变分法基础(第2版)

Fundamentals of the Calculus of Variations (Second Edition)

老大中 著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是变分法方面的专著，书中系统地介绍变分法的基本理论及其应用。

编写本书的目的是希望为高等院校的研究生和高年级大学生提供一本学习变分法课程的教材或教学参考书，使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法。内容包括预备知识、固定边界的变分问题、可动边界的变分问题、泛函极值的充分条件、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理、变分问题的直接方法和力学中的变分原理及其应用。其中一部分内容是作者多年来的研究成果，特别是提出了完全泛函的极值函数定理，统一了变分法中的各种欧拉方程。本书也可供有关专业的教师和科技人员参考。

本书概念清楚，逻辑清晰，内容丰富，深入浅出，便于自学，既注重方法的介绍，又不失数学的系统性、科学性和严谨性。书中列有大量例题和习题，并附有中英文索引。为了帮助读者解决学习中遇到的困难，本书给出了各章共226道习题的全部解答，供读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

变分法基础/老大中著. —2版. —北京：国防工业出版社，2007.7

ISBN 978-118-05078-3

Ⅰ.变… Ⅱ.老… Ⅲ.变分法 Ⅳ.0176

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第035025号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 30½ **字数** 774千字

2007年7月第2版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 49.00元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

第 1 版前言

变分法是17世纪末发展起来的一门数学分支。本书主要介绍古典变分法，它理论完整，在力学、物理学、光学、摩擦学、经济学、宇航理论、信息论和自动控制论等诸多方面有广泛的应用。20世纪中叶发展起来的有限元法，其数学基础之一就是变分法。如今，变分法已成为大学生、研究生、工程技术人员和科学工作者必备的数学基础。

编写本书的目的是为高等院校的研究生和高年级本科生提供一本学习变分法的教材或参考书，使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法，其中包括预备知识、固定边界的变分问题、泛函极值的充分条件、可动边界的变分问题、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理和变分问题的直接方法。书中的一部分内容是作者的研究成果。本书也可作为有关专业的教师、科学研究人员和工程技术人员的参考书。

具有高等数学知识的读者就可阅读本书，当然，如果读者具有线性代数、物理和力学等基础知识，阅读本书就会更容易。

在作者看来，衡量对于一门数学学科知识的掌握程度，有两个基本的检验手段：一是看是否清楚基本概念，因为概念是构建科学大厦的基石；二是看是否会作习题，因为作习题的过程就是消化知识的过程，同时也是加深理解概念的过程，只有会作习题，才能达到会应用的目的。对于变分法这门数学分支来说，如果只会机械地背诵书上的概念和定理，而不动手演算习题，恐怕掌握不好这门知识。书中例题和习题比较丰富。各章均配有适量的习题，大多数习题选自本书所附的参考文献，在此谨向这些参考文献的作者表示感谢。为了帮助读者加深对基本概念的理解和解决学习中遇到的困难，本书提供了各章共145道习题(没计入子习题)的全部解答或证明，其中包括参考文献2(注：即第2版参考文献3)中几乎全部习题的解答，供读者参考，同时这些习题解答也可看作是书中例题的补充。

变分法是一门饶有趣味的数学学科，作者本人就曾在变分法的学习和教学过程中体验到这种趣味。但作者认为学以致用才是更重要的目的。希望读者以愉悦的心情阅读本书，能从本书中学到所需要的知识，并能把这些知识应用到实践中去。在计算机高速发展的时代，为了提高计算精度和应用的普遍性，特别是在第8章中，一些例题和习题的解尽量给出分数和代数的形式，这很容易变成小数形式和具体形式。

为使读者了解变分法的发展历史，本书还对其中所涉及的37位科学家进行了最多200多字的简要介绍，其中的译名以1993年全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》为准。

本书初稿曾经用作三届北京理工大学工科硕士研究生的讲座材料，并给博士研究生和大学四年级学生讲授过部分内容。

作者在本书编写过程中曾得到北京理工大学前党委书记谈天民教授的指导与帮助。国防工业出版社张文峰处长对本书出版给予了大力支持。研究生李雪芳、李秀明帮助作者校验了部分习题。在此谨表示衷心感谢。

限于作者水平，书中若有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

作者的通讯地址：laodazhong@tsinghua.org.cn

老大中

2003年9月于北京

第 2 版前言

本书第 1 版出版后，收到了许多读者来信，对本书给予肯定，国家图书馆和国内许多大学的图书馆都收藏了本书，并被列为专著，这使作者深受感动与鼓舞，在此谨向收藏、使用和关心本书的单位和读者致以谢意。

本书第 1 版于 2004—2006 年曾用作三届北京理工大学硕士研究生的《变分法》选修课教材。在此期间，作者还多次给有关专业的本科生、硕士生和博士生讲授了本书的部分内容。

应国防工业出版社之约，决定本书出第 2 版。这次再版，修正了第 1 版中所发现的错误和不当之处，增加、改写了部分例题和习题。书中共有 226 道习题(未计入子习题)，全部给出解题过程及答案，供读者参考。

增加了部分内容，增设了第 9 章力学中的变分原理及其应用；把原书第 5 章第 4 节的哈密顿原理放到了第 9 章中；增加、改写了书中出现的科学家简介；等等。

不少初学者都认为变分法比较抽象难学，常为变分法中出现的各种概念所困惑，这说明他们还没有充分掌握变分法的基本观点和思想方法。不错，《简明不列颠百科全书》也认为变分法是最吸引人、最重要而又最难的数学分支之一。作为数学的一个分支，变分法确实有些抽象，这是正常的，因为数学的特点之一就是它的高度抽象性。比较难学也是事实，但难学也是可以学会的，学会了就不觉得难了。

子曰："吾道一以贯之。"这是《论语·里仁》里的一句话，意思是孔子说他是用一个基本观点把他的学说贯穿起来的。"一以贯之"这句话可以称得上是古代圣贤的"心学"。事实上，并不是任何事情都可以"一以贯之"的。那么，学习变分法是否可以"一以贯之"呢？回答应该是肯定的。泛函取极值的必要条件是一阶变分等于零，这就是变分法的"一以贯之"。掌握了这个主旨，变分法就不难学了。

根据"一以贯之"这个基本观点，本书作者论述了变分法中含有任意个自变量、任意个多元函数和任意阶多元函数偏导数的完全泛函的变分问题，提出并证明了完全泛函的变分问题的定理，采用偏微分算子，给出了完全欧拉方程组，该方程组包括了变分问题的各种欧拉方程。所提出的这个定理的作用还难以预料，相信读者一定能够运用这个定理解决更多的问题。本书作者认为，这是作者近年来对变分法这门学科做出的最重要的研究成果，也是对变分法这门学科的发展做出的最重要的贡献。

还是从"一以贯之"这个基本观点出发，本书作者还论述变分法中依赖于单自

变量的多个未知函数及其高阶导数且待定边界的泛函的变分问题，提出并论证了当泛函的一阶变分为零的情况下，可动端点的各变分项一般并非相互独立，而是至少要有一项为零或至少要给出一个已知条件的新见解，给出了此类泛函的变分问题的若干新的定理和推论。这是本书作者近年来对变分法这门学科的发展做出的另一个贡献。

变分法这门学科就像一座富矿，其中有许多宝藏尚待人们去探索、发现和开采。数学是历史发展进程的标志，是人类智慧的结晶，是人类永远的知识财富和精神财富，永远都不会过时，而变分法就是其中的重要组成部分。

虽经作者一再努力，力求使本书精益求精，但限于作者水平，书中可能还会有不当之处，希望读者批评指正。

作者 E-mail 地址：laodazhong@tsinghua.org.cn
laodazhong@bit.edu.cn

老大中
2006 年 12 月于北京

目　录

第 1 章　预备知识 …… 1
1.1　泰勒公式 …… 1
1.1.1　一元函数的情形 …… 1
1.1.2　多元函数的情形 …… 1
1.2　含参变量的积分 …… 3
1.3　场论基础 …… 5
1.3.1　方向导数及梯度 …… 5
1.3.2　向量场的通量和散度 …… 8
1.3.3　高斯定理与格林公式 …… 10
1.3.4　向量场的环量与旋度 …… 15
1.3.5　斯托克斯定理 …… 18
1.3.6　梯度、散度和旋度表示的统一高斯公式 …… 18
1.4　直角坐标与极坐标的坐标变换 …… 19
1.5　变分法基本引理 …… 22
1.6　求和约定、克罗内克尔符号和排列符号 …… 26
1.7　张量的基本概念 …… 29
1.7.1　直角坐标旋转变换 …… 29
1.7.2　笛卡儿二阶张量 …… 30
1.7.3　笛卡儿张量的代数运算 …… 32
1.7.4　张量的商定律 …… 33
1.7.5　二阶张量的主轴、特征值和不变量 …… 33
1.7.6　笛卡儿张量的微分运算 …… 35
1.8　常用不等式 …… 36
1.9　名家介绍 …… 40
习题 1 …… 43
第 2 章　固定边界的变分问题 …… 45
2.1　古典变分问题举例 …… 45
2.2　变分法的基本概念 …… 47
2.3　最简泛函的变分与极值的必要条件 …… 53
2.4　最简泛函的欧拉方程 …… 62
2.5　欧拉方程的几种特殊类型及其积分 …… 68
2.6　依赖于多个一元函数的变分问题 …… 75

2.7 依赖于高阶导数的变分问题 …… 77
2.8 依赖于多元函数的变分问题 …… 84
2.9 完全泛函的变分问题 …… 93
2.10 欧拉方程的不变性 …… 97
2.11 名家介绍 …… 103
习题2 …… 106
第3章 泛函极值的充分条件 …… 112
3.1 极值曲线场 …… 112
3.2 雅可比条件和雅可比方程 …… 113
3.3 魏尔斯特拉斯函数与魏尔斯特拉斯条件 …… 117
3.4 勒让德条件 …… 120
3.5 泛函极值的充分条件 …… 121
3.5.1 魏尔斯特拉斯充分条件 …… 121
3.5.2 勒让德充分条件 …… 124
3.6 泛函的高阶变分 …… 128
3.7 名家介绍 …… 132
习题3 …… 133
第4章 可动边界的变分问题 …… 135
4.1 最简泛函的变分问题 …… 135
4.2 含有多个函数的泛函的变分问题 …… 146
4.3 含有高阶导数的泛函的变分问题 …… 153
4.3.1 泛函含有一个未知函数二阶导数的情形 …… 153
4.3.2 泛函含有一个未知函数多阶导数的情形 …… 156
4.3.3 泛函含有多个未知函数多阶导数的情形 …… 160
4.4 含有多元函数的泛函的变分问题 …… 163
4.5 具有尖点的极值曲线 …… 168
4.6 单侧变分问题 …… 173
4.7 名家介绍 …… 178
习题4 …… 179
第5章 条件极值的变分问题 …… 181
5.1 完整约束的变分问题 …… 181
5.2 微分约束的变分问题 …… 185
5.3 等周问题 …… 188
5.4 混合型泛函的极值问题 …… 196
5.4.1 简单混合型泛函的极值问题 …… 196
5.4.2 二维、三维和 n 维问题的欧拉方程 …… 199
5.5 名家介绍 …… 201
习题5 …… 202

第 6 章　参数形式的变分问题 …… 204
6.1　曲线的参数形式及齐次条件 …… 204
6.2　参数形式的等周问题和测地线 …… 205
6.3　可动边界参数形式泛函的极值 …… 211
习题 6 …… 213
第 7 章　变分原理 …… 215
7.1　集合与映射 …… 215
7.2　集合与空间 …… 218
7.3　标准正交系与傅里叶级数 …… 225
7.4　算子与泛函 …… 227
7.5　泛函的导数 …… 234
7.6　算子方程的变分原理 …… 236
7.7　与自共轭常微分方程边值问题等价的变分问题 …… 238
7.8　与自共轭偏微分方程边值问题等价的变分问题 …… 243
7.9　弗里德里希斯不等式和庞加莱不等式 …… 248
7.10　名家介绍 …… 253
习题 7 …… 256
第 8 章　变分问题的直接方法 …… 258
8.1　极小(极大)化序列 …… 258
8.2　欧拉有限差分法 …… 260
8.3　里茨法 …… 262
8.4　坎托罗维奇法 …… 266
8.5　伽辽金法 …… 267
8.6　最小二乘法 …… 277
8.7　算子方程的特征值和特征函数 …… 277
8.8　名家介绍 …… 287
习题 8 …… 288
第 9 章　力学中的变分原理及其应用 …… 291
9.1　力学的基本概念 …… 291
9.1.1　力学系统 …… 291
9.1.2　约束及其分类 …… 292
9.1.3　实位移与虚位移 …… 292
9.1.4　应变与位移的关系 …… 293
9.1.5　功与能 …… 293
9.2　虚位移原理 …… 298
9.2.1　质点系的虚位移原理 …… 298
9.2.2　弹性体的广义虚位移原理 …… 299
9.2.3　弹性体的虚位移原理 …… 301

9.3 最小势能原理 …… 304
9.4 余虚功原理 …… 307
9.5 最小余能原理 …… 310
9.6 哈密顿原理及其应用 …… 311
9.6.1 质点系的哈密顿原理 …… 311
9.6.2 弹性体的哈密顿原理 …… 321
9.7 赫林格—赖斯纳广义变分原理 …… 328
9.8 胡海昌—鹫津久一郎广义变分原理 …… 330
9.9 莫培督—拉格朗日最小作用量原理 …… 333
9.10 名家介绍 …… 336
习题9 …… 337
附录1 习题全解 …… 341
第1章 预备知识习题解 …… 341
第2章 固定边界的变分问题习题解 …… 345
第3章 泛函极值的充分条件习题解 …… 369
第4章 可动边界的变分问题习题解 …… 380
第5章 条件极值的变分问题习题解 …… 394
第6章 参数形式的变分问题习题解 …… 407
第7章 变分原理习题解 …… 413
第8章 变分问题的直接方法习题解 …… 420
第9章 力学中的变分原理及其应用习题解 …… 441
附录2 索引 …… 455
参考文献 …… 471

Contents

Chapter 1 Preliminaries 1

1.1 Taylor formulas 1

1.1.1 Case of a Function of One Variable 1

1.1.2 Cases of Functions of Several Variables 1

1.2 Integrals with Parameters 3

1.3 Fundamentals of the Theory of Field 5

1.3.1 Directional Derivative and Gradient 5

1.3.2 Flux and Divergence of Vector Field 8

1.3.3 Gauss Theorem and Green's Formulas 10

1.3.4 Circulation and Rotation of Vector Field 15

1.3.5 Stokes Theorem 18

1.3.6 United Gauss Formula Expressed by Gradient, Divergence and Rotation 18

1.4 Coordinate Transformations between Cartesian Coordinates and Polar Coordinates 19

1.5 Fundamental Lemmas of the Calculus of Variations 22

1.6 Summation Convention, Kronecker Symbol and Permutation Symbol 26

1.7 Basic Conceptions of Tensors 29

1.7.1 Rotation Transformations of Rectangle Coordinates 29

1.7.2 Cartesian Second Order Tensors 30

1.7.3 Algebraic Operations of Cartesian Tensors 32

1.7.4 Quotient Laws of Tensors 33

1.7.5 Principal Axes, Eigenvalues and Invariants of Second Order Tensors 33

1.7.6 Differential Operations of Cartesian Tensors 35

1.8 Some Useful Inequalities 36

1.9 Introduction to the Famous Scientists 40

Problems 1 43

Chapter 2 Variational Problems with Fixed Boundaries 45

2.1 Examples of the Classical Variational Problems 45

2.2 Fundamental Conceptions of the Calculus of Variations 47

2.3 Variations of the Simplest Functionals and Necessary Conditions of Extrema of Functionals 53

2.4 Euler Equations of the Simplest Functional 62

2.5 Several Special Cases of Euler Equation and Their Integrals ····· 68
2.6 Variational Problems Depending on Several Functions of One Variable ····· 75
2.7 Variational Problems Depending on Higher Order Derivatives ····· 77
2.8 Variational Problems Depending on Functions of Several Variables ····· 84
2.9 Variational Problems of Complete Function ····· 93
2.10 Invariance of Euler Equation ····· 97
2.11 Introduction to the Famous Scientists ····· 103
Problems 2 ····· 106
Chapter 3 Sufficient Conditions of Extrema of Functionals ····· 112
3.1 Extremal Curve Fields ····· 112
3.2 Jacobi Conditions and Jacobi Equation ····· 113
3.3 Weierstrass Functions and Weierstrass Conditions ····· 117
3.4 Legendre Conditions ····· 120
3.5 Sufficient Conditions of Extrema of Functionals ····· 121
3.5.1 Weierstrass Sufficient Conditions ····· 121
3.5.2 Legendre Sufficient Conditions ····· 124
3.6 Higher Order Variations of Functionals ····· 128
3.7 Introduction to the Famous Scientists ····· 132
Problems 3 ····· 133
Chapter 4 Problems with Variable Boundaries ····· 135
4.1 Variational Problems of the Simplest Functional ····· 135
4.2 Variational Problems of Functionals with Several Functions ····· 146
4.3 Variational Problems of Functionals with Higher Order Derivatives ····· 153
4.3.1 Cases of Functionals with One Unknown Function and Its Second Derivative ····· 153
4.3.2 Cases of Functionals with One Unknown Function and Its Several Order Derivatives ····· 156
4.3.3 Cases of Functionals with Several Unknown Functions and Their Several Order Derivatives ····· 160
4.4 Variational Problems of Functionals with Functions of Several Variables ····· 163
4.5 Extremal Curves with Cuspidal Points ····· 168
4.6 One-Sided Variational Problems ····· 173
4.7 Introduction to the Famous Scientists ····· 178
Problems 4 ····· 179
Chapter 5 Variational Problems of Conditional Extrema ····· 181
5.1 Variational Problems with Holonomic Constraints ····· 181
5.2 Variational Problems with Differential Constraints ····· 185
5.3 Isoperimetric Problems ····· 188

5.4 Extremal Problems of Mixed Type Functionals ····· 196
5.4.1 Extremal Problems of Simple Mixed Type Functionals ····· 196
5.4.2 Euler Equations of 2-D, 3-D and n-D Problems ····· 199
5.5 Introduction to the Famous Scientists ····· 201
Problems 5 ····· 202
Chapter 6 Variational Problems in Parametric Forms ····· 204
6.1 Parametric Forms of Curves and Homogeneous Condition ····· 204
6.2 Isoperimetric Problems in Parametric Forms and Geodesic Line ····· 205
6.3 Extrema of Functionals with Variable Boundaries and Parametric Forms ····· 211
Problems 6 ····· 213
Chapter 7 Variational Principles ····· 215
7.1 Sets and Mappings ····· 215
7.2 Sets and Spaces ····· 218
7.3 Normal Orthogonal System and Fourier Series ····· 225
7.4 Operators and Functionals ····· 227
7.5 Derivatives of Functionals ····· 234
7.6 Variational Principles of Operator Equations ····· 236
7.7 Variational Problems of Equivalence with Boundary Value Problem of Self Conjugate Ordinary Differential Equation ····· 238
7.8 Variational Problems of Equivalence with Boundary Value Problem of Self Conjugate Partial Differential Equation ····· 243
7.9 Friedrichs Inequality and Poincaré Inequality ····· 248
7.10 Introduction to the Famous Scientists ····· 253
Problems 7 ····· 256
Chapter 8 Direct Methods of Variational Problems ····· 258
8.1 Minimizing (Maximizing) Sequence ····· 258
8.2 Euler Finite Difference Method ····· 260
8.3 Ritz Method ····· 262
8.4 Kantorovich Method ····· 266
8.5 Galerkin Method ····· 267
8.6 Least Square Method ····· 277
8.7 Eigenvalues and Eigenfunctions of Operator Equations ····· 277
8.8 Introduction to the Famous Scientists ····· 287
Problems 8 ····· 288
Chapter 9 Variational Principles in Mechanics and Their Applications ····· 291
9.1 Fundamental Conceptions in Mechanics ····· 291
9.1.1 System of Mechanics ····· 291
9.1.2 Constraints and Their Classification ····· 292

9.1.3 Actual Displacement and Virtual Displacement ····· 292
9.1.4 Relations of Strains and Displacements ····· 293
9.1.5 Work and Energies ····· 293
9.2 Principle of Virtual Displacement ····· 298
9.2.1 Principle of Virtual Displacement for System of Particles ····· 298
9.2.2 Principle of generalized Virtual Displacement for Elastic Body ····· 299
9.2.3 Principle of Virtual Displacement for Elastic Body ····· 301
9.3 Principle of Minimum Potential Energy ····· 304
9.4 Principle of Complementary Virtual Work ····· 307
9.5 Principle of Minimum Complementary Energy ····· 310
9.6 Hamilton Principle and Its Applications ····· 311
9.6.1 Hamilton Principle of System of Particles ····· 311
9.6.2 Hamilton Principle of Elastic Body ····· 321
9.7 Hellinger-Reissner Generalized Variational Principles ····· 328
9.8 Hu Haichang-Kyuichiro Washizu Generalized Variational Principles ····· 330
9.9 Maupertuis-Lagrange Principle of Least Action ····· 333
9.10 Introduction to the Famous Scientists ····· 336
Problems 9 ····· 337
Appendix 1 All Solutions to the Problems ····· 341
Chapter 1 Solutions to the Problems in Preliminaries ····· 341
Chapter 2 Solutions to the Problems in Variational Problems with Fixed Boundaries ····· 345
Chapter 3 Solutions to the Problems in Sufficient Conditions of Extrema of Functionals ····· 369
Chapter 4 Solutions to the Problems in Problems with Variable Boundaries ····· 380
Chapter 5 Solutions to the Problems in Variational Problems of Conditional Extrema ····· 394
Chapter 6 Solutions to the Problems in Variational Problems in Parametric Forms ····· 407
Chapter 7 Solutions to the Problems in Variational Principles ····· 413
Chapter 8 Solutions to the Problems in Direct Methods of Variational Problems ····· 420
Chapter 9 Solutions to the Problems in Variational Principles in Mechanics and Their Applications ····· 441
Appendix 2 Index ····· 455
References ····· 471

第 1 章　预备知识

工欲善其事，必先利其器。学习变分法需要一些必备的基础知识，如一元函数和多元函数的泰勒级数展开，含参变量的积分，向量分析与场论，坐标变换，变分法的基本引理，张量的基本概念等。本章简要介绍这些基础知识。

1.1　泰勒公式

1.1.1　一元函数的情形

定理 1.1.1　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶连续导数，则当 x 在 (a,b) 内时，$f(x)$ 可表示为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n \tag{1-1-1}$$

式中

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{1-1-2}$$

这里 ξ 是介于 x_0 和 x 之间的某个值。

定理 1.1.1 称为一元函数的**泰勒中值定理**或**泰勒定理**。公式(1-1-1) 称为 $f(x)$ 在点 x_0 按 $(x - x_0)$ 的幂展开到 n 阶的**泰勒公式**或称为**泰勒级数展开**。公式(1-1-2) 称为**拉格朗日型余项**。当 $x \to x_0$ 时，R_n 是一个比 $|x - x_0|^n$ 更高阶的无穷小，或者说 R_n 是一个比 $|x - x_0|$ 高 $n-1$ 阶的无穷小。

定理 1.1.2　设可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值，则在该点必有 $f'(x_0) = 0$。该定理称为**一元函数的极值定理**。

1.1.2　多元函数的情形

一元函数的泰勒中值定理可推广到多元函数的情形。下面先讨论二元函数余项为拉格朗日型的泰勒公式。

定理 1.1.3　若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内连续且有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，并设 $(x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y)$ 为该邻域内的任意一点，则总存在一个 $\theta(0 < \theta < 1)$，使下面的 n 阶泰勒公式成立

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots +$$

$$\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n \tag{1-1-3}$$

式中

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)=\sum_{r=0}^{k}C_k^r(\Delta x)^r(\Delta y)^{n-r}\frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^r\partial y^{k-r}} \tag{1-1-4}$$

即按牛顿二项式定理将它展开成为 $k+1$ 项之和，C_k^r 为 k 个事物中取 r 个的组合数。

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y) \tag{1-1-5}$$

R_n 称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的 **n 阶拉格朗日形式余项**。

定理 1.1.3 称为**二元函数的泰勒中值定理**。

令 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$\Delta x=\rho\cos\alpha$，$\Delta y=\rho\sin\alpha$。由于 $f(x,y)$ 的各 $n+1$ 阶偏导数都连续，在点 (x_0,y_0) 的闭邻域内 $f(x,y)$ 的各 $n+1$ 阶偏导数的绝对值都不超过一个正数 M。因此对于该邻域上任意一点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，余项的绝对值为

$$|R_n|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(|\Delta x|+|\Delta y|)^{n+1}=\frac{M\rho^{n+1}}{(n+1)!}(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|)^{n+1}\leqslant 2M\rho^{n+1}$$

这表明 R_n 是一个比 ρ 高 n 阶的无穷小。

定理 1.1.4 设可导函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极值，则在该点必有 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。该定理称为**二元函数的极值定理**。

上述定理可推广到 m 元函数的情形，并有下述定理。

定理 1.1.5 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 的某个邻域内连续且有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，并设 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为该邻域内的任意一点，则总存在 $\theta(0<\theta<1)$，使下面的 n 阶泰勒公式成立

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\\
&\frac{1}{1!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\\
&\frac{1}{2!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\cdots+\\
&\frac{1}{n!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+R_n
\end{aligned} \tag{1-1-6}$$

式中

$$\Delta x_k=x_k-x_k^0\qquad(k=1,2,\cdots,m)$$

$$\begin{aligned}
R_n=&\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1}\times\\
&f(x_1^0+\theta\Delta x_1,x_2^0+\theta\Delta x_2,\cdots,x_m^0+\theta\Delta x_m)
\end{aligned} \tag{1-1-7}$$

当 $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_m^2}\to 0$ 时，R_n 是一个比 ρ 高 n 阶的无穷小。定理 1.1.5 称为**多元函数的泰勒中值定理**。

定理 1.1.6 设可导函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 有极值，则在该点必有 $f_{x_k}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)=0$，其中 $k=1,2,\cdots,m$。该定理称为**多元函数的极值定理**。

n 阶泰勒展开式(1-1-6)可写成下面简洁的形式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(\sum_{k=1}^{m}\Delta x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^i f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+R_n \tag{1-1-8}$$

式(1-1-1)和式(1-1-3)可以看作是式(1-1-6)中 m 分别等于1和2的情况。

1.2 含参变量的积分

设函数 $f(x,y)$ 是矩形域 $D[a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d]$ 上的有界函数,对于 $[c,d]$ 上任何固定的 y_0,函数 $f(x,y_0)$ 就是 x 的函数,若这个函数在 $[a,b]$ 上可积,则 $\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 就唯一地确定一个数,这个数与 y_0 有关,当 y_0 在 $[c,d]$ 上变动时,所得到的积分值一般来说是不同的,可表示为

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1-2-1}$$

它是 y 的函数,定义域为 $[c,d]$,通常 y 称为**参数**,它在积分过程中被看作常量,并且积分 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 称为**含参变量积分**。下面讨论含参变量积分的连续性、可导性与可积性等性质。

性质1 (连续性) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $[a,b;c,d]$ 上连续,则函数

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间 $[c,d]$ 上连续。这个性质也可以改写成

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1-2-2}$$

即极限与积分的运算次序可以交换。此性质称为**积分号下求极限**。本性质的证明涉及一致连续概念,证明从略。

性质2 (积分顺序的可交换性) 若 $f(x,y)$ 在矩形域 $[a,b;c,d]$ 上连续,则

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \tag{1-2-3}$$

即积分顺序可以交换,该性质称为**积分号下求积分**。

性质3 (求导与积分顺序的可交换性) 若 $f(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 在矩形域 $[a,b;c,d]$ 上连续,则积分 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可导,且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x \tag{1-2-4}$$

即积分与求导次序可以交换,这个性质称为**积分号下求微商**。

证 设 $F(y)=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$,因函数 $f_y(x,y)$ 在 D 上连续,故它在 D 上的二重积分可以交换积分次序,从而对区间 $[c,d]$ 上的任意 y 有

$$\int_c^y F(y)\mathrm{d}y=\int_c^y\left[\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_c^y f_y(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^b[f(x,y)-f(x,c)]\mathrm{d}x=\varphi(y)-\varphi(c)$$

由于 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续,因此对上式两端求导,得

$$\varphi'(y) = F(y) = \int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

证毕。

有时还会遇到这样一种含参变量的积分，它的上、下限也是参变量的函数，即

$$\varphi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1-2-5}$$

关于它有下列性质：

性质 4 设函数 $f(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 都在闭矩形域 $D[a,b;c,d]$ 上连续，又函数 $\alpha(y),\beta(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可导，且当 $c \leqslant y \leqslant d$ 时，有 $a \leqslant \alpha(y) \leqslant b, a \leqslant \beta(y) \leqslant b$，那么函数

$$\varphi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间 (c,d) 上可导，且有

$$\varphi'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y) \tag{1-2-6}$$

式(1-2-6)称为**莱布尼茨公式**。

证 对 $[c,d]$ 内任何 y，当 y 有改变量 Δy 时，$\alpha(y)$ 和 $\beta(y)$ 分别有改变量

$$\Delta\alpha = \alpha(y+\Delta y) - \alpha(y), \Delta\beta = \beta(y+\Delta y) - \beta(y)$$

而 $\varphi(y)$ 有改变量

$$\Delta\varphi(y) = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y) = \int_{\alpha+\Delta\alpha}^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x =$$

$$\int_\alpha^\beta f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x + \int_\beta^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x - \int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x =$$

$$\int_\alpha^\beta [f(x,y+\Delta y) - f(x,y)]\mathrm{d}x + \int_\beta^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x - \int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha} f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x$$

将上式两端同除以 Δy，并对上式右端后面两个积分用中值定理，得

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta y} = \int_\alpha^\beta \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\mathrm{d}x + f(\bar{\beta},y+\Delta y)\frac{\Delta\beta}{\Delta y} - f(\bar{\alpha},y+\Delta y)\frac{\Delta\alpha}{\Delta y}$$

式中 $\bar{\alpha}$ 在 α 与 $\alpha+\Delta\alpha$ 之间，$\bar{\beta}$ 在 β 与 $\beta+\Delta\beta$ 之间，由 $f(x,y)$ 的连续性及 $\alpha(y),\beta(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上的可导性，得

$$\lim_{\Delta y\to 0} f(\bar{\beta},y+\Delta y)\frac{\Delta\beta}{\Delta y} = f(\beta(y),y)\beta'(y)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} f(\bar{\alpha},y+\Delta y)\frac{\Delta\alpha}{\Delta y} = f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

由性质 3 可得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\int_\alpha^\beta \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

所以

$$\varphi'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y(x,y)\mathrm{d}x+f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

证毕。

1.3 场论基础

场是现实世界中的物理量与空间和时间关系的一种表现形式，它是物质存在的一种形态。如果在空间中某个区域内的每一点，都对应着某物理量的一个确定的值，则在此空间区域内称为存在着该物理量的**场**。某物理量在场内的分布可表示为空间位置的函数，这样的函数称为该物理量的**点函数**。当然，物理量在场内还可能随时间变化而变化，因而点函数还可以与时间有关。如果一个物理量具有数量的性质，那么这个物理量所形成的场就称为**数量场**或**标量场**。如果一个物理量具有向量的性质，那么这个物理量所形成的场就称为**向量场**或**矢量场**。如果一个物理量具有张量的性质，那么这个物理量所形成的场就称为**张量场**。在物理量的场中，取值为数量的函数称为**数量函数**或**标量函数**，取值为向量的函数称为**向量函数**或**矢量函数**，取值为张量的函数称为**张量函数**。点函数、数量函数、向量函数和张量函数都可简称**函数**。

1.3.1 方向导数及梯度

函数 $\varphi(x,y,z)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 分别表示它在 x,y,z 轴三个特殊方向上的变化率。然而，在许多问题中，函数 $\varphi(x,y,z)$ 沿其他方向的变化率也是有实际意义的，因此有必要研究它在其他方向的导数。

设 M_0 是函数 $\varphi(M)$ 中一个确定的点，过此点引一条直线 L，在此直线上取与 M_0 相邻的一动点 M，当 $M\to M_0$ 时，若比

$$\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{\overline{M_0M}}$$

的极限存在，则它称为函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 沿着 L 方向的**方向导数**，并且记作

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial L}=\lim_{\overline{M_0M}\to 0}\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{\overline{M_0M}} \tag{1-3-1}$$

由此可见，方向导数是函数 $\varphi(M)$ 在某个给定点沿某方向的变化率。当 $\frac{\partial\varphi}{\partial L}>0$ 时，函数 φ 沿 L 方向增加；当 $\frac{\partial\varphi}{\partial L}<0$ 时，函数 φ 沿 L 方向减少。

过点 M_0 可取无穷多个方向，每个方向都有与之对应的方向导数。在直角坐标系中，可按下面定理给出的公式计算方向导数。

定理 1.3.1 若数量场 $\varphi=\varphi(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 L 方向的方向余弦，则 φ 在点 M_0 处沿 L 方向的方向导数必存在，且由下面公式给出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial L}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-3-2}$$

式中 $\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 是函数 φ 在点 M_0 处的各偏导数。

证 设动点 M 的坐标为 $M(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$，点 M_0 与 M 的距离为 $\rho=$

$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$。因 φ 在点 M_0 可微，故 φ 的增量可表示为

$$\Delta\varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z + \omega\cdot\rho$$

式中 ω 在 $\rho\to 0$ 时趋于零，将上式两端除以 ρ 并取极限，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial L} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

所以方向导数存在且为式(1-3-2)。证毕。

式(1-3-2)中的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial L}$ 可表示为两个向量的数量积，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial L} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}) \tag{1-3-3}$$

令 $\boldsymbol{L}^0$ 为 L 的单位向量

$$\boldsymbol{L}^0 = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k} \tag{1-3-4}$$

而令向量 $\boldsymbol{G}$ 为

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1-3-5}$$

需要指出的是，式(1-3-5)确定的向量 $\boldsymbol{G}$ 在给定点是一个固定的向量，它只与函数 φ 有关，而 $\boldsymbol{L}^0$ 则是在给定点引出的 L 方向上的单位向量，它与函数 φ 无关。利用式(1-3-4)和式(1-3-5)，式(1-3-2)可表示为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial L} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{L}^0 = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{L}^0) \tag{1-3-6}$$

式(1-3-6)表明，向量 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{L}^0$ 方向的投影等于函数 φ 在该方向的方向导数。更为重要的是，当选择 $\boldsymbol{L}^0$ 的方向与 $\boldsymbol{G}$ 方向一致时，即 $\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{L}^0)=1$ 时，方向导数取得最大值 $|\boldsymbol{G}|$，因此 $\boldsymbol{G}$ 方向就是函数 $\varphi(M)$ 变化率最大的方向。向量 $\boldsymbol{G}$ 称为函数 $\varphi(M)$ 在给定点 M 处的**梯度**，记作 $\mathrm{grad}\varphi$ 或 $\nabla\varphi$，记号 ∇ 形如古希伯莱的一种乐器纳布拉(nabla)，称为**哈密顿算子**或**∇ 算子**(读作 nabla 算子)，有时也称为 **Del 算子**。在直角坐标系中它可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1-3-7}$$

或

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1-3-8}$$

式中 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i},\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j},\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k},x_1=x,x_2=y,x_3=z$。$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 称为**单位向量**或**单位矢量**。

∇ 既是一个微分算子，又可以看作一个向量，故它称为**向量微分算子**或**矢量微分算子**。于是，梯度可表示为

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \boldsymbol{G} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1-3-9}$$

式(1-3-9)表明，一个标量函数 φ 的梯度是一个向量函数。

梯度的模为

$$|\mathrm{grad}\varphi| = |\nabla\varphi| = |\boldsymbol{G}| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \tag{1-3-10}$$

将式(1-3-9)代入式(1-3-6),得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial L} = \mathrm{grad}\varphi \cdot \boldsymbol{L}^0 = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{L}^0 \tag{1-3-11}$$

式(1-3-11)表明,函数 φ 沿 L 方向的导数等于 φ 的梯度与 L 方向的单位向量 $\boldsymbol{L}^0$ 的数量积。

若函数 $\varphi(x,y,z) = C$,则它表示一族曲面,与常数 C 对应的每个值都表示一个曲面。在每个曲面上的各点,虽然坐标值不同,但函数值却相等,这些曲面称为函数 φ 的**等值面**。因为函数 φ 沿其等值面保持不变,所以当向量 $\boldsymbol{L}^0$ 在函数 φ 的等值面上时,或者说向量 $\boldsymbol{L}^0$ 是等值面的切线时,有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial L} = \mathrm{grad}\varphi \cdot \boldsymbol{L}^0 = 0 \tag{1-3-12}$$

即在切线方向上函数 φ 的方向导数为零,这表明梯度向量 $\mathrm{grad}\varphi$ 与等值面的法线重合。由于函数 φ 沿着梯度向量的方向增加得最快,故可知梯度向量指向 φ 增加的方向,即 φ 的等值面的法线方向,用 N 表示法线方向。因为任意一个向量都可以表示为该向量的模乘以与该向量方向相同的单位向量,所以,若以 $\boldsymbol{n}$ 表示法线上的单位向量,并根据式(1-3-8)和式(1-3-9),则 φ 的等值面的单位法向向量 $\boldsymbol{n}$ 可表示为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{G}}{|\boldsymbol{G}|} = \frac{\mathrm{grad}\varphi}{|\mathrm{grad}\varphi|} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \tag{1-3-13}$$

函数 φ 的等值面的单位法向向量 $\boldsymbol{n}$ 还可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \cos(N,x)\boldsymbol{i} + \cos(N,y)\boldsymbol{j} + \cos(N,z)\boldsymbol{k} = \\ &\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k} = \\ &l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{1-3-14}$$

式中,α、β 和 γ 分别是 φ 的等值面的法向向量与三个坐标轴的夹角,$l = n_1 = \cos\alpha$、$m = n_2 = \cos\beta$ 和 $n = n_3 = \cos\gamma$ 分别是三个方向余弦。

单位法向向量 $\boldsymbol{n}$ 的模可表示为

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{n}| &= \sqrt{\cos^2(N,x) + \cos^2(N,y) + \cos^2(N,z)} = \\ &\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1 \end{aligned} \tag{1-3-15}$$

根据式(1-3-6)、式(1-3-9)、式(1-3-10)及式(1-3-13),如果用不同的形式来表示,则函数 φ 沿 N 方向的导数可写成下面诸形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{G}| \cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{n}) = \mathrm{grad}\varphi \cdot \boldsymbol{n} = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n} = |\mathrm{grad}\varphi| \, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = |\mathrm{grad}\varphi| = |\nabla \varphi| \tag{1-3-16}$$

式(1-3-16)表明,函数 φ 沿梯度方向的方向导数恒大于等于零,即梯度总是指向函数 φ 增大的方向。

将式(1-3-16)代入式(1-3-13),可得

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial N}\boldsymbol{n} \tag{1-3-17}$$

由式(1-3-14)和式(1-3-16)可得

$$\frac{\partial}{\partial N} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla = l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-3-18}$$

1.3.2 向量场的通量和散度

设有向量场 $\boldsymbol{a}$，在场内取一有向曲面 S，$\mathrm{d}S$ 是 S 上的曲面元素，在 $\mathrm{d}S$ 任取一点 M，$\boldsymbol{n}$ 是点 M 处外法向方向的单位向量，若将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 对曲面 S 积分

$$\Phi=\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_S a_n\mathrm{d}S \tag{1-3-19}$$

则 Φ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向通过曲面 S 的**通量**。

曲面 S 在三个坐标面上的投影分别为

$$\begin{cases}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos(N,x)\mathrm{d}S=\cos\alpha\mathrm{d}S=l\mathrm{d}S\\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos(N,y)\mathrm{d}S=\cos\beta\mathrm{d}S=m\mathrm{d}S\\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos(N,z)\mathrm{d}S=\cos\gamma\mathrm{d}S=n\mathrm{d}S\end{cases} \tag{1-3-20}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面 S 的通量还可以写成以下形式

$$\Phi=\oiint_S[a_x\cos(N,x)+a_y\cos(N,y)+a_z\cos(N,z)]\mathrm{d}S=$$

$$\oiint_S(a_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+a_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+a_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \tag{1-3-21}$$

当曲面 S 是封闭曲面时，具有特别重要的意义。为了明显起见，采用在积分号上加圆圈的方法，即用

$$\Phi=\oiint_S a_n\mathrm{d}S=\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-3-22}$$

来表示通过封闭曲面 S 的通量。

设有向量场 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M)$，在场中一点 M 的某个邻域内作包含此点的任一封闭曲面 ΔS，ΔS 所围成的体积为 ΔV，计算向量 $\boldsymbol{a}$ 穿过 ΔS 面上的通量，当 ΔV 以任意方式向点 M 收缩时，如果比式

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

的极限存在，则此极限称为向量函数 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 的**散度**，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$，当采用哈密顿算子时，可写作 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1-3-23}$$

显然点 M 的散度与所取的封闭曲面 ΔS 的形状无关，它是一个不依赖于坐标系选取的数量，因此是一个标量。由式(1-3-23)可见，散度是通量对体积的变化率。

虽然向量场的散度是一个不依赖于坐标系选取的标量，但在具体计算向量场的散度时，常需要用向量的分量来表示，而向量的分量和坐标的选择有关。因此需要讨论向量的散度与其分量的关系。

设直角坐标系向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，取式(1-3-23)中的微元体积 ΔV 是以 Δx、Δy 和 Δz 为边长的微元六面体，

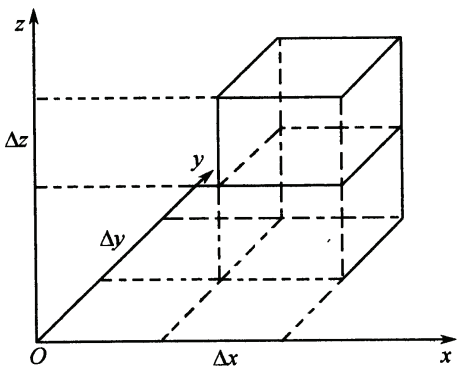


图 1-3-1 微元体积

如图1－3－1所示，并设微元六面体的中心坐标为(x,y,z)。作为一阶近似，在x方向存在如下关系

$$a_x\big|_{x+\frac{\Delta x}{2}} = a_x\big|_x + \frac{\partial a_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

$$a_x\big|_{x-\frac{\Delta x}{2}} = a_x\big|_x - \frac{\partial a_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

在x轴方向流出微元六面体的净通量为

$$\left(a_x\big|_{x+\frac{\Delta x}{2}} - a_x\big|_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right)\Delta y\Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同样，在y轴和z轴方向也可以到类似的关系，于是流出微元体积ΔV的净通量为

$$\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

将上式两端除以微元体积$\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$并取极限，得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

又

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

故

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1-3-24}$$

式(1－3－24)就是散度在直角坐标系中的表达式。在计算向量场的散度时，应用该式通常要比直接引用定义式更方便。

式(1－3－24)表明，一个向量函数$\boldsymbol{a}$的散度是一个标量函数。在向量场中任一点，向量$\boldsymbol{a}$的散度等于它在各坐标轴上的分量对各自坐标变量的偏导数之和。

散度具有下列性质：

(1) 两个向量函数之和的散度等于各向量函数的散度之和

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{div}\boldsymbol{a} + \mathrm{div}\boldsymbol{b} \tag{1-3-25a}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \nabla\cdot\boldsymbol{a} + \nabla\cdot\boldsymbol{b} \tag{1-3-25b}$$

(2) 数量函数与向量函数之积的散度等于数量函数与向量函数的散度之积加上数量函数的梯度与向量函数之内积

$$\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\mathrm{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi \tag{1-3-26a}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi \tag{1-3-26b}$$

例 1.3.1 证明

$$\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \tag{1-3-27}$$

证 因$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$是单位向量且相互垂直，故有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1, \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

于是

$$\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}=$$
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=|\nabla\varphi|^2$$

证毕。

将式(1-3-27)两端开平方,即可得到式(1-3-10)。

1.3.3 高斯定理与格林公式

定理1.3.2 设向量$\boldsymbol{a}$在一封闭曲面S的内部有连续一阶偏导数,则$\boldsymbol{a}$在S上的通量等于该向量的散度对S所围成体积V上的积分,即

$$\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}V\qquad(1-3-28)$$

式中$\boldsymbol{n}$为S上单位外法线向量,∇为哈密顿算子。

式(1-3-28)称为**高斯—奥斯特罗格拉茨基定理**,简称**高斯定理**,也称为**高斯公式**或**散度定理**,它建立了空间区域V上连续函数的三重积分与其边界面S上的曲面积分之间的关系。高斯公式在理论研究和实际工作中有着广泛的应用,是一种有力的数学工具,许多公式都是从高斯公式出发而得到的。

证 将封闭曲面S所围成的体积V分成n个由封闭曲面$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$所围成的体积元$\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$。取第$k$个曲面$\Delta S_k$和它所包围的体积$\Delta V_k$,根据散度的定义,存在下列关系

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{\oint_{\Delta S_k}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V_k}+\varepsilon_k$$

即

$$\Delta V_k\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\oint_{\Delta S_k}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\varepsilon_k\Delta V_k$$

式中散度是在体积元中某一点M的值,ε_k是个足够小的量,且当$\Delta V_k\to0$时,$\varepsilon_k\to0$。将上式对k从1到n求和,得

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Delta S_k}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Delta V_k$$

在封闭曲面S的内部,相邻两体积元公共面上的两个外法线方向相反,这两个积分相互抵消,这样,上式右端第一项只剩下对封闭曲面S的积分。同时,令$n\to\infty$,使得$\Delta V_k\to0$,则上式左端是以体积分$\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V$为极限。又对于向量$\boldsymbol{a}$,可认为当$n$充分大时,必存在一无穷小量$\varepsilon$,使得

$$|\varepsilon_1|<\varepsilon,|\varepsilon_2|<\varepsilon,\cdots,|\varepsilon_n|<\varepsilon$$

而当$n\to\infty$时,有

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon=0$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Delta V_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\varepsilon\Delta V_k=\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k=\varepsilon V$$

由于无穷小与有界函数的乘积还是无穷小，故上式的极限是零，于是

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

证毕。

设

$$\boldsymbol{a} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n} = \cos(n,x)\boldsymbol{i} + \cos(n,y)\boldsymbol{j} + \cos(n,z)\boldsymbol{k} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

将以上两式代入高斯公式，可得

$$\oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial Z}\right)\mathrm{d}V \qquad (1-3-29)$$

这个高斯公式是常见的一种形式。

设有平面向量场 $\boldsymbol{a}$，在场内取一有向曲线 Γ，$\mathrm{d}\Gamma$ 是 Γ 上的曲线元素，在 $\mathrm{d}\Gamma$ 任取一点 M，$\boldsymbol{n}$ 是点 M 处外法线方向的单位向量，若将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma$ 对于曲线 Γ 积分

$$\Phi = \int_\Gamma \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma a_n\mathrm{d}\Gamma \qquad (1-3-30)$$

则 Φ 称为向量场 $\boldsymbol{a}$ 沿法向向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向通过曲线 Γ 的**通量**，见图1-3-2。

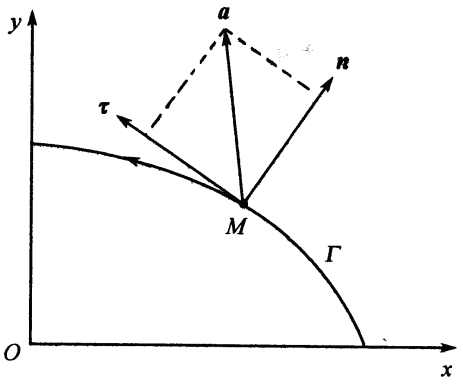


图 1-3-2　向量的通量、切向与法向向量

在直角坐标系中，设 $\boldsymbol{a} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$，又曲线的法向单位向量为

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_x + \boldsymbol{n}_y = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} = \cos(\boldsymbol{n},x)\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{n},y)\boldsymbol{j} =$$

$$\cos(\boldsymbol{\tau},y)\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{\tau},-x)\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{j} \qquad (1-3-31)$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 为 Γ 正向的切线单位向量，则通量 Φ 可写成

$$\Phi = \int_\Gamma \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma a_n\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma (P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x) \qquad (1-3-32)$$

设有平面向量场 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$，在场中一点 M 的某个邻域内作包含此点的任一封闭曲线 $\Delta\Gamma$，$\Delta\Gamma$ 所围成的面积为 ΔD，计算向量 $\boldsymbol{a}$ 经过 $\Delta\Gamma$ 线上的通量，当 ΔD 以任意方式向点 M 收缩时，如果比式

$$\lim_{\Delta D\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta D} = \lim_{\Delta D\to 0}\frac{\oint_{\Delta\Gamma}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma}{\Delta D}$$

的极限存在，则此极限称为向量函数 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 的**散度**，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$，当采用哈密顿算子时，可写作 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta D\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta D} = \lim_{\Delta D\to 0}\frac{\oint_{\Delta\Gamma}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma}{\Delta D} \qquad (1-3-33)$$

显然点 M 的散度与所取的封闭曲 $\Delta\Gamma$ 的形状无关，它是一个不依赖于坐标系选取的数量，因此是一个标量。

令 $\boldsymbol{b} = \varphi\boldsymbol{a}$，利用式散度的性质(1-3-26b)，将其代入高斯公式(1-3-28)中，可得到以下公式

$$\iiint_V \mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{a})\mathrm{d}V = \iiint_V \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})\mathrm{d}V = \iiint_V (\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi)\mathrm{d}V =$$

$$\oiint_S \varphi\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S \varphi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S \qquad (1-3-34)$$

定理1.3.3 设平面向量 $\boldsymbol{a}$ 在一封闭曲线 Γ 的内部有连续一阶偏导数，则 $\boldsymbol{a}$ 在 Γ 上的通量等于该向量的散度对 Γ 所围成面积 D 上的积分，即

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma = \oint_{\Gamma} a_n \mathrm{d}\Gamma = \iint_{D} \mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}D = \iint_{D} \nabla\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}D \tag{1-3-35}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上外法线方向的单位向量，∇ 为哈密顿算子。

式(1-3-35)称为**格林公式**或**格林定理**，它建立了平面区域 D 上的二重积分和沿该区域边界 Γ 的曲线积分之间的联系。证明的方法与高斯定理的证明方法相同，只需将封闭曲面 S 换成封闭曲线 Γ，并将 S 围成的体积 V 换成 Γ 围成的面积 D 即可。

设 $\boldsymbol{a} = Q(x,y)\boldsymbol{i} - P(x,y)\boldsymbol{j}$，并注意到 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{i} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma}\boldsymbol{j}$，则格林公式可写成

$$\oint_{\Gamma}[P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y] = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-3-36}$$

这里曲线积分沿着曲线 Γ 的正向，二重积分展布在区域 D 上。所谓曲线 Γ 的正向是这样的方向，设想一个人绕着曲线 Γ 行走，使得区域 D 总是保持在其左侧。

令 $P = -y, Q = x$，则有

$$D = \iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \tag{1-3-37}$$

式(1-3-37)是利用曲线积分计算平面区域 D 的面积公式。

若 $x = x(t), y = y(t)$，则式(1-3-37)可写成

$$D = \iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t \tag{1-3-38}$$

令 $P = u\dfrac{\partial u}{\partial y}, Q = -u\dfrac{\partial u}{\partial x}$，则有

$$\iint_{D}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$-\oint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x - u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) \tag{1-3-39}$$

设函数 φ、ψ 和 λ 在区域 V 内有连续二阶导数，令 $\boldsymbol{a} = \varphi\lambda\nabla\psi$，根据散度的性质，有下面公式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \nabla\cdot(\varphi\lambda\nabla\psi) = \varphi\nabla\cdot(\lambda\nabla\psi) + \lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\psi \tag{1-3-40}$$

根据式(1-3-16)，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} = \varphi\lambda\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} = \varphi\lambda\,|\nabla\psi|\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \varphi\lambda\frac{\partial\psi}{\partial n} \tag{1-3-41}$$

将式(1-3-40)和式(1-3-41)代入高斯公式(1-3-28)并注意到式(1-3-16)，可得

$$\iiint_{V}\nabla\cdot(\varphi\lambda\nabla\psi)\mathrm{d}V = \iiint_{V}[\varphi\nabla\cdot(\lambda\nabla\psi) + \lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\psi]\mathrm{d}V =$$

$$\oint_{S}\varphi\lambda\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S = \oint_{S}\varphi\lambda\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1-3-42}$$

若令式(1-3-42)中的 $\lambda = 1$，则可得到**格林第一公式**或**奥斯特罗格拉茨基公式**，也称为**格林第一定理**或**奥氏公式**，即

$$\iiint_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) \mathrm{d}V = \iiint_V (\varphi \nabla \cdot \nabla \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V =$$

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V =$$

$$\oiint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oiint_S \varphi \boldsymbol{n} \cdot \nabla \psi \mathrm{d}S \tag{1-3-43}$$

式中，$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$，称为**拉普拉斯算子或调和算子**。在直角坐标系中，它可表示为

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-3-44}$$

将式(1-3-43)中的 φ 和 ψ 易位，得

$$\iiint_V \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) \mathrm{d}V = \iiint_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) \mathrm{d}V = \oiint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oiint_S \psi \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1-3-45}$$

上式是格林第一公式的另一种形式。

将格林第一公式两种不同形式相减，便得到**格林第二公式**，也称为**格林第二定理**，即

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \mathrm{d}V = \oiint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \mathrm{d}S \tag{1-3-46}$$

当 $\varphi = \psi$ 时，由式(1-3-43)得到**格林第三公式**，也称为**格林第三定理**，即

$$\iiint_V [\varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2] \mathrm{d}V = \oiint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1-3-47}$$

在式(1-3-45)中，令 $\psi = 1$，则

$$\iiint_V \Delta \varphi \mathrm{d}V = \oiint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oiint_S \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1-3-48}$$

若 $\Delta \varphi = 0$，则由式(1-3-47)和式(1-3-48)分别得

$$\iiint_V (\nabla \varphi)^2 \mathrm{d}V = \oiint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oiint_S \varphi \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1-3-49}$$

$$\oiint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oiint_S \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0 \tag{1-3-50}$$

同理，若将式(1-3-40)和式(1-3-41)代入格林公式(1-3-35)，也会得到与式(1-3-42)～式(1-3-50)类似的公式，只需将对封闭曲面 S 的积分换成对封闭曲线 Γ 的积分，将对 S 围成的体积 V 的积分换成对 Γ 围成的面积 D 的积分，并将三维的哈密顿算子和拉普拉斯算子换成二维的即可。

从历史上看，格林公式是独立提出来的，因而是一个原始公式。但由于它和高斯公式密切相关，故可认为高斯公式是平面格林公式在空间的推广，而格林公式是高斯公式在平面上的特殊情况。

若将格林第一公式中的 φ 换成 $\Delta \varphi$，则有

$$\iiint_V \nabla \cdot (\Delta \varphi \nabla \psi) \mathrm{d}V = \iiint_V (\Delta \varphi \nabla \cdot \nabla \psi + \nabla \Delta \varphi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V =$$

$$\iiint_V (\Delta \varphi \Delta \psi + \nabla \Delta \varphi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V =$$

$$\oint_S \Delta\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oint_S \Delta\varphi \boldsymbol{n} \cdot \nabla\psi \mathrm{d}S \tag{1-3-51}$$

若将格林第一公式中的 ψ 换成 $\Delta\varphi$，则有

$$\iiint_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \Delta\psi) \mathrm{d}V = \iiint_V (\varphi \nabla \cdot \nabla \Delta\psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Delta\psi) \mathrm{d}V =$$

$$\iiint_V (\varphi \Delta^2 \psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\Delta\psi) \mathrm{d}V =$$

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \Delta\psi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oint_S \varphi \boldsymbol{n} \cdot \nabla\Delta\psi \mathrm{d}S \tag{1-3-52}$$

将式(1-3-52)中的 φ 和 ψ 易位，得

$$\iiint_V \nabla \cdot (\psi \nabla \Delta\varphi) \mathrm{d}V = \iiint_V (\psi \nabla \cdot \nabla \Delta\varphi + \Delta\psi \cdot \nabla \Delta\varphi) \mathrm{d}V =$$

$$\iiint_V (\psi \Delta^2 \varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\Delta\varphi) \mathrm{d}V =$$

$$\oint_S \psi \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = \oint_S \psi \boldsymbol{n} \cdot \nabla\Delta\varphi \mathrm{d}S \tag{1-3-53}$$

取式(1-3-53)中的第三个等式两端和式(1-3-51)中的第三个等式两端，得

$$\iiint_V \psi \Delta^2 \varphi \mathrm{d}V = -\iiint_V \nabla\psi \cdot \nabla\Delta\varphi \mathrm{d}V + \oint_S \psi \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n} \mathrm{d}S =$$

$$\iiint_V \Delta\varphi \Delta\psi \mathrm{d}V + \oint_S \left(\psi \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n} - \Delta\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \tag{1-3-54}$$

若标量函数 φ 在封闭曲面 S 内具有连续一阶偏导数，且 S 所围成的体积为 V，则有下列梯度公式

$$\oint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \varphi \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \oint_S \boldsymbol{n} \varphi \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}V = \iiint_V \nabla \varphi \mathrm{d}V \tag{1-3-55}$$

证 设 $\boldsymbol{a} = \varphi \boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$ 是一任意常向量，将该式取散度并利用梯度的性质(2)，得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{grad}\varphi$$

将上式代入高斯公式，得

$$\oint_S \varphi \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}V$$

因 $\boldsymbol{C}$ 是任意常向量，故可从积分号内提出，得

$$\boldsymbol{C} \cdot \oint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} \cdot \iiint_V \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}V$$

因 $\boldsymbol{C}$ 是任意常向量，故

$$\oint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}V = \iiint_V \nabla \varphi \mathrm{d}V$$

证毕。

顺便指出，根据式(1-3-55)，可以写出梯度的另一定义式

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla \varphi = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \boldsymbol{n} \varphi \mathrm{d}S \tag{1-3-56}$$

式(1-3-56)可根据积分中值定理得到。这是以积分形式定义的梯度表达式。

例 1.3.2 设 $v\Delta(p\Delta u)=u\Delta(p\Delta v)$,求证

$$\nabla\cdot[v\nabla(p\Delta u)-u\nabla(p\Delta v)+p\Delta v\nabla u-p\Delta u\Delta v]=0$$

证 令 $\varphi=p\Delta u$,$\psi=p\Delta v$,根据散度的性质,有

$$v\Delta(p\Delta u)=v\Delta\varphi=\nabla\cdot(v\nabla\varphi)-\nabla v\cdot\nabla\varphi \tag{1}$$

但式(1)最后一项还可写成

$$\nabla v\cdot\nabla\varphi=\nabla\cdot(\varphi\nabla v)-\varphi\nabla\cdot\nabla v=\nabla\cdot(\varphi\nabla v)-\varphi\Delta v \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),有

$$v\Delta(p\Delta u)=v\Delta\varphi=\nabla\cdot(v\nabla\varphi-\varphi\nabla v)+\varphi\Delta v \tag{3}$$

将 u、v 易位,并由 $\psi=p\Delta v$,可得

$$u\Delta(p\Delta\psi)=u\Delta\psi=\nabla\cdot(u\nabla\psi-\psi\nabla u)+\psi\Delta u \tag{4}$$

因式(3)和式(4)相等,两式相减,并注意到 $\varphi\Delta v=\psi\Delta u=p\Delta u\Delta v$,得

$$\nabla\cdot(v\nabla\varphi-u\nabla\psi+\psi\nabla u-\varphi\Delta v)=0 \tag{5}$$

或

$$\nabla\cdot[v\nabla(p\Delta u)-u\nabla(p\Delta v)+p\Delta v\nabla u-p\Delta u\Delta v]=0 \tag{6}$$

证毕。

1.3.4 向量场的环量与旋度

给定一个向量场 $\boldsymbol{a}$,在场内取一有向曲线 L,作线积分

$$\Gamma=\int_L\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l \tag{1-3-57}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 为微元曲线 $\mathrm{d}l$ 的切向单位向量,Γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿有向曲线 L 的**环量**。特别地,若 L 为一有向封闭曲线,则线积分

$$\Gamma=\oint_L\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l \tag{1-3-58}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿有向封闭曲线 L 的**环量**。

如果一个向量场的环量不等于零,则可认为该向量场中存在产生这种场的涡旋源。如果在一个向量场中沿任何封闭曲线上的环量恒等于零,则在该向量场中不可能有涡旋源。这种类型的向量场称为**无旋场**,力学或物理学上则把它称为**保守场**。

在向量场 $\boldsymbol{a}$ 中任取一点 $M(x,y,z)$,过 M 点作任一微小曲面 ΔS,$\boldsymbol{n}$ 为该曲面在 M 点处的法向向量,曲面 ΔS 的周界为 ΔL,其正方向与 $\boldsymbol{n}$ 构成右手螺旋关系。当 ΔS 在点 M 保持 $\boldsymbol{n}$ 的方向不变并以任意方式向点 M 收缩时,若向量场 $\boldsymbol{a}$ 沿 ΔL 的正向环量 $\Delta\Gamma$ 与面积 ΔS 之比的极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta L}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{1-3-59}$$

存在，则它称为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的**环量面密度**，记作 $\mathrm{rot}_n\boldsymbol{a}$ 或 $\mathrm{curl}_n\boldsymbol{a}$，表示向量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ 或 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$ 向 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影。当采用哈密顿算子时，可写作 $(\nabla\times\boldsymbol{a})_n$。于是式(1-3-59)又可写为下列形式

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{a}=\mathrm{curl}_n\boldsymbol{a}=(\nabla\times\boldsymbol{a})_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta L}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}\tag{1-3-60}$$

显然点 M 的环量面密度的定义与坐标系的选择无关，它是一个不依赖于坐标系选取的数量，因此是一个标量。由式(1-3-60)可见，环量面密度是有向封闭曲线的环量对该封闭曲线所围成的面积的变化率。

设向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{k}$，将其代入环量表达式并根据斯托克斯公式，得

$$\oint_{\Delta L}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_{\Delta L}(a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z)=$$

$$\iint_{\Delta S}\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=$$

$$\iint_{\Delta S}\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\right]\mathrm{d}S\tag{1-3-61}$$

式中，$\cos\alpha=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})$，$\cos\beta=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})$，$\cos\gamma=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})$。

由二重积分中值定理，得

$$\iint_{\Delta S}\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\right]\mathrm{d}S=$$

$$\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial \eta}-\frac{\partial a_y}{\partial \zeta}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\left(\frac{\partial a_x}{\partial \zeta}-\frac{\partial a_z}{\partial \xi}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})+\left(\frac{\partial a_y}{\partial \xi}-\frac{\partial a_x}{\partial \eta}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\right]\Delta S\tag{1-3-62}$$

式中，ξ、η 和 ζ 在 ΔS 内。于是

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{a}=(\nabla\times\boldsymbol{a})_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta L}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}=$$

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial \eta}-\frac{\partial a_y}{\partial \zeta}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\left(\frac{\partial a_x}{\partial \zeta}-\frac{\partial a_z}{\partial \xi}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})+$$

$$\left(\frac{\partial a_y}{\partial \xi}-\frac{\partial a_x}{\partial \eta}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\tag{1-3-63}$$

当 $\Delta S\to 0$ 且向点 M 收缩时，$\xi\to x$，$\eta\to y$，$\zeta\to z$，式(1-3-63)变为

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{a}=(\nabla\times\boldsymbol{a})_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta L}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}=$$

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})+$$

$$\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\tag{1-3-64}$$

将计算环量面密度的公式(1-3-64)改写为

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta L}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\cdot(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}) \tag{1-3-65}$$

式(1-3-65)右端第二组向量就是ΔS在点M处的单位法向向量$\boldsymbol{n}$。第一组向量称为向量场$\boldsymbol{a}$在点M的**旋度**,记作

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1-3-66}$$

于是,式(1-3-60)可表示为

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta L}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=\mathrm{rot}_{n}\boldsymbol{a} \tag{1-3-67}$$

因$\boldsymbol{n}$是任意的,所以上式给出了向量$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$在任意方向的投影的定义,且与坐标系的选择无关。由此可以清楚地看出,当$\boldsymbol{n}$与$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$方向相同时,环量面密度最大,旋度的方向就是环量面密度最大的方向,其模就是最大环量面密度的数值。

向量$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$向三个坐标轴的投影为

$$\begin{cases}\mathrm{rot}_x\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial a_z}{\partial y}-\dfrac{\partial a_y}{\partial z}\\ \mathrm{rot}_y\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial a_x}{\partial z}-\dfrac{\partial a_z}{\partial x}\\ \mathrm{rot}_z\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial a_y}{\partial x}-\dfrac{\partial a_x}{\partial y}\end{cases} \tag{1-3-68}$$

利用哈密顿算子,向量$\boldsymbol{a}$的旋度也可以写成

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1-3-69}$$

式(1-3-69)也可以写成便于记忆的行列式形式

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} \tag{1-3-70}$$

旋度的基本运算公式有

$$\mathrm{rot}(c\boldsymbol{a})=c\,\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\quad(c\text{为常数}) \tag{1-3-71}$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}+\mathrm{rot}\boldsymbol{b} \tag{1-3-72}$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\mathrm{rot}\boldsymbol{a}+\mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{a} \tag{1-3-73}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b} \tag{1-3-74}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi)=\boldsymbol{0} \tag{1-3-75}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})=0 \tag{1-3-76}$$

例 1.3.3 证明$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})$。

证 根据微分运算法则,有

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_c) + \nabla (\boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{b})$$

再根据三向量混合积的下列轮换位置的性质

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$$

于是,有

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_c) = \boldsymbol{b}_c \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a})$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{b}) = -\nabla \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}_c) = -\boldsymbol{a}_c (\nabla \times \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a} (\nabla \times \boldsymbol{b})$$

将上两式相加,得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_c) + \nabla (\boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} (\nabla \times \boldsymbol{b})$$

证毕。

1.3.5 斯托克斯定理

将式(1-3-69)代入式(1-3-61)并积分,可得以向量形式表示的斯托克斯公式为

$$\oint_L \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-3-77}$$

斯托克斯公式也称为斯托克斯定理。斯托克斯定理揭示了向量场线积分和面积分的转换关系。由此可以看出,前面介绍过的格林公式仅是斯托克斯定理在平面域上的一个特例。

斯托克斯定理还有另外一种向量形式,可用公式表示为

$$\oiint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}S = \iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}V \tag{1-3-78}$$

证 设 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}$ 是一个任意常向量,将该式取散度,根据式(1-3-74),得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a})$$

由高斯定理得

$$\oiint_S (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iiint_V \boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}V$$

或

$$\boldsymbol{C} \cdot \oiint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}S = C \cdot \iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}V$$

因 $\boldsymbol{C}$ 是任意常向量,故

$$\oiint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}S = \iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}V$$

证毕。

1.3.6 梯度、散度和旋度表示的统一高斯公式

现在把梯度公式(1-3-55)、高斯公式(1-3-28)和斯托克斯公式(1-3-78)集中写在一起,有

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}S \tag{1-3-79}$$

$$\iiint_V \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{n}\varphi \mathrm{d}S \tag{1-3-80}$$

$$\iiint_V \mathrm{rot}\boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a} \mathrm{d}S \tag{1-3-81}$$

或

$$\mathrm{grad}\varphi = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_S \boldsymbol{n}\varphi \mathrm{d}S \tag{1-3-82}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}S \tag{1-3-83}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} = \oiint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a} \mathrm{d}S \tag{1-3-84}$$

利用哈密顿算子,式(1-3-79)、式(1-3-80)和式(1-3-81)可统一写成下列形式

$$\iiint_V \nabla \otimes (\quad) \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{n} \otimes (\quad) \mathrm{d}S \tag{1-3-85}$$

式中⊗可以是空白、点或叉,括号内相应为数量函数φ或向量函数$\boldsymbol{a}$。

式(1-3-85)称为梯度、散度和旋度表示的**统一高斯公式**。在体积分中的哈密顿算子∇和面积分中的单位法向向量$\boldsymbol{n}$处于同样的地位,便于记忆和应用。

式(1-3-82)、式(1-3-83)和式(1-3-84)可统一写成下列形式

$$\nabla \otimes (\quad) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_S n \otimes (\quad) \mathrm{d}S \tag{1-3-86}$$

将空白、点或叉及相应的数量函数φ或向量函数$\boldsymbol{a}$代入式(1-3-86)时,可分别得到梯度、散度和旋度的定义。这些定义的优点是它们与坐标系的选择无关,并且可用一个统一的符号来表示。

1.4 直角坐标与极坐标的坐标变换

在变分法中经常遇到圆形或环形求解区域,此时宜采用极坐标。为此,应把以直角坐标(x,y)表示的微分方程转换为由极坐标(r,θ)表达。如图1-4-1所示,直角坐标与极坐标之间的关系是

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r^2 = x^2 + y^2, \theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{1-4-1}$$

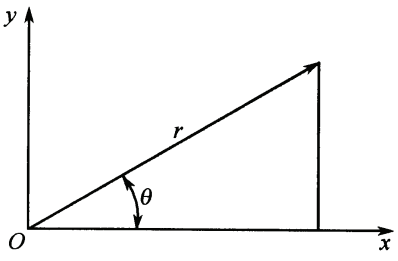


图1-4-1 直角坐标与极坐标的关系

由此求得r、θ与x、y的导数关系为

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta \tag{1-4-2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = -\frac{\sin\theta}{r} = -\frac{y}{r^2} \tag{1-4-3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x} = \frac{\cos\theta}{r} = \frac{x}{r^2} \tag{1-4-4}$$

根据复合函数求导法则,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1-4-5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1-4-6}$$

将式(1-4-5)和式(1-4-6)两端平方相加,并注意到式(1-3-27),得

$$\nabla u\cdot\nabla u=|\nabla u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 \tag{1-4-7}$$

对于轴对称问题,式(1-4-7)的最后一项为零,有

$$\nabla u\cdot\nabla u=|\nabla u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \tag{1-4-8}$$

对式(1-4-5)和式(1-4-6)求二阶偏导数,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} \tag{1-4-9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} \tag{1-4-10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)+\frac{y^2-x^2}{r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right) \tag{1-4-11}$$

式(1-4-9)和式(1-4-10)相加,得

$$\nabla^2 u=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{1-4-12}$$

对于轴对称问题,u 只是 r 的函数,上面方程对 θ 的偏导数为零,偏微分符号可改写成常微分符号,故有

$$\nabla^2 u=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) \tag{1-4-13}$$

将式(1-4-13)再对自变量求导两次,得

$$\nabla^2\nabla^2 u=\Delta^2 u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \tag{1-4-14}$$

式中,$\nabla^2\nabla^2=\Delta^2$ 称为**双调和算子**。将上式展开后,得

$$\Delta^2 u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}+2\frac{1}{r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+$$
$$\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4}+2\left(2\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 u}{\partial r\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 u}{\partial r^2\partial \theta^2}\right) \tag{1-4-15}$$

在轴对称情况下,对 θ 的偏导数等于零,上式可简化成

$$\Delta^2 u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}r^4}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \tag{1-4-16}$$

设 $\Delta^2 u=f(r)$,则式(1-4-16)可写成

$$\Delta^2 u = \frac{d^4u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{du}{dr} = f(r) \qquad (4-1-17)$$

满足式(4－1－17)的函数 u 称为**双调和函数**。作变换 $r = e^t$，即 $t = \ln r$，对 r 求导，得 $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$，于是

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}\frac{du}{dt} \qquad (1-4-18)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}\right) \qquad (1-4-19)$$

$$\frac{d^3u}{dr^3} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{d^3u}{dt^3} - 3\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt}\right) \qquad (1-4-20)$$

$$\frac{d^4u}{dr^4} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{d^4u}{dt^4} - 6\frac{d^3u}{dt^3} + 11\frac{d^2u}{dt^2} - 6\frac{du}{dt}\right) \qquad (1-4-21)$$

将式(1－4－18)至式(1－4－21)代入式(1－4－17)，得

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{d^4u}{dt^4} - 4\frac{d^3u}{dt^3} + 4\frac{d^2u}{dt^2}\right) = f(r) \qquad (1-4-22)$$

或

$$\frac{d^4u}{dt^4} - 4\frac{d^3u}{dt^3} + 4\frac{d^2u}{dt^2} = e^{4t}f(e^t) \qquad (1-4-23)$$

式(1－4－23)对应的齐次方程为

$$\frac{d^4u}{dt^4} - 4\frac{d^3u}{dt^3} + 4\frac{d^2u}{dt^2} = 0 \qquad (1-4-24)$$

式(1－4－24)是常系数四阶微分方程，其特征方程是

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = 0 \qquad (1-4-25)$$

解之，得两对二重实根 $k = 0$ 和 $k = 2$。于是，齐次方程的解是

$$U = At + Bte^{2t} + Ce^{2t} + D \qquad (1-4-26)$$

式中，A、B、C 和 D 为待定系数。因 $t = \ln r$，故上式可写成

$$U(r) = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D \qquad (1-4-27)$$

根据式(1－4－23)等号右边 $e^{4t}f(e^t)$ 的具体形式，可求出特解 $F(e^t) = F(r)$，于是，得式(1－4－17)的通解为

$$u = U(r) + F(r) \qquad (1-4-28)$$

若令方程(1－4－23)的 $f(e^t)$ 等于常数 E，则可设特解为 $F(r) = F(e^t) = GEe^{4t}$，代入式(1－4－23)，得

$$256GEe^{4t} - 256GEe^{4t} + 64GEe^{4t} = Ee^{4t} \qquad (1-4-29)$$

比较两边系数，得 $G = 1/64$。于是，通解为

$$u = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D + \frac{Er^4}{64} \qquad (1-4-30)$$

若上述圆形区域在圆心处有孔，则成为环形区域，这时在内、外两个边界上共有四个边界条件，足以确定四个积分常数。若在圆心处无孔，则 $r = 0$ 时，u 和 u'' 都应是有限值，故在式(1-4-30)中必须有

$$A = B = 0$$

此时，式(1-4-30)化为

$$u = Cr^2 + D + \frac{Er^4}{64} \tag{1-4-31}$$

式中常数 C、D 由边界条件确定。

1.5 变分法基本引理

为了后面各章研究变分问题的方便，下面介绍几个变分法的基本引理。

引理 1.5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，任意函数 $\eta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数，且对于某个正数 $m(m = 0,1,\cdots,n)$，当满足条件

$$\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0 \quad (k = 0,1,\cdots,m)$$

时，如果积分

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1-5-1}$$

总成立，则在区间 $[a,b]$ 上必有

$$f(x) \equiv 0 \tag{1-5-2}$$

证 用反证法。若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不恒为零，则由 $f(x)$ 的连续性可知，在区间 (a,b) 上至少有一点 ξ，如图1-5-1所示，使 $f(x) \neq 0$，不妨设 $f(\xi) > 0$，故必存在包含 ξ 的闭区间 $[a_0,b_0]$，当 $a < a_0 \leqslant \xi \leqslant b_0 < b$ 时，有 $f(x) > 0$。此时，取函数 $\eta(x)$ 为

$$\eta(x) = \begin{cases} [(x-a_0)(b_0-x)]^{2n+2} & x \in [a_0,b_0] \\ 0 & x \notin [a_0,b_0] \end{cases} \tag{1-5-3}$$

显然式(1-5-3)在区间 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续可导函数，满足条件 $\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0$ $(k = 0,1,\cdots,m)$，因此，根据式(1-5-2)和式(1-5-3)，有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{b_0} f(x)(x-a_0)^{2n+2}(b_0-x)^{2n+2}\mathrm{d}x > 0 \tag{1-5-4}$$

这与式(1-5-1)相矛盾，故 $f(x) > 0$ 是不可能的。同理可证，$f(x) < 0$ 也是不可能的。又因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续，故有 $f(a) = f(b) = 0$。综上所述，必有

$$f(x) \equiv 0 \quad x \in [a,b]$$

证毕。

在上面的证明中函数 $\eta(x)$ 采取了式(1-5-3)的形式，但 $\eta(x)$ 的取法并不是唯一的，例如，可以取 $\eta(x) = A\varphi(x)$，其中 A 是适当选取的常数，而函数 $\varphi(x)$ 的表达式如下

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}} & x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \\ 0 & x \notin (x_0-\delta, x_0+\delta) \end{cases} \tag{1-5-5}$$

式中 $a_0 = x_0 - \delta, b_0 = x_0 + \delta$。该函数常称为**软化子**。简单地说，软化子是一种光滑函数，它在有界区间内不为零，而在有界区间外等于零。注意，在利用式(1-5-5)求证时，原来的闭区间$[a_0, b_0]$要改成开区间，这样做并不影响所研究问题的性质。式(1-5-5)的图形见图1-5-2。软化子有许多表达式，下面再给出两个表达式

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\delta^2 - x^2}} & \text{当} \mid x \mid \leqslant \delta \\ 0 & \text{当} \mid x \mid > \delta \end{cases} \tag{1-5-6}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-\delta^2}{\delta^2 - (x - x_0)^2}} & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0 & x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases} \tag{1-5-7}$$

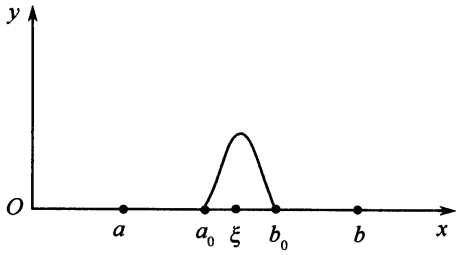


图1-5-1　引理1.5.1图

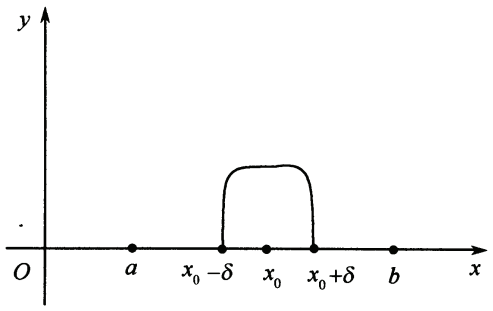


图1-5-2　软化子图形

当 m 或 n 增大时，所取 $\eta(x)$ 的函数类变小，该引理条件变弱。特别是当取 $m = n = 0$ 时，有下面的引理：

引理1.5.2　设函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续，任意函数 $\eta(x)$ 在区间$[a, b]$上连续，且满足条件 $\eta(a) = \eta(b) = 0$，总使积分

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1-5-8}$$

成立，则在区间$[a, b]$上必有 $f(x) \equiv 0$。

引理1.5.3　设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 内连续，任意函数 $\eta(x, y)$ 及其一阶导数在区域 D 内都连续，且在 D 的边界线 L 上 $\eta(x, y)$ 等于零，总使积分

$$\iint_D f(x, y)\eta(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{1-5-9}$$

成立，则在区域 D 上必有 $f(x, y) \equiv 0$。

证　设在域 D 内某一点(ξ, ζ)处，函数 $f(x, y)$ 取正值。由 $f(x, y)$ 的连续性可知，必存在某个以(ξ, ζ)为中心，以 ρ 为半径的圆。在该圆内，$f(x, y) > 0$，且该圆包含在 D 内。取 $\eta(x, y)$ 为

$$\eta(x, y) = \begin{cases} (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2, & (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2 < \rho^2 \\ 0, & (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2 \geqslant \rho^2 \end{cases} \tag{1-5-10}$$

不难验证，$\eta(x, y)$ 满足引理1.5.3的一切条件，但此时积分值为正，且此圆包含于 D 内，这与引理1.5.3的条件相矛盾，故引理1.5.3得证。证毕。

引理1.5.4　设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 内连续，任意函数 $\eta(x, y)$ 所有 n 阶导数在区域D内都连续，L 为D 的边界，只要

$$\left.\frac{\partial^k \eta}{\partial x^i \partial y^{k-i}}\right|_L = 0, \begin{pmatrix} k = 0,1,2,\cdots,n-1 \\ i = 0,1,2,\cdots,k \end{pmatrix}$$

总使积分

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{1-5-11}$$

则在区域 D 上，必有 $f(x,y) \equiv 0$。

引理 1.5.3 和引理 1.5.4 还可以推广到 n 元函数积分的情形。

引理 1.5.5 设函数 $\eta(x)$ 在区间$[a,b]$上连续可微，且 $\eta(a) = 0$(或 $\eta(b) = 0$)，则有

$$\int_a^b \eta'^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \eta^2(x)\mathrm{d}x \tag{1-5-12}$$

证 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，λ 为实变量。于是

$$y(\lambda) = \int_a^b [f(x)\lambda + g(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

或

$$y(\lambda) = \lambda^2\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

上式等号右端是关于 λ 的二次三项式，这表明抛物线 $y = y(\lambda)$ 与实轴最多只有一个交点，根据一元二次方程求根判别式，有

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x\int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x \tag{1-5-13}$$

式(1-5-13)称为**布尼亚可夫斯基不等式或施瓦茨不等式**。该不等式是1859年首先由布尼亚可夫斯基建立的，1875年施瓦茨才发现该不等式，但该不等式却常以施瓦茨的名字命名。布尼亚可夫斯基不等式是数学分析中最重要的不等式之一，它是有限和形式的柯西不等式在积分形式上的推广，它后来才被发现是赫尔德积分形式的不等式的特例。

对于 $\eta(a) = 0$，利用施瓦茨不等式和下面积分

$$\eta(x) = \int_a^x \eta'(x)\mathrm{d}x \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

可得

$$\int_a^b \eta^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_a^x 1 \cdot \eta'(x)\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left[\int_a^x 1^2\mathrm{d}x\int_a^x \eta'^2(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\int_a^b \left[(x-a)\int_a^b \eta'^2(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b \eta'^2(x)\mathrm{d}x$$

将上式整理，可得式(1-5-12)。

同理，对于 $\eta(b) = 0$，有

$$-\eta(x) = \int_x^b \eta'(x)\mathrm{d}x \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

可得

$$\int_a^b \eta^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_x^b 1 \cdot \eta'(x)\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left[\int_x^b 1^2\mathrm{d}x\int_x^b \eta'^2(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\int_a^b\left[(b-x)\int_a^b\eta'^2(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b\eta'^2(x)\mathrm{d}x$$

将上式整理,也可得式(1-5-12)。证毕。

引理1.5.5可以推广到更一般的情形,即有下面的引理:

引理1.5.6 设函数 $\eta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 阶连续可微,且 $\eta^{(n)}(a)=0$(或 $\eta^{(n)}(b)=0$),则有

$$\int_a^b[\eta^{(n+1)}(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b[\eta^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}x \tag{1-5-14}$$

当 $n=0$ 时,式(1-5-14)就退化成式(1-5-12)。

引理1.5.7 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,任意函数 $\eta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数,且 $\eta(a)=\eta(b)=0$,若积分

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)\mathrm{d}x=0 \tag{1-5-15}$$

总成立,则在区间 $[a,b]$ 上必有

$$f(x)\equiv\text{常数} \tag{1-5-16}$$

引理1.5.7也称为**黎曼定理或杜布瓦—雷蒙引理**。

证1 用反证法。若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不是常数,则由 $f(x)$ 的连续性,在该区间上至少有两点 ξ,ζ,使 $f(x)$ 取不相等的值,不妨设 $f(\xi)>f(\zeta)$。设 a_0 和 b_0 是一对满足不等式

$$f(\xi)>a_0>b_0>f(\zeta)$$

的数,取 n 足够大,可以作互不相交,位于在区间 $[a,b]$ 内的一对区间 $\left[x_0,x_0+\frac{\pi}{n}\right]$ 和 $\left[x_1,x_1+\frac{\pi}{n}\right]$,并在区间 $\left[x_0,x_0+\frac{\pi}{n}\right]$ 内,不等式 $f(\xi)>a_0$ 成立,而在区间 $\left[x_1,x_1+\frac{\pi}{n}\right]$ 内,$f(\zeta)<b_0$。此时,取函数 $\eta(x)$ 为

$$\eta'(x)=\begin{cases}\sin^2[n(x-x_0)] & x\in\left[x_0,x_0+\frac{\pi}{n}\right]\\ \cos^2[n(x-x_1)] & x\in\left[x_1,x_1+\frac{\pi}{n}\right]\\ 0 & x\text{ 在区间}[a,b]\text{ 其余的点上}\end{cases} \tag{1-5-17}$$

显然,函数 $\eta(x)=\int_a^x\eta'(x)\mathrm{d}x$ 连续,有连续导数 $\eta'(x)$,并且

$$\eta(a)=0$$

$$\eta(b)=\int_a^b\eta'(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}}\sin^2[n(x-x_0)]\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}}\sin^2[n(x-x_0)]\mathrm{d}x=0$$

根据引理条件,有

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)\mathrm{d}x=0$$

但另一方面,有

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}}f(x)\sin^2[n(x-x_0)]\mathrm{d}x-$$

$$\int_{x_1}^{x_1+\frac{\pi}{n}} f(x)\sin^2[n(x-x_0)]\mathrm{d}x > (a_0-b_0)\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 nx\mathrm{d}x > 0 \quad (1-5-18)$$

这与式(1-5-15)相矛盾,故 $f(x)$ 必等于常数。证毕。

证 2 将式(1-5-15)分部积分,得

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = [f(x)\eta(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\eta(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

由引理1.5.2可知,$f'(x)\equiv 0$,积分得 $f(x)\equiv c$。证毕。

引理1.5.8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,任意函数 $\eta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有 $n-1$ 阶连续导数,且 $\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) \doteq 0(k = 1,2,\cdots,n-1)$,都有积分

$$\int_a^b f(x)\eta^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (1-5-19)$$

成立,则在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 是 $n-1$ 次多项式。

证 对式(1-5-19)采用分部积分法

$$\int_a^b f(x)\eta^{(n)}(x)\mathrm{d}x =$$

$$[f(x)\eta^{(n-1)}(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\eta^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x =$$

$$-[f'(x)\eta^{(n-2)}(x)]\Big|_a^b + \int_a^b f''(x)\eta^{(n-2)}(x)\mathrm{d}x = \cdots =$$

$$(-1)^{i-1}[f^{(i-1)}(x)\eta^{(n-i)}(x)]\Big|_a^b + (-1)^i\int_a^b f^{(i)}(x)\eta^{(n-i)}(x)\mathrm{d}x = \cdots =$$

$$(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

由引理1.5.2可知,$f^{(n)}(x)\equiv 0$,故 $f(x)$ 是 $n-1$ 次多项式。证毕。

1.6 求和约定、克罗内克尔符号和排列符号

空间向量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i \quad (1-6-1)$$

为了使式(1-6-1)表达得更简洁,可以这样约定:在同一项中,某指标(上标或下标)出现两次时,就表示对该指标在取值范围内求和,同时把求和符号省略,这样的约定称为**爱因斯坦求和约定**。在同一项中重复出现的指标称为**哑指标**或简称**哑标**。于是式(1-6-1)可缩写成

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i \quad (1-6-2)$$

哑标仅表示求和,使用什么符号表示哑标无关紧要,但应避免使用已有特定含义的符号。

在 n 维空间中,任意一组 n 个线性无关的向量称为它的一个**基**,基中每个向量都称为**基向量**。在直角坐标系中,由三个互相垂直的具有单位长度的基向量组成的基称为**直角笛卡儿基**,简称**笛卡儿基**。

在三维直角坐标系中,基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 相互垂直且其长度为1,即

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_1=1;\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1;\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1;\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0;\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=0;\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0$$

这六个关系式可以简洁地表示为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i=\delta_{ij} \tag{1-6-3}$$

式中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{1-6-4}$$

符号 δ_{ij} 称为**克罗内克尔符号**。该定义表明 δ_{ij} 具有对称性，与指标排列顺序无关，即

$$\delta_{ij}=\delta_{ji} \tag{1-6-5}$$

克罗内克尔符号的分量是单位矩阵的各个元素，在三维空间中可表示为

$$\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \tag{1-6-6}$$

可以通过以下例子掌握克罗内克尔符号的运算规律。例如

$$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3 \tag{1-6-7}$$

$$\begin{cases}\delta_{1m}a_m=\delta_{11}a_1+\delta_{12}a_2+\delta_{13}a_3=a_1\\ \delta_{2m}a_m=\delta_{21}a_1+\delta_{22}a_2+\delta_{23}a_3=a_2\\ \delta_{3m}a_m=\delta_{31}a_1+\delta_{32}a_2+\delta_{33}a_3=a_3\end{cases} \tag{1-6-8}$$

式(1-6-8)的一般表达式为

$$\delta_{im}a_m=a_i \tag{1-6-9}$$

再如

$$\begin{cases}\delta_{1m}T_{mj}=\delta_{11}T_{1j}+\delta_{12}T_{2j}+\delta_{13}T_{3j}=T_{1j}\\ \delta_{2m}T_{mj}=\delta_{21}T_{1j}+\delta_{22}T_{2j}+\delta_{23}T_{3j}=T_{2j}\\ \delta_{3m}T_{mj}=\delta_{31}T_{1j}+\delta_{32}T_{2j}+\delta_{33}T_{3j}=T_{3j}\end{cases} \tag{1-6-10}$$

式(1-6-10)的一般表达式为

$$\delta_{im}T_{mj}=T_{ij} \tag{1-6-11}$$

式(1-6-9)和式(1-6-11)表明，在 δ 符号的两个指标中，如果有一个和同项中其他因子的指标相重，则可把该因子的那个重指标换成 δ 的另一个指标，而 δ 自动消失。由于 δ_{ij} 是个张量，又考虑到它的置换性质和算子的作用，故 δ_{ij} 也称为**置换张量**或**置换算子**。在式(1-6-11)中，在同一项中不重复出现的指标 i 和 j 称为**自由指标**或**指定指标**。

在直角坐标系中，两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积可写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot b_j\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i \tag{1-6-12}$$

类似地，向量函数 $\boldsymbol{a}$ 的散度可写成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot a_j\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\delta_{ij}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \tag{1-6-13}$$

例 1.6.1 证明恒等式 $\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{r}) = (n+3)r^n$，式中 $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x_i x_i}$。

证 散度 $\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{r})$ 可写成

$$\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{r}) = \left(\boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot(r^n x_j \boldsymbol{e}_j) = \left(\frac{\partial r^n}{\partial x_i}x_j + r^n\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)\delta_{ij} =$$

$$\left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x_i}x_j + r^n\delta_{ij}\right)\delta_{ij} = nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x_i}x_i + r^n\delta_{ii}$$

而

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial\sqrt{x_j x_j}}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}}\frac{\partial(x_j x_j)}{\partial x_i} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}x_j + x_j\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{r}\delta_{ij}x_j = \frac{x_i}{r}$$

于是有

$$\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{r}) = nr^{n-1}\frac{x_i x_i}{r} + r^n\delta_{ii} = (n+3)r^n$$

证毕。

在三维直角坐标系中，基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 满足下列叉积关系

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3;\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1;\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2;\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3;\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1;\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$$

且当 $i = j$ 时，有 $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = 0$。

以上各关系可表示为

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = \begin{cases}\boldsymbol{e}_k & \text{如果 } i\neq j\neq k \text{ 且 } i,j,k \text{ 按循环次序置换}\\ -\boldsymbol{e}_k & \text{如果 } i\neq j\neq k \text{ 且 } i,j,k \text{ 不按循环次序置换}\\ 0 & \text{如果任意两个指标相同}\end{cases} \tag{1-6-14}$$

上式可以方便地表示为

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1-6-15}$$

式中 ε_{ijk} 称为**排列符号**或**交错张量**。它可表示为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases}1 & \text{当}(i,j,k)\text{ 按}(1,2,3)\text{、}(2,3,1)\text{ 或}(3,1,2)\text{ 的次序排列时}\\ -1 & \text{当}(i,j,k)\text{ 按}(3,2,1)\text{、}(1,3,2)\text{ 或}(2,1,3)\text{ 的次序排列时}\\ 0 & \text{当 } i,j,k \text{ 中任意两个或三个指标相同时}\end{cases} \tag{1-6-16}$$

两个向量的叉积可以用排列符号来表示

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e}_i\times b_j\boldsymbol{e}_j = a_i b_j\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1-6-17}$$

类似地，向量函数 $\boldsymbol{a}$ 的旋度可写成

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\times a_j\boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k \tag{1-6-18}$$

排列符号和克罗内克尔符号之间有下列关系

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{ks}\delta_{jt} \tag{1-6-19}$$

式(1-6-19)称为 $\varepsilon-\delta$ **恒等式**。其一般形式为

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it}\\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix} \tag{1-6-20}$$

当出现两对或三对哑标时，式(1-6-20)退化为

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rjk} = 2\delta_{ir} \tag{1-6-21}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \tag{1-6-22}$$

有时为了缩写含有对一组指标变量 x_i 取偏导数的表达式，约定当逗号后面跟有一个下标 i 时，就表示某量对一组指标变量 x_i 取一阶偏导数，依此类推，当逗号后面跟有 n 个下标时，就表示对一组指标变量取 n 阶偏导数，这样的约定称为**逗号约定**。逗号约定可表示为

$$(\cdots)_{,i} = \frac{\partial(\cdots)}{\partial x_i} \tag{1-6-23}$$

例如

$$T_{i,i} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3}$$

$$T_{i,jk} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$T_{i,kk} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_3^2}$$

高斯定理可表示为

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \mathrm{d}V = \iiint_V a_{i,i} \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \oiint_S n_i a_i \mathrm{d}S \tag{1-6-24}$$

1.7 张量的基本概念

张量是向量概念的推广。张量的一个重要特点是它所表示的物理量和几何量与坐标系的选择无关。但是，为了便于在某些坐标系中研究张量，它就由其分量的集合确定，而这些分量与坐标系有关。本节主要讨论笛卡儿二阶张量的代数运算和微分运算，这些是张量分析的最基本内容，也是研究力学变分原理的必要工具。

1.7.1 直角坐标旋转变换

在直角坐标系 $Oxyz$ 中，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用它的三个分量 a_x, a_y, a_z 来表示。由于坐标系是人为选定的，当然也可以取另一坐标系 $Ox'y'z'$，$\boldsymbol{a}$ 的三个分量成为 $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$。同一个向量 $\boldsymbol{a}$，在不同的坐标系中可以用不同的分量来表示。

设 $Ox_1x_2x_3$ 和 $Ox_1'x_2'x_3'$ 分别是旧的和新的右旋直角坐标系。$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ 分别是两个坐标系中坐标轴上的单位向量，则有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j' = \delta_{ij} \tag{1-7-1}$$

新旧坐标中的单位向量之间存在下列关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2' = \alpha_{21}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3' = \alpha_{31}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{1-7-2}$$

式中 $\alpha_{ij} = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j$ 是两个坐标系中不同坐标轴夹角的余弦，即方向余弦，称为**变换系数**，其第一个指标表示新坐标，第二个指标表示旧坐标。利用爱因斯坦求和约定，式(1-7-2)可写成

$$\boldsymbol{e}_i' = \alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i = \alpha_{ji}\boldsymbol{e}_j' \tag{1-7-3}$$

设向量 $\boldsymbol{a}$ 在旧坐标系中的三个分量为 a_1, a_2, a_3，在新坐标系中的三个分量为 a_1', a_2', a_3'。向量 $\boldsymbol{a}$ 在新旧坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j = a_j\boldsymbol{e}_j \tag{1-7-4}$$

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i')\boldsymbol{e}_i' = a_i'\boldsymbol{e}_i' \tag{1-7-5}$$

将式(1-7-4)代入式(1-7-5)，两端同点乘 $\boldsymbol{e}_i'$，则新坐标系下的分量与旧坐标系下的分量之间有下列关系

$$a_i' = a_i'\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j a_j = \alpha_{ij}a_j \tag{1-7-6}$$

式中 i 为自由指标。将上式展开，有

$$\begin{cases} a_1' = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_1' = (a_j\boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_1' = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3 \\ a_2' = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_2' = (a_j\boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_2' = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3 \\ a_3' = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_3' = (a_j\boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_3' = \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3 \end{cases} \tag{1-7-7}$$

式(1-7-7)给出了向量的解析定义，即对于某个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 有三个量 a_1, a_2, a_3，在坐标变换时根据式(1-7-7)把它们变换成为另一个直角坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 中的三个量 a_1', a_2', a_3'，则此三个量组成一个新的量 $\boldsymbol{a}$，称为**向量或矢量**。向量的模并不随坐标变换而变化，这种与坐标选取无关的量称为**不变量**。对于标量只需用一个实函数就能表示，对于向量则必须用三个实函数才能表示。向量的分量只需要一个自由指标表示。

当然，式(1-7-7)也可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{1-7-8}$$

式(1-7-8)称为三维笛卡儿基的**旋转矩阵**，它描述了从一个笛卡儿基变换到另一个笛卡儿基的结果。

同理，将式(1-7-5)代入式(1-7-4)，两端同点乘 $\boldsymbol{e}_j$，则得

$$a_j = \alpha_{ij}a_i' \tag{1-7-9}$$

式(1-7-9)是式(1-7-6)的逆变换，写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \tag{1-7-10}$$

1.7.2 笛卡儿二阶张量

将以坐标变换为基础的向量的定义加以推广，可得到张量的定义。

设某量 T 是由3个分量 T_j 构成的有序总体，如果从一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 按照如下变换规律

$$T_i' = \alpha_{ij} T_j \tag{1-7-11}$$

变换到另一个直角坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 中的3个分量 T_i'，则该量 T 称为**一阶张量**。由此可见，向量就是笛卡儿一阶张量。一阶张量需要一个自由指标来表示。

设某量 T 是由9个分量 T_{lm} 构成的有序总体，如果从一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 按照如下变换规律

$$T_{ij}' = \alpha_{il}\alpha_{jm} T_{lm} \tag{1-7-12}$$

变换到另一个直角坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 中的9个分量 T_{ij}'，则该量 T 称为**笛卡儿二阶张量**，简称**二阶张量**。T_{lm} 和 T'_{ij} 称为笛卡儿二阶张量的**分量**。上面出现的克罗内克尔符号就是二阶张量。二阶张量需要两个自由指标表示。二阶张量通常用下列几种方式表示

$$T = \{T_{ij}\} = T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{1-7-13}$$

式中张量与其分量都使用了同一符号 T_{ij}，要注意 T_{ij} 在使用上所表示的不同含义。

张量是不变量，即它与坐标系的选取无关，但其分量却随坐标系的选取而变化。把标量与向量也归并到张量中去，标量为零阶张量，向量为一阶张量，应力为二阶张量，还有三阶、四阶乃至更高阶张量。对于三维空间，n 阶张量有 3^n 个分量。一般地，对于 m 维空间，n 阶张量有 m^n 个分量。可见张量是对不变量更一般的描述。

例 1.7.1 证明克罗内克尔符号是二阶张量。

证 在直角坐标系中两个单位向量的数量积为 $\delta_{ij}' = \boldsymbol{e}_i' \boldsymbol{e}_j'$，利用单位向量的坐标变换关系，有 $\boldsymbol{e}_i' = \alpha_{il}\boldsymbol{e}_l$，$\boldsymbol{e}_j' = \alpha_{jm}\boldsymbol{e}_m$，于是

$$\delta_{ij}' = \alpha_{il}\boldsymbol{e}_l \cdot \alpha_{jm}\boldsymbol{e}_m = \alpha_{il}\alpha_{jm}\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_m = \alpha_{il}\alpha_{jm}\delta_{lm}$$

证毕。

在一定的坐标系中，若两个张量的对应分量相等，则这两个张量称为**相等**。全部分量为零的张量称为**零张量**。分量为 δ_{ij} 的张量称为**单位张量**，记作 I，可表示为

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-7-14}$$

设 $T = T_{ij}$ 是一个二阶张量，那么 $T_c = T_{ji}$ 也是一个二阶张量，T_c 称为 T 的**共轭张量**或**转置张量**。

设 $T = T_{ij}$ 是一个二阶张量，如果其分量满足 $T_{ij} = T_{ji}$ 的关系，那么该张量称为**二阶对称张量**。二阶对称张量只有6个独立的分量，且满足 $T = T_c$ 的关系。弹性力学中的应力张量和应变张量都是二阶对称张量，克罗内克尔符号也是二阶对称张量。

设 $T = T_{ij}$ 是一个二阶张量，如果其分量满足 $T_{ij} = -T_{ji}$ 的关系，那么该张量称为**二阶反对称张量**或**二阶斜对称张量**。二阶反对称张量只有3个独立的分量，且满足 $T = -T_c$ 的关系。二阶反对称张量可表示为

$$T = T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{31} & -T_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{1-7-15}$$

式中，主对角线元素均为零。

定理 1.7.1 二阶张量可以唯一地分解成为一个对称张量和一个反对称张量之和。此定理称为**张量分解定理**。

证 存在性：二阶张量 T 可写成

$$T = \frac{1}{2}(T + T_c) + \frac{1}{2}(T - T_c) \tag{1-7-16}$$

式中 T_c 是 T 的共轭张量。显然，右边第一项是对称张量，第二项是反对称张量，这表明张量的分解是存在的。

唯一性：设二阶张量 T 已分解成为一个对称张量 S 和一个反对称张量 A 之和。需证 S、A 必具有式(1-7-15)所确定的表达式。因

$$T = S + A$$

对上式取共轭，有

$$T_c = S_c + A_c = S - A$$

以上两式相加和相减，得

$$S = \frac{1}{2}(T + T_c), A = \frac{1}{2}(T - T_c)$$

可见张量的分解方式是唯一的。证毕。

1.7.3 笛卡儿张量的代数运算

1. 加法运算

设 $A_{ij} = \alpha_{li}\alpha_{mj}A'_{lm}$ 和 $B_{ij} = \alpha_{li}\alpha_{mj}B'_{lm}$ 是两个同阶(此处为二阶)的笛卡儿张量，把第一个张量的每一个分量与第二个张量相应的分量相加(或相减)，其结果作成一个具有相同结构的新张量。例如

$$C_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij} = \alpha_{li}\alpha_{mj}(A'_{lm} \pm B'_{lm}) = \alpha_{li}\alpha_{mj}C'_{lm} \tag{1-7-17}$$

因为上式满足二阶张量的定义，所以 C_{ij} 为二阶张量。由此可见，两个同阶的笛卡儿张量之和(或差)仍为同阶张量，其分量等于两个张量的分量之和(或差)。

2. 乘法运算

可以把同一空间的任意个张量连乘，而不要求它们具有同样的结构，但次序不能乱，也不能有相同的指标，这样的运算称为张量的**外积**或**外乘法**。例如分量为 A_{ij} 和 B_{lmn} 的两个张量，它们的外积是一个五阶张量，它的组成为

$$C_{ijlmn} = A_{ij}B_{lmn} \tag{1-7-18}$$

3. 张量的缩并

设有一个 $n(n \geqslant 2)$ 阶张量，若令某两个指标相等并对此重复指标求和，则可得到一个 $n-2$ 阶的新张量，这种运算称为张量的**缩并**。每缩并一对指标，张量阶数减2。例如，一个二阶张量为 T_{ij}，令 $i = j$，则有

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{1-7-19}$$

可见二阶张量 T_{ii} 的缩并是零阶张量，它是二阶方阵的主对角线各元素之和。

将两个笛卡儿张量的外积加以缩并，以产生一个新张量的运算称为笛卡儿张量的**内积**或**内乘法**。向量的内积可看成张量的外积与缩并。例如

$$A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{1-7-20}$$

为零阶张量即标量，这正好是两个向量的数量积。

将若干个独立向量并写在一起称为**并向量**或**并矢**，它是张量的外积运算。两个向量的并矢是二阶张量，n 个向量的并矢是 n 阶张量。

证 设有并矢 $\boldsymbol{AB}$，它在旧坐标系下的分量为 A_iB_j，当变换坐标系时，由向量变换关系式(1-7-6)得知，$A_i' = \alpha_{il}A_l$，$A_j' = \alpha_{jm}A_m$，故并矢 $\boldsymbol{AB}$ 在新坐标系下的分量为

$$A_i'B_j' = \alpha_{il}\alpha_{jm}A_lA_m$$

可见，并矢 $\boldsymbol{AB}$ 的分量满足二阶张量的定义式(1-7-12)，由此可以得出结论：并矢就是二阶张量。同理可证 n 个向量的并矢就是 n 阶张量。证毕。

1.7.4 张量的商定律

张量的商定律是用来判定一组量是否构成张量的一种间接的法则。这样进行判断不需要满足坐标变换，只需在一个固定坐标系中判别。商定律可以用下面两个定理来表述。

定理 1.7.2 如果一组数的集合 $A_{i_1i_2\cdots i_m}$ 和任意 n 阶张量 $B_{j_1j_2\cdots j_n}$ 的外积

$$A_{i_1i_2\cdots i_m}B_{j_1j_2\cdots j_n} = C_{i_1i_2\cdots i_mj_1j_2\cdots j_n}$$

恒为 $m+n$ 阶张量，则 $A_{i_1i_2\cdots i_m}$ 必为 m 阶张量。

证 以 $m=3, n=2$ 为例，设

$$A_{ijk}B_{lm} = C_{ijklm}$$

式中 B_{lm} 是二阶张量，C_{ijklm} 是五阶张量。将上式两边同乘以二阶张量 B_{lm}，得

$$A_{ijk}B_{lm}B_{lm} = C_{ijklm}B_{lm}$$

等式右边是五阶张量与二阶张量的两次缩并内积，得到的是三阶张量 D_{ijk}，等式左边 $B_{lm}B_{lm}$ 的两次缩并是个标量，设为 λ。因为 B_{lm} 是任意的二阶张量，总存在着这样的 B_{lm}，可使得 $\lambda \neq 0$，故有

$$\lambda A_{ijk} = D_{ijk} = C_{ijklm}B_{lm}$$

由此证得 A_{ijk} 是三阶张量。该证明是在 $m=3, n=2$ 的情况得到的，若把 m 和 n 换成任意其他正整数，该定理的证明过程可完全相同。证毕。

定理 1.7.3 如果一组数的集合 $A_{i_1i_2\cdots i_mj_1j_2\cdots j_n}$ 和任意 n 阶张量 $B_{j_1j_2\cdots j_n}$ 的内积

$$A_{i_1i_2\cdots i_mj_1j_2\cdots j_n}B_{j_1j_2\cdots j_n} = C_{i_1i_2\cdots i_m}$$

恒为 m 阶张量，则 $A_{i_1i_2\cdots i_mj_1j_2\cdots j_n}$ 必为 $m+n$ 阶张量。

此定理的证明方法与定理1.7.2相类似。定理1.7.2和定理1.7.3称为**张量识别定理**或**张量的商定理**，有时也称为**张量特性的间接检验**。

1.7.5 二阶张量的主轴、特征值和不变量

设 T 为二阶张量，对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 作张量和向量的右向内积，有

$$T \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{1-7-21}$$

若向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向一致，即

$$\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a} \tag{1-7-22}$$

则向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向称为张量 T 的**特征方向**或**主轴方向**，λ 称为张量 T 的**特征值**或**主值**。根据张量识别

定理可知 λ 为标量。将式(1-7-22)代入式(1-7-21)并移项,得

$$T \cdot \boldsymbol{a} - \lambda \boldsymbol{a} = 0 \tag{1-7-23}$$

将式(1-7-22)展开,得

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda)a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3 = 0 \\ T_{21}a_1 + (T_{22} - \lambda)a_2 + T_{23}a_3 = 0 \\ T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + (T_{33} - \lambda)a_3 = 0 \end{cases} \tag{1-7-24}$$

式(1-7-24)是关于 a_1、a_2 和 a_3 的齐次线性代数方程组。若使此方程组有非零解,必须使下面行列式等于零,即

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1-7-25}$$

将上述行列式(1-7-25)展开,得

$$\lambda^3 - (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{1-7-26}$$

这是关于特征值 λ 的三次代数方程。该方程有三个根,或者是三个实根,或者是一个实根,两个共轭复根。特征值 λ 的三个根 λ_1、λ_2 和 λ_3 与 λ 的系数之间有下列关系

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} = \\ &\quad \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \tag{1-7-27}$$

式中,I_1 是矩阵$[T_{ij}]$主对角线各分量之和,称为张量 T 的**迹**,记作 $\mathrm{tr}T$。I_3 是矩阵$[T_{ij}]$的行列式,记作 $\det T$。由于三个特征值不随坐标轴的选取而变,所以 I_1, I_2, I_3 为不变量,它们分别称为张量的**第一、第二和第三不变量**。

特征值 λ 的三次代数方程的实根可能有三种情况,即三个不相等的实根,一个实根加两个相等的实根和三个相等的实根。对于对称张量,若三个实根不相等,则可证明三个主方向互相正交。

证 设 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 和 $\boldsymbol{n}_3$ 分别为对称张量 T 的三个主方向,λ_1、λ_2 和 λ_3 分别为其三个特征值,则有

$$T \cdot \boldsymbol{n}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{n}_1$$

$$T \cdot \boldsymbol{n}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{n}_2$$

第一式点乘 $\boldsymbol{n}_2$,第二式点乘 $\boldsymbol{n}_1$,得

$$\boldsymbol{n}_2 \cdot T \cdot \boldsymbol{n}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{n}_1$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot T \cdot \boldsymbol{n}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2$$

由于 T 是对称张量，故上两式相等。两式相减，可得

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) = 0$$

又因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$$

即 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 正交。同理可证 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_3$ 正交，$\boldsymbol{n}_2$ 与 $\boldsymbol{n}_3$ 正交。证毕。

1.7.6 笛卡儿张量的微分运算

设 $T_{j\cdots m}(x_i)$ 是某一张量场中的张量函数，并设它是单值和连续可微的，当坐标系从 x_i 变换到 x_p' 时，张量分量按如下变换规律

$$T'_{q\cdots t}(x'_p) = \alpha_{qj}\cdots\alpha_{tm}T_{j\cdots m}(x_i) \tag{1-7-28}$$

变换，式中 $T_{j\cdots m}(x_i)$ 为 n 阶张量的分量，而 x_i 按坐标变换律变换，即

$$x_i = \alpha_{pi}x'_p \tag{1-7-29}$$

现在来求该张量场中 n 阶张量的分量对坐标 x'_p 的偏导数，即张量的梯度，由于 $\alpha_{qj}\cdots\alpha_{tm}$ 为常数，故

$$\nabla T' = \mathrm{grad}T' = \frac{\partial T'_{q\cdots t}(x'_p)}{\partial x'_p} =$$

$$\alpha_{qj}\cdots\alpha_{tm}\frac{\partial T_{j\cdots m}(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_p} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\cdots\alpha_{tm}\frac{\partial T_{j\cdots m}(x_i)}{\partial x_i} \tag{1-7-30}$$

这是 $n+1$ 阶张量的分量的变换规律。由此可见，若 $T_{j\cdots m}(x_i)$ 是 n 阶张量，那么它对坐标 x_i（i 为自由指标）的一阶偏导数将是 $n+1$ 阶张量。

例 1.7.2 设 T_i 为笛卡儿一阶张量，试证 $\dfrac{\partial T_i}{\partial x_j}$ 为笛卡儿二阶张量，其中 $i \neq j$。

证 根据一阶张量的变换规律，有 $T_i = \alpha_{mi}T'_m$，于是

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \alpha_{mi}\frac{\partial T'_m}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial x_j}$$

但根据坐标变换关系，$x'_n = \alpha_{nj}x_j$，于是

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\frac{\partial T'_m}{\partial x'_n}$$

上式满足二阶张量的变换规律，所以 T_i 对坐标 $x_j(i \neq j)$ 的偏导数为比 T_i 高一阶的张量。证毕。

但是，当 $i = j$ 时，j 成为哑指标，则上式变为

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} = \alpha_{mi}\alpha_{ni}\frac{\partial T'_m}{\partial x'_n} = \delta_{mn}\frac{\partial T'_m}{\partial x'_n} = \frac{\partial T'_m}{\partial x'_m}$$

它是一个标量。由此可见，若 $T_{j\cdots m}$ 为 n 阶笛卡儿张量，那么它对与某个指标相同的坐标变量的偏导数，将得到一个 $n-1$ 阶的笛卡儿张量，此即张量的散度，可表示为

$$\nabla \cdot T = \mathrm{div}T = \frac{\partial T_{ki_2i_3\cdots i_n}}{\partial x_k} \tag{1-7-31}$$

张量的散度是张量的梯度加上一个缩并的结果。

场论中的高斯公式可以推广到张量中去。设 T 为 m 阶张量，则高斯公式可写为

$$\int_V \mathrm{div} T \mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot T \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{n} \cdot T \mathrm{d}S \tag{1-7-32}$$

证 设 $T_{i_1 \cdots i_m}$ 为张量 T 的任一分量，则有

$$\int_V \frac{\partial T_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{\partial x_i} \mathrm{d}V = \oint_S n_i T_{i_1 i_2 \cdots i_m} \mathrm{d}S \tag{1-7-33}$$

令 $i = i_1 = 1$ 或 2 或 3，式(1-7-33) 都成立，故有

$$\int_V \frac{\partial T_{k i_2 \cdots i_m}}{\partial x_k} \mathrm{d}V = \oint_S n_k T_{k i_2 \cdots i_m} \mathrm{d}S \tag{1-7-34}$$

式(1-7-34) 就是式(1-7-32)。证毕。

1.8 常用不等式

设 p 和 q 都是实数，且 $p > 1$，满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{1-8-1}$$

则 p、q 称为**共轭指数**或**相伴数**。

由式(1-8-1) 可知，必有 $q > 1$，且有如下等式

$$q = \frac{p}{p-1} \quad q - 1 = \frac{1}{p-1} = \frac{q}{p} \quad \frac{p+q}{pq} = 1 \tag{1-8-2}$$

$$pq = p + q \quad (p-1)(q-1) = 1$$

设 p、q 为共轭指数，$a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$，则下列不等式成立

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1-8-3}$$

式(1-8-3) 称为**扬氏不等式**或**扬不等式**。

证 1 考察 xOy 平面上由方程 $y = x^{p-1}$ 所定义的曲线，它也可以表示为 $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$，作积分

$$S_1 = \int_0^a y \mathrm{d}x = \int_0^a x^{p-1} \mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}$$

$$S_2 = \int_0^b x \mathrm{d}y = \int_0^a y^{q-1} \mathrm{d}y = \frac{b^q}{q}$$

不论 a、b 是什么样的正数，总有

$$ab \leqslant S_1 + S_2 = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

只有当 $b^q = a^p$ 时，式(1-8-3) 才以等式成立。证毕。

证 2 如果 $b = 0$，则不等式显然成立。设 $b > 0$，不等式(1-8-3) 等价于

$$\frac{a^p}{pb^q} + \frac{1}{q} - ab^{1-q} = \frac{a^p}{pb^q} + \frac{1}{q} - \left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0$$

令 $t=\frac{a^p}{b^q}$，$f(t)=\frac{a^p}{pb^q}+\frac{1}{q}-ab^{1-q}=\frac{t}{p}+\frac{1}{q}-t^{\frac{1}{p}}$，当 $t=1$ 时，$f(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=0$，不等式的等号成立。将 $f(t)$ 分别求一阶和二阶导数，得 $f'(t)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}$，$f''(t)=\frac{p-1}{p^2}t^{\frac{1}{p}-1}>0$，当一阶导数为零时，$t=1$，因二阶导数大于零，可知 $f(1)=0$ 是极小值，故 $f(t)\geqslant f(1)=0$。证毕。

设 C 是复数域，$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$x_k,y_k\in C$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1-8-4}$$

如果当 $k>n$ 时，$x_k=y_k=0$，则可得到有限和的形式。当右端的两个级数收敛时，可推出左端的级数收敛。式(1-8-4)称为**赫尔德不等式**。

证 令

$$a_k=\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}},b_k=\frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

则有 $\sum_{k=1}^{n}a_k^p=1$，$\sum_{k=1}^{n}b_k^q=1$，由扬不等式 $a_kb_k\leqslant\frac{a_k^p}{p}+\frac{b_k^q}{q}$ 求和，得

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^p}{p}+\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k^q}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

将 a_k、b_k 分别用与 x_k、y_k 的关系表示，有

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k||y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant1$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k||y_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

当上式右端两个收敛级数收敛时，令 $n\to\infty$，即可得到不等式(1-8-4)。证毕。

赫尔德不等式也可以写成积分形式

$$\int_{t_0}^{t_1}|x(t)y(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left[\int_{t_0}^{t_1}|x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{t_0}^{t_1}|y(t)|^q\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}} \tag{1-8-5}$$

证 在扬不等式(1-8-3)中，令

$$a=\frac{|x(t)|}{\left[\int_{t_0}^{t_1}|x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}},b=\frac{|y(t)|}{\left[\int_{t_0}^{t_1}|y(t)|^q\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}}$$

仿上面的证明方法即可推导出式(1-8-5)。证毕。

设 R 是实数域，任意实数 $x_k,y_k\in R$，$k=1,2,\cdots$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1-8-6}$$

如果当 $k>n$ 时，$x_k=y_k=0$，则可得到有限和的形式。当右端的两个级数收敛时，可推出左端的级数收敛。式(1-8-6)称为**柯西不等式**。

证 令

$$a_k = \frac{x_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}, b_k = \frac{y_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

则有 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1, \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$,由扬不等式或不等式 $(a_k - b_k)^2 \geqslant 0$,有

$$a_k b_k \leqslant \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$$

求和,得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{2} + \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

将 a_k、b_k 分别用与 x_k、y_k 的关系表示,有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

当上式右端两个收敛级数收敛时,令 $n \to \infty$,即可得到不等式(1-8-6)。证毕。

将式(1-8-6)两端平方,柯西不等式也可写成下面的形式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right) \tag{1-8-7}$$

设 R 是实数域,任意实数 $x_k, y_k, z_k \in R, k = 1,2,\cdots$,利用柯西不等式,则有

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} [(x_k - z_k) + (z_k - y_k)]^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)[(x_k - z_k) + (z_k - y_k)] + \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)[(x_k - z_k) + (z_k - y_k)] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)(x_k - y_k) + \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)(x_k - y_k) \leqslant$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

从而有

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1-8-8}$$

或

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \tag{1-8-9}$$

由此可见,$d(x,y)$ 满足三角不等式。

设 C 是复数域,$p \geqslant 1$,数列 $\{x_k\}$ 和数列 $\{y_k\}$ 满足 $x_k, y_k \in C$,且 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$,

则有如下不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1-8-10}$$

式(1-8-10)称为**闵可夫斯基不等式**。该不等式是闵可夫斯基于1896年建立的。

证 当 $p=1$ 时,根据复数模的性质可知,对于任意 $k\in N$,有 $|x_k+y_k|\leqslant|x_k|+|y_k|$,从而式(1-8-10)成立。

设 $p>1$,令 $z_k=x_k+y_k$,$k\in N$,则有

$$|z_k|^p=|x_k+y_k||z_k|^{p-1}\leqslant(|x_k|+|y_k|)|z_k|^{p-1} \tag{1-8-11}$$

对任意 $n\in N$,两端求和,得

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k||z_k|^{p-1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k||z_k|^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|y_k||z_k|^{p-1} \tag{1-8-12}$$

对上式右端第一项应用赫尔德不等式,并注意 $(p-1)q=p$ 得

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k||z_k|^{p-1}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}|z_k|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

同理可得

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k||z_k|^{p-1}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

将以上两式代入式(1-8-12),得

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\leqslant\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1-8-13}$$

上式右端的求和项均为正,两端同除以 $\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$,且考虑到 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1-8-14}$$

令 $n\to\infty$,则得式(1-8-10)。证毕。

同理,闵可夫斯基不等式也可以写成积分形式

$$\left[\int_{t_0}^{t_1}|z(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\int_{t_0}^{t_1}|x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_{t_0}^{t_1}|x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_{t_0}^{t_1}|y(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1-8-15}$$

令不等式(1-8-14)和等式(1-8-15)中的 $p=2$,则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1-8-16}$$

$$\left[\int_{t_0}^{t_1}|z(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_{t_0}^{t_1}|x(t)+y(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\int_{t_0}^{t_1}|x(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_{t_0}^{t_1}|y(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1-8-17}$$

不等式(1-8-16)和不等式(1-8-17)均称为**柯西不等式**。

1.9 名家介绍

莱布尼茨(Leibniz, Gottfried Wilhelm,1646.7.1—1716.11.14) 德国数学家、物理学家和哲学家等,数理逻辑的创始人。生于莱比锡,卒于汉诺威。1661 年入莱比锡大学学习法律,又曾到耶拿大学学习几何。1666 年获法学博士学位。1673 年当选为英国皇家学会会员。1676 年,任汉诺威图书馆馆长。1700 年当选为法兰西科学院院士,1700 年促成组建了柏林科学院并任首任院长。研究领域涉及逻辑学、数学、力学、地质学、法学、历史学、语言学、生物学以及外交、神学等诸多方面。曾制做了乘法计算器,被认为是现代机器数学的先驱者。1693 年,发现了机械能的能量守恒定律。与牛顿并称为微积分的创立者。系统阐述了二进制记数法,并把它和中国的八卦联系起来。在哲学方面,著有《单子论》,内含辩证法的因素。

泰勒(Taylor, Brook, 1685.8.18—1731.12.29) 英国数学家、哲学家。生于埃德蒙顿,卒于伦敦。1709 年获剑桥大学法学博士学位。1712 年当选为英国皇家学会会员,1714—1718 年任学会秘书。和哈雷(Halley, Edmund, 1656.10.29—1742.1.14)、牛顿是亲密的朋友。在数学方面,主要从事函数性质研究,于 1715 年出版了《增量方法及其逆》一书,书中发表了将函数展成级数的一般公式,这一级数后来被称为泰勒级数。还研究插值法的某些原理,并用这种计算方法研究弦的振动问题、光程微分方程的确定问题等。在音乐和绘画方面也极有才能。曾把几何方法应用于透视画方面,1715 年出版《直线透视原理》和 1719 年出版《直线透视新原理》。另外,还撰有哲学遗作,发表于 1793 年。

拉格朗日(Lagrange, Joseph Louis Comte de, 1736.1.25—1813.4.10) 法国数学家、力学家和天文学家,分析力学的奠基人。生于意大利都灵,卒于巴黎。1755 年任都灵炮兵学校数学教授,1759 年当选为柏林科学院院士。1772 年当选为法兰西科学院院士。1776 年当选为圣彼得堡科学院名誉院士。1776—1787 年任柏林科学院院长。在数学分析、代数方程理论、变分法、概率论、微分方程、分析力学、天体力学、偏微分方程、数论、球面天文学和制图学等方面均取得了重要成果。著有《分析力学》(1788)、《解析函数论》(1797)、《函数计算讲义》(1801)、《关于物体任何系统的微小振动》、《关于月球的天平动问题》和《彗星轨道的摄动》等书。在数学史上被认为是对分析数学的发展产生全面影响的数学家之一。

拉普拉斯(Laplace, Pierre Simon Marquis de, 1749.3.23—1827.3.5) 法国数学家、物理学家和天文学家。生于诺曼底的博蒙昂诺日,卒于巴黎。从 1767 年起,曾在多所高校任教授。1785 年当选为法兰西科学院院士,1789 年成为英国皇家学会会员。1816 年入法兰西学院,次年任院长。天体力学的主要奠基人,天体演化学的创立者之一,概率论分析的创始人,应用数学和热化学的先躯。发表数百篇论文,著有《概率分析理论》。1796 年发表《宇宙体系论》,独立提出太阳系起源的星云学说,被后人称之为"康德(Kant, Immanuel, 1724.4.22—1804.2.12) 一拉普拉斯" 星云学说。1799 年到 1825 年陆续出版五大卷巨著《天体力学》。书中大量运用了拉普拉斯方程、拉普拉斯变换和生成函数等数学工具。因研究太阳系稳定性的动力学问题被誉为法国的牛顿和天体力学之父。

高斯(Gauss, Johann Carl Friedrich, 1777.4.30—1855.2.23) 德国数学家、天文学家、物理学家。生于不伦瑞克,卒于格丁根。1799 年获赫尔姆斯泰特大学博士学位。从 1807 年直到 1855 年去世,一直任格丁根大学教授兼格丁根天文台台长。1804 年当选为英国皇家学会会员,还是法国科学院和其他许多科学院院士。数学成就遍及各个领域,在数论、高等代数、非欧几何、微分几何、超几何级数、复变函数、椭圆函数论、向量分析、概率论和变分法等方面均有一系列开创性贡献,创立和发展了最小二乘法、曲面论和位势论等。发表论文 155 篇,著有《算术研究》、《曲面的一般研究》、《地磁

概念》和《天体运动论》等。人类历史上最伟大的数学家之一，被誉为数学王子。其名言有“数学，科学的皇后；算术，数学的皇后。”

柯西(Cauchy, Augstin Louis, Baron, 1789.8.21—1857.6.23)　法国数学家和力学家。生于巴黎，卒于索镇。1807年和1810年先后毕业于巴黎综合工科学校和巴黎桥梁公路学院。1809年成为工程师。1813年回到巴黎综合工科学校任教，1816年任该校教授，并当选为法国科学院院士。还是英国皇家学会会员和几乎所有外国科学院的院士。还担任过巴黎大学理学院、法兰西学院和都灵大学的教授。成就遍及数学分析、复变函数、误差理论、代数、几何、微分方程、力学和天文学等诸多领域。在数学方面最重要的贡献在三个领域：微积分学、复变函数和微分方程。经典分析的奠基人之一，现代复变函数理论的创建人之一，并为弹性力学奠定了严格的理论基础。至少出版过7部著作和800多篇论文。

格林(George Green, 1793.7.14—1841.5.31)　英国数学家、物理学家。生于诺丁汉郡，卒于剑桥。1833年自费入剑桥大学学习，1837年获学士学位。1839年任剑桥大学教授。自学成才的科学家。1828年，写成重要著作《数学分析在电磁理论中的应用》，书中引入了位势概念，提出了著名的格林函数与格林定理，发展了电磁理论。在晶体中光的反射和折射等方面有较大的贡献。还发展了能量守恒定律，得出了弹性理论的基本方程。变分法中的狄利克雷原理、超球面函数的概念等最初都是由他提出来的。他的名字经常出现在大学数学、物理教科书或当代文献中，以他的名字命名的术语有格林定理、格林公式、格林函数、格林曲线、格林算子、格林测度和格林空间等。

奥斯特罗格拉茨基(Остроградский, Михаил Васильевич, 1801.9.24—1862.1.1)　俄罗斯数学家、力学家。生于帕先纳亚，卒于波尔塔瓦。1816—1820年在哈尔科夫大学学习。1822年留学巴黎索邦和法兰西学院。1827年回到俄国。1828年在圣彼得堡各大学和军事学院任教，同年获博士学位。1830年当选为圣彼得堡科学院候补院士，1831年成为院士。还是纽约科学院、都灵科学院、罗马科学院院士和巴黎科学院通信院士。研究涉及分析学、理论力学、数学物理、概率论、数论、传热学、代数学、变分学和天体力学等领域。最重要的数学工作是证明了三重积分与曲面积分之间关系的公式，即奥—高公式。他也是一位优秀的教育家，写过大量教科书，主要有《初等几何教程》、《三角学概要》、《天体力学教程》和《代数和超越分析讲义》等。

布尼亚可夫斯基(Буняковский, Виктор Яковлевич, 1804.12.16—1889.12.12)　俄罗斯数学家。生于巴尔(Бар)，卒于圣彼得堡。1820—1825年赴国外留学，1825年在巴黎获数学博士学位。回国后从事教育工作，先后在第一武备学校(1827)、海军学校(1827—1862)、交通道路学院(1830—1846)任教，1846—1859年任圣彼得堡大学教授。1830年当选为圣彼得堡科学院院士，1864—1889年任该科学院副院长和名誉副院长。1858年以后还兼任政府统计和保险问题的总顾问。研究内容涉及数论、概率论及其应用、统计学、数学分析、几何学、代数学和分析力学等领域。共发表论文168篇。著有《纯粹和应用数学辞典》(1839)、《算术》(1844)、《概率论的数学基础》(1846)和《算术教学大纲和提要》(1849)等。在他逝世后，圣彼得堡科学院设立了以他的名字命名的优秀数学著作奖。

哈密顿(Hamilton, Sir William Rowan, 1805.8.4—1865.9.2)　爱尔兰数学家、物理学家和天文学家。生、卒于都柏林。1823年入都柏林三一学院学习。1827年任三一学院天文学教授，并获爱尔兰皇家天文学家称号。1832年当选为爱尔兰科学院院士。1835年受封爵位。1837年当选为爱尔兰皇家科学院院长。还是法国科学院、美国科学院院士、圣彼得堡科学院通信院士和英国皇家学会会员。对分析力学的发展作出了重要贡献，在1834年发表的《动力学的一般方法》中提出了最小作用原理。建立了光学的数学理论，并把这种理论用于动力学中。数学上的主要贡献是1843年发现了“四元数”，并建立了其运算法则。还在微分方程和泛函分析方面取得了成就。论著有140多篇，其中最

重要的著作是1853年出版的《四元数讲义》。

斯托克斯(Stokes, Sir George Gabriel, 1819.8.13—1903.2.1) 英国数学家和物理学家。生于爱尔兰斯莱戈的斯克林,卒于剑桥。1841年毕业于剑桥大学。1849年任剑桥大学数学教授。1851年当选为英国皇家学会会员。1854—1885年任英国皇家学会秘书,1885—1890年任英国皇家学会会长。主要研究领域为解析学、发散级数、微分方程、流体力学、声学、光学和光谱学等。1845年用牛顿第二定律导出了黏性流体的动力学方程,即著名的纳维 — 斯托克斯方程。1851年推导出固体小球通过黏性介质运动时的阻力公式。1862年对晶体双折射动力学的数学研究作出了贡献。著有《斯托克斯数学和物理学论文集》、《论光》、《衍射的动力学理论》和《自然神学》等。

克罗内克尔(Kronecker Leopold, 1823.12.7—1891.12.29) 德国数学家。生于布雷劳斯(Breslau)附近的利格尼茨(Liegnitz,现属波兰的莱格尼查),卒于柏林。1841年入柏林大学,1849年获柏林大学哲学博士学位,1861年任该校终身教授,同年当选为柏林科学院院士,还是法国科学院和圣彼得堡科学院院士。1880年起任克雷尔杂志主编。1884年当选为英国皇家学会会员。在数论、群论和代数理论方面做出过贡献,特别对二次型理论和椭圆函数的研究有重要成果,1870年给出群的概念的最初定义。在其导师库默尔(Ernst Eduard Kummur, 1810.1.29—1893.5.14)提出的理想数的基础上得出了群论的公理结构,成为后来研究抽象群的出发点。他是直觉主义学派的先驱之一。有后人编辑的全集5卷。

黎曼(Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 1826.9.17—1866.7.20) 德国数学家。生于汉诺威的布瑞塞林兹,卒于意大利的塞拉斯卡。1846年入格丁根大学,师从高斯。1847—1849年在柏林大学就读,听过狄利克雷、雅可比等的讲课。1851年获格丁根大学博士学位。1859年任格丁根大学教授,同年当选为柏林科学院院士、法兰西科学院通信院士和英国皇家学会会员。其科学成就广泛,在数论、复变函数论、傅里叶级数、微分几何、代数几何和微分方程等方面都有贡献,并写过物理学方面的论文。提出了黎曼积分并创立了黎曼几何,后者为爱因斯坦的广义相对论提供了最合适的数学工具。主要著作有《单复变函数的一般理论的基础》、《数学物理的微分方程》和《椭圆函数论》等,1876年出版有《黎曼全集》。

杜布瓦 — 雷蒙(Du Bois-Reymond, Paul David Gustav, 1831.12.2—1889.4.7) 德国数学家。生于柏林,卒于弗赖堡。1853年入苏黎世大学学医,后转到柯尼斯堡(Konisberg)大学学习数学和物理。1859年获柏林大学博士学位。之后到中学教书。1870—1874年任弗赖堡大学教授,1874—1884年任杜宾根大学教授,1884—1889年任柏林工业大学教授。主要研究微分方程、分析学、实变函数论和变分法等,尤其对傅里叶级数和偏微分方程作出了较大贡献。首次用特征线法对二阶线性偏微分方程进行分类。提出了测度概念的雏形并提出了积分方程这个术语。著有《关于傅里叶级数》(1873)和《一般函数论》(1882)等。

施瓦茨(Schwarz, Carl Hermann Amandus, 1843.1.25—1921.11.30) 德国数学家。生于赫尔姆斯多夫(Hermsdorf),卒于柏林。1864年毕业于柏林工业学院,获哲学博士学位。1867年任哈雷大学教授。1869年任苏黎世工业大学教授。1875年主持格丁根大学数学讲座。1892年任柏林大学教授。法国科学院、柏林科学院和巴伐利亚科学院院士。其数学成就主要涉及分析学、微分方程、几何学和变分法等方面,对极小曲面的研究有突出贡献。以他的名字命名的不等式在数学中经常被使用。给出了泊松积分的严格理论。在微分方程解析理论方面引入了特种函数,后称为施瓦茨函数。1873年,首次得出了混合导数等式的证明。在保角映射研究中给出了任意多角形变换成半平面的函数的一般解析公式。著有《数学论文集》两卷。

赫尔德(Hölder, Otto Ludwig, 1859.12.22—1937.8.29) 德国数学家。生于斯图加特(Stuttgart),卒于莱比锡。1877年入柏林大学学习,1882年获杜宾根大学理学博士学位,1984年获格

丁根大学哲学博士学位。1884 年任格丁根大学讲师，1889 年任杜宾根大学副教授，1894 年任柯尼斯堡大学教授，1899 年任莱比锡大学教授。1827 年当选为巴伐利亚科学院通信院士。在代数学、分析学、位势论、函数论、级数论、群论、数论、几何学和数学基础等诸多方面都有贡献。他提出的赫尔德不等式和赫尔德积分不等式在数学分析和泛函分析中有重要作用。论证了哈密顿变分原理对于非完整系统同样有效。著有《几何学中的观点和思想》(1900) 和《数学方法》(1924) 等著作。

扬(Young, William Henry, 1863.10.20—1942.7.7)　英国数学家。生于伦敦，卒于瑞士洛桑(Lausanne)。先后在剑桥大学和格丁根大学学习。曾在印度加尔各答、利物浦、阿柏斯泰特和洛桑等地任教。研究工作涉及数学分析、实变函数论和三角级数论等方面。证明扬 — 豪斯多夫(Hausdorff, Felix, 1868.11.8—1942.1.26) 定理及扬判据，还证明扬不等式，它们都有一系列推广。1906 年与其夫人合著的《点集理论》是论述康托尔 (Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philip, 1845.3.3—1918.1.6) 集合论最早的一部著作，还著有《微分学基本理论》(1910)。

闵可夫斯基(Minkowski, Hermann, 1864.6.22—1909.1.12)　俄罗斯 — 德国数学家和物理学家。生于立陶宛的阿列克索塔斯(Alexotas)，卒于格丁根。先后就学于柏林大学和柯尼斯堡大学，与希尔伯特结为挚友，1885 年获柯尼斯堡大学博士学位。1892 年成为教授，1894 年任柯尼斯堡大学教授，1896 年任瑞士苏黎世大学教授，1902 年任格丁根大学教授。研究范围涉及多个方面，在数论、凸体理论和数学物理等方面有巨大贡献。最有名的贡献是在数学物理方面引入闵可夫斯斯基四维时空，为爱因斯坦狭义相对论提供了数学基础。1883 年在学期间因二次型的研究获法兰西科学院大奖。著有《数的几何学》(1896)、《空间与时间》(1907) 和《丢番图逼近》(Diophantus of Alexandria, 约 210—290 或约 246—330)(1907) 等著作。

爱因斯坦(Einstein, Albert, 1879.3.14—1955.4.18)　德国 — 瑞士 — 美国物理学家。生于德国乌尔姆，卒于美国普林斯顿。1905 年获苏黎世大学哲学博士学位。曾在伯尔尼专利局任职。苏黎世大学、布拉格德意志大学和苏黎世工业大学教授。1913 年任柏林大学教授和威廉帝国研究所所长。1913 年成为普鲁士科学院院士，1921 年成为英国皇家学会会员。1921 年获诺贝尔物理学奖。1933 年迁居美国，任普林斯顿高级研究所教授。1905 年建立了狭义相对论，1916 年推广为广义相对论。提出光的量子概念，并用量子理论解释了光电效应、辐射过程和固体的比热。在阐明布朗运动、发展量子统计法方面都有成就。后期致力于相对论统一场论的建立。著有《论动体的电动力学》、《相对论的数学理论》和《论理论物理学的方法》等。

习 题 1

1.1　证明 $\nabla\varphi\psi = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$。

1.2　证明 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \nabla\cdot\boldsymbol{a} + \nabla\cdot\boldsymbol{b}$。

1.3　证明 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi$。

1.4　求证

$$\iiint_V \left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\varphi_i}{\prod_{j=1}^{m}\varphi_j}\nabla u\cdot\nabla\prod_{j=1}^{m}\varphi_j + \prod_{i=1}^{n}\varphi_i\Delta u \right) \mathrm{d}V = \oiint_S \prod_{i=1}^{n}\varphi_i \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

1.5　求证 $v\Delta^2 u = \Delta u\Delta v + \nabla\cdot[v\nabla(\Delta u)] - \nabla\cdot(\Delta u\nabla v)$，其中 $\Delta^2 = \Delta\Delta$。

提示：利用 $\nabla\cdot[\nabla(v\Delta u)]$ 展开起证。

1.6　求证 $v\Delta(p\Delta u) = u\Delta(p\Delta v) + \nabla\cdot[p\Delta v\nabla u - u\nabla(p\Delta v)] - \nabla\cdot[p\Delta u\nabla v - v\nabla(p\Delta u)]$。

1.7 求证：(1) $\nabla^2(g\nabla^2 u)v = \nabla\cdot[v\nabla(g\nabla^2 u)] - \nabla v\cdot\nabla(g\nabla^2 u)$；

(2) $\nabla^2(g\nabla^2 u)v = \nabla\cdot[v\nabla(g\nabla^2 u) - g\nabla^2 u\nabla v] + g\nabla^2 u\nabla^2 v$。

1.8 证明：$\int_\Gamma (u\cos\alpha + v\cos\beta)\mathrm{d}\Gamma = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

1.9 证明下列恒等式

$$\iiint_V (u\Delta^2 v - \Delta u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_S \left(u\frac{\partial\Delta v}{\partial n} - \Delta v\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

1.10 证明恒等式$\nabla r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

1.11 已知张量 T_{ij} 为

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

试求 (1) T_{ii}； (2) $T_{ij}T_{ij}$； (3) $T_{ij}T_{ji}$。

1.12 设二阶张量为

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

试将 A_{ij} 分解为对称张量与反对称张量之和。

第 2 章　固定边界的变分问题

变分法也称**变分方法**或**变分学**是 17 世纪末开始发展起来的数学分析的一个分支，它是研究依赖于某些未知函数的积分型泛函极值的一门科学。简言之，求泛函极值的方法称为**变分法**。求泛函极值的问题称为**变分问题**或**变分原理**。克莱罗于 1733 年发表了变分法的首篇论文《论极大极小的某些问题》。欧拉于 1744 年发表的著作《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》标志着变分法这门学科的诞生。变分法一词由拉格朗日于 1755 年 8 月给欧拉的一封信中首次提出，他当时称为**变分方法**(the method of variation)，而欧拉则在 1756 年的一篇论文中提出了**变分法**(the calculus of variation)一词。变分法这门学科的命名由此得来。

变分法是泛函分析的一个重要组成部分，但变分法出现在前，而泛函分析出现在后。

本章通过举出几个古典变分问题的例子来说明泛函及变分的概念，主要讨论泛函的一阶变分、泛函取极值的必要条件、欧拉方程、欧拉方程的特殊情况以及在固定边界条件下不同类型的泛函的极值函数的求解方法，特别讨论完全泛函的变分问题。

2.1　古典变分问题举例

变分法的基本问题是关于泛函的极值问题。为了说明变分法所研究的内容，先从几个古典变分实例出发引出泛函的概念。

例 2.1.1　最速降线(或捷线)问题。这是历史上最早出现的变分法问题之一，通常被认为是变分法历史的起点，也是变分法发展的一个标志。它是伽利略于 1630 年首先提出来的，1638 年他又系统地研究过这个问题，但当时他给出的结果不对，认为这条曲线是一段圆弧。对变分法的实质性研究是约翰·伯努利在 1696 年 6 月号的《教师学报》上写给他哥哥雅可布·伯努利的一封公开信中征求该问题的解开始的。问题的提法是：设 A 和 B 是铅直平面上不在同一铅直线上的两点，在所有连接 A 和 B 两点的平面曲线中，求出一条曲线，使仅受重力作用且初速度为零的质点从点 A 到点 B 沿这条曲线运动时所需时间最短。这个问题引起了当时许多数学家的兴趣。牛顿于 1697 年 1 月 29 日得知这一消息后，当天就把这一问题解决了。莱布尼茨、伯努利兄弟和洛必达等人都研究了这个问题，各用不同的方法求得了正确的结果，其中雅可布·伯努利从几何直观出发给出的解法更具有一般性，朝变分法的方向迈出了一个较大的步伐。除雅可布·伯努利的解法外，其他人的解法都发表在 1697 年 5 月号的《教师学报》上。

解　质点运动时间不仅取决于路径的长短，而且与速度的快慢有关。连接 A 和 B 两点的所有曲线中以直线段 AB 为最短(见例 2.5.9 的解)，但它未必是质点运动时间最短的路径。现在来建立这个问题的数学模型。如图 2－1－1 所示，取 A 为平面直角坐标系的原点，x 轴置于水平位置，y 轴正向朝下。显然，最速降线应在这个平面内。于是点 A 的坐标就是(0,0)。设 B 点的坐标为(x_1,y_1)。取连接 A 和 B 两点的曲线方程为

$$y = y(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_1) \tag{1}$$

它在区间$[0,x_1]$的两个端点满足条件

$$y(0) = 0, y(x_1) = y_1 \tag{2}$$

设 $M(x,y)$ 为曲线 $y=y(x)$ 上的任意一点，则由能量守恒定律可得如下关系

$$mgy=\frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

式中，g 是重力加速度，故有

$$v=\sqrt{2gy} \tag{4}$$

另一方面，质点的运动速度还可表示为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+y'^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

由式(4)和式(5)消去 v 并积分，得质点沿曲线从 A 点滑行到 B 点所需的时间为

$$T=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{2-1-1}$$

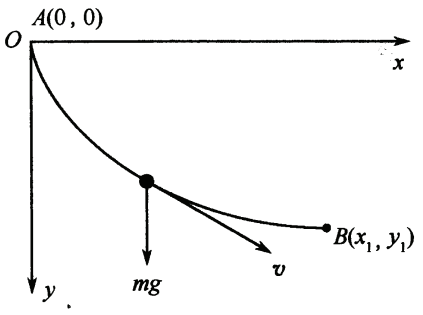


图 2-1-1　最速降线

显然，时间 T 是依赖于函数 $y=y(x)$ 的函数，$y=y(x)$ 取不同的函数，T 也就有不同的值与之对应。这样，捷线问题在数学上就归结为在满足条件(2)的所有函数(1)中，求使得积分(2-1-1)取最小值的函数。这个问题已由伯努利兄弟等人于1697年解决，但这类问题的一般解法直到后来才由欧拉和拉格朗日创立。

例 2.1.2　短程线问题。这个问题是约翰·伯努利于1697年提出来的。其提法是：在光滑曲面 $f(x,y,z)=0$ 上给定 $A(x_0,y_0,z_0)$ 和 $B(x_1,y_1,z_1)$ 两点(见图2-1-2)，在该曲面上求连接这两点的一条最短曲线 C。像这样，位于曲面上已知两点之间长度最短的曲线就称为**短程线或测地线**。

解　设这条曲线的方程可写成

$$y=y(x),\ z=z(x)\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1 \tag{1}$$

式中，$y(x)$ 和 $z(x)$ 为连续可微函数。因为曲线在曲面 $f(x,y,z)=0$ 上，所以 $y(x)$ 和 $z(x)$ 应满足约束条件

$$f(x,y,z)=0 \tag{2}$$

由高等数学可知，曲线(1)的长度为

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\mathrm{d}x \tag{2-1-2}$$

这样，短程线问题可归结为在满足约束条件(2)下，寻求过 A、B 两点的方程(1)，使得积分(2-1-2)取得最小值。短程线的变分问题称为**约束极值问题**或**条件极值问题**。地球上的测地线就属于该问题的特殊情况。约束条件(2)称为泛函式(2-1-2)的**约束方程**。

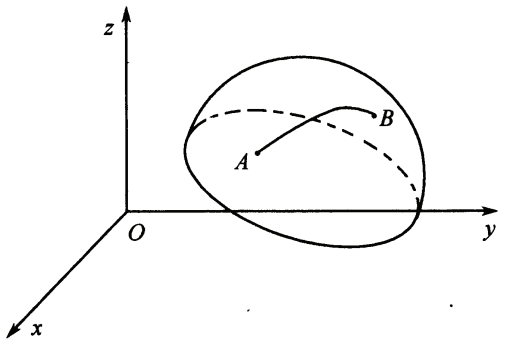


图 2-1-2　短程线

例 2.1.3　等周问题。在平面上给定长度为 L 的所有不相交的光滑封闭曲线中，求出一条能围成最大面积的曲线。这就是它命名的由来。这是最古老的变分问题之一，早在古希腊时期，人们就知道这条曲线是一个圆周。该问题于1701年由雅各布·伯努利解决，但它的变分特性直到1744年才由欧拉解决，但也有人认为1732年欧拉在阐述等周问题的通解时就给出了求解变分问题的一般方法。

解　设封闭曲线的参数方程为

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1}$$

式中，函数 $x(t), y(t)$ 连续可微，且 $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)$，$t_0$ 与 t_1 对应于封闭曲线的始点与终点。

再设封闭曲线的长度是 L，即

$$L = \oint \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

根据格林公式，这条曲线所围成的面积是

$$A = \frac{1}{2}\oint (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\oint (x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t \tag{3}$$

于是，等周问题就是在满足条件(2)的所有曲线(1)中，求使得积分(3)取最大值的曲线。式(2)称为**等周条件**。

这三个古典变分的例子在历史上对变分法的发展都有着密切关系和巨大影响，它们是在17世纪末和18世纪初产生的并且是验证数学分析的新方法的试金石。从上述例子可以看出，要求取极值的并且由积分给出的变量 T、L 和 A 都取决于所取的未知曲线或未知曲面的选取。这些未知曲线或曲面通常是由若干个函数给出的，因此这些由积分给出的变量可以看作是依赖于这些未知函数及未知函数的导数的变量，而这些未知函数及未知函数的导数在变分时是独立变化的，起着自变量的作用，这样的自变量称为**独立函数**或**自变函数**。简单地说，这种依赖于独立函数的函数就称为**泛函**，或者说以函数作为自变量的函数称为**泛函**。以积分形式出现的泛函称为**积分型泛函**或**积分泛函**。关于泛函的一般定义在下一节给出。

上述三个古典变分问题将在后面陆续解决。

2.2 变分法的基本概念

为了讨论问题的方便，下面给出一些与变分法有关的概念。

具有某种共同性质的函数构成的集合称为**类函数**或**函数类**，记作 F。例如，在例2.1.1中，所有的平面曲线都通过点 A 和点 B，而过点 A 和点 B 就是函数集合所具有的共同性质。在例2.1.3中，所有光滑封闭曲线的周长都是给定的 L，L 就是函数集合所具有的共同性质。

常见的类函数有：

在开区间 (x_0, x_1) 内连续的函数集，称为**在区间** (x_0, x_1) **上的连续函数类**，记为 $C(x_0, x_1)$。

在闭区间 $[x_0, x_1]$ 上连续的函数集，称为**在区间** $[x_0, x_1]$ **上的连续函数类**，记为 $C[x_0, x_1]$，其中函数在区间的左端点右连续，在区间的右端点左连续。这时它在区间端点的连续称为**单边连续**。

在开区间 (x_0, x_1) 内 n 阶导数连续的函数集，称为**在区间** (x_0, x_1) **上 n 阶导数连续的函数类**，记为 $C^n(x_0, x_1)$，并约定 $C^0(x_0, x_1) = C(x_0, x_1)$，即类函数的零阶导数就是该类函数本身。

符号 $C^n(x_0, x_1)$ 表示函数集在开区间 (x_0, x_1) 内每点的邻域有定义，在 (x_0, x_1) 中有小于或等于 n 的各阶连续导数的一切函数 $y(x)$ 的集合。如果对于每个 n，都有 $y(x) \in C^n(x_0, x_1)$，那么 $y(x)$ 称为**无穷可微函数**，记作 $y(x) \in C^n(x_0, x_1) \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(x_0, x_1)$。

在闭区间 $[x_0, x_1]$ 上 n 阶导数连续的函数集，称为**在区间** $[x_0, x_1]$ **上 n 阶导数连续的函数类**，记为 $C^n[x_0, x_1]$，其中函数的 n 阶导数在区间端点单边连续，并约定 $C^0[x_0, x_1] = C[x_0, x_1]$。

对于记号 C 和 C^n，同样也适用于多元函数。此时，要把上述区间换成函数所依赖的区域。

设 $F = \{y(x)\}$ 是给定的某一类函数，R 为实数集合。如果对于类函数 F 中的每一个函数

$y(x)$，在 R 中变量 J 都有一个确定的数值按照一定的规律与之对应，则 J 称为(类函数 F 中) 函数 $y(x)$ 的**泛函**，记为 $J=J[y(x)]$、$J=J[y(\cdot)]$ 或 $J=J[y]$。函数 $y(x)$ 称为泛函 J 的**宗量**，有时也称为**泛函变量**、**宗量函数**或**变函数**。类函数 F 称为泛函 J 的**定义域**。加在宗量函数上的条件称为**容许条件**。属于定义域的宗量函数称为**可取函数**或**容许函数**。换句话说，泛函是以类函数为定义域的实值函数。为了与普通函数相区别，泛函所依赖的函数用方括号括起来。泛函一词是阿达马于 1910 年在他的《变分法教程》一书中提出来的。

由泛函的上述定义可见，泛函的值是数，它所依赖的自变量是函数，而函数的值与它所依赖的自变量都是数，所以泛函是变量与函数的对应关系，它是一种广义的函数，而函数是变量与变量的对应关系，这是泛函与函数的基本区别。再有，复合函数依赖于自变量 x，当 x 的值给定后，就能算出复合函数的一个相应值。而泛函则依赖于函数 $y(x)$，泛函的值既不取决于自变量 x 的某个值，也不取决于函数 $y(x)$ 的某个值，而是取决于类函数 F 中 $y(x)$ 与 x 的函数关系，即泛函依赖于整个函数 $y(x)$ 和 x 的某个区间，这是泛函与复合函数的基本区别。

由于一元函数的几何图形是曲线，故一元函数也可称为**曲线函数**。同理，一般情况下，二元函数在几何上的表现形式是曲面，故二元函数也可称为**曲面函数**。

对于 x 是多维域 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上的变量时，以上定义的泛函也适用，这时泛函记为 $J=J[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$。同样也可以把依赖于多个未知函数的泛函记为 $J=J[(y_1(x),y_2(x),\cdots,\boldsymbol{y_m}(x)]$，其中 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 都是独立变化的。还有，可以把泛函记为 $J=J[u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$，其中 $u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也都是独立变化的。

例如，设曲面 S 由方程 $z=z(x,y)$ 给定，函数 $z(x,y)$ 具有连续的偏导数，S 在 xOy 平面上的投影区域为 D，则该曲面的面积为

$$A=A[z(x,y)]=\iint_D\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-2-1}$$

对于不同的函数 $z(x,y)$，面积 A 有确定的值与之对应，所以 A 是泛函。它的可取类函数为具有连续一阶偏导数的二元类函数。在给定的空间闭曲线上具有最小面积的曲面称为**极小曲面**。上式就是要求泛函的极小曲面。早在 1760 年拉格朗日就已提出这样的问题：在三维空间中给定一条可求长度的简单闭曲线 C，是否存在以 C 为边界的极小曲面？1873 年，普拉托曾用实验的方法显示极小曲面，他将弯成空间闭曲线的铅丝浸入到肥皂溶液中，再把铅丝取出，沾在铅丝上的肥皂膜就是最小曲面。因此求泛函的极小曲面问题后来就称为**普拉托问题**。普拉托问题涉及对这种曲面存在性、唯一性和稳定性的研究。1931 年拉多和道格拉斯给出了极小曲面存在性的证明，然而得到的解有孤立奇点，1970 年奥斯曼最后证明了极小曲面的存在性。于是，第一个问题已得到解决。

为了研究泛函的极值，需引入函数的距离和邻域的概念。

设函数 $y(x),y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的 n 阶导数，则这两个函数 0 到 n 阶导数之差的绝对值中最大的那个数

$$d_n[y(x),y_0(x)]=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y^{(i)}(x)-y_0^{(i)}(x)| \tag{2-2-2}$$

称为函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 n **阶距离**或 n **级距离**。特别，当 $n=0$ 时

$$d_0[y(x),y_0(x)]=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y^{(0)}(x)-y_0^{(0)}(x)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)-y_0(x)| \tag{2-2-3}$$

称为函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**零阶距离**或**零级距离**。显然，两条曲线重合的充要条件是两条曲线间的零阶距离等于零。当 $n=1$ 时

$$d_1[y(x),y_0(x)]=\max_{0\leqslant i\leqslant 1}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y^{(i)}(x)-y_0^{(i)}(x)| \tag{2-2-4}$$

称为函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**一阶距离或一级距离**。

显然有下面的不等式成立

$$d_0[y,y_0] \leqslant d_1[y,y_0] \leqslant \cdots \leqslant d_n[y,y_0] \tag{2-2-5}$$

式(2-2-5)表明,两个函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 的 $i(0 \leqslant i < j \leqslant n)$ 阶距离小,但其大于 i 阶距离的 j 阶距离未必小。反之,j 阶距离小的两个函数,其小于 j 阶距离的 i 阶距离也一定小。

由上述定义可见,距离是两个函数及其导数接近程度的一种度量。

设已知函数 $y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的 n 阶导数,则所有与函数 $y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 n 阶距离小于正数 δ 的函数 $y(x)$ 所组成的集合称为函数 $y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 n **阶** δ **邻域**或 n **级** δ **邻域**,记为 $N_n[\delta,y_0(x)]$,可表示为

$$N_n[\delta,y_0(x)] = \{y(x) \mid y(x)C^n[a,b], d_n[y(x),y_0(x)] < \delta\} \tag{2-2-6}$$

根据上述定义,函数 $y_0(x)$ 的 n 阶 δ 邻域内的任一函数 $y(x)$ 应在所讨论的区间内同时满足下列不等式

$$|y(x)-y_0(x)| < \delta,\ |y'(x)-y_0'(x)| < \delta, \cdots, |y^{(n)}(x)-y_0^{(n)}(x)| < \delta$$

函数 $y_0(x)$ 的零阶 δ 邻域由所有满足 $|y(x)-y_0(x)| < \delta$ 的函数 $y(x)$ 所组成。而函数 $y_0(x)$ 的一阶 δ 邻域则由所有满足 $|y(x)-y_0(x)| < \delta$ 和 $|y'(x)-y_0'(x)| < \delta$ 的函数 $y(x)$ 所组成。所以 $y_0(x)$ 的一阶 δ 邻域是 $y_0(x)$ 的零阶 δ 邻域的一部分。函数 $y_0(x)$ 的零阶 δ 邻域称为该函数的**强** δ **邻域或强邻域**。函数 $y_0(x)$ 的一阶 δ 邻域称为该函数的**弱** δ **邻域或弱邻域**。显然函数的弱邻域是函数的强邻域的一部分。

曲线 $y = y(x)$ 的零阶 δ 邻域由所有位于 $y = y(x)$ 上下宽为 2δ 的带状区域内的曲线组成。

以上概念可以推广到多元函数的情形。

若 $y(x) \in N_n[\delta,y_0(x)]$,则 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 称为具有 n **阶的** δ **接近度**。若两曲线具有 n 阶的 δ 接近度,则它们具有任何低于 n 阶的 δ 接近度。接近度的阶数越高,两曲线的接近程度就越近。例如图 2-2-1 是仅具有零阶接近度的两条曲线,而图 2-2-2 是具有零阶和一阶接近度的两条曲线。有了接近度的概念可以精确地定义泛函的连续。

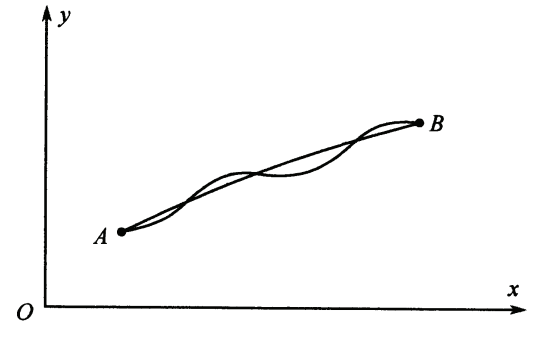


图 2-2-1　只有零阶接近度的两条曲线

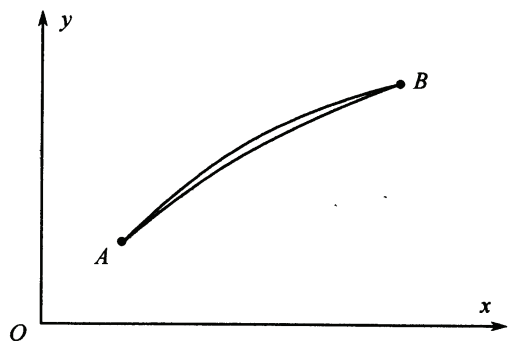


图 2-2-2　具有零阶和一阶接近度的两条曲线

设函数 $y(x) \in F = C^n[a,b]$,$J[y(x)]$ 是定义域为 F 的泛函。若对于任意给定的一个正数 ε,总可以找到一个 $\delta > 0$,只要

$$d_n[y(x),y_0(x)] < \delta,\ \text{即}\ y(x) \in N_n[\delta,y_0(x)] \subset F$$

都有

$$|J[y(x)]-J[y_0(x)]| < \varepsilon$$

成立,则泛函 $J[y(x)]$ 称为在函数 $y_0(x)$ 处具有 n 阶 δ 接近度的**连续泛函**。

例 2.2.1 设曲线 $y(x)=\frac{\sin n^k x}{n}$，其中 $k\geqslant 2$，n 是充分大的正整数，在区间$[0,\pi]$上曲线 $y_1(x)\equiv 0$。试求两曲线的零阶距离和一阶距离。

解 两曲线的零阶距离为

$$d_0=|y(x)-y_1(x)|=\left|\frac{\sin n^k x}{n}-0\right|=\left|\frac{\sin n^k x}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$$

两曲线的一阶距离为

$$d_1=|y'(x)-y_1'(x)|=n^{k-1}|\cos n^k x|$$

在点 $x=\frac{\pi}{n^k}$ 处，有 $|y'(x)-y_1'(x)|=n^{k-1}$，从而一阶距离 d_1 对于充分大的正整数 n 可以任意大。任给 $\delta>0$，当 $n>1/\delta$ 时，就能使这两条曲线具有零阶 δ 接近度，但这两条曲线没有一阶 δ 接近度。

例 2.2.2 求所给两条曲线 $y(x)=x$ 和 $y_1(x)=\ln x$ 在区间$[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}]$上的零阶距离。

解 由定义，两曲线的零阶距离为

$$d_0=\max_{\mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}}|y(x)-y_1(x)|=\max_{\mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}}|x-\ln x|\text{或}d_0=\max_{\mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}}(x-\ln x)$$

将 d_0 求导并令其等于零，可解得 $x=1$，但在 $x=1$ 点处的零阶距离小于在右端点处的零阶距离，故两曲线的零阶距离是 $d_0=\mathrm{e}-1$。

如果一个类函数中的某个函数能够使某个泛函取得极值或可能取得极值，则该类函数称为变分问题的**可取类函数**或**容许类函数**。一般来说，可取类函数中的函数可以有无穷多个，其中任何一个都称为**可取函数**或**容许函数**。可取类函数中的可取函数并不表示某种固定不变的函数关系，而是可以在可取类函数中任意选择和变化。可取类函数对应的曲线(曲面)称为**可取曲线(曲面)类**或**容许曲线(曲面)类**(或**簇**)。类函数中能使泛函取得极值或可能取得极值的函数(或曲线)称为**极值函数**、**极值曲线**或**极带**，也称为**变分问题的解**。变分法的核心问题就是求解泛函的极值函数和极值函数所对应的泛函极值。如果可取曲线类的曲线端点预先给出且为定值，则所求泛函极值的问题称为**固定终点变分问题**、**固定端点变分问题**或**固定边界变分问题**。

上节所举的几个例子说明如何从一个物理问题或几何问题及相应的物理定律或几何定理导出某问题的泛函。但仅有泛函还不足以求解所研究的变分问题，还应提出某些附加条件对所研究的变分问题加以限制，这些对变分问题加以限制的附加条件称为**约束**。如果给出的是未知函数在区间的端点或区域的边界上应满足的附加条件，则称为变分问题的**边界条件**。如果给出的是未知函数在初始时刻应满足的附加条件，则称为变分问题的**初始条件**。其他的附加条件称为变分问题的**约束条件**。约束条件可分为两种，泛函变量之间应满足的关系式称为**一般约束条件**。当泛函达到极值或驻值时，通过变分运算得到的泛函变量之间应满足的条件称为**变分约束条件**或**变分条件**。例如在例 2.1.3 中，式(3)给出的等周条件就是一种约束条件。如果容许函数在边界上没有限制，则这样的边界称为**自由边界**，这样的边界条件称为**自由边界条件**。初始条件、约束条件与边界条件合称为变分问题的**定解条件**。泛函与一定的定解条件结合起来，就称为**定解问题**。一般情况下，一个定解问题可以没有约束条件，但不能没有边界条件或初始条件。

设 $J[y(x)]$ 为在某一可取类函数 $F=\{y(x)\}$ 中定义的泛函，$y_0(x)$ 为 F 中的一个函数。如果对于 F 中任一函数 $y(x)$，都有 $\Delta J=J[y(x)]-J[y_0(x)]\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$，则泛函 $J[y(x)]$ 称为在 $y_0(x)$ 上取得**绝对极小值**或**绝对极大值**，也称为**全局极小值**或**全局极大值**。绝对极小值与绝对极大值统称**绝对极值**或**全局极值**。

例 2.2.3 设 $0\leqslant x_0<x_1$，试证泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$ 在曲线 $y(x)\equiv 0$ 上取得绝

对极小值。

证 因 $0 \leqslant x_0 < x_1$，故对于任意一个在 $[x_0, x_1]$ 上连续的函数 $y(x)$，有

$$\Delta J = J[y(x)] - J[0] = \int_{x_0}^{x_1}(x^2 + y^2)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1}x^2\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}y^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

等式仅当 $y(x) \equiv 0$ 时成立。证毕。

如果作为比较的函数 $y(x)$ 仅限于 $y_0(x)$ 的某个邻域，且有 $\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$，则泛函 $J[y(x)]$ 称为在 $y_0(x)$ 上取得**相对极小值**或**相对极大值**，也称为**局部极小值**或**局部极大值**。相对极小值与相对极大值统称**相对极值**或**局部极值**。

泛函的极值还与泛函变量的接近度有关。设 $J[y(x)]$ 为在某一可取类函数 $F = \{y(x)\}$ 中定义的泛函，$y_0(x)$ 为 F 中的一个函数。如果在 $y_0(x)$ 的零阶 δ 邻域内，都有 $\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \geqslant 0$（或 $\leqslant 0$），则泛函 $J[y(x)]$ 称为在 $y_0(x)$ 上取得**强相对极小值**（或**强相对极大值**）或**强极小值**（或**强极大值**）。如果不仅在 $y_0(x)$ 的零阶 δ 邻域内，而且在 $y_0(x)$ 的一阶 δ 邻域内，都有 $\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \geqslant 0$（或 $\leqslant 0$），则泛函 $J[y(x)]$ 称为在 $y_0(x)$ 上取得**弱相对极小值**（或**弱相对极大值**）或**弱极小值**（或**弱极大值**）。强（弱）极小值与强（弱）极大值统称**强（弱）极值**。强极值与弱极值的区别在讨论泛函极值的必要条件时作用不大，但在研究泛函极值的充分条件时这种区别很重要。

每个绝对极值同时也是强相对极值或弱相对极值，但是反过来每个相对极值却未必是绝对极值。

绝对极值、相对极值、强极值和弱极值统称**极值**。

由于一阶邻域是零阶邻域的一部分，而具有一阶接近度的两个函数必然具有零阶接近度，所以如果泛函 $J[y(x)]$ 在函数 $y_0(x)$ 上取得强极值，那么它也一定在 $y_0(x)$ 上取得弱极值。但反之却不尽然，即如果泛函 $J[y(x)]$ 在函数 $y_0(x)$ 上取得弱极值，却不一定在 $y_0(x)$ 上取得强极值。也就是说，在与 $y_0(x)$ 即在纵坐标上又在 $y_0'(x)$ 上（即切线方向上）都接近的那些曲线 $y(x)$ 中，可能没有这种曲线使得 $J[y(x)] < J[y_0(x)]$（或 $J[y(x)] > J[y_0(x)]$），而在那些与 $y_0(x)$ 只在纵坐标接近而不一定在 $y_0'(x)$ 上接近的曲线 $y(x)$ 中，则可能找出这样的曲线使 $J[y(x)] < J[y_0(x)]$（或 $J[y(x)] > J[y_0(x)]$）。由此可知，对于泛函 $J[y(x)]$ 的弱的相对极值的必要条件，必为其强的相对极值的必要条件。因而，在讨论泛函极值的必要条件时，总是设 δ 邻域为一阶邻域。

由绝对极值、强极值和弱极值的定义可知，强极值的取值域是绝对极值取值域的一部分，而弱极值的取值域又是强极值的取值域的一部分，故泛函能在取值域大的范围内取值，必然能在取值域小的范围内取值，但反之却未必成立。

对于任意定值 $x \in [x_0, x_1]$，可取函数 $y(x)$ 与另一可取函数 $y_0(x)$ 之差 $y(x) - y_0(x)$ 称为函数 $y(x)$ 在 $y_0(x)$ 处的**变分**或**函数的变分**，记作 δy，δ 称为**变分记号**、**变分符号**或**变分算子**，这时有

$$\delta y = y(x) - y_0(x) = \varepsilon\eta(x) \tag{2-2-7}$$

式中 ε 为拉格朗日引进的一个小参数，但它不是 x 的函数，而 $\eta(x)$ 为 x 的任意函数。由于可取函数都通过区间的固定端点，即它们在区间的端点的值都相等，故在区间的端点，任意函数 $\eta(x)$ 都满足

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \tag{2-2-8}$$

也就是

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0 \tag{2-2-9}$$

式(2-2-9)就是函数变分在固定端点应该满足的条件即固定边界条件。

因为可取函数 $y(x)$ 是泛函 $J[y(x)]$ 的宗量,故也可以这样定义变分:泛函的宗量 $y(x)$ 与另一宗量 $y_0(x)$ 之差 $y(x)-y_0(x)$ 称为宗量 $y(x)$ 在 $y_0(x)$ 处的**变分**。

对于任意定值 $x\in[x_0,x_1]$,若可取函数 $y(x)$ 与另一可取函数 $y_0(x)$ 具有零阶接近度,则 $y(x)-y_0(x)$ 称为函数 $y(x)$ 在 $y_0(x)$ 处的**强变分**。若 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 具有一阶(或一阶以上)接近度,则 $y(x)-y_0(x)$ 称为函数 $y(x)$ 在 $y_0(x)$ 处的**弱变分**。强变分与弱变分统称**变分**。

上述变分的定义也可以推广到多元函数的情形。

显然,根据变分的定义,函数 $y(x)$ 的变分 δy 是 x 的函数。注意函数变分 δy 与函数增量 Δy 的区别,如图2-2-3所示,函数的变分 δy 是两个不同函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 在自变量 x 取固定值时之差 $\varepsilon\eta(x)$,函数发生了改变;函数的增量 Δy 是由于自变量 x 取一个增量而使同一函数 $y(x)$ 产生的增量,函数仍是原来的函数。由此也可以看出变分符号 δ 的作用是用以表示相应于自变量 x 取某一定值时函数的微小改变。

因为在变分时自变量 x 保持不变,而函数本身形式改变所引起的函数值的改变量,故在变分运算时自变量的增量取零值,即 $\delta x=0$。当自变量 x 为时间 t 时,上述变分称为**等时变分**,此时 $\delta t=0$。

若可取函数由 $y(x)$ 变为 $y_1(x)$ 的同时,自变量 x 也取得无穷小增量 Δx,这里 Δx 是 x 的无穷小可微函数,函数的增量在舍去高阶微量后,可近似写成

$$\Delta y=\delta y+y'(x)\Delta x \tag{2-2-10}$$

则 Δy 称为函数 $y(x)$ 的**全变分**,Δ 称为**全变分符号**。全变分包括两部分:$y'(x)\Delta x$ 表示函数形式不变,由于自变量变化所引起的函数值的改变量(仅取线性部分);δy 表示自变量不变,仅由函数形式改变所引起的函数值的改变量。当自变量 x 为时间 t 时,全变分又称为**不等时变分**或**非等时变分**。

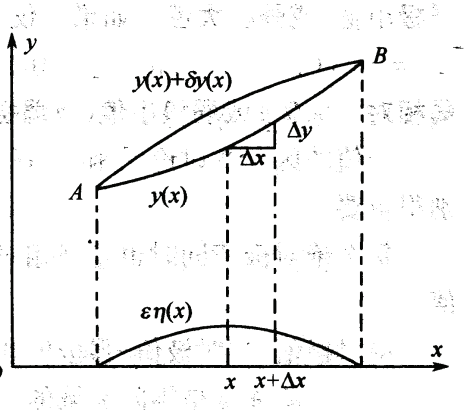


图2-2-3 变分与微分的差别

变分符号 δ 不仅可以表示当自变量 x 取某一定值时函数的微小改变,同样也可以表示当 x 取某一定值时函数的导数的改变。如果函数 $y(x)$ 与另一函数 $y_0(x)$ 都可导,则函数的变分 δy 有以下性质

$$\delta y'=y'(x)-y_0'(x)=[y(x)-y_0(x)]'=(\delta y)' \tag{2-2-11}$$

由此得到变分符号 δ 与导数符号 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 之间的关系

$$\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y \tag{2-2-12}$$

即**函数导数的变分等于函数变分的导数**。换句话说,**求变分与求导数这两种运算次序可以交换**。在进行变分法的有关推导时要经常用到变分的这个性质。

上面的性质可推广到高阶导数的变分情形,即

$$\delta y''=(\delta y)'',\delta y'''=(\delta y)''',\cdots,\delta y^{(n)}=(\delta y)^{(n)}$$

由式(2-2-7)和式(2-2-11)可得

$$\delta y'=(\delta y)'=\varepsilon\eta'(x) \tag{2-2-13}$$

对于高阶导数的变分,有

$$\delta y^{(n)}=(\delta y)^{(n)}=\varepsilon\eta^{(n)}(x) \tag{2-2-14}$$

由于哈密顿算子是一种求导运算的算子,故有

$$\delta\nabla\varphi = \delta\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\delta\varphi = \nabla\delta\varphi \tag{2-2-15}$$

$$\delta\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \delta\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\cdot a_j\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\cdot\delta a_j\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\cdot\delta\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\delta\boldsymbol{a} \tag{2-2-16}$$

$$\delta\nabla\times\boldsymbol{a} = \delta\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times a_j\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times\delta a_j\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times\delta\boldsymbol{a} = \nabla\times\delta\boldsymbol{a} \tag{2-2-17}$$

即哈密顿算子和变分符号可以交换次序。

同理,对于拉普拉斯算子,有

$$\delta\Delta\varphi = \delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2\delta\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\delta\varphi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\delta\varphi = \Delta\delta\varphi \tag{2-2-18}$$

即拉普拉斯算子和变分符号也可以交换次序。

2.3 最简泛函的变分与极值的必要条件

设 $F(x,y(x),y'(x))$ 是三个独立变量 $x,y(x),y'(x)$ 在区间 $[x_0,x_1]$ 上的已知函数,且二阶连续可微,其中 $y(x)$ 和 $y'(x)$ 是 x 的未知函数,则泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x);y'(x))\mathrm{d}x \tag{2-3-1}$$

称为最简单的积分型泛函,简称最简泛函,有时也称为**价值泛函**。泛函 $J[y(x)]$ 称为**泛函形式**或**变分积分**,被积函数 F 称为**泛函的核**、**变分被积函数**或**拉格朗日函数**。因对 F 的积分得到的 $J[y(x)]$ 值取决于函数 $y(x)$ 的形式,故 $J[y(x)]$ 是 $y(x)$ 的泛函。从泛函(2-3-1)可知,$J[y(x)]$ 其实不仅仅只是 $y(x)$ 的函数,而且还是 x 和 $y'(x)$ 的函数,但只要求出了 $y(x),y'(x)$ 也就能求出来了,于是泛函(2-3-1)只是写成 $J[y(x)]$ 的形式。

在 $y=y(x)$ 的一阶邻域内,任取一曲线 $y=y_1(x)$,则有

$$\delta y = y_1(x)-y(x),\delta y' = y_1'(x)-y'(x) \tag{2-3-2}$$

最简泛函 $J[y(x)]$ 的增量为

$$\Delta J = J[y_1(x)]-J[y(x)] = J[y(x)+\delta y]-J[y(x)] =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]\mathrm{d}x \tag{2-3-3}$$

有时泛函的增量也称为泛函的**全变分**。

由二元函数的泰勒中值定理得

$$F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y') = \overline{F}_y\delta y+\overline{F}_{y'}\delta y' \tag{2-3-4}$$

式中,$\overline{F}_y$ 与 $\overline{F}_{y'}$ 分别表示 F_y 与 $F_{y'}$ 在 $(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))$ 处的值,$\overline{y}(x)$ 介于 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 之间,$\overline{y}'(x)$ 介于 $y'(x)$ 与 $y_1'(x)$ 之间。因而

$$|\overline{y}(x)-y(x)| < d_1[y_1(x),y(x)] \tag{2-3-5}$$

$$|\overline{y}'(x)-y'(x)| < d_1[y_1(x),y(x)] \tag{2-3-6}$$

对于任意 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$,当 $d_1[y_1(x),y(x)]$ 充分小时,必有

$$|\overline{F}_y - F_y| < \varepsilon_1, |\overline{F}_{y'} - F_{y'}| < \varepsilon_2 \tag{2-3-7}$$

因此,有

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1}(\overline{F}_y\delta y + \overline{F}_{y'}\delta y')\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1}[(\overline{F}_y - F_y)\delta y + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\delta y']\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x + \varepsilon d_1[y_1(x), y(x)] \tag{2-3-8}$$

式中

$$\varepsilon d_1[y_1(x), y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}[(\overline{F}_y - F_y)\delta y + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\delta y']\mathrm{d}x \tag{2-3-9}$$

且 ε 随 $d_1[y_1(x), y(x)]$ 趋于零而趋于零。这是由于

$$\left|\int_{x_0}^{x_1}[(\overline{F}_y - F_y)\delta y + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\delta y']\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\int_{x_0}^{x_1}|\overline{F}_y - F_y||\delta y|\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1}|\overline{F}_{y'} - F_{y'}||\delta y'|\mathrm{d}x <$$

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d_1[y_1(x), y(x)](x_1 - x_0) = \varepsilon' d_1[y_1(x), y(x)] \tag{2-3-10}$$

而 ε' 随 $d_1[y_1(x), y(x)]$ 趋于零而趋于零。

这样 $\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x$ 与 ΔJ 相差一个比 $d_1[y_1(x), y(x)]$ 更高阶的无穷小量,是泛函增量的主要部分,记为 $L[y, \delta y]$。下面将进一步证明 $L[y, \delta y]$ 是关于 δy 的线性泛函。下面给出线性泛函的定义。

若连续泛函 $J[y(x)]$ 满足以下两个条件:

(1) $J[y_1(x) + y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)]$

(2) $J[cy(x)] = cJ[y(x)]$

式中,c 为任意常数,则 $J[y(x)]$ 称为关于 $y(x)$ 的**线性泛函**。

因为

$$L[y, \delta y_1 + \delta y_2] = \int_{x_0}^{x_1}[F_y(\delta y_1 + \delta y_2) + F_{y'}(\delta y_1' + \delta y_2')]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[F_y\delta y_1 + F_{y'}\delta y_1']\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1}[F_y\delta y_2 + F_{y'}\delta y_2']\mathrm{d}x =$$

$$L[y, \delta y_1] + L[y, \delta y_2]$$

$$L[y, c\delta y] = \int_{x_0}^{x_1}[F_y(c\delta y) + F_{y'}(c\delta y')]\mathrm{d}x = c\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x = cL[y, \delta y]$$

所以 $L[y, \delta y]$ 是关于 δy 的线性泛函。

若连续泛函 $J[u, v]$ 满足以下三个条件:

(1) $J[u, v] = J[v, u]$

(2) $J[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v] = \alpha_1 J[u_1, v] + \alpha_2 J[u_2, v]$

(3) $J[u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2] = \beta_1 J[u, v_1] + \beta_2 J[u, v_2]$

式中，α_1、α_2、β_1 和 β_2 为任意常数，则 $J[u,v]$ 称为关于 u 和 v 的**对称双线性泛函**。如果只满足后两个条件，则 $J[u,v]$ 称为关于 u 和 v 的**双线性泛函**。在双线性泛函中若令 $u=v$，可得到 $J[u,u]$，则 $J[u,u]$ 称为**二次泛函**。

若泛函(2-3-1)具有二阶连续性，且其增量可表示为 $\Delta J = L[y(x),\delta y]+d[y(x),\delta y]$，其中 $d[y,\delta y]$ 为 δy 的高阶无穷小量，则这个泛函称为在 $y=y(x)$ **处可微**，并把 $L[y,\delta y]$ 称为泛函 $J[y(x)]$ 在 $y(x)$ 上的**一阶变分或一次变分**，又称**泛函的变分或变分**，记作 $\delta J[y(x)]$、$\delta J[y]$ 或 δJ，即

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y']\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\varepsilon\eta + F_{y'}\varepsilon\eta')\mathrm{d}x =$$

$$\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta + F_{y'}\eta')\mathrm{d}x \tag{2-3-11}$$

泛函的变分是拉格朗日于1762年提出的概念。

由上述定义可知，泛函 J 的变分 δJ 具有下面两个性质：

(1) 泛函的增量 ΔJ 与变分 δJ 之差是一个比一阶距离 $d_1(y,y_1)$ 更高阶的无穷小，泛函的变分 δJ 是泛函增量 ΔJ 的线性主要部分(即线性主部)；

(2) 变分 δJ 的被积函数是关于 η 和 η' 的线性函数。

用泛函的变分 δJ 表示泛函增量 ΔJ 称为**泛函的线性化**。泛函的线性化可表示为 $\Delta J = \delta J$。

注意，在上述泛函的变分定义中，函数 $y(x)$ 和 $y'(x)$ 都是独立变量，这与高等数学中函数的微分定义有着本质的不同。表2.3.1给出了泛函和函数的对应关系。

表2.3.1　泛函和函数的对应关系

函数	泛函	函数	泛函
函数 $f(x)$	泛函 $J[y(x)]$	自变量 x 的增量 Δx	函数 $y(x)$ 的变分 δy
变量 $y=f(x)$	变量 $J=J[y(x)]$	函数的微分 $\mathrm{d}y$	泛函的变分 δJ
自变量 x	函数 $y(x)$		

例2.3.1　验证 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y^2\mathrm{d}x$ 不是线性泛函。

解　因为

$$J[cy]=\int_{x_0}^{x_1}(cy)^2\mathrm{d}x = c^2\int_{x_0}^{x_1}y^2\mathrm{d}x \neq c\int_{x_0}^{x_1}y^2\mathrm{d}x = cJ[y]$$

故 $J[y]$ 不是线性泛函。

例2.3.2　验证 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y+q(x)y']\mathrm{d}x$ 是线性泛函，其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是 x 的已知函数。

解　因为

$$J[cy]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)cy+q(x)cy']\mathrm{d}x = c\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y+q(x)y']\mathrm{d}x = cJ[y]$$

$$J[y_1+y_2]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)(y_1+y_2)+q(x)(y_1+y_2)']\mathrm{d}x=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y_1+q(x)y_1']\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y_2+q(x)y_2']\mathrm{d}x=$$

$$J[y_1]+J[y_2]$$

故 $J[y]$ 是线性泛函。

例 2.3.3 验证 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}f(x)yz\mathrm{d}x$ 是对称双线性泛函,其中 $f(x)$ 是 x 的已知函数。

解 因为

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}f(x)yz\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}f(x)zy\mathrm{d}x=J[z,y]$$

$$J[\alpha_1y_1+\alpha_2y_2,z]=\int_{x_0}^{x_1}f(x)(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)z\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x_1}f(x)\alpha_1y_1z\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_1}f(x)\alpha_2y_2z\mathrm{d}x=$$

$$\alpha_1\int_{x_0}^{x_1}f(x)y_1z\mathrm{d}x+\alpha_2\int_{x_0}^{x_1}f(x)y_2z\mathrm{d}x=\alpha_1J[y_1,z]+\alpha_2J[y_2,z]$$

$$J[y,\beta_1z_1+\beta_2z_2]=\int_{x_0}^{x_1}f(x)y(\beta_1z_1+\beta_2z_2)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}f(x)y\beta_1z_1\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_1}f(x)y\beta_2z_2\mathrm{d}x=$$

$$\beta_1\int_{x_0}^{x_1}f(x)yz_1\mathrm{d}x+\beta_2\int_{x_0}^{x_1}f(x)yz_2\mathrm{d}x=\beta_1J[y,z_1]+\beta_2J[y,z_2]$$

故 $J[y]$ 是对称双线性泛函。

例 2.3.4 设 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2)\mathrm{d}x$,试求 δJ。

解 $F=y^2+y'^2,F_y=2y,F_{y'}=2y'$,泛函的变分为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(2y\delta y+2y'\delta y')\mathrm{d}x=2\int_{x_0}^{x_1}(y\delta y+y'\delta y')\mathrm{d}x$$

例 2.3.5 设 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^3+y^2y'+y'^2)\mathrm{d}x$,试求 δJ。

解 $F=y^3+y^2y'+y'^2,F_y=3y^2+2yy',F_{y'}=y^2+2y'$,泛函的变分为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[(3y^2+2yy')\delta y+(y^2+2y')\delta y']\mathrm{d}x$$

例 2.3.6 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(xy^2+y'\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x$ 的变分。

解 $F=xy^2+y'\mathrm{e}^y,F_y=2xy+y'\mathrm{e}^y,F_{y'}=\mathrm{e}^y$,泛函的变分为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[(2xy+y'\mathrm{e}^y)\delta y+\mathrm{e}^y\delta y']\mathrm{d}x$$

设函数 $F=F(x,y,y')$ 关于 x,y,y' 连续,且有足够次可微性,计算 F 的增量

$$\Delta F=F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')=F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+\cdots \qquad (2-3-12)$$

则

$$\delta F = F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \tag{2-3-13}$$

称为函数 F 的变分。此时泛函的变分式(2-3-11)可写成

$$\delta J = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \delta F(x, y, y') \mathrm{d}x \tag{2-3-14}$$

式(2-3-14)表明,在 δF 是关于 δy 和 $\delta y'$ 的线性函数的条件下,变分符号 δ 和定积分符号 $\int_{x_0}^{x_1}$ 可以交换次序。在一定条件下,这种运算可以推广。例如,设泛函

$$J[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n') \mathrm{d}x \tag{2-3-15}$$

若 $F \in C^1, y_i \in C^1, y_i' \in C^1 (i = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \delta F \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n} F_{y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \delta y_i' \right) \mathrm{d}x \tag{2-3-16}$$

设 F、F_0、F_1 和 F_2 是 x、y、$y'\cdots$ 的可微函数,则变分记号 δ 有下列基本运算性质:

(1) $\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$

(2) $\delta(F_1 F_2) = F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1$

(3) $\delta(F^n) = nF^{n-1} \delta F$

(4) $\delta\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right) = \dfrac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2}$

(5) $\delta(F^{(n)}) = (\delta F)^{(n)} \qquad \left(F^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}x^n}\right)$

(6) $\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \delta F(x, y, y') \mathrm{d}x$

证 根据变分的定义及变分和求导可交换次序,有

$$\delta(F_1 + F_2) = \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial y'} \delta y' = \frac{\partial F_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F_2}{\partial y'} \delta y' =$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'} \delta y'\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y'} \delta y'\right) = \delta F_1 + \delta F_2$$

$$\delta(F_1 F_2) = \frac{\partial (F_1 F_2)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial (F_1 F_2)}{\partial y'} \delta y' = \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial y} + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \delta y + \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial y'} + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial y'}\right) \delta y' =$$

$$F_1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y'} \delta y'\right) + F_2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'} \delta y'\right) = F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1$$

$$\delta(F^n) = \frac{\partial (F^n)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial (F^n)}{\partial y'} \delta y' = nF^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + nF^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' =$$

$$nF^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'\right) = nF^{n-1} \delta F$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \delta y' = \frac{F_2 \dfrac{\partial F_1}{\partial y} - F_1 \dfrac{\partial F_2}{\partial y}}{F_2^2} \delta y + \frac{F_2 \dfrac{\partial F_1}{\partial y'} - F_1 \dfrac{\partial F_2}{\partial y'}}{F_2^2} \delta y' =$$

$$\frac{F_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial y'}\delta y'\right)-F_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial y'}\delta y'\right)}{F_2^2}=\frac{F_2\delta F_1-F_1\delta F_2}{F_2^2}$$

$$\delta(F^{(n)})=F^{(n)}-F_0^{(n)}=(F-F_0)^{(n)}=(\delta F)^{(n)}$$

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}F\mathrm{d}x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x_1}F\mathrm{d}x\right)\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\int_{x_0}^{x_1}F\mathrm{d}x\right)\delta y'=\left(\int_{x_0}^{x_1}F_y\mathrm{d}x\right)\delta y+\left(\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\mathrm{d}x\right)\delta y'=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\delta F\mathrm{d}x$$

证毕。

设 F、F_0、F_1 和 F_2 是 x、y、$y'\cdots$ 的可微函数，则全变分记号 Δ 有下列基本运算性质：

(1) $\Delta(F_1+F_2)=\Delta F_1+\Delta F_2$

(2) $\Delta(F_1F_2)=F_1\Delta F_2+F_2\Delta F_1$

(3) $\Delta(F^n)=nF^{n-1}\Delta F$

(4) $\Delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=\frac{F_2\Delta F_1-F_1\Delta F_2}{F_2^2}$

(5) $(\Delta F^{(n)})'=\Delta(F^{(n+1)})+F^{(n+1)}(\Delta x)'$

性质(5)表明微分与全变分的运算次序不能互换。

(6) $\Delta\int_{x_0}^{x_1}F\mathrm{d}x=\delta\int_{x_0}^{x_1}F\mathrm{d}x+(F\Delta x)\Big|_{x_0}^{x_1}=\int_{x_0}^{x_1}\left(\Delta F+F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta x\right)\mathrm{d}x$

性质(6)表明，当 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta x\neq 0$ 时，积分与全变分的运算次序也不能互换。

(7) $\mathrm{d}(\Delta x)=\Delta(\mathrm{d}x)$

性质7表明，对自变量而言，全变分和微分的运算次序具有交换性。

证 根据全变分的定义，有 $\Delta F=F'\Delta x+\delta F$，于是

$$\Delta(F_1+F_2)=(F_1+F_2)'\Delta x+\delta(F_1+F_2)=(F_1'+F_2')\Delta x+\delta(F_1+F_2)=$$

$$F_1'\Delta x+F_2'\Delta x+\delta F_1+\delta F_2=(F_1'\Delta x+\delta F_1)+(F_2'\Delta x+\delta F_2)=$$

$$\Delta F_1+\Delta F_2$$

$$\Delta(F_1F_2)=(F_1F_2)'\Delta x+\delta(F_1F_2)=(F_1'F_2+F_1F_2')\Delta x+F_1\delta F_2+F_2\delta F_1=$$

$$F_1(F_2'\Delta x+\delta F_2)+F_2(F_1'\Delta x+\delta F_1)=F_1\Delta F_2+F_2\Delta F_1$$

$$\Delta(F^n)=(F^n)'\Delta x+\delta(F^n)=nF^{n-1}F'\Delta x+nF^{n-1}\delta F=nF^{n-1}(F'\Delta x+\delta F)=nF^{n-1}\Delta F$$

$$\Delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)\Delta x+\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=\frac{F_2F_1'-F_1F_2'}{F_2^2}\Delta x+\frac{F_2\delta F_1-F_1\delta F_2}{F_2^2}=$$

$$\frac{F_2(F_1'\Delta x+\delta F_1)-F_1(F_2'\Delta x+\delta F_2)}{F_2^2}=\frac{F_2\Delta F_1-F_1\Delta F_2}{F_2^2}$$

根据全变分的定义，有 $\Delta(F^{(n)})=F^{(n+1)}\Delta x+\delta(F^{(n)})$ 将该式对 x 求导，得

$$(\Delta F^{(n)})'=[F^{(n+1)}\Delta x+\delta(F^{(n)})]'=F^{(n+2)}\Delta x+F^{(n+1)}(\Delta x)'+\delta(F^{(n+1)}) \tag{2-3-17}$$

再次根据全变分的定义，有

$$\Delta(F^{(n+1)})=F^{(n+2)}\Delta x+\delta(F^{(n+1)}) \tag{2-3-18}$$

将式(2-3-18)代入式(2-3-17),得

$$(\Delta F^{(n)})' = \Delta(F^{(n+1)}) + F^{(n+1)}(\Delta x)' \tag{2-3-19}$$

当 $n = 0$ 时,有

$$(\Delta F)' = \Delta(F') + F'(\Delta x)' \tag{2-3-20}$$

用定积分$\int_0^x F\mathrm{d}x$ 代替式(2-2-10)中的 y,则有

$$\Delta\int_0^x F\mathrm{d}x = \delta\int_0^x F\mathrm{d}x + F\Delta x \tag{2-3-21}$$

将式(2-3-21)中的积分上限 x 分别用x_1和x_0代替,可得到两个类似的关系式,然后将两式相减便得到下面的关系式

$$\Delta\int_{x_0}^{x_1} F\mathrm{d}x = \delta\int_{x_0}^{x_1} F\mathrm{d}x + (F\Delta x)\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{2-3-22}$$

又

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} F\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\delta F\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}(\Delta F - F'\Delta x)\mathrm{d}x \tag{2-3-23}$$

$$(F\Delta x)\Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}(F\Delta x) \tag{2-3-24}$$

将式(2-3-23)和式(2-3-24)代入式(2-3-22),得

$$\Delta\int_{x_0}^{x_1} F\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}(\Delta F - F'\Delta x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{d}F\Delta x) = \int_{x_0}^{x_1}[\Delta F - F(\Delta x)']\mathrm{d}x \tag{2-3-25}$$

证毕。

现在对泛函$J[y(x)]$引入一个新的泛函 $\Phi(\varepsilon) = J[y(x) + \varepsilon\delta y]$,其中 ε 为任意给定的小参数,有时它也用 α 来表示。这时式(2-3-1)可写成

$$\Phi(\varepsilon) = J[y + \varepsilon\delta y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\delta y, y' + \varepsilon\delta y')\mathrm{d}x \tag{2-3-26}$$

利用1.2节中的性质3,积分号下对 ε 求导,有

$$\Phi'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1}[F_y(x, y + \varepsilon\delta y, y' + \varepsilon\delta y')\delta y + F_{y'}(x, y + \varepsilon\delta y, y' + \varepsilon\delta y')\delta y']\mathrm{d}x \tag{2-3-27}$$

令 $\varepsilon = 0$,并注意到式(2-3-11),有

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1}[F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']\mathrm{d}x = \delta J[y(x)] = 0 \tag{2-3-28}$$

由此可引出泛函 $J[y(x)]$ 变分的另一个概念如下:

对于泛函$J[y(x)]$,可确定一个函数 $\Phi(\varepsilon)$,使得 $\Phi(\varepsilon) = J[y(x) + \varepsilon\delta y]$,如果它在 $\varepsilon = 0$ 处对 ε 的导数 $\Phi'(0) = \dfrac{\partial J[y(x) + \varepsilon\delta y]}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ 存在,则 $\Phi'(0)$ 称为**泛函** $J[y(x)]$ **在** $y = y(x)$ **处的变分**,

简称**变分**，并记作 δJ，即

$$\delta J = \Phi'(0) = \left.\frac{\partial J[y(x)+\varepsilon\delta y]}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{2-3-29}$$

这样定义的泛函变分，称为**拉格朗日定义的泛函变分**，它与前面定义的变分是等价的，且更便于计算泛函的变分。它的意义是，有时可用对函数的导数的研究来代替对泛函变分的研究。需要指出的是，在更广泛的类函数中，当 $\Phi'(0)$ 存在时，对应变分

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x$$

却不一定存在，这是因为从泛函的增量中去求出线性主要部分有时无法实现，可以构造泛函用例子来证实这一点。

现在解释一下参数 ε 的几何意义。设 $y_1(x) = y(x) + \delta y$ 是与 $y(x)$ 接近的曲线。引入参数 ε 后，得到曲线族 $y_1(x) = y(x) + \varepsilon\delta y$。当 ε 作微小变动时给出若干与曲线 $y(x)$ 接近的曲线。当 $\varepsilon = 0$ 时，得 $y_1(x) = y(x)$，当 $\varepsilon = 1$ 时，得 $y_1(x) = y(x) + \delta y$。与 $y(x)$ 接近的曲线 $y_1(x)$ 称为 $y(x)$ 的**邻(近)曲线、比较曲线或容许曲线**。

例 2.3.7 计算泛函 $J[y] = \int_0^1 \frac{1}{x}\sin y\mathrm{d}x$，其中 $y = \frac{k}{x}$，k 为任意实常数。

解 令 $x = \frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$，有

$$J[y] = \int_0^1 \frac{1}{x}\sin y\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\sin kt}{t}\mathrm{d}t$$

其积分值都存在，取 $y = \frac{1}{x}$，$\delta y = \frac{1}{nx}$，有

$$\Phi(\varepsilon) = J[y+\varepsilon\delta y] = \int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{n+\varepsilon}{nx}\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 2)$$

令 $\tau = \frac{n+\varepsilon}{nx}$，$\mathrm{d}\tau = -\frac{n+\varepsilon}{nx^2}\mathrm{d}x$，得

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{\frac{n+\varepsilon}{n}}^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{n+\varepsilon}{n}} \frac{\sin\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau$$

补充定义 $\left.\frac{\sin\tau}{\tau}\right|_{\tau=0} = 1$，则 $\frac{\sin\tau}{\tau}$ 在区间 $\left[0, 1+\frac{\varepsilon}{n}\right]$ 上连续，于是

$$\Phi'(\varepsilon) = -\frac{1}{n+\varepsilon}\sin\frac{n+\varepsilon}{n}, \Phi'(0) = -\frac{1}{n}\sin 1$$

但这时

$$\delta J = \int_0^1 (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{nx}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\cos t}{n}\mathrm{d}t$$

却不存在。

例 2.3.8 设泛函 $J[y] = y^2(x_0) + \int_{x_0}^{x_1}(xy + y'^2)\mathrm{d}x$，试求拉格朗日定义的泛函变分。

解 根据拉格朗日定义的泛函变分，有

$$J[y+\varepsilon\delta y]=[y(x_0)+\varepsilon\delta y(x_0)]^2+\int_{x_0}^{x_1}[x(y+\varepsilon\delta y)+(y'+\varepsilon\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

于是

$$\frac{\partial J[y+\varepsilon y]}{\partial\varepsilon}=2[y(x_0)+\varepsilon\delta y(x_0)]\delta y(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}[x\delta y+2(y'+\varepsilon\delta y')\delta y']\mathrm{d}x$$

故有

$$\delta J=\left.\frac{\partial J[y+\varepsilon y]}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=2y(x_0)\delta y(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}(x\delta y+2y'\delta y')\mathrm{d}x$$

定理 2.3.1 若泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 上达到极值，则在它在 $y=y(x)$ 上的变分 δJ 等于零。

证 对于 $y=y(x)$ 和任意固定的 δy，$J[y(x)+\varepsilon\delta y]=\Phi(\varepsilon)$ 是变量 ε 的函数，当 $\varepsilon=0$ 时，函数 $\Phi(\varepsilon)$ 取得极值，因此 $\Phi'(\varepsilon)=0$，但根据式(2－3－11)和式(2－3－28)，可知 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 上的变分 $\delta J=0$。证毕。

泛函 $J[y(x)]$ 的变分 $\delta J=0$ 称为泛函极值的**必要条件或驻值条件**，也称为泛函 $J[y(x)]$ 的**变分方程**。有时泛函 $J[y(x)]$ 的变分 $\delta J=0$ 也称为**变分原理**。

在一次变分表达式(2－3－11)中，积分号下是 δy 和 $\delta y'$ 的线性函数。用分部积分法，可将变分变为积分号下只是 δy 的线性函数，这样的变换称为**拉格朗日变换**；或者只是 $\delta y'$ 的线性函数，这样的变换称为**黎曼变换**。

拉格朗日变换如下：

对式(2－3－11)积分号下的第二项用分部积分，得

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'\mathrm{d}x=F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x \tag{2-3-30}$$

如果在点 x_0 和 x_1 上取变分等于零，那么

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'\mathrm{d}x=-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x \tag{2-3-31}$$

故有

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{2-3-32}$$

注意，上面在变分的定义中曾假定函数 $y=y(x)$ 可微，而并未假定 y' 也可微，因此拉格朗日变换是不合法的。

为了消除 y'' 存在的附加假设，黎曼提出另外一个变分变换，就是用记号

$$\int_{x_0}^{x_1}F_y\mathrm{d}x=N(x) \tag{2-3-33}$$

表示，那么有

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\delta y+F_{y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{2-3-34}$$

再用分部积分，有

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\delta y\mathrm{d}x=N\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}N\delta y'\mathrm{d}x \tag{2-3-35}$$

令 δy 在点 x_0 和 x_1 上取变分等于零，得

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_{y'} - N)\delta y' \mathrm{d}x \tag{2-3-36}$$

黎曼变换不要求函数 y'' 存在这个附加条件。

2.4 最简泛函的欧拉方程

定理 2.4.1 使最简泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{2-4-1}$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \tag{2-4-2}$$

的极值曲线 $y = y(x)$ 应满足必要条件

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \tag{2-4-3}$$

的解，式中 F 是 x, y, y' 的已知函数并有二阶连续偏导数。

注意式(2-4-3)等号左边第二项是对自变量 x 的全导数。

式(2-4-3)称为泛函(2-4-1)的**欧拉方程**，是瑞士数学家欧拉在1736年(另有1741年或1744年之说)得到的。不过，当时欧拉的证明有些繁琐，他是用折线逼近曲线的方法导出欧拉方程的。后来法国数学家拉格朗日以十分简洁的方式改进了欧拉的证明，并于1755年把他的证明告诉了欧拉。故式(2-4-3)也称为**欧拉—拉格朗日方程**。至此，变分法形成了数学分析的新分支。欧拉方程是泛函定义域内部的变分条件。

欧拉方程还可以写成

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \tag{2-4-4}$$

本定理的重要作用在于，它把求泛函式(2-4-1)的极值问题转化为求解欧拉方程(2-4-3)在满足边界条件(2-4-2)下的定解问题。注意，常见有人说欧拉方程就是微分方程，这只是一种习惯的说法，其实，这样的说法是不严谨的，因为当被积函数 F 中不含 y' 时，欧拉方程就不是微分方程，即使 F 中含有 y'，欧拉方程也不都是微分方程。后面将会看到欧拉方程不是微分方程的例子。

欧拉方程中出现的量 $[F]_y = F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}$ 称为 F 关于 y 的**变分导(函)数**。

证 因泛函 $J[y(x)]$ 在 $y = y(x)$ 达到极值，故有

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

由固定边界条件可知

$$\delta y(x_0) = 0,\ \delta y(x_1) = 0 \tag{2}$$

即在最简泛函变分中，全部容许曲线都要通过固定的边界点，而固定边界点是常数，其变分为零。

对式(1)右边第二项进行分部积分，利用式(2-2-9)，得

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y' \mathrm{d}x = F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x \tag{3}$$

将式(3)代入式(1),得

$$\delta J = F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x = 0 \tag{2-4-5}$$

由式(2)可知 $\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} = 0$,故得

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x = 0$$

由于 δy 的任意性并由变分法基本引理 1.5.2 可知,必有

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$$

此即欧拉方程(2-4-3),证毕。

如果欧拉方程中的 $F_{y'y'} \neq 0$,则式(2-4-4)是一个二阶常微分方程,所讨论的变分问题归结为解如下的微分方程边值问题

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases} \tag{2-4-6}$$

其通解含有两个任意常数

$$y = y(x, c_1, c_2) \tag{2-4-7}$$

它的图形称为欧拉方程的**积分曲线**,也称为泛函(2-3-14)**极值曲线族**或**极值曲线簇**,其中两个任意常数可由边界条件来确定。

定理 2.4.1 也可叙述为:若有一条给出极值的曲线 $y = y(x)$ 存在,则它一定属于含两个参变数的曲线族(2-4-7)。

在极值曲线 $y = y(x)$ 上,使 $F_{y'y'} \neq 0$ 的点称为**正则点**或**正规点**。此时,所研究的问题称为**正则问题**。

有时,当函数 $y = y(x)$ 满足方程(2-4-3)时,泛函式(2-4-1)在 $y = y(x)$ 处也不一定取得极值,这是因为欧拉方程只是使泛函式(2-4-1)取得极值的必要条件,而非充分条件。但至少处于平稳状态。在此意义下,满足欧拉方程的解的函数称为**平稳函数**或**逗留函数**,并且每个欧拉方程的解所表示的图形称为**平稳曲线、逗留曲线**或**极值曲线**。只有在极值曲线上,泛函(2-4-1)才有可能达到极值。泛函在平稳函数时取的值称为**平稳值**或**驻值**。由于欧拉方程只是泛函(2-4-1)取得极值的必要条件,而非充分条件,故要确定所求得的极值是极大值还是极小值,还需用极值的充分条件来加以判定,这个问题将在第 3 章讨论。

例 2.4.1 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y' + x^2y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$;再求出 $y(1) = 1, y(2) = 2$ 时泛函的值。

解 $F = y' + x^2y'^2$,欧拉方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + 2x^2y') = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + 2x^2y') = 4xy' + 2x^2y'' = 0$$

从上式约去 $2x$,得

$$xy'' + 2y' = 0$$

将上式积分,得

$$\int \frac{y''}{y'}dx + \int \frac{2}{x}dx = 0$$

或

$$\ln y' + \ln x^2 = \ln c_1$$

再积分,得

$$y = -\frac{c_1}{x} + c_2$$

这就是所给泛函的极值曲线族。可见,一般情况下应有 $x \neq 0$。利用边界条件 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$,可解出 $c_1 = -\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0x_1, c_2 = \frac{y_1x_1 - y_0x_0}{x_1 - x_0}$。将这两个积分常数代入 y 的表达式,得

$$y = -\frac{y_1 - y_0}{x(x_1 - x_0)}x_0x_1 + \frac{y_1x_1 - y_0x_0}{x_1 - x_0}$$

由边界条件 $y(1) = 1, y(2) = 2$,可得 $c_1 = -2, c_2 = 3$,于是

$$y = -\frac{2}{x} + 3, y' = \frac{2}{x^2}$$

将其代入原泛函并积分,得

$$J[y] = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} + x^2\frac{4}{x^4}\right)dx = \int_1^2 \frac{6}{x^2}dx = 3$$

例 2.4.2 求泛函 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2 - y^2)dx$ 的极值曲线。边界条件为 $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$。

解 $F = y'^2 - y^2$,欧拉方程为

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = -2y - 2y'' = 0$$

即 $y'' + y = 0$,其通解是 $y = c_1\cos x + c_2\sin x$。利用边界条件可得 $c_1 = 0, c_2 = 1$。故极值曲线是 $y = \sin x$。

例 2.4.3 求泛函 $J[y] = \int_0^{2\pi}(y'^2 - y^2)dx$ 的极值曲线。边界条件为 $y(0) = 1, y(2\pi) = 1$。

解 由例 2.4.2 可知,其通解是 $y = c_1\cos x + c_2\sin x$。利用边界条件可得 $c_1 = 1, c_2 = c$,其中 c 是任意常数,极值曲线是 $y = \cos x + c\sin x$,于是该泛函的变分问题有无穷多个解。

由例 2.4.2 和例 2.4.3 可以看出,泛函的极值曲线不仅与被积函数有关,还与积分区间以及边界条件有关。

例 2.4.4 求泛函 $J[y] = \int_1^2(y'^2 - 2xy)dx$ 的极值曲线。边界条件为 $y(1) = 0, y(2) = -1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$y'' + x = 0$$

积分两次,得

$$y = -\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

由边界条件 $y(1) = 0, y(2) = -1$，可解出 $c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = 0$，于是极值曲线为

$$y = \frac{x}{6}(1 - x^2)$$

例 2.4.5　火箭飞行问题。设一质量为 m 的火箭作水平飞行，用 $s(t)$ 表示飞行距离，其升力 L 与重力 mg（g 为重力加速度）相平衡，空气阻力 R 与火箭飞行速度 $v = \frac{ds}{dt}$ 及升力 L 有以下关系

$$R = av^2 + b_0 L^2 \tag{1}$$

式中 $a > 0$、$b_0 > 0$ 为常数。试求火箭飞行的最大距离。

解　因升力与重力平衡，故式(1) 可改写成

$$R = av^2 + b_0 g^2 m^2 = av^2 + bm^2 \tag{2}$$

式中 $b = b_0 g^2$ 为常数。

火箭飞行时的推力为

$$T = -c\frac{dm}{dt} \tag{3}$$

式中 $c > 0$ 为常数。火箭飞行时，随着推进剂的燃烧，其质量是在不断减少的，推进剂的燃速 $dm/dt < 0$，故式(3) 等号右边应有一负号。

由牛顿第二定律可知，火箭的运动方程为

$$m\frac{dv}{dt} = T - R = -c\frac{dm}{dt} - R \tag{4}$$

将上式两端同乘以 dt，并注意到 $v = ds/dt$，可得

$$mdv = -cdm - R\frac{ds}{v} \tag{5}$$

将阻力 R 的表达式代入式(5)，经整理得

$$ds = -\frac{v}{av^2 + bm^2}(c + mv')dm \tag{6}$$

式中 $v' = dv/dm$。于是，从时刻 $t = 0$ 到 $t = t_1$，火箭的飞行距离为下列泛函

$$J[v(m)] = s(t_1) - s(0) = \int_{m_1}^{m_0} \frac{v}{av^2 + bm^2}(c + mv')dm \tag{7}$$

令 $F = \frac{v}{av^2 + bm^2}(c + mv')$，则欧拉方程为

$$F_v - \frac{d}{dm}F_{v'} = \frac{(-av^2 + bm^2)(c + v)}{(av^2 + bm^2)^2} = 0 \tag{8}$$

求解式(8)，得

$$v = -c \tag{9}$$

因 $c > 0$，得 $v < 0$，此解不合理，舍去。还有两个解是

$$v = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}m \tag{10}$$

显然,式(10)的解应取正号。于是容易求出其导数为

$$v' = \sqrt{\frac{b}{a}} \tag{11}$$

将式(10)和式(11)代入式(7),得

$$J[v(m)] = \int_{m_1}^{m_0}\left(\frac{c}{2\sqrt{abm}} + \frac{1}{2a}\right)\mathrm{d}m = \frac{c}{2g\sqrt{ab_0}}\ln\frac{m_0}{m_1} + \frac{m_0 - m_1}{2a} \tag{12}$$

式(12)就是火箭飞行的最大距离。

例 2.4.6 证明欧拉方程(2-4-4)具有下列形式

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'F_{y'}) = 0 \tag{1}$$

证

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = F_x + F_y y' + F_{y'}y'' \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'F_{y'}) = y''F_{y'} + y'(F_{xy'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y'') \tag{3}$$

两式相减,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'F_{y'}) = F_x - y'(F_{xy'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y'' - F_y) \tag{4}$$

但由式(2-4-4)可知,式(4)等号右边的括号内各项的代数和等于零,故式(1)成立。证毕。

例 2.4.7 求圆锥面上的短程线方程。顶角为2φ的圆锥面上有两个任意给定的端点A与B,其中φ为圆锥母线与z轴的夹角。

解 取球坐标(r,θ,φ)。因φ = 常数,故弧微分为

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\sin\varphi\mathrm{d}\theta)^2$$

A、B两点间的弧长为泛函

$$A = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_{\theta_A}^{\theta_B}\sqrt{r'^2 + (r\sin\varphi)^2}\mathrm{d}\theta$$

泛函的欧拉方程为

$$\frac{r\sin^2\varphi}{\sqrt{r'^2 + (r\sin\varphi)^2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{r'}{\sqrt{r'^2 + (r\sin\varphi)^2}} = 0$$

运算后得

$$\frac{r^3\sin^4\varphi - r''(r\sin\varphi)^2 + 2rr'^2\sin^2\varphi}{[r'^2 + (r\sin\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

显然上式的分母不为零,r也不为零,故欧拉方程可化成

$$2r'^2 + (r\sin\varphi)^2 - r''r = 0$$

令$u = \frac{1}{r}$,$\psi = \theta\sin\varphi$,则有$\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$,$\mathrm{d}\psi = \sin\varphi\mathrm{d}\theta$,于是

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\psi} = -\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{r'}{r^2\sin\varphi}$$

$$r' = \frac{u'\sin\varphi}{u^2}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\psi^2} = \frac{du'}{d\psi} = -\frac{r^2r''d\theta - r'2rr'd\theta}{r^4\sin\varphi}\frac{1}{\sin\varphi d\theta} = -\frac{rr'' - 2r'^2}{r^3\sin^2\varphi}$$

$$rr'' = -\frac{u''\sin^2\varphi}{u^3} + 2\frac{u'^2\sin^2\varphi}{u^4}$$

将 r' 和 rr'' 表达式代入欧拉方程,得

$$u'' + u = 0$$

其解为

$$u = c_1\cos\psi + c_2\sin\psi$$

或

$$\frac{1}{r} = c_1\cos(\theta\sin\varphi) + c_2\sin(\theta\sin\varphi)$$

这就是所要求的在圆锥曲面上的短程线方程。其中积分常数 c_1 和 c_2 通过 A、B 两端点位置确定。如果把 r 和 ψ 看成极坐标,则这条短程线就是这个坐标系中的一条直线。

例 2.4.8　最优价格策略问题。某生产厂家要在一定时期内将某种商品的价格 $p(t)$ 由原来的 $p(t_0) = p_0$ 调整到 $p(t_1) = p_1$,已知单位时间的销售量 s 与价格 $p(t)$ 和价格的变化率 $p'(t)$ 有关。设由统计方法得出

$$s = -p + mp' + n$$

每周生产 s 件产品的生产费用

$$C = as^2 + bs + c$$

求价格函数 $p(t)$,使全年的总利润

$$J[p] = \int_{t_0}^{t_1}(sp - C)dt = \int_{t_0}^{t_1}[-(1+a)p^2 + (2an + b + n)p - am^2p'^2 +$$

$$(2am + m)pp' - (2amn + bm)p' - (an^2 + bn + c)]dt$$

达到最大。其中 a、b、c、m 和 n 为常数且都大于零。

解　泛函的欧拉方程为

$$-2(1+a)p + 2am^2p'' + (2an + b + n) = 0$$

或

$$2am^2p'' - 2(1+a)p = -(2an + b + n)$$

微分方程的特征方程为

$$am^2r^2 - (1+a) = 0$$

可解得

$$r = \pm\frac{1}{m}\sqrt{\frac{1+a}{a}}$$

设方程的特解是 $Y = A$,将其代入微分方程,可解得

$$A = \frac{2an + b + n}{2(1+a)}$$

于是,方程的通解为

$$p(t) = c_1 e^{\frac{1}{m}\sqrt{\frac{1+a}{a}}t} + c_2 e^{-\frac{1}{m}\sqrt{\frac{1+a}{a}}t} + \frac{2an + b + n}{2(1+a)}$$

式中积分常数 c_1 和 c_2 由边界条件确定。事实上价格不可能连续不断地随时间变化,只能隔一段时间才能变化一次,但本题得到的解对制定价格时有参考作用。

2.5 欧拉方程的几种特殊类型及其积分

由于欧拉方程(2-4-4)中 F 的各偏导数 F_y、$F_{y'y'}$、$F_{y'y}$ 及 $F_{y'x}$ 可能含有 x、y 和 y',在一般情况下,它不是一个线性微分方程,所以这种方程常常不能简单地解出,但当 F 不显含 x、y 和 y' 中的一个或两个时,问题有可能得到简化。本节就泛函(2-4-1)的被积函数 $F(x,y,y')$ 的几种特殊形式来进行讨论。

1. F 不依赖 y' 或仅依赖 y,即 $F = F(x,y)$ 或 $F = F(y)$

这时,$F_{y'} \equiv 0$,所以欧拉方程 $F_y(x,y) = 0$ 或 $F_y(y) = 0$,这是一个函数方程,其解不含任意常数。这个函数方程的解不满足边界条件:$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$,变分问题无解。只有在极个别情况下,如 $F_y(x,y) = 0$ 或 $F_y(y) = 0$ 的解通过 (x_0,y_0) 与 (x_1,y_1) 时,才能成为极值曲线。

例 2.5.1 已知泛函 $J[y] = \pi\int_{x_0}^{x_1} y^2 \mathrm{d}x, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$,求泛函 $J[y]$ 的极值。

解 泛函的欧拉方程为 $2y = 0$ 或 $y = 0$,当且仅当 $y_0 = y_1 = 0$ 时,$y = 0$ 才能使 $J[y]$ 的值为极小值。否则泛函 $J[y(x)]$ 的极小值不能在连续函数类中达到。

例 2.5.2 已知泛函 $J[y] = \int_0^{\pi} y(2x - y)\mathrm{d}x, y(0) = 0, y(\pi) = \pi$,求泛函的极值曲线。

解 泛函的欧拉方程为 $2x - 2y = 0$,即 $y = x$。由于边界条件得到满足,所以在直线 $y = x$ 上,泛函可取得极值。对于另外的边界条件,例如 $y(0) = 0, y(\pi) = 1$,直线 $y = x$ 不通过给定的边界点 $(0,0)$ 和 $(\pi,1)$,变分问题无解。

2. F 线性地依赖 y',即 $F(x,y,y') = M(x,y) + N(x,y)y'$

这时的欧拉方程为

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}N = 0$$

将其展开,得

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}y' = 0$$

整理,得

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

从上式解出的 $y = y(x)$,仍然是函数方程,它不一定满足边界条件。所以这里所讨论的变分问题的解通常不属于连续函数类。

若 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$,则表达式 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$ 是全微分。此时积分 $\int_{x_0}^{x_1}(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)$ 与积分路径无关,因而泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left(M+N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

的值不依赖于曲线 $y=y(x)$ 的选择，即泛函在容许曲线上为一定值，变分问题失去意义。

例 2.5.3 试求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(xy^2+x^2yy')\mathrm{d}x, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 的极值曲线。

解 由于$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy=\frac{\partial N}{\partial x}$，即$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$，因此，被积函数式是个全微分。而积分

$$J[y]=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}(x^2y^2)=\frac{1}{2}(x_1^2y_1^2-x_0^2y_0^2)$$

与积分路径无关，仅依赖于边界条件。变分问题没有意义。

例 2.5.4 试讨论泛函 $J[y]=\int_0^1(y^2+x^2y')\mathrm{d}x, y(0)=0, y(1)=a$ 的极值曲线是否存在。

解 由于$\frac{\partial M}{\partial y}=y, \frac{\partial N}{\partial x}=x$，且欧拉方程为$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$，即 $y-x=0$。这条极值曲线满足第一个边界条件 $y(0)=0$，而第二个边界条件只有在 $a=1$ 时才满足，如果 $a\neq 1$，则满足边界条件的极值曲线不存在。

例 2.5.5 试讨论泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(ax+by+cxy')\mathrm{d}x$ 是否有意义。

解 由于$\frac{\partial M}{\partial y}=b, \frac{\partial N}{\partial x}=c$，且欧拉方程为$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$，即 $b-c=0$，除非 $b=c$，否则泛函或欧拉方程就是不合理的。即使 $b=c$，也无法求得 y 对 x 的函数关系，这样的泛函无法求解。

一般情况下，若泛函的被积函数是未知函数的导数的线性组合，则相应的欧拉方程不是微分方程，其解无意义。

3. F 不依赖 y，即 $F=F(x,y')$

此时欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y')=0$$

将上式积分，得 $F_{y'}(x,y')=c_1$，由此可解出 $y'=\varphi(x,c_1)$，再次积分得到可能是极值的极值曲线族

$$y=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,c_1)\mathrm{d}x$$

例 2.5.6 在半径为 r 的球面上连接两定点的所有曲线中，求出长度最短的曲线。

解 取球坐标系，考察中心在原点，半径为 r 的球面，有

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi \tag{1}$$

设 $\theta=\theta(\varphi)$，代入上式，得到球面上以 φ 为参数的曲线方程，由弧微分 $\mathrm{d}s$ 的关系式，得

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2=(r\mathrm{d}\varphi)^2+(r\sin\varphi\mathrm{d}\theta)^2 \tag{2}$$

弧长的微元长度为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(r\mathrm{d}\varphi)^2+(r\sin\varphi\mathrm{d}\theta)^2}=r\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{3}$$

球面上，起点为$(r,\theta_0,\varphi(\theta_0))$，终点为$(r,\theta_1,\varphi(\theta_1))$ 的两点间的弧长为下列泛函

$$J[\theta]=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\mathrm{d}s=r\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{4}$$

此时，$F=\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}$ 不含 θ，泛函的欧拉方程化为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}F_{\theta'}=0$，即欧拉方程的首次积分为

$$\frac{\theta'\sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}}=c_1 \tag{5}$$

由式(5)解出 θ' 并改写成微分形式，有

$$\mathrm{d}\theta=\frac{c_1\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-c_1^2}} \tag{6}$$

令 $\eta=\cot\varphi$，则有 $\mathrm{d}\varphi=-\sin^2\varphi\mathrm{d}\eta=-\frac{1}{1+\eta^2}\mathrm{d}\eta$，代入式(6)，得

$$\mathrm{d}\theta=\frac{-\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\frac{1}{c_1^2}-1-\eta^2}} \tag{7}$$

令 $\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c_1^2}-1$，代入式(7)并积分，得

$$\theta=\arccos(c\eta)+\theta_0=\arccos(c\cot\varphi)+\theta_0 \tag{8}$$

或

$$\sin\varphi\cos(\theta-\theta_0)=c\cos\varphi \tag{9}$$

式中 θ_0 是积分常数。利用三角公式的和角公式，有

$$\cos(\theta-\theta_0)=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0 \tag{10}$$

将式(1)和式(10)代入式(9)，得

$$x\cos\theta_0+y\sin\theta_0-cz=0 \tag{11}$$

这是一个过原点的平面方程。球面被过球心的平面所截得的圆称为**大圆**。大于半圆的弧称为**优弧**，小于半圆的弧称为**劣弧**。此题表明球面上连接两定点长度最短的曲线是过这两点的大圆上的劣弧。注意到 $\cos\theta_0$ 是偶函数，$\sin\theta_0$ 是奇函数，若把式(11)中的 θ_0 换成 $-\theta_0$，则有

$$x\cos\theta_0-y\sin\theta_0-cz=0 \tag{12}$$

例 2.5.7 试求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x-x_c}\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中 x_c 为常数。

解 因 $F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x-x_c}$ 中不含 y，故欧拉方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{(x-x_c)\sqrt{1+y'^2}}=0$$

首次积分为

$$\frac{y'}{(x-x_c)\sqrt{1+y'^2}}=c$$

为便于积分，令 $y'=\tan t$，则有

$$x-x_c=\frac{y'}{c\sqrt{1+y'^2}}=\frac{\sin t}{c}=c_1\sin t$$

此时 $dy = \tan t dx = c_1 \sin t dt$，积分得 $y = -c_1 \cos t + c_2$。于是 $x - x_c = c_1 \sin t$，$y - c_2 = -c_2 \cos t$。方程两端平方后相加得

$$(x - x_c)^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2$$

这是中心在点 (x_c, c_2) 上的一族圆。

例 2.5.8 试求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x(1 + y'^2)} dx$ 的极值曲线。

解 因 $F = \sqrt{x(1 + y'^2)}$ 中不含 y，故欧拉方程的首次积分为

$$\sqrt{\frac{x}{1 + y'^2}} y' = c_1$$

因 $\frac{y'^2}{1 + y'^2} \leqslant 1$，故 $c_1^2 \leqslant x$。将上式两端平方并解出 y'，得

$$y' = \frac{c_1}{\sqrt{x - c_1^2}}$$

积分得

$$y = 2c_1 \sqrt{x - c_1^2} + c_2$$

4. F 只依赖于 y'，即 $F = F(y')$

这时 $F_y = 0$，$F_{xy'} = 0$ 及 $F_{yy'} = 0$，欧拉方程为 $F_{y'y'} y'' = 0$。这个方程可分为两个方程，$F_{y'y'} = 0$ 和 $y'' = 0$。如果 $y'' = 0$，则得到含有两个参数的直线方程 $y = c_1 x + c_2$。如果 $F_{y'y'} = 0$ 有一个或几个实根 $y' = k_i$，则 $y = k_i x + c$ 是一个包含在上面的两个参数直线族中的单参数直线族。如果 $F_{y'y'} = 0$ 还有复根 $y' = a + bi$，则 $y = (a + bi)x + c$ 不可能是极值曲线，这是因为所讨论的问题都是在实变量范围内进行的缘故。总之，在 $F = F(y')$ 情况下，极值曲线必然是直线族。

例 2.5.9 试求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$，$y(x_0) = y_0$，$y(x_1) = y_1$ 的极值曲线，并求 $y(0) = 0$，$y(1) = 1$ 时的极值曲线。

解 $F = \sqrt{1 + y'^2}$ 仅依赖于 y'，可得极值曲线为直线 $y = c_1 x + c_2$。利用边界条件确定两积分常数 c_1 和 c_2

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, c_2 = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}$$

将两积分常数代入直线方程，可得

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}$$

或

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

于是，有一条通过边界点的直线是极值曲线。此解表明，在连接已给定两点的所有平面曲线中，以直线为最短。当 $y(0) = 0$，$y(1) = 1$ 时，可得极值曲线为 $y = x$。

5. F 仅依赖于 y 和 y'，即 $F = F(y, y')$

这时有 $F_{xy'} = 0$，欧拉方程为

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

注意到 F 不依赖于 x，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'F_{y'}) = F_y y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} =$$

$$y'\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right) = y'(F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'') = 0$$

首次积分为

$$F - y'F_{y'} = c_1$$

由此解出 $y' = \varphi(y, c_1)$，积分后可得极值曲线族

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, c_1)} + c_2$$

例 2.5.10　捷线问题。求泛函

$$J[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

且满足边界条件 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$ 的极值曲线。

解　因为 $F = \sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{2gy}}$ 不含 x，所以欧拉方程首次积分为

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} = c_1 \tag{2}$$

令 $c = \dfrac{1}{2gc_1^2}$，将上式化简，得

$$y(1 + y'^2) = c \tag{3}$$

令 $y' = \cot\theta$，则方程化为

$$y = \frac{c}{1 + y'^2} = c\sin^2\theta = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\theta) \tag{4}$$

又因

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{c\sin 2\theta \mathrm{d}\theta}{\cot\theta} = \frac{c\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\cot\theta} = c(1 - \cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

积分，得

$$x = \frac{c}{2}(2\theta - \sin 2\theta) + c_2 \tag{6}$$

由边界条件 $y(0) = 0$，得 $c_2 = 0$。令 $t = 2\theta, a = \dfrac{c}{2}$，则得到捷线问题的解为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \tag{7}$$

方程(7)是**旋轮线**的参数方程，见图 2 - 5 - 1，其中 c 由边界条件 $y(x_1) = y_1$ 来确定。因此捷线

是半径为 a 的圆沿 x 轴滚动时圆周上的某点所描出的轨迹中的一段。将式(7)代入式(1),并令 $x_1 = 2\pi a$,可得悬轮线的周期为

$$J = 2\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)^2}{1-\cos t}}(1-\cos t)\mathrm{d}t =$$

$$2\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}{1-\cos t}}\mathrm{d}t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{8}$$

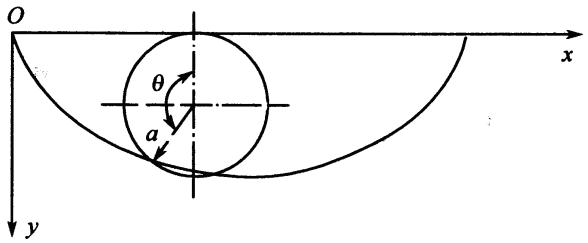


图 2-5-1　旋轮线

旋轮线就是惠更斯于 1673 年所研究的**摆线**。由于钟表摆锤作一次完全摆动所用的时间相等,因此摆线又称**等时曲线**。

现在把摆线的始点放在一般位置,即设左端点坐标为 $A(x_0,y_0)$,右端点坐标为 $B\left(\frac{\pi\gamma^2}{2},\gamma^2\right)$,此时泛函(1)可写成

$$T = J = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{y_0}^{\gamma^2}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{y-y_0}} = \frac{\gamma}{\sqrt{2g}}\int_{y_0}^{\gamma^2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\gamma^2-y}\sqrt{y-y_0}} =$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha-\beta}} = \frac{\gamma}{\sqrt{2g}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\varphi}\sqrt{1-\varphi}} = \frac{\gamma}{\sqrt{2g}}2\arcsin\sqrt{\varphi}\Big|_0^1 = \frac{\gamma\pi}{\sqrt{2g}} \tag{9}$$

由式(9)可见,质点沿摆线降落所需的时间与始点位置无关,这表明摆线确实是等时曲线。当 $x = \frac{\pi\gamma^2}{2} = \pi a$ 时,有 $y = \gamma^2 = 2a$,代入式(9),由此可得摆线运动周期为

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{10}$$

与式(8)的结果相同。

历史上,旋轮线曾被比做几何学中的海伦(Helen)。据希腊神话传说,海伦是众神之王宙斯(Zeus)和女神勒达(Leda)所生的女儿,古希腊史诗中最为驰名的女主人公,以美丽非凡著称于世。她是斯巴达王(the King of Sparta)墨涅拉俄斯(Menelaus)之妻,后被特洛伊(Troy)王子帕里斯(Paris)劫走,带至特洛伊。为了夺回这位绝代佳人,古希腊英雄与特洛伊人进行了一场绵延 10 年之久的特洛伊战争(Trojan War)。古希腊叙事诗人荷马(Homer,约公元前 850—前 8 世纪)所作的古希腊史诗《伊利亚特》又译《伊利昂记》(Iliad)主要就是叙述特洛伊战争最后一年的故事。马克思曾称这部史诗为"一种规范和高不可及的范本",具有"永久的魅力"。

例 2.5.11　最小旋转面问题。如图 2-5-2 所示,在端点 $A(x_0,y_0)$ 及 $B(x_1,y_1)$ 的所有曲线中,求出一条曲线使它围绕 Ox 轴旋转时,所得的曲面具有最小面积。

解　旋转面的表面积为

$$S[y] \doteq 2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

因 $F = y\sqrt{1+y'^2}$ 不含 x，故欧拉方程有首次积分

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1+y'^2} - y'y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

化简，得

$$y = c_1\sqrt{1+y'^2}$$

令 $y' = \sinh t$，代入上式，得

$$y = c_1\sqrt{1+\sinh^2 t} = c_1\cosh t$$

由于

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{c_1\sinh t\,\mathrm{d}t}{\sinh t} = c_1\mathrm{d}t$$

积分，得

$$x = c_1 t + c_2$$

消去 t，得

$$y = c_1\cosh\frac{x-c_2}{c_1}$$

这是**悬链线方程**。根据问题的实际意义，具有最小面积的旋转曲面是存在的。故**悬链面**即为所求。其中 c_1 和 c_2 可由端点 $A(x_0,y_0)$ 及 $B(x_1,y_1)$ 来确定。

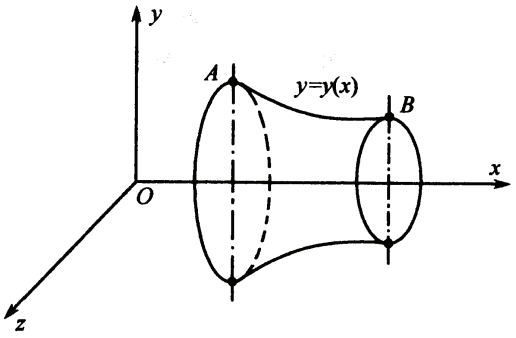


图 2－5－2　最小旋转面

例 2.5.12　气体流动的最小阻力问题。旋转体以速度 u 穿过稀薄气体在大气层外运动。要求设计旋转体的表面形状，使其具有最小阻力。假设气体分子与旋转体表面接触时无摩擦。

解　如图 2－5－3 所示，可以把旋转体看作静止，气体以速度 u 向 x 轴方向流动。由气流速度引起的压强在旋转体表面法向方向的分量为

$$p = 2\rho u^2\sin^2\theta \tag{1}$$

式中 ρ 为气体的密度，θ 为气流速度与旋转体表面切向方向的夹角。在弧长为 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$，半径为 y 的环面上沿 x 轴方向的压力分量即阻力为

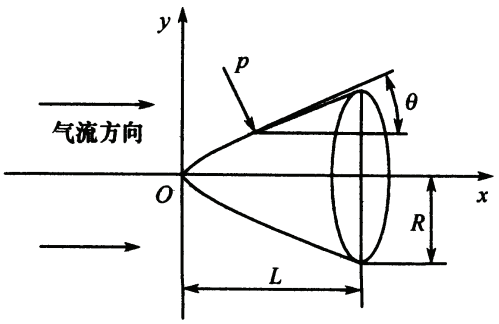


图 2－5－3　旋转体气流阻力图

$$\mathrm{d}F = 2\rho u^2\sin^2\theta\times 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\sin\theta\mathrm{d}x \tag{2}$$

假设 y' 较小，且

$$\sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \approx y' \tag{3}$$

于是作用在旋转体表面 x 方向的全部阻力是泛函

$$J[y] = \int_F \mathrm{d}F = 4\pi\rho u^2\int_0^L yy'^3\mathrm{d}x \tag{4}$$

边界条件为 $y(0)=0, y(L)=R$。因泛函的被积函数不含 x，故欧拉方程的首次积分为

$$yy'^3 - y'(3yy'^2) = -2c^3 \tag{5}$$

或

$$\sqrt[3]{y}\mathrm{d}y = c\mathrm{d}x \tag{6}$$

将式(6) 积分并解出 y，得

$$y = (c_1 x + c_2)^{\frac{3}{4}} \tag{7}$$

利用边界条件 $y(0) = 0, y(L) = R$，可得 $c_2 = 0, c_1 = \frac{R^{\frac{4}{3}}}{L}$，于是极值曲线为

$$y = R\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{3}{4}} \tag{8}$$

即流体所受阻力最小的边缘轮廓线应是四分之三次抛物线。

对于欧拉方程的特殊类型的积分问题，既可根据本节所列的公式求解，也可直接根据欧拉方程求解，应视求解问题的方便而定。

2.6 依赖于多个一元函数的变分问题

本节着重讨论含有两个未知函数的泛函取极值的必要条件。对于含有多个未知函数的情况可以类推。

定理 2.6.1 使泛函

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\mathrm{d}x \tag{2-6-1}$$

取得极值且满足固定边界条件

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1 \tag{2-6-2}$$

的极值曲线 $y = y(x), z = z(x)$ 必满足欧拉方程组

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0 \end{cases} \tag{2-6-3}$$

证 当曲线 $y(x)$ 和 $z(x)$ 变到 $y + \delta y、z + \delta z$ 时，相应的泛函的变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'}\delta y' + F_z \delta z + F_{z'}\delta z')\mathrm{d}x \tag{2-6-4}$$

将上式右边积分中的第二项和第四项分别进行分部积分，可得

$$\delta J = (F_{y'}\delta y + F_{z'}\delta z)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)\delta z\mathrm{d}\,x$$

根据泛函取得极值的必要条件 $\delta J = 0$ 及 $\delta y、\delta z$ 在 $x = x_0、x = x_1$ 处等于零，得

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)\delta z\mathrm{d}\,x = 0$$

又由于 $\delta y、\delta z$ 在区间 (x_0, x_1) 内的任意性，根据变分法基本引理 1.5.2 可知，必有

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0 \end{cases}$$

证毕。

推论 对于含有 n 个未知函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$，使泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \tag{2-6-5}$$

取得极值且满足边界条件

$$y_i(x_0)=y_{i0},y_i(x_1)=y_{i1}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{2-6-6}$$

的极值曲线 $y_i=y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 必满足欧拉方程组

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}=0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{2-6-7}$$

一般来说,方程组(2-6-7)可确定一族含有 $2n$ 个参数的积分曲线,它们可由边界条件确定。该积分曲线族就是这个变分问题的极值曲线族。

例 2.6.1 求泛函

$$J[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2yz+y'^2+z'^2)\mathrm{d}x$$

满足边界条件 $y(0)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,z(0)=0,z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ 的极值曲线。

解 $F=2yz+y'^2+z'^2$,由式(2-6-3),推得欧拉方程组为

$$y''-z=0,z''-y=0$$

解此二阶线性微分方程组,将上面前一个方程求导两次,消去 z'',得

$$y^{(4)}-y=0$$

同理可得

$$z^{(4)}-z=0$$

其通解为

$$\begin{cases}y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x\\ z=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x\end{cases}$$

再利用边界条件,得

$$c_1=c_2=c_3=0,\ c_4=1$$

故所求极值曲线为

$$y=\sin x,\ z=-\sin x$$

例 2.6.2 求泛函 $J[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2z-4y^2+y'^2-z'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。边界条件为 $y(0)=0$,$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,z(0)=0,z\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$。

泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases}y''+4y=0\\ z''+1=0\end{cases}$$

积分结果为

$$\begin{cases}y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\\ z=-\dfrac{x^2}{2}+c_3x+c_4\end{cases}$$

利用边界条件可求得 $c_1=0, c_2=1, c_3=\frac{32+\pi^2}{8\pi}, c_4=0$，故极值曲线为

$$\begin{cases} y=\sin 2x \\ z=-\frac{x^2}{2}+\frac{32+\pi^2}{8\pi}x \end{cases}$$

例 2.6.3 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1} f(y',z')\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解 该泛函的欧拉方程组呈如下形式

$$F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''=0, F_{y'z'}y''+F_{z'z'}z''=0$$

当 $F_{y'y'}F_{z'z'}-(F_{y'z'})^2\neq 0$ 时，由这两个方程可得 $y''=0$ 和 $z''=0$，积分得 $y=c_1x+c_2, z=c_3x+c_4$。这是空间中一族直线。

例 2.6.4 设泛函

$$J[\varphi(s),\varphi(t)]=\iint_D K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s+\int_a^b \varphi(s)[\varphi(s)-2f(s)]\mathrm{d}s$$

式中，D 为正方形域，即 $D=\{(s,t)\mid {}^{a\leqslant s\leqslant b}_{a\leqslant t\leqslant b}\}$，$K(s,t)$ 为 D 上已知的连续函数，且满足对称性，即 $K(s,t)=K(t,s)$，$f(s)$ 为区间 $[a,b]$ 上已知的连续函数。证明泛函 J 取得极值的必要条件是 $\varphi(t)$ 为下面的弗雷德霍姆型积分方程

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s+\varphi(t)-f(t)=0$$

的解。

证 对泛函取一阶变分，注意到 $K(s,t)=K(t,s)$ 以及被积函数的写法与积分变量的表示形式无关，有

$$\begin{aligned}
\delta J &= \iint_D K(s,t)[\varphi(s)\delta\varphi(t)+\varphi(t)\delta\varphi(s)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s+2\int_a^b[\varphi(s)-f(s)]\delta\varphi(s)\mathrm{d}s= \\
&2\iint_D K(s,t)\varphi(s)\delta\varphi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s+2\int_a^b[\varphi(t)-f(t)]\delta\varphi(t)\mathrm{d}t= \\
&2\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s\right]\delta\varphi(t)\mathrm{d}t+2\int_a^b[\varphi(t)-f(t)]\delta\varphi(t)\mathrm{d}t= \\
&2\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s+\varphi(t)-f(t)\right]\delta\varphi(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

若泛函取得极值，必有 $\delta J=0$，因 $\delta\varphi(t)$ 是任取的，故

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s+\varphi(t)-f(t)=0$$

证毕。

2.7 依赖于高阶导数的变分问题

本节讨论含有高阶导数的泛函的变分问题。先来讨论含有二阶导数的泛函，即

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x \qquad (2-7-1)$$

式中 F 是三阶连续可微的函数，y 是四阶连续可微的函数。

定理 2.7.1 使泛函(2-7-1)取极值且满足固定边界条件

$$y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1,y'(x_0)=y_0',y'(x_1)=y_1 \tag{2-7-2}$$

的极值曲线 $y=y(x)$ 必满足微分方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}=0 \tag{2-7-3}$$

式(2-7-3)称为**欧拉—泊松方程**或**欧拉方程**。一般情况下，式(2-7-3)是关于 $y=y(x)$ 的四阶常微分方程，其通解含有四个任意常数，这些常数可由边界条件(2-7-2)确定。

证 如果 $y=y(x)$ 是使泛函 $J[y(x)]$ 取得极值的曲线，则泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 上的变分 $\delta J=0$，即

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\delta F\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y'')\mathrm{d}x \tag{2-7-4}$$

将式(2-7-4)右边积分中第二项分部积分一次，第三项分部积分两次，得

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\mathrm{d}\delta y=F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\delta y\mathrm{d}x$$

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y''}\delta y''\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F_{y''}\mathrm{d}\delta y'=F_{y''}\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\delta y'\mathrm{d}x=$$

$$\left(F_{y''}\delta y'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\delta y\right)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\delta y\mathrm{d}x$$

将以上两式代入式(2-7-4)，得

$$\delta J=\left(F_{y'}\delta y+F_{y''}\delta y'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\delta y\right)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\right)\delta y\mathrm{d}x=0 \tag{2-7-5}$$

注意到

$$\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}=0,\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1}=0,\delta J=0$$

于是得

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\right)\delta y\mathrm{d}x=0$$

由于 δy 的任意性，根据第 1 章变分法基本引理 1.5.2 可知

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}=0$$

证毕。

对于含有未知函数的 n 阶导数，或未知函数有两个或两个以上的固定边界变分问题，若被积函数 F 足够光滑，可得出以下推论：

推论 2.7.1 使依赖于未知函数 $y(x)$ 的 n 阶导数的泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x \tag{2-7-6}$$

取极值且满足固定边界条件

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},y^{(k)}(x_1)=y_1^{(k)}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)\tag{2-7-7}$$

的极值曲线 $y=y(x)$ 必满足欧拉—泊松方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}}=0\tag{2-7-8}$$

式中 F 具有 $n+1$ 阶连续导数，y 具有 $2n$ 阶连续导数，这是个 $2n$ 阶微分方程，它的通解中含有 $2n$ 个待定常数，可由 $2n$ 个边界条件来确定。

因为一个函数的零阶导数就是对该函数没有求导，也就是该函数自身，所以式(2-7-8)可以写成如下求和的形式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}F_{y^{(k)}}=0\tag{2-7-9}$$

推论 2.7.2 使依赖于两个未知函数 $y(x)$ 的 m 阶导数、$z(x)$ 的 n 阶导数的泛函

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(m)},z,z',\cdots,z^{(n)})\mathrm{d}x\tag{2-7-10}$$

取极值且满足固定边界条件

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},\ y^{(k)}(x_1)=y_1^{(k)}\quad(k=0,1,\cdots,m-1)\tag{2-7-11}$$

$$z^{(k)}(x_0)=z_0^{(k)},\ z^{(k)}(x_1)=z_1^{(k)}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)\tag{2-7-12}$$

的极值曲线 $y=y(x)$、$z=z(x)$ 必满足欧拉—泊松方程组

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^m\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}F_{y^{(m)}}=0\\ F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}+\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{z''}-\cdots+(-1)^n\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{z^{(n)}}=0\end{cases}\tag{2-7-13}$$

或简写成

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}F_{y^{(k)}}=0\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}F_{z^{(k)}}=0\end{cases}\tag{2-7-14}$$

推论 2.7.3 使依赖于 m 个未知函数 $y_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 的 n_i 阶导数的泛函

$$J[y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)]=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n_1)},y_2,y_2',\cdots,y_2^{(n_2)},\cdots,y_m,y_m',\cdots,y_m^{(n_m)})\mathrm{d}x\tag{2-7-15}$$

取极值且满足固定边界条件

$$y_i^{(k)}(x_0)=y_{i0}^{(k)},y_i^{(k)}(x_1)=y_{i1}^{(k)}\quad(i=1,2,\cdots,m,k=0,1,\cdots,n_i-1)\tag{2-7-16}$$

的极值曲线 $y_i=y_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 必满足欧拉—泊松方程组

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y_i''}-\cdots+(-1)^{n_i}\frac{\mathrm{d}^{n_i}}{\mathrm{d}x^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0\tag{2-7-17}$$

或简写成

$$\sum_{k=0}^{n_i}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}F_{y_i^{(k)}}=0\tag{2-7-18}$$

例 2.7.1 长度为 L 的两端简支弹性梁，承受均布载荷 q 的作用，如图 2－7－1(a) 所示，试问梁取什么样的挠度曲线时，这个系统的总势能 J 最小？如果是两端固支的梁，如图 2－7－1(b) 所示，而其他条件不变，则结果又如何？

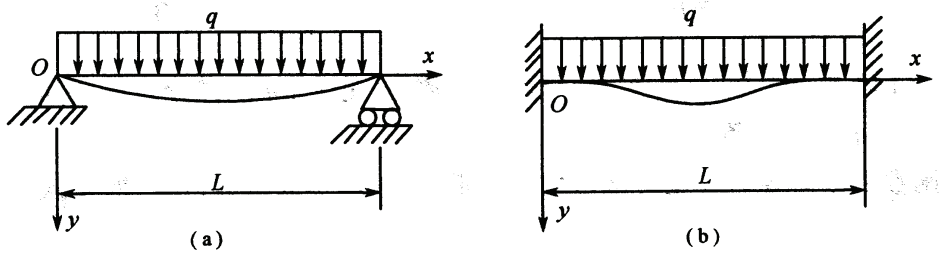


图 2－7－1　受均布载荷的梁的挠度曲线

解　设挠度曲线为 $y = y(x)$，梁的抗弯刚度为 EI，根据材料力学知识，该梁的弯曲应变能是

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^L EIy''^2 \mathrm{d}x$$

由于梁的挠度引起的载荷势能为

$$J_2 = -\int_0^L qy\mathrm{d}x$$

系统的总势能为

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{2}\int_0^L (EIy''^2 - 2qy)\mathrm{d}x$$

边界条件为

$$y(0) = 0, y(L) = 0, y''(0) = 0, y''(L) = 0$$

泛函的欧拉 — 泊松方程为

$$EIy^{(4)} - q = 0$$

其通解为

$$y = \frac{q_v}{24EI}x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

利用上面的边界条件，得

$$c_2 = c_4 = 0, c_1 = -\frac{qL}{12EI}, c_3 = \frac{qL^3}{24EI}$$

于是，梁的挠度曲线为

$$y = \frac{qx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3) \quad (0 \leqslant x \leqslant L)$$

这时系统的总势能最小，其值为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\frac{q^2}{4EI}(x^2 - Lx)^2 - \frac{q^2x}{12EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)\right]\mathrm{d}x = -\frac{q^2L^5}{240EI}$$

当梁的两端为固支时，其边界条件为

$$y(0) = 0, y(L) = 0, y'(0) = 0, y'(L) = 0$$

此时，其通解不变，代入上面边界条件，得

$$c_3 = c_4 = 0, c_1 = -\frac{qL}{12EI}, c_2 = \frac{qL^2}{24EI}$$

于是,梁的挠度曲线为

$$y = \frac{qx^2}{24EI}(x - L)^2$$

这时系统的总势能最小,其值为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\frac{q^2}{144EI}(6x^2 - 6Lx + L^2)^2 - \frac{q^2x^2}{12EI}(x - L)^2\right]\mathrm{d}x = -\frac{q^2L^5}{1440EI}$$

由此可见,两者的总势能是简单的6倍关系。

欧拉 — 泊松方程的几种特殊情况:

(1) F 不依赖于 y,此时 $F_y \equiv 0$,故欧拉 — 泊松方程为

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}F_{y^{(k)}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}} = 0 \tag{2-7-19}$$

从而得到首次积分

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}F_{y^{(k)}} = F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}F_{y^{(n)}} = c \tag{2-7-20}$$

(2) F 不依赖于 x,此时可把 y 视为自变量,即 x 视为 y 的函数,令

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, x'' = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}, \cdots, x^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^ix}{\mathrm{d}y^i}, \cdots \tag{2-7-21}$$

则

$$\mathrm{d}x = x'\mathrm{d}y, y' = \frac{1}{x'}, y'' = -\frac{x''}{x'^3}, y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \cdots \tag{2-7-22}$$

于是有

$$J[x(y)] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \cdots\right)x'\mathrm{d}y \tag{2-7-23}$$

若令

$$F\left(y, \frac{1}{x'}, \frac{x''}{x'^3}, \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \cdots\right)x' = \varphi(y, x', \cdots, x^{(n)}) \tag{2-7-24}$$

则泛函(2-7-23)可写成

$$J[x(y)] = \int_{y_0}^{y_1} \varphi(y, x', \cdots, x^{(n)})\mathrm{d}y \tag{2-7-25}$$

其首次积分为

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\varphi_{x^{(k)}} = \varphi_{x'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi_{x''} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\varphi_{x^{(n)}} = c \tag{2-7-26}$$

(3) F 仅依赖于 $y^{(n)}$。此时欧拉 — 泊松方程为

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}} = 0 \tag{2-7-27}$$

或

$$F_{y^{(n)}} = P_{(n-1)}(x) \tag{2-7-28}$$

式中 $P_{(n-1)}(x)$ 是 x 的 $(n-1)$ 次多项式。若用 f 表示 $F_{y^{(n)}}$ 的反函数,则得

$$y^{(n)} = f[P_{(n-1)}] \tag{2-7-29}$$

积分 n 次后得

$$y = \underbrace{\iint\cdots\int}_{n} f[P_{(n-1)}(x)](\mathrm{d}x)^n + Q_{(n-1)}(x) \tag{2-7-30}$$

式中 $Q_{(n-1)}(x)$ 是任意$(n-1)$次多项式。

(4) 如果积分号下是某个函数的全微分,则变分问题无意义。

例 2.7.2 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (1 + y'^2)\mathrm{d}x$ 且满足边界条件

$$y(0) = 0, y(1) = 1, y'(0) = 1, y'(1) = 1$$

的极值曲线。

解 因为 $F_y = F_{y'} = 0$,故欧拉 — 泊松方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = 0, \text{即} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(2y'') = 0, \text{或 } y^{(4)} = 0$$

其通解为 $y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$。

利用边界条件,得 $c_1 = c_2 = c_4 = 0, c_3 = 1$,于是得极值曲线为 $y = x$。

例 2.7.3 试确定泛函 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,且满足边界条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$。

解 因为 $F = y''^2 - y^2 + x^2$ 中不含 y',故欧拉 — 泊松方程为

$$-2y + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(2y'') = 0 \text{ 或 } y^{(4)} - y = 0$$

其通解为 $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$。

利用边界条件,得 $c_1 = c_2 = c_4 = 0, c_3 = 1$,于是得极值曲线为 $y = \cos x$。

例 2.7.4 试确定泛函 $J[y] = \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y\right)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,它满足边界条件 $y(-l) = 0, y'(-l) = 0, y(l) = 0, y'(l) = 0$,其中 μ 和 ρ 均为常数。

解 因为 $F = \frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y$ 中不含 y',故欧拉 — 泊松方程为

$$F_y + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = \rho + \mu y^{(4)} = 0 \text{ 或 } y^{(4)} = -\frac{\rho}{\mu}$$

将上式积分四次,得

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

利用边界条件,最后可得

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^4 - 2l^2x^2 + l^4) = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2$$

例 2.7.5 证明:如果泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\mathrm{d}x$ 中的 F 不显含 y,则泛函的欧拉方程有

首次积分

$$F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} = C(\text{常数})$$

如果 F 不显含 x,则泛函的欧拉方程有首次积分

$$F - y'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''} = C$$

证 泛函的欧拉方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = 0$$

若 F 不显含 y,则有 $F_y = 0$,故上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = 0$$

将上式积分一次,显然有

$$F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} = C$$

如果 F 不显含 x,则有 $F_x = 0$,于是,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F - y'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''}\right] =$$

$$F_y y' + F_{y'}y'' + F_{y''}y''' - y''\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) -$$

$$y'''F_{y''} - y''\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} = F_y y' - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) = y'\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\right) = 0$$

故

$$F - y'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''} = C$$

证毕。

例 2.7.6 试求泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y''^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = \sinh 1$, $y'(0) = 1, y'(1) = \cosh 1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$y^{(4)} - y'' = 0$$

欧拉方程的特征方程为

$$r^4 - r^2 = r^2(r-1)(r+1) = 0$$

求得它根为 $0,0,1,-1$。欧拉方程的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x + c_4$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = \sinh 1, y'(0) = 1, y'(1) = \cosh 1$,可列出以下方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 e + c_2 e^{-1} + c_3 + c_4 = \sinh 1 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 e - c_2 e^{-1} + c_3 = \cosh 1 \end{cases}$$

解得 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}, c_3 = c_4 = 0$,于是极值曲线为

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

例 2.7.7 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + yy'')dx$ 的极值曲线。边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, $y'(x_0) = y_0', y'(x_1) = y_1'$。

解 由于积分号下是函数 yy' 的全微分，所以变分问题无意义。

2.8 依赖于多元函数的变分问题

在许多工程和物理问题中，会经常遇到依赖于多元函数的泛函的极值问题，如弹性力学中的平面问题，电磁学中的平面电场问题，都含有两个自变量 x, y。弹性动力学中的板的振动问题含有三个自变量 x, y, t。传热学中的非稳态热传导方程则含有四个自变量 x, y, z 和 t。本节着重讨论含有两个自变量的泛函的变分问题。

定理 2.8.1 设 D 是平面区域，$(x, y) \in D, u(x, y) \in C^2(D)$，使泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy \tag{2-8-1}$$

取极值且在区域 D 的边界线 L 上取已知的极值函数 $u = u(x, y)$ 必满足偏微分方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0 \tag{2-8-2}$$

这个方程称为**奥斯特罗格拉茨基方程**，简称**奥氏方程**。该方程是 1834 年由俄罗斯数学家奥斯特罗格拉茨基首先得到的。奥氏方程是欧拉方程的进一步发展，有时它也称为**欧拉方程**。

式(2－8－2) 中的 $\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}$ 是对自变量 x 和 y 的完全偏导数，它们分别是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x} = F_{u_x x} + F_{u_x u}u_x + F_{u_x u_x}u_{xx} + F_{u_x u_y}u_{yx} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = F_{u_y y} + F_{u_y u}u_y + F_{u_y u_x}u_{xy} + F_{u_y u_y}u_{yy} \end{cases} \tag{2-8-3}$$

将式(2－8－3) 代入式(2－8－2)，得到式(2－8－2) 的展开式为

$$F_{u_x u_x}u_{xx} + 2F_{u_x u_y}u_{xy} + F_{u_y u_y}u_{yy} + F_{u_x u}u_x + F_{u_y u}u_y + F_{xu_x} + F_{yu_y} - F_u = 0 \tag{2-8-4}$$

式(2－8－4) 是二阶偏微分方程，其边界条件是 u 在 D 的边界 L 上取已知值。

证 设 $u = \bar{u}(x, y)$ 是泛函 $J[u(x, y)]$ 的极值曲面，作 $u = \bar{u}(x, y)$ 的邻近曲面

$$u = \bar{u}(x, y) + \varepsilon\eta(x, y) \tag{2-8-5}$$

式中 $\eta(x, y)$ 为任意可微的函数，且在边界上满足

$$\eta(x, y)|_L = 0 \tag{2-8-6}$$

ε 为绝对值充分小的参数。令

$$\delta u = \varepsilon\eta(x, y) \tag{2-8-7}$$

则有

$$\delta u|_L = 0 \tag{2-8-8}$$

对式(2－8－7) 求关于 x 和 y 的偏导数

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}(\delta u)=\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\varepsilon\eta_x(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\delta u)=\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\varepsilon\eta_y(x,y)\end{cases}\tag{2-8-9}$$

因为泛函 $J[u(x,y)]$ 在 $u=\bar{u}(x,y)$ 上达到极值，则对应的一次变分 $\delta J=0$，即

$$\delta J=\iint_D(F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\tag{2-8-10}$$

将式(2-8-10)右边积分中第二项和第三项改写为

$$F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y=\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)-\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\tag{2-8-11}$$

将式(2-8-11)代入式(2-8-10)，得

$$\delta J=\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{2-8-12}$$

应用格林公式，将式(2-8-12)右边第二个积分化为

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L(F_{u_x}\delta u\mathrm{d}y-F_{u_y}\delta u\mathrm{d}x)$$

由式(2-8-8)可知，$\delta u|_L=0$，所以上式积分为零。于是，由式(2-8-12)得

$$\delta J=\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

由于 $\delta u=\varepsilon\eta(x,y)$ 的任意性，根据变分法基本引理1.5.3，得

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

证毕。

例 2.8.1 已知 $(x,y)\in D$，求泛函

$$J[u(x,y)]=\frac{1}{2}\iint_D(u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的奥氏方程。此泛函表示弹性薄膜变形能，称为**狄利克雷泛函**或**狄利克雷积分**。

解 1 由公式(2-8-2)，可写出奥氏方程为

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

此即二维拉普拉斯方程。它是数理方程的基本问题之一，通常称为**狄利克雷问题**。这个问题最初是格林以猜想的形式提出来的，1833年，狄利克雷在研究变密度椭球体的引力问题时正式提出了该问题，但在当时没有引起足够的重视。

解 2 原泛函可以写成矢量的形式

$$J[u(x,y)]=\iint_D\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对上式取一阶变分，并利用格林公式，有

$$\delta J[u]=2\iint_D\nabla\delta u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D[\nabla\cdot(\delta u\nabla u)-\Delta u\delta u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$2\oint_L \frac{\partial u}{\partial n}\delta u \mathrm{d}L - 2\iint_D \Delta u \delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint_D \Delta u \delta u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

因对于固定边界问题，有 $\delta u|_L = 0$，故上式在封闭曲线 L 上的积分为零，而在区域 D 内，δu 是任取的，若使泛函的一阶变分为零，必有

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

可见，两种解法的结果一样，这是必然的。

例 2.8.2 写出泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D [u_x^2 + u_y^2 + 2uf(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的奥氏方程，其中在区域 D 的边界上 u 与 $f(x,y)$ 均为已知。

解 由式(2－8－2)或由例 2.8.1 的结果可知，奥氏方程为

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

这就是数理方程中人们所熟知的泊松方程。

例 2.8.3 线弹性力学平面应变问题以位移分量表达的应变能为

$$J[u,v] = \frac{E}{2(1+\mu)}\iint_D \left[\frac{\mu}{1-2\mu}(u_x + v_y)^2 + u_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{2}(v_x + u_y)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中，E 为弹性模量，μ 为泊松比，两者均为常量。试证：

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\mu}(u_{xx} + v_{xy}) = 0$$

$$\Delta v + \frac{1}{1-2\mu}(u_{xy} + v_{yy}) = 0$$

证 泛函的奥氏方程组为

$$\frac{2\mu}{1-2\mu}(u_{xx} + v_{xy}) + 2u_{xx} + v_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{2\mu}{1-2\mu}(u_{xy} + v_{yy}) + 2v_{yy} + v_{xx} + u_{xy} = 0$$

前一个奥氏方程可化为

$$\frac{1-(1-2\mu)}{1-2\mu}u_{xx} + \frac{2\mu}{1-2\mu}v_{xy} + 2u_{xx} + v_{xy} + u_{yy} =$$

$$\frac{1}{1-2\mu}u_{xx} + \frac{2\mu+1-2\mu}{1-2\mu}v_{xy} + u_{xx} + u_{yy} =$$

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\mu}(u_{xx} + v_{xy}) = 0$$

后一个奥氏方程可化为

$$\frac{2\mu}{1-2\mu}u_{xy} + \frac{1-(1-2\mu)}{1-2\mu}v_{yy} + 2v_{yy} + v_{xx} + u_{xy} = \frac{2\mu+1-\mu}{1-2\mu}u_{xy} +$$

$$\frac{1}{1-2\mu}v_{yy} + v_{yy} + v_{xx} = \Delta v + \frac{1}{1-2\mu}(u_{xy} + v_{yy}) = 0$$

证毕。

对于依赖于两个以上多元函数的泛函的极值问题,可以推出类似的奥氏方程。

推论 2.8.1 设 D 是平面区域,$(x,y)\in D$,$u(x,y)\in C^4(D)$,$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})\in C^3$,则泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-8-13}$$

的奥氏方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}=0 \tag{2-8-14}$$

证 为使式(2-8-13)取极值,应有

$$\delta J[u(x,y)]=\iint_D(F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y+F_{u_{xx}}\delta u_{xx}+F_{u_{xy}}\delta u_{xy}+F_{u_{yy}}\delta u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{2-8-15}$$

由定理 2.8.1 已推导出

$$\iint_D(F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-8-16}$$

因为

$$F_{u_{xx}}\delta u_{xx}+F_{u_{xy}}\delta u_{xy}+F_{u_{yy}}\delta u_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_{xx}}\delta u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_{xy}}\delta u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_{yy}}\delta u_y)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xx}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta u\frac{\partial}{\partial y}F_{u_{xy}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\frac{\partial}{\partial y}F_{u_{yy}}\right)+\delta u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}Fu_{xx}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}Fu_{xy}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}Fu_{yy}\right)$$

在固定边界条件下,有

$$\delta u|_L=\delta u_x|_L=\delta u_y|_L=0$$

应用格林公式,得

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{u_{xx}}\delta u_x-\delta u\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xx}}-\delta u\frac{\partial}{\partial y}F_{u_{xy}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta u\frac{\partial}{\partial y}F_{u_{yy}}-F_{u_{xy}}\delta u_x-F_{u_{yy}}\delta u_y\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\left[\left(F_{u_{xx}}\delta u_x-\delta u\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xx}}-\delta u\frac{\partial}{\partial y}F_{u_{xy}}\right)\mathrm{d}y+\left(\delta u\frac{\partial}{\partial y}F_{u_{yy}}-F_{u_{xy}}\delta u_x-F_{u_{yy}}\delta u_y\right)\mathrm{d}x\right]=0$$

故

$$\iint_D(F_{u_{xx}}\delta u_{xx}+F_{u_{xy}}\delta u_{xy}+F_{u_{yy}}\delta u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\delta u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-8-17}$$

将式(2-8-16)和式(2-8-17)代入式(2-8-15),即可得到式(2-8-14)。证毕。

更一般地,有下面推论:

推论 2.8.2 设 D 是平面区域,$(x,y)\in D$,$u(x,y)\in C^{2n}(D)$,$F\in C^{n+1}(D)$,则泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},\cdots,\underbrace{u_{xx\cdots x}}_{n},\cdots\underbrace{u_{yy\cdots y}}_{n})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-8-18}$$

的奥氏方程为

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}} + \cdots +$$

$$(-1)^n\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}F_{u_{\overbrace{xx\cdots x}^{n}}} + \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}F_{u_{\overbrace{xx\cdots xy}^{n-1}}} + \cdots + \frac{\partial^n}{\partial y^n}F_{u_{\overbrace{yy\cdots y}^{n}}}\right) = 0 \tag{2-8-19}$$

例 2.8.4 写出泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的奥氏方程。

解 应用推论 2.8.1,可写出奥氏方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2u_{xx}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2u_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(4u_{xy}) = 0$$

或

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

该方程称为**重调和方程**或**双调和方程**。满足调和方程的函数 u 称为**双调和函数**。它有时被缩写成 $\Delta\Delta u = 0$ 或 $\Delta^2 u = 0$。

例 2.8.5 写出泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D\left[\frac{D}{2}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xy}^2) - uf(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的奥氏方程,其中 D 为常数。

解 应用推论 2.8.1,可写出奥氏方程

$$\frac{D}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2u_{xx}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2u_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(4u_{xy})\right] - f(x,y) = 0$$

或

$$D\Delta^2 u = D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = f(x,y)$$

当 $f(x,y) = 0$ 时,它就退化为例 2.8.4 的情形。

推论 2.8.3 设 D 是平面区域,$(x,y) \in D$,$u(x,y) \in C^2$,$v(x,y) \in C^2$,则泛函

$$J[u(x,y),v(x,y)] = \iint_D F(x,y,u,v,u_x,v_x,u_y,v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-8-20}$$

的奥氏方程组为

$$\begin{cases} F_u - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0 \\ F_v - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{v_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{v_y} = 0 \end{cases} \tag{2-8-21}$$

推论 2.8.4 设 Ω 是 n 维空间域,$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \Omega$,$u(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in C^{2n}$,则泛函

$$J[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)] = \int_\Omega F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{2-8-22}$$

的极值函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足奥氏方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x_1}F_{u_{x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2}F_{u_{x_2}} - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_n}F_{u_{x_n}} = 0 \tag{2-8-23}$$

或简写成

$$F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0 \tag{2-8-24}$$

这种类型的方程在弹性动力学平衡问题中常会遇到。

在式(2-8-23)中,取 $n=4$,令 $x=x_1, y=x_2, z=x_3, t=x_4$,则有泛函

$$J[u(x,y,z,t)] = \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V F(x,y,z,t,u,u_x,u_y,u_z,u_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{2-8-25}$$

其极值函数满足奥氏方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z}F_{u_z} - \frac{\partial}{\partial t}F_{u_t} = 0 \tag{2-8-26}$$

推论 2.8.5 设 $D+T$ 是平面区域和时间区域的合成域,$t \in T=[t_0,t_1]$,$(x,y) \in D$,$(x,y,t) \in D+T$,$u(x,y,t) \in C^2(D+T)$,$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},u_t) \in C^3$,则泛函

$$J[u(x,y,t)] = \int_{t_0}^{t_1}\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},u_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \tag{2-8-27}$$

的奥氏方程为

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial t}F_{u_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}} = 0 \tag{2-8-28}$$

证 为使泛函(2-8-27)取极值,应有

$$\begin{aligned}\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\iint_D (&F_u\delta u + F_{u_x}\delta u_x + F_{u_y}\delta u_y + F_{u_{xx}}\delta u_{xx} + \\ &F_{u_{xy}}\delta u_{xy} + F_{u_{yy}}\delta u_{yy} + F_{u_t}\delta u_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{2-8-29}$$

仿推论 2.8.1 可推导出

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\iint_D (F_u\delta u + F_{u_x}\delta u_x + F_{u_y}\delta u_y + F_{u_{xx}}\delta u_{xx} + F_{u_{xy}}\delta u_{xy} + F_{u_{yy}}\delta u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\iint_D \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

利用分部积分,式(2-8-29)最后一项可化为

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\iint_D F_{u_t}\delta u_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \iint_D \left(\int_{t_0}^{t_1} F_{u_t}\mathrm{d}\delta u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint_D \left(F_{u_t}\delta u\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial t}F_{u_t}\delta u\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t_1}\iint_D \frac{\partial}{\partial t}F_{u_t}\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

将以上两式代入式(2-8-29),即可得到式(2-8-28)。证毕。

例 2.8.6 求泛函

$$J[u(x,y,z)] = \iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2uf(x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

的奥氏方程。其中 V 为积分区域,$f(x,y,z)$ 为已知函数,它在 V 上连续。

解 由式(2-8-21)可知,泛函 $J[u(x,y,z)]$ 的奥氏方程为

$$2f(x,y,z) - 2\frac{\partial}{\partial x}u_x - 2\frac{\partial}{\partial y}u_y - 2\frac{\partial}{\partial z}u_z = 0$$

或

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z)$$

上式为泊松方程。当 $f(x,y,z) = 0$ 时，方程退化为

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

此即三维拉普拉斯方程。

例 2.8.7 求泛函

$$J[u(x,y)] = \frac{D}{2}\iint_S [(u_{xx} + u_{yy})^2 - 2(1-v)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_S f(x,y)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的奥氏方程。其中 D、v 都是参数，S 为积分区域，$f(x,y)$ 为已知函数，它在 S 上连续。

解 被积函数可写成

$$F = \frac{D}{2}[(u_{xx} + u_{yy})^2 - 2(1-v)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)] - f(x,y)u$$

求各偏导数

$$F_u = -f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} = D\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right) - (1-v)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}} = D\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) - (1-v)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{u_{xy}} = 2D(1-v)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

由式(2 - 8 - 13) 可知，泛函 $J[u(x,y)]$ 的奥氏方程为

$$D\Delta^2 u = D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = f(x,y)$$

当 $f(x,y) = 0$ 时，它可化为重调和方程。

比较例 2.8.4 和例 2.8.7 可知，不同的泛函可给出相同的欧拉方程，但表示不同的物理意义。

例 2.8.8 根据弹性力学理论，在极坐标中，弹性薄板在单位面积载荷 $q(x)$ 的作用下，系统的总势能是板的弯曲应变能和载荷所作的功之和，可用挠度 $w = w(r,\theta)$ 的泛函来表示

$$J[w] = \frac{D}{2}\iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + 2(1-\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right] r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \iint_S q\dot{w}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

试求泛函的奥氏方程。

解 设被积函数是 F 的函数。求各偏导数

$$F_w = -qr, F_{w_r} = 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$F_{w_\theta}=4(1-\mu)\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\qquad F_{w_{rr}}=2r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)$$

$$F_{w_{r\theta}}=4(1-\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\qquad F_{w_{\theta\theta}}=2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}F_{w_r}=2\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}\right)+2\mu\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}F_{w_\theta}=4(1-\mu)\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}F_{w_{rr}}=2\left(2\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+r\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}\right)+2\mu\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\theta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}F_{w_{r\theta}}=4(1-\mu)\left(-2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\theta^2}+2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}F_{w_{\theta\theta}}=2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}\right)+2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\theta^2}$$

将以上有关式子代入奥氏方程,整理后得

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+$$

$$2\left(2\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\theta^2}\right)=\frac{q}{D}$$

利用式(1-4-15),上式可化成

$$D\Delta^2 w=q$$

这是以算子形式表示的薄板弯曲控制微分方程。

例 2.8.9 写出泛函 $J[u]=\iint_D[u_x^4+u_y^4+12uf(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的欧拉 — 奥氏方程。

解 泛函的欧拉 — 奥氏方程为

$$12f(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}4u_x^3-\frac{\partial}{\partial y}4u_y^3=0$$

或

$$u_x^2u_{xx}+u_y^2u_{yy}=f(x,y)$$

例 2.8.10 利用直角坐标与极坐标的关系 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,弧长的微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}\theta$,推出泛函

$$J[y]=\int_A^B(x^2+y^2)\mathrm{d}s$$

的极坐标的形式为

$$J[r(\theta)]=\int_{\theta_0}^{\theta_1}r^2\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta$$

式中,$\theta_0<\theta_1, r'=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$;$A$、$B$ 两定点的坐标分别为(r_0,θ_0)和(r_1,θ_1)。试证:$J[r(\theta)]$的欧拉方程的首次积分为

$$-3\mathrm{d}\theta=\frac{c_1\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-c_1^2\rho^2}}$$

其极值曲线族为

$$r^3\sin(3\theta + c_2) = c_1$$

证 因为

$$x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

$$\mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y = \sin\theta\mathrm{d}r + r\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$(\mathrm{d}x)^2 = (\mathrm{d}r)^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\theta)^2$$

$$(\mathrm{d}y)^2 = (\mathrm{d}r)^2\sin^2\theta + 2r\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + r^2\cos^2\theta(\mathrm{d}\theta)^2$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\theta$$

又 A、B 两定点的坐标分别为(r_0,θ_0)、(r_1,θ_1),所以可推出

$$J[y] = \int_A^B (x^2 + y^2)\mathrm{d}s = J[r(\theta)] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2\sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\theta$$

由于被积函数不含 θ,故欧拉方程有首次积分

$$F - r'F'_r = r^2\sqrt{r^2 + r'^2} - \frac{r^2r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = c_1$$

或

$$\frac{r^4}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = c_1$$

两端平方,得

$$r^8 = c_1^2(r^2 + r'^2)$$

令 $\rho = \frac{1}{r^3}$,则 $\mathrm{d}\rho = -\frac{3\mathrm{d}r}{r^4} = -\frac{3r'\mathrm{d}\theta}{r^4}, r' = \frac{r^4\mathrm{d}\rho}{3\mathrm{d}\theta}$,代入到首次积分方程,得 $1 = c_1^2\left[\rho^2 + \left(-\frac{\mathrm{d}\rho}{3\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]$,经整理,得

$$-3\mathrm{d}\theta = \frac{c_1\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1 - c_1^2\rho^2}}$$

将上式积分,注意到 c_1 是任意常数,可写成 $-c_1$ 形式,得

$$3\theta + c_2 = \arcsin c_1\rho$$

即极值曲线族为

$$r^3\sin(3\theta + c_2) = c_1$$

证毕。

例 2.8.11 证明:若泛函

$$J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} F(y,z,y',z')\mathrm{d}x$$

中的 F 不显含 x,则泛函的欧拉方程有首次积分

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'} = C(\text{常数})$$

证 当 F 不显含 x 时,有 $F_x = 0$,于是,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}) =$$

$$F_yy' + F_zz' + F_{y'}y'' + F_{z'}z'' - y''F_{y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - z''F_{z'} - z'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} =$$

$$F_y y' + F_z z' - y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - z' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = y'\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right) + z'\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right) = 0$$

故

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'} = C$$

证毕。

2.9 完全泛函的变分问题

理论的产生来源于实际需要，然而它一经产生，就会按自身的规律发展，并超越实际需要的限制。根据最简泛函的结构，可以考虑到一种最复杂、最普遍的情况，即自变量 x、未知函数 y 及其导数 y' 都不止一个，而是一个集类，该集类可以含有任意个自变量、任意个多元函数和任意个高阶偏导数。为研究问题方便起见，可以把具有这种结构的泛函称为**完全泛函**。完全泛函的概念是本书作者于 20 世纪 90 年代提出来的。对于完全泛函的变分问题，如果能建立类似于欧拉方程的微分方程组，就在一定程度上解决了具有此类结构的泛函极值的问题。现在提出的问题是：对于完全泛函的变分问题，存在与其相应的微分方程组吗？如果存在，它的具体形式是什么样的？下面的定理给出上述问题的肯定回答。

首先给出并证明依赖于任意个自变量、一个多元函数及该函数任意阶偏导数的泛函极值函数定理，然后利用这个定理给出并证明完全泛函的极值函数定理。为此，引入**偏微分算子**

$$D^{i_s} = \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_m}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_m^{i_m}} \tag{2-9-1}$$

该偏微分算子简称**算子**。其中 $i_s = i_1 + \cdots + i_m$，且 $i_s, i_1, \cdots, i_m$ 都是整数，这里，并不排斥 i_s 所表示的某些自变量是零的情形。若某自变量的上标是零，则表示没有对该自变量求偏导数，例如，$m = 3$ 且 $i_5 = i_1 + i_2 + i_3 = 3 + 0 + 2 = 5$，此时，算子并不是写成

$$D^{i_s} = \frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^0 \partial x_3^2} \tag{2-9-2}$$

而是写成

$$D^{i_s} = \frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_3^2} \tag{2-9-3}$$

即如果算子中不含对某自变量的偏导数，则算子中对该自变量导数就可略去不写。如果 $i_s = 0$，那么 $D^{i_s}u = D^0 u = u$，即一个函数对自变量求零阶偏导数，就是没对自变量求偏导数，也就是该函数自身。

定理 2.9.1 设 Ω 是 m 维域，自变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \Omega$，函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in C^{2n}$，泛函所依赖的函数 u 在泛函中对自变量的最高阶偏导数是 n，则泛函

$$J[u] = \int_\Omega F\Big(x_1, \cdots, x_m, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_m}, u_{x_1x_1}, \cdots, u_{x_mx_m}, \cdots,$$

$$\underbrace{u_{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}}}_{i_s}, \cdots, \underbrace{u_{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}}}_{n}\Big)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m =$$

$$\int_\Omega F(x_1, \cdots, x_m, u, D^{i_1}u, \cdots, D^{i_s}u, \cdots, D^n u)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m \tag{2-9-4}$$

的极值函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 满足下列方程

$$F_u+\sum_{s=1}^{S}(-1)^{i_s}D^{i_s}F_{D^{i_s}u}=0 \tag{2-9-5}$$

或

$$F_u+\sum_{s=1}^{S}(-1)^{i_s}D^{i_s}\frac{\partial F}{\partial D^{i_s}u}=0 \tag{2-9-6}$$

式中,大写的字母 S 表示被积函数 F 中 u 后面 u 的偏导数项的总项数,小写的字母 s 表示 u 后面的第 s 项,且 $s=1,2,\cdots,S$。

根据前面的表示方法,有 $D^0u=u$,则 $D^0F_{D^0u}=D^0F_u=F_u$。如果把 F_u 看作第零项,则式(2-9-5)和式(2-9-6)可以分别写成

$$\sum_{s=0}^{S}(-1)^{i_s}D^{i_s}F_{D^{i_s}u}=0 \tag{2-9-7}$$

$$\sum_{s=0}^{S}(-1)^{i_s}D^{i_s}\frac{\partial F}{\partial D^{i_s}u}=0 \tag{2-9-8}$$

需要指出的是,在实际应用中,u 对某几个自变量的偏导数往往会以不同的形式出现多次,这里的总项数 S 应正确理解为 u 对自变量偏导数的不同组合数。

证 对泛函(2-9-4)取一阶变分,并从中取出被积函数变分的第 s 项 $F_{D^{i_s}u}\delta D^{i_s}u$,该项具有 i_s 阶偏导数,利用变分与求导可以交换次序的性质,对其作分部积分 i_s 次,有

$$\int_{\Omega}F_{D^{i_s}u}\delta D^{i_s}u\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=\int_{\Omega}F_{D^{i_s}u}\mathrm{d}\delta\frac{\partial^{i_1-1+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=$$

$$\int_{\Omega-x_1}\left(F_{D^{i_s}u}\delta\frac{\partial^{i_1-1+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\Bigg|_{x_1=x_{10}}^{x_1=x_{11}}\right)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m-\int_{\Omega}\frac{\partial F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1}\delta\frac{\partial^{i_1-1+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=$$

$$\int_{\Omega-x_1}\left(F_{D^{i_s}u}\delta\frac{\partial^{i_1-1+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\Bigg|_{x_1=x_{10}}^{x_1=x_{11}}\right)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m-\int_{\Omega-x_1}\left(\frac{\partial F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1}\delta\frac{\partial^{i_1-2+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-2}\cdots\partial x_m^{i_m}}\Bigg|_{x_1=x_{10}}^{x_1=x_{11}}\right)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m+$$

$$(-1)^2\int_{\Omega}\frac{\partial^2F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1^2}\delta\frac{\partial^{i_1-2+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-2}\cdots\partial x_m^{i_m}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=\cdots=$$

$$\int_{\Omega-x_1}\left[\left(F_{D^{i_s}u}\delta\frac{\partial^{i_1-1+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-1}\cdots\partial x_m^{i_m}}-\frac{\partial F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1}\delta\frac{\partial^{i_1-2+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-2}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right)\Bigg|_{x_1=x_{10}}^{x_1=x_{11}}\right]\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=+\cdots+$$

$$(-1)^2\int_{\Omega}\frac{\partial^2F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1^2}\delta\frac{\partial^{i_1-2+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-2}\cdots\partial x_m^{i_m}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=\cdots=$$

$$\int_{\Omega-x_1}\left[\left(F_{D^{i_s}u}\delta\frac{\partial^{i_1-1+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-1}\cdots\partial x_m^{i_m}}-\frac{\partial F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1}\delta\frac{\partial^{i_1-2+\cdots+i_m}u}{\partial x_1^{i_1-2}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right)\Bigg|_{x_1=x_{10}}^{x_1=x_{11}}\right]\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m+\cdots+$$

$$(-1)^{i_s-1}\int_{\Omega-x_m}\left(\frac{\partial^{i_s-1}F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m-1}}\delta\frac{\partial u}{\partial x_m}\Bigg|_{x_m=x_{m0}}^{x_m=x_{m1}}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{m-1}+$$

$$(-1)^{i_s}\int_{\Omega}\frac{\partial^{i_s}F_{D^{i_s}u}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\delta u\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m=B_s+(-1)^{i_s}\int_{\Omega}D^{i_s}F_{D^{i_s}u}\delta u\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m$$

式中 B_s 表示与边界积分有关的各项之和。

除 u 项外,将被积函数的一阶变分的其他所有项都按上面方法去做,将含有 u 的偏导数的变分都化成 δu 的形式,并将所有项求和,其中包括 $F_u\delta u$ 项,得

$$\delta J = \sum_{s=1}^{S} B_s + \int_{\Omega} \left[F_u + \sum_{s=1}^{S} (-1)^{i_s} D^{i_s} F_{D^{i_s} u} \right] \delta u \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m = 0 \quad (2-9-9)$$

式中，由泛函取极值的必要条件 $\delta J = 0$，应分别有 $\sum_{s=1}^{S} B_s = 0$ 和积分项等于零，而根据变分法的基本引理，δu 是任取的，积分项中只能是括号内的部分等于零，于是可得到式(2-9-5) ~ 式(2-9-8)。证毕。

式(2-9-5) ~ 式(2-9-8)有两个规律，一个规律是求和项中有两个相同的算子，这表明 F 对含有某些自变量的导数项求偏导数后，要再次对这些自变量求偏导数，即两组对自变量求偏导数的自变量相同。另一个规律是关于求和项中各项的符号，每作一次分部积分，被积函数就改变一次符号，这样奇次积分取负号，偶次积分取正号，这个规律可通过 i_s 表示出来，i_s 是偶数取正号，i_s 是奇数取负号。掌握这两个规律对上述公式的应用会带来很大方便。

定理 2.9.2 设 Ω 是 m 维域，自变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \Omega$，函数 $u_k(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in C^{2n_k}$，$k = 1,2,\cdots,l$，泛函所依赖的函数 u_k 在泛函中对自变量的最高阶导数是 n_k，则完全泛函

$$\begin{aligned} J[u_1, u_2, \cdots, u_l] = \int_{\Omega} F(&x_1, \cdots, x_m, u_1, D^{i_{1_1}} u_1, \cdots, D^{i_{s_1}} u_1, \cdots, D^{n_1} u_1, \cdots, \\ &u_k, D^{i_{1_k}} u_k, \cdots, D^{i_{s_k}} u_k, \cdots, D^{n_k} u_k, \cdots, \\ &u_l, D^{i_{1_l}} u_l, \cdots, D^{i_{s_l}} u_l, \cdots, D^{n_l} u_l) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \end{aligned} \quad (2-9-10)$$

的极值函数 $u_k(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 满足下列方程组

$$F_{u_k} + \sum_{s_k=1}^{S_k} (-1)^{i_{s_k}} D^{i_{s_k}} F_{D^{i_{s_k}} u_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \qquad (2-9-11)$$

式中 u_k 表示 $u_1, u_2, \cdots, u_l$ 中的任何一项，S_k 是对应于 u_k 的偏导数项的总项数，其他符号意义同上。该定理的证明是本书作者于 2005 年完成的。定理 2.9.2 可称为**完全泛函的极值函数定理**。仿式(2-9-6) ~ 式(2-9-8)，式(2-9-11)可写成以下三种形式

$$F_{u_k} + \sum_{s_k=1}^{S_k} (-1)^{i_{s_k}} D^{i_{s_k}} \frac{\partial F}{\partial D^{i_{s_k}} u_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \qquad (2-9-12)$$

$$\sum_{s_k=0}^{S_k} (-1)^{i_{s_k}} D^{i_{s_k}} F_{D^{i_{s_k}} u_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \qquad (2-9-13)$$

$$\sum_{s_k=0}^{S_k} (-1)^{i_{s_k}} D^{i_{s_k}} \frac{\partial F}{\partial D^{i_{s_k}} u_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \qquad (2-9-14)$$

由此可见，式(2-9-11) ~ 式(2-9-14)与式(2-9-5) ~ 式(2-9-8)在形式上完全相同，只是多了一个下标 k。

证 仿定理 2.9.1 的证法，对泛函(2-9-10)取一阶变分，利用变分与求导可以交换次序的性质，把含有 u_k 的各项变分化成 δu_k，$k = 1,2,\cdots,l$，令含有边界项的积分之和为 B，则有

$$\begin{aligned} \delta J = B &+ \int_{\Omega} \left(F_{u_1} + \sum_{s_1=1}^{S_1} (-1)^{i_{s_1}} D^{i_{s_1}} F_{D_{i_{s_1}} u_1} \right) \delta u_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m + \\ &\int_{\Omega} \left(F_{u_2} + \sum_{s_2=1}^{S_2} (-1)^{i_{s_2}} D^{i_{s_2}} F_{D_{i_{s_2}} u_2} \right) \delta u_2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m + \cdots + \\ &\int_{\Omega} \left(F_{u_l} + \sum_{s_l=1}^{S_l} (-1)^{i_{s_l}} D^{i_{s_l}} F_{D_{i_{s_l}} u_l} \right) \delta u_l \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m = 0 \end{aligned} \qquad (2-9-15)$$

式中，由泛函取极值的必要条件 $\delta J = 0$，应有 B 等于零和各积分项分别等于零，$\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_l$ 是任取的，根据变分法的基本引理，各积分项中只能是括号内的部分等于零，于是，必然得到式(2－9－11)，而式(2－9－12) ～ 式(2－9－14) 都是式(2－9－1) 的变形。证毕。

至此，已给出并证明了依赖于任意个自变量、任意个多元函数、任意阶多元函数的偏导数的完全泛函取极值时极值函数应满足的条件，即式(2－9－11) ～ 式(2－9－14) 中的任意一组，这些方程组可称为**完全欧拉方程组、统一欧拉方程组**或简称**欧拉方程(组)**。式(2－9－11) ～ 式(2－9－14) 中的每个完全欧拉方程组都具有普遍性，它们是变分法中具有完全泛函式(2－9－10) 结构的各种欧拉方程的统一形式。变分法中的各种欧拉方程都是完全欧拉方程组(2－9－11) ～ 组(2－9－14) 的特例，可以通过各方程组的 m、l、n_k 和 S_k 等取某些特定的值来得到。所有具有完全泛函式(2－9－10) 结构的泛函的变分问题都是完全泛函的变分问题的特例，其极值函数都应满足完全欧拉方程组(2－9－11) ～ 组(2－9－14) 中的任何一组，可以通过完全欧拉方程组的 m、l、n_k 和 S_k 等取某些特定的值来得到。当 m、l、n_k 和 S_k 中的任何一个趋于无穷大时，完全欧拉方程组都从有限趋于无限。

在欧拉方程组(2－9－11) ～ 组(2－9－14) 中，如果省略 i 的下标 s_k 和偏导数 D 的阶数 i_{s_k}，并像爱因斯坦求和约定那样，约定一项中两个相同的偏微分算子表示求和，这样求和号也可以省略，那么欧拉方程组(2－9－11) ～ 组(2－9－14) 可写成以下几种更简单的形式

$$F_{u_k} + (-1)^i D F_{Du_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \tag{2-9-16}$$

$$F_{u_k} + (-1)^i D \frac{\partial F}{\partial Du_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \tag{2-9-17}$$

$$(-1)^i D F_{Du_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \tag{2-9-18}$$

$$(-1)^i D \frac{\partial F}{\partial Du_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \tag{2-9-19}$$

欧拉方程组(2－9－16) ～ (2－9－19) 与最简泛函的欧拉方程有相同的形式。有趣的是，欧拉方程组(2－9－18) 与最简泛函的欧拉方程(2－4－3) 一样，都是用 12 个符号表示的，但欧拉方程组(2－9－18) 可把最简泛函所依赖的三个独立变量 $x, y(x), y'(x)$ 扩展到无限个。

例 2.9.1 根据弹性力学理论，线弹性体三维应力问题以位移分量表达的应变能为

$$J = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iiint_V \Big[u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2\mu(u_x v_y + v_y w_z + w_z u_x) + \frac{1-\mu}{2}(v_x + u_y)^2 + \frac{1-\mu}{2}(w_y + v_z)^2 + \frac{1-\mu}{2}(u_z + w_x)^2 \Big] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

式中，E 为弹性模量，μ 为泊松比，两者均为常量。试求泛函的欧拉方程组。

解 此题相当于 $m = l = 3, S_1 = S_2 = S_3 = 1, n_1 = n_2 = n_3 = 1$ 的情况。泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases} 2u_{xx} + 2\mu(v_{xy} + w_{xz}) + (1-\mu)(v_{xy} + u_{yy}) + (1-\mu)(u_{zz} + w_{xz}) = 0 \\ 2v_{yy} + 2\mu(u_{xy} + w_{yz}) + (1-\mu)(v_{xx} + u_{xy}) + (1-\mu)(w_{yz} + v_{zz}) = 0 \\ 2w_{zz} + 2\mu(v_{yz} + u_{xz}) + (1-\mu)(w_{yy} + v_{yz}) + (1-\mu)(u_{xz} + w_{xx}) = 0 \end{cases}$$

经整理，以上方程组可化为

$$\begin{cases}\Delta u+\dfrac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xx}+v_{xy}+w_{zz})=0\\ \Delta v+\dfrac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xy}+v_{yy}+w_{yz})=0\\ \Delta w+\dfrac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xz}+v_{yz}+w_{zz})=0\end{cases}$$

例 2.9.2 根据弹性力学理论,线弹性体三维应变问题以位移分量表达的应变能为

$$J=\frac{E}{2(1+\mu)}\iiint_V\left[\frac{\mu}{1-2\mu}(u_x+v_y+w_z)^2+u_x^2+v_y^2+w_z^2+\frac{1}{2}(v_x+u_y)^2+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(w_y+v_z)^2+\frac{1}{2}(u_z+w_x)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

式中,E 为弹性模量,μ 为泊松比,两者均为常量。试求泛函的欧拉方程组。

解 泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{2\mu}{1-2\mu}(u_{xx}+v_{xy}+w_{xz})+2u_{xx}+(v_{xy}+u_{yy})+(u_{zz}+w_{xz})=0\\ \dfrac{2\mu}{1-2\mu}(u_{xy}+v_{yy}+w_{yz})+2v_{yy}+(v_{xx}+u_{xy})+(w_{yz}+v_{zz})=0\\ \dfrac{2\mu}{1-2\mu}(u_{xz}+v_{yz}+w_{zz})+2w_{zz}+(w_{yy}+v_{yz})+(u_{xz}+w_{xx})=0\end{cases}$$

经整理,以上欧拉方程组可化为

$$\begin{cases}\Delta u+\dfrac{1}{1-2\mu}(u_{xx}+v_{xy}+w_{zz})=0\\ \Delta v+\dfrac{1}{1-2\mu}(u_{xy}+v_{yy}+w_{yz})=0\\ \Delta w+\dfrac{1}{1-2\mu}(u_{xz}+v_{yz}+w_{zz})=0\end{cases}$$

若将例2.9.1的 μ 换成$\dfrac{\mu}{1-\mu}$,将其代入例2.9.1的欧拉方程组,则可化成例2.9.2的三维应变问题的欧拉方程组。同理,若将例2.9.2的 μ 换成$\dfrac{\mu}{1+\mu}$,将其代入例2.9.2的欧拉方程组,则可化成例2.9.1的三维应力问题的欧拉方程组。这两个算例验证了完全欧拉方程组的正确性。

2.10 欧拉方程的不变性

由高等数学可知,当函数 $y=f(u)$ 具有导数而 u 为自变量时,其微分为 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$,若 u 是中间变量且是一个具有导数的函数 $u=\varphi(x)$,且 $\varphi'(x)\neq 0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x) \tag{2-10-1}$$

于是

$$dy = f'(u)\varphi'(x)dx \tag{2-10-2}$$

但

$$du = \varphi'(x)dx \tag{2-10-3}$$

故

$$dy = f'(u)du \tag{2-10-4}$$

这表明，不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(u)$ 的微分形式是一样的，这种性质称为**微分形式的不变性**。

欧拉方程也具有类似的不变性。考虑最简泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \tag{2-10-5}$$

其欧拉方程为

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{2-10-6}$$

设 x 是 ξ 的函数，则

$$x = x(\xi), y = y(x(\xi)) = y(\xi) \tag{2-10-7}$$

当 $x = x_0$ 时，$\xi = \xi_0$，当 $x = x_1$ 时，$\xi = \xi_1$，且令

$$F_1\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right) = F\left(x(\xi), y, \frac{dyd\xi}{dx/d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi} = G\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi} \tag{2-10-8}$$

则有

$$J[y] = \int_{\xi_0}^{\xi_1} G\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}d\xi \tag{2-10-9}$$

再令

$$H\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right) = G\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi} \tag{2-10-10}$$

则有

$$J[y] = \int_{\xi_0}^{\xi_1} H\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right)d\xi \tag{2-10-11}$$

其欧拉方程为

$$H_y - \frac{d}{d\xi}H_{\frac{dy}{d\xi}} = 0 \tag{2-10-12}$$

显然，式(2-10-12)与式(2-10-6)在本质上是一样的。像这样，在已给的变分问题中，对自变量某种变换，变换后泛函的欧拉方程与原来的欧拉方程形式上一样，这种性质称为**欧拉方程的不变性**。

现采用曲线坐标，将上述变化加以推广。设 $y = y(x)$，坐标变换为

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \varphi, \psi \in C^2 \tag{2-10-13}$$

在 uOv 平面与 $y = y(x)$ 对应的曲线为 $v = v(u)$，则有

$$dx = \varphi_u du + \varphi_v v_u du = (\varphi_u + \varphi_v v_u)du \tag{2-10-14}$$

$$dy = \psi_u du + \psi_v v_u du = (\psi_u + \psi_v v_u)du \tag{2-10-15}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\psi_u + \psi_v v_u)du}{(\varphi_u + \varphi_v v_u)du} = \frac{\psi_u + \psi_v v_u}{\varphi_u + \varphi_v v_u} \tag{2-10-16}$$

将式(2-10-13)中的 x、y 表达式和式(2-10-14)、式(2-10-16)代入式(2-10-5),得

$$J[v(u)] = \int_{u_0}^{u_1} F\left(\varphi(u,v), \psi(u,v), \frac{\psi_u + \psi_v v_u}{\varphi_u + \varphi_v v_u}\right)(\varphi_u + \varphi_v v_u)du =$$

$$\int_{u_0}^{u_1} F_1(u, v, v')du \tag{2-10-17}$$

式中

$$F_1(u, v, v') = F\left(\varphi(u,v), \psi(u,v), \frac{\psi_u + \psi_v v_u}{\varphi_u + \varphi_v v_u}\right)(\varphi_u + \varphi_v v_u) \tag{2-10-18}$$

由此可以断言,若 $y = y(x)$ 是 xOy 平面泛函(2-10-5)的极值曲线,则 $v = v(u)$ 就是 uOv 平面泛函(2-10-17)的极值曲线。

对于依赖多元函数的变分问题,仍存在欧拉方程的不变性。

例 2.10.1 试把泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy$$

写成用极坐标表示的形式。

解 设 $U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$,则有

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

上式两边分别对 x,y 求偏导数,得

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}, 0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}, 1 = \frac{\partial r}{\partial y}\sin\theta + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

解出偏导数,得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

故

$$J[u(x,y)] = J[U(r,\theta)] = \iint_D G(r, \theta, U, U_r, U_\theta)drd\theta$$

式中

$$G(r,\theta,U,U_r,U_\theta)=F\left(r\cos\theta,r\sin\theta,U,U_r\cos\theta-U_\theta\frac{\sin\theta}{r},U_r\sin\theta+U_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)r$$

对应的欧拉方程为

$$G_U-\frac{\partial}{\partial r}G_{U_r}-\frac{\partial}{\partial\theta}G_{U_\theta}=0$$

即

$$rF_u-\frac{\partial}{\partial r}(rF_{u_x}\cos\theta+rF_{u_y}\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}(-F_{u_x}\sin\theta+F_{u_y}\cos\theta)=0$$

将上式展开并化简,得

$$rF_u-r\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}F_{u_x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}F_{u_y}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}F_{u_x}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}F_{u_y}=0$$

利用等式

$$\frac{\partial}{\partial r}F_{u_x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}F_{u_x},\frac{\partial}{\partial r}F_{u_y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}F_{u_y}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}F_{u_x}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}F_{u_x},\frac{\partial}{\partial\theta}F_{u_y}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}F_{u_y}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}$$

可把上面的式子化为

$$r\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)=0$$

或

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

由此可见,两个欧拉方程所表示的极值曲面相同,这表明欧拉方程具有不变性。

例 2.10.2 一质点在光滑平面上运动,其速度 v 与质点到原点的距离成反比,且泛函 $J=\int_{p_0}^{p_1}v\mathrm{d}s$ 在运动轨迹任一弧段 p_0p_1 上都取极值。求该质点的运动轨迹。

解 设质点到原点的距离为 r,比例系数为 k,据题意,有下列关系

$$J=\int_{p_0}^{p_1}v\mathrm{d}s=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{1}{kr}\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}F(r,r')\mathrm{d}\theta$$

式中,$F=\frac{1}{kr}\sqrt{r^2+r'^2}$。因 F 不含 θ,故有首次积分

$$F-r'F'_r=\frac{1}{kr}\sqrt{r^2+r'_2}-\frac{r'^2}{kr\sqrt{r^2+r'^2}}=c$$

或

$$\frac{r}{k\sqrt{r^2+r'^2}}=c$$

令 $r'=r\tan t$,则 $\sqrt{r^2+r'^2}=r\sec t$,代入上式,得

$$\frac{1}{k\sec t}=\frac{\cos t}{k}=c$$

或

$$\cos t = kc(\text{常数})$$

此时 $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t} = \dfrac{\sqrt{1-(kc)^2}}{kc} = a(\text{常数})$。于是

$$r' = ar$$

积分,得

$$r = ce^{a\theta}$$

即极值曲线是对数螺线。

例 2.10.3 求泛函 $J[r(\theta)] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta$ 的极值曲线。

解 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,可得

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

上两式平方相加,得

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2$$

两端开方,得

$$\sqrt{r^2 + r'^2}d\theta = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

原方程可转变为

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

因泛函仅是 y' 的函数,故极值曲线为直线 $y = c_1x + c_2$。又 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,回复到原来的变量,得泛函的极值曲线为 $r\sin\theta = c_1 r\cos\theta + c_2$。

例 2.10.4 求泛函 $J[y] = \int_0^{\ln 2} (e^{-x}y'^2 - e^x y^2)dx$ 的极值曲线。

解 作变量变换 $x = \ln u, y = v$,有 $dx = \dfrac{du}{u}, y' = \dfrac{dv}{du}\dfrac{du}{dx} = uv'$,其中 $v' = \dfrac{dv}{du}$,当 $x = 0$ 时,$u = 1$,当 $x = \ln 2$ 时,$u = 2$。于是,原来的泛函可写成

$$J[y] = \int_1^2 (e^{-\ln u}u^2 v'^2 - e^{\ln u}v^2)\frac{du}{u} = \int_1^2 (v'^2 - v^2)du$$

泛函的欧拉方程为 $v'' + v = 0$,可得其积分为

$$v = c_1\cos u + c_2\sin u$$

再变回到原来的变量,有

$$y = c_1\cos e^x + c_2\sin e^x$$

例 2.10.5 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(y'^2 - x^2)dx$ 通过坐标原点和点(1,1)的极值曲线。

解 作变量变换 $x^2 = u, y^2 = v$,有 $2xdx = du, 2ydy = dv, \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{u}{v}}\dfrac{dv}{du}$ 或 $y' = \sqrt{\dfrac{u}{v}}v'$,其中 $v' = \dfrac{dv}{du}$,当 $x_0 = x = 0$ 时,$u_0 = 0$,当 $x_1 = x = 1$ 时,$u_1 = 1$。于是原来的泛函可写成

$$J[y] = \int_{u_0}^{u_1} v\left(\frac{u}{v}v'^2 - u\right)\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{u}(v'^2 - v)du \tag{1}$$

泛函的欧拉方程为

$$-\sqrt{u}-\frac{v'}{\sqrt{u}}-2\sqrt{u}v''=0 \tag{2}$$

或

$$v''+\frac{1}{2u}v=-\frac{1}{2} \tag{3}$$

方程(3)的**积分因子**是 $e^{\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}}$,于是它的解可写成

$$v\sqrt{u}=c_1-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du \tag{4}$$

或

$$v'=\frac{c_1}{\sqrt{u}}=-\frac{u}{3}$$

将上式积分并代回到原来的变量,得

$$y^2=2c_1x-\frac{x^4}{6}+c_2 \tag{5}$$

符合边界条件的常数是 $c_2=0,c_1=\frac{7}{12}$。于是所求的极值曲线为

$$y^2=\frac{7x-x^4}{6} \tag{6}$$

若直接从所给的泛函出发,则有

$$2y(y'^2-x^2)-4yy'^2-2y^2y''=0 \tag{7}$$

或

$$yy''+y'^2+x^2=0 \tag{8}$$

将上式改写为

$$\frac{d}{dx}(yy')=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}y^2\right)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}y^2=-x^2 \tag{9}$$

将上式积分两次,可得到式(5)的结果,再利用边界条件,结果仍是式(6)。

例 2.10.6 证明泛函 $J[r]=\int_{\theta_0}^{\theta_1}f(r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$ 的极值曲线常能通过积分得到。

证 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,那么泛函可改写为

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}f(y)\sqrt{1+y'^2}dx$$

因泛函不含 x,故有首次积分

$$f(y)\sqrt{1+y'^2}-y'f(y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

或

$$\frac{f(y)}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

上式的积分可写成

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{f^2(y)-c_1^2}} = \frac{x}{c_1} + c_2$$

如果方程的左端能求出积分,就可得到极值曲线。证毕。

例 2.10.7 试证**克莱罗定理**:在旋转曲面上任一测地线的每一点处的平行半径以及通过该点的测地线和子午线间的夹角的正弦之积为一常数。

证 设旋转曲面的方程在圆柱坐标系下有如下形式

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = f(r)$$

其微分关系为

$$\mathrm{d}x = \cos\varphi\mathrm{d}r - r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}y = \sin\varphi\mathrm{d}r + r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}z = f_r\mathrm{d}r$$

则旋转曲面上弧长的微分是

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\varphi)^2 + (f_r\mathrm{d}r)^2} = \sqrt{r^2 + (1+f_r^2)r'^2}\mathrm{d}\varphi$$

在旋转曲面上的测地线为下列泛函

$$J[r] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (1+f_r^2)r'^2}\mathrm{d}\varphi$$

因泛函只是 r 和 r' 的函数,故泛函的欧拉方程为

$$\sqrt{r^2 + (1+f_r^2)r'^2} - r' \frac{(1+f_r^2)r'}{\sqrt{r^2 + (1+f_r^2)r'^2}} = c$$

或

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (1+f_r^2)r'^2}} = c$$

利用弧长的微分关系,上式可写成 $r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = c$,注意到 $r\mathrm{d}\varphi = \sin\theta\mathrm{d}s$,其中 θ 是测地线与子午线的夹角,于是可得 $r\sin\theta = c$。证毕。

2.11 名家介绍

伽利略(Galilei, Galileo, 1564.2.15—1642.1.8) 意大利物理学家、天文学家、哲学家和数学家,理性自然科学和近代实验科学的奠基者之一。生于比萨,卒于佛罗伦萨附近的阿切特里。1581—1585 年在比萨大学学习医学和物理学。1589 年任比萨大学教授,1591 年任帕多瓦大学教授。1611 年成为林琴科学院院士。通过实验,推翻了亚里士多德关于落体的下降速度与重量成正比的学说,建立了落体定律。还发现物体的惯性定律、摆振动的等时性和抛物体运动规律,并确定了伽利略相对性原理。在其力学著作中论述了材料的强度并创立了材料科学。他是利用望远镜观察天体取得大量成果的第一人,在天文学上的重要发现有力地证明了哥白尼的日心说。著有《关于两大世界体系的对话》和《关于两种新科学的对话》等。

惠更斯(Huygens, Christiaan, 1629.4.14—1695.6.8) 荷兰数学家、物理学家和天文学家。生、卒于海牙。1615 年入莱顿大学学习,两年后转入布雷达大学学习。1655 年获法国昂日大学法学博士学位。1663 年成为英国皇家学会的第一个外国会员。1666 年成为法兰西科学院院士。在数学上的主

要贡献是推动了无穷小分析及其应用的研究，促进了概率论的形成和发展。对多种曲线有深入的研究，取得了一系列重要成果，提出渐屈线和渐近线的概念，给出曲率半径计算公式，证明摆线是等时曲线等。在天文学上的最大贡献是发现了土星光环和土卫六。在物理学方面的主要贡献是创立了光的波动说。对望远镜有重要改进，改进了用摆来控制的时钟。著有《钟表的摆动》、《宇宙论》和《光论》等，后有《惠更斯全集》共22卷。

牛顿(Newton, Isaac, 1642.1.4—1727.3.31)　英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家。生于英格兰林肯郡伍尔索普，卒于伦敦。1661年以优异成绩考入剑桥大学三一学院。1665年获学士学位。1668年获硕士学位。1669年任卢卡斯教授。1696年任皇家造币厂监督，1699年任厂长。1703年当选为英国皇家学会会长。1705年被封为爵士。数学方面最卓越的贡献是创建微积分，并在代数、数论、解析几何、曲线分类、变分法、概率论、力学、光学和天文学等许多领域都有巨大贡献，是人类历史上最伟大的科学家之一，被誉为数学巨人。著有《运用无穷多项方程的分析》(1669年完成，1711年出版)、《流数法与无穷级数》(1671年完成，1736年出版)、《曲线求积术》(1676年完成，1704年出版)和《自然哲学的数学原理》(1687)等。

雅可布·伯努利(Jacob Bernoulli, 1654.12.27—1705.8.16)　瑞士数学家。生、卒于巴塞尔(Basel)。分别于1671年和1676年分获艺术和神学硕士学位，1687年任巴塞尔大学数学教授。1699年当选为法兰西科学院外籍院士。研究过许多种特殊曲线，如悬链线、双纽线和对数螺线，首创数学意义下的积分一词，发明了极坐标，引入了在 $\tan(x)$ 函数的幂级数展开式中的伯努利数。提出了微分方程中的"伯努利方程"。与其弟约翰·伯努利奠定了变分法的基础，提出并部分解决了捷线问题和等周问题。1704年，出版《关于无穷级数及其有限和的算术应用》一书。在1713年出版的巨著《猜度术》中给出了伯努利数和伯努利大数定理。许多概率论的术语都是以他的名字命名的。在算术、代数、几何学及物理学等方面的研究也有一定的成就。

洛必达(L'Hospital, Guillaume François Antoine de, 1661—1704.2.2)　法国数学家。生卒于巴黎。曾在军队任骑兵军官，后转向学术研究。15岁时就解出帕斯卡(Pascal, Blaise, 1623.6.19—1662.8.19)提出的摆线难题。在与其他数学家长期通信中萌发了许多科学理论的新思想，解决了最速降线等问题，是微积分的先驱之一。巴黎科学院院士。代表作是《阐明曲线的无穷小分析》(1696)，书中由一组定义和公理出发，对变量、无穷小量、切线和微分等概念进行了系统的阐述，是世界上第一本系统的微分学教科书，对传播微积分理论起了重要作用。书中记载了约翰·伯努利1694年写信告诉他的一个著名定理，即求一个分数当分子和分母都趋于零时的极限法则，后来称为洛必达法则。撰有几何、代数和力学方面的文章。遗稿汇编成《圆锥曲线分析论》(1720)。

约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667.8.6—1748.1.1)　瑞士数学家和力学家。生、卒于巴塞尔。1683年就读于巴塞尔大学，1685年获艺术硕士学位，1690年获医学硕士学位，1694年获得巴塞尔大学医学博士学位。1695年任荷兰戈罗宁根大学数学物理教授。1705年任巴塞尔大学教授。1699年成为法兰西科学院外籍院士，1712年为英国皇家学会会员，1724年为意大利博洛尼亚科学院外籍院士，1725年为圣彼得堡科学院名誉院士。因在力学方面的研究成果，三次获得法兰西科学院奖。于1696年6月在《教师月报》上向全欧洲数学家挑战，提出著名的"最速降线"问题，对变分法的发展起了推动作用，被誉为变分法的先驱之一。在微积分学、微分方程理论、变分学、几何学和力学等方面均取得了重要成果。著有《积分学教程》(1742)一书。

欧拉(Euler, Léonhard, 1707.4.15—1783.9.18)　瑞士数学家、物理学家、天文学家、力学家，理论流体动力学的创始人，柏林科学院创始人之一。生于巴塞尔，卒于圣彼得堡。1720年入巴塞尔大学，师从约翰·伯努利。1723年获硕士学位。1733年当选为圣彼得堡科学院院士。1774年，把变分问题的研究成果发表在《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书中，从而创立了变分

法。在几乎所有数学的最重要分支中，都有他开创性的贡献，还把数学用到了几乎整个物理领域。18世纪数学界最杰出的人物之一，史学家把他和阿基米德、牛顿、高斯列为人类有史以来贡献最大的四位数学家，被誉为数学英雄。发表论文800多篇，有《全集》74卷。晚年失明。拉普拉斯曾说过："读读欧拉，他是我们一切人的老师"。

克莱罗(Clairaut, Alexis Claude, 1713.5.7—1765.5.17)　法国数学家和天文学家。生、卒于巴黎。他是个神童，10岁时就读完了洛必达《无穷小分析》。1731年出版了著作《关于双重双曲率曲线的研究》，同年成为法国科学院院士。1737年成为英国皇家学会会员。在数学方面，建立了二元函数全微分、一阶微分方程的通解和特解等重要概念，创立积分因子学说，提出三角形内插法公式。在天文学方面，于1736年参加了测量地球子午线的工作。1743年提出大地测量基本定律，还引入了曲线积分。对月球运动、哈雷彗星的轨道和太阳摄动等问题都有研究。还是运动的动力理论的创始人之一。著有《几何原理》、《地球形状理论》、《月球理论》和《彗星运动理论》等。

泊松(Poisson, Siméon Denis, 1781.6.21—1840.4.25)　法国数学家、力学家和物理学家。生于卢瓦雷省的皮蒂维尔斯，卒于巴黎。1800年毕业于巴黎综合工科学校，1806年任该校教授。1812年当选为法兰西科学院院士。1816年任素尔博纳大学理论力学教授。1826年当选为圣彼得堡科学院院士。1837年被授予爵位。研究内容涉及现代科学的诸多方面、在有限差分理论、天体力学、传热学、电磁学、理论力学、弹性力学、数学分析、偏微分方程、概率论、变分学、内、外弹道学和流体力学等方面都有重要贡献。提出来的概率论中的泊松分布、弹性力学中的泊松常数和球体引力的泊松方程都非常著名。发表论文300多篇。主要著作有《力学教程》、《关于引力理论教程》、《热的数学理论》和《关于球体引力》等。

普拉托(Plateau, Joseph Antoine Ferdinand, 1801.10.14—1883.9.15)　比利时数学家和物理学家。生于布鲁塞尔，卒于根特。1829年获列日大学理学博士学位。1830—1834年在布鲁塞尔大学任教，1835—1872年任根特大学教授。1836年当选为比利时科学院院士。心理学和生理学的先驱。发明了早期的频闪观察器。1843年在一次实验中因注视太阳而导致眼睛失明，此后转入分子和薄膜的研究。主要贡献在变分法和微分几何方面，提出了空间闭曲线可以有一个极小曲面问题，后称为普拉托极小曲面问题。

狄利克雷(Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1805.2.13—1859.5.5)　德国数学家。生于迪伦，卒于格丁根。1822—1826年留学于法兰西学院和巴黎理学院，深受傅里叶的影响。1826年获科隆大学博士学位。1828年任柏林大学副教授，1839年任教授。1855年任格丁根大学教授。1831年成为柏林科学院院士，还是法兰西科学院院士和英国皇家学会会员(1855)。解析数论的创始人之一，创立了代数单位元素的一般理论。在数学分析方面，首次准确解释了级数条件收敛的概念，证明了分段连续单调函数展成傅氏级数的可能性。著有《数论讲义》(1863)、《关于三角级数的收敛性》和《用正弦和余弦级数表示完全任意函数》等。提出狄利克雷函数、狄利克雷积分和狄利克雷原理等。在位势论、热学、电磁学和数学物理等方面也有一些研究成果。

阿达马(Hadamard, Jacques Salomen, 1865.12.8—1963.10.17)　法国数学家。生于凡尔赛，卒于巴黎。1888年入巴黎高等师范学校学习，1892年获博士学位。曾在法兰西学院(1897—1935)、巴黎大学文理学院(1900—1912)、巴黎综合工科学校(1912—1935)和中央高等工艺制造学校(1920—1935)任教授。是许多国家科学机构的成员和许多大学的名誉博士。1912年当选为法兰西院士，1929年为苏联科学院外籍院士。1936年曾到清华大学讲学3个月。在函数论、数论、微分方程、泛函分析、微分几何、集合论和数学基础等方面均有贡献。90岁时获得法国荣誉团十字勋章。著有《初等几何讲义》(1898)、《变分法教程》(1910)、《波的传播理论》、《数学领域中的发明心里学》(1959)和《偏微分方程论》(1964)等多种著作。

弗雷德霍姆(Fredholm, Erik Ivar, 1866.4.7—1927.8.17)　瑞典数学家。生、卒于斯德哥尔摩。1885年起先后在斯德哥尔摩综合工科学校、乌普萨拉大学和斯德哥尔摩大学学习,是米塔－列夫勒(Mittag-Leffler, Magnus Gustaf, 1846.3.16—1927.7.7)的学生,1898年获乌普萨拉大学哲学博士学位。毕业后在斯德哥尔摩大学任教。1906年任教授。瑞典科学院院士和法国科学院通信院士,并获得过巴黎科学院奖。主要贡献在积分方程方面,是积分方程一般理论的创立者。研究了三类重要积分方程,提出了两个定理及其解,后来这三类积分方程分别称为第一、二、三类弗雷德霍姆积分方程,而有关弗雷德霍姆积分方程解的研究则称为弗雷德霍姆理论。研究成果导致了希尔伯特空间和其他函数空间的产生和发展。在幂级数理论上也有所贡献。

拉多(Rado, Tibor, 1895.6.2—1965.12.12)　匈牙利数学家。生于布达佩斯,卒于美国佛罗里达州的新士麦那比奇。曾在布达佩斯技术大学学习土木工程。1915年参加对俄作战被俘,1920年逃回国,入塞格德大学,1922年获博士学位。1922—1929年在塞格德大学任教,并在布达佩斯大学研究所工作。1929年去美国访问,先后在哈佛大学和赖斯研究所讲学,1930年任俄亥俄州立大学数学教授。1944—1945年在普林斯顿高级研究所任研究员。担任过《美国数学杂志》编委和美国科学促进协会副主席。在保角映射、实变函数、变分法、偏微分方程、测度论和集合论、点积和代数拓扑、曲面论、逻辑递归函数和图灵程序等许多方面都有所建树。研究了空间极小曲面问题,在闭曲线可求长时,用极限过程证明了解的存在性。

道格拉斯(Douglas, Jesse, 1897.7.3—1965.10.7)　美国数学家。生、卒于纽约。1916年毕业于纽约市立学院,1920年获哥伦比亚大学博士学位。1920—1926年在哥伦比亚大学任教。1926—1930年在普林斯顿、哈佛、芝加哥、巴黎和格丁根等地做研究工作。1930年在麻省理工学院任教,后到普林斯顿高等研究院工作。1942年回到纽约布鲁克林学院和哥伦比亚大学任教,1955年又回到纽约市立学院任教。主要贡献在微分几何和变分法等方面。给出了极小曲面问题的完整解并加以推广,于1936年获首届菲尔兹(Fields, John Charles, 1863.5.14—1932.8.9)奖,因极小曲面问题的杰出贡献,于1943年获美国数学会颁发的博歇奖。1941年解决了三维空间变分问题的反问题。在群论方面,1951年解决了有限群的一个重要问题,即由两个元素生成的有限群中的每个元素都可表示成 A^rB^s 的形式。

奥斯曼(Osserman, Robert, 1926—　)　美国数学家。生于纽约。1946年毕业于纽约大学,1948年获硕士学位,1955年获哈佛大学博士学位。1952—1953年在哥伦比亚大学任教。1955年到斯坦福大学任教,1957—1966年任助理教授和副教授,1966年任教授,1973—1979年任数学系主任。主要研究领域为复分析、极小曲面、黎曼曲面和黎曼几何等方面。著有《极小曲面综述》(A Survey of Minimal Surfaces, 1969,1986)。

习题2

2.1　设函数 $F = F(x,y,y') \in C^1, y = y(x) \in C^2$,试求

(1) 微分 $\mathrm{d}F$;(2) 变分 δF。

2.2　试求下列函数的一阶变分,其中 a、b、c 和 d 均为常数。

(1) $F = ax + by + cy^2 + dy'^2$;　(2) $F = y\sqrt{1+y'^2}$;　(3) $F = \sqrt{a + by' + cy'^2}$。

2.3　试求下列泛函的一阶变分

(1) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(ay + by' + cy''^2)\mathrm{d}x$;　(2) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$;

(3) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-y'^2-2y\cosh x)\mathrm{d}x$；　(4) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(ax^2y'+bxy'^2+c)\mathrm{d}x$；

(5) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(xy+y^2-2y^2y')\mathrm{d}x$。

2.4　求泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2+12xy)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=0,y(1)=1$。

2.5　求泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

2.6　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'(1+x^2y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.7　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(xy+y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.8　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(2y+xy'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$。

2.9　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{e}^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.10　求泛函 $J[y]=\int_1^2(xy'^2-y)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(1)=0,y(2)=1$。

2.11　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^k}\mathrm{d}x,k>0$ 的极值曲线。

2.12　求泛函 $J[y]=\int_1^2(y'^2+2yy'+y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(1)=1,y(2)=0$。

2.13　求泛函 $J[y]=\int_0^1yy'^2\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=1,y(1)=\sqrt[3]{4}$。

2.14　求泛函 $J[y]=\int_0^{\pi}(4y\cos x+y'^2-y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=0,y(\pi)=0$。

2.15　求泛函 $J[y]=\int_1^{\mathrm{e}}(xy'^2+yy')\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(1)=0,y(\mathrm{e})=1$。

2.16　求泛函 $J[y]=\int_0^1(x+y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=1,y(1)=2$。

2.17　求泛函 $J[y]=\int_0^1(y^2+y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=0,y(1)=1$。

2.18　求泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2+4y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=\mathrm{e}^2,y(1)=1$。

2.19　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-x^2y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$。

2.20　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y-xy')\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$ 的极值曲线，边界条件为 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$。

2.21　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(ay+by'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$。

2.22　求泛函 $J[y]=\int_0^{\pi}(y'^2-2y\cos x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=y(\pi)=0$。

2.23　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y^2+2q(x)yy'+r(x)y'^2+2f(x)y+2g(x)y']\mathrm{d}x$ 是正则问题的条件并求欧拉方程。

2.24　设 $F \equiv F(y')$，试证泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线为直线。

2.25　若泛函 $J[y] = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(Dy''^2 + ky^2 - 2qy)\mathrm{d}x$，其中 k 为常数，q 为 x 的给定函数，试求其欧拉方程。

2.26　试在过 $A(0,0)$ 与 $B(1,0)$ 的曲线中找出满足条件 $y'(0) = a, y'(1) = b$，且使泛函 $J[y] = \int_0^1 y''^2\mathrm{d}x$ 取极值的那一条曲线。

2.27　求泛函 $J[x,y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2 + 2xy + \dot{y}^2)\mathrm{d}t$ 的极值曲线，边界条件为 $x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$。

2.28　试讨论变分问题 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin y + \frac{1}{2}x^2y'\cos y\right)\mathrm{d}x, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ 是否有意义。

2.29　试讨论变分问题 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2 + y'\sin 2x)\mathrm{d}x, y(0) = k, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$。当 k 取什么值时它的极值曲线存在，并求出此极值曲线。

2.30　试讨论泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}[2xy + (x^2 + \mathrm{e}^y)y']\mathrm{d}x$ 的极值，边界条件为 $y(x_0) = y_0$，$y(x_1) = y_1$。

2.31　试讨论泛函 $J[y] = \int_0^1(\mathrm{e}^y + xy')\mathrm{d}x$ 的极值，边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = a$。

2.32　试讨论泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 + 2xyy')\mathrm{d}x$ 的极值，边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$。

2.33　试讨论泛函 $J[y] = \int_0^1(xy + y^2 - 2y^2y')\mathrm{d}x$ 的极值，边界条件为 $y(0) = 1, y(1) = 2$。

2.34　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x + k}\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中 k 为常数。

2.35　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(ax + b)\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.36　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y + k}\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中 k 为常数。

2.37　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y(1 + y'^2)}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.38　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}y'(1 + x^2y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.39　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + 2yy' - 16y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.40　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(xy' + y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.41　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\frac{1 + y^2}{y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.42 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'}\mathrm{d}x$ 通过点(0,0)、(1,1)的极值曲线。

2.43 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2-2y\sin x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.44 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(16y^2-y''^2+x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.45 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(2xy+y''^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.46 求泛函 $J[y]=\int_{-1}^{1}\left(yy''+\frac{y''^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(-1)=y(0)=y(1)=0, y'(-1)=y'(0)=y'(1)=1$。

2.47 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.48 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+z'^2+y'z')\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.49 写出泛函 $J[u(x,y)]=\iint_D(u_x^2-u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

2.50 写出泛函 $J[u(x,y,z)]=\iiint_V[u_x^2+u_y^2+u_z^2+2uf(x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的奥氏方程。

2.51 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+2y'^2+y''^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.52 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-y'^2-ay\cosh x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,其中 a 是常数。

2.53 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2+2ye^x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.54 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-y'^2-2y\sin x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.55 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y''^k\mathrm{d}x$ 的极值曲线,其中 $k\neq 0$。

2.56 求泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y''^2-2y'+y^2-x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,已知 $y(0)=y'(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$。

2.57 求泛函 $J[y]=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y''^2-4y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,已知 $y(0)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0, y'(0)=-1, y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$。

2.58 设泛函 $J[y]=\frac{\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2-q(x)y^2-s(x)y''^2]\mathrm{d}x}{\int_{x_0}^{x_1}r(x)y^2\mathrm{d}x}$ 满足边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1, y'(x_0)=y'_0, y'(x_1)=y_1$,其中 $p(x)$、$q(x)$、$r(x)$ 和 $s(x)\in C^2[x_0,x_1]$ 为已知函数,且 $r(x)\neq 0, y\in C^4[x_0,x_1]$。试导出该泛函的极值曲线应满足的边界条件。

2.59　设一边界固定，半径为 R 并呈轴对称弯曲的圆形薄板，在单位面积载荷为 $q(x)$ 的作用下，系统的总势能是板的挠度 $w = w(r)$ 的泛函

$$J[w] = D\pi\int_0^R \left(rw''^2 + \frac{1}{r}w'^2 + 2\mu w'w'' - \frac{2q}{D}rw \right)\mathrm{d}r$$

式中 D 和 μ 皆为弹性常数。试证当该泛函取得极小值时挠度函数 w 应当满足平衡方程

$$rw^{(4)} + 2w''' - \frac{1}{r}w'' + \frac{1}{r^2}w' = \frac{qr}{D}$$

2.60　周边固支正交各向异性圆板线性弯曲的总位能由下式给出

$$J[w] = \frac{1}{2}\int_0^a \left(D_{11}rw''^2 + 2D_{12}w'w'' + D_{22}\frac{w'^2}{r} - 2fw \right)\mathrm{d}r$$

式中，r 是径向坐标，a 是板的半径，f 是分布横向载荷，D_{ij} 是板的刚度。用总位能原理求出板的控制微分方程。

2.61　证明泛函 $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + 2yz' + 2zy' + z'^2)\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(x_0) = y_0$，$y(x_1) = y_1, z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1$ 的极值曲线为空间直线 $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$。

2.62　求泛函 $J[x,y] = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x - k}}\mathrm{d}t$ 的极值曲线，其中 k 为常数。

2.63　求下列泛函的变分和欧拉方程：

(1) $J[u(x,y)] = \iint_D (u_x^2 - u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(2) $J[u(x,y)] = \iint_D (u_x^2 - u_{yy}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

2.64　设某静电场 Ω 的电位 $V = V(x,y,x)$，电场能量 E 为

$$E = J[V] = \frac{1}{8\pi}\iiint_\Omega (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

根据电学知识，当 E 最小时，该静电场处于平衡状态。试求此时电位函数所应当满足的微分方程。

2.65　用极坐标求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$。

2.66　如果第一象限充满某种透明的光介质，而在其中的任一点光的速度等于 $1 + x$，求光束以最短的时间由原点传播至点(2,3) 的光路方程。

2.67　求泛函 $J[u(x,y)] = \iint_D [p(x)u_x^2 - q(y)u_y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

2.68　写出泛函 $J[u(x,y)] = \iint_D \left[\dfrac{D}{2}(u_{xx} + u_{yy})^2 - f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

2.69　给定泛函 $J[\varphi] = \iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $J[w] = \iiint_V (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，试由变分方程推导欧拉方程，$\varphi$ 和 w 在区域 D 和 V 的边界上的值为已知。

2.70　求泛函 $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + z'^2 - 2yz + 2y + 2z)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

2.71　写出泛函

$$J[u(x_1,\cdots,x_n)] = \iint\cdots\int_\Omega \left[\sum_{j=1}^n a_j(x_1,\cdots,x_n)u_{x_j}^2 - b(x_1,\cdots,x_n)u^2 + 2uf(x_1,\cdots,x_n)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

的欧拉 — 奥氏方程。

2.72　求泛函 $J[u(x,y)]=\iint_D\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

2.73　求泛函 $J[u]=\frac{1}{m}\left[\iiint_V(2fu+|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]^n$ 的奥氏方程，$n\geqslant 1$。

2.74　设一质量为 m 的小车在水平轨道上运动，开始时($t_0=0$)速度为零。忽略摩擦阻力，要求在时刻 $t=t_1$ 时，小车的速度为 v_1，试求控制规律即外力 $F(t)$，使速度误差及控制能量为极小，也即使泛函 $J[F(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\{F^2(t)+a[v_1-v(t)]^2\}\mathrm{d}t$ 取极小值。其中 a 为正的常数。

2.75　在平面应力状态下，线弹性体的应变能为

$$J=\iint_D\left[\frac{E}{2(1-\mu^2)}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y)+\frac{E}{4(1+\mu)}\gamma_{xy}^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中，E、μ 分别是弹性模量和泊松比，$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$ 分别是正应变和剪应变，u、v 分别是 x、y 方向的位移。求证

$$\Delta u+\frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xx}+v_{xy})=0,\Delta v+\frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xy}+v_{yy})=0$$

2.76　写出拉普拉斯方程 $u_{xx}+v_{yy}=0$ 的极坐标形式。

第 3 章　泛函极值的充分条件

第 2 章讨论了具有固定边界条件的变分问题。由泛函取极值的必要条件 $\delta J = 0$ 导出了极值函数所满足的欧拉方程或奥氏方程。正如第 2 章所指出的那样，在极值函数或极值曲线上，泛函并不一定取得极值。本章将在推导出泛函取极值的某些新的必要条件的基础上讨论泛函极值的充分条件。

3.1　极值曲线场

设 $y = y(x,c)$ 为平面区域 D 上的一个单参数曲线族，如果对于区域 D 内的每一点，有且仅有这个曲线族中的一条曲线通过，则该曲线族称为在区域 D 内形成一个**固有曲线场**。或更准确地说，它形成一个**正常场**。曲线族 $y = y(x,c)$ 在区域 D 内任意一点 $A(x,y)$ 处的切线 $p(x,y)$ 称为固有**曲线场**在点 $A(x,y)$ 处的**斜率**。因点 $A(x,y)$ 在固有曲线场中是任取的，这个斜率可以看作是点 $A(x,y)$ 的函数，故斜率 $p(x,y)$ 可称为固有曲线场的**斜率函数**。

例如，在圆 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 内的平行直线 $y = 2x + c$ 形成一个固有曲线场，如图 3 - 1 - 1 所示，这个场的斜率 $p = 2$。再如，抛物线族 $y = (x - a)^2 - 1$ 在上述圆内就不能形成一个固有曲线场，因为在该圆内这族抛物线相交，如图 3 - 1 - 2 所示。

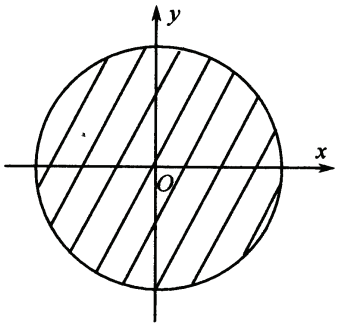


图 3 - 1 - 1　极值曲线场

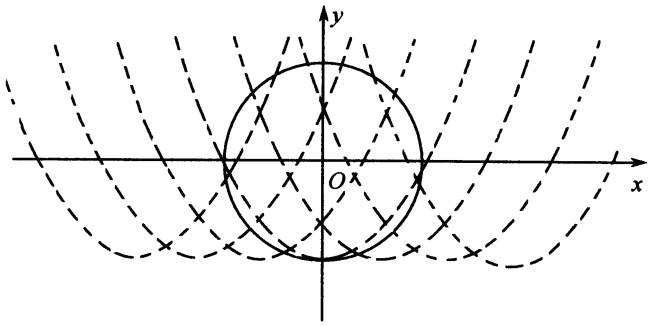


图 3 - 1 - 2　非极值曲线场

如果曲线族 $y = y(x,c)$ 的全部曲线都通过平面区域 D 内某一点 $M(x_c,y_c)$，则该点称为曲线族 $y = y(x,c)$ 的**束心**或**中心**。设 $M(x_c,y_c)$ 为平面区域 D 内某一点，$y = y(x,c)$ 是以 $M(x_c,y_c)$ 为束心的曲线族，该曲线族布满整个区域 D，且除束心 $M(x_c,y_c)$ 外，束中曲线在 D 内没有其他交点，这时曲线族 $y = y(x,c)$ 称为在 D 内形成一个**中心曲线场**。

例 3.1.1　对于正弦曲线族 $y = c\sin x$，可按区域 D 的选取不同，分为三种情况。在区域 $D_1 = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0 < \delta \leqslant x \leqslant a < \pi \\ -\infty < y < +\infty\end{matrix}\right\}$ 内形成一固有曲线场；在区域 $D_2 = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0 \leqslant x \leqslant a < \pi \\ -\infty < y < +\infty\end{matrix}\right\}$ 内形成以原点 $(0,0)$ 为束心的中心曲线场；在区域 $D_3 = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0 \leqslant x \leqslant a_1, a_1 > \pi \\ -\infty < y < +\infty\end{matrix}\right\}$ 内不形成任何曲线场，如图 3 - 1 - 3 所示。

如果固有曲线场或中心曲线场是由泛函的某一变分问题的极值曲线族所形成的，则这个曲线

场称为**极值曲线场或极值曲线中心场**。如果某条极值曲线位于形成固有场(或中心场)的极值曲线族之中,则这条极值曲线称为**被包含在极值曲线场(或极值曲线中心场)中**。

固有曲线场、中心曲线场和极值曲线场都可简称**曲线场**或场。

以上关于场的概念可推广到高维空间的情形。

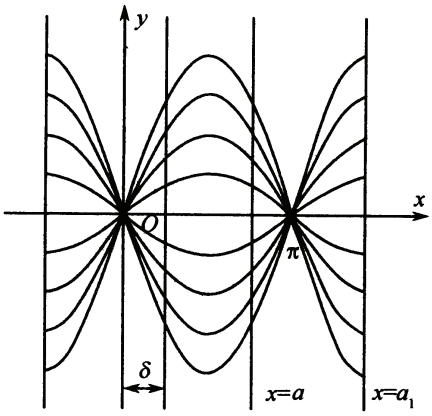


图 3-1-3 $c\sin x$ 曲线

例 3.1.2 试求泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(y'^2-y^2)\mathrm{d}x, y(0)=0, y(x_1)=y_1(x_1<\pi)$ 包含极值曲线 $y=0$ 的极值曲线中心场。

解 由泛函的欧拉方程 $y''+y=0$,,可解得 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$,由边界条件 $y(0)=0$,得 $c_2=0$。所以 $y=c_1\sin x$ 是极值曲线族,它在 $0\leqslant x\leqslant x_1(x_1<\pi)$ 上形成一个中心场,束心为坐标原点(0,0)。由边界条件 $y(x_1)=y_1$,得 $c_1=\dfrac{y_1}{\sin x_1}$,当 $y_1=0$ 时,有 $c_1=0, y=0$,它包含在由极值曲线族 $y=c_1\sin x$ 形成的中心在坐标原点(0,0)的中心场内。如果在本问题中 $x_1\geqslant\pi$,则不存在包含极值曲线 $y=0$ 在内的以坐标原点为束心的极值曲线场。

例 3.1.3 讨论泛函 $J[y]=\int_0^1 y'^2\mathrm{d}x$ 可能形成什么样的场?

解 泛函的极值曲线是直线族 $y=c_1x+c_2$,若 $c_1=0$,则极值曲线族 $y=c_2$ 形成一个正常场,若 $c_2=0$,则极值曲线族 $y=c_1x$ 形成一个中心在坐标原点的中心场。

例 3.1.4 求由泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(y'^2+y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线形成的正常场和中心场,其中 $x_1>0$。

解 由泛函的欧拉方程 $y''-y=0$,可解得 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$ 或 $y=c_1\cosh x+c_2\sinh x$。当 $c_1=0$ 时,$y=c_2\sin x$ 形成一个中心曲线场,当 $c_2=0$ 时,$y=c_1\cosh x$ 形成一个正常场。

3.2 雅可比条件和雅可比方程

考察最简泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{3-2-1}$$

及边界条件

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1 \tag{3-2-2}$$

式中 $F(x,y,y')$ 具有二阶连续偏导数。记边界点为 $A(x_0,y_0)$ 和 $B(x_1,y_1)$。

泛函式(3-2-1)的增量可表示为

$$\Delta J=\delta J+\delta^2 J+\varepsilon_2 \tag{3-2-3}$$

式中 ε_2 是比 $d_1^2(y,y+\delta y)$ 更高阶的无穷小。根据变分的定义可知 $\delta y=\varepsilon\eta(x)$,$\varepsilon$ 是小参数,任意函数 $\eta(x)\in C^2[x_0,x_1]$,$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$。现在讨论泛函式(3-2-1)取得弱极值的充分条件。

泛函式(3-2-1)的二阶变分(定义见 3.6 节)为

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^2+2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}(\delta y')^2]\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon^2}{2}J_2 \tag{3-2-4}$$

式中

$$J_2 = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\mathrm{d}x \tag{3-2-5}$$

由式(3-2-4)可见,二阶变分 $\delta^2 J$ 和 J_2 有相同的符号。

由于式(3-2-4)中的 F_{yy}、$F_{yy'}$ 和 $F_{y'y'}$ 所依赖的 $y(x)$ 和 $y'(x)$ 均可通过解欧拉方程来得到,它们为将极值函数代入后的 x 的已知函数,所以可把 J_2 视为只依赖于 η 的泛函。于是有下述定理:

预备定理 3.2.1 若泛函(3-2-5)取得极值 $\eta = u(x)$,那么

$$\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{3-2-6}$$

式(3-2-6)称为**雅可比配连方程**或**雅可比方程**。如果 $F_{y'y'} \neq 0$,则雅可比方程是关于 u 的二阶线性齐次微分方程。若令

$$S = F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}, R = F_{y'y'} \tag{3-2-7}$$

则雅可比方程(3-2-6)可简写成

$$Su - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ru') = 0 \tag{3-2-8}$$

证 设 $G = G(x,\eta,\eta') = F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2$,则 J_2 的欧拉方程为

$$G_\eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{\eta'} = 0$$

即

$$2F_{yy}\eta + 2F_{yy'}\eta' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2F_{yy'}\eta + 2F_{y'y'}\eta') = 0 \tag{3-2-9}$$

将上式括号内第一项求导并消去公因子 2,且注意到 $\eta = u(x)$,即可得到式(3-2-6)。证毕。

将式(3-2-4)中被积函数的第二项分部积分,并注意到 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$,有

$$\int_{x_0}^{x_1} 2F_{yy'}\eta\eta'\mathrm{d}x = F_{yy'}\eta^2\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1}\eta^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)\mathrm{d}x$$

将上式代入式(3-2-4),得

$$\delta^2 J = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)\eta^2 + F_{y'y'}\eta'^2\right]\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(S\eta^2 + R\eta'^2)\mathrm{d}x \tag{3-2-10}$$

预备定理 3.2.2 若 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$,且 $u = u(x)$ 为方程(3-2-6)的解,它在区间 (x_0,x_1) 内不等于零,则泛函(3-2-5)可写成

$$J_2 = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'}\left(\eta' - \eta\frac{u'}{u}\right)^2\mathrm{d}x \tag{3-2-11}$$

证 由于

$$J_2 = \int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{yy}\eta^2\mathrm{d}x + \eta^2F_{yy'}\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\mathrm{d}x + \eta\eta'F_{yy'}\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'y'}\eta')\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[S\eta^2 - \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(R\eta')\right]\mathrm{d}x$$

由式(3-2-8)可得

$$S = \frac{\mathrm{d}}{u\mathrm{d}x}(Ru')$$

将上式代入上面 J_2 的最后一个积分内，得

$$J_2 = \int_{x_0}^{x_1}\left[\eta^2 \frac{\mathrm{d}}{u\mathrm{d}x}(Ru') - \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(R\eta')\right]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\eta}{u}\left[\eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ru') - u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(R\eta')\right]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\eta}{u} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[R(\eta u' - u\eta')]\mathrm{d}x = \frac{\eta}{u}R(\eta u' - u\eta')\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} R(\eta u' - u\eta') \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\eta}{u}\right)\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} R(\eta u' - u\eta') \frac{\eta' u - \eta u'}{u^2}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} R\left(\eta' - \eta \frac{u'}{u}\right)^2 \mathrm{d}x$$

证毕。

设泛函 $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$，其端点为 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$，$y = y(x)$ 为该泛函的极值函数，若 $u(x)$ 为雅可比方程的解，$u(x_0) = 0$，除 x_0 外，设方程 $u(x) = 0$ 的根为 x^*，则根 x^* 称为 x_0 的**共轭值**，而点 $A_c(x^*, y(x^*))$ 称为极值函数 $y = y(x)$ 上点 A 的**共轭点**。

例 3.2.1 设曲线族 $u = c(x-1)x$，求坐标原点(0,0) 的共轭点。

解 显然，当 $x = 0$ 和 $x = 1$ 时，$u = 0$，可得坐标原点(0,0) 的共轭点是点(1,0)。

例 3.2.2 已知曲线族 $u = c\sinh x$，试判断坐标原点(0,0) 是否有共轭点？

解 因为双曲线只有当 $x = 0$ 时，才能使 $y = 0$，而当 x 取其他任意异于零的值时，都有 $u \neq 0$，故坐标原点(0,0) 没有共轭点。

由于雅可比方程是二阶线性齐次方程，可设它的两个线性无关的特解为 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$，于是其通解为

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \tag{3-2-12}$$

式中 c_1 和 c_2 是任意常数。

由雅可比方程解的条件 $u(x_0) = 0$，得

$$c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) = 0$$

或

$$\frac{u_1(x_0)}{u_2(x_0)} = -\frac{c_2}{c_1}$$

若 x^* 为方程 $u(x) = 0$ 的根，即 x^* 是 $A(x_0, y_0)$ 的共轭点 A_c 的横坐标，则有

$$c_1 u_1(x^*) + c_2 u_2(x^*) = 0$$

于是可得

$$\frac{u_1(x^*)}{u_2(x^*)} = \frac{u_1(x_0)}{u_2(x_0)} \tag{3-2-13}$$

当端点 $B(x_1, y_1)$ 介于 A 和 A_c 之间时，有

$$u(x_0) = \eta(x_0) = 0, u(x_1) \neq 0, \eta(x_1) = 0$$

由此可见，$u(x)$ 与 $\eta(x)$ 在两端点 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$ 之间的极值函数 $y = y(x)$ 上不能达到处处成比例，也即 $\eta' - \eta \frac{u'}{u} \neq 0$，故必有

$$\left(\eta' - \eta \frac{u'}{u}\right)^2 > 0 \tag{3-2-14}$$

式(3-2-9) 可化为二阶常微分方程

$$\eta'' + p(x)\eta' + q(x)\eta = 0 \tag{3-2-15}$$

的形式。若 $\eta' = 0$，则方程(3-2-15) 只有 $\eta = 0$ 的唯一解。为了使式(3-2-9) 有非零解，可设它

满足边界条件 $\eta(x_0)=0,\eta'(x_0)\neq 0$。此时,雅可比方程满足条件 $u(x_0)$ 的任何解 $u(x)$ 与满足边界条件

$$u(x_0)=0,u'(x_0)=1 \tag{3-2-16}$$

的解只差一个常数因子。于是仅需求满足边界条件(3-2-16)的解 $\eta=u(x)$ 即可。

设 $\eta=u(x)$ 是雅可比方程(3-2-8)满足边界条件(3-2-16)的解,如果 $u(x)$ 在半开区间 $[x_0,x_1)$ 上除点 x_0 之外没有其他零点,则泛函(3-2-1)的极值函数 $y=y(x)$ 称为在开区间 (x_0,x_1) 内满足**雅可比条件**。雅可比于1837年建立了该条件。如果 $u(x)$ 在闭区间 $[x_0,x_1]$ 上除点 x_0 之外没有其他零点,则泛函(3-2-1)的极值函数 $y=y(x)$ 称为在半开区间 $(x_0,x_1]$ 内满足**雅可比强条件**。

雅可比方程的解可以从欧拉方程的通解得出。设 $y=y(x,c_1,c_2)$ 为欧拉方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0 \tag{3-2-17}$$

的通解,则有

$$F_y=F_y(x,y(x,c_1,c_2),y'(x,c_1,c_2)) \tag{3-2-18}$$

$$F_{y'}=F_{y'}(x,y(x,c_1,c_2),y'(x,c_1,c_2)) \tag{3-2-19}$$

将式(3-2-17)对 c_1 求偏导数,得

$$\frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_1}+\frac{\partial F_y}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_1}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c_1}\right)=0$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial y}{\partial c_1}=\frac{\partial}{\partial c_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial y'}{\partial c_1}$$

故

$$F_{yy}\frac{\partial y}{\partial c_1}+F_{yy'}\frac{\partial y'}{\partial c_1}-\frac{\mathrm{d}F_{y'y}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial y}{\partial c_1}-F_{y'y}\frac{\partial y'}{\partial c_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\frac{\partial y'}{\partial c_1}\right)=0$$

由于 $F\in C^2$,故 $F_{yy'}=F_{y'y}$ 上式化简得

$$\left(F_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'y}\right)\frac{\partial y}{\partial c_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\frac{\partial y'}{\partial c_1}\right)=0 \tag{3-2-20}$$

将式(3-2-20)与式(3-2-6)作以比较,可知 $\frac{\partial y}{\partial c_1}$ 是式(3-2-6)的一个解。

同理可求得 $\frac{\partial y}{\partial c_2}$ 也是式(3-2-6)的一个解,并且 $\frac{\partial y}{\partial c_1}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial c_2}$ 线性无关。于是雅可比方程的通解可表示为

$$u=d_1\frac{\partial y}{\partial c_1}+d_2\frac{\partial y}{\partial c_2} \tag{3-2-21}$$

由此可以得到两种求雅可比方程通解的方法,一种方法是按式(3-2-6)所定义的雅可比方程来求解,另一种方法是先求出泛函极值曲线的通解,再按式(3-2-21)求出雅可比方程的通解。

点 $A(x_0,y_0)$ 的共轭点横坐标 x^* 满足式(3-2-13),利用上式,可写成

$$\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_1}\\ \frac{\partial y}{\partial c_2} & \frac{\partial y}{\partial c_2}\end{vmatrix}\right|_{x=x^*}=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_1}\\ \frac{\partial y}{\partial c_2} & \frac{\partial y}{\partial c_2}\end{vmatrix}\right|_{x=x_0} \tag{3-2-22}$$

例 3.2.3 考察过 $A(0,0)$ 和 $B(x_1,0)$ 两点的泛函

$$J[y]=\int_0^{x_1}(y'^2-y^2)\mathrm{d}x$$

的极值曲线是否满足雅可比条件。

解 $F=y'^2-y^2$。雅可比方程可写为

$$-2u(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[2u'(x)]=0$$

或

$$u''+u=0$$

解得

$$u=d_1\sin x+d_2\cos x$$

由例 3.1.4 可知，泛函的欧拉方程的通解为 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$，由式(3-2-21)也可得

$$u=d_1\frac{\partial y}{\partial c_1}+d_2\frac{\partial y}{\partial c_2}=d_1\sin x+d_2\cos x$$

由 $u(0)=0$，可得 $d_2=0$，于是有

$$u=d_1\sin x$$

它除在 $x=0$ 处等于零外，在点 $x=k\pi(k=1,2,\cdots)$ 也等于零。由此可知：

(1) 若 $0<x_1<\pi$，则当 $0<x\leqslant x_1$ 时，$u(x)\neq 0$，极值曲线 $y=c_1\sin x$ 满足雅可比条件。

(2) 若 $x_1\geqslant\pi$，则当 $0<x\leqslant x_1$ 时，$u(x)=0$ 至少有一根 $x=\pi$，极值曲线 $y=c_1\sin x$ 不满足雅可比条件。

例 3.2.4 考察过 $A(0,0)$ 和 $B(x_1,0)$ 两点的泛函

$$J[y]=\int_0^{x_1}[y'^2+k^2y^2+f(x)]\mathrm{d}x$$

的极值曲线是否满足雅可比条件，式中 $f(x)$ 为 x 的已知函数。

解 $F=y'^2+k^2y^2+f(x)$。雅可比方程为

$$u''(x)-k^2u(x)=0$$

其通解为

$$u(x)=d_1\sinh kx+d_2\cosh kx$$

由左端点条件 $A(0,0)$，可求得 $d_2=0$，于是 $u(x)=d_1\sinh kx$，即雅可比方程的解只有一个零点。对于任何不为零的 x_1 值，雅可比条件都成立。

3.3 魏尔斯特拉斯函数与魏尔斯特拉斯条件

设最简泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{3-3-1}$$

其边界条件为

$$y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1 \tag{3-3-2}$$

式中 $F(x,y,y')$ 具有二阶连续偏导数。记边界点为 $A(x_0,y_0)$ 和 $B(x_1,y_1)$。

设 C 是泛函(3-3-1)并通过式(3-3-2)两固定点 $A(x_0,y_0)$ 和 $B(x_1,y_1)$ 的极值曲线，其方程为 $y=y(x)$。若想知道在极值曲线 C 取得的极值是极大值还是极小值，需要考察该泛函在与极值曲线 C 邻近的容许曲线上的值。当极值曲线过渡到与 C 邻近的可取曲线 $\bar{C}$ 时，泛函 $J[y(x)]$ 的增量为

$$\Delta J = \int_{\overline{C}} F(x,y,y')\mathrm{d}x - \int_{C} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{3-3-3}$$

式中记号$\int_{\overline{C}} F(x,y,y')\mathrm{d}x$和$\int_{C} F(x,y,y')\mathrm{d}x$分别表示泛函$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x$通过两固定点$A(x_0, y_0)$和$B(x_1, y_1)$沿可取曲线$\overline{C}$和极值曲线$C$所得到的值。

为了确定ΔJ的符号，引入一个辅助泛函

$$H[\overline{C}] = \int_{\overline{C}} [F(x,y,p) + (y' - p)F_p(x,y,p)]\mathrm{d}x \tag{3-3-4}$$

式(3-3-4)称为**希尔伯特不变积分**。它是希尔伯特于1900年提出来的。式中$p = p(x,y)$为极值曲线场在所考查的点(x,y)处的斜率，而y'为沿可取曲线$\overline{C}$的斜率。这里应注意y'和p的差别，当A、B两点固定时，过点(x,y)的极值曲线一般只能有一条，过该点的极值曲线的斜率一般也只能有一个，这就是极值曲线场的斜率p，而过点(x,y)的可取曲线$\overline{C}$可以取任意条，相应地，在该点处的斜率y'也可以有任意个，这两者是不同的。

辅助泛函(3-3-4)有如下两个性质：

(1) 当取曲线$\overline{C}$为C时，由于有$y' = p(x,y)$，故辅助泛函成为C极值曲线所对应的泛函$\int_{C} F(x,y,y')\mathrm{d}x$。

(2) 它是某一函数的全微分的积分。

现在证明第二个性质。

证 辅助泛函可改写成以下形式

$$H[\overline{C}] = \int_{\overline{C}} \{[F(x,y,p) - pF_p(x,y,p)]\mathrm{d}x + F_p(x,y,p)\mathrm{d}y\}$$

设$M = F(x,y,p) - pF_p(x,y,p)$，$N = F_p(x,y,p)$。因为

$$M_y = F_y + F_p p_y - p_y F_p - p(F_{py} + F_{pp}p_y) = F_y - p(F_{py} + F_{pp}p_y), N_x = F_{px} + F_{pp}p_x$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p_x + p_y y' = p_x + pp_y, y' = p, y'' = p_x + p_y y' = p_x + pp_y$$

故

$$M_y - N_x = F_y - p(F_{py} + F_{pp}p_y) - F_{px} - F_{pp}p_x =$$

$$F_y - pF_{py} - F_{px} - F_{pp}(pp_y + p_x) =$$

$$F_y - pF_{py} - F_{px} - F_{pp}y'' = F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p$$

注意偏导数N_x中不含$F_{py}y_x$和$F_{pp}p_y y_x$这两项，否则就成为对x的全导数了。

因为极值曲线场的斜率$p(x,y)$就是欧拉方程的积分曲线的切线，所以在所讨论的场内，x，y，$p(x,y)$，满足欧拉方程，即有

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - F_p \equiv 0$$

这就证明了所作辅助泛函的被积函数是某一函数的全微分。同时也表明该积分与积分路径无关。证毕。

由于希尔伯特不变积分式(3-3-4)与积分路径无关，故无论是否$\overline{C} = C$，都有

$$H[\overline{C}] = \int_{\overline{C}} [F(x,y,p) + (y' - p)F_p(x,y,p)]\mathrm{d}x = \int_{C} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{3-3-5}$$

由此可见，希尔伯特不变积分是泛函沿极值曲线取值的另一种表示形式。

将式(3-3-5)代入式(3-3-3),泛函 $J[y(x)]$ 的增量可写成如下形式

$$\Delta J = \int_{\overline{C}} F(x,y,y')\mathrm{d}x - \int_{C} F(x,y,y')\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\overline{C}} F(x,y,y')\mathrm{d}x - \int_{\overline{C}} [F(x,y,p) + (y'-p)F_p(x,y,p)]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\overline{C}} [F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F_p(x,y,p)]\mathrm{d}x \tag{3-3-6}$$

式(3-3-6)的被积函数称为泛函式(3-3-1)的**魏尔斯特拉斯函数**或 E **函数**,记作 $E(x,y,y',p)$,即

$$E(x,y,y',p) = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F_p(x,y,p) \tag{3-3-7}$$

为了便于计算,有时需要对 E 函数加以变形,例如,令 $y' = p + u$,则有

$$E(x,y,p+u) = F(x,y,p+u) - F(x,y,p) - uF_p(x,y,p) \tag{3-3-8}$$

若将式(3-3-8)中的 p 换成 y',则有

$$E(x,y,y'+u) = F(x,y,y'+u) - F(x,y,y') - uF_{y'}(x,y,y') \tag{3-3-9}$$

将 E 函数代入泛函增量的表达式,有

$$\Delta J = \int_{\overline{C}} E(x,y,y',p)\mathrm{d}x \tag{3-3-10}$$

由此可见,泛函增量的符号与 E 函数的符号一致。E 函数的符号就是判断泛函极值的充分条件,即当 E 函数大于零时,泛函取极小值,E 函数小于零时,泛函取极大值。在魏尔斯特拉斯提出 E 函数以前变分问题所得到的结果通常称为**变分法的古典理论**或**古典变分法**。古典变分法研究的是定义域内的泛函的极值。

当 $y = y(x)$ 是极值曲线时,$y' = p$,此时 $E = 0$。

设 $y = y(x)$ 是泛函式(3-3-1)满足边界条件(3-3-2)的极值曲线。如果对于该极值曲线近旁的所有的点 (x,y) 和近于极值曲线场斜率函数 $p(x,y)$ 的 y' 值,有

$$E(x,y,y',p) \geqslant 0(\text{或} \leqslant 0) \tag{3-3-11}$$

则式(3-3-11)称为**魏尔斯特拉斯弱条件**。

如果对于该极值曲线近旁的所有的点 (x,y) 和任意的 y' 值,式(3-3-11)都成立,则该式称为**魏尔斯特拉斯强条件**。

魏尔斯特拉斯弱条件和强条件统称**魏尔斯特拉斯条件**。

例 3.3.1 求泛函

$$J[y] = \int_0^{x_1} y'^3\mathrm{d}x, y(0) = 0, y(x_1) = y_1, x_1 > 0, y_1 > 0$$

的魏尔斯特拉斯函数,并讨论魏尔斯特拉斯条件是否成立。

解 本题中泛函的欧拉方程为 $y'' = 0$。满足边界条件的极值曲线为

$$y = \frac{y_1}{x_1}x$$

又所给泛函的雅可比方程是 $u'' = 0$,其通解是

$$u = c_1 x + c_2$$

由雅可比方程的边界条件 $u(0) = 0, u'(0) = 1$,得 $c_1 = 1, c_2 = 0$,故

$$u = x$$

显然当 $0 < x < x_1$ 时,$u = x \neq 0$,故极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 满足雅可比条件。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E(x,y,y',p) = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = 2(y' - p)^2\left(p + \frac{y'}{2}\right)$$

在极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 上，场的斜率 $p = \frac{y_1}{x_1} > 0$。若 y' 取近于 $p = \frac{y_1}{x_1}$ 的值，则有 $E \geqslant 0$，即魏尔斯特拉斯弱条件成立。但若 y' 取任意的值，因这时 $p + \frac{y'}{2}$ 有任意的符号，E 不能保持固定的符号，所以魏尔斯特拉斯条件不成立。

3.4 勒让德条件

对于一个给定的最简泛函，要检验魏尔斯特拉斯条件是否成立，一般情况下比较困难。所以希望能用一个比较简单的条件来代替魏尔斯特拉斯条件。

设最简泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{3-4-1}$$

其边界条件为

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \tag{3-4-2}$$

式中，被积函数 $F(x,y,y')$ 具有连续二阶偏导数。将被积函数 $F(x,y,y')$ 关于变元 y' 在 $y' = p$ 处展成泰勒公式

$$F(x,y,y') = F(x,y,p) + F_{y'}(x,y,p)(y' - p) + F_{y'y'}(x,y,q)\frac{(y' - p)^2}{2!} \tag{3-4-3}$$

式中，q 介于 p 和 y' 之间。

将式(3-4-3)代入魏尔斯特拉斯函数 $E(x,y,y',p)$ 中，得

$$E(x,y,y'p) = F(x,y,p) + F_{y'}(x,y,p)(y' - p) + F_{y'y'}(x,y,q)\frac{(y' - p)^2}{2!} - F(x,y,p) - (y' - p)F_p(x,y,p) \tag{3-4-4}$$

因 $F_{y'}(x,y,p) = F_{y'}(x,y,y')\big|_{y'=p} = F_p(x,y,p)$，故式(3-4-4)成为

$$E(x,y,y',p) = \frac{(y' - p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q) \tag{3-4-5}$$

可见 $E(x,y,y',p)$ 与 $F_{y'y'}(x,y,q)$ 具有相同的符号，故魏尔斯特拉斯条件可用下面的条件来代替

$$F_{y'y'}(x,y,q) \geqslant 0(\text{或} \leqslant 0) \tag{3-4-6}$$

式(3-4-6)是勒让德于1786年通过研究二次变分提出来的，称为泛函式(3-4-1)的**勒让德条件**。如果式(3-4-6)是严格的不等式，则称为**勒让德强条件**。勒让德条件也是泛函取得极值的必要条件。泛函的一条极值曲线包含在极值曲线场中的充分条件是必须满足勒让德强条件。

预备定理 3.4.1 设泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x$，其边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$，其中 $F(x,y,y')$ 具有连续二阶偏导数，并设 $y = y(x)$ 为该泛函的极值函数，若满足下列条件：

(1) $u(x)$ 为雅可比方程的解，且 $u(x) \neq 0, x \in (x_0,x_1)$；

(2) x 在区间 $[x_0,x_1]$ 内有 $\eta' - \eta\frac{u'}{u} \neq 0$；

(3) $F_{y'y'}$ 在区间$[x_0,x_1]$内不变号；

那么

当 $F_{y'y'}>0$ 时，$J[y]$ 为弱极小值；当 $F_{y'y'}<0$ 时，$J[y]$ 为弱极大值。

证 由于泛函取得极值，可得 $\delta J=0$，又由式(3-2-3)、式(3-2-4)和式(3-2-10)，得

$$\Delta J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\left(\eta'-\eta\frac{u'}{u}\right)^2\mathrm{d}x+\varepsilon_2 \tag{3-4-7}$$

式中 ε_2 是比 $d_1^2(y,y+\varepsilon\eta)$ 更高阶的无穷小。

在式(3-4-7)中，由条件(2)、(3)可知，当一级距离 $d_1(y,y+\varepsilon\eta)$ 足够小时，ΔJ 与 $F_{y'y'}$ 同号，于是

当 $F_{y'y'}>0$ 时，$\Delta J>0$，$J[y]$ 为弱极小值；当 $F_{y'y'}<0$ 时，$\Delta J<0$，$J[y]$ 为弱极大值。证毕。

例 3.4.1 试判断泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}x^2(1-y'^2)\mathrm{d}x,y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1,0\leqslant x_0<x_1$ 的勒让德条件是否成立。

解 $F(x,y,y')=x^2(1-y'^2)$，$F_{y'y'}=-2x^2$。当 $x_0=0$ 时，勒让德条件成立。当 $x_0>0$ 时，勒让德强条件成立。

例 3.4.2 设泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(6y'^2-y'^4)\mathrm{d}x,y(0)=0,y(x_1)=y_1,x_1>0,y_1>0$。试判断该泛函的极值曲线是否能包含在一个相应的极值曲线场中。

解 因泛函只是 y' 的函数，故其欧拉方程为 $y=c_1x+c_2$，由边界条件得 $c_2=0,c_1=\frac{y_1}{x_1}$，于是极值曲线为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，相应的极值曲线场为 $y=cx$。此时，勒让德强条件为

$$F_{y'y'}=12(1-y'^2)>0$$

若使勒让德条件成立，应有 $1-y'^2=1-\frac{y_1^2}{x_1^2}>0$，即只有当 $y_1<x_1$ 时，极值曲线才能包含在 $y=cx$ 的极值曲线场中。

3.5 泛函极值的充分条件

有了上面的雅可比条件、魏尔斯特拉斯条件和勒让德条件以及极值曲线场、斜率函数和 E 函数等概念，就可以建立泛函极值的充分条件。

3.5.1 魏尔斯特拉斯充分条件

定理 3.5.1 如果曲线$(y=y(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 是泛函(3-2-1)满足边界条件(3-2-2)的极值曲线，且该极值曲线可以包含在极值曲线场中或满足雅可比条件，对于充分接近极值曲线 $y=y(x)$ 的所有点(x,y) 以及接近于极值曲线场的斜率函数 $p(x,y)$ 的 y' 值，魏尔斯特拉斯条件成立，即 E 函数不改变符号；则满足边界条件(3-2-2)的泛函式(3-2-1)在极值曲线 $y=y(x)$ 上取得弱极值。当 $E\geqslant0$ 时，取得弱极小值；当 $E\leqslant0$ 时取得弱极大值。

证 根据式(3-3-10)，泛函 $J[y(x)]$ 在极值曲线 $y=(x)$ 上的增量可表示为

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1}E(x,y,y',p)\mathrm{d}x$$

由上式可知，若 $E(x,y,y',p)\geqslant0$(或$\leqslant0$)，则 $\Delta J\geqslant0$(或$\leqslant0$)。故由弱极小值(或弱极大值)

的定义，即得证。证毕。

定理3.5.2 如果曲线 $y = y(x)(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ 是泛函(3-2-1)满足边界条件(3-2-2)的极值曲线，且该极值曲线包含在极值曲线场中或满足雅可比条件，对于极值曲线 $y = y(x)$ 近旁的所有点 (x,y) 以及任意的 y' 值，魏尔斯特拉斯条件成立，即 E 函数不改变符号；则满足边界条件(3-2-2)的泛函(3-2-1)在极值曲线 $y = y(x)$ 上取得强极值。当 $E \geqslant 0$ 时，取得强极小值；当 $E \leqslant 0$ 时，取得强极大值。

证 根据式(3-3-10)，泛函 $J[y(x)]$ 在极值曲线 $y = (x)$ 上的增量可表示为

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} E(x,y,y',p)\mathrm{d}x$$

由上式可知，若 $E(x,y,y',p) \geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)，则 $\Delta J \geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)。故由强极小值(或强极大值)的定义，即得证。证毕。

注意：定理3.5.1和定理3.5.2中的三项条件不仅是泛函取极值的充分条件，而且也是必要条件。这两个定理可各拆成两个定理。

定理3.5.3 如果曲线 $y = y(x)(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ 是泛函(3-2-1)满足边界条件(3-2-2)的极值曲线，且该极值曲线包含在区域为 D 极值曲线场中，在 D 内对于极值函数 $p = p(x,y)$ 以及任意的 y' 值，魏尔斯特拉斯条件成立，即 E 函数不改变符号；则满足边界条件(3-2-2)的泛函式(3-2-1)在极值曲线 $y = y(x)$ 上取得绝对极值。当 $E \geqslant 0$ 时，取得绝对极小值；当 $E \leqslant 0$ 时取得绝对极大值。

证 根据式(3-3-10)，泛函 $J[y(x)]$ 在极值曲线 $y = (x)$ 上的增量可表示为

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} E(x,y,y',p)\mathrm{d}x$$

由上式可知，若 $E(x,y,y',p) \geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)，则 $\Delta J \geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)。故由绝对极小值(或强极大值)的定义，即得证。证毕。

例3.5.1 讨论泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^3 + ay')\mathrm{d}x$ 的极值情况，其中 a 为任一实数，边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = 1$。

解 由于被积函数只是 y' 的函数，故欧拉方程的通解为 $y = c_1x + c_2$。由边界条件 $y(0) = 0$，$y(1) = 1$，可解得 $c_2 = 0, c_1 = 1$，故极值曲线为 $y = x$。$y = cx$ 在闭区间[0,1]上的极值曲线形成以(0,0)为中心的中心场，且 $y = x$ 位于该极值曲线场之内。在这条极值曲线上，场的斜率 $p = 1$。魏尔斯特拉斯函数为

$$E = y'^3 + ay' - (p^3 + ap) - (y' - p)(3p^2 + a) = (y' - p)^2(y' + 2p)$$

若 y' 在 p 附近取值，则 $E \geqslant 0$，根据定理3.5.1，泛函可在极值曲线 $y = x$ 上取得弱极小值。若 y' 取任意值，则 $(y' + 2p)$ 可以有任意符号，即 E 函数不能保持固定的符号，故强极值的充分条件得不到满足。又这个充分条件也是必要的。因此在极值曲线 $y = x$ 上，泛函不能取得强极值。

例3.5.2 判定泛函 $J[y] = \int_0^1 \mathrm{e}^x\left(y^2 + \frac{1}{2}y'^2\right)\mathrm{d}x$ 是否存在极值。边界条件为 $y(0) = 1$，$y(1) = \mathrm{e}$。

解 泛函的欧拉方程为

$$2\mathrm{e}^x y - \mathrm{e}^x y' - \mathrm{e}^x y'' = 0$$

或

$$y'' + y' - 2y = 0$$

方程的通解为 $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x}$，由边界条件 $y(0) = 1, y(1) = \mathrm{e}$，可得 $c_1 = 1, c_2 = 0$，于是，

泛函的极值曲线为 $y = e^x$。它包含在 $y = ce^x$ 的极值曲线场内。魏尔斯特拉斯函数为

$$E = e^x\left(y^2 + \frac{1}{2}y'^2\right) - e^x\left(y^2 + \frac{1}{2}p^2\right) - (y' - p)e^x p = \frac{1}{2}e^x(y' - p)^2$$

由此可见，对于任意的 y'，有 $E \geqslant 0$。根据定理3.5.2，泛函在极值曲线 $y = e^x$ 上取得强极小值。

例 3.5.3 判定泛函 $J[y] = \int_0^1 e^y y'^2 dx$ 是否存在极值。边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = \ln 4$。

解 因被积函数不含 x，故泛函的欧拉方程的首次积分为

$$e^y y'^2 - 2e^y y'^2 = -c^2$$

或

$$e^{\frac{y}{2}} dy = c dx$$

积分，得

$$e^{\frac{y}{2}} = c_1 x + c_2$$

两端取对数，有

$$y = 2\ln(c_1 x + c_2)$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = \ln 4$，得 $c_1 = c_2 = 1$，故极值曲线为

$$y = 2\ln(x + 1)$$

它包含在 $y = 2\ln(cx + 1)$ 的极值曲线中心场内。魏尔斯特拉斯函数为

$$E = e^y y'^2 - e^y p^2 - (y' - p)2e^y p = e^y(y' - p)^2$$

由此可见，对于任意的 y'，有 $E \geqslant 0$。根据定理 3.5.2，泛函在极值曲线 $y = 2\ln(x + 1)$ 上取得强极小值。

例 3.5.4 设泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + yy'^3) dx, y(0) = 0, y(1) = 0$。试讨论它的极值情况。

解 因 $F = y'^2 + yy'^3$ 不含 x，故泛函的欧拉方程有首次积分

$$y'^2 + yy'^3 - y'(2y' + 3yy'^2) = -c$$

或

$$y'^2(1 + 2yy') = c$$

解得

$$y = c_1 x + c_2$$

$$y^2 = c_3 x + c_4$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = 0$，得 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$。故 $y = 0$。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = (y' + u)^2 + y(y' + u)^3 - (y'^2 + yy'^3) - u(2y' + 3yy'^2) = u^2 \geqslant 0$$

虽然 $E \geqslant 0$，但由于极值曲线 $y = 0$ 不满足雅可比强条件，故泛函在 $y = 0$ 上只能取得弱极小值。

从这个例子可知，在极值曲线上，对任意的 y'，即使魏尔斯特拉斯函数 $E \geqslant 0$，也不一定能得出强极值存在的结论。

例 3.5.5 设泛函 $J[y] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 6y^2 + 12y) dx$，边界条件为 $y(1) = 0, y(2) = 3$。试讨论它的极值情况。

解 $F = x^2 y'^2 + 6y^2 + 12y$，泛函的欧拉方程为

$$12y + 12 - 4xy' - 2x^2 y'' = 0$$

作置换 $x = e^t$,原方程化为

$$D(D-1)y + 2Dy - 6y = 6$$

式中 D 表示对 t 的求导运算。上式的特征方程为

$$r(r-1) + 2r - 6 = 0$$

解出两个根 $r_1 = 2, r_2 = -3$,得余函数

$$Y = c_1 e^{2t} + c_2 c^{-3t} = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^3}$$

设特解的形式为

$$y^* = b$$

代入原方程中得则有 $b = -1$。于是方程的通解为

$$y = Y + y^* = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^3} - 1$$

由边界条件 $y(1) = 0, y(2) = 3$,可解出 $c_1 = 1, c_2 = 0$,故

$$y = x^2 - 1$$

雅可比方程的通解为

$$u = d_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + d_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} = d_1 x^2 + \frac{d_2}{x^3}$$

由边界条件 $u(1) = 0, u'(1) = 1$,可解出,$d_1 = \frac{1}{5}, d_2 = -\frac{1}{5}$,故雅可比方程的解为

$$u = \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)$$

由此可见,因 u 除了在点 $x_0 = 1$ 处之外没有其他零点,所以泛函的极值函数满足雅可比强条件。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = x^2(y'^2 - p^2) - (y' - p)2x^2 p = x^2(y' - p)^2 > 0$$

于是在极值曲线 $y = x^2 - 1$ 上,泛函 $J[y]$ 取得强极小值。

3.5.2 勒让德充分条件

定理 3.5.4 如果曲线 $y = y(x)(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ 是泛函(3-2-1)满足边界条件(3-2-2)的极值曲线,且满足雅可比条件,在极值曲线 $y = y(x)$ 上,勒让德条件成立,即 $F_{y'y'}(x, y, y')$ 不改变符号;则满足固定边界条件(3-2-2)的泛函式(3-2-1)在极值曲线 $y = y(x)$ 上取得弱极值。当 $F_{y'y'} > 0$ 时,取得弱极小值;当 $F_{y'y'} < 0$ 时取得弱极大值。

证 根据式(3-3-7)和式(3-4-5),泛函 $J[y(x)]$ 在极值曲线 $y = (x)$ 上的增量可表示为

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, y', p)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)\mathrm{d}x$$

式中 q 介于 p 和 y' 之间。因假设在极值曲线 $y = y(x)$ 上,$F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ 于是由泛函的连续性可知,对于与极值曲线 $y = y(x)$ 相邻的点及与斜率函数 p 相近的值 y',有 $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$,从而 $\Delta J \neq 0$。且当 $F_{y'y'} > 0$ 时,$\Delta J > 0$;当 $F_{y'y'} < 0$ 时,$\Delta J < 0$。故由弱极小值(或弱极大值)的定义,定理得证。证毕。

定理 3.5.5 如果曲线 $y = (x)(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ 是泛函式(3-2-1)满足边界条件(3-2-2)的极值曲线,且满足雅可比条件,对于极值曲线 $y = (x)$ 某个零阶邻域内的所有点 (x, y) 及任意的值 y',勒让德条件成立,即 $F_{y'y'}(x, y, q)$ 不改变符号,且函数 $F(x, y, y')$ 在 $y' = p$ 处的一阶泰勒公

式成立;则满足固定边界条件(3-2-2)的泛函(3-2-1)在极值曲线 $y=(x)$ 上取得强极值。当 $F_{y'y'}(x,y,q)\geqslant 0$ 时,取得强极小值;当 $F_{y'y'}(x,y,q)\leqslant 0$ 时,取得强极大值。

证 根据所给条件,对于任意的 y',有

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)F_p(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q)$$

式中 q 介于介于 p 和 y' 之间。将上式代入 E 函数中,得

$$E(x,y,y',p)=\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q)$$

于是,泛函 $J[y(x)]$ 在极值曲线 $y=(x)$ 上的增量可表示为

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q)\mathrm{d}x$$

由假设 $F_{y'y'}(x,y,q)$ 在极值曲线 $y=y(x)$ 零阶邻域的点及任意的 y' 不变号,因此 ΔJ 也不变号。当 $F_{y'y'}(x,y,q)\geqslant 0$ 时,$\Delta J\geqslant 0$,即泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 上取得强极小值;当 $F_{y'y'}(x,y,q)\leqslant 0$ 时,$\Delta J\leqslant 0$,即泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 上取得强极大值。证毕。

上述泛函取得极值充分条件的定理,可以推广到含有多个未知函数的泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \tag{3-5-1}$$

中去。此时,固定边界条件为

$$y_i(x_0)=y_{i0},y_i(x_1)=y_{i1}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{3-5-2}$$

勒让德强条件为

$$F_{y_1'y_1'}>0,\begin{vmatrix}F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'}\\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'}\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \cdots & F_{y_1'y_n'}\\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \cdots & F_{y_2'y_n'}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \cdots & F_{y_n'y_n'}\end{vmatrix}>0 \tag{3-5-3}$$

E 函数为

$$E=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')-F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,p_1',p_2',\cdots,p_n')-\sum_{i=1}^{n}(y_i'-p_i)F_{p_i}(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,p_1',p_2',\cdots,p_n') \tag{3-5-4}$$

式中 $p_i=\dfrac{\partial y_i}{\partial x}(i=1,2,\cdots,n)$ 为点 (x,y_i) 处的斜率函数。

在上述问题中,雅可比强条件要求在闭区间 $[x_0,x_1]$ 内不包含点 x_0 的共轭点。把勒让德强条件(3-5-3)与雅可比强条件相结合,可知泛函式(3-5-1)至少存在一个弱极小值。如果把勒让德强条件(3-5-3)中的不等式符号改变一下方向,则泛函式(3-5-1)至少可得到一个弱极大值。

例 3.5.6 讨论泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$ 的极值,边界条件为 $y(0)=0,y(x_1)=y_1$。

解 这是最速降线问题。可求得满足边界条件 $y(0)=0$ 的极值曲线族是摆线

$$\begin{cases}x=\dfrac{c}{2}(\theta-\sin\theta)\\ y=\dfrac{c}{2}(1-\cos\theta)\end{cases}$$

式中常数 c 可由另一边界条件 $y(x_1)=y_1$ 确定,设 $c=2a$,则满足给定边界条件的极值曲线为

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

当 $0 < x_1 < 2\pi a$ 时，上述摆线束形成以点(0,0)为中心的极值曲线场，且包含满足两个给定边界条件的极值曲线在内，即雅可比条件成立。又对于任意的 y' 值，都有

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

因此，当 $0 < x_1 < 2\pi a$ 时，在摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

上，所给泛函取得强极小值。

例 3.5.7 设泛函 $J[y] = \int_0^2 (e^{y'} + a)dx$，其中 a 为任意实常数，边界条件为 $y(0) = 1, y(2) = 3$。试讨论它的极值情况。

解 由于泛函的被积函数只是 y' 的函数，故极值曲线是直线族 $y = c_1x + c_2$，符合边界条件的极值曲线为 $y = x + 1$，它能包含在极值曲线族 $y = c_1x + c_2$ 的极值曲线场内。对于任意的 y' 值，都有 $F_{y'y'} = e^{y'} > 0$，由此可知，泛函在极值曲线 $y = x + 1$ 上取得强极小值。

例 3.5.8 用勒让德条件判别泛函 $J[y] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3)dx$ 是否有极值，边界条件为 $y(1) = 0, y(2) = 1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$-2y'^3 - 4y'^3 - 12xy'^2y'' + 6y'^3 + 12yy'y'' = 0$$

化简得

$$y'' = 0$$

欧拉方程的解为 $y = c_1x + c_2$，符合边界条件的解为 $y = x - 1$，在这条极值曲线上，场的斜率 $p = 1$。该极值曲线只有一个零点，符合雅可比条件。利用勒让德条件，有

$$F_{y'y'} = 12xy'^2 - 12yy' = 12(x - y) = 12 > 0$$

于是泛函在极值曲线 $y = x - 1$ 可取得弱极值。

例 3.5.9 用勒让德条件判别泛函 $J[y] = \int_0^{x_1} (1 - e^{-y'^2})dx$ 是否有极值，其中 $x_1 > 0$，边界条件为 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$。

解 因泛函的被积函数只是 y' 的函数，故欧拉方程的解为 $y = c_1x + c_2$，符合边界条件的解为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$，在这条极值曲线上，场的斜率 $p = \frac{y_1}{x_1}$。它只有一个零点，符合雅可比条件。利用勒让德条件，有

$$F_{y'y'} = 4y'^2e^{-y'^2} - 2e^{-y'^2} = 2e^{-y'^2}(2y'^2 - 1) = e^{-y'^2}\left(2\frac{y_1^2}{x_1^2} - 1\right)$$

若 $|y_1| > \frac{\sqrt{2}x_1}{2}$，则 $F_{y'y'} > 0$，泛函在极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 上取得弱极小值。若 $|y_1| < \frac{\sqrt{2}x_1}{2}$，则 $F_{y'y'} < 0$，泛函在极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 上取得弱极大值。若 $|y_1| = \frac{\sqrt{2}x_1}{2}$，则 $F_{y'y'} = 0$，泛函在极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 上不能取得极值。

例 3.5.10 设泛函 $J[y] = \int_0^1 yy'^2dx, y(0) = p > 0, y(1) = q > 0$。试讨论其极值情况。

解 因被积函数不含 x，故欧拉方程的首次积分为

$$yy'^2 = c^2$$

或

$$y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = c\mathrm{d}x$$

积分得

$$y^{\frac{3}{2}} = c_1x + c_2$$

由边界条件 $y(0) = p > 0, y(1) = q > 0$,得,$c_2 = p^{\frac{3}{2}}, c_1 = q^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}$ 故可得极值曲线为

$$y = \sqrt[3]{[(q^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}})x + p^{\frac{3}{2}}]^2}$$

显然应该有 $y > 0$。这条极值曲线包含在极值曲线场 $y = \sqrt[3]{(c_1x + c_2)^2}$ 中。勒让德条件为

$$F_{y'y'} = 2y > 0$$

如果 $p \neq q$,则泛函在极值曲线 $y = \sqrt[3]{[(q^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}})x + p^{\frac{3}{2}}]^2}$ 上取得弱极小值,如果 $p = q$,则泛函在极值曲线 $y = p$ 上取得弱极小值。

例 3.5.11 利用勒让德条件判断泛函 $J[y] = \int_0^{x_1}(6y'^2 - y'^4 + yy')\mathrm{d}x$ 是否有极值,边界条件为 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1, x_1 > 0, y_1 > 0$。

解 泛函的欧拉方程为

$$y' - 12y'' + 12y'^2y'' - y' = 0$$

或

$$y'' = 0$$

积分两次,得

$$y = c_1x + c_2$$

符合边界条件的解为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$,它包含在以(0,0)为中心的极值曲线中心场 $y = cx$ 中,且 $y' = \frac{y_1}{x_1}$。勒让德条件为

$$F_{y'y'} = 12(1 - y'^2) = 12\left(1 - \frac{y_1^2}{x_1^2}\right)$$

由此可见,对于极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$,若 $y_1 < x_1$,则 $F_{y'y'} > 0$,泛函取得弱极小值;若 $y_1 > x_1$,则 $F_{y'y'} < 0$,泛函取得弱极大值。

例 3.5.12 检验泛函 $J[y,z] = \int_0^1(y'^2 + z'^2)\mathrm{d}x$ 的极值,边界条件为 $y(0) = 0, z(0) = 0, y(1) = 1, z(1) = 2$。

解 因泛函只是 y' 和 z' 的函数,故其欧拉方程组的解为

$$\begin{cases} y = c_1x + c_2 \\ z = c_3x + c_4 \end{cases}$$

符合边界条件的解为 $y = x, z = 2x$,是通过原点的直线。

在所求的问题中有

$$F_{y'y'} = 2, F_{y'z'} = 0, F_{z'y'} = 0, F_{z'z'} = 2$$

勒让德条件为

$$F_{y'y'} = 2 > 0, \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

由此可见,所求泛函至少存在一个弱极小值。

3.6 泛函的高阶变分

考察最简泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{3-6-1}$$

式中 $F(x,y,y')$ 具有二阶连续偏导数。

对给定的函数 $y = y(x)$ 和任意确定函数 δy，且它们都属于 $C^1[x_0,x_1]$。应用多元函数的泰勒公式，被积函数 $F(x,y,y')$ 在 $y = y(x)$ 上的增量可写成如下形式

$$\Delta F = F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y') =$$

$$(F_y\delta y + F_{y'}\delta y') + \frac{1}{2}[\overline{F}_{yy}(\delta y)^2 + 2\overline{F}_{yy'}\delta y\delta y' + \overline{F}_{y'y'}(\delta y')^2] \tag{3-6-2}$$

式中，$\overline{F}_{yy}$、$\overline{F}_{yy'}$ 和 $\overline{F}_{y'y'}$ 分别表示 F_{yy}、$F_{yy'}$ 和 $F_{y'y'}$ 在点 $(x,y+\theta_1\delta y,y'+\theta_2\delta y')$ 处的值，$0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$。

由 $\overline{F}_{yy}$、$\overline{F}_{yy'}$ 和 $\overline{F}_{y'y'}$ 的连续性可知，当 $d_1[y,y+\delta y]$ 充分小时，有

$$\overline{F}_{yy} = F_{yy} + \varepsilon_1, \overline{F}_{yy'} = F_{yy'} + \varepsilon_2, \overline{F}_{y'y'} = F_{y'y'} + \varepsilon_3 \tag{3-6-3}$$

式中，ε_1、ε_2 和 ε_3 均随 $d_1[y,y+\delta y]\to 0$ 而趋于零。于是 ΔF 可写成下面的形式

$$\Delta F = F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y') =$$

$$(F_y\delta y + F_{y'}\delta y') + \frac{1}{2}[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] + \varepsilon \tag{3-6-4}$$

式中

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\varepsilon_1(\delta y)^2 + 2\varepsilon_2\delta y\delta y' + \varepsilon_3(\delta y')^2] \tag{3-6-5}$$

下面证明 ε 是比 $d_1^2[y,y+\delta y]$ 更高阶的无穷小量。

因 $(\delta y - \delta y')^2 \geqslant 0$，即 $|2\delta y\delta y'| \leqslant (\delta y)^2 + (\delta y')^2$，故有

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\varepsilon_1(\delta y)^2 + 2\varepsilon_2\delta y\delta y' + \varepsilon_3(\delta y')^2] \leqslant$$

$$\frac{1}{2}[(|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|)(\delta y)^2 + (|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|)(\delta y')^2] =$$

$$\frac{1}{2}[\varepsilon_4(\delta y)^2 + \varepsilon_5(\delta y')^2] \tag{3-6-6}$$

式中 $\varepsilon_4 = |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|$ 与 $\varepsilon_5 = |\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|$ 均随 $d_1[y,y+\delta y]\to 0$ 而趋于零。又因 $|\delta y| \leqslant d_1[y,y+\delta y]$，$|\delta y'| \leqslant d_1[y,y+\delta y]$，所以

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}[\varepsilon_3(\delta y)^2 + \varepsilon_4(\delta y')^2] \leqslant \frac{1}{2}[\varepsilon_3+\varepsilon_4]d_1^2[y,y+\delta y] \tag{3-6-7}$$

这表明 ε 是比 $d_1^2[y,y+\delta y]$ 更高阶的无穷小量。

式(3-6-4)中右端的第一项称为函数 $F(x,y,y')$ 的**一阶变分或一次变分**，记为 δF，即

$$\delta F = F_y\delta y + F_{y'}\delta y' \tag{3-6-8}$$

式(3-6-4)中右端的第二项称为函数 $F(x,y,y')$ 的**二阶变分或二次变分**，记为 $\delta^2 F$，即

$$\delta^2 F = \frac{1}{2}[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] \tag{3-6-9}$$

于是

$$\Delta F = \delta F + \delta^2 F + R_2 \tag{3-6-10}$$

考察泛函(3-6-1)在 $y = y(x)$ 上的增量,由式(3-6-10)得

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\mathrm{d}x \tag{3-6-11}$$

如果泛函(3-6-1)在 $y = y(x)$ 上取极值,则其一次变分

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \delta F \mathrm{d}x = 0 \tag{3-6-12}$$

故泛函的增量 ΔJ 成为

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} (\delta^2 F + R_2)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \delta^2 F \mathrm{d}x + R \tag{3-6-13}$$

式中 $R = \int_{x_0}^{x_1} R_2 \mathrm{d}x$。

积分 $\int_{x_0}^{x_1} \delta^2 F \mathrm{d}x$ 称为泛函式(3-6-1)在极值曲线 $y = y(x)$ 上的**二阶变分或二次变分**,记为 $\delta^2 J$,即

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \delta^2 F \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} [F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2]\mathrm{d}x \tag{3-6-14}$$

式(3-6-14)还可以写成其他形式。由于 $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$,并且

$$2\int_{x_0}^{x_1} F_{yy'}\delta y \delta y' \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} F_{yy'} \mathrm{d}(\delta y)^2 = -\int_{x_0}^{x_1} (\delta y)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{yy'} \mathrm{d}x \tag{3-6-15}$$

故

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} [S(\delta y)^2 + R(\delta y')^2]\mathrm{d}x \tag{3-6-16}$$

式中 $S = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)$,$R = \frac{1}{2}F_{y'y'}$。由此可见,泛函沿极值曲线 $y = y(x)$ 取得绝对极值的充分条件为:当 $S \geqslant 0$ 且 $R \geqslant 0$ 时,泛函取绝对极小值;当 $S \leqslant 0$ 且 $R \leqslant 0$ 时,泛函取绝对极大值。由此可见,泛函的二次变分和极值的充分条件相联系。

对于泛函 $J[y(x)]$,可引入一个函数 $\Phi(\varepsilon)$,使得 $\Phi(\varepsilon) = J[y(x) + \varepsilon\delta y]$,如果它在 $\varepsilon = 0$ 处对 ε 的二阶导数 $\Phi''(0) = \left.\frac{\partial^2 J[y(x) + \varepsilon\delta y]}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$ 存在,则 $\Phi''(0)$ 称为泛函 $J[y(x)]$ 在 $y = y(x)$ 处的**二阶变分**,并记作 $\delta^2 J$,即

$$\delta^2 J = \Phi''(0) = \left.\frac{\partial^2 J[y(x) + \varepsilon\delta y]}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \tag{3-6-17}$$

这样定义的泛函的二阶变分与前面定义的泛函的二阶变分对于可积函数类上确定的泛函来说是等价的,且有时更便于计算泛函的变分。

例 3.6.1 试求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (xy^2 + y'^3)\mathrm{d}x$ 的二阶变分。

解 求 S 和 R 分别为

$$S = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right) = x, R = \frac{1}{2}F_{y'y'} = 3y'$$

泛函的二阶变分为

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} [S(\delta y)^2 + R(\delta y')^2]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

对于泛函(3-6-1)中的被积函数 F,可根据泰勒公式展开成 n 次多项式,即

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x=\\&\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^2+2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}(\delta y')^2]\mathrm{d}x+\cdots+\\&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_1}\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'\frac{\partial}{\partial y'}\right)^nF\mathrm{d}x+\varepsilon_n\end{aligned}\tag{3-6-18}$$

式中 ε_n 是比 $d_1^n[y,y+\delta y]$ 更高阶的无穷小量。于是可得

$$\Delta J=\delta J+\delta^2J+\cdots+\delta^nJ+\varepsilon_n=\sum_{k=1}^{n}\delta^kJ+\varepsilon_n\tag{3-6-19}$$

式中

$$\begin{aligned}\delta J&=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x\\\delta^2J&=\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^2+2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}(\delta y')^2]\mathrm{d}x\\&\cdots\\\delta^nJ&=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_1}\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'\frac{\partial}{\partial y'}\right)^nF\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3-6-20}$$

由此可定义 n 阶变分,即积分 $\int_{x_0}^{x_1}\delta^nF\mathrm{d}x$ 称为泛函式(3-6-1)在极值曲线 $y=y(x)$ 上的 n **阶变分或** n **次变分**,记为 δ^nJ,即

$$\begin{aligned}\delta^nJ&=\int_{x_0}^{x_1}\delta^nF\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'\frac{\partial}{\partial y'}\right)^nF\right]\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^nF}{\partial y^{n-k}\partial y^k}(\delta y)^{n-k}(\delta y')^k\right]\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3-6-21}$$

式中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为 n 个事物中取 k 个的组合数(定义 $C_n^0=1$)。

上述定义也可以推广到依赖于多个未知函数的泛函。

当然,也可把 n 阶变分定义为

$$\delta^nJ=\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(\delta y\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'\frac{\partial}{\partial y'}\right)^nF\right]\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^nF}{\partial y^{n-k}\partial y'^k}(\delta y)^{n-k}(\delta y')^k\right]\mathrm{d}x\tag{3-6-22}$$

式(3-6-22)与式(3-6-20)或式(3-6-21)定义的 n 阶变分差仅一个常数 $\dfrac{1}{n!}$,不过这两种定义对泛函增量的计算都相同。若按式(3-6-22)定义 n 阶变分,则泛函的增量可写成

$$\Delta J=\delta J+\frac{1}{2!}\delta^2J+\cdots+\frac{1}{n!}\delta^nJ+\varepsilon_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\delta^kJ+\varepsilon_n\tag{3-6-23}$$

定理 3.6.1 设 $y=y(x)$ 是泛函(3-6-1)满足边界条件(3-2-2)的极值曲线。如果在 $y=y(x)$ 上,$\delta^2J\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$),则该泛函在 $y=y(x)$ 上取得弱极小值(或弱极大值)。

证 由泛函增量 ΔJ 的表达式(3-6-10)可知,当 $\delta y,\delta y'$ 的绝对值充分小时,ΔJ 的符号由 δ^2J 决定,故根据弱极值的定义即得证。证毕。

例 3.6.2 设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y'^k y^{n-k}\right]\mathrm{d}x \tag{3-6-24}$$

式中，$y\in C^1[x_0,x_1]$，$p_k(x)\in[x_0,x_1]$ 是已知函数($k=1,2,\cdots,n$)。求证

$$\Delta J=J[y+\delta y]-J[y]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\delta^k J \tag{3-6-25}$$

证 式(3-6-24)的增量可写成式(3-6-12)的形式，因被积函数 $F=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y'^k y^{n-k}$ 是关于 y 和 y' 的 n 次多项式，且两者的乘积的指数之和也是 n，最多只能有 n 阶变分，即 $\varepsilon_n=0$，故式(3-6-25)成立。证毕。

例 3.6.3 设泛函 $J[y]=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y^2+4q(x)yy'+r(x)y'^2]\mathrm{d}x$，式中 $p(x),q(x),r(x)\in C^1[x_0,x_1]$，$y\in C^2[x_0,x_1]$，$p(x)\neq 0$，$p(x)r(x)-q^2(x)>0$，且在 $y=y(x)$ 上，$\delta J=0$。

(1) 试求 $\delta^2 J$；

(2) 试证当 $p(x)>0$ 时，$J[y]$ 是绝对极小值；当 $p(x)<0$ 时，$J[y]$ 是绝对极大值。

解 (1) $F=\frac{1}{2}[p(x)y^2+2q(x)yy'+r(x)y'^2]$，其二阶变分为

$$\delta^2 F=\frac{1}{2}[F_{yy}(\delta y)^2+2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}(\delta y')^2]=\frac{1}{2}[p(\delta y)^2+2q\delta y\delta y'+r(\delta y')^2]$$

于是

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\delta^2 F\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[p(\delta y)^2+2q\delta y\delta y'+r(\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

(2) 由于被积函数 $F=\frac{1}{2}[p(x)y^2+2q(x)yy'+r(x)y'^2]$ 是关于 y 和 y' 的二次多项式，其泰勒公式展开式也是关于 y 和 y' 的二次多项式，且余项为零，故

$$\Delta J=J[y+\delta y]-J[y]=\delta J+\delta^2 J$$

由于在 $y=y(x)$ 上，$\delta J=0$，于是

$$\Delta J=\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[p(\delta y)^2+2q\delta y\delta y'+r(\delta y')^2(\delta y')^2]\mathrm{d}x$$

因 $p(x)\neq 0$，通过配方得

$$\Delta J=\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}p\left[\left(\delta y+\frac{q}{p}\delta y'\right)^2+\frac{pr-q^2}{p^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x$$

又由于 $p(x)r(x)-q^2(x)>0$，故上式

$$\left[\left(\delta y+\frac{q}{p}\delta y'\right)^2+\frac{pr-q^2}{p^2}(\delta y')^2\right]>0$$

于是 $\Delta J=\delta^2 J$ 的符号与 p 的符号相同。因此在区间 $[x_0,x_1]$ 上，当 $p(x)>0$ 时，$\Delta J=\delta^2 J>0$，$J[k]$ 是绝对极小值；当 $p(x)<0$ 时，$\Delta J=\delta^2 J<0$，$J[y]$ 是绝对极大值。

被积函数是未知函数及其导数的二次方的泛函称为**二次泛函**。例如形如例 3.6.1 的泛函就是一个二次泛函。

例 3.6.4 求泛函 $J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$ 的二阶变分。

解 泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n} F_{y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \delta y_i' \right) \mathrm{d}x$$

泛函的二阶变分为

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i y_k} \delta y_i \delta y_k + \sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i y_k'} \delta y_i \delta y_k' + \sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i' y_k} \delta y_i' \delta y_k + \sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i' y_k'} \delta y_i' \delta y_k' \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i y_k} \delta y_i \delta y_k + 2 \sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i y_k'} \delta y_i \delta y_k' + \sum_{i,k=1}^{n} F_{y_i' y_k'} \delta y_i' \delta y_k' \right) \mathrm{d}x$$

3.7 名家介绍

勒让德(Legendre, Adrien Marie, 1752.9.18—1833.1.9) 法国数学家。生、卒于巴黎。1770 年毕业于马扎林学院。1775 年任巴黎军事学院数学教授。1782 年其论文《关于阻尼介质中的弹道研究》获柏林科学院奖。1783 年当选为巴黎科学院助理院士,两年后升为院士,1787 年成为英国皇家学会会员。1795 年当选为法兰西研究院常任院士。与拉格朗日、拉普拉斯被并称为法国数学界的"三 L"。研究领域主要涉及数学分析、初等几何、数论及天体力学等方面。椭圆积分理论的奠基人之一,发表了《行星外形的研究》、《几何学基础》、《椭圆函数论》和《数论》等大量论著。在大地测量理论、球面三角形理论、最小二乘法等方面有重要贡献。还对高等几何学、力学、天文学和物理学等问题有过论述。

雅可比(Jacobi, Carl Gustav Jacbo, 1804.12.10—1851.2.18) 德国数学家。生于波茨坦,卒于柏林。1820 年入柏林大学学习,1825 年获哲学博士学位。1827 年被选为柏林科学院院士。1832 年任柯尼斯堡大学教授,同年成为英国皇家学会会员。还是圣彼得堡科学院、维也纳科学院、巴黎科学院、马德里科学院等名誉院士。椭圆函数论的创始人之一,代表作为《椭圆函数论新基础》(1829)。建立了函数行列式求导公式,引进了"雅可比行列式",并提出这些行列式在多重积分中变量替换和解偏微分方程时的作用。在数论、线性代数、变分法、微分方程、微分几何、复变函数、力学和数学史等方面均有重要贡献。数学中的许多术语都与他的名字有关。著有《算术大全》和《动力学讲义》(1866)等。

魏尔斯特拉斯(Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm, 1815.10.31—1897.2.19) 德国数学家。生于威斯特伐利亚的奥斯坦菲尔德,卒于柏林。1838 年毕业于波恩大学法律系,之后转学数学。1841 年起在中学执教了 15 年。1854 年获名誉博士学位。1856 年任柏林大学副教授,1864 年任教授,1873—1874 年任校长。1856 年当选为柏林科学院院士,1868 年当选为法国科学院院士,1881 年成为英国皇家学会会员。主要贡献在数学分析、解析函数论、变分法、微分几何和线性代数等方面。与戴德金(Dedekind, Julius Wilhelm Richard, 1831.10.6—1916.2.12)、康托尔(Cantor, Moritz Benedikt, 1829.8.23—1920.4.9)的共同努力下,创立了现代函数理论。19 世纪最有影响的分析学家,第一流的数学家,近世分析之父。杰出的教育家,培养了大批有成就的数学人才,其中著名的有柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская, Софья Васильевна, 1850.1.15—1891.2.10)、施瓦茨、米塔—列夫勒、波尔查和克莱因等。

希尔伯特(Hilbert, David, 1862.1.23—1943.2.14) 德国数学家。生于柯尼斯堡,卒于格丁根。1880 年入柯尼斯堡大学,1885 年获哲学博士学位。1893 年任柯尼斯堡大学教授。1895 年任格丁根大学教授,直到 1930 年退休。1913 年当选为柏林科学院通信院士,1942 年为该院荣誉院士。还是许多国家科学院院士或荣誉院士。在不变式理论、代数数论、几何学、变分法、微分方程、积分方程、数论、数学物理方法和数理逻辑等领域中都取得了辉煌的成果。1900 年,在巴黎国际数学家大会上

提出23个最重要的数学问题，后来称为希尔伯特问题，对20世纪数学发展产生了深刻的影响。主要著作有《几何基础》(1899)、《理论逻辑基础》、《直观几何学》和《数学基础》等。他是卓越的研究者和优秀的教师，并具有杰出的领导才能。

习 题 3

证明下列各基本变分问题的极值曲线可以包含在极值曲线场(正常的或有心的)内。

3.1 $J[y]=\int_0^1(y'^2-2xy)\mathrm{d}x, y(0)=y(1)=0$。

3.2 $J[y]=\int_0^1(2\mathrm{e}^x y+y'^2)\mathrm{d}x, y(0)=1, y(1)=\mathrm{e}$。

试讨论下面泛函的极值性质。

3.3 $J[y]=\int_0^2(xy'+y'^2)\mathrm{d}x, y(0)=1, y(2)=0$。

3.4 $J[y]=\int_0^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)\mathrm{d}x, x_1>0, y(0)=0, y(x_1)=0$。

3.5 $J[y]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')\mathrm{d}x, y(-1)=1, y(2)=4$。

3.6 $J[y]=\int_1^2 y'(1+x^2y')\mathrm{d}x, y(1)=3, y(2)=5$。

3.7 $J[y]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')\mathrm{d}x, y(-1)=y(2)=1$。

3.8 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4y^2-y'^2+8y)\mathrm{d}x, y(0)=-1, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$。

3.9 $J[y]=\int_1^2,(x^2y'^2+12y^2)\mathrm{d}x, y(1)=1, y(2)=8$。

3.10 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}\mathrm{d}x, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$。

3.11 $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2+2y\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x, y(0)=\frac{1}{3}, y(1)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^2$。

3.12 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}},(y^2-y'^2+6y\sin 2x)\mathrm{d}x, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$。

3.13 $J[y]=\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{y'}, y(0)=0, y(x_1)=y_1, x_1>0, y_1>0$。

3.14 $J[y]=\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{y'^2}, y(0)=0, y(x_1)=y_1, x_1>0, y_1>0$。

3.15 求泛函 $J[y]=\int_0^1(xy+y^2-2y^2y')\mathrm{d}x$ 的二阶和三阶变分。

3.16 设泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(x^2+y^2+y'^2)\mathrm{d}x, y(x_0)=0, y(x_1)=y_1$。求雅可比方程满足初值条件 $u(0)=0, u'(0)=1$ 的解。

3.17 求泛函 $J[y]=\int_0^1(y^2-2yy'+y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，并说明在该极值曲线上泛函是否取得绝对极大(小)值。

3.18 求泛函 $J[y]=\int_0^1-2(y'^2-1)^2\mathrm{d}x$ 的极值曲线，并判别在该极值曲线上泛函能否取绝

对极大(小)值。

3.19 求泛函 $J[y]=\int_0^2(yy'+y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,并讨论其极值性,边界条件为 $y(0)=0$, $y(1)=2$。

3.20 求泛函 $J[y]=\int_{(1,1)}^{(8,2)}x^{\frac{3}{2}}y'^2\mathrm{d}x$ 的极值曲线,并讨论其极值性。

3.21 求泛函 $J[y]=\int_{(1,1)}^{(2,4)}\frac{x^3}{y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线,并讨论其极值性。

3.22 设 $u=u(x,y)$ 是二次泛函

$$J[u]=\iint_D(pu_x^2+pu_y^2-2fu)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

满足固定边界条件 $u|_\Gamma=g(x,y)$, $g\in C(\Gamma)$ 的极值函数。其中 Γ 为 D 的边界闭曲线,$\overline{D}=D+\Gamma$; $p\in C^1(\overline{D})$, $f\in C(\overline{D})$,且 $p>0$, $u\in C^2(\overline{D})$。试证:$u=u(x,y)$ 使 $J[u]$ 取绝对极小值。

3.23 求泛函 $J[y]=\frac{1}{2}\int_1^3(x^2y'^2+4yy')\mathrm{d}x$ 的极值曲线,并讨论其极值性,边界条件为 $y(1)=0$, $y(3)=1$。

3.24 讨论泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(1+x)y'^2\mathrm{d}x$ 的极值情况,其中 $x_1>0$,边界条件为 $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$。

3.25 讨论泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2-y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值情况,边界条件为 $y(0)=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

3.26 讨论泛函 $J[y]=\int_0^1y'^3\mathrm{d}x$ 能否取得强极值?边界条件为 $y(0)=0$, $y(1)=1$。

3.27 判断泛函 $J[y]=\int_0^1(\varepsilon y'^2+y^2+x^2)\mathrm{d}x$,对于各种不同的参数 ε 的值是否存在极值,边界条件为 $y(0)=0$, $y(1)=1$。

3.28 利用勒让德条件判断泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2+x^2)\mathrm{d}x$ 是否有极值,边界条件为 $y(0)=-1$, $y(1)=1$。

3.29 利用勒让德条件判断泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(1-\mathrm{e}^{-y'^4})\mathrm{d}x$ 是否有极值,边界条件为 $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$, $x_1>0$, $y_1>0$。

3.30 试检验泛函 $J[y(x),z(x)]=\int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x$ 的极值,边界条件为 $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$, $z(0)=0$, $z(x_1)=z_1$, $x_1>0$, $y_1>0$, $z_1>0$。

第 4 章　可动边界的变分问题

前面在研究泛函的极值问题时，都假设其积分限固定不变，即其容许函数都通过 A、B 这两个固定端点。但在许多实际问题中，泛函的积分限既可以固定，也可以待定。如果容许函数的一个或两个端点并不通过预先给定的点，而是得通过变分才能确定，则这样的端点称为**变动端点、可变端点**或**可动端点**，对于一元函数来说，端点和边界具有同样的含义，故上述端点也可称为**变动边界、可变边界**或**可动边界**，有时也称为**待定端点**或**待定边界**。容许函数的两个端点就是泛函积分的上下限。如果泛函的积分限可变，或积分区域给定而缺少边界条件，则这样的变分问题称为**可动边界的变分问题**或**待定边界的变分问题**。当泛函的容许函数在边界上的值没有明显给出时，这样的变分问题称为**无约束变分问题**。本章就来讨论上述变分问题。

4.1　最简泛函的变分问题

设泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \qquad (4-1-1)$$

其可取曲线 $y=y(x)\in C^2$ 类函数，且两个端点 $A(x_0,y_0)$、$B(x_1,y_1)$ 分别在两个给定的 C^2 类函数 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 上移动，见图 4-1-1。此时，式(4-1-1)称为**可动边界的最简泛函**或**待定边界的最简泛函**。

若函数 $y=y(x)$ 能在可动边界的容许函数类中使泛函(4-1-1)取得极值，那么必能在固定边界的容许函数类中使泛函取得极值，这是因为可动边界泛函的容许曲线类的范围扩大了，当然包含了固定边界泛函的容许曲线，而在固定边界情况下使泛函取得极值的函数必须满足欧拉方程，所以函数 $y=y(x)$ 在可动边界情况下也应当满足欧拉方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0 \qquad (4-1-2)$$

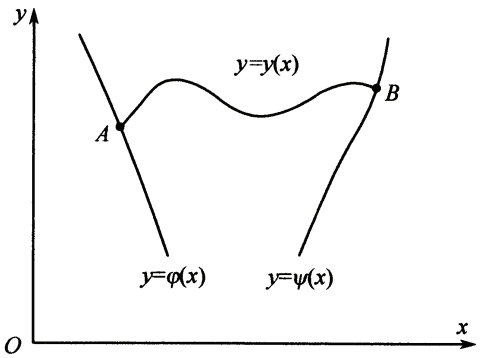


图 4-1-1　两端点可移动曲线

欧拉方程的解含有两个任意常数，它的一般形式为

$$y=y(x,c_1,c_2) \qquad (4-1-3)$$

在端点固定的情况下，这两个常数可由边界条件 $y_0=y(x_0)$ 和 $y_1=y(x_1)$ 确定。而在可动边界条件下，它们都是 x_0 和 x_1 的函数，且 x_0 和(或)x_1 也是待定的。确定它们的条件就是泛函取得极值的必要条件 $\delta J=0$。

设泛函(4-1-1)的 A 点固定，B 点可以变动。当 B 点从 (x_1,y_1) 移动到 $(x_1+\delta x_1,y_1+\delta y_1)$ 时，泛函 $J[y(x)]$ 的增量可写成

$$\Delta J=\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x=$$

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x +$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y')]\mathrm{d}x \tag{4-1-4}$$

对上式右边第一个积分应用中值定理,可得

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1 \tag{4-1-5}$$

式中 $0<\theta<1$。考虑到 F 的连续性,有

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x,y,y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1 \tag{4-1-6}$$

当 $\delta x_1 \to 0, \delta y_1 \to 0$ 时,$\varepsilon_1 \to 0$。将式(4-1-6)代入式(4-1-5),可得

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x = F(x,y,y')|_{x=x_1}\delta x_1 + \varepsilon_1\delta x_1 \tag{4-1-7}$$

将式(4-1-4)中第二个积分的被积函数展成一阶泰勒级数,有

$$F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y') =$$

$$F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y' + R_1 \tag{4-1-8}$$

式中 R_1 为 δy、$\delta y'$ 的高阶无穷小,可略去不计。

把式(4-1-8)代入式(4-1-4)的第二个积分中,得

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y')]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x \tag{4-1-9}$$

将式(4-1-9)的右边第二项进行分部积分得

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y')]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{4-1-10}$$

由于泛函 J 在固定端点 $A(x_0,y_0)$ 处,$\delta y|_{x=x_0} = 0$,故式(4-1-10)变成

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y')]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + F_{y'}\delta y|_{x=x_1} \tag{4-1-11}$$

将式(4-1-7)和式(4-1-11)代入式(4-1-4)中,得

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\delta y|_{x=x_1} + \varepsilon_1\delta x_1 \tag{4-1-12}$$

注意,一般情况下,$\delta y|_{x=x_1} \neq \delta y_1$,这是因为 δy_1 是可变端点 (x_1,y_1) 移动到 $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ 位置时 y_1 的增量,而 $\delta y|_{x=x_1}$ 则是当通过 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1) 两点的极值曲线移动到通过 (x_0,y_0) 和 $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ 两点的极值曲线时,在点 x_1 处纵坐标的增量为 BD,如图 4-1-2 所示。由图可见

$$BD = \delta y|_{x=x_1}, FC = \delta y_1$$

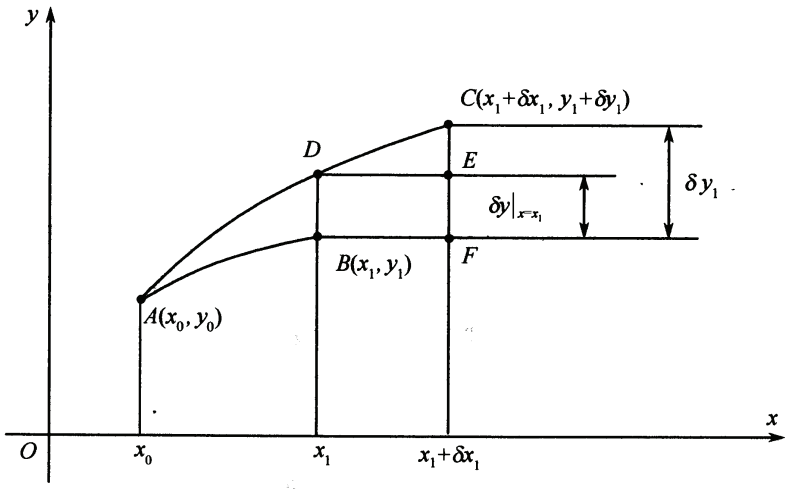


图 4－1－2　变分 δy_1 和 $\delta y|_{x=x_1}$ 的几何意义

$$EC = \Delta y(x_1) = y'(x_1)\delta x_1 + \varepsilon\delta x_1 \quad BD = FC - EC$$

故有

$$\delta y|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1 - \varepsilon\delta x_1 \tag{4-1-13}$$

移项，得

$$\delta y_1 = \delta y|_{x=x_1} + y'(x_1)\delta x_1 + \varepsilon\delta x_1 \tag{4-1-14}$$

式中，当 $\delta x_1 \to 0$ 时，$\varepsilon \to 0$ 。以上两式略去高阶小量 $\varepsilon\delta y_1$，则有

$$\delta y|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1 \tag{4-1-15}$$

和

$$\delta y_1 = \delta y|_{x=x_1} + y'(x_1)\delta x_1 \tag{4-1-16}$$

将式(4－1－16) 代入式(4－1－12)，当 δx_1、$\delta y'$ 与 δy_1 很小时，略去高阶小量 $F_{y'}|_{x=x_1}\varepsilon\delta x_1$ 和 $\varepsilon\delta x_1$，则可得到 ΔJ 关于 δx_1、δy 与 δy_1 的线性主部即一阶变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}[\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1] =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + (F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 \tag{4-1-17}$$

因为泛函的极值只能在极值曲线上取得，所以 $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} \equiv 0$。于是式(4－1－17) 可写成

$$\delta J = F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}[\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1] = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 \tag{4-1-18}$$

再由条件 $\delta J = 0$，得

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 = 0 \tag{4-1-19}$$

如果 δx_1 与 δy_1 相互无关，则由式(4－1－19) 得

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1} = 0 \tag{4-1-20}$$

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \tag{4-1-21}$$

然而有必要考虑 δx_1 与 δy_1 有关的情况，这是因为当把式(4－1－21) 代入式(4－1－20) 时，可得 $F|_{x=x_1} = 0$ ，这意味着泛函的被积函数为零，这样的情形只是变分问题中的特例，一般情况下并

不成立，可以不必考虑。当然也可以找到$F|_{x=x_1}=0$的泛函，例如泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'^2\mathrm{d}x$，它的极小值就是零，泛函的被积函数也为零。当点$B$沿着直线$x=x_1$移动时，则$\delta x_1=0$，而$\delta y_1$是任意的，此时只有式(4-1-21)而没有式(4-1-20)。

式(4-1-21)是自由端点B所要满足的条件，它是根据泛函取极值的必要条件$\delta J=0$推导出来的边界条件，这种边界条件称为**自然边界条件**或**运动边界条件**，同时把固定边界条件称为**强制边界条件**或**本质边界条件**或**几何边界条件**。本质边界条件也称为**狄利克雷边界条件**，而自然边界条件又称为**诺伊曼边界条件**。自然边界条件是泛函在定义域边界上的变分条件。可见，在变分学中有两类性质不同的边界条件。因为自然边界条件不是预先给定的，而是由极值函数$y(x)$自动满足，所以不作为定解条件列出。

定理 4.1.1 设泛函$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的极值曲线$y=y(x)$一端固定，而另一端在直线$x=x_1$上待定，则可动的一端必满足自然边界条件(4-1-21)。

若极值曲线$y=y(x)$的端点在已知曲线$y=\psi(x)$上待定，则变分δx_1与δy_1有关。

例 4.1.1 求泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y]\mathrm{d}x$极值问题的自然边界条件。其中$x_0$和$x_1$均为自由边界，$p(x)$、$q(x)$和$f(x)$均为已知函数，且$p(x)\neq 0$。

解 因x_0和x_1均为自由边界，根据定理4.1.1，故自然边界条件为

$$F_{y'}|_{x=x_0}=2p(x)y'|_{x=x_0}=0,F_{y'}|_{x=x_1}=2p(x)y'|_{x=x_1}=0$$

由于$p(x)\neq 0$，故自然边界条件可化为

$$y'|_{x=x_0}=y'(x_0)=0,y'|_{x=x_1}=y'(x_1)=0$$

定理 4.1.2 设泛函$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的极值曲线$y=y(x)$的左端点固定，而右端点在已知曲线$y=\psi(x)$上待定，则右端点在$x=x_1$处必满足

$$[F+(\psi'-y')F_{y'}]|_{x=x_1}=0 \tag{4-1-22}$$

证 对已知曲线$y=\psi(x)$取变分，得

$$\delta y=\psi'(x)\delta x$$

因x和y在右端点上，故$x=x_1,y=y_1$，由式(4-1-13)，可得

$$[F+(\psi'-y')F_{y'}]|_{x=x_1}\delta x_1=0$$

又因δx_1是任意的，故有

$$[F+(\psi'-y')F_{y'}]|_{x=x_1}=0$$

证毕。

式(4-1-22)建立了极值曲线$y=y(x)$与已知曲线$y=\psi(x)$在交点B处的y'与ψ'两斜率之间的关系，这样的关系称为**横截(性)条件**、**贯截条件**或**斜截条件**。这两条曲线较小的那个交角称为**斜截角**。

推论 1 若极值曲线$y=y(x)$的左端点$A(x_0,y_0)$在已知曲线$y=\psi(x)$上待定，则横截条件为

$$[F+(\psi'-y')F_{y'}]|_{x=x_0}=0 \tag{4-1-23}$$

推论 2 在定理4.1.2中，若已知曲线的方程由隐函数$\Psi(x,y)=0$给出，则在端点$x=x_1$处的横截条件为

$$\frac{F - y'F_{y'}}{F_{y'}} = \frac{\Psi_x}{\Psi_y} \tag{4-1-24}$$

证 对隐函数 $\Psi(x,y) = 0$ 微分，有

$$\Psi_x(x,y) + \Psi_y(x,y)y' = \Psi_x + \Psi_y\psi' = 0$$

或

$$\psi' = -\frac{\Psi_x}{\Psi_y}$$

将上式代入式(4-1-22)中，即得到式(4-1-24)。证毕。

特别地，如果曲线 $y = \psi(x)$ 是直线，且平行于 y 轴，即 $x = x_1$ 是常数，那么横截条件就化为

$$F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0 \tag{4-1-25}$$

将定理4.1.2和推论1合并在一起，可得到下述定理：

定理4.1.3 设泛函 $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线 $y = y(x)$ 的左端点在已知曲线 $y = \varphi(x)$ 上待定，而右端点在已知曲线 $y = \psi(x)$ 上待定，则左端点在 $x = x_0$ 处必满足

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_0} = 0 \tag{4-1-26}$$

而右端点在 $x = x_1$ 处必满足

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_1} = 0 \tag{4-1-27}$$

求平面上两条已知曲线的最短距离是定理4.1.3的一个常见的应用，在此情况下，该定理可化成更具体的形式。该问题归结为求泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \tag{4-1-28}$$

的极小值。约束条件是极值曲线的左端点在已知曲线 $y = \varphi(x)$ 上待定，而右端点在已知曲线 $y = \psi(x)$ 上待定。此时，由于被积函数只是 y' 的函数，故泛函的欧拉方程的通解是直线 $y = c_1x + c_2$，其中 c_1 和 c_2 是待定的任意常数，且 $y' = c_1$。在两条已知曲线上，欧拉方程的通解有以下形式

$$c_1x_0 + c_2 = \varphi(x_0) \tag{4-1-29}$$

$$c_1x_1 + c_2 = \psi(x_1) \tag{4-1-30}$$

式中 x_0 是泛函的极值曲线与函数 $y = \varphi(x)$ 的交点，x_1 是泛函的极值曲线与函数 $y = \psi(x)$ 的交点。

横截条件(4-1-27)对于(4-1-28)有以下形式

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (\varphi' - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_0} = 0 \tag{4-1-31}$$

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (\psi' - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0 \tag{4-1-32}$$

将 $y' = c_1$ 代入上面两式，并化简，得

$$1 + \varphi'(x_0)c_1 = 0 \tag{4-1-33}$$

$$1 + \psi'(x_0)c_1 = 0 \tag{4-1-34}$$

式(4-1-33)和式(4-1-34)表明，极值曲线与两条已知曲线分别正交，即两条不相交的曲线之间的距离为其公垂线的长度，横截条件(4-1-31)和(4-1-32)化成了正交条件。这样就可以得到含有四个未知数 x_0、x_1、c_1 和 c_2 的方程组

$$\begin{cases} c_1x_0 + c_2 = \varphi(x_0) \\ c_1x_1 + c_2 = \psi(x_1) \\ 1 + \varphi'(x_0)c_1 = 0 \\ 1 + \psi'(x_1)c_1 = 0 \end{cases} \tag{4-1-36}$$

解方程组(4-1-36),可以把这四个未知数求出来,然后可确定极值曲线的具体形式,并可求出两已知曲线之间的最小距离即泛函(4-1-28)的极小值。

由式(4-1-33)和式(4-1-34)还可知

$$\varphi'(x_0) = \psi'(x_1) \tag{4-1-37}$$

这表明两个交点处的已知曲线切线的斜率相等,即两条切线相互平行。

如果是求某已知点到一条已知曲线的最短距离,则未知数只有三个。此时,若已知点是泛函的极值函数的左端点 $A(x_0, y_0)$,则方程组可写成

$$\begin{cases} c_1x_0 + c_2 = y_0 \\ c_1x_1 + c_2 = \psi(x_1) \\ 1 + \psi'(x_1)c_1 = 0 \end{cases} \tag{4-1-38}$$

若已知点是泛函的极值函数的右端点 $B(x_1, y_1)$,则方程组可写成

$$\begin{cases} c_1x_0 + c_2 = \varphi(x_0) \\ c_1x_1 + c_2 = y_1 \\ 1 + \varphi'(x_0)c_1 = 0 \end{cases} \tag{4-1-39}$$

例 4.1.2 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ 的极值曲线,约束条件为左端点固定 $y(x_0) = y_0$,右端点在直线 $y = kx + b$ 上待定,且 $k \neq 0$。并求泛函 $J[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ 的极值曲线和极值。设左端点 $y(0) = 1$,右端点在曲线 $y = \psi(x) = 2 - x$ 上待定。

解 该问题归结为求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ 的极小值。约束条件为左端点固定 $y(x_0) = y_0$,右端点在直线 $y = \psi(x) = kx + b$ 上,且 $\psi'(x_1) = k$。泛函的欧拉方程的通解是直线 $y = c_1x + c_2$。关于三个未知数 x_1、c_1 和 c_2 的方程组为

$$\begin{cases} c_1x_0 + c_2 = y_0 \\ c_1x_1 + c_2 = kx_1 + b \\ 1 + kc_1 = 0 \end{cases}$$

解此方程组,得 $c_1 = -\frac{1}{k}$,$c_2 = y_0 - \frac{x_0}{k}$,$x_1 = \frac{k(y_0 - b) - x_0}{k^2 + 1}$。相应于点 x_1 的纵坐标为 $y_1 = \frac{k^2y_0 + b - kx_0}{k^2 + 1}$。于是极值曲线为 $y = -\frac{x + x_0}{k} + y_0$。

对于泛函 $J[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$,左端点 $y(0) = 1$,右端点在曲线 $y = \psi(x) = 2 - x$ 上待定的极值曲线,相当于 $x_0 = 0, y_0 = 1, k = -1, b = 2$ 的情况,将其代入极值曲线方程,得

$$y = -\frac{x}{k} + y_0 = x + 1$$

交点坐标为

$$x_1 = \frac{k(y_0 - b)}{k^2 + 1} = \frac{-1 \times (1 - 2)}{(-1) \times (-1) + 1} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{k^2 y_0 + b}{k^2 + 1} = \frac{(-1) \times (-1) \times 1 + 2}{(-1) \times (-1) + 1} = \frac{3}{2}$$

将极值曲线 $y = x + 1$ 和 $x_1 = \frac{1}{2}$ 代入原泛函，可求得泛函的值为

$$J[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 1^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_0^{x_1} (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} y' \delta y' \mathrm{d}x$$

泛函的二阶变分为

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_0^{x_1} \left[\frac{(\delta y')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(y'\delta y')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{x_1} \frac{(\delta y')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{y'^2}{1 + y'^2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{x_1} \frac{(\delta y')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x > 0$$

由此可见，所得泛函的值为极小值。

例 4.1.3 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y + y_c}\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中左端点固定 $y(x_0) = y_0$，右端点在直线 $y = \psi(x) = kx + b$ 上待定，$k \neq 0$。并求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。设左端点固定 $y(0) = 0$，右端点在直线 $y = \psi(x) = x - 5$ 上待定。

解 对比习题 2.36 的结果可知，泛函的极值曲线为圆方程

$$(x + c_1)^2 + (y + y_c)^2 = c_2^2$$

由边界条件 $y(x_0) = y_0$，得

$$(x_0 + c_1) + (y_0 + y_c)^2 = c_2^2$$

该极值曲线是个圆族。设该圆与已知直线的交点坐标为 (x_1, y_1)，则已知直线应是圆的直径，且有圆的切线方程

$$(x_1 + c_1) + (y_1 + y_c)y_1' = (x_1 + c_1) - (y_1 + y_c)\frac{1}{k} = 0$$

上式利用了横截条件 $y_1' k = -1$。在交点即切点处，直线方程为

$$y_1 = kx_1 + b$$

将直线方程代入圆的切线方程，可求得 c_1 为

$$c_1 = \frac{b + y_c}{k}$$

将上式代入圆方程，可求得 $c_2^2 = \left(x_0 + \frac{b + y_c}{k} \right)^2 + (y_0 + y_c)^2$ 于是，可求得极值曲线为

$$\left(x + \frac{b + y_c}{k} \right)^2 + (y + y_c)^2 = \left(x_0 + \frac{b + y_c}{k} \right)^2 + (y_0 + y_c)^2$$

将圆的切线方程改写为

$$(x_1 + c_1)m = (y_1 + y_c)$$

将上式两端平方后代入圆方程,可得到交点坐标为

$$x_1 = -c_1 \pm \frac{c_2}{\sqrt{1+m^2}} = -\frac{b+y_c}{k} \pm \sqrt{\frac{(kx_0+b+y_c)^2 + k^2(y_0+y_c)^2}{k^2(1+k^2)}}$$

$$y_1 = kx_1 + b = -y_c \pm \sqrt{\frac{(kx_0+b+y_c)^2 + k^2(y_0+y_c)^2}{1+k^2}}$$

对于泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} \mathrm{d}x, \text{且 } y(0) = 0, y = \psi(x) = x - 5$$

的极值曲线,相当于 $y_c = 0, x_0 = 0, y_0 = 0, k = 1, b = -5$ 的情况。可求得 c_1、c_2 为

$$c_1 = \frac{b+y_c}{k} = \frac{-5+0}{1} = -5$$

$$c_2^2 = \left(x_0 + \frac{b+y_c}{k}\right)^2 + (y_0+y_c)^2 = \left(0 + \frac{-5+0}{1}\right)^2 + (0+0)^2 = 25$$

于是可得圆方程为

$$(x-5)^2 + y^2 = 25$$

或写成 $y = \pm\sqrt{10x - x^2}$,即极值曲线只能在 $y = \sqrt{10x - x^2}$ **和** $y = -\sqrt{10x - x^2}$ 两圆弧上达到。圆心坐标是(5,0)。见图 4-1-3。圆弧和直线的交点坐标为

$$(x_1, y_1) = \left(5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 和 } (x_2, y_2) = \left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

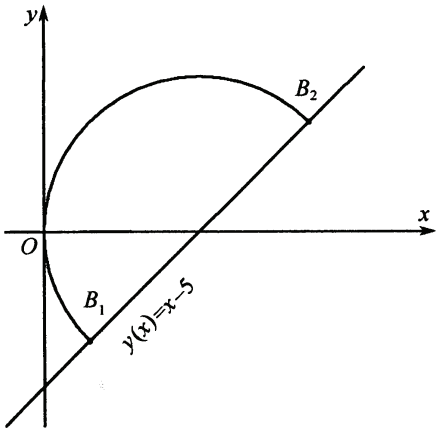


图 4-1-3　例题 4-1-3 图

例 4.1.4　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的横截条件,这里左端点固定,右端点待定,$y_1 = \psi(x_1)$。

解　由式(4-1-19)可得

$$f(x,y)\sqrt{1+y'^2} + (\psi' - y')\frac{f(x,y)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

化简得

$$\frac{f(x,y)(1+\psi'y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

设在边界点处 $f(x,y) \neq 0$,则得 $1 + \psi'y' = 0$,即

$$\psi'y' = -1$$

此式表明,极值曲线 $y = y(x)$ 与曲线 $y_1 = \psi(x_1)$ 在交点处正交,横截条件转化为正交条件。

若曲线的一个端点固定,则横截条件只对待定的端点成立。

例 4.1.5　求连接平面上两条曲线 $y = -x - 1$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 的最短曲线,见图 4-1-4。

解　设所求平面曲线为 $y = y(x)$,据题意,所求的最短曲线就是求泛函

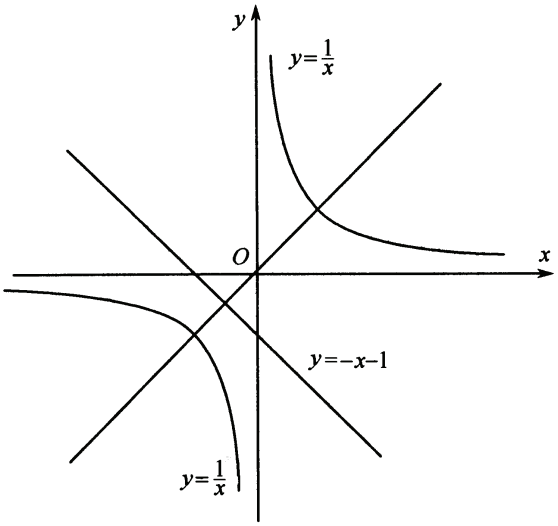


图 4-1-4　例题 4.1.5 图

$$J[y] = \left| \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x \right|$$

的极小值。其中 x_0 和 x_1 分别在曲线 C_0 和曲线 C_1 上，即

$$y = \varphi(x) = -x - 1, A(x_0, \varphi(x_0)) \in C_0$$

$$y = \psi(x) = \frac{1}{x}, B(x_1, \varphi(x_1)) \in C_1$$

因 $F = \sqrt{1 + y'^2}$ 只是 y' 的函数，故泛函的欧拉方程的积分为直线 $y = c_1 x + c_2$。此时关于四个未知数 x_0、x_1、c_1 和 c_2 的方程组可写成

$$\begin{cases} c_1 x_0 + c_2 = -x_0 - 1 \quad c_1 x_1 + c_2 = \dfrac{1}{x_1} \\ 1 - c_1 = 0 \quad 1 - \dfrac{c_1}{x_1^2} = 0 \end{cases}$$

先由方程组的第三式解出 $c_1 = 1$，然后将其代入方程组的第四式，可解出 $x_1 = \pm 1$，它们分别对应着第一象限和第三象限的两支双曲线，再将 c_1、x_1 代入方程组的前两式，可得 $c_2 = 0, x_0 = -\frac{1}{2}$。

若 $y = \frac{1}{x}$ 在第三象限，则所求曲线为 $y = x, -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}$，泛函的极值是

$$J_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 1} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

若 $y = \frac{1}{x}$ 在第一象限，则所求曲线为 $y = x, -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$，泛函的极值是

$$J_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 + 1} \mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

显然 $J_1 < J_2$。

例 4.1.6　绿洲问题。设大气的折射率 $n(y)$ 只依赖于高度 y。某人在与水平成角度 φ 的方向上看到“空中的绿洲”，如果 $n(y) = n_0 \sqrt{1 - a^2 y^2}$，其中 n_0 和 a 是常数，问这片绿洲离此人多远？并求光经过此人到这片绿洲的距离需要多长时间。

解　在解此题之前，先介绍一下费马原理。通过介质的光路，应使光线通过这一段光路所需的时间为极值。这一原理称为**费马原理**。费马原理是光的传播原理。费马原理的数学表达式就是时间泛函

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x, y)}{c} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x$$

取极值，在本问题中是取极小值。其中 n 为介质的折光率，c 为真空中的光速。

取此人所在位置为坐标原点，x 轴水平，y 轴向上，建立直角坐标系。根据费马原理，可建立泛函为

$$J[y] = \frac{n_0}{c} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 - a^2 y^2} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x \tag{1}$$

边界条件为 $y(x_0) = y(0) = 0, y'(0) = \tan\varphi, F_{y'}\big|_{x = x_1} = 0$。

泛函的欧拉方程为

$$\frac{-a^2 y \sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{1 - a^2 y^2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\sqrt{1 - a^2 y^2} y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \tag{2}$$

将上式展开并整理，得

$$a^2y(1+y'^2)+(1-a^2y^2)y''=0 \tag{3}$$

或

$$\frac{y''}{1+y'^2}=-\frac{a^2y}{1-a^2y^2}=0 \tag{4}$$

令 $y'=p$,则有 $y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$,将其代入欧拉方程并积分,得

$$\ln(1+p^2)=\ln(1-a^2y^2)+\ln c_1 \tag{5}$$

或

$$1+y'^2=c_1(1-a^2y^2) \tag{6}$$

因被积函数不显含义,故也可从欧拉方程的首次积分更简便地得到式(6)。

由边界条件 $y(x_0)=y(0)=0,y'(0)=\tan\varphi$,得 $c_1=1+\tan^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}=\sec^2\varphi$。将此积分常数代入式(6),得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{a^2y^2}{\sin^2\varphi}}}=\pm\tan\varphi\mathrm{d}x \tag{7}$$

令 $t=\frac{ay}{\sin\varphi}$,则有 $\mathrm{d}y=\frac{\sin\varphi}{a}\mathrm{d}t$,将其代入式(7)并积分,得

$$\arcsin t=\pm\frac{ax}{\cos\varphi}+c_2 \tag{8}$$

或

$$\arcsin\frac{ay}{\sin\varphi}=\pm\frac{ax}{\cos\varphi}+c_2 \tag{9}$$

由边界条件 $y(0)=0$,得 $c_2=0$。由上式解出 y

$$y=\pm\frac{\sin\varphi}{a}\sin\frac{ax}{\cos\varphi} \tag{10}$$

式(10)对 x 求导,得

$$y'=\pm\tan\varphi\cos\frac{ax}{\cos\varphi}$$

由边界条件 $F_{y'}\big|_{x=x_1}=0$,即 $y'\big|_{x_1}=\pm\tan\varphi\cos\frac{ax_1}{\cos\varphi}=0$,得 $x_1=\frac{\pi}{2a}\cos\varphi\pm k\pi$,取 $x_1=\frac{\pi}{2a}\cos\varphi$。此时在光路上,$x_1$ 和大于 x_1 的任意一点都可以是此人到绿洲的距离,当光路在 x 轴上时,考虑到光路的对称性,可得此人到绿洲的距离为

$$d=2x_1=\frac{\pi}{a}\cos\varphi \tag{11}$$

作变换

$$1+y'^2=1+\tan^2\varphi\cos^2\frac{ax}{\cos\varphi} \tag{12}$$

$$1-a^2y^2=1-\sin^2\varphi\sin^2\frac{ax}{\cos\varphi}=1-\sin^2\varphi\left(1-\cos^2\frac{ax}{\cos\varphi}\right)=$$

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\frac{ax}{\cos\varphi}\cos^2\varphi\left(1+\tan^2\varphi\cos^2\frac{ax}{\cos\varphi}\right) \tag{13}$$

$$(1-a^2y^2)(1+y'^2)=\cos^2\varphi\left(1+\tan^2\varphi\cos^2\frac{ax}{\cos\varphi}\right)^2 \tag{14}$$

令 $t=\frac{ax}{\cos\varphi}$,则有 $\mathrm{d}x=\frac{\cos\varphi\mathrm{d}t}{a}$,$x=0,t=0$,$x=\frac{\pi}{2a}\cos\varphi,t=\frac{\pi}{2}$。于是式(14)可写成

$$\sqrt{(1-a^2y^2)(1+y'^2)}=\cos\varphi(1+\tan^2\varphi\cos^2t)=\cos\varphi\left[1+\frac{1}{2}\tan^2\varphi(1+\cos2t)\right] \tag{15}$$

将式(15)和积分上、下限代入泛函(1),并积分,得

$$J=\frac{n_0}{c}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1-a^2y^2}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\frac{n_0\cos^2\varphi}{ac}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\tan^2\varphi(1+\cos 2t)\right]\mathrm{d}t=$$

$$\frac{n_0}{8ac}[4\pi+(2-\pi)\sin^2\varphi] \tag{16}$$

当 $\varphi=0$ 时,泛函(1)有最大值,即光经过此人到光路最高点所需要的时间为

$$J=\frac{n_0\pi}{2ac} \tag{17}$$

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时,泛函(1)有最小值

$$J=\frac{n_0+(3\pi+2)}{8ac} \tag{18}$$

例 4.1.7 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=x-5$ 之间的最短距离。

解 该问题归结为求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极小值。泛函欧拉方程的通解是直线 $y=c_1x+c_2$,约束条件是极值曲线的左端点在抛物线 $y=\varphi(x)=x^2$ 上,而右端点在直线 $y=\psi(x)=x-5$ 上,且 $\varphi(x_0)=2x_0,\psi(x_1)=1$。根据式(4.1.36),关于未知数 x_0、x_1、c_1 和 c_2 的方程组为

$$\begin{cases}c_1x_0+c_2=x_0^3 & c_1x_1+c_2=x_1-5\\ 1+2x_0c_1=0 & 1+c_1=0\end{cases}$$

解此方程组得

$$x_0=\frac{1}{2},x_1=\frac{23}{8},c_1=-1,c_2=\frac{3}{4}$$

于是极值曲线的方程为 $y=\frac{3}{4}-x$,而所给两条曲线之间的最短距离是

$$J[y]=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}=\frac{19\sqrt{2}}{8}$$

例 4.1.8 求点 $A(1,0)$ 和椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 间的最短距离。

解 该问题归结为求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极小值。泛函的极值曲线是直线 $y=c_1x+c_2$,约束条件是极值曲线的左端点通过点 $A(1,0)$,此时 $x_0=1,y_0=0$,而右端点在曲线椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 上待定。椭圆方程可写成 $y=\psi(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$,且 $\psi'(x_1)=\frac{2x_1}{3\sqrt{9-x_1^2}}$。关于三个未知数 x_1、c_1 和 c_2 的方程组为

$$\begin{cases}c_1+c_2=0\\ c_1x_1+c_2=\frac{1}{3}\sqrt{36-4x_1^2}\\ 1-\frac{2_1c_1}{3\sqrt{9-x_1^2}}=0\end{cases}$$

解此方程组得

$$x_1=\frac{9}{5},c_1=2,c_2=-2$$

于是极值曲线的方程为 $y=2x-2$,而点 $A(1,0)$ 和椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 之间的最短距离是

$$J[y]=\int_1^{\frac{9}{5}}\sqrt{1+2^2}\mathrm{d}x=\sqrt{5}x\Big|_1^{\frac{9}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

4.2 含有多个函数的泛函的变分问题

设空间曲线泛函

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x \tag{4-2-1}$$

式中 $y,z\in C^2[x_0,x_1]$,$F\in C^2$,容许曲线 $y=y(x)$,$z=z(x)$ 在左端点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 固定,在右端点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 待定。

泛函(4-2-1)的变分可模仿上节的方法来进行。泛函 $J[y,z]$ 的增量可写成

$$\begin{aligned}\Delta J=&\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x=\\&\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')\mathrm{d}x+\\&\int_{x_0}^{x_1}F[(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')-F(x,y,z,y',z')]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4-2-2}$$

对上式右边第一个积分应用中值定理并考虑到 F 的连续性,同时在第二个积分中析出它的线性主部,有

$$\begin{aligned}\delta J=&F|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\delta y|_{x=x_1}+F_{z'}\delta z|_{x=x_1}+\\&\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y+\left(F_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)\delta z\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4-2-3}$$

因为泛函 $J[y,z]$ 的极值只能在极值曲线上取得,故必须满足欧拉方程组

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,F_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0 \tag{4-2-4}$$

这个方程组的通解中含有四个任意常数,由于 B 点可以变动,又多了一个未知量 x_1,为了使泛函(4-2-1)有唯一一组解,就需要确定五个常数。因为 A 点固定,由 $y(x_0)=y_0$、$z(x_0)=z_0$ 可定出两个常数。其余三个常数可根据泛函的极值条件 $\delta J=0$ 确定。

根据式(4-2-4)并由条件 $\delta J=0$,式(4-2-3)可写成

$$\delta J=F|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\delta y|_{x=x_1}+F_{z'}\delta z|_{x=x_1}=0 \tag{4-2-5}$$

根据上一节的讨论,有

$$\delta y|_{x=x_1}=\delta y_1-y'(x_1)\delta x_1,\delta z|_{x=x_1}=\delta z_1-z'(x_1)\delta x_1 \tag{4-2-6}$$

将式(4-2-6)代入式(4-2-5),得

$$\delta J=(F-y'F_{y'}-z'F_{z'})|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1=0 \tag{4-2-7}$$

式(4-2-7)中的 $\delta x_1,\delta y_1,\delta z_1$ 是任意的,即点 B 可按任意方式变动。根据 y_1、z_1 与 x_1 之间的关系,可分四种情形来讨论。

(1) 若变分 δx_1、δy_1、δz_1 相互无关,则由条件 $\delta J=0$,得

$$\begin{cases}(F-y'F_{y'}-z'F_{z'})|_{x=x_1}=0\\F_{y'}|_{x=x_1}=0\\F_{z'}|_{x=x_1}=0\end{cases} \tag{4-2-8}$$

此时,若把式(4-2-8)的后两式代入第一个式中,则有 $F|_{x=x_1}=0$,即泛函的被积函数为零,一般来说,这样的变分问题无意义。

(2) 若边界点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 沿着某一曲线 $y_1=\varphi(x_1),z_1=\psi(x_1)$ 变动时，则 $\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1,\delta z_1=\psi'(x_1)\delta x_1$，。将它们代入式(4-2-7)并整理，同时注意到 δx_1 是任意的，得

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]\big|_{x=x_1}=0 \tag{4-2-9}$$

式(4-2-9)称为泛函 $J[y,z]$ 的极值曲线与端点曲线即极值问题的**横截(性)条件**。它与方程 $y_1=\varphi'(x_1),z_1=\psi(x_1)$ 一起就能确定欧拉方程组的通解中的任意常数。

(3) 若边界点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 沿着某一曲面 $\Phi(x_1,y_1,z_1)=0$ 变动，则

$$\Phi_{x_1}\delta x_1+\Phi_{y_1}\delta y_1+\Phi_{z_1}\delta z_1=0 \tag{4-2-10}$$

设 $\Phi_{z_1}\neq 0$，则可解出 $\delta z_1=-(\Phi_{x_1}/\Phi_{z_1})\delta x_1-(\Phi_{y_1}/\Phi_{z_1})\delta y_1$，代入式(4-2-7)，得

$$\left(F-y'F_{y'}-z'F_{z'}-F_{z'}\frac{\Phi_x}{\Phi_z}\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1+\left(F_{y'}-F_{z'}\frac{\Phi_y}{\Phi_z}\right)\Big|_{x=x_1}\delta y_1=0$$

由于 δx_1 与 δy_1 是任意的，故边界条件为

$$\begin{cases}\left(F-y'F_{y'}-z'F_{z'}-F_{z'}\dfrac{\Phi_x}{\Phi_z}\right)\Big|_{x=x_1}=0\\ \left(F_{y'}-F_{z'}\dfrac{\Phi_y}{\Phi_z}\right)\Big|_{x=x_1}=0\end{cases} \tag{4-2-11}$$

将式(4-2-11)与曲面方程 $\Phi(x_1,y_1,z_1)=0$ 联立，即可求出极值曲线。

(4) 若边界点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 可在空间平面 $x=x_1$ 上变动，则 $\delta x_1=0$，δy_1 和 δz_1 可取任意值，自然边界条件为

$$F_{y'}\big|_{x=x_1}=0,F_{z'}\big|_{x=x_1}=0 \tag{4-2-12}$$

定理 4.2.1 设泛函 $J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$ 的极值曲线左端边界条件 $y(x_0)=y_0$、$z(x_0)=z_0$ 固定，而另一端点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 在已知曲线 $y_1=\varphi(x_1)$、$z_1=\psi(x_1)$ 上变动，则可动一端的极值曲线 $y=y(x)$ 必满足横截条件(4-2-9)。

推论 1 若边界点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 在已知曲线 $y_0=\varphi(x_0)$、$z_0=\psi(x_0)$ 上变动，则泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$ 的极值曲线在边界点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 处必满足横截条件

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]\big|_{x=x_0}=0 \tag{4-2-13}$$

推论 2 若边界点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 沿某一曲面 $z_1=\varphi(x_1,y_1)$ 变动，则泛函(4-2-1)的极值曲线 $y=y(x)$、$z=z(x)$ 在 $B(x_1,y_1,z_1)$ 处必满足横截条件

$$\begin{cases}[F-y'F_{y'}+(\varphi_x-z')F_{z'}]\big|_{x=x_1}=0\\ (F_{y'}+F_{z'}\varphi_y)\big|_{x=x_1}=0\end{cases} \tag{4-2-14}$$

这两个条件和 $z_1=\varphi(x_1,y_1)$ 在一起，可以确定欧拉方程组通解中的两个任意常数。

推论 3 设泛函 $J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$，则可得到在端点 $B(x_1,y_{11},y_{21},\cdots,y_{n1})$ 是可动情况下的边界条件，即

$$\begin{cases}\left(F-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Big|_{x=x_1}=0\\ F_{y_i'}\big|_{x=x_1}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{4-2-15}$$

推论 4 设泛函 $J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$，若边界点 $B(x_1,y_{11},y_{21},\cdots,y_{n1})$ 在已知曲线 $y_i=\psi_i(x_1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上变动，则极值函数在边界点 $B(x_1,y_{11},y_{21},\cdots,y_{n1})$ 处必满足横截条件

$$\left(F+\sum_{i=1}^{n}(\psi_i-y_i')F_{y_i'}\right)\Big|_{x=x_1}=0 \tag{4-2-16}$$

如果端点 A 也是可动的，则和端点 B 作同样的处理。

例 4.2.1 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x$ 的横截条件，点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 在曲面 $z_1=\varphi(x_1,y_1)$ 上变动。

解 由推论 2 可知，在 $x=x_1$ 时，横截条件为

$$\begin{cases}[F-y'F_{y'}+(\varphi_x-z')F_{z'}]\big|_{x=x_1}=0\\(F_{y'}+F_{z'}\varphi_y)\big|_{x=x_1}=0\end{cases}$$

从而有

$$1+\varphi_x z'=0,y'+z'\varphi_y=0$$

当 $x=x_1$ 时，以上两式合并为

$$\frac{1}{\varphi_x}=\frac{y'}{\varphi_y}=-\frac{z'}{1}$$

这个条件说明所求的极值曲线在点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 处的切线矢量 $\boldsymbol{t}(1,y',z')$ 与在同一点处曲面的法线矢量 $\boldsymbol{N}(\varphi_x,\varphi_y,-1)$ 相互平行。因此横截条件变为极值曲线与曲面 $z=\varphi(x,y)$ 成正交的条件。

例 4.2.2 求泛函 $J[y(x),z(x)]=\int_0^{x_1}(y'^2+z'^2+2yz)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。已知端点 $y(0)=0$，$z(0)=0$，另一端点 (x_1,y_1,z_1) 在平面 $x=x_1$ 上待定。

解 泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0\\F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}z''-y=0\\y''-z=0\end{cases}$$

联立方程组，解得

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

$$z=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x$$

由边界条件 $y(0)=0,z(0)=0$，得

$$c_1=-c_2,c_3=0$$

所以

$$y=c_1\mathrm{e}^x-c_1\mathrm{e}^{-x}+c_4\sin x$$

$$z=c_1\mathrm{e}^x-c_1\mathrm{e}^{-x}-c_4\sin x$$

可动边界点的横截条件为

$$F_{y'}|_{x=x_1}=0,F_{z'}|_{x=x_1}=0$$

由上述条件得

$$F_{y'}|_{x=x_1}=2y'|_{x=x_1}=0,F_{z'}|_{x=x_1}=2z'|_{x=x_1}=0$$

或

$$y'(x_1)=0,z'(x_1)=0$$

也就是

$$c_1e^{x_1}+c_1e^{-x_1}+c_4\cos x_1=0$$

$$c_1e^{x_1}+c_1e^{-x_1}-c_4\cos x_1=0$$

当 $\cos x_1\neq 0$ 时，有 $c_1=c_4=0$，故极值曲线只能在直线 $y=0,z=0$ 上达到。当 $\cos x_1=0$，即 $x_1=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，有 $c_1=0$，而 c_4 可以任意取值，于是有

$$\begin{cases}y=c_4\sin x\\ z=-c_4\sin x\end{cases}$$

可以验证，在这种情况下，对于任意的 c_4 都是极值曲线。

例 4.2.3 求两不相交曲面 $z=\varphi(x,y)$ 与 $z=\psi(x,y)$ 之间的距离。

解 设连接两曲面上点的曲线方程为

$$\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases},(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

两曲面之间的距离为

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x$$

被积函数 $F=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$，它只依赖于 y' 和 z'，泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases}F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''=0\\ F_{y'z'}y''+F_{z'z'}z''=0\end{cases}$$

这是关于 y'' 和 z'' 的齐次方程组，当系数行列式不为零，即

$$F_{y'y'}F_{z'z'}-(F_{y'z'})^2\neq 0$$

时，得到零解

$$y''=0,z''=0$$

将上面两个方程积分，得

$$\begin{cases}y=c_1x+c_2\\ z=c_3x+c_4\end{cases}$$

即所求泛函的极值曲线是空间中的一族直线。

由于本例题中被积函数是例 4.2.1 中 $f(x,y,z)=1$ 的情形，只是边界条件两端都是变动的，所以在点 (x_0,y_0,z_0) 和点 (x_1,y_1,z_1) 处的横截条件都转化为正交条件。因此，它只能在与曲面 $z=\varphi(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处及与曲面 $z=\psi(x,y)$ 在点 (x_1,y_1,z_1) 处都相垂直的直线上取得极值。

例 4.2.4 求点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到直线

$$\begin{cases}y=mx+p\\ z=nx+q\end{cases}$$

的最短距离。

解 这个问题归结为求泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

的极小值，而泛函的极值曲线的一个边界点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 给定，而另一个边界点可以沿着给定的直线

$$\begin{cases}y=mx+p\\z=nx+q\end{cases} \tag{2}$$

移动。此时，函数 φ 和 ψ 分别为

$$\begin{cases}\varphi=mx+p\\\psi=nx+q\end{cases} \tag{3}$$

由于泛函只是 y' 和 z' 的函数，故其欧拉方程组的通解是直线，即

$$\begin{cases}y=c_1x+c_2\\z=c_3x+c_4\end{cases} \tag{4}$$

横截条件为

$$\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+(m-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+(n-z')\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0 \tag{5}$$

由 $y'=c_1,z'=c_3$，可得

$$1+mc_1+nc_3=0 \tag{6}$$

式(6)表明所求直线(4)与所给定的直线(2)垂直。

因所求直线(4)应通过给定的点 $M(x_0,y_0,z_0)$，故有

$$\begin{cases}y_0=c_1x_0+c_2\\z_0=c_3x_0+c_4\end{cases} \tag{7}$$

又因所求直线(4)还应在给定的直线(2)上，故有

$$\begin{cases}c_1x_1+c_2=mx_1+p\\c_3x_1+c_4=nx_1+q\end{cases} \tag{8}$$

将方程式(6)、式(7)和式(8)联立求解，可确定五个常数 c_1、c_2、c_3、c_4 和 x_1，这些常数是

$$c_1=\frac{mx_0+mn(z_0-q)-(1+n^2)(y_0-p)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0} \tag{9}$$

$$c_2=y_0-\frac{mx_0+mn(z_0-q)-(1+n^2)(y_0-p)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0}x_0 \tag{10}$$

$$c_3=\frac{nx_0+mn(y_0-p)-(1+m^2)(z_0-q)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0} \tag{11}$$

$$c_4=z_0-\frac{nx_0+mn(y_0-p)-(1+m^2)(z_0-q)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0}x_0 \tag{12}$$

$$x_1 = \frac{x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)}{1 + m^2 + n^2} \tag{13}$$

将 c_1、c_2 和 x_1 代入泛函(1),可得

$$J[y,z] = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2 + (z_0 - q)^2 - \frac{[x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)]^2}{1 + m^2 + n^2}} \tag{14}$$

例 4.2.5 试求圆周 $\Gamma_0: x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ 与双曲线 $\Gamma_1: z^2 - x^2 = b^2, y = 0$ 之间的最短距离。

解 选 z 作自变量。设曲线过 Γ_0 的任一点 $A(x_0, y_0, 0)$;过 Γ_1 的任一点 $B(x_1, 0, z_1)$,且所求曲线为

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases} \quad 0 \leqslant z \leqslant z_1 \tag{1}$$

它必使泛函

$$J[x,y] = \int_0^{z_1} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

取最小值。这个泛函的一个边界点 $A(x_0, y_0, 0)$ 在圆周 $\Gamma_0: \Phi_0 = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ 上移动,而另一个边界点 $B(x_1, 0, z_1)$ 在双曲线 $\Gamma_1: \Phi_1 = z^2 - x^2 - b^2 = 0$ 上待定。被积函数及各偏导数为

$$F = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}, F_x = 0, F_{x'} = \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}}, F_y = 0, F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \tag{3}$$

泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{x'} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = 0 \\ F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{y'} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

或

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = c_1, \frac{y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = c_2 \tag{5}$$

由上两式可得 $y' = kx'$,代入上两式,得 $x' = k_1, y' = k_2$,其中 k, k_1, k_2 皆为常数。将 x' 和 y' 积分,并注意到曲线过点 $A(x_0, y_0, 0)$,得

$$\begin{cases} x = k_1 z + x_0 \\ y = k_2 z + y_0 \end{cases} \tag{6}$$

它的几何形状为空间直线。又曲线过点 $B(x_1, 0, z_1)$,所以

$$\begin{cases} x_1 = k_1 z_1 + x_0 \\ 0 = k_2 z_1 + y_0 \end{cases} \tag{7}$$

因点 A 圆周 Γ_0 上移动,由横截条件,有

$$\left(F_{x'} - F_{y'}\frac{\Phi_{0x}}{\Phi_{0y}}\right)\Bigg|_{z=z_0} = 0$$

或

$$k_1 y_0 - k_2 x_0 = 0 \tag{8}$$

又因点 B 在双曲线 Γ_1 上待定，由横截条件，有

$$\left(F - x'F_{x'} - y'F_{y'} - F_{x'}\frac{\Phi_{1z}}{\Phi_{1x}}\right)\Big|_{z=z_1} = 0$$

或

$$x_1 + k_1 z_1 = 0 \tag{9}$$

由于曲线过 $A(x_0,y_0,0)$、$B(x_1,0,z_1)$ 两点，故有

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = a^2 \\ z_1^2 - x_1^2 = b^2 \end{cases} \tag{10}$$

联立求解式(7) ~ 式(10)，得 $y_0 = k_2 = 0, x_0 = 2x_1 = \pm a, z_1 = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}, k_1 = -\frac{x_1}{z_1}$。于是，所求极值曲线的长度为

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\mathrm{d}z = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + k_1^2}\mathrm{d}z =$$

$$z_1\sqrt{1 + k_1^2} = \sqrt{z_1^2 + x_1^2} = \sqrt{b_2 + \frac{1}{2}a^2} \tag{11}$$

由于 a、b 都不为零，所给两条曲线的距离一定存在，故 J 就是所求极值曲线的长度。

例 4.2.6 求点 $A(1,1,1)$ 到球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的最短距离。

解 最短距离为下列泛函

$$J[y,z] = \int_{x_1}^{1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

式中 x_1 所在的点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 应在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上。泛函(1) 的极值曲线是直线

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2 \\ z = c_3 x + c_4 \end{cases} \tag{2}$$

极值曲线(2) 应通过点 $A(1,1,1)$，有

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_3 + c_4 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 处的横截条件为

$$\left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - z'\right)\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right]\Big|_{x=x_1} = 0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right)\Big|_{x=x_1} = 0 \tag{5}$$

将式(4) 和式(5) 化简，并注意到 $y' = c_1, z' = c_3$，有

$$\begin{cases} z_1 - c_3 x_1 = 0 \\ c_1 z_1 - c_3 y_1 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

根据极值曲线应通过点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 的条件，有

$$\begin{cases} y_1 = c_1 x_1 + c_2 \\ z_1 = c_3 x_1 + c_4 \end{cases} \tag{7}$$

利用球面方程,联立求解式(3)、式(6)和式(7),可得 $c_1 = c_3 = 1, c_2 = c_4 = 0$,于是极值曲线的方程是

$$\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \tag{8}$$

因为点 $B(x_1, y_1, z_1)$ 在球面上,利用上式可得 $x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以可得到两点

$$B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{和} B_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

在连接点 A 和点 B_1 的极值曲线(8)上,泛函(1)取得极小值,该极小值是

$$J_{\min} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \sqrt{1 + 1^2 + 1^2}\mathrm{d}x = \sqrt{3} - 1 \tag{9}$$

在连接点 A 和点 B_2 的极值曲线(8)上,泛函(1)取得极大值,该极大值是

$$J_{\max} = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \sqrt{1 + 1^2 + 1^2}\mathrm{d}x = \sqrt{3} + 1 \tag{10}$$

4.3 含有高阶导数的泛函的变分问题

本节讨论含有高阶导数的泛函的边界点可以变动的极值问题。这里先讨论高阶导数为二阶的情形,再讨论含有更高阶导数的泛函。

4.3.1 泛函含有一个未知函数二阶导数的情形

设泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\mathrm{d}x \tag{4-3-1}$$

式中 $y \in C^2[x_0, x_1]$, $F \in C^3$,容许曲线 $y = y(x)$ 在左端点 $A(x_0, y_0)$ 固定,在右端点 $B(x_1, y_1)$ 可变。泛函(4-3-1)的极值曲线必满足欧拉—泊松方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2F_{y''}}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{4-3-2}$$

一般情况下,式(4-3-2)是一个四阶常微分方程,其通解含有四个任意常数。由于右端点 B 可变,所以 x_1 也待定,故总共需确定五个任意常数。因为左端点 A 固定,故可由边界条件 $y(x_0) = y_0$ 和 $y'(x_0) = y_0'$ 确定出欧拉—泊松方程通解中的两个任意常数。为了确定唯一解,就必须再找出三个方程以确定其余三个待定常数,这三个方程可以根据泛函取极值的必要条件 $\delta J = 0$ 得到。这里还是就一般情形进行讨论,先计算泛函(4-3-1)的增量 ΔJ,然后再分离出线性主部 δJ。

泛函(4-3-1)的增量为

$$\begin{aligned} \Delta J = &\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'')\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\mathrm{d}x = \\ &\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'')\mathrm{d}x + \\ &\int_{x_0}^{x_1} F[(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'') - F(x, y, y'')]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4-3-3}$$

将式(4-3-3)右边第一个积分用中值定理,把第二个积分的被积函数按泰勒级数展开,得

$$\Delta J = F(x,y,y',y'')\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'')\mathrm{d}x + R \qquad (4-3-4)$$

式中 R 是阶数高于 $|\delta x_1|$、$|\delta y_1|$、$|\delta y|$、$|\delta y'|$ 及 $|\delta y''|$ 之中最大阶次的无穷小量。取(4-3-4)的线性主部,得

$$\delta J = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'')\mathrm{d}x \qquad (4-3-5)$$

将式(4-3-5)右边积分号下第二项分部积分一次,第三项分部积分两次,并注意到左端点固定时有 $\delta y|_{x=x_0} = 0$,$\delta y'|_{x=x_0} = 0$,再由式(4-3-2),可得到

$$\delta J = \left(F\delta x + F_{y'}\delta y + F_{y''}\delta y' - \frac{\mathrm{d}F_{y''}}{\mathrm{d}x}\delta y\right)\Big|_{x=x_1} \qquad (4-3-6)$$

由 4.1 节知,δx_1、δy 与 $\delta y'$ 并非各自独立,而是存在下列关系

$$\delta y_1 = \delta y|_{x=x_1} + y'(x_1)\delta x_1 \qquad (4-3-7)$$

将上述关系用于 $\delta y'$,有

$$\delta y'_1 = \delta y'|_{x=x_1} + y''(x_1)\delta x_1 \qquad (4-3-8)$$

将式(4-3-7)和式(4-3-8)代入式(4-3-6),并由 $\delta J = 0$,得

$$\delta J = \left[F - y'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}\delta x_1 +$$

$$\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{y''}|_{x=x_1}\delta y_1 = 0 \qquad (4-3-9)$$

如果式(4-3-9)中 δx、δy_1 和 $\delta y'_1$ 之间是相互独立的,则它们的系数在点 $x = x_1$ 处应该等于零,即

$$\begin{cases}\left[F - y'\left(F_{y'} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1} = 0\\ \left(F_{y'} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)\Big|_{x=x_1} = 0\\ F_{y''}|_{x=x_1} = 0\end{cases} \qquad (4-3-10)$$

用与上面同样的方法,若把式(4-3-10)的后两式代入第一式中,仍可得到 $F|_{x=x_1} = 0$,一般情况下,这样的变分问题无意义。若使变分问题有意义,应在可动的右端点给出一个已知条件。于是,式(4-3-10)的后两个条件、右端点给出的一个已知条件加上固定端点的两个条件,就可以确定极值曲线 $y = y(x,c_1,c_2,c_3,c_4,x_1)$ 中的五个待定常量。

定理 4.3.1 泛函(4-3-1)在某一端点固定 $y(x_0) = y_0$,$y'(x_0) = y'_0$,另一可动端点 (x_1,y_1) 在给定一个已知条件下,其极值曲线 $y = y(x)$ 在端点 $x = x_1$ 处必满足自然边界条件(4-3-10)的后两个条件。

推论 1 设点 (x_1,y_1) 在曲线 $y_1 = \varphi(x_1)$ 上变动,且 $y'_1 = \psi(x_1)$,则泛函(4-3-1)的极值曲线 $y = y(x)$ 在端点 $x = x_1$ 处必满足以下自然边界条件

$$\left[F + (\varphi' - y')\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) + (\varphi' - y')F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1} = 0 \qquad (4-3-11)$$

证 由于 $y_1 = \varphi(x_1)$,$y'_1 = \psi(x_1)$,故有

$$\delta y_1 = \varphi'(x_1)\delta x_1,\ \delta y'_1 = \psi'(x_1)\delta x_1 \qquad (4-3-12)$$

把式(4-3-12)代入式(4-3-9)中,就得到式(4-3-11)。证毕。

注意,推论1中的 $\psi(x_1)$ 并不一定等于 $\varphi'(x_1)$,当然也包括 $\psi(x_1)=\varphi'(x_1)$ 的情况。

推论2 若端点 (x_1,y_1) 满足关系式 $\varphi(x_1,y_1,y_1')=0$,则在 $x=x_1$ 处的自然边界条件为

$$\begin{cases}\left[F-y'\left(F_{y'}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)-\left(y''+\dfrac{\varphi_x}{\varphi_{y'}}\right)F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}=0\\ \left[F_{y'}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}-\left(\dfrac{\varphi_y}{\varphi_{y'}}\right)F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}=0\end{cases}\tag{4-3-13}$$

证 因为 x_1、y_1 和 y_1' 之间由 $\varphi(x_1,y_1,y_1')=0$ 联系着,所以在 δx_1、δy_1 和 $\delta y_1'$ 中只有两个可以是任意的,另一个可由方程

$$\varphi_{x_1}\delta x_1+\varphi_{y_1}\delta y_1+\varphi_{y_1'}\delta y_1'=0$$

来确定。当 $\varphi y_1'\neq 0$ 时,将 $\varphi y_1'=-(\varphi_{x_1}/\varphi_{y_1'})\delta x_1-(\varphi_{y_1}/\varphi_{y_1'})\delta y_1$ 代入式(4-3-9)中,得

$$\delta J=\left[F-y'\left(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)-\left(y''+\frac{\varphi_x}{\varphi_{y'}}\right)F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}\delta x_1+$$

$$\left(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}-\frac{\varphi_y}{\varphi_{y'}}F_{y''}\right)\Big|_{x=x_1}\delta y_1=0$$

由于 δx_1 和 δy_1 是任意的,它们前边的系数应分别为零,故式(4-3-13)成立。证毕。

推论3 若端点 (x_1,y_1) 仅在直线 $x=x_1$ 上自由移动,则在 $x=x_1$ 处的自然边界条件为

$$\begin{cases}\left(F_{y'}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)\Big|_{x=x_1}=0\\ F_{y''}\big|_{x=x_1}=0\end{cases}\tag{4-3-14}$$

证 因为端点 (x_1,y_1) 仅在直线 $x=x_1$ 上自由移动,$\delta x_1=0$,δy_1 和 $\delta y_1'$ 可任意取值,由式(4-3-9)可知,若使 $\delta J=0$ 成立,δy_1 和 $\delta y_1'$ 的系数必须为零,所以式(4-3-14)成立。证毕。

例4.3.1 试讨论当 $y(0)=0,y'(0)=1,y(1)=1,y'(1)$ 为任意时,泛函 $J[y]=\int_0^1(a+y''^2)\mathrm{d}x$ 的极值情况。

解 $F=a+y''^2,F_y=0,F_{y'}=0,F_{y''}=2y''$,欧拉—泊松方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}(2y'')=0\tag{1}$$

或

$$y^{(4)}=0\tag{2}$$

其通解为

$$y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3\tag{3}$$

由条件 $y(0)=0$,得 $c_1=0$,由条件 $y'(0)=1$,得 $c_2=1$。由条件 $y(1)=1$,得

$$c_3+c_4=0\tag{4}$$

由 $y'(1)$ 的任意性,从式(4-3-10)的第三个式子可知 $F_{y''}\big|_{x=1}=0$,从而有 $y''(1)=0$。于是由式(3)可求得

$$y''(1)=2c_3+6c_4=0\tag{5}$$

将式(4)和式(5)联立,可求出 $c_3=0,c_4=0$。因此泛函的极值只能在直线 $y=x$ 上达到。

例4.3.2 设泛函 $J[y]=\int_0^1(y''^2-2xy)\mathrm{d}x$,其边界条件为 $y(0)=0,y'(0)=0,y(1)=1$,试

根据 $\delta J = 0$ 确定泛函的极值曲线。

解 泛函的欧拉方程为

$$-2x + 2y^{(4)} = 0$$

或

$$y^{(4)} = x$$

积分四次,得

$$y = \frac{x^5}{120} + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

由边界条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 0$,可定出 $c_3 = 0, c_4 = 0, c_1 + c_2 = \frac{119}{120}$。另一个边界条件由 $\delta J = 0$ 来补足。因已给定 $y(1) = 1$,不能变动,故 $\delta x_1 = 0, \delta y_1 = 0$,根据式(4-3-9),得

$$F_{y'}\big|_{x=1}\delta y_1' = 0$$

由于 $\delta y_1'$ 的任意性,显然应该有 $F_{y'}\big|_{x=1} = 2y''(1) = 0$,即

$$y''(1) = \left(\frac{x^3}{6} + 6c_1x + 2c_2\right)\Big|_{x=1} = \frac{1}{6} + 6c_1 + 2c_2 = 0$$

可解得 $c_1 = -\frac{129}{240}, c_2 = \frac{367}{240}$。于是极值曲线为

$$y = \frac{x^2}{240}(2x^3 - 129x + 367)$$

4.3.2 泛函含有一个未知函数多阶导数的情形

设泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)})\mathrm{d}x \tag{4-3-15}$$

式中 $y \in C^{2n}[x_0, x_1]$, $F \in C^{n+1}$,容许曲线 $y = y(x)$ 在左端点 $A(x_0, y_0)$ 固定,在右端点 $B(x_1, y_1)$ 可变。泛函(4-3-15)的极值函数必满足欧拉—泊松方程

$$F_y + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k F_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x^k} = 0 \tag{4-3-16}$$

一般情况下,欧拉—泊松方程(4-3-16)是一个 $2n$ 阶常微分方程,其通解含有 $2n$ 个任意常数。由于右端点 B 可变,所以 x_1 也待定,故总共需确定 $2n+1$ 个任意常数。因为左端点 A 固定,故可由边界条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ 确定出欧拉—泊松方程通解中的 n 个任意常数。为了确定唯一解,就必须再找出 $n+1$ 个方程以确定其余 $n+1$ 个待定常数,这 $n+1$ 个方程可以根据泛函取极值的必要条件一阶变分等于零即 $\delta J = 0$ 得到。这里就一般情形进行讨论,先计算泛函的增量 ΔJ,然后分离出其线性主部 δJ。泛函(4-3-15)的增量为

$$\begin{aligned}\Delta J = &\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'', \cdots, y^{(n)}+\delta y^{(n)})\mathrm{d}x - \\ &\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})\mathrm{d}x = \\ &\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'', \cdots, y^{(n)}+\delta y^{(n)})\mathrm{d}x + \\ &\int_{x_0}^{x_1}[F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'', \cdots, y^{(n)}+\delta y^{(n)}) - \\ &F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4-3-17}$$

将式(4-3-17)右边第一个积分用中值定理,将第二个积分的被积函数按泰勒级数展开,得

$$\Delta J = F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'', \cdots, y^{(n)}+\delta y^{(n)})\big|_{x=x_1+\theta x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'' + \cdots + F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)})\mathrm{d}x + R \tag{4-3-18}$$

式中,$0<\theta<1$,R 是比 $\delta y, \delta y', \delta y'', \cdots, \delta y^{(n)}$ 更高阶的无穷小。

可以认为 F 满足一定的连续条件,有

$$F\big|_{x=x_1+\theta x_1} = F\big|_{x=x_1} + \varepsilon \tag{4-3-19}$$

当 $\delta x_1 \to 0$ 时,$\varepsilon \to 0$。将式(4-3-19)代入式(4-3-18),略去高阶无穷小量 $\varepsilon\delta x_1$ 和 R,得泛函(4-3-15)的一阶变分为

$$\delta J = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'' + \cdots + F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)})\mathrm{d}x \tag{4-3-20}$$

将式(4-3-20)右边积分号下第二项起分别分部积分 k 次,其中 $k=1,2,\cdots,n$,并注意到左端点固定时有 $\delta y\big|_{x=x_0}=0, \delta y'\big|_{x=x_0}=0, \delta y''\big|_{x=x_0}=0, \cdots, \delta y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=0$,当泛函(4-3-15)取极值时,应有 $\delta J = 0$,故有

$$\begin{aligned}\delta J = &\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k F_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\delta y\mathrm{d}x + F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \left[F_{y'}\delta y + F_{y''}\delta y' - \frac{\mathrm{d}F_{y''}}{\mathrm{d}x}\delta y + \cdots + \right.\\ &F_{y^{(k)}}\delta y^{(k-1)} - \frac{\mathrm{d}F_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x}\delta y^{(k-2)} + \frac{\mathrm{d}^2F_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x^2}\delta y^{(k-3)} - \cdots + (-1)^{(k-1)}\frac{\mathrm{d}^{k-1}F_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\delta y + \cdots +\\ &\left.F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)} - \frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\delta y^{(n-2)} + \frac{\mathrm{d}^2F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x^2}\delta y^{(n-3)} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{\mathrm{d}^{n-1}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\delta y\right]\Bigg|_{x=x_1} =\\ &\left\{F\delta x + \left[F_{y'} + \sum_{k-1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\delta y + \left[F_{y''} + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\delta y' + \cdots + \right.\\ &\left[F_{y^{(j)}} + \sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\delta y^{(j-1)} + \cdots + \left[F_{y^{(n-1)}} - \frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\right]\delta y^{(n-2)} +\\ &\left.F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}\right\}\Bigg|_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[F_y + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\delta y\mathrm{d}x = 0\end{aligned} \tag{4-3-21}$$

由此可见,上式积分项应等于零,故式(4-3-16)成立。

变分 $\delta x_1, \delta y, \delta y', \cdots, \delta y^{(n-1)}$ 并非各自独立,而是存在下列关系

$$\delta y\big|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1 \tag{4-3-22}$$

将上述关系用于 $\delta y'$,有

$$\delta y'\big|_{x=x_1} = \delta y_1' - y''(x_1)\delta x_1 \tag{4-3-23}$$

将上述关系用于 $\delta y^{(k)}$,有

$$\delta y^{(k)}\big|_{x=x_1} = \delta y_1^{(k)} - y^{(k+1)}(x_1)\delta x_1 \quad (k \geqslant 0) \tag{4-3-24}$$

式(4-3-24)已包含了式(4-3-22)和式(4-3-23)。将式(4-3-24)所示关系代入式(4-3-21),经整理得

$$\begin{aligned}\delta J = &\left\{F - y'\left[F_{y'} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right] - y''\left[F_{y''} + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right] - \cdots - \right.\\ &\left.y^{(j)}\left[F_{y^{(j)}} + \sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right] - \cdots - y^{(n-1)}\left[F_{y^{(n-1)}} - \frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\right] - y^{(n)}F_{y^{(n)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}\delta x_1 +\end{aligned}$$

$$\left[F_{y'}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_1+\left[F_{y''}+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_1'+\cdots+$$

$$\left[F_{y^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_1^{(j-1)}+\cdots+$$

$$\left[F_{y^{(n-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_1^{(n-2)}+F_{y^{(n)}}\big|_{x=x_1}\delta y_1^{(n-1)}=0 \tag{4-3-25}$$

由式(4-3-25)可以看出,包括 δx_1 在内,该式右端共有 $n+1$ 个变分项。δx_1 前的系数除第一项 F 外,其余各项分别是 $\delta y_1,\delta y_1',\cdots,\delta y_1^{(n-1)}$ 的系数乘以 $y^{(j)}(x_1)$,其中 $j=1,2,\cdots,n$。当 $\delta y_1,\delta y_1',\cdots,\delta y_1^{(n-1)}$ 之间相互独立时,其前面的系数应为零,为使 $\delta J=0$ 恒成立,必然有 $F|_{x=x_1}\delta x_1=0$,因为此时 δx_1 前的各系数除 F 外均等于零,而 F 是泛函(4-3-15)的被积函数,它在 $x=x_1$ 处一般并不一定为零,故有 $\delta x_1=0$,只有在 $F|_{x=x_1}=0$ 的特定条件下,才允许 $\delta x_1\neq 0$。换句话说,当 δx_1 任意取值时,$\delta y_1,\delta y_1',\cdots,\delta y_1^{(n-1)}$ 之间并不相互独立,而是至少要有一项 $\delta y_1^{(j-1)}$(其中 $\delta y_1^{(0)}=\delta y_1$)等于零,才有可能使 F 与该项前面的系数(此时不为零)乘以 $y^{(j)}(x_1)$ 之和为零,以满足 $\delta J=0$ 的条件。总之,为使 $\delta J=0$ 恒成立,并能得到欧拉方程的定解,或者 $\delta x_1,\delta y_1,\delta y_1',\cdots,\delta y_1^{(n-1)}$ 之间至少应有一项为零,或者在待定端点给出某种(或某些种)附加条件,即待定边界至少要给出一项已知条件。当右端点 B 沿着直线 $x=x_1$ 移动时,有 $\delta x_1=0$,而其余各变分项任意取值时,则其前面的系数在点 $x=x_1$ 处应该分别等于零,即

$$\begin{cases}\left[F_{y'}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Big|_{x=x_1}=0\\ \left[F_{y''}+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Big|_{x=x_1}=0\\ \cdots\\ \left[F_{y^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Big|_{x=x_1}=0\\ \cdots\\ \left[F_{y^{(n-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\right]\Big|_{x=x_1}=0\qquad F_{y^{(n)}}|_{x=x_1}=0\end{cases} \tag{4-3-26}$$

式(4-3-26)是在 $\delta x_1=0$ 条件下泛函取极值所要求的自然边界条件。

式(4-3-26)有 n 个边界条件,加上固定端点的 n 个边界条件,共 $2n$ 个边界条件,此时 x_1 为已知,将欧拉方程(4-3-16)积分,就可以确定极值函数 $y=y(x,c_1,c_2,\cdots,c_i,\cdots,c_{2n},x_1)$ 中的 $2n$ 个待定参数。

基于上述分析,可得到依赖于一个自变量的未知函数和该函数 n 阶导数的泛函的变分问题的定理,表述如下:

定理 4.3.2 设泛函(4-3-15)的极值函数 $y=y(x)$ 左端点固定,而另一端点在直线 $x=x_1$ 上待定,则待定端点必须满足自然边界条件式(4-3-26)。

若极值函数 $y=y(x)$ 的左端点固定,右端点在已知曲线 $y=\psi(x)$ 上待定,则变分 δx_1 与 $\delta y_1,\delta y_1',\cdots,\delta y_1^{(n-1)}$ 有关。相应地,可有如下定理:

定理 4.3.3 设泛函(4-3-15)的极值函数 $y=y(x)$ 左端点固定,而右端点在已知曲线 $y=\varphi(x)$ 上待定,且极值曲线在右端点的 j 阶导数为右端点 x_1 的另一已知函数 $y^{(j)}=\psi_j(x)$,其中

$j = 1,2,3,\cdots,m-1, m < n$，则待定的一端必须满足以下自然边界条件

$$\left\{F+(\varphi'-y')\left[F_{y'}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+(\psi_1'-y'')\left[F_{y''}+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+\right.$$

$$[\psi_{j-1}'-y^{(j)}]\left[F_{y^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+$$

$$\left.[\psi_{m-1}'-y^{(m)}]\left[F_{y^{(m)}}+\sum_{k=1}^{n-m}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+m)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y^{(m+1)}}+\sum_{k=1}^{n-(m+1)}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+m+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots\left[F_{y^{(n-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0\quad F_{y^{(n)}}\big|_{x=x_1}=0 \tag{4-3-27}$$

证　由于 $y=\varphi(x), y^{(j)}=\psi_j(x)$，其中 $j=1,2,3,\cdots,m-1$，对其取变分，有

$$\delta y=\varphi'(x)\delta x \tag{4-3-28}$$

$$\delta y^{(j)}=\psi_j'(x)\delta x \tag{4-3-29}$$

因 x、y 在右端点上，故 $x=x_1, y=y_1$，于是式(4-3-28)和式(4-3-29)可写成

$$\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1 \tag{4-3-30}$$

$$\delta y_1^{(j)}=\psi_j'(x_1)\delta x_1 \tag{4-3-31}$$

将式(4-3-30)和式(4-3-31)代入式(4-3-25)，且由 δx_1 的任意性，必然得到式(4-3-27)。证毕。

推论　若 $m=n$，则式(4-3-27)可写成

$$\left\{F+(\varphi'-y')\left[F_{y'}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+(\psi_1'-y'')\left[F_{y''}-\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+\right.$$

$$[\psi_{j-1}'-y^{(j)}]\left[F_{y^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+$$

$$\left.[\psi_{n-2}'-y^{(n-1)}]\left[F_{y^{(n-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\right]+[\psi_{n-1}'-y^{(n)}]F_{y^{(n)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0 \tag{4-3-32}$$

当待定端点以隐函数 $g(x_1,y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n-1)})=0$ 给出时，对其取变分，可得

$$g_{x_1}\delta x_1+g_{y_1}\delta y_1+g_{y_1'}\delta y_1'+\cdots+g_{y_1^{(n-2)}}\delta y_1^{(n-2)}+g_{y_1^{(n-1)}}\delta y_1^{(n-1)}=0 \tag{4-3-33}$$

当 $g_{y_1^{(n-1)}}\neq 0$，时 $\delta x_1,\delta y_1,\delta y_1',\cdots,\delta y_1^{(n-2)}$ 可取任意值，有

$$\delta y_1^{(n-1)}=-\frac{g_{x_1}\delta x_1+g_{y_1}\delta y_1+g_{y_1'}\delta y_1'+\cdots+g_{y_1^{(n-2)}}\delta y_1^{(n-2)}}{g_{y_1^{(n-1)}}} \tag{4-3-34}$$

将式(4-3-34)代入式(4-3-25)，由 $\delta x_1,\delta y_1,\delta y_1',\cdots,\delta y_1^{(n-2)}$ 的任意性，得

$$\left\{F-y'\left[F_{y'}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-y''\left[F_{y''}+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\right.$$

$$\left.y^{(j)}\left[F_{y^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-\right.$$

$$y^{(n-1)}\left[F_{y^{(n-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x}\right]-\left[y^{(n)}+\frac{g_x}{g_{y^{(n-1)}}}\right]F_{y^{(n)}}\Bigg\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y'}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}-\frac{g_y}{g_{y^{(n-1)}}}F_{y^{(n)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y''}+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}-\frac{g_{y'}}{g_{y^{(n-1)}}}F_{y^{(n)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left[F_{y^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}-\frac{g_{y^{(j-1)}}}{g_{y^{(n-1)}}}F_{y^{(n)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left[F_{y^{(n-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y^{(n)}}}{\mathrm{d}x^k}-\frac{g_{y^{(n-2)}}}{g_{y^{(n-1)}}}F_{y^{(n)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0 \qquad (4-3-35)$$

同理可得 $g_{x_1}\neq 0$ 或 $g_{y_1}\neq 0$ 或 $g_{y_1'}\neq 0$ 或 … 或 $g_{y_1^{(n-2)}}\neq 0$ 时的自然边界条件。

以上定理和推论是在泛函的左边界固定，右边界待定的情形下得到的，对于右边界固定，左边界待定的情形，只需把上述定理、推论及公式中的左、右互换和下标 0、1 互换即可。当然，上述定理和推论也可以推广到左、右边界均为待定的情形中去。

4.3.3 泛函含有多个未知函数多阶导数的情形

设泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_r]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_1',y_1'',\cdots,y_1^{(k)},\cdots,y_1^{(n_1)},y_2,y_2',y_2'',\cdots,$$
$$y_2^{(k)},\cdots,y_2^{(n_2)},\cdots,y_r,y_r',y_r'',\cdots,y_r^{(k)},\cdots,y_r^{(n_r)})\mathrm{d}x \qquad (4-3-36)$$

式中 $y_i\in C^{2n_i}[x_0,x_1]$，$i=1,2,\cdots,r$，$F\in C^{\max(n_1,n_2,\cdots,n_r)+1}$ 容许曲线 $y_i=y_i(x)$ 在左端点 $A(x_0,y_{i0}$ 固定，在右端点 $B(x_1,y_{i1})$ 可变。泛函(4－3－36) 的极值函数必满足欧拉 — 泊松方程组

$$F_{y_i}+\sum_{k=1}^{n_i}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k)}}}{\mathrm{d}x^k}=0\quad(i=1,2,\cdots,r) \qquad (4-3-37)$$

一般情况下，方程组(4－3－37) 中的每个方程是一个 $2n_i$ 阶常微分方程，其通解含有 $2n_i$ 个任意常数。由于右端点 B 可变，所以 x_1 也待定，故方程组总共需确定 $2(n_1+n_2+\cdots+n_r)+1$ 个任意常数。因为左端点 A 固定，故可由边界条件 $y_i(x_0)=y_{i0}$、$y_i'(x_0)=y'_{i0}$、$y_i''(x_0)=y''_{i0}$、…、$y_i^{(n_i-1)}(x_0)=y_{i0}^{(n_i-1)}$ 确定出欧拉 — 泊松方程通解中的 $n_1+n_2+\cdots+n_r$ 个任意常数。为了确定唯一解，就必须再找出 $n_1+n_2+\cdots+n_r+1$ 个方程以确定其余 $n_1+n_2+\cdots+n_r+1$ 个待定常数，这 $n_1+n_2+\cdots+n_r+1$ 个方程可以根据泛函取极值的必要条件 $\delta J=0$ 得到。仿前面的方法，有

$$\delta J=\Bigg\{F-y_i'\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-y_i''\left[F_{y_i''}-\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-$$
$$y_i^{(j)}\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-y_i^{(n_i-1)}\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x}\right]-y_i^{(n_i)}F_{y_i^{(n_i)}}\Bigg\}\Bigg|_{x=x_1}\delta x_1+$$
$$\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_{i1}+\left[F_{y_i''}+\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_{i1}'+\cdots+$$

$$\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_{i1}^{(j-1)}+\cdots+\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_{i1}^{(n_i-2)}+$$

$$F_{y_i^{(n_i)}}\Big|_{x=x_1}\delta y_{i1}^{(n_i-1)}+\int_{x_0}^{x_1}\left[F_{y_i}+\sum_{k=1}^{n_i}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\delta y_i\mathrm{d}x=0 \tag{4-3-38}$$

由此可见，上式积分项应等于零，故式(4-3-37)成立。

仿4.3.2节的分析，可得到含有一个自变量、多个未知函数及其高阶导数的泛函的变分问题的定理，表述如下：

定理4.3.4 设泛函(4-3-36)的极值函数 $y_i=y_i(x)$ 左端点固定，其中 $i=1,2,\cdots,r$，而另一端点在已知直线 $x=x_1$ 上待定，则待定端点必须满足以下自然边界条件

$$\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y_i''}+\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}-\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0\quad F_{y_i^{(n_i)}}\Big|_{x=x_1}=0 \tag{4-3-39}$$

定理4.3.5 设泛函(4-3-36)的极值函数 $y_i=y_i(x)$ 左端点固定，其中 $i=1,2,\cdots,r$，而右端点在已知曲线 $y_i=\varphi_i(x)$ 上待定，且极值曲线在右端点的 j 阶导数为右端点 x_1 的另一已知函数 $y_i^{(j)}=\psi_{ij}(x)$，其中 $j=1,2,3,\cdots,m_i-1,m_i<n_i$ 则待定的一端必须满足以下自然边界条件

$$\left\{F+(\varphi_i'-y_i')\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\right.$$

$$(\psi_{i1}'-y_i'')\left[F_{y_i''}-\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+$$

$$[\psi_{i(j-1)}'-y_i^{(j)}]\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+$$

$$\left.[\psi'_{i(m_i-1)}-y_i^{(m_i)}]\left[F_{y_i}^{(m_i)}+\sum_{k=1}^{n_i-m_i}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+m_i)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y_i^{(m_i+1)}}+\sum_{k=1}^{n_i-(m_i+1)}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+m_i+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0;\cdots$$

$$\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0;F_{y_i^{(n_i)}}\Big|_{x=x_1}=0 \tag{4-3-40}$$

推论 若 $m_i=n_i$，则式(4-3-40)可改写成

$$\left\{F+(\varphi_i'-y_i')\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\right.$$

$$(\psi_{i1}'-y_i'')\left[F_{y_i''}-\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+$$

$$[\psi_{i(j-1)}'-y_i^{(j)}]\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]+\cdots+$$

$$\left.[\psi_{i(n_i-2)}'-y_i^{(n_i-1)}]\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x}\right]+[\psi_{i(n_i-1)}'-y_i^{(n_i)}]F_{y_i^{(n_i)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0 \quad (4-3-41)$$

当待定端点以隐函数 $g(x_1,y_{i1},y_{i1}',\cdots,y_{i1}^{(n_i-1)})=0$ 给出时，其中 $i=1,2,\cdots,p,p\leqslant r$ 对其取变分，得

$$g_{x_1}\delta x_1+g_{y_{i1}}\delta y_{i1}+g_{y_{i1}'}\delta y_{i1}'+\cdots+g_{y_{i1}^{(n_i-2)}}\delta y_{i1}^{(n_i-2)}+g_{y_{i1}^{(n_i-1)}}\delta y_{i1}^{(n_i-1)}=0 \quad (4-3-42)$$

当 $g_{y_{i1}^{(n_i-1)}}\neq 0$ 时，$\delta x_1,\delta y_{i1},\delta y_{i1}',\cdots,\delta y_{i1}^{(n_i-2)}$ 可取任意值，有

$$\delta y_{i1}^{(n_i-1)}=-\frac{g_{x_1}\delta x_1+g_{y_{i1}}\delta y_{i1}+g_{y_{i1}'}\delta y_{i1}'+\cdots+g_{y_{i1}^{(n-2)}}\delta y_{i1}^{(n_i-2)}}{g_{y_{i1}^{(n_i-1)}}} \quad (4-3-43)$$

将式(4-3-43)代入式(4-3-38)，由 $\delta x_{i1},\delta y_{i1},\delta y_{i1},\cdots,\delta y_{i1}^{(n_i-2)}$ 的任意性，当 $p<r$ 时，得

$$\left\{F-y_i'\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-y_i''\left[F_{y_i''}+\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-\right.$$

$$y_i^{(j)}\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-$$

$$\left.y_i^{(n_i-1)}\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x}\right]-y_i^{(n_i)}F_{y_i^{(n_i)}}-\frac{g_x}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left\{\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\frac{g_{y_i}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left\{\left[F_{y_i''}+\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}_kF_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\frac{g_{y_i'}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left\{\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\frac{g_{y_i^{(j-1)}}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left\{\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x}\right]-\frac{g_{y_i^{(n_i-2)}}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$F_{y_i^{(n_i)}}\Big|_{x=x_1}=0 \quad (4-3-44)$$

当 $p=r$ 时，得

$$\left\{F-y_i'\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^kF_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\right.$$

$$y_i''\left[F_{y_i''}+\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k F_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-$$

$$y_i^{(j)}\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k F_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}\right]-\cdots-$$

$$y_i^{(n_i-1)}\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}-\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x}\right]-\left[y_i^{(n_i)}+\frac{g_x}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}\right]F_{y_i^{(n_i)}}\Bigg\}\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y_i'}+\sum_{k=1}^{n_i-1}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k F_{y_i^{(k+1)}}}{\mathrm{d}x^k}-\frac{g_{y_i}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y_i''}+\sum_{k=1}^{n_i-2}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k F_{y_i^{(k+2)}}}{\mathrm{d}x^k}-\frac{g_{y_i'}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left[F_{y_i^{(j)}}+\sum_{k=1}^{n_i-j}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k F_{y_i^{(k+j)}}}{\mathrm{d}x^k}-\frac{g_{y_i^{(j-1)}}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\cdots$$

$$\left[F_{y_i^{(n_i-1)}}+\frac{\mathrm{d}F_{y_i^{(n_i)}}}{\mathrm{d}x}\frac{g_{y_i^{(n_i-2)}}}{g_{y_i^{(n_i-1)}}}F_{y_i^{(n_i)}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0 \qquad (4-3-45)$$

同理可得 $g_{x_1}\neq 0$ 或 $g_{y_{i1}}\neq 0$ 或 $g_{y_{i1}'}\neq 0$ 或 $\cdots$ 或 $g_{y_{i1}^{(n_i-2)}}\neq 0$ 时的自然边界条件。

以上定理和推论是在泛函的左边界固定，右边界待定的情形下得到的，对于右边界固定，左边界待定的情形，只需把上述定理、推论和公式中的左、右互换和下标 0、1 互换即可。当然，上述定理和推论也可以推广到左、右边界均为待定的情形中去。定理 4.3.2 至定理 4.3.5 以及推论是老大中和谈天民于 2005 年提出的。

4.4 含有多元函数的泛函的变分问题

设泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4-4-1)$$

式中 $u\in C^2(D)$，$F\in C^2$。积分域 D 的边界 Γ 由 Γ_1 和 Γ_2 两部分组成，见图 4-4-1，Γ_1 是固定边界，用曲线 $x=x_1(s)$、$y=y_1(s)$ 表示，且在 Γ_1 上，$u(x,y)$ 是固定的，有

$$u(x_1(s),y_1(s))=u_1(s)=u_1 \qquad (4-4-2)$$

Γ_2 是可变边界，用曲线 $x=x_2(s)$、$y=y_2(s)$ 表示。设 Γ_2 各点的 $u(x,y)$ 是某一已知曲面 $z=z(x,y)$ 上的任意曲线，即在可动边界 Γ_2 上有

$$u(x_2(s),y_2(s))=z(x_2(s),y_2(s)) \qquad (4-4-3)$$

当 u 变为 $u+\delta u$，D 变为 $D+\delta D$ 时，泛函(4-4-1)的增量为

$$\Delta J=\iint_{D+\delta D}F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

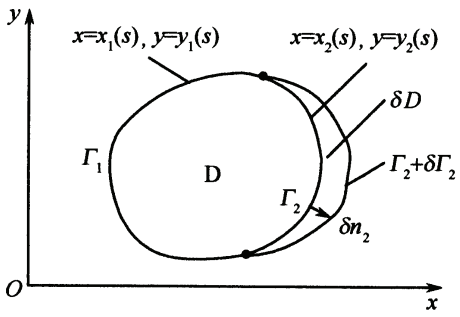


图 4-4-1 积分域及可变边界

$$\iint_D F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\iint_D [F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)-$$

$$F(x,y,u,u_x,u_y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4-4-4}$$

式(4-4-4)等号右边前两项积分可写成

$$\iint_{D+\delta D} F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint_D F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_{\delta D} F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4-4-5}$$

式中 δD 是 Γ_2 在法线方向的增量为 δn_2 时所开拓的区域。在此区域内，F 的值可以用 δn_2 线上某一中值来表示。当 $\delta n_2 \to 0$ 时，也可以用 Γ_2 上的值来表示，其差别的数量级为 δn_2 的高阶无穷小量，在取变分时可忽略不计。于是式(4-4-4)等号右边前两项的积分可写成

$$\iint_{\delta D} F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{\Gamma_2} F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\big|_{\Gamma_2}\delta n_2\delta s_2=$$

$$\int_{\Gamma_2} F(x,y,u,u_x,u_y)\big|_{\Gamma_2}\delta n_2\delta s_2+O(\delta^2)=$$

$$\int_{\Gamma_2} F(x,y,u,u_x,u_y)\big|_{\Gamma_2}\delta n_2\delta s_2 \tag{4-4-6}$$

式中 δs_2 是 Γ_2 的弧长坐标，当 δu、δu_x 和 δu_y 均为微量时，$O(\delta^2)$ 表示可以略去的 δ^2 的二阶微量，如 $\delta n\delta u$、$\delta n\delta u_x$ 和 $\delta n\delta u_y$ 等是同数量级的量。

式(4-4-4)等号右边最后一个积分可写成

$$\iint_D [F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)-F(x,y,u,u_x,u_y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_D (F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+O(\delta^2) \tag{4-4-7}$$

将式(4-4-6)和式(4-4-7)代入式(4-4-4)，且当 δn_2、δu、δu_x 和 δu_y 趋于零时，有 $\Delta J \to \delta J$，于是，有

$$\delta J=\int_{\Gamma_2} F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)\big|_{\Gamma_2}\delta n_2\delta s_2+$$

$$\iint_D (F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4-4-8}$$

将式(4-4-8)右边重积分中的 $F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y$ 改写为

$$F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y=\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)-\frac{\partial F_{u_x}}{\partial x}\delta u-\frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\delta u \tag{4-4-9}$$

应用格林公式，有

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma\left(F_{u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-F_{u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\delta u\delta s=$$

$$\int_\Gamma [F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)]\delta u\big|_\Gamma\delta s \tag{4-4-10}$$

因为在固定边界 Γ_1 上，有条件 $\delta u|_{\Gamma_1}=0$，所以上式可简化为在 Γ_2 上的积分，即

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{\Gamma_2}[F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)]\delta u|_{\Gamma_2}\delta s_2 \tag{4-4-11}$$

将式(4-4-10)和式(4-4-11)代入式(4-4-8)，得

$$\delta J=\int_{\Gamma_2}F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)|_{\Gamma_2}\delta n_2\delta s_2+$$

$$\int_{\Gamma_2}[F_{u_x}\cos(n_2,x)+F_{u_y}\cos(n_2,y)]\delta u|_{\Gamma_2}\delta s_2+$$

$$\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4-4-12}$$

式中 $\delta u|_{\Gamma_2}$ 是当 Γ_2 不变时 u 的变分。但 Γ_2 是待定可变的，如果考虑 Γ_2 的变化，则 u 在 Γ_2 上的全变分 δu_2 为

$$\delta u_2=\delta u|_{\Gamma_2}+\left.\frac{\partial u}{\partial n_2}\right|_{\Gamma_2}\delta n_2 \tag{4-4-13}$$

或

$$\delta u|_{\Gamma_2}=\delta u_2-\left.\frac{\partial u}{\partial n_2}\right|_{\Gamma_2}\delta n_2 \tag{4-4-14}$$

于是，式(4-4-12)可写成

$$\delta J=\int_{\Gamma_2}\left\{F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)-\right.$$

$$\left.[F_{u_x}\cos(n_2,x)+F_{u_y}\cos(n_2,y)]\frac{\partial u}{\partial n_2}\right\}\Big|_{\Gamma_2}\delta n_2\delta s_2+$$

$$\int_{\Gamma_2}[F_{u_x}\cos(n_2,x)+F_{u_y}\cos(n_2,y)]\delta u|_{\Gamma_2}\delta s_2+$$

$$\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4-4-15}$$

但是，在可动边界上，δu_2 与 δn_2 并不是相互独立的。根据式(4-4-3)，有

$$\delta u_2=\delta u(x_2,y_2)=\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial n_2}+\frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial n_2}\right)\delta n_2=\frac{\partial z}{\partial n_2}\delta n_2 \tag{4-4-16}$$

把式(4-4-16)代入式(4-4-15)中，得

$$\delta J=\int_{\Gamma_2}\left\{F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)-\right.$$

$$\left.[F_{u_x}\cos(n_2,x)+F_{u_y}\cos(n_2,y)]\left(\frac{\partial u}{\partial n_2}-\frac{\partial z}{\partial n_2}\right)\right\}\Big|_{\Gamma_2}\delta n_2\delta s_2+$$

$$\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4-4-17}$$

这里的 δu、δn_2 是相互独立的变分，故由泛函取得极值的必要条件 $\delta J=0$，得到奥氏方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0\quad(x,y\in D) \tag{4-4-18}$$

和在可动边界上的补充边界条件

$$\left\{F(x,y,u+\delta u,u_x+\delta u_x,u_y+\delta u_y)-\right.$$
$$\left.[F_{u_x}\cos(n_2,x)+F_{u_y}\cos(n_2,y)]\left(\frac{\partial u}{\partial n_2}-\frac{\partial z}{\partial n_2}\right)\right\}\Big|_{\Gamma_2}=0 \tag{4-4-19}$$

除此之外，在 Γ_1 和 Γ_2 的边界条件分别由式(4-4-2)和式(4-4-3)给出。下面举例说明其应用。

例 4.4.1 薄膜接触问题。设有一薄膜，其周界固定在一条平面曲线 Γ_1 上，膜内张力为 N，在横向均匀载荷 q 的作用下发生下垂变形 w，有一部分薄膜接触到距其下边为 d 的一个刚性平板上，变成紧贴平板的平面薄膜，薄膜接触平板区域的周界为 Γ_2，见图4-4-2。求薄膜平衡的方程和周界 Γ_2 上的条件。当 Γ_1 为半径等于 R 的圆时(即圆形薄膜)，计算薄膜的形状。

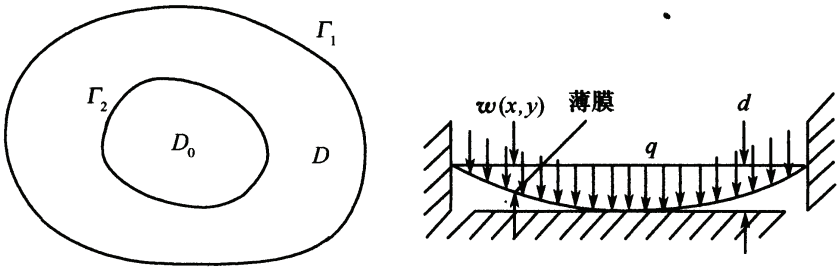


图 4-4-2 薄膜在均匀载荷 q 作用下的变形和平板接触面

解 设 D 为薄膜周界 Γ_1 和 Γ_2 之间的区域，D_0 为 Γ_2 所围成的接触区域。薄膜在变形前的内能为

$$U_0=\iint_{D+D_0}N\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

变形之后的内能为

$$U_1=\iint_{D_0}N\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D}N\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

将 $\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}$ 按泰勒公式展开，当 w 很小时，略去高次项后，式(2)可写成

$$U_1=\iint_{D}N\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D}\left[1+\frac{1}{2}(w_x^2+w_y^2)\right]N\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

薄膜变形的内能为

$$U_2=U_1-U_0=\frac{1}{2}\iint_{D}(w_x^2+w_y^2)N\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

载荷 q 在变形过程中所作的功为

$$W=\iint_{D+D_0}qw\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

薄膜和载荷的总势能为

$$U=U_2-W=\frac{1}{2}\iint_{D}(w_x^2+w_y^2)N\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D+D_0}qw\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\iint_{D}F(w,w_x,w_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_0}qw\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6}$$

式中 $F(w,w_x,w_y)=\frac{N}{2}(w_x^2+w_y^2)-qw$。

在 D_0 中，因 $w=d$ 是常量，q 也是常量，故有

$$\iint_{D_0}qw\mathrm{d}x\mathrm{d}y=qdD_0 \tag{7}$$

当 Γ_2 发生变形 δn_2 时，δn_2 从 D 进入 D_0 为正，D 扩大，D_0 缩小，此时，$\iint_D qw\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 扩大，$\iint_{D_0} qw\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等量地缩小，其变化正负相抵。因此，变分后的补充边界条件(4－4－19)的第一项只剩下 $\frac{N}{2}(w_x^2 + w_y^2)\Big|_{\Gamma_2}$，第二项中 $z = d$ 是常量，故有 $\frac{\partial z}{\partial n_2} = 0$，又

$$F_{u_x}\cos(n_2, x) + F_{u_y}\cos(n_2, y) = N[w_x\cos(n_2, x) + w_y\cos(n_2, y)] = N\frac{\partial w}{\partial n_2} \tag{8}$$

于是，补充边界条件(4－4－19)可写成

$$\left[\frac{N}{2}(w_x^2 + w_y^2) + N\left(\frac{\partial w}{\partial n_2}\right)^2\right]\Big|_{\Gamma_2} = 0 \text{ 在 } \Gamma_2 \text{ 上} \tag{9}$$

其他边界条件为

$$w = 0 \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \tag{10}$$

$$w = d \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \tag{11}$$

由式(6)得奥氏方程为

$$N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + q = 0 \quad \text{在 } D \text{ 内} \tag{12}$$

这样，所讨论的问题成为利用边界条件(9)～(11)求解奥氏方程(12)的问题。

对于圆形薄膜问题，见图 4－4－3，可把直角坐标转化为极坐标，根据式(1－4－7)和式(1－4－12)，有

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \tag{14}$$

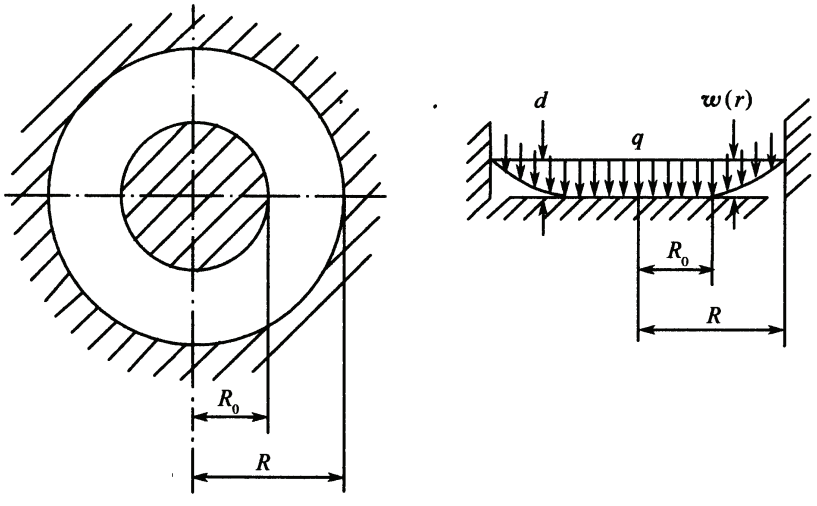


图 4－4－3　圆薄膜受均布载荷所引起的接触区域

利用上式，奥氏方程(12)可以写成

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{q}{N} = 0 \tag{15}$$

边界条件为：

(1) 在 Γ_1 上，即 $r = R$ 时，有

$$w(R) = 0 \tag{16}$$

(2) 在 Γ_2 上,即 $r = R_0$ 时, R_0 为接触区域圆半径,有

$$w(R_0) = d \tag{17}$$

(3) 在 Γ_2 上的补充边界式(9),设 w 是圆对称的,$w_0 = 0$,$\frac{\partial w}{\partial n_2} = -\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=R_0}$,这里, n_2 是 D 的外向法线,而 r 在 $r = R_0$ 处指向 D 的内部,故带有负号。注意到式(13),式(9) 可以写成

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=R_0} = w'(R_0) = 0 \tag{18}$$

因为假定 w 是圆对称的,故式(15) 可简化为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{q}{N} = 0 \tag{19}$$

式(19) 的通解为

$$w = -\frac{1}{4}\frac{q}{N}r^2 + c_1\ln r + c_2 \tag{20}$$

式中 c_1、c_2 为待定的积分常数。

利用边界条件(16)、(17) 和(18),得到确定 c_1、c_2 和 R_0 的三个方程,即

$$\begin{cases} w(R) = -\frac{1}{4}\frac{q}{N}R^2 + c_1\ln R + c_2 = 0 \\ w(R_0) = -\frac{1}{4}\frac{q}{N}R_0^2 + c_1\ln R_0 + c_2 = d \\ w'(R_0) = -\frac{1}{2}\frac{q}{N}R_0 + \frac{c_1}{R_0} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

解之,得

$$\begin{cases} c_1 = \frac{q}{2N}R_0^2 \\ c_2 = \frac{q}{4N}R^2\left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\ln R^2\right) \end{cases} \tag{22}$$

而 R_0 可按下式计算

$$1 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{4Nd}{qR^2} \tag{23}$$

位移 $w(r)$ 为

$$w(r) = \frac{q}{4N}R^2\left[1 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\ln\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{24}$$

薄膜与底平面开始接触的临界载荷 q_{cr} 由 $R_0 \to 0$ 来决定,根据式(23),可得

$$1 = \frac{4Nd}{q_{cr}R^2} \text{ 或 } q_{cr} = \frac{4Nd}{R^2} \tag{25}$$

4.5 具有尖点的极值曲线

前面所讨论的变分问题都是假定极值曲线 $y = y(x)$ 是连续的且有连续转动的切线。但在实际问题中有时会遇到除有限个点外极值曲线是充分光滑的情形,例如光的折射和反射问题,飞行器进入或离开有风区,控制系统中继电元件换向引起的轨迹转折等,都属于这种情况。此时,在有限个点处,对应的容许函数是分段连续的,左、右导数存在但不相等。极值曲线上的这种点称为**尖点、角点**或**折点**。具有尖点曲线称为**折曲线**或**折线**,也称为**分段连续可微路径**。具有尖点的极值曲线称为折

极值曲线。

如图4-5-1所示，设极值曲线只有一个尖点 $C(x_c,y_c)$ AC、CB 都是满足欧拉方程的连续光滑曲线，此时最简泛函可表示为

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_c}F_-(x,y,y')\mathrm{d}x+\int_{x_c}^{x_1}F_+(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{4-5-1}$$

式中 x_c 是折点 C 的横坐标，而折点 C 待定。另外设

$$F(x,y,y')=\begin{cases}F_-(x,y,y'),x_0\leqslant x\leqslant x_c\\F_+(x,y,y'),x_c\leqslant x\leqslant x_1\end{cases} \tag{4-5-2}$$

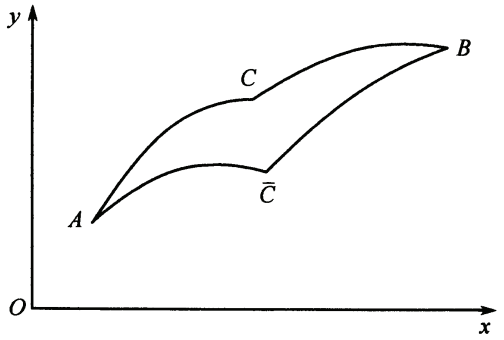


图 4-5-1　具有一个折点的曲线

式(4-5-1)中等号右边的两个积分均为待定边界。仿4.1节的推导方法，可得

$$\delta J_-=\delta\int_{x_0}^{x_c}F_-\,\mathrm{d}x=\left.\frac{\partial F_-}{\partial y'}\right|_{x=x_c-0}\delta y_c+\left.\left(F_--y'\frac{\partial F_-}{\partial y'}\right)\right|_{x=x_c-0}\delta x_c+\int_{x_0}^{x_c}\left[\frac{\partial F_-}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F_-}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x \tag{4-5-3}$$

$$\delta J_+=\delta\int_{x_c}^{x_1}F_+\,\mathrm{d}x=-\left.\frac{\partial F_+}{\partial y'}\right|_{x=x_c+0}\delta y_c-\left.\left(F_+-y'\frac{\partial F_+}{\partial y'}\right)\right|_{x=x_c+0}\delta x_c+\int_{x_c}^{x_1}\left(\frac{\partial F_+}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F_+}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{4-5-4}$$

由泛函的变分取得极值的必要条件 $\delta J=\delta J_-+\delta J_+=0$，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_-}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F_-}{\partial y'}=0,x_0\leqslant x\leqslant x_c\\[2ex]\dfrac{\partial F_+}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F_+}{\partial y'}=0,x_c\leqslant x\leqslant x_2\end{cases} \tag{4-5-5}$$

$$\left.\frac{\partial F_-}{\partial y'}\right|_{x=x_c-0}=\left.\frac{\partial F_+}{\partial y'}\right|_{x=x_c+0} \tag{4-5-6}$$

$$\left.\left(F_--y'\frac{\partial F_-}{\partial y'}\right)\right|_{x=x_c-0}=\left.\left(F_+-y'\frac{\partial F_+}{\partial y'}\right)\right|_{x=x_c+0} \tag{4-5-7}$$

式(4-5-6)称为**埃德曼第一角点条件**。式(4-5-7)称为**埃德曼第二角点条件**。式(4-5-6)和式(4-5-7)合称**魏尔斯特拉斯—埃德曼角点条件**。它们与极值曲线在 C 点的连续条件合在一起，就能确定出折点的坐标。在尖点处满足魏尔斯特拉斯—埃德曼角点条件的极值曲线称为**分段极值曲线**。

根据埃德曼第一角点条件，由微分中值定理得

$$F_{y'}(x_c,y_c,y'(x_{c-0}))-F_{y'}(x_c,y_c,y'(x_{c+0}))=[y'(x_{c-0})-y'(x_{c+0})]F_{y'y'}(x_c,y_c,p)=0 \tag{4-5-8}$$

式中 p 为介于 $y'(x_{c-0})$ 与 $y'(x_{c+0})$ 之间的某个值。由于 (x_c, y_c) 是极值曲线的尖点，有 $y'(x_{c-0}) \neq y'(x_{c+0})$，所以在尖点处有

$$F_{y'y'}(x_c, y_c, p) = F_{y'y'} = 0 \tag{4-5-9}$$

这是具有尖点的极值曲线存在的必要条件。

例 4.5.1 试求泛函 $J[y] = \int_0^2 y'^2(1-y')^2 \mathrm{d}x$ 具有折点的极值曲线。

解 在此情况下，因为 $F_{y'y'} = 12y'^2 - 12y' + 2$ 可以等于零，所以极值曲线可以有折点。又因为 $F = y'^2(1-y')^2$ 仅含有 y'，所以泛函的极值曲线为直线 $y = c_1 x + c_2$。设折点的坐标为 (x_c, y_c)，由魏尔斯特拉斯 — 埃德曼角点条件(4-5-6)和(4-5-7)得

$$\begin{cases} 2y'(1-y')(1-2y')\big|_{x=x_c-0} = 2y'(1-y')(1-2y')\big|_{x=x_c+0} \\ -y'^2(1-y')(1-3y')\big|_{x=x_c-0} = y'^2(1-y')(1-3y')\big|_{x=x_c+0} \end{cases} \tag{1}$$

当 $y'|_{x=x_c-0} = y'|_{x=x_c+0}$ 时，式(1)得到满足，但这是 $x = x_c$ 处为光滑曲线的条件，不是所要求的解。而 $y'|_{x=x_c-0} \neq y'|_{x=x_c+0}$ 的解有两个

$$y'(x_c - 0) = 0, y'(x_c + 0) = 1 \tag{2}$$

或

$$y'(x_c - 0) = 1, y'(x_c + 0) = 0 \tag{3}$$

因此极值曲线无论在 $x = x_c$ 的哪一边都是直线。若在折点处斜率为零，则其直线平行于 x 轴，若在折点处为 1，则直线与 x 轴成 45° 角。这表明极值曲线只能由直线族 $y = c_1$ 和 $y = x + c_2$ 组成，如图 4-5-2 所示。

下面通过两个例题讨论两种特殊的尖点情况。

例 4.5.2 极值曲线的反射问题。设函数 $y = y(x)$ 使泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$ 达到极值，且 $y = y(x)$ 为通过两个固定点 $A(x_0, y_0)$ 与 $B(x_1, y_1)$，这两个固定点在给定的曲线 $y = \varphi(x)$ 的同侧，而尖点 $C(x_c, y_c)$ 在曲线 $y = \varphi(x)$ 上，见图 4-5-3。试求入射角与反射角的关系。

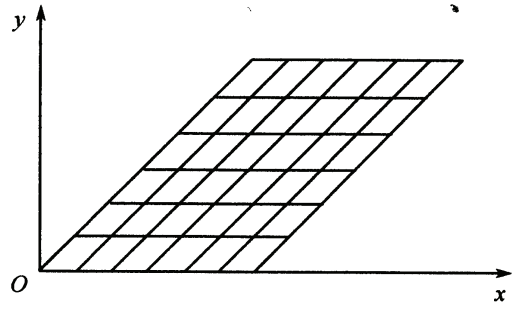


图 4-5-2 例 4.5.1 图

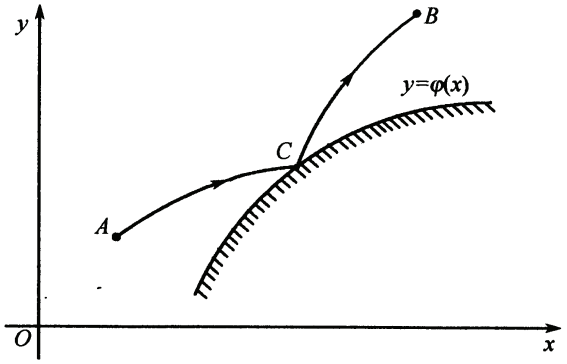


图 4-5-3 极值曲线的反射几何示意

解 根据可动端点泛函问题的结果，可写出

$$\delta J = \delta J_- + \delta J_+ = \int_{x_0}^{x_c} \left(F_{1y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{1y'}\right)\delta y \mathrm{d}x + [F_1 + (\varphi' - y')F_{1y'}]\big|_{x=x_c-0}\delta x_c +$$

$$\int_{x_c}^{x_1} \left(F_{2y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{2y'}\right)\delta y \mathrm{d}x - [F_2 + (\varphi' - y')F_{2y'}]\big|_{x=x_c+0}\delta x_c \tag{1}$$

当 δy 与 δx_c 都是独立变分的时候，则有欧拉方程

$$\begin{cases} F_{1y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{1y'} = 0 & (x_0 \leqslant x \leqslant x_c) \\ F_{2y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{2y'} = 0 & (x_c \leqslant x \leqslant x_1) \end{cases} \tag{2}$$

反射条件为

$$[F_1 + (\varphi' - y')F_{1y'}]\big|_{x=x_c-0} = [F_2 + (\varphi' - y')F_{2y'}]\big|_{x=x_c+0} \tag{3}$$

根据费马定理，可写出如下泛函

$$T = \int_{x_0}^{x_c} \frac{n(x,y)}{c}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x + \int_{x_c}^{x_1} \frac{n(x,y)}{c}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{4}$$

式中 n 为介质的折光率，c 为真空中的光速。于是

$$F = \frac{n(x,y)}{c}\sqrt{1+y'^2} \tag{5}$$

将式(5)代入式(3)，得

$$\frac{n(x,y)}{c}\left[\sqrt{1+y'^2} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_c-0} =$$

$$\frac{n(x,y)}{c}\left[\sqrt{1+y'^2} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_c+0} \tag{6}$$

化简上式，得

$$\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_c-0} = \frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_c+0} \tag{7}$$

令 α 表示曲线 $y = \varphi(x)$ 的切线与 x 轴的交角，β_1 与 β_2 分别表示在反射点 C 在两侧的极值曲线的切线与 x 轴的交角，见图 4－5－4，即

$$\varphi'(x) = \tan\alpha, y'(x_1 - 0) = \tan\beta_1, y'(x_1 + 0) = \tan\beta_2 \tag{8}$$

此时，在反射点 C 处，反射条件(7)化为

$$\frac{1 + \tan\alpha\tan\beta_1}{\sec\beta_1} = \frac{1 + \tan\alpha\tan\beta_2}{\sec\beta_2} \tag{9}$$

化简后得

$$\cos(\alpha - \beta_1) = \cos(\alpha - \beta_2) = \cos(\beta_2 - \alpha) \tag{10}$$

式(10)表明**光的入射角等于反射角**。

例 4.5.3 关于极值曲线的折曲线问题。该例题与例 4.5.2 类似，只是 A、B 两点在给定曲线 $y = \varphi(x)$ 的两侧，见图 4－5－5。试求入射角与折射角的关系。

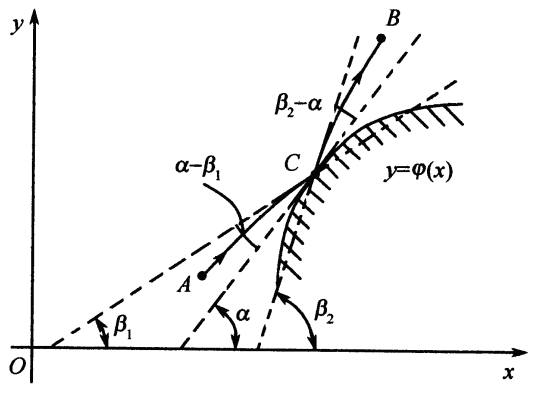


图 4－5－4 极值曲线反射角的关系

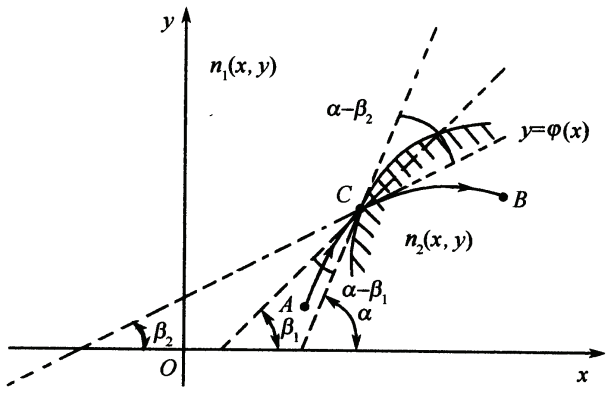


图 4－5－5 光的折射

解　利用上题式(6),得到折射条件为

$$\left.\frac{n_1(x,y)}{c}\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_c-0}=\left.\frac{n_2(x,y)}{c}\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_c+0} \tag{1}$$

令 $\varphi'(x)=\tan\alpha, y'(x_c-0)=\tan\beta_1, y'(x_c+0)=\tan\beta_2$,代入式(1),化简并乘以 $\cos\alpha$,得

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{n_2(x_c,y_c)}{n_1(x_c,y_c)} \tag{2}$$

或写为

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right]}=\frac{\frac{c}{n_1(x_c,y_c)}}{\frac{c}{n_2(x_c,y_c)}}=\frac{v_1(x_c,y_c)}{v_2(x_c,y_c)} \tag{3}$$

式中 v_1 与 v_2 为两个介质中的光速。式(3)就是著名的光的折射定律:**入射角的正弦与折射角的正弦之比等于在两介质中的光速之比**。该定律是1662年由费马提出的。

例 4.5.4　求连接点 $y(0)=1.5$ 及 $y(1.5)=0$ 的最短分段平滑曲线,它与 $\varphi(x)=-x+2$ 交于某一点。

解　曲线长度为

$$J[y]=\int_0^{1.5}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

因被积函数 $F=\sqrt{1+y'^2}$ 只是 y' 的函数,故其解必为直线,即

$$y=c_1x+c_2 \tag{2}$$

已知极值曲线在 $\varphi(x)=-x+2$ 上有个角点,设角点的横坐标为 x_c,可得

$$y_1=c_1x+c_2, y'_1=c_1 \quad x\in[0,x_c] \tag{3}$$

$$y_2=d_1x+d_2, y'_1=d_1 \quad x\in[x_c,1.5] \tag{4}$$

根据角点反射条件,有

$$[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}]\big|_{x=x_c-0}=[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}]\big|_{x=x_c+0} \tag{5}$$

将各式代入式(5),得

$$\left[\sqrt{1+c_1^2}+(-1-c_1)-\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}\right]\Bigg|_{x=x_c-0}=$$

$$\left[\sqrt{1+d_1^2}+(-1-d_1)-\frac{d_1}{\sqrt{1+d_1^2}}\right]\Bigg|_{x=x_c+0} \tag{6}$$

化简后得

$$\frac{1-c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}=\frac{1-d_1}{\sqrt{1+d_1^2}} \tag{7}$$

由边界条件 $y(0)=1.5$,得 $1.5=0+c_2, c_2=1.5$。由边界条件 $y(1.5)=0$,得 $0=1.5d_1+d_2$,故有

$$d_2=-1.5d_1 \tag{8}$$

将角点的约束方程 $\varphi(x_c)=-x_c+2$ 及 $c_2=1.5$ 代入式(3)和式(4),可得

$$c_1x_c+1.5=-x_c+2 \tag{9}$$

$$d_1x_c+d_2=-x_c+2 \tag{10}$$

联立求解式(7)～式(10),可得

$$c_1=-0.5, d_1=-2, d_2=3, x_c=1$$

于是,可得极值曲线为

$$y_1 = -0.5x + 1.5 \quad x \in [0, x_c] \tag{11}$$

$$y_2 = -2x + 3 \quad x \in [x_c, 1.5] \tag{12}$$

极值曲线为入射角等于反射角的路线。

4.6 单侧变分问题

如果变分问题中的极值函数服从于某个不等式,则把受有这种不等式约束的变分问题称为**单侧变分问题**。考虑最简泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{4-6-1}$$

在不等式

$$y(x) \geqslant \varphi(x) \tag{4-6-2}$$

约束条件下的极值问题。其中 $\varphi(x)$ 是给定的具有连续导数的函数。待求的极值曲线在 $\varphi(x)$ 的上方。

设曲线 $AMNB$ 使泛函(4-6-1)达到极值,且 $F_{y'y'} \neq 0$,其中曲线 MN 在曲线 $y = \varphi(x)$ 上,见图 4-6-1。显然,AM 与 NB 均为极值曲线。问题的关键是确定这些曲线的分界点 M 和 N 的位置。

设点 M 是可动的,其横坐标为 $\bar{x}$,于是泛函可写为

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{\bar{x}} F(x, y, y')\mathrm{d}x + \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x = J_1 + J_2 \tag{4-6-3}$$

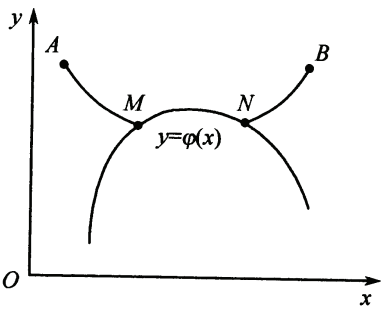


图 4-6-1 单侧变分示意图

沿着极值曲线 $AMNB$ 取变分,有

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0 \tag{4-6-4}$$

因曲线 MN 在已知曲线 $y = \varphi(x)$ 上,在求 δJ 时,曲线 MN 段不产生变分,$\delta y = 0$,因此有

$$\delta J_1 = [F + (\varphi' - y')F_{y'}]\big|_{x=\bar{x}}\delta\bar{x} \tag{4-6-5}$$

在点 M 变动的情况下计算 δJ_2,此时点 M 沿着曲线 $y = \varphi(x)$ 移动,J_2 的变化只由积分下限 $\bar{x}$ 的变动引起,于是

$$\Delta J_2 = \int_{\bar{x}+\delta\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x - \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x = -\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, y, y')\mathrm{d}x = -\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, \varphi, \varphi')\mathrm{d}x \tag{4-6-6}$$

根据函数连续性和中值定理,有

$$\Delta J_2 = -F(x, \varphi, \varphi')\big|_{x=\bar{x}}\delta\bar{x} + \varepsilon\delta\bar{x} \tag{4-6-7}$$

当 $\delta\bar{x} \to 0$ 时,$\varepsilon \to 0$,所以

$$\delta J_2 = -F(x, \varphi, \varphi')\big|_{x=\bar{x}}\delta\bar{x} \tag{4-6-8}$$

将式(4-6-5)和式(4-6-8)代入式(4-6-4),可得

$$[F(x, y, y') - F(x, \varphi, \varphi') + (\varphi - y')F_{y'}(x, y, y')]\big|_{x=\bar{x}} = 0 \tag{4-6-9}$$

对等号左边前两项应用中值定理,得

$$F(x, y, y') - F(x, \varphi, \varphi') = F_{y'}(x, y, q)(y' - \varphi') \tag{4-6-10}$$

式中 q 介于 φ' 与 y' 之间。于是式(4-6-9)化为

$$(y'-\varphi')[F_{y'}(x,y,q)-F_{y'}(x,y,y')]\big|_{x=\bar{x}}=0 \tag{4-6-11}$$

若 $F_{y'y'}\neq 0$ 且为连续函数,对式(4-6-11)使用中值定理,得

$$(y'-\varphi')(q-y')F_{y'y'}(x,y,q_1)\big|_{x=\bar{x}}=0 \tag{4-6-12}$$

式中 q_1 介于 q 与 y' 之间,q 介于 φ' 与 y' 之间,于是必有

$$y'=\varphi' \tag{4-6-13}$$

式(4-6-13)表明曲线 AM 与曲线 $y=\varphi(x)$ 在点 M 有公切线。同理可推得曲线 NB 与曲线 $y=\varphi(x)$ 在点 N 也有公切线。从而可知极值曲线与曲线 $y=\varphi(x)$ 在 M、N 两点相切。

例 4.6.1 在可取曲线不能通过由圆周 $(x-a)^2+y^2=R^2$ 所围圆域内部的条件下,求能使泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'^3\mathrm{d}x$ 达到极值的曲线,边界条件为 $y(x_0)=0,y(x_1)=0$,其中 $x_0<a-R,a+R<x_1$。并求 $a=13,R=5,x_0=0,x_1=26$ 时的极值曲线,见图 4-6-2。

解 因被积函数 $F=y'^3$ 只是 y' 的函数,故泛函的欧拉方程的积分为

$$y=c_1x+c_2 \tag{1}$$

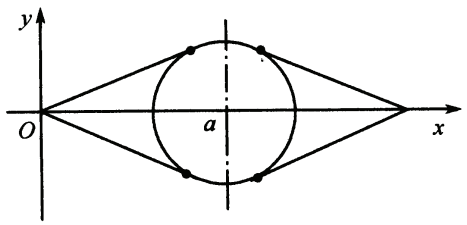


图 4-6-2 例 4.6.1 图

由边界条件 $y(x_0)=0$,可知 $c_2=-c_1x_0$,故 $y=c_1(x-x_0)$。设 $y=\varphi(x)=\pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ 与 $y=c_1(x-x_0)$ 相切,则 $y'=\varphi'$,即

$$c_1=-\frac{x-a}{y}=-\frac{x-a}{c_1(x-x_0)} \tag{2}$$

将 $y=c_1x+c_2$ 代入圆方程,得

$$(x-a)^2+c_1^2(x-x_0)^2=R^2 \tag{3}$$

将方程(2)和方程(3)联立,可解出切线的斜率为

$$c_1=\pm\frac{R\sqrt{(x_0-a)^2-R^2}}{R^2+2ax_0-a^2-x_0^2} \tag{4}$$

圆左侧切点的 x 和 y 坐标为

$$x=\frac{R^2+ax_0-a^2}{x_0-a},y=\pm\frac{R}{x_0-a}\sqrt{(x_0-a)^2-R^2} \tag{5}$$

对于 $y(x_1)=0$ 的右边界条件,用与上面类似的方法可求出

$$c_1=\pm\frac{R\sqrt{(x_1-a)^2-R^2}}{R^2+2ax_1-a^2-x_1^2} \tag{6}$$

圆右侧切点的 x 和 y 坐标为

$$x=\frac{R^2+ax_1-a^2}{x_1-a},y=\pm\frac{R}{x_1-a}\sqrt{(x_1-a)^2-R^2} \tag{7}$$

最后,所求的极值曲线为

$$y=\begin{cases}\pm\dfrac{R\sqrt{(x_0-a)^2-R^2}}{R^2+2ax_0-a^2-x_0^2}(x-x_0) & \left(x_0\leqslant x\leqslant\dfrac{R^2+ax_0-a^2}{x_0-a}\right)\\ \pm\sqrt{R^2-(x-a)^2} & \left(\dfrac{R^2+ax_0-a^2}{x_0-a}\leqslant x\leqslant\dfrac{R^2+ax_1-a^2}{x_1-a}\right)\\ \mp\dfrac{R\sqrt{(x_1-a)^2-R^2}}{R^2+2ax_1-a^2-x_1^2}(x-x_1) & \left(\dfrac{R^2+ax_1-a^2}{x_1-a}\leqslant x\leqslant x_1\right)\end{cases} \tag{8}$$

当 $a=13, R=5, x_0=0, x_1=26$ 时，在圆的左侧可求出 $c_1=\pm\frac{5}{12}$，此时与圆的切点为 $\left(\frac{144}{13}, \pm\frac{60}{13}\right)$；在圆的右侧可求出 $c_1=\mp\frac{5}{12}$，此时与圆的切点为 $\left(\frac{194}{13}, \pm\frac{60}{13}\right)$。所求的极值曲线为

$$y=\begin{cases}\pm\frac{5}{12}x & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{144}{13}\right)\\ \pm\sqrt{25-(x-13)^2} & \left(\frac{144}{13}\leqslant x\leqslant\frac{194}{13}\right)\\ \mp\frac{5}{12}(x-26) & \left(\frac{194}{13}\leqslant x\leqslant 26\right)\end{cases} \tag{9}$$

例 4.6.2 如图 4－6－3 所示，设泛函 $J[y]=\int_{-2}^{3}(y'^2+y)\mathrm{d}x$，边界条件为 $y(-2)=1$，$y(3)=1$，且所有可取曲线位于平面区域 $y\geqslant 2x-x^2$ 内。试求能使泛函达到极值的一条曲线。

解 被积函数 $F=y'^2+y$，泛函的欧拉方程为

$$1-2y''=0 \tag{1}$$

其通解为

$$y=\frac{x^2}{4}+c_1x+c_2 \tag{2}$$

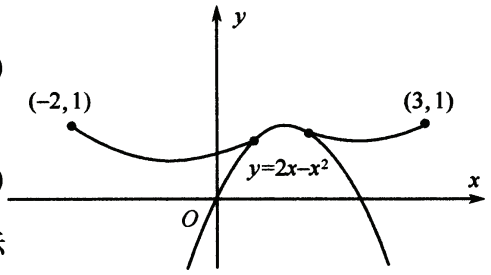


图 4－6－3 例题 4.6.2 图

设 $y=\varphi(x)=2x-x^2$ 与极值曲线的两个切点的横坐标为 x_2 和 x_3，由左侧的边界条件 $y(-2)=1$，得 $c_2=2c_1$。在切点处，有 $y(x_2)=\varphi(x_2)$，$y'(x_2)=\varphi'(x_2)$，得方程组为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+c_1x+c_2=2x-x^2\\ 2c_1=c_2\\ \frac{x}{2}+c_1=2-2x\end{cases} \tag{3}$$

可解出 $c_1=7-3\sqrt{5}$，$c_2=14-6\sqrt{5}$，$x_2=-2+\frac{6\sqrt{5}}{5}$。于是左侧的极值曲线方程为

$$y=\frac{x^2}{4}+(7-3\sqrt{5})x+14-6\sqrt{5} \tag{4}$$

在切点处，有

$$y(x_2)=\varphi(x_2)=-\frac{76}{5}+\frac{36\sqrt{5}}{5} \tag{5}$$

$$y'(x_2)=\varphi'(x_2)=6-\frac{12\sqrt{5}}{5} \tag{6}$$

同理，可得右侧极值曲线方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+c_1x+c_2=2x-x^2\\ \frac{x}{2}+c_1=2-2x\\ c_2=-\frac{5}{4}-3c_1\end{cases} \tag{7}$$

可解出 $c_1=\frac{-11+4\sqrt{5}}{2}$，$c_2=\frac{61-24\sqrt{5}}{4}$，$x_3=3-\frac{4\sqrt{5}}{5}$。于是右侧的极值曲线方程为

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{11 - 4\sqrt{5}}{2}x + \frac{61 - 24\sqrt{5}}{4} \tag{8}$$

在切点处,有

$$y(x_3) = \varphi(x_3) = \frac{16\sqrt{5} - 31}{5} \tag{9}$$

$$y'(x_3) = \varphi'(x_3) = \frac{8\sqrt{5}}{5} - 4 \tag{10}$$

于是,得极值曲线为

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + (7 - 3\sqrt{5})x + 14 - 6\sqrt{5} & (-2 \leqslant x \leqslant x_2) \\ 2x - x^2 & (x_2 \leqslant x \leqslant x_3) \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{11 - 4\sqrt{5}}{2}x + \dfrac{61 - 24\sqrt{5}}{4} & (x_3 \leqslant x \leqslant 3) \end{cases} \tag{11}$$

例 4.6.3 如图 4-6-4 所示,设泛函 $J[y] = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$,边界条件为 $y(\pm 2) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2$,且可取曲线满足单侧条件 $y \geqslant \varphi(x)$,其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\sin 2x & x \leqslant 0 \\ \sin 2x & x \geqslant 0 \end{cases}$$

试求能使泛函达到极值的一条曲线。

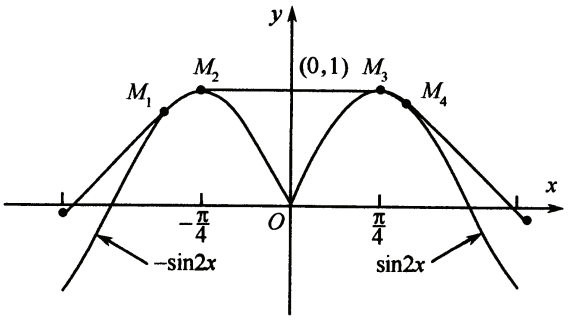


图 4-6-4 例题 4.6.3 图

解 因被积函数 $F = \sqrt{1 + y'^2}$ 仅是 y' 的函数,故泛函的欧拉方程的积分为直线族,即

$$y = c_1 x + c_1 \tag{1}$$

设 $\varphi(x)$ 与极值曲线的四个切点分别为 $M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$、$M_3(x_3, y_3)$ 和 $M_4(x_4, y_4)$,由左侧的边界条件 $y(-2) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2$,有 $c_2 = 2c_1 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2$。在切点 $M_1(x_1, y_1)$ 处,有 $y(x_1) = \varphi(x_1)$,$y'(x_1) = \varphi'(x_1)$。于是,得方程组为

$$\begin{cases} c_1 x + c_2 = -2\sin 2x \\ c_2 = 2c_1 + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2 \\ c_1 = -2\cos 2x \end{cases} \tag{2}$$

可解出 $c_1 = 1$,$c_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$,$x_1 = -\frac{\pi}{3}$。于是,左侧的极值曲线方程为

$$y = x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3}$$

在切点处,有

$$y'(x_1) = \varphi'(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4}$$

$$y'(x_1) = \varphi'(x_1) = 1 \tag{5}$$

由于对称性,可得右侧极值曲线方程为

$$y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6}$$

在切点处,有

$$y(x_4) = \varphi(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{7}$$

$$y'(x_4) = \varphi'(x_4) = -1 \tag{8}$$

点 M_2 和 M_3 应为正弦曲线 $y = -\sin 2x(-2 \leqslant x \leqslant 0)$ 与正弦曲线 $y = \sin 2x(0 \leqslant x \leqslant 2)$ 的公切线的切点,显然,切点分别为

$$M_2\left(-\frac{\pi}{4},1\right), M_3\left(\frac{\pi}{4},1\right)$$

于是,所求的极值曲线为

$$y = \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(-2 \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3}\right) \\ -\sin 2x & \left(-\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin 2x & \left(\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}\right) \\ -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\right) \end{cases} \tag{9}$$

例 4.6.4 求泛函 $J[y] = \int_0^{10}(2xy' - y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,假设容许曲线通过定点(0,7)和点(10,7),并且满足不等式 $y \geqslant x\left(2 - \frac{x}{5}\right)$。

解 泛函的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x - 2y') = 0 \tag{1}$$

首次积分为 $y' = x + c_1$。再积分一次,得 $y = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$。由边界条件(0,7),得 $c_2 = 7$,故 $y = \frac{x^2}{2} + c_1 x + 7$。设极值曲线与不等式相切,有

$$\frac{x^2}{2} + c_1 x + 7 = 2x - \frac{x^2}{5} \tag{2}$$

$$x + c_1 = 2 - \frac{2x}{5} \tag{3}$$

由式(2)和式(3)可解出 $x = \sqrt{10}, c_1 = 2 - \frac{7\sqrt{10}}{5}$。于是极值曲线为

$$y = \frac{x^2}{2} + \left(2 - \frac{7\sqrt{10}}{5}\right)x + 7 \quad (0 \leqslant x \leqslant \sqrt{10}) \tag{4}$$

又由边界条件(10,7)可定出 $c_2 = -43 - 10c_1$,故

$$y = \frac{x^2}{2} + c_1 x - 10c_1 - 43 \tag{5}$$

设极值曲线与不等式相切,有

$$\frac{x^2}{2} + c_1 x - 10c_1 - 43 = 2x - \frac{x^2}{5} \tag{6}$$

$$x + c_1 = 2 - \frac{2x}{5} \tag{7}$$

可解出 $x = 10 - \sqrt{10}, c_1 = \frac{7\sqrt{10}}{5} - 12, c_2 = 7(11 - 2\sqrt{10})$。于是极值曲线为

$$y=\frac{x^2}{2}+\left(\frac{7\sqrt{10}}{5}-12\right)x+7(11-2\sqrt{10})\quad(10-\sqrt{10}\leqslant x\leqslant 10)\tag{8}$$

再加上不等式的抛物线部分,有

$$\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{2}+\left(2-\dfrac{7\sqrt{10}}{5}\right)x+7 & (0\leqslant x\leqslant\sqrt{10})\\ y=x\left(2-\dfrac{x}{5}\right) & (\sqrt{10}\leqslant x\leqslant 10-\sqrt{10})\\ y=\dfrac{x^2}{2}+\left(\dfrac{7\sqrt{10}}{5}-12\right)x+7(11-2\sqrt{10}) & (10-\sqrt{10}\leqslant x\leqslant 10)\end{cases}\tag{9}$$

例 4.6.5 在条件 $y\leqslant x^2$ 下,求通过 $A(-2,3)$、$B(2,3)$ 两点间的最短曲线。

解 泛函为 $J[y]=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$。因被积函数只是 y' 的函数,故欧拉方程的积分为直线

$$y=c_1x+c_2\tag{1}$$

由边界条件 $x=-2,y=3$,得

$$-2c_1+c_2=3\tag{2}$$

设极值曲线与不等式的切点为 x_1,则

$$c_1=2x_1\tag{3}$$

$$c_1x_1+c_2=x_1^2\tag{4}$$

联立上面三个方程(2)、(3)和方程(4),可解出 $x_1=-3$(舍去),$x_1=-1,c_1=-2,c_2=-1$。于是极值曲线为 $y=-2x-1$。

由边界条件 $x=2,y=3$,得 $2c_1+c_2=3$。设极值曲线与不等式的切点为 x_2,用上述同样的方法,可解出 $x_2=3$(舍去),$x_2=1,c_1=1,c_2=1$。或由函数图形的对称性也可以得到这样的结果。于是极值曲线为 $y=2x+1$。综合起来,有

$$y=\begin{cases}-2x-1 & (-2\leqslant x\leqslant -1)\\ x^2 & (-1\leqslant x\leqslant 1)\\ 2x+1 & (1\leqslant x\leqslant 2)\end{cases}\tag{5}$$

4.7 名家介绍

费马(Fermat, Pierre de, 1601.8.20—1665.1.12) 法国数学家、物理学家。生于博蒙-德洛马涅,卒于卡斯特尔。曾在图卢兹大学习法律,毕业后任律师。1631 年起一直任图卢兹议会议员,并在业余时间钻研数学。在数论、解析几何、微积分、概率论和光学等方面都有重大贡献,被誉为"业余数学家之王"。著有《数学论集》、《平面与立体轨迹理论导论》和《论求最大和最小值的方法》等。他提出著名的"费马大定理",即方程 $x^n+y^n=z^n$ 在 $n>2$ 时没有整数解,这一世界级难题激起后来历代数学家的兴趣,直到 1994 年才由英国数学家怀尔斯(Wiles, Andrew John, 1953.4.11—) 完成该定理的证明。提出光学的"费马原理",给后来的变分法研究以极大的启示。为了求极值问题,在牛顿和莱布尼茨之前就运用了微分学思想。

诺伊曼(Neumann, Carl Gottfried von, 1832.5.7—1925.3.27) 德国数学家和理论物理学家。生于柯尼斯堡,卒于莱比锡。早年在柯尼斯堡大学求学,1855 年获博士学位。先后任哈雷(Halle) 大学(1863)、巴塞尔大学(1864)、杜宾根大学(1865) 和莱比锡大学(1868—1911) 教授。柏林科学院院

士，又是格丁根、慕尼黑和莱比锡等科学协会的会员。1868 年与德国数学家克莱布什(Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 1833.1.19—1872.11.7) 共同创办了德国数学杂志《数学年刊》。在解析理论、常微分方程、偏微分方程位势理论、特殊函数理论和积分方程理论等方面做出了贡献。特别研究了拉普拉斯方程的第二边值问题，即著名的诺伊曼问题。著有《代数函数的黎曼理论讲义》(1865)、《关于阿贝尔积分的黎曼理论讲义》(1870)、《关于牛顿势和对数势的研究》(1877) 和《对数学物理各方面的贡献》(1893) 等。

习 题 4

4.1 求泛函 $J[y]=\int_0^1 y^3y'^2\mathrm{d}x$ 的一阶变分，$y(0)=1$。

4.2 设泛函 $J[y]=\int_0^l\left(\frac{1}{2}EIy''^2-qy\right)\mathrm{d}x$，式中 $EI=\text{const}$，q 为 x 的给定函数，$y(0)=y(l)=0$。试由变分方程推导欧拉方程和自然边界条件。

4.3 设 Γ 为区域 D 的固定边界，试求泛函

$$J[u]=\iint_D(u_x^2+u_y^2+u_x\varphi+u_y\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的自然边界条件。其中 φ、ψ 都属于 $C^1(D)$。

4.4 求下列泛函取极值的自然边界条件

(1) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x+\frac{1}{2}ky^2(x_1)$，给定 $y(x_0)=y_0$；

(2) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x+\frac{1}{2}k[y(x_1)-y(x_0)]^2$。

4.5 求下列泛函的欧拉方程和自然边界条件

$$J[y]=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y''^2+q(x)y'^2+r(x)y^2-2s(x)y]\mathrm{d}x。$$

4.6 设泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$，求出下列情况的欧拉方程及自然边界条件

(1) $F=y'^2+yy'+y^2$；(2) $F=xy'^2-yy'+y$；

(3) $F=y'^2+k^2\cos y$；(4) $F=a(x)y'^2+b(x)y^2$。

4.7 设泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(y^2+y'^2)\mathrm{d}x$；$y(0)=0$，$y(x_1)=\mathrm{e}^{2x_1}$。试求：(1) 变分 δJ；(2) 横截条件。

4.8 设泛函 $J_1[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 与 $J_2[y]=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,y')+P(x,y)+Q(x,y)y']\mathrm{d}x$，其中 $P_y=Q_x$，试证：

(1) J_1 与 J_2 有相同的欧拉方程；(2) J_2 的自然边界条件为 $F_{y'}+Q=0$。

4.9 试求泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2-2\alpha yy'-2\beta y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中 α、β 均为常数。

(1) 端点条件：$y(0)=0$，$y(1)=1$；

(2) 给出端点条件：$y(0)=0$，另一端点是任意的；

(3) 给出端点条件：$y(1)=1$，另一端点是任意的；

(4) 两个端点均是任意的。

4.10　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x+\alpha y(x_0)+\beta y(x_1)$ 的欧拉方程和自然边界条件。其中 α、β 为已知常数，$y(x_0)$ 与 $y(x_1)$ 未给定。

4.11　在 $y\geqslant 5-x^2$ 条件下，求泛函 $J[y]=\int_{-3}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线，且一端点固定为 $A(-3,0)$，另一端点 $B(x_1,y_1)$ 在直线 $y=x-6$ 上移动。

4.12　求泛函 $J[y]=\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}(y^2+y'^2)\mathrm{d}x$ 的变分和自然边界条件，以及极值曲线，其中 $y_1=\mathrm{e}^{2x_1}$，x_1 自由取值。

4.13　求点 $A(-1,5)$ 到抛物线 $y^2=x$ 的最短距离。

4.14　求圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $x+y=4$ 之间的最短距离。

4.15　求点 $A(-1,3)$ 到直线 $y=1-3x$ 的最短距离。

4.16　求点 $M(0,0,3)$ 到曲面 $z=x^2+y^2$ 的最短距离。

4.17　求在泛函 $J[y(x)]=\int_0^4(y'-1)^2(y'+1)^2\mathrm{d}x$，$y(0)=0$，$y(4)=2$ 的极小问题中具有一个角点的解。

4.18　在泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x$，$y(x_0)=y_0$，$y(x_1)=y_1$ 的极值问题中具有角点的解是否存在？

4.19　在泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}y'^3\mathrm{d}x$，$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$ 的极值问题中具有角点的解是否存在？

4.20　在泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(y'^4-6y'^2)\mathrm{d}x$，$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$ 的极值问题中具有角点的解是否存在？

4.21　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)\mathrm{e}^{\arctan y'}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的横截条件。

4.22　利用泛函取极值的基本必要条件 $\delta J=0$，来求能使泛函 $J[y]=\int_0^1(y''^2-2xy)\mathrm{d}x$ 达到极值的函数。边界条件为 $y(0)=y'(0)=0$，$y(1)=\frac{1}{120}$，$y'(1)$ 没有给出。

4.23　在容许曲线不能通过由圆周 $(x-5)^2+y^2=9$ 所围圆域内部的条件下，来求能使泛函 $J[y]=\int_0^{10}y'^3\mathrm{d}x$，$y(0)=y(10)=0$ 达到极值的曲线。

4.24　求能使泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2)\mathrm{d}x$，$y(0)=0$ 达到极值的函数，另一个边界点可以在直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 上滑动。

4.25　只利用基本必要条件 $\delta J=0$，来求能使泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x$ 达到极值的曲线，边界条件为 $y(0)=0$，另一个边界点 (x_1,y_1) 可以在圆周 $(x-9)^2+y^2=9$ 上移动。

4.26　一动点由曲线 $y=\varphi(x)$ 之外的点 $A(x_0,y_0)$ 处降落到该曲线上一点 $B(x_1,y_1)$ 处，要使所用的时间为最短，应当是多少？已知动点在曲线 $y=\varphi(x)$ 之外运动时，速度为常数且等于 v_1；而沿曲线 $y=\varphi(x)$ 运动时，速度也为常数且等于 v_2，且 $v_2>v_1$。

第 5 章　条件极值的变分问题

在自然科学和工程技术中所遇到的变分问题，有时要求极值函数除满足给定的边界条件外，还要满足一定的附加条件，这就是泛函的条件极值问题。泛函在满足一定附加条件下取得的极值称为**条件极值**。在泛函所依赖的函数上附加某些约束条件来求泛函的极值问题称为**条件极值的变分问题**。本章将讨论完整约束、微分约束和等周问题的泛函的条件极值，并讨论简单混合型泛函的极值问题。

泛函的条件极值的计算方法与函数的条件极值的计算方法类似，可用拉格朗日乘数法来实现：选一个新的泛函，使原泛函的条件极值问题转化为与之等价的无条件极值问题。

5.1　完整约束的变分问题

本节主要研究泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \tag{5-1-1}$$

在约束条件

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0\quad(i=1,2,\cdots m;m<n) \tag{5-1-2}$$

及边界条件

$$y_j(x_0)=y_{j0},y_j(x_1)=y_{j1}\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{5-1-3}$$

下的极值问题，并导出泛函 $J[y]$ 的极值所应满足的条件。这种条件极值的求解问题类似于多元函数极值的拉格朗日乘数法，可化为无条件极值来处理。

约束条件(5-1-2)称为**完整约束、几何约束或有限约束**。完整约束的特点是约束中不含 y 的导数。此时，式(5-1-1)称为**完整约束的目标泛函**。关于完整约束下的泛函极值问题，有如下定理。

定理 5.1.1　若在完整约束(5-1-2)和边界条件(5-1-3)下使目标泛函(5-1-1)取得极值，则存在待定函数 $\lambda_i(x)$，使函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足由下列泛函

$$J^*[y]=\int_{x_0}^{x_1}\Big[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\Big]\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}H\mathrm{d}x \tag{5-1-4}$$

所给出的欧拉方程组

$$H_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y_j'}=0\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{5-1-5}$$

式中 $H=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i$。泛函(5-1-4)称为**辅助泛函**。

定理 5.1.1 称为**拉格朗日定理**。待定函数 $\lambda_i(x)$ 称为**拉格朗日乘数**或**拉格朗日乘子**。求出拉格朗日乘子的表达式，确定其实际意义，这一过程称为**识别拉格朗日乘子**。

在对式(5-1-4)进行变分运算时，应把 y_j、y_j' 和 $\lambda_i(x)$ 都看作是泛函 $J^*[y]$ 的独立函数，且诸约束条件 $\varphi_i=0$ 可以纳入泛函 $J^*[y]$ 的欧拉方程组而加以考查。式(5-1-5)可写为

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)=0,\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{5-1-6}$$

证 先求泛函(5-1-1)的变分,再由固定端点的条件以及把每个括号中的第二项分部积分,并注意到

$$(\delta y_j)'=\delta y_j',\delta y_j\big|_{x=x_0}=0 \text{ 及} \delta y_j\big|_{x=x_1}=0$$

可得

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)\right]\delta y_j\mathrm{d}x \tag{5-1-7}$$

因为变量 y_j 由约束条件(5-1-2)联系着,所以 δy_j 不全是独立的。用 $\lambda_i(x)$ 乘式(5-1-2)并在区间$[x_0,x_1]$上积分,得

$$J_i=\int_{x_0}^{x_1}\lambda_i(x)\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}x \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

对上式变分,得

$$\delta J_i=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j\right]\mathrm{d}x=0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{5-1-8}$$

将式(5-1-7)与式(5-1-8)相加,并令 $J^*=J+\sum_{i=1}^{m}J_i$,得

$$\delta J^*=\delta J+\sum_{i=1}^{m}\delta J_i=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right]\delta y_j\mathrm{d}x=0 \tag{5-1-9}$$

因为 $\lambda_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 是 m 个待定函数,故可假定它由下面 m 个线性方程

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}=0 \quad (j=1,2,\cdots,m) \tag{5-1-10}$$

来决定。这里假定 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是相互独立的,即至少要有一个 m 阶函数行列式不为零,例如

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{D(y_1,y_2,\cdots,y_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{5-1-11}$$

就可以由式(5-1-10)求得 $\lambda_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 的解。式(5-1-11)称为**函数行列式或雅可比行列式**。这时式(5-1-9)中剩下的变分项只有 $\delta y_{(m+1)},\delta y_{(m+2)},\cdots,\delta y_n$,共 $n-m$ 项,即

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right]\delta y_j\mathrm{d}x=0$$

这里的$(n-m)$项都是相互独立的,根据变分法的基本引理1.4.2,可得

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}=0 \quad (j=m+1,\cdots,n) \tag{5-1-12}$$

将式(5-1-10)和式(5-1-12)合并在一起,就得到了式(5-1-5)或式(5-1-6)。这表明,能使泛函(5-1-1)达到极值的函数能同时使泛函(5-1-4)达到无条件极值。证毕。

例 5.1.1 求在曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上两定点 $A(x_0,y_0)$ 和 $B(x_1,y_1)$ 间的最短距离。

解 两点间的距离为

$$D=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

作辅助泛函

$$D^*=\int_{x_0}^{x_1}[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\varphi(x,y,z)]\mathrm{d}x \tag{2}$$

根据式(5-1-5),欧拉方程为

$$\begin{cases}\lambda\varphi_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0\\ \lambda\varphi_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0\\ \varphi(x,y,z)=0\end{cases} \tag{3}$$

从式(3)中可解出 $\lambda(x)$ 及待求的函数 $y=y(x),z=z(x)$。

若给出的条件为圆柱面 $z=\sqrt{1-x^2}$,则式(3)变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\lambda(x)\\ z=\sqrt{1-x^2}\end{cases} \tag{4}$$

设弧长为 s,则有

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2 \tag{5}$$

于是式(4)可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=a,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=N(x),z=\sqrt{1-x^2} \tag{6}$$

式中 a 为积分常数,$N(x)=\int_0^x\lambda(x)\mathrm{d}x$。

由式(6)中的第二式和第三式,可得

$$\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}z=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}N(x)\mathrm{d}s \tag{7}$$

于是有

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2=\left[\frac{1-x^2}{x^2}N^2(x)+a^2+N^2(x)\right](\mathrm{d}s)^2 \tag{8}$$

将式(8)化简,得

$$\frac{1}{x^2}N^2(x)+a^2=1\text{ 或 }N(x)=\sqrt{1-a^2}x \tag{9}$$

将式(9)代入式(7)并分离变量,得

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-a^2}\mathrm{d}s \tag{10}$$

对式(10)积分,得

$$\arccos x=\sqrt{1-a^2}s+c \tag{11}$$

式中 c 为积分常数,于是有

$$x = \cos(\sqrt{1-a^2}s + c) \tag{12}$$

将式(12) 代入式(6) 中的第三式,得

$$z = \sin(\sqrt{1-a^2}s + c) \tag{13}$$

对式(6) 中的第一式积分,得

$$y = as + b \tag{14}$$

式中 b 是积分常数。

将式(12)、式(13) 和式(14) 写在一起,它们构成短程线的参数方程

$$\begin{cases} x = \cos(\sqrt{1-a^2}s + c) \\ y = as + b \\ z = \sin(\sqrt{1-a^2}s + c) \end{cases} \tag{15}$$

式中 a、b 和 c 由起点和终点的坐标来确定。

此例说明圆柱面上任意两点间的短程线为螺旋线。

例 5.1.2 求在抛物面 $2z = x^2$ 上求连接原点 $O(0,0,0)$ 和点 $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的短程线。

解 由抛物面方程 $2z = x^2$,可得 $z' = x$。取目标泛函为

$$J[y,z] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

作辅助泛函

$$J^*[y,z] = \int_0^1 [\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(2z - x^2)]\mathrm{d}x \tag{2}$$

欧拉方程为

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0 \\ 2\lambda(x) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

将式(3) 的第一式积分,并注意到 $z' = x$,得

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + x'^2}} = c \tag{4}$$

解出 y',得

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}\sqrt{1 + x^2} = c_1\sqrt{1 + x^2} \tag{5}$$

式中 $c_1 = \sqrt{\dfrac{c^2}{1-c^2}}$。

将式(5) 积分,得

$$y = \frac{c_1}{2}[x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})] + c_2 \tag{6}$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = \dfrac{1}{2}$,可得

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}, c_2 = 0 \tag{7}$$

所求曲线为

$$\begin{cases} y = \dfrac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]} \\ z = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{8}$$

原点 O 与点 B 之间的弧长为

$$J[y,z] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + c_1^2 + (1+x^2) + x^2}\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt{1+c_1^2}\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\sqrt{1+c_1^2}}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})]\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{1+c_1^2}}{2c_1} \tag{9}$$

式中，常数 c_1 为式(7)的第一式。

5.2 微分约束的变分问题

本节讨论具有微分约束的变分问题，它是完整约束下的变分问题的推广。设泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2 \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')\mathrm{d}x \tag{5-2-1}$$

其约束条件为

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n') = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m; m < n) \tag{5-2-2}$$

其边界条件为

$$y_j(x_0) = y_{j0}, y_j(x_1) = y_{j1} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{5-2-3}$$

约束条件(5-2-2)称为**微分约束**，其中 $\varphi_i(i = 1,2,\cdots,m; m < n)$ 相互独立。微分约束的特点是约束中含有 y 的导数。此时，式(5-2-1)称为**微分约束的目标泛函**。在微分约束(5-2-2)和边界条件(5-2-3)下求泛函(5-2-1)的极值问题也称为**拉格朗日问题**。

关于微分约束下的泛函极值问题，有与定理 5.1.1 类似的如下**拉格朗日定理**。

定理 5.2.1 若在微分约束(5-2-2)和边界条件(5-2-3)下使目标泛函(5-2-1)取得极值，则存在待定函数 $\lambda_i(x)$，使函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 满足由辅助泛函

$$J^*[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left[F + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} H\mathrm{d}x \tag{5-2-4}$$

所给出的欧拉方程组

$$H_{y_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y_j'} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{5-2-5}$$

式中 $H = F + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i$。

式(5-2-5)可写为

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial F}{\partial y_j'} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'}\right] + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{5-2-6}$$

在对式(5-2-4)进行变分运算时，应把 y_j、y_j' 和 $\lambda_i(x)$ 都看作是泛函 $J^*[y]$ 的独立函数，且诸约束条件 $\varphi_i = 0$ 同样可以纳入泛函 $J^*[y]$ 的欧拉方程组而加以考查。

本定理的证明方法和定理 5.1.1 的证明方法类似,在此从略。

例 5.2.1 试求泛函 $J[y]=\frac{1}{2}\int_0^2 y''^2\mathrm{d}x$ 的最小值。这里 $y=y(x)$ 满足端点条件 $y(0)=1$, $y'(0)=1, y(2)=0, y'(2)=0$。

解 引入两个变量 y_1, y_2,令 $y_1=y, y_2=y'$,于是泛函变为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 y_2'^2\mathrm{d}x \tag{1}$$

约束条件为

$$y_2-y_1'=0 \tag{2}$$

作辅助泛函

$$J^*=\frac{1}{2}\int_0^2[y_2'^2+\lambda(y_2-y_1')]\mathrm{d}x \tag{3}$$

泛函(3) 的欧拉方程组为

$$\begin{cases}0-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\lambda)=0\\ \lambda-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_2')=0\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}\lambda'=0\\ \lambda-y_2''=0\end{cases} \tag{4}$$

由式(4) 可得

$$\frac{\mathrm{d}^3y_2}{\mathrm{d}x^3}=0 \tag{5}$$

积分,得

$$y_2=ax^2+bx+c \tag{6}$$

式中 a、b 和 c 是积分常数,因为 $y_2=y_1'=y'$,故

$$y_1=\frac{a}{2}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+d \tag{7}$$

式中 d 也是积分常数,可由边界条件定出 a、b、c 和 d,于是有

$$\begin{cases}y_1=\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+x+1\\ y_2=\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+1\end{cases} \tag{8}$$

最后求得最小值为

$$J[y]=\frac{1}{2}\int_0^2\left(3x-\frac{7}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{13}{4} \tag{9}$$

例 5.2.2 **测地线问题**。在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上已给定两点 A 和 B。求连接这两点的最短弧线。

解 弧微分为 $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2$,令 $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$,则有约束条件

$$\varphi_1=x^2+y^2+z^2-a^2=0 \tag{1}$$

$$\varphi_2=x'^2+y'^2+z'^2-1=0 \tag{2}$$

弧长泛函为

$$J=\int_{s_A}^{s_B}\mathrm{d}s \tag{3}$$

令

$$H = 1 + \lambda_1(s)\varphi_1 + \lambda_2(s)\varphi_2 = 1 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 + a^2) + \lambda_2(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) \tag{4}$$

得无约束条件的泛函为

$$J^* = \int_{s_A}^{s_B} H\mathrm{d}s = \int_{S_A}^{S_B} [1 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 + a^2) + \lambda_2(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1)]\mathrm{d}s \tag{5}$$

泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\lambda_2 x') - \lambda_1 x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\lambda_2 y') - \lambda_1 y = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\lambda_2 z') - \lambda_1 z = 0 \end{cases} \tag{6}$$

因方程(5)类似于式(4－2－1),边界条件类似于式(4－2－7),所以边界条件可写成

$$[(H - x'H_{x'} - y'H_{y'} - z'H_{z'})\delta s + H_{x'}\delta x' + H_{y'}\delta y' + H_{z'}\delta z']\Big|_{s_A}^{s_B} = 0$$

对式(1)求导两次,得

$$xx' + yy' + zz' = 0 \tag{7}$$

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = xx'' + yy'' + zz'' + 1 = 0 \tag{8}$$

对式(2)求导,得

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0 \tag{9}$$

以 x'、y' 和 z' 分别乘以式(6)的第一、二、三式后相加,利用式(2)、式(7)及式(9),得

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{10}$$

得 λ_2 = 常数。又用 x、y 和 z 分别乘以式(6)的第一、二、三式后相加,再利用式(8),得

$$\lambda_2 + a^2\lambda_1 = 0 \tag{11}$$

因两端固定,故 $\delta x = \delta y = \delta z = 0$,$\delta x' = \delta y' = \delta z' = 0$,又由于 δs 是任取的,于是上述边界条件简化为

$$(H - x'H_{x'} - y'H_{y'} - z'H_{z'})\Big|_{s_A}^{s_B} = 0 \tag{12}$$

故需

$$H - x'H_{x'} - y'H_{y'} - z'h_{z'} = 0 \tag{13}$$

即

$$1 - 2\lambda_2 = 0 \tag{14}$$

得 λ_2 为

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \tag{15}$$

由式(15)及式(11),可求出 λ_1 为

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2a^2} \tag{16}$$

将 $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2a^2}$,$\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ 代回到欧拉方程组(6),积分后得

$$\begin{cases} x = A_1\cos\dfrac{s}{a} + A_2\sin\dfrac{s}{a} \\ y = B_1\cos\dfrac{s}{a} + B_2\sin\dfrac{s}{a} \\ z = C_1\cos\dfrac{s}{a} + C_2\sin\dfrac{s}{a} \end{cases} \tag{17}$$

式中 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 为积分常数，要以上方程组对任意 s 值都能成立，只需行列式

$$\begin{vmatrix} x & A_1 & A_2 \\ y & B_1 & B_2 \\ z & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

这是过原点的平面方程。这说明，球面上过 A、B 两点的短程线必然在过点 O、A 和 B 的平面上，除非 AOB 恰好构成直径，否则弧 AB 为大圆弧的较短的那一段，即劣弧。

例 5.2.3 试求泛函 $J[y,z] = \dfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(y^2 + z^2)\mathrm{d}x$ 在固定边界条件 $y(x_0) = y_0, z(0) = z_0$ 和约束条件 $y' = z$ 下的极值函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$。

解 令 $H = \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}z^2 + \lambda(y' - z)$，得无约束条件的泛函为

$$J^*[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} H\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \lambda(y' - z)\right]\mathrm{d}x$$

泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases} y - \lambda' = 0 \\ z - \lambda = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} y = \lambda' \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

由这两个方程组可得

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ z'' - z = 0 \end{cases}$$

其解为

$$y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}, z = c_1\mathrm{e}^x - c2\mathrm{e}^{-x}$$

由边界条件 $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$，得 $c_1 = \dfrac{y_0 + z_0}{2\mathrm{e}^{x_0}}, c_2 = \dfrac{y_0 - z_0}{2\mathrm{e}^{-x_0}}$。于是极值曲线为

$$\begin{cases} y = \dfrac{y_0 + z_0}{2\mathrm{e}^{x_0}}\mathrm{e}^x + \dfrac{y_0 - z_0}{2\mathrm{e}^{-x_0}}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{y_0 + z_0}{2}\mathrm{e}^{x - x_0} + \dfrac{y_0 - z_0}{2}\mathrm{e}^{-x + x_0} \\ z = \dfrac{y_0 + z_0}{2\mathrm{e}^{x_0}}\mathrm{e}^x - \dfrac{y_0 - z_0}{2\mathrm{e}^{-x_0}}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{y_0 + z_0}{2}\mathrm{e}^{x - x_0} - \dfrac{y_0 - z_0}{2}\mathrm{e}^{-x + x_0} \end{cases}$$

5.3 等周问题

设泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')\mathrm{d}x \tag{5-3-1}$$

其约束条件为

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x = a_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{5-3-2}$$

其边界条件为

$$y_j(x_0)=y_{j0},y_j(x_1)=y_{j1} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{5-3-3}$$

约束条件(5-3-2)称为**等周约束**或**等周条件**,其中 φ_i、a_i 是给定的函数或常数。等周性约束的特点是约束中含有积分,故等周约束也称为**积分约束**。此时,式(5-3-1)称为**等周问题的目标泛函**。关于等周问题泛函极值存在的必要条件,有如下定理。

定理 5.3.1 若在等周条件(5-3-2)和边界条件(5-3-3)下使目标泛函(5-3-1)取得极值,则存在常数 λ_i,使函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足由辅助泛函

$$J^*[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i\right)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}G\mathrm{d}x \tag{5-3-4}$$

所给出的欧拉方程组

$$G_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_{y_j'}=0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{5-3-5}$$

式中 $G=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i$。

式(5-3-5)可写为

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j'}\right)=0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{5-3-6}$$

在对式(5-3-4)进行变分运算时,应把 y_j、y_j' 都看作是泛函 $J^*[y]$ 的独立函数,λ_i 看作常数,且同样可以把等周条件 $\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i\mathrm{d}x-a_i=0$ 纳入泛函 $J^*[y]$ 的欧拉方程组而加以考查。

证 令

$$z_i(x)=\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{5-3-7}$$

由此可知,$z_i(x_0)=0,z_i(x_1)=a_i$。对式(5-3-7)求导,得

$$z_i'(x)=\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n') \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{5-3-8}$$

于是条件(5-3-2)就可以用式(5-3-8)来代替,这样,本定理所提出的等周问题就变成泛函(5-3-1)在约束条件(5-3-8)下的条件极值问题。根据定理 5.2.1,这种极值问题就化为求泛函

$$J^{**}[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left\{F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)[\varphi_i-z_i'(x)]\right\}\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}H\mathrm{d}x \tag{5-3-9}$$

的无条件极值问题。式中

$$H=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)[\varphi_i-z_i'(x)] \tag{5-3-10}$$

把 $y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n',z_1',z_2',\cdots,z_m',\lambda_i(x)$ 都当作独立函数,泛函(5-3-9)的变分给出欧拉方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial y_j}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial H}{\partial y_j'}=0 & (j=1,2,\cdots,n)\\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial z_i}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial H}{\partial z_i'}=0 & (i=1,2,\cdots,m)\\[2ex] \varphi_i-z_i'(x)=0 & (i=1,2,\cdots,m)\end{cases} \tag{5-3-11}$$

将式(5-3-10)代入式(5-3-11),得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\partial F}{\partial y_j'} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right] = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda_i(x) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ \varphi_i - z_i'(x) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m) \end{cases} \tag{5-3-12}$$

由式(5-3-12)的第二式可知 $\lambda_i(x)$ 为常数,故 $\lambda_i(x)$ 应写成 λ_i。式(5-3-12)的第一式与泛函(5-3-4)的欧拉方程(5-3-5)或(5-3-6)相同,其中

$$F = F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')$$

$$\varphi_i = \varphi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n') \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

λ_i 为常数,于是定理得证。证毕。

一般地,在使另一泛函的值一定的附加条件下,求某一泛函的极值问题称为**广义等周问题**。而第2章提到的等周问题则称为**特殊等周问题**。1870年,魏尔斯特拉斯在一次讲演中运用变分法完满地解决了一般的二维域的等周问题,之后不久,施瓦茨给出了三维域的等周问题的严格证明。

例 5.3.1　等周问题。在连接两定点 A 与 B 且有定常 L 的 $L > AB$ 的所有曲线中,求出一条曲线,使它与线段 AB 所围成的面积最大。这个问题是最古老的变分问题之一,实质上也是一个等周问题。关于这个问题还有一个神话传说,古腓尼基(Phoenicia)有个公主叫狄多(Dido),推罗(Tyrus)王穆托(Mutto)之女,嫁与其叔父、大力神赫拉克勒斯(Heracles)的祭司阿克尔巴斯(Acerbas or Acherbas)又称绪开俄斯(Sychaeus or Sichaeus)为妻。狄多的父亲去世后,她的兄弟皮格马利翁(Pygmalion)继位,皮格马利翁为了侵占她家的财产,把她的丈夫杀害。此后狄多便带着她的随从被迫离开腓尼基的蒂尔(Tyre),逃到北非柏柏里诸国(Barbary States)之一的突尼西亚(Tunisia)。狄多欲购置土地,那里的国王伊阿耳巴斯(Iarbas)答应只卖给她一块一张牛皮便可覆盖的土地,异常聪颖的公主把公牛皮裁成细条并结成一条长度超过4公里的绳子,再选择海岸附近的土地,用绳子围成一个半圆形,这块土地就成了她的属地,她把这个地方叫做比尔萨(Byrsa),意思就是公牛皮(hide of bull)。后来她在这块土地上建立了迦太基城[the City of Carthage,在今突尼斯首都突尼斯(Tunis)附近,该城建于约公元前853年,于公元前146年被罗马人所灭],并成了迦太基女王。在古希腊和古罗马神话中,狄多通常与埃涅阿斯(Aeneas)相关联。在荷马史诗《伊利亚特》中,埃涅阿斯是特洛伊联军中智勇双全、赫赫有名的武士。古罗马诗人维吉尔(Virgil, or Vergil, Publius Vergilius Maro, 公元前70.10.15—前19)在他的一部史诗《埃涅伊特》或译《埃涅阿斯记》(Aeneid)中叙述了特洛伊战争中的英雄埃涅阿斯在特洛伊陷落(the Full of Troy)之后在天神的护卫下从那里逃出,辗转飘泊,最后到意大利建立罗马的曲折经历,其中就编织了狄多与埃涅阿斯的故事。本问题也称为**狄多问题**。

解　取过定点 A,B 的直线为 x 轴,并设曲线 $y = y(x)$ 所围成的面积在 x 轴的上侧,它可表示为

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y\mathrm{d}x \tag{1}$$

约束条件为

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \tag{2}$$

边界条件为

$$y(x_0) = 0, y(x_1) = 0 \tag{3}$$

问题是求泛函(1)在约束条件(2)和边界条件(3)下的极大值。作辅助泛函

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda\sqrt{1 + y'^2})\mathrm{d}x \tag{4}$$

由于 $H = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$ 中不含 x,故有首次积分

$$y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} - \lambda y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1 \tag{5}$$

化简,得

$$y = c_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{6}$$

令 $y' = \tan t$,则

$$y = c_1 - \lambda\cos t \tag{7}$$

将其对 x 求导,得

$$y' = \lambda\sin t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \tag{8}$$

故

$$\lambda\sin t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tan t \tag{9}$$

积分,得

$$x = \lambda\sin t + c_2 \tag{10}$$

将式(7)和式(10)中的 t 消去,得

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2 \tag{11}$$

由此可知所求的曲线为圆弧,式中常数 c_1, c_2 和 λ 可由边界条件和约束条件来确定。

例 5.3.2 信源变量 x 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上变化,其信息的概率分布密度为 $p(x)$,求最佳概率分布密度 $p(x)$,使信息熵

$$J[p(x)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\ln[kp(x)]\mathrm{d}x \tag{1}$$

在条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x = \sigma^2 \tag{2}$$

下取极大值,式中 k、σ 为常数。

解 令 $F = -p(x)\ln[kp(x)], G_1 = p(x), G_2 = x^2 p(x)$。作辅助函数

$$H = F + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = -p(x)\ln[kp(x)] + \lambda_1 p(x) + \lambda_1 x^2 p(x) \tag{3}$$

作辅助泛函

$$J^* = \int_{-\infty}^{+\infty} H\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \{-p(x)\ln[kp(x)] + \lambda_1 p(x) + \lambda_1 x^2 p(x)\}\mathrm{d}x \tag{4}$$

其欧拉方程为

$$-\ln[kp(x)] - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0 \tag{5}$$

由式(5)解出 $p(x)$

$$p(x) = \frac{1}{k}e^{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 x^2} \tag{6}$$

将式(6)分别代入式(2)的两个积分中,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}e^{\lambda_1 - 1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 x^2}\mathrm{d}x = 1 \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}e^{\lambda_1 - 1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\lambda_2 x^2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2k\lambda_2}e^{\lambda_1 - 1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 x^2}\mathrm{d}x = \sigma^2 \tag{8}$$

由式(7)和式(8)解出 λ_2 为

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)最后一个积分式中,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}\mathrm{d}x \tag{10}$$

令 $\xi = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$,有 $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sigma\mathrm{d}\xi$,且当 $x \to -\infty$ 时,$\xi \to -\infty$,当 $x \to +\infty$ 时,$\xi \to +\infty$,于是式(10)可写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\zeta \tag{11}$$

设 $I(a) = \int_0^a e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi$,其中 a 是任意有限正数,于是

$$[I(a)]^2 = \int_0^a e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\int_0^a e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = \iint_D e^{-(\xi^2+\eta^2)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{12}$$

式中,D 表示正方形积分域 $0 \leqslant \xi \leqslant a$,$0 \leqslant \eta \leqslant a$。由于被积函数恒为正,所以有

$$\iint_{D_1} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta < \iint_D e^{-(\xi^2+\eta^2)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta < \iint_{D_2} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{13}$$

式中,D_1 和 D_2 分别为半径为 a 和 $\sqrt{2}a$ 的圆在第一象限的部分,见图 5-3-1,采用极坐标(r,θ),有

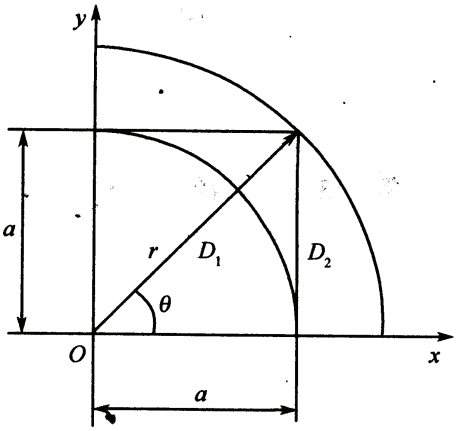


图 5-3-1　概率分布密度积分图

$$\iint_{D_1} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a re^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Big|_0^a =$$

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) \tag{14}$$

$$\iint_{D_2} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}a} re^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}a} =$$

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) \tag{15}$$

由式(13)可知

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) < [I(a)]^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2}) \tag{16}$$

令 $a \to \infty$ 而取极限,得

$$\lim_{a \to +\infty} I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{17}$$

这个积分称为**拉普拉斯积分**。注意到 $e^{-\xi^2}$ 是偶函数,还可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \tag{18}$$

将式(18)代入式(11),再将式(9)和式(11)代入式(8),得

$$e^{\lambda_1 - 1} = \frac{k}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{19}$$

将式(9)和式(19)代入式(6),便得概率分布密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{20}$$

它符合正态分布。

例5.3.3 试在过定点A、B长为L的曲线中求出重心最低的一条悬线,设线密度ρ为常数。并求出当$L = 2a\sinh 1$, $y_0(-a) = y_1(a) = a\cosh 1$时的曲线方程。

解 设悬线的纵坐标为$y(x)$,并通过$A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$两点,悬线长度为

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{1}$$

悬线在平衡位置时,其重心应当在最低位置,可表示为

$$y_c = \frac{1}{L\rho}\int_{s_0}^{s_1} \rho y ds = \frac{1}{L}\int_{s_0}^{s_1} y ds = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2} dx \tag{2}$$

或者从重力作功方面来考虑。重力所作的功为

$$W = \int_{s_0}^{s_1} \rho g y ds = \int_{x_0}^{x_1} \rho g y \sqrt{1 + y'^2} dx = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2} dx \tag{3}$$

因L、ρ和g都是常数,它们对泛函的变分没影响,故重心和重力作功可用下面的泛函来代替

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2} dx \tag{4}$$

作辅助泛函

$$J^*[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2}) dx \tag{5}$$

因为$H = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$不含$x$,故存在首次积分

$$(y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{(y + \lambda)y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1 \tag{6}$$

化简,得

$$y + \lambda = c_1\sqrt{1 + y'^2} \tag{7}$$

令$y' = \sinh t$,代入式(7)得

$$y = c_1\sqrt{1 + \sinh^2 t} - \lambda = c_1\cosh t - \lambda \tag{8}$$

对式(8)微分,得

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 \sinh t dt}{\sinh t} = c_1 dt \tag{9}$$

积分,得

$$x = c_1 t + c_2 \tag{10}$$

利用式(10),将y的表达式(8)消去t,得

$$y = c_1\cosh\frac{x - c_2}{c_1} - \lambda \tag{11}$$

这是悬链线的一般方程，见图5-3-2，式中任意常数 c_1、c_2 和 λ 可由边界条件

$$\begin{cases} y_0 = c_1\cosh\dfrac{x_0 - c_2}{c_1} - \lambda \\ y_1 = c_1\cosh\dfrac{x_1 - c_2}{c_1} - \lambda \end{cases} \tag{12}$$

和约束条件

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\cosh\frac{x - c_2}{c_1}\mathrm{d}x =$$

$$c_1\left(\sinh\frac{x_1 - c_2}{c_1} - \sinh\frac{x_0 - c_2}{c_1}\right) = L \tag{13}$$

来确定。

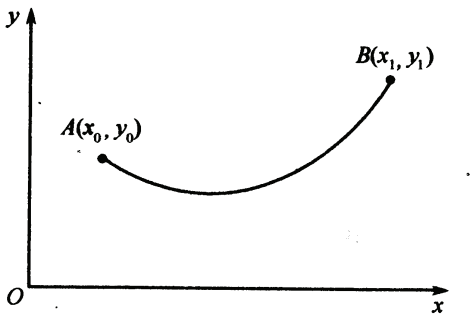


图5-3-2　悬链线

当 $L = 2a\sinh 1$，$y_0(-a) = y_1(a) = a\cosh 1$ 时，可解出 $c_1 = a$，$c_2 = \lambda = 0$。于是**悬链线方程**为

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \tag{14}$$

例 5.3.4　在有定常 L 的所有光滑封闭曲线中，求围成最大面积的曲线。

解　因 L 是封闭曲线，故采用参数形式，设 $x = x(s)$，$y = y(s)$，其中 s 为弧长。问题归结为在周长

$$L = \int_0^s\sqrt{x'^2 + y'^2}\mathrm{d}s \tag{1}$$

的条件下，求泛函

$$J = \frac{1}{2}\int_0^s(xy' - x'y)\mathrm{d}s \tag{2}$$

的极值。

作辅助泛函

$$J^* = \int_0^s\left[\frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}\right]\mathrm{d}s = \int_0^s H\mathrm{d}s \tag{3}$$

式中

$$H = \frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2} \tag{4}$$

H 的各偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{1}{2}y', \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}x' \\ \dfrac{\partial H}{\partial x'} = -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y'} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \end{cases} \tag{5}$$

因参数 s 为弧长，有 $x'^2 + y'^2 = 1$，故式(5)可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{1}{2}y', \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}x' \\ \dfrac{\partial H}{\partial x'} = -\dfrac{1}{2}y + \lambda x' \\ \dfrac{\partial H}{\partial y'} = \dfrac{1}{2}x + \lambda y' \end{cases} \tag{6}$$

欧拉方程为

$$\begin{cases} y' - \lambda x'' = 0 \\ x' + \lambda y'' = 0 \end{cases} \tag{7}$$

积分一次,得

$$\begin{cases} y' - \lambda x' = c_1 \\ x + \lambda y' = c_2 \end{cases} \tag{8}$$

消去式(8)中的 λ,得

$$(x - c_2)\mathrm{d}x + (y - c_1)\mathrm{d}y = 0 \tag{9}$$

将式(9)积分,得

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = c_3^2 \tag{10}$$

这是一簇圆,半径为 c_3,圆心(c_2, c_1)。可以验证拉格朗日乘子 λ 即为半径c_3。事实上,由式(8)和式(10)消去 c_1, c_2,得

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2(x'^2 + y'^2) = \lambda^2 = c_3^2 \tag{11}$$

所以 $\lambda = c_3$。

从上面讨论可知,变分法的广义等周问题可化为积分号下函数

$$H = F + \lambda\varphi \tag{5-3-13}$$

的变分问题。当以常数乘以积分号下的函数时,积分的极值曲线族保持不变,于是可把 H 写成对称形式

$$H = \lambda_1 F + \lambda_2 \varphi \tag{5-3-14}$$

式中 λ_1 和 λ_2 是常数。在函数 H 的表达式中,函数 F 和φ 是对称的。这表明,同一物理问题,可用两种不同形式的变分问题来表示,其中一个变分问题中的约束条件为另一个变分问题中的变分条件,如果不考虑 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = 0$ 的情形,则不论保持积分 a 为常数下求积分J 的极值,还是保持 J 为常数求积分 a 的极值,其欧拉方程相同,所得到的极值曲线族也相同。这种对称形式称为**对偶原理**或**互易原理**。

如果 $\lambda_2 = 0$,那么 H 仅和F 差一个常数,积分 J 的条件极值曲线也将与此积分的无条件极值曲线 $\lambda_1 = 0$,则 H 与 φ 相同,积分 a 的条件极值曲线就是其无条件极值曲线。

例 5.3.5 求证:在底边和面积一定的三角形中,等腰三角形的周长最短。在底边和周长一定的三角形中,等腰三角形的面积最大。

证 作一椭圆,使三角形的底边 AB 恰好是椭圆两焦点之间的长度,如图 5-3-3 所示。根据椭圆的性质,每个三角形的周长都相等,但与不等边的三角形相比,因为等腰三角形 ABC 的高度最大,因此它的面积也最大,此时,等腰三角形的顶点在椭圆与短轴的交点处。按互易原理,对于底边和面积一定的各三角形,等腰三角形有最短的周长。证毕。

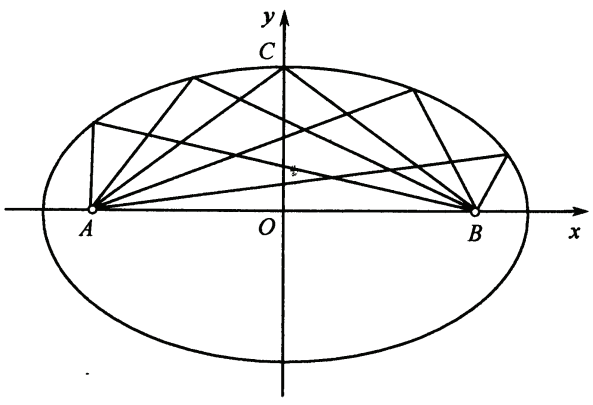


图 5-3-3 椭圆与三角形的关系图

5.4 混合型泛函的极值问题

在实际问题中常遇到这样的泛函，它除了含有通常的积分型泛函外，还含有附加项，其中附加项的类型与通常的积分型泛函的类型不同，这种形式的泛函称为**混合型泛函**或**混合泛函**，也称为**广义泛函**。混合型泛函的极值问题称为**混合变分问题**或**广义变分问题**。

混合型泛函的结构可以是相当复杂的，对此很难作一般性的论述，本节仅就最简类型的混合型泛函、二维、三维和 n 维混合型泛函的变分问题进行讨论。

5.4.1 简单混合型泛函的极值问题

考察如下泛函

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x + \Phi(x_0, y_0, x_1, y_1) \tag{5-4-1}$$

式中可动边界点的坐标(x_0, y_0)、(x_1, y_1)可以受某些条件的约束，如 $y_0 = \varphi(x_0)$，$y_1 = \psi(x_1)$。$\Phi(x_0, y_0, x_1, y_1)$是常数项。式(5-4-1)混合型变分问题又称为**波尔查问题**。特别地，当 $\Phi \equiv 0$ 时，称为**拉格朗日问题**。当 $F \equiv 0$ 时，称为**迈耶问题**。

显然，泛函(5-4-1)的极值只能在欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \tag{5-4-2}$$

的解上达到。根据式(4-1-18)，有

$$\begin{aligned}
\delta J = {} & [(F - y'F_{y'})\delta x_1 + F_{y'}\delta y_1]\big|_{x=x_1} - [(F - y'F_{y'})\delta x_0 + F_{y'}\delta y_0]\big|_{x=x_0} + \\
& \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\delta y_1 = \\
& (F - y'F_{y'} + \Phi_{x_1})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + (F_{y'} + \Phi_{y_1})\big|_{x=x_1}\delta y_1 - \\
& (F - yF_{y'} - \Phi_{x_0})\big|_{x=x_0}\delta x_0 - (F_{y'} - \Phi_{y_0})\big|_{x=x_0}\delta y_0
\end{aligned} \tag{5-4-3}$$

当 x_0 与 x_1 各自等于常数时，则端点只能上下变动，这就得到自然边界条件。此时 δy_0 与 δy_1 均为任意的，若泛函取得极值，则它们的系数必须为零，即

$$(F_{y'} + \Phi_{y_1})\big|_{x=x_1} = 0, (F_{y'} - \Phi_{y_0})\big|_{x=x_0} = 0 \tag{5-4-4}$$

当边界点(x_0, y_0)与(x_1, y_1)分别在给定曲线 $y_0 = \varphi(x_0)$ 与 $y_1 = \psi(x_1)$ 上变动时，有

$$\delta y_0 = \varphi'(x_0)\delta x_0, \delta y_1 = \psi'(x_1)\delta x_1$$

此时式(5-4-3)可写为

$$\begin{aligned}
& [F + (\varphi' - y')F_{y'} + \Phi_{x_1} + \Phi_{y_1}\psi']\big|_{x=x_1}\delta x_1 - \\
& [F + (\varphi' - y')F_{y'} - \Phi_{x_0} - \Phi_{y_0}\varphi']\big|_{x=x_0}\delta x_0 = 0
\end{aligned} \tag{5-4-5}$$

因为 δx_0 与 δx_1 是任意的，所以它们的系数应等于零，即

$$\begin{cases}
[F + (\psi' - y')F_{y'} + \Phi_{x_1} + \Phi_{y_1}\psi']\big|_{x=x_1} = 0 \\
[F + (\psi' - y')F_{y'} - \Phi_{x_0} - \Phi_{y_0}\psi']\big|_{x=x_0} = 0
\end{cases} \tag{5-4-6}$$

这就是可动边界点应满足的横截条件。由此可见，自然边界条件是横截条件的特殊情况。

对于形如

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\mathrm{d}x + \Phi(x_0, y_0, x_1, y_1) \tag{5-4-7}$$

的泛函，用上面类似的方法可得欧拉 — 泊松方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = 0 \tag{5-4-8}$$

及在端点的条件

$$\left[F - y'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''} + \Phi_{x_1}\right]\Big|_{x=x_1}\delta x_1 +$$

$$\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} + \Phi_{y_1}\right)\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{y''}|_{x=x_1}\delta y_1' = 0 \tag{5-4-9}$$

和

$$\left[F - y'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''} - \Phi_{x_0}\right]\Big|_{x=x_0}\delta x_0 +$$

$$\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} - \Phi_{y_0}\right)\Big|_{x=x_0}\delta y_0 + F_{y''}|_{x=x_0}\delta y_0' = 0 \tag{5-4-10}$$

若 δx_0、δy_0、$\delta y_0'$、δx_1、δy_1 和 $\delta y_1'$ 均为任意时，则它们的系数应等于零，即

$$\begin{cases} \left[F - y'\left(F_{y'} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''} + \Phi_{x_1}\right]\Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left(F_{y'} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} + \Phi_{y_1}\right)\Big|_{x=x_1} = 0, F_{y''}|_{x=x_1} = 0 \end{cases} \tag{5-4-11}$$

及

$$\begin{cases} \left[F - y'\left(F_{y'} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right) - y''F_{y''} - \Phi_{x_0}\right]\Big|_{x=x_0} = 0 \\ \left(F_{y'} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} - \Phi_{y_0}\right)\Big|_{x=x_0} = 0, F_{y''}|_{x=x_0} = 0 \end{cases} \tag{5-4-12}$$

若 x_0、y_0、y_0'、x_1、y_1 和 y_1' 之间有某种联系时，则可进一步分析端点条件的关系。

例 5.4.1 一根长度为 L 的梁，一端固定在高度为 H 的墙上，另一端由于太长和本身的自重，使梁下垂部分平压在地面上。试求在自重作用下，梁悬空部分的长度是多少？

解 如图 5-4-1 所示，把坐标原点取在固定端点 A 处，向右为正。端点 $B(x = x_1)$ 是可动的。

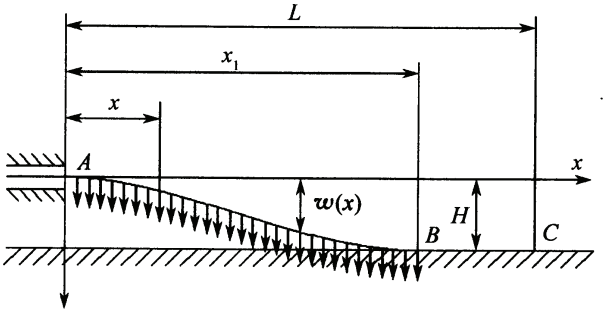


图 5-4-1 梁在自重作用下的变形

且 $L > x_1$。在固定端点 A 处的条件为

$$w(0) = 0, w'(0) = 0 \tag{1}$$

在可动端点 B 处的条件为

$$w(x_1) = H, w'(x_1) = 0 \tag{2}$$

梁的总能量为

$$U = \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2} EIw'' - qw \right) \mathrm{d}x - qH(L - x_1) \tag{3}$$

式中，$\int_0^{x_1} \frac{1}{2} EIw'' \mathrm{d}x$ 为 AB 段的弯曲变形能，$\int_0^{x_1} - qw \mathrm{d}x$ 为 AB 段均布载荷 q 所作的功，$qH(L - x_1)$ 为 BC 段 q 所作的功。这是一个属于式(5－4－7) 的混合型泛函，其欧拉 — 泊松方程为

$$F_w - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{w'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{w''} = 0 \tag{4}$$

即

$$F_w - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{w''} = - q + \frac{EI}{2} \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0 \tag{5}$$

根据式(5－4－9)，可知动端点的横截条件为

$$\left[F - w' \left(F_{w'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{w''} \right) - w'' F_{w''} + \Phi_{x_1} \right] \Big|_{x = x_1} \delta x_1 +$$

$$\left(F_{w'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{w''} + \Phi_{w_1} \right) \Big|_{x = x_1} \delta w_1 + F_{w''} |_{x = x_1} \delta w'_1 = 0 \tag{6}$$

由于在可动端点处恒保持水平方向，故 $\delta w_1 = \delta w'_1 = 0$，于是当 δx_1 为任意时，它的系数应为零，所以有

$$(F - w'' F_{w''} + \Phi_{x_1}) |_{x = x_1} = 0 \tag{7}$$

或

$$\left[\frac{1}{2} EIw''^2 - qw - w''(EIw'') + qH \right] \Big|_{x = x_1} = 0 \tag{8}$$

注意到 $w |_{x = x_1} = 1 - 1$，于是式(8) 成为

$$\frac{1}{2} EIw''^2 \Big|_{x = x_1} = 0 \text{ 或 } w'' |_{x = x_1} = 0 \tag{9}$$

由式(5) 解得

$$w(x) = \frac{q}{24EI} x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \tag{10}$$

由固定端点条件(1) 得 $c_3 = c_4 = 0$，再利用式(2)，得

$$\begin{cases} H = \dfrac{q}{24EI} x^4 + c_1 x^3 + c_2 c^2 \\ 0 = \dfrac{q}{6EI} x^3 + 3c_1 x^2 + 2c_2 x \end{cases} \tag{11}$$

联立解得

$$c_1 = - \frac{2H}{x_1^3} - \frac{q}{12EI} x_1, c_2 = \frac{3H}{x_1^3} + \frac{q}{24EI} x_1^2 \tag{12}$$

代入式(10)，得

$$w(x) = \frac{q}{24EI} x^2 (x_1 - x)^2 - \frac{H}{x_1^3} x^2 (2x - 3x_1) \tag{13}$$

最后利用条件(9)，可求得

$$w''(x) = \frac{q}{12EI}x_1^2 - \frac{6H}{x_1^2} = 0 \tag{14}$$

从而得

$$x_1 = \left(\frac{72HEI}{q}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{15}$$

此即梁悬空部分的长度。当然还须满足如下条件

$$L > x_1 = \left(\frac{72HEI}{q}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{16}$$

5.4.2 二维、三维和 n 维问题的欧拉方程

考察二维边值问题。设混合型泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} G(x,y,u,u',u'',\cdots,u^{(n)})\mathrm{d}\Gamma \tag{5-4-13}$$

这里 D 的边界为 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$，$G(x,y,u,u',u'',\cdots,u^{(n)})$ 是在边界 Γ_2 上取值的函数，且 u 在边界 Γ_2 上的函数未知，而 u 在边界 Γ_1 上的函数是给定的。$u',u'',\cdots,u^{(n)}$ 表示函数 u 对边界 Γ 的一阶，二阶，…，n 阶导数。

泛函(5-4-13)的一阶变分为

$$\delta J = \iint_D (F_u\delta u + F_{u_x}\delta u_x + F_{u_y}\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} (G_u\delta u + G_{u'}\delta u' + G_{u''}\delta u'' + \cdots + G_{u^{(n)}}\delta u^{(n)})\mathrm{d}\Gamma \tag{5-4-14}$$

根据求导和变分可以交换次序和分部积分公式，有

$$F_{u_x}\delta u_x = F_{u_x}\delta\frac{\partial u}{\partial x} = F_{u_x}\frac{\partial\delta u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) - \delta u\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} \tag{5-4-15}$$

$$F_{u_y}\delta u_y = F_{u_y}\delta\frac{\partial u}{\partial y} = F_{u_y}\frac{\partial\delta u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u) - \delta u\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} \tag{5-4-16}$$

由于边界 Γ_2 与 Γ_1 的连接点就是两段边界曲线的端点，它们是已知值，此时 $\delta u^{(k)}$ 在两端点的变分为零，故有

$$\int_{\Gamma_2} G_{u^{(k)}}\delta u^{(k)}\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_2} (-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\Gamma^k}G_{u^{(k)}}\delta u\mathrm{d}\Gamma \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{5-4-17}$$

将式(5-4-15)、式(5-4-16)和式(5-4-17)代入式(5-1-14)，得

$$\delta J = \iint_D \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k G_{u^{(k)}}}{\mathrm{d}\Gamma^k}\right]\delta u\mathrm{d}\Gamma \tag{5-4-18}$$

式中，$G_u = (-1)^0\frac{\mathrm{d}^0 G_{u^{(0)}}}{\mathrm{d}\Gamma^0}$。令上式等号右边第二积分中的 $F_{u_x}\delta u = Q$，$F_{u_y}\delta u = P$，根据格林公式，有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\Gamma (Q\mathrm{d}y - P\mathrm{d}x) = \oint_\Gamma (F_{u_x}\mathrm{d}y - F_{u_y}\mathrm{d}x)\delta u \tag{5-4-19}$$

式中 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$。由于 u 在 Γ_1 边界上的函数已知，故 $\delta u = 0$。上式等号右边只剩下沿边界 Γ_2 上的积分。根据第1章式(1-3-31)，在边界上 $\mathrm{d}x = -n_y \mathrm{d}\Gamma, \mathrm{d}y = n_x \mathrm{d}\Gamma$，这里 $n_y = \cos(n,y), n_x = \cos(n,x)$ 是边界外法线的方向余弦。将这些关系式代入式(5-4-19)，再将式(5-4-19)代入式(5-4-18)，可得

$$\begin{aligned}\delta J = & \iint_D \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)\delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\ & \int_{\Gamma_2}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k G_u^{(k)}}{\mathrm{d}\Gamma^k} + F_{u_x} n_x + F_{u_y} n_y\right]\delta u \mathrm{d}\Gamma = \\ & \iint_D \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)\delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\ & \oint\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k G_u^{(k)}}{\mathrm{d}\Gamma^k} + F_{u_x} n_x + F_{u_y} n_y\right]\delta u \mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{5-4-20}$$

注意，因为在边界 Γ_1 上 $\delta u = 0$，所以在式(5-4-20)中可以把线积分扩展至整条封闭曲线。考虑到 δu 的任意性，若使泛函的变分 $\delta J = 0$，以下两式必然成立

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} = 0 \quad (\text{在 } D \text{ 内}) \tag{5-4-21}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k G_u^{(k)}}{\mathrm{d}\Gamma^k} + F_{u_x} n_x + F_{u_y} n_y = 0 \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 或 } \Gamma \text{ 上}) \tag{5-4-22a}$$

式(5-4-22a)也可以写成下列形式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k G_u^{(k)}}{\mathrm{d}\Gamma^k} + F_{u_x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma} - F_{u_y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma} = 0 \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 或 } \Gamma \text{ 上}) \tag{5-4-22b}$$

这就是二维问题的欧拉方程。

由此可得出结论：由式(5-4-13)所给出的泛函，若在函数 $u(x,y)$ 上取得极值，则 $u(x,y)$ 必须满足欧拉方程(5-4-21)和(5-4-22)。混合型泛函(5-4-13)是本书作者从数学角度提出来的，并给出了上述欧拉方程。

用同样的方法可以推导出三维问题的欧拉方程。

设函数 $u(x,y,z)$ 为空间域 $V(x,y,z)$ 内的连续二阶可微函数，$S = S_1 + S_2$ 是 V 的曲面边界，且在边界 S_1 上 $u = u_1$ 为已知函数，在边界 S_2 上 u 为未知函数。对于混合型泛函

$$J[u] = \iiint_V F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{S_2} G(x,y,z,u)\mathrm{d}s \tag{5-4-23}$$

应用推导二维问题欧拉方程的方法，可以得出三维问题的欧拉方程如下

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} - \frac{\partial F_{u_z}}{\partial z} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{5-4-24}$$

$$G_u + F_{u_x} n_x + F_{u_y} n_y + F_{u_z} n_z = 0 \quad (\text{在 } S_2 \text{ 或 } S \text{ 上}) \tag{5-4-25}$$

式中 $n_x = \cos(n,x), n_y = \cos(n,y), n_z = \cos(n,z)$，为边界表面外法线的方向余弦。

由此可得出结论：由式(5-4-23)所给出的泛函，若在函数 $u(x,y,z)$ 上取得极值，则 $y(x,y,z)$ 必须满足欧拉方程(5-4-24)和(5-4-25)。

以上所得出的结论可推广到 n 维空间中去。

设函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 维空间域 $\Omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 内的连续二阶可微函数，$S = S_1 + S_2$ 是 Ω 的边界，且在边界 S_1 上 $u = u_1$ 为已知函数，在边界 S_2 上 u 为未知函数。对于混合型泛函

$$J[u] = \int_{\Omega} F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n +$$

$$\int_{S_2} G(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\mathrm{d}s \tag{5-4-26}$$

相应的欧拉方程如下

$$F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{5-4-27}$$

$$G_u + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} n_{x_i} = 0 \quad (\text{在 } S_2 \text{ 或 } S \text{ 上}) \tag{5-4-28}$$

式中 $n_{x_i} = \cos(n, x_i)$ 为边界表面外法线的方向余弦。

由此可见，二维和三维问题的欧拉方程都是 n 维问题的欧拉方程的特例。

例 5.4.2 试求混合型泛函

$$J[u] = \iiint_V [k(x,y,z)(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + 2uf(x,y,z)]\mathrm{d}V - \iint_S u^2 h(x,y,z)\mathrm{d}s$$

的欧拉方程和自然边界条件。

解 根据式(5-4-24)，泛函的欧拉方程为

$$2f(x,y,z) - \frac{\partial 2ku_x}{\partial x} - \frac{\partial 2ku_y}{\partial y} - \frac{\partial 2ku_z}{\partial z} = 0$$

或

$$\frac{\partial 2ku_x}{\partial x} + \frac{\partial 2ku_y}{\partial y} + \frac{\partial 2ku_z}{\partial z} = f(x,y,z) \quad (\text{在 } V \text{ 内})$$

根据式(5-4-25)，可写出边界条件为

$$hu + k(u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z) = 0 \quad (\text{在 } S \text{ 上})$$

根据式(1-3-18)，有

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{k}\right) \cdot (n_x \boldsymbol{i} + n_y \boldsymbol{j} + n_z \boldsymbol{k}) = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z$$

于是，边界条件也可以写成

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0 \quad (\text{在 } S \text{ 上}) .$$

5.5 名家介绍

迈耶(Mayer, Christian Gustav Adolph, 1839.2.15—1908.4.11) 德国数学家。生于莱比锡，卒于奥地利博岑附近的格里斯(Gries bei Bozen)。先后在格丁根大学、海德堡大学和柯尼斯堡大学学习数学和物理。1861 年获博士学位。1871 年任教授，1890 年任柯尼斯堡大学教授。主要研究领域是积分理论、变分法和理论力学。发展第二变分理论，为极值场提供一个定理，把希尔伯特独立性定理扩展到拉格朗日问题，得出迈耶问题。在微分方程方面提出一阶偏微分方程组的迈耶积分法以及迈耶互反律。

波尔查(Bolza, Oskar, 1857.5.12—1942.7.5) 德国数学家。生于贝格察伯恩(Bergzabern)，卒于弗赖堡(Freiberg)，1875 年就读于柏林大学物理系，1878 年转入数学系，是魏尔斯特拉斯的学生。1886 年获格丁根大学哲学博士学位。1888 年去美国，先在约翰斯·霍普金斯和克拉克大学执教，后任芝加哥大学教授。在美期间，曾任美国数学学会副会长。1910 年回国，任弗赖堡大学名誉教授。对椭圆和超椭圆函数及积分有深入的研究，1901 年以后研究变分法，曾在美国和欧洲广泛讲授变分法，于 1913 年提出的波尔查问题是古典变分法的基本问题之一，把拉格朗日问题和迈耶问题统一

在他的理论中。还研究过一般方程、积分方程和二阶线性微分方程等。著有《变分法讲义》(1904)、《变分法讲演集》(1908) 和《线性积分方程》(1924) 等。

习 题 5

5.1 求泛函 $J[y]=\int_0^{\pi}y'^2\mathrm{d}x$ 在等周条件$\int_0^{\pi}y^2\mathrm{d}x=1$ 的极值曲线和极小值,已知 $y(0)=0$, $y(\pi)=0$。

5.2 求泛函 $J[y,z]=\int_0^1(y'^2+z'^2-4xz'-4z)\mathrm{d}x$ 在等周条件$\int_0^1(y'^2-xy'-z'^2)\mathrm{d}x=2$ 的极值曲线,边界条件为 $y(0)=z(0)=0$ 和 $y(1)=z(1)=1$。

5.3 在所围面积为 π 的光滑闭曲线 $x=x(t),y=y(t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 中,求一条过点$(-1,0)$ 的曲线,满足 $x(0)=x(2\pi)=1,y(0)=y(2\pi)=0$,且使其长度最短。

5.4 求在条件$\int_0^1y^2\mathrm{d}x=2,y(0)=y(1)=0$ 下,等周问题 $J[y]=\int_0^1(y'^2+x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

5.5 求 $r=R$ 的圆柱上点$A(R,0,0)$ 到点 $B(0,R,R)$ 的短程线。

提示:用柱面坐标 r,θ,z 来求解较为便利。

5.6 求在条件$\int_{x_0}^{x_1}y\mathrm{d}x=a$ 下,等周问题 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'^2\mathrm{d}x$ 的极值曲线,其中 a 是常数。

5.7 写出在条件$\int_{x_0}^{x_1}r(x)y^2\mathrm{d}x=1$, $y(x_0)=y(x_1)=0$ 下,泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x$ 极值的等周问题的极值曲线微分方程。其中 $p(x),q(x),r(x)\in C^1[x_0,x_1]$ 都是已知函数。

5.8 试求泛函 $J=\int_{t_0}^{t_1}u^2\mathrm{d}t$ 在固定边界条件

$$x(0)=x_0,x(t_1)=x_1,y(0)=y_0,y(t_1)=y_1$$

和约束条件

$$x'=y,\ y'=ku$$

下的极值函数 $u=u(t)$。并求出

$$x(0)=x_0,x(t_1)=y(0)=y(t_1)=0$$

$$x(0)=y(0)=0,x(1)=y(1)=1$$

两组情况下的约束条件和极值函数。

5.9 求圆柱面 $z=\sqrt{1-x^2}$ 上的短程线。

5.10 求位于曲面 $15x-7y+z-22=0$ 上的两点 $A(1,-1,0)$ 和 $B(2,1,-1)$ 之间的最短距离。

5.11 求泛函 $J[y,z]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1\sqrt{\frac{1+y'z'}{x}}\mathrm{d}x$ 取得极小值的欧拉方程,约束条件为 $y=z+1$,端点条件为 $y(0)=0,y(1)=b$。

5.12 在信息论中,研究信源的信息量问题时,不同信源变量 x 表示不同的信息。若信源变量 x 在区间$[-a,a]$ 上变化,其信息的概率分布密度为连续函数 $p(x)$,求最佳概率分布密度 $p(x)$,使信息熵

$$J[p(x)]=-\int_{-a}^{a}p(x)\ln[kp(x)]\mathrm{d}x$$

在条件

$$\int_{-a}^{a} p(x)\mathrm{d}x = 1$$

下取极大值。式中 k 为常数。

5.13　利用球坐标 (r,φ,θ)，求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上从点 $A(R,0,0)$ 到点 $B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}R,\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$ 的短程线。

5.14　求泛函 $J = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(y^2 + u^2)\mathrm{d}x$ 极值曲线，边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$，约束条件为 $y' = u - y$。

5.15　求等周问题的极值曲线，若泛函为 $J[y] = \int_0^1 y'^2\mathrm{d}x$，边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{4}$，服从等周条件 $\int_0^1 (y - y'^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$。

5.16　求泛函 $J[y] = \int_{-1}^{1}(y'^2 - k^2y^2)\mathrm{d}x$ 极小问题的解，边界条件为 $y(-1) = y(1) = 0$，附加条件为 $\int_{-1}^{1} y^2\mathrm{d}x = 1$。

5.17　设已知函数 $f(x,y) \in C(D), \sigma(\Gamma), p(\Gamma) \in C(\Gamma)$，$\Gamma$ 为 D 的边界。试写出混合型泛函

$$J[u] = \iint_D [(u_x^2 + u_y^2) + 2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Gamma [\sigma(\Gamma)u^2 + 2p(\Gamma)u]\mathrm{d}\Gamma$$

的欧拉方程和自然边界条件。

5.18　设已知函数 $p(x,y) \in C^1(D), q(x,y), f(x,y) \in C(D), \sigma(\Gamma) \in C(\Gamma)$，$\Gamma$ 为 D 的边界。试写出混合型泛函

$$J[u] = \iint_D [p(x,y)(u_x^2 + u_y^2) + q(x,y)u^2 - 2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Gamma \sigma(\Gamma)u^2\mathrm{d}\Gamma$$

的欧拉方程和自然边界条件。

第 6 章　参数形式的变分问题

前面几章所研究的泛函的极值曲线都是用显函数形式表示的，每条极值曲线与平行于 Oy 轴的直线只能有一个交点，这个限制缩小了所研究的范围，如果采用参数形式来表示曲线，就可摆脱这种限制，为多值函数的研究提供方便。本章讨论固定边界和可动边界参数形式的变分问题及实现条件。

6.1　曲线的参数形式及齐次条件

考察等周问题，设闭曲线的长度是 L，其参数方程为

$$x = x(t), y = y(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{6-1-1}$$

式中，函数 $x(t), y(t)$ 连续可微，且 $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)$。

这条曲线所围成的面积是

$$A = \frac{1}{2}\oint (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\oint (x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t \tag{6-1-2}$$

这条曲线的长度可表示为

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{6-1-3}$$

面积 A 是两个函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的泛函，它应该只与曲线形状有关，而与参数表示形式无关。一般情况下，对于这种含有两个函数的泛函，当同一条曲线用不同参数形式表示时，泛函的值也不同。例如，含有两个函数的泛函

$$J[x(t), y(t)] = \int_0^1 \dot{x}(t)\dot{y}(t)\mathrm{d}t \tag{6-1-4}$$

对于过坐标原点的直线段，如果用直角坐标方程表示，它只有一种形式，即 $y = kx (0 \leqslant x \leqslant 1)$，但用参数表示则有无穷多种形式，例如

$$x = t^n, y = kt^n \quad (0 \leqslant t \leqslant 1; n = 1, 2, \cdots) \tag{6-1-5}$$

将式(6-1-5)代入泛函(6-1-4)，得

$$J[x(t), y(t)] = \int_0^1 nt^{n-1} knt^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{kn^2}{2n-1} \tag{6-1-6}$$

泛函的值随 n 而变。由此可见，对于一般含有多个函数的泛函，其值不仅与曲线形状有关，而且与该曲线的参数选择也有关。因此，有必要讨论两个函数的泛函的被积函数 F 具有什么性质时，该泛函的值只与曲线本身的形状有关，而与该曲线的参数选择无关。这就涉及齐次函数的概念。

具有 $f(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k^n f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 性质的函数称为关于 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 的 **n 次齐次函数**或**齐次函数**。如果 k 是正数，则这样的函数称为关于 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 的**正 n 次齐次函数**。

如果 x、y 表示为 t 的函数

$$x = x(t), y = y(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{6-1-7}$$

则泛函 $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$ 可表示为

$$J[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}F(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))\mathrm{d}t \tag{6-1-8}$$

式中 $F(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))=F(x,y,y')$ 是关于 $\dot{x}(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dot{y}(t)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的一次齐次函数。

定理 6.1.1 设 F 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的 n 次齐次函数，即

$$F(kx_1,kx_2,\cdots,kx_m)=k^nF(x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{6-1-9}$$

且有一阶连续导数，则有

$$\sum_{i=1}^{m}x_iF_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=nF(x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{6-1-10}$$

证 将式(6-1-9)等号两边对 k 取偏导数，然后令 $k=1$，即可得到式(6-1-10)。证毕。

定理 6.1.1 称为**欧拉齐次函数定理**。该定理可推广到更一般的情形。

定理 6.1.2 若泛函(6-1-8)的被积函数 $F(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ 中不显含 t，且对于 $\dot{x}(t)$、$\dot{y}(t)$ 是一次齐次函数，则泛函的形式与参数的选择无关。

证 因 $F(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ 是关于 $\dot{x}(t)$、$\dot{y}(t)$ 的一次齐次函数，故有

$$F(x(t),y(t),k\dot{x}(t),k\dot{y}(t))=kF(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))\quad(k\neq 0) \tag{6-1-11}$$

引入新的参数 τ，并令 $t=\varphi(\tau)$，且 $\varphi'(\tau)\neq 0$，代入式(6-1-1)，得

$$x=x(\tau),y=y(\tau)\quad(\tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1) \tag{6-1-12}$$

且有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\dot{x}\,\dot{\varphi}(\tau)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\dot{y}\,\dot{\varphi}(\tau)\end{cases} \tag{6-1-13}$$

将式(6-1-12)和式(6-1-13)代入式(6-1-8)中，可得

$$\begin{aligned}J[x(t),y(t)]&=\int_{t_0}^{t_1}F(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))\mathrm{d}t=\\&\int_{t_0}^{t_1}F\left(x(\tau),y(\tau),\frac{\dot{x}(\tau)}{\dot{\varphi}(\tau)}\frac{\dot{y}(\tau)}{\dot{\varphi}(\tau)}\right)\dot{\varphi}(\tau)\mathrm{d}\tau=\\&\int_{t_0}^{t_1}F(x(\tau),y(\tau),\dot{x}(\tau),\dot{y}(\tau))\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{6-1-14}$$

证毕。

本定理可以推广到 n 维空间曲线的情形。

6.2 参数形式的等周问题和测地线

若泛函(6-1-8)的极值曲线为 $x=x(t),y=y(t)$，则它应满足欧拉方程

$$\begin{cases}F_x-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}=0\\[2ex]F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}}=0\end{cases} \tag{6-2-1}$$

注意，这一对方程不是相互独立的，它们可归结为一个方程。下面来证明这个事实并找出它们之间的关系。

由于 F 是 $\dot{x}(t)$、$\dot{y}(t)$ 的一次齐次函数，故对于任意一个参数 k，它都有齐次关系式

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = kF(x,y,\dot{x},\dot{y}) \tag{6-2-2}$$

根据欧拉齐次函数定理，将上式两边对 k 取偏导数，然后令 $k=1$，有

$$F = \dot{x}F_{\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{y}} \tag{6-2-3}$$

将式(6-2-3)分别对 x、y、$\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 求导，可得如下恒等式

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{x}F_{x\dot{x}} + \dot{y}F_{x\dot{y}};F_y = \dot{x}F_{y\dot{x}} + \dot{y}F_{y\dot{y}} \\ 0 &= \dot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{x}\dot{y}};0 = \dot{x}F_{\dot{y}\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{y}\dot{y}} \end{aligned} \tag{6-2-4}$$

从式(6-2-4)后两个等式可得出

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = F_1(x,y,\dot{x},\dot{y}) \tag{6-2-5}$$

式中 $F_1 = F_1(x,y,\dot{x},\dot{y})$ 是比值，它是关于 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 的负3次正齐次函数。事实上，每对 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 求导一次，齐次函数的次数就降低一次，因此 $F_{\dot{x}}$、$F_{\dot{y}}$ 是零次齐次函数，$F_{\dot{x}\dot{x}}$、$F_{\dot{x}\dot{y}}$ 和 $F_{\dot{y}\dot{y}}$ 是负1次齐次函数。又因为 F_1 是由以2次的齐次表达式除负1次的齐次函数得来，故 F_1 是负3次的正齐次函数。

式(6-2-1)可写成

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}} = \dot{x}F_{x\dot{x}} + \dot{y}F_{x\dot{y}} - \dot{x}F_{x\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{x}y} - \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} - \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{y}} = 0 \\ F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}} = \dot{x}F_{\dot{x}y} + \dot{y}F_{y\dot{y}} - \dot{x}F_{x\dot{y}} - \dot{y}F_{y\dot{y}} - \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{y}} - \ddot{y}F_{\dot{y}\dot{y}} = 0 \end{cases} \tag{6-2-6}$$

将式(6-2-6)中的 $F_{\dot{x}\dot{x}}$、$F_{\dot{x}\dot{y}}$ 及 $F_{\dot{y}\dot{y}}$ 进行代换，则有

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}} = (\dot{x}F_{x\dot{x}} + \dot{y}F_{x\dot{y}}) - (\dot{x}F_{x\dot{x}} + \dot{y}F_{y\dot{x}} + \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \ddot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}) = \\ \dot{y}[F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})F_1] = 0 \\ F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}} = (\dot{x}F_{y\dot{x}} + \dot{y}F_{y\dot{y}}) - (\dot{x}F_{x\dot{y}} + \dot{y}F_{y\dot{y}} + \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{y}} + \ddot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}) = \\ -\dot{x}[F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})F_1] = 0 \end{cases} \tag{6-2-7}$$

因 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 不能同时为零，所以方程(6-2-1)等价于下面一个方程

$$F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})F_1 = 0 \tag{6-2-8}$$

式(6-2-8)称为**欧拉方程的魏尔斯特拉斯形式**。

将 y 对 x 的导数写成参数的形式，有

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{6-2-9}$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - \dot{y}\ddot{x}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \tag{6-2-10}$$

又极值曲线的曲率半径 R 可表示为

$$-\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6-2-11}$$

将式(6-2-11)代入式(6-2-8)，则 R 可写成

$$-\frac{1}{R}=\frac{F_{\dot{x}y}-F_{x\dot{y}}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}F_1} \tag{6-2-12}$$

式(6-2-12)也称为**欧拉方程的魏尔斯特拉斯形式**。

例 6.2.1 在围成面积一定的所有封闭曲线中,试求长度为极小的曲线。

解 设 $x=x(t),y=y(t),t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 是任意一条封闭曲线方程。在格林公式中,取 $P=-y,Q=x$,即得所围区域 D 的面积为

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_\Gamma(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-\dot{x}y)\mathrm{d}t \tag{1}$$

去掉常数$\frac{1}{2}$后,不会影响所讨论问题的性质。

曲线的长度为

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t \tag{2}$$

作辅助泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\lambda(\dot{x}y-\dot{x}y)]\mathrm{d}t \tag{3}$$

因为 $F=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\lambda(x\dot{y}-\dot{x}y)$,所以

$$F_x=\lambda\dot{y},F_{x\dot{y}}=\lambda,F_y=-\lambda\dot{x},F_{\dot{x}y}=-\lambda,F_{\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}-\lambda y,$$

$$F_{\dot{x}\dot{y}}=-\frac{\dot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}},F_1=-\frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}}=\frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

将以上所求结果代入式(6-2-12),得

$$-\frac{1}{R}=\frac{\lambda-(-\lambda)}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-\frac{3}{2}}}=2\lambda\quad(\lambda<0) \tag{5}$$

这个结果说明所求的封闭曲线的曲率是常数,即长度极小的曲线是个圆。

例 6.2.2 求泛函 $J[y]=\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}y^2y'^2\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解 设极值曲线的参数方程为 $x=x(t),y=y(t)$,此时被积函数可写成 $y^2\dot{y}^2\dot{x}^{-1}$,它是关于 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的正一次齐次函数。此时,欧拉方程(6-2-1)的第一个方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y^2\dot{y}\dot{x}^{-2})=0$$

或

$$y^2\dot{y}^2=c_1^2\dot{x}^2$$

积分,得

$$y^2=2c_1x+c_2$$

由边界条件 $y(0)=0,y(x_1)=y_1$,可得 $c_2=0,c_1=\frac{y_1^2}{2x_1}$,故极值曲线为

$$y^2=\frac{y_1^2}{x_1}x$$

它是过坐标原点且对称于 x 轴的一条抛物线。

例 6.2.3 求泛函 $J[x,y]=\int_{(-1,0)}^{(1,0)}\left(k\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\dot{x}y\right)\mathrm{d}t$ 的极值曲线。

解 被积函数 $F = k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{x}\,y$，它对 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 是正一次齐次函数，将其对 $\dot{x}$ 求两次偏导数，得

$$F_{\dot{x}} = k\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - y, F_{\dot{x}\dot{x}} = k\frac{\dot{y}^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

若用欧拉方程的魏尔斯特拉斯形式，就有

$$F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{k}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, F_{x\dot{y}} = 0, F_{\dot{x}y} = -1$$

将上面结果代入曲率半径公式，得 $R = k$。

例 6.2.4 飞机以定常速率 v 沿水平方向飞行，若风速大小及方向都恒定且为 v_w，$v_w < v$，试问飞机应绕什么样的闭曲线飞行，才能使它在给定的时间 T 内绕过最大的面积？

解 取 Ox 轴与风向一致，用 α 表示飞机的速度方向与 Ox 轴正向间的夹角。设飞机的运动方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \end{cases} \tag{1}$$

由于飞机以定常速率飞行，所以它在 x、y 方向的速度为

$$\dot{x}(t) = v\cos\alpha + v_w, \dot{y}(t) = v\sin\alpha \tag{2}$$

式中，飞机速度与 x 轴方向的夹角 $\alpha = \alpha(t)$ 是变化的。飞机飞行时间 T 后形成封闭曲线 Γ，而这条封闭曲线所围成的面积为

$$J = \frac{1}{2}\oint(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\oint(x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t \tag{3}$$

于是，问题化为在约束条件(2) 下，求式(3) 的极大值。

作辅助泛函

$$J^* = \frac{1}{2}\oint F^*\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\oint[(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda_1(t)(\dot{x} - v\cos\alpha - v_w) + \lambda_2(t)(\dot{y} - v\sin\alpha)]\mathrm{d}t \tag{4}$$

其欧拉方程组为

$$F_x^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}^* = 0, \text{或 } \dot{y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-y + \lambda_1) = 0, \text{即}$$

$$2\dot{y} - \dot{\lambda}_1 = 0 \tag{5}$$

$$F_y^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}}^* = 0, \text{或 } -\dot{x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x + \lambda_2) = 0, \text{即}$$

$$2\dot{x} + \dot{\lambda}_2 = 0 \tag{6}$$

$$F_\alpha^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{\alpha}}^* = 0, \text{或 } \lambda_1\sin\alpha - \lambda_2\cos\alpha = 0, \text{即}$$

$$\tan\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{7}$$

对式(5) 和式(6) 积分，得

$$2x + \lambda_2 = c_2, 2y - \lambda_1 = c_1 \tag{8}$$

平移坐标原点，使上两式中的 c_1、c_2 为零，这样做并不改变曲线的形状，于是

$$x = -\frac{\lambda_2}{2}, y = \frac{\lambda_1}{2} \tag{9}$$

将直角坐标转换成极坐标(r,θ)，由于$r^2=x^2+y^2$，$\tan\theta=\frac{y}{x}$，故有$\tan\theta=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$，$\tan\alpha\tan\theta=-1$。从而可知飞机飞行方向与矢径方向垂直，故有$\tan\alpha=-\cot\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$，即$\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$。代入式(2)中，得

$$\dot{x}(t)=v_w-v\sin\theta,\dot{y}(t)=v\cos\theta \tag{10}$$

将式(10)的前一式乘以x，后一式乘以y，然后两式相加，注意到$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，得

$$x\dot{x}+y\dot{y}=r\cos\theta(v_w-v\sin\theta)+r\sin\theta v\cos\theta=v_w r\cos\theta \tag{11}$$

又

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r=x\dot{x}+y\dot{y}=v_w r\cos\theta \tag{12}$$

将式(10)代入式(12)，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{v_w}{v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

积分，得$r=\frac{v_w}{v}y+c$，将$y=r\sin\theta$代入式(13)，得

$$r=\frac{c}{1-\frac{v_w}{v}\sin\theta} \tag{14}$$

这是焦点在原点的圆锥曲线方程，$\frac{v_w}{v}$为离心率。因为飞机的速度v大于风速v_w，即$\frac{v_w}{v}<1$，故式(14)是离心率为$\frac{v_w}{v}$，长轴在Oy轴上的椭圆，见图6-2-1。于是飞机最大飞行面积是椭圆，它的长轴垂直于风向，离心率等于风速与飞机速度之比，并且飞行方向垂直于椭圆的焦半径。

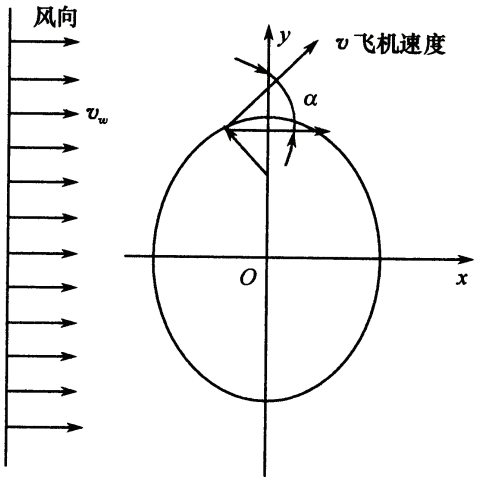


图6-2-1　飞机飞行图

由式(3-6-4)和式(3-6-6)可知，使泛函J取极小值的必要条件是二次变分不负，也就是二次形式

$$A=F_{\dot{x}\dot{x}}(\delta\dot{x})^2+2F_{\dot{x}\dot{y}}\delta\dot{x}\,\delta\dot{y}+F_{\dot{y}\dot{y}}(\delta\dot{y})^2\geqslant 0 \tag{6-2-13}$$

成立。由式(6-2-5)得

$$A=F_1(\dot{y}\,\delta\dot{x}-\dot{x}\,\delta\dot{y})^2\geqslant 0 \tag{6-2-14}$$

此时由条件$A\geqslant 0$化为条件$F_1\geqslant 0$。从而得到下面定理：

定理6.2.1　泛函取得极小值的必要条件是$F_1\geqslant 0$。

设曲面$\sum$由向量方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v) \tag{6-2-15}$$

给出，其中向量函数$\boldsymbol{r}(u,v)$有连续的偏导函数$\boldsymbol{r}_u$与$\boldsymbol{r}_v$，且$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$。再设$\Gamma$为$\sum$上的一条曲线，它表示为

$$u=u(t),v=v(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_1) \tag{6-2-16}$$

对于向量方程(6-2-15)，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v \tag{6-2-17}$$

若用s表示Γ的弧长，则有

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2=(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}_u^2(\mathrm{d}u)^2+2\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\boldsymbol{r}_v^2(\mathrm{d}v)^2 \tag{6-2-18}$$

令

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v, G = \boldsymbol{r}_v^2 \tag{6-2-19}$$

则式(6-2-18)可写成

$$\varphi_1 = (\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2 = E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2 \tag{6-2-20}$$

式(6-2-20)称为曲面$\sum$的**第一基本齐式**或**第一基本微分形式**。由式(6-2-19)可知,第一基本齐式中的系数E、F和G是u和v的函数,这三个系数称为曲面$\sum$的**第一类基本量**或**度量张量**。于是,Γ的弧长为

$$J[u,v] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2}\mathrm{d}t \tag{6-2-21}$$

泛函(6-2-21)的欧拉方程组有下列形式

$$\begin{cases} \dfrac{E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\,\dot{v} + G_u\dot{v}^2}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2}} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{2(E\dot{u} + F\dot{v})}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2}} = 0 \\ \dfrac{E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\,\dot{v} + G_v\dot{v}^2}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2}} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{2(E\dot{u} + G\dot{v})}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2}} = 0 \end{cases} \tag{6-2-22}$$

例 6.2.5 在半径为R的球面上求连接已知两点的短程线(测地线)。

解 取r,θ,φ为球面坐标,其中φ为矢径$\boldsymbol{r}$与z轴的夹角。设$\theta = \theta(\varphi)$为所求曲线的方程,则有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = x(\theta,\varphi)\boldsymbol{i} + y(\theta,\varphi)\boldsymbol{j} + z(\theta,\varphi)\boldsymbol{k} = R\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\varphi\boldsymbol{k} \tag{1}$$

$$r_0 = R(-\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = R(\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{j} - \sin\varphi\boldsymbol{k}) \tag{3}$$

$$E = \boldsymbol{r}_\theta \cdot \boldsymbol{r}_\theta = \boldsymbol{r}_\theta^2 = R^2\sin^2\varphi, F = \boldsymbol{r}_\theta \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = 0, G = \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = \boldsymbol{r}_\varphi^2 = R^2 \tag{4}$$

由式(6-2-22),有

$$J[\theta(\varphi)] = R\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\sin^2\varphi(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2} = R\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1 + \theta'^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{5}$$

因泛函不显含$\theta(\varphi)$,故其欧拉方程的首次积分为

$$\frac{\theta'\sin^2\varphi}{\sqrt{1 + \theta'^2\sin^2\varphi}} = c \tag{6}$$

由式(6)可得

$$\mathrm{d}\theta = \frac{c\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - c^2}} = \frac{c\mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1 - \dfrac{c^2}{\sin^2\varphi}}} = \frac{c\mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{(1-c^2) - c^2\cot^2\varphi}} = \frac{-c\mathrm{d}\cot\varphi}{\sqrt{(1-c^2) - c^2\cot^2\varphi}} \tag{7}$$

积分,得

$$\theta = \arccos\frac{c\cot\varphi}{\sqrt{1-c^2}} + c_2 = \arccos(c_1\cot\varphi) + c_2 \tag{8}$$

式中,$c_1 = \dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}}$。于是可得

$$c_1\cot\varphi = \cos(\theta - c_2) = \cos\theta\cos c_2 + \sin\theta\sin c_2 \tag{9}$$

或

$$\cos\varphi = A\cos\theta\sin\varphi + B\sin\theta\sin\varphi \tag{10}$$

式中

$$A = \frac{\cos c_2}{c_1}, B = \frac{\sin c_2}{c_1} \tag{11}$$

将式(10)两端乘以 R 并转换为直角坐标,有

$$z = Ax + By \tag{12}$$

这是通过球心并沿着大圆与球面相交的平面方程,因而最短曲线(测地线)是球面上大圆的劣弧。

6.3 可动边界参数形式泛函的极值

定理 6.3.1 设给定可取曲线类 C,它们有连续旋转的切线,其端点分别在由方程 $\varphi(x,y)=0$ 和 $\psi(x,y)=0$ 所确定的曲线 C_1 和 C_2 上,且可取曲线类 C 可用参数方程 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 表示。若泛函

$$J[x(t),y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))\mathrm{d}t \tag{6-3-1}$$

在所给定的可取曲线类 C 上取得极值,则泛函满足欧拉方程组

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}} = 0, F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}} = 0 \tag{6-3-2}$$

且在曲线 C 的端点处满足下面关系

$$\frac{F_{\dot{x}}}{\varphi_x} = \frac{F_{\dot{y}}}{\varphi_y} \quad (\text{在位于曲线 } C_1 \text{ 上的端点处}) \tag{6-3-3}$$

$$\frac{F_{\dot{x}}}{\psi_x} = \frac{F_{\dot{y}}}{\psi_y} \quad (\text{在位于曲线 } C_2 \text{ 上的端点处}) \tag{6-3-4}$$

式(6-3-3)和式(6-3-4)称为**横截(性)条件**、**贯截条件**或**斜截条件**。

如果曲线 C_1 和 C_2 中有一条或两条化为一点即端点固定,则对应的条件(6-3-3)和式(6-3-4)就变成了使 C 通过该点的条件。

证 把泛函(6-3-1)看成空间 (t,x,y) 中的曲线 $x=x(t)$、$y=y(t)$ 的函数。

设曲线 $C: x=x(t)$、$y=y(t)$ 是 xOy 平面上任一可取曲线,它与曲线 C_1 和 C_2 相联接。以 Q、Φ 和 Ψ 表示空间 (t,x,y) 中的三个柱面,它们分别以 xOy 平面的 C、C_1 和 C_2 为准线,其母线平行于 Ot 轴。

用 $\overline{C}$ 表示空间 (t,x,y) 中由方程 $x=x(t)$、$y=y(t)$ 所确定的曲线。显然曲线 $\overline{C}$ 属于曲线 C,并且其端点在曲面 Φ 与 Ψ 上。$\overline{C}$ 在 xOy 平面的投影是曲线 C。

平面曲线 C 的所有参数表达式将对应于空间 (t,x,y) 中所有曲线 $\overline{C}$,它们均在柱面 Q 上,并且与 Φ 和 Ψ 上的点联接。由于泛函 $J[C]$ 只依赖于曲线 C 的形状,而不依赖于它的参数表示法,所以空间曲线的泛函

$$J_s[\overline{C}] = \int_{\overline{C}} F(x,y,\dot{x},\dot{y})\mathrm{d}t \tag{6-3-5}$$

也只依赖于柱面 Q 的形状。于是可知,如果曲线 C 使泛函 $J[C]$ 取得极值,则 $J_s[\overline{C}]$ 也取得极值。根据空间曲线泛函极值的基本理论(见 4.2 节),沿着极值曲线有欧拉方程组

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}} = 0, F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}} = 0 \tag{6-3-6}$$

并且在端点有横截条件

$$(F - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}})\big|_{t=t_0}\delta t_0 + F_{\dot{x}}\big|_{t=t_0}\delta x_0 + F_{\dot{y}}\big|_{t=t_0}\delta y_0 = 0 \tag{6-3-7}$$

$$(F - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}})\big|_{t=t_1}\delta t_1 + F_{\dot{x}}\big|_{t=t_1}\delta x_1 + F_{\dot{y}}\big|_{t=t_1}\delta y_1 = 0 \tag{6-3-8}$$

式(6-3-7)和式(6-3-8)可写成统一的形式

$$(F - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}})\delta t + F_{\dot{x}}\delta x + F_{\dot{y}}\delta y = 0 \tag{6-3-9}$$

式中,δt、δx 和 δy 是端点在曲线 $\overline{C}$ 上作可能的移动时,端点坐标的改变量。

根据齐次条件式(6-2-2)可知

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} - \dot{y}F_{\dot{y}} = 0 \tag{6-3-10}$$

于是式(6-3-9)可变为

$$F_{\dot{x}}\delta x + F_{\dot{y}}\delta y = 0 \tag{6-3-11}$$

在曲线 C_1 上的端点有 $\varphi(x,y) = 0$,对其取变分,有

$$\varphi_x\delta x + \varphi_y\delta y = 0 \tag{6-3-12}$$

由式(6-3-12)解出 δx 或 δy,将其代入(6-3-11),注意到 δx 或 δy 是任取的,故可解得

$$\frac{F_{\dot{x}}}{\varphi_x} = \frac{F_{\dot{y}}}{\varphi_y} \tag{6-3-13}$$

式(6-3-13)即式(6-3-3)。

同理,对于在曲线 C_2 上的端点 $\Psi(x,y) = 0$,对其取变分,有

$$\Psi_x\delta x + \Psi_y\delta y = 0 \tag{6-3-14}$$

从而可解得

$$\frac{F_{\dot{x}}}{\Psi_x} = \frac{F_{\dot{y}}}{\Psi_y} \tag{6-3-15}$$

式(6-3-15)即式(6-3-4)。证毕。

推论 设给定可取曲线类 C,它们有连续旋转的切线,其端点分别在由方程 $\varphi_i(x,y_i) =$ 和 $\psi_i(x,y_i) = 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 所确定的曲线 C_1 和 C_2 上,且可取曲线类 C 可用参数方程 $x = x(t)$,$y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t),\cdots, y_n = y_n(t)$ 表示。若泛函

$$J(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) = \int_{t_0}^{t_1} F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,\dot{x},\dot{y}_1,\dot{y}_2,\cdots,\dot{y}_n)\mathrm{d}t \tag{6-3-16}$$

在所给定的可取曲线类 C 上取得极值,$F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,\dot{x},\dot{y}_1,\dot{y}_2,\cdots,\dot{y}_n)$ 是 $\dot{x},\dot{y}_1,\dot{y}_2,\cdots,\dot{y}_n$ 的齐次函数,则泛函满足欧拉方程组

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}} = 0 \quad F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6-3-17}$$

且在曲线 C 的端点处满足下面关系

$$F_{\dot{x}} = \sum_{i=1}^{n} F_{\dot{y}_i}\frac{\varphi_{ix}}{\varphi_{iy_i}} \quad (\text{在位于曲线 } C_1 \text{ 上的端点处}) \tag{6-3-18}$$

$$F_{\dot{x}} = \sum_{i=1}^{n} F_{\dot{y}_i}\frac{\psi_{ix}}{\psi_{iy_i}} \quad (\text{在位于曲线 } C_2 \text{ 上的端点处}) \tag{6-3-19}$$

式(6-3-18)和式(6-3-19)称为**横截(性)条件、贯截条件或斜截条件**。

如果曲线 C_1 和 C_2 中有一条或两条化为一点即端点固定,则对应的条件(6-3-18)、(6-3-19)就变成了使 C 通过该点的条件。

例 6.3.1 试求泛函 $J=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y)-R\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right]\mathrm{d}t$ 的横截条件。

解 $F=\frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y)-R\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$，分别对 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 求偏导数，得

$$F_{\dot{x}}=-\frac{1}{2}y-R\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \tag{1}$$

$$F_{\dot{y}}=\frac{1}{2}x-R\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \tag{2}$$

设可动边界的方程为 $\varphi(x,y)=0$，则横截条件为

$$F_{\dot{x}}\varphi_y-F_{\dot{y}}\varphi_x=\frac{1}{2}y\varphi_y-R\frac{\dot{x}\varphi_y}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}-\frac{1}{2}x\varphi_x+R\frac{\dot{y}\varphi_x}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=$$

$$-\frac{1}{2}(x\varphi_x+y\varphi_y)+R\frac{\dot{y}\varphi_x-\dot{x}\varphi_y}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=0 \tag{3}$$

若使式(3)在任何情况下都成立，应有

$$x\varphi_x+y\varphi_y=0 \tag{4}$$

$$\dot{y}\varphi_x-\dot{x}\varphi_y=0 \tag{5}$$

由式(5)解出 φ_x 并代入式(4)，得

$$\left(y+x\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)\varphi_y=0 \tag{6}$$

但 φ_y 是任取的，故横截条件为

$$x\dot{x}+y\dot{y}=0 \tag{7}$$

因 $\varphi(x,y)=0$ 是任取的，故上式对任意一个可动边界都成立。

习 题 6

6.1 验证下列泛函的值是否与容许曲线的参数形式无关。

(1) $J[x,y,z]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}t$；(2) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}=\sqrt{x\dot{x}\,\dot{y}^2}\mathrm{d}t$

(3) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}(x^2\dot{x}+3xy\dot{y}^2)\mathrm{d}t$；(4) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}+y\dot{x}^2)\mathrm{d}t$；

(5) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}+y\dot{x})^2\mathrm{d}t$；(6) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x\dot{y}^2+y\dot{x}^2}\mathrm{d}t$。

6.2 试证：封闭曲线 Γ 所围成的平面图形面积

$$A=\frac{1}{2}\oint x(\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$$

与曲线 Γ 的参数表示形式无关。

6.3 求泛函 $J[x,y]=\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}\frac{\dot{y}^2-y^2\dot{x}^2}{\dot{x}}\mathrm{d}t$ 的极值曲线。

6.4. 求泛函 $J[x,y]=\int_{(0,0)}^{(1,2)}\frac{\dot{y}^2-3\mathrm{e}^{\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}\dot{x}^2}{\dot{x}}\mathrm{d}t$ 的极值曲线。

6.5 求泛函 $J[x,y]=\int_{(0,1)}^{(1,0)}(x\dot{y}-y\dot{x}-2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2})\mathrm{d}t$ 的极值曲线。

6.6　求泛函 $J[x,y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\dot{x}\,\dot{y}+2x^2+2y^2)\mathrm{d}t$ 的极值曲线，边界条件为 $x(0)=y(0)=0$，$x(1)=y(1)=1$。

6.7　设一质点在 $t_0=0$ 到 $t_1=T_1$ 时间内无摩擦地沿着曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 从 p_0 点运动到 p_1 点，若这运动能使动能的平均值最小，求证下列等式成立。

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_x}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_y}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_z}$$

6.8　一质点沿着球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 从点 $(0,0,R)$ 滑动到点 $(0,0,-R)$，若运动能使动能的平均值最小，求质点的运动路径。

6.9　求泛函 $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{x-k}}\mathrm{d}t$ 的极值曲线，其中 k 为常数。

6.10　设一光滑曲面 $\varphi(x,y,z)=0$，$A(x_0,y_0,z_0)$、$B(x_1,y_1,z_1)$ 是该曲面上两定点。试证：曲面上连接这两定点的短程线 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 满足下面等式

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_x}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_y}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_z}=\lambda(t)$$

式中 $s=s(t)$ 是弧长，$\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}t$。

第7章　变分原理

前面各章所讨论的是如何把求泛函的极值问题转化为欧拉方程或奥氏方程的求解问题，在大多数情况下，它们分别对应着常微分方程和偏微分方程的边值问题。但在许多情况下，求解微分方程的边值问题也很困难。把变分问题都归结为微分方程的边值问题有时反而将问题复杂化了。现在考虑相反的问题，如果已经知道一个微分方程的边值问题，那么能否把它转化为某个泛函的极值问题并用近似方法来求解？这就是所谓微分方程变分问题的变分解法，这是一个非常重要而又相当困难的问题。对此，美国数学家弗里德里希斯曾给出证明：对于一个正定算子方程，一定有一个与之等价的泛函极小值问题。换句话说，如果能找到泛函极小值问题的解，也就能找到相应的算子方程的解。把微分方程边值问题转化为与之等价的泛函，即使泛函的欧拉方程就是所给的微分方程，这样的问题称为**变分问题的反问题**，这样的泛函在物理上常常表示能量，称为原微分方程的**能量积分**。把微分方程边值问题转化为等价的泛函极值问题的求解方法和理论称为**变分原理**或**变分方法**。在第2章中也给出了变分原理的定义，综合这两种定义，把微分方程边值问题转化为与之等价的泛函极值问题方法和理论与求泛函极值的问题即变分问题都称为**变分原理**。关于变分原理有许多表述。简单地说，以变分形式表述的某个科学定律称为**变分原理**，或者说把某个科学定律归结为某个泛函的变分问题称为**变分原理**。历史上，变分原理在产生时曾带有宗教和形而上学的色彩。变分原理的最根本特点是它与坐标系的选择无关。变分原理的本质是泛函的一阶变分为零，或者说泛函的一阶变分为零是最根本的变分原理。由于变分原理数学形式严谨、简洁、优美，物理内容普遍、深刻、丰富，可以给一般理论建立基础，因此变分原理被认为是各科学定律的最高形式。变分原理更有助于人们发现新事物，开拓新领域。有时变分原理也含有变分法的意思，如钱伟长的名著《变分法及有限元》其英文译名为《Variational principles and finite elements》。像第5章那样，如果引入拉格朗日乘数，把条件极值的变分问题转化为无条件极值的变分问题，则由此得出的相应的变分原理称为**广义变分原理**。把解除了全部约束条件的变分原理称为**完全的广义变分原理**，简称**广义变分原理**或**修正变分原理**。而把解除了部分约束条件的变分原理称为**不完全的广义变分原理**。由于二阶微分方程边值问题所对应的变分问题，通常其泛函中的被积函数关于未知函数及其导数都是二次的，即二次泛函的极值问题，这样的泛函在物理上通常表示能量，所以习惯上把二阶微分方程边值问题转化为二次泛函极值问题的求解方法称为**能量方法**或**能量法**，相应的二次泛函称为该微分方程的**能量积分**。

本章讨论如何把微分方程转化为与之等价的泛函，也就是变分原理。当然，这要涉及实变函数与泛函分析的一些概念，本章先予以介绍。

7.1　集合与映射

一定范围内具有某些性质或满足一定条件的对象组成的全体称为**集合**，简称**集**。集合中的每个对象称为**元素**。一个集合中的各个元素应该互不相同。通常用大写字母表示集合，用小写字母表示集合的元素。以集合为元素的集合称为**集族**或**集类**。不含任何元素的集合称为**空集**，记作 ϕ。

由点组成的集合称为**点集**。由数组成的集合称为**数集**。余类推。因为数轴上的点与全体实数构成一一对应，故数与点就不加区分，数集与点集也不加区分。由全体实数组成的集合称为**数直线**或**实直线**，常用 R 表示。由自然数组成的集合称为**自然数集**，常记作 N。

空集或只含有限个元素的集合称为**有限集**。含无限个元素的集合称为**无限集**或**无穷集**。只含一个元素的集合称为**单元素集**。如果有限集中 A 中元素的个数为 n，则 n 称为 A 的**计数**。规定空集 ϕ 的计数为零。

任何元素与给定的集合之间的关系有两种情况，即属于和不属于，两者必居其一。若 X 是一个集合，当元素 x 属于 X 时，记作 $x \in X$，当 x 不属于 X 时，记作 $x \notin X$。

集合的表示方法通常有两种，一种是列举法，一种是特性描述法。列举法适合于有限集或元素可按一定次序排列的无限集，其表示方法是在花括号内把集合的元素列举出来，如

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}; N = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

特性描述法是将集合中的元素所具有的性质或应满足的条件用命题的形式表示出来，即

$$\text{集合} = \{\text{元素} \mid \text{元素所具有的性质或应满足的条件}\}$$

例如

$$R^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid -\infty < x_i < \infty, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$X = \{x, y \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16\}$$

设 X 是一数集，M(或 m) 是一个数，若对任何 $x \in X$ 都有 $x \leqslant M$ 或 $x \geqslant m$，则 M 称为 X 的一个**上界**或**下界**。显然，若 X 有上界或下界，则它必定有无穷多个上界或下界，这是因为所有大于 M 的数都可成为 X 的上界，所有小于 m 的数都可成为 X 的下界。数集 X 的最小上界称为 X 的**上确界**，记作 $\sup X$。数集 X 的最大下界称为 X 的**下确界**，记作 $\inf X$。上确界和下确界都是唯一的。

设 A、B 是两个集合，如果 A 中的所有元素都属于 B，那么 A 称为 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$。如果 A 中的所有元素都属于 B，且 B 中的所有元素也都属于 A，即 A 与 B 含有相同的元素，**则称** A 与 B **相等**，记作 $A = B$。显然，$A = B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，即两个相等集合互为子集。如果 $A \subseteq B$，而 $A \neq B$，这表明 A 中的元素都属于 B，但 B 中有些元素不属于 A，那么 A 称为 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。对于任意集合 A，规定 $\phi \subset A$。

设 X 是函数集合，α、β 为任意实常数，若对于 X 中的任意两个函数 u、v，函数 $\alpha u + \beta v$ 也属于 X，则 X 称为**线性集合**。

两个集合 A、B 通过某种运算，可以得到另一个新的集合。

设 A、B 是两个非空集合，由 A 的所有元素和 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**，简称**并**，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \mid x \in B\}$$

由既属于集合 A 又属于集合 B 的共有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，简称**交**，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \mid \text{且 } x \mid x \in B\}$$

如果集合 A 与 B 没有共有元素，即 $A \cap B = \phi$，则 A 与 B 称为**互不相交**，简称**不相交**。

由所有属于集合 A 但不属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，简称**差**，记作 $A - B$ 或 $A \setminus B$，即

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

在研究某个具体问题时，如果所考虑的集合都是某一集合 X 的子集，则 X 称为**全集**或**基本集**。

如果 A 是 X 的子集，则 $X-A$ 称为 A 关于 X 的**余集**或**补集**，记作 A^C。以集合 X 的所有子集为元素构成的集合称为 X 的**幂集**。

任意两个元素 x 和 y 组成一个有序的元素对，称为 x 和 y 的**序对**，记作 (x,y)。元素 x 和 y 称为序对 (x,y) 的**分量**。有序是指当 $x \neq y$ 时，$(x,y) \neq (y,x)$，若 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$，则有 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$。由序对 (x,y) 定义的点的集合称为**相空间**。

设 X 和 Y 是两个集合，由 X 的元素 x 和 Y 的元素 y 组成的所有序对构成的集合称为 X 与 Y 的**笛卡儿积**、**直积**或**积集**，记作 $X \times Y$，即

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

其中 x 和 y 分别称为序对 (x,y) 在 X 和 Y 上的**投影**。当 X 和 Y 中有一个为空集时，规定 $X \times Y = \phi$。常用 X^n 表示 n 个 X 的乘积。

一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 是 n 个集合，则它们的笛卡儿积定义为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1,2,\cdots,n\}$$

其中每个 $X_i (i=1,2,\cdots,n)$ 称为笛卡儿积的**坐标集**。

例如两个实直线 R 的笛卡儿积就是实平面 R^2，R^n 就是 n 个实直线 R 的笛卡儿积。

实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的有序 n 元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合称为**笛卡儿空间**，记作 R^n。

设 X 和 Y 是两个非空集合，如果按照一定的法则 f，使得对于集合 X 中的每个元素 x，在集合 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则 f 称为给出了一个从 X 到 Y 的**映射**或**映照**，记作 $f: X \to Y$ 或 $f: X \to y (x \in X)$。映射有时也称为**算子**、**变换**或**函数**。其中，y 称为 x 在映射 f 下的**象**，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，有时也写成 $y=fx$ 或 $f: x \mapsto y$；其含意是 f 把 x 映射成 y。x 称为 y 在映射 f 下的**原象**。集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f 或 $D(f)$，即 $D_f = D(f) = X$。集合 X 中所有元素的象所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记作 R_f、$R(f)$ 或 $f(X)$，即 $R_f = R(f) = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$。注意，虽然对于 X 中的每一元素 x，都有 Y 中的元素 y 与之对应，即 x 的象 y 是唯一的，但 X 中的元素与 Y 中的元素并不一定一一对应，即 y 的原象 x 并不一定是唯一的。一般情况下，映射 f 的值域 $f(X)$ 只是 Y 的一个子集，即 $R(f) \subset Y$，而未必是整个 Y。

设 $f: X \to Y$，且 $f(X)=Y$，即 Y 中的每个元素都是 X 中某元素的象，或者说 X 中元素的象充满了整个 Y，则 f 称为从 X 到 Y 的**满射**。

设 $f: X \to Y$，如果对任意 $x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，即对于每个 $y \in f(X)$，X 中只有一个元素 x 与之对应，则 f 称为从 X 到 Y 的**单射**。单射也称为**可逆映射**或**一对一的映射**。

如果 $f: X \to Y$ 既是满射又是单射，则 f 称为**双射**，也称为 X 与 Y 的**一一对应映射**或**一一映射**。

设 $f: X \to Y$ 是单射，$x \in X$，若对于任意 $y \in f(X)$，存在唯一的 x 与 y 相对应，则由 $f(X)$ 到 X 的映射称为 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}。此时，$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$，$f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$。$f^{-1}(y)$ 即 x 称为 y 在映射 f 下的**逆象**。逆映射是反函数概念的拓广。

设有两个映射 $f: X \to Y_1$，$g: Y_2 \to Z$，其中 $Y_1 \subset Y_2$，若对于每个 $x \in X$，存在 $h(x) = g[f(x)]$，它确定了一个从 X 到 Z 的映射 $h: X \to Z$，则 h 称为 f 与 g 构成的**复合映射**，记作 $g \circ f$，即 $h = g \circ f$、$g \circ f: X \to Z$ 或 $g \circ f(x) = g[f(x)]$，$x \in X$。复合映射是复合函数概念的推广。映射 f 和 g 构成复合映射的条件是 f 的值域必须包含在 g 的定义域内。

设 X 为非空集合，若对于每个 $x \in X$，有映射 $I(x)=x$，则 $I: X \to X$ 称为 X 上的**恒等映射**。显然，恒等映射是双射。

设有两个集合 X 和 Y，如果对于每一个预先给定的任意小的正数 ε，都存在一个正数 δ，使得对

于 X 中适合于不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，所对应的映射 f 都满足不等式 $|y-y_0|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 f 为 X 上的**连续映射**。

如果两个集合 X 和 Y 之间存在一个双射 f，则这两个集合称为**对等**、**等价**或**等势**，记作 $X\sim Y$ 或 $X\overset{f}{\sim}Y$。等势就是两个集合中各元素的数目相等。如果一个集合与自然数集等势，则这个集合称为**可列集**或**可数集**。自然数集本身就是可列集。等价关系有以下三个性质。

(1) 自反性：$X\sim X$。

(2) 对称性：若 $X\sim Y$，则 $Y\sim X$。

(3) 传递性：若 $X\sim Y$，$Y\sim Z$，则 $X\sim Z$。

设 P 是某些复数组成的集合，其中包括 0 和 1，如果 P 中任意两个数进行加法、减法、乘法和除法(除数不为零)运算，其结果仍是 P 中的数，则 P 称为一个**数域**。

7.2 集合与空间

在初等数学中，距离原本指两点间线段的长度，空间原本表示立体的广度，它们都是几何概念，在近代数学中这两个概念也非常有用，它们具有更广泛的意义。

如果给某个集合引入某些不同的确定的关系，则称为赋予该集合以某**空间结构**，并且把赋予不同空间结构的集合称为不同的**空间**。由数集构成的空间称为**数空间**。由函数集合构成的空间称为**函数空间**。集合中的元素称为**点**。如果在某集合中可进行加法和数乘两种代数运算，则该集合称为**线性空间结构**。赋予线性空间结构的集合称为**线性空间**。如果定义一个集合中两个元素距离的概念，则称为赋予集合**距离结构**。

设 X 是非空集合，ρ 是定义在 $X\times X$ 上的实值函数，如果对于 X 中的任意两个元素 x 和 y，按照一定法则都有某一实数 $\rho(x,y)$ 与之对应，且 $\rho(x,y)$ 满足下面三条“**距离公理**”：① **正定性**及**恒等性**：$\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；② **对称性**：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；③ **三角不等式**：$\rho(x,y)+\rho(x,z)\geqslant\rho(y,z)$ 对于 X 中的任意三个元素 x、y 和 z 都成立；则 $\rho(x,y)$ 称为 X 上 x 与 y 之间的**度量**或**距离**，而 X 称为以 $\rho(x,y)$ 为距离的**度量空间**，或称为**距离空间**，记作 (X,ρ)。在度量 ρ 不致于产生混淆的情况下，度量空间 (X,ρ) 可简记作 X。度量空间 X 中的元素 $x,y,\cdots$ 称为 X 中的点。由此可见，所谓度量空间，就是在集合 X 中引入了距离。在一个集合中，距离的定义方式并不是唯一的。如果对同一个集合 X 引入的距离不同，那么所构成的度量空间也不同。在集合 X 引入距离后，就称为在 X 中引入了**拓扑结构**。具有拓扑结构的集合称为**拓扑空间**。有了拓扑结构，就可以在集合中比较元素的远近，进行极限运算。

在上述定义中，三角不等式的几何意义很明显，它表示在任何一个三角形中两边之和大于第三边这样一个事实。

如果对于度量空间 (X,ρ) 中非空子集 S，仍以 X 中的距离 ρ 作为 S 中的距离，则 S 也是度量空间，并且 S 称为 X 的**度量子空间**或**距离子空间**，简称**子空间**。显然，$(S,\rho)\subset(X,\rho)$。

设 A、B 是度量空间 (X,ρ) 中的两个集合，若对任意 $x\in A$，总存在数列 $\{y_n\}\in B$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\to x$，则 B 称为在 A 中的**稠密集**，简称在 A 中**稠密**。若 $A=X$，则 B 称为在 X 中的**稠密集**，简称在 X 中**稠密**。

设 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是度量空间 (X,ρ) 中的数列，若存在 $x\in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)\to 0$，则 $\{x_n\}$ 称为**收敛数列**，x 称为 $\{x_n\}$ 的**极限**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。注意，数列 $\{x_n\}$ 在度量空间 (X,ρ) 中收敛意味着 $\{x_n\}$ 的极限 x 不仅存在，而且 $x\in X$。

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的数列，如果对任意 $\varepsilon>0$，总存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，当 m、$n\geqslant$

N 时，恒有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 或 $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ 成立，则 $\{x_n\}$ 称为 (X, ρ) 中的**柯西序列**或**柯西数列**。有时 $\{x_n\}$ 也称为 (X, ρ) 中的**基本序列**或**基本数列**。

关于收敛数列和柯西数列的关系以及柯西数列的性质，有如下定理：

定理 7.2.1 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X, ρ) 中的数列，(1) 若 $\{x_n\}$ 是收敛数列，则 $\{x_n\}$ 是柯西数列；但逆命题不成立；(2) 若柯西数列 $\{x_n\}$ 有一个子数列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x，则数列 $\{x_n\}$ 也收敛于 x。

证 (1) 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得 $m、n \geqslant N$ 时，恒有 $\rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ 成立，于是根据三角不等式，有

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此，$\{x_n\}$ 是柯西数列。

现举例说明反命题不成立。设 (X, ρ) 为开区间 $(0,1)$，任意两点 x 和 y 的距离定义为 $\rho(x, y) = |x - y|$。考察 X 中的数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，当 $m, n \to \infty$ 时，根据不等式的性质，有

$$\rho\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \to 0$$

故 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是 (X, ρ) 中的柯西数列。但是，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (X, \rho)$，这说明数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 在 (X, ρ) 中没有极限，即 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 在 (X, ρ) 中不收敛。

(2) 设 $\{x_n\}$ 是 (X, ρ) 中的柯西数列，它有一个子数列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \to x \in (X, \rho)$。对任意 $\varepsilon > 0$，由于 $x_{n_k} \to x$，则存在正整数 N_1，使得对一切 $n_k > N_1$，有 $\rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$；又由于 $\{x_n\}$ 是柯西数列，则存在正整数 N_2，使得对一切 $m, n > N_2$，有 $\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$。令 $N = \max(N_1, N_2)$，则对一切 $n > N$ 及任取一个 $n_k > N$，有

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x$。证毕。

如果度量空间 (X, ρ) 中的每个柯西数列都收敛于 (X, ρ) 中的某一元素，则 (X, ρ) 称为**完全(备)度量空间**或**完全(备)距离空间**，简称**完全(备)空间**或**完全(备)**的。由此可见，完全度量空间是指，在度量空间中，柯西数列与收敛数列等价。

如果由 n 个实数构成有序坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体是集合 X，且 X 中任意两点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 间的距离可表示为

$$\rho(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

那么 X 称为 n **维空间**，记作 R^n。R^n 中的每个有序坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为一个 n **维点**。这样定义的距离常称为 n **维欧几里得距离**或 n **维欧氏距离**。

设 x_0 为 R^n 中的某一定点，对于 $\rho(x_0, x) < \delta$ 的点 x 所组成的集合称为以点 x_0 为中心、δ 为半径的**邻域**，简称 x_0 的 δ **邻域**，记作 $N(x_0, \delta)$，即

$$N(x_0, \delta) = \{x \mid \rho(x, x_0) < \delta, \delta > 0\}$$

设 E 为 R^n 中的一个点集，如果存在一个正常数 k，对 E 中所有 n 维点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有 $|x_i| \leqslant k (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 E 称为**有界集**。

设E为(X,ρ)中的一个点集，x是(X,ρ)中的一个定点。如果存在一个邻域$N(x,\delta)$，使$N(x,\delta)\subseteq E$，则x称为E的一个**内点**。若$x\in E^C=(X,\rho)-E$且存在邻域$N(x,\delta)$，使$N(x,\delta)\subseteq E^C$，则x称为E的一个**外点**。若$x\in(X,\rho)$既不是E的内点也不是E的外点，则x称为E的一个**界点**。E的所有界点称为E的**边界**。如果对任意的$N(x,\delta)$，恒有无穷多个点属于E，则x称为E的一个**聚点**。显然E的内点必为聚点，也一定属于E，但E的聚点却不一定属于E。如果$x\in E$，但x不是E的聚点，则x称为E的**孤立点**。E的全部聚点组成的集合称为E的**导集**，记作E'或E^d。E的全部内点组成的集合称为E的**内部**，记作$\mathrm{Int}E$或E^0。E的全部外点组成的集合称为E的**外部**，记作E^e。E与其内部的并集称为E的**闭包**，记作$\overline{E}$，即$\overline{E}=E\cup E'$。如果E中每一点都是它的内点，则E称为**开集**。如果E包含了它的所有聚点，则E称为**闭集**。若E是无孤立点的闭集，则E称为(X,ρ)的**完全集**。

设X是非空集合，x,y,z是属于X的任意元素，θ是属于X中的**零元素**，称为**单位元素**，P是某一数域，α,β是属于P的任意数，若在X中引入加法运算，又在X与P中引入数乘运算，且加法运算与数乘运算满足如下法则：①$x+y=y+x$；②$(x+y)+z=x+(y+z)$；③$x+\theta=x$；④$x+(-x)=\theta$，其中$-x$称为x的**负元素或逆元素**；⑤$1\alpha=\alpha$；⑥$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$；⑦$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$；⑧$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，则$X$称为$P$上的**线性空间或向量空间**。$X$中的元素称为**向量**。当$P$为实数域或复数域时，$X$分别称为**实线性空间或复线性空间**。加法运算与数乘运算统称**线性运算或线性空间结构**。由此可见，所谓线性空间，即对其元素可以进行加法和数乘运算的空间，例如笛卡儿空间就是线性空间。

在数域M上满足条件$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$的数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots\}$的全体所组成的集合称为**$p$方可和序列空间**，记作$l^p$，其中$1\leqslant p<\infty$。$l^p$可表示为

$$l^p=\{x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mid x_n\in M,n\in N\text{且}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$$

设α是属于数域M的任意数，对于任意$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$，则有

$$x+y=\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty},\alpha x=\{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty},\alpha x\in l^p$$

因为

$$|x_n+y_n|^p\leqslant(|x_n|+|y_n|)^p\leqslant 2^p[\max(|x_n|,|y_n|)]^p\leqslant 2^p(|x_n|^p+|y_n|^p)$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\leqslant 2^p\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)<\infty$$

故有$x+y\in l^p$，于是l^p是线性空间。

当p方可和序列空间中的p等于2时，则称为**平方可和序列空间**，记作l^2，当然它也是线性空间。

设X是数域P上的线性空间，$E\subset X$，若存在任意$x,y\in E,\lambda\in[0,1]$，都有$\lambda x+(1-\lambda)y\in E$，则$E$称为**凸集**。凸集的几何意义就是凸集中任意两点的连线仍在集合中。

设X是数域P上的线性空间，如果对X中的每个元素x，按照一定的规则，有确定的非负实数（记作$\|x\|$或$\|\cdot\|$）与之对应，且同时满足下列三个条件（范数公理），即对任何$x,y\in X,\alpha\in P$，有① **正定性**：$\|x\|\geqslant 0$，且$\|x\|=0$的充要条件是$x=0$；② **齐次性**：$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$；③ **三角不等式**：$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，则$\|x\|$表示元素$x$的长度，称为$X$上元素$x$的**范数**。$X$与$\|\cdot\|$一起称为**赋范线性空间、赋范向量空间或线性赋范空间**，记作$(X,\|\cdot\|)$。有时X

也称为**赋范线性空间、赋范向量空间或线性赋范空间**。在赋范线性空间中，可以用 $\rho(x,y) = \|x-y\|$ 定义元素 x 与 y 之间的距离。范数是欧氏空间向量长度概念的推广。显然，任一赋范线性空间必为度量空间，这是因为上述定义的距离满足距离公理，即

(1) $\rho(x,y) = \|x-y\| \geqslant 0$，且 $\rho(x,y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$；

(2) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|-1(y-x)\| = \|y-x\| = \rho(y,x)$；

(3) $\rho(x,z) = \|x-z+y-y\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$。

设 R^n 是 n 维线性空间，对于任何 $x \in R^n$，设 $\|\cdot\|_E$ 可表示为

$$\|\cdot\|_E = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

那么 $\|\cdot\|_E$ 是 R^n 上的范数，这个函数称为 R^n 上的**欧几里得范数**。

在 n 维线性空间中常引用下列重要范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{7-2-1}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R) \tag{7-2-2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \tag{7-2-3}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leqslant p < \infty) \tag{7-2-4}$$

可以验证它们都满足范数的三条公理。其实式(7-2-1)就是欧几里得范数 $\|\cdot\|_E$，且式(7-2-1)和式(7-2-2)是式(7-2-4)中的 p 分别等于1和2的情况。利用柯西不等式，可证明它们满足三角不等式。利用闵可夫斯基不等式，也可证明式(7-2-4)满足三角不等式。

设 X 是赋范线性空间，若 X 中的任何基本数列都是收敛数列，则 X 称为**完全(备)赋范线性空间**，又称为**巴拿赫空间**。巴拿赫空间是泛函分析中最重要的空间之一。

设 X 是数域 P 上的 n 维线性空间，x, y, z 是 X 中的任意向量，$\alpha \in P$，若在 X 中引入二元函数 (x,y)，且具有如下性质：

(1) **对称性**：$(x,y) = (y,x)$ 当 P 为实数域或 $(x,y) = \overline{(y,x)}$ 当 P 为复数域，其中 $\overline{(y,x)}$ 表示 (x,y) 的共轭复数；

(2) **齐次性**：$(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$；

(3) **线性或可加性**：$(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$；

(4) **正定性**：$(x,x) \geqslant 0$，且 $(x,x) = 0$ 的充要条件为 $x = 0$，则 X 称为**内积空间**，(x,y) 称为向量 x 与 y 的**内积**。内积也常用记号 $(\cdot,\cdot)$ 来表示。在有的书刊中，内积也可记作 $\langle x,y\rangle$、$x \cdot y$ 和 $(x \mid y)$ 等。当数域 P 是复数域 C 时，内积空间 X 称为具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的**复内积空间**。当数域 P 是实数域 R 时，内积空间 X 称为具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的**实内积空间**。这时，X 称为关于实内积的 n **维欧几里得空间**，简称 n **维欧氏空间或欧氏空间**，记作 E^n。例如，现实空间是三维欧氏空间，平面是二维欧氏空间，直线是一维欧氏空间。复内积空间和实内积空间都简称**内积空间**，记作 $(X,(\cdot,\cdot))$。

设 X 为内积空间，$x, y, z \in X$，$\alpha, \beta \in P$，则由内积公理可得

$$(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$$

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha}\,\overline{(y,x)} = \overline{\alpha}(x,y)$$

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$$

最常用的内积是按积分定义的，存在着多种形式的积分内积。例如设 X 为内积空间，其定义域

为 D,若两个函数 $u,v \in X$,则函数 u 与 v 由积分定义的内积可写成

$$(u,v) = \int_D uv\mathrm{d}D \tag{7-2-5}$$

$$(u,v) = \int_D wuv\mathrm{d}D \tag{7-2-6}$$

$$(u,v) = \int_D (uv + u'v')\mathrm{d}D \tag{7-2-7}$$

$$(u,v) = \int_D (uv + u'v' + u''v'')\mathrm{d}D \tag{7-2-8}$$

$$(u,v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}D \tag{7-2-9}$$

式中 $w \geqslant 0$ 是 D 内给定的连续函数,称为**权函数**。式(7-2-5)称为**希尔伯特内积**。式(7-2-9)称为**狄利克雷内积**。由此可见,第 1.5 节变分法的基本引理是希尔伯特内积的特定情况。

定理 7.2.2 设 X 是内积空间,若对于任意 $x,y \in X$,则有下列不等式

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,y)(y,y) \tag{7-2-10}$$

上式称为**施瓦茨不等式**,是施瓦茨于 1885 年得到的。施瓦茨不等式有时也称为**柯西 — 施瓦茨不等式**。

证 若 $x = 0$ 或 $y = 0$,则上式中的等号成立,若 $y \neq 0$,则对任意 $\alpha \in P$,由内积的性质可得

$$0 \leqslant (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x + \alpha y) + (\alpha y, x + \alpha y) =$$

$$(x,x) + \bar{\alpha}(x,y) + \alpha(y,x) + \alpha\bar{\alpha}(y,y)$$

由复变函数的理论可知,两个共轭复数之积,等于两者之一的模的平方,即

$$z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

令 $\alpha = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$,代入内积 $(x + \alpha y, x + \alpha y)$ 的展开式,可得

$$(x,x) + \alpha(x,y) + \alpha(y,x) + \alpha\bar{\alpha}(y,y) =$$

$$(x,x) + \bar{\alpha}(x,y) - \frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x) - \frac{(x,y)}{(y,y)}\bar{\alpha}(y,y) =$$

$$(x,x) - \frac{(x,y)}{(y,y)}\overline{(x,y)} = (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geqslant 0$$

由此可得施瓦茨不等式(7-2-7)。证毕。

定理 7.2.3 设 X 是内积空间,$x \in X$,令

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{7-2-11}$$

则 $\|x\|$ 是 X 的范数,称为**由内积导出的范数**,在此范数下 X 成为一个赋范线性空间。由式(7-2-11)引出的范数有时称为**能量范数**。

证 只需证明上述定义的范数满足范数的三条公理即可。显然范数公理的正定性与齐次性成立,事实上

(1) $\|x\| \geqslant 0$,且 $\|x\| = 0$ 的充要条件为 $(x,x) = 0$ 即 $x = \theta$;

(2) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}(x,x)} = |\alpha| \|x\|$;

现在只需证明三角不等式也成立即可。根据施瓦茨不等式,有

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x + y, x) + (x + y, y) \leqslant$$

$$\|x+y\| \cdot \|x\| + \|x+y\| \cdot \|y\|$$

两边各除以 $\|x+y\|$，得

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

证毕。

设 X 是内积空间，若 X 中的任何基本数列都是收敛数列，则 X 称为**完全(备)内积空间**，或称为**希尔伯特空间**，常记作 H。希尔伯特空间是特殊的巴拿赫空间，并且是一类十分重要的空间。希尔伯特空间的实质就是 n 维欧氏空间的无穷维推广。

由式(7-2-10)和式(7-2-11)可得

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \tag{7-2-12}$$

式(7-2-12)是施瓦茨不等式又一种表示形式。

范数还有下列性质

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\| \tag{7-2-13}$$

证 由范数的三角不等式可知，下列关系式成立

$$\|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \tag{1}$$

或

$$\|x\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \tag{2}$$

由式(2)可得

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\| \tag{3}$$

类似地，有

$$\|(y-x)+x\| \leqslant \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\| \tag{4}$$

可得

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\| \tag{5}$$

于是，式(7-2-11)可直接由不等式(3)和(4)得到。证毕。

例 7.2.1 设函数 $u = \cos x, v = x$，其中 x 在区间 $[0,\pi]$ 上，计算这两个函数的范数，内积和它们之和的范数。

解 各范数和内积为

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^{\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\|v\| = \sqrt{\int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} = \pi\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

$$(u,v) = \int_0^{\pi} x\cos x \mathrm{d}x = -2$$

$$\|u+v\| = \sqrt{\int_0^{\pi} (\cos + x)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} - 4}$$

显然，有

$$|(u,v)| = 2 < \|u\| \cdot \|v\| = \frac{\pi^2}{6} \approx 4.029249$$

$$\| u+v \| = \sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{2}} - 4 \approx 2.8118 < \| u \| + \| v \| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \approx 4.4681898$$

引理 7.2.1 设 X 是内积空间，$x_n, y_n \in X (n \in N)$。若 $x_n \to x, y_n \to y$，则 $(x_n, y_n) \to (x, y)$。

证 由三角不等式和施瓦茨不等式，有

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leqslant |(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x, y)| = \\ &|(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leqslant \\ &\| x_n - x \| \cdot \| y_n \| + \| x \| \cdot \| y_n - y \| \end{aligned}$$

由于 $y_n \to y$，则数列 $\{\| y_n \|\}$ 有界。又由条件 $x_n \to x, y_n \to y$，则 $\| x_n - x \| \to 0, \| y_n - y \| \to 0$，因此，$|(x_n, y_n) - (x, y)| \to 0$。证毕。

引理 7.2.1 指出了内积的连续性。

由定理 7.2.3 可知，每个内积空间可以由内积导出范数，由内积导出范数的空间成为一个赋范线性空间。反过来，是否每个赋范线性空间可以由范数确定一个内积，使得由此内积导出的范数与原来的范数相同？回答是不一定。由下面的引理可知，由内积导出的范数必须满足平行四边形公式。

引理 7.2.2 设 X 是内积空间，$\| \cdot \|$ 是由内积导出的范数，则对于任意的 $x, y \in X$，有

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \tag{7-2-14}$$

式(7-2-14)的几何意义是平行四边形对角线的平方和等于四边的平方和。式(7-2-14)称为**平行四边形公式**。

证 根据式(7-2-11)，有

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \\ &(x, x+y) + (y, x+y) + (x, x-y) - (y, x-y) = \\ &(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = \\ &2(x, x) + 2(y, y) = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \end{aligned}$$

证毕。

由引理 7.2.2 可知，不满足平行四边形公式的赋范线性空间不是内积空间。

对于任何一个内积空间 X，其内积可以用内积导出的范数来表达，即对任意 $x, y \in X$，当 X 是实内积空间时，有

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2) \tag{7-2-15}$$

当 X 是复内积空间时，有

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + \mathrm{i}\| x+\mathrm{i}y \|^2 - \mathrm{i}\| x-\mathrm{i}y \|^2) \tag{7-2-16}$$

式(7-2-15)和式(7-2-16)常称为**极化恒等式**。

证 当 X 是实内积空间时，仿照引理 7.2.2 的证明，有

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 &= (x+y, x+y) - (x-y, x-y) = \\ &(x, x+y) + (y, x+y) - (x, x-y) + (y, x-y) = \\ &(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) - (x, x) + (x, y) + (y, x) - (y, y) = \\ &2(x, y) + 2(y, x) = 4(x, y) \end{aligned}$$

式(7-2-15)得证。

当 X 是复内积空间时，由上面的计算得

$$\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 = 2(x,y) + 2(y,x)$$

将上式中的 y 换成 $\mathrm{i}y$，再乘以 i，得

$$\mathrm{i}(\| x+\mathrm{i}y \|^2 - \| x-\mathrm{i}y \|^2) = \mathrm{i}[2(x,\mathrm{i}y) + 2(\mathrm{i}y,x)] =$$
$$2\mathrm{i}\mathrm{i}(x,y) + 2\mathrm{i}\mathrm{i}(y,x) = 2\mathrm{i}(-\mathrm{i})(x,y) - 2(y,x) =$$
$$2(x,y) - 2(y,x)$$

以上两式相加，得

$$\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + \mathrm{i}(\| x+\mathrm{i}y \|^2 - \| x-\mathrm{i}y \|^2) = 4(x,y)$$

式(7-2-16)得证。证毕。

n 维欧氏空间 E^n 中连续的一部分称为**区域**，用 Γ 表示该区域的边界。区域中不包括边界 Γ 的那部分称为**开区域**，用 G 或 D 等表示；包括边界 Γ 的区域称为**闭区域**，用 $\overline{G}$ 或 $\overline{D}$ 等表示。

7.3 标准正交系与傅里叶级数

设 $x \in X$，如果存在数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in P$，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，使得 $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$，则 x 称为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**线性组合**。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，如果存在不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**线性相关**，否则称为**线性无关**。换句话说，如果 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ 成立，必有 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关。

设 X 为内积空间，$x, y \in X$，若 $(x,y) = 0$，则 x 与 y 称为**正交**，记作 $x \perp y$。当 $A, B \subseteq X$，对于任意 $a \in A$，任意 $b \in B$，若 $a \perp b$，则 A 与 B 称为**正交**，记作 $A \perp B$。

设 X 为内积空间，$A \in X$，若对任意向量 $a, b \in A (a \neq b)$，有 $(a,b) = 0$，则 A 称为**正交系**；若对任意 $a \in A$，有 $\| a \| = 1$，则 A 称为**标准正交系**或**规范正交系**。

标准正交系也可以这样来定义，设 X 为内积空间，$A \in X$，若对任意向量 $e_i, e_j \in A$，有 $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j \\ 0 & \text{若 } i \neq j \end{cases}$，则 A 称为**标准正交系**或**规范正交系**。这里的 δ_{ij} 是克罗内克尔符号。

显然标准正交系的任意向量满足两个条件：一是两两正交，二是每个向量都是单位向量，即范数是 1。

正交系有以下两个基本性质：

(1) 对于正交系 M 中的任意有限个向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，下式成立

$$\| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \cdots + \| x_n \|^2 \qquad (7-3-1)$$

事实上，由于 M 中的向量两两正交，所以

$$\| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i, x_j) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \cdots + \| x_n \|^2$$

(2) 正交系 M 是 X 中线性无关子集。事实上，设向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$，而且 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个数，则对任何 $1 \leqslant j \leqslant n$，下式成立

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_j\right) = a_j(x_j, x_j) = a_j \| x_j \|^2 = 0 \tag{7-3-2}$$

由于 $x_j \neq 0$，必有 $a_j = 0$，所以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关。这就证明了 M 是 X 中线性无关子集。

设 X 是线性赋范空间，x_n 是 X 中一组向量，a_n 是一组数，其中 $n = 1, 2, \cdots$，作表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + \cdots \tag{7-3-3}$$

式(7-3-3) 称为 X 中的**级数**。若取前 n 项

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{7-3-4}$$

则 S_n 称为级数的前 n 项**部分和**。如果部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛于 $S \in X$，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 称为**收敛于和** S，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{7-3-5}$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n x_n \| = \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \| x_n \|$ 收敛，则级数(7-3-3) 称为**绝对收敛**。

引理 7.3.1 设 M 是内积空间 X 中标准正交系，在 M 任取 n 个向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为任意 n 个数，则有下列不等式成立

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} | (x, e_i) |^2 \geqslant 0 \tag{7-3-6}$$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \geqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\| \tag{7-3-7}$$

证 根据范数的定义，有

$$\begin{aligned}
&\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \\
&(x, x) - \left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \\
&(x, x) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, x) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\
&(x, x) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{(x, e_i)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_i (e_i, e_i) = \\
&(x, x) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{(x, e_i)} + \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |^2 \geqslant 0
\end{aligned} \tag{7-3-8}$$

令 $\alpha_i = (x, e_i)$，则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(x, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{(x, e_i)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} = \\
&2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} = 2 \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} | (x, e_i) |^2
\end{aligned} \tag{7-3-9}$$

将式(7-3-9) 代入式(7-3-8)，即可得到式(7-3-6)。又由式(7-3-8) 和式(7-3-6)，有

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 - \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overline{x, e_i}) + \sum_{i=1}^{n} | (x, e_i) |^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} | \alpha_i - (x, e_i) |^2 \geqslant 0 \tag{7-3-10}$$

证毕。

设 $A = \{e_i \mid i \in N\}$ 是内积空间 X 的一个标准正交系，N 是自然数，任意向量 $x \in X$，则有下列不等式成立

$$\sum_{i=1}^{\infty} | (x, e_i) |^2 \leqslant \| x \|^2 \tag{7-3-11}$$

式(7-3-11)称为**贝塞尔不等式**。如果贝塞尔不等式中等号成立，则此等式称为**帕塞瓦尔等式**。

证 令式(7-3-6)中的 $n \to \infty$ 即可得到式(7-3-11)。证毕。

设 X 为内积空间，$A = \{e_k \mid k \in N\}$ 是 X 的一个标准正交系，N 是自然数，任意向量 $x \in X$，数列 $\{(x, e_k)\}$ 称为 x 关于标准正交系 A 的**傅里叶系数集**，内积 (x, e_k) 称为**傅里叶系数**，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ 称为 x 关于标准正交系 A 的**傅里叶级数**。

引理 7.3.2 设 $A = \{e_k \mid k \in N\}$ 为希尔伯特空间 H 中的规范正交系，那么以下论断成立：

(1) 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{i=1}^{\infty} | \alpha_2 |^2$ 收敛；

(2) 若 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$，则 $\alpha_i = (x, e_i)$，且 $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$；

(3) 对于任何 $x \in H$，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$ 收敛。

证 (1) 设 $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$，$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} | \alpha_2 |^2$，由于 A 为规范正交系，所以对任何正整数 m 和 n，当 $n > m$ 时，根据式(7-3-1)，有

$$\| S_n - S_m \|^2 = \| \alpha_{m+1} e_{m+1} + \alpha_{m+2} e_{m+2} + \cdots + \alpha_n e_n \|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} | \alpha_i |^2 = \sigma_n - \sigma_m$$

所以数列 $\{S_n\}$ 是 H 中柯西数列的充要条件为 $\{\sigma_n\}$ 是柯西数列，由 H 和数域的完备性可知，(1) 成立；

(2) 作 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ 与 e_i 的内积，有 $(x, e_i) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i, e_i \right) = \alpha_i (e_i, e_i) = \alpha_i$，即 $\alpha_i = (x, e_i)$，再将此式代入 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$，得 $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$；

(3) 由贝塞尔不等式可知，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} | (x, e_i) |^2 \leqslant \| x \|^2$ 收敛，再由(1)、(2)可知，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$ 收敛。证毕。

7.4 算子与泛函

设 X 和 Y 是同一数域 P 上的两个赋范线性空间，D 是 X 的一个子集，若存在某种对应法则 T，使对任何 $x \in D$，有唯一确定的 $y = T(x) = Tx \in Y$ 与之对应，则 T 称为 X 中 D 到 Y 的**算子**(映

射)，D 称为 T 的**定义域**，记作 $D(T)$。y 或 $T(x)$ 称为 x 的**象**，象的集合 $\{y \mid y = Tx, x \in D\}$ 称为 T 的**值域**，记作 $T(D)$ 或 TD。

根据集合 X、Y 的不同情形，在不同的数学分支中，算子 T 有不同的惯用名称。习惯上，当 X 和 Y 都是数空间时，T 称为**函数**；当 X 和 Y 都为赋范线性空间时，如上面定义的那样，T 称为**算子**；当 X 为赋范线性空间，Y 为数空间时，T 称为**泛函数**，简称**泛函**。或者说，值域为数集的算子称为**泛函**。当 X 为数空间，Y 为赋范线性空间时，T 称为**抽象函数**。

设算子 T 的定义域为 D，值域为 $T(D)$，$u \in D$，$f \in T(D)$，则等式 $Tu = f$ 称为**算子方程**。式中 u 是所要求的未知函数。f 称为**自由项**，代表一种源或汇。当自由项 f 为零时，算子方程称为**齐次方程**。

设 $u = \varphi$ 是算子方程的边界条件，φ 是在定义域 D 的边界上给定的函数，若 $\varphi = 0$，则这样的边界条件称为**齐次边界条件**。

设 X 和 Y 都是赋范线性空间，D 是 X 的子空间，T 是 D 到 Y 的算子，α 是数域 P 中的一个数，则可引出下列定义：

(1) 若 T 满足

$$T(x + y) = Tx + Ty, x, y \in D$$

则 T 称为**加法算子**或**可加算子**。

(2) 若 T 满足

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), x \in D$$

则 T 称为**齐次算子**。

(3) 若对每个 $n \geqslant 1$ 和任意点 $x_n, x \in D(n = 1,2,\cdots)$，当 $x_n \to x$ 时，必有 $Tx_n \to Tx$，即 $\| x_n - x \| \to 0$ 时，必有 $\| Tx_n - Tx \| \to 0$，则 T 称为 D 上的**连续算子**。

(4) 若存在正数 M，使得对任意的 $x \in D$ 都有

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \|$$

则 T 称为 D 上的**有界算子**。保证上个不等式成立的最小正数 M 称为有界算子 T 的范数，并记作 $\| T \|$。显然有 $\| Tx \| \leqslant \| T \| \| x \|$。

(5) 若

$$Tx = \alpha x$$

则 T 称为 X 到 X 的**相似算子**。特别当 $\alpha = 1$ 时，T 称为**单位算子**或**恒等算子**，记作 I。当 $\alpha = 0$ 时，T 称为**零算子**，记作 θ。

(6) 如果对于任意 $x_1, x_2 \in D, \alpha, \beta \in P$，都有

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2$$

成立，则 T 称为 D 到 Y 中的**线性算子**。换句话说，可加齐次算子称为**线性算子**。如果线性算子 T 的值域是数集，则 T 称为**线性泛函**，常记作 f、g 等。

(7) 设 T 是 X 到 Y 的线性算子，若对每个 $n \geqslant 1$ 和任意点 $x_n, x \in D(n = 1,2,\cdots)$，当 $x_n \to x$ 时，必有 $Tx_n \to Tx$，即 $\| x_n - n \| \to 0$ 时，必有 $\| Tx_n - Tx \| \to 0$，则 T 称为 D 上的**连续线性算子**。

如果线性算子 $T : D \to Y$ 是有界算子，如果存在正常数 K，使得 $\| Tx \|_Y \leqslant K \| x \|_X$，这里 $\| \cdot \|_D$ 与 $\| \cdot \|_Y$ 分别是 D 与 Y 中的范数，则 T 称为**有界线性算子**。相应地，当 T 的值域是数集时，T 称为**有界线性泛函**。不是有界的线性算子称为**无界线性算子**。

定理 7.4.1 设 X 和 Y 都是赋范线性空间，D 是 X 的子空间，T 是 D 到 Y 的线性算子，如果 T 在某一点 $x_0 \in D$ 连续，则 T 在整个 D 上连续。

证 任取 $x, x_n \in D(n = 1,2,\cdots)$，且设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x$，由于 T 是线性算子，故有

$$Tx_n - Tx = T(x_n - x) = T(x_n - x + x_0) - Tx_0$$

当 $n \to \infty$ 时，由 $x_n - x + x_0 \to x$ 以及 T 在点 x_0 处的连续性可知，$T(x_n - x + x_0) \to Tx_0$，即 $Tx_n \to Tx$。因此 T 在点 x 处连续。因 x 在 D 上是任取的，故 T 在整个 D 上连续。证毕。

定理 7.4.2 设 X 和 Y 都是赋范线性空间，D 是 X 的子空间，T 是 D 到 Y 的线性算子，则 T 连续的充要条件是 T 有界。

证 充分性。设 T 有界，则存在 $M > 0$，使得对于任意 $x \in D$，有 $\| Tx \| \leqslant M \| x \|$。任取序列 $\{x_n\} \in X(n = 1,2,\cdots)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x$，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\| Tx_n - Tx \| = \| T(x_n - x) \| \leqslant M \| x_n - x \| \to 0$$

因此，T 在 D 内任一点 x 处连续。

必要性。证法 1，用反证法来证明。设 T 连续但无界，则对每个自然数 n，必存在 $x_n \in D$ 且 $x_n \neq 0(n = 1,2,\cdots)$，使得 $\| Tx_n \| \geqslant n \| x_n \|$。令 $y_n = \dfrac{x_n}{n \| x_n \|}$，则有 $\| y_n \| = \dfrac{1}{n}$，当 $n \to \infty$ 时，$\| y_n \| \to 0$，由 T 的连续性，有 $Ty_n \to 0$。另一方面

$$\| Ty_n \| = \left\| \frac{Tx_n}{n \| x_n \|} \right\| = \frac{\| Tx_n \|}{n \| x_n \|} \geqslant 1$$

这与连续性矛盾，故 T 有界。

证法 2。设 T 在 D 上连续，则对点 $x = 0$，存在 $\delta > 0$，当 $\| x \| < \delta$ 时，有 $\| Tx \| < 1$。任取 $x \neq 0$，有

$$\left\| \frac{x}{\| x \|} \delta \right\| = \frac{\| x \|}{\| x \|} \delta = \delta, \left\| T\left(\frac{x}{\| x \|} \delta \right) \right\| = \frac{\| Tx \| \delta}{\| x \|} < 1$$

故有

$$\| Tx \| \leqslant \frac{\| x \|}{\delta}$$

这一不等式对任意 $x \in D$ 成立，且等号仅对 $x = 0$ 成立。故 T 是有界的。证毕。

定理 7.4.2 表明，有界线性算子是连续的，反过来，连续线性算子是有界的，即线性算子的连续性与有界性等价。

设 X 和 Y 均为赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，对于任意的 $x \in X$，若存在 $m > 0$，使得 $\| Tx \| \geqslant m \| x \|$，则 T 称为**下有界线性算子**。

设 $T: X \to Y$ 是线性算子，如果存在线性算子 $S: Y \to X$，使得 $ST = I_X$，$TS = I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X 和 Y 上的单位算子，则 T 称为**可逆线性算子**或**可逆算子**，S 称为 T 的**逆算子**，记作 $S = T^{-1}$。

设 X 和 Y 是两个赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，如果对任意的 $x \in X$，都有 $\| Tx \|_Y \leqslant \| x \|_X$，这里 $\| \cdot \|_X$ 与 $\| \cdot \|_Y$ 分别是 X 与 Y 中的范数，则 T 称为 X 到 Y 的**保范算子**或**等距算子**。如果 T 是保范的线性算子，且是 X 到 Y 的一一对应，则 T 称为 X 到 T 的**同构映射**。如果存在 X 到 Y 的同构映射，则 X 与 Y 称为**同构**，记作 $X \cong Y$。

对于赋范线性空间 X 上的线性泛函 $f(x)$，$x \in X$，总可以把它看作是由 X 到数空间中的线性算子，因此，关于对算子一些特性的定义对泛函也适用。

设 T 是赋范线性空间 X 的子空间 D 到赋范线性空间 Y 的线性算子，则

$$\| T \| = \sup_{x \in D, x \neq \theta} \frac{\| Tx \|}{\| x \|}$$

称为**算子 T 的范数**。算子范数的几何意义：$\frac{\| Tx \|}{\| x \|}$ 表示 T 在 x 方向的伸缩系数。$\| T \|$ 是所有方向上伸缩系数的上确界。根据算子范数的定义，显然有 $\| Tx \| \leqslant \| T \| \| x \|$。

设 $f(x)$ 是度量空间 X 上的泛函，$x_0 \in X$，若对于任意给定的正数 ε，存在正数 δ，当 $x \in X$ 及 $\rho(x, x_0)$ 时，有 $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$，则 $f(x)$ 称为在 x_0 处对于 X **连续**。若 $f(x)$ 在 X 上的每一点处都连续，则 $f(x)$ 称为 X 上的**连续泛函**。

设 X 和 Y 是同一数域 P 上的两个赋范线性空间，把 X 到 Y 的一切可能的线性算子的全体记作 (X, Y)，把 X 到 Y 的一切可能有界线性算子的全体记作 $B(X, Y)$，则 (X, Y) 称为**线性算子空间**，$B(X, Y)$ 称为**有界线性算子空间**。显然 $B(X, Y)$ 是 (X, Y) 的一个子集，且两者都是非空的，因为至少有一个零算子 $\theta \in B(X, Y)$。当 $X = Y$ 时，将 $B(X, X)$ 记作 $B(X)$。

设 X 是赋范线性空间，若将 X 上连续线性泛函的全体记作 X^*，且 X^* 按通常的线性运算及泛函的范数构成一个赋范线性空间，则 X^* 称为 X 的**对偶空间**或**共轭空间**。

设 X 和 Y 都是希尔伯特空间，T 是从 X 到 Y 的有界线性算子，若存在从 Y 到 X 的有界线性算子 T^*，且 T^* 满足对任意的 $x \in X$ 和 $y \in Y$，均可使 $(Tx, y) = (x, T^* y) + B(x, y)$ 成立；则 T^* **称为** T 的**共轭算子**或**伴随算子**。若 T 与其共轭算子 T^* 可交换，即 $TT^* = T^* T$，则 T 称为**正规算子或正常算子**。若 $T^* T = I_X$，$TT^* = I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X 和 Y 上的单位算子，则 T 称为**酉算子**。酉算子常用 U 表示。若边界项 $B(x, y)$ 为零，则共轭算子化为 $(Tx, y) = (x, T^* y)$。如果 X 和 Y 是相同的希尔伯特空间，那么 T 和 T^* 就是同一空间的算子，此时，若 $T = T^*$，则 T 称为**自共轭算子或自伴算子**，又称为**埃尔米特算子**。酉算子和自共轭算子都是正规算子的特例。

定理 7.4.3　有界算子的共轭算子也是有界算子。共轭算子的范数彼此相等。

证　根据施瓦茨不等式，从 $(Tx, y) = (x, T^* y)$ 推知

$$| (x, T^* y) | \leqslant \| Tx \| \| y \| \leqslant \| T \| \| x \| \| y \| \tag{1}$$

若令 $x = T^* y$，则有 $(x, T^* y) = (T^* y, T^* y) = \| T^* y \|^2$。在得到的不等式(1)两边约去 $\| T^* y \|$，可得

$$\| T^* y \| \leqslant \| T \| \| y \| \tag{2}$$

由此可知 $\| T^* \| \leqslant \| T \|$。交换 T^* 和 T 的位置，同样可证 $\| T \| \leqslant \| T^* \|$。比较这两个不等式，可得 $\| T^* \| = \| T \|$。证毕。

设 H 是希尔伯特空间，X 是 H 的子空间，T 是 X 到 H 的线性算子，如果对于任意的 $x, y \in X$，均有 $(Tx, y) = (x, Ty)$ 成立，则 T 称为**对称算子**。

定理 7.4.4　算子 T 为对称算子的充要条件是：内积 (Tx, x) 是实数。

证　必要性：设 T 是对称算子，根据对称算子的定义有 $(Tx, y) = (x, Ty)$，令 $x = y$，则有 $(Tx, x) = (x, Tx)$，或者根据内积的对称性有 $(Tx, x) = \overline{(Tx, x)}$。既然 (Tx, x) 等于其自身的共轭数，所以 (Tx, x) 是实数。

充分性：可以证明下列恒等式。

$$4(Tx, y) = [T(x + y), x + y] - [T(x - y), x - y] + \mathrm{i}[T(x + \mathrm{i}y), x + \mathrm{i}y] - [T(x - \mathrm{i}y), x - \mathrm{i}y]$$

根据定理的条件，等号右边的所有内积都是实数。将 x 和 y 易位，可得

$$4(Ty,x)=[T(y+x),y+x]-[T(y-x),y-x]+\mathrm{i}[T(y+\mathrm{i}x),y+\mathrm{i}x]-$$
$$[T(y-\mathrm{i}x),y-\mathrm{i}x]$$

从内积的基本性质可以推知

$$[T(y-x),y-x]=[T(x-y),x-y]$$
$$[(T(y+\mathrm{i}x),y+\mathrm{i}x]=[\mathrm{i}T(\mathrm{i}x-y),\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)]=[T(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y]$$
$$[T(y-\mathrm{i}x),y-\mathrm{i}x]=[-\mathrm{i}T(x+\mathrm{i}y),-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)]=[T(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y]$$

于是可断定$(Tx,y)=(\overline{Ty,x})$,或者根据内积的对称性$(Tx,y)=(x,Ty)$,即算子T是对称的。证毕。

若T是自共轭算子,则有

$$(Tx,y)=(x,T^*y)=(x,Ty)=(Ty,x)$$

可见,自共轭算子必定是对称算子,但对称算子未必是自共轭算子。于是,由定理7.4.4可得下面推论:

推论 算子T为自共轭算子的充要条件是:内积(Tx,x)是实数。

定理7.4.5 设T_1和T_2都是自共轭算子,则T_1T_2也是自共轭算子的充要条件是$T_1T_2=T_2T_1$。

证 必要性。若T_1T_2是自共轭算子,则对任何$x,y\in H$,有

$$(T_1T_2x,y)=(x,T_1T_2y)$$

又由于T_1和T_2都是自共轭算子,并且它们都是从希尔伯特空间H到希尔伯特空间H的有界线性算子,故有

$$(T_1T_2x,y)=(T_2x,T_1y)=(x,T_2T_1y)$$

于是,对于任何$x\in H$,有

$$(x,T_1T_2y)=(x,T_2T_1y)$$

可得$T_1T_2=T_2T_1$。

充分性。若$T_1T_2=T_2T_1$,则T_1T_2必为自共轭算子。事实上,由T_1和T_2的自共轭性和$T_1T_2=T_2T_1$,有

$$(T_1T_2x,y)=(T_2x,T_1y)=(x,T_2T_1y)=(x,T_1T_2y)$$

所以T_1T_2必为自共轭算子。证毕。

若$(Tx,y)\geqslant 0$,则T称为**正算子**。若对于任意非零的$x,y\in X$,均有$(Tx,y)>0$成立,则T称为**正定算子**。如果T是正定算子,则方程$Ty=f(x)$至多只有一个解。

事实上,如果有两个不同的解y_1和y_2,则必有

$$Ty_1-f=0,Ty_2-f=0$$

两式相减,得

$$T(y_1-y_2)=0$$

于是有

$$[T(y_1-y_2),y_1-y_2]=0$$

这与T是正定算子相矛盾,故方程$Ty=f$只有一个解。

正定算子也可以这样定义:设 T 是一个线性算子,若存在常数 $r>0$,使 $(Ty,y)\geqslant r^2(y,y)=r^2\|y\|^2$ 成立,则算子 T 称为**正定算子**。

例 7.4.1 若 T 是 H 中的自共轭算子,λ 为实数,证明 λT 和 $T-\lambda I$ 都是自共轭算子。

证 因 T 是自共轭算子,按定义有 $(Tx,y)=(x,Ty)$,又 λ 为实数,故 $\lambda=\overline{\lambda}$。于是

$$(\lambda Tx,y)=\lambda(Tx,y)=\lambda(x,Ty)=(x,\overline{\lambda}Ty)=(x,\lambda Ty)$$

$$[(T-\lambda I)x,y]=(Tx,y)-\lambda(x,y)=(x,Ty)-(x,\overline{\lambda}y)=$$

$$(x,Ty)-(x,\lambda y)=[x,(T-\lambda I)y]$$

证毕。

若由可微函数构成的集合,通过微分运算,可以使其变成另外的函数集合,则这种微分运算是可微函数上的一种算子,称为**微分算子**。简单地说,带有导数符号或微分符号的算子称为**微分算子**。微分算子也可以这样来定义:设 T 为由函数空间 F_1 到函数空间 F_2 的映射(算子),$Tu=f$,其中 $u\in F_1$,$f\in F_2$,如果象 f 在每个点 x 处的值 $f(x)$ 由原象 u 和有限个 u 的导数在点 x 处的值所决定,则 T 称为**微分算子**。

设 X 是区间 $[a,b]$ 上所有多项式组成的线性空间,T 是 X 上的算子,若对任意 $x\in X$,有 $Tx(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}x(t)$,则 T 称为 n **阶线性微分算子**,简称**线性微分算子**。

下面举出几个微分算子的例子。

(1) 设 $y(x)\in C^2$,$Ty=y''+y$,则 $T=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+1$ 是一个二阶微分算子。

(2) $Ty=[p(x)y']'+q(x)y$,$T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$ 是一个一般的二阶微分算子。

(3) $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$,$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是一个二阶偏微分算子,通常称为**三维拉普拉斯算子**。若没有 z 项,则称为**二维拉普拉斯算子**。

(4) $\nabla\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$,$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 是一个矢性微分算子,称为**哈密顿算子**、**梯度算子**或**位势算子**。

(5) 设 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\in C^{2n}$,$TF=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\dfrac{\partial F}{\partial y^{(k)}}$,则 $T=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\dfrac{\partial}{\partial y^{(k)}}$ 是一个微分算子。

(6) $\left(F_{yy}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)u-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=0$,$J=F_{yy}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是一个微分算子,称为**雅可比算子**。

例 7.4.2 设 $y(x)\in C^2[x_0,x_1]$,$p_0''(x)$,$p_1'(x)$,$p_2(x)\in C[x_0,x_1]$,且 $p_0(x)\neq0$。对二阶线性微分算子 T,有

$$Ty=p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y \tag{7-4-1}$$

试求 T 的自共轭算子。

解 设 $z(x)\in C^2[x_0,x_1]$,作内积 (Ty,z),并利用分部积分,可得

$$(Ty,z)=\int_{x_0}^{x_1}(p_0y''+p_1y'+p_2y)z\mathrm{d}x=$$

$$(p_0zy'+p_1yz)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}[-(p_0z)'y'-(p_1z)'y+p_2yz]\mathrm{d}x=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[(p_0z)'' - (p_1z)' + p_2z]y\mathrm{d}x + [p_0(y'z - yz') + (p_1 - p'_0)yz]\Big|_{x_0}^{x_1} =$$

$$(y, T^*z) + w(y,z)$$

于是,得共轭微分算子

$$T^*z = p_0z'' + (2p'_0 - p_1)z' + (p''_0 - p'_1 + p_2)z \tag{7-4-2}$$

为了使 $T^* = T$,当且仅当

$$\begin{cases} 2p'_0 - p_1 = p_1 \\ p''_0 - p'_1 + p_2 = p_2 \end{cases}$$

成立,也就是 $p'_0 = p_1$ 成立。得自共轭微分算子

$$Ty = p_0y'' + p_1y' + p_2y = p_0y'' + p'_0y' + p_2y = (p_0y')' + p_2y \tag{7-4-3}$$

例 7.4.3 设 $u(x,y,z) \in C^2(V)$,$p(x,y,z) \in C^1(V)$,$q(x,y,z) \in C(V)$,S 为 V 的封闭表面,$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为 S 的外法线方向导数。令 T 是二阶线性偏微分算子,且有

$$Tu = \nabla \cdot (p\nabla u) + qu = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + qu \tag{7-4-4}$$

试求 T 的自共轭算子。

解 设 $v(x,y,z) \in C^2(V)$,根据高斯公式,有

$$\iiint_V \nabla \cdot (vp\nabla u)\mathrm{d}V = \iiint_V p\nabla u \cdot \nabla v + v\nabla \cdot (p\nabla u)\mathrm{d}V = \oiint_S vp\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

注意到将高斯公式中的 p、u、v 两两易位,其形式不变。于是,作内积 (Tu, v),有

$$\begin{aligned}
(Tu, v) = & \iiint_V [\nabla \cdot (p\nabla u) + qu]v\mathrm{d}V = \\
& \iiint_V \nabla \cdot (vp\nabla u)\mathrm{d}V - \iiint_V (p\nabla u \cdot \nabla v - quv)\mathrm{d}V = \\
& \oiint_S vp\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_V (p\nabla u \cdot \nabla v - quv)\mathrm{d}V = \\
& \oiint_S vp\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \oiint_S up\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S + \iiint_V [u\nabla \cdot (p\nabla v) + quv]\mathrm{d}V = \\
& \iiint_V u[\nabla \cdot (p\nabla v) + qv]\mathrm{d}V + \oiint_S p\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = \\
& \iiint_V u(T^*v)\mathrm{d}V + \oiint_S p\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = \\
& (u, T^*v) + \oiint_S p\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

于是得共轭微分算子

$$T^*v = \nabla \cdot (p\nabla v) + qv = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial v}{\partial z}\right) + qv$$

若对 u,v 规定适当的齐次边界条件,则边界项等于零,故有

$$T^* = T \tag{7-4-5}$$

即 T 是自共轭微分算子。例 7.4.3 的推导是按三维情形得来的,如果换成二维情形,上述过程及结

果也照样成立，只需体积域 V 换成面积域D、封闭面积 S 换成封闭曲线Γ 即可。

7.5 泛函的导数

设有泛函 $J[u]$，如果

$$\Delta J = J[u+\varepsilon\eta] - J[u] = \delta J + \delta^2 J + \cdots + \delta^n J + o(\varepsilon^n) \tag{7-5-1}$$

且 n 次变分

$$\delta^n J = \frac{\varepsilon^n}{n!}[T(u)\eta^{n-1}, \eta] \tag{7-5-2}$$

式中 η 是满足齐次边界条件的任意可取函数，则 $J[u]$ 称为在 u 上**可导**，且 $T(u)$ 称为泛函 $J[u]$ 在 u 上的 n **阶导数**，记作 $J^n[u]$。当 $n=1$ 时，也称为泛函 $J[u]$ 在 u 上的**梯度**，也可记作 $J'[u]$ 或 $\mathrm{grad}J[u]$。当 $n=2$ 时，也可记作 $J''[u]$。

下面讨论最简泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$ 在固定边界 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 条件下的导数。

泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x =$$

$$\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\eta\mathrm{d}x = \varepsilon[T(y), \eta] = \varepsilon[\eta, T(y)]$$

式中，$T(y) = F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}$，所以泛函的梯度为

$$\mathrm{grad}J[y] = T(y) = F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} \tag{7-5-3}$$

由式(7-5-3)可见，泛函 $J[y]$ 的一阶导数是一个函数。

泛函的二阶变分为

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\mathrm{d}x$$

对第二项应用分部积分，得

$$\int_{x_0}^{x_1}2F_{yy'}\eta\eta'\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}F_{yy'}\mathrm{d}\eta^2 = F_{yy'}\eta^2\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1}\eta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\mathrm{d}x$$

对第三项也应用分部积分，得

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\eta'^2\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\eta'\mathrm{d}\eta = F_{y'y'}\eta'\eta\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'y'}\eta')\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\eta\mathrm{d}x$$

将第二项和第三项的积分结果代入泛函的二阶变分表达式，得

$$\delta^2 J = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right)\eta^2 - \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\eta\right]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\eta\left[\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\eta\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\eta\left[S - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\eta\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}[\eta, T(y)\eta] = \frac{\varepsilon^2}{2}[T(y)\eta, \eta]$$

式中，$S = F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}$，$R = F_{y'y'}$，$T(y) = S - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$，于是得泛函 $J[y]$ 的二阶导数

$$J''[y] = T(y) = S - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \tag{7-5-4}$$

由式(7-5-4)可见，泛函 $J[y]$ 的二阶导数是一个算子。

泛函的三阶变分为

$$\delta^3 J = \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^3 + 3F_{yyy'}(\delta y)^2\delta y' + 3F_{yy'y'}\delta y(\delta y')^2 + F_{y'y'y'}(\delta y')^3]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\varepsilon^3}{3!}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yyy}\eta^3 + 3F_{yyy'}\eta^2\eta' + 3F_{yy'y'}\eta\eta'^2 + F_{y'y'y'}\eta'^3)\mathrm{d}x$$

将第二项应用分部积分，得

$$\int_{x_0}^{x_1}3F_{yyy'}\eta\frac{1}{2}(\eta^2)'\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\frac{3}{2}F_{yyy'}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta^2\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\eta\left(\frac{3}{2}F_{yyy'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\eta^2\mathrm{d}x$$

将第三项应用分部积分，得

$$\int_{x_0}^{x_1}3F_{yy'y'}\eta\eta'^2\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}3F_{yy'y'}\eta\eta'\mathrm{d}\eta = 3F_{yy'y'}\eta\eta'\eta\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F_{yy'y'}(\eta^2)']\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{yy'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta^2\right)\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{yy'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\eta^2\mathrm{d}x$$

将第四项应用分部积分，得

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'y'}\eta'^3\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'y'}\eta'^2\mathrm{d}\eta = F_{y'y'y'}\eta'^2\eta\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'y'y'}\eta'^2)\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\eta\left(\eta'^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'y'y'} + F_{y'y'y'}2\eta'\eta''\right)\mathrm{d}x$$

利用第三项的计算结果，第四项前一个积分可写成

$$-\int_{x_0}^{x_1}\eta\eta'^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'y'y'}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\eta^2\mathrm{d}x$$

将第四项后一个积分应用分部积分，得

$$-\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'y'}2\eta\eta'\eta''\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'y'}(\eta^2)'\mathrm{d}\eta' =$$

$$-2F_{y'y'y'}\eta\eta'^2\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta^2\right)\mathrm{d}x=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta^2\right)\mathrm{d}\eta=$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta^2\right)\eta\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta^2\right)\mathrm{d}x=$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\eta^2\mathrm{d}x$$

将第二、三、四项代入三阶变分表达式，得

$$\delta^3J=\frac{\varepsilon^3}{3!}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yyy}\eta^3+3F_{yyy'}\eta^2\eta'+3F_{yy'y'}\eta\eta'^2+F_{y'y'y'}\eta'^3)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\varepsilon^3}{3!}\int_{x_0}^{x_1}\eta\left[F_{yyy}+\left(\frac{3}{2}F_{yyy'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{yy'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right]\eta^2\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\varepsilon^3}{3!}[\eta,T(y)\eta^2]=\frac{\varepsilon^3}{3!}[T(y)\eta^2,\eta]$$

于是得泛函 $J[y]$ 的三阶导数

$$J'''[y]=T(y)=F_{yyy}+\left(\frac{3}{2}F_{yyy'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{yy'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(F_{y'y'y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\tag{7-5-5}$$

由式(7-5-5)可见，泛函 $J[y]$ 的三阶导数仍是一个算子。

用类似上面的方法，可以推导出泛函更高阶的导数，并可得出结论：最简泛函的二阶及二阶以上导数都是算子。

7.6 算子方程的变分原理

下面给出对称正定算子方程的变分原理。

定理 7.6.1 设 T 是对称正定算子，其定义域为 D，值域为 $T(D)$，$u\in D$，$f\in T(D)$，若算子方程

$$Tu=f\tag{7-6-1}$$

存在解 $u=u_0$，则 u_0 所满足的充要条件是泛函

$$J[u]=(Tu,u)-2(u,f)\tag{7-6-2}$$

取得极小值。

在式(7-6-1)中，自由项 f 为自变量的已知函数，称为**驱动函数**或**强制函数**。

证 必要性。若 $u=u_0$ 是式(7-6-1)的解，则有 $Tu_0=f$。设 $u=u_0+\eta$，显然 $u\in D$。泛函(7-6-2)可以写为

$$J[u]=[T(u_0+\eta),u_0+\eta]-2(u_0+\eta,f)$$

利用算子 T 的对称性 $(Tu,v)=(u,Tv)$，并根据内积的性质 $(u,v)=(v,u)$，将上式展开，得

$$J[u]=(Tu_0,u_0)+(Tu_0,\eta)+(T\eta,u_0)+(T\eta,\eta)-2(u_0,f)-2(\eta,f)=$$
$$(Tu_0,u_0)+(Tu_0,\eta)+(Tu_0,\eta)+(T\eta,\eta)-2(u_0,f)-2(f,\eta)=$$
$$J[u_0]+2(Tu_0-f,\eta)+(T\eta,\eta)$$

但 $Tu_0-f=0$,又根据正定算子的定义,$(T\eta,\eta)>0$,故有

$$J[u]>J[u_0]$$

这说明 $J[u]$ 在 $u=u_0$ 处取极小值。

充分性。设 $u=u_0$ 时使泛函 $J[u]$ 取得极小值,即对任意的 $u=u_0+\varepsilon\eta$,都应有

$$J[u]-J[u_0]\geqslant 0$$

利用上面的 $J[u]$ 展开式,上式可化为

$$J[u]-J[u_0]=2\varepsilon(Tu_0-f,\eta)+\varepsilon^2(T\eta,\eta)\geqslant 0$$

为了保证 $u=u_0+\varepsilon\eta$ 的任意性,η 就必须是任意函数,若要上式对任意的 η 成立,则必有

$$(Tu_0-f,\eta)=0$$

从而推出

$$Tu_0-f=0$$

即 u_0 是算子方程(7-6-1)的解。证毕。

下面给出使泛函(7-6-2)为极小值的 u 是算子方程(7-6-1)的解的另一种证明方法。

证 设 u_0 是算子方程(7-6-1)的解,即 $Tu_0=f$,那么式(7-6-2)可写为

$$J[u]=(Tu,u)-2(u,Tu_0)$$

由于 T 是对称算子,有 $(Tu,u_0)=(u,Tu_0)$,且

$$[T(u-u_0),(u-u_0)]=[Tu,(u-u_0)]-[Tu_0,(u-u_0)]=$$
$$(Tu,u)-(Tu,u_0)-(Tu_0,u)+(Tu_0,u_0)$$

所以式(7-6-2)又可写为

$$J[u]=(Tu,u)-(Tu_0,u)-(Tu,u_0)=[T(u-u_0),(u-u_0)]-(Tu_0,u_0)$$

又由于 T 是正定算子,所以 $[T(u-u_0),(u-u_0)]\geqslant 0$,只有当 $u=u_0$ 时,$[T(u-u_0),(u-u_0)]=0$ 才成立,这时 $J[u]$ 有极小值为 $-(Tu_0,u_0)$,故 u_0 是泛函(7-6-2)的极小值。证毕。

定理 7.6.1 指出,具有对称正定算子的微分方程边值问题可以转化为等价的变分问题,为微分方程问题的求解开辟了新的变分法途径。

推论:如果 T 是对称的,负定的,即 $(Tu,u)\leqslant 0$,那么使泛函(7-6-2)取得极大值的 u 就是式(7-6-1)的解。

现在来求与算子方程(7-6-1)的一阶变分,根据泛函取极值的必要条件,算子方程(7-6-1)的解必须满足

$$\delta J[u]=\delta[(Tu,u)-2(u,f)]=(T\delta u,u)+(Tu,\delta u)-2(\delta u,f)=0$$

因 T 是对称算子,$(T\delta u,u)=(\delta u,Tu)=(Tu,\delta u)$,故上式可写为

$$\delta J[u]=2(Tu,\delta u)-2(\delta u,f)=2(Tu-f,\delta u)=2\int_D(Tu-f)\delta u\mathrm{d}D=0$$

(7-6-3)

于是可获得算子方程(7-6-1)的解所应满足的泛函为

$$(Tu - f, \delta u) = \int_D (Tu - f)\delta u \mathrm{d}D = 0 \tag{7-6-4}$$

由式(7-6-3)或式(7-6-4)可得出结论:正定算子方程(7-6-1)的解,可通过式(7-6-3)或式(7-6-4)的求解来得到。

若方程(7-6-1)的 T 不是对称正定算子,也可以作式(7-6-4)的内积,若内积能化成

$$(Tu - f, \delta u) = \int_D (Tu - f)\delta u \mathrm{d}D = \delta \int_D F \mathrm{d}D + 边界项 = 0 \tag{7-6-5}$$

的形式,式中 F 是 u 和 D 的函数,则有可能找到与算子方程的相对应的泛函为

$$J[u(D)] = \int_D F \mathrm{d}D \tag{7-6-6}$$

边界条件为边界项等于零或边界固定。

例 7.6.1 试求与微分方程边值问题

$$\begin{cases} p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y - f(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

相应的变分问题,式中 $p(x)$、$q(x)$ 和 $f(x)$ 均为 x 的已知函数。

解 微分方程可改写成

$$(py')' + qy - f = 0$$

作该微分方程与 δy 的内积,并将第一项积分一次,得

$$\int_{x_0}^{x_1} [(py')' + qy - f]\delta y \mathrm{d}x = py'\delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} (py'\delta y' - qy\delta y + f\delta y)\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{2}\delta \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 - qy^2 + 2fy)\mathrm{d}x = 0$$

或

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 - qy^2 + 2fy)\mathrm{d}x = 0$$

于是可写出与微分方程相应的泛函为

$$J = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 - qy^2 + 2fy)\mathrm{d}x$$

不管边界条件条件是否给出,必要的边界条件都是

$$py'\delta y \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

7.7 与自共轭常微分方程边值问题等价的变分问题

形如

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[p_k(x)y^{(k)}] = f(x) \tag{7-7-1}$$

的微分方程称为**自共轭常微分方程**，也称为**施图姆 — 刘维尔型 $2n$ 阶微分方程**。其中 $p_k(x) \in C^*[x_0, x_1]$ 且 $p_k(x) \geqslant 0$，$p_k(x)$ 至多只有有限个零点。这时方程(7-7-1)是一个 $2n$ 阶线性微分方程。施图姆 — 刘维尔方程是函数论中一个很重要的方程，许多著名方程都可由它派生出来。特别，当 $n = 1$ 时，方程(7-7-1)称为**施图姆 — 刘维尔型二阶微分方程**，即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y = f(x) \tag{7-7-2}$$

式中，$p(x) \geqslant 0$ 和 $q(x) \geqslant 0$ 且均为连续函数，$p(x)$ 至多只有有限个零点。式(7-7-2)的边界条件为

$$\alpha y'(x_0) - \beta y(x_0) = A, \gamma y'(x_1) + \sigma y(x_1) = B \tag{7-7-3}$$

式中，α、β、γ 和 σ 为常数且非负，A、B 为常数，$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$，$\gamma^2 + \sigma^2 \neq 0$，又当 $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ 时，$\beta^2 + \sigma^2 \neq 0$。

若引入算子 T，即

$$T = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x) \tag{7-7-4}$$

式中，T 的定义域为 D，则方程(7-7-2)是算子方程，且可写成

$$Ty = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y'] + q(x)y = f(x) \tag{7-7-5}$$

对于式(7-7-2)，构造二次泛函

$$J[y] = (Ty, y) - 2(y, f) = \int_{x_0}^{x_1}[-(py')' + qy - 2f]y\mathrm{d}x \tag{7-7-6}$$

下面讨论算子 T 的性质，根据式(7-7-3)，设 $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$，利用分部积分法，有

$$(Ty, z) = \int_{x_0}^{x_1}[-(py')' + qy]z\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}(py'z' + qyz)\mathrm{d}x - py'z\Big|_{x_0}^{x_1} =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(py'z' + qyz)\mathrm{d}x + \frac{A + \beta y}{\alpha}pz\Big|_{x=x_0} + \frac{\sigma y - B}{\gamma}pz\Big|_{x=x_1} \tag{7-7-7}$$

若 $A = B = 0$，将式(7-7-7)中的 y、z 易位，右端的形式不变，即关于 $y, z \in D$ 是对称的。因此 $(Ty, z) = (y, Tz)$，即 T 是对称算子。又在式(7-7-7)中，令 $z = y$，得

$$(Ly, y) = \int_{x_0}^{x_1}(py'^2 + qy^2)\mathrm{d}x + \frac{\beta}{\alpha}p(x_0)y^2(x_0) + \frac{\sigma}{\gamma}p(x_1)y^2(x_1) \tag{7-7-8}$$

根据假定 $p \geqslant 0, q \geqslant 0, \alpha, \beta, \gamma, \sigma$ 非负，因此 $(Ty, y) \geqslant 0$，即 T 是正定算子。

式(7-7-7)和式(7-7-8)是在 $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ 的条件下得到的。若 $\alpha = \gamma = 0$，则这两式中含有 α 和 γ 的项不出现，此时无论 A 和 B 是否为零，T 都是对称正定算子。

综上所述，当 $A = B = 0$ 或 $\alpha = \gamma = 0$ 时，问题给定的自共轭微分算子 T 是对称正定算子。于是可知，式(7-7-2)是二次泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(py'^2 + qy^2 - 2yf)\mathrm{d}x \tag{7-7-9}$$

的欧拉方程。

当 $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ 时，对泛函式(7-7-9)取一阶和二阶变分，有

$$\delta J[y] = 2\int_{x_0}^{x_1}(py'\delta y' + qy\delta y - f\delta y)\mathrm{d}x = 2\int_{x_0}^{x_1}(py'\mathrm{d}\delta y + qy\delta y\mathrm{d}x - f\delta y\mathrm{d}x) =$$

$$2py'\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + 2\int_{x_0}^{x_1}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py') + qy - f\right]\delta y\mathrm{d}x \tag{7-7-10}$$

$$\delta^2 J[y] = 2\int_{x_0}^{x_1}[p(\delta y')^2 + q(\delta y)^2]\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{7-7-11}$$

若 $y = y(x)$ 是微分方程(7-7-2)的解，则在 $y = y(x_0)$ 和 $y = y(x_1)$ 处分别有 $\delta J = 2p(x_0)y'(x_0)\delta y(x_0)$，$\delta J = 2p(x_1)y'(x_1)\delta y(x_1)$，利用边界条件式(7-7-3)，可得

$$\delta J = 2p(x_1)\delta y(x_1)\frac{B - \sigma y(x_1)}{\gamma} - 2p(x_0)\delta y(x_0)\frac{A + \beta y(x_0)}{\alpha}$$

这时，δJ 一般并不等于零，式(7-7-9)不是所要求的泛函，需要对它加以修正。考虑到泛函

$$J_B = -p(x_1)\frac{2By(x_1) - \sigma y^2(x_1)}{\gamma} + p(x_0)\frac{2Ay(x_0) + \beta y^2(x_0)}{\alpha}$$

的一阶变分为

$$\delta J_B = -p(x_1)\frac{2B\delta y(x_1) - 2\sigma y(x_1)\delta y(x_1)}{\gamma} + p(x_0)\frac{2A\delta y(x_0) + 2\beta y(x_0)\delta y(x_0)}{\alpha} =$$

$$-2p(x_1)\delta y(x_1)\frac{B - \sigma y(x_1)}{\gamma} + 2p(x_0)\delta y(x_0)\frac{A + \beta y(x_0)}{\alpha} = -\delta J$$

其二阶变分为

$$\delta^2 J_B = -p(x_1)\delta^2\frac{2By(x_1) - \sigma y^2(x_1)}{\gamma} + p(x_0)\delta^2\frac{2Ay(x_0) + \beta y^2(x_0)}{\alpha} =$$

$$\frac{2\sigma}{\gamma}p(x_1)[\delta y(x_1)]^2 + \frac{2\beta}{\alpha}p(x_0)[\delta y(x_0)]^2 \geqslant 0$$

于是，令

$$J_1[y] = J[y] + J_B = \int_{x_0}^{x_1}(py'^2 + qy^2 - 2yf)\mathrm{d}x +$$

$$p(x_0)\frac{2Ay(x_0) + \beta y^2(x_0)}{\alpha} - p(x_1)\frac{2By(x_1) - \sigma y^2(x_1)}{\gamma} \tag{7-7-12}$$

在 $y = y(x)$ 时，有 $\delta J_1 = 0$，$\delta^2 J_1 \geqslant 0$。

由此可见，在 $\alpha \neq 0$ 和 $\gamma \neq 0$ 的边界条件下，式(7-7-12)的一阶变分为零，二阶变分不小于零，即式(7-7-12)取得绝对极小值时的充分条件为 $y = y(x)$ 是方程(7-7-2)的解，故式(7-7-12)就是所求的泛函。

当 $\alpha = \gamma = 0$ 时，边界条件可简化为

$$y(x_0) = -\frac{A}{\beta}, y(x_1) = \frac{B}{\sigma}$$

此时，$y(x_0)$ 和 $y(x_1)$ 都是常数，即边界条件都固定，有 $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$。对泛函(7-7-12)取一阶和二阶变分，仍是式(7-7-10)和式(7-7-11)，但由于 $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$，一阶变分中的 $2py'\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} = 0$。由此可见，在上述边界条件下，泛函式(7-7-9)的一阶变分为零，二阶变分不小于零，即泛函式(7-7-9)取得绝对极小值时的充分条件为 $y = y(x)$ 是方程(7-7-2)的解，

故式(7-7-9)就是所求的泛函。然而,比较式(7-7-9)和式(7-7-12)可以看出,将式(7-7-12)中有关 α 和 γ 的项去掉,则式(7-7-12)就可退化为式(7-7-9)。类似地,如果在边界条件(7-7-3)中有某常数为零,则在式(7-7-12)中去掉与该常数有关的项后所得到的泛函就是与方程(7-7-2)的解对应的泛函。于是,可得到下面定理:

定理 7.7.1 设 $y \in C^2[x_0, x_1]$, $y = y(x)$ 是微分方程(7-7-2)在边界条件(7-7-3)下的解的充要条件为它对应的泛函(7-7-12)在 $y = y(x)$ 处取得绝对极小值,且边界条件(7-7-3)中的与常数 α、β、γ、σ、A 和 B 相关的项和泛函(7-7-12)中的同名常数相关的项相一致。

有时还会遇到非自共轭微分方程,在某些情况下,用一个待定因子 $\mu(x)$ 乘以该方程,可使它化为自共轭微分方程。

例 7.7.1 将二阶线性微分方程

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{7-7-13}$$

化成自共轭形式

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0$$

式中,$p_0(x) \neq 0$, $p_1(x) \neq p_0'(x)$。

解 根据式(7-7-2),自共轭微分方程的一般形式可写成

$$p(x)y'' + p(x)'y' - q(x)y = -f(x)$$

式(7-7-13)不是自共轭微分方程。以待定因子 $\mu(x)$ 乘以式(7-7-13)两边,得

$$\mu p_0 y'' + \mu p_1 y' + \mu p_2 y = 0$$

将上式和自共轭微分方程的一般形式比较可见,应有

$$(\mu p_0)' = \mu' p_0 + \mu p_0' = \mu p_1$$

将上式两端同除以 μp_0,得

$$\frac{\mu'}{\mu} + \frac{p_0'}{p_0} = \frac{p_1}{p_0}$$

积分得

$$\ln \mu p_0 = \int \frac{p_1}{p_0} \mathrm{d}x$$

从而有

$$\mu = \frac{1}{p_0} \mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0} \mathrm{d}x}$$

这个待定因子 μ 称为**积分因子**。以 μ 乘以式(7-7-13)两端,得

$$\mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0} \mathrm{d}x} \left(y'' + \frac{p_1}{p_0} y' + \frac{p_2}{p_0} y \right) = 0$$

或

$$\left(\mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0} \mathrm{d}x} y' \right)' + \frac{p_2}{p_0} \mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0} \mathrm{d}x} y = 0,$$

令

$$p = \mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0} \mathrm{d}x}, q = \frac{p_2}{p_0} \mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0} \mathrm{d}x}$$

则得

$$(py')' + qy = 0$$

例 7.7.2 设自共轭常微分方程为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[p_k(x)y^{(k)}] = f(x) \tag{7-7-14}$$

边界条件为

$$y^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_1) = 0 \quad (k = 0,1,\cdots,n) \tag{7-7-15}$$

试建立该边值问题的等价泛函。

解 令 $Ty = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[p_k(x)y^{(k)}] = f(x)$,则有

$$(Ty,y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_{x_0}^{x_1} y \frac{d^k}{dx^k}[p_k(x)y^{(k)}]dx$$

应用分部积分法,并注意到题中所给的边界条件,可得

$$(Ty,y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_{x_0}^{x_1} y \frac{d^k}{dx^k}[p_k(x)y^{(k)}]dx =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[p_k(x)y^{(k)}]y\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} y' \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[p_k(x)y^{(k)}]dx \right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left\{ -\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}[p_k(x)y^{(k)}]y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} y'' \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}[p_k(x)y^{(k)}]dx \right\} = \cdots =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left\{ (-1)^i \int_{x_0}^{x_1} y^{(i)} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}[p_k(x)y^{(k)}]dx \right\} = \cdots =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k} \int_{x_0}^{x_1} p_k(x)[y^{(k)}]^2 dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_0}^{x_1} p_k(x)[y^{(k)}]^2 dx$$

由于 $p_k(x) \in C^k[x_0,x_1]$ 且 $p_k(x) \geqslant 0$,$(Ty,y) \geqslant 0$,故可知 T 是正算子。于是所求的泛函为

$$J_{2n}[y] = (Ty,y) - 2(y,f) = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \sum_{k=0}^{n} p_k(x)[y^{(k)}]^2 - 2f(x)y \right\} dx \tag{7-7-16}$$

例 7.7.3 设二阶微分方程为

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx} \right] + r(x)u - \lambda u = 0$$

式中,λ 是参数,$p(x) \geqslant 0$ 和 $r(x) - \lambda \geqslant 0$ 且均为连续函数。边界条件为

$$u'(x_0) - au(x_0) = 0, u'(x_1) + bu(x_1) = 0$$

式中,a、b 为常数且不等于零。试求该微分方程的变分表达式。

解 此题相当于式(7-7-2)和式(7-7-3)中 $y = u, q = r - \lambda, \alpha = \gamma = 1, \beta = a, \sigma = b$, $A = B = 0$ 的情况,由式(7-7-12)立即可写出上述问题相应的变分表达式

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (pu'^2 + ru^2 - \lambda u^2)dx + ap(x_0)u^2(x_0) + bp(x_1)u^2(x_1)$$

7.8 与自共轭偏微分方程边值问题等价的变分问题

本节讨论椭圆型偏微分方程的变分问题。形如

$$-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu=f\quad(x,y,z\in V)\tag{7-8-1}$$

的方程称为**一般椭圆型(微分)方程**。其边界条件有如下三种

$$u|_S=g\tag{7-8-2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=h\tag{7-8-3}$$

$$\left.\left(p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_S=k\tag{7-8-4}$$

式中,S 为空间封闭曲面,V 为 S 所包围的空间开区域,在 V 上 $p=p(x,y,z)>0$,$q=q(x,y,z)\geqslant 0$,$\sigma=\sigma(x,y,z)\geqslant 0$,$f=f(x,y,z)$,且 $p\in C^1$,q,f,σ 都属于 C,$g=g(x,y,z)$,$h=h(x,y,z)$,$k=k(x,y,z)$ 都在 S 上。式(7-8-1)和式(7-8-2)称为**椭圆型方程第一边值问题**;式(7-8-1)和式(7-8-3)称为**椭圆型方程第二边值问题**;式(7-8-1)和式(7-8-4)称为**椭圆型方程第三边值问题**。当 $p(x,y)\equiv 1$,$q(x,y)\equiv 0$ 时,式(7-8-1)化为泊松方程

$$-\nabla\cdot\nabla u=-\Delta u=f\quad(x,y,z\in V)\tag{7-8-5}$$

其边界条件仍为式(7-8-2)、式(7-8-3)和式(7-8-4)三种情况,注意,此时式(7-8-4)中的 $p=1$。如果式(7-8-5)中的自由项 $f=0$,则称为**拉普拉斯方程**,简称**拉氏方程**。

泊松方程分别与边界条件(7-8-2)~(7-8-4)相结合,分别称为三维问题的**泊松方程第一、第二、第三边值问题**。若 $f=0$,则分别称为三维问题的**拉普拉斯方程第一、第二、第三边值问题**。泊松方程第一问题也称为**狄利克雷问题**,泊松方程第二问题也称为**诺伊曼问题**,泊松方程第三问题也称为**罗宾问题**。

如果式(7-8-1)中的 $z=0$,则空间问题化为平面问题

$$-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu=f\quad(x,y\in D)\tag{7-8-6}$$

其边界条件也有如下三种

$$u|_\Gamma=g\tag{7-8-7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=h\tag{7-8-8}$$

$$\left.\left(p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_\Gamma=k\tag{7-8-9}$$

式中,Γ 为平面封闭曲线,D 为 Γ 所包围的开区域,在 D 上,$p=p(x,y)>0$,$q=q(x,y)\geqslant 0$,$\sigma=\sigma(x,y)\geqslant 0$,$f=f(x,y)$,且 $p\in C^1$,q,f,σ 都属于 C,$g=g(x,y)$,$h=h(x,y)$,$k=k(x,y)$ 都在 Γ 上。其他对于空间问题的有关定义对平面问题都适用,只需把三维问题换成二维问题。二维问题和三维问题类似,只是把 V 换成了 D,S 换成了 Γ,二维问题问题和三维问题可用同一种方法求解。

如果 $\sigma=0$,则第三边值问题可化为第二边值问题,故第二边值问题是第三边值问题的特殊情况,三种边值问题可化为两种边值问题来求解。

总之,不论是三维问题还是二维问题,都可以化为第一边值问题和第三边值问题两种情况来

求解。

根据对称正定算子的变分原理，只有齐次边界条件的微分方程才有变分原理。事实上，非齐次边界条件的微分方程边值问题也有变分原理。下面给出椭圆型方程的变分原理。

定理 7.8.1 设有椭圆型方程(7－8－6)，其边界条件为

$$u|_{\Gamma_1} = g \tag{7-8-10}$$

$$\left(p\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_2} = k \tag{7-8-11}$$

式中，$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 是逐段光滑的平面闭曲线，D 是 Γ 所包围的开区域，在 $D + \Gamma$ 上，$p = p(x,y) > 0, q = q(x,y) \geqslant 0, f = f(x,y), \sigma = \sigma(x,y) \geqslant 0$，且 $p(x,y) \in C^1, q(x,y), f(x,y), \sigma(x,y)$ 都属于 C，在边界 Γ_1 上，$g = g(x,y)$，在边界 Γ_2 上，$k = k(x,y)$。则方程的解 $u = u_0$ 所满足的充要条件是泛函

$$J[u] = \int_D [p(\nabla u)^2 + qu^2 - 2uf]\mathrm{d}D + \int_{\Gamma_2} (\sigma u^2 - 2ku)\mathrm{d}\Gamma \tag{7-8-12}$$

在 $u|_{\Gamma_1} = g$ 条件下，在 $u = u_0$ 时取极小值。

证 构造一个函数 u_1，它在区域 D 内足够光滑，且在边界上满足非齐次边界条件

$$u_1|_{\Gamma_1} = g, \left(p\frac{\partial u_1}{\partial n} + \sigma u_1\right)\Big|_{\Gamma_2} = k$$

令 $w = u - u_1$，则 w 满足下列齐次边界条件的椭圆方程

$$-\nabla\cdot(p\nabla w) + qw = f^* \quad (x,y \in D) \tag{7-8-13}$$

$$w|_{\Gamma_1} = 0 \tag{7-8-14}$$

$$\left(p\frac{\partial w}{\partial n} + \sigma w\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0 \tag{7-8-15}$$

式中，$f^* = f + \nabla\cdot(p\nabla u_1) - qu_1$，若令 $Tw = -\nabla\cdot(p\nabla w) + qw$，则可证明在上述齐次边界条件下，$T$ 是对称正定算子。事实上，根据内积的定义并利用格林第一公式(1－3－43)，有

$$\begin{aligned}(Tw,v) &= \int_D [-\nabla\cdot(p\nabla w) + qw]v\mathrm{d}D = \\ &\int_D [-\nabla\cdot(vp\nabla w) + \nabla v\cdot p\nabla w + qwv]\mathrm{d}D = \\ &-\oint_D vp\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma + \int_D (p\nabla w\cdot\nabla v + qwv)\mathrm{d}D = \\ &-\oint_{\Gamma_1} vp\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma - \oint_{\Gamma_2} vp\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma + \int_D (p\nabla w\cdot\nabla v + qwv)\mathrm{d}D = \\ &\int_D (p\nabla w\cdot\nabla v + qwv)\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2}\sigma wv\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}$$

将上式中的 w、v 易位，得

$$(Tv,w) = \int_D (p\nabla v\cdot\nabla w + qvw)\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2}\sigma vw\mathrm{d}\Gamma$$

于是有

$$(Tw,v) = (Tv,w)$$

可见 T 是对称算子。若令 $v = w$，当 $w \neq 0$ 时，则有

$$(Tw, w) = \oint_D [p(\nabla w)^2 + qw^2]\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma w^2 \mathrm{d}\Gamma > 0$$

可见 T 又是正定算子。于是，T 是对称正定算子。根据定理 7.6.1，椭圆方程(7－8－13)在边界条件(7－8－14)和(7－8－15)下所对应的泛函是

$$J[w] = (Tw, w) - 2(f^*, w) =$$

$$\int_D [-\nabla \cdot (p\nabla w) + qw]w\mathrm{d}D - 2\int_D [f + \nabla \cdot (p\nabla u_1) + qu_1]w\mathrm{d}D =$$

$$\int_D [p(\nabla w)^2 + qw^2]\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma w^2 \mathrm{d}\Gamma - 2\int_D [f + \nabla \cdot (p\nabla u_1) + qu_1]w\mathrm{d}D =$$

$$\int_D [p(\nabla w)^2 + qw^2]\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma w^2 \mathrm{d}\Gamma - 2\int_D [f + \nabla \cdot (p\nabla u_1) + qu_1]w\mathrm{d}D$$

将 $w = u - u_1$ 代入上式，得

$$J[w] = \int_D \{p[\nabla (u - u_1)]^2 + q(u - u_1)^2\}\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma (u - u_1)^2 \mathrm{d}\Gamma -$$

$$2\int_D [f + \nabla \cdot (p\nabla u_1) - qu_1](u - u_1)\mathrm{d}D =$$

$$\int_D p[(\nabla u)^2 - 2\nabla u \cdot \nabla u_1 + (\nabla u_1)^2]\mathrm{d}D +$$

$$\int_D q(u^2 - 2uu_1 + u_1^2)\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma (u^2 - 2uu_1 + u_1^2)\mathrm{d}\Gamma -$$

$$2\int_D [f + \nabla \cdot (p\nabla u_1) - qu_1](u - u_1)\mathrm{d}D =$$

$$\int_D [p(\nabla u)^2 + qu^2 - 2fu]\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma u^2 \mathrm{d}\Gamma +$$

$$\int_D [p(\nabla u_1)^2 + qu_1^2 + 2f^* u_1]\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma u_1^2 \mathrm{d}\Gamma -$$

$$2\int_D (p\nabla u \cdot \nabla u_1 + quu_1)\mathrm{d}D - 2\oint_{\Gamma_2} \sigma uu_1 \mathrm{d}\Gamma -$$

$$2\int_D [\nabla \cdot (p\nabla u_1) - qu_1]u\mathrm{d}D \qquad (7-8-16)$$

令上式中的后三项之和为 $-2J_1[u, u_1]$，则

$$J_1[u, u_1] = \int_D (p\nabla u \cdot \nabla u_1 + quu_1)\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma uu_1 \mathrm{d}\Gamma + \int_D [\nabla \cdot (p\nabla u) - qu_1]u\mathrm{d}D =$$

$$\int_D [\nabla \cdot (up\nabla u_1) - u\nabla \cdot (p\nabla u_1)]\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2} \sigma uu_1 \mathrm{d}\Gamma + \int_D [u\nabla \cdot (p\nabla u_1)]\mathrm{d}D =$$

$$\int_\Gamma p\frac{\partial u_1}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma + \oint_{\Gamma_2} \sigma uu_1 \mathrm{d}\Gamma =$$

$$\int_{\Gamma_1} p\frac{\partial u_1}{\partial n}(w + u_1)\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} p\frac{\partial u_1}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma + \oint_{\Gamma_2} \sigma uu_1 \mathrm{d}\Gamma =$$

$$\int_{\Gamma_1} p\frac{\partial u_1}{\partial n}u_1 \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} p\frac{\partial u_1}{\partial n}w\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2}\left(p\frac{\partial u_1}{\partial n} + \sigma u_1\right)u\mathrm{d}\Gamma =$$

$$\int_{\Gamma_1} p\frac{\partial u_1}{\partial n}u_1 \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} ku\mathrm{d}\Gamma \tag{7-8-17}$$

将式(7-8-17)代入式(7-8-16),得

$$J[w] = J[u] + J_2[u_1] \tag{7-8-18}$$

式中

$$J[u] = \int_D [p(\nabla u)^2 + qu^2 - 2fu]\mathrm{d}D + \oint_{\Gamma_2}(\sigma u^2 - 2ku)\mathrm{d}\Gamma \tag{7-8-19}$$

$$J_2[u_1] = \int_D [p(\nabla u_1)^2 + qu_1^2 + 2f^* u_1]\mathrm{d}D - 2\oint_{\Gamma_1} p\frac{\partial u}{\partial n}u_1\mathrm{d}\Gamma + \oint_{\Gamma_2}\sigma u_1^2\mathrm{d}\Gamma$$

由于 u_1 是事先构造的已知函数,故 $J_2[u_1]$ 是常数,于是有

$$\delta J[w] = \delta J[u] \tag{7-8-20}$$

根据变分原理,齐次边界条件(7-8-14)和(7-8-15)下的椭圆方程(7-8-13)的解满足下列变分

$$\begin{cases}\delta J[w] = 0\\ w|_{\Gamma_1} = 0\end{cases} \tag{7-8-21}$$

从式(7-8-20)以及 $w = u - u_1$,可知式(7-8-21)等价于

$$\begin{cases}\delta J[u] = 0\\ u|_{\Gamma_1} = g\end{cases}$$

将式(7-8-19)代入上式,得

$$\begin{cases}\delta J[u] = 2\int_D [p\nabla u\cdot\nabla\delta u + (qu - f)\delta u]\mathrm{d}D + 2\int_{\Gamma_2}(\sigma u - g)\delta u\mathrm{d}\Gamma = 0\\ u|_{\Gamma_1} = g\end{cases} \tag{7-8-22}$$

式(7-8-22)的二阶变分为

$$\delta^2 J[u] = 2\int_D (p\nabla\delta u\cdot\nabla\delta u + q\delta u\delta u)\mathrm{d}D + 2\int_{\Gamma_2}\sigma\delta u\delta u\mathrm{d}\Gamma =$$

$$2\int_D [p(\nabla\delta u)^2 + q(\delta u)^2]\mathrm{d}D + 2\int_{\Gamma_2}\sigma(\delta u)^2\mathrm{d}\Gamma > 0$$

故方程的解在 $u = u_0$ 时是极小值。证毕。

例 7.8.1 试建立与泊松方程第一边值问题

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x,y,z)\quad (x,y,z\in V) \tag{7-8-23}$$

$$u|_S = 0\quad (S\text{ 为 }V\text{ 的边界}) \tag{7-8-24}$$

等价的变分问题,式中,$f(x,y,z)\in C[V+S]$。

下面分别用定理 7.7.1 和定理 7.8.1 求解。

解 1 用定理 7.7.1 求解。首先证明算子 $T = -\Delta$ 是对称算子和正定算子。根据格林第一公式

(1-3-43),有

$$(-\Delta u, v) = \iiint_V (-\Delta u) v \mathrm{d}V = \iiint_V \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}V - \oiint_S v \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S$$

由于 u 在边界上的值为零,所以有

$$(-\Delta u, v) = \iiint_V \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}V$$

将 u、v 易位,同样有

$$(-\Delta v, u) = \iiint_V \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}V$$

由上两式可得

$$(-\Delta u, v) = (-\Delta v, u)$$

故算子 $T = -\Delta$ 是对称算子。

令 $v = u$,当 $u \neq 0$ 时,则有

$$(-\Delta u, u) = \iiint_V \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}V = \iiint_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}V =$$

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] \mathrm{d}V > 0$$

故算子 $T = -\Delta$ 是正定算子。

根据定理 7.7.1,可建立二次泛函

$$J[u] = (-\Delta u, u) - 2(u, f) = \iiint_V [(\nabla u)^2 - 2uf] \mathrm{d}V \qquad (7-8-25)$$

解 2 直接用定理 7.8.1 求解。方程(7-8-23)相当于方程(7-8-6)中 $p = 1, q = 0$ 的情况,边界条件(7-8-24)相当于边界条件(7-8-14)中 $g = k = 0$ 的情况,于是可根据式(7-8-12)建立泛函

$$J[u] = \iiint_V [(\nabla u)^2 - 2uf] \mathrm{d}V \qquad (7-8-26)$$

可见式(7-8-25)和式(7-8-26)相同。本例题是就三维狄利克雷问题求解的,对于二维问题,只需要把空间区域 V 换成平面区域 D,并将三重积分换成二重积分即可,当然,边界上的封闭曲面 S 也要相应换成封闭曲线 Γ,并将封闭曲面积分相应换成封闭曲线积分。

例 7.8.2 设 $p(x,y,z) \in C^1(V), q(x,y,z), f(x,y,z), \sigma(x,y,z)$ 都属于 $C(V)$,且 $p > 0, q \geqslant 0, \sigma \geqslant 0$。其中 V 为空间有界区域,其边界为 S。试求与下面边值问题等价的泛函的极小值。

$$-\frac{\partial}{\partial x}(pu_x) - \frac{\partial}{\partial y}(pu_y) - \frac{\partial}{\partial z}(pu_z) + qu = f(x,y,z) \quad (x,y,z \in V)$$

$$\left(p \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$$

式中,$u \in C^2(V)$。

解 微分方程可表示为

$$-\nabla \cdot (p \nabla u) + qu = f$$

据题意,它属于第三类边界条件 $k = 0$ 的情况,直接套用式(7-8-12),得相应的泛函为

$$\iiint_V [p(\nabla u)^2 + qu^2 - 2uf]\mathrm{d}V + \iint_S \sigma u^2 \mathrm{d}S = 0$$

或

$$\iiint_V [p(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + qu^2 - 2uf]\mathrm{d}V + \iint_S \sigma u^2 \mathrm{d}S = 0$$

7.9 弗里德里希斯不等式和庞加莱不等式

设 G 是 n 维欧几里得空间中的有界区域，若其边界 Γ 充分光滑或分段光滑，则这样的边界称为**利普希茨边界**。这个概念的严格定义相当复杂，本定义只是一个简单的定义。利普希茨边界可以是圆、环、三角形、矩形、球面和立方体等，工程应用上经常遇到有界区域一般都属于利普希茨边界。对于 $n = 1$ 的情形，有界区域退化成一个区间 (a,b)。具有尖点的二维域和具有奇点的三维域的边界则不属于利普希茨边界。不属于利普希茨边界的例子如图 7-9-1 所示。

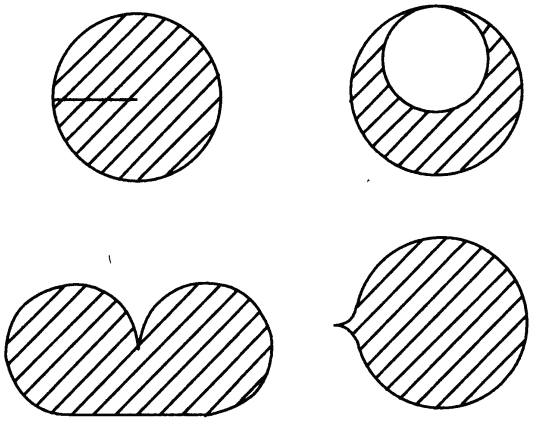


图 7-9-1　二维域中一些不属于利普希茨边界的区域

设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实函数，如果存在任意实数 $M>0, \alpha>0$，对于属于 $[a,b]$ 的任意的 x, x^*，都有不等式

$$| f(x^*) - f(x) | \leqslant M | x^* - x |^{\alpha} \tag{7-9-1}$$

成立，则 $f(x)$ 称为在 $[a,b]$ 上满足 α **次利普希茨条件**。如果 $f(x)$ 对于 M 满足这个不等式，那么 $f(x)$ 称为在 x 中**利普希茨连续**。当 $\alpha = 1$ 时，则 $f(x)$ 称为在 $[a,b]$ 上满足**利普希茨条件**。

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是具有 n 个自变量实函数，如果存在任意实数 $M>0, \alpha>0$，使得不等式

$$| f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) | \leqslant M \sum_{i=1}^{n} | x_i^* - x_i |^{\alpha} \tag{7-9-2}$$

成立，则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为满足 α **次利普希茨条件**。当 $\alpha = 1$ 时，则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为满足**利普希茨条件**。利普希茨条件是保证微分方程解的存在性和唯一性的重要条件。

n 维欧氏空间中点的坐标通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示。可以用点 x 代替点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。例如积分

$$I = \int \cdots \int_G u(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

可简写成

$$I = \int_G u(x)\mathrm{d}x$$

当然，如果 $n = 1$，则可写出积分的上下限，即

$$I = \int_a^b u(x)\mathrm{d}x$$

定理 7.9.1 （弗里德里希斯不等式） 设 G 是具有利普希茨边界的区域，M 是函数 $u(x)$ 的线性集合，这些函数在 $\overline{G}$ 内具有一阶连续偏导数。那么存在非负常数 c_1, c_2，它们依赖于所考虑的区域而与 M 中的函数 $u(x)$ 无关，即有下列不等式

$$\int_G u^2(x)\mathrm{d}x \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x + c_2 \int_\Gamma u^2(s)\mathrm{d}s \tag{7-9-3}$$

对于每个函数 $u \in M$ 成立。

当然，如果考虑到能量泛函和内积这两个概念，式(7-9-3) 还可表示为

$$\| u \|^2 = (u,u) = \int_G u^2\mathrm{d}x \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x + c_2 \int_\Gamma u^2(s)\mathrm{d}s \tag{7-9-4}$$

对于 $n = 1$，当 M 是闭区间 $[a,b]$ 内具有一阶连续偏导数的函数的线性集合时，弗里德里希斯不等式可写成下列形式的任何一个

$$\int_a^b u^2\mathrm{d}x \leqslant c_1 \int_a^b u'^2\mathrm{d}x + c_2 u^2(a) \tag{7-9-5}$$

$$\int_a^b u^2\mathrm{d}x \leqslant c_1 \int_a^b u'^2\mathrm{d}x + c_2 u^2(b) \tag{7-9-6}$$

$$\int_a^b u^2\mathrm{d}x \leqslant c_1 \int_a^b u'^2\mathrm{d}x + c_2 [u^2(a) + u^2(b)] \tag{7-9-7}$$

式(7-9-4)、式(7-9-6) 和式(7-9-7) 称为**弗里德里希斯第一不等式**。

特别地，当 $n = 2$ 时，在通常的变量记号下可写成

$$\iint_G u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant c_1 \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2 \oint_\Gamma u^2(s)\mathrm{d}s \tag{7-9-8}$$

式(7-9-8) 称为**弗里德里希斯第二不等式**。

上述不等式中的常数用相同的符号 c_1 和 c_2 表示。当然，常数 c_1 和 c_2 的值在每个不等式中可以不同。下面就 $n = 1$ 和 $n = 2$ 的情形对定理 7.9.1 进行证明。

首先对不等式(7-9-6) 证明。对于 $n = 1$，设

$$g(x) = \cos\frac{\pi(x-a)}{4(b-a)} \tag{7-9-9}$$

及

$$u = gv \tag{7-9-10}$$

对上式两端求导，显然有

$$u'^2 = (gv)'^2 = g^2v'^2 + 2vv'gg' + v^2g'^2 = g^2v'^2 + (v^2gg')' - v^2gg'' \tag{7-9-11}$$

由于 $g^2v'^2 \geqslant 0$，去掉该项后，则有

$$(v^2gg')' - v^2gg'' \leqslant u'^2 \tag{7-9-12}$$

将不等式(7-9-12) 在 a 和 b 之间积分，得

$$v^2gg'\Big|_a^b - \int_a^b v^2gg''\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b u'^2\mathrm{d}x \tag{7-9-13}$$

然而，由式(7-9-9) 得

$$g'' = -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}g \tag{7-9-14}$$

于是有

$$v^2gg'' = -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}v^2g^2 = -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}u^2 \tag{7-9-15}$$

由于

$$\frac{g'}{g} = -\frac{\pi}{4(b-a)}\tan\frac{\pi(x-a)}{4(b-a)} \tag{7-9-16}$$

且

$$\frac{g'(a)}{g(a)} = 0, \frac{g'(b)}{g(b)} = -\frac{\pi}{4(b-a)}\tan\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4(b-a)} \tag{7-9-17}$$

故有

$$v^2gg'\Big|_a^b = v^2g^2\frac{g'}{g}\Big|_a^b = u^2\frac{g'}{g}\Big|_a^b = -\frac{\pi}{4(b-a)}u^2(b) \tag{7-9-18}$$

将式(7-9-15)和式(7-9-18)代入不等式(7-9-13)并移项,有

$$\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\int_a^b u^2\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b u'^2\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4(b-a)}u^2(b) \tag{7-9-19}$$

或

$$\int_a^b u^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2\mathrm{d}x + \frac{4(b-a)}{\pi}u^2(b) \tag{7-9-20}$$

因此,在式(7-9-6)中完全可令

$$c_1 = \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}, c_2 = \frac{4(b-a)}{\pi} \tag{7-9-21}$$

这样就可得到所需要的结果。证毕。

不等式(7-9-4)的证明完全类似。此时不用函数(7-9-9),而是考虑下列函数

$$g(x) = \cos\frac{\pi(x-b)}{4(b-a)} \tag{7-9-22}$$

那么常数 c_1 和 c_2 再次由式(7-9-21)给出。

不等式(7-9-7)是不等式(7-9-6)或不等式(7-9-4)的结果,故对于 c_1 和 c_2 的值,可再取表达式(7-9-21)。然而,在此情况下,如果上面给出的证明用下面的函数来做,可能用简单的方法改进所得到的估计

$$g(x) = \cos\frac{\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{4(b-a)} \tag{7-9-23}$$

那么用直接积分法易验证,在式(7-9-7)中可取

$$c_1 = \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}, c_2 = \frac{2(b-a)}{\pi} \tag{7-9-24}$$

再证明式(7-9-8)。对于 $n=2$,为了简单起见,设区域 G 被矩形 $R=[0\leqslant x\leqslant a]\times[0\leqslant y\leqslant b]$ 所包含,而 $u\in M$。若 $(x,y)\in R$,但不属于 G 时,规定 $u(x,y)=0$。令 $u=gv$。因为

$$\nabla u \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial gv}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial gv}{\partial y}\right)^2 =$$

$$\left(g\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(g\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 =$$

$$g^2\nabla v \cdot \nabla v + 2gv\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) + v^2\nabla g \cdot \nabla g =$$

$$g^2\nabla v \cdot \nabla v - v^2 g\Delta g + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 g\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 g\frac{\partial g}{\partial y}\right) \tag{7-9-25}$$

因 $g^2\nabla v \cdot \nabla v \geqslant 0$,去掉式(7-9-25)右端的第一项后,则有

$$\nabla u \cdot \nabla u \geqslant - v^2 g\Delta g + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 g\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 g\frac{\partial g}{\partial y}\right) \tag{7-9-26}$$

将不等式(7-9-26)在区域 G 上积分,并利用格林第一恒等式,得

$$\iint_G \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant - \iint_G v^2 g\Delta g \mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 g\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 g\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$- \iint_G v^2 g\Delta g \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma v^2 g\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{7-9-27}$$

将式(7-9-27)改写为

$$- \iint_G v^2 g\Delta g \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_G \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_\Gamma v^2 g\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{7-9-28}$$

或

$$- \iint_G v^2 g\Delta g \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_G \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left|\oint_\Gamma v^2 g\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}s\right| \tag{7-9-29}$$

令 $g = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$,则 $\Delta g = -\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)g$,且在区域 G 上 g 不为零。将 Δg 代入不等式(7-9-29)的左端,则有

$$- \iint_G v^2 g\Delta g \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\iint_G u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7-9-30}$$

不等式(7-9-29)右端第二项可写成

$$\left|\oint_\Gamma v^2 g\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}s\right| = \left|\oint_\Gamma u^2\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}s\right| \leqslant \oint_\Gamma u^2\left|\frac{1}{g}\right|\left|\frac{\partial g}{\partial n}\right|\mathrm{d}s \tag{7-9-31}$$

沿着边界 Γ,$\left|\frac{1}{g}\right|\left|\frac{\partial g}{\partial n}\right|$ 是有界函数,设在边界 Γ 上 $0 \leqslant \left|\frac{1}{g}\right|\left|\frac{\partial g}{\partial n}\right| \leqslant d$,则

$$\left|\oint_\Gamma v^2 g\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}s\right| \leqslant d\oint_\Gamma u^2\mathrm{d}s \tag{7-9-32}$$

令

$$c_1 = \pi^{-2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1}, c_2 = d\pi^{-2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1} \tag{7-9-33}$$

将式(7-9-30)、式(7-9-32)和式(7-9-33)代入式(7-9-29),则有

$$\iint_G u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant c_1\iint_G \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2\oint_\Gamma u^2\mathrm{d}s =$$

$$c_1\iint_G (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2\oint_\Gamma u^2\mathrm{d}s \tag{7-9-34}$$

证毕。

有时式(7-9-8)写成下列形式

$$\iint_G u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant c\left[\iint_G (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma u^2(s)\mathrm{d}s\right] \tag{7-9-35}$$

这时只要取 $c = \max(c_1, c_2)$ 即可。

用同样的方法,也可得到其他情况下不等式的证明。

定理7.9.2 (庞加莱不等式) 设 G 是具有利普希茨边界的区域,并设 M 是在 $\overline{G}$ 中具有连续一阶各偏导数的函数的线性集合。那么存在非负常数 c_3, c_4,它们依赖于所给定的区域而与 M 中的函数 $u(x)$ 无关,即有下列不等式

$$\int_G u^2(x)\mathrm{d}x \leqslant c_3 \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x + c_4\left[\int_G u(x)\mathrm{d}x\right]^2 \tag{7-9-36}$$

对于每个函数 $u \in M$ 成立。

该不等式在 $n = 2$ 和 $n = 1$ 两个特别情况下,可得两个不等式,它们分别是

$$\iint_G u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant c_3 \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_4\left[\iint_G u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^2 \tag{7-9-37}$$

和

$$\int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x \leqslant c_3 \int_a^b u'^2(x)\mathrm{d}x + c_4\left[\int_a^b u(x)\mathrm{d}x\right]^2 \tag{7-9-38}$$

当然,在不等式(7-9-36)至式(7-9-38)的每个中,常数 c_3 和 c_4 的值可能不同,尽管在这里使用相同的符号。

就 $n = 1$ 的情形,即对不等式(7-9-38)进行对定理7.9.2的证明。对于 $n > 1$ 的情形,其证明思想仍是类似的。

设 $u(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 内且属于 M 的任意函数(故 $u(x)$ 和 $u'(x)$ 在 $[a,b]$ 内是连续函数)。对于 $[a,b]$ 中的两个点 x_0, x_1,有

$$u(x_1) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} u'(x)\mathrm{d}x \tag{7-9-39}$$

且自然有

$$u^2(x_1) + u^2(x_0) - 2u(x_0)u(x_1) = \left[\int_{x_0}^{x_1} u'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \tag{7-9-40}$$

根据施瓦茨不等式,有

$$\left[\int_{x_0}^{x_1} u'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_1} 1^2\mathrm{d}x\right| \left|\int_{x_0}^{x_1} u'^2(x)\mathrm{d}x\right| \tag{7-9-41}$$

式中,若 $x_1 > x_0$,则绝对值可略去。根据式(7-9-40)和式(7-9-41),有

$$u^2(x_1) + u^2(x_0) - 2u(x_0)u(x_1) \leqslant (b-a)\int_a^b u'^2(x)\mathrm{d}x \tag{7-9-42}$$

不等式(7-9-42)在区间 $[a,b]$ 内先对 x_1 积分,而 x_2 暂时被视为常数,然后再对 x_2 积分,得

$$(b-a)\int_a^b u^2(x_0)\mathrm{d}x_0 + (b-a)\int_a^b u^2(x_1)\mathrm{d}x_1 -$$

$$2\int_a^b u^2(x_0)\mathrm{d}x_0 \int_a^b u^2(x_1)\mathrm{d}x_1 \leqslant (b-a)^3 \int_a^b u'^2(x)\mathrm{d}x \tag{7-9-43}$$

或写成

$$\int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b u(x)\mathrm{d}x\right]^2 \tag{7-9-44}$$

若取

$$c_3 = \frac{(b-a)^2}{2}, c_4 = \frac{1}{b-a} \tag{7-9-45}$$

就是不等式(7-9-38)。

不等式(7-9-36)和式(7-9-37)的证明可类似地进行。特别地,如果所考虑的区域具有边长为 l_1 和 l_2 的矩形,那么可能用几乎逐字与上述所考虑的问题类比,也就是用

$$c_3 = \max(l_1^2, l_2^2), c_4 = \frac{1}{l_1 l_2} \tag{7-9-46}$$

来使不等式(7-9-37)成立。

7.10 名家介绍

欧几里得(Euclid,约前330—前270) 古希腊数学家。生于雅典附近的麦加拉,卒于亚力山大。公元前300年左右,受托勒密一世(Ptolemy I Soter, 前367—前283)之邀,到亚历山大从事学术活动。一生著述颇多,其中以巨著《几何原本》(The Elements)最著名。该书原有13卷,后人增补2卷。这部最古老的数学著作博大精深,为2000年来用公理法建立演绎的数学体系树立了最早的典范,并一直是几何学的经典教本。英国数学家德·摩根(De Morgan, Augustus, 1806.6.27—1871.3.18)曾说,除了《圣经》,再没有任何一种书像《几何原本》这样拥有如此众多的读者,被译成如此多种语言。从1482年到19世纪末,《几何原本》的各种版本用各种语言出了1000版以上。主要著作还有《论图形的分割》、《现象》、《衍论》、《光学》和《音乐原理》等。

笛卡儿(Descartes, René, 1596.3.31—1650.2.11) 法国哲学家、数学家、物理学家和生理学家,解析几何学奠基人之一。生于土伦的拉埃耶,卒于瑞典斯德哥尔摩。1612年入巴黎普瓦捷大学读法学,1616年获博士学位。1617年从军。1625年返回巴黎。1628年移居荷兰,潜心研究数学、哲学、天文学、物理学、化学和生理学等诸多领域,埋头著述20多年。他的贡献是多方面的,尤其在数学方面以创立解析几何而著称,代表作是《几何学》。还对微积分的创立起到了重要的推动作用。在哲学上,开创重视科学认识的方法论和认识论,成为西方近代哲学的创始人之一。提出"我思故我在"的哲学原则,著有哲学著作《方法论》,后面有三篇著名的附录:《折光学》、《论大气现象》和《几何学》(1637)。

帕塞瓦尔(Parseval, des Chenes, Marc Antoine, 1755.4.27—1836.8.6) 法国数学家。生于罗西耶尔—欧萨利讷(Rosieres-aux-salines),卒于巴黎。曾因保皇罪受过拘禁,后因发表诗歌反对现政权被拿破仑通缉,逃亡国外。在1796年、1799年、1802年、1813年和1828年五次被提名法兰西科学院院士人选。主要研究微分方程、实变函数论与泛函分析。在常微分方程中,给出帕塞瓦尔等式。曾向法国科学院提交过5篇论文,第2篇的日期为1799年4月5日,内有关于无穷级数的求和的帕塞瓦尔定理。1801年7月给出了该定理的新的陈述。还用其定理去解决某些微分方程,这类方程被称为帕塞瓦尔方程,他的方法后来被泊松等人继续采用。

傅里叶(Fourier, Jean Baptiste Josoph, Baron, 1768.3.21—1830.5.16) 法国数学家、物理学家。生于奥塞尔,卒于巴黎。1794年入巴黎高等师范学校,1795年到巴黎综合工科学校执教。1798年随

拿破仑远征埃及，任军中文书和埃及学院秘书。1801 年回国后任伊泽尔省地方长官。1807 年受封为男爵。1817 年当选为法兰西科学院院士，1822 年任该院终身秘书。1827 年成为英国皇家学会会员，1929 年成为圣彼得堡科学院荣誉院士。主要贡献是用数学方法研究热的理论，1822 年出版《热的分析理论》一书，其中把函数表示为由三角函数所构成的级数即傅里叶级数，从而提出任一函数都可展成三角级数，这在数学物理上有普遍意义和十分广泛的应用。最早使用定积分符号，改进了代数方程符号法则的证法和实根个数的判别法等。

贝塞尔(Bessel, Friedrich Wilhelm, 1784.7.22—1846.3.17)　德国天文学家和数学家。生于明登，卒于柯尼斯堡。1809 年获格丁根大学博士学位。1810 年起任柯尼斯堡天文台终身台长兼柯尼斯堡大学教授，晚年曾兼任柏林天文台台长。1812 年当选为柏林科学院院士，1816 年成为法兰西科学院院士，1825 年成为英国皇家学会会员。编制包含 75000 颗星的基本星表，首先测定天鹅座 61 号星的距离和视差，预言有伴星存在。对数学的贡献主要在微分方程方面，并研究复数和非欧几何等问题，研究成果主要有贝塞尔函数。由于对三角函数系的研究，于 1828 年导出了著名的贝塞尔不等式。著有《天文学基础》(1818)。

施图姆(Sturm, Jacques Charles Francois, 1803.9.29—1855.12.18)　瑞士 — 法国数学家。生于日内瓦，卒于巴黎。1819 年入日内瓦学院学习。毕业后任家庭教师。不久进入巴黎科学界。1833 年入法国籍。1836 年成为巴黎科学院院士。还是柏林科学院、圣彼得堡科学院院士及英国皇家学会会员。1840 年任巴黎综合工科学校教授。在数学上做出了许多开创性、奠基性贡献。建立了 n 次实系数代数方程的实根的施图姆定理。提出了不求方程的解而得知解的零点分布状态的方法，微分方程理论的奠基人之一。与法国数学家刘维尔合作，研究二阶常微分方程的特征值与特征函数问题，取得若干重要结果。在射影几何、微分几何、几何光学和分析力学方面也有重要贡献。著有《力学教程》和《分析教程》等。

刘维尔(Liouville, Joseph, 1809.3.24—1882.9.8)　法国数学家。生于圣奥梅尔，卒于巴黎。1827 年毕业于巴黎综合工科学校。1833 年起先后任巴黎工科大学、索邦大学、法兰西学院教授和天文事物局局长。1836 年获博士学位，同年创办《纯粹与应用数学杂志》，并任主编达 40 年之久。1839 年当选为法兰西科学院院士。1850 年当选为英国皇家学会会员。还是圣彼得堡科学院名誉院士。发表近 400 篇论著，涉及数学和物理学的十几个分支。在初等函数的积分理论、解析函数理论、超越函数理论和微分几何等方面均取得了重要成果。建立了椭圆函数理论，还与施图姆合作开创了二阶常微分方程边值问题的研究方向，并取得若干重要成果。最先肯定了伽罗瓦(Evariste Galois, 1811.10.25—1832.5.31)理论的重要意义，并于 1846 年整理、出版了伽罗瓦的遗著。

埃尔米特(Hermite, Charles, 1822.12.24—1901.1.14)　法国数学家。生于洛林(Lorraine)地区的迪约兹(Dieuze)，卒于巴黎。1842 年入巴黎综合工科学校学习。1847 年获学士学位。1848 年任该校辅导教师。1856 年当选为巴黎科学院院士。1873 年当选为英国皇家学会会员。1892 年当选为法国科学院院士。还是圣彼得堡科学院名誉院士。1862 年任巴黎高等师范学校教授。1869 年任巴黎综合工科学校分析学教授和索邦大学高等代数教授。1876 年任巴黎大学理学院高等代数教授。法国杰出的分析学家，在特殊函数论、数论、群论、高等代数、数学分析、微分方程和力学等许多方面都做出了很有价值的工作。特别是 1873 年证明了 e 是超越数，这是很著名的结果。主要著作有《椭圆函数理论》(1863)和《分析教程》(1873)等。

利普希茨(Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund, 1832.5.14—1903.10.7)　德国数学家。生于柯尼斯堡附近，卒于波恩。1847 年入柯尼斯堡大学，不久转入柏林大学跟随狄利克雷学习数学，1853 年获博士学位。1864 年任波恩大学教授，后任校长。先后当选为巴黎、柏林、格丁根和罗马等科学院院士。在微分方程、贝塞尔函数理论、傅里叶级数、微分几何、数论、变分法、位势理论、张量分析和分析

力学等方面都有贡献。1869 年起，发表了大量论文，给出了黎曼 n 维空间度量结构的某些结果，开创了微分不变量理论研究，协变微分的奠基人之一。1873 年，建立了著名的鉴别微分方程解存在的“利普希茨条件”，得到了“柯西 — 利普希茨存在性定理”。在代数领域建立了“利普希茨代数”的超复数系，奠定了该数学分支的基础。

庞加莱(Poincaré, Jules Henri, 1854.4.29—1912.7.17)　法国数学家、物理学家和天文学家。生于南锡，卒于巴黎。1875 年毕业于巴黎综合工科学校，1879 年获巴黎大学数学博士学位。1881 年起任巴黎大学教授。1887 年当选为法兰西科学院院士，1906 年任法兰西科学院院长，1908 年当选为法兰西学院院士。工作内容涉及数学、物理、电磁学、热力学、光学、弹性理论、位势理论、动力学、流体力学、相对论和天体力学等多个方面。围绕天文学三体问题的研究，首创微分方程的定性理论和组合拓朴学。自守函数理论的创始人之一。被公认为19世纪末20世纪初国际数学界的领袖人物。发表论文近500篇，著有《天体力学的新方法》、《热动力学》、《科学与方法》和《最后的思想》等，身后法兰西科学院出版其著作 10 卷。

罗宾(Robin, Gustave, 1855—1897)　国籍、生卒不详。他精于容量理论与微分方程。曾提出罗宾常数与椭圆型偏微分方程的罗宾问题。

巴拿赫(Banach, Stefan, 1892.3.30—1945.8.31)　波兰数学家，泛函分析奠基者。生于克拉科夫，卒于乌克兰的利沃夫。1914 年毕业利沃夫大学并留校任教，1920 年获哲学博士学位。1927 年任利沃夫大学教授。1939—1941 年任利沃夫大学校长。1924 年成为波兰科学院通信院士，还是乌克兰科学院通信院士，1939 年任波兰数学学会会长。1939 年获波兰科学院重大科学奖。和斯坦因豪斯(Steinhaus, Hugo Dionisi, 1887.1.14—1972.2.25)　共同创立并领导了利沃夫学派。1932 年，名著《线性算子理论》出版，并成为泛函分析的最重要经典著作之一。引进了赋范线性范数空间概念，建立了其上的线性算子理论。在级数理论、集合论、测度论、积分理论、常微分方程理论和复变函数理论等方面都有重要贡献。发表过 58 篇(部) 论著。

弗里德里希斯(Friedrichs, Kurt Otto, 1901.9.28—1983.1.2)　德国 — 美国数学家。生于基尔，卒于纽约。早年在格丁根大学求学，是库朗(Courant, Richard, 1888.1.8—1972.1.27) 的学生。1925 年获博士学位。1925—1937 年相继在格丁根大学、亚琛大学和不伦瑞克理工学院任教。1937 年移居美国，任纽约大学教授。1943 年起任库朗数学科学研究所教授，1953—1967 年相继任该所副所长和所长。1959 年当选为美国国家科学院院士，还是格丁根科学院和慕尼黑科学院通信院士。1968—1969 年任美国数学会副会长。1977 年获美国国家科学奖章。在数学物理、微分方程理论、广义函数、微分算子理论、弹性力学和流体力学等方面均做出贡献。著有《高阶常微分方程讲义》(1965)、《希尔伯特空间的谱摄动》(1965)、《伪微分算子》(1968)、《电磁理论的数学方法》(1974) 和《泛函积分》(1976) 等著作。

钱伟长(1912.10.9—)　中国数学家和力学家。生于无锡。1935 年毕业于清华大学，1942 年获多伦多大学应用数学博士学位。1946 年起先后任清华大学教授和副校长。1954 年为中科院学部委员(后改为院士)，1956 年当选为波兰科学院院士。中国科学院力学研究所和自动化研究所的创始人。1983 年起任上海工业大学校长、上海大学校长。1984 年创建上海市应用数学和力学研究所并任所长。历任全国政协副主席，民盟中央副主席、名誉主席。中国近代力学的奠基人之一，主要学术贡献是板壳非线性内禀统一理论，板壳大扰度问题的摄动解和奇异摄动解，广义变分原理、环壳解析解和汉字宏观字型编码等方面。著有《弹性力学》、《变分法及有限元》、《穿甲力学》和《广义变分原理》等多部著作。

习 题 7

7.1 设 T_1 和 T_2 是希尔伯特空间 H 到自身的有界线性算子，若对任何 $x,y\in H$，有 $(T_1x,y)=(T_2x,y)$，证明 $T_1=T_2$。

7.2 设内积空间 V 的两个矢量 u 和 v 正交，证明 $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$。

7.3 试求算子 T 是对称算子所应满足的边界条件。

(1) $T=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$，$D_T:\{u(x)\mid u(x)\in C^2[0,l]\}$；

(2) $T=-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]$，$D_T:\{u(x)\mid u(x)\in C^4[0,l]\}$，且 $p(x)\in C^2[0,l]$，并大于零。

7.4 设算子 $T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的定义域为 $D_T:\{u(x)\mid u(x)\in C^1[x_0,x_1],y(x_0)=y(x_1)=0\}$，试求 T 的共轭算子。

7.5 试将贝塞尔(Bessel)方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

化成自共轭方程。

7.6 设算子 $T=-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 的定义域为 $D_T:\{u(x)\mid u(x)\in C^2(D),u|_\Gamma=0\}$，$\Gamma$ 为 D 的边界，试求 T 的共轭算子。

7.7 设算子 $T=\nabla^2[p(x,y)\nabla^2]$，其中 $\nabla^2=\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，$D_T:\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^4(D)\}$，且 $p(x,y)\in C^2(D)$ 并大于零，试证 T 是自共轭算子的条件为

$$\oint_\Gamma\left[v\frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2u)-u\frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2v)+p\nabla^2v\frac{\partial u}{\partial n}-p\nabla^2u\frac{\partial v}{\partial n}\right]\mathrm{d}\Gamma=0,$$

式中 $v\in D_T$，$\dfrac{\partial}{\partial n}(\cdot)$ 为 D 的边界 Γ 的外法线方向导数。

7.8 已知施图姆—刘维尔型二阶微分方程

$$Ty=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=f(x)$$

的边界条件为 $y(x_0)=0,y(x_1)=0$，其等价泛函为 $J[y]=(Ty,y)-2(f,y)$。若 $p(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 中的最小值为 $p_m(p_m\geqslant0)$，$q(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 中的最小值为 $q_m(q_m\geqslant0)$，试证明 $(Ty,y)\geqslant r^2(y,y)$，其中 $r^2=\left[\dfrac{2p_m}{(x_1-x_0)^2}+q_m\right]$。

7.9 设微分方程 $x^2y''+2xy'-xy-x=0$，其边界条件为 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$。试将上述定解问题化为等价的变分问题。

7.10 试求与下列边值问题等价的泛函。

(1) $x^2y''+2xy'-2y=f(x),x\in(0,l),y(0)=y(l)=0$，其中 $f(x)\in C[0,l]$；

(2) $-y''=f(x),x\in(0,l),y'(0)=y'(l)=0$，其中 $f(x)\in C[0,l]$ 且满足 $\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=0$；

(3) $y^{(4)}=f(x),x\in(0,l),f(x)\in C[0,l],y(0)=y(l)=0,y''(0)=y''(l)=0$。

7.11 设定解问题

$$\Delta^2u=f(x,y)\quad(x,y\in D)$$

$$u|_\Gamma = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$$

式中 Δ^2 是重调和算子，Γ 是域 D 的边界，证明 Δ^2 是对称正定算子且 $(\Delta^2 u, u) = (\Delta u, \Delta u)$，并求出与定解问题等价的变分问题。

7.12　设泊松方程第一边值问题

$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y), x,y \in D, f(x,y) \in C(D), u|_\Gamma = 0$，这里 Γ 为 D 的边界。试证明二维拉普拉斯负算子 $-\Delta$ 是对称正定算子，并求出等价的变分问题。

7.13　设闭区域 D 的边界由 Γ_1 和 Γ_2 所组成，其中 Γ_1 为 Ox 轴上的线段 $a \leqslant x \leqslant b$，$\Gamma_2$ 为 xOy 平面的上半平面内的曲线弧，且该弧两端点在 Ox 轴上与 Γ_1 的端点相连接。又设 $\varphi(y) \in C(D)$，$\omega(y) \in C^1(D)$，且都大于零，$f(x,y) \in C(D)$，$u \in C^2(D)$。试证：与边值问题即特里科米(Tricomi, Francessco Giacomo Filippo, 1897.5.5—1978)问题

$$\begin{cases} Tu \equiv -\varphi(y)u_{xx} - \dfrac{\partial}{\partial y}[\omega(y)u_y] = f(x,y) \quad (x,y \in D) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad u|_{\Gamma_2} = 0 \end{cases}$$

等价的变分问题为求泛函

$$J[u] = \iint_D [\varphi(y)u_x^2 + \omega(y)u_y^2 - 2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, u|_{\Gamma_2} = 0$$

的极小值问题。

7.14　试找出与微分方程边值问题

$$\begin{cases} x^3 y'' + 3x^2 y' + y - x = 0 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

相应的变分问题。

7.15　证明：如果在 $x = x_0$ 与 $x = x_1$ 处满足适当的边界条件，那么四阶微分方程

$$(py'')'' + (qy')' + ry = 0$$

能转换成一个变分问题。其中 p、q 和 r 是 x 的已知函数。与该微分方程等价的变分问题是什么？必要的边界条件是什么？

第 8 章　变分问题的直接方法

各种变分问题的最后求解都可归结为解欧拉方程的边值问题。然而只有在一些特殊情况下欧拉方程才能求出解析解，在大多数情况下，欧拉方程的解析解无法求出。因此需要另外的求解方法。1900 年 8 月，第二届国际数学家代表大会在巴黎举行，希尔伯特在会上作了“数学问题”的报告，提出了 23 个重大数学问题，其中最后一个问题就是关于变分法的直接求解问题，并且第 19 和第 20 个问题也涉及变分法。

变分问题的直接方法是指不通过求解欧拉方程而直接从泛函出发，利用给定的边界条件，求出使泛函取得极值的极值函数的近似表达式。当然，有时也能得到精确解。此前的变分问题都是通过求解欧拉方程边值问题得到，这种求解方法称为**变分问题的间接方法**。

变分问题的近似解法有欧拉有限差分法、里茨法、坎托罗维奇法、伽辽金法、最小二乘法、特雷夫茨法、配置法和分区平均法等。欧拉有限差分法、里茨法、坎托罗维奇法和伽辽金法等称为**经典变分法**。本章介绍常用的前五种近似方法和极小(极大)化序列，并讨论算子方程的特征值和特征函数的求解问题。

8.1　极小(极大)化序列

如果从所有满足边界条件和一定的连续条件的容许函数中寻找使泛函达到极值的函数，则这个极值函数一定满足欧拉方程且是所给变分问题的解。如果不是从所有容许函数中寻找使泛函达到极值的函数，而只是从有限个容许函数中寻找使泛函达到极值的函数，这就缩小了容许函数的寻找范围，使找到的极值，比如说是极小值，一定比真正的极小值大，仅在最好的情况下，即极小值恰好在容许函数的寻找范围内时，两者才能相等，而这种情况很少出现。如果逐步扩大容许函数的寻找范围，则每次所得到的极小值就逐步减小，并逐步趋向真正的极小值。从理论上讲，只有把容许函数的寻找范围扩大到所有满足边界条件和一定的连续条件的容许函数时，才能使泛函达到真正的极值。

除了通过欧拉方程求得解析解外，实际上很少能把容许函数的寻找范围扩大到所有的容许函数。如果在既满足边界条件又满足一定的连续条件的一系列容许函数中逐步扩大寻找范围，也能逐步趋近真正的极值。如果极值是极小值，则从较大的一侧趋于极小值，即提供了极小值的上限。如果极值是极大值，则从较小的一侧趋于极大值，即提供了极大值的下限。

设有一系列既满足边界条件又满足一定的连续条件的函数 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$。用这些函数构成一系列容许函数作为极值函数的各级近似函数

$$\begin{cases} u_0(x) = a_{00}\varphi_0(x) \\ u_1(x) = a_{10}\varphi_0(x) + a_{11}\varphi_1(x) \\ u_2(x) = a_{20}\varphi_0(x) + a_{21}\varphi_1(x) + a_{22}\varphi_2(x) \\ \cdots \\ u_n(x) = a_{n0}\varphi_0(x) + a_{n1}\varphi_1(x) + \cdots + a_{nn}\varphi_n(x) \\ \cdots \end{cases} \tag{8-1-1}$$

式中，a_{ij} 为待定系数。计算时，选取不同的 n 值使泛函达到各级近似的极值。设用 $u_0(x)$ 作为近似极值函数时，泛函取极值为 J_0；用 $u_1(x)$ 作为近似极值函数时，泛函取极值为 J_1；因 $u_1(x)$ 比 $u_0(x)$ 的选择范围大且包含 $u_0(x)$ 的选择范围，故若为极小值问题，则有 $J_0 \geqslant J_1$，依此类推，有 $J_i \geqslant J_{i+1}$，于是有

$$J_0 \geqslant J_1 \geqslant J_2 \geqslant \cdots \geqslant J_n \geqslant \cdots \geqslant J \tag{8-1-2}$$

式中，J 为泛函的真正极小值。

能使各级近似极值像式(8-1-2)这样逐步趋于真正的极小值的函数序列$\{u_n\}(n = 1,2,\cdots)$称为泛函的**极小化序列**。极小化序列提供泛函极小值的上限。

同理，对于极大值问题，如果有函数序列$\{u_n\}(n = 0,1,2,\cdots)$能使泛函的各级近似极值适合于如下不等式

$$J_0 \leqslant J_1 \leqslant J_2 \leqslant \cdots \leqslant J_n \leqslant \cdots \leqslant J \tag{8-1-3}$$

式中，J 为泛函的真正极大值，则该函数序列称为泛函的**极大化序列**。极大化序列提供泛函极大值的下限。

现在提出这样的问题，若泛函的各级近似极值的极限为泛函的真正极值，即

$$\lim_{n\to\infty} J_n = J \tag{8-1-4}$$

问极小化序列(或极大化系列)的极限是否为真正的极值函数?即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = y(x) \tag{8-1-5}$$

是否一定成立?式中 $y(x)$ 为使泛函达到极小值的极值函数。

答案是有条件的。1870 年，魏尔斯特拉斯最先用一个特例指出，极小化序列(或极大化序列)的极限并非无条件地是真正的极值函数。换句话说，只有在一定条件下，极小(或极大)化序列才能收敛到使泛函达到极小(或极大)值的极值函数。当 $J[y]$ 是一个与正定算子等价的泛函时，在一定条件下，它的每个极小(或极大)化序列都收敛到使泛函达到极小(或极大)值的极值函数。下面的例题给出了得不到正确极值函数的极小化序列的反例。

例 8.1.1　狄利克雷问题。求泛函

$$J[u] = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

的极小值。设 D 的边界为 Γ，且曲面 $u(x,y)$ 通过 Γ，即在 Γ 上 $u(x,y) = 0$。所有容许曲面在 D 中都是连续的，且是逐片光滑的。

解　显然，这个泛函的极值函数 $u(x,y) = 0$。因为无论在什么情况下，都有 $u_x^2 + u_y^2 \geqslant 0$，只要 $u(x,y)$ 在 D 内有一点的值不为零，则在该点附近必有一个邻域，在此邻域内，有不全为零的 u_x 和 u_y 存在，使得 $u_x^2 + u_y^2 \geqslant 0$，而泛函 $J[u]$ 就比零大。所以这个问题的极值函数 $u(x,y)$ 在 D 内到处为零，而泛函 $J[u]$ 也为零。

对于这个问题，可以找到一个极小化序列，其泛函的各级近似极值的极限为零，但各级近似极值的函数不是真正的极值函数即 $u(x,y) = 0$。

设在边界 Γ 内有一个半径为 R 的圆，其中心在坐标原点。设在圆 R 和边界 Γ 之间的区域内，$u(x,y)$ 到处为零。设有另一个半径为 R^2 的圆，其中 $R < 1$，则圆 $r = R^2$ 必定在圆 $r = R$ 之内。设近似极值函数为

$$u(x,y) = \begin{cases} 0 & (\text{在边界 } \Gamma \text{ 之内和圆 } r = R \text{ 之外}) \\ \dfrac{A}{\ln R}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} = \dfrac{A}{\ln R}\ln\dfrac{r}{R} & (R^2 \leqslant r \leqslant R, R < 1) \\ A & (0 \leqslant r \leqslant R^2) \end{cases} \tag{2}$$

式(2)已采用了极坐标(r,θ),极点即为坐标原点。这个函数的图形见图8-1-1,它是连续的,而且是逐片光滑的。

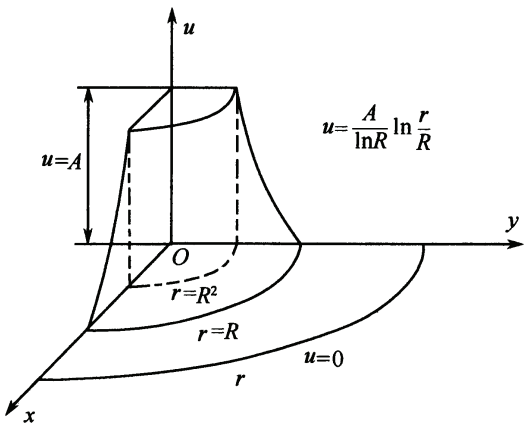


图8-1-1　函数(2)表示的曲面

将式(2)分别对x和y取偏导数,得

$$u_x = \frac{A}{\ln R}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{A}{\ln R}\frac{x}{r^2} \tag{3}$$

$$u_y = \frac{A}{\ln R}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{A}{\ln R}\frac{y}{r^2} \tag{4}$$

将式(3)与式(4)代入式(1),在$r=R$之外和$r=R^2$之内,$u_x^2+u_y^2\equiv 0$,故式(2)可以用极坐标表示为

$$J[u(R)] = \frac{A^2}{(\ln R)^2}\int_{R^2}^{R}\frac{1}{r^2}2\pi r\mathrm{d}r = -\frac{2\pi A^2}{\ln R} \tag{5}$$

这样可以看到,当R的值逐步减小时,可得到一个极小化序列即式(2),其极限为

$$\lim_{R\to 0}J[u(R)] = 0 \tag{6}$$

它是该问题的真正极小值。但当$R\to 0$时,式(2)的函数极限并不是真正的极值函数,即$u(x,y)$到处为零,而是

$$u(x,y) = \begin{cases} 0 & (r\neq 0) \\ A & (r=0) \end{cases} \tag{7}$$

也就是说,当$R\to 0$时,并不能从极小化序列中求得真正的极值函数$u(x,y)=0$。从此例可知,极小化(或极大化)序列并不一定能给出泛函的极值函数。

8.2　欧拉有限差分法

欧拉早在1768年就提出了用有限差分方法来求变分问题的近似解,这标志着极值问题数值解法的开端。设最简泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{8-2-1}$$

其边界条件为

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1 \tag{8-2-2}$$

求解上述泛函变分问题近似解的一般步骤如下:

(1)将区间$[x_0,x_1]$划分为n个小段,其中每个小段称为一个**有限单元**,而每个分点称为**节点**。单元的长度既可以相等,也可以不相等。在每个单元内假定宗量y是自变量x的函数,可写成

$$y(x) = \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}y_{i-1} + \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}y_i \quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i) \tag{8-2-3}$$

即用一条折线来代替解析解中的可取曲线,如图8-2-1所示。由于泛函(8-2-1)只涉及y和y',而不涉及高阶导数,所以用折线来近似地代替可取曲线是合理的。

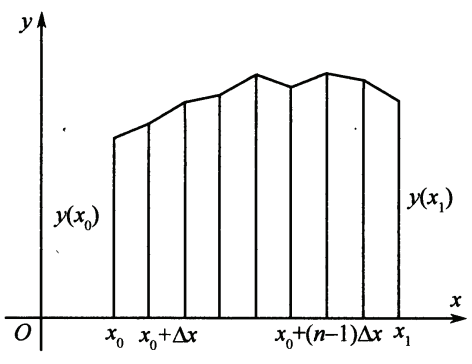


图8-2-1　欧拉差分法的折线

(2)把式(8-2-3)代入式(8-2-1),将泛函$J[y(x)]$转换为未知量$y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$的函数,

记为 $J[y(x)]=\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$，并令 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$ 在 $y_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 处达到极值，因而得方程组

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)\tag{8-2-4}$$

由此可确定未知数 y_i，从而得到变分问题近似解的一组折线。

将上述最简泛函推广到一般情况，如果泛函中涉及宗量的 n 阶导数 $y^{(n)}$，则可作 n 阶插值函数，使所得的近似解具有 C^n 连续性。

(3) 令 $n\to\infty$ 取极限，只要对函数 F 加些限制，便得到变分问题的解。

更方便的办法是在折线上计算泛函 $J[y(x)]$ 的近似值，即用积分和

$$\sum_{i=1}^{n}F\left(x_i,y_i,\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)\Delta x$$

来代替积分

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x}F\left(x,y,\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right)\mathrm{d}x\tag{8-2-5}$$

可使计算简便一些。

在泛函(8-2-1)的折线上，可用矩形公式有限和的形式表示所给积分，即

$$J[y(x)]\approx\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x\tag{8-2-6}$$

因为在这个和数中只有第 $i-1$ 和第 i 两项

$$F\left(x_{i-1},y_{i-1},\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x,F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$

依赖于 y_i，故方程 $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}=0(i=1,2,\cdots,n-1)$ 取下面的形式

$$F_{y'}\left(x_{i-1},y_{i-1},\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x+F_y\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x+$$

$$F_{y'}\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x=0\tag{8-2-7}$$

式中，$i=1,2,\cdots,n-1$。

令 $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\Delta y_{i-1}=y_i-y_{i-1}$，式(2-8-7)可改写成

$$F_y\left(x_i,y_i,\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)-\frac{F_{y'}\left(x_i,y_i,\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)-F_{y'}\left(x_{i-1},y_{i-1},\frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}=0\tag{8-2-8}$$

或

$$F_y\left(x_i,y_i,\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)-\frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x}=0\tag{8-2-9}$$

令 $n\to\infty$ 而取极限，就可得到欧拉方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0\tag{8-2-10}$$

所求的那个实现极值的函数 $y(x)$ 应当满足这个方程。在其他变分问题中，极值的基本必要条件可以用同样的方法获得。

例 8.2.1 求泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x$ 极小值问题中的近似解，边界条件为 $y(0)=y(1)=0$。

解 取 $\Delta x = \frac{1-0}{5} = 0.2$ 以及

$$y_0 = y(0) = 0, y_1 = y(0.2), y_2 = y(0.4), y_3 = y(0.6), y_4 = y(0.8), y_5 = y(1) = 0$$

在相应的点的导数值由近似公式

$$y_k' = y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}$$

计算,可算得

$$y'(0) = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{y_1 - 0}{0.2}, y'(0.2) = \frac{y_2 - y_1}{0.2}, y'(0.4) = \frac{y_3 - y_2}{0.2}$$

$$y'(0.6) = \frac{y_4 - y_3}{0.2}, y'(0.8) = \frac{y_5 - y_4}{0.2} = \frac{0 - y_4}{0.2}$$

将所给积分用矩形公式表示为有限和的形式,即

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \approx [f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) + \cdots + f(x_1)]\Delta x$$

将以上数值代入矩形公式的右端,得

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left[\left(\frac{y_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{-y_4}{\Delta x}\right)^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + 2(\Delta x y_1 + 2\Delta x y_2 + 3\Delta x y_3 + 4\Delta x y_4)\right]\Delta x$$

这样就可建立确定所求函数的节点纵坐标 y_1、y_2、y_3 和 y_4 的方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{y_1}{0.02} - \frac{y_2 - y_1}{0.02} + 2y_1 + 0.4 = 0 \\ \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{0.02} - \frac{y_3 - y_2}{0.02} + 2y_2 + 0.8 = 0 \\ \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = \frac{y_3 - y_2}{0.02} - \frac{y_4 - y_3}{0.02} + 2y_3 + 1.2 = 0 \\ \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial \varphi}{\partial y_4} = \frac{y_4 - y_3}{0.02} + \frac{y_4}{0.02} + 2y_4 + 1.6 = 0 \end{cases}$$

经整理得

$$\begin{cases} 2.04y_1 - y_2 = -0.008 \\ -y_1 + 2.04y_2 - y_3 = -0.016 \\ -y_2 + 2.04y_3 - y_4 = -0.024 \\ -y_3 + 2.04y_4 = -0.032 \end{cases}$$

将 $\Delta x = 0.2$ 代入该方程组并求解,得 $y_1 = -0.0285944$, $y_2 = -0.0503325$, $y_3 = -0.580840$, $y_4 = -0.0441588$。此题的解析解是 $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1} - x$。

8.3 里茨法

里茨法是变分问题直接解法中最重要的一种,其基本思想是,不把泛函的值放在容许函数中去考虑,而是用选定的线性无关的函数序列的线性组合逼近变分问题的极值曲线。下面介绍这种方法。

设 n 个函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 线性无关且满足线性泛函

$$J[y] = (Ty, y) - 2(f, y) \tag{8-3-1}$$

的边界条件。设 $\varphi_k(x)(k = 1,2,\cdots,n)$ 的线性组合为

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \tag{8-3-2}$$

式中 a_k 是待定常数。函数 $\varphi_k(x)(k = 1,2,\cdots,n)$ 是取自完备函数系列的一组线性无关函数，称为**基函数、测试函数**或**坐标函数**。所谓完备函数系列是指任一函数都可用此函数系列表示。

将式(8-3-2)代入式(8-3-1)，由于 Ty 是线性的，则有

$$J[y_n] = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (T\varphi_i, \varphi_j) - 2\sum_{i=1}^{n} a_i (\varphi_i, f) \tag{8-3-3}$$

此时泛函 $J[y_n]$ 是自变量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数，令 $J[y_n]$ 取得极值，则有

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \cdots, \frac{\partial J}{\partial a_n} = 0 \tag{8-3-4}$$

可确定出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。从而得到变分问题的近似解

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \tag{8-3-5}$$

式中 y_n 称为泛函变分问题的**第 n 近似解**或 **n 次近似解**。

令 $n \to \infty$，如果式(8-3-5)的极限存在，得

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{8-3-6}$$

即为变分问题的准确解。

将式(8-3-3)代入式(8-3-4)，可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (T\varphi_i, \varphi_j) = (\varphi_i, f) \tag{8-3-7}$$

例 8.3.1 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (x^2 y'^2 - xy)\mathrm{d}x, y(0) = 0, y(1) = 0$ 的变分问题的第一近似解。

解 设 $y_1(x) = a_1 x(1-x), y_1'(x) = a_1(1-2x)$，则

$$J[a_1] = \int_0^1 [x^2 a_1^2 (1-2x)^2 + a_1 x^2 (1-x)]\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 [a_1^2 (x^2 - 4x^3 + 4x^4) + a_1 (x^2 - x^3)]\mathrm{d}x$$

令

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0$$

得

$$\int_0^1 [2a_1 (x^2 - 4x^3 + 4x^4) + (x^2 - x^3)]\mathrm{d}x = 0$$

积分，得

$$\frac{2}{3}a_1 - 2a_1 + \frac{8}{5}a_1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0$$

解出 a_1 为

$$a_1 = -\frac{5}{16}$$

于是泛函 J 变分问题的第一近似解为

$$y_1(x) = -\frac{5}{16}x(1-x)$$

例 8.3.2 求 $y(x)$,使泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\mathrm{d}x$ 取极小值,其中 $y(0) = 0, y(1) = 0$。

解 取坐标函数系 $u_n(x) = (1-x)x^n$,其中 $n = 1,2,\cdots$,它满足边界条件。于是有

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x)x^k$$

取 $n = 1,2$ 来计算近似值。先求 $n = 1$ 的情形,此时有

$$y_1(x) = a_1(1-x)x$$

将上式代入泛函,得

$$J[a_1] = \int_0^1 [a_1^2(1-2x)^2 - a_1^2(1-x)^2 - 2a_1(1-x)x^2]\mathrm{d}x = \frac{3}{10}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1$$

令

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \text{即} \frac{3}{5}a_1 - \frac{1}{6} = 0$$

得

$$a_1 = \frac{5}{18}$$

于是有

$$y_1(x) = \frac{5}{18}(1-x)x$$

再求 $n = 2$ 的情形,此时设

$$y_2(x) = a_1(1-x)x + a_2(1-x)x^2 = x(1-x)(a_1 + a_2x)$$

将上式代入泛函,且令 $\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0$,得联立方程为

$$\begin{cases} \frac{3}{10}a_1 + \frac{3}{20}a_2 = \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20}a_1 + \frac{13}{105}a_2 = \frac{1}{20} \end{cases}$$

解之,得

$$a_1 = \frac{71}{369}, a_2 = \frac{7}{41}$$

于是,得

$$y_2(x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right)$$

此题的解析解为

$$y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

近似解与解析解的值及误差见表 8.3.1 所列。

表 8.3.1　近似解与解析解的值及误差

x	$y(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	y_1 误差 %	y_2 误差 %
0.25	0.0440137	0.0520833	0.0440803	18.334490	0.1513848
0.5	0.0697470	0.0694444	0.0694444	-0.8232490	-0.8232490
0.75	0.0600562	0.0520833	0.0600864	-13.275628	0.0503131

从表中可以看出，二次近似解的误差普遍降低了。

例 8.3.3　设一质量为 m 的火箭作水平飞行，其飞行距离为下列泛函

$$J[v(m)] = \int_{m_1}^{m_0} \frac{v}{av^2 + bm^2}(c + mv')\mathrm{d}m$$

式中，a、b 和 c 均为大于零的常量，试用里茨法求解上述问题。

解　设近似解为

$$v = \alpha m \tag{1}$$

式中，α 是待定常数。

将式(1) 对 m 求导，得

$$v' = \alpha \tag{2}$$

将式(1) 和式(2) 代入泛函表达式，化简并积分，得

$$J[v(m)] = \int_{m_1}^{m_0} \frac{\alpha}{(a\alpha^2 + b)m}(c + \alpha m)\mathrm{d}m = \frac{c\alpha}{a\alpha^2 + b}\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) + \frac{\alpha^2(m_0 - m_1)}{a\alpha^2 + b} \tag{3}$$

将式(3) 对 α 求导，得

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{b - a\alpha^2}{(a\alpha^2 + b)^2}c\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) + \frac{b - a\alpha^2}{(a\alpha^2 + b)^2}(m_0 - m_1) \tag{4}$$

令式(4) 等于零，得

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} \tag{5}$$

据题意，m、v 均应取正值，显然上式应取正号。将式(5) 代入式(3)，结果为

$$J[y(x)] = \frac{c}{2\sqrt{ab}}\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) + \frac{(m_0 - m_1)}{2a} \tag{6}$$

由例 2.4.5 可知，式(6) 正是解析解。

例 8.3.4　求 $y(x)$，使泛函 $J[y] = \int_0^1 y'^2\mathrm{d}x$ 取极小值，其约束条件为 $\int_0^1 y^2\mathrm{d}x = 1$，边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = 0$。

解　取坐标函数系 $u_n(x) = (1 - x)x^n (n = 1,2,\cdots)$，它满足边界条件。于是有

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1 - x)x^k \tag{1}$$

取 $n = 2$ 来计算近似值。此时有

$$y_2(x) = a_1(1 - x)x + a_2(1 - x)x^2 \tag{2}$$

$$y_2^2(x) = (x^2 - 2x^3 + x^4)a_1^2 + 2(x^3 - 2x^4 + x^5)a_1a_2 + (x^4 - 2x^5 + x^6)a_2^2 \tag{3}$$

$$y_2'(x) = (1 - 2x)a_1 + (2x - 3x^2)a_2 \tag{4}$$

$$y_2'^2(x) = (1 - 4x + 4x^2)a_1^2 + 2(2x - 7x^2 + 6x^3)a_1a_2 + (4x^2 - 12x^3 + 9x^4)a_2^2 \tag{5}$$

将 y_2 和 y_2' 分别代入约束条件和泛函中，得

$$\frac{1}{30}(a_1^2 + a_1a_2) + \frac{1}{105}a_2^2 = 1 \tag{6}$$

或

$$a_1^2 + a_1a_2 = 30 - \frac{2}{7}a_2^2 \tag{7}$$

$$J[y] = \int_0^1 (1 - 4x + 4x^2)a_1^2 + 2(2x - 7x^2 + 6x^3)a_1a_2 + (4x^2 - 12x^3 + 9x^4)a_2^2]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(a_1^2 + a_1a_2) + \frac{2}{15}a_2^2 \tag{8}$$

将式(7)代入式(8),得

$$J[y] = 10 + \frac{4}{105}a_2^2 \tag{9}$$

因 $a_2^2 \geqslant 0$,若使 $J[y(x)]$ 最小,应使 $a_2 = 0$,再由式(1)得 $a_1 = \pm\sqrt{30}$。于是得第二近似解为

$$y_2 = \pm\sqrt{30}x(1 - x) \tag{10}$$

此题求解时利用了 a_1^2 和 a_1a_2 的系数相等的特点,仅用代数方法就获得了近似解,而没有采用对 a_1、a_2 求导的方法来求解。

8.4 坎托罗维奇法

坎托罗维奇法是在里茨法的基础上求变分问题的近似解,坎托罗维奇于1941年提出了这个近似变分法。它主要被用来求解多变量函数的泛函的变分问题。

坎托罗维奇法求解泛涵

$$J[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)] = \underbrace{\iint\cdots}_{n}\int_{\Omega} F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{8-4-1}$$

在边界条件

$$u(S) = f(S) \qquad (S \in \Omega \text{ 的边界}) \tag{8-4-2}$$

下的变分问题的一般步骤是:

(1)适当选取坐标函数系

$$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots$$

作函数

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_i)\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{8-4-3}$$

式中,$a_k(x_i)$ 是某一自变量的函数。

(2)将 u_m 代入泛函 J,使泛函 J 转换为 $a_1(x_i),a_2(x_i),\cdots,a_m(x_i)$,这 m 个函数的泛函为 $\bar{J}$,而 $a_1(x_i),a_2(x_i),\cdots,a_m(x_i)$ 的选取应使泛函 $\bar{J}$ 达到极值,从而得到原泛函 J 的 m 次近似解。

(3)令 $m \to \infty$,若极限

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_i)\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{8-4-4}$$

存在,则它就是变分问题的准确解。

坎托罗维奇法与里茨法的不同之处在于,里茨法中的 a_k 是待定常数,而坎托罗维奇法中的 a_k 是自变量的函数。一般情况下,在坐标函数相同和近似解次数相同的条件下,用坎托罗维奇法求得

的近似解比里茨法求得的近似解要更精确一些，这是由于以变量 $a_k(x_i)$ 为系数的函数类比以常数 a_k 为系数的函数类在函数范围选择上更为宽广。

例 8.4.1 试求泛函

$$J[u(x,y)] = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(u_x^2 + u_y^2 - 2u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极值问题的一次近似解，其中在矩形 $-a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b$ 的边界上，$u = 0$。

解 设 $u_1 = (b^2 - y^2)c(x)$ 它在直线 $y = \pm b$ 上满足边界条件。此时原泛函变为

$$J[c(x)] = \int_{-a}^{a}\left[\frac{16}{15}b^5c'(x)^2 + \frac{8}{3}b^3c^2(x) - \frac{8}{3}b^3c(x)\right]\mathrm{d}x$$

其欧拉方程为

$$c''(x) - \frac{5}{2b^2}c(x) = -\frac{5}{4b^2}$$

这是一个二阶常系数微分方程，其通解为

$$c(x) = c_1\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}\right) + c_2\sinh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}\right) + \frac{1}{2}$$

由边界条件 $c(-a) = 0, c(a) = 0$，可确定

$$c_1 = -\frac{1}{2\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}\right)}, c_2 = 0$$

得

$$c(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}\right)}\right]$$

于是得

$$u_1 = \frac{1}{2}(b^2 - y^2)\left[1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}\right)}\right]$$

若要获得更准确的解，还可设

$$u_2 = (b^2 - y^2)c_1(x) + (b^2 - y^2)^2c_2(x)$$

来求解之。

8.5 伽辽金法

用里茨法求解微分方程的边值问题，首先要得到其对应的泛函，然而在实际问题中，并不是所有的边值问题都存在所对应的泛函，这就使里茨法的应用受到了限制。下面介绍**布勃诺夫—伽辽金法**，简称**伽辽金法**，它是更广泛一类微分方程边值问题的近似解法，它不仅解除了对算子 T 为正定的限制，而且不要求引入泛函。

布勃诺夫—伽辽金法是布勃诺夫于1913年首先提出来的，他建议采用正交基函数序列求解微分方程问题，1915年伽辽金在一篇论文中也提出了这样的方法，并把它加以推广，它属于**加权余量法**，是求解算子方程的一种近似计算方法，也称为**加权残数法或加权剩余法**。它是工程计算中广泛使用的一种近似计算方法。下面介绍加权余量法的基本原理。

设算子方程及边界条件分别为

$$Tu - f = 0 \quad (u \in V) \tag{8-5-1}$$

$$Bu - g = 0 \quad (u \in S) \tag{8-5-2}$$

式中 u 为待求的未知函数，T 和 B 分别为域内 V 上和边界 S 上的算子；f 和 g 分别为定义在域内和边界上不含 u 的已知函数。

一般情况下，方程(8-5-1)和(8-5-2)较难求得解析解，所以设方程(8-5-1)的近似解为

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{8-5-3}$$

式中 u_n 是近似解函数，$a(i = 1,2,\cdots,n)$ 为待定参数，$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是基函数。由于式(8-5-3)中的 u_n 是近似解，将其代入方程(8-5-1)和边界条件(8-5-2)中，一般来说不会精确满足，这样方程(8-5-1)和(8-5-2)将产生残余值 R_v 和 R_s，它们分别称为**域内剩余**和**边界剩余**，均简称**残差、剩余或余量**，它们可分别表示为

$$R_v = Tu_n - f \tag{8-5-4}$$

$$R_s = Bu_n - g \tag{8-5-5}$$

式(8-5-4)和式(8-5-5)都称为**剩余函数**。显然如果式(8-5-4)和式(8-5-5)中的 u_n 为**解析解** u，则余量 R_v 和 R_s 应等于零。

加权余量法的基本思想是：适当地选择两个函数 W_{vi} 和 W_{si}，它们分别称为**域内加权函数**和**边界加权函数**，均简称**加权函数或权函数**，使得剩余 R_v 和 R_s 与其相应的权函数的乘积在某种意义上等于零，即可令余量与加权的内积满足正交条件

$$(R_v, W_{vi})_v = \int_V R_v W_{vi} \mathrm{d}V = \int_V (Tu_n - f) W_{vi} \mathrm{d}V = 0 \tag{8-5-6a}$$

$$(R_s, W_{si})_s = \int_S R_s W_{si} \mathrm{d}S = \int_S (Bu_n - g) W_{si} \mathrm{d}S = 0 \tag{8-5-6b}$$

式中 $(R_v W_{vi})_v$ 和 $(R_s W_{si})_s$ 分别称为**域内内积**和**边界内积**，均简称**内积**。

如果恰当地选择近似解函数 u_n，使其满足边界条件(8-5-2)，则方程(8-5-6a)就退化为

$$(R_v, W_{vi})_v = \int_V R_v W_{vi} \mathrm{d}V = \int_V (Tu_n - f) W_{vi} \mathrm{d}V = 0 \tag{8-5-7}$$

此时，式(8-5-7)称为加权余量法的**内部法**。

如果近似解函数 u_n 满足算子方程(8-5-1)，则内积(8-5-6)就退化为

$$(R_s, W_{si})_s = \int_S R_s W_{si} \mathrm{d}S = \int_S (Bu_n - g) W_{si} \mathrm{d}S = 0 \tag{8-5-8}$$

此时，式(8-5-8)称为加权余量法的**边界法**。

如果近似函数 u_n 既不满足算子方程(8-5-1)，又不满足边界条件(8-5-2)，必须同时应用式(8-5-6a)和式(8-5-6b)消除剩余，则称其为加权余量法的**混合法**。

将近似解(8-5-3)代入式(8-5-6a)中，并选择 n 个权函数 $W_{vi}(i = 1,2,\cdots,n)$，可建立以 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为未知量的代数方程组

$$\int_V (Tu_n - f) W_{vi} \mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{8-5-9}$$

求解上面代数方程组，可得到参数 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$，代回到式(8-5-3)，便得到式(8-5-1)的近似解。

从上述加权余量法的基本原理的叙述可见，加权余量法的应用可按三个步骤进行：① 选取试函数；② 代入算子方程求出剩余表达式；③ 选取权函数，作剩余表达式与权函数的内积，并令其正

交以消除剩余。

在加权余量法中，权函数的取法很重要，它与所求近似解的精度有着密切关系，不同的权函数会衍生出不同的近似方法，也代表着不同的误差分配。若取权函数 W_{vi} 等于试函数 φ_i，即令 $W_{vi}=\varphi_i$，则有

$$\int_V (Tu_n - f)\varphi_i \mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{8-5-10}$$

式(8-5-10)称为**伽辽金方程组**，由该方程组解出 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，此时的 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为**伽辽金系数**，将其代入式(8-5-3)就得到边值问题(8-5-1)和(8-5-2)的近似解。由于伽辽金法精度较高，计算量不太大，故应用比较广泛。

注意伽辽金法只适用于齐次边界条件。如果是非齐次边界条件，可通过适当的变量代换化为齐次边界条件。

例 8.5.1 用伽辽金法解边值问题 $y''+y=2x, y(0)=0, y(1)=0$。

解 取函数坐标系为

$$\varphi_k(x) = x^k(1-k) \quad (k=1,2,\cdots)$$

取前两项，则近似解为

$$y_2 = a_1x(1-x) + a_2x^2(1-x)$$

于是，有

$$y_2'' = -2a_1 + (2-6x)a_2$$

$$y_2'' + y_2 - 2x = (-2+x-x^2)a_1 + (2-6x+x^2-x^3)a_2 - 2x$$

伽辽金方程组为

$$\int_0^1 [(-2+x-x^2)a_1 + (2-6x+x^2-x^3)a_2 - 2x](x-x^2)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^1 [(-2+x-x^2)a_1 + (2-6x+x^2-x^3)a_2 - 2x](x^2-x^3)\mathrm{d}x = 0$$

积分，得

$$-\frac{3}{10}a_1 - \frac{3}{20}a_2 = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{3}{20}a_1 - \frac{13}{105}a_2 = \frac{1}{10}$$

解之可得

$$a_1 = -\frac{142}{369}, a_2 = -\frac{14}{41}$$

于是，所求近似解为

$$y_2 = -2x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right)$$

例 8.5.2 用伽辽金法求边值问题 $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0, y(1)=1, y(2)=2$。

解 因边界条件是非齐次的，所以先作变量代换，把边界条件化为齐次的。为此，令 $y=z+x$，则上述边值问题化为

$$x^2z'' + xz' + (x^2-1)z + x^3 = 0 \tag{1}$$

$$z(1) = z(2) = 0 \tag{2}$$

取满足边界条件(2)的坐标函数

$$\varphi_1(x) = (x-1)(2-x) \tag{3}$$

第一次近似解为

$$z_1 = a_1\varphi_1(x) = a_1(x-1)(2-x) = a_1(-2+3x-x^2) \tag{4}$$

求导数,得

$$z_1' = (3-2x)a_1, z_1'' = -2a_1 \tag{5}$$

将式(4)和式(5)的两个导数代入式(1),得余量为

$$x^2z'' + xz' + (x^2-1)z + x^3 = (2-5x^2+3x^3-x^4)a_1 + x^3 \tag{6}$$

伽辽金方程为

$$\int^2 [(2-5x^2+3x^3-x^4)a_1 + x^3](x-1)(2-x)\mathrm{d}x = 0 \tag{7}$$

积分结果为

$$-\frac{311}{420}a_1 + \frac{3}{5} = 0 \tag{8}$$

可解出 a_1 为

$$a_1 = \frac{252}{311} \tag{9}$$

于是,得

$$z_1 = \frac{252}{311}(x-1)(2-x) \tag{10}$$

代回到原来的变量,得所给边值问题的第一次近似解为

$$y = \frac{252}{311}(x-1)(2-x) + x \tag{11}$$

例 8.5.3 试用伽辽金法解例 8.4.3 的火箭飞行问题。

解 取函数坐标与里茨法具有相同的形式

$$v(m) = \beta m \tag{1}$$

式中,β 是待定常数。

将式(1)代入泛函表达式,并应用欧拉方程,得

$$(-a\beta^2 + b)(c + \beta m)m^2 = 0 \tag{2}$$

虽然式(2)并不是微分方程,但它并不妨碍伽辽金法的应用。将式(2)乘以权函数 m,再从 m_1 到 m_0 积分,得

$$\int_{m_1}^{m_0}(-a\beta^2+b)(c+\beta m)m^3\mathrm{d}m = (-a\beta^2+b)\left[\frac{c}{4}(m_0^4-m_1^4) + \frac{\beta}{5}(m_0^5-m_1^5)\right] \tag{3}$$

令式(3)等于零,因 $m_0 \neq m_1$,显然式中方括号项不等于零,必有 $a\beta^2 - b = 0$,又根据前面的分析可知,$\beta > 0$,所以

$$\beta = \sqrt{\frac{b}{a}} = \alpha \tag{4}$$

可见 $\beta = \alpha$,即伽辽金法和里茨法的近似函数相同,也就是说伽辽金法和里茨法结果一样,都等于解析解。其实,式(2)不必求积分,可直接得到式(4)这个结果。

从例 8.5.3 可见,伽辽金法和里茨法结果一样,这并不是偶然的。在所给边值问题存在能量积分的情况下,可以证明:"伽辽金方程组和里茨法所得方程组相同,所得近似解也相同"。事实上,对于边值问题

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \qquad x \in (x_0, x_1) \tag{8-5-11}$$

$$y(x_0) = 0, F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \tag{8-5-12}$$

对应的泛函为

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{8-5-13}$$

取 n 次近似解，有

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \tag{8-5-14}$$

$$y_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k'(x) \tag{8-5-15}$$

式中，$\varphi_k(x)(k = 1,2,\cdots,n)$ 满足边界条件。

将式(8-5-14) 和式(8-5-15) 代入式(8-5-13)，得

$$J[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n, y_n')\mathrm{d}x \tag{8-5-16}$$

将式(8-5-16) 对 a_k 求导，用里茨法解该边值问题的方程组为

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = \int_{x_0}^{x_1} (F_{y_n}\varphi_k + F_{y_n'}\varphi_k')\mathrm{d}x = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{8-5-17}$$

对式(8-5-17) 分部积分，得

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_{y_n}\varphi_k + F_{y_n'}\varphi_k')\mathrm{d}x = F_{y_n'}\varphi_k\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_{y_n} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_n'}\right)\varphi_k\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_{y_n} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_n'}\right)\varphi_k\mathrm{d}x = 0$$

或

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_{y_n} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_n'}\right)\varphi_k\mathrm{d}x = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{8-5-18}$$

式(8-5-18) 正是伽辽金方程组。

里茨法的理论基础是**最小势能原理**，即弹性体在给定的外力作用下，在所有满足位移边界条件的位移中，与稳定平衡相对应的位移使总位能取最小值。伽辽金法的理论基础是**虚位移原理**，即一个平衡系统的所有主动力在虚位移上所作的虚功之和等于零。因最小位能原理是虚位移原理的一种特殊情况，故伽辽金法比里茨法应用更广泛。

例 8.5.4 用伽辽金法求边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -m & (x, y \in D) \\ u(x,y)\big|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{8-5-19}$$

的第一、第二次近似解。其中 $D = \{(x,y) \mid -a < x < a, -b < y < b\}$，$\Gamma$ 为矩形域 D 的边界，m 为一常数。

解 注意到待求解的问题关于 x、y 对称，选取坐标函数系为

$$\varphi_1, \varphi_1 x^2, \varphi_1 y^2, \varphi_1 x^4, \varphi_1 x^2 y^2, \varphi_1 y^4, \cdots$$

因要求第一、第二次近似解，故取满足边界条件的坐标函数

$$\varphi_1(x,y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

$$\varphi_2(x,y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

求第一次近似解。令

$$u_1(x,y) = a_1\varphi_1(x,y) = a_1(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -2a_1(b^2 - y^2), \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -2a_1(a^2 - x^2)$$

$$\Delta u_1 + m = -2a_1(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + m$$

将上式代入伽辽金方程,注意到被积函数均是偶函数,得

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[-2a_1(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + m](a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$4\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}[-2a_1(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + m](a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

消去积分号前的系数4,伽辽金方程可简化为

$$\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}[-2a_1(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + m](a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

积分,得

$$-\frac{32}{45}a_1(a^5b^3 + a^3b^5) + \frac{4}{9}a^3b^3m = 0$$

约去公因子 a^3b^3,并解出 a_1,得

$$a_1 = \frac{5m}{8(a^2 + b^2)}$$

于是,得到所给边值问题的第一次近似解为

$$u_1 = \frac{5m}{8(a^2 + b^2)}(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \tag{8-5-20}$$

求第二次近似解。令

$$u_2(x,y) = a_1\varphi_1(x,y) + a_2\varphi_2(x,y) =$$

$$(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)a_1 + (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(x^2 + y^2)a_2$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -2(b^2 - y^2)a_1 + 2(a^2 - 6x^2 - y^2)(b^2 - y^2)a_2$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -2(a^2 - x^2)a_1 + 2(a^2 - x^2)(b^2 - x^2 - 6y^2)a_2$$

$$\Delta u_2 + m = -2(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)a_1 + 2[2a^2b^2 - (a^2 + 7b^2)x^2 +$$

$$12x^2y^2 - (7a^2 + b^2)y^2 + x^4 + y^4]a_2 + m$$

伽辽金方程组为

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(\Delta u_2 + m)\varphi_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(\Delta u_2 + m)\varphi_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

因被积函数均是偶函数,故可简化成

$$4\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}(\Delta u_2 + m)\varphi_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$4\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}(\Delta u_2 + m)\varphi_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

将上两式积分,并将结果约去公因子 $4a^3b^3$,得方程组为

$$\frac{32}{45}(a^2 + b^2)a_1 + \left[\frac{64}{225}b^2a^2 + \frac{32}{315}(a^4 + b^4)\right]a_2 = \frac{4}{9}m$$

$$\left[\frac{64}{225}b^2a^2 + \frac{32}{315}(a^4 + b^4)\right]a_1 + \left[\frac{416}{1575}(a^4b^2 + a^2b^4) + \frac{32}{945}(a^6 + b^6)\right]a_2 = \frac{4}{45}(a^2 + b^2)m$$

解出 a_1 和 a_2,得

$$a_1 = \frac{35m[69(a^4b^2 + a^2b^4) + 5(a^6 + b^6)]}{16[280(a^6b^2 + a^2b^6) + 498a^4b^4 + 25(a^8 + b^8)]}$$

$$a_2 = \frac{525m(a^4 + b^4)}{16[280(a^6b^2 + a^2b^6) + 498a^4b^4 + 25(a^8 + b^8)]}$$

于是,可得第二次近似解为

$$u_2 = \frac{35m(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)[69(a^4b^2 + a^2b^4) + 5(a^6 + b^6) + 15(a^4 + b^4)(x^2 + y^2)]}{16[280(a^6b^2 + a^2b^6) + 498a^4b^4 + 25(a^8 + b^8)]} \tag{8-5-21}$$

若 $b = a$,式(8-5-21)可简化成

$$u_2 = \frac{35m(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)[74a^2 + 15(x^2 + y^2)]}{8864a^4} \tag{8-5-22}$$

例 8.5.5 试用伽辽金法求下列边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u \equiv \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = m \qquad (x, y \in D) \\ u(x,y)\big|_\Gamma = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{8-5-23}$$

的第一、第二次近似解。其中 $D = \{(x,y) \mid -a < x < a, -b < y < b\}$,$\Gamma$ 为矩形域 D 的边界。该方程在力学上表示薄板弯曲方程。拉格朗日曾把板看成交叉梁,忽略了交叉梁的相互作用,即式(8-5-23)中没有混合偏导数项。1816 年法国女数学家热尔曼纠正了拉格朗日的错误,为此获得了巴黎科学院奖学金。

解 取满足边界条件的坐标函数

$$\varphi_1(x,y) = (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2$$

$$\varphi_2(x,y) = \varphi_1(x,y)(x^2 + y^2) = (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2(x^2 + y^2)$$

求第一次近似解,令

$$u_1(x,y) = a_1\varphi_1(x,y) = a_1(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2 =$$
$$a_1(a^4 - 2a^2x^2 + x^4)(b^4 - 2b^2y^2 + y^4)$$

计算各偏导数与余量

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 24a_1(b^2 - y^2)^2, \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} = 24a_1(a^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 16a_1(-a^2 + 3x^2)(-b^2 + 3y^2)$$

$$\Delta u_1 - m = 8a_1[3(b^2 - y^2)^2 + 4(-a^2 + 3x^2)(-b^2 + 3y^2) + 3(a^2 - x^2)^2] - m$$

将上式代入伽辽金方程,注意到被积函数是偶函数,得

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(\Delta u_1 - m)(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$4\int_0^a\int_0^b(\Delta u_1 - m)(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

可简化成

$$\int_0^a\int_0^b(\Delta u_1 - m)(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

计算 a_1 和 m 的系数并积分,得

$$\frac{64}{225}\times\frac{128}{7}a_1\left[(a^5b^9+a^9b^5)+\frac{4}{7}a^7b^7\right]-a^5b^5\frac{64}{225}m=0$$

解出 a_1,得

$$a_1=\frac{49m}{896(a^4+b^4)+512a^2b^2}$$

于是,得到所给边值问题的第一次近似解为

$$u_1=\frac{49m}{896(a^4+b^4)+512a^2b^2}(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2 \tag{8-5-24}$$

求第二次近似解,令

$$\begin{aligned}u_2(x,y)&=a_1\varphi_1(x,y)+a_2\varphi_2(x,y)=\\&(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2a_1+(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2(x^2+y^2)a_2=\\&(a^4-2a^2x^2+x^4)(b^4-2b^2y^2+y^4)a_1+\\&(a^4x^2-2a^2x^4+x^6)(b^4-2b^2y^2+y^4)a_2+\\&(a^4-2a^2x^2+x^4)(b^4y^2-2b^2y^4+y^6)a_2\end{aligned}$$

计算各偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4u_2}{\partial x^4}&=24(b^4-2b^2y^2+y^4)a_1+24(15x^2-2a^2)(b^4-2b^2y^2+y^4)a_2+\\&\quad 24(b^4y^2-2b^2y^4+y^6)a_2\\\frac{\partial^4u_2}{\partial y^4}&=24(a^4-2a^2x^2+x^4)a_1+24(15y^2-2b^2)(a^4-2a^2x^2+x^4)a_2+\\&\quad 24(a^4x^2-2a^2x^4+x^6)a_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4u_2}{\partial x^2\partial y^2}&=16(3x^2-a^2)(3y^2-b^2)a_1+8(a^4-12a^2x^2+15x^4)(3y^2-b^2)a_2+\\&\quad 8(b^4-12b^2y^2+15y^4)(3x^2-a^2)a_2\end{aligned}$$

将上面各式代入下列伽辽金方程组

$$\int_0^a\int_0^b(\Delta u_2-m)(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\int_0^a\int_0^b(\Delta u_2-m)(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

第一个伽辽金方程积分结果为

$$\begin{aligned}&a^5b^9\frac{64}{225}\times\frac{128}{7}a_1+a^7b^9\frac{64}{225}\times\frac{128}{7\times7}a_2+a^5b^{11}\frac{64}{225}\times\frac{128}{7\times11}a_2+\\&a^9b^5\frac{64}{225}\times\frac{128}{7}a_1+a^9b^7\frac{64}{225}\times\frac{128}{7\times7}a_2+a^{11}b^5\frac{64}{225}\times\frac{128}{7\times11}a_2+\\&a^7b^7\frac{64}{225}\times\frac{128\times4}{7\times7}a_1-a^5b^5\frac{64}{225}m=0\end{aligned}$$

第二个伽辽金方程积分结果为

$$\begin{aligned}&a^7b^9\frac{64}{105}\times\frac{128}{105}a_1+a^5b^{11}\frac{64}{105}\times\frac{128}{5\times33}a_1+a^9b^9\frac{64}{105}\times\frac{128}{35}a_2+\\&a^7b^{11}\frac{64}{105}\times\frac{128\times2}{35\times33}a_2+a^5b^{13}\frac{64}{105}\times\frac{128}{5\times143}a_2+\end{aligned}$$

$$a^9b^7\frac{64}{105}\times\frac{128}{105}a_1+a^{11}b^5\frac{64}{105}\times\frac{128}{5\times33}a_1+a^9b^9\frac{64}{105}\times\frac{128}{35}a_2+$$
$$a^{11}b^7\frac{64}{105}\times\frac{128\times2}{35\times33}a_2+a^{13}b^5\frac{64}{105}\times\frac{128}{5\times143}a_2+$$
$$\frac{64}{105}\times\frac{128\times4}{105\times11}(a^{11}b^7+a^7b^{11})a_2-\frac{64}{105}\times\frac{1}{15}(a^7b^5+a^5b^7)m=0$$

化简,得

$$[77(a^4+b^4)+44a^2b^2]a_1+11(a^2b^4+a^4b^2)a_2+7(a^6+b^6)a_2=\frac{539}{128}m$$
$$143(a^2b^4+a^4b^2)a_1+91(b^6+a^6)a_1+858a^4b^4a_2+$$
$$78(a^2b^6+a^6b^2)a_2+21(b^8+a^8)a_2=\frac{1001}{128}(a^2+b^2)m$$

解出 a_1、a_2 为

$$a_1=\frac{154[715a^4b^4+39(a^2b^6+a^6b^2)+7(b^8+a^8)]m}{128[16885(a^8b^4+a^4b^8)+1232(a^{10}b^2+a^2b^{10})+245(a^{12}+b^{12})+11336a^6b^6]}\tag{1}$$

$$a_2=\frac{1001[7(a^6+b^6)+11(a^4b^2+a^2b^4)]m}{128[16885(a^8b^4+a^4b^8)+1232(a^{10}b^2+a^2b^{10})+245(a^{12}+b^{12})+11336a^6b^6]}\tag{2}$$

于是,得到所给边值问题的第二次近似解为

$$u_2=(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2[(a_1+a_2(x^2+y^2)]\tag{8-5-25}$$

式中,a_1、a_2 按式(1)和式(2)计算。

若 $a=b$,则 a_1、a_2 可简化成

$$a_1=\frac{77\times269m}{128\times8010a^4}=\frac{77\times269m}{1025280a^4}$$
$$a_2=\frac{77\times78m}{128\times8010a^6}=\frac{77\times78m}{1025280a^6}$$

于是,得到 $a=b$ 时所给边值问题的第二次近似解为

$$u_2=\frac{77m(a^2-x^2)^2(a^2-y^2)^2}{1025280a^4}\left[269+\frac{78(x^2+y^2)}{a^2}\right]\tag{8-5-26}$$

以上结果是在 m 为常数的情况下得到的,若 m 是自变量 x、y 的函数,且 $m\varphi_1$ 和 $m\varphi_2$ 可积,则上述伽辽金方程的积分结果只需作少许改动,仍可求出相应的常数 a_1、a_2 和相应的公式。例 8.5.5 中的 m 若也是自变量 x、y 的函数,且 $m\varphi_1$ 和 $m\varphi_2$ 可积,则也可按上述方法处理。

若令 $m=\frac{q}{D}$,$u=w$,则式(8-5-23)就是弹性力学中的小挠度薄板弯曲的基本微分方程(称为**拉格朗日方程**)和矩形薄板四边固支边界条件,其中 q 是中性面单位面积上的载荷,D 是薄板抗弯刚度,w 是薄板的挠度。在 q 是均布载荷的情况下,薄板的最大挠度出现在其对称中心,若 $a=b$,则解析解为

$$w_{\max}=0.02016\frac{qa^4}{D}$$

而伽辽金法的第一、第二次近似解的最大挠度分别为

$$w_{1\max}=\frac{49}{2304}\frac{qa^4}{D}=0.02126736\frac{qa^4}{D}$$

$$w_{2\max} = \frac{20713}{1025280}\frac{qa^4}{D} = 0.02020229\frac{qa^4}{D}$$

和解析解比较，相对误差分别为5.492863%和0.209753%。若 $b = 2a$，则解析解和伽辽金法的第二次近似解分别为

$$w_{\max} = 0.040640\frac{qa^4}{D}, w_{2\max} = 0.0403113\frac{qa^4}{D}$$

和解析解比较，相对误差为0.808792%。由此可见，对于此类问题，伽辽金法的第二次近似解具有很好的逼近性，故式(8-5-25)在一定范围内几乎可当作解析解公式来使用。

需要指出的是，坐标函数的取法并不是唯一的，例如在本例题中就可以选取

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}\left[1-\cos\frac{m\pi(x+a)}{a}\right]\left[1-\cos\frac{n\pi(y+b)}{b}\right]$$

作为坐标函数，它满足边界条件。若 m、n 只取第一项，则有

$$u = a_{11}\left[1-\cos\frac{\pi(x+a)}{a}\right]\left[1-\cos\frac{\pi(y+b)}{b}\right]$$

剩余为

$$R = -\frac{\pi^4}{a^4}a_{11}\cos\frac{\pi(x+a)}{a}\left[1-\cos\frac{\pi(y+b)}{b}\right]+$$
$$\frac{\pi^4}{a^2b^2}a_{11}\cos\frac{\pi(x+a)}{a}\cos\frac{\pi(y+b)}{b}-$$
$$\frac{\pi^4}{b^4}a_{11}\left[1-\cos\frac{\pi(x+a)}{a}\right]\cos\frac{\pi(y+b)}{b}-m$$

因剩余和权函数都是偶函数，故伽辽金方程为

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} R\left[1-\cos\frac{\pi(x+a)}{a}\right]\left[1-\cos\frac{\pi(y+b)}{b}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$4\int_{0}^{a}\int_{0}^{b} R\left[1-\cos\frac{\pi(x+a)}{a}\right]\left[1-\cos\frac{\pi(y+b)}{b}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

积分结果为

$$\left(\frac{\pi^4}{a^4}\frac{3ab}{4}+2\frac{\pi^4}{a^2b^2}\frac{ab}{4}+\frac{\pi^4}{b^4}\frac{3ab}{4}\right)a_{11}-mab=0$$

解出 a_{11} 为

$$a_{11} = \frac{4m}{\pi^4\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)}$$

得近似解为

$$u = \frac{4m}{\pi^4\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)}\left[1-\cos\frac{\pi(x+a)}{a}\right]\left[1-\cos\frac{\pi(y+b)}{b}\right]$$

当 $a = b$ 时，在中心处的值为

$$u = \frac{2ma^4}{\pi^4}$$

与解析解的相对误差为1.845069%。

8.6 最小二乘法

在式(8-5-9)中,若取权函数 W_{vi} 等于剩余 R_v 对待定参数 a_i 的导数,即令 $W_{vi}=\frac{\partial R_v}{\partial a_i}$,并注意到 $R_v = Tu_n - f$,且 f 中不含 a_i,则有

$$\int_V R_v \frac{\partial R_v}{\partial a_i}\mathrm{d}V = \int_V (Tu_n - f)\frac{\partial Tu_n}{\partial a_i}\mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{8-6-1}$$

式(8-6-1)称为**最小二乘法**。事实上,令 $J[a_1,a_2,\cdots,a_n] = \int_V R_v^2\mathrm{d}V$,对 J 取极值,得

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J}{\partial a_i}\delta a_i = 0$$

或

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i}\int_V R_v^2\mathrm{d}V = \int_V 2R_v\frac{\partial R_v}{\partial a_i}\mathrm{d}V = 0$$

或

$$\int_V R_v\frac{\partial R_v}{\partial a_i}\mathrm{d}V = 0$$

例 8.6.1 用最小二乘法求解方程 $y'' + y + x = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$。

解 取坐标函数系 $u_n(x) = (1-x)x^n (n = 1,2,\cdots)$,它满足边界条件。于是有

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x)x^k$$

取 $n = 1$ 来计算近似值,此时有

$$y_1(x) = a_1(1-x)x, y''_1(x) = -2a_1$$

可求出余量及它对 a_1 的偏导数为

$$R_v = (-2 + x - x^2)a_1 + x, \frac{\partial R_v}{\partial a_i} = -2 + x - x^2$$

代入式(8-6-1)中,得

$$\int_0^1 [(-2 + x - x^2)a_1 + x](-2 + x - x^2)\mathrm{d}x = \frac{101}{30}a_1 - \frac{11}{12} = 0$$

即

$$a_1 = \frac{55}{202}$$

于是有

$$y_1(x) = \frac{55}{202}(1-x)x$$

本例题的微分方程正是例 8.3.2 泛函的欧拉方程,用里茨法和最小二乘法所得的近似解很接近。

8.7 算子方程的特征值和特征函数

设微分算子方程

$$Tu - \lambda u = 0 \tag{8-7-1}$$

式中，T 为微分算子，λ 为参数。方程(8-7-1)称为**本征方程或特征方程**。$u=0$ 总是方程的一个解，称为**平凡解**。方程 $u\neq 0$ 的解称为**非平凡解**。并不是对每个非零 λ 都有非零解存在，那些使方程(8-7-1)有非零解存在的 λ_n 值称为算子 T 的**本征值或特征值**，也称为**本征元素或特征元素**，相应的非零解 u_n 称为与 λ_n 相对应的**本征函数、特征函数或特征向量**。符合条件 $(u,u)=1$ 的特征函数称为**正规特征函数**。对应于特征值的线性无关的特征函数的个数称为特征值的**秩**。特征值的秩可以有无限多个。求算子方程的非零解的问题称为**特征值问题**。所有特征值的集合 $\{\lambda_n\}$ 称为**本征谱或算子方程的谱**，简称**谱**。如果 λ_n 可数，则 $\{\lambda_n\}$ 称为**离散谱**。如果 λ_n 不可数，则 $\{\lambda_n\}$ 称为**连续谱**。习惯上按从小到大的次序排列特征值，即

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots<\infty$$

λ_1 称为**最小特征值或第一特征值**，依此类推。从 $n=2$ 起，每个特征值都称为它前一个特征值的**次一特征值**。

施图姆 — 刘维尔方程可表示为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y']+q(x)y=\lambda y \tag{8-7-2}$$

式中，$p(x)>0$ 有连续导数，$q(x)$ 是连续函数，λ 为特征值，$y=y(x)$ 有下列边界条件

$$y(x_0)=0,y(x_1)=0 \tag{8-7-3}$$

方程(8-7-2)就是求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)\,y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x \tag{8-7-4}$$

符合边界条件(8-7-3)和等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1}y^2\mathrm{d}x=1 \tag{8-7-5}$$

的极小值。由上面正规特征函数的定义可知，符合等周条件(8-7-5)的特征函数就是正规特征函数。

在方程(8-7-1)中，若 T 是正定算子，则其特征值都大于零。事实上，作方程(8-7-1)与 u 的内积

$$(Tu,u)-\lambda(u,u)=(Tu,u)-\lambda\|u\|^2=0$$

则

$$\lambda=\frac{(Tu,u)}{(u,u)}=\frac{(Tu,u)}{\|u\|^2}>0$$

定理8.7.1 设 T 是希尔伯特空间 H 的自共轭算子，则 T 的所有特征值都是实数，且不同特征值相应的特征函数相互正交。

证 设 $Tu=\lambda u$，作它与 u 的内积，有

$$(Tu,u)=(\lambda u,u)=\lambda(u,u)=\lambda\|u\|^2$$

因为 T 是自共轭算子，即 $T=T^*$，则有

$$(Tu,u)=(u,T^*u)=(u,Tu)=(u,\lambda u)=\overline{\lambda}(u,u)=\overline{\lambda}\|u\|^2$$

故

$$\lambda(u,u)=\overline{\lambda}(u,u)$$

两端同除以 (u,u)，得 $\lambda=\overline{\lambda}$，故 λ 必为实数。

设 λ_1、λ_2 是两个不同的特征值，u_1、u_2 是与之相应的特征函数，则有

$$Tu_1=\lambda_1u_1,Tu_2=\lambda_2u_2$$

作前式与 u_2 的内积,后式与 u_1 的内积,得

$$(Tu_1,u_2)=\lambda_1(u_1,u_2),(Tu_2,u_1)=\lambda_2(u_2,u_1)$$

两式相减,得

$$(\lambda_1-\lambda_2)(u_1,u_2)=0$$

由假设 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故有$(u_1,u_2)=0$,即 u_1、u_2 正交。证毕。

下面介绍用变分法求 T 的最小特征值和所对应的特征函数。

设 λ_0 是方程(8-7-1)的特征值,u_0 是它所对应的特征函数,则有 $Tu_0-\lambda_0u_0=0$,将其作与 u_0 的内积,得

$$(Tu_0,u_0)-\lambda_0(u_0,u_0)=0$$

将上式变形,并根据式(7-1-6),有

$$\lambda_0=\frac{(Tu_0,u_0)}{(u_0,u_0)}=\frac{(Tu_0,u_0)}{\|u_0\|^2}$$

若存在常数 c,使得对任意 u 都有$(Tu,u)\geqslant c\|u\|^2$,则 T 称为**下有界算子**,且记 $\lambda_m=\min\frac{(Tu,u)}{\|u\|^2}$。

定理 8.7.2 设 T 是下有界对称算子,若存在 $u_0\neq0$,使 $\lambda_m=\frac{(Tu_0,u_0)}{\|u_0\|^2}$,则 λ_m 就是 T 的最小特征值,u_0 就是与 λ_m 对应的特征函数。

证 设 η 是 T 的定义域$D(T)$中的任一元素,t 是任意实数,则 $u_0+t\eta\in D(T)$。作辅助函数

$$\varphi(t)=\frac{[T(u_0+t\eta),(u_0+t\eta)]}{\|u_0+t\eta\|^2}=\frac{(Tu_0,u_0)+2t(Tu_0,\eta)+t^2(T\eta,\eta)}{(u_0,u_0)+2t(u_0,\eta)+t^2(\eta,\eta)}$$

当 $t=0$ 时,$\varphi(t)$ 取极小值,故

$$\varphi'(0)=2\frac{(u_0,u_0)(Tu_0,\eta)-(Tu_0,u_0)(u_0,\eta)}{(u_0,u_0)^2}=0$$

或

$$(Tu_0,\eta)-\frac{(Tu_0,u_0)}{(u_0,u_0)}(u_0,\eta)=(Tu_0,\eta)-\frac{(Tu_0,u_0)}{\|u_0\|^2}(u_0,\eta)=0$$

但已知 $\lambda_m=\frac{(Tu_0,u_0)}{\|u_0\|^2}$,代入上式,得

$$(Tu_0,\eta)-\lambda_m(u_0,\eta)=(Tu_0,\eta)-(\lambda_mu_0,\eta)=(Tu_0-\lambda_mu_0,\eta)=0$$

由于 η 是任取的,可令它不为零,故有 $Tu_0-\lambda_mu_0=0$,即 λ_m 是 T 的特征值,u_0 是对应于 λ_m 的特征函数。同时,λ_m 必为 T 的最小特征值,若设 λ_a 是 T 的另一特征值,u_a 是对应于 λ_a 的特征函数,则有

$$\lambda_m=\frac{(Tu_0,u_0)}{\|u_0\|^2}=\min\frac{(Tu,u)}{\|u\|^2}\leqslant\frac{(Tu_a,u_a)}{\|u_a\|^2}=\lambda_a$$

证毕。

由定理 8.7.2 可知,求下有界算子的特征值问题,就是在希尔伯特空间中找出使泛函$\frac{(Tu,u)}{\|u\|^2}$取极小值的元素。若 u 是规范正交系中的元素,即如果存在附加条件$(u,u)=\|u\|^2=1$,则求最小特征值的问题就是求使泛函(Tu,u)取极小值的元素。除了定理 8.7.1 和定理 8.7.2 给出的特征值和特征函数的重要性质外,对于施图姆 — 刘维尔方程(8-7-2)来说,最小特征值等于泛函

(8-7-4)在边界条件(8-7-3)和等周条件(8-7-5)下的极小值,这也是特征值的一个重要性质。

定理8.7.3 设$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}$是下有界对称算子$T$的前$n-1$个特征值,$u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$是与之对应的标准正交特征函数。若存在函数$u_n \neq 0$,使得$(u_i, u_n) = 0 (i = 1,2,\cdots,n-1)$,$\lambda_n = \dfrac{(Tu_n, u_n)}{\| u_n \|^2}$取得极小值,则$\lambda_n$就是$\lambda_{n-1}$的次一特征值,$u_n$就是与$\lambda_n$对应的特征函数。

证 设v是算子T的定义域$D(T)$中的任一元素,η是v对$(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$的傅里叶级数的余项$\eta = v - \sum_{k=1}^{n-1}(v, u_k)u_k$,则$\eta$满足正交条件。事实上,作内积

$$(\eta, u_i) = (v, u_i) - \sum_{k=1}^{n-1}(v, u_k)(u_k, u_i)$$

式中,$i = 1,2,\cdots,n-1$。因为算子T的特征函数正交,且根据定理的条件u_k是标准的,故有

$$(u_k, u_i) = \begin{cases} 0 & (k \neq i) \\ 1 & (k = i) \end{cases}$$

于是得

$$(\eta, u_i) = (v, u_i) - (v, u_i) = 0$$

设t是任意实数,则乘积$t\eta$与η一样也满足正交条件,线性组合$u_n + t\eta \in D(T)$也一样满足正交条件。与定理8.7.2类似,作辅助函数$\psi(t)$,将u_0换成u_n,可得

$$(Tu_n - \lambda_n u_n, \eta) = 0$$

将η的表达式代入上式,得

$$\left[Tu_n - \lambda_n u_n, v - \sum_{k=1}^{n-1}(v, u_k)u_k\right] =$$

$$(Tu_n - \lambda_n u_n, v) - \left[Tu_n - \lambda_n u_n, \sum_{k=1}^{n-1}(v, u_k)u_k\right] =$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}(v, u_k)(Tu_n - \lambda_n u_n, u_k) = 0$$

后面的证法便与定理8.7.2的证法相同。证毕。

下面介绍如何用伽辽金法和里茨法求特征值。

设式(8-7-1)的近似解为$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$,作内积

$$(Tu_n - \lambda u_n, \varphi_m) = 0 \quad (m = 1,2,\cdots,n) \tag{8-7-6}$$

此即伽辽金方程组。将u_n的表达式代入式(8-7-6),得

$$\left(T\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \varphi_m\right) = 0 \quad (m = 1,2,\cdots,n) \tag{8-7-7}$$

若T是线性算子,则式(8-7-7)可写成

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [(T\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] = 0 \quad (m = 1,2,\cdots,n) \tag{8-7-8}$$

该方程组对于$a_k (k = 1,2,\cdots,n)$来说是齐次的,它有非零解的充要条件是其系数行列式为零,由此得λ的方程为

$$\begin{vmatrix} (T\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & (T\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & (T\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (T\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2) & (T\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\lambda_2, \varphi_2) & \cdots & (T\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (T\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) & (T\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n) & \cdots & (T\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{8-7-9}$$

如果基函数序列$\{\varphi_n\}$正交,则上述方程可简化为

$$\begin{vmatrix} (T\varphi_1,\varphi_1)-\lambda(\varphi_1,\varphi_1) & (T\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & (T\varphi_n,\varphi_1) \\ (T\varphi_1,\varphi_2) & (T\varphi_2,\varphi_2)-\lambda(\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (T\varphi_n,\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (T\varphi_1,\varphi_n) & (T\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & (T\varphi_n,\varphi_n)-\lambda(\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{8-7-10}$$

因基函数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$线性无关,故上述方程是关于$\lambda$的$n$次代数方程,且有$n$个根。设其中最小的一个根为$\lambda_1$,把它代入伽辽金方程组(8-7-6),就可得到对应于λ_1一组非零解$a_1,a_2,\cdots,a_n$。此时对于任意不为零的数$\mu,\mu a_k(k=1,2,\cdots,n)$也是伽辽金方程组(8-7-6)的解,$\mu$的值可根据附加条件来确定。

事实上,里茨法也可得到上述结果。若式(8-7-1)存在相应的泛函,则有

$$J=(Tu-\lambda u,u)=(Tu,u)-\lambda(u,u) \tag{8-7-11}$$

设近似解为$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$,代入上述泛函并对其中的$a_m(m=1,2,\cdots,n)$求偏导数,并令其为零,即

$$\frac{\partial J}{\partial a_m}=0 \quad (m=1,2,\cdots,n) \tag{8-7-12}$$

若T是线性算子,可得

$$\sum_{k=1}^{n}2a_k[(T\varphi_k,\varphi_m)-\lambda(\varphi_k,\varphi_m)]=0 \quad (m=1,2,\cdots,n) \tag{8-7-13}$$

式(8-7-13)中的常数2对方程组没有影响,可以消去,此时式(8-7-13)与式(8-7-8)相同,后面的求解过程也相同。于是,可得到如下定理:

定理8.7.3 设T是线性微分算子,对于方程(8-7-1),若伽辽金法和里茨法采用相同的基函数,则这两种方法等价,可以求得相同的特征值及相应的特征函数。

例8.7.1 用伽辽金法求特征值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda^2 y=0 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{cases}$$

的第一、第二特征值及相应的特征函数,并与解析解的特征值作比较。

解 设二次近似解为

$$y_2=(1-x^2)(a_1+a_2x^2) \tag{1}$$

计算二阶导数及剩余

$$y_2''=-2a_1+(2-12x^2)a_2 \tag{2}$$

$$R=y_2''+\lambda^2 y_2=[\lambda^2(1-x^2)-2]a_1+[2+(\lambda^2-12)x_2-\lambda^2x^4]a_2 \tag{3}$$

伽辽金方程组为

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}\{[\lambda^2(1-x^2)-2]a_1+[2+(\lambda^2-12)x^2-\lambda^2x^4]a_2\}(1-x^2)\mathrm{d}x=0 \\ \int_{-1}^{1}\{[\lambda^2(1-x^2)-2]a_1+[2+(\lambda^2-12)x^2-\lambda^2x^4]a_2\}(1-x^2)x^2\mathrm{d}x=0 \end{cases} \tag{4}$$

积分并整理,得

$$\begin{cases} (14\lambda^2-35)a_1+(2\lambda^2-7)a_2=0 \\ (6\lambda^2-21)a_1+(2\lambda^2-33)a_2=0 \end{cases} \tag{5}$$

若 a_1、a_2 有非零解，则应使它们的系数组成的行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} 14\lambda^2 - 35 & 2\lambda^2 - 7 \\ 6\lambda^2 - 21 & 2\lambda^2 - 33 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

将式(6)展开并化简，得

$$\lambda^4 - 28\lambda^2 + 63 = 0 \tag{7}$$

可解出 λ^2 的两个特征值为

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{28 \mp \sqrt{28^2 - 4 \times 63}}{2} = 14 \mp \sqrt{133} \tag{8}$$

对于 λ^2 的第一特征值，有

$$a_1 = \frac{7 - 2\lambda_1^2}{14\lambda_1^2 - 35} a_2 = \frac{343 + 28\sqrt{133}}{-147} a_2 \tag{9}$$

相应的特征函数为

$$y_{21} = (1 - x^2)\left(\frac{343 + 28\sqrt{133}}{-147} + x^2\right) a_2 \tag{10}$$

对于 λ^2 的第二特征值，有

$$a_1 = \frac{7 - 2\lambda_2^2}{14\lambda_2^2 - 35} a_2 = \frac{343 - 28\sqrt{133}}{-147} a_2 \tag{11}$$

相应的特征函数为

$$y_{22} = (1 - x^2)\left(\frac{343 - 28\sqrt{133}}{-147} + x_2\right) a_2 \tag{12}$$

本题微分方程的通解是 $y = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$，根据边界条件，有

$$\begin{cases} c_1\cos\lambda + c_2\sin\lambda = 0 \\ c_2\cos\lambda - c_2\sin\lambda = 0 \end{cases} \tag{13}$$

若齐次方程组(13)有非零解，则其系数行列式应为零，即

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \end{vmatrix} = -2\sin\lambda\cos\lambda = -\sin 2\lambda = 0 \tag{14}$$

可得 $2\lambda = n\pi$，或 $\lambda_n = \frac{n\pi}{2}$。于是第一特征值是 $\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$，相应于近似解的第二特征值是解析解的第三特征值 $\lambda_3^2 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2$。

第一特征值的相对误差为

$$E_1 = \frac{14 - \sqrt{133} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \times 100\% = 0.001471\% \tag{15}$$

第二特征值的相对误差为

$$E_2 = \frac{14 + \sqrt{133} - \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} \times 100\% = 14.977309\% \tag{16}$$

由此可见，第一特征值的近似值相当精确，而第二特征值的近似值误差较大。

例 8.7.2 设 $\overline{G}$ 为区域 $x^2 + y^2 \leqslant a^2$，Γ 为其边界。求定解问题 $\Delta u + \lambda u = 0, u|_\Gamma = 0$ 的第一和第二特征值以及相应的特征函数。

解 取极坐标系(r,θ),它与直角坐标的关系是

$$x = r\cos\theta, y = \sin\theta, r^2 = x^2 + y^2, \theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{1}$$

由此求得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) =$$

$$\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \sin^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) + 2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) =$$

$$\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \cos^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) - 2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right) \tag{7}$$

上面两式相加,得

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{8}$$

对于轴对称问题,方程(8)最后一项为零。原方程可化为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{dr}\right) + \lambda u = 0 \tag{9}$$

取坐标函数 $\varphi_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2a}r, i = 1,2,\cdots$,取一次近似解,有

$$u_1 = a_1\cos\frac{\pi}{2a}r \tag{10}$$

将式(10)代入微分方程,得剩余为

$$R = -a_1\left(\frac{\pi}{2ar}\sin\frac{\pi}{2a}r - a_1\frac{\pi^2}{4a^2}\cos\frac{\pi}{2a}r + \lambda\cos\frac{\pi}{2a}r\right) \tag{11}$$

伽辽金方程为

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\left(R\cos\frac{\pi}{2a}r\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0 \tag{12}$$

积分结果为

$$\pi + \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi}{2} - \pi\lambda a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right) = 0 \tag{13}$$

由式(13)解出 λ,得

$$\lambda = \frac{\pi^2(\pi^2+4)}{4a^2(\pi^2-4)} = 5.830355 \tag{14}$$

取第二次近似解,有

$$u_2 = a_1\cos\frac{\pi}{2a}r + a_2\cos\frac{3\pi}{2a}r \tag{15}$$

按照与上面类似的步骤,可得到剩余和伽辽金方程组,在积分时可利用如下三角函数公式

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \tag{16}$$

伽辽金方程的积分结果可得到如下齐次线性方程组

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \lambda a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right)\right]a_1 + \left(\lambda\frac{2a^2}{\pi^2} - \frac{3}{2}\right)a_2 = 0\\ \left(\lambda\frac{2a^2}{\pi^2} - \frac{3}{2}\right)a_1 + \left[\frac{9\pi^2}{8} + \frac{1}{2} - \lambda a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9\pi^2}\right)\right]a_2 = 0\end{cases} \tag{17}$$

式(17)前后两式分别乘以 $8\pi^2$ 和 $72\pi^2$,得

$$\begin{cases}[\pi^2(4+\pi^2) - 4\lambda a^2(\pi^2-4)]a_1 + 4(4\lambda a^2 - 3\pi^2)a_2 = 0\\ 36(4\lambda a^2 - 3\pi^2)a_1 + [9\pi^2(9\pi^2+4) - 4\lambda a^2(9\pi^2-4)]a_2 = 0\end{cases} \tag{18}$$

齐次线性方程组(18)有非零解的充要条件为其系数行列式的值为零,即

$$\begin{vmatrix}\pi^2(4+\pi^2) - 4\lambda a^2(\pi^2-4) & 4(4\lambda a^2 - 3\pi^2)\\ 36(4\lambda a^2 - 3\pi^2) & 9\pi^2(9\pi^2+4) - 4\lambda a^2(9\pi^2-4)\end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

将式(19)展开并整理,得

$$16\lambda^2 a^4(9\pi^4 - 40\pi^2 - 128) - 8\pi^2\lambda a^2(45\pi^4 - 128\pi^2 - 512) + 9\pi^4(9\pi^4 + 40\pi^2 - 128) = 0 \tag{20}$$

式(20)一个关于 λ 的一元二次方程,可求得两个特征值为

$$\lambda_1 = \frac{5.789732}{a^2}, \lambda_2 = \frac{30.578000}{a^2} \tag{21}$$

将 λ_1 和 λ_2 代入齐次线性方程组(18),得

$$a_1 = \frac{4(3\pi^2 - 4\lambda_i a^2)}{\pi^2(4+\pi^2) - 4\lambda_i a^2(\pi^2-4)}a_2 \quad (i = 1,2) \tag{22}$$

相应的特征函数为

$$u_2 = \left[\frac{4(3\pi^2 - 4\lambda_i a^2)}{\pi^2(4+\pi^2) - 4\lambda_i a^2(\pi^2-4)}\cos\frac{\pi r}{2a} + \cos\frac{3\pi r}{2a}\right]a_2 \quad (i = 1,2) \tag{23}$$

例 8.7.3 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数,使它符合边界条件 $y(0) = y(1) = 0$ 和等周条件 $\int_0^1 y^2\mathrm{d}x = 1$。

解 与泛函相应的施图姆—刘维尔方程是

$$y - y'' = \lambda y \tag{1}$$

或

$$y'' + (\lambda - 1)y = 0 \tag{2}$$

式(2)的特征方程是

$$r^2 + \lambda - 1 = 0 \tag{3}$$

式(3)有根 $r_{1,2} = \pm\sqrt{-(\lambda-1)}$。下面考虑三种情况。

(1) $\lambda - 1 < 0$ 即 $\lambda < 1$。此时方程(2)的通解是

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{-r_2 x} = c_1 e^{\sqrt{1-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}x} \tag{4}$$

根据边界条件 $y(0) = y(1) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{r_1} + c_2 e^{-r_2} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

可得 $c_1 = 0, c_2 = 0$,且 $y \equiv 0$。这不是所要求的解。

(2) $\lambda - 1 = 0$ 即 $\lambda = 1$。此时方程(2)的通解是

$$y = c_1 + c_2 x \tag{6}$$

根据边界条件 $y(0) = y(1) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

可得 $c_1 = 0, c_2 = 0$,且 $y \equiv 0$。这也不是所要求的解。

(3) $\lambda - 1 > 0$ 即 $\lambda > 1$。此时方程(2)的通解是

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda - 1}x) \tag{8}$$

根据边界条件 $y(0) = y(1) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1 + 0 = 0 \\ c_1 \cos\sqrt{\lambda - 1} + c_2 \sin\sqrt{\lambda - 1} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

若方程组(9)有非零解,则它的系数行列式应为零,即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda - 1} & \sin\sqrt{\lambda - 1} \end{vmatrix} = \sin\sqrt{\lambda - 1} - 0 = \sin\sqrt{\lambda - 1} = 0 \tag{10}$$

因而 $\sqrt{\lambda - 1} = n\pi$。特征值是 $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$,其中 $n = 1,2,\cdots$。显然,由式(9)的第一式可知 $c_1 = 0$。将这些关系代入式(8),可得到所给问题的特征函数

$$y_n = c_2 \sin n\pi x \tag{11}$$

式中,c_2 可以根据正规特征函数即本题的等周条件来确定,有

$$\int_0^1 (c_2 \sin n\pi x)^2 dx = \frac{1}{2} c_2^2 \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi x) dx = \frac{1}{2} c_2^2 = 1 \tag{12}$$

可得 $c_2 = \pm\sqrt{2}$。于是特征函数为

$$y_n = \pm\sqrt{2} \sin n\pi x \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{13}$$

例 8.7.4 求泛函 $J[y] = \int_1^2 x^2 y'^2 dx$ 的特征值和特征函数,使它符合边界条件 $y(1) = y(2) = 0$ 和等周条件 $\int_1^2 y^2 dx = 1$。

解 与泛函相应的施图姆—刘维尔方程是

$$-2xy' - x^2 y'' = \lambda y \tag{1}$$

或

$$x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0 \tag{2}$$

作代换,$x = e^t$,则有 $dx = e^t dt = x dt, \frac{dt}{dx} = x, y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$。若将 y 对 x 的导数改用 y 对 t 的导数来表示,则方程(2)可化为常系数二阶线性方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0 \tag{3}$$

它的特征方程是

$$r^2 + r + \lambda = 0 \tag{4}$$

方程(4)的两个根为 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(4\lambda - 1)}$。下面考虑三种情况。

(1) $4\lambda - 1 < 0$ 即 $\lambda < \frac{1}{4}$。此时方程(4)的通解是

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{-r_2 t} \tag{5}$$

因而方程(3)的通解是

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{-r_2} \tag{6}$$

根据边界条件 $y(1) = y(2) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 2^{r_1} + c_2 2^{-r_2} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

可得 $c_1 = 0, c_2 = 0$,且 $y \equiv 0$。这不是所要求的解。

(2) $4\lambda - 1 = 0$ 即 $\lambda = \frac{1}{4}$。此时方程(3)的通解是

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{1}{2}t} \tag{8}$$

因而方程(2)的通解为

$$y(x) = \frac{c_1 + c_2 \ln x}{\sqrt{x}} \tag{9}$$

根据边界条件 $y(1) = y(2) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1 + 0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 + c_2 \ln 2) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

可得 $c_1 = 0, c_2 = 0$,且 $y \equiv 0$。这也不是所要求的解。

(3) $4\lambda - 1 > 0$ 即 $\lambda > \frac{1}{4}$。此时方程(4)的通解是

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}t\right) \tag{11}$$

因而方程(3)的通解为

$$y(x) = c_1 \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln x\right)}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln x\right)}{\sqrt{x}} \tag{12}$$

根据边界条件 $y(1) = y(2) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1 + 0 = 0 \\ c_1 \dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln 2\right)}{\sqrt{2}} + c_2 \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln 2\right)}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

若方程组(13)有非零解,则它的系数行列式应为零,即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln 2\right)}{\sqrt{2}} & \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln 2\right)}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln 2\right)}{\sqrt{2}} = 0 \tag{14}$$

因而 $\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - 1}\ln 2 = n\pi$。特征值是 $\lambda_n = \frac{1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{\ln^2 2} = \frac{\ln^2 2 + 4n^2\pi^2}{4\ln^2 2}$,式中 $n = 1, 2, \cdots$。

显然，由式(13)的第一式可知 $c_1 = 0$。将这些关系代入式(12)，可得到所给问题的特征函数

$$y_n = \frac{c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln x\right)}{\sqrt{x}} \tag{15}$$

式中，c_2 可以根据正规特征函数即本题的等周条件来确定，有

$$\int^2 \left[\frac{c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln x\right)}{\sqrt{x}}\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}c_2^2 \int^2 \left[\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi}{\ln 2}\ln x\right)}{x}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}c_2^2 \ln 2 = 1 \tag{16}$$

可得 $c_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{\ln\sqrt{2}}}$。于是特征函数为

$$y_n = \pm\frac{c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln x\right)}{\sqrt{\ln\sqrt{2}}\sqrt{x}} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{17}$$

从例 8.7.3 和例 8.7.4 的求解过程可知，对于求泛函的特征函数和特征值问题，如果受正规特征函数约束，那么只需考虑第三种情况。

8.8 名家介绍

热尔曼(Germain, Sophie, 1776.4.1—1831.6.27) 法国数学家。生、卒于巴黎。早年在家自学拉丁文和希腊文，自修过牛顿、欧拉和拉格朗日等人的著作。1794 年研读了拉格朗日在巴黎综合工科学校的讲课笔记后，写出一篇文章，化名勒布朗(Le Blanc)寄给拉格朗日，受到其赞赏。当拉格朗日发现文章的作者是位女子时，便做了她的数学顾问。她还与勒让德和高斯等长期通信，探讨数学问题。后来高斯推荐她成为格丁根大学荣誉博士，但她在接受此称号前就去世了。主要研究数论和数理方程，其中一些公式以她的名字命名。在声学和弹性理论方面也有贡献，《关于弹性曲面振动的数学理论》的研究成果，于 1816 年获得巴黎科学院授予的奖金。在 1831 年最先提出微分几何中的平均曲率的概念。

伽辽金(Галёркин, Борис Григорьевич, 1871.3.4—1945.7.12) 苏联数学家、力学家和工程师。生于波洛茨克，卒于莫斯科。1899 年毕业于圣彼得堡工学院。1909 年从事教学工作。1828 年成为苏联科学院通信院士，1934 年当选为苏联建筑科学院院士，1935 年成为苏联科学院院士。1934 年获俄罗斯联邦功勋科学家称号。1942 年获苏联国家奖金。获得两枚列宁勋章。全苏建筑工程学会负责人。薄板弯曲理论的创立者之一。他对建筑机械和弹性力学的研究促进了数学分析在这些领域里的应用。深入研究了弹性力学中积分方程的解析解法和近似解法，提出了“伽辽金法”，这一方法是解决变分法、数理方程和函数方程最有效的近似方法之一。1952 年至 1953 年，苏联科学院出版社出版了他的论文集。

布勃诺夫(Бубнов, Иван Григорьевич, 1872.1.6—1919.3.13) 俄罗斯力学家和造船工程师。1891 年毕业于喀琅施塔得海军工程学校。1896 年毕业于圣彼得堡海军学院。1904 年起在圣彼得堡工学院任教，1909 年任该学院教授。1910 年起任圣彼得堡海军学院教授。主要研究领域是力学和造船，在《由水压引起的船外壳张力》著作中，首次阐明计算组装船体所用外壳板的基本问题。对船舶总体强度和局部强度问题给予数学论证。1902 年，建造了俄罗斯第一艘装备内燃机的“海豚”号潜水艇，1912 年又建造了“雪豹”型潜水艇。1909—1911 年所著的《船舶结构力学》是当时唯一一部具有严密科学性和完整性的著作。1908—1910 年他的理论广泛应用于战略舰的设计。还著有《船舶下水》(1900)、《论船舶的不沉性》(1901)和《船板理论》(1953)等。

里茨(Ritz, Walther, 1878.2.22—1909.7.7)　瑞士数学家、理论物理学家。生于锡永(Sion),卒于德国格丁根。1897年入苏黎世工业大学,1901年转入格丁根大学,1902年获博士学位。以后曾在波恩、苏黎世和巴黎等地的大学和实验室工作。1908年到格丁根大学工作,1909年任不支薪讲师,数月后病故。主要从事数学物理方程与数值分析的研究,1904年法兰西科学院设奖求解偏微分方程 $\Delta^2 u = f(x,y)$,他用"里茨法"予以解决。由于其方法极为有效,立即被广泛使用,用以解决变分学中近似解问题和解析学中某些边界问题。1908年他提出光谱线频率的"组合定则"是分析光谱的基本定则。共撰写18篇论文,1911年巴黎出版了他的全集。

特雷夫茨(Trefftz, Erich Immanuel, 1888.2.12—1937.1.21)　德国数学家和工程学家。1919年任亚琛工业大学教授,1922年任德累斯顿工业大学教授。主要研究解析学、航空动力学和弹性理论。对飞机机翼进行过流体力学研究,推导出机翼在大范围变形情况下的方程式,论述了板和壳的压曲变形问题,曾就变分法及变分方程的解法发表了论著。

坎托罗维奇(Канторович, Леонид Витальевич, 1912.1.19—1986.4.6)　原苏联数学家和经济学家。生于圣彼得堡,卒于莫斯科。1930年毕业于列宁格勒大学并留校任教。1934年任教授。1935年获数理科学博士学位。1958年当选为苏联科学院通信院士,1964年成为院士,还是匈牙利科学院、美国文理研究院和南斯拉夫文学院的荣誉院士。1949年获苏联国家奖(斯大林奖),1959年获列宁奖,1975年获诺贝尔经济学奖。最优化数学方法和计算数学的创始人之一,经济数学的奠基人。在泛函分析、程序设计、函数论、数学物理、微分方程、积分方程和变分法等许多方面都有所贡献。著有《生产组织与计划中的数学方法》(1939)、《高等分析的近似方法》(1941)、《经济资源的最佳利用》(1959)、《最优计划动态模型》(1964)和《泛函分析》(1977)等多部著作。

习题8

8.1　用欧拉有限差分法求泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2y)\mathrm{d}x$ 的极小值问题的近似解,边界条件为 $y(0) = y(1) = 0$。

8.2　求方程 $\Delta u = -1$ 在矩形域 $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ 内的近似解,且 u 在矩形域的边界上等于零。

提示:本问题可化为对泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 - 2u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极值的探讨。它的近似解可用 $u_1 = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$ 的形式来探求。

8.3　求泛函 $J[y] = \int_0^1 (x^3 y''^2 + 100xy^2 - 20xy)\mathrm{d}x$, $y(1) = 0, y'(1) = 0$ 的极值问题的近似解。

提示:它的解可用 $y_n(x) = (1-x)^2(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$ 的形式来探求,并对于 $n = 1$ 来进行计算。

8.4　求泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\mathrm{d}x$, $y(0) = 0, y(1) = 0$ 的极小问题的近似解,并与其准确解做一比较。

提示:近似解可用 $y_n(x) = x(1-x)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$ 的形式来探求,并对于 $n = 0$ 和 $n = 1$ 来进行计算。

8.5　求泛函 $J[y]=\int_1^2\left(xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)\mathrm{d}x, y(1)=0, y(2)=0$ 的极值问题的近似解，并与准确解做一比较。

提示：它的解可用 $y(x)=a(x-1)(x-2)$ 的形式来探求。

8.6　用里茨法求泛函 $J[y]=\int_0^2(y'^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x, y(0)=0, y(2)=0$ 的极小问题的近似解，并与其准确解做比较。

提示：近似解可用 $y_n(x)=x(2-x)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)$ 的形式来探求，并对于 $n=0$ 和 $n=1$ 来进行计算。

8.7　用里茨法解下面边值问题，并在 $x=0.5$ 处于解析解比较。

$$\begin{cases}y''-y=x & (0<x<1)\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

8.8　用里茨法求下列边值问题的近似解

$$\begin{cases}y''+(1+x^2)y+1=0 & (-1<x<1)\\ y(1)=0, y(-1)=0\end{cases}$$

8.9　用里茨法求边值问题

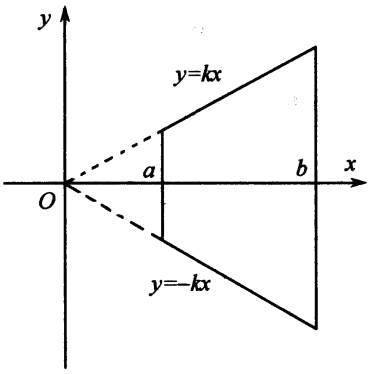
$$-\Delta u=\cos\frac{\pi x}{a}\quad (x,y\in D)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0, \Gamma \text{ 为 } D \text{ 的边界}$$

的近似解，其中区域 D 为矩形域：$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b$。

8.10　如图所示，设 D 是由 $y=\pm kx$ 及 $x=a, x=b$ 所围成的梯形域，Γ 是 D 的边界，试用坎托罗维奇法求解下面的定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=-1 & (x,y\in D)\\ u|_{\Gamma}=0\end{cases}$$



习题 8.10 图　梯形域图

8.11　用伽辽金法求下列边值问题的近似解

$$y''-y'+1=0\quad (0<x<1)$$

$$y'(0)=y(1)=0$$

8.12　用伽辽金法求下列微分方程边值问题的一、二次近似解，并在 $x=0.1n(n=1,2,\cdots,10)$ 处与解析解比较。

$$y''+y=x^2\quad (0<x<1)$$

$$y(0)=0, y(1)=1$$

8.13　用伽辽金法求解诺伊曼问题

$$\begin{cases}\Delta u=y & (x,y\in D)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0\end{cases}$$

式中 $D=\{(x,y)\mid -a<x<a, -b<y<b\}$，$\Gamma$ 为矩形域 D 的边界。

8.14　用伽辽金法解下列边值问题

$$[(x+2)y'']''+y=3x\quad (0<x<1)$$

$$y''(0)=y'''(0)=0, y(1)=y'(1)=0$$

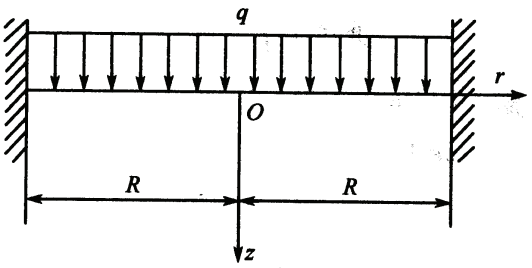
8.15　用伽辽金法求边值问题

$$y''+\lambda(1+x^2)y=0$$

$$y(-1)=y(1)=0$$

的第一、第二特征值 λ 及特征函数。

8.16　已知如图所示的圆形薄板，半径为 R，周边固定，承受均匀分布载荷 q 的作用，设挠度曲面函数为 $w = a\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2$，试用伽辽金法求其挠度。



习题 8.16 图　周边固支的圆形薄板

8.17　用伽辽金法求特征值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

的第一、第二特征值和相应的特征函数的近似解，并于该问题的精确解比较。

8.18　设弦振动方程为

$$(l + x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 l 为弦长，试求两端固定时弦的振动频率。

8.19　求泛函 $J[y] = \int_1^e (6y^2 + x^2 y'^2)\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数，使它符合边界条件 $y(1) = y(\mathrm{e}) = 0$ 和等周条件 $\int_1^e y^2 \mathrm{d}x = 1$。

8.20　求泛函 $J[y] = \int_\pi^{2\pi} (y^2 - y'^2)\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数，使它符合边界条件 $y(\pi) = y(2\pi) = 0$ 和等周条件 $\int_\pi^{2\pi} y^2 \mathrm{d}x = 1$。

8.21　求泛函 $J[y] = \int_0^1 [3y^2 - (x+1)^2 y'^2]\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数，使它符合边界条件 $y(0) = y(1) = 0$ 和等周条件 $\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = 1$。

8.22　求泛函 $J[y] = \int_0^3 [(2x+3)y'^2 - y^2]\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数，使它符合边界条件 $y(0) = y(3) = 0$ 和等周条件 $\int_0^3 y^2 \mathrm{d}x = 1$。

第 9 章　力学中的变分原理及其应用

力学中最基本和最普遍的规律称为**力学原理**。将数学上的变分法应用于力学原理中就称为**力学(的)变分原理**。由于描述力学变分原理的泛函常和力学系统的能量有关,故力学中的变分原理又称**能量原理**,相应的各种变分解法称为**能量法**。力学原理从数学表达的形式上,可以分为非变分原理和变分原理两大类,每类又分为微分形式和积分形式两种。这些力学原理的正确性在于它们所描述的同一客观事实的一致性,在于由它们所阐述的各种规律及所推导出的结论同实验事实的一致性。

直接描述系统真实运动的普遍规律的力学原理称为**力学(的)非变分原理**或**非变分(的)力学原理**,简称**非变分原理**,如果一个力学原理并不直接描述系统真实运动的普遍规律,而是提供一种准则,根据这种准则,可以把系统在力的作用下的真实运动和约束所允许的可能的其他运动区别开来,从而可以确定系统的真实运动,这样的力学原理称为**力学(的)变分原理**或**变分(的)力学原理**,简称**变分原理**。在应用上,较多用力学(的)变分原理这一提法。对某些变分原理,该准则是:对真实运动而言,某个由系统运动状态参数所构成的物理量(即泛函)具有极值或驻值。如果某力学原理只反映某一瞬时系统的运动规律,则该力学原理称为**微分变分原理**。如果某力学原理能描述某一有限时间的运动过程,则该力学原理称为**积分变分原理**。这样,力学原理可以进行如下分类:

力学原理
- 非变分的
  - 微分的(如达朗贝尔原理)
  - 积分的(如能量守恒原理)
- 变分的
  - 微分的(如虚位移原理)
  - 积分的(如哈密顿原理)

当然,上述力学原理的分类并不是最根本的,因为有的力学原理可以有不同的形式,例如赫兹最小曲率原理就是既具有微分形式,又具有积分形式。

本章介绍力学中最重要的一些原理,如虚位移原理、最小势能原理、余虚功原理、最小余能原理、哈密顿原理、赫林格 — 赖斯纳广义变分原理、胡海昌 — 鹫津久一郎广义变分原理和莫培督 — 拉格朗日最小作用量原理等,它们分别是微分变分原理和积分变分原理。这些原理或者与变分法有关或者直接就是变分法的组成部分。为此,先介绍一些有关的力学基本概念。

9.1　力学的基本概念

9.1.1　力学系统

同类事物按照一定的关系组成的整体称为**系统**。由物质构成并受到力的作用的系统称为**力学系统**。物体是占有一定空间的物质实体。可以抽象地把组成系统的物体看成是数学概念下的点或点系。在理论力学或分析力学中,把具有一定质量但可忽略其尺寸大小的物体称为**质点**。具有某种联系的一群质点组成的系统称**质点系**。若质点系中的每一个质点均可占据空间任意位置和具有任意速度,即各质点能在空间自由运动,则这样的质点系称为**自由质点系**,简称**自由系统**或**自由系**。若质点系中的质点受到某些事先给定条件的限制,使它们不能占据空间任意位置和具有任意速度,即

各质点不能在空间自由运动，则这样的质点系称为**非自由质点系统**，简称**非自由系统**或**非自由系**。质点系、自由系和非自由系都属于力学系统，都可简称**系统**。

力学系统的所有质点在同一瞬时在空间的有序集合决定了该系统的位置和形状，称为该系统的**位形**。

9.1.2 约束及其分类

若对非自由系各质点的位形或速度加以几何学或运动学的某种限制条件，则这种限制条件称为**约束**。约束对被约束的非自由系的作用力称为**约束反作用力**，简称**约束反力**或**约束力**。把除了约束反力以外的力称为**主动力**或**作用力**。用数学方程表述非自由系各质点所受的限制条件称为**约束方程**。当约束方程以等式表示时，约束称为**双侧约束**，又称为**固定约束**或**不可解约束**。当约束方程以不等式表示时，约束称为**单侧约束**，又称为**非固定约束**或**可解约束**。当约束方程不显含时间变量 t 时，约束称为**定常约束**，否则称为**非定常约束**。当约束方程仅含时间变量 t 和矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 时，约束称为**几何约束**或**有限约束**。几何约束给质点系可能占据的位置加以一定的限制，又称为**位置约束**。当约束方程含有速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 时，约束称为**微分约束**或**运动约束**。微分约束不仅限制质点系的位置，而且限制质点系的速度。若运动约束方程只含有速度的一次项，则称为**线性运动约束**。若约束方程可以积分，则它所表示的约束称为**可积微分约束**。事实上，可积微分约束就是几何约束。

几何约束和可积微分约束统称**完整约束**，有时也称为**半完整约束**。注意这里定义的完整约束与第 5 章定义的完整约束有所不同。不可积分的微分约束称为**非完整约束**。具有完整约束的质点系称为**完整系统**，否则称为**非完整系统**。

9.1.3 实位移与虚位移

一个非自由系在某一初始条件下进行运动，其内各质点的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 既满足动力学微分方程和初始条件，又满足所有约束方程，这种运动称为**真实运动**。真实运动意为实际上发生的运动。质点系中各质点在其真实运动中在空间位置上的变化量称为**真实位移**或**实位移**，简称**位移**。换句话说，系统位形的任何变化都称为**位移**。实位移需要时间。物体的位移可分为两种，一种是位移发生后，物体内各点仍然保持初始状态的相对位置不变，即物体内任意两点之间的距离没发生变化，物体的这种位移称为**刚体位移**。另一种是位移发生时，物体改变了自己在空间各点的相对位置，即改变了其大小和形状，这种现象称为**变形**。这种位移是由于物体的变形而引起的。一般来说，上述两种位移往往同时存在，并且大小和方向各不相同，但弹性力学对后一种位移更感兴趣，因为这种位移与物体内的应力有关系。

材料或物体在外力作用下产生变形，除去外力后能完全恢复原来的形状，并且应力与应变有单值对应的关系，这种性质称为**弹性**。由弹性材料构成的物体称为**弹性体**或**弹性系统**。弹性体变形时，其各点位置在空间上的改变量称为**弹性体的位移**。弹性体的位移要满足变形相容条件和几何边界条件。连接弹性体某点变形前后的矢量，称为该点的**位移矢量**。

质点系在通过固定端点时的真实运动轨迹称为**正路**或**真路**。其他与正路有共同的起点和终点，且满足约束条件的可能运动轨迹称为**旁路**或**弯路**。由于系统真实运动的唯一性，决定了在某一时间段内各质点的实位移是唯一的一组。实位移既可以是有限量，也可以是无限小量。

质点或质点系在给定时刻满足约束方程而为约束所容许的假想的任何无限小位移，称为该质点或质点系在该时刻的**虚位移**。换句话说，质点或质点系在约束允许的条件下与时间无关的假想的任意微小的位移称为**虚位移**。这种虚位移是假定的，实际上并不一定发生。所谓约束允许，是指弹性体的虚位移必须满足变形相容条件和几何边界条件。这里所说的约束条件是指弹性体内部之间的

联系以及它和外部的联系。所谓任意无限小位移，是指位移与弹性体外载荷状态无关，与时间无关，同时它是一个无穷小量。虚位移是与时间进程无关的，仅由质点或质点系所在位置及所受约束决定的几何概念。

9.1.4 应变与位移的关系

在小变形情况下，线弹性体的应变和位移有以下六个关系

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \tag{9-1-1}$$

式(9-1-1)称为线弹性体变形的**几何方程**，也称**柯西方程**，它们给出三个位移分量和六个应变分量之间的关系。若令

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{9-1-2}$$

则式(9-1-2)称为**应变张量**。应变张量是对称张量。

式(9-1-2)用张量记号可简写成

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{9-1-3}$$

由式(9-1-1)可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{9-1-4}$$

式(9-1-4)称为**应变协调方程**或**相容(性)方程**。也称为**变形协调条件**或**相容(性)条件**。

9.1.5 功与能

物体所受的力和沿力作用方向所产生位移的乘积称为**功**。作用于物体的力在任意实位移上所作功称为**实功**；在任意虚位移上所作的功称为**虚功**；在无限小实位移或虚位移上所作的功称为**微元功**或**元功**。

根据弹性力学的理论，某点处的应力张量可以写成矩阵的形式

$$\sigma = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{9-1-5}$$

应力张力是对称张量。

设微元六面体在应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 作用下，相应地产生应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$，若应力有一增量 $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy}$，则必引起相应的应变增量 $\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z, \delta\gamma_{yz}, \delta\gamma_{zx}, \delta\gamma_{xy}$。现在计算应力所作的功。

法向力 $\sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 所作的功对应于该力产生的伸长 $\delta\varepsilon_x \mathrm{d}x$，可求出该力所作的功为 $\sigma_x \delta\varepsilon_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，一对剪力 $\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可组成一个力偶，其力偶矩为 $\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当物体作任意虚位移时，该力偶所作的功为 $\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。同理可写出其余外力分量所作的功，于是，微元六面体在虚位移上所作的虚功为

$$\delta W = (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \delta W_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{9-1-6}$$

式中

$$\delta W_0 = \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{9-1-7}$$

这里 W_0 是单位体积内的总功，称为**比功**，δW_0 是比功的增量。

物体在外载作用下产生弹性应变时，则外载对弹性体作了功，即外界以外力功的形式向弹性体输入能量。若不考虑变形过程中的能量损失、弹性体的动能及外界阻尼等，则外力所作的功会把全部能量贮存于弹性体内。当外载去掉时，贮存在弹性体的能量将全部被释放出来，使物体恢复原状，这种贮存在弹性体内的能量常称为**应变能**，以 U 表示。应变能只取决于应变或应力状态，它是应变或应力函数，而与受力及变形过程无关。可见应变能代表了外力对物体所作的功。单位体积的应变能称为**应变能密度或比应变能**，简称**应变能**，可表示为

$$U_0 = U_0(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}) = U_0(\varepsilon_{ij}) \tag{9-1-8}$$

由弹性力学的理论可知，应变能 U_0 是一个**正定函数**，而正定函数有这样的性质，在变量所涉及的范围内，该函数总是大于等于零，只有当变量为零时才等于零。

对式(9-1-8)取一阶变分，有

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}\delta\varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}\delta\varepsilon_y + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z}\delta\varepsilon_z + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}}\delta\gamma_{yz} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}}\delta\gamma_{zx} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} \tag{9-1-9}$$

因比功与比应变能相等，根据式(9-1-7)和式(9-1-9)可得

$$\delta U_0 = \delta W_0 \tag{9-1-10}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}, \sigma_y = \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}, \sigma_z = \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{yz} = \dfrac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}}, \tau_{zx} = \dfrac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}}, \tau_{xy} = \dfrac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \end{cases} \tag{9-1-11}$$

或

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{9-1-12}$$

式(9－1－11)首先由格林得到,故称为**格林公式**。

将式(9－1－11)和式(9－1－12)代入式(9－1－9),得

$$\delta U_0 = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \tag{9-1-13}$$

式(9－1－13)称为**应变能密度的变分**或**虚应变能密度**。

将式(9－1－13)对体积进行积分,有

$$\begin{aligned} \delta U = \delta \iiint_V U_0 \mathrm{d}V = \iiint_V \delta U_0 \mathrm{d}V = \\ \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \cdots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) \mathrm{d}V = \\ \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{9-1-14}$$

式(9－1－14)称为**应变能的变分**或弹性体的**虚应变能**。式中的 U 表示在已达到某个应变状态时整个弹性体内的应变能。

由式(9－1－6)和式(9－1－8)可知,虚功和应变能都是应变的函数,而应变又是自变量 x、y 和 z 的函数,故虚功和应变能都是泛函。

设 L 为直杆长度,A 为直杆面积,E 为直杆材料弹性模量,在直杆为线弹性体的情况下,根据材料力学的理论,下列应变能公式成立:

拉伸(压缩)应变能

$$U = \frac{P \Delta L}{2} = \frac{\sigma \varepsilon}{2} AL = \frac{EAL\varepsilon^2}{2} = \frac{P^2 L}{2EA} \tag{9-1-15}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2}{EA} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x \tag{9-1-16}$$

式中,P 为轴向力,ΔL 为直杆变形量,u 为相应 x 长度轴向位移量,σ、ε 分别为直杆的应力和应变。

弯曲应变能

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^L EIk^2 \mathrm{d}x \tag{9-1-17}$$

式中,M 为弯矩,k 是曲率,EI 为截面抗弯刚度,I 为截面惯性矩。

根据高等数学的理论,曲率的表达式为

$$k = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{9-1-18}$$

在小变形的情况下,$y' \approx 0$,于是式(9－1－17)改可写成

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^L EIy''^2 \mathrm{d}x \tag{9-1-19}$$

剪切应变能

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{kQ^2}{GA} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{GA\gamma^2}{k} \mathrm{d}x \tag{9-1-20}$$

式中,Q 为剪力,γ 为平均剪应变,k 为与截面剪应力分布有关的系数,GA/k 为截面抗剪刚度。

圆轴扭转应变能

$$U = \frac{M_t^2 L}{2GJ_p} = \frac{GJ_p \phi^2}{2L} \tag{9-1-21}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_t^2}{GJ_p}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L GJ_p\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{9-1-22}$$

式中，M_t 为扭矩，ϕ 为扭转角，GJ_p 为圆轴截面抗扭刚度，J_p 为截面极惯性矩。

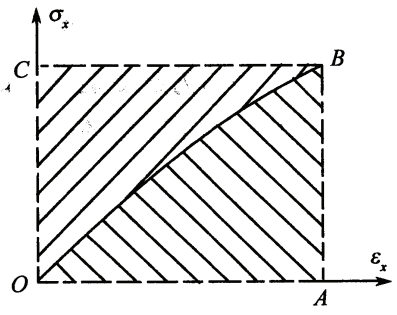


图 9-1-1　应变能与余应变能

如图 9-1-1 所示，在应力—应变坐标系中，应力—应变曲线与应变轴所围成的面积称为单位体积的**应变能**。应力—应变曲线与应力轴所围成的面积称为单位体积的**余应变能**。余应变能不像应变能那样有明确的物理意义。对于线性弹性材料，应力应变曲线是直线。在平衡状态下保持应变不变，当处于平衡状态的应力 σ 有微小变化 $\delta\sigma$ 时，则 $\delta\sigma$ 称为**虚应力**，虚应力在平衡状态的应变上所作的功称为**余虚应变能**。

如果质点在某空间内的任何位置都受到一个大小和方向完全确定的力的作用，则此空间称为**力场**。如果质点在力场中运动，力场对质点的作用力所作的功与质点所经历的路径无关，而只与质点的起点和终点位置有关，那么这种力场称为**保守力场**或**有势场**。在有势场中质点受到的力称为**有势力**或**保守力**。在有势场中，质点从某一点 M 运动到任选的一点 M_0，有势力所作的功称为质点在点 M 相对于点 M_0 的**势能**或**位能**，常以 U 或 V 表示。保守力场中的力学系统称为**保守系统**。

考虑由 n 个质点组成的系统，设 $\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个质点相对于固定坐标原点的位置矢量，系统的总动能是各质点的动能之和，可表示为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \tag{9-1-23}$$

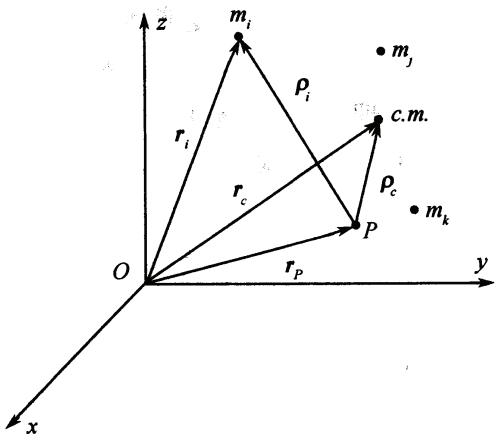


图 9-1-2　质点系在任意参考点的位置矢量

现在求与任意参考点 P 有关的动能，如图 9-1-2 所示。在此情况下

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{\rho}_i \tag{9-1-24}$$

将式(9-1-24)代入式(9-1-23)，得

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_P^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2 + \dot{\boldsymbol{r}}_P\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i \tag{9-1-25}$$

式中，m 是质点系的总质量。相对于参考点 P 质心的位置矢量 $\boldsymbol{\rho}_c$ 为

$$\boldsymbol{\rho}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{\rho}_i \tag{9-1-26}$$

于是得

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_P^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2 + \dot{\boldsymbol{r}}_P\cdot m\dot{\boldsymbol{\rho}}_c \tag{9-1-27}$$

在本章后面的例题和习题中，将多次用到式(9-1-27)。

式(9-1-27)表明质点系的总动能是三部分之和：① 具有质量 m 的质点系相对参考点 P 运动

的动能;② 系统相对于参考点 P 运动的动能;③ 参考点的矢径与系统相对于参考点的动量的数量积。

例 9.1.1　压杆稳定问题。长为 L 的简支杆的两端在压力 P 的作用下开始发生纵向弯曲,试求使杆弯曲的最小压力 P(欧拉临界压力)。边界条件为 $y(0)=0$。

解　设挠度曲线为 $y=y(x)$,杆的抗弯刚度为 EI,φ 是杆某点切向方向角,$k=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ 是杆的曲率。杆的弯曲应变能是

$$J_1=\frac{1}{2}\int_0^L EIk^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_0^L EIk^2\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

由于梁的挠度引起的载荷势能为

$$J_2=-P\int_0^L(1-\cos\varphi)\mathrm{d}s=-P\int_0^L(1-\cos\varphi)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

在小变形的情况下,$\mathrm{d}s\approx\mathrm{d}x$,$y'\approx 0$,$1-\cos\varphi\approx\dfrac{\varphi^2}{2}$,于是 J_2 可写成

$$J_2=-\frac{P}{2}\int_0^L\varphi^2\mathrm{d}s\approx-\frac{P}{2}\int_0^L\varphi^2\mathrm{d}x$$

系统的总势能为

$$J=J_1+J_2=\frac{1}{2}\int_0^L\left[EI\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2-P\varphi^2\right]\mathrm{d}s\approx\frac{1}{2}\int_0^L\left[EI\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2-P\varphi^2\right]\mathrm{d}x$$

泛函的欧拉方程为

$$\varphi''+a^2\varphi=0$$

式中,$a^2=\dfrac{P}{EI}$。欧拉方程的通解为

$$\varphi=c_1\cos ax+c_2\sin ax$$

当 φ 较小时,有 $\tan\varphi\approx\varphi$,且有 $\tan\varphi=y'$,于是有

$$y'=c_1\cos ax+c_2\sin ax$$

积分得

$$y=\frac{c_1}{a}\sin ax-\frac{c_2}{a}\cos ax$$

由边界条件 $y(0)=0$,得 $c_2=0$,于是有

$$y=c\sin ax$$

式中,$c=\dfrac{c_1}{a}$。

检验勒让德条件和雅可比条件是否满足。由于

$$F_{\varphi'\varphi'}=EI>0$$

显然勒让德条件成立。

雅可比方程为

$$EIu''+Pu=0\text{ 或 }u''+a^2=0$$

在 $u(0)=0$ 的边界条件下,雅可比方程的解是

$$u = d\sin ax$$

当 $x_k = \frac{k\pi}{a}$ 时，式中 $k = 1,2,\cdots$，函数 u 的值为零。若 $L \geqslant \frac{\pi}{a}$，则雅可比条件完全满足，于是

$$P \geqslant \frac{\pi^2}{L^2}EI$$

欧拉临界压力的最小值为

$$P_{\min} = \frac{\pi^2}{L^2}EI$$

杆的挠度曲线方程为

$$y = c\sin\frac{\pi x}{L}$$

9.2 虚位移原理

9.2.1 质点系的虚位移原理

虚位移原理亦称**虚功原理**，早在17世纪伽利略就开始应用这个原理，1717年约翰·伯努利首先认识到该原理的普遍意义以及它对求解静力学问题的效应。质点系的虚位移原理可表述为：**具有定常、理想约束的一个质点系，如果在某一位置上处于平衡状态，则保持平衡的充分必要条件是：作用于该质点系上的所有主动力在任意虚位移上所作的元功之和为零**。其数学表达式为

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{9-2-1}$$

或写成分量的形式

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x + F_{iy}\delta y + F_{iz}\delta z) = 0 \tag{9-2-2}$$

式(9-2-1)和式(9-2-2)称为**虚功方程**。

证 先证明原理条件的必要性。

设质点 m_i 所受主动力的合力为 $\boldsymbol{F}_i$，所受约束反力的合力为 $\boldsymbol{N}_i$。由于质点系在某一位形下处于平衡状态，必有 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{0}$，根据牛顿第二定律，必有

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{0} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

因此对于任意虚位移都有

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{0}$$

成立，由于质点系是理想约束系统，有

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{0}$$

故有

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{0}$$

原理条件的必要性得证。

再来证明原理条件的充分性，采用反证法。假设式(9-2-1)对任意的虚位移都成立，而系统在主动力的作用下原来的平衡状态被破坏了，则至少有一个质点 m_j 在主动力 $\boldsymbol{F}_j$ 和约束反力 $\boldsymbol{N}_j$ 的作用下产生加速度 $\boldsymbol{a}_j$

$$\boldsymbol{a}_j = \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \frac{\boldsymbol{F}_j + \boldsymbol{N}_j}{m_j} \neq \boldsymbol{0}$$

由于运动是从静止开始的，故在时间微元 $\mathrm{d}t$ 内将产生与 $\boldsymbol{a}_j$ 同方向的实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j$，所以至少在这个质点上有

$$(\boldsymbol{F}_j + \boldsymbol{N}_j) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j > 0$$

对整个系统而言则有

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i > 0$$

对于定常系统，实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 是虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 的可能形式之一，于是当取 $\delta\boldsymbol{r}_i = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i > 0$$

这与假设条件(9-2-1)相矛盾，也就是说只要式(9-2-1)成立就不可能发生平衡被破坏的情况。反之，只要式(9-2-1)成立，系统就保持平衡状态，故原理条件的充分性得证。证毕。

作为力学变分原理基础的虚位移原理，强调一下它的变分特性是必要的。虚位移原理指出，系统平衡时的位置是指系统可能有的一切位置(对应各种虚功)中的这样一种位置，此时作用力所作虚功之和为零。这样，从系统可能有的一切运动状态中确实挑选出了平衡这样一种实际现实的运动状态。作为泛函的虚功取极值(虚功为零)时对应真实的运动(即平衡状态)。

9.2.2 弹性体的广义虚位移原理

虚位移原理可以推广到变形体。下面导出弹性体的广义虚位移原理的表达式。

设弹性体在直角坐标系中的体积为 V，表面积为 S，取一微元体 $\mathrm{d}V$，所受单位体积的体积力为 $\overline{F}_x$、$\overline{F}_y$ 和 $\overline{F}_z$，记作 $\overline{F}_i(i = 1,2,3)$，字母上加一横线表示这个量已给定，单位面积的表面力为 X，Y，Z 记作 X_i。以 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 表示一点处的应力分量，记作 σ_{ij}，当弹性体在各力作用下处于平衡(或运动)状态时，根据弹性力学理论，有下式成立

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \overline{F}_x = 0 \quad \left(\text{或 } \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \overline{F}_y = 0 \quad \left(\text{或 } \rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \overline{F}_z = 0 \quad \left(\text{或 } \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \end{cases} \tag{9-2-3}$$

式中，ρ 表示单位体积的质量即密度，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 表示微元体在坐标 x, y, z 方向的加速度分量，它们与密度乘积表示在三个坐标方向的负的单位体积惯性力，其中 u、v 和 w 为三个坐标方向的位移分量，记作 u_i。一般情况下，这些变量都是坐标 x、y、z 和时间 t 的函数。

当加速度分量等于零时，式(9-2-3)称为弹性体的**平衡微分方程**，简称**平衡方程**；当加速度分量不等于零时，式(9-2-3)称为弹性体的**运动微分方程**，简称**运动方程**。由于该式是法国数学家柯西于 1822 年和法国力学家纳维于 1827 年从不同角度推得，故又称为**柯西方程**或**纳维方程**。

若引用爱因斯坦求和约定，则式(9-2-3)可合并成一个方程

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \overline{F}_i = 0 \quad (\text{或 } \rho u_{itt}) \tag{9-2-4}$$

式中，$u_{itt} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$。

利用逗号约定，式(9-2-4)可以更简单地写成如下形式

$$\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i = 0 \quad (\text{或 } \rho u_{itt}) \tag{9-2-5}$$

设弹性体的边界为 $S = S_u + S_\sigma$，其中 S_u 称为**位移边界**，在该边界上给定位移

$$u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w} \tag{9-2-6}$$

或

$$u_i = \bar{u}_i \tag{9-2-7}$$

因 S_u 上的位移已给定，故有

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \tag{9-2-8}$$

或

$$\delta u_i = \delta \bar{u}_i = 0 \tag{9-2-9}$$

S_σ 称为**应力边界**，在该边界上给定表面力，即它满足力学边界条件

$$X = \overline{X}, Y = \overline{Y}, Z = \overline{Z} \tag{9-2-10}$$

式中

$$\begin{cases} X = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \\ Y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ Z = l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases} \tag{9-2-11}$$

式中，l、m 和 n 为弹性体表面上某点外法线的方向余弦。若令 $n_1 = l, n_2 = m, n_3 = n, X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$，式(9-2-11)也可写成

$$X_i = n_j \sigma_{ij} \tag{9-2-12}$$

如果弹性体的位移满足物体内部的连续性条件即几何方程(9-1-1)和 S_u 上的位移边界条件(9-2-7)，则称为弹性体的**可能位移或容许位移**，记作 u_i^p。与可能位移相对应的应变称为**可能应变或容许应变**，记作 ε_{ij}^p。根据式(9-1-3)，则有

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j}^p + u_{j,i}^p) \tag{9-2-13}$$

如果弹性体的应力满足平衡微分方程(9-2-3)和 S_σ 上的应力边界条件(9-2-10)，则称为弹性体的**可能应力或容许应力**，记作 σ_{ij}^p。因为可能应力状态是与给定体积力和表面力(或惯性力)相平衡的应力状态，所以满足平衡(运动)微分方程和应力边界条件，故有

$$\sigma_{ij,j}^p + \overline{F}_i = 0 \quad (\text{或 } \rho u_{itt}) \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{9-2-14}$$

$$X_i = \overline{X}_i \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \tag{9-2-15}$$

式中

$$\overline{X}_i = n_j\sigma_{ij}^p \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \tag{9-2-16}$$

将平衡微分方程(9-2-14)乘以可能位移,并在整个体积 V 上积分,可得

$$\iiint_V(\sigma_{ij,j}^p + \overline{F}_i)u_i^p \mathrm{d}V = 0 \tag{9-2-17}$$

将式(9-2-17)中的第一项积分先进行分部积分,再应用高斯公式,然后利用式(9-2-16),可得

$$\begin{aligned}\iiint_V \sigma_{ij,j}^p u_i^p \mathrm{d}V &= \iiint_V (\sigma_{ij}^p u_i^p)_{,j}\mathrm{d}V - \iiint_V \sigma_{ij}^p u_{i,j}^p \mathrm{d}V = \\ &\iint_S n_j(\sigma_{ij}^p u_i^p)\mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_{ij}^p u_{i,j}^p \mathrm{d}V = \\ &\iint_S \overline{X}_i u_i^p \mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_{ij}^p u_{i,j}^p \mathrm{d}V\end{aligned} \tag{9-2-18}$$

注意到 $\sigma_{ij}^p = \sigma_{ji}^p$,经过验证可知

$$\sigma_{ij}^p u_{i,j}^p = \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \tag{9-2-19}$$

将式(9-2-19)代入式(9-2-18),再将式(9-2-18)代入式(9-2-17),可得

$$\iiint_V \overline{F}_i u_i^p \mathrm{d}V + \iint_S \overline{X}_i u_i^p \mathrm{d}S = \iiint_V \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \mathrm{d}V \tag{9-2-20}$$

式(9-2-20)称为弹性体的**广义虚位移原理、广义虚功原理或可能功原理**,也称为**高斯公式**。值得指出的是,因广义虚位移原理的推导过程并未涉及本构关系,故式(9-2-20)中的可能应力 σ_{ij}^p 和可能应变 ε_{ij}^p 可以互不相干,它们分别在各自容许的条件下独立变化。

式(9-2-20)表示的广义虚功原理可叙述为:**外力(体积力和表面力)在可能位移上做的功等于静力可能应力在与可能位移相应的可能应变上做的功**。广义虚功原理是能量守恒原理在弹性力学中的一个具体表现形式。

利用平衡微分方程(9-2-14)和几何方程(9-1-3)消去式(9-2-20)中的 $\overline{F}_i$ 和 ε_{ij}^p,可得

$$-\iiint_V \sigma_{ij,j}^p u_i^p \mathrm{d}V + \iint_S \overline{X}_i u_i^p \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}^p(u_{i,j}^p + u_{j,i}^p)\mathrm{d}V \tag{9-2-21}$$

式中,σ_{ij}^p 和 u_i^p 之间不需要满足任何关系。这是广义虚位移原理的另一种表示形式。

9.2.3 弹性体的虚位移原理

虚位移原理可以推广到变形体。下面导出弹性体的虚位移原理的表达式。

设弹性体满足式(9-2-3),在某平衡位置对弹性体施加一组任意的无限小的虚位移 δu、δv 和 δw,则弹性体内任一点将产生满足变形协调条件的虚位移

$$\delta \boldsymbol{u} = [\delta u \quad \delta v \quad \delta w]^T \tag{9-2-22}$$

且对于平衡微分方程(9-2-3)和 S_σ 上的应力边界条件(9-2-10),根据虚位移原理,有

$$\begin{aligned}-\iiint_V \Bigg[&\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \overline{F}_x\right)\delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \overline{F}_y\right)\delta v + \\ &\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \overline{F}_z\right)\delta w\Bigg]\mathrm{d}V +\end{aligned}$$

$$\iint_S [(X-\overline{X})\delta u + (Y-\overline{Y})\delta v + (Z-\overline{Z})\delta w]\mathrm{d}S = 0 \tag{9-2-23}$$

式中，$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}S$ 分别表示弹性体内的体积元素和弹性体表面的面积元素。

注意，本来面积分应该在应力边界 S_σ 上进行，但因在位移边界 S_u 上有式(9-2-8)成立，所以在式(9-2-23)中可以把面积分扩展至整个表面。

根据式(9-1-1)以及变分和求导可以交换次序的性质，有

$$\begin{cases} \delta\varepsilon_x = \delta\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \delta u}{\partial x}, \delta\varepsilon_y = \delta\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial \delta v}{\partial y}, \delta\varepsilon_z = \delta\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial \delta w}{\partial z} \\ \delta\gamma_{yz} = 2\delta\varepsilon_{yz} = \delta\dfrac{\partial v}{\partial z} + \delta\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial \delta v}{\partial z} + \dfrac{\partial \delta w}{\partial y} \\ \delta\gamma_{zx} = 2\delta\varepsilon_{zx} = \delta\dfrac{\partial w}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial \delta w}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta u}{\partial z} \\ \delta\gamma_{xy} = 2\delta\varepsilon_{xy} = \delta\dfrac{\partial u}{\partial y} + \delta\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial \delta u}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta v}{\partial x} \end{cases} \tag{9-2-24}$$

式(9-2-24)称为**虚应变与虚位移关系式**。式(9-2-24)可写成

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \tag{9-2-25}$$

取式(9-2-23)体积分中的第一项，利用高斯公式和分部积分，并注意到式(9-2-24)中的第一式，有

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\delta u\mathrm{d}V &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x \delta u) - \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x}\right]\mathrm{d}V = \\ &\iint_S l(\sigma_x \delta u)\mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\mathrm{d}V = \\ &\iint_S \sigma_x l\delta u\mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_x \delta\varepsilon_x \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{9-2-26}$$

同理，对式(9-2-23)体积分中含有 σ_y 和 σ_z 的项进行同样的处理，可得到与式(9-2-26)类似的两个关系式。

利用高斯公式和分部积分，并利用式(9-2-24)的第四式，下列积分成立

$$\begin{aligned} \iiint_V \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}\mathrm{d}V &= \iiint_V \tau_{xy}\left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}\right)\mathrm{d}V = \\ &\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}\delta v) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}\delta u)\right]\mathrm{d}V - \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\delta u\right)\mathrm{d}V = \\ &\iint_S \tau_{xy}(l\delta v + m\delta u)\mathrm{d}S - \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\delta u\right)\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{9-2-27}$$

同理，关于 $\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}$ 和 $\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}$ 的体积分也可得到与式(9-2-27)类似的两个关系式。

将式(9-2-26)和式(9-2-27)所表示的六个关系式代入式(9-2-23)，并利用 S_σ 上的应力边界条件(9-2-10)及(9-2-11)，经整理后可得

$$\begin{aligned} &\iiint_V (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\mathrm{d}V = \\ &\iiint_V (\overline{F}_x\delta u + \overline{F}_y\delta v + \overline{F}_z\delta w)\mathrm{d}V + \iint_S (\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w)\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{9-2-28}$$

式(9-2-28)即为平衡状态下的小位移弹性体的虚位移原理(表达式)。它还可以写成

$$\iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V = \iiint_V \overset{\cdot}{F}_i\delta u_i\mathrm{d}V + \iint_S \overline{X}_i\delta u_i\mathrm{d}S \tag{9-2-29}$$

由式(9-1-14)可知,式(9-2-29)的左端是弹性体的虚应变能,即

$$\delta U = \delta\iiint_V U_0\mathrm{d}V = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{9-2-30}$$

式(9-2-29)的右端是外力的虚功,即

$$\delta W = \iiint_V \overline{F}_i\delta u_i\mathrm{d}V + \iint_S \overline{X}_i\delta u_i\mathrm{d}S \tag{9-2-31}$$

式中,右端第一项为体积力所作的虚功,第二项为表面力所作的虚功。

根据式(9-2-30)和式(9-2-31),式(9-2-29)可写成

$$\delta W = \delta U \tag{9-2-32}$$

式(9-2-32)就是弹性体的虚位移原理的表达式,称为弹性体的**虚功方程**。在平衡状态发生虚位移时,外力已作用于弹性体,而且在虚位移中,外力和应力均保持不变,是恒力所做的功。故虚功简单地表示为外力与虚位移之乘积,并无因子1/2。这是虚功有别于真实功的重要特点。

根据式(9-2-32),弹性体的虚位移原理可表述为:**弹性体处于平衡状态的充要条件是:对于任意微小的虚位移,作用在弹性体上的外力(体力和面力)在任意虚位移过程中所做的虚功等于弹性体的虚应变能**。

虚位移原理式(9-2-28)、式(9-2-29)或式(9-2-32)是弹性力学变分原理的基础,它在有限元法中也有重要的应用价值。

值得指出的是,虽然上面从物体弹性平衡的角度导出了虚位移原理的表达式,但是一般说来,虚位移原理具有普遍意义。它可以适用于一切结构,不论材料是线性还是非线性、弹性还是塑性、静载还是动载等均能适用。

事实上,以上导出的虚位移原理可以用简单的方法获得。利用广义虚位移原理(9-2-20),取 σ_{ij}^p 为真实应力 σ_{ij},并注意到 δu_i 和 $\delta\varepsilon_{ij}$ 也是一种可能位移和可能应变。这样,可用 σ_{ij}、δu_i 和 $\delta\varepsilon_{ij}$ 分别替换式(9-2-20)中的 σ_{ij}^p、u_i^p 和 ε_{ij}^p,就可得到式(9-2-29)。

例9.2.1 如图9-2-1所示,一个具有 n 根铰接的杆件组成的结构于节点 A 铰接,每根杆长 L_i,截面积 A_i,弹性模量 E_i,各杆件分别与水平面成交角 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$。载荷 P 作用于 A 点且与水平面成交角 β。假定各杆件为线弹性材料,略去体力作用(杆件自重),试求各杆件所受的内力。

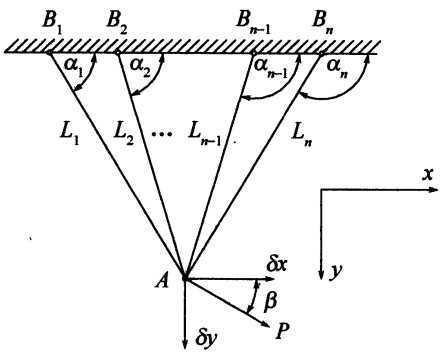


图9-2-1 桁架结构受力与位移

解 结构中各杆的变形可以通过节点 A 的位移来计算,而节点 A 的位移可以通过三角函数来表示。

设给节点 A 在 x 方向一个虚位移 δx,则各杆长度将改变并绕每个固定端点 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 转动(这样并不违反本问题所给定的约束条件)。

每根杆件长度的改变量为

$$\delta L_i = \delta x\cos\alpha_i \tag{1}$$

每根杆件的虚应变为

$$\delta\varepsilon_i = \frac{\delta L_i}{L_i} = \frac{\delta x\cos\alpha_i}{L_i} \tag{2}$$

本结构只有节点 A 不受约束，设其位移分量为 u 与 v。这是由载荷 P 产生的节点 A 的真实位移分量。由这些位移分量所引起的第 i 根杆件的应变为

$$\varepsilon_i = \frac{u\cos\alpha_i}{L_i} + \frac{v\sin\alpha_i}{L_i} \tag{3}$$

第 i 根杆由位移 u 与 v 引起的应力为

$$\sigma_i = E_i\varepsilon_i = E_i\left(\frac{u\cos\alpha_i}{L_i} + \frac{v\sin\alpha_i}{L_i}\right) \tag{4}$$

式中，E_i 为弹性模量。

本结构中只有载荷 P 作虚功。将虚位移方程(9-2-29)应用于结构，可得

$$P\cos\beta\delta x = \sum_{i=1}^{n}\iiint_V \sigma_i\delta\varepsilon_i \mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{4}\sigma_i\delta\varepsilon_i L_i A_i \tag{5}$$

将式(2)和式(4)代入式(5)，得

$$P\cos\beta\delta x = \sum_{i=1}^{n} E_i\left(\frac{u\cos\alpha_i}{L_i} + \frac{v\sin\alpha_i}{L_i}\right)\frac{\delta x\cos\alpha_i}{L_i}L_iA_i \tag{6}$$

消去 δx 后可得

$$P\cos\beta = \sum_{i=1}^{n}(u\cos^2\alpha_i + v\sin\alpha_i\cos\alpha_i)\frac{A_i}{L_i}E_i \tag{7}$$

同样，假定给节点 A 另一个沿 y 方向的虚位移 δy，重复上面的步骤，可得

$$P\sin\beta = \sum_{i=1}^{n}(u\cos\alpha_i\sin\alpha_i + v\sin^2\alpha_i)\frac{A_i}{L_i}E_i \tag{8}$$

联立解式(7)与式(8)这两个代数方程，便能解得两个真实的位移分量 u 与 v。它们分别为

$$u = \frac{P\cos\beta\sum_{i=1}^{n}\sin^2\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i - P\sin\beta\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\sin\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i}{\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i\sum_{i=1}^{n}\sin^2\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\sin\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i\right)^2} \tag{9}$$

$$v = \frac{P\sin\beta\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i - P\cos\beta\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\sin\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i}{\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i\sum_{i=1}^{n}\sin^2\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\sin\alpha_i\frac{A_i}{L_i}E_i\right)^2} \tag{10}$$

于是各杆件中的真实应力及轴向力就很容易计算得到了。

9.3 最小势能原理

将式(9-2-29)表示的虚位移原理应用于弹性结构，可以推导出更便于应用的**最小势能原理**。

由于虚位移是微小量，在弹性体的虚位移过程中，外力的大小和方向均保持不变，只是作用点有了改变，这样，就可以把式(9-2-29)的变分符号可以提至积分号外，并将诸式移至等号同一侧，故有

$$\delta(U - W) = 0 \tag{9-3-1}$$

式中

$$W = \iiint_V \overline{F}_i u_i \mathrm{d}V + \iint_S \overline{X}_i u_i \mathrm{d}S \tag{9-3-2}$$

显然，W 是外力(包括体力和面力) 在位移 u_i 上所做的功。若外力是有势场中的力，则

$$V = -W = -\iiint_V \overline{F}_i u_i \mathrm{d}V - \iint_S \overline{X}_i u_i \mathrm{d}S \tag{9-3-3}$$

V 称为**外力的势能**。

对式(9-3-3) 取变分，有

$$\delta V = -\iiint_V \overline{F}_i \delta u_i \mathrm{d}V - \iint_S \overline{X}_i \delta u_i \mathrm{d}S \tag{9-3-4}$$

而

$$\Pi = U + V = \iiint_V U_0(\varepsilon_{ij}) \mathrm{d}V - \iiint_V \overline{F}_i u_i \mathrm{d}V - \iint_S \overline{X}_i u_i \mathrm{d}S \tag{9-3-5}$$

是弹性变形势能与外力势能之和，称为**弹性体的总势能**。于是式(9-3-1) 可写成

$$\delta \Pi = 0 \tag{9-3-6}$$

式(9-3-6) 表明弹性体在平衡位置时，其总势能有极值。研究结果表明，在稳定的平衡位置弹性体的势能具有极小值。于是，对于位移和变形都很小的弹性体，最小势能原理可以叙述为：**弹性体在给定的外力作用下，在满足变形相容条件和位移边界条件的所有可能位移中，真实位移使弹性体总势能取得极小值**。根据最小势能原理，可以把求位移微分方程的边值问题转化为求总势能泛函的变分问题。求出了弹性体的位移，就可以求得应力，以分析弹性体的强度。

下面证明最小势能原理。

证　分别用 u、v、w 和 u^p、v^p、w^p 表示一组真实解的位移和一组可能位移，并令

$$u^p = u + \delta u, v^p = v + \delta v, w^p = w + \delta w$$

相应的势能为 $\Pi(u, v, w)$ 及 $\Pi(u^p, v^p, w^p)$。根据 3.6 节式(3-6-10)，势能的增量为

$$\begin{aligned}
\Delta \Pi = \Pi(u^p, v^p, w^p) - \Pi(u, v, w) = \\
\iiint_V [U_0(\varepsilon_x + \delta\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy} + \delta\gamma_{xy}) - U_0(\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy})] \mathrm{d}V - \iiint_V \overline{F}_i \delta u_i \mathrm{d}V - \iint_S \overline{X}_i \delta u \mathrm{d}S = \\
\iiint_V [U_0(\varepsilon_x + \delta\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy} + \delta\gamma_{xy}) - U_0(\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy})] \mathrm{d}V + \delta V = \\
\delta \Pi + \delta^2 \Pi + \cdots
\end{aligned} \tag{9-3-7}$$

注意 $\overline{F}_i$ 和 $\overline{X}_i$ 是给定的外力，它们不变化。

将应变能 $U_0(\varepsilon_x + \delta\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy} + \delta\gamma_{xy})$ 展成泰勒级数

$$\begin{aligned}
U_0(\varepsilon_x + \delta\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy} + \delta\gamma_{xy}) = U_0(\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy}) + \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} \delta\varepsilon_x + \cdots + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta\gamma_{xy} \right) + \\
\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_x^2} \delta\varepsilon_x^2 + \cdots + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \gamma_{xy}^2} \delta\gamma_{xy}^2 \right) + R
\end{aligned} \tag{9-3-8}$$

式中，R 是比 $d_1^2(\varepsilon_x, \varepsilon_x + \delta\varepsilon_x), \cdots, d_1^2(\gamma_{xy}, \gamma_{xy} + \delta\gamma_{xy})$ 更高阶的无穷小。

将式(9-3-8) 代入式(9-3-7)，并注意到式(9-1-9)、式(9-1-11) 和式(9-1-14)，经整理可得

$$\Pi(u^p, v^p, w^p) - \Pi(u, v, w) =$$

$$\delta U+\delta V+\iiint_V\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2U_0}{\partial\varepsilon_x^2}\delta\varepsilon_x^2+\cdots+\frac{\partial^2U_0}{\partial\gamma_{xy}^2}\delta\gamma_{xy}^2\right)\mathrm{d}V+R \tag{9-3-9}$$

式(9-3-9)右端前两项是关于位移的变分 δu、δv、δw 及其导数的线性项，称为**总势能的一次变分**，记为 $\delta\Pi$，由变分法的基本理论可知，泛函取极值时，其一阶变分等于零，即

$$\delta\Pi=\delta U+\delta V=\delta(U+V)=0 \tag{9-3-10}$$

式(9-3-10)其实就是式(9-3-6)。

式(9-3-9)中右端第三项是关于 δu、δv、δw 及其导数的二次项，称为**总势能的二次变分**，记为 $\delta^2\Pi$，即

$$\delta^2\Pi=\iiint_V\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2U_0}{\partial\varepsilon_x^2}\delta\varepsilon_x^2+\cdots+\frac{\partial^2U_0}{\partial\gamma_{xy}^2}\delta\gamma_{xy}^2\right)\mathrm{d}V \tag{9-3-11}$$

若令 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\cdots=\gamma_{xy}=0$，则式(9-3-8)可写成

$$U_0(\delta\varepsilon_x,\cdots,\delta\gamma_{xy})=U_0(0,\cdots,0)+\left(\frac{\partial U_0}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x+\cdots+\frac{\partial U_0}{\partial\gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2U_0}{\partial\varepsilon_x^2}\delta\varepsilon_x^2+\cdots+\frac{\partial^2U_0}{\partial\gamma_{xy}^2}\delta\gamma_{xy}^2\right) \tag{9-3-12}$$

因为各应变均为零时，有

$$U_0(0,\cdots,0)=0 \tag{9-3-13}$$

且由式(9-1-11)可知，$\frac{\partial U_0}{\partial\varepsilon_x},\cdots,\frac{\partial U_0}{\partial\gamma_{xy}}$ 分别为 $\sigma_x,\cdots,\tau_{xy}$，对于无应变状态，它们都应该为零。因此式(9-3-12)可写成

$$U_0(\delta\varepsilon_x,\cdots,\delta\gamma_{xy})=\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2U_0}{\partial\varepsilon_x^2}\delta\varepsilon_x^2+\cdots+\frac{\partial^2U_0}{\partial\gamma_{xy}^2}\delta\gamma_{xy}^2\right) \tag{9-3-14}$$

于是，当 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\cdots=\gamma_{xy}=0$ 时，式(9-3-11)可以表示为

$$\delta^2\Pi=\iiint_V U_0(\delta\varepsilon_x,\delta\varepsilon_y,\cdots,\delta\gamma_{xy})\mathrm{d}V \tag{9-3-15}$$

但由于应变能 U_0 是一个正定函数，总有 $U_0\geqslant0$，因此总势能的二次变分

$$\delta^2\Pi\geqslant0 \tag{9-3-16}$$

式中的等号仅当从 δu、δv 和 δw 导出的所有应变分量均为零时才成立。从而得

$$\Pi(u^p,v^p,w^p)\geqslant\Pi(u,v,w) \tag{9-3-17}$$

以上对于无应变状态证明了式(9-3-17)。事实上，这一结论对于任何应变状态都成立。证毕。

值得指出的是，从虚位移原理出发推证最小势能原理时，实际上采用了两个基本假设：系统总势能的存在和应变能正定函数。前者要求系统必须是保守的，后者则要求平衡必须是稳定的。最小势能原理只有在满足这两个条件的情况下才能成立，而虚位移原理则无此限制，这也是最小势能原理不如虚位移原理应用广泛的主要原因。

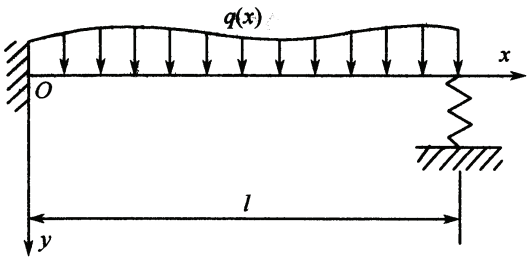


图 9-3-1　有弹簧支撑并受分布载荷的梁

例 9.3.1　如图 9-3-1 所示，左端固定、右端有弹簧支撑的梁，其跨度为 l，抗弯刚度为 EI，分布载荷为 $q(x)$，弹簧刚度为 k。试用最小势能原理导出梁的弯曲微分方程和边界条件。

解　该系统的总势能包括梁的弯曲应变能、弹簧的弹性势能和分布载荷 $q(x)$ 作功而产生的

外力势能，即

$$\Pi[w] = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}kw^2(l) - \int_0^l q(x)w\mathrm{d}x \tag{1}$$

由最小势能原理 $\delta\Pi = 0$，有

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \int_0^l EIw''\delta w''\mathrm{d}x + kw(l)\delta w(l) - \int_0^l q(x)\delta w\mathrm{d}x = \\ &EIw''\delta w'\Big|_0^l - \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EIw'')\delta w'\mathrm{d}x + kw(l)\delta w(l) - \int_0^l q(x)\delta w\mathrm{d}x = \\ &EIw''\delta w'\Big|_0^l - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EIw'')\delta w\Big|_0^l + \int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(EIw'') - q(x)\right]\delta w\mathrm{d}x + kw(l)\delta w(l) = 0\end{aligned} \tag{2}$$

因梁的左端固定，其位移和转角均为零，故有

$$\delta w|_{x=0} = 0, \delta w'|_{x=0} = 0 \tag{3}$$

于是，式(2)可写成

$$\delta\Pi = EIw''\delta w'\Big|_l - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EIw'') - kw\right]\delta w\Big|_l + \int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(EIw'') - q(x)\right]\delta w\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

由变分 δw 和 $\delta w'$ 的任意性，再考虑到 $EI \neq 0$，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(EIw'') = q(x) \quad (0 < x < l) \tag{5}$$

$$w'' = 0 \quad (x = l) \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(EIw'') = kw(l) \quad (x = l) \tag{7}$$

其中式(5)是梁的弯曲微分方程，式(6)和式(7)是梁在 $x = l$ 处的自然边界条件。

9.4 余虚功原理

虚功原理和最小势能原理都是以位移分量作为未知函数，所得到的解是位移解。然后由位移求各应变及应力分量。而在工程中最感兴趣的还是应力分量，如果仍采用先求位移而后通过微分再求应力及应变的方法，将会影响解的精度，因此以应力作为未知函数来求解尤为必要。

设弹性体在已给定的体力与表面力作用下处于平衡状态。以 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 和 u, v, w 分别表示一点处的真实的应变分量和位移分量，并以 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 表示与这些应变分量相应的应力分量。若应力分量发生了微小的改变，则有

$$\sigma_x^p = \sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y^p = \sigma_y + \delta\sigma_y, \cdots, \tau_{xy}^p = \tau_{xy} + \delta\tau_{xy} \tag{9-4-1}$$

式中，$\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy}$ 称为**应力的变分或虚应力**。将式(9-4-1)代入平衡微分方程(9-2-3)，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\sigma_x + \delta\sigma_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\tau_{zx} + \delta\tau_{zx})}{\partial z} + \overline{F}_x = 0 \\ \dfrac{\partial(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\sigma_y + \delta\sigma_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})}{\partial z} + \overline{F}_y = 0 \\ \dfrac{\partial(\tau_{zx} + \delta\tau_{zx})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\sigma_z + \delta\sigma_z)}{\partial z} + \overline{F}_z = 0\end{cases} \tag{9-4-2}$$

式中，体积力 $\overline{F}_x$、$\overline{F}_y$ 和 $\overline{F}_z$ 是给定的外力，它们不发生变化。将式(9-4-2)与平衡微分方程(9-2-3)相减，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta\tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \delta\tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta\tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta\sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{9-4-3}$$

在应力边界 S_σ 上，有

$$\begin{cases} \delta\overline{X} = \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m + \delta\tau_{zx} n = 0 \\ \delta\overline{Y} = \delta\tau_{xy} l + \delta\sigma_y m + \delta\tau_{yz} n = 0 \\ \delta\overline{X} = \delta\tau_{zx} l + \delta\tau_{yz} m + \delta\sigma_z n = 0 \end{cases} \tag{9-4-4}$$

这是因为在应力边界 S_σ 上面力已给定，故此时面力的虚变化均为零。在位移边界 S_u 上面力的虚变化为

$$\begin{cases} \delta X = \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m + \delta\tau_{zx} n \\ \delta Y = \delta\tau_{xy} l + \delta\sigma_y m + \delta\tau_{yz} n \\ \delta Z = \delta\tau_{zx} l + \delta\tau_{yz} m + \delta\sigma_z n \end{cases} \tag{9-4-5}$$

由于已假定应变及相应的应力是真实的，因此，弹性体存在下列关系

$$\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \varepsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \cdots, \gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{9-4-6}$$

在位移已给定的边界 S_u 上有

$$u - \overline{u} = 0, v - \overline{v} = 0, w - \overline{w} = 0 \tag{9-4-7}$$

式中，$\overline{u}$、$\overline{v}$ 和 $\overline{w}$ 是 S_u 上已给定的位移值。

假定弹性体从平衡状态接受一组任意的、无限小的虚应力 $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy}$，则有

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left[\left(\varepsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\sigma_x + \left(\varepsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta\sigma_y + \left(\varepsilon_z - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta\sigma_z + \right. \\ &\left. \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\tau_{xy} + \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta\tau_{yz} + \left(\gamma_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\tau_{zx} \right] \mathrm{d}V + \\ &\iint_{S_u} [(u - \overline{u})\delta X + (v - \overline{v})\delta Y + (w - \overline{w})\delta Z] \mathrm{d}S = 0 \end{aligned} \tag{9-4-8}$$

式中，δX、δY 和 δZ 是表面力相应于虚应力的虚变化。

利用高斯公式并通过分部积分，下列关系式成立

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial u}{\partial x}\delta\sigma_x \mathrm{d}V &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x}(u\delta\sigma_x)\mathrm{d}V - \iiint_V \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} u \mathrm{d}V = \\ &\iint_S u\delta\sigma_x l \mathrm{d}S - \iiint_V \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} u \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{9-4-9}$$

$$\iiint_V \frac{\partial v}{\partial x}\delta\tau_{xy} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x}(v\delta\tau_{xy})\mathrm{d}V - \iiint_V \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} v \mathrm{d}V =$$

$$\iint_S v\delta\tau_{xy}l\mathrm{d}S - \iiint_V \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x}v\mathrm{d}V \tag{9-4-10}$$

同理，还可以写出与式(9-4-9)相似的两个关系式以及与式(9-4-10)相似的五个关系式，将这些关系式代入式(9-4-8)，可得

$$\iiint_V(\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \cdots + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy})\mathrm{d}V + \iiint_V\left[\left(\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial z}\right)u + \left(\frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z}\right)v + \left(\frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\sigma_z}{\partial z}\right)w\right]\mathrm{d}V -$$

$$\iint_S[u(\delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy}m + \delta\tau_{zx}n) + v(\delta\tau_{xy}l + \delta\sigma_y m + \delta\tau_{yz}n)] +$$

$$w(\delta\tau_{zx}l + \delta_{yz}m + \delta\sigma_z n)]\mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_u}[(u-\bar{u})\delta X + (v-\bar{v})\delta Y + (w-\bar{w})\delta Z]\mathrm{d}S = 0 \tag{9-4-11}$$

注意到式(9-4-3)和式(9-4-4)，并利用式(9-4-5)，式(9-4-11)可化为

$$\iiint_V(\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \cdots + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy})\mathrm{d}V - \iint_S(\bar{u}\delta X + \bar{v}\delta Y + \bar{w}\delta Z)\mathrm{d}S = 0 \tag{9-4-12}$$

注意，本来式(9-4-12)中的面积分只应在 S_u 上进行，但因为在 S_σ 上有式(9-4-4)成立，所以在式(9-4-12)中可以把面积分扩展至整个表面。式(9-4-12)称为弹性体的**余虚功原理**。余虚功原理也称为**虚应力原理**。

根据式(9-1-2)和式(9-1-5)，式(9-4-12)可写成

$$\iiint_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V = \iint_S \bar{u}_i\delta X_i\mathrm{d}S \tag{9-4-13}$$

式(9-4-13)左边表示弹性体的总余虚能，而右边表示面力的变分在实际位移上所做的功。式(9-4-13)与式(9-2-29)表示的虚位移原理成互补形式。

令式(9-4-13)左端的被积函数为

$$\delta U_0^c = \varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \varepsilon_z\delta\sigma_z + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz} + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx} + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} \tag{9-4-14}$$

式(9-4-14)称为弹性体**余应变能密度的变分**或**余虚应变能密度**，而 U_0^c 是单位体积的余应变能，称为**余能密度函数**或**余应变能密度**。这样式(9-4-13)左端可写成

$$\delta U^c(\sigma_{ij}) = \delta\iiint_V U_0^c(\sigma_{ij})\mathrm{d}V = \iiint_V \delta U_0^c(\sigma_{ij})\mathrm{d}V = \iiint_V \delta U_0^c\mathrm{d}V \tag{9-4-15}$$

式(9-4-15)称为**余应变能的变分**或弹性体的**余虚应变能**。式中的 U^c 称为在已达到某个应变状态时整个弹性体内的**余应变能**，简称**余能**。

根据弹性力学的理论，余应变能密度和应变能密度存在下列关系

$$U_0^c(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - U_0(\varepsilon_{ij}) \tag{9-4-16}$$

式(9-4-13)右端称为边界位移的**余虚功**，即

$$\delta W^c = \iint_S \bar{u}_i\delta X_i\mathrm{d}S \tag{9-4-17}$$

根据式(9-4-15)和式(9-4-17)，式(9-4-13)可写成

$$\delta U^c = \delta W^c \tag{9-4-18}$$

根据式(9-4-12),弹性体的余虚功原理可叙述为:**当弹性体满足平衡方程和给定的力学边界条件时,给定的真实位移在虚表面力上所做的余虚功等于弹性体内真实应变在虚应力上所产生的余应变能。**

需要特别指出的是,无论材料的应力 — 应变关系即本构关系如何,余虚功原理都成立。

9.5 最小余能原理

最小余能原理也称为**总余能原理**。根据弹性力学的一般理论,在小变形的情况下,余能函数 U_0^c 是个正定单值函数,故 $\mathrm{d}U_0^c$ 必定是全微分,因而有下列关系

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_x}, \varepsilon_y = \dfrac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_y}, \varepsilon_z = \dfrac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_z} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial U_0^c}{\partial \tau_{yz}}, \gamma_{zx} = \dfrac{\partial U_0^c}{\partial \tau_{zx}}, \gamma_{xy} = \dfrac{\partial U_0^c}{\partial \tau_{xy}} \end{cases} \tag{9-5-1}$$

于是,余虚功原理(9-4-13)便成为

$$\iiint_V \left(\frac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_x}\delta\sigma_x + \frac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_y}\delta\sigma_y + \cdots + \frac{\partial U_0^c}{\partial \tau_{xy}}\delta\tau_{xy} \right) \mathrm{d}V - \iint_S (\bar{u}\delta X + \bar{v}\delta Y + \bar{w}\delta Z)\mathrm{d}S = 0 \tag{9-5-2}$$

或

$$\iiint_V \delta U_0^c \mathrm{d}V - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta X_i \mathrm{d}S = 0 \tag{9-5-3}$$

注意到在应力边界 S_σ 上,$\delta X_i = \delta \bar{X}_i = 0$,在位移边界 S_u 上,$\bar{u}$、$\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 为常数,式(9-5-3)可写成

$$\delta\left[\iiint_V U_0^c \mathrm{d}V - \iint_S \bar{u}_i X_i \mathrm{d}S \right] = 0 \tag{9-5-4}$$

或

$$\delta\Pi^c = \delta(U^c - W^c) = \delta(U^c + V^c) = 0 \tag{9-5-5}$$

式中

$$U^c = \iiint_V U_0^c \mathrm{d}V \tag{9-5-6}$$

为弹性体的余应变能。令

$$-V^c = W^c = \iint_S \bar{u}_i X_i \mathrm{d}S \tag{9-5-7}$$

式中 V^c 称为面力的**余虚能**,它与面力的余虚功 W^c 差一个负号。Π^c 称为弹性体的**总余能**。

式(9-5-5)表示余能的极值原理。事实上,仿照最小势能原理的证明方法,可以证明这个余能为极小值,故得最小余能原理:

在所有满足平衡方程和静力边界条件的所有应力分量的函数中,真实的应力分量能使弹性体的总余能取极小值。

利用最小余能原理，可以把应力微分方程的边值问题转化为求总余能泛函的变分问题。与最小势能原理一样，最小余能原理也在保守系统稳定平衡情况下才能成立。最小余能原理与最小势能原理成互补形式。

需要强调指出的是，最小余能原理虽然与余虚功原理在数学表达形式上相似甚至相同，但内涵却不一样，余虚功原理并没有要求材料的本构关系，而最小余能原理却给出了材料的本构关系。

9.6 哈密顿原理及其应用

9.6.1 质点系的哈密顿原理

设有 n 个质点组成的非自由质点系，其中第 i 个质点 P_i 所受的合力可分为两类：主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束反力 $\boldsymbol{R}_i$。若约束反力在系统的任意虚位移上所作元功之和恒等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{9-6-1}$$

则这种约束称为**理想约束**。式中，$\boldsymbol{R}_i$ 表示作用于系统中任一质点 i 上的约束反力，$\delta \boldsymbol{r}_i$ 表示该质点的任意虚位移。

设 n 个质点组成的系统受到理想约束并处于运动状态，其中第 i 个质点 P_i 所受的主动力的合力为 $\boldsymbol{F}_i$，约束反力的合力为 $\boldsymbol{R}_i$，质量为 m_i，具有加速度 $\boldsymbol{a}_i$，且在初始时刻 t_0 和终了时刻 t_1，系统的正路和旁路在同一位置上。根据牛顿第二定律，在任一瞬时，有

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-2}$$

式(9-6-2)可改写成

$$\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{R}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-3}$$

式(9-6-3)表明，在任一瞬时，作用于质点系内每个质点的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束反力 $\boldsymbol{R}_i$ 和惯性力 $-m_i \boldsymbol{a}_i$ 构成平衡力系，这称为质点系的**达朗贝尔原理**。在此瞬时，给系统以任意虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 并求和，因系统受理想约束，故有

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} (-m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{9-6-4}$$

式(9-6-4)称为**动力学普遍方程**，或称为**达朗贝尔—拉格朗日方程**，有时也称为**达朗贝尔原理的拉格朗日形式**。该方程可表述为：**具有理想约束的质点系运动时，在任意时刻，主动力和惯性力在任意虚位移上所做的元功之和为零**。全部动力学的定理和方程都可由动力学普遍方程推导出来。显然，在动力学普遍方程中，理想约束的约束反力没有出现。

式(9-6-4)第一项可写成

$$\delta' W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \tag{9-6-5}$$

式中，$\delta' W$ 为给定力系在虚位移上所作的元功即虚功。需要指出的是，第 i 个质点受到的主动力的合力 $\boldsymbol{F}_i$ 可能依赖于 $\boldsymbol{r}_i$、$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 和 t，但虚功表达式中并不包含带有 $\delta \dot{\boldsymbol{r}}_i$ 的项。因此虚功 $\delta' W$ 一般情况下并不表示总功 W 的变分，也就是说，在得到力的功的表达式 W 以后，一般不能由该表达式求变分而得到该力的虚功。$\delta' W$ 只是数量积 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$ 的简写，它并不一定是 W 的变分。

惯性力的虚功 $-m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$ 可改写成

$$-m_i\boldsymbol{a}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i)+m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{r}_i \tag{9-6-6}$$

由于微分和变分可交换次序，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{r}_i=\delta\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}=\delta\boldsymbol{v}_i \tag{9-6-7}$$

将式(9-6-7)代入式(9-6-6)并求和，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-m_i\boldsymbol{a}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i)&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)+\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=\\&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)+\sum_{i=1}^{n}\delta\Big(\frac{m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i}{2}\Big)=\\&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)+\delta T\end{aligned} \tag{9-6-8}$$

式中，$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i}{2}$ 称为系统的**总动能**。

把式(9-6-5)和式(9-6-8)代入式(9-6-4)，得

$$\delta T+\delta'W=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i) \tag{9-6-9}$$

对式(9-6-9)从 t_0 至 t_1 时刻积分，并注意到当 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 时正路和旁路占有相同的位置 M_0 和 M_1，即 $\delta\boldsymbol{r}_i|_{t=t_0}=\delta\boldsymbol{r}_i|_{t=t_1}=0$，则

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta'W)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}=0 \tag{9-6-10}$$

或

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta'W)\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-11}$$

式(9-6-11)称为**哈密顿原理的广义形式**。

当 $\delta'W$ 恰为某个函数的变分 δW 时，式(9-6-11)可改写成

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+W)\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-12}$$

当主动力为有势力时，有 $\delta W=-\delta V$，这里 V 是系统的势能，一般情况下，它只是系统位置坐标的单值连续函数，也称为**势能函数**或**势函数**。故

$$\delta T+\delta W=\delta T-\delta V=\delta(T-V)=\delta L \tag{9-6-13}$$

式中，$L=T-V$ 称为**拉格朗日函数**。于是，可得到下述哈密顿原理。

哈密顿原理：对于任何有势力作用下的完整系统的质点系，在给定始点 t_0 和终点 t_1 的状态后，其真实运动与任何容许运动的区别是真实运动使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t \tag{9-6-14}$$

达到极值，即

$$\delta J=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\mathrm{d}t=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-15}$$

哈密顿原理虽未指明真实路径使泛函取极大值还是极小值，但一般情况下，哈密顿原理所涉及的泛函在真实路径上都是取极小值。

哈密顿原理又称为**稳定作用量原理**或**最小作(量)用原理**。该原理是力学中的基本原理，与动力学普遍方程等价，它把力学原理化为更一般的形式，并且与坐标系的选择无关，在理论上具有意义的普遍性，在应用上具有广泛的适应性。该原理是哈密顿于1834年提出来的。式(9-6-14)称为**哈密顿作用量**，简称**作用量**。哈密顿原理只涉及两个动力学函数，即系统的动能和势能。

若把 T、V 和 L 分别看作质点系在时刻 t 的动能密度(即单位体积的动能)、势能密度和拉格朗日密度函数，则哈密顿原理可写成如下形式

$$\delta J = \delta\int_{t_0}^{t_1}\iiint_V (T - V)\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \delta\int_{t_0}^{t_1}\iiint_V L\mathrm{d}V\mathrm{d}t = 0 \tag{9-6-16}$$

式中，微分号下的 V 是质点系所占据的空间域。

运用哈密顿原理，可以推导出质点系真实运动所应满足的微分方程。下面通过保守力场的几个例子说明哈密顿原理。

考虑由 n 个质点组成的不受约束的质点系，质点的质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，其中第 i 个质点 m_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i)，$(i = 1,2,\cdots,n)$，质点系的动能为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i[\dot{x}_i^2(t) + \dot{y}_i^2(t) + \dot{z}_i^2(t)] \tag{9-6-17}$$

第 i 个质点的势能函数用 $V = V(t, x_i, y_i, z_i)$ 表示，该点所受的势函数的作用力为

$$F_i = F_{x_i}\boldsymbol{i} + F_{y_i}\boldsymbol{j} + F_{z_i}\boldsymbol{k} \tag{9-6-18}$$

式中

$$F_{x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, F_{y_i} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, F_{z_i} = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-19}$$

质点系的运动是用牛顿方程组描述的，即各质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = x_i(t) \\ y = y_i(t) \\ z = z_i(t) \end{cases} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-20}$$

它应满足如下微分方程

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = F_{x_i} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} \\ m_i\ddot{y}_i = F_{y_i} = -\dfrac{\partial V}{\partial y_i} \\ m_i\ddot{z}_i = F_{z_i} = -\dfrac{\partial V}{\partial z_i} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-21}$$

对 T 和 $-V$ 积分，则有泛函

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} T[\dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t)]\mathrm{d}t \tag{9-6-22}$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_1} -V[t, x_i(t), y_i(t), z_i(t)]\mathrm{d}t \tag{9-6-23}$$

泛函 J_1 的变分为

$$\delta J_1 = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\delta\dot{y}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}\delta\dot{z}_i\right)\mathrm{d}t \tag{9-6-24}$$

将式(9-6-24)积分号中的每一项分部积分,并注意到

$$\delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-25}$$

可得

$$\delta J_1 = -\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right)\mathrm{d}t =$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}(m_i\ddot{x}_i\delta x_i + m_i\ddot{y}_i\delta y_i + m_i\ddot{z}_i\delta z_i)\mathrm{d}t \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-26}$$

泛函 J_2 的变分为

$$\delta J_2 = -\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right)\mathrm{d}t \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-27}$$

由式(9-6-21)可得

$$\delta J_1 = \delta J_2 \tag{9-6-28}$$

或

$$\delta(J_1 - J_2) = 0 \tag{9-6-29}$$

由此可见,如果函数 $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$ 在时间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 间隔内描述质点系的运动,那么,对于这些函数,泛函

$$J = J_1 - J_2 = \int_{t_0}^{t_1}(T - V)\mathrm{d}t \tag{9-6-30}$$

取极值,即上述质点系遵循哈密顿原理。

假定上述质点系的坐标还受到 k 个约束条件的约束,即

$$G_j(t, x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,k) \tag{9-6-31}$$

根据哈密顿原理,各质点的运动曲线

$$\begin{cases} x_i = x_i(t) \\ y_i = y_i(t) \\ z_i = z_i(t) \end{cases} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; i = 1,2,\cdots,n) \tag{9-6-32}$$

应使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1}(T - V)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V\right]\mathrm{d}t \tag{9-6-33}$$

在条件(9-6-31)下取得极值,这是一个条件极值的变分问题。

作辅助泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)G_j\right]\mathrm{d}t \tag{9-6-34}$$

泛函的欧拉方程组为

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\dfrac{\partial G_j}{\partial x_i} \\ m_i\ddot{y}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial y_i} + \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\dfrac{\partial G_j}{\partial y_i} \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ m_i\ddot{z}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial z_i} + \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\dfrac{\partial G_j}{\partial z_i} \end{cases} \tag{9-6-35}$$

一个自由质点的空间的位置需要三个独立坐标来确定。由 n 个质点组成的自由系需要有 $3n$ 个独立坐标才能完全确定。

能完全决定系统位置的彼此独立的变量称为该系统的**广义坐标**，或简称**坐标**。常用符号 q_1，q_2，… 表示广义坐标。广义坐标的特点是它们之间没有依赖关系，故又称为**独立坐标**。广义坐标并不一定取直角坐标，也可以选用其他变量，如距离、弧长、角度和面积等。只要能够确定系统位置的变量都可作为广义坐标。

n 个质点组成的系统，受到 m 个完整约束的限制，系统的位形可以由 $k=3n-m$ 个广义坐标完全确定。可以把具有 k 个广义坐标也就是有 k 自由度的系统的运动看成是 k 维空间中一个代表点的运动，空间中的维度对应于 q_i 中的一个广义坐标，这个 k 维空间称为**位形空间**。简单地说，系统的所有位形构成的集合就称为系统的**位形空间**。

广义坐标的虚位移称为**坐标的变分**。系统广义坐标的独立变分数目称为系统的**自由度数目**，简称**自由度**。由 n 个质点组成的质点系有 m 个完整约束，广义坐标的个数为

$$k = 3n - m \tag{9-6-36}$$

若上述运动还受另外 m 个约束方程

$$\varphi_j(t,x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n,z_1,z_2,\cdots,z_n) = 0 \quad (j=1,2,\cdots,m,m<3n) \tag{9-6-37}$$

的约束，则独立变量的数目只有 $3n-m$ 个。可用广义坐标即 $q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m}$ 来表示这些独立变量。如果用这 $3n-m$ 个广义坐标表示原来的坐标 x_i,y_i,z_i，即

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t) \\ y_i = y_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t) \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ z_i = z_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t) \end{cases} \tag{9-6-38}$$

则 T 和 V 也是广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m}$ 的函数，即

$$T = T(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_{3n-m},t) \tag{9-6-39}$$

$$V = V(q_1,q_2,\cdots,q_{3n-m},t) \tag{9-6-40}$$

将式(9-6-39)和式(9-6-40)代入式(9-6-15)，得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{3n-m}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{9-6-41}$$

由于 $L=T-V$，且 V 不是 $\dot{q}_i$ 的函数，故式(9-6-41)也可写成

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t = 0 \tag{9-6-42}$$

将式(9-6-42)分部积分,得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \mathrm{d}t = 0 \tag{9-6-43}$$

于是,欧拉方程就可以写成以下两种形式

$$\frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,3n - m) \tag{9-6-44}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,3n - m) \tag{9-6-45}$$

式(9-6-44)和式(9-6-45)均称为**保守系统的拉格朗日方程组**。满足拉格朗日方程组的运动必定是真实运动,即运动路径是正路。式(9-6-45)也正是泛函取极值所必须满足的欧拉方程。

如果拉格朗日函数 L 不显含某个广义坐标 q_i[注意,此时 L 必显含 $\dot{q}_i$,否则系统与 q_i 无关,而退化成只有 $3(n-1)-m$ 个广义坐标的系统],则该坐标 q_i 称为**循环坐标**或**可遗坐标**。有一个循环坐标就对应一个积分,称为拉格朗日方程的**循环积分**。

例 9.6.1 试就自由质点由哈密顿原理导出牛顿第一定律。

解 设自由质点的质量为 m,其势能 $V = 0$,动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

哈密顿作用量为

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \mathrm{d}t$$

其欧拉方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 0 - m\ddot{x} = 0 \\ 0 - m\ddot{y} = 0 \\ 0 - m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

得 $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$,即自由质点的加速度为零,故其速度为常量。这表明,当自由质点不受外力作用时,它或静止,此时 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$,或作匀速直线运动,此时 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = c$,其中 c 为常量。

例 9.6.2 如图 9-6-1 所示,设有一条张紧的均匀弦,其线密度为 ρ,长度为 l,两端分别固定在点 $A(0,0)$,$B(l,0)$ 处,初始位置在 Ox 轴上,并在 xOu 平面上作垂直于 Ox 轴的运动,试建立此弦振动的微分方程。

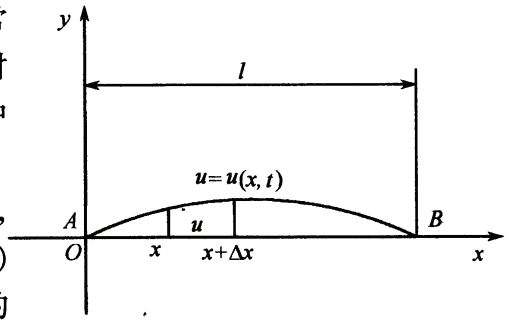


图 9-6-1 弦的振动示意图

解 弦被拉伸后所具有的势能与弦长的伸长量成正比，比例系数为 τ（张力），设弦的位移方程为

$$u = u(x,t)$$

在 t 时刻，弦在区间$[x, x+\Delta x]$上的动能为

$$\Delta T = \frac{1}{2}\rho \Delta x u_t^2$$

式中，u_t 为弦的位移速度。弦的总动能为

$$T = \frac{\rho}{2}\int_0^l u_t^2 \mathrm{d}x$$

弦的势能为

$$V = \tau\left(\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x - l\right)$$

利用泰勒公式，有$\sqrt{1+u_x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}u_x^2$，于是

$$V = \frac{\tau}{2}\int_0^l u_x^2 \mathrm{d}x$$

根据哈密顿原理，泛函

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l (\rho u_t^2 - \tau u_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

的变分 $\delta J = 0$，可得欧拉方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{\tau}{\rho}\right)$$

此即弦的振动方程。

例9.6.3 如图9-6-2所示，设单摆的摆臂长度为 l，摆锤质量为 m。忽略摆臂质量，试用哈密顿原理建立单摆的运动方程。

解 取摆杆与铅垂线夹角 θ 为广义坐标，选过悬挂点 O 的水平面为势能零位置，则摆的动能、势能和拉格朗日函数分别为

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

$$V = -mgl\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl\cos\theta$$

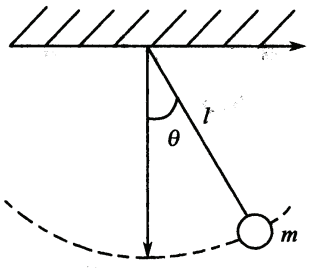


图 9-6-2 单摆的运动示意图

根据哈密顿原理，泛函

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[m(l\dot{\theta})^2 + 2mgl\cos\theta]\mathrm{d}t$$

的变分 $\delta J = 0$，可得欧拉方程

$$-mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0$$

或

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

例 9.6.4 如图 9-6-3 所示，设质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B 用三根弹簧串连在一起组成一个质点系，该系统无摩擦力且弹簧质量可忽略不计。三根弹簧的刚度分别为 k_1，k_2 和 k_3。试求物体 A 和 B 的运动方程。

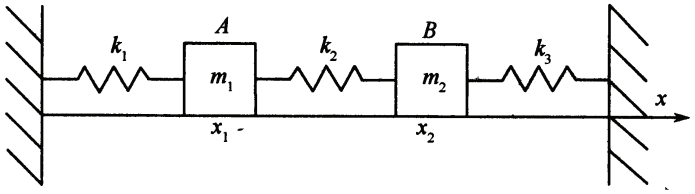


图 9-6-3 弹簧系统的运动

解 取各物体离开其平衡位置的位移 x_1 和 x_2 为广义坐标，则系统的动能和势能分别为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$V=\frac{1}{2}[k_1x_1^2+k_2(x_2-x_1)^2+k_3x_2^2]$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}[m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2-k_1x_1^2-k_2(x_2-x_1)^2-k_3x_2^2]$$

哈密顿作用量为

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2-k_1x_1^2-k_2(x_2-x_1)^2-k_3x_2^2]\mathrm{d}t$$

其欧拉方程组为

$$\begin{cases}-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)-m_1\ddot{x}_1=0\\-k_2(x_2-x_1)-k_3x_2-m_2\ddot{x}_2=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=0\\m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)+k_3x_2=0\end{cases}$$

这就是系统的运动方程。

例 9.6.5 在质点力学中，系统的作用量可表示为泛函

$$J[q(t)]=\int_{t_0}^{t_1}L(q(t),\dot{q}(t),t)\mathrm{d}t$$

式中，$q(t)$ 和 $\dot{q}(t)$ 分别为广义坐标和广义速度，L 是拉格朗日函数。已知：(1) 自由质点的拉格朗日函数为 $L=-mc\sqrt{c^2-v^2}$；(2) 在势能场 $V(\boldsymbol{r})$ 中运动质点的拉格朗日函数为 $L=\frac{m}{2}v^2-V(\boldsymbol{r})$。分别求它们的作用量 J 有极值的必要条件。在(2) 中若矢径和速度均用标量表示时，结果又如何？

解 (1) 速度 v 相当于 $\dot{q}$，泛函取极值的必要条件是满足欧拉方程

$$mc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}=0\text{ 即}\frac{(c^2-v^2)a+v^2}{(c^2-v^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

式中，$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ 为加速度。

(2) 因 $V(\boldsymbol{r}) = V(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$，故欧拉方程为

$$-(V_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j} + V_z\boldsymbol{k}) - m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

但

$$V_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j} + V_z\boldsymbol{k} = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla V$$

故

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla V$$

若矢径和速度用标量表示，因 $V(r) = V(x,y,z)$，故欧拉方程为

$$-m\frac{dv}{dt} - V_r = 0$$

但

$$V_r = V_x\frac{dx}{dr} + V_y\frac{dy}{dr} + V_z\frac{dz}{dr} = (v_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j} + V_z\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{dx}{dr}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dr}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dr}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$\nabla V \cdot \frac{d(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{dr} = \nabla V \cdot \frac{dr\boldsymbol{r}^0}{dr} = \boldsymbol{r}^0 \cdot \nabla V$$

注意到 $\boldsymbol{r}^0$ 的方向与∇V 的方向一致，故有

$$m\frac{dv}{dt} = -\boldsymbol{r}^0 \cdot \nabla V = -\boldsymbol{r}^0 \cdot \boldsymbol{r}^0 \mid \nabla V \mid = -\mid \nabla V \mid$$

如果利用式(1-3-7)、式(1-3-10) 和式(1-3-11)，可直接得到上述结果。

将上式两端各乘以 $\boldsymbol{r}^0$，得

$$m\frac{dv}{dt}\boldsymbol{r}^0 = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\mid \nabla V \mid \boldsymbol{r}^0 = -\nabla V$$

由此可见，两种表示方式是等价的。

例 9.6.6 质量为 m、半径为 r 的圆柱体在一空心圆柱体内的内表面上作纯滚动。空心圆柱体的质量为 M，半径为 R，可绕中心水平轴 O 转动，如图 9-6-4 所示。两圆柱体均系均质。试写出系统的运动微分方程。

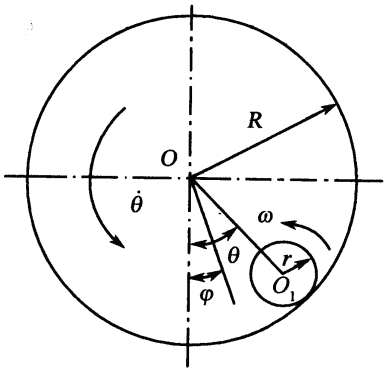


图 9-6-4 圆柱体的转动与滚动

解 系统有两个自由度。取空心圆柱体的转角 φ 和两圆柱体中心连线的转角 θ 为广义坐标。圆柱体的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}mr^2$。设圆柱体的角速度为 ω。

圆柱体中心的速度为

$$v_1 = (R - r)\dot{\theta}$$

圆柱体的角速度为

$$\omega = \frac{R\dot{\varphi}}{r} - \frac{R - r}{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}[R\dot{\varphi} - (R - r)\dot{\theta}]$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 =$$

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m[(R-r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{4}m[R\dot{\varphi} - (R-r)\dot{\theta}]^2$$

系统的势能为

$$V = -mg(R-r)\cos\theta$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m[(R-r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{4}m[R\dot{\varphi} - (R-r)\dot{\theta}]^2 + mg(R-r)\cos\theta$$

计算各偏导数

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(R-r)\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = MR^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mR[R\ddot{\varphi} - (R-r)\ddot{\theta}] = \frac{1}{2}(2M+m)R^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(R-r)^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m(R-r)[R\ddot{\varphi} - (R-r)\ddot{\theta}] =$$

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mR(R-r)R\ddot{\varphi}$$

将以上各式代入拉格朗日方程并化简，得

$$\begin{cases} m(R-r)\ddot{\theta} - (2M+m)R\ddot{\varphi} = 0 \\ \frac{1}{2}R\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

这就是系统的运动微分方程。

例 9.6.7 如图 9-6-5 所示，椭圆摆由质量为 m_1 的物块和质量为 m_2 的单摆组成，物块可在光滑水平面上滑动，摆臂长度为 L，质量可忽略不计，用光滑铰链连接在物块上，试列出系统的运动方程。

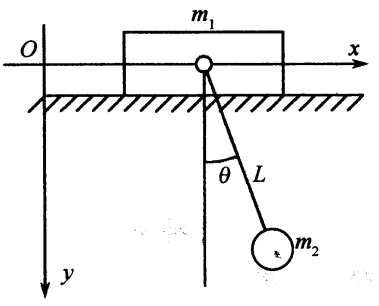


图 9-6-5 椭圆摆的运动

解 取 Ox 轴的 x 和摆的转角 θ 为广义坐标。物块的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 \tag{1}$$

单摆的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2[(\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (L\dot{\theta}\sin\theta)^2] \tag{2}$$

系统的动能为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_2L\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m_2(L\dot{\theta})^2 \tag{3}$$

系统的势能为

$$V = -m_2gL\cos\theta \tag{4}$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_2 L\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m_2(L\dot{\theta})^2 + m_2 gL\cos\theta \tag{5}$$

求各导数,得

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 L\dot{x}\,\dot{\theta}\sin\theta - m_2 gL\sin\theta \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 L\ddot{\theta}\cos\theta - m_2 L\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 L^2\ddot{\theta} + m_2 L\ddot{x}\cos\theta - m_2 L\dot{x}\,\dot{\theta}\sin\theta \tag{8}$$

将上面各式代入拉格朗日方程,得

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 0 \tag{9}$$

$$L\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \tag{10}$$

如果振动是微幅的,则有 $\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta$,式(9)和式(10)可化为

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 L(\ddot{\theta} - \theta\dot{\theta}^2) = 0 \tag{11}$$

$$L\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0 \tag{12}$$

将式(12)代入式(11)并消去 $\ddot{x}$,得摆角 θ 的方程为

$$m_1 L\ddot{\theta} + m_2 L\theta\dot{\theta}^2 + (m_1 + m_2)g\theta = 0 \tag{13}$$

若忽略摆角速度,式(13)可简化成

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 L}\theta = 0 \tag{14}$$

这是一个二阶常系数微分方程,其通解为

$$\theta = c_1\cos\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 L}}t + c_2\sin\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 L}}t \tag{15}$$

式中,c_1、c_2 为积分常数,由初始条件而定。这样就知道摆的振动周期为

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 L}} \tag{16}$$

可见,其周期小于单摆的周期。当 $m_1 \gg m_2$ 时,$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$ 此时,m_1 近似于静止,椭圆摆就相当于单摆了。

9.6.2 弹性体的哈密顿原理

下面把哈密顿原理从离散质点系推广到弹性连续系统。

达朗贝尔原理把牛顿第二定律表示成如下形式

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{9-6-46}$$

式(9-6-46)说明对于运动质点来说,只要将惯性力 $-ma$ 计入,则上述方程可看作为静力平衡方程。这样便把动力学问题处理成静力平衡问题了。同样,对于连续弹性体也可以这样做。注意到虚功方程(9-2-28)是根据方程(9-2-3)在没有计入惯性力的情况下推导出来的,对于动力系统,它也可以写成如下形式

$$-\iiint_V \rho\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}\delta u + \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}\delta v + \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\delta w\right)\mathrm{d}V + \iiint_V (\overline{F}_x\delta u + \overline{F}_y\delta v + \overline{F}_z\delta w)\mathrm{d}V +$$

$$\iint_S(\overline{X}\delta u+\overline{Y}\delta v+\overline{Z}\delta w)\mathrm{d}S=\iiint_V(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\cdots+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\mathrm{d}V \tag{9-6-47}$$

式中，δu、δv 和 δw 为在时刻 t 与约束相容的虚位移。

根据式(9-3-4)可知，式(9-6-47)左端第二、第三两项之和是负的外力势能变分 $-\delta V$，由式(9-1-14)可知，右端是弹性体应变能的变分 δU，因而式(9-6-47)可写成如下形式

$$-\iiint_V\rho\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\delta u+\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\delta v+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\delta w\right)\mathrm{d}V-\delta V-\delta U=0 \tag{9-6-48}$$

由于式中位移 u、v、w、势能 V 和应变能 U 这些变量应是时间的函数，故(9-6-48)式对物体在运动过程中的任意时刻 t 都成立。将上式在积分限 t_0 和 t_1 之间对时间积分，可得

$$-\int_{t_0}^{t_1}\iiint_V\rho\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\delta u+\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\delta v+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\delta w\right)\mathrm{d}V\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_1}\delta V\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_1}\delta U\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-49}$$

将式(9-6-49)第一项交换体积积分和时间积分的积分次序，而对第二、第三两项交换积分与变分运算次序，并注意到密度 ρ 不是时间的函数，可放到对时间积分的积分号外，得

$$-\iiint_V\rho\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\delta u+\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\delta v+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\delta w\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}V-\delta\int_{t_0}^{t_1}V\mathrm{d}t-\delta\int_{t_0}^{t_1}U\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-50}$$

根据分部积分公式，式(9-6-50)对括号内各项的积分可写成如下形式

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\delta u\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\delta u\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\delta v\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\delta v\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\delta w\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\delta w\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\delta w}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\end{cases} \tag{9-6-51}$$

因变分 δu、δv 和 δw 在 t_0 和 t_1 时刻均为零，故式(9-6-51)可改写成如下形式

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\delta u\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t_1}\dot{u}\,\delta\dot{u}\,\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t_1}\delta\frac{\dot{u}^2}{2}\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\delta v\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t_1}\dot{v}\,\delta\dot{v}\,\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t_1}\delta\frac{\dot{v}^2}{2}\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\delta w\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t_1}\dot{w}\,\delta\dot{w}\,\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t_1}\delta\frac{\dot{w}^2}{2}\mathrm{d}t\end{cases} \tag{9-6-52}$$

将式(9-6-52)代入式(9-6-50)，可得

$$-\iiint_V\frac{\rho}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\delta\dot{u}^2+\delta\dot{v}^2+\delta\dot{w}^2)\mathrm{d}t\mathrm{d}V-\delta\int_{t_0}^{t_1}V\mathrm{d}t-\delta\int_{t_0}^{t_1}U\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-53}$$

式中第一个积分再次交换积分次序，可得

$$\iiint_V\frac{\rho}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\delta\dot{u}^2+\delta\dot{v}^2+\delta\dot{w}^2)\mathrm{d}t\mathrm{d}V=\int_{t_0}^{t_1}\iiint_V\frac{\rho}{2}(\delta\dot{u}^2+\delta\dot{v}^2+\delta\dot{w}^2)\mathrm{d}V\mathrm{d}t=$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\left[\iiint_V\frac{\rho}{2}(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\delta T\mathrm{d}t=\delta\int_{t_0}^{t_1}T\mathrm{d}t \tag{9-6-54}$$

式中 T 是弹性体在时刻 t 的动能。

将式(9-6-54)代入式(9-6-50),可以把弹性体的哈密顿原理写成如下形式

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V-U)\mathrm{d}t=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-\Pi)\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-55}$$

式中,$\Pi=U+V$ 为系统的总势能。式(9-6-55)也可以写成为人们所熟悉的用下列形式来表示的哈密顿原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-\Pi)\mathrm{d}t=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0 \tag{9-6-56}$$

式中,$L=T-\Pi$ 仍然称为**拉格朗日函数**。

此时哈密顿原理叙述为:**弹性体在从 t_0 时刻的状态到 t_1 时刻的状态的所有可能的运动中,实际实现的运动应使拉格朗日函数在这段时间内对时间的积分取极值**。由于哈密顿原理是从牛顿第二定律出发得到的,故哈密顿原理也可叙述为:**弹性体在从 t_0 时刻所在的位置运动到 t_1 时刻所在的位置时的所有可能的运动中,它在每一瞬时都能满足牛顿运动定律的路径是使拉格朗日函数在这段时间内对时间的积分取极值的路径,也就是它所经历的真实轨迹**。自然,这里指的运动应把弹性体的变形包括在内。

例 9.6.8 试用哈密顿原理导出如图 9-6-6 所示摆锤的运动微分方程。

解 取如图 9-6-6 所示的极坐标系,摆锤的悬挂点为坐标原点。摆锤的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

势能为

$$V=-mgr\cos\theta$$

弹簧弹性变形能为

$$U=\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

式中,r_0 为弹簧原长。

总势能为

$$\Pi=-mgr\cos\theta+\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

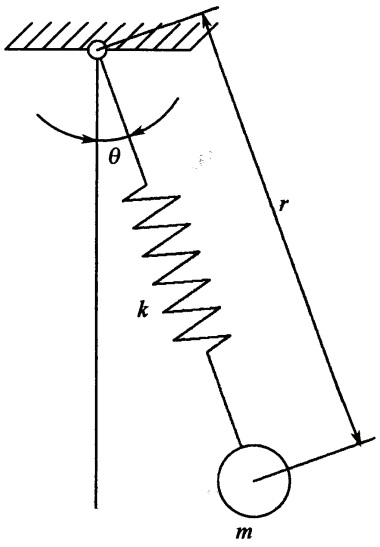


图 9-6-6 摆锤的运动

拉格朗日函数为

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+mgr\cos\theta-\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

根据哈密顿原理建立的泛函为

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+2mgr\cos\theta-k(r-r_0)^2]\mathrm{d}t$$

泛函的欧拉方程即摆锤的运动微分方程为

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mg\cos\theta+k(r-r_0)=0$$

$$mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}+mgr\sin\theta=0$$

后一个方程约去 mr,得

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+g\sin\theta=0$$

例 9.6.9 设梁的长度为 L，单位长度的质量(即线密度)为 ρ，弹性模量为 E，截面模量为 I。试求梁的弯曲振动微分方程。初始时刻和边界上梁的挠度为已知。

解 设梁的弯曲挠度为 w。梁在弯曲振动时，其势能为零，而弹性变形能为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L EIw_{xx}^2\mathrm{d}x$$

梁的动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho w_t^2\mathrm{d}x$$

根据哈密顿原理建立的泛函为

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L(\rho w_t^2-EIw_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

泛函的欧拉方程为

$$\rho w_{tt}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(EIw_{xx})=0$$

若 EI 等于常数，则有

$$\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}+\frac{\rho}{EI}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}=0$$

例 9.6.10 质量为 m 的质点由无质量的弹簧系于点 p，点 p 则以匀角速度 ω 沿半径为 a 的圆周路径运动，见图 9-6-7。设弹簧的刚度为 k，自然长度为 r_0，质点在水平面上无摩擦地运动，试求系统的运动微分方程。

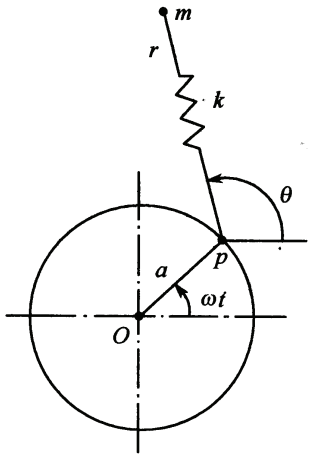


图 9-6-7 质点弹簧系统示意图

解 这是一个具有两个自由度的非定常系统，选取两个独立广义坐标 r 和 θ。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}ma^2\omega^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+ma\omega[\dot{r}\sin(\theta-\omega t)+r\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)]$$

系统的势能即弹簧的变形能为

$$V=\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}ma^2\omega^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+ma\omega[\dot{r}\sin(\theta-\omega t)+r\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)]-\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

由哈密顿原理建立的泛函为

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1}{2}ma^2\omega^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+ma\omega[\dot{r}\sin(\theta-\omega t)+\right.$$

$$\left.r\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)]-\frac{1}{2}k(r-r_0)^2\right\}\mathrm{d}t$$

泛函的欧拉方程即系统的运动微分方程为

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-ma\omega^2\cos(\theta-\omega t)+k(r-r_0)=0$$

$$mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}+mar\omega^2\sin(\theta-\omega t)=0$$

后一个方程约去 mr，可化为

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+a\omega^2\sin(\theta-\omega t)=0$$

当然，求出拉格朗日函数后，可直接用拉格朗日方程建立运动微分方程，不必再建立泛函。

例 9.6.11 求承受均匀载荷 q 的简支梁的挠曲线，如图 9-6-8 所示，梁的长度为 l，刚度为 EI。

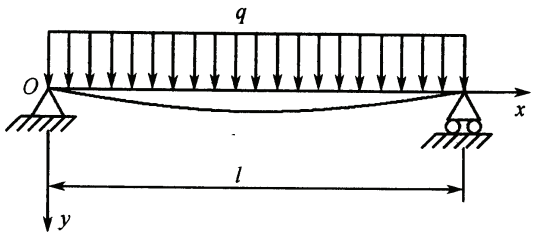


图 9-6-8 受均匀载荷的简支梁的挠度

解 设梁的挠曲线具有三角级数的形式

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

载荷 q 产生的位能是

$$V=-\int_0^l qy\mathrm{d}x=-\int_0^l q\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{2}$$

梁的弹性位能是

$$U=\frac{1}{2}EI\int_0^l y''^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}EI\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{l^2}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^4EI}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2 \tag{3}$$

式(3)用到了公式

$$\int_0^l\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{l}{2} & m=n\end{cases} \tag{4}$$

梁的总势能为

$$\Pi=U+V=\frac{\pi^4EI}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2-\int_0^l q\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{5}$$

当梁处于稳定平衡状态时，Π 取极小值，有

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}=0\quad(n=1,2,\cdots) \tag{6}$$

或

$$-\frac{2ql}{\pi n}+\frac{\pi^4EI}{2l^3}n^4a_n=0 \tag{7}$$

解出 a_n 为

$$a_n=\frac{4ql^4}{\pi^5n^5EJ} \tag{8}$$

于是，可得梁的挠度方程

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4ql^4}{\pi^5(2n-1)^5EI}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}=\frac{4ql^4}{\pi^5EI}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l} \tag{9}$$

当 $x = l/2$ 时,得梁在中点的挠度为

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI}\left[1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} + \cdots\right] \tag{10}$$

由参考文献[10]习题2962的部分解可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi) \tag{11}$$

式(11)的来源见参考文献[10]的第405-409页。将式(11)从0到 x 积分,得

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^5} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x}{n^4} = \frac{10\pi^2 x^3 - 3x^5}{720} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi) \tag{12}$$

以 $x = \pi/2$ 代入式(12),得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} + \cdots =$$

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} - \frac{37\pi^5}{720 \times 32} \tag{13}$$

由习题2962的部分解还可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720} \tag{14}$$

将式(14)代入式(13),得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1536} \tag{15}$$

将式(15)代入式(10),可得梁在中点的挠度为

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5ql^4}{384EI} \tag{16}$$

这与材料力学的精确解完全相同。

例9.6.12 如图9-6-9所示,设长度为 l 的梁两端固支,梁的刚度为 EI,在梁上的某点 C 作用一集中载荷 P。试用广义坐标求梁的挠度。

解 设梁的挠度为

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

点 C 处的挠度为

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(1 - \cos\frac{2n\pi c}{l}\right) \tag{2}$$

载荷 P 产生的位能是

$$V = -Py(c) = -P\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(1 - \cos\frac{2n\pi c}{l}\right) \tag{3}$$

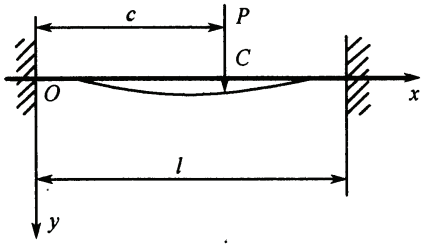


图9-6-9 受集中载荷的固支梁的挠度

弹性位能是

$$U = \frac{1}{2}EI\int_0^l y''^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2\pi^2}{l^2}a_n\cos\frac{2n\pi}{l}x\right)^2\mathrm{d}x = \frac{4\pi^4EI}{l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2 \tag{4}$$

式(4)用到了公式

$$\int_0^l \cos\frac{2m\pi}{l}x\cos\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{l}{2} & m = n \end{cases} \tag{5}$$

总位能是

$$\Pi = V + U = -P\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(1-\cos\frac{2n\pi c}{l}\right) + \frac{4\pi^4EI}{l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2 \tag{6}$$

当梁处于稳定平衡状态时,Π 取极小值,有

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_n} = 0 \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{7}$$

或

$$-P\left(1-\cos\frac{2n\pi c}{l}\right) + \frac{8\pi^4EI}{l^3}n^4a_n = 0 \tag{8}$$

解出 a_n 为

$$a_n = \frac{Pl^3}{8\pi^4n^4EI}\left(1-\cos\frac{2n\pi c}{l}\right) \tag{9}$$

于是,可得梁的挠度方程

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Pl^3}{8\pi^4n^4EI}\left(1-\cos\frac{2n\pi c}{l}\right)\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right) \tag{10}$$

由此可见,当 $c = 0$ 或 $c = l$ 时,$y \equiv 0$,即当集中力作用在端点时,梁不发生弯曲。当集中力作用在梁的中点时,有 $c = l/2$,该点的挠度为

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{2\pi^4EI}\left[1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^4}+\cdots\right] \tag{11}$$

由参考文献[10]习题2962的部分解可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \tag{12}$$

将式(12)代入式(11),可得梁在中点的挠度为

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{192EI} \tag{13}$$

当载荷作用于两端固支梁的中点时,根据材料力学的理论,梁的挠度曲线方程为

$$y = \frac{Px^2}{48EI}(3l-4x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l/2) \tag{14}$$

当取 $x = l/2$ 时,可得到式(13)。由此可见,式(13)正是材料力学的精确解。

从例9.6.11和例9.6.12可知,若基函数是完备的,则可收敛到精确解。本章后面习题9.6和习题9.7的求解结果也可证明这一点。

9.7 赫林格 — 赖斯纳广义变分原理

赫林格和赖斯纳分别于1914年和1950年先后研究并推广了最小余能原理，提出了关于小变形弹性理论以应力、应力对坐标的导数(或位移对坐标的导数)和位移为泛函的独立函数的一个无条件变分原理，该变分原理称为**赫林格 — 赖斯纳广义变分原理**，简称**赫林格 — 赖斯纳变分原理**或**赫林格 — 赖斯纳原理**。

赫林格 — 赖斯纳广义变分原理可以通过将有条件的最小余能原理变成无条件极值原理来得到。根据式(9-5-4)，并注意到式(9-2-12)，可建立弹性体的总余能的泛函为

$$J = \iiint_V U_0^c(\sigma_{ij})\mathrm{d}V - \iint_{S_u} \bar{u}_i X_i \mathrm{d}S = \iiint_V U_0^c(\sigma_{ij})\mathrm{d}V - \iint_{S_u} \bar{u}_i n_j \sigma_{ij}\mathrm{d}S \tag{9-7-1}$$

式(9-7-1)是以应力 σ_{ij} 为独立函数的泛函。应力 σ_{ij} 要受到平衡微分方程(9-2-3)和 S_σ 上的应力边界条件(9-4-4)的约束。为使泛函(9-7-1)取驻值，应解除上述两组约束，把有条件的泛函变分问题化为无条件的泛函变分问题。为此，引入三个拉格朗日乘子 λ_1、λ_2 和 λ_3，分别乘以弹性体的平衡微分方程(9-2-3)的左边，相加后对体积积分，可构造泛函为

$$J_1 = \iiint_V \lambda_i(\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i)\mathrm{d}V \tag{9-7-2}$$

再引入三个拉格朗日乘子 μ_1、μ_2 和 μ_3，利用式(9-4-4)构造泛函为

$$J_2 = -\iint_{S_\sigma} \mu_i(n_j\sigma_{ij} - \overline{X}_i)\mathrm{d}S \tag{9-7-3}$$

将式(9-7-1)、式(9-7-2)和式(9-7-3)相加，得到一个新的泛函也就是第5章中的辅助泛函

$$J^* = \iiint_V U_0^c(\sigma_{ij})\mathrm{d}V - \iint_{S_u} \bar{u}_i n_j \sigma_{ij}\mathrm{d}S + \iiint_V \lambda_i(\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i)\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} \mu_i(n_j\sigma_{ij} - \overline{X}_i)\mathrm{d}S \tag{9-7-4}$$

像泛函(9-7-4)这样，将泛函的约束乘以拉格朗日乘子构造泛函，再把构造的泛函与原泛函相加，得到解除了约束的辅助泛函，这样的辅助泛函称为**混合型泛函**或**混合泛函**，也称为**广义泛函**。这样定义的泛函与第5.4节中定义的同名泛函在内涵上是一样的。用拉格朗日乘子法系统地、规范化地构造广义泛函，这一普遍性的方法是钱伟长于1964年提出的，这种构造泛函的方法建立在严格的数学方法的基础上，已得到了广泛的应用。

对式(9-7-4)取变分并令其等于零，有

$$\delta J^* = \delta J + \delta J_1 + \delta J_2 = 0 \tag{9-7-5}$$

对 J 取变分，由式(9-7-1)，有

$$\delta J = \iiint_V \frac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V - \iint_{S_u} \bar{u}_i n_j \delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S \tag{9-7-6}$$

对 J_1 取变分，由式(9-7-2)，有

$$\delta J_1 = \iiint_V (\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i)\delta\lambda_i\mathrm{d}V + \iiint_V \lambda_i \delta\sigma_{ij,j}\mathrm{d}V \tag{9-7-7}$$

对式(9－7－7)第二个体积分用分部积分和高斯公式,有

$$\iiint_V \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} \mathrm{d}V = \iiint_V [(\lambda_i \delta\sigma_{ij})_{,j} - \lambda_{i,j}\delta\sigma_x]\mathrm{d}V = \iint_S n_j(\lambda_i \delta\sigma_{ij})\mathrm{d}S - \iiint_V \lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V =$$

$$\iint_{S_\sigma} n_j \lambda_i \delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S + \iint_{S_u} n_j\lambda_i\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S - \iiint_V \lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V \tag{9－7－8}$$

计算 J_2 的变分,由式(9－7－3),有

$$\delta J_2 = -\iint_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij} - \overline{X}_i)\delta\mu_i\mathrm{d}S - \iint_{S_\sigma}\mu_i n_j \delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S \tag{9－7－9}$$

将式(9－7－8)代入式(9－7－7),再将式(9－7－6)、式(9－7－7)和式(9－7－9)代入式(9－7－5),经整理,得

$$\delta J^* = \iiint_V \left(\frac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_{ij}} - \lambda_{i,j}\right)\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \iiint_V(\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i)\delta\lambda_i\mathrm{d}V +$$

$$\iint_{S_\sigma}(\lambda_i - \mu_i)n_j\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S + \iint_{S_u}(\lambda_i - \bar{u})n_j\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S -$$

$$\iint_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij} - \overline{X}_i)\delta\mu_i\mathrm{d}S = 0 \tag{9－7－10}$$

由 $\delta\sigma_{ij}$ 的任意性,可得

$$\lambda_{i,j} = \frac{\partial U_0^c}{\partial \sigma_{ij}} \quad 在\ V\ 内 \tag{9－7－11}$$

$$\lambda_i = \mu_i \quad 在\ S_\sigma\ 上 \tag{9－7－12}$$

$$\lambda_i = \bar{u}_i \quad 在\ S_u\ 上 \tag{9－7－13}$$

再由 $\delta\lambda_i$ 和 $\delta\mu_i$ 的任意性,可给出平衡方程(9－2－3)和 S_σ 上的应力边界条件(9－2－10)。由式(9－7－11)和式(9－7－12)可知,所引入的拉格朗日乘子 λ_i 和 μ_i 其实就是位移 u_i。用位移 u_i 取代(9－7－4)中的拉格朗日乘子 λ_i 和 μ_i,并用 J_{HR} 代替 J^*,可得

$$J_{HR} = \iiint_V [U_0^c(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i)u_i]\mathrm{d}V - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}\bar{u}_i\mathrm{d}S -$$

$$\iint_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij} - \overline{X}_i)u_i\mathrm{d}S \tag{9－7－14}$$

式(9－7－14)就是赫林格 — 赖斯纳广义变分原理的泛函。该泛函的独立函数是应力 σ_{ij}、应力对坐标的导数 $\sigma_{ij,j}$ 和位移 u_i,根据变分法的理论,它应该是三组独立函数的广义变分原理,但习惯上被认为是两类变量的广义变分原理,此时没把泛函的独立函数 — 应力对坐标的导数 $\sigma_{ij,j}$ 计入在内,或者说,把应力 σ_{ij} 和应力对坐标的导数 $\sigma_{ij,j}$ 看作了同一类变量。泛函(9－7－14)是弹性体总余能的一种推广了的表达式,称为三组独立函数的**广义余能**,但习惯上称为两类变量的**广义余能**。由泛函(9－7－14)的一阶变分可见,$\delta J_{HR} = 0$ 给出了弹性力学的全部基本方程。

赫林格 — 赖斯纳广义变分原理可表述为:**在所有位移场和应力场中,真实的位移场和应力场应使泛函(9－7－14)的一阶变分 $\delta J_{HR} = 0$**。

根据广义虚位移原理(9－2－21),并利用式(9－2－12),有

$$\iiint_V \sigma_{ij,j}u_i \mathrm{d}V = \iint_S X_i u_i \mathrm{d}S - \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i})\mathrm{d}V =$$

$$\iint_{S_u} X_i u_i \mathrm{d}S + \iint_{S_\sigma} X_i u_i \mathrm{d}S - \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i})\mathrm{d}V =$$

$$\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}u_i \mathrm{d}S + \iint_{S_\sigma} n_j\sigma_{ij}u_i \mathrm{d}S - \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i})\mathrm{d}V \qquad (9-7-15)$$

将式(9-7-15)代入式(9-1-14),并乘以 -1,得

$$J_{H-R} = -J_{HR} = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - U_0^c(\sigma_{ij}) - \overline{F}_i u_i\right]\mathrm{d}V -$$

$$\iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}(u_i - \overline{u}_i)\mathrm{d}S - \iint_{S_\sigma} \overline{X}_i u_i \mathrm{d}S \qquad (9-7-16)$$

泛函(9-7-16)正是赫林格 — 赖斯纳广义变分原理原来提出的泛函,它与泛函(9-7-14)完全等价,只是差了一个负号。泛函(9-7-16)的独立函数是应力 σ_{ij}、位移 u_i 和位移对坐标的导数 $u_{i,j}$(或 $u_{j,i}$)。泛函(9-7-16)是弹性体总势能的一种推广了的表达式,称为三组独立函数的**广义势能**,但习惯上称为两类变量的**广义势能**,此时没有把泛函的独立函数 — 位移对坐标的导数 $u_{i,j}$(或 $u_{j,i}$)考虑在内,或者说,把位移 u_i 和位移对坐标的导数 $u_{i,j}$(或 $u_{j,i}$)看作了同一类变量。

9.8 胡海昌 — 鹫津久一郎广义变分原理

胡海昌和鹫津久一郎分别于 1954 年和 1955 年先后将最小势能原理进行推广,得到了以位移 u_i、应力 σ_{ij} 和应变 ε_{ij} 为独立函数的一个无条件变分原理,该原理称为**胡海昌 — 鹫津久一郎广义变分原理**,简称**胡海昌 — 鹫津久一郎变分原理**或**胡 — 鹫津原理**。

同赫林格 — 赖斯纳广义变分原理一样,仍然可以用拉格朗日乘子法建立胡 — 鹫津原理的泛函。

根据最小势能原理建立的泛函为

$$J = \iiint_V [U_0(\varepsilon_{ij}) - \overline{F}_i u_i]\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} \overline{X}_i u_i \mathrm{d}S \qquad (9-8-1)$$

泛函(9-8-1)有两个独立函数即应变 ε_{ij} 和位移 u_i。在弹性力学中,要求应变 ε_{ij} 和位移 u_i 之间要满足几何方程(9-1-3),同时也要求位移要满足 S_u 上的位移边界条件(9-2-7)。由此可见,最小势能原理也是一个条件极值原理。为了把有约束条件的泛函(9-8-1)化为无约束条件的泛函,需要引入九个拉格朗日乘子 λ_{ij} 与几何方程(9-1-3)构造泛函

$$J_1 = \iiint_V \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij}\right]\lambda_{ij}\mathrm{d}V \qquad (9-8-2)$$

再引入三个拉格朗日乘子 μ_i 与 S_u 上的位移边界条件(9-2-7)构造泛函

$$J_2 = \iint_{S_u} (u_i - \overline{u}_i)\mu_i \mathrm{d}S \qquad (9-8-3)$$

上述三个泛函相加,得到一个广义泛函 J^*,即

$$J^* = \iiint_V [U_0(\varepsilon_{ij}) - \overline{F}_i u_i]\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} \overline{X}_i u_i \mathrm{d}S +$$

$$\iiint_V\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\lambda_{ij}\mathrm{d}V+\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\mu_i\mathrm{d}S \tag{9-8-4}$$

式(9-8-4)的变分为

$$\delta J^*=\delta J+\delta J_1+\delta J_2=0 \tag{9-8-5}$$

式(9-8-1)的变分为

$$\delta J=\iiint_V\frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V-\iiint_V\bar{F}_i\delta u_i\mathrm{d}V-\iint_{S_\sigma}\bar{X}_i\delta u_i\mathrm{d}S \tag{9-8-6}$$

式(9-8-2)的变分为

$$\delta J_1=\iiint_V\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\delta\lambda_{ij}\mathrm{d}V-\iiint_V\lambda_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\iiint_V(\lambda_{ij}\delta u_{i,j}+\lambda_{ij}\delta u_{j,i})\mathrm{d}V \tag{9-8-7}$$

对式(9-8-7)的最后一个积分的第一项采用分部积分并应用高斯公式,有

$$\iiint_V\lambda_{ij}\delta u_{i,j}\mathrm{d}V=\iiint_V[(\lambda_{ij}\delta u_i)_{,j}-\lambda_{ij,j}\delta u_i]\mathrm{d}V=\iint_S n_j(\lambda_{ij}\delta u_i)\mathrm{d}S-\iiint_V\lambda_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V=\iint_{S_\sigma}n_j(\lambda_{ij}\delta u_i)\mathrm{d}S+\iint_{S_u}n_j(\lambda_{ij}\delta u_i)\mathrm{d}S-\iiint_V\lambda_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V \tag{9-8-8}$$

同理,对式(9-8-7)的最后一个积分的第二项采用分部积分并应用高斯公式,注意到 λ_{ij} 的对称性,所得的结果仍为式(9-8-8)。

式(9-8-3)的变分为

$$\delta J_2=\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\mu_i\delta u_i\mathrm{d}S \tag{9-8-9}$$

将式(9-8-8)代入式(9-8-7),再将式(9-8-6)、式(9-8-7)和式(9-8-9)代入式(9-8-5),经整理得

$$\delta J^*=\iiint_V\left[\frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}-\lambda_{ij}\right]\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V-\iiint_V(\lambda_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\mathrm{d}V+\iiint_V\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\delta\lambda_{ij}\mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}(n_j\lambda_{ij}-\bar{X}_i)\delta u_i\mathrm{d}S+\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i\mathrm{d}S+\iint_{S_u}(n_j\lambda_{ij}+\mu_i)\delta u_i\mathrm{d}S=0 \tag{9-8-10}$$

由 $\delta\varepsilon_{ij}$、$\delta\lambda_{ij}$ 和 δu_i 的任意性,可得

$$\lambda_{ij}=\frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{9-8-11}$$

$$\lambda_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \tag{9-8-12}$$

$$n_j\lambda_{ij}-\bar{X}_i=0 \tag{9-8-13}$$

$$n_j\lambda_{ij}+\mu_i=0 \tag{9-8-14}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{9-8-15}$$

$$u_i = \bar{u}_i \tag{9-8-16}$$

由式(9-8-12)和式(9-8-13)可见，λ_{ij} 就是应力分量，即

$$\lambda_{ij} = \sigma_{ij} \tag{9-8-17}$$

由式(9-8-14)和式(9-8-17)得

$$\mu_i = -n_j\sigma_{ij} \tag{9-8-18}$$

将 $\lambda_{ij} = \sigma_{ij}$ 和 $\mu_i = -n_j\sigma_{ij}$ 代入辅助泛函泛函(9-8-5)，并用 $J_{H\text{-}W}$ 代替 J^*，可得到胡—鹫津变分原理的泛函

$$J_{H\text{-}W} = \iiint_V \left\{ U_0(\varepsilon_{ij}) - \bar{F}_i u_i + \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij}\right]\sigma_{ij} \right\} \mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} \bar{X}_i u_i \mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}(u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}S \tag{9-8-19}$$

泛函(9-8-19)的独立函数是位移 u_i、应力 σ_{ij} 和应变 ε_{ij}，虽然还有独立函数 $u_{i,j}$(或 $u_{j,i}$)，但由于存在几何方程(9-8-15)即 $u_{i,j}$(或 $u_{j,i}$)与 ε_{ij} 存在制约关系，在构造泛函(9-8-2)时就已经应用了这一关系，使得 $u_{i,j}$(或 $u_{j,i}$)不能被认为是第四组独立函数。根据变分法的理论，当然也可以取位移 u_i、应力 σ_{ij} 和位移对坐标的导数 $u_{i,j}$(或 $u_{j,i}$)作为独立函数。因此，胡—鹫津变分原理是三组独立函数或三类变量的广义变分原理。

胡海昌—鹫津久一郎广义变分原理可表述为：**在所有位移场、应力场和应变场中，真实的位移场、应力场和应变场应使泛函(9-8-19)的一阶变分** $\delta J_{H\text{-}W} = 0$。

胡海昌—鹫津久一郎广义变分原理的泛函的变分给出了弹性力学边值问题的全部基本方程和全部边界条件。

把式(9-4-16)代入式(9-8-19)，消去 $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\sigma_{ij}$ 项的体积分，并乘以 -1，得

$$J_{HW} = -J_{H\text{-}W} = \iiint_V [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - U_0(\varepsilon_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)u_i]\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij} - \bar{X}_i)u_i\mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}\bar{u}_i\mathrm{d}S \tag{9-8-20}$$

这表明泛函(9-8-20)与泛函(9-8-19)完全等价，只是差了一个负号。该泛函看起来有四组独立函数即 σ_{ij}、ε_{ij}、$\sigma_{ij,j}$ 和 u_i，但此时独立函数 σ_{ij}、ε_{ij} 受式(9-4-16)制约，两者之间只有一类独立函数是独立的，故泛函(9-8-20)实际上只有三组独立函数，或 σ_{ij}、$\sigma_{ij,j}$ 和 u_i，或 ε_{ij}、$\sigma_{ij,j}$ 和 u_i。泛函(9-8-19)是弹性体总势能的一种推广的表达式，称为三组独立函数或三类变量的**广义势能**。泛函(9-8-20)是弹性体总余能的一种推广的表达式，称为三组独立函数或三类变量的**广义余能**。

下面讨论赫林格—赖斯纳广义变分原理和胡海昌—鹫津久一郎广义变分原理之间的关系。将式(9-4-16)代入式(9-8-19)，消去 $U_0(\varepsilon_{ij})$ 项，并注意到式(9-7-16)，得

$$J_{H\text{-}W} = \iiint_V \left\{ \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - U_0^c(\sigma_{ij}) - \bar{F}_i u_i + \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij}\right]\sigma_{ij} \right\} \mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma} \bar{X}_i u_i \mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_j\sigma_{ij}(u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}S =$$

$$\iiint_V \left\{ \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\sigma_{ij} - U_0^c)(\sigma_{ij}) - \bar{F}_i u_i \right\} \mathrm{d}V -$$

$$\iint_{S_\sigma} \bar{X}_i u_i \mathrm{d}S - \iint_{S_u} n_j \sigma_{ij}(u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}S = J_{H-R} = -J_{HR} \tag{9-8-21}$$

再由式(9-8-20)得

$$J_{H-W} = -J_{HW} = J_{H-R} = -J_{HR} \tag{9-8-22}$$

泛函(9-8-22)表明,胡海昌—鹫津久一郎广义变分原理(的两种形式)与赫林格—赖斯纳广义变分原理(的两种形式)完全等价,两者完全可以互相转换;从变分法的角度看,这两个广义变分原理都是三组独立函数的广义变分原理,且它们都属于混合型泛函的变分问题。

9.9 莫培督—拉格朗日最小作用量原理

若质点系为 k 个自由度的完整保守系统,则系统的真实运动满足拉格朗日方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,k) \tag{9-9-1}$$

如果系统在由起始位置转移到终了位置的整个过程中,真实运动和一切与真实运动无限靠近的可能运动,都有相同不变的总机械能 $H = T + V$,比较这两种运动。为此将拉格朗日方程乘以全变分 Δq_i,然后取 k 个方程的总和,可得

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\Delta q_i - \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i = 0 \tag{9-9-2}$$

但

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\Delta q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta q_i =$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\Delta\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t\right) \tag{9-9-3}$$

将式(9-9-3)代入式(9-9-2),移项并交换求和与求导的运算次序,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t\right) \tag{9-9-4}$$

计算式(9-9-4)右端的前两项之和,有

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta\dot{q}_i\right) = \Delta L = \Delta(T - V) =$$

$$\Delta[2T - (T + V)] = \Delta 2T - \Delta H = \Delta 2T \tag{9-9-5}$$

式中 $\Delta H = \Delta(T + V) = 0$,是因为进行比较的正路和旁路有相同的不变的总机械能,即 $H = T + V =$ 常量。在所讨论的保守系统中,动能是广义速度的二次函数,根据欧拉齐函数定理及定常系统中势能仅为位置的函数,有

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T \tag{9-9-6}$$

将式(9-9-5)和式(9-9-6)代入式(9-9-4),可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i\right) = \Delta 2T + 2T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t \tag{9-9-7}$$

将式(9-9-7)两端乘以 $\mathrm{d}t$,再作从 t_0 到 t_1 的积分,得

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1}\Delta 2T\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}2T\mathrm{d}\Delta t = \int_{t_0}^{t_1}\Delta(2T\mathrm{d}t) = \Delta\int_{t_0}^{t_1}2T\mathrm{d}t \tag{9-9-8}$$

在 t_0 和 t_1 时刻 q_i 取固定值,故 $\Delta q|_{t_0} = \Delta q|_{t_1} = 0$,再令

$$S^* = \int_{t_0}^{t_1}2T\mathrm{d}t \tag{9-9-9}$$

式中,S^* 称为**拉格朗日作用量**。将式(9-9-9)代入式(9-9-8),得

$$\Delta S^* = \Delta\int_{t_0}^{t_1}2T\mathrm{d}t = 0 \tag{9-9-10}$$

式(9-9-10)称为**莫培督—拉格朗日最小作用量原理**。该原理表明,在保守系统中,真实运动与其他和真实运动有相同的起始点位置和终止位置及相同总机械能的可能运动相比较,真实运动的拉格朗日作用量有极值。因动能是正定函数,故还可进一步证明这一极值是极小值。从导出原理的前提可知,该原理只适用于完整保守系统。

拉格朗日作用量还可写成

$$S^* = \int_{t_0}^{t_1}2T\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{k}m_iv_i^2\mathrm{d}t = \int_{s_{i0}}^{s_{i1}}\sum_{i=1}^{k}m_iv_i\mathrm{d}s_i = \sum_{i=1}^{k}\int_{s_{i0}}^{s_{i1}}m_iv_i\mathrm{d}s_i \tag{9-9-11}$$

将式(9-9-11)代入式(9-9-10),可得莫培督—拉格朗日最小作用量原理的另一表述形式

$$\Delta S^* = \Delta\int_{s_{i0}}^{s_{i1}}\sum_{i=1}^{k}m_iv_i\mathrm{d}s_i = \Delta\sum_{i=1}^{k}\int_{s_{i0}}^{s_{i1}}m_iv_i\mathrm{d}s_i \tag{9-9-12}$$

式(9-9-12)通常称为**莫培督最小作用(量)原理**,简称**莫培督原理**。莫培督于1744年提出了该定理,但当时未加证明。而式(9-9-10)通常称为**拉格朗日最小作用(量)原理**,简称**拉格朗日原理**,1760年拉格朗日给出了该定理的严密数学论证。

对于单个质点,有

$$2T\mathrm{d}t = mv^2\frac{\mathrm{d}s}{v} = mv\mathrm{d}s = \sqrt{2mT}\mathrm{d}s \tag{9-9-13}$$

利用能量守恒关系,$T+V=H$,其中 H 是质点的总机械能,将这个关系式和式(9-9-13)代入式(9-9-9),得

$$S^* = \int_{s_0}^{s_1}\sqrt{2m(H-V)}\mathrm{d}s \tag{9-9-14}$$

式(9-9-14)称为**最小作用(量)原理的雅可比形式**。它是确定真实运动轨道的变分原理。

对式(9-9-14)取变分,得

$$\delta S^* = \delta\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{2m(H-V)}\mathrm{d}s = 0 \tag{9-9-15}$$

由于在此积分中,积分限是固定的,故已用 δ 代替了 Δ。又由于 $2m$ 是常量,它对变分没影响,故式(9-9-15)也可以写为

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{H-V}\,\mathrm{d}s=0 \tag{9-9-16}$$

例 9.9.1 应用最小作用量原理的雅可比形式求解**开普勒问题**。

解 质量为 m 的质点，在万有引力作用下运动，取引力中心作为坐标原点，取极坐标(r,θ)为广义坐标，求质点的运动轨迹。质点在万有引力场中的势能为

$$V=-\frac{GmM}{r}=-\frac{\mu m}{r} \tag{1}$$

式中 G 为万有引力常数，M 为固定质点质量，$\mu=GM$ 为高斯常数。

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \tag{2}$$

系统的总机械能为

$$H=T+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\mu m}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{\mu m}{r_0} \tag{3}$$

式中，v_0 和 r_0 是质点初始时刻的速度和极径。

任一时刻质点的动能与 $2m$ 的乘积为

$$2mT=2m(H-V)=\mu m^2\left(\frac{v_0^2}{\mu}-\frac{2}{r_0}+\frac{2}{r}\right)=k^2\left(h+\frac{2}{r}\right) \tag{4}$$

式中，$k^2=\mu m^2$，$h=\dfrac{v_0^2}{\mu}-\dfrac{2}{r_0}$，它们都是常数。

弧微分 $\mathrm{d}s$ 与极角微分 $\mathrm{d}\theta$ 的关系为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\theta)^2}=\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

将式(4)和式(5)代入式(9-9-15)，得

$$\delta\int_{\theta_0}^{\theta_1}k\sqrt{\left(h+\frac{2}{r}\right)(r^2+r'^2)}\,\mathrm{d}\theta=0 \tag{6}$$

因被积函数 $F=k\sqrt{\left(h+\dfrac{2}{r}\right)(r^2+r'^2)}$ 不含 θ，故欧拉方程的首次积分为

$$F-r'F_{r'}=kr^2\sqrt{\frac{h+2/r}{(r^2+r'^2)}}=c \tag{7}$$

或

$$\sqrt{hr^2+2r}=c_1\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}} \tag{8}$$

式中，$c_1=c/k$。

由式(8)可解得

$$\mathrm{d}\theta=\frac{c_1\mathrm{d}r}{r\sqrt{hr^2+2r-c_1^2}} \tag{9}$$

积分得

$$\theta + c_2 = \int \frac{c_1 \mathrm{d}r}{r\sqrt{hr^2 + 2r - c_1^2}} = \arccos \frac{c_1^2 - r}{r\sqrt{hc_1^2 + 1}} \tag{10}$$

令 $e = \sqrt{hc_1^2 + 1}$，$p = c_1^2$，式(10)可写成

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + c_2)} \tag{11}$$

式(11)表明这是以引力中心为焦点之一的圆锥曲线的极坐标方程，p 为焦点参数，e 为离心率。质点运动的轨道形状取决于离心率 e。根据质点初始时刻的速度 v_0 和极径 r_0 的不同，可分为以下三种情形：

(1) 当 $h = \frac{v_0^2}{\mu} - \frac{2}{r_0} < 0$ 时，离心率 $e < 1$，轨道为椭圆；

(2) 当 $h = \frac{v_0^2}{\mu} - \frac{2}{r_0} = 0$ 时，离心率 $e = 1$，轨道为抛物线；

(3) 当 $h = \frac{v_0^2}{\mu} - \frac{2}{r_0} > 0$ 时，离心率 $e > 1$，轨道为双曲线。

9.10 名家介绍

开普勒(Kepler, Johannes, 1571.12.27—1630.11.15) 德国数学家、天文学家和物理学家。生于魏尔德斯塔特，卒于雷根斯堡。1588 年毕业于杜宾根大学，1591 年获文学硕士学位。1594 年到奥地利格拉茨(Graz)新教神学院任数学和天文学教师。此后提出用几何图像描述行星的轨道，结果除木星外误差都小于 5%。1600 年应邀到布拉格附近的贝纳泰克天文台工作，担当第谷·布拉赫(Tycho Brahe, 1546.12.14—1601.10.24)的助手。1601 年继承了去世的第谷·布拉赫的工作，同时继承了皇家数学家的职位。主要成就是提出行星运动三大定律，奠定了天体力学的基础，被誉“为天空立法者”。还奠定了几何光学的基础。著有《神秘的宇宙》(1596)、《天文学中的光学》(1604)、《新天文学》(1609)、《和谐的宇宙》(1619)和《鲁道夫星表》(1629)等多部著作。

莫培督(Maupertuis, Pierre Louis Moreau de, 1698.9.28—1759.7.27) 法国数学家、物理学家和生物学家。生于圣马洛，卒于瑞士巴塞尔。年轻时曾在军队里当过火枪手。1723 年在法国科学院任数学教师。1723 年和 1743 年两次当选为法国科学院院士，1728 年当选为英国皇家学会会员，1746 年至 1753 年任柏林科学院院长。1735 年率领一个远征队到瑞典拉普兰地区进行地球子午线测量，证实了地球扁平学说的正确性。1744 年，提出物体的质量乘以其运动速度和所经过路径的积分 $\int mu\mathrm{d}s$ 是个极小值，即最小作用量原理，并把它推广到具有 n 个自由度的保守系统，后来欧拉进一步阐明了这个原理，拉格朗日和哈密顿又发展了这个原理。1744 年发表过有关自然进化论的论文，后来多次研究过生物胚胎的成因。著有《宇宙论》(1750)和《全集》(4 卷，1756)等。

达朗贝尔(D'Alembert, Jean Le Rond, 1717.11.16—1783.10.29) 法国数学家、物理学家和哲学家。生、卒于巴黎。1735 年毕业于马扎林学院。1741 年入法兰西科学院，任天文学助理院士。1746 年任法国《百科全书》副主编，并撰写了许多重要条目，同年成为数学副院士，并发表《关于风的一般成因的推论》，获法国科学院大奖。1754 年当选为法兰西科学院院士，1772 年任该院终身秘书。还是柏林科学院院士和欧洲许多其他国家科学院院士。在数学、力学和天文学等许多领域都做出贡献，行星摄动理论的创建者，在音乐方面也造诣颇深，并致力于哲学研究，18 世纪法国启蒙运

动的杰出代表。著有《论动力学》(1743)、《弦振动研究》(1747)、《关于流体阻力的新理论》(1752)、《哲学原理》和《力学原理》等。

纳维(Naveir, Claude Louis Marie Henri, 1785.2.15—1836.8.23) 法国数学家和力学家。生于第戎,卒于巴黎。1806 年毕业于巴黎桥梁和公路学校。1808 年成为土木工程师。1819 年当选为法兰西科学普及协会会员。1820 年成为母校教授。1824 年当选为法兰西科学院院士。1831 年任巴黎综合工科学校教授。主要贡献是 1820 年首次用双重三角级数方法求解简支矩形板的四阶偏微分方程,1821 年推广了欧拉提出的流体运动方程,建立了黏性流体动力学的纳维 — 斯托克斯方程,1827 年用变分法导出了三维空间的弹性固体的平衡和运动方程。建筑力学的创建者之一。著有《弹性体平衡与运动法则》(1821)、《关于悬索桥的论文集》(1823) 和《力学在建筑和机械制造中的应用简明教程》(1826) 等。

赫林格(Hellinger, Ernst, 1883.9.30—1950.3.28) 德国 — 美国数学家。生于斯特利高(Striegau),卒于芝加哥。早年在海德堡大学、格丁根大学和布雷斯劳大学学习,1907 年在格丁根大学获博士学位并留校任教。1909 年至 1914 年在马尔堡大学任教,后来到法兰克福大学任教。遭受纳粹政府迫害,曾被关入集中营,获释后于 1939 年移居美国。1944 年入美国国籍,在伊利诺伊州西北大学任教。在分析学、积分方程、无穷个变量的二次型和数学史等方面均有贡献。在希尔伯特空间的自共轭算子理论中建立了希尔伯特 — 赫林格二次型定理,并引入了赫林格积分。与他人合著的《积分方程和含有无穷多个未知量的方程》(1928) 一文颇负盛名。此外,还编辑出版过希尔伯特和克莱因(Klein, Christian Felix, 1849.4.25—1925.6.22) 的一些著作。

赖斯纳(Reissner, Eric,1913—) 美国数学家和工程科学家。生于德国亚琛。曾就学于柏林大学,1936 年获民用工程博士学位。1937 年至 1970 年一直在美国马萨诸塞理工学院任职,其间 1938 年获该校数学博士学位,1949 年任教授,1950 年当选为美国艺术与科学学院院士。1970 年任加利福尼亚大学力学与数学教授。主要从事应用数学及理论与应用弹性力学的教学与研究工作。1940 年至 1950 年间,曾表述了弹性力学的变分原理;建立了薄壳扭转对称弯曲的大范围挠曲理论。表述了弯管的冯·卡门(Karman, Theodore von, 1881.5.11—1963.5.7) 问题,并给出了近似解。发展了空气动力学的提升线理论。在 20 世纪 60 年代至 70 年代,在薄墙结构的非线性大应变等与工程有关的应用数学和力学问题方面进行了系统的研究,并取得不少重要成果。

鹫津久一郎(Kyuichiro Washizu, 1921—) 日本力学家。曾任东京大学教授,后来去美国马萨诸塞理工学院任职。著有《塑性论》、《能量分析》和《弹性和塑性力学中的变分法》等。

胡海昌(1928.4.25—) 中国力学家和空间技术专家。生于杭州市。1946 年考入浙江大学土木工程系,在学期间受到钱令希(1916.7.16—) 教授的赏识并得到其特殊指导。1950 年大学毕业后在中国科学院数学研究所力学研究室工作。1954 年发表的重要论文《论弹性体力学和受范性体力学中的一般变分原理》创立了弹性力学三类变量广义变分原理,即国际上公认的胡海昌 — 鹫津久 — 郎广义变分原理。1956—1965 年在中科院力学所工作,任副研究员。1965 年后曾在中国空间技术研究院工作,任研究员。1978 年起任北京大学和浙江大学等兼职教授,首批博士生导师。1980 年当选为中科院学部委员(后改为院士)。1982 年创办并主编《振动与冲击》期刊。著有《弹性力学的变分原理及其应用》、《变分学》和《多自由度结构固有振动理论》等。

习 题 9

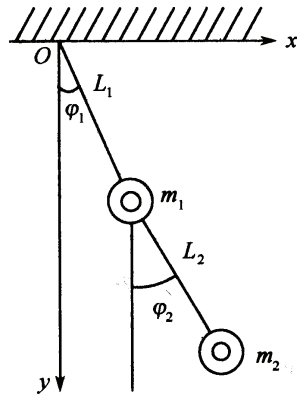
9.1 设质量为 m 的质点在均匀重力场中自由降落,试用哈密顿原理求质点的运动方程。

9.2 设质量为 m 的一个质点在保守力场中运动,试求它在球坐标系中的运动方程。假设势能

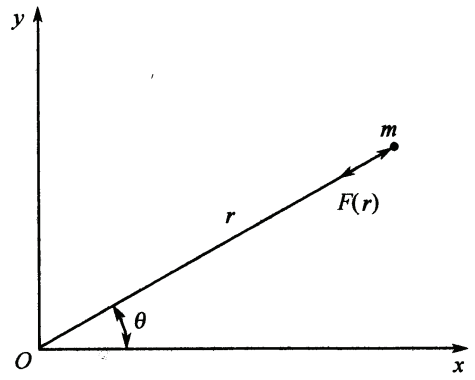
V 在球坐标表达式 $U(r,\theta,\varphi)$ 为已知。

9.3　如习题 9.3 图所示，设复摆的长度为 L_1 和 L_2，质量为 m_1 和 m_2。试求每个摆的运动方程。

9.4　**开普勒问题**。开普勒问题是描述行星运动的模型，它是经典力学所研究的最重要的问题之一。考虑单个行星环绕太阳运动的最简单问题，忽略太阳系其他行星的引力作用，假设太阳固定在原点。开普勒问题可抽象成这样的问题：如习题 9.4 图所示，设在 xOy 平面内，质量为 m 的质点由于受向原点的引力的作用而运动，吸引力的大小为 $F(r)$，其中 r 是质点到原点的距离。试用哈密顿原理建立质点运动方程。



习题 9.3 图　复摆示意图

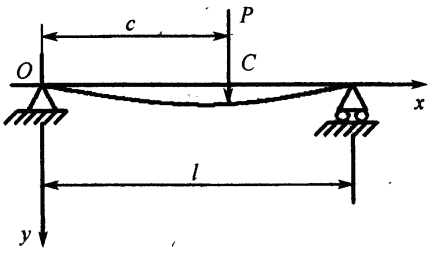


习题 9.4 图　矢径与引力图

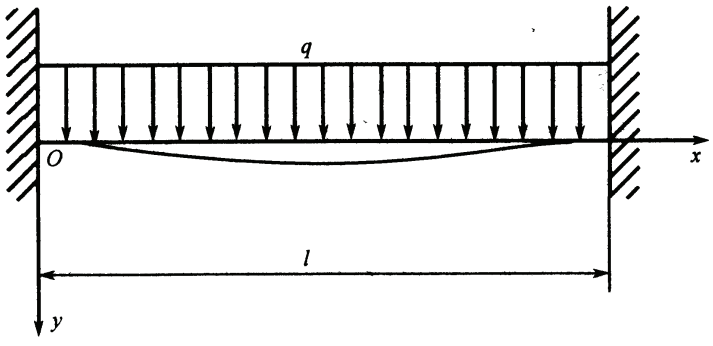
9.5　弹性杆的纵向振动方程。设长度为 l 的均匀杆放在 Ox 轴上，其线密度为 ρ，因为杆有弹性，所以把它所受的轴向外力撤去后，它将沿着 Ox 轴方向运动，试建立此杆运动的微分方程。

9.6　如习题 9.6 图所示，设长度为 l 的梁两端简支，梁的刚度为 EI，在梁上的某点 C 作用一集中载荷 P。试用广义坐标求梁的挠度。

9.7　求承受均匀载荷 q 的固支梁的挠曲线，如习题 9.7 图所示，梁的长度为 l，刚度为 EI。



习题 9.6 图　受集中载荷的简支梁的挠度



习题 9.7 图　承受均匀载荷的固支梁的挠度

9.8　设在 xOy 平面内有一完全柔性的薄膜，周边为简支，而且承受一个在每单位长度（应为面积）内为 τ 的张力，薄膜的质量面密度为 ρ，并假设在薄膜内处处都为常数。假若在薄膜上作用一个法向的分布压力 $q(t,x,y)$，因而薄膜产生了挠度 w，设为小变形。试求薄膜的运动方程并证明静挠度满足方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{q}{\tau}$$

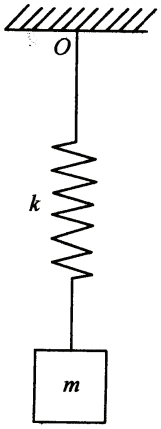
提示：根据微分几何理论，薄膜在变形状态下的表面面积为

$$A = \iint_S \sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}\,dxdy$$

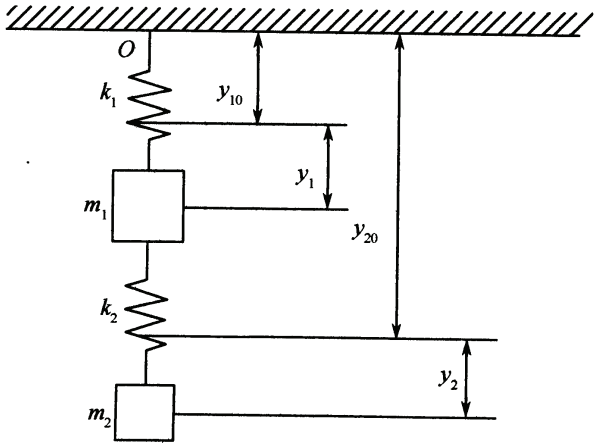
9.9　如习题9.9图所示，刚度为 k 的弹簧挂着一个质量 m 的物体。如果悬挂点按照 $S = a\sin\omega t$ 的规律竖直地运动，试用拉格朗日方程建立描述该质量运动的微分方程；如果悬挂点质量在其平衡位置上静止时开始运动，试求解该方程。

9.10　设简支梁承受强度为 q 的分布载荷，试用哈密顿原理导出该梁的横向自由振动微分方程。

9.11　如习题9.11图所示，质量为 m_1 和 m_2 的两个物体用两个弹性系数分别为 k_1 和 k_2 弹簧串联在一起，悬挂在定点 O，构成一个质点系，其中弹性质量和运动的摩擦力可忽略不计，试求系统在重力作用下，这两个物体的运动微分方程。



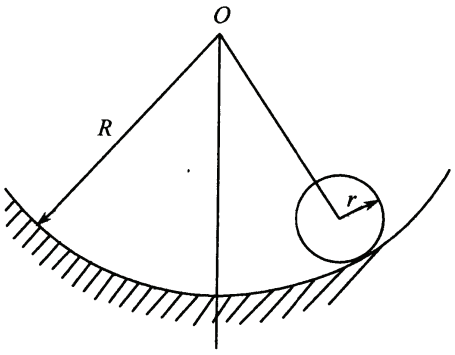
习题9.9图　质量 — 弹簧系统



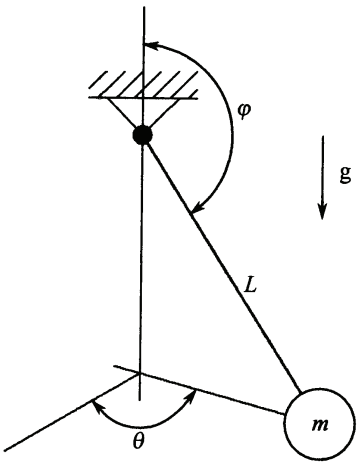
习题9.11图　耦合弹簧坐标的选择

9.12　均质圆柱体，半径为 r，质量为 m，在半径为 R 的圆柱形槽内做纯滚动，试用哈密顿原理导出圆柱体微小振动方程及振动周期。

9.13　如习题9.13图所示，求长度为 L 的球形摆的运动微分方程。



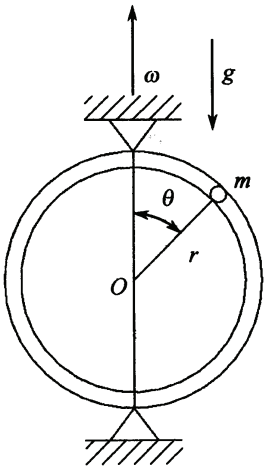
习题9.12图　圆柱体的滚动



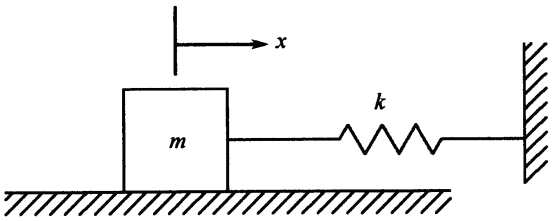
习题9.13图　球摆

9.14　一个质量为 m 的质点可在半径为 r 的圆形小管里无摩擦地滑动。小管以定常角速度 ω 绕着垂直直径旋转，如习题9.14图所示。写出质点的运动微分方程。

9.15　给定一个由质量为 m 和刚度为 k 的线性弹簧组成的弹簧 — 质量系统，如习题9.15图所示。试求系统的运动方程。



习题 9.14 图　在旋转管中的质点

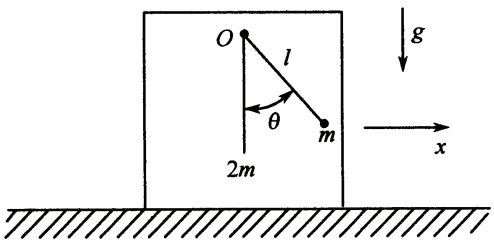


习题 9.15 图　质量 — 弹簧系统

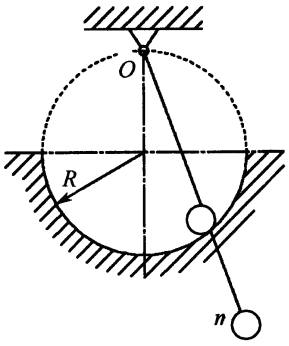
9.16　一个系统由长度为 l、质量为 m 的单摆和质量为 $2m$ 的物块组成，单摆在物块的点 O 摆动，如习题 9.16 图所示。物块可以水平面上无摩擦地滑动。试求系统的运动方程。

9.17　一平面摆如习题 9.17 图所示，摆锤质量为 m_1，均质杆摆杆质量为 m_3，长度为 l，挂于支点 O 处，可在铅垂平面内摆动，另一质量为 m_2 的小球，光滑地套在摆杆上，它既可以沿着摆杆自由滑动，又可沿着半径为 R 的固定圆柱形槽内滑动，不计摩擦。试用哈密顿原理写出系统的运动微分方程。

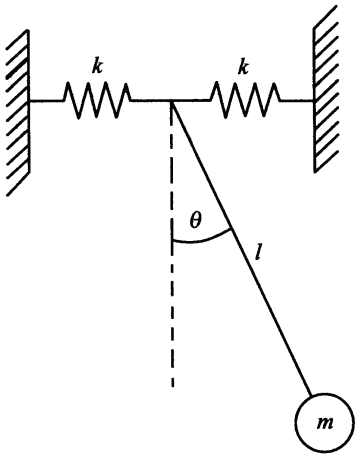
9.18　一个单摆的悬挂点能够克服弹性恢复力无摩擦地沿着水平线滑动，如习题 9.18 图所示。设 x 为悬挂点的水平位移而 θ 为摆与竖直线所成的角度，试用拉格朗日方程求出该系统的运动微分方程。



习题 9.16 图　挂在物块上的单摆



习题 9.17 图　平面摆



习题 9.18 图　弹簧 — 单摆系统

附录 1　习题全解

变分法习题的解法并不是唯一的，这里只给出了最基本的解法，个别习题给出了两种解法。

第 1 章　预备知识习题解

1.1　证明$\nabla\varphi\psi = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$。

证　两个函数相乘的梯度为

$$\nabla(\varphi\psi) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)\boldsymbol{k} =$$

$$\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$$

证毕。

1.2　证明$\nabla\cdot(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \nabla\cdot\boldsymbol{a} + \nabla\cdot\boldsymbol{b}$。

证　设$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_x)\boldsymbol{j} + (a_z + b_x)\boldsymbol{k}$$

于是

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial x} + \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial y} + \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} + \nabla\cdot\boldsymbol{b}$$

证毕。

1.3　证明$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi$。

证　设$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，则

$$\varphi\boldsymbol{a} = \varphi a_x\boldsymbol{i} + \varphi a_y\boldsymbol{j} + \varphi a_z\boldsymbol{k}$$

于是

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x} =$$

$$\varphi\frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$

$$\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi$$

证毕。

1.4　求证

$$\iiint_V \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \varphi_i}{\prod_{j=1}^{m} \varphi_j} \nabla u \cdot \nabla \prod_{j=1}^{m} \varphi_j + \prod_{i=1}^{n} \varphi_i \Delta u \right) \mathrm{d}V = \oiint_S \prod_{i=1}^{n} \varphi_i \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S$$

证　设 $\varphi = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i$，$\boldsymbol{a} = \nabla u$，根据高斯公式，有

$$\iiint_V \nabla \cdot (\varphi \nabla u) \mathrm{d}V = \iiint_V \nabla \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i \nabla u \right) \mathrm{d}V = \iiint_V \nabla \cdot \left(\prod_{j=1}^{m} \varphi_j \frac{\prod_{i=1}^{n} \varphi_i}{\prod_{j=1}^{m} \varphi_j} \nabla u \right) \mathrm{d}V =$$

$$\iiint_V \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \varphi_i}{\prod_{j=1}^{m} \varphi_j} \nabla u \cdot \nabla \prod_{j=1}^{m} \varphi_j + \prod_{i=1}^{n} \varphi_i \Delta u \right) \mathrm{d}V = \oiint_S \prod_{i=1}^{n} \varphi_i \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S$$

证毕。

1.5　求证 $v\Delta^2 u = \Delta u \Delta v + \nabla \cdot [v \nabla (\Delta u)] - \nabla \cdot (\Delta u \nabla v)$，其中 $\Delta^2 = \Delta\Delta$。

提示：可由 $\nabla \cdot [\nabla (v \Delta u)]$ 展开起证。

证　令 $w = \Delta u$，则

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [\nabla (v \Delta u)] = \nabla \cdot [\nabla (v w)] &= \nabla \cdot [v \nabla w + w \nabla v] = \\
&v \nabla \cdot \nabla w + \nabla v \cdot \nabla w + w \nabla \cdot \nabla v + \nabla w \cdot \nabla v = \\
&v \Delta w + 2 \nabla v \cdot \nabla w + w \nabla v = \\
&v \nabla w + 2[\nabla \cdot (w \nabla v) - w \nabla \cdot \nabla v] + w \Delta v = \\
&v \Delta w + 2 \nabla \cdot (w \nabla v) - w \Delta v = \\
&v \Delta^2 u + 2 \nabla \cdot (\Delta u \nabla v) - \Delta v \Delta v
\end{aligned}$$

取第二个等号后和最后一个等号后相等，经整理，得

$$v\Delta^2 u = \Delta u \Delta v + \nabla \cdot [v \nabla (\Delta u)] - \nabla \cdot (\Delta u \nabla v)$$

证毕。

1.6　求证 $v\Delta(p\Delta u) + \nabla \cdot [p\Delta u \nabla v - v \nabla (p \Delta u)] = u\Delta(p\Delta v) + \nabla \cdot [p\Delta v \nabla u - u \nabla (p \Delta v)]$。

证　令 $w = p\Delta u$，进行与习题 1.5 类似的推导，有

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [\nabla (vp\Delta u)] = \nabla \cdot [\nabla (v w)] &= \nabla \cdot [v \nabla w + w \nabla v] = \\
&v \Delta w + 2 \nabla \cdot (w \nabla v) - w \Delta v = \\
&v \Delta (p \Delta u) + 2 \nabla \cdot (p \Delta u \nabla v) - p \Delta u \Delta v
\end{aligned}$$

取第二个等号后和最后一个等号后相等，经整理，得

$$p\Delta u \Delta v = v\Delta(p\Delta u) + \nabla \cdot [p\Delta u \nabla v - v \nabla (p \Delta u)]$$

将 u、v 易位，则有

$$p\Delta v \Delta u = u\Delta(p\Delta v) + \nabla \cdot [p\Delta v \nabla u - u \nabla (p \Delta v)]$$

后两式相等。证毕。

1.7　求证：(1) $\nabla^2 (g \nabla^2 u) v = \nabla \cdot [v \nabla (g \nabla^2 u)] - \nabla v \cdot \nabla (g \nabla^2 u)$；

(2) $\nabla^2 (g \nabla^2 u) v = \nabla \cdot [v \nabla (g \nabla^2 u) - g \nabla^2 u \nabla v] + g \nabla^2 u \nabla^2 v$。

证 (1) 令 $w = g\nabla^2 u$, $\boldsymbol{a} = \nabla w$,利用散度公式$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \nabla \varphi$,有

$$\nabla \cdot [v \nabla (g \nabla^2 u)] = \nabla \cdot (v\boldsymbol{a}) = \nabla \cdot (v \nabla w) = v \nabla \cdot \nabla w + \nabla v \cdot \nabla w =$$

$$v\nabla^2 w + \nabla v \cdot \nabla w = v\nabla^2 (g\nabla^2 u) + \nabla v \cdot \nabla (g\nabla^2 u) \tag{1}$$

将最后一个等号右端第二项移到第一个等号的左边,得

$$\nabla^2 (g \nabla^2 u) v = \nabla \cdot [v \nabla (g \nabla^2 u)] - \nabla v \cdot \nabla (g \nabla^2 u) \tag{2}$$

这就是所要证得的等式。证毕。

证 (2) 令 $w = g\nabla^2 u$, $\boldsymbol{b} = \nabla v$,再次利用散度公式,有

$$\nabla \cdot (g\nabla^2 u \nabla v) = \nabla \cdot (w\boldsymbol{b}) = w\nabla \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla w =$$

$$w\nabla \cdot \nabla v + \nabla v \cdot \nabla w = g\nabla^2 u \nabla^2 v + \nabla v \cdot \nabla (g\nabla^2 u) \tag{3}$$

或

$$\nabla v \cdot \nabla (g \nabla^2 u) = \nabla \cdot (g \nabla^2 u \nabla v) - g \nabla^2 u \nabla^2 v \tag{4}$$

将式(4)代入式(2),得

$$\nabla^2 (g \nabla^2 u) v = \nabla \cdot [v \nabla (g \nabla^2 u)] - \nabla \cdot (g \nabla^2 u \nabla v) + g \nabla^2 u \nabla^2 v =$$

$$\nabla \cdot [v \nabla (g \nabla^2 u) - (g \nabla^2 u \nabla v)] + g \nabla^2 u \nabla^2 v \tag{5}$$

证毕。

1.8 证明:$\int_\Gamma (u\cos\alpha + v\cos\beta) \mathrm{d}\Gamma = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

证 在平面直角坐标系中,设 $\boldsymbol{a} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j}$,根据格林公式(1-3-35),有

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Gamma = \iint_D \nabla \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}D \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 代入式(1)的左边,得

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Gamma = \oint_\Gamma (u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}) \cdot (\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j}) \mathrm{d}\Gamma = \oint_\Gamma (u\cos\alpha\boldsymbol{i} + v\cos\beta\boldsymbol{j}) \mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

将 $\boldsymbol{a}$ 代入式(1)的右边,得

$$\iint_D \nabla \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}D = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) \cdot (u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

于是有

$$\int_\Gamma (u\cos\alpha + v\cos\beta) \mathrm{d}\Gamma = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

证毕。

1.9 证明下列恒等式

$$\iiint_V (u\Delta^2 v - \Delta u \Delta v) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_S \left(u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S$$

证 在式(1-3-54)中,令 $\psi = u$, $\varphi = v$,则有

$$\iiint_V u\Delta^2 u \mathrm{d}V = -\iiint_V \nabla u \cdot \nabla \Delta u \mathrm{d}V + \oiint_S u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} \mathrm{d}S =$$

$$\iiint_V \Delta v \Delta u \mathrm{d}V + \oiint_S \left(u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S$$

将第二个等号右端第一项移到第一个等号的左端即为所求的恒等式。证毕。

1.0　证明恒等式$\nabla r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

证　∇r^n 可写成

$$\nabla r^n = \left(\boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) r^n = \boldsymbol{e}_i n r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_i n r^{n-1} \frac{x_i}{r} = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$$

证毕。

1.11　已知张量 T_{ij} 为

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

试求 (1) T_{ii}；　(2) $T_{ij}T_{ij}$；　(3) $T_{ij}T_{ji}$。

解　(1) 将 T_{ii} 展开，得 $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 1 + 2 + 3 = 6$；

(2) 将 $T_{ij}T_{ij}$ 展开，得

$$\begin{aligned} T_{ij}T_{ij} &= T_{1j}T_{1j} + T_{2j}T_{2j} + T_{3j}T_{3j} = \\ &T_{11}T_{11} + T_{12}T_{12} + T_{13}T_{13} + T_{21}T_{21} + T_{22}T_{22} + \\ &T_{23}T_{23} + T_{31}T_{31} + T_{32}T_{32} + T_{33}T_{33} = \\ &1 + 1 + 0 + 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 9 = 24 \end{aligned}$$

(3) 因 T_{ij} 是二阶对称张量，故 $T_{ij}T_{ji} = T_{ij}T_{ij} = 24$。

1.12　设二阶张量为

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

试将 T_{ij} 分解为对称张量与反对称张量之和。

解　T_{ij} 的共轭张量为

$$T_{ij}^{c} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

T_{ij} 的对称张量为

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ij}^{c}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

T_{ij} 的反对称张量为

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ij}^{c}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 T_{ij} 可表示为

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第 2 章　固定边界的变分问题习题解

2.1　设函数 $F = F(x, y, y') \in C^1, y = y(x) \in C^2$，试求：

(1) 微分 $\mathrm{d}F$；(2) 变分 δF。

解　(1) $\mathrm{d}F = (F_x + F_y y' + F_{y'} y'')\mathrm{d}x$；(2) $\delta F = F_y \delta y + F_{y'} \delta y'$。

2.2　试求下列函数的一阶变分，其中 a、b、c、d 均为常数。

(1) $F = ax + by + cy^2 + dy'^2$；(2) $F = y\sqrt{1 + y'^2}$；(3) $F = \sqrt{a + by' + cy'^2}$。

解　(1) $\delta F = b\delta y + 2cy\delta y + 2dy'\delta y'$

(2) $\delta F = \sqrt{1 + y'^2}\delta y + y\dfrac{y'\delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

(3) $\delta F = \delta\sqrt{a + by' + cy'^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{b\delta y' + 2cy'\delta y}{\sqrt{a + by' + cy'^2}}$

2.3　试求下列泛函的一阶变分

(1) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(ay + by' + cy'^2)\mathrm{d}x$；(2) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$；

(3) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 - y'^2 - 2y\cosh x)\mathrm{d}x$；(4) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(ax^2y' + bxy'^2 + c)\mathrm{d}x$；

(5) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(xy + y^2 - 2y^2y')\mathrm{d}x$。

式中，a、b、c 均为常数。

解　(1) 泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(a\delta y + b\delta y' + 2cy''\delta y'')\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}(a\delta y\mathrm{d}x + b\mathrm{d}\delta y + 2cy''\mathrm{d}\delta y') =$$

$$(b\delta y + 2cy''\delta y')\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(a\delta y\mathrm{d}x - 2cy'''\delta y'\mathrm{d}x) =$$

$$(b\delta y + 2cy''\delta y' - 2cy'''\delta y)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}[a\mathrm{d}x + 2cy^{(4)}]\delta y\mathrm{d}x$$

(2) 泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left(2y\sqrt{1 + y'^2}\delta y + \frac{y^2y'\delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{y^2y'\delta y}{\sqrt{1 + y'^2}}\Big|_{x_0}^{x_1} +$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[2y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{(1 + y'^2)(2yy' + y^2y'') - y^2y'^2}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}\right]\delta y\mathrm{d}x$$

(3) 泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(2y\delta y - 2y'\delta y' - 2\cosh x\delta y)\mathrm{d}x = 2\int_{x_0}^{x_1}(y\delta y - y'\delta y' - \cosh x\delta y)\mathrm{d}x =$$

$$2\int_{x_0}^{x_1}(y+y''-\cosh x)\delta y\mathrm{d}x-2y'\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1}$$

(4) 泛函的一阶变分为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(ax^2\delta y'+2bxy'\delta y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}(ax^2+2bxy')\mathrm{d}\delta y=$$

$$(ax^2+2bxy')\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-2\int_{x_0}^{x_1}(ax+by'+bxy'')\delta y\mathrm{d}x$$

(5) 泛函的一阶变分为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(x\delta y+2y\delta y-4yy'\delta y-2y^2\delta y')\mathrm{d}x=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(x+2y-4yy'+4yy')\delta y\mathrm{d}x-2y^2\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}$$

式中，a、b、c 均为常数。

2.4　求泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2+12xy)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=0,y(1)=1$。

解　$F=y'^2+12xy$，泛函的欧拉方程为

$$12x-2y''=0$$

积分两次，得

$$y=x^3+c_1x+c_2$$

由边界条件 $y(0)=0,y(1)=1$，得 $c_1=0,c_2=0$，故极值曲线为 $y=x^3$。

2.5　求泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

解　$F=y'^2-y^2$，泛函的欧拉方程为

$$-2y-2y''=0$$

或

$$y''+y=0$$

微分方程的解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

由边界条件 $y(0)=0$，得 $c_1=0$，由 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，得 $c_2=1$，故极值曲线为 $y=\sin x$。

2.6　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'(1+x^2y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F=y'(1+x^2y')$，因 F 不依赖于 y，故泛函的欧拉方程有首次积分

$$1+2x^2y'=c$$

或

$$y'=-\frac{c_1}{x^2}$$

将上式积分，得极值曲线为

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2$$

2.7　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(xy + y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = xy + y'^2$,泛函的欧拉方程为

$$x - 2y'' = 0$$

积分两次,得

$$y = \frac{x^3}{12} + c_1 x + c_2$$

2.8　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(2y + xy'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$。

解　$F = 2y + xy'^2$,泛函的欧拉方程为

$$2 - 2y' - 2xy'' = 0$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y'}{y' - 1} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分,得

$$(y' - 1)x = c_1$$

再积分一次,得

$$y = x + c_1 \ln x + c_2$$

由边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$,可得

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0 - x_1 + x_0}{\ln x_1 - \ln x_0}, c_2 = \frac{(y_0 - x_0)\ln x_1 - (y_1 - x_1)\ln x_0}{\ln x_1 - \ln x_0}$$

于是极值曲线为

$$y = x + \frac{(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)}{\ln x_1 - \ln x_0}\ln x + \frac{(y_0 - x_0)\ln x_1 - (y_1 - x_1)\ln x_0}{\ln x_1 - \ln x_0}$$

2.9　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{e}^x \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　因为 $F = \mathrm{e}^x \sqrt{1 + y'^2}$ 不含 y,故泛函的欧拉方程的首次积分为

$$\frac{\mathrm{e}^x y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

注意,因 $\left|\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right| \leqslant 1$,故 $|c_1| \leqslant \mathrm{e}^{x_0}$。由上式解出 y',得

$$y' = \frac{c_1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - c_1^2}}$$

积分,得

$$y = \operatorname{arcsec}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{c_1}\right) + c_2$$

2.10　求泛函 $J[y]=\int_1^2(xy'^2-y)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(1)=0,y(2)=1$。

解　泛函的欧拉方程为

$$-1-2y'-2xy''=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y'}{2y'+1}=\frac{\mathrm{d}x}{2x}$$

积分，得

$$(2y'+1)x=c_1$$

再次积分，得

$$2y+x=c_1\ln x+c_2$$

由边界条件 $y(1)=0,y(2)=1$，得 $c_2=1,c_1=\frac{3}{\ln 2}$。于是可得 $y=\frac{3\ln x}{2\ln 2}+\frac{1-x}{2}$。

2.11　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^k}\mathrm{d}x$ 的极值曲线，式中 $k>0$。

解　$F=\frac{y'^2}{x^k}$，被积函数不含 y，欧拉方程首次积分为

$$y'=cx^k$$

再次积分，得 $y=c_1x^{k+1}+c_2$。

2.12　求泛函 $J[y]=\int_1^2(y'^2+2yy'+y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(1)=1,y(2)=0$。

解　泛函的欧拉方程为

$$2y'+2y-2y'-2y''=0$$

或

$$y''-y=0$$

这是二阶常系数微分方程，其解为

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$$

根据边界条件 $y(1)=1,y(2)=0$，可得

$$1=c_1\mathrm{e}^1+c_2\mathrm{e}^{-1},0=c_1\mathrm{e}^2+c_2\mathrm{e}^{-2}$$

将上面后一个式子代入前一个式子，并消去 c_1，得

$$1=-c_2\mathrm{e}^{-3}+c_2\mathrm{e}^{-1}$$

可解出 c_2 为

$$c_2=\frac{1}{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-3}}=\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}$$

再求出 c_1 为

$$c_1=-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}$$

于是极值曲线为

$$y=-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^{-x}=\frac{\mathrm{e}^{2-x}-\mathrm{e}^{-(2-x)}}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\sinh(2-x)}{\sinh 1}$$

2.13　求泛函 $J[y]=\int_0^1 yy'^2\mathrm{d}x$ 的极值曲线，边界条件为 $y(0)=1,y(1)=\sqrt[3]{4}$。

解 泛函的欧拉方程为

$$yy'^2 - 2yy'^2 = c$$

或

$$\sqrt{y}\mathrm{d}y = \pm c\mathrm{d}x$$

积分得

$$y^{\frac{3}{2}} = \pm c_1 x + c_2, y = \sqrt[3]{(c_2 \pm c_1 x)^2}$$

根据边界条件 $y(0) = 1, y(1) = \sqrt[3]{4}$,可得 $c_2 = 1, c_1 = 1$,或 $c_2 = -1, x_1 = 3$。于是极值曲线为 $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ 和 $y = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$。

2.14 求泛函 $J[y] = \int_0^{\pi}(4y\cos x + y'^2 - y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(0) = 0, y(\pi) = 0$。

解 泛函的欧拉方程为

$$4\cos x - 2y'' - 2y = 0$$

或

$$y'' + y = 2\cos x$$

这是二阶常系数非齐次线性微分方程。方程的齐次解为

$$Y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

设方程的特解为

$$y^* = x(a\cos x + b\sin x)$$

求导后得

$$y^{*\prime} = a\cos x + b\sin x + x(-a\sin x + b\cos x)$$

$$y^{*\prime\prime} = -2a\sin x + 2b\cos x - x(a\cos x + b\sin x)$$

将其代入微分方程,得

$$2b\cos x - 2a\sin x - x(a\cos x + b\sin x) + x(a\cos x + b\sin x) = 2\cos x$$

比较两边系数,得 $b = 1, a = 0$。于是微分方程的通解为

$$y = Y + y^* = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(\pi) = 0$,得 $c_1 = 0, c_2 = c$ 是任意常数,故极值曲线为

$$y = (c + x)\sin x$$

2.15 求泛函 $J[y] = \int_1^{\mathrm{e}}(xy'^2 + yy')\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(1) = 0, y(\mathrm{e}) = 1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$y' - y' - 2y' - 2xy'' = 0$$

或

$$xy'' + y' = 0$$

令 $y' = p$,则上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$$

积分,得

$$px = y'x = c_1$$

再次积分,得

$$y = c_1 \ln x + c_2$$

由边界条件 $y(1) = 0, y(e) = 1$,得 $c_2 = 0, c_1 = 1$,于是极值曲线为 $y = \ln x$。

2.16 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (x + y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(0) = 1, y(1) = 2$。

解 泛函的欧拉方程为

$$y'' = 0$$

积分两次,得

$$y = c_1 x + c_2$$

由边界条件 $y(0) = 1, y(1) = 2$,可解得 $c_1 = c_2 = 1$,故极值曲线为 $y = x + 1$。

2.17 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = 1$。

解 泛函的欧拉方程可表示为

$$y'' - y = 0$$

方程的通解为

$$y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = 1$,可解出 $c_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}} = -c_2$,于是极值曲线为

$$y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

2.18 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 4y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(0) = \mathrm{e}^2, y(1) = 1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$8y - 2y'' = 0$$

方程的通解为

$$y = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x}$$

由边界条件 $y(0) = \mathrm{e}^2, y(1) = 1$,得 $c_1 = 0, c_2 = \mathrm{e}^2$,故极值曲线为 $y = \mathrm{e}^{2(1-x)}$。

2.19 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - x^2 y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$。

解 泛函的欧拉方程为 $2y + 2x = 0$,即 $y = -x$。故只有当 $y_0 = y(x_0) = -x_0, y_1 = y(x_1) = -x_1$ 时才有解。又被积函数是 y' 的线性函数,变分问题失去意义。

2.20 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y - xy') \dfrac{\mathrm{d}x}{y^2}$ 的极值曲线,边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$-\frac{1}{y^2} + 2\frac{xy'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - 2\frac{xy'}{y^3} = 0$$

即 $0 = 0$,变分问题无意义。从被积函数是 y' 的线性函数也可知变分问题无意义。

2.21 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (ay + by'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$a - 2by''$$

积分两次,得极值曲线为

$$y = \frac{a}{4b}x^2 + c_1x + c_2$$

其中常数 c_1、c_2 由边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 确定,可得

$$c_1 = \frac{4b(y_1 - y_0) - a(x_1^2 - x_0^2)}{4b(x_1 - x_0)}, c_2 = \frac{4b(x_1y_0 - x_0y_1) + ax_0x_1(x_1 - x_0)}{4b(x_1 - x_0)}$$

2.22 求泛函 $J[y] = \int_0^{\pi}(y'^2 - 2y\cos x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(0) = y(\pi) = 0$。

解 $F = y'^2 - 2y\cos x$,泛函的欧拉方程为

$$-2\cos x - 2y'' = 0$$

积分两次,得

$$y = \cos x + c_1x + c_2$$

由边界条件 $y(0) = y(\pi) = 0$,得 $c_2 = -1, c_1 = \frac{2}{\pi}$。故极值曲线为

$$y = \cos x + \frac{2}{\pi}x - 1$$

2.23 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}[p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)y'^2 + 2f(x)y + 2g(x)y']\mathrm{d}x$ 是正则问题的条件并求欧拉方程。

解 $F = p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)y'^2 + 2f(x)y + 2g(x)y'$,当 $F_{y'y'} = r(x) \neq 0$ 时,则泛函满足正则问题的条件。泛函的欧拉方程为

$$2[py + qy' - (q'y + qy') - (ry')' + f - g'] = 0$$

整理,得

$$(ry')' + (q' - p)y + g' - f = 0$$

2.24 设 $F \equiv F(y')$,试证泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}F(y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线为直线。

证 因 $F \equiv F(y')$ 仅是 y' 的函数,这时 $F_y = 0, F_{xy'} = 0$ 及 $F_{yy'} = 0$,于是泛函的欧拉方程为

$$y''F_{y'y'} = 0$$

此时应有 $y'' = 0$ 或 $F_{y'y'} = 0$,若 $y'' = 0$,则积分两次可得到含有两个积分常数的直线族 $y = c_1x + c_2$。若 $F_{y'y'} = 0$,则有一个或几个实根 $y' = k_i$,此时除了上面的直线族外,又得到含有一个常数的直线族 $y = k_ix + c$,但这个直线族包含在上面那个含有两个参数的直线族 $y = c_1x + c_2$ 中。因此,在 $F = F(y')$ 情况下,极值曲线必然是直线族。证毕。

2.25 若泛函 $J[y] = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(Dy''^2 + ky^2 - 2qy)\mathrm{d}x$,其中 k 为常数,q 为 x 的给定函数,试求其欧拉方程。

解 欧拉方程为

$$ky - q + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(Dy'') = 0$$

若 D 是常数,则

$$ky - q + Dy^{(4)} = 0$$

或

$$y^{(4)} + \frac{k}{D}y = \frac{k}{D}q$$

2.26　试在过 $A(0,0)$ 与 $B(1,0)$ 的曲线中找出满足条件 $y'(0) = a, y'(1) = b$，且使泛函 $J[y] = \int_0^1 y''^2 \mathrm{d}x$ 取极值的那一条曲线。

解　泛函的欧拉 — 泊松方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = 2y^{(4)} = 0$$

积分四次，得

$$y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = 0, y'(0) = a, y'(1) = b$，得 $c_4 = 0, c_3 = a, c_2 = -(2a + b)$，$c_1 = a + b$，于是，极值曲线为 $y = (a + b)x^3 - (2a + b)x^2 + ax$。

2.27　求泛函 $J[x,y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2 + 2xy + \dot{y}^2)\mathrm{d}t$ 的极值曲线；边界条件为 $x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$。

解　泛函的欧拉方程组为

$$2y - 2\ddot{x} = 0$$

$$2x - 2\ddot{y} = 0$$

将第二个方程求导两次并代入第一个方程中，得

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}t^4} - y = 0$$

解得

$$y = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t$$

由边界条件 $x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$，得 $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = -1$，故极值曲线为 $y = -\sin t, x = \sin t$。

2.28　试讨论变分问题 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin y + \frac{1}{2}x^2y'\cos y\right)\mathrm{d}x, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ 是否有意义。

解　被积函数 $F = x\sin y + \frac{1}{2}x^2y'\cos y$ 是 y' 的线性函数，泛函的欧拉方程为

$$x\cos y - \frac{x^2y'}{2}\sin y - x\cos y + \frac{x^2y'}{2}\sin y = 0$$

即 $0 = 0$，变分问题无意义。事实上，泛函的积分可写成

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin y\mathrm{d}x + \frac{x^2}{2}\cos y\mathrm{d}y\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\sin y\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

积分结果为常数，与路径无关，变分问题失去意义。

2.29　试讨论变分问题 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2 + y'\sin 2x)\mathrm{d}x, y(0) = k, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$。当 k 取什么值

时它的极值曲线存在,并求出此极值曲线。

解 被积函数 $F = y^2 + y'\sin 2x$ 线性地依赖于 y',泛函的欧拉方程为

$$2y - 2\cos 2x = 0$$

或

$$y = \cos 2x$$

由上面方程可知,当 $x = 0$ 时,$y = 1$,故只有 $k = 1$ 时,才可能有极值曲线 $y = \cos 2x$,当 $k \neq 1$ 时,极值曲线不存在。

2.30 试讨论泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}[2xy + (x^2 + e^y)y']dx, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 的极值。

解 被积函数线性地依赖于 y',有

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \frac{\partial N}{\partial x}2x, \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$$

而积分

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1}[2xy + (x^2 + e^y)y']dx = \int_{x_0}^{x_1} d(x^2y + e^y) = x_1^2y_1 + e^{y_1} - x_0^2y_0 - e^{y_0}$$

与积分路径无关,仅依赖于边界条件。变分问题没有意义。

2.31 试讨论泛函 $J[y] = \int_0^1 (e^y + xy')dx, y(0) = 0, y(1) = a$ 的极值。

解 泛函的欧拉方程为

$$e^y - 1 = 0$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = a$ 可知,当 $a = 0$ 时,$y = 0$,当 $a \neq 0$ 时,不存在光滑的极值曲线。又被积函数是 y' 的线性函数,变分问题失去意义。

2.32 试讨论泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 + 2xyy')dx, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 的极值。

解 因 $F = y^2 + 2xyy'$,即 F 是 y' 的线性函数,故积分与积分路径无关,变分问题无意义。

2.33 试讨论泛函 $J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y')dx, y(0) = 1, y(1) = 2$ 的极值。

解 因 $F = xy + y^2 - 2y^2y'$,即 F 是 y' 的线性函数,故在连续函数类中极值不能达到。

2.34 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x + k}dx$ 的极值曲线。

解 因 $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x + k}$ 不依赖于 y,此时的欧拉方程为

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{(x + k)\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

首次积分为

$$\frac{y'}{(x + k)\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

令 $y' = \tan t$,代入上式得 $y'\cos t = (x + k)c_1$,即 $x + k = \frac{\sin t}{c_1}, dx = \frac{\cos t dt}{c_1}, dy = \frac{\sin t dt}{c_1}$,积

分得 $y = -\frac{\cos t}{c_1} + c_2$。于是得到以 t 为参数的解

$$x + k = \frac{\sin t}{c_1}, y = -\frac{\cos t}{c_1} + c_2$$

消去参数 t,得

$$(x + k)^2 + (y - c_2)^2 = \frac{1}{c_1^2}$$

即极值曲线是中心在纵坐标轴上的一族圆。

2.35 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (ax + b)\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解 因 $F = x\sqrt{1 + y'^2}$ 不依赖于 y,此时的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(ax + b)y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

首次积分为

$$\frac{(ax + b)y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

令 $y' = \tan t$,代入上式得 $(ax + b)\sin t = c_1$,于是

$$\mathrm{d}y = \tan t\mathrm{d}x = \frac{\sin t\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{c_1\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax + b)^2 - c_1^2}}$$

积分得

$$y = \frac{c_1}{a}\ln[ax + b + \sqrt{(ax + b)^2 - c_1^2}] + c_2$$

或

$$y = \frac{c_1}{a}\operatorname{arcsinh}\frac{ax + b}{c_1} + c_2$$

2.36 求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y + k}\mathrm{d}x$ 的极值曲线,其中 k 为常数。

解 因 $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y + k}$ 中不显含 x,且 $F_{y'} = \frac{y'}{(y + k)\sqrt{1 + y'^2}}$,故欧拉方程有首次积分,得

$$F - y'F_{y'} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y + k} - \frac{y'^2}{(y + k)\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

或

$$c(y + k)\sqrt{1 + y'^2} = 1$$

令 $y' = \cot t, c = \frac{1}{c_2}$,代入上式得 $(y + k)\csc t = c_2$,即 $y + k = c_2\sin t, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{c_2\cos t\mathrm{d}t}{\cot t} = c_2\sin t\mathrm{d}t$,积分得 $x = -c_2\cos t + c_1$。于是得到以 t 为参数的解

$$y + k = c_2\sin t, x = -c_2\cos t + c_1$$

消去参数 t,得

$$(x-c_1)^2+(y+k)^2=c_2^2$$

即极值曲线是个圆族。

2.37　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y(1+y'^2)}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　因 $F=\sqrt{y(1+y'^2)}$ 不依赖于 x，且 $F_{y'}=\dfrac{yy'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$，故欧拉方程有首次积分

$$F-y'F_{y'}=\sqrt{y(1+y'^2)}-\frac{yy'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c$$

或

$$\sqrt{\frac{y}{1+y'^2}}=c$$

令 $y'=\cot t$，则有 $\sqrt{1+\cot^2 t}=\csc t$，$y=c_1\csc^2 t$，此时 $c_1=c^2$，$\mathrm{d}x=\tan t\mathrm{d}y$。因为

$$\mathrm{d}y=-2c_1\sin^{-3}t\cos t\mathrm{d}t$$

所以

$$\mathrm{d}x=-\frac{2c_1\sin^{-2}t\cos t\mathrm{d}t}{\cos t}=\frac{4c_1\mathrm{d}t}{1-\cos 2t}$$

积分，得

$$x=-2c_1\cot t+c_2$$

由上式和式 $y=c_1\csc^2 t$ 两式消去 t，得

$$y-\frac{1}{4}\frac{(x-c_2)^2}{c_1}=c_1\frac{1-\cos^2 t}{\sin^2 t}=c_1$$

即极值曲线 $y=\dfrac{1}{4}\dfrac{(x-c_2)^2}{c_1}+c_1$ 是抛物线。

2.38　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'(1+x^2y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　由于 $F=y'(1+x^2y')$ 不含 y，故泛函的欧拉方程有首次积分

$$1+2x^2y'=c$$

上式可写成

$$\mathrm{d}y=\frac{c_1\mathrm{d}x}{x^2}$$

积分，得

$$y=\frac{c_1}{x}+c_2$$

即极值曲线是双曲线。

2.39　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F=y'^2+2yy'-16y^2$，且 $F_y=2y'-32y$，$F_{y'}=2y'+2y$，该泛函的欧拉方程为

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=2y'-32y-2y''-2y'=0$$

或

$$y'' + 16y = 0$$

此为二阶常系数微分方程,其解为 $y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$。

2.40　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(xy' + y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　因 $F = xy' + y'^2$ 不依赖于 y,故该泛函的欧拉方程有首次积分 $F_{y'} = x + 2y' = c$,积分得 $y = -\frac{x^2}{4} + c_1x + c_2$,其中 $c_1 = \frac{c}{2}$。

2.41　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\frac{1 + y^2}{y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = \frac{1 + y^2}{y'^2}$ 不依赖于 x,且 $F = -2\frac{1 + y^2}{y'^3}$,它的欧拉方程有首次积分

$$F - y'F_{y'} = \frac{1 + y^2}{y'^2} + 2\frac{1 + y^2}{y'^2} = c$$

可见 $c > 0$,于是,上式可改写成

$$c_1\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

两边积分得

$$c_1x + c_2 = \operatorname{arcsinh}y$$

或

$$\ln(y + \sqrt{1 + y^2})$$

解出 y,得 $y = \sinh(c_1x + c_2)$。

2.42　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\frac{1 + y^2}{y'}\mathrm{d}x$ 通过点(0,0)、(1,1) 的极值曲线。

解　因被积函数不含 x,故欧拉方程的首次积分为

$$\frac{1 + y^2}{y'} + y'\frac{1 + y^2}{y'} = c$$

或

$$y' = c_1(1 + y^2)$$

将上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = c_1\mathrm{d}x$$

积分得

$$\arctan y = c_1x + c_2$$

符合边界条件的常数为 $c_1 = \frac{\pi}{4}$,$c_2 = 0$,于是极值曲线为 $y = \tan\frac{\pi x}{4}$。

2.43　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 + y'^2 - 2y\sin x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = y^2 + y'^2 - 2y\sin x$,$F_y = 2y - 2\sin x$,$F_{y'} = 2y'$,欧拉方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 2y - 2\sin x - 2y'' = 0$$

或

$$y'' - y = -\sin x$$

这是二阶常系数微分方程,其解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$。

2.44　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(16y^2 - y''^2 + x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = 16y^2 - y''^2 + x^2$,将其代入欧拉 — 泊松方程,得

$$32y - y^{(4)} = 0$$

或

$$y^{(4)} - 16y = 0$$

这是四阶常系数微分方程,其解为

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$$

2.45　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(2xy + y'''^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = 2xy + y'''^2$,将其代入欧拉 — 泊松方程,得

$$2x - 2y^{(6)} = 0$$

或

$$y^{(6)} = x$$

将上式积分 6 次,得 $y = \frac{x^7}{7!} + c_1x^5 + c_2x^4 + c_3x^3 + c_4x^2 + c_5x + c_6$。

2.46　求泛函 $J[y] = \int_{-1}^{1}\left(yy''' + \frac{y'''^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,边界条件为 $y(-1) = y(0) = y(1) = 0, y'(-1) = y'(0) = y'(1) = 1$。

解　泛函的欧拉方程为

$$y''' - y''' - y^{(6)} = 0$$

或

$$y^{(6)} = 0$$

积分 6 次,得

$$y = c_1x^5 + c_2x^4 + c_3x^3 + c_4x^2 + c_5x + c_6$$

利用边界条件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 1$,可求出 $c_6 = 0$ 和 $c_5 = 1$,再利用其他四个边界条件,可求出 $c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = c_4 = 0, c_3 = -\frac{5}{2}$。于是得极值曲线为 $y = \frac{3x^5 - 5x^3}{2} + x$。

2.47　求泛函 $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1}(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　这是含有两个函数的泛函,$F = 2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2$,其极值曲线应满足欧拉方程组,有

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 2z - 4y - 2y'' = 0$$

$$F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 2y + 2z'' = 0$$

这是一个二阶线性微分方程组，消去 z 得

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

上式是四阶常系数微分方程，它有一对二重复根，$r = \pm \mathrm{i}$，故可解出 y

$$y = (c_1x + c_2)\cos x + (c_3x + c_4)\sin x$$

又 $z = 2y + y''$，由此可将 z 求出。

2.48　求泛函 $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + z'^2 + y'z')\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = y'^2 + z'^2 + y'z'$，代入欧拉方程组，得

$$2y'' + z'' = 0,\quad 2z'' + y'' = 0$$

或

$$y'' = 0,\quad z'' = 0$$

积分，得到两条直线 $y = c_1x + c_2, z = c_3x + c_4$。

2.49　写出泛函 $J[u(x,y)] = \iint_D (u_x^2 - u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

解　$F = u_x^2 - u_y^2, F_u = 0, \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = -2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，代入奥氏方程，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.50　写出泛函 $J[u(x,y,z)] = \iiint_V [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2uf(x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的奥氏方程。

解　$F = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2uf(x,y,z)$，各偏导数为

$$F_u = 2f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial z}F_{u_z} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

代入奥氏方程，得 $\Delta u = f(x,y,z)$。

2.51　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 + 2y'^2 + y''^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = y^2 + 2y'^2 + y''^2$，代入欧拉 — 泊松方程

$$2y - 4y'' + 2y^{(4)} = 0$$

或

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

这是一个四阶常系数微分方程，其解为

$$y = (c_1x + c_2)\mathrm{e}^x + (c_3x + c_4)\mathrm{e}^{-x}$$

2.52　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 - y'^2 - ay\cosh x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中 a 是常数。

解　$F = y^2 - y'^2 - ay\cosh x$，泛函的欧拉方程为

$$2y - a\cosh x + 2y'' = 0$$

或

$$y'' + y = \frac{a}{2}\cosh x$$

这是二阶常系数微分方程,其解为 $y = \frac{a}{4}\cosh x + c_1\cos x + c_2\sin x$。

2.53　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 + y'^2 + 2ye^x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = y^2 + y'^2 + 2ye^x$,泛函的欧拉方程为

$$2y + 2e^x - 2y'' = 0$$

或

$$y'' - y = e^x$$

这是二阶常系数微分方程,其解为 $y = \frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x}$。

2.54　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 - y'^2 - 2y\sin x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　$F = y^2 - y'^2 - 2y\sin x$,泛函的欧拉方程为

$$2y - 2\sin x + 2y'' = 0$$

或

$$y'' + y = \sin x$$

这是二阶常系数微分方程,其解为

$$y = -\frac{x\cos x}{2} + c_1\cos x + c_2\sin x$$

2.55　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}y''^k\mathrm{d}x$ 的极值,其中 $k \neq 0$。

解　因 $F = y''^k$ 不含 y 和 y',故欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2x}ky''^{k-1} = 0$$

或

$$y'' = (c_{11}x + c_{21})^{\frac{1}{k-1}}$$

积分两次,得

$$y = \frac{(k-1)^2}{k(2k-1)}(c_{11}x + c_{21})^{\frac{2k-1}{k-1}} + c_3x + c_4 =$$

$$(c_1x + c_2)^{\frac{2k-1}{k-1}} + c_3x + c_4 \qquad \left(k \neq 1, k \neq \frac{1}{2}\right)$$

当 $k = \frac{1}{2}$ 时,$F_{y'} = -\frac{1}{2}y''^{-\frac{1}{2}}$,欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(-\frac{1}{2}y''^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

积分两次,得

$$y''^{-\frac{1}{2}} = c_1x + c_2$$

或

$$y'' = \frac{1}{(c_1x + c_2)^2}$$

积分两次,得

$$c_1^2 y = \ln(c_1 x + c_2) + c_3 x + c_4$$

当 $k = 1$ 时,泛函的值与 y 无关。

2.56 求泛函 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - 2y' + y^2 - x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,已知 $y(0) = y'(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$。

解 欧拉方程为

$$2y + 2y^{(4)} = 0$$

或

$$y^{(4)} + y = 0$$

特征方程为

$$r^4 + 1 = 0$$

四重根为 $r = \pm \mathrm{i}$,于是解为

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$$

由 $y(0) = 0$,得 $c_1 = 0$。由 $y'(0) = 0$,得 $c_2 + c_3 = 0$。由 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,得 $c_3 + c_4 \frac{\pi}{2} = 1$。由 $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$,得 $-c_2 \frac{\pi}{2} + c_4 = \frac{\pi}{2}$。可求出 $c_2 = -1, c_3 = 1, c_4 = 0$。将它们代入上述方程,得

$$y = \sin x - x\cos x$$

2.57 求泛函 $J[y] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y''^2 - 4y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线,已知 $y(0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, y'(0) = -1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$。

解 欧拉方程为

$$y^{(4)} + 4y'' = 0$$

特征方程为

$$r^2(r^2 + 4) = 0$$

欧拉方程的解为

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3 x + c_4$$

由 $y(0) = 0$,得 $c_1 + c_4 = 0$。由 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,得 $c_2 + c_3 \frac{\pi}{4} + c_4 = 0$。由 $y'(0) = -1$,得 $2c_2 + c_3 = -1$,由 $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$,得 $c_3 \frac{\pi}{4} - 2c_1 = 1$。可解得 $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}, c_3 = 0, c_4 = \frac{1}{2}$。于是可得

$$y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x - \sin 2x)$$

2.58 设泛函 $J[y] = \dfrac{\int_{x_0}^{x_1} [p(x)y'^2 - q(x)y^2 - s(x)y''^2]\mathrm{d}x}{\int_{x_0}^{x_1} r(x)y^2\mathrm{d}x}$ 满足边界条件 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1, y'(x_0) = y'_0, y'(x_1) = y'_1$,其中 $p(x)$、$q(x)$、$r(x)$ 和 $s(x) \in C^2[x_0, x_1]$ 为已知函数,且 $r(x) \neq 0, y \in C^4[x_0, x_1]$。试导出该泛函的极值曲线应满足的边界条件。

解 取泛函的一阶变分

$$\delta J = \frac{2\int_{x_0}^{x_1} ry^2\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x_1}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}py' - qy - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}sy''\right)\delta y\mathrm{d}x}{\left(\int_{x_0}^{x_1} ry^2\mathrm{d}x\right)^2} -$$

$$\frac{2\int_{x_0}^{x_1} ry\delta y\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x_1}[py'^2 - qy^2 - sy''^2]\mathrm{d}x}{\left(\int_{x_0}^{x_1} ry^2\mathrm{d}x\right)^2} =$$

$$\frac{2\int_{x_0}^{x_1} ry^2\mathrm{d}x\left\{\int_{x_0}^{x_1}[-(py')' - qy - (sy'')'']\delta y\mathrm{d}x - J\int_{x_0}^{x_1} ry\delta y\mathrm{d}x\right\}}{\left(\int_{x_0}^{x_1} ry^2\mathrm{d}x\right)^2} = 0$$

因 $r(x)\neq 0$,可得$\int_{x_0}^{x_1} r(x)y^2\mathrm{d}x \neq 0$,故有

$$\int_{x_0}^{x_1}[(py')' + qy + (sy'')'']\delta y\mathrm{d}x + J\int_{x_0}^{x_1} ry\delta y\mathrm{d}x = 0$$

或

$$(py')' + (q + Jr)y + (sy'')'' = 0$$

2.59 设一边界固定,半径为 R 并呈轴对称弯曲的圆形薄板,在单位面积载荷为 $q(x)$ 的作用下,系统的总势能是板的挠度 $w = w(r)$ 的泛函

$$J[w] = D\pi\int_0^R\left(rw''^2 + \frac{1}{r}w'^2 + 2\mu w'w'' - \frac{2q}{D}rw\right)\mathrm{d}r$$

式中 D 和 μ 皆为弹性常数。试证当该泛函取得极小值时挠度函数 w 应当满足平衡方程

$$rw^{(4)} + 2w''' - \frac{1}{r}w'' + \frac{1}{r^2}w' = \frac{qr}{D}$$

证 对泛函取一阶变分

$$\delta J = 2D\pi\int_0^R\left[(rw'')'' - \left(\frac{1}{r}w'\right)' + \mu(w''' - w''') - \frac{q}{D}r\right]\delta w\mathrm{d}r = 0$$

由于 δw 是任取的,故方括号中的项应等于零,将其展开,得

$$rw^{(4)} + 2w''' - \frac{1}{r}w'' + \frac{1}{r^2}w' = \frac{q}{D}r$$

证毕。

将上式除以 r,应用式(1-4-16),上式可化为

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}$$

这正是以算子形式表示的薄板弯曲控制微分方程。此题可直接利用例 2.8.8 的结果令对 θ 的偏导数为零或直接应用欧拉方程来证得。

2.60 周边固支正交各向异性圆板线性弯曲的总位能由下式给出

$$J[w] = \frac{1}{2}\int_0^a\left(D_{11}rw''^2 + 2D_{12}w'w'' + D_{22}\frac{w'^2}{r} - 2fw\right)\mathrm{d}r$$

式中，r 是径向坐标，a 是板的半径，f 是分布横向载荷，D_{ij} 是板的刚度。用总位能原理求出板的控制微分方程。

解 泛函的欧拉方程为

$$\frac{d^2}{dr^2}(D_{11}rw'') - \frac{d}{dr}(D_{12}w'') + \frac{d^2}{dr^2}(D_{12}w') - \frac{d}{dr}\left(D_{22}\frac{1}{r}w'\right) - f = 0$$

或

$$\frac{d^2}{dr^2}(D_{11}rw'') - \frac{d}{dr}\left(D_{22}\frac{1}{r}w'\right) - f = 0$$

若 D_{ij} 是常数，则有

$$D_{11}\frac{d^2}{dr^2}(rw'') - D_{22}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}w'\right) - f = 0$$

2.61 证明泛函 $J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + 2yz' + 2zy' + z'^2)dx$ 满足边界条件 $y(x_0) = y_0$，$y(x_1) = y_1, z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1$ 的极值曲线为空间直线 $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$。

证 $F = y'^2 + 2yz' + 2zy' + z'^2$，泛函的欧拉方程组为

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = -2y'' + 2z' - 2z' = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = -2y' + 2y' - 2z'' = 0$$

积分，得

$$y = c_1x + c_2, z = c_3x + c_4$$

由边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$，得 $c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, c_2 = \frac{y_0x_1 - y_1x_0}{x_1 - x_0}$。将 c_1、c_2 代入欧拉方程的第一个解，得

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0x_1 - y_1x_0}{x_1 - x_0}$$

两端同减 y_0，得 $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$。同理可得 $z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$。故有 $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$，此为空间直线方程。证毕。

2.62 求泛函 $J[x,y] = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x - k}}dt$ 的极值曲线，式中 k 为常数。

解 因 $F = \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x - k}}$ 不含 t，故有首次积分

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} = \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{x - k}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1, \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{x - k}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0$$

$$\dot{y} = c_1\sqrt{x - k}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \dot{y}^2 = c_1^2(x - k)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

解出 $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$，得 $\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \sqrt{\frac{1}{c_1^2(x - k)} - 1}$。

分离变量并令 $x=\frac{1}{c_1^2}\cos^2 t+k$,积分得

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{c_1^2(x-k)}-1}}=-\frac{2}{c_1^2}\int\cos^2 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{c_1^2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2c_1^2}(2t+\sin 2t)+c_2$$

$$x=\frac{1}{2c_1^2}(1+\cos 2t)+k$$

2.63 求下列泛函的变分和欧拉方程:

(1) $J[u(x,y)]=\iint_D(u_x^2-u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (2) $J[u(x,y)]=\iint_D(u_x^2-u_{yy}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解 (1) $F=u_x^2-u_y^2$,泛函的一阶变分为

$$\delta J[u(x,y)]=\iint_D\delta(u_x^2-u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(2u_x\delta u_x-2u_y\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

欧拉方程为

$$F_u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{u_x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{u_y}=-2u_{xx}+2u_{yy}=0$$

即 $u_{xx}-u_{yy}=0$。

(2) $F=u_x^2-u_{yy}^2$,泛函的一阶变分为

$$\delta J=\iint_D\delta(u_x^2-u_{yy}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(2u_x\delta u_x-2u_{yy}\delta u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

欧拉方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u_x}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}F_{u_{yy}}=-2u_{xx}-2u_{yyyy}=0$$

即 $u_{xx}+u_{yyyy}=0$ 或 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$。

2.64 设某静电场 Ω 的电位 $V=V(x,y,z)$,电场能量 E 为

$$E=J[V]=\frac{1}{8\pi}\iiint_\Omega(V_x^2+V_y^2+V_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

根据电学知识,当 E 最小时,该静电场处于平衡状态。试求此时电位函数所应当满足的微分方程。

解 $F=V_x^2+V_y^2+V_z^2$,欧拉方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{V_x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{V_y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{V_z}=-2V_{xx}-2V_{yy}-2V_{zz}=0$$

即 $V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}=\Delta V=0$,可见它是调和方程。

2.65 用极坐标求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$。

解 取极坐标方程为 $r=r(\theta)$,则

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,r^2=x^2+y^2$$

$$\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2=(\mathrm{d}r)^2+r^2(\mathrm{d}\theta)^2$$

若端点 x_0、x_1 对应于 θ 的值 α、$\beta(\alpha<\beta)$,则泛函可写成

$$J[r]=\int_{\alpha}^{\beta}r\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta$$

因 $F=r\sqrt{r^2+r'^2}$ 不含 θ,故欧拉方程有首次积分

$$F-r'F_{r'}=r\sqrt{r^2+r'^2}-r'\frac{rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}}=\frac{r^3}{\sqrt{r^2+r'^2}}=c_1$$

令 $r'=r\tan t$,则 $\sqrt{r^2+r'^2}=r\sec t$,代入上式,得

$$r^2\cos t=c_1,\mathrm{d}r=\frac{r\tan t\mathrm{d}t}{2}=\frac{r'\mathrm{d}t}{2},\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}r}{r'}=\frac{\mathrm{d}t}{2}$$

将最后一个式子积分,得 $2\theta=t+c_2$。于是,极值曲线为 $r^2\cos(2\theta-c_2)=c_1$。又

$$\cos(2\theta-c_2)=\cos 2\theta\cos c_2+\sin 2\theta\sin c_2=$$

$$(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos c_2+2\sin\theta\cos\theta\sin c_2=$$

$$\frac{(x^2-y^2)\cos c_2}{r^2}+\frac{2xy\sin c_2}{r^2}$$

于是,极值曲线还可以写成

$$(x^2-y^2)\cos c_2+2xy\sin c_2=c_1$$

2.66　如果第一象限充满某种透明的光介质,而在其中的任一点光的速度等于 $1+x$,求光束以最短的时间由原点传播至点(2,3) 的光路方程。

解　设光的速度为 v,依题意有

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=1+x$$

此问题的泛函为

$$J[y]=t=\int_0^2\frac{\mathrm{d}s}{1+x}=\int_0^2\frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+x}\mathrm{d}x$$

因被积函数不含 y,故欧拉方程有首次积分

$$\frac{y'}{(1+x)\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{c_1}$$

设 $y'=\tan t$,代入上式,得 $1+x=c_1\sin t$。

又 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=c_1\cos t\mathrm{d}t$,即 $\mathrm{d}y=c_1\sin t\mathrm{d}t$,积分得 $y=-c_1\cos t+c_2$。消去参数 t,得

$$(y-c_2)^2+(x+1)^2=c_1^2$$

由边界条件 $y(0)=0$ 和 $y(2)=3$,可解出 $c_2=\frac{17}{6}$,$c_1=\frac{\sqrt{325}}{6}$。于是,光路方程为

$$\left(y-\frac{17}{6}\right)^2+(x+1)^2=\frac{325}{36}$$

2.67　求泛函 $J[u(x,y)]=\iint_D[p(x)u_x^2-q(y)u_y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

解　泛函的奥氏方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=-\frac{\partial}{\partial x}[2p(x)u_x]+\frac{\partial}{\partial y}[2q(y)u_y]=0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}[p(x)u_x] - \frac{\partial}{\partial y}[q(y)u_y] = 0$$

2.68　写出泛函 $J[u(x,y)] = \iint_D \left[\frac{D}{2}(u_{xx} + u_{yy})^2 - f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

解　被积函数为

$$F = \frac{D}{2}(u_{xx} + u_{yy})^2 - f(x,y)u$$

计算各偏导数

$$F_u = -f(x,y), \frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} = D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right), \frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}} = D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)$$

代入奥氏方程，得

$$D\Delta^2 u = D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = f(x,y)$$

当 $f(x,y) = 0$ 时，它可化为重调和方程。

2.69　给定泛函 $J[\varphi] = \iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $J[w] = \iiint_V (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，试由变分方程推导欧拉方程，$\varphi$ 和 w 在区域 D 和 V 的边界上的值为已知。

解　将第一个泛函取一阶变分并应用格林公式，得

$$\delta J = \iint_D \delta(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (2\varphi_x\delta\varphi_x + 2\varphi_y\delta\varphi_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$2\iint_D \left(\varphi_x \frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi + \varphi_y \frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$2\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_x\delta\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_y\delta\varphi)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_x + \frac{\partial}{\partial y}\varphi_y\right)\delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$2\oint_L [(\varphi_x\delta\varphi)\mathrm{d}y - (\varphi_y\delta\varphi)\mathrm{d}x] - 2\iint_D (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})\delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$-2\iint_D (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})\delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

因 $\delta\varphi$ 是任取的，故

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

将第二个泛函取一阶变分并应用高斯公式，得

$$\delta J = \iiint_V \delta\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$2\iiint_V \left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\delta\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\delta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$2\iiint_V \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta w + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\delta w + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\delta w\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$2\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x\delta w) + \frac{\partial}{\partial y}(w_y\delta w) + \frac{\partial}{\partial z}(w_z\delta w)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z -$$

$$2\iiint_V \left[\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right]\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$2\oint_S[(w_x\delta w)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(w_y\delta w)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(w_z\delta w)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]-$$

$$2\iiint_V(w_{xx}+w_{yy}+w_{zz})\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$-2\iiint_V(w_{xx}+w_{yy}+w_{zz})\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

因 δw 是任取的,故

$$\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

下面用矢量的方法求解。泛函可写成

$$J=\iiint_V(\nabla w\cdot\nabla w)\mathrm{d}V$$

求一阶变分

$$\delta J=2\iiint_V(\nabla\delta w\cdot\nabla w)\mathrm{d}V=2\iiint_V[\nabla\cdot(\delta w\nabla w)-\delta w\Delta w]\mathrm{d}V=$$

$$2\oint_S\frac{\partial w}{\partial n}\delta w\mathrm{d}S-2\iiint_V\Delta w\delta w\mathrm{d}V=-2\iiint_V\Delta w\delta w\mathrm{d}V=0$$

因 δw 是任取的,故

$$\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

同上面解法一样,但简便得多。同理可求出 $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$。

2.70 求泛函 $J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+z'^2-2yz+2y+2z)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解 泛函的欧拉方程组为

$$2-2z-2y''=0$$

$$2-2y-2z''=0$$

将上面第一个方程求导两次,再将第二个方程代入第一个方程中,消去 z'',得

$$y^{(4)}-y=1$$

同理可得

$$z^{(4)}-z=1$$

其通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2x^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+1,z=c_1\mathrm{e}^x+c_2x^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x+1$$

2.71 写出泛函

$$J[u(x_1,\cdots,x_n)]=\iint\cdots\int_\Omega\left[\sum_{j=1}^n a_j(x_1,\cdots,x_n)u_{x_j}^2-b(x_1,\cdots,x_n)u^2+2uf(x_1,\cdots,x_n)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

的欧拉 — 奥氏方程。

解 泛函的欧拉 — 奥氏方程为

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+b(x_1,\cdots,x_n)u=f(x_1,\cdots,x_n)$$

2.72　求泛函 $J[u(x,y)]=\iint_D \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程。

解　$F=\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}$ 不依赖于 u，$F_{u_x}=\dfrac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$，$F_{u_y}=\dfrac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$，泛函的奥氏方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}=$$

$$\frac{u_{xx}\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-u_x\dfrac{u_xu_{xx}+u_yu_{yx}}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}}{1+u_x^2+u_y^2}+\frac{u_{yy}\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-u_y\dfrac{u_xu_{xy}+u_yu_{yy}}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}}{1+u_x^2+u_y^2}=$$

$$\frac{u_{xx}(1+u_x^2+u_y^2)-u_x(u_xu_{xx}+u_yu_{yx})+u_{yy}(1+u_x^2+u_y^2)-u_y(u_xu_{xy}+u_yu_{yy})}{\sqrt{(1+u_x^2+u_y^2)^3}}=$$

$$\frac{u_{xx}(1+u_y^2)+u_{yy}(1+u_x^2)-2u_xu_yu_{xy}}{\sqrt{(1+u_x^2+u_y^2)^3}}=0$$

因上式的分母不为零，故有

$$u_{xx}(1+u_y^2)+u_{yy}(1+u_x^2)-2u_xu_yu_{xy}=0$$

2.73　求泛函 $J[u]=\dfrac{1}{m}\left[\iiint_V(2fu+|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]^n$ 的奥氏方程，$n\geqslant 1$。

解　由例 1.3.1 可知

$$\nabla u\cdot\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2=|\nabla u|^2$$

故原泛函可以写成以下形式

$$J[u]=\frac{1}{m}\left[\iiint_V(2fu+u_x^2+u_y^2+u_z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]^n$$

泛函的奥氏方程为

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=f$$

2.74　设一质量为 m 的小车在水平轨道上运动，开始时($t_0=0$)速度为零。忽略摩擦阻力，要求在时刻 $t=t_1$ 时，小车的速度为 v_1，试求控制规律即外力 $F(t)$，使速度误差及控制能量为极小，也即使泛函 $J[f(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\{F^2(t)+a[v_1-v(t)]^2\}\mathrm{d}t$ 取极小值。其中 a 为正的常数。

解　根据牛顿第二定律 $F=mv'$，将此式代入泛函中，可求出其欧拉方程为

$$-2a(v_1-v)-2m^2v''=0$$

令 $V=v-v_1$，则有 $V''=v''$，此时欧拉方程可化为

$$V''-\frac{a}{m^2}V=0$$

微分方程的特征方程为

$$r^2-\frac{a}{m^2}=0$$

解得 $r = \pm \frac{\sqrt{a}}{m}$。于是可得

$$V = v - v_1 = c_1 e^{-\frac{\sqrt{a}}{m}t} + c_2 e^{\frac{\sqrt{a}}{m}t}$$

据题意，速度应是有限值，可得 $c_2 = 0$，由初始条件 $t_0 = 0, v = 0$，可得 $c_1 = -v_1$，于是，小车的速度为

$$v = v_1(1 - e^{-\frac{\sqrt{a}}{m}t})$$

控制规律即外力为

$$F = mv' = \sqrt{a}v_1 e^{-\frac{\sqrt{a}}{m}t}$$

2.75　在平面应力状态下，线弹性体的应变能为

$$J = \iint_D \left[\frac{E}{2(1-\mu^2)}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y) + \frac{E}{4(1+\mu)}\gamma_{xy}^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中，E、μ 分别是弹性模量和泊松比，$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ 分别是正应变和剪应变，u、v 分别是 x、y 方向的位移。求证

$$\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xx} + v_{xy}) = 0, \Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xy} + v_{yy}) = 0$$

证　将 $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ 代入应变能表达式，得

$$J = \frac{E}{2(1+\mu)}\iint_D \left[\frac{1}{1-\mu}(u_x^2 + v_y^2 + 2\mu u_x v_y) + \frac{1}{2}(v_x + u_y)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

泛函的奥氏方程组为

$$\frac{2}{1-\mu}(u_{xx} + 2\mu v_{xy}) + v_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{2}{1-\mu}(v_{yy} + 2\mu u_{xy}) + v_{xx} + u_{xy} = 0$$

第一个奥氏方程化为

$$\frac{1-\mu+1+\mu}{1-\mu}u_{xx} + \frac{2\mu}{1-\mu}v_{xy} + v_{xy} + u_{yy} =$$

$$u_{xx} + \frac{1+\mu}{1-\mu}u_{xx} + \frac{2\mu+1-\mu}{1-\mu}v_{xy} + u_{yy} = \Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xx} + v_{xy}) = 0$$

第二个奥氏方程化为

$$\frac{1-\mu+1+\mu}{1-\mu}v_{yy} + \frac{2\mu}{1-\mu}u_{xy} + v_{xx} + u_{xy} =$$

$$v_{yy} + v_{xx} + \frac{1+\mu}{1-\mu}v_{yy} + \frac{2\mu+1-\mu}{1-\mu}u_{xy} =$$

$$\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu}(u_{xy} + v_{yy}) = 0$$

证毕。

若将 μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$，将其代入上面两个奥氏方程，则有

$$\Delta u + \frac{1+\frac{\mu}{1-\mu}}{1-\frac{\mu}{1-\mu}}(u_{xx}+v_{xy}) = \Delta u + \frac{1}{1-2\mu}(u_{xx}+v_{xy}) = 0$$

$$\Delta v + \frac{1+\frac{\mu}{1-\mu}}{1-\frac{\mu}{1-\mu}}(u_{xy}+v_{yy}) = \Delta v + \frac{1}{1-2\mu}(u_{xy}+v_{yy}) = 0$$

这正是平面应变问题的欧拉方程(见例 2.8.3)。

2.76　写出拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的极坐标形式。

解　拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 对应的泛函是 $J[u(x,y)]=\iint_D (u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。通过直角坐标与极坐标之间的关系 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,可求得 r、θ 与 x、y 的导数关系为

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta,\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r},\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$$

可写出以极坐标表示的泛函为

$$J=\iint_D\left[\left(u_r\frac{\partial r}{\partial x}+u_0\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(u_r\frac{\partial r}{\partial y}+u_\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$\iint_D\left[\left(u_r\cos\theta-u_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)^2+\left(u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)^2\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$\iint_D\left(ru_r^2+\frac{1}{r}u_\theta^2\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

写出泛函的奥氏方程,就得到以极坐标表示的拉普拉斯方程

$$ru_{rr}+\frac{1}{r}u_{\theta\theta}+u_r=0$$

当然,根据式(1-4-12),也可直接写出上述拉普拉斯方程。

第 3 章　泛函极值的充分条件习题解

证明下列各基本变分问题的极值曲线可以包含在极值曲线场(正常的或有心的)内。

3.1　$J[y]=\int_0^1(y'^2-2xy)\mathrm{d}x, y(0)=y(1)=0$。

证　由泛函的欧拉方程 $y''+x=0$,解得 $y=-\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2$,符合边界条件的极值曲线为 $y=\frac{x}{6}(1-x^2)$,它包含在中心在坐标原点(0,0)的中心极值曲线场 $y=c_1x-\frac{x^3}{6}$ 内。证毕。

3.2　$J[y]=\int_0^1(2\mathrm{e}^xy+y'^2)\mathrm{d}x, y(0)=1, y(1)=\mathrm{e}$。

证　由泛函的欧拉方程 $y''-\mathrm{e}^x=0$,可解得 $y=\mathrm{e}^x+c_1x+c_2$,符合边界条件的极值曲线为 $y=\mathrm{e}^x$,它包含在由极值曲线族 $y=\mathrm{e}^x+c$ 形成的正常场内。证毕。

试讨论下面泛函的极值性质。

3.3　$J[y]=\int_0^2(xy'+y'^2)\mathrm{d}x, y(0)=1, y(2)=0$。

解 $F = xy' + y'^2$,泛函的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + 2y') = 0$$

首次积分为 $y' = -\frac{x}{2} + c_1$,再积分一次,得 $y = -\frac{x^2}{4} + c_1x + c_2$。由边界条件 $y(0) = 1, y(2) = 0$,解得 $c_1 = 0, c_2 = 1$。故极值曲线为

$$y = 1 - \frac{x^2}{4}$$

函数 $y = -\frac{x^2}{4} + c_2$ 在区间[1,2]形成极值中心曲线场,且 $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ 在这个极值曲线场之内。

雅可比方程的通解为

$$u = d_1\frac{\partial y}{\partial c_1} + d_2\frac{\partial y}{\partial c_2} = d_1x + d_2$$

由边界条件 $u(0) = 0, u'(0) = 1$,解出 $d_1 = 1, d_2 = 0$。故雅可比方程的解为

$$u = x$$

由此可见,因 u 除了在点 $x_0 = 0$ 之外没有其他零点,故泛函的极值函数满足雅可比强条件。

又 $F_{y'} = -\frac{x}{2}$,魏尔斯特拉斯函数为

$$E = x\left(-\frac{x}{2} + u\right) + \left(-\frac{x}{2} + u\right)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = u^2 \geqslant 0$$

故该极值曲线 $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ 取得强极小值。

3.4 $J[y] = \int_0^{x_1}(y'^2 + 2yy' - 16y^2)\mathrm{d}x, x_1 > 0, y(0) = 0, y(x_1) = 0$。

解 由习题2.39可知,其解为 $y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$。由边界条件 $y(0) = 0$,可知 $c_1 = 0$。又 $y(x_1) = 0$,可知 $x_1 = \frac{\pi}{4}$ 或 $c_2 = 0$,故得极值曲线 $y = 0$。于是,$y = c_2\sin 4x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上形成一个以点(0,0)为中心的极值曲线场,且围绕极值曲线 $y = 0$。又 $F_{y'y'} = 2 > 0$ 对任意的 y' 和极值曲线 $y = 0$ 的邻域恒成立,故由极值的充分条件可知,如果 $0 < x_1 < \frac{\pi}{4}$,则 $y = c_2\sin 4x$ 达到强极小值。如果 $x_1 > \frac{\pi}{4}$ 则没有极小值。

3.5 $J[y] = \int_{-1}^{2} y'(1 + x^2y')\mathrm{d}x, y(-1) = 1, y(2) = 4$。

解 $F = y'(1 + x^2y')$,由习题2.38可知,其通解为 $y = \frac{c_1}{x} + c_2$,由边界条件 $y(-1) = 1, y(2) = 4$ 可定出 $c_1 = 2, c_2 = 3, y = \frac{2}{x} + 3$,因为 $y' = -\frac{2}{x^2}$ 在 $x = 0$ 点不存在,故在区间[-1,2]上不能达到极值。

3.6 $J[y] = \int_1^2 y'(1 + x^2y')\mathrm{d}x, y(1) = 3, y(2) = 5$。

解 由习题2.38或习题3.5可知,其通解为 $y = \frac{c_1}{x} + c_2$,由边界条件 $y(1) = 3, y(2) = 5$,可解出 $c_1 = -4, c_2 = 7$,故 $y = 7 - \frac{4}{x}, 1 \leqslant x \leqslant 2$。$y = \frac{c_1}{x} + c_2$ 在区间[1,2]上形成极值曲线场,且

$y = 7 - \frac{4}{x}$ 在这个极值曲线场之内。

雅可比方程的通解为

$$u = \frac{d_1}{x} + d_2$$

由边界条件 $u(1) = 0, u'(1) = 1$,解出 $d_1 = 1, d_2 = -1$。故雅可比方程的解为

$$u = \frac{1}{x} - 1$$

由此可见,因 u 除了在点 $x_0 = 1$ 之外没有其他零点,所以泛函的极值函数满足雅可比强条件。

又 $F_{y'} = 1 + 2x^2y'$,魏尔斯特拉斯函数为

$$E = (y' + u)[1 + x^2(y' + u)] - y'(1 + x^2y') - u(1 + 2x^2y') = x^2u^2 > 0$$

对于任意的 y',都有 $E > 0$,故极值曲线 $y = 7 - \frac{4}{x}$ 可达到强极小值。当然也可取得弱极小值。

3.7 $J[y] = \int_{-1}^{2} y'(1 + x^2y')\mathrm{d}x, y(-1) = y(2) = 1$。

解 由习题3.5可知,其解为 $y = \frac{c_1}{x} + c_2$,由边界条件 $y(-1) = y(2) = 1$ 可知 $c_1 = 0, c_2 = 1$,故 $y = 1$。

由习题3.6可知,雅可比方程的解 u 除了在点 $x_0 = -1$ 之外没有其他零点,所以泛函的极值函数满足雅可比强条件。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = (y' + u)[1 + x^2(y' + u)] - y'(1 + x^2y') - u(1 + 2x^2y') = x^2u^2 > 0$$

故极值曲线 $y = 1$ 可达到强极小值。

3.8 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y)\mathrm{d}x, y(0) = -1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$。

解 $F = 4y^2 - y'^2 + 8y$,泛函的欧拉方程为

$$8y + 8 + 2y'' = 0$$

或

$$y'' + 4y = -4$$

其解为 $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - 1$。由边界条件 $y(0) = -1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,得 $c_1 = 0, c_2 = 1$,故极值曲线为 $y = \sin 2x - 1$。$y = c_2\sin 2x - 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上形成极值曲线场,且 $y = \sin 2x - 1$ 在这个极值曲线场之内。

雅可比方程的通解为

$$u = d_1\cos 2x + d_2\sin 2x$$

由边界条件 $u(0) = 0, u'(0) = 1$,解得 $d_1 = 0, d_2 = \frac{1}{2}$,故雅可比方程的解为 $u = \frac{1}{2}\sin 2x$。因只在 $x = 0$ 处,$u = 0$,故泛函的极值函数满足雅可比强条件。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = 4y^2 - (y' + u)^2 + 8y - (4y^2 - y'^2 + 8y) + u2y' = -u^2 < 0$$

故极值曲线 $y = \sin 2x - 1$ 可达到强极大值。

3.9 $J[y]=\int_1^2(x^2y'^2+12y^2)\mathrm{d}x, y(1)=1, y(2)=8$。

解 $F=x^2y'^2+12y^2$,泛函的欧拉方程为

$$24y-4xy'-2x^2y''=0$$

或

$$x^2y''+2xy'-12y=0$$

这是欧拉方程,设 $x=\mathrm{e}^t$,原方程化为

$$D(D-1)y+2Dy-12y=0$$

它的特征方程为

$$r(r-1)+2r-12=0$$

解出两个根 $r_1=3, r_2=-4$。

方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{3t}+c_2\mathrm{e}^{-4t}=c_1x^3+c_2x^{-4}$$

由边界条件 $y(1)=1, y(2)=8$,得 $c_1=1, c_2=0$,故得极值曲线为 $y=x^3$。$y=c_1x^3$ 在区间[1,2]上形成极值曲线场,且 $y=x^3$ 在这个极值曲线场之内。

雅可比方程的通解为 $u=d_1x^3+d_2x^{-4}$。由边界条件 $u(1)=0, u'(1)=1$,解得 $d_1=\frac{1}{12}=-d_2$,故雅可比方程的解为 $u=\frac{1}{12}(x^3-x^{-4})$。它仅在 $x_0=1$ 处有零点,故泛函的极值曲线满足满足雅可比强条件。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E=x^2(y'+u)^2+12y^2-x^2y'^2-12y^2-u2x^2y'=x^2u^2>0$$

故极值曲线 $y=x^3$ 可达到强极小值。

3.10 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}\mathrm{d}x, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$。

解 由习题2.41的解可知,极值曲线族为 $y=\sinh(c_1x+c_2)$。由边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 可知,$c_1=\frac{\operatorname{arcsinh}y_1-\operatorname{arcsinh}y_0}{x_1-x_0}, c_2=\frac{x_1\operatorname{arcsinh}y_0-x_0\operatorname{arcsinh}y_1}{x_1-x_0}$,故极值曲线为

$$y=\sinh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}y_1-\operatorname{arcsinh}y_0}{x_1-x_0}x+\frac{x_1\operatorname{arcsinh}y_0-x_0\operatorname{arcsinh}y_1}{x_1-x_0}\right)$$

魏尔斯特拉斯函数为

$$E=\frac{1+y^2}{(y'+u)^2}-\frac{1+y^2}{y'^2}+2u\frac{1+y^2}{y'^3}=\frac{u^2(1+y^2)(3y'+2u)}{(y'+u)^2y'^3}$$

可见,当 $(3y'+2u)/y'^3$ 分别取大于零和小于零时,E 函数变号,故该极值曲线族不能取得强极值。但 $E_{y'y'}=\frac{6(1+y^2)}{y'^4}>0$,故该极值曲线族能达到弱极小值。

3.11 $J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2+2y\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x, y(0)=\frac{1}{3}, y(1)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^2$。

解 $F=y'^2+y^2+2y\mathrm{e}^{2x}$,其欧拉方程为

$$2y+2\mathrm{e}^{2x}-2y''=0$$

或

$$y'' - y = e^{2x}$$

方程的解为 $y = \frac{1}{3}e^{2x} + c_1e^x + c_2e^{-x}$，由边界条件 $y(0) = \frac{1}{3}, y(1) = \frac{1}{3}e^2$，可得 $c_1 = c_2 = 0$，极值曲线为 $y = \frac{1}{3}e^{2x}$。

雅可比方程的通解为

$$u = d_1e^x + d_2e^{-x}$$

由边界条件 $u(0) = 0, u'(0) = 1$，可得 $c_1 = \frac{1}{2} = -c_2$，故雅可比方程为

$$u = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

因 u 除了在点 $x_0 = 0$ 之外没有其他零点，所以泛函的极值函数满足雅可比强条件。魏尔斯特拉斯函数为

$$E = (y' + u)^2 + y^2 + 2ye^{2x} - (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) - u2y' = u^2 > 0$$

故极值曲线 $y = \frac{1}{3}e^{2x}$ 达到强极小值。

3.12 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2 - y'^2 + 6y\sin 2x)dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$。

解 $F = y^2 - y'^2 + 6y\sin 2x$，泛函的欧拉方程为

$$2y + 6\sin 2x + 2y'' = 0$$

或

$$y'' + y = -3\sin 2x$$

方程的解为 $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin 2x$。由边界条件 $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$，可知 $c_1 = c_2 = 0$，故极值曲线为 $y = \sin 2x$。魏尔斯特拉斯函数为

$$E = y^2 - (y' + u)^2 + 6y\sin 2x - (y^2 - y'^2 + 6y\sin 2x) + u2y' = -u^2 < 0$$

故 $y = \sin 2x$ 达到强极大值。

3.13 $J[y] = \int_0^{x_1}\frac{dx}{y'}, y(0) = 0, y(x_1) = y_1, x_1 > 0, y_1 > 0$。

解 $F = \frac{1}{y'}$，泛函的欧拉方程为

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{y'^2}\right) = 0$$

首次积分为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{c_1}$$

方程的通解为 $y = c_1x + c_2$。当然，由于被积函数只是 y' 的函数，故也可直接得到上述结果。由边界条件 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1, x_1 > 0, y_1 > 0$，可得 $c_1 = \frac{y_1}{x}, c_2 = 0$。极值曲线为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$。魏尔斯特拉斯函数为

$$E = \frac{1}{(y' + u)^2} - \frac{1}{y'^2} + \frac{2u}{y'^3} = \frac{u^2(3y' + 2u)}{(y' + u)^2y'^3}$$

当 $3y' + 2u > 0$ 时，$E > 0$，当 $3y' + 2u < 0$ 时，$E < 0$，故 E 的符号不能确定，极值曲线不能达到强极值。但 $F_{y'y'} = \frac{2}{y'^3}$，沿着极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$，有 $F_{y'y'} = \frac{2x_1^3}{y_1^3} > 0$，故泛函在极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 上可达到弱极小值。

3.14 $J[y] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2}$，$y(0) = 0, y(x_1) = y_1, x_1 > 0, y_1 > 0$。

解 $F = \frac{1}{y'^2}$，泛函的欧拉方程为

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{y'^3}\right) = 0$$

或

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{c_1}$$

方程的解为 $y = c_1x + c_2$。由边界条件 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1, x_1 > 0, y_1 > 0$，可得 $c_1 = \frac{y_1}{x_1}$，$c_2 = 0$。魏尔斯特拉斯函数为

$$E = \frac{1}{y' + u} - \frac{1}{y'} + \frac{u}{y'^2} = \frac{y' + u - uy'}{(y' + u)y'^2}$$

当 $y' + u > uy'$ 且 $u > -y'$ 时，$E > 0$，当 $y' + u < uy'$ 且 $y' + u > 0$ 时，$E < 0$，故 E 的符号不能确定，极值曲线不能达到强极值。但

$$F_{y'y'} = \frac{2}{y'^3} > 0$$

故极值曲线在直线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 上达到弱极小值。

3.15 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y')dx$ 的二阶和三阶变分。

解 $F = xy + y^2 - 2y^2y'$，泛函的二阶和三阶变分分别为

$$\delta^2 J = \int_0^1 [F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2]dx =$$

$$\int_0^1 [2(\delta y)^2 - 4y'(\delta y)^2 - 8y\delta y\delta y']dx =$$

$$\int_0^1 [(2 - 4y')(\delta y)^2 - 8y\delta y\delta y']dx$$

$$\delta^3 J = \int_0^1 [-4\delta y'(\delta y)^2 - 8\delta y\delta y\delta y']dx = -\int_0^1 12(\delta y)^2\delta y'dx$$

3.16 设泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y^2 + y'^2)dx$，$y(x_0) = 0, y(x_1) = y_1$。求雅可比方程满足初值条件 $u(0) = 0, u'(0) = 1$ 的解。

解 泛函的欧拉方程为 $2y - 2y'' = 0$，通解为 $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$。由于 $\frac{\partial y}{\partial c_1} = e^x$，$\frac{\partial y}{\partial c_2} = e^{-x}$，故可得雅可比方程的通解为

$$u = d_1e^x + d_2e^{-x}$$

由边界条件 $u(0)=0, u'(0)=1$，得 $d_1+d_2=0, d_1-d_2=1$，可解得 $d_1=\frac{1}{2}, d_2=-\frac{1}{2}$。于是 $u(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$。

3.17　求泛函 $J[y]=\int_0^1(y^2-2yy'+y'^2)dx$ 的极值曲线，并说明在该极值曲线上泛函是否取得绝对极大(小)值。

解　对泛函取一阶变分

$$\delta J=2\int_0^1(y\delta y-y\delta y'-y'\delta y+y'\delta y')dx=$$

$$2\int_0^1(y\delta y+y'\delta y-y'\delta y-y''\delta y)dx-y\delta y\Big|_0^1+y'\delta y\Big|_0^1=$$

$$2\int_0^1(y-y'')\delta y dx+(y'-y)\delta y\Big|_0^1$$

若使泛函取极值，应有 $\delta J=0$，由于 δy 是任取的，故自然边界条件为

$$y'(0)=y(0), y'(1)=y(1)$$

泛函的欧拉方程为

$$y''-y=0$$

可解得

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^x$$

由边界条件 $y'(0)=y(0)$，得 $-c_1+c_2=c_1+c_2$，可解出 $c_1=0$。令 $c=c_2$，则极值曲线为 $y=ce^x$。

对泛函取二阶变分，得

$$\delta^2J=2\int_0^1[(\delta y)^2-2\delta y\delta y'+(\delta y')^2]dx=2\int_0^1(\delta y-\delta y')^2dx\geqslant 0$$

故泛函在所求极值曲线处取得绝对极小值。

3.18　求泛函 $J[y]=\int_0^1-2(y'^2-1)^2dx$ 的极值曲线。并判别在该极值曲线上泛函能否取绝对极大(小)值。

解　对泛函取一阶变分

$$\delta J=\int_0^1-8(y'^2-1)y'\delta y'dx=8\int_0^1[(y'^2-1)y']'\delta y dx-(y'^2-1)y'\delta y\Big|_0^1$$

若使泛函取极值，应有 $\delta J=0$，由于 δy 是任取的，故自然边界条件为

$$y'(y'^2-1)\big|_{x=1}=y'(y'^2-1)\big|_{x=0}=0$$

欧拉方程为

$$[(y'^2-1)y']'=0$$

积分，得

$$(y'^2-1)y'=c$$

由自然边界条件可知，$c=0$。于是极值曲线为 $y=\pm x+c$ 或 $y=c$。

对泛函取二阶变分，得

$$\delta^2 J = \int_0^1 8(1-3y'^2)(\delta y')^2 \mathrm{d}x$$

当 $y = \pm x + c$ 时，$\delta^2 J < 0$，泛函在极值曲线上绝对极大值。当 $y = c$ 时，$\delta^2 J = 0$，泛函在极值曲线上是否取得绝对极值无法判定。

3.19　求泛函 $J[y] = \int_0^2 (yy' + y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线，并讨论其极值性，边界条件为 $y(0) = 0$，$y(1) = 2$。

解　因 $F = yy' + y'^2$ 不含 x，故欧拉方程有首次积分为 $y' = c_1$，再积分一次，得 $y = c_1 x + c_2$。由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = 2$ 可知，$c_1 = 2, c_2 = 0$。故极值曲线为 $y = 2x$。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = y(y' + u) + (y' + u)^2 - (yy' + y'^2) - u(y + 2y') = u^2 \geqslant 0$$

故该极值曲线取得强极小值。

对泛函取二阶变分，得

$$\delta^2 J = 2\int_0^2 (\delta y')^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$$

泛函取得绝对极小值。

3.20　求泛函 $J[y] = \int_{(1,1)}^{(8,2)} x^{\frac{2}{3}} y'^2 \mathrm{d}x$ 的极值曲线，并讨论其极值性。

解　因 $F = x^{\frac{2}{3}} y'^2$ 不依赖于 y，故欧拉方程为

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\frac{2}{3}} y' = 0$$

积分，得

$$y' = c_1 x^{-\frac{2}{3}}$$

再积分，得 $y = 3c_1 x^{\frac{1}{3}} + c_2$。由边界条件 $y(1) = 1, y(8) = 2$，得 $3c_1 + c_2 = 1, 6c_1 + c_2 = 2$，解得 $c_2 = 0, c_1 = \frac{1}{3}$，故 $y = x^{\frac{1}{3}}$。对泛函取二阶变分，得

$$\delta^2 J[y] = 2\int_{(1,1)}^{(8,2)} x^{\frac{2}{3}} (\delta y')^2 \mathrm{d}x > 0$$

于是泛函在极值曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 上取得绝对极小值。

3.21　求泛函 $J[y] = \int_{(1,1)}^{(2,4)} \frac{x^3}{y'^2} \mathrm{d}x$ 的极值曲线，并讨论其极值性。

解　泛函的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^3}{y'^3} = 0$$

积分，得

$$y = c_1 x^2 + c_2$$

由边界条件 $y(1) = 1, y(2) = 4$，得 $c_1 = 1, c_2 = 0$，故极值曲线为 $y = x^2$。对泛函取二阶变分，得

$$\delta^2 J = 6\int_{(1,1)}^{(2,4)} \frac{x^3}{y'^4} (\delta y')^2 \mathrm{d}x > 0$$

于是泛函在极值曲线 $y = x^2$ 上取得绝对极小值。

3.22　设 $u = u(x,y)$ 是二次泛函

$$J[u] = \iint_D (pu_x^2 + pu_y^2 - 2fu)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

满足固定边界条件 $u|_\Gamma = g(x,y), g \in C(\Gamma)$ 的极值函数。其中 Γ 为 D 的边界闭曲线，$\overline{D} = D + \Gamma$；$p \in C^1(\overline{D}), f \in C(\overline{D})$，且 $p > 0, u \in C^2(\overline{D})$。试证：$u = u(x,y)$ 使 $J[u]$ 取绝对极小值。

证　因 $u = u(x,y)$ 是 $J[u]$ 的解，有 $\delta J[u] = 0$，且泛函的二阶变分为

$$\delta^2 J = 2\iint_D p[(\delta u_x)^2 + (\delta u_y)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0$$

故 $u = u(x,y)$ 使 $J[u]$ 取绝对极小值。证毕。

3.23　求泛函 $J[y] = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2y'^2 + 4yy')\mathrm{d}x$ 的极值曲线，并讨论其极值性，边界条件为 $y(1) = 0, y(3) = 1$。

解　$F = \frac{1}{2}x^2y'^2 + 2yy'$，泛函的欧拉方程为

$$2y' - 2y' - 2xy' - x^2y'' = 0$$

或

$$x^2y'' + 2xy' = 0$$

作置换 $x = \mathrm{e}^t$，原方程化为

$$D(D-1)y + 2Dy = 0$$

式中 D 表示对 t 的求导运算。上式的特征方程为

$$r(r-1) + 2r = 0$$

解出两个根 $r_1 = 0, r_2 = -1$，于是

$$y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-t} = c_1 + \frac{c_2}{x}$$

由边界条件 $y(1) = 0, y(3) = 1$，可得 $c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = -\frac{3}{2}$，故极值曲线为 $y = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$。

雅可比方程的通解为

$$u = d_1\frac{\partial y}{\partial c_1} + d_2\frac{\partial y}{\partial c_2} = \frac{d_1}{x} + d_2$$

由边界条件 $u(1) = 0, u'(1) = 1$，可解出 $d_1 = -1, d_2 = 1$，故雅可比方程的解为

$$u = 1 - x$$

由此可见，因 u 除了在点 $x_0 = 1$ 之外没有其他零点，故泛函的极值函数满足雅可比强条件。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = \frac{x^2(y' + u)^2}{2} + 2y(y' + u) - \frac{x^2y'^2}{2} - 2yy' - u(x^2y' + 2y) = \frac{x^2u^2}{2} > 0$$

故在极值曲线 $y = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ 上，泛函 $J[y]$ 达到强极小值。

3.24　讨论泛函 $J[y] = \int_0^{x_1}(1+x)y'^2\mathrm{d}x$ 的极值情况，其中 $x_1 > 0$，边界条件为 $y(0) = 0$，

$y(x_1) = y_1$。

解 泛函的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)y' = 0$$

或

$$(1+x)y' = c_1$$

积分得

$$y = c_1\ln(1+x) + c_2$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$，得 $c_2 = 0, c_1 = \dfrac{y_1}{\ln(1+x_1)}$，故极值曲线为 $y = \dfrac{y_1\ln(1+x)}{\ln(1+x_1)}$，它包含在中心在(0,0)的曲线族 $y = c\ln(1+x)$ 的极值曲线中心场中。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = (1+x)y'^2 - (1+x)p^2 - (y'-p)2(1+x)p = (1+x)(y'-p)^2$$

在区间$[0,x_1]$内，$(1+x) > 0$，对任意的 y'，有 $E \geqslant 0$，于是泛函在极值曲线 $y = \dfrac{y_1\ln(1+x)}{\ln(1+x_1)}$ 上可取得强极小值。

3.25 讨论泛函 $J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2 - y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值情况，边界条件为 $y(0) = 1, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$。

解 $F = y^2 - y'^2$，泛函的欧拉方程为

$$2y + 2y'' = 0$$

或

$$y'' + y = 0$$

微分方程的解为

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

由边界条件 $y(0) = 1, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$，得 $c_1 = c_2 = 1$，故极值曲线为 $y = \cos x + \sin x$。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = (y^2 - y'^2) - (y^2 - p^2) + (y'-p)2p = -(y'-p)^2$$

对任意的 y'，有 $E \leqslant 0$，于是泛函在极值曲线 $y = \cos x + \sin x$ 上可取得强极大值。

3.26 讨论泛函 $J[y] = \int_0^1 y'^3\mathrm{d}x$ 能否取得强极值？边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = 1$。

解 欧拉方程的通解为 $y = c_1x + c_2$，由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = 1$，可解得 $c_2 = 0, c_1 = 1$，故极值曲线为 $y = x$。$y = c_1x$ 在闭区间$[0,1]$上的极值曲线形成中心场，且 $y = x$ 位于该极值曲线场之内。

魏尔斯特拉斯函数为

$$E = (y'+u)^3 - y'^3 - 3uy'^2 = (3y'+u)u^2$$

若 y' 取任意值，$(3y'+u)$ 可以有任意符号，即 E 函数不能保持固定的符号。故强极值的充分条件得不到满足。又这个充分条件也是必要的。因此在极值曲线 $y = x$ 上，泛函不能取得强极值。

3.27　判断泛函 $J[y]=\int_0^1(\varepsilon y'^2+y^2+x^2)\mathrm{d}x$ 对于各种不同的参数 ε 的值是否存在极值，边界条件为 $y(0)=0, y(1)=1$。

解　若 $\varepsilon=0$，则被积函数不依赖于 y'，极值问题在连续函数类中没有解。若 $\varepsilon\neq 0$，则泛函的欧拉方程为

$$2y-2\varepsilon y''=0$$

或

$$y''-\frac{1}{\varepsilon}y=0$$

若 $\varepsilon>0$，则欧拉方程的解为

$$y=c_1\cosh\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}+c_2\sinh\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

符合边界条件的解为

$$y=\frac{\sinh\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{\sinh\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

它包含在极值曲线中心场 $y=c\sinh\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ 中。对于任意的 y'，勒让德条件为

$$F_{y'y'}=\varepsilon>0$$

泛函在极值曲线 $y=\sinh\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\Big/\sinh\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 上取得强极小值。

若 $\varepsilon<0$，且 $|\varepsilon|>\frac{1}{\pi^2}$，则欧拉方程的解为

$$y=c_1\cos\frac{x}{\sqrt{|\varepsilon|}}+c_2\sin\frac{x}{\sqrt{|\varepsilon|}}$$

符合边界条件的解为

$$y=\frac{\sin\dfrac{x}{\sqrt{|\varepsilon|}}}{\sin\dfrac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}}$$

它包含在极值曲线中心场 $y=c\sin\frac{x}{\sqrt{|\varepsilon|}}$ 中。对于任意的 y'，勒让德条件为

$$F_{y'y'}=\varepsilon<0$$

泛函在极值曲线 $y=\sin\frac{x}{\sqrt{|\varepsilon|}}\Big/\sin\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}$ 上取得强极大值。

3.28　利用勒让德条件判断泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2+x^2)\mathrm{d}x$ 是否有极值，边界条件为 $y(0)=-1$，$y(1)=1$。

解　泛函的欧拉方程为

$$y''=0$$

积分两次，得 $y=c_1x+c_2$，符合边界条件的解为 $y=2x-1$，它包含在极值曲线场 $y=c_1x+$

c_2 中。对于任意的 y'，勒让德条件为

$$E_{y'y'} = 2 > 0$$

于是可判断出泛函在极值曲线 $y = 2x - 1$ 上取得强极小值。

3.29　利用勒让德条件判断泛函 $J[y] = \int_0^{x_1}(1 - e^{-y'^4})dx$ 是否有极值，边界条件为 $y(0) = 0$，$y(x_1) = y_1, x_1 > 0, y_1 > 0$。

解　因泛函只是 y' 的函数，故泛函的欧拉方程的解为 $y = c_1x + c_2$，符合边界条件的解为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$，它包含在以(0,0)为中心的极值曲线中心场 $y = cx$ 中，且 $y' = \frac{y_1}{x_1}$。勒让德条件为

$$F_{y'y'} = 4y'^2e^{-y'^4}(3 - 4y'^4) = 4\frac{y_1^2}{x_1^2}e^{-\frac{y_1^4}{x_1^4}}\left(3 - 4\frac{y_1^4}{x_1^4}\right)$$

由此可见，$F_{y'y'}$ 的符号取决于 $\left(3 - 4\frac{b^4}{a^4}\right)$ 的符号。在极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 上，若 $\frac{b}{a} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$，则 $F_{y'y'} > 0$，泛函可取得弱极小值；若 $\frac{y_1}{x_1} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$，则 $F_{y'y'} = 0$，泛函不能取得弱极值；若 $\frac{y_1}{x_1} > \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$，则 $F_{y'y'} < 0$，泛函可取得弱极大值。

3.30　试检验泛函 $J[y(x), z(x)] = \int_0^{x_1}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}dx$ 的极值，边界条件为 $y(0) = 0$，$y(x_1) = y_1, z(0) = 0, z(x_1) = z_1, x_1 > 0, y_1 > 0, z_1 > 0$。

解　因泛函只是 y' 和 z' 的函数，故其欧拉方程组的解为

$$\begin{cases} y = c_1x + c_2 \\ z = c_3x + c_4 \end{cases}$$

符合边界条件的解为 $y = \frac{y_1}{x_1}x, z = \frac{z_1}{x_1}x$，是通过原点的直线。

在所求的问题中有

$$F_{y'y'} = \frac{1 + z'^2}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}, F_{y'z'} = \frac{-y'z'}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = F_{z'y'}, F_{z'z'} = \frac{1 + y'^2}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

式中 $y' = \frac{y_1}{x_1}, z' = \frac{z_1}{x_1}$。

勒让德条件为

$$F_{y'y'} = \frac{1 + z'^2}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1 + y'^2 + z'^2)^2} > 0$$

由此可见，泛函在极值曲线 $y = \frac{y_1}{x_1}x, z = \frac{z_1}{x_1}x$ 上能取得一个弱极小值。

第4章　可动边界的变分问题习题解

4.1　求泛函 $J[y] = \int_0^1 y^3y'^2dx$ 的一阶变分，$y(0) = 1$。

解　泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_0^1 (3y^2 y'^2 \delta y + 2y^3 y' \delta y')\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 [3y^2 y'^2 \delta y - (2y^3 y')\delta y']\mathrm{d}x + 2y^3 y' \delta y \Big|_0^1 =$$

$$\int_0^1 [3y^2 y'^2 - (2y^3 y')']\delta y \mathrm{d}x + 2y^3(1)y'(1)\delta y(1)$$

4.2 设泛函 $J[y] = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EI y''^2 - qy\right)\mathrm{d}x$，式中 $EI = \text{const}$，q 为 x 的给定函数，$y(0) = y(l) = 0$。试由变分方程推导欧拉方程和自然边界条件。

解 泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_0^l (EIy''\delta y'' - q\delta y)\mathrm{d}x = 0$$

其中 $\delta y''$ 和 δy 不是相互独立的，有

$$\int_0^l y''\delta y'' \mathrm{d}x = \int_0^l y'' \mathrm{d}\delta y' = y''\delta y' \Big|_0^l - \int_0^l y'''\delta y' \mathrm{d}x =$$

$$y''\delta y' \Big|_0^l - \int_0^l y''' \mathrm{d}\delta y = y''\delta y' \Big|_0^l - y'''\delta y \Big|_0^l + \int_0^l y^{(4)}\delta y \mathrm{d}x$$

将上式代入 δJ 表达式中，得

$$\delta J = EIy''\delta y' \Big|_0^l - EIy'''\delta y \Big|_0^l + \int_0^l (EIy^{(4)} - q)\delta y \mathrm{d}x = 0$$

若使 $\delta J = 0$，显然应有

$$EIy''\delta y' \Big|_0^l = 0, EIy'''\delta y \Big|_0^l = 0, EIy^{(4)} - q = 0$$

其中第三个式子就是欧拉方程。

因 $y(0) = y(l) = 0$，故 $\delta y \Big|_0^l = 0$。又 $\delta y'$ 没有给出，而 EI 是不等于零的常数，故自然边界条件为 $y''(0) = y''(l) = 0$。

4.3 设 Γ 为区域 D 的固定边界，试求泛函

$$J[u] = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + u_x\varphi + u_y\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的自然边界条件。其中 φ、ψ 都属于 $C^1(D)$。

解 $F = u_x^2 + u_y^2 + u_x\varphi + u_y\psi$，$F_{u_x} = 2u_x + \varphi$，$F_{u_y} = 2u_y + \psi$。

自然边界条件为

$$\left(F_{u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - F_{u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\Big|_\Gamma = \left[(2u_x + \varphi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - (2u_y + \psi)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right]\Big|_\Gamma =$$

$$2\left(u_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - u_y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\Big|_\Gamma + \varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \psi\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma + \varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \psi\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 0$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{1}{2}\left(\psi\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)$$

4.4 求下列泛函取极值的自然边界条件

(1) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x + \frac{1}{2}ky^2(x_1)$，给定 $y(x_0) = y_0$；

(2) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x+\frac{1}{2}k[y(x_1)-y(x_0)]^2$。

解 (1) 对泛函取一阶变分

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x+ky(x_1)\delta y(x_1)=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+(F_{y'}+ky)\delta y\Big|_{x=x_1}$$

因泛函取极值时，$\delta J=0$，而 δy 是任取的，故自然边界条件为$(F_{y'}+ky)\Big|_{x=x_1}=0$

(2) 对泛函取一阶变分，因边界条件没有给出，故有

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x+k[y(x_1)-y(x_0)](\delta y(x_1)-\delta y(x_0))=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\{F_{y'}+k[y(x_1)-y(x_0)]\}\delta y\Big|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

因泛函取极值时，$\delta J=0$，而 δJ 是任取的，故自然边界条件为

$$\{F_{y'}+k[y(x_1)-y(x_0)]\}\Big|_{x=x_0}^{x=x_1}=0$$

4.5 求下列泛函的欧拉方程和自然边界条件

$$J[y]=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[p(x)\,y''^2+q(x)\,y'^2+r(x)y^2-2s(x)y]\mathrm{d}x。$$

解 取泛函的一阶变分并令其等于零，有

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(py''\delta y''+qy'\delta y'+ry\delta y-s\delta y)\mathrm{d}x=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[-(py'')'\delta y'-(qy')'\delta y+ry\delta y-s\delta y]\mathrm{d}x+py''\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1}+qy'\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[(py'')''-(qy')+ry-s]\delta y\mathrm{d}x+py''\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1}+(qy'-py'')\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}$$

因 δy 与 $\delta y'$ 是任取的，故得欧拉方程为

$$(py'')''-(qy')'+ry-s=0$$

自然边界条件为

$$Py''\Big|_{x_0}^{x_1}=0,(qy'-py'')\Big|_{x_0}^{x_1}=0$$

4.6 设泛函 $J[y]=\int_0^1F(x,y,y')\mathrm{d}x$，求出下列情况的欧拉方程及自然边界条件

(1) $F=y'^2+yy'+y^2$；(2) $F=xy'^2-yy'+y$；

(3) $F=y'^2+k^2\cos y$；(4) $F=a(x)\,y'^2+b(x)y^2$。

解 (1) 欧拉方程为

$$y'+2y-2y''-y'=0$$

或

$$y''-y=0$$

自然边界条件为

$$F_{y'}\Big|_0^1 = (2y' + y)\Big|_0^1 = 0$$

(2) 欧拉方程为

$$-y' + 1 - 2y' - 2xy'' + y' = 0$$

或

$$2xy'' + 2y' - 1 = 0$$

自然边界条件为

$$F_{y'}\Big|_0^1 = (2xy' - y)\Big|_0^1 = 0$$

(3) 欧拉方程为

$$-k^2\sin y - 2y'' = 0$$

或

$$2y'' + k^2\sin y = 0$$

自然边界条件为

$$F_{y'}\Big|_0^1 = 2y'\Big|_0^1 = y'\Big|_0^1 = 0$$

(4) 欧拉方程为

$$2b(x)y - 2a'(x)y' - 2a(x)y'' = 0$$

或

$$a(x)y'' + a'(x)y' - b(x)y = 0$$

自然边界条件为

$$F_{y'}\Big|_0^1 = 2a(x)y'\Big|_0^1 = a(x)y'\Big|_0^1 = 0$$

4.7 设泛函 $J[y] = \int_0^{x_1}(y^2 + y'^2)\mathrm{d}x; y(0) = 0, y(x_1) = \mathrm{e}^{2x_1}$。试求:(1) 变分 δJ;(2) 横截条件。

解 (1) $F = y^2 + y'^2, F_{y'} = 2y'$。根据端点条件 $y(x_1) = \psi(x_1) = \mathrm{e}^{2x_1}$,对其取变分为

$$\delta y_1 = 2\mathrm{e}^{2x_1}\delta x_1 = 2y(x_1)\delta x_1 = 2\psi(x_1)\delta x_1 \tag{1}$$

或

$$\delta x_1 = \frac{\delta y_1}{2\mathrm{e}^{2x_1}} \tag{2}$$

泛函的一阶变分为

$$\delta J = \int_0^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + (F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 =$$

$$2\int_0^{x_1}(y - y'')\delta y\mathrm{d}x + \left(\frac{y^2 - y'^2}{2\mathrm{e}^{x_1}}\right)\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + 2y'|_{x=x_1}\delta y_1 = \tag{3}$$

$$2\int_0^{x_1}(y - y'')\delta y\mathrm{d}x + \left(2y' + \frac{y^2 - y'^2}{2\mathrm{e}^{2x_1}}\right)\Big|_{x=x_1}\delta y_1$$

又根据式(4-1-16),有

$$\delta y_1 = \delta y\Big|_{x=x_1} + y'(x_1)\delta x_1 = \delta y\Big|_{x=x_1} + \frac{y'(x_1)}{2e^{2x_1}}\delta y_1 \tag{4}$$

解得

$$\delta y_1 = \delta y\Big|_{x=x_1}\frac{2e^{x_1}}{2e^{x_1} - y'(x_1)} = \frac{2e^{x_1}}{2e^{x_1} - y'}\delta y\Big|_{x=x_1} \tag{5}$$

将式(5)代入式(3),得

$$\delta J = 2\int_0^{x_1}(y - y'')\delta y\mathrm{d}x + \left(2y' + \frac{y^2 + y'^2}{2e^{2x_1} - y'}\right)\delta y\Big|_{x=x_1} \tag{6}$$

(2) 因 x_1 是可动边界,$\delta y|_{x=x_1} \neq 0$,故横截条件为

$$\left(2y' + \frac{y^2 + y'^2}{2e^{2x_1} - y'}\right)\Big|_{x=x_1} = \left[\frac{y^2 + (4e^{2x_1} - y')y'}{2e^{2x_1} - y'}\right]\Big|_{x=x_1} = 0 \tag{7}$$

或

$$[y^2 + (4e^{2x_1} - y')y'^2]|_{x=x_1} = 0 \tag{8}$$

直接应用式(4-1-22),也可得横截条件

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]\Big|_{x=x_1} = [y^2 + y'^2 + (2e^{2x_1} - y')2y']\Big|_{x=x_1} = [y^2 + (4e^{2x_1} - y')y']\Big|_{x=x_1} = 0 \tag{9}$$

式(8)和式(9)两者相同。

4.8 设泛函 $J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 与 $J_2[y] = \int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,y') + P(x,y) + Q(x,y)y']\mathrm{d}x$,其中 $P_x = Q_x$,试证:

(1) J_1 与 J_2 有相同的欧拉方程; (2) J_2 的自然边界条件为 $F_{y'} + Q = 0$。

证 显然,J_1 的欧拉方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$$

对 J_2 取一阶变分,并对含有 $\delta y'$ 的项积分一次,同时注意到条件 $P_y = Q_x$,有

$$\delta J_2 = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + P_y\delta y + Q_y y'\delta y + Q\delta y')\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + P_y + Q_y y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q\right)\delta y\mathrm{d}x + (F_{y'} + Q)\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + P_y + Q_y y' - Q_x - Q_y y'\right)\delta y\mathrm{d}x + (F_{y'} + Q)\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + (F_{y'} + Q)\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}$$

若使 J_2 取极值,应有 $\delta J_2 = 0$,因 δy 在积分号内和边界上都是任取的,故 J_2 的欧拉方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$$

即 J_1 和 J_2 具有相同的欧拉方程,且有

$$F_{y'} + Q = 0$$

证毕。

4.9　试求泛函 $J[y]=\int_0^1(y'^2-2\alpha yy'-2\beta y')\mathrm{d}x$ 的极值曲线，其中 α、β 均为常数。

(1) 端点条件：$y(0)=0, y(1)=1$；

(2) 给出端点条件：$y(0)=0$，另一端点是任意的；

(3) 给出端点条件：$y(1)=1$，另一端点是任意的；

(4) 两个端点均是任意的。

解　$F=y'^2-2\alpha yy'-2\beta y'$，泛函的欧拉方程为

$$-2\alpha y'-2y''+2\alpha y'=0$$

或

$$y''=0$$

积分两次，得

$$y=c_1x+c_2$$

(1) 由边界条件 $y(0)=0, y(1)=1$，得 $c_2=0, c_1=1$，故极值曲线为 $y=x$。

(2) $y(0)=0$，得 $c_2=0$，另一端点是任意的，则有

$$F_{y'}\Big|_{x=1}=(2y'-2\alpha y-2\beta)\Big|_{x=1}=2(c_1-\alpha c_1x-\beta)\Big|_{x=1}=0$$

得 $c_1=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$。故极值曲线 $y=\dfrac{\beta x}{1-\alpha}$，其中 $\alpha\neq 1$。

(3) 给出端点条件：$y(1)=1$，则有 $c_1+c_2=1$。另一端点是任意的，则有

$$F_{y'}\Big|_{x=0}=(2y'-2\alpha y-2\beta)\Big|_{x=0}=2[c_1-\alpha(c_1x+c_2)-\beta]\Big|_{x=0}=0$$

得 $c_1=\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha}, c_2=\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}$。故 $y=\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha}x+\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}$,,其中 $\alpha\neq -1$。

(4) 两个端点均是任意的，则有

$$F_{y'}\Big|_{x=0}=(2y'-2\alpha y-2\beta)\Big|_{x=0}=2[c_1-\alpha(c_1x+c_2)-\beta]\Big|_{x=0}=0$$

$$F_{y'}\Big|_{x=1}=(2y'-2\alpha y-2\beta)\Big|_{x=1}=2[c_1-\alpha(c_1x+c_2)-\beta]\Big|_{x=1}=0$$

或

$$c_1-\alpha c_2=\beta$$

$$c_1-\alpha(c_1+c_2)=\beta$$

若 $\alpha=0$，则 $c_1=\beta, c_2$ 是任意常数，故 $y=\beta x+$ 常数。

若 $\alpha\neq 0$，则 $c_1=0, c_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，故 $y=-\dfrac{\beta}{\alpha}$。

4.10　求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x+\alpha y(x_0)+\beta y(x_1)$ 的欧拉方程和自然边界条件。其中 α、β 为已知的常数，$y(x_0)$ 与 $y(x_1)$ 未给定。

解　$\Phi=\alpha y(x_0)+\beta y(x_1)$。欧拉方程为 $F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}$。自然边界条件为

$$(F_{y'}-\Phi_y)\Big|_{x=x_0}=(F_{y'}-\alpha)\Big|_{x=x_0}=0, (F_{y'}+\Phi_{y_{x_0}})\Big|_{x=x_1}=(F_{y'}+\beta)\Big|_{x=x_1}=0$$

得 $F_{y'}\Big|_{x=x_0}=\alpha, F_{y'}\Big|_{x=x_1}=-\beta$。

4.11　在 $y\geqslant 5-x^2$ 条件下，求泛函 $J[y]=\int_{-3}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线，且一端点固定为

$A(-3,0)$,另一端点 $B(x_1,y_1)$ 在直线 $y=x-6$ 上移动。

解 因被积函数只含 y',故欧拉方程的解是直线

$$y=c_1x+c_2$$

根据边界条件 $y(-3)=0$,有

$$-3c_1+c_2=0$$

直线应与抛物线 $y=5-x^5$ 相切,设切点为(x_2,y_2),则有

$$y'=c_1=-2x_2=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=\frac{5-x_2^2-0}{x_2+3}$$

由上式可得到 $x_2=-1$ 和 $x_2=-5$ 两个解,其中 $x_2=-5$ 的解不合理,舍去。由此可解得 $c_1=-2,c_1=6$,直线方程为 $y=-2x+6$。

另一条直线应与直线 $y=x-6$ 垂直且与抛物线 $y=5-x^5$ 相切,可知此时 $c_1=-1$。设所求直线与抛物线的切点为(x_3,y_3),与直线 $y=x-6$ 的垂点为(x_4,y_4),则有

$$y'=c_1=-1=-2x_3=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{5-x_3^2-x_4+6}{x_3-x_4}$$

由上式可解出 $x_3=\frac{1}{2},x_4=\frac{45}{8}$,并可求出 $c_2=\frac{21}{4}$,直线方程为 $y=-x+\frac{21}{4}$。于是所求的极值曲线为

$$\begin{cases}y=-2x+6 & (-3\leqslant x\leqslant -1)\\ y=5-x^2 & \left(-1\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\right)\\ y=-x+\frac{21}{4} & \left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{45}{8}\right)\end{cases}$$

4.12 求泛函 $J[y]=\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}(y^2+y'^2)\mathrm{d}x$ 的变分和自然边界条件,以及极值曲线,其中 $y_1=\mathrm{e}^{2x_1}$,x_1 自由取值。

解 泛函的变分为

$$\delta J=2\int_0^{x_1}(y-y'')\delta y\mathrm{d}x+(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1=$$

$$2\int_0^{x_1}(y-y'')\delta y\mathrm{d}x+(y^2+y'^2-y'2y')\Big|_{x=x_1}\delta x_1+2y'\Big|_{x=x_1}2\mathrm{e}^{2x_1}\delta x_1=$$

$$2\int_0^{x_1}(y-y'')\delta y\mathrm{d}x+(y^2-y'^2+4y'\mathrm{e}^{2x_1})\Big|_{x=x_1}\delta x_1$$

自然边界条件为

$$[y^2+y'(4\mathrm{e}^{2x_1}-y')]\big|_{x=x_1}=0$$

泛函的欧拉方程为

$$2y-2y''=0$$

或

$$y''-y=0$$

方程的解为

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$$

由边界条件 $y(0)=0$,得 $c_2=-c_1$。于是可求得极值曲线为 $y=c\sinh x$,其导数为 $y'=c_1(\mathrm{e}^x$

$+e^{-x}) = c\cosh x$。

在右边界，极值曲线和边界曲线相交，其交点关系式为

$$y_1 = c\sinh x_1 = e^{2x_1}$$

将极值曲线及交点关系式代入自然边界条件，可得

$$\sinh^2 x_1 - \cosh^2 x_1 + 4\cosh x_1 - \sinh x_1 = 0$$

利用关系式 $\sinh^2 x_1 + 1 = \cosh^2 x_1$，上式可化为

$$4\cosh x_1 \sinh x - 1 = 0$$

将上式展开并运算

$$(e^{x_1} + e^{-x_1})(e^{x_1} - e^{-x_1}) - 1 = e^{2x_1} - 1 - e^{-2x_1} = 0$$

将上式乘以 e^{2x_1} 并令 $y = e^{2x_1}$，则有

$$y_2 - y - 1 = 0$$

方程的解为

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = e^{2x_1}$$

解出 x_1 为

$$x_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

可求得积分常数为

$$c = \frac{2e^{2x_1}}{e^{x_1} - e^{-x_1}} = \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2}$$

故极值曲线为

$$y = \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

4.13　求点 $A(-1,5)$ 到抛物线 $y^2 = x$ 的最短距离。

解　所求距离为就是泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极小值，约束条件是极值曲线的左端点通过点 $A(-1,5)$，此时 $x_0 = -1, y_0 = 5$，而右端点在抛物线 $y^2 = x$ 上。欧拉方程的通解是直线 $y = c_1 x + c_2$，且 $y' = c_1$。关于未知数 x_1、c_1 和 c_2 的方程组为

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 5 \\ c_1 x_1 + c_2 = \sqrt{x_1} \\ 1 + \dfrac{c_1}{2\sqrt{x_1}} = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $x_1 = 1, c_1 = -2, c_2 = 1$。于是极值曲线的方程为 $y = 1 - 2x$，而所给两条曲线之间的最短距离是

$$J = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+(-2)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{5}x\Big|_{-1}^{1} = 2\sqrt{5}$$

4.14　求圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $x + y = 4$ 之间的最短距离。

解　所求距离就是泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极小值，约束条件是极值曲线的左端点在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上，而右端点在直线 $x + y = 4$ 上。欧拉方程的通解是 $y = c_1 x + c_2$，且 $y' = c_1$。关于

四个未知数 x_0、x_1、c_1 和 c_2 的方程组为

$$\begin{cases} c_1x_0 + c_2 = \sqrt{1 - x_0^2} \\ c_1x_1 + c_2 = 4 - x_1 \\ 1 - \dfrac{x_0c_1}{\sqrt{1 - x_0^2}} = 0 \\ 1 - c_1 = 0 \end{cases}$$

解此方程组得

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_1 = 2, c_1 = 1, c_2 = 0$$

于是极值曲线的方程为 $y = x$，而所给两条曲线之间的最短距离是

$$J = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \sqrt{1 + 1^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}x \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = 2\sqrt{2} - 1$$

4.15　求点 $A(-1,3)$ 到直线 $y = 1 - 3x$ 的最短距离。

解　所求距离就是泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$ 的极小值，约束条件是极值曲线的左端点通过点 $A(-1,3)$，此时 $x_0 = -1, y_0 = 3$，而右端点在直线 $y = 1 - 3x$ 上。欧拉方程的通解是 $y = c_1x + c_2$，且 $y' = c_1$。含有三个未知数 x_1、c_1 和 c_2 的方程组为

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 3 \\ c_1x_1 + c_2 = 1 - 3x_1 \\ 1 - 3c_1 = 0 \end{cases}$$

解此方程组得

$$x_1 = -\frac{7}{10}, c_1 = -\frac{1}{3}, c_2 = 3\frac{1}{3}$$

于是极值曲线的方程为 $y = \frac{1}{3}(10 - x)$，而点 $A(-1,3)$ 到直线 $y = 1 - 3x$ 的最短距离是

$$J = \int_{-1}^{-\frac{7}{10}} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{10}}{3}x \Big|_{-1}^{-\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

4.16　求点 $M(0,0,3)$ 到曲面 $z = x^2 + y^2$ 的最短距离。

解　最短距离为下列泛函

$$J[y,z] = \left| \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}x \right| \tag{1}$$

式中 x_1 所在的点 $B(x_1, y_1, z_1)$ 应在旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上。泛函(1)的极值曲线是直线

$$\begin{cases} y = c_1x + c_2 \\ z = c_3x + c_4 \end{cases} \tag{2}$$

极值曲线(2)应通过点 $M(0,0,3)$，可得 $c_2 = 0, c_4 = 3$。

点 $B(x_1, y_1, z_1)$ 处的横截条件为

$$\left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + 2(x - z') \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right] \Bigg|_{x = x_1} = 0 \tag{3}$$

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+2y\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)\Bigg|_{x=x_1}=0 \tag{4}$$

将式(3)和式(4)化简,并注意到 $y'=c_1, z'=c_3$,得

$$\begin{cases}1+2c_3x_1=0\\ c_1+2c_3y_1=0\end{cases} \tag{5}$$

根据极值曲线应通过点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 的条件,有

$$\begin{cases}y_1=c_1x_1\\ z_1=c_3x_1+3\end{cases} \tag{6}$$

将式(6)的第一式代入式(5)的第二式,得

$$c_1(1+2c_3x_1)=0 \tag{7}$$

由式(7)可见,式(5)的两个式子是同解方程,c_1 可取任意实常数。利用旋转抛物面方程,联立求解式(5)和式(6),可求出其他未知数值为 $z_1=\frac{5}{2}, x_1=\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}}, y_1=c_1\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}}, c_3=-\frac{1}{2x_1}=\mp\sqrt{\frac{(c_1^2+1)}{10}}$。于是极值曲线的方程是

$$\begin{cases}y=c_1x\\ z=\dfrac{\sqrt{10(c_1^2+1)}}{10}x+3\end{cases}\quad(x\leqslant 0) \tag{8}$$

$$\begin{cases}y=c_1x\\ z=-\dfrac{\sqrt{10(c_1^2+1)}}{10}x+3\end{cases}\quad(x>0) \tag{9}$$

因为点 $M(x_1,y_1,z_1)$ 在旋转抛物面上,所以可得到两点

$$B_1\left(-\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}},-c_1\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}},\frac{5}{2}\right)\text{ 和 }B_2\left(\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}},c_1\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}},\frac{5}{2}\right)$$

在连接点 M 和点 B_1 的极值曲线(8)上,泛函(1)取得极小值,该极小值是

$$J_{\min}=\int_0^{\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}}}\sqrt{1+c_1^2+\frac{(c_1^2+1)}{10}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{11(c_1^2+1)}{10}}\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}}=\frac{\sqrt{11}}{2} \tag{10}$$

当然,在连接点 M 和点 B_2 的极值曲线(9)上,泛函(1)取得与式(10)同样的极小值,即

$$J_{\min}=\int_{-\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}}}^{0}\sqrt{1+c_1^2+\frac{(c_1^2+1)}{10}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{11(c_1^2+1)}{10}}\sqrt{\frac{5}{2(c_1^2+1)}}=\frac{\sqrt{11}}{2} \tag{11}$$

4.17 求在泛函 $J[y]=\int_0^4(y'-1)^2(y'+1)^2\mathrm{d}x, y(0)=0, y(4)=2$ 的极小问题中具有一个角点的解。

解 $F=(y'-1)^2(y'+1)^2$ 只依赖于 y',故欧拉方程的解为 $y=c_1x+c_2$,且有

$$F_{y'}=4y'(y'-1)(y'+1), F-y'F_{y'}=-(y'-1)(y'+1)(3y'^2+1)$$

二阶偏导数 $F_{y'y'}=4(3y'^2-1)$,可以等于零。设角点的横坐标为 x_c,则由折点条件得

$$4y'(y'-1)(y'+1)\Big|_{x=x_c-0}=4y'(y'-1)(y'+1)\Big|_{x=x_c+0}$$

$$-(y'-1)(y'+1)(3y'^2+1)\Big|_{x=x_c-0}=-(y'-1)(y'+1)(3y'^2+1)\Big|_{x=x_c+0}$$

若使上面两式同时成立,应有

$$\text{A}\ \begin{cases}y'(x_c-0)=1\\ y'(x_c+0)=-1\end{cases}\qquad \text{B}\ \begin{cases}y'(x_c-0)=-1\\ y'(x_c+0)=1\end{cases}$$

对于A,有

$$y=\begin{cases}x+c_2 & (0\leqslant x\leqslant x_c)\\ -x+c_2, & (x_c\leqslant x\leqslant 4)\end{cases}$$

由 $y(0)=0$,可知 $c_2=0$;由 $y(4)=2$,可知$c'_2=6$。故有

$$y=\begin{cases}x & (0\leqslant x\leqslant x_c)\\ -x+6 & (x_c\leqslant x\leqslant 4)\end{cases}$$

因在折点处两条极值曲线相交,即 $x=-x+6$,得 $x=x_1=3$,故分段极值曲线为

$$y=\begin{cases}x & (0\leqslant x\leqslant 3)\\ -x+6 & (3\leqslant x\leqslant 4)\end{cases}$$

同理对于B,可得分段极值曲线为

$$y=\begin{cases}-x & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ x-2 & (1\leqslant x\leqslant 4)\end{cases}$$

在整个折线上泛函达到绝对极小值。

4.18 在泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 的极值问题中具有角点的解是否存在?

解 $F=y'^2+2xy-y^2$,其欧拉方程为

$$2x-2y-2y''=0$$

或

$$y''+y=x$$

方程的解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+x$$

由此可见 y 是光滑连续函数,不存在角点。事实上,因 $F_{y'y'}=2>0$,故在本题中只能在光滑曲线上达到极值。

4.19 在泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}y'^3\mathrm{d}x, y(0)=0, y(x_1)=y_1$ 的极值问题中具有角点的解是否存在?

解 $F=y'^3$,方程只依赖于 y',泛函欧拉方程的解为

$$y=c_1x+c_2$$

由 $y(0)=0, y(x_1)=y_1$,得 $c_2=0, c_1=\dfrac{y_1}{x_1}$,故极值曲线为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$。不存在角点。

4.20 在泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(y'^4-6y'^2)\mathrm{d}x, y(0)=0, y(x_1)=y_1$ 的极值问题中具有角点的解是否存在?

解 因 $F_{y'y'}=12y'^2-12$,可以等于零,故极值曲线可以有角点。泛函的欧拉方程为

$$4y'^2y''-12y''=4y''(y'+\sqrt{3})(y'-\sqrt{3})=0$$

方程有三个解

$$y = c_1x + c_2, y = -\sqrt{3}x + c_3, y = \sqrt{3}x + c_4$$

$$F_{y'} = 4y'^3 - 12y' = 4y'(y' + \sqrt{3})(y' - \sqrt{3})$$

$$F - y'F_{y'} = y'^4 - 6y'^2 - 4y'^4 + 12y'^2 = -3y'^2(y' + \sqrt{2})(y' - \sqrt{2})$$

设折点的横坐标为 x_c,则由折点条件得

$$4y'(y' + \sqrt{3})(y' - \sqrt{3})\Big|_{x=x_c-0} = 4y'(y' + \sqrt{3})(y' - \sqrt{3})\Big|_{x=x_c+0}$$

$$-3y'^2(y' + \sqrt{2})(y' - \sqrt{2})\Big|_{x=x_c-0} = -3y'^2(y' + \sqrt{2})(y' - \sqrt{2})\Big|_{x=x_c+0}$$

若使上面两式同时成立,应取

$$\text{A}\begin{cases} y'(x_c - 0) = \sqrt{3} \\ y'(x_c + 0) = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{B}\begin{cases} y'(x_c - 0) = -\sqrt{3} \\ y'(x_c + 0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

对于 A,有

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}x + c_4 & (0 \leqslant x \leqslant x_c) \\ -\sqrt{3}x + c_3 & (x_c \leqslant x \leqslant x_1) \end{cases}$$

由 $y(0) = 0$,得 $c_4 = 0$;由 $y(x_1) = y_1$,得 $c_3 = y_1 + \sqrt{3}x_1$。故

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}x & (0 \leqslant x \leqslant x_c) \\ -\sqrt{3}x + y_1 + \sqrt{3}x_1 & (x_c \leqslant x \leqslant x_1) \end{cases}$$

因在折点处两条极值曲线相交,即$\sqrt{3}x = -\sqrt{3}x + y_1 + \sqrt{3}x_1$,得 $x = x_c = \dfrac{y_1 + \sqrt{3}x_1}{2\sqrt{3}}$,故分段极值曲线为

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}x & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{y_1 + \sqrt{3}x_1}{2\sqrt{3}}\right) \\ -\sqrt{3}x + y_1 + \sqrt{3}x_1 & \left(\dfrac{y_1 + \sqrt{3}x_1}{2\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant x_1\right) \end{cases}$$

同理,可讨论 B。

总之,原泛函的极值曲线有折点,是由通过所给的两个边界点且以$\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$ 为斜率的直线段所组成的折线。

4.21　求泛函 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)e^{\arctan y'}\sqrt{1 + y'^2}dx$ 的横截条件。

解　$F = f(x,y)e^{\arctan y'}\sqrt{1 + y'^2}$,对 y' 求偏导数

$$F_{y'} = f(x,y)e^{\arctan y'}\left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{1 + y'^2} + \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = f(x,y)e^{\arctan y'}\frac{1 + y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

设可动端点的曲线为 $y_1 = \varphi(x_1)$,由横截条件得

$$f(x,y)e^{\arctan y'}\sqrt{1 + y'^2} + (\varphi' - y')f(x,y)e^{\arctan y'}\frac{1 + y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\Big|_{x=x_1} = 0$$

或

$$f(x,y)\frac{1+\varphi'-y'+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

如果 $f(x_1,y_1)\neq 0$，则 $\frac{\varphi'-y'}{1+\varphi'y'}=-1$，即极值曲线 $y=y(x)$ 的可动边界点沿着曲线 $y_1=\varphi(x_1)$ 滑动时，两曲线切线的交角为 $\frac{\pi}{4}$。证明如下：

设极值曲线 $y=y(x)$ 在交点处的切线与 x 轴的交角为 α，曲线 $y_1=\varphi(x_1)$ 在该点的切线与 x 轴的交角为 β，则 $y'=\tan\alpha$，$\varphi'=\tan\beta$，并且由三角函数的和角公式可知 $\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\varphi'-y'}{1+\varphi'y'}$，而 $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$，因而 $\beta-\alpha=-\frac{\pi}{4}$，从而 $\alpha=\beta+\frac{\pi}{4}$。证毕。

4.22　利用泛函取极值的基本必要条件 $\delta J=0$，来求能使泛函 $J[y]=\int_0^1(y''^2-2xy)\mathrm{d}x$ 达到极值的函数。边界条件为 $y(0)=y'(0)=0$，$y(1)=\frac{1}{120}$，$y'(1)$ 没有给出。

解　欧拉方程为

$$-2x+2y^{(4)}=0$$

或 $y^{(4)}=x$，积分 4 次，得

$$y=\frac{x^5}{120}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$$

由边界条件 $y(0)=y'(0)=0$，可得 $c_3=c_4=0$，又由 $y(1)=\frac{1}{120}$，可得 $c_1+c_2=0$。对泛函取一阶变分，有

$$\delta J=2\int_0^1(y''\delta y''-x\delta y)\mathrm{d}x=2\int_0^1y''\mathrm{d}\delta y'-2\int_0^1x\delta y\mathrm{d}x=$$
$$2y''\delta y'\Big|_{x=0}^{x=1}-2\int_0^1y'''\mathrm{d}\delta y-2\int_0^1x\delta y\mathrm{d}x=$$
$$2y''\delta y'\Big|_{x=0}^{x=1}-2y'''\delta y\Big|_{x=0}^{x=1}+2\int_0^1[y^{(4)}-x]\delta y\mathrm{d}x=0$$

因 $y'(1)$ 没有给出，可知 $y''(1)=0$，故 $0=\frac{1}{6}+6c_1+2c_2$，将该式与 $c_1+c_2=0$ 联立，可解得 $c_1=-c_2=-\frac{1}{24}$。于是，可得极值曲线为 $y=\frac{x^5}{120}+\frac{1}{24}(x^2-x^3)$。

4.23　在容许曲线不能通过由圆周 $(x-5)^2+y^2=9$ 所围圆域内部的条件下，来求能使泛函 $J[y]=\int_0^{10}y'^3\mathrm{d}x$，$y(0)=y(10)=0$ 达到极值的曲线。

解　因 $F=y'^3$ 只依赖于 y'，故欧拉方程的积分曲线为

$$y=c_1x+c_2$$

由 $y(0)=0$，得 $c_2=0$，于是 $y=c_1x$。

设 $y=\varphi(x)=\pm\sqrt{9-(x-5)^2}$ 与 $y=c_1x+c_2$ 在点 (x_2,y_2)、点 $(x_2,-y_2)$、点 (x_3,y_3) 和点 $(x_3,-y_3)$ 处相切 $(0<x_2<x_3<10)$，则有

$$y'(x_2)=\varphi(x_2)$$

或

$$c_1=\pm\frac{-(x_2-5)}{\sqrt{9-(x_2-5)^2}}$$

在切点处,有 $y(x_2)=\varphi(2)$,得

$$c_1x_2=\pm\sqrt{9-(x_2-5)^2}$$

联立上面两式,可解得

$$x=\frac{16}{5},c_1=\pm\frac{3}{4}$$

故得极值曲线 $y=\pm\frac{3}{4}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{16}{5}\right)$。

同理可得 $y=\mp\frac{3}{4}(x-10)\left(\frac{34}{5}\leqslant x\leqslant 10\right)$。可见极值曲线由与圆相切的直线段、圆弧和另一与圆相切的直线段所组成。此题也可直接套用例 4.6.1 题中的公式求解。

4.24 求能使泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2)\mathrm{d}x,y(0)=0$ 达到极值的函数,另一个边界点可以在直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 上滑动。

解 $F=y^2-y'^2$,欧拉方程为

$$2y+2y''=0$$

方程的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

由 $y(0)=0$ 可得 $c_1=0$,故 $y=c_2\sin x,y'=c_2\cos x,F_{y'}=-2y'=-2c_2\cos x$。当另一个边界点在直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 上滑动时,有

$$F_{y'}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-2c_2\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}c_2=0$$

可得 $c_2=0$,故 $y\equiv 0$。

4.25 只利用基本必要条件 $\delta J=0$,来求能使泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x$ 达到极值的曲线,边界条件为 $y(0)=0$,另一个边界点 (x_1,y_1) 可以在圆周 $(x-9)^2+y^2=9$ 上移动。

解 由习题 2.36 的解可知,该泛函的极值曲线为

$$(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$$

由 $y(0)=0$,得 $c_1=c_2=c$,故 $(x-c)^2+y^2=c^2$,即

$$y=\pm\sqrt{c^2-(x-c)^2}=\pm\sqrt{2cx-x^2},y'=\mp\frac{x-c}{\sqrt{c^2-(x-c)^2}}=\mp\frac{x-c}{\sqrt{2cx-x^2}}$$

设 $\varphi=y=\pm\sqrt{9-(x-9)^2}$,那么,$\varphi'=\mp\frac{x-9}{\sqrt{9-(x-9)^2}}$。极值曲线第二个边界点 (x_1,y_1) 可以移动,则有

$$F+(\varphi'-y')F_{y'}\Big|_{x=x_1}=\frac{1+\varphi'y'}{y\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1}=0,\sqrt{2cx_1-x_1^2}=\sqrt{9-(x_1-9)^2}$$

整理,得

$$\frac{x_1-9}{\sqrt{9-(x_1-9)^2}}\frac{x_1-c}{\sqrt{2cx_1-x_1^2}}=-1,x_1=\frac{36}{9-c}$$

解之,得 $x_1=7.2,c=4$。于是极值曲线为圆弧 $y=\pm\sqrt{8x-x^2}$。

4.26　一动点由曲线 $y=\varphi(x)$ 之外的点 $A(x_0,y_0)$ 处降落到该曲线上一点 $B(x_1,y_1)$ 处，要使所用的时间为最短，应当是多少？已知动点在曲线 $y=\varphi(x)$ 之外运动时，速度为常数且等于 v_1；而沿曲线 $y=\varphi(x)$ 运动时，速度也为常数且等于 v_2，且 $v_2>v_1$。

解　设所求极值曲线的尖点为 $C(x_c,y_c)$，T 是动点从点 A 移动到点 B 所用的时间，则有

$$T[y]=\int_{x_0}^{x_c}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}\mathrm{d}x+\int_{x_c}^{x_1}\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{v_2}\mathrm{d}x=J[y]+\Phi[y]$$

式中 $J[y]=\int_{x_0}^{x_c}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}\mathrm{d}x$，$\Phi[y]=\int_{x_c}^{x_1}\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{v_2}\mathrm{d}x$。由前一个泛函可知，因被积函数只是 y' 的函数，故 AB 应为直线。沿着极值曲线应有

$$\delta T=\delta J+\delta\Phi=0$$

即

$$\left[\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}+(\varphi'+y')\frac{y'}{v_1\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x_c-0}=\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{v_2}\Bigg|_{x_c+0}$$

令 $y'(x_c-0)=\tan\beta$，$\varphi'(x_c+0)=\tan\alpha$，，将它们代入上式并整理，得

$$\cos\alpha\cos\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)=\frac{v_1}{v_2}$$

或

$$\cos(\beta-\alpha)=\frac{v_1}{v_2}$$

该点由点 A 沿着这样的直线向曲线 $y=\varphi(x)$ 移动，以使 $\cos(\beta-\alpha)=\frac{v_1}{v_2}$，其中 β 为这条直线向横轴的倾斜角，而 α 是曲线 $y=\varphi(x)$ 上点 $B(x_1,y_1)$（直线与曲线的交点）处之切线向横轴的倾斜角。

第5章　条件极值的变分问题习题解

5.1　求泛函 $J[y]=\int_0^{\pi}y'^2\mathrm{d}x$ 在等周条件 $\int_0^{\pi}y^2\mathrm{d}x=1$ 的极值曲线和极小值，已知 $y(0)=0$，$y(\pi)=0$。

解　作辅助泛函 $J^*[y]=\int_0^{\pi}(y'^2+\lambda y^2)\mathrm{d}x$，则其欧拉方程为

$$2\lambda y-2y''=0$$

或

$$y''-\lambda y=0$$

方程的特征方程是 $r^2-\lambda=0$。显然 $\lambda\neq0$。若 $\lambda>0$，则欧拉方程的通解为

$$y=c_1\cosh\sqrt{\lambda}x+c_2\sinh\sqrt{\lambda}x$$

且仅当 $c_1=c_2=0$ 时，边界条件 $y(0)=0$，$y(\pi)=0$ 才能得到满足，所以通解为 $y=0$，但此时等周条件 $\int_0^{\pi}y^2\mathrm{d}x=1$ 不能成立。于是可设 $\lambda>0$，此时方程的解为

$$y=c_1\cos\sqrt{-\lambda}x+c_2\sin\sqrt{-\lambda}x$$

由边界条件 $y(0)=0$，$y(\pi)=0$，可知 $c_1=0$，$-\lambda=n^2(n=1,2,\cdots)$，得 $y_n=c_2\sin nx$，代入

等周条件，得$\int_0^{\pi}(c_2\sin nx)^2\mathrm{d}x = c_2^2\frac{\pi}{2} = 1$，得$c_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，故极值曲线为$y_n = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$。

通过(0,0)和(π,0)的极值曲线$y_n = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$中，只有两条极值曲线满足雅可比条件，即$y = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$。在这两条极值曲线上，泛函可达最小值

$$J[y] = \int_0^{\pi}y^2\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x = 1$$

5.2　求泛函$J[y,z] = \int_0^1(y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\mathrm{d}x$在等周条件$\int_0^1(y'^2 - xy'^2 - z'^2)\mathrm{d}x = 2$的极值曲线，边界条件为$y(0) = z(0) = 0$和$y(1) = z(1) = 1$。

解　作辅助泛函

$$J^*[y] = \int_0^1[y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)]\mathrm{d}x$$

欧拉方程组为

$$-2y'' - 2\lambda y'' + \lambda = 0, -2z'' + 4 - 4 + 2\lambda z'' = 0$$

或

$$y'' = \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}, (1-\lambda)z'' = 0$$

显然，应有$1 \pm \lambda \neq 0$。将上两式各积分两次，得

$$y = \frac{\lambda x^2}{4(1+\lambda)} + c_1x + c_2, z = c_3x + c_4$$

由边界条件$y(0) = z(0) = 0$，得$c_2 = c_4 = 0$；由$y(1) = z(1) = 1$，得$c_1 = \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}$，$c_3 = 1$。于是

$$y = \frac{\lambda x^2}{4(1+\lambda)} + \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}x, z = x$$

$$y' = \frac{\lambda x}{2(1+\lambda)} + \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}, z' = 1$$

将上述关系式代入等周条件，得

$$\int_0^1\left\{\left[\frac{\lambda x}{2(1+\lambda)} + \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}\right]^2 - \frac{\lambda x^2}{2(1+\lambda)} - \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)}x - 1\right\}\mathrm{d}x = 2$$

将上式积分并整理，得

$$121\lambda^2 + 242\lambda + 120 = 0$$

解出$\lambda_1 = -\frac{10}{11}$，$\lambda_2 = -\frac{12}{11}$。将这两个解代入$y$方程，得$y_1 = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$和$y_2 = 3x^2 - 2x$。将这两个解代入泛函方程，得

$$J[y_1,z] = \int_0^1\left[\left(-5x + \frac{7}{2}\right)^2 + 1 - 8x\right]\mathrm{d}x = -66$$

$$J[y_2,z] = \int_0^1[(6x-2)^2 + 1 - 8x]\mathrm{d}x = 1.5 > -66$$

泛函的二阶变分为

$$\cdot\ \delta^2J[y,z] = \int_0^1[(\delta y')^2 + (\delta z')^2]\mathrm{d}x > 0$$

泛函的二阶变分大于零,泛函应取得极小值。由此可见,由 y_2 求出的结果不是极小值。于是可得

$$y = y_1 = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x, z = x。$$

5.3　在所围面积为 π 的光滑闭曲线 $x = x(t), y = y(t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 中,求一条过点 $(-1, 0)$ 的曲线,满足 $x(0) = x(2\pi) = 1, y(0) = y(2\pi) = 0$,且使其长度最短。

解　曲线长度为

$$J[x, y] = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

约束条件为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t = \pi$$

作辅助泛函

$$J^*[x, y] = \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \lambda \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\right]\mathrm{d}t$$

欧拉方程组为

$$\lambda\dot{y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0, -\lambda\dot{x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0$$

积分,得

$$y - \frac{\dot{x}}{\lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1, -x - \frac{\dot{y}}{\lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2$$

或

$$y - c_1 = \frac{\dot{x}}{\lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -(x + c_2) = \frac{\dot{y}}{\lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

方程两边平方并相加,得

$$(y - c_1)^2 + (x + c_2)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

这是一个圆方程。由等周条件 $\frac{\pi}{\lambda^2} = \pi$,得 $\lambda = \frac{1}{R} = 1$,即 $R = 1$。

再利用边界条件 $x(0) = x(2\pi) = 1, y(0) = y(2\pi) = 0$,和曲线经过点 $(-1, 0)$,得

$$c_1^2 + (1 + c_2)^2 = 1, c_1^2 + (-1 + c_2)^2 = 1$$

解得 $c_1 = c_2 = 0$。故极值曲线为 $x^2 + y^2 = 1$,其参数形式为 $x = \cos t, y = \sin t$。

5.4　求在条件 $\int_0^1 y^2\mathrm{d}x = 2, y(0) = y(1) = 0$ 下,等周问题 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线。

解　作辅助泛函 $J^*[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2 + \lambda y^2)\mathrm{d}x$,则有

$$F = y'^2 + x^2 + \lambda y^2$$

欧拉方程为

$$2\lambda y - 2y'' = 0$$

或

$$y'' - \lambda y = 0$$

当 $\lambda \geqslant 0$ 时,其通解为

$$y = c_1 x + c_2 \quad (\lambda = 0)$$

或

$$y = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x} \quad (\lambda > 0)$$

由边界条件 $y(0) = y(1) = 0$,得 $c_1 = c_2 = 0, y = 0$。此解不满足所给的等周条件,故有 $\lambda < 0$。于是上述欧拉方程变为

$$y'' + |\lambda| y = 0$$

方程的通解为

$$y = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$$

由边界条件 $y(0) = 0$,得 $c_1 = 0$。由边界条件 $y(1) = 0$,得 $\sqrt{|\lambda|} = \pm n\pi$,其中 n 为整数。于是 $y = \pm c_2 \sin(n\pi x)$。将其代入等周条件

$$\int_0^1 c_2^2 \sin^2(n\pi x)\mathrm{d}x = c_2^2 \int_0^1 \frac{1}{2}[1 - \cos(n\pi x)]\mathrm{d}x = \frac{c_2^2}{2} = 2$$

解得 $c_2 = \pm 2$。故极值曲线为 $y = \pm 2\sin n\pi x$,其中 n 为整数。

5.5 求 $r = R$ 的圆柱上从点 $A(R,0,0)$ 到点 $B(0,R,R)$ 的短程线。

提示:用柱面坐标 r,θ,z 来求解较为便利。

解 1 因 $r = R$ 是常数,故 $\frac{\partial r}{\partial z} = r' = 0$。

目标泛函为

$$J[x(z),y(z)] = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\mathrm{d}z$$

作辅助泛函

$$J^* = \int_{z_0}^{z_1} [\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} + \lambda(r - R)]\mathrm{d}z$$

在柱面坐标系 r,θ,z 下,有

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\cos\theta - r\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\sin\theta + r\cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

$$x'^2 = r'^2\cos^2\theta - 2rr'\theta'\cos\theta\sin\theta + r^2\theta'^2\sin^2\theta$$

$$y'^2 = r'^2\sin^2\theta + 2rr'\theta'\cos\theta\sin\theta + r^2\theta'^2\cos^2\theta$$

上两式相加,得

$$x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2\theta'^2 = R^2\theta'^2$$

将上式代入辅助泛函,得

$$J^* = \int_{z_0}^{z_1} [\sqrt{1 + R^2\theta'^2} + \lambda(r - R)]\mathrm{d}z$$

欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{R^2\theta'}{\sqrt{1 + R^2\theta'^2}} = 0, \lambda = 0$$

对欧拉方程积分并且两边平方,得

$$\frac{\theta'^2}{\sqrt{1+R^2\theta'^2}}=c$$

由此解出$\theta'^2=\frac{c}{1-cR^2}=c_1^2$,即$\theta'=c_1$是常数,积分得$\theta=c_1z+c_2$。故得其解为$\theta=c_1z+c_2,r=R$,其中常数$c_1$、$c_2$由边界条件确定。

解 2 在柱坐标系r,θ,z下,$(\mathrm{d}s)^2=(R\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}z)^2$,所求短程线为泛函

$$J=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{R^2+z'^2}\mathrm{d}\theta$$

因圆柱面直接取柱坐标,故可不必作辅助泛函,又因泛函的被积函数仅是z'的函数,故其欧拉方程的解为直线$z=c_1\theta+c_2,r=R$。由此可见,后一种解法比较简单。

由边界条件$y=0,z=0,y=R,z=R$,得$c_2=0,c_1=\frac{2}{\pi}$,故极值曲线为$z=\frac{2}{\pi}\theta$。短程线长度为

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\sqrt{R^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\pi R)^2+4}$$

5.6 求在条件$\int_{x_0}^{x_1}y\mathrm{d}x=a$下,等周问题$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'^2\mathrm{d}x$的极值曲线,其中$a$是常数。

解 作辅助泛函$J^*[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+\lambda y)\mathrm{d}x$,欧拉方程为

$$\lambda-2y''=0$$

积分得$y=\frac{\lambda}{4}x^2+c_1x+c_2$,其中$c_1$、$c_2$和$\lambda$由边界条件和等周条件来确定。

5.7 写出在条件$\int_{x_0}^{x_1}r(x)y^2\mathrm{d}x=1,y(x_0)=y(x_1)=0$下,泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)\,y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x$极值的等周问题的极值曲线微分方程。其中$p(x),q(x),r(x)\in C^1[x_0,x_1]$都是已知函数。

解 作辅助泛函

$$J^*[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)\,y'^2+q(x)y^2+\lambda r(x)y^2]\mathrm{d}x$$

欧拉方程为

$$2[q(x)+\lambda r(x)]y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[2p(x)y']=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y']-[q(x)+\lambda r(x)]y=0$$

其边界条件为$y(x_0)=0,y(x_1)=0$。显而易见的解是$y\equiv0$,它不满足等周条件,而其他的解通常只对λ的某些值才存在,这时的λ值称为**特征值**(参见第 8 章)。因此,λ应当是特征值。欧拉方程的通解中的一个常数由条件$y(x_0)=0$确定,而另一个常数由等周条件确定。

5.8 试求泛函$J=\int_{t_0}^{t_1}u^2\mathrm{d}t$在固定边界条件

$$x(0)=x_0,x(t_1)=x_1,y(0)=y_0,y(t_1)=y_1$$

和约束条件

$$x'=y,y'=ku$$

下的极值函数 $u = u(t)$。并求出

$$x(0) = x_0, x(t_1) = y(0) = y(t_1) = 0$$

$$x(0) = y(0) = 0, x(1) = y(1) = 1$$

两组情况下的约束条件和极值函数。

解 1 作辅助函数 $H = u^2 + \lambda_1(t)(x' - y) + \lambda_2(t)(y' - u)$。欧拉方程组为

$$H_u = 2u - \lambda_2 = 0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_{x'} = \lambda_1' = 0, H_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_{y'} = \lambda_1 - \lambda_2' = 0$$

$$\lambda_1 = c_1, \lambda_2 = c_1 t + c_2, u = \frac{c_1}{2}t + \frac{c_2}{2}$$

积分，得

$$y = \frac{c_1}{4}t^2 + \frac{c_2}{2}t + c_3, x = \frac{c_1}{12}t^3 + \frac{c_2}{4}t^2 + c_3 t + c_4$$

由边界条件 $x(0) = x_0, x(t_1) = x_1, y(0) = y_0, y(t_1) = y_1$，可解得

$$c_1 = 12\frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{t_1^3}, c_2 = 4\frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{t_1^2}$$

$$c_3 = y_0, c_4 = x_0$$

于是，约束条件的表达式为

$$x = \frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{t_1^3}t^3 + \frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{t_1^2}t^2 + y_0 t + x_0$$

$$y = 3\frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{t_1^3}t^2 + 2\frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{t_1^2}t + y_0$$

极值函数为

$$u = 6\frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{kt_1^3}t + 2\frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{kt_1^2}$$

解 2 由约束条件可知 $u = x_1''$，将此关系式代入泛函中得

$$J = \int_0^{t_1} x_1''^2 \mathrm{d}t$$

欧拉方程为

$$2\frac{\mathrm{d}^4 x_1}{\mathrm{d}t^4} = 0$$

积分四次，得

$$x_1 = c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

由边界条件 $x(0) = x_0, x(t_1) = x_1, y(0) = y_0, y(t_1) = y_1$，可解得

$$c_1 = \frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{t_1^3}, c_2 = \frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{t_1^2}$$

$$c_3 = y_0, c_4 = x_0$$

于是可得约束条件的表达式为

$$x = \frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{t_1^3}t^3 + \frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{t_1^2}t^2 + y_0 t + x_0$$

$$y = 3\frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{t_1^3}t^2 + 2\frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{t_1^2}t + y_0$$

极值函数为

$$u = 6\frac{(y_1 + y_0)t_1 - 2(x_1 - x_0)}{kt_1^3}t + 2\frac{3(x_1 - x_0) - t_1(y_1 + 2y_0)}{kt_1^2}$$

在第一组边界条件下,有

$$x = \frac{2x_0}{t_1^3}t^3 - \frac{3}{t_1^2}t^2 + x_0, y = \frac{6x_0}{t_1^3}t^2 - \frac{6x_0}{t_1^2}t, u = x_1'' = \frac{6x_0(2t - t_1)}{kt_1^3}$$

在第二组边界条件下,有

$$x = -t^3 + 2t^2, y = -3t^2 + 4t, u = \frac{-6t + 4}{k}$$

5.9 求圆柱面 $z = \sqrt{1 - x^2}$ 上的短程线。

解 设连接圆柱面两点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 与 $B(x_1, y_1, z_1)$ 的曲线为

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$$

曲线长度为

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}x$$

作辅助泛函

$$J^*[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} [\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(z - \sqrt{1 - x^2})]\mathrm{d}x$$

欧拉方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \lambda(x) \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = c_1 \\ \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \int \lambda(x)\mathrm{d}x = k(x) \end{cases}$$

由 $z = \sqrt{1 - x^2}$,得

$$\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\mathrm{d}z = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}k(x)\mathrm{d}s$$

由弧微分公式

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = \left[\frac{1 - x^2}{x^2}k^2(x) + c_1^2 + k^2(x)\right](\mathrm{d}s)^2$$

得

$$\frac{1}{x^2}k^2(x) + c_1^2 = 1, k(x) = \sqrt{1 - c_1^2}x$$

将 $k(x)$ 的表达式代入 $\mathrm{d}x$ 的表达式中,有

$$\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\mathrm{d}z = -\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - c_1^2}\mathrm{d}s$$

将上式分离变量并积分,得

$$-\arcsin x=\sqrt{1-c_1^2}s+c$$

但 $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$,令 $c_2=c+\frac{\pi}{2}$,则有

$$\arccos x=\sqrt{1-c_1^2}s+c_2$$

或

$$x=\cos(\sqrt{1-c_1^2}s+c_2)$$

$$z=\sqrt{1-x^2}=\sin(\sqrt{1-c_1^2}s+c_2)$$

又由 $\frac{dy}{ds}=c_1$,得 $y=c_1s+c_3$。于是,短程线为

$$\begin{cases}x=\cos(\sqrt{1-c_1^2}s+c_2)\\ y=c_1s+c_3\\ z=\sin(\sqrt{1-c_1^2}s+c_2)\end{cases}$$

式中,积分常数 c_1、c_2 和 c_3 由边界条件确定。

5.10　求位于曲面 $15x-7y+z-22=0$ 上的两点 $A(1,-1,0)$ 和 $B(2,1,-1)$ 之间的最短距离。

解　曲面上两点之间的距离为下列泛函

$$J=\int_1^2\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \tag{1}$$

约束条件为

$$\varphi(x,y,z)=15x-7y+z-22=0 \tag{2}$$

建立辅助泛函

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)(15x-7y+z-22)]dx \tag{3}$$

欧拉方程组为

$$-7\lambda(x)-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0 \tag{4}$$

$$\lambda(x)-\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0 \tag{5}$$

式(5)乘以7,与式(4)相加并积分,得

$$\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c \tag{6}$$

由约束条件(2)可得

$$z'=7y'-15 \tag{7}$$

将式(7)代入式(6),得

$$\frac{y'+7(7y'-15)}{\sqrt{1+y'^2+(7y'-15)^2}}=c \tag{8}$$

即 $y'=c_1$,积分得 $y'=c_1x+c_2$,由端点条件得 $c_1=2,c_2=-3$,故

$$y=2x-3 \tag{9}$$

将式(9)代入式(7),得 $z' = -1$,积分得 $z = c_3 - x$,由端点条件得 $c_3 = 1$,故

$$z = 1 - x \tag{10}$$

再由式(4)和式(5)可知 $\lambda(x) = 0$,故所求的最短距离为

$$J = \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2 z'^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4 + 1}\,dx = \sqrt{6} \tag{11}$$

5.11 求泛函 $J[y,z] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + y'z'}{x}}\,dx$ 取得极小值的欧拉方程,约束条件为 $y = z + 1$,端点条件为 $y(0) = 0, y(1) = b$。

解 由约束条件 $y = z + 1$,可得 $y' = z'$,于是泛函可改写成

$$J = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}}\,dx$$

欧拉方程为

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} = 0$$

或

$$y' = c\sqrt{x(1 + y'^2)}$$

或

$$y' = \sqrt{\frac{c_1^2 x}{1 - c_1^2 x}}$$

令 $x = \frac{\sin^2 t}{c_1^2}$,则有 $dx = \frac{2\sin t\cos t\,dt}{c_1^2}$,将其代入上式,积分得

$$y = \int \sqrt{\frac{c_1^2 x}{1 - c_1^2 x}}\,dx = \frac{2}{c_1^2}\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{c_1^2}(t - \sin t\cos t) + c_2$$

$$x = \frac{\sin^2 t}{c_1^2}$$

由端点条件可确定 c_1 和 c_2,其中 $c_2 = 0$。

5.12 在信息论中,研究信源的信息量问题时,不同信源变量 x 表示不同的信息。若信源变量 x 在区间 $[-a,a]$ 上变化,其信息的概率分布密度为连续函数 $p(x)$,求最佳概率分布密度 $p(x)$,使信息熵

$$J[p(x)] = -\int_{-a}^{a} p(x)\ln[kp(x)]\,dx$$

在条件

$$\int_{-a}^{a} p(x)\,dx = 1$$

下取极大值。式中 k 为常数。

解 设 $F = -p(x)\ln[kp(x)], G = p(x)$。作辅助函数

$$H = F + \lambda G = -p(x)\ln[kp(x)] + \lambda p(x) \tag{1}$$

作辅助泛函

$$J^* = \int_{-a}^{a} H\,dx = \int_{-a}^{a} \{-p(x)\ln[kp(x)] + \lambda p(x)\}\,dx \tag{2}$$

欧拉方程为

$$-\ln[kp(x)]-1+\lambda=0 \tag{3}$$

由式(3)解出 $p(x)$

$$p(x)=\frac{1}{k}e^{\lambda-1} \tag{4}$$

将式(4)代入概率分布密度的积分中,得

$$\int_{-a}^{a}p(x)dx=\frac{1}{k}e^{\lambda-1}\int_{-a}^{a}dx=\frac{2a}{k}e^{\lambda-1}=1 \tag{5}$$

或

$$\frac{e^{\lambda-1}}{k}=\frac{1}{2a} \tag{6}$$

由式(6)可解出拉格朗日乘子为

$$\lambda=1+\ln\frac{k}{2a} \tag{7}$$

将式(6)代入式(4),可得最佳概率分布密度为

$$p(x)=\frac{1}{2a} \tag{8}$$

可见最佳概率分布密度是常数。最佳概率分布密度分布时的信息熵为

$$J[p(x)]=-\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}\ln\frac{k}{2a}dx=-\ln\frac{k}{2a} \tag{9}$$

5.13 利用球坐标(r,φ,θ),求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上从点 $A(R,0,0)$ 到点 $B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}R,\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$的短程线。

解 在球坐标上,$r=R$ 是常数,它对坐标的导数是零。弧长的微分是

$$(ds)^2=(Rd\varphi)^2+(R\sin\varphi d\theta)^2$$

目标泛函为

$$J[\varphi(\theta)]=\int_{\theta_0}^{\theta_1}R\sqrt{\varphi'^2+\sin^2\varphi}d\theta$$

作辅助泛函

$$J^*=\int_{\theta_0}^{\theta_1}[R\sqrt{\varphi'^2+\sin^2\varphi}+\lambda(r-R)]d\theta$$

欧拉方程为

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\varphi'^2+\sin^2\varphi}}-\frac{d}{d\theta}\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\sin^2\varphi}}=0$$

将上式展开并化简,得

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\varphi-\varphi''\sin^2\varphi+2\varphi'^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\varphi'^2+\sin^2\varphi}(\varphi'^2+\sin^2\varphi)}=0$$

因上式的 φ 及分母都不为零,故

$$\varphi''\sin\varphi-2\varphi'^2\cos\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi=0$$

令 $u=\cot\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$,则有

$$du=\frac{-\sin\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi=-\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$u'=\frac{du}{d\theta}=\frac{-\sin\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi=-\frac{\varphi'}{\sin^2\varphi}$$

$$du' = -\frac{d\varphi'\sin^2\varphi - 2\varphi'\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sin^4\varphi} = -\frac{d\varphi'\sin\varphi - 2\varphi'\cos\varphi d\varphi}{\sin^3\varphi}$$

$$u'' = \frac{du'}{d\theta} = \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\varphi''\sin\varphi - 2\varphi'^2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

将上式代入欧拉方程,得

$$u'' + u = 0$$

积分,得

$$u = c_1\sin\theta + c_2\cos\theta$$

或

$$\cot\varphi = c_1\sin\theta + c_2\cos\theta$$

故得到通解为 $\varphi = \text{arc}\cot(c_1\sin\theta + c_2\cos\theta), r = R$。其中积分常数由边界条件 A 与 B 确定。

由边界条件 $A(R,0,0)$,可知端点在 x 轴上,$\varphi = \frac{\pi}{2}, \theta = 0$,得 $c_2 = 0$。由边界条件 $B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}R,\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$,可知端点在 yOz 平面上,且在 yOz 平面的角分线上,$\varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{2}$,得 $c_1 = 1$。

故极值曲线为 $\varphi = \text{arc}\cot(\sin\theta), r = R$。

将 $\cot\varphi = \sin\theta$ **两端平方,得**

$$\cot^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{1 - \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \sin^2\theta$$

由上式解出 $\sin^2\varphi$ 为

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1 + \sin^2\theta}$$

将 $\cot\varphi = \sin\theta$ 两端微分,得

$$\frac{-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = \cos\theta d\theta$$

$$\varphi' = -\sin^2\varphi\cos\theta = \frac{\cos\theta}{1 + \sin^2\theta}$$

$$\varphi'^2 + \sin^2\varphi = \frac{\cos^2\theta + 1 + \sin^2\theta}{(1 + \sin^2\theta)^2} = \frac{2}{(1 + \sin^2\theta)^2}$$

将上式代入泛函表达式,得点 A 到点 B 的短程线为

$$J[\varphi(\theta)] = \sqrt{2}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta}$$

查积分表,有

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 + b^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\tan\frac{\pi}{2}\right)$$

当 $a = b = 1$ 时,上式的积分结果是 $\frac{\pi}{2}$,故点 A 到点 B 的短程线为

$$J[\varphi(\theta)] = R\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R$$

5.14 求泛函 $J = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(y^2 + u^2)dx$ 极值曲线,边界条件为 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$,约束条件为 $y' = u - y$。

解 作辅助泛函

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda(y' - u + y)\right]\mathrm{d}x$$

欧拉方程组为

$$\begin{cases} y + \lambda - \lambda' = 0 \\ u - \lambda = 0 \end{cases}$$

上式与约束条件联立,可解得 $y'' - 2y = 0$,该方程的通解为 $y = c_1\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$。由边界条件 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 可得

$$c_1 = \frac{y_1\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x_0} - y_0\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x_1}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x_1 - x_0)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x_1 - x_0)}}, c_2 = \frac{y_0\mathrm{e}^{\sqrt{2}x_1} - y_1\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x_0}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x_1 - x_0)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x_1 - x_0)}}$$

将 c_1、c_2 代入通解,得

$$y = \frac{y_1\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x_0} - y_0\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x_1}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x_1 - x_0)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x_1 - x_0)}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + \frac{y_0\mathrm{e}^{\sqrt{2}x_1} - y_1\mathrm{e}^{\sqrt{2}x_0}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x_1 - x_0)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x_1 - x_0)}}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$$

$$u = (1 + \sqrt{2})\frac{y_1\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x_0} - y_0\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x_1}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x_1 - x_0)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x_1 - x_0)}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + (1 - \sqrt{2})\frac{y_0\mathrm{e}^{\sqrt{2}x_1} - y_1\mathrm{e}^{\sqrt{2}x_0}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x_1 - x_0)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x_1 - x_0)}}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$$

5.15 求等周问题的极值曲线,若泛函为 $J[y] = \int_0^1 y'^2\mathrm{d}x$,边界条件为 $y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{4}$,服从等周条件 $\int_0^1 (y - y'^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$。

解 做辅助泛函 $J^*[y] = \int_0^1 [y'^2 + \lambda(y - y'^2)]\mathrm{d}x$,则其欧拉方程为

$$\lambda + 2\lambda y'' - 2y'' = 0$$

上式可写成

$$y'' = c$$

积分两次,得

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{4}$,得 $c_3 = 0, c_2 = \frac{1}{4} - c_1$,极值曲线为 $y = c_1x^2 + \left(\frac{1}{4} - c_1\right)x$,导数为 $y' = 2c_1x + \frac{1}{4} - c_1$。将其代入等周条件,得

$$\int_0^1\left[c_1x^2 + \left(\frac{1}{4} - c_1\right)x - \left(2c_1x + \frac{1}{4} - c_1\right)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$$

积分后整理得

$$16c_1^2 + 8c_1 + 1 = 0$$

解此一元二次方程,得

$$c_1 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 16 \times 1}}{2 \times 16} = -\frac{1}{4}$$

于是可得 $c_2 = \frac{1}{2}$,极值曲线为 $y = \frac{1}{4}(2x - x^2)$。

5.16 求泛函 $J[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 - k^2y^2)\mathrm{d}x$ 极小问题的解,边界条件为 $y(-1) = y(1) = 0$,附

加条件为$\int_{-1}^{1} y^2 \mathrm{d}x = 1$。

解 作辅助泛函

$$J^* = \int_1^1 [y'^2 + (\lambda - k^2)y^2]\mathrm{d}x$$

泛函的欧拉方程为

$$2(\lambda - k^2)y - 2y'' = 0$$

或

$$y'' + (k^2 - \lambda)y = 0$$

若 $k^2 - \lambda > 0$,则方程的解为

$$y = c_1 \cos\sqrt{k^2 - \lambda}x + c_2 \sin\sqrt{k^2 - \lambda}x$$

因被积函数函数是偶函数,故 $c_2 = 0$,由边界条件 $y(-1) = y(1) = 0$,得$\sqrt{k^2 - \lambda} = \frac{\pi}{2}$,$\lambda = k^2 - \frac{\lambda^2}{4}$,此时 $y = c_1 \cos\frac{\pi}{2}x$;将其代入附加条件,得

$$2c_1^2 \int_0^1 \cos^2\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x = c_1^2 \int_0^1 (1 + \cos\pi x)\mathrm{d}x = c_1^2 = 1$$

得 $c_1 = \pm 1$,于是极值曲线为 $y = \pm \cos\frac{\pi}{2}x$。

5.17 设已知函数 $f(x,y) \in C(D)$,$\sigma(\Gamma)$,$p(\Gamma) \in C(\Gamma)$,Γ 为 D 的边界。试写出混合型泛函

$$J[u] = \iint_D [(u_x^2 + u_y^2) + 2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Gamma \sigma(\Gamma)u^2 + 2p(\Gamma)u\mathrm{d}\Gamma$$

的欧拉方程和自然边界条件。

解 由式(5-4-21),泛函的欧拉方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

根据式(5-4-22a)或式(5-4-22b),自然边界条件为

$$\left(\sigma u + p + u_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma} - u_y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma}\right)\Big|_\Gamma = 0$$

或

$$(\sigma u + p + u_x n_x + u_y n_y)|_\Gamma = 0$$

根据式(1-3-18),有

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{j}\right) \cdot (n_x \boldsymbol{i} + n_y \boldsymbol{j}) = u_x n_x + u_y n_y$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向的单位矢量。于是自然边界条件也可以写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u + p\right)\Big|_\Gamma = 0$$

5.18 设已知函数 $p(x,y) \in C^1(D)$,$q(x,y)$,$f(x,y) \in C(D)$,$\sigma(\Gamma) \in C(\Gamma)$,$\Gamma$ 为 D 的边界。试写出混合型泛函

$$J[u] = \iint_D [p(x,y)(u_x^2 + u_y^2) + q(x,y)u^2 - 2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Gamma \sigma(\Gamma)u^2\mathrm{d}\Gamma$$

的欧拉方程和自然边界条件。

解 由式(5-4-21),泛函的欧拉方程为

$$\frac{\partial(pu_x)}{\partial x}+\frac{\partial(pu_y)}{\partial y}-qu=-f(x,y)$$

根据式(5-4-22a)或式(5-4-22b),自然边界条件为

$$\left(\sigma u+pu_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Gamma}-pu_y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\Gamma}\right)\Big|_\Gamma=0$$

或

$$[\sigma u+p(u_xn_x+u_yn_y)]\big|_\Gamma=0$$

根据式(1-3-18),有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\nabla u\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{j}\right)\cdot(n_x\boldsymbol{i}+n_y\boldsymbol{j})=u_xn_x+u_yn_y$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向的单位矢量。于是自然边界条件也可以写成

$$\left(p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_\Gamma=0$$

第6章　参数形式的变分问题习题解

6.1　验证下列泛函的值是否与容许曲线的参数形式无关。

(1) $J[x,y,z]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}t$;　(2) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x\dot{x}\,\dot{y}^2}\mathrm{d}t$;

(3) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}(x^2\dot{x}+3xy\dot{y}^2)\mathrm{d}t$;　(4) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}+y\dot{x}^2)\mathrm{d}t$;

(5) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}+y\dot{x})^2\mathrm{d}t$;　(6) $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x\dot{y}^2+y\dot{x}^2}\mathrm{d}t$。

解　(1) 对于任意正数 k,有

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y},k\dot{z})=\sqrt{(k\dot{x})^2+(k\dot{y})^2+(k\dot{z})^2}=k\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=kF(x,y,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

这个函数满足正一次齐次函数条件,故泛函的值与曲线的参数表示形式无关。

(2) 对于任意正数 k,有

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y})=\sqrt{x(k\dot{x})(k\dot{y})^2}=k\sqrt{kx\dot{x}\,\dot{y}^2}\neq kF(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

这个函数不满足正一次齐次函数条件,故泛函的值与曲线的参数表示形式有关。

(3) 对于任意正数 k,有

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y})=x^2(k\dot{x})+3xy(k\dot{y})^2=k(x^2\dot{x}+3kxy\dot{y}^2)\neq kF(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

这个函数不满足正一次齐次函数条件,故泛函的值与曲线的参数表示形式有关。

(4) 对于任意正数 k,有

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y})=x(k\dot{y})+y(k\dot{x})^2=k(x\dot{y}+yk\dot{x}^2)\neq kF(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

这个函数不满足正一次齐次函数条件,故泛函的值与曲线的参数表示形式有关。

(5) 对于任意正数 k,有

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y})=[x(k\dot{y})+y(k\dot{x})]^2=k^2(x\dot{y}+y\dot{x})^2=k^2F(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

这个函数是正二次齐次函数,不满足正一次齐次函数条件,故泛函的值与曲线的参数表示形式有关。

(6) 对于任意正数 k,有

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = \sqrt{x(k\dot{y})^2 + y(k\dot{x}^2)} = k\sqrt{x\dot{y}^2 + y\dot{x}^2} = kF(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

这个函数满足正一次齐次函数条件,故泛函的值与曲线的参数表示形式无关。

6.2 试证:封闭曲线 Γ 所围成的平面图形面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$

与曲线 Γ 的参数表示形式无关。

证 设 $x = x(t), y = y(t)$,并有 $\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = \dot{y}\,\mathrm{d}t$,则平面图形面积可表示为

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t$$

被积函数为 $F(x,y,\dot{x},\dot{y}) = x\dot{y} - y\dot{x}$,对于任意正数 k,有

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y}) = xk\dot{y} - yk\dot{x} = k(x\dot{y} - y\dot{x}) = kF(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

即 $F(x,y,\dot{x},\dot{y})$ 对 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 是正一次齐次函数,当然也是 x 和 y 的正一次齐次函数,故封闭曲线 Γ 所围成的平面图形面积 A 仅与曲线的形状有关,而与曲线 Γ 的参数表示形式无关。证毕。

6.3 求泛函 $J[x,y] = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\dot{y}^2 - y^2\dot{x}^2}{\dot{x}}\mathrm{d}t$ 的极值曲线。

解 求泛函的被积函数对 $\dot{x}$ 的偏导数

$$F_{\dot{x}} = \frac{-2y^2\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + y^2\dot{x}^2}{\dot{x}^2} = -\frac{y^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}$$

泛函的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{y^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2} = 0$$

积分,得

$$y^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c_1^2\dot{x}^2$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} = \mathrm{d}x$$

积分,得

$$y = c_1\sin(x + c_2)$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$,得 $c_2 = 0, c_1 = \frac{y_1}{\sin x_1}$,故极值曲线为

$$y = \frac{y_1\sin x}{\sin x_1}$$

6.4 求泛函 $J[x,y] = \int_{(0,0)}^{(1,2)} \frac{\dot{y}^2 - 3\mathrm{e}^{\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}\dot{x}^2}{\dot{x}}\mathrm{d}t$ 的极值曲线。

解 被积函数对 $\dot{y}$ 取偏导数

$$F_{\dot{y}} = \frac{2\dot{y} - 3\mathrm{e}^{\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}\dot{x}}{\dot{x}}$$

泛函的欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}} = \frac{(2-3\mathrm{e}^{\frac{\dot{y}}{\dot{x}}})(\dot{x}\,\ddot{y}-\ddot{x}\,\dot{y})}{\dot{x}^2} = 0$$

因分母不能为零,故有 $2-3\mathrm{e}^{\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}=0$ 或 $\dot{x}\,\ddot{y}-\ddot{x}\,\dot{y}=0$。前一个括号的解不符合边界条件,舍去。求第二个括号的解,设 $\dot{y}=p,\dot{x}=q$,有 $\dot{p}=\ddot{y},\dot{q}=\ddot{x}$,分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}q}{q}$$

积分,得

$$\ln\frac{p}{q} = \ln\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \ln y' = \ln c_1$$

或

$$y' = c_1$$

再积分,得 $y = c_1x + c_2$。由边界条件 $y(0)=0,y(1)=2$,得 $c_2=0,c_1=2$,故极值曲线为 $y=2x$。

6.5 求泛函 $J[x,y]=\int_{(0,1)}^{(1,0)}(x\dot{y}-y\dot{x}-2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2})\mathrm{d}t$ 的极值曲线。

解 1 $F=(x\dot{y}-y\dot{x})-2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$,欧拉方程为

$$\dot{y}+\dot{y}+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = 0$$

或

$$y\left[1+\frac{\ddot{x}\,\dot{y}-\dot{x}\,\ddot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=0$$

若使上式恒成立,或 $\dot{y}=0$,或 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{x}\,\ddot{y}-\ddot{x}\,\dot{y}=1$。若 $\dot{y}=0$,则 $y=\mathrm{const}$ 不是所要求的解。故应取 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$,显然它的解是 $x^2+y^2=1$ 的单位圆,注意到边界条件,它应是单位圆在第一象限内的一部分弧长。

解 2 被积函数 $F=(x\dot{y}-y\dot{x})-2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$,易见 F 对 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 是正一次齐次函数。F 对 $\dot{x}$ 求偏导数,得

$$F_{\dot{x}} = -2\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

再对 $\dot{x}$ 求偏导数,得

$$F_{\dot{x}\dot{x}} = -2\frac{\dot{y}^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

若用欧拉方程的维尔斯特拉斯形式,就有

$$F_{x\dot{y}}=1,F_{\dot{x}y}=-1,F_1=\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2}=-\frac{2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

将上面所求结果代入曲率公式,得

$$\frac{1}{R}=\frac{F_{\dot{x}y}-F_{x\dot{y}}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}F_1}=\frac{-1-1}{-2}=1$$

根据边界条件,它是单位圆在第一象限的一部分弧长。

6.6　求泛函 $J[x,y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\dot{x}\,\dot{y}+2x^2+2y^2)\mathrm{d}t$ 的极值曲线,边界条件为 $x(0)=y(0)=0$, $x(1)=y(1)=1$。

解　泛函的欧拉方程组为

$$4x-\ddot{y}=0,4y-\ddot{x}=0$$

或

$$y^{(4)}-16y=0,x^{(4)}-16x=0$$

方程的特征方程为

$$(r-2)(r+2)(r^2+4)=0$$

可得微分方程的通解为

$$y=c_1\sinh 2t+c_2\cosh 2t+c_3\cos 2t+c_4\sin 2t$$

$$x=c_1\sinh 2t+c_2\cosh 2t-c_3\cos 2t-c_4\sin 2t$$

利用边界条件 $x(0)=y(0)=0,x(1)=y(1)=1$,得 $c_1=c_2=c_4=0,c_2=\dfrac{1}{\sinh(\pi/2)}$,于是极值曲线为 $x=y=\dfrac{\mathrm{chsh}2t}{\sinh(\pi/2)}$。

6.7　设一质点在 $t_0=0$ 到 $t_1=T_1$ 时间内无摩擦地沿着曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 从 p_0 点运动到 p_1 点,若这运动能使动能的平均值最小,求证下列等式成立。

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_y}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_z}$$

证　设质点的质量为 m,则质点在 $t_0=0$ 到 $t_1=T_1$ 时间内的平均动能为

$$J=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t$$

约束条件为

$$\varphi(x,y,z)=0$$

作辅助泛函

$$J^*=\int_0^{T_1}\left\{\frac{m}{2T_1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]+\lambda\varphi(x,y,z)\right\}\mathrm{d}t$$

欧拉方程组为

$$\begin{cases}\lambda\varphi_x-\dfrac{m}{T_1}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0\\ \lambda\varphi_y-\dfrac{m}{T_1}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=0\\ \lambda\varphi_z-\dfrac{m}{T_1}\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=0\end{cases}$$

故有

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_y}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}}{\varphi_z}=\frac{\lambda T_1}{m}$$

证毕。

6.8　一质点沿着球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 从点(0,0,R)滑动到点(0,0,$-R$),若运动能使动能的平均值最小,求质点的运动路径。

解　由习题6.7的结果可知,当 $\lambda=0$ 时,其通解为 $x=c_1t+c_2, y=c_3t+c_4, z=c_5t+c_6$ 由初始条件和终了条件知 $x\equiv y\equiv 0$,不符合题意要求。又当 $\lambda>0$ 时,其解为 $x=c_1e^{-\sqrt{\lambda}t}+c_2e^{\sqrt{\lambda}t}$, $y=c_3e^{-\sqrt{\lambda}t}+c_2e^{\sqrt{\lambda}t}, z=c_5e^{-\sqrt{\lambda}t}+c_6e^{\sqrt{\lambda}t}$,由初始条件和终了条件知仍有 $x\equiv y\equiv 0$,也不符合题意要求。故必有 $\lambda<0$,于是

$$x=c_1\sin\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}t+c_2\cos\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}t$$

$$y=c_3\sin\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}t+c_4\cos\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}t$$

$$z=c_5\sin\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}t+c_6\cos\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}t$$

由初始条件,当 $t_0=0$ 时,$x=y=0, z=R$,得 $c_2=c_4=0, c_6=R$。当 $t_1=T_1$ 时,$x=y=0, z=-R$,得 $\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}T_1=\pi$,即 $\sqrt{-\frac{\lambda T_1}{m}}=\frac{\pi}{T_1}$。又由约束条件 $x^2+y^2+z^2=R^2$,可知 $c_5=0$, $c_1^2+c_3^2=R^2$。于是,结果为

$$\begin{cases} x=c_1\sin\dfrac{\pi}{T_1}t \\ y=c_3\sin\dfrac{\pi}{T_1}t \quad (c_1^2+c_3^2=R^2) \\ z=R\cos\dfrac{\pi}{T_1}t \end{cases}$$

运动路径为经线。

6.9　求泛函 $J[x,y]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{x-k}}\,\mathrm{d}t$ 的极值曲线,其中 k 为常数。

解　泛函的欧拉方程为

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}}=0-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{y}}{\sqrt{x-k}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=0$$

或

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{x-k}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=c_1$$

上式两端乘方并移项,得

$$\dot{y}^2=c_1^2(x-k)(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

设 $\dot{x}\neq 0$,两端同除以 $\dot{x}$ 并整理,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\sqrt{\frac{c_1^2(x-k)}{1-c_1^2(x-k)}}$$

令 $c_1^2(x-k)=\sin^2\frac{\tau}{2}$,则

$$1-c_1^2(x-k)=\cos^2\frac{\tau}{2},\mathrm{d}x=\frac{1}{c_1^2}\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}\mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{c_1^2}\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}\tan\frac{\tau}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2c_1^2}(1-\cos\tau)$$

积分得

$$y=\frac{1}{2c_1^2}(\tau-\sin\tau)+c_2$$

由于 $c_1^2(x-k)=\sin^2\frac{\tau}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\tau)$,于是,极值曲线为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2c_1^2}(1-\cos\tau)+k\\ y=\dfrac{1}{2c_1^2}(\tau-\sin\tau)+c_2\end{cases}$$

6.10　设一光滑曲面 $\varphi(x,y,z)=0$,$A(x_0,y_0,z_0)$,$B(x_1,y_1,z_1)$ 是该曲面上两定点。试证:曲面上连接这两定点的短程线 $x=x(t)$,$y=y(t)$,$z=z(t)$ 满足下面等式

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_y}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_z}=\lambda(t)$$

其中 $s=s(t)$ 是弧长,$\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}t$。

证　A、B 两点间的距离为

$$J=\int_A^B\mathrm{d}s=\int_A^B\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}t$$

约束条件为

$$\varphi(x,y,z)=0$$

作辅助泛函

$$J^*=\int_A^B[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}+\lambda(t)\varphi(x,y,z)]\mathrm{d}t$$

令 $F=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}+\lambda(t)\varphi(x,y,z)$,则

$$F_{\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

同理,可求得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{y}}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{z}}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。于是辅助泛函极值函数的欧拉方程组为

$$\begin{cases}\lambda(t)\varphi_x - \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0\\ \lambda(t)\varphi_y - \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0\\ \lambda(t)\varphi_z - \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0\end{cases}$$

故有

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_y} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\varphi_z} = \lambda(t)$$

证毕。

第7章 变分原理习题解

7.1 设 T_1 和 T_2 是希尔伯特空间 H 到自身的有界线性算子，若对任何 $x,y\in H$，有 $(T_1x,y)=(T_2x,y)$，证明 $T_1=T_2$。

证 因 $(T_1x,y)=(T_2x,y)$，则

$$(T_1x,y)-(T_2x,y)=(T_1x-T_2x,y)=[(T_1-T_2)x,y]=0$$

对任意 $y\in H$ 都成立，故

$$(T_1-T_2)x=0$$

对任意 $x\in H$ 都成立，即 $T_1=T_2$。证毕。

7.2 设内积空间 V 的两个矢量 u 和 v 正交，证明 $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$。

证 因 u 和 v 正交，故有

$$\|u+v\|^2=(u+v,u+v)=(u,u)+2(u,v)+(v,v)=\|u\|^2+\|v\|^2$$

证毕。

7.3 试求算子 T 是对称算子所应满足的边界条件。

(1) $T=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$，$D_T:\{u(x)\mid u(x)\in C^2[0,l]\}$；

(2) $T=-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]$，$D_T:\{u(x)\mid u(x)\in C^4[0,l]\}$，且 $p(x)\in C^2[0,l]$，并大于零。

解

(1) 设 $v(x)\mid v(x)\in C^2[0,l]$，作内积

$$(Tu,v)=-\int_0^l(x^2u')'v\mathrm{d}x=-x^2u'v\Big|_0^l+\int_0^l x^2u'v'\mathrm{d}x=$$

$$-x^2u'v\Big|_0^l+\int_0^l x^2v'\mathrm{d}u=-x^2u'v\Big|_0^l+x^2v'u\Big|_0^l-\int_0^l(x^2v')'u\mathrm{d}x=$$

$$x^2(v'u-u'v)\Big|_0^l+(Tv,u)$$

可见，若使 T 为对称算子，应使

$$x^2(v'u - u'v)\Big|_0^l = 0$$

(2) 设 $v(x) \mid v(x) \in C^4[0,l]$。作内积

$$(Tu,v) = -\int_0^l (pu'')''v\mathrm{d}x = -(pu'')'v\Big|_0^l + \int_0^l (pu'')'v'\mathrm{d}x =$$

$$-(pu'')'v\Big|_0^l + (pu'')v'\Big|_0^l - \int_0^l (pu'')v''\mathrm{d}x =$$

$$= -(pu'')'v\Big|_0^l + (pu'')v'\Big|_0^l - (pv'')u'\Big|_0^l + \int_0^l (pv'')'u'\mathrm{d}x =$$

$$-(pu'')'v\Big|_0^l + p(u''v' - v''u')\Big|_0^l + (pv'')'u\Big|_0^l - \int_0^l (pv'')''u\mathrm{d}x =$$

$$-(pu'')'v\Big|_0^l + p(u''v' - v''u')\Big|_0^l + (pv'')'u\Big|_0^l + (Tv,u)$$

可见,若使 T 为对称算子,应有

$$[u(pv'')' - v(pu'')' + p(u''v' - v''u')]\Big|_0^l = 0$$

7.4 设算子 $T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的定义域为 $D_T: \{u(x) \mid u(x) \in C^1[x_0,x_1], y(x_0) = y(x_1) = 0\}$,试求 T 的共轭算子。

解 设 $v(x) \mid v(x) \in C^1[x_0,x_1]$,作内积

$$(Tu,v) = \int_{x_0}^{x_1} u'v\mathrm{d}x = uv\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} uv'\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1} uv'\mathrm{d}x = (u,T^*v)$$

故 $T^* = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$。

7.5 试将贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

化成自共轭方程。

解 显然 $x \neq 0$,将原方程改写为

$$Ty = xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

与式(7-4-1)和式(7-4-3)比较可见,上式相当于 $p_0 = x, p_1 = 1, p_2 = x - \dfrac{n^2}{x}$,且有 $p_0' = x' = 1 = p_1$,于是,可写出原方程的共轭方程为

$$T^*y = (xy') + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

7.6 设算子 $T = -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 的定义域为 $D_T: \{u(x) \mid u(x) \in C^2(D), u\mid_\Gamma = 0\}$,$\Gamma$ 为 D 的边界,试求 T 的共轭算子。

解 设 $v(x) \mid v(x) \in C^2(D)$,算子 T 可写成 $T = -\nabla\cdot\nabla = -\Delta$,作内积,并注意到 $u\mid_\Gamma = 0$,有

$$(Tu,v) = -\iint_D (\nabla\cdot\nabla u)v\mathrm{d}D = \iint_D [\nabla u\cdot\nabla v - \nabla\cdot(v\nabla u)]\mathrm{d}D =$$

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}D - \oint_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma =$$

$$-\iint_D u\nabla \cdot \nabla v \mathrm{d}D - \oint_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma + \oint_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = (u, T^* v)$$

得自共轭算子为

$$T^* = T = -\nabla \cdot \nabla = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

7.7 设算子 $T = \nabla^2[p(x,y)\nabla^2]$，其中 $\nabla^2 = \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，$D_T$: $\{u(x,y) \mid u(x,y) \in C^4(D)\}$，且 $p(x,y) \in C^2(D)$ 并大于零，试证 T 是自共轭算子的条件为

$$\oint_\Gamma \left[v \frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2 u) - u \frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2 v) + p\nabla^2 v \frac{\partial u}{\partial n} - p\nabla^2 u \frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}\Gamma = 0$$

式中 $v \in D_T$，$\dfrac{\partial}{\partial n}(\cdot)$ 为 D 的边界 Γ 的外法线方向导数。

证 由习题 1.6 的证明结果可知

$$v\Delta(p\Delta u) + \nabla \cdot [p\Delta u \nabla v - v\nabla(p\Delta u)] = u\Delta(p\Delta v) + \nabla \cdot [p\Delta v \nabla u - u\nabla(p\Delta v)]$$

作内积 (Tu, v)，并利用高斯公式或格林第一公式，有

$$(Tu, v) = \iint_D v\Delta(p\Delta u)\mathrm{d}D =$$

$$\iint_D \{u\Delta(p\Delta v) + \nabla \cdot [p\Delta v\nabla u - u\nabla(p\Delta v)]\}\mathrm{d}D - \iint_D \nabla \cdot [p\Delta u\nabla v - v\nabla(p\Delta u)]\mathrm{d}D =$$

$$(u, T^* v) + \oint_\Gamma \left[p\Delta v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}(p\Delta v) - p\Delta u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial}{\partial n}(p\Delta u)\right]\mathrm{d}\Gamma =$$

$$(u, T^* v) + \oint_\Gamma \left[v \frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2 u) - u \frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2 v) + p\nabla^2 v \frac{\partial u}{\partial n} - p\nabla^2 u \frac{\partial v}{\partial n}\right]\mathrm{d}\Gamma$$

可见，上式只有环路积分为零时，才能使 $T^* = T$ 成立，即 T 是自共轭算子。证毕。

7.8 已知施图姆 — 刘维尔型二阶微分方程

$$Ty = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y = f(x)$$

的边界条件为 $y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$，其等价泛函为 $J[y] = (Ty, y) - 2(f, y)$。若 $p(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 中的最小值为 $p_m (p_m \geqslant 0)$，$q(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 中的最小值为 $q_m (q_m \geqslant 0)$，试证明 $(Ty, y) \geqslant r^2(y, y)$，其中 $r^2 = \left[\dfrac{2p_m}{(x_1 - x_0)^2} + q_m\right]$。

证 将内积 (Ty, y) 分部积分，并利用固定边界条件 $y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$，有

$$(Ty, y) = \int_{x_0}^{x_1} -\{[p(x)y']' + q(x)y\}y\mathrm{d}x =$$

$$-p(x)y'y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2 + q(x)y^2]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2 + q(x)y^2]\mathrm{d}x \tag{1}$$

因 $p(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 中最小值为 $p_m (\geqslant 0)$，$q(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 中最小值为 $q_m (\geqslant 0)$，于是有

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x)y'^2\mathrm{d}x \geqslant p_m\int_{x_0}^{x_1} y'^2\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} q(x)y^2\mathrm{d}x \geqslant q_m\int_{x_0}^{x_1} y^2\mathrm{d}x \tag{3}$$

根据施瓦茨不等式,有

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x)y'^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{2p_m}{(x_1-x_0)^2}\int_{x_0}^{x_1} y^2\mathrm{d}x \tag{4}$$

将式(3)和式(4)代入式(1)中,则有

$$(Ty,y) \geqslant \left[\frac{2p_m}{(x_1-x_0)^2}+q_m\right]\int_{x_0}^{x_1} y^2\mathrm{d}x \tag{5}$$

令

$$r^2 = \frac{2p_m}{(x_1-x_0)^2}+q_m \geqslant 0 \tag{6}$$

则有

$$(Ty,y) \geqslant r^2\int_{x_0}^{x_1} y^2\mathrm{d}x = r^2(y,y) \tag{7}$$

证毕。

7.9 设微分方程 $x^2y''+2xy'-xy-x=0$,其边界条件为 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$。试将上述定解问题化为等价的变分问题。

解 为使二阶微分方程有意义,显然有 $y''\neq 0, x\neq 0$,不妨设 $x>0$,将微分方程变形为

$$Ty = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)-x\right]y = f(x) = -x$$

作 Ty 与 z 的内积,并注意到边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$,应有 $y'(x_0)=0, y'(x_1)=0$,于是有

$$(Ty,z) = -\int_{x_0}^{x_1} zTy\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} z\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+x\right]y\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} z\mathrm{d}(x^2y') + \int_{x_0}^{x_1} zxy\mathrm{d}x =$$

$$-(zx^2y')\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} z'x^2y'\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} zxy\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (z'x^2y'+zxy)\mathrm{d}x$$

将 y、z 交换位置,上面结果不变,可见,T 是对称算子。令 $z=y$,有

$$(Ty,y) = \int_{x_0}^{x_1} (xy^2+x^2y'^2)\mathrm{d}x > 0$$

即 T 又是正定算子。由于 T 是对称正定算子,故所求的泛函为

$$J[y] = (Ty,y) - 2(f,y) = \int_{x_0}^{x_1} (xy^2+x^2y'^2+2xy)\mathrm{d}x$$

如果设 $x<0$,仍可得到上述结果。

7.10 试求与下列边值问题等价的泛函。

(1) $x^2y''+2xy'-2y=f(x), x\in(0,l), y(0)=y(l)=0$,其中 $f(x)\in C[0,l]$;

(2) $-y''=f(x),x\in(0,l),y'(0)=y'(l)=0$,其中 $f(x)\in C[0,l]$ 且满足 $\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=0$;

(3) $-y^{(4)}=f(x),x\in(0,l),f(x)\in C[0,l],y(0)=y(l)=y'(0)=y'(l)=0$。

解

(1) 将方程改写成标准型:$-(x^2y')'+2y=-f(x)$,此时 $p=q=2$,它所对应的等价泛函为

$$J[y]=\int_0^l[x^2y'^2+2y^2+2yf(x)]\mathrm{d}x$$

相应的边界条件为 $y(0)=y(l)=0$。

(2) 方程本身就是标准型,此时,$p=1,q=0$,可写出方程所对应的泛函为

$$J[y]=\int_0^l[y'^2-2yf(x)]\mathrm{d}x$$

边界条件为 $y'(0)=y'(l)=0$。

(3) 此式相当于施图姆—刘维尔方程 $k=2$ 的情形,此时,$p_2(x)=1,p_0(x)=p_1(x)=0$,比较式(7-7-14) ~ 式(7-7-16),可写出方程所对应的泛函为

$$J_4=\int_0^l[(y'')^2-2yf(x)]\mathrm{d}x$$

边界条件为 $y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0$。

7.11 设定解问题

$$\Delta^2u=f(x,y)\qquad(x,y\in D)$$

$$u|_\Gamma=0,\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0$$

式中 Δ^2 是重调和算子,Γ 是域 D 的边界,证明 Δ^2 是对称正定算子且 $(\Delta^2u,u)=(\Delta u,\Delta u)$,并求出与定解问题等价的变分问题。

解 由习题 1.5 已证得重调和算子 Δ^2 是正定算子,即

$$v\Delta^2u=\Delta u\Delta v+\nabla\cdot(v\nabla w)-\nabla\cdot(w\nabla v)$$

式中 $w=\Delta u$。作内积 (Δ^2u,v),利用格林公式及边界条件 $u|_\Gamma=0,\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0$,有

$$(\Delta^2u,v)=\iint_D v\Delta^2u\mathrm{d}D=\iint_D[\Delta v\Delta u+\nabla\cdot(v\nabla w)-\nabla\cdot(w\nabla v)]\mathrm{d}D=$$

$$\iint_D\Delta v\Delta u\mathrm{d}D+\oint_\Gamma\left(v\frac{\partial w}{\partial n}-w\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma=$$

$$\iint_D\Delta v\Delta u\mathrm{d}D+\oint_\Gamma\left(v\Delta\frac{\partial u}{\partial n}-\Delta u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma=\iint_D\Delta v\Delta u\mathrm{d}D$$

将 v、u 易位,上面结果不变,故 Δ^2 是对称算子。

令 $v=u$,则有

$$(\Delta^2u,u)=\iint_D\Delta u\Delta u\mathrm{d}D=(\Delta u,\Delta u)$$

当 $\Delta u\neq0$ 时,有

$$(\Delta^2u,u)=\iint_D\Delta u\Delta u\mathrm{d}D=\iint_D(\Delta u)^2\mathrm{d}D>0$$

故 Δ^2 也是正定算子。于是,可建立与微分方程等价的泛函

$$J[u]=(\Delta^2u,u)-2uf=\iint_D[(\Delta u)^2-2uf]\mathrm{d}D=$$

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-2uf\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7.12　设有泊松方程第一边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),x,y\in D,f(x,y)\in C(D)\\ u|_\Gamma=0\end{cases}$$

式中 Γ 为 D 的边界。试证明二维拉普拉斯负算子 $-\Delta$ 是对称正定算子，并求出等价的变分问题。

解　首先证明二维拉普拉斯算子 $T=-\Delta=-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 是对称算子和正定算子。根据格林第一公式，有

$$(-\Delta u,v)=\iint_D(-\Delta u)v\mathrm{d}D=\iint_D\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}D-\oint_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma$$

由于 u 在边界上的值为零，所以有

$$(-\Delta u,v)=\iint_D\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}D$$

将 u、v 易位，上面结果不变，所以有

$$(-\Delta u,v)=(-\Delta v,u)$$

故算子 $T=-\Delta$ 是对称算子。再令 $v=u$，当 $\nabla u\neq 0$ 时，则有

$$(-\Delta u,u)=\iint_D\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}D=\iint_D(\nabla u)^2\mathrm{d}D=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}D>0$$

因此算子 $T=-\Delta$ 是正定算子。根据定理 7.5.1，可建立二次泛函

$$J[u]=(-\Delta u,u)-2(u,f)=\iint_D[(\nabla u)^2-2uf]\mathrm{d}D$$

7.13　设闭区域 D 的边界为 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$，其中 Γ_1 为 Ox 轴上的线段 $a\leqslant x\leqslant b$，Γ_2 为 xOy 平面的上半平面内的曲线弧，且该弧两端点在 Ox 轴上与 Γ_1 的端点相连接。又设 $\varphi(y)\in C(D)$，$\omega(y)\in C^1(D)$，且都大于零，$f(x,y)\in C(D)$，$u\in C^2(D)$。试证：与边值问题即特里科米(Tricomi，Francessco Giacomo Filippo，1897.5.5—1978)问题

$$\begin{cases}Tu\equiv-\varphi(y)u_{xx}-\dfrac{\partial}{\partial y}[\omega(y)u_y]=f(x,y)\quad(x,y\in D)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_1}=0,\quad u|_{\Gamma_2}=0\end{cases}$$

等价的变分问题为求泛函

$$J[u]=\iint_D[\varphi(y)u_x^2+\omega(y)u_y^2-2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,u|_{\Gamma_2}=0$$

的极小值问题。

证　由于 Γ_1 在 Ox 轴上，故有 $\int_{\Gamma_1}\mathrm{d}y=0$。设 $v\in C^2(D)$，作内积 (Tu,v)，注意到 φ 和 ω 只是 y 的函数，应用格林公式并利用边界条件，有

$$\begin{aligned}(Tu,v)&=-\iint_D\left[\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&-\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\omega\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\omega\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\end{aligned}$$

$$\oint_\Gamma v\omega\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x - v\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + \iint_D\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_{\Gamma_1} v\left(\omega\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x - \varphi\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) + \int_{\Gamma_2} v\left(\omega\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x - \varphi\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) + \iint_D\left[\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint_D\left[\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将 u、v 易位，结果不变，故 T 是对称算子。

令 $v = u$，并注意到 $\varphi(y)$、$\omega(y)$ 都大于零，有

$$(Tu,u) = \iint_D\left[\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$$

故 T 是正定算子。于是，与微分方程等价的变分问题为求泛函

$$\begin{cases} J[u] = (Tu,u) - 2(f,u) = \iint_D\left[\varphi\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ u|_{\Gamma_2} = 0 \end{cases}$$

的极小值问题。证毕。

7.14　试找出与微分方程边值问题

$$\begin{cases} x^3y'' + 3x^2y' + y - x = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

相应的变分问题。

解　微分方程可改写为

$$(x^3y') + y - x = 0$$

作该微分方程与 δy 的内积，并将第一项分部积分一次，得

$$\int_0^1 (x^3y')' + y - x)\delta y\mathrm{d}x = x^3y'\delta y\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^3y'\delta y' - y\delta y + x\delta y)\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{2}\delta\int_0^1 (x^3y'^2 - y^2 + 2xy)\mathrm{d}x = 0$$

即

$$\delta\int_0^1 (x^3y'^2 - y^2 + 2xy)\mathrm{d}x = 0$$

于是可写出与微分方程相应的泛函为

$$J = \int_0^1 (x^3y'^2 - y^2 + 2xy)\mathrm{d}x$$

7.15　证明：如果在 $x = x_0$ 与 $x = x_1$ 处满足适当的边界条件，那么四阶微分方程

$$(py'')'' + (qy')' + ry = 0$$

能转换成一个变分问题。其中 p、q 和 r 是 x 的已知函数。与该微分方程等价的变分问题是什么？必要的边界条件是什么？

证　作该微分方程与 δy 的内积，并将第一项积分两次，第二项积分一次，得

$$\int_{x_0}^{x_1}[(py'')'' + (qy')' + ry]\delta y\mathrm{d}x =$$

$$[(py'')' + qy']\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}[-(py'')'\delta y' - (qy')\delta y' + ry\delta y]\mathrm{d}x =$$

$$[(py'')' + qy']\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - py''\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(py''\delta y'' - qy'\delta y' + ry\delta y)\mathrm{d}x =$$

$$[(py'')' + qy']\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - py''\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1}(py''^2 - qy'^2 + ry^2)\mathrm{d}x = 0$$

于是,与该微分方程等价的变分问题是

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}(py''^2 - qy'^2 + ry^2)\mathrm{d}x = 0$$

相应的边界条件是

$$[(py'')' + qy']\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} = 0, py''\delta y'\Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

证毕。

第 8 章　变分问题的直接方法习题解

8.1　用欧拉有限差分法求泛函 $J[y] = \int_0^1(y'^2 + 2y)\mathrm{d}x$ 的极小值问题的近似解,边界条件为 $y(0) = y(1) = 0$。

解　令 $\Delta x = \frac{1-0}{5} = 0.2$,且

$y_0 = y(0) = 0$, $y_1 = y(0.2)$, $y_2 = y(0.4)$, $y_3 = y(0.6)$, $y_4 = y(0.8)$, $y_5 = y(1) = 0$

则在相应点的导数值按下列近似公式计算

$$y_k' = y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}$$

可得

$$y'(0) = \frac{y_1 - 0}{0.2}, y'(0.2) = \frac{y_2 - y_1}{0.2}, y'(0.4) = \frac{y_3 - y_2}{0.2}, y'(0.6) = \frac{y_4 - y_3}{0.2}, y'(0.8) = \frac{0 - y_4}{0.2}$$

将所给积分用矩形公式表示为有限和

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})]\Delta x$$

将以上数值代入上式右端,得

$$\varphi = \left[\left(\frac{y_1}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_1}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{-y_4}{0.2}\right)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\right]\times 0.2$$

节点纵坐标 y_1, y_2, y_3, y_4 的方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{0.2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}=\dfrac{y_1}{0.02}-\dfrac{y_2-y_1}{0.02}+2=0\\[2ex]\dfrac{1}{0.2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2}=\dfrac{y_2-y_1}{0.02}-\dfrac{y_3-y_2}{0.02}+2=0\\[2ex]\dfrac{1}{0.2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_3}=\dfrac{y_3-y_2}{0.02}-\dfrac{y_4-y_3}{0.02}+2=0\\[2ex]\dfrac{1}{0.2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}=\dfrac{y_4-y_3}{0.02}+\dfrac{y_4}{0.02}+2=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}2y_1-y_2=-0.04\\-y_1+2y_2-y_3=-0.04\\-y_2+2y_3-y_4=-0.04\\-y_3+2y_4=-0.04\end{cases}$$

方程组的解是 $y_1=-0.08, y_2=-0.12, y_3=-0.12, y_4=-0.08$。原泛函的欧拉方程的解析解是 $y=\dfrac{x^2-x}{2}$。可以验证,在给定点处近似解的值和解析解的值相同。

8.2　求方程 $\Delta u=-1$ 在矩形域 $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$ 内的近似解,且 u 在矩形域的边界上等于零。

提示:本问题可化为对泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D(u_x^2+u_y^2-2u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极值的探讨。它的近似解可用 $u_1=c_1(x^2-a^2)(y^2-b^2)$ 的形式来探求。

解　原方程可写成与之等价的泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D(u_x^2+u_y^2-2u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设其近似解为 $u_1=c_1(x^2-a^2)(y^2-b^2)$。由 $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=2c_1x(y^2-b^2)$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=2c_1y(x^2-a^2)$,可得

$$\begin{aligned}J&=\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}[4(c_1x)^2(y^2-b^2)^2+4(c_1y)^2(x^2-a^2)^2-2c_1(y^2-a^2(y^2-b^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{8}{9}\left[\frac{4}{5}c_1^2a^3b^3(a^2+b^2)-c_1a^3b^3\right]\end{aligned}$$

由 $\dfrac{\partial J}{\partial c_1}=\dfrac{8}{9}\left[\dfrac{8}{5}c_1a^3b^3(a^2+b^2)-a^3b^3\right]=0$,得 $c_1=\dfrac{5}{8(a^2+b^2)}$,故

$$u_1=\frac{5(x^2-a^2)(y^2-b^2)}{8(a^2+b^2)}$$

若 $a=b$ 即正方形域的情况下,则有

$$u_1=\frac{5(x^2-a^2)(y^2-a^2)}{16a^2}$$

如需更准确,则解可由下式来求

$$u_2=(x^2-a^2)(y^2-b^2)[c_1+c_2(x^2+y^2)]$$

利用例 8.5.4 的结果,令 $m=1$,可得

$$u_2 = \frac{35(x^2-a^2)(y^2-b^2)[69(a^4b^2+a^2b^4)+5(a^6+b^6)+15(a^4+b^4)(x^2+y^2)]}{16[280(a^6b^2+a^2b^6)+498a^4b^4+25(a^8+b^8)]}$$

8.3 求泛函 $J[y]=\int_0^1(x^3y''^2+100xy^2-20xy)\mathrm{d}x, y(1)=0, y'(1)=0$ 的极值问题的近似解。

提示:它的解可用 $y_n(x)=(1-x)^2(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)$ 的形式来探求,并对于 $n=1$ 来进行计算。

解 设解的形式为 $y_n(x)=(1-x)^2(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)$,若取 $n=1$,则有 $y_1(x)=(1-x)^2(a_0+a_1x)$。因

$$(1-x)^2=1-2x+x^2$$

$$(1-x)^4=(1-2x+x^2)^2=1+4x^2+x^4-4x-4x^3+2x^2=1-4x+6x^2-4x^3+x^4$$

故

$$y_1=a_0(1-2x+x^2)+a_1x(1-2x+x^2)$$

其平方为

$$y_1^2=[a_0(1-2x+x^2)+a_1x(1-2x+x^2)]^2=$$
$$a_0^2(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)+a_1^2x^2(1-4x+6x^2-$$
$$4x^3+x^4)+2a_0a_1x(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)$$

将 y_1 对 x 求二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}=y_1''=2a_0-4a_1+6a_1x=2(a_0-2a_1+3a_1x)$$

其平方为

$$y_1''^2=4(a_0^2+4a_1^2+9a_1^2x^2-4a_0a_1+6a_0a_1x-12a_1^2x)=$$
$$4[a_0^2+a_1^2(4-12x+9x^2)-a_0a_1(4-6x)]$$

将上面的表达式代入原泛函,得

$$J[a_0,a_1]=\int_0^1\{4x^3[a_0^2+(4-12x+9x^2)a_1^2-(4-6x)a_0a_1]+$$
$$100x(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)a_0^2+$$
$$100x^3(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)a_1^2+$$
$$200x^2(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)a_0a_1-$$
$$20x(1-2x+x^2)a_0-20x^2(1-2x+x^2)a_1\}\mathrm{d}x$$

积分结果为

$$J[a_0,a_1]=\frac{13}{3}a_0^2+\frac{53}{70}a_1^2+\frac{284}{105}a_0a_1-\frac{5}{3}a_0-\frac{2}{3}a_1$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_0}=\frac{26}{3}a_0+\frac{284}{105}a_1-\frac{5}{3}=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}=\frac{284}{105}a_0+\frac{53}{35}a_1-\frac{2}{3}=0$$

或

$$910a_0+284a_1=175$$

$$284a_0+195a_1=70$$

解出 a_0 和 a_1 为

$$a_0 = \frac{7945}{64034} = 0.12407471, a_1 = \frac{14000}{64034} = 0.21863385$$

于是,可得近似解为

$$y_1 = (x-1)^2\left(\frac{7945}{64034} + \frac{14000}{64034}x\right) = (x-1)^2(0.12407471 + 0.21863385x)$$

8.4 求泛函 $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\mathrm{d}x, y(0) = 0, y(1) = 0$ 的极小问题的近似解,并与其准确解做一比较。

提示:近似解可用 $y_n(x) = x(1-x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$ 的形式来探求,并对于 $n = 0$ 和 $n = 1$ 来进行计算。

解 $F = y'^2 - y^2 - 2xy$,欧拉方程为

$$-2y - 2x - 2y'' = 0$$

或

$$y'' + y = -x$$

齐次方程的解为

$$Y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

设特解为

$$y^* = b_0 + b_1x$$

将上式代入欧拉方程,可解出 $b_0 = 0, b_1 = -1$。于是通解为

$$y = Y + y^* = c_1\cos x + c_2\sin x - x$$

利用边界条件 $y(0) = 0, y(1) = 0$,可解得 $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{\sin 1}$,于是准确解为 $y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$。

设 $y_n(x) = x(1-x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$,有

$$y_0(x) = x(1-x)a_0$$

$$y_1(x) = x(1-x)(a_0 + a_1x) = (a_0x + a_1x^2)(1-x)$$

$$y_1^2 = (a_0^2x^2 + 2a_0a_1x^3 + a_1^2x^4)(1 - 2x + x^2)$$

对 y_1 求导,得 $y_1' = a_0(1-2x) + a_1x(2-3x)$。其平方为

$$y_1'^2 = [a_0(1-2x) + a_1x(2-3x)]^2 =$$

$$a_0^2(1 - 4x + 4x^2) + 2a_0a_1x(2 - 7x + 6x^2) + a_1^2x^2(4 - 12x + 9x^2)$$

将 y_1 和 y_1' 代入泛函方程,得

$$\begin{aligned} J[a_0, a_1] = \int_0^1 \{&a_0^2(1 - 4x + 4x^2) + 2a_0a_1x(2 - 7x + 6x^2) + a_1^2x^2(4 - 12x + 9x^2) + \\ &a_1^2x^2(4 - 12x + 9x^2) - a_0^2x^2 + 2a_0a_1x^3 + a_1^2x^4(1 - 2x + x^2) - \\ &2a_0x^2(1-x) - 2a_1x^3(1-x)\}\mathrm{d}x = \\ &\frac{3}{10}a_0^2 + \frac{3}{10}a_0a_1 + \frac{13}{105}a_1^2 - \frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{10}a \end{aligned}$$

上式分别对 a_0、a_1 求导,得

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = \frac{3}{5}a_0 + \frac{3}{10}a_1 - \frac{1}{6} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = \frac{3}{10}a_0 + \frac{26}{105}a_1 - \frac{1}{10} = 0$$

可解出 a_0 和 a_1 为

$$a_0 = \frac{71}{369}, a_1 = \frac{7}{41}$$

于是,可得到近似解

$$y_1(x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right)$$

8.5 求泛函 $J[y] = \int_1^2 \left(xy'^2 - \frac{x^2-1}{x}y^2 - 2x^2y\right)\mathrm{d}x, y(1) = 0, y(2) = 0$ 的极值问题的近似解,并与准确解做一比较。

提示:它的解可用 $y(x) = a(x-1)(x-2)$ 的形式来探求。

解 设 $y(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2)$,则有

$$y' = a(2x-3), y'^2 = a^2(4x^2 - 12x + 9)$$

$$y^2 = a^2(x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4)$$

代入泛函表达式,得

$$J = \int^2 [xa^2(4x^2 - 12x + 9) - \frac{x^2-1}{x}a^2(x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4) -$$

$$2x^2a(x^2 - 3x + 2)]\mathrm{d}x = a^2(2.3 - 4\ln 2) + \frac{23}{30}a$$

对 a 求导并令其等于零,得

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 2a(2.3 - 4\ln 2) + \frac{23}{30} = 0$$

可解出 a 为

$$a = \frac{23}{60(2.3 - 4\ln 2)} = -0.811135169$$

于是,可得到近似解为

$$y = \frac{23(x-1)(x-2)}{60(2.3 - 4\ln 2)} = -0.811135169(x-1)(x-2)$$

被积函数 $F = xy'^2 - \frac{x^2-1}{x}y^2 - 2x^2y$,欧拉方程为

$$-2xy'' - 2y' - 2\frac{x^2-1}{x}y - 2x^2 = 0$$

或

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y + x^3 = 0$$

或

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y + x = 0$$

欧拉方程的解为 $y = 3.6072J_1(x) + 0.75195N_1(x) - x$,其中 J_1 和 N_1 分别是一阶贝塞尔函数和一阶诺伊曼函数。

8.6 用里茨法求泛函 $J[y] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy)\mathrm{d}x, y(0) = 0, y(2) = 0$ 的极小问题的近似解,并与其准确解做比较。

提示:近似解可用 $y_n(x) = x(2-x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$ 的形式来探求,并对于 $n = 0$ 和 $n = 1$ 来进行计算。

解 $F = y'^2 + y^2 + 2xy$,其欧拉方程为

$$2y + 2x - 2y'' = 0$$

或

$$y'' - y = x$$

齐次方程的解为

$$Y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

设特解为

$$y^* = b_0 + b_1 x$$

将特解代入欧拉方程,比较两端系数,可得 $b_0 = 0, b_1 = -1$。于是,方程的解为

$$y = Y + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

由边界条件 $y(0) = 0, y(2) = 0$,可得 $c_1 = -c_2 = \frac{2}{e^2 - e^{-2}}$。故准确解为

$$y = \frac{2(e^x - e^{-x})}{e^2 - e^{-2}} - x = \frac{2\sinh x}{\sinh 2} - x$$

对于 $n = 0$ 和 $n = 1$,设近似解分别为

$$y_0(x) = a_0 x(2 - x)$$

$$y_1(x) = (a_0 + a_1 x)x(2 - x) = a_0 x(2 - x) + a_1 x^2(2 - x)$$

有

$$y_0' = 2a_0(1 - x), y_0'^2 = 4a_0^2(1 - 2x + x^2)$$

$$y_1' = 2a_0(1 - x) + a_1 x(2 - 3x)$$

$$y_1^2 = (a_0^2 x^2 + 2a_0 a_1 x^3 + a_1^2 x^4)(4 - 4x + x^2)$$

$$y_1'^2 = 4a_0^2(1 - 2x + x^2) + 2a_0 a_1 x(2 - 5x + 3x^2) + a_1^2 x^2(4 - 12x + 9x^2)$$

$$y_1'^2 + y_1^2 = a_0^2(4 - 8x + 8x^2 - 4x^3 + x^4) + 2a_0 a_1 x(2 - 5x + 7x^2 - 4x^3 + x^4) + a_1^2 x^2(4 - 12x + 13x^2 - 4x^3 + x^4)$$

将 y_0、x_0' 代入泛函,得

$$J = \int_0^2 [4a_0^2(1 - 2x + x^2) + a_0^2 x^2(4 - 4x + x^2) + 2a_0 x^2(2 - x)]\mathrm{d}x = \frac{56}{15}a_0^2 + \frac{8}{3}a_0$$

对 a_0 求导,得

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = \frac{112}{15}a_0 + \frac{8}{3} = 0$$

可解出 a_0 为

$$a_0 = -\frac{5}{14}$$

于是,得第一次近似解

$$y_0(x) = \frac{5}{14}x(x - 2)$$

将 y_1、y_1' 代入泛函,得

$$J = \int_0^2 [a_0^2(4 - 8x + 8x^2 - 4x^3 + x^4) + 2a_0 a_1 x(2 - 5x + 7x^2 - 4x^3 + x^4) + a_1^2 x^2(4 - 12x + 13x^2 - 4x^3 + x^4) + 2a_0 x^2(2 - x) + 2a_1 x^3(2 - x)]\mathrm{d}x = \frac{56}{15}a_0^2 + \frac{112}{15}a_0 a_1 - \frac{1944}{105}a_1^2 + \frac{8}{3}a_0 + \frac{16}{5}a_1$$

分别对 a_0、a_1 求导,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J}{\partial a_0}=\dfrac{112}{15}a_0+\dfrac{112}{15}a_1+\dfrac{8}{3}=0\\[2ex]\dfrac{\partial J}{\partial a_1}=\dfrac{112}{15}a_0-\dfrac{1296}{35}a_1+\dfrac{16}{5}=0\end{cases}$$

可解出 a_0 和 a_1 为

$$a_0=-\frac{1509}{4088},a_1=-\frac{7}{584}$$

于是,得第二次近似解

$$y_1(x)=x(x-2)\left(\frac{1509}{4088}+\frac{7}{584}x\right)$$

8.7　用里茨法解下面边值问题,并在 $x=0.5$ 处于解析解比较。

$$\begin{cases}y''-y=x\quad 0<x<1\\y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

解　齐次方程的特征值为 $r^2-1=0$,得 $r=\pm 1$,故方程的齐次解为

$$Y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{x}$$

设特解为 $y^*=ax+b$,代入原方程中,得 $a=-1,b=0$。通解为

$$y=Y+y^*=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{x}-x$$

由边界条件 $y(0)=y(1)=0$,得 $c_2=\dfrac{1}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}=-c_1$,于是,解析解为

$$y=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}-x=\frac{\sinh x}{\sinh 1}-x$$

取坐标函数为

$$\varphi_k=x^k(x-1),k=1,2,\cdots$$

令 $k=2$,则有

$$y_2=a_1(x^2-x)+a_2(x^3-x^2)$$

$$y_2'=a_1(2x-1)+a_2(3x^2-2x)$$

由变分原理可知,上述边值问题所对应的泛函为

$$J[y]=\int_0^1(y'^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x$$

将 y_2、y_2' 代入上式,得

$$J[c_1,c_2]=\int_0^1\{[a_1(2x-1)+a_2(3x^2-2x)]^2+$$
$$[a_1(x^2-x)+a_2(x^3-x^2)]^2+2(a_1+a_2x)(x^3-x^2)\}\mathrm{d}x$$

泛函对 a_1、a_2 求导,得

$$\frac{\partial J}{2\partial a_1}=\frac{11}{30}a_1+\frac{11}{60}a_2-\frac{1}{12}=0$$

$$\frac{\partial J}{2\partial a_2}=\frac{11}{60}a_1+\frac{1}{7}a_2-\frac{1}{20}=0$$

求解上面方程组,得

$$a_1=\frac{69}{473},a_2=\frac{77}{473}$$

于是,可获得近似解为

$$y_2 = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{77}{473}(x^3 - x^2) = \frac{x}{473}(77x^2 - 8x - 69)$$

在 $x = 0.5$ 时，解析解为 $y = -0.005659056$，近似解为 $y_2 = -0.005681818$，绝对误差为 $y_2 - y = -2.276247 \times 10^5$。相对误差为 $\frac{y_2 - y}{y} \times 100 = 0.4022339\%$。

8.8　用里茨法求下列边值问题的近似解

$$\begin{cases} y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0 & (-1 < x < 1) \\ y(1) = 0, y(-1) = 0 \end{cases}$$

解　设近似解的形式为

$$y_n = (1 - x^2)(a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^{2n})$$

取二次近似解

$$y_2 = (1 - x^2)(a_1 + a_2x^2)$$

原方程对应的泛函为

$$J = \int_{-1}^{1} [y'^2 - (1 + x^2)y^2 - 2y]\mathrm{d}x$$

将 y_2 代入泛函并积分，然后分别对 a_1、a_2 求导，得

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 4 \times \left(\frac{76}{105}a_1 + \frac{52}{315}a_2 - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_2} = 4 \times \left(\frac{52}{315}a_1 + \frac{1324}{3465}a_2 - \frac{2}{15}\right) = 0$$

求解上面方程组，得 $a_1 = \frac{3969}{4252}$，$a_2 = -\frac{231}{4252}$。于是，求得二次近似解为

$$y_2 = \frac{3969 - 4200x^2 + 231x^4}{4252}$$

8.9　用里茨法求边值问题

$$-\Delta u = \cos\frac{\pi x}{a} \quad (x, y \in D)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \Gamma \text{ 为 } D \text{ 的边界}$$

的近似解，其中区域 D 为矩形域：$0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$。

解　设近似解的形式为

$$u_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}\cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}$$

取 $i = 1, j = 0, m = 1, n = 0$，有

$$u_{10} = c_{10}\cos\frac{\pi x}{a}$$

由例 7.7.1 可知，该微分方程所对应的泛函为

$$J[u] = \iint_D [(\nabla u)^2 - 2uf]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中 $f = \cos\frac{\pi x}{a}$，将 $u_{10} = c_{10}\cos\frac{\pi x}{a}$ 代入该泛函，并注意到

$$(\nabla u_{10})^2 - 2u_{10}f = \left(-\frac{\pi}{a}c_{10}\sin\frac{\pi x}{a}\right)^2 - 2c_{10}\cos^2\frac{\pi x}{a}$$

得

$$J[c_{10}] = \int_0^a\int_0^b\left[\left(-\frac{\pi}{a}c_{10}\sin\frac{\pi x}{a}\right)^2 - 2c_{10}\cos^2\frac{\pi x}{a}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$b\int_0^a\left[\frac{\pi^2}{a^2}c_{10}^2\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right) - c_{10}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\pi^2 b}{a}c_{10}^2 - c_{10}ab$$

对 c_{10} 求偏导数,得

$$\frac{\partial J}{\partial c_{10}} = b\frac{\pi^2}{a}c_{10} - ab = 0$$

可解出 c_{10} 为

$$c_{10} = \frac{a^2}{\pi^2}$$

于是,求得第一次近似解为

$$u_{10} = \frac{a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{a}$$

又

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} = -c_{10}\frac{\pi^2}{a^2}\cos\frac{\pi x}{a}, \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial y^2} = 0$$

将以上两式代入微分方程中,有

$$c_{10}\frac{\pi^2}{a^2}\cos\frac{\pi x}{a} = \cos\frac{\pi x}{a}$$

得 $c_{10} = \frac{a^2}{\pi^2}$,于是,求得第一次近似解

$$u_{10} = \frac{a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{a}$$

由此可见,两者结果一样。

8.10　如习题 8.10 图所示,设 D 是由 $y = \pm kx$ 及 $x = a, x = b$ 所围成的梯形域,Γ 是 D 的边界,试用坎托罗维奇法求解下面的定解问题

$$\begin{cases}\Delta u = -1 & (x, y \in B)\\ u|_\Gamma = 0\end{cases}$$

解　与该问题等价的变分问题是

$$J[u] = \int_a^b\int_{-kx}^{kx}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \min$$

设一级近似解为

$$u_1 = a_1(x)(y^2 - k^2x^2)$$

泛函的被积函数为

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 - 2u_1 = (y^4 - 2k^2x^2y^2 + k^4x^4)a_1'^2 +$$

$$4(k^4x^2 + y^2)a_1^2 + 4(k^4x^3 - k^2xy^2)a_1a_1' + 2(k^2x^2 - y^2)a_1$$

将泛函对 y 积分,得

$$J[a_1] = \int_a^b\int_{-kx}^{kx}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 - 2u_1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_a^b \left[\frac{16}{15}k^5x^5a_1'^2 + \left(8k^5 + \frac{8}{3}k^3\right)x^3a_1^2 + \frac{16}{3}k^5x^4a_1a_1' + \frac{8}{3}k^3x^3a_1\right]\mathrm{d}x$$

泛函的欧拉方程为

$$\frac{2}{5}k^2x^2a_1'' + 2k^2xa_1' + (k^2-1)a_1 = \frac{1}{2}$$

这个方程在线性常微分方程中也称为**欧拉方程**。将其化成标准形式

$$x^2a_1'' + 5xa_1' + \frac{5}{2k^2}(k^2-1)a_1 = \frac{5}{4k^2}$$

设 $x = \mathrm{e}^t$ 或 $t = \ln x$，并用 d 表示对 t 的求导，则原方程可化为

$$d(d-1)a_1 + 5\mathrm{d}a_1 + \frac{5}{2k^2}(k^2-1)a_1 = \frac{5}{4k^2}$$

方程的特征方程为

$$r(r-1) + 5r + \frac{5}{2k^2}(k^2-1) = 0$$

或

$$r^2 + 4r + \frac{5}{2k^2}(k^2-1) = 0$$

可求出特征方程的两个根为

$$r_1 = \frac{-4+\sqrt{6+\frac{10}{k^2}}}{2}, r_2 = \frac{-4-\sqrt{6+\frac{10}{k^2}}}{2}$$

得余函数为

$$A = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

设特解的形式为 $a^* = c_0$，代入微分方程中，得

$$c_0 = \frac{1}{2(k^2-1)}$$

从而，系数方程的通解为

$$a_1 = A + a^* = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} + \frac{1}{2(k^2-1)}$$

式中常数 c_1 和 c_2 可由边界条件 $a_1(a) = a_1(b) = 0$ 来确定。于是第一次近似解为

$$u_1 = \left[c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} + \frac{1}{2(k^2-1)}\right](y^2 - k^2x^2)$$

8.11　用伽辽金法求下列边值问题的近似解

$$y'' - y' + 1 = 0 \quad (0 < x < 1)$$
$$y'(0) = y(1) = 0$$

解　取坐标函数系为

$$\varphi_1 = 1 - x^2, \varphi_k = (1-k)x^k, (k = 2,3,\cdots)$$

设第一近似解为 $y_1 = a_1\varphi_1 = a_1(1-x^2)$。于是有

$$y_1' = -2xa_1, y_1'' = -2a_1, y_1'' - y_1' + 1 = -2a_1 + 2xa_1 + 1$$

伽辽金方程为

$$\int_0^1(-2a_1 + 2xa_1 + 1)(1-x^2)\mathrm{d}x = 0$$

积分，得

$$-\frac{5}{6}a_1+\frac{2}{3}=0$$

可解得 $a_1=\frac{4}{5}$。于是,第一近似解为 $y_1=\frac{4}{5}(1-x^2)$。

设第二近似解为 $y_2=a_1(1-x^2)+a_2(x^2-x^3)$。于是有

$$y_2'=-2a_1x+a_2(2x-3x^2),y_2''=-2a_1+a_2(2-6x)$$

$$y_2''-y_2'+1=(-2+2x)a_1+(2-8x+3x^2)a_2+1$$

伽辽金方程组为

$$\begin{cases}\int_0^1[(-2+2x)a_1+(2-8x+3x^2)a_2+1](1-x^2)\mathrm{d}x=0\\ \int_0^1[(-2+2x)a_1+(2-8x+3x^2)a_2+1](x^2-x^3)\mathrm{d}x=0\end{cases}$$

积分,得

$$\begin{cases}-\frac{5}{6}a_1-\frac{4}{15}a_2+\frac{2}{3}=0\\ -\frac{1}{15}a_1-\frac{2}{15}a_2+\frac{1}{12}=0\end{cases}$$

可解得 $a_1=\frac{5}{7},a_2=\frac{15}{56}$。于是,第二近似解为

$$y_2=\frac{5}{7}(1-x^2)+\frac{15}{56}(x^2-x^3)=\frac{5}{56}(8-5x^2-3x^3)$$

8.12 用伽辽金法求下列微分方程边值问题的第一、第二次近似解,并在 $x=0.1n(n=1,2,\cdots,10)$ 处与解析解比较。

$$y''+y=x^2\quad(0<x<1)$$

$$y(0)=0,y(1)=1$$

解 齐次方程的解为

$$Y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

设特解为

$$y^*=b_0+b_1x+b_2x^2$$

将特解代入微分方程,得

$$2b_2+b_0+b_1x+b_2x^2=x^2$$

解得 $b_2=1,b_1=0,b_0=-2$。通解为

$$y=Y+y^*=c_1\cos x+c_2\sin x+x^2-2$$

由边界条件 $y(0)=0,y(1)=1$,得 $c_1=2,c_2=\frac{2\sin 1-1}{\cos 1}$。代入通解中,得解析解为

$$y=\frac{2\cos(1-x)-\sin x}{\cos 1}+x^2-2$$

选取试函数 $\varphi_0=x,\varphi_1=x(2-x),\varphi_2=x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right),\varphi_n=x^n\left(1-\frac{n}{n+1}x\right),(n\geqslant 2)$。

选取一次近似解为

$$y_1=x+a_1x(2-x)$$

$$y_1''=-2a_1$$

$$-y_1''-y_1+x^2=(2-2x+x^2)a_1+x^2-x$$

伽辽金方程为

$$\int_0^1[(2-2x+x^2)a_1-x+x^2](2x-x^2)\mathrm{d}x=0$$

积分,得

$$\int_0^1[(2-2x+x^2)a_1-x+x^2](2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}a_1-\frac{7}{60}=0$$

可解出 a_1 为

$$a_1=\frac{7}{48}$$

于是,得第一次近似解为

$$y_1=x+\frac{7}{48}x(2-x)$$

选取二次近似解为

$$y_2=x+a_1x(2-x)+a_2x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right),y''_2=-2a_1+(2-4x)a_2$$

$$-y''_2-y_2+x^2=(2-2x+x^2)a_1+\left(-2+4x-x^2+\frac{2}{3}x^3\right)a_2+x^2-x$$

伽辽金方程组为

$$\begin{cases}\int_0^1\left[(2-2x+x^2)a_1+\left(2+4x-x^2+\frac{2}{3}x^3\right)a_2-x+x^2\right](2x-x^2)\mathrm{d}x=0\\ \int_0^1\left[(2-2x+x^2)a_1+\left(2+4x-x^2+\frac{2}{3}x^3\right)a_2-x+x^2\right]\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}x=0\end{cases}$$

积分,得

$$\begin{cases}\frac{4}{5}a_1+\frac{17}{90}a_2-\frac{7}{60}=0\\ \frac{17}{90}a_1+\frac{29}{315}-\frac{1}{36}=0\end{cases}$$

可解出 a_1、a_2 为

$$a_1=\frac{623}{4306}=0.1446818,a_2=\frac{21}{4306}=0.0048769$$

于是,得第二次近似解为

$$y_2=x+\frac{623}{4306}x(2-x)+\frac{21}{4306}x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right)$$

将近似解与解析解的值及误差列表如下

x	$y(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	y_1 误差 %	y_2 误差 %
0.1	0.126 198	0.127 708	0.127 535	1.197 003	1.059 713
0.2	0.251 251	0.252 500	0.252 255	0.497 059	0.399 367
0.3	0.374 210	0.374 375	0.374 139	0.043 978	-0.019 122
0.4	0.494 347	0.493 333	0.493 169	-0.204 985	-0.238 306
0.5	0.611 159	0.609 375	0.609 324	-0.291 889	-0.300 199
0.6	0.724 379	0.722 500	0.722 586	-0.259 416	-0.247 518
0.7	0.833 975	0.832 708	0.832 935	-0.151 925	-0.124 752
0.8	0.940 151	0.940 000	0.940 351	-0.016 097	0.021 251
0.9	1.043 345	1.044 375	1.044 815	0.098 729	0.140 913
1.0	1.144 224	1.145 833	1.146 307	0.140 679	0.182 113

从表中可以看出,一次近似解的最大相对误差是 1.197003%,二次近似解的最大相对误差是

1.059713%,两种计算结果均接近于解析解。

8.13　用伽辽金法求解诺伊曼问题

$$\begin{cases}\Delta u = y & (x,y \in D)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0\end{cases}$$

式中 $D = \{(x,y) \mid -a < x < a, -b < y < b\}$,$\Gamma$ 为矩形域 D 的边界。

解　由方程的对称性可知,所求的解应是 x 的偶函数和 y 的奇函数,故设解的形式为

$$u_n = a_1 + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 y + a_6 x^4 + a_7 x^4 y + a_8 x^2 y^3 + a_9 y^5 + \cdots$$

取 $n = 9$,要求 u_9 满足边界条件

$$\left.\frac{\partial u_9}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = \pm (2a_3 a + 2a_5 a y + 4a_6 a^3 + 4a_7 a^3 y + 2a_8 a y^3) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u_9}{\partial y}\right|_{x=\pm b} = \pm (a_2 + 3a_4 b^2 + a_5 x^2 + a_7 x^4 + 3a_8 x^2 b^2 + 5a_9 b^4) = 0$$

由 x 和 y 的不同次幂的系数等于零,得

$$a_5 = a_7 = a_8 = 0, a_3 = -2a_6 a^2, a_2 = -3a_4 b^2 - 5a_9 b^4$$

因 u_n 是 y 的奇函数,故 $a_1 = 0$。于是可取近似解为

$$u_9 = (-3a_4 b^2 - 5a_9 b^4) y + (-2a_6 a^2) x^2 + a_4 y^3 + a_6 x^4 + a_9 y^5 =$$

$$a_6 (x^4 - 2a^2 x^2) + a_4 (y^3 - 3b^2 y) + a_9 (y^5 - 5b^4 y)$$

即取坐标函数 $\varphi_1 = x^4 - 2a^2 x^2, \varphi_2 = y^3 - 3b^2 y, \varphi_3 = y^5 - 5b^4 y$。

$$\frac{\partial^2 u_9}{\partial x^2} = (12x^2 - 4a^2) a_6, \frac{\partial^2 u_9}{\partial y^2} = 6y a_4 + 20y^3 a_9$$

$$\Delta u_9 - y = (12x^2 - 4a^2) a_6 + 6y a_4 + 20y^3 a_9 - y$$

伽辽金方程(组)为

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} (\Delta u_9 - y)\varphi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

首先将 φ_1 代入方程,积分,得

$$2b\left(\frac{24}{7} - \frac{56}{5} + \frac{16}{3}\right) a^7 a_6 = -\frac{512}{105} a^7 b a_6 = 0$$

故 $a_6 = 0$。

再将 φ_2 和 φ_3 代入伽辽金方程,积分,得

$$2a\left[6\left(\frac{2}{5} - 2\right) b^5 a_4 + 20\left(\frac{2}{7} - \frac{6}{5}\right) b^7 a_9 - \left(\frac{2}{5} - 2\right) b^5\right] = 0$$

$$2a\left[6\left(\frac{2}{7} - \frac{10}{3}\right) b^7 a_4 + 20\left(\frac{2}{9} - 2\right) b^9 a_9 - \left(\frac{2}{7} - \frac{10}{3}\right) b^7\right] = 0$$

或

$$6a_4 + \frac{80}{7} b^2 a_9 = 1$$

$$6a_4 + \frac{35}{3} b^2 a_9 = 1$$

可解得 $a_9 = 0, a_4 = \frac{1}{6}$。于是可得近似解 $u_9 = \frac{1}{6}(y^3 - 3b^2 y)$。

8.14　用伽辽金法解下列边值问题

$$[(x+2)y']' + y = 3x \qquad (0 < x < 1)$$

$$y''(0) = y'''(0) = 0$$

$$y(1) = y'(1) = 0$$

解 令 $\varphi_1'' = 12x^2, \varphi_2'' = (12x^2 + 20x^3), \varphi_k = x^{k+1}(1-x)^2, (k = 3,4,\cdots)$。考虑第二次近似解,对 φ_1'' 和 φ_2'' 积分两次,得

$$\varphi_1 = x^4 + c_1x + c_2, \varphi_2 = x^5 + x^4 + c_3x + c_4$$

$$y_2 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 = a_1(x^4 + c_1x + c_2) + a_2(x^5 + x^4 + c_3x + c_4)$$

由边界条件 $y(1) = y'(1) = 0$,有

$$y_2(1) = a_1(1 + c_1 + c_2) + a_2(2 + c_3 + c_4) = 0$$

$$y_2'(1) = a_1(4 + c_1) + a_2(9 + c_3) = 0$$

可解出 $c_1 = -4, c_2 = 3, c_3 = -9, c_4 = 7$。于是有

$$\varphi_1 = x^4 - 4x + 3, \varphi_2 = x^5 + x^4 - 9x + 7$$

$$y_2 = a_1(x^4 - 4x + 3) + a_2(x^5 + x^4 - 9x + 7)$$

$$y_2'' = 12x^2a_1 + (20x^3 + 12x^2)a_2$$

$$(x+2)y_2'' = (12x^3 + 24x^2)a_1 + (20x^4 + 52x^3 + 24x^2)a_2$$

$$[(x+2)y_2'']'' = (72x + 48)a_1 + (240x^2 + 312x + 48)a_2$$

$$[(x+2)y_2'']'' + y - 3x = (x^4 + 68x + 51)a_1 +$$

$$(x^5 + x^4 + 240x^2 + 303x + 55)a_2 - 3x$$

伽辽金方程组为

$$\begin{cases} \int_0^1 \{[(x+2)y_2'']'' + y_2 - 3x\}\varphi_1 dx = 0 \\ \int_0^1 \{[(x+2)y_2'']'' + y_2 - 3x\}\varphi_2 dx = 0 \end{cases}$$

积分,得

$$\begin{cases} \frac{3776}{45}a_1 + \frac{63428}{315}a_2 - 1 = 0 \\ \frac{63428}{315}a_1 + \frac{1595359}{3465}a_2 - \frac{17}{7} = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} 26432a_1 + 63428a_2 = 315 \\ 697708a_1 + 1595359a_2 = 8415 \end{cases}$$

可解出 a_1 和 a_2 为

$$a_1 = \frac{31208535}{2085693936} = \frac{10402845}{695231312} = 0.0149631$$

$$a_2 = \frac{-2647260}{2085693936} = -\frac{220605}{173807828} = -0.0012692$$

于是,可得第二次近似解为

$$y_2 = \frac{10402845}{695231312}(x^4 - 4x + 3) - \frac{220605}{173807828}(x^5 + x^4 - 9x + 7)$$

8.15 用伽辽金法求边值问题

$$y'' + \lambda(1 + x^2)y = 0$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

的第一、第二特征值 λ 及特征函数。

解 设二阶近似解为

$$y_2 = (1 - x^2)(a_1 + a_2 x^2)$$

计算二阶导数及余量

$$y_2'' = -2a_1 + (2 - 12x^2)a_2$$

$$R = y_2'' + \lambda(1 + x^2)y_2 = [\lambda(1 - x^4) - 2]a_1 + [2 - 12x^2 + \lambda(x^2 - x^6)]a_2$$

伽辽金方程组为

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} \{[\lambda(1 - x^4) - 2]a_1 + [\lambda(x^2 - x^6) + 2 - 12x^2]a_2\}(1 - x^2)\mathrm{d}x = 0 \\ \int_{-1}^{1} \{[\lambda(1 - x^4) - 2]a_1 + [\lambda(x^2 - x^6) + 2 - 12x^2]a_2\}(x^2 - x^4)\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

将伽辽金方程组积分并整理,得

$$\begin{cases} (48\lambda - 105)a_1 + (8\lambda - 21)a_2 = 0 \\ (88\lambda - 231)a_1 + (32\lambda - 363)a_2 = 0 \end{cases}$$

若使 a_1、a_2 有非零解,则应使它们的系数组成的行列式的值为零,即

$$\begin{vmatrix} 48\lambda - 105 & 8\lambda - 21 \\ 88\lambda - 231 & 32\lambda - 363 \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开并整理,得

$$13\lambda^2 - 267\lambda + \frac{2079}{4} = 0$$

解出 λ,可得到两个特征值

$$\lambda_1 = \frac{267 - \sqrt{44262}}{26} = 2.177486$$

$$\lambda_2 = \frac{267 + \sqrt{44262}}{26} = 18.360975$$

由伽辽金方程的积分得

$$a_1 = \frac{21 - 8\lambda}{48\lambda - 105}a_2$$

分别将 λ_1 和 λ_2 代入上式,得

$$a_1 = \frac{21 - 8\lambda_1}{48\lambda_1 - 105}a_2 = \frac{26663 + 364\sqrt{4918}}{-7007}a_2$$

和

$$a_1 = \frac{21 - 8\lambda_2}{48\lambda_2 - 105}a_2 = \frac{26663 - 364\sqrt{4918}}{-7007}a_2$$

相应的特征函数为

$$y_{21} = (1 - x^2)\left(\frac{26663 + 364\sqrt{4918}}{-7007} + x^2\right)a_2$$

$$y_{22} = (1 - x^2)\left(\frac{26663 - 364\sqrt{4918}}{-7007} + x^2\right)a_2$$

8.16 已知如习题 8.16 图所示的圆形薄板,半径为 R,周边固定,承受均匀分布载荷 q 的作

用，设挠度曲面函数为$w = a\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2$，试用伽辽金法求其挠度。

解 圆形薄板的微分方程为

$$\Delta^2 w = \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}r^4} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{q}{D} \tag{1}$$

挠度曲面函数为

$$w = a\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 = a\left(1 - 2\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4}\right) \tag{2}$$

各阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}r^4} = \frac{24a}{R^4}, \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} = \frac{48a}{R^4}, \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} = \frac{12a}{R^4} - \frac{4a}{R^2 r^2}, \frac{1}{r^3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{4a}{R^4} - \frac{4a}{R^2 r^2} \tag{3}$$

将以上各阶导数代入圆形薄板的微分方程，得

$$\Delta^2 w = \frac{64a}{R^4} = \frac{q}{D} \tag{4}$$

伽辽金方程为

$$\int_0^a \left(\frac{64a}{R^4} - \frac{q}{D}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \mathrm{d}r = 0 \tag{5}$$

上式的积分结果为

$$\frac{8R}{15}\left(\frac{64a}{R^4} - \frac{q}{D}\right) = 0 \tag{6}$$

或

$$a = \frac{qR^4}{64D} \tag{7}$$

其实，由式(4)可直接得到式(7)。将式(7)代入式(2)，得

$$w = \frac{qR^4}{64D}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \tag{8}$$

式(8)与弹性力学的精确解相同。

8.17 用伽辽金法求特征值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

的第一、第二特征值和相应的特征函数的近似解，并于该问题的精确解比较。

解 设近似解为

$$y_2 = x(1-x)(a_1 + a_2 x) = (x - x^2)a_1 + (x^2 - x^3)a_2$$

求导数及余量

$$y_2'' = -2a_1 + (2 - 6x)a_2$$

$$R = y_2'' + \lambda y_2 = [\lambda(x - x^2) - 2]a_1 + [\lambda(x^2 - x^3) + 2 - 6x]a_2$$

伽辽金方程组为

$$\begin{cases} \int_0^1 \{[\lambda(x - x^2) - 2]a_1 + [\lambda(x^2 - x^3) + 2 - 6x]a_2\}(x - x^2)\mathrm{d}x = 0 \\ \int_0^1 \{[\lambda(x - x^2) - 2]a_1 + [\lambda(x^2 - x^3) + 2 - 6x]a_2\}(x^2 - x^3)\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

积分并整理，得

$$\begin{cases} (2\lambda - 20)a_1 + (\lambda - 10)a_2 = 0 \\ (7\lambda - 70)a_1 + (4\lambda - 56)a_2 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组有非零解的充要条件是其系数行列式的值为零，即

$$\begin{vmatrix} 2\lambda - 20 & \lambda - 10 \\ 7\lambda - 70 & 4\lambda - 56 \end{vmatrix} = 0$$

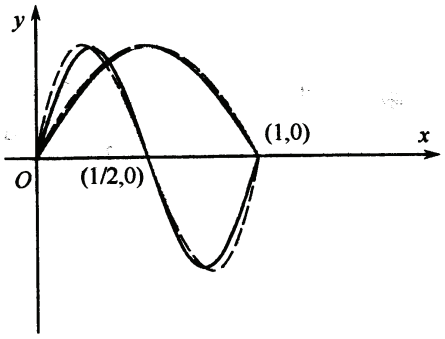
将行列式展开,得

$$\lambda^2 - 52\lambda + 420 = 0$$

解出 λ,可得到两个特征值

$$\lambda_1 = \frac{52 - \sqrt{52^2 - 4 \times 420}}{2} = 26 - 16 = 10$$

$$\lambda_2 = \frac{52 + \sqrt{52^2 - 4 \times 420}}{2} = 26 + 16 = 42$$



习题 8.17 图　精确解与近似解对比图

将 λ_1 代入齐次线性方程组,若使其成立,应有 $a^2 = 0, a_1$ 可取任意值,相应的特征函数为 $y = x(1-x)a_1$,将代入齐次线性方程组,得 $a_i = -\frac{1}{2}a_2$,相应的特征函数为 $y = x(1-x)\left(x - \frac{1}{2}\right)a_2$。

原微分方程的通解为

$$y = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件 $y(0) = 0$,得 $c_1 = 0$,得

$$y = c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件 $y(1) = 0$,得 $\sqrt{\lambda} = n\pi$,即 $\lambda = n^2\pi^2$,于是得解为

$$y = c_2\sin n\pi x$$

当 n 分别等于 1 和 2 时,得最小特征值 $\lambda|_{n=1} = \pi^2$,次最小特征值 $\lambda|_{n=2} = 4\pi^2$。伽辽金法得到的最小特征值及次最小特征值的相对误差分别为

$$Err_1 = \frac{10 - \pi^2}{\pi^2} = 1.321187\%$$

$$Err_2 = \frac{42 - 4\pi^2}{4\pi^2} = 6.387246\%$$

精确解与近似解见习题 8.17 图,其中实线表示精确解,虚线表示近似解。

8.18　设弦振动方程为

$$(l + x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 l 为弦长,试求两端固定时弦的振动频率。

解　设 $u(x,t) = v(x)\sin\omega t$,将弦振动方程化为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{a^2}(1 + x)v = 0$$

令 $\lambda = \frac{\omega^2}{a^2}$,则上述问题化为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda(l + x)v = 0$$

$$v(0) = v(l) = 0$$

的特征值问题。设近似解为

$$v_2 = a_1\sin\frac{\pi}{l}x + a_2\sin\frac{2\pi}{l}x$$

求二阶导数及余量

$$v_2'' = -a_1\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi}{l}x - a_2\frac{4\pi^2}{l^2}\sin\frac{2\pi}{l}x$$

$$R = v_2'' + \lambda(l+x)u_2 =$$

$$-a_1\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi}{l}x - a_2\frac{4\pi^2}{l^2}\sin\frac{2\pi}{l}x + \lambda(l+x)\left(a_1\sin\frac{\pi}{l}x + a_2\sin\frac{2\pi}{l}x\right)$$

伽辽金方程组为

$$\int_0^1 R\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2)$$

将 R 的具体表达式代入上式,积分结果为关于 a_1、a_2 的齐次线性方程组

$$\left(\frac{3}{4}\lambda l^2 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{l}\right)a_1 - \frac{8\lambda l^2}{9\pi^2}a_2 = 0$$

$$-\frac{8\lambda l^2}{9\pi^2}a_1 + \left(\frac{3}{4}\lambda l^2 - \frac{2\pi^2}{l}\right)a_2 = 0$$

将各项乘以 $36\pi^2 l$,得

$$(27\pi^2\lambda l^3 - 18\pi^4)a_1 - 32\lambda l^3 a_2 = 0$$

$$-32\lambda l^3 a_1 + (27\pi^2\lambda l^3 - 72\pi^4)a_2 = 0$$

方程组有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 27\pi^2\lambda l^3 - 18\pi^4 & -32\lambda l^3 \\ -32\lambda l^3 & 27\pi^2\lambda l^3 - 72\pi^4 \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开并整理,得

$$(729\pi^4 - 1024)l^6\lambda^2 - 2430\pi^6 l^3\lambda + 1296\pi^8 = 0$$

这是关于 λ 的一元二次方程,其解为

$$\lambda = \frac{1215\pi^6 \pm \pi^4\sqrt{(1215\pi^2)^2 - 1296(729\pi^4 - 1024)}}{(729\pi^4 - 1024)l^3}$$

解得两个特征值为

$$\lambda_1 = \frac{6.548458}{l^3}, \lambda_2 = \frac{26.831570}{l^3}$$

于是,可求得弦的振动频率为

$$\omega_1 = a\sqrt{\lambda_1} = \frac{2.558995a\sqrt{l}}{l^2}, \omega_2 = a\sqrt{\lambda_2} = \frac{5.179920a\sqrt{l}}{l^2}$$

将两个特征值代入线性齐次方程,得

$$a_1 = \frac{32\lambda_i l^3}{27\pi^2\lambda_i l^3 - 18\pi^4}a_2 \quad (i = 1,2)$$

相应的特征函数为

$$v_2 = \left(\frac{32\lambda_i l^3}{27\pi^2\lambda_i l^3 - 18\pi^4}\sin\frac{\pi}{l}x + \sin\frac{2\pi}{l}x\right)a_2 \quad (i = 1,2)$$

代回到原来的变量,得

$$u_2 = \left(\frac{32\lambda_i l^3}{27\pi^2\lambda_i l^3 - 18\pi^4}\sin\frac{\pi}{l}x + \sin\frac{2\pi}{l}x\right)a_2\sin\omega_i t \quad (i = 1,2)$$

8.19 求泛函 $J[y] = \int_1^{\mathrm{e}}(6y^2 + x^2y'^2)\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数,使它符合边界条件 $y(1) = y(\mathrm{e}) = 0$ 和等周条件 $\int_1^{\mathrm{e}} y^2\mathrm{d}x = 1$。

解 与泛函相应的施图姆—刘维尔方程是

$$12y - 4xy' - 2x^2y'' = \lambda y \tag{1}$$

或

$$2x^2y'' + 4xy' + (\lambda - 12)y = 0 \tag{2}$$

作代换，$x = e^t$，则式(2)可化为常系数二阶线性方程

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + (\lambda - 12)y = 0 \tag{3}$$

方程的特征方程是

$$2r^2 + 2r + \lambda - 12 = 0 \tag{4}$$

式(4)的两个根为 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(2\lambda - 25)}$。当 $2\lambda - 25 > 0$ 即 $\lambda > \frac{25}{2}$ 时，式(3)的通解是

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2\lambda - 25}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{2\lambda - 25}}{2}t\right) \tag{5}$$

将变量 t 还原到变量 x，可得式(2)的通解为

$$y(x) = c_1\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25}\ln x\right)}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25}\ln x\right)}{\sqrt{x}} \tag{6}$$

根据边界条件 $y(1) = y(e) = 0$，有

$$\begin{cases} c_1 + 0 = 0 \\ c_1\dfrac{\cos\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25}}{\sqrt{2}} + c_2\dfrac{\sin\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25}}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

若式(7)有非零解，则它的系数行列式应为零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25}\right)}{\sqrt{2}} & \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25}\right)}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25}\right)}{\sqrt{2}} = 0 \tag{8}$$

因而 $\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda - 25} = n\pi$。特征值是 $\lambda_n = \frac{25}{2} + 2n^2\pi^2 = \frac{25 + 4n^2\pi^2}{2}$，其中 $n = 1,2,\cdots$。显然，由式(7)的第一式可知 $c_1 = 0$。将这些关系代入式(6)，可得到所给问题的特征函数

$$y_n = \frac{c_2\sin(n\pi\ln x)}{\sqrt{x}} \tag{9}$$

式中，常数 c_2 可以根据正规特征函数即本题的等周条件来确定，有

$$\int_1^e\left[\frac{c_2\sin(n\pi\ln x)}{\sqrt{x}}\right]^2dx = \frac{1}{2}c_2^2\int_1^e\left[\frac{1 - \cos(n\pi\ln x)}{x}\right]dx = \frac{1}{2}c_2^2 = 1 \tag{10}$$

可得 $c_2 = \pm\sqrt{2}$。于是特征函数为

$$y_n = \pm\frac{\sqrt{2}\sin(n\pi\ln x)}{\sqrt{x}} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{11}$$

8.20　求泛函 $J[y] = \int_\pi^{2\pi}(y^2 - y'^2)dx$ 的特征值和特征函数，使它符合边界条件 $y(\pi) = y(2\pi) = 0$ 和等周条件 $\int_\pi^{2\pi} y^2dx = 1$。

解　与泛函相应的施图姆—刘维尔方程是

$$y + y'' = \lambda y \tag{1}$$

或

$$y'' + (1-\lambda)y = 0 \tag{2}$$

式(2)特征方程是

$$r^2 + 1 - \lambda = 0 \tag{3}$$

式(3)的两个根为 $r_{1,2} = \pm\sqrt{-(1-\lambda)}$。当 $1-\lambda > 0$ 即 $\lambda < 1$ 时,式(2)的通解是

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{1-\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{1-\lambda}x) \tag{4}$$

根据边界条件 $y(\pi) = y(2\pi) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1\cos(\pi\sqrt{1-\lambda}) + c_2\sin(\pi\sqrt{1-\lambda}) = 0 \\ c_1\cos(2\pi\sqrt{1-\lambda}) + c_2\sin(2\pi\sqrt{1-\lambda}) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

若式(5)有非零解,则 c_1 和 c_2 的系数行列式应为零,即

$$\begin{vmatrix} \cos(\pi\sqrt{1-\lambda}) & \sin(\pi\sqrt{1-\lambda}) \\ \cos(2\pi\sqrt{1-\lambda}) & \sin(2\pi\sqrt{1-\lambda}) \end{vmatrix} = \sin(\pi\sqrt{1-\lambda}) = 0 \tag{6}$$

因而 $\pi\sqrt{1-\lambda} = n\pi$。特征值是 $\lambda_n = 1 - n^2$,其中 $n = 1,2,\cdots$。将特征值代入式(5),可得 $c_1 = 0$。将这些关系代入式(4),可得到所给问题的特征函数

$$y_n = c_2\sin nx \tag{7}$$

式中,常数 c_2 可以根据正规特征函数即本题的等周条件来确定,有

$$\int_{\pi}^{2\pi} c_2^2\sin^2(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}c_2^2\int_{\pi}^{2\pi}[1-\cos(2nx)]\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}c_2^2 = 1 \tag{8}$$

可得 $c_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$。于是特征函数为

$$y_n = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx) \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{9}$$

8.21 求泛函 $J[y] = \int_0^1[3y^2 - (x+1)^2y'^2]\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数,使它符合边界条件 $y(0) = y(1) = 0$ 和等周条件 $\int_0^1 y^2\mathrm{d}x = 1$。

解 与泛函相应的施图姆—刘维尔方程是

$$3y + 2(x+1)y' + (x+1)^2y'' = \lambda y \tag{1}$$

或

$$(x+1)^2y'' + 2(x+1)y' + (3-\lambda)y = 0 \tag{2}$$

作代换,$x + 1 = \mathrm{e}^t$,则式(2)可化为常系数二阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (3-\lambda)y = 0 \tag{3}$$

方程的特征方程是

$$r^2 + r + (3-\lambda) = 0 \tag{4}$$

式(4)的两个根为 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(11-4\lambda)}$。当 $11-4\lambda > 0$ 即 $\lambda < \frac{11}{4}$ 时,式(3)的通解是

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{11-4\lambda}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{11-4\lambda}}{2}t\right) \tag{5}$$

将变量 t 还原到变量 x,可得式(2)的通解为

$$y(x) = c_1\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln(x+1)\right]}{\sqrt{x+1}} + c_2\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln(x+1)\right]}{\sqrt{x+1}} \tag{6}$$

根据边界条件 $y(0)=y(1)=0$,有

$$\begin{cases} c_1+0=0 \\ c_1\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln 2\right)}{\sqrt{2}}+c_2\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln 2\right)}{\sqrt{2}}=0 \end{cases} \tag{7}$$

若式(7)有非零解,则它的系数行列式应为零,即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln 2\right)}{\sqrt{2}} & \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln 2\right)}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln 2\right)}{\sqrt{2}}=0 \tag{8}$$

因而 $\frac{1}{2}\sqrt{11-4\lambda}\ln 2=n\pi$。特征值是 $\lambda_n=\frac{11}{4}-\frac{n^2\pi^2}{\ln^2 2}$,其中 $n=1,2,\cdots$。显然,由式(7)的第一式可知 $c_1=0$。将这些关系代入式(6),可得到所给问题的特征函数

$$y_n=\frac{c_2\sin\left[\dfrac{n\pi(x+1)}{\ln 2}\right]}{\sqrt{x+1}} \tag{9}$$

式中,常数 c_2 可以根据正规特征函数即本题的等周条件来确定,有

$$\int_0^1\left\{\frac{c_2\sin\left[\dfrac{n\pi\ln(x+1)}{\ln 2}\right]}{\sqrt{x+1}}\right\}^2\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}c_2^2\int_0^1\frac{1-\cos\left[\dfrac{n\pi\ln(x+1)}{\ln 2}\right]}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}c_2^2\ln 2=1 \tag{10}$$

可得 $c_2=\pm\sqrt{\frac{2}{\ln 2}}$。于是特征函数为

$$y_n=\pm\frac{\sqrt{2}\sin\left[\dfrac{n\pi\ln(x+1)}{\ln 2}\right]}{\sqrt{(x+1)\ln 2}}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{11}$$

8.22 求泛函 $J[y]=\int_0^3[(2x+3)y'^2-y^2]\mathrm{d}x$ 的特征值和特征函数,使它符合边界条件 $y(0)=y(3)=0$ 和等周条件 $\int_0^3 y^2\mathrm{d}x=1$。

解 与泛函相应的施图姆—刘维尔方程是

$$-y-2(2x+3)y'-(2x+3)^2y''=\lambda y \tag{1}$$

或

$$(2x+3)^2y''+2(2x+3)y'+(\lambda+1)y=0 \tag{2}$$

作代换,$2x+3=\mathrm{e}^t$,则式(2)可化为常系数二阶线性方程

$$4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(\lambda+1)y=0 \tag{3}$$

方程的特征方程是

$$4r^2+4r+\lambda+1=0 \tag{4}$$

式(4)的两个根为 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}$。当 $\lambda>0$ 时,式(3)的通解是

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t\right) \tag{5}$$

因而式(2)的通解为

$$y(x) = c_1\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln(2x+3)\right]}{\sqrt{2x+3}} + c_2\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln(2x+3)\right]}{\sqrt{2x+3}} \tag{6}$$

根据边界条件 $y(0) = y(3) = 0$,有

$$\begin{cases} c_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln 3\right) + c_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln 3\right) = 0 \\ c_1\cos(\sqrt{\lambda}\ln 3) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\ln 3) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

若式(7)有非零解,则它的系数行列式应为零,即

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln 3\right) & \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln 3\right) \\ \cos(\sqrt{\lambda}\ln 3) & \sin(\sqrt{\lambda}\ln 3) \end{vmatrix} = \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln 3\right) = 0 \tag{8}$$

因而 $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\ln 3 = n\pi$。特征值是 $\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{\ln^2 3}$,其中 $n = 1,2,\cdots$。由式(7)的第一式可知 $c_1 = 0$。将这些关系代入式(6),可得到所给问题的特征函数

$$y_n = \frac{c_2\sin\left[\frac{n\pi\ln(2x+3)}{\ln 3}\right]}{\sqrt{2x+3}} \tag{9}$$

式中,常数 c_2 可以根据正规特征函数即本题的等周条件来确定,有

$$\int_0^1\left\{\frac{c_2\sin\left[\frac{n\pi\ln(2x+3)}{\ln 3}\right]}{\sqrt{2x+3}}\right\}^2 dx = \frac{1}{2}c_2^2\int_0^1\frac{1-\cos\left[\frac{n\pi\ln(2x+3)}{\ln 3}\right]}{2x+3}dx = \frac{1}{4}c_2^2\ln 3 = 1 \tag{10}$$

可得 $c_2 = \pm\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$。于是特征函数为

$$y_n = \pm\frac{2\sin\left[\frac{n\pi\ln(2x+3)}{\ln 3}\right]}{\sqrt{(2x+3)\ln 3}} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{11}$$

第9章 力学中的变分原理及其应用习题解

9.1 设质量为 m 的质点在均匀重力场中自由降落,试用哈密顿原理求质点的运动方程。

解 取 y 轴垂直向上,拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

哈密顿作用量可表示为下列泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1}L\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy\right)dt$$

泛函的欧拉方程为

$$-mg - m\ddot{y} = 0$$

或

$$\ddot{y}+g=0$$

9.2 设质量为 m 的一个质点在保守力场中运动，试求它在球坐标系中的运动方程。假设势能 V 在球坐标表达式 $U(r,\theta,\varphi)$ 为已知。

解 在球坐标系下，r、θ、φ 三个方向的速度分别为

$$v_r=r',v_\theta=(r\sin\varphi)\theta',v_\varphi=r\varphi'$$

质点的动能和势能为

$$T=\frac{1}{2}m[r'^2+(r\sin\varphi\theta')^2+(r\varphi')^2],V=V(r,\theta,\varphi)$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m[r'^2+(r\sin\varphi\theta')^2+(r\varphi')^2]-V(r,\theta,\varphi)$$

哈密顿作用量可表示为下列泛函

$$J[r,\theta,\varphi]=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{1}{2}m[r'^2+(r\sin\varphi\theta')^2+(r\varphi')^2]-V(r,\theta,\varphi)\right\}\mathrm{d}t$$

欧拉方程组为

$$m[r''-r(\sin\varphi\theta')^2-r\varphi'^2]+V_r(r,\theta,\varphi)=0$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\sin^2\varphi\theta')+V_\theta(r,\theta,\varphi)=0$$

$$m\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\varphi')-r^2\theta'^2\sin\varphi\cos\varphi\right]+V_\varphi(r,\theta,\varphi)=0$$

上面三个方程即为 r、θ、φ 三个方向的运动方程。

9.3 如习题 9.3 图所示，设复摆的长度为 L_1 和 L_2，质量为 m_1 和 m_2。试求每个摆的运动方程。

解 把复摆看成一个质点系，取极坐标进行求解。设独立坐标为 θ_1、θ_2。极坐标与直角坐标的关系为

$$x_1=L_1\sin\theta_1,y_1=L_1\cos\theta_1,x_2=L_1\sin\theta_1+L_2\sin\theta_2,$$

$$y_2=L_1\cos\theta_1+L_2\cos\theta_2,x_1'=L_1\theta_1'\cos\theta_1,y_1'=-L_1\theta_1'\sin\theta_1,$$

$$x_2'=L_1\theta_1'\cos\theta_1+L_2\theta_2'\cos\theta_2,y_2'=-L_1\theta_1'\sin\theta_1-L_2\theta_2'\sin\theta_2。$$

系统动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1(x_1'^2+y_1'^2)+\frac{1}{2}m_2(x_2'^2+y_2'^2)=$$

$$\frac{1}{2}m_1L_1^2\theta_1'^2+\frac{1}{2}m_2[L_1^2\theta_1'^2+L_2^2\theta_2'^2+2L_1L_2\theta_1'\theta_1'^2\cos(\theta_1-\theta_2)]$$

系统势能为

$$V=-m_1gL_1\cos\theta_1-m_2g(L_1\cos\theta_1+L_2\cos\theta_2)$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)L_1^2\theta_1'^2+\frac{1}{2}m_2[L_2^2\theta_2'^2+2L_1L_2\theta_1'\theta_2'\cos(\theta_1-\theta_2)]+$$

$$(m_1 + m_2)gL_1\cos\theta_1 + m_2gL_2\cos\theta_2$$

哈密顿作用量为

$$J[\theta_1, \theta_2] = \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t$$

欧拉方程组为

$$\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)L_1(L_1\theta_1'' + g\sin\theta_1) + \\
&m_2L_1L_2[\theta_2''\cos(\theta_1 - \theta_2) - \theta_2'(\theta_1' - \theta_2')\sin(\theta_1 - \theta_2) + \\
&\theta_1'\theta_2'\sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0 \\
&m_2\{L_2^2\theta_2'' + L_1L_2[-\theta_1'\theta_2'\sin(\theta_1 - \theta_2) + \theta_1''\cos(\theta_1 - \theta_2) + \\
&\theta_1'(\theta_1' - \theta_2')\sin(\theta_1 - \theta_2)]\} + m_2gL_2\sin\theta_2 = 0
\end{aligned}$$

化简,得

$$\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)(L_1\theta_1'' + g\sin\theta_1) + m_2L_2[\theta_2''\cos(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2'^2\sin(\theta_1 - \theta_2)] = 0 \\
&L_2\theta_2'' + L_1[\theta_1''\cos(\theta_1 - \theta_2) - \theta_1'^2\sin(\theta_1 - \theta_2)] + g\sin\theta_2 = 0
\end{aligned}$$

9.4 **开普勒问题**。开普勒问题是描述行星运动的模型,它是经典力学所研究的最重要的问题之一。考虑单个行星环绕太阳运动的最简单问题,忽略太阳系其他行星的引力作用,假设太阳固定在原点。开普勒问题可抽象成这样的问题:设在 xOy 平面内,质量为 m 的质点由于受向原点的引力的作用而运动,吸引力的大小为 $F(r)$,其中 r 是质点到原点的距离。试用哈密顿原理建立质点运动方程。

解 取极坐标系以确定质点 m 的位置。直角坐标与极坐标的关系为

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

质点的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) =$$

$$\frac{1}{2}m[(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2] = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

质点所作的微元功为

$$\delta W = -F(r)\mathrm{d}r$$

上式等号右边的负号表示引力 $F(r)$ 的方向与 r 的方向相反。

因为当主动力有势时,有 $\delta W = -\delta V$,故质点的势能为

$$V = \int_r^{\infty} F(r)\mathrm{d}r$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V$$

根据哈密顿原理,有

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = \delta\int_{t_0}^{t_1}(T - V)\mathrm{d}t = 0$$

欧拉方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(T-V)}{\partial r}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial(T-V)}{\partial \dot{r}}=0\\ \dfrac{\partial(T-V)}{\partial \theta}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial(T-V)}{\partial \dot{\theta}}=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}mr\dot{\theta}^2-F(r)-m\ddot{r}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta})=0\end{cases}$$

由方程组第二式可知 $mr^2\dot{\theta}=c$，即常数。将其变形为

$$A=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{c}{2m}$$

由于质点质量为已知，c 为常数，故 A 为常数，在极坐标下，它表示矢径与质点速度围成的面积。由此推出**开普勒第二定律**：从原点到质点的矢径以恒定速率扫过面积。该定律也可表述为：从原点到质点的矢径在相同的时间扫过相等的面积。开普勒第二定律也称为**开普勒面积定律**。

若方程组的第一式消去 $\dot{\theta}$，则得

$$m\ddot{r}-\frac{c^2}{mr^3}=-F(r)$$

根据万有引力定律，有

$$F(r)=-\frac{GmM}{r^2}$$

其中 G 是万有引力常数，m 是行星的质量，M 是太阳的质量。

9.5　弹性杆的纵向振动方程。设长度为 l 的均匀杆放在 Ox 轴上，其线密度为 ρ，因为杆有弹性，所以把它所受的轴向外力撤去后，它将沿着 Ox 轴方向运动，试建立此杆运动的微分方程。

解　杆受轴向外力后将被拉伸或压缩，所具有的势能与杆长的伸长或缩短量成正比，设比例系数为 E(杨氏模量)，杆的横截面积为 A，杆的位移方程为

$$u=(x,t)$$

在 t 时刻，杆在区间$[x,x+\Delta x]$上的动能为

$$\Delta T=\frac{1}{2}\rho A\Delta x u_t^2$$

其中 u_t 为杆的位移速度。杆的总动能和势能为

$$T=\frac{\rho A}{2}\int_0^l u_t^2\mathrm{d}x,\ V=AE\left(\int_0^l\sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x-l\right)$$

利用泰勒公式，有$\sqrt{1+u_x^2}\approx 1+\frac{1}{2}u_x^2$，于是

$$V=\frac{AE}{2}\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x$$

根据哈密顿原理，泛函

$$J=\frac{A}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho u_t^2-Eu_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

的变分 $\delta J=0$，可得欧拉方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{E}{\rho}\right)$$

此即杆的运动方程。可见，杆的运动方程与弦的振动方程具有相同的形式。

9.6　如习题9.6图所示，设长度为 l 的梁两端简支，梁的刚度为 EI，在梁上的某点 C 作用一集中载荷 P。试用广义坐标求梁的挠度。

解　设梁的挠度为

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

点 C 的挠度为

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi c}{l} \tag{2}$$

载荷 P 产生的位能是

$$V = -Py(c) = -P\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi c}{l} \tag{3}$$

弹性位能是

$$U = \frac{1}{2}EI\int_0^l y''^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{l^2} a_n \sin \frac{n\pi}{l}x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^4 EI}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 \tag{4}$$

式(4)用到了公式

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l}x \sin \frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{l}{2} & (m = n) \end{cases} \tag{5}$$

总位能是

$$\Pi = V + U = -P\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi c}{l} + \frac{\pi^4 EI}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 \tag{6}$$

当梁处于稳定平衡状态时，Π 取极小值，有

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0 \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{7}$$

或

$$-P\sin \frac{n\pi c}{l} + \frac{\pi^4 EI}{2l^3} n^4 a_n = 0 \tag{8}$$

解出 a_n 为

$$a_n = \frac{2Pl^3}{\pi^4 n^4 EI}\sin \frac{n\pi c}{l} \tag{9}$$

于是，可得梁的挠度方程

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Pl^3}{\pi^4 n^4 EI}\sin \frac{n\pi c}{l}\sin \frac{n\pi x}{l} \tag{10}$$

由此可见，当 $c = 0$ 或 $c = l$ 时，$y \equiv 0$，即当集中力作用在端点时，梁不发生弯曲。当集中力作用在梁的中点时，有 $c = l/2$，该点的挠度为

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots\right] \tag{11}$$

由参考文献[10]习题2962的部分解可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96} \tag{12}$$

习题2962题的求解过程及上面的结果见参考文献[10]的第405～409页。将式(12)代入式(11),可得梁在中点的挠度为

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{Pl^3}{48EI} \tag{13}$$

这正是材料力学的精确解。

9.7　求承受均匀载荷 q 的固支梁的挠曲线,如习题9.7图所示,梁的长度为 l,刚度为 EI。

解　设梁的挠曲线具有三角级数的形式

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

载荷 q 产生的位能是

$$V=-\int_0^l qy\mathrm{d}x=-\int_0^l q\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{2}$$

梁的弹性位能是

$$U=\frac{1}{2}EI\int_0^l y''^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}EI\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2\pi^2}{l^2}a_n\cos\frac{2n\pi}{l}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi^4EI}{l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2 \tag{3}$$

式(3)用到了公式

$$\int_0^l\cos\frac{2m\pi}{l}x\cos\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \dfrac{l}{2} & (m=n)\end{cases} \tag{4}$$

梁的总势能为

$$\Pi=U+V=\frac{4\pi^4EI}{l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2-\int_0^l q\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x \tag{5}$$

当梁处于稳定平衡状态时,Π 取极小值,有

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}=0\quad(n=1,2,\cdots) \tag{6}$$

或

$$-ql+\frac{8\pi^4EI}{l^3}n^4a_n=0 \tag{7}$$

解出 a_n 为

$$a_n=\frac{ql^4}{8\pi^4n^4EI} \tag{8}$$

于是,可得梁的挠度方程

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ql^4}{8\pi^4n^4EI}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)=\frac{ql^4}{8\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right) \tag{9}$$

当 $x=l/2$ 时,得梁在中点的挠度为

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ql^4}{8\pi^4n^4EI}(1-\cos n\pi)=\frac{ql^4}{8\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^4} \tag{10}$$

由参考文献[10]习题2962的部分解可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \tag{11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720} \tag{12}$$

将式(11)和式(12)代入式(10),可得梁在中点的挠度为

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{ql^4}{384EI} \tag{13}$$

根据材料力学的理论,梁的挠度微分方程为

$$EIy^{(4)}=q \tag{14}$$

积分4次,得

$$y=\frac{q}{24EI}x^4+\frac{c_1}{6}x^3+\frac{c_2}{2}x^2+c_3x+c_4 \tag{15}$$

将上式求导,得

$$y'=\frac{q}{6EI}x^3+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3 \tag{16}$$

根据边界条件,当 $x=0$ 和 $x=l$ 时,$y=0,y'=0$,得 $c_1=-\frac{q}{2EI}l,c_2=\frac{q}{12EI}l^2,c_3=0,c_4=0$。于是,可得梁的挠度曲线方程为

$$y=\frac{qx^2}{24EI}(x^2-2lx+l^2)\quad(0\leqslant x\leqslant l) \tag{17}$$

当 $x=l/2$ 时,有

$$y\Big|_{x=\frac{l}{2}}=\frac{ql^2}{96EI}\left(\frac{1}{4}l^2-l^2+l^2\right)=\frac{ql^4}{384EI} \tag{18}$$

由此可见,式(13)正是材料力学的精确解。

9.8　设在 xOy 平面内有一完全柔性的薄膜,周边为简支,而且承受一个在每单位长度(应为面积)内为 τ 的张力,薄膜的质量面密度为 ρ,并假设在薄膜内处处都为常数。假若在薄膜上作用一个法向的分布压力 $q(t,x,y)$,因而薄膜产生了挠度 w,设为小变形。试求薄膜的运动方程并证明静挠度满足方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{q}{\tau}$$

提示:根据微分几何理论,薄膜在变形状态下的表面面积为

$$A=\iint_S\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解　设薄膜的方程为

$$w=w(x,y)$$

薄膜的动能为

$$T=\iint_S\frac{1}{2}\rho w_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

薄膜承受载荷之前的面积为

$$S = \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

薄膜被拉伸后所具有的变形能与薄膜的面积改变量成正比，比例系数为 τ（张力），此时，薄膜的变形能为

$$U = \tau \iint_S (\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2} - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在小变形的情况下，利用泰勒公式，有

$$\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2} \approx 1 + \frac{1}{2}w_x^2 + \frac{1}{2}w_y^2$$

于是有

$$U = \frac{\tau}{2} \iint_S (w_x^2 + w_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理，薄膜被拉伸后所具有的势能与薄膜的伸长量 w 成正比，它等于外力 q（正向与 w 的正向相同）所作的功的负数，即

$$V = - \iint_S qw\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

拉格朗日函数为

$$L = T - U - V = \iint_S \left[\frac{1}{2}\rho w_t^2 - \frac{\tau}{2}(w_x^2 + w_y^2) + qw\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据哈密顿原理建立的泛函为

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \iint_S \left[\frac{1}{2}\rho w_t^2 - \frac{\tau}{2}(w_x^2 + w_y^2) + qw\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

若使能量最小，应使其变分 $\delta J = 0$，可得欧拉方程

$$q - \rho w_{tt} + \tau(w_{xx} + w_{yy}) = 0$$

此即薄膜的运动方程，它可表示为

$$\rho w_{tt} - \tau(w_{xx} + w_{yy}) = q$$

这是二维波动方程。当薄膜静止时有 $w_{tt} = 0$，上式可化为

$$w_{xx} + w_{yy} = \Delta w = - \frac{q}{\tau}$$

此即薄膜的静挠度方程，式中 Δ 为二维拉普拉斯算子。

9.9　刚度为 k 的弹簧挂着一个质量 m 的物体。如果悬挂点按照 $S = a\sin\omega t$ 的规律竖直地运动，试用拉格朗日方程建立描述该质量运动的微分方程；如果悬挂点质量在其平衡位置上静止时开始运动，试求解该方程。

解　取 y 轴过原点且方向向下。系统的动能、势能和弹簧变形能分别为

$$T = \frac{1}{2}my'^2, V = - mg(y - a\sin\omega t), U = \frac{1}{2}k(y - a\sin\omega t + y_0)^2$$

式中 y_0 为弹簧在平衡位置时的变形量。

拉格朗日函数为

$$L = T - V - U = \frac{1}{2}my'^2 + mg(y - a\sin\omega t) - \frac{1}{2}k(y - a\sin\omega t + y_0)^2$$

根据哈密顿原理建立的泛函为

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}my'^2 + mg(y - a\sin\omega t) - \frac{1}{2}k(y - a\sin\omega t - y_0)^2\right]\mathrm{d}t$$

泛函的欧拉方程为

$$mg - k(y - a\sin\omega t - y_0) - my'' = 0$$

因 $mg = ky_0$,故欧拉方程可写成

$$y'' + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}a\sin\omega t$$

方程的齐次解为

$$Y = c_1\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

设特解为

$$y^* = C\sin\omega t$$

将特解代入欧拉方程,有

$$-mC\omega^2\sin\omega t + kC\sin\omega t = ka\sin\omega t$$

比较两边系数,可得

$$C = \frac{ka}{k - m\omega^2} = \frac{a}{1 - m\omega^2/k}$$

方程的通解为

$$y = Y + y^* = c_1\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{a}{1 - m\omega^2/k}\sin\omega t$$

由初始条件,$t = 0, y = 0$,得 $c_2 = 0$,故

$$y = c_1\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{a}{1 - m\omega^2/k}\sin\omega t$$

将上式求导

$$y' = c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{a\omega}{1 - m\omega^2/k}\cos\omega t$$

在初始时刻,速度为零,可解得 c_1 为

$$c_1 = -\frac{a\omega}{1 - m\omega^2/k}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

于是,该方程的解为

$$y = \frac{a}{1 - \omega^2 m/k}\left[\sin\omega t - \omega\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$$

9.10　设简支梁承受强度为 q 的分布载荷,试用哈密顿原理导出该梁的横向自由振动微分方程。

解　设梁单位长度的质量为 ρ。系统的动能和弯曲应变能为

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho y_t^2\mathrm{d}x, U = \frac{1}{2}\int_0^l EIy_{xx}^2\mathrm{d}x$$

式中 E 是材料的弹性模量，I 是梁横截面对中性轴的惯性矩。

系统的位能是

$$V = -\int_0^l (q + \rho g) y \mathrm{d}x$$

式中第二项是由梁的自重产生的位能。

由哈密顿原理可得泛函为

$$J[y] = \int_{t_0}^{t_1} (T - U - V)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\rho y_t^2 - EIy_{xx}^2 + 2(q + \rho g)y]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

由变分 $\delta J = 0$，可得欧拉方程为

$$-\frac{\partial^2 \rho y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + q + \rho g = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 \rho y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = q + \rho g$$

这就是梁的横向振动微分方程。若 ρ 和 EI 为常数，并忽略由梁的自重产生的位能，则有

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q$$

边界条件为

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\bigg|_0^l = 0$$

即简支梁两端弯矩为零。由于 EI 不为零，故上式可简化成

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\bigg|_0^l = 0$$

9.11　质量为 m_1 和 m_2 的两个物体用两个弹性系数分别为 k_1 和 k_2 弹簧串联在一起，悬挂在定点 O，构成一个质点系，其中弹性质量和运动的摩擦力可忽略不计，试求系统在重力作用下，这两个物体的运动微分方程。

解　分别取两物体各自平衡位置为坐标原点。设两物体的坐标为广义坐标 y_1 和 y_2，取它们各自过原点且方向向下，系统处于平衡状态时，$y_1 = y_2 = 0$。系统的动能、势能和弹簧变形能分别为

$$T = \frac{1}{2}m_1 y_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 y_2'^2,\ V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2,\ U = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V - U = \frac{1}{2}m_1 y_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 y_2'^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 - \frac{1}{2}k_1 y_1^2 - \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2$$

根据哈密顿原理建立的泛函为

$$J[y_1, y_2] = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m_1 y_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 y_2'^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 - \frac{1}{2}k_1 y_1^2 - \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2\right]\mathrm{d}t$$

泛函的欧拉方程组即运动微分方程组为

$$\begin{cases} m_1 y_1'' + k_1 y_1 - k_2(y_2 - y_1) - g m_1 = 0 \\ m_2 y_2'' + k_2(y_2 - y_1) - g m_2 = 0 \end{cases}$$

9.12　均质圆柱体，半径为 r，质量为 m，在半径为 R 的圆柱形槽内做纯滚动，试用哈密顿原理导出圆柱体微小振动方程及振动周期。

解　系统只有一个自由度，选 θ 为广义坐标。圆柱体的转动惯量为 $J=\frac{1}{2}mr^2$。

圆柱体中心的速度为

$$v=(R-r)\dot{\theta}$$

圆柱体的角速度为

$$\omega=\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2=$$

$$\frac{1}{2}m[(R-r)\dot{\theta}]^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\left[\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}\right]^2=\frac{3}{4}m[(R-r)\dot{\theta}]^2$$

系统的势能为

$$V=-mg(R-r)\cos\theta$$

拉格朗日函数为

$$L=-V=\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)\cos\theta$$

相应的泛函为

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)\cos\theta\right]\mathrm{d}t$$

由哈密顿原理

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0$$

泛函的欧拉方程为

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta}+mg(R-r)\sin\theta=0$$

或

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

当然，此式也可由例 9.6.6 的结果直接获得。

在微小振动时，有 $\sin\theta=\theta$，由上式得

$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3(R-r)}\theta=0$$

这就是圆柱体微小振动的微分方程。它的振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

9.13　如习题 9.13 图所示，求长度为 L 的球形摆的运动微分方程。

解　取球坐标系，把球形摆看作是一个质点。质点的动能、势能和拉格朗日函数分别为

$$T = \frac{1}{2}m(L^2\varphi'^2 + L^2\theta'^2\sin^2\varphi), V = mgL\cos\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}mL^2(\varphi'^2 + \theta'^2\sin^2\varphi) - mgL\cos\varphi$$

相应的泛函为

$$J = \frac{1}{2}mL\int_{t_0}^{t_1}(L\varphi'^2 + L\theta'^2\sin^2\varphi - 2g\cos\varphi)\,\mathrm{d}t$$

泛函的欧拉方程组即球形形摆的运动微分方程为

$$\begin{cases} -mL^2\varphi'' + mL^2\theta'^2\sin\varphi\cos\varphi + mgL\sin\varphi = 0 \\ mL^2(\theta''\sin^2\varphi + 2\theta'\sin\varphi\cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} L\varphi'' - L\theta'^2\sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi = 0 \\ \theta''\sin^2\varphi + 2\theta'\varphi'\sin\varphi\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

9.14　一个质量为 m 的质点可在半径为 r 的圆形小管里无摩擦地滑动。小管以定常角速度 ω 绕着垂直直径旋转，如图所示。写出质点的运动微分方程。

解　质点的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta), V = mgr\cos\theta$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta) - mgr\cos\theta$$

由哈密顿原理建立的泛函为

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta) - mgr\cos\theta\right]\mathrm{d}r$$

泛函的欧拉方程即质点运动微分方程为

$$mgr\sin\theta - mr^2\ddot{\theta} + mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

或

$$r\ddot{\theta} - r\omega^2\sin\theta\cos\theta - g\sin\theta = 0$$

当然，此题可由拉格朗日方程直接得出质点的运动微分方程，不必建立泛函。

9.15　给定一个由质量为 m 和刚度为 k 的线性弹簧组成的弹簧—质量系统，如图所示。试求系统的运动方程。

解　系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, V = \frac{1}{2}kx^2$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

将上式代入拉格朗日方程，得

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -kx - m\ddot{x} = 0$$

即系统的运动方程为

$$m\ddot{x}+kx=0$$

9.16　一个系统由长度为 l、质量为 m 的单摆和质量为 $2m$ 的物块组成，单摆在物块的点 O 摆动，如习题 9.16 图所示。物块可以水平面上无摩擦地滑动。试求系统的运动方程。

解　系统的动能是物块的动能和单摆的动能之和，即

$$T=m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}+l\dot{\theta})^2=\frac{3}{2}m\dot{x}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

系统的势能为重力势能，可表示为

$$V=mgl(1-\cos\theta)$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{3}{2}m\dot{x}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$$

计算拉格朗日方程的各导数

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=3m\ddot{x}+ml\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-mgl\sin\theta,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=ml\ddot{x}+ml^2\ddot{\theta}$$

由此得系统的运动方程为

$$\begin{cases}3m\ddot{x}+ml\ddot{\theta}=0\\ ml\ddot{x}+ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0\end{cases}$$

上式可简化为

$$\begin{cases}3\ddot{x}+l\ddot{\theta}=0\\ \ddot{x}+l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0\end{cases}$$

9.17　一平面摆如习题9.17图所示，摆锤质量为 m_1，均质杆摆杆质量为 m_3，长度为 l，挂于支点 O 处，可在铅垂平面内摆动，另一质量为 m_2 的小球，光滑地套在摆杆上，它既可以沿着摆杆自由滑动，又可沿着半径为 R 的固定圆柱形槽内滑动，不计摩擦。试用哈密顿原理写出系统的运动微分方程。

解　系统具有一个自由度，选 φ 为广义坐标。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}m_3l^2\dot{\varphi}^2$$

因为

$$r=2R\cos\varphi,\dot{r}=-2R\dot{\varphi}\sin\varphi$$

所以

$$T=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}^2+2m_2R^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{6}m_3l^2\dot{\varphi}^2$$

取点 O 处为零势能位置，系统的势能为

$$V=-\frac{1}{2}m_1gl\cos\varphi-2m_2gR\cos^2\varphi-\frac{1}{2}m_3gl\cos\varphi$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\varphi}^2 + 2m_2R^2\dot{\varphi}^2 +$$

$$\frac{1}{6}m_3 l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1 gl\cos\varphi + 2m_2 gR\cos^2\varphi + \frac{1}{2}m_3 gl\cos\varphi$$

根据哈密顿原理建立的泛函为

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\varphi}^2 + 2m_2R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}m_3 l^2\dot{\varphi}^2 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}m_1 gl\cos\varphi + 2m_2 gR\cos^2\varphi + \frac{1}{2}m_3 gl\cos\varphi\right)\mathrm{d}t$$

泛函的欧拉方程即系统的运动微分方程为

$$\left(m_1 l^2 + 4m_2R^2 + \frac{1}{3}m_3 l^2\right)\ddot{\varphi} + \frac{2m_1 + m_3}{2}gl\sin\varphi + 2m_2 gR\sin 2\varphi = 0$$

9.18　一个单摆的悬挂点能够克服弹性恢复力无摩擦地沿着水平线滑动，如习题 9.18 图所示。设 x 为悬挂点的水平位移而 θ 为摆与竖直线所成的角度，试用拉格朗日方程求出该系统的运动微分方程。

解　利用式(9-1-26)，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\,l\dot{\theta}\cos\theta$$

系统的势能为

$$V = mgl(1 - \cos\theta) + kx^2$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\,l\dot{\theta}\cos\theta - mgl(1 - \cos\theta) - kx^2$$

计算拉格朗日方程的各导数

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}\,l\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}\,l\cos\theta - m\dot{x}\,l\sin\theta$$

将上述各导数代入拉格朗日方程，得系统的运动微分方程组为

$$\begin{cases} m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + 2kx = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}\,l\cos\theta + mgl\sin\theta = 0 \end{cases}$$

约去上述方程组第二个方程中的 ml，得

$$\begin{cases} m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + 2kx = 0 \\ \ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

附录2 索 引

按照《辞海》汉语拼音字母顺序排列

A

埃德曼第二角点条件 second Erdmann corner condition, Erdmann's second corner condition 169
埃德曼第一角点条件 first Erdmann corner condition, Erdmann's first corner condition 169
埃尔米特算子 Hermite operator 230
爱因斯坦求和约定 Einstein summation convention 26
奥氏方程 Ostrogradski equation 84
奥氏公式 Ostrogradski formula 12
奥斯特罗格拉茨基方程 Ostrogradski equation 84
奥斯特罗格拉茨基公式 Ostrogradski formula 12

B

巴拿赫空间 Banach space 221
摆线 cycloid 72
半完整约束 semi-holonomic constraint 292
伴随算子 adjoint operator 230
保范算子 norm-preserving operator, operator preserving norm 229
保守场 conservative field 15
保守力 conservative force 296
保守力场 conservative field of force 296
保守系统 conservative system 296
保守系统的拉格朗日方程组 Lagrange's equations for conservative system 316
贝塞尔不等式 Bessel inequality 227
被包含在极值曲线场中 included in extremal curve field 113
被包含在极值曲线中心场中 included in central field of extremal curve 113
本征方程 characteristic equation 278
本征函数 eigenfunction 278
本征谱 eigenspectrum 278
本征元素 eigenelement 278
本征值 eigenvalue 278
本质边界条件 essential boundary conditions 138
比功 specific work 294
比较曲线 comparison curve 60
比应变能 specific strain energy 294
必要条件 necessary condition 61
闭包 closure 220
闭集 closed set 220
闭区域 closed domain 225
边界 boundary 220
边界剩余 boundary residual 268
边界法 boundary method 268
边界内积 boundary inner product, inner product on boundary 268
边界加权函数 boundary weighted function, weighted function on boundary 268
边界条件 boundary conditions 50
变动边界 variable boundary 135
变动端点 variable endpoint, mobile endpoint 135

变分 variation 51,52,55,60
变分被积函数 variational integrand, variational integrand function 53
变分导(函)数 variational derivative 62
变分(的)力学原理 variational principle of mechanics 291
变分法 calculus of variations, variational calculus, variational methods 45
变分法的古典理论 classical theory in the calculus of variations, classical theory of the calculus of variations 119
变分方程 variational equation, variation equation, equation in variation 61
变分方法 variational principle, variational method 45,215
变分符号 variational symbol 51
变分积分 variational integral 53
变分记号 variational notation 51
变分算子 variational operator 51
变分条件 variational condition 50
变分问题 variational problem, variation problem 45
变分问题的反问题 contrary problem of variational problem, inverse problem of variational problem 215
变分问题的间接方法 indirect methods of variational problems, indirect methods in variational problems 258
变分问题的解 solution of variational problem 50
变分问题的直接方法 direct methods of variational problems, direct methods in variational problems 258
变分学 calculus of variations, variational calculus, variational methods 45
变分原理 variational principle variation principle 45,61,215,291
变分约束条件 variational constraint condition 50
变函数 argument function 48
变换 transformation 217
变换系数 coefficient of transformation 30
变形 deformation 292
变形协调条件 condition of deformation compatibility 293
标量场 scalar field 5
标量函数 scalar function 5
标准正交系 normal orthogonal system 225
并 union 216
并集 union set, union of sets 216
并矢 dyad 33
并向量 dyad 33
波尔查问题 Bolza('s) problem 196
补集 complementary set 217
不变量 invariant 30
不等时变分 anisochronous variation, anisochronal variation 52
不可解约束 irremoval constraint 292
不完全的广义变分原理 incompletely generalized variational principle 215
不相交 disjoint 216
布勃诺夫—伽辽金法 Bubnov-Galerkin method 267
布尼亚可夫斯基不等式 Bunjakovski inequality 24
部分和 partial sum 226

C

参数 parameter 3
残差 residual 268
测地线 geodesic line, geodesic 46
测地线问题 geodesic line problem 186
测试函数 trial function 263
差 difference 216
差集 difference set 216
场 field 5,113
重调和方程 biharmonic equation 88
抽象函数 abstract function 228
稠密 dense 218
稠密集 dense set 218
初始条件 initial condition 50
n 次变分 n-th variation 130

n 次近似解 n-th approximate solution 263
α 次利普希茨条件 α-th Lipschitz condition 248
n 次齐次函数 n-th homogeneous function 204
次一特征值 next eigenvalue 278

D

达朗贝尔—拉格朗日方程 D'Alembert-Lagrange's equation 311
达朗贝尔原理 D'Alembert('s) principle, d'Alembert('s) principle 311
达朗贝尔原理的拉格朗日形式 Lagrangian form of D'Alembert's principle 311
大圆 great circle 70
待定边界 undetermined boundary 135
待定端点 undetermined endpoint 135
待定边界的变分问题 variational problem of undetermined boundary 135
待定边界的最简泛函 simplest functional of undetermined boundary 135
单边连续 one-sided continuity 47
单侧变分问题 one-sided variational problem 173
单侧约束 unilateral constraint 292
单射 injection 217
单位矢量 unit vector, vector of unit length 6
单位算子 unit operator 228
单位向量 unit vector, vector of unit length 6
单位元素 identity element 220
单位张量 unit tensor 31
单元素集 one-element set 216
导集 derived set 220
等价 equivalence, equivalent 218
等距算子 isometric operator 229
等时变分 isochronal variation, isochronous variation 52
等时曲线 tautochrone, isochrone 72
等势 equivalence, equipollence 218
等值面 contour surface 7
等周条件 isoperimetric condition 47,189
等周问题 isoperimetric problem 46,190
等周问题的目标泛函 objective functional of isoperimetric problem 189
等周约束 isoperimetric constraint 189
狄多问题 Dido's problem 190
狄利克雷边界条件 Dirichlet boundary condition 138
狄利克雷泛函 Dirichlet functional 85
狄利克雷积分 Dirichlet integral 85
狄利克雷内积 Dirichlet inner product 222
狄利克雷问题 Dirichlet problem 85,243,259
笛卡儿二阶张量 Cartesian second order tensor 31
笛卡儿积 Cartesian product 217
笛卡儿基 Cartesian basis 26
笛卡儿空间 Cartesian space 217
第二不变量 second invariant 34
第三不变量 third invariant 34
第 n 近似解 n-th approximate solution 263
第一不变量 first invariant 34
第一基本齐式 first fundamental form 210
第一基本微分形式 first fundamental differential form 210
第一类基本量 first kind fundamental quantity 210
第一特征值 first eigenvalue 278
点 point 218
点函数 point function 5
点集 point set, set of points 216
定常约束 scleronomic constraint, scleronomous constraint 292
定解条件 conditions for determining solution 50
定解问题 problem for determining solution 50
定义域 domain of definition, domain 48,217,227
动力学普遍方程 general equation of dynamics 311
逗号约定 comma convention 28
逗留函数 stationary function 63
逗留曲线 stationary curve 63
独立函数 independent function 47
独立坐标 independent coordinates 315
杜布瓦—雷蒙引理 Du Bois-Reymond lemma 25

度量 metric 218
度量空间 metric space 218
度量张量 metric tensor 210
度量子空间 metric subspace 218
短程线 geodesic line, geodesic 46
短程线问题 geodesic line problem, shortest distance problem 46
对称双线性泛函 symmetric bilinear functional 55
对称算子 symmetric operator 230
对等 equipotent 218
对偶空间 dual space 230
对偶原理 duality principle, principle of duality 195
多元函数的极值定理 extremal theorem of function of several variables 2
多元函数的泰勒中值定理 Taylor mean value theorem of function of several variables 2

E

二次变分 second variation 128,129
二次泛函 quadratic functional 55,131
二阶变分 second variation 128,129
二阶对称张量 symmetric tensor of (the) second order 31
二阶反对称张量 anti-symmetric tensor of (the) second order, inverse symmetric tensor of (the) second order 31
二阶斜对称张量 skew-symmetric tensor of (the) second order 31
二阶张量 second order tensor 31
二维拉普拉斯算子 two-dimensional Laplacian operator, two-dimensional Laplacian operator 232
二元函数的极值定理 extremal theorem of function of two variables 2
二元函数的泰勒中值定理 Taylor mean value theorem of function of two variables 2

F

泛函 functional 47,48,228
泛函变量 functional variable 48
泛函的变分 variation of a functional 55
泛函的核 kernal of a functional 53
泛函的线性化 linearization of a functional 55
泛函数 functional 228
泛函形式 functional form 53
泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 处的变分 variation of a functional $J[y(x)]$ at $y=y(t)$ 59
范数 norm 220
p 方可和序列空间 p-th power summable sequnce space 220
方向导数 directional derivative 5
非变分(的)力学原理 non-variational principle of mechanics 291
非变分原理 non-variational principle 291
非等时变分 anisochronous variation, anisochronal variation 52
非定常约束 rheonomic constraint, rheonomous constraint 292
非固定约束 unfixed constraint 292
非平凡解 278
非完整系统 nonholonomic system 292
非完整约束 nonholonomic constraint 292
非自由系 unfree system 292
非自由系统 unfree system 292
非自由质点系统 system of unfree particles 292
费马原理 Fermat('s) principle 143
分段极值曲线 piecewise extremal curve 169
分段连续可微路径 piecewise continuously differentiable path 168
分量 component 31,217
弗里德里希斯不等式 Friedrichs inequality 249
弗里德里希斯第二不等式 Friedrichs second inequality 249
弗里德里希斯第一不等式 Friedrichs

first inequality 249
辅助泛函 auxiliary functional 181
负元素 negative element 220
复合映射 composite mapping 217
复内积空间 complex inner product space 221
复线性空间 complex linear space 220
赋范线性空间 normed linear space 220,221
赋范向量空间 normed vector space 220,221
傅里叶级数 Fourier series 227
傅里叶系数 Fourier coefficient 227
傅里叶系数集 Fourier coefficient set 227

G

刚体位移 rigid displacement 292
高斯—奥斯特罗格拉茨基定理 Gauss-Ostrogradski theorem 10
高斯定理 Gauss theorem 10
高斯公式 Gauss formula 10,301
格林第二定理 Green's second theorem 13
格林第二公式 Green's second formula 13
格林第三定理 Green's third theorem 13
格林第三公式 Green's third formula 13
格林第一定理 Green's first theorem 12
格林第一公式 Green's first formula 12
格林定理 Green's theorem 12
格林公式 Green's formula 12,295
功 work 293
共轭点 conjugate point 115
共轭空间 conjugate space 230
共轭算子 conjugate operator 230
共轭张量 conjugate tensor 31
共轭值 conjugate value 115
共轭指数 conjugate exponent 36
孤立点 isolated point 220
古典变分法 classical theory in the calculus of variations 119
固定边界变分问题 fixed boundary variational problem 50
固定端点变分问题 fixed end point variational problem, variational problem with fixed ends, variational problem with fixed endpoints 50
固定约束 fixed constraint 292
固定终点变分问题 fixed end point variational problem, variational problem with fixed ends, variational problem with fixed endpoints 50
固有曲线场 inherent curve field 112
贯截条件 condition of transversality transversality condition 138,211,212
广义变分问题 generalized variational problem 196
广义变分原理 generalized variational principle 215
广义等周问题 generalized isoperimetric problem 190
广义泛函 generalized functional 196,328
广义势能 generalized potential energy 330,332
广义虚功原理 principle of generalized virtual work 301
广义虚位移原理 principle of generalized virtual displacement 301
广义余能 generalized complementary energy 329,332
广义坐标 generalized coordinates 315
规范正交系 orthonormal system 225

H

哈密顿算子 Hamilton operator 6,232
哈密顿原理 Hamilton('s) principle 312
哈密顿原理的广义形式 generalized form of Hamilton('s) principle 312
哈密顿作用量 Hamilton's action 313
含参变量积分 integral with parameter 3

函数 function 5,217,228
E 函数 E-function 119
函数的变分 variation of a function 51
函数 F 的变分 variation of a function F 57
函数行列式 functional determinant 182
函数空间 function space 218
函数类 class function 47
赫尔德不等式 Holder inequality 37
赫林格—赖斯纳变分原理 Hellinger-Reissner variational principle 328
赫林格—赖斯纳广义变分原理 Hellinger-Reissner generalized variational principle 328
赫林格—赖斯纳原理 Hellinger-Reissner principle 328
ε－δ 恒等式 ε-δ identity, epsilon-delta identity 28
恒等算子 identity operator 228
恒等映射 identity mapping 217
横截(性)条件 condition of transversality, transversality condition 138,147,211,212
胡海昌—鹫津久一郎变分原理 Hu Haichang-Kyuichiro Washizu variational principle 330
胡海昌—鹫津久一郎广义变分原理 Hu Haichang-Kyuichiro Washizu generalized variational principle 330
胡—鹫津原理 Hu-Washizu principle 330
互不相交 mutually disjoint 216
互易原理 principle of reciprocity 195
环量 circulation 15
环量面密度 circulation surface density 16
混合变分问题 mixed variational problem 196
混合法 mixed method 268
混合泛函 mixed functional 196,328
混合型泛函 functional of mixed type 196,328
火箭飞行问题 rocket flight problem 65

J

迹 trace 34
积分变分原理 integral variational principle 291
积分泛函 integral functional, functional with integral 47
积分号下求积分 integrating under the integral sign 3
积分号下求极限 finding limit under the integral sign, taking limit under the integral sign 3
积分号下求微商 differentiating under the integral sign 3
积分曲线 integral curve 63
积分型泛函 integral functional, functional of integral type 47
积分因子 integral factor 102,241
积分约束 integral constraint 189
积集 produce set, product set 217
基 basis 26
基本集 fundamental set 216
基本数列 fundamental sequence 219
基本序列 fundamental sequence 219
基函数 base function 263
基向量 base vector 26
n 级距离 n-th order distance, distance of n-th order 48
n 级 δ 邻域 δ neighborhood of n-th order 49
级数 series 226
极大化序列 maximizing sequence 259
极带 extremal 50
极化恒等式 polarization identity 224
极限 limit 218
极小化序列 minimizing sequence 259
极小曲面 minimal surface 48
极值 extremum, extreme value, extremum value 51
极值函数 extremal function, extremum function 50
极值曲线 extremal, extremal curve 50,63
极值曲线场 extremal curve field 113
极值曲线中心场 central field of extremal curves 113
极值曲线簇 variety of extremal curves 63

极值曲线族 family of extremal curves 63
集 set 215
集合 set 215
集类 class of sets 215
集族 class of sets, family of sets 215
几何边界条件 geometric boundary conditions 138
几何方程 geometrical equation 293
几何约束 geometrical constraint 181,292
计数 count 216
加法算子 additive operator 228
加权残数法 weighted residual method 267
加权剩余法 weighted residual method 267
加权函数 weighted function 268
加权余量法 weighted residual method 267
伽辽金法 Galerkin method 267
伽辽金方程组 Galerkin's equation system 269
伽辽金系数 Galerkin coefficient 269
价值泛函 cost functional 53
尖点 cusp, cuspidal point 168
交 intersection 216
交错张量 alternating tensor 28
交集 intersection set 216
角点 corner point, corner 168
n 阶变分 n-th variation 130
n 阶导数 n-th derivative 234
n 阶的 δ 接近度 δ approach degree of n-th-order 49
n 阶距离 n-th order distance, distance of n-th order 48
n 阶拉格朗日形式余项 n-th-order Lagrange's remainder 2
n 阶 δ 邻域 δ neighborhood of n-th-order 49
n 阶线性微分算子 n-th linear differential operator 232
节点 node 260
捷线问题 brachistochrone problem, problem of curve of steepest descent, problem of brachistochrone 45,72
界点 boundary point, frontier point 220
经典变分法 classical variational methods 258
局部极大值 local maximum 51
局部极小值 local minimum 51
局部极值 local extremum 51
距离 distance, metric 218
距离公理 axiom of distance 218
距离结构 distance structure 218
距离空间 metric space 218
距离子空间 metric subspace 218
聚点 accumulation point 220
绝对极大值 absolute maximum 50
绝对极小值 absolute minimum 50
绝对极值 absolute extremum 50
绝对收敛 absolutely convergent, absolute convergence 226

K

开集 open set 220
开普勒第二定律 Kepler's second law 444
开普勒面积定律 Kepler's law of areas 444
开普勒问题 Kepler problem 335,338
开区域 open domain 225
坎托罗维奇法 Kantorovich method 266
柯西不等式 Cauchy inequality 37,39
柯西方程 Cauchy equations 293,299
柯西—施瓦茨不等式 Cauchy-Schwarz inequality 222
柯西数列 Cauchy sequance 219
柯西序列 Cauchy sequance 219
可变边界 variable boundary 135
可变端点 variable endpoint, mobile endpoint 135
可导 derivable 234
可动边界 variable boundary, moving boundary 135
可动边界的变分问题 variational problem of variable boundary 135
可动边界的最简泛函 simplest functional of variable boundary 135
可动端点 variable endpoint, mobile endpoint 135
可积微分约束 integrable differential constraint 292

可加算子 additive operator 228
可解约束 removal constraint 292
可列集 countable set, denumberable set, enumberable set 218
可能功原理 principle of possible work 301
可能位移 possible displacement 300
可能应变 possible strain 300
可能应力 possible stress 300
可逆算子 invertible linaer oprator 229
可逆线性算子 invertible oprator 229
可逆映射 invertible mapping 217
可取函数 admissible function 48,50
可取类函数 admissible class function 50
可取曲面簇 variety of admissible surfaces 50
可取曲面类 family of admissible surfaces 50
可取曲线簇 variety of admissible curves 50
可取曲线类 family of admissible curves 50
可数集 countable set, denumberable set, enumberable set 218
可微 differentiable 54
可遗坐标 ignorable coordinate 316
克莱罗定理 Clairaut theorem 103
克罗内克尔符号 Kronecker delta, Kronecker symbol 27
空集 empty set, null set, vacant set 215
空间 space 218
空间结构 space structure 218

L

拉格朗日变换 Lagrange transformation 61
拉格朗日乘数 Lagrange multiplier 181
拉格朗日乘子 Lagrange multiplier 181
拉格朗日定理 Lagrange theorem 181,185
拉格朗日定义的泛函变分 variation of a functional defined by Lagrange 60
拉格朗日方程 Lagrange's equation 275
拉格朗日函数 Lagrange function, Lagrngian function 53,312,323
拉格朗日问题 Lagrange problem 185,196
拉格朗日型余项 Lagrange's remainder 1
拉格朗日原理 Lagrange principle 334
拉格朗日最小作用(量)原理 Lagrange principle of least action 334
拉格朗日作用量 Lagrange's action 334
拉普拉斯方程 Laplace('s) equation 243
拉普拉斯方程第三边值问题 third boundary value problem for the Laplace's equation 243
拉普拉斯方程第二边值问题 second boundary value problem for the Laplace's equation 243
拉普拉斯方程第一边值问题 second boundary value problem for the Laplace's equation 243
拉普拉斯积分 Laplace's integral 192
拉普拉斯算子 Laplacian, Laplace operator 13
拉氏方程 Laplace('s) equation 243
莱布尼茨公式 Leibniz formula 4
勒让德强条件 Legendre strong condition, strengthened Legendre condition 120
勒让德条件 Legendre condition 120
类函数 class function 47
离散谱 discrete spectrum 278
黎曼变换 Riemann transformation 61
黎曼定理 Riemann theorem 25
里茨法 Ritz method 262
理想约束 ideal constraint, idealized constraint 311
力场 field of force 296
力学(的)变分原理 variational principle of mechanics, variational principle in mechanics 291
力学(的)非变分原理 non-variational principle of mechanics, non-variational principle in mechanics 291
力学系统 mechanical system 291
力学原理 principle of mechanics 291
利普希茨边界 Lipschitz boundary, Lipschitzian 248
利普希茨连续 Lipschitz continuous 248

利普希茨条件 Lipschitz condition 248
连续 continuous 230
连续泛函 continuous functional 49,230
连续谱 continuous spectrum 278
连续算子 continuous operator 228
连续线性算子 continuous linear operator 228
连续映射 continuous mapping 218
劣弧 inferior arc 70
邻(近)曲线 neighbo(u)ring curve 60
邻域 neighborhood 219
δ邻域 δ neighborhood 219
零级距离 zero-th order distance 48
零阶距离 zero-th order distance 48
零算子 null operator 228
零元素 zero element, null element 220
零张量 zero tensor 31
绿洲问题 oasis problem 143
罗宾问题 Robin problem 243

M

迈耶问题 Mayer problem 196
满射 surjection, surmorphism, epimorphism 217
幂集 power set 217
闵可夫斯基不等式 Minkowski inequality 39
莫培督—拉格朗日最小作用量原理 Maupertuis-Lagrange principle of least action 334
莫培督原理 Maupertuis' principle 334
莫培督最小作用(量)原理 Maupertuis' principle of least action 334

N

纳布拉算子 nabla operator 7
纳维方程 Navier's equations 299
内部 interior 220
内部法 internal method 268
内乘法 inner multiplication 32
内点 inner point 220
内积 inner product, scalar product 32,221,268
内积空间 inner product space 221
能量法 energy method 215,291
能量范数 energy norm 222
能量方法 energy method 215
能量积分 energy integral 215
能量原理 energy principle 291
逆算子 inverse operator 229
逆象 inverse image 217
逆映射 inverse mapping 217
逆元素 inverse element 220
诺伊曼边界条件 Neumann boundary condition 138
诺伊曼问题 Neumann problem 243

O

欧几里得范数 Euclidean norm 221
欧拉方程 Euler equation 62,78,84,429
欧拉方程(组) Euler (system of) equations 96
欧拉方程的不变性 invariance of Euler equation 98
欧拉方程的维尔斯特拉斯形式 Weierstrass form of Euler equation 206,207
欧拉—拉格朗日方程 Euler-Lagrange's equation 62
欧拉—泊松方程 Euler-Poisson's equation 78
欧拉齐次函数定理 Euler theorem on homogeneous function 205
欧氏空间 Euclidean space 221

P

帕塞瓦尔等式 Parseval equality 227
排列符号 permutation symbol 28
庞加莱不等式 Poincaré inequality 252
旁路 nearby path, neighboring path, varied path 292
偏微分算子 partial differential operator 93
平凡解 trivial solution 278
平方可和序列空间 square summable sequence space 220
平衡方程 equilibrium equation 299
平衡微分方程 differential equation of equilibrium 299
平稳函数 stationary function 63
平稳曲线 stationary curve 63
平稳值 stationary value 63
平行四边形公式 parallelogram formula 224
泊松方程第二边值问题 second boundary value problem for the Poisson's equation 243
泊松方程第三边值问题 third boundary value problem for the Poisson's equation 243
泊松方程第一边值问题 first boundary value problem for the Poisson's equation 243
普拉托问题 Plateau('s) problem 48
谱 spectrum 278

Q

齐次边界条件 homogeneous boundary conditions 228
齐次方程 homogeneous equation 228
齐次函数 homogeneous function 204
齐次算子 homogeneous operator 228
气体流动的最小阻力问题 least drag problem on gas flow 74
强变分 strong variation 52
强极大值 strong maximum 51
强极小值 strong minimum 51
强极值 strong extremum 51
强邻域 strong neighborhood 49
强 δ 邻域 strong δ neighborhood 49
强相对极大值 strong relative maximum 51
强相对极小值 strong relative minimum 51
强制边界条件 forcing boundary condition 138
强制函数 forcing function 236
区域 domain, region 225
曲面函数 surface function 48
曲线场 curve field 113
曲线函数 curve function 48
驱动函数 driving function 236
权函数 weight function 222,268
全变分 total variation 52,53
全变分符号 total variation notation, total variation symbol 52
全集 total set, universal set 216
全局极大值 global maximum 50
全局极小值 global minimum 50
全局极值 global extemum 50

R

容许函数 admissible function 48,50
容许类函数 admissible class function 50
容许曲线 admissible curve 60
容许曲面簇 variety of admissible surfaces 50
容许曲面类 family of admissible surfaces 50
容许曲线簇 variety of admissible curves 50
容许曲线类 family of admissible curves 50
容许条件 admissible condition 48
容许位移 admissible displacement 300
容许应变 admissible strain 300

容许应力 admissible stress 300
软化子 mollifier 23
弱变分 weak variation 52
弱极大值 weak maximum 51
弱极小值 weak minimum 51
弱极值 weak extremum 51
弱邻域 weak neighborhood 49
弱 δ 邻域 weak δ neighborhood 49
弱相对极大值 weak relative maximum 51
弱相对极小值 weak relative minimum 51

S

三角不等式 triangle inequality 218,220
三维拉普拉斯算子 three-dimensional Laplacian operator, three-dimensional Laplace operator 232
散度 divergence 8,11
散度定理 divergence theorem 10
上界 upper bound 216
上确界 supremum 216
剩余 residual, residue 268
剩余函数 residual function 268
施图姆—刘维尔型二阶微分方程 Sturm-Liouville second differential equation 239
施图姆—刘维尔型 $2n$ 阶微分方程 Sturm-Liouville $2n$-th differential equation 239
施瓦茨不等式 Schwarz inequality 24,222
识别拉格朗日乘子 identifying Lagrange multiplier, identification of Lagrange multiplier 181
实功 actual work, real work 293
实内积空间 real inner product space 221
实位移 actual displacement, real displacement 292
实线性空间 real linear space 220
实直线 real line 216
矢量 vector 30
矢量场 vector field 5
矢量函数 vector function 5
矢量微分算子 vector differential operator 6
势函数 potential function 312
势能 potential energy 296
势能函数 potential energy function 312
收敛数列 convergent sequence of numbers 218
收敛于和 S converge to sum S 226
束心 center 112
数集 set of numbers 216
数空间 space of numbers 218
数量场 scalar field 5
数量函数 scalar function 5
数域 number field 218
数直线 number line 216
双侧约束 bilateral constraint 292
双射 bijection 217
双调和方程 biharmonic equation 88
双调和函数 biharmonic function 21,88
双调和算子 biharmonic operator 20
双线性泛函 bilinear functional 55
斯托克斯定理 Stokes theorem 18
算子 operator 93,217,227,228
∇算子 ∇ operator 6
Del 算子 Del operator 6
算子 T 的范数 norm of an operator T 230
算子方程 operator equation 228
算子方程的谱 spectrum of operator equation 278
缩并 contraction 32

T

泰勒定理 Taylor theorem 1
泰勒公式 Taylor formula 1
泰勒级数展开 Taylor series expansion 1
泰勒中值定理 Taylor mean value theorem 1
弹性 elasticity 292
弹性体 elastic body 292

弹性体的位移 displacement of elastic body 292
弹性体的总势能 total potential energy of an elastic body 305
弹性系统 system of elasticity 292
特殊等周问题 special isoperimetric problem 190
特征方程 characteristic equation 278
特征方向 characteristic direction 33
特征函数 eigenfunction, characteristic function 278
特征向量 eigenvector, characteristic vector 278
特征元素 characteristic element, eigenelement 278
特征值 eigenvalue, characteristic value 33,278,398
特征值问题 eigenvalue problem, characteristic value problem 278
梯度 gradient 6,234
梯度算子 gradient operator 232
条件极值 conditional extremum 181
条件极值的变分问题 variational problem of conditional extremum 181
条件极值问题 conditional problem of extremum 46
调和算子 harmonic operator 13
通量 flux 8,11
同构 isomorphism 229
同构映射 isomorphic mapping 229
统一高斯公式 united Gauss formula 18
统一欧拉方程组 united Euler system of equations 96
投影 projection 217
凸集 convex set 220
椭圆型方程第二边值问题 second boundary value problem of elliptic equation 243
椭圆型方程第三边值问题 third boundary value problem of elliptic equation 243
椭圆型方程第一边值问题 first boundary value problem of elliptic equation 243
拓扑结构 topological structure 218
拓扑空间 topological space 218

W

外部 exterior 220
外乘法 outer multiplication 32
外点 exterior point 220
外积 outer product, exterior product 32
外力的势能 potential energy of external force 305
弯路 nearby path, neighboring path, varied path 292
完全(备)的 complete 219
完全(备)度量空间 complete metric space 219
完全(备)赋范线性空间 complete normed linear space 221
完全(备)距离空间 complete metric space 219
完全(备)空间 complete space 219
完全(备)内积空间 complete inner product space 223
完全的广义变分原理 completely generalized variational principle 215
完全泛函 complete functional 93
完全泛函的极值函数定理 extremal function theorem of complete functional 95
完全集 complete set, perfect set 220
完全欧拉方程组 complete Euler system of equations 96
完整系统 holonomic system 292
完整约束 holonomic constraint 181,292
完整约束的目标泛函 objective functional with holonomic constraint 181
微分变分原理 differential variational principle 291
微分算子 differential operator 232
微分形式的不变性 invariance of differential form 98
微分约束 differential constraint 185,292
微分约束的目标泛函 objective functional of differential constraint 185
微元功 elementary work 293
n 维点 n-dimensional point 219
n 维空间 n-dimensional space 219
n 维欧几里得距离 n-dimensional Euclidean distance 219

n 维欧几里得空间 n-dimensional Euclidean space 221
n 维欧氏距离 n-dimensional Euclidean distance 219
n 维欧氏空间 n-dimensional Euclidean space 221
位能 potential energy 296
位势算子 potential operator 232
位形 configuration 292
位形空间 configuration space 315
位移 displacement 292
位移边界 displacement boundary 300
位移矢量 displacement vector 292
位置约束 position constraint 292
魏尔斯特拉斯—埃德曼角点条件 Weierstrass-Erdmann corner conditions 169
魏尔斯特拉斯函数 Weierstrass function 119
魏尔斯特拉斯强条件 Weierstrass strong condition 119
魏尔斯特拉斯弱条件 Weierstrass weak condition 119
魏尔斯特拉斯条件 Weierstrass condition 119
稳定作用量原理 principle of stable action 313
无界线性算子 unbounded linear operator 228
无穷集 infinite set 216
无穷可微函数 infinite differentiable function 47
无限集 infinite set 216
无旋场 irrotational field 15
无约束变分问题 unconstrained variational problem 135

X

希尔伯特不变积分 Hilbert invariant integral, invariant Hilbert integral 118
希尔伯特空间 Hilbert space 223
希尔伯特内积 Hilbert inner product 222
系统 system 291,292
下界 lower bound 216
下确界 infimum 216
下有界算子 bounded below operator 279
下有界线性算子 linear operator bounded below 229
线性泛函 linear functional 54,228
线性赋范空间 linear normal space 220,221
线性集合 linear set 216
线性空间 linear space 218,220
线性空间结构 linear space structure 218,220
线性算子 linear operator 228
线性算子空间 linear operator space 230
线性微分算子 linear differential operator 232
线性无关 linear independence, linearly independent 225
线性相关 linear dependence, linearly independent 225
线性运动约束 linear kinematic constraint 292
线性运算 linear operation 220
线性组合 linear combination 225
相伴数 adjoint number 36
相等 equality 31,216
相对极大值 relative maximum 51
相对极小值 relative minimum 51
相对极值 relative extremum 51
相容(性)方程 compatibility equation 293
相容(性)条件 compatibility condition 293
相似算子 similar operator 228
相空间 phase space 217
向量 vector 30,220
向量场 vector field 5
向量函数 vector function 5
向量空间 vector space 220
向量微分算子 vector differential operator 6
象 image 217,227
斜截角 angle of transversality 138
斜截条件 condition of transversality, transversality condition 138,211,212
斜率 slope 112
斜率函数 slope function 112
修正变分原理 modified variational principle 215

虚功 virtual work 293
虚功方程 equation of virtual work 298,303
虚功原理 principle of virtual work 298
虚位移 virtual displacement 292
虚位移原理 principle of virtual displacement 271,298
虚应变能 virtual strain energy 295
虚应变能密度 density of virtual strain energy 295
虚应变与虚位移关系式 relational expressions of virtual strains and virtual displacements 302
虚应力 virtual stress 296,307
虚应力原理 principle of virtual stress 309
序对 ordered pair 217
悬链面 catenoid 74
悬链线方程 catenary equation 74,194
旋度 curl, rotation 17
旋轮线 cycloid 72
旋转矩阵 rotation matrix 30
循环积分 cyclic integral 316
循环坐标 cyclic coordinate, ignorable coordinate 316

Y

压杆稳定问题 problem of compressive bar stability 297
哑标 dummy index 26
哑指标 dummy index 26
雅可比方程 Jacobi equation 114
雅可比行列式 Jacobian determinant 182
雅可比配连方程 Jacobi accessory equation 114
雅可比强条件 Jacobi strong condition 116
雅可比条件 Jacobi condition 116
雅可比算子 Jacobi operator 232
扬不等式 Youn inequality 36
扬氏不等式 Youn inequality 36
一般椭圆型(微分)方程 general elliptic (differential) equation 243
一般约束条件 general constraint condition 50
一次变分 first variation 55,128
一对一的映射 one-to-one mapping 217
一级距离 first order distance 49
一阶变分 first variation 55,128
一阶距离 first order distance 49
一阶张量 first order tensor 31
一一对应映射 one-to-one mapping 217
一一映射 one-one correspondence, one-one mapping 217
一元函数的极值定理 extremal theorem of function of one variable 1
应变能 strain energy, energy of deformation 294,296
应变能的变分 variation of strain energy 295
应变能密度 strain energy density 294
应变能密度的变分 variation of strain energy density 295
应变协调方程 equation of strain compatibility 293
应变张量 strain tensor 293
应力边界 stress boundary 300
应力的变分 variation of stress 307
映射 mapping, map 217,227
映照 mapping, map 217
优弧 superior arc 70
由内积导出的范数 norm generated by the inner product, norm induced by the inner product 222
有界集 bounded set 219
有界算子 bounded operator 228
有界线性泛函 bounded linear functional 228
有界线性算子 bounded linear operator 228
有界线性算子空间 bounded linear operator space 230
有势场 potential field 296
有势力 potential force 296
有限单元 finite element 260
有限集 finite set 216
有限约束 finite constraint 181,292
酉算子 unitary operator 230
余集 complementary set 217
余量 residual 268

余能 complementary energy 309
余能密度函数 complementary energy density function 309
余虚功 complementary virtual work 309
余虚功原理 principle of complementary virtual work 309
余虚能 complementary virtual energy 310
余虚应变能 complementary virtual strain energy 296,309
余虚应变能密度 density of complementary virtual strain energy 309
余应变能 complementary strain energy 296,309
余应变能的变分 variation of complementary strain energy 309
余应变能密度 complementary strain energy density 309
余应变能密度的变分 variation of density of complementary strain energy 309
域内剩余 residual in domain 268
域内内积 inner product in domain 268
域内加权函数 weighted function in domain 268
元功 elementary work 293
元素 element 215
原象 preimage, inverse image 217
约束 constraint 50,292
约束反力 reactive force of constraint 292
约束反作用力 reactive force of constraint 292
约束方程 constraint equation 46,292
约束极值问题 constrained problem of extremum 46
约束力 constraint force, force of constraint, constraining force 292
约束条件 constraint condition 50
运动边界条件 kinetic boundary condition 138
运动方程 equation of motion 299
运动微分方程 differential equation of motion 299
运动约束 kinematic constraint 292

Z

在区间(x_0,x_1)上的连续函数类 continuous class function on an interval (x_0,x_1) 47
在区间$[x_0,x_1]$上的连续函数类 continuous class function on an interval $[x_0,x_1]$ 47
在区间(x_0,x_1)上 n 阶导数连续的函数类 class function of continuous n-th derivative on an interval (x_0,x_1) 47
在区间$[x_0,x_1]$上 n 阶导数连续的类函数 class function of continuous n-th derivative on an interval $[x_0,x_1]$ 47
张量场 tensor field 5
张量的商定理 quotient theorem of tensors 33
张量分解定理 tensor decomposition theorem, decomposition theorem for tensor 32
张量函数 tensor function 4
张量识别定理 tensor recognition theorem, recognition theorem of tensor 33
张量特性的间接检验 indirect test for tensor character 33
折点 broken point 168
折极值曲线 broken extremal curve 168
折曲线 broken curve 168
折线 broken line, polygonal line 168
真路 actual path, natural path, proper path, true path 292
真实位移 actual displacement, real displacement 292
真实运动 actual motion, true motion 292
真子集 proper subset 216
正常场 proper field 112
正常算子 normal operator 230
正 n 次齐次函数 positive n-th homogeneous function 204
正定函数 positive definite function 294
正定算子 positive definite operator 231,232
正规点 regular point 63
正规算子 normal operator 230
正规特征函数 normal eigenfunction 278

正交 orthogonal 225
正交系 orthogonal system 225
正路 actual path, natural path, proper path, true path 292
正算子 positive operator 231
正则点 regular point 63
正则问题 regular problem 63
直积 direct product 217
直角笛卡尔基 rectangle Cartesian basis 26
值域 range 217,228
指定指标 assigned index 27
质点 particle, mass point 291
质点系 system of particles 291
秩 rank 278
置换算子 substitution operator 27
置换张量 substitution tensor 27
中心 center 112
中心曲线场 central curve field 112
主动力 active force 292
主轴方向 direction of principal axis 33
主值 principal value 33
驻值 stationary value 63
驻值条件 condition of stationary value 61
转置张量 transposed tensor 31
子集 subset 216
子空间 subspace 218
自伴算子 self-adjoint operator 230
自变函数 independent function 47
自共轭常微分方程 self-conjugate ordinary differential equation 239
自共轭算子 self-conjugate operator 230
自然边界条件 natural boundary conditions 138
自然数集 natural numbers set 216
自由边界 free boundary 50
自由边界条件 free boundary condition 50
自由度 degrees of freedom 315
自由度数目 number of degrees of freedom 315
自由系 free system 291
自由系统 free system 291
自由项 free term 228
自由指标 free index 27
自由质点系统 system of free particles 291
宗量 argument 48
宗量函数 argument function 48
总动能 total kinetic energy 312
总势能的二次变分 second variation of total potential energy 306
总势能的一次变分 first variation of total potential energy 306
总余能 total complementary energy 310
总余能原理 principle of total complementary energy 310
最简单的积分型泛函 simplest functional of integral type 53
最简泛函 simplest functional cost functional 53
最速降线问题 brachistochrone problem, problem of curve of steepest descent, problem of brachistochrone 45
最小二乘法 method of least squares, least square method 277
最小势能原理 principle of minimum potential energy 271,304
最小特征值 smallest eigenvalue 278
最小旋转面问题 problem of least surface of revolution, problem of minimal surface of revolution, problem of minimum surface of revolution 73
最小余能原理 principle of minimum complementary energy 310
最小作用(量)原理 principle of least action 313
最小作用(量)原理的雅可比形式 Jacobi's form of the principle of least action 334
最优价格策略问题 optimal price policy problem 67
坐标 coordinates 315
坐标的变分 variation of coordinate 315
坐标函数 coordinate function 263
坐标集 coordinate set 217
作用力 applied force 292
作用量 action 313

参考文献

[1] [苏] 拉弗林契叶夫,留斯切尔涅克. 变分学教程. 曾鼎鉌,邓汉英,王梓坤译. 北京:高等教育出版社,1955

[2] [苏] C. Г. 米赫林. 数学物理中的直接方法. 周先意译. 北京:高等教育出版社,1957

[3] [苏] Л. З. 艾利斯哥尔兹. 变分法. 李世晋译. 北京:人民教育出版社,1958

[4] [日] 加藤敏夫. 变分法及其应用. 周怀生译. 上海:上海科学技术出版社,1961

[5] [美] S. 铁摩辛柯,S. 沃诺斯基. 板壳理论. 板壳理论翻译组译. 北京:科学出版社,1977

[6] [美] DONALD T. GREENWOOD. CLASSICAL DYNAMICS. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1977

[7] [捷] Karel Rektorys. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering(Second edition). D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, 1980

[8] 钱伟长. 变分法及有限元(上册). 北京:科学出版社,1980

[9] 徐秉业主编. 弹性与塑性力学例题和习题. 北京:机械工业出版社,1981

[10] 费定晖,周学圣. 数学分析习题集题解(四). 济南:山东科学技术出版社,1981

[11] 曾少潜主编. 世界著名科学家简介. 北京:科学技术文献出版社,1982

[12] 彭旭麟,罗汝梅. 变分法及其应用. 武汉:华中理工大学出版社,1983

[13] [美] E. Neal Moore. THERETICAL MECHANICS. John Wiley & Sons, Inc. 1983

[14] [日] 鹫津久一郎. 弹性和塑性力学中的变分法. 老亮,郝松林译. 北京:科学出版社,1984

[15] [美] C. L. DYM, I. H. SHAMES. 固体力学变分法. 袁祖贻,姚金山,应达之译. 北京:中国铁道出版社,1984

[16] [美] J. N. Reddy. APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS AND VARIATIONAL METHODS IN ENGINEERING. New York: McGraw-Hill Book Company, 1986

[17] 刘诗俊. 变分法有限元法和外推法. 北京:中国铁道出版社,1986

[18] 吴迪光. 变分法. 北京:高等教育出版社,1987

[19] 胡海昌,胡闰莓. 变分学. 北京:中国建筑工业出版社,1987

[20] 施振东,韩耀新. 弹性力学教程. 北京:北京航空学院出版社,1987

[21] 林畛主编. 变分法与最优控制. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1987

[22] 欧雯君,梁建华. 变分法及其应用. 西安:陕西科学技术出版社,1987

[23] [美] I. 阿西摩夫. 古今科技名人辞典. 北京:科学出版社,1988

[24] 熊祝华,刘子廷. 弹性力学变分原理. 长沙:湖南大学出版社,1988

[25] 李哲岩,张永曙. 变分法及其应用. 西安:西北工业大学出版社,1989

[26] 陈位宫. 力学变分原理. 上海:同济大学出版社,1989

[27] 尤书平. 分析力学. 北京:水利电力出版社,1989

[28] 梁宗巨主编. 数学家传略辞典. 济南:山东教育出版社,1989

[29] 魏庆征主编. 外国神话传说大词典. 北京:中国国际广播出版社,1989

[30] 邓宗奇主编. 数学家辞典. 武汉:湖北教育出版社,1990

[31] 蒯祥金,李成滋. 外国科技人物词典,工程技术卷. 南昌:江西科学技术出版社,1990

[32] [苏] M. L. 克拉斯诺夫,G. I. 马卡连柯,A. L. 凯谢耶夫. 变分法中的问题和练习. 任天视译. 贵阳:贵州教育出版社,1991

[33] 谷超豪主编. 数学词典. 上海:上海辞书出版社,1992
[34] 苏家铎,潘杰,方毅,狄成恩. 泛函分析与变分法. 合肥: 中国科学技术大学出版社,1993
[35] 解恩泽,徐本顺主编. 世界数学家思想方法. 济南:山东教育出版社,1994
[36] 祝同江,谈天民. 工程数学—变分法. 北京:北京理工大学出版社,1994
[37] 何淑芷,刁元胜,周佐衡等. 数学物理方程中的近代分析方法. 广州:华南理工大学出版社,1995
[38] 侯吉占. 简明实用泛函. 北京:地质出版社,1995
[39] 吴文俊主编. 世界著名数学家传记(上、下集). 北京:科学出版社,1995
[40] 程昌钧. 弹性力学. 兰州:兰州大学出版社,1995
[41] 康盛亮、桂子鹏. 数学物理方程近代方法. 上海:同济大学出版社,1996
[42] [苏] M. H. 鲍特文尼克,M. A. 科甘等编著. 神话辞典. 黄鸿森,温乃铮译. 北京:商务印书馆,1997
[43] 杜瑞芝主编. 数学史辞典. 济南:山东教育出版社,2000
[44] 张奠宙,等. 科学家大辞典. 上海:上海辞书出版社,上海科技教育出版社,2000
[45] 张奠宙,马国选等. 现代数学家传略词典. 南京:江苏教育出版社,2001
[46] 黄璞生,等. 工程数学题解词典. 西安:陕西科学技术出版社,2002
[47] [美] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想(2). 朱学贤,申又枨,叶其孝,等译. 上海:上海科学技术出版社,2002
[48] 数学辞海编辑委员会. 数学辞海(第二卷). 山西教育出版社,东南大学出版社,中国科学技术出版社,2002
[49] 数学辞海编辑委员会. 数学辞海(第六卷). 山西教育出版社,东南大学出版社,中国科学技术出版社,2002
[50] [新西兰] Bruce van Brunt. The Calculus of Variations. Springer-Verlag, New York Inc., 2004
[51] 老大中. 论完全泛函的变分问题[J]. 北京理工大学学报,2006,26(8):749-752
[52] LAO Da-zhong(老大中), TAN Tian-min(谈天民). On the Variational Problems of the Functionals with Derivatives of Higher Orders and Undetermined Boundary[J]. JOURNAL OF BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY,2007,16(1):116-121