试用 Gauss 公式计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \Big[\frac{\partial(x^3)}{\partial x}+\frac{\partial(y^3)}{\partial y}+\frac{\partial(z^3)}{\partial z}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\pi R^5. \end{aligned}$$

4. 试用 Gauss 公式计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是圆柱体 $x^2+y^2\le 9,\ 0\le z\le 3$ 的表面外侧.

解 记 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 9,\ 0\le z\le 3\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega}\Big[\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\int_0^3 \mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 9}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 81\pi. \end{aligned}$$

5. 试用 Gauss 公式计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是边长为 a 的正方体的外表面.

解 记 $\Omega=\{(x,y,z):\ 0\le x,y,z\le a\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega}\Big[\frac{\partial(x^3-yz)}{\partial x}+\frac{\partial(-2x^2y)}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^a(x^2+1)\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a\mathrm{d}z = a^3(\frac{1}{3}a^2+1). \end{aligned}$$

6. 设几何体 V 的边界是光滑曲面 S. 证明 V 的体积为

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 又若曲面 S 在广义球坐标

$$x=ar\cos\varphi\sin\theta,\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\theta\ \ (a,b,c>0)$$

下可表示为 $r=r(\varphi,\theta),\ (\varphi,\theta)\in D$, 则

$$V=\frac{abc}{3}\iint_D r^3(\varphi,\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

证

$$\begin{aligned}\oiint_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &=\iiint_V \Big(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=3\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V.\end{aligned}$$

由于曲面 S 的外法向为 $\boldsymbol{r}'_\theta\times\boldsymbol{r}'_\varphi=abcr\sin\theta(x,y,z)$, 所以

$$\begin{aligned}V=\frac{1}{3}\oiint_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &=\frac{1}{3}\iint_D (x,y,z)\cdot abcr\sin\theta(x,y,z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{abc}{3}\iint_D r^3\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

习 题 11.3 B

1. 试用 Green 公式计算曲线积分

$$I=\int_L (x^2+1+\mathrm{e}^y\sin x)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^y\cos x\mathrm{d}y,$$

其中 L 是半圆 $x=\sqrt{1-y^2}$ 上从点 $A(0,-1)$ 到点 $B(0,1)$ 的一段弧.

解 由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+AB}-\int_{AB} \\ &= \iint\limits_{0\leq x\leq\sqrt{1-y^2}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}-\mathrm{e}^{y}\cos 0\mathrm{d}y=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

2. 试用 Green 公式计算曲线积分

$$I=\int_{L}(1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-y)\mathrm{d}y,$$

其中 L 是 $(x-2)^2+y^2=4$ 的上半圆周且逆时针定向.

解 记 $(4,0)$ 点为 A. 由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+OA}-\int_{OA} \\ &= \iint\limits_{0\leq y\leq\sqrt{4-(x-2)^2}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{0}^{4}(1+x)\mathrm{d}x=-12. \end{aligned}$$

3. 试用 Gauss 公式计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 位于平面 $z=1$ 以下部分的下侧.

解 记 Σ_1 为 $x^2+y^2\leq 1, z=1$ 的上侧，则

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1} \\ &= \iiint\limits_{x^2+y^2\leq z\leq 1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0=0. \end{aligned}$$

注：由于 $z=1$ 时，$\mathrm{d}z=0$, 所以 $\iint_{\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$. 由于 y 是 y 型对称域 $x^2+y^2\leq z\leq 1$ 上的奇函数，所以 $\iiint_{x^2+y^2\leq z\leq 1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

4. 试用 Gauss 公式计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 记 Σ_1 为 $x^2+y^2\leq R^2, z=0$ 的下侧，则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{0\leq z\leq\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 0 \\ &= \int_0^R z^2 \iint_{x^2+y^2\leq R^2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{15}\pi R^5. \end{aligned}$$

5. 试用 Gauss 公式计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 介于平面 $z=0,\ z=1$ 之间的外侧.

解 记 Σ_1 为 $\{(x,y,z): x^2+y^2\leq 1, z=0,1\}$ 的外侧，则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{0\leq z\leq\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (y-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 z\mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leq 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 0 = -\frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

§11.4 积分公式的应用

习 题 11.4 A

1. 利用 Green 公式计算抛物线 $y = x^2 - 2x$ 与直线 $y = 2x$ 所围图形的面积.

解 记 $D = \{(x, y) : x^2 - 2x \leq y \leq 2x\}$, 则

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 x^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_4^0 0\mathrm{d}x = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

2. 计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$, $z = 2$ 所围圆台表面的外侧.

解 利用 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned} I &= 3\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{x^2+y^2\leq 4} 2^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{x^2+y^2\leq 1} 1^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 3\int_1^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leq z^2} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 31\pi \\ &= 3\int_1^2 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^z (r^2 + z^2)r\mathrm{d}r - 31\pi = -\frac{31}{10}\pi. \end{aligned}$$

3. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是抛物面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

解 充分利用奇偶性和对称性.

$$\begin{aligned}I &= 3\iiint_{\Omega}(2x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{x^2+y^2\leq 1}(y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{x^2+y^2\leq 1}(2x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -\int_{x^2+y^2\leq 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{3}{2}\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

4. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y),$$

其中 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, Σ_ε 为半径为 ε 的球面内侧, $\Omega=\{(x,y,z):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1, x^2+y^2+z^2\geq\varepsilon^2\}$, 则

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}-\iint_{\Sigma_\varepsilon}\\ &= \iiint_{\Omega}\Big(\frac{3}{r^3}-\frac{3x^2+3y^2+3z^2}{r^5}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 0+\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq\epsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi.\end{aligned}$$

5. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

解 记 Σ_1 为 $\{(x,y,0):x^2+y^2\leq a^2\}$ 的下侧，则

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} \\ &= \iiint\limits_{0\leq z\leq\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{\Sigma_1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

6. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 在 $0\leq z\leq 1$ 之间的上侧.

解 记 Σ_1 为 $\{(x,y,1):x^2+y^2\leq 1\}$ 的下侧，则

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} \\ &= -\iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

7. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是三个坐标面与平面 $x+2y+z=1$ 所围立体的表面外侧.

解 利用 Gauss 公式，有

$$I = \iiint\limits_{\Omega}(y+z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} (y+z+x)\mathrm{d}z = \frac{5}{96}.$$

8. 计算曲线积分

$$\int_L (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从 z 轴正向往 z 轴负向看，L 为顺时针方向.

解 利用 Stokes 公式，有

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 1} (0,0,2)\cdot(-1,1,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi.$$

习 题 11.4 B

1. 计算曲线积分

$$\int_L yz\mathrm{d}x + 3zx\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z,$$

其中 L 是柱面 $x^2+y^2=4y$ 和平面 $3y-z+1=0$ 的交线，若从 z 轴的正向看去，交线 L 按逆时针定向.

解 利用 Stokes 公式，有

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 1} (0,0,2)\cdot(-1,1,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi.$$

2. 计算曲线积分

$$\int_L y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z,$$

其中 L 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$ 和柱面 $x^2+y^2=ax$ 的交线，若从 z 轴的正向看去，交线 L 按逆时针定向.

解 利用 Stokes 公式，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} \\ &= -2\iint_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -2\iint_{x^2+y^2\le ax} (z,x,y)\cdot\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -2\iint_{x^2+y^2\le ax} \left(x+\frac{x}{z}y+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{奇偶性}) \\ &= -2\iint_{x^2+y^2\le ax} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi a^4}{8}. \end{aligned}$$

其中 S 为 $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2\le ax\}$ 的上侧.

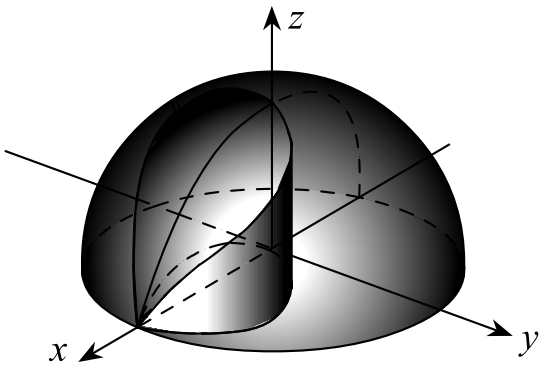

图 11.1

3. 计算曲线积分

$$\int_L (y+1)\mathrm{d}x + (z+2)\mathrm{d}y + (x+3)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线，若从 z 轴的正向看去，交线 L 按逆时针定向.

解 利用 Stokes 公式，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+1 & z+2 & x+3 \end{vmatrix} \\ &= -\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint_{x^2+y^2+xy\le R^2/2} (1,1,1)\cdot(1,1,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\sqrt{3}\pi R^2. \end{aligned}$$

其中 S 为 $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le R^2, x+y+z=0\}$ 的上侧.

4. 计算曲线积分

$$\int_L x^2yz\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\mathrm{d}y + (x+y+1)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 和 $z=x^2+y^2+1$ 的交线，若从 z 轴的正向看去，交线 L 按逆时针定向.

解 利用 Stokes 公式，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & x^2+y^2 & x+y+1 \end{vmatrix} \\ &= \iint_S (1, x^2y-1, 2x-x^2z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} (1, x^2y-1, 2x-2x^2)\cdot(0,0,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

其中 S 为 $\{(x,y,2): x^2+y^2\le 1\}$ 的上侧.

5. 计算曲线积分

$$I=\int_L (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z,$$

其中 L 为平面 $x+y+z=2$ 与三个坐标面的交线，从原点看 L 为顺时针定向.

解 利用 Stokes 公式，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2-y^2 & x^2-z^2 & y^2-x^2 \end{vmatrix} \\ &= 2\iint_S (y+z, z+x, x+y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iint_{x+y\le 2, x, y\ge 0} (y+z, z+x, x+y)\cdot(-1,-1,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -4\iint_{x+y\le 2, x, y\ge 0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -8. \end{aligned}$$

其中 S 为 $\{(x,y,z): x+y+z=2, x,y,z\geq 0\}$ 的下侧.

6. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

解 利用 Gauss 公式，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的上半部分的上侧.

解 记 Σ_1 为 $\{(x,y,0):(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2\}$ 的下侧， Ω 为 $\Sigma+\Sigma_1$ 的包围域，则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \\ &= 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iiint_{\Omega}[(x-a)+(y-b)+(z-c)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2(a+b+c)\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 0+2(a+b+c)\pi R^2. \end{aligned}$$

8. 设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S, 都有

$$\iint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$. 求 $f(x)$.

解 利用 Gauss 公式，有

$$\iiint_\Omega (xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

由于 Ω 具有任意性，所以根据积分中值定理，必有

$$f'(x)+\frac{1-x}{x}f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}.$$

解常微分方程可得

$$f(x)=\frac{1}{x}(\mathrm{e}^x+C).$$

根据 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$, 可得

$$f(x)=\frac{1}{x}(\mathrm{e}^x-1).$$

9. 计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧.

解 取 Σ_1 为 xOy 平面上被椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 Σ 和 Σ_1 围成的空间闭区域. 根据高斯公式

$$I_1=\int_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_\Omega (z+2z+0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 3z\mathrm{d}z\iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.$$

又

$$I_2 = \int_{\Sigma_1} = -3 \iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

所以 $I = I_1 - I_2 = \pi$.

总 习 题 十一

1. 计算曲线积分 $I = \int_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以点 (1,0) 为中心， R 为半径的圆周 $(R>1)$ 取逆时针方向.

解 记 $P = \dfrac{-y}{4x^2+y^2}, Q = \dfrac{x}{4x^2+y^2}$, 则 $(x,y) \neq 0$ 时,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

令 L_ε 为 $x = \dfrac{1}{2}\varepsilon\cos\theta, y = \varepsilon\sin\theta$ 的顺时针定向曲线，则根据 Green 公式，有

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+L_\varepsilon} - \int_{L_\varepsilon} \\ &= \iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{2\pi}^{0} \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta = \pi. \end{aligned}$$

2. 计算曲线积分

$$I = \int_L (\mathrm{e}^x\sin y - b(x+y))\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - ax)\mathrm{d}y,$$

其中 a, b 为正常数， L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解 根据 Green 公式，有

$$I = \int_{L+AB} - \int_{AB}$$

$$= \iint_D [(\mathrm{e}^x \cos\theta - a) - (\mathrm{e}^x \cos\theta - b)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{OA} (-bx)\mathrm{d}x$$
$$= (b-a)\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - b\int_0^{2a} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)\pi a^2 + 2ba^2.$$

3. 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周, 从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{f}$ 作用. $\boldsymbol{f}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{f}$ 对质点 P 所做的功.

解 引力为 $\boldsymbol{f} = (y, -x)$, AB 直线为 $y = x + 1$, 变力 $\boldsymbol{f}$ 对质点 P 所做的功为

$$W = \int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \int_{L+AB} - \int_{AB}$$
$$= \iint_D (-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_1^3 \mathrm{d}x = -\pi - 2.$$

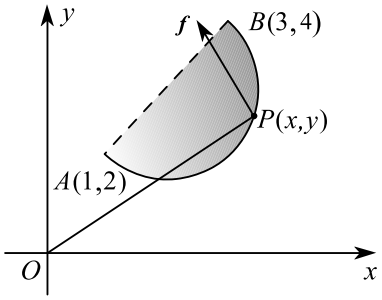

图 11.2

4. 计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma x^2 z\cos\gamma\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 下半部的上侧, γ 为曲面 Σ 的法线正向与 Oz 轴正向的夹角.

解 化为第二型曲面积分, 记 Σ_1 为 $\{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 的下侧, Ω 为 $\Sigma + \Sigma_1$ 的包围域, 则

$$I = \iint_\Sigma x^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Sigma+\Sigma_1} - \int_{\Sigma_1}$$

$$= -\iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta \int_0^a r^4 \mathrm{d}r = -\frac{2a^5}{15}.$$

5. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所切下部分的曲面面积.

解 投影域为 $x^2+y^2\leq 2x$, 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法向量为 $(-z'_x,-z'_y,-1)=(-\dfrac{x}{z},-\dfrac{y}{z},1)$, 所求面积为

$$S=\iint_S \mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leq 2x} \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 2x} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

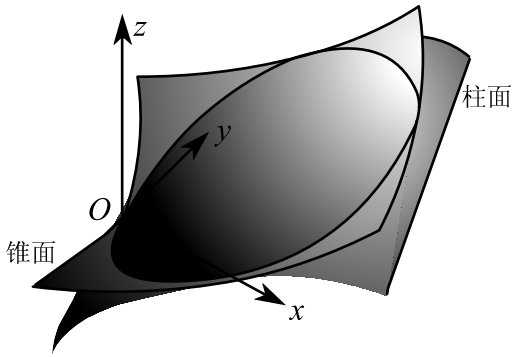

图 11.3

6. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\ln z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=1$, $z=2$ 之间部分的外侧.

解 利用投影方法, 有

$$I=-\iint_{1\leq x^2+y^2\leq 4}\frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{\ln r}{r}\cdot r\mathrm{d}r = 2\ln 2-1.$$

7. 证明 Archimedes 定律，即浸没在液体中的物体所受浮力等于物体排开液体的重量且方向铅直向上.

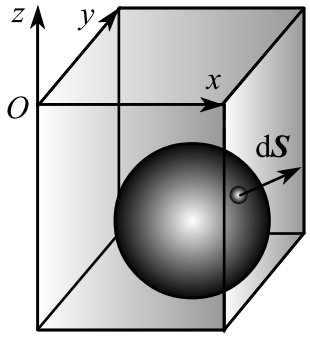

图 11.4

证 取坐标原点在水平面位置，z 轴方向向上. 设物体 Ω 的外侧曲面为 S, 则 (x,y,z) 点的面积微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 所受的压力为 $z\rho g\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $z\leq 0$. 于是物体 Ω 所受的浮力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\iint_S z\rho g\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\rho g\Big(\iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\iiint_\Omega 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big)\\&=(0,0,\rho gV).\end{aligned}$$

8. 证明 Gauss 定律，即点电荷 q 在真空中产生静电场 $\boldsymbol{E}$ 时，通过任何包含 q 在内的光滑封闭曲面 S 的电通量为 $4\pi q$.

证 设点电荷位于原点 O, 则 (x,y,z) 点的电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{r^3}(x,y,z).$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 设 S_r 为球心为 O, 半径为 r 的内侧球面，则

$$\begin{aligned}Q=\iint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iint_{S+S_r}-\iint_{S_r}\\&=\iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{S_r}\frac{q}{r^3}(x,y,z)\cdot\frac{(-x,-y,-z)}{r}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$= \frac{q}{r^2} \iint\limits_{S_r} \mathrm{d}S = 4\pi q.$$

9. 计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x + 2\big[2x + y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\big]\,\mathrm{d}y,$$

其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上由 $A(a,0)$ 点以反时针方向到 $B(-a,0)$ 点的圆弧， $a>0$ 为常数.

解 由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4$, 所以

$$I = \int_{L+BO+OA} - \int_{BO} - \int_{OA}$$

$$= \iint\limits_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^a 0\mathrm{d}x - \int_{-a}^0 2y\ln a\mathrm{d}y = a^2(\pi + \ln a).$$

10. 计算曲线积分的极限

$$\lim_{a\to+\infty} \int_L \big[\mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy) - 3y\big]\,\mathrm{d}x + \big[\mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy) - b^2\big]\,\mathrm{d}y,\ (b>0)$$

其中 L 是依次连接 $A(a,0), B\Big(a,\dfrac{\pi}{a}\Big), C\Big(0,\dfrac{\pi}{a}\Big), O(0,0)$ 的有向折线.

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2x\mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy) + 2y\mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy),$$

所以

$$\text{原积分} = \iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

11. 设 C 是包围原点的正向光滑曲线，计算曲线积分

$$I = \oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2}.$$

其中 $b^2-ac<0, a>0$.

解 (1) 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-ax^2+cy^2}{(ax^2+2bxy+cy^2)^2},$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_{C+C_\varepsilon}-\int_{C_\varepsilon}\\&=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{2\pi}^{0}\frac{\mathrm{d}\theta}{a\cos^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a\cos^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.\end{aligned}$$

其中 C_ε 为 $x^2+y^2=\varepsilon^2$ 的顺时针定向曲线.

解 (2) 令 $u=x+\dfrac{b}{a}y, v=\dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{a}y$, 则 C 变为正向光滑曲线 Γ, 于是

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int_\Gamma\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}=\int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon}-\int_{\Gamma_\varepsilon}\\&=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\iint_D 0\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int_{2\pi}^{0}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.\end{aligned}$$

解 (3) 令 C_ε 为顺时针定向曲线

$$\begin{cases}x=\varepsilon\cos\theta+\dfrac{b\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{ac-b^2}}\\[2ex] y=\dfrac{a\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{ac-b^2}}\end{cases}\qquad(0\le\theta\le 2\pi),$$

则

$$\begin{aligned}I&=\int_{C+C_\varepsilon}-\int_{C_\varepsilon}\\&=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{2\pi}^{0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{ac-b^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.\end{aligned}$$

12. 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且对任意实数 x_0,y_0 和任意正数 R, 都有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

其中 L 是半圆 $y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$, 则

$$P(x,y)=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

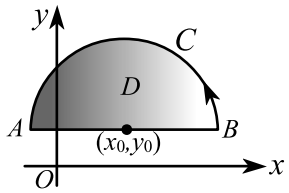

图 11.5

证 设半圆 L 的端点为 A,B. 由于

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

所以

$$\oint_{L+AB}=\int_L+\int_{AB}=\int_{AB}=\int_{x_0-R}^{x_0+R}P(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

根据格林公式，有

$$\oint_{L+AB}=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是，有

$$\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x_0-R}^{x_0+R}P(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

根据积分中值定理，有

$$\Big[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big]_{(\xi,\eta)}\cdot\frac{\pi R^2}{2}=P(\zeta,y_0)\cdot 2R.$$

其中 $\xi,\zeta\in(x_0-R,x_0+R)$, $\eta\in(y_0,y_0+R)$. 令 $R\to 0$, 则有

$$P(x_0,y_0)=0.$$

根据 (x_0,y_0) 的任意性，必有 $P(x,y)\equiv 0$. 因此必有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

第十二章　场的微分与积分

§12.1　数量场与梯度场

习　题 12.1 A

1. 设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

解　选择路径 $(0,0)\to(0,1)\to(1,1)$.

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \Big(\int_{(0,0)}^{(0,1)} + \int_{(0,1)}^{(1,1)}\Big) xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y\varphi(0)\mathrm{d}y + \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. 已知曲线积分

$$I = \int_L y^3\mathrm{d}x + (3x - x^3)\mathrm{d}y,$$

其中 L 为 $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$ 的正向，求：

(1) R 为何值时，$I=0$;

(2) 求 I 的最大值.

解　(1) 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 - 3x^2 - 3y^2 = 3 - 3R^2,$$

所以 $R=1$ 时，$I=0$.

(2) 由于

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}(3-3R^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3(1-R^2)\pi R^2,$$

所以 $R=\dfrac{1}{2}$ 时， I 取最大值且最大值为 $\dfrac{3}{4}\pi$.

3. 设 u,v 为两个数量场， f 为可导函数，求

(1) $\nabla f(\dfrac{v}{u})$; (2) $\nabla f(uv)$;

(3) $\operatorname{grad} f(\sqrt{u^2+v^2})$; (4) $\operatorname{grad} f(\dfrac{v}{u},\, u^2+v^2)$.

解

(1) $\nabla f(\dfrac{v}{u})=f'(\dfrac{v}{u})\nabla\dfrac{v}{u}=f'(\dfrac{v}{u})\dfrac{u\nabla v-v\nabla u}{u^2}$.

(2) $\nabla f(uv)=f'(uv)\nabla(uv)=f'(uv)(v\nabla u+u\nabla v)$.

(3) $\operatorname{grad} f(\sqrt{u^2+v^2})=f'(\sqrt{u^2+v^2})\nabla\sqrt{u^2+v^2}$

$$=f'(\sqrt{u^2+v^2})\frac{u\nabla u+v\nabla v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

(4) $\operatorname{grad} f(\dfrac{v}{u},\, u^2+v^2)=f_1'(\dfrac{v}{u},\, u^2+v^2)\nabla\dfrac{v}{u}+f_2'(\dfrac{v}{u},\, u^2+v^2)\nabla(u^2+v^2)$

$$=f_1'(\frac{v}{u},\, u^2+v^2)\frac{u\nabla v-v\nabla u}{u^2}+2f_2'(\frac{v}{u},\, u^2+v^2)(u\nabla u+v\nabla v).$$

4. 问函数 $u=\ln(xyz+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})$ 在 $(1,1,1)$ 点处沿哪个方向的方向导数最大？并求此最大值.

解 由于

$$\begin{aligned}\nabla u &= \frac{1}{xyz+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\nabla(xyz+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})\\ &= \frac{1}{xyz+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\Big[(yz,zx,xy)+\frac{(x,y,z)}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\Big],\end{aligned}$$

所以 $\nabla u(1,1,1)=\dfrac{5}{6}(1,1,1)$. 因此函数 u 在 $(1,1,1)$ 点沿 $(1,1,1)$ 方向的方向导数最大，其最大值为 $|\nabla u(1,1,1)|=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

5. 已知数量场 $v(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, 求沿 $v(x,y,z)$ 的梯度方向的方向导数.

解 由于

$$\nabla v=\Big(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\Big),$$

所以数量场 v 沿梯度方向的方向导数为 $|\nabla v|=2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}$.

6. 设函数 $u(x,y,z)=\cos^2(xy)+\dfrac{y}{x^2}$, 直线 l 是直线

$$L:\begin{cases}\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}z=1,\\ y-2z+4=0\end{cases}$$

在平面 $x+y-z=5$ 上的投影，求函数 $u(x,y,z)$ 在 $M(1,0,0)$ 点沿直线 l 向上方向的方向导数.

解 直线 L 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2,0,-3)\times(0,1,-2)=(3,4,2).$$

直线 l 的法向量为

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{n}-\Big(\boldsymbol{n}\cdot\frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}\Big)\frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}(4,7,11).$$

由于

$$\begin{aligned}\nabla u(1,0,0)&=(2\cos(xy)\sin(xy)\cdot y-\frac{2y}{x^3},2\cos(xy)\sin(xy)\cdot x+\frac{1}{x^2},0)\Big|_{(1,0,0)}\\&=(0,1,0),\end{aligned}$$

所以所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,0,0)}=\nabla u(1,0,0)\cdot\frac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}=(0,1,0)\cdot\frac{(4,7,11)}{\sqrt{186}}=\frac{7}{\sqrt{186}}.$$

7. 求函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 在 $(3,4,5)$ 点处沿曲线

$$\begin{cases}2x^2+2y^2-z^2=25,\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$$

在该点的切线方向的方向导数.

解 曲线的切线方向为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e} &= \nabla(2x^2+2y^2-z^2)\times\nabla(x^2+y^2-z^2)\Big|_{(3,4,5)}\\ &= 4(2x,2y,-z)\times(x,y,-z)\Big|_{(3,4,5)} = -240(1,-1,0).\end{aligned}$$

由于

$$\nabla u(3,4,5)=(2x,2y,-2z)\Big|_{(3,4,5)}=2(3,4,-5),$$

所以所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(3,4,5)}=\nabla u(3,4,5)\cdot\frac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}=\pm2(3,4,-5)\cdot\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}=\mp\sqrt{2}.$$

8. 确定常数 λ, 使在右半平面 $x>0$ 上的向量

$$\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$$

为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

解 根据

$$0=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-(1+\lambda)(x^4+y^2)$$

可知， $\lambda=-1$ 时，向量 $\boldsymbol{A}(x,y)$ 是函数 $u(x,y)$ 的梯度，其中

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\ &= \Big(\int_{(1,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\Big)\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\ &= \int_1^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{-x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=-\arctan\frac{y}{x^2}.\end{aligned}$$

9. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$, 试求 $f(x)$ 的表达式，以使积分

$$\int_L f(x)y\mathrm{d}x+\big[\sin x+f'(x)\big]\mathrm{d}y$$

与路径无关.

解 根据路径无关条件，有

$$\frac{\partial\big[\sin x+f'(x)\big]}{\partial x}-\frac{\partial\big[f(x)y\big]}{\partial y}=\cos x+f''(x)-f(x)=0,$$

解之得

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\cos x.$$

根据初始条件，有 $C_1=C_2=-\dfrac{1}{4}$. 于是所求函数为

$$f(x)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\cos x.$$

10. 设函数 $\varphi(x)$ 连续可微，且 $\varphi(0)=-2$, 试求 $\varphi(x)$ 的表达式，以使积分

$$\int_L[y\sin 2x-y\varphi(x)\tan x]\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$$

在第一象限内与路径无关，并计算

$$\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}[y\sin 2x-y\varphi(x)\tan x]\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y.$$

解 根据路径无关条件，有

$$\frac{\partial\big[\varphi(x)\big]}{\partial x}-\frac{\partial\big[y\sin 2x-y\varphi(x)\tan x\big]}{\partial y}=\varphi'(x)+\tan x\varphi(x)-\sin 2x=0,$$

解之得

$$\varphi(x)=C\cos x-2\cos^2 x.$$

根据初始条件，有 $C=0$. 于是所求函数为

$$\varphi(x)=-2\cos^2 x.$$

令 $y=x$, 则有

$$\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}[y\sin 2x-y\varphi(x)\tan x]\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi/4}(2x\sin 2x-2\cos^2 x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

11. 设在上半平面 $D=\{(x,y)\,|\,y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，且对任意的 $t>0$, 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, 证明对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

解 由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 关于 t 求导可得

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y).$$

令 $t=1$ ，则有

$$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y).$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\big[-xf(x,y)\big]-\frac{\partial}{\partial y}\big[yf(x,y)\big]=xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)+2f(x,y)=0,$$

所以由路径无关定理，有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

习 题 12.1 B

1. 设 $f(u),g'(v)$ 连续， $L:x^2+y^2=1$, D 为 L 所围的圆域，计算

$$I=\int_L[f(x^2+y^2)+g(x-y)](x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y),$$

并证明 $\iint_D(x+y)g'(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

解 由于 $x^2+y^2=1$, 所以

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)=0,$$

故 $I=0$. 进一步，有

$$\begin{aligned}0=I&=\frac{1}{2}\int_L f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)+\int_L g(x-y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\\&=0+\iint_D\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(g(x-y)y\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(g(x-y)x\Big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D(x+y)g'(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

2. 确定可微函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$, 使当

$$P(x,y)=[\alpha(x)+\beta(x)]y^2+3x^2y,\ Q(x,y)=y\alpha(x)+\beta(x)$$

时，曲线积分 $\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 对任何封闭曲线 L 都等于零，并写出 $\alpha(0)=-1,\ \beta(0)=0$ 时 $\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的表达式.

解 根据

$$0=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(\alpha'(x)-2\alpha(x)-2\beta(x))y+\beta'(x)-3x^2,$$

可建立微分方程组

$$\begin{cases}\beta'(x)-3x^2=0\\ \alpha'(x)-2\alpha(x)-2\beta(x)=0\\ \beta(0)=0\\ \alpha(0)=-1\end{cases}.$$

解之可得

$$\beta(x)=x^3,\alpha(x)=-\frac{1}{4}(3+6x+6x^2+4x^3+\mathrm{e}^{2x}).$$

3. 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分

$$\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

与路径无关，并对任意 t, 都有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解 由曲线积分与路径无关的条件可知

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x.$$

于是

$$Q(x,y) = x^2 + C(y).$$

其中 $C(y)$ 为待定函数. 又

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^1 [t^2 + C(y)]\mathrm{d}y = t^2 + \int_0^1 C(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^t [1 + C(y)]\mathrm{d}y = t + \int_0^t C(y)\mathrm{d}y.$$

根据题设，有

$$t^2 + \int_0^1 C(y)\mathrm{d}y = t + \int_0^t C(y)\mathrm{d}y.$$

两端对 t 求导可得

$$2t = 1 + C(t).$$

从而 $C(y) = 2y - 1, Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$.

4. 设曲线积分

$$\int_L 2[x\varphi(y) + \psi(y)]\mathrm{d}x + [x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)]\mathrm{d}y = 0,$$

其中 L 是任意平面封闭曲线，求：

(1) 可微函数 $\varphi(y), \psi(y)$, 已知 $\varphi(0) = -2,\ \psi(0) = 1$;

(2) 沿 L 从原点 (0,0) 到 $M\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的曲线积分.

解 (1) 根据

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= (\psi(y) - \varphi'(y))x + (y^2 - \psi'(y) - \varphi(y)), \end{aligned}$$

可得微分方程组

$$\begin{cases} \varphi'(y) = \psi(y) \\ \psi'(y) + \varphi(y) = y^2 \\ \varphi(0) = -2 \\ \psi(0) = 1 \end{cases},$$

消元可得

$$\begin{cases} \psi''(y) + \psi(y) = 2y \\ \psi'(0) = -\varphi(0) = 2 \\ \psi(0) = 1 \end{cases},$$

解之可得

$$\psi(y) = 2y + \cos y.$$

于是 $\varphi(y) = y^2 - \sin y - 2$.

(2)

$$\begin{aligned} \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/2} Q(0, y)\mathrm{d}y + \int_0^{\pi} P(x, \frac{\pi}{2})\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} 0\mathrm{d}y + \int_0^{\pi} 2\Big[x\varphi(\frac{\pi}{2}) + \psi(\frac{\pi}{2})\Big]\mathrm{d}x \\ &= \pi^2\varphi(\frac{\pi}{2}) + 2\pi\psi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^4}{4} - \pi^2. \end{aligned}$$

5. 确定 $f(x)$, 使曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \left[(x+1)^n \sin x + \frac{n}{x+1} f(x)\right] y\mathrm{d}x + f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关，设 $f(0) = 0$, 并计算此曲线积分.

解 根据 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 有

$$\begin{cases} f'(x)-\dfrac{n}{x+1}f(x)=(x+1)^n\sin x \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

解之可得

$$f(x)=(1+x)^n-(1+x)^n\cos x.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y &= \int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y f(x)\mathrm{d}y \\ &= \left[(1+x)^n-(1+x)^n\cos x\right]y. \end{aligned}$$

6. 设 Σ 是由曲线

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$$

绕 y 轴旋转一周得到的旋转面，求函数 $u(x,y,z)=\sin(x^2+y^2+z^2)$ 在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 点处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 在该点处的指向外侧的法向量.

解 曲面 Σ 的方程为

$$3x^2+2(y^2+z^2)=12.$$

指向外侧的法向量为

$$\nabla(3x^2+2(y^2+z^2))=2(3x,2y,2z).$$

在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{3},\sqrt{2}).$$

函数 $u(x,y,z)$ 的梯度为

$$\nabla u = \nabla(\sin(x^2+y^2+z^2)) = 2\cos(x^2+y^2+z^2)(x,y,z).$$

所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u(0,\sqrt{3},\sqrt{2})\cdot \boldsymbol{n} = 2\sqrt{5}\cos 5.$$

7. 设 L 为平面上的光滑闭曲线， $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，证明

$$\int_L \cos\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}s = 0.$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线单位向量.

证 记 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\mathrm{d}s.$$

由于

$$\cos\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}s = \boldsymbol{e}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\mathrm{d}s = \boldsymbol{e}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

所以由格林公式，有

$$\int_L \cos\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}s = \int_L \boldsymbol{e}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

8. 试证数量场 $u = u(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 点处的梯度为

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial n}\,\boldsymbol{n}.$$

其中 $\boldsymbol{n}(x,y,z)$ 为数量场 u 在 (x,y,z) 点处的等值面的单位法向量， $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 在 (x,y,z) 点沿法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

证 设 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ 是等值面上的任意光滑曲线，即

$$u(x(t),y(t),z(t)) \equiv 0,$$

又设 $\boldsymbol{r}(0) = (x,y,z)$. 由于

$$0 = \frac{\mathrm{d}u(\boldsymbol{r}(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \nabla u(x,y,z)\cdot\boldsymbol{r}'(0),$$

所以 $\nabla u(x,y,z)$ 是 u 在 (x,y,z) 点的法向量. 于是可设 $\nabla u = k\boldsymbol{n}$. 根据

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \boldsymbol{n},$$

有 $k = \dfrac{\partial u}{\partial n}$. 故 $\operatorname{grad} u = \nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial n}\,\boldsymbol{n}$.

9. 设函数 $u = u(x,y)$ 和 $v = v(x,y)$ 有二阶连续偏导数，证明：

(1) $\displaystyle\int_{\partial D} uv\mathrm{d}x + uv\mathrm{d}y = \iint\limits_D \Big[v\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) + u\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

(2) $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\partial D}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\mathrm{d}x + \Big(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_D \Big(u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 (1) 根据格林公式，有

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} uv\mathrm{d}x + uv\mathrm{d}y &= \iint\limits_D \Big[\Big(\frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D \Big[v\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) + u\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 根据格林公式，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\partial D}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\mathrm{d}x + \Big(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_D \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D \Big(u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

10. 设二元函数 $f_1(x,y), f_2(x,y)$ 及 $H(x,y)$ 在平面区域 D 上具有连续的一阶偏导数， C 是区域 D 的边界，证明

$$\iint\limits_D \Big(f_1\frac{\partial H}{\partial y} + f_2\frac{\partial H}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oint_C f_1 H \,\mathrm{d}y - f_2 H \,\mathrm{d}x - \iint\limits_D H\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 根据格林公式，有

$$\oint_C f_1 H \,\mathrm{d}y - f_2 H \,\mathrm{d}x$$

$$= \iint\limits_D \Big[\frac{\partial(f_1 H}{\partial x} - \frac{\partial(-f_2 H}{\partial y}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_D \Big(f_1 \frac{\partial H}{\partial y} + f_2 \frac{\partial H}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D H\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

11. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 问 a 取何值时，曲线积分

$$\int_L \frac{x}{y}\, r^a \,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}\, r^a \,\mathrm{d}y$$

在上半平面与路径无关，并计算曲线积分

$$\int_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}^{(0,1)} \frac{x}{y}\, r^a \,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}\, r^a \,\mathrm{d}y.$$

解 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{2x}{y^2}\, r^a - \frac{x^2}{y^2} \cdot a r^{a-2} x + \frac{x}{y^2}\, r^a - a x r^{a-2} \\ &= -\frac{r^a}{y^2}\,(1+a)x,\end{aligned}$$

所以当 $a = -1$ 时，曲线积分在上半平面与路径无关. 令

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

则

$$\int_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}^{(0,1)} \frac{x}{y}\, r^a \,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}\, r^a \,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big[-\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\Big]\mathrm{d}\theta = 1 - \sqrt{2}.$$

§12.2 场的通量与散度

习 题 12.2 A

1. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$ 在 $P(1,0,-1)$ 点处指向外侧的法向量，求 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在 P 点处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数，并求 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$.

解 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= \nabla(xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\Big|_{(1,0,-1)}\\ &= (yz,zx,xy)+\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,-1)}=\frac{(1,-\sqrt{2},-1)}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n} &= \nabla u(1,0,-1)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\\ &= \frac{2(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(1,0,-1)}\cdot\frac{(1,-\sqrt{2},-1)}{2}=1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) &= (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot\nabla u\\ &= (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot\frac{2(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}$$

2. 设 $f(u)$ 有连续的二阶导数，$\boldsymbol{r}=(x,y,z),r=|\boldsymbol{r}|$,

(1) 计算 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]$ 并求 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=0$ 的条件;

(2) 计算 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]$ 并求 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的条件.

解 (1) 根据 $\nabla\cdot(u\boldsymbol{f})=\nabla u\cdot\boldsymbol{f}+u\nabla\cdot\boldsymbol{f}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)] &= \nabla\cdot\Big(\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}\Big)\\ &= \nabla\Big(\frac{f'(r)}{r}\Big)\cdot\boldsymbol{r}+\frac{f'(r)}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}\\ &= \frac{r\nabla f'(r)-f'(r)\nabla r}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{3f'(r)}{r}=\frac{rf''(r)-2f'(r)}{r}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}] &= \nabla\cdot(f(r)\boldsymbol{r})\\ &= \nabla f(r)\cdot\boldsymbol{r}+f(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r}=f'(r)r+3f(r).\end{aligned}$$

解微分方程

$$f'(r)r+3f(r)=0,$$

可得 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=0$ 的条件为 $f(r)=\dfrac{C}{r^3}$.

3. 设 $u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$ 有连续的二阶偏导数, 求 $\mathrm{div}(u\mathrm{grad}v)$.

解 根据 $\nabla\cdot(u\boldsymbol{f})=\nabla u\cdot\boldsymbol{f}+u\nabla\cdot\boldsymbol{f}$, 有

$$\nabla\cdot(u\nabla v)=\nabla u\cdot\nabla v+u\triangle v.$$

4. 求向量场 $\boldsymbol{v}=(yz,zx,xy)$ 穿过圆柱体 $x^2+y^2\leq a^2$ $(0\leq z\leq h)$ 的侧表面和全表面的外侧流量.

解 全表面 S 的外侧流量为

$$\begin{aligned}Q_{\text{全}} &= \oiint_S(yz,zx,xy)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.\end{aligned}$$

侧表面 S_1 的外侧流量为

$$Q_{\text{侧}} = \iint_{S_1}(yz,zx,xy)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \oiint_S - \iint_{S_{\text{上}}} - \iint_{S_{\text{下}}} = 0 - \iint_{S_{\text{上}}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S_{\text{下}}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= - \iint_{x^2+y^2\le a^2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{x^2+y^2\le a^2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

5. 求流量场 $\boldsymbol{v} = (x-y+z, y-z+x, z-x+y)$ 通过椭球面

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的外表面的流量.

解 S 的外侧流量为

$$Q = \oiint_S (x-y+z, y-z+x, z-x+y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\pi abc.$$

6. 有一磁场 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\dfrac{m_0}{r^3}\boldsymbol{r}$, 求其穿过中心在原点，半径为 R 的球面的通量，其中 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 进一步求穿过任一包含原点的封闭曲面 S 的通量以及穿过任一不包含原点的封闭曲面 S 的通量.

解 穿过球面的通量为

$$Q_{\text{球}} = \oiint_{S_{\text{球}}} -\frac{m_0}{r^3}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \oiint_{S_{\text{球}}} -\frac{m_0}{R^2}\mathrm{d}S = -4\pi m_0.$$

穿过任一包含原点的封闭曲面 S 的通量为

$$Q_1 = \oiint_S -\frac{m_0}{r^3}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{S+S_\varepsilon} - \oiint_{S_\varepsilon}$$

$$= \iiint_\Omega \Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r})\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q_{\text{球}}$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 4\pi m_0 = 4\pi m_0.$$

其中 S_ε 为球面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 的内侧.

穿过任一不包含原点的封闭曲面 S 的通量为

$$Q_2 = \oiint\limits_{S} -\frac{m_0}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r})\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

习 题 12.2 B

1. 函数 $u=u(x,y,z)$ 称为某区域的调和函数，如果它在该区域内有二阶连续偏导数且 $\Delta u=0$. 证明：

(1) 若 u 是被光滑曲面 S 包围的有界闭区域 V 内的调和函数，则

$$\iiint\limits_{V}(\nabla u)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿 S 的外法线方向的方向导数；

(2) 若 u 为以 R 为半径以 (x_0,y_0,z_0) 为球心的球面 S 内的调和函数，则

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S} u(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

证 (1) 根据第一格林公式

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{S} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S,$$

令 $v=u$，则由 $\Delta u=0$ 可得

$$\iiint\limits_{V}(\nabla u)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

(2) 设 S_ε 为球面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 的外侧，$\Omega=\{(x,y,z):\varepsilon^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2\}$, 则由 $\Delta u=0$ 及第一格林公式可知

$$\begin{aligned}
0 &= \iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}\Omega \\
&= \Big(\iint_{S_R}-\iint_{S_\varepsilon}\Big)\Big(u\,\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{R^2}\iint_{S_R}u\mathrm{d}S-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}u\mathrm{d}S+\frac{1}{R}\iint_{S_R}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\frac{1}{\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{R^2}\iint_{S_R}u\mathrm{d}S-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}u\mathrm{d}S+\frac{1}{R}\iiint_{\Omega_R}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{\varepsilon}\iiint_{\Omega_\varepsilon}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{R^2}\iint_{S_R}u\mathrm{d}S-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}u\mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

于是利用积分平均值定理，有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R}u\mathrm{d}S &= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}u\mathrm{d}S=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}u\mathrm{d}S \\
&= \lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\cdot u(x_\varepsilon,y_\varepsilon,z_\varepsilon)\iint_{S_\varepsilon}\mathrm{d}S=u(x,y,z).
\end{aligned}$$

其中 $(x_\varepsilon,y_\varepsilon,z_\varepsilon)\in S_\varepsilon$.

2. 设 $u(x,y,z)$ 为连续函数，且在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点附近有连续的二阶偏导数，又设

$$m(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 S 为以 M_0 为球心以 R 为半径的球面. 证明 $\lim\limits_{R\to0}m(R)=u(x_0,y_0,z_0)$.

证 利用积分平均值定理，有

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to0}m(R) &== \lim_{R\to0+}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u\mathrm{d}S \\
&= \lim_{R\to0+}\frac{1}{4\pi R^2}\cdot u(x_R,y_R,z_R)\iint_{S_R}\mathrm{d}S=u(x_0,y_0,z_0).
\end{aligned}$$

其中 $(x_R, y_R, z_R) \in S$.

3. 设 u, u_1, u_2 都是 Ω 上的调和函数, Ω 是光滑封闭曲面 S 的包围闭区域, 证明:

(1) 若 u_1, u_2 在 S 上相等, 则在 Ω 上恒等;

(2) 若 u 在 S 上是常数, 则在 Ω 上是常数;

(3) $\iint_S \dfrac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = 0$;

(4) 若 $\dfrac{\partial u_1}{\partial n} = \dfrac{\partial u_2}{\partial n}$, 则 $u_1 - u_2$ 在 Ω 上为常数.

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿 S 的外法线方向的方向导数.

证 (1) 令 $w = u_1 - u_2$, 则有 $\Delta w = 0, w\big|_S = 0$. 根据第一 Green 公式, 有

$$\iiint_\Omega (\nabla w)^2 \mathrm{d}\Omega = \iint_S (w\nabla w)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint_\Omega w\Delta w \mathrm{d}\Omega = 0.$$

于是根据 ∇w 的连续性可知, $\nabla w = \mathbf{0}$. 进一步由 $w\big|_S = 0$ 可知, $w = 0$. 故 $u_1 = u_2$.

(2) 由于 u 在 Ω 上调和, 在 S 上是常数, 所以

$$\iiint_\Omega (\nabla u)^2 \mathrm{d}\Omega = \iint_S (u\nabla u)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint_\Omega u\Delta u \mathrm{d}\Omega = 0.$$

因此 u 在 Ω 上, 恒有 $\nabla u = \mathbf{0}$, 于是 u 在 Ω 上是常数.

(3) 利用高斯公式可得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \nabla u\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

(4) 令 $w = u_1 - u_2$, 则有 $\Delta w = 0, \dfrac{\partial w}{\partial n}\Big|_S = 0$. 根据第一 Green 公式, 有

$$\iiint_\Omega (\nabla w)^2 \mathrm{d}\Omega = \iint_S w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_\Omega w\Delta w \mathrm{d}\Omega = 0.$$

于是 $\nabla w = \mathbf{0}$. 因此 u 在 Ω 上是常数.

4. 已知点电荷 q_1, q_2 分别位于 A_1, A_2 两点处，求从封闭曲面 S 内穿出的电通量 Φ, 其中 S 为:

(1) 不包含 A_1, A_2 两点的任一封闭曲面;

(2) 仅包含 A_1 点的任一封闭曲面;

(3) 同时包含 A_1, A_2 两点的任一封闭曲面.

解 (1) S 不包含 $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$ 时的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_S \frac{q_1(x-x_1, y-y_1, z-z_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_S \frac{q_2(x-x_2, y-y_2, z-z_2)}{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2)^{3/2}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

其中 Ω 为 S 的包围区域.

(2) S 仅包含 $A_1(0,0,0)$ 时的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_S \frac{q_1(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_{S_R}\frac{q_1(x,y,z)}{R^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}.\end{aligned}$$

其中 S_R 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的内侧， Ω 为 $S+S_R$ 的包围区域.

(3) S 同时包含 A_1, A_2 时的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_S \frac{q_1(x-x_1, y-y_1, z-z_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_S \frac{q_2(x-x_2, y-y_2, z-z_2)}{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2)^{3/2}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_{S_R}\frac{q_1(x-x_1,y-y_1,z-z_1)}{R^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint\limits_{\Sigma_R}\frac{q_2(x-x_2,y-y_2,z-z_2)}{R^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon}.$$

其中 S_R 为 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$ 的内侧， Σ_R 为 $(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=R^2$ 的内侧， Ω 为 $S+S_R+\Sigma_R$ 的包围区域.

§12.3 场的环量与旋度

习 题 12.3 A

1. 设函数 $u=\mathrm{e}^{xyz}+\displaystyle\int_0^{xy}t\sin t\mathrm{d}t+\int_0^{yz}t^2\mathrm{d}t$, 求 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$.

解 注意到梯度场为无旋场，有

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0.$$

2. 求向量场 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}(\arctan\dfrac{y}{x})$ 沿围线 L 的环量.

解 由于

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

所以当 L 不包围原点时,

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

当 L 包围原点时,

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{L_\varepsilon}\frac{-y}{\varepsilon^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{\varepsilon^2}\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

其中 L_ε 为正向 $x^2+y^2=\varepsilon^2$.

3. 设 $f(r)$ 有连续的二阶导数， $\boldsymbol{r}=(x,y,z), r=|\boldsymbol{r}|$ 且 $\boldsymbol{a}$ 为常向量，求

(1) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$; (2) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{a}]$;

(3) $\mathrm{div}[\boldsymbol{r}\times(f(r)\boldsymbol{a})]$; (4) $\mathrm{div}[\boldsymbol{r}\times\mathrm{grad}\ f(r)]$

(5) $\mathrm{div}[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}]$; (6) $\mathrm{div}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})]$.

解 (1) 根据公式 $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{g})=f\mathrm{rot}\boldsymbol{g}+\mathrm{grad}f\times\boldsymbol{g}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}] &= f(r)\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}+\mathrm{grad}f(r)\times\boldsymbol{r}\\ &= \boldsymbol{0}+f'(r)\mathrm{grad}\,r\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{a}] &= f(r)\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathrm{grad}f(r)\times\boldsymbol{a}\\ &= 0+f'(r)\mathrm{grad}\,r\times\boldsymbol{a}=\frac{f'(r)}{r}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

(3) 根据公式 $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[\boldsymbol{r}\times(f(r)\boldsymbol{a})] &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}\cdot f(r)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{rot}\,[f(r)\boldsymbol{a}])\\ &= 0-\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{grad}f(r)\times\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{r}\cdot(\frac{f'(r)}{r}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})=0.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[\boldsymbol{r}\times\mathrm{grad}\ f(r)] &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\ f(r)-\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ f(r))\\ &= 0\cdot\mathrm{grad}\ f(r)-\boldsymbol{r}\cdot 0=0.\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}] &= \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\cdot\boldsymbol{a}\\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})0=\boldsymbol{a}^2.\end{aligned}$$

(6) 根据公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})] &= \nabla[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}]\\ &= \boldsymbol{a}^2\nabla\boldsymbol{r}-\mathrm{div}[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}]=3\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}^2=2\boldsymbol{a}^2.\end{aligned}$$

4. 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 为无旋场，证明 $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ 为无散场.

证 由于

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{g}=0,$$

所以 $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ 为无散场.

5. 求下列向量场的旋度：

(1) $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$; (2) $\boldsymbol{b}=(xyz,xyz,xyz)$; (3) $\boldsymbol{c}=(x^2,y^2,z^2)$.

解 (1)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

(2)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xyz & xyz & xyz\end{pmatrix}=(zx-xy,xy-yz,yz-zx).$$

(3)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & y^2 & z^2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

6. 设 $F(r)$ 为可微函数， $\boldsymbol{r}=(x,y,z),r=|\boldsymbol{r}|$, 证明：

(1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$; (2) $\operatorname{rot}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=0$; (3) $\operatorname{rot}[F(r)\boldsymbol{r}]=0$.

证 (1)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

(2)
$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{r}}{r} &= \frac{1}{r}\operatorname{rot}\boldsymbol{r}+\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\boldsymbol{r}\\ &= \mathbf{0}-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{r}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\operatorname{rot}[F(r)\boldsymbol{r}] &= F(r)\operatorname{rot}\boldsymbol{r}+\operatorname{grad}F(r)\times\boldsymbol{r}\\ &= \mathbf{0}+F'(r)\operatorname{grad}r\times\boldsymbol{r}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

7. 求向量场 $\boldsymbol{f}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 沿下列曲线的环量:

(1) 沿着圆周 $x^2+y^2=1, z=0$;

(2) 沿着圆周 $(x+2)^2+y^2=1, z=0$.

解 (1) 沿着圆周 $L: x^2+y^2=1, z=0$ 的正向环量为

$$\begin{aligned}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z &= \iint_D \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}\\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.\end{aligned}$$

(2) 沿着圆周 $L: (x-2)^2+y^2=1, z=0$ 的正向环量为

$$\begin{aligned}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z &= \iint_D \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & c\end{vmatrix}\\ &= \iint_{(x-2)^2+y^2\le 1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.\end{aligned}$$

8. 有一质量为 M 的固定质点位于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点，另一质点 m 沿该椭圆正向运动一圈，试求引力对质点 m 所做的功.

解 不妨设 $M(c,0)$, 则 $\boldsymbol{r}=(x-c,y)$, 引力为

$$\boldsymbol{f}=(P,Q)=\frac{GMm}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}(x-c,y).$$

由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{3(x-c)y}{[(x-c)^2+y^2]^{5/2}}$, 所以引力对质点 m 所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \oint_L \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \oint_L \frac{GMm}{[(x-c)^2+y^2]^{3/2}}\,[(x-c)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y] \\ &= \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \end{aligned}$$

习 题 12.3 B

1. 证明下列向量场为有势场，并求其势函数：

(1) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(y\cos xy)\,\boldsymbol{i}+(x\cos xy)\,\boldsymbol{j}+\sin z\,\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(2x\cos y-y^2\sin x)\,\boldsymbol{i}+(2y\cos x-x^2\sin y)\,\boldsymbol{j}$.

证 (1) 由于

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y\cos xy & x\cos xy & \sin z \end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

所以向量场 $\boldsymbol{f}$ 为有势场，其势函数为

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (y\cos xy)\,\mathrm{d}x+(x\cos xy)\,\mathrm{d}y+\sin z\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} 0\,\mathrm{d}x+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} (x\cos xy)\,\mathrm{d}y+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} \sin z\,\mathrm{d}z \\ &= \sin xy-\cos z+1. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x\cos y-y^2\sin x & 2y\cos x-x^2\sin y & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

所以向量场 $\boldsymbol{f}$ 为有势场，其势函数为

$$\begin{aligned}U(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(2x\cos y-y^2\sin x)\,\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y+0\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}2x\,\mathrm{d}x+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}(2y\cos x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y\\ &= y^2\cos x+x^2\cos y.\end{aligned}$$

2. 证明不论 C 为何种简单闭曲线都有

$$\oint_C 2xz\,\mathrm{d}x+2yz^2\,\mathrm{d}y+(x^2+2y^2z-1)\,\mathrm{d}z=0.$$

证 由于

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xz & 2yz^2 & x^2+2y^2z-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

所以

$$\oint_C 2xz\,\mathrm{d}x+2yz^2\,\mathrm{d}y+(x^2+2y^2z-1)\,\mathrm{d}z=\iint_S\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

其中 $\partial S=C$.

3. 证明无源场

$$\boldsymbol{B}=P(x,y,z)\,\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\,\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$$

为向量场

$$\boldsymbol{A}=U(x,y,z)\,\boldsymbol{i}+V(x,y,z)\,\boldsymbol{j}+W(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$$

的旋度场，其中

$$U(x,y,z)=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y,$$

$$V(x,y,z)=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

$$W(x,y,z)=C\ (\mathrm{C}\text{ 为任意常数}).$$

并用此公式计算旋度场为 $\boldsymbol{B}=y^2\,\boldsymbol{i}+z^2\,\boldsymbol{j}+x^2\,\boldsymbol{k}$ 的向量场 $\boldsymbol{A}$.

证 (1) 由于 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ 且

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=P(x,y,z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}=Q(x,y,z),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}&=-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}z+R(x,y,z_0)\\&=-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z+R(x,y,z)\\&=-\int_{z_0}^{z}\operatorname{div}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}z+R(x,y,z)=R(x,y,z).\end{aligned}$$

因此，有

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{rot}(U,V,W)=(P,Q,R)=\boldsymbol{B}.$$

(2) 由 $\boldsymbol{B}=(P,Q,R)=(y^2,z^2,x^2)$ 可知

$$U=\int_0^z z^2dz-\int_0^y x^2dy+C_1=\frac{1}{3}z^3-x^2y+C_1,$$

$$V=-\int_0^z y^2dz+C_2=-y^2z+C_2,$$

$$W=C.$$

于是对 $\boldsymbol{A}=(\frac{1}{3}z^3-x^2y+C_1,-y^2z+C_2,C)$, 有 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

4. 求下列全微分的位势函数 $u(x,y,z)$:

(1) $\mathrm{d}u=(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z$;

(2) $\mathrm{d}u=(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y$.

解 (1) 由于

$$\operatorname{rot}\ (x^2-2yz,y^2-2xz,z^2-2xy)$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-2yz & y^2-2xz & z^2-2xy \end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

所以位势函数存在，计算可得

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}x^2\,\mathrm{d}x+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}y^2\,\mathrm{d}y+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\operatorname{rot}\ (3x^2+6xy^2,6x^2y+4y^3,0)$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2+6xy^2 & 6x^2y+4y^3 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

所以位势函数存在，计算可得

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y+0\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}3x^2\,\mathrm{d}x+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y \\ &= x^3+4x^2y^2+y^4. \end{aligned}$$

5. 证明向量场

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=(2x+y)\,\boldsymbol{i}+(x+4y+2z)\,\boldsymbol{j}+(2y-6z)\,\boldsymbol{k}$$

为调和场，并求其调和函数.

证 由于

$$\operatorname{div}\boldsymbol{f}=2+4-6=0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x+y & x+4y+2z & 2y-6z\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 为调和场，其调和函数为

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(2x+y)\,\mathrm{d}x+(x+4y+2z)\,\mathrm{d}y+(2y-6z)\,\mathrm{d}z\\&=\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}2x\,\mathrm{d}x+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}(x+4y)\,\mathrm{d}y+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}(2y-6z)\,\mathrm{d}z\\&=x^2+xy+2x^2y^2+2yz-3z^3.\end{aligned}$$

6. 已知磁场 $\boldsymbol{H}=((z-y)^2,z,y)$, 求磁力线方程.

解 磁力线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{y}.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{y}$ 可得 $\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}z^2$, 即 $y^2=z^2+C_1$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}(z-y)}{y-z}=\dfrac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2}$ 可得 $\mathrm{d}(z-y)^2+2\mathrm{d}x=0$, 即 $(z-y)^2+2x=C_2$.

故所求磁力线方程为

$$y^2=z^2+C_1,(z-y)^2+2x=C_2.$$

7. 求流体流速场 $\boldsymbol{v}=xy^2\,\boldsymbol{i}+x^2y\,\boldsymbol{j}+zy^2\,\boldsymbol{k}$ 的流线方程.

解 流线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\frac{\mathrm{d}y}{x^2y}=\frac{\mathrm{d}z}{zy^2}.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$ 可得 $\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}y^2$, 即 $x^2=y^2+C_1$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ 可得 $\mathrm{d}\ln x=\mathrm{d}\ln z$, 即 $x=C_2z$.

故所求流线方程为

$$x^2=y^2+C_1, x=C_2z.$$

8. 求引力场 $\boldsymbol{f}=-y\,\boldsymbol{i}+x\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}$ 沿曲线

$$x=a\cos^2\theta,\ y=a\sin^3\theta,\ z=a\sin^3\theta$$

按 θ 增加方向运动一周所做的功.

解 所求功为

$$\begin{aligned}W&=\int_L x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}[2a^2\sin^4\theta\cos\theta+3a^2\cos^3\theta\sin\theta+3a^2\sin^5\theta\cos\theta]\mathrm{d}\theta=0.\end{aligned}$$

9. 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 是两个向量场, 证明

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+(\mathrm{div}\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}-(\mathrm{div}\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}.$$

证 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{i}&=\frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix}f_1&f_2\\g_1&g_2\end{vmatrix}-\frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix}f_3&f_1\\g_3&g_1\end{vmatrix}\\&=\Big[(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+(\mathrm{div}\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}-(\mathrm{div}\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}\Big]\cdot\boldsymbol{i},\end{aligned}$$

所以原式成立.

10. 已知数量场的球坐标表示为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sin\theta+r^2\cos2\varphi,$$

求 Δu.

解

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial(2r^3\cos 2\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\Big)-\frac{4\cos 2\varphi}{\sin^2\theta}\\ &= 6r\cos 2\varphi+\frac{\cos 2\theta}{r^2\sin\theta}-\frac{4\cos 2\varphi}{\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

11. 已知向量场的柱坐标表示为

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,z)=r^2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r+r^2\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta,$$

求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$.

解

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(r^2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r+r^2\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= \Big[\frac{\partial(r^2\sin\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\cos\theta)}{\partial\theta}\Big]\boldsymbol{e}_z=(2r\sin\theta+r\sin\theta)\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

12. 证明：

(1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)=u\operatorname{div}\operatorname{grad}v+\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v$;

(2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)-\operatorname{div}(v\operatorname{grad}u)=u\operatorname{div}\operatorname{grad}v-v\operatorname{div}\operatorname{grad}u$.

证 (1)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v) &= \operatorname{div}(u\frac{\partial v}{\partial x},u\frac{\partial v}{\partial y},u\frac{\partial v}{\partial z})\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(u\frac{\partial v}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(u\frac{\partial v}{\partial z}\Big)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\\ &= \operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v+u\operatorname{div}\operatorname{grad}v.\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 有

$$\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)=u\operatorname{div}\operatorname{grad}v+\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v,$$

$$\operatorname{div}(v\operatorname{grad}u)=v\operatorname{div}\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v\cdot\operatorname{grad}u,$$

两式相减，有

$$\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)-\operatorname{div}(v\operatorname{grad}u)=u\operatorname{div}\operatorname{grad}v-v\operatorname{div}\operatorname{grad}u.$$

13. 证明：

(1) $\displaystyle\iint_{\partial\Omega}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}(\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$

(2) $\displaystyle\iint_{\partial\Omega}u\,v\operatorname{grad}w\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

$$=\iiint_{\Omega}\left[u\operatorname{div}(v\operatorname{grad}w)+v\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}w\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证 (1) 利用高斯公式，有

$$\iint_{\partial\Omega}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega}(\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 利用高斯公式，有

$$\iint_{\partial\Omega}u\,v\operatorname{grad}w\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}(u\,v\operatorname{grad}w)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[u\operatorname{div}(v\operatorname{grad}w)+v\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}w\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

14. 已知柱坐标数量场为

$$u(r,\theta,z)=\Big(\frac{a^2}{r^2}-1\Big)r\cos\theta,\ (r\neq0).$$

求 $\operatorname{grad}u$ 和 $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$ 的柱坐标表达式.

解 (1)

$$\begin{aligned}\nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \\ &= -\Big(\frac{a^2}{r^2}+1\Big)\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \Big(\frac{a^2}{r^2}-1\Big) r\sin\theta \boldsymbol{e}_\theta.\end{aligned}$$

(2) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$

$$= \Big(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot\Big(-\Big(\frac{a^2}{r^2}+1\Big)\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \Big(\frac{a^2}{r^2}-1\Big)r\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\Big)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{a^2}{r^2}+1\Big)\cos\theta - \Big(\frac{a^2}{r^2}-1\Big)\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta$$

$$= \frac{2a^2\cos\theta}{r^3} - \Big(\frac{a^2}{r^2}-1\Big)\cos\theta.$$

15. 已知球坐标向量场为

$$\boldsymbol{f}(r,\theta,\varphi) = \frac{\cos\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\theta.$$

求 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}$ 的球坐标表达式.

解

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{f} &= \Big(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)\cdot\Big(\frac{\cos\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\theta\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r^2} = \frac{-\cos\theta}{r^3}.\end{aligned}$$

16. 证明 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 只依赖于 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ 的解是

$$u = C_1\ln\rho + C_2.$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

解 记 $u = u(\rho)$, 则

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(r\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''(\rho).$$

由于微分方程 $u''(\rho)=0$ 的全解为 $u=C_1\ln\rho+C_2$，所以 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 只依赖于 ρ 的解是 $u=C_1\ln\rho+C_2$.

17. 已知球坐标数量场为

$$u(r,\theta,\varphi)=2r\sin\varphi+r^2\cos\theta.$$

求 Δu 的球坐标表达式.

解

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(2r^2\sin\theta+2r^3\cos\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-2r\sin^2\theta)-\frac{2\sin\varphi}{r\sin^2\theta}\\ &= \frac{4\sin\theta}{r}+2\cos\theta-\frac{2\sin\varphi}{r\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

18. 已知柱坐标向量场为

$$\boldsymbol{f}(r,\theta,z)=r\cos^2\theta\,\boldsymbol{e}_r+r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta.$$

求 $\nabla\times\boldsymbol{f}$ 的柱坐标表达式.

解

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{f} &= \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(r\cos^2\theta\,\boldsymbol{e}_r+r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= \left(\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cos^2\theta)}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_z\\ &= (\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

19. 对于给定的向量场 $\boldsymbol{f}$, 如果方程 $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{f}$ 有解, 则必有无穷多解.

证 由于 $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解, 比如任意向量场 $(u(x),v(y),w(z))$，所以 $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{f}$ 有无穷多解, 比如 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+(u(x),v(y),w(z))$, 其中 $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{f}$.

20. 计算梯度场 $\boldsymbol{f}=\operatorname{grad}(\arctan\dfrac{y}{x})$ 沿封闭曲线 C 的环量，并由此证明代数基本定理.

解 设曲线 C 环绕原点的次数为 n, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$, 则所求环量为

$$I = \int_C \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \mathrm{d}\arctan\frac{y}{x}$$

$$= \int_0^{2n\pi} \mathrm{d}\theta = 2n\pi.$$

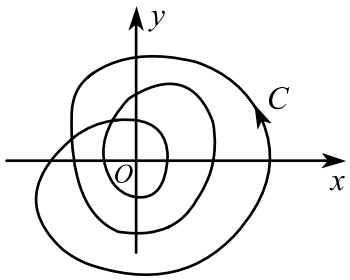

图 12.1

设 $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = P(x,y) + iQ(x,y)$ 为复多项式, 其中 P, Q 为实函数. 取正数 $R > 1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$,

$$w = \frac{a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{z^n},$$

则

$$|w| < 1, \quad f(z) = z^n(1+w).$$

由此可知, 当 z 绕圆周 $C_R : x^2 + y^2 = R^2$ 转一圈时, $f(z)$ 绕原点转 n 圈, 故

$$\oint_{C_R} \frac{P\mathrm{d}Q - Q\mathrm{d}P}{P^2+Q^2} = \oint_{C_R} \mathrm{d}\arctan(\frac{Q}{P})$$

$$= 2n\pi \neq 0.$$

如果 $f(z) = 0$ 无解, 则 $P^2 + Q^2 = |f(z)| \neq 0$, 于是由格林公式可知

$$\oint_{C_R} \frac{P\mathrm{d}Q - Q\mathrm{d}P}{P^2+Q^2} = \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

前后矛盾, 这表明 $f(z) = 0$ 必有解.

总 习 题 十二

1. 填空：

(1) 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在 $P(1,0,-1)$ 点处指向外侧的法向量，则 $u=\dfrac{6x^2+8y^2}{z}$ 在 P 点处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数 $=$ _____.

(2) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,-2,2)}=$ _____.

(3) 设 $r=\ln(x^2+y^2+z^2)$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,2,-2)}=$ _____.

(4) 设 $r=\ln(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)=$ _____.

(5) 设 $\boldsymbol{r}=(xy^2,y\mathrm{e}^z,x\ln(1+z^2))$, 则 $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=$ _____.

(6) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 $A(1,0,1)$ 点处沿 A 点指向 $B(3,-2,2)$ 点方向的方向导数为 _____.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= \nabla(2x^2+3y^2+z^2)\Big|_{(1,0,-1)}\\ &= (4x,6y,2z)\Big|_{(1,0,-1)}=2(2,0,-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla u\ (1,0,-1) &= \Big(\frac{12x}{z},\frac{16y}{z},-\frac{6x^2+8y^2}{z^2}\Big)\Big|_{(1,0,-1)}\\ &= -12(2,0,1),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\nabla u(1,0,-1)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=-12(2,0,1)\cdot\frac{(2,0,-1)}{\sqrt{5}}=-\frac{36}{\sqrt{5}}.$$

(2)

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,-2,2)}=\operatorname{div}\frac{(x,y,z)}{r}\Big|_{(1,-2,2)}$$

$$= \frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\Big|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{3}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,2,-2)} &= \operatorname{div}\frac{2(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(1,2,-2)}\\ &= \frac{6}{x^2+y^2+z^2} - \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

(4) 记 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) &= \operatorname{div}\frac{(x,y,z)}{(1+u)u}\\ &= \frac{3}{(1+u)u} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(1+u)^2u^3} = \frac{3}{(1+u)u} - \frac{1}{(1+u)^2u}.\end{aligned}$$

(5) $\operatorname{div}\boldsymbol{r} = y^2 + \mathrm{e}^z + \dfrac{2xz}{1+z^2}$.

(6) 由于

$$\nabla u(1,0,1) = \frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\Big(1, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big)\Big|_{(1,0,1)} = \Big(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\Big),$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u(1,0,1)\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \Big(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\Big)\cdot\frac{(2,-2,1)}{3} = \frac{1}{2}.$$

2. 求速度场 $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 穿过封闭锥面 $z^2 = x^2+y^2,\ 0\le z\le h$ 的流量.

解 所求流量为

$$\begin{aligned}I &= \oiint_S (x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \iiint_\Omega 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi h^3.\end{aligned}$$

3. 求速度场 $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ 穿过由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 围成四面体的外表面的流量.

解 所求流量为

$$\begin{aligned} I &= \oiint_S (x^2, y^2, z^2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iiint_\Omega 2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\int_0^1 z\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 3\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4. 求由位于坐标原点的质量为 m 的质点所产生的引力场的位势函数.

解 引力场为 $\boldsymbol{f} = \dfrac{Gm}{r^3}(x, y, z)$, 位势函数为

$$W = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{Gm}{r^3}(x\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) = Gm\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big).$$

5. 有一磁场 $\boldsymbol{F} = -\dfrac{m_0}{r^3}\boldsymbol{r}$, 求其通过中心在原点、半径为 R 的球面的通量. 其中 $r = |\boldsymbol{r}|$.

解 所求通量为

$$\begin{aligned} I &= \iint_S -\frac{m_0}{r^3}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \\ &= -\frac{m_0}{R^3}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} (x, y, z) \cdot \sin\theta(x, y, z)\mathrm{d}\theta = -\frac{4\pi m}{R}. \end{aligned}$$

6. 已知数量场 $v(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, 求沿 $v(x, y, z)$ 的梯度方向的方向导数.

解 所求方向导数为

$$|\nabla u| = \Big|\Big(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\Big)\Big| = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

7. 求向量场 $\boldsymbol{A} = -y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$ 沿圆周

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

的环量.

解 所求环量为

$$\begin{aligned} I &= \oint_L -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z \\ &= \iint_\Sigma 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

8. 已知 $\boldsymbol{F} = (axz + x^2, by + xy^2, z - z^2 + cxz - 2xyz)$, 试确定常数 a, b, c, 使得 $\boldsymbol{F}$ 为一无散场.

解 由

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{F} = az + 2x + b + 1 - 2z + cx = 0$$

可得, $a = 2, b = -1, c = -2$.

9. 设 S 是光滑的封闭曲面, $\boldsymbol{v}$ 是一个固定的向量, 证明

$$\iint_S \cos\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle \,\mathrm{d}S = 0.$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向.

证 不妨设 $\boldsymbol{v}$ 为单位向量, 由于 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_S \cos\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle \,\mathrm{d}S &= \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iiint_\Omega \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0. \end{aligned}$$

10. 设 V 是光滑封闭曲面 S 的包围区域, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 是调和函数 $u = u(x, y, z)$ 在曲面 S 上的外法线方向的方向导数, 证明

$$\iiint_V (\nabla u)^2 \,\mathrm{d}V = \oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S.$$

证 由于

$$\Delta u = 0, \quad \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S,$$

所以由第一 Green 公式

$$\iiint_V (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\mathrm{d}V = \iint_S (u\nabla v)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可知

$$\iiint_V (\nabla u)^2 \,\mathrm{d}V = \oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S.$$

11. 设 V 是光滑封闭曲面 S 的包围区域， $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的单位外法线向量，若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 是 S 上的光滑向量场，证明

$$\oiint_S (\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S = \iiint_V \left[\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})\right]\mathrm{d}V.$$

证 由于

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g}),$$

所以

$$\begin{aligned}\oiint_S (\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S &= \oiint_S (\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \iiint_V \mathrm{div}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \iiint_V \left[\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})\right]\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

12. 设 V 是光滑封闭曲面 S 的包围区域，若 $\boldsymbol{f},g$ 是 S 上的光滑场，证明

$$\oiint_S (\boldsymbol{f}\times\nabla g)\,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla g\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V.$$

证 由于

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{f}\times\nabla g) = \nabla g\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\nabla g) = \nabla g\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}),$$

所以

$$\oiint_S (\boldsymbol{f}\times\nabla g)\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}(\boldsymbol{f}\times\nabla g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \nabla g\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V.$$

第十三章　常微分方程 II

§12.1　一阶微分方程

习 题 12.1 A

1. 判断下列方程是否为全微分方程，若是则求其解：

(1) $\Big(x+\dfrac{2}{y}\Big)\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$;

(2) $(1+y)\mathrm{d}x+(1-x)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x+(x+y^3)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=0$;

(5) $(2y^2-4x+5)\mathrm{d}x=(4-2y+4xy)\mathrm{d}y$;

(6) $(\sin x\sin y-x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^y+\cos x\cos y)\mathrm{d}x$.

解 (1) 由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x+\frac{2}{y}\Big)=\frac{\partial y}{\partial x}=1,$$

所以原方程是全微分方程，其通解为

$$\begin{aligned}0\ &=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\Big(x+\frac{2}{y}\Big)\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+C\\ &=\int_0^x\mathrm{d}x+\int_1^y\Big(x+\frac{2}{y}\Big)\mathrm{d}y+C=xy+2\ln|y|+C.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{\partial(1+y)}{\partial y}=1\neq\frac{\partial(1-x)}{\partial x}=-1,$$

所以原方程不是全微分方程.

(3) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(y-x^3)=\frac{\partial}{\partial x}(x+y^3)=1,$$

所以原方程是全微分方程，其通解为

$$\begin{aligned}0 &= \int_{(0,0)}^{(x,y)}(y-x^3)\mathrm{d}x+(x+y^3)\mathrm{d}y+C\\ &= \int_0^x(-x^3)\mathrm{d}x+\int_0^y(x+y^3)\mathrm{d}y+C=-\frac{1}{4}x^4+xy+\frac{1}{4}y^4+C.\end{aligned}$$

(4) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y\neq\frac{\partial(x-2y)}{\partial x}=1,$$

所以原方程不是全微分方程.

(5) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y^2-4x+5)=4y\neq\frac{\partial}{\partial x}\big[-(4-2y+4xy)\big]=-4y,$$

所以原方程不是全微分方程.

(6) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}\big[-(\mathrm{e}^y+\cos x\cos y)\big]=\frac{\partial}{\partial x}(\sin x\sin y-x\mathrm{e}^y)=\cos x\sin y-\mathrm{e}^y,$$

所以原方程是全微分方程，其通解为

$$\begin{aligned}0 &= \int_{(0,0)}^{(x,y)}(\sin x\sin y-x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y-(\mathrm{e}^y+\cos x\cos y)\mathrm{d}x+C\\ &= -\int_0^x(1+\cos x)\mathrm{d}x+\int_0^y(\sin x\sin y-x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y+C\\ &= -x\mathrm{e}^y-\cos y\sin x+C.\end{aligned}$$

2. 验证下列方程是全微分方程，并求出其解：

(1) $(x^2+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(x^2-y^2)\mathrm{d}y+(x+2xy)\mathrm{d}x=0$;

(3) $(y-3x^2)\mathrm{d}x-(4y-x)\mathrm{d}y=0$;

(4) $2(3xy^2+2x^3)\mathrm{d}x+3(2x^2y+y^2)\mathrm{d}y=0$;

(5) $\Big(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\Big)\mathrm{d}x+\Big(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}\Big)\mathrm{d}y=0$;

(6) $\Big[\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\Big]\mathrm{d}x+\Big[\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{y}\Big]\mathrm{d}y=0.$

解 (1) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y)=\frac{\partial}{\partial x}(x-2y)=1,$$

所以原方程是全微分方程，其通解为

$$\begin{aligned}0 &= \int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y+C\\ &= \int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(x-2y)\mathrm{d}y+C=\frac{1}{3}x^3+xy-y^2+C.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+2xy)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)=2x,$$

所以原方程是全微分方程，其通解为

$$\begin{aligned}0 &= \int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2-y^2)\mathrm{d}y+(x+2xy)\mathrm{d}x+C\\ &= \int_0^x x\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-y^2)\mathrm{d}y+C=\frac{1}{2}x^2+x^2y-\frac{1}{3}y^3+C.\end{aligned}$$

(4) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}\big[2(3xy^2+2x^3)\big]=\frac{\partial}{\partial x}\big[3(2x^2y+y^2)\big]=12xy,$$

所以原方程是全微分方程，其通解为

$$0 = \int_{(0,0)}^{(x,y)}2(3xy^2+2x^3)\mathrm{d}x+3(2x^2y+y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$= \int_0^x 4x^3\mathrm{d}x + \int_0^y 3(2x^2y + y^2)\mathrm{d}y + C = x^4 + 2x^2y^2 + y^3 + C.$$

(5) 由于

$$\mathrm{d}\Big(\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y}\Big) = \Big(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\Big)\mathrm{d}x + \Big(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\Big)\mathrm{d}y,$$

所以原方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} = C.$$

(6) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\Big] = \frac{-2xy}{(x-y)^3},$$

所以原方程是全微分方程，凑微分可得

$$\Big[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\Big]\mathrm{d}x + \Big[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\Big]\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{x^2\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$$

$$= \mathrm{d}\Big(\ln\Big|\frac{x}{y}\Big| + \frac{xy}{x-y}\Big).$$

故通解为

$$\ln\Big|\frac{x}{y}\Big| + \frac{xy}{x-y} = C.$$

3. 求下列隐式方程的通解：

(1) $xy'^3 = 1 + y'$;　　(2) $x\sqrt{1+y'^2} = y'$;

(3) $\sin y' = x$;　　(4) $y = y'^2\mathrm{e}^{y'}$;

(5) $x^2 + y'^2 = 1$;　　(6) $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1$.

解 (1) 令 $y' = \dfrac{1}{t}$, 则原方程化为

$$x = t^3 + t^2.$$

两端关于 y 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t + 2.$$

解之得

$$y = \frac{3}{2}t^2 + 2t + C.$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x = t^3 + t^2, \\ y = \dfrac{3}{2}t^2 + 2t + C. \end{cases}$$

(2) 令 $y' = \tan t$, 则原方程化为

$$x = \sin t.$$

两端关于 y 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sin t.$$

解之得

$$y = -\cos t + C.$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\cos t + C. \end{cases}$$

(3) 令 $y' = p$, 则原方程化为

$$x = \sin p.$$

两端关于 y 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = p\cos p.$$

解之得

$$y = p\sin p + \cos p + C.$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \sin p, \\ y = p\sin p + \cos p + C. \end{cases}$$

(4) 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$y=p^2\mathrm{e}^p.$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=2\mathrm{e}^p+p\mathrm{e}^p.$$

解之得

$$x=\mathrm{e}^p+p\mathrm{e}^p+C.$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases}x=\mathrm{e}^p+p\mathrm{e}^p+C,\\ y=p^2\mathrm{e}^p.\end{cases}$$

(5) 令 $y'=\cos t$, 则原方程化为

$$x=\sin t.$$

两端关于 y 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos^2 t.$$

解之得

$$y=\frac{t}{2}t^2+\frac{1}{4}\sin 2t+C.$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\dfrac{t}{2}t^2+\dfrac{1}{4}\sin 2t+C.\end{cases}$$

(5) 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$y=\sqrt{1+p^2}.$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=\frac{2}{\sqrt{1+p^2}}.$$

解之得

$$x = 2\ln(p + \sqrt{1+p^2}) + C.$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x = 2\ln(p + \sqrt{1+p^2}) + C, \\ y = \sqrt{1+p^2}. \end{cases}$$

习 题 12.1 B

1. 用积分因子法求解下列方程：

(1) $(3x^2 - y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y = 0$;

(2) $(xy - 1)\mathrm{d}x + (x^2 - xy)\mathrm{d}y = 0$;

(3) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x + 3x^5y^4\mathrm{d}y = 0$;

(4) $y' + P(x)y = Q(x)$;

(5) $(y - xy^2)\mathrm{d}x + (x + x^2y^2)\mathrm{d}y = 0$;

(6) $(y + x^4y^4)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$;

(7) $(2y^2 + \dfrac{1}{y^2})\mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y = 0$;

(8) $(x - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0$;

(9) $y\mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y = 0$;

(10) $\big[x\cos(x+y) + \sin(x+y)\big]\mathrm{d}x + x\cos(x+y)\mathrm{d}y = 0$;

(11) $(y\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x + (y\sin x + x\cos x)\mathrm{d}y = 0$;

(12) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y} + \sqrt{1 + \Big(\dfrac{x}{y}\Big)^2}$.

解 (1) 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y,$$

所以有积分因子 $\mu = 1$. 故原方程有通解

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 - y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y + C \\ &= \int_0^x 3x\mathrm{d}x - \int_0^y 2xy\mathrm{d}y + C = \frac{3}{2}x^2 - xy^2 + C. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{1}{N}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = -\frac{1}{x},$$

所以有积分因子

$$\mu = \exp\Big(-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{1}{x}.$$

故原方程有通解

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} (y - \frac{1}{y})\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y + C \\ &= \int_1^x \Big(-\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x + \int_0^y (x - y)\mathrm{d}y + C = xy - \ln x - \frac{1}{2}y^2 + C. \end{aligned}$$

(3) 由于原方程可变为

$$\mathrm{d}(xy) + 3(xy)^5 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0,$$

所以有积分因子

$$\mu = \frac{1}{(xy)^5}.$$

故原方程有通解

$$\int \frac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^5} + 3\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C.$$

积分得

$$-\frac{1}{4(xy)^4} + 3\ln|y| = C.$$

(4) 用积分因子

$$\mu = \exp\Big(\int P(x)\mathrm{d}x\Big)$$

乘原方程两端可得

$$\Big(\exp\Big(\int P(x)\mathrm{d}x\Big)\,y\Big)' = \exp\Big(\int P(x)\mathrm{d}x\Big)Q(x).$$

积分得

$$\exp\Big(\int P(x)\mathrm{d}x\Big)\,y = \int \exp\Big(\int P(x)\mathrm{d}x\Big)Q(x)\mathrm{d}x + C.$$

此即

$$y = \exp\Big(-\int P(x)\mathrm{d}x\Big)\Big[\int \exp\Big(\int P(x)\mathrm{d}x\Big)Q(x)\mathrm{d}x + C\Big].$$

(5) 由于原方程可变为

$$\mathrm{d}(xy) + (xy)^2\mathrm{d}(y - \ln|x|) = 0,$$

所以有积分因子

$$\mu = \frac{1}{(xy)^2}.$$

故原方程有通解

$$\int \frac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^2} + \int \mathrm{d}(y - \ln|x|) = C.$$

积分得

$$-\frac{1}{xy} + (y - \ln|x|) = C.$$

(6) 由于原方程可变为

$$\mathrm{d}(xy) + (xy)^4\mathrm{d}x = 0,$$

所以有积分因子

$$\mu = \frac{1}{(xy)^4}.$$

故原方程有通解为

$$\int \frac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^4} + \int \mathrm{d}x = C.$$

积分得

$$-\frac{1}{3(xy)^3} + x = C.$$

(7) 用 xy^2 乘方程两端，有

$$(2xy^4+x)\mathrm{d}x+4x^2y^3\mathrm{d}y=0.$$

凑微分可得

$$x\mathrm{d}x+\mathrm{d}(x^2y^4)=0.$$

积分可得原方程通解为

$$\frac{1}{2}x^2+x^2y^4=C.$$

(8) 用 x^2 去除方程两端，有

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{2xy\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x}{x^2}=0.$$

凑微分可得

$$\mathrm{d}\ln|x|+\mathrm{d}\Big(\frac{y^2}{x}\Big)=0.$$

积分可得原方程通解为

$$\ln|x|+\frac{y^2}{x}=C.$$

(9) 用 y^2 去除方程两端，有

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

凑微分可得

$$\mathrm{d}\Big(\frac{x}{y}\Big)+\mathrm{d}\ln|y|=0.$$

积分可得原方程通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C.$$

(10) 原方程可变为

$$\sin(x+y)\mathrm{d}y-x\mathrm{d}\sin(x+y)=0.$$

用 $\sin^2(x+y)$ 去除方程两端，有

$$\mathrm{d}\frac{x}{\sin(x+y)}=0.$$

故原方程通解为

$$\frac{x}{\sin(x+y)}=C.$$

(11) 由于

$$\frac{1}{M}\Big(-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\Big)=1,$$

所以有积分因子

$$\mu=\exp\Big(\int \mathrm{d}y\Big)=\mathrm{e}^{y}.$$

故原方程有通解

$$\begin{aligned}0 &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathrm{e}^{y}(y\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{y}(y\sin x + x\cos x)\mathrm{d}y + C\\ &= \int_{0}^{x}(-x\sin x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{y}\mathrm{e}^{y}(y\sin x + x\cos x)\mathrm{d}y + C\\ &= x\mathrm{e}^{y}\cos x + \mathrm{e}^{y}(y-1)\sin x + C.\end{aligned}$$

(12) 方程可变为

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x.$$

这是一个分离变量方程，有积分因子

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{d}x.$$

积分得

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C.$$

2. 用引入参数法求解下列方程的通解：

(1) $x^3+y'^3-3xy'=0$;

(2) $y'^3 - y^2(a - y') = 0$;

(3) $y = \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{x^2}{2}$;

(4) $y = xy' + y' - y'^2$;

(5) $y = 2xy' + y'^2$;

(6) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$;

(7) $y'^4 = 4y(xy' - 2y)^2$;

(8) $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 + 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0$;

(9) $y^2(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) + x(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) = 0$;

(10) $xy' - y = 2x^2y(y^2 - x^2)$.

解 (1) 令 $y' = tx$, 则原方程可变为

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}.$$

于是

$$y' = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{9(1 - 2t^3)t^2}{(1 + t^3)^3}.$$

积分可得原方程的参数通解

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{3(1 + 4t^3)}{2(1 + t^3)^2} + C. \end{cases}$$

(2) 令 $y' = ty$, 则原方程变为

$$y = \frac{a}{t(t^2 + 1)}.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3t^2 + 1}{t^2(t^2 + 1)},$$

所以

$$x = \frac{1}{t} - 2\arctan t + C.$$

于是原方程的参数通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} - 2\arctan t + C, \\ y = \dfrac{a}{t(t^2+1)}. \end{cases}$$

(3) 令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, 则得

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

两端关于 x 求导可得

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p + x.$$

整理得

$$\Big(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - 1\Big)(2p - x) = 0.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - 1 = 0$ 可得通解

$$y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2.$$

(4) 令 $y' = p$, 则原方程可变为

$$y' = p = \frac{x+1}{2}.$$

解之可得

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C.$$

(5) 令 $y' = p$, 则原方程可变为

$$y = 2xp + p^2.$$

两端关于 x 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2}{p}x - 2.$$

解之可得

$$x=-\frac{2}{3}p+\frac{C}{p^2}.$$

于是原方程的参数通解为

$$\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3}p+\dfrac{C}{p^2},\\ y=2xp+p^2.\end{cases}$$

(6) 令 $y'=p$, 则原方程可变为

$$x=\frac{y}{p}+\frac{1}{p^2}.$$

两端关于 y 求导可得

$$\frac{1}{p^2}\Big(y+\frac{2}{p}\Big)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=0.$$

依赖于 p 的解为

$$y=-\frac{2}{p}.$$

于是原方程的参数通解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{y}{p}+\dfrac{1}{p^2},\\ y=-\dfrac{2}{p}.\end{cases}$$

(7) 解出 x, 有

$$x=\frac{2y}{y'}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}.$$

令 $y'=p$, 则有

$$x=\frac{2y}{p}+\frac{p}{2\sqrt{y}}.$$

两端关于 y 求导可得

$$(4y^{3/2}-p^2)\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{2y}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\Big)=0.$$

其中非奇解方程为

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{2y}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=0.$$

解得

$$p = 2C\sqrt{y}.$$

于是，原方程的通解为

$$y = C(x - C)^2.$$

(8) (解法一) 解出 y, 并令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, 则得

$$y = p^3 + 2xp.$$

两端关于 x 求导可得

$$p = 3p^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p.$$

整理得

$$3p^2\mathrm{d}p + 2x\mathrm{d}p + p\mathrm{d}x = 0.$$

两端乘以积分因子 p, 则可凑成全微分

$$\frac{3}{4}\mathrm{d}(p^4) + \mathrm{d}(xp^2) = 0.$$

解之可得通解

$$x = \frac{C - \dfrac{3}{4}p^4}{p^2}.$$

于是可得原方程的参数通解

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{3}{4}p^2, \\ y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{1}{2}p^3. \end{cases}$$

(解法二) 解出 x, 并令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, 则得

$$x = \frac{y - p^3}{2p}.$$

两端关于 y 求导可得

$$\frac{1}{p} = \frac{p\Big(1 - 3p^2\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - (y - p^2)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\Big)}{2p^2}.$$

整理得

$$p\mathrm{d}y + y\mathrm{d}p + 2p^3\mathrm{d}p = 0.$$

积分得

$$2yp + p^4 = C.$$

于是可得原方程的参数通解

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{4p^2} - \dfrac{3}{4}p^2, \\ y = \dfrac{C}{2p} - \dfrac{1}{2}p^3. \end{cases}$$

(9) 令 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 则原方程可变为

$$\sin^2\theta\mathrm{d}r - \cos\theta\mathrm{d}\theta = 0.$$

解得

$$r = -\frac{1}{\sin\theta} + C.$$

于是原方程的参数通解为

$$\begin{cases} x = \Big(-\dfrac{1}{\sin\theta} + C\Big)\cos\theta, \\ y = \Big(-\dfrac{1}{\sin\theta} + C\Big)\sin\theta. \end{cases}$$

(10) 原方程可变为

$$\Big(\frac{y}{x}\Big)' = 2y(y^2 - x^2).$$

令 $y = tx$, 则原方程可变为

$$\frac{\mathrm{d}t}{t(t^2-1)} = 2x^2\mathrm{d}x.$$

解之可得

$$\frac{1}{2}\ln(t^2-1) - \ln t = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

于是原方程的参数通解为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(t^2-1) - \ln t = \dfrac{2}{3}x^3 + C, \\ y = tx. \end{cases}$$

3. 试导出微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 分别具有形为 $\mu(x+y)$ 和 $\mu(xy)$ 的积分因子的等价条件.

解 (1) 设 $\mu=\mu(x+y)$, 则由

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

可得积分因子条件

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=\frac{\mu'}{\mu}=\varphi(x+y).$$

(2) 设 $\mu=\mu(xy)$, 则由

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

可得积分因子条件

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=\frac{\mu'}{\mu}=\varphi(xy).$$

4. 试证齐次方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 在 $xM+yN\neq 0$ 时有积分因子 $\mu=\dfrac{xy}{xM+yN}$.

证 设 $\mu=\mu\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, 则由

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

可得积分因子条件

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{N}{x}+\dfrac{M}{y}}=-\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{y}{x}=\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

由于齐次方程满足积分因子条件, 所以结论成立.

5. 设函数 $f(z),g(z)$ 连续、可微且 $f(z)\neq g(z)$, 试证微分方程

$$yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y=0$$

有积分因子

$$\mu = \frac{1}{xy\big[f(xy) - g(xy)\big]}.$$

证 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu y f)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu x g)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{f}{x(f-g)}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{g}{g(f-g)}\Big)\\ &= \Big(\frac{f'}{f-g} - \frac{f\cdot(f'-g')}{(f-g)^2}\Big) - \Big(\frac{g'}{f-g} - \frac{g\cdot(f'-g')}{(f-g)^2}\Big)\\ &= \frac{f'-g'}{f-g} - \frac{(f-g)(f'-g')}{(f-g)^2} = 0,\end{aligned}$$

所以给定 μ 为给定微分方程的积分因子.

6. 设函数 $M(x,y), N(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = Nf(x) - Mg(y),$$

试证微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 有积分因子

$$\mu = \exp\Big(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y\Big).$$

其中 $f(x), g(y)$ 分别是 x, y 的连续函数.

证 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} &= \mu\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) + \frac{\partial \mu}{\partial y}\,M - \frac{\partial \mu}{\partial x}\,N\\ &= \mu(Nf - Mg) + \mu f\cdot N - \mu g\cdot M = 0,\end{aligned}$$

所以给定 μ 为给定微分方程的积分因子.

§12.2 常微分方程组

习 题 12.2 A

1. 用初等积分法求解下列方程组：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 3y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + y; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y}{x-y}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{x}{x-y}; \end{cases}$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{x} = \dfrac{y\mathrm{d}z}{x(y+z)}$;

(6) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(y^2-z^2)} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y(z^2-x^2)} = \dfrac{\mathrm{d}z}{z(x^2-y^2)}$;

(7) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{x(y-t)}{t(x-y)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y(t-x)}{t(x-y)}. \end{cases}$

解 (1) 直接积分得

$$x = C_1\mathrm{e}^t,\ y = C_2\mathrm{e}^t.$$

(2) 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y$ 可得

$$y = C_1\mathrm{e}^t.$$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y$ 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + C_1\mathrm{e}^t.$$

解之得

$$x = C_1 t\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^t.$$

于是原方程通解为

$$\begin{cases} x = C_1 t\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^t, \\ y = C_1\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

(3) 解变形方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} = 4(x+y), \\ \dfrac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t} = 2(y-x) \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x + y = C_1\mathrm{e}^{4t}, \\ x - y = C_2\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

(4) 解变形方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t} = -1, \\ \dfrac{\mathrm{d}(x^2-y^2)}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x - y = -t + C_1, \\ x^2 - y^2 = C_2. \end{cases}$$

(5) 解变形方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(x^2+y)}{x^2+y+\frac{1}{2}} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} - \dfrac{1}{y}z = -1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x^2 + y + \dfrac{1}{2} = C_1\mathrm{e}^{2y}, \\ z = C_2 y - y\ln y. \end{cases}$$

(6) 解变形方程组

$$\begin{cases} \mathrm{d}\ln(xyz) = 0, \\ \mathrm{d}(x^2+y^2+z^2) = 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} \ln(xyz) = C_1, \\ x^2+y^2+z^2 = C_2. \end{cases}$$

(7) 解变形方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} = -1, \\ \dfrac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}t} = -xy \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x+y = -t+C_1, \\ xy = C_2\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

习 题 12.2 B

1. 求下列方程组的通解：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3x+4y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x+3y; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5x+4y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x+y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x-2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x+5y; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x+2y+t-1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x+2y-5t-2. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -5x-2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x-7y; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5x+4y+\mathrm{e}^t, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x+5y+1; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y = t^2 + 6t + 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - x = -3t^2 + 3t + 1; \end{cases}$ (8) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

解 (1) 解变形方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t} = y - x, \\ \dfrac{\mathrm{d}(x-2y)}{\mathrm{d}t} = x - 2y \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x - y = C_1 \mathrm{e}^{-t}, \\ x - 2y = C_2 \mathrm{e}^{t}. \end{cases}$$

(2) 解特征方程

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 = 0$$

得特征根 $\lambda = 3$.

令 $Y = C_1$, 解特征向量方程

$$\begin{pmatrix} 5-3 & 4 \\ -1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量

$$(X, Y) = (-2C_1, C_1).$$

令 $Y = C_2$, 解循环向量方程

$$\begin{pmatrix} 5-3 & 4 \\ -1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

得循环向量

$$(X, Y) = (-C_1 - 2C_2, C_2).$$

故原方程通解为

$$(x, y) = (-C_1 - 2C_2, C_2)\mathrm{e}^{3t} + (-2C_1, C_1)t\mathrm{e}^{3t}.$$

(3) 解特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3-2i)(\lambda-3+2i) = 0$$

得特征根 $\lambda = 3+2i$.

令 $Y = C_1 + C_2 i$, 解特征向量方程

$$\begin{pmatrix} 1-3-2i & -2 \\ 4 & 5-3-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$X = -\frac{1}{2}(C_1+C_2) + \frac{1}{2}(C_1-C_2)i.$$

故原方程通解为

$$(x,y) = \Big(-\frac{C_1+C_2}{2}, C_1\Big)\mathrm{e}^{3t}\cos 2t - \Big(\frac{C_1-C_2}{2}, C_2\Big)t\mathrm{e}^{3t}\sin 2t.$$

(4) 解特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

得特征根 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$.

令 $Y = C_1$, 解特征向量方程

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 3 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$X = -C_1.$$

令 $Y = C_2$, 解特征向量方程

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 3 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$X = C_2.$$

故齐次方程的通解为

$$(x,y)=(-C_1,C_1)\mathrm{e}^{-t}+(C_2,C_2)\mathrm{e}^{3t}.$$

设 $x=At+B,\ y=Ct+D$ 为原方程的特解，代入可得

$$\begin{cases}A+2C+1=0,\\ A=B+2D-1,\\ 3A+2C-5=0,\\ C=3B+2D-2.\end{cases}$$

解之可得

$$A=3,\ B=-2,\ C=-2,\ D=3.$$

故原方程的通解为

$$\begin{cases}x=-C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{3t}+3t-2,\\ y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{3t}-2t+3.\end{cases}$$

(5) 解特征方程

$$\begin{vmatrix}-5-\lambda & -2\\ 1 & -7-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+12\lambda+37=0$$

得特征根 $\lambda=-6+i.$

令 $Y=C_1+C_2i$, 解特征向量方程

$$\begin{pmatrix}-5+6-i & -2\\ 1 & -7+6-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

可得

$$X=C_1-C_2+(C_1+C_2)i.$$

故原方程通解为

$$(x,y)=(C_1-C_2,C_1)\mathrm{e}^{-6t}\cos t-(C_1+C_2,C_2)\mathrm{e}^{-6t}\sin t.$$

(6) 解变形方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t} = x - y + \mathrm{e}^t - 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} = 9(x+y) + \mathrm{e}^t + 1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x - y = C_1\mathrm{e}^t + 1 + t\mathrm{e}^t, \\ x + y = C_2\mathrm{e}^{9t} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

(7) 化为高阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = 4t^2 + 3t.$$

解之可得

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + 4t^2 + 3t - 8.$$

于是

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t^2 + 6t + 1 \\ &= C_1\sin t - C_2\cos t + t^2 - 2t - 2. \end{aligned}$$

(8) 化为高阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = \frac{1}{\cos t}.$$

解之可得

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + \cos t\cdot\ln\cos t + t\sin t.$$

于是

$$y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1\sin t - C_2\cos t - \sin t\cdot\ln\cos t + t\cos t.$$

2. 求解下列初值问题：

(1) $\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y - x^2, \end{cases}$ $\begin{cases} y(0) = 1, \\ z(0) = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5x + 4y + \mathrm{e}^t, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x + 5y - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5y + 3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x'(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

解 (1) 消元可得

$$y'' = -y + x^2.$$

解之得

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x + x^2.$$

由

$$z' = -y + x^2 = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + 2x$$

积分得

$$z = C_1 \sin x - C_2 \cos x + x^2 + C_3.$$

由 $y(0) = 1, y'(0) = z(0) = 0$ 可得, $C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 2.$ 故所求解为

$$\begin{cases} y = \cos x + 2\sin x - 2x + x^2, \\ z = \sin x - 2\cos x + x^2 + 2. \end{cases}$$

(2) 解变形方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t} = x - y + \mathrm{e}^t + 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} = 9(x+y) + \mathrm{e}^t - 1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x - y = C_1\mathrm{e}^t - 1 + t\mathrm{e}^t, \\ x + y = C_2\mathrm{e}^{9t} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

根据初值条件，有 $C_1=1,\ C_2=\dfrac{1}{72}$. 故所求定解为

$$\begin{cases} x-y=\mathrm{e}^t-1+t\mathrm{e}^t, \\ x+y=\dfrac{1}{72}\mathrm{e}^{9t}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

(3) 令 $z=x'(t)$, 则原方程变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2z+5y+3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-z-2y. \end{cases}$$

解特征方程

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

得特征根 $\lambda=i$.

令 $X=C_1+C_2i$, 解特征向量方程

$$\begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$Y=-\frac{2C_1+C_2}{5}+\frac{C_1-2C_2}{5}i.$$

故线性齐次方程的通解为

$$(z,y)=\Big(C_1,-\frac{2C_1+C_2}{5}\Big)\cos t-\Big(C_2,\frac{C_1-2C_2}{5}\Big)\sin t.$$

设 $z=A,\ y=B$ 为非齐次特解，代入可得

$$\begin{cases} 0=2A+5B+3, \\ 0=-A-2B. \end{cases}$$

解得

$$A=6,\ B=-3.$$

故线性非齐次方程的通解为

$$\begin{cases} z = C_1 \cos t - C_2 \sin t + 6, \\ y = -\dfrac{2C_1 + C_2}{5} \cos t - \dfrac{C_1 - 2C_2}{5} \sin t - 3. \end{cases}$$

解

$$x'(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t + 6$$

可得

$$x = C_1 \sin t - C_2 \cos t + 6t + C.$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 6t + C, \\ y = -\dfrac{2C_1 + C_2}{5} \cos t - \dfrac{C_1 - 2C_2}{5} \sin t - 3. \end{cases}$$

根据初值条件，有

$$\begin{cases} C_1 + 6 = 0, \\ C_2 + C = 0, \\ -\dfrac{2C_1 + C_2}{5} - 3 = 1. \end{cases}$$

解得 $C_1 = -6$, $C_2 = -8$, $C = 8$. 故所求定解为

$$\begin{cases} x = -6 \sin t - 8 \cos t + 6t + 8, \\ y = 4 \cos t - 2 \sin t - 3. \end{cases}$$

参考试题

试题 1　期末考试样题一

一、单项选择题 (每小题 4 分，共 24 分)

1．在下列曲线族中，满足微分方程 $(yy')^2+y^2=1$ 的是 (　　).

(A) $y=C(x-C)^2$;　　(B) $(x-C)^2+y^2=1$;

(C) $y=\sin(x+C)$;　　(D) $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$.

2．设有直线 $L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L(　　).

（ A ）平行于 π ；（ B ）在 π 上；（ C ）垂直于 π ；（ D ）与 π 斜交.

3．函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于 (　　).

（ A ） $\boldsymbol{i}$ ；（ B ） $-\boldsymbol{i}$ ；（ C ） $\boldsymbol{j}$ ；（ D ） $-\boldsymbol{j}$.

4．已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于 (　　).

（ A ） -1 ；（ B ） 0 ；（ C ） 1 ；（ D ） 2.

5．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 (　　).

（ A ）连续，偏导数存在；　（ B ）连续，偏导数不存在；

（ C ）不连续，偏导数存在；（ D ）不连续，偏导数不存在.

6．设 Σ 是曲面 $S: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在第一卦限的部分，则有 (　　).

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=4\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S$;　　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}S=4\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S$;

(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S=4\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S$;　　(D) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S$.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．微分方程 $y''-4y=0$ 的通解为 _____.

2．设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ _____.

3．交换累次积分的次序 $(a\geq 0)$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r=\text{_____}.$$

4．曲面 $z-\mathrm{e}^z+xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 _____.

5．向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+y\mathrm{e}^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=$ _____.

6．设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则

$$\iint\limits_\Sigma xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{_____}.$$

三、（10 分）设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

四、（10 分）求由抛物面 $x^2+y^2=az$ 和锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围几何体的体积.

五、（10 分）计算曲面积分

$$I=\iint\limits_\Sigma 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases}z=\mathrm{e}^y\\ x=0\end{cases}$ $(0\leq y\leq a)$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面的下侧.

六、（ 10 分）计算曲线积分

$$I=\oint_L \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

其中 L 是逆时针定向的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

七、（ 6 分）通过变量代换

$$u=x^2+y^2,\ v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ w=\ln z-(x+y),$$

变换方程 (视 w 为 u,v 的函数)

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z.$$

八、（ 6 分）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 平面的最远点和最近点.

试题 2　期末考试样题二

一、选择题 每小题 4 分，共 24 分）

1．在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 为通解的是（　　）.

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$;　　(B) $y'''-y''+4y'+4y=0$;

(C) $y'''+y''-4y'+4y=0$;　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

2．设有直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$，则 l_1 与 l_2 的夹角为（　　）.

（ A ）$\dfrac{\pi}{6}$；（ B ）$\dfrac{\pi}{4}$；（ C ）$\dfrac{\pi}{3}$；（ D ）$\dfrac{\pi}{2}$.

3．设曲线积分 $I=\int_L [f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x - f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 等于 (　　).

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$;　　(B) $\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$;

(C) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$;　　(D) $1-\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

5．考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

(2) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

(4) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

则有

(A) (3) ⇒ (2) ⇒ (1);　　(B) (2) ⇒ (3) ⇒ (1);

(C) (2) ⇒ (4) ⇒ (1);　　(D) (2) ⇒ (1) ⇒ (4).

6．设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ z\geq 0$ 和 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$, 则有 (　　).

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}S = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}S$;　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}S = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}S$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}S = 4\iiint\limits_{\Omega_2} 4\mathrm{d}S$;　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}S = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}S$.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 _____.

2．设 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 则 $m=$ _____.

3．交换累次积分的次序：

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \text{_____}.$$

4．两柱面

$$x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2$$

交线在 $P\Big(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\Big)$ 点的切线方程为 _____.

5．向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+y\mathrm{e}^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的旋度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}=$ _____.

6．设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则

$$\iint_{\Sigma}\sin(xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\qquad\qquad}.$$

三、（ 10 分）设 $\varphi(u)$ 是二阶可导函数，若 $z=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，证明

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

四、（ 10 分）求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截得的(含在柱体内部的) 立体的体积.

五、（ 10 分）计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}z^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$, 抛物面 $z=x^2+y^2$ 及坐标面在第一卦限所围立体的表面外侧.

六、（ 10 分）计算曲线积分

$$I=\int_L[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y,$$

其中 L 是从 $A(\pi,2)$ 到 $B(3\pi,4)$ 的位于线段 AB 下方的任意光滑曲线且 L 与线段 AB 所围图形的面积为 2.

七、（ 6 分）求圆锥 $x^2+y^2=3z^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=4y$ 之内，平面 xOy 之上部分的面积.

八、（ 6 分）求椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的长半轴和短半轴之长.

试题 3　期末考试样题三

一、选择题 每小题 4 分，共 24 分）

1．微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解是 (　　).

(A) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$;　　(B) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$;

(C) $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$;　　(D) $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

2．已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某函数的全微分，则 a,b 的取值分别为 (　　).

（ A ） $-2,\ 2$；（ B ） $2,\ -2$；（ C ） $-3,\ 3$；（ D ） $3,\ -3$.

3．函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 $M\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Big)$ 处沿球面在该点的外法线方向的方向导数为 (　　).

（ A ） 0；　　（ B ） 1；　　（ C ） $\sqrt{3}$；　　（ D ） $3\sqrt{3}$.

4. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充要条件是 (　　).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\big[f(x,y)-f(0,0)\big]=0$;

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$;

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$;

(D) $\lim\limits_{x\to0}\big[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)\big]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}\big[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)\big]=0$.

5．设 m,n 为自然数，若 (　　), 则

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1}\sin^m x\cos^n y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(A) m 为奇数;　　(B) m 为偶数;

(C) n 为奇数; (D) n 为偶数.

6 . 设函数

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有 ( ).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1 . 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z+1=0$, 则点 P 的坐标是 _____.

2 . 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数, $z=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x}\right)$, 则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\text{_____}.$$

3 . 设区域 D 为 $x^2+y^2\leq R^2$, 则

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{_____}.$$

4 . 函数 $u=xyz$ 在 $(a,a,\sqrt{2}a)$ 点沿曲面交线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\ x^2+y^2=2ax\end{cases}$$

在该点的切线方向的方向导数为 _____.

5 . 向量场 $\boldsymbol{u}=(yz,zx,xy)$ 穿过圆柱体

$$x^2+y^2\leq a^2,\ \ 0\leq z\leq h$$

的全表面外侧的流量为 _____.

6．设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则

$$\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s = \underline{\qquad\qquad}.$$

三、（ 10 分）设变换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$ 可把微分方程

$$6\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$, 求 a 的值.

四、（ 10 分）设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 2\}$.

五、（ 10 分）计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2},$$

其中 Σ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$, $z=-R$ $(R>0)$ 所围立体表面的外侧.

六、（ 10 分）设在上半平面 $D=\{(x,y)\,|\,y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，且对任意的 $t>0$, 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, 证明对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

七、（ 6 分）设有一高度为 $h(t)(t$ 为时间) 的雪堆在融化过程中，其侧面方程为 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米，时间单位为小时), 已知体

积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数 0.9), 问高度为 130(厘米) 的雪堆全部融化需要多少小时?

八、(6 分) 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在曲线

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

上的最大值和最小值.

试题 4　期末考试样题四

一、选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1 . 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$, 则 P 点的坐标为 (　　).

(A) $(1,-1,2)$; (B) $(-1,1,2)$; (C) $(1,1,2)$; (D) $(-1,-1,2)$.

2 . 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极大值, 则下列结论正确的是 (　　).

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点梯度非零;
(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点梯度不存在;
(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零;
(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

3 . 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在, 则下列结论正确的是 (　　).

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点方向导数存在;
(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续;
(C) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点梯度存在;
(D) $f(x,y_0)$ 在 $y=y_0$ 点连续.

4．二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x = (\quad)$.

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$; (B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^x f(x,y)\mathrm{d}y$;

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$; (D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.

5．函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处 $(\quad)$.

（ A ）连续、偏导数存在；（ B ）不连续、偏导数存在；

（ C ）连续、偏导数不存在；（ D ）不连续、偏导数不存在.

6．设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=3,\ f'_y(0,0)=1$, 则

(A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)} = 3\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$;

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$;

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$;

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$.

二、 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．已知两直线方程是 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行 L_2 的平面方程是 _____.

2．设 $z = \dfrac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$, f,φ 具有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

3．方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的极坐标形式为 _____.

4．设 L 是取正向的圆周 $x^2+y^2=9$, 则曲线积分

$$\oint_L (2xy - zy)\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y = \underline{\qquad}.$$

5．向量场 $\boldsymbol{v}=(x-y+z,y-z+x,z-x+y)$ 通过椭球面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的外表面的流量为 _____.

6．设曲线积分

$$\int_l\left[f(t)-\mathrm{e}^x\right]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$$

与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$, 则

$$f(x)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

三、（ 10 分）设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f, g 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（ 10 分）求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域

$$D=\{\,(x,y):\ x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\,\}$$

上的最大值和最小值.

五、（ 10 分）设有一容器是由抛物线 $y=ax^2$ 绕 y 轴旋转而成的抛物面，其中盛有高度为 H 厘米的液体，现将由抛物线 $y=bx^2+c$ 绕 y 轴旋转而成的抛物面浸没其中 h 厘米，问液面上升多少？

六、（ 10 分）计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}z^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$, 抛物面 $z=x^2+y^2$ 及坐标面在第一卦限所围立体的表面外侧.

七、（ 6 分）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$, 试求 $f(x)$ 的表达式，以使积分

$$\int_L f(x)y\mathrm{d}x+\left[\sin x+f'(x)\right]\mathrm{d}y$$

与路径无关.

八、（ 6 分 ）计算曲线积分

$$\int_L yz\mathrm{d}x + 3zx\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z,$$

其中 L 是柱面 $x^2+y^2=4y$ 和平面 $3y-z+1=0$ 的交线，若从 z 轴的正向看去，交线 L 按逆时针定向.

试题 5　期末考试样题五

一、选择题 (每小题 4 分，共 24 分)

1．设函数 $z=f(x,y),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2,\ f(0,y)=2,\ f'_x(0,y)=y$, 则 $f(x,y)$ 为 (　　).

(A) $2+xy+y^2$;　　(B) $2-xy+y^2$;

(C) $2+xy+x^2$;　　(D) $2-xy+x^2$.

2．设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$, 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是 (　　).

（ A ）若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$；
（ B ）若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$；
（ C ）若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$；
（ D ）若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

3．设函数 $f(x,y)$ 连续, 则二次积分 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{2} f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于 (　　).

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin x}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin x}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(C) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi/2}^{\pi+\arcsin x} f(x,y)\mathrm{d}y$;　　(D) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi/2}^{\pi-\arcsin x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

5．二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处 (　　).

（ A ）连续可微；　　（ B ）可微但偏导数不连续；
（ C ）连续但不可微；　　（ D ）可导但不可微.

6．设区域

$$D=\{(x,y):x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\},$$

$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=(\qquad).$$

(A) $ab\pi$;　　(B) $\dfrac{ab}{2}\pi$;　　(C) $(a+b)\pi$;　　(D) $\dfrac{a+b}{2}\pi$.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 _____.

2．过 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$ 两点的直线绕 z 轴旋转所得旋转面的方程为 _____.

3．设函数 $u=y^x+x^y$, 则全微分 $\mathrm{d}u=$ _____.

4．数量场

$$v(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

沿梯度方向的方向导数为 _____.

5．向量场 $\boldsymbol{A}=-y\,\boldsymbol{i}+x\,\boldsymbol{j}+z^2\,\boldsymbol{k}$ 沿圆周

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=0\end{cases}$$

的环量为 _____.

6．设曲面 Σ 是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上侧，则

$$\iint_{\Sigma}\sin(xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sin x\cos(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=_____.$$

三、（ 10 分）设 $z=f(x,y)$, 而 y 是由方程 $\dfrac{x}{y}=\ln\dfrac{y}{z}$ 所确定的 x,z 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

四、（ 10 分）求 $u(x,y)$, 使 $\mathrm{d}u=(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$.

五、（ 10 分）求由锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围均匀几何体的重心.

六、（ 10 分）把正数 a 分成三个正数之和，使它们的乘积最大，并由此结果证明：

$$\sqrt[3]{xyz}\ \le\ \frac{x+y+z}{3}\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0).$$

七、（ 6 分）计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{e}^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

其中 Σ 是 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 2)$ 的下侧.

八、（ 6 分）设函数 $f(u)$ 连续， Ω 由 $0\le z\le h$, $x^2+y^2\le t^2$ 围成．若

$$F(t)=\iiint_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

试题 6 兰州大学高数考研样题

一、填空题(每小题 4 分，共 24 分)

1. 设函数 $y = x^{\cos\frac{1}{x}}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =$ _____.

2. 设 $\displaystyle\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{x+y} - \mathrm{e}^{\sin y}$, 其中 $f(x)$ 连续, 则 $f(x) =$ _____.

3. 微分方程 $y''+y+\sin 2x = 0,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1$ 的解为 _____.

4. 设 C 为平面曲线 $|x|+|y| = 1$, 则 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_{C^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x =$_____.

5. 设行向量组 $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a \neq 1$, 则 $a =$_____.

6. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{bx(\theta-x)}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的简单子样，则 θ 的矩估计 $\widehat{\theta} =$ _____.

二、单选题(每小题 4 分，共 24 分)

1. 把三个无穷大量

$$a_n = \int_1^n |\sin nx|\mathrm{d}x,\ b_n = \int_1^n \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x,\ c_n = \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

排列起来, 使排列在后面者是其前一个的高阶无穷大量, 则正确的排序是【 】.

(A) a_n, b_n, c_n; (B) a_n, c_n, b_n; (C) b_n, a_n, c_n; (D) c_n, a_n, b_n.

2. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，则下面正确的是【 】.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收敛; (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ 收敛.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 又函数 $\varphi(x)$ 可导, 则 $F(x) = \varphi\big[f(x)\big]$ 在 $x = 0$ 点为【 】.

(A) 不连续; (B) 不可导;

(C) 可导且导数为 $\varphi'(0)$; (D) 可导且导数为零.

4. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z} = \mathrm{e}^{y+z}$ 所确定的二元函数, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$【 】.

(A) $-\dfrac{\mathrm{e}^{-(y+z)}}{(1+z)^3}$; (B) $\dfrac{\mathrm{e}^{-(y+z)}}{(1+z)^3}$; (C) $\dfrac{\mathrm{e}^{y+z}}{1+z}$; (D) $-\dfrac{\mathrm{e}^{-(y+z)}}{(1+z)^2}$.

5. 设 A, B, C 均为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位矩阵 $(n \geq 1)$, 且有 $ABC = E$, 则下式中成立的是【 】.

(A) $BAC = E$; (B) $CAB = E$; (C) $CBA = E$; (D) $ACB = E$.

6. 设 n 个随机变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相互独立同分布,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} x_i,\ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

则有【 】.

(A) S 是 σ^2 的无偏估计量; (B) S 是 σ 的最大似然估计量;

(C) S 是 σ 的一致估计量; (D) S^2 与 $\overline{x}$ 相互独立.

三、(10 分) 由方程 $z^3 - 3xyz + 2xy = a^2$(a 是常数) 确定了隐函数 $z = f(x, y)$, 计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

四、(10 分) 计算积分: $\iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为由不等式 $\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ 所确定的区域.

五、(10 分) 已知上半平面内一曲线 $y=y(x)$ $(x\geq 0)$ 过点 $(0,1)$, 且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率数值上等于此曲线与 x 轴, y 轴, 直线 $x=x_0$ 所围的面积与该点横坐标的平方这两项之和, 求此曲线方程.

六、(12 分) 求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面, 使之与坐标面所围四面体的体积最小.

七、(12 分) 计算积分:

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

其中 Σ 为 yOz 平面上曲线 $z=2-y^2$ $(-2\leq x\leq 2)$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面在 $z\geq -2$ 部分的上侧.

八、(12 分) 已知 $\varphi(\pi)=1$, 试确定 $\varphi(x)$, 使线积分

$$\int_L(\sin x-\varphi(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 并求从点 $(1,0)$ 到点 (π,π) 的线积分的值.

九、(12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-b&-1&a\\b&4&-1\end{pmatrix}$,$\xi=(2,0,1)^T$ 为 A 的特征向量,

(1) 求 a,b 的值以及 A 的特征值与特征向量;

(2) 判断 A 能否相似于对角矩阵, 若能, 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

十、(12 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases}(a+1)x_1+x_2+x_3=a^2+3a,\\x_1+(a+1)x_2+x_3=a^3+3a^2+a+3,\\x_1+x_2+(a+1)x_3=a^2+3a\end{cases}.$$

试问 a 为何值时, 该方程组有惟一解、有无穷多解、无解, 并求出其惟一解和一般解.

十一、(12 分) 若 Y 服从 $[0,6]$ 上的均匀分布，令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{当 } Y>k,\\ 0, & \text{当 } Y\le k\end{cases},\ k=1,2,$$

求 X_1,X_2 的联合分布及 $E(X_1+X_2),D(X_1+X_2)$.

试题 7　统考一类数学考研样题

一、选择题 (每小题 4 分，共 32 分)

1. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$, 则 $f'(x)$ 的零点个数 【　　】.

(A) 0 ;　　(B) 1 ;　　(C) 2;　　(D) 3.

2. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于 【　　】.

(A) $\boldsymbol{i}$;　　(B) $-\boldsymbol{i}$;　　(C) $\boldsymbol{j}$;　　(D) $-\boldsymbol{j}$.

3. 在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 为通解的是 【　　】.

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$;　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$;
(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$;　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是 【　　】.

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.
(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

5. 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=0$, 则 【　　】.

(A) $E-A$ 不可逆， $E+A$ 不可逆.
(B) $E-A$ 不可逆， $E+A$ 可逆.
(C) $E-A$ 可逆， $E+A$ 可逆.
(D) $E-A$ 可逆， $E+A$ 不可逆.

6. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图 1 ，则 A 的正特征值个数为【　　】.

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

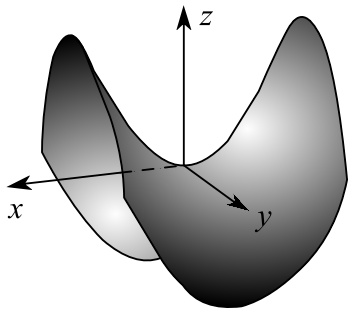

图 1

7. 设随机变量 X,Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为【　　】.

(A) $F^2(x)$;　　(B) $F(x)F(y)$;
(C) $1-[1-F(x)]^2$;　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$ ，则【　　】.

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$;　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$;
(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$;　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题 (每小题 4 分，共 24 分)

9. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$_____.

10. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_____.

11. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 _____.

12. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ _____.

13. 设 A 为 2 阶矩阵，α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$，则 A 的非零特征值为 _____.

14. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X = EX^2\right\} =$ _____.

三、解答题(15 ~ 23 小题，共 94 分)

15.（分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

16.（ 10 分）计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x + 2\left(x^2-1\right)y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

17.（ 10 分）已知曲线 $C: \begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点.

18.（ 10 分）设函数 $f(x)$ 连续，且 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，证明 $F(x)$ 可导，且 $F'(x) = f(x)$.

19.（ 10 分）设函数 $f(x) = 1 - x^2\ (0 \le x \le \pi)$，用余弦级数展开 $f(x)$，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

20.（ 11 分） $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，$\alpha, \beta$ 是三维列向量，α^T 为 α 的转置，β^T 为 β 的转置.

（ 1 ）证 $r(A) \le 2$；

（ 2 ）若 α, β 线性相关，则 $r(A) < 2$.

21.（ 11 分）设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},$$

现矩阵 A 满足方程 $AX=B$，其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$B=(1,0,\cdots,0)^T$，

（ 1 ）求证 $|A|=(n+1)\,a^n$;

（ 2 ） a 为何值时，方程组有惟一解，求 x_1;

（ 3 ） a 为何值时，方程组有无穷多解，求通解.

22.（ 9 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立， X 概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}\,(i=-1,0,1)$，概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$.

（ 1 ）求 $P\left\{Z\le\dfrac{1}{2}\middle|X=0\right\}$;

（ 2 ）求 Z 的概率密度.

23.（ 9 分）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\ T=\bar{x}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

（ 1 ）证 T 是 μ^2 的无偏估计量.

（ 2 ）当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 $D(T)$.