矩阵论十讲

Ten Lectures on Matrix Theory

李　乔　张晓东 / 著

中国科学技术大学出版社

选题编辑 / 肖向兵 ● 责任编辑 / 郭红建 ● 封面设计 / 周　全

定价：25.00 元

ISBN 978-7-312-03528-9

矩阵论十讲

Ten Lectures on Matrix Theory

李　乔　张晓东 / 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

矩阵的应用日趋深广，大学基础课的内容已很不适应. 本书旨在在大学“线性代数”课程的基础上，分 10 个专题充实和扩大关于矩阵理论的知识. 具体内容依次为：方阵函数；矩阵的直积和矩阵方程；复合矩阵和行列式恒等式；西方阵、Hermite 方阵和规范方阵；Hermite 方阵的特征值和一般方阵的奇异值；非负元方阵和布尔方阵；矩阵的组合性质；矩阵的广义逆；完全正方阵；图的 Laplace 方阵. 各讲基本独立成章，具备基本的线性代数和分析知识的读者即可读懂.

本书各讲内容可作为多种类型的大学选修课教程，也可以作为关心矩阵理论的教师、学生和科技工作者的自学读物或供查阅的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论十讲/李乔，张晓东著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.3
ISBN 978-7-312-03528-9

Ⅰ.矩… Ⅱ.①李… ②张… Ⅲ.矩阵论—研究生—教材 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 052534 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
合肥华星印务有限责任公司
全国新华书店经销

开本：710 mm×960 mm 1/16 印张：11 字数：216 千
2015 年 3 月第 1 版 2015 年 3 月第 1 次印刷
定价：25.00 元

前　言

本书的前身是李乔在1988年出版的《矩阵论八讲》.《矩阵论八讲》的前言阐明该书的宗旨是:"在基本线性代数课程的基础上,充实和扩大关于矩阵理论的有用知识.……还试图使之成为便于了解矩阵理论的某些内容的简明参考书.对读者只要求具备最基本的线性代数知识."

二十多年过去了,大学"线性代数"课程的内容大致依旧,而矩阵的应用则日趋深广.这种状况使得《矩阵论八讲》有更新、充实后再版的需要.现在新版得以真正面世,我们首先要感谢中国科学技术大学出版社的热诚邀约和大力支持.

本书共十讲,前八讲是对1988年版的全面修订和少量增补,由李乔完成;后两讲则是由张晓东新写的.我们在讨论确定了大致内容的同时,也商定这样的合作方式:体例和基本术语全书统一,而前八讲和后两讲则分别按各自的想法和行文风格独立写作,最后由张晓东校阅全书.我们都希望重申《矩阵论八讲》的数学思想,即强调组合学的视角和处理方法,这使得本书与同类著作相比,也许可以说是别具只眼吧.

李　乔　　张晓东

上海交通大学数学系

2014年8月

目　次

前言 …… (ⅰ)

第 1 讲　方阵函数 …… (1)

1.1　Jordan 标准形温习 …… (1)

1.2　方阵函数的定义 …… (4)

1.3　方阵函数的其他等价定义 …… (5)

1.4　方阵函数的性质 …… (9)

1.5　矩阵函数的初等因子 …… (10)

第 2 讲　矩阵的直积和矩阵方程 …… (13)

2.1　线性矩阵方程和矩阵直积 …… (13)

2.2　矩阵直积的性质 …… (14)

2.3　方程 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$ …… (17)

2.4　方阵的中心化子 …… (20)

2.5　方阵多项式方程 …… (23)

第 3 讲　复合矩阵和行列式恒等式 …… (26)

3.1　记号 …… (26)

3.2　复合矩阵的定义和性质 …… (27)

3.3　几个行列式恒等式 …… (28)

3.4　加性复合矩阵 …… (31)

第 4 讲　酉方阵、Hermite 方阵和规范方阵 …… (33)

4.1　方阵的酉相似 …… (33)

4.2　循回方阵 …… (36)

4.3　几类特殊的规范方阵 …… (38)

4.4 酉相抵和奇异值 …… (40)
4.5 实规范方阵 …… (43)

第 5 讲 Hermite 方阵的特征值和一般方阵的奇异值 …… (45)
5.1 Hermite 方阵特征值的性质 …… (45)
5.2 方阵之积的特征值和奇异值 …… (48)
5.3 方阵之和的特征值和奇异值 …… (51)
5.4 Schur 和 Hadamard 的不等式 …… (53)
5.5 Hadamard 积 …… (55)

第 6 讲 非负元方阵和布尔方阵 …… (58)
6.1 基本定理 …… (58)
6.2 不可约性探究 …… (60)
6.3 基本定理的证明 …… (65)
6.4 本原性探究 …… (69)
6.5 本原方阵的指数 …… (74)
6.6 一般非负方阵的性质 …… (76)
6.7 随机方阵 …… (80)
6.8 M 方阵 …… (83)
6.9 布尔方阵 …… (85)
练习 …… (90)

第 7 讲 矩阵的组合性质 …… (92)
7.1 项秩与线秩 …… (92)
7.2 置换相抵标准形 …… (95)
7.3 积和式 …… (99)
7.4 (0,1)矩阵与子集系 …… (104)
7.5 (0,1)矩阵类 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ …… (107)
7.6 van der Waerden 猜想的证明 …… (111)
练习 …… (117)

第 8 讲　矩阵的广义逆 …… (118)
8.1　广义逆与解线性方程组 …… (118)
8.2　Moore-Penrose 逆 …… (123)

第 9 讲　完全正方阵 …… (127)
9.1　完全正方阵与双非负方阵 …… (127)
9.2　阶数≤4 的完全正方阵的刻画 …… (129)
9.3　完全正方阵与比较方阵 …… (133)
9.4　完全正图 …… (135)
9.5　CP 秩 …… (140)

第 10 讲　图的 Laplace 方阵 …… (147)
10.1　矩阵与树定理 …… (147)
10.2　图的 Laplace 特征值的基本性质 …… (150)
10.3　图的最大 Laplace 特征值(谱半径) …… (151)
10.4　图的代数连通度 …… (156)
10.5　图的特征值的和 …… (158)
10.6　图的特征值技巧 …… (160)
10.7　广义 Laplace 方阵 …… (164)

第1讲　方阵函数

1.1　Jordan标准形温习

本讲都在复数域 $\mathbf{C}$ 上讨论. 矩阵通常用大写、黑体拉丁字母表示. $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 有 m 行、n 列，且 $\boldsymbol{A}$ 的位于第 i 行、第 j 列的元(简称 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元) a_{ij} $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 都是复数，$n\times n$ 矩阵也称为 n 阶方阵，$n\times 1$ 和 $1\times n$ 矩阵也分别称为 n 维列向量和行向量[①]. 数 α 称为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(eigenvalue)(或特征根)，如果有非零的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，使 $\boldsymbol{Ax}=\alpha\boldsymbol{x}$. 这时，满足这个等式的非零向量 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 α 的特征向量.

特征值可以不依赖于特征向量而直接由方阵来确定. 事实上，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 共有 n 个特征值，它们是 λ 的 n 次多项式

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$$

的 n 个根，这里 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位方阵，$\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$ 表示方阵 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 的行列式. 多项式 $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 如果记 $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=0$ 的 n 个(不一定互不相同)根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则称重集(multiset) $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱(spectrum)，记为 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}$. $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的一个根(从而是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值)的重数称为这个特征值的代数重数. 与同一特征值 α 相应的全体特征向量再加上零向量后构成一个线性子空间，称为与特征值 α 相应的特征子空间. 易知，这个特征子空间的维数等于 $n-\mathrm{rank}(\alpha\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$，称为特征值 α 的几何重数.

例 1.1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^2,\quad \mathrm{Spec}\boldsymbol{A}=\{0,0\},$$

0 的代数重数是 2，几何重数是 1.

---

① 它们在写法上也不加区别，n 维行向量和 $1\times n$ 矩阵都记为 $(a_1,\cdots,a_n)$.

多项式 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$ 称为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式，如果 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{A}$ 的次数最小且最高次项系数是 1 的化零多项式称为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式，记作 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$. 对任一方阵 $\boldsymbol{A}$，下述 Cayley-Hamilton 定理保证了 $\boldsymbol{A}$ 一定有化零多项式.

定理 1.1 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式. □

易证 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定，而且多项式 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式当且仅当 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\mid f(\lambda)$. 两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 称为相似的，如果有可逆方阵 $\boldsymbol{S}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SBS}^{-1}$. 显然，相似关系是一种等价关系. 前面提到的特征多项式、谱、最小多项式、特征值的代数重数和几何重数等等，都是方阵在相似关系下的不变量. 更加深刻的问题是：什么是对于相似关系来说的不变量全系？即由怎样一系列不变量可以确定两个同阶方阵是否相似？同样的问题对于 $m\times n$ 矩阵的相抵关系来说，答案非常简单：矩阵的秩(rank)这一个相抵不变量即已组成相抵关系的不变量全系. 因为两个 $m\times n$ 矩阵相抵当且仅当它们的秩相等. 相似关系当然远不是如此简单，但也早已彻底搞清楚了. 正是 Jordan 标准形简明地展示了方阵相似关系的不变量全系. 在具体讨论之前，再定义两个名词.

设 $\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,k)$ 是 n_i 阶方阵，称 $n_1+\cdots+n_k$ 阶对角块形方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_k\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k)$$

为 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 的直和，记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}_k=\bigoplus_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i.$$

给定数 α，称 l 阶方阵

$$\boldsymbol{J}_l(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & & \boldsymbol{0} \\ & \alpha & 1 & \ddots \\ & & \alpha & \ddots & 1 \\ \boldsymbol{0} & & & \ddots & \alpha\end{pmatrix}$$

为(属于 α 的 l 阶)Jordan 块.

不难得到 $\boldsymbol{J}_l(\alpha)$ 的一些性质：它的特征多项式是 $(\lambda-\alpha)^l$；$\operatorname{Spec}\boldsymbol{J}_l(\alpha)=\{\alpha,\cdots,\alpha\}$；$\alpha$ 的代数重数是 l，几何重数是 1；$\boldsymbol{J}_l(\alpha)$ 的最小多项式也是 $(\lambda-\alpha)^l$.

关键的 Jordan 标准形定理可陈述如下：

定理 1.2 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 共有 k 个不同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，则：

(1) $\boldsymbol{A}$ 相似于对角块形方阵

$$\bigoplus_{i=1}^{k}(\boldsymbol{J}_{n_{i1}}(\lambda_i)\oplus\boldsymbol{J}_{n_{i2}}(\lambda_i)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{J}_{n_{it_i}}(\lambda_i)),$$

这里 $n_{ij}(i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,t_i)$是正整数；

(2) 上述共 $t_1+\cdots+t_k$ 个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_{n_{ij}}(\lambda_i)$是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的，它们的直和称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形(Jordan canonical form)；

(3) 两个方阵相似的充要条件是它们有相同的 Jordan 标准形. □

定理 1.2 可以说，是矩阵基础知识领域的一个制高点. 有了 Jordan 标准形后，很多复杂的关系就能理顺了.

推论 1.1　在定理 1.2 的记号下，特征值 $\lambda_i(i=1,\cdots,k)$的代数重数是 $n_{i1}+\cdots+n_{it_i}$，几何重数是 t_i，从而一定有：几何重数≤代数重数，而且下列诸性质互相等价：

(1) $\lambda_i(i=1,\cdots,k)$的几何重数和代数重数相等；

(2) $\boldsymbol{A}$ 相似于对角方阵；

(3) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量；

(4) k 个特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 的几何重数之和等于n. □

推论 1.2　设 $n_{i1}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant t_i}\{n_{ij}\}(i=1,\cdots,k)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{n_{i1}}$. 从而 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$的根除重数外与 $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$的根相同. $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$当且仅当 $t_i=1(i=1,\cdots,k)$，即相应于每个特征值 λ_i 只有一个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_{n_{ij}}(\lambda_i)$. □

每个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_{n_{ij}}(\lambda_i)$的特征多项式$(\lambda-\lambda_i)^{n_{ij}}(i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,t_i)$称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子. 这里，$\boldsymbol{A}$ 的初等因子只是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形中的 Jordan 块的另一种记法. 我们也可以说，方阵的全部初等因子是方阵在相似下的不变量全系. 今后将不固定用一种说法，而是根据表述的简明程度来采用两种说法之一.

下面举两个用 Jordan 标准形解决矩阵问题的例子. 由此可以看到，有了 Jordan 标准形以后，犹如高屋建瓴，使看来难以下手的问题变得容易处理了.

例 1.2　任一方阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的转置阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似.

设 $\boldsymbol{SAS}^{-1}=\boldsymbol{J}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{J}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形，则

$$\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{J}_m^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{SAS}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}.$$

故只需证明一个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_l(\lambda_1)$和它的转置阵 $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}$ 相似即可.

令 $\boldsymbol{P}$ 是次对角线上元素都是 1、其余元素都是 0 的 l 阶方阵：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

则不难验证 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}$. □

例 1.3 记方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的最大模为 $\rho(\boldsymbol{A})$（也称 $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径），则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k$ 存在（指当 $k\to\infty$ 时，$\boldsymbol{A}^k$ 在每个位置上的元素都有有限极限）的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{A})<1$ 或 $\rho(\boldsymbol{A})=1$，但 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的唯一的模为 1 的特征值，且对应于 1 的初等因子的次数都是 1.

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k$ 存在与否以及存在时的极限矩阵都是相似下不变的性质，所以只要讨论当 $\boldsymbol{A}$ 是 Jordan 标准形，或更进一步，当 $\boldsymbol{A}$ 是一个 Jordan 块的情形. 而当 $\boldsymbol{A}$ 是 Jordan 块时，不难直接验证结论成立. □

我们不准备再多举这类例子了. 从根本上可以说，矩阵理论的相当一部分内容都能看作是 Jordan 标准形的应用. 在第 2 讲讨论矩阵方程时，Jordan 标准形的作用是关键的. 本讲对方阵函数的处理，虽然不是从 Jordan 标准形出发的，但从它出发定义和讨论方阵函数也是完全可行的（见 1.4 节）.

1.2 方阵函数的定义

本节所面临的问题是：对于复变量 λ 的复数值函数 $f(\lambda)$，怎样自然而又合理地定义 $f(\boldsymbol{A})$（这里 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵）？

当 $f(\lambda)$ 是多项式函数时，我们显然有这种定义：设 $f(\lambda)=a_0\lambda^l+a_1\lambda^{l-1}+\cdots+a_l$，自然定义 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^l+a_1\boldsymbol{A}^{l-1}+\cdots+a_l\boldsymbol{I}_n$. 这时，若有另一多项式 $g(\lambda)$，则易知

$$f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A}) \iff m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\mid(f(\lambda)-g(\lambda)),$$

这里 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式. 若记

$$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k},$$
$$\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=m_1+\cdots+m_k=m,$$

则

$$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\mid(f(\lambda)-g(\lambda)) \iff f^{(j)}(\lambda_i)=g^{(j)}(\lambda_i)$$
$$(i=1,\cdots,k;j=0,1,\cdots,m_i-1),$$

这里 $f^{(j)}(\lambda_i)$ 是多项式函数 $f(\lambda)$ 的 j 次导数在 $\lambda=\lambda_i$ 时的值. 所以，对多项式 $f(\lambda)$ 来说，$f(\boldsymbol{A})$ 是由总共 $m=m_1+\cdots+m_k$ 个值

$$f(\lambda_i), f^{(1)}(\lambda_i), \cdots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \quad (i = 1, \cdots, k)$$

唯一确定的. 如果下面 m 个等式

$$f^{(j)}(\lambda_i) = g^{(j)}(\lambda_i) \quad (i = 1, \cdots, k; j = 0, 1, \cdots, m_i - 1)$$

成立，这 m 个等可简记为 $f(\Lambda_A) = g(\Lambda_A)$，则对多项式 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$，有

$$f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A}) \quad \Leftrightarrow \quad f(\Lambda_A) = g(\Lambda_A).$$

现在来对一般的 $f(\lambda)$ 定义 $f(\boldsymbol{A})$. 我们总假设 $f(\lambda)$ 在各 λ_i 处有直到 $m_i - 1$ 阶的导数——简称为 $f(\lambda)$ 在 Λ_A 上有意义.

定义 1.1　对函数 $f(\lambda)$，如果有多项式 $p(\lambda)$ 使 $p(\Lambda_A) = f(\Lambda_A)$，则定义 $f(\boldsymbol{A}) = p(\boldsymbol{A})$，并称 $p(\lambda)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的定义多项式.

显然，上述定义是明确的：$f(\boldsymbol{A})$ 与可能有多种选择的多项式 $p(\lambda)$ 无关. 不很明显的是，这个定义是否真有意义，即所要求的多项式 $p(\lambda)$ 是否一定存在？回答是肯定的：使 $p(\Lambda_A) = f(\Lambda_A)$ 的多项式一定存在，而且次数小于 m 的这种多项式是唯一的. 这就是著名的 Lagrange-Sylvester 插值多项式. 当 $m_1 = \cdots = m_k = 1$ 时，它就是 Lagrange 插值多项式：

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_{i+1})\cdots(\lambda - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_1)\cdots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i - \lambda_k)} f(\lambda_i),$$

一般情形的 Lagrange-Sylvester 插值多项式尽管看似较繁，但在归并 $f(\lambda)$ 在各 λ_i 处的各阶导数后可以写成

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} [f(\lambda_i)\varphi_{i1}(\lambda) + f^{(1)}(\lambda_i)\varphi_{i2}(\lambda) + \cdots + f^{(m_i-1)}(\lambda_i)\varphi_{im_i}(\lambda)],$$

其中 $\deg\varphi_{ij}(\lambda) < m$，$\varphi_{ij}(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 无关，而由 $m_A(\lambda)$ 确定. 所以

$$f(\boldsymbol{A}) = p(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{k} [f(\lambda_i)\varphi_{i1}(\boldsymbol{A}) + \cdots + f^{(m_i-1)}(\lambda_i)\varphi_{im_i}(\boldsymbol{A})].$$

若记 $\varphi_{ij}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{Z}_{ij}$，则 n 阶方阵 $\boldsymbol{Z}_{ij}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 确定的，与 $f(\lambda)$ 无关. 这个表示式对具体求 $f(\boldsymbol{A})$ 来说，有时会带来方便，因为我们可以选取适当的函数作为 $f(\lambda)$，并通过这些函数来确定 $\boldsymbol{Z}_{ij}$，从而最终求得 $f(\boldsymbol{A})$. 在下一节，我们会通过另一条途径再次得到这个表示式.

注　$f(\boldsymbol{A})$ 的定义多项式 $p(\lambda)$ 既取决于函数 f，又取决于方阵 $\boldsymbol{A}$，因此 $f(\boldsymbol{A})$ 和 $f(\boldsymbol{B})$ 一般有不同的定义多项式.

1.3　方阵函数的其他等价定义

首先注意到 1.2 节中所定义的方阵函数有如下两个基本性质：

(1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SBS}^{-1}\Rightarrow f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{S}f(\boldsymbol{B})\boldsymbol{S}^{-1}$;

(2) $f(\boldsymbol{A}_1\oplus\cdots+\oplus\boldsymbol{A}_l)=f(\boldsymbol{A}_1)\oplus\cdots\oplus f(\boldsymbol{A}_l)=p(\Lambda_B)$.

证 (1) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SBS}^{-1}$ 可知 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$,从而 $\Lambda_A=\Lambda_B$,$f(\Lambda_A)=f(\Lambda_B)$.于是 $f(\Lambda_A)=p(\Lambda_A)\Rightarrow f(\Lambda_B)=p(\Lambda_B)$,$f(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{S}p(\boldsymbol{B})\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}f(\boldsymbol{B})\boldsymbol{S}^{-1}$.

(2) 由于 $m_A(\lambda)$一定是每个 $\boldsymbol{A}_i$ 的化零多项式,所以 $m_{A_i}(\lambda)\mid m_A(\lambda)\Rightarrow\Lambda_{A_i}\subseteq\Lambda_A$.从而对 $f(\boldsymbol{A})$的任一定义多项式 $p(\lambda)$来说,$p(\boldsymbol{A}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}_l)=p(\boldsymbol{A}_1)\oplus\cdots+\oplus p(\boldsymbol{A}_l)$显然成立,故(2)成立.

基于(1)和(2)以及 Jordan 标准形定理,只要能定义 $f(\boldsymbol{J})$,就能定义 $f(\boldsymbol{A})$,这里 $\boldsymbol{J}$ 是一个 Jordan 块.记

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_l(\alpha)=\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_l(0),$$

则 $m_J(\lambda)=(\lambda-\alpha)^l$.从而多项式

$$p(\lambda)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(\lambda-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(l-1)}(\alpha)}{(l-1)!}(\lambda-\alpha)^{l-1}$$

满足 $p(\Lambda_J)=f(\Lambda_J)$,即可取 $p(\lambda)$作为 $f(\boldsymbol{J})$的定义多项式.因此

$$f(\boldsymbol{J})=p(\boldsymbol{J})=\sum_{i=1}^{l-1}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}(\boldsymbol{J}-\alpha\boldsymbol{I})=\sum_{i=1}^{l-1}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}\boldsymbol{H}^i.$$

(3) 设 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_l(\alpha)$,则

$$f(\boldsymbol{J})=\begin{pmatrix} f(\alpha) & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{(l-1)}(\alpha)}{(l-1)!} \\ & f(\alpha) & \ddots & \vdots \\ & \boldsymbol{0} & \ddots & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} \\ & & & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

结合性质(1)~(3),可以给出矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$的另一种定义:设 $\boldsymbol{SAS}^{-1}=\boldsymbol{J}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{J}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形,则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{S}^{-1}(f(\boldsymbol{J}_1)\oplus\cdots\oplus f(\boldsymbol{J}_m))\boldsymbol{S}$.

这个定义和 1.2 节中的定义当然应该是等价的.事实上,它们各有特点.在 1.2 节的定义中,我们明确地知道,对函数 $f(\lambda)$及矩阵 $\boldsymbol{A}$,有多项式 $p(\lambda)$,使 $f(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{A})$.这个事实很重要.而现在所说的通过相似及 Jordan 标准形的定义,虽然对于计算 $f(\boldsymbol{A})$并不更方便(因为即使能求出 Jordan 标准形,但将原方阵化到标准形的变换方阵也不易求得),但它明确地表明,$f(\boldsymbol{A})$一定相似于一些特殊结构的上三角方阵 $f(\boldsymbol{J})$的直和,而且这些上三角方阵可以直接通过 $f(\Lambda_A)$表示出来.这个事实很有用.例如,由此可以得到 1.2 节最后的表示式:

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{k}[f(\lambda_i)\boldsymbol{Z}_{i1}+\cdots+f^{(m_i-1)}(\lambda_i)\boldsymbol{Z}_{im_i}].$$

在1.5节中，我们还将根据它求出 $f(\boldsymbol{A})$ 的全部初等因子，这里先提出它的一个简单而又常用的推论.

命题 1.1　设 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则 $\mathrm{Spec}f(\boldsymbol{A})=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$. □

最后再讲一种方阵函数的等价定义——通过方阵幂级数定义. 矩阵函数最初就是在求解常系数线性微分方程组时以这种方式引入的.

定理 1.3　设复函数 $f(\lambda)$ 在开圆域 $|\lambda-\lambda_0|<r$ 内解析，即 $f(\lambda)$ 在此开圆域内可展开成幂级数

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k,$$

则只要方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都在这个开圆域内，就有

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})^k.$$

证　由性质(1)和(2)，我们只要证明当 $\boldsymbol{A}$ 是 Jordan 块时定理成立即可. 设 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_l(\alpha)=\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}$，$\alpha$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的唯一特征值. 因为 $f(\lambda)$ 在 $\lambda=\alpha$ 的一个邻域内解析，故 $f(\lambda)$ 也可在此邻域内展开成 $\lambda-\alpha$ 的幂级数

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\lambda-\alpha)^k,\quad \text{其中 } b_k=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

由于在 α 的一个邻域内，

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\lambda-\alpha)^k,$$

故矩阵等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\boldsymbol{J}-\lambda_0\boldsymbol{I})^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\boldsymbol{J}-\alpha\boldsymbol{I})^k$$

也成立. 因为上式两边都是有限和的极限，而绝对收敛级数又可任意重排各项的次序，所以根据性质(3)以及 $\boldsymbol{H}^l=\boldsymbol{0}$，即得

$$f(\boldsymbol{J})=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\boldsymbol{H}^k=\sum_{k=0}^{l-1}b_k\boldsymbol{H}^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\boldsymbol{H}^k,$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\boldsymbol{J}-\alpha\boldsymbol{I})^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\boldsymbol{J}-\lambda_0\boldsymbol{I})^k.$$ □

对解析函数来说，定理1.3中的矩阵幂级数表示式可以作为 $f(\boldsymbol{A})$ 的定义，最常用的一些矩阵函数均属此列. 例如，可以有下面的表示式：

$$\mathrm{e}^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!},\ |\lambda|<+\infty,\quad \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\ (\boldsymbol{A}\text{ 任意});$$

$$\ln(1+\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\lambda^k,\quad |\lambda|<1,$$

$$\ln(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\boldsymbol{A}^k,\quad p(\boldsymbol{A})<1;$$

$$(1+\lambda)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}\lambda^k,\quad |\lambda|<1\quad (a\text{ 是实数}),$$

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^a=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}\boldsymbol{A}^k,\quad p(\boldsymbol{A})<1;$$

$$\ln\lambda=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\lambda-1)^k,\quad |\lambda-1|<1,$$

$$\ln\boldsymbol{A}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^k.$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_j 都满足 $|\lambda_j-1|<1$.

例 1.4 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},$$

所以向量函数 $\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{a}$(这里 $\boldsymbol{a}$ 是常数列向量,$\boldsymbol{x}(t)$是变量 t 的函数列向量)是常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,\\ \cdots,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases}$$

$$\left(\text{或记为}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\text{这里 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}\right),$$

在初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{a}$ 下的唯一解. 这和 $n=1$ 时的常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax,\quad x(0)=a_0$$

的唯一解 $x=a_0\mathrm{e}^{at}$ 完全一样. 类似地,可以解非齐次方程组的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\alpha}.$$

这时,可令解

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{\alpha}(t),$$

代入原方程组后再确定向量函数 $\boldsymbol{\alpha}(t)$. 这也和 $n=1$ 时非齐次方程的常数变易法一样.

1.4 方阵函数的性质

命题 1.2 设 $G(u_1,\cdots,u_l)$是 l 元多项式，函数 $f_1(\lambda),\cdots,f_l(\lambda)$都在 Λ_A 上有意义.若记 $g(\lambda)=G(f_1(\lambda),\cdots,f_l(\lambda))$，则有 $g(\boldsymbol{A})=G(f_1(\boldsymbol{A}),\cdots,f_l(\boldsymbol{A}))$.特别地，若 $g(\Lambda_A)=0$，则 $G(f_1(\boldsymbol{A}),\cdots,f_l(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{0}$.

(这个结论虽在意料之中，但不是不证自明的.因为按照定义，$g(\boldsymbol{A})$应等于某一多项式方阵函数 $p(\boldsymbol{A})$，而多项式 $p(\lambda)$却要根据 $g(\lambda)=G(f_1(\lambda),\cdots,f_l(\lambda))$来确定.)

证 取多项式 $r_i(\lambda)(i=1,\cdots,l)$，$r_i(\lambda)$和 $f_l(\lambda)$在 Λ_A 上相等，从而 $g(\lambda)=G(f_1(\lambda),\cdots,f_l(\lambda))$和 $G(r_1(\lambda),\cdots,r_l(\lambda))$在 Λ_A 上也相等.但后者是 λ 的多项式，所以

$$g(\boldsymbol{A})=G(r_1(\boldsymbol{A}),\cdots,r_l(\boldsymbol{A}))=G(f_1(\boldsymbol{A}),\cdots,f_l(\boldsymbol{A})).$$ □

命题 1.3 设复合函数 $g(\lambda)=h(f(\lambda))$在 Λ_A 上有意义，则 $g(\boldsymbol{A})=h(f(\boldsymbol{A}))$，即 $g(\boldsymbol{A})=h(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$.

证 记 $m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式，再记 $f(\lambda_i)=\mu_i$ $(i=1,\cdots,s)$，则 $\varphi(\mu)=(\mu-\mu_1)^{m_1}\cdots(\mu-\mu_s)^{m_s}$是 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$的化零多项式(因为函数 $\varphi(f(\lambda))=(f(\lambda)-f(\lambda_1))^{m_1}\cdots(f(\lambda)-f(\lambda_s))^{m_s}$在 Λ_A 上为零.由命题 1.2 可知 $\varphi(f(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{B}$ 的最小多项式必形如

$$m_{\boldsymbol{B}}(\mu)=(\mu-\mu_1)^{m_1'}\cdots(\mu-\mu_s)^{m_s'},\quad 0\leqslant m_i'\leqslant m_i\quad(i=1,\cdots,s).$$

对函数 $h(\mu)$，取多项式 $r(\mu)$，使

$$r^{(j)}(\mu_i)=h^{(j)}(\mu_i)\quad(i=1,\cdots,s;j=0,1,\cdots,m_i-1).$$

则当然有 $r(\boldsymbol{B})=h(\boldsymbol{B})$.

根据复合函数的求导公式，$g(\lambda)=h(f(\lambda))$和 $r(f(\lambda))$在 Λ_A 上相等.现在应用命题 1.2 于 $g(\lambda)-r(f(\lambda))$($r(u_1)+r(u_2)$是 u_1,u_2 的多项式!)，即得 $g(\boldsymbol{A})-r(f(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{0}$，即

$$g(\boldsymbol{A})=r(f(\boldsymbol{A}))=r(\boldsymbol{B})=h(\boldsymbol{B}).$$ □

例 1.5 对任一 n 阶方阵 $\boldsymbol{X}$，若记 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{X}=\{x_1,\cdots,x_n\}$，则 $\det(\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}})=\mathrm{e}^{x_1}\cdots\mathrm{e}^{x_n}=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}\boldsymbol{X}}\neq 0$，即 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}}$ 一定可逆.反之，设有可逆方阵 $\boldsymbol{A}$，是否存在 $\boldsymbol{X}$，使 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}$?

解 回答是肯定的.因为 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，所以在复平面上一定有以 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为内点，但不含原点的单连通区域，在这个区域上可以确定一个(单值)解析函数 $\ln\lambda$，使 $\mathrm{e}^{\ln\lambda}=\lambda$ 成立.由命题 1.3 即得 $\mathrm{e}^{\ln\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$，从而方阵 $\boldsymbol{X}=\ln\boldsymbol{A}$ 即为所求. □

例 1.6 对可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 和非零数 p，必有 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}^p=\boldsymbol{A}$.

解 $\boldsymbol{X}$ 的存在性可以像例 1.5 一样，从 $(\lambda^{\frac{1}{p}})^p=\lambda$ 得出 $(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{p}})^p=\boldsymbol{A}$. 也可以直接从例 1.5 得知，一定存在 $\boldsymbol{B}$，使 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}$. 因而 $\mathrm{e}^{\frac{1}{p}\boldsymbol{B}}$ 满足 $(\mathrm{e}^{\frac{1}{p}\boldsymbol{B}})^p=\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}$. □

上述讨论使人有理由认为：在一个变量为 λ 的通常的函数关系式中，将 λ 代之以方阵 $\boldsymbol{A}$ 后所得的方阵函数关系式仍成立. 但值得指出的是：正像矩阵运算中常常遇到的情形那样——当同时出现多个矩阵时，矩阵乘法的不可交换性将可能引起问题.

例 1.7 当 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 时，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 可以互不相同.

解 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e} & \mathrm{e}\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

从而

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^2 & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$ □

1.5 矩阵函数的初等因子

这是本讲要讨论的最后一个问题：对给定的函数 $f(\lambda)$ 和方阵 $\boldsymbol{A}$，怎样由 $\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子（或 Jordan 标准形）来确定 $f(\boldsymbol{A})$ 的全体初等因子？

由 1.3 节的性质(3)可知，对 $\boldsymbol{A}$ 的一个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_p(\lambda_0)$，$f(\boldsymbol{J}_p(\lambda_0))$ 是所讨论的 n 阶上三角特殊方阵，即

$$f(\boldsymbol{J}_p(\lambda_0))=\begin{pmatrix}f(\lambda_0) & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{(p-1)}(\lambda_0)}{(p-1)!}\\ & f(\lambda_0) & \ddots & \vdots\\ & \boldsymbol{0} & \ddots & \dfrac{f'(\lambda_0)}{1!}\\ & & & f(\lambda_0)\end{pmatrix},$$

所以可直接得到下述关于 $f(\boldsymbol{A})$ 的初等因子的结论：

定理 1.4　$f(\boldsymbol{A})$ 的全部初等因子可以从 $\boldsymbol{A}$ 的全部初等因子按如下方式得到，对 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子：$(\lambda-\lambda_0)^p$，$f(\boldsymbol{A})$ 有下列相应的初等因子：

(1) 当 $p=1$ 或 $p>1, f'(\lambda_0)\neq 0$ 时，$f(\boldsymbol{A})$ 有初等因子：$(\lambda-f(\lambda_0))^p$；

(2) 当 $p>1, f'(\lambda_0)=\cdots=f^{(k-1)}(\lambda_0)=0, f^{(k)}(\lambda_0)\neq 0 (1<k\leqslant p-1)$ 时，$f(\boldsymbol{A})$ 有初等因子：$k-h$ 个 $(\lambda-f(\lambda_0))^q$、h 个 $(\lambda-f(\lambda_0))^{q+1}$，这里 $p=qk+h$ $(0\leqslant h<k)$；

(3) 当 $p>1, f'(\lambda_0)=\cdots=f^{(p-1)}(\lambda_0)=0$ 时，$f(\boldsymbol{A})$ 有初等因子：p 个 $\lambda-f(\lambda_0)$. □

推论 1.3　如果对 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i 有 $f'(\lambda_i)\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的每个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{n_{ij}}$ 对应着 $f(\boldsymbol{A})$ 的一个初等因子 $(\lambda-f(\lambda_i))^{n_{ij}}$，或者说，在从 $\boldsymbol{A}$ 转变到 $f(\boldsymbol{A})$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的每个 Jordan 块不分裂.

附　Lagrange-Sylvester 插值定理及其证明

在 1.2 节的记号下，再记 $m(\lambda)=m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$.

定理 1.5　设函数 $f(\lambda)$ 在 $\Lambda_{\boldsymbol{A}}$ 上有意义，则：

(1) 存在唯一的多项式 $p(\lambda)$，使 $\deg p(\lambda)<m$，且 $p(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$；

(2) 记

$$f_i(\lambda)=\frac{f(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}{m(\lambda)},$$

有

$$\frac{p(\lambda)}{m(\lambda)}=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{f_i(\lambda_i)}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}+\frac{f_i'(\lambda_i)/1!}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i-1}}+\cdots+\frac{f_i^{(m_i-1)}(\lambda_i)/(m_i-1)!}{\lambda-\lambda_i}\right].$$

证　(1) 设 $p(\lambda)=a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$，代入条件 $p(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})$，得 m 个未知数的线性方程组. 为证此方程有唯一解，只需证明相应的齐次方程组只有零解. 而当 $p(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=0$ 时，有关系 $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\mid p(\lambda),\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{m_k}\mid p(\lambda)$，故 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\mid p(\lambda)$. 因为 $\deg p(\lambda)<m$，所以 $p(\lambda)=0$.

(2) 若令 $p_i(\lambda)=\dfrac{p(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}{m(\lambda)}$，则

$$p(\Lambda_{\boldsymbol{A}})=f(\Lambda_{\boldsymbol{A}})\quad\Rightarrow\quad p_i^{(j)}(\lambda_i)=f_i^{(j)}(\lambda_i)\ (j=0,1,\cdots,m_i-1).$$

现有理函数 $p_i(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_i$ 的邻域内解析，故函数

$$\frac{p_i(\lambda)-\sum\limits_{j=0}^{m_i-1}\dfrac{p_i^{(j)}(\lambda_i)}{j!}(\lambda-\lambda_i)^j}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}$$

也在 $\lambda=\lambda_i$ 的邻域内解析，即有理函数

$$\frac{p(\lambda)}{m(\lambda)}-\sum_{j=0}^{m_i-1}\frac{p_i^{(j)}(\lambda_i)}{j!(\lambda-\lambda_i)^{m_i-j}}$$

在 $\lambda=\lambda_i$ 的邻域内解析.考察有理函数

$$g(\lambda)=-\frac{p(\lambda)}{m(\lambda)}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1}\frac{p_i^{(j)}(\lambda_i)}{j!(\lambda-\lambda_i)^{m_i-j}},$$

$g(\lambda)$在所有可能的奇点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 处均解析，故 $g(\lambda)$为全纯函数.再因 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}g(\lambda)=0$，故由复变量函数理论的 Liouville 定理，可知 $g(\lambda)\equiv 0$.从而公式得证. □

第 2 讲　矩阵的直积和矩阵方程

2.1　线性矩阵方程和矩阵直积

一般形式的线性矩阵方程形如

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{C},$$

这里 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i(i=1,\cdots,l)$ 分别是已知的 $m\times n$ 和 $p\times q$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是已知的 $m\times q$ 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是未知的 $n\times p$ 矩阵. 首先讨论 $l=1$，即方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的情形.

记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{X}=(x_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，则方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 实际上是 np 个未知量 x_{ij} 的线性代数方程组. 对它具体求解并无原则性困难，问题是能否直接用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 来表示出 x_{ij} 的这个线性方程组，进而可通过 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 得到关于矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的解的知识. 现在先把这个有 np 个未知量、mq 个方程的线性方程组具体写出来，它可以简记为

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk}b_{kl} = c_{il} \quad (i=1,\cdots,m;\ l=1,\cdots,q). \tag{2.1}$$

方程组(2.1)的系数矩阵记为 $\boldsymbol{D}$，它是 $mq\times np$ 型的. 现在通过 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 把 $\boldsymbol{D}$ 明确表示出来.

记从 1 到 n 这 n 个自然数的有序集为$[n]$. 将式(2.1)中 mq 个方程按其常数项 c_{il} 的下标按笛卡儿积$[m]\times[q]$中的字典式排序，也将式(2.1)中 np 个未知数 x_{jk} 的下标按笛卡儿积$[n]\times[p]$中的字典式排序. 于是 $\boldsymbol{D}$ 的行标集合和列标集合分别是$[m]\times[q]$和$[n]\times[p]$. 对$(i,l)\in[m]\times[q]$和$(j,k)\in[n]\times[p]$，$\boldsymbol{D}$ 中的行标、列标分别为(i,l)和(j,k)的元素记为 $f_{(i,l),(j,k)}$，它正是式(2.1)中以 c_{il} 为常数项的那个方程中 x_{jk} 的系数. 这个方程是

$$(a_{i1},\cdots,a_{in})\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{pl} \end{pmatrix} = c_{il},$$

其中 x_{jk} 的系数等于 $a_{ij}b_{kl}$，即 $f_{(i,l),(j,k)}=a_{ij}b_{kl}$. 整体上，$\boldsymbol{D}$ 可以写成如下分块形式：

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & a_{12}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ a_{21}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & a_{22}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & a_{m2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

它是由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{B}$ 的转置阵）按一种很规则的方式组合而成的. 这就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的直积.

定义 2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $p\times q$ 矩阵，定义 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的直积（或张量积、Kronecker 积）$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 为如下的 $mp\times nq$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

也就是说，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 是在 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中将每个元素 a_{ij} 代之以 $p\times q$ 块 $a_{ij}\boldsymbol{B}$ 后所得到的分块形式的矩阵.

根据直积的定义，式(2.1)可以改写成

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{C}},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{C}}$ 分别是 np 维和 mq 维列向量. 在具体讨论求解线性矩阵方程前，先证明一些关于矩阵直积的常用性质.

2.2 矩阵直积的性质

矩阵直积的下列三个性质很容易验证：

(1) $(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\otimes\boldsymbol{B}$；

(2) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})$；

(3) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

和矩阵乘积一样，直积也不满足交换律，但 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$ 仍有下述密切联系.

(4) 一般地说，对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $p\times q$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$. 但 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$ 都是 $mp\times nq$ 型的，而且可以通过对行的置换和对列的置换把 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 化成 $\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$. 形式地说，存在 mp 阶和 nq 阶置换方阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$（这时称 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$ 置换相抵）. 特别地，当 $m=n$，$p=q$ 时，一定有 mp 阶置换方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$（这时称 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$ 置换相似）.

下面的性质(5)建立了矩阵直积和通常乘积的联系，是最常用的性质之一.

(5) 只要乘积 $\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{BD}$ 都有意义，则 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})$ 也有意义，而且

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})=\boldsymbol{AC}\otimes\boldsymbol{BD}.$$

证　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别是 $p\times q$ 和 $q\times r$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D}$ 分别是 $mp\times nq$ 和 $nq\times kr$ 矩阵，从而可以相乘. 现在分别将 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D}$ 作自然分块：

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{matrix}p\{\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix}\overbrace{a_{11}\boldsymbol{B}}^{q} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D}=\begin{matrix}q\{\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix}\overbrace{c_{11}\boldsymbol{D}}^{r} & \cdots & c_{1k}\boldsymbol{D}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{n1}\boldsymbol{D} & \cdots & c_{nk}\boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

则 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})$ 的 (i,j) 块是

$$\sum_{l=1}^{n}a_{il}\boldsymbol{B}c_{lj}\boldsymbol{D}=\Big(\sum_{l=1}^{n}a_{il}c_{lj}\Big)\boldsymbol{BD},$$

右边正是 $\boldsymbol{AC}\otimes\boldsymbol{BD}$ 的 (i,j) 块. □

性质(5)还可以推广成更一般的形式：

(5)′

$$(\boldsymbol{A}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{A}_l)(\boldsymbol{B}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{B}_l)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{B}_l,$$

$$(\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{B}_1)\cdots(\boldsymbol{A}_l\otimes\boldsymbol{B}_l)=(\boldsymbol{A}_1\cdots\boldsymbol{A}_l)\otimes(\boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_l).$$

上面两个式子只要等号右边有意义，则左边也有意义，而且两边相等.

利用性质(1)～(5)，特别是性质(5)，可以得到更多的常用性质. 在下列性质(6)～(10)中，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶和 n 阶方阵.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 也可逆，而且

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1}.$$

证　$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1})=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}_{mn}$. □

(7) $\det(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(\det\boldsymbol{A})^n(\det\boldsymbol{B})^m$.

证　由于 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B})$，而 $\det(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B})=(\det\boldsymbol{B})^m$，由 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_n$ 置换相似于 $\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A}$，知

$$\det(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_n)=\det(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})=(\det\boldsymbol{A})^n,$$

所以结论成立. □

(8) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=(\operatorname{rank}\boldsymbol{A})(\operatorname{rank}\boldsymbol{B})$.

证　记 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=a$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=b$，则有可逆方阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$，使

$$\boldsymbol{UAV}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_a & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{RBS}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_b & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

于是

$$(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{R})(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{S})=(\boldsymbol{UAV})\otimes(\boldsymbol{RBS}).$$

易知等号右边矩阵的秩等于 ab. □

(9) 设

$$\mathrm{Spec}\boldsymbol{A} = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\},\quad \mathrm{Spec}\boldsymbol{B} = \{\mu_1,\cdots,\mu_n\},$$

则

$$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) = \{\lambda_i\mu_j \mid i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n\}.$$

特别地,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) = (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})(\mathrm{tr}\boldsymbol{B})$. 另外,若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角阵,则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 也相似于对角阵.

证 设 $\boldsymbol{RAR}^{-1} = \boldsymbol{T}_A$, $\boldsymbol{SBS}^{-1} = \boldsymbol{T}_B$,其中 $\boldsymbol{T}_A$, $\boldsymbol{T}_B$ 都是上三角方阵(从而它们的主对角线上的元素集分别是 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}$, $\mathrm{Spec}\boldsymbol{B}$),则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{S})(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{S})^{-1} &= (\boldsymbol{RAR}^{-1})\otimes(\boldsymbol{SBS}^{-1})\\ &= \boldsymbol{T}_A\otimes\boldsymbol{T}_B.\end{aligned}$$

不难验证 $\boldsymbol{T}_A\otimes\boldsymbol{T}_B$ 也是上三角方阵,它的主对角线上的元素集正是 $\{\lambda_i\mu_j \mid i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n\}$. 当 $\boldsymbol{T}_A$, $\boldsymbol{T}_B$ 都是对角阵时,$\boldsymbol{T}_A\otimes\boldsymbol{T}_B$ 也是对角阵. □

性质(9)容易推广成:

(9)′ 设 $\varphi(x,y) = \sum c_{kl}x^k y^l$ 是 x 与 y 的二元多项式. 记 $\varphi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};\otimes) = \sum c_{kl}\boldsymbol{A}^k\otimes\boldsymbol{B}^l$,则

$$\mathrm{Spec}\varphi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};\otimes) = \{\varphi(\lambda_i,\mu_j) \mid i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n\}.$$ □

(10) $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的全部初等因子可以从 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的初等因子按如下方法产生:从 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子 $(\lambda-a)^p$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的一个初等因子 $(\lambda-b)^q$,相应地可产生 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的如下初等因子:

(a) 当 $a\neq0, b=0$ 时,有 p 个 λ^q;

(b) 当 $a=0, b\neq0$ 时,有 q 个 λ^p;

(c) 当 $a=0, b=0$ 时,对每个 $k=1,\cdots,\min\{p,q\}-1$,有 2 个 λ^k,另外还有 $|p-q|+1$ 个 $\lambda^{\min\{p,q\}}$;

(d) 当 $a\neq0, b\neq0$ 时,对每个 $l=1,\cdots,\min\{p,q\}$,有 1 个 $(\lambda-ab)^{p+q-2l+1}$.

这一事实在 20 世纪 30 年代前后即已证得,后来又有学者提到这一结果的应用,并给出一个简短的证明.①

回到最初提出的矩阵方程 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是已知的 $m\times n$ 和 $p\times q$ 矩阵,$\boldsymbol{X}$ 是未知的 $n\times p$ 矩阵. 则由性质(8)(注意在证明性质(8)时并未用到 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是方阵的假设!)和 1.1 节的讨论,立即可得以下定理:

定理 2.1 矩阵方程 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$ 有解的充要条件是 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\quad \hat{\boldsymbol{C}}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$;若齐次方程 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$ 有解,则其解集是 $np - (\mathrm{rank}\boldsymbol{A})(\mathrm{rank}\boldsymbol{B})$

① Communications of the ACM, 1975(18): 36 - 39.

维的. □

对一般形式的线性矩阵方程

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{C},$$

若将它写成含 np 个未知量 x_{ij} 的线性方程组的形式,则其系数矩阵是

$$\boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{A}_l \otimes \boldsymbol{B}_l^{\mathrm{T}}.$$

我们当然可以写出这个线性方程组的有解性条件.但矩阵 $\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{A}_l\otimes\boldsymbol{B}_l^{\mathrm{T}}$ 的秩不能简明地由 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_l, \boldsymbol{B}_l$ 的秩显式表出,从而相应的齐次方程的解的性质也就难以有简明的结论.下一节将较深入地讨论一类特殊的线性矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

2.3　方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

设 $\boldsymbol{X}$ 是 $m \times n$ 未知矩阵,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$ 只有当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶和 n 阶方阵时才有意义,本节即作此假设.

方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ 还可以写成线性方程组

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\hat{\boldsymbol{X}} = \hat{\boldsymbol{C}},$$

它的系数矩阵是 mn 阶方阵.若记 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$, $\mathrm{Spec}\boldsymbol{B} = \{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$,则由 2.2 节的性质(9),可知

$$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = \{\lambda_i - \mu_j \mid i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n\}.$$

从而立即可得:

定理 2.2　矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ 有唯一解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 没有公共特征值. □

推论 2.1　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的乘法可交换,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.若 $\boldsymbol{A}$ 有直和分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}_l$,其中 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_l$ 分别是 $n_1, \cdots, n_l$ 阶方阵,且两两没有公共特征值,则 $\boldsymbol{B}$ 有同型的直和分解 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{B}_l$,其中 $\boldsymbol{B}_1, \cdots, \boldsymbol{B}_l$ 分别是 $n_1, \cdots, n_l$ 阶方阵.

证　将 $\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{ll} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 是 $n_i \times n_j$ 矩阵,则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_{ij} = \boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{A}_j (i, j = 1, \cdots, l).$$

当 $i \neq j$ 时，由定理 2.2，又 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_j$ 没有公共特征值，可知必有 $\boldsymbol{B}_{ij} = \boldsymbol{0}$. □

推论 2.2 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ 分别是 m, n 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $m \times n$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ 没有公共特征值，则 $m+n$ 阶方阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$$

相似.

证 令

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 特定，则

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$

由定理 2.2，可知方程 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{C}$ 有唯一解 $\boldsymbol{X}$，这个解 $\boldsymbol{X}$ 所确定的 $\boldsymbol{P}$ 就使得

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$ □

现在来讨论一般条件下方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ 的解的性质.

首先把 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别化成 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}_A$ 和 $\boldsymbol{J}_B$，即有可逆方阵 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$，使

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}_A &= (\lambda_1 \boldsymbol{I}_{p_1} + \boldsymbol{H}_{p_1}) \oplus \cdots \oplus (\lambda_u \boldsymbol{I}_{p_u} + \boldsymbol{H}_{p_u}) \\ &\quad (p_1 + \cdots + p_u = m), \\ \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{J}_B &= (\mu_1 \boldsymbol{I}_{q_1} + \boldsymbol{H}_{q_1}) \oplus \cdots \oplus (\mu_v \boldsymbol{I}_{q_v} + \boldsymbol{H}_{q_v}) \\ &\quad (q_1 + \cdots + q_v = n). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} &\Leftrightarrow \boldsymbol{S}\boldsymbol{J}_A\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}_B\boldsymbol{T}^{-1} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T})\boldsymbol{J}_B. \end{aligned}$$

若记 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Y}$，则只要讨论方程 $\boldsymbol{J}_A\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{J}_B$. 现将 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的行按 $\boldsymbol{J}_A$ 的分法，列按 $\boldsymbol{J}_B$ 的分法作分块，记所得分块矩阵为 $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_{ij})$，其中 $\boldsymbol{Y}_{ij}$ 是 $p_i \times q_j$ 矩阵，则方程 $\boldsymbol{J}_A\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{J}_B$ 等价于 uv 个方程

$$(\lambda_i \boldsymbol{I}_{p_i} + \boldsymbol{H}_{p_i})\boldsymbol{Y}_{ij} = \boldsymbol{Y}_{ij}(\mu_j \boldsymbol{I}_{q_j} + \boldsymbol{H}_{q_j}) \quad (i = 1, \cdots, u; j = 1, \cdots, v).$$

当 $\lambda_i \neq \mu_j$ 时，由定理 2.2 可知 $\boldsymbol{Y}_{ij} = \boldsymbol{0}$.

当 $\lambda_i = \mu_j$ 时，方程成为 $\boldsymbol{H}_{p_i}\boldsymbol{Y}_{ij} = \boldsymbol{Y}_{ij}\boldsymbol{H}_{q_j}$. 这时，若记 $\boldsymbol{Y}_{ij} = (y_{kl})$，则

$$\boldsymbol{H}_{p_i}\boldsymbol{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} y_{21} & \cdots & y_{2q_j} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{p_i1} & \cdots & y_{p_iq_j} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_{ij}\boldsymbol{H}_{q_j} = \begin{pmatrix} 0 & y_{11} & \cdots & y_{1,q_j-1} \\ 0 & y_{21} & \cdots & y_{2,q_j-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & y_{p_i1} & \cdots & y_{p_i,q_j-1} \end{pmatrix}.$$

这两个 $p_i \times q_j$ 矩阵相等，当且仅当 $\boldsymbol{Y}_{ij}$ 有下列形式：

当 $p_i = q_j$ 时，

$$\boldsymbol{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{p_i-1} \\ & y_0 & \ddots & \vdots \\ & \boldsymbol{0} & \ddots & y_1 \\ & & & y_0 \end{pmatrix};$$

当 $p_i < q_j$ 时，

$$\boldsymbol{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_0 & y_1 & \cdots & y_{p_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & y_0 & \cdots & y_{p_i-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_0 \end{pmatrix};$$

当 $p_i > q_j$ 时，

$$\boldsymbol{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{q_j-1} \\ 0 & y_0 & \cdots & y_{q_j-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\min\{p_i, p_j\}$ 个参数 $y_0, y_1, \cdots$ 可任取.

由此可知 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0}$ 的线性无关解的个数等于 $\sum \min\{p_i, q_i\}$，这里 $\sum$ 是对所有满足 $\lambda_i = \mu_j (1 \leqslant i \leqslant u; 1 \leqslant j \leqslant v)$ 的整数对 (i, j) 求和. 这个结论也可以表述如下：

定理 2.3　设 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是 $\{(\lambda - \lambda_i)^{p_i} \mid i = 1, \cdots, u\}$，$\boldsymbol{B}$ 的初等因子是 $\{(\lambda - \mu_j)^{q_j} \mid j = 1, \cdots, v\}$，则方程 $\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XB} = \boldsymbol{0}$ 的线性无关解的个数是 $\sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{v} d_{ij}$，

这里 d_{ij} 表示$(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ 和$(\lambda-\mu_j)^{q_j}$ 的最大公因式的次数. □

例 2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是$\{(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,(\lambda-2)^3\}$,$\boldsymbol{B}$ 的初等因子是$\{(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-2)^4\}$,则方程 $\boldsymbol{J}_A\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{J}_B=\boldsymbol{0}$ 的一般解是

$$\boldsymbol{Y}=\left(\begin{array}{cccc:cccc}
a & b & c & d & \multicolumn{4}{c}{\multirow{2}{*}{$\boldsymbol{0}$}} \\
0 & a & 0 & c & & & & \\
\hdashline
e & f & g & h & \multicolumn{4}{c}{\multirow{3}{*}{$\boldsymbol{0}$}} \\
0 & e & 0 & g & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\hdashline
\multicolumn{2}{c}{\multirow{4}{*}{$\boldsymbol{0}$}} & \multicolumn{2}{c:}{\multirow{4}{*}{$\boldsymbol{0}$}} & 0 & i & j & k \\
 & & & & 0 & 0 & i & j \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & i \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时特别有意义.这时方程的解就是与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的方阵 $\boldsymbol{X}$.用代数的术语来说,所有与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的方阵 $\boldsymbol{X}$ 所组成的集合称为 $\boldsymbol{A}$ 的中心化子(centralizer),记为 $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$.下一节对它作专门讨论.

2.4 方阵的中心化子

以下定理是定理 2.3 的推论:

定理 2.4 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是$\{(\lambda-\lambda_i)^{p_i}\mid i=1,\cdots,u\}$,则 $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$ $(=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\})$是 $\sum\limits_{i,j=1}^{u}d_{ij}$ 维线性空间.这里 d_{ij} 是$(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ 和$(\lambda-\lambda_j)^{p_j}$ 的最大公因式的次数,从而 $\dim\mathscr{C}(\boldsymbol{A})\geqslant n$,而且 $\dim\mathscr{C}(\boldsymbol{A})=n$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子两两互素

证 记复数域为 $\mathbf{C}$,$\mathbf{C}$ 上所有 n 阶方阵构成 n^2 维线性空间,记为 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{C})$,$\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$的线性子空间,且其维数为

$$\sum_{i,j=1}^{u}d_{ij}\geqslant\sum_{i=1}^{u}d_{ii}=\sum_{i=1}^{u}p_i=n.$$

式中等号成立⇔当 $i\neq j$ 时 $d_{ij}=0$⇔$\boldsymbol{A}$ 的初等因子两两互素. □

记

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A})=\{p(\boldsymbol{A})\mid p(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]\},$$

则显然有 $\mathscr{P}(\boldsymbol{A})\subseteq\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$.从定理2.4 立即可以搞清楚 $\mathscr{P}(\boldsymbol{A})$和 $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$相等的充要条件.

推论 2.3　$\mathscr{P}(\boldsymbol{A})=\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子两两互素.

证　首先,由于

$$\dim\mathscr{P}(\boldsymbol{A})=\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\leqslant\deg\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=n\leqslant\dim\mathscr{C}(\boldsymbol{A}),$$

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\boldsymbol{A})=\mathscr{C}(\boldsymbol{A}) &\Leftrightarrow \dim\mathscr{P}(\boldsymbol{A})=\dim\mathscr{C}(\boldsymbol{A})\\ &\Leftrightarrow \deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\deg\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\dim\mathscr{C}(\boldsymbol{A})\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{ 的初等因子两两互素.}\end{aligned}$$

□

注　对一个方阵 $\boldsymbol{B}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$来说,是否一定有 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都属于 $\mathscr{P}(\boldsymbol{C})$? 19 世纪末有人发表论文"证明"了这一点,但随后在 1919 年又有人举例说明这个结论并不成立.例如,若令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,但可验证一定不存在 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都属于 $\mathscr{P}(\boldsymbol{C})$.

关于 $\mathscr{P}(\boldsymbol{A})$和 $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$的关系,我们再证明一个有意义的结果:

定理 2.5　$\mathscr{C}(\mathscr{C}(\boldsymbol{A}))=\mathscr{P}(\boldsymbol{A})$,即与 $\mathscr{C}(\boldsymbol{A})$中所有方阵乘积可交换的方阵必为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

证　首先,不妨设 $\boldsymbol{A}$ 已是 Jordan 标准形,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}_k$,$\boldsymbol{A}_i=\bigoplus\limits_{j=1}^{t_i}\boldsymbol{J}_{n_{ij}}(\lambda_i)$ $(i=1,\cdots,k)$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 两两不同.若 $\boldsymbol{B}\in\mathscr{C}(\mathscr{C}(\boldsymbol{A}))$,则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可知 $\boldsymbol{B}$ 具有与 $\boldsymbol{A}$ 同型的直和分解,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{B}_k$,而且 $\boldsymbol{B}_i\in\mathscr{C}(\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_i))(i=1,\cdots,k)$.下面分两种情形来证明,对每个 $i=1,\cdots,k$,一定有多项式 $p_i(\lambda)$,使 $\boldsymbol{B}_i=p_i(\boldsymbol{A}_i)$.

情形 1　$\boldsymbol{A}_i$ 是一个 Jordan 块(即 $t_i=1$).这时,由推论 2.3 可知 $\boldsymbol{B}_i\in\mathscr{P}(\boldsymbol{A}_i)$.

情形 2　$\boldsymbol{A}_i$ 有 $m(>1)$个 Jordan 块(即 $t_i=m$),

$$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{J}_{n_{i1}}(\lambda_i)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{J}_{n_{im}}(\lambda_i).$$

令

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i=\boldsymbol{J}_{n_{i1}}(\lambda_i+1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{J}_{n_{im}}(\lambda_i+m),$$

则 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i\in\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_i)$,从而 $\boldsymbol{B}_i$ 有同型分解

$$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{B}_{i1}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{B}_{im},\quad \boldsymbol{B}_{ij}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{J}_{n_{ij}}(\lambda_i))=\mathscr{C}(\boldsymbol{H}_{n_{ij}})\quad(j=1,\cdots,m).$$

所以,由定理 2.2 的证明,可知

$$\boldsymbol{B}_{ij}=\begin{pmatrix}c_0&c_1&\cdots&c_l\\&c_0&\ddots&\vdots\\&\boldsymbol{0}&\ddots&c_1\\&&&c_0\end{pmatrix}\quad(l=n_{ij}-1).$$

下面以 $m=3$ 为例，证明一定有多项式 $p_i(\lambda)$，使 $\boldsymbol{B}_1=p_i(\boldsymbol{A}_i)$（对一般的 m，可完全类似地证明，这里因书写太繁而从略）.

设

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}_i\in\mathscr{C}(\mathscr{C}(\boldsymbol{A}_i))$. 比较 $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{S}_i$ 的两边，可得

$$a_0=b_0=c_0,\quad a_1=b_1=c_1,\quad b_2=c_2.$$

记

$$q_i(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3+c_4\lambda^4,\quad \boldsymbol{A}_i=\lambda_i\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_i,$$

则 $\boldsymbol{B}_i=q_i(\boldsymbol{F}_i)=q_i(\boldsymbol{A}_i-\lambda_i\boldsymbol{I})$. 记 $p_i(\lambda)=q_i(\lambda-\lambda_i)$，则 $\boldsymbol{B}_i=p(\boldsymbol{A}_i)$.

由于 $\chi_{\boldsymbol{A}_i}(\lambda)(i=1,\cdots,k)$ 两两互素，所以有多项式 $p(\lambda)$，使 $p(\lambda)\equiv p_i(\lambda)\pmod{\chi_{\boldsymbol{A}_i}(\lambda)}$，从而

$$\boldsymbol{B}_i=p_i(\boldsymbol{A}_i)=p(\boldsymbol{A}_i),\quad \boldsymbol{B}=p(\boldsymbol{A}).$$ □

对一组两两乘法可交换的 n 阶方阵，常常可以用同一可逆方阵使这组方阵同时相似于同一种特殊形式. 这种性质以多种形式出现在矩阵理论中，现在我们证明其中一个结论.

定理 2.6 设 Γ 是一组两两乘法可交换的 n 阶方阵，则必有可逆方阵 $\boldsymbol{S}$ 以及一个 n 的（正整数）分拆 $n=n_1+\cdots+n_p$，使得对每个 $\boldsymbol{A}\in\Gamma$，$\boldsymbol{SAS}^{-1}=\boldsymbol{A}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}_p$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 n_i 阶方阵，而且 $\boldsymbol{A}_i$ 没有不同的特征值（$i=1,\cdots,p$）.

证 先任意取定一个 $\boldsymbol{A}\in\Gamma$，则有可逆方阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{TAT}^{-1}=\boldsymbol{A}_1'\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}_k'$，其中 $\boldsymbol{A}_i'$ 是 n_i' 阶方阵，$\boldsymbol{A}_i'$ 没有不同的特征值，且当 $i\neq j$ 时，$\boldsymbol{A}_i'$ 和 $\boldsymbol{A}_j'$ 没有公共特征值. 这时记集合 $\Gamma_1=\boldsymbol{T}\Gamma\boldsymbol{T}^{-1}=\{\boldsymbol{TMT}^{-1}\mid\boldsymbol{M}\in\Gamma\}$，$\Gamma_1$ 仍满足定理的条件，而且 Γ_1 中每个方阵都具有和 $\boldsymbol{TAT}^{-1}$ 同型的直和分解. 若对 $\boldsymbol{T}$ 以及分拆 $n=n_1'+\cdots+n_k'$ 定理还不成立，则有 $\boldsymbol{B}\in\Gamma_1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1'\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{B}_k'$，其中某一块，设为 $\boldsymbol{B}_1'$，至少有两个不同的特征值. 因此对 $\boldsymbol{B}_1'$ 可再作如上直和分解，即有 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{T}_1$，使 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{BT}_1^{-1}=(\boldsymbol{B}_{11}'\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{B}_{1l}')\oplus\boldsymbol{B}_2'\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{B}_k'$. 这时 n 有相应的分拆 $n=n_{11}'+\cdots+n_{1l}'+n_2'+\cdots+n_k'$，它是原有分划 $n=n_1'+n_2'+\cdots+n_k'$ 的加细. 记 $\Gamma_2=\boldsymbol{T}_1\Gamma_1\boldsymbol{T}_1^{-1}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}\Gamma\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}_1^{-1}$，则 Γ_2 中各方阵都具有和 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{BT}_1^{-1}$ 同型的直和分解. 若这时对 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}$ 以及分拆 $n=n_{11}'+\cdots+n_{1l}'+n_2'+\cdots+n_k'$ 定理还不成立，则有 $\boldsymbol{C}\in\Gamma_2$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{11}'\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{C}_{1l}'\oplus\boldsymbol{C}_2'\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{C}_k'$，其中某一块至少有两个不同的特征值，从而又可再作 n 的加细分拆. 显然，这种加细过程不能无限继续下去，故在有限步以后，$\boldsymbol{T}_m\Gamma_m\boldsymbol{T}_m^{-1}=$

$(\boldsymbol{T}_m\cdots\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T})\Gamma(\boldsymbol{T}_m\cdots\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T})^{-1}$中每个矩阵都具有符合定理要求的直和分解. □

推论 2.4　设 Γ 是一组两两乘法可交换的 n 阶方阵，而且 Γ 中每个方阵都相似于对角阵，则有可逆方阵 $\boldsymbol{S}$，使 $\boldsymbol{S}\Gamma\boldsymbol{S}^{-1}$中每个方阵都是对角阵.

证　由于当一个方阵相似于对角阵，而它又没有不同的特征值时，这个方阵必等于 $\sigma\boldsymbol{I}$，故由定理 2.6 即得推论. □

2.5　方阵多项式方程

本节准备讨论的是形如

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}^m+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}^{m-1}+\cdots+\boldsymbol{A}_m=\boldsymbol{0} \tag{2.1}$$

的方阵多项式方程，其中 $\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 是已知的 n 阶方阵，$\boldsymbol{X}$ 是未知的 n 阶方阵. 完全可以预料，对一般形式的方程(2.1)，不会有很多完整的非平凡结论. 本节将只证明一个这样的结论(定理 2.8)，另外再对若干很特殊的方程作些研究，从中也可看出，研究一般形式的矩阵多项式方程非常困难.

设 $\boldsymbol{A}_i=\alpha_i\boldsymbol{I}_n(i=1,\cdots,m)$. 这时方程(2.1)成为纯量多项式方程 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$，其中 $f(\lambda)=\alpha_0\lambda^m+\alpha_1\lambda^{m-1}+\cdots+\alpha_m$. 对这种方程立即可得如下结论：

定理 2.7　设多项式 $f(\lambda)=\alpha_0(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_l)^{m_l}$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 两两不同，则 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 的每个初等因子均形如 $(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ $(p_i\leqslant m_i;i=1,\cdots,l)$.

证　由 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\mid f(\lambda)$即得. □

例 2.2　设 $f(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$，求 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 的所有 3 阶方阵解.

解　解集是下列 6 个相似类的并集，每个相似类的初等因子分别是$\{(\lambda-2),(\lambda-2)^2\}$，$\{\lambda-2,\lambda-2,\lambda-2\}$，$\{(\lambda-2)^2,\lambda-3\}$，$\{\lambda-2,\lambda-2,\lambda-3\}$，$\{\lambda-2,\lambda-3,\lambda-3\}$，$\{\lambda-3,\lambda-3,\lambda-3\}$. □

例 2.3　$f(\lambda)=\lambda^m$，$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^m=\boldsymbol{0}$ 的 n 阶方阵解的解集是初等因子为$\{\lambda^{n_1},\lambda^{n_2},\cdots,\lambda^{n_k}\}$的 n 阶方阵的相似类的并集，这里$\{n_1,\cdots,n_k\}$是 n 的任一(无序)分划$(n_1+\cdots+n_k=n)$，其中 $1\leqslant n_1,\cdots,n_k\leqslant n$. □

例 2.4　设 $f(\lambda)=\lambda^m-1$，求 $\boldsymbol{X}^m=\boldsymbol{I}_n$ 的解集.

解　任一解 $\boldsymbol{X}$ 的每个初等因子必为某个 $\lambda-\zeta_m^p$，这里 $\zeta_m^p=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi p}{m}}$ $(p=0,1,\cdots,m-1)$，所以解集是所有形如 $\mathrm{diag}(\zeta_1^{j_1},\cdots,\zeta_m^{j_n})$的对角阵所属的相似类的并集，其中 $0\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant m-1$. □

例 2.5　求 $\boldsymbol{X}^{m+1}=\boldsymbol{X}$ 的 n 阶方阵解.

解 $\boldsymbol{X}$ 是解当且仅当它的 Jordan 标准形为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_j=0$ 或 $\zeta_m^p(p=0,1,\cdots,m-1)$. 特别当 $m=1$ 时，解 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{X}$，称为幂等方阵. $\boldsymbol{X}$ 是幂等方阵当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 相似于对角阵 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$. □

对一般形式的矩阵多项式方程(2.1)，有下述一般结论成立：

定理 2.8 记 $F(\lambda)=\boldsymbol{A}_0\lambda^m+\boldsymbol{A}_1\lambda^{m-1}+\cdots+\boldsymbol{A}_m$，其中 $\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 都是 n 阶已知方阵，$\boldsymbol{X}$ 是未知的 n 阶方阵. 则方程 $F(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 的每个解 $\boldsymbol{X}$ 一定满足纯量多项式方程 $f(\boldsymbol{X})=0$. 因此，若 $\det F(\lambda)\not\equiv 0$，则 $F(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 的解集是 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 的解集的子集.

证 用 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 右除矩阵系数多项式 $F(\lambda)$ 后，得

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=\boldsymbol{A}_0\lambda^{m-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_1)\lambda^{m-1}+\boldsymbol{A}_2\lambda^{m-2}+\cdots+\boldsymbol{A}_m\\&=\boldsymbol{A}_0\lambda^{m-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_1)\lambda^{m-2}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&\quad+(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_2)\lambda^{m-2}+\boldsymbol{A}_3\lambda^{m-3}+\cdots+\boldsymbol{A}_m\\&=Q(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，则 $F(\lambda)=Q(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，从而

$$f(\lambda)=\det F(\lambda)=\det Q(\lambda)\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det Q(\lambda)\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda).$$

但由 Cayley-Hamilton 定理知 $\chi_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，所以 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$. □

最后，我们研究很特殊的矩阵多项式方程 $\boldsymbol{X}^m=\boldsymbol{A}$（$m$ 是正整数）. 对给定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，方程 $\boldsymbol{X}^m=\boldsymbol{A}$ 的每个解 $\boldsymbol{X}$ 都称作 $\boldsymbol{A}$ 的一个 m 次方根. 我们要给出 $\boldsymbol{A}$ 具有 m 次方根的充要条件. 这里仅就 $m=2$，即平方根的情形予以证明. 完全类似的论证方法适用于一般的 m.

定理 2.9 方程 $\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{A}$ 有解的充要条件是：若记 $\boldsymbol{A}$ 的相应于特征值 0 的初等因子为 $\{\lambda^{n_1},\cdots,\lambda^{n_{2k}}\}$，其中 $n_1\geqslant\cdots\geqslant n_{2k-1}\geqslant 1$，$n_{2k-1}\geqslant n_{2k}\geqslant 0$[①]，则 $n_{2i-1}-n_{2i}\leqslant 1(i=1,\cdots,k)$.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{A}^{(0)}\oplus\boldsymbol{A}^{(1)}$，其中 $\boldsymbol{A}^{(0)}$ 的特征值全是 0，$\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的特征值全不是 0，则 $\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{A}$ 有解当且仅当 $\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{A}^{(0)}\oplus\boldsymbol{A}^{(2)}$ 有解. 由于后者的任一解 $\boldsymbol{Y}$ 必与 $\boldsymbol{A}^{(0)}\oplus\boldsymbol{A}^{(1)}$ 乘法可交换，故解 $\boldsymbol{Y}$ 有同型的直和分解 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{(0)}\oplus\boldsymbol{Y}^{(1)}$，而且 $\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $(\boldsymbol{Y}^{(0)})^2=\boldsymbol{A}^{(0)}$，$(\boldsymbol{Y}^{(1)})^2=\boldsymbol{A}^{(1)}$. 但 $(\boldsymbol{Y}^{(1)})^2=\boldsymbol{A}^{(1)}$ 由于 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 可逆而一定有解（可参看第 1 讲 1.4 节的例 1.5），所以只要讨论 $(\boldsymbol{Y}^{(0)})^2=\boldsymbol{A}^{(0)}$ 的可解性条件. 这时 $\boldsymbol{Y}^{(0)}$ 一定相似于若干 $\boldsymbol{H}_p$ 的直和，而 $\boldsymbol{H}_p^2$ 的初等因子是 h 个 λ^{q+1} 和 $2-h$ 个 λ^q，这里 $p=q\cdot 2+h(h=0,1)$（见第 1 讲 1.5 节的定理），即 $\boldsymbol{H}_p^2$ 的初等因子当 p 为偶数时（$h=0$）是 $\{\lambda^{p/2},\lambda^{p/2}\}$；当 p 为奇数时（$h=1$）是 $\{\lambda^{(p+1)/2},\lambda^{(p-1)/2}\}$. 所以若将 $\boldsymbol{A}^{(0)}$ 的初等因子写成 $\{\lambda^{n_1},\lambda^{n_2},\cdots,\lambda^{n_{2k-1}},\lambda^{n_{2k}}\}$，其中 $n_1\geqslant\cdots\geqslant n_{2k-1}\geqslant n_{2k}\geqslant 0$

① 当 $\boldsymbol{A}$ 恰有 $2k-1$ 个属于 0 的初等因子时，令 $u_{2k}=0$，即添加并非初等因子的 λ^0 作为 $\lambda^{n_{2k}}$.

(注意,当 $\boldsymbol{A}^{(0)}$ 有 $2k-1$ 个初等因子时,加上 λ^0 作为 $\lambda^{n_{2k}}$,它并不是初等因子,而是为了说明 $n_1,\cdots,n_{2k-1}$ 的性质),则 $n_{2i-1}-n_{2i}\leqslant 1(i=1,\cdots,k)$.

充分性.由 $\boldsymbol{H}_p^2$ 的初等因子的构造可知,当 $0\leqslant n_{2i-1}-n_{2i}\leqslant 1$ 时,$\boldsymbol{H}_{n_{2i-1}+n_{2i}}^2$ 相似于 $\boldsymbol{H}_{n_{2i-1}}\oplus\boldsymbol{H}_{n_{2i}}$.所以在定理的条件下,$\bigoplus\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}_{n_{2i-1}+n_{2i}}^2$ 相似于 $\bigoplus\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}_{n_i}$,而后者又相似于 $\boldsymbol{A}^{(0)}$.

若记

$$\bigoplus_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}_{n_{2i-1}+n_{2i}}^2=\boldsymbol{Z},$$

则存在可逆方阵 $\boldsymbol{S}$,使

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{A}^{(0)},$$

从而 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{S}^{-1}$ 满足方程 $\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{A}^{(0)}$. □

可以类似地证明下述更一般的结果:

定理 2.10　方程 $\boldsymbol{X}^m=\boldsymbol{A}$ 有解的充要条件是:若记 $\boldsymbol{A}$ 的相应于特征值 0 的初等因子为 $\{\lambda^{n_1},\cdots,\lambda^{n_m},\cdots,\lambda^{n_{km}}\}$,其中 $n_1\geqslant\cdots\geqslant n_{km}\geqslant 0$,$n_{(k-1)m+1}\geqslant 1$,则 $n_{rm+1}-n_{(r+1)m}\leqslant 1(r=0,1,\cdots,k-1)$. □

例 2.6　$\boldsymbol{H}_3\oplus\boldsymbol{H}_2\oplus\boldsymbol{H}_2$ 没有平方根,但有立方根.因为对平方根来说,n_1,n_2,n_3,n_4 分别是 3,2,2,0,其中 $n_3-n_4=2$ 不满足定理 2.9 的条件;但对立方根来说,n_1,n_2,n_3 是 3,2,2($m=3,k=1$),满足定理 2.10 的条件.

第3讲　复合矩阵和行列式恒等式

3.1　记　　号

本讲在不涉及像特征值等依赖于基域的内容时，均设基域为任意域.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵. 对 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m$，$1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant n$，用 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l]$ 来记 $\boldsymbol{A}$ 中由第 $i_1,\cdots,i_k$ 共 k 行和第 $j_1,\cdots,j_l$ 共 l 列按自然顺序排列后组成的 $k\times l$ 子矩阵. 用 $\boldsymbol{A}(i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l)$ 记从 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 $i_1,\cdots,i_k$ 共 k 行和第 $j_1,\cdots,j_l$ 共 l 列后余下的 $(m-k)\times(n-l)$ 子矩阵. 再用 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l)$ 记从 $k\times n$ 子矩阵 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid 1,\cdots,n]$ 中划去第 $j_1,\cdots,j_l$ 列后余下的 $k\times(n-l)$ 子矩阵. 同样，用 $\boldsymbol{A}(i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l]$ 记从 $m\times l$ 子矩阵 $\boldsymbol{A}[1,\cdots,m\mid j_1,\cdots,j_l]$ 中划去第 $i_1,\cdots,i_k$ 行后余下的 $(m-k)\times l$ 子矩阵. 上述子矩阵的记法有时还可以再作如下简化：

对正整数 $k\leqslant n$，定义 $Q_{k,n}$ 为 n 元数集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中所有 k 元递增数列的集合，即

$$Q_{k,n}=\{(i_1,\cdots,i_k)\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}.$$

对 $\boldsymbol{\alpha}=(i_1,\cdots,i_k)\in Q_{k,m}$，$\boldsymbol{\beta}=(j_1,\cdots,j_l)\in Q_{l,n}$，分别用记号 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}]$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta})$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}]$ 表示子矩阵 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l]$，$\boldsymbol{A}(i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l)$，$\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l)$ 和 $\boldsymbol{A}(i_1,\cdots,i_k\mid j_1,\cdots,j_l]$. 例如，当 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\cdots,k)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\cdots,l)$ 时，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有如下自然分块形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}] & \boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta})\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}] & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta})\end{pmatrix}.$$

为熟悉上述记法，现在写出两个关于行列式的常用公式. 其中第一个是熟知的；另一个公式也很著名，其证明在很多书上都有.

(1) Laplace 展开公式　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则对 $\boldsymbol{\alpha}=(i_1,\cdots,i_l)$，$\boldsymbol{\beta}=(j_1,\cdots,j_l)\in Q_{l,n}$，下式成立：

$$\sum_{\gamma\in Q_{l,n}}(-1)^{S(\alpha)+S(\gamma)}\det A[\alpha\mid\gamma]\det A(\beta\mid\gamma)=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta,\\ \det A, & \alpha=\beta,\end{cases}$$

其中 $S(\alpha)=i_1+\cdots+i_l$，$S(\gamma)=k_1+\cdots+k_l$（$\gamma=(k_1,\cdots,k_l)$）.

(2) Binet-Cauchy 公式　设 A 和 B 分别是 $m\times p$ 和 $p\times n$ 矩阵，则对给定的 $l\leqslant\min\{m,p,n\}$ 和 $\alpha\in Q_{l,m}$，$\beta\in Q_{l,m}$，下式成立：

$$\det AB[\alpha\mid\beta]=\sum_{\gamma\in Q_{l,p}}\det A[\alpha\mid\gamma]\det B[\gamma\mid\beta].$$ □

3.2　复合矩阵的定义和性质

设 A 是 $m\times n$ 矩阵. 对于 $1\leqslant k\leqslant\min\{m,n\}$，定义 A 的 k 级复合矩阵（k-th compound matrix）$C_k(A)$ 如下：$C_k(A)$ 是 $\binom{m}{n}\times\binom{n}{k}$ 矩阵，它分别以 $\alpha\in Q_{k,m}$ 和 $\beta\in Q_{k,n}$ 作为行标和列标，并均按字典式排序，$C_k(A)$ 的 (α,β) 元是 $\det A[\alpha\mid\beta]$.

例如，当 $m=n=3$，$k=2$ 时，$C_2(A)$ 是如下的 3×3 矩阵：

$$C_2(A)=\begin{pmatrix}\det A[1,2\mid1,2] & \det A[1,2\mid1,3] & \det A[1,2\mid2,3]\\ \det A[1,3\mid1,2] & \det A[1,3\mid1,3] & \det A[1,3\mid2,3]\\ \det A[2,3\mid1,2] & \det A[2,3\mid1,3] & \det A[2,3\mid2,3]\end{pmatrix}.$$

特别地，总有 $C_1(A)=A$；当 $m=n$ 时，$C_n(A)=(\det A)$（作为 1 阶方阵）.

复合矩阵表面上看起来很庞杂，但实际上仍有内在规律性，这正是我们要加以研究的.

有些性质很明显，像

$$C_k(\alpha A)=\alpha^kC_k(A),\quad (C_k(A))^{\mathrm{T}}=C_k(A^{\mathrm{T}}),\quad \cdots.$$

另一些性质则较深刻，从而也更有意义.

定理 3.1　设 A 和 B 分别是 $m\times p$ 和 $p\times n$ 矩阵，$1\leqslant k\leqslant\min\{m,p,n\}$，则有：

(1) $C_k(AB)=C_k(A)C_k(B)$；

(2) $\operatorname{rank}A=r\Rightarrow\operatorname{rank}C_k(A)=\binom{r}{k}$；

(3) 设 A 是可逆方阵，则 $C_k(A)$ 也可逆，而且 $(C_k(A))^{-1}=C_k(A^{-1})$.

证　(1) 实际上不过是 Binet-Cauchy 公式的另一种写法. 若 A 是 n 阶可逆方阵，则由

$$C_k(A)C_k(A^{-1})=C_k(I_n)=I_{\binom{n}{k}},$$

即得(3).若 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times p$ 矩阵,则分别有 m 阶和 p 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1.$$

因此由(1)和(3)可知

$$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{P})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}_1),\quad \operatorname{rank}\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}_1)=\binom{r}{k}.\ \square$$

最后再讨论一下 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$的谱性质,这时假设基域是复数域,我们有下述简明的结果:

定理 3.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶(复)方阵,$\operatorname{Spec}\boldsymbol{A}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$,则 $\operatorname{Spec}\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})=\{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$.

证 $\boldsymbol{A}$ 必相似于上三角方阵 $\boldsymbol{T}$,即有可逆方阵 $\boldsymbol{S}$,使

$$\boldsymbol{SAS}^{-1}=\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

因此,$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S}))^{-1}$.但注意到上三角方阵 $\boldsymbol{T}$ 的 k 级复合矩 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{T})$也一定是上三角方阵(因为若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in Q_{k,n}$,且按字典式排序,$\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\beta}$ 之后,则不难验证 $\det\boldsymbol{T}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}]=0$),而且这个上三角方阵 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{T})$的主对角线上元素的集合正是$\{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$. $\square$

当然可以进一步讨论当已知 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形(初等因子组)时,如何写出 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$的 Jordan 标准形问题.对此不能期望会有简洁的答案.即使对于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}(\alpha)$ 这种简单的情形,虽然知道 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$的特征值都是 $\alpha^k(\alpha\neq 0)$或 $0(\alpha\neq 0)$,但其 Jordan 标准形中各阶 Jordan 块的个数虽然原则上可以确定,但也难有简明的显式表述.

3.3 几个行列式恒等式

先讨论 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$的 k 阶子式.因为它正是 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}^{-1})$的一个元素,而 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}^{-1})=(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}))^{-1}$,所以可以像通过 $\boldsymbol{A}$ 的伴随方阵 $\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$ 来表示出 $\boldsymbol{A}^{-1}$的元素一样,可通过 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$的伴随方阵来表示出 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}^{-1})$的元素.怎么表示出$\binom{n}{k}$阶方阵 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$的伴随方阵呢?对 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in Q_{k,n}$,$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$的$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$元是 $\det\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}]$,现在 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$中将此元换成它在 $\boldsymbol{A}$ 中的代数余子式$(-1)^{S(\boldsymbol{\alpha})+S(\boldsymbol{\beta})}\det\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta})$,

则得到另一$\binom{n}{k}$阶方阵，再将所得的方阵作转置，记转置后的$\binom{n}{k}$阶方阵为$\mathrm{adj}_k(\boldsymbol{A})$，则不难利用Laplace展开式，验证如下等式成立：

$$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\mathrm{adj}_k(\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_{\binom{n}{k}},$$

即

$$(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}))^{-1} = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\mathrm{adj}_k\boldsymbol{A}.$$

于是得到：

定理3.3　设$\boldsymbol{A}$是n阶可逆方阵，则对$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in Q_{k,n}$，下式成立：

$$\det\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}] = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}(-1)^{S(\boldsymbol{\alpha})+S(\boldsymbol{\beta})}\det\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\beta}).$$ □

定理3.4(Sylvester-Franke)　设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，则

$$\det\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})^{\binom{n-1}{k-1}}.$$

证1(假设基域是复数域)　记$\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则由定理3.2，可知

$$\det\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}) = \prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k} = (\lambda_1\cdots\lambda_n)^{\binom{n-1}{k-1}}$$

$$= (\det\boldsymbol{A})^{\binom{n-1}{k-1}}.$$ □

为在任意基域上证明定理3.4，先证明行列式的一个很基本的性质.

引理　若将n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的元素当作基域上的n^2个独立不定元，则$\det\boldsymbol{A}$作为这n^2个不定元的多项式在基域上不可约.

证　假设$\det\boldsymbol{A}$可约，即有a_{ij}的非退化(即不恒等于常数)多项式f和g，使$\det\boldsymbol{A}=fg$.由于$\det\boldsymbol{A}$是每个变量a_{ij}的一次式，a_{11}必在f和g二者之一中出现，设a_{11}在f中出现，则a_{11}必不在g中出现，而且f可以写成$f=a_{11}f_1+f_2$，其中f_1,f_2中都没有a_{11}.根据$\det\boldsymbol{A}$的定义式，这时$2(n-1)$个不定元$a_{12},\cdots,a_{1n}$和$a_{21},\cdots,a_{n1}$都不能在g中出现，因此它们都在f中出现.现设g中出现a_{rs}，不妨设$r\neq1$，则根据同样的推理，a_{r1}必定在g中出现，这导致矛盾. □

证2(基域为任意域的情形)　前已证得

$$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\mathrm{adj}_k(\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_{\binom{n}{k}},$$

所以

$$\det\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\det\mathrm{adj}_k(\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})^{\binom{n}{k}},$$

这是一个关于a_{ij}的恒等式，由引理可知$\det\boldsymbol{A}$是n^2个不定元a_{ij}的不可约多项式，所以有整数r和s，且$r+s=\binom{n}{k}$，使

$$\det\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})^r,\quad \det\mathrm{adj}_k(\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})^s.$$

现在可以通过取特殊的 $\boldsymbol{A}$ 把这两个恒等式中的 r 和 s 确定下来.

令 $\boldsymbol{A}=\alpha \boldsymbol{I}_n$,则

$$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})=\alpha^k \boldsymbol{I}_{\binom{n}{k}},\quad \det \boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})=\alpha^{k\binom{n}{k}}=(\det \boldsymbol{A})^r=\alpha^{nr},$$

所以

$$r=\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1},\quad s=\binom{n}{k}\frac{n-k}{n}=\binom{n-1}{k}. \qquad \square$$

最后再证明一个行列式恒等式,它的证明方法具有一定的普遍性.

定理 3.5(Sylvester) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$1\leqslant k\leqslant n-1$. 记 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}[1,\cdots,k\mid 1,\cdots,k]$,$b_{ij}=\det \boldsymbol{A}[1,\cdots,k,k+i\mid 1,\cdots,k,k+j]$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})(i,j=1,\cdots,n-k)$,则有下式成立:

$$\det \boldsymbol{B}=(\det \boldsymbol{E})^{n-k-1}\det \boldsymbol{A}.$$

证 先假设 $\boldsymbol{E}$ 是可逆的,并将 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}^{-1} & \boldsymbol{I}_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{H}}\end{pmatrix},$$

其中 $n-k$ 方阵 $\widetilde{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{F}=(\tilde{a}_{ij})$.

上述矩阵运算实际上是 Gauss 消元过程的矩阵运算表述:将 $\boldsymbol{A}$ 的前 k 行分别乘以相应的数后再加到第 $k+i(i=k+1,\cdots,n)$ 行去,使得第 $k+i$ 行的前 k 个元素化为 0. 所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\quad 和\quad \widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{H}}\end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{E}$ 的加边行列式相等,即

$$\begin{aligned}b_{ij}&=\det \boldsymbol{A}[1,\cdots,k,k+i\mid 1,\cdots,k,k+j]\\&=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & *\\ \boldsymbol{0} & \tilde{a}_{ij}\end{pmatrix}=\tilde{a}_{ij}\det \boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

从而

$$\boldsymbol{B}=(\det \boldsymbol{E})\widetilde{\boldsymbol{H}},\quad \det \boldsymbol{B}=(\det \boldsymbol{E})^{n-k}\det \widetilde{\boldsymbol{H}}.$$

但 $\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{E}\det \widetilde{\boldsymbol{H}}$,所以 $\det \boldsymbol{B}=(\det \boldsymbol{E})^{n-k-1}\det \boldsymbol{A}$.

如果 $\boldsymbol{E}$ 不可逆,就用 $\boldsymbol{A}+\lambda \boldsymbol{I}$ 来代替 $\boldsymbol{A}$,这里 λ 是基域上的不定元. 根据上面的推理,恒等式

$$(\det(\boldsymbol{E}+\lambda \boldsymbol{I}))^{n-k-1}\det(\boldsymbol{A}+\lambda \boldsymbol{I})=\det \boldsymbol{B}(\lambda)$$

成立，其中 $\boldsymbol{B}(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$，$b_{ij}(\lambda)=\det(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I})[1,\cdots,k,k+i\,|\,1,\cdots,k,k+j]$. 比较恒等式两边的常数项，即得要证明的恒等式. □

注　定理3.5中的 $\widetilde{H}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\boldsymbol{E}$ 的 Schur 补，记为 $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{GEF}$，且 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{E}\cdot\det(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{E})$.

3.4　加性复合矩阵

前面引进的复合矩阵 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$ 的关键性质是它的可乘性，即 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{B})$. 由此所推得的其他性质，如 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$ 的谱性质等，可用来研究 $\boldsymbol{A}$ 的若干特征值的积（见后面第5讲5.2节）. 为了研究诸如若干特征值的和之类的加法性质，可通过“线性化”引进所谓加性复合矩阵（additive compound matrix）的概念. 以下设基域为复数域 $\mathbf{C}$.

定义 3.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，t 是不定元. 记

$$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{I}_n+t\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}_{\binom{n}{k}}+t\Delta_k(\boldsymbol{A})+t^2\boldsymbol{R},$$

其中 $\Delta_k(\boldsymbol{A})\in M_{\binom{n}{k}}(\mathbf{C})$，$\boldsymbol{R}\in M_{\binom{n}{k}}(\mathbf{C}[t])$. 称 $\binom{n}{k}$ 阶方阵 $\Delta_k(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 级加性复合矩阵. 易知，当 $k=1$ 时，$\Delta_1(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$；当 $k=n$ 时，$\Delta_n(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$.

加性复合矩阵的基本性质可以概括为以下定理：

定理 3.6　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则：

(1) $\Delta_k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\Delta_k(\boldsymbol{A})+\Delta_k(\boldsymbol{B})$；

(2) 对可逆方阵 $\boldsymbol{S}$，$\Delta_k(\boldsymbol{SAS}^{-1})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S})\Delta_k(\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S})^{-1}$，从而由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，可得 $\Delta_k(\boldsymbol{A})$ 与 $\Delta_k(\boldsymbol{B})$ 相似；

(3) 若记 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则 $\mathrm{Spec}\Delta_k(\boldsymbol{A})=\{\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_k}\,|\,1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$.

证　(1) 将等式

$$\boldsymbol{C}_k((\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{B}))=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{B})$$

两边分别按 t 展开后，得

$$\begin{aligned}\text{右边}&=(\boldsymbol{I}+t\Delta_k(\boldsymbol{A})+t^2\boldsymbol{R})(\boldsymbol{I}+t\Delta_k(\boldsymbol{B})+t^2\boldsymbol{S})\\&=\boldsymbol{I}+t(\Delta_k(\boldsymbol{A})+\Delta_k(\boldsymbol{B}))+t^2(\cdots),\\\text{左边}&=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{I}+t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+t^2\boldsymbol{AB})\\&=\boldsymbol{I}+t\Delta_k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+t^2(\cdots).\end{aligned}$$

比较两边 t 的系数即得(1).

(2) $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A})\boldsymbol{S}^{-1})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A})(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S}))^{-1}$

$$=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S})\Delta_k(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{S}))^{-1}+t^2(\cdots).$$

(3) 和讨论 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$的谱一样,设可逆方阵 $\boldsymbol{S}$ 使

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

由(2)得 $\Delta_k(\boldsymbol{A})$与 $\Delta_k(\boldsymbol{T})$相似.但 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{T})=\boldsymbol{I}+t\Delta_k(\boldsymbol{T})+t^2(\cdots)$的左边是上三角方阵,其主对角线上元素的集合是$\{(1+t\lambda_{i_1})\cdots(1+t\lambda_{i_k})\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$,所以右边的 $\Delta_k(\boldsymbol{T})$也是上三角方阵,其主对角线上元素的集合正是$\{\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}=\mathrm{Spec}\Delta_k(\boldsymbol{T})=\mathrm{Spec}\Delta_k(\boldsymbol{A})$. □

最后指出,对行列式恒等式有兴趣的读者可参看 R. A. Brualdi 和 H. Schneider 的论文.①

① Linear Algebra and Its Applications, 1983(52/53): 769-791.

第 4 讲　酉方阵、Hermite 方阵和规范方阵

4.1　方阵的酉相似

本讲均设基域为复数域 $\mathbf{C}$，对一个 $m\times n$（复）矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})$，这里 $\overline{a}_{ij}$ 是 a_{ij} 的共轭复数；再记 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵为 $\boldsymbol{A}^*=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$，它是 $n\times m$ 矩阵. 记 $\mathbf{C}$ 上 n 维列向量，即 $n\times 1$ 矩阵构成的线性空间为 $\mathbf{C}^n$，$\mathbf{C}^n$ 中两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积定义为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y}$. 也就是说，若

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\overline{y}_j$. 再记 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$，称为 $\boldsymbol{x}$ 的长度或模，模为 1 的向量称为单位向量. 内积为零的两个向量称为正交的. 如上引入内积后的线性空间 $\mathbf{C}^n$ 称为 n 维酉空间（unitary space），记为 U^n.

易知，一组两两正交的非零向量必线性无关. 称一组 l 个两两正交的单位向量为一个标准正交组. 显然 $l\leqslant n$. 当 $l=n$ 时，即 U^n 中一组 n 个两两正交的单位向量称为一个标准正交基.

定义 4.1　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为酉方阵（unitary matrix），如果对任意两个向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in U^n$，有 $(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

若记 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个坐标是 1、其余坐标都是零的 n 维向量，则显然 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是一个标准正交基. 容易验证酉方阵的下列几种定义等价：

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是酉方阵 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{Ae}_i,\boldsymbol{Ae}_j)=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)(i,j=1,\cdots,n)\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的 n 列组成一个标准正交基 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1}\Leftrightarrow\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{I}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的 n 行组成一个标准正交基（两个行向量即 $1\times n$ 矩阵的内积，定义为它们的转置列向量的内积）.

对两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，如果有 n 阶酉方阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{UAU}^{-1}=\boldsymbol{UAU}^*$，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 酉相似. n 阶方阵的酉相似关系是一种特殊的相似关系，同时它自身也是一

种等价关系.

定理 4.1 任一方阵必酉相似于上三角方阵.

这个定理可以推广为:

定理 4.1′ 设 Γ 是一组两两乘法可交换的 n 阶方阵,则存在酉方阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 对任一 $\boldsymbol{A}\in\Gamma$ 都是上三角方阵.

为了证明定理 4.1′,先证明一个其本身也很有意思的结论.

引理 设 Γ 是一组两两乘法可交换的 n 阶方阵,则 Γ 中所有方阵必有一个公共特征向量.

证 对 n 进行归纳证明. 当 $n=1$ 时,引理显然成立. 又若 Γ 中所有方阵都是纯量方阵(即形如 $\alpha\boldsymbol{I}_n$ 的方阵),引理也显然成立. 现设有 $\boldsymbol{A}\in\Gamma$,$\boldsymbol{A}$ 不是纯量方阵. 因此,$\boldsymbol{A}$ 有特征值 α,且与 α 相应的特征子空间 $A_\alpha=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}\}$ 的维数小于 n. 这时,对任意 $\boldsymbol{B}\in\Gamma$ 和任意 $\boldsymbol{x}\in A_\alpha$,因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\in A_\alpha$. 如果把一个 n 阶方阵等同于一个 $\mathbf{C}^n$ 到自身的线性变换,则前面所证明的事实说明 A_α 是任意 $\boldsymbol{B}\in\Gamma$ 所代表的线性变换的不变子空间. 由于 $\dim A_\alpha<n$,故由归纳假设,若记线性变换集合 Γ 在其共同的不变子空间 A_α 上所诱导产生的线性变换集合为 Γ_α,则 Γ_α 在 A_α 上一定有一个公共特征向量. □

定理 4.1′的证明 对 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时,定理显然成立. 设单位向量 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 是 Γ 中所有方阵的公共特征向量,再适当补充 $n-1$ 个单位向量 $\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}$,使 $\{\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}\}$ 是一个标准正交基. 记 n 阶方阵 $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{x}^{(1)}\quad\boldsymbol{x}^{(2)}\quad\cdots\quad\boldsymbol{x}^{(n)})$,它是酉方阵,而且对任意 $\boldsymbol{B}\in\Gamma$,$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)}=\beta\boldsymbol{x}^{(1)}$,$\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}=(\beta\boldsymbol{x}^{(1)}\quad\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(2)}\quad\cdots\quad\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(n)})$. 从而

$$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{V}^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\beta & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 是 $1\times(n-1)$ 矩阵,$\boldsymbol{B}_1$ 是 $n-1$ 阶方阵. 对任意 $\boldsymbol{C}\in\Gamma$,记

$$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{V}^{*}\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\gamma & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是 $1\times(n-1)$ 矩阵,$\boldsymbol{C}_1$ 是 $n-1$ 阶方阵,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\quad&\Rightarrow\quad(\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{V}^{*})(\boldsymbol{V}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{V}^{*})=(\boldsymbol{V}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{V}^{*})(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}^{*})\\ &\Rightarrow\quad\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_1.\end{aligned}$$

根据归纳假设,有 $n-1$ 阶酉方阵 $\boldsymbol{V}_1$,使对任意 $\boldsymbol{B}\in\Gamma$,$\boldsymbol{V}_1^{*}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{V}_1$ 是上三角方阵.

令 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{I}_1\oplus\boldsymbol{V}_1$,$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}$,则 $\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{V}^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}$ 是上三角方阵. □

推论 4.1(Schur 不等式) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵,$\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2,$$

其中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵.

证　由定理 4.1 可知,存在酉方阵 $\boldsymbol{U}$,使

$$\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (t_{ij})\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}.$$

所以 $\boldsymbol{T}^{*}=\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{U}$,而且

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{*}=\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{U}\\ \Rightarrow\quad &\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{*})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{U})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*})\\ \Rightarrow\quad &\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{i<j}|t_{ij}|^2=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2.\end{aligned}$$

由此即得结论. □

上述 Schur 不等式虽看似简单,但很有用.现以下例来说明.

例 4.1　设 $x_1,\cdots,x_n$ 是非负实数,记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{x_1} & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \sqrt{x_{n-1}}\\ \sqrt{x_n} & & & & 0\end{pmatrix},$$

则 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^n-\sqrt{x_1}\cdots\sqrt{x_n}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i 的模 $|\lambda_i|$ 都等于 $(x_1\cdots x_n)^{1/(2n)}$.由 Schur 不等式,可得

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=n(x_1\cdots x_n)^{1/n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

即 n 个非负实数的几何平均小于或等于它们的算术平均,而且几何平均等于算术平均当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵.讨论到此暂告一段落.

无论是 Schur 引理本身还是为了完全解答例 4.1,都自然地引出这样的问题:如何刻画酉相似于对角阵的方阵呢?这就是产生下述定义的源头之一.

定义 4.2　方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为规范的(normal),如果 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵.

定理 4.2　下列三个性质是互相等价的:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶规范方阵,即 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 由 n 个特征向量组成标准正交基;

(3) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}$.

证　(1)⇔(2).存在酉方阵 $\boldsymbol{U}$,使 $\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 等于对角阵 $\boldsymbol{D}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\Leftrightarrow\boldsymbol{U}$ 的 n 个列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(3)⇔(1).设 $\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{T}$ 是上三角方阵,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{*}=\boldsymbol{T}^{*}\boldsymbol{T}\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{T}$ 是对角阵. □

例 4.1′(续例 4.1) 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(x_n, x_1, \cdots, x_{n-1})$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* \Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. 从而不等式

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

中等式成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

酉方阵显然是规范方阵,另一类很重要的规范方阵是 Hermite 方阵.

定义 4.3 方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 Hermite 方阵,如果 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$.

由定义以及方阵的规范性是酉相似下的不变性质,即得:

定理 4.3 $\boldsymbol{A}$ 是酉方阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于主对角线上的元素都是模为 1 的复数的对角阵;$\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 方阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于实对角阵. □

对规范方阵来说,我们已多次讨论过的问题有如下结论:

定理 4.4 设 Γ 是一组两两乘法可交换的规范方阵,则存在酉方阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 对任意 $\boldsymbol{A} \in \Gamma$ 都是对角阵.

证 由于规范的上三角方阵一定是对角阵,故由定理 4.1 即得. □

4.2 循回方阵

如下的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶循回(circulant)方阵,也常记为 $\mathrm{Circ}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$. 它的各行是由第一行$(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$逐个向右移动一位,而最右端的元素转回到最左端后依次所得的.

如下的矩阵

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{Circ}(0,1,0,\cdots,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

称为基本循回方阵. 显然,任一循回方阵是基本循回方阵的多项式,即

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{Circ}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}) = c_0\boldsymbol{I} + c_1\boldsymbol{P} + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{P}^{n-1},$$

因而任意两个 n 阶循回方阵的乘法可交换. 再因 $(\boldsymbol{P}^k)^* = (\boldsymbol{P}^k)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{n-k}$，所以 $\boldsymbol{C}^* = \bar{c}_0\boldsymbol{I} + \bar{c}_1\boldsymbol{P}^{n-1} + \cdots + \bar{c}_{n-1}\boldsymbol{P}$ 也是循回方阵，从而有 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{C}$ 是规范的.

根据定理 4.4，存在一个 n 阶酉方阵，用它可把每一个 n 阶循回方阵酉相似于对角阵. 下面来具体确定这个酉方阵以及循回方阵在这个酉方阵所作的酉相似下的对角阵.

从考察基本循回阵 $\boldsymbol{P}$ 入手，$\boldsymbol{P}$ 的特征多项式是

$$\chi_P(\lambda) = \lambda^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - \zeta^j), \quad \zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}} \quad (\mathrm{i} = \sqrt{-1}).$$

若记多项式

$$f_C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1},$$

则对 $\boldsymbol{C} = \mathrm{Circ}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$，有

$$\boldsymbol{C} = f_C(\boldsymbol{P}), \quad \mathrm{Spec}\boldsymbol{C} = \{f_C(\zeta^j) \mid j = 0, 1, \cdots, n-1\}.$$

再求 $\boldsymbol{P}$ 的属于特征值 ζ^j 的特征向量. 记

$$\boldsymbol{x}^{(j)} = (1 \quad \zeta^j \quad \cdots \quad \zeta^{(n-1)j})^{\mathrm{T}},$$

则

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(j)} = (\zeta^j \quad \zeta^{2j} \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}} = \zeta^j\boldsymbol{x}^{(j)}.$$

从而

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(j)} = f_C(\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}^{(j)} = f_C(\zeta^j)\boldsymbol{x}^{(j)},$$

即 $\boldsymbol{x}^{(j)}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的属于特征值 $f_C(\zeta^j)$ 的特征向量. 不难验证

$$(\boldsymbol{x}^{(l)}, \boldsymbol{x}^{(m)}) = \sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{lk}\zeta^{mk} = \sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{m-l,k} = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ n, & l \neq m. \end{cases}$$

现将这 n 个两两正交的向量 $\boldsymbol{x}^{(j)}$ 单位化，即得标准正交基

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}^{(0)}, \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}^{(n-1)}\right\}.$$

记 n 阶酉方阵 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{x}^{(0)} \quad \boldsymbol{x}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}^{(n-1)})$ 为 $\boldsymbol{F}^*$，有时称 $\boldsymbol{F}$ 为 Fourier 矩阵.

综上，可得我们想知道的结论：

定理 4.5　对任意 n 阶循回方阵 $\boldsymbol{C} = \mathrm{Circ}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$，有下式成立：

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}^* = \mathrm{diag}(f_C(\zeta^0), f_C(\zeta^1), \cdots, f_C(\zeta^{n-1})),$$

其中 $f_C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$，$\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$ $(\mathrm{i} = \sqrt{-1})$，

$$\boldsymbol{F}^{*}=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \zeta & \zeta^{2} & \cdots & \zeta^{n-1}\\ 1 & \zeta^{2} & \zeta^{4} & \cdots & \zeta^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{2(n-1)} & \cdots & \zeta^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{F}^{*}$ 的(j,k)元等于$\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^{(j-1)(k-1)}$. □

4.3 几类特殊的规范方阵

基于规范方阵酉相似于对角阵这一事实，我们可作如下类比（当阶数为 1 时，这个类比是事实）：

规范方阵 ↔ 复数，

酉方阵 ↔ 模为 1 的复数，

Hermite 方阵 ↔ 实数.

在这种类比下，还有几类特殊的规范方阵，它们分别对应于纯虚数、正数（负数）和非负数（非正数）.

定理 4.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则下列性质是互相等价的：

(1) $\boldsymbol{A}$ 酉相似于主对角线上的元素都是纯虚数的对角阵；

(2) $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{*}$；

(3) $\mathrm{i}\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 方阵.

满足上述任一性质的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为斜 Hermite 方阵. □

定义 4.4 Hermite 方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定（负定）的，如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是正数（负数）；$\boldsymbol{A}$ 称为半正定（半负定）的，如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是非负数（非正数）.

正定、半正定、负定、半负定 Hermite 方阵在各种数学、力学和物理问题中经常出现，它们在研究一般矩阵时也起着重要的作用. 下述简单结论说明任一 $m\times n$ 矩阵自然关联着两个半正定的 Hermite 方阵.

定理 4.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}$ 和 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}$ 分别是 m 阶和 n 阶的半正定 Hermite 方阵.

证 设 α 是 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}$ 的特征值，则有非零向量 $\boldsymbol{x}$，使 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$. 因此$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}$，即 $\|\boldsymbol{A}x\|^{2}=\alpha\|x\|^{2}$，从而 α 是非负实数. 易知 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 方阵，从而一定是半正定 Hermite 方阵.

$\boldsymbol{AA}^*$ 的情形完全相仿. □

下面继续把本节开始时所说的类比贯彻下去.

定理 4.8　设 $\boldsymbol{H}$ 是半正定的 Hermite 方阵,则有唯一的半正定 Hermite 方阵 $\boldsymbol{F}$,使 $\boldsymbol{F}^2=\boldsymbol{H}$. 这个 $\boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的多项式. 若 $\boldsymbol{H}$ 是正定的,则 $\boldsymbol{F}$ 也是正定的.

证　存在性. 有酉方阵 $\boldsymbol{U}$,使 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{UDU}^*$,这里 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是非负实数. 令 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{U}^*$,即有 $\boldsymbol{F}^2=\boldsymbol{H}$.

唯一性. 假设又有半正定的 Hermite 方阵 $\boldsymbol{G}$,使得 $\boldsymbol{G}^2=\boldsymbol{H}$,则 $\operatorname{Spec}\boldsymbol{G}=\{\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\}$. 故有酉方阵 $\boldsymbol{W}$,使 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{W}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{W}^*$. 这时

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}^2=\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}^2\\ \Rightarrow\quad &\boldsymbol{W}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{W}^*=\boldsymbol{U}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{U}^*\\ \Rightarrow\quad &\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{U}=\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{U}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\end{aligned}$$

因为 $\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$的多项式,所以

$$\boldsymbol{W}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{W}^*=\boldsymbol{U}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{U}^*\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}.$$

令多项式 $p(\lambda)$是满足 $p(\lambda_j)=\sqrt{\lambda_j}(j=1,\cdots,n)$的 Lagrange 插值多项式,则 $p(\boldsymbol{H})=\boldsymbol{F}$. □

有时记上述唯一确定的半正定 Hermite 方阵 $\boldsymbol{F}$ 为$\sqrt{\boldsymbol{H}}$. 下例说明,为保证唯一性,必须有半正定性.

例 4.2　设 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}_2$,则$\sqrt{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{I}_2$. 但下列五个非半正定的 2 阶方阵 $\boldsymbol{F}$ 也都满足 $\boldsymbol{F}^2=\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{I}_2,\ \pm\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix}1&0\\a&-1\end{pmatrix}.$$ □

定理 4.9　$\boldsymbol{A}$ 是酉方阵当且仅当有 Hermite 方阵 $\boldsymbol{H}$,使

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{H}}.$$

证　$\boldsymbol{A}$ 是酉方阵⇔有酉方阵 $\boldsymbol{U}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n})\boldsymbol{U}^*$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都是实数. 再令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{U}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{U}^*$,则上述等价于 $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{H}}$. □

下面的定理仍然可以看作前述类比的继续,但它也说明了类比并非等同.(从根本上说,如把规范方阵比作复数,那么一般的(非规范)方阵又如何看待呢? 类比毕竟只是类比!)

定理 4.10(方阵的极分解)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则存在唯一的半正定方阵 $\boldsymbol{H}$,此外还有一个酉方阵 $\boldsymbol{U}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{HU}$. 这种 $\boldsymbol{U}$ 唯一当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的. $\boldsymbol{HU}=\boldsymbol{UH}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是规范的. 类似的结论对 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{H}_1$ 也成立.

证　假设已有分解式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{HU}$,则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{H}^2$. 从而半正定的 $\boldsymbol{H}$ 是唯一的,$\boldsymbol{H}=\sqrt{\boldsymbol{AA}^*}$.

现在我们对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{H}=\sqrt{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*}$ 来解矩阵方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}$，这里 $\boldsymbol{X}$ 是未知的酉方阵.分几步来解：

(1) 先取酉阵 $\boldsymbol{V}$，使 $\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}(r_1^2,\cdots,r_n^2)$，其中 $r_1,\cdots,r_k>0$，$r_{k+1}=\cdots=r_n=0$，则 $\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}(r_1,\cdots,r_n)$.现在可将方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}$ 通过酉相似化为等价方程 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{H}}\widetilde{\boldsymbol{X}}$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}(r_1,\cdots,r_n)$，$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{V}$ 是未知酉阵.

(2) 因为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{A}}^*=\mathrm{diag}(r_1^2,\cdots,r_n^2)$，所以：

(a) $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的 n 个行两两正交；

(b) $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的第 i 行的模为 r_i，特别地，$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的下面 $n-k$ 行全是零.

现记 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 的行向量分别为 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 和 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$，则方程 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{H}}\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 等价于向量方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1 = r_1\boldsymbol{X}_1,\\ \cdots,\\ \boldsymbol{A}_k = r_k\boldsymbol{X}_k,\\ \cdots,\\ \boldsymbol{A}_n = r_n\boldsymbol{X}_n,\end{cases}$$

其中后 $n-k$ 个方程为 $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\boldsymbol{X}_j$，说明 $\boldsymbol{X}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 可任意选取.而从前 k 个方程可解出 $\boldsymbol{X}_i=\dfrac{1}{r_i}\boldsymbol{A}_i\ (i=1,\cdots,k)$.由(b)知 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_k$ 是 k 个两两正交的单位向量，故可增补 $n-k$ 个向量 $\boldsymbol{X}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{X}_n$，使 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 是一组标准正交基.这时以此 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 为行向量的酉方阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 就是方程 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{H}}\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 的酉方阵解.解的存在性得证.

显然，当 $k=n$(即 $\boldsymbol{A}$ 可逆)时，解是唯一的；而当 $k<n$ 时，由于有多种增补法，故解必不唯一.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}$ 如定理所述，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{U}\Leftrightarrow\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{U}$ $\Leftrightarrow\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}$. □

4.4 酉相抵和奇异值

我们知道，两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 称为相抵，如果分别有 m 阶和 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.相抵关系是等价关系.若记 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 必相抵于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

从而可知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵当且仅当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\boldsymbol{B}$. 下面讨论一种很特殊的相抵——酉相抵.

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 称为酉相抵，如果分别有 m 阶和 n 阶的酉方阵 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$，使 $\boldsymbol{UAV}=\boldsymbol{B}$. 显然，酉相抵关系也是等价关系. 我们首先希望给出两个同型矩阵酉相抵的充要条件.

注意到 $\boldsymbol{UAV}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{BB}^*=\boldsymbol{UAA}^*\boldsymbol{U}^*\Rightarrow\boldsymbol{AA}^*$ 和 $\boldsymbol{BB}^*$ 酉相似. 但 $\boldsymbol{AA}^*$ 和 $\boldsymbol{BB}^*$ 都是 m 阶半正定的 Hermite 方阵，它们酉相似当且仅当 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{AA}^*)=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{BB}^*)$. 若记 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{AA}^*)=\{\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2,0,\cdots,0\}$，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r>0$，则 r 个正数的重集 $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_r\}$ 是酉相抵下的不变量. 我们要证明，$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_r\}$ 是酉相抵的不变量全系，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 酉相抵当且仅当 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{AA}^*)=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{BB}^*)$. 这个结论是下述酉相抵标准形定理的直接推论.

定理 4.11（酉相抵标准形定理）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$. 记 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{AA}^*)=\{\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2,0,\cdots,0\}$，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 酉相抵于矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n},\quad \boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r).$$

证　我们知道 $\boldsymbol{AA}^*$ 和 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 分别是 m 阶和 n 阶的半正定 Hermite 方阵，而且它们有相同的非零特征值（计入重数）[①]，可以证明这些非零特征值的个数正是 $r=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$. 因此有 m 阶和 n 阶酉方阵 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_1$，使

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{U}_1^*=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2,0,\cdots,0)\quad（记为\ \Delta_m），$$

$$\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AV}_1^*=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2,0,\cdots,0)\quad（记为\ \Delta_n）.$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{AV}_1^*$，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 酉相抵，且

$$\boldsymbol{BB}^*=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{U}_1^*=\Delta_m,\quad \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}=\Delta_n.$$

将 $\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1\text{ 是 }r\times r\text{ 阵},$$

则

$$\boldsymbol{BB}^*=\Delta_m\ \Rightarrow\ \boldsymbol{B}_3\boldsymbol{B}_3^*+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{B}_4^*=\boldsymbol{0}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}=\Delta_n\ \Rightarrow\ \boldsymbol{B}_2^*\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{B}_4^*\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{0}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^*=\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{B}_1=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_r^2).$$

所以 $\boldsymbol{B}_1$ 是规范方阵，从而有 r 阶酉方阵 $\boldsymbol{W}$，使

① 一般地，可证：对任意 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若 $m\leqslant n$，则 $\lambda^{n-m}\chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda)$.

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{W}^* = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r), \quad |\lambda_j|^2 = \sigma_j^2 \quad (j=1,\cdots,r).$$

记 $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{I}_{m-r}$, $\boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{W}^*\oplus\boldsymbol{I}_{n-r}$,则

$$\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}_2 = \begin{pmatrix}\Delta & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r).$$

由 $|\lambda_j|^2 = \sigma_j^2$,易知 $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ 与 $\boldsymbol{D}_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$ 酉相抵,从而 $m\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}\Delta & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

酉相抵,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 酉相抵. □

定义 4.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,记 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \{\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2\}$, $\sigma_1,\cdots,\sigma_n \geqslant 0$,则称 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值.

对规范方阵 $\boldsymbol{A}$ 来说,$\mathrm{Spec}\boldsymbol{A} = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\} \Rightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \{|\lambda_1|^2,\cdots,|\lambda_n|^2\}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值就是特征值的绝对值 $|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|$. 对一般方阵来说,它的奇异值和特征值之间虽然没有如此直接的关系,但仍然相互关联. 下述定理即为二者相互关联的一例.

定理 4.12 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,现将其特征值排列为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,其中 $|\lambda_1|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$;再将其奇异值排列为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$,其中 $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n$. 则有下列不等式组成立:

$$\prod_{j=1}^{k}|\lambda_j| \leqslant \prod_{j=1}^{k}\sigma_j \quad (k=1,\cdots,n),$$

且当 $k=n$ 时等号成立.

证 先证:当 $k=1$ 时,$|\lambda_1|\leqslant\sigma_1$ 成立. 因为 σ_1^2 是 Hermite 方阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 的最大特征值,所以

$$\sigma_1^2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

这是个一般结论,在下一讲的 5.1 节中将作详细讨论. 就现在的特殊情形而言,此结论不难直接证明. 设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2)$, $\boldsymbol{U}$ 是酉方阵,则

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2|y_j|^2\Big) \leqslant \sigma_1^2\sum_{j=1}^{n}|y_j|^2 = \sigma_1^2,$$

从而易得上式. 现取 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量,则有 $\boldsymbol{x}^{(1)*}\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = |\lambda_1|^2$,所以 $|\lambda_1|^2\leqslant\sigma_1^2$,即 $|\lambda_1|\leqslant\sigma_1$.

现将已证得的 $k=1$ 时的结论用于 $\binom{n}{k}$ 阶方阵 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$($\boldsymbol{A}$ 的 k 级复合矩阵). 因为 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$ 的特征值的最大模是 $|\lambda_1\cdots\lambda_k|$,而 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$ 的最大奇异值是 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}))^* = \boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)$ 的最大特征值的模的平方根,但

$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{AA}^*)$的最大特征值正是 $\sigma_1^2\cdots\sigma_k^2$，所以不等式组

$$\prod_{j=1}^{k}|\lambda_j|\leqslant\prod_{j=1}^{k}\sigma_j\quad(k=1,\cdots,n)$$

成立.

当 $k=n$ 时，

$$\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j|=|\det\boldsymbol{A}|,\quad\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^2=\det(\boldsymbol{AA}^*)=|\det\boldsymbol{A}|^2.$$

从而等式成立. □

从定理 4.12 所述的那组不等式出发，经过一些不等式推演，还可以导出一系列其他有关特征值的模与奇异值的不等式. 例如

$$\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\leqslant\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\quad(k=1,\cdots,n),$$

$$\prod_{j=1}^{k}(1+|\lambda_j|\varepsilon)\leqslant\prod_{j=1}^{k}(1+\sigma_j\varepsilon),\quad\varepsilon>0\quad(k=1,\cdots,n),$$

等等. 这些结果最早都是 H. Weyl 得到的，这里不多讨论了.

4.5　实规范方阵

迄今为止都是在复数域 **C** 上讨论的，但在实数域 **R** 上也都有其相应的概念，如：

酉空间 U^n　↔　欧几里得空间 E^n，

酉方阵($\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1}$)　↔　实正交方阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$)，

Hermite 方阵($\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$)　↔　实对称方阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$)，

规范方阵($\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*$)　↔　实规范方阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$)，

正交、半正定　↔　正定、半正定，

等等. 但应注意，由于实规范方阵的特征值可能是复数，所以它在实正交相似下，一般不能化为实对角阵，但有下述结果：

定理 4.13　(1) 设 n 阶实规范方阵的特征值为 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_k,\bar{\lambda}_k,\mu_{2k+1},\cdots,\mu_n$，其中 $\mu_l(l=2k+1,\cdots,n)$是实数，$\lambda_j=\mu_j+\mathrm{i}\nu_j$ 是复数，其虚部 $\nu_j\neq0(j=1,\cdots,k)$，则 $\boldsymbol{A}$ 实正交相似于

$$\begin{pmatrix}\mu_1&\nu_1\\-\nu_1&\mu_1\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{pmatrix}\mu_k&\nu_k\\-\nu_k&\mu_k\end{pmatrix}\oplus\operatorname{diag}(\mu_{2k+1},\cdots,\mu_n).$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实正交方阵，特征值如(1)所示，则 $|\lambda_1|=\cdots=|\lambda_k|=|\mu_{2k+1}|=\cdots=|\mu_n|=1$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称方阵,则其特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 全是实数,$\boldsymbol{A}$ 实正交相似于 $\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$.

证 (1) 实规范方阵 $\boldsymbol{A}$ 首先是实方阵,故其特征多项式是实系数多项式,从而复特征值必成对共轭出现,记

$$\mathrm{Spec}\boldsymbol{A} = \{\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_k,\bar{\lambda}_k,\mu_{2k+1},\cdots,\mu_n\}$$

如定理所述.又因 $\boldsymbol{A}$ 是规范方阵,所以在 U^n 中有一个由 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量组成的标准正交基$\{\boldsymbol{z}_1,\bar{\boldsymbol{z}}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_k,\bar{\boldsymbol{z}}_k,\boldsymbol{x}_{2k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$.若记复向量 $\boldsymbol{z}_j=\boldsymbol{x}_j+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_j$ 是属于复特征值$\lambda_j=\mu_j+\mathrm{i}\nu_j(j=1,\cdots,k)$的特征向量,$\boldsymbol{x}_{2k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是分别相应于实特征值$\mu_{2k+1},\cdots,\mu_n$ 的实特征向量,则可验证 n 个实向量$\{\sqrt{2}\boldsymbol{x}_1,\sqrt{2}\boldsymbol{y}_1,\cdots,\sqrt{2}\boldsymbol{x}_k,\sqrt{2}\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{x}_{2k+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$是 E^n 的一个标准正交基,而且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_j+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_j)=(\mu_j+\mathrm{i}\nu_j)(\boldsymbol{x}_j+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_j) \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j=\mu_j\boldsymbol{x}_j-\nu_j\boldsymbol{y}_j,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_j=\nu_j\boldsymbol{x}_j+\mu_j\boldsymbol{y}_j,\end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_j \quad \boldsymbol{y}_j)=(\boldsymbol{x}_j \quad \boldsymbol{y}_j)\begin{pmatrix}\mu_j & \nu_j\\ -\nu_j & \mu_j\end{pmatrix},$$

其中$(\boldsymbol{x}_j \quad \boldsymbol{y}_j)$表示第 1 和第 2 列分别是 $\boldsymbol{x}_j$ 和 $\boldsymbol{y}_j$ 的 $n\times 2$ 矩阵.再令 $\boldsymbol{Q}=(\sqrt{2}\boldsymbol{x}_1\ \sqrt{2}\boldsymbol{y}_1\ \cdots\ \sqrt{2}\boldsymbol{x}_k\ \sqrt{2}\boldsymbol{y}_k\ \boldsymbol{x}_{2k+1}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$,则 $\boldsymbol{Q}$ 是 n 阶实正交方阵,且有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\bigoplus_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}\mu_j & \nu_j\\ -\nu_j & \mu_j\end{pmatrix}\oplus\mathrm{diag}(\mu_{2k+1},\cdots,\mu_n).$$

(2)和(3)是(1)的直接推论. □

第 5 讲　Hermite 方阵的特征值和一般方阵的奇异值

5.1　Hermite 方阵特征值的性质

本节要证明三个关于 Hermite 方阵特征值的著名定理. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 方阵,以下均记 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个(实)特征值为 $\lambda_1(\boldsymbol{A})\geqslant\lambda_2(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{A})$. 在不引起混淆时,简记 $\lambda_i=\lambda_i(\boldsymbol{A})(i=1,\cdots,n)$. 与特征值 λ_i 相对应,取特征向量 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=\lambda_i\boldsymbol{u}_i$,并使 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ 是 U^n 的一个标准正交基. 若记 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1\quad\boldsymbol{U}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{U}_n)$,则 $\boldsymbol{U}$ 是 n 阶酉方阵, $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^*$. 从这些基本性质不难依次刻画每个 λ_i.

引理　在上述记号下,

$$\lambda_1=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad \lambda_i=\max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1\\ \boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{i-1}\rangle^\perp}}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad(i=2,\cdots,n).$$

这里对 U^n 中 l 个向量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l$,用 $\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l\rangle$ 表示它们在 U^n 中所张成的子空间; $\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l\rangle^\perp$ 表示这个子空间的正交补空间.

证　对单位向量 $\boldsymbol{x}$,记 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=(y_1,\cdots,y_n)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}\\&=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|y_j|^2\leqslant\lambda_1\Big(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^2\Big)=\lambda_1.\end{aligned}$$

若取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_1$,则 $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1$. 这就证明了 $\lambda_1=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

现设 $i>1$. 对 $\boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{i-1}\rangle^\perp$, $\|\boldsymbol{x}\|=1$,仍记 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=(y_1,\cdots,y_n)$,则同样有

$$\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}.$$

但注意,这时

$$\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}=(0\quad\cdots\quad0\quad\bar{y}_i\quad\cdots\quad\bar{y}_n).$$

所以

$$\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{*}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}=\sum_{j=i}^{n}\lambda_j\mid y_j\mid^2\leqslant\lambda_i\Big(\sum_{j=i}^{n}\mid y_j\mid^2\Big)=\lambda_i,$$

而当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_i$ 时，$\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_i^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=\lambda_i$. □

上述 λ_i 的表示式有一个根本性的缺点，即当 $i>1$ 时，λ_i 的表示式依赖于 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{i-1}$. 我们希望不通过 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 而直接表示 λ_i. 此即下述应用广泛的著名定理，它有时被称为 min-max 原理.

定理 5.1(Courant-Fisher) 设 n 阶 Hermite 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，则

$$\lambda_1=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

$$\lambda_i=\min_{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\in U^n}\ \max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1\\ \boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}}}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad(i=2,\cdots,n).$$

证 $\lambda_1=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 已由引理证得. 对于 $i>1$ 以及 U^n 中任意给定的 $i-1$ 个向量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}$，$n$ 元实值函数 $\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 U^n 的紧集 $\{\boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}\mid\|\boldsymbol{x}\|=1\}$ 上可达到最大值. 又由引理可知，当取 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}=\boldsymbol{u}_{i-1}$ 时，$\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在该紧集上的最大值是 λ_i. 所以

$$\lambda_i\geqslant\min_{\boldsymbol{v}_1,\cdots\boldsymbol{v}_{i-1}\in U^n}\ \max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1\\ \boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}}}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

为证上式中等号成立，只要再证对任意给定的一组 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\in U^n$，必存在单位向量 $\boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}$，使 $\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant\lambda_i$（从而反向不等式成立）. 这又相当于求向量 $\boldsymbol{x}$，它满足 $\|\boldsymbol{x}\|=1$，$\boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}$，同时 $\boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_i\rangle$. 这种单位向量 $\boldsymbol{x}$ 的存在性很明显，因为子空间 $\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}$ 与子空间 $\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_i\rangle$ 的维数之和是 $n+1$，所以它们的交空间的维数至少是 1. □

与上述 min-max 表示式相对称，还可以有如下的 max-min 表达式：

定理 5.1′

$$\lambda_n=\min_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

$$\lambda_{n-i+1}=\max_{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\in U^n}\ \min_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1\\ \boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}}}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad(i=2,\cdots,n).$$

证 由于 $-\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $-\lambda_n\geqslant-\lambda_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant-\lambda_1$，其第 i 个特征值是 $-\lambda_{n-i+1}(i=1,\cdots,n)$. 将定理 5.1 用于 $-\boldsymbol{A}$，得

$$-\lambda_n=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{*}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\min_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

$$-\lambda_{n-i+1}=\min_{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\in U^n}\ \max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1\\ \boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1}\rangle^{\perp}}}\boldsymbol{x}^{*}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

$$= \min_{v_1,\cdots,v_{i-1}\in U^n}\left(-\min_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\langle v_1,\cdots,v_{i-1}\rangle^\perp}} x^*Ax\right)$$

$$= -\max_{v_1,\cdots,v_{i-1}\in U^n}\min_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\langle v_1,\cdots,v_{i-1}\rangle^\perp}} x^*Ax. \qquad \square$$

通过上面关于 λ_i 的 min-max(或 max-min)表示式,可以轻而易举地得到一些干净利落的结论.下面就用它来证明两个有用的定理.第一个定理如下:

定理 5.2(Weyl)　设 A,B 是 n 阶 Hermite 方阵,则对 $j=1,\cdots,n$,有

$$\max_{r+s=n+j}\{\lambda_r(A)+\lambda_s(B)\}\leqslant\lambda_j(A+B)\leqslant\min_{r+s=j+1}\{\lambda_r(A)+\lambda_s(B)\}.$$

证　先证 $\lambda_j(A+B)$ 的上界.对 $r,s(1\leqslant r,s\leqslant n)$,分别有向量组 $\{v_1,\cdots,v_{r-1}\}$ 和 $\{w_1,\cdots,w_{s-1}\}$,使

$$\lambda_r(A)=\max_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\langle v_1,\cdots,v_{r-1}\rangle^\perp}} x^*Ax,\quad \lambda_s(B)=\max_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\langle w_1,\cdots,w_{s-1}\rangle^\perp}} x^*Bx,$$

其中当 $r=1$ 时,$\langle v_1,\cdots,v_{r-1}\rangle^\perp=U^n$.当 $s=1$ 时证明相仿.

记 $j=r+s-1$,则

$$\lambda_j(A+B)=\lambda_{r+s-1}(A+B)$$

$$\leqslant\max_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\langle v_1,\cdots,v_{r-1},w_1,\cdots,w_{s-1}\rangle^\perp}} x^*(A+B)x$$

$$\leqslant\max_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\langle v_1,\cdots,v_{r-1},w_1,\cdots,w_{s-1}\rangle^\perp}} x^*Ax+\max_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\langle v_1,\cdots,w_{s-1}\rangle^\perp}} x^*Bx$$

$$\leqslant\lambda_r(A)+\lambda_r(B).$$

$\lambda_j(A+B)$ 的下界可用 max-min 表示式类似得到,也可通过讨论 $\lambda_{n-j+1}(-A-B)$ 的上界而得到. $\square$

当我们想知道某个未知 Hermite 方阵 $A+B$ 的第 j 个特征值,但只知道"近似"的 Hermite 方阵 A 和"误差"Hermite 方阵 B 时,上述 Weyl 不等式对该未知特征值给出一个范围.另外还应指出,当 A 与 B 不是 Hermite 方阵时,即使 A,B 和 $A+B$ 的特征值都是实数,上述不等式也未必成立.

例 5.1　设

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{Spec}A=\mathrm{Spec}B=\{0,0\}$,但 $\mathrm{Spec}(A+B)=\{1,-1\}$.

推论 5.1　若定理 5.2 中的 B 是半正定的,则

$$\lambda_j(A+B)\geqslant\lambda_j(A)\quad(j=1,\cdots,n),$$

且当 B 正定时严格不等式成立.

证　由 $\lambda_j(A+B)\geqslant\lambda_j(A)+\lambda_n(B)$ 即得. $\square$

定理 5.2 说明 Hermite 方阵的谱和该方阵的各阶主子方阵的谱之间的交错分

布关系.

定理 5.3(Cauchy-Poincaré) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 方阵,$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. 对 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n$,记 $\boldsymbol{A}$ 的 m 阶主子方阵 $\boldsymbol{A}[i_1, \cdots, i_m \mid i_1, \cdots, i_m]$ 的特征值为 $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_m$,则

$$\lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_{n-m+i} \quad (i = 1, \cdots, m).$$

特别地,当 $m = n-1$ 时,$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n$.

证 事实上,只要证明 $m = n-1$ 的情形即可. 例如,当 $m = n-2$ 时,设 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $n-2$ 阶主子方阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\rho_1 \geqslant \cdots \geqslant \rho_{n-2}$,则必有 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶主子方阵 $\boldsymbol{B}$ 包含 $\boldsymbol{C}$,记 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1}$. 由 $m = n-1$ 情形的结论,对 $i = 1, \cdots, n-2$,有

$$\mu_i \geqslant \rho_i \geqslant \mu_{i+1}, \quad \lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_{i+1} \geqslant \mu_{i+1} \geqslant \lambda_{i+2}.$$

从而 $\lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \rho_i \geqslant \mu_{i+1} \geqslant \lambda_{i+2}$. 对一般的 m 可用类似的讨论继续,现在证明 $m = n-1$ 时的情形.

可不妨设 $i_1 = 1, \cdots, i_{n-1} = n-1$. 记 $\boldsymbol{A}[1, \cdots, n-1 \mid 1, \cdots, n-1] = \boldsymbol{B}$,再记 $\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{n-1}, 1)$,则对 U^n 中任给出的 $i-1$ 个向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}$,有

$$\max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1 \\ \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle^{\perp}}} \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \geqslant \max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1 \\ \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{e}_n \rangle^{\perp}}} \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \max_{\substack{\|\boldsymbol{y}\|=1 \\ \boldsymbol{y} \in \langle \hat{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{v}}_{i-1} \rangle^{\perp}}} \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{B} \boldsymbol{y},$$

这里 U^{n-1} 是所有 $n-1$ 维列向量组成的 $n-1$ 维酉空间,$\hat{\boldsymbol{v}}_j$ 是 n 维列向量($n \times 1$ 矩阵)$\boldsymbol{v}_j$ 中划去最后一行所得的 $n-1$ 维列向量($j = 1, \cdots, i-1$). 所以

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1} \in U^n} \max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1 \\ \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1} \rangle^{\perp}}} \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \\
&\geqslant \min_{\hat{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{v}}_{i-1} \in U^{n-1}} \max_{\substack{\|\boldsymbol{y}\|=1 \\ \boldsymbol{y} \in \langle \hat{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{v}}_{i-1} \rangle^{\perp}}} \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} \\
&= \min_{\hat{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{v}}_{i-1} \in U^n} \max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1 \\ \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{e}_n \rangle^{\perp}}} \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \\
&\geqslant \min_{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i \in U^n} \max_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1 \\ \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i \rangle^{\perp}}} \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

其中第一式是 λ_i,第二式是 μ_i,而最后一式是 λ_{i+1},即有 $\lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_{i+1}$ ($i = 1, \cdots, n-1$). □

5.2 方阵之积的特征值和奇异值

对 n 阶方阵 $\boldsymbol{M}$,用 $\sigma_1(\boldsymbol{M}) \geqslant \sigma_2(\boldsymbol{M}) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n(\boldsymbol{M})$ ($\geqslant 0$) 记它的 n 个奇异值.

按照定义和以前的记号，有 $\sigma_i^2(\boldsymbol{M})=\lambda_i(\boldsymbol{MM}^*)=\lambda_i(\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{M})(i=1,\cdots,n)$.

为讨论方阵之积的性质，首先应指出，两个 n 阶 Hermite 方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之积 $\boldsymbol{AB}$ 不一定是 Hermite 方阵，易知 $\boldsymbol{AB}$ 是 Hermite 方阵当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 若设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{AB})=\{\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_{\sigma(1)}(\boldsymbol{B}),\cdots,\lambda_n(\boldsymbol{A})\lambda_{\sigma(n)}(\boldsymbol{B})\}$，其中 σ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个置换. 若再假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 半正定，即 $\lambda_n(\boldsymbol{A})\geqslant 0,\lambda_n(\boldsymbol{B})\geqslant 0$，则显然有

$$\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{AB})\leqslant\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A})\lambda_i(\boldsymbol{B})\quad(k=1,\cdots,n),$$

且当 $k=n$ 时等号成立. 这种形式的不等式组就是本节的主要研究对象.

先研究一般方阵之积的奇异值.

定理 5.4　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

$$\prod_{i=1}^{k}\sigma_i(\boldsymbol{AB})\leqslant\prod_{i=1}^{k}\sigma_i(\boldsymbol{A})\sigma_i(\boldsymbol{B})\quad(k=1,\cdots,n),$$

且当 $k=n$ 时等号成立.

证　当 $k=1$ 时，

$$\sigma_1^2(\boldsymbol{AB})=\lambda_1(\boldsymbol{ABB}^*\boldsymbol{A}^*)=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABB}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}.$$

注意到对任意 Hermite 方阵 $\boldsymbol{H}$，有 $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Hx}\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{H})\|\boldsymbol{x}\|^2$，所以

$$\begin{aligned}\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABB}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}&\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{BB}^*)\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}\|^2\\&=\lambda_1(\boldsymbol{BB}^*)\lambda_1(\boldsymbol{AA}^*)=\sigma_1^2(\boldsymbol{A})\sigma_1^2(\boldsymbol{B}),\end{aligned}$$

从而 $k=1$ 时的情形得证.

在 $k=1$ 时的情形已获证的基础上，通过复合矩阵（参看第 3 讲 3.2 节）可以很顺利地得到 $k=2,\cdots,n$ 时的结论. 具体推导如下.

首先，对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{M}$，有关系式

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^2(\boldsymbol{M})&=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{MM}^*)\\&=\lambda_1(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{MM}^*))=\lambda_1(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{M}^*))\\&=\lambda_1(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{M})(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{M}))^*)=\sigma_1^2(\boldsymbol{M}),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{M})$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的 k 级复合矩阵. 因此

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^2(\boldsymbol{AB})&=\sigma_1^2(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{AB}))=\sigma_1^2(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{B}))\\&\leqslant\sigma_1^2(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}))\sigma_1^2(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{B}))=\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^2(\boldsymbol{A})\sigma_i^2(\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

而当 $k=n$ 时，

$$\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^2(\boldsymbol{AB})=|\det(\boldsymbol{AB})|^2=|\det\boldsymbol{A}|^2|\det\boldsymbol{B}|^2$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^2(\boldsymbol{A})\sigma_i^2(\boldsymbol{B}). \qquad \square$$

现在再来研究 Hermite 方阵之积的特征值.

定理 5.5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定的 Hermite 方阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值都是非负实数,记为 $\lambda_1(\boldsymbol{AB})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{AB})$,并有

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{AB}) \leqslant \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{A})\lambda_i(\boldsymbol{B}) \quad (k = 1,\cdots,n),$$

且当 $k = n$ 时等号成立.

证 因为 $\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}})\sqrt{\boldsymbol{B}}$,所以

$$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{Spec}(\sqrt{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}}).$$

但易知 $\sqrt{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}}$ 是半正定的 Hermite 方阵,所以 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值都是非负实数,记为 $\lambda_1(\boldsymbol{AB})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{AB})(\geqslant 0)$. 现在不难从定理 5.4 和定理 4.12 推得要证的不等式:

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{AB}) \leqslant \prod_{i=1}^{k} \sigma_i(\boldsymbol{AB}) \leqslant \prod_{i=1}^{k} \sigma_i(\boldsymbol{A})\sigma_i(\boldsymbol{B}) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{A})\lambda_i(\boldsymbol{B}),$$

右端的等式成立是因为对任意 Hermite 方阵 $\boldsymbol{H}$,恒有 $\sigma_i(\boldsymbol{H}) = |\lambda_i(\boldsymbol{H})|$.

当 $k = n$ 时,

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{AB}),$$

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{A})\lambda_i(\boldsymbol{B}) = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}. \qquad \square$$

以上证明定理 5.4 和定理 5.5 的关键在于利用复合矩阵. 由于 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$ 的每个特征值是 $\boldsymbol{A}$ 的某 k 个特征值之积,所以能顺利地将 $\lambda_1(\boldsymbol{A})\cdots\lambda_k(\boldsymbol{A})$ 表示成 $\lambda_1(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A}))$ 而化为简单情形. 这种关于方阵之积的结果和证明方法,可以通过与 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$ 相应的所谓加性复合矩阵 $\Delta_k(\boldsymbol{A})$(第 3 讲 3.5 节)转移到方阵之和的情形,这将在下一节具体讨论.

还有一种推广,它讨论更一般的乘积

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(\boldsymbol{AB}) \quad (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n).$$

这个乘积虽然也是 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{AB})$ 的某个奇异值,但这个奇异值在 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{AB})$ 的全体奇异值的非增排序中的位置不易明确,因此虽然成立如下比定理 5.4 和定理 5.5 更一般的不等式组(定理 5.4′和定理 5.5′),但看来难以用同样的方法得到.

定理 5.4′ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$,则有

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\left\{\prod_{i=1}^{k} \sigma_i(\boldsymbol{A})\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(\boldsymbol{B}), \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(\boldsymbol{A})\prod_{i=1}^{k} \sigma_i(\boldsymbol{B})\right\}. \qquad \square$$

定理 5.5′　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定 Hermite 方阵，$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，则有

$$\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\Big\{\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A})\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{B}),\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{A})\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{B})\Big\}.\qquad\square$$

当 $k=1$ 时，定理 5.4′和定理 5.5′的结论不难用 min-max 原理得出．一般情形的证明从略，它们首先是由 H. Wielandt 在 1955 年证明的．

5.3　方阵之和的特征值和奇异值

对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，除了它的“乘性”复合矩阵 $\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$ 外，还有所谓加性复合矩阵 $\Delta_k(\boldsymbol{A})$．$\Delta_k(\boldsymbol{A})$ 也是 $\binom{n}{k}$ 阶方阵，其主要性质有（见第 3 讲定理 3.6）：

(1) $\Delta_k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\Delta_k(\boldsymbol{A})+\Delta_k(\boldsymbol{B})$；

(2) $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\Rightarrow\mathrm{Spec}\Delta_k(\boldsymbol{A})=\{\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$；

(3) $(\Delta_k(\boldsymbol{A}))^*=\Delta_k(\boldsymbol{A}^*)$．

通过加性复合矩阵可以把关于方阵之积的定理 5.4 和定理 5.5 顺利地转化到方阵之和的情形．

定理 5.6　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶 Hermite 方阵，则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i(\boldsymbol{A})+\lambda_i(\boldsymbol{B}))\quad(k=1,\cdots,n),$$

且当 $k=n$ 时等号成立．

证　当 $k=1$ 时，结论不难直接证明：

$$\begin{aligned}\lambda_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\leqslant\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\\&=\lambda_1(\boldsymbol{A})+\lambda_1(\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

当 $2\leqslant k\leqslant n$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\lambda_1(\Delta_k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}))=\lambda_1(\Delta_k(\boldsymbol{A})+\Delta_k(\boldsymbol{B}))\\&\leqslant\lambda_1(\Delta_k(\boldsymbol{A}))+\lambda_1(\Delta_k(\boldsymbol{B}))=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i(\boldsymbol{A})+\lambda_i(\boldsymbol{B})).\end{aligned}$$

当 $k=n$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B}\\&=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i(\boldsymbol{A})+\lambda_i(\boldsymbol{B})).\end{aligned}\qquad\square$$

定理 5.7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\sum_{i=1}^{k}(\sigma_i(\boldsymbol{A})+\sigma_i(\boldsymbol{B}))\quad(k=1,\cdots,n).$$

证 先建立一个从 n 阶方阵集合到 $2n$ 阶 Hermite 方阵集合的自然映射

$$\boldsymbol{A}\mapsto\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

注意到 $\det(\lambda\boldsymbol{I}_{2n}-\hat{\boldsymbol{A}})=\det(\lambda^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})$，所以，若 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(\geqslant 0)$，即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\sigma_1^2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n^2$，则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant-\sigma_n\geqslant\cdots\geqslant-\sigma_1$. 再因 $\widehat{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{B}}$，故对 $k=1,\cdots,n$，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{k}(\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{B}})\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i(\hat{\boldsymbol{A}})+\lambda_i(\hat{\boldsymbol{B}}))\\&=\sum_{i=1}^{k}(\sigma_i(\boldsymbol{A})+\sigma_i(\boldsymbol{B})).\end{aligned}$$

□

注 (1) 定理 5.7 中当 $k=n$ 时等号不一定成立. 例如，令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&\\&1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的奇异值是 $1,1$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的奇异值是 $0,0$.

(2) 与方阵之积的情形相仿，事实上有比定理 5.6 和定理 5.7 更一般的不等式组：

定理 5.6′ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶 Hermite 方阵，$1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n$，则

$$\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\min\Big\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A})+\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{B}),\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{A})+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{B})\Big\}.\ \square$$

定理 5.7′ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，则

$$\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\min\Big\{\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(\boldsymbol{A})+\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(\boldsymbol{B}),\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(\boldsymbol{A})+\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(\boldsymbol{B})\Big\}.\ \square$$

(3) 与 5.2 节的定理 5.4 和定理 5.5 以及本节的定理 5.6 相应，还有三组反向不等式成立.

例如，与定理 5.6 相应的反向不等式组是

$$\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geqslant\sum_{i=k+1}^{k}(\lambda_i(\boldsymbol{A})+\lambda_i(\boldsymbol{B}))\quad(k=0,1,\cdots,n-1),$$

且当 $k=0$ 时等号成立. 这是因为当 $k=1,\cdots,n-1$ 时，已知有不等式

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i(\boldsymbol{A})+\lambda_i(\boldsymbol{B})),$$

当 $k=0$ 时，有等式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(\boldsymbol{A})+\lambda_i(\boldsymbol{B})).$$

将 $k=0$ 时的等式减去 $k=1,\cdots,n-1$ 时的不等式即得所说的反向不等式. 与定理 5.4 和定理 5.5 相应的反向不等式组可以完全同样得到：

$$\prod_{i=k+1}^{n}\sigma_i(\boldsymbol{AB})\geqslant\prod_{i=k+1}^{n}\sigma_i(\boldsymbol{A})\sigma_i(\boldsymbol{B}),$$

$$\prod_{i=k+1}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{AB})\geqslant\prod_{i=k+1}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{A})\lambda_i(\boldsymbol{B}),$$

其中 $k=0,1,\cdots,n-1$，且当 $k=0$ 时等号成立. 前式中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是任意 n 阶方阵，后式中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定 Hermite 方阵.

5.4　Schur 和 Hadamard 的不等式

在叙述和证明这两类不等式之前，先给出一个概念，它在这里仅仅是为了表述简洁，但其影响已相当深广[①]，我们在第 6 讲还要再次用到它.

定义 5.1　设 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)$，$\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_n)$ 是实向量. 记把 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的 n 个分量重新排成单调不增后的向量分别为 $\boldsymbol{u}'=(u_1',\cdots,u_n')$ 和 $\boldsymbol{v}'=(v_1',\cdots,v_n')$，即有 $u_1'\geqslant\cdots\geqslant u_n'$，$v_1'\geqslant\cdots\geqslant v_n'$. 如果这时有

$$u_1'+\cdots+u_i'\leqslant v_1'+\cdots+v_i'\quad(i=1,\cdots,n-1),$$

$$u_1'+\cdots+u_n'=v_1'+\cdots+v_n',$$

则称 $\boldsymbol{u}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 所优超（$\boldsymbol{u}$ is majorized by $\boldsymbol{v}$），记为 $u\prec v$.

例 5.2　$(3,4)\prec(2,5)$，

$$(5,5,5)\prec(2,5,8)\prec(15,0,0).$$

例 5.3　5.3 节定理 5.6 的结论可以表述为

$$(\lambda_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\cdots,\lambda_n(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}))\prec(\lambda_1(\boldsymbol{A})+\lambda_1(\boldsymbol{B}),\cdots,\lambda_n(\boldsymbol{A})+\lambda_n(\boldsymbol{B})).$$

定理 5.8（Schur）　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶 Hermite 方阵，则

$$(a_{11},\cdots,a_{nn})\prec(\lambda_1(\boldsymbol{A}),\cdots,\lambda_n(\boldsymbol{A})).$$

证　至多先对 $\boldsymbol{A}$ 的行和列作同样的置换，可不妨设 $a_{11}\geqslant\cdots\geqslant a_{nn}$. 再记 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$. 这时定理的结论等价于

① 详见专著《Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications》（A. W. Marshall & I. Olkin 著，Acad. Press，1979）.

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad (k = 1, \cdots, n),$$

且当 $k = n$ 时等号成立.

记 $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}[1, \cdots, k \mid 1, \cdots, k]$, $\boldsymbol{A}_k$ 的特征值为 $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_k$. 由交错分布定理(定理 5.3),可知

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1, \quad \cdots, \quad \lambda_k \geqslant \mu_k.$$

从而

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \cdots \mu_k = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}_k = a_{11} + \cdots + a_{kk}$$
$$(k = 1, \cdots, n-1).$$

另外,易知 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. □

这个定理可以推广为:

定理 5.8′ 设 n 阶 Hermite 方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是子方阵,则

$$(\lambda_1(\boldsymbol{B}), \cdots, \lambda_n(\boldsymbol{B})) \prec (\lambda_1(\boldsymbol{A}), \cdots, \lambda_n(\boldsymbol{A})).$$

证 因为 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 是 Hermite 方阵,故有酉方阵 $\boldsymbol{U}_i$,使 $\boldsymbol{U}_i \boldsymbol{A}_{ii} \boldsymbol{U}_i^* = \boldsymbol{D}_i$ 是对角阵($i = 1, 2$). 记 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2$,则

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}^* & \boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{D}_1 \oplus \boldsymbol{D}_2$ 的主对角线元素是 $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_n$,则由定理 5.8,可得

$$\begin{aligned} (\lambda_1(\boldsymbol{B}), \cdots, \lambda_n(\boldsymbol{B})) &= (d_1, \cdots, d_n) \\ &\prec (\lambda_1(\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^*), \cdots, \lambda_n(\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^*)) \\ &= (\lambda_1(\boldsymbol{A}), \cdots, \lambda_n(\boldsymbol{A})). \end{aligned}$$

□

如果说定理 5.8 和定理 5.8′建立的是加法形式的不等式,那么对半正定 Hermite 方阵,有如下的乘法形式的 Hadamard 不等式.

定理 5.9(Hadamard) 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶半正定 Hermite 方阵,则

$$\det\boldsymbol{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

定理 5.9′ 假设同上,则有

$$\det\boldsymbol{A} \leqslant \det\boldsymbol{A}[1, \cdots, k \mid 1, \cdots, k] \det(1, \cdots, k \mid 1, \cdots, k) \quad (k = 1, \cdots, n).$$

证 定理 5.9 显然是定理 5.9′的推论. 现证定理 5.9′.

先假设 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，则 $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A} = [1,\cdots,k\,|\,1,\cdots,k]$ 也是正定的（这是正定 Hermite 方阵的基本性质，也可以从交错分布定理直接得出），从而是可逆的.

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}^* & \boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_k & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}_k^{-1} & \boldsymbol{I}_{n-k} \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & -\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{X} \end{pmatrix}.$$

因而 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{X}$ 是正定的. 注意到 $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{X}$ 是半正定的，由定理 5.2 的推论可得 $\det\boldsymbol{B} \geqslant \det(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{X})$，从而

$$\det\boldsymbol{A} = \det\boldsymbol{A}_k \det(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{X}) \leqslant \det\boldsymbol{A}_k \det\boldsymbol{B}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 为半正定的，则对任意 $\varepsilon > 0$，$\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I}$ 是正定的. 在对 $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I}$ 的已证明成立的不等式中令 $\varepsilon \to 0$，即得定理的结论. □

注　从不等式的角度来看，定理 5.9 及定理 5.9′中的不等式是定理 5.8 及定理 5.8′中优超关系的推论. 事实上，有如下一般的结论：

定理 5.10（Pólya）　设 $\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,\cdots,y_n)$ 是 n 维实向量，$\phi(t)$ 是下凸$\left(\text{即 } \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(a)+\varphi(b))\right)$的连续函数，则

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i).$$ □

若取 $\phi(t) = -\ln t$，且 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 都是正数，则

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad -\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leqslant -\sum_{i=1}^{n} \ln y_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} x_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

5.5　Hadamard 积

定义 5.2　两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 的 Hadamard 积是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = (a_{ij}b_{ij})$.

易知，若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 Hermite 方阵，则 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ 也是. 进一步，有：

定理 5.11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定(半正定)Hermite 方阵,则 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 也是 n 阶正定(半正定)Hermite 方阵,而且

$$\lambda_n(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B}) \leqslant \lambda_1(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}) \leqslant \lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_1(\boldsymbol{B}).$$

证 因为 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 是 Hermite 方阵,再注意到它是 n^2 阶方阵 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 的一个 n 阶主子方阵,所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{ 正定(半正定)} &\Rightarrow \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\text{ 正定(半正定)}\\ &\Rightarrow \boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}\text{ 正定(半正定)}.\end{aligned}$$

再用一下交错分布定理,即得

$$\lambda_1(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) \geqslant \lambda_1(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}) \geqslant \lambda_{n^2-n+1}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) \geqslant \lambda_{n^2}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}).$$

但左端正是 $\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_1(\boldsymbol{B})$,右端正是 $\lambda_n(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})$. □

推论 5.1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶正定(半正定)Hermite 方阵,则 $\boldsymbol{A}\circ\bar{\boldsymbol{A}}=(|a_{ij}|^2)$ 也是,而且 $\lambda_1(\boldsymbol{A}\circ\bar{\boldsymbol{A}})\leqslant(\lambda_1(\boldsymbol{A}))^2$.

证 由 $\boldsymbol{A}$ 正定(半正定)$\Rightarrow\bar{\boldsymbol{A}}$ 正定(半正定)即得. □

下面的定理是定理 5.9(Hadamard 不等式)的推广.

定理 5.12 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定 Hermite 方阵,则有

$$\det(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}) \geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n} b_{ii}\Big)\det\boldsymbol{A}.$$

证 可不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 正定(否则,代之以 $\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{I}$,$\varepsilon>0$,再令 $\varepsilon\to 0$). 记 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 现对 n 进行归纳证明:

当 $n=1$ 时,结论显然成立. 记 $\boldsymbol{C}_{n-1}=\boldsymbol{C}(n\mid n)$,$\boldsymbol{A}_{n-1}=\boldsymbol{A}(n\mid n)$,$\boldsymbol{B}_{n-1}=\boldsymbol{A}(n\mid n)$,则

$$\boldsymbol{C}_{n-1}=\boldsymbol{A}_{n-1}\circ\boldsymbol{B}_{n-1}.$$

故由归纳假设,可知

$$\det\boldsymbol{C}_{n-1} \geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n-1} b_{ii}\Big)\det\boldsymbol{A}_{n-1}.$$

现令

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \frac{\det\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}_{n-1}}\boldsymbol{E}_{nn},$$

这里 $\boldsymbol{E}_{nn}$ 是 n 阶方阵,它在 (n,n) 处是 1,其余位置处均为零,则

$$\det\tilde{\boldsymbol{A}} = \det\boldsymbol{A} - \frac{\det\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}_{n-1}}\det\boldsymbol{A}_{n-1} = 0,$$

从而不难证明 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是半正定的,所以 $\tilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}$ 也是半正定的,且

$$\det(\tilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}) - b_{nn}\frac{\det\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}_{n-1}}\det\boldsymbol{C}_{n-1} \geqslant 0.$$

所以

$$\det(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\geqslant b_{nn}\frac{\det\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}_{n-1}}\det\boldsymbol{C}_{n-1}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}b_{ii}\right)\det\boldsymbol{A}.$$ □

推论 5.2　取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n$，则 $\det(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}\geqslant\det\boldsymbol{A}$，这正是 Hadamard 不等式. □

第 6 讲　非负元方阵和布尔方阵

6.1　基 本 定 理

元素都是非负实数的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为非负元素矩阵，简称非负矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$. 元素都是正数的矩阵称为正矩阵，记作 $\boldsymbol{A}>0$. 本讲前八节主要围绕特征值的性质来讨论非负方阵的基本特征，最后一节则讨论与非负方阵密切关联的布尔方阵. 随着非负方阵的应用日益扩展，它的基本特性已被认为是矩阵理论的经典内容之一.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为可约的(reducible)，如果有置换方阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是 l 阶方阵，$1\leqslant l\leqslant n-1$，右上角是 $l\times(n-l)$ 零矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 置换相似于上式右边的分块上三角形. 不是可约的方阵称为不可约的(irreducible). 根据这个定义，1 阶方阵一定不可约，正方阵也一定不可约.

Perron 在 1907 年最早得到了关于正方阵的一系列结论，随后，Frobenius 在 1912 年将这些结论推广到不可约非负方阵的情形，他们的工作奠定了非负方阵理论的基础，这些经典结果可以归纳成下述两个深刻的定理. 和 Jordan 标准形定理相仿，经常用到的是定理的结论，所以我们在这开头的一节里先表述这两个基本定理，并证明一些推论，后面再给出基本定理的证明和发展.

定理 6.1(Perron-Frobenius)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$ 阶不可约的非负方阵，记 $\rho(\boldsymbol{A})=\max\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$，这里 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的谱 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}$，则：

(1) $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值，且 $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单根(即其代数重数是 1)；

(2) $\rho(\boldsymbol{A})$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的 n^2 个元的实值函数是严格递增的，即若有 n 阶非负方阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\geqslant 0$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{A}$，则 $\rho(\boldsymbol{B})>\rho(\boldsymbol{A})$；

(3) $\boldsymbol{A}$ 有属于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的正特征向量 z，即有列向量 $z>0$，$\boldsymbol{A}z=\rho(\boldsymbol{A})z$，而且 $\boldsymbol{A}$

的任一非负特征向量一定是 z 的正数倍.[①] □

推论 6.1　记定理 6.1 中的不可约方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素之和 $r_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$，$r_{\min}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}r_i$，$r_{\max}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}r_i$，则 $r_{\min}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant r_{\max}$，且当 $r_{\min}=r_{\max}=r$ 时，$\rho(\boldsymbol{A})=r$；当 $r_{\min}<r_{\max}$ 时，$r_{\min}<\rho(\boldsymbol{A})<r_{\max}$.

证　若 $r_{\min}=r_{\max}=r$，则 $\boldsymbol{Ae}=r\boldsymbol{e}$，这里 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，从而由定理 6.1(3)，可知 $r=\rho(\boldsymbol{A})$.

若 $r_{\min}<r_{\max}$，则对 $\boldsymbol{A}$ 的那些使 $r_i>r_{\min}$ 的行，可适当减少该行中某些正元素的值(但仍保持那些元素为正)，使这个行的元素之和从 r_i 降至 $r_{\min}$. 记 $\boldsymbol{A}$ 经如此削减后所得到的不可约非负方阵为 $\boldsymbol{A}_1$. 由定理 6.1(2)以及前面的证明，即得

$$\rho(\boldsymbol{A})>\rho(\boldsymbol{A}_1)=r_{\min}.$$

同样，可通过适当增加 $\boldsymbol{A}$ 中某些元素的值而得到不可约非负方阵 $\boldsymbol{A}_2$，使 $\boldsymbol{A}_2$ 的每行元素之和都是 $r_{\max}$，从而

$$\rho(\boldsymbol{A})<\rho(\boldsymbol{A}_2)=r_{\max}.$$ □

定理 6.2(Frobenius)　设 $n(>1)$阶不可约的非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值中有 $k(\geqslant 1)$个特征值的模等于 $\rho(\boldsymbol{A})$，则：

(1) 这 k 个特征值一定是 $\rho(\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi l}{k}}$ $(l=0,1,\cdots,k-1;\mathrm{i}=\sqrt{-1})$，而且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{k}}\boldsymbol{A}$ 相似，从而点集 Spec$\boldsymbol{A}$ 在复平面上围绕原点旋转 $2\pi/k$ 角的变换下不变；

(2) 若 $k>1$，则 $\boldsymbol{A}$ 置换相似于分块阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_{12} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \boldsymbol{A}_{k-1,k} \\ \boldsymbol{A}_{k1} & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中主对角块都是非空零方阵. □

推论 6.2　设 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素不全为零，则 $\boldsymbol{A}$ 有且仅有一个模为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值，即 $\rho(\boldsymbol{A})$ 自身.

证　由于主对角线上的元素在置换相似下仍在主对角线上，故由定理 6.2(2)易知必有 $k=1$. □

推论 6.3　记 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $\chi_A(\lambda)$，$\rho(\boldsymbol{A})=r$，则

$$\chi_A(\lambda)=\lambda^m(\lambda^k-r^k)(\lambda^k-r_2^k)\cdots(\lambda^k-r_t^k),$$

① 文献中也称 $\rho(\boldsymbol{A})$ 和属于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的正特征向量分别为 Perron 根和 Perron 向量.

其中 $0<|r_j|<r(j=2,\cdots,t)$.

若记 $\chi_A(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n_1}+\cdots+c_s\lambda^{n_s}$, $c_1,\cdots,c_s\neq 0$, $n>n_1>\cdots>n_s\geqslant 0$, 则 $k=\gcd\{n-n_1,n-n_2,\cdots,n-n_s\}=\gcd\{n-n_1,n_1-n_2,\cdots,n_{s-1}-n_s\}$, 这里用 $\gcd\{a_1,\cdots,a_s\}$ 表示整数 $a_1,\cdots,a_s$ 的最大公因数.

证 设 $\alpha\neq 0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则由定理 6.2(1)可知 $re^{i\frac{2\pi l}{k}}(l=0,1,\cdots,k-1)$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 所以 $(\lambda^k-\alpha^k)|\chi_A(\lambda)$. 再因模等于 r 的 k 个特征值 $re^{\lambda\frac{2\pi l}{k}}$ 都是 $\chi_A(\lambda)$ 的单根, 所以各 $re^{i\frac{2\pi l}{k}}$ 也都是单根, 故得 $\chi_A(\lambda)$ 的上述因子分解式.

又由 $\boldsymbol{A}$ 与 $e^{2\pi/k}\boldsymbol{A}$ 相似, 可知

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda)&=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det(\lambda\boldsymbol{I}-e^{i\frac{2\pi}{k}}\boldsymbol{A})\\&=e^{i\frac{2n\pi}{k}}\det(e^{-i\frac{2\pi}{k}}\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&=e^{i\frac{2n\pi}{k}}\chi_A(e^{-i\frac{2\pi}{k}}\lambda),\end{aligned}$$

从而 $c_j=e^{i(2(n-n_j)\pi/k)}c_j$, 即 $k|(n-n_j)(j=1,\cdots,s)$.

另外, $k'|(n-n_j)(j=1,\cdots,s)\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $e^{i(2\pi/k')}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式相等 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 的 k 个模为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值在 $2\pi/k'$ 旋转下不变 $\Rightarrow k'|k$. 所以

$$\begin{aligned}k&=\gcd\{n-n_1,n-n_2,\cdots,n-n_s\}\\&=\gcd\{n-n_1,n_1-n_2,\cdots,n_{s-1}-n_s\}.\end{aligned}$$

□

6.2 不可约性探究

首先值得注意的一个基本事实是: 一个方阵的可约或不可约是完全由这个方阵的全体非零元的位置分布所决定的, 与每个非零元的具体数值无关. 可以说, 可约性是方阵的一种所谓"组合性质". 在本节, 我们要用组合学的表示方法——有向图(directed graph)的形式来刻画方阵的非零元的分布模式, 并用以证明可约或不可约方阵的一些性质.

先再明确一下置换方阵及其含义. n 阶方阵 $\boldsymbol{P}$ 称为置换方阵, 如果 $\boldsymbol{P}$ 是由单位方阵 $\boldsymbol{I}_n$ 经过行的置换后所得的. 形式地说, 设 σ 是集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个置换, 则记

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_\sigma=(p_{ij})$$

是由 σ 所确定的置换方阵, 其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \sigma(i)=j,\\0, & \sigma(i)\neq j,\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{P}_\sigma$ 的第 i 行是 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 $\sigma(i)$ 行. 因此, 对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}$ 的第 i 行正是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\sigma(j)$ 行, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列正是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\sigma(j)$ 列. 所以 $\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_\sigma^{-1}$, 而方阵 $\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}=$

$\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{-1}$ 称为与 $\boldsymbol{A}$ 置换相似. 实际上，$\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 的行和列都作同一置换 σ 后所得的. 由于矩阵乘法的结合律，$\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}$ 可以看成是先对 $\boldsymbol{A}$ 的行作置换，再对 $\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}$ 的列作同样的置换所得；也可以看成是先对 $\boldsymbol{A}$ 的列作置换，再对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}$ 的行作同样的置换所得.

因此 $\boldsymbol{A}$ 的可约性可以等价定义为：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可约 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 有零子方阵 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_l\,|\,i_1,\cdots,i_l)=\boldsymbol{0}$，其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant n$，$1\leqslant l\leqslant n-1$. 特别地，$\boldsymbol{A}$ 可约 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可约；$\boldsymbol{A}$ 是否可约与 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上元的任何改动无关.

例 6.1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{A}$ 不可约，因为 $\boldsymbol{A}$ 不具有 1×2 或 2×1 的零子矩阵，所以

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

也不可约. □

D 中两个不同的顶点 v_i 和 v_k 称为是互通的，如果有从 v_j 到 v_k 的路，又有从 v_k 到 v_j 的路. 若 D 中任意两个不同的顶点都互通，则称有向图 D 为强连通的 (strongly connected). 根据这个定义，只有一个顶点的图必是强连通的. 例 6.3 中的 $D(\boldsymbol{A})$，$D(\boldsymbol{B})$都是强连通图. 下例中的图 $D(\boldsymbol{C})$则不是强连通的：

例 6.2　设

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0&*&*&*&0*&0&0&0&0&0\\0&*&0&0&*&0\\0&0&0&0&*&0\\0&0&0&*&0&0\\0&0&*&0&*&0\end{pmatrix}\quad(*\text{ 表示非零数}),$$

则 $D(\boldsymbol{C})$如图 6.1 所示.

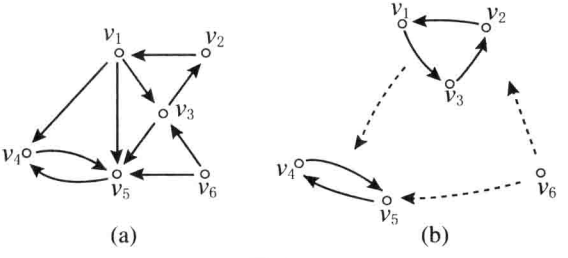


图 6.1

显然，一个回路上的任意两点必互通. 另外，图 D 中顶点间的互通关系是顶点集上的一种等价关系. 所以若将 D 的顶点集按互通关系分成等价类，则同一回路上的所有顶点一定属于同一等价类. 例 6.2 的有向图 $D(\boldsymbol{C})$ 的顶点集可以分成三个等价类：$\{v_1, v_2, v_3\}$，$\{v_4, v_5\}$，$\{v_6\}$，见图 6.1(b).

现在先用上述这些图论的术语来刻画方阵的可约性.

定理 6.3 $n(>1)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可约$\Leftrightarrow D(\boldsymbol{A})$ 不强连通.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 可约，则存在 $1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant n$，$1\leqslant l\leqslant n-1$，使 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_l\,|\,i_1,\cdots,i_l)=0$. 转换成 $D(\boldsymbol{A})$ 的语言，就是可将 $D(\boldsymbol{A})$ 的顶点集 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 分拆成两个(非空)子集 $V'=\{v_{i_1},\cdots,v_{i_l}\}$ 和 $V''=V\backslash V'$，而且 $D(\boldsymbol{A})$ 中没有起点属于 V'、终点属于 V'' 的弧. 因此，V' 中任一顶点都不能通过 V'' 中的顶点，故 $D(\boldsymbol{A})$ 不强连通.

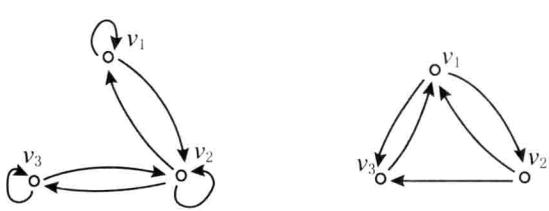
充分性. 设 $D(\boldsymbol{A})$ 不强连通，则其顶点集 C 按互通关系可分拆成 $k>1$ 个(非空)等价类 $U_1,\cdots,U_k$. 因此这 k 类中至少有一类，不妨设为 U_1，使 $D(\boldsymbol{A})$ 中没有起点属于 U_1 而终点不属于 U_1 的弧(简称为没有弧离开 U_1. 因为若每个 $U_i(i=1,\cdots,k)$ 都有弧离开的话，则不难得知 $D(\boldsymbol{A})$ 中将有一个回路，它的顶点不属于同一类). 记 $U_1=\{v_{i_1},\cdots,v_{i_l}\}$，其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant n$，$1\leqslant l\leqslant n-1$，则 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_l\,|\,i_1,\cdots,i_l)=0$. □

现在引入关键性的概念，一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 可以对应一个(标号)有向图((labelled) directed graph)$D(\boldsymbol{A})$：$D(\boldsymbol{A})$ 有 n 个顶点相连当且仅当 $a_{ij}\neq 0$；这时分别称 v_i 和 v_j 为弧 $\overset{\frown}{v_iv_j}$ 的起点和终点. 起点和终点重合的弧称为环(loop). 有向图可以在平面上形象地画出来.

例 6.3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}. \qquad \square$$

$D(\boldsymbol{A})$ 和 $D(\boldsymbol{B})$ 如图 6.2 所示.



(a) $D(\boldsymbol{A})$　　(b) $D(\boldsymbol{B})$

图 6.2

设有向图 D 的顶点集 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$，再定义一些名词.

从 v_j 到 v_k 的路就是顺序相连的一个顶点序列 $v_{i_0}=v_j, v_{i_1}, \cdots, v_{i_l}=v_k$，其中 $\overrightarrow{v_{i_t}v_{i_{t+1}}}$ $(t=0,1,\cdots,l-1)$ 是 D 中的弧. v_j 和 v_k 分别称为这条路的起点和终点，这条路可记为 $(v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_l})$，称 l 为这条路的长度. 如果它所经过的顶点 $v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_l}$ 中没有两点相同，则称这条路是简单的. 起点和终点相同的路称为回路，除起点和终点相同外，所经过的顶点中再没有两点相同的回路称为简单的. 例 6.3 中的 $D(\boldsymbol{B})$ 有简单路 (v_2, v_3, v_1)，简单回路 (v_1, v_2, v_3, v_1)，(v_1, v_2, v_1)，(v_3, v_1, v_3)，有回路 $(v_1, v_2, v_1, v_3, v_1)$ 等等.

方阵与有向图之间有如下最基本的联系：

命题 6.1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n(>1)$ 阶非负方阵，则在 $\boldsymbol{A}^l$ 中 (p,q) 位置处的元素 $(\boldsymbol{A}^l)_{pq}>0$ 当且仅当 $D(\boldsymbol{A})$ 中有从 v_p 到 v_q 的长为 l 的路.

证　$D(\boldsymbol{A})$ 中有路 $(v_p=v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_{l-1}}, v_{i_l}=v_q) \Leftrightarrow a_{pi_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{l-1}q}=(\boldsymbol{A}^l)_{pq}>0$. □

由此易得不可约非负方阵的下述刻画：

定理 6.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$ 阶非负方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 不可约当且仅当 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})^{n-1}>0$.

证　$\boldsymbol{A}$ 不可约 $\Leftrightarrow D(\boldsymbol{A})$ 强连通 $\Leftrightarrow$ 对任给的 $p\neq q$，$D(\boldsymbol{A})$ 中有从 v_p 到 v_q 的路，并可不妨设路长 $l\leqslant n-1 \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}^l)_{pq}>0 \Leftrightarrow \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}>0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}>0$. □

定理 6.4 可以推广为下述更完整的形式：

定理 6.4′　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$ 阶非负方阵，则下列各性质是互相等价的：

(1) $\boldsymbol{A}$ 不可约；

(2) 存在某个(复系数)多项式 $f(x)$，使 $f(\boldsymbol{A})>0$；

(3) $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1}>0$，这里 m 是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(x)$ 的次数；

(4) $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{m-1}>0$；

(5) $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}>0$.

证　只需证明(2)⇒(3). 作长除法 $f(x)=q(x)m_{\boldsymbol{A}}(x)+r(x)$，$\deg r(x)<m$. 因此 $f(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})>0$. 令

$$r(x)=b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m, \quad b=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|b_i|>0,$$

则易得 $b(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})\geqslant r(\boldsymbol{A})>0$，从而得(3). □

现在通过有向图 $D(\boldsymbol{A})$ 来分析一般方阵 $\boldsymbol{A}$ 的组合结构. 先将 $D=D(\boldsymbol{A})$ 的顶点集按互通关系分拆成等价类 $U_1, \cdots, U_k$ $(k\geqslant 1)$.

(1) D 在顶点集的每个子集 U_i 上诱导出一个子图 $\langle U_i\rangle$ 如下：$\langle U_i\rangle$ 的顶点集是 U_i、$\langle U_i\rangle$ 的弧的集合，就是 D 中所有那些起点和终点都属于 U_i 的弧. 显然，$\langle U_i\rangle$ 是强连通的，它称为 D 的一个强连通分支. 在例 6.2 中，$D(\boldsymbol{C})$ 有三个强连通

分支$\langle\{v_1,v_2,v_3\}\rangle$,$\langle\{v_4,v_5\}\rangle$和$\langle\{v_6\}\rangle$.

(2) 对两个等价类 U_i 和 $U_j(i\neq j)$,不可能既有起点属于 U_i 而终点属于 U_j 的弧,又有起点属于 U_j 而终点属于 U_i 的弧.因此,如果把每个 U_i 缩成一点 u_i,则从 D 可得另一个有向图 D^*,D^* 的顶点集是 $\{u_1,\cdots,u_k\}$,D^* 中有从 u_i 到 u_j 的弧当且仅当 D 中至少有一条起点属于 U_i 而终点属于 U_j 的弧.这个有 k 个顶点的有向图 D^* 反映了 D 的 k 个强连通分支间的关联情况.

(3) D^* 一定没有回路,从而 D^* 中一定有某个顶点 u_j,使得 D^* 中没有以 u_j 为起点的弧,称这种顶点 u_j 为 D^* 的末端点.例如,若 D 为例 6.2 中的 $D(\boldsymbol{C})$,则 D^* 有三个顶点 $u_1=\{v_1,v_2,v_3\}$,$u_2=\{v_4,v_5\}$,$u_3=\{v_6\}$,其中 u_2 是末端点.

(4) 设 D^* 有 g 个末端点 $u_1,\cdots,u_g$.若 $g<k$,则当在 D^* 中去掉这 g 个顶点连同以这些顶点之一为终点的所有弧后,得到一个顶点集为 $\{u_{g+1},\cdots,u_k\}$ 的有向图,记为 $D^*-\{u_1,\cdots,u_g\}$.易见这个有向图仍没有回路,因此它也有一些末端点,设其末端点为 $u_{g+1},\cdots,u_{g+h}$.再按同法讨论图 $D^*-\{u_1,\cdots,u_g\}$ 及其 h 个末端点 $u_{g+1},\cdots,u_{g+h}$,得到 $D^*-\{u_1,\cdots,u_g\}-\{u_{g+1},\cdots,u_{g+h}\}$.这样继续下去,最后可以得到这样的结论:可将 D^* 的所有顶点适当重新标号成为 $u_1,\cdots,u_g,u_{g+1},\cdots,u_k$,其中 $u_1,\cdots,u_g$ 是 D^* 的末端点,而对每个 $q(g<q\leqslant k)$,一定有 $p<q$,使 D^* 中有弧 $\overset{\frown}{u_qu_p}$,但一定没有弧 $\overset{\frown}{u_qu_r}(q<r)$.

(5) 回到方阵 $\boldsymbol{A}$,若记 $U_i=\{u_j\mid j\in K_i\}$,则 K_i 是 $\{1,\cdots,n\}$ 的非空真子集.若将 K_i 中的数按递增顺序排列,但仍记为 K_i.则由(1)~(4)可知:$\boldsymbol{A}[K_i\mid K_i]$不可约$(i=1,\cdots,k)$;$\boldsymbol{A}[K_i\mid K_i)=0(i=1,\cdots,g)$;对 $g<q<r\leqslant k$,$\boldsymbol{A}[K_q\mid K_r]=0$,而 $\boldsymbol{A}[K_q\mid K_1],\cdots,\boldsymbol{A}[K_q\mid K_{q-1}]$不全为零矩阵.

(6) 最后指出,对 $\{1,\cdots,n\}$ 上的一个置换 σ,$\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}$ 所对应的有向图 $D(\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}})$不过是对 $D(\boldsymbol{A})$的顶点重新标号,即将 $D(\boldsymbol{A})$的顶点 $v_{\sigma(i)}$ 改标为 v_i $(i=1,\cdots,n)$所得.反过来也是如此:对 $D(\boldsymbol{A})$的顶点重新标号所得的正是某个与 $\boldsymbol{A}$ 置换相似的方阵所对应的有向图.

归纳起来,我们得到了任意 n 阶方阵在置换相似下的如下"标准形":

定理 6.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 必置换相似于如下的分块下三角形:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}
\boldsymbol{A}_1 & & \boldsymbol{0} & & & \\
& \ddots & & & \boldsymbol{0} & \\
\boldsymbol{0} & & \boldsymbol{A}_g & & & \\
\hdashline
\boldsymbol{A}_{g+1,1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{g+1,g} & \boldsymbol{A}_{g+1} & & \boldsymbol{0} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\boldsymbol{A}_{p1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pg} & \boldsymbol{A}_{p,g+1} & \cdots & \boldsymbol{A}_p
\end{array}\right), \tag{6.1}$$

其中主对角块 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_g,\boldsymbol{A}_{g+1},\cdots,\boldsymbol{A}_p$ 都是不可约方阵,而且对 $g<q\leqslant p$,

$\boldsymbol{A}_{q1},\cdots,\boldsymbol{A}_{q,q-1}$不全是零矩阵. 式(6.1)称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个置换相似标准形.

若记 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}[K_i\mid K_i](i=1,\cdots,k)$,即子块 $\boldsymbol{A}_i$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的标号属于 K_i 的行、列所组成,则 $K_1\cup\cdots\cup K_g\cup K_{g+1}\cup\cdots\cup K_k$ 作为集$\{1,\cdots,n\}$的(无序)分拆是由 $\boldsymbol{A}$ 本身唯一确定的. 特别地,数 p 和 g 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的. □

例 6.4　例 6.2 中的 $\boldsymbol{C}$ 置换相似于

$$\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{cc:ccc:c}0&*&&\boldsymbol{0}&&\boldsymbol{0}*&0&&&&\\\hdashline *&*&0&0&*&\\0&0&*&0&0&\boldsymbol{0}\\0&*&0&*&0&\\\hdashline 0&*&0&0&*&0\end{array}\right).$$

其中

$$K_1=\{4,5\},\quad K_2=\{1,2,3\},\quad K_3=\{6\},$$

$$p=3,\quad g=1,\quad \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&1&2&3&6\end{pmatrix}.$$ □

一般说来,对角块 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p$ 的次序及每个对角块 $\boldsymbol{A}_i$ 本身并非都唯一确定的.

6.3　基本定理的证明

本节都假定 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n(>1)$阶不可约非负方阵. 为了证明基本定理 6.1 和定理 6.2,我们先设法通过 $\boldsymbol{A}$ 来定出 $\rho(\boldsymbol{A})$. 当 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都等于 r 时这很容易:$\rho(\boldsymbol{A})=r$(推论 6.1). 对一般情形,我们先从定理 6.1 得出一个更强的推论:

推论 6.1′　在定理 6.1 的假设下,对任一正(列)向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i}{x_i}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i}{x_i},$$

这里记 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$. 在上述不等式中,任一等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$.

证　记 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$,则 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(a_{ij}x_j/x_i)$的第 i 行元素之和正是 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i/x_i$. 由于 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似,且同为不可约非负方阵,故由推论 6.1,可得

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i}{x_i}\leqslant\rho(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i}{x_i},$$

而且其中任一等式成立当且仅当 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i/x_i=r\ (i=1,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{x}$,$r=\rho(\boldsymbol{A})$. □

迄今我们所做的只是从定理 6.1 得出两个推论，但推论 6.1′表明，定理 6.1 中的 $\rho(\boldsymbol{A})$一定等于$\max\limits_{\boldsymbol{x}>0}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}$. 这是通过 $\boldsymbol{A}$ 来定出$\rho(\boldsymbol{A})$的重要线索，现在即循此证明定理 6.1(1).

首先注意到集合$\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}>0\}$是 n 维欧几里得空间 E^n 中的开集，其上的函数不一定有最大值. 因此通过作下述变通来定出 $\rho(\boldsymbol{A})$：

对向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}>0$，令 $r_{\boldsymbol{x}}=\min\limits_{x_i>0}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}$（即 $r_{\boldsymbol{x}}$ 是使$\boldsymbol{Ax}\geqslant\sigma\boldsymbol{x}$ 成立的最大数σ），$r=\sup\limits_{\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}\neq 0}r_{\boldsymbol{x}}$. 注意到对任意 $\alpha>0$，$r_{\boldsymbol{x}}=r_{\alpha\boldsymbol{x}}$，所以 $r=\sup\limits_{\substack{\|\boldsymbol{x}\|=1\\ \boldsymbol{x}>0}}r_{\boldsymbol{x}}$. 这时区域已是 E^n 中的有界闭集$S_n^+=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|=1,\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$，但函数 $r_{\boldsymbol{x}}$ 不一定在S_n^+ 上连续. 再令 $T_n=\{(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in S_n^+\}$，则 T_n 也是E^n 中的有界闭集，且由定理 6.4，可知 $\boldsymbol{y}\in T_n\Rightarrow\boldsymbol{y}>0$，此外，$\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ax}\geqslant\sigma\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{x}\geqslant\sigma(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{x}$. 所以 $r_{(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{x}}\geqslant r_{\boldsymbol{x}}$，$\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in S_n^+}r_{\boldsymbol{x}}=\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in T_n}r_{\boldsymbol{y}}=\max\limits_{\boldsymbol{y}\in T_n}r_{\boldsymbol{y}}$. 这就保证了一定存在正向量 $\boldsymbol{z}$，使

$$r_{\boldsymbol{z}}=\max_{\boldsymbol{y}\in T_n}r_{\boldsymbol{y}}=\sup_{\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}r_{\boldsymbol{x}}=r.$$

我们再证明此处的 r 和$\boldsymbol{z}$ 正是定理 6.1 所要求的 $\rho(\boldsymbol{A})$和 $\boldsymbol{z}$. 为此，只要证明下述引理：

引理 6.1 设 $\boldsymbol{z}\geqslant 0,\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$，且

$$r_{\boldsymbol{z}}=\sup_{\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}r_{\boldsymbol{x}}=r,$$

则 $\boldsymbol{z}>0,\boldsymbol{Az}=r\boldsymbol{z},r=\rho(\boldsymbol{A})$.

证 记 $\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则

$$r\geqslant r_{\boldsymbol{e}}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}>0.$$

再由 $r=r_{\boldsymbol{x}}$的定义，可知 $\boldsymbol{Az}\geqslant r\boldsymbol{z}$. 若 $\boldsymbol{Az}\neq r\boldsymbol{z}$，令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Az}-r\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{u}\geqslant 0$，从而$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{u}>0$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{z}-r(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{z}>0$. 若记$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{n-1})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{Ay}>r_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}\Rightarrow r_{\boldsymbol{y}}>r$，这与 r 的定义矛盾. 所以 $\boldsymbol{Az}=r\boldsymbol{z}$，而且$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}\boldsymbol{z}=(1+r)^{n-1}\boldsymbol{z}>0\Rightarrow\boldsymbol{z}>0$. 最后，对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值$\lambda\neq 0$，有特征向量 $\boldsymbol{w}$. 由此得 $\boldsymbol{Aw}=\lambda\boldsymbol{w}\Rightarrow\boldsymbol{A}|\boldsymbol{w}|\geqslant|\lambda||\boldsymbol{w}|$（这里 $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{w}|=(|w_1|,\cdots,|w_n|)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，$|\boldsymbol{w}|\neq 0)\Rightarrow r\geqslant r_{|\boldsymbol{w}|}\geqslant|\lambda|$. 因为 $r>0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以 r 等于$\boldsymbol{A}$ 的所有特征值的最大模，即 $r=\rho(\boldsymbol{A})$. □

至此我们证明了定理 6.1(1)和(3)的前半部分的结论，同时也得到了比推论 6.1 和推论 6.1′更强的结论：

推论 6.1″ $\rho(\boldsymbol{A})=\max\limits_{\boldsymbol{x}>0}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}=\max\limits_{\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\min\limits_{x_i>0}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}$，而且 $\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ax}$

$\geqslant\sigma\boldsymbol{x}\Rightarrow\rho(\boldsymbol{A})\geqslant\sigma$.

类似地，$\rho(\boldsymbol{A})=\min\limits_{\boldsymbol{x}>0}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}=\min\limits_{\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\max\limits_{x_i>0}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}$，而且 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ax}\leqslant\tau\boldsymbol{x}\Rightarrow\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\tau$.

证　前一部分已经证过. 后一部分可以类似地证明. 对 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ax}\leqslant\tau\boldsymbol{x}\Leftrightarrow\tau\geqslant\max\limits_{x_i>0}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}$. 令 $r_{\boldsymbol{x}}=\max\limits_{x_i>0}\dfrac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}$，$\hat{r}=\inf\limits_{\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\hat{r}_{\boldsymbol{x}}$，则由完全平行的论证，可得

$$\rho(\boldsymbol{A})=\hat{r}=\min_{\boldsymbol{x}>0}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}=\min_{\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\max_{x_i>0}\frac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}.$$　□

为了完成基本定理的证明，先证明下述所谓的单调性定理，其本身也很有用.

定理 6.6（单调性定理）　设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 n 阶（复）方阵. 记 $\boldsymbol{B}_+=(|b_{ij}|)$，$y_+=(|y_i|)$. 如果 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_+\geqslant\boldsymbol{0}$，则对 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值 β，必有 $\rho(\boldsymbol{A})\geqslant|\beta|$. 且若 $\rho(\boldsymbol{A})=|\beta|$，即 $\beta=\rho(\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，当且仅当 $\boldsymbol{B}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{DAD}^{-1}$，这里 $|\boldsymbol{D}|=\boldsymbol{I}_n$（即 $\boldsymbol{D}$ 为元素都是模 1 复数的对角阵）.

证　设 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{By}=\beta\boldsymbol{y}$. 取模后有 $\boldsymbol{A}_+\boldsymbol{y}_+\geqslant\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{y}_+\geqslant|\beta|\boldsymbol{y}_+$，从而 $\rho(\boldsymbol{A})\geqslant r_{\boldsymbol{y}_+}\geqslant|\beta|$.

若 $\beta=\rho(\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $r_{\boldsymbol{y}_+}=\rho(\boldsymbol{A})$. 由引理 6.1，可知 $\boldsymbol{y}_+$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的与 $\rho(\boldsymbol{A})$ 相应的正特征向量，所以

$$\boldsymbol{Ay}_+=\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}_+=|\beta|\boldsymbol{y}_+=|\boldsymbol{B}_+|\boldsymbol{y}_+.$$

再由 $\boldsymbol{y}_+>\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_+\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ay}_+=\boldsymbol{B}_+\boldsymbol{y}_+$，可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_+$. 记对角阵 $\boldsymbol{D}$ 满足 $\boldsymbol{D}_+=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Dy}_+$. 从而 $\boldsymbol{By}=\beta\boldsymbol{y}\Rightarrow\boldsymbol{BDy}_+=\rho(\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{D}|\boldsymbol{y}_+|\Rightarrow\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{BDy}_+=\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}_+=\boldsymbol{Ay}_+=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{BD})_+\boldsymbol{y}_+\Rightarrow(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{BD})_+=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{BD}$. 这里最后一步推理成立的理由仍然是 $\boldsymbol{y}_+>\boldsymbol{0}$. 所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_+=|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{BD}|=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{BD},\quad\boldsymbol{B}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{DAD}^{-1}.$$　□

推论 6.4　定理 6.1 的结论(2)成立.　□

现在可以完成定理 6.1 的证明了.

证　(1) 记 $r=\rho(\boldsymbol{A})$. r 是单根$\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\chi(\lambda)|_{\lambda=r}\neq0$，这里 $\chi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\chi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\det(\lambda\boldsymbol{I}_{n-1}-\boldsymbol{A}(i\mid i))$$

再由单调性定理可知 $\rho(\boldsymbol{A}(i\mid i))\leqslant\rho(\boldsymbol{A})=r$，所以 $\det(r\boldsymbol{I}_{n-1}-\boldsymbol{A}(i\mid i)>0)(i=1,\cdots,n)$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\chi(\lambda)\Big|_{\lambda=r}>0$.

(2) 设 $\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，$\boldsymbol{Ay}=\beta\boldsymbol{y}$. 现证 $\beta=r(=\rho(\boldsymbol{A}))$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\text{ 不可约} &\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{ 不可约,且 }\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\rho(\boldsymbol{A})=r \\ &\Rightarrow \exists\, z>0,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}z=rz,\text{即 } z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=rz^{\mathrm{T}} \\ &\Rightarrow z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=\beta z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=rz^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ &\Rightarrow \beta=r. \end{aligned}$$

因为 r 是单根,所以 $\boldsymbol{y}$ 是属于 r 的正特征向量. □

至此定理 6.1 证完,这里的证明方法属于 H. Wielandt.

下面来证明定理 6.2,证明的关键仍是定理 6.6.

证 (1) 仍记 $\rho(\boldsymbol{A})=r$. 设 $\boldsymbol{A}$ 有 ρ 个特征值的模等于 r,它们是 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,其中 $0=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{k-1}<2\pi$. 取定理 6.6 中的 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,$\beta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$,则有

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}\boldsymbol{D}_j\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_j^{-1},\quad \boldsymbol{D}_{j+}=\boldsymbol{I}_n\quad (j=0,1,\cdots,p-1).$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的 p 个模为 r 的特征值又可以记成 $\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j+\theta_l)}\mid l=0,1,\cdots,p-1\}$. 特别地,每个特征值 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的单根,因此 $0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{q-1}<2\pi$,而且 p 个模为 1 的复数的集 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}\mid j=0,1,\cdots,p-1\}$ 对乘法封闭,从而它们一定构成乘法群,故每个元素都满足 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j})^p=1$. 这就证明了 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}\mid j=0,1,\cdots,p-1\}$ 正是 1 的 p 个单位根,从而 $\theta_j=(2\pi/p)j$ $(j=0,1,\cdots,p-1)$. 而 $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_1^{-1}$ 说明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)}\boldsymbol{A}$ 相似.

(2) 在等式 $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_1^{-1}$ 中,由于 $(w\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{A}=(w\boldsymbol{D}_1)^{-1}=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_1^{-1}$,$\boldsymbol{D}_1$ 可改成 $w\boldsymbol{D}_1$,其中 $|w|=1$,故可不妨设对角阵 $\boldsymbol{D}_1$ 的左上角元素是 1. 记 $\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{D}$,$z>0$ 是与 $r=\rho(\boldsymbol{A})$ 相应的正特征向量,则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=r\boldsymbol{z},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)}\boldsymbol{D}\boldsymbol{z},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{z}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)\cdot 2}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{z},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{z}=r\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{z}.$$

从最后一个等式,可知必有 $\boldsymbol{D}^p=\boldsymbol{I}$. 因为 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的单根,$\boldsymbol{D}$ 的左上角元又已假设是 1,所以有置换方阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\bigoplus_{t=0}^{s-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)n_t}\boldsymbol{I}_{mt}\quad (0=n_0<n_1<\cdots<n_{s-1}<p).$$

记 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}_{jk})$,$\boldsymbol{A}_{jk}$ 是 $m_{j-1}\times m_{k-1}$ $(j,k=1,\cdots,s)$ 块,则从 $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/p)}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}$,可得

$$\boldsymbol{A}_{jk}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}(1+n_{j-1}-n_{k-1})}\boldsymbol{A}_{jk}\quad (j,k=1,\cdots,s),$$

从而

$$\boldsymbol{A}_{jk}\neq\boldsymbol{0}\iff n_{k-1}\equiv n_{j-1}+1(\mathrm{mod}\ p).$$

对每个 $j=1,\cdots,s$,由 $\boldsymbol{A}$ 不可约可知 $j\neq k$,使 $\boldsymbol{A}_{jk}\neq\boldsymbol{0}$. 当 $j=1$ 时,由 $n_0=0$,可知 $\boldsymbol{A}_{1k}\neq 0$ 当且仅当 $k=2$,且 $n_1=1$;同样,当 $p=2$ 时,由 $n_1=1$,可知 $\boldsymbol{A}_{2k}\neq\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $k=3$,且 $n_2=2$. 如此继续进行,可知对任意 $j=1,\cdots,s-1$,$n_j=j$,$\boldsymbol{A}_{jk}\neq\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $k=j+1$;对 $j=s$,$n_{k-1}\equiv n_{i-1}+1\equiv s(\mathrm{mod}\ p)\Rightarrow s=p$,$k=1$. 这就证明了

$$PAP^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{12} & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & \boldsymbol{A}_{p-1,p} \\ \boldsymbol{A}_{p1} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中主对角块都是非空零方阵. 定理 6.2 证毕. □

不可约非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 可分成两类. 设 $\boldsymbol{A}$ 有 p 个模为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值，当 $p=1$ 时，称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原的(primitive)；当 $p>1$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 是非本原的(imprimitive). 统称 p 为 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标. 本原和非本原方阵的性质很不相同，我们在下一节讨论它们.

6.4　本原性探究

从定理 6.2(2)来看，非本原性指标(从而不可约非负方阵的本原性)很像是一种组合性质. 本节将肯定这种组合性：首先通过相应的有向图来刻画它，进而再用这种组合刻画来研究它.

如不另外说明，本节所论的不可约非负方阵均为 $n(>1)$ 阶的，并简称本原(非本原)的不可约非负方阵为本原(非本原)方阵.

设 D 是一个有向图，$(v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_l})$ 是 D 中一条从 v_{i_0} 到 v_{i_l} 的路，则构成这条路的弧 $\overrightarrow{v_{i_t}v_{i_{t+1}}}$ $(t=0,1,\cdots,l-1)$ 的个数 l 称为这条路的长. 同样，也称回路 $(v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_l})$ 的长为 l. 注意上述长为 l 的路或回路中的 l 条弧不必互不相同.

定义 6.1　设 D 是有 $n(>1)$ 个顶点的强连通图，则称 D 中所有回路的长的最大公因数 d 为 D 的回路性指标(index of cyclicity).

定理 6.7　不可约非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标等于 $\boldsymbol{A}$ 确定的强连通图 $D(\boldsymbol{A})$ 的回路性指标.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标是 p，$D(\boldsymbol{A})$ 的回路性指标是 d. 现分两步证明 $d=p$.

(a) $p \mid d$. 由定理 6.2，可知 $\boldsymbol{A}$ 置换相似于分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{12} & & & \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{23} & & \\ & & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \ddots & \boldsymbol{A}_{i-1,p} \\ \boldsymbol{A}_{p1} & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

在此分别记块 $\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{23},\cdots,\boldsymbol{A}_{p-1,p},\boldsymbol{A}_{p1}$ 的行标集合为 $W_1,W_2,\cdots,W_{p-1},W_p$，则它们的列标集合分别为 $W_2,W_3,\cdots,W_p,W_1$. $\{W_1,W_2,\cdots,W_p\}$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个分拆. 用 $D(\boldsymbol{A})$ 的语言来说，就是 $D(\boldsymbol{A})$ 的顶点集 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 有一个划分 $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$，$V_i=\{v_t\mid t\in W_i\}(i=1,\cdots,p)$，它使 $D(\boldsymbol{A})$ 中任一起点属于 v_i 的弧，其终点一定属于 v_{i+1}，这里 $v_{p+1}=v_1$. 因此 $D(\boldsymbol{A})$ 的任一回路的长一定是 p 的整数倍.

(b) $d\mid p$. 同推论 6.2 的记号一样，记 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n_1}+\cdots+c_s\lambda^{n_s}\quad(c_1,\cdots,c_s\neq 0,n>n_1>\cdots>n_s\geqslant 0).$$

则推论 6.2 断言 $p=\gcd\{n-n_1,n-n_2,\cdots,n-n_s\}$. 故只需证明 $d\mid(n-n_i)(i=1,\cdots,s)$.

因为 $c_i\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 必有 $n-n_i$ 阶主子式不为零. 不妨设 $n-n_i=m$，$\det\boldsymbol{A}[1,\cdots,m\mid 1,\cdots,m]\neq 0$，从而有一正数项 $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{m\sigma(m)}$，这里 σ 是 $\{1,\cdots,m\}$ 上的一个置换. 现将 σ 表示成若干个循环置换的乘积，其中每个循环置换都可写成

$$(k_1,k_2,\cdots,k_j)=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_j\\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1\end{pmatrix},$$

因此 $a_{k_1k_2}a_{k_2k_3}\cdots a_{k_jk_1}>0$，也就是说，在 $D(\boldsymbol{A})$ 中有一个长为 j 的简单回路 $(v_{k_1},v_{k_2},\cdots,v_{k_j},v_{k_1})$，所以 $d\mid j$. 因为这些循环置换的长度之和等于 $m=n-n_i$，所以 $d\mid(n-n_i)(i=1,\cdots,s)$. □

定理 6.7 给出了非本原性指标的组合刻画，在用它来研究不可约非负方阵的本原性之前，先说明一个事实：D 的回路性指标可以等价地定义为 D 的所有简单回路的长的最大公因数. 因为任意一个回路可看作其中弧的重集，则任一回路必为若干简单回路的并集，从而一个回路的长必为若干简单回路的长的和.

例 6.4 设

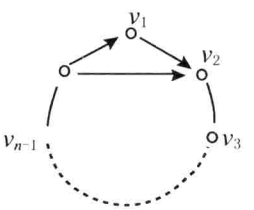


图 6.3

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1\\ 1 & 1 & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n},$$

则 $D(\boldsymbol{A})$ 如图 6.3 所示.

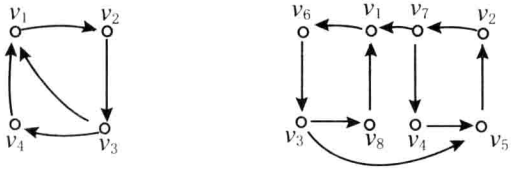
易见 $D(\boldsymbol{A})$ 有两个简单回路 $(v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1)$ 和 $(v_2,v_3,\cdots,v_n,v_2)$，它们的长分别是 n 和 $n-1$，所以 $D(\boldsymbol{A})$ 的回路性指标等于 1，从而 $\boldsymbol{A}$ 是本原的. □

注 $\boldsymbol{A}$ 的回路性指标为 p 并不蕴涵 $D(\boldsymbol{A})$ 中一定有长为 p 的回路.

例 6.5　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})$和 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B})$如图 6.4 所示.



(a) $D(\boldsymbol{A})$　　(b) $D(\boldsymbol{B})$

图 6.4

$D(\boldsymbol{B})$仅有长为 4 和 6 的简单回路，故 $\boldsymbol{B}$ 的回路性指标是 2. 这时 $\boldsymbol{A}$ 是本原的. □

例 6.5 反映的事实可以推广成如下结论：

推论 6.5　设不可约非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 置换相似于

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}_1&&&\\&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}_2&&\\&&\boldsymbol{0}&\ddots&\\&&&\ddots&\boldsymbol{B}_{p-1}\\\boldsymbol{B}_p&&&&\boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

其中主对角块都是非空零方阵，则：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标一定是 p 的整数倍；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标等于 p 当且仅当乘积方阵 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\cdots\boldsymbol{B}_p$ 是本原的.

证　(1) 由定理 6.6 的证明可得.

(2) 证明放在证明了本原性的一个重要刻画(见以下的(4))之后，并将(2)表述为更完整的结论(定理 6.9).

至今我们已证明了不可约非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原方阵的三个充要条件，它们是：

(1) $\boldsymbol{A}$ 只有一个模为$\rho(\boldsymbol{A})$的特征值，即 $\rho(\boldsymbol{A})$自身；

(2) 记 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n_1}+\cdots+c_s\lambda^{n_s}$$

$(c_1,\cdots,c_s\neq0, n>n_1>\cdots>n_s\geqslant0)$，则 $\gcd\{n-n_1,n-n_2,\cdots,n-n_s\}=1$；

(3) $D(\boldsymbol{A})$的所有回路(或所有简单回路)的长的最大公因数是 1.

下面再证明一种表述最简明的充要条件：

(4) 存在正整数 m，使 $\boldsymbol{A}^m>0$.

注意到对一个非负方阵 $\boldsymbol{B}$ 来说，$\boldsymbol{B}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的正元分布模式是由 $\boldsymbol{B}$ 的正元分布模式完全确定的，与 $\boldsymbol{B}$ 中各正元的具体数值无关. 而 $\boldsymbol{B}$ 的正元分布模式实际上又等价于有向图 $D(\boldsymbol{B})$，因此，是否存在正整数 m，使 $\boldsymbol{B}^m>0$ 这个矩阵性质实质上是一种组合性质.

首先用反证法证明(4)中的充分性.

设 $\boldsymbol{A}^m>0$，则易知 $\boldsymbol{A}$ 不可约. 若 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标为 $p(>1)$，则 $\boldsymbol{A}$ 置换相似于

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \boldsymbol{0} & \ddots & \\ & & & \ddots & \boldsymbol{B}_{p-1} \\ \boldsymbol{B}_p & & & & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

其中主对角块都是非空零方阵. 由此可知，对任一正整数 l，在 $\boldsymbol{PA}^l\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 的分块表示中，除主对角块外都是零块，因此 $\boldsymbol{PA}^l\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 不可能是正矩阵，从而 $\boldsymbol{A}^l$ 不可能是正矩阵.

再注意到 6.2 节定理 6.3 后面的命题 6.1，我们自然希望通过 $D(\boldsymbol{A})$ 来证明(4)中的必要性. 先证明强连通有向图中回路长度的一个结论，它本身有独立意义.

引理 6.2 设 D 是强连通的有向图，记 D 的顶点集为 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$，D 的回路性指标为 d，D 中所有通过顶点 V_i 的回路的长的最大公因数为 $d_i(i=1,\cdots,n)$，则：

(1) $d_1=\cdots=d_n=d$；

(2) 任给两点 $v_i,v_j\in V$，从 v_i 到 v_j 的所有路的长模 d 同余；

(3) 可将 V 分拆成 d 部分：$V=V_0\cup V_1\cup\cdots\cup V_{d-1}$，使得 D 中任一起点属于 V_i 而终点属于 V_j 的路的长 $l\equiv j-i(\mathrm{mod}\ d)$，特别地，若 D 的一条弧的起点属于 V_i，则终点必属于 $V_{i+1}(i=0,1,\cdots,d-1,V_d=V_0)$；

(4) 存在正整数 N，使得对任一整数 $m\geqslant N$ 以及任意两点 $v'\in V_i,v''\in V_j$，D 中一定有一条从 v' 到 v'' 的长为 $(j-i)+md$ 的路.

证 (1) 任取 $v_i,v_j\in V$ 以及过 v_j 的回路 C，记 C 的长为 m_j. 因 D 强连通，故可取一条从 v_i 到 v_j 的路 P，记 P 的长为 s，又可取一条从 v_j 到 v_i 的路 Q，记 Q 的长为 t. 由此可得两个过 v_i 的回路：一个回路是在 P 后接 Q，另一个是在 P 后接 C 再接 Q，这两个回路的长分别是 $s+t$ 和 $s+t+m_j$. 根据 d_i 的定义，可知 $d_i\mid m_j$. 因上述过 v_j 的 C 是任取的，所以 $d_i\mid d_j$. 从而 $d_1=\cdots=d_n=d'$，显然 $d\mid d'$.

反之，对 D 中任一长度为 l 的圈，按 d' 的定义可知 $d' \mid l$，从而 $d' \mid d$.

(2) 设 P' 和 P'' 是两条从 v_i 到 v_j 的路，它们的长分别为 l' 和 l''. 再任取一条从 v_j 到 v_i 的路 Q，记 Q 的长为 m，则在 P' 后接 Q 和在 P'' 后接 Q 分别得到长为 $l'+m$ 和 $l''+m$ 的两个回路，因此 $l'+m \equiv l''+m \pmod{d}$，从而 $l' \equiv l'' \pmod{d}$.

(3) 令 $V_i = \{v_j \in V \mid$ 从 v_1 到 v_j 的路的长与 i 模 d 同余$\}$ $(i=0,1,\cdots,d-1)$. 由(2)可知 V_i 是确切定义的，而且 $\{V_0, V_1, \cdots, V_{d-1}\}$ 是 V 的一个分拆，它具有所要求的性质.

在证(4)前，需先证明正整数集的一个性质.

命题 6.3　设 S 是正整数集的一个子集，且 S 对加法封闭. 记 S 中全部正整数的最大公因数为 d，则存在正整数 N，使得 $\{md \mid m \geqslant N\} \subseteq S$.

证　可不妨设 $d=1$. 因此 S 中必有 l 个数 $n_1, \cdots, n_l$，使 $\gcd\{n_1, \cdots, n_l\} = 1$. 从而有整数 $a_1, \cdots, a_l$，使 $a_1 n_1 + \cdots + a_l n_l = 1$. 把这个等式中 a_i 的正、负项分开，可得 $m_1 - m_2 = 1$，其中

$$m_1 = \sum_{a_i > 0} a_i n_i \in S, \quad m_2 = \sum_{a_i < 0} a_i n_i \in S.$$

令 $N = m_2(m_2-1)$，则当 $m \geqslant N$ 时，用 m_2 整除 m，得 $m = am_2 + r$，其中 $0 \leqslant r \leqslant m_2 - 1$，$a \geqslant m_2 - 1$，所以

$$m = am_2 + r = am_2 + r(m_1 - m_2) = rm_1 + (a-r)m_2 \in S.$$

命题证毕.

(4) 对 $v' \in V_i$，$v'' \in V_j$，取定一条从 v' 到 v'' 的路，记其长为 $(j-i) + l(v'', v'')d$，其中 $l(v', v'')$ 是非负整数. 再记过 v'' 的所有回路的长的集为 $S(v'')$，显然，$S(v'')$ 对加法封闭，且其最大公因数是 d. 由命题 6.3 可知，存在正整数 $N(v'')$，只要整数 $p \geqslant N(v'')$，就一定有过 v'' 的长为 pd 的回路. 所以只要 $m \geqslant l(v', v'') + N(v')$，就必有从 v' 到 v'' 的长为 $j - i + md$ 的路. 令 $N = \max\limits_{v', v'' \in V} \{l(v', v'') + N(v'')\}$，即为所求. □

现在可以完成关于方阵本原性充要条件(4)的证明了.

定理 6.8　非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原方阵的充要条件是，存在正整数 m，使 $\boldsymbol{A}^m > 0$.

证　充分性已经证过，现在证必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 是本原的，则 $D(\boldsymbol{A})$ 的回路性指标 $d=1$，$D(\boldsymbol{A})$ 的顶点集 V 按引理的(3)所作的分拆，现在是 $V = V_0$. 由引理 6.3(4) 可知，存在正整数 N，使得对任一整数 $m \geqslant N$ 和 V 中任意两点 v_i 与 v_j，$D(\boldsymbol{A})$ 中一定有一条从 v_i 到 v_j 的长为 m 的路. 用 $\boldsymbol{A}$ 的语言来说，就是当 $m \geqslant N$ 时，$\boldsymbol{A}^m > 0$. □

利用前面的讨论，可用另一种方法得到比定理 6.2(2) 更强的结论.

定理 6.9　设 $\boldsymbol{A}$ 是不可约非负方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标是 p 的充要条件为，有置换方阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \boldsymbol{0} & \ddots & \\ & & & \ddots & \boldsymbol{B}_{p-1} \\ \boldsymbol{B}_p & & & & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

其中主对角块都是非空零方阵，而且若记

$$\boldsymbol{PA}^{p}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p),$$

则 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p$ 都是本原方阵.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标是 p，则 $D(\boldsymbol{A})$ 的回路性指标也是 p，因此 $D(\boldsymbol{A})$ 的顶点集 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 可按引理 6.3(3) 作分拆 $\{V_0,V_1,\cdots,V_{p-1}\}$. 这时 $D(\boldsymbol{A})$ 中任一起点在 V_i 中的弧，其终点一定在 V_{i+1} 中. 再对 $\boldsymbol{A}$ 作置换相似，使得 $\boldsymbol{A}$ 中以 $V_0,V_1,\cdots,V_p$ 中点的下标为行标和列标的行和列经置换后，可转变成分组从小到大的自然顺序，也就是说，经过这样置换相似后所得到的方阵具有所要求的分块形式. 显然在这种分块形式下，有 $\boldsymbol{PA}^{p}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p)$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_p$，$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{B}_2\cdots\boldsymbol{B}_p\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_{p-1}$. 对 V 的分拆 $V=V_0\cup V_1\cup\cdots\cup V_{p-1}$ 来说，由引理 6.3(3) 可知，存在正整数 N，使得对 $V_i(i=0,1,\cdots,p-1)$ 中任意两点 v'，v'' 以及任一整数 $m\geqslant N$，$D(\boldsymbol{A})$ 中必有从 v' 到 v'' 的长为 mk 的路，从而 $\boldsymbol{A}_{l+1}^{m}>0$. 由定理 6.8 可知 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 都是本原的.

反之，设 $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$ 有所说的分块形式，且 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_p$ 是本原的(注意这里仅要求 $\boldsymbol{A}_1$ 是本原的). 则有正整数 t，使 $\boldsymbol{A}_1^{t}>0$，从而 $\boldsymbol{A}_1^{t+1}>0$. 因此，$(\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}})^{pt}$ 和 $(\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}})^{p(t+1)}$ 的左上角块是正方阵，从而左上角元素为正，即 $D(\boldsymbol{A})$ 中既有从 v_1 到 v_1 的长为 p 的回路，又有长为 $p(t+1)$ 的回路. 从而 p 作为 $p(t+1)$ 和 pt 的最大公因数必为 $D(\boldsymbol{A})$ 的回路性指标(=$\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标)的倍数，但已知 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标必为 p 的倍数(推论 6.5)，所以 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标就是 p. □

注 从上述证明可以看到，定理 6.9 的条件中的最后一项，即“$\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p$ 都是本原方阵”，可以减弱成一个条件：“$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_p$ 是本原方阵”.

6.5 本原方阵的指数

定义 6.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是本原方阵，则使 $\boldsymbol{A}^{k}>0$ 的最小正整数 k 称为 $\boldsymbol{A}$ 的本原指数，简称指数(exponent)，文献中常记为 $\gamma(\boldsymbol{A})$.

定理 6.8 保证了 $\gamma(\boldsymbol{A})$ 的存在性. 另外，由于对任意 $n(>1)$ 阶不可约非负方阵

$\boldsymbol{B}$ 成立$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{n-1}>0$，所以若一个 n 阶本原方阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上都是正元，则 $\gamma(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$. 对一般本原方阵 $\boldsymbol{A}$，可通过 $D(\boldsymbol{A})$给出 $\gamma(\boldsymbol{A})$的上界. 以下均设 $n>1$.

定理 6.10(Dulmage, Mendelsohn)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶本原方阵，而且其对应有向图 $D(\boldsymbol{A})$有一个长为 s 的简单回路，则本原指数 $\gamma(\boldsymbol{A})\leqslant n+s(n-2)$.

证　(a) 设 v_i 是$D(\boldsymbol{A})$的一个顶点，如果有正整数 h_i，使得从 v_i 到$D(\boldsymbol{A})$的任一顶点都有长为 h_i 的路，则可断言：对任意正整数 m，从 v_i 到任一顶点都有长为 h_i+m 的路.

设 v_j 是$D(\boldsymbol{A})$的顶点，则 $D(\boldsymbol{A})$中必有以 v_j 为终点的弧$\overset{\frown}{v_kv_j}$. 因为从 v_i 到 v_k 有长为h_i 的路，再接上$\overset{\frown}{v_kv_j}$后即得从 v_i 到 v_j 的长为 h_i+1 的路. 用归纳法即证得上述断言.

所以，若对每个 $i=1,\cdots,n$，都有具有上述性质的 h_i，令 $h=\max\{h_1,\cdots,h_n\}$，则对 $D(\boldsymbol{A})$的任意两顶点 v_p,v_q，一定有从 v_p 到 v_q 的长为 h 的路. 从而 $\boldsymbol{A}^h>0$，即 $\gamma(\boldsymbol{A})\leqslant h$.

(b) 现证对定理所设的 $\boldsymbol{A}$，有 $h_i\leqslant n+s(n-1)(i=1,\cdots,n)$. 设$(v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_s},v_{i_1})$是 $D(\boldsymbol{A})$中长为 s 的回路. 首先，一定有从 v_i 到 $v_{i_1},\cdots,v_{i_s}$ 中的某一点，设为 v_{i_k} 的路，且路长 $p_i\leqslant n-s$. 其次，$\boldsymbol{A}^s$ 也是本原的，从而不可约. 因此 $D(\boldsymbol{A}^s)$强连通. 注意到 $D(\boldsymbol{A}^s)$和 $D(\boldsymbol{A})$的顶点集都是$\{v_1,\cdots,v_n\}$，在 $D(\boldsymbol{A}^s)$中有弧$\overset{\frown}{v_pv_q}$，当且仅当在 $D(\boldsymbol{A})$中有从 v_p 到 v_q 的长为s 的路. 所以 $D(\boldsymbol{A}^s)$在顶点 $v_{i_t}(t=1,\cdots,s)$处有弧$\overset{\frown}{v_{i_t}v_{i_t}}$(即环，或长为 1 的回路)，因而对任一顶点 v_j，在 $D(\boldsymbol{A}^s)$中一定有从 v_{i_k}到 v_j 的长正好是$n-1$ 的路. $D(\boldsymbol{A}^s)$中这条长为 $n-1$ 的路表示了 $D(\boldsymbol{A})$中一条也是从 v_{i_k}到 v_j 但长为$s(n-1)$的路，所以在 $D(\boldsymbol{A})$中有一条从 v_i 到 v_j 的长为$p_i+s(n-1)$的路. 由于 $p_i+s(n-1)$与 v_i 无关，故可取 $h_i=p_i+s(n-1)$，且

$$h_i=p_i+s(n-1)\leqslant n-s+s(n-1)=n+s(n-2).$$

所以 $h=\max\{h_1,\cdots,h_n\}\leqslant n+s(n-2)$. 由(a)即知 $\gamma(\boldsymbol{A})\leqslant n+s(n-2)$.　□

推论 6.6(Wielandt)　设 $\boldsymbol{A}$ 是n 阶本原方阵，则

$$\gamma(\boldsymbol{A})\leqslant(n-1)^2+1=n^2-2n+2.$$

证　因 $D(\boldsymbol{A})$一定有长大于 1 的回路，而 $D(\boldsymbol{A})$的回路性指标是 1，所以 $D(\boldsymbol{A})$中一定有长小于 n 的回路. 在定理 6.10 中，令 $s\leqslant n-1$ 即得结论.　□

例 6.6　同例 6.4 的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 是本原的，所以 $\gamma(\boldsymbol{A})\leqslant(n-1)^2+1$. 现证等式成立. 为此，先证 $D(\boldsymbol{A})$中没有过 v_1 的长为$(n-1)^2$ 的回路. 若有这种回路，它一定是由 $a(>0)$个回路$(v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1)$和 $b(\geqslant 0)$个回路$(v_2,\cdots,v_n,v_2)$组合而成，因此这个回路的长 $l=an+b(n-1)\,l=(n-1)^2\Rightarrow(n-1)\mid a\Rightarrow a\geqslant a-1\Rightarrow an$

$+b(n-1)>(n-1)^2$，导致矛盾. 这个图论事实用矩阵的语言来说，就是 $\boldsymbol{A}^{(n-1)^2}$ 的左上角元素等于零. 所以 $\gamma(\boldsymbol{A})\geqslant(n-1)^2+1$. □

上例说明 $\gamma(\boldsymbol{A})$ 的上界 $(n-1)^2+1$ 是可以达到的. 实际上还可进一步证明，达到这个上界的 n 阶本原方阵一定与上例中的 $\boldsymbol{A}$ 置换相似.

关于本原方阵的指数分布，还可用图论方法证明下述“空隙”(gap)现象.

当 $n>4$ 是偶数时，开区间 $(n^2-4n+6,(n-1)^2)$ 不含 n 阶本原方阵的指数；当 $n>3$ 是奇数时，开区间 (n^2-4n+6,n^2-3n+2) 和 $(n^2-3n+4,(n-1)^2)$ 都不含 n 阶本原方阵的指数.

从本节的简单介绍可以看到，本原方阵的指数虽由纯矩阵方式定义，但它富有组合内涵，因此可以用有向图对此进行研究，20 世纪 60 年代对本原指数的估计进展甚多. 到 80 年代，人们开始研究更深入的本原指数的分布问题，即试图确定所有由 n 阶本原方阵的指数组成的整数集 $E(n)$. M. Hewin 和 Y. Vitek 发现，$PE(n)$ 中有一系列“空隙”，即不属于 $PE(n)$ 的一些连贯整数的段落，并对此进行研究. 之后，邵嘉裕和张克民先后对此深入研究，他们的工作最终完全确定了集合 $E(n)$. 邵和张的工作分别刊于《Linear Algebra and Its Applications》(1985(65):91～123; 1987(96):101～108).

6.6 一般非负方阵的性质

当非负方阵可约时，定理 6.1 和定理 6.2 不再成立，但从它们不难得到下述关于一般非负方阵的基本性质.

定理 6.11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非负方阵，则：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的最大模 $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而且 $\rho(\boldsymbol{A})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 置换相似于主对角线元素都是零的下三角方阵；

(2) $\boldsymbol{A}$ 有属于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的非负特征向量；

(3) 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_+\geqslant 0\Rightarrow\rho(\boldsymbol{A})\geqslant\rho(\boldsymbol{B})$；

(4) 对非零非负 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\min_{x_i>0}\frac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_{x_i>0}\frac{(\boldsymbol{Ax})_i}{x_i}.$$

证 (1) 根据 6.2 节定理 6.5，$\boldsymbol{A}$ 置换相似于分块下三角形矩阵，其中主对角块 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 都是不可约非负方阵. 显然，

$$\rho(\boldsymbol{A})=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\rho(\boldsymbol{A}_i),$$

而且 $\rho(\boldsymbol{A})=0$ 当且仅当每个 $\rho(\boldsymbol{A}_i)=0$，即每个 $\boldsymbol{A}_i$ 都是 1 阶零方阵.

以下通过取极限来证明(2)～(4).

(2) 令 $\boldsymbol{J}$ 为 n 阶全 1 方阵. 对 $\varepsilon>0$，分别记 $\boldsymbol{A}_\varepsilon=\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{J}$，$r_\varepsilon=\rho(\boldsymbol{A}_\varepsilon)>\rho(\boldsymbol{A})$，正方阵 $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ 的属于 r_ε 的单位正特征向量为 $\boldsymbol{y}^{(\varepsilon)}>0$，$\|\boldsymbol{y}^{(\varepsilon)}\|=1$. 易知有正数列 $\varepsilon_k\to 0$，使得 $\boldsymbol{A}_{\varepsilon_k}\to\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{y}^{\varepsilon_k}\to\boldsymbol{y}$，且 $\|\boldsymbol{y}\|=1$. 因此 $r_{s_k}\to r$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=r\boldsymbol{y}$，从而 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的非负特征值，$r\leqslant\rho(\boldsymbol{A})$. 而 $r_{\varepsilon_k}=\rho(\boldsymbol{A}_{\varepsilon_k})>\rho(\boldsymbol{A})\Rightarrow r\geqslant\rho(\boldsymbol{A})$，所以 $r=\rho(\boldsymbol{A})$.

(3) 在 $\rho(\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{J})\geqslant\rho(\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{J})$ 中，令 $\varepsilon\to 0$ 即得.

(4) 在 $\min\limits_{x_i>0}\dfrac{(\boldsymbol{A}_\varepsilon\boldsymbol{x})_i}{x_i}\leqslant\rho(\boldsymbol{A}_\varepsilon)\leqslant\max\limits_{x_i>0}\dfrac{(\boldsymbol{A}_\varepsilon\boldsymbol{x})_i}{x_i}$ 中，令 $\varepsilon\to 0$ 即得. □

注　一般说来，性质(4)中有一个等式成立并不足以保证有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \rho(\boldsymbol{A})=2,\quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_2=0.$$

但对任意 $\boldsymbol{x}>0$，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2}\dfrac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i}{x_i}=2$.

这个例子也说明，对可约的 $\boldsymbol{A}$，不一定有属于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的正特征向量. 下面来研究一定存在 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的正特征向量的条件. 为此，先证明一个引理.

引理 6.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非负方阵，则当数 $a>\rho(\boldsymbol{A})$ 时，$(a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\geqslant 0$，且若 $\boldsymbol{A}$ 不可约，则 $(a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}>0$.

证　当 $a>\rho(\boldsymbol{A})$ 时，有幂级数展开式

$$(a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^j}{a^{j+1}},$$

上式右端必非负. 而当 $\boldsymbol{A}$ 不可约时，右端前 n 项之和 $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{\boldsymbol{A}^j}{a^{j+1}}$ 与方阵 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{n-1}$ 一样必为正方阵. □

定理 6.12　设 n 阶非负非零方阵 $\boldsymbol{A}$ 的置换相似标准形为(参看定理 6.5)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}\boldsymbol{A}_1&&\boldsymbol{0}&&&\\&\ddots&&&\boldsymbol{0}&\\\boldsymbol{0}&&\boldsymbol{A}_g&&&\\\hdashline\boldsymbol{A}_{g+1,1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{g+1,g}&\boldsymbol{A}_{g+1}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\\\boldsymbol{A}_{p1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{pg}&\boldsymbol{A}_{p,g+1}&\cdots&\boldsymbol{A}_p\end{array}\right),\tag{6.2}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 有正特征向量属于特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的充要条件是

$$\rho(\boldsymbol{A})=\rho(\boldsymbol{A}_1)=\cdots=\rho(\boldsymbol{A}_g)>\rho(\boldsymbol{A}_{g+1}),\cdots,\rho(\boldsymbol{A}_p).$$

证　必要性. 显然，$\boldsymbol{A}$ 具有属于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的正特征向量当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的标准形

(6.2)具有相应于 $\rho(\boldsymbol{A})$的正特征向量.故不妨设 $\boldsymbol{A}$ 如式(6.2).记有正向量 $\boldsymbol{x}>0$, $\boldsymbol{Ax}=r\boldsymbol{x}$(从而 $r>0$).现将 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{x}$ 记成与 $\boldsymbol{A}$ 的标准形(6.2)相符的分块形式,则有

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^{(p)}\end{pmatrix},\quad \begin{cases}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}=r\boldsymbol{x}^{(i)} & (i=1,\cdots,g),\\ \sum\limits_{j=1}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}^{(j)}+\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}=r\boldsymbol{x}^{(i)} & (i=g+1,\cdots,p).\end{cases}$$

前 g 个等式说明 $r=\rho(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_g$ 的特征值,从而 $r=\rho(\boldsymbol{A}_1)=\cdots=\rho(\boldsymbol{A}_g)$.而后 $k-g$ 个等式说明

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}\leqslant r\boldsymbol{x}^{(i)},\quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}\neq r\boldsymbol{x}^{(i)}\quad (i=g+1,\cdots,p),$$

这里等式必不成立,是因为在 $\boldsymbol{A}$ 的标准形中,$\boldsymbol{A}_{i1},\cdots,\boldsymbol{A}_{i,i-1}$ 不全是零矩阵.再由6.3节中推论6.1′,可证下列推理成立:

$$\rho(\boldsymbol{A}_i)\leqslant\max_j\frac{(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)})_j}{x_j^{(i)}}\leqslant r,$$

且

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{A}_i)=r\quad&\Rightarrow\quad\rho(\boldsymbol{A}_i)=\max_j\frac{(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)})_j}{x_j^{(i)}}\\&\Rightarrow\quad\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}=\rho(\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}^{(i)}\leqslant r\boldsymbol{x}^{(i)},\end{aligned}$$

但 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}\neq r\boldsymbol{x}^{(i)}$,所以 $\rho(\boldsymbol{A}_i)<r(i=g+1,\cdots,k)$.

充分性.设 $r=\rho(\boldsymbol{A}_1)=\cdots=\rho(\boldsymbol{A}_g)>\rho(\boldsymbol{A}_{j+1}),\cdots,\rho(\boldsymbol{A}_p)$,则对 $i=1,\cdots,g$, $\boldsymbol{A}_i$ 有正特征向量 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ 与 r 相应,即 $\boldsymbol{Ax}^{(i)}=r\boldsymbol{x}^{(i)}$, $\boldsymbol{x}^{(i)}>0$.现在对 $i=g+1,\cdots,p$ 递推地求出满足

$$\sum_{j=1}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}^{(j)}+\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(i)}=r\boldsymbol{x}^{(i)}$$

的正向量 $\boldsymbol{x}^{(i)}>0$.先看 $i=g+1$,这时

$$\sum_{j=1}^{g}\boldsymbol{A}_{g+1,j}\boldsymbol{x}^{(j)}+\boldsymbol{A}_{g+1}\boldsymbol{x}^{(g+1)}=r\boldsymbol{x}^{(g+1)}\quad\Leftrightarrow\quad(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{g+1})\boldsymbol{x}^{(g+1)}=\sum_{j=1}^{g}\boldsymbol{A}_{g+1,j}\boldsymbol{x}^{(j)}.$$

但 $r>\rho(\boldsymbol{A}_{g+1})$, $\boldsymbol{A}_{g+1}$ 不可约$\Rightarrow(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{g+1})^{-1}>0$.故一定能解出

$$\boldsymbol{x}^{(g+1)}=(r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{g+1})^{-1}\sum_{j=1}^{g}\boldsymbol{A}_{g+1,j}\boldsymbol{x}^{(j)}>0.$$

同样可继续确定正向量 $\boldsymbol{x}^{(g+2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(p)}$.令

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^{(p)}\end{pmatrix},$$

即有 $\boldsymbol{x}>0$, $\boldsymbol{Ax}=r\boldsymbol{x}$. □

推论 6.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是非负方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都有正特征向量与特征值 $\rho(\boldsymbol{A})=$

$\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r$ 相应的充要条件是，在 $\boldsymbol{A}$ 的置换相似标准形(6.2)中 $g=p$(即 $\boldsymbol{A}$ 置换相似于 $\boldsymbol{A}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}_g$)，每个 $\boldsymbol{A}_i$ 都不可约，而且 $\rho(\boldsymbol{A}_i)=r(i=1,\cdots,g)$.

证　充分性很显然，现证必要性. 假设在推论的条件下，$\boldsymbol{A}$ 的置换相似标准形(6.2)中 $g<k$，则将式(6.2)转置后，我们一定可以选取 $\boldsymbol{A}_p^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的置换相似标准形中的左上方第一块. 因设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有正特征向量与 r 相应，故由定理 6.12 可得 $\rho(\boldsymbol{A}_p^{\mathrm{T}})=r$. 但同样由定理 6.12 可得 $\rho(\boldsymbol{A}_p)<\rho(\boldsymbol{A}_1)=r$，导致矛盾. □

推论 6.8　非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可约的充要条件是，$\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单根，而且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都有正特征向量与 $\rho(\boldsymbol{A})$ 相应.

证　$\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单根说明 $g=1$；$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都有正特向量与 $\rho(\boldsymbol{A})$ 相应，说明 $g=k$. □

最后讨论一个在控制理论研究中提出的矩阵问题.

n 阶(复)方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 称为列对角占优，如果

$$|a_{jj}|>\sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}| \quad (j=1,\cdots,n).$$

不难证明列对角占优的方阵必是可逆的. 现在提出相反方向的问题：对可逆方阵 $\boldsymbol{A}$，在什么条件下一定有实方阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{XA}$ 列对角占优？这个问题的一般情形至今尚未解决，但若限定 $\boldsymbol{X}$ 是对角阵，则它可以用非负方阵的知识很干净地处理.

可不妨设 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$，$x_1,\cdots,x_n>0$，则 $\boldsymbol{XA}$ 列对角占优相当于

$$x_j|a_{ij}|>\sum_{i\neq j}x_i|a_{ij}| \quad (j=1,\cdots,n).$$

上式又可等价地写成

$$\sum_{i\neq j}\frac{|a_{ij}|x_i}{|a_{jj}|x_j}<1 \quad (j=1,\cdots,n).$$

令

$$\hat{a}_{ji}=\begin{cases}0, & j=i\\ \dfrac{|a_{ij}|}{|a_{ij}|}, & j\neq i\end{cases} \quad (j=1,\cdots,n),\quad \hat{\boldsymbol{A}}=(\hat{a}_{ji}),\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

则上式又可写成

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x})_j}{x_j}<1.$$

若上式成立，则 $\rho(\hat{\boldsymbol{A}})<1$. 反过来，若 $\rho(\hat{\boldsymbol{A}})<1$，则一定有 $\mathring{\boldsymbol{A}}$，$\mathring{\boldsymbol{A}}-\hat{\boldsymbol{A}}\geqslant 0$，$1>\rho(\mathring{\boldsymbol{A}})\geqslant\rho(\hat{\boldsymbol{A}})$，而且 $\mathring{\boldsymbol{A}}$ 有正特征向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\rho(\mathring{\boldsymbol{A}})$ 相应(这只要在 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的置换相似标准形的前 g 个对角块上分别加上适当大小的形如 $s\boldsymbol{I}$ 的非负方阵即可). 对这个 $\boldsymbol{x}>0$，有

$$\frac{(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x})_j}{x_j}\leqslant\frac{(\mathring{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x})_j}{x_j}=\rho(\mathring{\boldsymbol{A}})<1 \quad (j=1,\cdots,n).$$

综上即得：有实对角阵 $\boldsymbol{X}$，使 $\boldsymbol{XA}$ 列对角占优的充要条件是，从 $\boldsymbol{A}$ 按前述定义所得的非负方阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 满足 $\rho(\hat{\boldsymbol{A}})<1$.

6.7 随 机 方 阵

定义 6.3 非负方阵称为随机方阵，如果它的每一行上的元素之和都是 1.

随机方阵是一类很特殊而又应用广泛的非负方阵，它出现于很多数学物理问题中. 特别地，n 阶随机方阵刻画了所谓 n 个状态的齐次马尔可夫链，后者可以这样描述：设某系统具有 n 个可能状态 $S_1,\cdots,S_n$，在每一单位时刻 $0,1,2,\cdots$，这个系统处于这 n 个状态之一. 而且若在时刻 l 处于状态 S_i，则在下一个时刻 $l+1$ 处于状态 S_j 的(条件)概率是 p_{ij}（p_{ij} 与时刻 l 无关，这就是“齐次性”). 这时 $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}=1$；再记这个系统在时刻 l 处于状态 S_i 的概率是 $y_i^{(l)}$，$y_i^{(l)}\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(l)}=1(i=1,\cdots,n)$，则在下一时刻 $l+1$ 处于状态 S_j 的概率等于 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(l)} p_{ij}$. 记 $\boldsymbol{y}^{(l)}=(x_1^{(l)},\cdots,x_n^{(l)})$，$\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，则有

$$\boldsymbol{y}^{(l+1)}=\boldsymbol{y}^{(l)}\boldsymbol{P}=\cdots=\boldsymbol{y}^{(0)}\boldsymbol{P}^{l+1}\quad(l=0,1,2,\cdots).$$

上述方阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 显然是 n 阶随机方阵，称为该齐次马尔可夫链的转移(概率)矩阵.

本节均设 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 是 n 阶随机方阵，显然有等式 $\boldsymbol{Pe}=\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 为元素都是 1 的列向量. 所以 $\boldsymbol{P}$ 有特征值 1，且 $\boldsymbol{e}$ 是属于特征值 1 的特征向量. 再由定理 6.11 与定理 6.12，可知 $\rho(\boldsymbol{P})\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{(\boldsymbol{Pe})_i}{1}=1$，从而 $\rho(\boldsymbol{P})=1$. 进一步，还可以证明：

定理 6.13 随机方阵 $\boldsymbol{P}$ 的任一模为 1 的特征值所属的 Jordan 块都是 1 阶的.

证 设 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的特征值，现证 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 所属的 Jordan 块都是 1 阶的. 若 $\boldsymbol{P}$ 不可约，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 1 一样，是 $\boldsymbol{P}$ 的单根，结论显然成立. 一般地，由定理 6.12，可知 $\boldsymbol{P}$ 的置换相似标准形是

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}
\boldsymbol{P}_1 & & \boldsymbol{0} & & & \\
& \ddots & & & \boldsymbol{0} & \\
\boldsymbol{0} & & \boldsymbol{P}_g & & & \\
\hdashline
& & & \boldsymbol{P}_{g+1} & & \boldsymbol{0} \\
& * & & & \ddots & \\
& & & * & & \boldsymbol{P}_p
\end{array}\right),$$

其中 $\rho(\boldsymbol{P}_j)<1(j=g+1,\cdots,p)$，而 $\rho(\boldsymbol{P}_1)=\cdots=\rho(\boldsymbol{P}_g)=1$，且 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_g$ 都是不可约的随机方阵. 不妨设 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_g$ 中某 $g'(1\leqslant g'\leqslant g)$ 个方阵的特征值，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是这 g' 个方阵的单根，从而 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 可相似于

$$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{P}}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{I}_{g'} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 不是 $\boldsymbol{Y}$ 的特征值. 由第 2 讲定理 2.2 的推论 2.2 可知 $\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{P}}}$ 相似于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{I}_{g'}\oplus\boldsymbol{Y}$，从而定理得证. □

定理 6.13 不难作如下推广：

定理 6.13′　设非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $r=\rho(\boldsymbol{A})>0$，且有正特征向量与 r 相应，则 $\boldsymbol{A}/r$ 相似于随机方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的任一模为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值所属的 Jordan 块都是 1 阶的.

证　设 $\boldsymbol{Ax}=r\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(x_1,\cdots,x_n)>0$. 令 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$，则 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX}$ 的第 i 行元素的和等于

$$\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=r,$$

所以 $\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{A}/r)\boldsymbol{X}$ 是随机方阵. $\boldsymbol{A}$ 的任一模为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值在 $\boldsymbol{A}$ 中所属 Jordan 块的阶，和 $\boldsymbol{A}/r$，从而和随机方阵 $\boldsymbol{X}^{-1}(A/r)\boldsymbol{X}$ 的模为 1 的特征值在其 Jordan 标准形中所属的 Jordan 块的阶一样，必为 1. □

最后再讨论 $l\to\infty$ 时 $\boldsymbol{P}^l$ 的极限，这个问题有鲜明的概率意义：若将 $\boldsymbol{P}$ 看作齐次马尔可夫链的转移矩阵，则有 $\boldsymbol{y}^{(l)}=\boldsymbol{y}^{(0)}\boldsymbol{P}^l$，这里 $\boldsymbol{y}^{(l)}=(y_1^{(l)},\cdots,y_n^{(l)})$，$y_j^{(l)}$ 是系统在时刻 l 处于状态 S_j 的概率. 假如 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l$ 存在，则易知 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{y}^{(l)}$ 也存在，它表示这个系统对 n 种状态 $S_1,\cdots,S_n$ 的极限概率分布. 利用前面的知识，不难证明下述结论：

定理 6.14　设 $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶随机方阵，则：

(1) $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l$ 存在当且仅当 $\boldsymbol{P}$ 的模为 1 的特征值仅有 1. 若记 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^{\infty}$，则 $\boldsymbol{P}^{\infty}$ 也是随机方阵，而且 $\boldsymbol{P}^l\boldsymbol{P}^{\infty}=\boldsymbol{P}^{\infty}\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^{\infty}$ 对所有正整数 l 都成立.

(2) 记 $\boldsymbol{y}^{(0)}=(y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})\geqslant 0$，$\boldsymbol{y}^{(l)}=\boldsymbol{y}^{(0)}\boldsymbol{P}^l$，其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{(0)}=1$. 若 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^{\infty}$ 存在，则 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{y}^{(l)}=\boldsymbol{y}^{(\infty)}$ 存在. 在 $\boldsymbol{P}^{\infty}$ 存在的前提下，$\boldsymbol{y}^{(\infty)}$ 与 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 的选取无关当且仅当 1 是 $\boldsymbol{P}$ 的单根.

(3) 设 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^{\infty}$ 存在，则 $\boldsymbol{y}^{(\infty)}$ 是与 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 的选取无关的正向量当且仅当 $\boldsymbol{P}$ 不可约. 在 $\boldsymbol{P}^{\infty}$ 存在的前提下，$\boldsymbol{P}$ 不可约当且仅当 $\boldsymbol{P}$ 是本原的，这时 $\boldsymbol{P}^{\infty}>0$，且 $\boldsymbol{P}$ 的同一列上的元素彼此相等.

证 (1) 因为对任意一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 来说，$\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{A}^l$ 存在当且仅当 $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant 1$，而且模为 1 的特征值只可能是 1. 同时，对应于 1 的 Jordan 块一定是 1 阶的(参看第 1 讲 1.2 节的例 1.3). 由定理 6.13 即得 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l$ 存在的充要条件，且易知 $\boldsymbol{P}^\infty$ 也是随机方阵.

再在等式 $\boldsymbol{P}^l\boldsymbol{P}^m=\boldsymbol{P}^m\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^{l+m}$ 中令 $m\to\infty$，即得

$$\boldsymbol{P}^l\boldsymbol{P}^\infty=\boldsymbol{P}^\infty\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^\infty\quad(l=1,2,\cdots).$$

(2) 若 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^\infty$ 存在，则

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{y}^{(l)}=\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{y}^{(0)}\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{y}^{(0)}\boldsymbol{P}^\infty$$

必存在，记为 $\boldsymbol{y}^{(\infty)}$. 现设 $\boldsymbol{P}^\infty$ 存在. 令 $\boldsymbol{P}$ 的置换相似标准形是

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}\boldsymbol{P}_1 & & \boldsymbol{0} & & & \\ & \ddots & & & \boldsymbol{0} & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{P}_g & & & \\ \hdashline & & & \boldsymbol{P}_{g+1} & & \boldsymbol{0} \\ & * & & & \ddots & \\ & & & * & & \boldsymbol{P}_p\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}\boldsymbol{P}_1 & & \boldsymbol{0} & \\ & \ddots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{P}_g & \\ \hdashline & \boldsymbol{U} & & \boldsymbol{W}\end{array}\right),$$

其中 $\rho(\boldsymbol{P}_j)<1(j=g+1,\cdots,p)$，而 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_g$ 都是不可约的随机方阵，则 $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^\infty$ 存在$\Leftrightarrow\lim\limits_{l\to\infty}\widetilde{\boldsymbol{P}}^l=\widetilde{\boldsymbol{P}}^{(\infty)}$ 存在. 另外，

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}^l=\left(\begin{array}{ccc:c}\boldsymbol{P}_1^l & & & \\ & \ddots & & \boldsymbol{0} \\ & & \boldsymbol{P}_g^l & \\ \hdashline & \boldsymbol{U}^l & & \boldsymbol{W}^l\end{array}\right)\Rightarrow\widetilde{\boldsymbol{P}}^{(\infty)}=\left(\begin{array}{ccc:c}\boldsymbol{P}_1^\infty & & \boldsymbol{0} & \\ & \ddots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{P}_g^\infty & \\ \hdashline & \boldsymbol{U}^\infty & & \boldsymbol{0}\end{array}\right),$$

$\boldsymbol{y}^{(0)}\boldsymbol{P}^\infty$ 与 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 的选取无关$\Leftrightarrow\boldsymbol{y}^{(0)}\widetilde{\boldsymbol{P}}^\infty$ 与 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 的选取无关. 由此不难证明 $\boldsymbol{y}^{(0)}\widetilde{\boldsymbol{P}}^\infty$ 与 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 的选取无关，必须有 $g=1$，即 1 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 的单根，从而是 $\boldsymbol{P}$ 的单根. 反之，若 1 是 $\boldsymbol{P}$ 的单根，则由 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\infty=\boldsymbol{P}^\infty$ 可知，$\boldsymbol{P}^\infty$ 的每一非零列作为列向量看待，都是 $\boldsymbol{P}$ 的与 1 相应的非负特征向量，从而是 $\boldsymbol{e}$ 的正数倍. 记 $\boldsymbol{P}^\infty$ 的第 j 列元素都是 b_j，$b_j\geqslant 0$，$\sum\limits_{j=1}^{n}b_j=1$，则 $\boldsymbol{y}^{(\infty)}=\boldsymbol{y}^{(0)}\boldsymbol{P}^\infty=(b_1,\cdots,b_n)$ 与 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 的选取无关.

(3) 设 $\boldsymbol{P}^\infty$ 存在. 则由(2)及其证明可知，$\boldsymbol{y}^{(\infty)}$ 是与 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 的选取无关的正向量$\Leftrightarrow$在 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 中 $g=1$，且 $g=p\Leftrightarrow\boldsymbol{P}$ 不可约. 而 $\boldsymbol{P}$ 不可约且 $\boldsymbol{P}$ 的模为 1 的特征值只有 $1\Leftrightarrow\boldsymbol{P}$ 是本原的.

而当 $\boldsymbol{P}$ 本原时，只要 l 适当大，就有 $\boldsymbol{P}^l>0$. 再结合等式 $\boldsymbol{P}^\infty=\boldsymbol{P}^\infty\boldsymbol{P}^l$ 即得 $\boldsymbol{P}^\infty>0$. 而从等式 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^\infty=\boldsymbol{P}^\infty$，又可知 $\boldsymbol{P}^\infty$ 的每一列都是 $\boldsymbol{e}$ 的正数倍. □

6.8 M 方 阵

在很多问题中都会出现主对角线外的元素都非正的实方阵，即方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}\leqslant 0$. 由于这种 $\boldsymbol{A}$ 一定可以表示为 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}\geqslant 0, s>0$（例如，取 s 为大于 $a_{11},\cdots,a_{nn}$ 的正数即可），所以这种方阵自然会与非负方阵密切相关. 本节讨论其中重要的一类，文献上称为 Minkowski 方阵，通常简称 M 方阵.

定义 6.4　实方阵 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 称为 M 方阵，如果 $\boldsymbol{B}\geqslant 0, s>\rho(\boldsymbol{B})$.

易知在上述定义中，$\boldsymbol{A}$ 是否是 M 方阵与实数 s 和非负方阵 $\boldsymbol{B}$ 的不同选取无关. M 方阵有很多等价的特征刻画，下面先证明四种.

定理 6.15　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，且当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}\leqslant 0$，则下列四种性质是互相等价的：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是 M 方阵；

(2) $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$；

(3) 存在列向量 $\boldsymbol{f}>0$，使 $\boldsymbol{Af}>0$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 的实部 $\mathrm{Re}\lambda>0$.

证　(1)⇒(2). 按定义，$\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\geqslant 0, s>\rho(\boldsymbol{B})$. 由 6.6 节的引理 6.3 即知 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 存在，而且是非负的.

(2)⇒(3). 仍记 $\boldsymbol{e}$ 为全 1 的列向量，则由 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$，可知 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}>0$ 即为所求.

(3)⇒(4). 记 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}, s>0, \boldsymbol{B}\geqslant 0$. 若有 $\boldsymbol{f}>0$ 使 $\boldsymbol{Af}>0$，则 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{f}>0$，即 $s\boldsymbol{f}>\boldsymbol{Bf}$. 在不等式两边同时左乘 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的与 $\rho(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\rho(\boldsymbol{B})$ 相应的非负特征向量 $\boldsymbol{x}$ 的转置行向量 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 后，得 $s\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}>\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bf}=\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$，从而 $s>\rho(\boldsymbol{B})$. 由此即得 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 的所有特征值的实部都是正数.

(4)⇒(1). 记 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\geqslant 0$，则 $s-\rho(\boldsymbol{B})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 从而 $s-\rho(\boldsymbol{B})=\mathrm{Re}(s-\rho(\boldsymbol{B}))>0$. □

对于一个主对角线外的元素都非正的实方阵，可以通过各种性质来给出它是 M 方阵的充要条件，现在已知的刻画有 50 多种. 除定理 6.15 所说的四种外，这里再补充证明两种.

定理 6.15′　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，且当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}\leqslant 0$，则下列两种性质都和“$\boldsymbol{A}$ 是 M 方阵”是互相等价的：

(5) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式都大于零，即对所有的 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有 $\det[i_1,\cdots,i_k\mid i_1,\cdots,i_k]>0$.

(6) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式都大于零，即对 $k=1,\cdots,n$，有 $\det[1,\cdots,k\mid 1,\cdots,k]>0$.

证 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 M 方阵，去证(5). 记 $\mathrm{Spec}\boldsymbol{A}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 由定理 6.15 可知，其中任一实的 λ_j 一定大于零；而对非实数的 $\lambda_j,\bar{\lambda}_j$ 也是特征值. 所以

$$\det\boldsymbol{A}=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\geqslant 0.$$

再由 $\boldsymbol{A}$ 可逆即得 $\det\boldsymbol{A}>0$.

另外，$\boldsymbol{A}$ 的任一主子方阵 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid i_1,\cdots,i_k]$ 也一定是 M 方阵：$\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\geqslant 0,s>\rho(\boldsymbol{B})\Rightarrow\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid i_1,\cdots,i_k]=s\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{B}[i_1,\cdots,i_k\mid i_1,\cdots,i_k]$，$\boldsymbol{B}[i_1,\cdots,i_k\mid i_1,\cdots,i_k]\geqslant 0$，$s>\rho(\boldsymbol{B})\geqslant\rho(\boldsymbol{B}[i_1,\cdots,i_k\mid i_1,\cdots,i_k])$. 所以 $\det\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k\mid i_1,\cdots,i_k]>0$.

(5)⇒(6). 显然成立.

现设(6)成立，去证 $\boldsymbol{A}$ 是 M 方阵.

对 n 作归纳论证. 当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}=(a_{11})$，$(6)\Leftrightarrow a_{11}>0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 是 M 方阵. 假设结论对 $n-1$ 阶方阵成立，则 $\boldsymbol{A}_{n-1}=\boldsymbol{A}[1,\cdots,n-1\mid 1,\cdots,n-1]$ 是 M 方阵，从而 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是可逆的，且 $\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\geqslant 0$. 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1}&\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}&a_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}&\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}&1\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}&\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}&a_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}&\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{0}&a_{nn}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{x}\end{pmatrix}.$$

记 $\beta=a_{nn}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{x}$，则 $\beta=\det(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{BA})=\det\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\det\boldsymbol{A}>0$. 再令

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}&-\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{x}\beta^{-1}\\ \boldsymbol{0}&\beta^{-1}\end{pmatrix},$$

即得 $\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，或 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}$. 由于 $\boldsymbol{x}\leqslant 0,\boldsymbol{y}\leqslant 0$，所以 $\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是非负的，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$，$\boldsymbol{A}$ 是 M 方阵. □

可以利用上述 M 方阵的几种等价刻画给出非负方阵的特征值的最大模的上界.

推论 6.9 设 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶非负方阵，s 是正数，则下列四种性质是互相等价的：

(1) $s>\rho(\boldsymbol{B})$；

(2) $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 是 M 方阵；

(3) $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\geqslant 0$;

(4) $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})[1,\cdots,k\,|\,1,\cdots,k]>0(k=1,\cdots,n)$. □

例 6.7　设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\\2&3&2\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{B}$ 的三个行的和分别是 6,8,7. 从而 $6\leqslant\rho(\boldsymbol{B})\leqslant 8$. 但可算出 $\det(7\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=-8$, 从而可进一步得知 $\rho(\boldsymbol{B})>7$. □

6.9　布 尔 方 阵

在前面的 6.2 节和 6.5 节已知知道，非负方阵的不可约性和本原性都是方阵的所谓组合性质，它们都是由方阵的正零元的分布模式，简称零位模式所完全确定，而与正元的具体数值无关. 我们是通过忠实记录了这种零位模式的有向图及随之引入的一套形象的图论语言来对此研讨的. 注意到，如果只是为了忠实记录一个非负方阵的零位模式，则只要把正元都改成 1 得到(0,1)方阵就足够了. 但在数域上，(0,1)方阵经加法或乘法运算后都不一定仍是(0,1)方阵，从而这种记录也就难以发挥除记录外的更多作用. 这种状况将在二元集{0,1}上规定布尔运算，从而把(0,1)方阵当成二元布尔方阵后得到改善. 现在布尔矩阵在数学和其他学科分支上的应用相当广泛，这里并不试图作全面介绍，有意了解更多的读者可参看 K. H. Kim 的专著《Boolean Matrix Theory and Applications》(New York: Marced Derrer, 1982). 我们主要讨论由布尔方阵的各次幂所构成的方阵序列所蕴涵的组合性质，它们是非负方阵本原性的自然拓展. 从 20 世纪 60 年代以来，随着对本原方阵指数的研究而引起对这个课题的研究，一度相当活跃，而且其中大量进展都是我国学者的成果. 本节先比较详细地阐明有关的基本概念和性质，再简单介绍这个方向上的研究内容和进展，想更深入地具体了解的读者可参看李乔和邵嘉裕的综述论文《The Index Set Problem for Boolean (or Nonnegative) Matrices》(Discrete Math, 1993(123): 75～92). 我们将会看到，在布尔方阵这个新平台上，可以进一步展现非负方阵更多有意义的新性质.

6.9.1 定义和基本性质

设在二元集{0,1}上规定如下的所谓布尔加法和乘法运算:0,1 的加法和乘法如同十进制数 0,1,但特别规定 $1+1=1$. 如此得到的代数结构形成环,通常称为二元布尔环(binary Boolean ring),记为 B. B 上的矩阵称为布尔矩阵(Boolean matrix),所有 n 阶布尔方阵的集合记为 B_n,这时 B_n 对方阵的加法和乘法运算构成含乘法单位元 $\boldsymbol{I}_n$ 的环,其中对乘法运算构成含单位元 $\boldsymbol{I}_n$ 的半群.

首先注意到,一个布尔方阵 $\boldsymbol{B}$ 可以像在 6.4 节中所定义的那样,自然确定一个有向图 $D(\boldsymbol{B})$,并定义 $\boldsymbol{B}$ 的不可约性,以及用 $D(\boldsymbol{B})$的强连通性来刻画 $\boldsymbol{B}$ 的不可约性. 对于非负方阵 $\boldsymbol{A}$,把 $\boldsymbol{A}$ 中所有正元都改成 1 后所得的布尔方阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的零位模式布尔阵,记成 $\beta(\boldsymbol{A})$. 对两个 n 阶非负方阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 来说,易证

$$\beta(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)=\beta(\boldsymbol{A}_1)+\beta(\boldsymbol{A}_2),\quad \beta(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)=\beta(\boldsymbol{A}_1)\beta(\boldsymbol{A}_2),$$

其中等号左边出现的是数域上的方阵加法和乘法运算,而等号右边出现的则是 B_n 中的加法和乘法运算. 所以 $\beta(\boldsymbol{A})$不仅忠实记录了 $\boldsymbol{A}$ 的零位模式,还保留住了非负方阵中非负元的运算特性:这时的布尔运算"1+1=1"正好反映了"正数+正数=正数"的性质. 由此可知,$\boldsymbol{A}$ 是正元方阵$\Leftrightarrow\beta(\boldsymbol{A})$是全 1 布尔方阵;从而 $n>1$ 阶不可约布尔方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为本原的$\Leftrightarrow$有正整数 m,使得 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{J}$(元素全为 1 的方阵),非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原的$\Leftrightarrow$布尔方阵 $\beta(\boldsymbol{A})$是本原的.

再注意到 B_n 对乘法构成的半群的阶,即元素个数是 2^{n^2},从而对任一 $\boldsymbol{B}\in B_n$,其幂序列 $\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{I},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^2,\cdots$显然构成乘法半群 B_n 的一个有限子半群$\langle\boldsymbol{B}\rangle$. 由 B_n 的有限性可知,$\boldsymbol{B}$ 的幂序列中一定有重复出现的项,从而一定有最小的非负整数 $R=R(\boldsymbol{B})$,使得等式 $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{B}^{k+t}$对某一正整数 t 成立. 对于如此定义的 k,又一定有最小的正整数 $p=p(\boldsymbol{B})$,使得等式 $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{B}^{k+p}$成立. $R(\boldsymbol{B})$和 $p(\boldsymbol{B})$分别称为布尔方阵 $\boldsymbol{B}$ 的收敛指数和收敛周期.

例 6.8 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$阶本原非负方阵. 由 $\boldsymbol{A}$ 确定的布尔方阵 $\boldsymbol{B}=\beta(\boldsymbol{A})$. 则 $\boldsymbol{B}$ 的幂序 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^2,\cdots$中,当 $m\geqslant k(\geqslant 1)$时,$\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{J}$,这里的 $R=R(\boldsymbol{B})$是 $\boldsymbol{B}$ 的收敛指数,它正是 $\boldsymbol{A}$ 的本原指数 $\gamma(\boldsymbol{A})$,而易知 $\boldsymbol{B}$ 的收敛周期 $p=p(\boldsymbol{B})=1$. 因此布尔方阵的收敛指数是本原指数的拓广.

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$的幂序列是

$$\boldsymbol{I},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{J},\cdots.$$

从而有 $R(\boldsymbol{B})=0, p(\boldsymbol{B})=3$；而且 $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2\}$ 是 3 阶循环群(后一结论在一般情形下也成立). □

下面讨论布尔方阵幂序列的基本性质.

设 $\boldsymbol{B}\in B_n$ 的收敛指数是 k，收敛周期是 p，则 $\boldsymbol{B}$ 的幂序列形如 $\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{B}^k, \boldsymbol{B}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{B}^{k+p-1}, \boldsymbol{B}^{k+p}=\boldsymbol{B}^k, \cdots$，其中前 $k+p$ 个方阵 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{B}^{k+p-1}$ 两两不同，从而构成 $k+p$ 阶乘法半群，而且子集 $\{\boldsymbol{B}^k, \boldsymbol{B}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{B}^{k+p-1}\}$ 构成乘法循环群，$\boldsymbol{B}^{e+1}$ 是循环群的生成元，$\boldsymbol{B}^e$ 是单位元，这里的 e 是满足 $k\leqslant e\leqslant k+p-1$，且 $e=0(\mathrm{mod}\ p)$ 的唯一整数.

证　先证当 $k\leqslant i<j\leqslant k+p-1$ 时，$\boldsymbol{B}^i\neq\boldsymbol{B}^j$. 当 $i\leqslant k$ 时，这由 k 和 p 的定义可知；而当 $k<i<j\leqslant k+p-1$ 时，

$$\boldsymbol{B}^i=\boldsymbol{B}^j \Rightarrow \boldsymbol{B}^i\boldsymbol{B}^{k+p-j}=\boldsymbol{B}^j\boldsymbol{B}^{k+p-j}=\boldsymbol{B}^k.$$

但 $\boldsymbol{B}^i\boldsymbol{B}^{k+p-j}=\boldsymbol{B}^{k+(p-j+i)}$，而正整数 $t=p-j+i<p$，即有 $\boldsymbol{B}^{k+t}=\boldsymbol{B}^k$. 这与 p 的定义矛盾.

再证 $\{\boldsymbol{B}^k, \boldsymbol{B}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{B}^{k+p-1}\}$ 是 p 阶循环群. 根据整数 e 的定义，易知对任一 $j(k\leqslant j\leqslant k+p-1)$，有 $\boldsymbol{B}^j\boldsymbol{B}^e=\boldsymbol{B}^j$. 再设 $\boldsymbol{B}^{e+1}=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{B}^{e+1}\boldsymbol{B}^{e+1}=\boldsymbol{B}^{e+2}, \cdots, \boldsymbol{C}^{p-1}=\boldsymbol{B}^{e+p-1}, \boldsymbol{C}^p=\boldsymbol{B}^{e+p}=\boldsymbol{B}^e$. 因此 $\{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}^2, \cdots, \boldsymbol{C}^{p-1}, \boldsymbol{C}^p\}=\{\boldsymbol{B}^k, \boldsymbol{B}^{k+1}, \cdots, \boldsymbol{B}^{k+p-1}\}$ 是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^{e+1}$ 生成的 p 阶循环群. □

基本性质展示了布尔方阵 $\boldsymbol{B}$ 的幂序列的总体构造：它由 $\boldsymbol{B}$ 的收敛指数 $R=R(\boldsymbol{B})$ 和收敛周期 $p=p(\boldsymbol{B})$ 这两个参数确定. 而 Rosenblatt 在 1957 年就给出了收敛周期的如下组合性刻画：

定理 6.16　设 $\boldsymbol{B}$ 是 $n(>1)$ 阶布尔方阵，则：

(1) 当 $\boldsymbol{B}$ 不可约时，其收敛周期 $p(\boldsymbol{B})$ 等于 $\boldsymbol{B}$ 的确定的有向图 $D(\boldsymbol{B})$ 的回路性指标，即 $D(\boldsymbol{B})$ 中的所有回路长度的最大公因数；

(2) 当 $\boldsymbol{B}$ 可约时，记 $D(\boldsymbol{B})$ 有 $m(>1)$ 个强连通分支 $D(\boldsymbol{B}_1), \cdots, D(\boldsymbol{B}_m)$，则 $p(\boldsymbol{B})$ 等于 $p(\boldsymbol{B}_1), \cdots, p(\boldsymbol{B}_m)$ 的最小公倍数. □

结合 6.4 节的定理 6.7 以及对本原性的讨论，即可得：

推论 6.10　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$ 阶不可约非负方阵，$\boldsymbol{B}=\beta(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的零位模式布尔阵. 则 $\boldsymbol{A}$ 的非本原性指标 $p(\boldsymbol{A})$ 等于 $\boldsymbol{B}$ 的收敛周期 $p(\boldsymbol{B})$；而且 $\boldsymbol{A}$ 是本原阵 $\Leftrightarrow p(\boldsymbol{B})=1$，当 $\boldsymbol{A}$ 本原时，$\boldsymbol{A}$ 的本原指数 $a(\boldsymbol{A})$ 等于 B 的收敛指数 $k(\boldsymbol{B})$. □

注　通常假设方阵的阶 $n>1$，主要为了避免对 $n=1$ 时的平凡情形可能出现的例外，再另作说明. 从这里开始，以后凡提到 n 阶方阵或 B_n 都设 $n>1$，不再写出.

从上述讨论可以知道，非负方阵的组合性质可以体现在其零位模式布尔阵上；反过来，布尔方阵的性质也都可以解释成以它为零位模式的所有非负方阵的共同性质. 例如布尔方阵的收敛指数，它就可以看成是本原非负方阵的本原指数在一般

非负方阵上的推广：我们可以定义一个非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 的收敛指数为其零位模式布尔阵 $\beta(\boldsymbol{A})$ 的收敛指数. 以下将布尔方阵的收敛指数简称为指数，对本原布尔方阵来说，其指数自然就是本原指数. 另外，提及的方阵都是布尔方阵，通常也将略去作为定理的“布尔”二字.

对方阵指数的研究几乎是与对本原非负方阵的指数研究同步展开的. 初期主要关注 n 阶方阵指数的上界，后来拓展到更深入地研究给定的 n 阶方阵类的指数分布情况，简称指数集问题. 本节下一部分将具体阐述这个问题及与此相关的代表性成果.

6.9.2 指数集问题及相关研究

指数集问题：对 B_n 的给定子集 B_1，确定 B_1 中方阵的指数所组成的集 $S_1(B_1) \triangleq \{k(\boldsymbol{B}) \mid \boldsymbol{B} \in B_1 \subseteq B_n\}$.

20 世纪在本原方阵和一般方阵的指数集问题上都取得了不少出色成果. 下面将从本原、不可约和可约方阵三个方面作简略介绍.

1. 本原方阵

记 P_n 是 B_n 中本原方阵的集合. 本原方阵的指数集问题是：对 P_n 的给定子集，确定 P 中方阵的指数集 $S_1(P) = \{k(\boldsymbol{B}) \mid \boldsymbol{B} \in P \subseteq P_n\}$. 当 $P = P_n$ 时，$S_1(P)$ 正是在 6.5 节最后所说的本原指数集 $E(n)$. 历经 M. Hewin 和 Y. Vitek，邵嘉裕、张克民等的工作，最终在 1987 年完全确定了本原指数集 $E(n)$.

当 P 是对角线上恰有 d 个 1 的 n 阶创本原方阵集合时，记 $S_1(P) = E(n,d)$. 邵嘉裕、柳柏谦等的工作完全确定了 $E(n,d)$：$E(n,n) = \{1,\cdots,n-1\}$；当 $1 \leqslant d < n$ 时，$E(n,d) = \{2,\cdots,2n-d-1\}$；而当 $n \geqslant 4$ 时，$E(n,0) = E(n)$.

当 P 是 n 阶对称本原方阵集合时，记 $S_1(P) = SE(n)$. 邵嘉裕证明了：$SE(n) = \{1,2,\cdots,2n-3\} \setminus X$，这里的 X 是 n 和 $2n-2$ 之间所有奇数构成的集；后来，柳柏谦、Mckay、Wormald 和张克民又进一步证明了：当 P 是对角线上都是零元的 n 阶对称本原方阵集合时，指数集 $S_1(P) = \{2,3,\cdots,2n-4\} \setminus Y$，这里的 Y 是 $n-2$ 和 $2n-5$ 之间所有奇数构成的集合.

2. 不可约方阵

记 $B_{1,n,p}(n>1, n \geqslant p \geqslant l)$ 是 B_n 中的收敛周期是 p 的不可约方阵构成的集合. 注意到 $B_{1,n,l}$ 正是 P_n，因此 $S_1(B_{1,n,l}) = E(n)$. 和研究大多数指数集问题一样，在开始研究指数集 $S_1(B_{1,n,p})$ 之前，人们首先关注的是集合的上界，特别希望能确定这个指数集的最大值 $\overline{R}(n,p) = \max\{R(\boldsymbol{B}) \mid \boldsymbol{B} \in B_{1,n,p}\}$. 邵嘉裕和李乔解决了这个最大值问题. 他们证明了：$\overline{R}(n,p) = p^{w_r} + s$，其中 $r = [n/p]$，$n = rp + s$；且当 $r>1$ 时，$w_r = r^2 - 2r + 2$，$w_1 = 0$.

他们还刻画了 $B_{1,n,p}$ 中的指数等于 $\bar{R}(n,p)$ 的极阵.

在邵和李的工作基础上,吴小军最终完全确定了指数集:

$$S_1(B_{1,n,p}) = I_1(n,p) \cup I_2(n,p),$$

其中

$$I_1(n,p) = \{0,1,2,\cdots,p\}\left\{\left[\frac{1}{2}(r^2-2r+4)\right]+s\right\}.$$

$$I_2(n,p) = \bigcup_{\substack{n\geqslant r_1>r_2\geqslant 4p\\ r+r_2\geqslant(r+3)p\\ \gcd\{r_1,r_2\}=p}} \left\{r_2\left(\frac{r_1}{p}-1\right),\cdots,r_2\left(\frac{r_1}{p}-2\right)+n\right\}. \qquad \square$$

3. 可约方阵

记 $B_{R,n}$ 是 B_n 中可约方阵的集合,邵嘉裕和蒋志明理清了指数集 $S_1(B_{R,n})$ 和 $S_1(B_n)$ 的关系,借助 $S_1(P_n)=E(n)$ 可表示成

$$S_1(B_n) = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1}\bigcup_{j=0}^{i}(E(n-i)+j)\right)\cup\{0\},$$

$$S_1(B_{R,n}) = S_1(B_n)\cup E(n),$$

其中 $E(n-i)+j=\{a+j \mid a\in E(n-i)\}$.

邵嘉裕还证明了 $S_1(B_{R,n})$ 的最大值是 $(n-2)^2+2(n\geqslant 4)$,并刻画了达到此最大值的极阵是下列方阵 $\boldsymbol{R}_n$ 的置换相似类:

$$\boldsymbol{R}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ & 0 & 1 & & 0 & 0\\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & 0 & \ddots & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以上研究的主要手段是有向图,再辅以初等数论的细微分析.当然,布尔方阵有兴趣的内容并非只有其幂序列,而布尔方阵幂序列有兴趣的内容也不仅仅只有其收敛指数和收敛周期.例如,在幂序列 $\{\boldsymbol{B}^j\}$ 中,各次幂 $\boldsymbol{B}^j$ 中 1 的个数 $\sigma(\boldsymbol{B}^j)$ 就值得研究,对此也确实得到一些结果,这里就不具体讨论了.

总之,通过布尔方阵有助于了解和研究非负方阵,而布尔方阵又等价于有向图,后者显然有很广的应用空间.从这个角度来看,布尔方阵也有充分的可能发展空间.

练　　习

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶非负方阵. 证明：

(1) 若 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}>0$，则对任一正整数 m，有 $\boldsymbol{A}^m-\boldsymbol{B}^m>0$；

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正元位置分布相同，则有正数 α,β，使得 $\alpha\boldsymbol{B}\leqslant\boldsymbol{A}\leqslant\beta\boldsymbol{B}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$ 阶不可约非负方阵，$\boldsymbol{A}$ 有 n_0 个零特征值，有 R 个恒等于 $p(\boldsymbol{A})$ 的特征值. 证明：$R\mid(n-n_0)$. 特别当 $\boldsymbol{A}$ 非奇异且 n 是素数时，或有 $R=1$，或有 $R=n$.

3. 一个 $n(>1)$ 阶不可约方阵中最多有多少个零元？

4. 对 $n>1$，记 $f(m)=\max\limits_{m}\{m\mid$零元个数$\leqslant m$ 的任一 n 阶方阵必不可约$\}$. 求 $f(n)$. (提示：$f(n)=n-2$.)

5. 两个 $n(>1)$ 阶不可约非负方阵的和是否一定不可约？其积又如何？

6. 求下列方阵的置换相似(同定理 6.5 所说的)标准形：

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&3\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&4&0&0&0\\5&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

7. 定理 6.6 的证明中最后一步推理为什么成立？

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n(>1)$ 阶不可约非负方阵，并满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的 Perron 向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的 Perron 向量.

9. 把 6.4 节例 6.4 中方阵 $\boldsymbol{A}$ 的(1,1)位元 0 改成 1 后所得的方阵记为 $\boldsymbol{B}$. 证明 $\gamma(\boldsymbol{B})\leqslant(n-1)^2$.

10. 利用第 6 题的结论证明：若 n 阶本原方阵 $\boldsymbol{B}$ 的本原指数 $\gamma(\boldsymbol{B})=(n-1)^2$，则 $\boldsymbol{B}$ 相似于 6.4 节例 6.4 中的 $\boldsymbol{A}$，即有向图 $D(\boldsymbol{B})$ 同构于 $D(\boldsymbol{A})$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是非负方阵. 证明：

$$\rho\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)\geqslant\rho(\boldsymbol{A}),$$

且其等号成立的充要条件是有列向量 $\boldsymbol{x}\geqslant0$，使得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是非负方阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是属于 λ 的特征向量. 若 $\boldsymbol{x}$ 可以分块成

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(1)}\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}^{(2)}\leqslant 0,$$

再把 $\boldsymbol{A}$ 分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{22}$ 是方阵，阶数分别与 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}$ 的行数相同. 证明：$\lambda\leqslant\min\{\rho(\boldsymbol{A}_{11}),\rho(\boldsymbol{A}_{22})\}$.

13. 设

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}^{(0)}=\left(\frac{1}{q},\frac{1}{3},\frac{5}{9}\right).$$

求 $\boldsymbol{P}^{\infty}$ 和 $\boldsymbol{y}^{\infty}$.

14. 记 $Z(n)$ 是主对角线外元素都非负的 n 阶实方阵的集合，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in Z(n)$. 判断下列结论的真伪，并给出相应的证明或反例：

(1) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶 M 方阵$\Rightarrow\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是 M 方阵；

(2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶 M 方阵且 $\boldsymbol{AB}\in Z(n)\Rightarrow\boldsymbol{AB}$ 是 M 方阵；

(3) $\boldsymbol{A}$ 是 M 方阵，$\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}$ 是 M 方阵；

(4) $\boldsymbol{A}$ 是可逆 M 方阵，$\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}^{-1}\geqslant\boldsymbol{A}^{-1}$.

15. 给出推论 6.10 的完整证明.

16. 求 6.9 节最后的 n 阶布尔方阵 $\boldsymbol{R}_n$ 的周期和指数.

第 7 讲　矩阵的组合性质

很难一般性地说究竟什么是“组合性质”，但却可以结合具体对象和问题加以研讨. 在第 6 讲中，我们对方阵的“不可约性”和“本原性”等组合性质正是这样做的，相信读者会有所领悟. 本讲将专门讨论矩阵的一些经常用到的组合性概念及有关定理. 虽然这些内容理应成为现在矩阵理论的必要基础知识，但至今在多数科书和矩阵专著中鲜有反映. 本讲是想改变这种状况的尝试.

7.1　项秩与线秩

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵[①]，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶置换方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{PAQ}$ 置换相抵. 矩阵 $\boldsymbol{PAQ}$ 实际上只是对 $\boldsymbol{A}$ 的行和列分别重新排序. 但往往在经过这种适当重新排序后，能更好地表示出原矩阵的结构，使接下去的论证或计算更加简便. 至今还没有一种好的方法来判定两个同型矩阵是否置换相抵，但我们确实知道一些在置换相抵下的不变量以及关于它们的一些很有用的定理，这是本讲前四节的内容.

由于置换相抵是一种非常特殊的相抵，所以矩阵的秩作为一般相抵下的不变量当然也是置换相抵下的不变量. 这一节要讨论矩阵在置换相抵下的两个组合性的不变量——项秩与线秩.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一行或一列统称为 $\boldsymbol{A}$ 的一条线，一些线的集合称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个(线)覆盖，如果这个集合中的线包含了 $\boldsymbol{A}$ 的所有非零元. $\boldsymbol{A}$ 的线数最小的覆盖称为最小覆盖，每个最小覆盖中的线数称为 $\boldsymbol{A}$ 的线秩(line rank)或覆盖数，记为 λ_A. 显然，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 置换相抵$\Rightarrow\lambda_A = \lambda_B$.

对偶地，$\boldsymbol{A}$ 的一组两两不共线的非零元称为一个无关元组；$\boldsymbol{A}$ 的元素个数最大的无关元组称为最大无关元组，每个最大无关元组中的元素个数称为 $\boldsymbol{A}$ 的项秩

① 这里对基域没有任何限制.

(term rank),记为 ρ_A. 显然,项秩也在置换相抵下不变.

例 7.1　记

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

则 $\lambda_{\boldsymbol{A}_j}=j=\rho_{\boldsymbol{A}_j}(j=1,2,3)$,其中 $\boldsymbol{A}_3$ 有两个最大无关元组. □

上例中矩阵的线秩与项秩相等并非偶然,这个结论对任一矩阵都成立. 在证明这个有意义的一般结论之前,先证明这个结论的一个应用广泛的特殊情形.

定理 7.1(Frobenius-König)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$m\leqslant n$,则下列性质是互相等价的:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的项秩 $\rho_{\boldsymbol{A}}<m$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的线秩 $\lambda_{\boldsymbol{A}}<m$;

(3) $\boldsymbol{A}$ 含有 $p\times q$ 的零子矩阵,其中 $1\leqslant p\leqslant m$,$1\leqslant q\leqslant n$,$p+q=n+1$.

证　(2)⇔(3)是线秩定义的直接推论. 现证(1)⇔(3).

情形 1　$m=n$.

(3)⇒(1). 设 $\boldsymbol{A}$ 有一个 $p\times q$ 的零子矩阵,$1\leqslant p\leqslant m$,$1\leqslant q\leqslant n$,$p+q=n+1$,则这个零子矩阵所在的 p 行至多只有 $n-q=p-1$ 个非零列,而如果 $\rho_{\boldsymbol{A}}=m$,则在这 p 行中一定有 $\boldsymbol{A}$ 的最大无关元组中的 p 个元素,它们两两不共线,因此位于 p 个列上. 这导致矛盾. 所以 $\rho_{\boldsymbol{A}}<m$.

(1)⇒(3). 对 n 用归纳法论证. 当 $n=1$ 时,显然成立. 假设结论对小于 n 阶的方阵成立,现证对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 结论成立. 若 $\boldsymbol{A}$ 是零方阵,(3)显然成立. 设 $\boldsymbol{A}$ 有非零元 a_{ij},记 $\boldsymbol{A}(i\mid j)$ 为从 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 i 和第 j 列后余下的 $n-1$ 阶方阵. 则 $\rho_{\boldsymbol{A}}<n\Rightarrow\rho_{\boldsymbol{A}(i\mid j)}<n-1\Rightarrow\boldsymbol{A}(i\mid j)$ 有 $p_1\times q_1$ 的零子矩阵,$1\leqslant p_1,q_1\leqslant n-1$,$p_1+q_1=n$. 不妨设这个 $p_1\times q_1$ 的零子矩阵位于 $\boldsymbol{A}$ 的右上角,记

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\overbrace{}^{f}\ \overbrace{}^{n-f}\\\left(\begin{array}{cc}\boldsymbol{X}&\boldsymbol{W}\\\boldsymbol{Z}&\boldsymbol{Y}\end{array}\right)\begin{array}{l}\}e\\\}m-e\end{array}\end{array}.$$

由 $\rho_{\boldsymbol{A}}<n$,可知 $\rho_{\boldsymbol{X}}<p_1$ 或 $\rho_{\boldsymbol{Y}}<n-p_1$. 不妨设 $\rho_{\boldsymbol{X}}<p_1$. 根据归纳假设,$p_1$ 阶方阵 $\boldsymbol{X}$ 一定有 $u\times v$ 的零子矩阵,这里 $1\leqslant u,v\leqslant p_1$,$u+v=p_1+1$,$\boldsymbol{A}$ 中这个 $u\times v$ 零子矩阵所在的 u 行和 v 列,连同 $\boldsymbol{A}$ 中最右端的 $n-p_i$ 列交汇所得的是一个 $u\times(v+n-p_1)$ 的零子矩阵,其中 $u+(v+n-p_1)=n+1$. 所以(3)对 $\boldsymbol{A}$ 成立.

情形 2　$m<n$.

令

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{J} \end{pmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{J}$ 是 $(n-m)\times n$ 的全 1 矩阵. 显然 $\rho_{\boldsymbol{A}} < m \Leftrightarrow \rho\widetilde{\boldsymbol{A}} < n \Leftrightarrow \widetilde{\boldsymbol{A}}$ 有 $p\times(n-p+1)$ 的零子矩阵, $1\leqslant p\leqslant m \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 有 $p\times(n-p+1)$ 零子矩阵, $1\leqslant p\leqslant m$. □

定理 7.1 的应用很多. 下面只举一例.

非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为是双随机的, 如果 $\boldsymbol{A}$ 的每条线上的元素之和都是 1.

定理 7.2(Birkhoff) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶双随机方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个 n 阶置换方阵的凸线性组合, 即

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{t} c_i \boldsymbol{P}_i,$$

这里诸 $\boldsymbol{P}_i$ 都是 n 阶置换方阵, $c_1, \cdots, c_t$ 是正数,

$$\sum_{i=1}^{t} c_i = 1.$$

证 先证 $\rho_{\boldsymbol{A}} = n$. 若 $\rho_{\boldsymbol{A}} < n$, 则由定理 7.1 可知 $\lambda_{\boldsymbol{A}} < n$, 即可以用 $n-1$ 条线覆盖 $\boldsymbol{A}$ 的全部非零元, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的全部元素之和不超过 $n-1$, 这与 $\boldsymbol{A}$ 的全部元素之和应是 n 相矛盾.

现在对 $\boldsymbol{A}$ 的正元素的个数 a 用归纳法论证. 显然 $a\geqslant n$, 且由 $a=n$, 知 $\boldsymbol{A}$ 是置换方阵, 从而定理成立. 当 $a>n$ 时, 由 $\rho_{\boldsymbol{A}} = n$, 可知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 有由 n 个正元素组成的无关元组 $\{a_{1j_1}, \cdots, a_{nj_n}\}$. 记 $c_1 = \min\{a_{1j_1}, \cdots, a_{nj_n}\}$, 则 $0<c_1<1$. 令 $\boldsymbol{P}_1$ 是在 n 个位置 $(1,j_1), \cdots, (n,j_n)$ 处是 1 的 n 阶置换方阵, 则 $\dfrac{1}{1-c_1}(\boldsymbol{A}-c_1\boldsymbol{P}_1)$ 是双随机方阵, 但它的正元素个数少于 $\boldsymbol{A}$ 的正元素个数 a, 则由归纳假设可知

$$\frac{1}{1-c_1}(\boldsymbol{A}-c_1\boldsymbol{P}_1) = c_2'\boldsymbol{P}_2 + \cdots + c_t'\boldsymbol{P}_t,$$

这里 $c_2', \cdots, c_t' > 0$, $c_2' + \cdots + c_t' = 1$, $\boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_t$ 都是 n 阶置换方阵. 所以

$$\boldsymbol{A} = c_1\boldsymbol{P}_1 + (1-c_1)(c_2'\boldsymbol{P}_2 + \cdots + c_t'\boldsymbol{P}_t)$$

即为所求. □

推论 7.1 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素是 0 或 1, 而且 $\boldsymbol{A}$ 的每条线上正好有 k 个 1, 则 $\boldsymbol{A}$ 一定可表为 k 个 n 阶置换方阵的和.

证 和定理 7.2 一样, 可证 $\rho_{\boldsymbol{A}} = n$. 而 $\boldsymbol{A}$ 的一组 n 个无关的 1 确定了一个置换方阵 $\boldsymbol{P}_1$, 对 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}_1$, 类似讨论即得结论. □

下面证明关于项秩和线秩的主要结果:

定理 7.3(König) 任一矩阵的项秩等于线秩.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵. 首先, 可不妨设 $m\leqslant n$. 否则, 可以讨论 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 而易知 $\rho_{\boldsymbol{A}} = \rho_{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}$, $\lambda_{\boldsymbol{A}} = \lambda_{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}$.

$\lambda_A \geqslant \rho_A$ 可直接从定义推得：在 $\boldsymbol{A}$ 的一个由 λ_A 条线组成的覆盖中，必须含有 $\boldsymbol{A}$ 的 ρ_A 个无关元，但每条线中至多只能有这 ρ_A 个无关元中的一个，故 $\lambda_A \geqslant \rho_A$.

现证 $\rho_A \geqslant \lambda_A$. 首先注意到，若 $\lambda_A = m$，则由定理 7.1 可知 $\rho_A = m$. 因此只要证明 $\lambda_A < m$ 的情形. 这时，设 $\boldsymbol{A}$ 有一个由 e 行和 f 列组成的覆盖，$e + f = \lambda_A$. 可不妨假设这是前 e 行和前 f 列，将 $\boldsymbol{A}$ 分块成

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \overbrace{}^{f}\ \overbrace{}^{n-f} \\ \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{W} \\ \hline \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Y} \end{array}\right) \begin{array}{l} \}e \\ \}m-e \end{array} \end{array}.$$

易知 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$. 我们断言 $\rho_Y = e$.

若 $e = 0$，则 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$，从而 $\rho_Y = 0$.

若 $e > 0$，则首先由 $e + f = \lambda_A < m \leqslant n$，可知 $e < n - f$，从而根据定理 7.1，$\rho_Y < e \Rightarrow \lambda_Y < e$. 再由覆盖的定义以及 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$，可知 $\lambda_A < e + f$，导致矛盾. 从而断言得证.

同法可证 $\rho_Z = f$. 因 $f < m - e$，故由 $\rho_Z < f$ 得 $\rho_A < e + f$. 但显然有 $\rho_A \geqslant \rho_Y + \rho_Z$，所以 $\rho_A \geqslant e + f = \lambda_A$. □

7.2　置换相抵标准形

在第 6 讲中，我们讨论过方阵在置换相似下的分块下三角形标准形，其中关键的概念是方阵的可约性——这是方阵的一种组合性质：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为可约的，如果有 n 阶置换方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}$ 通过 $\boldsymbol{P}$ 置换相似于如下分块方阵：

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中右上角是零矩阵，$\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 都是非空（即阶数为正）的方阵. 现在把这个概念推广到置换相抵的情形，并由此求得矩阵的置换相抵标准形.

定义 7.1　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为部分可分（partly composable）的，如果当 $n > 1$ 时，有置换方阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中右上角是零矩阵，$\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 都是非空的方阵. 不是部分可分的方阵称为完全不可分（fully indecomposable）的.

注　由定义易知，当 $n > 1$ 时，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 部分可分 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 有一个 $r \times (n - r)$ 的零子矩阵，其中 $1 \leqslant r < n$；而 $\boldsymbol{A}$ 可约 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 有一个形如 $\boldsymbol{A}[i_1, \cdots, i_r \mid i_1, \cdots, i_r)$ 的零

子矩阵[①],其中 $1\leqslant r<n$.因此,若 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上没有零元,则 $\boldsymbol{A}$ 可约$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 部分可分.(注意 1 阶方阵必不可约).因为当 $n>1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的任一 $r\times(n-r)$的零子矩阵必不含主对角线上的元素,从而一定形如 $\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_r\mid i_1,\cdots,i_r)$.对一般的 $\boldsymbol{A}$,只成立 $\boldsymbol{A}$ 可约$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 部分可分,但反之不真.例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

部分可分,但不可约.此处,还不难证明:当 $n>1$ 时,n 阶完全不可分方阵的项秩是 n,但反之不真.

下面提出并证明本节的主要结果.

定理 7.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$阶方阵,其项秩 $\rho_A\neq n$,则有:

(1) $\boldsymbol{A}$ 置换相抵于如下的分块下三角形:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}\boldsymbol{A}_1&&\boldsymbol{0}&&&\\&\ddots&&&\boldsymbol{0}&\\\boldsymbol{0}&&\boldsymbol{A}_g&&&\\\hdashline\boldsymbol{A}_{g+1,1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{g+1,g}&\boldsymbol{A}_{g+1}&&\boldsymbol{0}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\\\boldsymbol{A}_{k1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{kg}&\boldsymbol{A}_{k,g+1}&&\boldsymbol{A}_k\end{array}\right),\tag{7.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_g,\boldsymbol{A}_{g+1},\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 都是非空的完全不可分方阵,而且对于 $g<q\leqslant k$,$\boldsymbol{A}_{q1},\cdots,\boldsymbol{A}_{q,q-1}$不全是零矩阵.式(7.1)称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个置换相抵标准形.

(2) 记式(7.1)中构成子方阵 $\boldsymbol{A}_j$ 的行在 $\boldsymbol{A}$ 中的标号集为 K_j,列的标号集为 L_j.虽然式(7.1)不一定由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定,但集合$\{(K_1,L_1),\cdots,(K_g,L_g)\}$与$\{(K_{g+1},L_{g+1}),\cdots,(K_k,L_k)\}$都是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的.特别地,正整数 k 和 g,分别以 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_g$ 为代表元的 g 个完全不可分方阵的置换相抵等价类的集合,以及分别以 $\boldsymbol{A}_{g+1},\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 为代表元的 $k-g$ 个完全不可分方阵的置换相抵等价类的集合都是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的.

更具体地说,若 $\boldsymbol{A}$ 又置换相抵于另一标准形

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}\widetilde{\boldsymbol{A}}_1&&\boldsymbol{0}&&&\\&\ddots&&&\boldsymbol{0}&\\\boldsymbol{0}&&\widetilde{\boldsymbol{A}}_h&&&\\\hdashline&&&\widetilde{\boldsymbol{A}}_{h+1}&&\boldsymbol{0}\\&*&&&\ddots&\\&&&*&&\widetilde{\boldsymbol{A}}_l\end{array}\right),\tag{7.2}$$

① 关于子矩阵的这种记法,可参看第 3 讲 3.1 节.

则 $k=l, g=h$；并分别有 $\{1,\cdots,g\}$ 上的置换 σ 和 $\{g+1,\cdots,k\}$ 上的置换 τ，使 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\sigma(i)}$ 和 $\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,g)$ 以及 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau(j)}$ 和 $\boldsymbol{A}_j(j=g+1,\cdots,k)$ 都是由 $\boldsymbol{A}$ 的同样的一些行和一些列所组成的.

证　注意到这里的标准形式(7.1)和第 6 讲 6.2 节的置换相似标准形的形状是完全一样的，我们将利用后者来导出前者.

因为 $\rho_{\boldsymbol{A}}=n$，所以一定有置换方阵 $\boldsymbol{P}_1$，使得 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{A}}$ 的主对角线上的 n 个元素都不是零. 由定理 6.5 再对 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 作置换相似，即取置换方阵 $\boldsymbol{P}_2$，使 $\boldsymbol{P}_2\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}$ 是 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的形如式(7.1)的置换相似标准形，其中对角块 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 都是不可约方阵. 根据前面关于方阵部分可分的定义下面的注，可知 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 都是完全不可分的，从而 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}$ 即为式(7.1)，如(1)所述.

现证(2). 首先要注意：若式(7.1)中 $k=1$，即 $\boldsymbol{A}$ 完全不可分，则 $\boldsymbol{A}$ 自身以及任意 $\boldsymbol{PAQ}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的置换相抵标准形，从而结论(2)自然成立. 现设 $k>1$，这时若 $\boldsymbol{A}$ 有另一相抵标准形式(7.2)，则一定有从式(7.1)到式(7.2)的置换相抵 φ. 我们先证明下述两个断言：

1° 式(7.1)中 $\boldsymbol{A}_1$ 所在的行和列，经 φ 作用后一定变成式(7.2)中某个 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 所在的行和列；

2° 当 $t\neq i_1$ 时，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{i_1t}$ 都是零矩阵，从而 $i_1\leqslant h$.

证　1° 记 $\boldsymbol{A}_1$ 在式(7.1)中所在的行和列的标号集是 $\{1,\cdots,n_1\}$. 则式(7.1)中的行集 $\{n_1+1,\cdots,n\}$ 和列集[①] $\{1,\cdots,n\}$ 合起来是式(7.1)的一个覆盖，经 φ 作用后，记式(7.1)中的行集 $\{n_1+1,\cdots,n\}$ 和列集 $\{1,\cdots,n_1\}$ 分别变成了式(7.2)中的行集 $\widetilde{M}$ 和列集 $\widetilde{L}$，则 $\{\widetilde{M},\widetilde{L}\}$ 也是式(7.2)的一个覆盖，在式(7.2)中，记 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_j(j=1,\cdots,l)$ 所在的行集和列集为 $\widetilde{L}_j$，则行集 $\widetilde{M}\cap\widetilde{L}_j$ 覆盖了 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_j$ 中的全部非零元，所以其线数 $|\widetilde{M}\cap\widetilde{L}_j|+|\widetilde{L}\cap\widetilde{L}_j|\geqslant\rho_{\widetilde{\boldsymbol{A}}_j}=|\widetilde{L}_j|$. 但由于

$$n=|\widetilde{M}|+|\widetilde{L}|=\sum_{j=1}^{l}(|\widetilde{M}\cap\widetilde{L}_j|+|\widetilde{L}\cap\widetilde{L}_j|)\geqslant\sum_{j=1}^{l}|\widetilde{L}_j|=n,$$

所以一定有下面的等式成立：

$$|\widetilde{M}\cap\widetilde{L}_j|+|\widetilde{L}\cap\widetilde{L}_j|=|\widetilde{L}_j|.$$

如果 $\widetilde{L}\cap\widetilde{L}_j\neq\varnothing$，则因 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_j$ 完全不可分，必须 $\widetilde{L}\cap\widetilde{L}_j=\widetilde{L}_j$，$\widetilde{M}\cap\widetilde{L}_j=\varnothing$. 因此 $\widetilde{L}$ 一定是若干 $\widetilde{L}_j$ 的并，而 $\widetilde{M}$ 则是这个并集在 $\{1,\cdots,n\}$ 中的补集 $\{1,\cdots,n\}\backslash\widetilde{L}$. 由此可知，在式(7.1)经 φ 变到式(7.2)时，$\boldsymbol{A}_1$ 所在的行和列分别变成式(7.2)中若干对角块 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 所在行的并集和列的并集. 而且假如这些对角块 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_j$ 不止一个，则 $\boldsymbol{A}_1$ 经 φ 置换相抵于有不止一个主对角方块的下三角形方阵，这与 $\boldsymbol{A}_1$ 是完全不可分方阵相

① 这里将“行的标号集”和“列的标号集”简记为“行集”和“列集”，下同.

矛盾，所以 $\widehat{L}=\widehat{L}_{i_1}$．1°证毕．

又因为在式(7.2)中，列集 $\widehat{L}_{i_1}$ 和行集 $\{1,\cdots,n\}\backslash\widehat{L}_{i_1}$ 是一个覆盖，所以 2°成立．

用同样的方法讨论 $\boldsymbol{A}_j(j=2,\cdots,g)$，可得：

1° 式(7.1)中 $\boldsymbol{A}_j$ 所在的行和列，经 φ 作用后一定变成式(7.2)中某个 $\boldsymbol{A}_{i_j}$ 所在的行和列；

2° 当 $t\neq i_j$ 时，$\boldsymbol{A}_{i_jt}=\boldsymbol{0}$，从而 $i_j\leqslant h$；

3° $i_1,\cdots,i_g$ 互不相同，从而 $g\leqslant h$．

但也可以讨论从式(7.2)到式(7.1) 的置换相抵，并同样有类似的结论 1°，2°，3°．所以 $g=h$，而且映射 $j\mapsto i_j\ (j=1,\cdots,g)$ 是 $\{1,\cdots,g\}$ 上的一个置换 $\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & \cdots & g\\ i_1 & \cdots & i_g\end{pmatrix}$．

由于从式(7.1)到式(7.2)的置换相抵 φ，可以自然诱导出从式(7.1)中右下方的分块下三角形方阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{g+1} & & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_{k,g+1} & \cdots & \boldsymbol{A}_k\end{pmatrix} \tag{7.3}$$

到式(7.2)中右下方的同阶方阵

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{g+1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \widetilde{\boldsymbol{A}}_{l,g+1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{A}}_l\end{pmatrix} \tag{7.4}$$

的置换相抵，因此又可以用前面的方法进行论证，最终证明(2)成立[①]． □

对一般的 $m\times n$ 矩阵，即 $m\neq n$，或者 $m=n$ 但项秩小于 n 的情形，也有置换相抵标准形．这里只写出结论，因为这时置换相抵标准形的形状不大容易想到，而结论的证明和定理 7.4 的差不多，叙述却更烦琐．

定理 7.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 没有零行或零列，则：

(1) $\boldsymbol{A}$ 置换相抵于如下的分块下三角形矩阵：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}} & & & & \\ & \boldsymbol{A}_1 & & \boldsymbol{0} & \\ & & \ddots & & \\ * & & & \boldsymbol{A}_k & \\ & & & & \boldsymbol{A}_{\mathrm{H}}\end{pmatrix} \tag{7.5}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}$ 是 $r_{\mathrm{V}}\times s_{\mathrm{V}}$ 矩阵，$r_{\mathrm{V}}>s_{\mathrm{V}}$，$\rho_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}}=s_{\mathrm{V}}$．$\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}$ 只有一个最小覆盖，即全部 s_{V} 列

① 事实上，由此不难看出，可以有更细致一些的置换相抵标准形，这里不多讨论了．

所组成的覆盖. 类似地，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{H}}$ 是 $r_{\mathrm{H}} \times s_{\mathrm{H}}$ 矩阵，$r_{\mathrm{H}} > s_{\mathrm{H}}$，$\rho_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{H}}} = r_{\mathrm{H}}$. $\boldsymbol{A}_{\mathrm{H}}$ 只有一个最小覆盖，即全部 r_{H} 行所组成的覆盖，$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 都是非空的完全不可分方阵. 式(7.4)称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个置换相抵标准形，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}$ 和 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{H}}$ 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形式(7.5)中的竖块和横块.

(2) 分别记式(7.5)中构成 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{H}}, \boldsymbol{A}_j$ ($j = 1, \cdots, k$)的行的标号集为 K_{V}, K_{H}, K_j；列的标号集为 $L_{\mathrm{V}}, L_{\mathrm{H}}, L_j$. 虽然式(7.5)不一定由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定，但集合 $\{(K_{\mathrm{V}}, L_{\mathrm{V}}), (K_{\mathrm{H}}, L_{\mathrm{H}}), (K_1, L_1), \cdots, (K_k, L_k)\}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的. 特别地，$\boldsymbol{A}$ 的标准形中有没有竖块、横块，它们的大小，正整数 k 和分别以 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{V}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{H}}, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 为代表元的 $k+2$ 个置换相抵等价类的集合是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的. □

例 7.2　下面的 5×6 矩阵是一个置换相抵标准形：

$$\left(\begin{array}{c:cc:ccc} 1 & & & & & \\ & \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} \\ 1 & & & & & \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

其中项秩 = 4，$k = 1$，竖块是 2×1，横块是 1×3. 如将其(3,3)元 1 改成 0，则所得分块矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c:ccc} 1 & & & & \\ 1 & \multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$} & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} \\ 1 & & & & \\ \hdashline 0 & 1 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

仍是标准形，但其项秩 = 3，$k = 1$，竖块是 3×1，横块是 1×4. □

7.3　积　和　式

定义 7.2　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵($m \leqslant n$). 称和式

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_m \in P_m^n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{mi_m}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的积和式(permanent)，这里 P_m^n 表示在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中所有 m 元排列的集合.

不难验证，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的这个数值函数 per$\boldsymbol{A}$ 是一个置换相抵不变量，即 per$\boldsymbol{A}$ = per($\boldsymbol{PAQ}$)．此外，它还有如下的性质：

(1) per$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量的多重线性函数；

(2) Laplace 展开公式成立：对第 i 行展开，

$$\text{per}\boldsymbol{A} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\,\text{per}\boldsymbol{A}(i \mid t),$$

对第 $i_1,\cdots,i_k$ 行展开，

$$\text{per}\boldsymbol{A} = \sum_{j_1,\cdots,j_k} \text{per}\boldsymbol{A}[i_1,\cdots,i_k \mid j_1,\cdots,j_k]\text{per}\boldsymbol{A}(i_1,\cdots,i_k \mid j_1,\cdots,j_k);$$

(3) 当 $m=n$ 时，per$\boldsymbol{A}$ = per$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

从这些性质来看，对于方阵 $\boldsymbol{A}$，per$\boldsymbol{A}$ 与 det$\boldsymbol{A}$ 十分相像；从表面上来看，per$\boldsymbol{A}$ 还比 det$\boldsymbol{A}$ 更简单些：它们同样都是 $n!$ 个乘积项的和，在 det$\boldsymbol{A}$ 中有一半项改成负项，而在 per$\boldsymbol{A}$ 中所有项不动，实际上正好相反；很多方阵的行列式不难求出，而确定这些方阵的积和式却极为困难．明显的一个原因是，行列式的下述两条基本性质对积和式不成立：

(1) det$\boldsymbol{AB}$ = det$\boldsymbol{A}$det$\boldsymbol{B}$；

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘以常数后加到另一行上，行列式不变．

这也暗示积和式的组合本性．而且实际上，至今尚未找到计算一个矩阵的积和式的一种有效方法，而且仍有很多关于积和式的未解决的问题．

积和式最早是由法国数学家 Binet 和 Cauchy 在 1812 年提出的．从一开始，它就和行列式相伴．人们自然期望二者之间有更密切的联系，最好是能把计算积和式化为计算行列式．例如，对 2 阶方阵来说，显然有

$$\text{per}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

对 $n\geqslant 3$，能不能通过适当改变 n 阶方阵中某些元的正负号，而使得部分变号后方阵的行列式等于原方阵的积和式呢？这个设想早在 1913 年就被 Pólya 所否定，证明很简单：

记 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则 det$\boldsymbol{A}$ 是 6 项的和，其中 3 项是 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$，称为正项；另 3 项是 $-a_{11}a_{23}a_{32}$，$-a_{12}a_{21}a_{33}$，$-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为负项．若能通过改变某些 a_{ij} 的正负号使这 6 项都变成正项，即有 $\sigma_{ij}=1$ 或 -1，使

$$\det(\sigma_{ij}a_{ij}) = \text{per}(a_{ij})$$

对任意的 a_{ij} 成立，则从 3 个正项来看，必须有偶数个 σ_{ij} 等于 -1；而从 3 个负项来看，又必须有奇数个 σ_{ij} 等于 -1，因此这是不可能的．对 $n>3$，只要令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_3\oplus\boldsymbol{I}_{n-3}$ 就可以证明这也不可能．当然，这并不排除对某些特殊形状的方阵这种部分变号的方法是可行的．例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{per}\boldsymbol{A}=\det\begin{pmatrix}a_{11}&-a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&-a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

更一般些，若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是所谓的 Hessenberg 方阵，即当 $j-i>1$ 时，$a_{ij}=0$，则若令

$$\sigma_{ij}=\begin{cases}-1, & j=i+1,\\ 1, & \text{其他},\end{cases}$$

$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\sigma_{ij}a_{ij})$，不难验证 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}=\det\tilde{\boldsymbol{A}}$.

$\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的一个数值函数，在不少计数问题上有用. 首先，对每个元素是 0 或 1 的矩阵 $\boldsymbol{A}$（以下简称为(0,1)矩阵 $\boldsymbol{A}$），$\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 有如下的组合意义.

定理 7.6　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的(0,1)矩阵，$m\leqslant n$. 当 $\rho_{\boldsymbol{A}}<m$ 时，$\operatorname{per}\boldsymbol{A}=0$；当 $\rho_{\boldsymbol{A}}=m$ 时，$\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的最大无关元组的个数.

证　根据定义，$\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 的表示式中的每一项 $a_{1i_1},a_{2i_2},\cdots,a_{mi_m}$ 等于 0 或 1，而且 $a_{1i_1}\cdots a_{mi_m}=1\Leftrightarrow\{a_{1i_1},\cdots,a_{mi_m}\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个无关元组. 再由项秩 $\rho_{\boldsymbol{A}}$ 的定义即得结论. □

另外，对每个 n 阶(0,1)方阵 $\boldsymbol{A}$，$\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 可以解释为某种带若干约束条件的排列的个数. 我们通过下面的例子来说明.

例 7.3　数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 元更列（derangement），如果对每个 $j=1,\cdots,n$ 都有 $i_j\neq j$. 记 n 元更列的个数为 D_n，则不难验证

$$D_n=\operatorname{per}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n),$$

$\boldsymbol{J}_n$ 是 n 阶全 1 方阵.

再考虑 $1,2,\cdots,n$ 的一个更列 $i_1i_2\cdots i_n$，它还满足限制条件 $i_j\neq j+1(j=1,\cdots,n-1)$，$i_n\neq i_1$. 记此处排列的个数为 U_n，则同样不难验证

$$U_n=\operatorname{per}(\boldsymbol{J}_n-\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{P}_n),$$

这里 $\boldsymbol{P}_n$ 是第 1 行等于(0,1,0,$\cdots$,0)的 n 阶循回方阵（见第 4 讲 4.2 节）.

现在通过计算积和式来找出 D_n 和 U_n. D_n 较易求得：按第 1 行展开 $\operatorname{per}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})$ 后，可得递推公式

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}).$$

此外，显然有 $D_1=0$，$D_2=1$. 再令 $D_1=0$，则上述递推公式对 $n\geqslant 2$ 成立. 将这个公式改写成

$$\begin{aligned}D_n-nD_{n-1}&=-(D_{n-1}-(n-1)D_{n-2})\\&=-(-1)^2(D_{n-2}-(n-2)D_{n-3})\\&=\cdots\\&=(-1)^n\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

令

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n,$$

则对递推式两边乘以 $x^n/n!$ 后，再对 n 从 1 起相加，即得

$$D(x) - D_0 - xD(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x} - 1.$$

所以

$$D(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\infty}}{1-x}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^l}{l!}\right)(1 + x + x^2 + \cdots),$$

从中可解出

$$D_n = n!\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\right).$$

U_n 则不能这样轻易地求得，但也已在 1934 年求得，其显式表示为

$$U_n = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{2n}{2n-l}\binom{2n-2}{l}(n-l)!,$$

这里就不进行推导了. 更进一步，对更复杂的 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}_n - \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_n^3$，在 1967 年已求得 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}$ 的显式表示；$\mathrm{per}(\boldsymbol{J}_n - \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}_n^2 - \boldsymbol{P}_n^3)$ 的求出则是 1979 年的事. 从这些实例可知计算积和式并非易事.

作为实例，再证明一个关于积和式下界的著名定理，并对相关的进展情况稍作解说，由此也可感受到计算积和式的困难程度.

定理 7.7(M. Hall) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 的(0,1)矩阵，$m \leqslant n$，$\rho_{\boldsymbol{A}} = m$，而且 $\boldsymbol{A}$ 的每行至少有 k 个 1，则

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A} \geqslant \begin{cases} k!, & k \leqslant m, \\ \dfrac{k!}{(k-m)!}, & k > m. \end{cases}$$

证 先证 $k \leqslant m$ 时的结论 $\mathrm{per}\boldsymbol{A} \geqslant k!$. 现对 m 用归纳法论证如下.

当 $m = 1$ 时，k 必须是 1，从而 $\mathrm{per}\boldsymbol{A} = 1$.

当 $m > 1$ 时，$\rho_{\boldsymbol{A}} = m \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 没有 $p \times (n+1-p)(1 \leqslant p \leqslant m)$ 的零子矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的任一 $p \times n$ 子矩阵至少有 p 个非零列. 以下分两种情形来讨论：

(a) $\boldsymbol{A}$ 有一个 $r \times n$ 子矩阵($1 \leqslant r \leqslant m$)，它正好有 r 个非零列. 这时可使 $\boldsymbol{A}$ 置换相抵于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ a_{21} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 r 阶方阵. 由 $\rho_{\boldsymbol{A}} = m$，可知 $\rho_{\boldsymbol{A}_1} = r$，$\rho_{\boldsymbol{A}_2} = m - r$，从而

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}_2 \geqslant 1, \quad \mathrm{per}\boldsymbol{A} = \mathrm{per}\boldsymbol{A}_1 \mathrm{per}\boldsymbol{A}_2 \geqslant \mathrm{per}\boldsymbol{A}_1,$$

再由归纳假设可知 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}_1 \geqslant k!$.

(b) $\boldsymbol{A}$ 的任一 $r\times n$ 子矩阵($1\leqslant r\leqslant m$)都有 $r+1$ 个非零列.将 $\boldsymbol{A}$ 按第 1 行展开,得

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\mathrm{per}\boldsymbol{A}(1\mid j).$$

但这时对每个$(m-1)\times(n-1)$的$(0,1)$矩阵 $\boldsymbol{A}(1\mid j)$来说,它的任一 $r\times(n-1)$ 子矩阵($1\leqslant r\leqslant m-1$)至少有 r 个非零列,从而项秩为 $m-1$.又因 $\boldsymbol{A}(1\mid j)$的每行至少有 $k-1$ 个 1,故由归纳假设可得

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}(1\mid j)\geqslant(k-1)!.$$

从而

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}=\sum_{j=1}^{n}a_{1},\quad \mathrm{per}\boldsymbol{A}(1\mid j)\geqslant k!.$$

当 $k\leqslant m$ 时结论证毕.

若 $k>m$,令

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{J}\end{pmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{J}$ 是$(k-m)\times n$ 的全 1 矩阵,则对 $k\times n$ 的$(0,1)$矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 来说,$\rho_{\widetilde{A}}=k$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的每一行至少有k 个 1,所以由已证的结论可得

$$\mathrm{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}\geqslant k!.$$

但易见 $\mathrm{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\mathrm{per}\boldsymbol{A})(k-m)!$,所以

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}\geqslant\frac{k!}{(k-m)!}.$$ □

推论 7.2　设 $\boldsymbol{A}$ 是n 阶$(0,1)$方阵,$\boldsymbol{A}$ 的每一条线上正好有k 个 1,则

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}\geqslant k!.$$

证　这时一定有 $\rho_{\boldsymbol{A}}=n$(定理 7.2 的推论),由此即得. □

对推论中所说的 $\boldsymbol{A}$,由于所得的下界 $k!$ 与 n 无关,所以当 $k\geqslant 3$,n 充分大时,这个下界偏小得厉害.事实上,因为这时 $\boldsymbol{A}/k$ 是 n 阶双随机方阵,由 1980 年证得的 van der Waerden-Фадияман-Егорцчев 定理(详见 7.6 节定理 7.15),可知

$$\mathrm{per}\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}\right)\geqslant\frac{n!}{n^{n}},$$

从而

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}\geqslant\frac{n!k^{n}}{n^{n}}\simeq\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}.$$

当 $k>3$ 时,这个下界是目前的最好估计.当 $k=3$ 时,近年已证得迄今最好的结果:

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A} \geqslant 6\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}.$$

一般地说，记(n,k)为每条线上正好有 k 个 1 的 n 阶$(0,1)$方阵的集合，则当 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{A}(n,k)$中变化时，per$\boldsymbol{A}$ 所能达到的最小值还远未为人所知，甚至尚未能提出明确的猜想.

最后介绍一下关于积和式的 van der Waerden 猜想及其得到证明的概况. 这个猜想最早是在 1926 年由著名数学家 van der Waerden 提出来的.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 n 阶双随机方阵，则

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A} \geqslant \frac{n!}{n^n}.$$

由于当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}_n/n$ 时易知等式成立，后来这个猜想被加强为“上述不等式成立，且其中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}_n/n$”. 有很多数学家试图证明这个猜想，甚至可以说，这是 50 年代后期起，促使形成研究积和式的踊跃局面的主要原因. 在解决这个猜想的众多努力中，Marcus 和 Newman 在 1959 年走出了实质性的一步，但始终未能进行到底. 直到 1980 年，两位苏联数学家法里克曼和叶果罗切夫几乎同时独立地证明了 van der Waerden 猜想成立，其中法里克曼稍早一点，但只证得原来的猜想，而叶果罗切夫则证明了上述强猜想. 他们都是沿着 Marcus 和 Newman 想走而未成的路最终证得结论的，而且证明的关键一步也都是使用了苏联数学家 A·D·阿历山大罗夫在 1938 年得到的一个不等式. 我们将在本章最后一节完整地给出这个猜想的证明. 这里先介绍一下概况. 上面所说的想法的出发点是这样的：

把所有 n 阶双随机方阵的集合记为 Ω_n，因为 Ω_n 是 n^2 维欧几里得空间中的有界闭集，所以 n^2 个变量的连续函数 per(a_{ij})在 Ω_n 上可取得最小值. 对任意 $\boldsymbol{A}\in\Omega_n$，若

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A} = \min_{\boldsymbol{S}\in\Omega_n}\mathrm{per}\boldsymbol{S},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为极阵. van der Waerden 猜想可以表述为：极阵是唯一的，即 $\boldsymbol{J}_n/n$. Marcus 和 Newman 的想法是通过研究极阵的性质，最终证明它只能是 $\boldsymbol{J}_n/n$.

在 van der Waerden 猜想证明以后，有关积和式的研究状况及未解决的问题可参看 H. Minc 的综述论文《Linear and Multilinear Algebra》(1983(12):227～264).

7.4 (0,1)矩阵与子集系

设 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$是一个 n 元集，$X_1,\cdots,X_m$ 是 X 的 m 个子集，它们不一定

互不相同. X 连同其子集系$\{X_1,\cdots,X_m\}$是一个极为一般的组态. 现在定义 $m\times n$ 的(0,1)矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & x_j\in X_i\\ 0, & x_j\notin X_i\end{cases}\quad(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n).$$

称 $\boldsymbol{A}$ 是 n 元集 X 关于其子集系$\{X_1,\cdots,X_m\}$的关联矩阵. $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行上的 1 说明了有子集 X_i 的元素，$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列上的 1 则指出了含有 x_j 的子集. 因此，$\boldsymbol{A}$ 给出了 X 的子集系$\{X_1,\cdots,X_m\}$的一个完全记录.

我们可以将 n 元集 X 的元素以及子集系的子集重新标号，这样做并不改变原有组态的组合内涵. 用关联矩阵的语言来说，上述重新标号就是用新的关联矩阵

$$\boldsymbol{PAQ}$$

来代替原来的 $\boldsymbol{A}$，这里 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶置换方阵. 所以，我们主要关心关联矩阵在置换相抵下的不变性质. 当然，可以不用 0,1 而用别的两个量，如 +1，−1 或 x,y 来构作关联矩阵，它们同样能记录 X 及其子集系. 但这样做往往并不更加有利. 事实上，取(0,1)矩阵作为关联矩阵是特别合适的，因为 0 和 1 的加法和乘法性质特别简单，从而通常能方便地表出所论性质的数量. 例如，若记 $\boldsymbol{A}$ 的转置为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\quad 与\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$$

分别是 m 阶和 n 阶的元素是非负整数的对称方阵. $\boldsymbol{B}$ 的(i,j)元素正是 $X_i\cap X_j$ 的元素个数，而 $\boldsymbol{C}$ 的(i,j)元素则是 m 个子集 $X_1,\cdots,X_m$ 中同时含有 x_i 和 x_j 的子集的个数. 以后我们还会重温上述说明.

现在通过关联矩阵来讨论子集系的代表元组. X 和 $X_1,\cdots,X_m$ 如上所记. X 的一个有序 m 元组

$$\boldsymbol{D}=(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})$$

称为子集的有序组$(X_1,\cdots,X_m)$的一个相异代表组(systems of distinct representatives，通常简记为 SDR)，如果

$$x_{i_1}\in X_1,\quad\cdots,\quad x_{i_m}\in X_m.$$

这时称 x_i 是 $\boldsymbol{X}_j(j=1,\cdots,m)$的代表元.

例如，设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$X_1=\{2,5\}$，$X_2=\{2,5\}$，$X_3=\{1,2,3,4\}$，$X_4=\{1,2,5\}$，则 $\boldsymbol{D}=(2,5,3,1)$是(X_1,X_2,X_3,X_4)的一个 SDR. 如果将上述 X_4 改成 $X_4'=\{2,5\}$，则(X_1,X_2,X_3,X_4')不再有 SDR. 因为这时 $X_1\cup X_2\cup X_4'$是 2 元集，因而不可能有 3 个不同的元素分别作为 X_1,X_2,X_4'的代表元.

用关联矩阵的语言来说，$(X_1,\cdots,X_m)$有一个 SDR$(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})\Leftrightarrow a_{1i_1}=\cdots=a_{mi_m}=1$，也就是说，$(X_1,\cdots,X_m)$的一个 SDR 正是 $\boldsymbol{A}$ 的一个有 m 个元素的无关元组. 所以$(X_1,\cdots,X_m)$具有 SDR$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的项秩 $\rho_{\boldsymbol{A}}=m$；而且这时$(X_1,\cdots,X_m)$

的 SDR 的个数 = $\boldsymbol{A}$ 的最大无关元组的个数 = per$\boldsymbol{A}$(见 7.3 节定理 7.6,并注意到 $\rho_A = m \Rightarrow m \leqslant n$). 因此,下述最早由 P. Hall 在 1935 年证明的应用广泛的定理,不过是 7.1 节定理 7.1 的等价命题.

定理 7.8(P. Hall) $(X_1, \cdots, X_m)$有 SDR 的充要条件是:对任一整数 $k(1 \leqslant k \leqslant m)$以及$\{1, \cdots, m\}$的任一 k 元子集$\{i_1, \cdots, i_k\}$,并集 $X_{i_1} \cup \cdots \cup X_{i_k}$ 至少含有 k 个元素. □

同样,7.3 节定理 7.7 可以表述为:

定理 7.9(M. Hall) 设$(X_1, \cdots, X_m)$有 SDR,而且每个 X_i 至少有k 个元素. 当 $k \leqslant m$ 时,$(X_1, \cdots, X_m)$至少有 $k!$ 个 SDR;当 $k > m$ 时,$(X_1, \cdots, X_m)$至少有 $k!/(k-m)!$ 个 SDR. □

再讨论集合的两个分划的公共代表组. 设集合 S 有两个分划:

$$S = A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n,$$

其中 A_i, B_i 均非空,且当 $i \neq j$ 时,$A_i \cap A_j = \varnothing$,$B_i \cap B_j = \varnothing$,$S$ 的 n 个元素 $x_1, \cdots, x_n$ 称为这两个分划的公共代表组(systems of common representatives,简记为 SCR),如果有$\{1, \cdots, n\}$上的两个置换 σ 和τ,使

$$x_i \in A_{\sigma(i)} \cap B_{\tau(i)} \quad (i = 1, \cdots, n).$$

对 S 的上述两个分划,可引进它们的相交矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶非负整数方阵,其中

$$c_{ij} = |A_i \cap B_j| \quad (i, j = 1, \cdots, n)^{①}.$$

显然,这两个分划具有 SCR$\Leftrightarrow C$ 有 n 个非零元 $\boldsymbol{C}_{\sigma(i)\tau(i)}(i = 1, \cdots, n) \Leftrightarrow \rho_C = n$. 但是由定理 7.1 可得 $\rho_C = n \Leftrightarrow$不存在$(n-k) \times (k+1)$零子矩阵$(0 \leqslant k \leqslant n-1) \Leftrightarrow$不存在 $n-k$ 个 A_i,它们的并集与 $k+1$ 个 B_j 不交$\Leftrightarrow$不存在 k 个 A_i,它们的并集包含 $k+1$ 个 $B_j \Leftrightarrow$任意 k 个 A_i 的并集至多包含 k 个 B_j($k = 1, \cdots, n$,因为 $k = 0, n$ 时,断言是肯定成立的). 这就证明了下述关于 SCR 的存在性定理.

定理 7.10 集合 S 的两个分划 $S = A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ 具有 SCR 的充要条件是:对任一整数 $k = 1, \cdots, n$ 以及任意 k 个子集 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$,并集 $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}$ 至多包含 k 个子集 $B_j(j = 1, \cdots, n)$. □

另外,再注意到 $\boldsymbol{C}$ 的 n 个非零元 $C_{\sigma(i)\tau(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 实际上可产生 $\prod_{i=1}^{n} C_{\sigma(i)\tau(i)}$ 个 SCR,所以有:

定理 7.11 在前述记号下,S 的这两个分划共有 per$\boldsymbol{C}$ 个 SCR. □

① 用 $|X|$ 记有限集 X 的元素个数,下同.

7.5　(0,1)矩阵类 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的(0,1)矩阵. 记 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行上元素的和为 r_i，第 j 列上元素的和为 s_j，并称向量

$$\boldsymbol{R}=(r_1,\cdots,r_m)$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的行和向量；称向量

$$\boldsymbol{S}=(s_1,\cdots,s_n)$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的列和向量. 显然，$r_1+\cdots+r_m=s_1+\cdots+s_n$.

反过来，对分量为非负整数的向量 $\boldsymbol{R}=(r_1,\cdots,r_m)$ 和 $\boldsymbol{S}=(s_1,\cdots,s_n)$，记行和向量等于 $\boldsymbol{R}$、列和向量等于 $\boldsymbol{S}$ 的所有 $m\times n$ 的(0,1)矩阵的集合为 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$. 当然，不是对于任意两个满足 $r_1+\cdots+r_m=s_1+\cdots+s_n$ 的非负整向量 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 都是非空的. 本节将首先建立 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 非空的充要条件，然后初步讨论一下对于给定的 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$，(0,1)矩阵类 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 的内在结构.

$\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 可以作这样的组合解释. 设 $r_1,\cdots,r_m,s_1,\cdots,s_n$ 都大于 0，如果集合 T 有两个分划

$$T=F_1\cup\cdots\cup F_m=G_1\cup\cdots\cup G_n,$$

其中

$$|F_i|=r_i,\quad |G_j|=s_j,\quad |F_i\cap G_j|=0\text{ 或 }1$$

$(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，则这两个分划的相交矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$，这里 $a_{ij}=|F_i\cap G_j|$. 反过来，对 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$，令具有 $r_1+\cdots+r_m=s_1+\cdots+s_n$ 个元素的集合 $T=\{x_{ij}\mid a_{ij}=1;i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n\}$，再令 T 的子集

$$F_i=\{x_{ij}\mid a_{ij}=1;j=1,\cdots,n\},$$
$$G_j=\{x_{ij}\mid a_{ij}=1,\cdots,m\}.$$

则 T 有分划

$$T=F_1\cup\cdots\cup F_m=G_1\cup\cdots\cup G_n,$$

且

$$|F_i|=r_i,\quad |G_j|=s_j,\quad |F_i\cap G_j|=a_{ij}$$
$$(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n).$$

现在来研究类 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 非空的充要条件. 先固定 $\boldsymbol{R}=(r_1,\cdots,r_m)$，其中非负整数 $r_i\leqslant n(i=1,\cdots,m)$，则可唯一确定一个 $m\times n$ 的(0,1)矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$，它的第 i 行行向量是

$$\boldsymbol{\delta}_i = (\overbrace{1,1,\cdots,1}^{r_i\text{个}},\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n-r_i\text{个}}) \quad (i = 1,\cdots,m).$$

记 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$的列和向量为

$$\boldsymbol{R}^* = (r_1^*,\cdots,r_n^*).$$

显然，$\boldsymbol{R}^*$ 由 $\boldsymbol{R}$ 唯一确定. 事实上，

$$r_j^* = |\{i \mid r_i \geqslant j, i = 1,\cdots,m\}| \quad (j = 1,\cdots,n).$$

如果有 $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$，则将 $\boldsymbol{A}$ 的每一行上的 1 全部移到左边后就得到 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$. 反过来，任一 $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$也一定可以通过将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$的各行上的 1 向右作适当平移而得到. 现在的问题是：$\boldsymbol{S}$ 满足什么条件时，确实可以由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$经平移 1 产生 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$中的矩阵？这个条件当然要用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$来刻画，Ryser 和 Gale 在 1957 年各自独立地证明了这个条件可以用优超关系简洁地表示为

$$\boldsymbol{S} \prec \boldsymbol{R}^*$$

注意到当 $\boldsymbol{S}=(s_1,\cdots,s_n)$是单调非增向量，即 $s_1\geqslant\cdots\geqslant s_n$ 时，$\boldsymbol{R}^*$ 一定单调非增，$\boldsymbol{S}\prec\boldsymbol{R}^*$ 相当于

$$s_1 + \cdots + s_j \leqslant r_1^* + \cdots + r_j^* \quad (j = 1,\cdots,n),$$

且当 $j=n$ 时等式成立①.

定理 7.12(Gale,Ryser) 设 $\boldsymbol{R}=(r_1,\cdots,r_m)$和 $\boldsymbol{S}=(s_1,\cdots,s_n)$是分量为非负整数的向量，$r_i\leqslant n(i=1,\cdots,m)$. $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$非空的充要条件是

$$\boldsymbol{S} \prec \boldsymbol{R}^*.$$

证 首先，可以不妨假设 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 都是单调非增的. 否则，可分别重新排列 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的诸分量的次序，使重排后的向量 $\boldsymbol{R}'$和 $\boldsymbol{S}'$成为单调非增的. 这时显然有相应的 m 阶和 n 阶的置换方阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}'\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{S}')\Leftrightarrow\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Q}\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$. 故以下均设 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 是单调非增的.

必要性. 若有 $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$，则显然有 $s_1+\cdots+s_j=\boldsymbol{A}$ 的前 j 列元素之和$\leqslant\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$的前 j 列元素之和$=r_1^*+\cdots+r_j^*$ $(j=1,\cdots,n)$，

$$s_1 + \cdots + s_n = r_1 + \cdots + r_m = r_1^* + \cdots + r_n^*.$$

充分性. 我们对 n 用归纳法证明：在 $\boldsymbol{S}\prec\boldsymbol{R}^*$ 的条件下，一定可以具体构造出一个 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$. 当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}(R,1)\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$. 现设 $n>1$. 考察 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^*)$. 由条件 $\boldsymbol{S}\prec\boldsymbol{R}^*$，可得

$$s_1 + \cdots + s_{n-1} \leqslant r_1^* + \cdots + r_{n-1}^*,$$

$$s_1 + \cdots + s_n = r_1^* + \cdots + r_n^*.$$

从而

① 两个不一定单调非增的向量之间的优超关系的定义可参见第 5 讲 5.4 节，这里不再重复了.

$$r_n^* \leqslant s_n .$$

但

$$r_1^* \geqslant s_1 \geqslant s_n .$$

所以我们一定能够在 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$ 中依次把行和最大的 s_n 个行的最右端的一个 1 平移到第 n 列，遇到有些行的行和相等时，则优先移动它们中最下面的那一行的最右端的 1. 经如此变化后，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$ 成为 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 的第 n 列上正好有 s_n 个 1，$\boldsymbol{B}$ 中去掉第 n 列后所得的 $m\times(n-1)$ 的 $(0,1)$ 矩阵有单调非增的行和向量 $\boldsymbol{C}=(c_1,\cdots,c_m)$，而且这个 $m\times(n-1)$ 矩阵正是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C};n-1)$. 记 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C};n-1)$ 的列和向量为 $\boldsymbol{C}^*=(c_1^*,\cdots,c_{n-1}^*)$. 如果能够证明

$$(s_1,\cdots,s_{n-1}) \prec \boldsymbol{C}^* , \tag{7.6}$$

则由归纳假设，可知有行和向量为 $\boldsymbol{C}$、列和向量为 $(s_1,\cdots,s_{n-1})$ 的 $m\times(n-1)$ 的 $(0,1)$ 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{n-1}$，将 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{n-1}$ 换入 $\boldsymbol{B}$ 的前 $n-1$ 列就得到一个 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$.

现证式(7.6)成立. 设 $1\leqslant k\leqslant n-1$. 按照 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的定义以及 $\boldsymbol{R}$ 的单调非增性，可知：

(a) $r_{k+1}^*\geqslant s_n \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$ 的第 $k+1$ 列的最上面 s_n 个元都是 1 $\Rightarrow$ 在构成 $\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$ 的前 k 列组成的 $m\times k$ 子矩阵没有变动 $\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{k} c_j^* = \sum\limits_{j=1}^{k} r_j^* \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k} s_j$；

(b) $r_{k+1}^*<s_n \Rightarrow$ 在构成 $\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$ 的前 k 列组成的 $m\times k$ 子矩阵中有 $s_n-r_{k+1}^*$ 行各被移走一个 1，从而

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^* = \sum_{j=1}^{k} r_j^* - (s_n - r_{k+1}^*) = \sum_{j=1}^{k+1} r_j^* - s_n$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{k+1} s_j - s_n \geqslant \sum_{j=1}^{k} s_j .$$

因此式(7.6)成立. □

上述归纳证明实际上提供了从 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};n)$ 逐列构作出 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 中的一个矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的方法. 当 $\boldsymbol{S}\prec\boldsymbol{R}^*$ 时，这种构作必可行；当 $\boldsymbol{S}\prec\boldsymbol{R}^*$ 不成立时，这种构作过程必在某一步上无法实现. 而且如上所得的 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 还有这样的性质：$\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的前 j 列组成的 $m\times j$ 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n[1,\cdots,m\,|\,1,\cdots,j]$ 一定具有单调非增的行和向量与列和向量，行和向量显然非增，可归纳证明列和向量也非增.

例 7.4　设 $\boldsymbol{R}=(5,4,3,3,2)$，$\boldsymbol{S}=(4,4,3,2,2,2)$，则 $\boldsymbol{R}^*=(5,5,4,2,1,0)$，$\boldsymbol{S}\prec\boldsymbol{R}^*$.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R};6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{R};6)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&1\\1&1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

这里给出的构造性证明基本上是 Ryser 的原始证明. 其优点是思路清晰，同时又能按确定的方式具体构作出类中的一个矩阵. 但这个证明不能对 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 的元素个数作出任何定量的估计. 1980 年，我国学者魏万迪提出了另一种证明①. 他定出了当 $\boldsymbol{S}<\boldsymbol{R}^*$ 时 $|\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})|$ 的一个非平凡的正下界. 例如，设 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}=(\overbrace{k,\cdots,k}^{n\text{个}})$，记 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})=\mathfrak{A}(n,k)$，则当 $k\mid n$ 时，按魏的估计有

$$|\mathfrak{A}(n,k)|\geqslant\frac{(n!)^k}{(k!)^n}.$$

设 $\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的如下 2 阶子方阵：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

把 $\boldsymbol{A}$ 中某个形如 $\boldsymbol{A}_1$（或 $\boldsymbol{A}_2$）的子方阵换成 $\boldsymbol{A}_2$（或 $\boldsymbol{A}_1$），同时不改动 $\boldsymbol{A}$ 的所有其他元素的变换称为对 $\boldsymbol{A}$ 的一次对换. 显然，$\boldsymbol{A}$ 经一次对换后仍属于 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$. 进一步可以证明下述对换定理.

定理 7.13(Ryser)　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 是 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 中的任意两个矩阵，则可经过有限次对换把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{A}'$.

证　不妨设 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 都单调非增，仍记 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 为定理 7.12 中所构作的 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 中的那个矩阵. 我们证明一定可经过有限次对换把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$.

先从上到下逐个比较 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n=(\bar{a}_{ij})$ 的第 n 列上的元素. 假设它们的第 i 个首次不同，这时有两种可能.

(a) $a_{in}=0,\bar{a}=1$. 因 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_n$ 的第 n 列上 i 行以上的元素彼此相等，同时它们都有 s_n 个 1，所以一定有 $i'>i$，使 $a_{i'n}=1,\bar{a}_{i'n}=0$，并设 i' 是具有此性质的最小下标. 根据 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的第 n 列的产生方法，这时还有 $r_i>r_{i'}$ 成立. 从而一定有 $j<n$，使

$$\boldsymbol{A}[i,i'\mid j,n]=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1.$$

将 $\boldsymbol{A}$ 中这个 $\boldsymbol{A}_1$ 换成 $\boldsymbol{A}_2$ 后，$\boldsymbol{A}$ 所变成的矩阵仍属于 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$，但其第 n 列的前 i 个元素与 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的对应元素已相等.

① 见《Discrete Math.》，1982(39)：301～305，之后我国学者又有一些后续研究.

(b) $a_{in}=1,\bar{a}_{in}=0$. 和(a)一样,一定有 $i'>i$,使 $a_{i'n}=0,\bar{a}_{i'n}=1$,但这时有 $r_i=r_{i'}$ 成立. 从而仍一定有 $j<n$,使 $\boldsymbol{A}[i,i'|j,n]=\boldsymbol{A}_2$. 将 $\boldsymbol{A}$ 中这个 $\boldsymbol{A}_2$ 换成 $\boldsymbol{A}_1$ 后,$\boldsymbol{A}$ 所变成的矩阵的第 n 列的前 i 个元素与 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的相应元素相等.

继续做下去,一定可经过有限次对换把 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 列变成 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的第 n 列,而且 $\boldsymbol{A}$ 所变成的矩阵的前 $n-1$ 列所组成的 $m\times(n-1)$ 矩阵和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的前 $n-1$ 列所组成的 $m\times(n-1)$ 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{n-1}$ 有相同的行和向量. 因此,同理又可经有限次对换把前一个 $m\times(n-1)$ 矩阵的第 $n-1$ 列变成 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{n-1}$ 的第 $n-1$ 列,即变成 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 的第 $n-1$ 列. 这样逐列做下去,总能经有限次对换把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$.

同样,可以经有限次对换把 $\boldsymbol{A}'$ 变成 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$. 但因为对换是可逆的,所以反过来也可以经有限次对换把 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n$ 变成 $\boldsymbol{A}'$. 合起来就能把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{A}'$. □

推论 7.3　设 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 中矩阵的最小项秩和最大项秩分别为 $\bar{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$,则对区间 $[\bar{\rho},\bar{\rho}]$ 中的任一整数 ρ,必有 $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$,使 $\rho_{\boldsymbol{A}}=\rho$.

证　因为对 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 中的矩阵每进行一次对换,其项秩至多增减 1,所以从项秩为 $\bar{\rho}$ 的矩阵经过一系列对换变成项秩为 $\bar{\rho}$ 的矩阵的过程中,必遍历从 $\bar{\rho}$ 到 $\bar{\rho}$ 的所有整数. □

7.6　van der Waerden 猜想的证明

本节给出 van der Waerden 猜想的完整证明. 这里主要依照 van Lint 的简化证明[①],证明的过程和历史发展也是一致的.

先证明三个引理. 名词及记号见 7.3 节.

引理 7.1　设 $\boldsymbol{A}\in\Omega_n$ 是极阵,则 $\boldsymbol{A}$ 完全不可分.

证　若不然,即 $\boldsymbol{A}$ 部分可分,则 $\boldsymbol{A}$ 置换相抵于

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是 k 阶方阵,$1\leqslant k<n$.

首先可以断言 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的前 k 列加上后 $n-k$ 行元素之和 $=\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的元素之和 $+\boldsymbol{D}$ 的元素之和. 但左边 $=n=$ 右边第一项,所以 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$,且易知 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\Omega_k,\boldsymbol{C}=(c_{ij})\in\Omega_{n-k}$.

再证明这时必存在 n 阶双随机方阵,其积和式小于 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}$. 因为 $\mathrm{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{per}\boldsymbol{A}$

① Linear Algebra and Its Applications, 1981(39): 1-8.

>0,可不妨设

$$b_{kk}\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k\mid k)>0,\quad c_{11}\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k+1\mid k+1)>0.$$

令 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是(i,j)位置元素是 1、其余元素都是 0 的 n 阶方阵. ε 是小于 $\min\{b_{kk},c_{11}\}$ 的正数. 定义

$$\boldsymbol{G}(\varepsilon)=\widetilde{\boldsymbol{A}}-\varepsilon(\boldsymbol{E}_{kk}+\boldsymbol{E}_{k+1,k+1})+\varepsilon(\boldsymbol{E}_{k,k+1}+\boldsymbol{E}_{k+1,k}),$$

则 $\boldsymbol{G}(\varepsilon)\in\Omega_n$,且有

$$\begin{aligned}\operatorname{per}\boldsymbol{G}(\varepsilon)=&\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}-\varepsilon\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k\mid k)+\varepsilon\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k\mid k+1)\\&-\varepsilon\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k+1\mid k+1)+\varepsilon\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k+1\mid k)+O(\varepsilon^2)\\=&\operatorname{per}\boldsymbol{A}-\varepsilon(\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k\mid k)+\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k+1\mid k+1))+O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

最后一个等号成立是因为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(k\mid k+1)$和 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(k+1\mid k)$的项秩都小于 $n-1$,从而其积和式为 0. 因为

$$\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k\mid k)+\operatorname{per}\widetilde{\boldsymbol{A}}(k+1\mid k+1)>0,$$

故对充分小的正数 ε,有

$$\operatorname{per}\boldsymbol{G}(\varepsilon)<\operatorname{per}\boldsymbol{A},$$

与 $\boldsymbol{A}$ 是极阵相矛盾. □

引理 7.2(Marcus, Newman) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\Omega_n$ 是极阵,则当 $a_{pq}>0$ 时,有 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}(p\mid q)=\operatorname{per}\boldsymbol{A}$.

证[①] 首先注意到引理 7.2 的结论等价于断言"对所有的 $a_{pq}>0$,$\operatorname{per}\boldsymbol{A}(p\mid q)$ 的值都相等",因通过对 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 的 Laplace 展开,易知后一断言中的公共值一定是 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}$. 下面证明这个断言.

定义 n 阶方阵

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij}),\quad b_{ij}=\frac{a_{ij}\operatorname{per}\boldsymbol{A}(i\mid j)}{\operatorname{per}\boldsymbol{A}}.$$

不难验证 $\boldsymbol{B}\in\Omega_n$,而且 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 有相同的正元素分布. 这时若有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,则对所有的 $a_{pq}>0$,均有 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}(p\mid q)=\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 成立,引理证毕. 故以下设 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{A}$.

作 $\boldsymbol{A}_\theta=(1-\theta)\boldsymbol{A}+\theta\boldsymbol{B}$,显然对 $\theta\in[0,1]$,$\boldsymbol{A}_\theta\in\Omega_n$. 又因 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正元素分布,所以有 $\varepsilon>0$,当 $|\theta|<\varepsilon$ 时,仍有 $\boldsymbol{A}_\theta\in\Omega_n$. 也就是说,对 $\theta\in(-\varepsilon,1]$,$\boldsymbol{A}_\theta\in\Omega_n$. 记 $g(\theta)=\operatorname{per}\boldsymbol{A}_\theta$,则由于 $\boldsymbol{A}$ 是极阵,可知 $g'(0)=0$. 但可以直接求出

$$g'(0)=\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}-a_{ij})\operatorname{per}\boldsymbol{A}(i\mid j).$$

故由 $g'(0)=0$,可得

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}[\operatorname{per}\boldsymbol{A}(i\mid j)]^2=n(\operatorname{per}\boldsymbol{A})^2.$$

① 此证明是邵嘉裕教授给出的.

而这个等式正是下述的内积不等式：

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sqrt{a_{ij}}\cdot\sqrt{a_{ij}}\,\mathrm{per}\boldsymbol{A}(i\mid j)\right)^2\leqslant\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathrm{per}\boldsymbol{A}(i\mid j))^2\right)$$

中等号成立的情形. 所以由内积不等式中等号成立的充要条件，可知有常数 α，使

$$\sqrt{a_{ij}}\,\mathrm{per}\boldsymbol{A}(i\mid j)=\alpha\sqrt{a_{ij}}\quad(i,j=1,\cdots,n).$$

从而证明了开始所说的断言成立. □

引理 7.3(London)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\Omega_n$ 是极阵，则 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}(p\mid q)\geqslant\mathrm{per}\boldsymbol{A}$ 对 p，$q\in\{1,\cdots,n\}$ 成立.

证　对任意给定的 $p,q\in\{1,\cdots,n\}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 完全不可分，所以 $\boldsymbol{A}(p\mid q)$ 的项秩是 $n-1$（见本讲练习第 3 题），从而有 $\{1,\cdots,n\}$ 上的置换 σ，使得 $\sigma(p)=q$；且当 $i\neq p$ 时 $a_{i\sigma(i)}>0$. σ 可以确定一个置换方阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，其中 $p_{ij}=1$ 当且仅当 $\sigma(i)=j$.

令 $\boldsymbol{A}_\theta=(1-\theta)\boldsymbol{A}+\theta\boldsymbol{P}$，则当 $\theta\geqslant0$ 充分小时，$\boldsymbol{A}_\theta\in\Omega_n$. 再记 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}_\theta=f(\theta)$，则有 $f'(0)=0$. 注意到，由引理 7.2 可知

$$\begin{aligned}f'(0)&=\sum_{i,j=1}^{n}(-a_{ij}+p_{ij})\mathrm{per}\boldsymbol{A}(i\mid j)\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{per}\boldsymbol{A}(k\mid\sigma(k))-n\mathrm{per}\boldsymbol{A}\\&=\mathrm{per}\boldsymbol{A}(p\mid q)-\mathrm{per}\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

引理 7.3 得证. □

从引理 7.2 可以证明，若极阵 $\boldsymbol{A}$ 是正矩阵，则 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}=\mathrm{per}(\boldsymbol{J}_n/n)$. 这可以通过“平均化运算”来证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，记 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}=\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$. 若 $\boldsymbol{A}>0$，则将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、第 2 两列取平均后所得的正方阵仍是极阵，因为

$$\begin{aligned}&\mathrm{per}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2),\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2),\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right)\\&=\frac{1}{4}[\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&\quad+2\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)].\end{aligned}\tag{7.7}$$

而由引理 7.2，将 $\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 按第 2 列展开后，得

$$\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\mathrm{per}\boldsymbol{A}(i\mid2)=\mathrm{per}\boldsymbol{A},$$

同样有 $\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{per}\boldsymbol{A}$，故式(7.7)右边等于 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}$. 通过不断选取不同的一对列作平均，可以产生一个正的极阵序列 $\boldsymbol{A}^{(1)},\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots$，且 $\boldsymbol{A}^{(l)}\to\boldsymbol{J}_n$，故

$$\mathrm{per}\boldsymbol{A}=\mathrm{per}\boldsymbol{A}^{(l)}=\mathrm{per}\boldsymbol{J}_n.$$

引理 7.2 和引理 7.3 是分别在 1959 年和 1971 年证得的. 由此除了可得出“若极阵 $\boldsymbol{A}$ 是正矩阵，则 $\mathrm{per}\boldsymbol{A}=\mathrm{per}\boldsymbol{J}$”的结论外，始终未能通过得到极阵的进一步性

质而最终证明猜想.直到两位苏联数学家法里克曼和叶果罗切夫在这个基础上不约而同地使用了苏联著名几何学家阿历山大罗夫在1938年得出的一个不等式,最终轻巧地证明了这个40多年来未能解决的猜想.

阿历山大罗夫的关键性不等式可以表述为:

定理 7.14 设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的正(列)向量,$\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任一(列)向量,则

$$[\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-2},\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{b})]^2 \geqslant \mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-2},\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_{n-1})\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-2},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}),$$

其中等号成立当且仅当有常数 α,使 $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}_{n-1}$.

定理7.14是下述更一般的定理7.14′的特殊情况,而定理7.14′在用空间的语言表述后,比定理7.14更简明,也更富有启发性.为此,先定义一些名词和概念.

设 Q 是 n 阶实对称方阵,且在 Q 的 n 个实特征值中1个为正,$n-1$ 个为负.则通过 Q 可以在 n 维实(列)向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中引进一种对称内积:对 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,定义 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积为 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{y}$.显然,$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$.如此引进内积后的 $\mathbf{R}^n$ 称为一个Lorentz空间.注意,对Lorentz空间中的向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$ 可以是正数,也可能是负数或零,按 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$ 为正、负和零分别称为 $\boldsymbol{x}$ 为正向量、负向量和迷向向量.不难证明,Lorentz空间的任意二维子空间中,如果有正向量,则一定同时有负向量和迷向向量.

定理7.14的推广形式可表述如下:

定理 14′ 设 $\boldsymbol{a}$ 是Lorentz空间中的正向量,$\boldsymbol{b}$ 是任给向量,则有

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^2 \geqslant \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle,$$

其中等号成立当且仅当有常数 α,使 $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}$.

证 若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 线性相关,显然定理中的等式成立.现设 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 线性无关,则由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 构成的二维子空间中一定有负向量和迷向向量,从而 μ 的2次方程

$$\langle\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle\mu^2+2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\mu+\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle=0$$

有相异的实根.因此,其判别式为正,即

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^2 > \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle. \qquad \square$$

为了从定理7.14′得到定理7.8,我们通过 n 维正列向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-2}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义内积为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

即

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{y},$$

其中 $Q=(q_{ij})$,$q_{ij}=\mathrm{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-2},\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$,这里记 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个分量是1、其余分量都是0的 n 维向量.

这只要能证明 $\mathbf{R}^n$ 连同如上定义的内积是Lorentz空间,即上述 n 阶实对称

方阵 Q 有 1 个正特征值和 $n-1$ 个负特征值，则因为对于每个分量都是正数的向量 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 来说，显然有

$$\langle \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1} \rangle = \operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1}) > 0,$$

故定理 7.14 就是定理 7.14′的直接推论.

引理 7.4　设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-2}$ 都是 n 维的正列向量. 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义内积

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{y},$$

则 $\mathbf{R}^n$ 成为一个 Lorentz 空间.

证　对 n 用归纳法论证. 当 $n=2$ 时，易知

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

从而结论成立. 现设结论对 $\mathbf{R}^{n-1}$ 成立. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，我们首先证明 Q 是可逆的，即 Q 没有零特征值. 假设有 $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$，$Q\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$，则对第 $n-1$ 列作 Laplace 展开，即得

$$\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}_i) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n).$$

特别地，

$$\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = 0.$$

对于每个确定的 $j(j=1, \cdots, n)$，记

$$q_{kl}^{j} = \operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-3}, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_j) \quad (k, l \neq j; 1 \leqslant k, l \leqslant n).$$

则根据归纳假设，由 $n-1$ 阶实对称方阵 $Q^{(j)} = (q_{kl}^{(j)})$ 在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中引进内积后得到 Lorentz 空间. 这时

$$\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-3}, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{a}_{n-2}; \boldsymbol{e}_j) > 0,$$

$$\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-3}, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{e}_j) = 0.$$

故由定理 7.14′，可得

$$\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-3}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{e}_j) \leqslant 0,$$

且等号成立当且仅当除 j 个分量外，$\boldsymbol{c}$ 的其余 $n-1$ 个分量 c_i 是 $\boldsymbol{a}_{n-2}$ 的相应的 $n-1$ 个分量 $\boldsymbol{a}_{i,n-2}$ 的同一个常数 α_j 倍 $(i=1, \cdots, n; i \neq j)$. 但

$$0 = \operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{j,n-2} \operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-3}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{e}_j)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-3}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{e}_j) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n).$$

所以诸 $\boldsymbol{a}_j$ 必须是零. 从而 $Q\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

令 $\boldsymbol{e}$ 是分量都是 1 的 n 维列向量. 对实数 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$，考察 $\mathbf{R}^n$ 中如下定义的内积：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_\theta = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} q_\theta \boldsymbol{y} = \operatorname{per}((1-\theta)\boldsymbol{e} + \theta \boldsymbol{a}_i, \cdots, (1-\theta)\boldsymbol{e} + \theta \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

显然 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_\theta$ 仍符合引理的条件，从而由前面的证明可知 Q_θ 没有零特征值. 所以当 θ 从 0 增加到 1 时，Q_θ 的正特征值的个数不变. 注意到 $Q_0 = (n-2)!(\boldsymbol{J}_n -$

$\boldsymbol{I}_n$),这里 $\boldsymbol{J}_n$ 和 $\boldsymbol{I}_n$ 分别是 n 阶全 1 方阵和单位方阵. 所以 $\boldsymbol{Q}_0$ 有 1 个正特征值、$n-1$个负特征值,从而 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}$ 也是如此. □

注 在定理 7.14 中,若仅假设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非负向量,则所说的不等式仍成立. 这只要将 $\boldsymbol{a}_i$ 代以 $\boldsymbol{a}_1+\varepsilon\boldsymbol{e}(i=1,\cdots,n-1)$,其中 $\varepsilon>0$,并令 $\varepsilon\to 0$ 即得. 但这时从等式成立不能推得 $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}_{n-1}$. 下面即可说明:

$$\left(\operatorname{per}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right)^2=\operatorname{per}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\operatorname{per}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

现在来完成 van der Waerden 猜想的证明. 首先利用定理 7.14 来加强引理 7.2 的结论.

引理 7.2′ 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\Omega_n$ 是极阵,则 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}(i\mid j)=\operatorname{per}\boldsymbol{A}$ 对 $i,j=1,\cdots,n$ 成立.

证 假设有 r,s,使 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}(r\mid s)>\operatorname{per}\boldsymbol{A}$,则因 $\boldsymbol{A}$ 完全不可分,故有 $t\neq s$,使 $a_{rt}>0$. 利用定理 7.14 及其注,有

$$\begin{aligned}(\operatorname{per}\boldsymbol{A})^2&=\operatorname{per}^2(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\cdots,\boldsymbol{a}_t,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&\geqslant\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&\quad\times\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_t,\cdots\boldsymbol{a}_t,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ks}\operatorname{per}\boldsymbol{A}(k\mid t)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{kt}\operatorname{per}\boldsymbol{A}(k\mid s)\Big).\end{aligned}$$

但根据引理 7.3,上述右端每个 $n-1$ 阶积和式至少是 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}$,且有一个 $\operatorname{per}\boldsymbol{A}(r\mid s)>\operatorname{per}\boldsymbol{A}$. 因为 $a_{rt}>0$,所以右端一定大于$(\operatorname{per}\boldsymbol{A})^2$,这导致矛盾. □

定理 7.15 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 n 阶双随机方阵,则

$$\operatorname{per}\boldsymbol{A}\geqslant\frac{n!}{n^n},$$

且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}_n/n$.

证 设 $\boldsymbol{A}\in\Omega_n$ 是极阵. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列$\boldsymbol{a}_i$ 和第 j 列$\boldsymbol{a}_j$ 都换成$(\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_j)/2$ 后得 $\hat{\boldsymbol{A}}\in\Omega_n$,则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 仍是极阵. 不妨设 $i=1,j=2$,由引理 7.2′,即可得

$$\begin{aligned}\operatorname{per}\hat{\boldsymbol{A}}&=\frac{1}{2}\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\frac{1}{4}\operatorname{per}(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&=\frac{1}{2}\operatorname{per}\boldsymbol{A}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_{k1}\operatorname{per}\boldsymbol{A}(k\mid s)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_{k2}\boldsymbol{A}(k\mid 1)\\&=\operatorname{per}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

从 $\boldsymbol{A}$ 到$\hat{\boldsymbol{A}}$ 称为一次平均化运算.

现任意选定 $\boldsymbol{A}$ 的一列,设选第 n 列. 因为 $\boldsymbol{A}$ 完全不可分,所以 $\boldsymbol{A}$ 的每一行的前 $n-1$ 个分量中至少有一个正数,从而对 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 列进行有限次平均化运算

后，$\boldsymbol{A}$ 变成极阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的前 $n-1$ 列 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-1}$ 都是正向量，$\hat{\boldsymbol{A}}$ 的第 n 列是 $\boldsymbol{a}_n$. 对 $\mathrm{per}(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-2},\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-1},\boldsymbol{a}_n)$ 用定理 7.14，再注意到引理 7.2′，可知有下式成立：

$$\begin{aligned}&\mathrm{per}^2(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-2},\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-1},\boldsymbol{a}_n)\\&\quad=\mathrm{per}(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-2},\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-1},\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-1})\mathrm{per}(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-2},\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_n).\end{aligned}$$

于是由定理 7.14 可知 $\boldsymbol{a}_n$ 是 $\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-1}$ 的常数倍. 同理，$\boldsymbol{a}_n$ 是每个 $\tilde{\boldsymbol{a}}_j$ 的常数倍，但 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1+\cdots+\tilde{\boldsymbol{a}}_{n-1}+\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{e}$，所以 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{e}/n$. 因为我们开始时可选定 $\boldsymbol{A}$ 的任意一列，所以 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都等于 $\boldsymbol{e}/n$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}_n/n$. □

练　习

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶双随机方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可表为至多 n^2-2n+2 个置换方阵的凸线性组合.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的(0,1)矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的任一线上的元素不全是零. $\boldsymbol{A}$ 的一组线称为不交组，若其中任意两线或平行，或公共元素是 0；$\boldsymbol{A}$ 的一组元素 1 称为关联组，若 $\boldsymbol{A}$ 中任一线含有该组中的 1. 证明：$\boldsymbol{A}$ 的不交组中线数的最大值等于 $\boldsymbol{A}$ 的关联组中元素数的最小值.

3. 证明：$n(\geqslant 2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 完全不可分的充要条件是 $\boldsymbol{A}(i\,|\,j)$ 的项秩为 $n-1$ $(i,j=1,\cdots,n)$.

4. 证明：$n(>1)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 置换相抵于不可约方阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的项秩是 n.

5. n 阶(0,1)方阵 $\boldsymbol{T}_n=(t_{ij})$ 称为 Teoplitz 方阵，若当 $|i-j|\leqslant 2$ 时，$t_{ij}\approx 1$；其余所有 $t_{ij}=0$. 证明：当 $n>5$ 时，下式成立：

$$\mathrm{per}\boldsymbol{T}_n=2\mathrm{per}\boldsymbol{T}_{n-1}+2\mathrm{per}\boldsymbol{T}_{n-3}-\mathrm{per}\boldsymbol{T}_{n-5}.$$

6. 证明定理 7.7 中的下界是可以达到的.

7. 设集合 X_i 有 $i+1$ 个元素 $(i=1,\cdots,n)$. 证明：$(X_1,\cdots,X_n)$ 至少有 2^n 个不同的 SDR. 正好有 2^n 个不同的 SDR 的充要条件是什么？

8. 设 $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶双随机方阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维非负列向量. 证明：$\boldsymbol{P}\prec\boldsymbol{x}$.

9. 设 $\boldsymbol{R}=(r_1,\cdots,r_m)$，$\boldsymbol{S}=(s_1,s_2)$ 是整向量，其中 $r_i=0,1,2(i=1,\cdots,m)$，$m\geqslant s_1\geqslant s_2\geqslant 0$. 证明：$\mathfrak{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ 非空的充要条件是

$$r_1+\cdots+r_m=s_1+s_2.$$

10. 验证 7.5 节例 7.4.

11. 试证明：在 Lorentz 空间的任意二维子空间中，若含有正向量，则必含有负向量和迷向向量.

第 8 讲　矩阵的广义逆

近几十年来，人们对推广方阵之逆的概念并使之应用于研究各类数学问题，做了不少工作，逐渐促使矩阵的广义逆矩阵的基本知识成为矩阵理论的基础内容之一. 本讲仅结合解线性代数方程组的问题对此作简单的介绍[①].

8.1　广义逆与解线性方程组

设有线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别是 $m \times n$ 矩阵和 $m \times 1$ 矩阵. 若 $m = n$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则此方程组对任意 $\boldsymbol{b}$ 都有唯一解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 对于一般情形，即当 $m \neq n$，或 $m = n$ 但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，这个方程组就不一定对任意 $\boldsymbol{b}$ 都有解；即使有解，解也不一定唯一. 现在先讨论这样的问题：如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，能不能用类似于 $\boldsymbol{A}$ 可逆时解的表达式 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 来显式表示出方程组的解？

定义 8.1[②]　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵. $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称作 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1\}$-广义逆（简记为 $\{1\}$-逆），如果对任意给出的 $m \times 1$ 矩阵（列向量）$\boldsymbol{b}$，只要方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b}$ 一定是解.

不难分析清楚 $\{1\}$-逆这个概念的内涵：

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 属于由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量所张成的线性空间 $L(\boldsymbol{A})$. 易知

$$L(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n\}.$$

所以，按照定义：

$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆$\Leftrightarrow$对每个 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z})$ 是方程组的解$\Leftrightarrow$对每个 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n$，

---

① 有关著作很多，例如，可参看 A. Ben-Israel 和 T. N. Greville 的专著《Generalized Matrix Inverse: Theory and Applications》(New York: Wiley, 1973).

② 为方便计，本讲均假定基域是复数域. 但其中相当一部分内容实际上在任意基域上都成立，读者不难自行判断.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA}\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \Leftrightarrow \boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$.

这就证明了：

定理 8.1　$n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个$\{1\}$-逆，当且仅当 $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$ 成立. □

再进一步讨论，对任给的 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 是否一定有$\{1\}$-逆？如果有，又如何确定 $\boldsymbol{A}$ 的所有$\{1\}$-逆？

为此，只需分析等式 $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$. 先将 $\boldsymbol{A}$ 化到相抵标准形：设 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶可逆方阵，使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A} \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{PAQQ}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{PAQ} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}_r, \end{aligned}$$

这里记

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{pmatrix}.$$

定理 8.2　对 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，设

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶可逆方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有$\{1\}$-逆的集合是

$$\left\{ \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{pmatrix}\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \text{ 分别是任意的 } r \times (m-r), \right.$$

$$\left. (n-r) \times r, (n-r) \times (m-r) \text{ 矩阵} \right\}.$$

推论 8.1　任意 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定有$\{1\}$-逆，而且 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1\}$-逆唯一当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵，这时$\{1\}$-逆就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

证　由定理 8.2，易知 $\boldsymbol{A}$ 的所有$\{1\}$-逆的集合是一个 $mn - r^2$ 维线性空间. 因为 $r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} \leqslant m\ (n)$，所以 $mn - r^2 = 0$ 当且仅当 $m = n = r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. □

例 8.1　若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1\}$-逆 $\boldsymbol{B}$ 可表示为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_n \quad \boldsymbol{X})\boldsymbol{P}.$$

从而

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_n \quad \boldsymbol{X})\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{I}_n,$$

而 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的左逆. 同样,若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = m$,则 $\boldsymbol{A}$ 的$\{1\}$-逆 $\boldsymbol{B}$ 可表示为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}\boldsymbol{P},$$

从而

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{I}_m \quad \boldsymbol{0})\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_m,$$

即 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右逆. □

定理 8.3 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个$\{1\}$-逆. 如果方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解,则其通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Bb} + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{z},$$

这里 $\boldsymbol{z}$ 是任意的 n 维列向量.

证 先讨论齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$. 首先,

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

对任意 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n$ 成立. 即对任意 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n$,$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{z}$ 一定是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 要证 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解必能表示为$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{z}$,只需证明

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = n - r,$$

这里 $r = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$.

由定理 8.2,可知

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z}\end{pmatrix}\boldsymbol{PA}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) &= \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{Q})\\ &= \mathrm{rank}\left(\boldsymbol{I}_n - \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}\\ &= n - r.\end{aligned}$$

又若非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解,则根据$\{1\}$-逆的定义,$\boldsymbol{Bb}$ 必为解,从而通解是

$$\boldsymbol{Bb} + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n.$$ □

利用上述通解表示式可以研究相容方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解的性质. 设在 n 维酉空间 U^m 中讨论方程组的求解问题,我们称在 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的所有解 $\boldsymbol{x}$ 中模 $\| \boldsymbol{x} \| =$

$\sqrt{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$最小的解为最小模解(对矩阵 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^{*}$ 表示 $\boldsymbol{M}$ 的共轭转置矩阵,即 $\boldsymbol{M}^{*}=\overline{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}}$).

定理 8.4　设 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个$\{1\}$-逆,则下列两个性质是等价的:

(1) 对任给的 m 维向量 $\boldsymbol{b}$,只要方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解,则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bb}$ 一定是其最小模解;

(2) $(\boldsymbol{BA})^{*}=\boldsymbol{BA}$.

证　设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解,则其通解是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bb}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})z,\quad z\in U^n.$$

于是,定理中的性质等价于

$\|\boldsymbol{Bb}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{Bb}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})z\|^2$ 对任意 $z\in U^n$ 和 $\boldsymbol{b}\in L(\boldsymbol{A})$成立(这里 $L(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量所张成的空间)

$\Leftrightarrow\|\boldsymbol{BAy}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{BAy}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})z\|^2$ 对任意 $\boldsymbol{y},z\in U^n$ 成立

$\Leftrightarrow\boldsymbol{y}^{*}(\boldsymbol{BA})^{*}\boldsymbol{BAy}\leqslant\boldsymbol{y}^{*}(\boldsymbol{BA})^{*}\boldsymbol{BAy}+\boldsymbol{y}^{*}(\boldsymbol{BA})^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})z+z^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})^{*}\boldsymbol{BAy}+z^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})z$ 对任意 $\boldsymbol{y},z\in U^n$ 成立

$\Leftrightarrow z^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})z+2\mathrm{Re}(\boldsymbol{y}^{*}\boldsymbol{Cz})\geqslant 0$ 对任意 $\boldsymbol{y},z\in U^n$ 成立(这里记$(\boldsymbol{BA})^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{C}$)

$\Leftrightarrow\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$(因为若 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{0}$,则在取定一个使 $\boldsymbol{Cz}\neq\boldsymbol{0}$ 的 $z\in U^n$ 后,总可以取到 $\boldsymbol{y}\in U^n$,使 $z^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})^{*}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})z+2\mathrm{Re}(\boldsymbol{y}^{*}\boldsymbol{Cz})<0$)

$\Leftrightarrow(\boldsymbol{BA})^{*}=(\boldsymbol{BA})^{*}\boldsymbol{BA}\Rightarrow\boldsymbol{BA}=((\boldsymbol{BA})^{*}\boldsymbol{BA})^{*}=(\boldsymbol{BA})^{*}\cdot\boldsymbol{BA}=(\boldsymbol{BA})^{*}$.

但因为 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}$,所以

$$\boldsymbol{BA}=(\boldsymbol{BA})^{*}\quad\Rightarrow\quad(\boldsymbol{BA})^{*}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BABA}=\boldsymbol{BA}=(\boldsymbol{BA})^{*}.$$

和定义$\{1\}$-逆一样,如果定理 8.4 中的 $\boldsymbol{B}$ 存在,它也可以定义为 $\boldsymbol{A}$ 的某一种逆——基于本节最后要阐明的理由,我们称这种 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个$\{1,4\}$-逆.

以上讨论的都是关于相容方程组的求解问题,现在转向任意的方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.虽然任意方程组一般说来是无解的,但它总有如下定义的最小二乘解.

定义 8.2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量.我们称 n 维列向量 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个最小二乘解,如果对任意 n 维向量 $\boldsymbol{x}$,都有

$$\|\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2.$$

关于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解,我们可以提出和前面一样的问题:能否用 $\boldsymbol{A}$ 的某种"广义逆"来显式表示出最小二乘解?对此有下述与定理 8.4 相仿的结果:

定理 8.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则下列两个性质是等价的:

(1) 对任给的 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bb}$ 一定是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解;

(2) $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}$,$(\boldsymbol{AB})^{*}=\boldsymbol{AB}$.

证　记 $\boldsymbol{A}$ 的列向量所张成的空间 $L(\boldsymbol{A})$ 为 L_1,再记 L_1 在 U^m 中的正交补空

间为 L_2，则 U^m 中任一向量 $\boldsymbol{b}$ 可以唯一地表示为

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_1 \in L_1, \quad \boldsymbol{b}_2 \in L_2.$$

由于对任意 $\boldsymbol{x} \in U^n$，$\boldsymbol{Ax} \in L_1$，所以

$$\| \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} \|^2 = \| \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}_1 \|^2 + \| \boldsymbol{b}_2 \|^2.$$

由此可见，$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解，当且仅当 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}_1$ 的解.

先证(1)⇒(2). 设 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足(1)，则对任意 $\boldsymbol{b} \in U^m$，有 $\boldsymbol{ABb} = \boldsymbol{b}_1$. 特别地，对任意 $\boldsymbol{z} \in U^n$，令 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Az}$，则 $\boldsymbol{b} \in L_1$，从而 $\boldsymbol{ABAz} = \boldsymbol{Az}$ 对任意 $\boldsymbol{z} \in U^n$ 成立，则有 $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$.

现在证明 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{AB}$. 记 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}$，则

$$\boldsymbol{ABb} = \boldsymbol{b}_1 \text{ 对任意 } \boldsymbol{b} \in U^m \text{ 成立} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Pb} = \boldsymbol{b}_1 \text{ 对任意 } \boldsymbol{b} \in U^m \text{ 成立},$$

所以

$$\boldsymbol{Pb}_2 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_1) = \boldsymbol{0}.$$

任取 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in U^m$，记 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$，这里 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1 \in L_1$，$\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z}_2 \in L_2$，则 U^m 中有下述内积关系式：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Pz}) = (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z}_1) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1), \\ (\boldsymbol{Py}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1), \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{Pz} = \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{P}^* \boldsymbol{z}$ 对任意 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in U^m$ 成立，所以 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$，即 $\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^*$.

再证(2)⇒(1). 设 $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^*$. 仍记 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}$，则以上两式可写成 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$. 由此还可知

$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{ABAB} = \boldsymbol{P}.$$

令 $L = \{\boldsymbol{Py} \mid \boldsymbol{y} \in U^m\}$. 仍记 $L_1 = \{\boldsymbol{Az} \mid \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{U}^n\}$，则一方面有

$$L = \{\boldsymbol{ABy} \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U}^m\} \subseteq L_1;$$

另一方面有 $L_1 = \{\boldsymbol{PAz} \mid \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{U}^n\} \subseteq L$. 所以 $L = L_1$.

对任意 $\boldsymbol{b} \in U^m$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Pb} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{b}$. 由于对任意 $\boldsymbol{Py} \in \boldsymbol{L}_1$，

$$(\boldsymbol{Py}, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{P}^* (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^* (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{b} = 0,$$

以及 $\boldsymbol{Pb} \in L = L_1$，所以

$$\boldsymbol{Pb} = \boldsymbol{b}_1 \in L_1, \quad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_2 \in L_2.$$

但 $\boldsymbol{Pb} = \boldsymbol{b}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{ABb} = \boldsymbol{b}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{Bb}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解. □

仍然基于本节最后要阐明的理由，把满足定理 8.5 条件的一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,3\}$-逆.

迄今为止，通过讨论方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的求解问题，我们得到了三个等式：

$$\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{AB}, \quad (\boldsymbol{BA})^* = \boldsymbol{BA}.$$

但并不了解对给定的 $\boldsymbol{A}$，满足这三个等式或其中两个等式的 $\boldsymbol{B}$ 是否存在. 但至少可以从表面上看到，在上述三个等式中交换 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的位置即可得到右边的等式.

而假如在左边的等式中交换 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的位置，则得出一个新的等式：

$$\boldsymbol{BAB} = \boldsymbol{B}.$$

利用这四个等式可以形式地定义以下一种广义逆.

定义 8.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times m$ 矩阵. 一个 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 若满足下列四个等式：

(1) $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{A}$；　　(2) $\boldsymbol{BAB} = \boldsymbol{B}$；

(3) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{AB}$；　　(4) $(\boldsymbol{BA})^* = \boldsymbol{BA}$，

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 Moore-Penrose 广义逆(简称 M-P 逆).

$\boldsymbol{A}$ 的 M-P 逆同时满足(1)～(4)，故也称为{1,2,3,4}-逆. 而前面讨论的三种广义逆，由于分别满足等式(1)，(1)和(4)，(1)和(3)，所以分别称为{1}-逆、{1,4}-逆和{1,3}-逆. 下一节专门讨论 M-P 逆存在而且唯一，因此，{1,4}-逆和{1,3}-逆一定存在，虽然一般并不唯一.

8.2　Moore-Penrose 逆

定理 8.6　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，则其 Moore-Penrose 广义逆 $\boldsymbol{A}^+$ 存在而且唯一. 也就是说，满足下列四个等式：

(1) $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$；　　(2) $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$；

(3) $(\boldsymbol{AX})^* = \boldsymbol{AX}$；　　(4) $(\boldsymbol{XA})^* = \boldsymbol{XA}$

的 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 存在而且唯一，并记为 $\boldsymbol{A}^+$.

证　唯一性. 假设当 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 时，等式(1)～(4)都成立，则有下列两组等式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &\overset{(2)}{=\!=} (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B} \overset{(4)}{=\!=} \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} \overset{(1)}{=\!=} \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} \\
&\overset{(4)}{=\!=} \boldsymbol{CAA}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} \overset{(4)}{=\!=} \boldsymbol{CABAB} \overset{(1)}{=\!=} \boldsymbol{CAB}, \\
\boldsymbol{C} &\overset{(2)}{=\!=} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AC}) \overset{(3)}{=\!=} \boldsymbol{CC}^*\boldsymbol{A}^* \overset{(1)}{=\!=} \boldsymbol{CC}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\
&\overset{(3)}{=\!=} \boldsymbol{CC}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB} \overset{(3)}{=\!=} \boldsymbol{CACAB} \overset{(1)}{=\!=} \boldsymbol{CAB}.
\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

存在性. 首先不难直接验证，当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = m$ 时，

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{AA}^*)^{-1}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的 M-P 逆；当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = n$ 时，$\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 M-P 逆. 对一般的 $\boldsymbol{A}$，不一定可以表示为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{XY}$，这里 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 分别是 $m \times r$ 矩阵和 $r \times n$ 矩阵，且 $\mathrm{rank}\boldsymbol{X} = \mathrm{rank}\boldsymbol{Y} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A} = r$. 令

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{X}^{+} = \boldsymbol{Y}^{*}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{*})^{-1}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{*})^{-1}\boldsymbol{X}^{*},$$

则可直接代入验证 $\boldsymbol{A}^{+}$ 满足(1)～(4)：

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}$(因为 $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{+} = \boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_r$)；

(2) $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{X}^{+} = \boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{X}^{+} = \boldsymbol{A}^{+}$；

(3) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{X}^{+} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+} = (\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+})^{*} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})^{*}$；

(4) $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{X}^{+}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}^{+}\boldsymbol{Y})^{*} = (\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{*}$. □

例 8.2 记 $\boldsymbol{J}_{m,n}$ 为元素都是 1 的 $m \times n$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{J}_{m,n} = 1, \quad \boldsymbol{J}_{m,n} = \boldsymbol{J}_{m,1}\boldsymbol{J}_{1,n}.$$

所以

$$\boldsymbol{J}_{m,n}^{+} = \boldsymbol{J}_{n,1}(\boldsymbol{J}_{1,m}\boldsymbol{J}_{n,1})^{-1}(\boldsymbol{J}_{1,m}\boldsymbol{J}_{m,1})^{-1}\boldsymbol{J}_{1,m} = \frac{1}{mn}\boldsymbol{J}_{n,m}. \quad \square$$

例 8.3 设 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 r 阶可逆方阵，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}$，其中

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I}_r \quad \boldsymbol{0}).$$

由

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{*} = \boldsymbol{I}_r, \quad \boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1^{*}\boldsymbol{A}_1,$$

即得

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{Y}^{*}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{*})^{-1}(\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{X}^{-1})\boldsymbol{X}^{*} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 8.4 设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则可直接验证

$$\boldsymbol{A}^{+} = \mathrm{diag}(a_1^{+}, a_2^{+}, \cdots, a_n^{+}), \quad a^{+} = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a^{-1}, & a \neq 0. \end{cases} \quad \square$$

这和把数 a 当作 1×1 矩阵时的 M-P 逆 a^{+} 完全一样.

例 8.5 不难验证 M-P 逆还具有下列性质：

$(\boldsymbol{A}^{+})^{+} = \boldsymbol{A}$(因为等式(1)～(4)中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的地位是对称的)；

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})^{2} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}$；

$(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{2} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}$；

$(\boldsymbol{A}^{*})^{+} = (\boldsymbol{A}^{+})^{*}$.

但应该注意，$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^{+}$ 一般不等于 $\boldsymbol{A}_2^{+}\boldsymbol{A}_1^{+}$. 例如，令

$$\boldsymbol{A}_1 = (1,0), \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = (1) \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^+ = (1).$$

但

$$\boldsymbol{A}_1^+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2^+ = \frac{1}{2}(1,1) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}_2^+\boldsymbol{A}_1^+ = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \qquad \square$$

人们自然期望 M-P 逆与解线性方程组会有密切关系. 事实上也的确有下述整齐的结论.

定理 8.7　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别是 $m\times n$ 和 $m\times 1$ 矩阵，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的模最小的最小二乘解唯一存在，它就是 $\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$. 也就是说，如记 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$，则对任意 $\boldsymbol{x}\in U^n$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0$，或者 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2>\|\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}\|^2$，或者 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}\|^2$，但 $\|\boldsymbol{x}\|>\|\boldsymbol{x}_0\|$.

证　根据定理 8.5 和 $\boldsymbol{A}^+$ 的定义，易知 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个最小二乘解. 而且，若 $\boldsymbol{x}\in U^n$ 也是一个最小二乘解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Ax}_0$（见定理 8.5 证明的开始部分）. 所以这时 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是齐次方程组的解. 根据定理 8.3，它可以表示为

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})z, \quad z\in U^n.$$

我们可以断言 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 在 U^n 中是正交的，因为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) &= \boldsymbol{x}_0^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{A}^{+*}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\ &= \boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{A}^{+*}-\boldsymbol{A}^{+*}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})z,\end{aligned}$$

但

$$\boldsymbol{A}^{+*} = (\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^* = \boldsymbol{A}^{+*}(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^{+*}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A},$$

所以 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$. 从而

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}_0\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0\\ \Rightarrow\quad &\|\boldsymbol{x}\|>\|\boldsymbol{x}_0\|.\end{aligned} \qquad \square$$

定理 8.7 可以推广到解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的情形，这里 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是已知的 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是待求的 $n\times p$ 矩阵. 我们定义一个 $s\times t$ 矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$ 的（向量）模为

$$\|\boldsymbol{M}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t}|m_{ij}|^2}.$$

$n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{X}_0$ 称为方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的一个最小二乘解，如果对任意 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$，有

$$\|\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{B}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}\|^2.$$

定理 8.7′　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的模最小的二乘解唯一存在，它就是 $\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{B}$. 也就是说，若记 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{B}$，则对任意 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{X}_0$，或者 $\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}\|^2>\|\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{B}\|^2$，或者 $\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}\|^2=\|\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{B}\|^2$，但

$$\| \boldsymbol{X} \| > \| \boldsymbol{X}_0 \| .$$

证 分别记 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 个列向量为 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{b}^{(k)}$ $(k = 1, \cdots, p)$，则所谓矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 实际上只是 p 个线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{b}^{(k)} \quad (k = 1, \cdots, p)$$

的合并记法，而且

$$\| \boldsymbol{X} \|^2 = \sum_{k=1}^{p} \| \boldsymbol{x}^{(k)} \|^2 .$$

因此，$\boldsymbol{X}_0 = (\boldsymbol{x}_0^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_0^{(p)})$ 是 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的模最小的二乘解，当且仅当对每个 $k = 1, \cdots, p$，$\boldsymbol{x}_0^{(k)}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(k)}$ 的模最小的二乘解. 但 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(k)}$ 的模最小的二乘解唯一存在，它就是 $\boldsymbol{A}^+ \boldsymbol{B}^{(k)}$，所以 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的模最小的二乘解也唯一存在，它就是 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A}^+ \boldsymbol{B}$. □

推论 8.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}_m$ 的模最小的二乘解唯一存在，它就是 $\boldsymbol{A}$ 的 M-P 逆 $\boldsymbol{A}^+$. □

上述推论揭示了 M-P 广义逆的一种具体意义.

第 9 讲　完全正方阵

9.1　完全正方阵与双非负方阵

定义 9.1　如果一个实方阵 $\boldsymbol{A}$ 能够分解为一个非负矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与它的转置矩阵的乘积，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵(completely positive matrix)．这里 $\boldsymbol{B}$ 不一定是方阵．

Markham 在 1971 年首次使用“完全正方阵”这一术语，虽然在之前已有学者研究这类方阵的性质及其应用．这类方阵在组合设计、DNA 进化的马尔可夫链模型以及能量模型等方面都有着广泛的应用．

定义 9.2　半正定的对称非负方阵称为双非负方阵(doubly nonnegative matrix)．

从定义中可以看出，完全正方阵一定是双非负方阵．反之，情况如何呢？一般情况下是不一定的．

例 9.1　方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&6\end{pmatrix}$$

是双非负方阵，但不是完全正方阵(读者可自证或见 9.3 节)．□

这个例题提出了一个十分自然的问题：双非负方阵满足什么条件才是完全正方阵？进一步，如果 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵，那么它有什么样的非负分解？事实上，在完全正方阵理论中有两个最基本和最重要的问题：

(Ⅰ) 如何刻画一个完全正方阵？即给出一个方阵是完全正方阵的充要条件，或者给出更多必要条件和充分条件．

(Ⅱ) 给定一个完全正方阵 $\boldsymbol{A}$,如何确定最小的 k,使得有 $n\times k$ 非负矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$?

这两个问题都非常困难.虽然已取得许多重要的进展,但是离彻底解决这两个问题还相距甚远.我们在 9.2 节中将完全刻画小阶数的完全正方阵,在 9.3 节和 9.4 节中刻画几类完全正方阵,在 9.5 节中研究问题(Ⅱ).本节最后将给出完全正方阵的一些基本性质.

命题 9.1 一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成一些非负列向量与其转置向量乘积之和,即

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{b}_i(i=1,\cdots,k)$ 是非负列向量. □

命题 9.2 两个完全正方阵的和、Hadamard 积、Kronecker 积仍是完全正方阵.

证 由命题 9.1,令

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{C}=\sum_{i=k+1}^{k+l}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{b}_i(i=1,\cdots,k+l)$ 是非负列向量,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\sum_{i=1}^{k+l}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{C}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{k+l}(\boldsymbol{b}_i\circ\boldsymbol{b}_j)(\boldsymbol{b}_i\circ\boldsymbol{b}_j)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{b}_i\circ\boldsymbol{b}_j(i=1,\cdots,k;j=k+1,\cdots,l)$ 是非负列向量.另外,

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T}}.$$ □

命题 9.3 如果 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵,$\boldsymbol{C}$ 是非负方阵,则 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^k$ 都是完全正方阵.

证 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{B}\geqslant 0$,则

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\geqslant 0.$$

另外,当 $k=2l$ 为偶数时,

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{A}^l)(\boldsymbol{A}^l)^{\mathrm{T}};$$

当 $k=2l+1$ 为奇数时,

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^l)^{\mathrm{T}}.$$ □

命题 9.4 设 $f(x)$ 是非负实系数的多项式.若 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵,则 $f(\boldsymbol{A})$ 为完全正方阵.

证 由命题 9.2 和命题 9.3 可得. □

命题 9.5 完全正方阵的主子方阵是完全正方阵.

证 令 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}]$ 为完全正方阵 $\boldsymbol{A}$ 的主子方阵.因为 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵,所以存

在非负 $n\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. 故

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}]=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\gamma}]\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\gamma}],\quad \boldsymbol{\gamma}=(1,\cdots,k).$$

即 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}]$为完全正方阵. □

命题 9.6　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵的充要条件是，存在正整数 k 和 n 个非负列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in\mathbf{R}^k$，使得 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的 Gram 方阵，即 $\boldsymbol{A}=(\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle)_{n\times n}$，其中$\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$ 是向量$\boldsymbol{\alpha}_i$与$\boldsymbol{\alpha}_j$的内积.

证　$\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵当且仅当存在非负的 $n\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，当且仅当 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为非负向量，使得$\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=a_{ij}$，即

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{Gram}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle)_{n\times n}.$$ □

9.2　阶数≤4 的完全正方阵的刻画

本节的主要目标是证明阶数≤4 的完全正方阵与双非负方阵是等价的，即：

定理 9.1　阶数≤4 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是双非负方阵.

为了证明这个结论，我们分 $n\leqslant 3$ 和 $n=4$ 两种情况.

引理 9.1　阶数≤3 的双非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵.

证　当 $n=1$ 时，显然成立. 当 $n=2$ 时，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix},$$

则当 $c=0$ 时，令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；当 $c>0$ 时，则由 $\boldsymbol{A}$ 是半正定知$ac-b^2\geqslant 0$. 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sqrt{a-b^2/c} & \dfrac{b}{\sqrt{c}}\\ 0 & \sqrt{c}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{B}$ 是非负方阵，且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

当 $n=3$ 时，令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

为双非负方阵. 若 $a_{ii}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 i 列的所有元素均为 0，再由 $n\leqslant 2$ 的情形即得. 不失一般性，设 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$(否则令

$$\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}},\frac{1}{\sqrt{a_{22}}},\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\right),$$

$\boldsymbol{DAD}^{\mathrm{T}}$ 仍为双非负方阵).

进一步,可设 $a_{12}>a_{13}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}1-a_{13}^2 & a_{12}-a_{13}a_{23} & 0\\ a_{12}-a_{13}a_{23} & 1-a_{23}^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{bb}^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

显然 $\boldsymbol{bb}^{\mathrm{T}}$ 是完全正方阵.因为 $\boldsymbol{A}$ 是双非负方阵,所以 $a_{13},a_{23}\leqslant 1$,$a_{12}-a_{13}a_{23}\geqslant a_{12}-a_{13}\geqslant 0$,$1-a_{13}^2\geqslant 0$,$1-a_{23}^2\geqslant 0$.进一步,由第5讲定理5.9的证明知 $\boldsymbol{C}$ 是半正定的.

故 $\boldsymbol{C}$ 是双非负方阵,由 $n=2$ 时的情形,可知 $\boldsymbol{C}$ 为完全正方阵.因此 $\boldsymbol{A}$ 的为完全正方阵. □

为了证明 $n=4$ 的情况,我们首先证明下面的引理,其本身也有意义.

引理 9.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶双非负方阵.如果 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant 2$,则 $\boldsymbol{A}$ 必为完全正方阵.

证 如果 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant 1$,那么存在一个列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$.因为 $\boldsymbol{A}$ 是非负方阵,所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 必定非负.故结论成立.现在假定 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$.由 9.1 节命题 9.3,不妨设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 n 阶非负方阵,其中 $a_{ii}=1(i=1,\cdots,n)$,$a_{12}=\min\{a_{ij}\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}<1$.

令

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\\&=\begin{pmatrix}1-a_{12}^2 & 0 & a_{13}-a_{12}a_{23} & \cdots & a_{1n}-a_{12}a_{2n}\\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}-a_{21}a_{n2} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

是双非负矩阵,因为 $a_{12}a_{23}\leqslant a_{12}\leqslant a_{ij}\leqslant 1$.

令

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-a_{12}^2}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{DBD}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}.$$

由 $2=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{C}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}[1,2])+\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}[1,2])$，知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}[1,2])=0$. 所以 $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}[1,2]=\boldsymbol{C}_{22}-\boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{C}_{12}=\boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{C}_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{C}_{21}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

因此 $\boldsymbol{C}$ 是完全正方阵. 再由 9.1 节命题 9.3，知 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵. □

引理 9.3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 4 阶双非负方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵.

证　若 $a_{ii}=0(1\leqslant i\leqslant 4)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 i 列均为 0，故可以归结到 3 阶双非负方阵必为完全正方阵的情况. 不失一般性，设 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=1$ 且 $a_{34}=\min\{a_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant 4\}<1$.

令

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}\geqslant 0$，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\\ &=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & a_{13}-a_{14}a_{34} & a_{14}\\ a_{12} & 1 & a_{23}-a_{24}a_{34} & a_{24}\\ a_{13}-a_{14}a_{34} & a_{23}-a_{24}a_{34} & 1-a_{34}^2 & 0\\ a_{14} & a_{24} & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(1,1,1/\sqrt{1-a_{34}^2},1)$，则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{DBD}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{12} & 1 & c_{23} & c_{24}\\ c_{13} & c_{23} & 1 & 0\\ c_{14} & c_{24} & 0 & 1\end{pmatrix}$$

为双非负方阵. 由第 5 讲 5.3 节知

$$\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}[3,4]=\begin{pmatrix}1 & c_{12}\\ c_{12} & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_{13} & c_{14}\\ c_{23} & c_{24}\end{pmatrix}\boldsymbol{I}_2^{-1}\begin{pmatrix}c_{13} & c_{23}\\ c_{14} & c_{24}\end{pmatrix}$$

是半正定方阵.因此它可分解为

$$\boldsymbol{C}/\boldsymbol{C}[3,4]=\begin{pmatrix}d_{11}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11}\\ 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}d_{12}\\ d_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{12}\\ d_{22}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

其中 $d_{11}\geqslant 0, d_{22}\geqslant 0$. 因此 $d_{11}^2+d_{12}^2+c_{13}^2+c_{14}^2=1$ 且 $c_{12}-c_{13}c_{23}-c_{14}c_{24}=d_{12}d_{22}$.令

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}c_{13}\\ c_{23}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}c_{14}\\ c_{24}\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}d_{12}\\ d_{22}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}d_{11}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\sqrt{\frac{c_{13}c_{23}}{c_{13}c_{23}+c_{14}c_{24}}}\boldsymbol{\gamma},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\sqrt{\frac{c_{14}c_{24}}{c_{13}c_{23}+c_{14}c_{24}}}\boldsymbol{\gamma},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}$ 中(1,2)位置的元素等于

$$c_{13}c_{23}+\frac{c_{13}c_{23}}{c_{13}c_{23}+c_{14}c_{24}}d_{12}d_{22}=c_{13}c_{23}\frac{c_{13}c_{23}+c_{14}c_{24}+d_{12}d_{22}}{c_{13}c_{23}+c_{14}c_{24}}$$

$$=\frac{c_{13}c_{23}c_{12}}{c_{13}c_{23}+c_{14}c_{24}}\geqslant 0.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{T}+\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}$ 是双非负方阵且秩为 2.由引理 9.2 知 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}$ 是完全正方阵.同理,可证 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}$ 是完全正方阵.

另一方面,通过计算可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\\ &=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

为三个完全正方阵之和,故 $\boldsymbol{C}$ 必为完全正方阵.再由 9.1 节命题 9.3,知 $\boldsymbol{A}$ 必为完全正方阵. □

定理 9.1 的证明则由引理 9.1 和引理 9.3 即得.

注 阶数≥5 的双非负方阵不一定是完全正方阵.例如在 9.1 节例 9.1 中,$\boldsymbol{A}$ 与单位方阵 $\boldsymbol{I}_{n-5}$ 的直和就不是完全正方阵.一个很自然的问题是:如何给出 5 阶双非负方阵是完全正方阵的充要条件?

这个问题到目前为止还没有彻底解决.在随后两节中将侧重讨论双非负方阵是完全正方阵的一些充分条件以及一些必要条件.

9.3　完全正方阵与比较方阵

本节主要给出一类双非负方阵必为完全正方阵的充分条件以及在一些附加条件的基础上这些充分条件也是必要条件的情形.

定理 9.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶双非负方阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 是对角占优的(即 $|a_{ii}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,(i=1,\cdots,n)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵.

证　令 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 是元素在 $(i,i),(i,j),(j,i),(j,j)$ 位置的值为 1、其余都为 0 的 n 阶双非负方阵,则 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 是完全正方阵. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对角占优,所以 $a_i=a_{ii}-\sum\limits_{j\neq i}a_{ij}\geqslant 0$. 故非负对角方阵 $\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$ 为完全正方阵. 因为

$$\boldsymbol{A}=\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_{ij}\boldsymbol{F}_{ij}+\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n),$$

所以由 9.1 节命题 9.2 知 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵. □

例 9.2

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&2\\2&4&1\\2&1&3\end{pmatrix}$$

是完全正方阵,因为 $\boldsymbol{A}$ 是对角占优的双非负方阵,且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$ □

定义 9.3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵. $\boldsymbol{A}$ 的比较方阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})=(b_{ij})$ 定义为

$$b_{ij}=\begin{cases}|a_{ij}|, & i=j,\\ -|a_{ij}|, & i\neq j.\end{cases}$$

定理 9.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶双非负方阵. 若 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ 是 M 方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵.

证　由第 6 讲 6.8 节定理 6.15,可知有正对角方阵 $\boldsymbol{D}$,使得 $\boldsymbol{DM}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}$ 为严格对角占优方阵,故 $\boldsymbol{DAD}$ 为严格对角占优方阵. 由定理 9.1 知 $\boldsymbol{DAD}$ 为完全正方阵,再由 9.1 节命题 9.3 知 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵.

注　定理 9.3 的条件不是必要条件. 例如

$$\boldsymbol{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是完全正方阵，但是

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{J}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

不是 M 方阵.

在第 6 讲中，在研究不可约方阵时，引入了有向图的概念. 为了进一步研究完全正方阵和图的拉普拉斯方阵，我们引入无向图的概念.

定义 9.4 无向图(undirected graph)是一个二元组 $G=(V,E)$，其中 V 为非空集合，称为顶点集，其元素称为 G 的顶点；E 称为边集，其中元素 $e=\{u,v\}$，$u,v\in V$ 称为边，并且称 u,v 为边 e 的两个端点，u 与边 e 相关联，u 与 v 相邻. 进一步，如果无向图的任何一条边有两个不同的端点，且 V 中任何两个顶点之间至多有一条边，则称之为无向简单图，简称简单图(simple graph).

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可以对应一个简单图 $G(\boldsymbol{A})$ 有 n 个顶点 $\{v_1,\cdots,v_n\}$，v_i 与 v_j 相邻当且仅当 $a_{ij}\neq 0$，且 $i\neq j$. 设 $H=(V(H),E(H))$ 是 n 个顶点 $V(H)=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 的简单图. 若一个 n 阶对称方阵 $\boldsymbol{B}$ 所对应的图 $G(\boldsymbol{B})$ 恰好是 H，则称 $\boldsymbol{B}$ 是图 H 的一个实现. 如果一个简单图 G 中存在三个顶点两两相邻，则称 G 有三角形. 我们有下列结论：

定理 9.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶完全正方阵. 如果 $G(\boldsymbol{A})$ 不含三角形，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ 为 M 方阵.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶完全正方阵，则存在 k 个非负列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}.$$

因为 $G(\boldsymbol{A})$ 不含三角形，所以每个 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,\cdots,k)$ 中至多有两个分量不为 0. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 恰好有两个分量不为 0，则改变其中一个分量符号后所得到的向量记为 $\boldsymbol{\beta}_i$. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 恰好只有一个分量不为 0，则令 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i$. 容易验证 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}$. 故 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ 为正定方阵. 再由第 6 讲 6.8 节知 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ 为 M 方阵. □

由定理 9.3 和定理 9.4 知：

定理 9.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶双非负方阵. 若 $G(\boldsymbol{A})$ 不含三角形，则 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵当且仅当 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ 是 M 方阵. □

9.4 完 全 正 图

从定理 9.5 可以看出，一个双非负方阵的图的结构与它是不是完全正方阵有着密切的联系.

本节进一步研究图的结构来确定双非负方阵为完全正方阵的条件.

定义 9.5　一个无向简单图 G 称为完全正图(completely positive graph)，如果图 G 的每个双非负实现方阵 $\boldsymbol{A}$ 都是完全正方阵，即任何一个双非负方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的图恰好是 G，则 $\boldsymbol{A}$ 必定为完全正方阵.

本节的主要结论是完全正图结构的刻画.

定理 9.6　一个无向简单图 G 是完全正图的充要条件是，G 不含长度$\geqslant 5$ 的奇圈(即长为奇数的圈).

为了证明这个主要结论，我们分五个部分.

引理 9.4　设 G 包含$\geqslant 5$ 的奇圈，则 G 不是完全正图.

证　首先证明$\geqslant 5$ 的奇圈不是完全正图.

令 $k\geqslant 5$ 为奇数且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k-2 \end{pmatrix}_{k\times k}.$$

显然 $G(\boldsymbol{A})$是长为 k 的奇圈. 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 & \cdots & (-1)^{k-2} & (-1)^{k-1} & 0 \end{pmatrix}_{k\times(k-1)},$$

即 $b_{ii}=1(i=1,\cdots,k)$，以及 $b_{j+1,j}=1, b_{kj}=(-1)^{j+1}(j=1,\cdots,k-2)$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为半正定方阵. 另一方面，

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & k-2 \end{pmatrix},$$

$\det\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})=-4$.

故 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$不是 M 方阵.由定理 9.5 知 $\boldsymbol{A}$ 不是完全正方阵.

其次,设 G 是n 个顶点的简单图,且包含一个 k 圈,$k\geqslant 5$ 为奇数.令 $\boldsymbol{S}$ 为 G 的邻接方阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $n\times n$ 方阵,其对应圈的主子方阵正好是前面的方阵 $\boldsymbol{A}$,其余位置为 0.对于每一个 $a>0$,存在 $0<b<a$,使得 $\boldsymbol{C}_a=\boldsymbol{C}+a\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{S}$ 是双非负方阵,且为 G 的一个双非负方阵实现,即 $G(\boldsymbol{C}_a)=G$.

但是 $\lim\limits_{a\to 0}\boldsymbol{C}_a=\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{C}$ 不是完全正方阵.另外,由于 n 阶完全正方阵形成的集合是闭集,故存在 $a>0$,使得 $\boldsymbol{C}_a$是双非负方阵,但不是完全正方阵.所以 $\boldsymbol{G}$ 不是完全正图. □

定义 9.6 如果一个图 G 的顶点集可以分拆为两部分 X 和 Y,使得每条边的一个顶点在 X,另一个顶点在 Y,则称 G 为二部图.

引理 9.5 二部图是完全正图.

证 对于任何一个双非负方阵 $\boldsymbol{A}$,且对应的图 $G(\boldsymbol{A})=H$ 是三部,则存在置换方阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_2\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ 为对角方阵.因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_1 & -\boldsymbol{C} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

且 $\boldsymbol{A}$ 为半正定方阵,所以由 Sylvester 惯性定律知 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$半正定.故由定理 9.4 知 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵. □

定义 9.7 如果简单图 G 中一个顶点 v 使得 $G-\{v\}$比 G 有更多的连通分支,即 $G=G_1\cup G_2$,其中 G_1 和 G_2 只有一个公共顶点 v,则称 v 为 G 一个割点(cut vertex),一个没有割点的连通图称为块(block).

引理 9.6 设 $G=G_1\cup G_2$ 有一个割点 v,其中 G_1 和 G_2 只有一个公共顶点 v,没有公共边.如果 G_1与 G_2 是完全正图,则 G 也是完全正图.

证 不失一般性,设 $V(G_1)=\{1,\cdots,k\}$,$V(G_2)=\{k,k+1,\cdots,n\}$.令图 G 的任何一个双非负方阵实现为$\boldsymbol{A}$,即 n 阶双非负方阵$\boldsymbol{A}$ 对应的图$G(\boldsymbol{A})=G$.由于

$\boldsymbol{A}$ 为半正定阵，所以存在一组向量$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$使得 $\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbf{R}^m$，以及

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{Gram}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=(\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle).$$

由于 G 有一个割点 v，故$\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle=0(1\leqslant i\leqslant k-1,k+1\leqslant j\leqslant n)$成立. 因此子空间 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1}\}$与 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$正交. 令 $\boldsymbol{\alpha}'_k$为$\boldsymbol{\alpha}_k$在 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1}\}$上的正交投影，$\boldsymbol{\alpha}''_k$为$\boldsymbol{\alpha}_k$在 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$上的正交投影，$\boldsymbol{\alpha}'''_k=\boldsymbol{\alpha}_k-\boldsymbol{\alpha}'_k-\boldsymbol{\alpha}''_k$，则$\langle\boldsymbol{\alpha}'_k,\boldsymbol{\alpha}_k-\boldsymbol{\alpha}'_k\rangle=0$，$\langle\boldsymbol{\alpha}''_k,\boldsymbol{\alpha}_k-\boldsymbol{\alpha}''_k\rangle=0$，$\langle\boldsymbol{\alpha}'_k,\boldsymbol{\alpha}'''_k\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}''_k,\boldsymbol{\alpha}'''_k\rangle=0$. 进一步，令 $\boldsymbol{A}'=\mathrm{Gram}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}'_k)$，则

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_k-\boldsymbol{\alpha}'_k,\boldsymbol{\alpha}_i\rangle=0\quad(i=1,\cdots,k-1),$$

即

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_i\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}'_k,\boldsymbol{\alpha}_i\rangle\quad(i=1,\cdots,k-1),$$

故 $\boldsymbol{A}'$与$\boldsymbol{A}[1,\cdots,k\,|\,1,\cdots,k]$中元素除了右下角一个元素不同外，其余均相同. 故 $\boldsymbol{A}'$必为双非负方阵. 由于 $\boldsymbol{A}'$对应的图是完全正图 G'，由 9.1 节命题 9.6 知，存在欧几里得空间 V'和非负向量$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{k-1},\boldsymbol{\beta}'_k\in V'$，使得

$$\boldsymbol{A}'=\mathrm{Gram}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{k-1},\boldsymbol{\beta}'_k).$$

同理，存在欧几里得空间 V''和非负向量$\boldsymbol{\beta}''_k,\boldsymbol{\beta}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\in V''$，使得

$$\boldsymbol{A}''=\mathrm{Gram}(\boldsymbol{\beta}'_k,\boldsymbol{\beta}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

令 $\beta'''_k=\|\boldsymbol{\alpha}''_k\|\geqslant 0$，$V=V'\oplus\mathbf{R}\oplus V''$，

$$\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{\beta}_i\oplus 0\oplus\mathbf{0}\quad(i=1,\cdots,k-1),$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k=\boldsymbol{\beta}'_k\oplus\beta'''_k\oplus\boldsymbol{\beta}''_k,$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i=\mathbf{0}\oplus 0\oplus\boldsymbol{\gamma}_i\quad(i=k+1,\cdots,n).$$

由于

$$\langle\boldsymbol{\gamma}_i,\boldsymbol{\gamma}_j\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j\rangle=\alpha_{ij}\quad(1\leqslant i,j\leqslant k-1\text{ 或 }k+1\leqslant i,j\leqslant n),$$

$$\langle\boldsymbol{\gamma}_i,\boldsymbol{\gamma}_k\rangle=\langle\boldsymbol{\gamma}_k,\boldsymbol{\gamma}_i\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_k\rangle=a_{ki}=a_{ik}\quad(i=1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n),$$

以及

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\gamma}_k,\boldsymbol{\gamma}_k\rangle&=\langle\boldsymbol{\beta}'_k,\boldsymbol{\beta}'_k\rangle+\langle\boldsymbol{\beta}''_k,\boldsymbol{\beta}''_k\rangle+\langle\beta'''_k,\beta'''_k\rangle\\&=\langle\boldsymbol{\alpha}'_k,\boldsymbol{\alpha}'_k\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha}''_k,\boldsymbol{\alpha}''_k\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha}'''_k,\boldsymbol{\alpha}'''_k\rangle\\&=\langle\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_k\rangle\\&=a_{kk}.\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{Gram}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{Gram}(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),\quad\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n\geqslant 0.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵. □

引理 9.7　设 n 个顶点的简单图 T_n有 $n-2$ 个三角形且有一条共同边，则 T_n 是完全正图.

证 设 T_n 的任何一个双非负方阵实现为 $\boldsymbol{A}$. 由命题 9.3 和引理 9.4 的证明过程,不失一般性,设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异方阵且对角元均为 1,即 $\boldsymbol{A}$ 形如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{I}_{n-2} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \begin{pmatrix} c_{13} & c_{14} & \cdots & c_{1n} \\ c_{23} & c_{24} & \cdots & c_{2n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times(n-2)}.$$

由于 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_n^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 为半正定的,所以存在两个 n 维向量 $\boldsymbol{\gamma}=(a_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\delta}=(a_2,a_3,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,使得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}},$$

且 $a_1 \geqslant 0, a_3 \geqslant 0$,则 $b_{12} - \sum\limits_{j=3}^{n} c_{1j}c_{2j} = a_2 a_3$. 令

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sqrt{\frac{c_{1i}c_{2i}}{\sum\limits_{j=3}^{n} c_{1j}c_{2j}}}\boldsymbol{\delta} \quad (i = 3,\cdots,n).$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}$ 的位置(1,2)上的元等于

$$c_{1i}c_{2i} + \frac{c_{1i}c_{2i}a_2a_3}{\sum\limits_{j=3}^{n} c_{1j}c_{2j}} = c_{1i}c_{2i}\frac{\sum\limits_{j=3}^{n} c_{1j}c_{2j} + a_2a_3}{\sum\limits_{j=3}^{n} c_{1j}c_{2j}} = c_{1i}c_{2i}\frac{b_{12}}{\sum\limits_{j=3}^{n} c_{1j}c_{2j}} \geqslant 0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}$ 是秩为 2 的双非负方阵. 由引理 9.2 知 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}$ 为完全正方阵. 进一步,有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_{n-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{I}_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{I}_{n-2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=3}^{n} \boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} + \sum_{i=3}^{n} \boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=3}^{n} (\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}). \end{aligned}$$

再由命题 9.4 知 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵.

引理 9.8 一个简单图不含长度≥5 的奇圈,当且仅当 G 的每一块为二部图或 4 个顶点的完全图或 T_k.

证　充分性显然. 下面证明必要性. 设 H 是 G 的一个块，它不含长$\geqslant 5$ 的奇圈，也不是二部图，则 H 必含有 3 -圈（否则为二部图）. 比方说顶点 A, B, C，如果 H 是一个三角形，则 $H = T_3$；否则存在一个顶点 D. 由于 H 是一个块，一定存在一条路 P，其起点和终点恰好是三角形 ABC 中两个顶点（不妨经过顶点 A 和 B），但不经过 ABC 中剩余的顶点（不经过 C）. 设 P 的长为 s，则 G 有两个长分别为 $s+1$ 和 $s+2$ 的圈 $P \cup \{A, B\}$ 和 $P \cup \{A, C, B\}$. 由于 H 不含长$\geqslant 5$ 的奇圈，故 $s = 2$，即 H 包含 T_4. 若 H 至少有 4 个顶点，则必存在长为 s 的路 P，其起点和终点恰好是 $\{A, B, C, D\}$ 中的两个顶点，且不经过 $\{A, B, C, D\}$ 中的其他顶点. 假如 P 的起点和终点是 $\{A, C\}$. 因为 $P \cup \{A, B, C\}$ 和 $P \cup \{A, B, C, D\}$ 分别是长为 $s+2$ 和 $s+3$ 的两个圈，故 G 有$\geqslant 5$ 的奇圈. 因此 P 的起点和终点不是 $\{A, B\}$. 同理可证 P 的起点和终点不是 $\{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$. 故 P 的起点和终点是 $\{A, B\}$，即 H 含有 T_5. 因此当 $k = 4$ 时，H 是 K_4 或 T_4. 当 $k \geqslant 5$ 时，利用数学归纳法容易证明 H 必为 T_k. □

现在我们给出定理 9.6 的证明.

充分性. 设 G 不含$\geqslant 5$ 的奇圈，则由引理 9.8 知 G 的每一块为二部图，或者 4 个顶点完全图，或者 T_k. 由引理 9.5 和引理 9.7 知 G 的每一块都是完全正图. 再由引理 9.6 知 G 为完全正图.

必要性. 由引理 9.4 即得. □

推论 9.1　简单图 G 的下列性质等价：

(1) G 是完全正图；

(2) G 的每一块是完全正图；

(3) G 的每一块是二部图或 K_4 或 T_k；

(4) R 不含$\geqslant 5$ 的奇圈；

(5) G 的线图是完美图. □

注　如果一个双非负方阵对应的图不是完全正图，那么如何刻画它的完全正方阵. 到目前为止结果甚少. 最后，给出这方面的两个结果，证明略.

定理 9.7　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_n \\ h_1 & a_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & a_3 & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & a_{n-1} & h_{n-1} \\ h_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

是双非负方阵，$n\geqslant 5$ 且 n 为奇数，则 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵的充要条件是

$$\det\boldsymbol{A}\geqslant 4\prod_{i=1}^{n}h_i.$$

□

定理 9.8 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n}\\
a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_{34} & a_{44} & a_{45} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\
a_{nn} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

是双非负方阵. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的，则 $\boldsymbol{A}$ 为完全正方阵的充要条件是

$$(-1)^n(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\geqslant 0$$

且

$$\det(\boldsymbol{A}[2,\cdots,n\mid 2,\cdots,n])>0.$$

□

注 定理 9.7 刻画了双非负方阵对应的图是≥5 的奇圈的特征，而定理 9.8 部分地刻画了双非负方阵对应的图含有三角形和奇圈.

9.5 CP 秩

本节讨论完全正方阵的基本问题(Ⅱ).

定义 9.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶完全正方阵，则存在最小非负整数 k，使得 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times k$ 非负方阵且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. 称 k 为 $\boldsymbol{A}$ 的 CP 秩，记 CP-rank$\boldsymbol{A}$.

换句话说，CP-rank$\boldsymbol{A}$ 是最小的 $\boldsymbol{A}$ 的秩 1 表示，即

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{b}_i(i=1,\cdots,k)$ 是非负列向量. 从向量空间的角度来看，存在最小维数 k，使得存在非负列向量 $\boldsymbol{\omega}_1,\cdots,\boldsymbol{\omega}_n\in\mathbf{R}^k$，有

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{Gram}(\boldsymbol{\omega}_1,\cdots,\boldsymbol{\omega}_n).$$

确定完全正方阵的 CP 秩似乎比判定一个双非负方阵是不是完全正方阵更加困难. 本节介绍一些基本结果.

命题 9.7　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶完全正方阵，则：

(1) CP-rank$\boldsymbol{A}\geqslant$rank$\boldsymbol{A}$；

(2) 当 rank$\boldsymbol{A}\leqslant 2$ 时，CP-rank$\boldsymbol{A}$ = rank$\boldsymbol{A}$；

(3) 当 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶完全正方阵时，CP-rank$\boldsymbol{A}$ = rank$\boldsymbol{A}$；

(4) CP-rank$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant$CP-rank$\boldsymbol{A}$ + CP-rank$\boldsymbol{B}$.

证　(1)和(4)显然成立.

(2) 由引理 9.2 的证明过程即得.

(3) 当 $n\leqslant 2$ 时，或者 $n=3$ 且 rank$\boldsymbol{A}=2$ 时，由(2)即得. 现在假设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非奇异的完全正方阵，则存在 δ 使得 $\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_{33}$ 是半正定的奇异方阵，其中 $\boldsymbol{E}_{33}$ 是位置(3,3)为 1、其余位置为 0 的方阵. 于是有

$$\boldsymbol{A}=\delta\boldsymbol{E}_{33}+(\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_{33}).$$

显然，$\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_{33}$ 是双非负方阵且为奇异的. 由(2)知

$$\text{CP-rank}(\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_{33})\leqslant\text{rank}(\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_{33}).$$

故

$$3=\text{rank}\boldsymbol{A}\leqslant\text{CP-rank}\boldsymbol{A}\leqslant 1+\text{CP-rank}(\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_{33})\leqslant 1+2=3.$$

从而 CP-rank$\boldsymbol{A}$ = rank$\boldsymbol{A}$. □

命题 9.8　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶完全正方阵. 当 $n\leqslant 4$ 时，有 CP-rank$\boldsymbol{A}\leqslant n$.

证　从引理 9.3 的证明过程中可以得到. 详细证明留给读者. □

注 9.5　存在一个 4 阶完全正方阵 $\boldsymbol{A}$，使得

$$4=\text{CP-rank}\boldsymbol{A}>\text{rank}\boldsymbol{A}=3.$$

例 9.3　令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&3&3&0\\3&5&1&3\\3&1&5&3\\0&3&3&6\end{pmatrix},$$

则可以证明 rank$\boldsymbol{A}$ = 3，CP-rank$\boldsymbol{A}$ = 4. □

为了证明完全正方阵的 CP 秩与秩的关系，我们需要秩理论的一个重要的 Carathéodory 定理.

定理 9.9(Carathéodory 定理)　设 $K=\text{cone}(S)$ 是由 S 产生的最小凸锥，其中 S 是 n 维向量空间的子集，则对于每一个 $\boldsymbol{x}\in K$，$\boldsymbol{x}$ 可以是 S 中至多 n 个元素的非负线性组合.

证　设 $\boldsymbol{x}\in K$，则在 S 中至少存在 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\boldsymbol{S}$，使得

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{\alpha}_i\quad(a_1,\cdots,a_m\text{ 为正数}).$$

假设 $m>n$，则$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}\subseteq\mathbf{R}^n$必线性相关.因此存在不全为0的数 $b_1,\cdots,b_m$且至少有一个正数，使得

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}.$$

令

$$a = \min\left\{\frac{a_j}{b_j} \mid b_j>0\right\}>0,$$

且 $c_i=a_i-ab_i(i=1,\cdots,m)$，则

$$c_i\geqslant 0,\quad a_i = ab_i + c_i \quad (i=1,\cdots,m),$$

$\{c_1,\cdots,c_m\}$中至少有一个为0.因此有

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{\alpha}_i = a\sum_{i=1}^{m} b_i\boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{i=0}^{m} c_i\boldsymbol{\alpha}_i.$$

故存在 $k<m$ 个S中的向量使得$\boldsymbol{x}$是这些向量的非负线性组合.这与假设相矛盾，故结论成立. □

定理 9.10 设 $\boldsymbol{A}$ 是n 阶完全正方阵且 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r\geqslant 2$.令 N 是$\boldsymbol{A}$ 的非零的r 阶主子式方阵主对角线上方的零元的最大个数，则

$$\text{CP-rank}\boldsymbol{A}\leqslant\frac{r(r+1)}{2}-N.$$

证 不失一般性，设 $\boldsymbol{A}[1,\cdots,r\,|\,1,\cdots,r]$为 r 阶非奇异方阵且主对角线上方的零元的个数为N.令 $R(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的列空间，S_n为所有 n 阶对称方阵的集合.

令

$$L_1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})\},$$

$$L_2=\{\boldsymbol{X}=(x_{ij})\in S_n \mid x_{ij}=0,\forall\, a_{ij}=0,1\leqslant i<j\leqslant r\},$$

则有下列断言：

$$\dim L_1=\frac{r(r+1)}{2},\quad \dim(L_1\cap L_2)=\frac{r(r+1)}{2}-N.$$

事实上，令 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为$R(\boldsymbol{A})$的一组基，且 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r$为 $\mathbf{R}^r$ 中一组标准正交基，则由于$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$是秩为 r 的$n\times r$ 方阵，故存在秩为 r 的$r\times n$ 方阵$\boldsymbol{U}$，使得

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\boldsymbol{I}_r.$$

令

$$\varphi: L_1\to S_r,\quad X\mapsto \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},$$

则 φ 是L_1 到 S_r的映射且保持加法和数乘运算.进一步，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为$R(\boldsymbol{A})$的

一组基，对于 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$，有 $\boldsymbol{b}=\sum\limits_{i=1}^{r}a_i\boldsymbol{\alpha}_i$. 因此

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}a_ia_j(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}})+\sum_{i=1}^{r}a_i^2\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}.$$

又因为

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_j)(\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_j)^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\in L_1,$$

所以$\{\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant r\}$是 L_1 的生成集，且

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}})&=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}_j)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}_j(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\alpha}_i)^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

从而对于任何 $\boldsymbol{W}\in S_r$，有

$$\boldsymbol{W}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}w_{ij}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}).$$

存在

$$\boldsymbol{C}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}w_{ij}(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}})\in L_1,$$

使得 $\varphi(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{W}$. 因此 φ 是满射. 进一步，若 $\boldsymbol{X}\in L_1$，使得 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，则存在 x_{ij} 使得 $\boldsymbol{X}=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}x_{ij}(\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}})$. 所以 $\boldsymbol{0}=\varphi(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}x_{ij}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$. 故 $x_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因此 φ 是单射. 我们可以得到 φ 是 L_1 到 S_r 的一个同构映射. 因而

$$\dim L_1=\dim S_r=\frac{r(r+1)}{2}.$$

下面证明 $S_n=L_1+L_2$. 事实上，由于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}[1,\cdots,r\mid 1,\cdots,r])=r$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可以写成如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$ 当且仅当 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^r$. S_n 中任何一个对称方阵 $\boldsymbol{X}\in S_n$ 可以写成

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{X}_1$ 为 $r\times r$ 对称方阵. 它可以分解为

$$\boldsymbol{X}_1=\sum_{i=1}^{r}a_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{u}_i\in\mathbf{R}^r.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &\in L_1 + L_2.\end{aligned}$$

故 $S_n = L_1 + L_2$. 由维数公式知

$$\begin{aligned}\dim(L_1 \cap L_2) &= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) \\ &= \frac{r(r+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - N - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{r(r+1)}{2} - N.\end{aligned}$$

所以断言成立. 另一方面，因为 $\boldsymbol{A}$ 是完全正方阵，所以存在 $k \times n$ 非负矩阵 $\boldsymbol{Z}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}$. 又由于 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\boldsymbol{Z} = r$，故存在 $R(\boldsymbol{Z})$ 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_r$，$\boldsymbol{\delta}_i \in \mathbf{R}^k$. 则有 $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_r)\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$，其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $r \times n$ 矩阵且 $\mathrm{rank}\boldsymbol{W} = r$，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_r$. 因此 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$. 故 $R(\boldsymbol{A}) \subseteq R(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}) \subseteq R(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})$. 又 $\dim(R(\boldsymbol{A})) = \mathrm{rank}\boldsymbol{A} = r = \dim(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}))$，所以 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})$. 因此 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{\beta}_k\boldsymbol{\beta}_k^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k)$ 且 $\boldsymbol{\beta}_i \in R(\boldsymbol{A})$，从而

$$\boldsymbol{A} \in \mathrm{cone}\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{b} \text{ 是非负列向量且 } G(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}) \subseteq G(\boldsymbol{A})\}.$$

又

$$\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{b} \text{ 是非负列向量且 } G(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}) \subseteq G(\boldsymbol{A})\} \subseteq L_1 \cap L_2.$$

所以由定理 9.9，$\boldsymbol{A}$ 至多是 $L_1 \cap L_2$ 中 $\dfrac{r(r+1)}{2} - N$ 个元素的非负线性组合，即

$$\text{CP-rank}\boldsymbol{A} \leqslant \frac{r(r+1)}{2} - N. \qquad \square$$

关于 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ 与 CP-$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ 的关系，人们自然要问：在什么条件下 CP-$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ = $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$？这个问题同样具有非常大的挑战性. 这里我们给出一个完全正方阵的 CP 秩与秩相等的充分条件.

定理 9.11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶完全正方阵. 若 $G(\boldsymbol{A})$ 是树，则 CP-$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ = $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$.

证 当 $n \leqslant 3$ 时，由命题 9.7 知定理成立. 假设定理对 $1, \cdots, n-1$ 成立，由于 $G(\boldsymbol{A})$ 是树，不失一般性，设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & \dfrac{a_{12}}{a_{11}}a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}} \end{pmatrix} \oplus \mathbf{0}_{n-2} \right) + (\mathbf{0} \oplus \hat{\boldsymbol{A}}).
\end{aligned}
$$

易知 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 是 $n-1$ 阶双非负方阵且 $\boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{A}})$ 是树，$\mathrm{rank}\hat{\boldsymbol{A}} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A} - 1$. 由归纳假设，$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} \leqslant \text{CP-rank}\boldsymbol{A} \leqslant 1 + \text{CP-rank}\hat{\boldsymbol{A}} = 1 + \mathrm{rank}\boldsymbol{A} - 1 = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$. 故定理成立. □

完全正图的每个双非负方阵实现都是完全正方阵，这些完全正方阵的 CP 秩有什么性质呢？

定义 9.9　设 G 是一个无向简单图.

$\text{CP-rank}_{\max}(G) = \max\{\text{CP-rank}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}$ 是图 G 的完全正方阵的实现$\}$，

$\text{CP-rank}_{\min}(G) = \min\{\text{CP-rank}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}$ 是图 G 的完全正方阵的实现$\}$，

$I(G) = \{\text{CP-rank}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}$ 是图 $\boldsymbol{G}$ 的完全正方阵的所有实现$\}$.

我们不加证明地叙述下面几个主要结果.

定理 9.12　设 G 是 n 阶完全正图.

(1) 对于 G 的每个完全正方阵的实现 $\boldsymbol{A}$，有

$$\text{CP-rank}\boldsymbol{A} \leqslant \max\{|\boldsymbol{E}(G)|, \mathrm{rank}\boldsymbol{A}\},$$

其中 $|E(G)|$ 为 G 的边数；

(2) 当 $n \geqslant 4$ 时，$\text{CP-rank}G \leqslant n^2/4$. □

定理 9.13　设 G 是 n 阶完全正图，则 $I(G)$ 没有缺数，即对于每个满足 $\text{CP-rank}_{\min}G \leqslant k \leqslant \text{CP-rank}_{\max}G$ 的 k，存在一个 G 的完全正方阵的实现 $\boldsymbol{A}$，使得 $\text{CP-rank}\boldsymbol{A} = k$. □

定理 9.14　设 G 是一个 n 顶点的连通图，则下列条件等价：

(1) 对于 G 的每个非奇异的完全正方阵的实现，有 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \text{CP-rank}\boldsymbol{A} = n$；

(2) $\text{CP-rank}G = n$；

(3) G 不含三角形且边数超过顶点数；

(4) G 的每个块或者是 K_4 或者是 $S_{2m}(m \geqslant 3)$ 的子图，且至多有一块的顶点数超过 3，其中 S_{2m} 是由一个圈 $C_{2m} = (1, \cdots, n)$ 加上边 $\{i, i+2\}(i = 2, \cdots, 2n-2)$ 所形成的图. □

注　想进一步学习和研究完全正方阵的读者，可参考 A. Berman 和

N. Shaked-Monderer 在 2003 年出版的专著《Completely Positive Matrices》(World Scientific,2003)一书,本讲大部分内容来自该书. 另外,F. Barioli(Completely positive matrices with a book-graph, Linear Algebra Appl.,1998(277):11～31.)给出了具有书图的双非负方阵是完全正方阵的充要条件. 最近,Berman 和 D. Shasha (Completely positive house matrices, Linear Algebra Appl.,2012(436):12～26)研究了具有房图的双非负方阵. 阶数等于 5 的双非负方阵与完全正方阵的差别研究参见 S. Burer, K. M. Anstreicher 的文章《M. Dür, The difference between 5×5 doubly nonnegative and completely positive matrices》(Linear Algebra Appl.,2009(431):1539～1552). 关于完全正方阵的锥理论方面的研究可以参见 P. J. C. Dickinson 的文章《Geometry of the co-positive and completely positive cones》(J. Math. Anal. Appl.,2011(380):377～395). 关于完全正图的秩的概念和定理 9.12 参见 X. D. Zhang, J. S. Li 的文章《Factorization index sets for complete positive graphs》(Acta Math. Sinica, English Series, 2002(18):823～832). 从算法的角度,如何判定一个双非负方阵是不是完全正方阵以及如何计算 CP 秩的复杂度等相关问题参见 A. Berman, U. G. Rothblum 的文章《A note on the computation of the CP-rank》(Linear Algebra Appl.,2006(419):1～7).

第 10 讲　图的 Laplace 方阵

图的 Laplace 方阵起源于 1847 年著名的矩阵与树定理. 20 世纪 70 年代 Fiedler 发现图的 Laplace 方阵特征值和特征向量与图的结构有着密切的联系. 金芳蓉(Fan Chung)等学者在 20 世纪 90 年代系统地研究图的规范 Laplace 方阵,建立流形上的 Laplace 算子与图的规范 Laplace 方阵的对应关系,揭示了连续与离散之间的内在联系. 特别是金芳蓉在 1997 年出版了专著《谱图理论》(*Spectral Graph Theory*). 另一方面,图的 Laplace 方阵在诸如计算机科学、模式识别、电子工程等许多领域具有广泛的应用. 本讲主要介绍矩阵与树定理、图的 Laplace 谱半径、代数连通度等以及相关的应用.

10.1　矩阵与树定理

定义 10.1　设 $G=(V(G),E(G))$是一个 n 阶简单图,其顶点集 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$. G 的邻接方阵 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})$定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 相邻},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

G 的度对角方阵定义为

$$\boldsymbol{D}(G)=\operatorname{diag}(d(v_1),\cdots,d(v_n)),$$

其中 $d(v_i)$是顶点 v_i 的度,即与 v_i 相关联的边数.

G 的 Laplace 方阵 $\boldsymbol{L}(G)$定义为

$$\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G).$$

从定义 10.1 可以看出,$\boldsymbol{L}(G)$是半正定方阵且为 M 方阵,并且 $\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$是其 0 特征值对应的特征向量.

定义 10.2　设 $G=(V,E)$是一个 n 阶 m 条边的无向简单图,其中 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$. 假设对于 G 的每条边规定其两个端点中一个是正端点,另一个是负端点,则 G 的定向关联矩阵 $Q(G)=(q_{ij})$(或者简记为 Q)是 n

$\times m$ 矩阵，其中

$$q_{ij}=\begin{cases}1, & \text{顶点 } v_i \text{ 是边 } e_j \text{ 的正端点},\\ -1, & \text{顶点 } v_i \text{ 是边 } e_j \text{ 的负端点},\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{Q}(G)$的每列恰有一个 $+1$ 和一个 -1 两个非零元素. 进一步可以验证，对于 G 的每条边的任何定向都成立

$$\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)=\boldsymbol{Q}(G)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G).$$

命题 10.1 设 Q 为 n 阶树 T 的一个定向关联 $n\times(n-1)$矩阵，则

$$\det\boldsymbol{Q}(T)(k\mid\varnothing)=\pm 1\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

其中 $\boldsymbol{Q}(k\mid\varnothing)$表示从 Q 中划去第 k 行所得到的子方阵.

证 由于顶点和边的重排相当于对有向关联矩阵左乘和右乘一个置换方阵，故它的行列式的值不变或只改变符号. 不失一般性，设 $k=n$. 由于 T 为树，存在顶点的一个排序，使得顶点 v_i 恰好与$\{v_{i+1},\cdots,v_n\}$中唯一的一个顶点相邻，且这条边为 $e_i=v_iv_{i+1}(i=1,\cdots,n-1)$. 这样得到的关联矩阵 Q 有性质“划去 Q 最后一行恰好是一个下三角方阵且主对角线元素为 $+1$ 或 -1”. 故 $\det\boldsymbol{Q}(k\mid\varnothing)=\pm 1$. □

命题 10.2 设 $Q(G)$是一个 n 阶简单图 G 的有向关联矩阵，则

$$\det\boldsymbol{Q}(G)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]=\pm 1$$

当且仅当图 G 中 $n-1$ 边 $e_{j_1},\cdots,e_{j_{n-1}}$ 构成的子图恰好是 G 的一棵支撑树(spanning tree)，其中 $\boldsymbol{Q}(G)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]$表示由 $\boldsymbol{Q}(G)$删去第 k 行和由第 $j_1,\cdots,j_{n-1}$列组成的 $n-1$ 阶方阵.

证 充分性. 若 $e_{j_1},\cdots,e_{j_{n-1}}$ 构成 G 的子图是 G 的一棵支撑树 T，设 T 的定向关联矩阵为 $\boldsymbol{Q}(T)$，则 $\boldsymbol{Q}(T)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]$恰好就是 $\boldsymbol{Q}(G)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]$. 由命题 10.1 知 $\det\boldsymbol{Q}(G)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]=\pm 1$.

必要性. 若由 $e_{j_1},\cdots,e_{j_{n-1}}$ 组成的图 H 不是 G 的一棵支撑树，则 H 至少有两个连通分支. 不妨设有一个连通分支不含顶点 v_k，且边为 $e_{j_1},\cdots,e_{j_l}$，则 $\boldsymbol{Q}(G)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]$中前 l 行的行向量组是线性相关的，因为这些行向量的和等于 0，所以 $\boldsymbol{Q}(G)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]$的行向量组是线性相关的，即 $\det\boldsymbol{Q}(G)(k\mid j_1,\cdots,j_{n-1}]=0$. □

现在可以证明著名的矩阵与树定理.

定理 10.1(矩阵与树定理) 设 G 是 n 阶无向简单图，则图 G 的支撑树的个数 $\tau(G)$等于图 G 的 Laplace 方阵 $\boldsymbol{L}(G)$的任一个 $n-1$ 阶主子方阵的行列式，即

$$\tau(G)=\det\boldsymbol{Q}(G)(k\mid k)\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

证 不失一般性，设 $k=n$ 且图 G 有 m 条边，则由 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{Q}(G)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G)$和 Binet-Cauchy 公式，知

$$\begin{aligned}
&\det \boldsymbol{L}(G)[1,\cdots,n-1 \mid 1,\cdots,n-1] \\
&= \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{n-1}\leqslant m} \det \boldsymbol{Q}(G)[1,\cdots,n-1 \mid j_1,\cdots,j_{n-1}] \\
&\quad \times \det(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G))[j_1,\cdots,j_{n-1} \mid 1,\cdots,n-1] \\
&= \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{n-1}\leqslant m} (\det \boldsymbol{Q}(G)[1,\cdots,n-1 \mid j_1,\cdots,j_{n-1}])^2.
\end{aligned}$$

由命题 10.2，知$(\det \boldsymbol{Q}(G)[1,\cdots,n-1 \mid j_1,\cdots,j_{n-1}])^2=1$ 当且仅当 $e_{j_1},\cdots,e_{j_{n-1}}$ 构成 G 的一棵支撑树. 故 $\det \boldsymbol{L}(G)[1,\cdots,n-1 \mid 1,\cdots,n-1]=\tau(G)$. □

推论 10.1　设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n=0$ 为 n 阶简单图 G 的 Laplace 方阵 $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值，则

$$\tau(G)=\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_n.$$

证　由定理 10.1，知

$$n\tau(G)=\sum_{k=1}^{n}\det \boldsymbol{L}(G)(k \mid k).$$

一方面，$\boldsymbol{L}(G)$方阵的特征多项式的一次项系数正好等于$(-1)^{n-1}$乘以 $\boldsymbol{L}(G)$的所有 $n-1$ 阶主子方阵的行列式之和；另一方面，$\boldsymbol{L}(G)$方阵的特征多项式的一次项系数正好等于$(-1)^{n-1}$乘以 $\boldsymbol{L}(G)$所有 n 个特征值中取所有可能 $n-1$ 个特征值乘积之和. 由于 $\boldsymbol{L}(G)$的最小特征值为 0，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\det \boldsymbol{L}(G)(k \mid k)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}.$$

从而推论 10.1 成立. □

推论 10.2　设 λ_{n-1}为 $\boldsymbol{L}(G)$的第二小的特征值，则 G 连通当且仅当$\lambda_{n-1}>0$.

证　由于 G 是连通的当且仅当G 至少有一个支撑树. 由定理 10.1 知，G 至少有一个支撑树当且仅当$\tau(G)>0$. 由推论 10.1 知，$\tau(G)>0$ 当且仅当 $\lambda_{n-1}>0$. 因此 G 连通当且仅当$\lambda_{n-1}>0$. □

推论 10.3　设 G 是n 阶简单连通图，则

$$\tau(G)=(-1)^{i+j}\det \boldsymbol{L}(G)(i \mid j)\quad (1\leqslant i,j\leqslant n).$$

证　因为 G 是连通图，由推论 10.2 知，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}(G))=n-1$. 进一步，全 1 的 n 维向量 $\boldsymbol{e}$ 是方程组 $\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的所有解集的一个基础解系. 另一方面，令 $\operatorname{adj}\boldsymbol{L}(G)$ 为 $\boldsymbol{L}(G)$的伴随方阵. 由 $\boldsymbol{L}(G)\operatorname{adj}\boldsymbol{L}(G)=0$，知 $\operatorname{adj}\boldsymbol{L}(G)$的每一列向量都是方程组 $\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解. 因此 $\operatorname{adj}\boldsymbol{L}(G)$的每一列向量是 $\boldsymbol{e}$ 的一个倍数. 另外，$\operatorname{adj}\boldsymbol{L}(G)$是对称方阵，故 $\operatorname{adj}(\boldsymbol{L}(G))=a\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J}$ 是全 1 方阵，即 $\boldsymbol{L}(G)$的任一个元素代数余子式相等. □

10.2 图的 Laplace 特征值的基本性质

这一节，我们主要讨论图的 Laplace 特征值的一些性质.

设 $G=(V,E)$是一个 n 阶无向简单图. $L(G)$的特征值

$$\lambda_1(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}(G)\geqslant\lambda_n(G)=0,$$

称为图的 Laplace 特征值，有时简记为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$. 进一步，$\lambda_1$ 称为 G 的谱半径. Fiedler 称 λ_{n-1}为图 G 的代数连通度，并且记为 $\alpha(G)$或者 α. 一个图 G 的补图 $\overline{G}=(V(\overline{G}),E(\overline{G}))$，其中 $V(\overline{G})=V(G)$，$v_iv_j\in E(\overline{G})$当且仅当 $v_iv_j\notin E(G)$.

命题 10.3 设 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 n 阶简单图 G 的 Laplace 特征值，则

$$n-\lambda_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant n-\lambda_1\geqslant 0$$

为 G 的补图 $\overline{G}$ 的 Laplace 特征值.

证 由图与补图的定义知 $\boldsymbol{L}(G)+\boldsymbol{L}(\overline{G})=n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J}$ 是全 1 方阵. 令 $\boldsymbol{x}$ 是图的 Laplace 特征值 $\lambda_i\neq 0$ 对应的特征向量，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}=0$，其中 $\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是图的零特征值对应的特征向量. 从而有

$$\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{x}=\lambda_i\boldsymbol{x}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{L}(\overline{G})\boldsymbol{x}=(n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}-\boldsymbol{L}(G))\boldsymbol{x}=(n-\lambda_i)\boldsymbol{x},$$

即 $n-\lambda_i$ 是 $\overline{G}$ 的 Laplace 特征值. □

下面研究图与子图之间 Laplace 特征值的关系.

定理 10.2 设简单连通图 G 和 $G-e$ 的 Laplace 特征值分别为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 和 $\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$，其中 e 为 G 的一条边. 则

$$\lambda_1\geqslant\mu_1\geqslant\lambda_2\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}\geqslant\mu_{n-1}\geqslant\lambda_n=\mu_n=0.$$

证 设 G 有 m 条边. 令 $Q(G)$为 G 的 $n\times m$ 有向关联矩阵，且最后一列对应的边为 e. 则 $Q(G)$划去最后一列所得到的矩阵 $Q(G)(\varnothing\mid m)$为 $G-e$ 的有向关联矩阵. 因此$[Q(G)(\varnothing\mid m)]^{\mathrm{T}}[Q(G)(\varnothing\mid m)]$为 $Q^{\mathrm{T}}(G)Q(G)$的 $m-1$ 阶主子方阵. 另一方面，因为

$$\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{Q}(G)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G),$$

$$\boldsymbol{L}(G-e)=\boldsymbol{Q}(G)(\varnothing\mid m)[\boldsymbol{Q}(G)(\varnothing\mid m)]^{\mathrm{T}},$$

所以当 $m\geqslant n$ 时，$Q^{\mathrm{T}}(G)Q(G)$的前 n 个特征值为$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}\geqslant\lambda_n=0$，当 $m\leqslant n-1$ 时，$m=n-1$ 且 $Q^{\mathrm{T}}(G)Q(G)$的前 $n-1$ 个特征值为 $\lambda_1>\cdots\geqslant\lambda_{n-1}$. $[Q(G)(\varnothing\mid m)]^{\mathrm{T}}[Q(G)(\varnothing\mid m)]$的前 n 个特征值为$\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}\geqslant\mu_n$. 由第 5 讲定理 5.3 知

$$\lambda_1\geqslant\mu_1\geqslant\lambda_2\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}\geqslant\mu_{n-1}\geqslant\lambda_n=\mu_n=0.$$ □

推论 10.4　设 H 为简单图 G 的子图. 如果 $\lambda_i(G)$ 和 $\mu_i(H)$ 分别为 G 和 H 的第 i 大的 Laplace 特征值($i=1,\cdots,|V(H)|$),则

$$\lambda_i(G) \geqslant \mu_i(H) \quad (i = 1,\cdots, |V(H)|).$$

证　不失一般性,设 $V(H)=V(G)$,否则可以添加孤立点,除 0 特征值外其他点相同. 因此 H 看成 G 删去若干条边所成的子图. 连续应用定理 10.2 即得. □

定理 10.3　设 G 是一个简单图,则图的零 Laplace 特征值的个数等于图 G 的连通分支的个数.

证　设 G 有 k 个连通分支 $G_1,\cdots,G_k$,则 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{L}(G_1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{L}(G_k)$. 故 $\boldsymbol{L}(G)$ 的所有特征值恰好是 $\boldsymbol{L}(G_1),\cdots,\boldsymbol{L}(G_k)$ 所有特征值的并. 由推论 10.2 知 $\boldsymbol{L}(G_i)$ 的零特征值的重数恰好是 1,那么 $\boldsymbol{L}(G)$ 的零特征值的重数恰好是 k. □

设 $G_i=(V_i,E_i)$ 是 n_i 个顶点的简单图,$i=1,2$,则 G_1 与 G_2 的积图 $G_1\otimes G_2$ 的顶点集为笛卡儿积 $V_1\times V_2$,两个顶点 $(u_1,u_2),(v_1,v_2)$ 相邻当且仅当 $u_1=v_1$ 且 u_2 与 v_2 相邻,或者 u_1 与 v_1 相邻且 $u_2=v_2$.

定理 10.4　设简单图 G_i 的 Laplace 特征值为 $\lambda_1(G_i),\cdots,\lambda_{n_i}(G_i)$($i=1,2$). 则 G_1 与 G_2 的积图 $G_1\otimes G_2$ 的 Laplace 特征值为 $\lambda_i(G_1)+\lambda_j(G_2)$ ($i=1,\cdots,n_1;j=1,\cdots,n_2$).

证　容易看出 $\boldsymbol{L}(G_1\otimes G_2)=\boldsymbol{L}(G_1)\otimes\boldsymbol{I}_{n_2}+\boldsymbol{I}_{n_1}\otimes\boldsymbol{L}(G_2)$. 如果向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别是 $\boldsymbol{L}(G_1),\boldsymbol{L}(G_2)$ 的特征值 $\lambda_i(G_1),\lambda_j(G_2)$ 对应的特征向量,则 $\boldsymbol{L}(G_1\otimes G_2)(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})=(\lambda_i(G_1)+\lambda_j(G_2))(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})$. 由此知定理成立. □

本节最后给出图的 Laplace 方阵特征多项式的系数与图的结构关系①.

定理 10.5　设 $\Phi_G(x)=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x$ 是图 G 的 Laplace 方阵的特征多项式,则

$$c_i = (-1)^i \sum_{|E(F)|=i} p(F) \quad (i = 1,\cdots,n-1),$$

其中和项是对所有恰好有 i 边的支撑森林 F,$p(F)$ 是 F 中每个连通分支的顶点个数的乘积. □

10.3　图的最大 Laplace 特征值(谱半径)

在组合优化中,最大割的问题和图的顶点划分与图的最大 Laplace 谱半径有

① Kelmans A K, Chelnoko V M. A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees[J]. J. Combin. Theory Ser. B, 1974(16): 197-214

着密切的关系.本节主要给出图的最大 Laplace 特征值的上(下)界的几个估计.

命题 10.4 设 λ_1 是至少有两个顶点图 G 的最大 Laplace 特征值,则

$$\lambda_1 = \max_{x\in \mathbf{R}^n\setminus\{0\},\, x\perp e} \frac{\sum\limits_{uv\in E}(x_u - x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V} x_u^2} = 2n \max_{x\in \mathbf{R}^n\setminus\{e\}} \frac{\sum\limits_{uv\in E}(x_u - x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V}\sum\limits_{v\in V}(x_u - x_v)^2},$$

其中 $\boldsymbol{e} = (1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

证 容易看出

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(G)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(G)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G)\boldsymbol{x} = \sum_{uv\in E}(x_u - x_v)^2.$$

又因为 $\boldsymbol{e} = (1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是方阵 $\boldsymbol{L}(G)$ 的 0 特征值对应的特征向量,所以由第 5 讲定理 5.1,知

$$\lambda_1 = \max_{x\in \mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(G)\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \max_{x\in \mathbf{R}^n\setminus\{0\},\, x\perp e} \frac{\sum\limits_{uv\in E}(x_u - x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V} x_u^2}.$$

另外,如果 $\boldsymbol{x} = (x_u, u\in V)$ 且 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}$,那么

$$\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}(x_u - x_v)^2 = 2n\sum_{u\in V} x_u^2.$$

故命题 10.4 成立. □

定理 10.6 设 Δ 为至少有一条边的 n 阶图 G 的最大度,则 $\Delta + 1 \leqslant \lambda_1(G) \leqslant n$.

证 由命题 10.3 知 $\lambda_1 \leqslant n$.又因为 $K_{1,\Delta}$ 为 G 的子图,所以由推论 10.4 知

$$\lambda_1(G) \geqslant \lambda_1(K_{1,\Delta}) = \Delta + 1.$$ □

定理 10.7 设 G 是任何一个 n 阶图.若边 $e = uv$,记 $\deg(e) = d(u) + d(v) - 2$,则

$$\lambda_1(G) \leqslant 2 + \max\{\sqrt{\deg(e)\deg(f)}\},$$

其中最大值是对图中所有具有共同顶点的边对 (e,f) 取值.

证 不失一般性,设 G 连通.因为 $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{Q}(G)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G)$ 与 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G)\boldsymbol{Q}(G)$ 有相同的非零特征值,所以 $\lambda_1(G)$ 是 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G)\boldsymbol{Q}(G)$ 的最大特征值.令

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(G)\boldsymbol{Q}(G) = 2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}.$$

由第 6 讲 6.3 节定理 6.6,知

$$\lambda_1(G) \leqslant 2 + \lambda_1(\boldsymbol{C}_+),$$

其中 $\boldsymbol{C}_+ = (|c_{ij}|)$ 是主对角线元素等于 0 的不可约非负方阵.令 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{C}_+$ 的最大特征值 $\lambda_1(\boldsymbol{C}_+)$ 对应的正特征向量,并且令 $\boldsymbol{x}$ 的最大分量为 x_k, $k\in E(G)$.令 $x_l = \max\{x_l \mid$ 边 l 与边 k 存在公共顶点$\}$,则由 $\boldsymbol{C}_+\boldsymbol{x} = \lambda_1(\boldsymbol{C}_+)\boldsymbol{x}$ 中第 k 和第 l 个方程,知

$$\lambda_1(\boldsymbol{C}_+)x_k \leqslant \deg(k)x_l, \quad \lambda_1(\boldsymbol{C}_+)x_l \leqslant \deg(l)x_k.$$

故 $\lambda_1(\boldsymbol{C}_+) \leqslant \sqrt{\deg(k)\deg(l)}$，即

$$\begin{aligned}\lambda_1(G) &\leqslant 2 + \lambda_1(\boldsymbol{C}_+)\\ &\leqslant 2 + \sqrt{\deg(k)\deg(l)}\\ &\leqslant 2 + \max\{\sqrt{\deg(e)\deg(f)}\},\end{aligned}$$

其中边 e 与边 f 有共同的顶点. □

推论 10.5　对任何图 G，有

$$\lambda_1(G) \leqslant \max\{d(u) + d(v) \mid uv \in E(G)\}.$$

证　令 $\max\{d(u) + d(v) \mid uv \in E(G)\} = \Phi$，则对于任何边 $e = xy$，有 $\deg(e) = d(x) + d(y) \leqslant \Phi$. 由定理 10.7，知

$$\lambda_1(G) \leqslant 2 + \sqrt{(\Phi - 2)(\Phi - 2)} = \Phi.$$ □

令 $m(v)$ 为顶点 v 的所有邻点度的平均，即

$$m(v) = \frac{\sum\limits_{u \sim v} \deg(u)}{\deg(v)}.$$

称 $m(v)$ 为顶点 v 的 2-度平均. 我们有下列结论.

定理 10.8　设有 n 阶图 G，则有

$$\lambda_1(G) \leqslant \max\left\{\frac{d(u)(d(u) + m(u)) + d(v)(d(v) + m(v))}{d(u) + d(v)} \mid uv \in E(G)\right\}.$$

证　由定理 10.7 的证明过程，知

$$\lambda_1(G) \leqslant \lambda_1(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}) = \lambda_1(\boldsymbol{D}^{-1}(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{D}),$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为对角方阵，边 $e = uv$ 对应对角线元的大小为 $d(v) + d(u)$. 容易验证 $\boldsymbol{D}^{-1}(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{D}$ 的对应边 $e = uv$ 的行和等于

$$\frac{d(u)(d(u) + m(u)) + d(v)(d(v) + m(v))}{d(u) + d(v)}.$$

因此由盖氏圆盘定理知结论成立. □

推论 10.6　对于任何一个图 G，有

$$\lambda_1(G) \leqslant \max\{d(u) + m(u) \mid u \in V(G)\}.$$ □

定理 10.9　设 G 是简单连通图，则

$$\lambda_1(G) \leqslant \max\{d(u) + \sqrt{d(u)m(u)} \mid u \in V(G)\},$$

且等号成立当且仅当 G 是二部正则图或者二部半正则图.

证　设 $\boldsymbol{x} = (x_v, v \in V(G))^{\mathrm{T}} \parallel \boldsymbol{x} \parallel_2 = 1$ 是对应特征值 $\lambda(G)$ 的特征向量，即 $\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{x} = \lambda_1(G)\boldsymbol{x}$. 那么对于任何 $u \in V(G)$，有

$$\lambda_1(G)x_u = d(u)x_u - \sum_{v \in V(G)} a_{uv}x_v = \sum_{uv \in E(G)} (x_u - x_v).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\lambda_1^2(G)x_u^2 \leqslant \Big(\sum_{uv\in E(G)} 1^2\Big)\sum_{uv\in E(G)}(x_u - x_v)^2$$
$$= d^2(u)x_u^2 + 2d(u)x_u^2(\lambda_1(G) - d(u)) + d(u)\sum_{uv\in E(G)} x_v^2.$$

由此得

$$\sum_{u\in V(G)}\lambda_1^2(G)x_u^2 \leqslant \sum_{u\in V(G)}(2d(u)\lambda_1(G) - d^2(u))x_u^2 + \sum_{u\in V(G)} d(u)\sum_{uv\in E(G)} x_v^2$$
$$= \sum_{u\in V(G)}(2d(u)\lambda_1(G) - d^2(u))x_u^2 + \sum_{u\in V(G)} d(u)m(u)x_u^2.$$

因此

$$\sum_{u\in V(G)}(\lambda_1^2(G) - 2d(u)\lambda_1(G) + d^2(u) - d(u)m(u))x_u^2 \leqslant 0.$$

从而一定存在 $u\in V(G)$，使得

$$\lambda_1^2(G) - 2d(u)\lambda_1(G) + d^2(u) - d(u)m(u) \leqslant 0.$$

所以 $\lambda_1(G) \leqslant d(u) + \sqrt{d(u)m(u)}$.

如果 G 是二部正则图或者二部半正则图，则容易验证等号成立. 反之，如果等号成立，从证明中可以看出对于 $u\in V(G)$，$uv\in E(G)$，$uw\in E(G)$，有 $x_u - x_v = x_u - x_w$. 因此所有与 u 相邻的顶点 v，x_v 都相等. 现在固定 $w\in V(G)$，令 $V_1 = \{v\in V(G) \mid v$ 与 w 之间的距离是偶数$\}$，$V_2 = \{v\in V(G) \mid v$ 与 w 之间的距离是奇数$\}$. 显然，V_1 与 V_2 是 $V(G)$的一个划分. 因为 G 连通，容易看出对于所有 $v\in V_1$，所有 x_v 是相等的且记为 a. 同样，对于所有 $v\in V_2$，所有 x_v 是相等的且记为 b，则断言 G 是二部图. 事实上，如果存在一条边 $u_1u_2\in E(G)$，其中 $u_1, u_2\in V_1$ 或者 $u_1, u_2\in V_2$，则 $a = b$. 那么

$$\lambda_1(G)x_w = \sum_{(v,w)\in E(G)}(x_w - x_v) = 0.$$

由此得 $x_w = 0$. 进而知 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，矛盾. 对于任何 $u\in V_1$，有

$$\lambda_1(G)x_u = \sum_{vu\in E(G)}(x_u - x_v) = (a - b)d(u),$$

这就导出对于所有 $u\in V_1$，有

$$d(u) = \frac{a\lambda_1(G)}{a - b}.$$

同样，对所有 $u\in V_2$，有

$$d(u) = \frac{-b\lambda_1(G)}{a - b}.$$

因此 G 是正则的或者半正则的. □

在给出另一个上界前，我们需要方阵的特征值一个引理[①].

引理 10.1　设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $n\times n$ 非负方阵. 令 $\xi(\boldsymbol{B})$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的模第二大的特征值. 如果 $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 对应谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})$ 的特征向量，那么

$$\xi(\boldsymbol{B})\leqslant\frac{1}{2}\max\left\{\sum_{k=1}^{n}w_k\left|\frac{b_{ik}}{w_i}-\frac{b_{jk}}{w_j}\right|\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\right\}.$$ □

定理 10.10　设 G 是 n 阶简单图. 令 $N(u)$ 是 u 的所有邻点的集合，则

$$\lambda_1(G)\leqslant\max\{d(u)+d(v)-|N(u)\cap N(v)|\mid u,v\in V(G)\}.$$

证　令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{L}(G)+\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=(b_{ij})$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是全 1 的向量. 显然 $\boldsymbol{B}$ 是非负方阵，且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}=n\boldsymbol{e}$. 那么 $\boldsymbol{e}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 对应的谱半径 n 的特征向量，且 $\lambda_1(G)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的模第二大的特征值. 另外，

$$\sum_{k=1}^{n}w_k\left|\frac{b_{ik}}{w_i}-\frac{b_{jk}}{w_j}\right|=d(u)+d(v)-|N(u)\cap N(v)|.$$

应用引理 10.1 知本定理成立. □

定理 10.11　设 $G=(V,E)$ 是 n 阶不含三角形的简单图. 如果 $d(u)$ 和 $m(u)$ 分别是顶点 u 的度和 2－度平均，则

$$\lambda_1(G)\geqslant\max\left\{\frac{1}{2}(d(u)+m(u)+\sqrt{(d(u)-m(u))^2+4d(u)},u\in V\right\}.$$

证　令 $\boldsymbol{L}(U)$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$ 对应 U 的主子方阵，其中 $U=\{u,v_1,\cdots,v_k\}$ 是 u 的所有邻点的集 $N(u)$ 与 u 的并集，$d(u)=k$. 显然，$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))\geqslant\lambda_1(\boldsymbol{L}(U))$. 因为 G 不含三角形，故可以假定

$$\boldsymbol{L}(U)=\begin{pmatrix}d(u) & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & d(v_1) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & d(v_k)\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{L}(U)$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(U))=\left(\lambda-d(u)-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda-d(v_i)}\right)\prod_{i=1}^{k}(\lambda-d(v_i)).$$

注意到 $\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))\geqslant\lambda_1(\boldsymbol{L}(U))>d(v_i)(i=1,\cdots,k)$，$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))$ 满足

$$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(u)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(v_i)}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，知

① Bauer F L, Deutsch E, Stoer J. Abschätzungen füreigenwerte positiver linearer operatoren[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1969(2): 275-301.

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(v_i))\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(v_i)}$$
$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\sqrt{\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(v_i)}}{\sqrt{\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(v_i)}}\right)^2=k^2.$$

那么由 $m(u)=\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}d(v_i)$，得到

$$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(u)\geqslant\frac{k^2}{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-d(v_i))}$$
$$=\frac{d(u)}{\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))-m(u)}.$$ □

注 本节主要给出了图的 Laplace 特征值的上、下界的估计，并且达到这些上界的所有极图都可以刻画. 关于更多的上、下界可以参考由 Ling 主编的书《Linear Algebra Research Advances》中的第 6 章(The Laplacian Eigenvalues of Graphs: A Survey. Nova Science Publishers Inc.，2007：201～228).

10.4 图的代数连通度

定义 10.3 图 G 的第二小的 Laplace 特征值称为图的代数连通度，并且记之为 $\alpha(G)$.

例 10.1 n 个顶点的路 P_n 和圈 C_n 的代数连通度分别为

$$\alpha(P_n)=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\quad \alpha(C_n)=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right).$$ □

我们在 10.1 节中看到，$\alpha(G)>0$ 当且仅当 G 是连通的. 因为它揭示了图的顶点连通度与代数连通度之间的关系，故可以作为图的连通性质的一种度量. 为了证明我们的主要结果，首先给出下列命题.

命题 10.5 设 $\alpha(G)$ 为 n 阶简单图 G 的代数连通度，则

$$\alpha(G)=\min_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\},x\perp e}\frac{\sum_{uv\in E}(x_u-x_v)^2}{\sum_{u\in V}x_u^2}=2n\min_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{e\}}\frac{\sum_{uv\in E}(x_u-x_v)^2}{\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}(x_u-x_v)^2},$$

其中 $\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$. □

命题 10.6 设 G 是 n 阶简单图. 如果 U 是 $V(G)$ 的一个含 k 个元素的非空

真子集，则

$$\alpha(G) \leqslant \alpha(G-U)+k.$$

证　不妨设 $G_1=G-U$，$V(G)=\{1,\cdots,n\}$，$V(G_1)=\{1,\cdots,n-k\}$. 由 Courant-Fischer 定理知，存在单位向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_{n-k})$满足 $y_1+\cdots+y_{n-k}=0$，并且使得

$$\alpha(G_1)=\sum_{uv\in E(G_1)}(y_u-y_v)^2.$$

现在令 $\boldsymbol{x}=(y_1,\cdots,y_{n-k},0,\cdots,0)$，则

$$\begin{aligned}\alpha(G) &\leqslant \sum_{uv\in E(G)}(x_u-x_v)^2\\ &\leqslant \sum_{uv\in E(G_1)}(x_u-x_v)^2+\sum_{u\in U}\sum_{uv\in E(G)}(x_u-x_v)^2\\ &=\sum_{uv\in E(G_1)}(y_u-y_v)^2+\sum_{u\in U}\sum_{uv\in E(G)}y_u^2\\ &\leqslant \alpha(G_1)+\sum_{u\in U}1=\alpha(G-U)+k.\end{aligned}$$

□

定理 10.12　设 G 是 n 阶非完全简单图. 如果 $\kappa(G)$和 $\delta(G)$分别为 G 的顶点连通度和最小度，则

$$\alpha(G)\leqslant\kappa(G)\leqslant\delta(G).$$

证　首先，容易看出 $\kappa(G)\leqslant\delta(G)$. 如果图 G 不连通，那么 $\alpha(G)=\kappa(G)=0$. 因此不妨设 $U\subseteq V(G)$是 G 的非空真子集，使 $G\backslash U$ 不连通，且 $|U|=k=\kappa(G)$，那么 $\alpha(G\backslash U)=0$. 由命题 10.6，知

$$\alpha(G)\leqslant\alpha(G\backslash U)+k=0+\kappa(G)\leqslant\delta(G).$$

□

定理 10.13　设 G_1 与 G_2 是有相同的顶点集但是边不相交的两个图，则

$$\alpha(G_1)+\alpha(G_2)\leqslant\alpha(G_1\cup G_2).$$

证　令 $G=G_1\cup G_2$. 由命题 10.5，知

$$\begin{aligned}\alpha(G)&=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}}\frac{\sum\limits_{uv\in E(G)}(x_u-x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V}x_u^2}\\ &=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}}\left(\frac{\sum\limits_{uv\in E(G_1)}(x_u-x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V}x_u^2}+\frac{\sum\limits_{uv\in E(G_2)}(x_u-x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V}x_u^2}\right)\\ &\geqslant\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}}\frac{\sum\limits_{uv\in E(G_1)}(x_u-x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V}x_u^2}+\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\},\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}}\frac{\sum\limits_{uv\in E(G_2)}(x_u-x_v)^2}{\sum\limits_{u\in V}x_u^2}\end{aligned}$$

$$= \alpha(G_1) + \alpha(G_2). \qquad \square$$

推论 10.7 设 H 是 G 的支撑子图，则 $\alpha(H) \leqslant \alpha(G)$. $\square$

定理 10.14 设 T 是直径为 d 的树，则

$$\alpha(T) \leqslant 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{d+1}\right).$$

证 容易看出树 T 可以从路 P_{d+1} 连续增加悬挂边得到. 由定理 10.2，可以知道增加悬挂边不增加代数连通度，那么 $\alpha(T) \leqslant \alpha(P_{d+1})$. 再由例 10.1 知结论成立. $\square$

最后，我们不加证明地用最大度和直径给出代数连通度的一个上界[①].

定理 10.15 设 G 是最大度为 Δ、直径为 d 的简单连通图，则

$$\alpha(G) \leqslant \Delta - 2\sqrt{\Delta - 1} + \frac{2\sqrt{\Delta - 1} - 1}{\lfloor d/2 \rfloor}. \qquad \square$$

注 关于图的代数连通度更多的上、下界以及与图的结构之间的联系，可以参考 de Abreu 的综述论文《Old and new results on algebraic connectivity of graphs》(Linear Algebraic Appl.，2007(423)：53～73).

10.5 图的特征值的和

在第 5 讲中介绍了对称方阵的特征值与主对角元之间优超关系的 Schur 定理. 图的 Laplace 方阵是特殊的对称方阵，所以应该是比 Schur 定理更强的结论. 1994 年，Grone 和 Merris[②] 提出了下面两个猜想：

猜想 10.1 设 G 是($n \geqslant 2$)阶简单连通图. 如果$(\lambda_1(G), \cdots, \lambda_{n-1}(G), 0)$和$(d_1, \cdots, d_n)$分别是非增 Laplace 特征值序列和度序列，则

$$(\lambda_1(G), \cdots, \lambda_{n-1}(G), 0) \geq (d_1 + 1, d_2, \cdots, d_{n-1}, d_n - 1).$$

猜想 10.2 设 G 是 $n \geqslant 2$ 阶简单连通图. 如果$(\lambda_1(G), \cdots, \lambda_{n-1}(G), 0)$和$(d_1, \cdots, d_n)$分别是非增 Laplace 特征值序列和度序列，令 $d^* = (d_1^*, \cdots, d_n^*)$是度序列$(d_1, \cdots, d_n)$的共轭序列，即 d_i^* 是集合$\{j \mid d_j \geqslant i\}$的基数，$i = 1, \cdots, n$，则

$$(\lambda_1(G), \cdots, \lambda_{n-1}(G), 0) \preceq (d_1^*, \cdots, d_n^*).$$

① Nilli N A. On the second eigenvalue of a graph[J]. Discrete Math., 1991(91): 207 - 210.

② The Laplacian spectrum of a graph: II [J]. SIAM J. Discrete Math., 1994, 7(2): 221 - 229.

Grone 在 1995 年证明了猜想 10.1[①].

定理 10.16　设 G 是 $n\geqslant 2$ 阶简单连通图. 如果 $(\lambda_1(G),\cdots,\lambda_{n-1}(G),0)$ 和 $(d_1,\cdots,d_n)$ 分别是非增 Laplace 特征值序列和度序列,则

$$(\lambda_1(G),\cdots,\lambda_{n-1}(G),0)\geq(d_1+1,d_2,\cdots,d_{n-1},d_n-1).$$

证　令

$$\boldsymbol{L}(G)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{11} & \boldsymbol{L}_{12}\\ \boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{11}^{1/2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{11}^{-1/2} & (\boldsymbol{L}_{22}-\boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{L}_{12})^{1/2}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{L}_{11}$ 对应顶点集 $U=\{u_1,\cdots,u_k\}$, $d(u_i)=d_i(i=1,\cdots,k)$,则 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{11}+\boldsymbol{L}_{11}^{-1/2}\boldsymbol{L}_{12}\boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{11}^{-1/2} & *\\ * & *\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{L}(G)$ 和 $\boldsymbol{K}$ 有相同的特征值. 令 $\boldsymbol{L}_{11}=\boldsymbol{L}(G[U])+\boldsymbol{D}$,其中 $\boldsymbol{L}(G[U])$ 是 U 的诱导子图的 Laplace 方阵, $\boldsymbol{D}$ 是非负非零的对角方阵. 令 $\boldsymbol{e}$ 是全 1 向量,则 $\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}(G[U]))\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$,所以 1 是 $\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}$ 的一个特征值. 注意到 $\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}^{1/2}$ 相似,且 $\boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}^{1/2}$ 是半正定的,故 $\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D})$ 等于 $\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}$ 的所有特征值之和,即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D})\geqslant 1$. 又因为 $\boldsymbol{L}_{12}\boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}}$ 的主对角元与 $\boldsymbol{D}$ 的对角元相同,所以

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}_{11}+\boldsymbol{L}_{11}^{-1/2}\boldsymbol{L}_{12}\boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{11}^{-1/2})&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}_{11})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}_{12}\boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}})\\ &\geqslant\sum_{i=1}^{k}d_i+\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}_{11}^{-1}\boldsymbol{D})\\ &\geqslant\sum_{i=1}^{k}d_i+1.\end{aligned}$$

另一方面, $\boldsymbol{K}$ 的前 k 个最大特征值之和 $\geqslant\boldsymbol{L}_{11}+\boldsymbol{L}_{11}^{-1/2}\boldsymbol{L}_{12}\boldsymbol{L}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{11}^{-1/2}$ 的所有特征值之和. 因此

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(G)\geqslant\sum_{i=1}^{k}d_i+1\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

由此知结论成立. □

注　关于猜想 10.2, Stephen[②] 在 2005 年证明了猜想对于树成立,并且猜想部分不等式成立. Bai 在 2011 年证明了这个猜想成立[③]. Duval 和 Reiner 基于图的特征值 Grone-Merris 猜想,提出了单纯复形的特征值的更一般的猜想. 这个猜想

① Eigenvalues and the degree sequences of graphs[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1995(39): 133-136.

② On the Grone-Merris conjecture[J]. DMTCS Proc. AE, 2005: 187-192

③ The Grone-Merris conjecture[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2011, 363(8): 4463-4474

推广了 Grone-Merris猜想，但到目前为止，仍然没有得到证明.[①]另外，Brouwer[②]提出了关于 Grone-Merris 猜想的一个变形，即：

猜想 10.3 设 G 是 m 条边的 n 阶简单图. 对于 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$\lambda_1(G)+\cdots+\lambda_k(G)\leqslant m+\binom{k+1}{2}.$$

注 到目前为止，猜想 10.3 没有完全解决. 但是最近，Wang，Huang 和 Liu 证明了对于树等特殊情形成立. 详细内容见《On a conjecture for the sum of Laplacian eigenvalues》(Math. Comput. Modelling，2012，56(314)：60～68). Du 和 Zhou 证明了对于单圈图和双圈图成立.[③]

10.6 图的特征值技巧

本节主要介绍如何利用图的特征值来研究图论的问题. Lovász 在研究信息论中的信道容量时提出了图的 Shannon 容量的概念. 假定一个由“字母”组成的集合 A 用来发送信息，有一些字母对容易“混淆”. 称由 n 个“字母”组成的两个“单词”容易“混淆”当且仅当这两个单词对应位置的“字母”相同或者容易“混淆”. 给定集合 A，可以发送多少最多不相“混淆”的“单词”？ 如果我们采用图论的语言可以使问题更加清晰. 设图 $G=(V,E)$ 的顶点集 V 是由“字母”组成的集合，一对“字母”是边集 E 中一条边当且仅当这一对“字母”相“混淆”. 则由任何两个“字母”不相“混淆”的一些“字母”组成的集合恰好是 G 的独立集. 图 G 的最大独立集的基数称为图 G 的独立数，记为 $i(G)$.

定义 10.4 设两个简单图 $G=(V(G),E(G))$ 和 $H=(V(H),E(H))$. 强积图 $G\boxtimes H=(V(G\boxtimes H),E(G\boxtimes H))$ 的顶点集 $V(G\boxtimes H)=V(G)\times H(G)$ 定义为 $V(G)$ 与 $V(H)$ 的笛卡儿积，$V(G)\times H(G)$ 中两个顶点 (x_1,x_2) 与 (y_1,y_2) 相邻定义为 $x_i=y_i$ 或者 x_i 与 y_i 相邻 $(i=1,2)$. $G^{\boxtimes n}=G\boxtimes\cdots\boxtimes G$ 是 n 个 G 的强积图.

因此，$G^{\boxtimes n}$ 的独立数 $i(G^{\boxtimes n})$ 恰好是可以发送最多不相“混淆”的“单词”数.

① Duval A M，Reiner V. Shifted simplicial complexes are Laplacian integral[J]. Trans. Amer. Math. Soc.，2002，354：4313－4344.

② Brouwer A E，Haemers W H. Spectra of Graphs[M]. Springer-Verlag，2012.

③ Upper bounds for the sum of Laplacian eigenvalues of graphs[J]. Linear Algebra Appl.，2012，436：3672－3683.

Lovász 定义了图 G 的容量.

定义 10.5　设 G 是一个简单图,则图 G 的容量定义为

$$\Theta(G) = \lim_{n\to\infty}(i(G^{\boxtimes n}))^{1/n}.$$

命题 10.7　$\Theta(G)$存在且等于 $\sup_n(i(G^{\boxtimes n}))^{1/n}$.

证　容易看出,对于任意 p,q,有 $i(G^{\boxtimes p})i(G^{\boxtimes q})\leqslant i(G^{\boxtimes p+q})$.因此固定 p,s $(s\leqslant p)$,有

$$i(G^{\boxtimes s})(i(G^{\boxtimes p}))^q \leqslant i(G^{\boxtimes s+qp}),$$

所以

$$(i(G^{\boxtimes p}))^{1/p} \leqslant \lim_{q\to\infty}\inf(i(G^{\boxtimes s+lp}))^{1/(s+qp)}.$$

因为固定 p,至多有 p 个可能的 s,所以

$$(i(G^{\boxtimes p}))^{1/p} \leqslant \lim_{q\to\infty}\inf(i(G^{\boxtimes q}))^{1/q}.$$

再令 $p\to\infty$,得到

$$\lim_{p\to\infty}\sup(i(G^{\boxtimes p}))^{1/p} \leqslant \lim_{l\to\infty}\inf(i(G^{\boxtimes q}))^{1/q}.$$

故结论成立. □

注　确定图的容量是一项艰巨的任务.在 1979 年 Lovász 利用特征值的技巧确定 5 圈容量的值之前,它是一个几十年的公开问题.事实上,到目前为止还没有纯图论的证明方法.更重要的事实是,到目前为止,确定 7 圈容量的值仍然是一个重要的公开问题.下面介绍 Lovász 如何利用特征值的技巧确定 5 圈容量的值.首先,需要 Hoffman 关于图的独立数与特征值一个不等式①.

引理 10.2　设 $\boldsymbol{C}$ 是主对角线元全等于 0 的 n 阶对称非负方阵,且对应简单无向图 G.如果 $\boldsymbol{C}$ 的每一行和都相等且等于 c,以及 μ 是 $\boldsymbol{C}$ 的最小特征值,则

$$i(G)\leqslant\frac{-\mu n}{c-\mu}.$$

证　因为 μ 是 $\boldsymbol{C}$ 的最小特征值,所以 $\boldsymbol{C}-\mu\boldsymbol{I}_n$ 是半正定方阵.令 $\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,则$(\boldsymbol{C}-\mu\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{e}=(c-\mu)\boldsymbol{e}$,即对应最大特征值 $c-\mu$ 的特征向量为 $\boldsymbol{e}$.令 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{C}-\mu\boldsymbol{I}_n-\dfrac{c-\mu}{n}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$,且对应除了 $\boldsymbol{C}-\mu\boldsymbol{I}_n$ 的最大特征值 $c-\mu$ 以外,任何一个特征值 λ 的对应特征向量都是 $\boldsymbol{M}$ 的一个特征值 λ 的对应特征向量.因此 $\boldsymbol{M}$ 是半正定方阵.令 $\boldsymbol{x}$ 是 G 的最大独立集 S 的特征向量,即

$$x(i)=\begin{cases}1, & i\in S,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

① Haemers W H. Interlacing eigenvalues and graphs[J]. Lin. Alg. Appl., 1995, 226/227/228: 593-616.

因此

$$0 \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = -\mu\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \frac{c-\mu}{n}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = -\mu i(G) - \frac{c-\mu}{n}i(G)^2.$$

因此结论成立. □

定理 10.17 设 G 是 $k(\geqslant 1)$ 的正则 n 阶无向简单图. 如果 λ_1 是图的 Laplace 方阵 $\boldsymbol{L}$ 的最大特征值,则

$$\Theta(G) \leqslant \frac{n(\lambda_1 - k)}{\lambda_1}.$$

证 设 $\boldsymbol{A}$ 是图 G 的邻接方阵. 由归纳法容易看出,$G^{\boxtimes m}$ 的邻接方阵为 m 个 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 方阵的直积与单位方阵之差,即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\otimes(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\otimes\cdots\otimes(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})-\boldsymbol{I}$. 令

$$\boldsymbol{C} = (\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})\otimes(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})\otimes\cdots\otimes(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}) - (\lambda_1-k)^m\boldsymbol{I},$$

则

$$\boldsymbol{C} = ((\lambda_1-k)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\otimes((\lambda_1-k)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\otimes\cdots \otimes((\lambda_1-k)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}) - (\lambda_1-k)^m\boldsymbol{I}.$$

容易看出 $\boldsymbol{C}$ 是主对角线上元素全为 0 的非负对称方阵,且对应无向简单图恰好是 $G^{\boxtimes m}$. 另外,$\boldsymbol{C}$ 的每一行和等于 $\lambda_1^m-(\lambda_1-k)^m$,以及对应的最小特征值为 $-(\lambda_1-k)^m$. 由引理 10.2,知

$$i(G^{\boxtimes m}) \leqslant \frac{n^m(\lambda_1-k)^m}{\lambda_1^m} = \left(\frac{n(\lambda_1-k)}{\lambda_1}\right)^m.$$

从而有

$$\Theta(G) \leqslant \lim_{m\to\infty}(i(G^{\boxtimes m})^{1/m} \leqslant \frac{n(\lambda_1-k)}{\lambda_1}.$$

推论 10.8 5 圈的 Shannon 容量等于$\sqrt{5}$,即 $\Theta(C_5)=\sqrt{5}$.

证 设 C_5 的顶点集为$\{1,2,3,4,5\}$,则$(1,1),(2,3),(3,5),(4,2),(5,4)$为 $C_5\boxtimes C_5$ 的一个独立集. 由命题 10.7 知 $\Theta(C_5)\geqslant\sqrt{5}$. 另一方面,$C_5$ 的最大 Laplace 特征值等于$(5+\sqrt{5})/2$. 由定理 10.17,知

$$\Theta(G) \leqslant \frac{5((5+\sqrt{5})/2-2)}{(5+\sqrt{5})/2} = \sqrt{5}.$$

所以 $\Theta(C_5)=\sqrt{5}$. □

作为图的 Laplace 特征值的另一个应用,我们可以证明著名的 Petersen 图不是 Hamilton 图.

定义 10.6 $G=(V,E)$称为 Petersen 图,如果其顶点集 V 的顶点是 5 个元素的集合的所有 2 元子集,两个顶点相邻当且仅当它们是不相交的 2 元子集,如图 10.1 所示. 一个图称为 Hamilton 图,如果它含有一个通过所有顶点的圈.

引理 10.3　设 G 是 n 阶 k -正则图且包含一个 Hamilton 圈 C. 令 $\nu_1(G)\geqslant\cdots\geqslant\nu_n(G)$ 和 $\nu_1(C)\geqslant\cdots\geqslant\nu_n(C)$ 分别为 G 和 C 的邻接方阵的特征值，则

$$\nu_i(G)\leqslant\nu_i(C)+k-2.$$

证　由于 G 是 k -正则图，所以

$$\boldsymbol{L}(G)=k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(G),\quad \boldsymbol{L}(C)=2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(C),$$

因此 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值 $\nu_{n-i+1}(G)=k-\lambda_i(G)$，$\boldsymbol{A}(C)$ 的特征值 $\nu_{n-i+1}(C)=2-\lambda_i(C)$，其中 $\lambda_i(G)$ 和 $\lambda_i(C)$ 分别为图 G 和图 C 的 Laplace 特征值($1\leqslant i\leqslant n$). 由推论 10.4 知 $\lambda_i(G)\geqslant\lambda_i(C)$($1\leqslant i\leqslant n$). 故 $k-\nu_{n-i}(G)\geqslant 2-\nu_{n-i}(C)$，即 $\nu_{n-i}(G)\leqslant k-2+\nu_{n-i}(C)$($i=1,\cdots,n$).

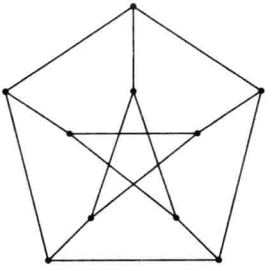
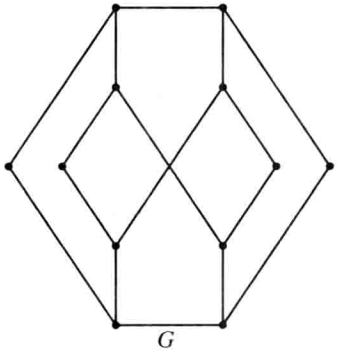


图 10.1

综上，$\nu_i(G)\leqslant k-2+\nu_i(C)$.

定理 10.18　Petersen 图不是 Hamilton 图.

证　由于 Petersen 图 G 的邻接方阵的特征值为 3，1，-2，对应的重数分别为 1，5，4. 图 C_{10} 的邻接方阵的特征值分别为 $2,2\cos\frac{\pi}{5},2\cos\frac{2\pi}{5},2\cos\frac{3\pi}{5},2\cos\frac{4\pi}{5},-2$，对应的重数分别为 1，2，2，2，2，1.



G

图 10.2

Petersen 图邻接方阵的第六大特征值 $\nu_6(G)=1$，但是图 C_{10} 邻接方阵的第六大特征值 $\nu_6(C_{10})=2\cos\frac{3\pi}{5}$. 因为 $\nu_6(G)=1\geqslant 3-2+2\cos\frac{3\pi}{5}=3-2+\mu_6(C_{10})$，所以由引理 10.3 知 Petersen 图不是 Hamilton 图. □

定理 10.19　图 10.2 所示的图 G 不是 Hamilton 图.

证　图 G 的 Laplace 特征值为 $\frac{7+\sqrt{7}}{2},3+\sqrt{2},4,3,3-\sqrt{2},\frac{7-\sqrt{7}}{2},1,0$ 对应的重数分别为 1，2，2，1，2，1，2，1，所以 $\lambda_7(G)=3-\sqrt{2}$. 但是 $\lambda_7(C_{12})=2-2\cos\frac{\pi}{2}=2>\lambda_7(\boldsymbol{L}(G))$. 故图 G 不是 Hamilton 图. □

10.7 广义 Laplace 方阵

1990 年，C. de Verdière 引入了一个非常重要且有意义的图参数 $\mu(G)$，它来源于 Riemann 曲面上的某种 Schrödinger 算子的第二个特征值的重数.

定义 10.7 设 $G=(V,E)$是一个简单图，其顶点集 $V=\{1,\cdots,n\}$. 如果一个 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$满足下面三条，则称 $\boldsymbol{M}$ 是 G 的一个广义 Laplace 方阵：

(1) 当 i 与 j 相邻时，$m_{ij}<0$，当 i 与 j 不相邻时，$m_{ij}=0$；

(2) $\boldsymbol{M}$ 只有一个负特征值，且重数为 1；

(3) 不存在一个非零的方阵 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})$，使得 $\boldsymbol{MX}=\boldsymbol{0}$，且当 $i=j$ 或 $m_{ij}\neq 0$ 时，$x_{ij}=0$.

令 $\mu(G)=\max\{\boldsymbol{M}$ 的零度$|\boldsymbol{M}$ 是 G 的广义 Laplace 方阵$\}$，其中 n 阶方阵 $\boldsymbol{M}$ 的零度 $=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{M}$.

称 $\mu(G)$为图的 de Verdière 参数.

命题 10.8 (1) 如果 n 阶图 G 连通，那么 $\boldsymbol{L}(G)-a\boldsymbol{I}_n$ 是 G 的一个广义 Laplace 方阵，其中 $a<\lambda_{n-1}(G)$. 设 $\boldsymbol{A}(G)$是 n 阶连通图 G 的邻接方阵，则 $b\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}(G)$也是 G 的一个广义 Laplace 方阵，其中 b 在 $\boldsymbol{A}(G)$的最大两个特征值之间.

(2) $\mu(K_1)=0$. 当 G 至少有一条边时，$\mu(G)>0$. □

命题 10.9 $n(\geqslant 3)$阶图 G 是完全图当且仅当 $\mu(G)=n-1$.

证 必要性. 设 K_n 是 n 阶完全图，则所有元素均为 -1 的 n 阶方阵 $-\boldsymbol{J}$ 是 K_n 的一个广义 Laplace 方阵，故 $\mu(K_n)\geqslant -\boldsymbol{J}$ 的零度 $=n-1$. 另一方面，K_n 的任何一个广义 Laplace 方阵 $\boldsymbol{M}$ 有一个负特征值，故 $\boldsymbol{M}$ 的零度$\leqslant n-1$. 所以 $\mu(G)=n-1$.

充分性. 设 $\mu(G)=n-1$，则存在一个 n 阶广义 Laplace 方阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$，使得 $\boldsymbol{M}$ 的零度 $=\mu(G)=n-1$. 因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{M}=1$. 故存在一个非零列向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$，使得 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$. 假设 G 不是完全图，则 $\boldsymbol{u}$ 必有零分量，比方说 $u_n=0$. 另一方面，图 G 的阶数 $n\geqslant 3$，所以 $\boldsymbol{M}$ 的零度 $=n-1\geqslant 2$. 故存在非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{n-1},0)^{\mathrm{T}}$，使得 $\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{0}$. 令

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}(0,\cdots,0,1)+(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&x_1\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&x_{n-1}\\ x_1&\cdots&x_{n-1}&0\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} u_1^2 & \cdots & u_1u_{n-1} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ u_{n-1}u_1 & \cdots & u_{n-1}^2 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{MX}=\boldsymbol{0}$，满足当 $i=j$ 或者 $m_{ij}\neq 0$ 时，$x_{ij}=0$. 这与广义 Laplace 方阵的第 3 条相矛盾. 故 G 必为完全图. □

命题 10.10　设 P_n 是 $n(\geqslant 2)$阶路，则 $\mu(P_n)=1$.

证　不妨设 $P_n=v_1\cdots v_n$. 令 $\boldsymbol{M}$ 为 P_n 的任何一个广义 Laplace 方阵，则容易看出 $\mathrm{rank}\boldsymbol{M}\geqslant n-1$. 故 $\boldsymbol{M}$ 的零度$\leqslant 1$. 因此，$\mu(\boldsymbol{P}_n)=\max\{\boldsymbol{M}$ 的零度$\mid \boldsymbol{M}$ 为 P_n 的广义 Laplace 方阵$\}=1$. □

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维向量，则 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})=\{i\mid x_i\neq 0\}$称为 $\boldsymbol{x}$ 的支撑. 进一步，$\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})=\{i\mid x_i>0\}$和 $\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})=\{i\mid x_i<0\}$分别称为 $\boldsymbol{x}$ 的正支撑和 $\boldsymbol{x}$ 的负支撑. 设 $\boldsymbol{z}$ 为连通图 G 的一个广义 Laplace 方阵 $\boldsymbol{M}$ 对应负特征值的特征向量. 如果 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的 0 特征值对应的特征向量，即 $\boldsymbol{x}\in\ker\boldsymbol{M}$ 时，我们有 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 且

$$\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})\neq\varnothing,\quad \mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})\neq\varnothing.$$

进一步，当 $i\notin\mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$时，如果 i 与 $\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})$中至少有一个顶点相邻，那么 i 与 $\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})$中至少一个顶点相邻；反之亦然.

定义 10.8　称非零向量 $\boldsymbol{x}\in\ker\boldsymbol{M}$ 为方阵 $\boldsymbol{M}$ 一个**极小支撑**，如果对于每一个非零向量 $\boldsymbol{y}\in\ker\boldsymbol{M}$，$\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})\subseteq\mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$，那么 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y})=\mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$.

引理 10.4　设 $\boldsymbol{M}$ 是连通图 G 的一个广义 Laplace 方阵. 如果 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的一个极小支撑，则分别由 $\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})$和 $\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})$导出的子图是连通的.

证　假设 $G[\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})]$不连通，则不失一般性，令 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 为 $\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})$的两个连通分支. 另外，令 $\boldsymbol{K}=\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})$. 由 $\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{0}$，知

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}[\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{I}]\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}]+\boldsymbol{M}[\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}[\boldsymbol{K}]=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{M}[\boldsymbol{J}\mid\boldsymbol{J}]\boldsymbol{x}[\boldsymbol{J}]+\boldsymbol{M}[\boldsymbol{J}\mid\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}[\boldsymbol{K}]=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

由 Perron-Frobenius 定理，可设 $z(>0)$是 $\boldsymbol{M}$ 的负特征值对应的正特征向量，则 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$. 进一步，令 $\lambda=\dfrac{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}]}{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{J}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[\boldsymbol{J}]}$和 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$，其中

$$y_i=\begin{cases}x_i, & i\in\boldsymbol{I},\\ -\lambda x_i, & i\in\boldsymbol{J},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}[\boldsymbol{I}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[\boldsymbol{I}]-\lambda\boldsymbol{z}[\boldsymbol{J}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[\boldsymbol{J}]=0$. 进一步，由 $\boldsymbol{M}[\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{J}]=0$，知

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{I}]\boldsymbol{M}[\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{I}]\boldsymbol{y}[\boldsymbol{I}]+\boldsymbol{y}[\boldsymbol{J}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[\boldsymbol{J}\mid\boldsymbol{J}]\boldsymbol{y}[\boldsymbol{J}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{x}[I]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[I \mid I]\boldsymbol{x}[I] + \lambda^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[J]\boldsymbol{M}[J \mid J]\boldsymbol{x}[J] \\
&= -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[I]\boldsymbol{M}[I \mid K]\boldsymbol{x}[K] - \lambda^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[J]\boldsymbol{M}[J \mid K]\boldsymbol{x}[K] \\
&\leqslant 0,
\end{aligned}
$$

这是因为 $\boldsymbol{M}[I \mid K] \leqslant 0, \boldsymbol{M}[J \mid K] \leqslant 0, \boldsymbol{x}[I] > 0, \boldsymbol{x}[J] > 0, \boldsymbol{x}[K] < 0$. 另一方面，对称方阵 $\boldsymbol{M}$ 只有一个负特征值，所以存在 n 个特征值 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant 0 > \lambda_n$ 和对应的特征向量 $z^{(1)}, \cdots, z^{(n-1)}, z$，则

$$
\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i z^{(i)} (z^{(i)})^{\mathrm{T}} + \lambda_n z z^{\mathrm{T}}.
$$

由 $z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$，知

$$
\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i ((z^{(i)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^2 \geqslant 0.
$$

故 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = 0$. 从而由 Courant-Fischer 定理知 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{y} \in \ker(\boldsymbol{M})$. 但 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{y}) \subsetneq \mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$，与 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的极小支撑相矛盾. 因此 $G[\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})]$ 是连通的. 同理，$G[\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})]$ 是连通的. □

我们不加证明地引用下面两个引理.

引理 10.5 设简单图 H 是图 G 的一个子式（即图 H 是从图 G 经过一系列删边、收缩边，并且去掉环和重边所得到的）. 如果 $\mu(G)$ 和 $\mu(H)$ 分别为图 G 和 H 的 de Verdière 参数，则 $\mu(H) \leqslant \mu(G)$.

引理 10.6 一个简单图 G 是平面图，当且仅当完全图 K_5 和完全二部图 $K_{3,3}$ 不是 G 的子式.

定理 10.19 一个简单图 G 的 de Verdière 参数 $\mu(G) \leqslant 3$ 当且仅当 G 是平面图.

证 必要性. 因为 $\mu(K_5) = 4, \mu(K_{3,3}) = 4$，所以 K_5 和 $K_{3,3}$ 不是 G 的子式. 故由引理 10.6 知 G 为平面图.

充分性. 当 G 是平面图时，用反证法. 若 $\mu(G) > 3$，由引理 10.5，不失一般性，设 G 是极大平面图. 设 $\boldsymbol{M}$ 是 G 的一个广义 Laplace 方阵且 $\mu(G) = \dim \ker(\boldsymbol{M}) > 3$. 设 uvw 是 G 的一个面，则存在一个非零向量 $\boldsymbol{x} \in \ker(\boldsymbol{M})$ 且 $x_u = x_v = x_w = 0$，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的一个极小支撑. 由引理 10.4 知 $G[\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})]$ 和 $G[\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})]$ 是连通的. 因为 G 是极大平面图，所以 G 是 3-连通的，从而存在三条不相交的路 P_1, P_2, P_3 从 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$ 到 $\{u, v, w\}$. 令 u_1, v_1, w_1 分别为 P_1, P_2, P_3 中第一个不属于 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$ 的顶点. 由于与 $\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})$ 中的顶点相邻必定与 $\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})$ 中的顶点相邻，反之亦然，可知：u_1, v_1, w_1 分别与 $\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x})$ 和 $\mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})$ 相邻. 现在将 $\mathrm{Supp}_+(\boldsymbol{x}), \mathrm{Supp}_-(\boldsymbol{x})$ 取 P_1, P_2, P_3 在 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{x})$ 外面并且各自收缩一个顶点，这将得到有五个顶点的图 $K_{2,3}$. 在 G 中面 uvw 上增加一个顶点 w'，以及 3 条边 $w'u, w'v, w'w$，则所得到的图 G' 仍为平面图. 但是 G' 有一个子式为 $K_{3,3}$，这与平面图不含

$K_{3,3}$子式矛盾，所以 $\mu(G)\leqslant 3$(图 10.3).

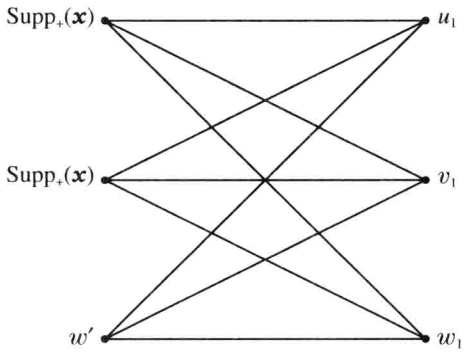


图 10.3

最后给出如何用特征值来刻画图的结构性定理.①

定理 10.20　(1) $\mu(G)\leqslant 1$ 当且仅当 G 是一些路的并；

(2) $\mu(G)\leqslant 2$ 当且仅当 G 是外平面图；

(3) $\mu(G)\leqslant 3$ 当且仅当 G 是平面图；

(4) $\mu(G)\leqslant 4$ 当且仅当 G 是无边可嵌入的.

注　虽然图的邻接方阵的谱比图的 Laplace 方阵的谱研究开始得早，但是图的 Laplace 方阵的谱似乎在许多领域比图的邻接方阵的谱有更多的应用，因此也越来越受到重视. Merris 在 1994 年和 1995 年的综述论文②系统地总结了图的特征值的性质，特别从矩阵理论的角度来揭示图的 Laplace 方阵的谱. Mohar 在 1991 年的综述论文③更侧重讨论在组合优化、图的结构等方面的应用. 关于图的特征值大小的各种不同的类型不等式可以参见张晓东的综述④. 关于 de Verdière 参数的有关问题和内容，可以参见 H. van der Holst, L. Lovász, A. Schrijver 的文章《The Colin de Verdiére graph parameter》(Graph Theory and Combinatorial Biology, Balatonlelle, 1996; Bolyai Soc. Math. Stud. 7, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999: 29～85). 与图的 Laplace 方阵相应的规范 Laplace 方阵即 $\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{D}^{-1/2}$

① van der Holst H, Lovász L, Schrijver A. The Colin de Verdiére graph parameter[C]// Graph Theory and Combinatorial Biology, Balatonlelle, 1996. Bolyai Soc. Math. Stud. 7, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999: 29-85.

② Laplacian matrices of graphs: A survey[J]. Linear Algebra Appl., 1994 (197/198): 143-176. A survey of graph Lpalacians[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1995, 39: 19-31.

③ The Laplacian spectrum of graphs[M]// Alavi Y, et al. Graph Theory, Combinatorics, and Applications, New York: Wiley, 1991(2): 871-898.

④ The Laplacian Eigenvalues of Graphs: A Survey[M]// Ling G D. Linear Algebra Research Advances. Nova Science Publishers, 2007: 201-208.

(也有文献定义此为图的 Laplace 方阵)的研究可以参见本讲开始时提到的金芳蓉的专著《Spectral Graph Theory》(CMBS Lecture Notes 92. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997). 最后,关于图的 Laplace 谱在复杂网络中的应用,可以参考金芳蓉与陆临渊的专著《复杂图与网络》(Complex Graphs and Networks)以及陈娅红、潘荣英、张晓东的综述论文《The Laplacian spectra of graphs and complex Networks》(中国科学技术大学学报,40(12):1236~1244).