吉米多维奇数学分析习题集题解

费定晖 周学圣 编著

山东科学技术出版社

书　　名：吉米多维奇数学分析习题集题解
作　　者：费定晖 周学圣
出 版 社：山东科学技术出版社
出版日期：2005年1月
ISBN：7-5331-0099-9/017
定　　价：20.00元

出版说明

CHUBANSHUOMING

《数学分析习题集题解》(6卷本),由山东科学技术出版社出版以来,几经修改补充,一直畅销不衰,深受读者厚爱。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识和基本技能的训练,感到帮助很大,赞誉其为学习数学分析"不可替代之图书"。

众所周知,原书4462题,内容丰富,题目有浅有深;涉及的内容涵盖了数学分析的全部主题。在长期的教学实践中,我们又反复研究了原习题集,有些问题引起了我们的思考:该书题量较大,且有相当的重复率;有些题目解答运算过程冗长;部分题目难度较大;使用该书耗时较多。那么怎样才能在一定的时间内,既掌握了数学分析的基本知识和基本技能,又学到了数学分析的主要内容呢?因此,我们想到了对原书进行精选和精解。考虑到原书四位作者,均系从事高等教育近50年的教授,且指导研究生教学数十年,有着极其丰富的教学经验与指导能力,因此,继续由他们对全书进行精选和精解,无疑是最合适的人选。

这次选题掌握以下原则:

第一,对于通过学习,读者能独立解决的容易的习题不予选用。

第二,对于重复率高的计算题,仅选出其中有代表性的习题。

第三,对于难度很大或运算过程冗长的习题不予选用。

第四,对于一题多解或多种证明方法的习题,仅选用其中较好的解法或证明方法。

第五,对于选用的习题,相对于6卷本的习题解答,进行了精解或修正,使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第六,为保证读者数学分析基本功的训练,总题量控制在原习题集的四分之一左右。

通过精选,共对原书的1080题做出解答,其中证明题274道。一册出版。

本书精选精解工作由华东交通大学费定晖教授负责第一章,第五章,第六章,第七章和第八章,以及全书的统稿和校阅。山东大学周学圣教授负责第二章,第三章和第四章。山东大学郭大钧教授和青岛大学邵品琮教授,对全书作了重要仔细的审校,其中有的较好的解法或证明方法的习题,均出自

出版说明

CHUBANSHUOMING

这两位教授的亲笔，尤其是郭大钧教授，对精解本的形成及精选原则作了积极的指导和裁定。

本书可作为大专院校师生学习和教学参考用书，也可作为广大青年自学者及工程技术人员的自学用书。特别是，可作为广大有志考研人员的指导用书。读者使用该书时，宜先独立求解，再与本书作比较，这样一定会获益匪浅，取得较多的有用知识，以及掌握丰富的数学分析基本技能。如果读者志在向科学进军的征途上更上一层楼，那就建议花点时间和精力，认真仔细阅读山东科学技术出版社出版的《数学分析习题集题解》(第三版，2005.01)的6卷本。

书中不当之处，恳请指正。

编　者

2006.08

目 录

MULU

第一章 分析引论 …… 1

§1. 实数 …… 1

§2. 叙列的理论 …… 6

§3. 函数的概念 …… 27

§4. 函数的图形表示法 …… 30

§5. 函数的极限 …… 38

§6. 函数无穷小和无穷大的阶 …… 57

§7. 函数的连续性 …… 60

§8. 反函数. 用参数表示的函数 …… 70

§9. 函数的一致连续性 …… 73

§10. 函数方程 …… 78

第二章 单变量函数的微分学 …… 82

§1. 显函数的导函数 …… 82

§2. 反函数的导函数.用参变数表示的函数的导函数.
隐函数的导函数 …… 96

§3. 导函数的几何意义 …… 99

§4. 函数的微分 …… 102

§5. 高阶的导函数和微分 …… 104

§6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理 …… 112

§7. 函数的增大与减小.不等式 …… 118

§8. 凹凸性.拐点 …… 124

§9. 未定形的求值法 …… 129

§10. 台劳公式 …… 133

§11. 函数的极值.函数的最大值和最小值 …… 138

§12. 依据函数的特征点作函数图形 …… 144

§13. 函数的极大值与极小值问题 …… 150

§14. 曲线的相切.曲率圆.渐屈线 …… 153

§15. 方程的近似解法 …… 156

目 录
MULU

第三章 不定积分 …… 159
§1. 最简单的不定积分 …… 159
§2. 有理函数的积分法 …… 168
§3. 无理函数的积分法 …… 176
§4. 三角函数的积分法 …… 182
§5. 各种超越函数的积分法 …… 188
§6. 函数的积分法的各种例子 …… 191
第四章 定积分 …… 196
§1. 定积分作为和的极限 …… 196
§2. 利用不定积分计算定积分的方法 …… 202
§3. 中值定理 …… 211
§4. 广义积分 …… 214
§5. 面积的计算法 …… 223
§6. 弧长的计算法 …… 226
§7. 体积的计算法 …… 227
§8. 旋转曲面表面积的计算法 …… 230
§9. 矩的计算法. 重心的坐标 …… 231
§10. 力学和物理学中的问题 …… 233
§11. 定积分的近似计算法 …… 235
第五章 级 数 …… 238
§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法 …… 238
§2. 变号级数收敛性的判别法 …… 251
§3. 级数的运算 …… 257
§4. 函数项级数 …… 259
§5. 幂级数 …… 270
§6. 福里叶级数 …… 282
§7. 级数求和法 …… 290
§8. 利用级数求定积分之值 …… 295

目 录
MULU

§9. 无穷乘积 …… 296
§10. 斯特林格公式 …… 302
§11. 用多项式逼近连续函数 …… 303
第六章 多变量函数的微分法 …… 306
§1. 多变量函数的极限. 连续性 …… 306
§2. 偏导函数. 多变量函数的微分 …… 312
§3. 隐函数的微分法 …… 325
§4. 变量代换 …… 335
§5. 几何上的应用 …… 345
§6. 台劳公式 …… 354
§7. 多变量函数的极值 …… 359
第七章 带参数的积分 …… 377
§1. 带参数的常义积分 …… 377
§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性 …… 383
§3. 广义积分中的变量代换. 广义积分号下的微分法及积分法 …… 390
§4. 尤拉积分 …… 398
§5. 福里叶积分公式 …… 403
第八章 重积分和曲线积分 …… 406
§1. 二重积分 …… 406
§2. 面积的计算法 …… 415
§3. 体积的计算法 …… 417
§4. 曲面面积计算法 …… 420
§5. 二重积分在力学上的应用 …… 421
§6. 三重积分 …… 424
§7. 利用三重积分计算体积法 …… 429
§8. 三重积分在力学上的应用 …… 432
§9. 二重和三重广义积分 …… 436
§10. 多重积分 …… 445

目 录
MULU

§11. 曲线积分 …… 449
§12. 格林公式 …… 454
§13. 曲线积分的物理应用 …… 461
§14. 曲面积分 …… 467
§15. 斯托克斯公式 …… 470
§16. 奥斯特洛格拉德斯基公式 …… 471
§17. 场论初步 …… 475

第一章　分析引论

§1. 实　数

1.数学归纳法　为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：(1)这定理对 $n=1$ 为真，(2)设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真.

2.分割　假设分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：(1)两类均非空集，(2)每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3)属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数，这样的一个分类法称为分割.(ⅰ)若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(ⅱ)若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3.绝对值　假若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{若 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{若 } x<0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4.上确界和下确界　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合，若：

(1)每一个 $x\in X$** 满足不等式　$x\geqslant m$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在有 $x'\in X$，使　$x'<m+\varepsilon$，

则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样，若：

(1)每一个 $x\in X$ 满足不等式　$x\leqslant M$，

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在有 $x''\in X$，使　$x''>M-\varepsilon$，

则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界，则通常说

$$\inf\{x\}=-\infty;$$

若集合 X 上方无界，则认为

$$\sup\{x\}=+\infty.$$

5.绝对误差和相对误差　设 $a(a\neq 0)$ 是被测的量的准确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|$$

称为绝对误差，而

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X.

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半,则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及 $a^{[0]}=1$,求证:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数,由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时,由于

$$[a+b]^{[1]}=a+b \qquad 及 \qquad \sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}\cdot(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\
&=(a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+C_k^k a^{[0]}b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0 a^{[k]}b^{[0]}+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]}\\
&\quad+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^k a^{[0]}b^{[k]}\\
&=C_k^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0 a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1 a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1 a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^k a^{[1]}b^{[k]}+C_k^k a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1 a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^k a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]},
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时,等式也成立:

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]}.$$

于是,对于任何自然数 n,有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$

中,令 $h=0$,即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式,得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m.$$

【6】 证明:贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于-1的数.

证 当 $n=1$ 时,此式取等号.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$大于-1,所以,$1+x_i>0$.因而,有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$,所以,

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【8】 证明不等式:

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当\ n>1.$$

证 当 $n=2$ 时,因为$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$,故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于 $$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而有 $$(k+1)!<\left(\frac{(k+1)+1}{2}\right)^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

【10】 证明不等式:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时,因为$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式显然成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言,由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$，而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的.于是,最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.由数学归纳法证毕.

【11】 设 c 为正整数,而不为整数的平方,且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割,其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b,而 A 类包含所有其余的有理数.求证在 A 类中无最大数,而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$.若 $a\leqslant 0$,则显然存在 $a'>a(a'>0)$且 $a'\in A$.故可设 $a>0$,于是 $a^2\leqslant c$.但不可能有 $a^2=c$.因若 $a^2=c$,设 $a=\frac{p}{q}$,p 与 q 为互质的正整数,则 $\frac{p^2}{q^2}=c$.由于 c 是正整数,而 p^2 与 q^2 也是互质的,故必 $q=1$,从而 $c=p^2$,此与假定矛盾,故必 $a^2<c$.下面我们证明,存在正整数 n,使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c,\quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n}<c-a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此,只要取

$$n>\frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的.因此,不论 a 为 A 类内怎样的数,在 A 类内总能找到大于它的数,故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上,此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

【13】 作出适当的分割,然后证明等式:

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$.

证 (1)作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B:一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类,一切满足 $b^2>2$ 的正有理数 b 归入 B 类.又作确定 $\sqrt{8}$ 的分割 A'/B':一切有理数 $a'\leqslant 0$ 以及满足 $a'^2<8$ 的正有理数 a' 归入 A' 类,一切满足 $b'^2>8$ 的正有理数 b' 归入 B' 类.我们知道,根据实数加法的定义,满足不等式:

$$a+a'<c<b+b'\quad(\text{对任何 } a\in A,b\in B,a'\in A',b'\in B')$$

的惟一实数 c 就是 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$.因此,如果我们能证明恒有 $(a+a')^2<18$(当 $a+a'>0$ 时),$(b+b')^2$

>18,则有 $a+a'<\sqrt{18}<b+b'$.于是得知 $\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若 $a+a'>0$,则 a 与 a' 中至少有一个为正,从而由 $a^2a'^2<16$ 知 $aa'<4$,$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18$;同样,因 $b^2>2$,$b'^2>8$,$b>0$,$b'>0$,故 $b^2b'^2>16$,$bb'>4$,$(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18$.于是证毕.

【15】 求证:任何非空且下方有界的数集有下确界,而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性,只证本题的后半部分,分两种情形:

(1) A 中有最大数 $\bar{a}$,此时,设 $a\in A$,则有 $a\leqslant\bar{a}$,说明 $\bar{a}$ 为 A 的上界.又由于 $\bar{a}\in A$,故对 A 的任何上界 M,均有 $\bar{a}\leqslant M$,故 $\bar{a}$ 为 A 的上确界.

(2) A 中无最大数.此时,作分割 A_1/B_1:取集 A 的一切上界归入 B_1 类,而其余的数归入 A_1 类.这样,A 中一切数全部落在 A_1 内,A_1 及 A 均非空,且 A_1 中的数小于 B_1 中的数,这确实是一个实数分割,易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数,即 β 是 A 的最小上界,从而 β 是 A 的上确界.

【18】 设 $\{-x\}$ 为数的集合,这些数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数.证明等式:

(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

证 (1)设 $\inf\{-x\}=m'$,则有:

(ⅰ)当 $-x\in\{-x\}$ 时,$-x\geqslant m'$;

(ⅱ)对于任何的正数 ε,存在有 $-x'\in\{-x\}$,使

$$-x'<m'+\varepsilon.$$

由(ⅰ)及(ⅱ)推得:

(ⅲ)当 $x\in\{x\}$ 时,$x\leqslant -m'$;

(ⅳ)对于任何的正数 ε,存在有 $x'\in\{x\}$,使

$$x'>-m'-\varepsilon.$$

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $-m'=\sup\{x\}$,即 $m'=-\sup\{x\}$,所以,$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

【19】 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合,其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$.证明等式:

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

证 (1)设 $\inf\{x\}=m_1$,$\inf\{y\}=m_2$,则有:

(ⅰ)当 $x\in\{x\}$,$y\in\{y\}$ 时,$x\geqslant m_1$,$y\geqslant m_2$;

(ⅱ)对于任何的正数 ε,存在有数 $x'\in\{x\}$,$y'\in\{y\}$,使

$$x'<m_1+\frac{\varepsilon}{2},\quad y'<m_2+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由(ⅰ)及(ⅱ)推得:

(ⅲ)当 $x+y\in\{x+y\}$ 时(其中 $x\in\{x\}$,$y\in\{y\}$),

$$x+y\geqslant m_1+m_2;$$

(ⅳ)对于任何的正数 ε,存在有 $x'+y'\in\{x+y\}$ (其中 $x'\in\{x\}$,$y'\in\{y\}$),使

$$x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon.$$

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$,即

$$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}.$$

解不等式:

【26】 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

解 令 $x-2=t$,则得

$$|t+4|+|t|\leqslant 12 \quad 或 \quad |t+4|\leqslant 12-|t|.$$

两边平方,即有 $$t^2+8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2,$$

或 $$3|t|\leqslant 16-t.$$

将上式两端再平方,化简整理得 $$t^2+4t-32\leqslant 0,$$

于是,有 $$-8\leqslant t\leqslant 4.$$

从而得 $$-8\leqslant x-2\leqslant 4,$$

即 $$-6\leqslant x\leqslant 6 \quad 或 \quad |x|\leqslant 6.$$

【29】 $|x(1-x)|<0.05$.

解 由 $|x-x^2|<\dfrac{1}{20}$ 得

$$x^2-x+\frac{1}{20}>0 \quad 或 \quad x^2-x-\frac{1}{20}<0,$$

解之得
$$\begin{cases} \dfrac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\dfrac{5+\sqrt{30}}{10} \\ \dfrac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad 或 \quad x<\dfrac{5-\sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即 $$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10} \quad 或 \quad \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

【40】 设 $\delta(x)$及 $\delta(y)$为数 x 和 y 的相对误差,$\delta(x,y)$为数 xy 的相对误差.求证:

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

证 设 $x=a+\Delta_x$,$y=b+\Delta_y$,其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值,Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差,则有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y,$$

于是, $$\Delta=|xy-ab|\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

最后得 $$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|},$$

此即 $$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 叙列的理论

1.叙列的极限的概念 假设对于任何的 $\varepsilon>0$,有数 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 时,

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称叙列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 有极限 a(或者说,收敛于 a),亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

其中,若 $$\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的叙列,称为发散的.

2.极限存在的准则

(1)设

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

(2)单调而且有界的叙列有极限.

(3)哥西判别法 叙列$\{x_n\}$的极限存在的必要而且充分的条件是:对于任何的$\varepsilon>0$,有数$N=N(\varepsilon)$,使当$n>N$和$p>0$时,$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$.

3.关于叙列的极限的基本定理 设

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

存在,则有:

(1)若$x_n \leqslant y_n$,则$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$;

(2)$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$;

(3)$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$;

(4)若$\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$,则$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$.

4.数 e 叙列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\cdots$$

5.无穷极限 符号

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的$E>0$,有数$N=N(E)$,使当$n>N$时,$|x_n|>E$.

6.聚点 设已知叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$有子叙列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}, \cdots$$

适合

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数ξ(或符号∞)为已知叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$的聚点.

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点(波尔查诺——外尔斯特拉斯原理).若这个聚点是惟一的,则它即为已知叙列的有穷极限.

叙列x_n的最小聚点(有穷的或无穷的)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

称为下极限,而它的最大聚点

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

称为此叙列的上极限.

等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

为叙列x_n的(有穷或无穷)极限存在的必要而且充分的条件.

【44】 求证:

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

无界,但当$n\to\infty$时,它并不成为无穷大.

证 因为 $x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & \text{当 } n=2k,k\text{为自然数},\\ \dfrac{1}{2k+1}, & \text{当 } n=2k+1,\end{cases}$

所以，$$x_{2k}\to\infty,\quad x_{2k+1}\to 0\quad (k\to\infty).$$

由于 $x_{2k}\to\infty$，故 x_n 无界；但因 $x_{2k+1}\to 0$，故 x_n 并不趋于无穷大.

设 n 跑过自然数列，求下列各式之值：

【48】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 因为 $\sin n!$ 有界：$|\sin n!|\leqslant 1$ 及 $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

【52】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

解 当 $n=2k$ 时（k 为自然数），

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\frac{3}{2k}-\cdots-\frac{2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2};$$

当 $n=2k+1$ 时，

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{3}{2k+1}-\cdots+\frac{2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2};$$

由于取不同方式时，所得的极限值不同，所以，极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$$

不存在.

【53】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\dfrac{1}{3}$.

【54】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 设 $f(n)=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}$，由 53 题即得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}[8f(2n)-4f(n)]=\frac{4}{3}.$$

【55】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $f(n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$，$g(n)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$，则有

$$2f(n+1)-g(n)=f(n)+1,$$

又由 $$2f(n+1)-f(n)=f(n)+\frac{2n+1}{2^n}=g(n)+1,$$

故 $$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}[g(n)+1]=3$及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}=0$*)，故得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

*) 参看58题.

证明下列等式：

【58】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0.$

证 因为$2^n=(1+1)^n=1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\cdots+1>\dfrac{n(n-1)}{2}$ $(n>2)$，故

$$0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1};$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n-1}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0.$

【60】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$.

证 令$a=1+\lambda(\lambda>0)$，则

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \quad (n>2).$$

当$n>2$时，$n-1>\dfrac{n}{2}$，此时，

$$a^n>\frac{n^2}{4}\lambda^2=\frac{n^2(a-1)^2}{4}.$$

分三种情况：

(1)当$k\leqslant 0$时，这时显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n\cdot n^{-k}}=0.$$

(2)当$k=1$时，$0<\dfrac{n^k}{a^n}=\dfrac{n}{a^n}<\dfrac{4n}{n^2(a-1)^2}$，而$\dfrac{4n}{n^2(a-1)^2}\to 0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0;$$

(3)当$k>0$时，$\dfrac{n^k}{a^n}=\left[\dfrac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}\right]^k$，而$a^{\frac{1}{k}}>1$，于是由(2)知，$\dfrac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}\to 0$，

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0.$

总之，当$a>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0.$

【61】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

证 令k代表任何一个大于$2|a|$的自然数，则当$n>k$时，有

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{k}\right)\left(\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}\right)<|a|^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2|a|)^k}{2^n}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

【62】 $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$，若 $|q|<1$.

证 (1)当 $0<q<1$ 时，可令 $q=\dfrac{1}{a}$，其中 $a>1$，所以，当 $n\to\infty$ 时，

$$nq^n=\frac{n}{a^n}\to 0^{*)};$$

(2)当 $-1<q<0$ 时，可令 $q=-q'$，其中 $0<q'<1$，所以，当 $n\to\infty$ 时，

$$nq^n=(-1)^n nq'^n\to 0;$$

(3)当 $q=0$ 时，$nq^n=0$.

总之，当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$.

*) 利用 60 题的结果.

【63】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$.

证 (1)当 $a=1$ 时，等式显然成立；

(2)当 $a>1$ 时，因为 $(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon$ $(n>1,\varepsilon>0)$，则当 n 充分大后，可使 $1+n\varepsilon>a$，即 $(1+\varepsilon)^n>a$. 事实上，只要取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就可保证这点. 所以，

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon,$$

于是，当 $n>N$ 时，$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，此即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;$$

(3)当 $0<a<1$ 时，则令 $a=\dfrac{1}{a'}$，其中 $a'>1$. 于是，当 $n\to\infty$ 时，

$$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a'}}\to 1.$$

总之，当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

【68】 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

证 因为 $0<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *)，又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

*) 利用 10 题的结果.

【69】 证明：叙列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$

是单调增加的，且上方有界. 而叙列

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

是单调减少的，且下方有界. 由此推出这些叙列有公共的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

证 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1+1+C_n^2\dfrac{1}{n^2}+C_n^3\dfrac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\dfrac{1}{n^k}+\cdots+\dfrac{1}{n^n}$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

其中每一项都为正，当 n 增加时，不但对应的项数增多，而且每一个括弧内的数值也增大，所以，叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加.

又当 $k>2$ 时，$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$，$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,$$

此即叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 上方有界.

由此，我们知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，以 e 表之.

其次，由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\frac{n+1}{n},$$

也即 $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

此即 $y_{n-1}>y_n$，因而，叙列 $y_n(n=1,2,\cdots,)$ 单调减少.又因

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+n\cdot\frac{1}{n}=2,$$

所以，叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 下方有界.

由此，我们知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}.$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

【71】 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列，而 $q_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列.求证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

证 令 $k_n=[p_n]$，即 k_n 表 p_n 的整数部分，则

$$k_n\leqslant p_n<k_n+1.$$

由于 $p_n\to+\infty$，故 $k_n\to+\infty$，从而显然 $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\to\mathrm{e}$.(参看 69 题题解).由于

$$\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1},\qquad\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}>\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}>\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\mathrm{e},\qquad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}.$$

其次，若 $q_n\to-\infty$，令 $q_n=-p_n$，其中 $p_n\to+\infty$. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)=\mathrm{e},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

【74】 证明不等式：

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

证 由 $\sqrt{i(n-i)}\leqslant\frac{n}{2}$，则 $\frac{1}{2}[\ln i+\ln(n-i)]\leqslant\ln\frac{n}{2}$，从而

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ln i\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2},\ (n-1)!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

两边同乘以 $\frac{n}{2}$，得 $\frac{1}{2}n!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是，

$$n!\leqslant2\left(\frac{n}{2}\right)^n<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即 $n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

再证 $\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$. 设 $x_n=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}\mathrm{e}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{\mathrm{e}}<n.$$

所以（注意到 $x_1=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$），$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!$.

从而证得 $$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!.$$

【75】 证明不等式：

(1) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，式中 n 为任意的自然数；

(2) $1+\alpha<\mathrm{e}^{\alpha}$，式中 α 为异于零的实数.

证 (1) 因为 $1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，两边取对数，得 $0<n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$，

故 $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n};$$

又因为 $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，两边取对数，得 $1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，

故 $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

因而 $$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(2) $(1+x)^n\geqslant1+nx$（$x>0$，n 为正整数）.

设 a 为正有理数：$a=\frac{p}{q}$，p,q 是正整数，则由于 $\mathrm{e}>\left(1+\frac{1}{q}\right)^q$，

故 $$\mathrm{e}^a>\left(1+\frac{1}{q}\right)^{qa}=\left(1+\frac{1}{q}\right)^p\geqslant 1+\frac{p}{q}=1+a.$$

至于 a 为任意实数($\neq 0$)时，由图易知 $\mathrm{e}^a>1+a$.待学了导数之后易证.

【76】 求证：

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a \quad (a>0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $\mathrm{e}=2.718\cdots$ 作底时数 a 的对数.

证 先设 $a>1$.令 $b_n=a^{\frac{1}{n}}-1$，则 $b_n>0$，且 $\frac{\ln a}{n}=\ln(1+b_n)$，故

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}.$$

由于 $b_n\to 0$，故存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，$0<b_n<1$.于是，对每个 $n>N$，存在惟一正整数 k_n，使 $\frac{1}{k_n+1}\leqslant b_n<\frac{1}{k_n}$.由于 $b_n\to 0$，故 $k_n\to+\infty$.由 75 题(1)知

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots),$$

故 $$\frac{1}{k_n+2}<\ln\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)\leqslant\ln(1+b_n)<\ln\left(1+\frac{1}{k_n}\right)<\frac{1}{k_n},$$

从而 $$1-\frac{1}{k_n+1}=\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}=1+\frac{2}{k_n},$$

由于 $k_n\to+\infty$ ($n\to\infty$)，故 $\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}\to 1$ ($n\to\infty$)，由此得

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a.$$

现设 $0<a<1$.则 $\frac{1}{a}>1$.于是，由上结果可知

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}(-a^{\frac{1}{n}})\cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)=-\ln\frac{1}{a}=\ln a.$$

当 $a=1$ 时，$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$ 显然成立，故此式对任何 $a>0$ 成立.证毕.

利用关于单调而且有界的叙列的极限存在的定理，证明以下各叙列的收敛性：

【80】 $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>x_n$，所以，叙列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

又因 $1+a<\mathrm{e}^a$，所以，

$$0<x_n<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<\mathrm{e},$$

即叙列是有界的.因而 $\{x_n\}$ 收敛.

利用哥西判别法，证明以下各叙列的收敛性：

【83】 $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$.

证 $|x_m-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}\right|$

$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right)<\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$ $(m>n)$.

任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$,则当 $m>n>N$ 时,必有 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,从而 $|x_m-x_n|<\varepsilon$,所以,叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

【86】 若存在数 c,使得

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c \quad (n=2,3,\cdots),$$

则称叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$有有界变差.

证明凡有有界变差的叙列是收敛的.

举出一个收敛叙列而无有界变差的例子.

证 设 $y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$ $(n=2,3,\cdots)$,则叙列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界,所以,它是收敛的.

根据哥西收敛准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 N,使当 $m>n>N$ 时,

$$|y_m-y_n|<\varepsilon, \quad 即 \quad |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon.$$

而对于叙列 $\{x_n\}$ 有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=|x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\cdots+x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以,叙列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

叙列:$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},(-1)\frac{1}{n},\cdots$,它是以零为极限的收敛叙列.但它不是有有界变差的.事实上,

$$\begin{aligned}&|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|\\&>|x_2-x_1|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

而叙列 $\omega_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是发散的*),又是递增的,故 $\omega_n\to+\infty$.于是,

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$

不是有界的,因而,收敛叙列 $\{x_n\}$:$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots$无有界变差.

*) 详见 88 题的证明.

【88】 利用哥西判别法,证明叙列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

的发散性.

证 取 $m=2n$,则

$$|x_m-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

所以,叙列 $\{x_n\}$ 发散.

【89】 证明:若叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$收敛,则它的任何子叙列 x_{p_n} 也收敛,且有同一极限

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则对于任给的 $\varepsilon>0$,存在有正整数 N,使当 $n>N$ 时,

$$|x_n - a| < \varepsilon .$$

今因自然叙列$\{p_k\}$以$+\infty$为其极限,所以,对于 N,存在有正整数 k_0,使当 $k>k_0$ 时,$p_k>N$,此时 $|x_{p_k}-a|<\varepsilon(k>k_0)$,所以,子叙列$\{x_{p_k}\}$收敛,且

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

【90】 证明:若单调叙列的某一子叙列收敛,则此单调叙列本身是收敛的.

证 不失一般性,假设叙列$\{x_n\}$单调增加,其一子叙列$\{x_{p_n}\}$收敛于 a.则对于任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $k>N$ 时,

$$|x_{p_k} - a| < \varepsilon,$$

令 $N' = p_{N+1}$.设 $n>N'$,由于 $p_1<p_2<p_3<\cdots\to+\infty$,故必有 $p_k(k>N)$使 $p_k\leqslant n<p_{k+1}$.由上知

$$|x_{p_k} - a| < \varepsilon, \quad |x_{p_{k+1}} - a| < \varepsilon.$$

而 $x_{p_k}\leqslant x_n\leqslant x_{p_{k+1}}$(因 x_n 递增),故必

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 即$\{x_n\}$是收敛的.

【91】 证明:若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad 则 \quad \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a| .$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则对于任给的 $\varepsilon>0$,存在有正整数 N,使当 $n>N$ 时,$|x_n - a|<\varepsilon$.

又因$\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|$,故当$n>N$时,$\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon$,于是,

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a| .$$

【92】 设 $x_n\to a$,则极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么?

解 按题意,应设 $x_n\neq0(n=1,2,\cdots)$.

若 $a\neq0$,则显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能不存在,例如,若$\{x_n\}$为:

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots$$

则 $x_n\to0$, 但显然 $\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}}\to1$, $\frac{x_{2m+1}}{x_{2m}}\to\frac{1}{2}$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$不存在.下面我们证明,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在,设为 b, 则必有$-1\leqslant b\leqslant1$.

用反证法.若$|b|>1$.取 r,使$|b|>r>1$.利用 91 题结果,知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |b| .$$

于是，存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|>r$. 从而，当 $n>N$ 时，

$$|x_n|=|x_N|\cdot\left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right|\cdot\left|\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|>|x_N|\cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，此与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 矛盾，故必有 $-1\leqslant b\leqslant 1$.

总结起来，若 $a\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$；若 $a=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在，当存在时，它必属于 $[-1,1]$.

求下列各叙列的聚点：

【121】 试举出以已知数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 作为聚点的叙列的例子.

解 叙列

$$a_1-\frac{1}{2},\ a_2-\frac{1}{2},\ \cdots,\ a_p-\frac{1}{2},\ a_1-\frac{1}{3},$$

$$a_2-\frac{1}{3},\ \cdots,\ a_p-\frac{1}{3},\ \cdots,\ a_1-\frac{1}{n},\ a_2-\frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$a_p-\frac{1}{n},\ \cdots$$

显然以 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 为聚点.

【122】 试举出叙列的例子，对此叙列而言，已知叙列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ 所有各项皆为其聚点，已知叙列还必有怎样的聚点？

解 例如，叙列

$$a_1+\frac{1}{2},\ a_2+\frac{1}{2},\ a_1+\frac{1}{3},\ a_2+\frac{1}{3},\ a_3+\frac{1}{3},$$

$$a_1+\frac{1}{4},\ a_2+\frac{1}{4},\ a_3+\frac{1}{4},\ a_4+\frac{1}{4},\ \cdots,$$

$$a_1+\frac{1}{n},\ a_2+\frac{1}{n},\ a_3+\frac{1}{n},\ \cdots,\ a_n+\frac{1}{n},\ \cdots$$

就以 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 为其聚点.

此外，很明显，若 $\{x_n\}$ 为一叙列，使已知叙列 $\{a_n\}$ 的各项 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 皆为 $\{x_n\}$ 的聚点，则已知叙列 $\{a_n\}$ 本身的聚点也必为叙列 $\{x_n\}$ 的聚点.

【123】 举出叙列的例子：

(2)有惟一有限的聚点，但非收敛者；

(4)以每一实数作为聚点.

解 (2)叙列：

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -2,\ \frac{1}{3},\ -3,\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ -n,\ \cdots$$

有惟一有限的聚点 0，但此叙列却不收敛.

(4)我们按下述“对角线法则”来构造一个叙列，使每一元素后面跟一个对应的负数，排列顺次如图 123.

$$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{1}{2},\ x_4=-\frac{1}{2},$$

$$x_5=2,\ x_6=-2,\ x_7=3,\ x_8=-3,$$

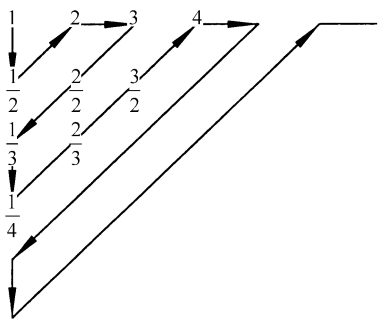

图 123

$x_9=\frac{2}{2}, x_{10}=-\frac{2}{2}, x_{11}=\frac{1}{3}, x_{12}=-\frac{1}{3}$,

….

此叙列以每一实数作为其聚点,即聚点的集合为$(-\infty,+\infty)$.

【125】 证明:从有界的叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$中,永远可选出收敛的子叙列

$$x_{p_n}(n=1,2,\cdots).$$

证 因为叙列$\{x_n\}$有界,故可设一切项满足不等式

$$a\leqslant x_n\leqslant b,$$

其中 a,b 为有限的实数,将区间$[a,b]$二等分之,得区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$,其中必至少有一个包含所给叙列的无限多项,将它记为$[a_1,b_1]$(若两者均含无穷多项,则任取其一作为$[a_1,b_1]$).再将区间$[a_1,b_1]$等分之,又可得区间$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$,它包含所给叙列的无限多项.依次类推,于是得一串区间:

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其中每一$[a_n,b_n]$都包含所给叙列$\{x_n\}$中的无限多项,且有

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此,根据区间套定理诸$[a_n,b_n]$具有惟一的公共点 c,且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c.$$

现按下法选出$\{x_n\}$的一个子叙列$\{x_{p_k}\}$:在包含于$[a_1,b_1]$内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1}.然后,在包含于$[a_2,b_2]$内且在 x_{p_1} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_2},然后,又在包含于$[a_3,b_3]$内且在 x_{p_2} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_3}.余类推(这是可能的,因为每个$[a_k,b_k]$中都包含有 x_n 无穷多项).于是,我们得出$\{x_n\}$的一个子叙列$\{x_{p_k}\}$,满足

$$a_k\leqslant x_{p_k}\leqslant b_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此,知$|x_{p_k}-c|\leqslant b_k-a_k(k=1,2,\cdots)$,故$\lim\limits_{k\to\infty}x_{p_k}=c$.从而,$\{x_{p_k}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子叙列.证毕.

【126】 证明:若叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$无界,则存在子叙列 $x_{p_n}(n=1,2,\cdots)$,使得

$$\lim_{n\to\infty}x_{p_n}=\infty.$$

证 因 $x_n(n=1,2,\cdots)$无界,故存在某项 x_{p_1} 满足$|x_{p_1}|>1$.由于叙列 $x_n(n=p_1+1,p_1+2,\cdots)$也无界,故又存在某项 $x_{p_2}(p_2>p_1)$,使$|x_{p_2}|>2$;又由于叙列 $x_n(n=p_2+1,p_2+2,\cdots)$无界,故又存在某项 $x_{p_3}(p_3>p_2)$,使$|x_{p_3}|>3$.余类推.于是,我们得$\{x_n\}$的一个子叙列$\{x_{p_k}\}$,满足

$$|x_{p_k}|>k\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此可知

$$\lim_{k\to\infty}x_{p_k}=\infty.$$

证毕.

【131】 证明:

(1)$\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}x_n+\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}y_n$, 及

(2)$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

举出在上面关系式中仅不等号成立的例子.

证 (1)先证右端不等式.根据定义,存在$\{x_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}\}$使$x_{n_k}\to\alpha=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.对于叙列$\{y_{n_k}\}$,必有子叙列$y_{n_{k_i}}\to\beta=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}$.显然$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}y_{n_k}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.由于$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to\alpha+\beta$,故$\alpha+\beta$是$\{x_n+y_n\}$的一个聚点.由此可知

$$\alpha+\beta\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n).$$

故得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

再证左端的不等式,根据定义,存在$\{x_n+y_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$使$x_{n_k}+y_{n_k}\to\alpha'=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$.对于叙列$\{x_{n_k}\}$,存在子叙列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}$,显然$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to\alpha'-\beta'.$$

故$\alpha'-\beta'$是$\{y_n\}$的一个聚点,从而,

$$\alpha'-\beta'\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\alpha'\geqslant\beta'+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(2)先证右端不等式.根据定义,存在$\{x_n+y_n\}$的一个子叙列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$,使$x_{n_k}+y_{n_k}\to r=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$.对于叙列$\{x_{n_k}\}$,存在子叙列$x_{n_{k_i}}\to\tau=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}$.显然$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to r-\tau,$$

故$r-\tau$是$\{y_n\}$的一个聚点,从而,

$$r-\tau\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=r\leqslant\tau+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

再证左端的不等式.根据定义,存在$\{y_n\}$的一个子叙列$\{y_{n_k}\}$,使$y_{n_k}\to r'=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.对于叙列$\{x_{n_k}\}$,存在子叙列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\tau'=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}$.显然$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.由于

$$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to r'+\tau',$$

故$r'+\tau'$是$\{x_n+y_n\}$的一个聚点,从而,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant r'+\tau'.$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant r'+\tau'\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

证毕.

以下举不等号成立的例子.例如,令

$\{x_n\}$为:1,0,1,0,1,0,…　　$\{y_n\}$为:0,2,0,2,0,2,….

则有不等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n=0<\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=1<\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=2.$$

而对于叙列

$\{x_n\}$为:0,2,0,2,0,2,…　　$\{y_n\}$为:1,0,1,0,1,0,…,

则有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n=1<\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=2<\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n=3.$$

【132】 设 $x_n\geqslant 0$ 和 $y_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$.证明:

(1) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n$, 及

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n$.

举出在这些关系式中仅不等号成立的例子.

证 (1)先证右端的不等式.根据定义,存在$\{x_n\}$的一个子叙列$\{x_{n_k}\}$,使 $x_{n_k}\to\alpha=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\geqslant 0$;对于叙列$\{y_{n_k}\}$,存在子叙列$\{y_{n_{k_i}}\}$,使 $y_{n_{k_i}}\to\beta=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,y_{n_k}\geqslant 0$.显然$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,y_{n_k}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n$.由于 $x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\alpha\beta$,故 $\alpha\beta$是叙列$\{x_ny_n\}$的一个聚点,因此,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta,$$

由此,再注意到 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,即得知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta\leqslant\alpha(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n).$$

再证左端的不等式.若$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=0$,则此不等式显然成立,故设$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=\beta^*>0$.于是,存在正整数 N_0,使当 $n>N_0$ 时,$x_n>0$.根据定义,存在$\{x_ny_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$,使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\alpha'=\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\geqslant 0.$$

对于叙列$\{x_{n_k}\}$,存在子叙列$\{x_{n_{k_i}}\}$,使

$$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\underline{\lim_{k\to\infty}}\,x_{n_k}.$$

注意到 $\beta'=\underline{\lim_{k\to\infty}}\,x_{n_k}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=\beta^*>0$ 以及 $x_n>0(n>N_0)$,知

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

故$\frac{\alpha'}{\beta'}$是$\{y_n\}$的一个聚点,从而,

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n,$$

由此可知 $$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\alpha'\geqslant\beta'(\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n)\geqslant(\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n)\cdot(\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n).$$

(2)先证右端不等式,可设$\{y_n\}$有界(若$\{y_n\}$无界,则$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n=+\infty$,从而此不等式显然成立).根据定义,存在$\{x_ny_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$,使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\bar{\alpha}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\geqslant 0.$$

对于$\{x_{n_k}\}$,存在子叙列$\{x_{n_{k_i}}\}$,使

$$x_{n_{k_i}}\to\beta=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,x_{n_k}\geqslant 0.$$

若 $\beta=0$,则由于$\{y_n\}$有界,知 $x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to 0$,从而 $\bar{\alpha}=0$,此时所要证的不等式显然成立,故下设 $\beta>0$.于是,当 i 充分大时($i>i_0$),$x_{n_{k_i}}>0$,故得

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\bar{\alpha}}{\beta}.$$

因此,$\frac{\bar{\alpha}}{\beta}$是$\{y_n\}$的一个聚点,从而$\frac{\bar{\alpha}}{\beta}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n$;由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\bar{\alpha}\leqslant\beta(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)\leqslant(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

再证左端的不等式.根据定义,存在$\{y_n\}$的一子叙列$\{y_{n_k}\}$,使$y_{n_k}\to r=\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n\geqslant 0$,对于$\{x_{n_k}\}$,存在子叙列$\{x_{n_{k_i}}\}$,使

$$x_{n_{k_i}}\to\tau=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant 0.$$

显然$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$.由于$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\tau r$,故$\tau r$是$\{x_n y_n\}$的一个聚点,从而,$\tau r\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)$,由此可知

$$(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)\leqslant\tau r\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n).$$

证毕.

下面举不等号成立的例子,例如,令

$\{x_n\}$为:$\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$　　$\{y_n\}$为:$2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$

则有不等式

$$(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}y_n)=\frac{1}{8}<\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\frac{1}{2}<(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=1.$$

再令　　$\{x_n\}$为:$2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$　　$\{y_n\}$为:$\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$

则有不等式

$$(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=\frac{1}{2}<\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=1<(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=4.$$

【133】 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则对于任何的叙列$y_n(n=1,2,\cdots)$,有

(1)$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$　及

(2)$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$　$(x_n\geqslant 0)$.

证　(1)由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

从而,利用131题的结果可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n),$$

故得　$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$.

(2)分三种情形:(ⅰ)设$y_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$.则利用132题的结果可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)\leqslant(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n),$$

故得　$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)$.

(ⅱ)设$y_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$.则$-y_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,于是,仍利用132题的结果可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n),$$

故得　$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)$;

但是根据上、下极限的定义,显然有等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n y_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n),\qquad\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(ⅲ)设$\{y_n\}$中有无穷多项是非负的,设这些项构成的子序列为$\{y_{n_k}\}$($y_{n_k}\geqslant 0$, $k=1,2,\cdots$)(如果$\{y_n\}$中只有有限项是非负的,则从某一项开始有$y_n<0$,这时应用(ⅱ)的结果即知所要证的等式成立).于是,注意到$x_n\geqslant 0$,显然有(利用(ⅰ)已证的结果)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\overline{\lim_{k\to\infty}}(x_{n_k}y_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}y_{n_k}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

证毕.

【134】 证明:若对于某非负*)叙列x_n($x_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$),任何叙列y_n($n=1,2,\cdots$)都使下二等式中至少有一成立:

(1)$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$ 或

(2)$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$,

则叙列x_n是收敛的.

证 取$\{x_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}\}$,使$x_{n_k}\to\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$.

取
$$y_n=\begin{cases}-x_n, & \text{当 } n\neq n_k \text{ 时},\\ A, & \text{当 } n=n_k \text{ 时},\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots),$$

其中A为任取的正常数,对此$\{y_n\}$若(1)成立,则由(注意到$x_n\geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=A,$$

知$(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A=(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A$,由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

故$\{x_n\}$收敛.

若(2)成立,则由(同样,注意到$x_n\geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

知$A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=A\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$,由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

故$\{x_n\}$也是收敛的.证毕.

*) 作者注:原著中将$x_n\geqslant 0$的假定加在条件(2)后,似不妥,因为叙列x_n应该是预先给定的.

【136】 证明:若叙列x_n($n=1,2,\cdots$)有界,且$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_{n+1}-x_n)=0$,则此叙列的聚点密布于下极限和上极限

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\quad 和\quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

之间,即是说间隔$[l,L]$中的任意一个数都是已知叙列的聚点.

证 根据定义,l与L都是$\{x_n\}$的聚点,故我们只要证明l与L之间的任何数a($l<a<L$)都是$\{x_n\}$的聚点.先证:对于任意给定的$\varepsilon>0$及任意给定的正整数N,必有正整数$n^*>N$存在,使$|x_{n^*}-a|<\varepsilon$.

由假定,必有正整数N'存在,使当$n>N'$时,恒有$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$.令

$$N_0=\max\{N,N'\},$$

则于叙列x_n($n=N_0+1,N_0+2,\cdots$)中必至少有两项$x_{n'}$和$x_{n''}$存在,使$x_{n'}<a$, $x_{n''}>a$(因为否则

的话，例如，无小于 a 的项，则必 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant a$，此与 $l<a$ 矛盾），不妨设 $n'<n''$，令满足 $n'\leqslant n\leqslant n''$ 且使 $x_n<a$ 的正整数 n 中之最大者为 n^*．显然 $n^*\leqslant n''-1$，且 $x_{n^*}<a$，$x_{n^*+1}>a$．故 $n^*>N$，$n^*>N'$ 并且

$$|x_{n^*}-a|<x_{n^*+1}-x_{n^*}<\varepsilon.$$

现取 $\varepsilon_1=1$，$N_1=1$，则存在 x_{n_1}（$n_1>1$）使 $|x_{n_1}-a|<1$；再取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$，$N_2=n_1$，则存在 x_{n_2}（$n_2>n_1$）使 $|x_{n_2}-a|<\frac{1}{2}$；又取 $\varepsilon_3=\frac{1}{3}$，$N_3=n_2$，则存在 x_{n_3}（$n_3>n_2$）使 $|x_{n_3}-a|<\frac{1}{3}$；这样一直继续下去，则得 $\{x_n\}$ 的一个子叙列 $\{x_{n_k}\}$，满足

$$|x_{n_k}-a|<\frac{1}{k}\quad(k=1,2,\cdots),$$

故 $x_{n_k}\to a$，即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点，证毕．

【138】 证明：若叙列 x_n（$n=1,2,\cdots$）收敛，则算术平均值的叙列

$$\zeta_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

反之，则结论不真，举例说明之．

证 令 $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}\cdot\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设收敛于 a，则对于任给的 $\varepsilon>0$ 存在序号 N，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，即 x_{N+1}，x_{N+2}，…均 $\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$．由此推得 $\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}$ 也含在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之内，即

$$\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}=a+\alpha,$$

式中 $|\alpha|<\varepsilon$．

这样，$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+(a+\alpha)\left(1-\frac{N}{n}\right)$．由此得

$$\left|\frac{s_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|s_N|}{n}+|\alpha|+(|a|+|\alpha|)\frac{N}{n}.$$

今取 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\varepsilon,\quad\frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}.$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有

$$\left|\frac{s_n}{n}-a\right|<3\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=a,\qquad\text{即}\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

但反之不然，例如，叙列 $x_n=(-1)^{n+1}$（$n=1,2,\cdots$）是发散的，但是叙列

$$\zeta_n=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为偶数},\\ -\dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\end{cases}$$

却是收敛的.

【139】 证明:若

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\quad \text{则}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

证 因为$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$,故对于任给的 $M>0$,存在有序号 N,使当 $n>N$ 时,$x_n>3M$,此时,仿 138 题的证明,有

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right)>\frac{s_N}{n}+3M\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

又因$\frac{s_N}{n}\to 0$, $1-\frac{N}{n}\to 1(n\to\infty)$, 故可取正整数 $N'>N$, 使当$n>N'$时,恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\frac{M}{2},\quad 1-\frac{N}{n}>\frac{1}{2}.$$

于是,当 $n>N'$时恒有$\frac{s_n}{n}>M$.由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

【140】 证明:若叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$收敛,且 $x_n>0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证 设$\lim_{n\to\infty}x_n=a$. 因 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,故 $a\geqslant 0$. 先设 $a>0$,则$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$,于是,利用 138 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a.$$

由此可知 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}=e^{\ln a}=a=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

若 $a=0$,则$\lim_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$.利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)=+\infty,$$

由此可知 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)}=0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证毕.

【141】 证明:若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}(n=1,2,\cdots)$,则 $y_n>0$.由假定$\lim_{n\to\infty}y_n$ 存在,设为 a.利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=a.$$

于是,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\left[(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}=1\cdot a=a=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

【143】 证明:若

(1)$y_{n+1}>y_n$ $(n=1,2,\cdots)$,(2)$\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$,(3)$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在,

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

证 假定$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$.由此,并注意到 $y_n\to+\infty$,可知对于任给的 $\varepsilon>0$,存在有序号 N,使当 $n>N$时,恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\text{且 } y_n>0).$$

于是,分数(当 $n>N$时)

$$\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\frac{x_{N+3}-x_{N+2}}{y_{N+3}-y_{N+2}},\cdots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

都包含在$(a-\dfrac{\varepsilon}{2},a+\dfrac{\varepsilon}{2})$之内,因为 $y_{n+1}>y_n$,所以,这些分数的分母都是正数,于是,得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2}),$$

$$\vdots$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n),$$

相加之,得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1})<x_{n+1}-x_{N+1}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1}),$$

即 $$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2},$$

所以,当 $n>N$时,恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另外,我们有(当 $n>N$时)

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+(1-\frac{y_{N+1}}{y_n})\cdot\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right),$$

故

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

现取正整数 $N'>N$,使当 $n>N'$时,恒有

$$\frac{|x_{N+1}-ay_{N+1}|}{y_n}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是,当 $n>N'$时,恒有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon.$$

由此可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.证毕.

注 本题中,若将条件(3)换为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty\ (\text{或}-\infty)$$

则结论仍成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

详见 Г.М.菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章 §2.

【144】 求(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$.

解 (1)设 $x_n=n^2$，$y_n=a^n(a>1)$.则 $y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^2-n^2}{a^{n+1}-a^n}=\frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n=2n+1$，$y'_n=a^n$，则 $y'_{n+1}>y'_n$，$y'_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\frac{2}{a^n(a-1)}\to 0,$$

因而利用 143 题的结果得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n}=0,\qquad 即\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0.$$

继续利用 143 题的结果，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0,\qquad 即\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0.$$

注 143 题的结果属于 O.Stolz，当 $y_n=n$ 时，早已被 A.L.Cauchy 所证明，此结果常用于确定“$\frac{\infty}{\infty}$”型的待定式$\dfrac{x_n}{y_n}$的极限，144 题即是一例.应用此结果，也可证明 138 题及 139 题的结果(此结果属于哥西 Cauchy).事实上，令

$$x'_n=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad y'_n=n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

【146】 证明：叙列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\quad (n=1,2,\cdots)$$

收敛.

因此有公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$称为尤拉常数，且当 $n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0$.

证 因为 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ (*)，故 $\ln(n+1)-\ln n<\dfrac{1}{n}$，令 $n=1,2,3,\cdots,n$，得出

$$\ln 2-\ln 1<1,\quad \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},\quad \ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},\ \cdots,\quad \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

相加之得

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

于是，

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0,$$

即$\{x_n\}$是一个有下界的叙列.

其次，

$$x_n-x_{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1},$$

因为$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ***)，所以 $x_n-x_{n+1}>0$，这就是说，$\{x_n\}$ 又是一个单调下降的叙列.因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，用 C 表示之，即

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216.或表成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

*)及**)利用 75 题(1)的结果.

【150】 证明：由下列各式

$$x_1=a,\quad y_1=b,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的叙列 x_n 和 y_n($n=1,2,\cdots$)有公共的极限

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$$

(数 a 和 b 的算术—几何平均数).

证 分两种情形：

(1)a 与 b 中至少有一个为零，例如，设 $a=0$.则显然有 $x_n=0$ ($n=1,2,\cdots$)，$y_{n+1}=\frac{y_n}{2}$，从而，递推得

$$y_n=\frac{b}{2^{n-1}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由此可知 $$\lim_{n\to\infty}x_n=0=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

(2)设 $a\neq0$，$b\neq0$，这时，必须 $a>0$，$b>0$.否则，若 $ab<0$，则 $x_2=\sqrt{ab}$ 没有意义；若 $a<0$，$b<0$，则 $x_2=\sqrt{ab}>0$，$y_2=\frac{a+b}{2}<0$，从而 $x_3=\sqrt{x_2y_2}$ 没有意义.因此，必须 $a>0$，$b>0$.不妨假定 $a\leqslant b$.由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项，并且都界于原来两数之间，故有

$$a\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant b,$$

由此又有 $$a\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant y_2\leqslant b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b\quad(n=2,3,\cdots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界叙列，$\{y_n\}$ 为单调减小的有界叙列，因此它们的极限都存在.令

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha,\qquad\lim_{n\to\infty}y_n=\beta.$$

在等式 $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ 两端取极限，得

$$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

故 $\alpha=\beta$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.证毕.

§3. 函数的概念

1.函数的概念 若对于集合 $X=\{x\}$ 中的每一个 x，有一个确定的实数 $y\in Y=\{y\}$ 与之对

应,则变量 y 称为变量 x 在已知变域 X 的单值函数 f,并记为 $y=f(x)$.

集合 X 名为函数 $f(x)$的定义域或存在域;Y 称为这个函数的值域,在最简单的情形下,集合 X 或为开区间(a,b):$a<x<b$,或为半开区间$(a,b]$:$a<x\leqslant b$或$[a,b)$:$a\leqslant x<b$,或为闭区间(线段)$[a,b]$:$a\leqslant x\leqslant b$,其中 a 和 b 为某实数或符号$-\infty$和$+\infty$.

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y=f(x)$与之对应,则 y 称为 x 的多值函数.

2.反函数 若把 x 了解为满足方程式

$$f(x)=y$$

(式中 y 为属于函数 $f(x)$的值域 Y 中之一固定数值)的任何数值,则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x=f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$的反函数,这个函数一般说来是多值的.若函数 $y=f(x)$是严格单调的,即当 $x_2>x_1$ 时,$f(x_2)>f(x_1)$[或相应地 $f(x_2)<f(x_1)$],则反函数 $x=f^{-1}(y)$为单值而且严格的单调函数.

求下列函数的存在域:

【157】 $y=\log\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ 时,y 值确定,即只要

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad 及 \qquad -(2k+2)\pi<\frac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi.$$

所以,存在域为满足不等式

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}, \quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad 及 \qquad -\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$$

的数 x 的集合.

求下列函数的存在域和函数值域:

【167】 $y=\lg(1-2\cos x)$.

解 当 $1-2\cos x>0$ 时,y 值确定.解之,得存在域为满足不等式

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的数 x 的集合 A.因为

$$\max_{x\in A}(1-2\cos x)=1-(-2)=3, \qquad \inf_{x\in A}(1-2\cos x)=0,$$

所以,函数值域为满足不等式 $-\infty<y\leqslant\lg 3$ 的数 y 的集合.

【173】 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 173(1)),底为 $AD=a$,$BC=b(a>b)$,高为 $HB=h$,引直线 $MN\parallel BH$,MN 与顶点 A 相距 $AM=x$,把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数.作函数 $S=S(x)$的图形.

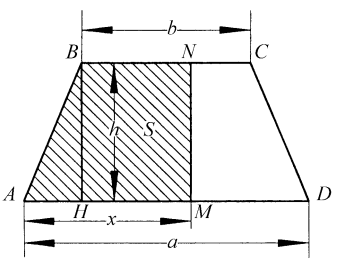

图 173(1)

解 $AH=\dfrac{1}{2}(a-b)$,分三种情况讨论:

(1)当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{a-b}{2}$时,即 MN 线在$\triangle ABH$ 内,此时

$$\frac{MN}{h}=\frac{x}{\frac{a-b}{2}},\qquad MN=\frac{2hx}{a-b}.$$

于是，$$S=\frac{1}{2}MN\cdot x=\frac{hx^2}{a-b},$$

如图 173(2)中弧 OA(系抛物线段).

(2)当 $\frac{a-b}{2}<x<\frac{a-b}{2}+b=\frac{a+b}{2}$ 时，面积

$$S=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{h}{2}+h\left(x-\frac{a-b}{2}\right)=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right),$$

如图 173(2)中不含 A 点及 B 点的直线段 AB.

(3)当 $\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$ 时，面积

$$S=\frac{h(a+b)}{2}-\frac{h}{a-b}\cdot(a-x)^2=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right],$$

如图 173(2)中抛物线段 BC.

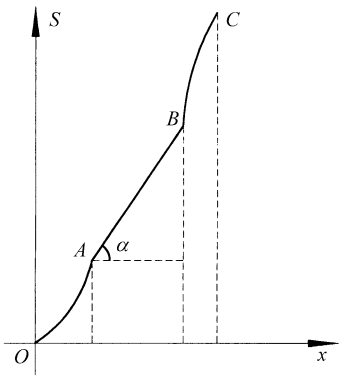

图 173(2)

图 173(2)中各点的位置如下：

$$A\left(\frac{a-b}{2},\frac{h(a-b)}{4}\right),\quad B\left(\frac{a+b}{2},\frac{h(a+3b)}{4}\right),\quad C\left(a,\frac{h(a+b)}{2}\right),$$

又 $\tan\alpha=h$.

【223】 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数.证明：若

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\tag{1}$$

则

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].\tag{2}$$

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点，则

$$\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0).$$

由(1)以及函数 $f(x)$ 的单调增加性知

$$f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)],\qquad \varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)];$$

从而，$$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)].$$

同理，可证 $$f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)],$$

由 x_0 的任意性，于是，(2)式得证.

求反函数 $x=\varphi(y)$ 和它的存在域，若：

【229】 $y=\operatorname{th}x$，式中 $\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1}$，

即 $$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},$$

两端再取对数，并注意到 $\frac{1+y}{1-y}>0$ 即 $-1<y<1$，于是，

$$x=\operatorname{arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\quad -1<y<1.$$

【233】 若存在有数 $T>0$(函数的周期——在广义的意义上)使对于一切被考虑的自变量 x 满足等式

$$f(x+nT)=f(x)\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

则函数 $f(x)$称为周期函数.

说明下列各已知函数中哪些是周期函数,并求它们的最小周期.设:

(1) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;　　(2) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

(3) $f(x)=2\tan\frac{x}{2}-3\tan\frac{x}{3}$;　　(4) $f(x)=\sin^2 x$;

(5) $f(x)=\sin x^2$;　　(6) $f(x)=\sqrt{\tan x}$;

(7) $f(x)=\tan\sqrt{x}$;　　(8) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

解　对于(1),由于

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)+B\sin\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=f(x),$$

故为周期函数,最小周期为 $T=\frac{2\pi}{\lambda}$ $(\lambda>0)$.同理可证:(2)、(3)、(4)和(6)也是周期函数,最小周期分别为 2π、6π、π 和 π.对于(5),若周期为 a,即 $\sin(x+a)^2=\sin x^2$.令 $x=0$ 即得 $a=\pm\sqrt{m\pi}$ (m 为某正整数),代入,又令 $x=\sqrt{2m\pi}$,易得 $\sin(2\sqrt{2}m\pi)=0$.但 $2\sqrt{2}m$ 显然不是整数,得到矛盾.于是,$\sin x^2$ 不是周期函数,同理,(7)和(8)也不是周期函数.

【234】　证明:对于迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证　设 l 为任一有理数,则当 x 为有理数时,$x+l$ 也为有理数.若 x 为无理数,则 $x+l$ 也为无理数,所以,

$$\chi(x+l)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

即 $\chi(x+l)=\chi(x)$,l 为周期.

【236】　证明:若对于函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$有等式

$$f(x+T)=kf(x)$$

(式中 k 和 T 为正的常数)成立,则

$$f(x)=a^x\varphi(x)$$

(式中 a 为大于零的常数,而 $\varphi(x)$为以 T 为周期的函数).

证　由假定 $k>0$,$T>0$,令 $a=k^{\frac{1}{T}}>0$,则 $a^T=k$.于是有 $f(x+T)=a^Tf(x)$.今定义函数 $\varphi(x)$如下:

$$\varphi(x)=a^{-x}f(x).$$

易知 $\varphi(x)$是周期为 T 的函数.事实上,

$$\varphi(x+T)=a^{-(x+T)}f(x+T)=a^{-x}a^{-T}a^Tf(x)=a^{-x}f(x)=\varphi(x).$$

于是,$f(x)=a^x\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$是周期为 T 的函数.证毕.

§4. 函数的图形表示法

1.要作函数 $y=f(x)$的图形可用下法来进行:(1)确定函数的存在域 $X=\{x\}$;(2)从 X 中

选出充分密集的自变数数值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 并作出函数

$$y_i = f(x_i) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

的对应数值表;(3)在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$并用线把它们连接起来,此连线的性质就是可认为是许多中间点的位置.

2.为了得到函数的正确图形,应当研究这个函数的一般性质.

首先必须:(1)解方程式 $f(x)=0$,求出函数图形与 Ox 轴的交点(函数值为零的点);(2)确定使函数为正或为负时自变数的变域;(3)尽可能地说明函数单调(增或减)的区间;(4)研究当自变数无限趋近于函数存在域的境界点时函数的情况.

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质,如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质,不用作大量的计算工作,立即可以画出许多函数的略图,其他的图形有时就是这些最简单图形的组合(和或乘积等等).

作出高于二次的有理整函数的图形:

【247】 $y=x^2-x^4$.

解 $y=x^2(1-x)(1+x)=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$.

图形关于 Oy 轴对称,与两坐标轴的交点为

$$(-1,0),\quad (1,0),\quad (0,0),$$

且在(0, 0)点与 Ox 轴相切.

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y=\frac{1}{4}$, 此时 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{4}\right)$ 及 $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

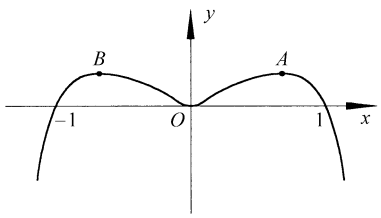

图 247

当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$时,曲线上升;

当$\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$时,曲线下降.如图 247 所示.

作出线性分式函数的图形(双曲线):

【251】 把线性分式函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$. 化为下面的形式

$$y=y_0+\frac{m}{x-x_0}.$$

再作它的图形.

研究例子 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$.

解 $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}=y_0+\frac{m}{x-x_0}$,

其中 $x_0=-\frac{d}{c}$, $y_0=\frac{a}{c}$, $m=\frac{bc-ad}{c^2}$,

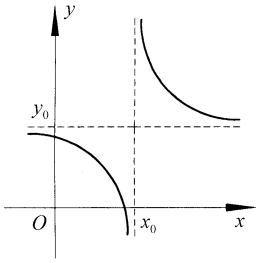

图 251(1)

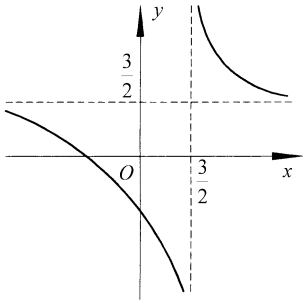

图 251(2)

如图 251(1)所示.

对于 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$,有 $x_0=y_0=\frac{3}{2}$,如图 251(2)所示.

作出下列有理分式函数的图形:

【260】 $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}$.

解 将 $y=\frac{1}{1+x}$, $y=-\frac{2}{x}$ 及 $y=\frac{1}{1-x}$ 的图形叠加即得,渐近线:$x=-1$, $x=0$, $x=1$ 及 $y=0$,如图 260 所示.

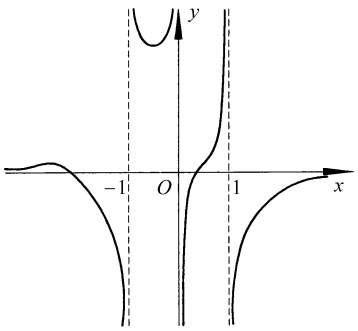

图 260

【263】 把函数

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\quad(a_1\neq 0)$$

化为下面的形状

$$y=kx+m+\frac{n}{x-x_0},$$

然后作出它的略图.研究例子

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}.$$

解 $$y=\frac{a}{a_1}x+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}+\frac{\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)}{x-\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}$$

$$=kx+m+\frac{n}{x-x_0}$$

其中 $k=\frac{a}{a_1}$，$m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$，

$x_0=-\frac{b_1}{a_1}$，$n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$.

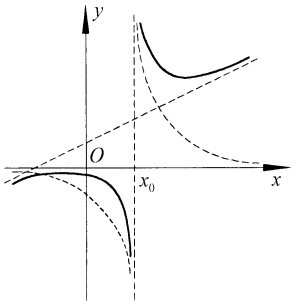

图 263(1)

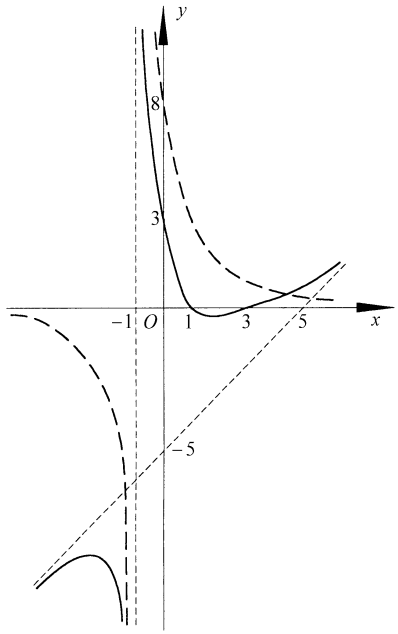

图 263(2)

如图 263(1)中黑粗线所示.

对于 $y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}=x-5+\frac{8}{x+1}$，如图 263(2)中黑粗线所示.

作出下列无理函数的图形：

【270】 $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

解 $y^2=\frac{1-x}{1+x}$，$x=-1+\frac{2}{1+y^2}$，

将 $x=-1$ 及 $x=\frac{2}{1+y^2}$的图形叠加即得，如图 270 所示($-1<x\leqslant 1$).

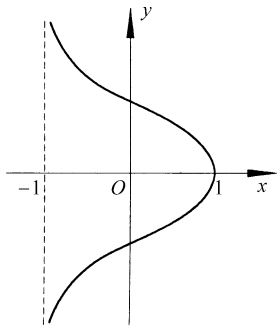

图 270

作下列三角函数的图形：

【296】 $y=\sin x\cdot\sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称.周期为 π.将

$y=\frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y=-\frac{1}{2}\cos 4x$

的图形叠加即得.如图 296 所示.

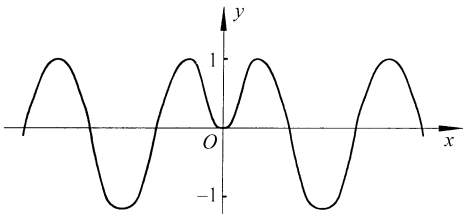

图 296

作下列函数的图形：

【298】 $y=\sin x^2$.

解 图形关于 Oy 轴对称.因为 $f(\sqrt{\pi})=f(\sqrt{2\pi})=\cdots=f(\sqrt{n\pi})=0$. 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi})=0$,所以,曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的叙列的极限为零.

由不等式 $\sin x^2<x^2$,我们知道这条曲线位于抛物线 $y=x^2$ 的下方.如图 298 所示.

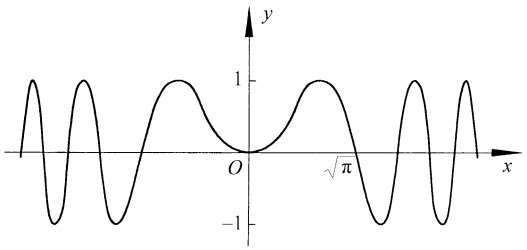

图 298

【299】 $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $-1\leqslant y\leqslant 1$. $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$, $y=0$ 为渐近线.

当 x 由 $+\infty$ 减小到 $\dfrac{2}{\pi}$ 时,则 $\dfrac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\dfrac{\pi}{2}$,而 y 由 0 增到 1;但当 x 由 $\dfrac{2}{\pi}$ 减小到 $\dfrac{2}{3\pi}$,则 $\dfrac{1}{x}$ 由 $\dfrac{\pi}{2}$ 增大到 $\dfrac{3\pi}{2}$,而 y 由 1 减小到 -1.当 $x=\dfrac{1}{\pi}$ 时,$y=0$ 等.因为 y 是奇函数,故图形关于原点对称.当 x 无限接近 0 时,函数在 -1 与 1 之间摆动,并且凝聚于 O 点,而在点 $x=0$ 处,函数 y 没有定义.如图 299 所示.

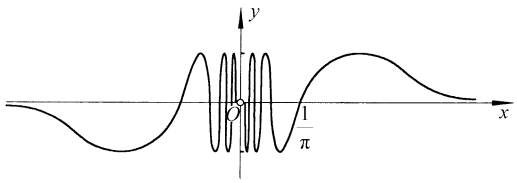

图 299

【301】 $y=\tan\dfrac{\pi}{x}$.

解 当 $x=\dfrac{1}{k}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)时,$y=0$.

当 $x\to\dfrac{2}{2k+1}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)时,$y\to\infty$.

当 $x>2$ 时,$y>0$,且当 $x\to+\infty$ 时,$y\to0$.

因为 y 为奇函数,故图形关于原点对称.

当 $x\to0$ 时,图形凝聚于 O 点,而在点 $x=\dfrac{2}{2k+1}$ 及 0 处,函数 y 是没有定义的.如图 301 所示.

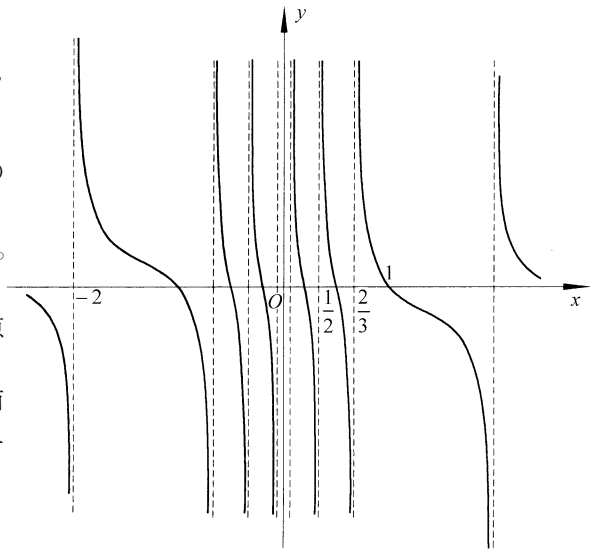

图 301

【302】 $y=x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解 先作 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图形.因为 y 为偶函数,故图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）时，$y=\pm x$.

当 $x=\dfrac{1}{k\pi}$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$）时，$y=0$.

当 $x>\dfrac{2}{\pi}$时，y 单调增加，且有 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$*）. 如图 302(1)所示(在点 $x=0$ 外无定义).

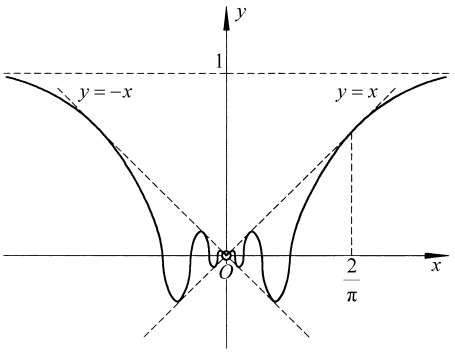

图 302(1)

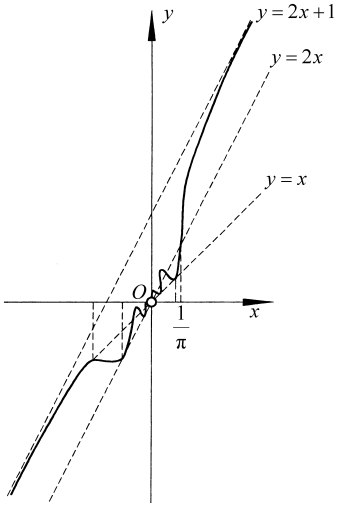

图 302(2)

其次，再将函数 $y=2x$ 及 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图形“叠加”，即得 $y=x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 的图形，如图 302(2)所示.

*） 此结果参看本章 §5.

【305】 $y=e^x\cos x$.

解 由于 $-e^x\leqslant y\leqslant e^x$，故图形在 $y=e^x$ 及 $y=e^{-x}$ 之间.

当 $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）时，$y=0$. 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\cos x$ 却不存在. 如图 305 所示.

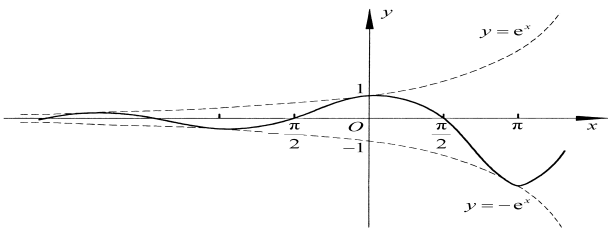

图 305

作下列反三角函数的图形：

【319】 $y=\arcsin(\cos x)$.

解 $\sin y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

因此，当$-\pi\leqslant x\leqslant 0$时，$y=\frac{\pi}{2}+x$；当$0\leqslant x\leqslant\pi$时，$y=\frac{\pi}{2}-x$；

一般地，当$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$时，$y=\left|\frac{\pi}{2}+x\right|-2k\pi$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）；

而当$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$时，$y=\left|\frac{\pi}{2}-x\right|+2k\pi$.

如图 319 所示.

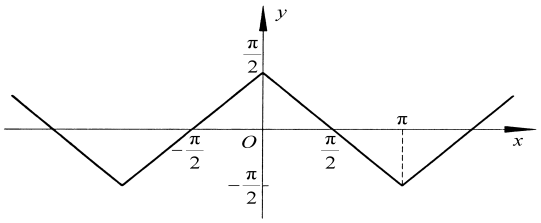

图 319

【326】 已知函数 $y=f(x)$的图形，作下列各函数的图形：

(1) $y=f(x-x_0)$； (2) $y=y_0+f(x-x_0)$；

(3) $y=f(2x)$.

解 (1)函数 $y=f(x-x_0)$的图形可由 $y=f(x)$的图形平移距离$|x_0|$得出.

当 $x_0>0$时，向右平移；

当 $x_0<0$时，向左平移.

如图 326(1)所示.

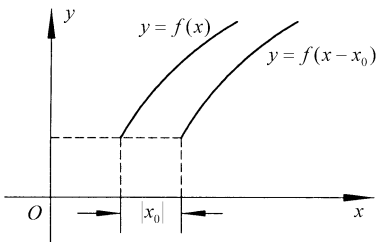

图 326(1)

(2)函数 $y=y_0+f(x-x_0)$的图形可由 $y=f(x)$的图形先平移距离$|x_0|$，再上下平移距离$|y_0|$得出，其中

当 $y_0>0$时，向上平移；

当 $y_0<0$时，向下平移.

事实上，只要先将坐标原点平移到点(x_0,y_0).坐标轴的方向均不变，再在新坐标系中作 $y'=f(x')$的图形，其中 $y'=y-y_0$, $x'=x-x_0$.

如图 326(2)所示.

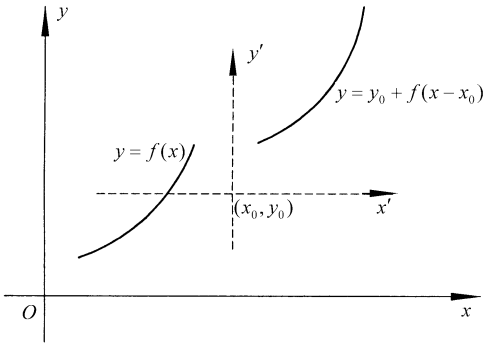

图 326(2)

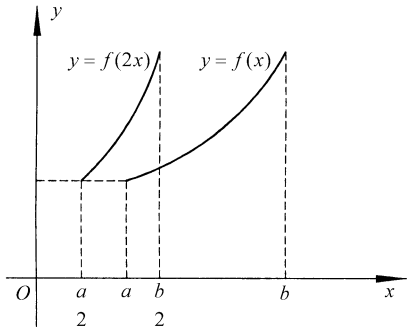

图 326(3)

(3)函数 $y=f(2x)$的图形可由 $y=f(x)$的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得出.图形如图 326(3)所示.

【330】 已知函数 $y=f(x)$和 $y=g(x)$的图形,作下列各函数的图形:

(3)$y=f[g(x)]$.

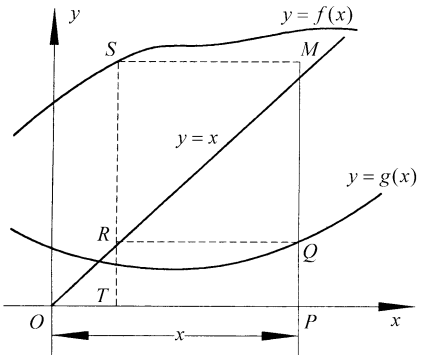

图 330

解 (3)如图 330 所示.设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点.通过 P 点引铅直线.它和 $y=g(x)$的图形相交得 Q 点(当然假定值 PQ 在 $f(x)$的存在域内).$PQ=g(x)$.过 Q 点引水平线,它与 $y=x$ 交于 R 点,过 R 作铅直线与 Ox 轴及 $y=f(x)$分别交于 T 点及 S 点,则 $OT=TR=PQ=g(x)$,因而 $TS=f[g(x)]$.最后,把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点,此即函数 $y=f[g(x)]$图形上的一点.至于该图形上的其他点,同法求得.但要注意,函数 $y=f[g(x)]$的存在域是满足不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的数 x 的集合,式中$[a,b]$是 $f(x)$的存在域.

利用图形的相乘法,作出下列函数的图形:

【350】 作函数

$$y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$$

的图形.

解 当 $2k<x<2k+1$ ($k=0,1,2,\cdots$)时,$\sin\pi x>0$,$\operatorname{sgn}(\sin\pi x)=1$,因而,

$$y=x+\sqrt{x}.$$

而当 $2k+1<x<2k+2$ 时,$y=x-\sqrt{x}$.图 350(1)中系函数

$$y=\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$$

的图形(黑粗线所示).其中在 $y=x$ 上的一支系 $y=\sqrt{x}+x$ 的一段.

至于函数

$$y=x+\sqrt{x}\cdot\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$$

的图形如图 350(2)所示.

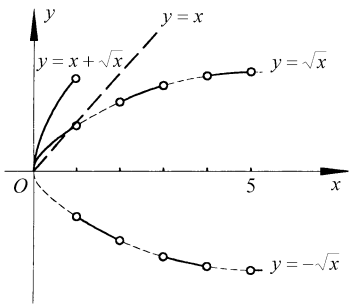

图 350(1)

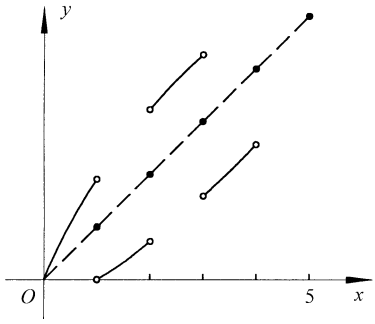

图 350(2)

【358】 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{若}|x|\leqslant 1;\\ 0, & \text{若}|x|>1.\end{cases}\quad\text{及}\quad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & \text{若}|x|\leqslant 2;\\ 2, & \text{若}|x|>2.\end{cases}$$

作函数:(2)$y=\varphi[\psi(x)]$的图形.

解 (2)$\varphi[\psi(x)]=\varphi[\psi(-x)]$,故图形关于 Oy 轴对称.

当 $0\leqslant x<1$ 时,$\psi(x)=2-x^2$,由于 $1<2-x^2\leqslant 2$,所以,$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时,$\psi(x)=2-x^2$,由于 $-1\leqslant 2-x^2\leqslant 1$,所以,$\varphi[\psi(x)]=1$.

当 $\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 时,$\psi(x)=2-x^2$,由于 $-2\leqslant 2-x^2<-1$,所以,$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $x>2$ 时,$\psi(x)=2$,所以,$\varphi[\psi(x)]=0$.

如图 358 所示.

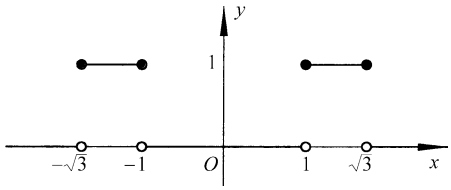

图 358

【363】 证明:若函数

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的图形对于二垂直轴 $x=a$ 和 $x=b(b>a)$对称,则函数 $f(x)$为周期函数.

证 设 x 为任一实数,则按假设有

$$f(a+x)=f(a-x)\quad\text{及}\quad f(b+x)=f(b-x).$$

在 $f(a+x)=f(a-x)$中将 x 换成 $x+(b-a)$,则得

$$f(x+b)=f(a-x-b+a)=f(2a-b-x);$$

而 $f(x+b)=f(b-x)$,所以,

$$f(b-x)=f(2a-b-x).$$

将 $b-x$ 换成 x,则得

$$f(x)=f(2a-2b+x).$$

再将 x 换成 $2(b-a)+x$,即得

$$f(x+2(b-a))=f(x),$$

即 $f(x)$为一以 $2(b-a)$周期的周期函数.

如图 363 所示.

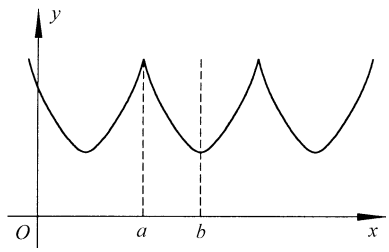

图 363

【364】 证明:若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$的图形对于两点 $A(a,y_0)$和$B(b,y_1)(b>a)$

对称，则函数 $f(x)$是线性函数与周期函数的和.特别是，若 $y_0=y_1$，则函数 $f(x)$是周期函数.

证 设 x是任一实数，按假设有：

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \tag{1}$$

$$f(b+x)-y_1=y_1-f(b-x). \tag{2}$$

在(1)中，将 x换成 $x+(b-a)$则得

$$f(b+x)-y_0=y_0-f(2a-b-x). \tag{3}$$

将(3)代入(2)得 $2y_1-f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x)$，

即

$$f(b-x)=2(y_1-y_0)+f(2a-b-x). \tag{4}$$

在(4)中，将 $b-x$换成 x，则得

$$f(x)=2(y_1-y_0)+f(2a-2b+x). \tag{5}$$

再在(5)中将 x换成 $2(b-a)+x$，则得

$$f(x)=2(y_0-y_1)+f[2(b-a)+x]. \tag{6}$$

令

$$f(x)=-\frac{y_0-y_1}{b-a}x+\varphi(x). \tag{7}$$

下面证明 $\varphi(x)$一定是周期函数.事实上，由(7)式我们有

$$f[x+2(b-a)]=-\frac{y_0-y_1}{b-a}[x+2(b-a)]+\varphi[x+2(b-a)],$$

$$f(x)-f[x+2(b-a)]=2(y_0-y_1)+\varphi(x)-\varphi[x+2(b-a)].$$

因此，由(6)式可得

$$\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]. \tag{8}$$

由(7)式和(8)式可知，$f(x)$是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0=y_1$，则由(7)式和(8)式可知，$f(x)$是一个周期函数.

§5. 函数的极限

1.函数的有界性 设存在有某两数 m和 M，使得当 $x\in(a,b)$时，

$$m<f(x)<M,$$

则称函数 $f(x)$在这区间(a,b)上为有界的.

数 $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$称为函数 $f(x)$在这区间(a,b)上的下确界，而数 $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$称为函数 $f(x)$在这区间(a,b)上的上确界.

差 M_0-m_0 称为函数在区间(a,b)上的振幅.

2.函数在某一点的极限 符号

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \tag{1}$$

表示对于任一个数 $\varepsilon>0$，都存在有数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于满足条件式$0<|x-a|<\delta$，并使 $f(x)$有意义的一切 x，有下列不等式成立：

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数的极限(1)存在的必要而且充分的条件是:对于每一个叙列 $x_n\to a$ ($n=1,2,\cdots$),下面的等式都成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

有两个著名的极限:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;　　(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

哥西判别法.函数 $f(x)$在 a 点的极限存在,当而且仅当,对于每一个 $\varepsilon>0$,都能找到 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得,只要是

$$0<|x'-a|<\delta \quad 和 \quad 0<|x''-a|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内的.

3.单侧的极限　若

当 $0<a-x<\delta(\varepsilon)$ 时,有 $|A'-f(x)|<\varepsilon$,则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限:

$$A'=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0).$$

同样,若当 $0<x-a<\delta(\varepsilon)$ 时,有 $|A''-f(x)|<\varepsilon$,则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限:

$$A''=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为:

$$f(a-0)=f(a+0).$$

4.无穷极限　符号

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

表示对于任何的 $E>0$,只要是 $0<|x-a|<\delta(E)$,则有

$$|f(x)|>E.$$

5.子列极限　若对于某叙列 $x_n\to a$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B,$$

则称数(或符号∞)B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限(有穷的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) \quad 和 \quad \overline{\lim_{x\to a}} f(x)$$

来表示,分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限.

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x)=\overline{\lim_{x\to a}} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限(有穷的或无穷的)的必要而且充分的条件.

【381】 函数 $f(x)$ 由下面的条件所定义:

若 $x=\dfrac{m}{n}$,则 $f(x)=n$, 式中 m 和 n 为互质的整数,且 $n>0$;

若 x 为无理数,则 $f(x)=0$.证明此函数在每一点 x 为有穷的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

证　任给 $x_0>0$,当 x_0 固定时,$f(x_0)$ 值确定.由于有理数在数轴上处处稠密,故在 x_0 的任何邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内总有无限多个有理数.下面证明对于任给的 $\delta>0$,函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0$

$-\delta, x_0+\delta)$内是无界的.若不然,存在 $M>0$,使当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$时,

$$|f(x)|\leqslant M.$$

于是,在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中的有理数只能表示成

$$\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \cdots, \frac{k}{[M]},$$

其中 k是与分母互质的整数,$[M]$为 M的整数部分.由于这些有理数都在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中,故有

$$(x_0-\delta)[M]<k<(x_0+\delta)[M],$$

上式表明在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中的有理数仅为有限个,这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是,本题所定义的函数 $f(x)$在每一点 x(有穷)的任何邻域中是无界的.

【384】 证明:函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x\to 0$ 时不成为无穷大.

证 当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$时,$f(x)=0$; 而当 $x=\frac{1}{k\pi}$时,$f(x)=(-1)^k k\pi$.于是,当 $k\to\infty$时,点 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$及$\frac{1}{k\pi}$均在点 $x=0$ 的任何邻域内.由于$|(-1)^k k\pi|\to+\infty$ $(k\to+\infty)$,故函数 $f(x)$在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的.然而当 $k\to\infty$时,$f(x)$不断地与 Ox 轴相交,即 $f(x)=0$(这样的数 x 的集合是无限的).因而,当$x\to 0$时,$f(x)$又不成为无穷大.

【399】 设 $m[f]$和 $M[f]$分别为函数 $f(x)$在区间(a,b)内的下确界和上确界.

证明:若 $f_1(x)$和 $f_2(x)$为定义于(a,b)内的函数,则

$$m[f_1+f_2]\geqslant m[f_1]+m[f_2] \quad 及 \quad M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$的例子,使它们在最后的二关系中是:(1)等式的情形;(2)不等式的情形.

证 因为

$$m[f_1]\leqslant f_1\leqslant M[f_1] \quad 及 \quad m[f_2]\leqslant f_2\leqslant M[f_2],$$

所以,$m[f_1]+m[f_2]\leqslant f_1+f_2$, 从而有

$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant m[f_1+f_2].$$

又因 $f_1+f_2\leqslant M[f_1]+M[f_2]$, 所以, $M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2]$.

(1) 当 $f_1(x)$及 $f_2(x)$在(a,b)内具有相同的单调性,且 m及 M 均为有限时,取等式.

(2) $f_1(x)=x^2, f_2(x)=-x^2$ 在区间$(-1,1)$内

$$m[f_1]=0, \quad M[f_1]=1; \qquad m[f_2]=-1, \quad M[f_2]=0.$$

又因为 $f_1+f_2=0$,所以 $m[f_1+f_2]=M[f_1+f_2]=0$. 此时

$$m[f_1+f_2]>m[f_1]+m[f_2], \qquad M[f_1+f_2]<M[f_1]+M[f_2].$$

取不等式的符号.

利用不等式表示下列各式,并举出适当的例子:

【405】 (4) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; (5) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$; (6) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$;

(7) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$; (8) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$; (9) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

解 (4) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$|f(x)|>E$, 此即

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty.$$

例如,$f(x)=\dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]}}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\infty$.

(5) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时, $f(x)<-E$,此即

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty.$$

例如,$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$.

(6) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时, $f(x)>E$, 此即

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty.$$

例如,$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=+\infty$.

(7) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$|f(x)|>E$, 此即

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

例如,$f(x)=\dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{x-1}\right]}}{x-1}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\infty$.

(8) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时, $f(x)<-E$, 此即

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty.$$

例如,$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$.

(9) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时, $f(x)>E$, 此即

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty.$$

例如,$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=+\infty$.

【408】 设

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

式中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$为实数.

证明:

$$\lim_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty.$$

证 不妨设 $a_0\neq 0$,则

$$|p(x)|\geqslant|a_0|\cdot|x^n|\cdot\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|,$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|^i}=0$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$,故存在 $E_1>0$,使当 $|x|>E_1$ 时,恒有

$$\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|>\frac{1}{2},$$

从而有

$$|p(x)|>\frac{1}{2}|a_0|\cdot|x|^n.$$

任给 $M>0$,设 $E_2=\sqrt[n]{\dfrac{2M}{|a_0|}}$. 取 $E=\max(E_1,E_2)$,则当 $|x|>E$ 时,恒有

$$|p(x)|>M,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty$.

【410】 设

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

式中 $P(x)$和 $Q(x)$为 x的多项式,且

$$P(a)=Q(a)=0.$$

下式有什么可能的值 $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$?

解 若 a仅为 $P(x)=0$及 $Q(x)=0$的一重根,则极限

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

为一确定值(不等于零).

若 a为 $P(x)=0$的 n重根,而为 $Q(x)=0$的 m重根,则当 $n>m$(n,m均大于 1)时,此极限为 0;当 $n<m$时,此极限为∞;当 $n=m$时,此极限为一不等于零的值.

总之,极限

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

为 0,或为∞,或为不等于零的值.

求下列各式之值:

【414】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m与 n为自然数).

解
$$\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{\left[1+nmx+\frac{1}{2!}n(n-1)m^2x^2+\cdots+m^nx^n\right]}{x^2}$$
$$+\frac{-\left[1+mnx+\frac{1}{2!}m(m-1)n^2x^2+\cdots+n^mx^m\right]}{x^2}$$
$$=\frac{n}{2}(n-1)m^2-\frac{m}{2}(m-1)n^2+o(x)^{*)}=\frac{1}{2}mn(n-m)+o(x),$$

于是,
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{1}{2}mn(n-m).$$

*) $o(x)$表示当 $x\to0$时的无穷小量.

【424】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

解
$$x+x^2+\cdots+x^n-n=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$$
$$=(x-1)[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$$
$$=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}].$$

于是,
$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【428】 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ (m和 n为自然数).

解 当 $m=n$ 时，此极限显然为零.

当 $m\neq n$ 时，不失一般性，假设 $m<n$，且 $m+l=n$. 此时

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}$$

$$=-\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}-\frac{+l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}.$$

于是，

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=-\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)]+l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn}$$

$$=-\frac{\frac{ml(l-1)}{2}+\frac{ml(m+1)}{2}}{mn}=-\frac{ml(m+l)}{2mn}=\frac{m-n}{2}.$$

当 $m=n$ 时，上述结果就等于零. 即上述结果对 $m=n$ 的情况仍然适用.

总之，不论 m 及 n 为任何的自然数，均有

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}.$$

【433】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

解 令

$$1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=x_n,\qquad [1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=y_n,$$

则 $y_{n+1}>y_n$，且 $y_n\to+\infty$，由于

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2-[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2}+\frac{n(3n-1)}{2}\right](3n+1)}\to3\quad(n\to\infty).$$

利用 143 题的结果即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}=3.$$

求极限：

【452】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ （m 及 n 为整数）.

解 如果 m 及 n 为正整数，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\alpha x)^n-(1+\beta x)^m}{x(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(n\alpha-m\beta)+(C_n^2\alpha^2x+\cdots+\alpha^nx^{n-1}-C_m^2\beta^2-\cdots-\beta^mx^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}}=\frac{n\alpha-m\beta}{mn}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 为负整数. 设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数，则

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}=\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于1,于是利用本题前半段的结果,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{x}=\frac{\beta}{n'}-\frac{\alpha}{m'}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数,另一个为正整数,则同法可证上述结论仍然成立.因此,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\quad (mn\neq 0).$$

【456】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

解 设 $x=t^{n!}$,则

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{(1-t^{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n})(1-t^{2\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot n})\cdots(1-t^{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n-1)})}{(1-t^{n!})^{n-1}}$$

$$=\frac{(1+t+t^2+\cdots+t^{\frac{n!}{2}-1})(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{3}-1})\cdots(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1+t+\cdots+t^{n!-1})^{n-1}}$$

当 $x\to 1$ 时,$t\to 1$.于是,上式趋向于 $\dfrac{\frac{n!}{2}\cdot\frac{n!}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}}=\dfrac{1}{n!}$,即

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

【459】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

解 设 $x=\dfrac{1}{t}$,则

$$x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}=\frac{(\sqrt{1+2t}+1)^2-4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}$$

$$=\frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}.$$

当 $x\to+\infty$ 时,$t\to 0$.于是,上式趋向于 $-\dfrac{1}{4}$,即

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=-\frac{1}{4}.$$

【465】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)}-x]$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)-x^n}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\right)x^{n-1}+\cdots+\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}.$$

【470】[+] * 从条件：

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0 \quad 和 \quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$$

求常数 a_i 和 b_i $(i=1,2)$.

解 $$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1=\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1}, \tag{1}$$

上式极限为零的必要条件是 $1-a_1^2=0$ 及 $1+2a_1b_1=0$，解之，得

$$a_1=\pm1,\ b_1=\mp\frac{1}{2}.$$

当 $a_1=1,\ b_1=-\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1=\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x^2-x+1-(x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x+1}-(x-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}}\to0 \quad (当\ x\to-\infty时),$$

从而，由(1)式知

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\to+\infty \quad (当\ x\to-\infty时),$$

此与假定不符合，故舍弃 $a_1=1,\ b_1=-\frac{1}{2}$.

当 $a_1=-1,\ b_1=\frac{1}{2}$ 时，显然有

$$\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1=\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}\to+\infty \quad (当\ x\to-\infty时),$$

从而，由(1)式知

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\to0 \quad (当\ x\to-\infty时),$$

此与假定符合，故得 $$a_1=-1,\ b_1=\frac{1}{2}.$$

同理可得 $$a_2=1,\ b_2=-\frac{1}{2}.$$

【473】 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 及 n 为整数).

解 设 $x=\pi+y$，则当 $x\to\pi$ 时，$y\to0$. 于是，

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{y\to0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}=(-1)^{m-n}\lim_{y\to0}\frac{\sin my}{my}\cdot\frac{ny}{\sin ny}\cdot\frac{m}{n}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

【494】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos2x\cos3x}{1-\cos x}$.

解 因为

$$1-\cos x\cos2x\cos3x=1-\frac{1}{2}(\cos4x+\cos2x)\cos2x=1-\frac{1}{2}\cos4x\cos2x-\frac{1}{2}\cos^22x$$

---

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$=1-\frac{1}{4}(\cos 6x+\cos 2x)-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)=\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x).$$

所以，
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{4}(4+16+36)=14.$$

【499】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{4}.$$

【504】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

解 不妨令 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x})}=3.$$

【521】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\dfrac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}\cdot\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}$.

因为

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{\cos x+1-2\cos^2 x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}(1+2\cos x)=\frac{1+2\cos x}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{3}{2}\quad(x\to 0),$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}$.

【526】 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(\cos\sqrt{x}-1+1)}{\cos\sqrt{x}-1}(\cos\sqrt{x}-1)}=\lim\limits_{x\to+0}e^{-\frac{1}{x}\cdot2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}$ **) $=e^{-\frac{1}{2}}$.

*) 原题为 $x\to0$,应改为 $x\to+0$.

**) 利用结果 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\ln e=1$.

【537】 $\lim\limits_{h\to0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$ $(x>0)$.

解 $\lim\limits_{h\to0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\lg(x^2-h^2)-\lg x^2}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left[-\frac{1}{x^2}\lg\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right]=-\frac{1}{x^2}\lg e$.

【551】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}a+a}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{\frac{x}{b}b+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b}[2(a+b)]+(a+b)}}=\frac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}$.

【564】 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad(a>0,\ n>0).$$

证 当 $x\geqslant1$ 时,存在惟一的正整数 k,使

$$k\leqslant x<k+1.$$

于是当 $n>0$ 时,我们有

$$\frac{x^n}{a^x}<\frac{(k+1)^n}{a^k}\quad\text{及}\quad\frac{x^n}{a^x}>\frac{k^n}{a^{k+1}}=\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}.$$

因为当 $x\to+\infty$ 时,$k\to+\infty$,所以有

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^k}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^{k+1}}\cdot a=0\cdot a$ *) $=0$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k^n}{a^{k+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}=0\cdot\frac{1}{a}$ *) $=0$.

于是, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$.

*) 利用 60 题的结果.

【607】 设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$,由此是否可推出

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

研究这个例子:当 $x=\frac{p}{q}$(其中 p 和 q 是互质的整数)时,$\varphi(x)=\frac{1}{q}$;当 x 为无理数时,$\varphi(x)=0$;当 $x\neq0$ 时,$\psi(x)=1$;当 $x=0$ 时,$\psi(x)=0$;并且 $x\to0$.

解 不一定.例如,对于函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\text{当 } x=\dfrac{p}{q}\text{(其中 } p \text{ 和 } q \text{ 互质)时;}\\ 0,\text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}\quad \text{及}\quad \psi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0(=A)\quad \text{及}\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=1,$$

但是,极限

$$\lim_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$$

却不存在.事实上,当 x 以一串无理叙列 x_n 趋近于零时,有 $\varphi(x_n)=0$,因此 $\psi(\varphi(x_n))=0(n=1,2,\cdots)$;而当 x 以一串有理叙列 x_n' 趋近于零时,$\varphi(x_n')\neq 0$,因此,$\psi(\varphi(x_n'))=1(n=1,2,\cdots)$.由此可知,当 $x\to 0$ 时,极限

$$\lim_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$$

不存在.

【608】 证明哥西定理:若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a,+\infty)$ 上,且在每一个有穷的区间 (a,b) 内是有界的,则

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)],$$

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}\quad (f(x)\geqslant c>0),$$

假定在等式右端的极限都存在.

证 (1)记 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$.任给 $\varepsilon>0$,必存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x>X_0+1$.于是,恰有一个正整数 n(依赖于 x),满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$.令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=X_0+\tau+n$.我们有

$$\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]+\frac{f(X_0+\tau)}{x}-\frac{(X_0+\tau)A}{x}.$$

显然

$$\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]\right|\leqslant\left|\frac{f(X_0+\tau+n)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A]\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A|<\frac{1}{n}\cdot\frac{n\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

由假定,$f(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界,故存在正数 X_1,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad (0\leqslant\tau<1);$$

另外,显然存在正数 X_2,使当 $x>X_2$ 时,恒有

$$\left|\frac{(X_0+1)A}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1,X_2\}$.于是,当 $x>X$ 时,必有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由此可知 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$

(2)由假定,$f(x)\geqslant c>0$.记 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=A'$.显然 $A'\geqslant 0$.下证 $A'>0$.事实上,若 $A'=0$,则存在正数 X_0,使当 $x\geqslant X_0$ 时,必 $0<\dfrac{f(x+1)}{f(x)}<\dfrac{1}{2}$.于是,

$$0<\frac{f(X_0+n)}{f(X_0)}=\frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)}\cdot\frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)}\cdot\cdots\cdot\frac{f(X_0+1)}{f(X_0)}<\left\{\frac{1}{2}\right\}^n.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(X_0+n)=0$,此显然与 $f(x)\geqslant c>0$ 矛盾,因此,有 $A'>0$.

由于 $f(x)\geqslant c>0$ 且 $f(x)$在每个有穷区间(a,b)内有界,故函数 $\ln f(x)$在每个有穷区间(a,b)内也有界,并且

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{f(x+1)}{f(x)}=\ln A'.$$

于是,将(1)的结果用于函数 $\ln f(x)$,即知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\ln A'.$$

故有 $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}[e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln f(x)}{x}}=e^{\ln A'}=A'.$$

证毕.

【609】 证明,若:(1)函数 $f(x)$定义于域 $x>a$ 内;(2)在每一个有限的域 $a<x<b$ 内是有界的;(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ (或$-\infty$)*),则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ (或$-\infty$).

证 只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$的情形,这时要证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$(对于$-\infty$的情形,只要考虑函数$-f(x)$即可归结为$+\infty$的情形).任给 $G>0$.必存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$f(x+1)-f(x)>4G.$$

现设 $x>2(X_0+1)$.仿 608 题(1)的证明,恰有一个正整数 n(依赖于 x),满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$.令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=x_0+\tau+n$.由于 $n+1>x-X_0>X_0+2$,故 $n>X_0+1>X_0+\tau$.从而 $2n>x$,即 $\dfrac{n}{x}>\dfrac{1}{2}$.又,我们有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}+\frac{f(X_0+\tau)}{x};$$

显然 $$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)]>\frac{1}{n}\cdot 4nG=4G,$$

故 $$\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}>2G.$$

由假定,$f(x)$在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界,故存在正数 X_1,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<G.$$

令 $X=\max\{2(X_0+1),X_1\}$,则当 $x>X$ 时,恒有

$$\frac{f(x)}{x}>G.$$

由此可知 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

证毕.

*) 原题条件(3)误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$,结论误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$.例如,按下式定义$[0,+\infty)$上的函数 $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}2n & \text{当 } 2n\leqslant x<2n+1 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } 2n+1\leqslant x<2n+2 \text{ 时.}\end{cases}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

则显然 $f(x)$满足原题的条件(1)和(2)(这时 $a=0$),并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$;但显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\neq\infty$(实际 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{f(x)}{x}=1$).

【610】 证明,若:(1)函数 $f(x)$定义于域 $x>a$ 内;(2)在每一个有限的域 $a<x<b$ 内是有界的;(3)存在着有限的或无穷的(带确定符号的无穷,即$+\infty$和$-\infty$)*)极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

证 先证一条一般性的定理(Stolz 定理在函数情形的推广)若:(1)函数 $f(x)$与 $g(x)$都定义于域 $x>a$ 内;(2)$f(x)$与 $g(x)$在每一个有限域 $a<x<b$ 内有界,并且 $g(x)$当 $x>a$ 时满足 $g(x+1)>g(x)$且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$;(3)存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l \quad (l\text{为有限数或为}+\infty\text{或为}-\infty);$$

则必 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$. 证如下:

先证 l 为有限数.任给 $\varepsilon>0$.存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x>X_0+1$.于是,恰有一个正整数 n(依赖于 x),使 $n\leqslant x-X_0<n+1$.令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=X_0+\tau+n$.我们有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\cdot\left[\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right],\end{aligned}$$

而

$$\left|\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad (k=1,2,\cdots,n),$$

又由于

$$g(x)=g(X_0+\tau+n)>g(X_0+\tau+n-1)>g(X_0+\tau+n-2)>\cdots>g(X_0+\tau),$$

从而

$$\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>0\ (k=1,2,\cdots,n);$$

由此可知

$$\left|\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0-\tau)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

容易直接验证等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}-l=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right]+\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$,并且 $f(x)$与 $g(x)$都在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界,故必有正数 $X_1>a$ 存在,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\quad\left|\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$.于是,当 $x>X$时,恒有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, l为有限数获证.

下设 $l=+\infty$(若 $l=-\infty$,则考虑函数$-f(x)$即可化为 $l=+\infty$的情形).任给 $G>0$,存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}>4G.$$

当 $x>X_0+1$ 时,仿前一段之证,有

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\cdot\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}$$

从而

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>4G\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=4G.$$

易知

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}+\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

根据 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$以及 $f(x)$,$g(x)$在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上的有界性,可取正数 $X_1>a$,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\quad\left|\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<G.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$.于是,当 $x>X$时,恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{1}{2}\cdot4G-G=G.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般定理来证明本题,在一般性定理中取$g(x)=x^{n+1}$.显然此 $g(x)$满足一般性定理的条件,并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1}+\cdots+(n+1)x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}\cdot\frac{1}{(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)nx^{-1}+\cdots+(n+1)x^{-n+1}+x^{-n}}=\frac{l}{n+1}.$$

由此,根据此一般性定理,即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{n+1}.$$

证毕.

*) 原题所说的无穷,必须是带确定符号的无穷,即$+\infty$或$-\infty$;参看609题末尾加的注.

注 608题的(1)和609题可直接从上述一般性定理推出.实际上,只需令$g(x)=x$,由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

即知.

【611】 证明:(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$; (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

证 (1)当$x=0$时是显然的;当$x\neq0$时,令$y_n=\frac{n}{x}$,由71题的结果,得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n\cdot x}=e^x;$$

(2)当$x=0$时是显然的,我们先讨论$x>0$的情形.由牛顿二项式定理知

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\leqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

另一方面,当$m>n$时有

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

令$m\to\infty$(n保持不变),得

$$e^x\geqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

由此可知 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x\quad(x>0).$$

由于 $$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)=1+(-1)^n\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2,$$

而由61题知,对固定的x有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.于是,对于$x<0$,仍然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x\quad(x<0).$$

【627】 求下列曲线的渐近线并作其图形:

(1) $y=\frac{x^2}{x^2+x-2}$; (4) $y=\frac{xe^x}{e^x-1}$.

解 (1)因为$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$及$\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$,所以,直线$x=1$及$x=-2$为曲线的垂直渐近线.其次,因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x^2+x-2)}=0,$$

而 $$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1,$$

所以，$y=1$ 为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当 $-2<x<1$ 时，$y<0$，故曲线在 Ox 轴的下方；

当 $x>1$ 或 $x<-2$ 时，$y>0$，故曲线在 Ox 轴的上方.

适当描若干点；

$A(2,1)$，$B(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

$C(4,\frac{8}{9})$，$D(-3,\frac{9}{4})$，…，

并用光滑曲线联接，即得图形(图 627(1)).

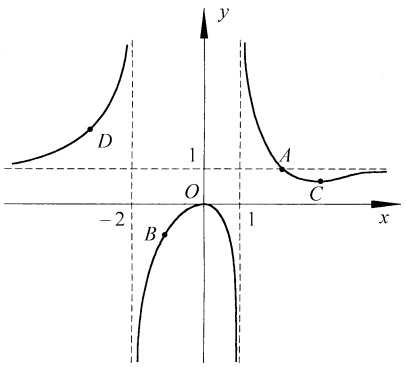

图 627(1)

(4) 当 $x>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=0,$$

故渐近线为 $y=x$；

当 $x<0$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=0,$$

故另一渐近线为 $y=0$.

曲线在 $x=0$ 处无定义(以后可以说明它是“可去的间断”).

因为 $y>0$，故图形始终在 Ox 轴的上方.

如图 627(2)所示.

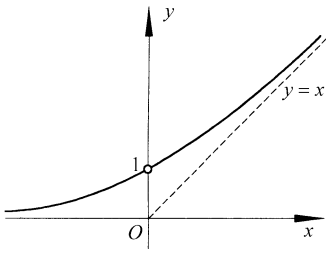

图 627(2)

求下列极限：

【628】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

解 由于

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}(1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}).$$

当 $|x|=1$ 时，上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!}\to0$ $(n\to\infty)$；

当 $|x|\neq1$ 时，此式为

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}=\frac{1}{1-|x|}\cdot\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{(|x|^2)^n}{n!}\right].$$

由 61 题的结果知：$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to0$，$\frac{(|x|^2)^n}{n!}\to0$ $(n\to\infty)$，故当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}\to0.$$

于是，对于任意实数 x，有

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]=0.$$

【629】 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$,若$|x|<1$.

解 因为

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},\quad 1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2},\quad \cdots\quad 1+x^{2^n}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}.$$

所以,
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又因$|x|<1$, 故当 $n\to\infty$时, $x^{2^{n+1}}\to 0$. 最后得到

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1}{1-x}.$$

【631】 令
$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中 $\psi(x)>0$ 且当 $n\to\infty$时 $\alpha_{mn}\Rightarrow 0(m=1,2,\cdots,n)$,换言之, 当 $m=1,2,\cdots,n$ 且 $n>N(\varepsilon)$时 $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$.再假定 $\alpha_{mn}\neq 0$.[*)] 证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{mn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{mn})],\tag{1}$$

此处假定等式(1)右端的极限存在.

证 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $0<|x|<\delta$时,恒有

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-1\right|<\varepsilon,$$

从而(注意到 $\psi(x)>0$),

$$(1-\varepsilon)\psi(x)<\varphi(x)<(1+\varepsilon)\psi(x).\tag{2}$$

由 $\alpha_{mn}\neq 0$ 以及 $\alpha_{mn}\Rightarrow 0$ $(m=1,2,\cdots,n)$知,必有正整数 $N=N(\varepsilon)$存在,使当 $n>N$时,恒有

$$0<|\alpha_{mn}|<\delta\quad(m=1,2,\cdots,n).$$

于是, $(1-\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})<\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})$ $(n>N, m=1,2,\cdots,n)$. 将这 n个不等式相加,得

$$(1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})<\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\qquad(n>N).$$

即
$$1-\varepsilon<\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}<1+\varepsilon\quad(n>N).$$

由此可知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}=1.$$

由假定,极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$存在,故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}).$$

证毕.

*) 作者注:此题应加上条件 $\alpha_{mn}\neq 0$(原书没有),因为 $\varphi(x)$或$\psi(x)$都可能在 $x=0$ 处无定义.另外,$m=1,2,\cdots$ 应改为 $m=1,2,\cdots,n$.

利用上边的定理,求

【632】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

解 设 $x=\frac{k}{n^2}$,我们将首先说明它满足 631 题的条件.首先,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{3}\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=1,$$

其次,$\frac{k}{n^2}\Rightarrow 0$ ($n\to\infty$; $k=1,2,\cdots,n$). 最后,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{6}.$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{6}$.

【635】 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

解 设 $y=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$, $\ln y=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.我们考虑下列极限,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, 又 $\frac{k}{n^2}\Rightarrow 0$($n\to\infty$时,$k=1,2,\cdots,n$), 且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2},$$

所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\ln y=\frac{1}{2}$,即

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

【638】 函数叙列 $y_n=y_n(x)$ ($0\leqslant x\leqslant 1$) 用以下的方法来确定:

$$y_1=\frac{x}{2},\quad y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}\quad (n=2,3,\cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解 当 $x=0$ 时, $y_n=0$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时,用数学归纳法可证 $y_n>0$, $n=1,2,\cdots$: $y_1>0$.若 $y_k>0$,由 $x>y_{k-1}^2$,可得

$$y_{k+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_k^2}{2}=\frac{4x-(x-y_{k-1}^2)^2}{8}\geqslant\frac{3x}{8}>0.$$

因而有 $\quad y_1-y_3=\frac{y_2^2}{2}>0,\quad y_2-y_4=\frac{y_3^2-y_1^2}{2}<0,\quad \cdots$

用数学归纳法可证　　$y_{2n}-y_{2n+2}<0$，　$y_{2n-1}-y_{2n+1}>0$　$(n=1,2,\cdots)$.

即　　$$\frac{x}{2}=y_1>y_3>\cdots>0,0<y_2<y_4<\cdots<\frac{x}{2}.$$

可见叙列 $y_1,y_3,\cdots$及叙列 $y_2,y_4,\cdots$都是收敛的.设极限分别为 A_1,A_2,由

$$y_{2n}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n-1}^2}{2}\quad 及\quad y_{2n+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得 $A_2=\frac{x}{2}-\frac{A_1^2}{2}$，$A_1=\frac{x}{2}-\frac{A_2^2}{2}$,相减得

$$A_1-A_2=(A_1-A_2)\frac{(A_1+A_2)}{2}.$$

而 $0\leqslant A_1\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，$0\leqslant A_2\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，故 $A_1=A_2=A$. 用极限定义直接可以证明:若$\{y_n\}$的两个子叙列$\{y_{2n}\}$及$\{y_{2n-1}\}$($n=1,2,\cdots$)收敛于同一个极限,则$\{y_n\}$也收敛于这个极限,由

$$A=\frac{x}{2}-\frac{A^2}{2}$$

解得

$$A=\sqrt{1+x}-1,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\sqrt{1+x}-1.$$

【640】 为了求克卜勒方程式(Уравнение Кеплера)

$$x-\varepsilon\sin x=m\quad(0<\varepsilon<1)\tag{1}$$

的近似解,假设

$$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \cdots,\ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\ \cdots\quad(逐次逼近法).$$

证明有 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,且数 ξ为方程(1)的惟一的根.

证　首先考虑$|x_m-x_n|$.由于

$$x_2-x_1=\varepsilon(\sin x_1-\sin x_0)=2\varepsilon\sin\frac{x_1-x_0}{2}\cos\frac{x_1+x_0}{2},$$

所以，　　$$|x_2-x_1|\leqslant 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_1-x_0}{2}\right|\leqslant 2\varepsilon\cdot\frac{|x_1-x_0|}{2}=\varepsilon|x_1-x_0|.$$

同理可证　　$$|x_3-x_2|\leqslant\varepsilon^2|x_1-x_0|.$$

设 $|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|$，则有

$$|x_{n+1}-x_n|=2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|\leqslant\varepsilon|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^n|x_1-x_0|.$$

由数学归纳法得知对于任意的自然数 n,均有$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|$.于是,当 $m>n$时,有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant(\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^{m-2}+\cdots+\varepsilon^n)|x_1-x_0|=\varepsilon^n\cdot\frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}\cdot|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

而 $|x_1-x_0|=\varepsilon|\sin x_0|\leqslant\varepsilon$, 所以,

$$|x_m-x_n|\leqslant\varepsilon^{n+1}\cdot\frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}<\frac{\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}.$$

由此知　　$$|x_m-x_n|\to 0\quad(n\to\infty).$$

按哥西判别法得知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.设其值为 ξ,由等式 $x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$取极限即得

$$\xi=m+\varepsilon\sin\xi.$$

这就是说,变量 x_n 的极限 ξ是方程(1)的根.

最后，证明此根的惟一性.设 ξ 是另一根，则 $\xi-\xi=\varepsilon(\sin\xi-\sin\xi)$，由此得

$$|\xi-\xi|\leqslant\varepsilon|\xi-\xi|.$$

因为 $0<\varepsilon<1$，故 $\xi=\xi$.

于是，我们就证明了 ξ 是方程(1)的惟一的根.

§6. 函数无穷小和无穷大的阶

1.符号

$$\varphi(x)=O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x\to a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=k\quad(0<|k|<+\infty).$$

特别是，若当 $x\to 0$ 时，有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n 阶无穷小.

仿此，若当 $x\to\infty$ 时，有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n 阶无穷大.

2.符号

$$\varphi(x)=o(\psi(x))$$

表示当 $x\to a$ 时，函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小，或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3.若当 $x\to a$ 时，无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶(在广义的意义上)不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶(或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶)，即

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)}=k\quad(0\leqslant k<+\infty),$$

则约定写为：

$$\varphi(x)=O(\psi(x)).$$

4.若

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x\to a$ 时为等价的[$\varphi(x)\sim\psi(x)$].

例如，当 $x\to 0$ 时，有：

$$\sin x\sim x;\qquad \tan x\sim x;\qquad a^x-1\sim x\ln a\,(a>0);\qquad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n};\qquad \ln(1+x)\sim x.$$

一般地说来，

$$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x).$$

当求两个函数比的极限时，已知函数可用其等价的函数来代换.

【645】 把圆心角 $AOB=x$(图 645)当作 1 阶无穷小,求下列各量无穷小的阶:

(1) 弦 AB;(2) 矢 CD;(4) 三角形 ABC 的面积.

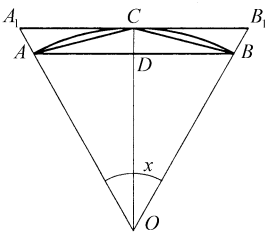

图 645

解 (1) $AB=2R\sin\frac{x}{2}$,式中 R 为圆的半径.因为 $\frac{AB}{x}=\frac{2R\sin\frac{x}{2}}{x}\to R\ (x\to 0)$,所以,弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

(2) $CD=R-R\cos\frac{x}{2}=2R\sin^2\frac{x}{4}$.因为 $\frac{CD}{x^2}\to\frac{R}{8}$,所以,矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(4) $\triangle ABC=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2R^2\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}$.因为 $\frac{\triangle ABC}{x^3}\to\frac{R^2}{16}$,所以,$\triangle ABC$ 的面积是关于 x 的三阶无穷小.

【646】 命 $o(f(x))$ 为当 $x\to a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数,且 $O(f(x))$ 为 $x\to a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶(在广义的意义上)的任意无穷大函数,其中 $f(x)>0$.

证明:(1) $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$;　　(2) $O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$;

(3) $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$;　　(4) $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$;

(5) $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$;　(6) $O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]}\cdot\frac{o[f(x)]}{f(x)}=0$,故 $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(2) 由 133 题(2)的结果,有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)}=\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o[f(x)]}\cdot\lim_{x\to a}\frac{o[f(x)]}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}$ 存在且等于 0.因此 $O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(3) 仍由 133 题(2)的结果,有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left|\frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\right|\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{O[f(x)]}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)}=0$,即 $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(4) 由 132 题(2)的结果,有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]}\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{O[f(x)]}{f(x)}<+\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$.

(5) 由 131 题(2),有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]+o[f(x)]|}{f(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}+\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|o[f(x)]|}{f(x)}=\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}<+\infty.$$

故 $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$.

(6) 由 132 题(2),有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[g(x)]|}{g(x)}<+\infty,$$

故 $O[f(x)]O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$.

【647】 设 $x\to+0$ 和 $n>0$.

证明：(1) $CO(x^n)=O(x^n)$ （C为常数）； (2) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ （$n<m$）；

(3) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (1) 由 $$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|CO(x^n)|}{x^n}=|C|\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $CO(x^n)=O(x^n)$.

(2) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}+\overline{\lim_{x\to+0}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot x^{m-n}\right)=\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ （$n<m$）.

(3) 由 $$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}\cdot\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^m)|}{x^m}<+\infty,$$

得知 $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

【653】 设 $x\to0$.选出下列函数的形如 Cx^n（C为常数）的主部，并求其对于无穷小变数 x 的阶：

(2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$； (4) $\tan x-\sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$的主部 $g(x)$，即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to1 \quad 或 \quad f(x)=g(x)+o(x) \quad (x\to0).$$

(2) 因为 $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\to1$ （$x\to0$），故其主部为 x，它对于 x 是一阶的.

(4) 因为 $\tan x-\sin x=\dfrac{2}{\cos x}\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}$，于是，$\dfrac{\tan x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}\to1$（$x\to0$），故其主部为 $\dfrac{x^3}{2}$，它对于 x 是三阶的.

【656】 设 $x\to+\infty$.选出下列函数的形如 Cx^n 的主部，并求其对于无穷大 x 的阶：

(3) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$； (4) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

解 (3) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}=x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}}\right)$，于是，

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}\to1 \quad (x\to+\infty),$$

故其主部为 $x^{\frac{2}{3}}$，它对于无穷大 x 是$\dfrac{2}{3}$阶的.

(4) 因为$\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}\to1$（$x\to+\infty$），故其主部为$\sqrt[8]{x}$，它对于无穷大 x 是$\dfrac{1}{8}$阶的.

【661】 证明：对于任意的函数叙列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots \quad (x_0<x<+\infty).$$

可举出一函数 $f(x)$,当 $x\to+\infty$时它比函数 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

证 取正整数 $N>x_0$.定义 $x_0<x<+\infty$上的函数 $f(x)$如下:

$$f(x)=\begin{cases} n\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|+1\right\}, & \text{当 } n\leqslant x<n+1 \text{ 时},(n=N,N+1,\cdots);\\ 0, & \text{当 } x_0<x<N \text{ 时}. \end{cases}$$

于是,对任何正整数 n,当 $x>\max\{N,n\}$时,有

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right|=\frac{|f_n(x)|}{[x]\left\{\sum\limits_{k=1}^{[x]}|f_k(x)|+1\right\}}<\frac{1}{[x]},$$

其中$[x]$表 x 的整数部分.由此可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)}=0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\to+\infty$时,$f(x)$比 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

§7. 函数的连续性

1.函数的连续性 设

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{1}$$

即,若对于每一个 $\varepsilon>0$,都有 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使当$|x-x_0|<\delta$时,对于$f(x)$的有意义的一切值,不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

都成立,则称函数 $f(x)$当$x=x_0$ 时(或在点 x_0)是连续 的.

若函数 $f(x)$在集合 X上的每一点都是连续的,则称函数 $f(x)$在已知集合 $X=\{x\}$(区间,线段等等)上是连续的.

若某值 $x=x_0$ 属于函数 $f(x)$的定义域 $X=\{x\}$或为此集合的聚点,而当 $x=x_0$ 时,等式(1)不成立[即,(ⅰ)数 $f(x_0)$不存在,换言之,函数在点 $x=x_0$ 没有定义;或(ⅱ)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;或(ⅲ)公式(1)的两端虽有意义,但它们不相等],则称 x_0 为函数 $f(x)$的不连续点.

分为:(1)第一类的不连续点 x_0,对于这些点存在有单侧有限的极限:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x) \text{ 和 } f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

(2)第二类的不连续点——其余的一切不连续点.

差 $$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

称为函数在点 x_0 的跳跃.

若等式 $$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

成立,则不连续点 x_0 称为无变化的.若极限 $f(x_0-0)$或 $f(x_0+0)$中至少有一个等于符号∞,则称 x_0 为无穷型不连续点.

若等式

$$f(x_0-0)=f(x_0)[\text{或 } f(x_0+0)=f(x_0)]$$

成立，则称函数 $f(x)$在点 x_0 是左侧(或右侧)连续.函数 $f(x)$在点 x_0 连续的充分而且必要的条件为下面三个数相等：

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2.初等函数的连续性　若函数 $f(x)$和 $g(x)$在 $x=x_0$ 连续，则函数

(1) $f(x)\pm g(x)$；　(2) $f(x)g(x)$；　(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　$[g(x_0)\neq 0]$

也在 $x=x_0$ 连续.

特殊情形：(1)有理整函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的；

(2)有理分式函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值，都是连续的.

一般地说，基本初等函数：x^n，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，a^x，$\log_a x$，$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，…在一切使它们有意义的点都连续.

较普通的结果如下：若函数 $f(x)$当 $x=x_0$ 时连续，及函数 $g(y)$当 $y=f(x_0)$时连续，则函数 $g(f(x))$当 $x=x_0$ 时连续.

3.关于连续函数的基本定理　若函数 $f(x)$在有限的闭区间$[a,b]$内连续，则：(1)函数$f(x)$在此闭区间内是有界的；(2)达到其下确界 m 和上确界 M(外尔什特拉斯定理)；(3)在每一个区间$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$中，函数具有介于 $f(\alpha)$和 $f(\beta)$间的一切中介值(哥西定理).特例，若$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$，则可找到一个数值 $\gamma(\alpha<\gamma<\beta)$，使得 $f(\gamma)=0$.

【669】 设对于某些数 $\varepsilon>0$，可找到对应的数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得，只要$|x-x_0|<\delta$，则

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

设：(1) 诸数 ε形成一有穷的集合；(2) 数 ε形成分数 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$的无穷集合. 可否断定函数 $f(x)$在点 x_0 连续?

解　(1) 不能.因为 ε不能任意地小.

(2) 可以.事实上，对于任给的 $\varepsilon>0$，总可以取充分大的 n，使$\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.于是，存在 $\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

【670】 设已知函数

$$f(x)=x+0.001[x].$$

证明对于每一个 $\varepsilon>0.001$，便可以选出 $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$，使得：只要$|x'-x|<\delta$，则$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.而对于$0<\varepsilon\leqslant 0.001$，这件事对于一切的值 x 都不行.

在怎样的点这个函数失去了连续性?

证　当 $\varepsilon>0.001$，且$|x'-x|<1$时，

$$|f(x')-f(x)|=|x-x'+0.001([x]-[x'])|\leqslant|x-x'|+0.001$$

此时只要取 $\delta=\min\{\varepsilon-0.001,1\}$，则当 $|x-x'|<\delta$ 时恒有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

当 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$，且 x_0 不为整数时，有整数 n，使得 $n<x_0<n+1$. 只要取

$$\delta=\min(x_0-n,n+1-x_0,\varepsilon)>0,$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $[x]=[x_0]$，从而，

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon.$$

而当 $x_0=n$ 为整数时，则对于无论怎样取正数 δ，总有 x 满足 $x<x_0$ 及 $x_0-x<\delta$，此时

$$|f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\varepsilon.$$

于是，函数 $f(x)$ 在 $x=n$（整数）的点失去了连续性.

【672】 设对于每一个数 $\varepsilon>0$，都有数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得：若 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则 $|x-x_0|<\delta$. 从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续？由这些不等式说明了函数的什么性质？

解 不对，若函数 $f(x)$ 在有穷的区间 (a,b) 内有定义，则只要取 $\delta=2(b-a)$，不等式 $|x-x_0|<\delta$ 恒成立. 若 (a,b) 为无穷区间，例如，设 $b=+\infty$，则必然

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty.$$

事实上，若不然，则

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=c<+\infty.$$

于是，存在叙列 $x_n>a\ (n=1,2,\cdots)$，$x_n\to+\infty$ 使 $f(x_n)\to c$. 由此可知叙列 $f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$ 有界，令 $\varepsilon_0=\sup\{|f(x_n)|+|f(x_0)|+1\}>0$. 显然 $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon_0\ (n=1,2,\cdots)$，但

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=+\infty,$$

故对此 $\varepsilon_0>0$，不存在对应的 $\delta=\delta(\varepsilon_0,x_0)>0$，此与假定矛盾. 由此可知，必有

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty.$$

求出下列函数的不连续点，并研究这些点的性质：

【691】 $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=1$ 及 $\lim\limits_{x\to k\pi}y=\infty$（$k$ 为不等于零的整数），所以，$x=0$ 为“可移去”的不连续点，而 $x=k\pi$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$）为无穷型不连续点.

【694】 $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点. 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}-0}y=(-1)^k$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}+0}y=(-1)^{k-1}$，故 $x=\dfrac{1}{k}$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$）为第一类不连续点.

【700】$^+$ $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1+0}y=1$，$\lim\limits_{x\to1-0}y=0$，$\lim\limits_{x\to+0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-0}y=+\infty$，所以，$x=1$ 为第一类不连续点，而 $x=0$ 为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图形.

【708】 $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos\dfrac{1}{x}=0$ 的点,即

$$x=\frac{2}{(2k+1)\pi}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

为第一类不连续点.

图 708 仅画了当

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2$$

时的情形,图形关于 Oy 轴对称.

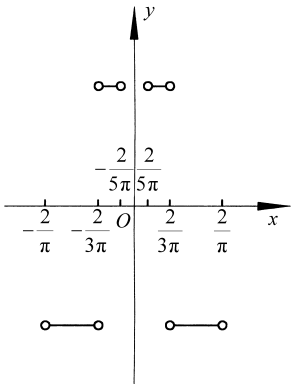

图 708

【709】 $y=\left[\dfrac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

$x=\pm\dfrac{1}{k}$ 及 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ $(k=1,2,\cdots)$为第一类不连续点.

图 709 的两轴所取的比例单位不同.

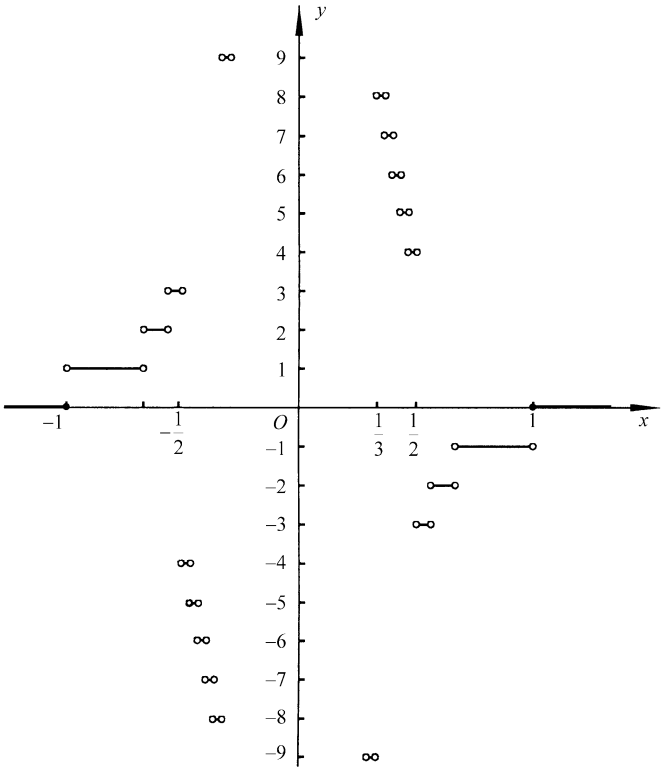

图 709

【710】 $y=\cot\dfrac{\pi}{x}$.

解 凡使 $\sin\dfrac{\pi}{x}=0$,即 $x=\dfrac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷型不连续点. $x=0$ 为第二类不连续点.

图形关于原点对称,如图 710 所示.

当 $x\to-\infty$时, $y\to-\infty$; 当 $x\to+\infty$时, $y\to+\infty$.

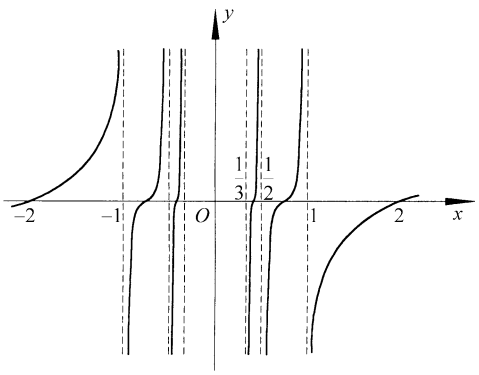

图 710

研究下列函数的连续性并作出其图形:

【724】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

解
$$y=\begin{cases} x, & \text{当}\ |x-k\pi|<\dfrac{\pi}{6};\\ \dfrac{x}{2}, & \text{当}\ x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6};\\ 0, & \text{当}\dfrac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$为第一类不连续点.

如图 724 所示.

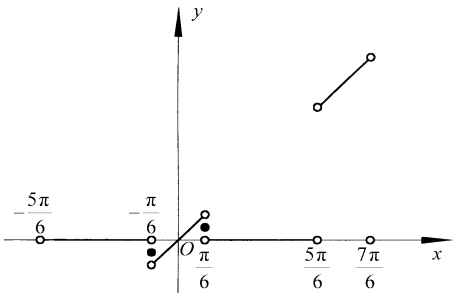

图 724

【732】 函数 $d=d(x)$是数轴 Ox 上的点 x 与由线 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $2\leqslant x\leqslant 3$ 所构成点集间的最短距离.求函数 d 的解析表示式,作出其图形并研究其连续性.

解
$$d=\begin{cases}-x, & -\infty<x<0;\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x-1, & 1<x\leqslant\frac{3}{2};\\ 2-x, & \frac{3}{2}<x<2;\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant 3;\\ x-3, & 3<x<+\infty.\end{cases}$$

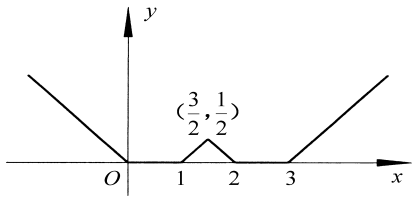

图 732

处处连续,如图 732 所示.

【733】 图形 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成(图 733(1)).函数 $S=S(y)(0\leqslant y<+\infty)$是图形 E 介于平行线 $Y=0$ 及 $Y=y$ 之间的那一部分面积;而函数 $b=b(y)(0\leqslant y<+\infty)$是用平行线 $Y=y$ 去截图形所得截痕之长.求函数 S 及 b 的解析表示式,作出它们的图形并研究其连续性.

解
$$S=\begin{cases}3y-\frac{y^2}{2}, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ \frac{1}{2}+2y, & \text{当 } 1<y\leqslant 2;\\ \frac{5}{2}+y, & \text{当 } 2<y\leqslant 3;\\ \frac{11}{2}, & \text{当 } 3<y<+\infty.\end{cases}$$

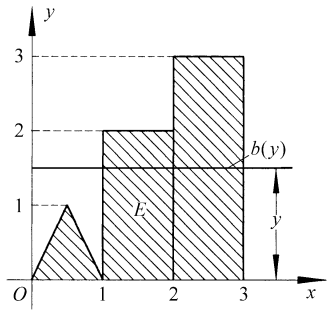

图 733(1)

处处连续,如图 733(2)所示.

对于函数 $b=b(y)$根据假设,则有如下解析表示式:
$$b=\begin{cases}3-y, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 2, & \text{当 } 1<y\leqslant 2;\\ 1, & \text{当 } 2<y\leqslant 3;\\ 0, & \text{当 } 3<y<+\infty.\end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点,如图 733(3)所示.

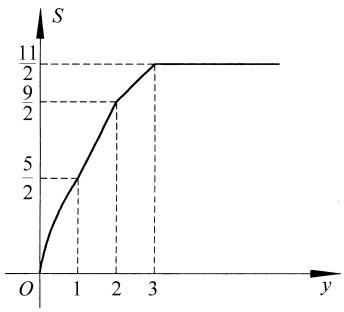

图 733(2)

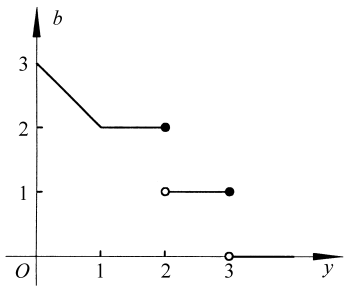

图 733(3)

【734】 证明:迪里黑里函数

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)\}$$

当 x 取任一值时都是不连续的.

证 记 $f(m,n)=\cos^n(\pi m!x)$.

当 x 为有理数时,总可认为 $m>p$,其中 $x=\frac{q}{p}$(p,q 为互质的整数).于是,$f(m,n)=1$,故此时

$$\chi(x)=1;$$

当 x 为无理数时,则对任一固定的 m 而言,$|\cos(\pi m!x)|<1$,从而 $\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)=0$,故此时

$$\chi(x)=0.$$

总之,

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

由实数的稠密性可知,对于 x 的任意值在其任一邻域内含有无限个有理数和无理数,因而 $\chi(x)$ 的值总在 1 和 0 这两个数中取一个.这样,$\chi(x)$ 的极限就不存在.于是,当 x 取任一值时,$\chi(x)$ 都是不连续的.

【736】 证明:黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{若 } x=\frac{m}{n},\text{其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的整数;}\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时不连续的,而当 x 取任一个无理值时是连续的.作出这个函数的略图.

证 不失一般性,我们仅就区间[0,1]讨论,图 736 为 $f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 时的略图.

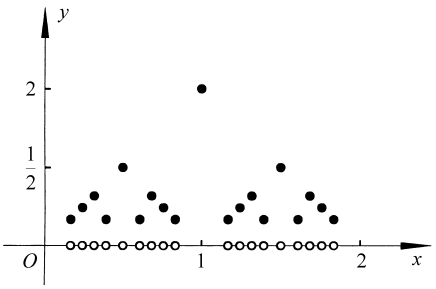

图 736

对于任意的 $x_0\in[0,1]$ 来说,若任取 $\varepsilon>0$,则满足不等式 $n<\frac{1}{\varepsilon}$ 的自然数 n 至多只有有限个,即在[0,1]中至多只有有限个有理数 $\frac{m}{n}$,使得 $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}>\varepsilon$.因而我们可以取 $\delta>0$,使得 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内不含有这样的有理数(若 x_0 为有理数,则可能除去 x_0).于是,只要 $0<|x-x_0|<\delta$,不论 x 是否为有理数,都成立 $|f(x)|<\varepsilon$.即证明了对于[0,1]中任意点 x_0,都成立

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若 x_0 为无理数,则 $f(x_0)=0$,可见 $f(x)$在 x_0 连续;若 x_0 是有理数,则$f(x_0)\neq 0$,函数$f(x)$在 x_0 点有可移间断.

【741】 设:(1)函数 $f(x)$当 $x=x_0$ 时是连续的,而函数$g(x)$当 $x=x_0$ 时是不连续的;(2)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$和$g(x)$二者都是不连续的,则此二函数的和 $f(x)+g(x)$在已知点 x_0 是否必为不连续的?举出适当的例子.

解 (1) $f(x)+g(x)$必为不连续的.事实上,设

$$F(x)=f(x)+g(x)$$

对于函数 $F(x)-f(x)=g(x)$,如果 $F(x)$在 x_0 连续,则有

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}[F(x)-f(x)]=\lim_{x\to x_0}F(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)=F(x_0)-f(x_0)=g(x_0).$$

因此若当 $g(x_0)$有意义,则 $g(x_0)=F(x_0)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,这与假设是矛盾的,故 $F(x)$在点 x_0 不连续;若 $g(x_0)$没有意义,那么当然它在 x_0 点不连续.

(2) 不.例如,

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ -1, & \text{当 } x<0.\end{cases}\quad \text{及}\quad g(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ 1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续,但其和 $f(x)+g(x)\equiv 0$ 却处处连续.

【742】 设:(1)函数 $f(x)$在点 x_0 连续,而 $g(x)$在点 x_0 不连续;(2)当 $x=x_0$ 时,$f(x)$和$g(x)$二者都是不连续的,则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$在已知点 x_0 是否必为不连续?举出适当的例子.

解 (1)不.例如,

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}\quad \text{及}\quad f(x)=0.$$

它们满足假设条件,其中 $f(x)$处处连续,而 $g(x)$在点 $x=0$ 不连续,但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 处处连续.

(2) 不.例如,

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}\quad \text{及}\quad g(x)=f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续,但其乘积 $f(x)g(x)\equiv 1$ 却处处连续.

【743】 可否断定不连续函数平方后仍为不连续函数?举出处处都有不连续点的函数,而平方后是连续函数的例子.

解 不能.例如 742 题(2)之例.

又对于函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

处处不连续,但平方后所得函数 $f^2(x)\equiv 1$ 却处处连续.

【744】 研究函数 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$的连续性,设:

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=x(1-x^2)$.

解 (2) 因为 $g(x)=x(1-x^2)$当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时为正,而当$-1<x<0$ 或 $x>1$ 时为负,故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & \text{当 } x<-1;\\ 0, & \text{当 } x=-1;\\ -1, & \text{当 } -1<x<0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ 1, & \text{当 } 0<x<1;\\ 0, & \text{当 } x=1;\\ -1, & \text{当 } x>1.\end{cases}$$

在点 $x=-1, x=0, x=1$ 处不连续. 而 $g[f(x)]\equiv 0$ 却处处连续.

【748】 证明:若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在$[a,b]$上也是连续的.

证 只证 $m(x)$在$[a,b]$连续. $M(x)$连续性之证完全类似.设 $x_0\in[a,b]$.先证 $m(x)$在点 x_0 右连续.任给 $\varepsilon>0$.由于 $f(x)$在点 x_0 连续,故存在 $\delta>0$,使当$|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是,当 $x_0<x<x_0+\delta$时,有

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon\geqslant m(x_0)-\varepsilon.$$

而当 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 时, $f(x)\geqslant m(x)>m(x_0)-\varepsilon$.由此可知:当 $x_0<x<x_0+\delta$时, $m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon$.又因$m(x)$显然是递减的,故

$$m(x_0)\geqslant m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon \quad (\text{当 } x_0<x<x_0+\delta\text{时}).$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0+0}m(x)=m(x_0)$,即 $m(x)$在 x_0 右连续.下证左连续,不妨设$f(x)$在$[a,x_0]$的最小值在点 $x=x_0$ 达到,即$m(x_0)=f(x_0)$(否则,若 $m(x_0)=f(x_1)$, $a\leqslant x_1<x_0$.则显然知,当 $x_1<x<x_0$ 时 $m(x)\equiv m(x_0)$,从而左连续).任给$\varepsilon>0$.仿上述,存在 $\delta>0$,使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,恒有

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon=m(x_0)+\varepsilon,$$

因此 $m(x)<m(x_0)+\varepsilon$,从而

$$m(x_0)\leqslant m(x)<m(x_0)+\varepsilon \quad (\text{当 } x_0-\delta<x<x_0\text{ 时}).$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0}m(x)=m(x_0)$,即 $m(x)$在 x_0 左连续.证毕.

【750】 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$有定义并有界,证明函数 $m(x)=\inf\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$和$M(x)=\sup\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$在闭区间$[a,b]$是左方连续的.而函数

$$\overline{m}(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad \overline{M}(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间$[a,b]$是右方连续的*).

证 设 $x_0\in(a,b]$,要证 $m(x)$在 x_0 左方连续.由于$f(x)$在$[a,b]$上有界,故 $m(x)$恒为有限.任给 $\varepsilon>0$,必存在一点$\xi_0\in[a,x_0)$,使得 $f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon$.于是,当 $\xi_0<x<x_0$ 时,必有

$$m(x_0)\leqslant m(x)\leqslant f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon,$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0}m(x)=m(x_0)$.故 $m(x)$在 x_0 点左方连续.

同法可证 $M(x)$在$[a,b]$也为左方连续.

*) $\overline{m}(x)$和 $\overline{M}(x)$在$[a,b]$右方连续的结论是错误的,今举反例证明之.例如,对于有界函数

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } a\leqslant x\leqslant p;\\ 0, & \text{当 } p<x\leqslant b.\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } a\leqslant x\leqslant p,\\ 0, & \text{当 } p<x\leqslant b.\end{cases}$$

分别有

$$\overline{m}(x)=f_1(x),\qquad M(x)=f_2(x),$$

显然它们在点 p 不是右方连续的.

若定义 $\overline{m}=\inf\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$, $M(x)=\sup\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$ 则可证明 $\overline{m}(x)$ 与 $M(x)$ 在$[a,b]$右方连续.

【751】 证明:若函数 $f(x)$于区间 $a\leqslant x<+\infty$上连续,且有有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则此函数在已知区间上是有界的.

证 记 $A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,取 $\varepsilon=1$,则存在 $X>a$,使当 $x>X$ 时,恒有 $|f(x)|<|A|+1$.又因 $f(x)$在$[a,X]$上连续,因而有界,即存在常数 M_1,使当 $x\in[a,X]$时,恒有 $|f(x)|<M_1$,取 $M=\max(|A|+1,M_1)$,则当 $x\in[a,+\infty)$时,恒有

$$|f(x)|<M.$$

【752】 设函数 $f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界,证明:对于任何数 T,可求得叙列 $x_n\to+\infty$,使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

证 不妨设 $T>0$,记 $g(y)=f(x_0+(y+1)T)-f(x_0+yT)$, $y\geqslant1$.取一叙列$\{\varepsilon_n\}(n=1,2,\cdots)$,且当 $n\to\infty$时,$\varepsilon_n\to0$.易见,$g(y)$是$[1,+\infty)$上连续且有界的函数,今按下法取 $x_{n_1}=x_0+k_{n_1}T$,使$|g(k_{n_1})|<\varepsilon_1$,如果 $g(1)$,$g(2)$异号,则由连续函数介值定理,存在 k_{n_1},且 $1<k_{n_1}<2$,使得 $|g(k_{n_1})|=0<\varepsilon_1$,这时取 $x_{n_1}=x_0+k_{n_1}T$.若 $g(1)$与 $g(2)$同号,且 $g(1)$,$g(2)$,$g(3)$,$g(4)$…都是同号的,不妨设它们均大于 0,那么我们可以证明,必存在一个自然数 $k_{n_1}\geqslant1$,使 $g(k_{n_1})<\varepsilon_1$.因为,若对一切自然数 n, $g(n)\geqslant\varepsilon_1$,则由 $g(y)$的定义,

$$\begin{aligned}f(x_0+2T)&\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+T),\\ f(x_0+3T)&\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+2T),\\ f(x_0+4T)&\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+3T),\\ &\vdots\\ f(x_0+nT)&\geqslant\varepsilon_1+f[x_0+(n-1)T].\end{aligned}$$

则 $f(x_0+nT)\geqslant(n-1)\varepsilon_1+f(x_0+T)$,这与 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$内有界矛盾,故必存在自然数 k_{n_1},使得$|g(k_{n_1})|<\varepsilon_1$,取 $x_{n_1}=x_0+k_{n_1}T$.然后,取自然数 $p_2>k_{n_1}+1$,通过考虑 $g(p_2)$, $g(p_2+1)$,…的符号;仿上,可取 $x_{n_2}=x_0+k_{n_2}T$, $k_{n_2}>k_{n_1}+1$,使$|g(k_{n_2})|<\varepsilon_2$.依此类推,我们就可得到一叙列$\{x_{n_k}\}$适合要求.

【754】 证明单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的不连续点.

证 不妨设 $f(x)$为单调增函数,取其定义域 A 中的任意点 x_0,且设 x_0 不是 A 的左端点,由于 $x<x_0$ 时显然有 $f(x)\leqslant f(x_0)$.由关于单调函数的极限定理知

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\leqslant f(x_0).$$

可见若 $f(x)$在 x_0 点不连续,则函数在该点只可能有跃度,即第一类间断点.

【755】 证明若函数 $f(x)$具有下列诸性质:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义且单调;(2)取介于 $f(a)$和 $f(b)$之间所有的数作为其函数值,则此函数在$[a,b]$上连续.

证 用反证法,不妨设单调函数 $f(x)$为递增的且在 x_0 间断($x_0\in[a,b]$),由 754 题知 x_0 只能是第一类间断点,则$f(x_0)-f(x_0-0)$及 $f(x_0+0)-f(x_0)$中至少有一个大于零,例如$f(x_0)$

$-f(x_0-0)>0$.于是,由函数 $f(x)$的单调性知,$f(x)$无法取到 $f(x_0-0)$和 $f(x_0)$之间的数值.

这与题设函数 $f(x)$的性质(2)矛盾,从而,$f(x)$在$[a,b]$上连续.

【758】 设函数 $f(x)$在区间(a,b)上连续,且

$$l=\lim_{x\to a+0}f(x) \quad 及 \quad L=\overline{\lim_{x\to a+0}}f(x).$$

证明:对于任意的数 λ,此处 $l\leqslant\lambda\leqslant L$,则有叙列 $x_n\to a+0$ $(n=1,2,\cdots)$,使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

证 当 $\lambda=l$或 $\lambda=L$时结论都是显然的.因此设

$$l<\lambda<L.$$

由条件有$\{a_n\}$及$\{b_n\}$,$a_n\to a+0$,$b_n\to a+0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=L$. 于是,存在自然数 N,使当 $n>N$时,恒有

$$f(a_n)<\lambda \quad 及 \quad f(b_n)>\lambda.$$

再由 $f(x)$的连续性知,在 a_n 及 b_n 之间存在 x_n,使 $f(x_n)=\lambda$ $(n>N)$. 这样选取的$\{x_n\}$,由于 $a_n\to a+0$, $b_n\to a+0$,故 $x_n\to a+0$,从而,

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

§8. 反函数. 用参数表示的函数

1.反函数的存在及其连续性 若函数 $y=f(x)$具有下列性质:(1)在区间(a,b)上有定义并连续;(2)在严格的意义上说来,于此区间上是单调的,则有单值的反函数 $x=f^{-1}(y)$,此函数在区间(A,B)上有定义并连续,而且在严格的意义上说来,是相应地单调的,其中

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x) \quad 和 \quad B=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

任何一个单值连续函数 $x=g(y)$,它在其有定义的最大区域上适合方程 $f(g(y))=y$,则被了解为已知连续函数 $y=f(x)$的多值反函数的一个单值连续分枝.

2.以参数表示的函数的连续性 若函数 $\varphi(t)$和 $\psi(t)$在区间(α,β)上有定义并且是连续的,且函数 $\varphi(t)$在此区间上是严格地单调的,则方程组

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

在区间(a,b)上把 y定义成 x 的单值参数函数:

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中

$$a=\lim_{t\to\alpha+0}\varphi(t) \quad 及 \quad b=\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t).$$

【761】 证明:有惟一的连续函数 $y=y(x)$$(-\infty<x<+\infty)$满足于克卜勒方程

$$y-\varepsilon\sin y=x \ (0\leqslant\varepsilon<1).$$

证 由 640 题知叙列

$$y_0=x, \quad y_1=x+\varepsilon\sin y_0, \quad y_2=x+\varepsilon\sin y, \quad \cdots \quad y_n=x+\varepsilon\sin y_{n-1}, \quad \cdots$$

的极限 $y(x)$为克卜勒方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ 的惟一的根.现在证明 $y=y(x)$是连续的.我们只须证明当 $x\to x_0$时,$y(x)\to y(x_0)$.为此,我们考虑

$$\begin{aligned}|y_n(x)-y_n(x_0)|&=|(x-x_0)+\varepsilon[\sin y_{n-1}(x)-\sin y_{n-1}(x_0)]|\\&\leqslant|x-x_0|+\varepsilon|y_{n-1}(x)-y_{n-1}(x_0)|.\end{aligned}$$

逐次应用此不等式,即得

$$|y_n(x)-y_n(x_0)|\leqslant|x-x_0|(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n)$$
$$=|x-x_0|\cdot\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|.$$

令 $n\to\infty$,便有

$$|y(x)-y(x_0)|\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|\quad(0\leqslant\varepsilon<1).$$

于是,显然有 $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)$.这就证明了 $y(x)$的连续性.

【762】 证明:方程 $\cot x=kx$

对于每一个实数 $k(-\infty<k<+\infty)$在区间 $0<x<\pi$ 中有惟一连续的根 $x=x(k)$.

证 令 $f(x)=\dfrac{\cot x}{x}$.显然,在$(0,\pi)$上 $\cot x$ 和$\dfrac{1}{x}$都是连续的严格减函数,从而 $f(x)$在$(0,\pi)$上也是连续的严格减函数,并且,很明显

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty,\qquad\lim_{x\to\pi-0}f(x)=-\infty.$$

由此可知,对每一个实数 $k(-\infty<k<+\infty)$,恰有一个 $x\in(0,\pi)$,使 $f(x)=k$,即 $\cot x=kx$.另外,由于 $f(x)=\dfrac{\cot x}{x}$在$(0,\pi)$上是连续的严格减函数,故 $k=f(x)$的反函数 $x=x(k)=f^{-1}(k)$存在而且是$-\infty<k<+\infty$上的连续的严格减函数.此 $x=x(k)$即方程 $\cot x=kx$ 的根.

综上所述,可知:对任何$-\infty<k<+\infty$,方程 $\cot x=kx$ 在$(0,\pi)$上具有惟一的根 $x=x(k)$,而且 $x(k)$是 $k(-\infty<k<+\infty)$的连续的严格减函数,证毕.

求下列函数的反函数的连续的单值枝:

【769】 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 由于 $x^2y-2x+y=0$,故

$$x=\begin{cases}\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, & \text{当 } y\neq0 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } y=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

又由于

$$\lim_{y\to0}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})}=0,\qquad\lim_{y\to0}\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\infty,$$

故反函数的连续分枝为

$$x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\quad(-1\leqslant y\leqslant1)\quad\text{及}\quad x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\quad(0<|y|\leqslant1).$$

【773】 证明:连续函数 $y=1+\sin x$ 对应于区间 $0<x<2\pi$ 的值的集合是一线段.

证 显然,当 $x\in(0,2\pi)$时,$-1\leqslant\sin x\leqslant1$ 从而 $0\leqslant1+\sin x\leqslant2$.而由于

$$y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=2,\qquad y\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}}=0.$$

而 $y=1+\sin x$ 是$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上的连续函数,故由介值定理知当 x 从 $\dfrac{\pi}{2}$ 变到 $\dfrac{3\pi}{2}$ 时,y取 0 到 2 之间的一切数值.由此可知当 $0<x<2\pi$ 时,y 的值的集合是线段$[0,2]$.

【775】 证明等式:

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\quad(x\neq0).$$

证 当 $x>0$ 时，令 $\varphi=\arctan x$，则得 $\tan\varphi=x$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$．又 $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\varphi=x$，故

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x}.$$

因为 $0<\frac{\pi}{2}-\varphi<\frac{\pi}{2}$，而在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内仅有惟一的数，使其正切等于 $\frac{1}{x}$，故 $\frac{\pi}{2}-\varphi=\arctan\frac{1}{x}$，即当 $x>0$ 时，

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

当 $x<0$ 时，令 $\varphi=\arctan x$，则得 $\tan\varphi=x$，且 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$．又 $\cot\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\varphi=x$，即

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x},$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}-\varphi<0$，而在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内有惟一的数，使其正切等于 $\frac{1}{x}$，故 $-\frac{\pi}{2}-\varphi=\arctan\frac{1}{x}$，即当 $x<0$ 时，

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

总之，当 $x\neq0$ 时，

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x.$$

【781】 设

$$x=\operatorname{ch}t,\quad y=\operatorname{sh}t\quad(-\infty<t<+\infty).$$

参数 t 变化的域怎样，即可视变数 y 为变数 x 的单值函数？求在各个域上 y 的表示式．

解 由于 $x=\operatorname{ch}t$，$y=\operatorname{sh}t$，故

$$x^2-y^2=\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1.$$

当 $\operatorname{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\geqslant0$ 时，即 $e^t\geqslant e^{-t}$ 或 $e^{2t}\geqslant1$ 或 $t\geqslant0$ 时，

$$y=\sqrt{x^2-1};$$

当 $t\leqslant0$ 时，$y=-\sqrt{x^2-1}$．

不论 t 为何值，$x\geqslant1$，故 $\sqrt{x^2-1}$ 有意义．$t=0$ 是函数 $y=y(x)$ 单值区域的分界值．

【782】 要使方程组

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

把 y 定义为 x 的单值函数的必要而且充分的条件是什么？

解 其必要而且充分的条件为，使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值，函数 $\psi(t)$ 应有同一的值．下面加以证明．先证必要性．若不然，则存在 x^* 及 $t_1\neq t_2$，使

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x^*\quad\text{且}\quad\psi(t_1)\neq\psi(t_2).$$

于是，对于这样的 x^*，一方面有 $y_1=\psi(t_1)$ 及 $y_2=\psi(t_2)$，另一方面又有 $y_1\neq y_2$，这样 y 就不定义为 x 的单值函数．因此，使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值，$\psi(t)$ 应有同一的值．

再证充分性．设所述条件满足，则对于任一 $x^*\in\{\varphi(t)\}$，有 t^* 使 $\varphi(t^*)=x^*$，$\psi(t^*)=y^*$ 有

意义，这样定义的函数 $y=y(x)$不因 t^* 的不同选取而不同，因此它由 x^* 惟一确定，从而，y 定义为 x 的单值函数.

§9. 函数的一致连续性

1.一致连续性的定义 若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在有 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，且对于使 $f(x)$有意义的任何数值 x'，$x''\in X$，由不等式

$$|x'-x''|<\delta$$

可得不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$在已知集合(区间、线段等) $X=\{x\}$ 上为一致连续的.

2.康托尔定理 在有界的闭区间$[a,b]$上有定义的连续函数 $f(x)$在此区间上一致连续.

【787】 以《$\varepsilon-\delta$》的说法在肯定的意义上表达下面论断的意义：函数 $f(x)$在某集合(区间，线段)上连续，但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E.所需论断的《$\varepsilon-\delta$》说明如下：对于任给的 $\varepsilon>0$，及 $x_0\in E$，总存在一个数 $\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使当 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon,x_0)$时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

同时，至少存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于任意给定的 $\delta>0$，都可找到 x_1，$x_2\in E$，满足 $|x_1-x_2|<\delta$，但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

【790】 证明：函数

$$f(x)=\sin x^2$$

在无穷区间$-\infty<x<+\infty$上是连续的并且有界，但在此区间上并非一致连续的.

证 函数 $f(x)$的连续性及其有界性是显然的.现证其不一致连续性.

考虑$(-\infty,+\infty)$上的两串点

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\qquad x_n'=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当$0<\varepsilon_0<1$时，不论 $\delta>0$ 如何选取，只要 n 充分大，总可以使

$$|x_n-x_n'|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}+\sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}}<\delta,$$

但是，$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0$.因而，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上并非一致连续.

【791】 证明：若函数 $f(x)$在域 $a\leqslant x<+\infty$上有定义并且是连续的，而且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，则 $f(x)$在此域上是一致连续的.

证 任给 $\varepsilon>0$.由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，故必存在 $X>a$，使当 $x'>X$，$x''>X$时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由于 $f(x)$在$[a,X+1]$上连续，故一致连续，从而必有正数 δ'存在，使当 $x'\in[a,X+1]$，$x''\in[a,X+1]$，$|x'-x''|<\delta'$时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

令 $\delta=\min\{\delta',1\}$.现设 x',x''为满足 $a\leqslant x'<+\infty$,$a\leqslant x''<+\infty$,$|x'-x''|<\delta$的任何两点.由于$|x'-x''|<\delta$,故 x'与 x''或同时属于$[a,X+1]$,或同时满足 $x'>X$,$x''>X$,因此,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上一致连续.证毕.

【793】 函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的:

(1)$(-l,l)$,这里 l为随便多大的正数;(2)在区间$(-\infty,+\infty)$上?

解 (1) 当 $x_1,x_2\in(-l,l)$时,$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2l|x_1-x_2|$.对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2l}$,则当$|x_1-x_2|<\delta$,且 $x_1,x_2\in(-l,l)$时,恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$在$(-l,l)$上一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0=1$,不论 $\delta>0$ 取得多小,只要 n充分大,我们总可以使 $x_n'=n+\frac{1}{n}$,$x_n''=n$的距离 $|x_n'-x_n''|=\frac{1}{n}<\delta$,但是,

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=2+\left[\frac{1}{n}\right]^2>\varepsilon_0.$$

可见 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续.

研究下列函数在已知域上的一致连续性:

【796】 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $(0<x<\pi)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,我们定义函数

$$F(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0<x<\pi;\\ 0, & x=\pi.\end{cases}$$

易见 $F(x)$在$[0,\pi]$上连续,根据康托尔定理知,$F(x)$在$[0,\pi]$上一致连续,从而,$f(x)$也在$(0,\pi)$上一致连续.

【798】 $f(x)=\arctan x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $f(x)$在区间$(-\infty,1]$、$[0,+\infty)$上连续,且有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

由 791 题知 $f(x)$在$[0,+\infty)$及$(-\infty,1]$上均一致连续.

于是,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$,当 x_1、$x_2\in(-\infty,1]$,$|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$时,恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$,当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$时,恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

今取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$,则当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$时,$x_1$ 与 x_2 必或同时属于$(-\infty,1]$,或同时属于$[0,+\infty)$,故恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

【801】 证明:函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$在每个区间

$$J_1=(-1<x<0) \quad 及 \quad J_2=(0<x<1)$$

上是一致连续的,但在它们的和

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$$

上并非一致连续的.

证 在 $J_1=(-1<x<0)$上 $f(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$,在 $J_2=(0<x<1)$上 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,它们的一致连续性由 796 题可知.

由于 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=-\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}=-1$, 故必存在 $\eta>0(\eta<1)$,使当 $0<x_1<\eta$, $-\eta<x_2<0$时恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|>1.$$

现取 $\varepsilon_0=1$,则不论 $\delta>0$ 取得多么小,都可取两点 x_1' 和 x_2',使 $0<x_1'<\min\left\{\eta,\dfrac{\delta}{2}\right\}$, $-\min\left\{\eta,\dfrac{\delta}{2}\right\}<x_2'<0$.于是,$|x_1'-x_2'|<\delta$,但是,

$$|f(x_1')-f(x_2')|>\varepsilon_0=1.$$

由此可知 $f(x)$在 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$ 上非一致连续.

【804】 证明:在区间(a,b)上有穷个一致连续函数的和与它们的乘积在此区间内仍是一致连续的.

证 由于有穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘,故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x)$与 $g(x)$都在有限区间(a,b)上一致连续,要证$f(x)+g(x)$与$f(x)\ g(x)$也在(a,b)上一致连续.任给 $\varepsilon>0$.由于 $f(x)$在(a,b)上一致连续,故有 $\delta_1>0$ 存在,使对于(a,b)中任何两点 x'与 x'',只要$|x'-x''|<\delta_1$,就有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由于 $g(x)$在(a,b)上一致连续,故又有 $\delta_2>0$ 存在,使对于(a,b)中任何两点 x'与 x'',只要$|x'-x''|<\delta_2$,就有

$$\left|g(x')-g(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$|x'-x''|<\delta$($x'$, x''为(a,b)中任何两点)时,恒有

$$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $f(x)+g(x)$在(a,b)上一致连续.下证 $f(x)\,g(x)$在(a,b)上一致连续.为此先证一个结论:若函数 $F(x)$在有限区间(a,b)上一致连续,则 $F(x)$在(a,b)上必有界.事实上,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,都有 $\delta>0$ 存在,使对于(a,b)中任何两点 x', x'',只要$|x'-x''|<\delta$,就有

$$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon.$$

特别,当 $a<x'<a+\delta$, $a<x''<a+\delta$时,必有$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$;当 $b-\delta<x'<b$, $b-\delta<x''<b$

时，也必有

$$\left| F(x')-F(x'') \right|<\varepsilon.$$

因此，根据柯西收敛准则，知 $F(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$ 与 $F(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$ 都存在(有限)．现在 $[a,b]$ 上定义函数 $F^*(x)$：

$$F^*(x)=\begin{cases} F(x), & \text{当 } a<x<b \text{ 时；} \\ F(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时；} \\ F(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时．} \end{cases}$$

显然，$F^*(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，从而有界，由此可知 $F(x)$ 在 (a,b) 上有界．

根据刚才已证的结论，存在常数 $L>0$ 与 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant L$，$|g(x)|\leqslant M$ $(a<x<b)$．任给 $\varepsilon>0$，根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 上的一致连续性，可取 $\delta>0$，使对于 (a,b) 中任何两点 x' 与 x''，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad |g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} &|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')| \\ &=|[f(x')-f(x'')]g(x')+f(x'')[g(x')-g(x'')]|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot L=\varepsilon. \end{aligned}$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续．

注：当 (a,b) 是无穷区间时，(a,b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 必也一致连续，但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续．例如，设 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$，函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，则函数 $[f(x)]^2=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续(参看 793 题(2))．

【805】 证明：若单调有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a,b) 上是连续的，则此函数在区间 (a,b) 上是一致连续的．

证 分三种情形予以证明．

(1)设 (a,b) 是有限区间．由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调有界，故极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限)．按下式定义 $[a.b]$ 上的函数 $f^*(x)$：

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } a<x<b \text{ 时；} \\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时；} \\ f(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时．} \end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，当然在 (a,b) 上也一致连续，故 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续．

(2)a 为有限数，$b=+\infty$，此时，令

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } a<x<+\infty \text{ 时；} \\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时．} \end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^*(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限)，故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 一致连续，从而 $f(x)$ 在 $a<x<+\infty$ 一致连续．

若 $a=-\infty$，b 为有限数．考虑函数 $g(x)=f(-x)$ $(-b<x<+\infty)$，即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形．

(3)$a=-\infty$，$b=+\infty$．任给 $\varepsilon>0$．利用(2)已证的结果，$f(x)$ 在 $0<x<+\infty$ 上一致连续，故

存在 $\delta_1>0$,使当 x' 与 x'' 都属于$(0,+\infty)$且$|x'-x''|<\delta_1$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

同样利用(2)已证的结果,$f(x)$在$-\infty<x<1$ 上一致连续,故对于同一个 ε,存在 $\delta_2>0$,使当 x' 与 x'' 都属于$(-\infty,1)$且$|x'-x''|<\delta_2$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

现令 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$,则当$-\infty<x'<+\infty$, $-\infty<x''<+\infty$, $|x'-x''|<\delta$时,x'与 x''必或是同属于区间$(0,+\infty)$,或是同属于区间$(-\infty,1)$.因此,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可知,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.证毕.

【806】 证明:在有穷区间(a,b)上有定义而且是连续的函数 $f(x)$,可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上,其必要且充分的条件是函数 $f(x)$在区间(a,b)上是一致连续的.

证 必要性:若 $f(x)$可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上,则 $f(x)$在$[a,b]$上连续,从而一致连续,当然在(a,b)上也是一致连续的.

充分性:若 $f(x)$在(a,b)上一致连续.根据 804 题的证明过程,知 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$都存在(有限).按下式定义$[a,b]$上的函数:

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } a<x<b\text{时;}\\ f(a+0), & \text{当 } x=a\text{时;}\\ f(b-0), & \text{当 } x=b\text{时.}\end{cases}$$

显然,$f^*(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上 $f^*(x)\equiv f(x)$.

故 $f^*(x)$是在$[a,b]$上的连续延拓.证毕.

【807】 函数

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为$(a.b)$中受条件$|x_1-x_2|\leqslant\delta$限制的任意两点)称为函数 $f(x)$在区间(a,b)上的连续模数.

证明:函数 $f(x)$在区间(a,b)上是一致连续的必要且充分的条件是

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

证 必要性: 设 $f(x)$在(a,b)上一致连续.任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta'>0$, 使(a,b)中任何两点 x_1, x_2,只要$|x_1-x_2|<\delta'$就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$.现设$0<\delta<\delta'$,则当$|x_1-x_2|\leqslant\delta$时,必有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$,从而,$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 由此可知,

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

充分性: 设 $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$. 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta'>0$,使当$0<\delta<\delta'$时,恒有 $\omega_f(\delta)<\varepsilon$.现设 x_1 与 x_2 是(a,b)中满足$|x_1-x_2|<\delta'$的任何两点.

若 $x_1=x_2$,则显然$|f(x_1)-f(x_2)|=0<\varepsilon$;

若 $x_1\neq x_2$,令$|x_1-x_2|=\delta^*$,则 $0<\delta^*<\delta'$,于是,$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\omega_f(\delta^*)<\varepsilon$.

由此可知,$f(x)$在(a,b)上一致连续.证毕.

§10. 函数方程

【809】 证明:对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

的惟一的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$是齐次线性函数：

$$f(x)=ax,$$

式中 $a=f(1)$是任意的常数.

证 先证：若 $f(x)$满足(1)，则对任何有理数 c，必有

$$f(cx)=cf(x) \quad (-\infty<x<+\infty).$$

事实上，当 m与 n 为正整数时，有

$$\begin{aligned}f(mx)&=f(x+(m-1)x)=f(x)+f((m-1)x)=f(x)+f(x)+f((m-2)x)\\&=\cdots=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=mf(x);\end{aligned}$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right),$$

故 $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$.于是，

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)$，故 $f(0)=0$；又在(1)中令 $y=-x$，并注意到已证的结果 $f(0)=0$，得 $f(-x)=-f(x)$.于是，

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c，有 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$.下面，我们利用 $f(x)$的连续性证明对任何无理数 c，此式也成立.事实上，设 c为无理数.取一串有理数 c_n，使 $c_n\to c(n\to\infty)$.于是，

$$f(c_nx)=c_nf(x) \quad (n=1,2,\cdots),$$

在此式两端令 $n\to\infty$取极限，并注意到函数 f在点 cx 连续，即得 $f(cx)=cf(x)$.于是，对任何实数 x和 c，有 $f(cx)=cf(x)$.由此可知，对任何实数 x，有

$$f(x)=f(x\cdot1)=xf(1)=ax,$$

其中 $a=f(1)$.证毕.

【812】 证明：对 x和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \tag{2}$$

的惟一不恒等于零的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$是指数函数：

$$f(x)=a^x,$$

式中 $a=f(1)$为正的常数.

证 先证必有 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$.事实上，由 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$，知 $f(x)\geqslant0$.由于 $f(x)\not\equiv0$，故存在 x_0 使 $f(x_0)>0$.在(2)中令 $x=x_0$，$y=0$，得 $f(x_0)=f(x_0)f(0)$，故 $f(0)=1$；又在(2)中令 $y=-x$，得 $1=f(0)=f(x)f(-x)$，故 $f(x)\neq0$，由此可知 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$.当 m与 n为正整数时，

$$\begin{aligned}f(mx)&=f((m-1)x+x)=f((m-1)x)\cdot f(x)=f((m-2)x)\cdot f(x)\cdot f(x)\\&=\cdots=[f(x)]^m;\end{aligned}$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n, \quad \text{即} \quad f\left(\frac{x}{n}\right)=[f(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

于是，$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}$.又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=[f(-x)]^{\frac{m}{n}}=[f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知,对任何有理数 c,有

$$f(cx)=[f(x)]^c \quad (-\infty<x<+\infty).$$

根据 $f(x)$的连续性,仿 809 题的证明易知此式对任何无理数也成立.因此,对于任何实数 c 与 x,有 $f(cx)=[f(x)]^c$.从而,

$$f(x)=f(x\cdot 1)=[f(1)]^x=a^x, \quad a=f(1)>0.$$

注:也可利用 809 题的结果来证.前面已证 $f(x)>0$ $(-\infty<x<+\infty)$.令 $F(x)=\log_a f(x)$,这里 $a=f(1)>0$.于是,$F(x)$是$-\infty<x<+\infty$上的连续函数,满足(1)式:

$$F(x+y)=\log_a f(x+y)=\log_a[f(x)f(y)]=\log_a f(x)+\log_a f(y)=F(x)+F(y).$$

故由 809 题的结果,知 $F(x)=a^* x$,这里 $a^*=F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1$,从而 $F(x)=x$.

由此可知 $f(x)=a^x$.

【814】 证明:对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的惟一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$是对数函数:

$$f(x)=\log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$中令 $y=1$,得 $f(1)=0$.由于 $f(x)\not\equiv 0$,故存在 $x_0>0$ 使 $f(x_0)\neq 0$.先设 $f(x_0)>0$.

由于 $f(x_0^2)=f(x_0)+f(x_0)=2f(x_0)$,$f(x_0^4)=2f(x_0^2)=4f(x_0)$,…,利用数学归纳法,易知 $f(x_0^{2^n})=2nf(x_0)\to+\infty$ $(n\to\infty)$.故可取某正整数 n,使 $f(x_0^{2^n})>1$.于是,根据连续函数性质知,在 1 与 $x_0^{2^n}$ 之间必存在某 a(显然 $a>0$)使 $f(a)=1$.现考虑函数 $F(x)=f(a^x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.显然 $F(x)$连续且满足(1)式:

$$F(x+y)=f(a^{x+y})=f(a^x\cdot a^y)=f(a^x)+f(a^y)=F(x)+F(y).$$

于是,根据 809 题的结果知,$F(x)=a^* x$ $(-\infty<x<+\infty)$,其中 $a^*=F(1)=f(a)=1$.于是,$F(x)=x$,即 $f(a^x)=x$;令 $a^x=y$,则 $x=\log_a y$,于是,$f(y)=\log_a y$ $(0<y<+\infty)$.

若 $f(x_0)<0$,则可考虑函数 $g(x)=-f(x)$.于是,$g(x_0)>0$ 且 $g(x)$也满足 $g(xy)=g(x)+g(y)$,故根据刚才已证的结果,可知 $g(y)=\log_a y$ $(0<y<+\infty)$,其中 $a>0$.即

$$-f(y)=\log_a y, \quad 或 \quad f(y)=-\log_a y.$$

令 $a^*=\frac{1}{a}$,则 $a^*>0$ 且$-\log_a y=\log_{a^*} y$,故

$$f(y)=\log_{a^*} y \quad (0<y<+\infty),$$

其中 $a^*>0$.证毕.

【815】 证明:对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy)=f(x)f(y) \tag{3}$$

的惟一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$是幂函数

$$f(x)=x^a,$$

式中 a 为常数.

证 考虑函数 $F(x)=f(e^x)$ $(-\infty<x<+\infty)$,则 $F(x)$在$-\infty<x<+\infty$连续不恒为零,且满足(2)式:

$$F(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^x\cdot e^y)=f(e^x)f(e^y)=F(x)F(y).$$

于是，根据812题的结果知 $F(x)=b^x(-\infty<x<+\infty)$，其中 $b>0$，即

$$f(e^x)=b^x\quad(-\infty<x<+\infty).$$

令 $e^x=y$，则 $y>0$；显然，存在惟一的 $a(-\infty<a<+\infty)$，使 $e^a=b$. 于是，

$$f(y)=b^x=e^{ax}=y^a\quad(0<y<+\infty).$$

证毕.

【816】 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程(3)的一切连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

证 因为 $f(xy)=f(x)f(y)$，所以 $f(1)=f(1)f(1)$，于是，$f(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

当 $f(1)=0$ 时，对于任意实数 x，均有 $f(x)=f(1)f(x)\equiv 0$.

当 $f(1)=1$ 时，由于 $f(1)=f((-1)\cdot(-1))=f(-1)f(-1)=1$，所以，$f(-1)=\pm 1$. 下面分两种情况讨论：

(ⅰ) 当 $f(-1)=1$ 时，由于 $f(-x)=f(-1)f(x)=f(x)$. 所以，在这种情形下就可把问题归结为对 $0<x<+\infty$ 中的 x 进行讨论. 而对于 $x>0$，我们已证得 $f(x)=x^a$，式中 a 为常数*). 然后再利用 $f(-x)=f(x)$，即得 $f(x)=|x|^a$，为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中连续，需 $a\geqslant 0$.

(ⅱ) 当 $f(-1)=-1$ 时，同(ⅰ)可得 $f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a(a\geqslant 0)$.

综上所述，所求的函数为

(1) $f(x)\equiv 0$； 或(2) $f(x)=|x|^a$ $(a\geqslant 0)$； 或(3) $f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a$ $(a\geqslant 0)$.

*) 利用815题的结果.

【820】 设

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\quad 及\quad \Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差.

证明：若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是连续的且 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$，则此函数是线性函数，即

$$f(x)=ax+b,$$

式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$ 得

$$f(x+\Delta_1 x+\Delta_2 x)-f(x+\Delta_2 x)\equiv f(x+\Delta_1 x)-f(x).$$

令 $x=0$，得

$$f(\Delta_1+\Delta_2)-f(\Delta_2)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

令 $\Delta_2=n\Delta_1$，得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(n\Delta_1)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

利用数学归纳法，可得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(0)\equiv(n+1)[f(\Delta_1)-f(0)].\qquad(1')$$

关系式(1′)可写成

$$f(\Delta_1)-f(0)=\frac{1}{n}[f(n\Delta_1)-f(0)].$$

在上式中令 $n\Delta_1=m$，再利用(1′)即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right)-f(0)=\frac{m}{n}[f(1)-f(0)].$$

所以

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=a\cdot\frac{m}{n}+b,$$

式中 $a=f(1)-f(0)$ 及 $b=f(0)$ 均为常数.

于是,对于有理数 x,均有

$$f(x)=ax+b.$$

对于无理数 x,利用 $f(x)$的连续性,即可证得上式仍成立.事实上,取有理叙列 $x_n\to x$,则

$$\lim_{x_n\to x} f(x_n)=f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n\to x} f(x_n)=\lim_{x_n\to x}(ax_n+b)=ax+b.$$

因此,对于一切实数 x,均有

$$f(x)=ax+b.$$

第二章　单变量函数的微分学

§1.　显函数的导函数

1.导函数的定义　若 x 及 $x_1=x+\Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

称为函数 $y=f(x)$ 的增量.

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数.

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y=f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 $[\tan\alpha=f'(x)]$（图 2—1）.

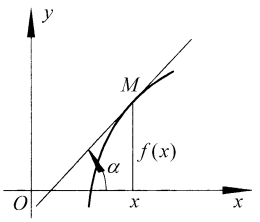

图 2—1

2.求导函数的基本法则　若 c 为常数且函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 都有导函数，则

(1) $c'=0$；　(2) $(cu)'=cu'$；

(3) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$；　(4) $(uv)'=u'v+v'u$；

(5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$　$(v\neq 0)$；　(6) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$　(n 为常数)；

(7) 若函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都有导函数，则 $y'_x=y'_u u'_x$.

3.基本公式　若 x 为自变数*，则

Ⅰ. $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为常数）；　Ⅱ. $(\sin x)'=\cos x$；

Ⅲ. $(\cos x)'=-\sin x$；　Ⅳ. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$；

Ⅴ. $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$；　Ⅵ. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅶ. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　Ⅷ. $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；

Ⅸ. $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$；　Ⅹ. $(a^x)'=a^x\ln a$　$(a>0)$；$(e^x)'=e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$　$(a>0$ 且 $a\neq 1)$；　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

---

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如，本节公式Ⅴ中要求 $x\neq k\pi$（k 为整数），Ⅵ中要求 $|x|<1$ 等等.以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

《题解》作者注

Ⅻ. $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$;　　ⅫⅠ. $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$;

ⅫⅡ. $(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$;　　ⅫⅢ. $(\coth x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$.

4.单侧的导函数　表示式

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad 及\quad f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

5.无穷的导函数　若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

则称函数 $f(x)$在 x 点有无穷的导函数.在此种情形下,函数 $y=f(x)$的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

【824】 证明:(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

证 (2) $\Delta[f(x)g(x)]=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$

$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x)$,

于是,　　$\Delta[f(x)\ g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

同样,我们还可将(2)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x).$$

【827】 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x=10t+5t^2$$

式中 t 以秒(s)计的时间,x 为以米(m)计的距离.求在 $20\leqslant t\leqslant20+\Delta t$ 时间内运动的平均速度.设:(1)$\Delta t=1$;(2)$\Delta t=0.1$;(3)$\Delta t=0.01$,计算此速度的值.当 $t=20$ 时运动的速度等于什么?

解 平均速度

$$\bar v=\{[10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2]-[10\times20+5\times20^2]\}\div\Delta t=210+5\Delta t(\mathrm{m/s}),$$

(1) $\bar v=210+5\times1=215(\mathrm{m/s})$;(2) $\bar v=210.5(\mathrm{m/s})$;(3) $\bar v=210.05(\mathrm{m/s})$.

于是,　　$v\big|_{t=20}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(210+5\Delta t)=210(\mathrm{m/s})$.

【829】 设:

$$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$,$f'(2)$和 $f'(3)$.

解 $f'(x)=(x-2)^2(x-3)^3+2(x-1)(x-2)(x-3)^3+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$

$=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9)$.

于是,　　$f'(1)=-8$;　$f'(2)=f'(3)=0$.

【831】 设:　$f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,求 $f'(1)$.

解 解法 1:若用复合函数求导法,可得

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是，$$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

解法 2：若按定义作，注意到当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得 $$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)=1+\frac{\pi}{4}.$$

【833】 证明：若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1}$$

反之，若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在，则可否断定这个函数有导函数？研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第 734 题).

证 $$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]}{\frac{1}{n}}=f'(x).$$

反之，就不一定对了.例如，对于迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

在任一有理点是不连续的，当然其导数也不存在.但由于 $x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故当 x 为有理数时，

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0,$$

从而，极限(1) $\lim_{n\to\infty} n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0$ 存在.

利用导函数表，求下列函数的导函数：

【844】 证明公式：$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证 $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

这里已暗设 $cx+d\neq 0$.

求下列函数之导函数：

【846】 $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

解 由于 $y=\dfrac{2}{1-x+x^2}-1$，故 $y'=\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

【860】 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\qquad(x>0).$$

【867】 $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

解 $y'=\dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}\qquad(x^2\neq k\pi;\ k=1,2,\cdots).$

【873】 $y=4\sqrt[3]{\cot^2 x}+\sqrt[3]{\cot^8 x}$.

解 $y'=\dfrac{8}{3}(\cot x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x)+\dfrac{8}{3}(\cot x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)=-\dfrac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\cot x}}$

$$(x\neq k\pi;\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【883】 $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

解 $y'=e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$.

【884】 $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\qquad(a>0,b>0).$

解 两边取对数,得

$$\ln y=x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a).$$

两端同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}.$$

于是, $y'=y\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\cdot\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}\right)\qquad(x>0).$

【885】 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\qquad(a>0).$

解 $y'=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a.$

【886】 $y=\lg^3 x^2$.

解 $y'=3\lg^2 x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}2x\lg e=\dfrac{6}{x}\lg e\cdot\lg^2 x^2\qquad(x\neq0).$

或按 $y=(\lg e\cdot\ln x^2)^3=8\lg^3 e\cdot\ln^3|x|$ 求导数,有

$$y'=24\lg^3 e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln^2|x|\right)^{*)}\qquad(x\neq0).$$

*) $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{1}{x}$,以后不再说明.

【901】 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$.

解 $y'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}\qquad(0<x-2k\pi<\pi;\ k\text{ 为整数}).$

【902】 $y=\ln\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 $y'=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sec^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos x}\qquad(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2};\ k\text{为整数}).$$

【919】 $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

解 $y'=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\qquad(x\geqslant 0).$$

【924】 $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

解 $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(0<|x|<1).$

【928】 $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}\quad(x\neq 0).$

【932】 $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

解 $y'=\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}}\cdot\frac{-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\qquad(x>1).$

【940】 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

解 $y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\quad(|x|<1).$

【949】 $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

解 $y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right]-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\qquad(0<|x|<1).$$

【966】 $y=\lg_x e$.

解 由 $y=\lg_x e$ 推得 $y=\frac{1}{\ln x}$.于是,

$$y'=-\frac{1}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{x}(\lg_x e)^2\qquad(x>0,x\neq 1).$$

【972】 引入中间变量 $u=\cos^2 x$ 求函数

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$$

的导函数.

解 $u=\cos^2 x$，$y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$，$y'_x=y'_u\cdot u'_x$，而

$$y'_u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}},\qquad u'_x=-2\cos x\sin x=-\sin 2x,$$

于是，
$$y'_x=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

利用 972 题所示的方法，求下列函数的导函数：

【974】$^+$ $y=\frac{1}{2}\arctan(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

解 设 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$，则

$$y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4}=-\frac{1}{x^4},\quad u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是，
$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\quad(x\neq 0).$$

【975】 $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

解 设 $u=e^{-x^2}$，则

$$y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2).$$

由于

$$y'_u=\frac{\left(\arcsin u+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2}+\frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}-\frac{u}{1-u^2}=\frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$u'_x=-2xe^{-x^2}$，

于是，
$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{-2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}\quad(x\neq 0).$$

【978】 求下列函数的导函数：

(1) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$；(4) $y=[x]\sin^2\pi x$.

解 (1) $y'=\frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^2}[2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2]$

$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)\ (|x|\neq 1)$；

(4)对于 $y=[x]$ 有 $y'=0\quad(x\neq k,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

于是，当 $x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，有

$$\{[x]\sin^2\pi x\}'=2\pi\sin\pi x\cos\pi x\cdot[x]=\pi[x]\sin 2\pi x.$$

容易直接验证当 $x=k\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形：

【979】 $y=\begin{cases}1-x, & \text{当}-\infty<x<1;\\ (1-x)(2-x), & \text{当}\ 1\leqslant x\leqslant 2;\\ -(2-x), & \text{当}\ 2<x<+\infty.\end{cases}$ （图 979(1)）

解 显然 $y'=\begin{cases}-1, & \text{当}-\infty<x<1;\\ 2x-3, & \text{当}\ 1<x<2;\\ 1, & \text{当}\ 2<x<+\infty.\end{cases}$

当 $x=1$ 时，右导数 $y'_+|_{x=1}=(2x-3)|_{x=1}=-1$，左导数 $y'_-|_{x=1}=-1$.

因此 $x=1$ 的导数存在，且 $y'|_{x=1}=-1$. 同理，可得 $y'|_{x=2}=1$. 于是，

$$y'=\begin{cases}-1, & \text{当}-\infty<x<1;\\ 2x-3, & \text{当}\ 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 1, & \text{当}\ 2<x<+\infty.\end{cases}$$ （图 979(2)）

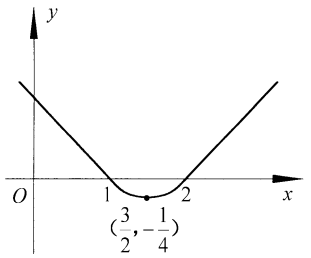

图 979(1)

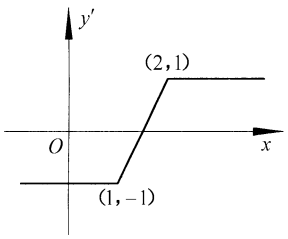

图 979(2)

注 在下面的 980 到 983 题中，求分段定义函数的导数时，在分段点，都要先求其左、右导数. 若左、右导数存在而且相等，则导数存在. 为简便计，我们只写出结果，而省去了(在分段点)求左、右导数的过程.

【982】$^+$ $y=\begin{cases}\arctan x, & \text{当}\ |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2}, & \text{当}\ |x|>1.\end{cases}$ （图 982(1)）

解 $y'=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & \text{当}-1<x\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当}\ |x|>1.\end{cases}$ （图 982(2)）

【984】 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数 y，求其对数的导函数：

(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$；(3) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$.

解 (2) 由 $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}\ln|3-x|-\frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

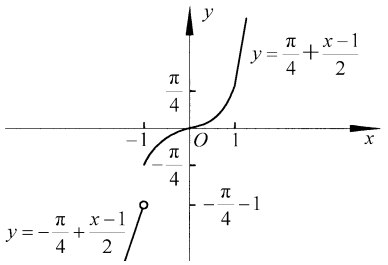

图 982(1)

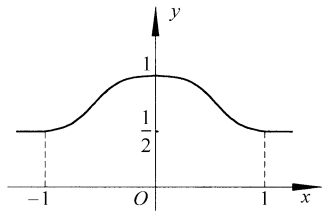

图 982(2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3(3-x)}-\frac{2}{3(3+x)}=\frac{54-36x-4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

$(x\neq 0, x\neq 1, |x|\neq 3)$;

(3)由于 $y=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内,故应设 $\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0$,从而有

$$\ln y=\ln\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\quad(x\in R),$$

其中 $R=\left\{x\middle|\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0\right\}$.

【985】 设 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$为 x 的可微分函数.求函数 y 的导函数,若:

(4) $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ $[\varphi(x)>0, \psi(x)>0]$.

解 (4) 由 $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$得

$$y=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)},$$

$$y'=\frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}.$$

【986】 求 y',设:

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; (4) $y=f\{f[f(x)]\}$.

其中 $f(u)$表示可微分的函数.

解 (2) $y'=2\sin x\cos x f'(\sin^2 x)-2\sin x\cos x f'(\cos^2 x)=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$;

(4) $y'=f'(x)\cdot f'[f(x)]\cdot f'\{f[f(x)]\}$.

【987】 证明 n 阶行列式微分法:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i1}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}. \quad (1)$$

证 从行列式的定义出发予以证明.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)^{*)}$$

$$=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)]$$

$$=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}\sum_{i=1}^{n}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{ij_i}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{ij_i}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i1}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

*) 其中 $N(j_1 j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 的逆序数. $\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots n$ 的所有排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 求和.

【989】设: $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$,求 $F'(x)$.

解 利用 987 题结果,有

$$F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0+0+6(2x^2-x^2)=6x^2.$$

【992】 在什么条件下函数

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)\quad 及\quad f(0)=0$$

(1) 在 $x=0$ 处是连续的; (2) 在 $x=0$ 处可微分; (3) 在 $x=0$ 处其导函数是连续的.

解 (1)当 $n>0$ 时

$$\lim_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=0,$$

于是,$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$,此时,$f(x)$在 $x=0$ 处是连续的(当 $n=\frac{p}{q}$(p,q 互质)且 q 为偶数时,只考虑在 $x=0$ 处右连续).

(2) 当 $n>1$ 时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0,$$

于是，$f'(0)=0$，即 $f(x)$在 $x=0$ 处是可微的；

(3) 当 $n>2$ 时，由于

$$f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),$$

故

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0,$$

而由(2)可得 $f'(0)=0$，所以，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$.这就说明当$n>2$时，$f'(x)$在 $x=0$ 处是连续的.

【995】 设：

$$f(x)=|x-a|\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$为连续函数及 $\varphi(a)\neq 0$，证明此函数在 a 点没有导数.

单侧导函数 $f'_-(a)$及 $f'_+(a)$等于什么？

解 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(a+\Delta x)=\begin{cases}\varphi(a+\Delta x), & \text{当 }\Delta x>0\text{ 时},\\ -\varphi(a+\Delta x), & \text{当 }\Delta x<0\text{ 时}.\end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}[-\varphi(a+\Delta x)]=-\varphi(a),$$

即 $f'_-(a)=-\varphi(a)$；$\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}[\varphi(a+\Delta x)]=\varphi(a)$，

即 $f'_+(a)=\varphi(a)$.

由于 $\varphi(a)\neq 0$，故 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$，因此，$f(x)$在 a 点没有导数.

【996】 举出在已知点：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 没有导数的连续函数的例子.

解 我们已知 $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数.利用这一点，我们作一个函数

$$y=f(x)=\sum_{k=1}^{n}|x-a_k|,$$

它在 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 点均连续，而在这些点均无导数.

【997】 证明：函数

$$f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|\quad(x\neq 0)\quad\text{及}\quad f(0)=0$$

在点 $x=0$ 的任何邻域上有不可微分的点，但在 $x=0$ 这点是可微分的.

作出此函数的略图.

证 对于函数 $f(x)$，我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x}=0,$$

故 $f'(0)=0$，即在 $x=0$ 处函数 $f(x)$是可微的.

下面我们将指出对于 $x=0$ 的任何邻域$(-\delta,\delta)$(其中 $\delta>0$)中，函数 $f(x)$总有不可微分的点.事实上，令

$$x_n=\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

则当 n充分大时，总可使 $0<x_n<\delta$，从而点 $x_n\in(-\delta,\delta)$.对于这样的点 x_n，有

$$f'_-(x_{2n})=\pi\quad\text{及}\quad f'_+(x_{2n})=-\pi,$$

所以，

$$f'_-(x_{2n})\neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得 $$f'_-(x_{2n+1})\neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是，函数 $f(x)$在点 x_n 处不可微.

函数的图形全在 Ox 轴上方，包括原点；当 $x=\frac{2}{2n+1}$时，$f(x)=0$，且 $f'(x)$不存在.此函数的略图如图 997 所示.

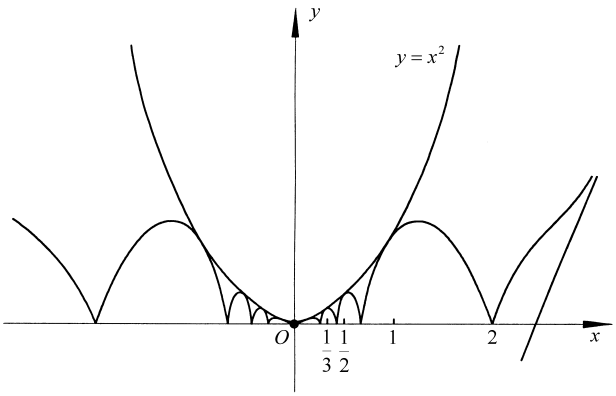

图 997

【998】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

仅在 $x=0$ 时有导数.

证 $$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\Delta x, & \text{当 } \Delta x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } \Delta x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

于是，有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0,$$

即 $$f'(0)=0.$$

其次，对于任一点 $x\neq 0$，分两种情形讨论函数的可微性：

(1) x 为有理数.取一无理数叙列$\{x_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则有

$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$在任一有理点($\neq 0$)不可微.

(2) x 为无理数.取一异于零的有理数叙列$\{x'_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x$，则有

$$\lim_{x'_n\to x}\frac{f(x'_n)-f(x)}{x'_n-x}=\lim_{x'_n\to x}\frac{x'^2_n}{x'_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$在任一无理点也不可微.

总上所述，函数 $f(x)$仅在 $x=0$ 时有导数.

【999】 研究下列函数的可微性：

(5) $$y=\begin{cases}\frac{x-1}{4}(x+1)^2, & \text{当}|x|\leqslant 1;\\ |x|-1, & \text{当}|x|>1.\end{cases}$$

解 (5) 函数 y 对于 $|x|\neq 1$ 的点均可微.现在我们来考虑函数 y 在 $|x|=1$ 点的可微性.

(ⅰ) 当 $x=1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\Delta x+2)^2, & \text{当 } \Delta x<0;\\ 1, & \text{当 } \Delta x>0.\end{cases}$$

于是, $$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1 \quad 及 \quad \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

所以,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$,即函数 y 在 $x=1$ 点可微.

(ⅱ) 当 $x=-1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=-1, & \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时;}\\ \dfrac{\frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x}=-\dfrac{1}{2}\Delta x+\dfrac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时.}\end{cases}$$

于是, $$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1 \quad 及 \quad \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

所以,函数 y 在 $x=-1$ 点不可微分.

求函数 $f(x)$左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$和 $f'_+(x)$.设:

【1001】 $f(x)=[x]\sin\pi x$.

解 当 x 不等于整数时,

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x;$$

当 x 为整数时,从定义出发得

$$f'_+(k)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{k\cos k\pi\sin(\pi\Delta x)}{\Delta x}=k\pi(-1)^k,$$

同法可得 $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$.

【1002】 $f(x)=x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

解 当 $x\neq\dfrac{2}{2k+1}$(k 为整数)时(即使 $\cos\dfrac{\pi}{x}\neq 0$ 的 x 值),

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi}{x}\cdot\frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}}\sin\frac{\pi}{x}=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);$$

当 $x=\dfrac{2}{2k+1}$时,从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2}\pi, \qquad f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{2k+1}{2}\pi \quad (k\text{为整数}).$$

【1009】 证明:在 $x\neq 0$ 时函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$,在 $x=0$ 时 $f(0)=0$,在此点连续,但在此点既无左侧导数,又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以，$f(x)$在 $x=0$ 点连续.

其次，由于

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左、右侧趋向于零，此极限均不存在.因此，在点 $x=0$，函数 $f(x)$既无左侧导数，也无右侧导数.

【1011】 设：

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } x\leqslant x_0; \\ ax+b, & \text{若 } x>x_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 为左方可微分的.应当选择如何的系数 a 和 b，使函数 $F(x)$在点 x_0 处连续而且可微分？

解 $F(x_0)=F(x_0-0)=f(x_0)$，　$F(x_0+0)=ax_0+b$

当 $f(x_0)=ax_0+b$ 时，函数 $F(x)$在点 x_0 处连续.又因 $F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$，$F'_+(x_0)=a$，故当

$$a=f'_-(x_0)$$

时，函数 $F(x)$在点 x_0 处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a=f'_-(x_0), \\ f(x_0)=ax_0+b, \end{cases}$$

即得所求的系数为　$a=f'_-(x_0)$，　$b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$.

【1013】 用抛物线 $y=a+bx^2$（$|x|\leqslant c$）（其中 a 与 b 为未知的参数）去补充曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$（$|x|>c$）的部分，使所得的为一平滑曲线.

解 显见 $c>0$，否则在点 $x=c$ 处就不可能形成一平滑曲线.此时，在点 $x=c$ 处两曲线的切线斜率相等，且有相同的纵坐标.于是，有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c}=\left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c} \quad \text{及} \quad a+bc^2=\frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc=-\dfrac{m^2}{c^2}, \\ a+bc^2=\dfrac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{3m^2}{2c}, \quad b=-\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知，在点 $x=-c$ 处，按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y=a+bx^2$ 与曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$ 也联成一平滑曲线.

【1015】 若：(1)函数 $f(x)$在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$在此点没有导数；(2)在点 x_0 函数 $f(x)$和 $g(x)$二者都没有导数，可否断定他们的积

$$F(x)=f(x)g(x)$$

在点 $x=x_0$ 没有导数？

解 (1) 不能.例如，$f(x)=x$，在点 $x=0$ 处有导数，$g(x)=|x|$，在点 $x=0$ 处没有导数，而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|$$

在点 $x=0$ 处有导数.事实上,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0\cdot|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即有 $F'(0)=0$.

(2) 不能.例如,

$$f(x)=|x|,\quad g(x)=|x|,$$

在点 $x=0$ 处它们都没有导数,但它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=(|x|)^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数,且 $F'(0)=2x\Big|_{x=0}=0$.

【1018】 函数 $f(x)$在其不连续点可否有:(1)有穷的导数;(2)无穷的导数?

解 (1)不能.否则由此可推出其连续性.

(2)能.例如,

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}x$$

它在点 $x=0$ 不连续,但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{|\Delta x|}\to+\infty\quad(\Delta x\to 0).$$

【1021】 设函数 $f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上可微分且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在.由此能否推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在?

解 不能.例如,函数

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在$(0,+\infty)$上可微分,$f'(x)=2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}$,且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

然而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在.

【1022】 设有界函数 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$上可微分且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在.由此可否推出有穷的或无穷的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在?

解 不能.例如,

$$f(x)=\cos(\ln x),$$

它在$(0,+\infty)$上有界且可微分,其导数为

$$f'(x)=-\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

然而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在.

【1030】 长方形的一边 $x=20\text{m}$,另一边 $y=15\text{m}$,若第一边以 1m/s 的速度减少,而第二边以 2m/s 的速度增加,问这长方形的面积和对角线变化的速度如何?

解 面积 $S=xy$, 对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x>0,y>0)$, 对 t求导数,即得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\quad\text{及}\quad\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设，有 $x=20$，$y=15$，$\frac{dx}{dt}=-1$，$\frac{dy}{dt}=2$，代入上面两式，得

$$\frac{dS}{dt}=20\cdot 2+(-1)\cdot 15=25,\quad \frac{dl}{dt}=\frac{-20+2\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}=0.4.$$

于是，该长方形的面积的变化率为 $25\text{m}^2/\text{s}$，而对角线的变化率为 0.4m/s.

§2. 反函数的导函数.用参变数表示的函数的导函数. 隐函数的导函数

1.反函数的导函数　若具有导函数 $f'(x)\neq 0$ 的可微分的函数 $y=f(x)(a<x<b)$ 有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$，则此反函数也可微分，且有公式

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}$$

成立.

2.用参变数表示的函数的导函数　若方程组：

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (\alpha<t<\beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，确定 y 为 x 的单值连续函数：

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在，且可用公式

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3.隐函数的导函数　若可微函数 $y=y(x)$ 满足方程

$$F(x,y)=0,$$

则此隐函数之导函数 $y'=y'(x)$ 可从以下方程求得：

$$\frac{d}{dx}[F(x,y)]=0,$$

其中 $F(x,y)$ 是当作变量 x 的复合函数.

【1034】 证明：由方程 $y^3+3y=x$ 定义的单值函数 $y=y(x)$ 存在，并求它的导函数 y'_x.

证　对函数 $x=f(y)=y^3+3y$ 有

$$f'(y)=3y^2+3=3(y^2+1)>0$$

其中 y 为任意实数，故 $f(y)$ 是严格增大的(在 $-\infty<y<+\infty$)，因此存在单值的反函数 $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3(y^2+1)}.$$

【1035】 证明：由方程 $y-\varepsilon\sin y=x(0\leqslant\varepsilon<1)$ 确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在，并求其导函数 y'_x.

证 对于函数 $x=f(y)=y-\varepsilon\sin y$ 有

$$f'(y)=1-\varepsilon\cos y>0 \quad (0\leqslant\varepsilon<1).$$

故 $f(y)$在$(-\infty,+\infty)$上是严格增大的,从而反函数 $y=y(x)$存在且是单值的,且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

【1036】 设: (3) $y=\operatorname{sh}x$. 求它的反函数 $x=x(y)$的存在域,并求它的导函数.

解 (3) 由 $y'_x=\operatorname{ch}x>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$,其存在域为$-\infty<y<+\infty$,而导函数

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

其中因为 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$,所以 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2\sqrt{1+y^2}$.

【1037】 设:(3) $y=2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$.

选出反函数 $x=x(y)$的单值连续的各枝,求它的导函数并作其图形.

解 (3) $y=2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$,解出 e^{-x},得

$$\mathrm{e}^{-x}=1\pm\sqrt{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$x_1=-\ln(1+\sqrt{1-y}) \quad (-\infty<y\leqslant1),$$

$$x_2=-\ln(1-\sqrt{1-y})=\ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y} \quad (0<y\leqslant1).$$

由 $y=2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$,对 y求导数,得

$$1=-2\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},$$

所以, $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{1}{2(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x})}$ $(i=1,2)$. (图 1037)

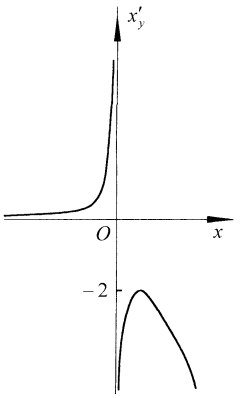

图 1037

【1038】 作出函数 $y=y(x)$的略图,并求其导函数 y'_x,设:$x=-1+2t-t^2$, $y=2-3t+t^3$. 当 $x=0$ 及 $x=-1$ 时, $y'_x(x)$等于什么? 在何点 $M(x,y)$的导函数 $y'_x(x)=0$?

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-3+3t^2}{2-2t}=-\dfrac{3}{2}(1+t)$.

当 $t=-1$,即 $x=-4$, $y=4$ 时. $y'_x(x)=0$.

当 $x=0$ 时, $t=1$,此时 $y'_x(x)=-3$;

当 $x=-1$ 时, $t=0$ 或 $t=2$,此时 $y'_x(x)=-\dfrac{3}{2}$ 或 $y'_x(x)=-\dfrac{9}{2}$.

列表:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t<-1$ 时，$\frac{dy}{dx}>0$，函数值 y 随自变量增加而增加，曲线上升.

当 $t>-1$ 时，$\frac{dy}{dx}<0$，曲线下降.

图形如图 1038 所示.

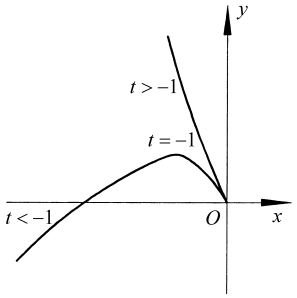

图 1038

求导函数 y'_x（参数是正数）.设：

【1046】 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，$y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

解 $$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\left[-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{\operatorname{sgn}t}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}.$$

于是，$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\operatorname{sgn}t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=\operatorname{sgn}t\quad(0<|t|<+\infty).$$

【1047】 证明：由方程组

$$x=2t+|t|,\quad y=5t^2+4t|t|,$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微分.但它的导函数不能用普通的公式求得.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时，x 由 0 变化到 $\Delta x=2\Delta t+|\Delta t|$，$y$ 由 0 变化到 $\Delta y=5(\Delta t)^2+4\Delta t\cdot|\Delta t|$.于是，

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{t=0}=\frac{5(\Delta t)^2+4\Delta t\cdot|\Delta t|}{2\Delta t+|\Delta t|}=\begin{cases}3\Delta t, & \Delta t>0,\\ \Delta t, & \Delta t<0,\end{cases}$$

从而 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 0\quad(\Delta t\to 0).$$

即 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微分.但由于 $|t|$ 当 $t=0$ 时不可微，因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t=0$ 时不存在.所以，导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t=0$ 的值不能用普通公式求得.

求下列隐函数的导函数 y'_x：

【1053】 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$（对数螺线）.

解 对 x 微分，得 $$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'_x-y}{x^2}=\frac{x+yy'_x}{x^2+y^2}.$$

于是，$$y'_x=\frac{x+y}{x-y}\quad(x\neq y,\ x\neq 0).$$

【1054】 求 y'_x，设：

(3) $r=ae^{m\varphi}$(对数螺线),其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ 表极坐标.

解 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,其中 $r=r(\varphi)$.于是,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi}. \tag{1}$$

(3) $\frac{dr}{d\varphi}=ma e^{m\varphi}$,代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ma e^{m\varphi}\sin\varphi+ae^{m\varphi}\cos\varphi}{ma e^{m\varphi}\cos\varphi-ae^{m\varphi}\sin\varphi}=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}=\tan\left(\varphi+\arctan\frac{1}{m}\right).$$

§3. 导函数的几何意义

1.切线和法线的方程 可微分的函数 $y=f(x)$在其图形上之一点 $M(x,y)$(图 2−3(1))处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是:

$$Y-y=y'(X-x) \quad 及 \quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X,Y 为切线或法线上的流动坐标,而 $y'=f'(x)$为切点处导函数的值.

2.切线长和法线长 PT 为次切线,PN 为次法线,MT 为切线,MN 为法线.设 $\tan\alpha=y'$(图 2−3(1)).我们得下列的值:

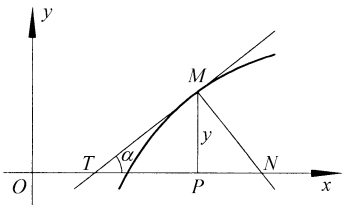

图 2−3(1)

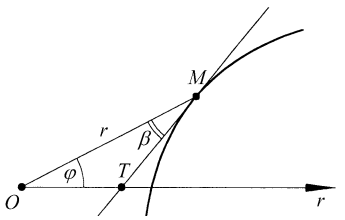

图 2−3(2)

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|, \quad PN=|yy'|, \quad MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \quad MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

3.切线与切点的向径间的夹角 若 $r=f(\varphi)$为曲线的极坐标方程及 β为切线 MT 与切点 M 的向径 OM所成的角(图 2−3(2)),则

$$\tan\beta=\frac{r}{r'}.$$

【1055】 写出曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$上 $A(-1,0)$、$B(2,3)$、$C(3,0)$诸点处的切线和法线方程.

解 由于

$$y'=\sqrt[3]{3-x}-\frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以，在 A 点的切线方程为

$$y-0=y'|_{x=-1}(x+1),\quad \text{即}\quad y=\sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1),\quad \text{即}\quad y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为

$$y-3=y'|_{x=2}(x-2),\quad \text{即}\quad y=3;$$

法线方程为

$$x=2.$$

在 C 点，由于 y' 为无穷，故切线方程为

$$x=3;$$

法线方程为

$$y=0.$$

【1057】 证明：抛物线

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)\qquad (a\neq 0,\ x_1<x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 $\beta\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ 彼此相等.

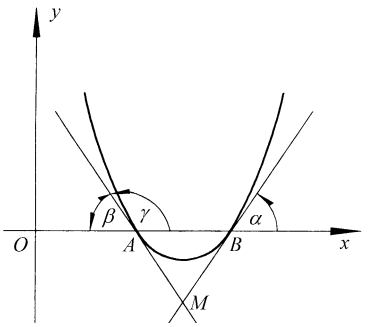

图 1057

解 如图 1057 所示，显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$. 由于 $y'=2ax-a(x_1+x_2)$，故在点 A、B 处切线的斜率分别为

$$k_A=y'\Big|_{x=x_1}=2ax_1-a(x_1+x_2)=a(x_1-x_2)=\tan\gamma=\tan(\pi-\beta),\tag{1}$$

$$k_B=y'\Big|_{x=x_2}=2ax_2-a(x_1+x_2)=a(x_2-x_1)=\tan\alpha.\tag{2}$$

由(2)式得

$$\tan(\pi-\alpha)=a(x_1-x_2).\tag{3}$$

由(1)式及(3)式证得

$$\alpha=\beta.$$

【1062】 曲线 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 相交的角如何？

解 先求交点. 解 $\begin{cases}y=\sin x,\\ y=\cos x,\end{cases}$ 得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ （k 为整数）.

其次，求两曲线在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处切线的斜率：

$$k_1=(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad k_2=(\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处，交角 θ（今取锐角，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$）满足

$$\tan\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=2\sqrt{2}.$$

于是，

$$\theta=\arctan 2\sqrt{2}\approx 70°32'.$$

【1064】 求出曲线：(1) $y=\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x=0$ 处，

(2) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x=1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

解 (1)函数的左、右导数分别为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-a^2x^2}}}{x}=\lim_{x\to-0}\left(-\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}\right)=-|a|,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-a^2x^2}}}{x}=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}=|a|.$$

所以,于点 $x=0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\tan\theta=\frac{2|a|}{|a|^2-1},\quad \text{即 } \theta=2\arctan\frac{1}{|a|}.$$

(2) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\arcsin1}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x}=1,$$

同理,$y'_+(1)=-1$.因此,左、右切线的斜率互为负倒数,所以,夹角为 $90°$.

【1070】 证明:内摆线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.对于曲线上任一点$(x_0,y_0)(x_0\neq0)$处,其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}\quad\text{及}\quad l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是,切线在两坐标轴间的部分长为

$$l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}.$$

由于

$$\begin{aligned}l_x^2+l_y^2&=x_0^2+y_0^2+3x_0\sqrt[3]{x_0y_0^2}+3y_0\sqrt[3]{x_0^2y_0}=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{x_0^2y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2}+\sqrt[3]{y_0^2})\\&=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{a^2x_0^2y_0^2}=(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})^3+y_0^2+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\&=a^2-3a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2-3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\&=a^2-3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2,\end{aligned}$$

故 $l=a$,即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

【1072】 在什么条件下,三次抛物线

$$y=x^3+px+q$$

与 Ox 轴相切?

解 由方程 $y=x^3+px+q$ 求得 $y'=3x^2+p$.要此曲线与 Ox 轴相切,必须满足

$$\begin{cases}3x^2+p=0,&(1)\\x^3+px+q=0.&(2)\end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2+p)=-q$,两端平方,则

$$x^2(x^2+p)^2=q^2. \tag{3}$$

以(1)式代入(3)式,得

$$-\frac{p}{3}\cdot\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2=q^2,\quad 即\quad \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0,$$

此即所求的条件.

【1075】 证明:双曲线族 $x^2-y^2=a$ 及 $xy=b$ 形成一正交网,就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2-y^2=a$ 与双曲线 $xy=b$ 相交于点 $P(x,y)$,则在此点双曲线 $x^2-y^2=a$ 的切线的斜率 k_1 满足:$2x-2yk_1=0$,所以,

$$k_1=\frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy=b$ 的切线的斜率 k_2 满足:$y+xk_2=0$,所以,

$$k_2=-\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1k_2=\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)=-1.$$

因此,两双曲线交成直角,故此两曲线族形成一正交网.

§4. 函数的微分

1.函数的微分 若自变数为 x 的函数 $y=f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y=A(x)\mathrm{d}x+o(\mathrm{d}x),$$

其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$,则此增量的线性主部称为函数 y 的微分

$$\mathrm{d}y=A(x)\mathrm{d}x.$$

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数 $y'=f'(x)$,且有

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若自变数 x 为另一自变数的函数,公式(1)于这种情形下仍然有效(一阶微分的不变性).

2.函数的微小增量的估计 为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x)\neq 0$,当 $|\Delta x|$ 充分小时,它的相对误差可以任意地小.

特别情形,若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$,则函数 $y=f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来:

$$|\Delta y|=|f'(x)\Delta x|\quad 及\quad \delta y=|[\ln f(x)]'\Delta x|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x\right|.$$

求下列函数 y 的微分:

【1089】 $y=\arcsin\frac{x}{a}\quad(a\neq 0)$.

解 $y'=\frac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}$,$\quad \mathrm{d}y=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\quad(|x|<|a|)$.

【1096】 求

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(x^3-2x^6-x^9)$； (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^+$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(x^3-2x^6-x^9)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}[x^3-2(x^3)^2-(x^3)^3]=1-4x^3-3x^6$；

(2) 由于$\frac{\sin x}{x}$为偶函数，故不妨设 $x>0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right]=\frac{\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3},$$

显然，上述结果对于也 $x<0$ 是正确的($x\neq0$).

【1097】 有半径为 $R=100\mathrm{cm}$ 及圆心角 $\alpha=60^\circ$的扇形.若(1)其半径 R增加 1cm；(2)角 α 减小 $30'$，则扇形面积的变化若干？求出精确的和近似的解.

解 扇形面积 $A=\frac{1}{2}R^2\alpha$，其增量

$$\Delta A=\frac{\alpha}{2}[(R+\Delta R)^2-R^2]=\alpha R\Delta R+\frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2,\quad 或\quad \Delta A=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha.$$

扇形面积的微分

$$\mathrm{d}A=R\alpha\mathrm{d}R,\quad 或\quad \mathrm{d}A=\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\alpha.$$

增量是精确的解，微分是近似的解.

(1) 当 $R=100,\alpha=\frac{\pi}{3},\Delta R=1$ 时，

$$\Delta A=\frac{\pi}{6}(200+1)=105.2\mathrm{cm}^2,\qquad \mathrm{d}A=100\cdot\frac{\pi}{3}=104.7\mathrm{cm}^2(增加).$$

(2) 当 $\Delta\alpha=-\frac{\pi}{360}$时，

$$\Delta A=\frac{1}{2}\cdot100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.6\mathrm{cm}^2,\quad \mathrm{d}A=\frac{1}{2}\cdot100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.6\mathrm{cm}^2(减少).$$

利用函数之微分代替函数的增量，求下列各式之近似值：

【1102】 $\arctan1.05$.

解 设 $f(x)=\arctan x$，$x_0=1$，$\Delta x=0.05$，则

$$\arctan1.05\approx\arctan1+0.05\cdot\frac{1}{2}=0.8104(弧)=46^\circ26'.$$

【1104】 证明近似公式：

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\quad(a>0),$$

其中$|x|\ll a$(正数 A 和 B 之间的关系式 $A\ll B$ 表示 A 与 B 相比较时，A 为高阶无穷小).

利用这个公式近似地计算：(3) $\sqrt{120}$ 并与表中的数值比较.

证 设 $f(y)=\sqrt{y}$，$y_0=a^2$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt{y_0+\Delta y}\approx\sqrt{y_0}+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y\quad(当|\Delta y|\ll\sqrt{y_0}时).$$

于是，

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\quad(\text{当}|x|\ll a\text{时}).$$

(3) $\sqrt{120}=\sqrt{11^2-1}\approx 11-\frac{1}{2\cdot 11}=10.9546$，

查表：$\sqrt{120}=10.9545$.

【1105】 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad(a>0).$$

其中$|x|\ll a$.利用此公式近似地计算：(4) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y)=\sqrt[n]{y}$，$y_0=a^n$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx\sqrt[n]{a^n}+\frac{x}{n\sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}}=a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad(\text{当}|x|\ll a\text{时}).$$

(4) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1.9953$，

查表：$\sqrt[10]{1000}=1.9953$.

【1108】 借助于单摆的振动利用公式 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$(其中 l 为摆长，T 为摆振动的全周期)以求重力加速度.当测量(1)摆长 l,(2)周期 T 时的相对误差 δ 影响于值 g 几何？

解 (1) $\delta_g=\left|\frac{\mathrm{d}g}{g}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}l}{l}\right|$，于是，$\delta_g=\delta_l$，即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

(2) $\delta_g=\left|\frac{-8\pi^2 l\cdot T^2\mathrm{d}T}{T^3\cdot 4\pi^2 l}\right|=2\left|\frac{\mathrm{d}T}{T}\right|$，于是，$\delta_g=2\delta_T$，即 g 的相对误差是周期的相对误差的2倍.

§5. 高阶的导函数和微分

1.基本定义 函数 $y=f(x)$的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义！)：

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}'\quad(n=2,3,\cdots).$$

函数 $y=f(x)$的高阶微分是根据下列公式顺次定义的：

$$\mathrm{d}^n y=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y)\quad(n=2,3,\cdots),$$

其中采取 $\mathrm{d}^1 y=\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$.

若 x 为自变数，则应有：

$$\mathrm{d}^2 x=\mathrm{d}^3 x=\cdots=0.$$

在这种情形下，下列公式正确

$$\mathrm{d}^n y=y^{(n)}\mathrm{d}x^n\quad\text{及}\quad y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

2.基本公式：

Ⅰ. $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$ $(a>0)$； $(e^x)^{(n)}=e^x$；

Ⅱ. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；　　Ⅲ. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

Ⅳ. $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$；　　Ⅴ. $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3.莱布尼兹公式　若函数 $u=\varphi(x)$及 $v=\psi(x)$有 n阶导函数(可微分 n次),则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v, C_n^i$ 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

同样地对于微分 $d^n(uv)$得

$$d^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

其中设 $d^0u=u$及 $d^0v=v$.

求 y'',设

【1118】 $y=\ln f(x)$.

解 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $y''=\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ $(f(x)>0)$.

【1119】 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

解 $y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\cdot\frac{1}{x}[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)]=2\cos(\ln x)$,

$y''=-\frac{2\sin(\ln x)}{x}$ $(x>0)$.

设 $u=\varphi(x)$及 $v=\psi(x)$为可微分二次的函数,求 y'',设:

【1124】 $y=u^v$ $(u>0)$.

解 $y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)$,

$$y''=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2+u^v\left(v''\ln u+\frac{u'v'}{u}+\frac{(u'v'+vu'')u-vu'^2}{u^2}\right)$$

$$=u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)^2+v''\ln u+\frac{2u'v'}{u}+\frac{v}{u^2}(uu''-u'^2)\right].$$

设 $f(x)$为可微分三次的函数,求 y''及 y''',设:

【1128】 $y=f(\ln x)$.

解 $y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$,

$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$,

$y'''=-\frac{2}{x^3}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]+\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-f''(\ln x)]$

$=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$　　$(x>0)$.

【1130】 对于以下二种情形:(1)x为自变量,(2)x为中间变量,求函数 $y=e^x$ 的 d^2y.

解 (1) $dy=e^x dx$, $d^2y=e^x dx^2$;

(2) $dy=e^x dx$, $d^2y=e^x d^2x+e^x dx^2$.

若 x 为自变数,求 d^2y,设:

【1133】 $y=x^x$.

解 $y'=x^x(1+\ln x)$, $y''=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]$, 于是,

$$d^2y=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2 \quad (x>0).$$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数,求 d^2y,设:

【1134】 $y=uv$.

解 $dy=ud v+vdu$,

$d^2y=dud v+ud^2v+dvdu+vd^2u=ud^2v+2dud v+vd^2u$.

【1137】 $y=a^u$ $(a>0)$.

解 $dy=a^u\ln a du$,

$d^2y=a^u\ln^2 a\cdot du^2+a^u\ln a\cdot d^2u=a^u\ln a(\ln a\cdot du^2+d^2u)$ $(a>0)$.

求以参数给出的函数 $y=y(x)$的导函数 y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3},设:

【1142】 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

解 $y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}$, $y''_{x^2}=\frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$,

$$y'''_{x^3}=\frac{\frac{\cos\frac{t}{2}}{2a\sin^5\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}} \quad (t\neq 2k\pi,\ k\text{为整数}).$$

【1144】 $x=f'(t)$, $y=tf'(t)-f(t)$.

解 $y'_x=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t$, $y''_{x^2}=\frac{1}{f''(t)}$, $y'''_{x^3}=-\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$ $(f''(t)\neq 0)$.

求由下列隐函数给出的 $y=y(x)$的 y'_x, y''_{x^2} 及 y'''_{x^3}:

【1148】 $x^2-xy+y^2=1$.

解 对 x 微分,得

$$2x-y-xy'+2yy'=0, \tag{1}$$

$$y'=\frac{2x-y}{x-2y}. \tag{2}$$

将(1)式两端再对 x 微分,得

$$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0, \tag{3}$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式,得

$$y''=\frac{6}{(x-2y)^3}. \tag{4}$$

将(3)式两端对 x 微分,得

$$-3y''-xy'''+6y'y''+2yy'''=0, \tag{5}$$

将(2)式及(4)式代入(5)式,得

$$y'''=\frac{54x}{(x-2y)^5}\quad (x\neq 2y).$$

【1151】 设函数 $f(x)$ 当 $x\leqslant x_0$ 时有定义且可微分两次. 应当如何选择系数 a,b 及 c,使函数.

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & \text{若 } x>x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设 $F'(x)$ 存在,所以,$F(x)$ 在点 x_0 连续,即

$$\lim_{x\to x_0-0}F(x)=\lim_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=f(x_0).$$

于是,$c=f(x_0)$.其次,由 $F'(x_0-0)=F'(x_0+0)$得

$$f'(x_0)=[2a(x-x_0)+b]\Big|_{x=x_0}=b,$$

再由 $F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$得

$$f''(x_0)=2a,$$

于是,

$$a=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

【1154】 质点 $M(x,y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去.建立(空气的阻力略去不计)运动的方程并计算速度 v、加速度 j 的大小及运动的轨道.最大的高度和射程等于多少?

解 若不考虑空气的阻力,则有

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha,\\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

此即运动方程.化为直角坐标方程,得

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

即轨道为一抛物线.速度

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha+(v_0\sin\alpha-gt)^2}=\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0gt\sin\alpha},$$

而加速度

$$j=\sqrt{j_x^2+j_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}=\sqrt{0+(-g)^2}=g.\quad \frac{dy}{dx}=\tan\alpha-\frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

在最大高度处,$\dfrac{dy}{dx}=0$.此时

$$x=\frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

于是,最大高度为

$$H_{\max}=\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot\frac{v_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

上式也可从$\frac{dy}{dt}=0$解出$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$,再以$t$值代入$y$的表达式而得到.在最大射程处有:$y=0$.于是,

$$x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0,$$

解得

$$x=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}.$$

从而,最大射程为$\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$.

求下列指定的阶的导函数:

【1159】 $y=\frac{x^2}{1-x}$;求$y^{(8)}$.

解 $y=\frac{x^2-1+1}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x}$,

$$y'=-1+\frac{1}{(1-x)^2},\quad y''=\frac{2}{(1-x)^3},\quad y'''=\frac{2\cdot3}{(1-x)^4},\quad\cdots,\quad y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}\quad(x\neq1).$$

【1167】 $y=\sin x\sin2x\sin3x$;求$y^{(10)}$.

解 利用三角函数和、差与其积的互化公式,将y化简得

$$y=\frac{1}{4}\sin4x-\frac{1}{4}\sin6x+\frac{1}{4}\sin2x.$$

于是,
$$y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot4^{10}\sin\left(4x+\frac{10}{2}\pi\right)-\frac{1}{4}\cdot6^{10}\sin\left(6x+\frac{10}{2}\pi\right)+\frac{1}{4}\cdot2^{10}\sin\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)$$
$$=-2^{18}\sin4x+2^8\cdot3^{10}\sin6x-2^8\sin2x.$$

于下列各例中,视x为自变数,求指定的阶的微分.

【1174】 $y=e^x\ln x$;求d^4y.

解 $d^4y=(e^x\ln x)^{(4)}dx^4=e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$.

设u为x的可微分足够多次的函数,于下列各例中求指定的阶的微分.

【1178】 $y=\ln u$;求d^3y.

解 $dy=\frac{1}{u}du$,$d^2y=-\frac{1}{u^2}du^2+\frac{1}{u}d^2u$,

$$d^3y=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{2}{u^2}du\,d^2u-\frac{1}{u^2}d^2u\,du+\frac{1}{u}d^3u=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{3}{u^2}du\,d^2u+\frac{1}{u}d^3u.$$

【1180】 以变量x和y的逐次微分来表示函数$y=f(x)$的导函数y''及y''',但不假定x为自变量.

解 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y''=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3}=\dfrac{\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}^2x & \mathrm{d}^2y\end{vmatrix}}{\mathrm{d}x^3}$，

$$y'''=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}x\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}^3x & \mathrm{d}^3y\end{vmatrix}-3\mathrm{d}^2x\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}^2x & \mathrm{d}^2y\end{vmatrix}}{\mathrm{d}x^5}.$$

求 $y^{(n)}$，设：

【1188】 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

解 $y'=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$；$y''=-\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$；

利用数学归纳法，可证得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}\quad\left(x\neq-\frac{d}{c},\ c\neq0\right).$$

事实上，对于 $n=2$ 等式成立，设对于 n 等式成立，则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)}=\frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n\cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}$$

$$=\frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立，于是得证.

【1190】 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

解 $y=\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$.

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\quad(x\neq1,\ x\neq2).$$

【1195】 $y=\sin^3x$.

解 $y=\sin x\sin^2x=\dfrac{1}{2}\sin x(1-\cos2x)=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin3x$.

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1205】 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

解 $y^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}=\mathrm{e}^x\left\{\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}$.

【1206】 $y=\mathrm{e}^x\cos x$.

解 $y'=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=2^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$$y''=2^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2^{\frac{2}{2}}\mathrm{e}^x\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得 $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

【1212】 求 d^ny，设 $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

解 $$\mathrm{d}^n y=y^{(n)}\mathrm{d}x^n=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x+n\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}+C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]\mathrm{d}x^n$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]\mathrm{d}x^n\quad(x>0).$$

【1215】 将函数 $f(x)=\sin^{2p}x$，其中 p 为自然数，化为三角多项式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

解 设 $t=\cos x+i\sin x$，则

$$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

其中 $\bar{t}$ 为 t 的共轭复数. 于是，

$$\sin^{2p}x=\frac{1}{(2i)^{2p}}(t-\bar{t})^{2p}=\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}C_{2p}^k t^{2p-k}(-1)^k\bar{t}^{\,k}$$

$$=(-1)^p\frac{1}{(2i)^{2p}}C_{2p}^p+\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^k(-1)^k\cos(2p-2k)x.$$

所以，

$$(\sin^{2p}x)^{(n)}=\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^k(-1)^k(2p-2k)^n\cdot\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^n\cdot C_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1223】 设

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n-1)$ 阶的连续导函数，求 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼兹公式，得

$$f^{(n-1)}(x)=(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots$$

$$+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots 3(x-a)^2\varphi'(x)+n!(x-a)\varphi(x).$$

于是，$f^{(n-1)}(a)=0$.

按导数定义，即得

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots\right.$$

$$\left.+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots 3(x-a)\varphi'(x)+n!\varphi(x)\right]$$

$$=n!\varphi(a).$$

【1226】 证明：契比协夫多项式

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$$

证 $$T_m'(x)=\frac{m}{2^{m-1}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)\quad(|x|<1),$$

$$T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arccos x).$$

于是，

$$(1-x^2)T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)$$

$$=-m^2T_m(x)+xT'_m(x),$$

即 $$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

【1227】 证明：勒襄德多项式

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

证 设 $y=(x^2-1)^m$，就有

$$y'=2mx(x^2-1)^{m-1}\quad 或\quad (x^2-1)y'=2mxy.$$

对上式两端各取$(m+1)$阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2(m+1)xy^{(m+1)}+m(m+1)y^{(m)}=2mxy^{(m+1)}+2m(m+1)y^{(m)}.$$

于是， $$(x^2-1)y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}-m(m+1)y^{(m)}=0.$$

两端再以$\frac{1}{2^m m!}$乘之，并以 $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}y^{(m)}$ 代入，即得所要证明的等式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

【1233】 设$\frac{d}{dx}=D$表示微分算子及

$$f(D)=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k$$

为微分符号的多项式，其中 $p_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$为 x 的某连续函数.

证明：

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ为常数.

证 按莱布尼兹公式，有

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=[e^{\lambda x}u(x)]^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(e^{\lambda x})^{(i)}u^{(k-i)}(x)=e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{k-i}(x).$$

另一方面，有

$$(D+\lambda)^k u(x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i D^{(k-i)}u(x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

因而，得 $$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).$$

于是，

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}p_k(x)\cdot(D+\lambda)^k u(x)=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

即 $f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x).$

§6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1.洛尔定理　若函数 $f(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在此区间内有有限的导函数 $f'(x)$;(3)$f(a)=f(b)$,则至少存在有一个数 c 于区间(a,b)内,使

$$f'(c)=0,\quad \text{其中 } a<c<b.$$

2.拉格朗日定理　若函数 $f(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在区间(a,b)内有有限的导函数 $f'(x)$,则

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\quad \text{其中 } a<c<b \qquad \text{(有限增量公式)}.$$

3.哥西定理　若函数 $f(x)$及 $g(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)于(a,b)内 $f(x)$及 $g(x)$有有限的导函数 $f'(x)$及$g'(x)$;(3)当 $a<x<b$,$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$;(4)$g(a)\neq g(b)$,则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(d)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\qquad \text{其中 } a<c<b.$$

【1237】 设函数 $f(x)$于有穷的或无穷的区间(a,b)中的任意一点有有限的导函数 $f'(x)$,且

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

证明:

$$f'(c)=0,$$

其中 c 为区间(a,b)中的某点.

证　当(a,b)为有穷区间时,设

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in(a,b)\text{时} \\ A, & \text{当 } x=a\text{与 }b\text{ 时,}\end{cases}$$

其中 $A=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

显然 $F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且有 $F(a)=F(b)$.故由洛尔定理可知,在(a,b)内至少存在一点 c,使

$$F'(c)=0.$$

而在(a,b)内,$F'(x)=f'(x)$,所以

$$f'(c)=0.$$

下设(a,b)为无穷区间.若 $a=-\infty$,$b=+\infty$,可设

$$x=\tan t \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则对由函数 $f(x)$与 $x=\tan t$组成的复合函数

$$g(t)=f(\tan t)$$

在有穷区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内仿前讨论可知:至少存在一点 $t_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,使

$$g'(t_0)=f'(c)\cdot\sec^2 t_0=0,$$

其中 $c=\tan t_0$.由于 $\sec^2 t_0\neq 0$,故

$$f'(c)=0.$$

若 a 为有限数，$b=+\infty$ 则可取 $b_0>\max\{a,0\}$，而令

$$x=\frac{(b_0-a)t}{b_0-t}.$$

于是，对复合函数 $g(t)=f\left[\frac{(b_0-a)t}{b_0-t}\right]$ 在有穷区间 (a,b_0) 上仿前讨论，可知：存在 $t_0\in(a,b_0)$ 使

$$g'(t_0)=f'(c)\cdot\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}=0,$$

其中 $c=\frac{(b_0-a)t_0}{b_0-t_0}$. 显然 $a<c<+\infty$. 由于

$$\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}>0,$$

故 $f'(c)=0$.

对于 $a=-\infty$，b 为有限数的情形，可类似地进行讨论. 证毕.

【1238】 设函数 $f(x)$：(1)于闭区间 $[x_0,x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导函数 $f^{(n-1)}(x)$；(2)于区间 (x_0,x_n) 内有 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$；(3)有下面的等式成立

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\quad(x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明：在区间 (x_0,x_n) 内至少有一点 ξ，使

$$f^{(n)}(\xi)=0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

上，函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此，存在 n 个点

$$x_1',x_2',\cdots,x_k',\cdots,x_n',$$

其中 $x_k'\in(x_{k-1},x_k)(k=1,2,\cdots,n)$，使

$$f'(x_k')=0\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

于是，在每个区间 $[x_k',x_{k+1}'](k=1,2,\cdots,n-1)$ 上，函数 $f'(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此存在点 x_k'' 属于 $(x_k',x_{k+1}')(k=1,2,\cdots,n-1)$，使

$$f''(x_k'')=0\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

继续上述步骤，经 $(n-1)$ 次后，得出一个区间 $[x_1^{n-1},x_2^{n-1}]\subset(x_0,x_n)$，满足 $f^{(n-1)}(x_k^{n-1})=0$ $(k=1,2)$. 于是在此区间上，函数 $f^{n-1}(x)$ 满足洛尔定理的条件. 所以，至少存在一点 $\xi\in(x_1^{n-1},x_2^{n-1})$，使

$$f^{(n)}(\xi)=0.$$

【1247】 证明：若 $x\geqslant0$，则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$，并且 $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证 当 $x\geqslant0$ 时，对函数 $\sqrt{x}$ 施用有限增量公式，即得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之，得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x].$$

当 $x=0$ 时，$\theta=\frac{1}{4}$．当 $x>0$ 时，有

$$0\leqslant \sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4},\quad \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{4}+\frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)}+x]}\right\}=\frac{1}{2}.$$

【1250】 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内有连续的导函数 $f'(x)$．对于区间 (a,b) 内任何一点 ξ 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使满足于

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\quad (x_1<\xi<x_2).$$

解 一般地说，不可以．例如，研究函数

$$f(x)=x^3\quad (-1<x<1),$$

它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2 使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

事实上，$f'(\xi)=3\xi^2=0$，而当 $x_1<0<x_2$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1x_2+x_1^2=x_2^2+x_1^2-|x_1|\cdot|x_2|$$
$$>x_2^2+x_1^2-2|x_1||x_2|=(|x_1|-|x_2|)^2\geqslant 0.$$

【1251】 证明下列不等式：

(3) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；　(4) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，设 $0<b<a$.

证 (3) $|\arctan a-\arctan b|=\left|\frac{a-b}{1+\xi^2}\right|\leqslant|a-b|$.

(4) $\ln a-\ln b=\frac{a-b}{\xi}$，其中 $0<b<\xi<a$.

于是，

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

【1252】 说明在闭区间 $[-1,1]$ 上哥西定理对于函数 $f(x)=x^2$ 及 $g(x)=x^3$ 何以不真？

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上虽有连续的导函数，且 $g(-1)\neq g(1)$，但是，当 $x=0$ 时，

$$[f'(x)]^2+[g'(x)]^2=4x^2+9x^4=0,$$

因此，对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足哥西定理的条件，所以结论可以不真．事实上，

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\xi}{3\xi^2}\neq 0,\quad \xi\in(-1,1),\quad \xi\neq 0,$$

它们是不相等的．

【1253】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上可微分，并且 $x_1x_2>0$，证明：

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中 $x_1<\xi<x_2$.

证 设 $g(x)=\frac{1}{x}$, $F(x)=\frac{f(x)}{x}$,由于 $x_1x_2>0$,故 $x=0$ 在$[x_1,x_2]$之外.从而 $g(x)$和$F(x)$均在$[x_1,x_2]$上可微,且有

$$[g'(x)]^2+[F'(x)]^2=\frac{1}{x^4}\{1+[xf'(x)-f(x)]^2\}\neq 0 \quad 及 \quad g(x_1)\neq g(x_2).$$

因此,对于函数 $F(x)$和 $g(x)$满足哥西定理的条件,故在(x_1,x_2)内至少存在一点 ξ,使有

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad 即 \quad \frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理,即得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

【1254】 证明:若函数 $f(x)$于有穷的区间(a,b)内可微分,但无界,则其导函数 $f'(x)$于区间(a,b)内也无界.逆定理不真;举出例子.

证 在开区间(a,b)内,由于导函数存在,因此,$f(x)$在(a,b)内连续.

现在假定$|f'(x)|<N$ $(a<x<b)$,即 $f'(x)$是有界的.取定 $c\in(a,b)$,则按有限增量公式可知,对任何 $a<x<b$,均有

$$|f(x)-f(c)|=|x-c|\,|f'(\xi)|<N(b-a).$$

其中 ξ在 c 与 x 之间,从而属于(a,b).

因为

$$|f(x)-f(c)|\geqslant|f(x)|-|f(c)|,$$

所以,

$$|f(x)|<|f(c)|+N(b-a).$$

此与 $f(x)$是无界的条件相矛盾,所以 $f'(x)$是无界的.

反之不一定正确.例如,函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

在$\left(0,\frac{1}{2}\right]$内有界,但其导函数却是无界的.

注意 在无限区间内无界的函数的导函数可能有界.例如,函数

$$f(x)=\ln x$$

在$(1,+\infty)$内无界,但其导函数 $f'(x)=\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内却是有界的.

【1255】 证明:若函数 $f(x)$于有穷或无穷的区间(a,b)内有有界的导函数$f'(x)$,则 $f(x)$于(a,b)中一致连续.

证 设当 $x\in(a,b)$时,$|f'(x)|\leqslant M$.对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$,则当 $x_1,x_2\in(a,b)$且$|x_1-x_2|<\delta$时,就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|f'(\xi)|\leqslant M|x_1-x_2|<\varepsilon,\quad(\xi在\ x_1\ 与\ x_2\ 之间),$$

于是,$f(x)$在(a,b)内一致连续.

【1265】 证明:若函数 $f(x)$ (1)在闭区间$[a,b]$上是连续的;(2)于此线段内有有穷的导函

数 $f'(x)$；(3)非线性函数，则于区间(a,b)内至少能找到一点 c，满足

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

作出这个事实的几何解释.

证 当 $a\leqslant x\leqslant b$时，设

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

易知 $F(a)=F(b)=0$，且当 $a<x<b$时，$F(x)\not\equiv 0$ (因为$f(x)$为非线性函数).设在 c_1($a<c_1<b$)点，$F(c_1)\neq 0$，不妨设 $F(c_1)>0$，在区间$[a,c_1]$与$[c_1,b]$上分别应用拉格朗日定理，可知存在

$$\xi_1\in(a,c_1)\quad 使\quad F'(\xi_1)=\frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\frac{F(c_1)}{c_1-a}>0;$$

$$\xi_2\in(c_1,b)\quad 使\quad F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}=-\frac{F(c_1)}{b-c_1}<0.$$

因而，

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\tag{1}$$

$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\tag{2}$$

由此可知：

当$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0$时，由(1)，

$$|f'(\xi_1)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|;$$

当$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$时，由(2)，

$$|f'(\xi_2)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

于是，命题得证.

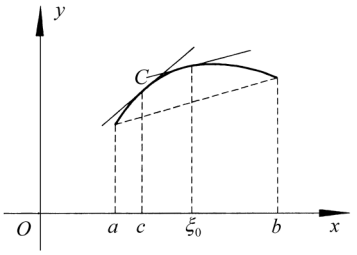

图 1265

这个事实的几何意义是：对于一条非直线的连续曲线段(线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线)，在曲线上至少存在一点 C，使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点$(a,f(a))$和$(b,f(b))$的弦的斜率的绝对值，换句话说，此切线比此弦“陡”，如图 1265 所示.

【1266】 若函数 $f(x)$：

(1)在区间$[a,b]$上有二阶导函数 $f''(x)$及

(2)$f'(a)=f'(b)=0$，

则在区间(a,b)内至少存在一点，满足

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 设 x_0 是$[a,b]$中任意固定的一点,两次应用哥西定理*,即得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(\xi), \tag{1}$$

其中 ξ在 x_0 与 x之间(即 $x_0\leqslant\xi\leqslant x$),$x$为$[a,b]$中任意点.特别,在(1)式中取

$$x_0=a,\quad x=\frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件 $f'(a)=0$,则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a<c_1<\frac{a+b}{2}$.

同理,在(1)式中取 $x_0=b$, $x=\frac{a+b}{2}$,并利用已知条件 $f'(b)=0$,则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_2),$$

其中 c_2 满足$\frac{a+b}{2}<c_2<b$. 于是,

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&\leqslant\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|\\&=\frac{(b-a)^2}{8}\{|f''(c_1)|+|f''(c_2)|\}.\end{aligned}\tag{2}$$

取 c如下:若$|f''(c_1)|\geqslant|f''(c_2)|$,则令 $c=c_1$;若$|f''(c_1)|<|f''(c_2)|$,则令 $c=c_2$.于是,$a<c<b$且$|f''(c)|=\max\{|f''(c_1)|,|f''(c_2)|\}$. 由此,根据(2),即得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(c)|.$$

从而,

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

---

* 仅考虑 $x>x_0$($x<x_0$ 时可类似地讨论).令

$$F(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]\qquad G(x)=(x-x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0)=G(x_0)=0$,

$$F'(x)=f'(x)-f'(x_0)\ \text{(记为 } F_1(x)),\quad G'(x)=2(x-x_0)\ \text{(记为 } G_1(x)),$$

并且 $F'(x_0)=G'(x_0)=0$,(即 $F_1(x_0)=G_1(x_0)=0$),但当 $x\neq x_0$, $G'(x)\neq0$, 而

$$F_1'(x)=F''(x)=f''(x),\quad G_1'(x)=G''(x)=2.$$

应用哥西定理,得

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}=\frac{F_1(c)-F_1(x_0)}{G_1(c)-G_1(x_0)}=\frac{F_1'(\xi)}{G_1'(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{2},$$

此处 $\xi\in(x_0,c)$,而 $c\in(x_0,x)$,从而知 $\xi\in(x_0,x)$. 因此,有

$$F(x)=\frac{1}{2}G(x)f''(\xi)$$

也即有公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi).$$

其中 $x_0<\xi<x$(以后即将看到,这就是所谓的台劳公式,这里就顺便给出了一个关于二阶的台劳公式的另一种推论方法).

§7. 函数的增大与减小. 不等式

1.函数的增大与减小 若当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时，

$$f(x_2)>f(x_1) \quad [\text{或当 } a\leqslant x_1<x_2\leqslant b \text{ 时，} f(x_2)<f(x_1)],$$

则称函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a,b]$ 上增大(或对应地减小).

若可微分的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上增大(或减小)，则当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，

$$f'(x)\geqslant 0 \quad [\text{或对应地当 } a\leqslant x\leqslant b \text{ 时，} f'(x)\leqslant 0].$$

2.函数增大(或减小)的充分条件 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的；并且在其内有正的(或负的)导函数 $f'(x)$，则函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 内增大(或对应地减小).

求下列函数在严格意义上的单调(增大或减小)的区间：

【1273】 $y=x+|\sin 2x|$.

解 $y'=1+2\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}\cos 2x \quad \left(x\neq\dfrac{k\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

当 $x\in\left(\dfrac{k\pi}{2},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时，$y'>0$，函数增大；

当 $x\in\left(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$y'<0$，函数减小，

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

【1278】 若 $x>0$，$f(x)=x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sin\ln x\right)$ 及 $f(0)=0$.

解 $f'(x)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sin\ln x+\cos\ln x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln x\right)$ $(x>0)$.

令 $f'(x)=0$，解得

$$x=e^{-\frac{11}{12}\pi+2k\pi},\quad x=e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi} \quad \text{或} \quad x=e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi},\ x=e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi}$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当 $x\in(e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi})$ 时，$f'(x)>0$，函数增大；

当 $x\in(e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi})$ 时，$f'(x)<0$，函数减小.

【1280】 证明：函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

于区间 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,+\infty)$ 内增大.

证 设 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$，则

$$y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right].$$

由于当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x>0$，因此要看 y' 为正或为负，只需看 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$ 的正负性.

再设 $z=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$，则

$$z'=-\frac{1}{x(1+x)^2}>0,\quad x\in(-\infty,-1),$$

故当$-\infty<x<-1$时 z增大，又$\lim\limits_{x\to-\infty}z=0$，因而 $z>0$．于是，在$(-\infty,-1)$内 $y'>0$，因此，函数

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

在区间$(-\infty,-1)$内增大．

同理可证，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$在区间$(0,+\infty)$内增大．

【1284】 证明：若 $\varphi(x)$为单调增大的可微分的函数，且当 $x\geqslant x_0$ 时，$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$，则当 $x\geqslant x_0$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0).$$

对这个事实作几何的解释．

证 作函数 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$，由拉格朗日定理知

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi'(\xi)(x-x_0)\quad(x_0<\xi<x).$$

由 $|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$知

$$\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-f'(\xi)\geqslant0.$$

从而 $\psi(x)-\psi(x_0)\geqslant0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x)-f(x_0).\qquad(1)$$

再令 $\psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$，同理有 $\psi_1(x)-\psi_1(x_0)\geqslant0$（当$x\geqslant x_0$时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x_0)-f(x).\qquad(2)$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant|f(x)-f(x_0)|.$$

其几何意义就是：若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应的点的切线“陡”，则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦“陡”．如图 1284 所示．

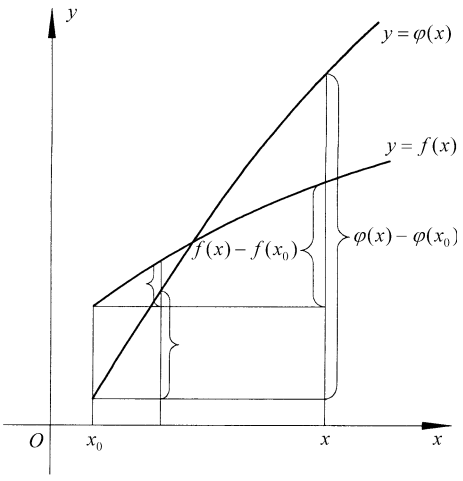

图 1284

【1285】 设函数 $f(x)$于区间 $a\leqslant x<+\infty$ 内是连续的，而且当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$，其中 k 为常数．证明：若 $f(a)<0$，则于区间$\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$内方程$f(x)=0$有一而且仅有一实根．

证 由有限增量公式，有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=-\frac{f(a)}{k}f'(\xi)>-\frac{f(a)}{k}\cdot k=-f(a).$$

于是，$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$．又 $f(a)<0$，故根据连续函数的介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在$\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$上至少有一实根．又因为当 $x>a$时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(a,+\infty)$内严格单调上升，由此可知，方程 $f(x)=0$ 在$\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$内恰有一个实根．

【1286】 若于某邻域$|x-x_0|<\delta$内，函数增量 $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$的符号与自变数增

量 $\Delta x_0=x-x_0$ 的符号相同，函数 $f(x)$称为在 x_0 点增大.

证明：若函数 $f(x)$($a<x<b$)于有穷或无穷的区间(a,b)内的每一点增大，则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点 $x_1<x_2$($a<x_1<x_2<b$)，都有 $f(x_1)<f(x_2)$.对$[x_1,x_2]$中每一点 c，由假定都存在开区间 $\Delta_c=(c-\delta_c,c+\delta_c)$使当 $0<|x-c|<\delta_c$ 时，$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$.于是，诸区间 $\{\Delta_c\}$(c取遍$[x_1,x_2]$)形成$[x_1,x_2]$的一个开复盖.由波内耳有限复盖定理，从$\{\Delta_c\}$中可选出有限个，设为 $\Delta_1,\Delta_2\cdots\Delta_m$，它们已经复盖了$[x_1,x_2]$.不妨设 $x_1<c_1<c_2<\cdots<c_m<x_2$，而且可设诸 Δ_i 互不包含(因若 $\Delta_i\subset\Delta_j$，则可将 Δ_i 舍去).于是，必有 $x_1\in\Delta_1$(因若 x_1 不属于 Δ_i，而属于某 Δ_j，$j>1$，则显然有 $\Delta_1\subset\Delta_j$，此与诸 Δ_i 互不包含矛盾).另外，易知 Δ_i 与 $\Delta_{c_{i+1}}$($i=1,2,\cdots,m-1$)必有公共点 $\bar{x}_i$(因若 Δ_i 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点，则点 $c_i+\delta_{c_i}$ 必属于某 Δ_{c_j}，$j\neq i$，$j\neq i+1$，若 $j<i$，则 $\Delta_i\subset\Delta_j$，矛盾；若 $j>i+1$，则 $\Delta_{i+1}\subset\Delta_j$，也矛盾).显然可取公共点 $\bar{x}_i$ 满足 $c_i<\bar{x}_i<c_{i+1}$.

于是，
$$f(c_i)<f(\bar{x}_i)<f(c_{i+1})\qquad(i=1,2,\cdots,m-1).$$
同理，可知 $x_2\in\Delta_m$.于是，我们有
$$f(x_1)<f(c_1)<f(c_2)<\cdots<f(c_m)<f(x_2).$$
证毕.

【1287】 证明：函数
$$f(x)=x+x^2\sin\frac{1}{x},$$
若
$$x\neq0\quad\text{及}\quad f(0)=0,$$
于点 $x=0$ 增大，但在含这点的任何区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$中并非增大的，其中 $\varepsilon>0$ 为任意小的数.作出此函数的略图.

证 当 $x\neq0$ 时，
$$f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$
$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x+\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=1>0,$$
所以，$f(x)$在 $x=0$ 点增大.又当 $x\neq0$ 时，
$$f''(x)=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$
$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-4n\pi\begin{cases}<0, & n\text{为正整数};\\ >0, & n\text{为负整数};\end{cases}$$
而 $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)=0$.故 $f(x)$在点 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$($n=1,2,\cdots$)都达极大值.由于 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to0$，故 $f(x)$在$(-\varepsilon,\varepsilon)$内不是增大的(作无穷次振荡，如图 1287 所示).

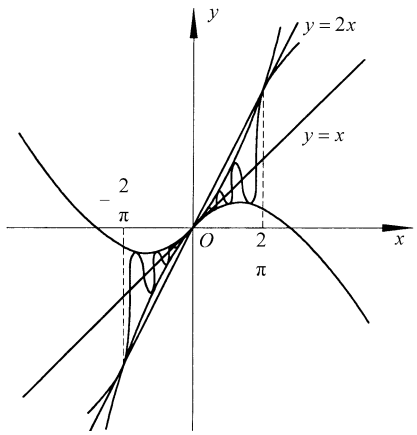

图 1287

【1288】 证明定理：设(1)函数 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$可微分 n次；(2)$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$($k=0,1,2,\cdots,n-1$)；(3)当 $x>x_0$ 时，$\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，则当 $x>x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x)>\psi(x).$$

证 设 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，则由于 $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，所以，

$$F^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)-\psi^{(n)}(x)>0 \quad (x>x_0).$$

因此，$F^{(n-1)}(x)$在 $x>x_0$ 时是严格增大的．又由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0)=\varphi^{(n-1)}(x_0)-\psi^{(n-1)}(x_0)=0,$$

因此，

$$F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0 \quad (x>x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$在 $x>x_0$ 时是严格增大的．再由条件(2)知

$$F^{n-2}(x_0)=\varphi^{(n-2)}(x_0)-\psi^{(n-2)}(x_0)=0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x)>F^{(n-2)}(x_0)=0 \quad (x>x_0).$$

依此类推，最后得

$$F(x)>F(x_0)=0 \ (x>x_0),$$

即

$$\varphi(x)>\psi(x) \ (x>x_0).$$

【1289】 证明下列不等式：

(2) 当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；　(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{x^3}{3}$．

作不等式(2)及(4)的几何解释．

证 (2) 设 $\varphi(x)=x$，$\psi(x)=\ln(1+x)$，则

$$\varphi'(x)=1, \quad \psi'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>\psi'(x)$，即

$$\varphi'(x)-\psi'(x)>0, \text{ 且有 } \varphi(0)=\psi(0)=0,$$

从而

$$\varphi(x)-\psi(x)>\varphi(0)-\psi(0)=0 \quad (x>0),$$

即

$$x-\ln(1+x)>0 \quad (x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x).$$

所以，当 $x>0$ 时，

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

此不等式表示对数函数 $y=\ln(1+x)$的图形介于抛物线 $y=x-\frac{x^2}{2}$ 和直线 $y=x$ 之间($x>0$)．如图 1289(1)所示．

(4) 令 $f(x)=\tan x-(x+\frac{x^3}{3})$，则 $f(0)=0$．又

$$f'(x)=\frac{1-\cos^2 x-x^2\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{\cos^2 x}.$$

显然有 $\sin x-x\cos x>0$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，故

$$f'(x)>0, \ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

从而，$f(x)>0$，即 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$．

此不等式表示，在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，曲线 $y=\tan x$ 在曲线 $y=x+\frac{x^3}{3}$的上方．如图 1289(2)所示．

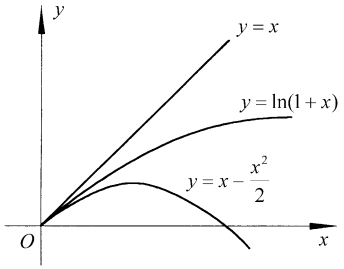

图 1289(1)

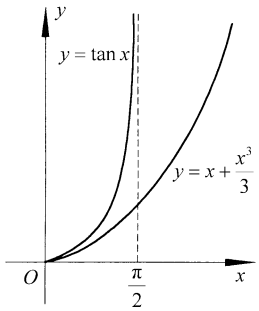

图 1289(2)

【1290】 证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x,$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时成立.

证 不等式的后半部分容易证明,我们仅证其前半部分.

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,显然有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$.而

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x),$$

由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$\cos x>0$ 及 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}>x$,于是,在此区间内 $f'(x)<0$.所以,函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是递减的.因而,当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad 即\quad \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}\quad (0<x<\frac{\pi}{2}).$$

所以,

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x\quad (0<x<\frac{\pi}{2}).$$

【1291】 证明:当 $x>0$ 时有不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

证 由于当 $x>0$ 时,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

严格增大(利用 1280 题的结果),并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

所以,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e\quad (x>0).$$

同理可证,当 $x>0$ 时,$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 严格递减,并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e,$$

所以，$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>\mathrm{e}\quad(x>0).$$

【1293】 用不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2\geqslant 0,$$

其中 $x,a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$为实数，来证明哥西—布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

证 由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 都成立，故上述二次式的判别式不能为正，即

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2-4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leqslant 0,$$

也即 $$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

【1294】 证明：正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数，即是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

证 利用 1293 题的结果，设

$$a_k=x_k,\quad b_k=\frac{1}{n},$$

则有 $$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

所以，$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

【1297】 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$为可微分二次的函数及

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\quad(k=0,1,2).$$

证明不等式：$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

证 运用 1266 题附注的公式(对任何 h)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2\quad(x\leqslant\xi_1\leqslant x+h),\tag{1}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2\quad(x-h\leqslant\xi_2\leqslant x),\tag{2}$$

(1)减(2)，得

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

即 $$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

所以，

$$2h|f'(x)|\leqslant|2hf'(x)|\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$$

$$\leqslant 2M_0+h^2M_2,$$

即 $$M_2h^2-2|f'(x)|h+2M_0\geqslant 0.$$

由于此式对任何 h 都成立，故此二次式的判别式必非正：

$$4|f'(x)|^2-4M_2(2M_0)\leqslant 0,\quad 即\quad |f'(x)|^2\leqslant 2M_0M_2$$

由此可得 $$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

证毕.

§8. 凹凸性. 拐点

1.凹的充分条件　若曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 的一段，位于其任意一点的切线之上(或之下)，则称这个可微分的函数 $y=f(x)$ 的图形于闭区间 $[a,b]$ 上是凹(或对应地，凸)的.在假设二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下，当 $a<x<b$ 时不等式

$$f''(x)>0\quad [或对应地\ f''(x)<0]$$

成立，为图形是凹(或对应地，凸)的充分条件.

2.拐点的充分条件　若函数的图形在某点的凹凸性改变，则称此点为拐点.

若在点 x_0，或是 $f''(x_0)=0$，或是 $f''(x_0)$ 不存在，且当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 x_0 便是拐点.

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点：

【1303】　$y=x+\sin x$.

解　$y'=1+\cos x$，　$y''=-\sin x$.

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y''<0$，故图形是凸的；

当 $(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y''>0$，故图形是凹的；

$x=k\pi$ 是拐点($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

【1306】　$y=x\sin(\ln x)$　$(x>0)$.

解　$y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$，　$y''=\dfrac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln x\right)$.

令 $y''=0$，得 $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

当 $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时，$y''>0$，故图形是凹的；

当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ 时，$y''<0$，故图形是凸的；

$x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 是拐点($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$).

【1308】　证明曲线

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点.作出这个函数的图形.

证　$y'=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$，　$y''=\dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y''=0$ 得 $x_1=-2-\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$，$x_3=1$，对应的函数值为 $y_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$，$y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，

$y_3=1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}=0$$

所以,拐点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$及 $C(x_3,y_3)$在一条直线上(图 1308).

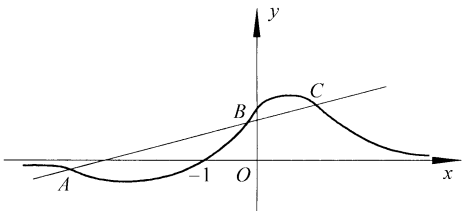

图 1308

【1309】 当如何选择参变数 h时,

"概率曲线" $y=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $(h>0)$

有拐点 $x=\pm\sigma$?

解 $y'=\dfrac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, $y''=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2)$.

令 $y''=0$,得 $x^2=\dfrac{1}{2h^2}$. 由于拐点为 $x=\pm\sigma$, 故有

$$h^2=\frac{1}{2\sigma^2},\quad 即\quad h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\quad(\sigma>0).$$

【1311】 设函数 $f(x)$于区间 $a\leqslant x<+\infty$中可微分二次,并且:

(1) $f(a)=A>0$; (2) $f'(a)<0$; (3) 当 $x>a$, $f''(x)\leqslant 0$.

证明:在区间$(a,+\infty)$内有而且仅有方程 $f(x)=0$ 之一实根.

证 由于 $f'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上连续且当 $a<x<+\infty$时 $f''(x)\leqslant 0$,故函数 $f'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是减小的,于是,当 $a\leqslant x<+\infty$时,$f'(x)\leqslant f'(a)<0$;由此又知函数 $f(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是严格减小的.因此,在$(a,+\infty)$上至多有一点使$f(x)=0$,即在$(a,+\infty)$上方程$f(x)=0$至多有一(实)根.

下面再证明必有点 $a<x_0<+\infty$存在,使 $f(x_0)=0$.考虑函数 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ $(a\leqslant x<+\infty)$,则

$$F'(x)=f'(x)-f'(a),$$
$$F''(x)=f''(x)\qquad(a\leqslant x<+\infty).$$

于是,当 $a<x<+\infty$时 $F''(x)\leqslant 0$,从而 $F'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是减小的,但$F'(a)=0$,故当 $a\leqslant x<+\infty$时,$F'(x)\leqslant F'(a)=0$;由此又知 $F(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是减小的,但$F(a)=0$,因此,当 $a\leqslant x<+\infty$时,恒有 $F(x)\leqslant F(a)=0$.

令 $x^*=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$.由于 $f(a)>0$, $f'(a)<0$,故 $x^*>a$.很明显

$$F(x^*)=f(x^*)-f(a)-f'(a)\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]=f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*)\leqslant 0$,故$f(x^*)\leqslant 0$.于是,根据连续函数的中间值定理,知必有 $a<x_0\leqslant x^*$ 存在,使$f(x_0)=0$.证毕.

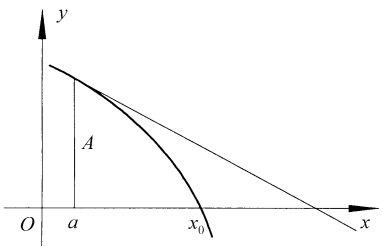

图 1311

注 上述证明的思路在几何上是明显的.函数 $F(x)$代表曲线 $y=f(x)$(它是凸的)上的纵坐标与在点

$(a,f(a))$处的切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$上的纵坐标之差，点 $x^*=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$即是此切线与 Ox 轴的交点(图 1311).

【1313】 证明：函数

$$x^n(n>1),\ e^x,\ x\ln x$$

于区间$(0,+\infty)$上是凹的；而函数

$$x^n(0<n<1),\ \ln x$$

于区间$(0,+\infty)$上是凸的.

证 (1) 设 $y=x^n(n>1)$，则

$$y''=n(n-1)x^{n-2},$$

它在$(0,+\infty)$上是大于零的，因此图形是凹的.

但当 $0<n<1$ 时，则 $y''<0$，故此时图形是凸的.

(2) 对于函数 e^x，其二阶导函数为 e^x，它始终为正，因此图形是凹的.

(3) 对于函数 $x\ln x$，其二阶导函数为$\frac{1}{x}$，它在$(0,+\infty)$内大于零，因此图形是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$，其二阶导函数为$-\frac{1}{x^2}$，它始终为负，因此，在$(0,+\infty)$内图形是凸的.

【1314】 证明下列不等式，并解释其几何意义：

(1)$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$，$(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$；

(3)$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$　$(x>0,y>0)$.

证 我们已知，若函数 $f(x)$的图形在区间(a,b)内是凹的，则对于(a,b)中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是，利用 1313 题的结果，我们有：

(1) 设 $f(x)=x^n$，$(x>0,n>1)$，则其图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(3) 设 $f(x)=x\ln x$，则对于 $x>0$ 图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是：联接点$(x,f(x))$及$(y,f(y))$的弦的中点始终位于曲线上对应点(具有相同横坐标)的上方.

【1315】 证明有界的凸函数处处连续，并有左侧及右侧的导函数.

证 设 $f(x)$在(a,b)内是凸的，并设 x_0 为(a,b)内的任一点，今证 $f(x)$在点 x_0 连续，且有左侧及右侧的导数.

在点 x_0 附近取一邻域$|x-x_0|<\delta$，使得这邻域全部都包含在(a,b)内，并记

$$M=\min\{f(x_0-\delta),f(x_0+\delta)\}.$$

设 $0<|x-x_0|<\delta$. 记

$$t=\frac{|x-x_0|}{\delta},$$

则 $0<t<1$.

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,有

$$x=t(x_0+\delta)+(1-t)x_0 \quad 及 \quad x_0=\frac{1}{1+t}x+\frac{t}{1+t}(x_0-\delta).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数,故有

$$f(x)>tf(x_0+\delta)+(1-t)f(x_0)\geqslant tM+(1-t)f(x_0) \tag{1}$$

及

$$f(x_0)>\frac{1}{1+t}f(x)+\frac{t}{1+t}f(x_0-\delta)\geqslant\frac{f(x)+tM}{1+t}. \tag{2}$$

由(1),得 $f(x)-f(x_0)>-t[f(x_0)-M]$;

由(2),得 $t[f(x_0)-M]>f(x)-f(x_0)$.

从而 $f(x_0)-M>0$,且

$$|f(x)-f(x_0)|<t[f(x_0)-M]=\frac{[f(x_0-M)]}{\delta}\cdot|x-x_0|. \tag{3}$$

当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,类似地也可导出(3)式,故当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,(3)式恒成立.由此显然有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x=x_0+h$,则(3)式可改写为

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|<\frac{|f(x_0)-M|}{\delta}\quad(0<|h|<\delta). \tag{4}$$

引进函数

$$\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)\quad(-\delta<h<\delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数,且有 $\varphi(0)=0$.今取任意两数 t_1 及 t_2,设有 $0<t_1<t_2<\delta$,并改写为

$$t_1=\frac{t_1}{t_2}\cdot t_2+\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质,有

$$\varphi(t_1)>\frac{t_1}{t_2}\cdot\varphi(t_2)+\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0)=\frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2),$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1}>\frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t)=\dfrac{\varphi(t)}{t}$ 是一个严格单调下降函数. 如从 $h\to+0$ 方向看,则函数 $F(h)$ 严格单调增大.但由(4)可知 $|F(h)|<\dfrac{|f(x_0)-M|}{\delta}$,即 $F(h)$ 在 $0<|h|<\delta$ 有界,故极限 $\lim\limits_{h\to+0}F(h)$ 存在,也即 x_0 的右侧函数

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

存在.同理,可证左侧导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中,对于区间是否有穷无关紧要.证毕.

注 本题不需假定凸函数有界,证明中也未用到有界这个条件,参看 E.C.Tichmarsh, The Theory of Functions, §5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{1}{2}f(x_1)+\dfrac{1}{2}f(x_2)\ (x_1\neq x_2)$ 作

为凸函数的定义，则需加上凸函数有界这个条件，才能推出它连续并且左、右导数都存在.参看 G.Pólya, G.Szegö, Problems and Theorems in Analysis, Vol.Ⅰ,70 题和 124 题.

【1317】 证明：若函数 $f(x)$在无穷的区间$(x_0,+\infty)$内可微分两次，且

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

则在区间$(x_0,+\infty)$内至少有一点 ξ,满足

$$f''(\xi)=0.$$

证 用反证法，即若不存在 ξ,使 $f''(\xi)=0$,则当 $x>x_0$ 时，或者 $f''(x)>0$,或者 $f''(x)<0$.如果不是这样，即若存在点 a 与 b,使得 $f''(a)<0$ 及 $f''(b)>0$,则由达布定理*)可知，在 a 与 b 之间必有 c 存在，使得 $f''(c)=0$,这与我们的反证假设矛盾.因此我们不妨设 $f''(x)>0$,从而函数 $f(x)$的图象是凹的，位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

与 $f(x)$的可微性，利用 1237 题的结果，即知：在$(x_0,+\infty)$中至少存在一点 c_1,使 $f'(c_1)=0$.由 $f''(x)>0$ 易知 $f'(x)$单调上升，从而当 $x>c_1$ 时，$f'(x)>0$.取 $c_2>c_1$,则 $f'(c_2)>0$.

过点$(c_2,f(c_2))$作曲线 $y=f(x)$的切线，其方程为

$$Y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

易知

$$\lim_{x\to+\infty} Y(x)=+\infty,$$

而 $f(x)-Y(x)>0$,从而应有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

这与原设条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾.同样，对于 $f''(x)<0$ 的情况也可推出以上结论.

于是，在区间$(x_0,+\infty)$内至少有一点 ξ,使

$$f''(\xi)=0.$$

*) 达布定理指：若函数 $g(x)$在$[a,b]$内有有限的导函数，且 $g'(a)g'(b)<0$,则在(a,b)内至少有一点 c,使

$$g'(c)=0.$$

其证法是：不妨设 $g'(a)<0$,$g'(b)>0$,则在 a 右边且与 a 充分近的点 x,有 $g(a)>g(x)$;在 b 左边且与 b 充分近的点 x,有 $g(x)<g(b)$;由此可知 $g(x)$在$[a,b]$上的最小值必在(a,b)内某点 c 达到，从而必有 $g'(c)=0$.

在本题中，可设 $g(x)=f'(x)$,则由 $g'(a)=f''(a)<0$ 及 $g'(b)=f''(b)>0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在，使 $g'(c)=0$,即 $f''(c)=0$.

§9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则(未定形$\frac{0}{0}$的求值法) 若:(1) 函数 $f(x)$与$g(x)$在 a点的某邻域 U_s内*有定义并且是连续的(此处 a为数字或符号∞),并且当 $x\to a$时,这两个函数都趋近于零:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0;$$

(2)在 a点的邻域 U_s 内,除 a点而外,在其余各点导函数 $f'(x)$与$g'(x)$都存在,并且当 $x\neq a$时,二者不同时为零;(3)有限或无穷的极限值$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在,则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

洛比塔第二法则(不定形$\frac{\infty}{\infty}$的求值法) 若:(1) 当 $x\to a$时,函数$f(x)$与 $g(x)$二者都趋于无穷大:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

其中 a为有限数或符号∞;

(2) 对于属于 a点的邻域 U_s 而异于 a 的一切 x 值,导函数 $f'(x)$与 $g'(x)$都存在,并且当 $x\in U_s$ 及 $x\neq a$时,

$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0;$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法,可使未定形 $0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,1^{∞},0^0,∞^0 等的求值法化为前面两个类型的未定形:

$$\frac{0}{0}\quad 与\quad \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值:

【1323】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{2x\tan x+x^2\sec^2 x}$

---

* 所谓点 a的邻域 U_s系指适合于不等式

(1)$|x-a|<\varepsilon$,若 a为一个数及(2)$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,若 a为符号∞,x 的集合.

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2\tan^2 x+2x\tan x+x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2\dfrac{x}{\tan x}+\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)^2}=-\frac{1}{3}.$$

【1337】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,n>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{ae^{ax}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{a^n e^{ax}}=0.$

以上是就 n 为正整数的情形解得的.若 n 不是正整数,则

$$[n]<n<[n]+1.$$

于是,
$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}}<\frac{x^n}{e^{ax}}<\frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}}\quad(x>1).$$

而左右两端当 $x\to+\infty$ 时,上面已证明它们的极限为零.因此,中间的极限也为零.于是,对于任意大于零的实数 a 和 n,均有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}=0.$$

【1341】 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x$ $(\varepsilon>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=-\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0.$

【1343】 $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}$

解 $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}=\lim\limits_{x\to+0}e^{(x^x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to+0}e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}$.

由于
$$\lim_{x\to+0}x\ln x=0^{*)},\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1$$

及
$$\lim_{x\to+0}(x\ln^2 x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{2}{x}\ln x}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-2x\ln x)=0,$$

故
$$\lim_{x\to+0}\{(e^{x\ln x}-1)\ln x\}=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot x\ln^2 x\right\}=1\cdot 0=0.$$

于是,$\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}=\lim\limits_{x\to+0}e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}=e^0=1$.

*) 利用 1341 题的结果.

【1347】 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x-2}}{-\dfrac{\pi}{2}\csc^2\dfrac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

所以,$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

【1348】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\csc^2 2x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=-1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\mathrm{e}^{-1}$.

【1354】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

【1359】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$

$=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=-\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1+x)^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

【1367】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\mathrm{ch}\,x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}\,x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}\,x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\mathrm{ch}\,x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}\,x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}\,x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{th}\,x}{\mathrm{sh}\,x\left[\frac{1}{m}(\mathrm{ch}\,x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{1}{n}(\mathrm{ch}\,x)^{\frac{1}{n}-1}\right]}$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\dfrac{mn}{n-m}\quad(n\neq m)$.

【1373】 证明：若函数 $f(x)$的二阶导函数 $f''(x)$存在，则

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证 当 $h\to 0$时，$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to 0$及 $h^2\to 0$，且分子、分母(视为 h的函数)都有导数，又注意到分母的导数$2h\neq 0$($h\to 0$但 $h\neq 0$)，故对$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$可用洛比塔法则，并且继续运算，最后得证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

【1374】 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}(\cos x+2\sin x)+\mathrm{e}^{-x^2}\sin^2 x}{\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)}$.

解 (1) 分子、分母分别求导数，得商为

$$\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当 $x\to 0$时，极限不存在，因此洛比塔法则不能适用.但是，原极限是存在的. 事实上，函数

$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时，$\frac{x}{\sin x}\to 1$ 及 $x\sin\frac{1}{x}\to 0$，于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0.$$

(2) 分子、分母分别求导数，得商为

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

当 $x\to\infty$ 时，上述函数的极限不存在，因此洛比塔法则不能适用. 但是，原极限是存在的. 事实上，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

(3) 如果运用洛比塔法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x-2xe^{-x^2}\sin^2 x+e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}e^{-x}+xe^{-x^2+x}\sin x-e^{-x^2+x}\cos x\right)=0.$$

这个结果是错误的. 事实上，若取 $x_n=n\pi+\frac{3\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=+\infty$. 对于叙列 $\{x_n\}$，原式的分母 $e^{-x_n}(\cos x_n+\sin x_n)=\sqrt{2}e^{-x_n}\cdot\sin\left(x_n+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}\sin(n+1)\pi=0$，而分子不为零，此时原式的极限不存在，从而对于 $x\to+\infty$，原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 时，虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为零，但其导函数在点列 $x_n=n\pi(n=1,2,\cdots)$ 上两者同时出现了零点. 因此，一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件；另一方面也不允许在求极限过程中，用 $\sin x$ 作除数，上、下约分后再求极限.

【1375】 设有一弓形，其弦为 b，矢为 h，又有内接于此弓形之内的等腰三角形，若当 R 不变时弓形的弧趋于零，求弓形面积与内接三角形面积之比. 利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式：

$$S\approx\frac{2}{3}bh.$$

解 如图 1375 所示. $AB=b$，$DC=h$，$\angle AOB=\alpha$，$\triangle ABC$ 为内接等腰三角形，其面积为

$$\frac{1}{2}bh=R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$

弓形面积为 $\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$.

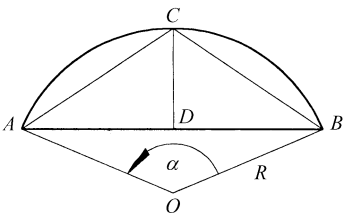

图 1375

当弧长趋于零时，α 趋于零，于是，弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}{R^2\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right]}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\right]}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\alpha}{4}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\left[\frac{\alpha}{2}\right]^2}{\frac{3\alpha}{4}\cdot\frac{\alpha}{4}}=\frac{4}{3}.$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S\approx\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}bh=\frac{2}{3}bh.$$

§10. 台劳公式

1.台劳局部公式 若(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x-x_0|<\varepsilon$ 内有定义;(2)于此邻域内有一直到 $(n-1)$ 阶的导函数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$;(3)$n$ 阶导函数 $f^{(n)}(x)$ 于 x_0 点存在,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o(|x-x_0|^n),\tag{1}$$

其中 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1,\cdots,n)$.

特例,当 $x_0=0$ 时,有:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(|x|^n).\tag{2}$$

在所示的条件下,(1)式是惟一的.

从台劳局部公式(2),得出下列 5 个重要的展开式:

Ⅰ. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

Ⅱ. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$;

Ⅲ. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

2.台劳公式 若函数 $f(x)$ (1)在闭区间 $[a,b]$ 上有定义;(2)在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x),\cdots,f^{n-1}(x)$;(3)当 $a<x<b$ 时,有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)\quad(\underline{\text{拉格朗日余项公式}}),$$

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta_1(x-a)]}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n\quad(0<\theta_1<1)\quad(\underline{\text{哥西余项公式}}).$$

【1376】 将多项式

$$P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$$

表成二项式 $x+1$ 的正整数乘幂多项式.

解 $P'(x)=3+10x-6x^2$, $P'(-1)=-13$.

$P''(x)=10-12x$, $P''(-1)=22$.

$P'''(x)=-12$, $P'''(-1)=-12$.

$P^{(4)}(x)=0$, $P(-1)=5$.

按台劳公式有

$$P(x)=P(-1)+\frac{P'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3+R_4(x),$$

这里 $R_4(x)=0$,即展开式中的余项为零,将上述结果代入,即得

$$P(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

按变数 x 的正整数乘幂,写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项:

【1377】 $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于什么?

解 $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=(1+x+x^2)\dfrac{(1+x)}{1+x^3}=(1+x)(1+x+x^2)\cdot[1-x^3+o(x^6)]$

$=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$.

$f^{(4)}(0)=4!\cdot(-2)=-48$.

【1382】 $\dfrac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时.令 $\dfrac{e^x-1}{x}=1+\Delta$,则有

$$\Delta=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4),$$

其中 Δ 也很小.于是,

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+\Delta}=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(x^4).$$

注意到

$$\Delta^2=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72}+o(x^4),\quad \Delta^3=\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),\quad \Delta^4=\frac{x^4}{16}+o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4).$$

【1388】 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开式的前三项.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.

$f(1)=1$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$, $f''(1)=-\dfrac{1}{4}$.

于是,

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2).$$

【1391】 按分式 $\dfrac{1}{x}$ 的正整数乘幂展开函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x\ (x>0)$ 到含 $\dfrac{1}{x^3}$ 的项.

解 由于 $\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$,

于是, $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=x\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-x=\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

【1393】 设:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)\qquad(0<\theta<1).$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$.证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

证 按题设,我们有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0<\theta<1$.又因 $f^{(n+1)}(x)$存在,故

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$

比较上面两式,得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),$$

从而有

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}.$$

由于$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x)\neq 0$,故由上式知$\lim\limits_{h\to 0}\theta$存在,并且

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

【1394】 估计下列近似公式的绝对误差:

(3) $\tan x\approx x+\frac{x^3}{3}$ 当$|x|\leqslant 0.1$.

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(0<\theta<1).$$

(3) 由 $f(x)=\tan x$,得

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x)=\frac{6}{\cos^4 x}-\frac{4}{\cos^2 x},\qquad f^{(4)}(x)=\frac{24\sin x}{\cos^5 x}-\frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{16}{\cos^2 x}+\frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},\qquad f^{(6)}(x)=\frac{32\sin x}{\cos^3 x}+\frac{240\sin x}{\cos^5 x}+\frac{720\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$是偶函数,又当 $0\leqslant x\leqslant 0.1$ 时,$f^{(6)}(x)\geqslant 0$,所以,$f^{(5)}(x)$在 $x=\pm 0.1$ 处达到最大值,注意到

$$f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{(4)}(0)=0,$$

及 $\cos^2 0.1=1-\sin^2 0.1>0.9,\quad |f^{(5)}(x)|\leqslant\frac{16}{0.9}+\frac{120\times 0.1^2}{0.9^3}<20.$

于是，$$|R_5(x)|\leqslant\frac{0.1^5}{5!}\times 20<2\times 10^{-6}.$$

【1396】 利用台劳公式近似地计算：

(2) $\sqrt[5]{250}$；(5) $\sin 18°$；

并估计误差.

解 (2) $\sqrt[5]{250}=3\left(1+\frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}\approx 3\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{243}\right)^2\right]\approx 3.0171;$

$$\Delta<3\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^3\approx 3.45\times 10^{-6}.$$

(5) $\sin 18°\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 0.309017,\quad \Delta<\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7\approx 6\times 10^{-8}.$

【1397】 计算：

(1) e 准确到 10^{-9}；　(5) $\log_{10}11$ 准确到 10^{-5}.

解 (1) $\Delta=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\cdots\right)$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

要 $\Delta<10^{-9}$，只需 $n!n>10^9$，即只需 $n\geqslant 11$. 于是，

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}\approx 2.718281828.$$

(5) $\log_{10}11=1+\log_{10}(1+0.1),\quad \Delta<\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}.$

要 $\Delta<10^{-5}$，只需 $\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}<10^{-5}$，即只需 $n\geqslant 4$. 于是，

$$\log_{10}11\approx 1+\left[0.1-\frac{1}{2}(0.1)^2+\frac{1}{3}(0.1)^3-\frac{1}{4}(0.1)^4\right]\cdot\frac{1}{\ln 10}\approx 1.04139.$$

利用展开式Ⅰ～Ⅴ，求下列极限：

【1398】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

【1402】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{8x^{12}}+o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{6}.$$

当 $x\to 0$ 时，求出无穷小量 y 的形如 Cx^n（C 为常数）的主项，假设：

【1408】 $y=(1+x)^x-1$

解 $y=e^{x\ln(1+x)}-1=e^{x\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}-1=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-1$

$$=1+\left[x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]+o\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-1=x^2+o(x^2),$$

故主项为 x^2.

【1410】 当选择怎样的系数 a 与 b 时，量

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小？

解

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

$$=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5+o(x^6)\right]$$

$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5).$$

要此量对于 x 为 5 阶无穷小，当且仅当

$$\begin{cases}1-a-b=0,\\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{2b}{3}=0.\end{cases}$$

解之，得 $a=\frac{4}{3}$，$b=-\frac{1}{3}$.

【1412】 当 x 的绝对值为小量时，推出形如

$$x=\alpha\sin x+\beta\tan x$$

且准确到 x^5 项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

解

$$x=\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]+\beta\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right]$$

$$=(\alpha+\beta)x-\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)x^3+\left(\frac{\alpha}{120}+\frac{2\beta}{15}\right)x^5+o(x^5),$$

所以，

$$(1-\alpha-\beta)x+\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)x^3-\left(\frac{\alpha}{120}+\frac{2\beta}{15}\right)x^5+o(x^5)=0.$$

要此近似公式准确到 x^5 项，当且仅当

$$\begin{cases}1-\alpha-\beta=0,\\ \dfrac{\alpha}{6}-\dfrac{\beta}{3}=0.\end{cases}$$

解之，得 $\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$.

于是，近似公式为

$$x\approx\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x;$$

弧长＝中心角×半径，设中心角为 x，半径为 R，则弧长＝$Rx\approx\frac{2R}{3}\sin x+\frac{R}{3}\tan x$，此即小角度的弧长的近似公式.

§11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1.有极值的必要条件　若函数于点 x_0 的双侧邻域中有定义，并且对于某域：$0<|x-x_0|<\delta$ 内的一切点 x，有下列的不等式成立：

$$f(x)<f(x_0)\quad 或\quad f(x)>f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值).

在有极值的点导函数 $f'(x_0)=0$(假定它存在).

2.有极值的充分条件　第一法则：若(1)函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内有定义并且是连续的，且在 x_0 点，$f'(x_0)=0$ 或不存在(临界点)；(2)$f(x)$ 在范围：$0<|x-x_0|<\delta$ 内有有限值的导函数 $f'(x)$；(3)导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来：

	导函数的符号		结　论
	$x<x_0$	$x>x_0$	
Ⅰ	＋	＋	无极值
Ⅱ	＋	－	极大值
Ⅲ	－	＋	极小值
Ⅳ	－	－	无极值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$，并且在点 x_0 有下列条件成立：

$$f'(x_0)=0\quad 与\quad f''(x_0)\neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，就是说，当 $f''(x_0)<0$ 时，有极大值；当 $f''(x_0)>0$ 时，有极小值.

第三法则：设函数 $f(x)$ 于某区间 $|x-x_0|<\delta$ 内有导函数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$，并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 及

$$f^{(k)}(x_0)=0\quad (k=1,\cdots,n-1),\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

这时：(1)若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时有极小值；(2)若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3.绝对极值　在闭区间 $[a,b]$ 内，连续函数 $f(x)$，或于其临界点(就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点)，或于所给闭区间的端点 a 和 b，达到其最大(最小)值.

研究下列函数的极值：

【1417】　$y=x^m(1-x)^n$　(m 及 n 为正整数)

解　$y'=x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$，由 $y'=0$ 得

$$x=0,\quad x=1,\quad x=\frac{m}{m+n}.$$

(1) 若 m 为偶数，则

当 $0<x<\frac{m}{m+n}$ 时，$y'>0$，当 $x<0$ 时，$y'<0$，

所以，函数 y 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$.

(2) 若 m 为奇数，则 y' 在 $x=0$ 邻近不变号，故无极值.

(3) 不论 m、n 是奇数还是偶数时，由于

当 $0<x<\frac{m}{m+n}$ 时，$y'>0$，当 $\frac{m}{m+n}<x<1$ 时，$y'<0$，

所以，函数 y 在 $x=\frac{m}{m+n}$ 处有极大值 $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

(4) 同理，容易得知：若 n 为偶数时，则当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$. 若 n 为奇数，则当 $x=1$ 时函数 y 无极值.

【1423】 函数

$$f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x) \quad (n\text{为自然数}),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0)\neq 0$. 研究此函数在点 $x=x_0$ 的极值.

解 由于 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续且 $\varphi(x_0)\neq 0$，所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 于是，$f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性有关.

(1) 若 n 为奇数，则经过 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值变号，所以在 $x=x_0$ 时没有极值.

(2) 若 n 为偶数，则 $(x-x_0)^n>0$ $(x\neq x_0)$. 因而，当 $\varphi(x_0)>0$ 时，则

$$f(x)>f(x_0)=0 \quad (0<|x-x_0|<\delta),$$

所以，当 $x=x_0$ 时有极小值 $f(x_0)=0$.

当 $\varphi(x_0)<0$ 时，则

$$f(x)<f(x_0)=0 \quad (0<|x-x_0|<\delta),$$

所以，当 $x=x_0$ 时有极大值 $f(x_0)=0$.

【1425】 可否断定下面的事实：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值，则在此点某充分小邻域内，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升，而右侧下降？

解 不能断定. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时,} \\ 2, & \text{当 } x=0 \text{ 时,} \end{cases}$$

则 $f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)<0 \quad (x\in(-\delta,\delta),\ x\neq 0)$.

所以，在 $x=0$ 点有极大值 $f(0)=2$. 易知

$$f'(x)=\cos\frac{1}{x}-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) \quad (x\neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负，故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的(时上升时下降).

求下列函数的极值：

【1440】 $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

解 $y'=-\sin x(1+2\cos x)$，令 $y'=0$ 得 $x=k\pi$ 或 $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$. 因为

$$y''=-\cos x-2\cos 2x,\quad y''\big|_{x=k\pi}=(-1)^{k+1}-2<0,\quad y''\big|_{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi}=\frac{1}{2}+1>0.$$

所以，

当 $x=k\pi$ 时有极大值 $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$；

当 $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{4}$.

【1444】 $y=|x|e^{-|x-1|}$.

解 当 $x<0$ 时，$y=-xe^{x-1}$，$y'=-(x+1)e^{x-1}$. 令 $y'=0$ 得 $x=-1$.因为

当 $x<-1$ 时，$y'>0$，当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=e^{-2}\approx 0.135$.

又当 $0<x<1$ 时，有

$$y=xe^{x-1},\quad y'=(x+1)e^{x-1}>0,$$

所以，当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$.

而当 $x>1$ 时，有

$$y=xe^{1-x},\quad y'=(1-x)e^{1-x}<0.$$

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

求下列函数的最大值和最小值：

【1447】 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在闭区间 $[-10,10]$ 上.

解 由于 $f(x)\geqslant 0$，故对于在区间 $[-10,10]$ 上能使 $f(x)=0$ 的点取得最小值.由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1,2$.即当 $x=1,2$ 时，函数取得最小值 $m=0$.其次，

$$f'(x)=(2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-2x+3),$$

当 $1<x<\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $\frac{3}{2}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，所以，当 $x=\frac{3}{2}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4}$，于是，$M=\max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right),f(-10),f(10)\right\}=132$.

求下列函数的下界(inf)与上界(sup)：

【1454】 求函数 $f(\xi)=\frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x<\xi<+\infty$ 内的下界与上界，作出下列函数的图形：

$$m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty}f(\xi)\quad 及\quad M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty}f(\xi).$$

解 由于 $f(-3)$，$f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值，又 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}f(\xi)=0$，于是，

当 $-\infty<x\leqslant -3$ 时，$m(x)=f(-3)=\frac{1}{6}$，

当 $-3<x\leqslant -1$ 时，$m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$，

当 $-1<x<+\infty$ 时，$m(x)=0$；

当 $-\infty<x\leqslant 1$ 时，$M(x)=f(1)=\frac{1}{2}$，

当 $1<x<+\infty$ 时，$M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$.

$m(x)$及 $M(x)$的图形分别如图 1454(1)及图 1454(2)所示.

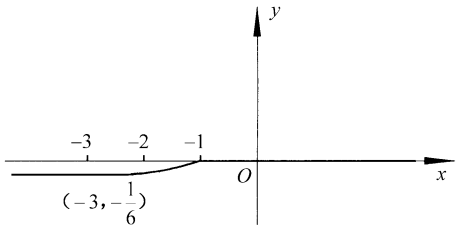

图 1454(1)

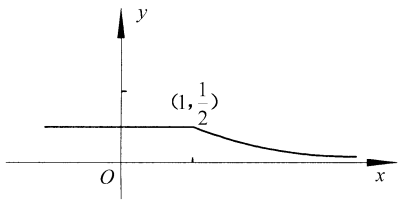

图 1454(2)

【1455】 求以下各叙列的最大项:

(1) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

解 (1) 经判断知当 $x=\frac{10}{\ln 2}$时,$f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$有极大值,并且是惟一的极值.从而,最大项

$$\max\left\{\frac{n^{10}}{2^n}\right\}=\max\left\{\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}},\frac{N^{10}}{2^N},\frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right\},$$

其中 $N=\left[\frac{10}{\ln 2}\right]=14$.于是,最大项为

$$\max\left\{\frac{n^{10}}{2^n}\right\}=\max\left\{\frac{13^{10}}{2^{13}},\frac{14^{10}}{2^{14}},\frac{15^{10}}{2^{15}}\right\}=\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1.77\times 10^7.$$

【1456】 证明下列不等式:

(2) 若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $p>1$, 则$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

证 (2) 设 $f(x)=x^p+(1-x)^p$,经判断知 $f\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2^{p-1}}$为$0\leqslant x\leqslant 1$ 上的惟一的极小值,而边界值 $f(0)=f(1)=1$,所以,

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1.$$

【1457】 求多项式

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间$[-2,1]$上"与零的差",就是求

$$E_p=\sup_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|.$$

解 $P'(x)=2(x-1)(2x^2+2x-1)$.

令 $P'(x)=0$ 得 $x=1$ 或$\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$,所以,

$$E_p=\max\left\{|P(-2)|,|P(1)|,\left|P\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}\right|,\left|P\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}\right|\right\}$$

$$=\left|P\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}\right|=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4.85.$$

【1459】 数 $\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$称为函数 $f(x)$及 $g(x)$于闭区间$[a,b]$上的绝对差.求函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^3$ 在闭区间$[0,1]$上的绝对差.

解 由于

$$f(x)-g(x)=x^2-x^3,\quad f'(x)-g'(x)=2x-3x^2,$$

从而令 $f'(x)-g'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $\frac{2}{3}$.又因

$$f''(x)-g''(x)=2-6x,\quad f''\left(\frac{2}{3}\right)-g''\left(\frac{2}{3}\right)=2-4=-2<0,$$

所以,当 $x=\frac{2}{3}$ 时 $f(x)-g(x)$取极大值;又由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)-g(x)\geqslant 0$ 所以,绝对差为

$$\Delta=f\left(\frac{2}{3}\right)-g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}.$$

确定下列各方程实根的数目,并定这些根所在的范围:

【1465】 $x^5-5x=a$.

解 设 $f(x)=x^5-5x-a$,则 $f'(x)=5x^4-5$.令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=\pm 1$.由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

$f'(x)>0$,$x\in(-\infty,-1)$,$x\in(1,+\infty)$,

$f'(x)<0$,$x\in(-1,1)$,

$f(-1)=4-a$,$f(1)=-4-a$,

故当 $a<-4$ 时,$f(-1)>0$,$f(1)>0$.因此,有且仅有一实根,位于$(-\infty,-1)$内;当$-4<a<4$时,$f(-1)>0$,$f(1)<0$,此时有三个实根,分别位于$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$和$(1,+\infty)$内;当 $a>4$ 时,$f(-1)<0$,$f(1)<0$.因此,有且仅有一实根位于$(1,+\infty)$内.

【1466】 $\ln x=kx$.

解 当 $k=0$ 时,方程显然仅有一个根 $x=1$.因此,不妨设 $k\neq 0$.令 $f(x)=\ln x-kx(x>0)$,则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-k.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=\frac{1}{k}$.由于

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

故曲线的图形始终呈凸状.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$.

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-1,$$

故当 $k>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$,此时方程无根.

当 $0<k<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f\left(\frac{1}{k}\right)>0$,因此,方程有两个实根,分别位于$\left(0,\frac{1}{k}\right)$和$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$内.

当$-\infty<k<0$时,由于$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$,$f(1)=-k>0$,$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0$,故此时方程有且仅有一实根位于$(0,1)$内.

【1468】 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$\sin^3 x\cdot\cos x=a$.

解 当 $a=0$ 时,方程显然有实根 $x=0,\frac{\pi}{2}$ 或 π.因此,不妨设 $a\neq 0$.令 $f(x)=\sin^3 x\cos x-a$,则 $f'(x)=3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x$.

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$.由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,\quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,\quad f(0)=f(\pi)=-a,$$

并且

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x)<0$.

于是,当 $|a|<\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时,方程有两个实根位于 $(0,\pi)$ 内;当 $|a|>\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时,方程无实根.

【1470】 在什么条件下方程 $x^3+px+q=0$ 有:

(1) 一个实根; (2) 三个实根. 在平面 (p,q) 上描绘对应的范围.

解 设 $f(x)=x^3+px+q$,则 $f'(x)=3x^2+p$.若 $p\geqslant 0$,则 $f'(x)>0(x\neq 0)$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增大的,并且显然 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,故 $f(x)=0$ 有惟一实根.

若 $p<0$,令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$.在 $(-\infty,x_2]$ 和 $[x_1,+\infty)$ 上 $f(x)$ 严格增大,在 $[x_2,x_1]$ 上 $f(x)$ 严格减小.

因此,若 $f(x_1)f(x_2)>0$,则方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根.若 $f(x_2)>0$, $f(x_1)<0$,则方程 $f(x)=0$ 恰有三个实根.

由于

$$f(x_1)=-\frac{p}{3}\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

$$f(x_2)=\frac{p}{3}\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

故 $f(x_1)f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p\geqslant 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1)<0$ 及 $f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

此即方程有三实根的条件.

如图 1470 所示,曲线 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ 的左右上方是方程仅有一实根的 (p,q) 域,以阴影表之;而曲线的下方则是方程有三实根的 (p,q) 域,以不具阴影表之.

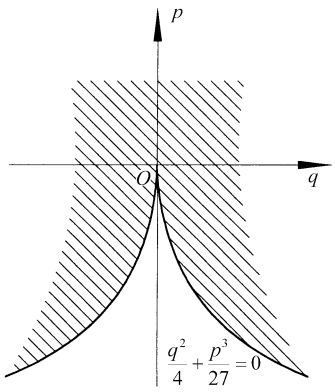

图 1470

§12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y=f(x)$的图形，必须：(1)确定此函数的存在域；并研究函数在其存在域之边界上各点之性质；(2)查明函数的对称性和周期性；(3)求出函数的不连续点及连续的区间；(4)确定函数的零值点及同号区间；(5)求出极值点及查明函数上升和下降的区间；(6)确定拐点及函数图形凸凹的区间；(7)若有渐近线存在则求出渐近线；(8)指出函数图形的各种特性.

作出下列函数的图形：

【1473】 $y=(x+1)(x-2)^2$.

解 $y'=3x(x-2)$，令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 2； $y''=6x-6$，令 $y''=0$ 得 $x=1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=0$ 时，$y=4$； $x=1$ 时，$y=2$； $x=2,-1$ 时，$y=0$. (图 1473)

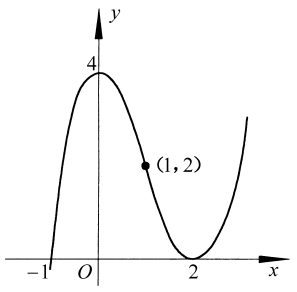

图 1473

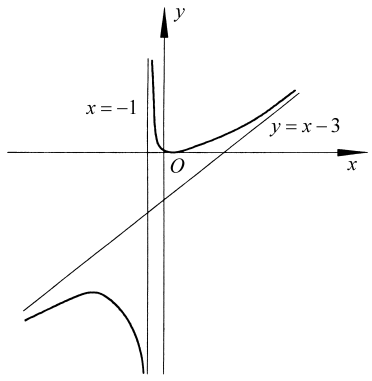

图 1477

【1477】 $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

解 零点处：$x=0$. 不连续点：$x=-1$. 斜渐近线：$y=x-3$，事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-3.$$

垂直渐近线：$x=-1$. $y'=\dfrac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$.

令 $y'=0$，得 $x=0$，或 $x=-4$. $y''=\dfrac{12x^2}{(1+x)^5}$.

当 $x<-1$ 时，$y''<0$，图形呈凸状；当 $x>-1$ 时，$y''>0$，图形呈凹状；

又 $y''\big|_{x=-4}<0$，故当 $x=-4$ 时有极大值 $y=-9\frac{13}{27}$；由于 y' 经过 $x=0$ 从负变到正，故当 $x=0$ 时取得极小值 $y=0$.（图 1477）

【1483】 $y=\frac{1}{1+x}-\frac{10}{3x^2}+\frac{1}{1-x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点处：$x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm0.79$.

$y'=\frac{4(8x^4-10x^2+5)}{3x^3(1-x^2)^2}$，$y'=0$ 无实根，无极值点.

$y''=\frac{4(24x^6-42x^4+45x^2-15)}{x^4(1-x^2)^3}$，令 $y''=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm0.71$. 经判别，此为拐点，相应纵坐标 $y=-2\frac{2}{3}$.

渐近线：$x=0$，$x=-1$，$x=1$ 和 $y=0$.

当 $x>0$ 时，$y'>0$，曲线上升.

当 $0<x<0.71$ 时，$y''<0$，图形呈凸状.

当 $0.71<x<1$ 时，$y''>0$，图形呈凹状.

当 $1<x<+\infty$ 时，$y''<0$，图形呈凸状.

图形如图 1483 所示.

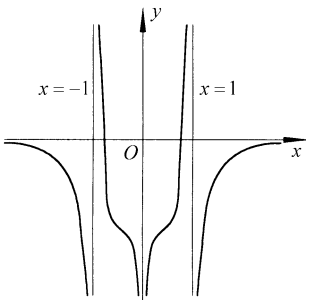

图 1483

【1491】 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

间断点：$x=\pm1$.

$y'=\frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}$，令 $y'=0$，得 $x=\pm\sqrt{3}$.

当 $x=\pm1$ 时，$y'=\infty$.

$y''=-\frac{2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}$，令 $y''=0$ 得 $x=0$ 或 ±3.

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	−	∞	−	−	−	∞	−	0	+	+	+
y''	+	0	−	−	−	∞	+	0	−	∞	+	+	+	0	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	间断点	↘	拐点	↘	间断点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线：$x=-1$，$x=1$.

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx\pm1.38$；

当 $x=\pm 3$ 时，$y=\pm 1\frac{1}{2}$.

图形如图 1491 所示.

【1501】 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 由于

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x$$
$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}(3+\cos 4x),$$

故函数的周期 $T=\frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内讨论图形.

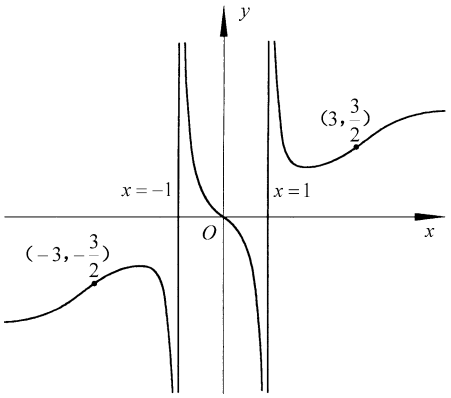

图 1491

$y'=-\sin 4x$. 令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $\pm\frac{\pi}{4}$.

$y''=-4\cos 4x$. 令 $y''=0$，得 $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{8}$，$y_{1,2}=\frac{3}{4}$.

经判别：点 x_1 和 x_2 均为拐点；

当 $x=0$ 时有极大值 $y=1$；

当 $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}$.

图形如图 1501 所示，图中主要点的坐标：

$$A(0,1),\quad B\left(\frac{\pi}{8},\frac{3}{4}\right),\quad C\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right).$$

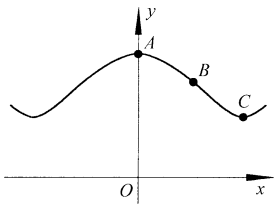

图 1501

【1503】 $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

解 利用 $\sin(\pi+x)=-\sin x$，易知函数的周期 $T=\pi$. 在一周期 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形.

不连续点：$x=\frac{3\pi}{4}$.

零点处：$x=0$ 或 π.

渐近线：$x=\frac{3\pi}{4}$.

$$y'=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0$$，无极值，函数图形上升.

$$y''=-\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$，令 $y''=0$ 得 $x=\frac{\pi}{4}$，对应的 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

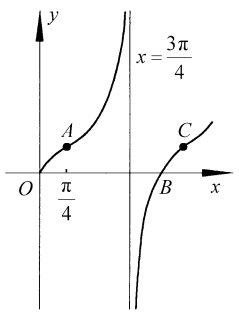

图 1503

经判别为拐点. 图形如图 1503 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad B(\pi,0)\text{和 }C\left(\frac{5\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

【1505】 $y=2x-\tan x$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x\approx\pm0.37\pi,\cdots$.

对称中心：$(k\pi,2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

渐近线：$x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$y'=2-\sec^2 x$，令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ 或 $x=-\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

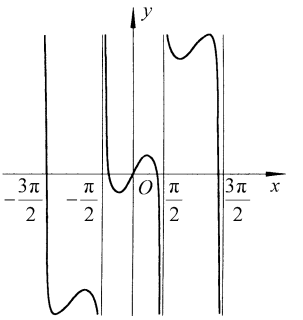

图 1505

经判别：

当 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ 时，有极大值 $y=\dfrac{\pi}{2}-1+2k\pi$；

当 $x=-\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$ 时，有极小值 $y=-\left(\dfrac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)$

$(k=0,1,2,\cdots)$.

$y''=-2\sec^2 x\tan x$，令 $y''=0$ 得 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

经判别此为拐点.图形如图 1505 所示(仅描绘从$-\dfrac{3\pi}{2}$到$\dfrac{3\pi}{2}$区间内的图形).

【1512】 $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 存在域：$x>0$. 零点处：$x=1$. 渐近线：$x=0(x\to+0)$，$y=0(x\to+\infty)$.

$y'=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$，令 $y'=0$ 得 $x=e^2\approx7.39$.经判别知此时有极大值 $y=\dfrac{2}{e}\approx0.74$.

$y''=\dfrac{3\ln x-8}{4x^{\frac{5}{2}}}$，令 $y''=0$ 得

$$x=e^{\frac{8}{3}}\approx14.39,$$

经判别此为拐点，此时 $y=\dfrac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\approx0.70$.

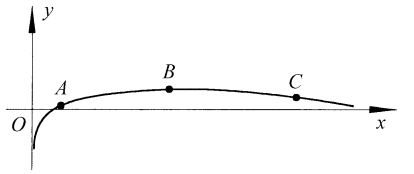

图 1512

图形如图 1512 所示.图中主要点的坐标：

$A(1,0)$， $B(7.39,0.74)$， $C(14.39,0.70)$.

【1527】 $y=x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x>0$. 渐近线：$y=1$.事实上，$k=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}-1}=0$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

当 $x=+0$ 时有边界的极小值 $y=0$. $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.令 $y'=0$ 得 $x=e$.

当 $x<e$ 时，$y'>0$，图形上升，当 $x>e$ 时，$y'<0$，图形下降.

当 $x=e$ 时有极大值 $y=e^{\frac{1}{e}}\approx1.445$. $y''=x^{\frac{1}{x}-4}(1-2\ln x+\ln^2 x-3x+2x\ln x)$，

令 $y''=0$ 得 $x\approx e^{1.47}(\approx4.35)$.

当 $0<x<e^{1.47}$ 时，$y''<0$，图形是凸的.

当 $x>e^{1.47}$ 时，$y''>0$，图形是凹的，故 $x=e^{1.47}$ 是拐点，$y\approx1.402$. 图形如图 1527 所示.图中各点位置：

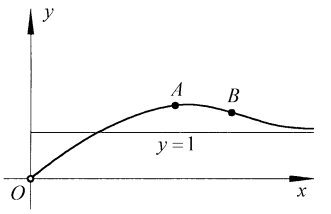

图 1527

$A(e,1.445)$， $B(4.35,1.402)$.

作出下列参数方程所表示的曲线：

【1532】 $x=2t-t^2$，　$y=3t-t^3$.

解　$x'_t=2(1-t)$，　$y'_t=3(1-t^2)$. 令 $x'_t=0$，$y'_t=0$，得 $t=\pm1$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t)\ (t\neq1).$$

令$\frac{dy}{dx}=0$ 得 $t=-1$，此时 $x=-3$，$y=-2$.

作下表：

t的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由$-\infty$上升到-3	由$+\infty$下降到-2
$(-1,1)$	+	+	由-3上升到 1	由-2上升到 2
$(1,+\infty)$	−	−	由 1 下降到$-\infty$	由 2 下降到$-\infty$

由于 $t=1\pm\sqrt{1-x}$，故存在域为 $x\leqslant1$，且图形有两支，又因$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1-t)}$，故当 $t>1$ 时图形呈凸状，而当 $t<1$ 时图形呈凹状.

当 $x=0$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y=0$ 或 $y=-2$.

当 $y=0$ 时，$t=0$，$+\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$，此时 $x=0$，0.464 或 -6.464.

图形如图 1532 所示.图中主要点的坐标：

$A(-6.464,0)$，　$B(-3,-2)$，　$D(1,2)$，　$E(0,-2)$.

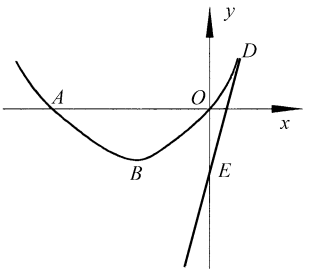

图 1532

【1535】 $x=t+e^{-t}$，$y=2t+e^{-2t}$.

解　$x'_t=\frac{e^t-1}{e^t}$，　$y'_t=\frac{2(e^{2t}-1)}{e^{2t}}$，　$\frac{dy}{dx}=\frac{2(e^t+1)}{e^t}$，　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2}{e^t-1}$.

作下表：

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty,0)$	−	−	由$+\infty$下降到 1	由$+\infty$下降到 1	+	+	上升，凹状
$(0,+\infty)$	+	+	由 1 上升到$+\infty$	由 1 上升到$+\infty$	+	−	上升，凸状

渐近线：$y=2x$.事实上，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2t+e^{-2t}}{t+e^{-t}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}[(2t+e^{-2t})-2t-2e^{-t}]=0.$$

当 $t=0$ 时，对应于曲线上的点 $A(1,1)$，此点的导数$\frac{dy}{dx}=4$. 当 $t=-\ln2$ 时，曲线与渐近线相交.图形如图 1535 所示.

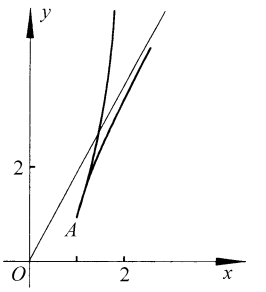

图 1535

把下列曲线方程变成参数式，然后作出这些曲线：

【1543】 $x^2y^2=x^3-y^3$.

解 设 $y=tx$,代入原方程,即得

$$x=\frac{1-t^3}{t^2},\quad y=\frac{1-t^3}{t}\quad (t\neq 0).\quad x'_t=-\frac{2+t^3}{t^3},\quad y'_t=-\frac{1+2t^3}{t^2}.\quad \frac{dy}{dx}=\frac{t(1+2t^3)}{2t^3}.$$

令 $x'_t=0$, $y'_t=0$ 及 x'_t, y'_t 趋于∞,得 $t=-\sqrt[3]{2}$, $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 0.

作下表:

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	−	+	由$+\infty$下降到$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由$-\infty$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	−	下降
$(-\sqrt[3]{2},-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$上升到$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	+	上升
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0)$	+	−	由$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$+\infty$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$下降到$-\infty$	−	下降
$(0,+\infty)$	−	−	由$+\infty$下降到$-\infty$	由$+\infty$下降到$-\infty$	+	上升

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt[3]{2}}=\infty$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=0$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=1$.

图形通过点

$$A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}},-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right),\quad B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}},-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right),\text{及 } O(0,0).$$

如图 1543 所示.

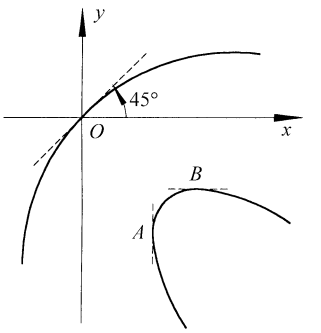

图 1543

作出下列用极坐标$(\varphi, r)$$(r\geqslant 0)$表示的函数的图形:

【1546】 $r=a+b\cos\varphi\ (0<a\leqslant b)$.

解 当 $a=b$时,$r=a(1+\cos\varphi)$,这就是心脏线,如图 1546 所示.

当 $0<a<b$时,其几何轨迹叫做蚶线,由于 $r(-\varphi)=r(\varphi)$,故图形关于极轴对称.由于当 $r\geqslant 0$时,

$$|\varphi|\leqslant\alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right),$$

故当 $\varphi=0$时 r有极大值 $r=a+b$;当 $\varphi=\pm\alpha$时 r有边界的极小值 $r=0$.又由于 $r'=-b\sin\varphi<0$,故当 φ由 0 变到 α时,r由$a+b$变到 0.

当 $r<0$时,$\alpha<|\varphi|\leqslant\pi$,仿照上述讨论,$r$由 0 下降到$a-b$.

极点 O为二重点,如图 1546 所示.如果不考虑 $r<0$,则极点 O不是二重点.

作出下列曲线族的图形(a表参变量)：

【1554】 $y=\frac{x}{2}+e^{-ax}$.

解 原方程可变形为

$$y-\frac{x}{2}=e^{-ax}.$$

因此，若作仿射变换

$$\begin{cases}\xi_1=-\frac{x}{2}+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1=e^{-a\xi_2}$$

当 $a\neq0$ 时，表示一指数曲线族；当 $a=0$ 时，表示直线 $y=1+\frac{x}{2}$. 全族曲线均通过点$(0,1)$.

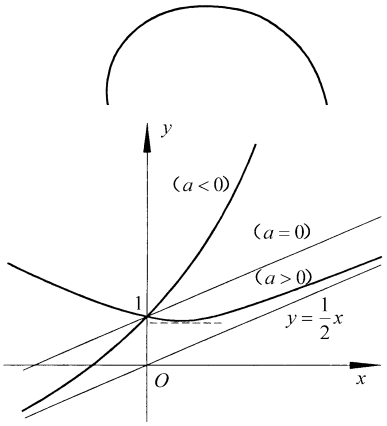

图 1554

$y'=\frac{1}{2}-ae^{-ax}$. 令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{a}\ln 2a$.

$y''=a^2e^{-ax}>0$，故曲线呈凹状. 若 $a>0$，则当 $x=\frac{1}{a}\ln 2a$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2a}(1+\ln 2a)$；

若 $a\leqslant 0$，则因 $y'>0$，故函数 y 是增大的.

现求渐近线：当 $a>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{xe^{ax}}\right)=\frac{1}{2},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=0,$$

故渐近线为 $y=\frac{x}{2}$.

同法求得当 $a<0$ 时，渐近线也为 $y=\frac{x}{2}$，然此时应考虑 $x\to-\infty$. 如图 1554 所示.

§13. 函数的极大值与极小值问题

【1563】 当有怎样的长度大小时，容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积？

解 设底半径为 x，则高为 $H=\frac{V}{\pi x^2}$，故圆柱的表面积为

$$S(x)=2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}+2\pi x^2.$$

$$S'(x)=\frac{4\pi x^3-2V}{x^2},$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)>0$ 知，当 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，$S(x)$ 有极小值

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值，故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，而高为 $\frac{V}{\pi x^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小表面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

【1569】 于半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱.

解 设圆柱的底半径为 r，高为 $2h$，则有

$$r^2+h^2=R^2,$$

即 $h=\sqrt{R^2-r^2}$. 按题设，求函数

$$f(r)=2\pi r^2 h=2\pi r^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}$$

何时最大.

$f'(r)=\frac{2\pi r(2R^2-3r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$，此时 $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$，且

$$f(r)=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知，此值即为圆柱体体积的最大值.

【1572】 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设，只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$，此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知，$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大，因此，所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$，高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$，体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

【1578】 一物体为直圆柱形，其上端为半球形. 若此物体的体积等于 V，问这物体的尺寸如何，才有最小表面积？

解 设 r 为圆柱的底半径，h 为圆柱的高，则按题设，我们有

$$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2 h \quad 或 \quad h=\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x)=3\pi r^2+2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{2V}{r}.\quad S'(r)=\frac{10}{3}\pi r-\frac{2V}{r^2},$$

令 $S'(r)=0$，得 $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$，此时 $h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知，$S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值. 因此，当 $r=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小.

【1579】 露天水沟的横断面为等腰梯形. 若沟中流水的横断面等于 S，水面的高等于 h，问水沟侧边的倾角 φ 如何，才使横断面被水浸湿的周长为最小？

解 浸湿周长 $l=a+2h\csc\varphi$，其中 a 为底边长，而截面积

$$S=\frac{1}{2}(2a+2h\cot\varphi)h=ah+h^2\cot\varphi.$$

于是，$$l=2h\csc\varphi+\frac{S}{h}-h\cot\varphi.$$

由$\frac{dl}{d\varphi}=-\frac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{h}{\sin^2\varphi}=0$，得$\cos\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi=60^\circ$.因为

$$\left.\frac{d^2l}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=60^\circ}=\left.\frac{2h\sin^3\varphi-h\sin 2\varphi(1-2\cos\varphi)}{\sin^4\varphi}\right|_{\varphi=60^\circ}>0,$$

所以，当$\varphi=60^\circ$时，横截面被水浸湿的周长为最小.

【1586】 设圆桌面的半径为a，应当在圆桌面中央上面怎样高的地方安置电灯，才可使其桌子边沿上的照度为最大？

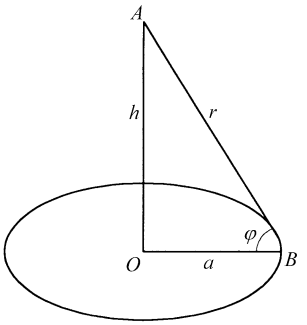

图 1586

解 如图 1586 所示.由物理学知，照度I为

$$I=k\frac{\sin\varphi}{r^2}=k\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}\quad(k\text{为常数}).$$

考虑函数$f(r)=\frac{r^2-a^2}{r^6}=\frac{1}{r^4}-\frac{a^2}{r^6}$何时最大，

$$f'(r)=-\frac{4}{r^5}+\frac{6a^2}{r^7}=\frac{6a^2-4r^2}{r^7},$$

令$f'(r)=0$得$r=\sqrt{\frac{3}{2}}a$.经判别可知，$f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$最大.因此，我们应在高$h=\sqrt{\frac{3}{2}a^2-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$的地方安置电灯，才可使桌子边沿上的照度为最大.

【1587】 向宽为a米的河修建一宽为b米的运河，二者成直角相交，问能驶进这运河的船，其最大的长度如何？

解 如图 1587 所示.

BC的长度为

$$l=a\csc\varphi+b\sec\varphi.\quad l'=\frac{b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi},$$

令$l'=0$得$\tan\varphi_0=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$或$\cot\varphi_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$，从而有

$$\csc\varphi_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}},\quad\sec\varphi_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\left.l'\right|_{\varphi=\varphi_0}=3\left(\frac{b}{\cos\varphi_0}+\frac{a}{\sin\varphi_0}\right)>0,$$

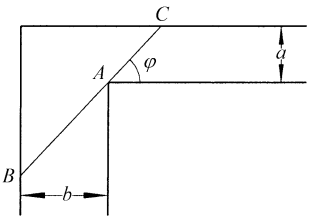

图 1587

因此，$\left.l\right|_{\varphi=\varphi_0}$为最小值，即船的最大长度为

$$\left.l\right|_{\varphi=\varphi_0}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

【1590】 有一茶杯，其形状为半径为a的半球，于茶杯中放一长为$l>2a$的棒，求棒的平衡位置.

解 取球心为坐标原点.当$2a<l\leqslant 4a$时，设棒的重心的纵坐标为y，棒对杯口所在平面的倾角为φ，则

$$y=-\left(2a\cos\varphi-\frac{l}{2}\right)\sin\varphi \quad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

当棒平衡时，y 最小，为此，求 y 的极值. 由 $y'_\varphi=-4a\cos^2\varphi+\frac{l}{2}\cdot\cos\varphi+2a=0$ 得

$$\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a} \quad \text{（负值不合适，舍去）}.$$

经判别可知，此时 y 取最小值，即当 $\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ 时，棒取平衡位置.

当 $l>4a$ 时，棒的重心必在半球心外，于是，此时棒失去平衡，无平衡位置.

§14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1. n 阶相切　有两曲线 $y=\varphi(x)$ 及 $y=\psi(x)$，若于点 x_0，

$$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0) \quad (k=0,1,2,\cdots,n) \quad \text{及} \quad \varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说明这两曲线于点 x_0 有<u>n 阶相切</u>（在严格的意义上讲！）. 当 $x\to x_0$ 时在这种情形有：

$$\varphi(x)-\psi(x)=O((x-x_0)^{n+1}).$$

2. 曲率圆　圆周

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

与已知曲线 $y=f(x)$ 有不低于 2 阶的相切，此圆称为在对应点的<u>曲率圆</u>. 这个圆的半径：

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为<u>曲率半径</u>，而量 $k=\frac{1}{R}$ 为<u>曲率</u>.

3. 渐屈线　曲率圆中心 (ξ,η)（曲率中心）

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y=f(x)$ 的<u>渐屈线</u>.

【1592】 应当怎样选择参数 a,b 和 c，才能使抛物线

$$y=ax^2+bx+c$$

于点 $x=x_0$ 与曲线 $y=e^x$ 有二阶的相切？

解　对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，在点 $x=x_0$ 有

$$y'\big|_{x=x_0}=2ax_0+b, \quad y''\big|_{x=x_0}=2a, \quad y'''=0.$$

按假设，应有

$$\begin{cases} ax_0^2+bx_0+c=e^{x_0}, \\ 2ax_0+b=e^{x_0}, \\ 2a=e^{x_0}, \end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{1}{2}e^{x_0}, \quad b=e^{x_0}(1-x_0), \quad c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right).$$

求下列曲线的曲率半径：

【1599】 内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，$y''=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$.于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|}=\left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right|=3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

【1603】 证明：二次曲线

$$y^2=2px-qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成比例.

证 曲线的曲率半径公式为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|,$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{|y^3y''|}$. 下面求 y^3y''：

因为 $y^2=2px-qx^2$，故在等式两端分别对 x 求两次导数，即得

$$2yy'=2p-2qx \quad 或 \quad yy'=p-qx, \tag{1}$$

$$yy''+y'^2=-q. \tag{2}$$

以 y^2 乘(2)式两端，并以(1)式及原二次曲线的表达式代入左右端，即得

$$y^3y''+(p-qx)^2=-q(2px-qx^2);$$

化简之，最后得

$$y^3y''=-p^2.$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{p^2}$ 为一常数.证毕.

【1604】 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

解 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\varphi)$，则由

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$$

可求得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2r'r'-rr''}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3},$$

其中 $r'=\frac{dr}{d\varphi}$，$r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}$.于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}.$$

求下列极坐标方程所表曲线的曲率半径：

【1608】 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

解 $r'=-\dfrac{a^2\sin 2\varphi}{r}$, $r''=-\dfrac{r^4+a^4}{r^3}$,

$$r^2+2r'^2-rr''=\frac{3a^4}{r^2},\quad (r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^6}{r^3}.$$

于是,曲率半径为

$$R=\frac{\dfrac{a^6}{r^3}}{\dfrac{3a^4}{r^2}}=\frac{a^2}{3r}.$$

求下列各曲线的渐屈线方程:

【1611】 抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线.

解 由于 $y'=\dfrac{p}{y}$, $y''=-\dfrac{p^2}{y^3}$,故曲率中心坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\dfrac{p}{y}\left(1+\dfrac{p^2}{y^2}\right)}{\dfrac{p^2}{y^3}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=3x+p,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y-\frac{1+\dfrac{p^2}{y^2}}{\dfrac{p^2}{y^3}}=-\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x=\frac{\xi-p}{3},\quad y^3=-p^2\eta. \tag{1}$$

由于 $y^6=8p^3x^3$,故将(1)式代入后,消去 x 及 y,即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2=8(\xi-p)^3.$$

【1616】 证明:摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线,仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cot\frac{t}{2},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}.$$

于是,

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=a(t-\sin t)+\frac{\cot\dfrac{t}{2}\cdot\left(1+\cot^2\dfrac{t}{2}\right)}{\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}}=a(t+\sin t),$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=a(\cos t-1).$$

令 $t-\pi=\tau$,即得

$$\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau),\quad \eta=-2a+a(1-\cos\tau).$$

此仍为摆线,显然,只是位置与原摆线不同而已.

§15. 方程的近似解法

1.比例法(弦位法) 若函数 $f(x)$于闭区间$[a,b]$上连续及

$$f(a)f(b)<0,$$

且当 $a<x<b$时,$f'(x)\neq 0$,则方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

于区间(a,b)内有一个而且仅有一个实根 ξ.可取下面的值作为此根的第一近似值:

$$x_1=a+\delta_1,$$

式中 $\delta_1=-\dfrac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$.

更进而对于区间(a,x_1)或(x_1,b)中,函数 $f(x)$在其两端异号的那一个区间运用这方法,得到根 ξ的第二近似值 x_2,由此类推.对于第 n近似值 x_n,下列公式正确:

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

式中 $m=\inf\limits_{a<x<b}|f'(x)|$,并且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi.$$

2.牛顿法(切线法) 若在闭区间$[a,b]$内 $f''(x)\neq 0$及 $f(a)f''(a)>0$,则可取数值

$$\xi_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根 ξ的第一近似值 ξ_1.

重复利用这个方法,很快就得到趋近于根 ξ的一系列近似值 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$,这些近似值的精确性可根据公式(2)来估计.

为了大略的确定方程的根,最好可作函数 $y=f(x)$的图形.

利用比例法,求下列方程的根(精确到 0.001):

【1618】 $x^4-x-1=0$.

解 设 $f(x)=x^4-x-1$.由于 $f(1)=-1$,$f(2)=13$,且当 $1<x<2$时,$f'(x)\neq 0$,故所给方程在(1,2)内有且仅有一实根 ξ_1,由求近似根的公式,依次求得该根的各次近似值为

$x_1=1.07$; $x_2=1.12$; $x_3=1.156$; $x_4=1.180$; $x_5=1.196$;

$x_6=1.205$; $x_7=1.217$; $x_8=1.220$; $x_9=1.221$.

由于 $f(1.221)=0.002$, $m_1=\inf\limits_{1<x<2}|f'(x)|=3$,因此,如果取 1.221 作为 ξ_1 的第九次近似值,其误差为

$$|1.221-\xi_1|\leqslant\frac{|f(1.221)|}{m_1}<0.001,$$

已达到所需的精确度.于是,所给方程的一近似根为 1.221.

又因 $f(-1)=1$,$f(-0.5)=-0.4375$,且当$-1<x<-0.5$时,$f'(x)\neq 0$,故所给方程在(−1,−0.5)内有且仅有一实根 ξ_2,依次求得其各次近似值为

$x_1=-0.652$; $x_2=-0.789$; $x_3=-0.706$; $x_4=-0.719$; $x_5=-0.723$; $x_6=-0.724$.

由于 $f(-0.724)=-0.001$，$m_2=\inf\limits_{-1<x<-0.5}|f'(x)|=1$，因此，如果取 -0.724 作为 ξ 的第六次近似值，其误差为

$$|-0.724-\xi|\leqslant\frac{|f(-0.724)|}{m_2}=0.001,$$

已达到所需的精确度.于是，所给方程的另一近似根为 -0.724.

由于 $f'(x)=4x^3-1=0$ 只有一实根，且 $f''(x)=12x^2>0(x\neq0)$，故所给方程仅有二实根，其余二根为一对共轭复根.

利用牛顿法，求下列方程的根（精确到所指定的程度）：

【1622】 $x\lg x=1$ （精确到 10^{-4}）.

解 曲线 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 只有一个交点.因此，所给方程只有一个实根.现确定其范围.设 $f(x)=x\lg x-1$，由于 $f(2.506)=-0.0004$，$f(2.507)=0.0005$，且当 $2.506<x<2.507$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故在 $(2.506,2.507)$ 内有且仅有一实根，切点选在 $(2.507,f(2.507))$.依次求得其各次近似值为

$$x_1=2.5064;\quad x_2=2.5062.$$

由于 $f(2.5062)=0.00002$，$m=\inf\limits_{2.506<x<2.507}|f'(x)|=|f'(2.506)|=0.84$，因此，如果取 2.5062 作为根的近似值时，其误差为

$$|2.5062-\xi|\leqslant\frac{|f(2.5062)|}{m}<0.0001,$$

已达到所需的精确度，故所求的惟一近似根为 2.5062.

【1627】 求方程

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$$

的二正根（精确到 10^{-3}）.

解 由 $y=\cot x$ 与 $y=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$ 的图形知交点有无穷个，我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2：

$$\frac{\pi}{2}<\xi_1<\pi,\quad\frac{3\pi}{2}<\xi_2<2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1.

设 $f(x)=\cot x-\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$，则在所考虑的区间内 $f'(x)=-\cot^2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}<0$，$f''(x)=\frac{2\cos x}{\sin^3x}-\frac{2}{x^3}<0$.又因 $f(2.0708)=0.0062$，$f(2.1708)=-0.0593$，故切点应选在 $(2.1708,f(2.1708))$ 处.用比例法与牛顿法联合求 ξ_1.重复应用，即得

$$x_1'=2.0803,\quad x_1=2.0923,$$

故 $2.0803<\xi_1<2.0923$.

$$x_2'=2.0815,\quad x_2=2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值，即可保证所需的精确度.于是，所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2.

由于 $f(5.9324)=0.0648$，$f(5.9424)=-0.0169$，故

$$5.9324<\xi_2<5.9424,$$

切点取$(5.9424, f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次,即得

$$x_1'=5.9403,\quad x_1=5.9404,$$

因此,取 5.940 作为 ξ_2 的近似值,即可保证所需的精确度.于是,所给方程的又一正根的近似值为 5.940.

第三章　不定积分

§1.　最简单的不定积分

1.不定积分的概念　若 $f(x)$为连续函数及 $F'(x)=f(x)$,则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

式中 C为任意常数.

2.不定积分的基本性质:

(1) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \mathrm{d}\Phi(x)=\Phi(x)+C$;

(3) $\int Af(x)\mathrm{d}x=A\int f(x)\mathrm{d}x$　(A=常数);

(4) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3.最简积分表:

Ⅰ. $\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$　($n\neq-1$);　　Ⅱ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$　($x\neq0$);

Ⅲ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\begin{cases}\arctan x+C,\\ -\operatorname{arccot}x+C;\end{cases}$　　Ⅳ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$;

Ⅴ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$　　Ⅵ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm1}|+C$;

Ⅶ. $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ ($a>0,a\neq1$);　$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$;

Ⅷ. $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;　　Ⅸ. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;

Ⅹ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2x}=-\cot x+C$;　　ⅩⅠ $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=\tan x+C$;.

ⅩⅡ. $\int\operatorname{sh}x\mathrm{d}x=\operatorname{ch}x+C$;　　ⅩⅢ. $\int\operatorname{ch}x\mathrm{d}x=\operatorname{sh}x+C$;

ⅩⅣ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2x}=-\coth x+C$;　　ⅩⅤ. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+C$.

4.积分的基本方法

(1) 引入新变数法　若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, 则

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C,$$

式中 $u=\varphi(x)$.

(2) 分项积分法　若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+\int f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(3)代入法　假设 $x=\varphi(t)$，式中 $\varphi(t)$及其导函数 $\varphi'(t)$为连续的，则得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(4) 分部积分法　若 u和 v 为 x 的可微分函数，则

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

利用最简积分表，求出下列积分*：

【1636】 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

【1638】 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$

【1646】 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C.$

【1670】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分：

【1679】 $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2}.$

解 $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C.$

【1683】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$

---

* 本章在叙述习题及其解答过程中，凡出现的函数，无论是被积函数还是原函数，均默认是在有意义的定义域上进行的.例如最简积分表Ⅰ中当 $n\leqslant-2$ 时，要求 $x\neq0$；Ⅳ中要求 $|x|\neq1$；Ⅴ中要求 $|x|<1$；以及Ⅵ中，当取负号时要求 $|x|>1$；等等，就未加声明.在题解中也有相当多的类似情况.因此，如无特别声明，在一般情况下，这些定义域是很容易被读者确定的，此处就不再予以一一指明.

《题解》作者注

【1687】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$.

解 由 $x(1+x)>0$ 知：$x>0$ 或 $x<-1$. 当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C;$$

当 $x<-1$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=-\int \frac{\mathrm{d}(-(1+x))}{\sqrt{(-x)(-(1+x))}}=-2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$$

$$=-2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)})+C.$$

总之，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\cdot\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

【1702】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x+2}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

【1707】 $\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x=(\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x)^2-2\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x=\operatorname{ch}^2 2x-\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x=\frac{1+\operatorname{ch}^2 2x}{2}$，

所以，得

$$\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{1}{4}\mathrm{d}(\operatorname{ch}2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\operatorname{ch}2x+\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x})+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}\right)+C.$$

【1712】 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C.$

【1713】 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)+C.$

【1720】 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int \frac{\mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$

$=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$

用分项积分法计算下列积分：

【1727】 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x=\int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x=\int [(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}]\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$

【1732】 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int [(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x^2)$

$=\frac{1}{2}\int [(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}]\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$

$=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$

【1740】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(|a|\neq|b|)$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{a^2-b^2}\int\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)+C.$

【1749】 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x.$

解 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

【1750】 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x.$

解 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\int(3+4\cos 2x+\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

【1758】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}=\int \sec^2 x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int(1+\tan^2 x)\mathrm{d}(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$

【1765】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}^2 x}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}^2 x}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)\mathrm{d}x=-(\coth x+\mathrm{th}\,x)+C.$

用适当的代换，求下列积分：

【1770】 $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$.

解 设 $2-5x^3=t$，则 $x^3=\frac{1}{5}(2-t)$，从而，$x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\mathrm{d}(x^3)=-\frac{1}{75}(2-t)\mathrm{d}t$，故得

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(2-t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{75}\int\left(2t^{\frac{2}{3}}-t^{\frac{5}{3}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+C=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$$

【1771】$^+$ $\int\cos^5 x\ \sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sin x=t$，则 $\cos^5 x\mathrm{d}x=(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}(\sin x)=(1-t^2)^2\mathrm{d}t$，故得

$$\int\cos^5 x\ \sqrt{\sin x}\mathrm{d}x=\int(1-t^2)^2t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{9}{2}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+C=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

【1773】 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x$.

解 设 $\tan x=t$，则 $\frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=(1+t^2)\mathrm{d}t$，故得

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x=\int(t^4+t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$$

【1776】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$.

解 设 $\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$，故得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C=\ln\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right)+C=x-2\ln(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^x})+C.$$

运用三角的代换 $x=a\sin t$，$x=a\tan t$，$x=a\sin^2 t$ 等等，求下列积分（参数为正的）：

【1779】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}$.

解 被积函数的存在域为 $x>\sqrt{2}$ 及 $x<-\sqrt{2}$，分别考虑.

(1) 当 $x>\sqrt{2}$ 时，可设 $x=\sqrt{2}\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$. 从而，

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{2\sec^2 t}{\sqrt{2}\tan t},\qquad \mathrm{d}x=\sqrt{2}\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t.$$

代入得

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}=2\int\sec^3 t\mathrm{d}t=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)^2\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2}+\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1-\sin^2 t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+C_1$$

$$=\tan t\cdot\sec t+\ln(\sec t+\tan t)+C_1=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$$

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$时,仍设 $x=\sqrt{2}\sec t$,但限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$.其余步骤与上相同,注意到,此时 $\sec t+\tan t<0$,因此,在对数符号里要加绝对值,即结果为

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C.$$

总之,当 $|x|>\sqrt{2}$时,

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C.$$

【1781】 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 被积函数的存在域为 $-\infty<x<+\infty$,因此,可设 $x=a\tan t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.从而,$dx=a\sec^2 t\,dt$,代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

【1782】 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

解 被积函数的存在域为 $-a\leqslant x<a$,因此,可设 $x=a\sin t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.从而,

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\frac{1+\sin t}{\cos t},\quad dx=a\cos t\,dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=a\int(1+\sin t)\,dt=a(t-\cos t)+C=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\quad(-a<x<a).$$

注意,上式在端点 $x=-a$ 也成立.即函数 $F(x)=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ 在点 $x=-a$ 的(右)导数等于被积函数 $f(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 在点 $x=-a$ 之值.事实上,由于 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $-a\leqslant x<a$ 连续,且 $F'(x)=f(x)$ 在 $-a<x<a$ 成立.故由中值定理知,当 $-a<x<a$ 时,有

$$\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=F'(\xi)=f(\xi),\quad -a<\xi<x.$$

由此可知,(右)导数

$$F'(-a)=\lim_{x\to-a+0}\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=\lim_{\xi\to-a+0}f(\xi)=f(-a).$$

用双曲线代换 $x=a\operatorname{sh}t$, $x=a\operatorname{ch}t$ 等等,求下列积分(参数为正的):

【1786】 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

解 被积函数的存在域为 $-\infty<x<+\infty$,因此,可设 $x=a\operatorname{sh}t$.从而,

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\operatorname{ch}t,\quad dx=a\operatorname{ch}t\,dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\operatorname{ch}^2 t\,dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t\right)+C.$$

注意到 $x+\sqrt{a^2+x^2}=a(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)=ae^t$,即

$$t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\quad 及\quad \mathrm{sh}2t=2\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2},$$

最后得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

【1788】$^+$ $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x.$

解 被积函数的存在域为 $x\geqslant a$ 及 $x<-a$.

(1) 当 $x>a$ 时,可设 $x=a\mathrm{ch}t$,并限制 $t>0$.从而,

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\mathrm{ch}t-1}{\mathrm{sh}t},\quad \mathrm{d}x=a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=a\int(\mathrm{ch}t-1)\mathrm{d}t=a\mathrm{sh}t-at+C_1=a\sqrt{\mathrm{ch}^2t-1}-at+C_1$$

$$=a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}+\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}+x)+C_2=\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})+C.$$

(2) 当 $x<-a$ 时,可设 $x=-a\mathrm{ch}t$,并限制 $t>0$.从而,

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\mathrm{ch}t+1}{\mathrm{sh}t},\quad \mathrm{d}x=-a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=-a\int(\mathrm{ch}t+1)\mathrm{d}t=-a\mathrm{sh}t-at+C_1$$

$$=-a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}-x)+C_2$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})+C.$$

总之,当 $|x|>a$ 时,

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=\mathrm{sgn}x\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|})+C.$$

用分部积分法,求下列积分:

【1793】 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

解 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=-\int\ln^2x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln^2x+\int\frac{1}{x}2\ln x\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\ln^2x-2\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{1}{x}\ln^2x-\frac{2}{x}\ln x+2\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}(\ln^2x+2\ln x+2)+C.$$

【1810】 $\int\sin x\ln(\tan x)\mathrm{d}x.$

解 $\int \sin x\ln(\tan x)\mathrm{d}x=-\int \ln(\tan x)\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x\ln(\tan x)+\int \cos x\cot x\sec^2 x\mathrm{d}x$

$=-\cos x\ln(\tan x)+\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=-\cos x\ln(\tan x)+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

【1815】 $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$

【1820】 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2+x^2)=\frac{1}{3}\int x\mathrm{d}[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}]$

$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$

于是,得

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

*) 利用 1786 题的结果.

【1824】 $\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解 记 $I_1=\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$, $I_2=\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

则
$$\begin{cases} I_1=\int \mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}(-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}})=-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+I_2, & ① \\ I_1=\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-I_2. & ② \end{cases}$$

由①+②即得

$$\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}+C.$$

【1825】 $\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解 同 1824 题②−①,即得

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}+C.$$

【1833】 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int \ln(\sin x)\mathrm{d}(\cot x)=-\cot x\ln(\sin x)+\int \cot^2 x\mathrm{d}x$

$=-\cot x\ln(\sin x)+(-\cot x-x)+C=-[x+\cot x\ln(\mathrm{e}\sin x)]+C$.

下列积分的求法需要把二次三项式化成正则型，并利用下列公式：

Ⅰ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ $(a\neq 0)$；　Ⅱ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$ $(a\neq 0)$；

Ⅲ. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|+C$；　Ⅳ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ $(a>0)$；

Ⅴ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$；　Ⅵ. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C$；

Ⅶ. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$ $(a>0)$；

Ⅷ. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$.

【1836】$^+$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}$ $(ab\neq 0)$.

解 当 $ab>0$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\operatorname{sgn}a\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2+(\sqrt{|b|}x)^2}=\operatorname{sgn}a\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C;$$

当 $ab<0$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\operatorname{sgn}a\int \frac{\mathrm{d}x}{|a|-|b|x^2}=\operatorname{sgn}a\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2-(\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+C.$$

【1842】 $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4-x^2+2}$.

解 $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4-x^2+2}=\frac{1}{2}\int \frac{x^2\mathrm{d}(x^2)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

【1843】 $\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6-x^3-2}$.

解 如果本题不化成正则型来作，则有更简单的作法.事实上，

$$\int \frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int \frac{x^3\mathrm{d}(x^3)}{(x^3-2)(x^3+1)}=\frac{1}{9}\int\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)\mathrm{d}(x^3)$$

$$=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2\}+C.$$

【1846】 $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$ $(b\neq 0)$.

解 当 $b>0$ 时,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}|+C;$$

当 $a>0$ 及 $b<0$ 时,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\int\frac{d(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{-b}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+C.$$

【1855】 $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$.

解
$$\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{3}{4}\int\frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

【1856】 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 当 $x>0$,设 $x=\frac{1}{t}$,$t>0$,则

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C_1=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C_2,$$

当 $x<0$,设 $x=-\frac{1}{t}$,$t>0$,显然有

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_3=-\ln\left|\frac{-x-2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C_4,$$

总之,不论 x 为正或为负,均有

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

【1865】 $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.

解
$$\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{\operatorname{sgn}x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx=\int\frac{\operatorname{sgn}x\,d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$$

$$=\operatorname{sgn}x\ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right|+C_1=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C.$$

§2. 有理函数的积分法

利用待定系数法，求下列积分：

【1866】 $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x.$

解 设 $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，通分后应有

$$2x+3\equiv A(x+5)+B(x-2).$$

在这恒等式中，令 $x=2$*)，得 $7=7A$，$A=1$；令 $x=-5$，得 $-7=-7B$，$B=1$. 于是，

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x=\ln|(x-2)(x+5)|+C.$$

*) 注意，这是一种习惯的说法. 实际上，不能直接令 $x=2$（因为上述恒等式是当 $x\neq2$，$x\neq-5$ 时得出来的），而应令 $x\to2$ 取极限，得 $7=7A$，以下类似情况都作此理解，不再一一说明.

【1869】 $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x.$

解 $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}$，

设 $\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，通分后应有

$$5x^2-6x+1\equiv A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$$

在这恒等式中，令 $x=0$，得 $1=6A$，$A=\frac{1}{6}$；令 $x=2$，得 $9=-2B$，$B=-\frac{9}{2}$；令 $x=3$，得 $28=3C$，$C=\frac{28}{3}$. 于是，

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x=\int\left[1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

【1872】 $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x.$

解 设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$，通分后应有

$$x^2+1\equiv A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2.$$

在这恒等式中，令 $x=-1$，得 $2=-2B$，$B=-1$；令 $x=1$，得 $2=4C$，$C=\frac{1}{2}$；比较 x^2 的系数，得 $A+C=1$，从而，$A=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

【1876】 $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解 本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解，可有更简单的方法.事实上，

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x+5\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)}=\arctan x+\frac{5}{6}\int\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right]\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\arctan x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C.$$

【1877】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0,\\ x^1 & B+C=0,\\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

【1878】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

解 由于

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\frac{(x^2-4x+5)-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5},$$

于是，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\int\left[\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{(x-2)^2+1}=-\frac{1}{x-2}-\arctan(x-2)+C.$$

本题若用待定系数法，较麻烦一些，也可获得同样的结果，此处从略.

【1881】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

解 设 $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0,\\ x^1 & -A+B+C=0, \end{array}$$

$$x^0 \mid A+C=1.$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{2}{3}$.于是，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1883】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$

本题若用待定系数法，则较麻烦.从略.

【1884】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解 本题如用待定系数法来作，主要步骤如下：

设

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1},$$

经计算可求得

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad D=\frac{1}{2}.$$

于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)]+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$$

【1890】 在什么条件下，积分$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$为有理函数？

解 设

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2},$$

通分后应有

$$ax^2+bx+c\equiv Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+D=0, \\ x^3 & -2A+B-D+E=0, \\ x^2 & A-2B+C=a, \\ x^1 & B-2C=b, \\ x^0 & C=c. \end{array}$$

由此，

$$A=a+2b+3c,\quad B=b+2c,\quad C=c,\quad D=-(a+2b+3c),\quad E=a+b+c.$$

当 $A=D=0$，即 $a+2b+3c=0$ 时，积分 $\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$ 为有理函数.

利用奥斯特洛格拉得斯基方法*，计算积分：

【1891】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

解 $Q=(x-1)^2(x+1)^3$，

$Q_1=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$，

$Q_2=(x-1)(x+1)=x^2-1$.

设
$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\frac{Dx+E}{x^2-1},$$

从而，

$$x\equiv(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(3x-1)(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

---

* 所谓奥式方法，是指关于有理真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$的积分，可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和，使在新的被积真分式函数中，其分母次数达到最低状态，也即在公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\mathrm{d}x \tag{1}$$

中，如果 $P(x)$，$Q(x)$已知，且设分母 $Q(x)$可以分解成一次与二次类型的实因式：

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots.$$

其中 $k,\cdots,m,\cdots$是自然数.在公式(1)的右端分母已知，形如：

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$

$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots,$$

且满足 $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$.而 $P_1(x)$和 $P_2(x)$为相应比 $Q_1(x)$和 $Q_2(x)$更低次的多项式，一般可用待定系数法求得.这种利用公式(1)来求积分的方法，就是所谓的奥斯特洛格拉得斯基方法.详细可以参见 Г.М.菲赫金哥尔茨著(北大译)，微积分学教程，第二卷一分册，第 264 目.

——《题解》作者注

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\left|\begin{array}{ll} x^4 & D=0, \\ x^3 & -A+D+E=0, \\ x^2 & A-2B-D+E=0, \\ x^1 & -2A+B-3C-D-E=1, \\ x^0 & -B+C-E=0. \end{array}\right.$$

由此，$A=-\frac{1}{8}$，$B=-\frac{1}{8}$，$C=-\frac{1}{4}$，$D=0$，$E=-\frac{1}{8}$. 于是，

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$
$$=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$$

【1892】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$.

解 $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$，$Q_1=Q_2=x^3+1$.

设
$$\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1},$$

从而，

$$1\equiv(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\left|\begin{array}{ll} x^5 & D=0, \\ x^4 & -A+E=0, \\ x^3 & -2B+F=0, \\ x^2 & -3C+D=0, \\ x^1 & 2A+E=0, \\ x^0 & B+F=1. \end{array}\right.$$

由此，$A=0$，$B=\frac{1}{3}$，$C=0$，$D=0$，$E=0$，$F=\frac{2}{3}$. 于是，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【1897】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}$.

解 $Q=(x^4-1)^3$，$Q_1=(x^4-1)^2$，$Q_2=x^4-1$.

设
$$\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2}\right]'+\frac{P_1(x)}{x^4-1},$$

其中

$$P(x)=Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H,$$

$$P_1(x)=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1,$$

从而利用待定系数法，解出

$$A=0,\quad B=0,\quad C=\frac{7}{32},\quad D=0,\quad E=0,\quad F=0,\quad G=-\frac{11}{32},H=0,$$

$$A_1=0,\quad B_1=0,\quad C_1=0,\quad D_1=\frac{21}{32}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{32}\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\arctan x^{*)}+C.$$

*) 利用 1883 题的结果.

分出下列积分的代数部分：

【1898】 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx.$

解 设 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}+\int\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1}dx.$

上述等式右端的积分为非代数部分，因此，只需要求出 A、B、C、D 就可以了.等式两端求导并通分，得

$$x^2+1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1)-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$$
$$+(A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)(x^4+x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出

$$A=\frac{1}{6},\quad B=0,\quad C=\frac{1}{3},\quad D=0,A_1=0,\quad B_1=\frac{1}{6},\quad C_1=0,\quad D_1=\frac{2}{3}.$$

因此，所求积分的代数部分为

$$\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}.$$

利用各种方法，计算下列积分：

【1904】 $\int\frac{xdx}{x^8-1}.$

解 $\int\frac{xdx}{x^8-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2)^4-1}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan(x^2)^{*)}+C.$

*) 利用 1883 题的结果.

【1906】 $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}dx.$

解 $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2)^3+1}$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【1909】 $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}.$

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8d(x^4)}{(x^4+1)(x^4+2)}=\frac{1}{4}\int\left[1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right]d(x^4)$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{x^4+1}-\frac{4}{x^4+2}\right]\mathrm{d}(x^4)=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}+C.$$

【1914】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$.

解 由于

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x(x^{10}+1)}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(x^{10}+1)+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

【1915】 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{2}{7}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^7)}{1+x^7}$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C=\frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+C.$$

【1921】 试导出计算积分 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(a\neq0)$ 的递推公式. 利用这个公式计算

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}.$$

解 由于

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=t^2+\Delta,$$

其中 $t=2ax+b$, $\Delta=4ac-b^2$. 于是,

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{(4a)^n\mathrm{d}x}{[(2ax+b)^2+\Delta]^n}=2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}.$$

当 $\Delta\neq0$ 时,对于积分$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}$施用分部积分法,即有

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^{n+1}}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}-2n\Delta\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^{n+1}}.$$

若令$\bar{I}_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}$,则得

$$\bar{I}_n=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\bar{I}_n-2n\Delta\bar{I}_{n+1},\quad\text{或}\quad\bar{I}_{n+1}=\frac{1}{2n\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_n,$$

从而,

$$\bar{I}_n=\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_{n-1}.$$

代入 I_n,即得

$$I_n=2^{2n-1}a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}I_{n-1}\right\}$$

$$=2^{2n-1}a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{2a}{(4a)^{n-1}}\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1},$$

最后得递推公式

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时,则有

$$I_n=\int\frac{(4a)^n\mathrm{d}x}{(2ax+b)^{2n}}=2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}}=\frac{1}{a^n(1-2n)}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{1-2n}+C.$$

对于 I_3, $\Delta\neq0$,两次运用上述递推公式,即得

$$\begin{aligned}I_3&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}\\&=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\\&=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.\end{aligned}$$

§3. 无理函数的积分法

化被积函数为有理函数，以求下列积分：

【1929】 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt[6]{x+1}=t$，则 $x=t^6-1$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x=6\int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\arctan t+C,$$

其中 $t=\sqrt[6]{x+1}$.

【1932】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，$\mathrm{d}x=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$.代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int \mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

【1935】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

解 设 $\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}$并限制 $t>1$，则

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2,\quad \mathrm{d}x=\frac{t^4-1}{2t^3}\mathrm{d}t,\quad \sqrt{x+1}=\frac{t^2+1}{2t},\quad t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}.$$

代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{t^4-1}{t^3(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C_1=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C.$$

【1936】 证明：若

$$p+q=kn,$$

式中 k 为整数，则积分 $\int R[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]\mathrm{d}x$（式中 R 为有理函数及 p,q,n 为整数）为初等函数.

证 当 $a=b$ 时，$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^k$，则积分显然为初等函数.

当 $a\neq b$ 时，设 $\frac{x-a}{x-b}=y(\neq 1)$，则

$$x=\frac{a-by}{1-y},\quad \mathrm{d}x=\frac{a-b}{(1-y)^2}\mathrm{d}y,\quad x-a=\frac{(a-b)y}{1-y},\quad x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

代入得

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x=(a-b)\int R\left[\frac{a-by}{1-y},y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^{k}\right]\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}.$$

再设$\sqrt[n]{y}=t$,则 $y=t^n$,$\mathrm{d}y=nt^{n-1}\mathrm{d}t$.从而,上述积分化为

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x=n(a-b)\int R\left[\frac{a-bt^n}{1-t^n},t^p\left(\frac{a-b}{1-t^n}\right)^{k}\right]\frac{t^{n-1}}{(1-t^n)^2}\,\mathrm{d}t,$$

因为被积函数为 t 的有理函数,所以,积分是初等函数.

求最简单二次无理式的积分:

【1939】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$,则

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,\quad 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2},\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

利用公式 $\int\frac{P_n(x)}{y}\mathrm{d}x=Q_{n-1}(x)y+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$,**式中** $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$,$P_n(x)$ **为** n **次多项式**,$Q_{n-1}(x)$**为** $n-1$ **次多项式及** λ **为常数,求下列积分:**

【1943】 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x=(ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$,

两边对 x 求导数,得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}+\frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3\equiv(2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)(1-x)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,求得 $a=-\frac{1}{3}$,$b=-\frac{5}{6}$,$c=-\frac{19}{6}$,$\lambda=4$.于是,

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

【1951】 在什么条件下,积分

$$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$$

是代数函数?

解 设 $\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

从而有

$$a_1x^2+b_1x+c_1\equiv A(ax^2+bx+c)+\left(ax+\frac{b}{2}\right)(Ax+B)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，当 $a\neq0$ 时求得

$$A=\frac{a_1}{2a},\quad B=\frac{4ab_1-3a_1b}{4a^2},\quad \lambda=\frac{8a^2c_1+3a_1b^2-4a(a_1c+bb_1)}{8a^2}.$$

于是，当 $a\neq0$ 且 $8a^2c_1+3a_1b^2=4a(a_1c+bb_1)$ 时，$\lambda=0$，积分为代数函数；当 $a=0$ 时积分显然为代数函数.

要求积分 $\int\frac{P(x)}{Q(x)y}\mathrm{d}x$，式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，应先分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式.

【1957】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $x=\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$. 代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2t+\cos^2t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\tan t)}{(\sqrt{2}\tan t)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C.$$

【1960】 $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+2)\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+2})+I_1.$$

对于 I_1，设 $x=\sqrt{2}\tan t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\sec^2t\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}\sec t$. 代入得

$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{\sec t\mathrm{d}t}{1+2\tan^2t}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\sin^2t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1+\sin^2t}$$

$$=\arctan(\sin t)+C_1=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)+C_1=-\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

利用尤拉代换

(1) 若 $a>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$；　(2) 若 $c>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$；

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$.

以求下列积分：

【1966】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 设 $\sqrt{x^2+x+1}=z-x$,则

$$x=\frac{z^2-1}{1+2z},\quad \mathrm{d}x=\frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}\,\mathrm{d}z,\quad \sqrt{x^2+x+1}=\frac{z^2+z+1}{1+2z}.$$

代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{z}-\frac{3}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{\left|z+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)}+C_1=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+\frac{3}{2(2z+1)}+C,$$

其中 $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

【1967】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 设 $\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$,则

$$z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x},\quad x=\frac{2(z-1)}{z^2+1},\quad \mathrm{d}x=\frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z,$$

$$\sqrt{1-2x-x^2}+1=\frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}\mathrm{d}z=\int\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\arctan z+C,$$

其中 $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

【1969】 $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}\,x}\mathrm{d}x$.

解 设 $\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$,则

$$x=\frac{2-z^2}{z^2-1},\quad \mathrm{d}x=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}\mathrm{d}z,\quad \sqrt{x^2+3x+2}=\frac{z}{z^2-1}.$$

代入得

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\mathrm{d}x=\int\frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}\mathrm{d}z$$

$$=\int\left[-\frac{17}{108(z+1)}+\frac{5}{18(z+1)^2}+\frac{1}{3(z+1)^3}+\frac{3}{4(z-1)}-\frac{16}{27(z-2)}\right]\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{17}{108}\ln|z+1|-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

利用各种方法,计算下列积分:

【1975】 $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int \frac{\sqrt{x(x+1)}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}\mathrm{d}x$

$=\int[(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]\mathrm{d}x=\int[x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]-\frac{2}{5}[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}]+C.$

【1978】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}.$

解 作变换$\frac{1}{x}=\sqrt{t}$(这里设 $x>0$.若 $x<0$,则作变换$\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$,最后结果相同),则

$$\mathrm{d}x=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\mathrm{d}t,\qquad \sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}$$

代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t-t^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+C=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C\qquad(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}).$$

【1979】 $\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

解 $\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}=\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^4}}}+C.$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(1+2x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{2+x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}+C.$$

【1980】 证明:积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x.$$

(式中 R 为有理函数)的求法,归结为有理函数的积分法.

证 当 a,c 中至少有一个为零时,则积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a\neq0,c\neq0$ 时,设 $\sqrt{ax+b}=z$,则

$$x=\frac{z^2-b}{a},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{a}z\mathrm{d}z,\quad \sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}z^2+d-\frac{bc}{a}}=\sqrt{c_1z^2+d_1},$$

式中 $c_1=\frac{c}{a}$, $d_1=d-\frac{bc}{a}$. 代入得

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x$$

$$=\int R\left(\frac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{c_1 z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}z\mathrm{d}z=\int R_1(z, \sqrt{c_1 x^2+d_1})\,\mathrm{d}z,$$

其中 R_1 为有理函数.

再设 $\sqrt{c_1 x^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}z+u$ $(c_1>0)$ 或 $\sqrt{c_1 x^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}$ $(d_1>0)$——尤拉代换,就可将被积函数有理化.于是,积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b})\mathrm{d}x$$

的求法可归结为有理函数的积分法.

二项微分式

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x,$$

(式中 m,n 和 p 为有理数)仅在下列三种情形可化为有理函数的积分(契比协夫定理):

第一种情形,p 为整数.假定 $x=z^N$,其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形,$\frac{m+1}{n}$ 为整数.假定 $a+bx^n=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形,$\frac{m+1}{n}+p$ 为整数.利用代换:$ax^{-n}+b=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母.

【1982】 $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x.$

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$. $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$; p 为整数,这是二项微分式的第一种情形.

设 $x=z^6$,则 $\mathrm{d}x=6z^5\mathrm{d}z$, $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$. 代入得

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x=6\int\frac{z^8}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=6\int\left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\arctan z+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan z\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\arctan(x^{\frac{1}{6}})+C.$$

*) 利用 1921 题的结果.

【1983】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$. $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}=3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$,则 $x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$, $\mathrm{d}x=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z$. 代入得

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(z^2-1)^2\mathrm{d}z=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C,$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

【1985】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}=x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$，$m=0$，$n=3$，$p=-\frac{1}{3}$；$\frac{m+1}{n}+p=0$，这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3}+1=z^3$，则 $x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}}$，$\mathrm{d}x=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}z$. 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int \frac{z}{z^3-1}\mathrm{d}z=-\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}z}{z-1}+\frac{1}{3}\int \frac{z-1}{z^2+z+1}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

【1990】 在什么情形下，积分

$$\int \sqrt{1+x^m}\mathrm{d}x$$

(式中 m 为有理数)为初等函数?

解 $\sqrt{1+x^m}=x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $p=\frac{1}{2}$，故由契比协夫定理知，仅在下述两种情形，此函数的积分可化为有理函数的积分.

第一种情形，$\frac{1}{m}$ 为整数，即 $m=\frac{1}{k_1}=\frac{2}{2k_1}$，其中 $k_1=\pm1,\pm2,\cdots$.

第二种情形，$\frac{1}{m}+\frac{1}{2}$ 为整数，即 $m=\frac{2}{2k_2-1}$，其中 $k_2=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

综上所述，即得：当 $m=\frac{2}{k}$ (式中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$)时，积分 $\int \sqrt{1+x^m}\mathrm{d}x$ 为初等函数.

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x.$$

的积分(式中 m 及 n 为整数)，可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分：

【1994】 $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x\mathrm{d}(\sin 2x)=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

【1996】 $\int \sin^5 x\cos^5 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^5 x\cos^5 x\mathrm{d}x=\int \frac{1}{32}\sin^5 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{64}\int (1-\cos^2 2x)^2(\cos 2x)$

$=-\frac{1}{64}\cos 2x+\frac{1}{96}\cos^3 2x-\frac{1}{320}\cos^5 2x+C$.

【1999】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=-\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}(\cot x)=-\frac{\cot x}{\sin x}-\int \cot x\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$,

于是,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【2001】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x}=16\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 2x}=-8\int \csc^2 2x\mathrm{d}(\cot 2x)$

$=-8\int (1+\cot^2 2x)\mathrm{d}(\cot 2x)=-8\cot 2x-\frac{8}{3}\cot^3 2x+C$.

【2003】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x+\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}$

$=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^4 x}+\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\frac{1}{3\cos^3 x}-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

【2011】 推出下列积分的递推公式

(1) $I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x$; (2) $K_n=\int \cos^n x\mathrm{d}x$ $(n>2)$.

并利用推得的公式来计算

$$\int \sin^6 x\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int \cos^8 x\mathrm{d}x.$$

解 (1) $I_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x=-\int \sin^{n-1} x\mathrm{d}(\cos x)$

$=-\cos x\sin^{n-1} x+(n-1)\int \cos^2 x\sin^{n-2} x\mathrm{d}x$

$=-\cos x\sin^{n-1} x+(n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\mathrm{d}x$

$=-\cos x\sin^{n-1} x+(n-1)I_{n-2}+(1-n)I_n$,

于是,

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1} x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2};$$

利用此公式及 $I_0=\int \mathrm{d}x=x+C$, 即得

$$I_6=\int \sin^6 x\mathrm{d}x=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}\ I_4=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{5}{8}\ I_2$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5}{16}x+C.$$

(2) 类似地,可得

$$K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\ K_{n-2};$$

$$K_8=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x+C.$$

【2012】 推出下列积分的递推公式

(1) $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$; (2) $K_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$ $(n>2)$.

并利用推得的公式计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}\quad 及\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}.$$

解 (1) $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int \cos x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right)$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}\ I_{n-2}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\ I_{n-2};$$

利用此公式及 $I_1=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$, 即得

$$I_5=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3}{4}\ I_3=\cdots=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(2) 类似地,可得

$$K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2};$$

$$K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}+\frac{5}{16}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

【2014】 $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int(1+\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{x}{4}+C.$$

【2019】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C,$$

其中 $\sin(a-b)\neq 0$.

【2022】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x-\sin a}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{\cos a}\int \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\sin x-\sin a}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}+\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中 $\cos a\neq 0$.

【2025】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

于是,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

【2028】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$; (1)$0<\varepsilon<1$; (2)$\varepsilon>1$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$,同 2025 题,得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=I.$$

(1) $0<\varepsilon<1$,

$$I=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C;$$

(2) $\varepsilon>1$,

$$I=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}t}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|+C.\quad (*)$$

$(*)$ $\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}=\frac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{(\varepsilon+1)-(\varepsilon-1)t^2}=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1-t^2)+2\sqrt{\varepsilon^2-1}t}{\varepsilon(1-t^2)+(1+t^2)}$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1+t^2)\cos x+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon(1+t^2)\cos x+(1+t^2)}=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon\cos x+1}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{\varepsilon\cos x+1}.$$

【2031】 $\int \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$.

解 $\int \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(a\tan x)}{(a^2\tan^2 x+b^2)^2}$

$=\frac{\tan x}{2b^2(a^2\tan^2 x+b^2)}+\frac{1}{2ab^3}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)^{*)}+C$,

其中 $ab\neq 0$.

*) 利用 1921 题的结果.

【2035】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int \frac{2\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x}=\int \frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2\sec^2 2x-\tan^2 2x}$

$=\int \frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2+\tan^2 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

【2037】 $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=-\int \frac{\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}+C$.

【2042】 证明：

$$\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C,$$

式中 A,B,C 为常数.

证 $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$，式中

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},\quad a^2+b^2\neq 0.$$

于是，

$$\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=A\int \mathrm{d}x+B\int \frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

【2043】 $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$.

解 此为 2042 题的特例，这里

$a_1=1,\quad b_1=-1,\quad a=1,\quad b=2$;

$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-2}{1+4}=-\frac{1}{5},\quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{-1-2}{1+4}=-\frac{3}{5}$.

代入得 $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$.

【2046】 证明：

$$\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c},$$

式中 A,B,C 都是常系数.

证 按题意 a、b 不同时为零.设

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,则有

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\quad C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x=A\int\mathrm{d}x+B\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

【2047】 $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x.$

解 此为 2046 题的特例,这里

$$a_1=1,\ b_1=2,\ c_1=-3,\ a=1,\ b=-2,\ c=3;$$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5},\qquad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{2+2}{1+4}=\frac{4}{5},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}=\frac{(-3-3)+(-2)(6-6)}{1+4}=-\frac{6}{5}.$$

代入得

$$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+3}$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\arctan\frac{1+5\tan\frac{x}{2}}{2}\ \text{*)}\ +C.$$

*) 设 $t=\tan\frac{x}{2}$,积分即得所求式子.

【2050】 证明:

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x},$$

式中 A,B,C 都是常系数.

证 按题意 a、b 不同时为零.设

$$a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x=A\cos x(a\sin x+b\cos x)-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,则有

$$aA-bB=2b_1,\quad C-aB=a_1,\quad C+bA=c_1,$$

从而,

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}\quad C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=A\int\cos x\mathrm{d}x-B\int\sin x\mathrm{d}x+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}.$$

【2052】 $\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x.$

解 此为2050题的特例,这里

$$a_1=1,\quad b_1=-\frac{1}{2},\quad c_1=2,\quad a=1,\quad b=2;\quad A=\frac{1}{5},\quad B=\frac{3}{5},\quad C=\frac{8}{5}.$$

代入得

$$\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x+\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\cos x}$$

$$=\frac{1}{5}(\sin+3\cos x)+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\tan\frac{x}{2}+1}\right|+C.\quad *)$$

*) 设 $t=\tan\frac{x}{2}$,积分即得所求式子.

【2054】 $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}\mathrm{d}x$

$$=-2\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{3+\cos^2x}-\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{4-\sin^2x}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+C.$$

【2064】$^+$ $\int\frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x.$

解 设 $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$,则 $\mathrm{d}t=\frac{-\frac{1}{2}\cos a}{\sin^2\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x$,$\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\frac{2}{\cos a}\mathrm{d}t.$

于是,

$$\int\frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}\mathrm{d}t=-\frac{2}{n\cos a}t^n+C=-\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^n+C\quad(\cos a\neq0).$$

§5. 各种超越函数的积分法

【2066】 证明:若 $P(x)$为 n次多项式,则

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

证 $\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int P(x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{ax}P'(x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a^2}\int P'(x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a^2}P'(x)\mathrm{e}^{ax}+\frac{1}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}P''(x)\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=\mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式，所以，$P^{(n+1)}(x)\equiv 0$. 从而，上述等式括号中的导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

求下列积分：

【2082】 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int \frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int \frac{dx}{1+e^x}-\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}$

$=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-\int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C.$

【2085】 $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

解 设 $e^{\frac{x}{6}}=t$，则 $x=6\ln t$，$dx=\frac{6}{t}dt$. 代入得

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}=6\int \frac{dt}{t(1+t^3+t^2+t)}=6\int \frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t+1}{2(t^2+1)}\right]dt=6\ln t-3\ln(t+1)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln\left[(1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

【2088】 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

解 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx=\int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

$=\int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}}+\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})+C.$

【2090】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$

$=-\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})d(e^{-x})$

$=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)dx$

$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2.$

对于 $I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$，设 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2tdt}{t^2-1}$. 于是，

$$I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int \frac{dt}{t^2-1}=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C_1.$$

对于 $I_2=\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$，设 $\sqrt{1-e^x}=t$，则 $x=\ln(1-t^2)$，$dx=-\frac{2tdt}{1-t^2}$. 于是，

$$I_2=\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}=-2\int \frac{dt}{1-t^2}=-\ln\frac{1+t}{1-t}+C_2=-\ln\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}}+C_2.$$

代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-\sqrt{1-\mathrm{e}^x})+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^x})}{(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1)(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^x})}+C.$$

【2091】 证明:积分

$$\int R(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x,$$

(式中 R 为有理函数,其分母仅有实根)可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x}\mathrm{d}x=li(\mathrm{e}^{ax})+C,$$

式中用 $lix=\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 来表示.

证 因为 R 的分母仅有实根,所以仅包含形如 $(x-a_i)^{k_i}$ 的因子($i=1,2,\cdots,l$).分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x)=P(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j},$$

其中 $P(x)$ 为 x 的多项式,A_{ij} 是常系数. 从而,积分

$$\int R(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\int\frac{\mathrm{e}^{ax}}{(x-a^i)^j}\mathrm{d}x.$$

上式右端第一个积分显然是初等函数.而积分 $\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{(x-a_i)^j}\mathrm{d}x$ 可用初等函数和超越函数来表示.

事实上,设 $x-a_i=t$,则

$$\int\frac{\mathrm{e}^{ax}}{(x-a_i)^j}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{a(a_i+t)}}{t^j}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{aa_i}}{1-j}\int\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right)=\frac{\mathrm{e}^{aa_i}}{1-j}\mathrm{e}^t\cdot\frac{1}{t^{j-1}}-\frac{a\mathrm{e}^{aa_i}}{1-j}\int\frac{\mathrm{e}^{at}}{t^{j-1}}\mathrm{d}t.$$

这样,被积函数中分母的次数便降低一次,再继续运用分部积分法($j-2$)次,即可得

$$\int\frac{\mathrm{e}^{ax}}{(x-a_i)^j}\mathrm{d}x=g_{ij}(x)+B_{ij}\ li(\mathrm{e}^{a(x-a_i)}),$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 x 的初等函数,B_{ij} 为常数. 因而,积分

$$\int R(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\ g_{ij}(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\ B_{ij}\ li(\mathrm{e}^{a(x-a_i)})$$

是初等函数与超越函数之和.

【2092】 在什么情形下,积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

(式中 $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$ 及 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数)为初等函数?

解 $$\int\frac{a_k}{x^k}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{k-1}\int\frac{\mathrm{e}^x}{x^{k-1}}\mathrm{d}x=\cdots$$

$$=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x^{k-1}}-\frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x^{k-2}}-\cdots-\frac{a_k}{(k-1)!}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x.$$

于是,

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\int\frac{a_k}{x^k}\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_k}{(k-1)(k-2)\cdots(k-j)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-j}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx+a_0e^x.$$

因而，若 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=0$，即 $a_0+\frac{a_1}{1!}+\frac{a_2}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$，则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

求含有 $\ln f(x)$，$\arctan f(x)$，$\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$ 等函数的积分，其中 $f(x)$ 为代数函数：

【2103】 $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$.

解 $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C.$

【2105】 $\int x\arctan(x+1)dx$.

解 $\int x\arctan(x+1)dx=\frac{1}{2}\int\arctan(x+1)d(x^2)$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$

【2111】 $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解 $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{x dx}{1-x^2}=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}+C.$

求含有双曲线函数的积分：

【2122】 $\int\sqrt{\operatorname{th}x}dx$.

解 $\int\sqrt{\operatorname{th}x}dx=\int\sqrt{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}dx=\int\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{e^{2x}-e^{-2x}}}dx=\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}-\int\frac{e^{-2x}dx}{\sqrt{1-e^{-4x}}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x})}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{-2x})}{\sqrt{1-(e^{-2x})^2}}=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(e^{-2x})+C.$

【2123】 $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}$.

解 设 $\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$，则

$$\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad x=\ln\frac{1+t}{1-t},\quad dx=\frac{2}{1-t^2}dt.$$

于是，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+2\mathrm{ch}x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\mathrm{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

【2124】 $\int \mathrm{sh}ax\sin bx\mathrm{d}x.$

解 $\int \mathrm{sh}ax\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ax}\ \frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ax}\ \frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}+C=\frac{a\mathrm{ch}ax\sin bx-b\mathrm{sh}ax\cos bx}{a^2+b^2}+C.$$

§6. 函数的积分法的各种例子

求积分：

【2126】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}=\int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6}-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$

$$=-\frac{1}{5x^5}-\int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{5x^5}-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4}-\int \frac{x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}+\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$$

【2127】 $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}.$

解 $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}=\int \frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}-\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^3}$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}-\left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2}-\frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}\right]^{*)}$$

$$=-\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\right\}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}=\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

【2135】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}=-\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}\right|+C_1=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3}\right|+C.$$

注 以上实际已设 $x>0$.对于 $x<0$,可得同一结果.

【2142】 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=(\operatorname{sgn}x)\int\frac{\arcsin x\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\arcsin x\mathrm{d}(\arcsin x)$

$=-(\operatorname{sgn}x)\int\arcsin x\mathrm{d}(\sqrt{x^{-2}-1})+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$

$=-(\operatorname{sgn}x)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\arcsin x-\int\frac{\mathrm{d}x}{|x|}\right)+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$

$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$

$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\arcsin x)^2+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C\qquad(0<|x|<1).$

【2148】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

解 设 $1+\cos x=t^2$,并限制 $t>0$,则

$$\sin x=t\sqrt{2-t^2},\quad \mathrm{d}x=-\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}\mathrm{d}t.$$

于是,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=-\int\frac{2\mathrm{d}t}{t^2(2-t^2)}=-\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2-t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+C=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C.$$

【2151】 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$

【2158】 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x.$

解 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)\mathrm{d}x$

$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x.$$

于是，

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C\quad(|x|<1).$$

【2165】 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=e^x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C.$

【2170】 $\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x.$

解 当 $x\geqslant0$ 时，$\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C_1$，

当 $x<0$ 时，$\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C_2$.

由于 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，故其原函数必在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数.今求满足$F(0)=0$的原函数 $F(x)$.由上述知，必有

$$F(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C_1, & x\geqslant0,\\ \mathrm{e}^x+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中 C_1，C_2 是两个常数.由于 $0=F(0)=\lim\limits_{x\to0^-}F(x)$，即$0=-1+C_1=1+C_2$，因此，$C_1=1$，$C_2=-1$.从而，

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant0;\\ \mathrm{e}^x-1, & x<0.\end{cases}$$

所以，$\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geqslant0,\\ \mathrm{e}^x-1+C, & x<0.\end{cases}$

【2171】 $\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x.$

解 仿 2170 题，

当$|x|\leqslant1$时，$\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x+C_1$；

当 $x>1$ 时，$\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_2$，

当 $x<-1$ 时，$\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_3$.

今求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$.由上述知，必有

$$F(x)=\begin{cases}x+C_1, & -1\leqslant x\leqslant1;\\ \frac{1}{3}x^3+C_2, & x>1;\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x<-1.\end{cases}$$

其中 C_1，C_2，C_3 是三个常数.由于 $1=F(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)$，即 $1=1+C_1=\frac{1}{3}+C_2$，故 $C_1=0$，$C_2=\frac{2}{3}$.再由 $F(-1)=\lim\limits_{x\to -1-0}F(x)$，得 $-1=-\frac{1}{3}+C_3$，故 $C_3=-\frac{2}{3}$. 由此可知，有

$$F(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}, & x>1;\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}, & x<-1. \end{cases}$$

最后得 $\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x=\begin{cases} x+C, & |x|\leqslant 1;\\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x+C, & |x|>1. \end{cases}$

【2175】 $\int f(x)\mathrm{d}x$，式中

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{若}-\infty<x<0;\\ x+1, & \text{若}\ 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, & \text{若}\ 1<x<+\infty. \end{cases}$$

解 当 $-\infty<x<0$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C_1$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int (x+1)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x+C_2$；

当 $1<x<+\infty$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C_3$.

今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$.利用

$$F(0)=0,\quad \lim_{x\to 0-0}F(x)=F(0),\quad \lim_{x\to 1+0}F(x)=F(1),$$

仿 2171 题，可得

$$F(x)=\begin{cases} x, & \text{当}-\infty<x<0\ \text{时};\\ \frac{x^2}{2}+x, & \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \text{时};\\ x^2+\frac{1}{2}, & \text{当}\ 1<x<+\infty\ \text{时}. \end{cases}$$

故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} x+C, & \text{当}-\infty<x<0\ \text{时};\\ \frac{x^2}{2}+x+C, & \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \text{时};\\ x^2+\frac{1}{2}+C, & \text{当}\ 1<x<+\infty\ \text{时}. \end{cases}$$

【2178】 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

解 由 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$. 于是，

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$$

【2179】$^{+}$ 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$,求 $f(x)$.

解 由 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 得 $f'(x)=1-x$.于是,

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(1-x)\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}x^2+C \qquad (|x|\leqslant 1).$$

【2180】 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x\leqslant 1;\\ x, & \text{当 } 1<x<+\infty\end{cases}$ 及 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 设 $t=\ln x$, 则

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^t, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

于是,

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & -\infty<x\leqslant 0;\\ \mathrm{e}^x+C_2, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 是两个常数.由假定 $f(0)=0$,得 $C_1=0$.再由 $f(x)$在 $x=0$ 的连续性知,

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x),$$

由此得 $C_2=-1$. 于是,

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当}-\infty<x\leqslant 0\text{ 时};\\ \mathrm{e}^x-1, & \text{当 } 0<x<+\infty\text{时}.\end{cases}$$

第四章　定　积　分

§1.　定积分作为和的极限

1.黎曼积分的意义　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则数

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

(式中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$)称为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的积分.

极限(1)存在的必要而且充分的条件为：

$$\text{积分下和 } \underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i \quad \text{及} \quad \text{积分上和 } \overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$$

当$|\Delta x_i|\to 0$时有共同的极限，其中

$$m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_i+1} f(x) \quad \text{及} \quad M_i=\sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_i+1} f(x)$$

若等式(1)右端的极限存在，则函数 $f(x)$称为在对应的区间上可积分(常义的)，特殊情况：(ⅰ)连续函数；(ⅱ)具有有穷个不连续点的有界函数；(ⅲ)单调有界的函数，——在任意的有穷闭区间上为可积分的.

2.可积分的条件

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$有闭区间$[x_i,x_{i+1}]$上的振幅，上述等式成立为函数 $f(x)$于已知闭区间$[a,b]$上可积分的充要条件.

【2182】 设

(1) $f(x)=x^3$　$[-2\leqslant x\leqslant 3]$.

把相应区间等分成 n份，求给定函数 $f(x)$在相应区间上的积分下和$\underline{S_n}$及积分上和$\overline{S_n}$.

解　(1) 把区间$[-2,3]$$n$等分，则每一个子区间的长为$h=\dfrac{5}{n}$，且第 i个子区间为$[-2+ih,-2+(i+1)h]$$(i=0,1,\cdots,n-1)$.若令 m_i 及 M_i 分别表示函数$f(x)$在第 i个子区间上的下确界及上确界，则因 $f(x)=x^3$ 为增函数，所以，

$$m_i=(-2+ih)^3,\qquad M_i=[-2+(i+1)h]^3 \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是，

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(-2+ih)^3h=-8nh+12h^2\sum_{i=0}^{n-1} i-6h^3\sum_{i=0}^{n-1} i^2+h^4\sum_{i=0}^{n-1} i^3$$

$$=-40+\frac{12\cdot 25n(n-1)}{2n^2}-\frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}+\frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2};$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[-2+(i+1)h]^3=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

【2184】$^+$ 从积分的定义出发，求

$$\int_0^T (v_0+gt)\mathrm{d}t,$$

其中 v_0 及 g 为常数.

解 $f(t)=v_0+gt$ 在$[0,T]$上为增函数($T>0$).

$$h=\frac{T}{n},\quad m_i=v_0+igh,\quad M_i=v_0+(i+1)gh\quad (i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是，

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}(v_0+igh)h=nv_0h+gh^2\sum_{i=0}^{n-1}i=v_0T+\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=v_0T+\frac{gT^2}{2}-\frac{gT^2}{2n},$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}[v_0+(i+1)gh]h=v_0T+\frac{gT^2}{2}+\frac{gT^2}{2n}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S_n}=v_0T+\frac{gT^2}{2}$，所以，

$$\int_0^T (v_0+gt)\mathrm{d}t=v_0T+\frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法进行积分区间的分段，把积分看作是对应的积分和的极限，来计算定积分.

【2185】 $\int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x$

解 将区间$[-1,2]$$n$等分，得 $h=\frac{3}{n}$. 取 $\xi=-1+ih$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$. 作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(-1+ih)^2h=nh-2h^2\sum_{i=0}^{n-1}i+h^3\sum_{i=0}^{n-1}i^2=3+\frac{9-9n}{2n^2}.$$

于是，
$$\lim_{n\to\infty}S_n=3.$$

由于 $f(x)=x^2$ 在$[-1,2]$上连续，故积分$\int_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x$是存在的，且它与分法无关，同时也与点的取法无关.因此，上述和的极限就是所求的积分值(以后如无特殊情况，不再说明)，即定积分

$$\int_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x=3.$$

【2192】 计算布阿桑积分

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x$$

当：(1) $|\alpha|<1$； (2) $|\alpha|>1$.

解 因为$(1-|\alpha|)^2\leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2$，所以当$|\alpha|\neq 1$时，被积函数是连续的，于是，积分就存在.把区间$[0,\pi]$分成 n个相等部分，即有

$$S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)=\frac{\pi}{n}\ln\left[(1+\alpha)^2\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)\right].$$

另一方面，我们可以证明

$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

事实上，方程 $t^{2n}-1=0$ 共有 $2n$ 个根，记作 $1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n=-1,\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\cdots,\bar{\varepsilon}_{n-1}$，其中

$$\varepsilon_i=\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}\quad 及\quad \bar{\varepsilon}_i=\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}\quad (j=\sqrt{-1}为虚数单位).$$

于是，

$$t^{2n}-1=(t+1)(t-1)\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$$

$$=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}\right)\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}\right)=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

当 $t=\alpha$ 时，利用上式就可把 S_n 表成下面的形式

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n}-1)\right].$$

于是，(1) 当 $|\alpha|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$，即

$$\int_0^{\pi}(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=0.$$

(2) 当 $|\alpha|>1$ 时，把 S_n 改写成

$$S_n=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right]$$

后，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}=1$，从而，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\pi\ln|\alpha|$，即

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=2\pi\ln|\alpha|.$$

【2194】 证明：不连续的函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

于区间 $[0,1]$ 上可积分.

证 首先注意，函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在 $[0,1]$ 上有界，其不连续点是

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega\leqslant 2$.

任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$ 上只有有限个间断点，故可积. 因此存在 $\eta>0$，使对 $\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$ 的任何分法，只要 $\max|\Delta x_i'|<\eta$，就有 $\sum\limits_i\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{5}$. 显然，若 $[\alpha,\beta]\subset\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$，则对于 $[\alpha,\beta]$ 的任何分法，只要 $\max|\Delta x_i'|<\eta$，也有 $\sum\limits_i\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\right\}$. 现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$ 是 $[0,1]$ 的满足 $\max|\Delta x_i|<\delta$ 的任一分法，设 $x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{5}<x_{i_0+1}$.

由上述，有 $\sum\limits_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{5}$. 又显然有 $\sum\limits_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant 2\sum\limits_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<2\frac{2\varepsilon}{5}=\frac{4\varepsilon}{5}$. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0$. 于是，$f(x)$在$[0,1]$可积.

【2197】 证明：迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\end{cases}$$

于任意区间上不可积分.

证 在任意区间$[a,b]$的任何部分区间上均有

$$\omega_i=1,$$

所以，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=b-a$，它不趋于零.因此，函数 $\chi(x)$在$[a,b]$上不可积分.

【2198】 设函数 $f(x)$于$[a,b]$上可积分，且

$$f_n(x)=\sup f(x)$$

当 $x_i<x\leqslant x_{i+1}$，其中

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\begin{cases}i=0,1,\cdots,n-1;\\ n=1,2,\cdots\end{cases}.$$

证明：
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 $f_n(x)$是不超过 $n+1$ 个间断点的阶梯函数，因此，$f_n(x)$在$[a,b]$上可积分.于是，

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\omega_i\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\to 0\qquad(\text{当 }\max|\Delta x_i|=\frac{b-a}{n}\to 0\text{ 时}),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【2199】 证明：若函数 $f(x)$于$[a,b]$上可积分，则有连续函数 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$的叙列，使

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant c\leqslant b).$$

证 将区间$[a,b]$$n$等分，设分点为 $a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n-1}^{(n)}<x_n^{(n)}=b$，即

$$x_i^{(n)}=a+\frac{i}{n}(b-a)\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

在 $\Delta x_i^{(n)}=[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$上令 $\varphi_n(x)$为过点$[x_{i-1}^{(n)},f(x_{i-1}^{(n)})]$及$[x_i^{(n)},f(x_i^{(n)})]$的直线，即当 $x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$时，令

$$\varphi_n(x)=f(x_{i-1}^{(n)})+\frac{x-x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}[f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})],$$

则 $\varphi_n(x)$是$[a,b]$上的连续函数，因此，它是可积分的.

若令 $m_i^{(n)}$，$M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示函数 $f(x)$在$[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$上的下确界，上确界及振幅，则当 $x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$时，

$$m_i^{(n)}\leqslant\varphi_n(x)\leqslant M_i^{(n)},\quad m_i^{(n)}\leqslant f(x)\leqslant M_i^{(n)},$$

从而，$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\omega_i^{(n)}$. 于是，当 $a\leqslant c\leqslant b$时，

$$\left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_a^c\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^c|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}}|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}.$$

由于 $f(x)$在$[a,b]$上可积分,因此,当 $\max|\Delta x_i^{(n)}|=\dfrac{b-a}{n}\to 0$ 时,必有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}\to 0.$$

由此可知 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant c\leqslant b)$.

【2201】 若函数 $f(x)$于闭区间$[a,b]$上绝对可积(即积分$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$存在).这个函数在$[a,b]$上是否为可积分的函数?

解 一般地说,不.例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

$|f(x)|=1$,它在$[a,b]$上连续,因此,它在$[a,b]$上可积.但对于函数 $f(x)$而言,在$[a,b]$的任一部分区间上 $\omega_i=2$,所以,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=2(b-a),$$

它不趋向于零.于是,函数 $f(x)$在$[a,b]$上不可积分.

【2204】 设函数 $f(x)$于闭区间$[A,B]$上可积分,证明:函数 $f(x)$有积分的连续性,即是说

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0,$$

式中$[a,b]\subset[A,B]$.

证 由 2199 题的结果可知:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,由于 $f(x)$在$[A,B]$上可积,故存在$[A,B]$上的连续函数 $\varphi(x)$,使

$$\int_A^B|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\varphi(x)$在$[A,B]$上一致连续,故存在 $\delta>0$,使当$|x'-x''|<\delta$ $(x'\in[A,B],\ x''\in[A,B])$时,恒有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是,当$|h|<\delta$时,

$$\begin{aligned}&\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\\ \leqslant&\int_a^b|f(x+h)-\varphi(x+h)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\ \leqslant&2\int_A^B|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<2\,\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0$.

【2205】 设函数 $f(x)$于闭区间$[a,b]$上可积分,证明:等式

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$$

当且仅当对属于闭区间$[a,b]$内函数 $f(x)$连续的一切点有$f(x)=0$时方成立.

证 先证必要性：

采用反证法.设 $f(x)$在点 x_0 连续,但 $f(x_0)\neq 0$,则存在$\delta>0$,$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$,使当$|x-x_0|\leqslant\delta$时 $|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}$.从而,

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{f^2(x_0)}{2}\,2\delta=\frac{\delta f^2(x_0)}{2}>0.$$

这与假设$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

再证充分性：

也即要证：$f(x)$在$[a,b]$上可积条件下,假设 $f(x)$在一切连续点 x_0 上均有 $f(x_0)=0$,则必有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明分两个部分.第一,首先要指出当 $f(x)$在$[a,b]$上可积时,$f(x)$的连续点在$[a,b]$中必定是稠密的.此处所谓“稠密”性是指：对于任意区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,总存在一点 $x_0\in[\alpha,\beta]$,使 $f(x)$在 x_0 连续.第二,利用假设,并借助于稠密性,可证得充分性.现在先证第二部分,如下：由 $f(x)$在$[a,b]$上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0\in X$ 时有 $f(x_0)=0$ 的假设.便知,对于区间$[a,b]$的任一分法,均可适当地取 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$,使$f(\xi)=0$.从而,积分和 $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f^2(\xi)\Delta x_i=0$.由此,再注意到$f^2(x)$在$[a,b]$的可积性,便有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi)\Delta x_i=0.$$

如今再补证第一部分：应当首先指明,若 $f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积,则对任给的 $\varepsilon>0$,总存在$[\alpha,\beta]$的子区间$[\alpha',\beta']$,使得振幅 $\omega(\alpha',\beta')<\varepsilon$. 事实上,如果上述结论不成立,则存在一个$\varepsilon_0>0$,使对于$[\alpha,\beta]$的任意分法,有

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\sum_i\Delta x=\varepsilon_0(\beta-\alpha)>0,$$

这与 $f(x)$在$[\alpha,\beta]$可积矛盾,因此,结论为真.

今取$[\alpha,\beta]$为$[a_1,b_1]$.由于 $f(x)$在$[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},b_1-\frac{b_1-a_1}{4}]$上可积,故存在区间

$$[a_2,b_2]\subset[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},\quad b_1-\frac{b_1-a_1}{4}]\subset[a_1,b_1],$$

使 $\omega[a_2,b_2]<\frac{1}{2}$. 同样,存在区间

$$[a_3,b_3]\subset[a_2+\frac{b_2-a_2}{4},\quad b_2-\frac{b_2-a_2}{4}]\subset[a_2,b_2],$$

使$\omega[a_3,b_3]<\frac{1}{3}$. 这样继续下去, 得一串闭区间$[a_n,b_n]$($n=1,2,3,\cdots$),满足 $\alpha=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1=\beta$,并且

$$b_n-a_n\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}\to 0,\quad \omega[a_n,b_n]<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由区间套定理,诸$[a_n,b_n]$具有惟一的公共点 c.显然 $a_n<c<b_n$($n=1,2,3,\cdots$). 下证 $f(x)$在点 c 连续.

任给 $\varepsilon>0$,取正整数 n_0 使 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$.再取 $\delta>0$ 使$(c-\delta,c+\delta)\subset[a_{n_0},b_{n_0}]$.于是,当$|x-c|<\delta$时,必有

$$|f(x)-f(c)|\leqslant\omega[a_{n_0},b_{n_0}]<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

故 $f(x)$在点 $x=c$ 连续.到此,充分性证毕.

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1.牛顿—莱布尼兹公式　若函数 $f(x)$于闭区间$[a,b]$上有定义而且连续,$F(x)$为它的原函数(即 $F'(x)=f(x)$),则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b{}^{*}.$$

定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义表示由曲线$y=f(x)$,OX 轴及垂直于 OX 轴的二直线$x=a$和 $x=b$四者所围成的代数面积 S(图 4—2).

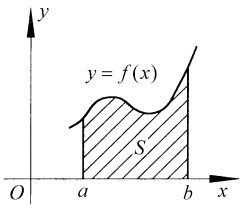

图 4—2

2.部分积分法　若函数 $f(x)$和 $g(x)$于闭区间$[a,b]$上连续并有连续导数 $f'(x)$和$g'(x)$,则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

3.变数代换　若:(1)函数 $f(x)$于闭区间$[a,b]$内连续,(2)函数$\varphi(t)$及其导数 $\varphi'(t)$皆于闭区间$[\alpha,\beta]$上连续,其中 $a=\varphi(\alpha)$,$b=\varphi(\beta)$;(3)复合函数 $f[\varphi(t)]$于闭区间$[\alpha,\beta]$上有定义并连续,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

利用牛顿—莱布尼兹公式,求下列定积分.

【2212】 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$　$(0<\alpha<\pi)$.

解　$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big|_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\arctan\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)+\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.$

【2213】 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$　$(0\leqslant\varepsilon<1)$.

解　令 $\tan\frac{x}{2}=t$,并记 $a=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$,则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{(1+\varepsilon)a}\int\frac{\mathrm{d}(at)}{1+(at)^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(a\tan\frac{x}{2}\right)+C,$$

---

* 本节个别题是收敛的广义积分,仍按此公式计算.——《题解》作者注.

故 $$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\arctan\left(a\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi-0}+\arctan\left(a\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi+0}^{2\pi-0}\right]=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

【2216】 设(2)$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}$;说明为什么运用牛顿—莱布尼兹公式会得到不正确的结果.

解 (2) 若应用公式得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

但$\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}>0$,故积分若存在,必为正.原因在于原函数在$[0,2\pi]$上 $x=\frac{\pi}{2}$,$x=\frac{3\pi}{2}$为第一类不连续点,故不能直接运用公式.

【2217】 求 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$.

解 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}.$$

注意 被积函数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$显然在 $x=0$ 间断,但易知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)=0,$$

故 $x=0$ 是可去间断点.若我们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0,则被积函数在整个$[-1,1]$上都是连续的,从而积分$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$存在.以后,凡是被积函数有可去间断点的情形,我们都按此法处理,理解为连续函数的积分,另外,

$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

应理解为

$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0+}\int_{-1}^{-\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{-\eta}=\frac{1}{3}.$$

以后,凡是定积分存在而原函数有间断点的情况,都按此理解,省去取极限的式子,但应理解为取极限的结果.

【2218】 求 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=200\sqrt{2}.$$

【2225】 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 由于 $$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\ln i\right)-n\ln n\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0} x(\ln x-1)\Big|_\varepsilon^1=-1,$$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

弃掉高阶同等无穷小，求下列和的极限值：

【2228】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}$.

解 由于 $\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{\pi}{n}(1+\alpha_n)$，式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}$$

$$=\left(\lim_{n\to1}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}\right)\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\dfrac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

【2232】 求：(3)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

解 (3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sin x)}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\cos x)}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$$

$$=-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)^{*)}=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

*) $\cos(\pi\cos^2 x)=\cos(\pi-\pi\sin^2 x)=-\cos(\pi\sin^2 x)$.

【2234】 证明：当 $x\to\infty$ 时，$\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\sim\dfrac{1}{2x}\mathrm{e}^{x^2}$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=1$，所以，当 $x\to\infty$ 时，$\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\sim\dfrac{1}{2x}\mathrm{e}^{x^2}$.

【2236】 设 $f(x)$ 为连续正值函数，证明：当 $x\geqslant0$ 时，函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

增加.

证 首先注意，$\lim\limits_{x\to0+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{xf(x)}{f(x)}=0$，故若规定 $\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$ 是 $x\geqslant0$ 上的连续函数. 另外，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\frac{f(x)}{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2}\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0 \quad (\text{当 } x>0 \text{ 时}),$$

所以,$\varphi(x)$当 $x\geqslant 0$ 时是增加的.

利用部分积分法的公式,求下列定积分:

【2242】$^+$ $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\lg x|\,\mathrm{d}x$.

解 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\lg x|\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} (-\lg x)\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}} \lg x\mathrm{d}x$

$$=\left(-x\lg x\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}+\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\frac{1}{\ln 10}\mathrm{d}x\right)+x\lg x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{\ln 10}\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\lg \mathrm{e}.$$

利用适当的变数代换,求下列定积分:

【2246】 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$,则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

【2250】 假设 $x-\frac{1}{x}=t$,来计算积分 $\int_{-1}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数是偶函数,于是,

$$\int_{-1}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\lim_{N\to-\infty}2\int_N^0\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}=\lim_{N\to-\infty}\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_N^0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【2251】 设:(1)$\int_{-1}^1\mathrm{d}x$,$t=x^{\frac{2}{3}}$;(2)$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$,$x=\frac{1}{t}$.

说明为什么用 $\varphi(t)$代换 x 会引致不正确的结果.

解 (1)$\int_{-1}^1\mathrm{d}x=2$.但若作代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$,则得

$$\int_{-1}^1\mathrm{d}x=\pm\frac{3}{2}\int_1^1 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=0.$$

其错误在于代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

(2)$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^1=\frac{\pi}{2}$.但若作代换 $x=\frac{1}{t}$,则得

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果:$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=0$.其错误在于 $x=\frac{1}{t}$,当 $t=0$(0 属于$[-1,1]$)时不连续.

【2262】 计算积分

$$\int_{\mathrm{e}^{-2\pi n}}^1\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x,$$

式中 n 为自然数.

证 $\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\sin(-\ln x)}{x}$.设 $x=\mathrm{e}^{-t}$,则

$$dx=-e^{-t}dt,\quad \frac{\sin(-\ln x)}{x}=\frac{\sin t}{e^{-t}}=e^{t}\sin t.$$

代入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx=\int_{0}^{2\pi n}|\sin t|\,dt=\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,dt$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\int_{0}^{\pi}\sin t\,dt=2\cdot 2n=4n.$$

【2266】 证明：当 n 为奇数时，函数

$$F(x)=\int_{0}^{x}\sin^{n}x\,dx\quad 及\quad G(x)=\int_{0}^{x}\cos^{n}x\,dx$$

为以 2π 为周期的周期函数；而当 n 为偶数时，则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数的和.

证 当 n 为奇数时，$\sin^{n}x$ 是奇函数，而且是以 2π 为周期的函数.于是，

$$F(x+2\pi)=\int_{0}^{x+2\pi}\sin^{n}x\,dx=\int_{0}^{2\pi}\sin^{n}x\,dx+\int_{2\pi}^{2\pi+x}\sin^{n}x\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{n}(\pi-x)\,dx+\int_{0}^{x}\sin^{n}x\,dx=0+\int_{0}^{x}\sin^{n}x\,dx=F(x)$$

及

$$G(x+2\pi)=G(x)+\int_{0}^{2\pi}\cos^{n}x\,dx=G(x)+\int_{0}^{\pi}\cos^{n}x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos^{n}x\,dx$$

$$=G(x)+\int_{0}^{\pi}\cos^{n}x\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos^{n}(x+\pi)\,dx=G(x),$$

从而得知：$F(x)$ 和 $G(x)$ 都是以 2π 为周期的周期函数.当 n 为偶数时，显然有

$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_{0}^{2\pi}\sin^{n}x\,dx,\qquad G(x+2\pi)=G(x)+\int_{0}^{2\pi}\cos^{n}x\,dx.$$

但因 $\int_{0}^{2\pi}\sin^{n}x\,dx=\int_{0}^{2\pi}\cos^{n}x\,dx=a>0$，所以，$F(x)$ 和 $G(x)$ 都不是以 2π 为周期的周期函数.

设 $F_1(x)=F(x)-\frac{a}{2\pi}x$，则

$$F_1(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\frac{a}{2\pi}(x+2\pi)=F(x)+a-\frac{a}{2\pi}x-a=F(x)-\frac{a}{2\pi}x=F_1(x).$$

即 $F_1(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，而 $F(x)=F_1(x)+\frac{a}{2\pi}x$.所以，$F(x)$ 为周期函数与线性函数之和.

同理，可以证明 $G(x)$ 也是周期函数与线性函数之和.

一般地，当 $f(x)$ 为周期函数时，可以证明：函数

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt$$

可表示成线性函数与周期函数之和.

计算下列积分：

【2270】$^{+}$ $\int_{1}^{e}(x\ln x)^{2}\,dx.$

解 $\int_{1}^{e}(x\ln x)^{2}\,dx=x^{3}\ln^{2}x\Big|_{1}^{e}-2\int_{1}^{e}x^{2}\ln x(1+\ln x)\,dx$

$$=e^3-2\int_1^e x^2\ln x\,dx-2\int_1^e (x\ln x)^2\,dx.$$

移项合并得

$$\int_1^e (x\ln x)^2\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{2}{9}x^3\ln x-\frac{2}{27}x^3\right)\Big|_1^e=\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}.$$

【2276】 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}\Big|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{2}.$

*) 利用 2035 题的结果.

【2278】 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,dx$.

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)\,dx$

$$=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\,dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x^2}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.$$

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分.

【2281】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

解 $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d(\cos x)=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,$$

移项合并得

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}; & \text{若 } n=2k,\\[2ex] \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{若 } n=2k+1.\end{cases}$$

【2282】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

解 设 $\frac{\pi}{2}-x=t$,则 $dx=-dt$,且 $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$.代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt.$$

因此,与 2281 题的结果相同.

【2283】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$.

解 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\mathrm{d}(\tan x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}$,

即 $I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}$.

由于 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$,于是,推得

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2n-3}-I_{n-2}\right)=\cdots=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-\cdots+(-1)^nI_0$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right].$$

利用尤拉公式:

$$\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}),\qquad \sin x=\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}),$$

计算下列积分(m及n为正整数):

【2291】 $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\frac{\sin nx}{\sin x}$,利用尤拉公式得

$$u=\frac{\mathrm{e}^{inx}-\mathrm{e}^{-inx}}{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}.$$

当 $n=2k$时, $u=(\mathrm{e}^{ikx}+\mathrm{e}^{-ikx})(\mathrm{e}^{i(k-1)x}+\mathrm{e}^{i(k-3)x}+\cdots+\mathrm{e}^{-i(k-3)x}+\mathrm{e}^{-i(k-1)x})$

$=\mathrm{e}^{(2k-1)ix}+\mathrm{e}^{(2k-3)ix}+\cdots+\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}+\cdots+\mathrm{e}^{-(2k-1)ix}$

$=2[\cos(2k-1)x+\cos(2k-3)x+\cdots+\cos x]$.

于是,

$$\int_0^{\pi}u\mathrm{d}x=2\left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3}+\cdots+\sin x\right]\Bigg|_0^{\pi}=0.$$

当 $n=2k+1$ 时,同上得

$$u=2[\cos2kx+\cos2(k-1)x+\cdots+\cos2x]+1,$$

于是,$\int_0^{\pi}u\mathrm{d}x=\pi$. 最后得到

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{为偶数};\\ \pi, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

求下列积分(n为自然数):

【2296】 $\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x$.

解 考虑积分 $I=\int_0^{\pi}\cos^{n+1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x$,并对它作两次分部积分,可得

$$I=I-\frac{n}{n+1}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x.$$

于是,

$$\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x=0.$$

本题也可不用分部积分法.事实上,$\cos^{n-1}x\sin(n+1)x$ 是以 π 为周期的函数,又是奇函数,于是,

$$\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\mathrm{d}x=0.$$

【2299】 利用多次的分部积分法,计算尤拉氏积分:

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

式中 m 及 n 为正整数.

解 $B(m,n)=\dfrac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1+\dfrac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x=\dfrac{n-1}{m}B(m+1,n-1).$

继续利用部分积分法,可得

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-1}\Big|_0^1=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

【2300】 勒让德多项式 $P_n(x)$ 被下面公式来定义:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

证明: $\displaystyle\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{若 } m\neq n;\\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{若 } m=n.\end{cases}$

证 当 $m\neq n$ 时,不失一般性,设 $n<m$.由于 $P_m(x)$ 为一 m 次的多项式,我们记

$$P_m(x)=R^{(m)}(x),$$

其中 $R(x)=\dfrac{1}{2^m m!}(x^2-1)^m$. 利用多次分部积分法,得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x\\ =&[P_n(x)R^{(m-1)}(x)-P_n'(x)R^{m-2}(x)+\cdots\\ &+(-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)]\Big|_{-1}^1+(-1)^m\int_{-1}^1 R(x)P_n^{(m)}(x)\mathrm{d}x\\ =&0.\end{aligned}$$

当 $m=n$ 时,

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^1\left[\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}\right]^2\mathrm{d}x,$$

设 $u=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^n-1)^n]$, $v=(x^2-1)^n$,则

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots\\ &+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v]\Big|_{-1}^1+(-1)^n\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^1 vu^{(n)}\mathrm{d}x\\ =&\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^1(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}[(x^2-1)^n]\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t^{*)}=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}^{**)}=\frac{2}{2n+1}.$$

*) 设 $x=\sin t$.

**) 利用 2282 题的结果.

【2301】 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积分,函数 $F(x)$在$[a,b]$内除了有限个点 $c_i(i=1,\cdots,p)$及点 a与 b 外皆有$F'(x)=f(x)$,而在这除去的有限个点上 $F(x)$有第一类的间断点(广义原函数).证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

证 为确定起见,设 $a<c_1<c_2<\cdots<c_p<b$,并记 $a=c_0$,$b=c_{p+1}$.由于 $f(x)$在$[a,b]$上可积,故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\sum_{i=1}^{p}\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)\mathrm{d}x.$$

显然,在$[c_i+\eta,c_{i+1}-\eta]$上 $F'(x)=f(x)$,从而可应用牛顿—莱布尼兹公式,得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)\mathrm{d}x=F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta),$$

由此可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta)]=\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)]$$

$$=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

求下列有界非连续函数的不定积分:

【2304】 $\int\mathrm{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x$.

解 由于 $\mathrm{sgn}(\sin x)$在任何有限区间上都可积,故其原函数 $F(x)=\int_0^x\mathrm{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.对任何 x,必存在惟一的整数 k使 $k\pi\leqslant x<(k+1)\pi$.于是,

$$F(x)=\int_0^x\mathrm{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}}\mathrm{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x\mathrm{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos t)\Big|_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos x)-\frac{\pi}{2}=\arccos(\cos x).$$

故

$$\int\mathrm{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x=\arccos(\cos x)+C\quad(-\infty<x<+\infty).$$

计算下列有界非连续函数的定积分:

【2314】 $\int_0^1\mathrm{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1\mathrm{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-\pi}}^1(-1)\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_{\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}}^{\mathrm{e}^{-k\pi}}\mathrm{d}x$

$$=-1+2\mathrm{e}^{-\pi}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-(k-1)x}=-1+\frac{2\mathrm{e}^{-\pi}}{1+\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}-1}{\mathrm{e}^{-\pi}+1}=-\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}.$$

【2315】 求$\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x}\,dx$,其中 E 为闭区间$[0,4\pi]$中使被积分式有意义的一切值所成之集合.

解
$$\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x}\,dx=\int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x}\,dx+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\,dx+\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x}\,dx$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\,dx=\frac{8}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}.$$

§3. 中值定理

1.函数的平均值 数
$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
称为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值.

若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则可求得一点 $c\in(a,b)$适合
$$M[f]=f(c).$$

2.第一中值定理 若:(1)函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$于闭区间$[a,b]$上有界并可积分;(2)当 $a<x<b$时,函数 $\varphi(x)$不变号,则
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$
式中 $m\leqslant\mu\leqslant M$及 $M=\sup\limits_{a<x<b} f(x)$, $m=\inf\limits_{a<x<b} f(x)$;(3)除此而外,若函数 $f(x)$于闭区间$[a,b]$上连续,则 $\mu=f(c)$,其中 $a\leqslant c\leqslant b$(作者注:可以证明,c可取值使 $a<c<b$).

3.第二中值定理 若:(1)函数 $f(x)$和 $\varphi(x)$于闭区间$[a,b]$上有界并可积分;(2)当 $a<x<b$时,函数 $\varphi(x)$是单调的,则
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)\,dx,$$
式中 $a\leqslant\xi\leqslant b$;(3)除此而外,若函数 $\varphi(x)$单调下降(广义的)且不为负,则
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx \quad (a\leqslant\xi\leqslant b);$$
(3′)若函数 $\varphi(x)$单调上升(广义的)且不为负,则
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)\,dx \quad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

【2316】 确定下列积分的符号:

(2)$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

解 (2) 由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2\sin c}{c(c+\pi)}>0,\quad (\text{其中 } 0<c<\pi).$$

【2319】 求椭圆之焦径

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\quad (0<\varepsilon<1)$$

之长的平均值.

解 设 $\varphi=\pi+t$,则

$$M(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{p}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\overset{*)}{=}\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b,$$

其中 b 为椭圆的短半轴.

*) 利用 2213 题的结果.

利用第一中值定理估计积分:

【2324】 $\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^9\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$,从而,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^9\mathrm{d}x,\quad \text{即}\quad \frac{1}{10\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{10}.$$

利用第二中值定理,估计积分:

【2328】 $\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$

解 设 $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\frac{1}{x}$,则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[100\pi,200\pi]$ 上满足第二中值定理的条件,又 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 单调下降且不为负,于是,

$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1-\cos\xi}{100\pi}=\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}}{50\pi}=\frac{\theta}{50\pi},$$

其中 $100\pi\leqslant\xi\leqslant 200\pi$ 及 $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

【2331】 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a,b]$ 上可积分.证明:哥西—布尼雅可夫斯基不等式

$$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 考虑积分 $\int_a^b[\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2\mathrm{d}x$,其中 λ 为任意实数.从而有

$$\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x-2\lambda\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

这是关于变数 λ 的不等式，左端是二次三项式．于是，其判别式

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2-\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

【2332】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可微分且 $f(a)=0$，证明不等式

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$．

证 设 x 为 $[a,b]$ 上任一点，利用哥西—布尼雅可夫斯基不等式得到

$$\left\{\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}x\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$f^2(x)=[f(x)-f(a)]^2\leqslant(x-a)\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

由此可知 $M^2=\sup\limits_{x\in[a,b]}f^2(x)\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$

【2333】 证明：等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0.$$

证 证法 1：应用第一中值定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\,p=0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n+p$ 之间的某值．

证法 2：应用第二中值定理，得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{n}\left|\int_n^{\xi_n'}\sin x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{n}|\cos n-\cos\xi_n'|\leqslant\frac{2}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中 ξ_n' 是界于 n 与 $n+p$ 之间的某值．于是，

$$\lim_{n\to\infty}\int_p^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0.$$

§4. 广义积分

1.函数的广义可积分性　若函数 $f(x)$于每一个有穷区间$[a,b]$上依寻常的意义是可积分的,则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若函数 $f(x)$于点 b的邻域内无界且于每一个区间$(a,b-\varepsilon)(\varepsilon>0)$内依寻常的意义是可积分的,则取

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

若极限(1)或(2)存在,则对应的积分称为收敛的,在相反的情形则称为发散的.

2.哥西准则　积分(1)收敛的充要条件为对于任意的 $\varepsilon>0$,存在有数 $b=b(\varepsilon)$,当 $b'>b$及 $b''>b$时,下面的不等式成立

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

同样地对形状为(2)的积分可述出哥西准则.

3.绝对收敛的判别法　若$|f(x)|$是广义可积分的,则函数 $f(x)$的对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的,而且显然也是收敛的积分.

比较判别法Ⅰ.设当 $x\geqslant a$时$|f(x)|\leqslant F(x)$.

若$\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$收敛,则积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛.

比较判别法Ⅱ.若 $\psi(x)>0$及当 $x\to+\infty$时,$\varphi(x)=O^*[\psi(x)]$.则积分

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$$

同时发散或同时收敛.就特别情形来说,若当 $x\to+\infty$时,$\varphi(x)\sim\psi(x)$,则上面的结果也成立.

比较判别法Ⅲ.(1)　设当 $x\to+\infty$时,

$$f(x)=O^*\left[\frac{1}{x^p}\right].$$

在这种情况下,当 $p>1$时,积分(1)收敛;当 $p\leqslant1$时,积分(1)发散.

(2)　设当 $x\to b-0$时,

$$f(x)=O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right].$$

在这种情况下,当 $p<1$时,积分(2)收敛;当 $p\geqslant1$时,积分(2)发散.

4.收敛性的较精密的判别法　若(1)当 $x\to+\infty$时,函数 $\varphi(x)$单调地趋近于零;(2)函数 $f(x)$有有界的原函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

收敛,但一般地说,并非绝对收敛.

特殊情形,若 $p>0$,则积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

收敛.

5.在哥西意义上的主值 若函数 $f(x)$对任意的 $\varepsilon>0$ 积分

$$\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x \quad (a<c<b)$$

存在,则在哥西意义上的主值$(V\cdot P\cdot)$为

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right].$$

相仿地,

$$V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

计算下列积分:

【2339】 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ *) $+C.$

由于

$$\begin{aligned}&\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}\\&=\lim_{a\to-\infty}\left\{\left[\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right]-\left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\\&\quad+\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right]-\left[\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right\}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},\end{aligned}$$

所以, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

*) 利用 1921 题的递推公式.

利用递推公式计算下列广义积分(n为自然数):

【2349】$^+$ $\displaystyle I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+2bx+c)^n}$ $(ac-b^2>0)$.

解 $\displaystyle I_n=\frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{2(ac-b^2)}I_{n-1}$ *)

$$=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1},$$

即 $\displaystyle I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1}$ $(n>1)$.

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+2bx+c}=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}\arctan\frac{|a|\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

利用递推公式及 I_1 容易得到

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

*) 利用 1921 题的结果.

【2351】 $I_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解 由于 $\sqrt{1-x}\,\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\to\frac{1}{2}$（当 $x\to1-0$ 时），且 $p=\frac{1}{2}<1$，所以，积分 I_n 收敛.

其次，设 $x=\sin t$，则

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时;}^{*)}\\[2ex] \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

*) 利用 2281 题的结果.

【2353】 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$.

解 先证明它们是收敛的.事实上，当 $x\to+0$ 时，$\sqrt{x}\ln\sin x\to0$，所以，积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

同法可证积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$ 也收敛.

其次，求这两个积分的值.设 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=A.$$

相加得

$$\begin{aligned}2A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin2x\mathrm{d}x-\ln2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln2=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t\right)-\frac{\pi}{2}\ln2\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln2=A-\frac{\pi}{2}\ln2,\end{aligned}$$

于是，$2A=A-\frac{\pi}{2}\ln2$，$A=-\frac{\pi}{2}\ln2$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln2.$$

【2356】 数

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的平均值.求下列函数的平均值：

(2) $f(x)=\arctan x$；　(3) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

解 (2) $M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x \arctan\xi\,\mathrm{d}\xi=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left[x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$

$=\dfrac{\pi}{2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}=\dfrac{\pi}{2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2(1+x^2)}=\dfrac{\pi}{2}$;

(3) 利用第二中值定理,得

$$\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{x}\int_c^x\sin\xi\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{x}(\cos c-\cos x)\quad(0\leqslant c\leqslant x).$$

于是,

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos c-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$$

【2357】 求:

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t}{x^3}$; (3) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_x^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{\ln\frac{1}{x}}$ *)

其中 $a>0$, $f(t)$为闭区间$[0,1]$上的连续函数.

解 (2) 由于 $t^2<\sqrt{1+t^4}$, 所以, $\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}$, 从而, 当 $x\to+\infty$时, $\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\to+\infty$. 利用洛比塔法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}=\frac{1}{3};$$

(3) 由于$\lim\limits_{t\to+0}t(t^{-1}\mathrm{e}^{-t})=1$,故广义积分$\int_0^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$发散.从而,所求的极限是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式. 利用洛比塔法则,得

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-\mathrm{e}^{-x}x^{-1}}{-\frac{1}{x}}=1.$$

*) 原题(3)中 $x\to+0$ 误印为 $x\to0$.

研究下列积分的收敛性:

【2361】 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

解 将积分分成

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

对于积分$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. 由于 $x^{1-p}(x^{p-1}\mathrm{e}^{-x})\to1$ (当 $x\to+0$ 时),故当 $p>0$ 时 (从而 $1-p<1$),积分$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

对于积分$\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. 由于 $x^2(x^{p-1}\mathrm{e}^{-x})=\dfrac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x}\to0$ (当 $x\to+\infty$时), 故对于一切p值, 积分$\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 恒收敛.

于是，当 $p>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2362】 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 将积分分成

$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，由于

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{-q}x^p \ln^q \frac{1}{x}=\lim_{x\to 1-0}x^p\left(\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q=\left(\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q=\left[\lim_{x\to 1-0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1}\right]^q=1,$$

故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 当 $-q<1$（即 $q>-1$）时收敛，当 $-q\geqslant 1$（即 $q\leqslant -1$）时发散. 于是，当 $q\leqslant -1$ 时，$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 必发散. 故下面可在 $q>-1$ 的假定下来讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

若 $p>-1$，可取 $\tau>0$ 充分小，使 $p-\tau>-1$. 于是，

$$\lim_{x\to+0}x^{-p+\tau}x^p \ln^q \frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^\tau}=0.$$

由于 $-p+\tau<1$，故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛；

若 $p\leqslant -1$（设 $q>-1$），则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1}\ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}\left(\ln\frac{1}{x}\right)=-\left.\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q+1}}{q+1}\right|_0^{\frac{1}{2}}=+\infty.$$

故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

总之，仅当 $p>-1$ 且 $q>-1$ 时，积分 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2367】$^+$ $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$ $(n\geqslant 0)$.

解 当 $a\neq 0$ 时，设 $f(x)=\cos ax$，$g(x)=\frac{1}{1+x^n}$，则对于任意的 $A>0$，均有

$$\left|\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{a};$$

其次，当 $n>0$ 时，$g(x)$ 单调下降且趋于零（$n\to+\infty$）. 从而得知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 收敛. 至于当 $n=0$ 时，积分显然发散.

当 $a=0$ 时，由于 $x^n\frac{1}{1+x^n}\to 1$（当 $x\to+\infty$ 时），故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 仅当 $n>1$ 时收敛.

于是，当 $a\neq 0$、$n>0$ 及 $a=0$、$n>1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$. 收敛.

【2368】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

解 注意到$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right)$.积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$显然发散.

又因对于任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A \cos 2x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，且当 $x\to+\infty$时，$\frac{1}{x}$单调地趋于零，故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$收敛.

于是,积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散,从而,积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散.

【2369】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$.

解 先考虑积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$. 对于任何 q 值,由于

$$\lim_{x\to+0}x^p\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos^q x}\right)=1,$$

故积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$仅当 $p<1$(q为任意值)时收敛.

再考虑积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$. 对于任何 p 值,由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^q\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\sin^p x}\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^q=1,$$

故积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ 仅当 $q<1$（p 为任意值）时收敛.

于是，当$p<1$ 且 $q<1$，积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$收敛.

【2371】 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$.

解 先考虑积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$.不妨设 $\min(p,q)=p$,由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^p\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+x^{q-p}}=1,$$

故积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$仅当 $p<1$,即当 $\min(p,q)<1$ 时收敛.

再考虑积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$.不妨设 $\max(p,q)=q$,由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^q\frac{1}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-(q-p)}+1}=1,$$

故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$仅当 $q>1$ 即当 $\max(p,q)>1$ 时收敛.

于是,当 $\min(p,q)<1$ 且 $\max(p,q)>1$ 时,积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$收敛.

【2374】 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$.

解 先考虑 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$. 对于任意的 p, 由于

$$\lim_{x\to 1+0}\left[(x-1)^q \frac{1}{x^p \ln^q x}\right] = \lim_{x\to 1+0}\left[\frac{1}{x^p}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\right] = \left(\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q = \left(\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^q = 1,$$

故积分 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$ 仅当 $q<1$ 且 p 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$. 如果 $p>1$, 取 $\alpha>0$ 充分小, 使 $p-\alpha>1$, 则对于任意的 q, 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-\alpha}\frac{1}{x^p \ln^q x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha \ln^q x}\right) = 0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$ 收敛; 如果 $p\leqslant 1$, $q<1$, 由于

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x} \geqslant \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^q x} = \left.\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\right|_2^{+\infty} = +\infty,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$ 发散.

于是, 当 $p>1$ 且 $q<1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$ 收敛.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

【2378】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 对于任意的 $A>1$, 由于 $\left|\int_1^A \sin x \mathrm{d}x\right| \leqslant 2$, 且当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调地趋于零, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 而积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是普通的定积分 $\left(\frac{\sin x}{x}\right.$ 在 $x=0$ 有可去间断点, 故补充定义其值为 1 后, $\left.\frac{\sin x}{x}\right.$ 可视为 $[0,1]$ 上的连续函数$\left.\right)$, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 但它不是绝对收敛的.

事实上, 当 $x>0$ 时, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x}$, 由 2368 题知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散, 故积分 $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ 发散.

【2380】 $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\mathrm{d}x \quad (q\neq 0)$.

解 设 $t=x^q$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}$. 于是,

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\mathrm{d}x = \frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t \mathrm{d}t.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t \mathrm{d}t$. 由于 $\lim_{t\to+0}\left(t^{-\frac{p+1}{q}}\cdot t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right) = \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$, 故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t \mathrm{d}t$ 仅当 $-\frac{p+1}{q}<1$, 即当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时收敛. 又由于被积函数在 $[0,1]$ 上非负, 故也是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t \mathrm{d}t$. 如果 $\frac{p+1}{q}<1$, 则由于对任意的 $A>1$, $\left|\int_1^A \sin t \mathrm{d}t\right| \leqslant 2$ 且

$t^{\frac{p+1}{q}-1}$单调地趋于零(当 $t\to+\infty$时),故此时积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$收敛.如果$\frac{p+1}{q}=1$,则积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$显然发散.从而,积分$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$也发散.如果$\frac{p+1}{q}>1$,则由于$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}=+\infty$,故对任给的 $A>0$,总存在自然数 N,使有 $2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$,且当 $t>2N\pi+\frac{\pi}{4}$时,$t^{\frac{p+1}{q}-1}>\sqrt{2}$.

今取 $A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}$, $A''=2N\pi+\frac{\pi}{2}$, 则有

$$\left|\int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t\right|>\sqrt{2}\left|\int_{A'}^{A''}\sin t\mathrm{d}t\right|=1,$$

它不可能小于任给的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,因而,积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$发散,从而,积分$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}t\mathrm{d}t$也发散.

于是,仅当$-1<\frac{p+1}{q}<1$时,积分$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$收敛,且当$\frac{p+1}{q}>-1$时,积分$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$绝对收敛.

下面我们考虑积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$的绝对收敛性.分三种情形讨论:

(1) 当$\frac{p+1}{q}<0$时,由于$\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\leqslant t^{\frac{p+1}{q}-1}$ $(1\leqslant t<+\infty)$.且$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\mathrm{d}t$收敛,故当$\frac{p+1}{q}<0$时,积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$绝对收敛;

(2) 当$\frac{p+1}{q}=0$时,由于$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=+\infty$故此时积分不绝对收敛(但条件收敛);

(3) 当$\frac{p+1}{q}>0$时,由于$\int_1^{+\infty}|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t|\,\mathrm{d}t\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=+\infty$,故此时积分也不是绝对收敛的.

于是,当$-1<\frac{p+1}{q}<0$时,积分$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$绝对收敛.

最后我们得到:当$-1<\frac{p+1}{q}<0$时,积分$\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x$绝对收敛;当$0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$时,积分条件收敛.

【2384】 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,则当 $x\to+\infty$时是否必有$f(x)\to0$? 研究例子:

(1)$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$.

解 不一定.例如,

(1) 积分$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$收敛.事实上,它是 2380 题之特例:$p=0$,$q=2$.但是,$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x^2)$不存在.

【2385】 于$[a,b]$上有定义的，无界函数 $f(x)$可否把函数 $f(x)$的收敛广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$看作对应的积分和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

的极限？式中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

解 不能.因为若 $c(a\leqslant c\leqslant b)$是瑕点，则对于$[a,b]$的任何分法，不论其 $\max|\Delta x_i|$多么小，当分法确定以后，设 $c\in[x_j,x_{j+1}]$，则总可以取 ξ_j，使 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于任何预先给定的值.因此，当 $\max|\Delta x_i|\to 0$时，$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能具有有限极限.

【2386】 设

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

收敛，函数 $\varphi(x)$有界，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

是否必定收敛？举出适当的例子.

若积分(1)绝对收敛，问积分(2)的收敛性如何？

解 不.例如，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$收敛*)，且 $\varphi(x)=\sin x$有界，但是积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$是发散的**).

若积分(1)绝对收敛，$\varphi(x)$有界，则积分(2)一定是绝对收敛的.事实上，设$|\varphi(x)|\leqslant L$，则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant L|f(x)| \quad 及 \quad \int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

的收敛性即可获证.

*) 利用 2378 题的结果.

**) 利用 2368 题的结果.

【2390】 证明：

(2) $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=0$.

证 (2) 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}+\int_{1+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\right)$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}\right|=0,$$

所以，$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=0$.

【2392】 $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.

解 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}+\int_{1+\varepsilon}^{2-\eta}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}+\int_{2+\eta}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}-\ln 2+\ln\frac{\eta}{1-\eta}-\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right|-\ln\frac{\eta}{1+\eta}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}-\ln 2+\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)=-\ln 2=\ln\frac{1}{2},$$

所以， $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}=\ln\frac{1}{2}$.

§5. 面积的计算法

1.直角坐标系中的面积　由两条连续的曲线 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)[y_2(x)\geqslant y_1(x)]$与 Ox 轴的两条垂线$x=a$和$x=b$所围成的面积 $S=A_1A_2B_2B_1$(图 4－5(1))等于

$$S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x.$$

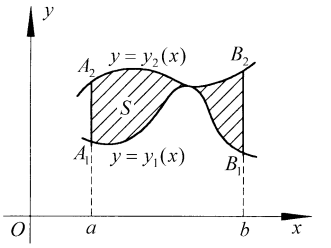

图 4－5(1)

2.参数形状表出的曲线所围成的面积　若 $x=x(t)$，$y=y(t)[0\leqslant t\leqslant T]$为一逐段平滑的简单封闭曲线 C的参数方程式,面积 S表由此曲线所围在它左侧的面积(图 4－5(2))，则

$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^T x(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

或

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)]\mathrm{d}t.$$

3.极坐标系中的面积　由连续的曲线 $r=r(\varphi)$和两条半射线 $\varphi=\alpha$和 $\varphi=\beta$所围成的面积 $S=OAB$(图 4－5(3))等于

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

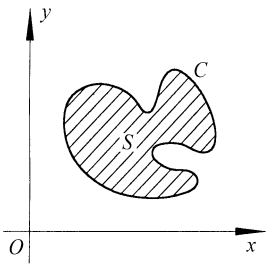

图 4－5(2)

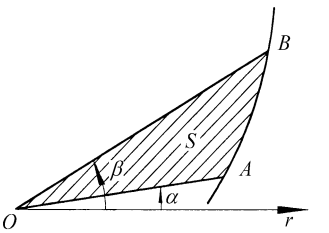

图 4－5(3)

求下列直角坐标方程所表曲线围成的面积*.

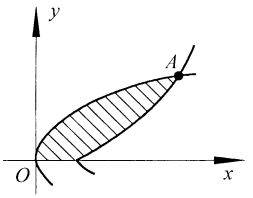

图 2405

【2405】 $y^2=2px$, $27py^2=8(x-p)^3$.

解 曲线 $L_1:27py^2=8(x-p)^3$ 与曲线 $L_2:y^2=2px$ 在第一象限内的交点为 $A(4p,2\sqrt{2}p)$,如图 2405 所示,所求的面积为

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}p}\left[\left(p+\frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{2p}y^2\right]\mathrm{d}y=\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2.$$

【2406】 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ $(AC-B^2>0)$.

解 解此方程,得

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},\quad 及\quad y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},$$

当 $B^2x^2-C(Ax^2-1)\geqslant 0$,即 $|x|\leqslant\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$ 时,y_1 及 y_2 才有实数值.

设 $a=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$,则所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}(y_2-y_1)\mathrm{d}x=\frac{2}{C}\int_{-a}^{a}\sqrt{C^2-(AC-B^2)x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\,\frac{\pi}{2}a^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

【2408】 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ (曳物线),$y=0$.

解 如图 2408 所示,所求的面积为

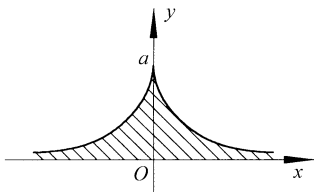

图 2408

$$S=2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\mathrm{d}y$$

$$-2\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\left(y\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}+a\arcsin\frac{y}{a}\right)\Bigg|_\varepsilon^a-\frac{\pi a^2}{2}=$$

$$\frac{\pi a^2}{2}.$$

求由下列参数方程式所表曲线围成的面积:

【2415】 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$(圆的渐伸线)及 $x=a$, $y\leqslant 0$.

解 所求的面积为

$$S=-\int_0^{2\pi}a(\sin t-t\cos t)at\cos t\mathrm{d}t-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x$$

$$=a^2\left(\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x,$$

* 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的.

其中$\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x$表沿着从点$A(a,-2\pi a)$到点$B(a,0)$的直线$\overline{AB}$上的积分.由于在$\overline{AB}$上$x\equiv a$,故$\mathrm{d}x=0$.从而,$\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x=0$.

于是,得 $S=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$.

求由下列极坐标方程式所表曲线围成的面积S:

【2421】 $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$(抛物线), $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

解 所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{p^2}{(1-\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^4\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=-\frac{p^2}{4}\left(\cot\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\cot^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3)^{*)}.$$

*) $\cot\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$.

【2422】 $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$(椭圆).

解 所求的面积为

$$S=2\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{p^2\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=p^2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

设$\tan\frac{\varphi}{2}=t$,并记$a^2=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$,则有

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=\int\frac{2(t^2+1)\mathrm{d}t}{(1-\varepsilon)^2(t^2+a^2)^2}=\frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{2}{a(1-\varepsilon)^2}\arctan\frac{t}{a}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\left\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a}\right\}^{*)}+C.$$

当$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$时,$0\leqslant t<+\infty$,从而得一广义积分.于是,经计算得

$$S=\left\{\frac{\pi}{a(1-\varepsilon)^2}+\frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\varepsilon)^2}\right\}p^2=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*) 利用1921题的递推公式.

变为极坐标,以求下列曲线所围成的面积:

【2426】 $x^3+y^3=3axy$ (笛卡尔叶形线).

解 $r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$,于是,

$$r=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}.$$

当$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,$r\geqslant0$,且当$\varphi=0$及$\varphi=\frac{\pi}{2}$时,$r=0$.所以,从$\varphi=0$到$\varphi=\frac{\pi}{2}$,叶形线位于第一象限部分所围成的面积,即为所要求的面积(图2426)

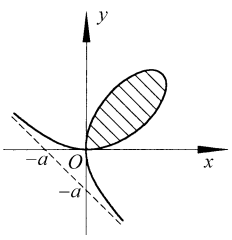

图2426

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}\overset{*)}{=}\frac{9a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{3(1+t^3)}\Big|_0^b=\frac{3a^2}{2}.$$

*) 设 $\tan\varphi=t$.

化方程式为参数式的形状，以求下列曲线所围成的面积：

【2429】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ （内摆线）.

解 设 $$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,$$

其中 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，它对应于四分之一的面积.所求的面积为其四倍，即

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

§6. 弧长的计算法

1.在直角坐标系中的弧长　平滑（连续可微分的）曲线

$$y=y(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

上一段弧的长度等于

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

2.参数方程所表曲线的弧长　若曲线 C 用参数方程式给出

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T),$$

式中 $x(t)$，$y(t)$ 为在闭区间 $[t_0,T]$ 内可微分的连续函数，则曲线 C 的弧长等于

$$s=\int_{t_0}^T\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

3.极坐标系中的弧长　若

$$r=r(\varphi)\quad(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta),$$

式中 $r(\varphi)$ 及其导函数 $r'(\varphi)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上皆是连续的，则曲线上对应的一段弧长等于

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章.

求下列曲线的弧长：

【2433】 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 至点 $B(b,h)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^b\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\int_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b=a\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{h^2-a^2}\overset{*)}{}.$$

*) 由于 $h=a\operatorname{ch}\frac{b}{a}$，故 $\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{1}{a}\sqrt{h^2-a^2}$.

【2441】 $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad c^2=a^2-b^2$ （椭圆的渐屈线）.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\ \sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}$. 所求的弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\ \sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{12c^2}{3ab(a^2-b^2)}\{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t\}^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

【2450】 $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi)$（图 2450）.

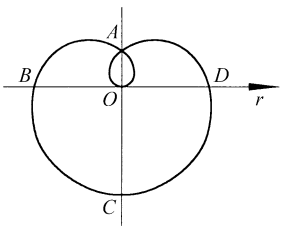

图 2450

所求的弧长为 $s=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\varphi}{3}\mathrm{d}\varphi=\frac{3\pi a}{2}$. 我们甚至可以证明：

1. 弧 AB 为弧 $OABC$ 的三分之一；

2. OA, AB, BC 之间依次是等差的，其公差为 $\frac{3a}{8}\sqrt{3}$.

不仅如此，我们还可以证明更一般的情况：曲线

$$r=a\sin^n\left(\frac{\theta}{n}\right)\quad (n\text{ 为正整数})$$

之全长为

$$s=\begin{cases}\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & \text{当 } n=2k \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时}.\end{cases}$$

【2453】 证明：椭圆

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

的弧长等于正弦曲线 $y=c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

证 对于椭圆，其全长为

$$s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

对于正弦曲线，其一波（x 由 0 到 $2\pi b$）之长为

$$s_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+c^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

所以，$s_1=s_2$，本题得证.

§7. 体积的计算法

1. 由已知横切面计算物体体积　若物体体积 V 存在及 $S=S(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 为用平面切下的

物体的横断面积，而此横断面为经过 x 点垂直于 Ox 轴者，则

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

2.旋转体的体积　面积

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

式中 $y(x)$ 为单值连续函数，绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\mathrm{d}x.$$

更普遍的情形：面积

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数，绕 Ox 轴旋转所成的环形的体积等于

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]\mathrm{d}x.$$

求下列曲面所围成的体积：

【2463】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ （椭球）.

解　用垂直于 Ox 轴的平面截椭球得截痕为一椭圆，它在 yOz 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

由此显见其半轴分别为 $b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ 及 $c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$，从而，此椭圆的面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

于是，所求的椭球的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\pi bc\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc.$$

【2466】 $x^2+y^2+z^2=a^2$，　$x^2+y^2=ax$.

解　如图 2466 所示，过点 $M(x,0,0)$ 垂直于 Ox 轴作一平面，在所给立体上截出一曲边梯形，其曲边由方程

$$z=\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}$$

给出（上半面），其变化范围为：

$$-\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}$$

（如图中 $ABCD$）. 从而，其截面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

于是，所求的体积为

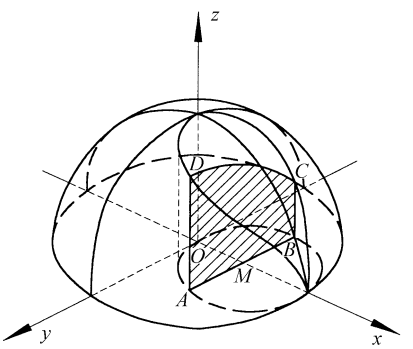

图 2466

$$V=2\int_0^a S(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a\left[a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]\mathrm{d}x$$
$$=4\left\{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{5}a^3+\left[\left(\frac{\pi a^3}{4}-\frac{1}{2}a^3\right)-\left(\frac{1}{12}\pi a^3-\frac{13}{90}a^3\right)\right]\right\}=\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

求下列曲线旋转所成曲面包围的体积.

【2480】 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，$y=0$：

(1) 绕 Ox 轴；(2) 绕 Oy 轴；(3) 绕直线 $y=2a$.

解 所求的体积为

(1) $V_x=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=5\pi^2a^3$；

(2) $V_y=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi^3a^3$；

(3) 作平移：$y=\bar{y}+2a$，$x=\bar{x}$ 则曲线方程为，

$$\bar{x}=a(t-\sin t),\quad \bar{y}=-a(1+\cos t),\quad 及\quad \bar{y}=-2a.$$

于是，所求的体积为

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi}[4a^2-a^2(1+\cos t)^2]a(1-\cos t)\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.$$

求下列由极坐标所表出的面积经旋转后所得的体积：

【2484】 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$：

(1) 绕 Ox 轴；(2) 绕 Oy 轴；(3) 绕直线 $y=x$.

解 (1) 曲线的极坐标方程为 $r^2=a^2(2\cos^2\varphi-1)$.

$$V_x=2\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[a^2(2\cos^2\varphi-1)]^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

由于

$$\int(2\cos^2\varphi-1)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\int[(\sqrt{2}\cos\varphi)^2-1]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(\sqrt{2}\cos\varphi)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]+C,$$

所以，

$$V_x=-\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\right]=\frac{1}{4}\pi a^3\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right].$$

(2) 利用对称性知，所求的体积为

$$V_y=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^3\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

令 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$，则 $\sqrt{\cos 2\varphi}=\cos x$，$\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\mathrm{d}x$，并且 x 的变化范围为 $(0,\frac{\pi}{2})$. 于是，得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.$$

(3) 利用对称性知，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

若用本题(2)的变换,即得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

§8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑的曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P=2\pi\int_A^B y\mathrm{d}s,$$

式中 $\mathrm{d}s$ 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

【2489】 $y^2=2px$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$:

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $\sqrt{1+y_x'^2}=\dfrac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$. 于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2].$$

(2) $\sqrt{1+x_y'^2}=\dfrac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$. 于是,所求的表面积为

$$P_y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}} x\sqrt{1+x_y'^2}\mathrm{d}y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}\frac{y^2}{2p}\cdot\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2\sqrt{p^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2px_0}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right].$$

【2495】 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$:

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y=2a$.

解 先求 $\mathrm{d}s$: $\mathrm{d}s=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,\mathrm{d}t=2a\sin\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t$. 于是,所求的表面积为

(1) $P_x=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\mathrm{d}u=\dfrac{64}{3}\pi a^2$.

(2) $P_x=2\pi\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)2a\sin\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t=16\pi^2 a^2$.

(3) 作平移 $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}+2a$ 则 $\bar{y}=-a(1+\cos t)$.

$$P_x=\left|2\pi\int_0^{2\pi}\left[-a(1+\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\right]\right|^{*)}=\frac{32}{3}\pi a^2.$$

*) 在此取绝对值,是由于被积函数始终不为正之故.

【2498】 $r^2=a^2\cos 2\varphi$;

(1) 绕极轴; (2) 绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{2}$; (3)绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

解 (1) $y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$, $\mathrm{d}s=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$. 于是,所求的表面积为

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(2) $x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$. 于是,所求的表面积为

$$P=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\sqrt{2}.$$

(3) $x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$, $y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$, $\mathrm{d}s=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$.

注意到在 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内恒有 $x-y\geqslant 0$,于是,所求的表面积为

$$P=2\cdot 2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{a}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=4\pi a^2.$$

§9. 矩的计算法. 重心的坐标

1.矩 若在 Oxy 平面上,密度为 $\rho=\rho(y)$的质量 M 充满了某有界连续统 Ω(曲线,平面的区域),而 $\omega=\omega(y)$为 Ω中纵标不超过 y 的部分的对应的度量(弧长,面积),则数

$$M_k=\lim_{\max|\Delta y_i|\to 0}\sum_{i=1}^{i}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i)=\int_\Omega\rho y^k\mathrm{d}\omega(y)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

称为质量 M 对于轴的k 次矩.

特殊情形,当 $k=0$ 时得质量 M,当 $k=1$ 时得静力矩,当 $k=2$ 时得转动惯量.

同样地可定义出质量对于坐标平面的矩.

若 $\rho=1$,则对应的矩称为几何矩(线矩,面积矩,体积矩等等).

2.重心 均匀平面图形 S的重心的坐标(x_0,y_0)根据下面的公式来定义

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},\qquad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ 为面积 S对于 Oy 轴和 Ox 轴的几何静力矩.

【2504】 求底半径为 r 和高为 h 的均匀圆锥对于其底平面的静力矩和转动惯量($\rho=1$).

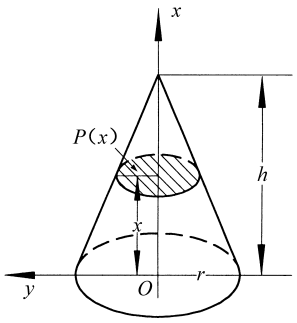

图 2504

解 取坐标系如图 2504 所示,则

$$M_1=\int_0^h x\,P(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$P(x)=\pi y^2=\pi\left[\frac{r}{h}(h-x)\right]^2.$$

于是,所求的静力矩和转动惯量分别为

$$M_1=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x(h-x)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2h^2}{12};$$

$$M_2=\int_0^h x^2P(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2(h-x)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2h^3}{30}.$$

【2509】 求面积

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\quad(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$$

的重心的坐标.

解 首先,我们已知第一象限椭圆的面积等于$\frac{\pi ab}{4}$.

其次,我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积.因为 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$,所以,

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

按古尔金第二定理,我们有 $2\pi\eta\frac{\pi ab}{4}=\frac{2}{3}\pi ab^2$, $\eta=\frac{4b}{3\pi}$. 同理可求得 $\xi=\frac{4a}{3\pi}$.事实上,只须在结果中间将 a 和 b 对调即得.于是,所求的重心为 $(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi})$.

【2510】 求半径为 a 的均匀半球的重心坐标.

解 取圆心作为原点,则球的方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

设重心为 (ξ,η,ζ), 显见 $\xi=\eta=0$. 而 $V_{半球}=\frac{2\pi a^3}{3}$. 将圆 $y^2+z^2=a^2$ 绕 Oz 轴旋转,即得球.又

$$M_1^{(z)}=\int_{(V)}z\mathrm{d}V=\pi\int_0^a zy^2\mathrm{d}z=\pi\int_0^a z(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi a^4}{4}.$$

最后得到

$$\zeta=\frac{M_1^{(z)}}{V}=\frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}}=\frac{3a}{8}.$$

于是,所求的重心为 $(0,0,\frac{3a}{8})$.

【2511】 求对数螺线

$$r=ae^{m\varphi}\quad(m>0)$$

上由点 $O(-\infty,0)$到点 $P(\varphi,r)$的弧 OP 的重心 $C(\varphi_0,r_0)$的坐标.当 P 点移动时,C 点画出怎样的曲线?

解 重心的直角坐标为

$$\xi=\frac{\int_{(l)}x\mathrm{d}s}{\int_{(l)}\mathrm{d}s}=\frac{\int_{-\infty}^{\varphi}r\cos\varphi\ \sqrt{a^2(1+m^2)}\mathrm{e}^{m\varphi}\mathrm{d}\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\sqrt{a^2(1+m^2)}\mathrm{e}^{m\varphi}\mathrm{d}\varphi}=\frac{a\int_{-\infty}^{\varphi}\mathrm{e}^{2m\varphi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\mathrm{e}^{2m\varphi}\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{ma\mathrm{e}^{m\varphi}(\sin\varphi+2m\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

同法可得

$$\eta=\frac{\int_{(l)}y\mathrm{d}s}{\int_{(l)}\mathrm{d}s}=\frac{ma\mathrm{e}^{mp}(2m\sin\varphi-\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

于是,重心的极坐标为

$$r_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\frac{ma}{4m^2+1}\sqrt{4m^2+1}\mathrm{e}^{m\varphi}=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}},$$

$$\tan\varphi_0=\frac{\eta}{\xi}=\frac{2m\tan\varphi-1}{\tan\varphi+2m}=\frac{\tan\varphi-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\tan\varphi},$$

即 $\varphi_0=\varphi-\alpha$,其中 $\alpha=\arctan\frac{1}{2m}$.

当 P 点移动时,$C(\varphi_0,r_0)$画出的曲线为

$$r_0=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}\mathrm{e}^{m\varphi}=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}\mathrm{e}^{m(\varphi_0+\alpha)}.$$

这也是一条对数螺线.

§10. 力学和物理学中的问题

作成适当的积分和并找出它们的极限,来解下列问题:

【2520】 求水对于垂直壁上的压力,这壁的形状为半圆形,半径为 a 且其直径位于水的表面上.

解 为求出水对半圆形的压力,只要计算出作用于四分之一圆上的压力,然后再把它两倍起来.现将四分之一圆等分成 n 个圆心角为 $\Delta\theta$ 的小扇形(图 2520).作用于该小扇形上的压力的近似值为

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta\,\frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

其中 $\Delta\theta=\frac{\pi}{2n}$, $\theta_i=\frac{i\pi}{2n}$. 于是,作用于半圆上的压力为

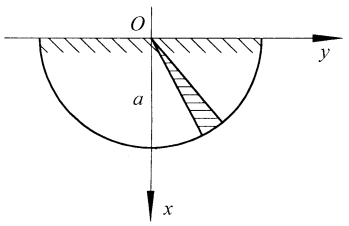

图 2520

$$P=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}a^2\ \frac{2}{3}a\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{2a^3}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2a^3}{3}.$$

作出微分方程式以解下列问题：

【2523】 半径为 R 而密度为 δ 的均匀球体以角速度 ω 绕其直径而旋转.求此球的动能.

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$.不妨设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$,则考察以 $\mathrm{d}z$ 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘,其转动惯量为

$$\mathrm{d}J_z=\frac{1}{2}\pi(R^2-z^2)\delta(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2\mathrm{d}z.$$

从而,球体的转动惯量为

$$J_z=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2\mathrm{d}z=\frac{8}{15}\pi\delta R^5.$$

于是,球的动能为

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5.$$

注 原题误为球壳,现根据答案予以改正.

【2524】 具不变的线性密度 μ 的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点?

解 取坐标系如图 2524 所示,$|AO|=a$.设引力在坐标轴上的射影为 F_x 和 F_y.由于

$$\mathrm{d}F_y=k\frac{m\mu\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cos\varphi=-\frac{km\mu a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

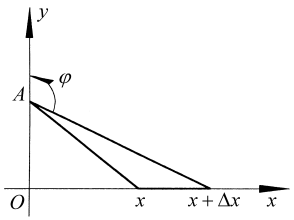

图 2524

于是,

$$F_y=-2km\mu a\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-2km\mu a\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{2km\mu}{a}.$$

由对称性知,$F_x=0$.事实上,我们有

$$F_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{km\mu\sin\varphi}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=km\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=0.$$

其中 k 为引力常数.由上述分析知,引力指向 y 轴的负向.

【2525】 计算半径为 a 及固定的表面密度为 δ 的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P,此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的垂直线上,最短距离 PQ 等于 b.

解 取坐标系如图 2525 所示.显然,引力指向 y 轴的正向.对于以 x 为半径的圆环,其质量为 $\mathrm{d}m=\delta\cdot2\pi x\mathrm{d}x$,对质点 P 的引力为

$$\mathrm{d}F_y=2km\delta\pi\frac{\cos\theta}{b^2+x^2}\mathrm{d}x=2km\delta\pi\frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

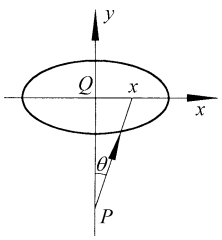

图 2525

于是,所要求的引力为

$$F_y=2km\delta\pi\int_0^a\frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=2km\delta\pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

【2528】 镭在每一时刻的分解速度与其现存的量成比例，设在开始的时刻 $t=0$ 有镭 Q_0(g)，经过时间 $T=1600$ 年它的量减少了一半.求镭分解的规律.

解 设 Q 为现存的量，按题设有 $\frac{dQ}{dt}=kQ$，其中 k 为比例系数，即 $\frac{dQ}{Q}=kdt$，两端积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}}\frac{dQ}{Q}=\int_0^{1600}k\,dt,$$

从而，$k=-\frac{\ln 2}{1600}$. 于是，

$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q}=-\frac{\ln 2}{1600}\int_0^t dt,\qquad \ln\frac{Q}{Q_0}=\ln 2^{-\frac{t}{1600}}$$

所以，镭的分解规律为 $Q=Q_0\,2^{-\frac{t}{1600}}$.

§11. 定积分的近似计算法

1.矩形公式 若函数 $y=y(x)$ 于有穷的区间 $[a,b]$ 上连续且可微分充分多次数，并且

$$h=\frac{b-a}{n},\quad x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n),\ y_i=y(x_i),$$

则

$$\int_a^b y(x)dx=h(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})+R_n,$$

式中

$$R_n=\frac{(b-a)^2}{2n}y'(\xi)\quad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

2.梯形公式 用相同的记号有

$$\int_a^b y(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

式中

$$R_n=-\frac{(b-a)^2}{12n^2}f''(\xi')\quad (a\leqslant\xi'\leqslant b).$$

3.抛物线公式(辛普森公式)命 $n=2k$，得

$$\int_a^b y(x)dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2})]+R_n,$$

式中

$$R_n=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\zeta')\quad (a\leqslant\zeta'\leqslant b).$$

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差：

【2534】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx\quad (n=6).$

解 $h=\frac{\pi}{12}=0.2618,$

$x_0=0,\quad y_0=1;$

$x_6=\frac{\pi}{2},\ y_6=0.8660;\qquad \frac{y_0+y_6}{2}=0.9330,$

$x_1=\frac{\pi}{12},\qquad y_1=0.9916;$

$x_2=\frac{\pi}{6},\qquad y_2=0.9682;$

$x_3=\frac{\pi}{4},\qquad y_3=0.9354;$

$x_4=\frac{\pi}{3},\qquad y_4=0.9014;$

$x_5=\frac{5\pi}{12},\qquad \underline{y_5=0.8756}\quad(+$

$\sum_{i=1}^{5} y_i=4.6722.$

按梯形公式,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\approx h\left\{\frac{y_0+y_6}{2}+\sum_{i=1}^{5} y_i\right\}=0.2618(0.9330+4.6722)\approx 1.4674.$$

误差为 $$|R_n|=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12\cdot 6^2}|y''(\xi)|,$$

式中 $y=\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}$, $0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 利用 $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant 1$ 及 $y^2=1-\frac{1}{4}\sin^2 x$,依次求导可得$|y''|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$.于是,$|R_n|\leqslant\frac{\pi^3}{8\times 12\times 6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<2.59\times 10^{-3}$.

利用辛普森公式计算下列积分:

【2536】 $\int_0^{\pi}\sqrt{3+\cos x}\,\mathrm{d}x\quad(n=6).$

解 $h=\frac{\pi}{6}.$

$x_0=0,\quad y_0=2;$

$x_1=\frac{\pi}{6},\ y_1=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3.866}=1.966;$

$x_2=\frac{\pi}{3},\ y_2=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3.5}=1.871;$

$x_3=\frac{\pi}{2},\ y_3=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}=1.732;$

$x_4=\frac{2\pi}{3},\ y_4=\sqrt{3+\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2.5}=1.581;$

$x_5=\frac{5\pi}{6},\ y_5=\sqrt{3+\cos\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2.134}=1.461;$

$x_6=\pi,\quad y_6=\sqrt{3+\cos\pi}=\sqrt{2}=1.414.$

按辛普森公式,得

$$\int_0^{\pi}\sqrt{3+\cos x}\,\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{18}[(2+1.414)+4(1.966+1.732+1.461)+2(1.871+1.581)]$$
$$\approx 5.4025.$$

【2541】 计算$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$精确到0.001.

解 采用辛普森公式计算,则其误差为

$$R_n(x)=-\frac{1}{180n^4}2\mathrm{e}^{\xi^2}(8\xi^4+24\xi^2+6)\quad(0<\xi<1),$$

故有

$$|R_n(x)|<\frac{1}{180n^4}\,2\mathrm{e}\cdot 38.$$

要$|R_n(x)|<10^{-3}$,只须$\frac{2\cdot 38\mathrm{e}^1}{180n^4}<10^{-3}$,即只须取$n=6$.

现取$n=6$,则有

$x_0=0,\quad y_0=1$

$x_1=\frac{1}{6},\quad y_1=\mathrm{e}^{\frac{1}{36}}=1.0282;$

$x_2=\frac{1}{3},\quad y_2=\mathrm{e}^{\frac{1}{9}}=1.1175;$

$x_3=\frac{1}{2},\quad y_3=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}=1.2840$

$x_4=\frac{2}{3},\quad y_4=\mathrm{e}^{\frac{4}{9}}=1.5596;$

$x_5=\frac{5}{6},\quad y_5=\mathrm{e}^{\frac{25}{36}}=2.0026;$

$x_6=1,\quad y_6=\mathrm{e}=2.7183.$

于是,

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\approx\frac{1}{18}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]\approx 1.463.$$

第五章　级　　数

§1.　数项级数.同号级数收敛性的判别法

1.一般概念　对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{1}$$

若

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\quad(\text{级数的和})$$

存在,式中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则称级数(1)为收敛的.反之,则称级数(1)为发散的.

2.哥西准则　级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\varepsilon>0$,都存在有数 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon$$

成立.

特别是,若级数收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3.比较判别法Ⅰ　设除级数(1)外,还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots. \tag{2}$$

若当 $n\geqslant n_0$,不等式

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

成立,则 1)从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛;2)从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是,当 $n\to\infty$,若 $a_n\sim b_n$,则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4.比较判别法Ⅱ　设

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^*,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛,　(ⅱ)当 $p\leqslant 1$ 时级数(1)发散.

5.达朗伯耳判别法　若 $a_n>0$ ($n=1,2,\cdots$)及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛,　(ⅱ)当 $q>1$ 时级数(1)发散.

6.哥西判别法　若 $a_n\geqslant 0$ ($n=1,2,\cdots$)及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

---

* 记号 O^* 的意义参阅第一章 §6,1°.

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $q>1$ 时级数(1)发散.

7.拉阿伯判别法 若 $a_n>0$ ($n=1,2,\cdots$)及

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $p<1$ 时级数(1)发散.

8.高斯判别法 若 $a_n>0$ ($n=1,2,\cdots$)及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$,则(ⅰ)当 $\lambda>1$ 时级数(1)收敛,(ⅱ)当 $\lambda<1$ 时级数(1)发散;(ⅲ)当 $\lambda=1$ 时,若 $\mu>1$ 则级数(1)收敛;若 $\mu\leqslant 1$ 则级数(1)发散.

9.哥西积分的判别法 若 $f(x)$ ($x>0$)是非负的不增函数,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{与积分} \quad \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【2546】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$,

即所给级数收敛,且其和为 $\frac{2}{3}$.(以下有关各题省略这两句话)

【2552】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})\\&\quad+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1-\sqrt{2}$.

【2554】 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,其中

$$A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1=1,\ p_1<p_2<\cdots)$$



也收敛且具有相同的和.反之不真.举出例子.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和叙列为 $l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$, 则

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i .$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S,因此,

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的,且与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和.反之不真.例如,级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的,但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

研究下列级数的收敛性:

【2562】 $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$.

解 由于 $0<\dfrac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛.

【2565】 证明:由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$,其中 d 为公差.

当 $d>0$ 时,总存在正整数 n_0,使 $a<(n_0-1)d$,则当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $a+(n-1)d<2(n-1)d$.于是,

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{1}{2nd}$ 发散,因而级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{1}{a+(n-1)d}$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a+(n-1)d}$ 也发散.

当 $d=0$ 时,a 不可能为零,此时级数 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\cdots+\dfrac{1}{a}+\cdots$ 显然发散.

当 $d<0$ 时,将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d>0$ 的情形,于是,这级数也发散.

总上所述,不论 d 为何值,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

【2569】 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

证 由于 $0\leqslant 2|a_n b_n|\leqslant a_n^2+b_n^2$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ 收敛.

其次,由于 $(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_n b_n$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 皆收敛,故知级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛.

最后,设 $b_n=\dfrac{1}{n}$,利用第一个结果即证得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$ 收敛.

【2572】 若当 $p=1,2,3,\cdots$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$.问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛?

解 若当 $p=1,2,3\cdots$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0, \tag{1}$$

并不一定有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.例如,取 $a_n=\dfrac{1}{n}$,显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,但却有

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{n+1}=0$,故对于一切 p,(1)式均成立.

这个事实与哥西准则并不矛盾,因为在哥西准则中,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

成立,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,其中的 N 只依赖于 ε,而与 p 无关.本题的叙述中,条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用哥西准则,证明下列正项级数的收敛性:

【2574】 $\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{2^n}+\cdots$.

证 $$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}. \tag{1}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛,故按哥西准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,对任意正整数 p,有

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\varepsilon. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得知,当 $n>N$ 时,不等式

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对一切正整数 p 皆成立.因此,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

利用哥西准则,证明下列正项级数的发散性:

【2577】 $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots$.

解 取 $0<\varepsilon_0<\dfrac{1}{6}$.不论 n 多大,若令 $p=3n$,则有

$$|S_{3n+p}-S_{3n}|=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}$$

$$>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$>\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}\right)=\frac{1}{6}>0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$ 发散.

运用达朗伯耳哥西或比较判别法，研究下列级数的收敛性：

【2585】 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n=1}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$ 收敛.

【2586】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

【2587】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n}>0$，对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n}.$$

由于其通项趋于 $\frac{1}{e}\neq0$，故它是发散的.因此，原级数也是发散的.

注意 若用达朗伯耳判别法，则有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，无明确结论，此时还应改用高斯判别法.

【2590】 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$.

解 注意到

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法,可证得通项为 $a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

【2591】 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ $(a_n>0)$, 则 $a_n=o(q_1^n)$,其中 $q_1>q$.

证 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,故利用 141 题的结果,即得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(q_1-q)>0$,则由上式知存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $|\sqrt[n]{a_n}-q|<\varepsilon$, 从而有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=\lambda q_1 \quad (n\geqslant n_0),$$

其中 $\lambda=\frac{q_1+q}{2q_1}<1$. 利用 $\lambda^n=o(1)$,即证得 $a_n=\lambda^n q_1^n=o(q_1^n)$.

【2592】 证明:若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$ $(a_n>0)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

相反的结论不真.研究例子

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

证 取 $0<\varepsilon<1-q$,由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$,故存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=l<1.$$

从而,

$$0<a_n\leqslant a_{n_0}\,l^{n-n_0} \quad (n\geqslant n_0).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}l^{n-n_0}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛,从而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

反之不真,例如,级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$ 显然是收敛的.但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}, & \text{当 } n=2m+1;\\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m}, & \text{当 } n=2m,\end{cases}$$

故有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$.

【2593】 证明:若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$,极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \tag{1}$$

存在,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \tag{2}$$

也存在.

相反的结论不真:若极限(2)存在,则极限(1)可以不存在.研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

证 利用141题的结论,本题的前半部分即得证.

反之不真.例如,对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2\cdot\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2}$. 但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;}\\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

【2594】 证明:若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$ $(a_n\geqslant 0)$,则

(1) 当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;(2) 当 $q>1$ 时级数发散(哥西判别法的推广).

证 (1) 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(1-q)$.由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$,故存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$0<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon.$$

从而, $0<\sqrt[n]{a_n}<\frac{q+1}{2}$ $(n\geqslant n_0)$ 或 $0<a_n<\left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ $(n\geqslant n_0)$.

由于 $0\leqslant q<1$,故 $0<\frac{q+1}{2}<1$.又因级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛,从而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 由于 $q>1$,故对于叙列 $\{a_n\}$,必有无穷多个 a_n,能使不等式 $\sqrt[n]{a_n}>1$ 成立,从而,$a_n>1$.

于是,当 $n\to\infty$ 时,a_n 不可能趋于零,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

利用拉阿伯和高斯判别法,研究下列级数的收敛性:

【2599】 $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+b)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots$ $(a>0,b>0,d>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nd}{a+nd}$, 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d},$$

故当 $\frac{b-a}{d}>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$ 收敛.

【2603】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ $(p>0,q>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}$.由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px}-1}{x}=q+1-p,$$

故当 $q+1-p>1$ 即 $q>p$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ 收敛.

【2606】 证明：若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$，则

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)\quad(\varepsilon>0).$$

证 下面记 $\alpha_n,\alpha_n',\beta_n,\beta_n',\beta_n'',\varepsilon_n$ 为无穷小量，即 $\alpha_n=o(1),\alpha_n'=o(1),\beta_n=o(1),\beta_n'=o(1),\beta_n''=o(1),\varepsilon_n=o(1)$ $(n\to\infty)$. 由题设知，当 $n\to\infty$ 时有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}$. 取对数，即得

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\right)=\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}(p+\alpha_n').$$

令 $n=1,2,\cdots,N-1$ 并求和，则得

$$\ln a_1-\ln a_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}(p+\alpha_n').$$

由 143 题(在其中令 $x_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha_n'}{n}$，$y_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$)知

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha_n'}{n}\right)\Big/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to\infty}\alpha_N'=0.$$

又由 146 题知 $\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=C+\ln(N-1)+\varepsilon_n$，其中 C 是尤拉常数，$\varepsilon_N\to 0$. 于是，令

$$\beta_N=\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha_n'}{n}\right)\Big/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right),$$

有

$$\ln a_1-\ln a_N=(p+\beta_N)\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=(p+\beta_N)[C+\ln(N-1)+\varepsilon_N]$$
$$=(p+\beta_N)\ln(N-1)+k+\beta_N',$$

其中 $k=Cp$ 为常数. 于是，$\ln a_N=-(p+\beta_N)\ln(N-1)+k'-\beta_N'$，其中 $k'=\ln a_1-k$ 为常数，从而，

$$a_N=e^{k'-\beta_N'}\cdot(N-1)^{-(p+\beta_N)}=e^{k'-\beta_N'}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}\cdot N^{\beta_N''}\cdot N^{-p}.$$

其中 $\beta_N''=-\beta_N$. 由于 $\beta_N''=o(1)$，故对于任给的 $\varepsilon>0$，当 N 充分大时，有 $|\beta_N''|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而，$N^{\beta_N''}<N^{\frac{\varepsilon}{2}}$. 再注意到 $\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}=1$，即知：当 N 充分大时，有

$$0<a_N\leqslant k''\cdot N^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot N^{-p}=O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数. 于是，得 $a_N=o\left(\frac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right)$. 本题获证.

求出通项 a_n 的减小的阶，从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性，设：

【2608】 $a_n=\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$.

解 由于 $a_n\geqslant 0$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}}=\pi \quad 或 \quad a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1+p>1$ 即 $p>0$ 时,级数收敛.

【2614】 $a_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

解 由于 $a_n=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\dfrac{1}{n}\right)$,故级数发散.

【2615】 证明:若有 $\alpha>0$,使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$($a_n>0$),则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$($a_n>0$)收敛;若 $n\geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$,则这级数发散(对数判别法).

证 若 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$,则 $\dfrac{1}{a_n}\geqslant n^{1+\alpha}$ 或 $a_n\leqslant\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$.由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

若 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$,则 $\dfrac{1}{a_n}\leqslant n$ 或 $a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$.由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

研究具如下通项的级数的收敛性:

【2618】 $a_n=\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ $(n>1)$.

解 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$.由洛比塔法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}=0$,从而,存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<1$,利用 2615 题的结论,即知级数发散.

利用哥西积分判别法,研究具如下通项的级数的收敛性:

【2620】 $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ $(n>2)$.

解 易知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$(不论 p,q 为何实数)的导函数当 x 充分大时是负的,故当 x 充分大时,$f(x)$是非负递减函数.

若 $p=1$,则

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^q}=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1;\\ \left.\ln\ln\ln x\right|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散，故由哥西积分判别法知，原级数当 $p=1$，$q>1$ 时收敛，$p=1$，$q\leqslant 1$ 时发散.

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$ 使 $p-\eta>1$，由于(不论 q 为何实数)

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\eta(\ln t)^q}=0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛，从而，原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$ 使 $p+\tau<1$. 由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\tau}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}$ 发散，从而，原级数发散.

综上所述，可知原级数仅当 $p=1$，$q>1$ 及 $p>1$，q 任意时收敛.

【2622】 证明：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项单调减小，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

证 设 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，则因 $a_1>a_2>\cdots>a_{2^n}>a_{2^n+1}>\cdots>0$，故得

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^na_{2^n},\tag{1}$$

且有

$$S_{2^n}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^na_{2^n})>0.\tag{2}$$

由(1)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；由(2)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散. 由此本题获证.

注意 在此命题中，用作比较的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 可以用更普遍的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}m^na_{m^n}$ 来代替，其中 m 为任一自然数. 证法类似.

【2624】 证明厄耳玛可夫判别法：设 $f(x)$ 为单调减少的正值函数，又设

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^xf(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\lambda.$$

若 $\lambda<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛；若 $\lambda>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散.

证 由于 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^xf(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\lambda$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，使当 $x>N$ 时，有

$$e^x f(e^x)<(\lambda+\varepsilon)f(x).$$

当 $\lambda<1$ 时，取 ε 使 $\lambda+\varepsilon=\rho<1$，则有 $e^x f(e^x)<\rho f(x)$. 于是，当 $m>N$ 时有

$$\int_N^m e^x f(e^x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^m f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^m f(x)\mathrm{d}x$，也即

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^m f(x)\mathrm{d}x-\rho\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x=\rho\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x-\rho\int_m^{e^m} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 N 充分大且 $m>N$，故 $m<e^m$. 又因 $f(x)>0$，故 $\int_m^{e^m} f(x)\mathrm{d}x>0$. 从而，

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x<\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x.$$

固定 N，让 $m\to+\infty$，取极限即得

$$\int_{e^N}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x=\text{常数}.$$

于是，由哥西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda>1$ 时，则取 N 为充分大，可得 $e^x f(e^x)\geqslant f(x)$ $(x>N)$. 从而，

$$\int_N^m e^x f(e^x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^m f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^m f(x)\mathrm{d}x \quad 或 \quad \int_{e^N}^m+\int_m^{e^m}\geqslant\int_N^{e^N}+\int_{e^N}^m,$$

故 $$\int_m^{e^m} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x \quad (m>N).$$

今设 $e_0=N+1$，$e_1=e^{e_0}$，$e_2=e^{e_1}$，…，$e_{k+1}=e^{e_k}$，…，并分别取 $m=e_0,e_1,e_2,\cdots$，则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{e_2}^{e_3} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\vdots$$

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\vdots$$

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lim_{n\to\infty} n\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x=+\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为发散的，故由哥西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性：

【2626】 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$.

解 由于 $0<\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}=\dfrac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}\Big/\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}=2,$$

注意到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ 仅当 $a+\dfrac{1}{2}>1$(即 $a>\dfrac{1}{2}$)时收敛，即知原级数仅当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时收敛.

【2628】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\dfrac{n\pi}{4n-2}-\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)$.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\dfrac{n\pi}{4n-2}-\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\cot\dfrac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)\right]$.

分别考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\dfrac{n\pi}{4n-2}\right)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)$，它们都是正项级数.由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\dfrac{n\pi}{4n-2}\right)$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\dfrac{n\pi}{4n-2}-\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}\right)$ 发散.

【2631】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$.

解 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n(\mathrm{e}^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$.

由于

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=+\infty,$$

利用 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}=1$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$ 收敛.

【2643】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}\quad(a>0)$.

解 $a_n=a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时，显然 $a_n=1$，因而级数发散. 当 $a\neq1$ 时，考虑

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=(b+c\ln n)\ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数判别法)，即知：

(1) 当 $c=0$，$b\ln a>1$，即 $a^b>\mathrm{e}$ 时，原级数收敛；而当 $c=0$，$b\ln a\leqslant1$，即 $a^b\leqslant\mathrm{e}$ 时，原级数发散.

(2) 当 $c\neq0$，$c\ln a>0$，即 $a^c>1$ 时，原级数收敛；而当 $c\neq0$，$c\ln a<0$ 即 $a^c<1$ 时，原级数发散.

综上所述，仅当 $c=0$，$a^b>\mathrm{e}$ 及 $a^c>1$ 时，原级数收敛.

研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性，其通项如下：

【2647】 $u_n=\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,\mathrm{d}x}$.

解 由于 $0<u_n\leqslant\dfrac{1}{\int_0^n x\,\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{n^2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

用对应的级数来代替叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$，然后研究它们的收敛性，设：

【2653】 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$.

解 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，记 $x_0=0$，故 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$ 当 $n\to\infty$ 时的极限存在，即叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

【2655】 假如 (2)$^+$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)!}$，约需取级数的多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5}.

解 (2) 余项 $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)!}$. 利用 74 题的不等式

$$k!>\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k\quad(k=1,2,\cdots),$$

于是，当 $n\geqslant N+1$，有

$$\frac{2^n}{(n+1)!}<2^n\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{2\mathrm{e}}{n+1}\right)^n\leqslant\frac{1}{N+2}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{e}}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^{N+2}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^{n-(N+1)}.$$

因此得

$$R_N<\frac{1}{2\mathrm{e}}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^{N+2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^{n-(N+1)}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^{N+2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^l.$$

取 $N\geqslant4$，则 $\dfrac{2\mathrm{e}}{N+2}<1$，此时又有

$$R_N<\frac{1}{2\mathrm{e}}\left(\frac{2\mathrm{e}}{N+2}\right)^{N+2}\frac{1}{1-\dfrac{2\mathrm{e}}{N+2}}.$$

取 $N=11$，则有 $R_N=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\left(\dfrac{2\mathrm{e}}{13}\right)^{13}\dfrac{1}{1-\dfrac{2\mathrm{e}}{13}}=\Delta_N$. 利用对数对于 Δ_N 作数值计算，有

$$\Delta_N\leqslant\frac{13}{15.126\mathrm{e}}\left(\frac{2\mathrm{e}}{13}\right)^{13}\approx10^{-5.42266}<10^{-5},$$

即此级数取 $N\geqslant 11$ 项求和就可保证精确到 10^{-5}.

§2. 变号级数收敛性的判别法

1.级数的绝对收敛性 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛,如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛.这时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛,绝对收敛级数的和与项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性,只须把对于同号级数收敛性的已知判别法应用于级数(2)就够了.

若级数(1)收敛,而级数(2)发散,则称级数(1)为条件收敛(非绝对收敛).条件收敛级数的各项顺序加以改变后可使其和等于任何数(黎曼定理).

2.莱布尼兹判别法 交错级数

$$b_1-b_2+b_3-\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots \quad (b_n\geqslant 0)$$

收敛(一般说来,非绝对地),若 1) $b_n\geqslant b_{n+1}$ ($n=1,2,\cdots$) 和 2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. 在这种情形下,对于级数的余项

$$R_n=(-1)^n b_{n+1}+(-1)^{n+1}b_{n+2}+\cdots$$

有以下的估计

$$R_n=(-1)^n\theta_n b_{n+1} \quad (0\leqslant\theta_n\leqslant 1).$$

3.亚伯尔判别法 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛,若:1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,2) 数 b_n ($n=1,2,\cdots$)形成一单调并有界的叙列.

4.迪里黑里判别法 级数(3)收敛,若:1) 部分和 $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 是有界的;2) 当 $n\to\infty$ 时 b_n 单调地趋近于零.

【2656】 证明:可把非绝对收敛级数的各项不变更其顺序而分群组合起来使所得的新级数绝对收敛.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数.利用哥西准则,即知:

对于给定的 $\varepsilon_1=\dfrac{1}{2}$,存在 N_1,使对于任意自然数 m_1,有

$$|a_{N_1+1}+\cdots+a_{N_1+m_1}|<\varepsilon_1;$$

对于给定的 $\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$，存在 N_2（可取 $N_2>N_1$），使对于任意自然数 m_2，有

$$|a_{N_2+1}+\cdots+a_{N_2+m_2}|<\varepsilon_2;$$

$$\vdots$$

对于给定的 $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$，存在 N_k（可取 $N_k>N_{k-1}$），使对于任意自然数 m_k，有

$$|a_{N_k+1}+\cdots+a_{N_k+m_k}|<\varepsilon_k;$$

$$\vdots$$

令

$$A_0=a_1+a_2+\cdots+a_{N_1},$$
$$A_1=a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_{N_2},$$
$$\vdots$$
$$A_k=a_{N_k+1}+a_{N_k+2}+\cdots+a_{N_{k+1}},$$
$$\vdots$$

则有 $|A_k|<\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$（$k=1,2,\cdots$），且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数.由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|A_k|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 绝对收敛.证毕.

【2658】 证明：若将收敛级数的各项重新排列，而使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置（m 为预先给定的数），则其和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，当然有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.又记重排出的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，再记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 N 项部分和为 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的前 N 项部分和为 $\sigma_N=\sum\limits_{n=1}^{N}b_n$.当然有 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N=S$.今证 σ_N 的极限也存在，且等于 S.

考察 σ_N 与 S_N 之差 $\Delta_N=\sigma_N-S_N$.任给 $\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m}>0$，则存在 N_1，使当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon_1$.今取 $N\geqslant N_1+2m$，又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 S_k，记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\widetilde{\sigma}_k$，则有

$$\Delta_N=\sum_{b_n\in\widetilde{\sigma}_N}b_n-\sum_{a_n\in\widetilde{S}_N}a_n.$$

今从 a_1 查起，看 $a_1,a_2,\cdots$至 a_N，注意每一个 a_i 被重排成 b_j 时，i 与 j 的标号差不超过 m.因此，对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j=a_i$.反过来，从 b_1 查起，看 $b_1,b_2,\cdots$至 b_N，对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i=b_j$.但也可能且只有那种可能：最后一段不超过个 m 元素的 a_i，即 $a_N,a_{N-1},\cdots,a_{N-m}$之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后，从而，在 $\widetilde{\sigma}_N$ 内找不到搬迁元素，但个数（设为 r 个）不超过 m.同样，也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j，即 $b_N,b_{N-1},\cdots,b_{N-m}$之内若干个元素在 $\widetilde{S}_n$ 内找不到搬迁元素，但个数（设为 s 个）不超过 m.除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应.于是，

$$|\Delta_N|=\left|\sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}}b_n-\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\widetilde{\sigma}_N}}a_n\right|\leqslant\sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}}|b_n|+\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\widetilde{\sigma}_N}}|a_n|<s\varepsilon+r\varepsilon\leqslant m\varepsilon+m\varepsilon=\varepsilon.$$

上式中 a_n 的下标 $n\geqslant N_1+m>N_1$，故 $|a_n|<\varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n\geqslant N_1+m$，记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来，其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m，故此时 $i\geqslant N_1$，因而，此时 $|b_n|=|a_i|<\varepsilon$. 从而，上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N=0,$$

也即有

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty}S_N=S.$$

从而，命题得证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【2660】 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$.

解 显然该级数绝对收敛，从而，它是收敛的，记其和为 S. 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{10}{7}.$$

【2662】 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$，求从已知级数把各项重排后所成级数：

(1) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$ 的和.

解 (1) 考虑部分和 S_m. 当 $m=3n$ 时，有

$$S_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

记

$$\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\quad l_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

则 $l_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$，$l_{1n}=\sigma_{1n}-\sigma_{2n}$，且有

$$S_{3n}=\sigma_{1n}-\frac{1}{2}\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n=(\sigma_{1n}-\sigma_{2n})+\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)=l_{1n}+\frac{1}{2}l_{2n}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}l_{1n}=\lim_{n\to\infty}l_{2n}=\ln 2$，故 $\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2$. 易证当 $m=3n+1$ 及 $m=3n+2$ 时，

有

$$S_{3n+1}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad S_{3n+2}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$时，它们与 S_{3n}有相同的极限，从而，$\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\frac{3}{2}\ln 2$，即原级数收敛，且其和为$\frac{3}{2}\ln 2$.

【2663】 把收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的各项重排，使它成发散的.

解 我们这样进行重排：先取两个正项，然后取一个负项，得

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots \tag{1}$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数，如果它发散，当然上述重排后所得的级数也发散.由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},\quad \frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{2}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}},$$

因而

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}>0\quad(n=1,2,\cdots).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$ 发散，从而，重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性：

【2665】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

解 $a_n=(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

【2667】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

解 由于当 $n\to\infty$时，$\frac{\ln^{100}n}{n}$单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

为有界的，故按迪里黑里判别法即知原级数收敛.

【2674】 证明：若

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0,$$

则交错级数 $b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots$ $(b_n>0)$收敛.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=A$,我们取 $\varepsilon>0$,使得 $A-\varepsilon>0$,则存在自然数 N,使当 $n\geqslant N$时,有

$$A-\varepsilon<n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)<A+\varepsilon \quad 或 \quad 1<1+\frac{A-\varepsilon}{n}<\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{A+\varepsilon}{n}.$$

因此,当 $n\geqslant N$时,$b_n>b_{n+1}$,即 b_n 单调下降.

下面证明$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.事实上,利用 2606 题的结果即知,$b_n=o\left(\frac{1}{n^{A-\varepsilon}}\right)$.例如,取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$,于是,当 $n\to\infty$时,有 $b_n\to 0$.

因此,交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

【2675】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

解 当 $p<0$时,由于 $n^{-p}\to+\infty$,故级数发散.

当 $p=0$时,由于 $n^{-p}=1$,故级数也发散.

当 $0<p\leqslant 1$时,由于 $a_n>a_{n+1}$且 $a_n\to 0$(其中 $a_n=\frac{1}{n^p}$),故此交错级数收敛;然当 $0<p\leqslant 1$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散,故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$仅为条件收敛.

当 $p>1$时,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$绝对收敛.

【2686】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

解 由于$\frac{1}{\ln n}$当 $n\to\infty$时单调下降趋于零,又部分和

$$\left|\sum_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{12}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{24}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

有界,故级数收敛. 但是

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散,级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$收敛,故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$发散.从而,原级数仅为条件收敛.

研究下列级数的收敛性:

【2693】 $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

解 当 $p>1$，$q>1$ 时，显然级数绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，显然级数并非绝对收敛，但由莱布尼兹判别法知级数收敛. 因此，当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，级数条件收敛.

当 p、q 中有一个小于或等于零时，由于通项不趋于零(当 $n\to\infty$)，故级数发散.

【2698】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\quad (0<x<\pi)$$

对全体参数 (p,x) 定出：(1)绝对收敛域；(2)非绝对收敛域.

解 当 $p>1$ 时，由于

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},\quad \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}\quad (0<x<\pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故这两个级数当 $p>1$ 时，对于 $(0,\pi)$ 内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零，且部分和 $\sum_{n=1}^{N}\cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ 均有界 $(0<x<\pi)$，故由迪里黑里判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散，事实上，

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时发散到 $+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时均发散. 因此，当 $0<p\leqslant 1$ 时，对于 $(0,\pi)$ 内任一 x 值，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛. 当 $p\leqslant 0$ 时，两级数显然发散.

总之，当 $0<x<\pi$ 时，两级数的(1)绝对收敛域为 $p>1$；(2)条件收敛域为 $0<p\leqslant 1$.

【2703】 证明：对于每一个 $p>0$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 首先，由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right)$$

中的每一个括号内的数大于零，故 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调上升的叙列. 又因

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right)-\frac{1}{(2n)^p}<1,$$

故 $\{S_{2n}\}$ 是以 1 为上界的叙列. 从而知 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在且不超过 1.

由于此级数当 $p>0$ 时是收敛的,故对于叙列 $\{S_{2n}\}$,它的极限与级数的和相等,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1\quad(p>0)$$

(对于 $p=1$,此级数的和为 $\ln 2$).

其次,我们证明此和不小于 $\frac{1}{2}$,仍考虑前 $2n$ 项的部分和 S_{2n},则有 $S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\mathfrak{S}_{2n}$,其中

$$\mathfrak{S}_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right]=\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0<\theta_k<1$ ($k=2,3,\cdots,n$).由于 $p>0$ 以及 $\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}\geqslant\frac{1}{(2k)^{p+1}}$ ($k=2,3,\cdots$),即得

$$\mathfrak{S}_{2n}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k)^{p+1}}=\frac{p}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{p+1}}\geqslant\frac{p}{2^{p+1}}\left[\int_2^n\frac{\mathrm{d}x}{x^{p+1}}+\frac{1}{n^{p+1}}\right]=\frac{p}{2^{p+1}}\left[-\frac{1}{px^p}\Big|_2^n+\frac{1}{n^{p+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}+\frac{p}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^{p+1}}=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{2^{2p+1}}+\Delta_n,$$

此处

$$\Delta_n=\frac{-1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{p}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)\quad(\text{当 }n\to\infty\text{时}).$$

于是,对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N_0,使当 $n\geqslant N_0$ 时,有 $|\Delta_n|<\varepsilon$.这时有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\mathfrak{S}_{2n}\geqslant 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}-\varepsilon.$$

但当 $p>0$ 时,$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2}$,这是因为 $2^p+\frac{1}{2^p}>2$,故得

$$1+\frac{1}{2^{2p}}>\frac{2}{2^p}\quad\text{或}\quad\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2^p}.$$

从而 $S_{2n}>\frac{1}{2}-\varepsilon$,故收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和 $S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\geqslant\frac{1}{2}-\varepsilon$.由 $\varepsilon>0$ 的任意性,即得 $S\geqslant\frac{1}{2}$.综上所述,$\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant 1$.

§3. 级数的运算

二级数的和与积 我们定义

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$,

式中 $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 二者收敛,则等式(1)非仅有形式上的意义,而等式(2)当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 二者收敛,并且其中最少有一个是绝对收敛的,则也有相同的意义.

【2706】 若两个级数,(1)一个收敛,而另一个发散;(2)两个级数都发散,问这两个级数的和可以说成什么?

解 (1) 一定发散.因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,如果其和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛,则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} c_n-\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛,得出矛盾.于是,此时两级数的和一定发散.

(2) 可为收敛,可为发散.例如:

(ⅰ) 设 $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散,但 $c_n=0$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛;

(ⅱ) 设 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$,则 $c_n=\dfrac{2}{n}$.显见,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散.

求下列级数的和:

【2709】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解 原级数显然绝对收敛,记其和为 S,则有 $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1$.设将 $n=0,1,2,\cdots$ 分成三类:

$$A_1=\{n\mid n=3k,\ k=0,1,2,\cdots\},$$
$$A_2=\{n\mid n=3k+1,\ k=0,1,2,\cdots\},$$
$$A_3=\{n\mid n=3k+2,\ k=0,1,2,\cdots\},$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n\in A_1} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_2} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}}+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^3}\right)^k=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7},$$

以上计算是合理的,因为上述三个级数均绝对收敛,故其和为 $\dfrac{5}{7}$.从而知原级数的和为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}.$$

【2715】 验证下面二发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 和 \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

证 记 $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m$, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m$,

其中

$$u_1=1,u_2=-\frac{3}{2},u_3=-\left(\frac{3}{2}\right)^2,\cdots,u_m=-\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}\quad(m=2,3,\cdots),$$

$$v_1=1,v_2=2+\frac{1}{2^2},v_3=\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right),\cdots,$$

$$v_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}\left(2^{m-1}+\frac{1}{2^m}\right)\quad(m=2,3,\cdots).$$

因此 $c_1=u_1v_1=1$.一般地,在

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

中,按乘积定义有

$$\begin{aligned}c_n&=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\&\quad+\cdots+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[(2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots-2-2^0)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§4. 函数项级数

1.收敛域 使函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots\tag{1}$$

收敛的 x 值的总体 X 叫做此级数的收敛域,而级数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(x\in X)$$

称为级数的和.

2.一致收敛性 对于函数叙列 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$ 如果:

1) 存在有极限函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ $(a<x<b)$;

2) 对于任何的数 $\varepsilon>0$,可以确定 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $a<x<b$ 时,$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 成立,则称这函数叙列在区间 (a,b) 内为一致收敛.此种情况写:$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数(1)的部分和叙列:

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

在区间(a,b)内一致收敛,则称级数(1)在此已知区间内为一致收敛.

3.哥西判别准则　级数(1)在已知区间(a,b)内一致收敛的充分而且必要的条件为:对于每一个$\varepsilon>0$,有数$N=N(\varepsilon)$存在,使得当$n>N$和$p>0$时,不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon\quad(a<x<b)$$

成立.

4.外耳什特拉斯判别法　对于级数(1),若有收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots\tag{2}$$

存在,使对于$a<x<b$下列不等式都成立$|u_n(x)|\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$,则级数(1)在区间$(a,b)$内绝对并一致收敛.

5.亚伯尔判别法　如果:1)级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在区间$(a,b)$内一致收敛;2)函数$b_n(x)(n=1,2,\cdots)$全体是有界的并对每一个$x$形成一单调的叙列,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)\tag{3}$$

于区间(a,b)内一致收敛.

6.迪里黑里判别法　如果:1)级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和全体是有界的;2)叙列$b_n(x)(n=1,2,\cdots)$对于每一个$x$都是单调的,并且当$n\to\infty$时在$(a,b)$内一致地趋于零,则级数(3)在区间$(a,b)$内一致收敛.

7.函数项级数的性质　1)以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

2)若函数项级数(1)在区间(a,b)内一致收敛且有有穷的极限

$$\lim_{x\to a}u_n(x)=A_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

则:ⅰ)级数$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$收敛,ⅱ)下面等式成立:

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to a}u_n(x)\right].$$

3)若收敛级数(1)的各项当$a<x<b$时皆可微分并且导函数的级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在区间$(a,b)$内一致收敛,则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

4)若级数(1)的各项连续,并且此级数在有穷区间(a,b)内一致收敛,则

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.\tag{4}$$

一般说来,若当$n\to\infty$时$\int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x\to0$,则公式(4)为真,这里$R_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$.这个最

后的条件对于积分的限是无穷大的时候也适合.

定出下列函数项级数的(绝对的和条件的)收敛域.

【2717】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right|}=1,$$

故仅当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$即$(1-x)^2<(1+x)^2$或$x>0$时,级数绝对收敛.

当$x=0$时,原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$,显见它为条件收敛,当$x<0$时,原级数通项不趋于零,故发散.

【2724】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ (拉伯耳特级数).

解 考虑级数(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 与 (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$.

当$|x|<1$时,级数(2)绝对收敛.根据亚伯耳判别法,以单调递减且有下界的因子$\frac{1}{1-x^{2n}}$乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}} \tag{3}$$

也收敛,且为绝对收敛.

同理,再以单调递减且有界的因子x^n乘级数(3)的对应项所得的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$仍然收敛,且为绝对收敛.由于

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x^n}{1-x^{2n}}+\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当$|x|<1$时绝对收敛.

当$|x|=1$时,级数(1)显然无意义.

当$|x|>1$时,级数(2)显然发散.下证级数(1)也发散.若不然,当$|x|>1$时,由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛,再根据亚伯耳判别法,我们就会推出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$也收敛.从而会得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}1$$

也收敛,这是错误的.因此,当$|x|>1$时,级数(1)发散.

【2737】 证明：若劳郎级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2(|x_1|<|x_2|)$时收敛，则此级数当$|x_1|<|x|<|x_2|$时也收敛.

证 由于劳郎级数当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时收敛，故级数

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n,\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},\quad (3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n,\quad (4)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛.于是，由(3)知，当$|x|<|x_2|$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛.由(2)知，当$\left|\frac{1}{x}\right|<\left|\frac{1}{x_1}\right|$即当$|x_1|<|x|$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$收敛.因而，当$|x_1|<|x|<|x_2|$时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad 与 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$$

均收敛，也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

【2740】 证明：若迪里黑里级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 收敛，则此级数当 $x>x_0$ 时也收敛.

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$.由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛，并且$\frac{1}{n^{x-x_0}}$当 $x>x_0$ 时单调下降趋于零，故根据亚伯耳判别法即知：当 $x>x_0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$收敛.

【2741】 证明：叙列 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在区间(a,b)内一致收敛于极限函数 $f(x)$的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0,$$

式中 $\gamma_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$.

证 先证必要性.

由于 $f_n(x)$在(a,b)内一致收敛于 $f(x)$，故对任给的$\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$时，对于区间(a,b)内的一切 x 值，均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.因此，当 $n>N(\varepsilon)$时，有

$$\sup_{a<x<b}\{\gamma_n(x)\}\leqslant\varepsilon,$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0.$$

再证充分性.

由于$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$时，有

$$\sup_{a<x<b}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是，对于(a,b)内的一切 x 值，只要当 $n>N(\varepsilon)$时，就有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 因此，$f_n(x)$在$(a,b)$内一致收敛于 $f(x)$.

研究叙列在所示区间上的一致收敛性：

【2746】 $f_n(x)=x^n$；(1) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$；(2) $0\leqslant x\leqslant 1$.

解 (1) 当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x)$.任给$\varepsilon>0$，由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,即只要 $n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$.取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$,则当 $n\geqslant N$时,对于$[0,\frac{1}{2}]$上的一切 x 值,均有$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon$.因此,$f_n(x)=x^n$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上一致收敛于零.

(2) $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x=1,\\ 0, & \text{若 } 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,就有 $\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0$.因此,$f_n(x)$在$[0,1]$上收敛而不一致收敛.

【2756】 (1) $f_n(x)=\arctan nx\quad(0<x<+\infty)$.

解 (1) 当 $0<x<+\infty$时,$\lim_{n\to\infty}\arctan nx=\frac{\pi}{2}=f(x)$. 取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{4}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{n}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\arctan 1-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

【2762】 $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$.

解 $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-1|=\frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{n};$$

(2) 当 $1<x\leqslant 2$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-x|$$
$$=\frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+x(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{n-2}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+x^{n-1}}<\frac{1}{nx^{n-1}}<\frac{1}{n}.$$

因此,对于 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的一切 x 值,均有$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n}$.任给 $\varepsilon>0$,要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$时,对于$[0,2]$上的一切 x 值,均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.因此,$f_n(x)$在$[0,2]$上一致收敛.

【2765】 设函数 $f(x)$于区间(a,b)内有连续的导函数$f'(x)$,且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

证明:在闭区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$上(其中 $a<\alpha<\beta<b$),$f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$.

证 考虑$[\alpha',\beta']$,其中 $a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$.由于 $f_n(x)$(n充分大)在$[\alpha',\beta']$上有连续导函数,由微分学中值公式,得

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=nf'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\quad(0<\theta<1).$$

又因 $f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上连续,所以 $f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上一致连续,即对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使对于$[\alpha',\beta']$上的任意点 x'及 x'',只要当$|x'-x''|<\delta$时,就有$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$.今取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1=N(\varepsilon)$,则当 $n>N$时,有$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$.于是,对$[\alpha,\beta]$上的一切 x值,只要 N足够大,就可保证 x与$x+\frac{\theta}{n}$均属于$[\alpha',\beta']$.于是,对于$[\alpha,\beta]$上的一切 x值,均有

$$|f_n(x)-f'(x)|=\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于 $f'(x)$.

研究下列级数的收敛性:

【2769】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$;在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}$.

于是,
$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } 0\leqslant x<1;\\ 0, & \text{若 } x=1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$,就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上收敛而不一致收敛.

【2774】 利用外耳什特拉斯判别法,证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性:

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\leqslant x<+\infty$.

解 (3) 当 $x=0$ 时,级数显然收敛于零.当 $x>0$ 时,$1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$,于是,$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^2}$.又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

【2777】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ $(0<x<+\infty)$.

解 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$. 当 $0<x<+\infty$时,$\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$,它单调一致地趋于零.因此,由迪里黑里判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$当 $0<x<+\infty$时一致收敛.

【2781】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ $(0\leqslant x<+\infty)$.

解 当 $x=2m\pi$ $(m=0,1,2,\cdots)$时, $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x\sin kx=0$.当 $x\neq 2m\pi$ $(m=0,1,2,\cdots)$时,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=|\sin x|\cdot\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant|\sin x|\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 2.$$

于是,对于一切 $x\in[0,+\infty)$,均有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|\leqslant 2$.又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x\in[0,+\infty)$ 关于 n 都是单调递减的,且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$ 知,当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上一致地趋于零.因此,由迪里黑里判别法知,级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2783】 不连续函数的叙列可否一致收敛于连续函数?

解 可以.例如,函数叙列 $f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x)$ $(n=1,2,\cdots)$,其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数;}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数.}\end{cases}$$

显然,$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上每一点均不连续,但由于

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots;\ -\infty<x<+\infty),$$

故当 $n\to\infty$ 时,$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致趋于零.而 $f(x)\equiv 0$ $(-\infty<x<+\infty)$ 显然是连续函数.此例说明,不连续函数的叙列仍然可以一致收敛于连续函数.

【2784】 证明:若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

证 由哥西准则及题设知:对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 时,对于 $[a,b]$ 上的一切 x 值,均有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数.由于

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

故根据一致收敛的哥西准则知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

【2785】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上是否必定一致收敛?

解 未必.例如,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上绝对并一致收敛,但其绝对值级数不一致收敛.事实上,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛[*].因此,我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛就可以了.首先,当 $x=0$ 及 $x=1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 显然收敛.当 $0<x<1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$ 是交错级数且满足莱布尼兹条件,故也收敛.要证其一致收敛,只要证其余式

$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$ 一致趋于零(对 $0\leqslant x\leqslant 1$)即可.按满足莱布尼兹条件的交错级数的余式估计,有

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).\tag{1}$$

令 $f(x)=(1-x)x^{n+1}$,通过求导数易知此函数在 $x=\frac{n+1}{n+2}$ 时达到其在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值,故当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

于是,由(1)式知

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n+2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1;\ n=1,2,\cdots).$$

由此即知,当 $n\to\infty$ 时 $R_n(x)$ 关于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致趋于零.

*) 利用 2769 题的结果.

【2788】 证明:幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\ x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\ x^n$$

的收敛区间为 $(-R,R)$ $(R>0)$,$[a,b]\subset(-R,R)$. 令 $r=\max(|a|,|b|)$,则当 $x\in[a,b]$ 时,有

$$|a_n\ x^n|\leqslant|a_n|\cdot|r|^n=|a_nr^n|.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nr^n|$ 收敛,故原幂级数在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛,由 $[a,b]$ 的任意性,本题获证.

【2790】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则迪里黑里级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

证 $0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$,且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的.又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛,故由亚伯尔判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

【2795】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性,设

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$.

解 (1) 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|}=|x|$,故当 $|x|<1$ 时,级数绝对收敛;而当 $|x|>1$ 时,级数发散.当 $|x|=1$ 时,通项不趋于零,因而级数也发散.于是,$f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$.下面证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续.设 $0<\delta<1$,则当 $|x|\leqslant 1-\delta$ 时,有

$$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leqslant\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n.$$

上面已证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$[-1+\delta,1-\delta]$上一致收敛，从而 $f(x)$在该区间上连续.由于 δ可以任意的小，故知 $f(x)$在开区间$(-1,1)$内连续.

【2797】 证明：黎曼 ζ函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在域 $x>1$ 内是连续的并且在此域内有各阶的连续导函数.

证 显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$当 $x>1$ 时收敛.各项求导数所得级数为$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$.下证它在 $1<a\leqslant x<+\infty$上一致收敛(a为大于一的任何数).事实上，当 $a\leqslant x<+\infty$时，有

$$0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$收敛$\left(\text{这是由于}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^a}\Big/\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}}=0,\ \text{而}\frac{a+1}{2}>1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\text{收敛}\right)$，故知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在 $a\leqslant x<+\infty$上一致收敛.再注意到每项$\frac{\ln n}{n^x}$都是 x 的连续函数，即知：在$a\leqslant x<+\infty$上可逐项求导数，得

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x},\tag{1}$$

并且 $\zeta'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上连续.再由 $a>1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1<x<+\infty$成立，并且 $\zeta'(x)$在 $1<x<+\infty$上连续.当然 $\zeta(x)$更在 $1<x<+\infty$上连续.

利用数学归纳法，并注意到对任何正整数 k，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^a}$ $(a>1)$都收敛，仿照上述，可证：对任何正整数 k，$\zeta^{(k)}(x)$在 $1<x<+\infty$上都存在且连续，并且可由原级数逐项求导数 k次而得：

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}\quad(1<x<+\infty).$$

【2800】 证明：叙列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n\quad(n=1,2,\cdots)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，但$\left[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right]'_{x=1}\neq\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(1)$.

证 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$|\arctan x^n|<\frac{\pi}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$，故有

$$|f_n(x)|<\frac{\pi}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$，选取 $N=\left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$时，对于一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2(N+1)}<\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零.但 $f'_n(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$，易见

$$\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'_{x=1}=f'(x)\big|_{x=1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}f'_n(1)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此,两个极限不相等.值得注意的是,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零,但$f'_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内却不一致收敛于其极限函数:

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\neq 1;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

【2802】 当参数 α取什么值:(1) 叙列

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{1'}$$

在闭区间$[0,1]$上收敛;(2)叙列(1′)在$[0,1]$上一致收敛;(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$可在积分号下取极限?

解 (1) 当 $x=0$时,对于任意 α,均有 $f_n(x)=0$;当 $x\neq 0$且 $x\in(0,1]$时,对于任意 α,均有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}xe^{-nx}=0$.因此,对于任意的 α, $f_n(x)$在$[0,1]$上收敛于函数 $f(x)=0$.

(2) 由于 $f'_n(x)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)$,故当 $x=\dfrac{1}{n}$时,$f'_n(x)=0$.又由于当 $x<\dfrac{1}{n}$时,$f'_n(x)>0$;当 $x>\dfrac{1}{n}$时,$f'_n(x)<0$,故 $x=\dfrac{1}{n}$为$f_n(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值点.因此,

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}e^{-1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

当 $\alpha<1$且 $n\to\infty$时,$n^{\alpha-1}e^{-1}\to 0$.于是,当 $\alpha<1$时,对任给的$\varepsilon>0$,总存在 N,使当 $n>N$时,对于一切的 $x\in[0,1]$,均有$|f_n(x)-0|<\varepsilon$,即当 $\alpha<1$时,$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于零.当 $\alpha\geqslant 1$时,由于 $f_n(\frac{1}{n})\not\to 0$,故$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛于零.

(3) 要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$可在积分号下取极限,即只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}x.\tag{2'}$$

事实上,$\int_0^1\left[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x=0$,而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\int_0^1 xe^{-nx}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(-\frac{1}{n}e^{-n}-\frac{1}{n^2}e^{-n}+\frac{1}{n^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-2}(1-e^{-n}-ne^{-n}).\end{aligned}$$

要(2′)式成立,只要下式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

当 $\alpha<2$时成立.于是,当 $\alpha<2$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$可在积分号下取极限.

【2805】 于下式中

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x$$

在积分号下取极限合理否?

解 由于 $\int_0^1\left[\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n^2x^4}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan nx^2\right]\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

故在积分号下取极限不合理.

一般说来,若叙列 $f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,则是保证在积分号下取极限为合理的一个充分条件,但当它不一致收敛时,则就不一定能保证可以在积分号下取极限了,本题就是其中一例.事实上,取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{n}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^4}}>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}$在$[0,1]$上并不一致收敛.

【2810】 在闭区间$[0,1]$上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

合理否?

解 令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}\right)$,则 $x=0,1$ 时,$S_n(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,$S_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x$.因此,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,1;\\ 1-x, & \text{当 } 0<x<1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x_n=\frac{1}{2^{2n+1}}$ 就有 $|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0$.因此,$S_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

注意,对于不一致收敛的级数而言,一般地讲逐项积分级数不一定合理.但对于本题来说,由于

$$\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{2n-1}{2n}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[1-\frac{1}{2n+2}\right]-\left[1-\frac{1}{2n}\right]\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right]=\frac{1}{2},$$

故本题所给出的级数在$[0,1]$上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明,级数在$[a,b]$上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件,并不是必要条件.

【2811】 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$是可微分任何次的函数,且其导函数 $f^{(n)}(x)(n=1,2,\cdots)$的叙列在每一个有穷区间(a,b)内一致收敛于函数 $\varphi(x)$.证明 $\varphi(x)=Ce^x$,其中 C为常数.

证 由于 $f(x)$可微分任意次,故 $f^{(n)}(x)$在(a,b)内连续且可微$(n=1,2,\cdots)$.又按题设 $f^{(n)}(x)$在(a,b)内一致收敛于$\varphi(x)$,且其导函数叙列 $f^{(n+1)}(x)(n=1,2,\cdots)$在$(a,b)$内也一致收敛于$\varphi(x)$,故 $\varphi(x)$在(a,b)内可微,并且

$$\varphi'(x)=\left[\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)\right]'=\lim_{n\to\infty}\left[f^{(n)}(x)\right]'=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x).$$

积分之，即得 $\ln\varphi(x)=x+C_1$，也即 $\varphi(x)=Ce^x$，其中 $C=e^{C_1}$ 为常数.

§5. 幂 级 数

1.收敛区间　对于每一个幂级数 $a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$ 都存在有收敛区间：$|x-a|\leqslant R$，已知的级数在其内收敛，而在其外发散.收敛半径 R 可按哥西—哈达玛公式

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 R 也可按公式

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

来计算(若此极限存在).

2.亚伯耳定理　若幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$($|x|<R$)在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛，则

$$S(R)=\lim_{x\to R-0}S(x).$$

3.台劳级数　在 a 点的解析函数可展为幂级数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.此级数的余项

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

(拉格朗日形式)或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta_1<1)$$

(哥西形式).

必须记住下列五个基本的展开式：

Ⅰ. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$　　$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅱ. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$　　$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅲ. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$　　$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$　　$(-1<x<1)$.

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$　　$(-1<x\leqslant1)$.

4.幂级数的运算　在公共的收敛区间 $|x-a|<R$ 内有：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$，

式中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$；

(3) $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$；

(4) $\int\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]\mathrm{d}x=C+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5.在复数域内的幂级数　研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

式中 $c_n=a_n+ib_n$，$a=\alpha+i\beta$，$z=x+iy$，$i=\sqrt{-1}$.对于每一个如像这样的级数都有一收敛圆 $|z-a|\leqslant R$，原来的级数在其内收敛(并且是绝对地)，而在其外发散.收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

【2812】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解　记 $a_n=\frac{1}{n^p}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1$，故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，若 $p>1$，则幂级数为绝对收敛；若 $0<p\leqslant 1$，则为条件收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，则为发散.

当 $x=1$ 时，若 $p>1$，则为绝对收敛；若 $p\leqslant 1$，则为发散.

【2821】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$　$(a>0,\ b>0)$.

解　考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$，容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1=\frac{1}{a}$ 及 $R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径 $R=\min(R_1,R_2)=\min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $x=-R$ 时，若 $a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\tag{1}$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛.因此，当$a<b$时，级数(1)绝对收敛.当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n, \tag{2}$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛($b<a$)或条件收敛($b=a$)，故当 $a\geqslant b$ 时，级数(2)条件收敛.

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数.

【2828】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

解 记 $a_n=\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}$.由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{4}$；收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot 4^n}. \tag{1}$$

将它拆成两部分，一部分为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，一部分为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$.前一级数显然发散；而对于后一级数，利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛.因此，级数(1)发散.

当 $x=-\dfrac{1}{4}$，同法可证，原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数.因此，它是发散的.

求下列广义的幂级数的收敛域：

【2836】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$.

解 记 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$，则原级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\mathrm{e}^{-x})^n$.由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-1},$$

故当$|\mathrm{e}^{-x}|<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}$即当 $1+x>0$ 或 $x>-1$ 时，级数绝对收敛；当 $x<-1$ 时，级数发散；当 $x=-1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n=1\neq 0,$$

故级数发散.于是，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为$(-1,+\infty)$.

写出下列函数按变数 x 的正整数幂的展开式，并求出对应的收敛区间：

【2845】 $f(x)=\sin(u\arcsin x)$.

解 $\arcsin x=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\left[1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\cdots\right]\mathrm{d}t$

$$=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots \quad (|x|<1),$$

$$f(x)=u\arcsin x-\frac{u^3}{3!}(\arcsin x)^3+\frac{u^5}{5!}(\arcsin x)^5-\cdots$$

$$=ux+\frac{u(1^2-u^2)}{3!}x^3+\frac{u(1^2-u^2)(3^2-u^2)}{5!}x^5+\cdots,$$

收敛区间为$(-1,1)$.

利用Ⅰ～Ⅴ基本展开式,写出下列函数关于 x 的幂级数展开式

【2855】 $\frac{1}{(1-x)^2}$.

解 $\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2+\cdots$

$$+\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \quad (|x|<1).$$

【2860】 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

解 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n\,*)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n \quad (|x|<1).$$

*) 利用 2855 题的结果.

【2863】 $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=-1-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right]$

$$=-1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha+\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中 $|x|<\min\left\{\frac{1}{|\cos\alpha+i\sin\alpha|},\frac{1}{|\cos\alpha-i\sin\alpha|}\right\}=1$.

【2867】 $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$.

但

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

故当$-1<x\leqslant 1$时,有

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}[1+(-1)^m]\frac{x^m}{m}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}[1+(-1)^m]}{m}x^m.$$

首先展开导函数,然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式.

【2872】 $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

解 $\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)=\int_0^x\frac{2t-2\cos\alpha}{1-2t\cos\alpha+t^2}\mathrm{d}t=-2\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\frac{t\cos\alpha-t^2}{1-2t\cos\alpha+t^2}\mathrm{d}t$

$$=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\alpha\right)\mathrm{d}t^{*)}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n.$$

收敛区间为$|x|<1$.当$|x|=1$时,由2698题知,对于$0<\alpha<\pi$,级数收敛.因此,当$0<\alpha<\pi$时,级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$.但当$\alpha=0$且$x=1$时,级数发散;当$\alpha=0$且$x=-1$时,级数条件收敛;当$\alpha=\pi$且$x=1$时,级数条件收敛;当$\alpha=\pi$且$x=-1$时,级数发散.

*) 利用2863题的结果.

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数的展开式:

【2884】 $f(x)=\ln^2(1-x)$.

解 $f(x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]x^{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\right]x^{n+1}$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad(|x|<1).$$

当$x=-1$时,级数为$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.由于

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}>\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2}\quad(n=2,3,\cdots),$$

并且有

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{C+\ln n+\varepsilon_n}{n+1}^{*)}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故它是收敛的.

当$x=1$时,由于$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n+1}$发散且原级数为正项级数,故$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}$也发散.因此,级数$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$的收敛域为$-1\leqslant x<1$.

*) 利用 146 题的结果.

【2886】 $f(x)=e^x\cos x$.

解 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$的实部.由于

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^xe^{ix}=e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部,即得

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\qquad(|x|<+\infty).$$

【2890】 $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

解 令 $\varphi(x)=(\arcsin x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$,则

$$\varphi'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\qquad(-1<x<1).$$

由于 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$,故 $a_0=a_1=0$.由 $\sqrt{1-x^2}\varphi'(x)=2\arcsin x$ 得

$$\sqrt{1-x^2}\varphi''(x)-\frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(-1<x<1).$$

即 $$(1-x^2)\varphi''(x)-x\varphi'(x)=2\qquad(-1<x<1),$$

将 $\varphi(x)$的展开式代入,并注意到 $a_0=a_1=0$,可得

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n=2$$

或 $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nx^n=2$, 也即

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n]x^n=2\qquad(-1<x<1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数,得

$$a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n\quad(n\geqslant2).$$

从而可得

$$a_{2k+1}=0,\qquad a_{2k+2}=\frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

于是, $$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2}\quad(-1<x<1).$$

从而得 $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k}\quad(-1<x<1).$$

显然右端的幂级数当 $x=\pm1$ 时均收敛,而左端的函数当$x=\pm1$时连续,故由幂级数的亚伯耳定理知,上述展式当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时也成立.

【2894】 设 $\sec x$ 的展开式写成下形:

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

求出关于系数 E_n(尤拉数)的递推公式.

解 在等式 $\sec x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{E_n}{(2n)!}x^{2n}$ 的两端同乘 $\cos x$,并注意 $\cos x$ 的展开式,就有

$$\begin{aligned}1&=\cos x\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s+k=n}(-1)^k x^{2(k+s)}\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{s+k=n}(-1)^k\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}\right]x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{2n}.\end{aligned}$$

根据幂级数展开式的惟一性,就有 $A_0=E_0=1$,而 $A_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$,其中

$$A_n=\sum_{k+s=n}(-1)^k\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

例如,已知 E_0,由上式令 $n=1$,即得 $E_1-E_0=0$,从而,$E_1=E_0=1$.由 E_0,E_1,令 $n=2$,又可推出 E_2,…,等等.一般说来,由 E_0,E_1,E_2,…,E_{n-1},从上式可推出 E_n.

【2897】 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 有收敛半径 R_1,而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 有收敛半径 R_2,则级数

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$

的收敛半径 R 是怎样的?

解 (1)记 $A_n=a_n+b_n$,则有

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|A_n|}&=\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}\leqslant\sqrt[n]{2\max(|a_n|,|b_n|)}\\&=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{\max(|a_n|,|b_n|)}=\sqrt[n]{2}\cdot\max\left(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|}\right).\end{aligned}$$

注意到 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{2}=1$,故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{2}\cdot\max\left(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|}\right)\right\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max\left(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|}\right)\right\}\\&=\max\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\right\}=\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right),\end{aligned}$$

从而得 $R\geqslant\dfrac{1}{\max\left(\dfrac{1}{R_1},\dfrac{1}{R_2}\right)}=\min(R_1,R_2)$.

(2)记 $B_n=a_n b_n$,则有 $\sqrt[n]{|B_n|}=\sqrt[n]{|a_n b_n|}=\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}$.于是,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|B_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}\right\}\leqslant\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\right\}\cdot\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\right\}\\&=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1R_2},\end{aligned}$$

故得 $R\geqslant R_1R_2$.

【2898】 设

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\quad\text{和}\quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

证明:幂级数的收敛半径 R 满足下列不等式

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

证 记 $l_1=\frac{1}{l}$, $L_1=\frac{1}{L}$.注意 $l\geqslant 0$, $L\geqslant 0$.若 $l=0$,则记 $l_1=+\infty$;若 $l=+\infty$,则记 $l_1=0$.对 L 与 L_1 也作同样规定.易见 $L_1\leqslant l_1$.任给 $\varepsilon>0$,总可选 $\delta_1>0$, $\delta_2>0$,使

$$\frac{1}{1+\delta_1}=1-\frac{\varepsilon}{2},\qquad \frac{1}{1-\delta_2}=1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 δ_1, δ_2 而言,存在自然数 m,使当 $n>m$ 时,有

$$l(1-\delta_2)<\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|<L(1+\delta_1)\quad 或\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{1+\delta_1}<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n>m$ 时,有

$$L_1\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l_1\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n>m$ 时,有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|}=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}<\left[l_1\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{n-m}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).\tag{1}$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).\tag{2}$$

注意到若 $A>0$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1$,故存在充分大的 $n_0(>m)$,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\quad 及\quad \left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}.\tag{3}$$

将(3)式代入(1)式及(2)式,即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<1+\varepsilon\quad 及\quad \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>1-\varepsilon.$$

于是,有 $L_1(1-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant l_1(1+\varepsilon)$.从而得

$$\frac{1}{l_1(1+\varepsilon)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{L_1(1-\varepsilon)}\ ^{*)}.\quad 即\quad \frac{l}{1+\varepsilon}\leqslant R\leqslant\frac{L}{1-\varepsilon}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知,即得 $l\leqslant R\leqslant L$.

*) 若 $L_1=+\infty$,即 $L=0$,此时显然有 $R=0$(级数除 $x_0=0$ 点收敛以外,对任一点 $x\neq x_0$ 均发散),故可设 $L_1<+\infty$.

【2899】 证明:若函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 且 $|n!a_n|<M$ $(n=1,2,\cdots)$,其中 M 是常数,则:(1) $f(x)$在任一点 a 可微分无限多次;(2) 下述展开式成立

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad (|x|<+\infty).$$

证 (1) 由于 $|n!a_n|<M$,故有 $|a_n|<\frac{M}{n!}$ $(n=1,2,\cdots)$.设 $[-N,N]$ 是包含 x_0 的任一有限

区间.由于$|a_n(x-x_0)^n|<\frac{M}{n!}(2N)^n$及级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!}(2N)^n$收敛,故由外耳什特拉斯判别法知,级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在包含$x_0$的任意有限区间上一致收敛,即其收敛半径$R=+\infty$.于是,此级数在任一点$a\in(-\infty,+\infty)$可逐项微分任意多次.

(2) 由(1)段已证可知级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在任何点可逐项微分任意多次,故

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}a_n(x-x_0)^{n-m}\qquad(m=1,2,\cdots).$$

今设$|x-a|<R$(R为任意固定的正数),于是,

$$|x-x_0|\leqslant|x-a|+|a-x_0|<R+|a-x_0|=L,$$

故由假定知

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}|a_n|\cdot L^{n-m}\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{M}{n!}L^{n-m}$$

$$=M\sum_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}=MP\qquad(m=1,2,\cdots),$$

其中$P=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}<+\infty$.

考虑余项$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$的拉格朗日形式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\qquad(0<\theta<1).$$

于是,当$|x-a|<R$时,有$|R_n(x)|\leqslant\frac{MP}{(n+1)!}R^{n+1}$($n=1,2,\cdots$).由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$收敛,故$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$,从而,$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.由此可知,当$|x-a|<R$时,展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

成立.再由$R>0$的任意性即知,此展式对一切$x(|x|<+\infty)$皆成立.证毕.

【2900】 证明:若(1)$a_n\geqslant0$及(2)存在有$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

证 首先,如果级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$收敛,则根据亚伯耳定理可知,函数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=R$处左连续.因此,

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(R)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

其次,我们证明级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$发散是不可能的.采用反证法,引出矛盾.事实上,根据

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n=+\infty$知,对于任取的正整数 $A>S$,总存在正整数 N,使有 $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n R^n>A>S$.由于

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n=\sum_{n=0}^{N} a_n R^n>A>S,$$

故对任意的 $\varepsilon>0$,例如,取 $\varepsilon=\dfrac{A-S}{2}$,存在 $\delta>0$,使当 $x\in(R-\delta,R)$时,就有

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n>A-\varepsilon=A-\frac{A-S}{2}=\frac{1}{2}(A+S)>A>S.$$

注意到 $a_n\geqslant 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\geqslant\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$ $(x\geqslant 0)$,即得

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\geqslant A>S,$$

此与假设 $\lim\limits_{x\to R-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S$ 相矛盾.因此,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 一定收敛.从而命题获证.

运用逐项微分法计算下列级数的和:

【2908】 $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$.

解 设 $F(x)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$.在收敛域$|x|<+\infty$内逐项微分之,得

$$F'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

于是,有

$$F(x)-F'(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x},\tag{1}$$

$$F(x)+F'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{x}.\tag{2}$$

将(1)式和(2)式相加,最后得

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x\quad(|x|<+\infty).$$

【2909】 $\dfrac{x}{1\cdot 2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$.

解 设 $F(x)=\dfrac{x}{1\cdot 2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$.在收敛域$|x|\leqslant 1$内逐项微分之,得

$$F'(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)]\quad(0<|x|<1).$$

注意 $F(0)=0$,即得

$$F(x)=\int_0^x F'(t)\,dt=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\quad(0<|x|<1).$$

当 $x=0$ 时,级数收敛于零.当 $x=1$ 时,级数收敛于 1.当$x=-1$时,级数收敛于 $1-2\ln 2$.事实上,

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$=2\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\right)+1=1-2\ln 2.$$

于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), & \text{当 } 0<|x|<1;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ 1-2\ln 2, & \text{当 } x=-1;\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

运用逐项积分法计算下列级数的和：

【2911】 $x+2x^2+3x^3+\cdots$.

解 设 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$.在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$

$$=(x^2+x^3+x^4+\cdots)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)$$

$$=x(1+x+x^2+\cdots)-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\quad(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\left(\frac{1}{1-x}+\ln(1-x)\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}\qquad(|x|<1).$$

当$|x|=1$时，由于级数的通项不趋于零，故它是发散的.

【2913】 $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$.

解 设 $F(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$.在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=x^2+2x^3+3x^4+\cdots=x(x+2x^2+3x^3+\cdots)$$

$$=x\cdot\frac{x}{(1-x)^2}\overset{*)}{=}\frac{x^2}{(1-x)^2}\qquad(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}\qquad(|x|<1).$$

当$|x|=1$时，级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

利用适当的展开式，计算下列函数准确到所指出的程度的值.

【2927】 $\ln 1.2$，准确到 10^{-4}.

解 $\ln 1.2=\ln(1+0.2)=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\cdots$.

若取头 n 项，则其误差 $\Delta<\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}$.欲 $\Delta<10^{-4}$，只要$\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}<10^{-4}$.取 $n=4$ 即可保证 $\Delta<\frac{1}{5}(0.2)^5<10^{-4}$.于是，当每项取到小数点后五位，即得

$$\ln 1.2\approx 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4\approx 0.1823.$$

【2929】 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

计算数 π,准确到 0.001.

解 按题设,有

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼兹型的,所以在被加数与加数中,弃去了未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{4}{11\cdot 2^{11}}<0.0002,\qquad 0<\Delta_2<\frac{4}{9\cdot 3^9}<0.00002,$$

于是,总误差 $\Delta\leqslant\Delta_1+\Delta_2<0.001$.计算保留下来的项近似到小数点后四位(末位由四舍五入而得),即可保证达到所需误差,列成下表(括号中的正、负号指示校正数的符号):

正　项	负　项
$\frac{4}{2}=2.0000$	$\frac{4}{3\cdot 2^3}=0.1667(-)$
$\frac{4}{5\cdot 2^5}=0.0250$	$\frac{4}{7\cdot 2^7}=0.0045(-)$
$\frac{4}{9\cdot 2^9}=0.0009(-)$	$\frac{4}{3\cdot 3^3}=0.0494(-)$
$\frac{4}{3}=1.3333(+)$	$+)\ \frac{4}{7\cdot 3^7}=0.0003(-)$
$+)\ \frac{4}{5\cdot 3^5}=0.0033(-)$	0.2209
3.3625	
$-)\ 0.2209$	
3.1416	

于是,$3.1415<\pi<3.1420$.因此,取 $\pi\approx 3.142$ 即可准确到 0.001.

§6. 福里叶级数

1.展开定理　若函数 $f(x)$在区间$(-l,l)$内逐段连续并有逐段连续的导函数 $f'(x)$,并且一切不连续点 ξ是正则的[即 $f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]$],则函数 $f(x)$在此区间上可用福里叶级数表出

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\tag{1}$$

式中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{2}$$

及 $$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2'}$$

特别是：

(ⅰ) 若函数 $f(x)$是偶函数,则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\tag{3}$$

式中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$;

(ⅱ) 若函数 $f(x)$是奇函数,则得：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\tag{4}$$

式中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$.

一个在区间$(0,l)$中有定义的并具有上面所提到的连续条件的函数$f(x)$,可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2.完全性条件　对于任一在区间$(-l,l)$上可积的且其平方也是可积的函数 $f(x)$,作具有系数(2),(2′)的级数(1),则李雅甫诺夫等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

3.福里叶级数的积分法　在区间$(-l,l)$内按黎曼意义可积分的函数 $f(x)$之福里叶级数(1)(即使是发散的),可以在$(-l,l)$内逐项积分.

在所指定的区间内把下列函数展开为福里叶级数：

【2943】 在区间$(-\pi,\pi)$中展开

$$f(x)=\begin{cases}ax, & 若-\pi<x<0;\\ bx, & 若0<x<\pi,\end{cases}$$

其中 a及 b为常数.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n];$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\sin nx\mathrm{d}x=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ bx, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

【2946】 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\sin ax$.

解 因为 $f(x)=\sin ax$为奇函数,从而,$a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-a)x-\cos(n+a)x]\mathrm{d}x=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}=\sin ax \quad (-\pi<x<\pi).$$

【2950】 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=x\sin x$.

解 因为 $f(x)$为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right)=2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{x\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\qquad (n=2,3,\cdots),$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=x\sin x\qquad (-\pi<x<\pi).$$

将下列周期函数展开成福里叶级数：

【2955】 $f(x)=x-[x]$.

解 因为

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数，而且，除 $x=k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$诸点外，$f(x)$都连续.由于

$$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Bigg|_0^1=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\sin 2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Bigg|_0^1=-\frac{1}{n\pi},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$x-[x]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}\quad (x\neq k,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【2961】 将函数 $f(x)=x^2$ 展开成福里叶级数：(1)按余弦展开；(2)按正弦展开；(3)在区间$(0,2\pi)$内展开.

绘出函数的图形及情形(1)、(2)与(3)的福里叶级数之和的图形.

利用这些展开式，求级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (1)由于 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

故 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

(2) 由于 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],$$

故 $f(x)$在$[0,\pi]$上按正弦展开为

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}=x^2\qquad(0\leqslant x<\pi).$$

(3) 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{-4\pi}{n},$$

故 $f(x)$在$(0,2\pi)$上可展开为

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=x^2\quad(0<x<2\pi).$$

函数的图形，(1)、(2)及(3)的福里叶级数之和的图形，如图 2961(1)、(2)、(3)及(4)所示.

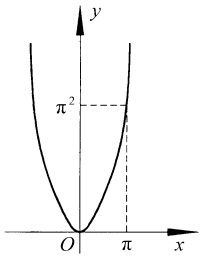

图 2961(1)

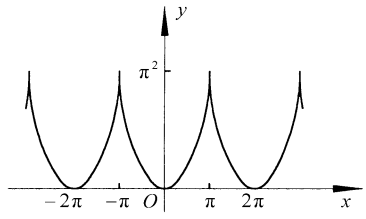

图 2961(2)

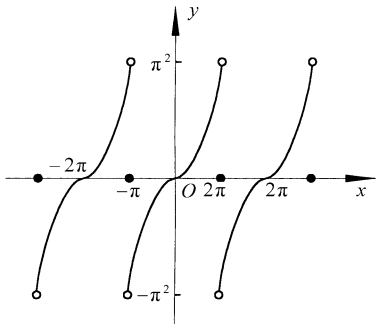

图 2961(3)

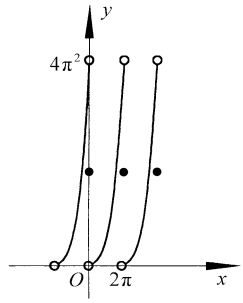

图 2961(4)

若在展开式(1)中令 $x=\pi$,则得 $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n=\pi^2$,于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1'}$$

若在展开式(3)中令 $x=\pi$, 则得 $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\pi^2$,于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{2'}$$

将级数(1′)和(2′)相加,得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]=\frac{\pi^2}{4}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{3'}$$

【2963】 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}|x|<\alpha,\\ 0, & \text{当 }\alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的李雅甫诺夫等式.

由李雅甫诺夫等式,求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

解 由于 $f(x)$为偶函数,从而,$b_n=0$,且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}, \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi},$$

又 $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi},$$

故对应于 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开的李雅甫诺夫等式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\dfrac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}{}^{*)}-\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}=\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}.$$

*) 利用 2961 题的结果.

利用公式 $\cos x=\dfrac{1}{2}(t+\bar{t})$，$\sin x=\dfrac{1}{2i}(t-\bar{t})$，式中$t=\mathrm{e}^{ix}$及$\bar{t}=\mathrm{e}^{-ix}$，将下列函数展开成福里叶级数：

【2966】 $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

解 由于

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{\frac{q}{2i}(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix})}{1-q(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})+q^2}=\frac{1}{2i}\frac{q(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix})}{(1-q\mathrm{e}^{ix})(1-q\mathrm{e}^{-ix})}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-q\mathrm{e}^{ix}}-\frac{1}{1-q\mathrm{e}^{-ix}}\right)=\frac{1}{2i}[(1+q\mathrm{e}^{ix}+q^2\mathrm{e}^{2ix}+\cdots)-(1+q\mathrm{e}^{-ix}+q^2\mathrm{e}^{-2ix}+\cdots)]$$

$$=q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots,$$

及级数 $q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$满足$|q^n\sin nx|\leqslant q^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n(|q|<1)$收敛，故级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.因此，级数 $q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$即为其和$\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$(它是周期为 2π 的奇函数)的福里叶级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【2969】 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$.

解 由于 $1-2q\cos x+q^2\geqslant 1-2q+q^2=(1-q)^2>0$，故$\ln(1-2q\cos x+q^2)$是$(-\infty,+\infty)$内的连续函数，而且是周期为 2π 的偶函数，将函数对求 x 导数，得

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]'=\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx^{*)}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

对上式从 0 到 x 积分(由于上式中级数在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，故可在有限区间上逐项积分)，则有

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=\int_0^x\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x+2\ln(1-q)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x q^n\sin nx\mathrm{d}x+2\ln(1-q)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}+2\ln(1-q).$$

而 $\ln(1-q)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{q^n}{n}$，于是，

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx \quad (-\infty<x<+\infty).$$

由于右端级数在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛,故它就是左端函数的福里叶级数.

*) 利用2966题的结果

将下列无界周期函数展开成福里叶级数:

【2970】 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

解 $f(x)$是以2π为周期的周期函数,当$x=2k\pi$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)时函数有无穷不连续点.由于$f(x)$是偶函数,从而,$b_n=0$,且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=-2\ln 2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}dt,$$

由于
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dt=\pi^{**)} \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\pi.$$

在上式左端第二个积分中令$\pi-x=u$,即得与第一个积分相同的积分,从而,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

利用这一结果,易得

$$a_n=-\frac{1}{n}, \qquad (n=1,2,\cdots).$$

由于$f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$在$(-\pi,\pi)$内绝对可积(参看上面$a_0$计算):

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx=2\int_0^{\pi}\left|\ln\sin\frac{x}{2}\right|dx=-2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=2\pi\ln 2<+\infty,$$

且除$x=2k\pi$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)诸点外,在其他的点$f(x)$均可微,故根据福里叶级数收敛的Lipschitz判别法(参看T. M. 菲赫金哥尔茨著,微积分学教程,第三卷第三分册658目)知,除上述诸点外,$f(x)$的福里叶级数收敛于$f(x)$本身,即

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \quad (x\neq 2k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

*) 利用2353题的结果.

**) 利用2291题的结果.

【2975】 应当如何把给定的在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内的可积函数$f(x)$延拓到区间$(-\pi,\pi)$内,而使

得它展开成福里叶级数的形状如下：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x \quad (-\pi<x<\pi).$$

解 由于展开式中无正弦项，故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内应满足 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的部分记以 $g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\cos 2ny\mathrm{d}y+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[f(\pi-x)+g(x)]\cos 2nx\mathrm{d}x=0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

为要上式成立，显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内任一 x 值，恒有

$$f(\pi-x)+g(x)=0, \quad \text{即 } g(x)=-f(\pi-x).$$

总之，首先要在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内定义一个函数，使它等于 $-f(\pi-x)$；然后，再按偶函数延拓到 $(-\pi,0)$，不妨将延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内的函数仍记为 $f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=f(x), \qquad f(\pi-x)=-f(x) \quad (-\pi<x<\pi).$$

【2981】 如果函数 $\varphi(-x)=\psi(x)$，问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n,b_n 与 α_n,β_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

解 函数 $\varphi(x),\psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x,$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right],$$

故在上式右端两个积分中代作换 $-x=y$，并将 $\varphi(-x)=\psi(x)$ 代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x=\alpha_n.$$

同理，有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\beta_n.$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n=\alpha_n \quad (n=0,1,2,\cdots), \qquad b_n=-\beta_n \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

【2985】 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数并且 a_n,b_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为其福里叶系数. 求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0,1,2,\cdots)$.

利用所得的结果,推出李雅甫诺夫等式.

解 由于

$$F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+2\pi+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=F(x),$$

故 $F(x)$仍为以 2π 为周期的函数.于是,有

$$\begin{aligned}
A_0 &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\right]^2=a_0^2,\\
A_n &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\cos n\xi\cos nt+\sin n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_n f(t)\cos nt+b_n f(t)\sin nt]\mathrm{d}t=a_n^2+b_n^2;\\
B_n &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\sin n\xi\cos nt-\cos n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[b_n f(t)\cos nt-a_n f(t)\sin nt]\mathrm{d}t=b_n a_n-a_n b_n=0.
\end{aligned}$$

由 $f(x)$的连续性知,$F(x)$不仅以 2π 为周期而且是连续函数,故按展开定理,注意到 $B_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$,即得

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx.$$

因此,特别地,有

$$F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

但已知 $A_0=a_0^2$, $A_n=a_n^2+b_n^2$, 且

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(0+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t,$$

故得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

这就是李雅甫诺夫等式.

§7. 级数求和法

1.直接求和法 若

$$u_n=v_{n+1}-v_n\quad(n=1,2,\cdots)\quad\text{及}\quad\lim_{n\to\infty}v_n=v_\infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=v_\infty-v_1.$$

特别是,若

$$u_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+m}},$$

其中数 a_i $(i=1,2,\cdots)$形成以 d 为公差的等差级数,则

$$v_n=-\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知级数能表为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2;\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

等等.

2.亚伯耳方法 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

在最简单的例子中,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和借助于逐项微分法或积分法来求.

3.三角级数求和法 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\quad\text{及}\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin nx$$

的和,常把它们视为复数域内幂级数:$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$(其中 $z=e^{ix}$)的和的实数部分及对应的虚数部分的系数.

在许多情形下级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}$ 是有用的.

求下列级数的和:

【2988】 $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$.

解 $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}-1\right\}=2\ln 2-1.$$

【2990】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+m)}$ （m为自然数）.

解 由$\dfrac{1}{n(n+m)}=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m+n}\right)$，考虑适当大的正整数 N，并令 $N\to\infty$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\cdots-\frac{1}{N+m}\right)=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

【2993】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由 $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\overset{*)}{=}1.$$

*） 所写级数均为绝对收敛级数，并利用 2961 题的结果(或本节前言).

【2999】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

解 注意到

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right),\ \frac{2}{5!}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right),\ \cdots\ \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right],\ \cdots$$

相加即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]\overset{*)}{=}\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1).$$

*） 由于级数绝对收敛，从而其和与项相加的顺序无关.

利用逐项微分法求级数的和：

【3006】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故收敛半径为 1. 当 $x=1$ 时，级数发散；当 $x=-1$ 时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$[-1,1)$.

当 $x\in[-1,1)$时，令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. 当$|x|<1$ 时，逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=\ln\frac{1}{1-x}\ (|x|<1).\tag{1}$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性，且其和为$-\ln 2=\ln\dfrac{1}{2}$，利用亚伯耳定理知，上述结果(1)当$-1\leqslant x<1$ 时成立.

利用逐项积分法求级数的和：

【3012】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=1$,故收敛半径为 1.当$|x|=1$时,由于 $n(n+2)\to\infty$,故级数发散.因此,级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$时,令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$.由于

$$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{(1-x)^2}\ {}^{*)}+\frac{2x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},$$

故

$$g(x)=[G(x)]'=\left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{3-x}{(1-x)^3}.$$

因此,当$|x|<1$时,

$$f(x)=xg(x)=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

*) 利用 2911 题的结果.

利用亚伯耳方法,求下列级数的和:

【3014】 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots$.

解 级数 $x-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{x^{10}}{10}+\cdots$的收敛域为$(-1,1]$.当$|x|<1$时,令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$$

逐项微分之,得 $f'(x)=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\dfrac{1}{1+x^3}$.由于 $f(0)=0$,故有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\ {}^{*)}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\quad(-1<x<1).$$

由亚伯耳定理,即得

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用 1881 题的结果.

求下列三角级数的和:

【3018】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

解 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}=\ln\dfrac{1}{1-z}$,其中 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,以及

$$\ln\frac{1}{1-z}=-\ln(1-\cos x-i\sin x)=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)+i\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}\quad{}^{*)}$$

$$=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+i\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}\tag{1}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\tag{2}$$

比较(1),(2)两式实数部分及虚数部分,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\quad(0<x<2\pi)\tag{3}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}=\arctan\left(\cot\frac{x}{2}\right)=\arctan\left(\tan\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi).$$

*) 其中用到 $\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$. 若 $z=x+iy$,则 $\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$,而 $\arg z=\arctan\frac{y}{x}$.

【3021】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}\quad(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.

解 利用半角公式、积化和差公式以及 3018 题的结果,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\alpha\sin nx}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+2\alpha)}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

下面分三种情况求此级数的和 S:

(1) 取 $0<x<2\pi$, $0<x-2\alpha<2\pi$ 与 $0<x+2\alpha<2\pi$ 的公共部分,即 $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$. 此时,级数的和为 $S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=0$.

(2) 当 $0<x<2\alpha$ 时, $S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}+\frac{\pi-(2\alpha-x)}{8}=\frac{\pi}{4}$.

(3) 当 $2\pi-2\alpha<x<2\pi$ 时, $S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)}{8}\quad{}^{*)}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=-\frac{\pi}{4}$.

*) 由于 $2\pi<x+2\alpha<3\pi$,故可令 $x+2\alpha=2\pi+\theta\ (0<\theta<\pi)$,则有

$$\sin n(x+2\alpha)=\sin n(2\pi+\theta)=\sin n\theta,$$

从而以 $\theta=x+2\alpha-2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 x 即可.

【3022】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

解 记 $I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$,利用 3018 题的结果,有

$$I(x)=(\operatorname{sgn}x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n|x|}{n}=(\operatorname{sgn}x)\cdot\frac{\pi-|x|}{2}\quad(|x|<2\pi).$$

又记 $I_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$, $I_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}$,

则有 $I_2(x)=(\operatorname{sgn}x)\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(2|x|)}{k}=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\cdot\frac{\pi-2|x|}{2}$ $(|x|<\pi)$.

由 $I(x)=I_1(x)+I_2(x)$，当 $|x|<\pi$ 时，有 $(\operatorname{sgn}x)\cdot\frac{\pi-|x|}{2}=I_1(x)+(\operatorname{sgn}x)\cdot\frac{\pi-2|x|}{4}$. 于是，最后得

$$I_1(x)=(\operatorname{sgn}x)\cdot\left(\frac{\pi-|x|}{2}-\frac{\pi-2|x|}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x\quad(|x|<\pi).$$

【3024】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

解 记 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$，显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛，故 $F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，而且是以 2π 为周期的周期函数. 因此，只要求 $F(x)$ 在 $|x|\leqslant\pi$ 上的值. 易知 $2\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=1-\cos 2nx$. 故当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ $(0<\tau<\frac{\pi}{2}$ 是任意的$)$时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x\right|\leqslant\frac{1}{\sin\tau}.$$

于是，根据迪里黑里判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 上一致收敛. 从而，由逐项求导数法则知，当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 时，有

$$F'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}\quad(*)\qquad(1)$$

由 τ 的任意性知(1)式当 $0<x<\pi$ 时成立. 于是，

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+C\qquad(0<x<\pi).\qquad(2)$$

其中 C 是某常数. 由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及 $F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ $(**)$，在(2)式中令 $x\to+0$ 取极限，即得 $C=\frac{\pi^2}{8}$，于是，

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{8}\qquad(0\leqslant x<\pi).$$

由此，再注意到 $F(x)$ 是偶函数及连续函数，得

$$F(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x|\qquad(|x|\leqslant\pi).$$

$*$) 利用 3022 题的结果.

$**$) 利用 2961 题的结果.

求下列级数的和：

【3033】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$，若(1)$|x|<1$；(2)$|x|>1$.

解 记 $s_n=\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ $(n=1,2,\cdots;\ |x|\neq1)$. 注意到

$$\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}=\frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}s_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

即得

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1-x}{x}s_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^{k+1}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{N+1}},$$

或有 $\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^{N+1}}$. 于是,

(1) 当 $|x|<1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-x^{N+1}}=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

(2) 当 $|x|>1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_k=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{x^{N+1}-1}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

§8. 利用级数求定积分之值

利用被积函数展开成级数的展开式来计算下列积分:

【3034】 $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x+\cdots^{*)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots=1.$

*) 由于幂级数(收敛半径为 1)

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

当 $x=1$ 时发散,故在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上逐项积分的合理性要单独证明,今证如下:

对任何 $0<\tau<1$,有

$$\int_0^\tau\ln(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^\tau\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x+R_n,\tag{1}$$

其中

$$R_n=\int_0^\tau\left(-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}-\cdots\right)\mathrm{d}x.$$

由于 $0<\tau<1$,故可在 $0\leqslant x\leqslant\tau$ 上逐项积分,得

$$\begin{aligned}0>R_n&=-\left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]\\&>-\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]\\&=-\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots\right]=-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

于是,由(1)式知

$$\left|\int_0^\tau\ln(1-x)\mathrm{d}x-\left(-\frac{\tau^2}{1\cdot2}-\frac{\tau^3}{2\cdot3}-\cdots\frac{\tau^{n+1}}{n(n+1)}\right)\right|<\frac{1}{n+1}.\tag{2}$$

在(2)式中让 n 固定而令 $\tau\to 1-0$ 取极限(注意,瑕积分 $\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x$ 显然收敛),得

$$\left|\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x-\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots\frac{1}{n(n+1)}\right)\right|<\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由此式即知

$$\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots\frac{1}{n(n+1)}\right)=-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\cdots,$$

也即

$$\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)\mathrm{d}x=\int_0^1(-x)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\cdots,$$

换句话说,逐项积分公式成立.

本节以下诸题中,凡在端点发散的级数的逐项积分的合理性问题,都可仿照上面类似地去证明,不再一一写出.

【3039】 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}$.

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2\pi x}(1+\mathrm{e}^{-2\pi x}+\mathrm{e}^{-4\pi x}+\cdots)\mathrm{d}x$$
$$=\left[-\frac{x}{2\pi}\mathrm{e}^{-2\pi x}-\frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{-2\pi x}\right]_0^{+\infty}+\left[-\frac{x}{4\pi}\mathrm{e}^{-4\pi x}-\frac{1}{(4\pi)^2}\mathrm{e}^{-4\pi x}\right]_0^{+\infty}$$
$$+\left[-\frac{x}{6\pi}\mathrm{e}^{-6\pi x}-\frac{1}{(6\pi)^2}\mathrm{e}^{-6\pi x}\right]_0^{+\infty}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}\overset{*)}{=}\frac{1}{24}.$$

*) 利用 2961 题的结果.

求:

【3049】 $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x$.

解 利用 2872 题的结果,即得:当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时,

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=-2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\alpha^n\cos nx}{n}\mathrm{d}x=0.$$

当 $|\alpha|>1$ 时,即当 $\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$ 时,

$$\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=\ln\left[\alpha^2\left(1-2\frac{1}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]=\ln\alpha^2+\ln\left(1-\frac{2}{\alpha}\cos\alpha+\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

利用以上结果,即得当 $|\alpha|>1$ 时

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=\pi\ln\alpha^2=2\pi\ln|\alpha|.$$

§9. 无穷乘积

1.无穷乘积的收敛性 如果存在有穷而且异于零的极限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}p_i=\lim_{n\to\infty}P_n=P,$$

则称无穷乘积

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n \tag{1}$$

是收敛的.

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中无一个等于零,则称乘积(1)发散于零;在相反的情形下,则称无穷乘积收敛于零.

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n \tag{2}$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1.$$

若 $p_n=1+\alpha_n$($n=1,2,\cdots$)及 α_n 不变号,则乘积(1)收敛的必要而且充分的条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1) \tag{3}$$

收敛.

在一般的情形下,当 α_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛,则乘积(1)将与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)^2$$

同时收敛或同时发散,在发散的情形下,乘积发散于零.

2.绝对收敛性 乘积(1)称为绝对或条件(非绝对)收敛是随级数(2)为绝对或条件收敛而定.级数(3)绝对收敛就是乘积(1)绝对收敛的充分而且必要的条件.

3.函数的成无穷乘积展开 当$-\infty<x<+\infty$时有展开式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right],\quad \cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

特别是,由第一式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时得瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式:

【3054】 $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$

证 由于部分乘积满足下述等式:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},$$

从而,

$$P_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\to\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\qquad(\text{当 }n\to\infty\text{时}),$$

故 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2$.

【3056】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

证 当 $x\neq 0$ 时,由于部分乘积

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\to\frac{\sin x}{x}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

【3058】 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$.

证 由于 $(1-x)P_n=(1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}$,从而(注意 $|x|<1$),

$$P_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\to\frac{1}{1-x}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$. 利用此题的结果,易得

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

此即 3054 题的结果.

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

【3062】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$.

证 $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.由于部分乘积

$$P_n=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$ 收敛,且其值为 2.

【3064】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}\quad(a>0)$.

证 由于部分乘积

$$P_n=a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n})}\to a^{-\ln 2}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛,且其值为 $a^{-\ln 2}$.

【3065】 可否由乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{n}q_n$ 的收敛性得出乘积:

(1) $\prod\limits_{n=1}^{n}(p_n+q_n)$; (4) $\prod\limits_{n=1}^{n}\frac{p_n}{q_n}$.

的收敛性?

解 (1) 不可以.例如,乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$及 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$均收敛,但乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]=\prod_{n=1}^{\infty}(2\cdot n^0)$$

却发散.

(4) 可以.事实上,部分乘积 $Q_n=\frac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n}$($q_i\neq0$, $i=1,2,\cdots$),当 $n\to\infty$时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$,故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$收敛.且其值为$\frac{P}{Q}$,其中 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n=P\neq0$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n=Q\neq0$.

研究下列无穷乘积的收敛性:

【3068】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

解 $p_n=1+\frac{1}{n^p}$,其中$\frac{1}{n^p}$不变号.由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当 $p>1$ 时收敛,而当 $p\leqslant1$ 时发散,故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$当 $p>1$ 时收敛,而当 $p\leqslant1$ 时发散.

【3070】* $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

解 通项 $p_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^p$.由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p=p\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$$

对任何 p 均收敛(因为级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}$收敛),故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*) 原题误为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$,这时,若 $p\geqslant0$,第一个因子为零,按定义无穷乘积收敛于零;若 $p<0$,第一个因子无意义,因此整个无穷乘积无意义.

【3074】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 $p_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$, $\ln p_n=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛,从而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛.因此,无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$收敛.

【3087】 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,则乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)\qquad(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4})$$

收敛.

证 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.此时有

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)=\frac{1+\tan\alpha_n}{1-\tan\alpha_n}=(1+\tan\alpha_n)(1+\tan\alpha_n+\tan^2\alpha_n+\cdots)$$
$$=1+2\tan\alpha_n+2\tan^2\alpha_n+\cdots=1+2\alpha_n+o(\alpha_n).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(\alpha_n)]$收敛,而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(\alpha_n)]^2=\sum_{n=1}^{\infty}4\alpha_n^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot o(\alpha_n)+\sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$$

也收敛*),故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)\quad\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{2}\right)$$

收敛.

*) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\sum\limits_{s=1}^{\infty}|\alpha_s|\cdot|\alpha_{k_s}|$,因而,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 也收敛.又当 n 充分大时,有

$$|\alpha_n\cdot o(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,\quad|o^2(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot o(\alpha_n)$及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

【3090】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

解 当 $p>1$ 时,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$绝对收敛,故原无穷乘积绝对收敛.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$条件收敛及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 收敛,故原无穷乘积条件收敛.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$时,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$发散,故原无穷乘积发散.

当 $p\leqslant0$ 时,由于$\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$不趋于零,故原无穷乘积也发散.

【3093】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

解 记 $p_n=n^{(-1)^n}$,则有子序列 $p_{2k}=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k\to\infty$ $(k\to\infty)$.于是 $p_n\not\to1(n\to\infty)$.从而,原无穷乘积发散.

【3094】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

解 记 $p_n=\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$,则有

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln n^{(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\ln n.$$

注意到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 是莱布尼兹型级数，它条件收敛，因而，原无穷乘积条件收敛.

【3100】 设 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$（黎曼 ζ 函数）而 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 是素数的叙列.证明：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x).$$

证 设 $x>1$.首先，有 $\left(1-\dfrac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\dfrac{1}{p_n^x}+\dfrac{1}{(p_n^2)^x}+\cdots+\dfrac{1}{(p_n^m)^x}+\cdots$.如果把对应于不超过自然数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来，则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=1+\frac{1}{n_1^x}+\frac{1}{n_2^x}+\cdots,$$

其中 $n_1,n_2,\cdots$ 是整数，它不包含超过 N 的素因子，显然 $1,2,\cdots,N$ 这种整数全被包含在 $n_1,n_2,\cdots$ 之中.因此，

$$\left|\zeta(x)-\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}\right|=\left|\zeta(x)-1-\frac{1}{n_1^x}-\frac{1}{n_2^x}-\cdots\right|\leqslant\frac{1}{(N+1)^x}+\frac{1}{(N+2)^x}+\cdots\to 0\quad(n\to\infty),$$

取极限即得 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)\quad(x>1)$.

【3105】 根据尤拉的定义戛玛函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定：

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发：(1)表函数 $\Gamma(x)$ 为无穷乘积的形状；(2)证明 $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义；(3)推出下面这个性质 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$；(4)对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (1) 由于

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x},$$

故得 $\Gamma(x)=\dfrac{1}{x}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$.

(2) 由上面 $\Gamma(x)$ 写成无穷乘积的过程，得知 $x\neq -n(n=0,1,2,\cdots)$，即当 x 为非负整数时 $\Gamma(x)$ 才允许写成上述形式.另一方面，由于

$$p_n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\alpha_n\quad(n=1,2,\cdots),\quad\text{而}\quad\alpha_n=\frac{x(x-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，从而，无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛,也即 $\Gamma(x)$对于 $x\neq -n(n=0,1,2,\cdots)$的一切实数 x 皆有意义.

(3) 由于

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!\,n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\frac{n!\,n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

故 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(4) 令 $x=n-1$,即得

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots=(n-1)!.$$

【3110】 证明:若 $0<x<y$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=0.$$

证 记 $p_n=\frac{x+n}{y+n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 显然,$0<p_n<1$.由题意,现在要证无穷乘积 $\frac{x}{y}\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 发散到零.因为部分乘积 $\prod\limits_{k=1}^{n}p_k$ 是正的递减的,故只要证明它是发散的就行了.为此先估计一下 $p_n=1+\alpha_n$,则有

$$\alpha_n=p_n-1=\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}}-1=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-1}-1=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$=\left[1-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1=-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故当 n 适当大时,α_n 保持定号.但由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y-x}{n}$ 发散,便知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散.因此,原无穷乘积发散,即它发散到零.于是,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{y+k}=\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{\infty}p_k=0.$$

证毕.

§10. 斯特林格公式

斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\quad(0<\theta_n<1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林格公式,近似地计算:

【3117】 $\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\,dx$.

解 先将$\int_0^{2\pi}$分成$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$，$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$及$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$四部分，然后分别作代换 $x=t$，$x=t+\frac{\pi}{2}$，$x=t+\pi$，及 $x=t+\frac{3\pi}{2}$，再利用结果$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t$，易得$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{200}x\mathrm{d}x$.利用 2281 题的结果及斯特林格公式，最后得

$$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\frac{(199)!!}{(200)!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{200!}{2^{200}(100!)^2}\cdot 2\pi=\frac{2\pi\cdot\sqrt{2\pi\cdot 200}\cdot 200^{200}\cdot\mathrm{e}^{-200}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200}\cdot 200\pi\cdot 100^{200}\cdot\mathrm{e}^{-200}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{600}}}$$

$$=0.355\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta}{600}}\approx 0.355\left(1+\frac{\theta}{600}\right),$$

其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

【3118】 对于乘积

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

推出渐近公式.

解 $(2n-1)!!=\frac{2n!}{2^n n!}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot\mathrm{e}^{-2n}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot\mathrm{e}^{-n}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{12n}}}=\sqrt{2}(2n)^n\,\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta}{12n}}$，

其中

$$|\theta|<1\ (0<\theta_1<1,0<\theta_2<1).$$

【3120】 利用斯特林格公式求下列极限：

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$；　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$；　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

解 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2\pi n}\cdot n\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[n]{2\pi n}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\mathrm{e}$.

(3) 利用 3118 题的结果即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2}\cdot 2n\cdot\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\frac{\mathrm{e}}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\ln 2+\ln\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{\theta}{12n}}{n\ln n}=1$.

§11. 用多项式逼近连续函数

1.拉格朗日插入公式　拉格朗日多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

具有性质 $P_n(x_i)=y_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

2.白恩什坦多项式　若 $f(x)$是闭区间$[0,1]$上的连续函数，则白恩什坦多项式

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

当 $n\to\infty$时在闭区间$[0,1]$上一致收敛于函数 $f(x)$.

【3122】 写出经过三点：$A(x_0-h,y_{-1})$，$B(x_0,y_0)$，$C(x_0+h,y_1)$的抛物线方程

$$y=ax^2+bx+c$$

解 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式，即得

$$\begin{aligned}y=&\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1}+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0\\&+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1\\=&y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2.\end{aligned}$$

【3128】 对于在闭区间$[a,b]$上的已知函数$f(x)$，写出白恩什坦多项式$B_n(x)$的公式.

解 令$a+(b-a)y=x$，则当$0\leqslant y\leqslant 1$时$a\leqslant x\leqslant b$，此时

$$y=\frac{x-a}{b-a},\qquad 1-y=\frac{b-x}{b-a},\qquad f(x)=f(a+(b-a)y),$$

故$f(x)$在$[a,b]$上的白恩什坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

【3129】 在闭区间$[-1,1]$上用白恩什坦多项式$B_4(x)$逼近函数$f(x)=\frac{|x|+x}{2}$.作出函数

$$y=\frac{|x|+x}{2}\quad 和\quad y=B_4(x)$$

的图形.

解 利用3128题的结果，易得

$$\begin{aligned}B_4(x)=&\sum_{k=0}^{4}f\left(-1+\frac{k}{2}\right)C_4^k\cdot\frac{(x+1)^k(1-x)^{4-k}}{2^4}\\=&\frac{1}{2}C_4^3\cdot\frac{(x+1)^3(1-x)}{2^4}+1\cdot C_4^4\cdot\frac{(x+1)^4}{2^4}\\=&\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4.\end{aligned}$$

函数$y=\frac{|x|+x}{2}$和$y=B_4(x)$的图形如图3129所示.

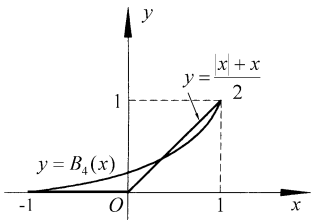

图3129

注 $y=B_4(x)=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4$.

当$x=-1$时为0；当$x=1$时为1；当$x=0$时为$\frac{3}{16}$.

又$y'=\frac{(1+x)^2}{4}(2-x)$，当$x=-1$时，$y'=0$；当$x\in(-1,1)$时，$y'>0$，故图形上升.

$y''=\frac{3}{4}(1-x^2)\geqslant 0$，故图形向上凹.

【3133】 证明：在闭区间$[-1,1]$上，$|x|=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$其中

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2i-3)}{2\cdot 4\cdots(2i)}(1-x^2)^i.$$

证 $|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1-t}$，其中$t=1-x^2$.

我们知道，函数$\sqrt{1-t}$按幂级数展开有

$$\begin{aligned}\sqrt{1-t}&=1+\frac{1}{2}(-t)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot(-t)^n\\&=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!\,2^n}(-1)^n t^n\\&=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n)}(-1)^{2n-1}t^n\\&=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n\quad(-1<t<1).\end{aligned}\tag{1}$$

当 $t=\pm1$ 时，上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(\pm1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right)=\frac{3}{2}>1,$$

故由拉阿伯判别法可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛.因此，由幂级数的亚伯耳定理知，(1)式当 $t=\pm1$ 时也成立，即有

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n\quad(-1\leqslant t\leqslant1).\tag{2}$$

于是，将 $t=1-x^2$ 代入，即得

$$|x|=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n=\lim_{n\to\infty}P_n(x)(-1\leqslant x\leqslant1).\tag{3}$$

证毕.

注 由幂级数的性质知，(2)式右端的级数在 $0\leqslant t\leqslant1$ 上一致收敛(实际在 $-1\leqslant t\leqslant1$ 上也一致收敛)，故(3)式中的级数在 $-1\leqslant x\leqslant1$ 上一致收敛.因此，我们实际证明了更强的结论：当 $n\to\infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant1$ 上一致趋于 $|x|$.

第六章　多变量函数的微分法

§1.　多变量函数的极限. 连续性

1.多变量函数的极限　设函数

$$f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义.若对于任何的 $\varepsilon>0$ 存在有 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$,使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,P_0)<\delta$[其中 $\rho(P,P_0)$为 P 和 P_0 二点间的距离],则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

2.连续性　若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$,则称函数 $f(P)$于 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$于已知域内的每一点连续,则称函数 $f(P)$于此域内是连续的.

3.一致连续性　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在仅与 ε有关的 $\delta>0$,使得对于域 G中的任何点 P',P'',只要是

$$\rho(P',P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立,则称函数 $f(P)$于域 G内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的.

确定并绘出下列函数存在的域:

【3141】　$u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解　存在域为满足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的点集.由 $x^2+y^2\geqslant x$ 得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出 $(x-1)^2+y^2<1$,两者组成一月形,如图 3141 阴影部分所示.

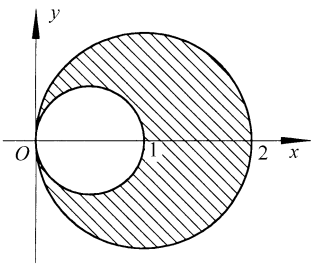

图 3141

作出下列函数的等位线:

【3159】　$z=|x|+|y|-|x+y|$.

解　等位线为曲线族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因为恒有$|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以 $a\geqslant0$．当 $a=0$ 时，由 $|x|+|y|=|x+y|$ 两边平方即得 $xy\geqslant0$，即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内．

当 $a>0$ 时，$xy<0$ 分下面四组求解：

(1) $x>0$，$y<0$，$x+y\geqslant0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=-\frac{a}{2}$；

(2) $x>0$，$y<0$，$x+y\leqslant0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=\frac{a}{2}$；

(3) $x<0$，$y>0$，$x+y\geqslant0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=-\frac{a}{2}$；

(4) $x<0$，$y>0$，$x+y\leqslant0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=\frac{a}{2}$．

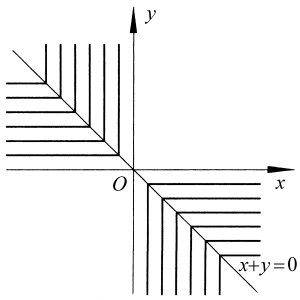

图 3159

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 3159 所示．

求下列函数的等位面：

【3169】 $u=(x+y)^2+z^2$．

解 等位面为曲面族 $(x+y)^2+z^2=a^2$ $(a\geqslant0)$．

当 $a=0$ 时为 $x+y=0$ 和 $z=0$．当 $a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z. \end{cases}$$

这是旋转变换．在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,\quad 即\quad \frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面，母线的方向平行于 y' 轴，准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a（z' 轴方向），短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$（x' 轴方向）．

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为 $\begin{cases} x'=0, \\ z'=0, \end{cases}$ 而在旧系 $O-xyz$ 中的方程为 $\begin{cases} x+y=0, \\ z=0, \end{cases}$ 即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴．

根据曲面的已知方程研究其性质：

【3171】 $z=f(y-ax)$．

解 引入参数 t，s，将曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=at+s, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s，得到以 t 为参数的直线方程，其方向数为 1，a，0. 因此，曲面为以 1，a，0 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$，可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=s, \\ z=f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=0, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线，也是柱面. $z=f(y-ax)$ 的一条准线.

【3174】$^{+}$ $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t，s，将曲面方程 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 表成参数方程 $\begin{cases} x=t, \\ y=st, \\ z=f(s). \end{cases}$

今固定 s，这是一条过点 $(0,0,f(s))$ 的直线，方向数为 1，s，0. 因此，它与 Oz 轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关. 从而得知，曲面 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来，它既不是柱面，也不是锥面. 令 $t=1$，得到直纹面的一条准线 $\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$ 从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直相交的直线. 这样的直线的全体，便构成由 $z=f(\dfrac{y}{x})$ 所表示的直纹面.

【3179】 设

$$z=x+y+f(x-y).$$

若当 $y=0$ 时，$z=x^2$. 求函数 f 及 z.

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$，所以，$x^2=x+f(x)$，即 $f(x)=x^2-x$，且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

【3182】 证明：对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 有

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\}=\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

证 $$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\}=\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

如果按 $y=kx\to 0$ 的方向取极限，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$

特别地，分别取 $k=0$ 及 $k=1$，便得到不同的极限 0 及 1. 因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

【3183】 证明：对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

累次极限$\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}$和$\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}$不存在，然而$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

证 由不等式

$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

知 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

但当 $x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to0$ 时，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$的极限不存在，因此，累次极限$\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}$不存在．同法可证累次极限$\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}$也不存在．

求下列极限：

【3190】 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 由不等式 $|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)}{4}|\ln(x^2+y^2)|$ 及

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{4}t^2\ln t=0,$$

即得 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1$.

【3193】$^+$ 若 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在：

(1) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$；(2) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}e^{x^2-y^2}\sin2xy$.

解 (1) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}=\begin{cases}0, & \text{当 }\cos\varphi<0;\\ 1, & \text{当 }\cos\varphi=0;\\ +\infty, & \text{当 }\cos\varphi>0.\end{cases}$

于是，仅当 $\cos\varphi\leqslant0$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，所给的极限才有确定的值．

(2) $e^{x^2-y^2}\sin2xy=e^{\rho^2\cos2\varphi}\sin(\rho^2\sin2\varphi)$.

当 $\rho\to+\infty$ 时，$\sin(\rho^2\sin2\varphi)$有界，除 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,1,2,3)$外无极限，且

$$\lim_{\rho\to+\infty}e^{\rho^2\cos2\varphi}=\begin{cases}0, & \text{当 }\cos2\varphi<0;\\ 1, & \text{当 }\cos2\varphi=0;\\ +\infty & \text{当 }\cos2\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$及$\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$以及 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 时才有确定的极限．

求下列函数的不连续点：

【3196】 $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

解 对于任意不等于零的实数 a，有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

于是,对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点均为可移去的不连续点.而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点.

【3202】 证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{若 } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

分别对于每一个变数 x 或 y(当另一变数的值固定时)是连续的,但并非对这些变数的总体是连续的.

证 先固定 $y=a\neq 0$,则得 x 的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\dfrac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即 $g(x)=\dfrac{2ax}{x^2+a^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$,它是处处有定义的有理函数.又当 $y=0$ 时,$f(x,0)\equiv 0$,它显然是连续的.于是,当变数 y 固定时,函数 $f(x,y)$ 对于变数 x 是连续的.同理可证,当变数 x 固定时,函数 $f(x,y)$ 对于变数 y 是连续的.

作为二元函数,$f(x,y)$ 虽在除点 $(0,0)$ 外的各点均连续,但在点 $(0,0)$ 不连续.事实上,当动点 $P(x,y)$ 沿射线 $y=kx$ 趋于原点时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=kx)}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的 k 可得不同的极限值,从而知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.因此,函数 $f(x,y)$ 在原点不是二元连续的.

【3204】 证明:函数

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y},$$

若 $y\neq 0$ 及 $f(x,0)=0$ 的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0\neq 0$ 时,函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 显见是连续的,即 $f(x,y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$,故知 $f(x,y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0\neq 0$ 时,对于点 $(x_0,0)$,由于极限 $\lim\limits_{y\to 0}f(x_0,y)=\lim\limits_{y\to 0}x_0\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在,故知 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续.

这样,我们证明了,函数 $f(x,y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点.显然,原点是不连续点集合的一个聚点,但它本身却不是 $f(x,y)$ 的不连续点.因此,$f(x,y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

【3205】 证明:若函数 $f(x,y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的,而关于 x 对变数 y 是一致连续的,则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$.

由于 $f(x,y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$,使当 $(x,y')\in$

G, $(x,y'')\in G$且$|y'-y''|<\delta_1$时,就有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因$f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于变数x是连续的,故对上述的ε,存在$\delta_2>0$,使当$|x-x_0|<\delta_2$时,就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$0<\delta\leqslant\min\{\delta_1,\delta_2\}$,并使点$(x_0,y_0)$的$\delta$邻域全部包含在区域$G$内,则当点$P(x,y)$属于点$(x_0,y_0)$的$\delta$邻域,即$|PP_0|<\delta$时,$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2$, $|y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1$.从而有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此,$f(x,y)$在点P_0连续.由P_0的任意性知,函数$f(x,y)$在G内是连续的.

【3206】 证明:若在某域G内函数$f(x,y)$对变数x是连续的,并满足对变数y的里普什兹条件,即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中$(x,y')\in G$, $(x,y'')\in G$而L为常数,则此函数在已知域内是连续的.

证 由于$f(x,y)$在G内满足对y的里普什兹条件,故知$f(x,y)$在G内关于x对变数y是一致连续的.

因此,由3205题的结果即知,$f(x,y)$在G内是连续的.

【3207】 证明:若函数$f(x,y)$分别地对每一个变数x和y是连续的并对于其中的一个是单调的,则此函数对两个变数的总体是连续的(尤格定理).

证 不妨设$f(x,y)$关于x是单调的.

设(x_0,y_0)为函数$f(x,y)$的定义域G内的任一点.由于$f(x,y)$关于x连续,故对任给的$\varepsilon>0$,存在$\delta_1>0$(假定δ_1足够小,使我们所考虑的点都落在G内),使当$|x-x_0|<\delta_1$时,就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点$(x_0-\delta_1,y_0)$及$(x_0+\delta_1,y_0)$,由于$f(x,y)$关于y连续,故对上述的ε,存在$\delta_2>0$(也要求δ_2足够小,使所考虑的点落在G内),使当$|y-y_0|<\delta_2$时,就有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{及}\quad|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$时,由于$f(x,y)$关于x单调,故有

$$|f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$
$$\leqslant\max\left\{|f(x_0+\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|,|f(x_0-\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\right\}.$$

但是

$$|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|$$
$$\leqslant|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|+|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故当$|\Delta x|<\delta$, $|\Delta y|<\delta$时,就有

$$|f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

即$f(x,y)$在点(x_0,y_0)是连续的.由点(x_0,y_0)的任意性知,$f(x,y)$是G内的二元连续函数.

【3208】 设函数$f(x,y)$于域$a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$上是连续的,而函数叙列$\varphi_n(x)$($n=1,2$,

…)在$[a,A]$上一致收敛并满足条件 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$.证明:函数叙列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]\quad(n=1,2,\cdots)$$

也在$[a,A]$上一致收敛.

证 由于 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$,故 $F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$有意义.

由题设 $f(x,y)$在域 $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$ 上连续,故在此域上一致连续,即对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使对于此域中的任意两点$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)$,只要$|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|<\delta$时,就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别地,当$|y_1-y_2|<\delta$时,对于一切的 $x\in[a,A]$,均有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon.$$

对于上述的 $\delta>0$,因为 $\varphi_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛,故存在自然数 N,使当 $m>N$, $n>N$时,对于一切的 $x\in[a,A]$,均有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是,对任给的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,使当 $m>N$, $n>N$时,对于一切的 $x\in[a,A]$,均有

$$|F_n(x)-F_m(x)|=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此,$F_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛.

§2. 偏导函数. 多变量函数的微分

1.偏导函数 若所论及的多变数的函数的一切偏导函数是连续的,则微分的结果与微分的次序无关.

2.多变量函数的微分 若自变数 x,y,z 的函数 $f(x,y,z)$的全增量可写为下形

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A,B,C 与 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$,则称函数 $f(x,y,z)$可微分,而增量的线性主部 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ 等于

$$\mathrm{d}f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z,\tag{1}$$

(其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$, $\mathrm{d}z=\Delta z$)称为此函数的微分.

当变数 x,y,z 为其他自变数的可微分的函数时,公式(1)仍有其意义.

若 x,y,z 为自变数,则对于高阶的微分,有符号公式

$$\mathrm{d}^nf(x,y,z)=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^nf(x,y,z).$$

3.复合函数的导函数 若 $w=f(x,y,z)$,其中 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$且函数 φ,ψ,χ可微分,则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式:

$$\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

及

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中

$$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\quad Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\quad R_1=\frac{\partial z}{\partial u}\qquad 及\qquad R_2=\frac{\partial x}{\partial v},\quad Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\quad R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4.在已知方向上的导函数　若用方向余弦$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$表 $Oxyz$ 空间内的方向 l,且函数 $u=f(x,y,z)$可微分,则沿方向 l的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用矢量——函数的梯度

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

来表示,它的大小等于

$$|\operatorname{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

【3211】 证明:

$$f'_x(x,b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)].$$

证 令 $\varphi(x)=f(x,b)$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]=\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=f'_x(x,b).$$

注 在求某一固定点的导数及微分时,用本题的结果常可减少运算量.在本节中,我们就多次利用本题的结果来简化运算.

求下列函数的一阶和二阶偏导函数:

【3213】 $u=x^4+y^4-4x^2y^2$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$,　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$,　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$,　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-16xy$*).

*) 以下各题不再写$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$,而仅写$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$,因为当它们连续时是相等的,并且在今后各题中均把$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$理解为$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$.

【3216】 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{2x\cdot x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{3}{2}y^2\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=-\dfrac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}xy\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

【3224】 $u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\overset{*)}{=}\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\overset{*)}{=}-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{|y|}$$

$$=-\frac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2\operatorname{sgn}y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2}\qquad(y\neq0).$$

*) 利用 3216 题的结果.

【3225】 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性,即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

【3229】 设(3)$u=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,验证等式$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

证 (3) 当 $0<x\leqslant y$ 时,我们有 $u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是,当 $0<x\leqslant y$ 时,有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

当 $y\leqslant x<0$ 时,$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2(x-y)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是,当 $y\leqslant x<0$ 时,也有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

仔细观察可以看到,在不同的区域上,一阶偏导数相差一个符号,但二阶混合偏导数却是相等的.

【3231】 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数,就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理:

(3) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

证 关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下:

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$* 在域 A 中关于所有变数均有连续偏导函数,则下述等式成立

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

---

* 为了书写的简便,在这里我们仅限于讨论三个变量的情形.

(3) 由于$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u(t>0)$,故函数 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right]=\frac{u}{z}\left[\ln\frac{x}{y}-1\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\frac{yu}{xz}+y\frac{u}{z}\left[\ln\frac{x}{y}-1\right]-z\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

【3232】 证明:若可微函数 $u=f(x,y,z)$满足方程式

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证 任意固定域中一点(x_0,y_0,z_0),考察下面 t 的函数$(t>0)$:

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n},$$

它当 $t>0$ 时有定义且是可微的.应用复合函数的求导法则,对 t 求导数即得

$$\begin{aligned}F'(t)=&\frac{1}{t^n}\{x_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+y_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)\\&+z_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)\}-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx_0,ty_0,tz_0)\\=&\frac{1}{t^{n+1}}\{tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)\\&+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\},\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)\\=&nf(tx_0,ty_0,tz_0),\end{aligned}$$

故 $F'(t)=0$.从而,当 $t>0$ 时,$F(t)=c$,其中 c 为常数.现在确定 c.为此,在定义 $F(t)$的等式中令 $t=1$,则得

$$c=f(x_0,y_0,z_0).$$

于是,

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}=f(x_0,y_0,z_0),$$

即

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^nf(x_0,y_0,z_0).$$

上式说明函数 $f(x,y,z)$为一个 n 次的齐次函数,这就是所要证明的.

【3233】 证明:若 $f(x,y,z)$是可微分的 n次齐次函数,则其偏导函数

$$f'_x(x,y,z),\ f'_y(x,y,z),\ f'_z(x,y,z)$$

是$(n-1)$次的齐次函数.

证 由等式 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两端分别对 x,y,z 求偏导函数,则得

$$tf'_1(tx,ty,tz)=t^n f'_1(x,y,z),$$
$$tf'_2(tx,ty,tz)=t^n f'_2(x,y,z),$$
$$tf'_3(tx,ty,tz)=t^n f'_3(x,y,z).$$

其中 $f'_1(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f'_2(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f'_3(\cdot,\cdot,\cdot)$分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$对第一个,第二个,第三个变量的偏导数.于是,

$$f'_1(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z),$$
$$f'_2(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_2(x,y,z),$$
$$f'_3(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_3(x,y,z),$$

即偏导函数 $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$及 $f'_z(x,y,z)$均为$(n-1)$次的齐次函数.

【3234】 设 $u=f(x,y,z)$是可微分两次的 n次齐次函数.证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=n(n-1)u.$$

证 由 3233 题知:$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial u}{\partial z}$均为$(n-1)$次齐次函数.应用尤拉定理,即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x},\tag{1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y},\tag{2}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}.\tag{3}$$

将(1)式两端乘以 x,(2)式两端乘以 y,(3)式两端乘以 z,然后相加,即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u,$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x,y,z为自变数):

【3242】 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$,求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$及 $\mathrm{d}^2 f(1,1,1)$.

解 本题将采用分别先求一阶及二阶偏导函数,然后再合成以求一阶及二阶微分的方法.由于

$$f'_x(x,1,1)=1,\quad f'_x(1,1,1)=1,\quad f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},$$
$$f'_y(1,1,1)=-1,\quad f'_z(1,1,z)=0,\quad f'_z(1,1,1)=0,$$

故得

$$\mathrm{d}f(1,1,1)=f'_x(1,1,1)\mathrm{d}x+f'_y(1,1,1)\mathrm{d}y+f'_z(1,1,1)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

又因

$$f'_x(x,1,1)=1,\quad f''_{xx}(x,1,1)=0,\quad f''_{xx}(1,1,1)=0,$$
$$f'_x(1,y,1)=\frac{1}{y},\quad f''_{xy}(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\quad f''_{xy}(1,1,1)=-1,$$
$$f'_z(1,1,z)=\frac{1}{z},\quad f''_{xz}(1,1,z)=-\frac{1}{z^2},\quad f''_{xz}(1,1,1)=-1,$$
$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\quad f''_{yy}(1,y,1)=\frac{2}{y^3},\quad f''_{yy}(1,1,1)=2,$$
$$f'_y(1,1,z)=-\frac{1}{z},\quad f''_{yz}(1,1,z)=\frac{1}{z^2},\quad f''_{yz}(1,1,1)=1,$$
$$f'_z(1,1,z)=0,\quad f''_{zz}(1,1,z)=0,\quad f''_{zz}(1,1,1)=0,$$

故得

$$\begin{aligned}d^2f(1,1,1)&=f''_{xx}(1,1,1)dx^2+f''_{yy}(1,1,1)dy^2+f''_{zz}(1,1,1)dz^2+2f''_{xy}(1,1,1)dxdy\\&\quad+2f''_{yz}(1,1,1)dydz+2f''_{xz}(1,1,1)dxdz\\&=2dy^2-2dxdy+2dydz-2dxdz=2(dy-dx)(dy+dz).\end{aligned}$$

【3251】 证明：在点(0,0)连续的函数

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

于点(0,0)有两个偏导函数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$，但在点(0,0)并非可微分的.

说明导函数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)的邻域中的性质.

解 $f'_x(0,0)=\dfrac{d}{dx}[f(x,0)]\Big|_{x=0}=0,\quad f'_y(0,0)=\dfrac{d}{dy}[f(0,y)]\Big|_{y=0}=0.$

考察极限

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to+0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当动点(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时，显然对不同的 k 有不同的极限值 $\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$. 因此，上述极限不存在，即在点(0,0)，$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$ 不能表成 $o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，故知 $\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)不可微分.

不难得到

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\\ \text{无意义}, & x=0,\ y\neq0.\end{cases}$$

因此，$f'_x(x,y)$ 在点(0,0)的任何邻域中均有无意义之点及无界，$f'_y(x,y)$ 的性质类似.

【3254】 证明：于某凸形的域 E 内有有界偏导函数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$ 于域 E 内一致连续.

证 由于 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在 E 内有界，故存在 $L>0$，使当 $(x,y)\in E$ 时，恒有

$$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{L}{2},\quad 及\quad |f'_y(x,y)|\leqslant\frac{L}{2}.$$

在 E 内任取两点 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$.

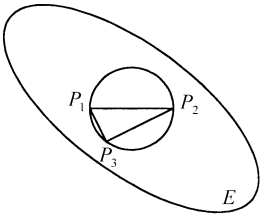

图 3254(1)

(1)如果以$|P_1P_2|$为直径的圆(包括圆周在内)都属于E(图3254(1)),则点$P_3(x_1,x_2)$及线段P_1P_3、P_2P_3都在E内.于是,

$$\begin{aligned}&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)|\\&=|f'_y(x_1,\xi)|\cdot|y_1-y_2|+|f'_x(\eta,y_2)|\cdot|x_1-x_2|,\end{aligned}$$

其中ξ介于y_1,y_2之间,η介于x_1,x_2之间.由偏导函数的有界性,即得

$$\begin{aligned}&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\frac{L}{2}|y_1-y_2|+\frac{L}{2}|x_1-x_2|\\&\leqslant\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=L\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1,y_2)^2},\end{aligned}$$

或 $|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_2P_2|$.

(2)如图3254(2)所示,$P_1\in E$, $P_2\in E$, 但点(x_1,y_2)和(x_2,y_1)都不一定属于E.由于P_1和P_2均为E的内点,故存在$R>0$,使得分别以P_1,P_2为圆心,R为半径的圆(包括圆周在内)都在E内.作两圆的外公切线Q_1Q_4及Q_2Q_3,则由切点均在E内知,矩形$Q_1Q_2Q_3Q_4$整个落在E内.

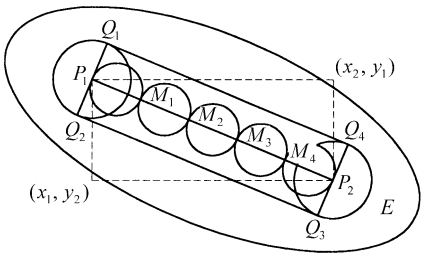

图3254(2)

不难看出,在直线段P_1P_2上可取足够多的分点:$P_1=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=P_2$,使

$$|M_{k-1}M_k|<2R\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

则以$|M_{k-1}M_k|$为直径的圆全落在矩形内,从而也在E内.于是,

$$\begin{aligned}|f(P_1)-f(P_2)|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(M_k)-f(M_{k-1})|\leqslant\sum_{k=1}^{n}L|M_kM_{k-1}|\\&=L\sum_{k=1}^{n}|M_kM_{k-1}|=L|P_1P_2|.\end{aligned}$$

这就证明了对E中任意两点,函数$f(P)$满足里普什兹条件.

对于任给的$\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{L}$,则当$P_1\in E$, $P_2\in E$,且$|P_1P_2|<\delta$时,就恒有

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_1P_2|<L\delta=\varepsilon$$

即函数$f(x,y)$在E中一致连续.

注 用∂E表区域E的边界,E表E加上∂E所成的闭区域.在本题的假定下,还可证明$f(x,y)$可开拓为E上的一致连续函数.事实上,对∂E上任一点P_0,由柯西收敛准则知,当点P从E内趋于P_0时,$f(P)$的极限A存在(根据$f(P)$在E有一致连续性易知它满足柯西收敛准则).我们规定$f(P_0)=A$.于是,$f(P)$在整个E上有定义.在不等式

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_1P_2|\quad(P_1,P_2\in E)$$

两端让$P_1\to P_0(P_0\in\partial E)$取极限,得

$$|f(P_0)-f(P_2)|\leqslant L|P_0P_2|\quad(P_0\in\partial E,\ P_2\in E),$$

再让$P_2\to P'_0(P'_0\in\partial E)$取极限,得

$$|f(P_0)-f(P'_0)|\leqslant L|P_0P'_0|\quad(P_0\in\partial E,\ P'_0\in\partial E).$$

由此可知，$f(P)$在 E 上满足里普什兹条件，从而，$f(P)$在 E 上一致连续.

【3255】 证明：若函数 $f(x,y)$对变数 x 是连续的(对每一个固定的值 y)且有对变数 y 的有界的导函数 $f'_y(x,y)$，则此函数对变数 x 和 y 的总体是连续的.

证 设 $P_0(x_0,y_0)$是所论的开域 E 中任一点.取以 P_0 为中心的一个充分小的开球 G_0，使 G_0 完全含于 E 内.设在 G_0 内，有$|f'_y(x,y)|\leqslant L$.于是，当(x,y')，(x,y'')属于 G_0 时，有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|=|f'_y(x,\xi)|\cdot|y'-y''|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 ξ 为介于 y'，y''之间的一个数，故 $f(x,y)$在 G_0 中满足里普什兹条件.因此，根据 3206 题的结果知 $f(x,y)$在 G_0 中连续，特别是在 P_0 点连续.由 P_0 点的任意性，即知 $f(x,y)$在 E 内连续，证毕.

注 从证明过程中很明显，本题只要假定 $f'_y(x,y)$在 E 中每一点的某邻域中有界即可.

在下列问题中求所指出的偏导函数：

【3264】 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$，若 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

解 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}=x^2e^xe^y+y^2e^ye^x=u_1+u_2$.显见$\dfrac{\partial^m u_2}{\partial x^m}=e^xy^2e^y$，利用求高阶导数的莱布尼兹公式，即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}&=\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^xy^2e^y)=e^x\frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^2)e^y\\&=e^x\left\{y^2\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^y)+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(e^y)+C_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2)\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}(e^y)\right\}\\&=e^{x+y}\{y^2+2ny+n(n-1)\}.\end{aligned}$$

同法可求得

$$\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}\{x^2+2mx+m(m-1)\}.$$

于是，

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}+\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}[x^2+y^2+2mx+2ny+m(m-1)+n(n-1)].$$

求下列复合函数的一阶和二阶导函数：

【3284】 $u=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$.

解
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right),\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)\ ^{*)}.$$

*) f'_1，f'_2，f''_{11}，f''_{22}均系按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导函数，以下各题均同，不再说明.

【3285】 $u=f(x,xy,xyz)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1(x,xy,xyz)+yf'_2(x,xy,xyz)+yzf'_3(x,xy,xyz)$.

将 $f'_1(x,xy,xyz)$, $f'_2(x,xy,xyz)$, $f'_3(x,xy,xyz)$,简记为 f'_1, f'_2, f'_3,以后不再说明.于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3,\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}+yzf''_{13}+y(f''_{21}+yf''_{22}+yzf''_{23})+yz(f''_{31}+yf''_{32}+yzf''_{33}).$$

由于 $f''_{12}=f''_{21}$, $f''_{13}=f''_{31}$, $f''_{23}=f''_{32}$(以下各题均同),故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+x^2zf''_{23}+x^2zf''_{32}+x^2z^2f''_{33}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=xf''_{12}+xzf''_{13}+f'_2+xyf''_{22}+xyzf''_{23}+zf'_3+xyzf''_{32}+xyz^2f''_{33}\\&=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3.$$

求下列复合函数的一阶和二阶全微分(x, y 及 z 为自变量):

【3298】 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$.

解 $\mathrm{d}u=f'_1\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+f'_2\dfrac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u=&f''_{11}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{y^4}+f''_{22}\frac{(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2}{z^4}+2f''_{12}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)}{y^2z^2}\\&-2f'_1\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\mathrm{d}y}{y^3}-2f'_2\frac{(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)\mathrm{d}z}{z^3}.\end{aligned}$$

【3305】 设 $u=f(r)$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 f 为可微分两次的函数.证明:

$$\Delta u=F(r),$$

其中

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

Δ 为拉普拉斯算子,并求函数 F.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\dfrac{x^2}{r^2}+f'(r)\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$. 由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

于是,

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+2f'(r)\frac{1}{r}=F(r).$$

【3306】 设 u 和 v 为可微分两次的函数而 Δ 为拉普拉斯算子(参阅 3305 题).证明:

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

其中 $\Delta(uv)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$.

证 $$\begin{aligned}\Delta(uv)&=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}=\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&\quad+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\&=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),\end{aligned}$$

这就是所要证明的.

【3314】 设函数 $u_1=u_1(x,y,z)$及 $u_2=u_2(x,y,z)$满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$.证明:函数

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$$

满足二重调和方程 $\Delta(\Delta v)=0$.

证 利用 3306 题的结果,即得

$$\begin{aligned}\Delta v&=\Delta u_1+(x^2+y^2+z^2)\Delta u_2+u_2\Delta(x^2+y^2+z^2)+2\left(2x\frac{\partial u_2}{\partial x}+2y\frac{\partial u_2}{\partial y}+2z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\\&=6u_2+4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x}+y\frac{\partial u_2}{\partial y}+z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

重复应用同一结果于 Δv,得

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta v)&=6\Delta u_2+4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z\right.\\&\quad\left.+2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2)=0,\\\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)&=0,\qquad\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)=0,\end{aligned}$$

故最后证得 $\Delta(\Delta v)=0$.

【3315】 设 $f(x,y,z)$是可微分 m 次的 n 次齐次函数.证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

证 当 $m=1$ 时,由 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两端对 t 求导,可得

$$x\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tx)}+y\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(ty)}+z\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tz)}=nt^{n-1}f(x,y,z)\quad(t>0).$$

令 $t=1$,即有 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^1 f=nf$.

当 $m=2$ 时,由 3234 题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=n(n-1)f.$$

在3233题中已证得 $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$为$(n-1)$次的齐次函数.

今设 $m=k-1$ 时命题为真.对 f'_x, f'_y, f'_z,用数学归纳法的假设,即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_x=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_x, \tag{1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_y=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_y, \tag{2}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_z=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_z, \tag{3}$$

将(1)两端乘以 x,(2)式两端乘以 y,(3)式两端乘以 z,然后相加,即得

$$\begin{aligned}&\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k}f(x,y,z)\\&=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)\\&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f(x,y,z).\end{aligned}$$

即当 $m=k$ 时命题也为真.

于是,命题对于一切自然数 m 为真,即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m}f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

假定任意函数 φ,ψ 等等为可微分足够多次的函数,验证下列等式:

【3329】 $x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=n(n-1)u$, 若

$$u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

证 $u_1=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 为 n 次齐次函数, $u_2=x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 为$1-n$次齐次函数.由 3234 题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2}u_1=n(n-1)u_1,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2}u_2=(1-n)(1-n-1)u_2=n(n-1)u_2.$$

于是,

$$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2}(u_1+u_2)=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

【3349】 证明:在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处函数

$$u=ax^2+by^2+cz^2 \quad 及 \quad v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a,b,c,m,n,p 为常数且 $a^2+b^2+c^2\neq0$)二者的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

证 本题的题设条件"点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$无限远移"应该理解为"$x_0\to\infty$, $y_0\to\infty$, $z_0\to\infty$同时成立"(此时 $\sqrt{(ax_0)^2+(by_0)+(cz_0)^2}\to+\infty$).否则,本题的结论不成立.

显见有

$$\operatorname{grad}u=\{2ax_0,2by_0,2cz_0\},\qquad \operatorname{grad}v=\{2ax_0+2m,2by_0+2n,2cz_0+2p\},$$

令 $\alpha=ax_0$, $\beta=by_0$, $\gamma=cz_0$; $\alpha_1=ax_0+m=\alpha+m$, $\beta_1=by_0+n=\beta+n$, $\gamma_1=cz_0+p=\gamma+p$.

于是,$\operatorname{grad}u$ 与 $\operatorname{grad}v$ 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}}$$

或

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$=\frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2+(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

令 $\delta=\max(|ax_0|,|by_0|,|cz_0|)=\max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$，则 $\delta\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leqslant\sqrt{3}\delta$. 于是，当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$时，$\delta\to+\infty$.

再令 $q=\max(|m|,|n|,|p|)$，则下述不等式显然成立：

$$0\leqslant\sin^2\theta=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}\leqslant\frac{(2q\delta)^2+(2q\delta)^2+(2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2-6\delta q-3q^2)}$$

$$=\frac{12q^2}{\delta^2-6\delta q-3q^2}\to0\qquad(\text{当 }\delta\to+\infty\text{时}).$$

于是，当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$时，$\sin^2\theta\to0$，即当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$，$\theta\to0$. 证毕.

【3350】 设 $u=f(x,y,z)$为可微分两次的函数. 若 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦，求 $\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，

$$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial y}\cos\gamma\right)\cos\beta$$

$$+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\cos\gamma\right)\cos\gamma$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma$$

$$+2\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha.$$

【3351】 设 $u=f(x,y,z)$为可微分两次的函数及

$$l_1\{\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1\},\quad l_2\{\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2\},\quad l_3\{\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3\}$$

为三个互相垂直的方向. 证明：

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$；

(2) $\frac{\partial^2u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$.

证 (1) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i\right)^2$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i.\qquad(1)$$

由于 l_1,l_2,l_3 是互相垂直的三个单位矢量,故

$$\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i=0,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i=0,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i=0,$$
$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i=1,\quad \sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i=1. \tag{2}$$

将上述诸等式(2)代入(1)式,即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

(2) 利用 3350 题的结果,得

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i. \tag{3}$$

将诸等式(2)代入(3)式,即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

假定 $z=z(x,y)$,解下列方程:

【3360】 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y.$$

的满足条件 $z(x,0)=x$, $z(0,y)=y^2$ 的解 $z=z(x,y)$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi_1(x),\quad z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\varphi(x)+\psi(y).$$

现确定 $\varphi(x)$及 $\psi(y)$.由于 $z(x,0)=x$, $z(0,y)=y^2$,故有

$$x=\varphi(x)+\psi(0),\quad y^2=\varphi(0)+\psi(y),$$

于是

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-[\varphi(0)+\psi(0)].$$

又因 $z(0,0)=0$,故 $\varphi(0)+\psi(0)=0$.最后得

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y).$$

§3. 隐函数的微分法

1.存在定理 设:1)函数 $F(x,y,z)$在某点 $\hat{A}(x_0,y_0,z_0)$等于零;2) $F(x,y,z)$和 $F'_z(x,y,z)$在点 $\hat{A}_0$ 的邻域内有定义并且是连续的;3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则在点 $A_0(x_0,y_0)$的某充分小的邻域内存在惟一的连续函数

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

满足方程 $F(x,y,z)=0$ 而且是 $z_0=f(x_0,y_0)$.

2.隐函数的可微分性　设除了上面的条件外,4)如果函数 $F(x,y,z)$在点$\hat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$的邻域内可微分,则函数(1)在点 $A_0(x_0,y_0)$的邻域内也可微分并且它的导函数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

求得.若函数 $F(x,y,z)$可微分任意多次,则用逐次微分方程(2)的方法也可计算函数 z 的高阶导函数.

3.由方程组定义的隐函数　设函数 $F_i(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,n)$满足下列条件:

(ⅰ)于点$\hat{A}_0(x_{10},\cdots,x_{m0};\ y_{10},\cdots,y_{n0})$变成为零;

(ⅱ)在点$\hat{A}_0$ 的邻域内可微分;

(ⅲ)在点$\hat{A}_0$ 函数行列式$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$.

在这种情况下,方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_n)=0\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

在点 $A_0(x_{10},\cdots,x_{m0})$的邻域内惟一地确定出一组可微分的函数:

$$y_i=f_i(x_1,\cdots,x_m)\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

这些方程满足方程(3)及原始条件

$$f_i(x_{10},\cdots,x_{m0})=y_{i0}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

这些隐函数的微分可由方程组

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k=0\quad (i=1,2,\cdots,n)^{*}$$

求得.

【3362】 设函数 $f(x)$定义于区间(a,b)内.问在怎样的情况下方程

$$f(x)y=0$$

当 $a<x<b$时才有惟一连续的解 $y=0$?

解　函数 $f(x)$的非零点的集合在区间(a,b)内是处处稠密的,即 $f(x)$的零点的集合不能充满区间(a,b)的任意一个子区间$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$.此时,方程 $f(x)y=0$ 有惟一连续的解 $y=0$.事实上,设 $y=y(x)$为方程 $f(x)y=0$ 的一个连续解,$x_0\in(a,b)$则

(1) 当 $f(x_0)\neq 0$时,显然有 $y(x_0)=0$;

(2) 当 $f(x_0)=0$时,由 $f(x)$的非零点的稠密性知:存在叙列$\{x_n\}$,满足 $x_n\to x_0$ 及$f(x_n)\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$.于是,$y(x_n)=0$.由$y(x)$的连续性即得

$$y(x_0)=y(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}y(x_n)=0.$$

---

* 这一段在简明陈述大多数的问题时无条件地假定隐函数和它们的对应导函数存在的条件满足.

于是，当 $a<x<b$ 时，$y\equiv 0$.

反之，若方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 只有惟一的连续解 $y=0$，则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a,b) 的任何子区间.事实上，设在 (a,b) 的某子区间 (α,β) 上 $f(x)\equiv 0$.定义 (a,b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下：

$$y_0(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } a<x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4} \text{ 时；}\\ \dfrac{4}{\beta-\alpha}\left[x-\alpha-\dfrac{\beta-\alpha}{4}\right], & \text{当 } \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\leqslant x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2} \text{ 时；}\\ -\dfrac{4}{\beta-\alpha}\left[x-\alpha-\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}\right], & \text{当 } \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\leqslant x\leqslant\alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha) \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } \alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)<x<b \text{ 时.}\end{cases}$$

如图 3362 所示，图中

$$c_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4},$$

$$c_0=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$c_2=\alpha+\frac{3(\beta-\alpha)}{4}.$$

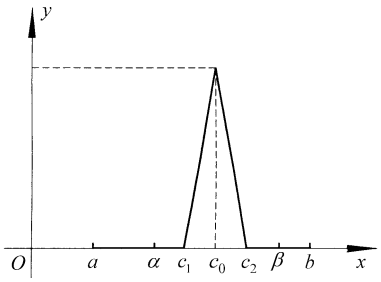

图 3362

显然，$y_0(x)\not\equiv 0$，但 $y=y_0(x)$ 是方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 上的一个连续解.

【3369】 设

$$x=y+\varphi(y), \tag{1}$$

其中 $\varphi(0)=0$ 且当 $-a<y<a$ 时 $\varphi'(y)$ 连续并满足 $|\varphi'(y)|\leqslant k<1$.证明：当 $-\varepsilon<x<\varepsilon$ 时存在惟一的可微分函数 $y=y(x)$ 满足方程(1)且 $y(0)=0$.

证 设 $F(x,y)=x-y-\varphi(y)$，则

(ⅰ) 由于 $\varphi(0)=0$，故 $F(0,0)=0$；

(ⅱ) 当 $-\infty<x<+\infty$，$-a<y<a$ 时，$F(x,y)$，$F'_x(x,y)$ 及 $F'_y(x,y)=-1-\varphi'(y)$ 均连续；

(ⅲ) $F'_y(0,0)=-1-\varphi'(0)<0$，当然 $F'_y(0,0)\neq 0$.

于是，由隐函数的存在及可微性定理知：存在 $\varepsilon>0$，使当 $-\varepsilon<x<\varepsilon$ 时，存在惟一的可微分函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 及 $y(0)=0$.

【3370】 设 $y=y(x)$ 为由方程 $x=ky+\varphi(y)$ 所定义的隐函数，其中常数 $k\neq 0$ 且 $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的可微周期函数，且 $|\varphi'(y)|<|k|$.证明：

$$y=\frac{x}{k}+\psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

证 由于 $x=ky+\varphi(y)$，故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=k+\varphi'(y)$.又因 $|\varphi'(y)|<|k|$，故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 与 k 同号，即 x 为 y 的严格单调函数，且为连续的.由于 $\varphi(y)$ 是连续的以 ω 为周期的函数，故有界，从而当 $k>0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}x=+\infty;$$

当 $k<0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=+\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}x=-\infty;$$

由此可知，其反函数 $y=y(x)$ 存在惟一，且是 $-\infty<x<+\infty$ 上有定义的严格单调可微函数．令

$$y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{1}$$

则由 $x=ky(x)+\varphi[y(x)]$，$\varphi[y(x)+\omega]=\varphi[y(x)]$ 知，

$$x+k\omega=ky(x)+\varphi[y(x)]+k\omega=k[y(x)+\omega]+\varphi[y(x)+\omega].$$

从而，根据反函数的惟一性，得

$$y(x+k\omega)=y(x)+\omega\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{2}$$

由(1)式与(2)式，得

$$\psi(x+k\omega)=y(x+k\omega)-\frac{x+k\omega}{k}=y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

同理可证　　$\psi(x-k\omega)=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$，

故 $\psi(x)$ 是以 $|k|\omega$ 为周期的可微周期函数．由(1)得

$$y=y(x)=\frac{1}{k}x+\psi(x).$$

证毕．

【3378】 证明：方程

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a\neq0)$$

在点 $x=0$，$y=0$ 的邻域中定义两个可微分的函数：$y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$．求 $y_1'(0)$ 及 $y_2'(0)$．

解　$(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$ *)

即　　$y^4+(2x^2+a^2)y^2-(a^2x^2-x^4)=0.$

解之得　　$y^2=\dfrac{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+a^4}}{2}$

(根号前取正号是由于 $y^2\geqslant0$)．记

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}=\pm f(x^2).$$

不难看出(0,0)为枝点．从点(0,0)出发，有单值连续的四个分枝：

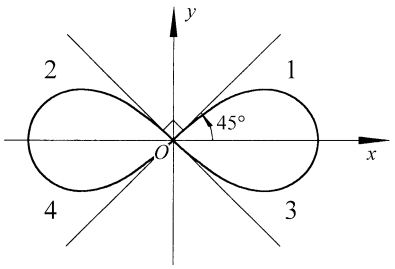

图 3378

$y_1=f(x^2)$，　$0\leqslant x\leqslant\delta$；　　$y_2=f(x^2)$，　$-\delta\leqslant x\leqslant0$；

$y_3=-f(x^2)$，　$0\leqslant x\leqslant\delta$　　$y_4=-f(x^2)$，　$-\delta\leqslant x\leqslant0$.

这几个单值分枝能否组成 $(-\delta,\delta)$ 上的可微分函数，主要是看组成的函数在 $x=0$ 是否可微．为此，研究各分枝在点 $x=0$ 处的单侧导数．

$$y_{1+}'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{y_1(x)-y_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x^2)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2x^2}}=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{8a^2x^2+a^4-(2x^2+a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{4a^2-4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}=1.$$

同法可得

$$y'_{2-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x^2)}{x}=-1,\ y'_{3+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{-f(x^2)}{2}=-1,\ y'_{4-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{-f(x^2)}{2}=1.$$

由上可以看出

$$y_1(x)=\begin{cases} f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ -f(x^2), & -\delta<x<0,\end{cases}\quad 及\quad y_2(x)=\begin{cases} -f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ f(x^2), & -\delta<x<0\end{cases}$$

是仅有的两个过点(0,0)的可微分函数,且

$$y'_1(0)=1\quad 及\quad y'_2(0)=-1.$$

*) 此方程的图象系双纽线(图 3378),它的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos 2\theta$. 以上作法及结论由图很容易看出.

【3382】 证明:对于二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

等式 $\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0$ 为真.

证 原题中的二次曲线应是非退化的,即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0,$$

由 $\Delta\neq 0$ 保证 $y''\neq 0$.

等式两端对 x 求导数,得

$$2ax+2by+2bxy'+2cyy'+2d+2ey'=0. \tag{1}$$

于是,

$$y'=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$$

(1)式除以 2 后,等式两端再对 x 求导数,得

$$a+2by'+cy'^2+(bx+cy+e)y''=0.$$

于是,

$$y''=-\frac{a+2by'+cy'^2}{bx+cy+e}=-\frac{1}{(bx+cy+e)^3}\{a(bx+cy+e)^2$$

$$-2b(bx+cy+e)(ax+by+d)+c(ax+by+d)^2\}=\frac{\Delta}{(bx+cy+e)^3},$$

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}(bx+cy+e)^2=\Delta^{-\frac{2}{3}}[b^2x^2+c(cy^2+2bxy+2ey)+e^2+2bex]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}[b^2x^2-c(ax^2+2dx+f)+2bex+e^2]$$

$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}[(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf],$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式,故

$$\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0.$$

对于函数 $z=z(x,y)$ 求一阶和二阶的偏导函数,设:

【3385】 $x+y+z=e^z$.

解 等式两次微分,得

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\mathrm{e}^z\mathrm{d}z, \tag{1}$$

故有 $$\mathrm{d}z=\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\frac{1}{x+y+z-1}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y).$$

于是，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$. 再将(1)式微分一次，得

$$\mathrm{d}^2z=\mathrm{e}^z\mathrm{d}^2z+\mathrm{e}^z\mathrm{d}z^2,$$

故有 $$\mathrm{d}^2z=-\frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1}(\mathrm{d}z)^2=-\frac{\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z-1)^3}(\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2).$$

于是， $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z-1)^3}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$

【3388】 设：

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \tag{1}$$

及 $$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$

求：(ⅰ)$f'_x(1,1,1)$，设 $z=z(x,y)$是由方程(1)所定义的隐函数，(ⅱ)$f'_x(1,1,1)$，设 $y=y(x,z)$是由方程(1)所定义的隐函数.说明为什么这些导数相异.

解 (ⅰ)记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，则由方程(1)所定义的隐函数 $z=z(x,y)$的偏导函数 $z'_x(x,y)$在(1,1)点的值为

$$z'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(1,1,z)\right|_{z=1}}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+2-3x)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2+z^2-3z)\right|_{z=1}}=-1.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\right|_{x=1}+\left.\frac{\partial}{\partial z}f(1,1,z)\right|_{z=1}z'_x(1,1)$$
$$=1+3(-1)=-2.$$

(ⅱ) $$y'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(1,y,1)\right|_{y=1}}=-1.$$

于是，

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z),z)]\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\right|_{x=1}+\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y,1)\right|_{y=1}y'_x(1,1)$$
$$=1+2(-1)=-1.$$

由(ⅰ)与(ⅱ)所求得的对 x 的偏导函数在(1,1,1)点的值不相等，可说明如下：

方程 $F(x,y,z)=0$ 代表一个空间曲面，而 $f(x,y,z)$表示定义在这个曲面上的一个函数.函数 $G(x,y)=f(x,y,z(x,y))$表示把原曲面上的点射影到 Oxy 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxy 平面上定义的一个函数，$G'_x(x,y)$表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部分.同样地，$H(x,z)=f(x,y(x,z),z)$表示把原曲面上的点射影到 Oxz 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxz 平面上定义的函数，$H'_x(x,z)$表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部分.一般地，原来函数在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部份是不相等的.

求 $\mathrm{d}z$ 和 d^2z，设：

【3392】 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.

解 等式两端微分一次,得

$$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z}-\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

于是,$\mathrm{d}z=\frac{z(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y)}{y(x+z)}$.对$(x+z)\mathrm{d}z=z\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y}\mathrm{d}y$再微分一次,得

$$(x+z)\mathrm{d}^2z=-(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{2z}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}y-\frac{z^2}{y^2}\mathrm{d}y^2=-\mathrm{d}z^2+\frac{2z}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{z^2}{y^2}\mathrm{d}y^2$$

$$=-\left(\mathrm{d}z-\frac{z}{y}\mathrm{d}y\right)^2=-\frac{z^2[(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y)-(x+z)\mathrm{d}y]^2}{y^2(x+z)^2}=-\frac{z^2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^2}.$$

于是, $\mathrm{d}^2z=-\frac{z^2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^3}$.

【3402】 设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$, 求

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z},\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}\quad 和\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}$$

当 $x=1$, $y=-1$, $z=2$ 时的值.

解 对 z 求导数,得

$$\begin{cases} 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=z, & (1)\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+1=0, & (2)\\ 2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+2x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}+2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2+2y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}=1, & (3)\\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}=0. & (4)\end{cases}$$

将 $x=1$, $y=-1$, $z=2$ 代入(1),(2),解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1.$$

将上述结果及 x,y,z 值联同由(4)式所决定的式子$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}$ 一起代入(3)式,即得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{1}{4},\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{4}.$$

【3404】 设 $u+v=x+y$,$\frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}$ 求,$\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}^2u$ 和 d^2v.

解 将原式改写为

$$\begin{cases} u+v=x+y,\\ y\sin u=x\sin v.\end{cases}$$

微分得

$$\begin{cases} \mathrm{d}u+\mathrm{d}v=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y, & (1)\\ \sin u\mathrm{d}y+y\cos u\mathrm{d}u=\sin v\mathrm{d}x+x\cos v\mathrm{d}v. & (2)\end{cases}$$

联立求解,得

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(\sin v+x\cos v)\mathrm{d}x-(\sin u-x\cos v)\mathrm{d}y],$$

$$\mathrm{d}v=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[-(\sin v-y\cos u)\mathrm{d}x+(\sin u+y\cos u)\mathrm{d}y].$$

对(1),(2)两式再微分一次,得

$$\begin{cases}\mathrm{d}^2u+\mathrm{d}^2v=0,\\ y\cos u\mathrm{d}^2u+2\cos u\mathrm{d}y\mathrm{d}u-y\sin u\mathrm{d}u^2=x\cos v\mathrm{d}^2v+2\cos v\mathrm{d}x\mathrm{d}v-x\sin v\mathrm{d}v^2.\end{cases}$$

联立求解,得

$$\mathrm{d}^2u=-\mathrm{d}^2v=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(2\cos v\mathrm{d}x-x\sin v\mathrm{d}v)\mathrm{d}v-(2\cos u\mathrm{d}y-y\sin u\mathrm{d}u)\mathrm{d}u].$$

【3409】 设 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$,求

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\quad 及\quad \frac{\partial^2z}{\partial y^2}.$$

解 本题求微分,可将所有的二阶偏导函数一起求出.

$$\mathrm{d}x=\cos v\mathrm{d}u-u\sin v\mathrm{d}v,\qquad \mathrm{d}y=\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v.$$

联立求解,得

$$\mathrm{d}u=\cos v\mathrm{d}x+\sin v\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}v=\frac{1}{u}(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y),\ u\mathrm{d}v=-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y.$$

再对上式微分一次,得 $u\mathrm{d}^2v+\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\cos v\mathrm{d}v\mathrm{d}x-\sin v\mathrm{d}v\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,于是,

$$\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}^2v=-\frac{2}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\frac{2}{u^2}(\cos v\mathrm{d}x+\sin v\mathrm{d}y)(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y)$$

$$=\frac{2}{u^2}(\sin v\cos v\mathrm{d}x^2-\cos 2v\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\sin v\cos v\mathrm{d}y^2),$$

从而有

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=\frac{2\sin v\cos v}{u^2}=\frac{\sin 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

注 本题也可消去 u,v,由 $z=v=\arctan\dfrac{y}{x}$ 获解.

【3413】 设方程:$x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v,)$ $z=\chi(u,v)$ 定义 z 为 x 和 y 的函数.求

$$\frac{\partial z}{\partial x}\quad 和\quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 对 x 求偏导函数,得

$$1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{1}$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{3}$$

由(1)及(2)解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\tag{4}$$

其中

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}&\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}&\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

再将(4)的结果代入(3),即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right).$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right).$$

【3421】 证明:由方程

$$\Phi(x-az,y-bz)=0 \tag{1}$$

(其中 $\Phi(u,v)$是变数 u,v 的任意可微分函数,a 和 b 为常数)所定义的函数 $z=z(x,y)$为方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

的解.说明曲面(1)的几何性质.

解 由于 $\Phi_1'\cdot\left(1-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)-b\Phi_2'\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $-\Phi_1'a\frac{\partial z}{\partial y}+\Phi_2'\cdot\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$, 故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\Phi_1'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以 a,b,然后相加,即得

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

这就说明 $z=z(x,y)$为方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 的解.

等式 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-1=0$ 表示曲面(1)上任一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$的法向量

$$\vec{n}_1=\left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_1},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_1},-1\right\}$$

皆与向量$\vec{r}_1=\{a,b,1\}$垂直.过点 P_1 作平行于$\vec{r}_1$ 的直线 $l_1:\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{1}$.易知 l_1 上的点皆在曲面(1)上.于是,曲面(1)是母线平行于$\vec{r}_1$ 的柱面.

【3422】 证明:由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \tag{2}$$

(其中 $\Phi(u,v)$是变数 u 和 v 的任意可微分函数)所定义的函数 $z=z(x,y)$满足方程式

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

说明曲面(2)的几何性质.

解 由于

$$\Phi_1'\frac{z-z_0-(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}-\Phi_2'\frac{(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}=0,$$

$$-\Phi_1'\frac{(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}+\Phi_2'\frac{z-z_0-(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}=0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)\Phi_1'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)\Phi_2'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $x-x_0$ 及 $y-y_0$，然后相加，即得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0,$$

本题获证.

等式 $(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}-(z-z_0)=0$ 表示曲面(2)在其上任一点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的法向量 $\vec{n}_2=\left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_2},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_2},-1\right\}$ 与向量 $\vec{r}_2=\{x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0\}$ 垂直.作过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 $l_2:\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}$.易知 l_2 上的任一点皆在曲面(2)上.于是，曲面(2)是顶点在 P_0 的锥面.

【3423】 证明：由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

[其中 $\Phi(u)$ 是变数 u 的任意可微分函数，a,b 和 c 为常数]所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

说明曲面(3)的几何性质.

解 由于 $a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\Phi'\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，$b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\Phi'\cdot\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\Phi'-a}{c-2z\Phi'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\Phi'-b}{c-2z\Phi'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $(cy-bz)$ 及 $(az-cx)$，然后相加，即得

$$\begin{aligned}(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{(2x\Phi'-a)(cy-bz)+(2y\Phi'-b)(az-cx)}{c-2z\Phi'}\\&=\frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'}=bx-ay,\end{aligned}$$

本题获证.

设 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 是曲面(3)上任意一点，并记 $\vec{r}_3=\{a,b,c\}$.由于曲面(3)在点 P_3 的法向量为 $\vec{n}_3=\left\{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_3},-1\right\}$，故由方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}-(bx-ay)=0$$

知 $\vec{n}_3\perp(\vec{P}_3\times\vec{r}_3)$，其中 $\vec{P}_3=\{x_3,y_3,z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d，即 $x_3^2+y_3^2+z_3^2=d^2$.考虑平面 $\Pi:ax+by+cz=d$ 和过点 P_3 的球面 $S:x^2+y^2+z^2=d^2$，并设平面 Π 与球面 S 的交线为 C，则

1.由点 P_3 在曲面(3)上可知 $ax_3+by_3+cz_3=\Phi(x_3^2+y_3^2+z_3^2)$，即 $d=\Phi(d^2)$.这表明曲线 C 上的点的坐标皆满足方程(3)，即曲线 C 位于曲面(3)上.

2.由 Π 为平面，S 为球面知交线 C 为一圆周曲线.

3.圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面 Π 的垂足，故点 Q 位于过原点且与平面 Π 垂直的直线 l 上.

综上所述，可见曲面(3)是以直线 $l:\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 为旋转轴的旋转曲面.

【3428】 证明：由方程组

$$\left.\begin{aligned}[z-f(\alpha)]^2&=x^2(y^2-\alpha^2),\\ [z-f(\alpha)]f'(\alpha)&=\alpha x^2\end{aligned}\right\}$$

所定义的函数 $z=z(x,y)$满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

证 $2[z-f(\alpha)][\mathrm{d}z-f'(\alpha)\mathrm{d}\alpha]=(y^2-\alpha^2)2x\mathrm{d}x+x^2(2y\mathrm{d}y-2\alpha\mathrm{d}\alpha)$.

于是,

$$\begin{aligned}[z-f(\alpha)]\mathrm{d}z&=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y-\{\alpha x^2-[z-f(\alpha)]f'(\alpha)\}\mathrm{d}\alpha\\ &=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x(y^2-\alpha^2)}{z-f(\alpha)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}.$$

从而得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3y(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy\frac{x^2(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy,$$

本题获证.

§4. 变量代换

1.在含有导函数的式子中的变量代换. 设于式

$$A=\Phi(x,y,y'_x,y''_{xx},\cdots)$$

中需要把 x,y 换为新的变量:t(自变量)及 u(函数),这些变量由方程

$$x=f(t,u),\qquad y=g(t,u) \tag{1}$$

与原来的变量 x 和 y 联系起来.

把方程式(1)微分,便有:

$$y'_x=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

同样地可表示出高阶的导函数 y''_{xx},…因此我们得:

$$A=\Phi_1(t,u,u'_t,u''_{tt},\cdots).$$

2.在含有偏导函数的式子中自变量的代换. 若于下式中

$$B=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\cdots\right)$$

令

$$x=f(u,v),\qquad y=g(u,v), \tag{2}$$

其中 u 和 v 为新的自变量,则挨次的偏导函数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, …由下列方程所确定:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

等等.

3.在含有偏导函数的式子中自变量和函数的代换. 在一般的情况下,设有方程

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w),\tag{3}$$

其中 u,v 为新的自变量及 $w=w(u,v)$为新的函数,则对于偏导函数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\cdots$得到这样的方程:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

等等.

在某些情况下,使用全微分法进行变量代换是方便的.

【3431】 把 y 看作新的自变量,变换方程

$$y'y'''-3y''^2=x.$$

解 函数 $y=y(x)$的各阶导函数 $y',y'',y''',\cdots$与其反函数 $x=x(y)$的各阶导函数 $x',x'',x''',\cdots$之间有下述关系.

$$y'=\frac{1}{x'}\qquad\text{公式 1}$$

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{x'}\right)'_y\cdot y'_x=-\frac{x''}{x'^2}\frac{1}{x'}=-\frac{x''}{(x')^3}\qquad\text{公式 2}$$

$$y'''=(y'')'=-\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]'_y y'_x=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}.\qquad\text{公式 3}$$

以公式 1、2、3 代入所给方程,化简整理即得

$$x'''+x(x')^5=0.$$

【3432】 用同样的方法变换方程

$$(y')^2(y)^{(4)}-10y'y''y'''+15(y'')^3=0.$$

解 由公式 3 可得

$$y^{(4)}=(y''')'=\left[\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}\right]'_y y'_x=\frac{6x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-x'x''x'''-5[(3x'')^2-x'x''']x''}{(x')^6}\frac{1}{x'}$$

$$=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}.\qquad\text{公式 4}$$

以公式 1、2、3、4 代入所给方程,化简整理得

$$x^{(4)}=0.$$

引入新变量,变换下列常微分方程:

【3434】 $x^2y''+xy'+y=0$,若 $x=e^t$.

解 当函数 y 不变,只作自变量的代换 $x=x(t)$时,注意到对$\frac{dt}{dx},\frac{d^2t}{dx^2}$运用公式 1 及 2,即得

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\qquad\text{公式 5}$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3}.\qquad \text{公式 6}$$

在本题中，$x=\mathrm{e}^t$，故有$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t=x$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{e}^t=x$，从而有

$$y'=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{x},\qquad y''=\frac{x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{x^3}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

将 y'及 y''代入所给方程，即得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0.$$

【3436】 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$，若 $x=\cos t$.

解 注意到$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\cos t$，用公式 5 及 6，就有

$$y'=-\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sin t},\qquad y''=\frac{-\sin t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\cos t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{-\sin^3 t}.$$

将 y'，y''及 x 代入所给方程，即得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+n^2y=0.$$

将下列方程式改变为极坐标 r 与 φ 所表示的方程，即令

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi;$$

【3450】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$.

解 当 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$时，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\cos\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}-r\sin\varphi,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}=\sin\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}+r\cos\varphi,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\varphi^2}=\cos\varphi\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}-2\sin\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}-r\cos\varphi,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\varphi^2}=\sin\varphi\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}+2\cos\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}-r\sin\varphi.$$

由公式 5 及 6，即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}}=\frac{\sin\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}-r\sin\varphi},\qquad \text{公式 7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\varphi^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\varphi^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^3}=\frac{r^2+2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2-r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}-r\sin\varphi\right)^3}.\qquad \text{公式 8}$$

将公式 7 及 x，y 代入所给方程，化简整理即得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=r\quad 或\quad r'=r.$$

【3456】 引用新函数 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\arctan\frac{y}{x}$，变换式子

$$W=x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

解 由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 两端微分,得

$$\mathrm{d}r=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y \quad 或 \quad r\mathrm{d}r=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y. \tag{1}$$

由 $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ 两端微分,得

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x \quad 或 \quad r^2\mathrm{d}\varphi=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x. \tag{2}$$

于是,由(1)及(2)可得

$$x\mathrm{d}r-yr^2\mathrm{d}\varphi=(x^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y)-(xy\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x)=(x^2+y^2)\mathrm{d}x=r^2\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}x=\frac{x}{r}\mathrm{d}r-y\mathrm{d}\varphi. \tag{3}$$

同理可得

$$\mathrm{d}y=\frac{y}{r}\mathrm{d}r+x\mathrm{d}\varphi. \tag{4}$$

从而由(3)及(4),得

$$\begin{aligned}x\mathrm{d}^2y-y\mathrm{d}^2x&=x\left(\frac{y}{r}\mathrm{d}^2r-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}r^2+\frac{1}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi+x\mathrm{d}^2\varphi\right)\\&\quad-y\left(\frac{x}{r}\mathrm{d}^2r-\frac{x}{r^2}\mathrm{d}r^2+\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}r-\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi-y\mathrm{d}^2\varphi\right)\\&=\frac{\mathrm{d}r}{r}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)+(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\mathrm{d}\varphi+(x^2+y^2)\mathrm{d}^2\varphi\\&=\frac{\mathrm{d}r}{r}(r^2\mathrm{d}\varphi)+(r\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi+r^2\mathrm{d}^2\varphi=2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+r^2\mathrm{d}^2\varphi,\end{aligned}$$

于是, $W=x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$.

引入新变量 ξ 及 η,解下列方程:

【3458】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$, 令 $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

解 当仅作自变量代换,引入新自变量

$$\xi=\xi(x,y), \qquad \eta=\eta(x,y)$$

这个最简单的情形时,只要把 ξ,η 看作中间变量,用复合函数求偏导函数的公式,即可求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

代入原方程,即得变换后的方程,本题中,$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=1$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}=-1$.于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

代入原方程,得

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{\partial z}{\partial\eta} \quad 或 \quad \frac{\partial z}{\partial\eta}=0,$$

即 $z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y)$, 其中 φ 为任意的函数.

【3460】 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1\ (a\neq 0)$，令 $\xi=x,\ \eta=y-bz$.

解 当变量间的变换关系比较复杂时，用全微分法较好.首先，根据新旧变元之间的关系，求出它们微分之间的关系

$$\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{d}\eta=\mathrm{d}y-b\mathrm{d}z. \tag{1}$$

其次，将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式，并按旧变元关系重新整理.

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial z}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta=\frac{\partial z}{\partial\xi}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial\eta}(\mathrm{d}y-b\mathrm{d}z),$$

$$\left(1+b\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial\xi}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial\eta}\mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}z=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial\xi}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial\eta}}\mathrm{d}x+\frac{\dfrac{\partial z}{\partial\eta}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial\eta}}\mathrm{d}y.$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 比较，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial\xi}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial\eta}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial\eta}}{1+b\dfrac{\partial z}{\partial\eta}}.$$

代入原方程，得 $a\dfrac{\partial z}{\partial\xi}+b\dfrac{\partial z}{\partial\eta}=1+b\dfrac{\partial z}{\partial\eta}$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial\xi}=\dfrac{1}{a}$.于是，

$$z=\frac{\xi}{a}+\varphi(\eta)=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz).$$

取 u 与 v 作新的自变量，变换下列方程式：

【3464】 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若

$$u=\frac{y}{x},\qquad v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

解 本题用微分法较好.

$$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2},$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{r}\quad(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}y}{x}-\frac{y\mathrm{d}x}{x^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\mathrm{d}z+\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y+\frac{z}{r}\mathrm{d}z\right).$$

于是，

$$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=(z+r)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$2(z+r)\frac{\partial z}{\partial v}=z+r.$$

如果 $z+r=0$，则可推得 $x^2+y^2=0$，但由于 $x\neq 0$，所以，x^2+y^2 不可能为零．于是，$z+r\neq 0$．从而，得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}.$$

于下列方程中，代入新的变量 u, v, w，其中 $w=w(u,v)$：

【3476】 $(xy+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+yz$，设

$$u=yz-x,\quad v=xz-y,\quad w=xy-z.$$

解 $\mathrm{d}w=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\dfrac{\partial w}{\partial u}(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)+\dfrac{\partial w}{\partial v}(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)$．整理得

$$\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)\mathrm{d}z=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\mathrm{d}y.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入方程，得

$$(xy+z)\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)+(1-y^2)\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)=(x+yz)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

即

$$(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

不难验证，由方程 $1-x^2-y^2-z^2-2xyz=0$ 所确定的隐函数不是原方程的解(证略)．于是，

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

假定 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，改变下列各式为极坐标 r 和 φ 所表示的式子．

【3481】 $w=x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$．

解 $\mathrm{d}x=\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}y=\sin\varphi\mathrm{d}r+r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$．联立解之，得

$$\mathrm{d}r=\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}\varphi=\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x.$$

于是，

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}y,$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{y}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi},\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{x}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\end{cases}\qquad \text{公式 9}$$

将公式 9 代入原式，即得

$$w=x\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)-y\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)=\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

【3483】 $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

解 $w=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$.

【3484】 $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 先导出极坐标变换的所有二阶偏导函数的变换式，将 r,φ 看作中间变量，x,y 看作自变量.由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 r&=\mathrm{d}(\mathrm{d}r)=\mathrm{d}\left(\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)-\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r^2}\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)-\frac{1}{r^3}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{r^3}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2,\\
\mathrm{d}^2\varphi&=\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi)=\mathrm{d}\left(\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x\right)=-\frac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{r^3}\mathrm{d}r\\
&=-\frac{2}{r^4}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y),
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 u&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\mathrm{d}r^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\mathrm{d}\varphi^2+\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}^2 r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}^2\varphi\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)^2\\
&\quad+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{r^3}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

将上式右端按 $\mathrm{d}x^2$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y^2$ 合并同类项，并与全微分式

$$\mathrm{d}^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

比较，即得

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{y^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{y^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},\\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{x^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{x^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},\\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{x^2-y^2}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-\dfrac{xy}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\dfrac{xy}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{x^2-y^2}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}.
\end{cases}$$ 公式 10

将公式 10 代入原式，即得

$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

【3492】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=\frac{x}{x^2+y^2}$，$v=-\frac{y}{x^2+y^2}$

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，　　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$，

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\
\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.
\end{cases}$$ 公式 11

本题中，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

同法可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. 注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

则由公式 11，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0.$$

由于 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0$，故得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

【3495】 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=xy$，$v=\frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$.

由公式 11 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

【3502】 证明：拉普拉斯方程

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

在满足条件 $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$ 的非退化的变数代换

$$x=\varphi(u,v),\qquad y=\psi(u,v)$$

下形式不变.

证
$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v,\\[2ex] \mathrm{d}y=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}v.\end{cases}$$

令 $I=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$. 由于变换是非退化的，故知

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2=I\neq 0.$$

由上述方程组解得

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}x-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}y\right),\qquad \mathrm{d}v=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}y\right).$$

于是，
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题的证明及公式 11，并考虑到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{I^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{1}{I},$$

即得
$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0,$$

或
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

即形式是不变的.

【3511】 假定 $x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$，变换式子

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \quad 及 \quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

为球坐标所表的式子.

解 先作变换 $x=R\cos\varphi$，$y=R\sin\varphi$，$z=z$，它相当于对 x,y 坐标作一次极坐标变换.

利用 3483 题及 3484 题的结果，对新变元 R,φ,z 有

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

所作变换 $R=r\sin\theta$，$\varphi=\varphi$，$z=r\cos\theta$. 它相当于对 R,z 坐标又作一次极坐标变换，其中 R 相当于公式 9 中的 y，θ 相当于公式 9 中的 φ. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial R}=\frac{R}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

再利用 3483 题及 3484 题的结果，得

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 u&=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}\\&=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].\end{aligned}$$

注意到两次变换的乘积就是所给的变换，因此，最后得到 $\Delta_1 u$ 及 $\Delta_2 u$ 的结果即为所求.

【3525】 证明：方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

的形状与变量 x,y 和 z 所分别担任的角色无关.

证 令 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$，则 $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$. 若以 x 作为新函数，则有

$$d^2x=\frac{\partial^2x}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}dydz+\frac{\partial^2x}{\partial z^2}dz^2+\frac{\partial x}{\partial y}d^2y+\frac{\partial x}{\partial z}d^2z.$$

今以作为旧变元的关系：$d^2x=0$，$d^2y=0$，$dz=pdx+qdy$ 代入上式，可得

$$d^2z=-\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}\left[\frac{\partial^2x}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}dy(pdx+qdy)+\frac{\partial^2x}{\partial z^2}(pdx+qdy)^2\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=-p\left(p^2\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right),\tag{1}$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-p\left(p\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right),\tag{2}$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-p\left(\frac{\partial^2x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right).\tag{3}$$

代入原方程，得

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\frac{\partial^2z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right)^2=p^2\left(p^2\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right)-p^2\left(p\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right)^2$$

$$=p^4\left[\frac{\partial^2x}{\partial y^2}\frac{\partial^2x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}\right)^2\right]=0,$$

即 $\dfrac{\partial^2x}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2x}{\partial z^2}-\left(\dfrac{\partial^2x}{\partial y\partial z}\right)^2=0$.类似地，若以 y 作为函数，则也有

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\frac{\partial^2y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2y}{\partial x\partial z}\right)^2=0,$$

即方程的形状与变量 x，y 和 z 所分别担任的角色无关.

【3526】 取 x 作为变量 y 和 z 的函数，解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0.$$

解 将 3525 题中的(1)，(2)，(3)三式及 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 代入，得

$$q^2\left(-p^3\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right)+2pq\left(p^2\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}+p^2q\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right)-p^2\left(p\frac{\partial^2x}{\partial y^2}+2pq\frac{\partial^2x}{\partial y\partial z}+pq^2\frac{\partial^2x}{\partial z^2}\right)$$

$$=-p^3\frac{\partial^2x}{\partial y^2}=0,$$

即 $\dfrac{\partial^2x}{\partial y^2}=0$ 或 $p=0$.由 $\dfrac{\partial^2x}{\partial y^2}=0$ 解之，得原方程的解为

$$x=\varphi(z)y+\psi(z),$$

其中 φ，ψ 为任意函数；由 $p=0$ 解之，得 $z=f(y)$（f 为任意函数），它也是原方程的解.

§5. 几何上的应用

1.切线和法平面　在曲线

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad z=\chi(t)$$

上的一点 $M(x,y,z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dt}}.$$

在此点的法平面方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(X-x)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(Y-y)+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(Z-z)=0.$$

2.切平面和法线　曲面 $z=f(x,y)$上点 $M(x,y,z)$处的切平面方程为

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在 M点处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面的方程给成隐函数的形状 $F(x,y,z)=0$,则切平面方程为:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

3.平面曲线族的包线　含一个参数的曲线族 $f(x,y,\alpha)=0$ (α为参数)的包线满足方程组:

$$f(x,y,\alpha)=0,\qquad f'_{\alpha}(x,y,\alpha)=0.$$

4.曲面族的包面　含一个参数的曲面族 $F(x,y,z,\alpha)=0$ 的包面满足方程组:

$$F(x,y,z,\alpha)=0,\qquad F'_{\alpha}(x,y,z,\alpha)=0.$$

在含两个参数的曲面 $\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ 族的情形,其包面满足下面的方程组:

$$\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_{\alpha}(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_{\beta}(x,y,z,\alpha,\beta)=0.$$

对下列曲线写出在已知点的切线和法平面方程:

【3528】 $x=a\cos\alpha\cos t$, $y=a\sin\alpha\cos t$, $z=a\sin t$;在点 $t=t_0$.

解　曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 在点 $t=t_0$ 的切向量为

$$\vec{v}\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}.$$

本题中,当 $t=t_0$ 时曲线上点的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0=x(t_0)=a\cos\alpha\cos t_0,\quad y_0=y(t_0)=a\sin\alpha\cos t_0,\quad z_0=z(t_0)=a\sin t_0,$$

$$\vec{v}(t_0)=\{-a\cos\alpha\sin t_0,-a\sin\alpha\sin t_0,a\cos t_0\}.$$

于是,切线方程为

$$\frac{x-x_0}{-a\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-a\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{a\cos t_0},\quad \text{即}\quad \frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0};$$

法平面方程为

$$(-a\cos\alpha\sin t_0)(x-x_0)+(-a\sin\alpha\sin t_0)(y-y_0)+(a\cos t_0)(z-z_0)=0,$$

以 x_0,y_0,z_0 的值代入上式,化简整理得

$$x\cos\alpha\sin t_0+y\sin\alpha\sin t_0-z\cos t_0=0,$$

即法平面过原点.

【3530】 $y=x$, $z=x^2$;在点 $M(1,1,1)$.

解　设 $x=t$,则 $y=t$, $z=t^2$. 于是,$\vec{v}(1)=\{1,1,2\}$,切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2};$$

法平面方程为　　$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$　或　$x+y+2z=4$.

【3531】　$x^2+z^2=10$，$y^2+z^2=10$；在点 $M(1,1,3)$.

解　当曲线以两个曲面方程 $F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$ 交线形式给出时，可先求出两曲面在交点处的法向量：

$$\vec{n}_1=\{F'_{1x},F'_{1y},F'_{1z}\},\qquad \vec{n}_2=\{F'_{2x},F'_{2y},F'_{2z}\},$$

则曲线在该点的切向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}F'_{1y}&F'_{1z}\\F'_{2y}&F'_{2z}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1z}&F'_{1x}\\F'_{2z}&F'_{2x}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1x}&F'_{1y}\\F'_{2x}&F'_{2y}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，$\vec{n}_1=\{2,0,6\}$，$\vec{n}_2=\{0,2,6\}$，$\vec{v}=\{1,0,3\}\times\{0,1,3\}=\{-3,-3,1\}$.

于是，切线方程为　　$\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$　或　$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$；

法平面方程为　　$-3(x-1)-3(y-1)+(z-3)=0$，　即　$3x+3y-z=3$.

【3533】　在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上求出一点，此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的.

解　$\vec{v}=\{1,2t,3t^2\}$，平面法向量 $\vec{n}=\{1,2,1\}$.按题设，应有 $\vec{v}\cdot\vec{n}=1+4t+3t^2=0$.解之，得 $t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$.于是，所求的点为

$$M_1(-1,1,-1),\qquad M_2\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right).$$

写出下列曲面上已知点的切平面和法线方程：

【3539】　$z=x^2+y^2$；在点 $M_0(1,2,5)$.

解　当曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出时，法向量为 $\vec{n}=\left\{\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\}$，特别是曲面由显式方程 $z=f(x,y)$ 给出时，法向量为 $\vec{n}=\{f'_x,f'_y,-1\}$.本题中，$\vec{n}=\{2x,2y,-1\}_{M_0}=\{2,4,-1\}$.于是，切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,\quad 或\quad 2x+4y-z=5;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}.$$

【3545】　$x=a\cos\psi\cos\varphi$，$y=b\cos\psi\sin\varphi$，$z=c\sin\psi$；在点 $M_0(\varphi_0,\psi_0)$.

解　当曲面由参数方程 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$ 给出时，曲面上分别令 $u=u_0$，$v=v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\},\qquad \vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

则切面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial u}\\\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}\\\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，

$$\vec{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi},\frac{\partial y}{\partial\varphi},\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}_{M_0}=\{-a\cos\psi_0\sin\varphi_0,b\cos\psi_0\cos\varphi_0,0\}=\cos\psi_0\{-a\sin\varphi_0,b\cos\varphi_0,0\},$$

$$\vec{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial\psi},\frac{\partial y}{\partial\psi},\frac{\partial z}{\partial\psi}\right\}_{M_0}=\{-a\sin\psi_0\cos\varphi_0,-b\sin\psi_0\sin\varphi_0,c\cos\psi_0\},$$

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=ab\cos\psi_0\left\{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a},\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b},\frac{\sin\psi_0}{c}\right\}.$$

于是,切平面方程为

$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}(x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0)+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}(y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0)+\frac{\sin\psi_0}{c}(z-c\sin\psi_0)=0,$$

即
$$\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1;$$

法线方程为
$$\frac{x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}}=\frac{y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}}=\frac{z-c\sin\psi_0}{\frac{\sin\psi_0}{c}},$$

即
$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\csc\psi_0-c}{ab}.$$

【3549】 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解 $\vec{n}=\{2(x+y+z),2(x+2y+2z),2(x+2y+3z)\}$

当 $\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+2z=0\\x+2y+3z=\lambda\end{cases}$ 时,$\vec{n}$与$\vec{k}=\{0,0,1\}$平行,即切平面平行于 Oxy 平面. 解之,得 $x=0$, $y=-\lambda$, $z=\lambda$.将求得的 x,y,z 值代入所给的曲面方程,得$\lambda=\pm2\sqrt{2}$.于是,切平面平行于 Oxy 坐标面的切点为$(0,\pm2\sqrt{2},\mp2\sqrt{2})$.同法可求得切平面平行于 Oyz 坐标面及 Oxz 坐标面的诸切点分别为$(\pm4,\mp2,0)$及$(\pm2,\mp4,\pm2)$.

【3551】 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

解 $\vec{n}=2\{x,2y,3z\}$.按题设,应有 $x=\lambda$, $2y=4\lambda$, $3z=6\lambda$, 解之,得 $x=\lambda$, $y=2\lambda$, $z=2\lambda$. 将它们代入方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$,得 $\lambda=\pm1$,故切点为$(\pm1,\pm2,\pm2)$.于是,所求的切平面方程为

$$(x\mp1)+4(y\mp2)+6(z\mp2)=0,\quad 即\quad x+4y+6z=\pm21.$$

【3554】 证明:锥面

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面经过其顶点.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$.于是,锥面在任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的切面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0),$$

化简整理得

$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的顶点$(0,0,0)$.

【3558】 设

$$z=f(x,y),\qquad \text{其中}(x,y)\in D \tag{1}$$

为曲面的方程,$\varphi(P_1,P)$为曲面(1)在点 $P(x,y)\in D$ 及$P_1(x_1,y_1)\in D$二点的法线之间的夹角.

证明:若域 D有界且为封闭的,函数 $f(x,y)$在域 D内有有界的二阶导函数,则李雅甫诺夫不等式

$$\varphi(P_1,P)<C\rho(P_1,P) \tag{2}$$

成立.其中 C为常数,$\rho(P_1,P)$为点 P与 P_1 之间的距离

证 本题应加区域是凸的这个条件,否则结论就不成立.例如,

$$z=\begin{cases}0, & \text{当 } y\leqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ y^3, & \text{当 } y>0,\ x\geqslant y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ -y^3, & \text{当 } y>0,\ x\leqslant -y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$$

如图 3558 所示,函数 z在单位圆内缺一个角的闭区域内定义,且有连续的二阶偏导函数,取

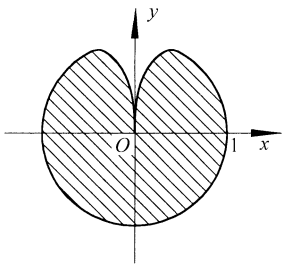

图 3558

$$P_n\left(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right)\quad 与\quad P_n'\left(-\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right),$$

则

$$\vec{n}=\vec{n}(P_n)=\{0,3y^2,-1\}_{P_n}=\left\{0,\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\vec{n}'=\vec{n}(P_n')=\{0,-3y^2,-1\}_{P_n'}=\left\{0,-\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\vec{n}\times\vec{n}'=\left\{-\frac{6}{n^2},0,0\right\},\qquad \sin\varphi_n=\frac{|\vec{n}\times\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}\to 0\quad (n\to\infty).$$

又因 $\rho_n(P_n,P_n')=\dfrac{2}{n^3}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}\ \frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}=+\infty,$$

故不存在常数 C,使 $\varphi_n<C\rho_n$

下面证明当 D为凸的有界闭域时,不等式(2)为真.

由 3255 题知:当 $f(x,y)$在 D内有二阶连续的偏导函数时,$\dfrac{\partial f}{\partial x}$及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在 D 内是二元连续的.又因 D是有界闭域,故$\dfrac{\partial f}{\partial x}$及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在 D 上有界,记

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|<M,\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|<M.$$

又由 3254 题的证明过程可知:当 D是凸域,$f(x,y)$有有界二阶偏导函数时,对 D中任意两

点 P 及 P_1，$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$满足里普什兹条件，即存在常数 L，使有

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right|<L\rho(P_1,P),\qquad \left|\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right|<L\rho(P_1,P).$$

由$\vec{n}(P_1)=\left\{\frac{\partial f(P_1)}{\partial x},\frac{\partial f(P_1)}{\partial y},-1\right\}$及$\vec{n}(P)=\left\{\frac{\partial f(P)}{\partial x},\frac{\partial f(P)}{\partial y},-1\right\}$知：对于 $\varphi=\varphi(P_1,P)$有下列不等式

$$\begin{aligned}\sin^2\varphi&=\frac{|\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2}{|\vec{n}(P_1)|^2|\vec{n}(P)|^2}\leqslant|\vec{n}(P_1)\times\vec{n}(P)|^2\\&=\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2\\&<L^2\rho^2+L^2\rho^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}-\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2\\&<2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2=2L^2\rho^2(1+2M^2).\end{aligned}$$

于是，$\sin\varphi<C_1\rho(P_1,P)$，其中 $C_1^2=2L^2(1+2M^2)$，从而得

$$\varphi(P_1,P)<\frac{\pi}{2}\sin\varphi^{*)}<\frac{\pi}{2}C_1\rho(P_1,P)=C\rho(P_1,P).$$

其中 $C=\frac{\pi}{2}C_1$ 为常数，本题获证.

*) 利用 1290 题的结果.

【3563】 求函数 $u=x+y+z$ 在沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上 $M_0(x_0,y_0,z_0)$点的外法线方向上的导函数.

在球面上怎样的点使得上述的导函数有：(1)最大值，(2)最小值，(3)等于零？

解 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=1$，则在 M_0 点处球面的外法线单位向量为

$$\left\{\frac{x_0}{r_0},\frac{y_0}{r_0},\frac{z_0}{r_0}\right\}=\{x_0,y_0,z_0\}.$$

于是，$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\{x_0,y_0,z_0\}=\{1,1,1\}\{x_0,y_0,z_0\}=x_0+y_0+z_0.$$

(1) 利用 1294 题的结果，得

$$x_0+y_0+z_0=1x_0+1y_0+1z_0\leqslant\sqrt{3}\quad\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{3}.$$

当 $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$时，上述等式成立，此点恰在球面上.因此，在$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$点$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最大值.

(2) 同法可得 $-(x_0+y_0+z_0)=(-1)x_0+(-1)y_0+(-1)z_0\leqslant\sqrt{3}$，或 $x_0+y_0+z_0\geqslant-\sqrt{3}$.故在点$(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$，$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最小值.

(3) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时$\frac{\partial u}{\partial n}=0$.因此，所求的点为由方程$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$所确定的解$(x,y,z)$，它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线——圆上面.

求含一个参变数的平面曲线族的包线：

【3566】 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ （p=常数）.

解 $\begin{cases} f(x,y,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \\ f'_\alpha(x,y,\alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \end{cases}$

消去 α,得 $$x^2+y^2=p^2. \tag{1}$$

由于原曲线没有奇点,且(1)也不是原曲线族中的某一支,故(1)为原曲线族的包线方程.

【3570】 设有长为 l 的线段,其两端点沿坐标轴滑动,求如此产生的线段族的包线.

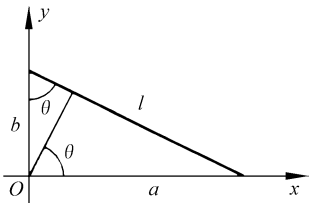

图 3570

解 如图 3570 所示,直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

但是

$$a=l\sin\theta, \qquad b=l\cos\theta,$$

所以,

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=l. \tag{1}$$

对 θ 求导数,得 $$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta=0 \quad 或 \quad \frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}. \tag{2}$$

由(1),(2)消去 θ,得 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$,同 3566 题的理由可知,它是包线方程.

【3573】 证明:平面曲线的法线的包线是此曲线的渐屈线.

证 这里我们仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线情形加以证明.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的法线方程为

$$(X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{1}$$

对 x 求导数,得

$$-1+y''(Y-y)-y'^2=0 \quad 或 \quad y''(Y-y)=1+y'^2. \tag{2}$$

由(1),(2)解得 $$\begin{cases} X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}, \end{cases}$$

此即 $y=f(x)$ 的渐屈线方程(参看第二章 §14 前言 3°).

同 3566 题的理由可知,它是平面曲线的法线的包线方程.

【3574】 研究下列曲线族的判别曲线的性质(c—参变数):

(1) 立方抛物线 $y=(x-c)^3$; (2) 半立方抛物线 $y^2=(x-c)^3$;

(3) 奈尔半立方抛物线 $y^3=(x-c)^2$; (4) 环索线 $(y-c)^2=x^2\dfrac{a-x}{a+x}$.

解 (1) $\begin{cases} f(x,y,c)=y-(x-c)^3=0, \\ f'_c(x,y,c)=3(x-c)^2=0. \end{cases}$

消去 c,得 $y=0$,它为判别曲线的方程.

原曲线无奇点,且 $y=0$ 也不是原曲线族的某一支,因此,它是包线.此包线与原曲线族在 $(c,0)$ 点相切,且 $(c,0)$ 点是曲线的拐点,即它又是原曲线族拐点的轨迹.如图 3574(1)所示.

(2) $\begin{cases} y^2-(x-c)^3=0, \\ 3(x-c)^2=0. \end{cases}$

消去 c,得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为$(c,0)$,因此它是奇点的轨迹.要看是否为包线,还要看在奇点的两支是否与判别曲线相切.事实上,两支分别为 $y_1=(x-c)^{\frac{3}{2}}$,$y_2=-(x-c)^{\frac{3}{2}}$,均有 $y'_1(c)=0$, $y'_2(c)=0$. 因此,$y=0$ 为原曲线族的包线.如图 3574(2)所示.

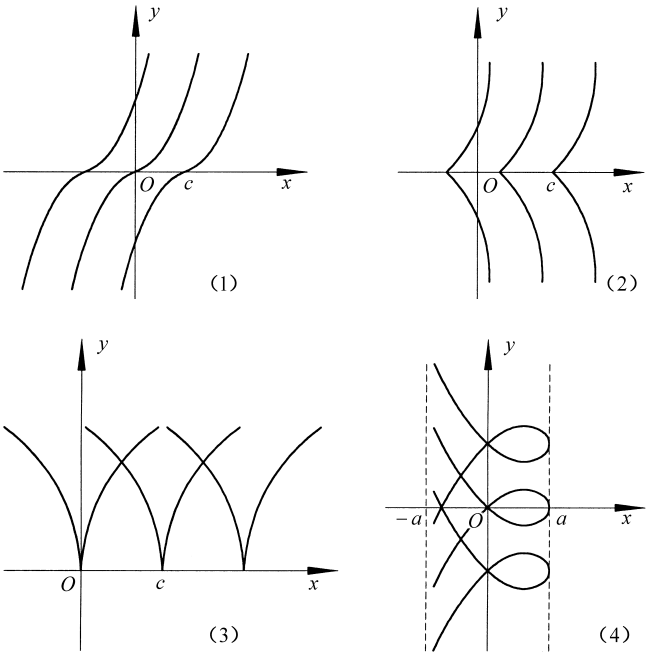

图 3574

$$(3)\begin{cases} y^3-(x-c)^2=0, \\ 2(x-c)=0. \end{cases}$$

消去 c,得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为$(c,0)$.由于 $y=(x-c)^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=c$ 处的导数为无穷,因此,它与 $y=0$ 不相切,从而,它无包线.奇点$(c,0)$为尖点.如图 3574(3)所示.

$$(4)\begin{cases} (y-c)^2-x^2\dfrac{a-x}{a+x}=0, \\ -2(y-c)=0. \end{cases}$$

消去 c,得 $x^2(a-x)=0$,即判别曲线为直线 $x=0$ 及 $x=a$.

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹,用§6.的方法可判别出它是二重点的轨迹.事实上,

$$A=f''_{xx}(0,c)=2,\qquad B=f''_{xy}(0,c)=0,$$
$$C=f''_{yy}(0,c)=-2,\quad AC-B^2=-4<0.$$

从而知 $x=0$ 不是包线.

但是,在 $x=a$ 处 $f'_x(a,y)\neq 0$ $(a\neq 0)$. 因此 $x=a$ 不是原曲线族奇点的轨迹,同时它又不是原曲线族的某一支.因此,$x=a$是原曲线族的包线,如图 3574(4)所示.

【3575】 求半径为 r,中心在圆周 $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=0$(t—参数,$R>r$)上的球族的包

面.

解 $\begin{cases}(X-R\cos t)^2+(Y-R\sin t)^2+Z^2=r^2, & (1)\\ 2R\sin t(X-R\cos t)-2R\cos t(Y-R\sin t)=0. & (2)\end{cases}$

(2)式化简得 $X\sin t-Y\cos t=0$.于是,

$$\tan t=\frac{Y}{X},\quad \cos t=\pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \sin t=\pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},\tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,得

$$(X^2+Y^2)\left(1\pm\frac{R}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)^2+Z^2=r^2.$$

当取“+”号时,由于 $R^2>r^2$,故它不代表任何点(不是虚的)的轨迹.

当取“-”号时,由于原曲面族无奇点,且 $(\sqrt{X^2+Y^2}-R)^2+Z^2=r^2$ 不是原曲面族的某一个,因此,它是原曲面族的包面(圆环).

【3577】 求椭球面族 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的包面,这些椭球的体积 V 是常数.

解 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda\left(abc-\frac{3V}{4\pi}\right),$$

则包面的方程由方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & (1)\\ abc=\frac{3V}{4\pi}, & (2)\\ F'_a=-\frac{2x^2}{a^3}+\lambda bc=0, & (3)\\ F'_b=-\frac{2y^2}{b^3}+\lambda ac=0, & (4)\\ F'_c=-\frac{2z^2}{c^3}+\lambda ab=0 & (5)\end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可解得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\lambda abc}{2}=\mu.\tag{6}$$

将(6)式代入(1)式,得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\mu=\frac{1}{3}$. 于是,

$$a=\sqrt{3}|x|,\quad b=\sqrt{3}|y|,\quad c=\sqrt{3}|z|.\tag{7}$$

将(7)式代入(2)式,得

$$|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}.\tag{8}$$

由于原曲面族无奇点,且曲面(8)也不是原曲面族中的某一个,故知曲面(8)为原曲面族的包面.

【3579】 有一发光点位于坐标原点.若 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$,求由球

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.

解 解法 1：

所求的阴影圆锥的表面，可看作是一个过原点的平面族的包面，此平面族的方程为 $ax+bx+cz=0$，其中 a,b,c 满足约束条件

$$\begin{cases} ax_0+by_0+cz_0=\pm R, \\ a^2+b^2+c^2=1. \end{cases}$$

引进辅助函数 $F(x,y,z,a,b,c)=ax+by+cz+\lambda(ax_0+by_0+cz_0\mp R)+\mu(a^2+b^2+c^2-1)$，则包面方程由方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, & (1)\\ a^2+b^2+c^2=1, & (2)\\ ax_0+by_0+cz_0=\pm R, & (3)\\ F'_a=x+\lambda x_0+2\mu a=0, & (4)\\ F'_b=y+\lambda y_0+2\mu b=0, & (5)\\ F'_c=z+\lambda z_0+2\mu c=0 & (6) \end{cases}$$

确定.

方程(4)、(5)、(6)要能解出 λ、μ，其中 a、b、c 必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ z & z_0 & c \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

记

$$r_1=\begin{vmatrix} y & y_0 \\ z & z_0 \end{vmatrix},\quad r_2=\begin{vmatrix} z & z_0 \\ x & x_0 \end{vmatrix},\quad r_3=\begin{vmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{vmatrix},$$

则上述关系式可记为

$$ar_1+br_2+cr_3=0. \tag{8}$$

由(1)、(3)、(8)可解得

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ \pm R & y_0 & z_0 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}=\frac{\pm R(zr_2-yr_3)}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}$$

或

$$a^2=\frac{R^2(zr_2-yr_3)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},\quad b^2=\frac{R^2(xr_3-zr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},\quad c^2=\frac{R^2(xr_2-yr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}. \tag{9}$$

将(9)式代入(2)式，即得

$$(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2=R^2[(yr_3-zr_2)^2+(xr_3-zr_1)^2+(xr_2-yr_1)^2]$$

$$=R^2[(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2)-(xr_1+yr_2+zr_3)^2]=R^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2).$$

(其中利用了 $xr_1+yr_2+zr_3=0$，这是不难验证的.)于是，有

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=R^2(x^2+y^2+z^2). \tag{10}$$

由于原平面族无奇点，且曲面(10)不是平面族的某一个，因此，曲面(10)即为包面.所求的

阴影圆锥为此锥面的内部,即满足不等式

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域(严格说来,还要除去球前部的区域).

解法 2:

如图 3579 所示,由三角形的面积公式$\frac{1}{2}|\vec{r}|\cdot|\vec{l}_0|\sin\alpha$得到

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|=|\vec{r}|\cdot|\vec{l}_0|\frac{R}{|\vec{l}_0|},$$

其中$\vec{l}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$,$\vec{r}=\{x,y,z\}$,而 $P(x,y,z)$为锥面上的任意一点.平方之,即得圆锥曲面的方程为

$$|\vec{r}\times\vec{l}_0|^2=R^2|\vec{r}|^2.$$

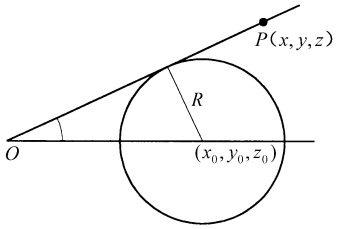

图 3579

于是,所求的阴影圆锥为适合不等式$|\vec{r}\times\vec{l}_0|^2\leqslant R^2|\vec{r}|^2$,即

$$\begin{vmatrix}x&y\\x_0&y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y&z\\y_0&z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z&x\\z_0&x_0\end{vmatrix}^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域(严格说来,还要除去球前部的区域).

§6. 台劳公式

1.台劳公式　若函数 $f(x,y)$在点(a,b)的某邻域内有直到 $n+1$ 阶(连 $n+1$ 阶的在内)的一切连续偏导函数,则在此邻域内下面的公式成立

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i\cdot f(a,b)+R_n(x,y),\tag{1}$$

其中

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}\cdot f[a+\theta_n(x-a),b+\theta_n(y-b)]$$

$$(0<\theta_n<1).$$

2.台劳级数　若函数 $f(x,y)$可以无穷次地微分及$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$,则此函数可表成幂级数的形状

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geqslant1}^{\infty}\frac{1}{i!j!}f_{x^iy^j}^{(i+j)}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j\tag{2}$$

特别情形,当 $a=b=0$ 时,公式(1)和(2)分别名为马克老林公式和马克老林级数.

对于多于两个变量的函数有类似的公式.

3.平面曲线的奇点　设在某点 $M_0(x_0,y_0)$可微分两次的曲线 $F(x,y)=0$ 适合下列条件

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_x(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)=0$$

及数

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=F''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=F''_{yy}(x_0,y_0)$$

不全为零.于是,若

(1) $AC-B^2>0$,则 M_0—孤立点;

(2) $AC-B^2<0$,则 M_0—二重点(节);

(3) $AC-B^2=0$,则 M_0—上升点或孤立点.

在 $A=B=C=0$ 的情形,奇点的种类可能更复杂.至于不属于光滑的曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线,奇点还可能有更复杂的类型:中断的点,角点等等.

【3584】 设:

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz,$$

按数 h,k 和 l 的正整数幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2(Ax+Dy+Ez)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2D$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(By+Dx+Fz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2B$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2F$,

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=2(Cz+Ex+Fy)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2C$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=2E$.

所有三阶偏导函数均为零,因此,$R_2(x,y)=0$.于是,按台劳公式即得

$$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^i f(x,y,z)$$

$$=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(By+Dx+Fz)+l(Cz+Ex+Fy)]$$

$$+[Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ehl+2Fkl]$$

$$=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(Dx+By+Fz)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l).$$

【3590】 已知中心在点 $P(x,y)$半径为 ρ的圆周,设

$f(P)=f(x,y)$ 及 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$为已知圆周之内接正三角形的顶点,并且

$$x_1=x+\rho,\qquad y_1=y.$$

依 ρ的正整数幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

展开准确到 ρ^2.

解 如图 3590 所示.$\triangle P_1P_2P_3$ 之三顶点分别为

$$P_1(x+\rho,y),$$

$$P_2\left(x-\frac{\rho}{2},y+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right),$$

$$P_3\left(x-\frac{\rho}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right).$$

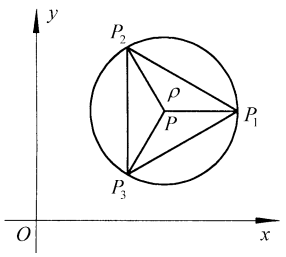

图 3590

于是,

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

$$\approx\frac{1}{3}\left\{\left[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\right.$$

$$\left.+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right.$$

$$+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\Bigg\}$$

$$=f(P)+\frac{\rho^2}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right].$$

【3591】 依 h 与 k 的乘幂把函数

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)$$

展开.

解 $$\Delta_{xy}f(x,y)=\left[f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]$$

$$-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right]-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]+f(x,y)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right].$$

将下列函数展开成马克老林级数：

【3594】 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

解 $$f(x,y)=\ln[1+(x+y)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+y)^k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{m!(k-m)!}x^m y^{k-m} \tag{1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^m y^n. \tag{2}$$

当 $m=0$，$n=0$ 时，分子出现 $(-1)!$，规定该项为零. 下面讨论一下收敛区间. (1)式成立，只要求 $|x+y|<1$ 即可. 但从(1)式到(2)式，必须要求(1)式绝对收敛，这样才能将各项重新排列. 不难看出(1)式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1-(|x|+|y|)]$ 的展开式，它的收敛要求 $|x|+|y|<1$. 这就是 $f(x,y)$ 的展开式的收敛区域.

【3601】 写出函数

$$f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}\mathrm{d}t$$

的马克劳林级数前面不为零的三项.

解 $$(1+x)^{t^2y}=\mathrm{e}^{t^2y\ln(1+x)}\approx 1+t^2y\ln(1+x)+\frac{1}{2!}[t^2y\ln(1+x)]^2\approx 1+t^2y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y.$$

于是，

$$f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y\right)\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$$

【3604】 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数，当 $x=1$ 和 $y=1$ 时它的值为 $z=1$.

写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解 对原方程微分一次,得

$$3z^2\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0. \tag{1}$$

再微分一次,得

$$(3z^2-2x)\mathrm{d}^2z+6z\mathrm{d}z^2-4\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0. \tag{2}$$

以 $x=1$, $y=1$, $z=1$ 代入(1),(2)两式,得

$$\mathrm{d}z=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

$$\mathrm{d}^2z=(4\mathrm{d}x-6\mathrm{d}z)\mathrm{d}z=(4\mathrm{d}x-12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}y)(2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=-16\mathrm{d}x^2+20\mathrm{d}x\mathrm{d}y-6\mathrm{d}y^2,$$

$$\vdots$$

于是,可求得在 $x=1$, $y=1$ 处,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-1;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6;$$

$$\vdots$$

从而,有

$$z=1+2(x-1)-(y-1)-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\cdots$$

研究下列曲线的奇点的种类并大略地绘出这些曲线:

【3605】 $y^2=ax^2+x^3$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=ax^2+x^3-y^2=0,\\ F'_x(x,y)=2ax+3x^2=0,\\ F'_y(x,y)=-2y=0 \end{cases}$$

得 $x=0$, $y=0$,故点(0,0)为奇点.

其次,由于

$$A=F''_{xx}(0,0)=2a,\qquad B=F''_{xy}(0,0)=0,$$

$$C=F''_{yy}(0,0)=-2,\qquad AC-B^2=-4a,$$

故当 $a>0$ 时,点(0,0)为二重点;当 $a<0$ 时,点(0,0)为孤立点;当 $a=0$ 时,原方程化为 $y^2=x^3$,由 3574(2)的讨论知,点(0,0)为尖点.

如图 3605 所示,点 A_1 为$(-a,0)$

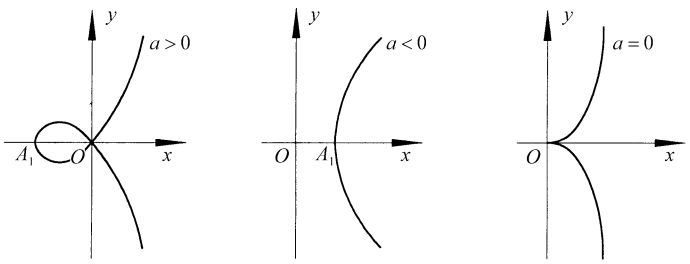

图 3605

【3612】 研究参变量 a,b,c ($a\leqslant b\leqslant c$)的值与曲线 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$的形状之关系.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-(x-a)(x-b)(x-c)=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=-(x-a)(x-b)-(x-a)(x-c)-(x-b)(x-c)=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $y=0$,代入(1),联立(1),(2)求解.

当 $a<b<c$ 时,(1),(2)无解.因此无奇点,此时曲线如图 3612(1)所示;

当 $a=b<c$ 时,显然(1),(2)有解 $x=a$, $y=0$,由于 $A=F''_{xx}(a,0)=-2(a-c)$, $B=F''_{xy}(a,0)=0$, $C=F''_{yy}(a,0)=2$,且 $AC-B^2=-4(a-c)>0$,故点 $A_1(a,0)$ 为孤立点,如图 3612(2)所示;

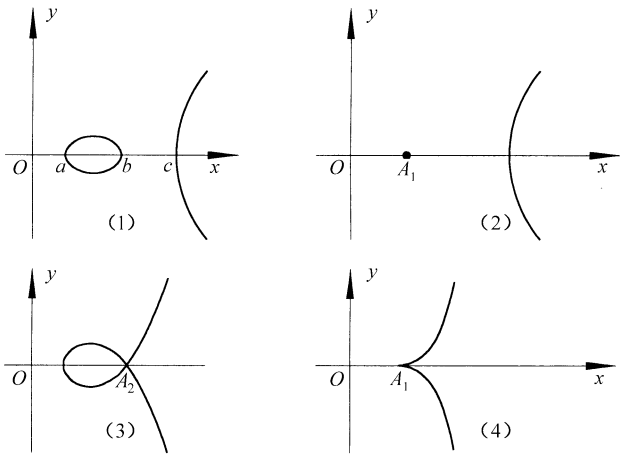

图 3612

当 $a<b=c$ 时,显然(1),(2)有解 $x=b$, $y=0$.由于 $A=F''_{xx}(b,0)=-2(c-a)$, $B=F''_{xy}(b,0)=0$, $C=F''_{yy}(b,0)=2$,且 $AC-B^2=-4(c-a)<0$,故点 $A_2(b,0)$ 为二重点,如图 3612(3)所示;

当 $a=b=c$ 时,显然有解 $x=a$, $y=0$.由于 $AC-B^2=0$,此时原方程为 $y^2=(x-a)^3$,且由 3574 题(2)的结果知,点 $A_1(a,0)$ 为尖点,如图 3612(4)所示.

研究超越曲线的奇点:

【3614】 $y^2=1-e^{-x^3}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=y^2-1+e^{-x^3}=0,\\ F'_x(x,y)=-3x^2e^{-x^3}=0,\\ F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$, $y=0$,故点(0,0)为奇点.

又 $A=F''_{xx}(0,0)=-0$, $B=F''_{xy}(0,0)=0$, $C=F''_{yy}(0,0)=2$,且 $AC-B^2=0$,故对点(0,0)还需再讨论一下.原式可解为 $x=-\sqrt[3]{\ln(1-y^2)}>0$,在(0,0)附近,第一及第四象限各有原曲线的一支,因此,点(0,0)为尖点.

【3616】 $y=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

解 在 $x=0$ 处,由于 $\lim\limits_{x\to+0}y=\lim\limits_{x\to-0}y=0$,故 $x=0$ 为"可移去"的第一类不连续点,补充函数在该点的值为零后,即得知函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续.由于 $F'_y(x,y)=1\neq0$,故无奇点.当 $x\neq0$ 时,由于

$$y'=\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\lim_{x\to+0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1+z)\mathrm{e}^z+1}{(1+\mathrm{e}^z)^2}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^z(z+2)}{2\mathrm{e}^z(1+\mathrm{e}^z)}$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{z+2}{2(1+\mathrm{e}^z)}=0,$$

$$\lim_{x\to-0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1-z)\mathrm{e}^{-z}+1}{(1+\mathrm{e}^{-z})^2}=1,$$

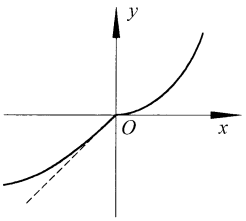

图 3616

故点(0,0)为角点.如图 3616 所示.

§7. 多变量函数的极值

1.极值的定义 若函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 于点 P_0 的邻域内有定义并且当 $0<\rho(P_0,P)<\delta$ 时,$f(P_0)>f(P)$ 或 $f(P_0)<f(P)$,则说,函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值(相应地为极大值或极小值).*

2.极值的必要条件 可微分的函数 $f(P)$ 仅在静止点 P_0,即是说在 $\mathrm{d}f(P_0)=0$ 的点 P_0 能达到极值.所以,函数 $f(P)$ 的极值点应当满足方程组 $f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0$ $(i=1,\cdots,n)$.

3.极值的充分条件 函数 $f(P)$ 于点 P_0 有:

(1) 极大值,若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$, $\mathrm{d}^2f(P_0)<0$,

(2) 极小值,若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$, $\mathrm{d}^2f(P_0)>0$.

研究二次微分 $\mathrm{d}^2f(P_0)$ 的符号可用化相应的二次式成典式的方法来进行.

特别是,对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x,y)$ 在静止点 (x_0,y_0)[$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0$],$D=AC-B^2\neq0$[其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$]成立时,有:

(1) 极小值,若 $D>0$, $A>0$ ($C>0$);

(2) 极大值,若 $D>0$, $A<0$ ($C<0$);

(3) 极值不存在,若 $D<0$.

---

* 作者注:若将不等式 $f(P_0)>f(P)$[或 $f(P_0)<f(P)$]换为不等式 $f(P_0)\geqslant f(P)$[或 $f(P_0)\leqslant f(P)$],则称 $f(P)$ 在点 P_0 有弱极大值(或弱极小值).

4.条件极值　在关系式 $\varphi_i(P)=0$ $(i=1,\cdots,m;\ m<n)$存在的条件下，求函数 $f(P_0)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的极值的问题，可归结为对于拉格朗日函数

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P)$$

[其中 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$为常数因子]求普通极值的问题.关于条件极值的存在和性质的问题，在最简单的情况，根据研究函数 $L(P)$于静止点 P_0 的二次微分 $\mathrm{d}^2L(P_0)$的符号，并在变量 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 由下面的关系式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j=0\quad(i=1,\cdots,m)$$

所限制的条件下，得到解决.

5.绝对极值　于有界且封闭的区域内可微分的函数 $f(P)$在此域内或于静止点，或于域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多变量函数的极值：

【3625】 $z=x^2y^3(6-x-y)$.

解　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy^3(12-3x-2y)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2(18-3x-4y)=0\end{cases}$$

得静止点 $P_0(2,3)$.并且直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 上的点都是静止点.

不难断定在 P_0 点，$A=-162$，$B=-108$，$C=-144$，$AC-B^2>0$，故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0)=108$.

在直线 $x=0$ 及 $y=0$ 上的各点均有 $z=0$.先分析直线 $y=0$的情况.在直线上 $x\neq0$ 及 $x\neq6$ 处，$x^2(6-x-y)\neq0$，在确定点的足够小的邻域内也不变号，但是 y^3 可正可负，因此函数 z 变号，即在上述情况下没有极值.当 $x=0$ 及 $x=6$ 类似地可判断也无极值.

其次，分析直线 $x=0$ 的情况.在直线上 $y=0$ 及 $y=6$ 的点的情况类似地可判断无极值，但当 $0<y<6$ 时，$y^3(6-x-y)>0$，且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号.因此，在足够小的邻域内，$z=x^2y^3(6-x-y)\geqslant0$ 也成立，但邻域内任意近处总有 $z=0$ 的点.于是，对于 $x=0$，$0<y<6$的点函数 z 取得弱极小值 $z=0$.同法可判定，对于直线 $x=0$ 上 $y<0$ 及 $y>6$ 的各点处，函数 z 取得弱极大值 $z=0$.

【3627】 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

解　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$

得静止点 $P_0(0,0)$，$P_1(1,1)$及 $P_2(-1,-1)$.

在点 P_0 附近，当 $x=y$ 且足够小时，有 $z=2x^4-4x^2<0$；但当 $x=-y$ 时，$z=2x^4>0$，因此，在点 P_0 无极值.

不难断定，在点 P_1 及 P_2 均有 $A=10$，$B=-2$，$C=10$ 及 $AC-B^2=96>0$，故函数 z 在点

P_1 及 P_2 取得极小值 $z=-2$.

【3629】 $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0)$.

解 考虑函数 $u=z^2=x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 显然 z 的极值均为 u 的极值;且 u 在点(x,y)取得的极值不为零时,z 也在点(x,y)取得极值;u 在点(x,y)取得的极值为零时,情况复杂一些,但对 z 也不难讨论.

解方程组
$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{2}{a^2}x^3y^2=0,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=2x^2y\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{2}{b^2}x^2y^3=0\end{cases}$$

得静止点

$$P_0(0,0),\ P_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right),\ P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right),\ P_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\text{ 及 }P_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right).$$

由于 z 在点 P_0 附近变号,所以 $z(P_0)$不是极值.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^2\left(1-\frac{6x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{6y^2}{b^2}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right).$$

在 P_1,P_2,P_3,P_4 各点,得

$$A=-\frac{8}{9}b^2,\quad B=\pm\frac{4}{9}ab,\quad C=-\frac{8}{9}a^2,\quad AC-B^2=\left(\frac{64}{81}-\frac{16}{81}\right)a^2b^2>0,$$

故函数 u 取得极大值.于是,相应地函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极大值$z(P_1)=z(P_2)=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$;而在点 P_3 及 P_4 取得极小值$z(P_3)=z(P_4)=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

【3640】 $z=x+y+4\sin x\sin y$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=1+4\cos x\sin y=0, & (1)\\ \frac{\partial z}{\partial y}=1+4\sin x\cos y=0. & (2)\end{cases}$$

(2)−(1)得 $\sin(x-y)=0$,故 $x-y=n\pi$;

(2)+(1)得 $\sin(x+y)=\frac{1}{2}$,故 $x+y=m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}$.

于是,得静止点 $P_0(x_0,y_0)$,其中

$$\begin{cases}x_0=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m+n)\frac{\pi}{2},\\ y_0=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m-n)\frac{\pi}{2}.\end{cases}\quad(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在点 P_0,有

$$\begin{aligned}AC-B^2&=(-4\sin x_0\sin y_0)(-4\sin x_0\sin y_0)-(4\cos x_0\cos y_0)^2\\&=16(\sin x_0\sin y_0-\cos x_0\cos y_0)(\sin x_0\sin y_0+\cos x_0\cos y_0)\\&=-16\cos(x_0+y_0)\cos(x_0-y_0)\end{aligned}$$

$$=-16\cos\left[m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right]\cos m\pi=-16(-1)^{m+n}\cos\frac{\pi}{6}.$$

当 m 及 n 有相同的奇偶性时，$m+n$ 为偶数，$AC-B^2<0$ 故无极值，当 m 及 n 有不同的奇偶性时，$m+n$ 为奇数，$AC-B^2>0$，故有极值，看 A 的符号决定取得极大值还是极小值.由于

$$A=-4\sin x_0\sin y_0=2[\cos(x_0+y_0)-\cos(x_0-y_0)]=2\left\{(-1)^m\cos\frac{\pi}{6}-(-1)^n\right\},$$

故当 m 为奇数及 n 为偶数时，$A<0$，取得极大值；当 m 为偶数及 n 为奇数时，$A>0$，取得极小值.极值为

$$z(x_0,y_0)=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2(-1)^n.$$

【3643】 $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

解 $\mathrm{d}u=(3x^2+12y)\mathrm{d}x+(2y+12x)\mathrm{d}y+(2z+2)\mathrm{d}z$. 令

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0,$$

得静止点 $P_0(0,0,-1)$及 $P_1(24,-144,-1)$. $\mathrm{d}^2u=6x\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.在点 P_0，有

$$\mathrm{d}^2u=2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}y(\mathrm{d}y+12\mathrm{d}x),$$

当 $\mathrm{d}z=0$，$\mathrm{d}y>0$ 及 $\mathrm{d}y+12\mathrm{d}x<0$ 时，$\mathrm{d}^2u<0$；而当 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}z$ 均大于零时，$\mathrm{d}^2u>0$.因此 d^2u 的符号不定，故无极值.

在点 P_1，有

$$\mathrm{d}^2u=144\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(12\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2>0$$
$$(\text{当 } \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\neq0 \text{ 时}),$$

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1)=-6913$.

【3647】 $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi;\ 0\leqslant z\leqslant\pi)$.

解 $\mathrm{d}u=[\cos x-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}x+[\cos y-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}y$
$+[\cos z-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}z$.

令$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}\cos x-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos y-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos z-\cos(x+y+z)=0.\end{cases}$$

注意到 $0\leqslant x\leqslant\pi$；$0\leqslant y\leqslant\pi$；$0\leqslant z\leqslant\pi$，解之得静止点 $P_0(0,0,0)$，$P_1(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$及 $P_2(\pi,\pi,\pi)$.

在点 P_1，有

$$\mathrm{d}^2u=-\sin x\mathrm{d}x^2-\sin y\mathrm{d}y^2-\sin z\mathrm{d}z^2+\sin(x+y+z)[\mathrm{d}(x+y+z)]^2$$
$$=-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2-(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2<0,$$

故函数 u 在点 P_1 取得极大值 $u(P_1)=4$.

由于 P_0 与 P_2 是所考虑区域 $0\leqslant x\leqslant\pi$；$0\leqslant y\leqslant\pi$；$0\leqslant z\leqslant\pi$ 的边界点，故函数在点 P_0 与 P_2 不达极值(根据极值定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义).但如果放宽要求，对于边界点，仅将其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值相比较，则在边界点也可引入达极值和达弱极值的概念.今对于点 P_0 及 P_2 的邻域中且属于上述区域的点 (x,y,z)，显然有 $\sin x\geqslant0$，$\sin y\geqslant0$，$\sin z\geqslant0$.又

$$\sin(x+y+z)=\sin x\cos y\cos z-\sin x\sin y\sin z+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z$$

$$\leqslant \sin x+\sin y+\sin z-\sin x\sin y\sin z,$$

故 $u\geqslant 0$.而当 $x=y=0$ 时或 $x=y=\pi$ 时都恒有 $u=0$.因此,函数 u 在点 P_0 及 P_2 都达到弱极小值 $u(P_0)=u(P_2)=0$(按上述边界点达极值的意义).

【3650】 惠更斯问题.在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得分数

$$u=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值是最大.

解 记 $w=\dfrac{1}{u}=(a+x_1)\left(1+\dfrac{x_2}{x_1}\right)\left(1+\dfrac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{b}{x_n}\right)$.

设 $y_1=\dfrac{x_2}{x_1},y_2=\dfrac{x_3}{x_2},\cdots,y_n=\dfrac{b}{x_n}$,并记 $A=y_1y_2\cdots y_n$,则有

$$x_1=\frac{b}{y_1y_2\cdots y_n}=\frac{b}{A},$$

$$w=\left(a+\frac{b}{A}\right)(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

又记 $m=a+\dfrac{b}{A}$,则有

$$\mathrm{d}w=\sum_{k=1}^{n}\frac{w}{1+y_k}\mathrm{d}y_k-\frac{wb}{mA}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}=w\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}.$$

令 $\dfrac{\partial w}{\partial y_k}=0$ 得方程组 $\dfrac{y_k}{1+y_k}=\dfrac{b}{mA}$ $(k=1,2,\cdots,n)$.解之得静止点 $P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点 P_0,有

$$\mathrm{d}^2w\Big|_{P=P_0}=w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}\Big|_{P=P_0}$$

$$=w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\right)\Big|_{P=P_0}-w\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\left[\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\dfrac{a}{b}A}\right)\right]\Big|_{P=P_0}$$

$$=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2+\frac{w(P_0)}{y_0\left(1+\dfrac{a}{b}A\right)^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{d}y_k\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aA}{by_k}\mathrm{d}y_k\right)\right]_{P=P_0}$$

$$=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k\right)^2\right]>0\quad(\text{当}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2\neq 0\text{时}),$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值.从而,函数 u 在

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b}{A}=\dfrac{b}{y_0^n}=\dfrac{b}{a}\,ay_0^{-n}=ay_0^{n+1}\,y_0^{-n}=ay_0,\\ x_2=x_1\,y_1=ay_0^2,\\ x_3=x_2\,y_2=ay_0^3,\\ \quad\vdots\\ x_n=\dfrac{b}{y_n}=\dfrac{b}{a}ay_0^{-1}=ay_0^{n+1}\,y_0^{-1}=ay_0^n,\end{cases}$$

即数 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$,构成有公比 $y_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的几何级数时,其值最大,并且 u 的最大值为

$$u=\frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}}=\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)}$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值:

【3651】 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

解 微分得

$$(x-1)\mathrm{d}x+(y+1)\mathrm{d}y+(z-2)\mathrm{d}z=0.$$

显见,当 $x=1, y=-1$,时,$\mathrm{d}z=0$.代入原方程可解得 $z=6$ 及 $z=-2$.又 $z=2$ 时为不可微的.为判断极值,求二阶微分,得

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+(z-2)\mathrm{d}^2z+\mathrm{d}z^2=0.$$

以 $x=1$, $y=-1$, $z=6$,代入,并考虑 $\mathrm{d}z=0$,得

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{4}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)<0 \quad (\text{当 } \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq 0 \text{ 时}),$$

故当 $x=1, y=-1$ 时,隐函数 z 取得极大值 $z=6$.同法可判断得:当 $x=1$, $y=-1$ 时,隐函数 z 也取得极小值,且其值为 $z=-2$.

不难看出,$z=2$ 是球的切平面平行于 Oz 轴的地方,因此,函数 z 不取得极值.

求下列函数的条件极值点:

【3656】 $z=x^2+y^2$, 若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

解 设 $F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+\dfrac{1}{a}\lambda=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+\dfrac{1}{b}\lambda=0,\\[2mm] \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\end{cases}$$

可得

$$\lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},\quad x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},\quad y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当 $x\to\infty$, $y\to\infty$时,$z\to+\infty$,故函数 z 必在有限处取得最小值.这里可疑点仅一个.因此,当 $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$时,函数 z 取得极小值 $z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

注 如果用二阶微分判别,则易从 $\mathrm{d}^2z=2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)>0$(不论 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 之间有何约束条件,此式恒成立)可知 $z=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 为极小值.

【3660】 $u=x^my^nz^p$,若 $x+y+z=a(m>0, n>0, p>0, a>0)$*.

---

* 作者注:应加上条件 $x>0, y>0, z>0$.

解 设 $w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z$.

$$F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{m}{x}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{y}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{p}{z}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\[2mm]x+y+z=a\end{cases}$$

可得 $$x=\frac{am}{m+n+p},\quad y=\frac{an}{m+n+p},\quad z=\frac{ap}{m+n+p}.$$

相应地，$u=\dfrac{a^{(m+n+p)}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分，边界由三条直线

$$\begin{cases}x+y=a,\\z=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y+z=a,\\x=0,\end{cases}\quad\begin{cases}z+x=a,\\y=0\end{cases}$$

组成.当点 P 趋于边界上的点时，显然有 $w\to-\infty$.因此，函数 w 在区域内取得最大值.由于可疑点仅一个，故当 $x=\dfrac{am}{m+n+p}$，$y=\dfrac{an}{m+n+p}$，$z=\dfrac{ap}{m+n+p}$ 时，函数 u 取得最大值 $u=\dfrac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$，因而也是极大值.

【3667】 $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，若 $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$

$(a_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda\left(\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}-1\right)$.

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\dfrac{\lambda}{a_i}=0\ (i=1,2,\cdots,n),\\[2mm]\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}=1\end{cases}$$

可得静止点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}^2F=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i^2>0$（它不受约束条件的限制），故当 $x_i=\dfrac{1}{a_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ 时，函数 u 取得极小值

$$\begin{aligned}u&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2\\&=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

【3671】 若 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$,求二次型 $u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 的极值.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)$.解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}=(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, & (1)\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2}=a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, & (2)\\ \vdots & \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0, & (n)\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1. & (n+1) \end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解,必须矩阵 (a_{ij}) 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 有解,其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵,E 为单位矩阵.由线性代数中关于欧氏空间的理论知,此特征方程必有 n 个实根,即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 满足 $|A-\lambda E|=0$.对于任一根 λ_k,代入方程(1)~(n),可求得 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个解空间,解空间的维数,等于 λ_k 的重数.解空间中的单位元素即方程组(1)~$(n+1)$ 的根.当 λ_k 是单重根时,解空间是一维的,单位元素只有两个.当 λ_k 是多重根时,对应 λ_k 的单位元素就有无穷多个了.

对于 λ_k 的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,显然满足方程组(1)~$(n+1)$.因此,有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda_k x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,从而得

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n} x_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_k x_i^2=\lambda_k\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\lambda_k.$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 上连续,故必取得最大值和最小值.于是,对应于 λ_1 和 λ_n 的解,分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n,因而也是 u 的极大值和极小值,或是 u 的弱极大值和弱极小值,视 λ_1 和 λ_n 的重数而定(多重时为弱极值).由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法,可证:对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k,二次型不取得极值.

【3673】 证明:和尔窦不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\Big)^{\frac{1}{k}}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\Big)^{\frac{1}{k}}$$

$$(a_i\geqslant 0,\ x_i\geqslant 0;\ i=1,2,\cdots,n;\ k>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1).$$

证 我们首先证明函数

$$u=\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\Big)^{\frac{1}{k}}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\Big)^{\frac{1}{k}}$$

在条件 $\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=A$ $(A>0)$ 下的最小值是 A.为此,对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,显然有 $(a_1^k)^{\frac{1}{k}}(x_1^{k'})^{\frac{1}{k'}}=a_1x_1=A$.

设当 $n=m$ 时,命题为真.故对任意 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ $(a_i\geqslant 0)$,当 $\sum_{i=1}^{m} a_ix_i=A$ $(x_1\geqslant 0,\cdots,x_m\geqslant 0)$ 时,必有

$$A\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^k\Big)^{\frac{1}{k}}\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'}\Big)^{\frac{1}{k}}.$$

我们证明当 $n=m+1$ 时命题也真.设 $\sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A$, $u=\alpha^{\frac{1}{k}}\left[\sum\limits_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k}}$,其中 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i^k$,求 u 的最小值.令

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) = u(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) - \lambda\left[\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i - A\right].$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \dfrac{\alpha^{\frac{1}{k}}}{k'}\left[\sum\limits_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}-1}(k' x_i^{k'-1}) - \lambda a_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A \qquad (i=1,2,\cdots,m+1), \end{cases}$$

可得

$$\frac{x^{k'-1}}{a_i} = \frac{\lambda}{\alpha^{\frac{1}{k}}}\left[\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k}} = \mu^{k'-1} \quad (i=1,2,\cdots,m+1).$$

(这里引入了记号 μ),即 $x_i=(a_i\mu^{k'-1})^{\frac{1}{k-1}} = a_i^{\frac{1}{k-1}}\mu = \mu a_i^{k-1}$,从而有

$$\mu\sum_{i=1}^{m+1} a_i\, a_i^{k-1} = \mu\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k = \mu\alpha = A, \qquad \mu = \frac{A}{\alpha}.$$

于是,解得满足极值必要条件的惟一解

$$x_i^0 = \frac{A}{\alpha} a_i^{k-1} \quad (i=1,2,\cdots,m+1).$$

对应的函数值为

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m+1}^0) \\ &= \alpha^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{A}{\alpha}\, a_i^{k-1}\right)^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}} = \alpha^{\frac{1}{k}}\frac{A}{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m+1} a_i^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}} = \alpha^{\frac{1}{k}-1} A\left[\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \\ &= A\alpha^{\frac{1}{k}-1}\alpha^{\frac{1}{k}} = A. \end{aligned}$$

所研究的区域 $\sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i\, x_i = A$, $x_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,m+1)$是 $m+1$ 维空间中一个 m 维平面在第一卦限的部分,其边界由 $m+1$ 个 $m-1$ 维平面(之一部分)所组成:$x_i=0$, $\sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j\, x_j = A$ $(a_j \geqslant 0, x_j \geqslant 0;\ i=1,2,\cdots,m+1)$在这些边界面上,求

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}) &= u(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_{m+1}) \\ &= \alpha^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} x_j^{k'} + \sum_{j=i+1}^{m+1} x_j^{k'}\right]^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

的最小值变为求 m 个变量的最小值.以估计 $x_{m+1}=0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i = A$ 的最小值为例.根据数学归纳法假设,注意到 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i^k \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^k$,即有

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0) &= \alpha^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k}} \\ &\geqslant \left[\sum_{i=1}^{m} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m} x_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k}} \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = A. \end{aligned}$$

因此,u 在边界面上的最小值不小于 A.由此可知,u 在区域上的最小值为 $u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m+1}^0) =$

A,故命题当 $n=m+1$ 时为真.于是,由数学归纳法可知,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant A, \tag{1}$$

当 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$, $x_i \geqslant 0$ ($i=1,2,\cdots,n$)时.

下面我们证明和尔窦不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (a_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0) \tag{2}$$

成立.事实上,若 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$,则(2)式显然成立;若 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > 0$,令 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$,则 $A>0$.于是,根据不等式(1)知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i ,$$

故不等式(2)成立.证毕.

注 和尔窦(Holder)不等式是一个重要而常用的不等式,而且还可推广到一般的形式,证明方法也很多.例如,可参看 G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya 合著的名著“Inequalities” (Second Edition, 1952), ChapterⅡ, 2.7~2.8.

【3674】 对于 n 阶行列式 $A=|a_{ij}|$,证明:哈达马不等式

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) .$$

证 为区别起见,以下用 A 表矩阵(a_{ij}),$|A|$ 表行列式 $|a_{ij}|$.考虑函数 $u=|A|=|a_{ij}|$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i$ ($i=1,2,\cdots,n$)下的极值问题.其中 $S_i>0$ ($i=1,2,\cdots,n$).

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 元点集是有界闭集,故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值.下面我们求函数 u 满足条件极值的必要条件.设

$$F = u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 - S_i\right) .$$

由于函数 u 是多项式.当按第 i 行展开时,有

$$u=|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} ,$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i a_{ij} = 0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

得 $a_{ij}=\frac{A_{ij}}{2\lambda_i}$.当 $i\neq k$ 时,有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij} a_{kj}}{2\lambda_i} = \frac{1}{2\lambda_i}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_{kj} = 0,$$

故当函数 u 满足极值的必要条件时,行列式不同的两行所对应的向量必直交.若以 A' 表示 A 的转置矩阵,则由行列式的乘法得

$$u^2=|A'|\cdot|A|=\begin{vmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & S_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & S_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} S_i .$$

因此,函数 u 满足极值的必要条件时,必有

$$u=\pm\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i} .$$

显然由于函数 u 在条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 下不恒为常数,故

$$u_{\max}=\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i},\quad u_{\min}=-\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i} .$$

从而,

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n} S_i,\quad \text{当}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=S_i\ (i=1,2,\cdots,n)\text{时}. \tag{1}$$

下面我们证明

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big) . \tag{2}$$

若至少有一个 i,使 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=0$,则 $a_{ij}=0\ (j=1,2,\cdots,n)$. 从而,$|A|=0$. 于是,不等式(2)显然成立.

若对一切 $i\ (i=1,2,\cdots,n)$,都有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\neq 0$. 令 $S_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$,则 $S_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 于是,根据不等式(1)即得

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n} S_i=\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big) ,$$

故不等式(2)成立. 证毕.

求下列函数在指定域内的上确界(sup)和下确界(inf):

【3675】 $z=x-2y-3$,若 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x+y\leqslant 1$.

解 以 D 表区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x+y\leqslant 1$,它是一个有界闭区域(为一闭三角形),故连续函数 z 在其上必有最大值和最小值. 由于 z 是 x,y 的线性函数,故不存在静止点,因此,最大值与最小值都在 D 的边界上达到. D 的边界为三条直线段:$y=0\ (0\leqslant x\leqslant 1)$,$x=0\ (0\leqslant y\leqslant 1)$,$x+y=1\ (0\leqslant x\leqslant 1)$;在其上 z 分别变成一元函数:$z=x-3\ (0\leqslant x\leqslant 1)$,$z=-2y-3\ (0\leqslant y\leqslant 1)$,$z=3x-5\ (0\leqslant x\leqslant 1)$. 由于这些函数都是一元线性函数,故也无静止点,其最大值与最小值必在此三线段的端点(即点(0,0),点(1,0),点(0,1))达到. 由此可知,z 在 D 上的最大值与最小值必在此三点(0,0),(1,0),(0,1)中达到.

由于 $z(0,0)=-3$, $z(1,0)=-2$, $z(0,1)=-5$, 故

$$\sup z=-2\qquad \inf z=-5 .$$

【3683】 分解已知正数 a 为 n 个正的因数,使得它们的倒数的和为最小.

解 按题设,我们应求函数 $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ 在条件 $a=\prod_{i=1}^{n} x_i$ 或 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ (a>0, x_i>0)$ 下

的极值.设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a)$.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=-\dfrac{1}{x_i^2}+\dfrac{\lambda}{x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\end{cases}$$

可得 $x_i=\dfrac{1}{\lambda}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.从而解得

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=a^{\frac{1}{n}},\quad u(x_1^2,x_2^0,\cdots,x_n^0)=na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$趋于边界时,至少有一个 $x_i\to0$,即$\dfrac{1}{x_i}\to+\infty$,而 $u>\dfrac{1}{x_i}$,故 $u\to+\infty$.因此,函数 u必在区域内部取得最小值.于是,将正数 a分为 n 个相等的正的因数 $a^{\frac{1}{n}}$时,其倒数和 $na^{-\frac{1}{n}}$最小.

【3687】 已知容积为 V 的开顶长方浴盆,当其尺寸怎样时,有最小的表面积?

解 设浴盆长、宽、高分别为 x、y、h,则考虑函数 $S=2(x+y)h+xy$在条件 $V=xyh(x>0,y>0,h>0)$下的极值.

设

$$F(x,y,h)=S-\lambda(xyh-V).$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2h-\lambda yh=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2h-\lambda xh=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial h}=2(x+y)-\lambda xy=0, & (3)\\ xyh=V.\end{cases}$$

(1),(2),(3)可改写为

$$\frac{1}{h}+\frac{2}{y}=\lambda=\frac{1}{h}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y},$$

故有

$$x_0=y_0=2h_0=\sqrt[3]{2V},\quad h_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定,一定在某一处达到最小.因此,当长宽均为 $\sqrt[3]{2V}$,高为 $\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$时,浴盆的表面积最小,且最小表面积为 $S=3\sqrt[3]{4V^2}$.

【3696】 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 此直角平行六面体的对称中心为原点.设其一个顶点为(x,y,z),则按题意,我们应考虑函数 $V=8xyz$在条件$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(x>0,y>0,z>0)$下的极值.为计算简单计,略去常数

8.设 $F=xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$.解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda\frac{x}{a^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda\frac{y}{b^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda\frac{z}{c^2}=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$,这时 $V=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc>0$.

现在讨论边界情况.当 $x\to a-0$, $y\to b-0$, $z\to c-0$ 中有任一个成立时,则另两个变量必皆趋于零;又若 x,y,z 中有一个趋于零时,则体积 V 趋于零.总之,在边界上,恒有 $V\to 0$.于是,具有最大体积的直角平行六面体的长、宽、高分别为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

【3701】 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

解 设 (x_1,y_1) 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点,(x_2,y_2) 为直线 $x-y-2=0$ 上的任一点.按题意,我们应求函数

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

在条件 $y_1-x_1^2=0$ 及 $x_2-y_2-1=0$ 下的极值.显然,由几何知,当两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 至少有一伸向无穷时,r 也必趋于无穷大,故 r 的最小值必在有限处达到.

设 $F(x_1,x_2,y_1,y_2)=r^2+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2-2)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_1}=-2(x_2-x_1)-2\lambda_1 x_1=0,\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-x_1)+\lambda_2=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y_1}=-2(y_2-y_1)+\lambda_1=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y_2}=2(y_2-y_1)-\lambda_2=0,\\ y_1=x_1^2,\\ x_2-y_2-2=0\end{cases}$$

得惟一的一组解 $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{1}{4}$; $x_2=\frac{11}{8}$, $y_2=-\frac{5}{8}$.

于是,所求的最短距离为

$$r_0=\sqrt{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

【3704】 求用平面

$$Ax+By+Cz=0$$

与椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

相交所成椭圆的面积.

解 我们只要确定所得椭圆的长短半轴 $\overline{a}$ 及 $\overline{b}$,即可按公式 $S=\pi\overline{a}\,\overline{b}$ 求得椭圆的面积.

注意到原点(0,0,0)在原椭圆柱面的中心轴上,且截平面 $Ax+By+Cz=0$ 又通过它.因此,原点是截线椭圆的中心,从而长短半轴 $\overline{a}$ 及 $\overline{b}$ 的平方 $\overline{a}^2$ 及 $\overline{b}^2$,分别为函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $Ax+By+Cz=0$ 及 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 下的最大值和最小值.设

$$F=u+2\lambda(Ax+By+Cz)-\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

于是,达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\frac{\mu}{a^2}\right)x+\lambda A=0, & (1)\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\frac{\mu}{b^2}\right)y+\lambda B=0, & (2)\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}=z+\lambda C=0, & (3)\\ Ax+By+Cz=0, & (4)\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. & (5)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z 后,然后相加,得 $x^2+y^2+z^2=\mu$,即从方程组可解得 $u(x,y,z)=\mu$.由(1)、(2)、(3)、(4)知,若要 x,y,z 及 λ 不全为零,μ 必须满足下列方程(同时 μ 只要满足下列方程,静止点(x,y,z)也一定有解):

$$\begin{vmatrix}1-\frac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A\\ 0 & 1-\frac{\mu}{b^2} & 0 & B\\ 0 & 0 & 1 & C\\ A & B & C & 0\end{vmatrix}=0$$

展开后,得

$$\frac{C^2}{a^2b^2}\mu^2-\left(\frac{B^2}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{C^2}{a^2}+\frac{C^2}{b^2}\right)\mu+(A^2+B^2+C^2)=0.$$

此方程有两正根.显然即为最大值及最小值 $\overline{a}^2$、$\overline{b}^2$.由韦达定理知

$$\overline{a}^2\overline{b}^2=\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2},$$

故椭圆面积

$$\pi\overline{ab}=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\quad(C\neq0).$$

当 $C=0$ 时,平面 $Ax+By=0$ 过 Oz 轴,显然得不到椭圆截面.

【3706】 根据飞耳马原则,从点 A 射出而达于点 B 的光线,沿着需要最短时间的曲线传播.

假定点 A 和点 B 位于以平面所分开的不同的光介质中,并且光散播的速度在第一介质中等于 v_1,而在第二介质中等于 v_2,推出光的折射定律.

解 如图 3706 所示,光线从点 A 射出,沿着折线 AMB 到达点 B.由 A、B 作垂直于 l 的直线

AC及BD,并与直线l交于点C及点D.设$AC=a$,$BD=b$,$CD=d$.选择角度α,β为变量,则

$$AM=\frac{a}{\cos\alpha},\qquad BM=\frac{b}{\cos\beta},$$
$$CM=a\tan\alpha,\qquad MD=b\tan\beta.$$

于是,我们的问题就是求函数

$$f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$$

在条件$a\tan\alpha+b\tan\beta=d$下的最小值,其中$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$,(当$M$在$C$与$D$之间时,$\alpha>0,\beta>0$;当$M$在点$C$的左边时,$\alpha<0,\beta>0$;当$M$在点$D$的右边时$\alpha>0,\beta<0$).显然$f(\alpha,\beta)$是连续函数;又当$\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$时(这时点$M$从右边伸向无穷远,$\beta\to-\frac{\pi}{2}+0$),显然$f(\alpha,\beta)\to+\infty$;当$\alpha\to-\frac{\pi}{2}+0$时(这时点$M$从左边伸向无穷远,$\beta\to\frac{\pi}{2}-0$),显然也有$f(\alpha,\beta)\to+\infty$.由此可知$f(\alpha,\beta)$在有限处达到最小值,此处必为静止点.设

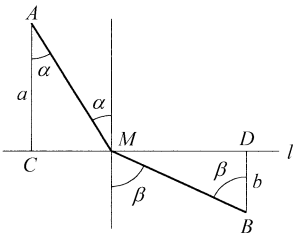

图 3706

$$F=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_1\cos\beta}-\lambda(a\tan\alpha+b\tan\beta-d)$$

注意到由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial\beta}=\dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta}-\dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta}=0,\end{cases}$$

即得

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\lambda,\qquad\frac{\sin\beta}{v_2}=\lambda.$$

于是,在静止点必满足

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}.$$

由此可知,光的传播路径必满足上面的关系.这就是著名的光线折射定律.此时,由点A到点B的光线传播所需要的时间最短.

【3707】 当投射角怎样时,光线的折射(即投射线与出射线之间的角)为最小?(此光线经过棱镜的折射角为α,折射系数为n).求出此最小的折射.

解 如图 3707 所示,ABC为棱镜.$\angle BAC=\alpha$为棱镜顶角(即棱镜的折射角),DE为入射光线,折射后从F点折射出棱镜,射出线为FG.IH和JH分别为入射点和射出点的法线,它们相交于H($IH\perp AC$,$JH\perp AB$).入射线DE的延长线DM与射出线的反向延长线FL交于K.令$\angle DEI=\beta$,$\angle GFJ=\gamma$,$\angle GKM=\delta$,$\angle HEF=\lambda$,$\angle EFH=\mu$.

按题意即问:当β在$(0,\frac{\pi}{2})$之间的一定范围内变化时,δ何时达到最小值.这本是一元函数的极值问题,然因牵涉的变量关系太多,因此把它看作多元函数的条件极值问题.

由折射定律(3706 题)可知:

$$\sin\beta=n\sin\lambda,\tag{1}$$
$$\sin\gamma=n\sin\mu.\tag{2}$$

由几何关系不难求出 α、β、γ、δ、λ 及 μ 之间的关系：

$$\lambda+\mu=\alpha \tag{3}$$

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha. \tag{4}$$

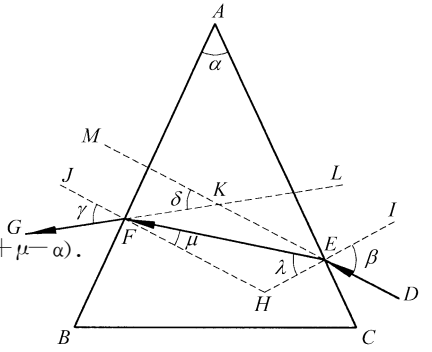

图 3707

由于 α 为常数，故从(1)、(2)、(3)、(4)四式中消去 λ、μ 及 γ 就得到 δ 作为 β 的函数. 令

$$F(\beta,\gamma,\lambda,\mu)=\beta+\gamma-\alpha+k_1(\sin\beta-n\sin\lambda)+k_2(n\sin\mu-\sin\gamma)+k_3(\lambda+\mu-\alpha).$$

静止点适合下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\beta}=1+k_1\cos\beta=0, & (5)\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}=1-k_2\cos\gamma=0, & (6)\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=-k_1 n\cos\lambda+k_3=0, & (7)\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial\mu}=k_2 n\cos\mu+k_3=0. & (8)\end{cases}$$

由(7)、(8)消去 k_3，得

$$k_1\cos\lambda=-k_2\cos\mu. \tag{9}$$

由(5)、(6)得 $k_1=-\dfrac{1}{\cos\beta}$，$k_2=\dfrac{1}{\cos\gamma}$，代入(9)，两边平方，即得

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta}=\frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma} \quad 或 \quad \frac{1-\sin^2\lambda}{1-\sin^2\beta}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-\sin^2\gamma}. \tag{10}$$

将(1)、(2)代入(10)，得

$$\frac{1-\sin^2\lambda}{1-n^2\sin^2\lambda}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-n^2\sin^2\mu},$$

整理后得

$$(n^2-1)(\sin^2\lambda-\sin^2\mu)=0.$$

由于 $0<\lambda<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\mu<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\sin\lambda=\sin\mu$ 或 $\lambda=\mu$. 代入(3)，得 $\lambda=\mu=\dfrac{\alpha}{2}$. 从而，$\beta=\gamma=\arcsin\left(n\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 于是，

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.$$

所求得的 β 即为惟一的静止点.

根据物理知识，作为本题所讨论的对象：顶角较小的分光棱镜，在区域内确实存在着最小的折射. 于是，当入射角 $\beta=\arcsin\left(n\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 时，则

$$\delta=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$$

应为最小折射. 至于作其他用途的各种棱镜，光线的折射路径不仅与顶角有关，面且大部分与整个棱镜的构造有关，这已不属于本题所考虑的对象，因而，也不再对它们进行讨论.

【3710】 在区间(1,3)内用线性函数 $ax+b$，来近似地代替函数 x^2，使得绝对偏差

$$\Delta=\sup|x^2-(ax+b)| \quad (1\leqslant x\leqslant 3)$$

为最小.

解 考虑函数

$$u(a,b)=\Delta^2=\sup_{1\leqslant x\leqslant 3}[x^2-(ax+b)]^2, \qquad f(x,a,b)=x^2-(ax+b).$$

由于$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-a$,故当固定 a,b时,$f(x,a,b)$只在 $x=\frac{a}{2}$处达到极值 $f(\frac{a}{2},a,b)$.当限制 $1\leqslant x\leqslant 3$时,只有当 $2<a<6$ 时,$f(x,a,b)$才可能在 $1<x<3$ 内部达到极值.于是,

$$u(a,b)=\begin{cases}\max\left\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b),f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)\right\}, & 2<x<6;\\ \max\{f^2(1,a,b),f^2(3,a,b)\}, & a\leqslant 2 \text{ 或 } a\geqslant 6.\end{cases}$$

从上式得知,对一切(a,b)均有 $u(a,b)>0$.

设从上式已解出平面区域 Ω_1,Ω_2 及 Ω_3,使得

$$u(a,b)=\begin{cases}f^2(1,a,b)=(1-a-b)^2, & (a,b)\in\Omega_1;\\ f^2(3,a,b)=(9-3a-b)^2, & (a,b)\in\Omega_2;\\ f^2\left(\frac{a}{2},a,b\right)=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2, & (a,b)\in\Omega_3,\end{cases} \qquad 2<a<6.$$

由于 $u(a,b)>0$,不难看出 $u(a,b)$在区域 $\Omega_i(i=1,2,3)$内部均无静止点.再看区域边界的状况.以 Ω_1 及 Ω_2 的边界为例.根据 $u(a,b)$的连续性,即知在边界上有 $u(a,b)=(1-a-b)^2$,且满足条件

$$(1-a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2.$$

下面我们求满足条件极值的必要条件的点.设

$$F(a,b)=(1-a-b)^2+\lambda\left[(1-a-b)^2-\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2\right],$$

则

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial a}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-\lambda a\left(\frac{a^2}{4}+b\right),\\ \frac{\partial F}{\partial b}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-2\lambda\left(\frac{a^2}{4}+b\right).\end{cases}$$

使$\frac{\partial F}{\partial a}=0$, $\frac{\partial F}{\partial b}=0$ 且满足条件 $1-a-b\neq 0$, $\frac{a^2}{4}+b\neq 0$ 的点没有.

同法可证:在 Ω_1,Ω_2 及 Ω_2,Ω_3 的边界上也无静止点,但是,$u(a,b)$一定在区域内达到最小值.因此,只能在 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 的边界交点上取得最小值,即在满足方程

$$(1-a-b)^2=(9-3a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2 \tag{1}$$

的点(a,b)上取得最小值.方程(1)可转化为下面四组方程

$$\begin{cases}1-a-b=9-3a-b=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (2)\\ 1-a-b=9-3a-b=\frac{a^2}{4}+b, & (3)\\ 1-a-b=-(9-3a-b)=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (4)\\ 1-a-b=-(9-3a-b)=\frac{a^2}{4}+b. & (5)\end{cases}$$

方程组(2)无解.

方程组(3)的解为 $a=4$, $b=-\frac{7}{2}$.对应的 $\Delta=\frac{1}{2}$.

方程组(4)的解为 $a=2$, $b=1$.,对应的 $\Delta=2$.

方程组(5)的解为 $a=6$, $b=-7$,对应的 $\Delta=2$.

综上所述,可知:在区间(1,3)内,用线性函数 $4x-\frac{7}{2}$ 来近似地代替函数 x^2,即可使绝对偏差 Δ 为最小,且 $\Delta_{\min}=\frac{1}{2}$.

第七章　带参数的积分

§1.　带参数的常义积分

1.积分的连续性　若函数 $f(x,y)$ 于有界的域 $R[a\leqslant x\leqslant A;\ b\leqslant y\leqslant B]$ 内有定义并且是连续的，则

$$F(y)=\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x$$

是在闭区间 $b\leqslant y\leqslant B$ 上的连续函数.

2.积分符号下的微分法　若除在 1°中所已指明的条件之外，并且偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在区域 R 内连续，则当 $b<y<B$ 时莱布尼兹公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^A f'_y(x,y)\mathrm{d}x$$

为真.

在更普遍的情况下，当积分的限为参数 y 的可微分函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 并且当 $b<y<B$ 时 $a\leqslant\varphi(y)\leqslant A$，$a\leqslant\psi(y)\leqslant A$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x=f[\psi(y),y]\psi'(y)-f[\varphi(y),y]\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\mathrm{d}x$$

$$(b<y<B).$$

3.积分符号下的积分法　在 1°的条件下有

$$\int_b^B \mathrm{d}y\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^A \mathrm{d}x\int_b^B f(x,y)\mathrm{d}y.$$

【3711】　证明：不连续函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

为连续函数.作出函数 $u=F(y)$ 的图形.

证　当 $-\infty<y<0$ 时，$F(y)=\int_0^1 1\cdot\mathrm{d}x=1$；

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$F(y)=\int_0^y(-1)\mathrm{d}x+\int_y^1 1\cdot\mathrm{d}x=1-2y$；

当 $1<y<+\infty$ 时，$F(y)=\int_0^1(-1)\mathrm{d}x=-1$.

由于

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\lim_{y\to+0}(1-2y)=1,\quad \lim_{y\to-0}F(y)=1$$

且 $F(0)=1$,即有

$$F(+0)=F(-0)=F(0),$$

故 $u=F(y)$当 $y=0$ 时为连续的.

同法可证 $u=F(y)$当 $y=1$ 时为连续的.当 $y\neq 0$, $y\neq 1$ 时, $u=F(y)$显然连续.于是, $u=F(y)$在整个 Oy 轴上均为连续的.如图 3711 所示.

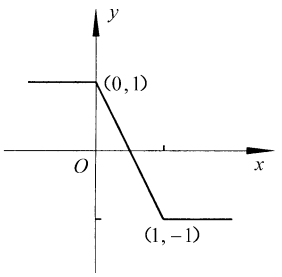

图 3711

【3713】 求:

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}$.

解 (1) 因 $\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, α, $1+\alpha$都是连续函数,故含参变量 α的积分 $F(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$ 是 α在$-\infty<\alpha<+\infty$上的连续函数,因此,

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

(4) 考虑二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,0<y\leqslant 1 \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,y=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$ 易知 $f(x,y)$是 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数.从而,积分 $F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数,因此, $\lim\limits_{y\to+0}F(y)=F(0)$,从而,更有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{1}{n}\right)=F(0)=\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$

$$=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_0^1=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$$

【3714】 设函数 $f(x)$在闭区间$[\alpha,A]$上连续.证明:

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)\qquad(a<x<A).$$

证 由于 $f(x)$在$[a,A]$上连续,故在$[a,A]$上存在原函数 $F(x)$.于是,

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)]$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to+0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).$$

【3716】 当 $y=0$ 时,可否根据莱布尼兹法则计算函数

$$F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

的导数?

解 不能.事实上,我们有:当 $y\neq 0$ 时,

$$F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\ln\ \sqrt{1+y^2}-\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\ \sqrt{1+y^2}-1+y\arctan\frac{1}{y}.$$

又有 $$F(0)=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x=-1.$$

由此可知

$$F'_+(0)=\lim_{y\to+0}\frac{F(y)-F(0)}{y}=\lim_{y\to+0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\right]=\frac{\pi}{2},$$

$$F'_-(0)=\lim_{y\to-0}\frac{F(y)-F(0)}{y}=\lim_{y\to-0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\right]=-\frac{\pi}{2},$$

故 $F'(0)$不存在.

另一方面,当 $x>0$ 时,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ \sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}\equiv0,$$

故 $$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ \sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}\mathrm{d}x=0.$$

由此可知,当 $y=0$ 时不能在积分号下求导数,就是求右导数或求左导数也不行,因为

$$F'_+(0)=\frac{\pi}{2}\neq0=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ \sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}\mathrm{d}x,$$

$$F'_-(0)=-\frac{\pi}{2}\neq0=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\ \sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{y=0}\mathrm{d}x,$$

【3718】 设:(4) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$;

(5) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}\mathrm{d}x\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y$,

求 $F'(\alpha)$.

解 (4)设 $u=x+\alpha$, $v=x-\alpha$,则 $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(u,v)\mathrm{d}x$.于是,

$$\begin{aligned}F'(\alpha)&=f(2\alpha,0)+\int_0^{\alpha}[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]\mathrm{d}x\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}[f'_u(u,v)+f'_v(u,v)]\mathrm{d}x\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u,v)\mathrm{d}x\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x-f(x+\alpha,x-\alpha)\Big|_{x=0}^{x=\alpha}\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x-[f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha)]\\&=f(\alpha,-\alpha)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$(5)\ F'(\alpha)=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+\int_0^{\alpha^2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+\int_0^{\alpha^2}\Big\{\sin[x^2+(x+\alpha)^2-\alpha^2]$$

$$-\sin[x^2+(x-\alpha)^2-\alpha^2](-1)+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\Big\}\mathrm{d}x$$

$$=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+\int_0^{\alpha^2}\Big\{\sin(2x^2+2\alpha x)+\sin(2x^2-2\alpha x)$$

$$+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\Big\}\mathrm{d}x$$

$$=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\mathrm{d}x$$

$$-2\alpha\int_0^{\alpha^2}\mathrm{d}x\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y.$$

【3720】 设：

$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|\mathrm{d}y,$$

其中 $a<b$ 及 $f(y)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$.

解 当 $x\in(a,b)$ 时，由于

$$F(x)=\int_a^x(x-y)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b(y-x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x(x-y)f(y)\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x(y-x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^x\frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]\mathrm{d}y-\int_b^x\frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y+\int_b^x f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

当 $x\overline{\in}(a,b)$ 时，例如 $x\leqslant a$，则 $F(x)=\int_a^b(y-x)f(y)\mathrm{d}y$，故有

$$F'(x)=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x)=0;$$

同理，对于 $x\geqslant b$ 也可得 $F''(x)=0$. 总之，

$$F''(x)=\begin{cases}2f(x), & \text{当 } x\in(a,b);\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in}(a,b).\end{cases}$$

【3725】 求完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \quad 及 \quad F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad(0<k<1)$$

的导函数并以函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 来表示它们.

证明：$E(k)$ 满足微分方程式

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

解
$$E'(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{k}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\Big]-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E(k)-F(k)}{k}.\qquad(1)$$

$$F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$
$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

我们易证

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varphi.$$

于是,

$$F'(k)=-\frac{F(k)}{k}+\frac{E(k)}{k(1-k^2)}.\tag{2}$$

由(1)式,对 k 再求导数,并注意到(2)式,即得

$$E''(k)=\frac{[E'(k)-F'(k)]k-[E(k)-F(k)]}{k^2}$$
$$=\frac{\left[\frac{E(k)-F(k)}{k}+\frac{F(k)}{k}-\frac{E(k)}{k(1-k^2)}\right]k-kE'(k)}{k^2}=-\frac{E(k)}{1-k^2}-\frac{E'(k)}{k},$$

即

$$E''(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}+\frac{E'(k)}{k}=0.$$

应用对参数的微分法,计算下列积分:

【3733】 $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$.

解 设 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$.当 $|a|<1$ 时,由于 $1-2a\cos x+a^2\geqslant 1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0$,故 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数且具有连续导数,从而可在积分号下求导数.将 $I(a)$ 对 a 求导数,得

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+a^2)-2a\cos x}=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x}$$
$$=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi^*)}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=0.$$

于是,当 $|a|<1$ 时,$I(a)=C$(常数).但是,$I(0)=0$,故 $C=0$.从而,$I(a)=0$.

当 $|a|>1$ 时,令 $b=\frac{1}{a}$,则 $|b|<1$,并有 $I(b)=0$.于是,我们有

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)\mathrm{d}x=I(b)-2\pi\ln|b|=-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.$$

当 $|a|=1$ 时,有

$$I(1)=\int_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\ln 4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\ln 2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\overset{**)}{=}0;$$

同法可求得 $I(-1)=0$.

综上所述,故知

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当}|a|\leqslant 1;\\ 2\pi\ln|a|, & \text{当}|a|>1.\end{cases}$$

*) 利用 2028 题(1)的结果.

**) 利用 2353 题(1)的结果.

【3737】 应用积分符号下的积分法,计算积分

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0).$$

解 首先注意,因为 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}=0$,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{x^{-1}}=\lim_{x\to 1-0}(bx^b-ax^a)=b-a,$$

故 $\int_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ 不是广义积分,并且,如果补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0,在 $x=1$ 时的值为 $b-a$,则可理解为[0,1]上连续函数的积分.由于

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

(注意,$x=0$ 时左端规定为 0,$x=1$ 时右端规定为 $b-a$),而函数 x^y 在 $0\leqslant x\leqslant 1$, $a\leqslant y\leqslant b$ 上连续(不妨设 $a<b$),故有

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

【3739】 设 $F(k)$和 $E(k)$为完全椭圆积分(参阅问题 3725).证明公式:

(1) $\int_0^k F(k)k\,\mathrm{d}k=E(k)-k_1^2F(k)$; (2) $\int_0^k E(k)k\,\mathrm{d}k=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]$,

其中 $k_1^2=1-k^2$.

证 (1)利用 3725 题的结果,可得

$$[E(k)-k_1^2F(k)]'=E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)$$

$$=\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]=kF(k).$$

于是,

$$E(k)-k_1^2F(k)=\int_0^k kF(k)\,\mathrm{d}k+C,$$

其中 C为常数.但当 $k=0$ 时,上式左端为 $E(0)-F(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$,而右端等于 C,故 $C=0$.最后证得

$$\int_0^k kF(k)\,\mathrm{d}k=E(k)-k_1^2F(k).$$

(2) 由于

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'$$

$$=\frac{1}{3}[2kE(k)+(1+k^2)E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)]$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2kE(k)+(1+k^2)\cdot\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)-(1-k^2)\cdot\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]\right\}$$

$$=kE(k),$$

故
$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]=\int_0^k kE(k)\mathrm{d}k+C,$$

以 $k=0$ 代入上式,得 $C=0$.于是,最后证得

$$\int_0^k kE(k)\mathrm{d}k=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)].$$

§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1.一致收敛性的定义 若对于任何的 $\varepsilon>0$,都存在有数 $B=B(\varepsilon)$,使得在 $b'\geqslant B$ 的条件下有

$$\left|\int_{b'}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\quad(y_1<y<y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1}$$

(其中函数 $f(x,y)$于域 $a\leqslant x<+\infty$, $y_1<y<y_2$ 内是连续的)在区间(y_1,y_2)内一致收敛.

积分(1)的一致收敛与形状如下的一切级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_0}^{a_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2}$$

(其中 $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$)的一致收敛等价.

若积分(1)在区间(y_1,y_2)中一致收敛,则在这个区间内它是参数 y 的连续函数.

2.哥西判别法则 积分(1)在区间(y_1,y_2)内一致收敛的充分而且必要的条件为,对于任何的 $\varepsilon>0$ 便存在有数 $B=B(\varepsilon)$,使得只要是 $b'>B$ 及 $b''>B$ 则当 $y_1<y<y_2$ 时

$$\left|\int_{b'}^{b''}f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

3.外尔什特拉斯判别法 对于积分(1)一致收敛的充分条件为,与参数 y 无关的强函数 $F(x)$存在,使得

(1) 当 $a\leqslant x<+\infty$时$|f(x,y)|\leqslant F(x)$ 及 (2)$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

4.对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域:

【3742】 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$.

解 首先注意

$$\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'=\frac{(1-p)x^p+(1-q)x^q}{(x^p+x^q)^2}.$$

若 $\max(p,q)>1$，则显然当 x 充分大时 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'<0$，从而，当 x 充分大时函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 是递减的，并且很明显，这时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^p+x^q}=0$. 又因 $\left|\int_\pi^A\cos x\mathrm{d}x\right|=|\sin A|\leqslant 1$（对任何 $A>\pi$），故知 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $\max(p,q)\leqslant 1$，则恒有 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'\geqslant 0$，故函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 在 $x\geqslant\pi$ 上是递增的. 于是，对于任何正整数 n，有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{\pi^p+\pi^q}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(\pi^p+\pi^q)}=\text{常数}>0,$$

故不满足柯西收敛准则，因此，积分 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

【3744】 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$.

解 考虑积分

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)}=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

利用 2362 题的结果即知：它当 $-p>-1$ 或 $p<1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$. 由于

$$\lim_{x\to1+0}(x-1)^p\frac{1}{\ln^p x}=\left[\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right]^p=\left[\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^{-1}}\right]^p=1.$$

故积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^p}$ 具有相同的敛散性，而后者显然当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散，从而，前者亦然.

于是，仅当 $p<1$ 时，积分 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$ 收敛.

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性：

【3747】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$.

解 设 $a>0$. 我们证明：对任何叙列

$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots\ (a_n\to+\infty).$$

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 都收敛. 事实上，有

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x+a}\Big|_{a_n}^{a_{n+1}}+\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x$$

故

$$\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a}-\frac{\sin a_m}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x.$$

从而，

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+1}}\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\left(\frac{1}{a_m+a}-\frac{1}{a_{m+p}+a}\right)=\frac{2}{a_m+a},$$

由此可知,满足柯西收敛准则,从而,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 收敛.因此,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $a=0$,显然瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 发散,故广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

下设 $a<0$.若 $a=-(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$,则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x&=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x+\int_{(n+1)\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由上所证,右端第二个积分收敛;又由于

$$\lim_{x\to(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\cos x}{x+a}=(-1)^{n+1},$$

故右端第一个积分收敛(它不是广义积分,补充定义被积函数在 $x=(n+\frac{1}{2})\pi$ 时的值为 $(-1)^{n+1}$ 后即为连续函数的积分);从而,此时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $a<0$ 但 $a\neq-(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$,此时 $\cos(-a)\neq0$.由连续性,可取 $\delta>0$,使当 $-a\leqslant x\leqslant-a+\delta$ 时 $\cos x$ 保持定号且 $|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|$.于是,

$$\left|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x+a}=+\infty.$$

由此可知,瑕积分 $\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 发散.从而,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 更是发散.

综上所述,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 仅当 $a>0$ 及 $a=-(n+\frac{1}{2})\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 时收敛.

【3752】 证明:若(ⅰ)积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;(ⅱ)函数 $\varphi(x,y)$ 有界并关于 x 是单调的,则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x$ 一致收敛(在对应的域内).

证 设 $|\varphi(x,y)|\leqslant L$,则由题设(ⅰ)知:对于任给的 $\varepsilon>0$,总存在数 $B=B(\varepsilon)$,使当 $A'>A>B$ 时,就有不等式

$$\left|\int_A^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2L}.\tag{1}$$

由积分第二中值定理知:存在 $\xi\in[A,A']$,使有下述等式

$$\int_A^{A'}f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\varphi(A+0,y)\cdot\int_A^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+\varphi(A'-0,y)\cdot\int_{\xi}^{A'}f(x)\mathrm{d}x.\tag{2}$$

由(1)式,得

$$\left|\int_A^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2L},\qquad\left|\int_{\xi}^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是,由(2)式,可得

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\right|<L\frac{\varepsilon}{2L}+L\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon,$$

即积分$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x$在对应的$y$域内一致收敛.

【3754】 证明:积分

$$I=\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$$

(1) 在任何区间$0<a\leqslant\alpha\leqslant b$内一致收敛;

(2) 在区间$0\leqslant\alpha\leqslant b$内非一致收敛.

证 显然,积分I对于每一个定值$\alpha\geqslant 0$是收敛的.事实上,

当$\alpha=0$时,$\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=0$;

当$\alpha>0$时,$\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}=1$.

(1) 如果$0<a\leqslant\alpha\leqslant b$,则由于$0<\int_A^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\alpha A}\leqslant\mathrm{e}^{-aA}$,故对于任给的$\varepsilon>0$,可以找到不依赖于$\alpha$的数$A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$,使当$A>A_0$时,就有$\int_A^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x<\mathrm{e}^{-aA_0}=\varepsilon$.于是,在区间$0<a\leqslant\alpha\leqslant b$上积分$I$一致收敛.

(2) 如果$0\leqslant\alpha\leqslant b$,则不存在这样的数$A_0$.事实上,取$0<\varepsilon<1$就办不到.由于当$\alpha\to+0$时,$\mathrm{e}^{-A\alpha}\to 1$,故对于足够小的$\alpha$值,$\mathrm{e}^{-A\alpha}$就比任意一个小于1的数$\varepsilon$为大.因此,在区间$0\leqslant\alpha\leqslant b$上,积分$I$对$\alpha$的收敛是不一致的.

【3755】 证明:迪里黑里积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$

(1) 在每一个不含数值$\alpha=0$的闭区间$[a,b]$上一致收敛,

(2) 在含数值$\alpha=0$的每一个闭区间$[a,b]$上非一致收敛.

证 不失一般性,我们只考虑α的正值.

(1) 由于积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$是收敛的,故对于任给的$\varepsilon>0$,存在数$A_0$,使当$A>A_0$时,恒有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z\right|<\varepsilon.$$

当$\alpha>0$时,由于$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$,故取$A>\frac{A_0}{a}$,对于$\alpha\geqslant a>0$,就有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

于是,在区间$0<a\leqslant\alpha\leqslant b$上,积分$I$是一致收敛的.

(2) 对于任何的$A>0$,当$\alpha\to+0$时,

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}.$$

因此,当$\alpha>0$且充分小时,有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x>\frac{\pi}{4}.$$

于是,在区间 $0\leqslant a\leqslant b(b>0)$ 上,积分 I 不一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性:

【3760】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$

解 首先注意,因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}e^{\alpha x}=1$. 故 $x=0$ 不是瑕点.

由于 $\left|\int_0^A\sin x dx\right|=|1-\cos A|\leqslant 2$,而当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时,函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x}$ 在 $x>0$ 关于 x 递减,并且当 $x\to+\infty$ 时它关于 $\alpha(0\leqslant\alpha<+\infty)$ 一致趋于零(因为 $0\leqslant\alpha<+\infty$, $x>0$ 时,$0<\frac{e^{-\alpha x}}{x}\leqslant\frac{1}{x}$),故由迪里黑里判别法知,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

【3762】 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$.

解 此积分是收敛的.事实上,当 $\alpha=0$ 时,积分为零;当 $\alpha>0$ 时,设 $\sqrt{\alpha}x=t$,则得

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是,此积分却不一致收敛.事实上,对于任何的 $A>0$,由于

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故对于 $0<\varepsilon_0<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,必存在 $\alpha_0>0$,使有

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0 x^2}dx>\varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛的.

【3766】 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$, (1) $p\geqslant p_0>0$; (2) $p>0$ ($q>-1$).

解 注意到 $x=0$ 和 $x=1$ 都可能是瑕点.作代换 $x=e^{-t}$,得

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=-\int_{+\infty}^0 e^{-(p-1)t}t^q e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt,$$

右端的积分当 $p>0(q>-1)$ 时是收敛的[*],从而,左端的积分此时也收敛.更由于($\varepsilon,\varepsilon'>0$ 很小)

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'}x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_{\ln\frac{1}{\varepsilon}}^{\ln\frac{1}{1-\varepsilon}}e^{-pt}t^q dt,$$

故 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 的一致收敛性等价于 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt$ 的一致收敛性.

(1) 当 $p\geqslant p_0>0$ 时,由于

$$0<e^{-pt}t^q\leqslant e^{-p_0 t}t^q\quad(0<t<+\infty)$$

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-p_0 t}t^q$ 收敛,故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^q dt$ 一致收敛(对于 $p\geqslant p_0>0$). 从而,原积分 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $p\geqslant p_0>0$ 时一致收敛.

(2) 对任何 $A>0$, $p>0$,作代换 $pt=s$,则

$$\int_A^{+\infty} e^{-pt}t^q dt=\frac{1}{p^{q+1}}\int_{pA}^{+\infty} s^q e^{-s}ds,$$

由于 $q>-1$,故积分 $\int_0^{+\infty} s^q e^{-s}ds$ 收敛,且显然

$$0<\int_0^{+\infty} s^q e^{-s}ds<+\infty,$$

于是,有

$$\lim_{p\to+0}\int_A^{+\infty} e^{-pt}t^q dt=+\infty,$$

由此即知,积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^q dt$ 在 $p>0$ 上非一致收敛.从而,原积分 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $p>0$ 时非一致收敛.

*) 利用 2361 题的结果(在其中作代换 $pt=s$).

【3772】 在下式中

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx$$

把极限移到积分号内合理吗?

解 不合理.事实上,由 3754 题(2)的结果知,积分 $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ ($b>0$)的收敛并非一致,故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理.对于本题,实际上也不能交换,这是由于

$$\int_0^{+\infty}\left[\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x}\right]dx=0,$$

而

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx=\lim_{\alpha\to+0}(-e^{-\alpha x})\Big|_0^{+\infty}=1,$$

故得

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx\neq\int_0^{+\infty}\left[\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x}\right]dx.$$

【3773】 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可积分,证明:公式

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

证 容许有有限个瑕点.为叙述简单起见,例如,设只有一个瑕点 $x=0$.已知积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且被积函数中不含有 α,故它关于 α 一致收敛.又因函数 $e^{-\alpha x}$ 对于固定的 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$,关于 x ($x>0$)是递减的,并且一致有界:$0<e^{-\alpha x}\leqslant 1$ ($0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $x>0$),故根据亚贝尔判别法知,$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 上一致收敛.于是,对于任给的 $\varepsilon>0$,可取 $\eta>0$, $A_0>0$ ($\eta<A_0$),使

$$\left|\int_0^{\eta} e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5},\qquad \left|\int_{A_0}^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[\eta,A_0]$ 上常义可积,故有界,即存在常数 M_0 使 $|f(x)|\leqslant M_0$ ($\eta\leqslant x\leqslant A_0$).再根据二元函数 $e^{-\alpha x}$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $\eta\leqslant x\leqslant A_0$ 上的一致连续性知,必存在 $\delta>0$ ($\delta<1$),使当 $0<\alpha<\delta$ 时,对一切 $\eta\leqslant x\leqslant A_0$,皆有 $0\leqslant 1-e^{-\alpha x}<\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}$.于是,当 $0<\alpha<\delta$ 时,恒有

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^{+\infty} f(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_{\eta}^{A_0}(\mathrm{e}^{-\alpha x}-1)f(x)\mathrm{d}x+\int_{A_0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x-\int_{A_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\eta}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x-\int_0^{\eta}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$<M_0A_0\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.$$

由此可知,

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

【3774】 若 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$内绝对可积,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

证 由 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$内的绝对可积性可知:对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $A>0$,使有

$$\int_A^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,

$$\left|\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^{A}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|+\frac{\varepsilon}{3}.$$

先设 $f(x)$在$[0,A]$中无瑕点.我们在$[0,A]$中插入分点 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<t_m=A$,并设 $f(x)$在$[t_{k-1},t_k]$上的下确界为 m_k,则有

$$\begin{aligned}\int_0^{A}f(x)\sin nx\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(x)-m_k]\sin nx\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{m}m_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin nx\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{A}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|&\leqslant\sum_{k=1}^{m}w_k\,\Delta t_k+\sum_{k=1}^{m}|m_k|\cdot\frac{|\cos nt_{k-1}-\cos nt_k|}{n}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{m}w_k\,\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k|,\end{aligned}$$

其中 w_k 为 $f(x)$在区间$[t_{k-1},t_k]$上的振幅,$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

由于 $f(x)$在$[0,A]$上可积,故可取某一分法,使有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}w_k\,\Delta t_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样固定的分法,$\sum_{k=1}^{m}|m_k|$为一定值,因而存在 N,使当$n>N$时,恒有

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,对于上述所选取的 N,当 $n>N$时,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left|\int_0^{A}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{m}w_k\,\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k|+\int_A^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$.

其次,设 $f(x)$在区间$[0,A]$中有瑕点.为简便起见,不妨设只有一个瑕点,且为 0.于是,对于

任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\eta>0$,使有

$$\int_0^{\eta}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}.$$

但是,$f(x)$在$[\eta,A]$上无瑕点,故应用上述结果可知:存在 N,使当 $n>N$ 时,恒有

$$\left|\int_{\eta}^{A}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{\eta}|f(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_{\eta}^{A}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|+\int_A^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$.

总之,当 $f(x)$在$(0,+\infty)$内绝对可积,不论 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有无瑕点,均可证得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

研究下列函数在所指定区间内的连续性:

【3780】 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha>0$.

解 对于任何 $A>1$,均有

$$\left|\int_1^{A}\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2.$$

而函数 $\frac{1}{x^{\alpha}}$在 $x\geqslant 1$,$\alpha>0$ 关于 x 单调递减,且由

$$0<\frac{1}{x^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0}}\quad(x\geqslant 1,\alpha\geqslant\alpha_0>0)$$

知:当 $x\to+\infty$时$\frac{1}{x^{\alpha}}$在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致趋于零.因此,由迪里黑里判别法知,积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$$

对 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 一致收敛.于是,函数 $F(\alpha)$当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续.由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,$F(\alpha)$当 $\alpha>0$ 时连续.

§3. 广义积分中的变量代换. 广义积分号下的微分法及积分法

1.对参数的微分法 若 1)函数 $f(x,y)$于域 $a\leqslant x<+\infty$,$y_1<y<y_2$ 内是连续的并对参数 y 可微分;2)$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 收敛;3)$\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)\mathrm{d}x$ 于区间(y_1,y_2)内一致收敛,则当 $y_1<y<y_2$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)\mathrm{d}x\quad(\text{莱布尼兹法则}).$$

2.对参数积分的公式 若 1)函数 $f(x,y)$当 $x\geqslant a$ 及 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 时是连续的；2)$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在有穷的区间(y_1,y_2)内一致收敛,则

$$\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

若 $f(x,y)\geqslant 0$,则公式(1)在假定等式(1)的一端有意义时,对于无穷的区间(y_1,y_2)也正确.

【3784】 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\quad(n>0),$$

计算积分 $I=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\mathrm{d}x$,其中 m为自然数.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x^{n-1}}{\mathrm{d}n}=x^{n-1}\ln x$ ($n>0$ 为任意实数).积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x \tag{1}$$

对于 $n\geqslant n_0>0$ 为一致收敛.事实上,当 $0<x\leqslant 1$,$n\geqslant n_0>0$ 时,

$$|x^{n-1}\ln x|\leqslant -x^{n_0-1}\ln x,$$

而积分$\int_0^1 x^{n_0-1}\ln x\mathrm{d}x$ 显然收敛*).因此,由外氏判别法即知,积分(1)对 $n\geqslant n_0>0$ 一致收敛.于是,积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x$$

对参数 $n\geqslant n_0$ 求导数时,积分号与导数符号可交换,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x^{n-1}}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x.$$

由 $n_0>0$ 的任意性知,上式对任意 $n>0$ 均成立.

同理对 n逐次求导数,也可在积分号下求导数,即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}n^2}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(x^{n-1}\ln x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^2 x\mathrm{d}x$$

$$\vdots$$

由数学归纳法,可得

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}n^m}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\mathrm{d}x.$$

但是,$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}$ ($n>0$),故有

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而得 $\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\mathrm{d}x=\dfrac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$.

*) 利用 2362 题的结果.

【3787】 证明:函数

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)}\mathrm{d}x$$

在区域$-\infty<\alpha<+\infty$内连续并且可微分的.

证 设α_0为$(-\infty,+\infty)$内任意一点.记$M=\max(|\alpha_0-1|,|\alpha_0+1|)$,则当$x>M$,$\alpha\in(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$时,恒有

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x-\alpha)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+(x-M)^2},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\right|=\left|\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|\leqslant\frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由于积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-M)^2}$收敛,故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x\quad\text{及}\quad\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\mathrm{d}x$$

在(α_0-1,α_0+1)内一致收敛,从而,$F(\alpha)$在(α_0-1,α_0+1)内连续且可微分,且可在积分号下求导数.由α_0的任意性,即知$F(\alpha)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且可微分.

【3789】 证明:傅茹兰公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,b>0),$$

式中$f(x)$为连续函数及积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$对任何的$A>0$都有意义.

证 对任何的$A>0$,有

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{Aa}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{Ab}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{\mathrm{d}t}{t}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad(Aa<\xi<Ab).$$

当$A\to+0$时,$\xi\to+0$.由$f(x)$在点$x=0$的连续性,即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

利用傅茹兰公式,计算积分:

【3792】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0).$

解 令$f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x$,则$f(x)$在$0\leqslant x<+\infty$上连续.

由于$f(x)>0$且(利用洛比塔法则)

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1,$$

故对任何$A>0$,积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$都收敛.因此,由傅茹兰公式,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan ax\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan bx\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a},$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

利用对参数的微分法计算下列积分：

【3793】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha xe^{-\alpha x^2}+2\beta xe^{-\beta x^2}}{1}=0,$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 又由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\alpha x^2}}-\frac{x}{e^{\beta x^2}}\right)=0,$$

故对任何 $\alpha>0,\beta>0$ 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ 都收敛. 今将 $\beta>0$ 固定，而把所求积分视为含参变量 $\alpha(\alpha>0)$ 的积分，即令

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx\quad(\alpha>0).$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)dx=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx.$$

下证右端积分在 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛. 事实上，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$0\leqslant x<+\infty$ 时，$0\leqslant xe^{-\alpha x^2}\leqslant xe^{-\alpha_0 x^2}$，而积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha_0 x^2}dx=\frac{1}{2\alpha_0}$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛. 因此，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，可在积分号下对参数求导数：

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立. 积分之，得

$$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+C\quad(0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 为待定的常数. 在此式中令 $\alpha=\beta$，并注意到，

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=0,$$

即得 $0=I(\beta)=-\frac{1}{2}\ln\beta+C$，由此知 $C=\frac{1}{2}\ln\beta$. 于是，

$$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\beta=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0),$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0,\beta>0).$$

注 本题中，实际应考察积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(x,\alpha)dx$，其中

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}, & \text{当 } 0<x<+\infty\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0\text{ 时}.\end{cases}$$

易知 $f(x,\alpha)$ 是 $0\leqslant x<+\infty,0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数（$\beta>0$ 固定）. 我们证明：

$$f'_\alpha(x,\alpha)=-xe^{-\alpha x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty,0<\alpha<+\infty).$$

事实上，当 $0<x<+\infty$ 时，此式显然成立．由于 $f(0,\alpha)\equiv 0(0<\alpha<+\infty)$，故 $f'_\alpha(0,\alpha)=0\ (0<\alpha<+\infty)$．因此，上式当 $x=0$ 时也成立．$f'_\alpha(x,\alpha)$ 显然是 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数．

在以下许多题中，我们都应作此理解，但不必写出 $f(x,\alpha)$．函数 $\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$ 就代表 $f(x,\alpha)$（$x=0$ 时规定其函数值为其极限值 0），而公式

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)=-xe^{-\alpha x^2}$$

当 $x=0$ 时也成立（如上述）．这样，才严格符合莱布尼兹法则（积分号下求导数）的条件．

另外，本题若利用逐次积分来作可更简单一些．今作如下：易知（不妨设 $\alpha<\beta$）

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}\,dy,$$

而积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}\,dx$ 当 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 时一致收敛（因为 $0\leqslant xe^{-yx^2}\leqslant xe^{-\alpha x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}\,dx$ 收敛），故可交换积分次序，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}dy=\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx=\int_\alpha^\beta\frac{dy}{2y}=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

【3803】 从公式

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}dy$$

出发，计算尤拉—普阿桑积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$$

解 在积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 中令 $x=ut$，其中 u 为任意正数，即得

$$I=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt.$$

在上式两端乘以 $e^{-u^2}du$，再对 u 从 0 到 $+\infty$ 积分，得

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}dt.\tag{1}$$

由于被积函数 $ue^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负的连续函数，并且积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2(1+t^2)}\quad\text{及}\quad\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt=e^{-u^2}I$$

分别对于 t 及 u 是连续的，积分互换后的逐次积分显然存在．于是，(1)式中的积分顺序可以互换*），并且有

$$I^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

由于 $I>0$，故

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*） 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 483 目定理Ⅴ的系理．

利用尤拉—普阿桑积分，求下列积分之值：

【3804】 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$ $(a>0, ac-b^2>0)$*).

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2}dx$

$=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}$.

*) 只要假定 $a>0$,条件 $ac-b^2>0$ 可去掉.

【3809】 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$ $(a>0)$.

解 令 $I(b)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$.由于 $e^{-ax^2}\cos bx$ 与 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$ 都是 $x\geqslant 0$,$-\infty<b<+\infty$ 上的连续函数,并且此时

$$|e^{-ax^2}\cos bx|\leqslant e^{-ax^2},\qquad |xe^{-ax^2}\sin bx|\leqslant xe^{-ax^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}dx$ 都收敛,故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx$ 都在 $-\infty<b<+\infty$ 上一致收敛,从而可在积分号下求导数,得

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx\quad(-\infty<b<+\infty).$$

利用分部积分法,得

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{b}{2a}I(b),$$

故 $I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)$ $(-\infty<b<+\infty)$.于是,

$$\int\frac{I'(b)}{I(b)}db=-\frac{1}{2a}\int b\,db,$$

即

$$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+C\quad(-\infty<b<+\infty),$$

其中 C 是待定常数,也即

$$I(b)=C_1e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad(-\infty<b<+\infty),$$

其中 C_1 也是待定常数.但

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

代入,得 $C_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.于是,最后得

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx=I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\qquad(-\infty<b<+\infty).$$

【3812】 从积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$$

出发,计算迪里黑里积分

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx.$$

解 先设 $\beta>0$,将 β 固定,α 视为参变量.仿 3760 题的证法,可知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 当 $\alpha\geqslant 0$ 时一致收敛,从而,$I(\alpha)$ 是 $\alpha\geqslant 0$ 上的连续函数(注意,上述积分中 $x=0$ 不是瑕点,因为 $\lim\limits_{x\to+0} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}=\beta$).由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x dx=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

易知积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x dx$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛(因为此时 $|e^{-\alpha x}\sin\beta x|\leqslant e^{-\alpha_0 x}$,而 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx$ 收敛),故知当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ 可在积分号下求导数,得

$$I'(\alpha)=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 皆成立.两端对 α 积分,得

$$I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+C\ (0<\alpha<+\infty),\tag{1}$$

其中 C 是某常数.由 $|\sin u|\leqslant|u|$ 知

$$|I(\alpha)|\leqslant\beta\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{\beta}{\alpha}\quad(0<\alpha<+\infty),$$

由此可知 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0$.在(1)式两端令 $\alpha\to+\infty$ 取极限,得 $0=-\frac{\pi}{2}+C$,故 $C=\frac{\pi}{2}$.于是,

$$I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{2}\quad(0<\alpha<+\infty)\tag{2}$$

在(2)式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限,并注意到 $I(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant 0$ 时连续,即得

$$D(\beta)=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

当 $\beta<0$ 时,$D(\beta)=-D(-\beta)=-\frac{\pi}{2}$.又显然有 $D(0)=0$.综上所述,有

$$D(\beta)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

利用迪里黑里和傅茹兰积分,求下列积分之值:

【3816】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx$.

解 由于 $\sin 3\alpha x=3\sin\alpha x-4\sin^3\alpha x$,故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{3\sin\alpha x-\sin 3\alpha x}{4x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$

*) 利用 3812 题的结果.

【3818】 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx$.

解
$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^3\alpha x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2x^2}\sin^3\alpha x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}dx$$

$$=-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{3\alpha}{2x}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty}+\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x\cos^2\alpha x-\alpha\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=3\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\frac{9}{2}\alpha^2\cdot\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha^{*)}=\frac{3\pi}{8}\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha=\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|.$$

*) 利用 3816 题的结果.

【3835】 对于函数 $f(t)$,求拉普拉斯变换

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t\quad(p>0).$$

设:(6) $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

解 (6) $F(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

由于 $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{t}=0$, 故函数 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ 有界:

$$0<\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\leqslant M=\text{常数}\quad(0<t<+\infty)$$

由此可知,当 $p>0$ 时,积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ 收敛,并且

$$0<F(p)\leqslant M\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{M}{p}\quad(0<p<+\infty).\tag{1'}$$

再考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(\mathrm{e}^{-pt}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}(\mathrm{e}^{-t}-1)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\qquad(p>0),$$

它对 $p\geqslant p_0>0$ 是一致收敛的.因此,当 $p\geqslant p_0$ 时,可对函数 $F(p)$ 应用莱布尼兹法则,得

$$F'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\quad(\text{当 }p\geqslant p_0\text{ 时}),$$

由 $p_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $p>0$ 均成立.两端积分,得

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}+C\quad(0<p<+\infty),\tag{2'}$$

其中 C 是某常数.由(1')式知,

$$\lim_{p\to+\infty}F(p)=0.$$

于是,在(2')式两端令 $p\to+\infty$,取极限,得 $C=0$.由此可知

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

【3839】 计算在概率论中有重要意义的积分

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}}\mathrm{d}\xi\quad(\sigma_1>0,\sigma_2>0).$$

解 注意到

$$\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}=\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2-2\sigma_1^2x\xi+\sigma_1^2x^2]$$

并令 $$a=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\quad b=-\frac{\sigma_1^2 x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\quad c=\frac{\sigma_1^2 x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

即得 $$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)}\,d\xi=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}\ *)$$

将 a,b,c 的表达式代入上式，并令 $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$，化简整理得

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

*) 利用 3804 题的结果.

§4. 尤拉积分

1. Γ—函数 当 $x>0$ 有：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Γ—函数的基本性质由下面的递推公式所表示出来

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

设 n 为正整数，则 $\Gamma(n)=(n-1)!$；

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2. 余元公式 当 x 不等于正整数时有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

此公式可用来定义自变量为负值的 Γ 函数.

3. B—函数 当 $x>0$ 及 $y>0$ 有

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

下公式正确

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

【3841】 证明：Γ—函数 $\Gamma(x)$ 在域 $x>0$ 内是连续的并有各阶连续导函数.

证 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$,

当 $x\geqslant x_0>0$ 时，$0<t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{x_0-1}e^{-t}$ $(0<t<1)$，而 $\int_0^1 t^{x_0-1}e^{-t}dt$ 收敛，故 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 当 $x\geqslant x_0$ 时一致收敛；又当 $x\leqslant x_1$ 时，$t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{x_1-1}e^{-t}$ $(t\geqslant1)$，而 $\int_1^{+\infty}t^{x_1-1}e^{-t}dt$ 收敛，故当 $x\leqslant x_1$ 时 $\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 一致收敛.由此可知，积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 当 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时一致收敛.因此，$\Gamma(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上连续.由 x_0 及 x_1 $(x_1>x_0>0)$ 的任意性，即知 $\Gamma(x)$ 在整个域 $x>0$ 上连续.

考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t})dx=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt.$$

当 $x\geqslant x_0>0$ 时，$|t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}|\leqslant t^{x_0-1}|\ln t|$ $(0<t\leqslant 1)$，而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}|\ln t|dt$ 收敛（这是因为 $\lim\limits_{t\to+0}t^{1-\frac{x_0}{2}}\cdot t^{x_0-1}|\ln t|=\lim\limits_{x\to+0}(-t^{\frac{x_0}{2}}\ln t)=0$），故积分 $\int_0^1 t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt$ 当 $x\geqslant x_0>0$ 时一致收敛.

同样，当 $x\leqslant x_1$ 时，$|t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}|\leqslant t^{x_1}e^{-t}$ $(t\geqslant 1)$，这是因为 $t\geqslant 1$ 时 $0\leqslant\ln t<t$；而积分 $\int_1^{+\infty}t^{x_1}e^{-t}dt$ 收敛，故积分 $\int_1^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt$ 当 $x\leqslant x_1$ 时一致收敛.因此，积分 $\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt$ 当 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时一致收敛.由此可知 $\Gamma(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上具有连续的导函数 $\Gamma'(x)$ 且可在积分号下求导数，得

$$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt \tag{1}$$

由 x_0，x_1，的任意性可知 $\Gamma'(x)$ 在 $x>0$ 上连续，且(1)式对一切 $x>0$ 皆成立.

完全类似地，可证 $\Gamma''(x)$ 在 $x>0$ 上连续，且可在(1)式积分号下求导数.一般地，由数学归纳法可知，对任何正整数 n，$\Gamma^{(n)}(x)$ 在 $x>0$ 上都存在连续，并且可在积分号下求导数，得

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(\ln t)^n\cdot e^{-t}dt\quad(x>0).$$

【3842】 证明：B—函数 $B(x,y)$ 在域 $x>0$，$y>0$ 内是连续的并有各阶连续导函数.

证 由于当 $x\geqslant x_0>0$，$y\geqslant y_0>0$ 时，恒有

$$0<t^{x-1}(1-t)^{y-1}\leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}\quad(0<t<1),$$

而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}$ 收敛，故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 在 $x\geqslant x_0$，$y\geqslant y_0$ 上一致收敛，从而 $B(x,y)$ 是 $x\geqslant x_0$，$y\geqslant y_0$ 上的二元连续函数.由 $x_0>0$，$y_0>0$ 的任意性知，$B(x,y)$ 在整个域 $x>0$，$y>0$ 上连续.

考虑积分

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}[t^{x-1}(1-t)^{y-1}]dt=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t dt.$$

由于当 $x\geqslant x_0>0$，$y\geqslant y_0>0$ 时，恒有

$$|t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t|\leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|\quad(0<t<1),$$

而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|dt$ 收敛

（因为 $\lim\limits_{t\to+0}t^{1-\frac{x_0}{2}}t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|=-\lim\limits_{t\to+0}t^{\frac{x_0}{2}}\ln t=0$，

$\lim\limits_{t\to1-0}(1-t)^{1-\frac{y_0}{2}}\cdot t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|=-\lim\limits_{t\to1-0}(1-t)^{\frac{y_0}{2}}\ln t=0$），

故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t dt$ 当 $x\geqslant x_0$，$y\geqslant y_0$ 时一致收敛.因此，当 $x\geqslant x_0$，$y\geqslant y_0$，时可在积分号下对 x 求导数，得

$$B'_x(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t dt, \tag{1}$$

并且 $B'_x(x,y)$ 是 $x\geqslant x_0$，$x\geqslant y_0$ 上的连续函数.由 $x_0>0$，$y_0>0$ 的任意性知，(1)式对一切 $x>0$，y

>0 皆成立，并且 $B'_x(x,y)$ 是域 $x>0, y>0$ 上的二元连续函数. 同理可证 $B'_y(x,y)$ 是域 $x>0, y>0$ 上的二元连续函数，并且 $x>0, y>0$ 时，可在积分号下对 y 求导数，得

$$B'_y(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln(1-t)\mathrm{d}t.$$

完全类似地，利用数学归纳法，可证 $\dfrac{\partial^n B(x,y)}{\partial x^i \partial y^{n-i}}$ 在域 $x>0, y>0$ 上存在连续，并且

$$\frac{\partial^n B(x,y)}{\partial x^i \partial y^{n-i}}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ln t)^i[\ln(1-t)]^{n-i}\mathrm{d}t.$$

利用尤拉积分计算下列积分：

【3843】 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2!}.$

由于

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi,$$

故 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. 于是，$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

【3845】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$

解 设 $\dfrac{x}{1+x}=t$，则 $x=\dfrac{t}{1-t}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$，代入即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

【3848】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x.$

解 设 $t=\sin x$，则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x=\int_0^1 t^6(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$. 再作代换 $t=\sqrt{u}$，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{5}{2}}(1-u)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{5!}=\frac{3\pi}{512}.$$

【3850】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ （n 为正整数）.

解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{2n-1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

求下列积分的存在域，并用尤拉积分来表示下面这些积分：

【3851】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x\quad(n>0)$.

解 令 $x^n=t$，再令 $\frac{t}{1+t}=u$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1}(1-u)^{\frac{n-m}{n}-1}\mathrm{d}u,$$

此积分的存在域为 $\frac{m}{n}>0$ 及 $\frac{n-m}{n}>0$，即 $0<m<n$. 此时，我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n},\frac{n-m}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

【3854】 $\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\frac{b+c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x+c}=t$，则 $x=\frac{a+lct}{1-lt}$，其中 $l=\frac{b-a}{b+c}$，且

$$x-a=\frac{(a+c)lt}{1-lt},\quad x-b=\frac{(a-b)+(b+c)lt}{1-lt},\quad x+c=\frac{a+c}{1-lt},\quad \mathrm{d}x=\frac{(a+c)l}{(1-lt)^2}\mathrm{d}t.$$

代入即得

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\mathrm{d}x&=(-1)^n\frac{l^{m+1}}{(a+c)^{n+1}}\int_0^1 t^m[(a-b)+(b+c)lt]^n\mathrm{d}t\\&=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\int_0^1 t^m(1-t)^n\mathrm{d}t\\&=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\mathrm{B}(m+1,n+1),\end{aligned}$$

存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$.

【3856】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$.

解 令 $\sin x=t$，再令 $t^2=u$，即得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x&=\int_0^1 t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\end{aligned}$$

存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$.

【3868】 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$.

解 设 $1-x=t$，则有

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)\mathrm{d}t=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x.$$

相加即得

$$\begin{aligned}2\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\mathrm{d}x=\ln\pi-\int_0^1\ln\sin\pi x\mathrm{d}x=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ln\sin t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,dt\right]=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=\ln 2\pi.$$

于是，$\int_0^1\ln\Gamma(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2\pi=\ln\sqrt{2\pi}$.

*) 利用 2353 题(1)的结果.

【3871】 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx$ （n 为自然数）.

解 设 $x=1-t$，则有

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)\cos 2n\pi t\,dt=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\cos 2n\pi x\,dx.$$

等式两端同加 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx$，得

$$2\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx=\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\cos 2n\pi x\,dx$$

$$=\int_0^1(\ln\pi-\ln\sin\pi x)\cos 2n\pi x\,dx=-\int_0^1\cos 2n\pi x\ln\sin\pi x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2nt\ln\sin t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}\sin 2nt\ln\sin t\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}dt$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}dt=\frac{1}{4n\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt+\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}dt\right]=\frac{1}{4n\pi}(\pi+\pi)^{*)}=\frac{1}{2n}.$$

于是，$\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx=\frac{1}{4n}$.

*) 利用 2291 题的结果.

证明等式：

【3872】 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$.

证 首先，我们将积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx\quad(p>0,q>0,m>0)$$

表成 B—函数或 Γ—函数. 作代换 $x^m=u$，即得

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx=\frac{1}{m}\int_0^1 u^{\frac{p}{m}-1}(1-u)^{q-1}du=\frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right)=\frac{1}{m}\,\frac{\Gamma(\frac{p}{m})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{p}{m}+q)}.$$

利用此结果，即可证得

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4^2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4^2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{\pi}{4}.$$

【3879】 求曲线

$$r^n=a^n\cos n\varphi\quad(a>0,n\text{ 为自然数})$$

的弧长.

解 所求的弧长为

$$s=2n\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi=2na\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos^{\frac{1}{n}-1}n\varphi\mathrm{d}\varphi=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{n}-1}t\mathrm{d}t=a\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)^{*)}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

【3880】 求由曲线

$$|x|^n+|y|^n=a^n\quad(n>0,a>0)$$

所界的面积.

解 所求的面积为

$$A=4\int_0^a(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{4a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4a^2}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right)=\frac{4a^2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right)}=\frac{2a^2}{n}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

§5. 福里叶积分公式

1.用福里叶积分表示函数 如果：1)函数 $f(x)$在$-\infty<x<+\infty$内有定义；2)在每一个有穷的区间内此函数和它的导函数 $f'(x)$皆是逐段连续；3)在区间$(-\infty,+\infty)$内绝对可积分，则在函数连续的一切点，可把函数表成福里叶积分的形式

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda,\tag{1}$$

式中 $$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi\quad\text{及}\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

在函数 $f(x)$不连续的各点，公式(1)的左端应用$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$代换.

对于偶函数 $f(x)$关于不连续的点应加以同样的附注，公式(1)给出：

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda.\tag{2}$$

其中 $$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

同样对于奇函数 $f(x)$可得：

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda,\tag{3}$$

其中 $$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

2.在区间$(0,+\infty)$内用福里叶积分表示函数 已知函数 $f(x)$于区间$(0,+\infty)$内绝对可积分并有性质(2)，则在已知区间内可按我们的愿望用公式(2)(偶式展拓的时候)，或用公式(3)(奇式展拓的时候)来表示出函数 $f(x)$.

用福里叶积分表示下列函数：

【3881】 $f(x)=\begin{cases}1, & 若|x|<1;\\ 0, & 若|x|>1.\end{cases}$

解 由于函数 $f(x)$在$|x|\neq1$上有定义，且 $f(x)$和 $f'(x)$在任何有穷区间上皆逐段连续，特别是 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

故可将 $f(x)$表成福里叶积分的形式(以下各题如不加说明，均满足福里叶积分展式成立的条件).又由于 $f(x)$为偶函数，故$b(\lambda)=0$，且

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}.$$

于是，当$|x|\neq1$时($|x|\neq1$为 $f(x)$的连续点)，有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda;$$

而当$|x|=1$时为不连续点，由于

$$\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},\qquad\frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

故有 $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}$.

【3882】 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & 若|x|<1;\\ 0, & 若|x|>1.\end{cases}$

解 由于 $f(x)$为奇函数，故 $a(\lambda)=0$，且

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}.$$

于是，当$0<|x|\neq1$时为连续点，故有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda,$$

当 $x=0$时，虽为不连续点，但由于$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=0$，$f(0)=0$，且右端积分显然为零，故上式仍成立.而当$|x|=1$时为不连续点，由于

$$\frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2}=-\frac{1}{2},\quad\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

故有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda\operatorname{sgn}x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x.$$

【3895】 用福里叶积分来表示函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\quad(0<x<+\infty).$$

(1)用偶式延拓；(2)用奇式延拓.

解 首先，我们注意到函数 e^{-x}在$[0,+\infty]$内连续且绝对可积：$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1<+\infty$，故对于

(1) 若用偶式延拓，则有

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\xi}\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是，$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda \quad (0<x<+\infty).$$

由于按偶式延拓的函数在点 $x=0$ 连续，故上式当 $x=0$ 时也成立，即上式成立的范围是 $0\leqslant x<+\infty$.

(2)若用奇式延拓，则有

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\xi}\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是，$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda \quad (0<x<+\infty).$$

但当 $x=0$ 时上式不成立.事实上，左端的值为 1，而右端的值为零.

对于函数 $f(t)$，求出福里叶变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt.$$

若：

【3896】 $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

解 $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}(\cos tx-i\sin tx)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}\cos txdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos txdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}.$$

【3898】 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

解 $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(\cos tx-i\sin tx)dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos txdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}{}^{*)}=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

*) 利用 3809 题的结果.

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1.二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x,y)$展布在有限封闭可求积二维域 Ω内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_i|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$，而其和为对所有 i,j 使$(x_i,y_i)\in\Omega$的那些值来求的.

若域 Ω由下面的不等式所给出

$$a\leqslant x\leqslant b,\qquad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x).$$

其中 $y_1(x)$和 $y_2(x)$为在闭区间$[a,b]$上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2.二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

把平面 Oxy上的有限域 Ω单值惟一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω'及雅哥比式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0,$$

则下之公式正确：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]|I|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别是，根据公式 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，变换为极坐标 r 和 φ 的情形有

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

【3911】　设 $f(x)$为在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$内的连续函数，证明不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

此处仅当 $f(x)$=常数时等号成立.

证　因为

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y\\&=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$=常数时，显然上式中等号成立.反之，设上式中等号成立，则

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 \mathrm{d}y=0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b [f(x)-f(y)]^2 \mathrm{d}y$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $F(x)\equiv 0\ (a\leqslant x\leqslant b)$.

特别 $F(a)=0$，即 $\int_a^b [f(a)-f(y)]^2=0$. 又由于函数

$$G(y)=[f(a)-f(y)]^2$$

是 $a\leqslant y\leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $G(y)\equiv 0\ (a\leqslant y\leqslant b)$. 因此，$f(y)\equiv f(a)\ (a\leqslant y\leqslant b)$，即 $f(x)=$ 常数. 证毕.

【3912】 下列积分有什么样的符号：

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(3) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

解 (2)我们有 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2-I_3$，其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

显然

$$0<I_1<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,\quad I_2>0,\quad I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\pi=2\pi,$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(3)我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零，第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数，因而，积分值是正的. 于是，原积分是正的.

【3914】 利用中值定理，估计积分

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

之值.

解 由于积分域的面积为 200，故由积分中值定理知，

$$I=\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot 200=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\tag{1}$$

其中 (ξ,η) 为域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 中的某点.

显然 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2$，我们证明必有

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2.\tag{2}$$

由于函数 $\cos^2 x+\cos^2 y$ 在有界闭域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 上的最大值为 2，最小值为 0. 从而，连续函数 $\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$ 在有界闭域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 上的最小值为 $\frac{1}{102}$，最大值为 $\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2\xi+$

$\cos^2\eta=2$,则由(1)式知,

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0.$$

但 $f(x,y)=\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\dfrac{1}{102}$是非负连续函数,从而,必有 $f(x,y)\equiv 0$(在域$|x|+|y|\leqslant 10$上),即 $\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2$(在域$|x|+|y|\leqslant 10$上).这显然是错误的.由此可知,$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$.同理可证 $\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$.于是,(2)式成立.从而,得

$$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100},\quad 即\quad 1.96<I<2.$$

在问题 3916～3922 中对二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 内按所指示的区域 Ω 依两个不同的顺序安置积分的上下限.

【3917】 Ω—以 $O(0,0)$,$A(2,1)$,$B(-2,1)$为顶点的三角形.

解 如图 3917 所示

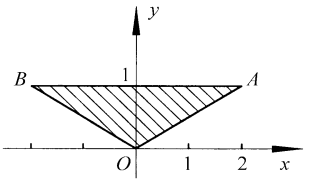

图 3917

OA 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$,OB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$,AB 的方程为 $y=1$.于是,

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

【3922】 Ω—圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 如图 3922 所示.若先对 y 后对 x 积分,则

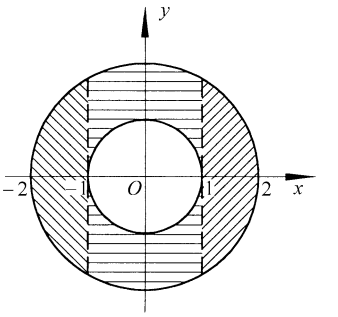

图 3922

$$\begin{aligned}I=&\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\\&+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\right.\\&\left.+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\right\}\\&+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

若先对 x 后对 y 积分,则

$$\begin{aligned}I=&\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\left\{\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right.\\&\left.+\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right\}+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在下列积分中改变积分的顺序：

【3925】 $\int_{-6}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 积分域的围线为：$y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x^2}{4}$，其交点为 $(2,0),(-6,8)$，如图 3925 所示.改变积分的顺序，即得

$$\int_{-6}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{8}\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

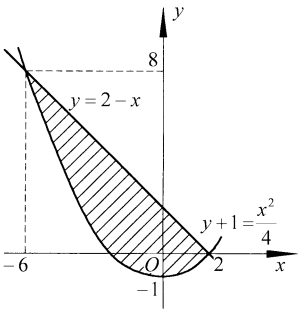

图 3925

【3929】 $\int_{0}^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$ $(a>0)$.

解 积分域由围线 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (y\geqslant 0)$，$y^2=2ax\ (y\geqslant 0)$ 及 $x=2a$ 组成.如图 3929 中阴影部分所示.改变积分的顺序，即得

$$\int_{0}^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x\right\}+\int_{a}^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

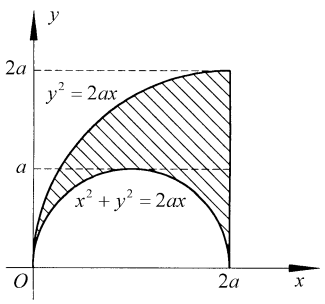

图 3929

计算下列积分：

【3933】 $\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$，设 Ω 是由圆心在点 (a,a) 半径为 a 且与坐标轴相切的圆周的较短弧和坐标轴所围成的区域.

解 如图 3933 所示.当 x 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 x，y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$.于是，

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}$$
$$=\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}\int_{0}^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{0}^{a}\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}-\int_{0}^{a}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$$

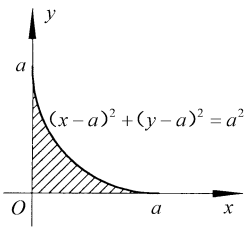

图 3933

【3936】 $\iint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 Ω 是由横轴和摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的第一拱所界的区域.

解 $\iint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_{0}^{y}y^2\mathrm{d}x=\frac{a^4}{3}\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t$

$$=\frac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}\,dt=\frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\,du=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\,du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^8u\,du\right\}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\,du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8u\,du\right\}=\frac{2^5a^4}{3}\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\,du^{*)}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot2\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\pi}{2}^{**)}=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

*) 参看 2282 题的结果.

**) 参看 2281 题的结果.

在二重积分 $\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\,dx\,dy$ 中,假定 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$,变换为极坐标 r 和 φ,并配置积分的限,设:

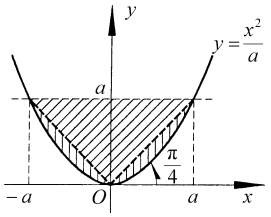

图 3941

【3941】 Ω—抛物线节 $-a\leqslant x\leqslant a$; $\frac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant a$.

解 如图 3941 所示.区域 Ω 可分为三部分:

(1)当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$,其中 $r=\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=\frac{x^2}{a}$ 的极坐标方程;

(2)当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{3\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\frac{a}{\sin\varphi}$;

(3)当 φ 从 $\frac{3\pi}{4}$ 变到 π 时,对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

于是,

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}f(r\cos\varphi,r\cos\varphi)\,r\,dr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr.$$

在下列积分中,假定 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$,变换为极坐标 r 和 φ,并依两种不同的顺序配置积分的限:

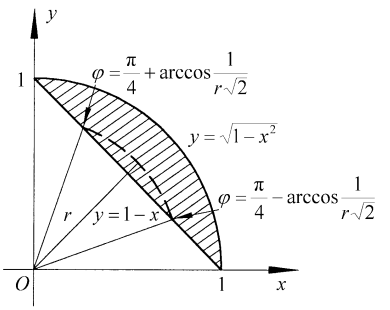

图 3944

【3944】 $\int_0^1dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy.$

解 如图 3944 所示.若先对 r 积分,则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,对于每一固定的 φ, r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})$ 变到 1.若先对 φ 积分,则当 r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 变到 1 时,对于每一固定的 r, φ 从 $\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$ 变到 $\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$,其中直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为

$$r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\frac{1}{r\sqrt{2}}$ 或 $\frac{\pi}{4}-\varphi=\pm\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$.于是,

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^1 f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

【3946】$^+$ $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y.$

解 如图 3946 所示.若先对 r 积分,则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 变到 $\frac{1}{\cos\varphi}$,其中 $r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程.

若先对 φ 积分,则当 r 从 0 变到 1 时,对于每一固定的 r,φ 从 0 变到 $\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$(由 $r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 解出 φ);当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时,对于每一固定的 r,φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$.于是,

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

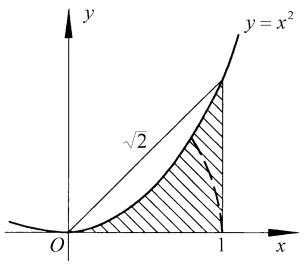

图 3946

假定 r 和 φ 为极坐标,在下列积分中变更积分的顺序:

【3948】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)\mathrm{d}r$ $(x\geqslant 0)$.

解 积分域为由圆

$$r=a\cos\varphi \text{ 或 } \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

所围成的圆域.

若先对 φ 积分,则当 r 从 0 变到 a 时,对于每一固定的 r,φ 从 $-\arccos\frac{r}{a}$ 变到 $\arccos\frac{r}{a}$(图 3948).于是,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)\mathrm{d}r=\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi,r)\mathrm{d}\varphi.$$

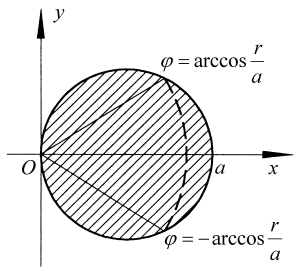

图 3948

变换成极坐标，以一重积分来代替二重积分：

【3952】 $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $\Omega=\{|y|\leqslant|x|;|x|\leqslant 1\}$.

解 域 Ω 如图 3952 所示. 先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时，φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$. 于是，

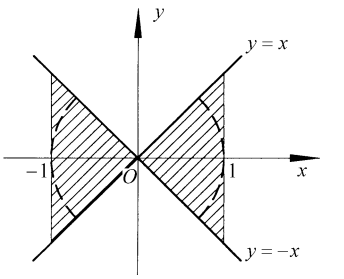

图 3952

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi+4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\\&=\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

变换成极坐标，以计算下列二重积分：

【3955】 $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi}^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r=2\pi\int_{\pi}^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r=-6\pi^2$.

引入新的变量 u,v 来代替 x,y 并确定下列二重积分中的积分限：

【3958】 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$，若 $u=x+y,v=x-y$.

解 在变换 $u=x+y$，$v=x-y$ 下，区域 $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant 2,1-x\leqslant y\leqslant 2-x\}$ 变为 $\Omega=\{1\leqslant u\leqslant 2,-u\leqslant v\leqslant 4-u\}$. 事实上，$u+v=2x$，$u-v=2y$，故 $0\leqslant u+v\leqslant 4$，即 $-u\leqslant v\leqslant 4-u$. 变换的雅可比式 $I=-\frac{1}{2}$，从而，$|I|=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}u\int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\mathrm{d}v.$$

【3959】 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，$x=0$，$y=0(a>0)$ 所界的区域，若

$$x=u\cos^4 v,\qquad y=u\sin^4 v.$$

解 Ω 的界线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x=a\cos^4 v,\qquad y=a\sin^4 v\quad\left(0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换 $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$,有 $|I|=4|u\cos^3 v\cdot\sin^3 v|$,且区域 Ω 变为 $\Omega'=\left\{0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.于是,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^a u\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v f(u\cos^4 v, v\sin^4 v)\mathrm{d}v$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v\mathrm{d}v\int_0^a u f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\mathrm{d}u.$$

计算下列二重积分:

【3967】 $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其积分域 Ω 是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所界的域.

解 作变换:$x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$,则域 Ω 变为域 $\Omega'=\left\{0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}$,且 $|I|=ab\rho$.于是,

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 ab\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho=2\pi ab\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi ab}{3}.$$

【3973】$^+$ $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解
$$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x^2}}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

*) 参看 1750 题的结果.

计算不连续函数的积分:

【3974】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 当 $y^2-x^2<2$ 时,$\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)=1$;

当 $y^2-x^2>2$ 时,$\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;

当 $y^2-x^2=2$ 时,$\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)=0$.

现将域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 分成 Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 和 Ω_5 五部分,其界线分别为 $x^2+y^2=4$, $y^2-x^2=2$, $x=\pm 1$(图 3974).当点在 Ω_1 和 Ω_5 中时,$y^2-x^2>2$,故 $\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;当点在 Ω_2、Ω_3 和 Ω_4 中时,$y^2-x^2<2$,故 $\mathrm{sgn}(x^2-y^2+2)=1$.于是,

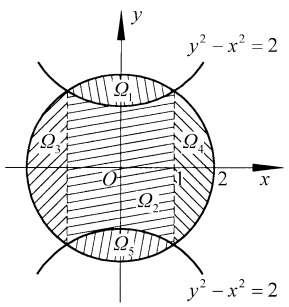

图 3974

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\iint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Omega_5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-4\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y+4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}y+4\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y$$
$$=8\int_0^1\sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x+4\left(\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

【3975】 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

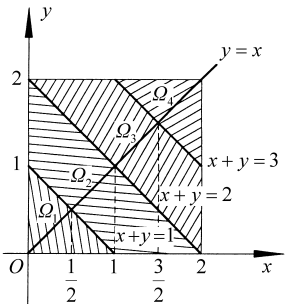

图 3975

解 当 $0\leqslant x+y<1$ 时，$[x+y]=0$；
当 $1\leqslant x+y<2$ 时，$[x+y]=1$；
当 $2\leqslant x+y<3$ 时，$[x+y]=2$；
当 $3\leqslant x+y<4$ 时，$[x+y]=3$；
当 $x+y=4$ 时，$[x+y]=4$.

如图 3975 所示，域 $0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$ 可分为下列四部分：

Ω_1：$x+y\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$；
Ω_2：$1\leqslant x+y\leqslant 2$，$x=0$，$y=0$；
Ω_3：$2\leqslant x+y\leqslant 3$，$x=2$，$y=2$；
Ω_4：$x+y\geqslant 3$，$x\leqslant 2$，$y\leqslant 2$.

当点属于 Ω_1 的内部时，$[x+y]=0$；当点属于 Ω_2 的内部时，$[x+y]=1$；当点属于 Ω_3 的内部时，$[x+y]=2$；当点属于 Ω_4 的内部时，$[x+y]=3$. 于是，

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{\Omega_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_{\Omega_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\left[\int_{\frac12}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^x\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}\mathrm{d}y\right]+4\left[\int_1^{\frac32}\mathrm{d}x\int_{2-x}^x\mathrm{d}y+\int_{\frac32}^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{3-x}\mathrm{d}y\right]+6\int_{\frac32}^2\mathrm{d}x\int_{3-x}^x\mathrm{d}y$$
$$=2\left[\int_{\frac12}^1(2x-1)\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x\right]+4\left[\int_1^{\frac32}(2x-2)\mathrm{d}x+\int_{\frac32}^2\mathrm{d}x\right]+6\int_{\frac32}^2(2x-3)\mathrm{d}x=6.$$

【3977】 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数，证明：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证 作变换：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant a}}r^{m+n+1}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right]. \tag{1}$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi=\pi+t$，即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi=(-1)^m\cdot(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\sin^n t\mathrm{d}t. \tag{2}$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=-1$，因而，(1)式为零，当 m 和 n 均为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=1$，因而，(1)式等于

$$\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

但此被积函数在对称区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上为奇函数，故积分仍然为零.

总之，当 m 和 n 中至少有一个为奇数时，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

§2. 面积的计算法

Oxy 平面上域 S 的面积由公式

$$S=\iint\limits_S\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所给出.

求下列曲线所界的面积：

【3986】 $(x-y)^2+x^2=a^2\quad(a>0)$.

解 如图 3986 所示.所求面积的域为：

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad x-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant x+\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t\mathrm{d}t=4\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^2.$$

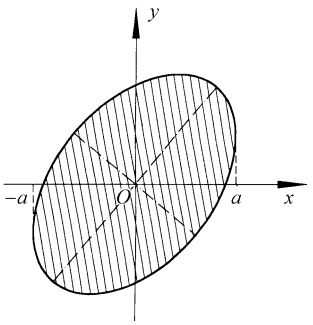

图 3986

变换为极坐标，以计算由下列曲线所界的面积：

【3987】 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$；$x^2+y^2\geqslant a^2$.

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2=2a^2\cos2\varphi\text{ 及 }r\geqslant a.$$

它们的交点在第一象限内为$(a,\frac{\pi}{6})$，如图 3987 所示.利用对称性，得所求面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{\sqrt{2a^2\cos2\varphi}}r\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos2\varphi-a^2)\mathrm{d}\varphi=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

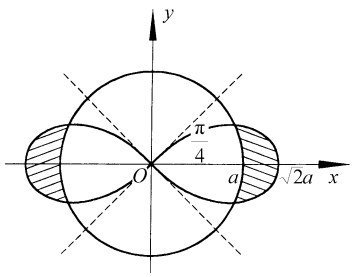

图 3987

根据公式

$$x=ar\cos^{\alpha}\varphi,\qquad y=br\sin^{\alpha}\varphi\quad(r\geqslant 0)$$

引入普遍的极坐标(其中 a, b 和 α 以适当的方法选出的常数,且 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$),以求由下列曲线所界的面积(假定参数是正的):

【3995】 $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$.

解 令 $x=ar\cos^{8}\varphi$, $y=br\sin^{8}\varphi$,则方程化为

$$r=1\qquad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是,曲线所界的面积为

$$S=\iint_{S}8abr\cos^{7}\varphi\sin^{7}\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{7}\varphi\sin^{7}\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_{0}^{1}u^{7}(1-u^{2})^{3}\mathrm{d}u$$

$$=4ab\int^{1}(u^{7}-3u^{9}+3u^{11}-u^{13})\mathrm{d}u=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)=\frac{ab}{70}.$$

进行适当的变量代换,求由下列曲线所界的面积:

【3999】 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=2$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, $\dfrac{4x}{a}=\dfrac{y}{b}$ $(a>0,b>0)$.

解 作变换: $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=u$, $\dfrac{x}{y}=v$, 即

$$x=\left(\frac{u^{2}v}{\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}\right)^{2},\qquad y=\left(\frac{u^{2}}{\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}\right)^{2},$$

则 $1\leqslant u\leqslant 2$, $\dfrac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\dfrac{a}{b}$,且有

$$|I|=\left(\frac{2u^{3}}{\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}\right)^{4}.$$

于是,所求的面积为

$$S=\int_{1}^{2}2u^{3}\mathrm{d}u\int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}}\frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^{4}}=\frac{15}{2}\cdot\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\frac{2at\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^{4}}\quad{}^{*)}$$

$$=15a\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^{3}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+t\right)^{4}}\right]\mathrm{d}t=15a\cdot\left(\frac{7b}{72}-\frac{37b}{648}\right)=\frac{65ab}{108}.$$

*) 作代换 $v=at^{2}$.

【4001】 求由椭圆

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$$

(其中 $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq0$)所界的面积.

解 作变换:$a_1x+b_1y+c_1=u$, $a_2x+b_2y+c_2=v$,则椭圆所围成的域变为 $u^2+v^2\leqslant1$,且有 $|I|=\dfrac{1}{|\delta|}$. 于是,所求的面积为

$$S=\frac{1}{|\delta|}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|\delta|}.$$

§3. 体积的计算法

设柱体上顶是连续的曲面 $z=f(x,y)$,下底是平面 $z=0$,侧面为从平面 Oxy 中的可求面积的区域 Ω(图 8−3)竖起的垂直柱面所界定.

柱体的体积等于

$$V=\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

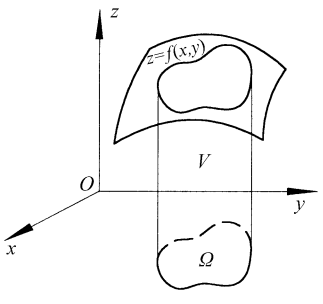

图 8−3

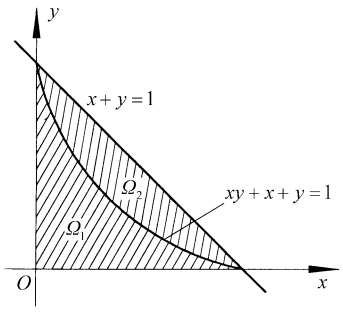

图 4012

求由下列曲面所界的体积:

【4012】 $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

解 体积 V 由两部分组成:

V_1: $0\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant\dfrac{1-x}{1+x}$, $z=xy$.

V_2: $0\leqslant x\leqslant1$, $\dfrac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant1-x$, $z=1-x-y$.

它们在 Oxy 平面上的射影域 Ω_1 及 Ω_2 如图 4012 所示.于是,所求的体积为

$$V=V_1+V_2=\int_0^1x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}y\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\left(-\frac{11}{4}+4\ln2\right)+\left(\frac{25}{6}-6\ln2\right)=\frac{17}{12}-2\ln2.$$

变换成极坐标，以求下列曲面所界定的体积：

【4014】 $z=x+y$，$(x^2+y^2)^2=2xy$，$z=0(x>0,y>0)$.

解 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则方程

$$(x^2+y^2)^2=2xy \quad 及 \quad z=x+y$$

变为

$$r^2=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi \quad 及 \quad z=r(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}}r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{\frac{5}{2}}\varphi\cos^{\frac{3}{2}}\varphi+\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot B\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!}=\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4016】 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2\geqslant a|x|$ $(a>0)$.

解 只须计算由下列曲面所围成的体积：

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2\leqslant a|x|.$$

若引用极坐标，则 $r^2+z^2=a^2$，$r^2\leqslant a|r\cos\varphi|$，其体积为

$$V_1=8\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}-\left(\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}\right)=\frac{16a^3}{9}.$$

求由下列曲面所界的体积(假定参数是正的)：

【4021】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$. 令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2} \quad 及 \quad z=cr \quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega}\left[c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}abr(c\sqrt{1-r^2}-cr)\mathrm{d}r=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{3}abc\int_0^{2\pi}\left[r^3+(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).$$

【4027】 $z^2=xy$，$x+y=a$，$x+y=b\ (0<a<b)$.

解 由于 $z=\pm\sqrt{xy}$，又所界立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由直线 $x+y=a$，$x+y=b$，$x=0$ 及 $y=0$ 围成.利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V=2\iint_\Omega\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\left(\int_0^a\mathrm{d}x\int_{a-x}^{b-x}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y+\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{b-x}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^a\left[\sqrt{x(b-x)^3}-\sqrt{x(a-x)^3}\right]\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_a^b\sqrt{x(b-x)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\int_0^a(a-x)\sqrt{a(a-x)}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x=b\sin^2 t$，可得

$$\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,\mathrm{d}x=2b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2b^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\,\mathrm{d}t\right)=2b^3\left(\frac{3\cdot1}{4\cdot2}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}\pi b^3;$$

同理，有 $$\int_0^a(a-x)\sqrt{x(a-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\pi a^3.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi b^3}{16}-\frac{\pi a^3}{16}\right)=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).$$

【4028】 $z=x^2+y^2$，$xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=\frac{x}{2}$，$y=2x$，$z=0$.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由曲线 $xy=a^2$，$xy=2a^2$ 和直线 $y=\frac{x}{2}$，$y=2x$ 围成.利用对称性知，曲面所界体积为

$$V=2\iint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量代换 $xy=ua^2$，$y=vx$，则积分域变为长方形域 $1\leqslant u\leqslant2$，$\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant2$，且

$$|I|=\frac{a^2}{2v},\qquad z=x^2+y^2=a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right).$$

于是，所求的体积为

$$V=2\iint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{\substack{1\leqslant u\leqslant2\\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant2}}a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)\frac{a^2}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=a^4\int_1^2u\,\mathrm{d}u\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v=\frac{9}{2}a^4.$$

§4. 曲面面积计算法

1.曲面由显函数给出的情形　平滑曲面 $z=z(x,y)$ 的面积由积分

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(其中 Ω 为已知曲面在 Oxy 平面上的射影)所表出.

2.曲面由参数方程给出的情形　若曲面的方程是用参数给出

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

其中 $(u,v)\in\Omega$,Ω 为封闭可求积的有界区域,假定函数 x,y 和 z 为在域 Ω 内连续可微分的函数,则对于曲面的面积有公式

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

【4040】 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 外那部分的面积(维维安尼问题).

解　只须求出球面被圆柱面割出部分的面积.因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是,利用对称性知,割出部分的面积为

$$S=8\iint\limits_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

因而,所求的面积为

$$A=4\pi a^2-S=4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2.$$

【4046】 求由曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$,$x+y+z=2a(a>0)$ 所界物体的表面积和体积.

解　曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,\quad \text{即}\quad x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$,$y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$,则方程变为

$$\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2}+\frac{y'^2}{(2a)^2}=1.$$

由此可见,曲面所界的物体在 Oxy 平面上的射影域为以 $2a$ 为短半轴、$2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆.

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成.对于 $z=2a-x-y$,$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ 分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3},\qquad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是,物体的表面积

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\sqrt{3}+2)\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2.$$

又所截圆锥之高为

$$H=\left|\frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

(即坐标原点到平面 $x+y+z=2a$ 的距离).于是,物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot A\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中 A 为截圆锥的底面积:

$$A=\iint_{\Omega}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a=12\pi a^2.$$

因此,所求物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot 12\pi a^2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3.$$

【4047】 求球壳被包含在两条纬线和两条经线间那部分的面积.

解 球壳的参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\psi,\quad y=R\sin\varphi\cos\psi,\quad z=R\sin\psi,$$

其中 R 为球的半径.因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi=R^2\cos^2\psi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+R^2\cos^2\psi=R^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi}=R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi-R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi+0=0,$$

故 $\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi$.于是,所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi\mathrm{d}\psi=(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2,$$

其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度,ψ_1 及 ψ_2 纬线的纬度.

§5. 二重积分在力学上的应用

1.重心 若 x_0 和 y_0 为平面 Oxy 内薄板 Ω 的重心坐标,$\rho=\rho(x,y)$ 为薄板的密度,则

$$x_0=\frac{1}{M}\iint_{\Omega}\rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad y_0=\frac{1}{M}\iint_{\Omega}\rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

其中 $M=\iint_{\Omega}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为薄板的质量.

若薄板是均匀的,则于公式(1)中应令 $\rho=1$.

2.转动惯量 I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量——用公式来表示

$$I_x=\iint_\Omega \rho y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad I_y=\iint_\Omega \rho x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2}$$

其中 $\rho=\rho(x,y)$为薄板的密度.

于公式(2)中假定 $\rho=1$,我们得到平面图形的几何转动惯量.

【4051】 求边长为 a 的正方形薄板的质量,设薄板上每一点的密度与该点距正方形顶点之一的距离成比例且在正方形的中点等于 ρ_0.

解 取坐标系如图 4051 所示,则密度 $\rho=k\sqrt{x^2+y^2}$.由于

$$\rho_0=k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

故 $k=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$.从而,$\rho=\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}$.

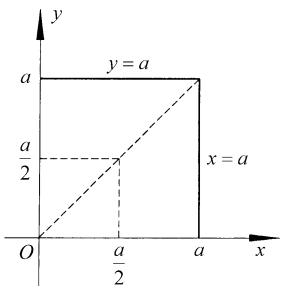

图 4051

若引用极坐标,即得质量

$$M=\iint_\Omega \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^2\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}r^2\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=\frac{\rho_0 a^2}{3}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\varphi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin^3\varphi}\right]=\frac{\rho_0 a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\varphi}=\frac{\rho_0 a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\,\mathrm{d}(\tan\varphi)$$

$$=\frac{\rho_0 a^2}{3}2\sqrt{2}\left[\frac{\tan\varphi}{2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\varphi+\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\rho_0 a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})].$$

求由下列曲线所界均匀薄板的重心坐标:

【4054】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0,y>0)$.

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=\rho\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t^{*)}$$

$$=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=3a^2\rho\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^2\rho}{32},$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\,\mathrm{d}x\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=\rho\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=3a^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^5 t\,\mathrm{d}t=\frac{8a^3\rho}{105}.$$

于是,重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知 $x_0=y_0=\frac{256a}{315\pi}$.

*) 作代换 $x=a\cos^3 t$.

【4060】 求由变动面积的重心所描写出来的曲线，所指的变动面积是被曲线

$$y=\sqrt{2px},\quad y=0,\quad x=X$$

所界的.

解 变动面积的质量

$$M=\rho\int_0^X \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{3}X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩

$$M_y=\rho\int_0^X x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{5}X^{\frac{5}{2}},\quad M_x=\rho\int_0^X\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y=\rho\frac{1}{2}pX^2.$$

于是，变动面积的重心为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}X,\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$$

因此，重心的轨迹方程为

$$y_0=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{p\cdot\frac{5}{3}x_0}=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0},$$

此即所求的曲线方程，其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所界的面积($\rho=1$)对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y：

【4063】 $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 曲线所界的平面域可表示为

$$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\varphi).$$

于是，

$$I_x=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^2\sin^2\varphi\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}a^4(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}(1+4\cos\varphi+6\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+\cos^4\varphi)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\pi a^4\cdot\frac{21}{16}=\frac{21}{32}\pi a^4.$$

$$I_y=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^2\cos^2\varphi\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+6\cos^4\varphi+4\cos^5\varphi+\cos^6\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

【4068】 证明：面积 S 对于通过重心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴组成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为面积 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为离心惯量：

$$I_{xy}=\iint_S\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$，使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α，则有

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

这就是旋转变换，雅哥比式的绝对值

$$|I|=\left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right|=1.$$

于是，

$$I=\iint_S y'^2\rho\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\iint_S(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\cos^2\alpha\iint_S\rho y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\iint_S\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sin^2\alpha\iint_S\rho x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha.$$

【4071】 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中的深度为 h(由球心量起),这里 $h\geqslant a$.求在球表面的上部和下部的液体压力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$,则在球面上的点(x,y,z)处沉入液体的深度 d 为

$$d=h-z\quad(-a\leqslant z\leqslant h).$$

于是,上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为:

$$d=h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},\quad d=h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$

根据对称性知,压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的射影均为零,故只要计算压力在 Oz 轴上的射影,液体作用于球面上部和下部的压力分别记以 p_1 和 p_2,并设 γ 为球上各点处压力的方向(即内法线方向)与 Oz 轴正向的夹角,则

$$p_1=\iint_{S_1}d\delta\cos\gamma\mathrm{d}S=-\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta\left[h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-h\pi a^2\delta+\delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r=-h\pi a^2\delta+\left[\frac{-2\pi\delta}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\right]\Bigg|_0^a$$
$$=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{2a}{3}\right)\quad(p_1<0\text{ 表示压力向下}).$$

同理,我们有

$$p_2=\iint_{S_2}d\delta\cos\gamma\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta\left[h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right)$$

($p_2>0$ 表示压力向上).

§6. 三重积分

1.三重积分的直接计算法 设函数 $f(x,y,z)$是连续的,且有界域 V 由下列不等式确定出来:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),$$

其中 $y_1(x)$,$y_2(x)$,$z_1(x,y)$,$z_2(x,y)$皆为连续函数,则函数 $f(x,y,z)$展布于域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

来计算.有时采用下面的公式也很方便

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\iint_{S(x)}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $S(x)$是用平面 $X=x$ 截域 V 所得的截断面.

2.三重积分中的变量代换 若 $Oxyz$ 空间的有界三维闭域 V 借助于下列连续可微分的函数双方单值地反应到 $O'uvw$ 空间的域 V'

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w),$$

并且当 $(u,v,w)\in V'$ 时，

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0,$$

则下面的公式成立

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\,|I|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

在特殊情况下，有：1) 圆柱坐标系 φ,r,h，其中

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,\quad 及\quad \frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,r,h)}=r.$$

2) 球坐标系 φ,ψ,r，其中

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,\quad 及\quad \frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\psi,r)}=r^2\cos\psi.$$

计算下列三重积分：

【4079】 $\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，此处 V 是由曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所界的区域.

解 设 P_x,Q_y,R_z 分别表示立体 V 与平面 $x=$常数，$y=$常数，$z=$常数所截部分在 Oyz，Ozx，Oxy 平面上的射影，则有

$$\begin{aligned}
&\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\iint_{P_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}y\iint_{Q_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}z\iint_{R_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x^{*)}+\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z\\
&=3\cdot\frac{4\pi abc}{15}=\frac{4\pi abc}{5}.
\end{aligned}$$

*) P_x 在平面 $X=x$ 上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

故其面积为 $\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$.

Q_y 及 R_z 的面积类推.

【4080】 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是由曲面

$$x^2+y^2=z^2,\qquad z=1$$

所界的区域.

解 曲面在 Oxy 平面上的射影 Q 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$.于是，

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.$$

于下列三重积分内用各种方法来配置积分的限：

【4081】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

解 有界域 V 如图 4081(1)所示.

如果先对 y 积分，再对 z,x 积分，如图 4081(2)所示，则积分域在 Oyz 平面上的射影域由诸直线

$$z=0,\ z=x+y,\ y=0,\ y=1-x\quad (x\text{ 固定})$$

围成.于是，我们有

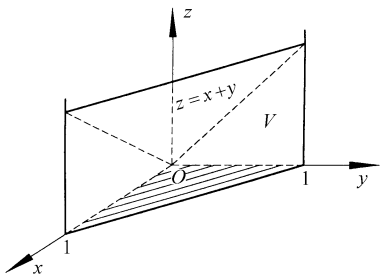

图 4081(1)

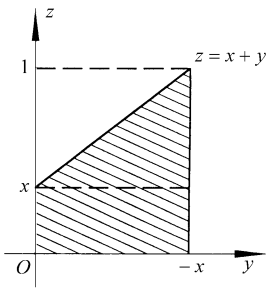

图 4081(2)

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\left\{\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_x^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y\right\}^{*)},$$

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，如图 4081(3)所示，则有

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\left\{\int_0^z\mathrm{d}y\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_z^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}f(x,y,z)\mathrm{d}x\right\}.$$

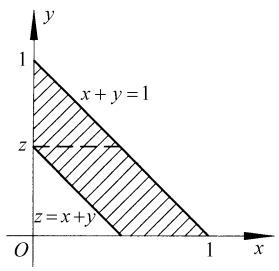

图 4081(3)

*) 这里用的公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b \mathrm{d}x\iint_{S(x)} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4083】 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

解 如果先对 y 积分，再对 z、x 积分，则积分域在 Oxy 平面上的射影域*）由方程

$$x=1,\ z=0,\ z=x^2 \quad 及 \quad x=0,\ x=1,\ z=x^2,\ z=x^2+1$$

所表示的线围成.于是，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\\ =&\int_0^1 \mathrm{d}x\left[\int_0^{x^2}\mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_{x^2}^{x^2+1}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y\right].\end{aligned}$$

如果先对 x 积分，再对 z、y 积分，不难由轮换对称关系得出结果.

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，则积分域在 Oyz 平面上的射影域由方程

$$y=1,\ z=0,\ y=\sqrt{z} \quad 及 \quad y=0,\ y=1,\ y=\sqrt{z},\ y=\sqrt{z-1}$$

所表示的线围成.于是，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\\ =&\int_0^1 \mathrm{d}z\left[\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{z}}^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x\right]\\ &+\int_1^2 \mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-1}}^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

*） 这里采用的投影方式与前两题不同，系用结果

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_1}^{y_2} f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

变换为球坐标以计算积分：

【4087】 $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，此处 V 是由曲面

$$x^2+y^2+z^2=z$$

所界的区域.

解 令 $x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，则曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 化为 $r=\sin\psi$.从而，

$$V:\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sin\psi,\ |I|=r^2\cos\psi.$$

于是，

$$\begin{aligned}\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sin\psi} r\cdot r^2\cos\psi\mathrm{d}r\\ &=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\cos\psi\mathrm{d}\psi=\frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

【4090】 进行适当的变量代换，以计算三重积分

$$\iiint_S \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

此处 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内部.

解 作变量代换

$$x=ar\cos\varphi\cos\psi,\quad y=br\sin\varphi\cos\psi,\quad z=cr\sin\psi,$$

则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$,且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分有

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是,

$$\iiint_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\ \sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^1 abcr^2\ \sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi abc}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2 abc}{4}.$$

【4091】 变换为圆柱坐标,以计算积分

$$\iiint_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

此处 V 是由曲面 $x^2+y^2=2z$, $z=2$ 所界的区域.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$,则 $x^2+y^2=2z$ 化为 $r^2=2z$.积分域

$$V:\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 2,\ \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2.\quad |I|=r.$$

于是,
$$\iiint_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2\mathrm{d}z=\frac{16\pi}{3}.$$

【4097】 证明:若函数 $f(x,y,z)$ 于域 V 内是连续的且对于任何的域 $\omega\subset V$

$$\iiint_\omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

则当 $(x,y,z)\in V$ 时, $f(x,y,z)\equiv 0$,

证 用反证法.若当 $(x,y,z)\in V$ 时, $f(x,y,z)\not\equiv 0$.不失一般性,设对于 V 的某内点 (x_0,y_0,z_0),有 $f(x_0,y_0,z_0)>0$,则由于 $f(x,y,z)$ 的连续性,故存在点 (x_0,y_0,z_0) 的某个闭邻域 $\omega'\subset V$,使当 $(x,y,z)\in\omega'$ 时, $f(x,y,z)>0$.这样一来,利用中值定理,即有

$$\iiint_{\omega'} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V_{\omega'}>0,$$

其中 $(\xi,\eta,\zeta)\in\omega'\subset V$.这与假设

$$\iiint_{\omega'} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\equiv 0$$

矛盾.因此,当 $(x,y,z)\in V$ 时, $f(x,y,z)\equiv 0$.

§7. 利用三重积分计算体积法

域的体积 V 由下公式来表示

$$V=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

求由下列曲面所界的体积：

【4104】 $az=x^2+y^2$，$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

解 对立体 V 在 Oxy 平面上的射影作极坐标变换

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$$

则域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant a,\quad \frac{r^2}{a}\leqslant z\leqslant r,$$

且有 $|J|=r$.于是，体积为

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{a}}^{r}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{6}.$$

【4105】 $az=a^2-x^2-y^2$，$z=a-x-y$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ $(a>0)$.

解 由 $az=a^2-x^2-y^2$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 所界的体积为

$$V_1=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{a^2-r^2}{a}r\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{8}.$$

由 $z=a-x-y$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 所界的体积为

$$V_2=\iiint\limits_{\substack{x+y+z\leqslant a\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0,\,z\geqslant 0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{a-x-y}\mathrm{d}z=\frac{a^3}{6}.$$

于是，所求的体积为 $V=V_1-V_2=\dfrac{a^3}{24}(3\pi-4)$.

变换为球坐标或圆柱坐标，以计算曲面所界的体积：

【4107】 $x^2+y^2+z^2=2az$，$x^2+y^2\leqslant z^2$.

解 变换为圆柱坐标，则有

$$r^2+z^2=2az\quad 及\quad r^2\leqslant z^2.$$

因而域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2}\ ^{*)}.$$

于是，体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a r(a+\sqrt{a^2-r^2}-r)\mathrm{d}r\\&=2\pi\left[\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^a=\pi a^3.\end{aligned}$$

*) 球面的方程应该是 $z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$，但因体积 V 的一部分为球 $x^2+y^2+z^2=2az$ 的

上半部，故取 $z=a+\sqrt{a^2-r^2}$.

【4109】 $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

解 立体在第一，第三，第六及第八卦限内，对于这些卦限分别有：

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0;\qquad x\leqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\geqslant 0;$$
$$x\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\leqslant 0;\qquad x\geqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\leqslant 0.$$

立体在这四个卦限内的各部分，一对一对地对称于坐标轴之一.这是因为左端及右端当 x,y,z 中的任何两个同时变号时等号不变.

变换为球坐标，计算得体积

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{3\cos^2\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi}}r^2\cos\psi\mathrm{d}r$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi=4\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(-\frac{1}{4}\cos^4\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

在下列各例中最好利用普遍的极坐标 r,φ 及 ψ（$r\geqslant 0$；$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$；$-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$），根据下列各式来引入它们

$$x=ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\quad y=br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\quad z=cr\sin^{\beta}\psi$$

（a,b,c,α,β 为常数），并且

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

计算下列曲面所界的体积：

【4111】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则域的 $\frac{1}{4}$ 部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}.$$

于是，体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{4a^2bc}{3h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\mathrm{d}\psi\right)=\frac{\pi a^2bc}{3h}.$$

【4115】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1$.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$，$y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$，$z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$，则有 $|I|=\frac{1}{2}abcr^2\cdot\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$ 且 $\frac{1}{8}$ 域 V（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{3}\pi abc\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi}^{**)}=\frac{1}{3}abc\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

*) 利用 3856 题的结果.

**) 利用余元公式:$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

利用适当的变量代换,以计算由曲面所界的体积(假定参数是正的):

【4119】$^{+}$ $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0, y>0)$.

解 令 $z=u(x^2+y^2)$, $xy=v$, $x=yw$,则

$$x=\sqrt{vw},\quad y=\sqrt{\frac{v}{w}},\quad z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right).$$

变换的雅哥比式为

$$I=\begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}}\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}}\\ vw+\frac{v}{w} & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(v-\frac{v}{w^2}\right)\end{vmatrix}=-\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right),$$

而域 V 为

$$1\leqslant u\leqslant 2,\quad a^2\leqslant v\leqslant 2a^2,\quad \frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2.$$

于是,体积为

$$V=\int_1^2 du\int_{a^2}^{2a^2} dv\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right)dw=\frac{3a^4}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{w^2}\right)dw=\frac{9a^4}{4}.$$

【4128】 求由曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$$

所界的体积,设

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

解 令

$$a_1x+b_1y+c_1z=u,\quad a_2x+b_2y+c_2z=v,\quad a_3x+b_3y+c_3z=w,$$

则有 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是,$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{\Delta}$,且体积为

$$V=\frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant h^2}dudvdw=\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

§8. 三重积分在力学上的应用

1.物体的质量　若一物体占有体积 V，$\rho=\rho(x,y,z)$为在点(x,y,z)的密度，则该物体的质量等于

$$M=\iiint_V \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

2.物体的重心　物体的重心坐标(x_0,y_0,z_0)按下列公式来计算

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint_V \rho x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint_V \rho y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint_V \rho z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

若物体是均匀的，则在公式(1)中可令 $\rho=1$.

3.转动惯量　积分

$$I_{xy}=\iiint_V \rho z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad I_{yz}=\iiint_V \rho x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad I_{zx}=\iiint_V \rho y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

分别称为物体对于坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l=\iiint_V \rho r^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(其中 r为物体的动点(x,y,z)与轴 l的距离)称为物体对于某轴 l的转动惯量.特别是，对于坐标轴 Ox,Oy,Oz分别有

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\quad I_y=I_{yx}+I_{yz},\quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

积分

$$I_0=\iiint_V \rho(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

称为物体对于坐标原点的转动惯量.

显而易见，有

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4.引力场的位　积分

$$u(x,y,z)=\iiint_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}$$

(其中 V为物体的体积，$\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$为物体的密度及

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$

称为物体在点 $P(x,y,z)$的牛顿位.

质量为 m的质点被物体吸引的力在坐标轴 Ox,Oy,Oz上的射影 X,Y,Z等于

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint\limits_V\rho\frac{\xi-x}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=km\iiint\limits_V\rho\frac{\eta-y}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

$$Z=km\frac{\partial u}{\partial z}=km\iiint\limits_V\rho\frac{\zeta-z}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

其中 k 为引力定律常数.

【4132】 若物体的密度按规律 $\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$（其中 $\rho_0>0$ 及 $k>0$ 为常数）而变更，求占有无限域 $x^2+y^2+z^2\geqslant1$ 的物体的质量.

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$，则质量为

$$\begin{aligned}M&=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant1}\rho_0\mathrm{e}^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_1^{+\infty}r^2\rho_0\mathrm{e}^{-kr}\cos\psi\mathrm{d}r\\&=4\pi\rho_0\int_1^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-kr}\mathrm{d}r=-\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}r^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-kr}=-\frac{4\pi\rho_0}{k}r^2\mathrm{e}^{-kr}\Big|_1^{+\infty}+\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}2r\mathrm{e}^{-kr}\mathrm{d}r\\&=\frac{4\pi\rho_0}{k}\mathrm{e}^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}r\mathrm{d}\mathrm{e}^{-kr}=\frac{4\pi\rho_0}{k}\mathrm{e}^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}r\mathrm{e}^{-kr}\Big|_1^{+\infty}+\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-kr}\mathrm{d}r\\&=4\pi\rho_0\mathrm{e}^{-k}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).\end{aligned}$$

求由下列曲面所界的均匀物体的重心坐标：

【4134】 $z=x^2+y^2$，$x+y=a$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{6}a^4.$$

重心的横坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2a}{5}.$$

同理可求得 $y_0=\frac{2a}{5}$，而

$$\begin{aligned}z_0&=\frac{1}{M}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{M}\int_0^a\left(\frac{a^5}{10}-\frac{1}{2}a^4x+\frac{4}{3}a^3x^2-2a^2x^3+2ax^4-\frac{14}{15}x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{7}{180}a^6=\frac{7}{30}a^2.\end{aligned}$$

于是，重心的坐标为 $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$，$z_0=\frac{7}{30}a^2$.

【4137】 $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$（$z>0$）.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^a(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{8a^3}{3}.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}x\mathrm{d}x=0.$$

同理可得 $y_0=0$,而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a z\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x=a^4\cdot\frac{3}{8a^3}=\frac{3}{8}a.$$

于是,重心的坐标为 $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{3}{8}a$.

求由下列曲面(参变量是正的)所界均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

【4144】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,则有

$$I_{xy}=abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^4\cos\psi\sin^2\psi\mathrm{d}r=\frac{abc^3}{5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{abc^3}{15}2\pi\sin^3\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

利用对称性可得 $I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$, $I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$.

【4151】 证明等式

$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$

其中 I_l 为物体对于某轴 l 的转动惯量,I_{l_0} 为对于平行于 l 并通过物体的重心的轴 l_0 的转动惯量,d 为轴与轴之间的距离及 M 为物体的质量.

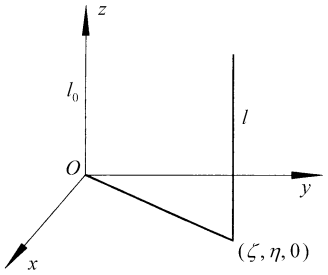

图 4151

证 以重心为坐标原点 O,z 轴与 l_0 重合,l 与 Oxy 平面的交点为$(\zeta,\eta,0)$,如图 4151 所示,则

$$I_l=\iiint_V[(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2]\rho\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_V(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}v+(\zeta^2+\eta^2)\cdot\iiint_V\rho\mathrm{d}v-2\zeta\iiint_V x\rho\mathrm{d}v-2\eta\iiint_V y\rho\mathrm{d}v \tag{1}$$

由于重心在原点,故 $x_0=y_0=0$,即

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint_V x\rho\mathrm{d}v=0 \quad 及 \quad y_0=\frac{1}{M}\iiint_V y\rho\mathrm{d}v=0,$$

并且

$$M=\iiint_V\rho\mathrm{d}v,\ d^2=\zeta^2+\eta^2,$$

代入(1)式,最后得

$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$

【4152】 证明:体积为 V 的物体对于过其重心 $O(0,0,0)$并与坐标轴成角 α,β,γ的轴 l 的转动惯量等于

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma,$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对于坐标轴的转动惯量及

$$K_{xy}=\iiint_V \rho xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad K_{xz}=\iiint_V \rho xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad K_{yz}=\iiint_V \rho yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

为离心距.

证 如图 4152 所示.距离

$$d=\frac{|\overline{O}M\times\overline{O}M'|}{|\overline{O}M'|}=\frac{1}{r}\sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r\cos\beta & r\cos\gamma \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ r\cos\gamma & r\cos\alpha \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ r\cos\alpha & r\cos\beta \end{vmatrix}^2}$$

其中 $r=|\overline{O}M'|$.由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,故有

$$d^2=(x^2+y^2)\cos^2\gamma+(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(z^2+x^2)\cos^2\beta$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta-2yz\cos\beta\cos\gamma-2xz\cos\alpha\cos\gamma.$$

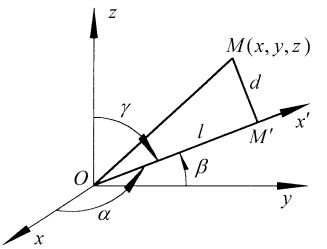

图 4152

于是,

$$\begin{aligned} I_l&=\iiint_V \rho d^2\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=\cos^2\gamma\iiint_V \rho\cdot(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\quad+\cos^2\alpha\iiint_V \rho\cdot(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\quad+\cos^2\beta\iiint_V \rho\cdot(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\cos\alpha\cos\beta\iiint_V \rho xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\quad-2\cos\beta\cos\gamma\iiint_V \rho yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\cos\gamma\cos\alpha\iiint_V \rho xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \end{aligned}$$

证毕.

【4155】 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 在点(x,y,z)的牛顿位.

解 由对称性显然可知,所求的牛顿位与 ξ,η,ζ 轴取的方向无关.今取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$,即得牛顿位

$$u(x,y,z)=\iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\rho_0\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}}=\rho_0\int_{-R}^{R}\mathrm{d}\zeta\iint_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.积分之,得

$$u(x,y,z)=2\pi\rho_0\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}-|\zeta-r|\right)\mathrm{d}\zeta.$$

由于

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{3r}\left[(R+r)^3-|R-r|^3\right]=\begin{cases}\dfrac{2}{3}R^3\dfrac{1}{r}+2rR, & (r>R);\\ \dfrac{2}{3}r^2+2R^2, & (r\leqslant R),\end{cases}$$

及

$$\int_{-R}^{R}|\zeta-r|\,\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}2Rr & (r>R),\\ r^2+R^2 & (r\leqslant R).\end{cases}$$

因而,最后得

$$u(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{4}{3r}\pi R^3\rho_0 & (r>R),\\ 2\pi\rho_0\left(R^2-\dfrac{1}{3}r^2\right) & (r\leqslant R).\end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论：

(1)在球外一点上的牛顿位，与将球的全部质量集中在它的中心处时一样；

(2)如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球，则它在位于其空隙处的一点($r<R$)上的牛顿位可表示成差

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=u_2(x,y,z)-u_1(x,y,z)\\&=\left(R_2^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0-\left(R_1^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0=2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho_0.\end{aligned}$$

它与 r 无关，故空心球体在其空隙范围内的位势保持一个常数值.

【4159】 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$，$0\leqslant\zeta\leqslant h$ 对具有单位质量的质点 $P(0,0,z)$的吸引力.

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零，即 $X=Y=0$.若引用柱坐标，即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned}Z&=k\rho_0\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant a^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\int_0^h\frac{(\zeta-z)\mathrm{d}\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}=k\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^h\frac{(\zeta-z)\mathrm{d}\zeta}{[r^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\\&=2\pi k\rho_0\int_0^a r\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right]\mathrm{d}r\\&=2\pi k\rho_0\left[\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-|z|+|h-z|\right].\end{aligned}$$

易知，

当 $0\leqslant z<\dfrac{h}{2}$ 时，$Z>0$，此时吸引力朝着向上的铅垂线；

当 $\dfrac{h}{2}<z\leqslant h$ 时，$Z<0$，此时吸引力朝着向下的铅垂线；

当 $z=\dfrac{h}{2}$ 时，$Z=0$，引力为零.

§9. 二重和三重广义积分

1.无界限域的情形 若二维的域 Ω 是无界的及函数 $f(x,y)$在域 Ω 上连续，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

其中 Ω_n 为域 Ω 中可求积的有界封闭子域的任意叙列，这个叙列可以盖满域 Ω.若在右端的极限存在且与叙列 Ω_n 的选择无关，则对应的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

同样定义出连续函数展布在无界的三维域上的三重广义积分.

2.不连续函数的情形 若函数 $f(x,y)$在有界封闭域 Ω 内除了点 $P(a,b)$而外处处是连续的，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Omega-U_\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中 U_ε 是点 P 的 ε 邻域，当极限存在的情形，所研究的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

假定在点 $P(a,b)$的邻近有等式

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{r^a},$$

其中函数 $\varphi(x,y)$的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间，且

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

则 1)当 $a<2$ 时，积分(2)收敛；2)当 $a\geqslant 2$ 时，积分(2)发散.

若函数 $f(x,y)$有不连续的线，同样可定义出广义积分(2).

不连续函数的广义积分定义易于引伸到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性($0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$)：

【4161】 $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

与积分 $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 同时收敛或同时发散.由于$\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$是正的，故引用极坐标，得

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r}{r^{2p}}\mathrm{d}r=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & \text{若 } p>1;\\ +\infty, & \text{若 } p\leqslant 1.\end{cases}$$

由此可知，原积分 $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

【4164】 $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,q>0).$

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+1\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q},$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2\}$，$\Omega_2=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2\}$，令 $\Omega_3=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2\}$，易知，当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2$ 时必有 $x+y\geqslant 1$(因若 $x+y<1$，则必有 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$，从而，$0\leqslant x^p<1,0\leqslant y^q<1$，这就会得出 $x^p+y^q<2$)，故 $\Omega_2=\Omega_3$.由于 Ω 是有界闭区域，故(1)式右端第一个积分为常义积分，因此，广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$的敛散性，在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是，注意到被积函数是非负的，得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r.$$

由3856题的结果知，右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\quad(p>0,q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)$；而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3<-1$(即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$)时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\geqslant-1$(即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant1$)时发散.

综上所述，可知广义积分$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$仅当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$时收敛.

【4166】 证明：若连续函数$f(x,y)$不为负及$S_n(n=1,2,\cdots)$为有界闭域的任一叙列，这个叙列可以盖满域S，则

$$\iint\limits_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭域的叙列S'_n，它盖满S并且$S'_1\subset S'_2\subset\cdots\subset S'_n\subset\cdots\subset S$.由于$f(x,y)$在$S$上非负，故积分叙列$\iint\limits_{S'_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是递增的，从而，极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S'_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{1}$$

存在(是有限数或是$+\infty$).我们要证

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I.\tag{2}$$

先设I为有限数.任给$\varepsilon>0$，由(1)式知，存在N，使当$n\geqslant N$时，恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S'_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon.\tag{3}$$

又存在n_0，使当$n\geqslant n_0$时，$S_n\supset S'_N$.从而，根据$f(x,y)$的非负性以及(3)式，得

$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{S'_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>I-\varepsilon.$$

另一方面，对每个固定的$n\geqslant n_0$又必存在某个充分大的$k_n(\geqslant N)$使$S'_{k_n}\supset S_n$.于是，再由(3)

式得

$$\iint_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{S_{k_n}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < I+\varepsilon.$$

由此可知,当 $n\geqslant n_0$ 时,恒有

$$I-\varepsilon < \iint_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < I+\varepsilon,$$

故(2)式成立.

次设 $I=+\infty$.任给 $M>0$,由(1)式知,存在 N_1,使

$$\iint_{S'_{N_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > M.$$

又存在 n_1,使当 $n\geqslant n_1$ 时,恒有 $S_n \supset S'_{N_1}$,从而,

$$\iint_{S_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_{S_{N_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > M,$$

故(2)式成立.证毕.

计算下列积分:

【4169】 $\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}$.

解 由于被积函数非负,故

$$I=\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^q}.$$

而当 $q>1$ 时,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^q}=\frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

(注意,当 $q\leqslant 1$ 时,此积分发散,从而,$I=+\infty$);又当 $p>q$ 时

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty} x^{q-p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意,当 $p\leqslant q$ 时,此积分发散,$I=+\infty$)

综上所述,可知:当 $p>q>1$ 时,

$$\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

变换为极坐标而计算积分:

【4175】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由于被积函数非负,故采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=2\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=+\infty}=\pi.$$

计算积分:

【4178】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$,其中 $a<0$, $ac-b^2>0$.

解 我们有(令 $\delta=ac-b^2>0$, $t=x+\frac{b}{a}y$)

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f\\
&=a\left(x^2+\frac{2b}{a}xy+\frac{b^2}{a^2}y^2\right)+\frac{ac-b^2}{a}y^2+2dx+2ey+f\\
&=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{\delta}{a}y^2+2dx+2ey+f=at^2+\frac{\delta}{a}y^2+2d\left(t-\frac{b}{a}y\right)+2ey+f\\
&=a\left(t^2+\frac{2d}{a}t+\frac{d^2}{a^2}\right)-\frac{d^2}{a}+\frac{\delta}{a}\left[y^2+\frac{2}{\delta}(ae-bd)y+\frac{(ae-bd)^2}{\delta^2}\right]-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}+f\\
&=a\left(t+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{\delta}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{\delta}\right)^2+\beta,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta&=f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}=\frac{1}{a\delta}[af(ac-b^2)-d^2(ac-b^2)-(ae-bd)^2]\\
&=\frac{1}{\delta}(acf-b^2f-cd^2-ae^2+2bde)=\frac{\Delta}{\delta},
\end{aligned}$$

这里
$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases} u=\sqrt{-a}x+\dfrac{b\sqrt{-a}}{a}y+\dfrac{d\sqrt{-a}}{a}\\ v=\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\,y+\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\cdot\dfrac{ae-bd}{\delta}, \end{cases}\tag{1}$$

则 $\varphi(x,y)=-u^2-v^2+\beta$. 又

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\sqrt{-a} & \dfrac{b}{a}\sqrt{-a}\\ 0 & \sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}>0.$$

故线性变换(1)是非退化的,它将(x,y)平面的点与(u,v)平面的点一一对应.于是,利用 4175 题的结果,得

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi(x,y)}\,dx\,dy&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2+\beta}\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,du\,dv\\
&=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}.
\end{aligned}$$

研究不连续函数的二重广义积分的收敛性 $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$:

【4182】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy$.

解 由于

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2>0 \quad (\text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{时}),$$

故 $$\frac{m}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+xy+y^2)^p} \quad (\text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{时}),$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛,即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{x^2+xy+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{与积分} \quad \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

同时收敛或同时发散.由于$\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p}>0$(当$(x,y)\neq(0,0)$时),采用极坐标即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}},$$

$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$为常义积分,其值为有限数,而

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-p)}, & \text{当 } p<1 \text{ 时;}\\ +\infty, & \text{当 } p\geqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

由此可知:原积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p<1$ 时收敛,当 $p\geqslant 1$ 时发散.

【4183】 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0,q>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}, \tag{1}$$

其中 $\Omega_1=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2^{-p-q}\right\}$,

$\Omega_2=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\right\}$.

令 $\Omega_3=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\right\}$,易知,当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}$时,必有 $x+y\leqslant 1$(因为 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}$,故 $x^p\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^p}$,$y^q\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^q}$,从而,$x\leqslant\frac{1}{2}$,$y\leqslant\frac{1}{2}$,由此知 $x+y\leqslant 1$).故 $\Omega_3=\Omega_2$.由于函数$\frac{1}{x^p+y^q}$在有界闭区域 Ω_1 上连续,故(1)式右端第一个积分为常义积分.因此,广义积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$的敛散性取决于广义积分$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$的敛散性.在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta, \qquad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是,注意到被积函数是非负的,得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r.$$

由 3856 题的结果知，右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\quad(p>0,q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$；而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3>-1(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1)$时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\leqslant-1$(即$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}\leqslant1$)时发散.

综上所述，可知原积分$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$时收敛，当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant1$时发散.

计算下列积分：

【4189】 $\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这里域 Ω 是由直线 $y=0$，$y=x$，$x=\pi$ 所界.

解 作变量代换 $x=u+v$，$y=u-v$，则 Oxy 平面上的域 Ω 变为 uv 平面上的域 Ω'. 显然 Ω' 由直线 $u=v$，$v=0$，$u+v=\pi$ 所界. 又有$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$. 于是，再注意到被积函数非正，即有

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&2\iint\limits_{\Omega'}\ln\sin2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_v^{\pi-v}\ln\sin2v\mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin2v\mathrm{d}v\\
=&2\ln2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\cos v\mathrm{d}v\\
=&\pi^2\ln2-\frac{\pi^2}{2}\ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\ln\sin t\mathrm{d}t\\
=&\frac{\pi^2}{2}\ln2+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v=\frac{\pi^2}{2}\ln2+2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)^{*)}=-\frac{\pi^2}{2}\ln2.
\end{aligned}$$

*) 利用 2353 题(1)的结果.

研究下列三重积分的收敛性：

【4191】 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，这里 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

解 由于 $\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p}$，

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，可知积分

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\text{ 与积分 }\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于被积函数$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$是正的，采用球坐标 $x=r\cos\varphi\cos\psi$，

$y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}=4\pi\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}.$$

显然,$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$ 当 $p>\frac{3}{2}$时收敛,$p\leqslant\frac{3}{2}$时发散;由此可知,

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

当 $p>\frac{3}{2}$时收敛,当 $p\leqslant\frac{3}{2}$时发散.

【4193】 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ $(p>0,q>0,r>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}=8\iiint\limits_{\substack{x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\\x+y+z>1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$$

$$=8\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}+8\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}.$$

其中,令

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r\leqslant3\},$$
$$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r>3\},$$
$$\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x^p+y^q+z^r>3\}.$$

由于当 $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$, $x^p+y^q+z^r>3$ 时必有 $x+y+z>1$(否则,$x+y+z\leqslant1$,就有 $x\leqslant1$, $y\leqslant1$, $z\leqslant1$,从而,$x^p\leqslant1$, $y^q\leqslant1$, $z^r\leqslant1$,于是 $x^p+y^q+z^r\leqslant3$),故 $\Omega_2=\Omega_3$.显然,$\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$ 为常义积分,故积分 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ 的敛散性取决于$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$ 的敛散性.对此积分,作变量代换

$$x=R^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi\cos^{\frac{2}{p}}\psi,\quad y=R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\cos^{\frac{2}{q}}\psi,\quad z=R^{\frac{2}{r}}\sin^{\frac{2}{r}}\psi.$$

则易知

$$\frac{D(x,y,z)}{D(R,\varphi,\psi)}=\frac{8}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi.$$

于是,由被积函数的非负性,并利用 3856 题的结果,得

$$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}=\frac{8}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi\mathrm{d}\psi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R$$

$$=\frac{8}{pqr}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{r},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R$$

$$=\frac{2}{pqr}B\left(\frac{1}{r},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R.$$

由于积分 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R$ 当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3<-1$(即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$)时收敛,当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3\geqslant-1$ 时发散,故积分

$$\iiint_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}\ (\text{从而积分}\iiint_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r})$$

当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$时收敛，当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant 1$时发散.

计算积分：

【4199】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 采用球坐标，由被积函数的非负性，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=4\pi\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

作代换 $r^2=t$，则

$$\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

于是，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi^{\frac{3}{2}}$.

【4200】 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-P(x_1,x_2,x_3)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,$$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ （$a_{ij}=a_{ji}$）为正定形.

解 用 A 表矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的，故由高等代数中关于二次型的理论知：存在正交矩阵

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},\tag{1}$$

使

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},\tag{2}$$

其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$；也即在线性（正交）变换

$$\begin{cases}x_1=b_{11}x_1'+b_{12}x_2'+b_{13}x_3'\\x_2=b_{21}x_1'+b_{22}x_2'+b_{23}x_3'\\x_3=b_{31}x_1'+b_{32}x_2'+b_{33}x_3'\end{cases}\tag{3}$$

之下，二次型 $P(x_1,x_2,x_3)$ 化为平方和：

$$P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2+\lambda_3x_3'^2.\tag{4}$$

注意，由于 B 是正交矩阵，故 $B^{-1}=B'$（B' 表 B 的转置矩阵），从而，$|B|=|b_{ij}|=\pm1$. 显然，

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(x_1',x_2',x_3')}=|b_{ij}|=\pm 1.$$

由(4)式,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2}\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'. \tag{5}$$

再作变量代换 $x_1'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1$, $x_2'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2$, $x_3'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}u_3$,则

$$\frac{D(x_1',x_2',x_3')}{D(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}.$$

于是(注意 4199 题的结果),

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2}\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'\\=&\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}\,du_1\,du_2\,du_3=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}.\end{aligned} \tag{6}$$

但由(2)式知(记 $\Delta=|a_{ij}|=|A|$,注意,由于 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的,故 $\Delta>0$)

$$\Delta=|A|=|B^{-1}|\cdot|A|\cdot|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{7}$$

于是,根据(5)、(6)、(7)诸式,最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}.$$

§10. 多重积分

1.多重积分的直接计算法 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在由下列不等式所确定的有界域 Ω内是连续的:

$$\begin{cases}x_1'\leqslant x_1\leqslant x_1'',\\ x_2'(x_1)\leqslant x_2\leqslant x_2''(x_1)\\ \qquad\vdots\\ x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),\end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数及 $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1)$, $\cdots$, $x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$, $x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$为连续函数,则对应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n\\=&\int_{x_1'}^{x_1''}dx_1\int_{x_1'(x_1)}^{x_2''(x_1)}dx_2\cdots\int_{x_n'(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_n.\end{aligned}$$

2.重积分中的变量代换 若 1)函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在有界可测的域 Ω内是均匀连续的;2)连续可微分的函数

$$x_i=\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

把 $Ox_1,x_2,\cdots,x_n$ 空间的域 Ω双方单值地映射成 $O'\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 空间内的有界域 Ω';3)在域 Ω'

内雅哥比式

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\neq 0,$$

则下面的公式正确

$$\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\iint_{\Omega'}\cdots\int f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)|I|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n.$$

特别是,根据公式

$$\begin{aligned}
x_1&=r\cos\varphi_1,\\
x_2&=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\vdots\\
x_{n-1}&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\
x_n&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

变换成极坐标时$(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$,有

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

【4202】 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为域 $0\leqslant x_i\leqslant x(i=1,2,\cdots,n)$内的连续函数,证明等式

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1\quad(n\geqslant 2).$$

证 考虑下面三个有界闭域:

$$\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant x,i=1,2,\cdots,n\},$$
$$\Omega_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_1\leqslant x,0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\},$$
$$\Omega_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_n\leqslant x,x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x\},$$

由假定 $f(x_1,\cdots,x_n)$在域 Ω上连续,显然,$\Omega_1\subset\Omega,\Omega_2\subset\Omega$,故$f(x_1,\cdots,x_n)$在 Ω_1 与 Ω_2 上连续.根据化 n重积分为累次积分的公式,我们有

$$\iint_{\Omega_1}\cdots\int f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\mathrm{d}x_n,\tag{1}$$

$$\iint_{\Omega_2}\cdots\int f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1.\tag{2}$$

下证 $\Omega_1=\Omega_2$,事实上,若$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_1$,则

$$0\leqslant x_1\leqslant x,0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1},\tag{3}$$

从而,

$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant x.\tag{4}$$

于是,

$$0\leqslant x_n\leqslant x,x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x.\tag{5}$$

由此可知$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$.反之,若$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$,则(5)式成立.从而,(4)式显然成立,由此又知(3)式成立,故$(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$,于是,$\Omega=\Omega_2$ 获证.由此,再根据(1)式与(2)式,即得

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1.$$

证毕.

计算下列多重积分：

【4205】 $I_n=\underset{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}{\iint\cdots\int} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解 化为累次积分,有

$$I_n=\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{a-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n,$$

我们又知

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})^2\Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}}=\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2,$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}\mathrm{d}x_{n-2}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2\mathrm{d}x_{n-2}=\frac{1}{3!}(a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3,$$

$$\vdots$$

这样继续下去,显然有

$$\int_0^{a-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{a-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}.$$

于是,
$$I_n=\int_0^a\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}\mathrm{d}x_1=\frac{a^n}{n!}.$$

【4211】 求 n 维球体

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$$

的体积.

解 令 $x_i=a\xi_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,即得体积

$$V_n=\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=a^nV_n(1),$$

其中 $V_n(1)$表示 $a=1$ 时的 n 维球体的体积.但是

$$V_n(1)=\underset{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\leqslant 1}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=\int_{-1}^1\mathrm{d}\xi_n\underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}$$

$$=V_{n-1}(1)\int_{-1}^1(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\xi_n=2V_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2V_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}=V_{n-1}(1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

因为 $V_1(1)=2$,故由上述循环公式可得

$$V_n(1)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

因而,所求的体积为

$$V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数,分别可得公式

$$V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}a^{2m},\qquad V_{2m+1}=\frac{2\cdot(2\pi)^m}{(2m+1)!}a^{2m+1}.$$

特别是,对于 V_1,V_2,V_3 可求得熟知的值:$2a,\pi a^2,\frac{4}{3}\pi a^3$.

【4215】 证明等式

$$\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}x_2\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)\mathrm{d}u.$$

证 利用 4202 题的结果,即得

$$\begin{aligned}
&\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}x_2\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}\\
&=\int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x x_1\mathrm{d}x_1\\
&=\int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^x\frac{1}{2}(x^2-x_2^2)x_2\mathrm{d}x_2\\
&=\int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_4}^x\frac{1}{2^2\cdot 2}(x^2-x_3^2)^2x_3\mathrm{d}x_3\\
&=\cdots\\
&=\int_0^x f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}(x^2-x_n^2)^{n-1}x_n\mathrm{d}x_n\\
&=\int_0^x\frac{1}{2^n n!}f(x_{n+1})(x^2-x_{n+1}^2)^n\mathrm{d}x_{n+1}.
\end{aligned}$$

于是,将 x_{n+1} 代之以 u,不影响积分的值,故得

$$\int_0^x x_1\mathrm{d}x_1\int_{x_0}^{x_1}x_2\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)\mathrm{d}u.$$

【4216】 证明迪里黑里公式

$$\iint\cdots\int_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}$$

$$(p_1,p_2,\cdots,p_n>0).$$

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n=1$ 时,公式显然成立,即

$$\int_{0\leqslant x_1\leqslant 1}x_1^{p_1-1}\mathrm{d}x_1=\frac{1}{p_1}=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}.$$

其次,设公式对 $n-1$ 成立,今证公式对 n 也成立.为此,将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n\iint\cdots\int_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1-x_n}}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

在里面的 $n-1$ 重积分中进行代换:

$$x_1=(1-x_n)\xi_1,\ x_2=(1-x_n)\xi_2,\cdots,x_{n-1}=(1-x_n)\xi_{n-1},$$

即得

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)}\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)x^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}\,\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\cdot B(p_n,p_1+\cdots+p_{n-1}+1)$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\cdot\frac{\Gamma(p_n)\cdot\Gamma(p_1)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

这样一来,我们得知公式对 n 重积分也正确.从而对 n 为任意的自然数时,迪里黑里公式均成立.

【4219】 计算半径为 R,密度为 ρ_0 的均匀球对自己的位,即求积分

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

解 我们有

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}}.$$

由 4155 题的结果可知

$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}z_2}{r_{1,2}}=2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.于是(利用球坐标),

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$$
$$=\frac{\rho_0}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^R\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r^2\right)r^2\,\mathrm{d}r=\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5.$$

§11. 曲线积分

1.第一型的曲线积分 若 $f(x,y,z)$在平滑曲线 C

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\ (t_0\leqslant t\leqslant T)\tag{1}$$

的各点上有定义并且是连续的函数,$\mathrm{d}s$ 为弧的微分,则

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{t_0}^T f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

这个积分的特性在于它与曲线 C 的方向无关.

2.第一型曲线积分在力学方面的应用 若 $\rho=\rho(x,y,z)$为曲线 C 在流动点(x,y,z)的线密度,则曲线 C 的质量等于

$$M=\int_C \rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

此曲线的重心坐标(x_0,y_0,z_0)由下面的公式来表示

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\quad y_0=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\quad z_0=\frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

3.第二型的曲线积分　若函数 $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$在曲线(1)上的各点上是连续的,这曲线的方向是使参数 t增加的方向,则

$$\begin{aligned}&\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\=&\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\\&+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2}$$

当曲线 C环行的方向变更时此积分的符号也变更.在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C时变力$\{P,Q,R\}$所作的功.

4.全微分的情形　若

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z=\mathrm{d}u,$$

式中 $u=u(x,y,z)$为域 V内的单值函数,则与完全位于域 V内的曲线 C的形状无关,而有:

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1),$$

式中(x_1,y_1,z_1)为路径的始点,(x_2,y_2,z_2)为路径的终点,最简单的情况是域 V是单联通的而函数 P,Q,R有连续的一阶偏导函数,对于此事充分而且必要的条件为:在域 V内,下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时,函数 u可按下面的公式来求得

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\mathrm{d}z,$$

其中(x_0,y_0,z_0)为域 V内某一固定的点.

在力学上这个情况对应于位力所作的功.

计算下列第一型的曲线积分:

【4225】 $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$,其中 C为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的弧.

解　按参数方程计算.若令 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$,则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是,

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s=4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a\cos t\sin t\mathrm{d}t=24a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\mathrm{d}(\sin t)=4a^{\frac{7}{3}}.$$

【4243】 计算均匀的曲线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$从点 $A(0,a)$到点 $B(b,h)$的弧的重心的坐标.

解　弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx.$$

质量为 $$M=\rho_0\int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=a\rho_0\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}=\rho_0\sqrt{h^2-a^2}\ ^{*)}.$$

于是,重心的坐标为

$$x_0=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b x\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=\frac{\rho_0}{M}\left[ab\mathrm{sh}\frac{b}{a}-a^2\left(\mathrm{ch}\frac{b}{a}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\left[b\sqrt{h^2-a^2}-a^2\left(\frac{h}{a}-1\right)\right]=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}};$$

$$y_0=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b y\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b \mathrm{ch}^2\frac{x}{a}dx=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b\frac{1+\mathrm{ch}2x}{2}dx=\frac{a\rho_0}{M}\left[\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2x}{a}\right]\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{a\rho_0}{M}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)=\frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\cdot\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}.$$

*) 由 $h=a\mathrm{ch}\frac{b}{a}$ 知:$\mathrm{ch}\frac{b}{a}=\frac{h}{a}$.从而,

$$\mathrm{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\mathrm{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}.$$

在参数增加的方向,沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分:

【4255】 $\oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$,其中 $ABCDA$ 为以 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$为顶点的正方形的围线.

解 正方形各边的方程分别为

$$AB:\ y=1-x;\quad BC:\ y=1+x;\quad CD:\ y=-1-x;\quad DA:\ y=-1+x.$$

于是,

$$\oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_{AB}\frac{dx+dy}{x+y}+\int_{BC}\frac{dx+dy}{-x+y}+\int_{CD}\frac{dx+dy}{-x-y}+\int_{DA}\frac{dx+dy}{x-y}$$

$$=\int_1^0(1-1)dx+\int_0^{-1}2dx+\int_{-1}^0(1-1)dx+\int_0^1 2dx=0.$$

【4257】 $\oint_{OmAnO}\arctan\frac{y}{x}dy-dx$,其中 OmA 为抛物线段 $y=x^2$, OnA 为直线段 $y=x$.

解 如图 4257 所示,我们有

$$\oint_{OmAnO}\arctan\frac{y}{x}dy-dx=\int_{OmA}\arctan\frac{y}{x}dy-dx+\int_{AnO}\arctan\frac{y}{x}dy-dx$$

$$=\int_0^1 2x\arctan x\,dx-\int_0^1 dx+\int_1^0(\arctan 1-1)dx$$

$$=x^2\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-1+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)x\Big|_1^0$$

$$=\frac{\pi}{4}-(x-\arctan x)\Big|_0^1-1-\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=\frac{\pi}{4}-1$$

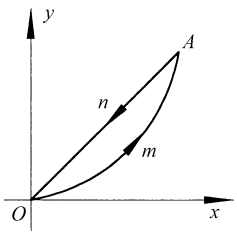

图 4257

注 原题为 $\int_{OmAnO} \mathrm{d}y\arctan\frac{y}{x}-\mathrm{d}x$，若把它理解为

$$\int_{OmAnO} \mathrm{d}\left(y\arctan\frac{y}{x}\right)-\mathrm{d}x,$$

则其值为零，与原答案不符.

验证被积函数为全微分，并计算下列曲线积分：

【4262】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$，其中 $f(u)$为连续函数.

解 令 $F(x,y)=\int_0^{x+y} f(u)\mathrm{d}u$. 由于 $f(u)$连续，故

$$F'_x(x,y)=f(x+y),\quad F'_y(x,y)=f(x+y),$$

并且它们都是 x,y 的连续函数. 因此，$F(x,y)$可微，且

$$\mathrm{d}F(x,y)=F'_x(x,y)\mathrm{d}x+F'_y(x,y)\mathrm{d}y=f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y),$$

故 $f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$是全微分，并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x,y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=F(a,b)-F(0,0)=\int_0^{a+b} f(u)\mathrm{d}u.$$

【4267】 $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径.

解 $P=-\frac{y}{(x-y)^2}$，$Q=\frac{x}{(x-y)^2}$（$x\neq y$）. 容易验证

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}\quad (x\neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega=\{(x,y)\mid x>y\}$. 由于 Ω是单连通区域，且在其上$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$是某函数 $u=u(x,y)$的全微分，从而，在 Ω上线积分$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关. 因此，可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\int_0^1 \frac{-(-1)\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

注 也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$来. 我们有

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}(x-y)}{(x-y)^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x-y}\right),$$

从而，$\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\frac{y}{x-y}\Big|_{(0,-1)}^{(1,0)}=1.$

【4277】 证明下面的估计对于曲线积分是正确的：

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant LM,$$

式中 L为积分路径的长及 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$（在弧 C上）.

证 由于

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|=\left|\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_C |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\,\mathrm{d}s,$$

又因

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

故有 $$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2,$$

从而，$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M$. 于是，

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant M\int_C \mathrm{d}s=LM.$$

【4278】 估计积分

$$I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$.

解 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上，有

$$P^2+Q^2=\frac{y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}+\frac{x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$
$$=\frac{R^2}{(R^2+xy)^4}\leqslant\frac{R^2}{(R^2-|xy|)^4}\leqslant\frac{R^2}{\left(R^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)^4}=\frac{16}{R^6}.$$

于是，$M\leqslant\frac{4}{R^3}$. 利用 4277 题的结果，即得 I_R 的估计式：

$$|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知：$\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$.

利用全微分计算下列曲线积分：

【4289】 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$，

式中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2}f(\sqrt{v})\mathrm{d}v$. 由于 f 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$
$$F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$
$$F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此，$F(x,y,z)$ 可微，且

$$\mathrm{d}F(x,y,z)=F'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+F'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+F'_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$$
$$=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)=\frac{1}{2}\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2}f(\sqrt{v})\mathrm{d}v\overset{*)}{=}\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}uf(u)\mathrm{d}u,$$

*) 这里已作代换 $\sqrt{v}=u$ （$v=u^2$，$\mathrm{d}v=2u\mathrm{d}u$）.

求原函数 u，若：

【4292】 $du=\dfrac{(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

解 由于

$$\begin{aligned}&(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz\\&=(xdx+ydy)+(ydx+xdy)+(x+y)dz-z(dx+dy)+zdz\\&=\frac{1}{2}d[(x^2+y^2+2xy)+z^2]+(x+y)dz-zd(x+y),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}du&=\frac{1}{2}\frac{d[(x+y)^2+z^2]}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(x+y)dz-zd(x+y)}{(x+y)^2+z^2}\\&=\frac{1}{2}d\ln[(x+y)^2+z^2]+d\left(\arctan\frac{z}{x+y}\right)=d\left[\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}\right].\end{aligned}$$

于是，$u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\dfrac{z}{x+y}+C$.

【4295】$^+$ 当单位质量从点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$移动到点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$时，求作用于单位质量的引力 $F=\dfrac{k}{r^2}$(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)所做的功.

解 引力指向坐标原点，故它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{r},\quad \cos\beta=-\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=-\frac{z}{r},$$

而引力的射影为

$$X=-\frac{kx}{r^3},\quad Y=-\frac{ky}{r^3},\quad Z=-\frac{kz}{r^3}.$$

于是，引力所做的功为

$$\begin{aligned}A&=-k\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{r^3}=-\frac{k}{2}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=k\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\frac{1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right).\end{aligned}$$

当然，这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的，上式表明功与路径无关，仅决定于起始点的坐标.

§12. 格林公式

1.曲线积分与二重积分的关系　设 C 为逐段光滑的简单封闭围线，它围成单联通的有界域 S，这围线的方向是这样的：域 S 保持在左边，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$与它们自己的一阶偏导函数在域 S 内及其边缘上皆是连续的，则有格林公式

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.\tag{1}$$

若把域 S 的边界 C 了解为一切边界围线的和，而围线绕转的方向是选择来使得域 S 保持在左边，则公式(1)对于由几个简单围线所界的有界域 S 也真确.

2.平面域的面积　由逐段光滑的简单围线 C 所界的面积 S 等于：

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

在这一节中，若没有相反的约定，则假定积分的封闭围线是简单的(无自交点)，并选择它们的正方向使所界不含无穷远点的域是保持在曲线的左边.

【4297】 应用格林公式，计算曲线积分

$$I=\oint_k (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

其中 k 依正方向经过以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 为顶点的三角形 ABC 的围线.直接计算积分，以验证所求得的结果.

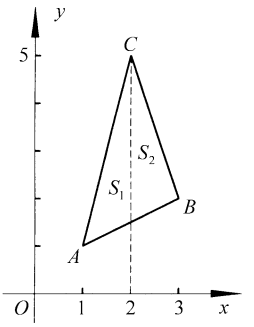

图 4297

解　如图 4297 所示. AB, BC 及 CA 的方程分别为

$$y=\frac{1}{2}(x+1),\quad y=-3x+11,\quad y=4x-3.$$

由于 $P=(x+y)^2$，$Q=-(x^2+y^2)$.故

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2(x+y)=-4x-2y.$$

通过顶点 C 引直线垂直于 Ox 轴，它把三角形域 S 分成 S_1 和 S_2 两部分.于是，

$$\begin{aligned}
I&=\iint_S(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)\mathrm{d}y+\int_2^3\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x-2y)\mathrm{d}y\\
&=\int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4}\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-46\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

如果直接计算，则

$$\begin{aligned}
I&=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}\\
&=\int_1^3\left[\left(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)(x^2+9x^2-66x+121)]\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]\mathrm{d}x\\
&=\int_1^3\left(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\right)\mathrm{d}x+\int_3^2(34x^2-242x+484)\mathrm{d}x+\int_2^1(-43x^2+66x-27)\mathrm{d}x\\
&=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-46\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

应用格林公式计算下列曲线积分：

【4303】 计算曲线积分

$$\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y,$$

其中 AmO 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半周 $x^2+y^2=ax$.

解 在 Ox 轴上连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$，这样，便构成封闭的半圆形 $AmOA$，且在线段 OA 上，

$$\int_{OA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0.$$

从而，$\oint_{AmOA}=\int_{AmO}+\int_{OA}=\int_{AmO}$.另一方面，利用格林公式可得

$$\oint_{AmOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}m\,dx\,dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

于是，
$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

【4304】 计算曲线积分

$$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，AmB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路径，但与线段 AB 围成已知大小为 S 的面积 $AmBA$.

解 首先，我们有 $\oint_{AmBA}=\int_{AmB}+\int_{BA}$，而

$$\oint_{AmBA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy=\iint\limits_{S}m\,dx\,dy=mS.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&\int_{BA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy\\
=&\int_{BA}d[e^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(y\,dx+dy)\\
=&e^x\varphi(y)\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}-m\int_{x_2}^{x_1}\left[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]dx\\
=&e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)-m\left[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right](x_1-x_2)+\frac{m}{2}\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)^2\\
=&e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)+m(y_2-y_1)+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).
\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy\\
=&mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).
\end{aligned}$$

注 利用此题的结果可计算 4303 题.事实上，由于 $\varphi(y)=\sin y$，$x_1=a$，$y_1=0$，$x_2=y_2=0$，$S=\frac{\pi a^2}{8}$，代入即得

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

【4307】 计算

$$I=\oint_C\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

其中 C 为依正方向进行而不经过坐标原点的简单封闭围线.

解 令 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$. 易知,当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线 C 之外,这时,在由 C 围成的有界闭区域 S 上,P 与 Q 以及它们的偏导数都连续,故可应用格林公式,得

$$I=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点.这时,由于 P,Q 在原点无定义,故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式.今取 $a>0$ 充分小,使中心在原点半径为 a 的圆周 L_a (L_a: $x^2+y^2=a^2$) 完全位于围线 C 之内.用 S_a 表界于 C 和 L_a 之间的环形闭区域.显然,在 S_a 上,P、Q 及其偏导数均连续,故可应用格林公式,得

$$\left(\oint_C+\oint_{-L_a}\right)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{S_a}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中 $-L_a$ 表沿 L_a 的负方向(即顺时针方向).

于是,$I=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_a}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,其中 L_a 沿正方向(即逆时针方向).利用 L_a 的参数方程 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 即得

$$\begin{aligned}I&=\oint_{L_a}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_a}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\&=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(a\cos t)-a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.\end{aligned}$$

利用曲线积分计算由下列曲线所界的面积:

【4310】 抛物线 $(x+y)^2=ax$ $(a>0)$ 和轴 Ox.

解 作代换 $y=tx$,则原方程化为 $x^2(1+t)^2=ax$. 从而,曲线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2},\quad y=\frac{at}{(1+t)^2}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a,0)$ 与 $(0,0)$. 在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 的一段上,有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0.$$

在抛物线上,有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{(1+t)^4}\mathrm{d}t.$$

于是,面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^4}=-\frac{a^2}{6}\left.\frac{1}{(1+t)^3}\right|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}.$$

【4311】 笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$.

解 作代换 $y=tx$,则曲线的参数方程为

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于 $\mathrm{d}x=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$，从而，

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

【4315】 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1\quad(a>0,b>0,n>0)$$

和坐标轴所界的面积.

解 作代换 $x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$，$y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$，即得

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点$(a,0)$和点$(0,b)$.在 Oy 轴上，从点$(0,b)$到点$(0,0)$一段，以及在 Ox 轴上从点$(0,0)$到点$(a,0)$一段上，显然有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{n}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^{*)}=\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4320】 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为

$$x^2+y^2=ax,\qquad z^2=a^2-ax.$$

若将平面 Oxy 上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 记以 C，其弧长记以 s，则所求的面积显然可表为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,\mathrm{d}s.$$

由于 $x^2+y^2=ax$ 即为$\left(x-\frac{a}{2}\right)+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，故令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi,\qquad y=\frac{a}{2}\sin\varphi.$$

从而，弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\frac{a}{2}\mathrm{d}\varphi$.于是，面积为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,\mathrm{d}s=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a}{2}(1-\cos\varphi)}\cdot\frac{a}{2}\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{2\pi}a^2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a^2.$$

【4321】 计算

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2},$$

若 $X=ax+by, Y=cx+dy$,且 C为包围坐标原点的简单的封闭围线($ad-bc\neq 0$).

解 首先注意,由于 $ad-bc\neq 0$,故只有原点$(0,0)$使 $X^2+Y^2=0$.易知

$$X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=(ax+by)(c\mathrm{d}x+d\mathrm{d}y)-(cx+dy)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)=(ad-bc)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x),$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$P=-\frac{(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},\quad Q=\frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

容易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(ad-bc)\left[(a^2+c^2)x^2-(b^2+d^2)y^2\right]}{\left[(ax+by)^2+(cx+dy)^2\right]^2}\quad((x,y)\neq(0,0)\text{时}),$$

故由格林公式知

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\oint_{C'} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 C'可为包围原点$(0,0)$的任一位于 C内的围线.特别是,可取 C'为围线$(ax+by)^2+(cx+\mathrm{d}y)^2=r^2$(即 $X^2+Y^2=r^2$),$r>0$ 充分小.于是,得(利用格林公式)

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_{X^2+Y^2=r^2} \frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}\\&=\frac{1}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2} X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\right|\mathrm{d}X\mathrm{d}Y.\end{aligned}$$

由于$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=ad-bc$,故$\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}=\frac{1}{ad-bc}$.于是,代入上式得

$$I=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\frac{1}{|ad-bc|}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\cdot\frac{1}{|ad-bc|}\pi r^2=\operatorname{sgn}(ad-bc).$$

【4322】 若简单的围线 C包围坐标原点,$X=\varphi(x,y)$,$Y=\psi(x,y)$,而曲线 $\varphi(x,y)=0$ 和 $\psi(x,y)=0$ 在围线 C内面有几个单交点,计算积分 I(参阅 4321 题).

解 设 $\varphi(x,y)=0$,$\psi(x,y)=0$ 在 C内的交点为 $P_i(x_i,y_i)$($i=1,2,\cdots,m$).首先注意,本题应假定函数 $\varphi(x,y)$与$\psi(x,y)$在 C围成的区域内具有连续的二阶偏导数,并且在各点 P_i($i=1,2,\cdots,m$)处有$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x\neq 0$.容易算得

$$X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=(\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi)\mathrm{d}x+(\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi)\mathrm{d}y,$$

从而,

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$P=\frac{\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi}{\varphi^2+\psi^2},\qquad Q=\frac{\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi}{\varphi^2+\psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2}[(\varphi\psi''_{xy}-\varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2+\psi^2)-(\varphi'_x\psi'_y+\varphi'_y\psi'_x)\varphi^2$$
$$+(\varphi'_y\psi'_x+\varphi'_x\psi'_y)\psi^2+2(\varphi'_x\varphi'_y-\psi'_x\psi'_y)\varphi\psi]$$
$$((x,y)\neq(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)).$$

围绕点 $P_i(x_i,y_i)$ 作围线 C_i：$[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2=r^2$（即 $X^2+Y^2=r^2$），取 $r>0$ 充分小，使诸 C_i 互不相交且都位于 C 内｛这是办得到的，因为在各点 P_i，$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq0$. 从而，由连续性知在 P_i 的某邻域内 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq0$ 且保持定号. 于是，根据隐函数存在定理知变换 $X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$ 在点 $(x,y)=(x_i,y_i)$ 邻近及点 $(X,Y)=(0,0)$ 邻近是双方单值双方连续的｝，并使 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$ 在 P_i 的邻近 $X^2+Y^2\leqslant r^2$（记为 S_i）上保持定号，将格林公式应用于诸围线 $C,C_1,\cdots,C_m$ 之间的区域，可得

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}. \tag{1}$$

但

$$\oint_{C_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_C X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\frac{1}{r^2}\oint_{C_i}(\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi)\mathrm{d}x+(\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{r^2}\iint_{S_i}2(\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\left[\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right]_{P_i}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{r^2}\left[\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right]_{P_i}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=\frac{2}{r^2}\left[\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right]_{P_i}\cdot\pi r^2=2\pi\left[\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right]_{P_i},$$

代入(1)式，即得

$$I=\sum_{i=1}^{m}\left[\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right]_{P_i}$$

或写为

$$I=\sum\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}$$

其中 $\sum$ 的是对曲线 $\varphi(x,y)=0$ 与 $\psi(x,y)=0$ 在 C 内的各交点相加.

注 显然，4321 题是 4322 题的特例. 这时，曲线 $ax+by=0$ 与 $cx+\mathrm{d}y=0$ 在 C 内只有一个交点，即原点(0,0)，而 $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=ad-bc$.

【4323】 证明：若 C 为封闭的围线且 $\vec{l}$ 为任意的方向，有

$$\oint_C\cos(\vec{l},\vec{n})\mathrm{d}s=0,$$

式中 n 为围线 C 的外法线.

证 如图 4323 所示. 不妨规定 C 的方向为逆时针的，以 $\vec{t}$ 表示. 由于夹角

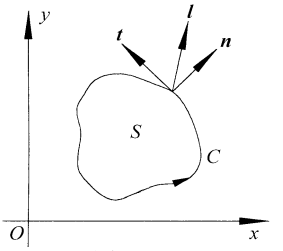

图 4323

$$(\vec{l},\vec{n})=(\vec{l},x)-(\vec{n},x),$$

故得

$$\cos(\vec{l},\vec{n})=\cos(\vec{l},x)\cos(\vec{n},x)+\sin(\vec{l},x)\sin(\vec{n},x).$$

但 $\sin(\vec{n},x)=\sin\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\vec{t},x)$,

$\cos(\vec{n},x)=\cos\left[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\vec{t},x)$,

且 $\cos(\vec{t},x)=\frac{dx}{ds}$, $\sin(\vec{t},x)=\frac{dy}{ds}$, 因此,有

$$\cos(\vec{l},\vec{n})ds=\cos(\vec{l},x)dy-\sin(\vec{l},x)dx.$$

再利用格林公式,并注意到 $\sin(\vec{l},x)$和 $\cos(\vec{l},x)$均为常数,即得

$$\oint_C\cos(\vec{l},\vec{n})ds=\oint_C[-\sin(\vec{l},x)dx+\cos(\vec{l},x)]dy=\iint_S 0dxdy=0.$$

§13. 曲线积分的物理应用

【4327】 计算单层的对数位

$$u(x,y)=\oint_C\kappa\ln\frac{1}{r}ds,$$

式中 κ=常数—密度,$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$,设围线 C 是圆周 $\xi^2+\eta^2=R^2$.

解 由对称性知,对数位

$$u(x,y)=2\kappa\int_0^\pi\ln\frac{1}{r}\cdot Rd\theta=2R\kappa\int_0^\pi\ln\frac{1}{\sqrt{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}}d\theta$$

$$=-R\kappa\int_0^\pi\ln R^2\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta,$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$\xi x+\eta y=R\rho\cos\theta$,而 θ 是矢量 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{i}$ 与 $\vec{r}_i=\xi\vec{i}+\eta\vec{i}$ 的正向夹角.

利用 3733 题(或 2192 题)的结果,可得

$$\int_0^\pi\ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta=\begin{cases}0, & \rho\leqslant R;\\ 2\pi\ln\frac{\rho}{R}, & \rho>R.\end{cases}$$

于是,我们有

$$u(x,y)=-2R\kappa\int_0^\pi\ln Rd\theta-R\kappa\int_0^\pi\ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta=\begin{cases}2\pi R\kappa\ln\frac{1}{R}, & \rho\leqslant R,\\ 2\pi R\kappa\ln\frac{1}{\rho}, & \rho>R.\end{cases}$$

【4329】 计算高斯积分

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds,$$

式中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为向量 $\vec{r}$ 的长度，此向量是连接点 $A(x,y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi,\eta)$ 而得的，$(\vec{r},\vec{n})$ 为向量 $\vec{r}$ 与在曲线 C 上 M 点的外法线 $\vec{n}$ 所夹的角.

解 设 $\vec{n}$ 与 Ox 轴的夹角为 α，$\vec{r}$ 与 Ox 轴的夹角为 β，则 $(\vec{r},\vec{n})=\alpha-\beta$. 于是，

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha.$$

代入高斯积分，得

$$u(x,y)=\oint_C\left\{\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha\right\}\mathrm{d}s=\oint_C\frac{\xi-x}{r^2}\mathrm{d}\eta-\frac{\eta-y}{r^2}\mathrm{d}\xi.$$

令 $P=-\frac{\eta-y}{r^2}$，$Q=\frac{\xi-x}{r^2}$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},\quad\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

因而 P、Q 的偏导数除去点 A（此处 $r=0$）外，在全平面上是连续的，并且 $\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial P}{\partial\eta}$. 于是，利用格林公式知：当点 A 在曲线 C 之外时，有

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=0.$$

当点 A 在曲线 C 之内时，则在曲线 C 内以 A 为圆心，R 为半径作一圆 l，即得

$$u(x,y)=\oint_l\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\oint_l\frac{1}{R}\mathrm{d}s=2\pi.$$

当点 A 在曲线 C 上时，不妨利用关系式

$$\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\mathrm{d}\varphi^{*)},$$

其中 $\mathrm{d}\varphi$ 为从点 A 看曲线 C 上弧长的微分 $\mathrm{d}s$ 所张的角度. 今以 A 为圆心，r_1 为半径作一小圆，交 C 于 B_1 及 B_2 两点，将曲线 C 除去小圆内的部分记以 B_1B_2，则有

$$\int_{B_1B_2}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\int_{B_1B_2}\mathrm{d}\varphi=\angle B_1AB_2.$$

于是，我们有

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\lim_{r_1\to+0}\int_{B_1B_2}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\lim_{r_1\to+0}\angle B_1AB_2=\pi.$$

综上所述，得高斯积分

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外;}\\ \pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上;}\\ 2\pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内.}\end{cases}$$

*) 参看 Г.М.菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

【4331】 若 $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，则称可微分两次的函数 $u=u(x,y)$ 为调和函数，证明：当且仅当

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$$

(式中 C 为任意封闭围线,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线的导函数)时,u 是调和函数.

证 由于 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)$,而(参看 4323 题的推导)

$$\cos(\vec{n},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\quad \sin(\vec{n},x)=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$

故利用格林公式(注意,题中应假定 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数),得

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_C \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 表由封闭曲线 C 围成的区域.由此式知:$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$ (对任何封闭围线 C)当且仅当 $\iint_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$(对任何区域 S).但易知这又相当于 $\Delta u\equiv 0$.事实上,若 $\Delta u\equiv 0$,则对任何 S,有 $\iint_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;反之,若对任何 S,有 $\iint_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,则必 $\Delta u\equiv 0$.因为,若不然,在某点 (x_0,y_0),$\Delta u\neq 0$.例如,设在此点,$\Delta u>0$,则由连续性可知,必存在以 (x_0,y_0) 为中心,半径为 r_0(充分小)的圆域 S_0,使在其上每一点,都有 $\Delta u>0$.由此可知,$\iint_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$.矛盾,证毕.

【4334】 证明平面上的格林第二公式

$$\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s,$$

式中光滑的围线 C 包围着有界域 S,$\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导函数.

证 我们有

$$\begin{aligned}\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s&=\oint_C v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]\mathrm{d}s\\&=\oint_C v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_S v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

同理,有

$$\begin{aligned}\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s&=\oint_C u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y-u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s&=\oint_C\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\iint_S v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

【4335】 利用格林第二公式证明：若 $u=u(x,y)$是有界闭域 S内的调和函数，则

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

式中 C为域 S的边界，$\vec{n}$为围线 C的外法线方向，(x,y)为域 S内的点，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}$为点$(x,y)$与围线 C上的动点(ξ,η)间的距离.

证 先证 $v=\ln r$为$(\xi,\eta)((\xi,\eta)\neq(x,y))$的调和函数.事实上，我们有

$$\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{\eta-y}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

因此，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=0$，即 $\Delta v=0$.

今以点(x,y)(当$(\xi,\eta)\neq(x,y)$时)为中心，ρ为半径画一圆 C_0，使此圆包含在围线 C内，C_0 及 C的正向如图 4335 所示.曲线 C的法线向外，C_0 的法线指向点(x,y).因此，在 C_0 上，我们有

$$\left.\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{\partial\ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=-\frac{1}{\rho}.$$

现将格林第二公式应用到由 C_0 及 C所界的域 S'上去，即得

$$\iint_{S'}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta\ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial\ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}s,$$

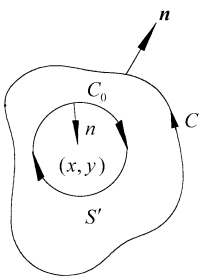

图 4335

由于 $\Delta\ln r=0$，$\Delta u=0$，故得

$$\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial\ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}s=0.$$

将行列式展开，并利用线积分性质，即得

$$\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=-\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

但由于

$$\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\oint_{C_0}\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s-\oint_{C_0}u\left(-\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{d}s$$

$$=0\cdot\ln\rho^{*)}+\frac{1}{\rho}\oint_{C_0}u\mathrm{d}s=\frac{1}{\rho}u(\xi',\eta')\oint_{C_0}\mathrm{d}s^{**)}=2\pi u(\xi',\eta'),$$

其中 $u(\xi',\eta')$为 u在圆 C_0 上某点的值，故得

$$u(\xi',\eta')=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

两端令 $\rho\to+0$ 取极限，并注意到函数 u在点(x,y)的连续性，即得

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

*) 利用 4331 题的结果.

**) 利用第一型曲线积分的中值定理，其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

【4336】*) 证明对于调和函数 $u(M)=u(x,y)$的中值定理：

$$u(M)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s;$$

式中 C_ρ 是以 M 点为中心 ρ 为半径的圆周.

证 利用 4335 题的结果(取 C 为 C_ρ),得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left[u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}s;$$

但在 C_ρ 上,有 $r=\rho$

$$\left.\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{\partial\ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho},$$

由此,再注意到 $\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$(这是利用 4331 题的结果),得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left[\frac{u}{\rho}-\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u\mathrm{d}s-\frac{\ln\rho}{2\pi}\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s.$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ,即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

【4337】 证明:在有界闭域内是调和的且于此域内不为常数的函数 $u(x,y)$,在此域的内点不能达到其最大值或最小值(极大值原则).

证 设有界闭域为 Ω,它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成.我们要证明:如果 $u(x,y)$ 在 Ω 的某内点 $P_0(x_0,y_0)$ 达到其最大值或最小值(例如,设达到最大值),则 $u(x,y)$,在 Ω 上必为常数.下分三步证明.

(1) 先证:若圆域 $S_\rho=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2\}$ 完全属于 Ω,则 $u(x,y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何的 $0<r\leqslant\rho$,用 C_r 表圆周 $\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$.由 4336 题的结果可知

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s=0. \tag{1'}$$

但因 $u(x_0,y_0)$ 为最大值,故在 C_r 上恒有

$$u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant 0.$$

由此,根据(1'),即易知在 C_r 上 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$.因为,若有某点 $(\xi_1,\eta_1)\in C_r$ 使 $u(x_0,y_0)-u(\xi_1,\eta_1)=\tau>0$,则由 $u(x,y)$ 的连续性可知,必有以 (ξ_1,η_1) 为中心的某小圆域 σ 存在,使当 $(\xi,\eta)\in\sigma$ 时,恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant\frac{\tau}{2}$.用 C'_r 表 C_r 含于 σ 内的部分,则

$$\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s\geqslant\int_{C'_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s\geqslant\oint_{C'_r}\frac{\tau}{2}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\tau l'_r>0,$$

其中 l'_r 表圆弧 C'_r 之长,此显然与(1')式矛盾.

于是,在 C_r 上有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$.再根据 r 的任意性 $(0<r\leqslant\rho)$,即知对任何 $(\xi,\eta)\in S_\rho$,都有 $u(\xi,\eta)=u(x_0,y_0)$.换句话说,$u(x,y)$ 在 S_ρ 上是常数.

(2) 次证:设 $P^*(x^*,y^*)$ 为 Ω 的任一内点(即 $P^*\in\Omega$),则必有

$$u(x^*,y^*)=u(x_0,y_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0,y_0)$ 与点 $P^*(x^*,y^*)$ 连接起来(图 4337).用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离,即

$$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

其中 min 的是对一切 $(x,y)\in\partial\Omega,(x,y)\in l$ 来取的(由于 $\partial\Omega,l$ 是互不相交的有界闭集,可证 min 一定能达到,从而 $\delta>0$).取 $0<\delta'<\delta$.以点 P_0 为中心,δ' 为半径作一圆,得圆域

$$S_0=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta'^2\},$$

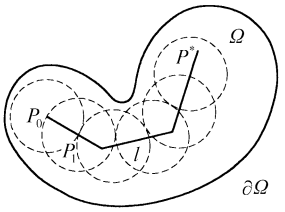

图 4337

此圆域完全含于 Ω 内,由(1)段已证的结论知,$u(x,y)$ 在 S_0 中为常数.特别 $u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0)$,这里点 $P_1(x_1,y_1)$ 代表圆周 $C_0=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta'^2\}$ 与 l 折线的交点.又以点 P_1 为中心,δ' 半径作一圆,得圆域 $S_1=\{(x,y)|(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leqslant\delta'^2\}$.由于 $u(x,y)$ 在点 $P_1(x_1,y_1)$ 也达到最大值,而 S_1 完全含于 Ω 内,故将(1)段结果用于 S_1 可知 $u(x,y)$ 在 S_1 上为常数,特别 $u(x_2,y_2)=u(x_1,y_1)$,这里点 $P_2(x_2,y_2)$ 表圆周 $C_1=\{(x,y)|(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\delta'^2\}$ 与 l 的交点(除 P_0 外的另一交点).再以点 P_2 为中心,δ' 为半径作一圆域 S_2,…,这样继续作下去,显然,至多经过 n 次(n 表大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数,s 表 l 的长),点 $P^*(x^*,y^*)$ 必属于 S_{n-1},从而,

$$u(x^*\ y^*)=u(x_{n-1},y_{n-1})=\cdots=u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0).$$

(3)由(2)段的结果可知,$u(x,y)$ 在 Ω 上是常数;根据 $u(x,y)$ 在 Ω 上的连续性,通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限,即知 $u(x,y)$ 在 Ω 上是常数.证毕.

注 从证明过程中看出,需假定区域 Ω(从而 Ω)是连通的.事实上,若 Ω 不连通,则结论不一定成立.例如,设 $\Omega=S_1+S_2$,其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域,而令

$$u(x,y)=\begin{cases}c_1, & (x,y)\in S_1;\\ c_2, & (x,y)\in S_2,\end{cases}$$

其中 $c_1\neq c_2$ 是两个常数,则 $u(x,y)$ 显然是 Ω 上的调和函数且在 Ω 上不是常数,但它却在其内点达到最大值与最小值.

【4339】 设 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 为液体的速度的分量.求在单位时间内流过以围线 C 为界的域 S 的液体的量(即液体流出量与流入量的差).若液体不能压缩且在域 S 内没有源泉和漏孔,则函数 u 和 v 满足怎样的方程式?

解 设液体的速度为 $\vec{W}$,则 $\vec{W}=u\vec{i}+v\vec{j}$,又 $\mathrm{d}\vec{s}=\mathrm{d}x\cdot\vec{i}+\mathrm{d}j\cdot\vec{j}$.于是,所求的液体量为

$$\begin{aligned}Q&=\oint_C\vec{w}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=\oint_C[u\cos(\vec{n},x)+v\sin(\vec{n},x)]\mathrm{d}s\\&=\oint_C u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x^*)=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $\vec{n}$ 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量,并且此处已假定流体的面密度等于 1.若液体是不可压缩的,且在域 S 内无源泉和漏孔,则液体的流出量与流入量的差 Q 应等于零,即

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又显然,对于任意的围线 C,上述结果均正确.于是,连续函数 u,v 应满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

*) 参看4323题的题解.

§14. 曲面积分

1.第一型的曲面积分 若 S 为逐片光滑的双面曲面

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)\ ((u,v)\in Q) \tag{1}$$

而 $f(x,y,z)$ 为在曲面 S 上的各点上有定义并且是连续的函数,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\ \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2}$$

式中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\ G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\ F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

特别情形,若曲面的方程式的形状为

$$z=z(x,y)\quad ((x,y)\in\sigma),$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续地可微分函数,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\sigma f[x,y,z(x,y)]\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此积分与曲面 S 的方向的选择无关.

若把函数 $f(x,y,z)$ 当作曲面 S 在点 (x,y,z) 的密度,则积分(2)是此曲面的质量.

2.第二型的曲面积分 若 S 为平滑的双面曲面;S^+ 为它的正面,由法线的方向 $\vec{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 所确定的一面,$P=P(x,y,z)$,$Q=Q(x,y,z)$,$R=R(x,y,z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数,则

$$\iint_{S^+}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S. \tag{3}$$

若曲面 S 的方程为参数式(1),则法线 $\vec{n}$ 的方向余弦由下列公式来确定:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且方根前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时,积分(3)的符号变为相反的符号.

计算下列第一型曲面积分：

【4348】 $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$,式中 S 为螺旋面 $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v\ (0<u<a;0<v<2\pi)$的一部分.

解 由于

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\cos^2 v+\sin^2 v=1,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=1+u^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=-u\sin v\cos v+u\cos v\sin v=0,$$

故得 $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+u^2}$.于是,

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=\int_0^a \mathrm{d}u\int_0^{2\pi} v\ \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v=2\pi^2\int_0^a \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Big|_0^a=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]$$

【4350】 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,式中 S 为圆锥曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}.$$

又曲面 S 在平面 Oxy 上的射影域为 $x^2+y^2\leqslant 2ax$.于是,利用极坐标,即得

$$\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}[r^2\cos\varphi\sin\varphi+r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)]r\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

【4355】 求均匀的曲面

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

被曲面 $x^2+y^2=ax$ 所割下部分的重心的坐标.

解 质量为

$$M=\iint\limits_S \rho_0\mathrm{d}S=\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\rho_0\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{\sqrt{2}\pi a^2\rho_0}{4}.$$

从而,重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi a^2}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,\mathrm{d}t\overset{*)}{=}\frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2},$$

$$y_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}y\mathrm{d}y=0,$$

$$z_D=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r=\frac{8a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{16a}{9\pi},$$

即重心的坐标为$(\frac{a}{2},0,\frac{16a}{9\pi})$.

*) 作变换 $t=x-\frac{a}{2}$.

计算下列第二型曲面积分：

【4364】 $\iint\limits_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,式中 S 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外表面.

解 记曲面 S 在各坐标面的射影域分别为 S_{xy}, S_{yz} 和 S_{zx}.于是,

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_S(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\iint\limits_S(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\Big[\iint\limits_{S_{yz}}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{S_{yz}}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big]+\Big[\iint\limits_{S_{zx}}(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\iint\limits_{S_{zx}}(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\Big]\\&+\Big[\iint\limits_{S_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]=0+0+0=0.\end{aligned}$$

【4366】 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,式中 S 为球壳$(x-a)^2+(y-b)^2+(x-c)^2=R^2$ 的外表面.

解 根据轮换对称,只要计算$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.注意到

$$z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}.$$

并利用极坐标,即得

$$\begin{aligned}\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\left[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&-\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\left[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&4c\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r=8\pi c\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^R=\frac{8}{3}\pi R^3c.\end{aligned}$$

于是,我们有

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$为连续可微分的函数，C为包围逐片光滑的有界双面曲面 S的简单封闭逐段光滑的围线，则有斯托克斯公式：

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面 S的法线的方向余弦，此法线的方向是这样的，围线 C环绕着它依反时针方向(对于右旋坐标系)而回转.

【4368】 计算积分

$$\int_{AmB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z,$$

此积分是从点 $A(a,0,0)$至点 $B(a,0,h)$沿着螺线

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

上所取的.

解 连接 A,B两点得线段 AB，它与 AmB组成封闭曲线并依正向进行，则由斯托克斯公式知：

$$\oint_{AmBA}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\iint_S 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0\mathrm{d}x\mathrm{d}z+0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

于是，

$$\begin{aligned}&\int_{AmB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z\\ =&\int_{AB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\int_0^h z^2\mathrm{d}z^{*)}=\frac{h^3}{3}.\end{aligned}$$

*) 在线段 AB上，$x=a$，$y=0$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=0$，而 $0\leqslant z\leqslant h$.

【4369】 设 C为位于平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$($\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为平面之法线的方向余弦)上并包围面积为 S的封闭围线，求

$$\oint_C \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中围线 C是依正方向进行的.

解 若记

$$\begin{aligned}P&=\begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ y & z\end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma,\\ Q&=\begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ z & x\end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha,\\ R&=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ x & y\end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta,\end{aligned}$$

则得

$$\oint_C \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$=2\iint_S (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S=2\iint_S \mathrm{d}S=2S.$$

应用斯托克斯公式,计算积分:

【4372】 $\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,式中 C 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R, z>0)$,此曲线是如下进行的:由它所包围在球 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\quad \cos\beta=\frac{y}{R},\quad \cos\gamma=\frac{z}{R},$$

即得

$$\begin{aligned} &\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z \\ =&2\iint_S [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S \\ =&2\iint_S \left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S=2\iint_S (z-y)\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称,故 $\iint_S y\mathrm{d}S=0$. 又 $\iint_S z\mathrm{d}S=\iint_S R\cos\gamma\mathrm{d}S=R\cdot\pi r^2$,于是,

$$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=2\pi Rr^2.$$

§16. 奥斯特洛格拉德斯基公式

若 S 为包含体积 V 的逐片光滑曲面,$P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ 和它们的一阶偏导函数均为域 $V+S$ 内的连续函数,则奥斯特洛格拉德斯基公式真确:

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

应用奥斯特洛格拉德斯基公式以变换下列曲面积分,设光滑的曲面 S 包围着有界的体积 V,$\cos\alpha$, $cso\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

【4382】 证明:由曲面 S 所包围的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

证 由奥氏公式,有

$$\iint_C (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V,$$

由此可知 $V=\frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$. 证毕.

利用奥斯特洛格拉德斯基公式计算下列面积分:

【4389】 $\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

式中 S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面.

解 $\iint_S (x-y+z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中 V 为由曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 围成的体积. 作变换 $u=x-y+z$, $v=y-z+x$, $w=z-x+y$, 则 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4$, 且由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$ *) . 于是,所求的积分为

$$\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1} 3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$$

*) 由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积,其大小等于由平面 $u+v+w=1, u=0, v=0, w=0$ 所围成的四面体体积的 8 倍,即为 $8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{4}{3}$.

【4391】 证明公式:

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S,$$

其中 S 为包围体积 V 的封闭曲面,$\vec{n}$ 为封闭曲面 S 上的动点 (ξ,η,ζ) 处的外法线,而

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\vec{r}$ 为从点 (x,y,z) 到点 (ξ,η,ζ) 的矢径.

证 先设曲面 S 不包围点 (x,y,z)(即点 (x,y,z) 在 V 之外),我们有

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos(\vec{r},x)\cos\alpha+\cos(\vec{r},y)\cos\beta+\cos(\vec{r},z)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦. 由于

$$\cos(\vec{r},x)=\frac{\xi-x}{r},\ \cos(\vec{r},y)=\frac{\eta-y}{r},\cos(\vec{r},z)=\frac{\zeta-z}{r},$$

故

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

于是,利用奥氏公式,即得

$$\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S=\iint_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$
$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\iiint_V\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

故
$$\iiint_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S.$$

次设曲面 S 包围点 (x,y,z). 这时，不能对 V 应用奥氏公式，必须用一小区域将点 (x,y,z) 挖掉，即以点 (x,y,z) 为中心，ε 为半径作一开球域 V_ε（ε 充分小），其边界（球面）以 S_ε 表示. 对闭域 $V-V_\varepsilon$，应用奥氏公式，仿上可得

$$\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S+\iint_{S_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S$$
$$=\iiint_{V-V_\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=2\iiint_{V-V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}.$$

但在 S_ε 上，$\vec{n}$ 的方向与 $\vec{r}$ 的方向相反，故 $\cos(\vec{r},\vec{n})=1$. 于是，

$$\iint_{S_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S=-4\pi\varepsilon^2.$$

由此可知，在前式中令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，即得

$$\iiint_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\lim_{\varepsilon\to+0}\iiint_{V-V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})\mathrm{d}S.$$

证毕.

【4393】 证明：若

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

及 S 为包围有界体积 V 的光滑曲面，则下列公式正确：

(1) $\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

(2) $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

式中 u 和它的直到二阶的偏导函数是在域 $V+S$ 内连续的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导函数.

证 (1) 由于 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，因此，利用奥氏公式即得

$$\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint_V\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_V\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint_S\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$
$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4394】 证明空间的格林第二公式：

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

式中体积 V 是由曲面 S 所包围的，$\vec{n}$ 是曲面 S 的外法线方向，而函数 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 为域 $V+S$ 内可微分两次的函数.

证

$$\iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \iint_S \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right)\cos\alpha + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} \right)\cos\beta + \left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z} \right)\cos\gamma \right] \mathrm{d}S$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} \right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z} \right)\cos\gamma \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_V \left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

【4396】 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 是在由光滑曲面 S 所包围着的有界闭域 V 内的调和函数，则

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] \mathrm{d}S,$$

式中 $\vec{r}$ 是从域 V 的内面的点 (x,y,z) 引至曲面上的动点 (ξ,η,ζ) 的矢径，而

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2},$$

$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 的外法线向量.

证 在 4394 题中令 $v=\dfrac{1}{r}$，则当 $(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$ 时，有 $\Delta v=0$. 现以点 $P(x,y,z)$ 为中心，ρ 为半径作一球面 S_ρ 含于曲面 S 内，再将 4394 题应用到由曲面 $S+S_\rho$ 所包围的体积 V 内，即得

$$\iint_{S+S_\rho} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = 0,$$

或

$$\iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = -\iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S.$$

显然，S 上的法线是向外的，而 S_ρ 上的法线是指向球心的，即指向半径减少的一方. 因此，

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial r}\bigg|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}.$$

于是，我们有

$$\iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{u}{\rho^2} \right) \mathrm{d}S = -\iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S.$$

但 $\iint\limits_{S_\rho} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \dfrac{1}{\rho}\iint\limits_{S_\rho} \dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$，又利用中值定理，得

$$\iint_{S_\rho} \frac{u}{\rho^2}\mathrm{d}S = \frac{1}{\rho^2}u(x',y',z')4\pi\rho^2 = 4\pi u(x',y',z'),$$

其中 $u(x',y',z')$为函数 u在球面 S_ρ上某点之值.从而,

$$u(x',y',z')=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.$$

上式右端与 ρ无关.而$\lim\limits_{\rho\to+0}u(x',y',z')=u(x,y,z)$.因而,令 $\rho\to+0$.即得

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.$$

又由于

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\cos\alpha+\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos\beta+\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)=-\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}$$

故最后得

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.$$

§17. 场论初步

1.梯度 若 $u(\vec{r})=u(x,y,z)$(其中 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$)是连续可微分的数量场,则称向量

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

为 $u(\vec{r})$的梯度,或简记为 $\mathrm{grad}u=\nabla u$,其中$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$.于已知点$(x,y,z)$场 u的梯度的方向是与过此点的等位面 $u(x,y,z)=C$的法线方向一致.对于场的每一点此向量给出函数 u变化之最大速度的大小

$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

与方向.

在某方向 $\vec{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上场 u的导数等于

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\vec{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2.场的散度与场的旋度 若

$$\vec{a}(\vec{r})=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

是连续可微分的向量场,则称数量

$$\mathrm{div}\vec{a}=\nabla\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

名为场的旋度.

3.穿过曲面的流量　若向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 在域 Ω 内产生向量场,则称积分

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_S (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

为穿过位于域 Ω 内的已知曲面 S 的流向法线上单位向量 $\vec{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 所指的那一面的流量.在向量的论述中奥斯特洛格拉德斯基公式具有下面的形状:

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_V \mathrm{div}\vec{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

式中 S 为包围体积 V 的曲面,$\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线单位向量.

4.向量的环流　数

$$\int_C \vec{a}\mathrm{d}\vec{r}=\int_C a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z$$

称为向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 沿某曲线 C 所取的线积分(场做的功).

若围线 C 是封闭的,则称线积分为向量 $\vec{a}$ 沿围线 C 的环流.

在向量的形式上斯托克斯公式为

$$\oint_C \vec{a}\mathrm{d}\vec{r}=\iint_S \vec{n}\mathrm{rot}\vec{a}\mathrm{d}S,$$

式中 C 为包围曲面 S 的封闭围线,并且对曲面 S 的法线 $\vec{n}$ 之方向应当这样来选择:使得立于曲面 S 上的观察者,以头向着法线的方向,围线 C 的回绕是依反时针前进的方向作成的(对于右旋坐标系).

5.有势场　向量场 $\vec{a}(\vec{r})$ 是某数量 u 的梯度即 $\mathrm{grad}u=\vec{a}$,$\vec{a}$ 名为有势场,而数量 u 名为场的势.

若势 u 为单值函数,则

$$\int_{AB} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r}=u(B)-u(A).$$

特别是,在这个情形向量 $\vec{a}$ 的环流等于零.

给定在单联通域内的场 $\vec{a}$ 为有势场的充要条件,是条件 $\mathrm{rot}\vec{a}=\vec{0}$ 满足,就是说,这样的场应当是无旋场.

【4412】 求 $\operatorname{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}$（$\vec{c}$ 为常向量）.

解 $|\vec{c}\times\vec{r}|^2=(c_yz-c_zy)^2+(c_zx-c_xz)^2+(c_xy-c_yx)^2$.于是，

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}&=[2c_z(c_zx-c_xz)-2c_y(c_xy-c_yx)]\vec{i}+[-2c_z(c_yz-c_zy)+2c_x(c_xy-c_yx)]\vec{j}\\&\quad+[2c_y(c_yz-c_zy)-2c_x(c_zx-c_xz)]\vec{k}\\&=2[x(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_x(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{i}\\&\quad+2[y(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_y(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{j}\\&\quad+2[z(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_z(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{k}\\&=2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c})-2\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

【4415】 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$在凸形域 Ω内可微分且$|\operatorname{grad}u|\leqslant M$，其中 M 为常数，则对于 Ω中任意两点 A,B有：

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$为 A 与 B两点间之距离.

证 由于 Ω为凸形域，故线段$\overline{AB}$整个属于 Ω.设 B的坐标为(x_0,y_0,z_0)，A 的坐标为(x_1,y_1,z_1)，且令 $x_1-x_0=\Delta x,y_1-y_0=\Delta y,z_1-z_0=\Delta z$，并考虑一元函数 $f(t)=u(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)(0\leqslant t\leqslant 1)$，显然 $f(0)=u(B),f(1)=u(A)$，且 $f(t)$在$[0,1]$可微，并且

$$\begin{aligned}f'(t)&=u'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta x+u'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta y\\&\quad+u'_z(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta z.\end{aligned}$$

于是，由微分学中值定理知

$$\begin{aligned}u(A)-u(B)&=f(1)-f(0)=f'(\xi)=u'_x(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta x\\&\quad+u'_y(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta y+u'_z(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta z\\&=[\operatorname{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA},\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}|u(A)-u(B)|&=|[\operatorname{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA}|\\&\leqslant|\operatorname{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)|\cdot|\overrightarrow{BA}|\leqslant M\rho(A,B).\end{aligned}$$

【4421】 用直接计算的方法证明向量 $\vec{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$(坐标轴方向的单位向量为$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$)外，另有直角坐标系 $O'x'y'z'$(坐标轴方向的单位向量为$\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$).我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'},$$

设

$$\begin{cases}\vec{i}'=\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k},\\ \vec{j}'=\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k},\\ \vec{k}'=\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}.\end{cases}$$

又设 $\vec{r}_0=\overrightarrow{OO'}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$.于是，空间一点 P在两个坐标系中的坐标(x,y,z)与(x',y',z')之间的关系为(令$\vec{r}=\overrightarrow{OP},\vec{r}'=\overrightarrow{O'P}$)：

$$x'=\vec{r}'\cdot\vec{i}'=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{i}'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma_1,$$
$$y'=\vec{r}'\cdot\vec{j}'=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{j}'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma_2,$$
$$z'=\vec{r}'\cdot\vec{k}'=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma_3,$$

我们有

$$\vec{a}=a_{x'}\vec{i}'+a_{y'}\vec{j}'+a_{z'}\vec{k}'=a_{x'}(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma_1\,\vec{k})+a_{y'}(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta_2\,\vec{j}+\cos\gamma_2\,\vec{k})$$
$$+a_{z'}(\cos\alpha_3\,\vec{i}+\cos\beta_3\,\vec{j}+\cos\gamma_3\,\vec{k}).$$

由此可知

$$a_x=a_{x'}\cos\alpha+a_{y'}\cos\alpha+a_{z'}\cos\alpha$$
$$a_y=a_{x'}\cos\beta+a_{y'}\cos\beta_2+a_{z'}\cos\beta_3$$
$$a_z=a_{x'}\cos\gamma_1+a_{y'}\cos\gamma_2+a_{z'}\cos\gamma_3.$$

于是,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}=\left(\cos\alpha\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\alpha\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\alpha\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\alpha$$
$$+\left(\cos\alpha\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\alpha\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\alpha\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\alpha+\left(\cos\alpha\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\alpha\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\alpha\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\alpha.$$

同理,可得

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}=\left(\cos\beta\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\beta+\left(\cos\beta\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\beta$$
$$+\left(\cos\beta\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\beta_3,$$
$$\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\gamma_1+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\gamma_2$$
$$+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\gamma_3.$$

将这三式相加,得

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=(\vec{i}'\cdot\vec{i}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+(\vec{j}'\cdot\vec{i}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+(\vec{k}'\cdot\vec{i}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}+(\vec{i}'\cdot\vec{j}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+(\vec{j}'\cdot\vec{j}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}$$
$$+(\vec{k}'\cdot\vec{j}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}+(\vec{i}'\cdot\vec{k}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+(\vec{j}'\cdot\vec{k}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+(\vec{k}'\cdot\vec{k}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}$$
$$=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

证毕.

【4422】 证明:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S,$$

其中 S 为围绕着点 M 和界有体积 V 的封闭曲面,$\vec{n}$ 为曲面 S 之外法线,$d(S)$ 为曲面 S 的直径.

证 由于

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\vec{n}$ 的方向余弦.应用奥氏公式以及积分中值定理,得

$$\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\operatorname{div}\vec{a}(M_1)\cdot V,$$

其中 M_1 是 V 中某点,即

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S.$$

令 $d(S)\to 0$,这时 V 缩向点 M,从而点 $M_1\to M$,取极限,即得

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S.$$

证毕.

【4423】 求

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ w_x&w_y&w_z\end{vmatrix}.$$

解 $$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ w_x&w_y&w_z\end{vmatrix}=\operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=0.$$

【4437】 求:(1)$\operatorname{rot}\vec{c}f(r)$;(2)$\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$($\vec{c}$ 为定向量).

解 (1) $\operatorname{rot}\vec{c}f(r)=f(r)\operatorname{rot}\vec{c}+\operatorname{grad}f(r)\times\vec{c}=\dfrac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{c})$.

(2) $\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]=f(r)\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r})+\operatorname{grad}f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})$.

但是,
$$\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ c_yz-c_zy&c_zx-c_xz&c_xy-c_yx\end{vmatrix}=2\vec{c},$$

$$\operatorname{grad}f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})=\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{r})=\frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}],$$

故最后得
$$\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]=2f(r)\vec{c}+\frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}].$$

【4440】 物体以一定的角速度 w 围绕轴 $\vec{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 旋转.求速度向量 $\vec{v}$ 在空间的点 $M(x,y,z)$ 和在已知时刻的旋度.

解 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{w}\times\vec{r}$.从而有

$$v_x=v_{0x}+w_yz-w_zy,\quad v_y=v_{0y}+w_zx-w_xz,\quad v_z=v_{0z}+w_xy-w_yx,$$

由于

$$\operatorname{rot}_x\vec{v}=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2w_x,\quad \operatorname{rot}_y\vec{v}=2w_y\text{ 及 }\operatorname{rot}_z\vec{v}=2w_z,$$

故 $\operatorname{rot}\vec{v}=2\vec{w}$.

【4444】 求向量 $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ 穿过球 $x^2+y^2+z^2=1, x>0, y>0, z>0$ 的正八分之一的流量.

解 设 S 为所给的曲面，S_1, S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分，则有

$$\iint\limits_S a_n\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_1} a_n\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2} a_n\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_3} a_n\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x>0,y>0,z>0}} \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x>0,y>0,z>0}} (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\cos\psi\cdot r(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi)\mathrm{d}r$$

$$=2\,\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos\psi\sin\psi+\cos^2\psi(\cos\varphi+\sin\varphi)]\mathrm{d}\psi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{8}\pi.$$

但在 $S_i(i=1,2,3)$ 上，显然有 $\vec{a}\perp\vec{n}$，故 $a_n=0$. 从而，$\iint\limits_{S_i} a_n\mathrm{d}S=0\ (i=1,2,3)$. 于是，所求的流量为

$$\iint\limits_S a_n\mathrm{d}S=\frac{3}{8}\pi.$$

【4450】 在单位时间内经过曲面元素 $\mathrm{d}S$ 而进入温度场 u 的热量等于

$$\mathrm{d}Q=-k\vec{n}\cdot\operatorname{grad}u\mathrm{d}S,$$

其中 k 为内热的传导系数，$\vec{n}$ 为曲面 S 的法线的单位向量. 求在单位时间内物体 V 所积累的热量. 研究温度上升的速度以推出为物体温度所满足的方程式(热传导方程式).

解 由于 $\mathrm{d}Q=-k\vec{n}\cdot\operatorname{grad}u\mathrm{d}S=-k\operatorname{grad}_n u\mathrm{d}S$，故由奥式公式，即得

$$Q=-\iint\limits_S k\operatorname{grad}_n u\mathrm{d}S=\iiint\limits_V k\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)\mathrm{d}V.$$

因此，每单位时间内向立体内部流入的热量为

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)\mathrm{d}V. \tag{1}$$

这一热量引起立体内部温度的增加，现在我们从另一方面再来计算此热量. 在时间 $\mathrm{d}t$ 内温度 u 增加 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$，需要对体积元素 $\mathrm{d}V$ 输入热量 $c\mathrm{d}u\rho\mathrm{d}V=c\dfrac{\partial u}{\partial t}\rho\mathrm{d}t\mathrm{d}V$，其中 c 为物体在所考察的点处的热容量. 于是，在时间 $\mathrm{d}t$ 内整个立体就要吸收热量 $\mathrm{d}t\iiint\limits_V c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V$，而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V. \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式，便得等式

$$\iiint\limits_V\left\{c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)\right\}\mathrm{d}V=0.$$

由于上式对取在所考察境域内的任何立体 V 都适合，且被积函数显见连续，故根据 4097 题的结果，当点属于所考察的境域时，恒有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u),$$

此即所求的热传导方程.

【4455】 求向量 $\vec{a}=\operatorname{grad}(\arctan\dfrac{y}{x})$ 沿着围线 C 的环流 Γ：

(1)C不围绕 Oz 轴；(2)C围绕 Oz 轴.

解 我们有 $\vec{a}=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.于是,易知 $\mathrm{rot}\,\vec{a}=\vec{0}$(除 $x=y=0$,即 Oz 轴上的点).

(1)若 C不围绕 Oz 轴,则可于 C上张一曲面 S,使 S与 Oz 轴不相交,于是,根据斯托克斯公式,得

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}\,\mathrm{d}S=0.$$

(2)若 C围绕 Oz 轴.先设 C正好围绕 Oz 轴旋转一周,取常数 $\tau>0$ 充分小,使 C位于平面 $z=\tau$的上方.在平面 $z=\tau$上围绕 Oz 轴取一圆周 C_r($x^2+y^2=r^2$, $z=\tau$)充分小,使半径 r小于 C到 Oz 轴的距离.以 C与 C_r 为边界张上一曲面 S,使 S与 Oz 轴不相交.由斯托克斯公式,得

$$\oint_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\oint_{-C_r}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}\,\mathrm{d}S=0,$$

其中$-C_r$ 表示沿顺时针方向取向.于是,

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\oint_{C_r}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=\tau$后,得

$$\oint_{C_r}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}\right)(-r\sin\theta)+\left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\right)(r\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

从而,$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}r=2\pi$.

现设 C围绕 Oz 轴旋转了 n圈.为叙述简单起见,假定 $n=2$.在平面 Ozx 上引辅助线(直线段)AB,将 C分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线

$$C_1=ABMA \quad 与 \quad C_2=ANBA$$

(图 4455).根据前面已证的结果可知

$$\oint_{C_1}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=2\pi,\quad \oint_{C_2}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=2\pi.$$

于是,注意到$\overline{AB}$的线积分(第二型)与$\overline{BA}$上的线积分相消,即得

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\oint_{C_1}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\oint_{C_2}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=4\pi.$$

完全类似地,可得一般情况(C围绕 Oz 轴旋转 n圈)时,有

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=2\pi n.$$

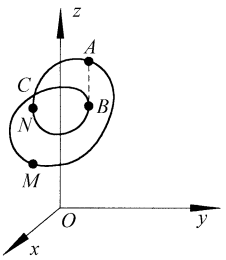

图 4455

【4457】 证明:场

$$\vec{a}=yz(2x+y+z)\vec{i}+xz(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$$

是有势场,并求这个场的势.

解 由于对空间任一点(x,y,z)均有

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\vec{a}=&\left\{\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y+2z)]-\frac{\partial}{\partial z}[xz(x+2y+z)]\right\}\vec{i}\\&+\left\{\frac{\partial}{\partial z}[yz(2x+y+z)]-\frac{\partial}{\partial x}[xy(x+y+2z)]\right\}\vec{j}\\&+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[xz(x+2y+z)]-\frac{\partial}{\partial y}[yz(2x+y+z)]\right\}\vec{k}=\vec{0},\end{aligned}$$

故 $\vec{a}$ 为有势场.



又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u=\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}&=yz(2x+y+z)\mathrm{d}x+xz(x+2y+z)\mathrm{d}y+xy(x+y+2z)\mathrm{d}z\\&=xyz(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+(x+y+z)(yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)\\&=xyz\mathrm{d}(x+y+z)+(x+y+z)\mathrm{d}(xyz)=\mathrm{d}[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

故势 $u=xyz(x+y+z)+C$,其中 C 为任意常数.