微积分杂谈

[illegible] 编著

科学技术文献出版社

172
53a

责任编辑：王文才

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$$

ISBN 7-5023-3800-4

9 787502 338008 >

ISBN 7-5023-3800-4/O·126

定 价：7.50 元

微积分杂谈

龚 昇 编著

A1064180

科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分杂谈/龚升编著. —北京:科学技术文献出版社,2001.5
ISBN 7-5023-3800-4
Ⅰ.微… Ⅱ.龚… Ⅲ.微积分-研究 Ⅳ.0172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 20203 号

出　版　者:科学技术文献出版社
地　　址:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼 B 段/100038
社办公室电话:(010)68515544-2950
编辑部电话:(010)68515544-2935,(010)68515037
发行部电话:(010)68515544-2831(或 2835),(010)68514035
门市部电话:(010)68515544-2172
传　　真:(010)68514035
E-mail　:stdph@istic.ac.cn
责任编辑:王文才
发　行　者:新华书店北京发行所
印　刷　者:上海市曙光印刷厂
版(印)次:2002 年 11 月第 1 版　2002 年 11 月第 1 次印刷
开　　本:850×1168　32 开
字　　数:80 千
印　　张:3.25
印　　数:1000 册
定　　价:7.50 元

© 版权所有　违法必究
购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

前　　言

这本小书由五篇相互独立又相互联系的文章组成.

教书半世纪，教材只写了二本.

1958 年到中国科学技术大学教书，教了八年后，于 1966 年写了一本微积分教材《简明微积分》. 在 1966 年《自然辩证法研究通讯》杂志上，我写了一篇短文，对写这本教材的想法做了十分简要的说明. 这当然不能引起人们的注意. 直到 30 年后，我在中国科学技术大学和其他一些大学，以及一些会议上，系统地讲述了我写这本教材的想法，才引起人们的注意. 后来，在这些讲话的基础上，写了一本小册子《话说微积分》，于 1998 年 5 月由中国科学技术大学出版社出版. 书出版后，受到数学界以及教与学微积分师生们较为广泛的欢迎.

《话说微积分》一书，吴文俊院士审阅后，曾给以鼓励，且亲自动手写了“龚昇教授《简明微积分》读后感”一文. 此文刊登在《高等数学研究》每 2 卷，1999 年，第三期，第 2~3 页，也刊于《数学通报》杂志，2000 年，第一期，第 44~45 页. 此文不仅评述了拙著《简明微积分》一书，还十分深刻地论述了微积分的地位、微积分的产生和发展、微积分的精髓，这对读者认识微积分这门学科以及这门课程，具有十分重要的指导意义. 征得吴文俊院士同意，将此文列在本书之首，以代序. 此文也是本书的指导性文章.

何祚庥院士在审阅了《话说微积分》后，也给以鼓励，并嘱我从侧重于哲学的角度写一文章，投《自然辩证法研究》杂志. 于是我就写了“对微积分中主要矛盾的认识”一文. 此文刊登在

《自然辩证法研究》第 15 卷， 1999 年，第 11~18 页. 刊登时，对文章曾作了删节. 此文全文刊登在《高等数学研究》杂志第 2 卷，1999 年，第一期，第 5~12 页；第二期，第 2~5 页；第 3 卷，2000 年，第一期，第 2~5 页；第二期，第 2~5 页. 这就是本书的第一篇文章.

为了对理解第一篇文章有所帮助，还将拙著《简明微积分》中第 7 章 7.6 节，作为本书的第二篇文章，取名为“浅说外微分形式”.

《简明微积分》的英文版即将出版.

2000 年 10 月 18 日至 21 日于西安举行的“20 世纪数学传播与交流国际学术讨论会”上，我作了二次演讲，讲的内容是“微积分严格化之后”，这是“对微积分中主要矛盾的认识”一文的续篇，现整理成文，作为本书的第三篇文章.

大学基础课复分析的内容实际上是复数域上的微积分，这是我于 1992 年撰写另一本教材《简明复分析》的指导思想之一. 此书于 1996 年由北京大学出版社出版，第一次印了三千册，到 1999 年已售罄. 此书同样引起了教与学复分析这门课的师生们较为广泛的注意. 在 1999 年第二次印刷时，除了修订一些错误外，还写了一个“重印说明”. 在此文中，比较详细地说明了撰写这本教材的指导思想，这也反映了我对这门数学基础课的一些认识与看法，这是本书的第四篇文章，此文也是“对微积分中主要矛盾的认识”的另一个续篇. 读者可以发现，此文与前三文的思想是一脉相通的. 希望此文对教与学复分析及微积分这二门课的师生们有所参考与帮助.

《简明复分析》的英文版《 Concise Complex Analysis 》已于 2001 年由 World Scientific Publishing Company 出版.

本书的最后一篇文章是我写的一篇短文“数学基础课教材随想”. 此文刊于《中国大学教学》杂志 (原《教学与教材研究》杂志)2000 年第一期，第 35~37 页；以及《高等理科教育》杂志 2000

年第一期，第 38~41 页. 在此文中，阐述了我对数学基础课教材的一些基本观点，而上述二本教材就是试图按照这种观点撰写的.

这本小书是由相互独立的五篇文章组成. 由于这些文章写于不同时期及不同场合，在内容上难免有些重复. 但要去掉一些重复部分，会影响每篇文章的独立性. 因之，只好保持原状，这点还望读者谅解. 这五篇文章又是相互联系的，观点是一致的. 这是一本反映我对大学数学基础课教学的一些看法的小书，当然这仅仅是个人的一点浅见，不妥之处，还望读者不吝赐教.

龚 昇

2001 年 12 月

目　录

代序 ..... 吴文俊
前言
对微积分中主要矛盾的认识 1
浅说外微分形式 32
微积分严格化之后 54
《简明复分析》重印说明 72
数学基础课教材随想 82

对微积分中主要矛盾的认识*

1958 年，我从中国科学院数学研究所调到中国科学技术大学教书. 在中国科学技术大学，我大多时间是在教微积分. 教了 8 年之后，于 1966 年对微积分的教学产生了一些想法，于是写了一篇关于微积分教学改革的想法的短文，题为“对高等数学课程改革的一些尝试”，刊登在《自然辩证法研究通讯》1966 年第 1 期上，并且，按照这个想法写了一本微积分教材《简明微积分》(第一版，1978 年 - 1983 年，人民教育出版社；第二版，1993 年，中国科学技术大学出版社；第三版，1997 年，中国科学技术大学出版社). 这本教材正式出版后，在中国科学技术大学部分系一直用到现在，已 20 年了. 微积分教材不下千种，我为何还要再写一本？这是有感而发. 由于我长期以来，从未系统地、公开地阐述这个“感”是什么，以至于 1995 年，我在中国科学技术大学数学系的一次教学研讨会上，讲了为何 30 年前我要写这本微积分教材，以及对微积分这门学科、这门课程的一些想法时，大多数教员说他们从未听过. 后来我又在多次有关会议及多所大学讲了这个课题，引起了一些人的兴趣. 还有同行建议我将此讲稿整理出版. 由于我对微积分这门学科、这门课程的想法与 30 多年前无大变化，基本上是 1966 年我刊登在《自然辩证法研究通讯》上的那篇短文的想法，所以我只好老调重弹，在 1966 年那篇短文的基础上，加以扩展与充实，写成了一本很小的小册子《话说微积分》，于 1998 年由中国科学技术大学出版社出版. 小册子出版后，在国内

*本文曾节录刊于《自然辩证法研究》第 15 卷、1999 年；全文在《高等数学研究》上连载：第 2 卷 (1999 年) 第 1 期、第 2 期，第 3 卷 (2000 年) 第 1 期、第 2 期.

一部分数学界与国外一部分华裔数学界中得到了较快的传播，有不少同行，或口头、或写信、或电子邮件给我，对我在这本小册子中阐述的一些观点表示赞同，这使我得到了极大的鼓舞．何祚庥院士在审阅了这本小册子后，给我以鼓励，并嘱我写一稿投寄《自然辩证法研究》杂志．我十分冒昧地写了此文，此文的主要观点与 30 年前我在《自然辩证法研究通讯》上刊登的那篇短文是完全一致的，只是写得更具体、更充实，与《话说微积分》这本小册子中所阐述的一些观点也是完全一致的，只是侧重有所不同．由于我对自然辩证法完全是外行，对无产阶级革命导师的一些论述的理解也十分浅薄甚至可能不正确，对数学的了解也十分肤浅，文笔不通甚至谬误之处一定不少，还望大家指正．

本文的内容大致如下：在第一部分叙述无产阶级革命导师马克思、恩格斯以及列宁对微积分的关注与研究，以及有关微积分的一些论述．当然这里只能引述其中极小的一部分，但这些论述是本文的指导思想．在第二部分，对微分与积分这对矛盾在一元微积分中的体现，谈了自己的认识．在第三部分，对微分与积分这对矛盾在高维空间中如何体现，说说自己一些粗浅的想法．在第四部分，对数学中的高与低、难与易的辩证关系作了一些探索．在第五部分，探讨了微积分这门学科中其他一些矛盾．

马克思、恩格斯以及列宁对微积分的关注与研究

恩格斯在《反杜林论》中提出：“纯数学是以现实世界的空间形式和数量关系，也就是说，以非常现实的材料为对象的．这种材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界”(《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出版社，1995 年版，第 377 页)，明确地指出了数学科学所研究的对象．尽管人们对“空间”及“数量”的概念及认识较之上一个世纪已有了极大的扩充与

深化，但恩格斯对数学科学所研究的对象的提法依然是十分正确的，仍然为大家所接受的．但是数学科学有十分众多的学科，随着时间的推移，不断地有新的数学学科产生．要说清楚数学科学中各个学科所研究的对象是什么，恐怕不是一件容易的事情．即使就其中的一门学科来讨论其研究的对象是什么，对大多数学科来说，也会众说纷纭，很难取得共识．但是，对微积分这门学科来说，它所研究的对象是什么，是早已解决了的，大概不会引起任何争议的．毛泽东在《矛盾论》中论述了矛盾的特殊性时指出："科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性．因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一科学的对象"（《毛泽东选集》第 1 卷，人民出版社，1991 年版，第 309 页）．因之，要说清楚某一门数学学科所研究的对象，等于要说清楚这门学科是研究那一种矛盾的，即说清楚这门学科的主要矛盾是什么．而微积分这门学科是研究那一种矛盾的，这在马列主义的一些经典著作中早已解决了的．不妨十分简单地回顾一下历史．

微积分是由牛顿 (Isaac Newton, 1642~1727) 及莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716) 所建立的．牛顿对微积分主要创作年代是在 1665 年至 1667 年之间，而发表其成果于 1687 年、1704 年及 1736 年．莱布尼兹对微积分主要创作年代是在 1673 年至 1676 年之间，而发表其成果于 1684 年及 1686 年．也就是说，微积分建立于 17 世纪 60 年代至 70 年代．马克思、恩格斯以及列宁等都对微积分给予了关注并作了深入研究，在他们的一些经典著作中多次论及微积分．

马克思对微积分作了很多研究，且特别重视它．例如，1863 年 7 月 6 日马克思给恩格斯的信中说到："有空时我研究微积分．顺便说说，我有许多关于这方面的书籍，如果您愿意研究，我准备寄给您一本．"（《马克思恩格斯全集》第 30 卷，人民出版社，1975 年版，第 357 页）．1865 年 5 月 20 日马克思给恩格斯的信中说到：

"在工作之余 —— 当然不能老是写作 —— 我就搞搞微分学 $\frac{dx}{dy}$. 我没有耐心再去读别的东西，任何其他读物总是把我赶回写字台来" (《马克思恩格斯全集》第 31 卷，人民出版社，1972 年版，第 124 页). 从这二封信中可以看出，马克思是多么热衷于研究微积分. 从下面另一封马克思给恩格斯的信中可以看出，马克思不仅研究牛顿、莱布尼兹，而且对当时活跃在数学研究第一线的一批大数学家，如达兰贝尔 (Jean Le Rond D'Alembert, 1717~1783)、欧勒 (通常译作欧拉， Leonhard Euler, 1707~1783) 以及拉格朗日 (Loseph Louis Lagrange, 1736~1813) 等人的著作，都有所研究. 1882 年 11 月 22 日马克思给恩格斯的信中说到："我未尝不可用同样的态度去对待所谓微分方法本身的全部发展 —— 这种方法始于牛顿和莱布尼兹的神秘方法，继之以达兰贝尔和欧勒的唯理论的方法，终于拉格朗日的严格的代数方法 (但始终是从牛顿 – 莱布尼兹的原始的基本原理出发的), —— 我未尝不可以用这样的话去对待分析的这一整个发展过程，说它在利用几何方法于微分学方面，也就是使之几何形象化方面，实际上并未引起任何实质性的改变". (《马克思恩格斯全集》第 35 卷，人民出版社， 1971 年版，第 110 页). 在恩格斯撰写的《资本论》第二卷序言中，说到马克思在 "1870 年以后又有一个间歇期间，这主要是由马克思的病情造成的，他照例利用这类时间进行各种研究. …… 最后还有自然科学，如地质学和生理学，特别是独立的数学研究，成了这个时期的许多札记本的内容."(《马克思恩格斯全集》第 24 卷，人民出版社， 1972 年版，第 7~8 页). 现在我们能见到马克思在数学上的研究，除了散见在他的各种著作中以外，比较集中的是他的《数学手稿》 (人民出版社， 1975 年版), 而其中绝大部分的内容是论述微积分的. 马克思本人十分重视他的数学研究，主要是对微积分的研究. 1883 年 6 月 24 日恩格斯在致劳拉 · 拉法格的信中说到马克思委托后人处理他的文稿， "并关心出版那些应

该出版的东西，特别是第二卷和一些数学著作”(《马克思恩格斯全集》第 36 卷，人民出版社， 1975 年版，第 42 页). 这里，第二卷指的是后来编成的《资本论》第二卷与第三卷.

恩格斯高度评价马克思的数学研究，尤其是微积分研究的成就. 例如， 1881 年，马克思曾将他的部分有关微积分的数学手稿誊清后寄给恩格斯，恩格斯仔细阅读了这份手稿，于 1881 年 8 月 18 日写信给马克思，说道：“昨天我终于鼓起勇气，没用参考书便研究了你的数学手稿，我高兴地看到，我用不着其他书籍，为此，我向你祝贺.”(《马克思恩格斯全集》第 35 卷，人民出版社， 1971 年版，第 21 页). 在《反杜林论》中，恩格斯说：“马克思是精通数学的”.(《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出版社，1995 年版，第 349 页). 恩格斯在《在马克思墓前的讲话》中还说到：“但是马克思在他所研究的每一个领域，甚至在数学领域，都有独到的发现，这样的领域是很多的，而且其中任何一个领域他都不是浅尝辄止.”(《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出版社，1995 年版，第 776~777 页). 恩格斯本人在他的著作中，大量论述了数学，尤其是微积分. 特别在他的《反杜林论》以及《自然辩证法》这两部著作中，更是深刻地、系统地论述了微积分. 恩格斯在《反杜林论》第二版的序言中写道：“目前我只好满足于本书所作的概述，等将来有机会再把所获得的成果汇集发表，或许同马克思所遗留下来的极其重要的数学手稿一齐发表.”(《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出版社， 1995 年版，第 351 页)，后来由于种种原因并未实现. 关于恩格斯对微积分的大量论述，在这里只是摘引其中的二段. 在《反杜林论》中，恩格斯说到：“因为辩证法突破了形式逻辑的狭隘界限，所以它包含着更广的世界观的萌芽. 在数学中也存在着同样的关系. 初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样，而变数的数学 —— 其中最重要的部分是微积分 —— 本质上不外是辩证法在数学方面的运用.”(《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出

版社，1995 年版，第 477 页). 在这里恩格斯十分明确地指出，微积分本质上不外是辩证法在数学方面的运用. 在《自然辩证法》中，恩格斯说："数学中的转折点是笛卡尔的变数. 有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发明的."(《马克思恩格斯全集》第 20 卷，人民出版社，1971 年版，第 602 页). 这段话实际上阐述了微积分产生的过程.

到了列宁，他也有不少关于数学的论述. 他在 1915 年写的《谈谈辩证法问题》一文中，在论及自然科学中的矛盾时，十分明确地指出："在数学中加号和减号，微分和积分. 在力学中，作用与反作用. 在物理学中，正电和负电. 在化学中，原子的化合和分解. 在社会科学中，阶级斗争."(《列宁选集》第 2 卷，人民出版社，1995 年版，第 556 页). 而这段话，毛泽东在《矛盾论》中论及矛盾的普遍性时，全文加以引用 (《毛泽东选集》第 1 卷，人民出版社，1991 年版，第 306 页). 从这里，列宁十分明确地指出了，微积分这门学科是研究微分和积分这对矛盾的学问. 也就是说，微积分这门学科中，主要矛盾是微分和积分的矛盾.

在一元微积分中微分与积分这对矛盾

马克思、恩格斯以及列宁有关微积分的一些论述，是我们认识与研究微积分的指导思想. 有了这个认识之后，就决定了微积分这门学科的内容是由三个部分组成的，即微分、积分、指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理这三个部分. 微分的部分与积分的部分都易于理解，而对于第三部分，指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理，也许得多说几句.

微分与积分的概念古已有之，例如：阿基米德 (Archimedes, 公

元前 287 年 ~ 公元前 212 年) 于公元前就已经知道如何求抛物线 $y=x^2$ 的切线. 刘徽于公元 3 世纪在他的割圆术中, 就是用无穷小分割来求面积的, 等等. 由于长期的积累, 在牛顿与莱布尼兹之前, 已经有了大量的微积分的先驱性的工作, 这为微积分的产生作了准备. 例如: 托里拆利 (Evangelista Torricelli, 1608~1647) 已经知道如何求曲线 $y=x^n$(其中 n 是为正整数) 的切线, 卡瓦列利 (Bonaventure Cavalieri, 1598~1647) 已经知道如何求曲线 $y=x^n$ (其中 n 是正整数) 所覆盖的曲边梯形的面积. 又例如: 开普勒 (Johannes Kepler, 1571~1630) 的父亲好喝酒, 以开酒馆为业, 少年时期的开普勒帮助父亲照料酒馆, 他用无穷小方法精确地计算酒桶的体积, 并于 1615 年为此出版了一本书, 题为《测量酒桶体积的新科学》. 当然, 还可以举出很多用无穷小分析计算切线、面积及体积的例子. 有兴趣的读者可参阅众多的有关微积分史的书籍. 例如波耶的《微积分概念史》, 1977 年, 上海人民出版社 (Carl B. Boyer, The concepts of the Calculus, Hafner Publishing Company, 1949). 但是, 所有这些还不能说建立了微积分. 直到牛顿与莱布尼兹证明了如下的微积分基本定理.

微积分基本定理 (微分形式) 设函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, x 是 $[a,b]$ 中的一个内点, 令

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \qquad (\text{其中 } a<x<b)$$

则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 并且

$$\Phi'(x)=f(x), \qquad (\text{其中 } a<x<b)$$

即

$$d\Phi(x)=f(x)dx.$$

换句话说, 若 $f(x)$ 的积分是 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 的微分就是 $f(x)dx$, 即 $f(x)$ 的积分的微分就是 $f(x)$ 自己乘上 dx, 也就是反映整体性质

的积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 是由作为反映局部性质的微分 $d\Phi(x)=f(x)\,dx$ 所决定.

微积分基本定理 (积分形式) 设 $\Phi(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可微, 且 $\dfrac{\Phi(x)}{dx}$ 等于连续函数 $f(x)$, 那么成立着

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Phi(x)-\Phi(a). \qquad (\text{其中 } a\leqslant x\leqslant b)$$

换句话说, 若 $\Phi(x)$ 的微分是 $f(x)\,dx$, 则 $f(x)$ 的积分就是 $\Phi(x)$, 即 $\Phi(x)$ 的微商的积分就是 $\Phi(x)$ 自己 (或相差一常数). 也就是, 作为反映局部性质的微分 $f(x)\,dx$, 是由作为反映整体性质的积分 $\Phi(x)-\Phi(a)=\int_a^x f(t)\,dt$ 所规定. (参阅龚昇, 张声雷: 《简明微积分》第三版, 1997 年, 中国科学技术大学出版社, 第 34~36 页.)

微积分基本定理明确地指出: 微分与积分互为逆运算, 也就是指出微分与积分是对矛盾. 这时也只有在这时, 才算建立了微积分这门学科. 所以恩格斯在论述微积分产生过程时说: 微积分"是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的, 但不是由他们发明的"(《马克思恩格斯全集》第 20 卷, 人民出版社, 1971 年版, 第 602 页). 说"不是由他们发明的"是指: 在牛顿和莱布尼兹之前, 微分与积分的概念早已有之. 说"是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的"是指: 他们建立了微积分基本定理, 指出微分与积分是一对矛盾, 从此微积分成了一门独立的学科, 而不再像以前那样作为几何学的延伸. 而求微分与积分的问题, 不再是一个个问题地来处理, 而是有了统一的处理方法. 说"大体上"是指: 他们建立起来的微积分这门学科还有不完备之处, 是没有建立牢固的基础, 一些解说不能令人满意. 他们利用直观无穷小的概念, 例如牛顿使用"刹那"的说法, 莱布尼兹对微分有时解释为 0, 有时又说不为 0, 在逻辑上往往不能自圆其说, 所以马克思称之"牛顿和莱布尼兹的神秘方法"(《马克思恩格斯全集》第 35 卷, 人民出版社, 1971 年

版, 第 110 页). 而马克思在他的《数学手稿》 (人民出版社, 1975 年版) 中大量论述的正是这些问题.

从历史唯物主义的观点来看微积分的产生, 就会感到是十分自然的事. 自从 15 世纪 ~16 世纪文艺复兴以来, 大批优秀的数学家为微积分的诞生作出了杰出的贡献. 牛顿与莱布尼兹正处在微积分诞生前的水到渠成的时代. 牛顿说他是站在巨人的肩膀上, 这时巨人已经形成. 这位巨人当然包括了这些伟大的微积分的先驱们. 我不在这里一一列举他们的名字与他们的贡献, 在这里只想提一下巴罗 (Isaac Barrow, 1630~1677) 其人. 他是牛顿的老师, 他已经知道 "求切线" 和 "求面积" 是两个互逆的问题, 他写了并译了很多书, 其中 1669 年出版的《几何讲义》一书对微积分的创立起了巨大的作用. 他完全以几何的面貌, 用语言来表述上述重要结果, 可是在表述上是有一些不严格与难于理解之处, 并在具体应用上较为困难. 而他本人对于这个接近于微积分基本定理的重大发现并不重视. 1669 年, 作为剑桥大学 "路卡斯 (Lucas) 教授" 的巴罗, 主动宣布牛顿的学识已超过自己, 把 "路卡斯教授" 的职位让给年仅 26 岁的牛顿. 这种高风亮节的品德与风格, 实在令人钦佩, 这件事也成了科学史上的一段佳话.

从以巴罗为代表的这些微积分的先驱们的贡献, 可以看出: 牛顿与莱布尼兹的确生长在微积分诞生前的水到渠成的年代. 更为重要的是: 16 世纪的欧洲, 正处于资本主义萌芽的时期, 生产力得到了很大的发展, 生产实践的发展向自然科学提出了新的课题, 迫切要求力学、天文学等基础学科的发展, 这些学科是深刻地依赖于数学, 因而也就推动了数学的发展. 在马列主义的一些经典著作中, 对此都有十分深刻的论述. 可以这样认为: 微积分的产生, 是量变 (先驱们的大量工作的积累) 到质变 (牛顿与莱布尼兹指出微分与积分是对矛盾) 的过程, 是当时历史条件 (资本主义萌芽时期) 下的必然产物.

在我国最早引入微积分的是清代的李善兰 (1811~1882). 他

与英人伟烈亚力 (A. Wylie, 1815~1887) 一起合作翻译了罗密士 (E. Loomis, 1811~1899) 于 1850 年所著的《解析几何与微积分初步》 (Elements of analytic geometry and differential and integral calculus). 李善兰首先引入了微分与积分的这两个中译名, 他大约是取自我国古代成语 "积微成著" 而来的. 这个译名确切地反映了 "微分" 与 "积分" 的涵义, 而 "积微成著" 的想法正好反映了微分与积分的辩证关系. 因之, 这个译名与他给出的一大批数学译名, 一直沿用至今.

在牛顿与莱布尼兹建立了微积分后, 关于微积分这门学科的斗争与发展, 不在这里多加叙述与评论了. 以下是想用对立统一的观点, 在微积分这门学科的主要矛盾是微分与积分的矛盾的观点下, 来考察与认识一元微积分中的一些主要的内容.

在这个观点下, 原则上讲, 微分学中的一条定理或公式, 在积分学中也应有相应的定理或公式, 反之亦然, 即它们之间应是相互对应的. 也就是说: 它们之间, 既是对立的 (一个是微分的形式, 一个是积分的形式), 又是统一的 (它们表述的往往是同一件事, 是同一件事物的两种不同的表达形式). 以下我们对一元微积分中的一些主要定理或公式, 作一番考察.

在数学中引入一个概念或运算之后, 往往就要讨论作用到被作用的对象的算术 (arithemetic), 即加、减、乘、除, 作用到被作用的对象的复合 (composition), 作用到被作用的对象的逆 (inverse) 等等, 这几乎是成了例行公事. 在微积分中, 运算是微分与积分, 被作用的对象是函数, 于是就有了双方的相应的公式.

对微分运算来讲, 就有如下公式 (写成导数形式, 假设函数都是可微的):

(i) $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$;

(ii) $(u(x)-v(x))' = u'(x)-v'(x)$;

(iii) $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(iv) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$;

(v) 若 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 则

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x);$$

(vi) 若 $x = g(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数，且 $f'(x) \neq 0$, 则

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)};$$

等等. 其中 (i)~(iv) 是算术运算，公式 (v) 是对复合的运算，公式 (vi) 是对逆的运算. 这是一般微积分书中所必列的公式.

对于积分运算来讲，可以将公式 (i)~(vi) 写成积分形式. 如与 (i)、(iii)、(v) 相应的是 (写成不定积分形式，假设函数都是可积的):

(I) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

(III) $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$;

(V) $\int f'(u)\varphi'(x)\,dx = f(\varphi(x)) + c$ (c 为不定常数).

当然也可写出与 (ii)、(iv)、(vi) 相应的 (II)、(IV) 及 (VI).

但只要仔细分析一下，公式 (ii) 可由公式 (i) 推出，只要将 $u(x) - v(x)$ 写成 $u(x) + (-v(x))$ 即可；公式 (iv) 可由公式 (iii) 推出，只要对 $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)v(x) = u(x)$ 两边求导即可；公式 (vi) 可由公式 (v) 推出，只要对 $g(f(x)) \equiv x$ 两边求导即可. 所以，在微分运算中，重要的具有本质性的公式是 (i)、(iii) 及 (v). 同样地，在积分运算中，重要的具有本质性的公式是其相应的公式 (I)、(III) 及 (V). 而这三个公式，就是微积分书中必讲的积分计算的三种主要方法. 其中，公式 (I) 尤其用于求有理函数的积分 $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, 其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 均为多项式，将 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 分拆成多个有理分式之

和，然后逐个求积分；公式 (III) 就是分部积分法；公式 (V) 就是换元法. 所以，微分运算中的三个主要公式 (i)、(iii)、(v)，在积分运算中就对应求积分的三个主要方法，即将被积函数分拆成几个易于求积分的函数之和、分部积分法与换元法. 而这些组成了一元微积分中的微分运算与积分运算的主要内容. 所以，从微分与积分是微积分中的主要矛盾，从对立统一的观点来看，微积分中的运算部分其主要内容就是这些，而所以有这些内容也是十分自然的了.

在一元微积分中，有二条重要的定理 (叫中值定理).

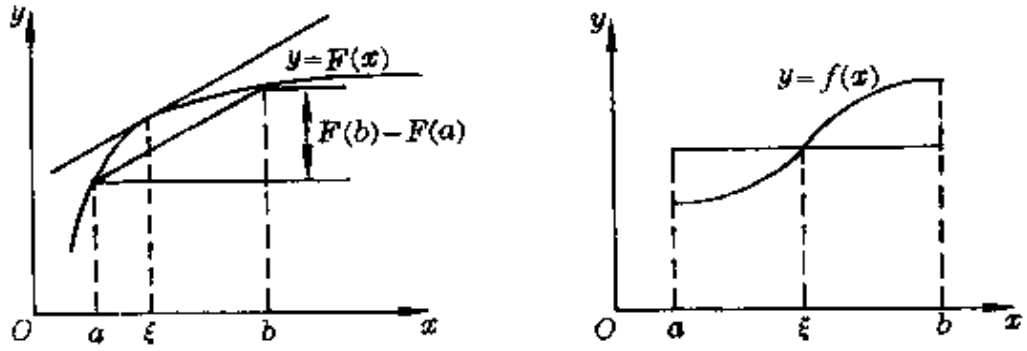
微分中值定理 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，则在 $[a,b]$ 中一定存在一点 ξ，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi).$$

积分中值定理 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则在 $[a,b]$ 中一定存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi).$$

这两条中值定理有十分明确的几何意义. 微分中值定理表示在 $[a,b]$ 中存在一点 ξ，曲线 $y=F(x)$ 在这点的切线平行于连结点 $(a,F(a))$ 与点 $(b,F(b))$ 的割线 (见下左图)；而积分中值定理表示在 $[a,b]$ 中存在一点 ξ，曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上覆盖的曲边梯形的面积等于以 $b-a$ 及 $f(\xi)$ 为边长的长方形的面积 (见下右图). 从上述的观察知悉，这两个中值定理从表面上看是两个完全不同的几何定理，一个定理说的是切线 (即微分)，一个定理说的是面积 (即积分)，而已知 "求切线"(微分) 与 "求面积"(积分) 是互为逆运算，所以当我们令 $\int_a^x f(t)\,dt=F(x)$ 时，就可发现，这两个中值定理实际上说的是同一件事，这还是微分与积分是一对矛盾，对立统一规律在微积分上的一个体现.



再例如，一元微积分中的泰勒 (Broox Taylor, 1685~1731) 展开式：若 $f(x)$ 在 $x=a$ 点附近是 $n+1$ 次可微的，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的附近可以写成

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 称为泰勒展开式中的余项.

这个公式可用多次求导数得到，也可用多次分部积分法得到，而余项 $R_n(x)$ 既可表成微分形式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

式中 ξ 位于 a 与 x 之间，即 $a<\xi<x$; $R_n(x)$ 也可表成积分形式

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

可以证明：微分形式的余项公式与积分形式的余项公式，利用中值定理是相互可以推导的. 这是微分与积分这对矛盾再次体现.

当然还有最重要的，在前面已经讲到的微积分基本定理，它有微分形式的基本定理，也有积分形式的基本定理，而两种形式说的是同一件事.

作为一元微积分的理论部分 (还有应用部分), 上述论及的那些结果是最重要的组成部分. 所以, 如果我们紧紧抓住微分与积分是微积分的主要矛盾这个基本观点, 那末, 理解一元微积分就显得十分自然, 十分简单, 十分容易了.

微分与积分这对矛盾在高维空间中的体现

上面探讨了一元微积分中微分与积分这对矛盾是如何体现的, 现在来探讨高维空间的情形.

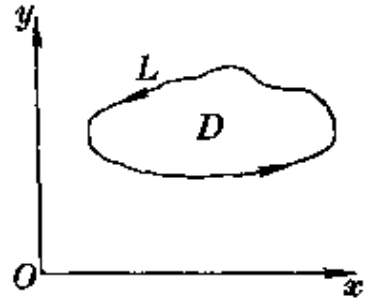
在高维空间上讨论微积分, 或多元微积分, 情况当然要略为复杂一些. 但微分与积分这对矛盾依然是微积分这门学科的主要矛盾, 其内容依然有三个组成部分, 即: 微分、积分、指出微分与积分是对矛盾的微积分基本定理. 微分与积分这两部分易于理解, 到了高维空间, 只是将一元微积分中的导数及微分推广成偏导数、方向导数与全微分; 将积分推广成重积分、线积分、面积分等. 这些推广是十分自然的. 那末, 什么是高维空间中的微积分基本定理? 要回答并说清楚这个问题, 还得费些口舌.

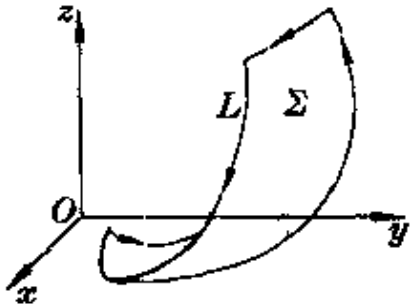
通常说的多元微积分, 主要是指在三维欧氏空间中讨论的微积分, 而在三维欧氏空间中揭示微分与积分是一对矛盾是由以下三个定理 (或称公式) 来体现的.

格林 (George Green, 1793~1841) **定理**(或称 **格林公式**) 设 D 是 xy 平面上封闭曲线 L 围成的闭区域, 且函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

这里 $\oint_L$ 表示沿 L 逆时针方向的线积分 (见下左图).





斯托克斯(George Gabriel Stokes, 1819~1903)**定理**(或称 **斯托克斯公式**) 设空间曲面 Σ 的边界是封闭曲线 L, 若函数 P、Q、R 有一阶连续偏导数, 则

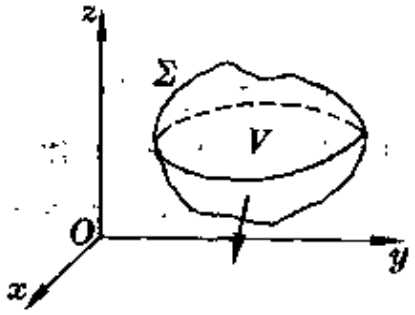
$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

这里 $\oint$ 表示沿上右图中的方向的线积分.

高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777~1855) **定理** (或称 **高斯公式**, 或称 **奥斯特罗格拉茨基** (Michel Ostrogradsky, 1801~1862)**公式**) 设 V 是空间封闭曲面 Σ 所围成的闭区域, 函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 V 上有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_{\Sigma_{\text{外}}} P\,dydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv,$$

这里 $\Sigma_{\text{外}}$ 表示曲面 Σ 的定向为法线向外. (见下图)



这三条定理 (或称公式) 是任何多元微积分的书中必讲的. 这三条定理都是说函数在区域边界上的积分与在区域内部积分的关系. 为什么说, 这三条定理是三维欧氏空间中微积分的基本定理? 在三维欧氏空间中, 除了这三条刻划函数在区域边界上的积分与区域内部积分的关系的定理外, 还有没有可能有更多这样的定理? 这三条定理与一元微积分中微积分基本定理到底有什么关系? 要回答并说清楚这些问题, 必须要用到外微分形式.

要严格地定义什么是外微分形式, 得用很多篇幅, 而这方面的书籍已经很多. 如作为经典著作之一的由德 · 拉姆 (Georges-William de Rham) 著的 Differential manifold, Springer, 1981(译自法文) 等. 在这里, 作一个通俗而不严格的简要介绍.

在一般的微积分的书中, 如果从 a 到 b 的直线段的长度是正的, 那末从 b 到 a 的直线段的长度是负的. 可是一涉及到面积, 就往往假设面积都是非负的, 如在二维欧氏空间中进行变数变换 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$ 则 xy 平面的面积元素 $dA = dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$, 这里 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 是关于 u,v 的雅可比行列式 (Jacobian), 而对雅可比行列式要加以绝对值, 为的是面积总是非负的. 既然线段的长度可有正有负, 为什么面积不能是负的? 如果去掉这个限制, 可以允许面积可正可负, 这可能就是引入外微分形式的最最根本与原始的思想.

对面积元素 $dxdy$ 引入外乘积 $\wedge$. 把 $dx \wedge dy$ 称为微分的 **外乘积**, 它要满足如下的规则: $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. 粗略来讲, 这相当于面积元素按不同定向有正有负. 在这个规则下, 立即得到 $dx \wedge dx = 0$. 由微分的外乘积乘上函数组成的微分形式称为 **外微分形式**. 微分在外乘积中的个数称为 **外微分形式的次数**. 于是, 若 P, Q, R, A, B, C, H 为三维欧氏空间中变数 x, y, z 的函数, 则

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

为 **一次外微分形式**(由于一次没有乘积, 与普通的微分形式是一样的);

$$Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdz \wedge dx$$

为 **二次外微分形式**;

$$Hdx \wedge dy \wedge dz$$

为 **三次外微分形式**, 而 P, Q, R, A, B, C, H 等称为 **微分形式的系数**, 而称函数 f 为 **0 次外微分形式**.

对任意两个外微分形式 λ, μ, 也可以定义外乘积 $\lambda \wedge \mu$, 只要相应的各项外微分进行外乘积就可以了. 例如, A, B, C, E, F, G 为 x, y, z 的函数, 且

$$\begin{aligned} \lambda &= Adx + Bdy + Cdz, \\ \mu &= Edx + Fdy + Gdz, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \lambda \wedge \mu &= (Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Edx + Fdy + Gdz) \\ &\quad + BFdy \wedge dy + CFdz \wedge dy + AGdx \wedge dz \\ &\quad + BGdy \wedge dz + CGdz \wedge dz \\ &= (BG - CF)dy \wedge dz + (CE - AG)dz \wedge dx \\ &\quad + (AF - BE)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

对外微分形式 ω, 可以定义 **外微分算子** d.

对于零次外微分形式, 即函数 f, 定义

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

即是普通的全微分算子.

对于一次外微分形式

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

定义

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dx.$$

经过简单计算，

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

对于二次外微分形式

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy,$$

也是一样，定义

$$d\omega = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy.$$

经过简单计算，

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

对于三次外微分形式

$$\omega = H dx \wedge dy \wedge dz,$$

也是一样，定义

$$d\omega = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

由于在三维欧氏空间中讨论外微分形式，易证此时 $d\omega = 0$.

有了这些准备以后，就可以说清楚在高维空间中微分与积分如何成为一对矛盾了.

先看格林公式

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

如果记 $\omega_1 = P dx + Q dy$, 则 ω_1 为一次外微分形式. 于是

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

由于线积分的曲线 L 是定向的，所以格林公式可以写成

$$\oint \omega_1 = \iint d\omega_1.$$

再看斯托克斯公式

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Omega \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

由于线积分的曲线 L 、面积分的区域 Ω 都是定向的，把 $Pdx + Qdy + Rdz = \omega$ 看作一次外微分形式，于是

$$d\omega = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dx \wedge dx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx \wedge dy.$$

因之，斯托克斯公式可写为

$$\oint \omega = \iint d\omega.$$

同样，高斯公式为

$$\iint_{\Omega_{外}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dxdydz.$$

由于 Ω 是定向的，所以可将

$$Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

看作二次外微分形式，即记

$$\omega_2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

从而

$$d\omega_2 = \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dx \wedge dy \wedge dz.$$

于是，高斯公式可写成

$$\oint \omega_2 = \iiint d\omega_2.$$

从这些立即看出，在三维欧氏空间，格林公式、斯托克斯公式与高斯公式实际上都可以用同一公式写出来，这个定理 (或公式) 也叫做

斯托克斯定理 (或 **斯托克斯公式**)

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega. \qquad (*)$$

这里，ω 为外微分形式，$d\omega$ 为 ω 的外微分，Ω 为 $d\omega$ 的积分区域，$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数.

从这里还可以看出，除了格林公式、斯托克斯公式与高斯公式以外，在三维欧氏空间中，联系区域与其边界的积分公式不会再有了，因为这时三次外微分形式的外微分为 0.

不仅如此，回到一元微积分的情况，这时取 ω 为 0 次外微分形式，即函数 $f(x)$ 取 Ω 为直线段 $[a,b]$, $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，这里就是端点 a 与 b. $d\omega$ 就是 $\dfrac{df(x)}{dx}dx$, 公式 $(*)$ 就成为

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

这就是一元微积分的基本定理.

归纳起来，在公式 $(*)$ 中，当 ω 为零次外微分形式，Ω 为直线段时，此即牛顿 - 莱布尼兹公式；当 ω 为一次外微分形式，而 Ω 为平面区域时，此即格林公式；当 Ω 为一次外微分形式，而 Ω 为三维空间中的曲面时，此即斯托克斯公式；当 Ω 为二次外微分形式，而 Ω 为三维空间中的曲面时，此即斯托克斯公式；当 Ω 为二次外微分形式，而 Ω 为三维空间中的一个区域时，此即高斯公式. 它们之间的关系可列表如下：

外微分形式的次数	空　间	公　式
0	直线段	牛顿－莱布尼兹公式
1	平面区域	格林公式
1	空间曲面	斯托克斯公式
2	空间中区域	高斯公式

公式 (*) 揭露了在三维欧氏空间中微分与积分是如何成为一对矛盾的，这对矛盾的一方为外微分形式，另一方为线积分、面积分、体积分. 这个公式是说，高次外微分形式 $d\omega$ 在区域上的积分等于低一次的外微分形式 ω 在区域的低一维空间的边界上的积分，外微分运算与积分起了相互抵消作用，就像加法与减法、乘法与除法、乘方与开方相互抵消一样.

更为重要的是：在高维欧氏空间，当维数大于 3 时，斯托克斯公式 (*) 依然成立；不但如此，当 Ω 是微分流形时 (关于微分流形不在此定义了，读者如有需要，可参阅有关文献)，(*) 式依然成立. 这就说明斯托克斯公式 (*) 是微积分中具有本质性的定理. 这不仅说清楚了三维欧氏空间中，为何微分与积分是一对矛盾，它们是如何体现的，还说清楚了高维欧氏空间，当维数大于 3 时，为何微分与积分是一对矛盾，它们是如何体现的，甚至说清楚了在微分流形上，为何微分与积分是一对矛盾，它们是如何体现的. 也可以说，斯托克斯公式 (*) 是微积分这门学科的一个顶峰，是数学中少有的简洁、美丽而深刻的定理之一，也是在近代数学中被应用得十分广泛的定理之一.

再重新回到三维欧氏空间中来. 在三维欧氏空间中，有着广泛应用，尤其是在物理上有广泛应用的三 "度"，即梯度 (gradient)、旋度 (curl) 与散度 (divergence)，现在在外微分形式的意义下来重新认识它.

先看零次外微分形式 $\omega = f(x,y,z)$, 它的外微分为

$$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

而 f 的梯度为

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

所以梯度是与零次外微分形式的外微分相当.

再看一次外微分形式

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

它的外微分为

$$\begin{aligned} d\omega_1 =& \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy \\ =& \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

而矢量 $\boldsymbol{u} = (P,Q,R)$ 的旋度为

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} =& \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\ =& \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 $x-$ 轴, $y-$ 轴, $z-$ 轴的单位矢量. 所以, 旋度是与一次外微分形式的外微分相当.

再看二次外微分形式

$$\omega_2 = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy,$$

它的外微分为

$$d\omega_2 = \Big(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\Big) dx \wedge dy \wedge dz.$$

而矢量 $\boldsymbol{v} = (A, B, C)$ 的散度为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

所以散度与二次外微分形式的外微分相当.

从这个观点来看，还有没有可能产生具有这种性质的其他的“度”呢？很明显，在三维欧氏空间，这是不可能的了. 因为在三维欧氏空间，三次外微分形式的外微分为零. 所以不可能再有与这相当的“度”了. 所以从外微分形式的观点，在三维欧氏空间，有且只能有这三个度，即梯度、旋度与散度. 它们与外微分形式的对应关系可列表如下：

外微分形式的次数	对应的度
0	梯度
1	旋度
2	散度

数学中高与低、难与易的辩证关系

上面已经指出，要说清楚高维欧氏空间中微分与积分是一对矛盾，以及它们是如何体现的，要用而且必须要用外微分形式. 这就

使我想起大数学家希尔伯特 (David Hilbert, 1863~1943) 于 1900 年在巴黎国际数学家代表会上那篇著名的演讲 (参见 The Bulletin of American Mathematical Society, Vol.8, p.437~445, 478~479, 1902, 或 Göttinger Nachrichten, 253~297, 1900) 中一段十分精辟的话. 他说: "数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着, 这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论并把陈旧的复杂的东西抛到一边, 数学科学发展的这种特点是根深蒂固的." 希尔伯特这段话是在 20 世纪将开始时讲的, 现在重读他的讲话, 依然感到是多么的深刻. 他实际上讲了数学发展过程中, 数学的高与低、难与易的辩证关系. 由庞加莱 (Jules-Henri Poincaré, 1851~1912)、嘉当 (Elie-Joseph Cartan, 1869~1951)、弗罗贝尼乌斯 (Ferdinand Georg Frobenius, 1849~1917) 以及古萨 (E. J. -B. Goursat, 1858~1936) 等一大批数学家建立与发展起来的外微分形式及其相关的理论, 对促使近代数学的发展, 起了极大的作用. 在这里就不加以论述了, 还是回到微积分这个话题上来.

外微分形式就是"更有力的工具和更简单的方法", 而"这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论", 即已有的微积分的理论, 例如: 上面说到的, 在外微分形式的观点下, 已有的格林公式、斯托克斯公式与高斯公式, 甚至一元微积分中的微积分基本定理, 原来是一回事, 只是在不同空间的不同区域上得到的不同形式. 而相对于用外微分形式表达的斯托克斯公式 (*), 格林公式、斯托克斯公式与高斯公式就成了"陈旧的、复杂的东西", 要记住斯托克斯公式 (*) 是十分容易的, 而要记住格林公式、斯托克斯公式与高斯公式, 相对来讲要困难得多, 的确可以把这三个公式"抛到一边". 要用的时候, 从斯托克斯公式 (*) 直接推导一下就很容易得到. 而所以会这样, 因为外微分形式的产生与引入是数学中"一步真正的进展". 事实也的确如此, 由于外微分形式的引入, 对近代数学面貌有了极大的改观.

不仅如此, 从这里还启示我们数学中高与低、难与易的辩证

关系，即高的数学未必难，往往反而易，而低的数学未必易，往往反而难．例如，外微分形式较之原有的微积分当然是更为高级的，但这个相对高级的数学来叙述微分形式在边界上的积分与内部的积分的关系式，斯托克斯公式 (*) 是这样的容易，实际上它的证明也并不困难．反之，不用外微分形式的微积分较之用外微分形式的微积分来是低级，但用这个相对低级的数学来叙述微分形式在边界上的积分与内部的积分的关系时，所出现的三个公式，是这样的复杂，且证明也较困难，公式也不易记住．

这种现象在数学中不是个别的，正如希尔伯特所说的："数学科学发展的这种特点是根深蒂固的．"关键是要有"更有力的工具和更简单的方法的发现"，这就需要真正的实质性的创新．

为了说清楚这点，我们不妨再来回顾一下大家十分熟悉的一些数学．

例如，我在小学学算术感到很难．如鸡兔同笼问题，已知有多少个头，多少只脚，问有多少只鸡，多少只兔．当时我确实感到困难，一是鸡、兔为何要关在一个笼子里？二是既能数得清有多少个头，多少只脚，为何数不清楚有多少只鸡，多少只兔？老师教我解鸡兔同笼问题的方法，更是使我感到很难，现在已完全记不得了．等到学了初中代数，才明白这不过是解二元一次联立方程组的问题，而解此方程组十分容易，不论是鸡兔同笼还是鸭狗同室，都可用此法来解，心中豁然开朗．初中代数当然比小学算术来得高级，但高级的却比低级的容易，低级的比高级的难，而最终是高级的替代了低级的．这是因为初中代数包括二元一次联立方程组等是"更有力的工具和更简单的方法"，而这有助理解已有的算术理论，并把陈旧的、复杂的，如用算术来解鸡兔同笼等问题的方法等"抛到一边"．这件事，现在谈起来很轻松，但在数学的发展史上，这"一步真正的进展"却经历了漫长的过程．

又例如，中学的平面及立体几何对训练学生的逻辑思维能力确有好处，但一些几何的定理与题目，往往不易理解与解答，如辅

助线应该添在哪里？应该先证哪些线、角或三角形相等或全同？一些题目解起来甚至十分困难，如著名的九点圆定理等．但有了解析几何之后，将一些几何问题代数化，使得相当一部分平面几何与立体几何的问题变得容易．解析几何比起平面几何与立体几何来当然要容易，而解析几何比起平面几何与立体几何当然要来得高级．笛卡儿 (René Descartes, 1596~1650) 引入了坐标，将几何问题代数化，这是数学中 "一步真正的进展"．由于 "代数化" 这个 "更有力的工具和更简单的方法"，对原有的平面几何与立体几何的理论有了更丰富、更深刻的理解，而的确把其中一些 "陈旧的、复杂的东西抛到一边"，使上几个世纪曾经很热闹的平面几何与立体几何的种种定理的研究，逐渐冷下来，到了本世纪初归于沉寂．所以这又是一个说明数学中高级的反面变得容易，而低级的往往较难的例子．

再例如人们知道了欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 以及它的推论棣莫弗 (Abraham de Moive. 1667~1754) 公式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 之后，发现中学里学习的一大批三角公式不过是这个简单公式的直接推论．而欧拉公式的产生的确是数学中 "一步真正的进展"，而这的确是 "更有力的工具和更简单的方法"，使人们对一部分数学包括三角学在内有了更深刻的理解，而把那些陈旧的、复杂的内容，如一些繁琐的三角公式 "抛到一边"．无可置疑，欧拉公式比起三角学来要更高级，面的确是高级的反面容易，低的反而难；例如：在三角学中的一些三角等式或不等式，用原有的方法证明起来往往很繁琐与困难．当然还可以举出一些这样的例子来，但我想可以不必多举了．举上述这些例子，无非想说明：数学中高与低、难与易的辩证关系，即高的未必难，低的未必易，关键是发现从低到高的这一步 " 真正的进展"．而这是不容易的，往往需要长时期的积累，才会有质的飞跃，才会有真正的、实质性的创新．然而这又的的确确是数学科学发展的根深蒂固的特点．

微积分中其他一些矛盾

毛泽东在《矛盾论》中指出："在复杂的事物的发展过程中，有许多的矛盾存在，其中必有一种是主要的矛盾，由于它的存在和发展规定或影响着其他矛盾的存在和发展"(《毛泽东选集》第1卷，人民出版社，1991年版，第320页). 还指出："捉住了这个主要矛盾，一切问题就迎刃而解了"(同上，第322页). 在微积分这门学科中，也存在着许多矛盾，主要矛盾无可置疑是微分与积分这对矛盾. 除了这对主要矛盾外，在微积分这门学科中还存在着很多其他的矛盾，当然这些都是次要矛盾，它们是在主要矛盾，微分与积分这对主要矛盾下存在和发展，并且也起着重要的作用. 例如，离散与连续，局部与整体，有限与无限，数与形，特殊与一般，等等. 其实，上述这些矛盾几乎在数学的所有分支中都起着重要的作用. 在微积分这门学科中，可以举出很多的例子来说明. 这里就离散与连续这对矛盾来多说几句，而对其他的矛盾只是十分简单地说几句. 例如：数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 与无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ 就是离散与连续的关系；函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 与含参变量的无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x,u)\,dx$ 就是离散与连续的关系；傅里叶(Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768~1830) 级数 $\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 与傅里叶积分 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-x)}d\xi$ 也是离散与连续的关系. 无穷级数、函数项级数与傅里叶级数都是离散地求和，且它们发展起来的理论、定理与公式，都是有关于离散的理论、定理与公式；而无穷积分、含参变量的无穷积分与傅里叶积分都是连续地求和，且它们发展起来的理论、定理与公式，都是有关于连续的理论. 在离散与连续是一对矛盾的观点下，这些微积分

的定理，往往是有一条离散的定理，就会有一条连续的定理，反之亦然．这是离散与连续这对矛盾在微积分这门学科中体现．这里只是举几个极为简单的例子来说明之．例如：对无穷级数，有如下一条大家十分熟悉的柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789~1857) 判别准则：无穷级数

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

收敛的充分必要条件为：对任一 $\varepsilon > 0$，存在一自然数 $N(\varepsilon)$，当 $n > m > N$ 时，

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

成立，即

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

成立．这里 $S_j = a_0 + a_1 + \cdots + a_j$, $j = 1, 2, \cdots$．而对于无穷积分，有如下一条与之对应的柯西判别准则：积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的充分必要条件为：对任一 $\varepsilon > 0$，存在 $X > a$，只要 $x, x' > X$，便有

$$\left|\int_x^{x'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

比较这两条判别准则，其差别只是：一个是离散地求和，一个是连续地求和 (即积分)，两者本质上完全一样，这是离散与连续这对矛盾在收敛判别准则上的体现．

又例如，对函数项级数，有如下一条柯西判别准则：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是，任给 $\varepsilon > 0$，有不依赖于 x 的 N 存在，使得当 $n > N$ 时，

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+l}(x)| < \varepsilon$$

对所有 $l > 0$ 都成立．

而对于含参变量的无穷积分，有如下一条与之对应的柯西判别准则：$\int_0^{\infty} f(x,u)\,dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是，对任给 $\varepsilon>0$，总存在一个仅与 ε 有关的 A_0，使得当 $A'、A''>A_0$ 时，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上所有的 u 都成立.

比较这两条判别准则，其差别仍然只是一个是离散地求和，一个是连续地求和 (即积分)，尽管表面上看来有差别，但本质上完全一样. 这也是离散与连续这对矛盾在收敛判别准则上的体现.

在傅里叶级数与傅里叶积分中，也可举出种种这样的例子. 如：若 $f(x)$ 是在 $[0,2\pi]$ 上勒贝格 (Henri Léon Lebesgue, 1875~1911) 平方可积的函数，则帕舍伐尔 (Parseval) 等式成立：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

这里 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

在傅里叶积分中，与帕舍伐尔等式相当的是普朗歇尔 (Plancherel) 等式：若 $f(x)$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上勒贝格平方可积的函数，称

$$\widehat{f}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt$$

为 f 的傅里叶变换 (与傅里叶级数中傅里叶系数相当)，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(x)|^2\,dx$$

成立.

比较帕舍伐尔等式与普朗歇尔等式，在等式的右边，一个是离散地求和 (级数)，一个是连续的求和 (积分)，但都是用来表达 $\int f^2 dx$ (即 f 的范数的平方) 与 f 的傅里叶系数之间的关系，所以本质上是一样的. 这是离散与连续这对矛盾在傅里叶分析中的体现.

当然，在微积分中，这样离散与连续这对矛盾的种种体现，还可举出很多来.

不仅如此，离散与连续这对矛盾是可以相互转化的. 例如：求函数所描绘的曲线覆盖下的曲边梯形的面积 (连续求和)，是通过黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826~1866) 和 (离散求和) 取极限过程得到的. 而一些级数求和 (离散求和) 是通过积分 (连续求和) 得到的. 反之亦然. 再例如：函数 $f(x)$ 的微分 $df = f(x)\,dx$ 是连续的差，差分 $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ 是离散的差. 因此，从原则上讲，有微分的公式或定理，就应有与之对应的差分的公式或定理，反之亦然. 且微分与差分之间可相互表达，相互转化. 对于离散与连续这对矛盾在微积分中的表现与作用，就说到这里，否则篇幅会太长了. 至于其他一些矛盾，仔细讨论起来都可以说很多，但我想不必在此文中多加探讨了，以下只是十分简单地说上几句.

我们知道，微分是局部性质，积分是整体性质，微积分的基本定理刻画了局部性质 (微分) 与整体性质 (积分) 的辩证关系. 而有限与无限这对矛盾，恩格斯早已指出："数学的无限是从现实中借用的"(《马克思恩格斯选集》第 4 卷，人民出版社，1995 版，第 369 页). 数学中的无限的概念是由现实中的有限建立起来的. 在微积分中几乎所有的无限的量都是通过有限的量得到的，如级数求和，无穷积分，泰勒级数等等；反之，一些有限的量是可以通过无限的量得到的. 有限与无限这对矛盾，在微积分中可以说是贯彻始终的. 同样，数与形这对矛盾，也是在微积分中贯彻

始终的. 如函数表示了曲线、曲面等，曲线、曲面可用函数来表达. 如二次方程表示二次曲线、二次曲面. 反之，一些几何的量都可以用数的关系表达出来，如曲率. 一些数量关系的推导可以导出几何图形的意义. 反之，一些几何图形的考察与研究可以导出数量关系. 至于导数表示切线方向，积分表示面积等，更是在微积分一开始时就体现了数与形这对矛盾的例子.

至于特殊与一般这对矛盾，在微积分中最为突出的表现为：三个初等函数 (即幂函数及其反函数；三角函数及其反函数；指数函数及其反函数) 与一般函数 (主要是连续函数与可积函数) 之间的关系. 在微积分中的几乎所有的定理或公式都是对一般函数，主要是连续函数或可积函数讨论的，但是，例题与习题的大部分却是讨论这三个大家十分熟悉的初等函数以及它们的复合函数. 这充分体现了人们对微积分中的一些结果的认识由特殊到一般，由一般到特殊的辩证关系.

由于本文主要讨论微积分中的主要矛盾，即微分与积分这对矛盾，而微积分中一些次要矛盾不应展开太多的讨论，还是到此为止为好.

浅说外微分形式？*

1. 外乘积，外微分形式

通常的多元微积分教科书中，出现了线积分、面积分等，与之同时出现的是一些微分形式. 例如，在线积分

$$\int A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

中，出现了微分 dx, dy, dz 的一次式

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz,$$

称为 **一次微分形式**; 在面积分

$$\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

中，出现了微分 dx, dy, dz 的二次式

$$\alpha = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

称为 **二次微分形式**; 在体积分

$$\iiint H\,dxdydz$$

中，出现了微分的三次式

*本文摘自裴 昇、张声雷编《简明微积分》第七章 7.6 节，中国科学技术大学出版社 1997 年版，第 364~382 页.

$$\lambda = H\,dxdydz,$$

称为 **三次微分形式**.

在我们所讨论的三维空间中，能出现的微分形式就这三种，再加上 **零次微分形式**, 即函数 f. 值得注意的是，所有出现的这些微分形式中，都不出现像 $dxdx, dydzdy, \cdots$, 即至少有两个相同的 dx, dy, dz 的项，而每个形式中只包含具有不同的 dx, dy, dz 的项.

此外，我们还有了联系这些线积分、面积分及体积分的三个基本公式，即

(1) 格林公式

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy,$$

这里，D 是由 L 围成的闭区域；P, Q 都是 D 上的具有一阶连续偏导数的函数.

(2) 高斯公式

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega_n} P\,dydz + Qdzdx + Rdxdy\\ &= \iiint_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,dxdydz,\end{aligned}$$

这里，V 是由封闭曲面 Ω 围成的闭区域；函数 P, Q, R 都是 V 上具有一阶连续偏导数的函数.

(3) 斯托克斯公式

$$\begin{aligned}&\oint_L P dx + Q dy + R dz\\ &= \iint_\Omega \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) dzdx\\ &\quad + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy,\end{aligned}$$

这里，封闭曲线 L 是曲面 Ω 的边界；P,Q,R 都是具有一阶连续偏导数的函数.

这表面上看来很不相像的上述三个公式，它们之间有什么联系？它们说明的本质是什么？能不能用统一的公式将它们概括起来，以至能在更高维的空间中也有这样的公式呢？

此外，我们还介绍了场论的三个“度”，即梯度、旋度与散度. 若 u 为数量场，$v=Pi+Qj+Rk$ 为矢量场，则梯度、旋度与散度分别为

$$\operatorname{grad} u=\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k,$$

$$\operatorname{rot} v=\nabla\times v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{div} v=\nabla\cdot v=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

这三个“度”的物理意义是十分重要的. 从数学上来看，这三个“度”是怎样产生的？它的意义如何？还有没有其他的“度”呢？

在单变量微积分中，说清楚微分与积分是一对矛盾的是微积分基本定理，即牛顿－莱布尼兹公式. 到了多变量微积分时，这对主要矛盾是怎样体现的呢？

所有这些，都必须在引入外微分形式之后才能清楚.

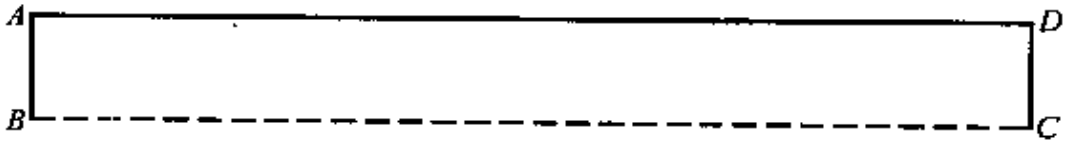
什么是外微分形式？

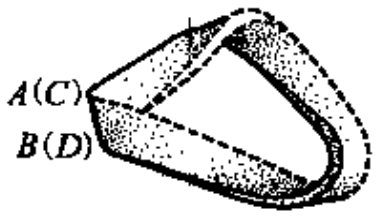
首先，我们看到线积分、面积分的区域都是有方向的 (指第二种线积分、面积分，以后都是这样，不另作申明). 把一重积分、二重积分看作线积分、面积分的特殊情形，则它们的积分区域也是有方向的. 同样，对三重积分也可以定向. 例如，一条曲线 L 的端点分别为 A,B，那么对它有两种定向的办法，或是由 A 到 B，或是由 B 到 A. 有了定向之后，从 A 到 B 的线积分与从 B 到 A 的

线积分这两者就相差一符号，也就是曲线的长度可以有正有负. 这类事在单变量积分时也早已有了：

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

关于曲面，也有个定向的问题. 假设所讨论的曲面可以分为内外两侧，也就是法线从一点出发连续移动，当回到原来位置时法线的方向不变，于是可以有法线向外或向内两种定向的办法. 这里值得注意的是，的确存在这样的曲面，它只有一侧，即法线从一点出发走了一些路后回到原来的位置时，法线的方向指向另一面了. 例如，把一矩形纸条 $ABCD$ 的一对对边拧转粘上 (见下图，这样的曲面就无法分出内外两侧了，这种曲面就不可定向. 我们不讨论这种曲面，而只讨论可定向的曲面. 在曲面定向后，不同方向的积分值差一符号，也就是曲面的面积在定向之后有正有负. 对三维空间中的区域，也可给予定向.





再回忆 二重积分的下述定义：如 $f(x,y)$ 在 D 中有定义，则

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim \sum f(\xi_i,\eta_i)\Delta A_i.$$

这里，ΔA_i 是面积元素，由于没有对 D 定向，所以总假定是正的. 因此，进行变数变换

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

则

$$dA = dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv,$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

即为了保持面积元素还是正的，必须对雅可比行列式取绝对值. 但是，对于已经定向的曲面进行积分时，由于面积本来就可正可负，所以就没有必要对雅可比行列式取绝对值了，即此时

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv.$$

此处 D 是已经定了向的； D' 是由 D 经过变换 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 的逆变换得到的区域，当然也是定了向的. 于是

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$

从这里可以得到：

(i) 如果取 $y = x$, 则

$$dxdx = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = 0.$$

如果将 x、y 对换，则

$$\begin{aligned} dydx &= \frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}dudv \\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = -dxdy. \end{aligned}$$

所以此时 $dydx \neq dxdy$. 也就是说， dx、dy 在乘积中的次序不能颠倒；如要颠倒，就要相差一符号.

满足上述两条规则的微分乘积称为 **微分的外乘积**. 为了表示与普通乘积不一样，用记号 $dx \wedge dy$ 来记它，即

$dx \wedge dx = 0$ (两个相同微分的外乘积为零);

$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ (两个不同微分的外乘积交换次序后相差一符号).

当然， $dx \wedge dx = 0$ 是 $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ 的推论.

由微分的外乘积乘上函数组成的微分形式，称为 **外微分形式**. 例如，若 P, Q, R, A, B, C, H 都是 x, y, z 的函数，则

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

为 **一次外微分形式**(由于一次没有乘积，与普通的微分形式是一样的);

$$Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdz \wedge dx$$

为 **二次外微分形式**;

$$Hdx \wedge dy \wedge dz$$

为 **三次外微分形式**. 把 P, Q, R, A, B, C, H 等称为 **外微分形式的系数**.

例如:

$$\sin y\, dx + \mathrm{tg}\, z\, dy + \cos x\, dz$$

是一次外微分形式;

$$zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$$

是二次外微分形式;

$$e^{x+y+z} dx \wedge dy \wedge dz$$

是三次外微分形式.

对任意两个外微分形式 λ、μ, 也可以定义**外乘积** $\lambda\wedge\mu$, 只要相应的各项外微分进行外乘积就可以了. 例如, $A,B,C.E,F,G,P,Q,R$ 都是 x,y,z 的函数, 且

$$\begin{aligned}\lambda &= Adx+Bdy+Cdz,\\ \mu &= Edx+Fdy+Gdz,\\ \nu &= Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\lambda\wedge\mu &= (Adx+Bdy+Cdz)\wedge(Edx+Fdy+Gdz)\\ &= AEdx\wedge dx+BEdy\wedge dx+CEdz\wedge dx\\ &\quad +AFdx\wedge dy+BFdy\wedge dy+CFdz\wedge dy\\ &\quad +AGdx\wedge dz+BGdy\wedge dz+CGdz\wedge dz.\end{aligned}$$

由微分的外乘积的定义, 有

$$\begin{aligned}&dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0,\\ &dy\wedge dx=-dx\wedge dy,\\ &dz\wedge dy=-dy\wedge dz,\\ &dx\wedge dz=-dz\wedge dx,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda\wedge\mu &= (BG-CF)dy\wedge dz+(CE-AG)dz\wedge dx\\ &\quad +(AF-BE)dx\wedge dy.\end{aligned}$$

同样,

$$\begin{aligned}\lambda\wedge\nu &= (Adx+Bdy+Cdz)\\ &\quad \wedge(Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy)\\ &= APdx\wedge dy\wedge dz+BPdy\wedge dy\wedge dz\\ &\quad +CPdz\wedge dy\wedge dz+AQdx\wedge dz\wedge dx\\ &\quad +BQdy\wedge dz\wedge dx+CQdz\wedge dz\wedge dx\\ &\quad +ARdx\wedge dx\wedge dy+BRdy\wedge dx\wedge dy\\ &\quad +CRdz\wedge dx\wedge dy.\end{aligned}$$

由微分的外乘积的定义，有

$$\begin{aligned}
dy \wedge dy \wedge dz &= 0,\\
dz \wedge dy \wedge dz &= -dy \wedge dz \wedge dz = 0,\\
dx \wedge dz \wedge dx &= -dx \wedge dx \wedge dz = 0,\\
dy \wedge dz \wedge dx &= -dy \wedge dx \wedge dz\\
&= (-1)^2 dx \wedge dy \wedge dz\\
&= dx \wedge dy \wedge dz,\\
dz \wedge dz \wedge dx &= 0,\\
dx \wedge dx \wedge dy &= 0,\\
dy \wedge dx \wedge dy &= -dy \wedge dy \wedge dx = 0,\\
dz \wedge dx \wedge dy &= -dx \wedge dz \wedge dy\\
&= (-1)^2 dx \wedge dy \wedge dz\\
&= dx \wedge dy \wedge dz,
\end{aligned}$$

所以

$$\lambda \wedge \nu = (AP + BQ + CR) dx \wedge dy \wedge dz.$$

有了外微分形式的外乘积的这个定义后，可立刻得到：外微分形式的外乘积满足分配律及结合律. 即如果 λ、μ、ν 是任意三个外微分形式，则

(1) $(\lambda + \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge \nu + \mu \wedge \nu$,

$\lambda \wedge (\mu + \nu) = \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge \nu$;

(2) $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$.

当然，外微分形式的外乘积不满足交换律，而满足

(3) 若 λ 为 p 次外微分形式，μ 为 q 次外微分形式，则

$$\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu.$$

外乘积的上列性质，读者可自行证明.

按照

(1) $dx \wedge dx = 0$,

(2) $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

的规律进行的外乘积，实际上以前我们早已遇到过．例如，两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的外乘积 (矢量积) 就是服从这个规律的，即 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. 所以，对微分进行外乘积就好像对矢量进行外乘积 (矢量积).

2. 外微分运算，Poincaré 引理及其逆

对外微分形式 ω, 可以定义 **外微分算子** d 如下：

对于零次外微分形式，即函数 f, 定义

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

即是普通的全微分算子.

对于一次外微分形式

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

定义

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz,$$

即对 P、Q、R 进行外微分，然后进行外乘积．因为

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz, \\ dQ &= \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz, \\ dR &= \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \Big(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\Big)\wedge dx \\ &\quad +\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\Big)\wedge dy \\ &\quad +\Big(\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz\Big)\wedge dz \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial P}{\partial z}dz\wedge dx \\ &\quad +\frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\wedge dy \\ &\quad +\frac{\partial R}{\partial x}dx\wedge dz+\frac{\partial R}{\partial y}dy\wedge dz+\frac{\partial R}{\partial z}dz\wedge dz. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0, \\ dy\wedge dx=-dx\wedge dy, \\ dz\wedge dy=-dy\wedge dz, \\ dx\wedge dz=-dz\wedge dx, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dy\wedge dz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dz\wedge dx \\ &\quad +\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\wedge dy. \end{aligned}$$

对于二次外微分形式

$$\omega=Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdx\wedge dy$$

也是一样，定义

$$d\omega=dA\wedge dy\wedge dz+dB\wedge dz\wedge dx+dC\wedge dx\wedge dy.$$

将 dA、dB、dC 的式子代入上式，利用外乘积的性质，立刻得到

$$d\omega=\Big(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\Big)dx\wedge dy\wedge dz.$$

对于三次外微分形式

$$\omega = H dx \wedge dy \wedge dz,$$

也是一样，定义

$$d\omega = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

而

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz,$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}dx \wedge dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H}{\partial y}dy \wedge dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

这是因为，每一项中至少有两个微分是相同的. 于是，在三维空间中，任意三次外微分形式的外微分为零.

在这些规定下，外微分算子 d 与普通的微分算子是一样的了，即对每一项进行运算，在每一项中分别对每一个因子进行运算，其余因子不动，将得出的各项相加. 不同的只是外微分算子 d 是运算之后进行外乘积，而普通的微分算子是运算之后进行通常的乘积.

关于外微分算子，立即可得到重要的

Poincaré 引理 若 ω 为一外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续偏导数，则 $dd\omega = 0$.

证明 由于只在三维空间中讨论，而三维空间中的外微分形式不外乎有以下四种：零次外微分形式，即函数 f，以及一次、二

次和三次外微分形式：

$$\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz,$$
$$\omega_2 = Adx \wedge dy + Bdy \wedge dx + Cdz \wedge dx,$$
$$\omega_3 = Hdx \wedge dy \wedge dz,$$

只要对它们一一验证就是了.

先看零次外微分形式 $\omega = f$. 有

$$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$
$$\begin{aligned} ddw = ddf &= d\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \wedge dx + d\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \wedge dy + d\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big) \wedge dz \\ &= \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial x \partial z}dz\Big) \wedge dx \\ &\quad + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dz\Big) \wedge dy \\ &\quad + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\Big) \wedge dz, \end{aligned}$$

因为

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0,$$
$$dy \wedge dx = -dx \wedge dy,$$
$$dz \wedge dy = -dy \wedge dz,$$
$$dx \wedge dz = -dz \wedge dx,$$

所以

$$\begin{aligned} ddw = &\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)dx \wedge dy \\ &+ \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\Big)dy \wedge dz \\ &+ \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\Big)dz \wedge dx. \end{aligned}$$

由假设， f 具有二阶连续偏导数，于是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

故

$$dd\omega = 0.$$

同样，对于一次外微分形式 ω_1，有

$$\begin{aligned} d\omega_1 =& dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ =& \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) dz \wedge dx \\ &+ \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned} dd\omega_1 =& \Big(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} \\ &+ \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}\Big) dx \wedge dy \wedge dz \\ =& 0. \end{aligned}$$

对于二次外微分形式 ω_2，有

$$d\omega_2 = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy.$$

这是一个三次外微分形式，前面已证明任意三次形式的外微分为零，故

$$dd\omega_2 = 0.$$

至于三次外微分形式 $\omega_3 = H dx \wedge dy \wedge dz$, 前已证明 $d\omega_3 = 0$, 所以当然有

$$dd\omega_3 = 0.$$

反过来, 还可以有

Poincaré 引理之逆 若 ω 是一个 p 次外微分形式, 且 $d\omega = 0$, 则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 α, 使 $\omega = d\alpha$.

证明 ω 可能是一次形式、二次形式或三次形式.

如果 ω_3 是三次形式, 那么 ω_3 只可能是

$$\omega_3 = H dx \wedge dy \wedge dz.$$

于是取 $\alpha_0 = \int_0^x H(t,y,z)dt$, 则 $\alpha_2 = \alpha_0 dy \wedge dz$ 就是 $\omega_3 = d\alpha_2$ 的解. 这只要直接验证就知道了.

如果 ω_2 是二次形式, 那么 ω_2 可以写成

$$\omega_2 = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy.$$

因为 $d\omega_2 = 0$, 所以

$$d\omega_2 = \Big(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\Big) dx \wedge dy \wedge dz = 0,$$

故

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

显然

$$d\Big(\int_0^y A(x,t,z)\, dtdz\Big) = A(x,y,z)\, dy \wedge dz + \int_0^y \frac{\partial A(x,t,z)}{\partial x} dtdx \wedge dz,$$

$$d\left(\int_0^y -C(x,t,z)\,dtdx\right)$$
$$= -C(x,y,z)\,dy\wedge dx - \int_0^y \frac{\partial C(x,t,z)}{\partial z}dtdz\wedge dx.$$

于是

$$\begin{aligned}
&d\left(\int_0^y A(x,t,z)\,dtdz - \int_0^y C(x,t,z)\,dtdx\right)\\
&=A(x,y,z)\,dy\wedge dz + C(x,y,z)\,dx\wedge dy\\
&\quad -\int_0^y\left(\frac{\partial A(x,t,z)}{\partial x}+\frac{\partial C(x,t,z)}{\partial z}\right)dtdz\wedge dx\\
&=A(x,y,z)dy\wedge dz + C(x,y,z)dx\wedge dy\\
&\quad +\int_0^y \frac{\partial B(x,t,z)}{\partial t}dtdz\wedge dx\\
&=A(x,y,z)dy\wedge dz + C(x,y,z)dx\wedge dy\\
&\quad + B(x,y,z)dz\wedge dx - B(x,0,z)dz\wedge dx.
\end{aligned}$$

所以，取一次形式

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = &\int_0^y A(x,t,z)dtdz - \int_0^y C(x,t,z)dtdx\\
&+\int_0^y B(x,0,t)dtdx,
\end{aligned}$$

就得到

$$d\alpha_1 = \omega_2.$$

如果 ω_1 是一次形式，那么 ω_1 可以写成

$$\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz.$$

因为 $d\omega_1 = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
d\omega_1 =&\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx\\
&+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\\
=&0.
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

取

$$f(x,y,z)=\int_0^x P(t,y,z)\,dt,$$

那么

$$\begin{aligned}df =&P(x,y,z)dx+\int_0^x\frac{\partial P(t,y,z)}{\partial y}dtdy+\int_0^x\frac{\partial P(t,y,z)}{\partial z}dtdz\\ =&P(x,y,z)dx+\int_0^x\frac{\partial Q(t,y,z)}{\partial t}dtdy+\int_0^x\frac{\partial R(t,y,z)}{\partial t}dtdz\\ =&P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\\ &-Q(0,y,z)dy-R(0,y,z).\end{aligned}$$

所以，只要取

$$\alpha=\int_0^x P(t,y,z)dt+\int_0^y Q(0,t,z)dt+\int_0^z R(0,0,t)dt,$$

就有

$$d\alpha=\omega_1.$$

这样就证明了 Poincaré 引理之逆.

在这个证明过程中，读者可以发现，我们已经作了这样的假定：所涉及的区域是有限或无限的长方体. 如果没有这个假定，证明中所出现的积分就不一定存在. 但这个假定对区域的要求太高，可作如下降低：

(1) 对一次微分形式 ω_1，如果区域中任一条闭曲线都可在区域内连续变动收缩为区域中的一点 (这时可自由使用斯托克斯公式)，那么当 $d\omega_1=0$ 时，便存在零次微分形式 α，使 $d\alpha=\omega_1$.

(2) 对二次微分形式 ω_2，如果区域是“星形区域”(即可在区域中找到一点 P_0，对于区域中的任何一点 P，线段 $\overline{PP_0}$ 都完全落在区域内)，那么当 $\omega_2=0$ 时，便存在一次微分形式 α_1，使 $d\alpha_1=\omega_2$.

这些结论的证明这里从略.

3. 梯度、旋度与散度的数学意义

有了这些准备之后，用外微分形式来重新叙述多元微积分的一些结果，就一目了然了.

首先来看看梯度、旋度与散度在外微分形式的意义下是怎样一回事：

先看零次外微分形式 $\omega = f$. 它的外微分为

$$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

而 f 的梯度为

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

所以梯度与零次外微分形式的外微分相当.

再看一次外微分形式

$$\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz.$$

它的外微分为

$$\begin{aligned} d\omega_1 =& \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dz \wedge dx \\ &+ \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx \wedge dy \\ =& \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

而矢量 $\boldsymbol{u}=(P,Q,R)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的旋度为

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}&=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\boldsymbol{i}+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\boldsymbol{j}+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix},\end{aligned}$$

所以旋度与一次外微分形式的外微分相当.

再看二次外微分形式

$$\omega_2=A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

它的外微分为

$$\mathrm{d}\omega_2=\Big(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

而矢量 $\boldsymbol{u}=(A,B,C)$ 的散度为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z},$$

所以散度与二次外微分形式的外微分相当.

从这个观点来看，还有没有可能产生具有这种性质的其他的“度”呢？很明显，在三维空间中这是不可能的了. 因为在三维空间中，三次外微分形式的外微分为零，所以不可能再有与之相当的“度”了. 据此看来，在三维空间中只能有这三个度，即梯度、旋度与散度.

此外， Poincaré 引理 $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega=0$ 也有其场论意义. 当 ω 为零次外微分形式，即 $\omega=f$ 时， $\mathrm{d}\mathrm{d}f=0$ 就是

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}f=0.$$

当 ω 为一次外微分形式，即 $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz$ 时，记 $\boldsymbol{u} = (P, Q, R)$，那么 $dd\omega_1 = 0$ 也就是

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\boldsymbol{u} = 0.$$

同样，Poincaré 引理之逆也有其场论意义. 我们知道，$\boldsymbol{v}$ 为有热场的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}$ 为无旋场，即 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} f$ 的充要条件为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0$. 这就是 Poinccré 引理及其逆. 若 $d\omega = 0$，则必有 $\omega = d\alpha$. 即如果一次外微分形式的外微分为零，则此外微分形式一定是一个函数 (零次外微分形式) 的外微分.

同样，如果 $\boldsymbol{v}$ 为旋度场，当且仅当 $\boldsymbol{v}$ 为无源场，即 $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$. 这就是 Poincaré 引理及其逆，若 $d\omega = 0$，则必有 $\omega = d\alpha$. 即如果二次外微分形式的外微分为零，则此外微分形式一定是一个一次外微分形式的外微分.

4. 多变量微积分的基本定理 (斯托克斯公式)

有了外微分形式，就可以说清楚在高维空间中微分与积分如何成为一对矛盾了.

先看格林公式

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

如果记 $\omega_1 = Pdx + Qdy$，则 ω_1 为一次外微分形式，于是

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

由于线积分的曲线 L 是定向的，所以格林公式可以写成

$$\oint \omega_1 = \iint d\omega_1.$$

同样，高斯公式为

$$\iint_{\Omega_{外}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

因为 Ω 是定向的，所以可将

$$Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

看作二次外微分形式，即记

$$\omega_2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

从而

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

于是，高斯公式可写成

$$\oiint \omega_2 = \iiint d\omega_2.$$

再看斯托克斯公式

$$\begin{aligned}
&\oint_L Pdx + Qdy + Rdz \\
&= \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\
&\qquad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

因为线积分、面积分都是定向的，把 $Pdx + Qdy + Rdz = \omega$ 看作一次外微分形式，于是

$$\begin{aligned}
d\omega =& \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\
&+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

因此，斯托克斯公式可写为

$$\oint \omega = \iint d\omega.$$

从这些立即看出，格林公式、高斯公式与斯托克斯公式实际上都可以用同一个公式写出来，即

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

这里，ω 为外微分形式，$d\omega$ 为 ω 的外微分，Ω 为 $d\omega$ 的积分区域，$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数.

从这里还可以看到，除了格林公式、高斯公式与斯托克斯公式以外，联系区域与其边界的积分公式不会再有了，因为三维空间中三次外微分形式的外微分为零.

这个一般的公式

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

可以推广到更高维的空间中去，甚至可以推广到更一般的流形上去 (什么叫流形，不在此解释了). 正是这个一般的公式，揭露了高维空间中的微分与积分是如何成为一对矛盾的. 这对矛盾的一方为外微分形式，另一方为线积分、面积分、体积分. 这个公式是说，高次的外微分形式 $d\omega$ 在区域上的积分，等于低一次的外微分形式 ω 在区域的低一维空间的边界上的积分，外微分运算与积分起了相互抵消作用，就像加法与减法、乘法与除法、乘方与开方相互抵消一样. 在一维空间中，这就是微积分基本定理

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

这时，Ω 为直线段 $[a,b]$; $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，这时就是端点 a 与 b; $d\omega$ 就是 $\dfrac{df(x)}{dx}dx$.

公式

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega.$$

统称为 **斯托克斯公式**. 所以，在高维空间中，斯托克斯公式就是高维空间的微积分基本定理，相当于一维空间中的牛顿 – 莱布尼兹公式，即一维空间的微积分基本定理.

最后必须申明，这里的介绍的着眼点不是数学上的严格，而是希望给读者对于外微分形式有一个比较直观的了解. 在这个了解的基础上，可以用外微分形式来加深对以往学过的微积分内容的本质的认识，从而搞清楚在高维空间中微分与积分这对矛盾是如何体现的. 有了这些认识，再来学习严格的用外微分形式写的多变量微积分，大概是不会有多大困难了.

微积分严格化之后*

牛顿 (Isaac Newton, 1642~1727) 于 1665~1667 年间，莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm, 1646~1716) 于 1673~1676 年间建立微积分之后，很多数学家将它应用于天文、力学、物理等各种自然科学，获得了很大的成功，对整个自然科学的发展起了很大的推动作用. 由于微积分的建立，数学本身也起了很大的变化，进入一个崭新的时代，很多新的数学分支产生了，如：常微分方程、偏微分方程、积分方程、变分法、微分几何等等，数学成为由分析、几何、代数三大部门所组成的学科，这三大部门既相对独立又互相联系.

但是，由于当时牛顿、莱布尼兹建立的微积分的理论基础并不完善，以至在应用与发展微积分的同时，对它的基础的争论愈来愈多，这样的局面持续二百年之久. 直到柯西 (Augustin Louis Cauchy, 1789~1857), 外尔斯特拉斯 (Karl Wilhelm Theodor Weierstrass. 1815~1897) 及黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826~1866) 等人在前人工作的基础上逐步完成了微积分基础的严格化之后，这种争论才算结束.

在微积分基础的严格化方面，柯西的代表作有《分析教程》[1] (1821), 《无穷小计算概要》[2](1823), 《微分学讲义》[3] 等. 他对微积分中的一些基本概念，如变量、函数、极限、连续、导数、微分、收敛等给出了明确的定义，并在此基础上严格地表达并证明了微积分基本定理、中值定理等一系列重要定理，他对

*本文是依据作者在 2000 年 10 月 18 日至 21 日于西安举行的 "20 世纪数学传播与交流国际学术讨论会" 上的二次演讲加以整理而写成的.

无穷级数进行了严格化处理，明确定义了级数的收敛性，还给出了判别准则等等. 他的工作较大地澄清了微积分基础上长期存在的混乱局面. 但他的理论依然不十全十美，仍有一些漏洞. 后来外尔斯特拉斯弥补了这些不足，他创造了一套使用至今的 ε–δ 语言，并用以重新定义了极限、连续、导数等基本概念，将微积分中一些重要的定理用 ε–δ 语言重新叙述、证明之. 他还引进了一致收敛的概念，从而消除了微积分中出现的混乱. 他于 1857 年第一次给出了严格的实数的定义，大意是从自然数出发定义有理数，通过无穷多个有理数的集合来定义实数等等. 可以这样说，现在教科书中的微积分的表达形式基本上就是外尔斯特拉斯给出的. 黎曼 1854 年的 "就职论文"[4] 定义了黎曼积分. 因之，从 19 世纪 20 年代到 60 年代，微积分的严格化大体上已经完成. 到 1872 年，有四位数学家从不同的角度建立起各个不相同的实数理论，他们是戴德金 (R. Dedekind)[5]，康托 (G. F. L. Ph. Cantor)[6]，米勒 (C. Meray)[7] 与海因 (E. Heine)[8]. 这标志着微积分基础严格化的工作已告成. 这里需要说明的是， 20 世纪 60 年代美国数理逻辑学家鲁滨逊 (A. Robinson) 运用现代数理逻辑的方法和新成果，主要是模型论的理论，建立了非标准分析，这也可以说是重新做了微积分基础严格化的工作. 本文只讨论标准分析，不涉及非标准分析. 有兴趣了解非标准分析的读者，可以读 A. Robinson 的原著 (有中译本)[9].

微积分基础完成了严格化之后，对整个数学的发展起了很大的促进作用. 可以说，整个数学都面目一新，微积分更为深入，广泛地渗透到数学的各种分支中去. 但以微分与积分作为主要矛盾的微积分自身的理论是怎样往前发展的？走向何处？

拙见以为：在微积分完成了严格化之后，微积分本身沿着三个不同，但相互影响的方向发展，这三个方向是： 1. 微积分的深化与拓展； 2. 外微分形式； 3. 复数域上的微积分.

现就这三个方向分别简略论述如下：

1. 微积分的深化与拓展

微积分的基础虽然已经建立，但逐渐发现它仍有不少新的缺陷，且有很大局限性. 主要有以下四点.

1. 作为微积分中最为重要的定理，微积分的基本定理，即牛顿 – 莱布尼兹公式是这样说的：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微，且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \tag{1}$$

这里要求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微，且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 这样的要求未免条件过强，例如即使像 $f(x) = \sqrt{x}$ 这样简单的函数，如果 $a = 0, b = 1$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处在通常意义下不可微，而函数 $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ 在 $[0,1]$ 上在通常意义下不是 Riemann 可积的，因之公式 (1) 对这样简单的例子却不能适用. 而且，即使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微，也不能保证 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 上述例子与对 f 的要求，说明原有的微分、积分概念的局限性. 要想微积分进一步发展，必须拓展微分与积分的概念，使 (1) 式能在更为广泛的意义下成立.

2. Lebesgue 定理说：在一个闭区间上有界的函数 Riemann 可积当且仅当这个函数的间断点的集合的测度为零.

也就是说：Riemann 可积的函数，基本上是连续函数，与之相差不过是一个测度为零的集合. 这样的函数类当然是太小了，尤其是有下面的事实.

3. 存在处处不可微的连续函数. 使得人们认识到：连续函数类与可微函数类相距甚远！

首先举出这样的例子的数学家是波尔查诺 (Bernhard Bolzano, 1781~1848). 他是微积分严格化的先驱. 在 1817 年，他就给出了函数连续性、导数等基本概念的合适的定义，可惜的是他的工作

长期湮没无闻. 他在 1834 年用作图的方法构造出第一个处处不可微的连续函数的例子，这样重要的例子同样不为人们所注意. 他所构造的例子是：设 PQ 是与水平线斜交的直线，中点为 M，将 PM、MQ 分别分为四等分，记分点分别为 P_1, P_2, P_3 与 Q_1, Q_2, Q_3，令 P_3' 为 P_3 在过点 M 的水平线的反射点，Q_3' 为 Q_3 在过点 Q 的水平线的反射点，这就形成了折线 $PP_3'MQ_3'Q$. 再对这个折线的四个线段中的每一个应用上述作法，这样就得到一条由 4^2 个线段组成的折线. 依此方法无穷地连续下去，所得的折线图形将收敛于一条曲线，而这条曲线就表示了一个处处不可微分的连续函数.

波尔查诺的这样重要的例子可惜当年不为人们所注意. 直到 1861 年，外尔斯特拉斯用式子写出了一个处处不可微的连续函数的具体表达式 [11](到 1872 年 Weierstrass 才写成论文发表)，这才使人们震惊. 他的著名的例子是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

这里 a 为奇数，$b \in (0,1)$, $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$.

后来人们还举出了很多这样的例子，使大家认识到光讨论连续函数类是远远不够的. 而 Riemann 积分能讨论的基本上只是连续函数类，这就有很大的局限性. 因之，有必要来拓展积分的概念，以能讨论更大的函数类.

4. 在原有的微积分的框架下，很多定理都要求很强的条件，例如：

(i) 若 $f_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, 在 $[a,b]$ 上连续，且一致收敛于 $f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

如果“一致收敛”的条件不满足，则有反例说明 (2) 不成立.

(ii) 若 D 为矩形 $[a,b]\times[c,d]$, f 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

还有一些结果显示出原有微积分的缺陷. 如： Riemann 可积函数空间是不完备的，即不是一个 Banach 空间，这就大大限制了积分理论的进一步的发展.

具体的可叙述为：若定义区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数空间中的二个函数 f 与 g 的距离为 (当然还可以定义别的距离)

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx,$$

若 $\{f_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的一个 Riemann 可积函数序列，且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(f_n,f_m)=0$, 则不能保证一定存在 Riemann 可积函数 f, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$.

以上四个问题，显示了原有微积分的缺陷与局限性，促使人们重新考虑更深化、更拓展微分与积分的概念及理论，来克服这些缺陷，拓宽局限性. 这就促使现在称之为实变函数论的产生与发展.

由康托 (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845~1918), 勒贝格 (Henri Leon Lebesgue, 1875~1941) 等人建立了这一整套理论，使微积分的面貌焕然一新，其核心部分是 Lebesgue 积分理论. 这整套理论现今称为实变函数或实分析，成为现代数学中的重要内容，且成为最重要的一种数学语言 (另外重要的数学语言还有：代数语言、拓扑语言等等)，也就是当人们要叙述或论证一些数学命题、定理、假设或理论时，必须要用这些数学语言来叙述或论证. 实分析的语言在概率论、数理统计、调和分析、泛函分析等等各种学科中的应用尤为显著. 康托有关集合论的第一篇革命性文章发表于 1874 年的 Crelle 杂志上 [12], 而勒贝格的关于 Lebesgue 积分理论叙述首先在他的博士论文 [13] 中出现，时为 1902 年.

Riemann 积分被 Lebesgue 积分所替代，而原有的微分概念却并没有被新的微分概念所代替. 之所以这样，其原因也许是：积分的概念与微分的概念有着本质上的不同，前者是整体的 (global) 性质，而后者是局部的 (local) 性质. 即使如此，由于测度论方法的引入，使得微分理论也因之而得到很大的革新.

至于 Lebesgue 积分最本质的思想，也许用勒贝格自己的说法最为恰当了. 他说：假如我欠了人家许多钱，现在要还，此时，先按钞票面值的大小分类，然后计算每一类的面额总值，再相加，这就是我的积分思想. 如不按面值大小先分类，而是按从钱袋中摸出的先后次序来计算总数，那就是 Riemann 积分的思想.

按勒贝格思想建立起积分理论，先要解决一个如何度量“长度”的问题. 于是，就要有 Lebesgue 测度的理论.

由于这套理论的建立，使微积分能在一个更为广阔的天地中发挥它的作用. 而对微积分本身的理解，与原有的认识相比，也达到了更为深刻的地步. 这套理论将微积分推向到一个更高的层次.

这时候，前面提到的原有微积分的缺陷与局限性，尤其是上述提到的四个问题，都得到了改善或解决.

1. 在 Lebesgue 积分意义下，连续函数 f 使 (1) 式成立，当且仅当 f 是绝对连续函数. 前面提到的那个例子，$f(x)=\sqrt{x}$ 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数，故在 Lebesgue 积分意义下，(1) 式成立. 之后人们有很多研究，在 Lebesgue 积分意义下，如何使 (1) 式成立. 例如虽然 f' 存在不能保证 $f'\in\mathcal{L}$ (这里 $\mathcal{L}$ 表示 Lebesgue 可积函数类), 1980 年，Cohn 证明了如下的结果：若 f 在 $[a,b]$ 上处处可微，且 $f'\in\mathcal{L}$, 则 (1) 式成立. 这也许是在 Lebesgue 积分意义下，使 (1) 式成立的最好条件. 但是，就使微分与积分互为逆运算的观点而言，Lebesgue 积分似还仍不够用. 于是促使人们从在 Lebesgue 积分产生不久之后就逐步建立起来的更新的、更为广义的积分. 如：Denjoy 积分、Perron 积分等的角度来考虑这个问

题.

2. 在 Riemann 积分意义下，考察的函数类几乎是连续函数类，而在 Lebesgue 积分意义下，考察的函数类就扩充为可测集上的可测函数类，这是一个很大的扩充.

3. 在 $[a,b]$ 上绝对连续函数几乎处处可导，这就说清楚了连续函数类与可微函数类之间的区别与联系.

4. 一些在原有框架下，要求很强的定理，在 Lebesgue 积分意义下，可以松绑.

例如前面说到的原微积分的缺陷与局限性中的 4(i) 可以宽松为 Lebesgue 控制收敛定理：若 $a_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ 与 $a(x)$ 都是可测集 D 上的可测函数，且在 D 上 $a_n(x)$ 几乎处处收敛于 $a(x)$, 若存在 $g(x)\in\mathcal{L}(D)$, 使得对每一个 $n\geqslant 1$, 在 D 上有 $|a_n(x)|\leqslant g(x)$ 几乎处处成立，则 $a_n(x)$ 与 $a(x)$ 在 D 上可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_D a_n(x)\,dx=\int_D \lim_{n\to\infty} a_n(x)\,dx=\int_D a(x)\,dx.$$

显然 Lebesgue 控制收敛定理比原有的收敛定理的条件宽松得多了，这也显示了 Lebesgue 积分成功之处.

同样，前面说到的 4(ii) 可以宽松为 Fubini 定理：若 $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ $(p+q=n,\ p\geqslant 0,\ q\geqslant 0)$, 则

1° 对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^q$ 上的 Lebesgue 可积函数;

2° 积分 $\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的 Lebesgue 可积函数;

3° $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^q} dy\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx.$$

显然， Fubini 定理比原有定理的条件也宽松得多了.

前面说到 Riemann 可积函数空间是不完备的，即不是 Banach 空间，但 $\mathcal{L}^p$ 空间 $(1\leqslant p)$ 却是完备空间，即为 Banach 空间，尤其 $\mathcal{L}^2$ 为 Hilbert 空间. 这就克服了原有 Riemann 积分的一个重大缺陷.

1944 年，李特尔伍德 (John Edensor Littlewood, 1885~1977) 曾写过一本书叫《函数论讲义》[14]，关于实分析，他说了这样一段话："知识的范围不像有时设想的那样大. 有三条原理，大致上可表达为：每个 (可测) 集几乎是有限个区间的并；每个 (可测) 函数几乎是连续的；每个 (可测) 函数的收敛序列几乎是一致收敛的. (实函数论) 中的大多数结果是这些概念的完全直觉的应用，而学生们掌握了这些，等于掌握了大多数情况下实变数理论所要求的. 若可以看到由一个原理可以 '很好' 地证实一个问题的正确性，那么自然要问 '几乎' 应充分接近到怎样的程度，这个问题就可以确切地解决了."

李特尔伍德的这一番话是 50 多年前说的，现在读来依然感到很有意思，很重要，是画龙点睛之笔. 他紧紧抓住了实函数论中三个最重要的概念，指出了：可测集与有限个区间之并；可测函数与连续函数；可测函数序列的收敛与一致收敛之间的区别与联系，刻划了相互之间的血缘关系. 这不仅仅指出了如何来思考与解决新的理论中的问题的途径，而且还指出了新的理论与原有的理论尽管有本质上的不同，克服了原有理论中的种种缺陷，但又与原有的理论从某种意义上讲相距不远，指出了这两者之间十分亲密的血缘关系.

在实分析中，的确不断出现以体现 Littlewood 三条原理形式的定理. 如以下的定理就是体现原理 1 的，若 E 为集，且外测度 m^*E 有限，则 E 为可测集当且仅当：任给 $\varepsilon > 0$，有一有限开区间之并 V，使得 $m^*(V \Delta E) < \varepsilon$，这里 $A \Delta B = (A \sim B) \cup (B \sim A)$，而 $B \sim A = \{x : x \in B \text{ 及 } x \notin A\}$. 以下的定理是体现原理 2 的，若 f 为定义在 $[a,b]$ 上的可测函数，f 取 $\pm\infty$ 的集合的测度为零，则任给 $\varepsilon > 0$，可以找到一个阶梯函数 g 及一个连续函数 h，使得 $|f-g| < \varepsilon$ 及 $|f-h| < \varepsilon$，除了一个测度小于 ε 的集合外都成立. 以下的 Egoroff 定理就是体现原理 3 的，若 $\{f_n\}$ 为具有有限测度的可测集 E 上的可测函数序列，几乎处处收敛于 f，则任给 $\eta > 0$，

有一子集 $A \subset E, mA < \eta$, 使得 f_n 在 $E \sim A$ 上一致收敛于 f.

这种体现 Littlewood 三条原理的定理还可以举出很多. 总之, Littlewood 的三条原理充分说明了实分析与原有微积分之间的区别与血缘关系.

2. 外微分形式

外微分形式使微积分从古典走向现代, 从在欧氏空间上讨论微积分走向流形上讨论微积分.

外微分形式的产生也是理所当然的事.

在原有的微积分中, 面积与体积永远是非负的. 例如, 若可积函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的区域 D 上定义, 变换 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 将区域 D 变为 D', 则有变换公式

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv. \qquad (2)$$

在这个公式中, Jacobi 行列式取绝对值就是因为面积元素永远是非负的.

但是, 线段的长度可以有正、有负, 为什么面积与体积就不能有正、有负呢? 如果这可正、可负, 那么 (2) 式中的 Jacobi 行列式的绝对值就不必要取了, 但这时候, D 与 D' 必须定向 (orientation).

吴文俊老师在一文 [15] 中曾说了这样一段话: "法国著名的拓扑学家 Thom 教授, 曾经对本人表达过这样的意见: 定向概念是几何拓扑中最有深刻意义的伟大创造之一. 对于 Thom 先生的卓识, 本人深为钦服."

有了定向的概念, 就有可能定义外微分. 外微分形式. 而这些概念的产生, 使微积分的面貌发生了根本性的转变. 例如, 微积分中的 Green 公式、 Stokes 公式与 Gauss 公式, 可以用外微分

形式统一成为一个公式 —— 外微分形式的 Stokes 公式

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega, \tag{3}$$

这里 ω 为外微分形式， d 为外导数， Ω 为区域，其维数与外微分形式 $d\omega$ 的阶数相同， $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，积分的重数与积分区域的维数相同.

当 Ω 为直线段时， ω 为 0 次外微分形式，这就是牛顿 - 莱布尼兹公式；当 Ω 为平面区域时， ω 为一次外微分形式，这就是 Green 公式；当 Ω 为三维空间中的一张曲面时， ω 为一次外微分形式，这就是 Stokes 公式；当 Ω 为三维空间中的区域时， ω 为二次外微分形式，这就是 Green 公式.

又例如，可以用外微分形式来说明：在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中有：散度，梯度与旋度这三个 "度"，且只有这三个 "度"，等等.

(3) 式不仅统一了 $\mathbb{R}^3$ 中这些有关边界积分与内部积分的三个公式，重要的是， (3) 式正好说明了高维空间中微分与积分是怎样形成一对矛盾的. 从这里看出，应用外微分，也只有应用了外微分，才能说清楚这一点.

更为重要的是，公式 (3) 不仅仅是在 $\mathbb{R}^3$ 成立，并在 $\mathbb{R}^n, n > 3$ 也成立，且在微分流形上也成立. 所谓流形，实际上是局部欧氏空间. 流形上的公式 (3) 不仅说清楚了微分与积分如何在流形上形成一对矛盾，而且公式 (3) 也正是从古典微积分走向现代微积分的入口处.

实际上，有了微分，就会有微分形式. 早在 1740 年，克莱罗 (A. -C. Clairaut) 就曾讨论过这样的微分方程 $Adx + Bdy = 0$, 这里 A, B 均为 x, y 的函数. 他指出，方程有解的充要条件是 $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$, 方程的左边实际上是一次微分形式，后来出现了线积分与面积分，如： $\int Adx + Bdy + Cdz$ 及 $\iint Adxdy + Bdydz + Cdzdx$ 等等，这里 A, B, C 均为 x, y, z 的函数，积分号下都是微分形式，如 1855

年，麦克斯韦 (J. C. Maxwell) 在计算电流通量时，就应用了这种积分.

1899 年， É. 嘉当 (Élie Cartan, 1869~1951) 首先明确地定义了外微分形式、外导数等 [16]. 1922 年，他十分明确地写出了 (3) 式. 1899 年，庞加莱 (Jules Henri Poincaré, 1854~1912)[17] 给出了那著名的 Poincaré 引理及其逆，即：若 ω 为一个外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续偏导数，则 $dd\omega = 0$. 反之，若 ω 为一个 p 次外微分且 $d\omega = 0$, 则一定存在一个 $p-1$ 次的外微分形式 α, 使得 $\omega = d\alpha$. 此外，他还将 V. Volterra 的一个结果写成 (3) 的形式，等等.

由于 H. Poincaré, E. Cartan, E. Goursat 等数学家的努力，以及外微分形式在微分方程、微分几何等众多学科中的巨大成功，使得外微分形式得到蓬勃的发展，成为现代数学中不可缺少的重要内容.

3. 复数域上的微积分

Frobenius 定理说：实数域上所有有限维结合可除代数 (Division Algebra) 只有三个，即：实数域、复数域、四元数 (Quaternion) 代数；如果去掉结合性要求，则实数域上还有另一个可除代数，Cayley–Dickson 代数，即 Octonion 代数，在实数域上的维数为 8.

由于四元数代数不可交换，Cayley–Dickson 代数既不可交换又不结合，而复数域既可交换又可结合，且复数早已为人们所熟悉，于是人们在考虑原有微积分，即实数域上的微积分之后，理所当然地考虑复数域上的微积分，这就形成了复分析.

复分析既然是复数域上的微积分，那么它的内容应有两个部分，一部分是从实数域上的微积分直接地平行推广过来的，这部分的建立往往无多大的困难. 另一部分是实数域上的微积分所没

有的，不能直接地推广过来的．前一部分当然重要，但后一部分往往更为引人注意．

原有微积分由三个部分组成，即：微分、积分、指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理，这些都没有什么困难地可以直接推广到复数域上来．值得一提的是，微积分基本定理到了复数域上将成为怎样？在复平面 $\mathbb{C}$ 上，这成为复形式的 Green 公式：若 $\omega = \omega_1 dz + \omega_2 \overline{dz}$ 为域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的一次外微分形式，这里 $\omega_1 = \omega_1(z, \overline{z})$, $\omega_2 = \omega_2(z, \overline{z})$ 均为 z、$\overline{z}$ 的可微函数，d 为外微分算子，即 $d = \partial + \overline{\partial}$, 而 $\partial = \dfrac{\partial}{\partial z}$, $\overline{\partial} = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, 记 Ω 的边界为 $\partial\Omega$, 则

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \iint_{\Omega} d\omega.$$

这就是公式 (3) 在复平面上的形式．由此出发，就可以得到著名的 Cauchy 积分公式与 Cauchy 积分定理．Cauchy 积分公式说：若 L 是一条逐段光滑的闭 Jordan 曲线，$f(z)$ 在曲线上及由曲线包围的内部连续，且在其内部解析，则在区域内的任一点 z, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\gamma)\, d\gamma}{\gamma - z}$$

成立．Cauchy 积分定理说：假设如上，则

$$\int_L f(z)\, dz = 0.$$

Cauchy 积分定理是他在 1825 年证明的，但到 1874 年才发表 [18]，且并未收入他的全集中．当然，柯西原来的证明不是用外微分形式，他还假设了 $f'(z)$ 在 L 上连续．Cauchy 积分公式是他在 1831 年证明的 [19]，他还假设了 $f(z)$ 在 L 上解析，后来古萨 (É. -J. -B. Goursat) 去掉了这些条件 [20]．不难证明：Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式是相互等价的．

1825 年及 1831 年 Cauchy 两条定理的建立，是复分析中的一个重大里程碑，这标志着复分析中三个主要内容之一，Cauchy 理

论的诞生. 从这两条定理出发，可以得到一系列重要的结果，愈来愈显示出复分析与原有的微积分之间的质的不同. 但从上面的叙述中，可以看出 Cauchy 理论与原有微积分的血缘关系.

就在柯西为建立复分析而努力的时候，另外还有两位大数学家也正在从不同的角度为建立复分析而努力.

一位是外尔斯特拉斯，他以他治学严谨、逻辑严密的特点来考虑复分析. 他从幂级数出发，所以他的复分析理论是级数理论. 原有微积分中已有级数理论，如 Taylor 级数等，这一套理论可以不很困难地推广到复数域上. 但在复数域上的微积分中，还有 Laurent 级数，这是原有微积分中所没有的，人们以此来刻划奇点，研究亚纯函数等等. Laurent 级数来源于 1843 年罗朗 (P. A. Laurent) 建立的定理. 圆环 $D=\{0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ 内的任一单值解析函数 $f(z)$ 在 D 内可由一个收敛的 Laurent 级数 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-a)^k$ 来表示. 事实上，外尔斯特拉斯于 1841 年已经研究了具有正、负幂的级数，即 Laurent 级数，只是他的一些早期的论文一直未付印，直到他的全集第一卷刊印时才发表，但那时已是 1894 年了 [21]，Weierstrass 级数理论有着极为丰富的内容.

另一位数学家黎曼，他从几何的观点来考察复分析，即将函数看作从一个区域到另一个区域的映射. 他还引入了一个全新的几何概念，即 Riemann 面，引入这种曲面的出发点是为了对多值函数进行研究. 这套理论是原有微积分中所没有的. 1851 年，黎曼的博士论文是数学史上的一篇重要文献 [22]，正如著名数学家阿尔福斯 (Lars Valerian Ahlfors, 1907~) 所说的，这篇论文不仅包含了现代复变函数论主要部分的萌芽，而且开启了拓扑学的系统研究，革新了代数几何，并为黎曼自己的微分几何研究铺平了道路. 在此文中，不但引入了 Riemann 面，还证明了如下的著名的 Riemann 映射定理：若 D 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的单连通区域，其边界点至少有二点，则存在 D 上的单叶全纯函数，将 D 映射为单位

圆 $\Delta=\{z\in\mathbb{C},|z|<1\}$, 若 $a\in D$, $b\in\Delta$, $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, 则满足 $f(a)=b$, $\arg f'(a)=\alpha$ 的 f 是唯一的. 这个定理说: 拓扑等价导出全纯等价. 当时黎曼是用 Dirichlet 原理来证明此定理的. 但这个原理当时被看出有毛病, 以至数学家纷纷致力于寻求一个正确的证明. 后来, 1870 年由诺伊曼 (C. G. Neumann) 与许瓦兹 (H. A. Schwarz) 找到了.

Riemann 映射定理是复变数几何函数论的出发点. 从此之后, 发展了一整套优美而重要的理论.

1825 年, 1831 年开始的 Cauchy 理论, 1841 年开始的 Weierstrass 级数理论, 1851 年开始的 Riemann 几何理论, 这三套相对独立又紧密联系着的理论, 构成了复数域上的微积分, 成为复分析的主要部分. 在这三套理论中, Cauchy 积分理论的根在原来的微积分, 这点是比较清楚的 (尽管后来发展的理论已与原有的微积分相距甚远); 而 Weierstrass 级数理论的来源之一是微积分中的级数理论, 这点也比较清楚, 但起主要作用的 Laurent 级数却是原有微积分中所没有的; 至于 Riemann 几何理论, 则是全新的理论, 与原来的微积分没有什么关系.

另一方面, Cauchy 积分理论中大部分的结果, 可以推广到高维空间, 而在 Weierstrass 级数理论中起主要作用的 Laurent 级数及 Riemann 几何理论出发点的 Riemann 映射定理, 却不能推广到高维空间.

1906 年, F. M. Hartogs 证明了如下的定理 [23]: 若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n, n\geqslant 2$ 为域, k 为 Ω 中紧致子集, 且 $\Omega\setminus k$ 连通, 若 f 在 $\Omega\setminus k$ 上全纯, 则 f 可以全纯开拓到 Ω. 因之, 想把 $\mathbb{C}$ 中的圆环拓展成 $\mathbb{C}^n$ $(n\geq 2)$ 中的球挖去一个小球后的球壳上将全纯映射展开成具有正、负次幂的幂级数成为毫无意义的事了. 因之, 作为 Weierstrass 级数理论中的主要部分的 Laurent 级数, 在原先的微积分中是没有的, 在高维复空间中也是没有的, 只有复平面上有.

1907 年, J. -H. Poincare 证明了这样的定理 [24]: 在 $\mathbb{C}^n(n\geqslant 2)$

中的单位球 $B=\{z\in\mathbb{C}^n:\ |x_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$ 与多圆柱 $P=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_1|<1,\cdots,|z_n|<1\}$ 之间不存在全纯映射，将 B 映为 P 的，这里 $z=(z_1,\cdots,z_n)$. 也就是说，到了 $\mathbb{C}^n$，当 $n\geqslant 2$ 时，区域之间的拓扑等价不能导出全纯等价. 因之，作为单复变数几何函数论的基石的 Riemann 映射定理，也是前无古人，后无来者的.

也正因如此，这些内容成了复数域上的微积分，即复分析中所独有的理论，形成了丰富的内容.

对于微积分完成了严格化之后. 作为微积分本身的理论是怎样往前发展的，就说到这里. 这里所说的三个方向还可以说很多很多，但应到此为止为好.

当然，发展是永远不会停止的. 如第一个方向，微积分的深化与拓展形成的实分析，进一步发展为无穷维空间的微积分，即泛函分析等. 第二个方向外微分形式，进一步发展为流形上的分析等. 第三个方向复数域上的微积分，即复分析，进一步发展为多复变数函数论等等. 所有这些，只好以后有机会再进一步来探讨了.

最后，我想说说对“严格化”的一些粗浅的认识，不一定正确.

事实上，“严格化”是相对的，人们对数学理论的认识往往是从不严格开始的，只要大方向正确，等到理论建立起来后再严格化也是可以的，过了一段时间，也许会发现已有的“严格化”又不够严格，于是再进一步严格化. 例如，前面说到的实变函数是微积分的进一步的严格化，克服了微积分中原有的种种缺陷与不足之处，但实变函数本身又有缺陷与不足之处，如罗素悖论引发的“数学危机”等，还需进一步严格化. 数学的理论就是这样一步步的向前发展的. 如果设想牛顿、莱布尼兹当时感到他们创立的微积分的理论不够严格而不予发表，那么微积分的发现及由它而引起 17 世纪以来自然科学的大发展就会被推迟，这对世界来讲是多

大的损失呀！事实上，这种“不严格”丝毫也不影响其对自然科学的巨大推动作用．如果一定要拘泥于所谓的“严格”，并以此为理由来扼杀微积分，那么这就是科学上的倒退．正确的态度应是一方面努力发挥微积分在自然科学中的威力，一方面来想方设法不断严格化．二百年来，这两种截然不同的，相互对立的态度一直存在着，直到微积分严格化完成．在历史上，建立起并应用一些数学理论，开始并不严格，然后走向严格化的例子屡见不鲜．例如，前面已经说到黎曼关于 Riemann 映射定理的证明，开始是不严格的，后人将它严格化；δ 函数及广义函数诞生并应用了很长时间，才给出它的严格的理论，等等．直到最近，A. Wiles 关于 Fermat 大定理的证明也是从不严格走向严格的．

我这样说，不是提倡做数学研究可以不严格，而只是不赞成用所谓的“严格”来束缚自己的手脚．想想我们自己做数学研究，都是在一些重大的、关键的步骤上想清楚了，才去一步步地严格化，如果一开始就要求每一步都要严格，那么很可能抓住了芝麻，丢了西瓜，抓不住解决问题的要害面寸步难行．

在数学教学中，我也不赞成过分强调所谓“严格化”．例如：对学生讲述一条定理，有多少个条件才能成立，于是，就对学生举出一个个反例，说少了这个条件定理不成立，少了那个条件定理不成立，使得学生谨小慎微，战战兢兢，不敢越雷池一步，唯恐出错，这样很难培养出学生的创新能力．其实在一条定理中，各种条件有主次之分，举一些反例也许是必要的，将各种条件反反复复扣得过细，未必是培养有气魄的数学家的好办法．

数学当然要严格，这是天经地义的事．但在什么意义下严格化，如何严格化，却是值得思索的问题，不能因严格化而阻碍数学的发展，而应该用严格化来促进数学的发展，这才是正确的道路．

参考文献

[1] Cauchy, A. C, Cours d'analyse de l'École polytechnique, 1821.

[2] Cauchy, A. C, Résumé des lecons sur le calcul infinitésimal, 1823.

[3] Cauchy, A. C, Leccons sur le calcul differential, 1829.

[4] Riemann, G. F. B, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch einer Trigonometrische Reihe, 1854.

[5] Dedekind, R, Stetigkeit und die Irrationalzahlen, 1872.

[6] Cantor, G, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math Annalen, 1872.

[7] Meray, C, Nouveau précis d'analyse infinité simale, 1872.

[8] Heine, E, Die Elemante der Funktionenlehe, Jour für die Reine und Angew. Math. LXXXIV(1872), 172–188.

[9] Robinson, A., Non-Standard Analysis, North-Holland Publishing Company, 1974.

中译本： A. 鲁滨逊著，申又枨，王世强，张锦文等译，《非标准分析》，科学出版社，1980.

[10] Kowalewski, G, Über Bolzano nichtdiffer enzierbare stetige Funktion, Acta Math, XLIV(1923), 315–319.

[11] Weierstrass, K. W. T, Mathematische Werke II, 71–74.

[12] Cantor, G, Über eine sigenschaft das Inbegriffes allr reelen algebrashen Zahlen, Crelles Journal für Mathematik 77(1874), 258–262.

[13] Lebesgue, H, Intégrale, longyeur, aire, Annali di Matematica Pura ed Appl., (3) 7(1902) 231–359.

[14] Littlewood, J. E, Lectures on the theory of functions, Oxford University Press. 1944.

[15] 吴文俊，龚昇教授《简明微积分》读后感，数学通报，2000 年 1 期，44–45 页.

[16] Cartan, É, Sur certains expressions differentielles et le problem de Pfaff, Ann. Sci, Ecole Norm, (3), T, 16, p239–322.

[17] Poincaré, H, Les Methodes Nourelles de la Mecanique Caleste, 1899.

[18] Cauchy, A. L, Bull, des Sci. Math, 7(1874) 265–304; 8(1875)43–55, 148–159 & Qeuvres completes Ser 1,4,Paris, 1890.

[19] Cauchy A. L, Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul applé calcul des limites, Turin, 1931.

[20] Goursat, E, Sur la definition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy, Tran Amer. Math. Soc 4(1900) 14–16.

[21] Weierstrass, K, Darstellung einer analytischen Function einer comple en Veränder lichen, deren alsoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Gronztn liegt, Mathematische werke, Johnson, reprint, 51–66.

[22] Riemann, G. F. B, Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Funk tionen einer Veränder lichen Complex Grósse, 1851.

[23] Hartogs, F, Zur theorie der analytischen Funktionen meherer unalhängiger Veränder lichen, insbesondere über die Darstellung derseler durch Reihen welche nach Potentzen einer Veränderlichen fortscheiten, Math. Ann. 62(1906) 1–88.

[24] Poincaré, H, Les fonctions analytiqeas de deux varialles et la représentation conforme, Rend, Circ. Mat, Polermo 23(1907) 185–220.

《简明复分析》重印说明*

在国内外，我都教过复变函数这门基础课. 拟写一本这门课的教材的想法，酝酿已久. 经过长时间的思索与考虑，直到 1992 年 9 月在美国教书时，才写成这本很薄的小书，并于 1996 年 5 月由北京大学出版社出版. 出版前后，此书曾在中国科学技术大学、清华大学等几所大学作过教材. 在教学过程中发现了一些问题，如习题配得不够，有些地方写得太简单，需要补上证明或多说几句话. 在这次重印出版时，对这些缺点作了些修改，而这是较易做到的. 但最要修补的是，对本书写作的意图并未做应有足够的说明，原有的前言写得太简单了. 这就使我想起 1966 年我写的另一本大学基础课教材《简明微积分》. 这是我教了八年书之后(这八年中主要是教微积分)，经过了很长时间考虑才写成的. 写那本书的想法，很长时间以来未系统地叙述过，只是在 1966 年《自然辩证法研究通讯》上写了一篇短文，做了十分简要的说明. 这当然不可能引起人们的注意. 直到 30 年后，我在中国科学技术大学以及其他一些大学，在一些会议上系统地讲述了我的想法，才引起人们的注意. 后来在这些讲话的基础上写了一本小册子《话说微积分》(中国科学技术大学出版社， 1998 年 5 月出版)，受到国内外数学界以及教与学微积分师生们较为广泛的欢迎. 因之，将写作本书的意图写出来，一方面可以使应用本书进行教学的师生们更好地理解本书的内容，另一方面也可以尽早地得到大家的

*作者的《简明复分析》初版于 1996 年，修订重版于 1999 年. 本文是《简明复分析》重版本中的“重印说明”，反映了作者在处理复分析教材中的一些思想，这是和作者对微积分的思想一脉相承的.

指教.

复变函数论是一门历史悠久的学科，已出版的教科书不计其数，其中不少是写得很好的. 为何我还要来再写一本教科书？写这本书的指导思想是什么？与传统的教材有哪些不同？如果没有明确的指导思想，写出来的教材难免是将他人写的教材修修补补，排列组合，人云亦云.

数学教材要现代化已是大势所趋. 但如何现代化，似应不断探讨与尝试，才能逐步摸索出一条正确的途径. 将一些近代数学不断地放到基础课中去，使基础课教材愈编愈厚，这可能不是一种十分有效的途径. 基础课教材终究应该讲基础的内容为主. 本书试图将一些传统的基础内容尽可能用近代的观点与语言来叙述与证明. 由于数学的发展，一些较为近代的概念现在似乎已可属于基础的范畴了. 基础的内涵当然是在不断地推陈出新的. 无可置疑，这种尝试必然会引起各种争议，但只有争议才能得到进步与发展.

强调数学的统一性，也为数学界愈来愈多的人所倡导. 这就是强调数学各分支之间的相互影响、相互渗透. 也就是数学各分支之间你中有我、我中有你. 数学本身是一个统一体. 数学发展到了今天，将各分支的基础课相互割裂，强调“纯”，这种时代似乎也应该过去了.

在这本不到 200 页的小书中，大部分内容的写法仍然是传统的，只是在部分内容中力图做到上述两点. 这可体现在以下与传统教材有哪些不同的说明中.

1. 复分析是指复数域上的分析，更确切些，是指复流形上的分析. 作为大学基础课教材，由于历史的原因，复分析往往称为复变函数论，或解析函数论. 而现在出版的教材，往往称为复分析，因这这种说法更确切. 例如在本书中强调引入代数与几何等到教材中，所涉及的不仅仅是在论函数.

什么是大学教材的复分析？就是讨论复数域上的微积分. 这

是撰写本书的第一个观点. 在这个观点下，大学复分析的内容应分为两个部分，一个部分是可以没有多大困难地由实数域上的微积分 (这里指的是大学普通微积分) 直接推广得到的，另一个部分是在原有实数域上微积分所没有的，不能直接推广得到的. 前一部分当然重要，但更为重要的是后一部分. 本书的第一章，讲述的是前一部分. 由于这些结果可以没有多大困难地直接推广得到的，所以有的就述而不证. 普通微积分的内容很多，人们当然没有必要及可能来将这些内容一一加以验证，是否可以推广到复数域上，只能抓住主要内容. 什么是微积分中的主要内容？我在写《简明微积分》时已十分明确地提出，即微积分由：微分、积分、指出微分与积分是一对矛盾这三个部分所组成. 而第三部分必须用外微分形式才能说清楚，后来在拙作《话说微积分》中对此作了详细的阐述. 本书第一章就是按这种观点对微积分的一个十分简略的回顾，并讲了这些结果在复数域上的推广. 其中复平面上的微积分基本定理就是复形式的 Green 定理 (§1.4 定理 2), 这为第二章建立 Pompeiu 公式作了准备.

2. 传统的复变函数论由三个部分组成，它们都是在实数域上微积分 (即大学微积分) 中所没有的，而是在复数域上所特有的. 这三部分是：Cauchy 积分理论，Weierstrass 级数理论与 Riemann 几何理论. 作为一本大学本科的教材，理应包括有这三部分内容，这就是本书的第二章，第三章与第四章. 大学本科教学大纲所规定的内容，在这三章中不但都有了，而且还多. 但如前所述，本书对这些传统内容的一些部分给予了现代化的处理，与传统教材有所不同.

从复变函数论是复数域上微积分这个观点出发，微积分基本定理在复数域中成为复形式的 Green 定理. 由此立即导出 Cauchy–Green 公式，即 Pompeiu 定理 (第二章 §2.1 定理 1). 这时候函数的实部与虚部属于 C^1, 而并不要求函数是全纯，而 Cauchy 积分定理与公式就为它的简单推论. 为什么要先引入 Pompeiu 公式而不

先引入 Cauchy 积分定理与公式？这是因为，一、从复变函数论是复数域上的微积分这个观点出发，这是顺理成章的．从复形式的 Green 定理出发，不加任何条件，得出来的应是 Pompeiu 公式，而不是 Cauchy 积分公式．二、用 Pompeiu 公式可以得到一维 $\overline{\partial}$- 问题的解 (第二章 §2.1 定理 4)．这是由 Cauchy 积分公式所得不到的．众所周知，$\overline{\partial}$- 问题是近代偏微分方程理论中十分重要的部分，是近代数学中一个强有力的工具．本书这样处理还为了使读者能及早接触到近代数学的一点气息．不仅如此，在本书的第三章中，用 $\overline{\partial}$- 问题的解证明了一系列定理．尤其是 Mitting-Leffler 定理 (第三章 §3.4 定理 6)．一方面使定理的证明十分简单，另一方面显示了 $\overline{\partial}$- 问题的威力．传统的教材往往几乎只讨论解析函数，以致有些教科书的书名，就叫做解析函数论．但数学发展到今天，人们愈来愈认识到只讨论解析函数已是不够的了，用解析函数论作书名似乎也已过时．$\overline{\partial}$- 问题的产生与应用，就是支持上述看法的一个例子．

Pompeiu 定理及一维 $\overline{\partial}$- 问题的解也许是第一次出现在国内的大学复分析的教材中．用 $\overline{\partial}$- 问题的解来证明 Mittag-Leffler 定理是我给出的，是第一次出现在大学教材中．作为用近代数学的观点来处理经典结果的一个例子．在同一节中，另一个例子是用 $\overline{\partial}$- 问题的解来证明插值定理 (第三章 §3.4 定理 7)．这也许也是第一次出现在国内的大学教材中．由于这种证明十分简单明了，相信会被更多的作者采用．此外，在本书中，作为 Pompeiu 定理的另一个应用，还给出了全纯函数的各阶导数在紧集上的一致估计 (第二章 §2.3 定理 6(2))．这在传统教材中，一般来说是不会写进去的．但这是一条很深刻的定理．不用 Pompeiu 公式是难于证明的．在第二章中写进这条定理是因为一方面这条定理有不少应用，另一方面也让读者看看 Pompeiu 定理的威力，牛刀小试，就能得到如此深刻的定理．

3. 复分析中的基本定理之一是 Poincaré-Koebe 单值化定理．

这是一条纲领性的定理. 定理说: 任意单连通的 Riemann 曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一: 单位圆、复平面 $\mathbb{C}$、扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$. 这条定理是复分析中最重要和最美好的定理之一, 它与 Abel 定理、Riemann-Roch 定理一起, 成为经典 Riemann 曲面的三条最重要的定理. 这样的定理在数学中并不多见. Poincaré-Koebe 定理的证明已超出了大学基础课的范围, 不能给出, 但定理本身完全可以在大学教科中叙述, 并强调它的意义. 本书第三章 §3.3 中就叙述了这条定理. 这条定理有很多的应用. 但在一本大学基础课教材中, 最重要的意义是: 这条定理确立了单位圆、复平面 $\mathbb{C}$ 及扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 在复分析中的重要地位. 对这三种区域进行探讨成为复分析中极为重要的组成部分, 所以我们说这是一条纲领性的定理.

在本书中, 给出了这三种区域的全纯自同构群. 在第二章 §2.5 中给出了单位圆的全纯自同构群, 在第三章 §3.3 中给出了 $\mathbb{C}$ 及 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的全纯自同构群. 一个区域的全纯自同构群是十分重要的, 这是因为全纯自同构群很大程度上决定了区域上的一些分析的性质. 在本书中就是用单位圆的全纯自同构群定出 Poisson 核作为这方面的例子. 在本书中突出这三个全纯自同构群的另一个目的是: 这三个群是最为简单又是十分重要的李群. 当然在这本大学基础课教材中完全没有必要引入严格的李群的概念, 但突出这三个简单的李群并给出它们的应用, 等到读者接触到严格李群的定义时, 就会有 "似曾相识" 的感觉, 且有一些简单的具体的李群在胸, 对李群的抽象定义就易于了解与掌握了. 为了同一个目的, 在本书的第六章中, 给出了 $\mathbb{C}^2$ 中单位球与双圆柱上的全纯自同构群, 并用它们证明了多复变函数中经典的 Poincaré 定理. 这样可以让读者在胸中又多了两个简单的具体的李群的例子.

如果说在本书第二、三章中给出了这三个区域的全纯自同构群是指出了复分析与代数的关系, 那么在本书的第五章中给出的复几何是指出了复分析与几何的关系.

在第五章中，对这三个区域分别建立起它们的几何．在单位圆上引入双曲度量，即 Poincaré 度量；在 $\mathbb{C}$ 上引入抛物度量，即欧氏度量；在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上引入椭圆度量，即球度量．并对这三种复几何进行了简单的讨论，而这些内容现在应属于基础的部分了．

4. 上一段的讨论是涉及复分析与几何、代数的相互关系的一个例子，是说明数学的统一性的一个很好的事例．这里所说的几何不是初等几何，是指微分几何、复几何．

用一个个事例来说明数学的统一性，不失为一种好的方法．尤其是在大学的基础课教材中，希望通过这些事例，让读者初步建立起这种看法．除了以上的例子外，本书中还有其他的一些事例．

在本书第二章 §2.5 中，给出了 Schwarz-Pick 引理．这使得经典的 Schwarz 引理有了微分几何的意义．这条引理说，将单位圆映到单位圆内的全纯映射，使二点之间的 Poincaré 度量不增．这是一个初等、自然而漂亮的对经典的 Schwarz 引理的几何解释．这是复分析与微分几何相互关联的一个很好的例子．

在第五章中用几何的方法来证明著名的 Picard 定理又是一个说明数学统一性的很好事例．这种写法在国内或许也是首次出现在复分析的教材中． 1938 年，阿尔福斯建立了著名的 Ahlfors-Schwarz 引理．这条引理是作为近代微分几何进入复分析的标志而载入史册的．这是一条有历史意义的重要的引理．在本书第五章中，由此引理出发证明了重要的 Picard 定理．在传统的教材中，Picard 定理是不讲的，原因是这条定理原有的证明较难，要涉及椭圆模函数，讲起来较麻烦．但是 Picard 定理在分析中实在太重要了，而用微分几何的方法使证明变得较为简单，易于为大学生所了解与接受．所以在本书第五章中证明了这条定理．一方面让读者学到了重要的 Picard 定理，另一方面也让读者看到应用近代数学的微分几何其威力是何等之大，更重要的是使读者再一次体会到数学的统一性，各个分支之间，的确是我中有你，你中有我

啊！

本书第二章 §2.6 中的 Poisson 积分公式，是体现数学统一性的又一事例．在上一段中已经说到， Poisson 积分公式是由单位圆的全纯自同构群得来的，本书所以不用传统的分析的方法来给出这个公式，而用全纯自同构群来给出，是让读者能够看到群尤其是李群的威力．用了这样简单的群的概念，就十分利索地得到了重要的 Poisson 公式，而 Poisson 公式从复分析的角度来看，这是一种积分表示；从偏微分方程的角度来看，这是 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的解；从调和分析的角度来看，这是函数的 Fourier 级数的 Abel 求和．同一件事，从不同的数学分支的角度来看，成了不同的事物．这种观点十分重要，这正是体现了数学各分支之间的相互渗透，这也是体现了数学的统一性．这种观点，常常导致从一个分支的结果产生出另一分支的结果．分支之间的成果相互启发，相互促进．当然， Poisson 积分公式不过是体现这种思想的一个很简单的例子．在大学教材中也只能举些简单的例子来体现这种思想．在数学中，这种例子是很多的，有的是十分重要的．典型的例子如 Riemann 曲面，从复分析的观点， Riemann 曲面是一维复流形，更确切些，是一维 Kahler 流形；从代数几何的观点， Riemann 曲面是一条代数曲线；从代数数论的观点， Riemann 曲面是一个一元代数函数域．各种不同分支的交叉点又往往是数学中富有强大生命力，且极为重要的部分．

5. 本书的最后一章 —— 第六章讲了一点多复变数．这在传统教材中是不讲的．但数学发展到了今天，讲一点多复变数，既有必要又有可能．在本书中讲一点多复变数的主要目的，不是为了向读者初步地介绍多复变数的基本知识，因为如果要这样做，必须要花很多的篇幅，作为一本大学基础课教材，当然无此必要．本书讲一点多复变数的真正目的，是为了让读者更深刻地认识单复变数．因为，本书终究是一本大学单复变数的教材．为此目的，当然要选择能使读者更深刻认识单复变数的有关多复变数的定理．本书只

选了如下的二条. 一条是 Poincaré 定理, 一条是 Hartogs 定理. 所以选择这二条定理, 是因为这二条定理的证明都不难, 但又是很深刻的基本定理, 又能使人们更深刻地认识单复变数. Poincaré 定理说, $\mathbb{C}^2$ 中的超球与双圆柱不能全纯等价. (对 $\mathbb{C}^n$ 也一样成立. 为叙述方便计, 讨论 $\mathbb{C}^2$ 已足够, 对 $\mathbb{C}^n$ 中定理的证明与 $\mathbb{C}^2$ 的情形无任何本质的区别.) 这条定理告诉我们, Riemann 映射定理 (拓扑等价导出全纯等价) 只在单复变数中成立. 在这之前, 在普通微积分中不可能有此定理; 在这之后, 在多复变数中也不可能有此定理. Riemann 映射定理只是在单复变数中所特有的. 因之, 这是一条十分深刻的定理. 作为复分析中三个组成部分之一的几何理论, 同样也是单复变数中所特有的. 企图推广单复变数的几何理论到高维, 必须另辟蹊径. 本书中介绍的另一条多复变数的几何的定理是 Hartogs 定理. 这条定理说, 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n, n \geqslant 2$ 为域, K 为 Ω 中紧致子集, 且 $\Omega \setminus K$ 连通, 若 f 在 $\Omega \setminus K$ 上全纯, 则 f 可以全纯开拓到 Ω. 这条定理告诉我们, 作为复分析中三个组成部分之一的 Weierstrass 级数理论, 其核心部分的 Laurent 级数理论, 在多复变数的情形, 一般是不可能存在的. 因此, 用级数来刻画奇性, 如何定义亚纯函数等等, 在多复变数的情形, 必须另行考虑. 因之, Weierstrass 级数中的核心部分, 即 Laurent 级数是单复变数中所特有的, 在其前, 在普通微积分中不可能有, 在其后, 在多复变数中也不可能有, 只有在单复变数有. 因之, 这是十分深刻的理论, 也就是说, 作为单复变数三个组成部分中的二个组成部分的出发点, Riemann 映射定理与 Laurent 级数是前无古人, 后无来者的! 本书是一本基础教材, 讲这样二条多复变数的定理已经足够, 再多讲就会偏离主题了.

在大学复变函数论中写一点多复变数的做法, 在国内也许是首次出现在本书中, 这种做法将会被更多一些教材的编写者所采用.

6. 在本书重印版中, 增加了三个附录. 直接目的是为了弥补

第一次印刷中一些不足之处，但更主要的，是这三个附录中讲的都是近代数学中最为基本与重要的内容，而在传统的复变函数论的教材中往往是不讲的.

第二章的附录是单位分解定理. 这在证明 §2.3 定理 6(2) 时要用到. 如果不标出单位分解定理而直接写出一个函数来替代之也可以过得去，但单位分解定理在近代数学中太重要了，且以后还会不断地用到，因之，花点篇幅写下这条定理与证明是合宜的.

第四章的附录是 Riemann 曲面，给出了 Riemann 曲面的严格定义，这是为了与 §4.5 相呼应的. 作为一本大学基础课教材，不可能花很多篇幅去深入探讨 Riemann 曲面的理论，但是 Riemann 曲面在近代数学中实在太重要了. 它是一维复流形. 如果不涉及流形，恐怕就很难涉及近代数学. 写上这个附录，让读者能对 Riemann 曲面、复流形多一点认识，这也是好的.

第五章的附录是曲率. 直接的目的是为了说明 §5.1 中的 (1.2) 式定义的 K 为何是曲率. 众所周知，曲率是微分几何中的核心部分，它在近代数学中扮演着极为重要的角色. 因之，即使在大学微分几何课中学习了曲率的概念，还仍然值得花些篇幅来将这个重要的概念再说一遍.

这三个附录，如教学时间允许，则讲之；如教学时间不够，可略之.

不言而喻，加上这三个附录的另一个目的，是为了再次体现数学的统一性.

以上说了些本书与传统教材不同之处. 但我应重说一遍. 这终究是一本大学基础课教材，本书的大部分写法仍然是传统的，与传统教材不同之处只是很有限的. 在这不到 200 页的小书中，这些有限的不同之处却是撰写中最费心思的部分. 我衷心盼望广大师生在用本书进行教学时充分注意到本书试图体现数学教学现代化以及数学统一性的愿望.

本书的写作意图曾在一些国内的学术会议上作过简要的介绍，

反映较为热烈. 本书出版后，已受到国内外广大同行的关注. 不少年长的同行给了很多鼓励，更令人兴奋的是，一大批年轻数学家对此书表现出较大的热情. 本书已被不少大学用作教材或主要教学参考书，国外有的年轻的留学生看了此书后说：如回国教复变，就用这本书，不要自己再写教材了. 本书对这门基础课教材的影响正在显现，相信会有更多的学校将采用本书作为教材或教学参考书. 本书第一次印刷的 3000 册已售罄，这些都促使我在重印本书时进行修订. 为了保持本书原有的风格，只对本书的内容作了一些小的修改，为了使大家更好地使用本书，就唠唠叨叨地写下了这篇较长的重印说明. 一些曾用此书做为教材进行教学的教师，将在教学过程中发现的问题与意见告诉了我，在此，向他们表示感谢. 无可置疑，在重印的本书中，依然有很多缺点与毛病，还望广大师生及行家指正.

龚　昇

1999 年 9 月于北京

数学基础课教材随想*

写专著不易. 专著的读者虽少，但写得不好仍会感到内疚.

写教材更不易，越是基础的教材越难写. 教材的读者较多，且主要是刚刚起步的学生. 教材基础性越强，读者越多，写得不好，就越会误人子弟.

我教书已近半个世纪，教材却只写了两本. 这两本基础课教材，每本都花费了我大量的精力与时间，虽非“披阅十载，增删五次”，但每本都几乎思索了七、八年，才试于命笔. 尽管如此，书出版后，仍感到有许多不足，只好在再版或重印时不断完善.

基础课教材无非是写些基础的内容，写起来何难之有？关键在于，如果写教材只是将他人的教材内容进行修修补补，增增减减，排列组合，人云亦云，那末这样的教材，作者虽然不同，难免百书一面，当然也谈不上创新了.

要写一本不同于上述写法的教材就不大容易了. 难在哪里？不妨说说我个人感受到的艰辛.

1. 教材 $\neq$ 字典

在字典中，每个字地位相同，无法说哪个字特别重要或不重要. 但教材就不同. 教材中各部分内容，各种概念，包括各种定义、定理、证明、例题就不是同样重要，地位也不能相同. 如果

本文原刊于《中国大学教学》2000 年第 1 期，并刊于《高等理科教育》2000 年第 1 期.

用每部分都同样重要的写法来写教材，那末就成了一本几乎处处都不重要的教材．实际上，一门课程中最关键的内容，最核心的概念，包括定义、定理、证明、例题等，往往只有几个，甚至只有一、二个．同样，教材中每一章中最根本、最重要的内容与概念往往也是这样，只有几个或一、二个．紧紧抓住这门课程中最重要的内容与概念，并贯彻始终，才能决定教材内容的取舍，才能梳理清楚全书的内容，才能纲举目张，使全书思路清晰，读起来清楚，易于记忆．

这些关键的内容、核心的概念在教材中必须写好，写透彻．但要做到阐明教材中这些内容与概念是最根本的、最重要的，且能说出其理由，这就要求教材的作者对这门课有深刻的认识，要有自己十分明确的观点．

2. 教材 ≠ 辞典

编辞典力求全，求辞条多，每条辞条力求详尽，不厌其繁，使读者一查即明白．但写教材不能求全，更不是说写得越多、越详细越好．如果唯恐学生这也不知、那也不晓，又怕漏了这个不好，缺了那个不妥，就洋洋洒洒写了一大厚本，什么都能查到．这样的教材往往不能教，只能用来查．教材不必求全，力戒繁．把一些本来不难的东西，故弄玄虚，写得复杂、烦琐，莫测高深来吓唬学生，以示高明，这是极不可取的．对那些可有可无，可学可不学的应该坚决去掉，“少而精”应是写教材的正确原则．事实上，厚书较好写，将各种东西东拼西凑放在一起，认为可以为学生作备考，其后果是使学生感到茫茫一片，不知什么是重要的，什么是不重要的．要学生学得越多，记得越多，结果往往是忘得越快，什么也未学到．所以，深入浅出，写薄书而内容不少，甚至比厚书更多，这才是真功夫．

3. 教材 ≠ 定义、定理、证明、举例

在数学教材中一定会有定义、定理、证明、举例. 在我国，由于以往受到前苏联教材的影响，对定义、定理、证明、举例这一套逻辑体系十分强调，甚至是过分强调. 如果在哪一步逻辑上不大完备，就好像是不得了的事了. 当然，逻辑体系是重要的，应力求完备，但这决不能当做教材的全部内容. 如果一本教材只对这套定义、定理、证明、举例的逻辑体系写得很好，很完备，而没有其他，还不能说是一本很好的教材. 读了这样的教材，有时会使人感到面目刻板，索然无味. 读完了，读者仍可能对这门课程不得要领. 不知道学这门课到底要干什么. 其实一本教材最重要的是要说清楚这门课的主题，包括来龙去脉与思维过程. 书中的定义、定理、证明、举例的逻辑不过是形式的东西，是为说清楚这门课的主题服务的. 如果一本教材只有逻辑体系，而无思想，就好像只有躯壳而无灵魂. 我遇到过一些早年毕业的大学生，讲到在大学学习阶段，说到有的老师课虽然讲得很清楚，但现在想想他讲过些什么已全记不得了，而有的老师讲的内容却还能记得不少. 我想这里的差别在于：前一位老师逻辑方面是讲清楚了，但没有讲出思想，这后一位老师不仅逻辑讲清楚了，还讲出了思想，讲出了书上的精髓，这就有了灵魂，使学生能融会贯通. 以我个人的意见，一本教材除了逻辑应讲清楚以外，至少还应讲到以下六点中的一部分，才能把教材写好. 这六点是：

1. 这些概念与内容的直观意义. 一些重要概念的形成，一些重要的定义、定理的建立，其实都是十分自然的，往往是水到渠成的，即此人不建立，他人也会建立. 也就是说，到了一定的时候，有了对这些概念和内容的直观的认识，才能用形式逻辑的语言来严格表达出来. 所以，直观地对这些概念与内容的认识比起形式逻辑的表达，对学生来说，可能更为重要.

2. 定理的证明的关节点. 不论定理的证明多么长，多么难，在大学教材中的定理，其证明的关键往往只有一二步，弄清这关键的一二步才算弄懂了定理的证明. 而定理的证明者也正是想清楚了这关键的一二步才证明了这条定理，才用形式逻辑来表达出严格的证明. 所以，不要引导学生在一些次要的条件上绕圈子，作一些逻辑游戏，这样会捡了芝麻丢了西瓜.

3. 这些概念与内容的用途，尤其是重要定理的用途，最好能举一二个能说明定理本身的意义的用途.

4. 说一些概念与内容的来龙去脉，前后课程的对比与联系，从何处来，到何处去.

5. 教材中要有议论，要生动活泼. 如果只是板着面孔，会令人望而生畏. 真善美是人类的天性，是易于接受的，数学不仅仅是真，而且是美. 可以说数学是天生丽质，常常表现出了不起的自然美，尤其在一些重大的定理上，卸去浓妆，精彩大多来自天然，即返朴归真.

6. 教材不仅要教学生“学到什么”，还要教学生“忘掉什么”. 数学教学过程是一个以高级替代低级的过程，学到了高层次的数学后，一部分低层次被替代了，也应告诉学生可以忘掉了.

4. 教材 $\neq$ 作者对这门课的知识

如果教材的作者对这门课只有通常的了解，怎能写出一本好的教材来？念懂了一些别人的教材，就动手写教材，这样的教材只能是他人教材的修修补补，排列组合. 写好一本教材，作者的知识必须大大超越应写的内容. 只有居高，才能临下，而不是低下. 作者不但要对这门课有十分深刻的了解，而且要有丰富的知识储备，越多越好，越高越好，面且要看清这门课的前后，左右，上下. 正如一些有经验的老教师所常说的：教给学生一杯水，自己

要准备一桶水. 此言诚不谬也！如果自己知识不足，其后果往往是写了一大堆，而抓不住要害；往往写成厚书而写不成薄书，因为弄不清主次；往往会自觉或不自觉地故弄玄虚，而不敢写得浅出. 其实“临下”,“浅出”才能显出作者真正的功力，因为没有“居高”与“深入”是不可能做到这些的. 如果作者自己没有足够的功力，写出来的往往是花拳绣腿，看起来好看，但两拳即可打倒；也容易抱着一些自以为重要的东西不放，视为命根，而不知山外有山，天外有天，由于自己看不到高峰何在，也就不可能指出攀登的途径. 一些大师的作品之所以能够广泛流传，经久不衰，就是因为他们站得高、看得远. 如果自己水平不够，不能真正领悟大师作品，即使去抄大师的作品，也只能形似而不能神似.

5. 数学教材现代化 $\neq$ 将现代数学直接移植到教材中

教材现代化已成为数学界的共识，但如何才能实现？如果将一些现代数学的内容直接写入基础课教材，势必将基础课教材越写越厚，这似乎不是教材现代化的正确途径. 什么是正确途径？这是要长期努力，不断摸索才能找到的. 我想至少有一条途径可以试一下，那就是用现代数学的思想、观点与方法来重新认识基础课的内容，将这些内容用现代数学的思想、观点与方法来重新处理. 基础课终究是基础课，一些基本的内容必须保留，但用现代数学的思想、观点与方法写起来就可以面目一新，富有现代气息. 另一方面，现代数学往往站得更高，看得更远，用来处理基础课的内容往往更简明、漂亮. 当然要做到这一点不易，在一门课的教材中，有部分内容能这样做就很好了. 万事开头难，这样做起来，逐步积累，就会越写越好.

6. 教材要反映数学的统一性，要有一定的“杂”，不求“全纯”

数学发展到今天，数学的统一性越来越显示出来，越来越显得重要. 这也就是说，数学作为一个整体，数学各分支虽然是相对独立的，但各个分支之间相互渗透、相互影响、相互启发的作用越来越大了，这在教材中也应该有适当的反映. 以往的教材往往强调“纯”，即分析的教材只讲分析，代数的教材只讲代数，几何的教材只讲几何，这似乎应该逐步成为过去. 教材应该走向“杂”，即：分析的教材以讲分析为主，但如能讲到与代数、几何的相互渗透与联系，则对学生更有启发. 同样，代数的教材、几何的教材也应如此. 当然，要做到这一点，对作者的要求就更高了. 这要求作者不但要有对一门课的知识，而且要对整个数学有很好的素养. 我认为，这样写教材恐怕也是大势所趋.

7. 写教材是求最短途径到高峰

学生在校学习的时间是有限的，大学学习时间不过四、五年. 在这短短的时间内要学不少课程. 整个教学计划是让学生在有限的时间内尽可能攀登到所学学科的高峰. 对一门课程来讲，也是如此. 每一门课程都有它的目标，这就是高峰. 这门课的教材就是要使学生通过最短的途径攀登上这个高峰. 但要达到这个目的，不可能没有同一水平的徘徊；没有这个徘徊，往上爬就不能得到巩固，即使爬上去了也会掉下来，但徘徊不能过长过久，更不能在同一水平上团团转. 带领学生在同一水准上徘徊，指给学生看，这是小溪，这是松林，这是山洞，这是花丛，…… 可令学生赏心

悦目，甚至留连忘返．但如果不及时提高，老是这样团团转，就不能让学生尽快地达到高峰．让他们徘徊一定时间后往高处走，站在高处来看这些小溪、松林、山洞、花丛，……，使学生对这些美景另有一番境界．一览众山小，在高处看会感到看得更清楚，更深刻．应徘徊多久多长，这就依赖于作者对这门课的认识了，但太久、太长终究是不合适的．

8. 写教材一定要有气势

一本好的教材也许会影响学生一辈子．写教材一定要有气势，要有“大江东去”的气概，不要小家子气，不要对学生说：这也不行，那也不行，以至让学生感到动辄得咎，以至拘泥于一些小节，反而忽略了大处．一定要在大处着眼，然后才谈得上小处着手．如果只有小处着手而无大处着眼，这样的小处着手只能将学生引入歧途．当然光有大处着眼而无小处着手，这样的大处着眼也成了一句空话．这点对综合性大学数学系来讲尤为重要．我们应有这样的志气，在数学系的学生中，将来会有 Fields 奖获得者、 Wolf 奖获得者．如果教材只着重于三分钱酱油五分钱醋，要实现这样的目标是不可能的．

总之，教材宜“少而精”而不宜“多而粗”，宜“简”不宜“繁”，宜“明”不宜“不明不白”，宜有一定的“杂”而不宜求“全纯”，要有躯壳更要有灵魂，要居高临下而不低下，要深入浅出而不肤浅，要用一桶水来写出一杯水，要有气势而不小气．所有这些，也许是说起来容易，做起来却不易．我自己写的两本教材也只是用这些标准来要求自己，而远未达到．就是我写的教材的艰辛，这也就是为什么我教书已近半个世纪，而教材只写了两本的原因．道出这些艰辛是为了与同仁们共勉，共同努力来写出创新的好的教材．