变分法

吴迪光 编



高等教育出版社

变　分　法

吴迪光　编

高等教育出版社

本书介绍变分法的基本内容，全书共8章，第1章变分法的概念；第2章固定边界的变分问题；第3章变动边界的变分问题；第4章重积分的变分问题；第5章泛函的条件极值问题；第6章泛函极值的充分条件；第7章变分原理；第8章变分问题的近似解法。

本书可供工科大学有关专业大学生、研究生作教学参考书，也可供工程技术人员作自学用书。

变 分 法

吴迪光 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

*

开本850×1168 1/32 印张6.75 字数160 000

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数 00,001—8 150

书号 13010·01325 定价 1.40 元

序　言

自然科学和工程技术中出现的许多问题，常要研究这样一种抽象的函数——泛函；其值域是实数域，而定义域由某类函数所构成．研究泛函的极值问题，是变分法的基本问题．变分法是数学分析的一个分支，是微分学中处理函数极值方法的扩展，但由于泛函定义域中的函数起着独立变量的作用，在处理极值问题时，适合泛函极值条件的变元不是单个或有限多个数值变量，而是整个变动的曲线或函数，甚至是一组函数，因而它涉及的问题更深入和广泛．

古希腊人提出所谓等周问题，即在长度一定的所有封闭曲线中，找出含有最大面积的一条封闭曲线，这就是一个变分问题．人们很早就知道，这条曲线是一个圆，但这个事实直到十八世纪由欧拉(Euler)和拉格朗日(Lagrange)确立了变分法后，才得到令人满意的证明．1696年约翰·伯努利(Johann Bernoulli)向他的长兄雅可布·伯努利(Jakob Bernoulli)和其他数学家们挑战性地提出了捷线(最速降线)问题，这是变分法发展的一个标志．这个问题引起了当时数学家们的极大兴趣，如牛顿(Newton)、莱布尼兹(Leibniz)、洛必达(L'Hospital)都获得了一些结果，只有受到自己弟弟嘲笑为无能的雅可布得到的结果与众不同，在他那"很不优美"的解答中，却看到了其他人所没有看到的事实——从无穷多条曲线中，选出一条满足极值条件的曲线．实质上，这个问题是一类新问题，这类问题的解决，需要寻找新的方法．在一系列的研究中，欧拉和拉格朗日得出了泛函极值的必要条件，勒让德(Legendre)、雅可比(Jacobi)和另外一些数学家又加以发展，导出了极值

的充分条件，维尔斯特拉斯（Weierstrass）又使该理论臻于完善。希尔伯特(Hilbert)对变分法这个领域做出了若干重要的贡献，他在一个定理中叙述并证明了极小弧的可微性条件，在许多场合里，上述条件保证了极小值的存在。在希尔伯特工作的启示下，物理学家里兹(Ritz Walter)从已修正的狄利克雷(Dirichlet)原理出发，发现了一个求偏微分方程边值问题数值解的极有用的方法，这个方法为今天计算机成为日益成功的数值计算工具，提供了一种可能性条件。希尔伯特深切体会到，重大的个别问题是数学的活的血液。变分法的理论正是在解决个别问题的基础上发展起来的。1900年8月庞加莱(Poincaré)在巴黎宣布第二次国际数学家代表大会开幕，希尔伯特作了"数学问题"的报告，强调了决定着一门科学发展方向的问题的重要性，他提出并讨论了二十三个个别问题，他相信这些问题的解决，必将大大地推动二十世纪数学的发展。他所提出的第二十三个问题，是对将来的一个建议，希尔伯特认为，变分法这个数学领域，在过去受到了不适当的忽视，他希望下个世纪的数学家们能对这个领域给以更多的注意。

变分法理论的发展，与力学、物理学等其它自然科学的发展密切相关，相互促进。拉格朗日用其最小作用原理成功地描述了流体动力学的规律，启示着这些概念可应用到物理学的其它分支上去。在十九世纪早期，泊松(Poisson)、索非·乔曼(Sophie Germain)、柯西(Cauchy)等用变分法解决了许多弹性理论问题。哈密顿(Hamilton)在1824年到1832年，建立了光学的数学理论，此后，他从最小作用原理出发得出更普遍的原理，在其它数学物理分支，如弹性理论、电磁理论、相对论和量子理论中，求得相似的变分原理，不仅推动了变分法的进一步研究，而且也推动了微分方程进一步的研究。1928—1934年间，摩斯(M.Morse)与刘斯切尔尼克(Л.А.Люстерник)、舍尼列利玛(Л.Г.Шнирельман)分别提出两种联系紧流形上函数临界点的性态与流形自身拓扑性质的理论，这

两个理论已成功地应用到变分学中的测地线问题中去．近十多年来，变分理论又有了重大的进展，1973 年由安布罗塞特(A.Ambrosetti)、鲁滨罗维茨(P.H.Rabi-nowitz)提出了山路引理，引出了一系列极小极大原理．这些原理可以处理既无下界又无上界的泛函变分问题，为超线性椭圆型方程边值问题、超线性弦的周期振动问题、以及哈密顿方程组周期轨道的研究提供了有效的工具． 变分法在近代科学技术中应用愈来愈广泛，如信息论中确定信息熵的最佳分布，控制论中研究最优控制问题都有它的应用．本书限于介绍古典变分法的理论，也涉及到与近代有限元方法有关的变分原理部分，内容分为两部分：

第一部分　古典变分法泛函极值的必要条件与充分条件(第一章至第六章)，这是本书的主要部分．

第二部分　变分原理(第七章)和变分问题的近似解法(第八章)，第七章是第八章的理论基础．

本书是在教学实践的基础上，根据高等学校工科数学课程教学指导委员会(原工科数学教材编委会)的编写要求，和《变分法》评审组拟订的编写提纲编写的．评审组的同志和复审人姚昌瑞同志对本书内容提出许多极为宝贵的意见，在此表示衷心的感谢．编者希望本书能为读者在学习有关专业课程和在实际应用方面提供必要的基础知识．限于编者水平，本书难免存在缺点和不当之处，敬希读者批评指正．

吴迪光

1985 年 3 月

目　录

序　言

第1章　变分法的概念 …… 1

§1　泛函和泛函的极值 …… 1

1.1　实例 …… 1

1.2　泛函和泛函的极值 …… 4

§2　基本引理 …… 8

习题 1 …… 10

第2章　固定边界的变分问题 …… 12

§1　欧拉(Euler)方程 …… 12

1.1　欧拉方程的推导 …… 12

1.2　欧拉方程的几种特殊情况 …… 15

1.3　捷线问题的近似解 …… 23

§2　含多个未知函数的变分问题 …… 25

§3　含高阶导数的变分问题 …… 29

§4　参数形式的变分问题 …… 33

§5　泛函的变分 …… 38

5.1　泛函的一阶变分 …… 38

5.2　极值必要条件的变分表示 …… 43

5.3　泛函的二阶变分 …… 45

习题 2 …… 50

第3章　变动边界的变分问题 …… 55

§1　变动端点变分问题的自然边界条件 …… 55

§2　变动端点变分问题的横截条件 …… 59

2.1　横截条件 …… 59

2.2　一阶变分的一般形式 …… 62

2.3 三维空间的横截条件 ……66
习题 3 ……68
第4章 重积分的变分问题 ……71
§1 固定边界问题 ……71
§2 变动边界问题与自然边界条件 ……78
习题 4 ……80
第5章 泛函的条件极值问题 ……82
§1 短程线问题 ……82
§2 等周问题 ……91
§3 哈密顿(Hamilton)原理 ……99
习题 5 ……104
第6章 泛函极值的充分条件 ……108
§1 泛函弱极值的充分条件 ……108
1.1 雅可比(Jacobi)方程 ……109
1.2 雅可比判定法 ……112
1.3 欧拉方程与雅可比方程解的联系 ……114
§2 泛函强极值的充分条件 ……117
2.1 极值曲线场 ……118
2.2 维尔斯特拉斯(Weierstrass)函数 ……119
2.3 强极值的充分条件 ……121
习题 6 ……124
第7章 变分原理 ……125
§1 预备知识 ……125
1.1 函数的内积 ……125
1.2 微分算子 ……128
§2 与自共轭微分方程边值问题等价的变分问题 ……135
2.1 构造泛函 ……135
2.2 二次泛函的变分原理 ……137
2.3 非齐次边界条件 ……139
2.4 高阶方程的情形 ……141
§3 与自共轭偏微分方程边值问题等价的变分问题 ……142

3.1 狄里克雷(Dirichlet)问题 …… 143
3.2 诺伊曼(Neumann)问题 …… 145
3.3 洛平(Robin)问题 …… 147
3.4 非齐次边界条件 …… 150
习题 7 …… 152
第 8 章 变分问题的近似解法 …… 157
§ 1 里兹法 …… 157
1.1 里兹法的基本思想 …… 157
1.2 二阶自共轭微分方程边值问题的里兹法 …… 163
1.3 二阶自共轭偏微分方程边值问题的里兹法 …… 169
§ 2 伽辽金法 …… 178
§ 3 有限元法介绍 …… 186
习题 8 …… 195
习题答案 …… 198

第 1 章　变分法的概念

本章从实例引入泛函和泛函极值的定义，介绍变分法的基本引理，为讨论泛函极值的必要条件作准备.

§ 1　泛函和泛函的极值

1.1　实　　例

例 1　捷线(最速降线)问题　一质量为 m 的质点，在重力作用下，从定点 A 沿曲线下滑到定点 B，试确定一条曲线，使质点下滑的时间最短. 假定质点在 A 点处的初速 $v_0 \neq 0$，且 A, B 两定点不在同一铅直线上，我们不考虑曲线上的摩擦力和周围介质的阻力.

如图 1-1，取坐标系 xOy，点 A、B 的坐标分别为 (x_0, y_0)，(x_1, y_1). 过点 A, B 任取一条光滑曲线 l，设其方程为

$$l: \quad y = y(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

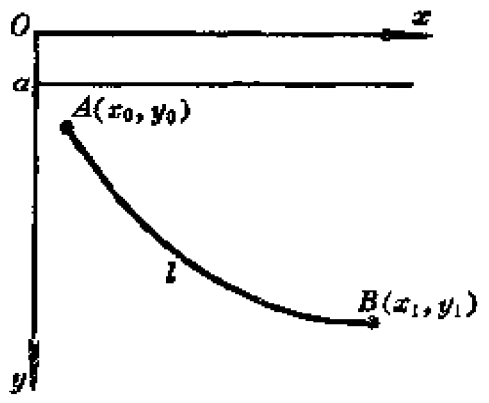

图 1-1

若质点从点 A 沿曲线 l 下滑到任意一点 $P(x, y)$ 处的速率为 v，由能量守衡定律得出

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = mg(y - y_0),$$

由上式解得　$v = \sqrt{2g(y-a)}$，其中　$a = y_0 - \frac{v_0^2}{2g}$，$g$ 为重力

加速度.

若令 s 表示弧 AP 的长，由微分学知识，$v=\frac{ds}{dt}$，于是

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2g(y-a)}},$$

两边积分，得质点沿曲线 l 从点 A 下滑到点 B 所需时间为

$$T=\int_0^T dt=\int_l\frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y-a}}dx. \qquad (1\text{-}1)$$

对于过 A、B 两点的每一选定的光滑曲线 l，由积分(1-1)都有确定的 T 值与之对应. 也就是说，T 是依赖于曲线 $y=y(x)$ 的，不妨记为 $T=T[y]$. 因此，捷线问题的数学提法是：在满足端点条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \qquad (1\text{-}2)$$

的光滑曲线集合$\{y=y(x),\ x\in[x_0,x_1]\}$中，确定一条曲线 $y=y(x)$，使积分(1-1)取极小值. 所求曲线称为捷线、或最速降线，是约翰·伯努利在 1696 年提出的.

例 2 等周问题 在平面上，给定长度为 l 的所有封闭光滑曲线中，求一条曲线，使它所围区域的面积 A 为最大.

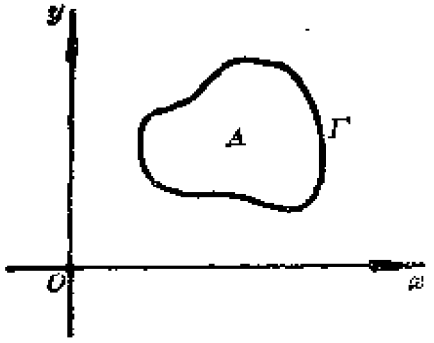

图 1-2

设曲线的参数方程为

$$\Gamma:\ \begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

且 $x(t_0)=x(t_1),\quad y(t_0)=y(t_1)$.

由条件，有

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=l(\text{常数}). \qquad (1\text{-}3)$$

根据格林(Green)公式，曲线 Γ 所围成的面积为

$$A=\frac{1}{2}\oint_\Gamma x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})dt. \qquad (1\text{-}4)$$

对每一条满足条件(1-3)的光滑曲线 Γ，由积分(1-4)有确定的 A 值与之对应，也就是说，A 是依赖于 $x=x(t), y=y(t)$ 的，记为 $A=A[x, y]$. 于是等周问题归结为：在封闭光滑曲线的集合 $\{x=x(t), y=y(t), t_0\leqslant t\leqslant t_1\}$ 中，求一条曲线，它使积分(1-4)在条件(1-3)下取极大值. (1-3)式称为等周条件.

例 3 极小曲面问题 在三维空间中，给定一条光滑闭曲线 Γ (图 1-3)，在以 Γ 为边界的一切光滑曲面中，求面积最小的曲面.

设 l 是 Γ 在平面 xOy 上的投影，D 是 l 所围的平面区域，以 Γ 为边界的任一光滑曲面方程为

$$z=z(x,y),(x,y)\in D.$$

由积分学知识，曲面面积为

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{1-5}$$

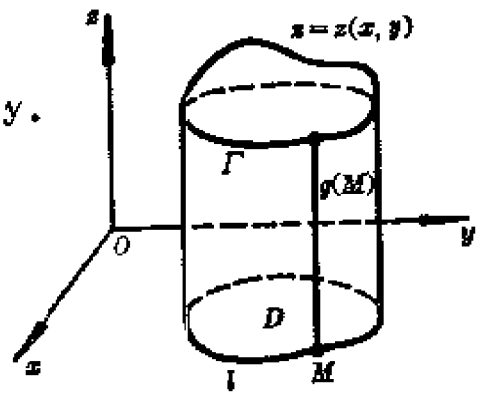

图 1-3

设 M 为 l 上任一点，与点 M 对应，Γ 上的点的纵坐标为已知函数 $g(M)$，即

$$z|_l=g(M),\quad M\in l, \tag{1-6}$$

为(1-5)中函数 z 必须满足的条件.

对于每一张满足条件(1-6)的光滑曲面 $z=z(x,y)$，积分(1-5)有确定的值与之对应，或者说，面积 S 的值是依赖于函数 $z=z(x,y)$ 的，记为 $S=S[z]$. 因此，极小曲面问题归结为在给定的条件(1-6)下，在光滑曲面的集合 $\{z=z(x,y),(x,y)\in D\}$ 中，求一张曲面 $z=z(x,y)$，使积分(1-5)取极小值.

以上例 1 至例 3 中，$T=T[y], A=A[x,y], S=S[z]$，都以定积分的形式出现，它们的变化分别依赖于未知函数 $y(x)$；$x(t)$ 和 $y(t)$；$z(x,y)$ 等. 求这些定积分在给定的附加条件(如(1-2)、

(1-3)、(1-6))下的极值问题，就是所谓泛函的极值问题. 这些未知函数 $y(x)$，$x(t)$和 $y(t)$，$z(x,y)$是独立变化的，它们起着通常微分学中自变量的作用. 因此，我们现在要研究的所谓泛函极值问题，就是适合泛函极值条件的变元并不是单个或有限多个数值变量，而是整个变动的曲线或曲面，一个函数或一组函数. 从无穷多个适合问题条件的函数中，求出一个函数，或一组函数使之能满足所题的要求，这实质上是一类新问题，它与微分学研究的函数极值问题，提法上虽相同，但涉及到的数学概念却是很不相同的. 因此，这类问题的解决，需要新的数学方法. 研究求泛函极值的方法就产生了变分法这门学科.

1.2 泛函和泛函的极值

下面，我们介绍泛函和泛函极值的概念，先介绍泛函的定义.

(一) 泛函的定义

定义 给定满足一定条件的函数集合 $\mathscr{F}$：$\{y(x)\}$，和实数集合 $\mathbf{R}$. 设 $y(x)$是 $\mathscr{F}$ 中的函数，J 是R中的变量，若 $\mathscr{F}$ 和R之间存在一个对应关系，使 $\mathscr{F}$ 中每一个函数 $y(x)$，R 中都有唯一的 J 值与之对应，则称 J 是 $y(x)$的泛函，记为

$$J=J[y(x)] \text{ 或 } J=J[y]. \tag{1-7}$$

$\mathscr{F}$ 称为泛函的定义域.

对于依赖于多个未知函数，或未知函数的自变量多于一个的情形，我们可以类似地定义如下的泛函：

$$J=J[y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)],$$

$$J=J[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)],$$

$$J=J[u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,$$
$$u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)].$$

为了叙述方便，我们介绍下面的术语：

函数类 具有某种共同性质的函数集，称为函数类.

如在区间(x_0,x_1)上连续的函数集，称为在区间(x_0,x_1)上的连续函数类，记为$C(x_0,x_1)$.

在区间(x_0,x_1)上n阶导数连续的函数集，称为在区间(x_0,x_1)上n阶导数连续的函数类，记为$C^n(x_0,x_1)$，而$C^0(x_0,x_1)$约定为$C(x_0,x_1)$.

上述术语中，若为闭区间$[x_0,x_1]$的情形，则在区间端点处的所谓连续与导数，皆是单边的.

关于C与C^n的记号，可同样地用于多元函数.

例如，在n维区域G上，若n元函数连续，而且n阶以及n阶以下的各阶偏导数皆连续的函数集，记为$C^n(G)$.

例 1 设泛函

$$J=J[y]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

试分别求 $y=x,y=x^2,y=\mathrm{ch}x$ 的泛函值.

解 $y=x$，$y'=1$，

$$J[x]=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2};$$

$y=x^2$，$y'=2x$，

$$J[x^2]=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]$$

$$\approx 1.4789;$$

$y=\mathrm{ch}x$，$y'=\mathrm{sh}x$

$$J[\mathrm{ch}x]=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\mathrm{sh}^2x}\,dx$$

$$=\int_0^1\mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}\,x\Big|_0^1$$

$$=\mathrm{sh}1\approx 1.1752.$$

事实上，只要给定的函数$y(x)\in C^1[0,1]$，由于连续函数的定积分存在，上述泛函就有定义.

（二） 函数间的距离　函数的邻域

定义　设函数$y(x)$与$y_0(x)$都属于$C^n[a,b]$，则

$$|y(x)-y_0(x)|,|y'(x)-y_0'(x)|,\cdots,|y^{(n)}(x)-y_0^{(n)}(x)|,$$

在区间$[a,b]$上的最大值，称为函数$y(x)$与$y_0(x)$在$[a,b]$上的n级距离，记为

$$d_n(y,y_0)\triangleq\max_{x\in[a,b]}\{|y-y_0|,|y'-y_0'|,\cdots,|y^{(n)}-y_0^{(n)}|\}. \tag{1-9}$$

特别，

$$d_0(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}|y-y_0|, \tag{1-10}$$

表示y与y_0在区间$[a,b]$上的零级距离；

$$d_1(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}\{|y-y_0|,|y'-y_0'|\} \tag{1-11}$$

表示y与y_0在区间$[a,b]$上的一级距离.

定义　设给定$y_0(x)\in C^n[a,b]$和正数δ，如果对于$y(x)\in C^n[a,b]$，有

$$d_n(y,y_0)<\delta, \tag{1-12}$$

则称y与y_0具有n阶的δ接近度. 又称集

$$N_n[\delta,y_0]\triangleq\{y(x)|y(x)\in C^n[a,b],d_n(y,y_0)<\delta\}^* \tag{1-13}$$

为y_0的n阶δ邻域.

在(1-12)式中，特别当$n=0,1$时，分别表示y与y_0具有零阶与一阶的δ接近度. 对于给定的正数δ，我们由(1-10)与(1-11)式表示的函数间的距离的意义知道，如果y与y_0具有一阶的δ接近度，那

---

* 记号$\triangleq$是"定义相等"或"表示"的意思.

么，就蕴含有零阶的δ接近度，但反之不成立. 一般，若两曲线具有n阶的δ接近度，那么，它们将具有任何低于n阶的δ接近度. 显然，接近度的阶数越高，两曲线接近得越好.

（三）连续泛函

定义 设泛函$J[y(x)]$的定义域为$\mathscr{F}:\{y(x)\mid y(x)\in C^n[a,b]\}$，又$y_0\in\mathscr{F}$. 如果对于任意给定的正数$e$，都能找到正数$\delta$，使得对于任意的

$$y(x)\in N_n[\delta,y_0]\subset\mathscr{F},$$

都有 $$|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<e$$

成立，则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处是具有n阶δ接近度的连续泛函.

（四）泛函的极值

下面我们介绍泛函极值的定义，它和函数极值的定义是类似的.

定义 设$y_0(x)$是泛函$J[y(x)]$的定义域$\mathscr{F}$中的某一函数，若对于$\mathscr{F}$中任一函数$y(x)$都有

$$J[y_0(x)]\leqslant J[y(x)] \quad (\text{或}J[y_0(x)]\geqslant J[y(x)])$$

则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处达到绝对极小值(或绝对极大值).

若存在一正数δ，使对于任一$y(x)\in\mathscr{F}\cap N_0[\delta,y_0]$都有

$$J[y_0(x)]\leqslant J[y(x)] \quad (\text{成}J[y_0(x)]\geqslant J[y(x)])$$

则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处达到强相对极小值(或强相对极大值).

若存在一正数δ，使对于任一$y(x)\in\mathscr{F}\cap N_1[\delta,y_0]$都有

$$J[y_0(x)]\leqslant J[y(x)] \quad (\text{或}J[y_0(x)]\geqslant J[y(x)])$$

则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处达到弱相对极小值(或弱相对极大值).

极大值和极小值统称极值.

在上述绝对极值、强相对极值和弱相对极值的定义中，函数

$y_0(x)$是依次地与较小的函数集里的函数$y(x)$相比较而言的（如图1-4）．因此，我们得出：

绝对极值⇒强相对极值⇒弱相对极值；

弱相对极值的必要条件⇒强相对极值的必要条件

⇒绝对极值的必要条件．

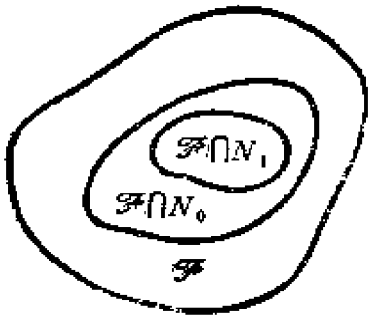

图 1-1

因此，我们推导泛函极值的必要条件时，只对泛函弱极值的必要条件进行推导．在实际问题中，泛函极值的存在性，往往在问题给出时就已肯定了的．因此，当泛函$J[y(x)]$有极值时，求出满足必要条件的未知函数$y(x)$，是我们着重要解决的问题．

泛函的极值问题，简称变分问题．在一个变分问题中，还包含一些附加条件，如(1-2)、(1-6)给出函数在区间端点或区域边界上应满足的条件，叫边界条件．其他的附加条件，叫约束条件，如(1-3)给出的等周条件就是一种约束条件．

求解变分问题就是要在指定的函数类中求泛函的极值，这类函数(其中每一函数至少应使泛函有定义，并满足边界条件及其他约束条件)叫做该变分问题的容许(可取)函数类，或容许(可取)曲线族．因此，对于容许函数，我们总假定它在某函数类中来讨论．

§2 基本引理

为了导出泛函极值的必要条件，我们介绍下列基本引理．

引理 1 设函数$f(x)\in C[x_0,x_1]$，以及对任意函数$\eta(x)\in C[x_0,x_1]$，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，都有

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx=0, \tag{2-1}$$

则在区间$[x_0,x_1]$上，$f(x)\equiv 0$．

证 用反证法. 若$f(x)$在$[x_0,x_1]$内某点$x=\xi$处不等于零，由$f(x)$的连续性，在点$x=\xi$的某个δ邻域$\xi-\delta<x<\xi+\delta$也不等于零，记$\xi-\delta=\xi_1,\xi+\delta=\xi_2$，不妨设

$$f(x)>0,x\in(\xi_1,\xi_2)\subset[x_0,x_1].$$

由于$\eta(x)$的任意性，当选定$\eta(x)$在此邻域(ξ_1,ξ_2)内为正，而在此邻域外恒为零，比如，可构造函数$\eta(x)$如下：

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & x\in[x_0,\xi_1]\\ (x-\xi_1)^2(\xi_2-x)^2, & x\in(\xi_1,\xi_2]\\ 0, & x\in[\xi_2,x_1]\end{cases}\qquad(2\text{-}2)$$

这时，$\eta(x)$在$[x_0,x_1]$上连续，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，故$\eta(x)$满足引理中所设条件，但由于在(ξ_1,ξ_2)上，$\eta(x)=(x-\xi_1)^2(\xi_2-x)^2>0$，并且连续，我们有

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\eta(x)\,dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2}f(x)(x-\xi_1)^2(\xi_2-x)^2dx>0.$$

这与假设条件(2-1)矛盾. 因此，在区间$[x_0,x_1]$上，$f(x)\equiv0$.

注意，如将引理1的条件“对任意函数$\eta(x)\in C[x_0,x_1]$，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$”改为“对任意函数$\eta(x)\in C^n[x_0,x_1]$，$\eta^{(k)}(x_0)=\eta^{(k)}(x_1)=0,(k=0,1,2,\cdots,n-1)$”其它条件不变，引理仍成立，上述证明同样有效，只要把(2-2)式的指数2改为$n+1$或$n+2$就行了.

引理2 设D为某平面区域，它的边界为Γ，函数$f(x,y)\in C(D)$，以及对任意函数$\eta(x,y)\in C(D)$，且$\eta(x,y)|_\Gamma=0$，都有

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y)dxdy=0,\qquad(2\text{-}3)$$

则在区域D上，$f(x,y)\equiv0$.

与引理1的证明方法相同，不妨设在D内某点(ξ,ζ)有$f(\xi,\zeta)>0$，由$f(x,y)$的连续性，它在点(ξ,ζ)的某个邻域$Q:(x-\zeta)^2+(y-\zeta)^2<\rho^2$上有

$$f(x,y)>0,\quad (x,y)\in Q\subset D.$$

我们构造函数

$$\eta(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in D\backslash Q\\ [(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2-\rho^2]^2, & (x,y)\in Q\end{cases}$$

于是，$\eta(x,y)$满足引理2的条件，但有

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\iint_Q f(x,y)[(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2-\rho^2]^2\,dx\,dy>0$$

这与假设条件(2-3)矛盾．因此，在区域D上，$f(x,y)\equiv 0$.

在这个引理中，如对函数$\eta(x,y)$加以更多的限制(如在D内连续可微一次或多次，且在边界Γ上，它和它的偏导数等于零)，易知引理的结论仍成立.

对于三重积分或多重积分的情形，也有类似的引理，这些引理将贯穿着以后各章的各种变分问题的讨论，因而它们是很重要的.

习 题 1

1．写出下列变分问题的数学表达式（包括相应的边界条件或约束条件)，

(1) 求过平面上两定点，且使距离为最短的光滑曲线.

(2) 设A、B为坐标平面xoy上ox轴上方的两定点，在连接A、B的所有光滑曲线中，求出一条曲线，使它绕ox轴旋转所成曲面的面积最小.

(3) 设$\varphi(x,y,z)=0$是给定的一张曲面，而$A(x_0,y_0,z_0)$，$B(x_1,y_1,z_1)$是曲面上的两定点，在该曲面上过A，B的所有曲线中，试求长度最短的一条曲线.

(4) 根据光学知识，光在不均匀的各向同性的介质中传播时，传播的速率$v(x,y,z)=\dfrac{c}{\mu(x,y,z)}$，式中$\mu(x,y,z)$为折光率，$c$为真空中光的速率．根据Fermat原理，光是沿着从A点到B点所需时间最短的路线传播的，求光从A点传播到B点所需的时间.

2．设一质量为 m(包括燃料)的火箭，推力 $T=-C\frac{dm}{dt}$ (C为正常数)，空气阻力D依赖于速度 v 和升力 L，且 $D=Av^2+BL^2$(A、B 为正常数)，假定升力L恰与重力平衡，于是，火箭沿水平方向运动的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v,\\ m\dfrac{dv}{dt}=C\beta-D,\ \ D=Av^2+Bm^2g^2\\ \dfrac{dm}{dt}=-\beta.\end{cases}$$

已知 $m(0)=m_0, m(t_1)=m_1<m_0$，试导出从时间 $t=0$ 到 $t=t_1$ 火箭的水平射程的积分表达式：

$$x(t_1)-x(0)=\int_{m_1}^{m_0}\frac{Cv}{D}\left(1+\frac{m}{C}\frac{dv}{dm}\right)dm. \tag{1}$$

我们可提出变分问题：在条件 $v(0)=v_0, v(t_1)=v_1$下，试求函数 $v=v(m)$，使积分(1)取最大值。

3．(1) 设函数$f(x)\in C_1[x_0,x_1]$,以及对任意的函数 $\eta(x)\in C^1[x_0,x_1]$，且 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ 时，都有

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\eta'(x)dx=0.$$

试证 在区间$[x_0,x_1]$上，$f(x)$恒等于常数。

(2) 设函数$f(x)\in C^1[x_0,x_1]$,以及对任意的函数 $\eta(x)\in C^n[x_0,x_1]$,且 $\eta^{(k)}(x_0)=\eta^{(k)}(x_1)=0(k=0,1,2,\cdots,n-1)$时，都有

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\eta^{(n)}(x)dx=0,$$

则在区间$[x_0,x_1]$上，$f(x)$是 $n-1$ 次多项式。

第2章　固定边界的变分问题

从本章起，我们介绍泛函(弱)极值的必要条件，先考虑固定边界的变分问题.

§1　欧拉(Euler)方程

1.1　欧拉方程的推导

首先考察依赖于一个未知函数 $y(x)$ 的泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx, \tag{1-1}$$

其中 F 是对变元 x，y，y' 连续，且一阶与二阶偏导数皆连续的函数. 容许函数 $y(x)\in C^2[x_0,x_1]$，且满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1. \tag{1-2}$$

若函数 $y(x)$ 使泛函(1-1)取极值，下面我们来导出它所满足的必要条件.

令任意函数 $\eta(x)\in C^2[x_0,x_1]$，且 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$. 考虑以实数 α 为参数的容许函数族：

$$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x), \tag{1-3}$$

它们满足边界条件(1-2)，事实上，

$$\bar{y}(x_0)=y(x_0)+\alpha\eta(x_0)=y(x_0)=y_0,$$
$$\bar{y}(x_1)=y(x_1)+\alpha\eta(x_1)=y(x_1)=y_1.$$

当 $\alpha=0$ 时，$\bar{y}(x)=y(x)$ 就是使泛函(1-1)取极值的函数.

当 α 的绝对值充分小时，对给定的 $\delta>0$，有

$$\bar{y}(x)\in C^2[x_0,x_1]\cap N_1[\delta,y], \tag{1-4}$$

将 $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ 代入(1-1)式，得到关于参数 α 的函数，即

$$J[\bar{y}]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')dx\triangleq\Phi(\alpha).$$

由于泛函(1-1)在 $y=y(x)$ 上取极值，因而函数 $\Phi(\alpha)$ 应在 $\alpha=0$ 处取极值，从而必有

$$\Phi'(0)=\frac{d}{d\alpha}\Phi(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=0.$$

这样，我们将泛函 $J[y]$ 的极值问题转化为函数 $\Phi(\alpha)$ 的极值问题，这是最重要的一步。然后利用积分号下对参数求导数的法则*，由

$$\frac{d}{d\alpha}\Phi(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')dx\Big|_{\alpha=0}=0,$$

即有

$$\Phi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,y,y')\eta+F_{y'}(x,y,y')\eta']dx=0,$$

上式中第二项利用分部积分法，有

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\eta'dx=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}d\eta=\Big[F_{y'}\eta(x)\Big]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)dF_{y'}$$

$$=-\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}dx.$$

于是

$$\Phi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\Big[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\Big]\eta(x)dx=0. \qquad (1\text{-}5)$$

由于 $\eta(x)$ 是任意函数，由引理 1 得

---

* 由《数学分析》知道，对于含参变量的积分 $\int_a^b f(x,y)dx$，若 $f(x,y)$ 及 $f_y'(x,y)$ 都在矩形域：$a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$ 上连续，则

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f_y'(x,y)\,dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$$

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \tag{1-6}$$

方程(1-6)称为泛函(1-1)的欧拉方程，是瑞士数学家欧拉在1744年发现的.

我们得到：函数 $y(x)$使泛函 (1-1) 取到极值的必要条件是 $y(x)$满足欧拉方程(1-6).

又在方程(1-6)中

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=F_{y'x}+F_{y'y}y'+F_{y'y'}y'',$$

于是欧拉方程(1-6)可写成

$$F_{y'y'}y''+F_{y'y}y'+F_{y'x}-F_y=0.$$

当 $F_{y'y'}\neq 0$时，欧拉方程是一个二阶的常微分方程，其通解

$$y=y(x,C_1,C_2)$$

含有两个任意常数 C_1,C_2，利用边界条件(1-2)可将它们确定. 即由方程组

$$\begin{cases}y(x_0,C_1,C_2)=y_0,\\ y(x_1,C_1,C_2)=y_1,\end{cases}$$

来确定，如果方程组有且只有一组解，即有且只有一条积分曲线通过端点(x_0,y_0)和(x_1,y_1)，这样求得的 $y=y(x)$就有可能使泛函(1-1)取得极值. 由于欧拉方程仅仅是泛函(1-1)取得极值的必要条件，而非充分条件，要肯定这样求得的曲线是否确使泛函 (1-1) 达到极值，以及究竟是极大值还是极小值，还需利用所谓极值的充分条件来加以判定，这个问题我们将在第六章讨论. 不过，我们应该看到，如果 $y=y(x)$是欧拉方程满足边界条件的解，则泛函(1-1)在此曲线上即使不成为极值，但至少也应该认为是处于逗留状态. 在这个意义下，我们称欧拉方程的解为逗留函数，而它所表示的曲线称为逗留曲线或极值曲线.

例 1 求泛函

$$J[y]=\int_0^{\pi}(y'^2-2y\cos x)\,dx$$

满足边界条件 $y(0)=0, y(\pi)=0$ 的极值曲线.

解 由题设 $F(x,y,y')=y'^2-2y\cos x$,

$$F_y=-2\cos x,\quad F_{y'}=2y',$$

欧拉方程为

$$y''+\cos x=0,$$

其通解为

$$y=\cos x+C_1x+C_2,$$

代入边界条件,得 $C_1=\frac{2}{\pi}, C_2=-1$. 所求极值曲线为

$$y=\cos x+\frac{2}{\pi}x-1.$$

在这个例子中,欧拉方程的通解很容易求得,但是对于一般的二阶微分方程来说,它们的解能够表示成有限形式的情况是很少的. 下一节我们就欧拉方程的可解性的几种特殊情况进行讨论.

1.2 欧拉方程的几种特殊情况

本节,我们讨论欧拉方程的几种特殊情况.

(一) 设 $F=F(x,y')$,即 F 不显含 y.

这时,$F_y\equiv 0$,欧拉方程(1-6)化为

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

它的首次积分为

$$F_{y'}(x,y')=C, \tag{1-7}$$

其中 C 是任意常数.

例 1 在球面上连接两定点的所有曲线中,求出长度最短的曲线.

解 取坐标系如图 2-1. 考察中心在原点，半径为 1 的球面，我们有关系式

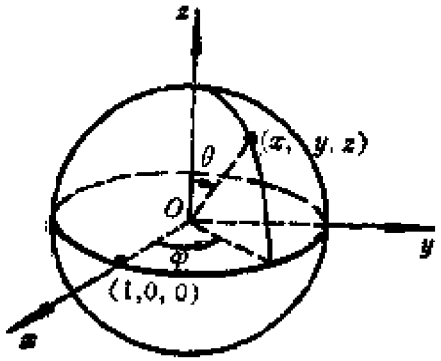

图 2-1

$$\begin{cases} x=\sin\theta\cos\varphi, \\ y=\sin\theta\sin\varphi, \\ z=\cos\theta, \end{cases}$$

设 $\varphi=\varphi(\theta)$，代入上式，得球面上以 θ 为参数的曲线方程，由弧微分 ds 的关系式

$$\begin{aligned}(ds)^2&=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\\&=(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2.\end{aligned}$$

球面上，起点为$(1,\theta_0,\varphi(\theta_0))$，终点为$(1,\theta_1,\varphi(\theta_1))$ 的两点间的弧长为

$$J[\varphi]=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}\,d\theta,$$

这里，$F(\theta,\varphi,\varphi')=\sqrt{1+\sin^2\theta(\varphi')^2}$ 不显含 φ，其欧拉方程

$$F_\varphi-\frac{d}{d\theta}F_{\varphi'}=0$$

化为$\frac{d}{d\theta}F_{\varphi'}=0$，即

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta(\varphi')^2}}\right)=0,$$

对 θ 积分，得

$$\frac{\sin^2\theta\cdot\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta(\varphi')^2}}=C, \tag{1-8}$$

其中 C 为积分常数. 如果坐标系的 Oz 轴通过题设中的一个定点，则该点的坐标 $\theta=0$，代入上式得 $C=0$. 于是上式化为 $\varphi'=0$，我

们得到解 $\varphi=$常数*. 它表示经过球的两极所引的一切大圆. 由于球面上极的选择是任意的，因此，球面上连接两定点长度最短的曲线，是过这两点的大圆上的较短弧.

（二）设 $F=F(y,y')$，即 F 不显含 x.

泛函的形式为

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(y,y')dx.$$

设 $y'(x)\neq 0$，求得 $x=x(y)$，把 y 取作自变量，于是，问题可化为求泛函

$$\bar{J}[x]=\int_{y_0}^{y_1}F\left(y,\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dx}{dy}dy\triangleq\int_{y_0}^{y_1}G(y,x')dy$$

的极值曲线了，其中 $x'=\frac{dx}{dy}$，$G(y,x')=x'F\left(y,\frac{1}{x'}\right)$.

这时，积分号下的函数 G 不显含未知函数 x，这就化为(一)的情形，其欧拉方程

$$G_x-\frac{d}{dy}G_{x'}=0,$$

由于 $G_x=0$，于是

$$\frac{d}{dy}G_{x'}=0.$$

它的首次积分为

$$G_{x'}(y,x')=C,$$

其中 C 为积分常数. 代回原变量，注意，$y'=\frac{1}{x'}$，$G(y,x')=x'F\left(y,\frac{1}{x'}\right)$，于是

---

* 或从(1-8)式解出 φ' 后积分，积分时作变换 $\theta=\operatorname{arctg}\frac{1}{t}$.

$$G_{x'}=F+x'F_{y'}\cdot\left(-\frac{1}{x'^2}\right)=F(y,y')-y'F_{y'}(y,y').$$

因此，原泛函的欧拉方程的首次积分为

$$F(y,y')-y'F_{y'}(y,y')=C, \tag{1-9}$$

其中C是积分常数.

例 2 第1章§1例1中提到的捷线问题，其中

$$F(y,y')=\frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-a}},$$

代入(1-9)，化简后得

$$\sqrt{y-a}\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{C_1\sqrt{2g}},$$

等式两边同时平方，得

$$(y-a)(1+y'^2)=C_1 \qquad \left(C_1=\frac{1}{2gC_1^2}\right)$$

令$y'=\operatorname{ctg}t$，上式化为

$$y-a=\frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2t}=C_1\sin^2t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

由于

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t\,dt}{\operatorname{ctg}t}=2C_1\sin^2t\,dt$$

$$=C_1(1-\cos 2t)dt,$$

积分得

$$x=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2,$$

作代换$2t=\theta$，于是

$$\begin{cases}x=\dfrac{C_1}{2}(\theta-\sin\theta)+C_2,\\ y=\dfrac{C_1}{2}(1-\cos\theta)+a,\end{cases}$$

其中常数 C_1, C_2 由边界条件确定. 因此，所求捷线是旋轮线.

例 3 最小旋转面问题 在 xOy 平面上，连接两点 $A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$ 的所有曲线（如图 2-2）中，要找这样一条曲线 $y=y(x)$，使它绕 Ox 轴旋转一周所成曲面有最小面积.

解 旋转曲面面积为

$$S[y]=\int_{\overset{\frown}{AB}} 2\pi y\,ds=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,$$

求泛函 $S[y]$ 满足边界条件的极小值. 由于

$$F(y,y')=2\pi y\sqrt{1+y'^2},$$

其欧拉方程的首次积分，由(1-9)式为

$$y\sqrt{1+y'^2}-y'\cdot y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,\quad\left(C_1=\frac{C}{2\pi}\right).$$

化简，得

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1.$$

令 $y'=\mathrm{sh}t$，代入上式，得

$$y=C_1\mathrm{ch}t.$$

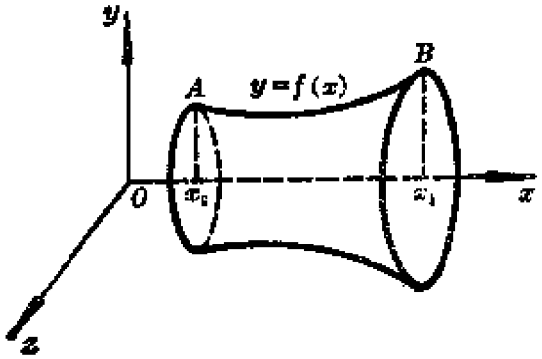

图 2-2

由于

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C_1\mathrm{sh}t\,dt}{\mathrm{sh}t}=C_1dt,$$

积分得 $x=C_1t+C_2$.

于是，所求曲面是由曲线

$$\begin{cases}x=C_1t+C_2,\\ y=C_1\mathrm{ch}t,\end{cases}$$

绕 Ox 轴旋转而成的. 在上式中消去参数 t 得

$$y=C_1\mathrm{ch}\frac{x-C_2}{C_1},$$

这是一族悬链线. 常数 C_1, C_2 可由已给边界条件确定.

(三) 设 $F=F(y')$, 即 F 不显含 x, y.

这时, 欧拉方程(1-6)化为

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

求导后, 得

$$y''F_{y'y'}=0. \tag{1-10}$$

若 $y''=0$, 得 $y=C_1x+C_2$. 这是含两个参数 C_1, C_2 的直线族.

若 $F_{y'y'}=0$, 由于 F 是 y' 的已知函数, 不妨假定方程 $F_{y'y'}=0$ 有 n 个实根

$$y'=k_i,(i=1,2,\cdots,n),$$

积分得

$$y=k_ix+C,(i=1,2,\cdots,n).$$

这是含有一个参数 C 的直线族, 它已包含在上面得到的含有两个参数的直线族 $y=C_1x+C_2$ 里面. 综合上述, 在 $F=F(y')$ 的情形, 泛函的极值曲线是直线族 $y=C_1x+C_2$.

例 4 在连接两点 $A(x_0,y_0), B(x_1,y_1)$ 的所有平面曲线中, 试求长度最短的曲线.

解 易知问题化为在端点条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 下, 求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

的极小值问题.

这里, $F=\sqrt{1+y'^2}$ 只依赖于 y', 由(三)的结论知极值曲线为直线族: $y=C_1x+C_2$, 代入端点条件确定 C_1, C_2, 得

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0),$$

因此，所求长度最短的曲线，就是我们熟知的连接 A，B 两点的直线.

（四）设 $F=P(x,y)+Q(x,y)y'$，即 F 是 y' 的线性函数的情形.

这时，泛函的欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}y'-\frac{dQ}{dx}=0,$$

其中，$\frac{dQ}{dx}=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}y'$，于是上述欧拉方程化为

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0. \tag{1-11}$$

这是普通的函数方程，由它解出的 $y=y(x)$ 不含有任意常数，它只能给出一条或几条曲线，而并不象微分方程的解那样，构成依赖于任意常数的曲线族. 所以一般说来，不能使这一条或几条曲线所确定的函数满足预先给定的边界条件. 也就是说，所给的变分问题一般是无解的. 只有在特别的情况下，由方程(1-11)所确定的曲线，恰好通过问题给定的边界点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1) 时，问题的解才存在.

如果有

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0, \tag{1-12}$$

在所讨论的平面单连区域上成立，则表达式

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

是某个单值函数 $u(x,y)$ 的全微分. 这时，泛函

$$\begin{aligned}J[y]&=\int_{x_0}^{x_1}(P+Qy')dx=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}Pdx+Qdy\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}du(x,y)=u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\\&=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)=\text{常数},\end{aligned}$$

也就是泛函的值与积分路径无关，故变分问题失去意义.

例 5 讨论泛函

$$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2+y'\sin 2x)dx$$

满足边界条件$y(0)=K$(常数)，$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$的极值曲线是否存在.

解 由于$F=y^2+y'\sin 2x$是关于y'的线性函数，$P=y^2$，$Q=\sin 2x$，欧拉方程为

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad 或\quad y-\cos 2x=0.$$

这是普通的函数方程，边界条件$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$满足.而$y(0)=K$，只有当$K=1$时才满足；如果$K\neq 1$，则满足边界条件的光滑极值曲线不存在，这时变分问题无解.

例 6 讨论变分问题

$$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[x\sin y+\left(\frac{x^2}{2}\cos y\right)y'\right]dx,$$

$$y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

是否有意义.

解 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad 即\quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0,$$

从而积分与路径无关，而

$$J[y]=\int_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}x\sin y\,dx+\frac{x^2}{2}\cos y\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos y\,dy=\frac{\pi^2}{8}.$$

这个值与从点(0,0)到点$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$所取的路径无关，故变分问题失去意义.

1.3 捷线问题的近似解

在1.2例2中，我们已从欧拉方程得出捷线问题的解是旋轮线. 现在，我们来考虑它的近似解法.

设在铅直的xoy平面上有一质点，以初速为v_0从点$A(x_A, y_A)$沿某条光滑曲线下滑到点$B(x_B, y_B)$. 我们在xOy平面上作宽为$y_B - y_A = h$的水平带形区域

$$y_A \leqslant y \leqslant y_B = y_A + h, \tag{1-13}$$

然后以直线

$$y = y_A + \frac{ih}{n}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

分带形区域(1-13)为n个水平小带形区域

$$y_A + \frac{ih}{n} \leqslant y \leqslant y_A + \frac{(i+1)h}{n}, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

在每一个小带形区域内将质点的速度近似地看成常数，设等于

$$v_i = \sqrt{2g(y_i - \alpha)} = \sqrt{2g\left(y_A + \frac{ih}{n} - \alpha\right)},$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

质点从A到B的路线将是一条折线(如图2-3)，它的顶点在下列直线上

$$y = y_A + \frac{ih}{n}, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

设第i个顶点的坐标为(x_i, y_i)，其中$y_i = y_A + \frac{ih}{n}$. 于是质点沿折线从A到B所需时间为

$$T_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{v_i}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+\left(\frac{h}{n}\right)^2}. \qquad (1\text{-}14)$$

若质点用最短的时间从 A 下滑到 B，所取折线各顶点的横坐标应这样选择，使 T_n 达到最小值. 于是，问题化为求 $n-1$ 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 的函数 T_n 的极值问题. 令

$$\frac{\partial T_n}{\partial x_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n-1), \qquad (1\text{-}15)$$

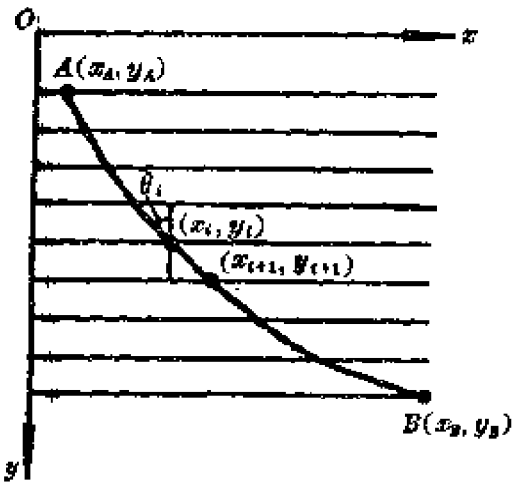

图 2-3

得

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{v_i\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+\left(\frac{h}{n}\right)^2}}+\frac{x_i-x_{i-1}}{v_{i-1}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\left(\frac{h}{n}\right)^2}}=0,$$

$$(i=1,2,\cdots,n-1).$$

若令 θ_i 表示折线的第 i 段与铅直线的夹角，上式化为

$$\frac{\sin\theta_{i-1}}{v_{i-1}}=\frac{\sin\theta_i}{v_i}=k\text{（常数）},\quad (i=1,2,\cdots,n-1). \qquad (1\text{-}16)$$

这样，在所给小带形区域的分划下，就得到一条最节省时间的折线——近似解. 若使小带形区域的宽度无限缩短，即当 $n\to\infty$ 时，则质点运动便趋于 A、B 两点间运动的真实情况，即折线就趋于所求曲线. 若曲线方程用

$$y=f(x),\quad x_A\leqslant x\leqslant x_B$$

表示，质点经过这段路程所需时间就是和式(1-14)的极限

$$T=\lim_{n\to\infty}T_n=\int_{x_A}^{x_B}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y-\alpha)}}dx,$$

而(1-16)化为

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{y-\alpha}}=k_1,\quad (k_1=\sqrt{2g}k). \tag{1-17}$$

设β为曲线的切线与Ox轴的夹角，则有$\theta+\beta=\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{dy}{dx}=y'$，于是

$$\sin\theta=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

代入(1-17)得

$$\sqrt{y-\alpha}\sqrt{1+y'^2}=C\quad\left(C=\frac{1}{k_1}\right)$$

由1.2例2，我们已经求得它的解是旋轮线.

上述解法中，用划分小区域进行离散化处理，将运动的时间T_n化为折线顶点横坐标$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$的函数，用多元函数求极值的方法，得到近似极值曲线. 由此得出一种求变分问题近似解的方法.

§2 含多个未知函数的变分问题

本节着重讨论含两个未知函数$y(x),z(x)$的泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z')dx \tag{2-1}$$

的极值问题，边界条件为

$$\begin{cases}y(x_0)=y_0,\\ z(x_0)=z_0,\end{cases}\qquad\begin{cases}y(x_1)=y_1,\\ z(x_1)=z_1,\end{cases} \tag{2-2}$$

其中F是变元x,y,y',z,z'的连续函数，且具有连续的一阶和二阶偏导数.

设容许函数 $y(x)$和 $z(x)$ 均属于 $C^2[x_0,x_1]$、满足边界条件(2-2)，并使泛函(2-1)取得极值，我们来导出它满足的必要条件.

设属于 $C^2[x_0, x_1]$ 的满足 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，$\eta_1(x_0)=\eta_1(x_1)=0$ 的任意函数 $\eta(x),\eta_1(x)$.

令

$$\begin{cases} \bar{y}=y(x)+\alpha\eta(x), \\ \bar{z}=z(x)+\alpha_1\eta_1(x), \end{cases} \tag{2-3}$$

为极值函数 $y(x),z(x)$ 的邻近容许函数族. 其中 α,α_1 均为绝对值充分小的参数. 显然(2-3)适合边界条件(2-2)，且当 $\alpha=\alpha_1=0$ 时，就是泛函(2-1)取到极值的函数.

将(2-3) 式代入泛函(2-1)，我们得到关于含参数 α,α_1 的函数，记为

$$\Phi(\alpha,\alpha_1)=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta',\ z+\alpha_1\eta_1,z'+\alpha_1\eta_1')dx. \tag{2-4}$$

由假定，泛函在 $y(x),z(x)$上取到极值，所以当$\alpha=\alpha_1=0$ 时，函数 $\Phi(\alpha,\alpha_1)$应有极值，因而必有

$$\begin{cases} \Phi_\alpha(0,0)=0, \\ \Phi_{\alpha_1}(0,0)=0. \end{cases}$$

对(2-4)求偏导数时，利用积分号下对参数求导的法则，分别关于参数 α,α_1 求偏导数，然后利用分部积分法得

$$\begin{cases} \Phi_\alpha(0,0)=[F_{y'}\eta(x)]_{x_0}^{x_1} \\ \qquad\qquad +\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}\right]\eta(x)dx=0, \\ \Phi_{\alpha_1}(0,0)=[F_{z'}\eta_1(x)]_{x_0}^{x_1} \\ \qquad\qquad +\int_{x_0}^{x_1}\left[F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}\right]\eta_1(x)dx=0. \end{cases} \tag{2-5}$$

由于 $\eta(x)$，$\eta_1(x)$ 的任意性，以及条件 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，

$\eta_1(x_0)=\eta_1(x_1)=0$，根据引理 1 由(2-5) 式得出函数 $y(x),z(x)$ 必须满足下面的欧拉方程组

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0, \\ F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}=0. \end{cases} \tag{2-6}$$

这就是泛函(2-1)取极值的必要条件.

(2-6)的两个方程一般都是二阶常微分方程，其通解含有四个任意常数：

$$\begin{cases} y=y(x,C_1,C_2,C_3,C_4), \\ z=z(x,C_1,C_2,C_3,C_4). \end{cases}$$

这四个任意常数 C_1,C_2,C_3,C_4 可由边界条件(2-2)确定. 从几何上看，泛函(2-1)的极值函数 $y=y(x),z=z(x)$ 就是三维空间中通过点(x_0,y_0,z_0)与(x_1,y_1,z_1)的一条曲线，称为极值曲线.

对于含有 n 个未知函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$的泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')dx,$$

具有边界条件

$$\begin{cases} y_i(x_0)=y_{0i}, \\ y_i(x_1)=y_{1i}, \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

可类似地推出泛函取极值的函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 的必要条件为满足欧拉方程组

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

一般说来，其通解含有 $2n$ 个任意常数，它们可由边界条件确定.

例 1 求泛函

$$J[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2yz-y'^2-z'^2)dx,$$

满足边界条件

$$y(0)=0,\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$z(0)=0,\qquad z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,$$

的极值曲线.

解 $F=2yz-y'^2-z'^2$,由(2-6)式,欧拉方程组为

$$\begin{cases}y''+z=0,\\ z''+y=0,\end{cases}\tag{2-7}$$

将(2-7)的两式相加,得

$$(y+z)''+(y+z)=0,$$

解得

$$y+z=C_1\cos x+C_2\sin x.\tag{2-8}$$

将(2-7)的两式相减,得

$$(y-z)''-(y-z)=0,$$

解得

$$y-z=C_3e^x+C_4e^{-x}.\tag{2-9}$$

由(2-8)、(2-9)得欧拉方程组(2-7)的通解为

$$\begin{cases}y=A_1\cos x+A_2\sin x+A_3e^x+A_4e^{-x},\\ z=A_1\cos x+A_2\sin x-A_3e^x-A_4e^{-x},\end{cases}$$

代入边界条件,求得$A_1=A_2=0,A_3=-A_4=1\Big/\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\right)$,故所求极值曲线为

$$y=\mathrm{sh}x\Big/\mathrm{sh}\frac{\pi}{2},\qquad z=-\mathrm{sh}x\Big/\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}.$$

例2 设在不均匀的各向同性的介质中,光的传播速率为$v(x,y,z)=c/\mu(x,y,z)$,c为真空中光的速率,$\mu(x,y,z)$为折光

率. 试求光从点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 到点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 的传播路线.

解 取过点 $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ 的任意光滑曲线

$$\Gamma:\begin{cases}y=y(x),\\ z=z(x),\end{cases}\qquad (x_0\leqslant x\leqslant x_1).$$

根据费尔马(Fermat)原理,在介质中,光是沿由 A 到 B 所需时间最短的路线进行的. 光沿曲线 Γ 从点 A 传播到点 B 所需时间为

$$T[y,z]=\int_\Gamma \frac{ds}{v}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{c}\mu(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

其欧拉方程组为

$$\begin{cases}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\mu y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0,\\[2ex] \sqrt{1+y'^2+z'^2}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\mu z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0,\end{cases}$$

所求光的传播路线乃由这个方程的解与边界条件

$$\begin{cases}y(x_0)=y_0,\\ z(x_0)=z_0,\end{cases}\qquad\begin{cases}y(x_1)=y_1,\\ z(x_1)=z_1,\end{cases}$$

来确定.

§ 3 含高阶导数的变分问题

我们先考虑含有未知函数 $y(x)$ 的二阶导数的泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')\,dx,\tag{3-1}$$

具有边界条件

$$\begin{aligned}&y(x_0)=y_0, && y'(x_0)=y'_0,\\ &y(x_1)=y_1, && y'(x_1)=y'_1,\end{aligned}\tag{3-2}$$

的极值问题.

假定 F 对各个变元连续,且具有直到三阶的各阶连续偏导

数，以及容许函数 $y(x)\in C^4[x_0,x_1]$，满足边界条件(3-2)，并使泛函(3-1)取到极值，我们来导出它所满足的必要条件。

令

$$\bar{y}=y(x)+\alpha\eta(x), \tag{3-3}$$

为 $y(x)$的邻近容许函数族。其中任意函数 $\eta(x)\in C^2[x_0,x_1]$，同时

$$\eta(x_0)=\eta(x_1)=\eta'(x_0)=\eta'(x_1)=0, \tag{3-4}$$

将(3-3)代入(3-1)式，得关于参数 α 的函数 $\Phi(\alpha)$，对 α 求导数并令$\alpha=0$ 得

$$\Phi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y\eta(x)+F_{y'}\eta'(x)+F_{y''}\eta''(x)]dx, \tag{3-5}$$

上式中，第二、三两项分别利用分部积分法，得

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\eta'(x)dx=\left[\eta(x)\ F_{y'}\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}dx,$$

以及

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y''}\eta_y''(x)dx=\left[\eta'(x)\ F_{y''}\right]_{x_0}^{x_1}-\left[\eta(x)\frac{d}{dx}F_{y''}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}dx,$$

于是(3-5)式化为

$$\Phi'(0)=\left[\eta(x)F_{y'}+\eta'(x)F_{y''}-\eta(x)\frac{d}{dx}\ F_{y''}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right]\eta(x)dx, \tag{3-6}$$

利用条件(3-4)，上面等式右边第一个方括号内各项都等于零，再由泛函(3-1)在曲线 $y=y(x)$上取极值，因而函数 $\Phi(\alpha)$在$\alpha=0$处取极值，必有 $\Phi'(0)=0$，即

$$\Phi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right]\eta(x)dx=0,\tag{3-7}$$

由于$\eta(x)$的任意性，根据引理1得

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0.\tag{3-8}$$

因此，使泛函(3-1)取到极值的函数$y=y(x)$应当是方程(3-8)的解. 方程(3-8)称为欧拉-泊松(Euler-Poisson)方程. 一般说来，(3-8)是关于$y(x)$的四阶常微分方程，它的通解含有四个任意常数，这些常数可由边界条件(3-2)确定.

对于含有未知函数的较高阶导数，或未知函数多于一个的固定边界变分问题，在函数F足够光滑的条件下，易得下列结果：

(1) 依赖于未知函数$y(x)$的较高阶导数的泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})dx,$$

其欧拉-泊松方程为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

(2) 依赖于两个未知函数$y(x)$，$z(x)$的较高阶导数的泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)};z,z',z'',\cdots,z^{(m)})dx,$$

其欧拉-泊松方程组为

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}+\dfrac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0,\\[2ex] F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}+\dfrac{d^2}{dx^2}F_{z''}-\cdots+(-1)^m\dfrac{d^m}{dx^m}F_{y^{(m)}}=0.\end{cases}$$

例 1 求泛函

$$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y''^2-2y'^2+y^2-x^2)dx,$$

满足边界条件

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

的极值曲线.

解 这里 $F=y''^2-2y'^2+y^2-x^2$,其欧拉-泊松方程为

$$y^{(4)}+2y''+y=0,$$

其通解是

$$y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x,$$

代入边界条件得

$$C_1=-1,\ C_2=C_3=0,\ C_4=1.$$

于是，所求极值曲线为 $y=\sin x-x\cos x$.

例 2 长度为 l 两端固定的弹性梁，承受均布载荷 q 的作用(如图2-4)，问梁取怎样的挠度曲线

$$y=y(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l$$

时，这个系统的总势能 J 最小？

解 设梁的弯曲刚度为 EI(常量)，由力学知识，这梁的弯曲应变能是

$$\frac{1}{2}\int_0^l EIy''^2dx.$$

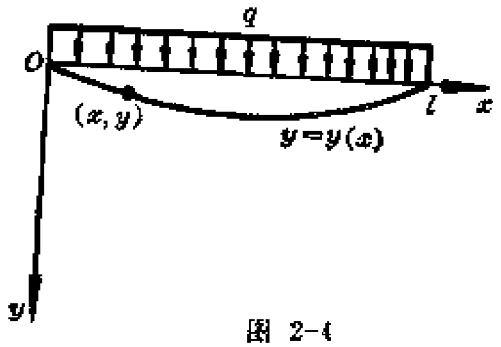

图 2-4

由于梁的挠度，使得载荷的势能有了变化，载荷势能是

$$-\int_0^l qy\,dx,$$

于是，这个系统的总势能为

$$J[y]=\frac{1}{2}\int_0^l(EIy''^2-2qy)dx. \tag{3-9}$$

另外，在问题中，已规定了 $x=0$ 和 $x=l$ 是梁的固定端点，其边界条件为

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,$$
$$y(l)=0,\quad y'(l)=0. \tag{3-10}$$

这个问题的欧拉-泊松方程为

$$EIy^{(4)}-q=0,$$

其通解为

$$y=\frac{q}{24EI}x^4+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4,$$

代入边界条件(3-10)得

$$C_1=-\frac{q}{12EI}l,\quad C_2=\frac{ql^2}{24EI},\quad C_3=C_4=0,$$

于是，梁的挠度曲线为

$$y=\frac{q}{24EI}\left[x^4-2lx^3+l^2x^2\right],\qquad 0\leqslant x\leqslant l.$$

这时，这个系统的总势能最小，根据力学中最小势能原理，对弹性体来说，在各种可能存在的势能状态中，它的稳定平衡状态是使总势能达到最小的状态. 因而，该系统中梁处于稳定平衡状态时，上述梁的挠度曲线描述了梁的轴线形状.

§ 4 参数形式的变分问题

在讨论泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{4-1}$$

的极值时，所考虑的容许函数 $y=y(x)$，总假定 y 是 x 的单值函数，这就必然缩小我们的研究范围. 例如，若我们研究的极值曲线是封闭曲线，则遇到的函数是多值的函数. 这时，如果曲线用参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\qquad t_0\leqslant t\leqslant t_1 \tag{4-2}$$

来表示，就会带来方便. 因此，我们讨论参数形式的变分问题.

将(4-2)代入(4-1)得

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F\left[x(t),y(t),\ \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right]\dot{x}(t)dt$$

$$\triangleq\int_{t_0}^{t_1}G[x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)]dt,\qquad(4\text{-}3)$$

其中

$$G(x,y,\dot{x},\dot{y})=F\left(x,\ y,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dot{x}.$$

由于同一曲线可用无穷多种形式的参数方程表出. 因此，表示曲线的参数方程要尽量使问题简化，这就产生了泛函 J 的值是否仅与曲线有关，而与该曲线的参数表示形式无关的问题，我们分析下面的例子：

例 1 考虑泛函

$$J[x(t),\ y(t)]=\int_0^1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)dt,$$

沿直线 $y=x$ 的值. 如果将直线 $y=x$ 用两种不同的参数表示形式：

$$(1)\ \begin{cases}x=t,\\ y=t,\end{cases}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

$$(2)\ \begin{cases}x=\operatorname{tg}\tau,\\ y=\operatorname{tg}\tau,\end{cases}\qquad\left(0\leqslant\tau\leqslant\frac{\pi}{4}\right),$$

则由(1)得

$$J=\int_0^1(1^2+1^2)dt=2,$$

由(2)得

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^4\tau+\sec^4\tau)d\tau=2\left[\frac{\operatorname{tg}^3\tau}{3}+\operatorname{tg}\tau\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{3},$$

由此看出，对于一般的泛函，其值不仅与曲线有关，而且与该曲线的参数表示形式也有关. 因此，我们有必要探求(4-3)中的

函数G属于什么类型时，其泛函的值仅与曲线本身有关，而与该曲线的参数表示形式无关．下面我们证明$G(x,y,\dot{x},\dot{y})$关于$\dot{x}$，$\dot{y}$是正一次齐次函数，即对于任意的正数K，恒有

$$G(x,y,K\dot{x},K\dot{y})=KG(x,y,\dot{x},\dot{y}). \tag{4-4}$$

这时，泛函(4-3)的值仅与曲线(4-2)有关，而与该曲线的参数表示形式无关．

事实上，我们若把参数t换为另外的参数τ，且t与τ是互为单值对应的，即设$\tau=\tau(t)$，$\dot{\tau}(t)>0$．于是

$$\begin{aligned}J&=\int_{t_0}^{t_1}G(x,y,\dot{x},\dot{y})dt\\&=\int_{\tau_0}^{\tau_1}G\left(x,y,\dot{\tau}\frac{dx}{d\tau},\dot{\tau}\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{1}{\dot{\tau}}d\tau\\&=\int_{\tau_0}^{\tau_1}G\left(x,y,\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau}\right)d\tau,\end{aligned} \tag{4-5}$$

上式中的$\dot{\tau}$起着(4-4)中正数K的作用．这就证明了泛函J的被积函数$G(x,y,\dot{x},\dot{y})$是$\dot{x},\dot{y}$的正一次齐次函数时，它的值只与曲线有关，而与该曲线的参数表示形式无关，我们用下述例子验证这个结论．

例如，上面例1中，$G=\dot{x}^2-\dot{y}^2$不是关于$\dot{x}$，$\dot{y}$的正一次齐次式，当$x=t,y=t$时

$$G\left(x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=1^2+1^2=2,$$

又当$t=\mathrm{tg}\tau$时

$$G\left(x,y,\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}=(\sec^4\tau+\sec^4\tau)\cos^2\tau=2\sec^2\tau.$$

因此，泛函的值是不同的．

又如　泛函

$$J=\int_0^1\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt,$$

这时，$G=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$是关于 $\dot{x},\dot{y}$ 的正一次齐次式，容许函数 $y=x$ 的两种参数形式表示如下.

$$G\left(x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$G\left(x,y,\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{\sec^4\tau+\sec^4\tau}\cdot\cos^2\tau=\sqrt{2}.$$

可以看到，这时泛函的值是一样的.

泛函 (4-1) 在参数方程 (4-2) 的表示形式下，其欧拉方程组为

$$\begin{cases}G_x-\dfrac{d}{dt}G_{\dot{x}}=0,\\[2ex] G_y-\dfrac{d}{dt}G_{\dot{y}}=0.\end{cases}\tag{4-6}$$

但这两个方程并不独立，它们之间存在一定的关系. 因 G 是关于 $\dot{x},\dot{y}$ 的正一次齐次函数，

$$G(x,y,K\dot{x},K\dot{y})=KG(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

的两边对 K 求导，然后令 $K=1$，得恒等式

$$G=\dot{x}G_{\dot{x}}+\dot{y}G_{\dot{y}},\tag{4-7}$$

再将(4-7)两边对 t 求导，则有

$$\dot{x}G_x+\dot{y}G_y+\ddot{x}G_{\dot{x}}+\ddot{y}G_{\dot{y}}=\ddot{x}G_{\dot{x}}+\dot{x}\frac{d}{dt}G_{\dot{x}}+\ddot{y}G_{\dot{y}}+\dot{y}\frac{d}{dt}G_{\dot{y}},$$

整理后可得

$$\left(G_x-\frac{d}{dt}G_{\dot{x}}\right)\dot{x}+\left(G_y-\frac{d}{dt}G_{\dot{y}}\right)\dot{y}=0.\tag{4 8}$$

上式表明(4-6)中两个方程并不独立，其中一个方程可通过另一个方程来表示.

例 3 求泛函

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\sqrt{x-k}}dt,\quad (k\text{为常数})$$

的极值曲线.

解 $G(x,y,\dot{x},\dot{y})=\dfrac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\sqrt{x-k}}$，代入(4-6)中第二个方程，得

$$G_{\dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{x-k}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=C_1,$$

即 $$\dot{y}^2=C_1^2(x-k)(\dot{x}^2+\dot{y}^2),$$

或 $$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2=C_1^2(x-k)\left(1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right),\quad (\dot{x}\neq 0)$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\sqrt{\frac{C_1^2(x-k)}{1-C_1^2(x-k)}},$$

令 $$C_1^2(x-k)=\sin^2\frac{\tau}{2};\quad 1-C_1^2(x-k)=\cos^2\frac{\tau}{2},$$

$$dx=\frac{1}{2C_1^2}\sin\tau d\tau,$$

及 $$dy=\frac{1}{2C_1^2}\sin\tau\,\mathrm{tg}\frac{\tau}{2}\,d\tau=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos\tau)d\tau,$$

积分得 $$y=\frac{1}{2C_1^2}(\tau-\sin\tau)+C_2$$

又

$$x-k=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos\tau),$$

于是

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2C_1^2}(1-\cos\tau)+k, \\ y=\dfrac{1}{2C_1^2}(\tau-\sin\tau)+C_2. \end{cases}$$

对于三维空间的情形，同样可证，若对于任意的正数 K，等式

$$G(x,y,z,K\dot{x},K\dot{y},K\dot{z})=KG(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

恒成立，则泛函

$$J[x(t),y(t),z(t)]=\int_{t_0}^{t_1} G(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})dt$$

的值只与曲线有关，而与曲线的参数表示形式无关，其欧拉方程组

$$\begin{cases} G_x-\dfrac{d}{dt}G_{\dot{x}}=0, \\ G_y-\dfrac{d}{dt}G_{\dot{y}}=0, \\ G_z-\dfrac{d}{dt}G_{\dot{z}}=0, \end{cases}$$

的三个方程之间是不独立的.

§5 泛函的变分

5.1 泛函的一阶变分

设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx, \tag{5-1}$$

其中 $F\in C^1$，其容许函数 $y(x)$，$\bar{y}(x)$ 都属于 $C^1[x_0,x_1]$，用 $\eta(x)$ 表示它们的差：

$$\eta(x)=\bar{y}(x)-y(x). \tag{5-2}$$

我们研究泛函的改变量，

$$\Delta J=J[\bar{y}]-J[y]$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\eta,y'+\eta')-F(x,y,y')]dx,$$

将被积函数改写为

$$\begin{aligned} &F(x,y+\eta,y'+\eta')-F(x,y,y') \\ &=F(x,y+\eta,y'+\eta')-F(x,y,y'+\eta')+F(x,y,y'+\eta') \\ &\quad -F(x,y,y') \\ &=F_y(x,y+\theta_1\eta,y'+\eta')\eta+F_{y'}(x,y,y'+\theta_2\eta')\eta' \end{aligned}$$

$$\triangleq \bar{F}_y\eta + \bar{F}_{y'}\eta', \qquad 0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_2<1.$$

当 $x\in[x_0,x_1]$时，有

$$|(y+\theta_1\eta)-y| = |\theta_1\eta| < |\eta| \leqslant d_1(y,\bar{y}),$$

$$|(y'+\theta_2\eta')-y'| = |\theta_2\eta'| < |\eta'| \leqslant d_1(y,\bar{y}).$$

由于$F_y(x,y,y')$与$F_{y'}(x,y,y')$对x，y，y'连续，任给$\varepsilon>0$，当$d_1(y,\bar{y})$充分小时，有

$$|\bar{F}_y - F_y| < \varepsilon, \quad |\bar{F}_{y'} - F_{y'}| < \varepsilon. \tag{5-3}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_0}^{x_1}[(\bar{F}_y - F_y)\eta + (\bar{F}_{y'} - F_{y'})\eta']dx\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x_1} |(\bar{F}_y - F_y)\eta + (\bar{F}_{y'} - F_{y'})\eta'|dx \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x_1} [|\bar{F}_y - F_y||\eta| + |\bar{F}_{y'} - F_{y'}||\eta'|]dx \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x_1} 2\varepsilon d_1(y,\bar{y})dx \\
&= 2\varepsilon(x_1-x_0)d_1(y,\bar{y})
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{x_0}^{x_1} (\bar{F}_y\eta + \bar{F}_{y'}\eta')dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (F_y\eta + F_{y'}\eta')dx + \int_{x_0}^{x_1} [(\bar{F}_y - F_y)\eta \\
&\quad + (\bar{F}_{y'} - F_{y'})\eta']dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (F_y\eta + F_{y'}\eta')dx + \varepsilon_1,
\end{aligned} \tag{5-4}$$

其中 ε_1 按不等式(5-3)，随着 $d_1(y,\bar{y})$趋于零而趋于零，由此可见，表达式

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\eta + F_{y'}\eta')dx$$

与泛函改变量 ΔJ 之差是一个比一级距离 $d_1(y,\bar{y})$更高阶的无穷

小．我们引入定义：

定义 1 设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$$

且在区间$[x_0,x_1]$上 $F\in C^1, y\in C^1$．表达式

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx$$

称为泛函 $J[y]$在 $y=y(x)$处的变分，记为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx. \tag{5-5}$$

综上所述，泛函 J 的变分 δJ 具有下面两点性质：

(1) 它与泛函的改变量 ΔJ 的差是一个比 $d_1(y,\bar{y})$ 更高阶的无穷小；

(2) 它的被积函数是关于 η 及 η'的线性函数．

应当注意，上述泛函的变分定义中，独立变量是函数 $y(x)$和 $y'(x)$，这与微分学中函数的微分的定义，有本质的差别．

为了应用方便，变分还有另一个定义．考虑含参数 α 的容许函数类 $y(x)+\alpha\eta(x)$，若 $y(x)$及 $\eta(x)$固定，将泛函 $J[y+\alpha\eta]$化为参数 α 的函数，记为

$$\Phi(\alpha)=J[y+\alpha\eta], \tag{5-6}$$

在(5-4)中，若以 $\alpha\eta(x)$代 $\eta(x)$，得

$$\Delta J=J[y+\alpha\eta]-J[y]=\alpha\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx+\varepsilon_\alpha,$$

其中 ε_α 是比 $d_1(y,y+\alpha\eta)$更高阶的无穷小，即有

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}=0.$$

于是

$$\Phi'(0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Phi(\alpha)-\Phi(0)}{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[y+\alpha\eta]-J[y]}{\alpha}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx. \tag{5-7}$$

这样，我们得到变分的另一个定义：

定义 2 设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,$$

且在区间$[x_0,x_1]$上，$F\in C^1$，$y\in C^1$，$\eta(x)\in C^1$；$y+\alpha\eta$ 是含一个参数 α 的容许函数类．表达式

$$\Phi'(0)=\frac{d}{d\alpha}J[y+\alpha\eta]\Big|_{\alpha=0} \tag{5-8}$$

称为泛函 $J[y]$在 $y=y(x)$处的变分．

若采用与定义 1 同样的记号，于是由定义 2 与(5-7)式，有

$$\delta J=\Phi'(0)=\frac{d}{d\alpha}J[y+\alpha\eta]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx,$$

也就是说，在假设的条件下，上述定义 1 与定义 2 所定义的变分，两者均存在并且相等*．

为了讨论方便起见，我们把函数 $y(x)$的改变量 $\eta(x)$称为函数 $y(x)$的变分，记为 $\delta y(x)$，即

$$\eta(x)=\bar{y}(x)-y(x)=\delta y(x), \tag{5-9}$$

于是

$$\eta'(x)=\bar{y}'(x)-y'(x)=\delta y'(x), \tag{5-10}$$

故知

---

* 一般情况下，按第一种定义的变分存在，则按第二种定义的变分也存在，反之不成立。

$$\delta y' = (\delta y)'.$$

易知，若 $y \in C^n$，则

$$\delta y^{(n)} = (\delta y)^{(n)} \tag{5-11}$$

成立.

由(5-9)、(5-10)式，泛函的变分(5-5)可改写为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx. \tag{5-12}$$

如果我们再考虑泛函(5-1)的被积函数 $F(x, y, y')$ 的改变量

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') \\ &= F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + \varepsilon_1' \end{aligned}$$

式中 ε_1' 是按不等式(5-3)随 $d_1(y, y + \delta y)$ 趋于零而趋于零，由此可见，表达式

$$F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \tag{5-13}$$

与被积函数改变量 ΔF 之差是一个比 $d_1(y, y + \delta y)$ 更高阶的无穷小，且是关于 $\delta y, \delta y'$ 的线性函数，我们称它为函数 $F(x, y, y')$ 在 $y(x)$ 处的变分，记为 δF，即

$$\delta F = F_y \delta y + F_{y'} \delta y'. \tag{5-14}$$

于是，(5-12)式又可写为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (\delta F) dx, \tag{5-15}$$

也就是说，在所假设的条件下，变分算子"δ"和定积分符号"$\int_{x_0}^{x_1}$"的次序是可以交换的. 在一定条件下，这种运算可以推广. 例如，设泛函

$$J[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n') dx.$$

若 $F \in C^1, y_i \in C^1, \delta y_i \in C^1 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(\delta F)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\Big(\sum_{i=1}^{n}F_{y_i}\delta y_i+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\delta y_i'\Big)dx.$$

(5-16)

5.2 极值必要条件的变分表示

有了变分概念，对泛函极值的必要条件有更简洁的描述．例如

(1) 设函数 $y(x)\in C^2[x_0,x_1]$给出泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

在边界条件 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 下的极值，必须对任意函数 $\delta y(x)\in C^2[x_0,x_1],\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$,其变分

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx$$

等于零．

这里,我们看到,泛函的变分 $\delta J=0$ 简洁地表达了泛函 J 取极值的必要条件．在上式中，我们注意到 $\delta y'=(\delta y)'$，将第二项分部积分,于是

$$\delta J=[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\Big(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\Big)\delta y\,dx \qquad (5\text{-}17)$$

等于零．由条件 $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$,以及 δy 的任意性，根据引理 1 得出欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

(2) 设函数 $y(x)\in C^4[x_0,x_0]$给出泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')dx$$

在边界条件$y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1,y'(x_0)=y_0',y'(x_1)=y_1'$下的极值，必须对任意函数 $\delta y(x)\in C^4[x_0,x_1]$，$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=\delta y'$

$(x_0)=\delta y'(x_1)=0$，其变分

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(\delta F)dx=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y'')dx$$

等于零．注意到 $\delta y'=(\delta y)'$，$\delta y''=(\delta y)''$，将上式中第二、三两项分别分部积分，于是得

$$\delta J=\left[\delta yF_{y'}+\delta y'F_{y''}-\delta y\frac{d}{dx}F_{y''}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dy^2}F_{y''}\right)\delta y\,dx \qquad (5\text{-}18)$$

等于零．再利用 δy，$\delta y'$ 在区间端点的值为零的条件，以及 δy 的任意性，根据引理 1 得欧拉-泊松方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0.$$

(3) 设函数 $y_i(x)\in C^2[x_0,x_1]$，$(i=1,2,\cdots,n)$给出泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')dx$$

在条件 $y_i(x_0)=y_{i0}$，$y_i(x_1)=y_{i1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 下的极值，必须对任意函数 $\delta y_i(x)\in C^2[x_0,x_1]$，$\delta y_i(x_0)=\delta y_i(x_1)=0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，其变分

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(\delta F)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{i=1}^{n}F_{y_i}\delta y_i+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\delta y_i'\right)dx$$

等于零，再利用分部积分法得

$$\delta J=\left[\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\delta y_i\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\left(F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}\right)\delta y_i dx \qquad (5\text{-}19)$$

等于零．利用 $\delta y_i(x)$在区间端点的值为零的条件，以及 δy_i 的任意性，根据引理 1 得欧拉方程组

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

5.3 泛函的二阶变分

下面我们介绍泛函的二阶变分概念。

设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx,$$

在区间$[x_0,x_1]$上，$F\in C^2$，容许函数$y(x)$与$\bar{y}(x)$都属于C^2，记

$$\delta y(x)=\bar{y}(x)-y(x).$$

考虑泛函的改变量

$$\begin{aligned}\Delta J&=J[\bar{y}]-J[y]\\&=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\delta y,y'-\delta y')-F(x,y,y')]dx,\end{aligned}$$

利用二元函数的泰勒(Taylor)公式，得

$$\begin{aligned}&F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')\\&=(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')+\frac{1}{2!}[F_{yy}(x,y+\theta\delta y,y'+\theta\delta y')\delta y^2\\&\qquad+2F_{yy'}(x,y+\theta\delta y,y'+\theta\delta y')\delta y\delta y'\\&\qquad+F_{y'y'}(x,y+\theta\delta y,y'+\theta\delta y')\delta y'^2]\\&\qquad(0<\theta<1)\\&\triangleq(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')+\frac{1}{2}[\bar{F}_{yy}\delta y^2+2\bar{F}_{yy'}\delta y\delta y'+\bar{F}_{y'y'}\delta y'^2].\end{aligned}$$

当$x\in[x_0,x_1]$时，

$$\begin{aligned}&|(y+\theta\delta y)-y|=|\theta\delta y|<|\delta y|\leqslant d_1(y,\bar{y}),\\&|(y'+\theta\delta y')-y'|=|\theta\delta y'|<|\delta y'|\leqslant d_1(y,\bar{y}),\end{aligned}$$

由于F_{yy}，$F_{yy'}$，$F_{y'y'}$是连续函数，因此，对于任给$e>0$，当$d_1(y,\bar{y})$充分小时，有

$$|\bar{F}_{yy}-F_{yy}|<e,\ |\bar{F}_{yy'}-F_{yy'}|<e,\ |\bar{F}_{y'y'}-F_{y'y'}|<e \tag{5-20}$$

与(5-4)式相同的估计方法，可得

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') \, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2 F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [(\bar{F}_{yy} - F_{yy}) \delta y^2 + 2(\bar{F}_{yy'} - F_{yy'}) \delta y \delta y'$$

$$+ (\bar{F}_{y'y'} - F_{y'y'}) \delta y'^2)] dx$$

$$\triangleq \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J + e_2, \tag{5-21}$$

其中

$$|e_2| \leqslant \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [e d_1^2(y, \bar{y}) + 2 e d_1^2(y, \bar{y}) + e d_1^2(y, \bar{y})] dx$$

$$= 2(x_1 - x_0) e d_1^2(y, \bar{y}),$$

故 e_2 按不等式(5-20)随着 $d_1^2(y, \bar{y})$ 趋于零而趋于零. 它是一个比 $d_1^2(y, \bar{y})$ 更高阶的无穷小.

δJ 是泛函 J 的变分,即

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') \, dx,$$

今后我们称它为一阶变分.

表达式

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2 F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2) dx \tag{5-22}$$

称为泛函 J 的二阶变分.

再考虑到泛函 J 的被积函数 F 的改变量

$$\Delta F = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')$$

$$= F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + \frac{1}{2} (F_{yy} \delta y^2 + 2 F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2) + e_2'$$

$$\triangleq \delta F + \frac{1}{2} \delta^2 F + e_2'.$$

其中 e_2' 是比 $d_1^2(y, y + \delta y)$ 更高阶的无穷小.

记号

$$\delta F = F_y \delta y + F_{y'} \delta y'$$

是函数 $F(x, y, y')$的变分，今后称为一阶变分。

而记号

$$\delta^2 F = F_{yy} \delta y^2 + 2 F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2 \qquad (5\text{-}23)$$

称为函数 $F(x, y, y')$的二阶变分.

有了函数的二阶变分概念，于是泛函的二阶变分(5-22)可写为

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} (\delta^2 F) dx, \qquad (5\text{-}24)$$

也就是说，在假设的条件下，二阶变分算子"δ^2"和定积分符号"$\int_{x_0}^{x_1}$"的次序是可以交换的.

有了泛函二阶变分概念，于是泛函的改变量由(5-21)式可写为

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + \varepsilon_2, \qquad (5\text{-}25)$$

其中 ε_2 是比 $d_1^2(y, y + \delta y)$更高阶的无穷小.

又由(5-6)式

$$\Phi(\alpha) = J[y + \alpha \delta y],$$

将 $\Phi(\alpha)$在 $\alpha = 0$ 处按泰勒公式展开

$$\Phi(\alpha) = \Phi(0) + \alpha \Phi'(0) + \frac{\alpha^2}{2!}\Phi''(0) + \frac{\alpha^3}{3!}\Phi'''(\theta\alpha),^{*}$$

$$(0 < \theta < 1) \qquad (5\text{-}26)$$

其中

$$\Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha \delta y]\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = \delta J.$$

* 在(5-26)式中，或者项 $\alpha\Phi'(0)$，$\frac{\alpha^2}{2!}\Phi''(0)$，或者仅仅系数 $\Phi'(0)$，$\Phi''(0)$分别称为泛函 J 的一阶与二阶变分. 本书采用后面这种定义.

同理

$$\Phi''(0)=\frac{d^2}{d\alpha^2}J[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(\delta y^2F_{yy}+2\,\delta y\delta y'F_{yy'}+\delta y'^2F_{y'y'})dx=\delta^2J.$$

因此

$$\Delta J=J[y+\alpha\delta y]-J[y]=\Phi(\alpha)-\Phi(0)$$

$$=\alpha\delta J+\frac{\alpha^2}{2!}\delta^2J+\frac{\alpha^3}{3!}\Phi'''(\theta\alpha),\qquad(0<\theta<1).$$

由于泛函取极值的必要条件是一阶变分 $\delta J=0$，在 $\delta^2J\neq0$ 的情况下，由(5-25)式知道当 $d_1(y,y+\delta y)$ 充分小时，泛函改变量 ΔJ 的符号就与二阶变分 δ^2J 的符号相同. 这样，二阶变分对研究泛函弱极值的充分条件就起着基本的作用，这个充分条件我们将在第 6 章讨论. 下面我们举个简单的例子，说明怎样利用二阶变分的符号来判定泛函的极值.

例 1 设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}[P(x)y^2+2\,Q(x)yy'+R(x)y'^2]dx,$$

试求 δJ，δ^2J，其中 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 都属于 $C^1[x_0,x_1]$，$y(x)\in C^2[x_0,x_1]$.

解 因为 $F(x,y,y')=\frac{1}{2}[Py^2+2\,Qyy'+Ry'^2]$，

$$\delta F=F_y\delta y+F_{y'}\delta y'=(Py+Qy')\delta y+(Qy+Ry')\delta y'$$

于是

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\delta F\,dx=\int_{x_0}^{x_1}[(Fy+Qy')\delta y+(Qy+Ry')\delta y']dx,$$

又因

$$\delta^2F=F_{yy}\delta y^2+2\,F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}\delta y'^2$$

$$=P\delta y^2+2\,Q\delta y\delta y'+R\delta y'^2,$$

于是

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}\delta^2 F\,dx=\int_{x_0}^{x_1}[P\delta y^2+2Q\delta y\delta y'+R\delta y'^2]dx.$$

例 2 在例 1 中，若再设在区间$[x_0, x_1]$上 $P(x)\neq 0$，$PR-Q^2>0$，且在 $y=y(x)$上，$\delta J=0$，试证在区间$[x_0, x_1]$上

(1) 当 $P(x)>0$ 时，$J[y(x)]$是绝对极小值；

(2) 当 $P(x)<0$ 时，$J[y(x)]$是绝对极大值.

解 本题中 $F=\frac{1}{2}(Py^2+2Qyy'+Ry'^2)$是关于 y，y' 的二次多项式，故其泰勒公式的表达式也是关于 y，y' 的二次多项式，即余项为零，因此

$$\Delta J=J[y+\delta y]-J[y]=\delta J+\frac{1}{2}\delta^2 J,$$

由题设 $\delta J=0$，于是

$$\Delta J=\frac{1}{2}\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[P\delta y^2+2Q\delta y\delta y'+R\delta y'^2]dx.$$

因题设 $P(x)\neq 0$，通过配方得

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}P\left[\left(\delta y+\frac{Q}{P}\delta y'\right)^2+\frac{PR-Q^2}{P^2}\delta y'^2\right]dx,$$

又由题设 $PR-Q^2>0$，故$\left[\left(\delta y+\frac{Q}{P}\delta y'\right)^2+\frac{PR-Q^2}{P^2}\delta y'^2\right]>0$

所以$\delta^2 J$的符号同 $P(x)$在区间$[x_0, x_1]$上的符号相同. 因此，在区间$[x_0, x_1]$上

(1) 当$P(x)>0$ 时，$\delta^2 J>0$，则$J[y+\delta y]>J[y]$，即 $J[y]$是绝对极小值.

(2) 当$P(x)<0$ 时，$\delta^2 J<0$，则$J[y+\delta y]<J[y]$，即$J[y]$是绝对极大值.

习 题 2

§ 1

1．求泛函的极值曲线

(1) $J[y]=\int_0^1(y'^2+12xy)dx$,

(2) $J[y]=\int_0^1 y'(1+x^2y')dx$,

(3) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$,

(4) $J[v(t)]=\int_{t_0}^{t_1}(v'^2+2vv'-16v^2)dt$,

(5) $J[\omega(\theta)]=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{1+\omega^2}{\omega'^2}d\theta$,

(6) $J[s(t)]=\int_{t_1}^{t_2}[s^2-2s(\sin t)-s'^2]dt$,

(7) $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+y^2+2ye^x)dx$,

(8) $J[y(x)]=\int_0^1(y'^2-y^2-2xy)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$

2．求泛函$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\varphi(x)}dx$的极值曲线。

(1) $\varphi(x)=x$, (2) $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, (3) $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

3．讨论下列变分问题的解。

(1) $J[y]=\int_0^1(y^2-x^2y')dx, y(0)=\alpha, y(1)=\beta$,

(2) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}y'\right)dx, y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$,

(3) $J[y]=\int_{-1}^{1}\sqrt{y(1+y'^2)}dx, y(-1)=y(1)=\alpha>0$。

4. 设泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$,*

(1) 试证若 $y'\neq 0$,则欧拉方程又可表示为

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})-F_x=0,$$

(2) 若 $F=F(y,y')$,则欧拉方程的首次积分为 $F-y'F_{y'}=C$。

§ 2

1. 求泛函的极值曲线

(1) $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx$,

(2) $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2-2yz+2y+2z+z'^2)dx$,

(3) $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yz'+2zy'+z'^2)dx$,

$$y(x_0)=y_0,z(x_0)=z_0;y(x_1)=y_1,z(x_1)=z_1.$$

2. (1) 试证泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(y',z')dx$(设 $F_{y'y'}F_{z'z'}-F_{y'z'}^2\neq 0$)的极值曲线是空间的直线族。

(2) 求泛函 $J[y,z]=\int_0^1(y'^2+z'^2+y'z')dx$ 满足边界条件 $y(0)=0$, $z(0)=0,y(1)=1,z(1)=1$ 的极值曲线。

3. 试证 泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx$ 的欧拉方程有下列首次积分

(1) 如 F 不显含 y 时,$F_{y'}=C$

(2) 如 F 不显含 x 时,$F-y'F_{y'}-z'F_{z'}=C$

§ 3

1. 求泛函的极值曲线

(1) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(x^2+16y^2-y''^2)dx$,

---

* 今后都假定题中函数皆满足问题所需条件，这些条件概不一一列出。

(2) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(2xy+y''^2)\,dx$,

(3) $J[y]=\int_0^1(1+x+y''^2)dx$,

$y(0)=0, y(1)=1, y'(0)=1, y'(1)=1$。

2. 求泛函的极值曲线

(1) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y'')^n dx$,($n$为大于1的正整数)

(2) $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^{(n)})^2 dx$。

3. 试证 泛函$J[y]=\int_x F(x,y,y',y'')dx$的欧拉-泊松方程有下列积分

(1) 如F不显含y时，$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}=C$

(2) 如F不显含x时，$F-y'\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)-y''F_{y''}=C$

(3) 如F不显含x,y时，$F-y''F_{y''}=C_1+C_2y'$

(4) 如F不显含x,y,y'时，$F_{y''}=C_1x+C_2$

§ 4

1. 考察泛函的值是否与容许曲线的参数表示形式无关

(1) $J=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})dt$,

(2) $J=\int_0^1\sqrt{x\dot{x}\dot{y}^2}\,dt$,

(3) $J=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$。

2. 设泛函$J=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})dt$，$A$端固定在点$x_0=x(t_0), y_0=y(t_0)$，$B$端固定在点$x_1=x(t_1), y_1=y(t_1)$。试求$J$在$x=x(t), y=y(t)$上取极值的必要条件。

3. 求泛函$J=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y}}dt$的极值曲线。

§ 5

1. 设函数 $F=F(x,y,y')\in C^1$，$y=y(x)\in C^2$，试求

(1) 微分 dF，(2) 变分 δF。

2. 设函数 $F_1=F_1(x,y,y')\in C^1$，$F_2=F_2(x,y,y')\in C^1$，试证

(1) $\delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2$，

(2) $\delta(F_1F_2)=F_1\delta F_2+F_2\delta F_1$，

(3) $\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=\frac{F_2\delta F_1-F_1\delta F_2}{F_2^2}$，$(F_2\neq 0)$。

3. 设泛函 $J_1=J_1[y]$，$J_2=J_2[y]$，试证

(1) $\delta(J_1+J_2)=\delta J_1+\delta J_2$，

(2) $\delta(J_1J_2)=J_2\delta J_1+J_1\delta J_2$，

(3) $\delta\left(\frac{J_1}{J_2}\right)=\frac{J_2\delta J_1-J_1\delta J_2}{J_2^2}$，$(J_2\neq 0)$。

4. 设 $F=F(x,y,y',y'')\in C^1$，试证泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')dx$$

的变分

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\delta F\ dx。$$

5. 求下列泛函的变分

(1) $J[y]=\int_0^1(xy+y^2-2y^2y')dx$，求 δJ，δ^2J，

(2) $J[y_1,y_2]=\int_{x_0}^{x_1}(y_1^2+2y_1y_2+y_2^2+2y_1'y_2')dx$，求 δJ。

6. 试从 $\delta\lambda=0$ 导出泛函 $\lambda=\lambda[y]$ 的极值曲线所应满足的微分方程

(1) $$\lambda=\frac{\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2-q(x)y^2]dx}{\int_{x_0}^{x_1}r(x)y^2dx},$$

$$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0,$$

(2) $\lambda=\dfrac{\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2-q(x)y^2-s(x)y''^2]dx}{\int_{x_0}^{x_1}r(x)y^2dx}$,

$$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=\delta y'(x_0)=\delta y'(x_1)=0.$$

7. 设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2-q(x)y^2]dx+ay_0^2+by_1^2$$

其中 $y_0=y(x_0)$, $y_1=y(x_1)$, a,b 是常数.

(1) 试证 可选择一个线性函数$g(x)$,使得

$$J[y]=\int_x^x\left\{p(x)y'^2-q(x)y^2+\frac{d}{dx}[g(x)y^2]\right\}dx$$

(2) 试求 (1) 中泛函的变分 δJ.

8. 设泛函 $J=\int_{x_0}^{x_1}F(y_1',y_2',\cdots,y_n')dx$, 其中 $F(y_1',y_2',\cdots,y_n')$

$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)y_i'y_j'$,且$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$.

试证

$$\Delta J=\delta J+\frac{1}{2}\delta^2J$$

9. 一边界固定,半径为 a 的圆板,在对称分布、单位面积载荷为 $q(r)$的作用下, 系统的总势能为

$$J[w]=D\pi\int_0^a\left[r\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+2\nu\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{2q}{D}rw\right]dr$$

当$J[w]$取最小值时,系统处于平衡状态,试证板的挠度 $w=w(r)$应适合平衡方程

$$r\frac{d^4w}{dr^4}+2\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}=\frac{qr}{D},$$

式中 D 和 ν 均为弹性常数.

第3章　变动边界的变分问题

前面我们研究泛函的极值问题时，都假定其边界端点 A,B 是固定的，并且其容许曲线都通过 A,B 两点．本章我们将研究泛函的容许曲线满足另一种边界条件，即其端点不限于固定在点 A,B 处，比如端点可以沿某已知的光滑曲线自由移动．在这种情形下，泛函不仅包含固定端点的容许曲线，还应包含变动端点的容许曲线，因此，欧拉方程不但是固定端点情况下泛函极值的必要条件，也应是变动端点情况下泛函极值的必要条件*．此外，由于端点是变动的，极值曲线还需满足变动端的边界条件，下面我们就来讨论这个问题．

§1　变动端点变分问题的自然边界条件

考虑泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,\qquad(1\text{-}1)$$

先假定其容许曲线 $y=y(x)$ 的左端 $A(x_0,y_0)$ 仍固定，而右端点 B 可沿直线 $x=x_1$ 自由移动(图 3-1).

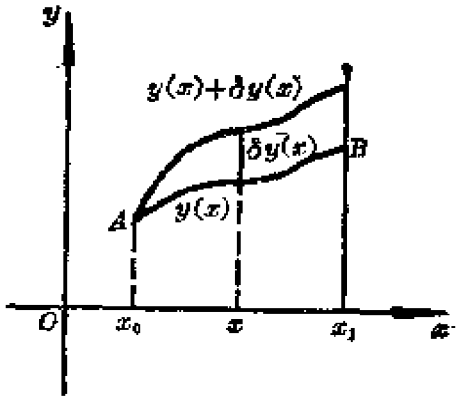

图 3-1

在这种情形下，(1-1)式的积分限 x_0,x_1 不变，泛函的变分由第2章(5-17)式为

$$\delta J=\Big[F_{y'}\delta y\Big]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\Big(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\Big)\delta y\,dx.\qquad(1\text{-}2)$$

*下文中有说明．

在所求极值曲线上泛函的一阶变分 $\delta J=0$，由于变动端点泛函的容许曲线包含了固定端点泛函的容许曲线，因此，若 $y=y(x)$ 是泛函(1-1)的极值曲线，则 $y=y(x)$ 应满足欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0. \tag{1-3}$$

于是，在所求极值曲线上，泛函 J 的变分化为

$$[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1}=0$$

由于端点 $A(x_0,y_0)$ 固定，仍有 $\delta y(x_0)=0$，而 $B(x_1,y_1)$ 可沿直线 $x=x_1$ 自由移动，亦即 $\delta y(x_1)$ 是任意变动的，就可以不等于零了，因此，上式化为

$$F_{y'}|_{x=x_1}=0,\text{或}\quad F_{y'}(x_1,y(x_1),y'(x_1))=0. \tag{1-4}$$

在所讨论的情形，泛函 $J[y]$ 取极值的必要条件是所求极值曲线必须满足欧拉方程(1-3)，变动端点 B 必须满足条件(1-4)。这样，欧拉方程的通解 $y=y(x,C_1,C_2)$ 的任意常数 C_1,C_2，由固定端点条件 $y(x_0)=y_0$ 和变动端点条件(1-4)所确定。

同理，对左端点 $A(x_0,y_0)$ 为变动端点的情况，应满足的边界条件为

$$F_{y'}|_{x=x_0}=0,\text{或}\quad F_{y'}(x_0,y(x_0),y'(x_0))=0. \tag{1-5}$$

这里，我们看到条件(1-4)与(1-5)不必对泛函的容许函数类作为条件提出，只要(1-2)式中 $\delta J=0$ 成立，就必然自动地满足该条件，这种条件称为自然边界条件。

对于其他形式的泛函，若其极值曲线的端点沿垂直于 x 轴的直线移动时，可类似地求得其自然边界条件。例如，泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\,dx$$

的一阶变分

$$\delta J=\left[\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\delta y_i\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\left(F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}\right)\delta y_i\,dx=0, \tag{1-6}$$

论，得到在变动端点 x_1 或 x_0 处的 n 个自然边界

$$F_{y_i'}|_{x=x_1\text{ 或 }x=x_0}=0,(i=1,2,\cdots,n)。\tag{1-7}$$

又如，从泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')dx$$

的一阶变分

$$\delta J=\left[\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)\delta y+F_{y''}\delta y'\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right)\delta y\,dx=0,\tag{1-8}$$

我们得到在变动端点 x_1 或 x_0 处的两个自然边界条件

$$\left[F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right]_{x=x_1\text{或}x=x_0}=0,$$
$$F_{y''}|_{x=x_1\text{ 或 }x=x_0}=0.\tag{1-9}$$

例 1 我们在第 1 章 §1 中讨论过捷线问题，现在换一种提法，即 A 端固定，B 端可沿直线 $x=b(b>0)$ 自由滑动，试确定该捷线.

解 问题归结为求泛函

$$T[y]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-\alpha}}dx,$$

在已知边界条件下的极小问题. 我们在第 2 章中已经讨论过它的欧拉方程的解是旋轮线族

$$\begin{cases}x=\dfrac{C_1}{2}(\theta-\sin\theta)+C_2,\\ y=\dfrac{C_1}{2}(1-\cos\theta)+\alpha.\end{cases}\tag{1-10}$$

假定 A 端符合条件 $x=0,y=\alpha$，可得 $\theta=0,C_2=0$. 又由自然边界条件 $F_{y'}|_{x=b}=0$，即

$$F_{y'}|_{x=b}=\frac{y'}{\sqrt{2g(y-a)}\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=b}=0,$$

得 $y'(b)=0$，即当 $x=b$ 时，

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=0,$$

于是 $\theta=\pi$. 将 $x=b,\theta=\pi$ 代入(1-6)第一式，注意到 $C_2=0$. 得 $C_1=\frac{2b}{\pi}$. 所求曲线的方程为

$$\begin{cases} x=\frac{b}{\pi}(\theta-\sin\theta), \\ y=\frac{b}{\pi}(1-\cos\theta)+a. \end{cases}$$

例 2 求泛函

$$J[y]=\int_{-a}^{a}(y''^2-2y)dx,$$

在边界条件 $y(-a)=0,y(a)=0$ 下的极值曲线.

解 泛函的欧拉-泊松方程为

$$y^{(4)}-1=0,$$

它的通解为

$$y=\frac{x^4}{24}+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4.$$

含有四个任意常数，但只给出两个边界条件，另两个为自然边界条件，由(1-8)可知为

$$F_{y''}|_{x=-a}=0,\quad F_{y''}|_{x=a}=0.$$

将上述四个条件代入通解，得

$$\begin{cases} \dfrac{a^4}{24}+C_1\dfrac{a^3}{6}+C_2\dfrac{a^2}{2}-C_3a+C_4=0, \\ \dfrac{a^4}{24}-C_1\dfrac{a^3}{6}+C_2\dfrac{a^2}{2}-C_3a+C_4=0, \\ \dfrac{a^2}{2}+C_1a\quad+C_2\qquad\qquad=0, \\ \dfrac{a^2}{2}-C_1a\quad+C_2\qquad\qquad=0, \end{cases}$$

解得 $C_1=C_3=0$, $C_2=-\dfrac{a^2}{2}$, $C_4=\dfrac{5a^4}{24}$. 于是，所求极值曲线为

$$y=\frac{x^4}{24}-\frac{a^2x^2}{4}+\frac{5a^4}{24}.$$

§ 2 变动端点变分问题的横截条件

本节我们讨论泛函的积分限 x_0, x_1 是可变的情形.

2.1 横截条件

设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{2-1}$$

的容许曲线 $y=y(x)$ 的左端点 $A(x_0,y_0)$ 仍固定，即 $y(x_0)=y_0$；而右端点 $B(x_1,y_1)$ 可沿已知光滑曲线

$$\Gamma:\quad y=b(x),\quad (x_0<x\leqslant x_1)$$

自由移动，即 $y(x_1)=b(x_1)$（如图 3-2 ）.

若曲线

$$y=y(x),\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1 \tag{2-2}$$

满足上述边界条件，并使泛函(2-1)取到极值，现在来确定这条曲线.

这里与固定边界的变分问题不同，在确定极值曲线的同时，

变动端点的横坐标 x_1 也是待定的.

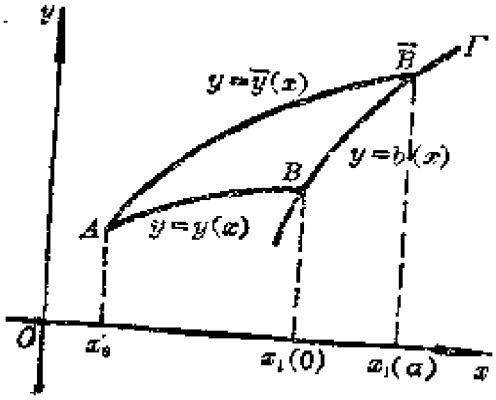

图 3-2

我们还注意到，可变端点泛函的容许曲线包含了固定端点泛函的容许曲线，当(2-2)是可变端点泛函(2-1)取得极值的曲线，那么，当 x_1 固定时，对固定端点的泛函来说，(2-2)仍然是它的极值曲线. 因此，所求曲线(2-2)应当满足欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \tag{2-3}$$

设其通解为 $y=y(x,C_1,C_2)$，其中 C_1,C_2 是任意常数. 此曲线族中的曲线应当满足边界条件：

$$\begin{cases} y(x_0,C_1,C_2)=y_0, \\ y(x_1,C_1,C_2)=b(x_1). \end{cases} \tag{2-4}$$

如果 x_1 已知，由(2-4)中两式就可确定 C_1,C_2. 但是，B 端点是变动的，上式中 x_1 还有待确定. 因此，还需寻找另一个条件来确定 x_1. 下面就来解决这个问题.

首先，我们作出极值曲线(2-2)的邻近容许曲线，使之满足给定的边界条件.

令任意函数 $\eta(x)\in C^2[x_0,x_1]$，且 $\eta(x_0)=0$. $\eta(x_1)\neq 0$ 考虑含参数 α 的曲线族

$$\bar{y}=y(x)+\alpha\eta(x), \tag{2-5}$$

上式显然满足固定端的边界条件，即

$$\bar{y}(x_0)=y(x_0)+\alpha\eta(x_0)=y(x_0)=y_0.$$

又为了使(2-5)满足变动端的边界条件，亦即当 B 端变动时，它总落在已知曲线 Γ：$y=b(x)$ 上. 因此，B 点的横坐标 x_1 的变化就不是任意的了. 我们设

$$x = x_1(\alpha),$$

且 $x_1'(\alpha) \neq 0$. 它满足

$$y(x_1(\alpha)) + \alpha\eta(x_1(\alpha)) \equiv b(x_1(\alpha)), \tag{2-6}$$

当 $\alpha = 0$ 时，$x_1 = x_1(0)$，于是，$y(x_1(0)) = b(x_1(0))$.

又由(2-6)式，我们可以求得

$$x_1'(0) = \frac{\eta(x_1(0))}{b'(x_1(0)) - y'(x_1(0))}. \tag{2-7}$$

我们将(2-5)代入(2-1)，并注意到 $x_1 = x_1(\alpha)$，于是得

$$J[y + \alpha\eta] = \int_{x_0}^{x_1(\alpha)} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')dx.$$

它的一阶变分

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha\eta]\Big|_{\alpha=0}.$$

根据对含参变量积分的求导公式*得

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1(0)} (F_y\eta + F_{y'}\eta')dx + F(x, y, y')\Big|_{x=x_1(0)} \cdot x_1'(0),$$

由分部积分公式，并注意到 $\eta(x_0) = 0$，得

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1(0)} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta dx + [F_{y'}\eta]_{x=x_1(0)} + F(x, y, y')\Big|_{x=x_1(0)} \cdot x_1'(0). \tag{2-8}$$

在极值曲线上 $\delta J = 0$，且(2-3)成立，于是(2-8)化为

$$[F_{y'}\eta]_{x=x_1(0)} + F\Big|_{x=x_1(0)} \cdot x_1'(0) = 0,$$

再由(2-7)得

---

* 设含参变量积分

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx \quad D,\ a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d,$$

函数 $f(x, y)$ 及 $f_y'(x, y)$ 都在矩形域 D 上连续. 同时，在 $[c, d]$ 上 $a'(y)$ 及 $b'(y)$ 皆存在，且 $a \leqslant a(y) \leqslant b, a \leqslant b(y) \leqslant b$，则

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y'(x, y)dx + f[b(y), y]b'(y) - f[a(y), y]a'(y).$$

$$[(b'(x)-y'(x))F_{y'}+F]_{x=x_1(0)}\cdot x_1'(0)=0,$$

由于 $x_1'(0)\neq 0, x_1(0)=x_1$ 于是得

$$[(b'(x)-y'(x))F_{y'}+F]_{x=x_1(0)}=0. \tag{2-9}$$

这就是变动端 B 点的横坐标 x_1 应满足的条件. 这个条件称为极值曲线 $y=y(x)$ 与 Γ：$y=b(x)$ 的横截条件.

于是，将(2-9)与(2-4)联立，即可确定 C_1, C_2 及 x_1.

如果泛函(2-1)的容许曲线的另一端 A 也是可变动的，设它在光滑曲线 Γ'：$y=a(x)$ 上自由移动，则极值曲线在这一端点 $x=x_0$ 处应类似地满足横截条件

$$[(a'(x)-y'(x))F_{y'}+F]_{x=x_0}=0. \tag{2-10}$$

特别地，若泛函(2-1)的被积函数具有形式

$$F=P(x,y)\sqrt{1+y'^2}\ (P(x,y)\neq 0) \tag{2-11}$$

时，则(2-9)、(2-10)的横截条件化为

$$b'(x_1)y'(x_1)=-1, \tag{2-12}$$

$$a'(x_0)y'(x_0)=-1. \tag{2-13}$$

这就是说，极值曲线 $y=y(x)$ 与变动端已知曲线 $y=b(x)$，$y=a(x)$ 分别在 $x=x_1, x=x_0$ 处成正交. 因此，当泛函的被积函数具有(2-11)的形式时，横截条件化为正交条件. 最后，我们还注意到前面所说的各种横截条件，也都是自然边界条件.

2.2 一阶变分的一般形式

下面我们将变分表达式(2-8)改写为一般形式. 由于

$$\delta x_1=\frac{d}{d\alpha}x_1(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=x_1'(0). \tag{2-14}$$

当 α 从 $\alpha=0$ 开始变化右端点描绘出某曲线 l.

B 点坐标 $(x_1(0), y(x_1(0)))$,

$\bar{B}$ 点坐标 $(x_1(\alpha), y_1(x_1(\alpha)))$,

其中

$$y_1(x_1(\alpha))=y(x_1(\alpha))+\alpha\eta(x_1(\alpha)).$$

如图 3-3，δy_1 是右端点纵坐标的改变量

$$C\bar{B}=\delta y_1,$$

而

$$\begin{aligned}\delta y_1&=\frac{d}{d\alpha}[y(x_1(\alpha))+\alpha\eta(x_1(\alpha))]\Big|_{\alpha=0}\\&=\left[\frac{dy}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}+\eta(x_1(\alpha))\Big|_{\alpha=0}\\&=y_1'(x_1(0))\delta x_1+\eta(x_1(0)),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\eta(x_1(0))&=\delta y_1-y_1'(x_1(0))\delta x_1\\&\triangleq(\delta y-y'\delta x)\big|_{x=x_1}.\end{aligned}\tag{2-15}$$

下面是变分表达式(2-8)的一般形式

$$\begin{aligned}\delta J&=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx+[(\delta y-y'\delta x)F_{y'}]_{x=x_1}\\&\quad+F|_{x=x_1}\delta x_1\\&=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx+[(F-y'F_{y'})\delta x]_{x=x_1}\\&\quad+[F_{y'}\delta y]_{x=x_1}\end{aligned}\tag{2-16}$$

由于 $\delta x,\delta y$ 的任意性，从 $\delta J=0$，及

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

得到横截条件

$$\begin{aligned}&[F-y'F_{y'}]_{x=x_1}=0,\\&F_{y'}|_{x=x_1}=0.\end{aligned}\tag{2-17}$$

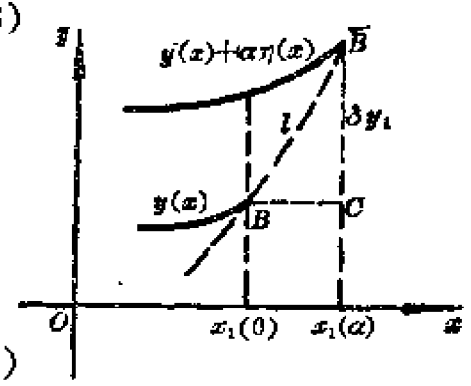

图 3-3

同理

$$[F-y'F_{y'}]_{x=x_0}=0,\quad F_{y'}|_{x=x_0}=0.\tag{2-18}$$

例 1 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ 的极值曲线，它的边

界条件为：

A端固定，即 $y(x_0)=y_0$；

B端可沿直线 $y=mx+b(m\neq 0)$自由移动，即有

$$y_1=mx_1+b.$$

解 由于 $F=\sqrt{1+y'^2}$ 不显含 x，泛函的极值曲线为直线族 $y=C_1x+C_2$.

又 F 具有(2-11)的形式，$P(x,y)\equiv 1$，因此，横截条件化为正交条件，于是，由(2-12)得

$$mC_1=-1 \text{ 即 } C_1=-\frac{1}{m}.$$

我们由

$$\begin{cases} y_1=-\dfrac{1}{m}x_1+C_2, \\ y_0=-\dfrac{1}{m}x_0+C_2, \\ y_1=mx_1+b, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{my_0+x_0-bm}{1+m^2}, \\ y_1=\dfrac{m(my_0+x_0)+b}{1+m^2}, \\ C_2=y_0+\dfrac{x_0}{m}. \end{cases}$$

这样，所求极值曲线与变动端的坐标就确定了.

例 2 求泛函

$$J[y]=\int_0^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y+1}dx$$

满足端点 $A(0,0)$固定，另一端 $B(x,y)$ 可在直线 $y=mx+b$ 上自由移动的极值曲线.

解 由于F不显含x，欧拉方程的首次积分为$F-y'F_{y'}=C_1$，可得

$$(y+1)\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{C_1},(C_1\neq 0)。$$

令$y'=\operatorname{tg} t$，于是

$$y+1=\frac{1}{C_1}\cos t,$$

又由

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\frac{1}{C_1}(-\sin t)dt}{\operatorname{tg} t}=\frac{1}{C_1}(-\cos t)dt,$$

积分得

$$x=\frac{1}{C_1}(-\sin t)+C_2,$$

消去t，得出欧拉方程的通解

$$(x-C_2)^2+(y+1)^2=\left(\frac{1}{C_1}\right)^2,$$

由于过点$(0,0)$，得$C_2^2=\left(\frac{1}{C_1}\right)^2-1$，又由横截条件化为正交条件，按(2-12)式有

$$m\left(-\frac{x-C_2}{y+1}\right)=-1 \text{ 即 } \frac{x-C_2}{y+1}=\frac{1}{m}。$$

设极值曲线与$y=mx+b$的交点为(x_1,y_1)，即

$$\begin{cases}\dfrac{x_1-C_2}{y_1+1}=\dfrac{1}{m},\\ y_1=mx_1+b,\end{cases}$$

解得$C_2=-\dfrac{b+1}{m}$。所求极值曲线方程为

$$\left(x+\frac{b+1}{m}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{b+1}{m}\right)^2+1。$$

2.3 三维空间的横截条件

对于泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx,$$

若端点 $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$分别在已知光滑曲线

$$\begin{cases}y=\varphi_0(x)\\ z=\psi_0(x)\end{cases},\qquad \begin{cases}y=\varphi_1(x)\\ z=\psi_1(x)\end{cases}$$

上自由移动，其横截条件为

$$[F+(\varphi_0'-y')F_{y'}+(\psi_0'-z')F_{z'}]_{x=x_0}=0, \tag{2-19}$$

$$[F+(\varphi_1'-y')F_{y'}+(\psi_1'-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0. \tag{2-20}$$

又若端点 $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$分别在已知光滑曲面

$$z=\varphi_0(x,y),z=\varphi_1(x,y)$$

上自由移动，其横截条件为

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}+\left(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x}-z'\right)F_{z'}\right]_{x=x_0}=0, & (2\text{-}21)\\ \left[F_{y'}+F_{z'}\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right]_{x=x_0}=0, & (2\text{-}22)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}+\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}-z'\right)F_{z'}\right]_{x=x_1}=0, & (2\text{-}23)\\ \left[F_{y'}+F_{z'}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right]_{x=x_1}=0. & (2\text{-}24)\end{cases}$$

特别地，若

$$F(x,y,z,y',z')=P(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\quad(P(x,y,z)\neq 0), \tag{2-25}$$

则由(2-21)、(2-22)可得在变动端点 $A(x_0,y_0,z_0)$处有

$$\begin{cases}1+z'\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x}=0, & (2\text{-}26)\\ y'+z'\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y}=0, & (2\text{-}27)\end{cases}$$

或写为

$$\frac{1}{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}}=\frac{y'}{\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}}=\frac{z'}{-1}. \tag{2-28}$$

这个条件也就是所求极值曲线在点(x_0,y_0,z_0)处的切线向量与在同一点处曲面的法线向量平行的条件. 因此，泛函的被积函数如(2-25)的形式时，横截条件化为极值曲线与曲面$z=\varphi_0(x,y)$的正交条件.

例 3 求二不相交曲面

$$z=\varphi(x,y) \text{ 与 } z=\psi(x,y)$$

间的距离.

解 设连接二曲面上点的曲线方程为

$$\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases},(x_0\leqslant x\leqslant x_1),$$

按题意就是求

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx$$

的极小值，其条件是边界点之一的坐标(x_0,y_0,z_0)满足方程$z_0=\varphi(x_0,y_0)$，而另一边界点的坐标(x_1,y_1,z_1)满足方程$z_1=\psi(x_1,y_1)$.

因为泛函的被积函数只依赖于y'和z'，即

$$F=F(y',z'),$$

欧拉方程组为下面的形式

$$\begin{cases}F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''=0,\\ F_{y'z'}y''-F_{z'z'}z''=0.\end{cases}$$

这是关于y''，z''的齐次方程组，当系数行列式不为零，即

$$F_{y'y'}F_{z'z'}-(F_{y'z'})^2\neq 0$$

时，得到零解

$$y''=0,\quad z''=0,$$

故所求泛函的极值曲线是空间中一族直线

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2, \\ z = C_3 x + C_4. \end{cases}$$

又因本题中泛函的被积函数是(2-25)中 $P(x,y,z)\equiv 1$ 的情形，所以在(x_0,y_0,z_0)和(x_1,y_1,z_1)点处的横截条件都转化为正交条件．因此，只有在这样的直线上达到极值，它与曲面 $z=\varphi(x,y)$ 在点(x_0,y_0,z_0)处，以及与曲面 $z=\psi(x,y)$ 在点 (x_1,y_1,z_1) 处都要垂直。

习 题 3

§ 1

求下列泛函的(1)变分，(2)自然边界条件，(3) 极值曲线。

1．$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2)dx$，　　$y(0)=0$，$y\left(\frac{\pi}{4}\right)$任意。

2．$J[x]=\int_1^2(t\dot{x}^2+\dot{x})dt$，　　$x(1)=1, x(2)$任意

3．$J[y]=\int_0^1(y''^2-2xy)dx$，　　$y(0)=0$，$y'(0)=0$，$y(1)=1$，$y'(1)$任意。

§ 2

1．设泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}(y^2+y'^2)dx, y(0)=0$，$y(x_1)=e^{2x_1}$，试求(1)$\delta J$，(2)横截条件。

2．设二曲线不相交，试证它们之间距离最短线必为该二曲线的公垂线．

3．求泛函 $J[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y-1}dx$ 的极值曲线，若 A端点固定在原点，B端点(x_1,y_1)可沿圆周$(x-9)^2+y^2=9$上自由移动。

4．设泛函

$$J[y]=\int_A^B G(x,y)e^{-(\operatorname{arctg} y')\operatorname{ctg}\alpha}ds\ (ds\text{为弧长的微分})$$

的极值曲线的端点 A，B 可分别沿 Γ_1：$y=y_1(x)$，Γ_2：$y=y_2(x)$ 自由移动，$G(x,y)$ 在 A,B 二点处不等于零，试证泛函的极值曲线与 Γ_1,Γ_2 相交成 α 角。

5．设泛函

$$J_1[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

与

$$J_2[y]=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,y')+P(x,y)+Q(x,y)y']dx,$$

其中 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，试证

(1) J_1 与 J_2 有相同的欧拉方程；

(2) J_2 的自然边界条件为 $F_{y'}+Q=0$。

6．设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx-\varphi(y_0)+\psi(y_1),$$

其中 φ,ψ 都是已知函数，y_0,y_1 是函数 $y(x)$ 在积分区间 $[x_0,x_1]$ 两端点的已知值。又端点位置在直线 $x=x_0,x=x_1$ 上。

(1) 试求变分 δJ；

(2) 当两个端点都自由时，试求自然边界条件。

7．设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

当容许曲线的一个端点可在已知光滑曲线 l：

$$\varphi(x,y)=0$$

上自由移动，试导出泛函 J 在该端的横截条件：

$$\frac{F-y'F_{y'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y'}}{\varphi_y}.$$

8．设泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx,$$

当容许曲线的一个端点可在已知光滑曲面 S：

$$\varphi(x,y,z)=0$$

上自由移动，试导出泛函 J 在该端的横截条件：

$$\frac{F-y'F_{y'}-z'F_{z'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y'}}{\varphi_y}=\frac{F_{z'}}{\varphi_z}.$$

9. 在第 8 题中，如果容许曲线的方程用参数形式 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$表示，泛函 J 的被积函数为

$$\Phi=\Phi(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=F\left(x,y,z,\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)\dot{x},$$ 试导出泛函在变动端点处相应的横截条件

$$\frac{\Phi_{\dot{x}}}{\varphi_x}=\frac{\Phi_{\dot{y}}}{\varphi_y}=\frac{\Phi_{\dot{z}}}{\varphi_z}.$$

第4章　重积分的变分问题

本章着重介绍依赖于二元函数的泛函极值问题，即所谓重积分的变分问题，我们将导出其极值的必要条件.

§1　固定边界问题

设泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_G F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (1\text{-}1)$$

其中未知函数 $u(x,y)$ 在区域 G 的边界 l 上的值是已知的连续函数 $g(x,y)$，记为

$$u(x,y)_l\Big|=g(x,y), \qquad (1\text{-}2)$$

又设在 G 上 $F\in C^2$，且 $u\in C^2$ 使泛函(1-1)取到极值，现在来导出它应满足的必要条件.

我们作出极值函数 $u(x,y)$ 的邻近容许函数

$$\bar{u}(x,y)=u(x,y)+\alpha\eta(x,y), \qquad (1\text{-}3)$$

其中，任意函数 $\eta(x,y)\in C^2(G)$，在 G 的边界 l 上 $\eta(x,y)$ 的值为零，即

$$\eta(x,y)\big|_l=0,$$

α 为绝对值充分小的参数. 容易看到 $\bar{u}$ 与 u 在 G 的边界 l 上取相同的值.

将(1-3)代入(1-1)，得

$$J[\bar{u}]=\iint_G F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)dxdy\triangleq\Phi(\alpha),$$

与第2章§5中讨论的一样，将 $\Phi(\alpha)$ 对 α 求导，并令 $\alpha=0$，得

$$\delta J=\Phi'(0)=\iint_{\sigma}(F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)dxdy, \qquad (1\text{-}4)$$

利用恒等式

$$F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)-\eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right),$$

将(1-4)式化为

$$\delta J=\Phi'(0)=-\iint_{\sigma}\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta(x,y)\,dxdy$$

$$+\iint_{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)\right]dxdy,$$

利用格林公式

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{l}Pdx+Qdy$$

可将上式第二个重积分化为曲线积分，即

$$\iint_{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)\right]dxdy$$

$$=\int_{l}F_{u_x}\eta dy-F_{u_y}\eta dx=\int_{l}\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right)\eta ds,$$

其中 s 是边界曲线 l 的弧长变量. 于是，得

$$\delta J=\Phi'(0)=\iint_{\sigma}\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta dxdy$$

$$+\int_{l}\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right)\eta ds. \qquad (1\text{-}5)$$

由边界条件 $\eta(x,y)|_l=0$，知(1-5)中线积分为零. 因此，极值函数 $u(x,y)$ 应满足

$$\iint_{\sigma}\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta dxdy=0,$$

由于 $\eta(x,y)$ 在 G 内的任意性，根据第 1 章 § 2 引理 2 就得到

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0. \tag{1-6}$$

这就是使泛函(1-1)取极值函数 $u(x,y)$ 应满足的方程，这个方程称为奥斯特洛格拉得斯基(Остроградский)方程，简称奥氏方程. 若写出式中的偏导数，得

$$F_{u_xu_x}u_{xx}+2F_{u_xu_y}u_{xy}+F_{u_yu_y}u_{yy}+F_{xu_x}u_x+F_{xu_y}u_y+F_{yu_x}+F_{yu_y}-F_u=0. \tag{1-7}$$

一般说，这是 $u(x,y)$ 的二阶偏微分方程，它与边界条件(1-2)一起构成一个二阶偏微分方程的边值问题.

例 1 对于变分问题

$$\begin{cases} J[u]=\iint_G(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy, \\ u|_l=g(x,y), \end{cases}$$

其中 l 为区域 G 的边界，$g(x,y)$ 为 l 上的已知连续函数. 这里 $F=u_x^2+u_y^2$，其奥氏方程由(1-6)式得

$$-\frac{\partial}{\partial x}(2u_x)-\frac{\partial}{\partial y}(2u_y)=0$$

即

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

这就是拉普拉斯(Laplace)方程. 于是，这个变分问题转化为一个偏微分方程的边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in G, \\ u|_l=g(x,y), & (l\text{ 为 }G\text{ 的边界}). \end{cases}$$

在这个变分问题中，若将直角坐标 (x,y) 转换为极坐标 (r,θ)，由关系

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases}$$

于是

$$u_x^2+u_y^2=u_r^2+\frac{1}{r^2}u_\theta^2,$$

将问题中的泛函转换为极坐标下的泛函

$$J[u]=\iint_{\sigma}\left(ru_r^2+\frac{1}{r}u_\theta^2\right)drd\theta,$$

这里 $F=ru_r^2+\frac{1}{r}u_\theta^2$. 其奥氏方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial r}F_{u_r}-\frac{\partial}{\partial\theta}F_{u_\theta}=0,$$

或

$$-\frac{\partial}{\partial r}(2ru_r)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(2\frac{1}{r}u_\theta\right)=0,$$

即

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0.$$

这正是极坐标下的拉普拉斯方程.

这里我们看到,泛函 $J[u]$具有极值曲面这一性质,对于坐标变换来说是不变的.

例 2 对于变分问题

$$\begin{cases}J[u]=\iint_{\sigma}[u_x^2+u_y^2+2uf(x,y)]\,dxdy,\\ u|_l=g(x,y),\end{cases}$$

其中 l 为区域 G 的边界,$g(x,y)$为 l 上的已知连续函数.

这里 $F=u_x^2+u_y^2+2uf(x,y)$. 其奥氏方程由(1-6)式为

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),$$

这个方程称为泊松(Poisson)方程. 于是,这一变分问题就转化为求泊松方程的边值问题,即

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),(x,y)\in G\\ u|_l=g(x,y),\qquad (l\text{ 为 }G\text{ 的边界}).\end{cases}$$

例 3 在第 1 章 §1 例 3 中提到的极小曲面问题化为求泛函

$$S[z]=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

的极小值问题，其边界条件为 $u|_l=g(M)$.

这里，它的奥氏方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right\}=0,$$

或

$$(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)z_{yy}=0,$$

这个方程便是极小曲面 $z=z(x,y)$所应满足的微分方程. 这个方程是拉格朗日得出的，后来梅斯尼尔(Meusnier)证明了这个方程与该曲面上每一点的平均曲率为零是等价的. 由实验得出，给定周线 Γ 上所张的肥皂膜，它的平衡位置是按曲率处于极小的状态. 比利时科学家白拉脱(Plateau)曾用肥皂膜做过实验，恰与极小曲面的提法相合，因此，极小曲面问题也叫白拉脱问题.

极小曲面问题可看作上述拉普拉斯方程边值问题的一种推广，我们看下面的例子：

例 4 设一拉紧了的均匀膜*，最初它覆盖在 xOy 平面的区域 D 上，D 的边界曲线为 l. 现在让 D 的边界 l 上的所有点，按垂直于 xOy 平面的方向(取为 oz 轴的正向)作微小位移 $g(x,y)$，因此，$g(x,y)$是定义在 l 上的函数。由力学知识，膜被拉伸后，所具有的势能与面积增量或正比，其比例系数 μ 称为张力，因膜均匀，μ 为常量. 这膜将采取这样的形状 $z=z(x,y)$，使其势能最小.

按题意，膜的势能

$$U[z]=\iint_D \mu(\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}-1)dxdy, \qquad (1\text{-}8)$$

其中 z 与它的偏导数 z_x、z_y 的绝对值都很小，由泰勒公式，取近似

* 不能抵抗弯曲与切变的平面薄片叫做膜.

值

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\approx 1+\frac{1}{2}(z_x^2+z_y^2),$$

于是(1-8)化为

$$U[z]=\frac{1}{2}\iint_D \mu(z_x^2+z_y^2)dxdy. \tag{1-9}$$

本题就是求一个函数 $z=z(x,y)$，它在 l 上取值 $g(x,y)$，使泛函(1-9)取极小值。这个泛函的奥氏方程

$$z_{xx}+z_{yy}=0.$$

这正是上面例 1 中求得的拉普拉斯方程。

若上述膜还受有面密度为 $f(x,y)$的外力作用，并设力的正向与 Oz轴方向一致。此时，这个外力作功所转化的势能是

$$-\iint_D fzdxdy. \tag{1-10}$$

将(1-10)并入(1-9)中，得膜的总势能为

$$U_1[z]=\iint_D \left\{\frac{1}{2}u(z_x^2+z_y^2)-fz\right\}dxdy, \tag{1-11}$$

要求总势能$U_1[z]$最小，得奥氏方程

$$z_{xx}+z_{yy}+\frac{f}{\mu}=0. \tag{1-12}$$

这就是上面例 2 考虑过的泊松方程。

对于更一般泛函的奥氏方程，可以推得下列结果：

(1) 依赖于二元函数n阶偏导数的泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_\sigma F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},\cdots,\underbrace{u_{xx\cdots x}}_{n个},\cdots,\underbrace{U_{yy\cdots y}}_{n个})dxdy, \tag{1-13}$$

其奥氏方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}F_{\underbrace{u_{xx\cdots x}}_{n个}}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^n}{\partial y^n}F_{\underbrace{u_{yy\cdots y}}_{n个}}\right)=0; \tag{1-14}$$

(2) 依赖于n元函数的泛函

$$J[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=$$

$$\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n个}F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})\,dx_1dx_2\cdots dx_n, \tag{1-15}$$

其奥氏方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x_1}F_{u_{x_1}}-\frac{\partial}{\partial x_2}F_{u_{x_2}}-\cdots-\frac{\partial}{\partial x_n}F_{u_{x_n}}=0; \tag{1-16}$$

(3) 依赖于两个二元函数的泛函

$$J[u(x,y),U(x,y)]=\iint_{\Omega}F(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y)\,dxdy, \tag{1-17}$$

其奥氏方程组为

$$\begin{cases}F_u-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0,\\[2ex] F_v-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{v_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{v_y}=0.\end{cases} \tag{1-18}$$

例 5 泛函

$$J[u]=\iint_D[u_{xx}^2+u_{yy}^2+2u_{xy}^2-2uf(x,y)]dxdy$$

的极值函数$u(x,y)$应当满足非齐次的重调和方程

$$\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}=f(x,y).$$

以上讲的都是把求泛函极值问题转化为解微分方程的边值问题，在前面各章所举的例中，有的变分问题用这种方法易于求解，也有许多问题用这种方法求解有困难．因此，我们以后还要介绍另外的方法．

§ 2　变动边界问题与自然边界条件

设泛函

$$J[u]=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy. \tag{2-1}$$

由第一节中(1-5)式

$$\delta J=\Phi'(0)=\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta\,dx\,dy$$

$$+\int_l\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right)\eta\,ds, \tag{2-2}$$

其中 l 是曲面 $u=u(x,y)$ 的边界线 Γ 在平面 xOy 上的投影，D 是 l 所围的平面区域(图 4-1)，s 是 l 的弧长变量．

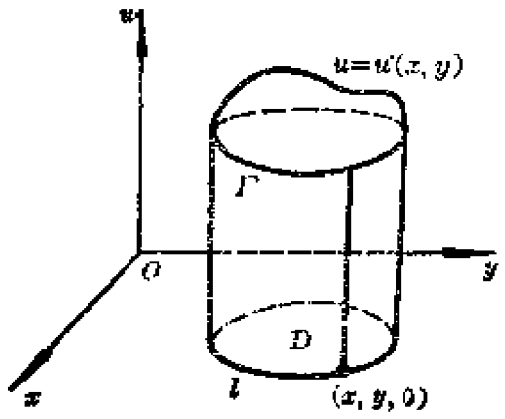

图 4-1

又假定曲面 $u=u(x,y)$ 的边界曲线 Γ 可沿母线平行于 z 轴的柱面上下自由移动，且 $u=u(x,y)$ 使泛函(2-1)取到极值．这时，泛函(2-1)的容许函数的范围比边界 Γ 固定的情形扩大了，$u=u(x,y)$ 亦必在边界 Γ 固定时给泛函(2-1)以极值，如§1指出，它应满足奥氏方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0,$$

而在极值曲面上 $\Phi'(0)=0$，由(2-2)得

$$\int_l \left(F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} \right)\eta ds = 0,$$

由于$\eta(x,y)$在l上的值是任意的，故得

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0, \tag{2-3}$$

其中s是D的边界曲线l的弧长变量. 这个条件是从泛函(2-1)的极值必要条件直接得出，并未事先对泛函的容许函数类作为条件提出，它称为泛函(2-1)的极值函数在l上的自然边界条件.

例1 在上节的例4中，假定在膜的边界l上，膜受有线密度为$p(s)$方向垂直于xOy平面的外力作用；且每单位弧长的恢复力为$\sigma(s)$，于是，所对应的势能为

$$\int_l \left(-pz + \frac{\sigma}{2}z^2 \right) ds.$$

这个系统的总势能为

$$U_2[z] = \iint_D \left[\frac{1}{2}\mu(z_x^2 + z_y^2) - fz \right] dxdy + \int_l \left(\frac{\sigma}{2}z^2 - pz \right) ds, \tag{2-4}$$

当总势能U_2最小时，膜处于平衡状态. 令

$$\delta U_2 = 0.$$

注意到(1-5)式，得

$$\iint_D \left[-\mu(z_{xx} + z_{yy}) - f \right] \eta dxdy + \int_l \left[\mu\left(z_x\frac{dy}{ds} - z_y\frac{dx}{ds} \right) + \sigma z - p \right] ds = 0, \tag{2-5}$$

函数$z = z(x,y)$仍须满足奥氏方程

$$z_{xx} + z_{yy} + \frac{f}{\mu} = 0, \qquad (x,y) \in D$$

而在边界l上须满足自然边界条件

$$\mu\left(z_x\frac{dy}{ds} - z_y\frac{dx}{ds} \right) + \sigma z = p. \tag{2-6}$$

我们注意到$\frac{dx}{ds}$，$\frac{dy}{ds}$是l的切线方向余弦，因而，$\frac{dy}{ds}$，$-\frac{dx}{ds}$是l的外法线方向余弦．于是$z_x\frac{dy}{ds}-z_y\frac{dx}{ds}$正是函数$z=z(x,y)$沿$l$的法线方向的方向导数，即

$$z_x\frac{dy}{ds}-z_y\frac{dx}{ds}=\frac{\partial z}{\partial n},$$

这样，(2-6)式可写为

$$\left[\mu\frac{\partial z}{\partial n}+\sigma z\right]_l=p. \tag{2-7}$$

习 题 4

1．求泛函的奥氏方程

(1) $J[z(x,y)]=\iint_D(z_x^2-z_y^2)dxdy$,

(2) $J[u(x,t)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(u_t^2-u_{x^2}^2)dtdx$.

2．设泛函

$$J[u]=\iiint_V F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)dxdydz,$$

其未知函数$u=u(x,y,z)$在区域V的边界s上的值是已知的连续函数$\varphi(x,y,z)$，即

$$u|_s=\varphi(x,y,z).$$

又设在V上$F\in C^2$，且$u\in C^2$并使泛函$J[u]$取极值，试导出它应满足的必要条件为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}F_{u_z}=0.$$

3．设泛函

$$J[u]=\iint_S F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})\,dxdy.$$

其未知函数$u=u(x,y)$在积分区域S的边界Γ上的值是已知的连续函数

$\psi(x,y)$，即

$$u|_\Gamma=\psi(x,y).$$

又设在S上$F\in C^4$，且$u\in C^4$并使泛函$J[u]$取极值，试导出它应满足的必要条件为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}=0.$$

4．一块支承在弹性基础上但周边自由的圆板，在板的中心作用一集中载荷，设板的挠度面方程为$z=z(x,y),(x,y)\in G$，$x^2+y^2\leqslant a^2$，根据力学知识，该系统的总势能

$$J=\frac{D}{2}\iint_a\left\{(z_{xx}+z_{yy})^2-2(1-\nu)(z_{xx}^2-z_{xx}z_{yy})-2qz+kz^2\right\}dxdy$$

为最小时，此系统处于稳定平衡状态，试求此时圆板的挠度面方程．式中D、ν、q、k均为常数．

5．设$V=V(x,y,z)$是某静电场的电势，已知电场的能量为

$$U=\frac{1}{8\pi}\iiint_V(V_x^2+V_y^2+V_z^2)dxdydz.$$

根据电学知识，当U取最小值时，该静电场处于平衡状态．试求此时$V=V(x,y,z)$应满足的方程．

6．设泛函

$$J[u]=\iint_a F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy$$

在区域G中，$F\in C^2$，$u\in C^2$．又设

$$K[u]=\iint_a\left[F(x,y,u,u_x,u_y)+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right]dxdy,$$

其中$P=P(x,y,u)\in C^2$，$Q=Q(x,y,u)\in C^2$．且u在G的边界上的值为零．试证$K[u]$与$J[u]$有相同的奥氏方程．

第5章　泛函的条件极值问题

在泛函的极值问题中，容许函数有时还会受到一些附加约束条件的限制，这就是所谓泛函的条件极值问题．本章我们讨论两种类型的约束条件的泛函条件极值问题．

§1　短程线问题

曲面上两点间长度最短的曲线叫做短程线或测地线．在第2章§1，1.2例1中．我们知道球面上两点间的短程线是通过这两点大圆的较短弧．这类问题的一般提法是：在连接两定点A，B并位于曲面

$$G(x,y,z)=0 \tag{1-1}$$

上的一切曲线

$$\Gamma:\begin{cases}y=y(x),\\ z=z(x),\end{cases}\quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

中，试确定一条曲线Γ，使泛函

$$J_1[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\,dx \tag{1-2}$$

在Γ上取到极值．

这种极值存在的必要条件，有下面的定理，它把泛函的条件极值问题化为无条件极值问题．

定理1（拉格朗日定理）　设函数$y(x)$，$z(x)$在条件(1-1)下，使泛函(1-2)取极值，并且沿着曲线Γ：$y=y(x)$，$z=z(x)$，偏导数G_y或G_z中至少有一个不为零，则必有函数因子$\lambda(x)$存在，使得$y(x)$，$z(x)$满足泛函

$$I[y,\ z]=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)G(x,y,z)]dx$$

$$\triangleq\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,z,y',z',\lambda(x))dx \tag{1-3}$$

的欧拉方程组

$$\begin{cases}H_y-\dfrac{d}{dx}H_{y'}=0,\\ H_z-\dfrac{d}{dx}H_{z'}=0,\end{cases}$$

其中 $H=F+\lambda(x)G(x,y,z)$.

证 设 $G_z\neq0$，从(1-1)式可确定一函数

$$z=\varphi(x,\ y),$$

使 $G(x,y,\varphi(x,y))\equiv0$.

由于所求曲线 Γ：$y=y(x),z=z(x)$在曲面(1-1)上，于是，$z=\varphi(x,y(x))$. 其导数

$$z'=\varphi_x+\varphi_y y',$$

将它们代入(1-2)式，得

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,\varphi,y',\varphi_x+\varphi_y y')dx.$$

为了方便起见，令

$$\Phi(x,y,y')=F(x,y,\varphi,y',\varphi_x+\varphi_y y'),$$

这就转化为函数 $y(x)$没有约束条件的变分问题，于是 $y(x)$应满足欧拉方程

$$\Phi_y-\frac{d}{dx}\Phi_{y'}=0. \tag{1-4}$$

因

$$\Phi_y=F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y'),$$

$$\Phi_{y'}=F_{y'}+F_{z'}\varphi_y,$$

$$\frac{d}{dx}\Phi_{y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}+\varphi_y\frac{d}{dx}F_{z'}+F_{z'}(\varphi_{yx}+\varphi_{yy}y'),$$

这样，(1-4)就化为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\varphi_y\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)=0. \qquad (1\text{-}5)$$

又由(1-1)式，注意到条件 $G_z\neq 0$，于是

$$\varphi_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z},$$

将上式代入(1-5)后，得比式

$$\frac{F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}}{G_y}=\frac{F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}}{G_z}=-\lambda(x).$$

于是得

$$\begin{cases} F_y+\lambda(x)G_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0, \\ F_z+\lambda(x)G_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}=0, \end{cases} \qquad (1\text{-}6)$$

由于 $\lambda(x)$和 $G(x,y,z)=0$ 中不含 y'、z'，(1-6)式可改写为

$$(F+\lambda(x)G)_y-\frac{d}{dx}(F+\lambda(x)G)_{y'}=0,$$
$$(F+\lambda(x)G)_z-\frac{d}{dx}(F+\lambda(x)G)_{z'}=0,$$

记 $H=F+\lambda(x)G$，于是得

$$\begin{cases} H_y-\dfrac{d}{dx}H_{y'}=0, \\ H_z-\dfrac{d}{dx}H_{z'}=0. \end{cases} \qquad (1\text{-}7)$$

证毕.

由方程组(1-7)与约束条件(1-1)，联立消去 $\lambda(x)$ 及待定函数 $y(x)$，$z(x)$中的一个函数，例如 $z(x)$，就得到关于 $y(x)$ 的一个四阶常微分方程，它的通解含有四个任意常数. 这些常数可由固定端 A，B 的边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0;\ y(x_1)=y_1,\ z(x_1)=z_1$$

确定，同样可确定 $z(x)$.

在上面，我们就约束条件

$$G(x,y,z)=0$$

的情况，介绍了拉格朗日定理，我们指出：若函数 $y(x)$，$z(x)$ 使泛函(1-2)在约束条件

$$G(x,y,z,y',z')=0 \tag{1-8}$$

下取到极值，也有类似的定理，只要将定理 1 中的条件 G_y 或 G_z 改为 $G_{y'}$ 或 $G_{z'}$ 中至少有一个不等于零，则存在这样的函数因于 $\lambda(x)$，使 $y(x)$，$z(x)$ 满足泛函

$$I[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)G(x,y,z,y',z')]dx$$

$$\triangleq\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,z,y',z',\lambda(x))dx$$

的欧拉方程组

$$\begin{cases} H_y-\dfrac{d}{dx}H_{y'}=0, \\ H_z-\dfrac{d}{dx}H_{z'}=0, \end{cases} \tag{1-9}$$

其中 $H=F+\lambda(x)G(x,y,z,y',z')$.

应当注意，方程组 (1-9) 中含有 $\lambda(x)$ 的一阶导数，这是与(1-7)的差别.

我们将(1-8)与(1-9)联立，就可解得

$$\begin{cases} y=y(x,C_1,C_2,C_3,C_4), \\ z=z(x,C_1,C_2,C_3,C_4), \\ \lambda=\lambda(x,C_1,C_2,C_3,C_4), \end{cases}$$

其中任意常数 C_1,C_2,C_3,C_4 可由边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0;\ y(x_1)=y_1,\ z(x_1)=z_1$$

来确定.

上述通解中含有四个任意常数，我们可以这样推出，若令 $y'=u$，$z'=v$，代入(1-8)、(1-9)中，于是得

$$G(x,y,z,u,v)=0,$$

以及含有未知函数 y,z,u,v,λ 的一阶微分方程组：

$$\begin{cases} y'=u, \\ z'=v, \\ H_y-\dfrac{d}{dx}H_u=0, \\ H_z-\dfrac{d}{dx}H_v=0, \end{cases}$$

再从 $G=0$ 中解出 v 或 u 并代入方程组中，于是这四个一阶方程只含四个未知函数，一般说来，它们的通解含有四个任意常数.

如果作更一般的推广，例如：设函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$是在 $k(k<n)$个约束条件

$$G_j(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)=0,\quad (j=1,2,\cdots,k) \tag{1-10}$$

下，使泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_n,y'_1,\cdots,y'_n)dx$$

取到极值，如果沿着极值曲线 k 阶函数行列式之一不为零，例如

$$\frac{D(G_1,G_2,\cdots,G_k)}{D(y'_1,y'_2,\cdots,y'_k)}\neq 0.$$

那么，存在函数因子 $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\cdots,\lambda_k(x)$，使得函数 $y_1(x)$，$y_2(x),\cdots,y_n(x)$满足泛函

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)G_j\right)dx\triangleq\int_{x_0}^{x_1}H\,dx$$

的欧拉方程组

$$H_{y_i}-\frac{d}{dx}H_{y'_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-11}$$

其中 $H=F+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)G_j$.

例 1 求圆柱面上的短程线.

解 设圆柱面方程为

$$x^2+z^2=1,\ (z>0).\qquad (1\text{-}12)$$

如图 5-1 在圆柱面上连接 $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ 两点的曲线方程为

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases} (x_0\leqslant x\leqslant x_1),$$

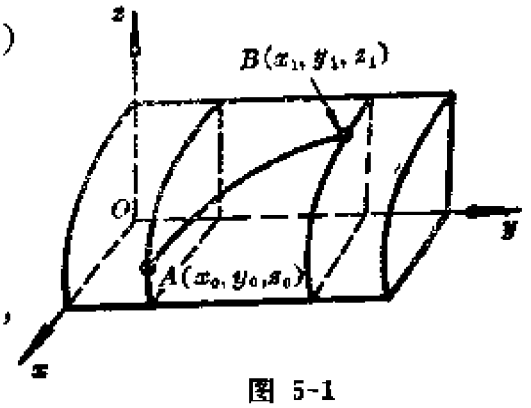

图 5-1

曲线长为

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx. \qquad (1\text{-}13)$$

问题化为在约束条件

$$G(x,y,z)=z-\sqrt{1-x^2}=0.$$

以及边界条件

$$\begin{aligned} &y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1 \\ &z(x_0)=z_0, \quad z(x_1)=z_1 \end{aligned} \qquad (1\text{-}14)$$

下,求泛函(1-13)取极小值的解 $y(x)$和 $z(x)$.

作辅助泛函

$$I[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)(z-\sqrt{1-x^2})]dx, \qquad (1\text{-}15)$$

其欧拉方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0, \\ -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=\lambda(x), \end{cases} \qquad (1\text{-}16)$$

求出首次积分,并用弧长 s 作参数,得

$$ds=\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx,$$

于是方程组(1-16)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{ds}=C_1,\\ \dfrac{dz}{ds}=\omega(x),\end{cases}\tag{1-17}$$

其中 C_1 为积分常数,以及

$$\omega(x)=\int\lambda(x)dx,$$

又由 $z=\sqrt{1-x^2}$,得 $dx=-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}dz$,将 $dz=\omega(x)ds$ 代入,得

$$dx=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\omega(x)ds.\tag{1-18}$$

根据 ds 的定义,有

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

$$=\left[\frac{1-x^2}{x^2}\omega^2(x)+C_1^2+\omega^2(x)\right](ds)^2,$$

化简得

$$\frac{1}{x^2}\omega^2(x)+C_1^2=1,$$

或

$$\omega(x)=\sqrt{1-C_1^2}\,x,$$

代入(1-18),并分离变量,得

$$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-C_1^2}\,ds$$

积分得

$$\arccos x = \sqrt{1-C_1^2}\, s + C_2$$

或
$$x = \cos(\sqrt{1-C_1^2}\, s + C_2).$$

于是
$$z = \sqrt{1-x^2} = \sin(\sqrt{1-C_1^2}\, s + C_2),$$

再由(1-17)第一式积分得
$$y = C_1 s + C_3.$$

因此，圆柱面(1-12)上的短程线是它上面的螺旋曲线
$$\begin{cases} x = \cos(\sqrt{1-C_1^2}\, s + C_2), \\ y = C_1 s + C_3, \\ z = \sin(\sqrt{1-C_1^2}\, s + C_2), \end{cases} \tag{1-19}$$

式中参数 s 为弧长，积分常数 C_1, C_2, C_3 由边界条件(1-14)确定.

例 2 求在约束条件
$$\frac{dx}{dt} = u - x$$

下，泛函
$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} [x^2(t) + u^2(t)]dt$$

的极值曲线，边界条件为
$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) \text{任意}.$$

解 这是一个具有可动边界的泛函条件极值问题. 作辅助泛函
$$I = \int_0^{t_1} \left[\frac{1}{2}(x^2+u^2) + \lambda(t)(u - x - \dot{x})\right]dt$$

$$= \int_0^{t_1} H(t, x, u, \dot{x}, \dot{u}, \lambda)dt$$

其欧拉方程组为

$$\begin{cases} H_x - \dfrac{d}{dt}H_{\dot{x}} = 0 \\ H_u - \dfrac{d}{dt}H_{\dot{u}} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} x - \lambda - \dfrac{d}{dt}(-\lambda) = 0 \\ u + \lambda = 0 \end{cases}$$

和约束条件方程联立

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \lambda - x, & (1\text{-}20) \\ \lambda = -u, & (1\text{-}21) \\ \dot{x} = u - x, & (1\text{-}22) \end{cases}$$

将(1-21)、(1-22)关于 t 求导，并将 $\dot{u} = -\dot{\lambda}$ 代入 $\ddot{x} = \dot{u} - \dot{x}$ 得

$$\ddot{x} = -\dot{\lambda} - \dot{x} \qquad (1\text{-}23)$$

将(1-20)代入(1-23)，得

$$\ddot{x} = -\lambda + x - \dot{x} \qquad (1\text{-}24)$$

又由(1-21)与(1-22) 得 $\lambda = -u = -(\dot{x} + x)$ 代入 (1-24)，于是

$$\ddot{x} - 2x = 0,$$

其通解为

$$x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t},$$

代入条件 $x(0) = x_0$，得

$$C_1 + C_2 = x_0 \qquad (1\text{-}25)$$

由于 $x(t_1)$ 任意，得自然边界条件

$$H_{\dot{x}}\Big|_{t=t_1} = 0 \quad \text{即} \quad \lambda(t_1) = 0$$

由(1-21)与(1-22)，得

$$\lambda(t) = -u = -(\dot{x} + x)$$

$$= -[C_1(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} + C_2(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}]$$

代入 $t = t_1$ 得

$$C_1(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t_1} + C_2(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t_1} = 0, \qquad (1\text{-}26)$$

由(1-25)，(1-26) 解得

$$C_1=\frac{x_0}{1+(1+\sqrt{2})^2e^{2\sqrt{2}t_1}},\quad C_2=\frac{x_0(1+\sqrt{2})^2e^{2\sqrt{2}t_1}}{1+(1+\sqrt{2})^2e^{2\sqrt{2}t_1}}.$$

(1-27)

于是，得

$$\begin{cases}x=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t},\\ u=C_1(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}+C_2(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t},\end{cases}$$

其中C_1，C_2由(1-27)式确定.

§2 等周问题

在一切有定长的平面封闭曲线中求一条曲线，使它围成的区域面积最大，这是一种狭义的等周问题. 现在我们叙述一般的等周问题：

在满足条件

$$K=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx=l(\text{常数})\tag{2-1}$$

的所有曲线中，确定一条曲线 $y=y(x)$，它使泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\tag{2-2}$$

取到极值，这类问题统称为等周问题. 条件(2-1)称为等周条件.

对等周问题极值存在的必要条件，有下面的定理，它把条件极值的变分问题归结为无条件极值的变分问题.

定理 2（欧拉定理） 若曲线$y=y(x)$在满足等周条件 (2-1) 及边界条件 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 下，使泛函(2-2) 取到极值(但 $y=y(x)$不是泛函 K 的极值曲线)，则必存在一常数 λ，使得 $y=y(x)$是泛函

$$I=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')]dx$$

$$\triangleq \int_{x_0}^{x_1} H(x, y, y')dx$$

的极值曲线，即 $y=y(x)$ 满足欧拉方程

$$H_y - \frac{d}{dx}H_{y'} = 0,$$

其中 $H = F + \lambda G$.

证 取邻近容许函数

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta_1(x) + \beta\eta_2(x),$$

其中 α，β 是绝对值充分小的参数，$\eta_1(x)$、$\eta_2(x)$ 是 C^2 类中的任意函数，且 $\eta_1(x_0)=\eta_1(x_1)=\eta_2(x_0)=\eta_2(x_1)=0$，将 $\bar{y}(x)$ 分别代入(2-1)与(2-2)式，得

$$K(\alpha,\beta) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2, y'+\alpha\eta'_1+\beta\eta'_2)dx = l,$$

$$J(\alpha,\beta) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2, y'+\alpha\eta'_1+\beta\eta'_2)dx.$$

因 $y=y(x)$ 是在条件(2-1)下泛函 J 的极值曲线，而 $\alpha=\beta=0$ 时，$\bar{y}=y$. 所以当 $\alpha=\beta=0$ 时，二元函数 $J(\alpha,\beta)$ 在条件 $K(\alpha,\beta)=l$ 下取极值. 于是，由微分学中条件极值问题的拉格朗日乘数法，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(J+\lambda K)\Big|_{\alpha=\beta=0} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta}(J+\lambda K)\Big|_{\alpha=\beta=0} = 0, \end{cases}$$

其中 λ 是待定常数. 上式求导后，得

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} [(F_y+\lambda G_y)\eta_1 + (F_{y'}+\lambda G_{y'})\eta'_1]\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} [(F_y+\lambda G_y)\eta_2 + (F_{y'}+\lambda G_{y'})\eta'_2]\,dx = 0, \end{cases}$$

再分别将上列两方程中的被积函数的第二项进行分部积分，并注意到 $\eta_1(x)$，$\eta_2(x)$ 在 x_0，x_1 处取零值的条件，得

$$\begin{cases}\int_{x_0}^{x_1}\left[(F_y+\lambda G_y)-\dfrac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda G_{y'})\right]\eta_1 dx=0, & (2\text{-}3)\\ \int_{x_0}^{x_1}\left[(F_y+\lambda G_y)-\dfrac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda G_{y'})\right]\eta_2 dx=0. & (2\text{-}4)\end{cases}$$

由假设，对于极值函数 $y(x)$，方程 $G_y-\dfrac{d}{dx}G_{y'}\not\equiv 0$，故可选取 $\eta_2(x)$，使得

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2(x)dx\not\equiv 0,$$

这样的 $\eta_2(x)$ 总是存在的. 否则，根据基本引理 1，将有 $G_y-\dfrac{d}{dx}G_{y'}=0$，这与假设矛盾. 从而，由(2-4)式，得

$$\lambda=-\frac{\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2 dx}{\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\dfrac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx}.$$

因 η_2 与 η_1 是相互独立的，故 λ 是与 η_1 无关的常数. 最后，再对(2-3)应用基本引理，得

$$F_y+\lambda G_y-\frac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda G_{y'})=0,$$

或

$$H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0, \qquad (2\text{-}5)$$

其中 $H=F+\lambda G$.

(2-5)式是一个含参数 λ 的二阶常微分方程，它的通解含三个待定的常数 C_1，C_2，λ，它们可由等周条件 (2-1) 和边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 来确定.

上述等周问题，如果引进新的未知函数

$$z(x)=\int_{x_0}^{x}G(x,y,y')dx, \qquad (2\text{-}6)$$

则可化为§ 1 中讲过的短程线问题.

事实上,在(2-6)中,令

$$x=x_0 \text{ 时}, \quad z(x_0)=0;$$

$$x=x_1 \text{ 时}, \quad z(x_1)=l \quad \text{(等周条件)}$$

对(2-6)式关于 x 求导,得 $z'(x)=G(x,y,y')$,或

$$G(x,y,y')-z'(x)=0. \tag{2-7}$$

这就将积分形式的约束(2-1)化成微分形式的约束(2-7),于是,等周问题就化成为短程线问题. 又泛函

$$I=\int_{x_0}^{x_1}[F+\lambda(x)(G-z')]dx$$

$$\triangleq\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,z,y',z',\lambda(x))dx$$

的欧拉方程组为

$$\begin{cases} H_y-\dfrac{d}{dx}H_{y'}=0, \\ H_z-\dfrac{d}{dx}H_{z'}=0, \end{cases} \tag{2-8}$$

其中 $H=F+\lambda(x)(G-z')$.

由(2-8)中第二个方程,因 $H_z=0$, $H_{z'}=-\lambda(x)$,于是

$$\frac{d}{dx}\lambda(x)=0,$$

故 $\lambda(x)=$常数. 因此,(2-8)第一个方程正好就是泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}(F+\lambda G)dx$$

的欧拉方程,恰与(2-5)一致.

上述定理 2 可推广到多个等周条件的情形:

如果函数 $y(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$满足$m$个等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1}G^j(x,y,y')dx=l_j(\text{常数}),(j=1,2,\cdots,m),$$

并使泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

取到极值. 以及在积分区间(x_0,x_1)内存在m个点$x_1,x_2,\cdots,x_m$使行列式

$$\left|G_y^j[x_i,y(x_i),y'(x_i)]-\frac{d}{dx}G_{y'}^j[x_i,y(x_i),y'(x_i)]\right|$$

$$(i,j=1,2,\cdots,m)$$

不等于零. 那么,就有m个常数$\lambda_j(j=1,2,\cdots,m)$存在,使得函数$y(x)$满足泛函

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G^j\right)dx\triangleq\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,y')dx$$

的欧拉方程

$$H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0,$$

其中 $H=F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G^j$.

例 1 第1章 § 1 例2的等周问题,可归结为求泛函

$$\begin{cases}J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})dt,\\ x(t_0)=x(t_1),y(t_0)=y(t_1),\end{cases}$$

在等周条件

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=l$$

下的极大值.

解 作辅助泛函

$$I=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x\dot{y}-y\dot{x}+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}]dt,$$

其欧拉方程组

$$\begin{cases} \dot{y}-\dfrac{d}{dt}\left(-y+\dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0, \\ -\dot{x}-\dfrac{d}{dt}\left(x+\dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=0, \end{cases}$$

积分后得

$$\begin{cases} 2y-\dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=2C_1, \\ 2x+\dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=2C_2, \end{cases}$$

整理后，有

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\frac{\lambda^2}{4},$$

这是圆族方程. 令

$$\begin{cases} x-C_2=\dfrac{\lambda}{2}\cos t, \\ y-C_1=\dfrac{\lambda}{2}\sin t, \end{cases} \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

代入等周条件，得

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}\sin^2 t+\frac{\lambda^2}{4}\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda}{2}\,dt=\lambda\pi,$$

即 $\lambda=\dfrac{l}{\pi}$. 于是

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2,$$

利用边界条件 $x(t_0)=x(t_1), y(t_0)=y(t_1)$，可定出 C_1, C_2. 故所求极值曲线是一个圆.

例 2 信息熵的最佳分布问题 在信息论中，研究连续信源的信息量问题时，设信源变量 x 在区间 $(-\alpha,\alpha)$ 上变化，信源的不同信息的概率分布密度为 $p(x)$，求最佳概率分布密度 $p(x)$，使

信息熵

$$J[p(x)]=-\int_{-a}^{a}p(x)\ln p(x)dx,$$

在条件

$$\int_{-a}^{a}p(x)dx=1$$

下取极大值.

解 作辅助泛函

$$I=\int_{-a}^{a}[-p(x)\ln p(x)+\lambda p(x)]dx$$

$$\triangleq\int_{-a}^{a}H(x,p(x),p'(x))dx,$$

其欧拉方程

$$H_p-\frac{d}{dx}H_{p'}=0,$$

可化为

$$-1-\ln p+\lambda=0,$$

解得 $p=e^{\lambda-1}$,代入等周条件

$$\int_{-a}^{a}e^{\lambda-1}dx=1,$$

积分得 $2\alpha e^{\lambda-1}=1$. 故得

$$p(x)=e^{\lambda-1}=\frac{1}{2\alpha}.$$

这就是说,当 $x\in[-\alpha,\alpha]$ 时,信源的熵为最大的概率密度函数 $p(x)$是均匀分布的

例 3 设曲线 $y=y(x)$过点 $A(0,0),B(\pi,0)$,且使泛函

$$J=\int_0^{\pi}y'^2dx$$

在条件

$$\int_0^{\pi}y^2dx=1$$

下取极小值，求此曲线。

解 作辅助泛函

$$\int_0^{\pi}(y'^2-\lambda y^2)\,dx,$$

其欧拉方程为

$$y''+\lambda y=0,$$

这是一个含参数 λ 的微分方程，具有边界条件

$$y(0)=0,\quad y(\pi)=0.$$

当 $\lambda\leqslant 0$ 时，易知上述边值问题的解为 $y=0$，但这个解不满足等周条件。

当 $\lambda>0$ 时，方程的通解是

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x,$$

代入 $y(0)=0$，得 $C_1=0$，于是

$$y=C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x,$$

代入 $y(\pi)=0$，得

$$y|_{x=\pi}=C_2\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0,$$

由于 $C_2\neq 0$（否则，$y=0$），故

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0.$$

于是

$$\lambda=\lambda_n=n^2,\ (n=1,2,\cdots)$$

故得

$$y=y_n=C_2\sin nx$$

再代入等周条件

$$\int_0^{\pi}(C_2\sin nx)^2dx=1,$$

积分后，求得 $C_2=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. 故所求极值曲线为

$$y_n = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx.$$

这里附带说明一下，上述欧拉方程边值问题具有非零解的参数 λ 的值 $\lambda_n = n^2 (n = 1, 2, \cdots)$，称为该边值问题的特征值，而对应于特征值的非零解 $y_n = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$，称为该边值问题的特征函数. 这种类型的边值问题，称为特征值问题. 从这个问题看到，微分方程的特征值问题，是与泛函的条件极值问题紧密联系的.

§ 3 哈密顿(Hamilton)原理

本节我们简单介绍哈密顿原理，并举例说明它在力学方面的应用.

哈密顿在 1835 年提出他的所谓哈密顿原理，真实运动是使作用稳定的运动，叙述如下：

质点系在 t_0 到 t_1 时间内的一切容许的运动路线中，实际是实现这样一种运动路线，它使泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt$$

取到极值. 这里 T 和 U 分别表示质点系的动能和势能.

下面以势量场(保守力场)为例，说明哈密顿原理.

设已知质点系的第 i 个质点的质量为 m_i，坐标为 (x_i, y_i, z_i)，$i = 1, 2, \cdots, n$. 又设在质点 m_i 上受到以 $-U(t, x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)$ 为势函数的力

$$\boldsymbol{F}_i = F_{x_i}\boldsymbol{i} + F_{y_i}\boldsymbol{j} + F_{z_i}\boldsymbol{k}$$

$$F_{x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{z_i} = -\frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的作用. 我们知道，质点系的运动是用牛顿方程组描写的，即各质点的运动路线方程

$$\begin{cases} x=x_i(t) \\ y=y_i(t) \\ z=z_i(t) \end{cases} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ i=1,2,\cdots,n)$$

满足

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i=F_{x_i}=-\dfrac{\partial U}{\partial x_i} \\ m_i\ddot{y}_i=F_{y_i}=-\dfrac{\partial U}{\partial y_i} \\ m_i\ddot{z}_i=F_{z_i}=-\dfrac{\partial U}{\partial z_i} \end{cases} \quad (i=1,2\cdots,n) \quad (3\text{-}1)$$

质点系的势能为U，动能为

$$T=T(\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2).$$

假定质点系的起始位置$(x_i(t_0),y_i(t_0),z_i(t_0))$和终止位置$(x_i(t_1),y_i(t_1),z_i(t_1))$固定$(i=1,2,\cdots,n)$. 考虑泛函

$$J_1=\int_{t_0}^{t_1}T(\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n)dt$$

和

$$J_2=\int_{t_0}^{t_1}U(t,x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n)dt.$$

计算这两个泛函的变分

$$\delta J_1=\int_{t_0}^{t_1}(T_{\dot{x}_1}\delta\dot{x}_1+\cdots+T_{\dot{z}_n}\delta\dot{z}_n)dt,$$

把每项分部积分，并注意

$$\delta x_1(t_0)=\delta x_1(t_1)=\cdots=\delta z_n(t_0)=\delta z_n(t_1)=0,$$

可得

$$\delta J_1=-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}T_{\dot{x}_1}\delta x_1+\cdots+\frac{d}{dt}T_{\dot{z}_n}\delta z_n\right)dt$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}(m_1\ddot{x}_1\delta x_1+\cdots+m_n\ddot{z}_n\delta z_n)dt,$$

又

$$\delta J_2=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1+\cdots+\frac{\partial U}{\partial z_n}\delta z_n\right)dt$$

由牛顿方程组(3-1)可得

$$\delta J_1=\delta J_2$$

或

$$\delta(J_1-J_2)=0.$$

由以上讨论可见，如果函数 $x_1(t),y_1(t),z_1(t),\cdots.x_n(t),y_n(t),z_n(t)$ 在时间 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 间隔内描述质点系的运动，那么，在这些函数处，泛函

$$J_1-J_2=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$$

取极值. 这就是说，上述质点系遵循哈密顿原理*.

现在假定上述质点系的坐标还受到 k 个约束条件

$$G_j(t_1,x_1,y_1,z_1,\cdots x_n,y_n,z_n)=0$$

$$(j=1,2,\cdots,k)\qquad(3\text{-}2)$$

的约束，利用哈密顿原理，很容易导出这个质点系的运动方程.

事实上，由哈密顿原理，各质点的运动曲线

$$\begin{cases}x=x_i(t)\\ y=y_i(t)\\ z=z_i(t)\end{cases}\qquad\begin{matrix}t_0\leqslant t\leqslant t_1\\ (i=1,2,\cdots,n)\end{matrix}$$

应使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-U\right]dt$$

在条件(3-2)下取极值，这是一个条件极值的变分问题. 作辅助泛函

---

* 如果力学系统处于静力平衡稳定状态，则因动能为零，势能与时间无关，因而哈密顿原理便转化为最小势能原理.

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-U+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t)G_i\right]dt,$$

这个泛函的欧拉方程为

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i=-\dfrac{\partial U}{\partial x_i}+\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i(t)\dfrac{\partial G_i}{\partial x_i}, \\ m_i\ddot{y}_i=-\dfrac{\partial U}{\partial y_i}+\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i(t)\dfrac{\partial G_i}{\partial y_i}, \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ m_i\ddot{z}_i=-\dfrac{\partial U}{\partial z_i}+\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i(t)\dfrac{\partial G_i}{\partial z_i}, \end{cases}$$

这就是质点系的运动微分方程.

例 1 设一拉紧的均匀弦，它的平衡位置为 Ox 轴，两端分别固定在点 $A(0,0)$，$B(l,0)$ 处，并在 xOu 平面上作垂直于 Ox 轴的运动，试求此弦的振动方程.

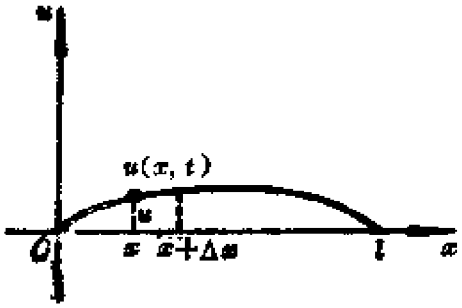

图 5-2

解 如图(5-2)，设在时刻 t 时，在小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上弦的动能为

$$\Delta T=\frac{1}{2}\rho u_t^2\Delta x,$$

则在整个区间 $[0,l]$ 上弦的总动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\rho u_t^2dx,$$

其中 ρ 是弦的线密度，因假设弦是均匀的，故 ρ 为常量. 弦被拉伸后所具有的势能与长度的增量成正比，比例系数 τ（张力），因弦均匀，τ 也是常量. 故在时刻 t，弦的势能是

$$U=\tau\left[\int_0^l\sqrt{1+u_x^2}dx-l\right]\approx\tau\left[\int_0^l\left(1+\frac{1}{2}u_x^2\right)dx-l\right]$$

$$=\frac{\tau}{2}\int_0^l u_x^2dx,$$

其中由泰勒公式知 $\sqrt{1+u_x^2}\approx 1+\frac{1}{2}u_x^2$. 因弦作微小振动，$u_x^2$ 和 1 相比很小，可略去 u_x 的高次幂.

若弦上还受有线密度为 $f(x,t)$的外力作用，并设力的正向与 Ou 轴方向一致，则外力作功所转化的势能是

$$U_2=-\int_0^l f u\,dx,$$

总势能为 $U=U_1+U_2$.

由哈密顿原理，泛函

$$J=\int_0^t (T-U)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l (\rho u_t^2-\tau u_x^2+2uf)\,dx\,dt$$

的变分 $\delta J=0$，得奥氏方程为

$$\rho u_{tt}-\tau u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<l,t>0.$$

这是弦在外力作用下的强迫振动方程.

若 $f(x,t)\equiv 0$，则有弦的自由振动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}.\qquad \left(a^2=\frac{\tau}{\rho}\right).$$

例 2 如图 5-3，两个质量相同的物体用三个弹簧串联在一起组成质点系，该系统无摩擦约束只能沿水平直线运动. 这个系统需要用两个独立的坐标*来标明质点的位置，如图中用 x_1 和 x_2 来表示. 当 $x_1=x_2=0$ 时，弹簧处于平衡位置，试求该系统的运动方程.



图 5-3

解 据题设，系统的动能为

---

* 也叫广义坐标.

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)$$

势能为

$$U=\frac{1}{2}\left[k_1x_1^2+k_2(x_2-x_1)^2+k_1x_2^2\right],$$

系统的总能量为

$$\begin{aligned}J&=\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt\\&=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\left[k_1x_1^2+k_2(x_2-x_1)^2+k_1x_2^2\right]\right\}dt\\&\triangleq\int_{t_1}^{t_2}F(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)dt\ .\end{aligned}$$

令 $\delta J=0$，得欧拉方程组

$$\begin{cases}F_{x_1}-\dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_1}=0\ ,\\[2ex] F_{x_2}-\dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}_2}=0\ ,\end{cases}$$

即有

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=0,\\ m\ddot{x}_2+k_2x_2+k_2(x_2-x_1)=0.\end{cases}$$

这就是该系统的运动方程.

习 题 5

§ 1

1. 试用柱面坐标(r,θ,z)，求解圆柱面 $z=\sqrt{1-x^2}$ 上的短程线.

2. 试用球面坐标(ρ,θ,φ)，求解圆锥面 $z=(\operatorname{ctg}\alpha)\sqrt{x^2+y^2}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$上的短程线.

3. 设泛函

$$J=\int_0^{t_1}u^2dt\qquad(t_1\text{ 给定})$$

具有约束条件

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=u$$

以及边界条件 $x_1(0)=x_0$(常数),$x_2(0)=0$,$x_1(t_1)=0$,$x_2(t_1)=0$,试求其极值函数 $u(t)$。

4. 设曲面的方程为 $G(x,y,z)=0$

(1) 求曲面上两定点 $A(x_0,y_0,z_0)$,$B(x_1,y_1,z_1)$间的短程线方程。

(2) 试证 沿曲面的短程线成立关系式

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{G_x}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{G_y}=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{G_z}\left(=\frac{\lambda(t)}{\frac{ds}{dt}}\right),$$

其中 s 是曲线的弧长变量,且 $\frac{ds}{dt}\neq 0$。

5. 一质点在 $t=0$ 到 $t=T$ 这段时间内,沿曲面 $G(x,y,z)=0$ 从点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 滑动到点 $B(x_1,y_1,z_1)$,忽略曲面的摩擦力和周围介质的阻力,若在这段时间内运动的动能平均值最小,求证

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{G_x}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{G_y}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{G_z}\left(=\frac{\lambda(t)T}{m}\right).$$

§ 2

1. 求下列等周问题的极值曲线

(1) 泛函 $J[y]=\int_0^1 y'^2dx$,$y(0)=0$,$y(1)=8$。

等周条件 $\int_0^1 ydx=5$。

(2) 泛函 $J[y]=\int_0^1 (y'^2+x^2)dx$,$y(0)=0$,$y(1)=0$。

等周条件 $\int_0^1 y^2dx=2$。

(3) 泛函 $J[y]=\int_0^{\pi} y''^2dx$,$y(0)=0$,$y''(0)=0$,$y(\pi)=0$,$y''(\pi)=0$。

等周条件 $\int_0^{\pi} y'^2 dx = 1$。

(4) 泛函 $J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2-4xz'-4z)dx$，$y(0)=0$，$z(0)=0$，$y(1)=1$，$z(1)=1$。

等周条件 $\int_0^1 (y'^2-xy'-z'^2)dx=2$。

2．写出在条件

$$\int_{x_0}^{x_1} r(x)y^2 dx = 1,\quad y(x_0)=0,\quad y(x_1)=0$$

下，泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}[p(x)y'^2+q(x)y^2]dx$$

的极值曲线应满足的微分方程。

3．设线密度为常数，有定长 l 的曲线，当曲线的重心最低时，试求曲线的形状。端点条件为：(1)两端固定；(2)两端可分别沿光滑曲线 $y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$ 自由移动。

4．在所围面积为一定的所有封闭曲线中，求其长度为最短的曲线。

5．设有两个泛函

$$J_1[y]=\int_{x_0}^{x_1} F_1(x,y,y')dx, J_2[y]=\int_{x_0}^{x_1} F_2(x,y,y')dx,$$

求证 $J_1[y]$ 在约束条件 $J_2[y]=l$（常数）下，与 $J_2[y]$ 在约束条件 $J_1[y]=l$（常数）下，J_1，J_2 有相同的极值曲线。

6．电枢控制的他激直流电动机，它的运动方程为

$$J\frac{d\omega}{dt}+M_f=C_M I_a,$$

式中 M_f 为恒定负载转矩，J 为转动惯量，C_M 为常量。当电动机在时间 t_1 内从静止状态起动转过一定角度后停止，即

$$\omega(0)=\omega(t_1)=0,\quad \int_0^{t_1}\omega dt = a\ (\text{常数}),$$

求在时间间隔 $[0,t_1]$ 内，使电枢绕组的损耗

$$Q=\int_0^{t_1} I_a^2 dt$$

为极小的电枢电流 I_a。

7．信源变量 x 在区间$(-\infty,+\infty)$上变化，信源的不同信息的概率分布密度为 $p(x)$，求最佳概率分布密度 $p(x)$，使信息熵

$$J[p(x)]=-\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\ln[kp(x)]dx$$

在条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\sigma^2$$

下取最大值．式中 k,σ^2 为常数．

§ 3

1．在单摆中，一质量为 m 的质点，悬在一根长为 l 而质量可以忽略不计的杆的端点，该系统可以在一平面内运动，试用哈密顿原理建立其运动方程．

2．在 xOy 平面上，一质量为 m 的质点受到指向原点的引力作用而运动，引力的大小为 $F(r)$，其中 r 是质点与原点的距离，试用哈密顿原理建立其运动方程．

3．设膜的平衡位置处于 xOy 平面的区域 D 上，试考虑膜垂直于该平面的微小振动．$u(x,y,t)$表示膜与平衡位置的垂直偏离(位移)；ρ 为膜的质量面密度；μ 为张力；$f(x,y,t)$为外力的面密度，方向沿 Ou 轴方向，试用哈密顿原理，建立膜的振动方程．

4．一质量为 m 的质点在保守力场中运动，试求它在球面坐标系下的运动方程．假定其势能 U 在球面坐标系下的表达式为 $U(\rho,\theta,\varphi)$，试证：该质点的运动方程为

$$\begin{cases} m[\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2-(\rho\sin^2\theta)\dot{\varphi}^2]=-\dfrac{\partial U}{\partial\rho}, \\ m\left[\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})-(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\dot{\varphi}^2\right]=-\dfrac{\partial U}{\partial\theta}, \\ m\dfrac{d}{dt}\left[(\rho^2\sin^2\theta)\,\dot{\varphi}\right]=-\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

第6章　泛函极值的充分条件

前面几章，我们讨论了泛函弱极值的必要条件，利用它可求出那些存在极值函数的实际变分问题的极值．但对一般的变分问题来说，尚需在必要条件的基础上，进一步寻求充分条件，用以判定泛函极值的存在和判定极值是极大还是极小．本章我们将在泛函的二阶变分的基础上导出泛函弱极值的充分条件，然后再简单地介绍泛函强极值的充分条件．

§1　泛函弱极值的充分条件

设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx, \tag{1-1}$$

在区间$[x_0,x_1]$上$F\in C^2$，$y\in C^2$，且$y=y(x)$为(1-1)满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$$

的极值曲线．

在第2章§5中，我们讨论了泛函(1-1)的改变量

$$\Delta J=J[y+\eta]-J[y]=\delta J+\frac{1}{2}\delta^2J+e_2, \tag{1-2}$$

式中e_2是比$d_1^2(y,y+\eta)$更高阶的无穷小，而任意函数$\eta(x)\in C^2[x_0,x_1]$，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$．且δJ为泛函J的一阶变分，δ^2J为泛函J的二阶变分．现在我们来导出泛函(1-1)的弱极值的充分条件．

1.1 雅可比(Jacobi)方程

我们知道，泛函(1-1)的二阶变分

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)dx$$

是依赖于 $y(x)$ 和 $\eta(x)$ 的泛函，若记

$$\delta^2 J=J_2[y,\eta],$$

并且我们假定 $\delta J=0,\delta^2 J\neq 0$. 于是，$\delta^2 J$ 中的 $F_{yy}(x,y,y')$，$F_{yy'}(x,y,y')$ 和 $F_{y'y'}(x,y,y')$ 所依赖的 $y(x),y'(x)$ 均为已知，这是出 $\delta J=0$，即 $y(x)$ 可从欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

得出. 这样 J_2 看成只依赖于 η 的泛函，我们有下述定理：

预备定理 1 若 $\eta=u(x)$ 使泛函

$$J_2=\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)dx$$

取极值，则有

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)=0,\qquad(1\text{-}3)$$

方程(1-3)称为雅可比方程.

证 设

$$G=G(x,\eta,\eta')\triangleq F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2,$$

J_2 的欧拉方程为

$$G_\eta-\frac{d}{dx}G_{\eta'}=0,$$

亦即

$$2\eta F_{yy}-2\eta' F_{yy'}-\frac{d}{dx}(2\eta F_{yy'}+2\eta' F_{y'y'})=0,$$

将括号内第一项求导并整理，得

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)\eta-\frac{d}{dx}\left(\eta' F_{y'y'}\right)=0,$$

也就是说，泛函 J_2 的极值曲线 $\eta=u(x)$ 必须满足方程

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)=0.$$

预备定理 2 若 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，且 $u(x)$ 为方程(1-3)的解，它在区间 (x_0,x_1) 内不等于零，则

$$J_2=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\left(\eta'-\eta\frac{u'}{u}\right)^2dx. \tag{1-4}$$

证 由于

$$\begin{aligned}J_2&=\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta^2F_{yy}+2\eta\eta'F_{yy'}+\eta'^2F_{y'y'}\right)dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}\eta^2F_{yy}dx+\left[\eta^2F_{yy'}\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta^2\frac{d}{dx}F_{yy'}dx\\&\quad+\left[\eta\eta'F_{y'y'}\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\eta\frac{d}{dx}(\eta'F_{y'y'})dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}\left[\eta^2\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)-\eta\frac{d}{dx}(\eta'F_{y'y'})\right]dx\end{aligned}$$

由(1-3)式，我们将

$$F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}=\frac{1}{u}\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)$$

代入上面最后一个积分内，即有

$$\begin{aligned}J_2&=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\eta^2}{u}\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)-\eta\frac{d}{dx}(\eta'F_{y'y'})\right]dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\eta}{u}\left[\eta\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)-u\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{d\eta}{dx}\right)\right]dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\eta}{u}\frac{d}{dx}\left[F_{y'y'}\left(\eta\frac{du}{dx}-u\frac{d\eta}{dx}\right)\right]dx\\&=\left[\frac{\eta}{u}F_{y'y'}\left(\eta\frac{du}{dx}-u\frac{d\eta}{dx}\right)\right]_{x_0}^{x_1}\end{aligned}$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\left(\eta\frac{du}{dx}-u\frac{d\eta}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\eta}{u}\right)dx$$

$$=-\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}(\eta u'-u\eta')\frac{u\eta'-\eta u'}{u^2}dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\left(\eta'-\eta\frac{u'}{u}\right)^2dx,$$

故得证

$$J_2=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\left(\eta'-\eta\frac{u'}{u}\right)^2dx.$$

预备定理 3 设 $y=y(x)$为泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

在边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 下的极值函数，若

(1) $u(x)$ 为雅可比方程的解，且 $u(x)\neq 0, x\in(x_0,x_1)$，

(2) $\eta'-\eta\left(\frac{u'}{u}\right)\not\equiv 0 \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$，

(3) $F_{y'y'}(x,y,y')$在区间$[x_0,x_1]$内不变号，

则

当 $F_{y'y'}>0$ 时，$J[y]$为极小值；

当 $F_{y'y'}<0$ 时，$J[y]$为极大值，

其中 $F_{y'y'}>0$ 称为勒让德(Legendre)强条件.

证 在(1-2)式中，由假设条件 $\delta J=0$，又由(1-4)式，得

$$J[y+\eta]-J[y]=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}F_{y'y'}\left(\eta'-\eta\frac{u'}{u}\right)^2dx+e_2, \qquad (1\text{-}5)$$

其中 e_2 是比 $d_1^2(y,y+\eta)$更高阶的无穷小.

在(1-5) 式中，由条件(2)、(3)知道，当一级距离 $d_1(y,y+\eta)$充分小时，它右边的符号由 $F_{y'y'}$的符号决定，于是

当 $F_{y'y'}>0$ 时，$J[y+\eta(x)]>J[y]$，即 $J[y]$ 为弱极小值；

当 $F_{y'y'}<0$ 时，$J[y+\eta(x)]<J[y]$，即 $J[y]$ 为弱极大值.

1.2 雅可比判定法

在预备定理 3 的条件中，假定 $\eta'-\eta\left(\frac{u'}{u}\right)\not\equiv 0$，现在我们讨论什么时候这个条件得到保证. 为此，我们讨论关于函数 $\eta(x)$ 的方程

$$\eta'-\eta\frac{u'}{u}=0 \tag{1-6}$$

的解，其中 $u=u(x)$ 为雅可比方程(1-3)的解.

将方程(1-6)分离变量，得

$$\frac{1}{\eta}d\eta=\frac{1}{u}du\ ,$$

两边积分，得

$$\eta(x)=Cu(x), \tag{1-7}$$

其中 C 为任意常数，设它不等于零.

若 $\eta(x)$ 是(1-6)的解，即 $\eta(x)=Cu(x)$，则由(1-4)有

$$J_2=\delta^2 J=0.$$

此时，$J[y]$ 究竟是极大或极小，需要考虑三阶变分 $\delta^3 J$ 的符号，为了避免这个困难，我们选择极值曲线 $y=y(x)$ 的某一段上有

$$\left(\eta'-\eta\frac{u'}{u}\right)^2>0$$

来进行研究，为此，我们引进共轭点的定义：

若泛函(1-1)的极值曲线 $y=y(x)$ 的两个端点为 $A(x_0, y_0)$，$B(x_1, y_1)$，它的雅可比方程为(1-3).

设

(1) $u(x)$ 是雅可比方程的解；

(2) x_0 是极值曲线端点 A 的横坐标；

(3) $u(x_0)=0$.

除 x_0 外，设方程 $u(x)=0$ 的根为 x^*，则点 $(x^*, y(x^*))$ 称为极值

曲线 $y=y(x)$上 A 的共轭点.

关于A的共轭点的横坐标，我们可以用下法求得：

由于雅可比方程是二阶线性齐次微分方程，设它的两个线性无关的特解为 $u_1(x),u_2(x)$，于是通解为

$$u(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x),$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

由条件(3)，$u(x_0)=0$，于是

$$C_1u_1(x_0)+C_2u_2(x_0)=0,$$

或

$$\frac{u_1(x_0)}{u_2(x_0)}=-\frac{C_2}{C_1},\quad (C_1\neq 0).$$

若 x 为 $A(x_0,y_0)$的共轭点的横坐标，则有

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)}=\frac{u_1(x_0)}{u_2(x_0)},\tag{1-8}$$

式中 $u_1(x),u_2(x)$是雅可比方程两个线性无关的解.

设A_1 为 A的第一个共轭点(沿极值曲线从 A到B的方向)，则当点 $B(x_1,y_1)$在 A,A_1 之间时，我们有，

$$u(x_0)=\eta(x_0)=0,\quad u(x_1)\neq 0,\quad \eta(x_1)=0.$$

此时可见，$u(x)$与 $\eta(x)$ 在 AB 间的极值曲线 $y=y(x)$ 上不能到处成比例，亦即方程(1-6)不满足，故必

$$\left(\eta'-\eta\frac{u'}{u}\right)^2>0$$

也就是说，当泛函(1-1)的极值曲线弧 AB 的B端点落在曲线弧 AA_1 之内时，其中 A_1 为 A的第一个共轭点，则预备定理 3 中条件(2)得到保证. 这样，我们得到下面的弱极值的充分条件：

定理（弱极值的充分条件） 设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,$$

在$[x_0,x_1]$上$F\in C^2$，$y\in C^2$. 若

(1) $y=y(x)$是极值曲线，且过 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，

(2) 任何与 A 共轭的点必位于弧 AB 之外，

(3) 沿极值曲线 $y=y(x)$ $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$，$F_{y'y'}$ 有确定的符号，则

当 $F_{y'y'}>0$ 时，$J[y]$为弱极小值；

当 $F_{y'y'}<0$ 时，$J[y]$为弱极大值.

这个定理是上面预备定理 3 的直接结果.开始由雅可比研究，到 1879 年由维尔斯特拉斯(Weierstrass)完成的，这个弱极值的充分条件也叫雅可比判定法.

应当注意，我们要着重考察雅可比方程的解在区间 $[x_0,x_1]$ 内部是否有零点这个事实，而雅可比方程满足条件 $u(x_0)=0$ 的任何解 $u(x)$，与雅可比方程满足条件

$$u(x_0)=0,\quad u'(x_0)=1$$

的解 $u_0(x)$只差一常数因子. 因此，上述定理中条件(2)，也可以说 $u_0(x)$在半开区间$[x_0,x_1)$上，除点 x_0 以外，没有其它的零点. 这时，我们也说泛函 $J[y]$的极值曲线 $y=y(x)$在区间 (x_0,x_1)上满足雅可比条件；又若 $u_0(x)$在闭区间 $[x_0,x_1]$ 上除点 x_0外，没有其它的零点，则说泛函 $J[y]$的极值曲线 $y=y(x)$ 在 $(x_0,x_1]$ 上满足雅可比强条件.

1.3 欧拉方程与雅可比方程解的联系

雅可比方程的解可以从欧拉方程的通解得出，事实上，设 $y=y(x,C_1,C_2)$为欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{1-9}$$

的通解，则$\dfrac{\partial y}{\partial C_1}$与$\dfrac{\partial y}{\partial C_2}$为雅可比方程

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)=0 \tag{1-10}$$

的两个基本解.

由于

$$\begin{aligned} F_y &= F_y[x, y(x, C_1, C_2), y'(x, C_1, C_2)], \\ F_{y'} &= F_{y'}[x, y(x, C_1, C_2), y'(x, C_1, C_2)]. \end{aligned} \tag{1-11}$$

今对(1-9)两边关于 C_1 求偏导数，并注意

$$\frac{\partial}{\partial C_1}\left(\frac{d}{dx} F_{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial C_1} F_{y'}\right),$$

可得

$$\frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial C_1}+\frac{\partial F_y}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial C_1}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial C_1}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial C_1}\right)=0.$$

又注意到

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial C_1}\right)=\frac{\partial}{\partial C_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\partial y'}{\partial C_1},$$

于是

$$F_{yy}\frac{\partial y}{\partial C_1}+F_{yy'}\frac{\partial y'}{\partial C_1}-\frac{d}{dx}(F_{y'y})\frac{\partial y}{\partial C_1}-F_{y'y}\frac{\partial y'}{\partial C_1}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{\partial y'}{\partial C_1}\right)=0.$$

由于 $F\in C^2$，故 $F_{yy'}=F_{y'y}$，化简得

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)\frac{\partial y}{\partial C_1}-\frac{d}{dx}\left[F_{y'y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial C_1}\right)\right]=0,$$

即知$\frac{\partial y}{\partial C_1}$是(1-10)的解.

同理可得，$\frac{\partial y}{\partial C_2}$也是 (1-10) 的解. 同时，还容易知道$\frac{\partial y}{\partial C_1}$，$\frac{\partial y}{\partial C_2}$是线性无关的，于是，雅可比方程的通解可表示为

$$u=D_1\frac{\partial y}{\partial C_1}+D_2\frac{\partial y}{\partial C_2},$$

其中 D_1, D_2 为任意常数.

因此，点 $A(x_0,y_0)$ 的共轭点的横坐标 x 满足方程(1-8)，又可写为

$$\frac{\partial y}{\partial C_1}\Big/\frac{\partial y}{\partial C_2}=\left[\frac{\partial y}{\partial C_1}\Big/\frac{\partial y}{\partial C_2}\right]_{x=x_0}. \tag{1-12}$$

例 1 讨论泛函

$$J[y]=\int_0^1 y'^3dx$$

的极值，其边界条件为 $y(0)=0, y(1)=1$.

解 这里，$F=y'^3$，欧拉方程为 $y''=0$，通解为

$$y=C_1x+C_2,$$

代入边界条件 $y(0)=0, y(1)=1$，得 $C_1=1, C_2=0$，所求极值曲线为

$$y=x.$$

又 $\frac{\partial y}{\partial C_1}=x$，$\frac{\partial y}{\partial C_2}=1$，雅可比方程的通解为

$$u=D_1x+D_2,$$

代入初值条件 $u(0)=0, u'(0)=1$，得 $D_2=0, D_1=1$，于是

$$u_0(x)=x$$

在区间[0,1]上除 $x=0$ 外，$u_0(x)\neq 0$，故满足雅可比强条件.

又 $F_{y'y'}=6y'$，沿极值曲线 $y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，$F_{y'y'}=6>0$，由雅可比判定法知，$y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 给出泛函 $J[y]$ 的弱极小值. 该极小值为

$$\int_0^1 y'^3dx=\int_0^1 1^3dx=1.$$

例 2 讨论泛函

$$J[y]=\int_0^{x_1}(y'^2-y^2)dx$$

的极值，其边界条件为 $y(0)=0, y(x_1)=b$.

解 这里 $F=y'^2-y^2$，欧拉方程为

$$y''+y=0,$$

其通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

代入 $y(0)=0$，得 $C_1=0$，于是

$$y=C_2\sin x.$$

又 $\frac{\partial y}{\partial C_1}=\cos x$，$\frac{\partial y}{\partial C_2}=\sin x$，故雅可比方程的通解为

$$u=D_1\cos x+D_2\sin x,$$

代入初值条件 $u(0)=0$，$u'(0)=1$，得 $D_1=0$，$D_2=1$，于是

$$u_0(x)=\sin x,$$

当 $x=k\pi$（k 为正整数）时，$u_0(x)=0$.

若 $0<x_1<\pi$，于是在区间 $0\leqslant x\leqslant x_1$ 上，函数 $u_0(x)=\sin x$ 仅在点 $x=0$ 处等于零，故雅可比强条件满足.

若 $x_1\geqslant\pi$，在区间 $0\leqslant x\leqslant x_1$ 上，函数 $u_0(x)=\sin x$ 在 $x=\pi$ 处为零，且零点不只一个，雅可比条件不满足.

因此，当 $0<x_1<\pi$ 时，由边界条件 $y(x_1)=b$ 定出 $C_2=\frac{b}{\sin x_1}$. 这样，沿着极值曲线

$$y=\frac{b}{\sin x_1}\sin x$$

满足雅可比判定法中所有条件. 由于 $F_{y'y'}=2>0$，因此，极值曲线 $y=\frac{b}{\sin x_1}\sin x$ $(0\leqslant x<x_1<\pi)$ 给出泛函 $J[y]$ 的弱极小值.

§ 2 泛函强极值的充分条件

前面我们讨论弱极值的必要条件和充分条件时，曾将极值函数 $y(x)$ 与它有一阶 δ 邻域的邻近函数类 $y(x)+\alpha\eta(x)$ 相比较. 也就是说，所谓 $\alpha\eta(x)$ 和 $\alpha\eta'(x)$，或 δy 和 $\delta y'$，其绝对值在区间

$[x_0, x_1]$上充分小，是指$y(x)$与有限制的邻近函数类$y(x)+\alpha\eta(x)$相比较而言的．本节，我们将要考虑强极值的充分条件，此时，极值函数$y(x)$将与它有零阶δ邻域的邻近函数类$y(x)+\alpha\eta(x)$相比较，这对比较函数的限制放宽了，也就是说，只要$\alpha\eta$或δy的绝对值在区间$[x_0, x_1]$上充分小就可以了．过去讨论过的弱极值的必要条件，也适用于强极值，但对充分条件就不然了．下面我们先建立极值曲线场的概念，然后介绍强极值的充分条件．

2.1 极值曲线场

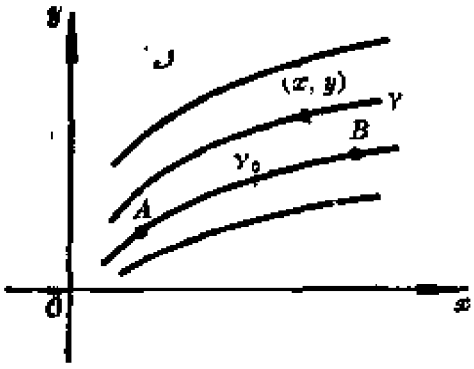

图 6-1

设泛函

$$\begin{cases} J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx, \\ y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1 \end{cases} \tag{2-1}$$

在区间$[x_0, x_1]$上，$F\in C^2$，$y\in C^2$．过$A(x_0, y_0)$，$B(x_1, y_1)$的极值曲线为

$$\gamma_0: \quad y=y(x) \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1).$$

考虑泛函(2-1)的单参数极值曲线族

$$\{\gamma\}: \quad y=y(x,\alpha), \tag{2-2}$$

并假定$\frac{\partial y}{\partial \alpha}>0$．且$\{\gamma\}$中包含$\gamma_0$．

固有场 在含γ_0的某一单连区域D内的任一点(x, y)，在曲线族$\{\gamma\}$中有一条且仅有一条曲线通过它．这时，我们称极值曲线族$\{\gamma\}$在D上构成一个固有场．

由于$\frac{\partial y}{\partial \alpha}>0$，我们可从(2-2)中解出$\alpha$，

$$\alpha=\alpha(x,y),$$

于是

$$y(x,\alpha)=y(x,\alpha(x,y))$$

求导数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}y(x,\alpha)=\frac{\partial}{\partial x}y(x,\alpha(x,y))\triangleq p(x,y) \qquad (2\text{-}3)$$

我们称 $p(x,y)$ 是场$\{\gamma\}$的斜率函数.

中心场 如果极值曲线族$\{\gamma\}$的所有曲线都通过某点 M_0，且点 M_0 属于 D，显然，$\{\gamma\}$ 在 D 上不构成固有场. 若在 D 上除了点 M_0 外的所有点，都只有$\{\gamma\}$中的一条曲线通过，则称 $\{\gamma\}$ 构成一个**中心场**.

如果泛函的极值曲线族$\{\gamma\}$，在某一单连区域 D 上形成一个固有场或中心场，则称这个场为极值曲线场.

2.2 维尔斯特拉斯(Weierstrass)函数

设泛函(2-1) 的极值曲线满足雅可比条件，通过 $A(x_0,y_0)$ 与 $B(x_1,y_1)$的极值曲线 γ_0 含于斜率为 $p(x,y)$的中心场之内 (图 6-2).

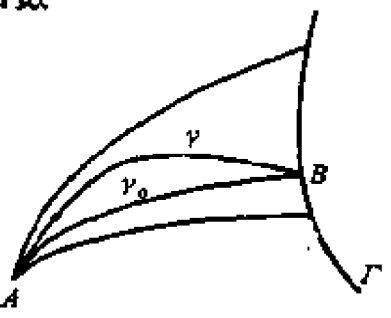

图 6-2

若 γ 为该场中与 γ_0 接近的容许曲线，沿着 γ 与 γ_0 取值的泛函 (2-1)分别表示为 $J[\gamma]$与 $J[\gamma_0]$. 于是，泛函的改变量

$$\Delta J=J[\gamma]-J[\gamma_0]=\int_{\gamma}F(x,y,y')\,dx-\int_{\gamma_0}F(x,y,y')dx. \qquad (2\text{-}4)$$

考虑辅助积分

$$\int_{\gamma}\left[F(x,y,p)+\left(\frac{dy}{dx}-p\right)F_p(x,y,p)\right]dx. \qquad (2\text{-}5)$$

如果 γ 取为极值曲线 γ_0，则$\frac{dy}{dx}=p$，于是上式化为 $J[\gamma_0]$.

(2-5)式叫做希耳伯特(Hilbert)不变积分. 现在我们来证明这个积分与路径无关. 为此，我们将(2-5)改写为

$$\int_{\gamma}[F(x,y,p)-pF_p(x,y,p)]dx+F_p(x,y,p)dy, \quad (2\text{-}6)$$

并记

$$A(x,y)=F-pF_p,\ B(x,y)=F_p,$$

注意到 $y'=p=p(x,y)$, $y''=\dfrac{dp}{dx}=p_x+p_yp$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}&=F_y+F_pp_y-p_yF_p-p(F_{py}+F_{pp}p_y)-F_{px}-F_{pp}p_x\\&=F_y-F_{px}-pF_{py}-(p_x+p_yp)F_{pp}\\&=F_y-F_{y'x}-y'F_{y'y}-y''F_{y'y'}=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'},\end{aligned}$$

上式最后一个等式的右边即是泛函 $J[\gamma]$ 的欧拉方程的左端，因而等于零. 故得

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}.$$

这个等式在极值曲线族 $\{\gamma\}$ 所在的单连区域 D 中处处成立. 因此，(2-5)的积分与路径无关，只与起点和终点的位置有关. 于是

$$\int_{\gamma_c}F(x,y,y')\,dx=\int_{\gamma}[F(x,y,p)+(y'-p)F_p(x,y,p)]\,dx,$$

从而(2-4)式化为

$$\begin{aligned}\Delta J&=\int_{\gamma}F(x,y,y')\,dx-\int_{\gamma_0}F(x,y,y')\,dx\\&=\int_{\gamma}F(x,y,y')\,dx-\int_{\gamma}[F(x,y,p)+(y'-p)F_p(x,y,p)]\,dx\\&=\int_{\gamma}[F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)]dx\\&\triangleq\int_{\gamma}E(x,y,p,y')\,dx \qquad (2\text{-}7)\end{aligned}$$

被积式中

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p) \qquad (2\text{-}8)$$

称为维尔斯特拉斯函数，简称E函数。

2.3 强极值的充分条件

由以上讨论，可以得到下面的强极值的充分条件。

定理（强极值的充分条件） 泛函(2-1)在通过$A(x_0,y_0)$与$B(x_1,y_1)$的极值曲线$y=y(x)$上给出强极值的充分条件是

(1) 泛函的极值曲线族$y=y(x,C)$在$y=y(x)$的零阶δ邻域内构成极值曲线场，且$y(x)\subset y(x,C)$.

(2) 在极值曲线$y=y(x)$的零阶δ邻域内，对于任意的y'，E函数保持确定的符号

当 $E(x,y,p,y')\geqslant 0$时，$J[y]$为强极小值；

当 $E(x,y,p,y')\leqslant 0$时，$J[y]$为强极大值，

式中$p=p(x,y)$是场的斜率函数。

这个充分条件是希尔伯特在1900年提出不变积分理论后，简化了维尔斯特拉斯的充分性证明得出的。但由于E函数比较复杂，我们可以将它简化。

函数$F(x,y,y')$关于$(y'-p)$的泰勒公式为

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)F_p(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{pp}(x,y,q),$$

式中$q=y'+\theta p \quad (0<\theta<1)$.

这样E函数可写为

$$E(x,y,p,y')=\frac{(y'-p)^2}{2}F_{pp}(x,y,q),$$

即E函数与F_{pp}的符号一致，从而(2-7)可写为

$$\Delta J=\frac{1}{2}\int_{\gamma}(y'-p)^2F_{pp}(x,y,q)dx, \tag{2-9}$$

这样ΔJ的符号与F_{pp}的符号一致。

因而，我们将上述定理的充分条件简化为：

泛函(2-1)在通过 $A(x_0,y_0)$ 与 $B(x_1,y_1)$ 的极值曲线 $y=y(x)$ 上给出强极值的充分条件是

(1) 泛函的极值曲线族 $y=y(x,C)$ 在 $y=y(x)$ 的零阶 δ 邻域内构成极值曲线场，且 $y(x)\subset y(x,C)$.

(2) 在极值曲线 $y=y(x)$ 的零阶 δ 邻域内，对于任意的 y'，函数 $F_{y'y'}$ 保持确定的符号

当 $F_{y'y'}(x,y,y')\geqslant 0$ 时，$J[y]$为强极小值；

当 $F_{y'y'}(x,y,y')\leqslant 0$ 时，$J[y]$为强极大值.

上面所讲的定理的条件是强极值的充分条件，事实上还可证明它也是必要条件，我们就不多述了.

前面的极值充分条件的定理，毋须作本质的修改，就可推广到如下形式的泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')dx,$$

$$y_i(x_0)=y_{0i},\quad y_i(x_1)=y_{1i}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

中去. 这时，勒让德强条件为

$$F_{y_i'y_i'}>0,\ \begin{vmatrix}F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'}\\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'}\end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix}F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \cdots & F_{y_1'y_n'}\\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \cdots & F_{y_2'y_n'}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \cdots & F_{y_n'y_n'}\end{vmatrix}>0.$$

E 函数的形式为

$$\begin{aligned}E=&F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\\&-F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)\\&-\sum_{i=1}^{n}(y_i'-p_i)F_{p_i}(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,p_1,p_2,\cdots,p_n),\end{aligned}$$

其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$为场的斜率函数.

例 1 讨论泛函

$$\begin{cases} J[y]=\int_0^1 (yy'+y'^2)dx, \\ y(0)=0, \quad y(1)=2 \end{cases}$$

的极值.

解 $F=yy'+y'^2$,欧拉方程 $y''=0$ 的通解为

$$y=C_1x+C_2,$$

代入边界条件得 $C_1=2, C_2=0$. 于是,极值曲线为 $y=2x$. 又 $y=C_1x$ 在[0,1]上形成极值曲线中心场,且 $y=2x$ 在这个极值曲线场之内.

$$\begin{aligned} E(x,y,p,y') &= F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p) \\ &= yy'+y'^2-(yp+p^2)-(y'-p)(y+2p) \\ &= y'^2-2py'+p^2=(y'-p)^2 \end{aligned}$$

对于任意的 y',皆有 $E(x,y,p,y')\geqslant 0$,因此,函数 $y=2x$ 给出泛函的强极小值.

例 2 讨论上节例 1 中的泛函

$$\begin{cases} J[y]=\int_0^1 y'^3dx \\ y(0)=0, y(1)=1 \end{cases}$$

能否取到强极值?

解 欧拉方程的通解为 $y=C_1x+C_2$,代入 $y(0)=0$,得 $C_2=0$,即单参数直线族 $y=C_1x$. 又代入 $y(1)=1$,得 $C_1=1$. 故极值曲线为 $y=x$.

$y=C_1x$ 在[0,1]上的极值曲线形成中心场. 且 $y=x$ 在这个极值曲线场之内.

$$E(x,y,p,y')=y'^3-p^3-3p^2(y'-p)=(y'-p)^2(y'+2p).$$

若 y' 取任意值,$(y'+2p)$ 可以有任何符号,即 E 函数不能保持确定的符号. 因此,强极值的充分条件不满足,但由于这个充

分条件也是必要的。因此，在极值曲线 $y=x$ 上，泛函取不到强极值。

习 题 6

1. 设泛函

$$\begin{cases} J[y]=\int_0^{x_1}(y''^2+y'+x^2)dx, \\ y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1 \quad (x_1>0), \end{cases}$$

(1) 求雅可比方程满足初值条件 $u(0)=0, u'(0)=1$ 的解。

(2) 在区间 $[0,x_1](x_1>0)$ 上，$A(0,0)$ 是否有共轭点？

2. 用充分条件讨论下列泛函的极值。

(1) $\begin{cases} J[y]=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx, \\ y(1)=3, \quad y(2)=5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} J[y]=\int_0^1 (y'^2+y^2+2ye^{2x})dx, \\ y(0)=\frac{1}{3}, \ y(1)=\frac{e^2}{3}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2+6y\sin 2x)dx, \\ y(0)=0, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} J[y]=\int_1^2 \frac{x^3}{y^2}dx, \\ y(1)=1, \quad y(2)=4; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} J[y]=\int_0^{x_1}\frac{dx}{y'}, \\ y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1, \quad x_1>0, \quad y_1>0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} J[y]=\int_0^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)dx, \\ y(0)=0, \quad y(x_1)=0, \quad x_1>0; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} J[y]=\int_{-1}^{1} x^{\frac{2}{3}}y'^2dx, \\ y(-1)=-1, \quad y(1)=1. \end{cases}$

3. 讨论捷线问题中泛函在极值曲线上的极值性质。

第7章　变分原理

前面讲的是把求泛函的极值问题，转化为解微分方程的边值问题．但是，在许多情况下，解微分方程的边值问题是十分困难的．若反过来研究，寻找使泛函取极小的函数这个问题，来代替求解的微分方程边值问题，这为解决数学物理问题，往往提供了一种有效办法．本章就几种常见的微分方程边值问题，来建立与二次泛函极值问题的等价关系——变分原理，作为下章研究变分问题（也就是微分方程的边值问题）的近似解作准备．为了研究问题方便起见，我们先介绍预备知识．

§1　预备知识

1.1　函数的内积

设G表示n维区域，它是欧几里得空间R^n中的一个连通开集．以Γ表示区域G的边界．集合$G+\Gamma$称为闭区域，用$\bar{G}$表示．

例如，$n=1$时，区域化为开区间(a,b)，边界是区间的端点$x=a$和$x=b$．闭区域化为闭区间$[a,b]$．

$n=2$时，如圆$x^2+y^2<a^2$是区域，$x^2+y^2=a^2$是它的边界，$x^2+y^2\leqslant a^2$是闭区域．

空间R^n中的点P，用有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示．对于点P的函数

$$u(P)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad P\in R^n$$

的积分

$$\int\int\cdots\int_G u(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n\triangleq\int_G u(P)\,dG.$$

当 $n=1,2$ 时，分别写为

$$\int_a^b u(x)dx,\quad \iint_G u(x,y)dxdy.$$

（一）线性集合

下面我们介绍线性集合的定义：

定义 设集合 M，它的元素是给定在某集合上的函数，且 a_1，a_2 为任意实常数. 若对于 M 中任意的两个函数 $u(P),v(P)$，函数

$$a_1u(P)+a_2v(P)$$

也属于 M，我们称 M 是线性集合.

例如，用 C 表示定义在闭区域 $\overline{G}$ 上的连续函数集合，若 $u_1(P),u_2(P)$ 都属于 C，根据连续函数的性质，知 $a_1u_1(P)+a_2u_2(P)$ 在 $\overline{G}$ 上也连续，从而也属于 C. 因此，C 是线性集合.

由上述定义推知，若 M 是线性集合，于是，它的任意 n 个函数 $u_1(P),u_2(P),\cdots,u_n(P)$ 的线性组合

$$a_1u_1(P)+a_2u_2(P)+\cdots+a_nu_n(P)$$

也属于 M.

（二）函数的内积

定义 设 M 是由定义在 $\overline{G}$ 上的所有连续函数所组成的线性集合，若 $u(P),v(P)\in M$，则

$$\int_G u(P)v(P)dG\triangleq(u,v)\qquad(1\text{-}1)$$

称为 M 上函数 $u(P),v(P)$ 的内积.

由(1-1)式知道，在 M 上两个函数的内积，是一个实数，它由(1-1)式的积分值所确定.

从内积的定义，得到内积的如下性质：

设 $u(P),v(P),u_1(P),u_2(P)$ 是 M 中的任意函数，a_1，a_2 是任意实数，则

(1) $(u,v)=(v,u)$；

(2) $(a_1u_1+a_2u_2,v)=a_1(u_1,v)+a_2(u_2,v)$；

(3) $(u,u)\geqslant 0$；

(4) $(u,u)=0\Longleftrightarrow u(P)\equiv 0,P\in G$.

证

(1) $(u,v)=\int_G u(P)v(P)\,dG=\int_G v(P)u(P)dG=(v,u)$；

(2) $(a_1u_1+a_2u_2,v)=\int_G[a_1u_1(P)+a_2u_2(P)]v(P)dG$

$$=a_1\int_G u_1(P)v(P)\,dG+a_2\int_G u_2(P)v(P)dG$$

$$=a_1(u_1,v)+a_2(u_2,v)$$；

(3) $(u,u)=\int_G u^2(P)dG\geqslant 0$；

(4) 若 $u(P)\equiv 0$，$P\in G$，则 $\int_G u^2(P)dG=0$. 反之，若 $\int_G u^2(P)dG=0$，应有 $u(P)\equiv 0,P\in G$. 否则，必有一点 $P^*\in G$，在该点 $u(P^*)\neq 0$. 因 $u(P)$ 在 G 上连续，所以必存在 P^* 的某个邻域 K，在该邻域上 $u(P)\neq 0$. 从而

$$\int_G u^2(P)\,dG=\int_K u^2(P)dG>0,$$

这与假设矛盾.

例 1 设 $u=\cos x,v=x$，定义在 $[0,\pi]$ 上，于是

$$(u,v)=\int_0^{\pi}x\cos x\,dx=-2.$$

例 2 设 $u(x,y)=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ 定义在矩形域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上，$v(x,y)\equiv 1$. 于是

$$(u,v)=\int_0^a\int_0^b \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cdot 1\,dx\,dy=\frac{4ab}{\pi^2}.$$

1.2 微分算子

(一) 线性微分算子

我们先看下面的例子：

在第 4 章中，我们遇到过泊松方程的边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y), \quad (x,y)\in G, & (1\text{-}2)\\ u|_\Gamma=0,(\Gamma\text{ 为 }G\text{ 的边界}), & (1\text{-}3)\end{cases}$$

其中 $f(x,y)$ 在 $\overline{G}=G+\Gamma$ 上连续.

我们提出求(1-2)、(1-3)的经典解，也就是说，求在 $\overline{G}$ 上连续的函数 $u(x,y)$，它在区域 G 内满足(1-2)，且在边界 Γ 上满足(1-3). 由于 $f(x,y)$ 在 $\overline{G}$ 上连续，这就意味着解函数 $u(x,y)\in C^2(\overline{G})$，且在边界 Γ 上等于零. 因此，若定义一个线性集合

$$M_1:\{u(x,y)|,u(x,y)\in C^2(\overline{G}),u|_\Gamma=0\}$$

则对于上述泊松方程的边值问题，我们也可以这样说，在 M_1 中找一个函数 u，使满足方程

$$-\Delta u=f,$$

或简单地说，在 M_1 上来解方程

$$-\Delta u=f.$$

在这个意义上，我们称 M_1 是算子

$$-\Delta=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

的定义域，记为 $D_{-\Delta}$.

对于每一个 $u\in D_{-\Delta}$，得到在 $\overline{G}$ 上的连续函数

$$v=-\Delta u,$$

所有这样的函数 v，也构成一个线性集，若以 N 表示，这个线性集

称为算子 $-\Delta$ 的值域.

一般有下述定义：

定义 给定两个集合 M_1, M_2. 若对于每一个元素 $u \in M_1$，按一定的法则，它有唯一的一个元素 $v \in M_2$. 我们说在集合 M_1 上定义了一个把集合 M_1 映射到集合 M_2 的算子 T. 记为

$$v = Tu. \tag{1-4}$$

M_1 称为算子 T 的定义域，记为 D_T. 由(1-4)所得到的全部 v 所成的集合 N，称为算子 T 的值域，记为 R_T. 一般说，$R_T \subset M_2$.

下面我们介绍线性算子的定义.

定义 若 D_T 是一个线性集，且

(1) 对任一 $u \in D_T$，和任一实数 a，

$$T(au) = aTu,$$

(2) 对任何 $u_1, u_2 \in D_T$，有

$$T(u_1 + u_2) = Tu_1 + Tu_2,$$

则称 T 是一个线性算子.

例 1 在线性集 $C^1[x_0, x_1]$ 上给定的算子

$$L = \frac{d}{dx}$$

是一个线性算子.

事实上，对任一 $u \in C^1[x_0, x_1]$，和任一实数 a，有

$$L(au) = \frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx} = aLu,$$

$$L(u_1 + u_2) = \frac{d}{dx}(u_1 + u_2) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} = Lu_1 + Lu_2.$$

因此，L 是一个线性算子.

(二) 对称算子 正算子

定义 设 D_T 是一线性集合，T 是 D_T 中的线性算子. 若对

于每一对元素 $u,v\in D_T$，有

$$(Tu,v)=(u,Tv), \tag{1-5}$$

则称 T 是在 D_T 中的对称算子.

例 2 设 D_L 是由 $u(x)\in C^2[x_0,x_1]$所组成的线 性集合，且满足条件 $u(x_0)=0,u(x_1)=0$. 在 D_L 上由

$$Lu=-\frac{d^2}{dx^2}u$$

所定义的算子 L 是对称算子.

事实上，L 是线性算子. 又每一对 $u,v\in D_L$，有

$$(Lu,v)=-\int_{x_0}^{x_1}u''v\,dx=-[u'v]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}u'v'\,dx,$$

由于 $v\in D_L,v(x_0)=0,v(x_1)=0$，于是，边界项

$$-[u'v]_{x_0}^{x_1}=u'(x_0)v(x_0)-u'(x_1)v(x_1)=0.$$

又

$$\int_{x_0}^{x_1}u'v'\,dx=[uv']_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}uv''\,dx=\int_{x_0}^{x_1}u(-v'')\,dx$$
$$=(u,Lv),$$

即

$$(Lu,v)=(u,Lv),$$

按定义，L 是对称算子.

定义 设 T 是对称算子，且对所有 $u\in D_T$，

$$(Tu,u)\geqslant 0,$$

以及

$$(Tu,u)=0\Longleftrightarrow u\equiv 0,\quad u\in D_T$$

成立，则称 T 在它的定义域 D_T 中是正算子.

例 3 在例 2 中，我们已经证明了

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}$$

在 D_L 中是对称算子，我们还可证明它是正算子. 事实上，对所有

的 $u,v\in D_L$，有

$$(Lu,v)=\int_{x_0}^{x_1}u'v'dx$$

成立. 令 $v=u$，于是

$$(Lu,u)=\int_{x_0}^{x_1}u'^2dx\geqslant 0.$$

当 $(Lu,u)=0$ 时，即

$$\int_{x_0}^{x_1}u'^2dx=0,$$

因 $u'(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 上连续，推知 $u'(x)\equiv 0$，即 $u(x)$ 在 $[x_0,\ x_1]$ 上是常数.

由于 $u\in D_L$，$u(x_0)=u(x_1)=0$，于是

$$u(x)\equiv 0,\quad x\in[x_0,x_1],$$

故 L 是在 D_L 上的正算子.

（三）共轭算子

定义 设 M_1,M_2 是两个线性集合，对于由 M_1 到 M_2 的线性微分算子 T，总存在由 M_2 到 M_1 的算子 T^*，使

$$(v,Tu)=(T^*v,u)+w(u,v)\qquad(1\text{-}6)$$

成立. 则称 T^* 是 T 的共轭算子. 其中，$u\in D_T$，$v\in D_{T^*}$，$w(u,v)$ 是边界项.

在(1-6)中，若边界项 $w(u,v)$ 为零，于是

$$(v,Tu)=(T^*v,u),\qquad(1\text{-}7)$$

特别，$T^*=T$，则称 T 是自共轭算子.

若 T 是自共轭算子，于是

$$(v,Tu)=(T^*v,u)=(Tv,u)$$

因此，自共轭算子一定是对称算子.

(1) 二阶自共轭微分算子

设 $y(x)\in C^2[x_0,x_1]$，$p_0'(x)$，$p_1'(x)$，$p_2(x)\in C[x_0,x_1]$，且

$p_0(x)\neq 0$. 对二阶线性微分算子

$$Ly=p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y,$$

利用分部积分，可得

$$\begin{aligned}(Ly,z)&=\int_{x_0}^{x_1}(p_0y''+p_1y'+p_2y)z\,dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}[(p_0z)''-(p_1z)'+p_2z]y\,dx+[p_0(y'z-yz')\\&\quad+(p_1-p_0')yz]_{x_0}^{x_1}\\&\triangleq(y,L^*z)+w(y,z).\end{aligned}$$

因此，得共轭微分算子

$$L^*z=p_0z''+(2p_0'-p_1)z'+(p_0''-p_1'+p_2)z. \tag{1-8}$$

为了使 $L^*=L$，当且仅当

$$\begin{cases}2p_0'-p_1=p_1,\\ p_0''-p_1'+p_2=p_2\end{cases}$$

成立，也就是 $p_0'=p_1$ 成立. 得自共轭微分算子

$$\begin{aligned}Ly&=p_0y''+p_1y'+p_2y=p_0y''+p_0'y'+p_2y\\&=(p_0y')'+p_2y.\end{aligned} \tag{1-9}$$

例 1 将二阶线性微分方程

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \tag{1-10}$$

化成自共轭形式

$$(py')'+qy=0.$$

解 以待定因子 $\mu(x)$ 乘(1-10)两边，并令

$$(\mu p_0)'=\mu p_1$$

于是

$$\frac{\mu'}{\mu}+\frac{p_0'}{p_0}=\frac{p_1}{p_0},$$

积分得

$$\ln\mu p_0=\int\frac{p_1}{p_0}dx,$$

从而

$$\mu=\frac{1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx},$$

以这个 μ 乘(1-10)两边后,得

$$\left(e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y'\right)'+\frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y=0,$$

令 $$p=e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx},\qquad q=\frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx},$$

则得

$$(py')'+qy=0.$$

(2) 二阶自共轭偏微分算子

设 $u(x,y)\in C^2(\bar{G}),p(x,y)\in C^1(\bar{G}),q(x,y)\in C(\bar{G})$

$$Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+q(x,y)u,$$

注意到恒等式

$$v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(vp\frac{\partial u}{\partial x}\right)-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$v\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(vp\frac{\partial u}{\partial y}\right)-p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

以及平面上的格林公式

$$\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(vp\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(vp\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\oint_\Gamma vp\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)$$

$$=\oint_\Gamma vp\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

其中 s 为 Γ 的弧长变量，$\frac{\partial u}{\partial n}$为 Γ 的外法线方向导数.

于是，有

$$
\begin{aligned}
(v, Lu) &= \iint_G v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu\right]dxdy \\
&= \iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(vp\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(vp\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy \\
&\quad -\iint_G\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-quv\right]dxdy \\
&= \oint_\Gamma vp\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right) \\
&\quad -\iint_G\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-quv\right]dxdy \\
&= \oint_\Gamma vp\frac{\partial u}{\partial n}ds-\oint_\Gamma up\frac{\partial v}{\partial n}ds \\
&\quad +\iint_G u\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right)+qv\right]dxdy \\
&= \iint_G u\,(L^*v)\,dxdy+\oint_\Gamma p\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds,
\end{aligned}
$$

于是得共轭微分算子

$$
L^*v=\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right)+qv
$$

因此

$$
L^*=L,
$$

故 L 是自共轭微分算子. 若对 u, v 规定适当的齐次边界条件，则边界项等于零.

§ 2 与自共轭微分方程边值问题等价的变分问题

考虑二阶自共轭微分方程

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] + q(x)y(x) = f(x), \quad (2\text{-}1)$$

具有齐次边界条件

$$\begin{cases} \alpha y'(x_0) - \beta y(x_0) = 0, \\ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0. \end{cases} \quad (2\text{-}2)$$

对于函数 $p(x), q(x)$ 和常数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 作如下假设

(1) $p'(x), q(x)$ 和 $f(x)$ 都属于 $C[x_0, x_1]$,

(2) $p(x) > 0, q(x) \geqslant 0$,

(3) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 非负，且 $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, 又当 $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ 时，$\beta^2 + \delta^2 \neq 0$.

算子 L 的定义域 D_L 为函数集：

$\{y(x) \mid y(x) \in C^2[x_0, x_1]$，满足边界条件(2-2)$\}$.

显然，算子 L 将 D_L 中任一函数变为一连续函数 Ly. 为了把(2-1)、(2-2)这一微分方程边值问题化为变分问题，我们作如下考虑.

2.1 构造泛函

对于边值问题(2-1),(2-2)，我们来构造二次泛函.

$$J[y] = (Ly, y) - 2(y, f),$$

其中 $y \in D_L$，采用内积记号

$$(Ly, y) = \int_{x_0}^{x_1} (Ly)y(x)dx,$$

$$(y, f) = \int_{x_0}^{x_1} y(x)f(x)dx.$$

根据(2-1),(2-2)我们证明 Ly 是对称算子与正算子. 利用

分部积分法，当 $\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}(Ly,z)&=\int_{x_0}^{x_1}[-(py')'-qy]z\,dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}(py'z'+qyz)\,dx-[zpy']_{x_0}^{x_1}\\&=\int_{x_0}^{x_1}(py'z'+qyz)\,dx+\frac{\beta}{\alpha}pyz\Big|_{x=x_0}\\&\quad+\frac{\delta}{\gamma}pyz\Big|_{x=x_1}\end{aligned}\tag{2-3}$$

(2-3)右端关于 $y,z\in D_L$ 是对称的，因此

$$(Ly,z)=(y,Lz),$$

即 L 是对称算子。

又在(2-3)中，令 $z=y$，得

$$\begin{aligned}(Ly,y)=&\int_{x_0}^{x_1}(py'^2+qy^2)\,dx+\frac{\beta}{\alpha}p(x_0)y^2(x_0)\\&+\frac{\delta}{\gamma}p(x_1)y^2(x_1),\end{aligned}\tag{2-4}$$

根据假定，$p>0,q\geqslant 0,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 非负，因此 $(Ly,y)\geqslant 0$。

又若 $(Ly,y)=0\Rightarrow$(2-4)式右端四项均为零，特别，

$$\int_{x_0}^{x_1}py'^2dx=0,$$

因为 $p>0$，所以 $y'=0\Rightarrow y\equiv C$。又因 $\beta^2+\delta^2\neq 0$，比如 $\beta\neq 0$，则 $y(x_0)=0\Rightarrow y\equiv 0$，因此，有

$$(Ly,y)=0\Longleftrightarrow y(x)\equiv 0,y\in D_L$$

即 L 是正算子。

综合上述，问题给定的自共轭微分算子 L 是正的对称算子。

于是，当 $\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$ 时，我们得到与问题(2-1)、(2-2)相应的泛函

$$J[y]=(Ly,y)-2(y,f)$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(py'^2+qy^2-2yf)\,dx+\frac{\beta}{\alpha}p(x_0)y^2(x_0)$$

$$+\frac{\delta}{\gamma}p(x_1)y^2(x_1). \tag{2-5}$$

当 $\alpha=\gamma=0$ 时，同理可得

$$J[y]=(Ly,y)-2(y,f)$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(py'^2+qy^2-2yf)dx, \tag{2-6}$$

(2-5)、(2-6)中被积函数关于 y,y' 是二次的，称为二次泛函，在物理上称为能量积分.

2.2 二次泛函的变分原理

对于上述二次泛函，我们提出下述变分问题：

求一函数 $y_0\in D_L$，使对所有 $y\in D_L$，以 $J[y_0]$为极小，即

$$J[y]\geqslant J[y_0],\qquad y\in D_L.$$

现在我们建立二次泛函的变分原理：求泛函

$$J[y]=(Ly,y)-2(y,f)$$

的极小值问题和边值问题(2-1)、(2-2)的等价性.

定理 1 如果 y_0 是边值问题(2-1)、(2-2)的解，则 y_0 使泛函 $J[y]$ 取极小. 反之，如果 y_0 使 $J[y]$ 取极小，则 y_0 是边值问题(2-1)、(2-2)的解.

证 设 y_0 是边值问题(2-1)、(2-2)的解，即

$$Ly_0=f,$$

于是

$$J[y]=(Ly,y)-2(y,f)=(Ly,y)-2(y,Ly_0), \tag{2-7}$$

由于 L 是线性微分算子，故有

$$(L(y-y_0),(y-y_0))-(Ly-Ly_0,y-y_0)$$

$$=(Ly,y)-(Ly,y_0)-(Ly_0,y)+(Ly_0,y_0),$$

又由于 L 是对称算子，有

$$(Ly, y_0) + (Ly_0, y) = (y, Ly_0) + (y, Ly_0) = 2(y, Ly_0).$$

于是，(2-7)化为

$$J[y] = (L(y-y_0), (y-y_0)) - (Ly_0, y_0),$$

以及 L 是正算子，故当 $y \neq y_0$ 时，有

$$(L(y-y_0), (y-y_0)) > 0,$$

于是

$$J[y] > -(Ly_0, y_0) = J[y_0], \quad (\text{当 } y \neq y_0 \text{ 时}).$$

即 y_0 使泛函 $J[y]$ 取极小.

反之，若 y_0 使 $J[y]$ 取极小，对任意 $\eta(x) \in D_L$，有

$$J[y_0 + \alpha\eta] - J[y_0] \geqslant 0,$$

其中 α 是绝对值很小的参数. 根据 L 是线性的和对称的算子，可得

$$\begin{aligned} J[y_0 + \alpha\eta] &= (L(y_0 + \alpha\eta), y_0 + \alpha\eta) - 2(y_0 + \alpha\eta, f) \\ &= (Ly_0, y_0) + \alpha(Ly_0, \eta) + \alpha(L\eta, y_0) \\ &\quad + \alpha^2(L\eta, \eta) - 2(y_0, f) - 2\alpha(\eta, f) \\ &= J[y_0] + 2\alpha(Ly_0 - f, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta), \end{aligned}$$

于是

$$J[y_0 + \alpha\eta] - J[y_0] = 2\alpha(Ly_0 - f, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta) \geqslant 0,$$

右端是 α 的非负二次多项式，其判别式

$$(Ly_0 - f, \eta)^2 - (L\eta, \eta) \cdot 0 \leqslant 0.$$

从而，对任意 $\eta(x) \in D_L$，等式

$$(Ly_0 - f, \eta) = 0$$

成立. 由基本引理 1，可知

$$Ly_0 - f \equiv 0,$$

即 y_0 是边值问题(2-1)、(2-2)的解. 证毕.

现在我们证明边值问题(2-1)、(2-2)的解和相应的变分问题的解，都是唯一的.

假设边值问题(2-1)、(2-2)有两个解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，且

$y_1(x)\neq y_2(x)$，因为 $y_1(x)$ 是这个边值问题的解，由定理 1 知 $y_1(x)$一定使 $J[y]$取极小值，即 $J[y_2(x)]>J[y_1(x)]$. 另一方面，$y_2(x)$也是边值问题(2-1)、(2-2)的解，也应使泛函 $J[y]$取极小值，故有 $J[y_1(x)]>J[y_2(x)]$，这两个不等式是矛盾的，故边值问题(2-1)、(2-2)不能有两个解，从而相应的变分问题的解也是唯一的.

例 1 考虑一均匀弦，两端固定在 $x=0, x=l$，它的横向振动方程为

$$\begin{cases} Ly \equiv -\mu y'' = f(x), \\ y(0)-y(l)=0, \end{cases}$$

其中 $\mu>0$ 是常数. 我们知道弦的总势能

$$U[y]=\frac{1}{2}\int_0^l (\mu y'^2-2fy)dx,$$

又
$$(Ly,y)=\int_0^l -\mu y''\cdot y dx = -\mu\left[(yy')\Big|_0^l - \int_0^l y'^2 dx\right]$$
$$=\mu\int_0^l y'^2 dx$$

二次泛函

$$J[y]=(Ly,y)-2(y,f)$$
$$=\int_0^l (\mu y'^2-2yf)dx$$

它与 $U[y]$只差一个常数因子. 根据最小势能原理，弦的平衡位置使 $U[y]$取极小，从而也使 $J[y]$取极小. 因此，二次泛函的变分原理实际上是最小势能原理的一般化.

2.3 非齐次边界条件

前面考虑过的边界条件(2-2)是齐次的，现在我们考虑非齐次边界条件

$$\begin{cases} \alpha y'(x_0)-\beta y(x_0)=A, \\ \gamma y'(x_1)+\delta y(x_1)=B, \end{cases} \tag{2-8}$$

其中 A,B 为常数. 我们可以通过一变量替换，将它转化为齐次的情形. 事实上，设 y 是(2-1)、(2-8)的解，$w(x)\in C^2[x_0,x_1]$，且在端点 x_0,x_1 处满足(2-8). 令 $v(x)=y(x)-w(x)$，则 $v(x)$ 是下面微分方程边值问题

$$\begin{cases} Lv\equiv -(pv')'+qv=F(x), & (2\text{-}9)\\ \alpha v'(x_0)-\beta v(x_0)=0, & (2\text{-}10)\\ \gamma v'(x_1)-\delta v(x_1)=0 \end{cases}$$

的解. 从而边值问题得到齐次化. 其中

$$F(x)=f(x)-[-(pw')'+qw],$$

而取 $w(x)=C_1x+C_2$，其中常数 C_1,C_2 可由

$$\begin{cases} \alpha w'(x_0)-\beta w(x_0)=A,\\ \gamma w'(x_1)+\delta w(x_1)=B \end{cases}$$

确定.

在(2-9)、(2-10)中，我们考虑 $\alpha=\gamma=0$ 的情形，相应的泛函

$$J[v]=\int_{x_0}^{x_1}(pv'^2+qv^2-2Fv)dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(pv'^2+qv^2)dx-2\int_{x_0}^{x_1}\{f(x)-[-(pw')'+qw]\}vdx,$$

由于 $v(x)\in D_L$，于是

$$\int_{x_0}^{x_1}[-(pw')'+qw]vdx=-[pw'v]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}(pw'v'-qwv)dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(pw'v'+qwv)dx,$$

所以

$$J[v]=\int_{x_0}^{x_1}(pv'^2+qv^2-2vf)dx+2\int_{x_0}^{x_1}(pw'v'+qwv)dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}[p(v'+w')^2+q(v+w)^2-2(v+w)f]dx$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}(pw'^2+qw^2-2wf)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2 - 2yf)dx$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} (pw'^2 + qw^2 - 2wf)dx,$$

因 w 是已知函数，上式最后一项的积分为已知值．所以当 $\alpha = \gamma = 0$ 时，齐次边界条件的泛函和非齐次边界条件的泛函只相差一常数项，即

$$J(y) = J(v) + (\text{常数}),$$

它们的极值点是一样的．

当 $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ 时，可以证明与 (2-1)、(2-8) 对应的泛函为

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2 - 2fy)dx + \frac{\beta}{\alpha} p(x_0) y^2(x_0)$$
$$+ \frac{\delta}{\gamma} p(x_1) y^2(x_1) + \frac{2A}{\alpha} p(x_0) y(x_0)$$
$$- \frac{2B}{\gamma} p(x_1) y(x_1). \qquad (2\text{-}11)$$

2.4 高阶方程的情形

设有 $2n$ 阶微分方程

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right] = f(x), \qquad (2\text{-}12)$$

边界条件为

$$\begin{cases} y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ y(x_1) = y'(x_1) = \cdots = y^{(n-1)}(x_1) = 0, \end{cases} \qquad (2\text{-}13)$$

其中 $p_k(x) \in C^n[x_0, x_1] (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 且非负，并且最高阶导数的系数 $p_n(x)$ 只可以在有限个点处等于零．这时，取算子 L 的定义域为

$$D_L = \{y(x) \mid \ y(x) \in C^{2n}[x_0, x_1], \text{满足边界条件 (2-13)}\}$$

则可证明，L是正的对称算子．因此，边值问题(2-12)、(2-13)等价于泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\sum_{k=1}^{n}p_k(x)\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^2-2yf\right\}dx$$

的极小问题．

例 2 我们在第2章§3讨论过两端固定在$x=0, x=l$的弹性梁，承受均匀分布荷载q的作用，梁的平衡方程

$$\begin{cases}EI\dfrac{d^4y}{dx^4}-q=0,\\ y(0)=y'(0)=0,\\ y(l)=y'(l)=0,\end{cases}$$

其中常数$EI>0$．我们知道，梁的总势能是

$$U[y]=\frac{1}{2}\int_0^l\left[EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2qy\right]dx,$$

它和二次泛函

$$J[y]=(Ly,y)-2(y,q)=\int_0^l\left[EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2qy\right]dx$$

只差一常数因子．根据最小势能原理，梁的平衡位置使$U[y]$取极小，从而也使$J[y]$取极小．

§3 与自共轭偏微分方程边值问题等价的变分问题

在§1中，我们讨论过二阶自共轭偏微分算子，现在我们讨论这类微分算子下的偏微分方程边值问题：求函数$u=u(x,y)$满足椭圆型方程

$$Lu\equiv-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}-qu=f(x,y),(x,y)\in G \tag{3-1}$$

在G的边界Γ上(Γ为逐段光滑的封闭曲线)满足下列条件之

一，

$$u|_\Gamma=0, \tag{3-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0, \tag{3-3}$$

$$\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0. \tag{3-4}$$

假定在 $\bar{G}$ 上 $p(x,y)>0, q(x,y)\geqslant 0, \sigma(x,y)\geqslant 0$. $(\sigma\not\equiv 0)$；以及 $p(x,y)\in C^1, q(x,y), f(x,y), \sigma(x,y)$ 都属于 C. 我们称(3-1)、(3-2)为椭圆型方程第一边值问题；(3-1)、(3-3)为椭圆型方程第二边值问题；(3-1)、(3-4)为椭圆型方程第三边值问题.

为了简单起见，在(3-1)式中，我们讨论当 $p(x,y)\equiv 1$，$q(x,y)\equiv 0$ 的情况.

3.1 狄里克雷(Dirichlet)问题

泊松方程第一边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y), & (x,y)\in G \qquad (3\text{-}5)\\ u|_\Gamma=0, \ (\Gamma \text{ 为 } G \text{ 的边界}) & (3\text{-}6)\end{cases}$$

也称狄里克雷问题，其中 $f(x,y)\in C(\bar{G})$. 我们取算子 $-\Delta$ 的定义域为

$$M: \{u(x,y)\,|\,u(x,y)\in C^2(\bar{G}), u|_\Gamma=0\}.$$

对边值问题(3-5)、(3-6)，我们来构造二次泛函

$$J[u]=(-\Delta u,u)-2(u,f).$$

考虑内积

$$(-\Delta u,u)=\iint_G(-\Delta u)u\,dx\,dy,$$

$$(u,f)=\iint_G uf\,dx\,dy.$$

下面我们证明 $-\Delta$ 算子是对称算子和正算子. 由于

$$(-\Delta u, v) = \iint_G (-\Delta u) v \, dx dy = -\iint_G v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy, \tag{3-7}$$

根据恒等式

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tag{3-8}$$

以及格林公式

$$\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \oint_\Gamma v \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = \oint_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \tag{3-9}$$

其中 s 为 Γ 的弧长变量，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 Γ 的外法线方向导数．于是(3-7)化为

$$(-\Delta u, v) = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \oint_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \tag{3-10}$$

由于 $v \in M$，有 $v|_\Gamma = 0$，因此，(3-10)化为

$$(-\Delta u, v) = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \tag{3-11}$$

上式右端关于 $u, v \in M$ 是对称的，所以

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v)$$

成立，故在 M 上 $-\Delta$ 是对称算子．

又由(3-11)式，在 M 上，令 $v = u$，于是

$$(-\Delta u, u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geqslant 0,$$

如果$(-\Delta u, u)=0$，则$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，所以$u\equiv$常数，因为$u|_\Gamma=0$，故$u\equiv 0$。

因此，对一切$u\in M$，都有$(-\Delta u, u)\geqslant 0$，而且$(-\Delta u, u)=0 \Longleftrightarrow u\equiv 0$。这就证明了算子$-\Delta$在$M$上是正算子。

于是，可以构造和(3-5)、(3-6)相应的二次泛函

$$J[u]=(-\Delta u, u)-2(u, f)$$

$$=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2uf\right]dxdy, \qquad (3\text{-}12)$$

其中$u\in M$。

关于泛函(3-12)，我们提出如下变分问题：

求$u_0\in M$，使泛函$J[u]$对一切$u\in M$而言，以$J[u_0]$为极小。和定理1的证明相同，成立如下的变分原理：

定理2 如果u_0为泊松方程第一边值问题(3-5)、(3-6)的解，则u_0使泛函(3-12)取极小值。反之，如果u_0使泛函(3-12)取极小值，则u_0是泊松方程第一边值问题(3-5)、(3-6)的解。

3.2 诺伊曼(Neumann)问题

泊松方程第二边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u\equiv -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),(x,y)\in G & (3\text{-}13)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0, \quad (\Gamma\text{为}G\text{的边界}), & (3\text{-}14)\end{cases}$$

也称诺伊曼问题，其中$f(x,y)\in C(\bar{G})$，$\frac{\partial u}{\partial n}$是$u$沿$\Gamma$的外法线方向导数。

我们取算子$-\Delta$的定义域为

$$M_0:\left\{u(x,y)\mid \quad u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0\right\},$$

由(3-10)，代入$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0$，于是

$$(-\Delta u, v)=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

知在M_0上，$-\Delta$仍然是对称算子，可是它却不是正算子．事实上

$$(-\Delta u, u)=\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\geqslant 0,$$

因为对于M_0中任意一个恒等于常数C的函数u，都有

$$(-\Delta u, u)=0,$$

而函数$u\not\equiv 0$，所以在M_0上$-\Delta$不是正算子．此时，边值问题(3-13)、(3-14)不是对一切函数$f(x,y)$都有解，这是由于若我们在区域G上对方程(3-13)两端积分

$$-\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=\iint_{\sigma}f(x,y)dxdy,$$

上式左端等于$-\oint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}ds$，因$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0$，所以

$$\iint_{\sigma}f(x,y)dxdy=0. \tag{3-15}$$

即(3-13)中等式右端的函数$f(x,y)$必须满足条件(3-15)时，边值问题(3-13)、(3-14)才有解．

此时，我们对考虑的函数集合M_0，必须补充规定

$$\iint_{\sigma}u(x,y)dxdy=0,$$

亦即把$-\Delta$算子的定义域取为

$$\tilde{M}_0:\left\{u(x,y)\,\middle|\, u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0,\ \iint_{\sigma}u(x,y)dxdy=0\right\}.$$

这时，在 $\tilde{M}_0$ 上方可证明算子 $-\Delta$ 是正算子.

事实上，我们由

$$(-\Delta u, u)=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\geqslant 0,$$

若 $(-\Delta u, u)=0$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，所以 $u\equiv C$（常数）. 因 $u\in\tilde{M}_0$，故有

$$\iint_G u(x,y)dxdy=C\iint_G dxdy=0$$

因而，$C=0$，即 $u(x,y)\equiv 0$. 即得证算子 $-\Delta$ 在 $\tilde{M}_0$ 上是正算子.

和诺伊曼问题(3-13)、(3-14)相应的变分问题是，求函数 $u_0\in\tilde{M}_0$，使二次泛函

$$J[u]=(-\Delta u, u)-2(u, f)$$

$$=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2uf\right]dxdy, \tag{3-16}$$

对一切 $u\in\tilde{M}_0$，以 $J[u_0]$ 为极小.

同样，成立如下变分原理.

定理 3 函数 u_0 为诺伊曼问题(3-13)、(3-14) 的解的充要条件是 u_0 为变分问题(3-16)的解.

3.3 洛平(Robin)问题

泊松方程第三边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),\ (x,y)\in G & (3\text{-}17)\\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0 \quad (\Gamma\text{ 为 }G\text{ 的边界}) & (3\text{-}18)\end{cases}$$

也称为洛平问题. 其中 $\sigma(x,y)$ 是在 Γ 上的非负连续函数，且不恒等于零. 我们取算子 $-\Delta$ 的定义域为

$$M_\sigma:\left\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0\right\}.$$

当 $u\in M_\sigma$ 时，由(3-18)，$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=-\sigma u|_\Gamma$，并代入(3-10)，得

$$(-\Delta u,v)=\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\oint_\Gamma\sigma uvds,\tag{3-19}$$

易见 $(-\Delta u,v)=(u,-\Delta v)$ 成立，即 $-\Delta$ 为对称算子.

在(3-19)中，令 $v=u$，得

$$(-\Delta u,u)=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\oint_\Gamma\sigma u^2ds\geqslant 0,\tag{3-20}$$

又从 $(-\Delta u,u)=0\Rightarrow\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=0$，

$\oint_\Gamma\sigma u^2ds=0$. 由前者得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow u\equiv C$；再由后者得

$$C^2\oint_\Gamma\sigma ds=0.$$

由于 $\sigma\not\equiv 0$ 且非负，于是 $\oint_\Gamma\sigma ds>0$，故 $C=0$，即 $u(x,y)\equiv 0$. 也就是说，在 M_σ 上 $-\Delta$ 是正算子.

和洛平问题(3-17)、(3-18)相应的变分问题是：求函数 $u_0\in M_\sigma$，使二次泛函

$$\begin{aligned}J[u]&=(-\Delta u,u)-2(u,f)\\&=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2uf\right]dxdy\\&\quad+\oint_\Gamma\sigma u^2ds,\end{aligned}\tag{3-21}$$

对一切 $u\in M_\sigma$，以 $J[u_0]$ 为极小.

因此，成立如下变分原理：

定理 4 函数 u_0 为洛平问题 (3-17)、(3-18) 的解的充要条件，是 u_0 为变分问题(3-21)的解.

例 3 在第 4 章§2中，我们考虑过膜的(若设 $\mu=1, p(s)=0$)总势能

$$U_2[z]=\frac{1}{2}\left\{\iint_D[(z_x^2+z_y^2)-2zf]dxdy+\oint_l \sigma z^2 ds\right\}.$$

它与二次泛函

$$J[z]=(-\Delta z, z)-2(z, f)$$
$$=\iint_D[(z_x^2+z_y^2)-2zf]dxdy+\oint_l \sigma z^2 ds$$

只差常数因子. 根据最小势能原理，膜平衡位置应使 $U_2[z]$ 取极小，从而 $J[z]$也取极小.

和上面 3.1 至 3.3 中讨论相类似，我们可得椭圆型方程边值问题(3-1)至(3-4)相应的二次泛函如下：

(1) 第一边值问题

$$J(u]=(Lu, u)-2(u, f)$$
$$=\iint_a\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2uf\right\}dxdy,$$

(3-22)

算子 L的定义域为

$$M_1\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\bar{G}), u|_\Gamma=0\}.$$

(2) 第二边值问题

当 $q(x,y)\not\equiv 0$ 时，

$$J[u]=(Lu, u)-2(u, f)$$
$$=\iint_a\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2-2fu\right\}dxdy,\right.$$

(3-23)

算子 L 的定义域

$$M_0:\ \left\{u(x,y)\,|\,u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0\right\}.$$

当 $q(x,y)\equiv 0$ 时，

$$J[u]=(Lu,u)-2(u,f)$$
$$=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-2fu\right\}dxdy,\tag{3-24}$$

算子 L 的定义域

$$\tilde{M}_0:$$
$$\left\{u(x,y)\,|\,u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,\ \iint_G u(x,y)\,dxdy=0\right\}.$$

(3) 第三边值问题

$$J[u]=(Lu,u)-2(u,f)$$
$$=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}dxdy$$
$$+\oint_\Gamma\sigma u^2ds,\tag{3-25}$$

算子 L 的定义域

$$M_\sigma:\ \left\{u(x,y)\,|\,u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0\right\}.$$

3.4 非齐次边界条件

下面，我们简单地介绍非齐次边界条件的情形.

设椭圆型方程(3-1)在 Γ 上满足下列非齐次边界条件之一：

$$u|_\Gamma=g(s),\tag{3-26}$$

$$p\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=h(s),\tag{3-27}$$

$$\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_{\Gamma}=K(s), \tag{3-28}$$

其中 $g(s),h(s),K(s)$ 为给定在边界 Γ 上的连续函数，s 为 Γ 的弧长变量，可以证明与上述边值问题相联系的变分问题的泛函表达式分别为：

(1) 第一边值问题

$$J[u]=\iint_{G}\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}dxdy, \tag{3-29}$$

$$M_1'=\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\bar{G}),u|_{\Gamma}=g(s)\}.$$

(2) 第二边值问题

当 $q(x,y)\not\equiv 0$ 时，

$$J[u]=\iint_{G}\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}dxdy-2\int_{\Gamma}huds, \tag{3-30}$$

$$M_0'=\left\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\bar{G}),p\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=h(s)\right\}.$$

当 $q(x,y)\equiv 0$ 时，

$$J[u]=\iint_{G}\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-2fu\right\}dxdy-2\int_{\Gamma}huds, \tag{3-31}$$

$$\tilde{M}_0'=$$

$$\left\{u(x,y)\mid u(x,y)\in C^2(\bar{G}),p\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=h(s),\iint_{G}udxdy=0\right\}.$$

注意，这类边值问题可解的条件为

$$\iint_G f(x,y)dxdy+\int_\Gamma h(s)ds=0.$$

(3) 第三边值问题

$$J[u]=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}dxdy$$

$$+\int_\Gamma \sigma u^2ds-2\int_\Gamma Kuds \tag{3-32}$$

$$M_0'=\left\{u(x,y)\,|\,u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\ \left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=K(s)\right\}.$$

还须指出，在第一边值问题所对应的变分问题中，需将边界条件(3-26)对泛函(3-29)的容许函数作为条件提出，而在第二与第三边值问题所对应的变分问题中，由于(3-27)、(3-28)是自然边界条件，它们就不必另作条件对所相应的泛函提出了。

习 题 7

§ 1

1．试求算子 L 是对称算子所应满足的边界条件。

(1) $L=-\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)$，　D_L：$\{u(x)\,|\,u(x)\in C^1[0,l]\}$；

(2) $L=\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2}{dx^2}\right]$，$D_L$：$\{u(x)\,|\,u(x)\in C^4[0,l]\}$，且 $p(x)\in C^2[0,l]$，并大于零。

2．设算子 $L=-\frac{d}{dx}$ 的定义域为 D_L：$\{y(x)\,|\,y(x)\in C^1[x_0,x_1],y(x_0)=y(x_1)=0\}$，试求 L 的共轭算子。

3．试将贝塞尔(Bessel)方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

化成自共轭方程。

4．设算子 $T=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 的定义域为 D_T：$\{u(x)\,|\,u(x)\in C^2(\bar{G}),u|_\Gamma=0\}$，$\Gamma$ 为 G 的边界，试求 T 的共轭算子。

5 设算子 $L=\nabla^2[p(x,\ y)\nabla^2]$，　其中　$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，$D_L$，$\{u(x,y)|u(x,y)\in C^4(\bar{G})\}$，且 $p(x,y)\subset C^2(\bar{G})$ 并大于零，试证 L 是对称算子的条件为

$$\oint_\Gamma\left[v\frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2u)-u\frac{\partial}{\partial n}(p\nabla^2v)+p\nabla^2v\frac{\partial u}{\partial n}-p\nabla^2u\frac{\partial v}{\partial n}\right]ds=0,$$

其中 $v\subset D_L$，$\frac{\partial}{\partial n}(\cdot)$ 为 G 的边界 Γ 的外法线方向导数。

§ 2

1 试将边值问题

$$\begin{cases}-\dfrac{d^2u}{dx^2}=f(x), & 0<x<l,\\ u(0)=u(l)=0,\end{cases}$$

化为变分问题。

2. 试将边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^4u}{dx^4}=f(x), & 0<x<l,\\ u(0)=u(l)=u''(0)=u''(l)=0,\end{cases}$$

化为变分问题。

3. 试证　边值问题

$$\begin{cases}(p_2u'')''-(p_1u')'+p_0u=f(x), a<x<b,\\ u(a)=u(b)=u''(a)=u''(b)=0\end{cases}$$

等价于泛函

$$J[u]=\int_a^b(p_2u''^2+p_1u'^2+p_0u^2-2fu)dx$$

的极小问题。

其中 p_2，p_2'，p_2'' 以及 $f(x)$ 都属于 $C[a,\ b]$；　$p_0(x)\geqslant0$，　$p_1(x)\geqslant0$，$p_2(x)>0$，　$x\in[a,b]$。

4. 试证　函数 $u(x)$ 是边值问题

$$\begin{cases}Lu\equiv\dfrac{d}{dx}(pu')+qu=f(x), & x_0<x<x_1\\ u(x_0)=0, \quad u'(x_1)=0\end{cases}$$

的解的充要条件是 $u(x)$ 满足方程

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+quv-fv\right)dx=0,$$

其中，$p'(x),q(x),f(x)$都属于 $C[x_0,x_1]$；$p(x)>0,q(x)\geqslant 0$. 算子 L的定义域 D_L 是由 $u\in C^2[x_0,x_1]$且满足边界条件 $u(x_0)=0$，$u'(x_1)=0$ 的函数所组成的线性集合，$v\in D_L$.

5．试证边值问题

$$\begin{cases}-(pu')'=f(x), & x_0<x<x_1,\\ u'(x_0)=K_1, \quad u'(x_1)=K_2\end{cases}$$

可解的条件为

$$\int_a^b f(x)dx+K_2p(x_1)-K_1p(x_0)=0,$$

其中 $p'(x)$，$f(x)$都属于 $C[x_0,x_1]$；$p(x)>0$，K_1,K_2 为常数.

§ 3

1．试证与边值问题

$$\begin{cases}Lu\equiv-\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(p\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+qy=f(x,y),(x,y)\in G,\\ \left[p\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0, \quad (\Gamma\text{为}G\text{的边界})\end{cases}$$

等价的变分问题为求泛函

$$J[u]=\int_G\int\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}dxdy+\int_\Gamma\sigma u^2ds$$

的极小值问题，算子 L的定义域

$$M_\sigma:\left\{u(x,y)\,|\,u(x,y)\in C^2(\bar G),\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=0\right\},$$

且其中 p'，p,q,f,σ 都属于 $C(\bar G)$；$p>0$，$q\geqslant 0$，$\sigma\geqslant 0(\sigma\not\equiv 0)$.

2．如将第 1 题中齐次边界条件改为非齐次边界条件

$$\left[p\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right]_\Gamma=K(s),$$

试证　与该边值问题等价的变分问题为求泛函

$$J[u]=\iint_G\left\{p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+qu^2-2fu\right\}dxdy$$
$$+\int_\Gamma \sigma u^2 ds-2\int_\Gamma Kuds$$

的极小值问题，其中 $K(s)$ 在 Γ 上连续，s 为 Γ 的弧长变量。

3. 设区域 G 的边界由 Γ_1 与 Γ_2 所组成，其中 Γ_1 为 Ox 轴上的线段 $a\leqslant x\leqslant b$，Γ_2 为 xOy 平面的上半平面内的曲线弧，且该弧两端点在 Ox 轴上与 Γ_1 的端点相衔接。

试证 (1) 与边值问题(Tricomi 问题)

$$\begin{cases}Lu\equiv-\left[\varphi(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=f(x,y), & (x,y)\in G\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_1}=0, \quad u|_{\Gamma_2}=0\end{cases}$$

等价的变分问题为求泛函

$$J[u]=\iint_G\left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]dxdy,\ u|_{\Gamma_2}=0$$

的极小值问题，算子 L 的定义域 D_L，$\left\{u(x,y)\ u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_1}=0,\right.$ $\left.u|_{\Gamma_2}=0\right\}$，且其中 $\varphi(y)$，$\omega(y)$ 都 $\in C[0,Y]$（Y 是 Γ_2 的纵坐标的最大值），且都大于零。

(2) 与边值问题

$$\begin{cases}Lu\equiv\varphi(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\\ \left.\omega(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_1}=g_1(s), \quad u|_{\Gamma_2}=g_2(s),\end{cases}$$

等价的变分问题为求泛函

$$\begin{cases}J[u]=\displaystyle\iint_G\left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\\ \qquad\qquad -2\displaystyle\int_a^b u(x)g_1(x)dx\\ u|_{\Gamma_2}=g_2(s).\end{cases}$$

的极小值问题，算子 L 的定义域 D_L：$\left\{u(x,y)\,|\,u(x,y)\in C^2(\bar{G}),\omega(y)\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_1}=\right.$

$g_1(s), u|_{\Gamma_2}=g_2(s)\Big\}$，$\varphi(y)$与$\omega(y)$的意义与(1)相同.

4. 试证 双调和方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u\equiv\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=f(x,y),\ (x,y)\in G\\ u|_\Gamma=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,(\Gamma\text{ 为}G\text{的边界})\end{cases}$$

等价的变分问题是求泛函

$$J[u]=\iint_G[(\Delta u)^2-2uf]dxdy$$

的极小值问题，其中算子

$$\Delta^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

的定义域为

$$M_{\Delta^2}=\left\{u(x,y)\,|\,u\subset C^4(\bar{G}),u|_\Gamma=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0\right\}.$$

第8章　变分问题的近似解法

在上一章中，建立了某些泛函的极小问题与微分方程边值问题的等价性定理．从这里看到，如果某些泛函的极小问题能解决的话，则与之相联系的微分方程边值问题的解就可以求得．又从前面几章还可以看到：对一个变分问题，(1) 求欧拉方程边值问题的有限解，极困难，故考虑直接由变分问题求其近似解；(2) 微分方程的边值问题，也可转化为变分问题，求相应的近似解．变分问题的近似解法正是这样提出来的．本章介绍求泛函极小问题常用的近似解法——里兹(Ritz)法和伽辽金(Галёркин)法，以及有限元法的思想．

§1　里　兹　法

1.1　里兹法的基本思想

设T是第7章中考虑过的微分算子(如L，$-\Delta$等)，我们已经证明，方程

$$Tu=f,\quad u\in D_T \tag{1-1}$$

的边值问题与泛函

$$J[u]=(Tu,u)-2(u,f) \tag{1-2}$$

的极小问题是等价的，其中D_T是算子T的定义域．现在，我们介绍里兹法求变分问题(1-2)的近似解的基本思想．先看下面的例子．

例 1　求泛函

$$J[y]=\int_0^1(xy'+y'^2)dx,$$

$$y(0)=0,\quad y(1)=0$$

的极值曲线.

解 设待求极值函数 $y(x)\in C^1[0,1]$. 根据维尔斯特拉斯定理*,连续函数可用代数多项式或三角多项式来一致逼近. 我们可以设待求近似解 y_n 为某一关于 x 的多项式. 又由于极值函数属于容许函数类,应当满足给定的边界条件. 故可取近似解

$$y_n=x(1-x)(C_1+C_2x+\cdots+C_nx^{n-1}).$$

为了方便起见,我们只取两项,即

$$y_2=x(1-x)(C_1+C_2x)=C_1(x-x^2)+C_2(x^2-x^3),$$

$$y_2'=C_1(1-2x)+C_2(2x-3x^2),$$

代入 $J[y]$,得

$$\begin{aligned}J[y_2]=&\int_0^1[C_1(x-2x^2)+C_2(2x^2-3x^3)+C_1^2(1-4x+4x^2)\\&+C_1C_2(4x-14x^2+12x^3)+C_2^2(4x^2-12x^3+9x^4)]dx\\=&\frac{1}{3}C_1^2+\frac{1}{3}C_1C_2+\frac{2}{15}C_2^2-\frac{1}{6}C_1-\frac{1}{12}C_2.\end{aligned}$$

这就是说 $J[y_2]$ 是 C_1,C_2 的函数,即

$$J[y_2]=\int_0^1(xy_2'+y_2'^2)dx\triangleq\Phi(C_1,C_2),$$

现在我们选择 C_1,C_2 使 $J[y_2]$ 取极值,即可由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial C_1}=\dfrac{2}{3}C_1+\dfrac{1}{3}C_2-\dfrac{1}{6}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial\Phi}{\partial C_2}=\dfrac{1}{3}C_1+\dfrac{4}{15}C_2-\dfrac{1}{12}=0,\end{cases}$$

---

* 维尔斯特拉斯定理:若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则对任给 $\varepsilon>0$,总存在一多项式 $P(x)$,使得 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon,(a\leqslant x\leqslant b)$.

若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数,则对任给 $\varepsilon>0$,总存在三角多项式 $T(x)$,使得 $|f(x)-T(x)|<\varepsilon,(-\infty<x<+\infty)$.

上述结论可推广到高维空间中去. 参看 Jackson 逼近论.

解出 $C_1=\frac{1}{4}, C_2=0$，得近似解

$$y_2=\frac{1}{4}(x-x^2).$$

另一方面，我们可以求出泛函的欧拉方程为

$$2y''+1=0,$$

它满足边界条件 $y(0)=0$，$y(1)=0$ 的解恰与上述近似解 y_2 一致，即 $y=\frac{1}{4}(x-x^2)$. 因为这个问题的欧拉方程满足边界条件的解是一个二次多项式. 这样用上述近似方法，只取含两个参数 C_1, C_2 的 x 的多项式，就得出最令人满意的结果.

下面我们对变分问题 (1-2) 来叙述里兹法求近似解的思想.

设点 P 的函数 $u=u^*(P)$ 是泛函

$$J[u]=(Tu, u)-2(u,f)$$

的精确解，即

$$J[u^*]=\min_{u\in D_T} J[u], \quad u^*\in D_T,$$

为了求得近似解，我们在 D_T 中选取依赖于参数 $C_1, C_2,\cdots, C_n$ 的函数子集

$$u_n=u_n(P, C_1, C_2, \cdots, C_n), \quad n=1,2,\cdots \tag{1-3}$$

将 u_n 代入(1-2)，则 $J[u_n]$ 是 n 个变数 $C_1, C_2,\cdots, C_n$ 的函数

$$J[u_n]\triangleq\Phi_n(C_1, C_2, \cdots, C_n). \tag{1-4}$$

现在选取 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 使(1-4)取极小值，为此，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 必须满足方程

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial C_i}=0, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1-5}$$

设 $\bar{C}_1, \bar{C}_2,\cdots,\bar{C}_n$ 是(1-5)的一组解. 将这组参数代入(1-3)，得(1-2)的近似解

$$\bar{u}_n = u_n(P, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_n).$$

为了得到逼近精确解 u^* 的函数列$\{\bar{u}_n\}$，就要考虑形如(1-3)的一系列函数集

D_T^1：$\{u_1(P, C_1)\}$，

D_T^2：$\{u_2(P, C_1, C_2)\}$，

……

D_T^n：$\{u_n(P, C_1, C_2, \cdots, C_n)\}$，

当参数 C_i 增多时，意味着函数集合在扩大，同时这些函数集合都是 D_T 的子集。于是

$$D_T^1 \subset D_T^2 \subset \cdots \subset D_T^n \subset \cdots \subset D_T.$$

因此，如果用 $\bar{u}_n$ 表示 D_T^n 中使 $J[u]$取极小的函数，就有

$$J[\bar{u}_1] \geqslant J[\bar{u}_2] \geqslant \cdots \geqslant J[\bar{u}_n] \geqslant \cdots \geqslant J[u^*].$$

这里，序列 $\{J[\bar{u}_n]\}$ 是单调下降且以 $J[u^*]$ 为下界的序列，其极限存在。设极限为 m，即

$$\lim_{n\to\infty} J[\bar{u}_n] = m.$$

按照上述步骤定出的函数序列 $\{\bar{u}_n\}$，称为泛函 $J[u]$ 的极小化序列。值得注意的是：极小化序列$\{\bar{u}_n\}$不一定收敛到真正的极值函数 u^*，m 也不一定等于 $J[u^*]$。因此，所构造的子集 D_T^n，应保证

(1) $\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n = u^*$，

(2) $m = J[u^*]$.

里兹方法的具体作法是：选取

$$u_n(P) = u_n(P, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$
$$= C_1\varphi_1(P) + C_2\varphi_2(P) + \cdots + C_n\varphi_n(P), \qquad (1\text{-}6)$$

其中

$$\{\varphi_i(P)\} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

称为坐标函数系，它满足下列条件

(1) 它是 D_T 的子集，并满足相应的边界条件；

(2) 任意有限个函数都是线性无关的；

(3) 它具有完备性.

完备性的意思是：若 $u(P)=u(x)$，$\varphi_i(P)=\varphi_i(x)$，对于任何 $u\in D_T$ 和任给 $\varepsilon>0$，总可找到坐标函数的某个线性组合

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(x),$$

使得

$$\left|u-\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i\right|<\varepsilon,$$

$$\left|u'-\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i'\right|<\varepsilon.$$

如果 $u=u(P)$是多元函数，则 u' 应是偏导数，例如：$u=u(x,\ y)$，$\varphi_i(P)=\varphi_i(x,\ y)$.

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n}C_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}-\sum_{i=1}^{n}C_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right|<\varepsilon.$$

完备性的假定将保证极小化序列$\left\{\sum_{i=1}^{n}\bar{C}_i\varphi_i(P)\right\}$满足上述条件(1)、(2)的要求，于是有

$$\left|J[u^*]-J\left[\sum_{i=1}^{n}\bar{C}_i\varphi_i\right]\right|<\varepsilon.$$

为了求出 $\bar{u}_n$，我们将 $u_n=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i$ 代入(1-2)，得

$$J[u_n]=\left(T\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i,\ \sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i,f\right)$$

$$\triangleq\Phi_n(C_1,C_2,\cdots,C_n),$$

令

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\Phi_n=0,\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\Phi_n=\frac{\partial}{\partial C_i}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}C_iC_j(T\varphi_i,\varphi_j)-2\sum_{i=1}^{n}C_i(\varphi_i,f)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}C_j(T\varphi_i,\varphi_j)+\sum_{j=1}^{n}C_j(T\varphi_j,\varphi_i)-2(\varphi_i,f)$$

$$=2\left\{\sum_{j=1}^{n}C_j(T\varphi_j,\varphi_i)-(\varphi_i,f)\right\}.$$

因考虑的 $J[u]$ 是二次泛函，且 u_n 线性地依赖于 $C_1,\ C_2,\ \cdots,C_n$，故得线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{n}C_j(T\varphi_j,\varphi_i)=(\varphi_i,f),(i=1,2,\cdots,n).\qquad(1\text{-}7)$$

由于算子 T 的对称性，上式也可写为

$$\sum_{j=1}^{n}C_j(T\varphi_i,\varphi_j)=(\varphi_i,f),(i=1,2,\cdots,n).\qquad(1\text{-}8)$$

也就是说，线性代数方程组（1-7）的系数矩阵关于对角线是对称的。由坐标函数系$\{\varphi_i\}$的性质(2)，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 线性无关，故方程组(1-7)存在唯一解。

事实上，只要证明(1-7)所对应的齐次方程

$$\sum_{j=1}^{n}C_j(T\varphi_j,\varphi_i)=0,\ (i=1,2\cdots,n)$$

只有零解.

用反证法，若存在一组不全为零的数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，满足

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(T\varphi_j,\varphi_i)=0,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

用 C_i 乘上式，并对 i 求和

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\sum_{j=1}^{n} C_j(T\varphi_j,\ \varphi_i)=0$$

或

$$\left(T\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j,\ \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i\right)=0.$$

由于 T 是正算子，故

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i=0.$$

这表示 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 线性相关，与假设矛盾．故方程组(1-7)存在唯一解.

将(1-7)的解 $\bar{C}_1,\bar{C}_2,\cdots,\bar{C}_n$ 代入(1-6)，便求得 (1-2) 的近似解

$$\bar{u}_n=\sum_{i=1}^{n}\bar{C}_i\varphi_i. \tag{1-9}$$

1.2 二阶自共轭微分方程边值问题的里兹法

求解二阶自共轭微分方程边值问题

$$\begin{cases} Ly=-\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x),x\in(0,l) & (1\text{-}10)\\ y(0)=0,\ y(l)=0 & (1\text{-}11)\end{cases}$$

是与求函数 $y(x)\in D_L$ 使泛函

$$J[y]=\int_0^l (py'^2+qy^2-2yf)dx \tag{1-12}$$

取极小值的变分问题等价的.

我们取变分问题(1-12)的近似解为

$$y_n=\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x).$$

根据边界条件(1-11),我们常选

$$\varphi_i(x)=\sin\frac{i\pi}{l}x, \quad i=1,2,\cdots \tag{1-13}$$

或

$$\varphi_i(x)=(l-x)x^i, \quad i=1,2,\cdots \tag{1-14}$$

为坐标函数系.

容易看到,(1-13)、(1-14)分别都满足坐标函数系的条件(1)与(2). 至于条件(3)的成立,我们可以从维尔斯特拉斯定理得到. 然后从(1-7)式求出 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$,便得到所求近似解.

例 2 用里兹法求

$$\begin{cases} Ly=-y''+x^2y=x, \\ y(0)=0, \quad y(1)=0 \end{cases}$$

的近似解.

解 等价的泛函为

$$J[y]=\int_0^1 (y'^2+x^2y^2-2xy)dx,$$

取坐标函数系

$$\varphi_i(x)=(1-x)x^i, \quad i=1,2,\cdots.$$

我们构造形如

$$y_n=\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i=x(1-x)(C_1+C_2x+\cdots+C_ix^{i-1}+\cdots+C_nx^{n-1})$$

的近似解,由方程组

$$\begin{cases}(L\varphi_1,\varphi_1)C_1+(L\varphi_1,\varphi_2)C_2+\cdots+(L\varphi_1,\varphi_n)C_n=(\varphi_1,f),\\(L\varphi_2,\varphi_1)C_1+(L\varphi_2,\varphi_2)C_2+\cdots+(L\varphi_2,\varphi_n)C_n=(\varphi_2,f),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(L\varphi_n,\varphi_1)C_1+(L\varphi_n,\varphi_2)C_2+\cdots+(L\varphi_n,\varphi_n)C_n=(\varphi_n,f).\end{cases}$$

及 $Ly=-y''-x^2y$，于是

$$(L\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^1\{-[x^i(1-x)]''+x^2\cdot x^i(1-x)\}x^j(1-x)dx$$

$$=\frac{2ij}{(i+j-1)(i+j)(i+j+1)}+\frac{2}{(i+j+3)(i+j+4)(i+j+5)},$$

$$(\varphi_i,f)=\int_0^1 x\cdot x^i(1-x)dx=\frac{1}{(i+2)(i+3)},$$

在计算中，我们利用了公式

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{n!m!}{(m+n+1)!}.$$

如取 $n=1$，得

$$\frac{12}{35}C_1=\frac{1}{12},\quad 或\quad C_1=\frac{35}{144}.$$

于是，第一近似解

$$y_1=\frac{35}{144}x(1-x).$$

如取 $n=2$，得

$$\begin{cases}\frac{12}{35}C_1+\frac{29}{168}C_2=\frac{1}{12},\\\frac{29}{168}C_1+\frac{173}{1260}C_2=\frac{1}{20}.\end{cases}$$

解得 $C_1=0.16261$，$C_2=0.15972$. 于是，第二近似解

$$y_2=x(1-x)(0.16261+0.15972x).$$

为了大致看出所求得的近似解的精确度，我们比较 y_1与y_2 在

点 $x=\frac{1}{2}$ 处的值

$$\left|y_2\left(\frac{1}{2}\right)-y_1\left(\frac{1}{2}\right)\right|=0.000148<0.001,$$

可认为 y_2 的误差比较小了.

例 3 用里兹法求解边值问题

$$\begin{cases}Ly\equiv -y''-\cos x,\\ y(0)=0,y(\pi)=0.\end{cases}$$

解 此问题的精确解为 $y=\cos x+\frac{2}{\pi}x-1$. 现在用里兹法求近似解,相应的泛函为

$$J[y]=\int_0^{\pi}(y'^2-2y\cos x)dx,$$

取坐标函数系为

$$\varphi_i(x)=\sin ix,\quad i=1,2,\cdots,$$

我们注意到给定的微分算子 L 具有常系数，边界条件关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称,以及方程右边函数的图形也关于这点对称. 因此,在坐标函数系中只要选取它们的图形关于 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称的函数，亦即

$$\varphi_i(x)=\sin 2ix,\ i=1,2,\cdots$$

我们构造形如

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i=C_1\sin 2x+C_2\sin 4x+\cdots+C_n\sin 2nx$$

的近似解.

由方程组

$$\begin{cases}(L\varphi_1,\varphi_1)C_1+(L\varphi_1,\varphi_2)C_2+\cdots+(L\varphi_1,\varphi_n)C_n=(\varphi_1,f),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (L\varphi_n,\varphi_1)C_1+(L\varphi_n,\varphi_2)C_2+\cdots+(L\varphi_n,\varphi_n)C_n=(\varphi_n,f).\end{cases}$$

我们有 $Ly=-y''$，并注意到所取坐标函数系$\{\sin 2ix\}$ 在 $[0,\pi]$ 上是正交函数系，即

$$(L\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^{\pi}4i^2\sin 2ix\sin 2jx\,dx=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq j,\\ 2\pi i^2, & \text{当 } i=j.\end{cases}$$

$$(\varphi_i,f)=\int_0^{\pi}\cos x\sin 2ix\,dx=\frac{4i}{4i^2-1}.$$

于是上述方程组有形式

$$\begin{cases}2\pi\cdot 1^2\cdot C_1+0\cdot C_2+\cdots+0\cdot C_n=\dfrac{4}{4\cdot 1^2-1},\\ 0\cdot C_1+2\pi\cdot 2^2\cdot C_2+\cdots+0\cdot C_n=\dfrac{4\cdot 2}{4\cdot 2^2-1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdot C_1+0\cdot C_2+\cdots+2\pi\cdot n^2\cdot C_n=\dfrac{4n}{4n^2-1}.\end{cases}$$

因此，得

$$C_i=\frac{2}{\pi i(4i^2-1)},$$

$$y_n=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin 2ix}{i(4i^2-1)}.$$

事实上，这个解收敛于精确解 $y(x)=\cos x+\dfrac{2}{\pi}x-1$。如取近似解 y_3，其误差为 0.035。

从以上例子看到，用里兹法求变分问题近似解时，关键在取好坐标函数系，又如

(1) 若边界条件为

$$y'(0)=y'(l)=0$$

时，可取坐标函数系

$$\varphi_i(x)=\cos\frac{i\pi}{l}x,\ (i=0,1,2,\cdots),$$

或

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=2x^3-3lx^2,$$
$$\varphi_i(x)=(l-x)^2x^i\quad(i=2,3,\cdots).$$

(2) 若边界条件为

$$y(0)=0,\quad y'(l)=0$$

时，可取坐标函数系

$$\varphi_i(x)=\sin\frac{(2i-1)\pi}{2l}x,\ (i=1,2,\cdots),$$

或 $$\varphi_i(x)=(l-x)^2x^i,\ (i=1,2,\cdots).$$

(3) 若边界条件为

$$y'(0)+k_0y(0)=0,\ y'(l)+k_1y(l)=0$$

时，可取坐标函数系

$$\varphi_0(x)=x^2\left(x-l-\frac{l}{2+k_1l}\right),\varphi_1(x)=(l-x)^2\left(x+\frac{l}{2+k_0l}\right),$$
$$\varphi_i(x)=(l-x)^2x^i,\ (i=2,3,\cdots).$$

又若边界条件是非齐次时，例如

$$y(x_0)=a_0,\ y(x_1)=a_1,$$

其中 a_0,a_1 至少有一个不等于零，我们可令

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(x)+\psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 满足给定的边界条件

$$\psi(x_0)=a_0,\ \psi(x_1)=a_1,$$

$\varphi_i(x)$ 满足齐次边界条件，即

$$\varphi_i(x_0)=0,\quad \varphi_i(x_1)=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这样选取，对于任何 C_i，函数 $y_n(x)$ 满足给定的边界条件，至于函

数 $\psi(x)$，比如说，我们可选为线性函数

$$\psi(x)=\frac{a_1-a_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+a_0.$$

1.3 二阶自共轭偏微分方程边值问题的里兹法

泊松方程第一边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),\ (x,y)\in G\\ u|_\Gamma=0,\ (\Gamma\text{ 为 }G\text{ 的边界})\end{cases}$$

与在算子$(-\Delta)$的定义域 M 内，求泛函

$$J[u]=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2uf\right]dxdy$$

的极小值问题是等价的.

设近似解

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(x,y),\tag{1-15}$$

其中坐标函数 $\varphi_i(x,y)$，常选取它为满足边界条件的三角函数，或关于 $x^k y^s$(其中 $k,s=0,1,2,\cdots$)的多项式. 当选取关于 $x^k y^s$的多项式时，先要选取一个具备下列条件的函数 $\omega(x,y)$：

(1) $\omega(x,y)>0$, $(x,y)\in G$; $\omega|_\Gamma=0$;

(2) 在 $G+\Gamma$ 上连续;

(3) 在 G 内有连续的偏导数 $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$. 然后构造坐标函数系$\{\varphi_i(x,y)\}$;$(i=1,2,\cdots)$.

$$\varphi_0=\omega,\ \varphi_1=\omega x,\ \varphi_2=\omega y,\ \varphi_3=\omega x^2,\ \varphi_4=\omega xy,$$
$$\varphi_5=\omega y^2,\cdots,\varphi_i=\omega x^k y^s,\cdots\tag{1-16}$$

其中 k,s 为某正整数或零.

一、对于边界条件 $u|_\Gamma=0$

(1) 当 $G+\Gamma$ 为椭圆形域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 时，可取

$$\omega(x,y)=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

(2) 当 $G+\Gamma$ 为矩形内开有圆孔的区域：

$$x^2+y^2\geqslant R^2,\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b\ \left(R<\min\left\{\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right\}\right)$$

时，可取

$$\omega(x,y)=(a^2-x^2)(b^2-y^2)(x^2-y^2-R^2).$$

(3) 当 $G+\Gamma$ 为直线段

$$a_kx+b_ky+c_k=0,\ (k=1,2,\cdots,m,m\geqslant 3)$$

所围凸多边形区域时，可取

$$\omega(x,y)=\pm(a_1x-b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\cdots\cdot(a_mx+b_my+c_m).$$

(4) 当 $G+\Gamma$ 为矩形域：$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$ 时，可取

$$\omega(x,y)=(a-x)(b-y)xy$$

或取

$$\varphi_{ij}(x,y)=\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b},\ (i,j=1,2,\cdots).$$

(5) 当 $G+\Gamma$ 为由顶点 $(0,0),(a,0),(a+k,b),(k,b)$ 所围平行四边形域时，可取

$$\varphi_{ij}(x,y)=\sin\frac{i\pi\left(x-\frac{k}{b}y\right)}{a}\sin\frac{j\pi y}{b},$$

$$(i,j=1,2,\cdots).$$

二、对于边界条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0$

当 $G+\Gamma$ 为矩形域：$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$ 时，可取

$$\varphi_{ij}(x,y)=\cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b},\quad (i,j=0,1,2,\cdots).$$

若椭圆型方程不含 u 的项，则 i,j 都从 1 开始取值.

三、在矩形域：$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b$ 上，边界条件为

当 $x=0$，$x=a$ 时，$u=0$，

当 $y=0$，$y=b$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$，

可取

$$\varphi_{ij}(x,y)=\sin\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b},\quad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots \\ j=0,1,2,\cdots \end{pmatrix}.$$

当坐标函数系(1-16)取好后，然后由方程组

$$\begin{cases}(-\Delta\varphi_1,\varphi_1)C_1+(-\Delta\varphi_1,\varphi_2)C_2+\cdots+(-\Delta\varphi_1,\varphi_n)C_n=(\varphi_1,f),\\ (-\Delta\varphi_2,\varphi_1)C_1+(-\Delta\varphi_2,\varphi_2)C_2+\cdots+(-\Delta\varphi_2,\varphi_n)C_n=(\varphi_2,f),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (-\Delta\varphi_n,\varphi_1)C_1+(-\Delta\varphi_n,\varphi_2)C_2+\cdots+(-\Delta\varphi_n,\varphi_n)C_n=(\varphi_n,f)\end{cases}$$

求得 $C_1,C_2,\cdots,C_n$.

其中 $-\Delta u=-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$. 并注意到边界条件，例如，当 $G+\Gamma$ 为矩形域 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b$ 时，

$$(-\Delta\varphi_i,\varphi_j)=\iint_G(-\Delta\varphi_i)\varphi_j\,dx\,dy$$

$$=\int_0^a\int_0^b-\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\right)\varphi_j\,dx\,dy$$

$$=\int_0^b\left[\int_0^a-\varphi_j\,d\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)\right]dy+\int_0^a\left[\int_0^b-\varphi_j\,d\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)\right]dx$$

$$=\int_0^b\left\{\left[-\varphi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right]_0^a+\int_0^a\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}dx\right\}dy$$

$$+\int_0^a\left\{\left[-\varphi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right]_0^b+\int_0^b\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}dy\right\}dx$$

$$=\iint_G\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right)dxdy.$$

当坐标函数系取为三角函数系$\{\varphi_{ij}\}$时，确定C_{ij}的方程组与上面完全相同.

例 4 在区域$G+\Gamma$：$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b$上，用里兹法解泊松方程第一边值问题.

$$\begin{cases}\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=1, & (x,y)\in G,\\ u|_\Gamma=0.\end{cases}$$

解 取坐标函数系

$$\varphi_{11}=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\quad \varphi_{12}=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$

$$\varphi_{21}=\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\quad \varphi_{22}=\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

求如下近似解

$$u_{22}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{2}C_{ij}\varphi_{ij}=C_{11}\varphi_{11}+C_{12}\varphi_{12}+C_{21}\varphi_{21}+C_{22}\varphi_{22}.$$

由方程组

$$\sum_{m,n=1}^{2}(-\Delta\varphi_{ij},\varphi_{mn})C_{mn}=(\varphi_{ij},f),\quad i,j=1,2,$$

其中

$$(-\Delta\varphi_{ij},\varphi_{mn})=\iint_G\left(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\int_0^a\int_0^b\left(\frac{i\pi}{a}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right.$$

$$+\frac{j\pi}{b}\frac{n\pi}{b}\sin\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\Big)dxdy$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi^2ab}{4}\left(\dfrac{i^2}{a^2}+\dfrac{j^2}{b^2}\right)+\dfrac{\pi^2}{4ab}(b^2i^2+a^2j^2), & \text{当 } m=i,n=j\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\tag{1-17}$$

计算时利用了公式

$$\int_0^a\int_0^b\cos\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

$$=\begin{cases}\dfrac{ab}{4}, & \text{当 } m=i,n=j,\\ 0, & \text{其它,}\end{cases}$$

$$\int_0^a\int_0^b\sin\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

$$=\begin{cases}\dfrac{ab}{4}, & \text{当 } m=i,n=j,\\ 0, & \text{其它,}\end{cases}$$

以及

$$(\varphi_{ij},f)=\int_0^a\int_0^b\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}dxdy$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4ab}{ij\pi^2}, & \text{当 } i,j \text{ 都为奇数,}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\tag{1-18}$$

得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\pi^2(a^2+b^2)}{4ab}C_{11}=\dfrac{4ab}{\pi^2},\\ \dfrac{\pi^2(4a^2+b^2)}{4ab}C_{12}=0,\\ \dfrac{\pi^2(a^2+4b^2)}{4ab}C_{21}=0,\\ \dfrac{\pi^2(a^2+b^2)}{ab}C_{22}=0,\end{cases}$$

解得 $C_{11}=\dfrac{16\,a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)}$，$C_{12}=0$，$C_{21}=0$，$C_{22}=0$。

于是

$$u_{22}(x,y)=\frac{16\,a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

若取近似解

$$u_{33}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}\varphi_{ij},$$

其中，$\varphi_{ij}=\sin\dfrac{i\pi x}{a}\sin\dfrac{j\pi y}{b}$，$i,j=1,2,3$。

按公式(1-17)、(1-18)，得

$$u_{33}(x,y)=\frac{16\,a^2b^2}{\pi^4}\left[\frac{1}{a^2+b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right.$$

$$+\frac{1}{3(9\,a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}+\frac{1}{3(a^2+9\,b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\left.+\frac{1}{81(a^2+b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\right].$$

例 5 若在区域 $G+\Gamma$，$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上，

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),(x,y)\in G,\\ u|_\Gamma=0,\end{cases}$$

解 假定函数 $f(x,y)$ 在 G 中可展开为一致收敛的二重级数

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}.$$

与边值问题等价的变分问题其泛函为

$$J[u]=\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2uf(x,y)\right]dxdy,$$

取坐标函数系

$$\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b},\quad (i,j=1,2,\cdots)$$

求如下近似解

$$u_{nm}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}.$$

于是

$$J[u_{nm}]=\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial u_{nm}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{nm}}{\partial y}\right)^2-2\,u_{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\right]dxdy$$

$$=\frac{\pi^2 ab}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)\alpha_{ij}^2-\frac{ab}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{ij}$$

$$\triangleq\Phi(\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{nm}),$$

其中在计算时，利用了公式

$$\iint_a\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

$$=\begin{cases}\dfrac{ab}{4}, & \text{当 } m=i,n=j \text{ 时},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

我们由

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_{ij}}=0,\quad \begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,n\\ j=1,2,\cdots,m\end{pmatrix}.$$

于是，得

$$\alpha_{ij}\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)\pi^2-\beta_{ij}=0,\quad \begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,n\\ j=1,2,\cdots,m\end{pmatrix}.$$

$$a_{ij}=\frac{\beta_{ij}}{\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)}.$$

所求近似解为

$$u_{nm}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_{ij}}{\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}.$$

当 $n\to\infty$，$m\to\infty$ 时，得精确解

$$u=\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta_{ij}}{\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}.$$

例 6 求解诺伊曼问题

$$\begin{cases}-\Delta u\equiv-\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=-y, & (x,y)\in G,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0, & (\Gamma\text{ 为 }G\text{ 的边界}),\end{cases}$$

其中区域 $G+\Gamma$ 为矩形域：$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$.

解 由于

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-b}^{b}-y\,dy=0$$

满足诺伊曼问题有解的必要条件. 相应的泛函为

$$J[u]=\iint_{G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2uy\right]dx\,dy.$$

我们把近似解取成关于 x^ky^s 的多项式，k，s 为非负整数. 由于区域的对称性和方程自由项的形式，解应是 y 的奇函数和 x 的偶函数，因此

$$u_n(x,y)=C_1+C_2y+C_3x^2+C_4y^2+C_5x^2y+C_6x^4+C_7x^4y+C_8x^2y^2+C_9y^3+\cdots+C_nx^ky^s.$$

今取 $n=9$，为了使它满足边界条件，必须

$$\left.\frac{\partial u_9}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = \pm(C_3\cdot 2a + C_5\cdot 2ay + C_6\cdot 1a^3 + C_7\cdot 4a^3y + C_8\cdot 2ay^3) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u_9}{\partial y}\right|_{y=\pm b} = \pm(C_2 + C_4\cdot 3b^2 + C_5x^2 + C_7x^4 + C_8\cdot 3b^2x^2 + C_9\cdot 5b^4) = 0,$$

即

$$\begin{cases} 2aC_3 + 4a^3C_6 + (2aC_5 + 4a^3C_7)y + 2aC_8y^3 = 0, \\ C_2 + 3b^2C_4 + 5b^4C_9 + (C_5 + 3b^2C_8)x^2 + C_7x^4 = 0. \end{cases}$$

令 x, y 的各次幂的系数等于零，得

$$\begin{cases} C_8 = C_5 = C_7 = 0, \\ C_3 = -2a^2C_6, \\ C_2 = -3b^2C_4 - 5b^4C_9. \end{cases}$$

因为解的确定，可相差一常数，所以取 $C_1 = 0$. 因此，所求近似解的形式为

$$u_9(x,y) = C_6(x^4 - 2a^2x^2) + C_4(y^3 - 3b^2y) + C_9(y^5 - 5b^4y).$$

令

$$\varphi_1 = x^4 - 2a^2x^2,\ \varphi_2 = y^3 - 3b^2y,\ \varphi_3 = y^5 - 5b^4y.$$

由

$$\begin{cases} (-\Delta\varphi_1, \varphi_1)C_6 + (-\Delta\varphi_1, \varphi_2)C_4 + (-\Delta\varphi_1, \varphi_3)C_9 = (\varphi_1, -y), \\ (-\Delta\varphi_2, \varphi_1)C_6 + (-\Delta\varphi_2, \varphi_2)C_4 + (-\Delta\varphi_2, \varphi_3)C_9 = (\varphi_2, -y), \\ (-\Delta\varphi_3, \varphi_1)C_6 + (-\Delta\varphi_3, \varphi_2)C_4 + (-\Delta\varphi_3, \varphi_3)C_9 = (\varphi_3, -y). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{512}{105}ba^7C_6 + 0\cdot C_4 + 0\cdot C_9 = 0, \\ 0\cdot C_6 + \frac{6}{5}C_4 + \frac{16}{7}b^2C_9 = \frac{1}{5}, \\ 0\cdot C_6 + 16C_4 + 5b^2C_9 = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

解得 $C_6 = 0$, $C_4 = \frac{1}{6}$, $C_9 = 0$.

所求近似解为

$$u_0(x,y)=\frac{1}{6}(y^3-3b^2y).$$

容易验证，所得解实际上是精确解.

若边界条件为非齐次的情形，例如

$$u|_\Gamma=g(x,y),$$

其中 $g(x,y)$为多项式，Γ 的方程为 $B(x,y)=0$. 这时，我们可取近似解为

$$u_n=g(x,y)+B(x,y)(C_1+C_2x+C_3y+\cdots+C_nx^ky^s),$$

其中 k,s 为某非负整数.

§2 伽辽金法

设方程

$$Tu=f,\ u\in D_T, \tag{2-1}$$

其中 T 是微分算子，D_T 是算子 T 的定义域.

又设坐标函数系为

$$\{\varphi_i(P)\},\ i=1,2,\cdots \tag{2-2}$$

其中每一个函数都满足(2-1)中相应的边界条件.

取(2-1)的近似解为

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(P), \tag{2-3}$$

其中 C_i 是待定常数.

若 u 是方程(2-1)的边值问题的精确解，则

$$Tu-f\equiv 0.$$

在 Tu 与 f 是连续函数的条件下，就等价于

$$(Tu-f,\varphi_i)=0,\quad i=1,2,\cdots \tag{2-4}$$

(2-4)式表示函数 $Tu-f$ 与函数系 (2-2) 中一切函数 $\varphi_i(P)$成正交. 但在近似解(2-3)中，只有 n 个待定参数 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$.

所以只需 n 个正交条件

$$\left(T\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i\right)-f,\varphi_i\right)=0,\quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2\text{-}5)$$

设算子 T 是线性的，则有

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(T\varphi_i,\varphi_i)=(\varphi_i,f),\quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2\text{-}6)$$

或

$$\begin{cases}(T\varphi_1,\varphi_1)C_1+(T\varphi_2,\varphi_1)C_2+\cdots+(T\varphi_n,\varphi_1)C_n=(\varphi_1,f),\\ (T\varphi_1,\varphi_2)C_1+(T\varphi_2,\varphi_2)C_2+\cdots+(T\varphi_n,\varphi_2)C_n=(\varphi_2,f),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (T\varphi_1,\varphi_n)C_1+(T\varphi_2,\varphi_n)C_2+\cdots+(T\varphi_n,\varphi_n)C_n=(\varphi_n,f).\end{cases}$$

解线性代数方程组(2-6) 可决定 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$，将 C_i 代入(2-3)，即得所求近似解．这种方法称为伽辽金法．方程组(2-5)称伽辽金方程组．

从(2-5)看到，当 T 是正算子(当然也是对称算子)条件下，伽辽金方程组与里兹法得到的方程组是一致的．然而伽辽金法应用的范围，比里兹法要广泛．由(2-5)式所描述的伽辽金法，事先并不需要对算子 T 加许多限制性条件，它并不需是正算子，也不需是对称算子，甚至不需是线性算子．也就是说，伽辽金法能适用子非常广泛的一类微分算子的情形．

同时我们还看到，里兹法是从微分方程所对应的泛函出发，而伽辽金法是直接从微分方程出发，它与变分问题毫无联系．但二者所用坐标函数系构造近似解的步骤却是相同的．当然里兹法所选取的坐标函数系，在所满足的边界条件中，不必考虑自然边界条件．而伽辽金法，则还需满足自然边界条件．

(2-4)式的力学意义是表示虚功，即一个平衡系统的力 $Tu-f$ (不必具有力的量纲)，对任意假想的位移 $\eta=\varphi_i$ (虚位移．当然，

也不必具有位移的量纲)所作功等于零. 因此,伽辽金法的力学背景,即虚功原理,而里兹法的力学背景,即最小势能原理. 虚功原理比最小势能原理更具一般性,不仅适用于势量场的方程,而且也适用于一些非势量场的方程.

例 1 用伽辽金法求边值问题

$$\begin{cases} Ly \equiv [(x+2)y'']'' + y = 3x, \\ y''(0)=0, y'''(0)=0, \\ y(1)=0, y'(1)=0, \end{cases}$$

的近似解.

解 为满足边界条件 $y''(0)=0$, $y'''(0)=0$, 我们假定坐标函数

$$\varphi_1'' = 12x^2.$$

积分两次并利用边界条件 $y'(1)=0, y(1)=0$,可得

$$\varphi_1 = x^4 - 4x - 3.$$

求第一近似解 $y_1 = C_1\varphi_1$,由方程

$$(L\varphi_1, \varphi_1)C_1 = (\varphi_1, f),$$

即 $$C_1\int_0^1 \{[(x+2)\varphi_1'']'' + \varphi_1\}\varphi_1 dx = \int_0^1 3x\varphi_1 dx.$$

于是 $83.9111\,C_1 = 1$, 或 $C_1 = 0.011917$.

所求第一近似解为

$$y_1 = 0.011917(x^4 - 4x + 3).$$

为了求第二近似解 $y_2 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$,我们设

$$\varphi_2'' = 12x^2 + 20x^3,$$

积分两次并利用边界条件 $y'(1)=0, y(1)=0$,可得

$$\varphi_2 = x^5 + x^4 - 9x - 7.$$

由方程组 $$\begin{cases} (L\varphi_1, \varphi_1)C_1 + (L\varphi_1, \varphi_2)C_2 = (\varphi_1, f), \\ (L\varphi_2, \varphi_1)C_1 + (L\varphi_2, \varphi_2)C_2 = (\varphi_2, f), \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} 83.9111\,C_1+201.3587\,C_2=1, \\ 201.3587\,C_1+487.4353\,C_2=2.4286. \end{cases}$$

于是
$$C_1=0.004452,\quad C_2=0.006821.$$

所求第二近似解为
$$y_2=0.004452(x^4-4x+3)+0.006821\,(x^5+x^4-9x+7).$$

比较 y_1 与 y_2 在点 $x=\frac{1}{2}$ 处的值，其误差为
$$\left|y_2\left(\frac{1}{2}\right)-y_1\left(\frac{1}{2}\right)\right|=0.0098.$$

例 2 设区域 $G+\Gamma$ 为圆环：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，用伽辽金法求解
$$\begin{cases} \Delta^2 u\equiv\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=1,(x,y)\in G, \\ u|_\Gamma=0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0. \end{cases}$$

解 取 $\omega(x,y)=(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)$，坐标函数系为
$$\omega^2,\ x\omega^2,\ y\omega^2,\ x^2\omega^2,\ xy\omega^2,\ y^2\omega^2,\ \cdots$$

注意到区域 G、算子 Δ^2 和函数 $f(x,y)\equiv 1$ 关于两个坐标轴对称，因此在坐标函数系中，只取含 x，y 的偶次幂项．今考虑近似解
$$u_2=\omega^2(x,y)[C_1+C_2(x^2+y^2)],$$

利用极坐标 (r,θ)，于是
$$\omega(r,\theta)=(r^2-1)(4-r^2),$$
$$\varphi_1(r,\theta)=\omega^2=(r^2-1)^2(4-r^2)^2,$$
$$\varphi_2(r,\theta)=r^2\omega^2=r^2(r^2-1)^2(4-r^2)^2,$$

因此
$$u_2=C_1\varphi_1+C_2\varphi_2.$$

代入方程组(2-6)，得
$$\begin{cases} (\Delta^2\varphi_1,\varphi_1)C_1+(\Delta^2\varphi_1,\varphi_2)C_2=(\varphi_1,f), \\ (\Delta^2\varphi_2,\varphi_1)C_1+(\Delta^2\varphi_2,\varphi_2)C_2=(\varphi_2,f), \end{cases}$$

由于 φ_1,φ_2 仅依赖于变量 r，于是

$$\Delta^2\varphi_1=\Delta(\Delta\varphi_1)=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{dr}\right)$$

$$=\frac{d^4\varphi_1}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\varphi_1}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\varphi_1}{dr}$$

$$=2304\,r^4-5760\,r^2+2112,$$

同理可得

$$\Delta^2\varphi_2=6400\,r^6-23040\,r^4+19008\,r^2-2560.$$

于是

$$(\Delta^2\varphi_1,\varphi_1)=\int_1^2\int_0^{2\pi}(2304\,r^4-5760\,r^2+2112)(r^2-1)^2\cdot(4-r^2)^2r\,dr\,d\theta$$

$$=72538.95,$$

$$(\Delta^2\varphi_1,\varphi_2)=228434.71,$$

$$(\Delta^2\varphi_2,\varphi_2)=805459.24,$$

以及

$$(\varphi_1,f)=\int_1^2\int_0^{2\pi}1\cdot(r^2-1)^2(4-r^2)^2r\,dr\,d\theta=25.447,$$

$$(\varphi_2,f)=63.617,$$

得方程组

$$\begin{cases}72588.95\,C_1+228434.71\,C_2=25.447,\\228434.71\,C_1+805459.24\,C_2=63.617,\end{cases}$$

解得

$$C_1=0.0009485,\qquad C_2=-0.0001900,$$

所求近似解为

$$u_2=(0.009485-0.0001900\,r^2)(r^2-1)^2(4-r^2)^2.$$

为了估计这个解的近似程度，我们注意到本题中，方程 $\Delta^2u=1$ 可化为欧拉方程

$$\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}=1,$$

它的通解为

$$u=(C_1+C_2r^2)\ln r-C_3+C_4r^2+\frac{r^4}{64},$$

代入边界条件

$$u\Big|_{r=1}=0,\ u\Big|_{r=2}=0;\ \frac{du}{dr}\Big|_{r=1}=0,\ \frac{du}{dr}\Big|_{r=2}=0$$

可得 $C_1=-0.266104,\quad C_2=-0.279217,$

$C_3=-0.257036,\quad C_4=0.241411.$

于是

$$u=(-0.266104-0.279217\,r^2)\ln r$$
$$-0.257036+0.241411\,r^2+\frac{r^4}{64}.$$

我们可求得近似解 u_2 与精确解 u 在 $r=1.5$ 处的误差为

$$|u(1.5)-u_2(1.5)|=0.002612-0.002493=0.000119.$$

例 3 设 $G+\Gamma$ 为圆域：$x^2+y^2\leqslant a^2$，及拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases} +\lambda u=0,\ (x,y)\in G, & (2\text{-}7)\\ u|_{\Gamma}=0. & (2\text{-}8)\end{cases}$$

若对于参数 λ 的正实数值，使上述边值问题有非零解，我们称 λ 为特征值，对应于 λ 的解 u 称为特征函数，试用伽辽金法求近似的 λ 与 u.

解 方程(2-7)可写成

$$Lu\equiv-\Delta u=\lambda u,$$

将 λu 看成 f，并令

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i,$$

由方程组(2-5)，得

$$\iint_G(-\Delta u_n-\lambda u_n)\varphi_j\,dx\,dy=0,\ j=1,2,\cdots,n. \qquad (2\text{-}9)$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(L\varphi_i-\lambda\varphi_i,\varphi_j)=0,\ j=1,2,\cdots,n. \qquad (2\text{-}10)$$

这是一个齐次线性代数方程组，它有非零解的充要条件为系数行列式等于零．即

$$\begin{vmatrix} (L\varphi_1,\varphi_1)-\lambda(\varphi_1,\varphi_1) & (L\varphi_2,\varphi_1)-\lambda(\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & (L\varphi_n,\varphi_1)-\lambda(\varphi_n,\varphi_1) \\ (L\varphi_1,\varphi_2)-\lambda(\varphi_1,\varphi_2) & (L\varphi_2,\varphi_2)-\lambda(\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (L\varphi_n,\varphi_2)-\lambda(\varphi_n,\varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (L\varphi_1,\varphi_n)-\lambda(\varphi_1,\varphi_n) & (L\varphi_2,\varphi_n)-\lambda(\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & (L\varphi_n,\varphi_n)-\lambda(\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix}=0.$$

这是一个关于 λ 的 n 次代数方程，它的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$．即为所求近似特征值，如取其中最小的一个值，代入 (2-10) 式，确定 C_1，$C_2,\cdots,C_n$．于是，(2-7)与(2-8)相应的近似特征函数为

$$u_n=\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i.$$

根据题设的对称性，所求解仅与点 (x,y) 到原点的距离 r 有关．因此，我们采用极坐标，则 u 与幅角 θ 无关，于是，(2-7)、(2-8)可写成

$$\begin{cases} \Delta u+\lambda u=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du}{dr}\right)+\lambda u=0, \\ u|_{\Gamma}=0. \end{cases}$$

取坐标函数系为

$$\varphi_1=\cos\frac{\pi}{2a}r,\ \varphi_2=\cos\frac{3\pi}{2a}r,\cdots,\varphi_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2a}r,\cdots$$

先求第一近似解

$$u_1=C_1\varphi_1=C_1\cos\frac{\pi}{2a}r,$$

代入(2-9)式，得

$$\iint_G(\Delta u_1+\lambda u_1)\varphi_1\,dx\,dy=2\pi\int_0^a\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{\pi}{2a}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(-\sin\frac{\pi}{2a}r\right)\right]C_1+\lambda C_1\cos\frac{\pi}{2a}r\right\}\cos\frac{\pi}{2a}r\cdot r\,dr=0.$$

从而

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\right)-\lambda a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\right)=0.$$

于是得近似特征值

$$\lambda_1=\frac{5.832}{a^2},$$

从而得相应的近似特征函数

$$u_1=C_1\cos\frac{\pi}{2a}r,$$

其中 C_1 为常数.

再求第二近似解，将

$$u_2=C_1\cos\frac{\pi}{2a}r+C_2\cos\frac{3\pi}{2a}r,$$

代入(2-9)式，得

$$\begin{cases}(1.7337-0.29736\,\lambda a^2)C_1+(0.20264\,\lambda a^2-1.5)C_2=0,\\(0.20264\,\lambda a^2-1.5)C_1+(11.603-0.47748\,\lambda a^2)C_2=0.\end{cases}$$

这是二元齐次线代数方程组，由方程组有非零解的充要条件，得确定近似特征值 λ 的方程

$$\begin{vmatrix}1.7337-0.29736\,\lambda a^2 & 0.20264\,\lambda a^2-1.5\\0.20264\,\lambda a^2-1.5 & 11.603-0.47748\,\lambda a^2\end{vmatrix}=0,$$

或

$$0.10092\,a^4\lambda^2-3.670\,a^2\lambda+17.866=0,$$

取较小的根

$$\lambda_1=\frac{5.792}{a^2},$$

代入上述方程组的第一个方程，得

$$0.0114\,C_1-0.3263\,C_2=0,$$

故可取

$$C_1=0.3263\,C,\quad C_2=0.0114\,C,$$

其中 C 为常数. 于是，我们得到相应的近似特征函数

$$u_2=C\left(0.3263\cos\frac{\pi}{2a}r+0.0114\cos\frac{3\pi}{2a}r\right).$$

§ 3 有限元法介绍

前两节我们介绍了里兹法与伽辽金法，这两种方法对不规则区域的问题，要求在整个区域上选择光滑的坐标函数，实际上是困难的，因而使用上受到了限制. 而有限元法将连续体划分成有限个"单元"的集合，把连续问题离散化，在有限个"节点"上求出问题解的近似值. 这种方法采用分块光滑的坐标函数，克服了在整体区域上选择坐标函数的困难，因而这种方法是里兹法和伽辽金法的进一步发展，它适用于具有复杂边界条件的数学物理方程问题. 1943 年柯朗(R. Courant)用近似变分法，分析二维狄里克雷问题中，在三角形单元上首先创立了分段线性函数的有限单元分析法. 这种方法在 1950 年以后发展起来. 不但在结构力学，而且在流体力学、断裂力学、传热学、电磁场等方面的近似计算，用有限元法计算都十分有效. 下面我们举例来说明这种方法.

例 1 设边值问题

$$\begin{cases} Ly \equiv -\dfrac{d}{dx}(py') + qy = f(x), x \in (0,l), & (3\text{-}1) \\ y(0) = y(l) = 0, & (3\text{-}2) \end{cases}$$

(其中 $p(x)>0, q(x)\geqslant 0$，且 $p'(x), q(x), f(x)$ 都属于 $C[0,l]$)，相应的变分问题是：在 D_L 内求函数 $y(x)$，使泛函

$$J[y] = \int_0^l (py'^2 + qy^2 - 2yf)dx \qquad (3\text{-}3)$$

取极小值，其中 D_L 是 $[0,l]$ 上连续可微且满足条件(3-2)的函数集合.

(1) 将求解区间划分为有限个单元

将区间 $[0,l]$ 划分成 n 个互不重迭子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $x_0=0, x_n=l$. 我们称这些子区间为单元，分点 x_i 称为节点.

(2) 构造插值函数

为简单计，在每个单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 上构造 $y(x)$ 的线性插值函数。

设函数 $y(x)$ 在节点 x_{i-1}, x_i 上的值分别为 y_{i-1}, y_i，其线性插值函数为

$$y^{(i)}(x)=\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}y_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}y_i,\quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)。$$

这样作出的函数，在相邻两个单元的公共节点上保持连续，并且，当 $x=0,l$ 时，满足边界条件(3-2)。把每个单元上的函数 $y^{(i)}(x)$ 合并起来，就得到在整个区间$[0,l]$上的插值函数

$$y_n(x)=y^{(i)}(x), x\in[x_{i-1},x_i]\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

它的图形是一条折线。这些分段插值函数的全体表示为 D_L^n。

由于

$$y^{(i)}(x)=\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}y_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}y_i,\quad x\in[x_{i-1},x_i],$$

$$y^{(i+1)}(x)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1},\quad x\in[x_i,x_{i+1}],$$

因此，在相邻两单元$[x_{i-1},x_i]$,$[x_i,x_{i+1}]$上 y_i 的系数表达式分别为

$$\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\quad 与\quad \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}。$$

现在定义坐标函数系 $\varphi_i(x)$(如图 8-1)：

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x\in[x_{i-1},x_i),\\ 1, & x=x_i,\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x\in(x_i,x_{i+1}],\\ 0, & x\in[x_{i-1},x_{i+1}]。\end{cases}$$

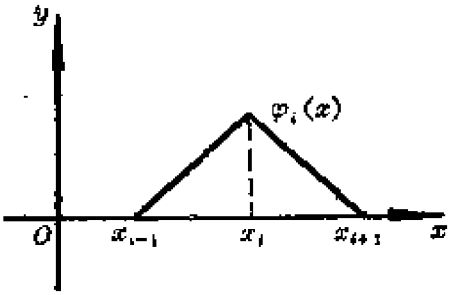

图 8-1

于是

$$y_n(x)=\sum_{i=1}^{n-1}y_i\varphi_i(x). \tag{3-4}$$

它具有以下性质：

i) $y_n(x_i)=y_i$；

ii) 在$[0,l]$上分段光滑；

iii) $y_n'(x)$有间断点，但平方可积.

(3) 用区间$[0,l]$内部节点处的函数值 $y_i(i=1,2,\cdots,n-1)$近似地表示泛函(3-3).

$$J[y_n(x)]=\int_0^l\left\{p\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i\varphi_i'(x)\right)^2\right.$$

$$\left.+q\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i\varphi_i(x)\right)^2-2f\sum_{i=1}^{n-1}y_i\varphi_i\right\}dx$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n-1}\left\{\int_0^l\left(p\varphi_i'\varphi_j'+q\varphi_i\varphi_j\right)dx\right\}y_iy_j-2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^l f\varphi_i dx\right)y_i$$

$$\triangleq\sum_{i=1}^{n-1}a_{ij}y_iy_j-2\sum_{i=1}^{n-1}b_iy_i,$$

其中

$$a_{ij}=\int_0^l(p\varphi_i'\varphi_j'+q\varphi_i\varphi_j)dx=a_{ji},$$

$$b_i=\int_0^l f\varphi_i dx.$$

由

$$\frac{\partial J[y_n(x)]}{\partial y_j}=0,\qquad j=1,2,\cdots,n-1$$

得

$$\sum_{i=1}^{j+1} a_{ij} y_i - b_j = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

写成矩阵形式

$$KY = B, \tag{3-5}$$

其中K称为刚度矩阵，Y称为广义节点位移，B称为广义节点力．因此，整个过程和里兹法的过程完全一样，但它的特点是近似函数$y_n(x)$分段光滑，其坐标函数是"∧"形函数，而里兹法中所选取的坐标函数，要求在整个区间上充分光滑，除了一些简单的边界条件外，这些函数的选择一般是比较困难的．

(4) 具体计算

有限元法各个计算环节，如在各单元的函数插值，进行积分计算，求出单元刚度矩阵，然后形成总体刚度矩阵，和求解线性代数方程组等，对同一类型问题，可用同一标准程序计算．(3-5)的解求得后，便得到边值问题的离散解．

例 2 在区域$G+\Gamma$内考虑

$$-\Delta u \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y),$$

$$(x, y) \in G \tag{3-6}$$

具有混合边界条件

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1} = \varphi, & (3\text{-}7) \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right]_{\Gamma_2} = \psi & (3\text{-}8) \end{cases}$$

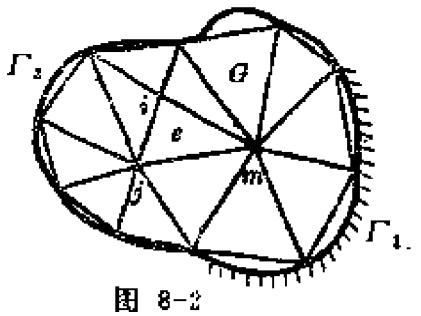

图 8-2

的解．其中$\Gamma_1, \Gamma_2 (\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2)$是区域$G$的两部分边界（如图 8-2），$\varphi, \psi$分别是沿着$\Gamma_1, \Gamma_2$给定的连续函数，$h \geqslant 0$且在$\Gamma_2$上连续．$f(x, y)$在$G$上连续．

我们从伽辽金法出发，导出有限元

(1) 把边值问题化为积分关系式

用任意函数$\eta(x, y)$乘(3-6)两边，并在G上积分

$$\iint_G(-\Delta u)\eta\,dxdy=\iint_G f\,\eta\,dxdy, \tag{3-9}$$

由格林公式

$$\iint_G(-\Delta u)\eta\,dxdy=\iint_G\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$

$$-\int_\Gamma\eta\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

在 Γ_2 上，$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=[\psi-hu]_{\Gamma_2}$，于是(3-9)化为

$$\iint_G\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-f\eta\right)dxdy$$

$$-\int_{\Gamma_1}\eta\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_{\Gamma_2}\eta(\psi-hu)ds=0, \tag{3-10}$$

由于 u 在 Γ_1 上取第一类边界条件(3-7)，我们规定

$$\eta|_{\Gamma_1}=0,$$

于是，(3-10)化为

$$\iint_G\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-f\eta\right)dxdy+\int_{\Gamma_2}\eta(hu-\psi)ds$$

$$=0. \tag{3-11}$$

(2) 将求解区域 G 划分为有限个单元

为了简单起见，将区域 G 划分为有限多个三角形单元．每个三角形顶点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 称为节点．节点 (x_i,y_i) 处的函数值用 u_i 表示．注意将 Γ_1 与 Γ_2 的分界点取为节点．

(3) 用函数逼近引入有限元

设边值问题(3-6)、(3-7)、(3-8)的解 $u(x,y)$ 能用

$$u_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}N_i(x,y)u(x_i,y_i)\triangleq\sum_{i=1}^{n}N_iu_i \tag{3-12}$$

来逼近，其中 $N_i(x,y)$ 是按某种方法已定出的线性无关函数系

$\{N_i(x,y)\}$ 中的一个函数. $u_i=u(x_i,y_i)$ 表示 $u(x,y)$ 在节点 (x_i,y_i) 的值$(i=1,2,\cdots,n)$.

同理,

$$\eta(x,y)\approx\eta_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}N_i(x,y)\eta(x_i,y_i)\triangleq\sum_{i=1}^{n}N_i\eta_i, \tag{3-13}$$

将(13-12)、(3-13)代入(3-11),得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\iint_G\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy+\int_{\Gamma_2}hN_iN_jds\right]\eta_iu_j$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[-\iint_G N_if\,dxdy-\int_{\Gamma_2}N_i\psi\,ds\right]\eta_i=0 \tag{3-14}$$

(3-14)中方括号内的值皆为已知,记为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_iu_j+\sum_{i=1}^{n}b_i\eta_i=0, \tag{3-15}$$

其中

$$a_{ij}=\iint_G\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy+\int_{\Gamma_2}hN_iN_jds$$

$$b_i=-\iint_G N_ifdxdy-\int_{\Gamma_2}N_i\psi ds.$$

对于在 $G+\Gamma$ 上的点(x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$作适当排列,设 $i=1,2,\cdots,L(L<n)$的点(x_i,y_i) 在 $G+\Gamma_2$ 中,而 $i=L+1$, $L+2,\cdots,n$ 的点(x_i,y_i)在 Γ_1 上. 于是

$$\begin{cases} u_i=\varphi_i, \\ \eta_i=0. \end{cases} \quad (i=L+1,L+2,\cdots,n) \tag{3-16}$$

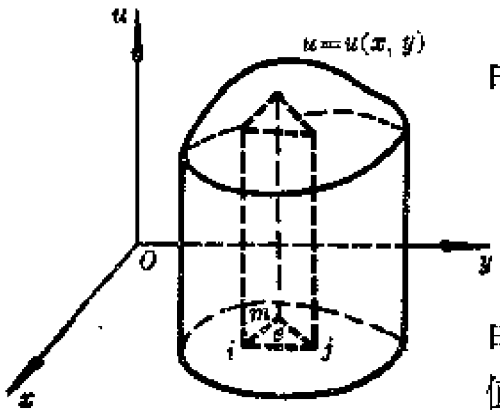

图 8-3

由(3-15)、(3-16)得

$$\sum_{i=1}^{L}\eta_i\left(\sum_{j=1}^{L}a_{ij}u_j+\sum_{j=L+1}^{n}a_{ij}\varphi_j+b_i\right)=0,$$

由于 $\eta_i(i=1,2,\cdots,L)$ 可取任意数值，令

$$\eta_i=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,L)$$

得

$$\sum_{i=1}^{L}a_{ij}u_j+\sum_{j=L+1}^{n}a_{ij}\varphi_j+b_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,L)$$

解出 $u_j(j=1,2,\cdots,L)$，代入(3-12)，得近似解.

(4) 构造插值函数

考虑一个单元 e，其节点编号按逆时针顺序为 i，j，m. 在 e 上取逼近 $u(x,y)$的平面片函数 $\bar{u}(x,y)$，如图(8-3).

设平面片上任一点坐标为$(x,y,\bar{u})$.

由点$(x,y,\bar{u})$，(x_i,y_i,u_i)，(x_j,y_j,u_j)，(x_m,y_m,u_m)共面关系得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_i & x_j & x_m \\ y & y_i & y_j & y_m \\ \bar{u} & u_i & u_j & u_m \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{vmatrix} \bar{u} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_j & x_m \\ y & y_j & y_m \end{vmatrix} u_i - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_m & x_i \\ y & y_m & y_i \end{vmatrix} u_j + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_i & x_j \\ y & y_i & y_j \end{vmatrix} u_m$$

或

$$\bar{u} = \frac{1}{2A}[(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m] \triangleq \frac{1}{2A} N U_e, \tag{3-17}$$

其中

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{vmatrix}$$

是三角形 e 的面积，其顶点编号 i, j, m 取逆时针顺序，总有 $A > 0$。

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & x_m \\ y_j & y_m \end{vmatrix}, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j,$$

其它 a_j, b_j, c_j；a_m, b_m, c_m 为由上述 a_i, b_i, c_i 的下标 i, j, m 依次轮换而得。

其中 N 为行向量

$$N = (a_i + b_i x + c_i y, a_j + b_j x + c_j y, a_m + b_m x + c_m y),$$

U_e 为列向量

$$U_e = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{pmatrix}.$$

由(3-11)得

$$\sum_e \left[\iint_e \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\eta f\right)dxdy\right.$$

$$\left.+\int_{\Gamma_e}\eta(hu-\psi)ds\right]=0, \tag{3-18}$$

其中，Γ_e为单元e在Γ_2上的边．当单元e没有在Γ_2上的边时，Γ_e为零．

在单元e中，由(3-17)得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2A}\frac{\partial N}{\partial x}U_e=\frac{1}{2A}(b_i,b_j,b_m)U_e.$$

函数$\eta(x,y)$的结构与$u(x,y)$一样，故有

$$\eta(x,y)=\frac{1}{2A}NV_e=\frac{1}{2A}V_e^TN^T,$$

其中

$$V_e=\begin{pmatrix}\eta_i\\ \eta_j\\ \eta_m\end{pmatrix}.$$

因此，得

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{2A}V_e^T\begin{pmatrix}b_i\\ b_j\\ b_m\end{pmatrix}.$$

于是

$$\iint_e\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dxdy$$

$$=\frac{1}{2A}V_e^T\begin{pmatrix}b_i\\ b_j\\ b_m\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2A}(b_i,b_j,b_m)U_e\iint_e dxdy$$

$$=\frac{1}{4A}V_e^T\begin{pmatrix}b_i^2 & b_ib_j & b_ib_m\\ b_jb_i & b_j^2 & b_jb_m\\ b_mb_i & b_mb_j & b_m^2\end{pmatrix}U_e. \tag{3-19}$$

同理，得

$$\iint_{\Delta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dxdy=\frac{1}{4A}V_e^T\begin{pmatrix}c_i^2 & c_ic_j & c_ic_m\\ c_jc_i & c_j^2 & c_jc_m\\ c_mc_i & c_mc_j & c_m^2\end{pmatrix}U_e,\tag{3-20}$$

以及

$$\iint_{\Delta}\eta f\,dxdy=\frac{1}{2A}V_e^T\iint_{\Delta}N^T f\,dxdy.\tag{3-21}$$

$$\int_{\Gamma_e}\eta\psi\,ds=V_e^T\int_{\Gamma_e}\frac{N^T}{2A}\psi ds,\tag{3-22}$$

$$\int_{\Gamma_e}\eta hu\,ds=V_e^T\int_{\Gamma_e}\frac{N^T}{2A}\cdot\frac{N}{2A}hds\cdot U_e.\tag{3-23}$$

对(3-19)至(3 23)进行计算，将结果代入(3-18)，并注意到当节点在 Γ_1 上时，$u|_{\Gamma_1}=\varphi,\eta|_{\Gamma_1}=0$；当节点在 G 内或 Γ_2 上时，u 为未知函数，η 为任意函数。设后一种情况的节点共有 L 个，于是这 L 个 η 的系数必须等于零，故得到 $u_1,u_2,\cdots,u_L$ 的 L 个线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{J}K_{ij}u_j-F_i=0,\qquad(i=1,2,\cdots,L)$$

或写成矩阵形式

$$KU=F,\tag{3-24}$$

其中 K 为刚度矩阵，U 为广义节点位移，F 为广义节点力。由(3-24)解得节点处 u 的值。因此，我们得到边值问题(3-6)、(3-7)、(3-8)的离散解。

习 题 8

1．分别用里兹法与伽辽金法求边值问题

$$\begin{cases} y''-y=x, & 0<x<1, \\ y(0)=0, \quad y(1)=0 \end{cases}$$

的近似解，并与精确解比较。

2．用里兹法求下列边值问题的近似解。

(1) $\begin{cases} y''+(1+x^2)y-1=0, & -1<x<1, \\ y(1)=0, \quad y(-1)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y''=-\cos x, & 0<x<\pi, \\ y'(0)=0, \quad y'(\pi)=0. \end{cases}$

3．用里兹法解边值问题

$$\begin{cases} EIy^{(4)}=q, & 0<x<l, \\ y(0)=y(l)=0, \quad y''(0)=y''(l)=0, \end{cases}$$

式中 E、I、q 为非零常数。

4．分别用里兹法与伽辽金法求边值问题

$$\begin{cases} \Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(x,y)\in G, \\ u|_\Gamma=x^3 \qquad (\Gamma \text{ 为 } G \text{ 的边界}) \end{cases}$$

的近似解，其中区域 G 为矩形域：$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$。

5．用里兹法求边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\cos\dfrac{\pi x}{a}, \quad (x,y)\in G, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0, \quad (\Gamma \text{ 为 } G \text{ 的边界}) \end{cases}$$

的近似解，其中区域 G 为矩形域：$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$。

6．用里兹法求边值问题

$$\begin{cases} Tu\equiv-(4+y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=y^2, \quad (x,y)\in G, \\ u|_\Gamma=0, \qquad (\Gamma \text{ 为 } G \text{ 的边界}) \end{cases}$$

的近似解，其中 G 为以 $A(0,0)$，$B(\pi,0)$，$C(2\pi,\pi)$，$D(\pi,\pi)$ 为顶点的平边形区域。

7．用伽辽金法求边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda(1+x^2)y=0, \\ y(-1)=y(1)=0 \end{cases}$$

的近似特征值 λ.

8. 设弦振动方程为

$$(1+x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

设弦长为 1，求两端固定时弦的振动频率。

习 题 答 案

习 题 1

1. (1) 求函数 $y(x)\in C^1[x_0,x_1]$，使泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx,$$

在条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 下取极小值.

(2) 求函数 $y(x)\in C^1[x_0,x_1]$，使泛函

$$J[y]=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}dx, y(x)\geqslant 0, x\in[x_0,x_1]$$

在条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 下取极小值.

(3) 在函数类 $C^1[x_0,x_1]$中，求一组函数 $y=y(x), z=z(x)$，使泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx,$$

在条件 $y(x_0)=y_0$，$z(x_0)=z_0$；$y(x_1)=y_1$，$z(x_1)=z_1$ 与条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下取极小值.

(4) 在函数类 $C^1[x_0,x_1]$中，求一组函数 $y=y(x), z=z(x)$，使泛函

$$T[y,z]=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1}\mu(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx,$$

在条件 $y(x_0)=y_0, z(x_0)=z_0; y(x_1)=y_1, z(x_1)=z_1$ 下取极小值.

3. 提示：由条件，对任何常数 $\bar{C}$ 有 $\int_{x_0}^{x_1}\eta'(x)[f(x)-C]dx=0$，今选取 C 使 $\int_{x_0}^{x_1}[f(x)-C]dx=0$，作函数

$$\eta(x)=\int_{x_0}^{x_1}[f(x)-C]dx, \text{则 } \eta(x_0)=\eta(x_1)=0,$$

代入前式，再由 $f(x)$的连续性即得证.

习 题 2

§ 1

1. (1) $y=x^3+C_1x+C_2$, (2) $y=\frac{C_1}{x}+C_2$,

(3) $(x-C_2)^2+y^2=C_1^2$, (4) $v=C_1\cos 4t+C_2\sin 4t$,

(5) $\omega=\mathrm{sh}(C_1\theta+C_2)$,

(6) $s=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{t}{2}\cos t$,

(7) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x$,

(8) $y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$.

2. (1) $x^2+(y-C_2)^2=\left(\frac{1}{C_1}\right)^2$,

(2) $y-C_2=C_1\ln(x+\sqrt{x^2-C_1^2})$,

(3) $(y-C_2)^2=4C_1^2(x-C_1^2)$.

3. (1) 当$\alpha=0,\beta=-1$才有解，(2)无意义.

(3) 仅当$\alpha=1$时有唯一解.

§ 2

1. (1) $\begin{cases}y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x,\\ z=(C_1x+C_2+2C_3)\cos x+(C_3x+C_4-2C_1)\sin x,\end{cases}$

(2) $\begin{cases}y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3e^x+C_4e^{-x}+1,\\ z=C_1\cos x+C_2\sin x-C_3e^x-C_4e^{-x}+1,\end{cases}$

(3) $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

2. (2) $x=y=z$.

§ 3

1. (1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$,

(2) $y=\frac{x^7}{7!}+C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6$,

(3) $y=x$.

2. (1) $y=(C_1x+C_2)^{\frac{2n-1}{n-1}}+C_3x+C_4$,

(2) $y=C_{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+C_1x+C_0$.

§ 4

1. (1) 无关， (2) 有关， (3) 无关.

2. $\Phi_x-\frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}}=0$， $\Phi_y-\frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}}=0$.

3. $\begin{cases} x=C_2-\frac{C_1}{2}(2\theta+\sin 2\theta),(C_1>0), \\ y=\frac{C_1}{2}(1+\cos 2\theta). \end{cases}$

§ 5

1. (1) $dF=(F_x+y'F_y+y''F_{y'})dx$,

(2) $\delta F=F_y\delta y+F_{y'}\delta y'$.

5. (1) $\delta J=\int_0^1[(x+2y-4yy')\delta y-2y^2\delta y']dx$,

$$\delta^2 J=\int_0^1[(2-4y')\delta y^2-8y\delta y\delta y']dx,$$

(2) $\delta J=2\int_0^1[(y_1+y_2)(\delta y_1+\delta y_2)+y_2'\delta y_1'+y_1'\delta y_2']dx$.

6. (1) $(py')'+qy+\lambda ry=0$,

(2) $(sy'')''+(py')'+(q+\lambda r)y=0$.

7. (2) $\delta J=2\int_{x_0}^{x_1}[(g'y+gy'-qy)\delta y+(py'+qy)\delta y']dx$.

习 题 3

§ 1

1. (1) $\delta J=(-2y'\delta y)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y+y'')\delta y dx$,

(2) $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,

(3) $y=0$.

2. (1) $\delta J=[(2t\dot{x}+1)\delta x]\,|_{t=2}+2\int_1^2(\dot{x}+t\bar{x})\delta x dt$,

(2) $\dot{x}(2)=-\frac{1}{4}$,

(3) $x=\ln\frac{e}{\sqrt{t}}$.

3. (1) $\delta J=(2y''\delta y')\,|_{x=1}+\int_0^1(y^{(4)}-x)\delta y dx$,

(2) $y''(1)=0$,

(3) $y=\frac{x^2}{240}(2x^3-129x+367)$.

§ 2

1. (1) $\delta J=\left[\left(2y'+\frac{y^2+y'^2}{2e^{2x}-y'}\right)\delta y\right]_{x=x_1}$

$+2\int_0^{x_1}(y-y'')\delta y dx$,

(2) $[y^2+(4e^{2x}-y')y']_{x=x_1}=0$.

3. $(x-4)^2+(y-1)^2=16$.

6. (1) $\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx+\{\psi'(y_1)+F_{y'}[x_1,y_1,y'(x_1)]\}\delta y_1+\{\varphi'(y_0)+F_{y'}[x_0,y_0,y'(x_0)]\}\delta y_0$,

(2) $[\varphi'(y)+F_{y'}]|_{x=x_0}=0$; $[\psi'(y)+F_{y'}]|_{x=x_1}=0$.

习 题 4

1. (1) $z_{xx}-z_{yy}=0$,

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$.

4. $D\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)+kz=q$.

5. $V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}=0$.

习 题 5

§ 1

1. 提示：圆柱面上的弧元

$$ds=\sqrt{(rd\theta)^2+(dz)^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \qquad (r=a\text{ 常数}).$$

2. $r\sin(\theta\sin\alpha+C_1)=C_2$. 提示：球面坐标$(\rho,\theta,\varphi)$，$\varphi=\alpha$（常数），弧元 $ds=\sqrt{(\rho\sin\alpha d\theta)^2+(d\rho)^2}=\sqrt{(\rho\sin\alpha)^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$.

3. $u=\frac{6x_0}{t_1^2}\left(\frac{2}{t_1}t-1\right)$.

4. (1) $\begin{cases}\lambda(x)G_y-\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,\\ \lambda(x)G_z-\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,\end{cases}$

(2) 提示：曲线用参数形式 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 表示，$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt$.

§ 2

1. (1) $y=14x-6x^2$,(2) $y=\pm 2\sin k\pi x$ (k 为整数),

(3) $y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin kx}{k}$($k$ 为整数),(4) $\begin{cases}y=\dfrac{x}{2}(7-5x),\\ z=x.\end{cases}$

2. $(py')'-(\lambda r-q)y=0$.

3. $y+\lambda=C_1\operatorname{ch}\dfrac{x-C_2}{C_1}$，其中 C_1,C_2,λ 在(1)中由固定端的坐标和等周条件确定；在(2)中由变动端的横截条件和等周条件确定. 在本问题中，由于横截条件化为正交条件，因而在平衡状态下的悬链线，它在端点处分别与曲线 $y=\varphi(x),y=\psi(x)$ 成正交。

4. $(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\dfrac{1}{\lambda^2}$，其中 C_1,C_2,λ 由边界条件和等周条件确定.

6. $I_a=\dfrac{1}{C_M}\left[\left(\dfrac{6aJ}{t_1^2}+M_f\right)-\dfrac{12aJ}{t_1^3}t\right]$

7. $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$(正态分布). 提示：将欧拉定理推广到无界区间上的广义积分，再利用含参变量的广义积分在积分号下求导的定理.

§ 3

1. $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$.

2. $m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{k^2}{r^3}\right)=-F(r)$ （k 为常数）

提示：利用极坐标.

3. $\rho u_{tt}-\mu(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t),(x,y)\in D,t>0$，其中 ρ 为膜的质量面密度，μ 为张力.

习 题 6

1. (1) $u_0(x)=\mathrm{sh}x$, (2) 无.

2. (1) 在 $y=7-\frac{4}{x}(1\leqslant x\leqslant 2)$ 上取到弱极小值，且是强极小值.

(2) 在 $y=\frac{1}{3}e^{2x}(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上取到弱极小值，且是强极小值.

(3) 在 $y=\sin 2x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 上取到弱极大值，且是强极大值.

(4) 在 $y=x^2(1\leqslant x\leqslant 2)$ 上取到弱极小值.

(5) 在 $y=\frac{y_1}{x_1}x(0\leqslant x\leqslant x_1,x_1>0)$ 上取到弱极小值.

(6) 在 $y\quad 0\left(0<x\leqslant x_1<\frac{\pi}{4}\right)$ 上取到弱极小值，且是强极小值，但若 $x_1>\frac{\pi}{4}$，则无极值.

(7) 在 $y=x^{\frac{1}{3}}(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 上取到弱极小值，且是强极小值.

3. 强极小值.

习 题 7

§ 1

1. (1) $[x^2(vu'-uv')]_0^l=0$,

(2) $[v(pu'')'-u(pv'')'+p(v''u'-u''v')]_0^l=0$.

2. $L^*=-\dfrac{d}{dx}$. 3. $(xy')'+\left(x-\dfrac{n^2}{x}\right)y=0$.

4. $T^*=-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$.

§ 2

1. $u(x)\in C^1[0,l]$使泛函 $J[u]=\int_0^l(u'^2-2uf)dx$ 在条件 $u(0)=u(l)=0$ 下取极小值.

2. $u(x)\in C^2[0,l]$使泛函 $J[u]=\int_0^l(u''^2-2uf)dx$ 在条件 $u(0)=u(l)=u''(0)=u''(l)$ 下取极小值.

§ 3

4. 提示:两次利用关系式

$$(-\Delta u,v)=\iint_\sigma\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

并注意 $\Delta^2u=\Delta(\Delta u)$,求出

$$(\Delta^2u,v)=\iint_\sigma\Delta u\Delta v\,dxdy+\int_\Gamma\left(v\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}-\Delta u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds.$$

习 题 8

1. 设近似解的形式为 $y_n=x(1-x)(C_1+C_2x+\cdots$

$+C_nx^n$). 第二近似解

$$y_2=\frac{77x^3-8x^2-69x}{473}$$

与精确解 $y=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}1}-x$ 在 $x=0.5$ 处的误差为

$$|y_1(0.5)-y(0.5)|=0.0002.$$

2. (1) 设近似解的形式为

$$y_n=(1-x^2)(C_1+C_2x^2+\cdots+C_nx^{2n})$$

求得第二近似解

$$y_2=\frac{3969-4200x^2+231x^4}{4252},$$

(2) 由于 $\int_0^{\pi}\cos x\,dx=0$，满足解的存在必要(充分)条件.

近似解的形式为

$$y_n=\sum_{k=0}^{n}C_k\cos kx$$

求得

$$y_n(x)=\cos x.$$

3. 设解的形式为

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

求得

$$y=\frac{4ql^4}{EI\pi^5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^5}\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x$$

4. 设边界条件齐次化后的边值问题近似解形式为

$$v_n(x,y)=(a^2-x^2)(b^2-y^2)$$
$$\cdot(C_1+C_2x^2+C_3y^2+\cdots+C_nx^{2i}y^{2j})$$

(i,j 为正整数)，求得第一近似解

$$v_1(x,y)=\frac{5}{4}\frac{(a^2-x^2)(b^2-y^2)}{a^2+b^2},$$

则原非齐次边值问题的近似解为

$$u_1(x,y)=v_1(x,y)+x^2.$$

5. 由于$\iint_D \cos\frac{\pi x}{a}dxdy=0$，满足解的存在必要(充分)条件，

设近似解的形式为

$$u_{nn}=\sum_{i,j=0}^{n}C_{ij}\cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\quad (i,j\text{ 不同时为零})$$

求得第一近似解

$$u_{10}=\frac{a^2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{a}.$$

6. 设坐标函数系

$\varphi_{11}(x,y)=\sin(x-y)\sin y$，$\varphi_{12}(x,y)=\sin(x-y)\sin 2y$，

$\varphi_{21}(x,y)=\sin 2(x-y)\sin y$，$\varphi_{22}(x,y)=\sin 2(x-y)\sin 2y$，

……。

求得

$$u_{22}=\sum_{i,j=1}^{2}C_{ij}\varphi_{ij}$$

$$=0.608\sin(x-y)\sin y-0.319\sin(x-y)\sin 2y$$
$$-0.021\sin 2(x-y)\sin y-0.031\sin 2(x-y)\sin 2y.$$

7. 若令

$$y_2=(1-x^2)(C_1+C_2x^2),$$

求得 $\lambda_1\approx 2.1775$，$\lambda_2\approx 18.3610$

8. 先设$u(x,t)=v(x)\sin\omega t$，将弦的固有振动方程化为

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{\omega^2}{a^2}(1+x)v=0,$$

记 $\lambda=\frac{\omega^2}{a^2}$，则问题化为求

$$\begin{cases}\dfrac{d^2v}{dx^2}+\lambda(1+x)v=0,\\ v(0)=v(1)=0\end{cases}$$

的特征值问题，若令

$$v_2=C_1\sin\pi x+C_2\sin 2\pi x,$$

求得

$$\lambda_1\approx 6.5485,\quad \lambda_2\approx 26.8301.$$