數學傳播　34卷2期, pp. 52-75

複分析五講　第一講

龔　昇・張德健

1.0. 前言: 從微積分說起

簡單來說, 複變函數論是在複平面上討論微積分。如同對任何的數學進行推廣那樣, 往往一部分的內容可以毫無困難地直接得到, 但另一部分的內容卻是推廣後所獨有的。前一部分固然重要, 但人們更有興趣的是後面那一部分, 因爲常常是這一部分才眞正刻劃了這學科的本質。

在這一講中, 我們先簡單地回顧一下什麼是微積分, 然後再看看微積分中那些結果是可以直接推廣到複數領域的, 而在以後的各講中著重討論一些本質不同, 只在複數域上才特有的一些主要性質與結果。關於微積分的部分, 讀者可以參考我們以前在《數學傳播》上發表過的「微積分五講」。

正如在「微積分五講」中提過, 微積分是由三個部分組成, 即微分, 積分以及聯繫微分與積分成爲一個對立的微積分基本定理, 即 Newton-Leibniz 公式。

我們知道若 $y = f(x)$ 爲定義在區間 (a, b) 上的一個函數, 若在 (a, b) 中的一點 x 極限 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在這點可微, 記這個極限值爲 $\dfrac{df}{dx}$ 或 $f'(x)$。我們稱 $df = f'(x)dx$ 爲 $f(x)$ 在點 x 的微分。如果函數 f 在 (a, b) 上每一點都可微, 則稱函數 f 在 (a, b) 上可微。

另一方面, 如果 $y = f(x)$ 爲定義在 $[a, b]$ 上的一個非負函數, 將 $[a, b]$ 分爲任意 n 個小區間 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 而 ξ_j 爲 $[x_{j-1}, x_j]$ 中任一點, 如果令 $n \to \infty$, 且所有 $[x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ 的長度都趨於零, 如果極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可積, 記此極限爲 $\int_a^b f(x)dx$。這便是微積分最最基本的定義及出發點, 並且都有很明確的幾何意義, 而微分是 $y = f(x)$ 所描繪的曲線在點 (x, y) 處的斜率, 積分是曲線 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲邊梯形的面積。

微分, 積分的概念古已有之, 使之成爲一門學問而發揚光大是由於 Newton 和 Leibniz 證明了微積分基本定理, 即指出了微分與積分是一組對立, 這個基本定理有兩種相互等價的表達形式。

微積分基本定理 (微分形式)

設函數 $f(t)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續, x 是 $[a,b]$ 中的一點, 令

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad a\le x\le b,$$

則 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微, 並且 $\Phi'(x)=f(x)$, 即 $d\Phi(x)=f(x)dx$, 換句話說, 若 $f(x)$ 的積分是 $\Phi(x)$, 則 $\Phi(x)$ 的微分就是 $f(x)dx$。

微積分基本定理 (積分形式)

設 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微, 且 $\dfrac{d\Phi}{dx}(x)$ 等於連續函數 $f(x)$, 則下面式子成立:

$$\int_a^x f(t)dt=\Phi(x)-\Phi(a),\quad a\le x\le b.$$

換句話說, 若 $\Phi(x)$ 的微分是 $f(x)dx$, 則 $f(x)$ 的積分就是 $\Phi(x)$。

有了這個定理, 求積分成爲求微分的逆運算, 而微分與積分的一些性質彼此相互對應, 即是一個理論的兩種解述。例如:

$$\frac{d(f(x)\pm g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}\pm\frac{dg(x)}{dx},$$

與

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

相對應; 而微分的乘法原則

$$\frac{d}{dx}(fg)(x)=f(x)\frac{dg(x)}{dx}+\frac{df(x)}{dx}g(x)$$

與部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$$

相對應; 由 Chain rule: 若 $u=f(y)$, $y=g(x)$, 則

$$\frac{df(g(x))}{dx}=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dg(x)}{dx}.$$

與積分換變數

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(y)dy$$

相對應等等, 我們就不在此一一贅述了。

在微積分中一般討論初等函數及其複合函數, 所謂初等函數是指下面三類函數, 即

1. 冪函數 x^a, $a \in \mathbb{R}$; 多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, a_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ 爲實常數; 有理分式
$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_px^p},$$
這裡 b_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$, c_k $(k = 0, 1, \ldots, p)$ 爲實常數; 以及其反函數。
2. 三角函數 $\sin x$, $\cos x$ 等等及其反函數, 如 $\arcsin x$, $\arccos x$ 等等。
3. 指數函數 e^x, 2^x 等等及其反函數 $\ln x$, $\log_2 x$ 等等。

而所謂函數 $f(x)$ 的 Taylor 展開式及 Fourier 展開式不過是用第一類中的多項式來逼近函數 $f(x)$, 以及用第二類中的 $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ 等來逼近函數 $f(x)$。所以沒有用第三類初等函數, 即指數函數來逼近函數 $f(x)$ 的原因之一是下面即將講到的 Euler 公式: 指數函數可以表爲三角函數。當然一些重要的初等函數的 Taylor 級數是熟知的。例如:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots, \quad (|x| < 1,\ r \in \mathbb{R})$$

等等。

以上我們只是十分簡單地回顧了一維微積分的大概。至於高維度的微積分基本定理, 也有相對應的三個部分, 即微分, 積分及聯繫微分與積分的微積分基本定理。只是在微分的部分有偏微分, 全微分, 而與微分相當的是 Jacobi 矩陣; 在積分的部分有重積分, 線積分, 面積分等, 這些都是一維微分與積分的自然推廣, 於是也可以列出其相對應的定理, 這裡不多敍述了。對於第三部分, 我們在此要補充幾句話, 說明在高維情況下, 什麼是微積分的基本定理? 是什麼定理刻劃了在高維的情況下, 微分與積分是相對應的逆運算? 答案是: Green 公式, Stokes 公式及 Gauss 公式。

Green **公式** 若 Ω 爲 xy 平面上封閉曲線 L 圍成的閉區域, 函數 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 Ω 上有一階連續偏導數, 則

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Stokes **公式** 設在空間有曲面 Σ, 邊界是封閉曲線 L, 函數 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 有一階連續偏導數, 則

$$\begin{aligned}\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=&\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx\\&+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.\end{aligned}$$

Gauss **公式** 設 V 是空間封閉曲面 Σ 所圍成的閉區域, 函數 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, 及 $R(x,y,z)$ 在 V 上有一階連續偏導數, 則

$$\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

這三個公式都刻劃了在邊界上積分與內部積分的聯繫, 如果我們用外微分形式, 那麼這三個公式可以寫成一個公式, 稱爲 Stokes 公式, 要十分嚴謹地敍述外微分形式需要很多篇幅, 但這可以在很多微積分的教材中找到, 以前發表的「微積分五講」就是用這個觀點來介紹的。這裡我們只簡略地介紹。

定義微分 dx 與 dy 的外乘積爲 $dx\wedge dy$, 它滿足下面的規則:

(1) $dx\wedge dx=0$, 即兩個相同微分的外乘積 (extersior product) 爲零。

(2) $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$, 即兩個不同微分的外乘積交換次序差一個負號。

當然, (1) 可以看成 (2) 的推論。由微分的外乘積乘上函數組成的微分形式 (differential form) 稱爲外微分形式。例如, 若 P, Q, R, A, B, C, H 爲 x, y, z 的函數, 則

$$Pdx+Qdy+Rdz$$

爲一次外微分形式;

$$Adx\wedge dy+Bdy\wedge dx+Cdz\wedge dx$$

爲二次外微分形式;

$$Hdx\wedge dy\wedge dz$$

爲三次外微分形式; 而 P, Q, R, A, B, C, H 稱爲微分形式的係數。對於外微分形式 ω 可以定義外微分算子 d, 它的定義如下:

對於零次外微分形式, 即函數 f, 定義

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

即普通的全微分算子。對於一次外微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, 定義

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz,$$

即對 P, Q, R 進行微分, 然後進行外乘積; 通過外乘積的運算規則, 可得

$$\begin{aligned} d\omega = &\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx \\ &+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

對於二次外微分形式 $\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdxdy$ 也是同樣定義

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{dz}\right)dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

對於三次外微分形式 $\omega = Hdx \wedge dy \wedge dz$ 也是同樣定義

$$d\omega = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

可以證明這恆等於零。如果規定 $ddx = ddy = ddz = 0$, 則外微分算子 d 與普通微分算子是一樣的了, 即對每一項進行運算, 在每一項中分別對每一個因子進行運算, 其餘因子不動, 將得出的各項相加, 不同的只是外微分算子 d 是在運算之後進行外乘積, 由此立即得到下面這個重要的結果。

Poincaré **引理** 若 ω 爲一外微分形式, 其係數具有二階連續偏導數, 則 $dd\omega = 0$。其逆也成立, 即若 ω 是一個 n 次外微分形式, 且 $d\omega = 0$, 則存在一個 $n-1$ 次外微分形式 α 使得 $d\alpha = \omega$。

有了這些準備之後, 那麼 Green 公式, Stokes 公式與 Gauss 公式可以統一地寫成

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega, \tag{0.1}$$

這裡 ω 爲外微分形式, $d\omega$ 爲 ω 的外微分, Σ 爲 $d\omega$ 的積分區域爲一封閉區域, $\partial\Sigma$ 表示 Σ 的邊界, $\int$ 表示區域有多少維數就是多少重數積分。事實上, 當 ω 爲零次外微分形式, (0.1) 就是 Newton-Leibniz 公式; 當 ω 爲一次外微分形式, 在平面的情形, (0.1) 就是 Green 公式; 在三維空間, (0.1) 爲 Stokes 公式; 當 ω 爲二次外微分形式, (0.1) 就是 Gauss 公式。(0.1) 眞正刻劃了微分與積分是一組對立的運算。這個公式不僅對三維歐氏空間成立, 而且對任意高維的歐氏空間也成立。不僅如此, 對於更一般的流形上也是成立的, 所以 (0.1) 是高維空間的微積分基本定理!

當然, 這個對微積分的回顧是相當粗略的, 但我們認爲有了這個回顧, 思路便可以理清楚, 而複變函數理論是複數體上的微積分, 是普通微積分的延續, 公式 (0.1) 成爲這五講的出發點也就是十分自然的事了。

1.1. 複數體, 擴充複平面及其球面表示

複數的全體組成複數體, 它是實數體的擴充。

在初等代數中已經知道, 虛數單位 i 具有性質 $i^2 = -1$, 將這一虛數單位與兩個實數 a, b 用加、乘結合起來得到複數 $a + ib$, a, b 分別稱爲這一個複數的實部 (real part) 與虛部 (imaginary part)。若記 $z = a + ib$, 則記 $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$, 兩複數相等若且唯若實部與虛部相等。複數的四則運算爲: 若 $z = a + ib$, $w = c + id$

$$z \pm w = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d),$$
$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

若 $w \neq 0$, 則

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

若複數 $z = a + ib$, 則 $a - ib$ 稱爲 z 的共軛 (Conjugate) 複數, 記作 $\overline{z}$, 於是

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$$

$z\overline{z} = a^2 + b^2$, 記作 $|z|^2$, 而 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 稱爲複數 z 的絕對值。顯然 $|z| \geq 0$。若 $w \neq 0$, 則我們有

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$$
$$|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\bar{w}), \qquad |z + w| \leq |z| + |w| \text{ 等等。}$$

對於平面上一個給定的直角座標系來講, 複數 $z = a + ib$ 可以用座標 (a, b) 的點來表示。第一個座標稱爲實軸, 第二個座標稱爲虛軸, 所在的平面稱爲複平面 (complex plane) 或高斯平面 (Gauss plane), 記作 $\mathbb{C}$。

一個複數不僅可以用一個點來表示, 而且可用一個由原點指向這個點的向量來表示, 這個複數, 這個點, 這個向量都用同一個字母 z 來表示。與通常一樣, 任一向量作平行移動後得到的所有向量都視爲與原向量恆等。於是複數的加法成爲向量的加法, 而複數的公式往往賦有幾何意義, 例如複數 z 的絕對值 $|z|$ 便可表示爲向量 z 的長度; $|z + w| \le |z| + |w|$ 表示三角形兩邊邊長之和大於第三邊的長度等等。

對複數也可以引入極座標 (r, θ)。複數 $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 顯然 $r = |z|$, r 稱爲複數 z 的模(modulus), θ 稱爲複數 z 的幅角(argument), 如果

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

則

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\Big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\Big) = r(\cos\theta + i\sin\theta); \end{aligned}$$

即 $r = r_1 r_2$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$。複數 z 的幅角不唯一, 因爲 $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 仍爲一個幅角, 記一般的幅角爲 $\arg(z)$, 特別當 $0 \le \theta < 2\pi$ 時, 稱爲主幅角(Principal argument), 記作 $\mathrm{Arg}(z)$。

若 $z = x + iy$, z_0 爲一固定的複數, r 爲一個固定的正實數, 則

$$|z - z_0| = r$$

表示一個以 z_0 爲中心, r 爲半徑的圓周; $|z - z_0| < r$ 表示一個以 z_0 爲中心, r 爲半徑的圓盤, 記作 $D(z_0; r)$。同樣, 上半平面可以用 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 來表示, 左半平面可以用 $\mathrm{Re}(z) < 0$ 來表示等等。

引入座標, 得到高斯平面 $\mathbb{C}$, 但如何來處理無窮遠點呢? 在複變函數論中, 我們引入一個 "點", 叫做無窮遠點, 記作 ∞, 以此來擴張 $\mathbb{C}$, 對所有有限的複數 $z \in \mathbb{C}$, $z + \infty = \infty + z = \infty$。對所有 $w \ne 0$, $w \cdot \infty = \infty \cdot w = \infty$, $\dfrac{z}{0} = \infty$ $(z \ne 0)$ 及 $\dfrac{z}{\infty} = 0$ 等等, $\mathbb{C}$ 上所有的點加上 "∞", 組成擴充複數平面, 記作 $\mathbb{C}^*$, 即 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。在本文中, 擴充複數平面指的就是 $\mathbb{C}^*$。

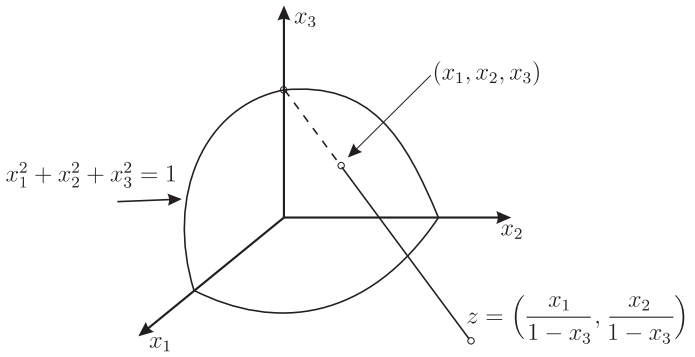


圖1

下面我們要對擴充複數平面作個幾何模型, 在這個模型上一切擴充平面上的點都有一個具體的表示, 這便是球面表示, 它是通過球極平面投影 (Stereographic projection) 得到的。

考慮一個三維空間的單位球面 $\mathbb{S}^2$, 其方程式爲 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (此處三維空間的直角座標爲 x_1, x_2, x_3), 在 $\mathbb{S}^2$ 上的每一點, 除 "北極" (0, 0, 1) 之外, 我們都可用一個複數

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \tag{1.1}$$

與之相對應, 這個對應是一對一的 (見圖 1)。事實上, 由 (1.1) 可得到

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

因之得到

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|^2)}. \tag{1.2}$$

令無窮遠點 ∞ 對應於 $(0, 0, 1)$, 就完成了球面 $\mathbb{S}^2$ 上的點與擴充複平面 $\mathbb{C}^*$ 上的點之間的一對一對應。因之, 可以把球面 $\mathbb{S}^2$ 稱爲里曼球面 (Riemann sphere)。顯然, $x_3 < 0$ 的半球面對應於單位圓盤 $|z| < 1$, 而 $x_3 > 0$ 的半球面對應於單位圓盤的外部 $|z| > 1$ 等等。

如複平面爲以 x_1 軸爲實軸, x_2 軸爲虛軸的 (x_1, x_2) 平面, 則 (1.1) 有明確的幾何意義, 取 $z = x + iy$, 則由 (1.1) 得

$$x : y : -1 = x_1 : x_2 : x_3 - 1.$$

這說明點 $(x, y, 0)$, (x_1, x_2, x_3), $(0, 0, 1)$ 在一條直線上, 因此, 這個對應實際上是以 $(0, 0, 1)$ 爲中心的中心投影, 將 $\mathbb{S}^2$ 上的點投影到 $\mathbb{C}^*$ 上, 這稱爲球極平面投影, 在球面表示中, 無窮遠點不再有任何特殊了!

1.2. 複微分

如同普通微積分中那樣, 我們可以定義複數體上的複值函數 $w = f(z)$, 這裡 $z, w \in \mathbb{C}$, 爲了有確切的意義, 我們先限定 $f(z)$ 爲單值的。我們也可以用 $\varepsilon - \delta$ 的語言來定義函數的極限, 即

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

是指任給 $\varepsilon > 0$, 存在一個正數 δ, 對於所有複平面上的 z, 只要 $|z - z_0| < \delta$ $(z \neq z_0)$, 我們有 $|f(z) - A| < \varepsilon$, 如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 則稱 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 處連續。

如同普通微積分中那樣, 可以在複平面上定義開集合、閉集合, 集合的連通性、緊緻性等等。定義複平面中的曲線爲區間 $[a, b]$ 上的連續複值函數 $\gamma(t)$: $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, 此處 $x(t)$ 及 $y(t)$ 爲 t 的連續函數, $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ 稱爲曲線 $\gamma(t)$ 的端點。如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 則稱 $\gamma(t)$ 爲閉曲線, 曲線的方向就是 t 增加的方向, 如果 $\gamma'(t)$ 存在且連續, 則稱 $\gamma(t)$ 爲光滑曲線, 如果 $\gamma'(t)$ 除去有限個 t 外是連續的, 在這有限個 t 處, $\gamma(t)$ 有左、右導數, 則稱 $\gamma(t)$ 爲分段光滑曲線, 分段光滑曲線是可以求長的。若曲線 $\gamma(t)$ 僅當 $t_1 = t_2$ 時, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, 則稱 $\gamma(t)$ 爲簡單曲線, 或 Jordan 曲線。若 $\gamma(t)$ 同時是閉曲線, 則稱 $\gamma(t)$ 爲簡單閉曲線或 Jordan 閉曲線。

複平面上的一個點集合 Ω 稱爲一個區域 (domain), 如果

(1) Ω 爲開集合;
(2) Ω 爲連通, 即 Ω 上任意兩個點均可用完全位於 Ω 內的分段光滑曲線把它們連接起來。

區域 Ω 的邊界記作 $\partial\Omega_0$, 區域 Ω 稱爲單連通 (simply-connected) 的, 如果 Ω 內任何簡單閉曲線的內部仍屬於 Ω, 不是單連通的區域稱爲多連通區域 (multiply-connected domain)。由兩條 Jordan 閉曲線所圍成的區域是二連通區域, 由 n 條 Jordan 閉曲線所圍成的區域是 n 連通區域, 這些閉曲線可能退化成爲一個點或一條 Jordan 曲線。此外, 如同實數體的情形那樣, 我們可以證明 Heine-Borel 定理, Bolzano-Weiestrass 定理等等, 這裡不再詳敘。

Heine-Borel **定理**：若 K 爲 $\mathbb{C}$ 中的一個緊緻集合, G 爲 K 的一個開覆蓋, 則從 G 中可以選出有限個開集合覆蓋 K。

Bolzano-Weiestrass **定理**：任何一個有界的無窮集合至少有一個極限點。

我們現在來討論複變數複值函數的導數, 若 $w = f(x)$, 那麼自然地我們可以考察

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

這裡 $h \in \mathbb{C}$。如果這個極限對於所有的 $h \to 0$ 都存在且相等, 則稱 $f(z)$ 在 z 點可微, 記作 $\dfrac{df}{dz}$ 或 $f'(z)$, 稱爲 $f(z)$ 在 z 點的微商或導數(derivative)。

如果 $f(z)$ 在其定義區域上每一點都可微, 則稱 $f(z)$ 爲其定義區域上的解析函數 (analytic function) 或全純函數 (holomorphic function), 這個定義與普通微積分中微商的定義是一致的, 因此, 複微商的四則運算, 複合函數的微分等公式也是一致的, 這些公式讀者可以立即寫出來, 我們不再詳述! 但是, 複導數終究是在複平面上進行, 所以這裡有一些特殊的地方。

若

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

在點 $z_0 = x_0 + iy_0$ 處可微, 則

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

對任意途徑 $z \to z_0$ 都存在且相等, 特別 z 沿著平行於座標軸的途徑趨於 z_0 也應存在且相等。先令 $z = x + iy_0$, $x \to x_0$, 則

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

再令 $z = x_0 + iy$, $y \to y_0$, 則

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \left[\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

比較兩式的實部與虛部, u, v 在點 (x_0, y_0) 處應滿足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.1}$$

(2.1) 式也可以寫成

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-i) \frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.2}$$

方程式 (2.1) 與 (2.2) 都稱爲 Cauchy-Riemann 方程, 簡稱 C-R 方程。C-R 方程爲 $f(z)$ 在一點 $z = z_0$ 處可微的必要條件, 但並不是充分條件。例如

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

在 $z=0$ 處, $f(z)$ 滿足 C-R 方程, 但不可微, 因爲取 $x=my$

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{f(z)}{z}=\frac{\overline{z}^2}{z^2}=\frac{m^4-4m^3i-6m^2-4mi+1}{m^4+2m^2+1},$$

令 $z\to 0$ 其極限不唯一! 但我們可以證明下面的定理。

定理 2.1. 函數 $f(z)=u\pm iv$ 在區域 Ω 內全純的充要條件是: u, v 在 Ω 內有一階連續偏導數, 且滿足 C-R 方程 (2.1) 或 (2.2)。

證明: (1) 必要性: 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 處可微, 則由上面討論, f 滿足 C-R 方程 (2.1) 或 (2.2)。在下一講中我們將證明, 全純函數的導數也是全純函數, 故 $f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y$ 也是連續函數。

(2) 充分性: 設 u, v 在點 $z_0=x_0+iy_0$ 處有一階連續偏導數, 且滿足 C-R 方程 (2.1), 記 $a=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$, 那麼

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=a(x-x_0)-b(y-y_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|),$$
$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=b(x-x_0)+a(y-y_0)+\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

其中 $|\Delta z|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, ε_1, ε_2 滿足

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=0.$$

將上面之第二式乘以 i 與第一式相加, 則得到

$$f(z)-f(z_0)=(a+ib)(z-z_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

即爲

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-(a+ib)=\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|)}{z-z_0}.$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=a+ib,$$

即

$$f'(z_0)=a+ib=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),$$

定理因而證畢。

上面的定理可以有如下的改進:

Loomen-Menchoff 定理

若 $f(z)$ 在開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 中連續, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 與 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 Ω 中每一點都存在, 且滿足 C-R 方程 (2.1), 則 $f(z)$ 在 Ω 上全純。

Loomen-Menchoff 定理說明定理 2.1 中 u, v 有一階連續偏導數的條件是不必要的, 前面所舉的例子, $f(z) = \begin{cases} \overline{z}^2/z, & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ 在 $z = 0$ 並不滿足 Loomen-Menchoff 定理的條件。當然, 我們在此不可能也沒有這個必要來證明這定理。

在第二講中如何將證明: 如 $f(z) = u + iv$ 在區域 Ω 內全純, 則其微分 $f'(z)$ 也是 Ω 內的全純函數, 所以 u, v 的二階偏導數也是連續的, 因而二階混合偏導數 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 與 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 是相等的, 由 C-R 方程得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

因而得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

同樣可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

這個方程稱爲 Laplace 方程, 它是偏微分方程理論中三個最基本的偏微分方程之一, 即橢圖型方程的典型範例, 記作

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

此處

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

滿足 $\Delta u = 0$ 的函數 u 稱爲調和函數。我們在此看到一個事實, 即全純函數 $f = u + iv$ 的實部與虛部均爲調和函數。

由於 $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, 於是 $x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$, x, y 的函數 $f(x, y)$ 可以考慮爲 z 及 $\overline{z}$ 的函數, 把 z 及 $\overline{z}$ 看作自變數, 如微分法則可用,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \pm i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

應用這個記號, 則一個函數 f 是全純的若且唯若 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, 換句話說, 一個全純函數是與 $\overline{z}$ 無

關, 而只是 z 的函數, 所以全純函數可以看作是一個複變數 z 的函數, 而不稱之爲兩個實變數的複值函數。$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 又等價於 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial z}$。應用這些記號, 則

$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

複微商有很好的幾何性質, 即共形性 (conformal property)。

設函數 $f(z)$ 在區域 Ω 內全純, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$, $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, 爲 Ω 內過點 z_0 的一條光滑曲線, 且 $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(t)$ 在點 z_0 的切線與實軸的夾角爲 $\arg(\gamma'(0))$, $f(z)$ 把 $\gamma(t)$ 映爲過點 $\omega_0 = f(z_0)$ 的光滑曲線 $\sigma(t) = f(\gamma(t))$, 於是

$$\sigma'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \quad \sigma'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0),$$

而 $\sigma(t)$ 在點 ω_0 的切線與實軸的夾角爲

$$\arg(\sigma'(0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(0)),$$

此即爲

$$\arg(\sigma'(0)) - \arg(\gamma'(0)) = \arg(f'(z_0)).$$

即 $\sigma(t)$ 在點 ω_0 處切向量的幅角與 $\gamma(t)$ 在點 z_0 處切向量的幅角之差總是 $\arg(f'(z_0))$, 與 $\gamma(t)$ 無關, 因此, 這點 z_0 的任意兩條光滑曲線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$, 它們在 $f(z)$ 映射下的像分別是過點 $w_0 = f(z_0)$ 的光滑曲線 $\sigma_1(t)$ 與 $\sigma_2(t)$, 於是

$$\arg(\sigma_2'(0)) - \arg(\gamma_2'(0)) = \arg(\sigma_1'(0)) - \arg(\gamma_1'(0)),$$

即

$$\arg(\sigma_2'(0)) - \arg(\sigma_1'(0)) = \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0)).$$

所以 $\gamma_1(t)$ 與 $\gamma_2(t)$ 在點 z_0 處的夾角等於 $\sigma_1(t)$ 與 $\sigma_2(t)$ 在點 $w_0 = f(z_0)$ 處的夾角, 也就是說, 在映射 $w = f(z)$ 之下, 在導數不爲零的點處, 兩條光滑曲線的夾角的大小及旋轉的方向是保持不變的, 此爲 $f(z)$ 在 z_0 處的保角性(conformal property)。

另一方面, 由於

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

任取這 z_0 的曲線 $\gamma_1(t)$, 在映射 $f(z)$ 下成爲 $\sigma(t)$, 那麼

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \gamma}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \gamma}} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

即像點之間的距離與原來兩點之間的距離之比的極限與曲線無關, 稱 $|f'(z_0)|$ 爲 $f(z)$ 在點 z_0 處的伸長度, 因此任意一個以 z_0 爲頂點的小三角形, 經過 $f(z)$ 映射後, 成爲一個曲邊三角形, 它們的微分三角形是相似的。

上述兩個性質加在一起, 稱爲共形性, 所以我們稱在 Ω 上的全純映射爲共形映射 (conformal mapping) (conformal mapping) (若 $f'(z) \neq 0$), 在後面幾講中, 我們要詳細討論這一主題。

1.3. 複積分

假設 $f(t) = u(t) + iv(t)$ 爲一個在實區間 $[a, b]$ 上定義的複值函數, 則

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

如果 γ 是一個分段可微弧段, 其方程爲 $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, $f(z)$ 在 γ 上定義且連續, 則 $f(z(t))$ 也是 t 的連續函數, 令

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

作爲 $f(z)$ 沿複曲線 γ 上積分的定義, 這是一個參數變換下的不變的積分。

如有增函數 $t = (t(r))$ 將 $r \in [c, d]$ 映爲 $a \leq t \leq b$, $t(r)$ 爲逐段可微, 則

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))z'(t)dt &= \int_c^d f(z(t(r)))z'(t(r))t'(r)dr \\ &= \int_c^d f(z(t(r)))\frac{dz(t(r))}{dr}dr.\end{aligned}$$

如果用 Riemann 和來定義線積分, 也可以獲得同樣的結果。於是我們便有與普通線積分一樣的性質, 例如

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz;$$

如果 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$, 則

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

所以對複積分沒有大多可以講的了。那麼對於微積分的第三部分, 也就是聯繫微分與積分成爲一對對立的微積分基本定理 (參考微積分五講), 我們要怎樣應用到複分析上呢? 在複平面上,

對應的是複形式的 Green's 公式, 我們現在盡量用一般通行的符號將之書寫出來。爲此緣故, 我們採用複的外微分形式, 視 z 與 $\overline{z}$ 爲獨立變量, 定義微分的外乘積爲:

$$dz \wedge dz = 0, \quad d\overline{z} \wedge d\overline{z} = 0, \quad dz \wedge d\overline{z} = -d\overline{z} \wedge dz,$$

這裡

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy.$$

所以

$$\begin{aligned} d\overline{z} \wedge dz &= (dx - idy) \wedge (dx + idy) = -idy \wedge dx + idx \wedge dy \\ &= 2idx \wedge dy = 2idA, \end{aligned}$$

這裡 dA 爲二維面積元素, 如同實分析的情況, 定義 0 次外微分形式爲函數 $f(z, \overline{z})$; 一次外微分形式爲 $w_1 dz + w_2 d\overline{z}$, 其中 w_1, w_2 爲 z, $\overline{z}$ 的函數; 二次外微分形式爲 $w dz \wedge d\overline{z}$, 其中 w 爲 z, $\overline{z}$ 的函數。定義外微分算子 $d = \partial + \overline{\partial}$, 其中 $\overline{\partial} = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, $\partial = \dfrac{\partial}{\partial z}$, 我們很容易證明 $ddw = 0$ 對任意外微分形式都成立, 於是複形式的 Green's 公式爲

定理 1.1. 若 $w = w_1 dz + w_2\, d\overline{z}$ 爲區域 Ω 上的一次外微分形式, 這裡 $w_1 = w_1(z, \overline{z})$, $w_2 = w_2(z, \overline{z})$ 均爲 $z, \overline{z}$ 的可微函數, d 爲外微分算子, 即 $d = \partial + \overline{\partial}$, 在此 $\partial = \dfrac{\partial}{\partial z}$, $\overline{\partial} = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, 記 Ω 的邊界爲 $\partial\Omega$, 則

$$\int_{\partial\Omega} w = \iint_{\Omega} dw. \tag{3.1}$$

證明: 若 $w_1 = \xi_1 + i\eta_1$, $w_2 = \xi_2 + i\eta_2$, 在此 ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 均爲實值可微函數, 於是

$$\begin{aligned} w &= w_1 dz + w_2 d\overline{z} \\ &= (\xi_1 + i\eta_1)(dx + idy) + (\xi_2 + i\eta_2)(dx - idy) \\ &= \Big[(\xi_1 + \xi_2)dx + (-\eta_1 + \eta_2)dy\Big] + i\Big[(\eta_1 + \eta_2)dx + (\xi_1 - \xi_2)dy\Big]. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} dw &= \partial(w_1 dz + w_2 d\overline{z}) + \overline{\partial}(w_1 dz + w_2 d\overline{z}) \\ &= \frac{\partial w_1}{\partial z} dz \wedge dz + \frac{\partial w_1}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz + \frac{\partial w_2}{\partial z} dz \wedge d\overline{z} + \frac{\partial w_2}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge d\overline{z} \\ &= \left(\frac{\partial w_1}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) d\overline{z} \wedge dz \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\xi_1 + i\eta_1) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\xi_2 + i\eta_2)\right] 2i dA$$
$$= \left[- \Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x}\Big) + i\Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y}\Big)\right] dA$$

由 Green's 公式, 我們有

$$\int_{\partial\Omega} (\xi_1 + \xi_2)dx + (-\eta_1 + \eta_2)dy = \iint_\Omega \Big(- \frac{\partial}{\partial x}(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\xi_1 + \xi_2)\Big) dA$$

及

$$\int_{\partial\Omega} (\eta_1 + \eta_2)dx + (\xi_1 - \xi_2)dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}(\xi_1 - \xi_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\eta_1 + \eta_2)\right) dA$$

所以式子 (3.1) 成立。

公式 (3.1) 在高維複歐氏空間也成立, 在複流形上也成立, 所以這是一般情況的特例, 這個一般形式也叫做 Stokes' 公式, 這個公式是第二講的出發點之一。

1.4. 初等函數

在微積分中, 初等函數是由三類函數以及它們的複合函數所構成的, 這三類函數是

(1) 冪函數, 多項式, 有理分式及其反函數;

(2) 三角函數及其反函數;

(3) 指數函數及其反函數, 即對數函數。

在複數體中如何定義這三類函數? 有些是顯而易見的, 例如, 對於多項式只要將實變數換成複變數即可。但另外一些函數, 如 $\sin z$, 當 z 是複數時, 這是什麼意思? 又如 e^z 當 z 是複數時, 這又是什麼意思? 對這些函數, 我們必須重新定義! 即要有確切的意義, 當變數限制在實數體時, 又要與原來的定義一致, 一個自然的想法是用級數來定義!

若 $y \in \mathbb{R}$, 則

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots$$

十分自然地去定義

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(-y)^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^3}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

但是我們知道:

$$1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots=\cos y$$
$$\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots=\sin y$$

所以就有

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{4.1}$$

這就是著名的 Euler 公式。

這裡建議對任意的複數 $z=x+iy$, 定義

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{4.2}$$

於是, (4.1) 是 (4.2) 的推論, (4.1) 是非常重要的公式, 它告訴我們指數函數與三角函數之間是可以互相表示的。由 (4.1) 即得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

由此建議我們: 對任意複數 $z=x+iy$, 定義

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{4.3}$$

當然, 由此我們也可定義: $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ 等等。由 (4.3) 我們立刻可以得到, 若 y 爲實數, 則 $\cos(iy)=\cosh y$ 及 $\sin(iy)=i\sinh y$。

從定義 (4.2) 可以定義 e^z 的反函數 $\log z$, 這可以看成滿足 $e^w=z$ 的複數 w 稱爲 z 的對數, 記作 $\log z$。同樣由 (4.3) 可以定義 $\cos z$ 及 $\sin z$ 的反函數, $\arcsin z$ 及 $\arccos z$ 等等。

對於冪函數 z^a, 當 a 爲整數時, 其意義是十分明確的, 對於任意的複數 a, 十分自然地可定義

$$w=z^a=e^{a\log z}. \tag{4.4}$$

由 (4.2), (4.3) 及 (4.4) 定義的函數性質, 我們下面會作進一步的討論。但在這裡我們想指出, 在微積分中看來互不相關的三類初等函數, 在複數體中卻成爲一類, 即指數函數及其反函數, 而三角函數及其反函數, 冪函數及其反函數均可由此來表達。我們之所以能這樣做, 其關鍵在於公式 (4.1), 即 Euler 公式, 這是個十分深刻的公式, 例如當 $y=\pi$ 時, 則公式 (4.1) 成爲 $e^{i\pi}=-1$, 這是聯繫數學中四個重要的常數, π, e, i, -1 的一個公式。又例如有用的 De Moivre 公式,

$$(\cos y+i\sin y)^n=\cos(ny)+i\sin(ny),$$

也是公式 (4.1) 的一個推論。

以下我們來看看這樣定義出來的初等函數的性質。先看指數函數, 由定義 (4.2) 得到

(1) 指數函數不取零值; $e^z \neq 0$, 這是因爲 $|e^z| = e^x > 0$。

(2) 對於任意 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 我們有 $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, 這是因爲

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

(3) e^z 以 $2\pi i$ 爲周期, 這是因爲 $e^{2\pi i} = 1$。

(4) e^z 在 $\mathbb{C}$ 上爲全純, 且 $(e^z)' = e^z$, 這是因爲由 (4.2), $e^z = u(x,y) + iv(x,y)$, 故

$$u(x,y) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = e^x\sin y,$$

因此,

$$u_x = e^x\cos y = v_y, \quad u_y = -e^x\sin y = v_x,$$

這都是 $\mathbb{C}$ 上的連續函數, 由定理 2.1, e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全純且

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z.$$

以上可以看到在實數體中 e^x 的主要性質, 在複數體中依然成立。如果將 $w = f(z)$ 看作由 z 平面上的一個區域到 w 平面上的一個區域的映射, 如果這個映射是一對一的, 我們便稱這個映射爲單葉映射。我們繼續來討論指數函數。

(5) e^z 的單葉性區域, 即怎樣的區域上 e^z 看作映射可以建立起一一對應。

設 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 使 $e^{z_1} = e^{z_2}$ 成立, 即

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

成立, 也就是 $e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}$ 成立。因此, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2k\pi$, 即 $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 取帶狀區域 $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 作爲 e^z 的單葉區域。例如取 $z = x + iy$, $0 < y < 2\pi$。則 e^z 將此帶狀區域單葉地映到 $\mathbb{C}$ 上去掉正實軸的區域 $E = \mathbb{C} \setminus \{z : z \geq 0\}$。再看看指數函數的反函數, 即對數函數, 對於 $z \neq 0$, 滿足 $e^w = z$ 的複數 w 稱爲 z 的對數, 記作 $\log z$。由於指數函數的周期性 $\log z$ 是 (無窮) 多值函數。假設

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = u + iv,$$

則

$$e^{u+iv} = re^{i\theta},$$

得到 $e^u = r$, $v = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 所以

$$w = \log z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$$

或記作

$$w = \log|z| + i\arg(z),$$

這裡 $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ 爲 z 的幅角。

對數函數有性質

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

這是因爲 $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ 。

由指數函數的討論知道: 若在區域 $\Omega : \mathbb{C} \setminus \{z : z \geq 0\}$ 上 z 的幅角取主值 $0 < \arg(z) < 2\pi$, 則函數

$$w_k(z) = \log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

把 Ω 單葉地映爲平行於實軸的帶狀區域, $E_k : 2k\pi < v < 2(k+1)\pi$。它們都是指數函數 $z = e^w$ 的反函數, 且在區域 Ω 內全純, 並且有 $(w_k)' = \dfrac{1}{z}$, 稱 $w_0(z) = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z)$ 爲 $\log z$ 的主值分支 (principal branch), 記作 $\mathrm{Log}\, z$, 即

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z).$$

爲方便起見, 有時我們也取 $-\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$。

我們再來看三角函數, 由定義 (4.3), 我們立即可以得到

(1) $\sin z$ 與 $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上全純, 而且 $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$。

(2) $\cos z$, $\sin z$ 以 2π 爲周期, 即

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

(3) $\cos z$ 爲偶函數, $\sin z$ 爲奇函數, 即

$$\sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos(-z) = \cos z.$$

(4) 和角公式成立, 即

$$\sin(z_1+z_1)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,\quad \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

(5) $\cos z$ 與 $\sin z$ 的基本關聯公式

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$$

成立。

(6) $\sin z$ 僅在 $z=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 處爲零, 而 $\cos z$ 僅在 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 處爲零。

由以上 (1)−(6), 我們看見實數體上定義的 $\sin x$, $\cos x$ 的主要性質, 在複數體上依然成立, 但是 $\cos x$, $\sin x$ ($x\in\mathbb{R}$) 與 $\cos z$, $\sin z$ ($z\in\mathbb{C}$) 有不同之處 :

(7) $|\sin z|$ 與 $|\cos z|$ 是無界的, 這是由於 (4),

$$\begin{aligned}|\sin z|^2=|\sin(x+iy)|^2&=|\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)|^2\\&=|\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y|=\sinh^2 y+\sin^2 x,\end{aligned}$$

這是個無界函數。同樣, $|\cos z|^2=\cosh^2 y-\sin^2 x$, 這也是一個無界函數。

(8) $\sin z$ 與 $\cos z$ 的單葉性區域。

我們先考察 $w=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, 這是三個函數 $\xi=iz$, $\zeta=e^{\xi}$, $w=\dfrac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$ 的複合。第一個函數只是旋轉, 故映射處處單葉。第二個函數單葉的充要條件爲: ξ 平面上的區域不包含滿足 $\xi_2-\xi_1=2k\pi i$ 的兩點 ξ_1, ξ_2, 此處 $k\in\mathbb{Z}$, 換句話說, 在 z 平面上不包含 $z_1-z_2=2k\pi$ 的兩點。第三個函數單葉的充要條件爲: 在 ζ 平面上不包含 $\zeta_1\zeta_2=1$ 的兩點 ζ_1 與 ζ_2, 在 z 平面上就是不包含滿足條件 $e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}=1$, 即 $z_1+z_2=2k\pi$ 的兩點, 因此, 帶狀區域 $0<\mathrm{Re}(z)<\pi$ 就可作爲 $\cos z$ 的單葉區域。

$\xi=iz$ 將 $0<\mathrm{Re}(z)<\pi$ 單葉地映爲 $0<I_m(z)<\pi$, $\zeta=e^{\xi}$ 又將後面這個帶狀區域單葉地映爲上半平面 $\mathrm{Im}(\zeta)>0$, 最後 $w=\dfrac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$ 又將上半平面映爲除去實軸上 $-\infty<u\le -1$ 和 $1\le u<+\infty$ 的整個 w 平面, 即 $w=\cos z$, 將 $0<\mathrm{Re}(z)<\pi$ 單葉地映爲 w 平面上去掉 $-\infty<u\le 1$, $v=0$ 及 $1\le u<+\infty$, $v=0$ 的區域。同樣地, 我們也可以考慮 $w=\sin z$, $w=\tan z$ 等函數的單葉性區域。

再來看看反三角函數, 先看 $w=\arccos z$, 即 $\cos w=z$, 由於

$$\cos w=\frac{1}{2}(e^{iw}+e^{-iw})=z,$$

這是一個 e^{iw} 的二次方程式, 其根爲 $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2-1}$, 即

$$w = \arccos z = -i\log(z \pm \sqrt{z^2-1}) = \pm i\log(z + \sqrt{z^2-1}).$$

所以 $\arccos z$ 有無窮多值, 這反映了 $\cos w$ 的周期性, 另一方面, $\arcsin z$ 可定義爲 $\dfrac{\pi}{2} - \arccos z$。

最後我們來看看冪函數, 由定義 (4.4) 知, 若 $\alpha = a + ib$, 則

$$\begin{aligned} z^\alpha = e^{\alpha \log z} &= e^{(a+ib)[\log|z| + i(\arg(z)+2k\pi)]} \\ &= e^{a\log|z| - b(\arg(z)+2k\pi)} \cdot e^{i[b\log|z| + a(\arg(z)+2k\pi)]}, \end{aligned}$$

這裡 $k \in \mathbb{Z}$, 記 $\rho_k = e^{a\log|z| - b(\arg(z)+2k\pi)}$, $\theta_k = b\log|z| + a(\arg(z)+2k\pi)$, 則

$$w = z^\alpha = \rho_k e^{i\theta_k}, \qquad |w| = \rho_k.$$

因此, 若 $b \neq 0$, 則 $w = z^\alpha$ 是無窮多值函數; 若 $b = 0$, 則 α 爲實數 a, 而

$$w = z^\alpha = e^{a\log|z|} e^{ia(\arg(z)+2k\pi)} = |z|^a e^{ia(\arg(z)+2k\pi)}.$$

這時 z^a 的值, 都在圓周 $|w| = |z|^a$ 上, 所以

(1) 當 $\alpha = a = n$ 爲整數時, $z^a = z^n$ 是單值的;

(2) 當 $\alpha = a = \dfrac{p}{q}$ 爲既約分數 (i.e., $(p,q) = 1$), 且 $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, 則

$$z^a = e^{\frac{p}{q}\log|z|} e^{i\frac{p}{q}(\arg(z)+2k\pi)} = |z|^{\frac{p}{q}} e^{i\frac{p}{q}\arg(z)} e^{i\frac{p}{q}2k\pi}.$$

由於 $\dfrac{p}{q}2k\pi$ 僅當 $k = 0, 1, \ldots, q-1$ 時, 這 q 個值關於 2π 是不同餘的, 而 k 取其他值時, 其相對應的值均與上述 q 個值中的某一個關於 2π 是同餘的, 故對於給定的 z, z^a 只有 q 個不同的值;

(3) 當 $\alpha = a$ 爲無理數, 則 z^a 爲無窮多值函數。

1.5. 複數級數

在這一講中, 我們最後可以看到實分析中的級數理論有一部分也可以沒有困難地推廣到複數體。例如: 函數序列 $\{f_n(z)\}$ 在集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上一致收斂到 $f(z)$ 是指: 對任給的 $\varepsilon > 0$, 一定存在一個只依賴於 ε 而不依賴於 z 的 $N \in \mathbb{N}$, 使得所有的 $n \geq N$ 和所有的 $z \in \Omega$, 都有

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

如同在實分析中一樣, 可以證明: 一個一致收斂的連續函數序列, 其極限函數本身也是連續的, 我們也很容易得到下面二個定理:

Cauchy **判別準則** 函數序列 $\{f_n(z)\}$ 在集合 $\Omega \in \mathbb{C}$ 上一致收斂的充要條件是: 對於給定的 $\varepsilon > 0$, 一定存在一個只依賴於 ε 而不依賴於 z 的正整數 N, 使得對所有的 $m, n \geq N$ 和所有的 $z \in \Omega$, 我們有

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Weierstrass M - **判別法** 若函數項級數

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

在集合 $\Omega \in \mathbb{C}$ 上定義, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 爲一正項級數, 若存在 N 及常數 $M > 0$, 當 $n > N$ 時, 對所有 $z \in \Omega$ 使得 $|f_n(z)| \leq Ma_n$ 都成立。如果級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 上一致收斂。

特別考慮冪級數

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{5.1}$$

我們則有如下的結果。

定理 1.2. (Abel **定理**) 對於冪級數 (5.1), 存在一個數 R, $0 \leq R \leq +\infty$, 稱爲它的收斂半徑, 具有下列性質:

(1) 對於每一個使 $|z| < R$ 的 z, 級數絕對收斂, 如果 $0 \leq \rho \leq R$, 則對於 $|z| \leq \rho$, 級數一致收斂;
(2) 如果 z 滿足 $|z| > R$, 則級數的項無界, 級數發散;
(3) 在 $|z| < R$ 內, 級數的和是一個全純函數, 它的導數可以通過逐項微分求得, 所得的級數與原來級數有相同的收斂半徑, 圓 $|z| \leq R$ 稱爲收斂圓。在收斂圓周上, 收斂性不一定, R 可取爲

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5.2}$$

這稱爲收斂半徑的 Hadamard 公式。

我們現在來證明定理 1.2。

證明: 如果 $|z| < R$, 則可找到 $\rho > 0$, 使得 $|z| < \rho < R$, 於是 $\dfrac{1}{\rho} > \dfrac{1}{R}$。由 (5.2), 存在一個 N_0 使得當 $n \geq N_0$ 時, 有 $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{\rho}$, 即 $|a_n| < \dfrac{1}{\rho^n}$, 故當 $n \geq N_0$ 時, $|a_n z^n| < \left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$。

由於 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ 當 $|z|<\rho$ 時收斂, 由 Weiestrass M - 判別法知: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 絕對收斂, 爲了證明級數在 $|z|\le\rho\ (<R)$ 中的一致收斂性, 選取 ρ', N_1, 使得 $\rho<\rho'<R$, 對於 $n\ge N_1$, $|a_nz^n|\le\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$ 成立。由 Weierstrass M - 判別法, 知 (5.1) 在 $|z|\le\rho$ 中一致收斂。

如果 $|z|>R$, 取 ρ 使得 $R<\rho<|z|$, 由於 $\frac{1}{\rho}<\frac{1}{R}$, 故存在一個 N_2, 使得當 $n\ge N_2$ 時, $|a_n|^{\frac{1}{n}}>\frac{1}{\rho}$, 即 $|a_n|>\frac{1}{\rho^n}$, 於是有無窮多個 n, 使得 $|a_nz^n|>\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$, 故級數無界。

級數 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$ 與級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 有相同的收斂半徑, 這是因爲 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 對於 $|z|<R$, 記

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=S_n(z)+R_n(z),$$

這裡

$$S_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1},\qquad R_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_nz^n.$$

令 $f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n'(z)$, 我們要證明 $f_1(z)=f'(z)$。

取 $0<\rho<R$, 任意取定一點 z_0, $|z_0|<\rho$, 由於

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z)=\left(\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}-S_n'(z)\right)+\left(s_n'(z_0)-f_1(z)\right)+\left(\frac{R_1(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right),$$

若 $z\ne z_0$, 且 $|z|<\rho<R$, 則上式右邊最後一項可寫爲

$$\sum_{k=n}^{\infty}a_k\left(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+z^{k-3}z_0^2+\cdots+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1}\right),$$

故

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|\le\sum_{k=n}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1}.$$

這是一個收斂級數的餘項, 故存在 N, 使得當 $n\ge N_3$ 時, 我們有

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon/3.$$

由於 $f_1(z) = \lim_{n\to\infty} S_n'(z)$, 故存在 N_4, 使得 $N \geq N_4$ 時,

$$|S_n'(z_0) - f_1(z)| < \varepsilon/3.$$

取固定的 $n > N_3$, $n > N_4$, 由導數的定義, 可以找到 $\delta > 0$, 使得當 $0 < |z_0 - z| < \delta$ 時有

$$\left|\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right| < \varepsilon/3.$$

綜合上面各式子, 得到: 當 $0 < |z - z_0| < \delta$ 時, 有

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0)\right| < \varepsilon,$$

這就證明了 $f'(z_0) = f_1(z_0)$, 定理 1.2之證明完畢。

這種推理可重複進行, 得到

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2 + \cdots$$

對任意 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。由此可得 $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, 故冪級數可以寫成

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots,$$

這是 Taylor - Maclaurin 級數, 這是在 $f(z)$ 具有一個冪級數展開式這個假定下證明的, 即如果展開式存在則唯一確定, 在下一講中我們將證明: 每一全純函數具有一個 Taylor 展開式。

由指數函數的性質 (4), $(e^z)' = e^z$, 我們立即得到 e^z 的 Taylor 級數

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

由定義 (4.3), 得到 $\cos z$ 及 $\sin z$ 的 Taylor 展開式爲

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots,$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

由 Hadamard 公式, 這三個級數是在全複平面上爲一致收斂的。

—本文作者龔昇任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—

數學傳播　34卷3期, pp. 49-73

複分析五講　第二講

Cauchy 積分定理與 Cauchy 積分公式

龔　昇・張德健

2.1. Cauchy - Green 公式 (Pompeiu 公式)

Cauchy 積分理論是複變函數論中三個主要組成部分之一, 有了 Cauchy 積分理論, 複變函數論才形成一門獨立的學科, 並且導出一系列在微積分中得不到的結果。我們先從 Cauchy - Green 公式開始, 這是上一章中的定理 1.1 (複形式的 Green 公式) 的直接推論。

定理 2.1. (Cauchy - Green **公式**, Pompein **公式**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲 C^1 邊界, 即 $\partial\Omega$ 爲光滑曲線, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, 即 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上有一階連續偏導數, 則

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi_0}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi_0}\iint_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\cdot\frac{dA}{\zeta - z}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

證明: 在 z 點的附近作一個以 z 爲中心, ε (>0) 爲半徑的小圓盤 $D(z;\varepsilon)$, 且 $D(z;\varepsilon) \subset \Omega$。記 $\Omega_{z,\varepsilon} = \Omega \setminus D(z;\varepsilon)$ 在 $\Omega_{z,\varepsilon}$ 中考慮微分形式

$$\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

則由第一講之定理 1.1得到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\partial D_{z,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right).$$

由 d_ζ 的定義知,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) &= \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}(\partial + \overline{\partial})\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) \\ &= \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\partial\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) + \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\overline{\partial}\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right). \end{aligned}$$

由於

$$\partial\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta\wedge d\zeta=0$$

以及

$$\overline{\partial}\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta+f\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)d\overline{\zeta}\wedge d\zeta,$$

而 $\dfrac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\dfrac{1}{\zeta-z}=0$, 所以 $\overline{\partial}\left(\dfrac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\dfrac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta$.

因此

$$\iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta-z}.$$

另一方面, 由於

$$\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta,$$

而由假設, $f(\zeta)\in C^1(\overline{\Omega})$, k 存在常數 c, 使得

$$|f(\zeta)-f(z)|<c|\zeta-z|$$

在 $\partial D(z;\varepsilon)$ 上成立, 於是

$$\left|\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|<c\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\left|\frac{\zeta-z}{\zeta-z}\right||d\zeta|=2\pi\varepsilon\cdot c,$$

當 $\varepsilon\to0$ 時, 上述積分 $\to0$, 而當 $\zeta\in\partial D(z;\varepsilon)$時, ζ 可表爲 $\zeta=z+\varepsilon e^{i\theta}$, $0\le\theta\le2\pi$, 於是

$$\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon e^{i\theta}id\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}=2\pi if(z).$$

因此,

$$\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-2\pi if(z)=\iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta-z}+O(\varepsilon),$$

這裡 $O(\varepsilon)$ 表示一個量, 當此量除以 ε, 而讓 $\varepsilon\to0$ 時, 其值趨於常數, 在上式中令 $\varepsilon\to0$, 即得到 (1.1), 定理 2.1因而證畢。

由定理 2.1, 我們立即可以得到下面之結果。

定理 2.2. (Cauchy **積分公式**) 若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 爲有界區域, 且 $\partial\Omega$ 爲 C^1 邊界, $f(z)$ 爲 Ω 上的全純函數, 且 $f(z)\in C^1(\overline{\Omega})$, 則

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.\tag{1.2}$$

由此我們還可以得到

定理 2.3. (Cauchy **積分定理**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, 且 $\partial\Omega$ 爲 C^1 邊界, $F(z)$ 爲 Ω 上的全純函數, 且 $F(z) \in C^1(\overline{\Omega})$, 則

$$\oint_{\partial\Omega} F(\zeta)d\zeta = 0. \tag{1.3}$$

證明: 我們不妨假設原點 $o \in \Omega$, 令 $f(z) = zF(z)$, 以此代入 (1.2) 式中, 再令 $z = 0$, 即得到 (1.3) 式, 定理因而證畢。

由上面的討論, 我們知道 Cauchy 積分定理可由 Cauchy 積分公式推出。當然, 定理 2.3 也可以由定理 2.1直接證明之。 反過來說, 由 Cauchy 積分定理可以導出 Cauchy 積分公式。在 Ω 中固定一個點 z_0, 考慮 $\Omega_{z_0,\varepsilon} = \Omega \setminus D(z_0;\varepsilon)$, 取 $F(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$, 如同證明定理 2.1那樣, 我們可以立即得到定理 2.2, 因此定理 2.2同定理 2.3是相互等價的, 這兩個相互等價的定理即是複變函數論的重要基石之一。

Cauchy - Green 公式的另一個重要應用是解一維的 $\overline{\partial}$ - 問題, 這個結果將會在下一講中用到。若 ϕ 爲一個連續函數, 使 $\phi \neq 0$ 的所有的點之集合的閉包 (closure) 稱爲 ϕ 的支集 (support), 記作 Supp(ϕ)。

定理 2.4. (**一維的** $\overline{\partial}$ **- 問題的解**) 若 $\phi(z) \in C^1(\mathbb{C})$, 且有緊緻支集, 即其支集爲緊緻的, 令

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\overline{\zeta} \wedge d\zeta, \tag{1.4}$$

則 $u(z) \in C^1(\mathbb{C})$, 且爲 $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = \phi(z)$ 的解。

證明: 固定 $z \in \mathbb{C}$, 令 $\zeta - z = \xi$, 則

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\xi + z)}{\xi} d\overline{\xi} \wedge d\xi.$$

由於 $\dfrac{1}{\xi}$ 在任意緊緻集合上可積, 故 $u(z)$ 爲連續函數, 若 $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, 則

$$\frac{u(z+h) - u(z)}{h} = \frac{-1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\phi(\xi + z + h) - \phi(\xi + z)}{h} d\overline{\xi} \wedge d\xi.$$

固定 z 與 ξ, 當 $h \to 0$ 時,

$$\frac{\phi(\xi + z + h) - \phi(\xi + z)}{h} \to \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi + z),$$

由於 $\phi \in C^1(\mathbb{C})$, 且有緊緻支集, 所以

$$\frac{\phi(\xi+z+h)-\phi(\xi+z)}{h} \to \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi+z),$$

對 ξ 及 z 來講是一致的, 所以我們有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(u(z+h)-u(z)\Big)\\ &= \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{1}{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\xi+z)d\overline{\xi}\wedge d\xi\\ &= \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta, \qquad (1.5)\end{aligned}$$

這裡 $\zeta=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 而這個極限對 $\mathbb{C}$ 中任意緊緻集合的點 z 來講是一致的, 故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 是連續函數, 同理

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{1}{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial \beta}(\xi+z)d\overline{\xi}\wedge d\xi = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial \phi}{\partial \beta}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta. \qquad (1.6)$$

且 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 是連續函數, 故 $u\in C^1(\mathbb{C})$。

由公式 (1.5) 及 (1.6) 立即得到

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta. \qquad (1.7)$$

由於 $\phi(z)$ 有緊緻支集 $\mathrm{Supp}(\phi)$, 則存在 $R>0$, 使得 $\mathrm{Supp}(\phi)\subset D(0;R)=\{z\in\mathbb{C}: |z|<R\}$。於是由公式 (1.7) 得到: 取 $\varepsilon>0$, 則

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{D(0;R+\varepsilon)}\frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta.$$

由 Cauchy - Green 公式得到上式右邊等於

$$\phi(z)-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0;R+\varepsilon)}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

而 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0;R+\varepsilon)}\dfrac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0$, 故得 $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}}(\zeta)=\phi(z)$, 定理因而證畢。

顯而易見, 若 $\phi(z)\in C^k(\mathbb{C})$ 有緊緻支集, 則由公式 (1.4) 所定義的 $u(z)\in C^k(\mathbb{C})$, 這裡 $k\in\mathbb{N}$ 或 $k=\infty$。同樣顯然的是: 若 $\phi(z)\in C^k(\mathbb{C})$, 其支集爲互不相交的緊緻集合的聯集 (有限個或無限個), 則定理 2.4 依然成立。

2.2. Cauchy - Goursat 定理

Cauchy 當初建立的積分公式與積分定理就是定理 2.2及定理 2.3的形式。後來 Goursat 去掉了 $f(z) \in C^1(\overline{\Omega})$ 的條件, 成爲 Cauchy-Goursat 積分公式與積分定理, 從而成爲一般通常應用的公式與定理。

定理 2.2′. (Cauchy-Goursat **積分公式**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲簡單封閉曲線, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{2.1}$$

定理 2.3′. (Cauchy-Goursat **積分定理**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲簡單封閉曲線, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$上連續, 則有

$$\oint_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 0. \tag{2.2}$$

顯然定理 2.2′ 與定理 2.3′ 是相互等價的, 這裡我們只證明定理 2.3′, 用的是傳統的方法, 我們先要證明下面兩個引理。

引理 2.1. 設 $f(z)$ 爲在區域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的連續函數, γ 是這個區域內的任意一條逐段光滑曲線, 則對任意小的 $\varepsilon > 0$, 存在一條內接於 γ, 且完全在 Ω 內的折線 Σ, 使得

$$\left| \int_{\Sigma} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon$$

成立。

證明: 在 Ω 內取一個閉子區域 $\overline{D} \subset \Omega$, 使得 $\gamma \subset \overline{D}$, 由於 $f(z)$ 在 Ω 上連續, 故在 $\overline{D}$ 上一致連續, 因此, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得對 $\overline{D}$ 內任意滿足 $|z - w| < \delta$ 的兩點, $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ 都成立。我們分 γ 爲 n 段, 長度都小於 δ 的弧 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, 且內接於 γ 作折線 Σ, 使它的連接線段 $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ 正好對著這些弧, 以 $z_0, z_1, \ldots, z_n$ 表示折線 Σ 的頂點。由於每一段 γ_k 的長度都小於 δ, 故每個弧段上任意兩點的距離都小於 δ, 對 l_k 上的任意兩點也是如此, 積分 $\int_{\gamma} f(z) dz$ 有近似值

$$S = f(z_0)\Delta z_1 + f(z_1)\Delta z_1 + \cdots + f(z_{n-1})\Delta z_{n-1},$$

這裡 $\Delta z_k = \int_{\gamma_k} dz$, 這也可以表示爲

$$S = \int_{\gamma_0} f(z_0) dz + f_{\gamma_1} f(z_1) dz + \cdots + \int_{\gamma_{n-1}} f(z_{n-1}) dz.$$

於是

$$\int_\gamma f(z)dz - S = \int_{\gamma_0} (f(z)-f(z_0))dz + \int_{\gamma_1} (f(z)-f(z_1))dz + \cdots + \int_{\gamma_{n-1}} (f(z)-f(z_{n-1}))dz.$$

由於在每段 γ_k 上都有 $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$, 故

$$\left| \int_\gamma f(z) - S \right| < \varepsilon|\gamma_0| + \varepsilon|\gamma_1| + \cdots + \varepsilon|\gamma_{n-1}| = \varepsilon L$$

這裡 L 爲 γ 的長度, 由於 Δz_k 也可以表示成 $\int_{l_k} dz$, 故同樣地,

$$\int_\Sigma f(z) - S = \int_{\ell_0} (f(z)-f(z_0))dz + \int_{\ell_1} (f(z)-f(z_1))dz + \cdots + \int_{\ell_{n-1}} (f(z)-f(z_{n-1}))dz.$$

同樣得到

$$\left| \int_\Sigma f(z)dz - S \right| < \varepsilon|\ell_0| + \varepsilon|\ell_1| + \cdots + \varepsilon|\ell_{n-1}| = \varepsilon(|\ell_0| + |\ell_1| + \cdots + |\ell_{n-1}|) < \varepsilon L.$$

故

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)dz - \int_\Sigma f(z)dz \right| &= \left| \int_\gamma f(z)dz - S \right| + \left| \int_\Sigma f(z)dz - S \right| \\ &< \varepsilon L + \varepsilon L = 2\varepsilon L. \end{aligned}$$

這就證明了引理 2.1。

引理 2.2. 若 $f(z)$ 是在單連通區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上的全純函數, 則沿 Ω 內任一條逐段光滑封閉曲線 γ 所取的積分 $\int_\gamma f(z)dz = 0$。

證明: 由引理 2.1, 任給 $\varepsilon > 0$, 任意一條逐段光滑封閉曲線 γ 都可用一條封閉折線 Σ 來內接之, 且

$$\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_\Sigma f(z)dz \right| < \varepsilon$$

成立。

如果對任意封閉折線, 引理 2.2成立即 $\int_\Sigma f(z)dz = 0$, 由此即可得出引理 2.2對任意逐段光滑封閉曲線也都成立。

對任意封閉折線, 我們均可添加直線段, 使之分解成若干個三角形之和。因爲在添加的這些線段上, 積分的值相互抵消, 於是在封閉折線上的積分等於在這些三角形上的積分總和, 如果能證明在三角形 (如圖 1) 上, 引理 2.2是成立的。那引理 2.2對任意逐段光滑封閉也都成立。現在我們來證明引理 2.2對三角形成立。

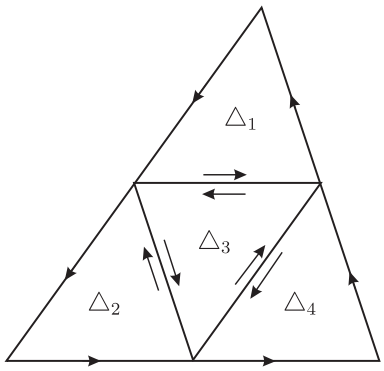


圖1

設在 Ω 內任一三角形邊界 $\triangle$ 上, $f(z)$ 的積分的絕對值爲 M, 即

$$\left|\int_{\triangle} f(z)dz\right| = M.$$

現要證明 $M = 0$, 二分三角形的每一邊, 兩兩相接這些分點, 給定的三角形被分爲四個全等的三角形, 它們的周界分別爲 $\triangle_1$ $\triangle_2$, $\triangle_3$ 及 $\triangle_4$, 於是

$$\int_{\triangle} f(z)dz = \left(\int_{\triangle_1} + \int_{\triangle_2} + \int_{\triangle_3} + \int_{\triangle_4}\right) f(z)dz.$$

由於 $|\int_{\triangle} f(z)dz| = M$, 故至少有一個 $\triangle_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ 使得 $|\int_{\triangle_k} f(z)dz| \geq \frac{M}{4}$。不妨設此爲 $\triangle_1 = \triangle^{(1)}$, 於是 $|\int_{\triangle^{(1)}} f(z)dz| \geq \frac{M}{4}$, 對 $\triangle_1$ 用同樣方法分成四個全等三角形, 又可找到一個三角形 $\triangle^{(2)}$, 使得 $|\int_{\triangle^{(2)}} f(z)dz| \geq \frac{M}{4^2}$, 這樣可以無限止的進行下去, 於是得到一個三角形序列

$$\triangle = \triangle^{(0)}, \quad \triangle_1 = \triangle^{(1)}, \quad \triangle^{(2)}, \ldots, \triangle^{(n)}, \ldots$$

前一個包含後面一個, 而且

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.3}$$

以 L 表示 $\triangle$ 的周長, 於是 $\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \ldots, \triangle^{(n)}, \ldots$ 的長度爲 $\frac{L}{2}, \frac{L}{2^2}, \ldots, \frac{L}{2^n}, \ldots$。當 $n \to \infty$ 時, 這趨於零, 故存在一點 z_0, 屬於所有的 $\triangle^{(n)}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, 對於任給 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 只要 $|z - z_0| < \delta$, 就有

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

成立, 即 $|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|$ 成立, 當 n 充分大時, $\triangle^{(n)}$ 全落在 $D(z_0;\varepsilon)$ 之中, 顯然 $\int_{\triangle^{(n)}}dz=0$ 及 $\int_{\triangle^{(n)}}zdz=0$, 故

$$\int_{\triangle^{(n)}}f(z)dz=\int_{\triangle^{(n)}}(f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0))dz.$$

$$\left|\int_{A^{(n)}}f(z)dz\right|<\int_{A^{(n)}}\varepsilon\cdot|z-z_0||dz|.$$

但 $|z-z_0|$ 爲 $A^{(n)}$ 上任意一點 z 到這三角形內一點 z_0 的距離, 故

$$|z-z_0|<\frac{L}{2^n}.$$

因此

$$\left|\int_{A^{(n)}}f(z)dz\right|<\varepsilon\cdot\frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n}=\varepsilon\cdot\frac{L^2}{4^n},\tag{2.4}$$

比較式子 (2.3) 與 (2.4), 即得 $M<\varepsilon L^2$ 對任意 $\varepsilon>0$ 都成立, 故 $M=0$, 引理 2.2 因而證畢。

現在我們來證明定理 2.3′。

定理 2.3′ 的證明: 我們先證明定理 2.3′ 對具有特殊性質的 Ω 成立。

若 $\partial\Omega$ 爲由 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 及兩條可求長連續曲線

$$MN:y=\varphi(x),\quad a\le x\le b$$
$$PQ:y=\psi(x),\quad a\le x\le b$$

所圍成的區域 (見圖 2), 其中 $\varphi(x)<\psi(x)$ $(a<x<b)$, 假定 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 要證

$$\oint_{MNQPM}f(z)dz=0.\tag{2.5}$$

作直線 $x=a+\varepsilon$, $x=b-\varepsilon$ 及

$$M'N':y=\varphi(x)+\eta,\quad a\le x\le b$$
$$P'Q':y=\psi(x)-\eta,\quad a\le x\le b$$

其中 ε, η 爲充分小的正數, 由於 Ω 爲單連通區域, 故

$$\oint_{M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'}f(z)dz=0.$$

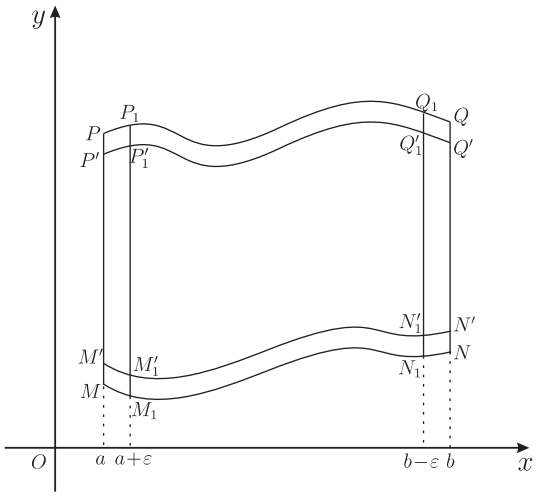


圖2

其中 $M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'$ 爲由上述兩條直線及兩條曲線所圍成的區域的邊界。固定 ε, 令 $\eta \to 0$, 由於 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致連續, 故有

$$\int_{M_1'N_1'} f(z)dz \to \int_{M_1N_1} f(z)dz, \quad \int_{Q_1'P_1'} f(z)dz \to \int_{Q_1P_1} f(z)dz,$$

$$\int_{P_1'M_1'} f(z)dz \to \int_{P_1M_1} f(z)dz, \quad \int_{N_1'Q_1'} f(z)dz \to \int_{N_1Q_1} f(z)dz,$$

因此

$$\oint_{M_1N_1Q_1P_1M_1} f(z)dz = 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 同理可得

$$\int_{M_1N_1} f(z)dz \to \int_{MN} f(z)dz, \quad \int_{Q_1P_1} f(z)dz \to \int_{QP} f(z)dz,$$

如能證明: 當 $\varepsilon \to 0$ 時,

$$\int_{P_1M_1} f(z)dz \to \int_{PM} f(z)dz, \quad \int_{N_1Q_1} f(z)dz \to \int_{NQ} f(z)dz,$$

則 (2.5) 得證。這裡只證後一個極限, 前一個極限同理可證。令

$$y_\varepsilon = \max\{\varphi(b), \varphi(b-\varepsilon)\}, \quad Y_\varepsilon = \max\{\psi(b), \psi(b-\varepsilon)\},$$

於是

$$\int_{NQ} f(z)dz = i\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b+iy)dy = i\left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+iy)dy,$$

$$\int_{N_1Q_1} f(z)dz = i\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{\psi(b-\varepsilon)} f(b-\varepsilon+iy)dy = i\Big(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\Big) f(b-\varepsilon+iy)dy.$$

所以

$$\int_{NQ} f(z)dz - \int_{N_1Q_1} f(z)dz = i\int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} \Big(f(b+iy) - f(b-\varepsilon+iy)\Big)dy + iE(\varepsilon), \quad (2.6)$$

這裡

$$E(\varepsilon) = \Big(\int_{\phi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\Big) f(b+iy)dy - \Big(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\Big) f(b-\varepsilon+iy)dy.$$

由於 $f(z)$ 的一致連續性, 當 $\varepsilon \to 0$ 時, (2.6) 右邊的第一項趨於零。而當 $\varepsilon \to 0$ 時, y_ε, Y_ε 分別以 $\varphi(b)$, $\psi(b)$ 爲極限, 故 $E(\varepsilon)$ 中的四個積分均爲零, 於是當 $\varepsilon \to 0$ 時, $\int_{N_1Q_1} f(z)dz \to \int_{NQ} f(z)dz$。

這就證明了: 當 Ω 爲這種特殊區域時, 定理 2.3′ 成立, 但對任意區域 Ω, 均可用有限條平行於 y 軸的輔助線, 將 Ω 劃分成具有上述形狀的區域, 而在輔助線上, 積分相互抵消, 故定理 2.3′ 得證。

定理 2.3′ 對多連通區域也是對的, 因爲這可以將多連通區域用若干曲線將它分割成若干個單連通區域之聯集, 而在輔助線上的積分都是相互抵消的。

這也可敍述爲: 若 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 爲 $n+1$ 條可求長的曲線, 而 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 全在 γ_0 之內, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 中每一條曲線都在其他各條曲線的外部, Ω 爲由 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 所圍成的區域, 即 Ω 的邊界 $\partial\Omega$ 由 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 所組成, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

由定理 2.3′, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, z_0, z 爲 Ω 內兩點, 我們便可以定義 $f(z)$ 的積分爲

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

這個積分不依賴於路徑的選擇, 顯然, $F'(z) = f(z)$ 成立。

2.3. Taylor 級數與 Liouville 定理

由 Cauchy 積分公式及 Cauchy 積分定理, 我們立即得到一系列重要的推論, 這一講中剩下的內容都是講這些重要的推論。

定理 2.5: 若 $f(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則 $f(z)$ 在 Ω 上每一點, 各階導數都存在, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

若 $z_0 \in \Omega$, $\overline{D}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$, 則 $f(z)$ 在 $D(z_0; r)$ 中可展開成 Taylor 級數

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j. \tag{3.2}$$

這級數在 $\overline{D}(z_0; r)$ 中絕對和一致收斂, 且有

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}d\zeta. \tag{3.3}$$

證明: 設 $z_0 \in \Omega$, 作小圓盤 $D(z_0; r) \subset \Omega$, 由定理 2.2′ 知, 若 $z \in D(z_0; r)$, 則

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta.$$

於是

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)f(\zeta)d\zeta \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}d\zeta. \end{aligned}$$

即

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}d\zeta.$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)d\zeta \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}d\zeta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

若 z_0 到 $\partial\Omega$ 的距離爲 d, i.e., $d = \min\{|z_0 - \zeta|, \zeta \in \partial\Omega\}$, 取 $r = \dfrac{d}{2}$, 於是

$$|\zeta - z| = |(\zeta - z_0) - (z - z_0)| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

但是 $|\zeta - z_0| \geq d$, 故

$$\left| \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \leq \frac{M \cdot L}{d/2 \cdot d^2} = \frac{2ML}{d^3}.$$

這裡 $M = \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|$, $L = \partial\Omega$ 的長度。在 (3.4) 中令 $z \to z_0$, 由上述估計式便得到

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2}.$$

這便證明了 (3.1) 在 $n = 1$ 時成立。

若 (3.1) 在 $n = k \geq 1$ 時成立, 即

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

成立。由於

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

而 $|z - z_0| < r \leq |\zeta - z_0|$, 故 $\left| \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$, 於是

$$\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j. \tag{3.5}$$

因而得到

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \cdots \right)^{k+1} d\zeta \\ &= f^{(k)}(z_0) + \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} d\zeta + O(|z - z_0|^2) \end{aligned}$$

於是有

$$\frac{f^{(k)}(z) - f^{(k)}(z_0)}{z - z_0} = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} d\zeta + O(|z - z_0|).$$

令 $z \to z_0$, 即得 (3.1), 當 $n = k + 1$ 時也成立, 即

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} d\zeta.$$

由數學歸納法, (3.1) 對任意的 $n = 1, 2, \ldots$ 都成立。

將 (3.5) 代入 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$, 由 (3.1) 即得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty}(z-z_0)^j\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}d\zeta \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j. \end{aligned}$$

這便證明了 (3.2) 式與 (3.3) 式。

定理 2.5說明了一個重要的事實: 對於複變數函數而言, 如果一個函數的一階導數存在, 則任意階導數都存在, 而且可以展成 Taylor 級數, 也就是說這個函數是解析的。這個性質對實變數而言是沒有的。這顯示了複變函數與實變函數的根本差異之一, 在第一講中, 我們定義一個複變函數 $f(z)$ 在區域 Ω 上是全純的, 若 $f(z)$ 在 Ω 上每一點, 其導數是存在的, 由定理 2.5 知道, 這也可以定義爲: $f(z)$ 在 Ω 上每一點 z 全純, 如果在這點的一個鄰域中, $f(z)$ 可以展開成爲收斂冪級數, 顯然, 這兩種定義是等價的。

由定理 2.5, 我們立即得到

定理 2.6. (1) Cauchy 不等式。若 $f(z)$ 在 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上全純, $\overline{D}(z_0;R)\subseteq\Omega$, 則

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(z_0)\right|\le\frac{k!M}{R^k},\quad k\in\mathbb{N} \tag{3.6}$$

成立, 這裡 $M=\max\limits_{z\in\overline{D}(z_0;R)}|f(z)|$。

(2) 若區域 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, K 爲 Ω 中的一個緊緻集合, V 爲 K 的一個鄰域且在 Ω 中是相對緊緻的 (即相對於 Ω, V 是緊緻的), 則對每一個在 Ω 中全純的函數 $f(z)$, 存在常數 c_n ($n\in\mathbb{N}$), 使得

$$\sup_{z\in K}\left|f^{(n)}(z)\right|\le c_n\cdot\|f\|_{L(V)},\quad n\in\mathbb{N} \tag{3.7}$$

這裡 $\|f\|_{L(V)}$ 爲 f 在 V 上的 L^1 模, 即

$$\|f\|_{L(V)}=\iint_V|f(\zeta)|dA.$$

Cauchy 不等式給出全純函數的各階導數的模在一點的估計。而定理 2.6 (2) 的 (3.7) 不等式給出全純函數的各階導數的模在一個緊緻集合上的估計。

定理 2.6 **的證明**: 此定理的第一個結果是顯然的, 現在我們來證明式子 (3.7) 在集合 V 上作一個光滑函數 ψ, 具有如下的性質: 在 V 上有緊緻支集, 且在集合 K 的鄰域 (包含在 V

中) 上取值爲 1, 這樣的函數 ψ 是存在的。可以在許多實分析的書中找到證明, 我們在此就不敍述其證明了。對 ψf 應用定理 2.1 Cauchy-Green 公式, 則有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{\psi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_{\Omega}\frac{\partial(\psi f)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

由於在 Ω 上, f 爲全純, 故 $\dfrac{\partial(\psi f)}{\partial\overline{\zeta}}=f\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}$, 但是 $\psi(\zeta)$ 的支集在 V 中, 而 V 在 Ω 上相對緊緻, 故有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{V}f\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

若 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}$ 的支集爲 K_1, 則 K_1 爲 V 中的緊緻子集合, 故 K 與 K_1 之間的距離 $d(K,K_1)>0$。

若 $z\in K$, 則有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

在上式中, 對 z 求 n 次導數, 得到

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

於是就有

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\iint_{K_1}|f(\zeta)|\cdot\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\right|\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{|\zeta-z|^{n+1}}.$$

由於 $d(K,K_1)>0$, 故有 c_1 使得 $\dfrac{1}{|\zeta-z|}<c_1$ 對於任意 $z\in K$, $\zeta\in K_1$ 都成立。而 $\left|\dfrac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\right|$ 顯然在 K_1 上有界, 故有 c_n' 使得

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z)\right|&\le c_n'\iint_{K_1}|f(\zeta)|\cdot|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|\\&\le c_n'\iint_{V}|f(\zeta)|\cdot|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|=c_n\cdot\|f\|_{L(V)}.\end{aligned}$$

這裡 c_n, c_n' 爲只依賴於 n 的常數, 這便完成我們對 (3.7) 的證明。

由定理 2.5, 我們立即得到 Cauchy - Goursat 定理之逆定理。

定理 2.7. (Morera **定理**) 若 $f(z)$ 在 Ω 上連續, 且沿 Ω 中任意一條可求長閉曲線的積分爲零, 則 $f(z)$ 在 Ω 上全純。

證明: 任取一點 $z_0 \in \Omega$, 由於在 Ω 上任一可求長閉曲線的積分爲零, 故

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \quad z \in \Omega,$$

不依賴於路徑的選擇, 且 $F'(z) = f(z)$, 於是 $F(z)$ 爲 Ω 上全純函數, 由定理 2.5, $F(z)$ 的二階導數, 即 $f(z)$ 的導數 $f'(z)$ 也是存在的, 故 $f(z)$ 在 Ω 上是全純函數, 定理因而證畢。

由定理 2.5, 我們還可以得到下面這個重要的結果。

定理 2.8. (Liouville **定理**) 若 $f(z)$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上全純且有界, 則 $f(z)$ 爲一常數函數。

證明: 若 $|f(z)| \leq M$ 對所有 $z \in \mathbb{C}$ 都成立, 則固定 $z_0 \in \mathbb{C}$, 作一圓盤 $D(z_0; R)$, 由 Cauchy 不等式, 我們得到

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

令 $R \to +\infty$, 得到 $f'(z_0) = 0$。由於 z_0 爲 $\mathbb{C}$ 上任意一點, 故 $f'(z) = 0$ 對任意 $z \in \mathbb{C}$ 都成立。因此, $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上爲常數。

Liouville 定理表明: 在整個複平面 $\mathbb{C}$ 上全純且有界的函數, 只有常數, 這個定理我們在以後還會作進一步的討論。在本節中, 我們最後來證明下面定理。

定理 2.9. (Riemann **定理**) 若 f 在去掉一點 z_0 的圓盤 $\widetilde{D}(z_0; r) = D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ 內全純, 且 f 在 $\widetilde{D}(z_0; r)$ 上有界, 則 f 可以解析延拓到 $D(z_0; r)$ 之上, 即存在 $D(z_0; r)$ 上定義的全純函數 F, 使得 $F|_{\widetilde{D}(z_0;r)} = f$。

證明: 我們不妨假設 $z_0 = 0$, 定義

$$G(z) = \begin{cases} z^2 f(z), & \text{當} \quad z \in \widetilde{D}(0; r) \\ 0, & \text{當} \quad z = 0, \end{cases}$$

則 $G(z)$ 在 $D(0; r)$ 上連續可導, 且滿足 Cauchy-Riemann 方程, 這是因爲

$$\lim_{z\to 0} \frac{G(z) - 0}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 f(z) - 0}{z} = \lim_{z\to 0} z f(z) = 0.$$

故 $\dfrac{dG(z)}{dz} = 0$, 而當 $z \neq 0$ 時,

$$G'(z) = z^2 f'(z) + 2z f(z).$$

顯然, $G'(z) \to 0$, 當 $z \to 0$, 由第一講的定理 2.1, $G(z)$ 是在 $D(0; r)$ 上的全純函數, 故 $G(z)$ 可以在 $z = 0$ 處展開成 Taylor 級數

$$G(z) = 0 + 0 \cdot z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{3.8}$$

此級數在 $D(0;r)$ 中一致收斂, 定義

$$F(z)=\frac{G(z)}{z^2}=a_2+a_3z+a_4z^2+\cdots \tag{3.9}$$

顯然, 級數 (3.8) 與 級數 (3.9) 有相同之收斂半徑, 這可由第一講 Abel 定理中的 (5.2) 式得到, 故 $F(z)$ 在 $D(0;r)$ 上全純, 且在 $\widetilde{D}(0;r)$ 中, $f(z)=F(z)$, 定理證畢。

2.4. 有關全純函數零點的一些結果

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全純, 如果 $z_0\in\Omega$, 且 $f(z_0)=0$, 則稱 z_0 爲 $f(z)$ 的零點。若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 有級數展開

$$a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,\quad a_m\neq 0$$

則稱 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 處有 m 重零點, 由 Cauchy 積分公式及 Cauchy 積分定理可以得到一系列有關零點的結果。

定理 2.10. (**代數基本定理**) 若 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 爲 n 次多項式, 則至少有一個 z_0, 使得 $p(z_0)=0$, z_0 稱爲方程式 $p(z)=0$ 的根。

證明: 如果本定理的結論不對, 則 $f(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全純。由於當 $z\to\infty$ 時, $p(z)\to\infty$, 所以 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 由 Liouville 定理知道, $f(z)$ 爲常數, 即 $p(z)$ 爲常數, 得到矛盾, 定理因而證畢。

定理 2.11. 若 $f(z)$ 在區域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全純, 則 $f(z)$ 的零點的集合 $\{z\in\Omega: f(z)=0\}$ 在 Ω 上沒有聚集點 (accumulation point), 除非 $f(z)$ 在 Ω 上恆等於零。

證明: 假設上述定理不對, 若 $z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots$ 爲 $f(z)$ 在 Ω 上的零點, 且存在 $z_0\in\Omega$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$。我們不妨假設 $z_0=0$, 由於 $f(z)$ 在 Ω 上全純且 $0\in\Omega$, 所以我們可以將 $f(z)$ 在 $z=0$ 展開成 Taylor 級數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots,$$

由於數列 $\{z_n\}$, $n=1,2,\ldots$, 爲 $f(z)$ 的零點, 故 $f(z_n)=0$, 於是

$$0=\lim_{n\to\infty}f(z_n)=f(\lim_{n\to\infty}z_n)=f(0).$$

故得到 $a_0=0$, 因此

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$$

這就有 $a_1 = \dfrac{f(z)}{z} + O(z)$, 取 $z = z_n$, 我們得到

$$a_1 = \frac{f(z_n)}{z_n} + O(z_n) = O(z_n).$$

令 $n \to \infty$, 即得到 $a_1 = 0$。同樣方法可以得到 $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$, 即 Taylor 級數的所有的係數均爲零, 故 $f(z) = 0$, 因此, 若 $f(z)$ 不是在 Ω 上恆等於零的函數, 集合 $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ 在 Ω 上沒有聚集點, 定理因而證畢。

由定理 2.11 我們立即得到: 假設 $g_1(z)$, $g_2(z)$ 爲區域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的兩個全純函數, E 爲 Ω 中一個有聚集點的集合, 其聚集點在 Ω 中。如果這個聚集點也在 E 上, 則 $g_1(z) = g_2(z)$, 則在 Ω 上我們也得到 $g_1(z) = g_2(z)$, 即全純函數在 Ω 上的值, 可以由聚集點在 Ω 內的點集合的值完全決定。例如: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, 當 z 爲實數時成立, 故 z 爲複數時也成立。同樣道理一些三角恆等式取實數值時成立, 即可導出在複數時也成立。

定理 2.12. (**幅角原理**) (Argument principle) 若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, $\gamma \subset \Omega$ 爲一條正定向簡單封閉曲線, 且在 Ω 中可連續地縮成一點, $f(z)$ 在 γ 上不爲零, 則 $f(z)$ 在 γ 內有有限個零點, 零點的個數 k (重數計算在內) 爲

$$k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

註解: 若記 $w = f(z)$, 則有

$$k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w}.$$

這裡 Γ 爲 γ 在 $w = f(z)$ 映射下的影像, 這方程式說明當 z 沿著 γ 的正方向轉動一圈時, $w = f(z)$ 在 Γ 上沿正方向繞原點轉動的總圈數, 恰好等於 f 在 γ 內的零點的個數, 所以這個定理被稱爲幅角原則。

幅角原理的證明: 這裡我們只證明 $k = 1$ 的情形, 其他的情形同理可證。

我們不妨假設 γ 爲一個正定向的圓, 且 $f(z)$ 在 $z = 0$ 處有單零點, 於是 $f(z)$ 在 $z = 0$ 處有 Taylor 級數的展開:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots .$$

於是 $f'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{a_1z + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots}{a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots}{a_1 + a_2z + a_3z^2 + \cdots} \\ &= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{a_2z + 2a_3z^2 + \cdots}{a_1 + a_2z + a_3z^2 + \cdots}\right) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{a_2 + 2a_3z^2 + \cdots}{a_1 + a_2z + \cdots} = \frac{1}{z} + h(z).\end{aligned}$$

由於 $f(z)$ 在 $z = 0$ 處只有單零點, 故 $a_1 \neq 0$, 所以 $h(z)$ 在 $z = 0$ 的附近是全純的, 因此

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma h(z)dz = 1.$$

這是因爲 $\oint_\gamma h(z)dz = 0$。

定理 2.13. (Hurwitz **定理**) 若 $\{f_j\}$ 爲 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上的全純函數序列, 在 Ω 內的緊緻集合上收斂到一個函數 f, 若所有的 f_j 在 Ω 上全不等於零, 則 f 或是恆不等於零或是恆等於零。

證明: 對於任一點 $z \in \Omega$, 在 Ω 中取一條簡單封閉曲線 γ, 且 z 在 γ 所包圍的區域內, 由於 f_j 在 Ω 上全純, 故由 Cauchy 積分公式

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_j(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

由於 $\{f_j\}$ 在 Ω 內的緊緻集合一致收斂, 故

$$\lim_{j\to\infty} f_j(z) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_j(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_r \lim_{j\to\infty} f_j(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

所以,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

因此, $f(z)$ 爲全純函數。同樣我們可以證明 $f_j'(z)$ 在 Ω 內的緊緻集合一致收斂到 $f'(z)$。

若 $f(z) \neq 0$, 則由定理 2.11, $f(z)$ 的零點是離散的, 取 γ 不經過這些零點, 於是當 $j \to \infty$ 時,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_j'(\zeta)}{f_J(\zeta)}d\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta.$$

但由假設及幅角原理, 我們知道

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_j'(\zeta)}{f_j(\zeta)}d\zeta = 0.$$

因此, $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \dfrac{f_j'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = 0$, 即 $f(z)$ 在 Ω 上沒有零點。

若 $f_j(z) = \dfrac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, 則 $f_j(z) \to f(z) \equiv 0$ 在 Ω 上一致收斂, 這便說明了定理的另一個結論。

定理 2.14. (Rouché **定理**) 若 $f(z)$, $g(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, γ 爲 Ω 內可求長簡單封閉曲線且在 γ 上滿足

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \tag{4.1}$$

則 f, g 在 γ 內有相同的零點的個數。

證明: 由 (4.1) 知, 在 γ 上 $|f(z)| > 0$, 且 $g(z) \neq 0$, 假如在 γ 上存在一點 z_0 使得 $g(z_0) = 0$, 則我們得到 $|f(z_0)| < |f(z_0)|$, 這是不可能的! 令 N_1, N_2 爲 f, g 在 γ 內零點的數目, 則由幅角原理得到

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz, \qquad N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz.$$

於是得到

$$\begin{aligned} N_2 - N_1 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z_0)}{f(z)}\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{f(z)g(z)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(g/f)'(z)}{(g/f)(z)}dz. \end{aligned}$$

令 $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$, 則 $N_2 - N_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \dfrac{F'(z)}{F(z)}dz$。

但 (4.1) 告訴我們 $|F(z) - 1| < 1$, $w = F(z)$ 將 γ 映爲 Γ, Γ 不經過原點且不包含原點, 這是因爲 Γ 在 $|w - 1| < 1$ 之內, 由 Cauchy 積分定理, 得到 $\int_\Gamma \dfrac{dw}{w} = 0$, 即 $N_1 = N_2$, 定理因而證畢。

在代數基本定理中我們已證明: 若 $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ 爲 n 次多項式, 則 $p(z)$ 至少有一個根, 即存在零點 z_0 使得 $p(z) = 0$。現在我們用 Rouché 定理, 立即可以證明: 若 $a_n \neq 0$, 則 $p(z)$ 有且只有 n 個零點, 即 $p(z) = 0$ 有且只有 n 個根, 這可以證明如下:

令 $g(z) = a_n z^n$, 則當 $|z| = R$ 足夠大時,

$$\begin{aligned} |p(z) - g(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| < |g(z)| \\ &= |a_n||z|^n = |a_n|R^n \end{aligned}$$

成立, 故由 Rouché 定理, 在 $|z| < R$ 內, $p(z)$ 與 $g(z)$ 有相同的零點個數, 而 $a_n z^n$ 顯然有 n 個零點, 故 $p(z)$ 也是如此。

作爲 Rouché 定理的推論, 我們有

定理 2.15. 若 $f(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in \Omega$, 若 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 重零點, 則對於充分小的 $r > 0$, 存在 $\rho > 0$, 使得對於 $D(w_0; \rho)$ 內每一個點 A, 函數 $f(z) - A$ 在 $D(z_0; r)$ 內恰有 m 個零點。

證明: z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 重零點, 故由定理 2.11 知, 存在 $r > 0$, 使得 $f(z)-f(z_0)$ 在 $\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega$ 上, 除去 z_0 外, 沒有其他的零點, 而在 $|z - z_0| = r$ 上, $|f(z) - f(z_0)| \geq \rho$ $(\rho > 0)$, 於是在 $D(z_0; \rho)$ 內任意點 A, 當 $|z - z_0| = r$ 時, $|A - w_0| < |f(z) - f(z_0)|$ 成立, 此即

$$|f(z_0) - A| = |(f(z) - f(z_0)) - (f(z) - A)| < |f(z) - f(z_0)| \quad \text{成立。}$$

由 Rouché 定理, $f(z) - A$ 與 $f(z) - f(z_0)$ 在 $D(z_0; r)$ 上有相同的零點個數, 而 $f(z) - f(z_0)$ 在 $D(z_0; r)$ 上有 m 重零點, 故 $f(z) - A$ 在 $D(z_0; r)$ 上也有 m 個零點。定理的證明因而完畢。

2.5. 最大模原理, Schwarz 引理與全純自同構群

作爲 Cauchy 積分公式的另一重要推論是最大模原理, 這是一個十分有用的結果, 在敍述這個定理之前, 我們先證明全純函數的均值性質。

均值性質: 若 $f(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, $z_0 \in \Omega$, 若 $r > 0$, 使得 $\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega$, 則由 Cauchy 積分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0; r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

成立, $\partial D(z_0; r)$ 上的點 ζ 可以表示成 $\zeta = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 於是 Cauchy 積分公式成爲

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \tag{5.1}$$

這便是全純函數的均值性質, 這說明了 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 的值等於 $f(z)$ 在 $\partial D(z_0; r)$ 上的值的平均。在 (5.1) 的兩邊取實部與虛部, 於是得到: 調和函數也有均值性質。反過來, 我們也可

證明具有均值性質的連續函數一定是調和函數。這便告訴我們函數具有均值性質, 若且唯若函數是調和函數, 所以調和函數也可定義爲有均值性質的函數。

現在利用全純函數的均值性質來證明

定理 2.16. (**最大模原理**) (Maximum modulus principle) 若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, 如有點 $z_0 \in \Omega$ 使得 $|f(z_0)| \geq |f(z)|$, 對所有的 $z \in \Omega$ 都成立, 則 $f(z)$ 爲常數函數。

證明: 我們先乘以模爲 1 的常數, 使得 $M = f(z_0) \geq 0$, 令

$$U = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\},$$

則 $U \neq \varnothing$, 因爲我們已知 $z_0 \in U$。由於 f 爲 Ω 上的連續函數, 故 U 爲一個閉集合。現在來證明 U 也是一個開集合。假設 $w \in U$, 取 $r > 0$ 使得 $D(w, r) \subset \Omega$, 取 $r' > 0$ 使得 $r' < r$。由全純函數的均值性質

$$\begin{aligned} M = f(w) &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + r'e^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(w + r'e^{i\theta}) \right| d\theta \leq M. \end{aligned}$$

由於上式左, 右兩端相等, 故所有不等式中的等號成立, 即

$$f(w + re^{i\theta}) = |f(w + re^{i\theta})| = M.$$

對所有的 θ 及 $0 < r' < r$ 都成立, 於是

$$\{w + r'e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 < r' < r\} \subset U.$$

也就是說: 對 U 中任意一點 w, 一定存在一個開的小圓盤, 這個小圓盤中的任意一點都屬於 U, 故 U 爲一開集合。因此 U 是 Ω 中的非空, 即開又閉的集合。由於 Ω 是連通的, 故 U 只能是 Ω, 即 $U = \Omega$, 因此, $f(z) = f(z_0)$, $\forall z \in \Omega$, 定理因而證畢。

註解:

(1) 在證明最大模原理中我們用到了一個事實, 一個連通集合的非空部分集合, 如果是既開又閉, 則這個部分集合一定是集合自己; 這個結果非常有用, 讀者不妨自行證之。

(2) 作爲最大模原理的直接推論有: 若 $f(z)$ 在有界區域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 並且不是常數, 則 $|f(z)|$ 只能在 $\partial\Omega$ 上取最大值。

(3) 在最大模原理的證明中, 只用到了函數的均值性質, 所以最大模原理對調和函數也是成立的。

由最大模原理, 我們立即推導出下面的結果。

定理 2.17. (Schwarz **原理**) 若 $f(z)$ 爲將單位圓盤 $D = D(0;1)$ 映到 D 的全純函數, 且 $f(0) = 0$, 則

$$|f(z)| \le |z| \quad 及 \quad |f'(0)| \le 1$$

成立。而 $|f(z)| = |z|$ 在 D 中一點 $z \neq 0$ 處成立, 或 $|f'(0)| = 1$ 成立, 若且唯若 $f(z) = e^{i\alpha}z$, 這裡 $\alpha \in \mathbb{R}$。

證明: 令

$$G(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & 當 \quad z \neq 0 \\ f'(0), & 當 \quad z = 0, \end{cases}$$

則 $G(z)$ 在 D 上全純, 對函數 $G(z)$ 在 $\{z : |z| \le 1-\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ 上應用最大模原理, 得到

$$|G(z)| \le \frac{\max\limits_{|z|=1-\varepsilon} |f(z)|}{1-\varepsilon} < \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 即得 $|G(z)| \le 1$ 在 D 上成立。當 $z \neq 0$ 時, $|f(z)| \le |z|$ 成立, 而當 $z = 0$ 時, $|G(0)| = |f'(0)| \le 1$.

若 $|f(z)| = |z|$ 在 D 中一點 $z \neq 0$ 處成立, 即 $|G(z)| = 1$ 在 D 中一點 $z \neq 0$ 處成立, 由最大模原理, $|G(z)| = 1$ 對所有 $z \in D$ 都成立, 故 $G(z) = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 即 $f(z) = e^{i\alpha}z$, 同樣我們可以證明 $|f'(0)| = 1$ 成立時, $f(z) = e^{i\alpha}z$, 定理因而證畢。

由 Schwarz 引理立即可以得到單位圓盤 D 的全純自同構群。假設 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 爲一區域, 我們定義 Ω 上的全純自同構群如下:

全純函數 $f(z)$ 在 Ω 上定義, 若 $f(z)$ 將 Ω 單值全純地映射到本身, 則稱 $f(z)$ 爲 Ω 的全純自同構。Ω 上所有全純自同構組成一個群, 這個群稱爲區域 Ω 的全純自同構群, 記作 $\mathrm{Aut}(\Omega)$。

現在我們來刻劃 $\mathrm{Aut}(D)$。

先來證明: 若 $a \in D$, 則 $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathrm{Aut}(D)$.

顯然 φ_a 在 $\overline{D}$ 上全純, $\varphi_a(a) = 0$, 且 $\varphi_a : \partial D \to \partial D$, 這是因爲對於 $|z| = 1$, 有

$$|\varphi_a(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}} \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}\right| = 1.$$

所以 $\varphi_a(z)$ 將 D 的內部映爲 D 的內部。

再來證明 $\varphi_a(z)$ 在 D 上是單值的。

若有 $z_1, z_2 \in D$, 且

$$\frac{z_1 - a}{1 - \overline{a}z_1} = \frac{z_2 - a}{1 - \overline{a}z_2},$$

則 $(z_1 - a)(1 - \overline{a}z_2) = (z_2 - a)(1 - \overline{a}z_1)$, 此即 $(z_1 - z_2)(1 - |a|^2) = 0$。由於 $|a| < 1$, 故 $z_1 = z_2$, 這就證明了 $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(D)$.

令 $w = \varphi_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}$, 於是 $w - \overline{a}zw = z - a$,

$$z = \frac{w + a}{1 + \overline{a}w} = \varphi_{-a}(w).$$

故有 $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$, 顯然這也屬於 $\mathrm{Aut}(D)$, 我們稱 φ_a 爲 Möbius 變換, 所有 Möbius 變換組成的群, 稱爲 Möbius 變換群, 這是 $\mathrm{Aut}(D)$ 的一個子群。另外, 旋轉

$$w = \rho_\alpha(z) = e^{i\alpha}z, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

顯然也是屬於 $\mathrm{Aut}(D)$, 而所有旋轉所組成的群稱爲旋轉群, 這也是 $\mathrm{Aut}(D)$ 的一個子群。

定理 2.18. (**單位圓盤上的全純自同構群**) 若 $f \in \mathrm{Aut}(D)$, 則存在複數 a, $|a| < 1$ 及 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(z) = \varphi_a \circ \rho_\alpha(z).$$

換句話說, $\mathrm{Aut}(D)$ 中的元素都是由 Möbius 變換及旋轉之合成而成的。

證明: 若 $f(0) = b$, 令 $G = \varphi_b \circ f$, 則

$$G(0) = \varphi_b \circ f(0) = \varphi_b(b) = 0.$$

由 Schwarz 引理得知, $|G'(0)| \leq 1$, 同樣可對 G^{-1} 應用 Schwarz 引理得到

$$\left|\frac{1}{G'(0)}\right| = \left|(G^{-1})'(0)\right| \leq 1,$$

於是 $|G'(0)| = 1$, 這便得到 $G(z) = e^{i\alpha}z = \rho_\alpha(z)$, 即

$$\varphi_b \circ f = \rho_\alpha.$$

所以 $f = \varphi_{-b} \circ \rho_\alpha$, 取 $-b = a$, 即得到定理之結論。

由上面的定理可以導出下面重要的結果。

定理 2.19. (Schwarz - Pick **引理**) 若 f 是將 D 映入到 D 內的全純函數, 且將 $z_1, z_2 \in D$ 映爲 $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$, 則

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\overline{w}_2}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}\right| \tag{5.2}$$

及

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2} \le \frac{|dz|}{1-|z|^2} \tag{5.3}$$

成立, 等號成立若且唯若 $f \in \mathrm{Aut}(D)$.

證明: 令 $\varphi(z) = \dfrac{z+z_1}{1+\overline{z}_1 z}$, $\psi(z) = \dfrac{z-w_1}{1-\overline{w}_1 z}$。
顯然, $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(D)$, 且

$$\psi \circ f \circ \varphi(0) = \psi \circ f(z_1) = \psi(w_1) = 0.$$

故 $\psi \circ f \circ \varphi$ 滿足 Schwarz 引理的條件, 因此, 當 $z(\neq 0) \in D$ 時

$$|(\psi \circ f \circ \varphi)(z)| \le |z|$$

成立, 令 $z = \varphi^{-1}(z_2)$, 則有

$$|\psi \circ f(z_2)| \le |\varphi^{-1}(z_2)|$$

此即 $|\psi(w_2)| \le |\varphi^{-1}(z_2)|$, 這便是 (5.2)。

當 $z = 0$ 時, 則由 Schwarz 引理, 就有

$$|(\psi \circ f \circ \varphi)'(0)| \le 1,$$

此即 $|\psi'(w_1) f'(z_1) \varphi'(0)| \le 1$. 但是

$$\varphi'(z) = \frac{1-z_1\overline{z}_1}{(1+\overline{z}_1 z)^2}, \qquad \varphi'(0) = 1-|z_1|^2;$$
$$\psi'(z) = \frac{1-w_1\overline{w}_1}{(1-\overline{w}_1 z)^2}, \qquad \psi'(w_1) = \frac{1}{1-|w_1|^2}.$$

所以得到 $|f'(z_1)| \le \dfrac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2}$, 此即 (5.3) 式。

由 Schwarz 引理, 等號成立若且唯若 $(\psi \circ f \circ \varphi)(z) = e^{i\alpha} z = \rho_\alpha(z)$, 故 $f = \psi^{-1} \circ \rho_\alpha \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(D)$。定理因而證畢。

註解: 事實上在 D 上可以定義度量 (一般稱爲雙曲度量 hyperbolic metric 或 Poincaré metric),

$$d_z s^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

則 (5.3) 就是 $d_w s^2 \le d_z s^2$, 所以定理 2.19也可敍述爲:

如果 $w = f(z)$ 爲 D 上全純函數, 將 D 映入 D 內, 則其 Poincaré 度量是不增的, f 保持 Poincaré 度量若且唯若 $f \in \mathrm{Aut}(D)$, 於是定理 2.19給出了 Schwarz 引理的明確微分幾何的意義。

—本文作者龔昇任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—

台北表現理論冬季研習班

Taipei Winter School in Representation Theory

主　講　人 : Professor Olivier Schiffmann (Université de Paris VI) &
Professor Mark Shimozono (Virginia Tech)

日　　期 : 2010年12月16日 (星期四) ∼ 2010年12月19日 (星期日)

地　　點 : 臺北市大安區羅斯福路四段1號 天文數學館6樓 中央研究院數學研究所 638研討室

*歡迎學生參加, 如有疑問請洽詢陳麗伍 liwuchen@math.sinica.edu.tw

詳細情形請查詢中研院數學所網頁 http://www.math.sinica.edu.tw

數學傳播 34卷4期, pp. 50-76

複分析五講 第三講

Weierstrass 級數理論

龔 昇・張德健

3.1. Laurent 級數

Weierstrass 是用級數來研究與刻劃複變函數的性質, 在第一講與第二講中我們已提到全純函數的冪級數展開, 以及 Weierstrass M - 判別法等, 這些結果與微積分中的級數理論大致上是一樣的。在這一講中我們要強調的是 Weierstrass 理論與微積分不相同的地方。在複變函數的級數理論中, 與微積分級數理論最大不同之處是: 除了 Taylor 級數外, 還有 Laurent 級數。在介紹 Laurent 級數之前, 先介紹一個有關函數項級數的 Weierstrass 定理, 這是一個深刻的定理, 而這個定理在微積分中是沒有的。

定理 3.1. (Weierstrass **定理**)
若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上全純, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 上任一緊緻集合上一致收斂到 $f(z)$, 則 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上任一緊緻集合上收斂到 $f^{(k)}(z)$, $k = 1, 2, \ldots$。

在我們證明定理 3.1之前, 我們先敍述兩個有關函數項級數的結果。

(1) 若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在集合 A 上連續, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 A 上一致收斂到 $f(z)$, 則 $f(z)$ 在 A 上連續。

(2) 若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在可求長曲線 γ 上連續, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收斂到 $f(z)$, 則

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz.$$

這兩個結果與微積分中有關函數項級數的理論是一樣的, 而定理 3.1爲更爲深入的結果。這個定理告訴我們, 如全純函數項級數在區域 Ω 上的任一緊緻集合上一致收斂, 則這個級數會

收斂到一個全純函數, 而且逐項求導後的級數也會在 Ω 內任一緊緻集合上一致收斂到全純函數的導數。

定理 3.1之證明: 由上面所講的結論 (1) 知道, $f(z)$ 在 Ω 上是連續函數。若 K 爲 Ω 內任一圓周, 其內部包含於 Ω, γ 爲 K 內任一可求長的封閉曲線, 由於 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收斂, 故由結論 (2) 得到

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma f_n(z)dz = 0,$$

這是因爲 $f_n(z)$ 在 K 內全純。由 $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ 以及 Morera 定理得到 $f(z)$ 在 K 內全純, 所以 $f(z)$ 在 Ω 上全純。

若 $z_0 \in \Omega$, $\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\partial D(z_0; r)$ 上一致收斂到 $f(z)$, 若 $\zeta \in D(z_0; r/2)$, 則

$$\left|\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| \le \left(\frac{2}{r}\right)^{k+1}.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}$ 在 $\partial D(z_0; r)$ 上一致收斂到 $\dfrac{f(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}$。於是任給 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n \ge N$ 時,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z)}{(\zeta - z)^{k+1}} - \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{k!},$$

當 $z \in \partial D(z_0; r)$ 及 $\zeta \in D(z_0; \frac{r}{2})$ 時成立。

因此, 當 $\zeta \in D(z_0; \frac{r}{2})$ 時, 由 Cauchy 積分公式,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(\zeta) - f^{(k)}(\zeta)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0;r)} \frac{f_j(z)dz}{(z-\zeta)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0;r)} \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^{k}}\right| \\ &\le \frac{k!}{2\pi}\int_{\partial D(z_0;r)} \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} - \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}}\right| |dz| < \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(\zeta)$ 在 $D(z_0; \frac{r}{2})$ 上一致收斂到 $f^{(k)}(\zeta)$。

取 $\overline{V}$ 爲 Ω 中任一有界的閉區域, 在 $\overline{V}$ 上的每一點, 都存在一個鄰域使得 $\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(\zeta)$ 一致收斂到 $f^{(k)}(\zeta)$, 這些鄰域構成 $\overline{V}$ 的一個開覆蓋, 由 Heine-Brel 定理, 我們可以選取 $\overline{V}$ 的一個有限子覆蓋, 因此 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(\zeta)$ 在 $\overline{V}$ 上一致收斂到 $f^{(k)}(\zeta)$, 定理 3.1因而證畢。

由最大模原理可以得到: 若 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 爲一有界區域, 若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 Ω 內的全純函數序列, 而且在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 且級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收斂, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收斂, 因此, 定理 3.1中的條件「$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 內任一緊緻集合上一致收斂到 $f(z)$」可以改爲「$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 內任一封閉曲線上一致收斂到 $f(z)$」, 則定理 3.1依然成立。

現在我們來討論 Laurent 級數。

若 $a, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, 則稱

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{3.1}$$

爲在點 a 的 Laurent 級數, 即 Laurent 級數由兩部分組成, 一部分是非負冪的冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$; 一部分是負冪的冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$, 若這兩部分在 $z = z_0$ 處收斂, 則稱 Laurent 級數在這點收斂。若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收斂半徑爲 R, 且 $R > 0$, 則級數在 $|z-a| < R$ 內絕對收斂, 且在其內的任一有界閉集合上一致收斂, 故級數的和 (記作 $\varphi(z)$) 在 $|z-a| < R$ 上全純。記 $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$。設其收斂半徑爲 ρ, 且 $\rho > 0$, 則級數在 $|\zeta| < \rho$ 內絕對收斂, 且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 所以級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 在 $r = \dfrac{1}{\rho} < |z-a| < \infty$ 內絕對收斂且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 故級數的和 (記作 $\psi(z)$) 在 $r < |z-a| < \infty$ 上全純。如果 $r > R$, 則級數 (3.1) 處處發散; 如果 $r = R$, 則級數 (3.1) 除了 $|z-a| = R$ 的點外, 處處發散; 而在 $|z-a| = R$ 上有不同的情形, 如 $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 在 $|z| = 1$ 上處處收斂; $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$ 在 $|z| = 1$ 上處處發散; $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 在 $|z| = 1$上除了 $z = 1$ 外處處收斂。如果 $r < R$, 則級數 (3.1) 在圓環 $r < |z-a| < R$ 內絕對收斂, 且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 在圓環外發散。我們稱這圓環爲級數 (3.1) 的收斂圓環。由定理 3.1知, 級數 (3.1) 在圓環內收斂到一個全純函數, $\varphi(z)$ 在 $|z-a| < R$ 內全純, $\psi(z)$ 在 $r < |z-a| < \infty$ 內全純, 而 $f(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ 在 $r < |z-a| < R$ 內全純。$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 稱爲級數 (3.1) 的全純部分 (holomorphic part), $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 稱爲級數 (3.1) 的主要部份 (principal part) 或奇異部份 (singular part), 即函數 $f(z)$ 的特性主要由這部分所決定。綜合上面的討論, 若 Laurent 級數 (3.1) 的收斂圓環爲 $r < |z-a| < R$, 則級數 (3.1) 在此圓環內絕對收斂且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 因而函數 $f(z)$ 在此圓環上全純。

反過來, 我們有下面定理

定理 3.2: 若函數 $f(z)$ 在圓環 $V : r < |z-a| < R$, $0 \le r < R < \infty$, 上全純, 則 $f(z)$ 在 V 上有展開式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.2}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad r < \rho < R. \tag{3.3}$$

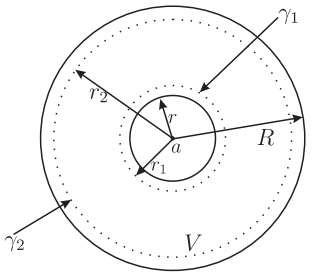
展開式 (3.2) 是唯一的, 稱爲 $f(z)$ 在圓環 V 上的 Laurent 級數或 Laurent 展開式。

證明: (3.3) 中的積分與 ρ 無關, 若 $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, 則

$$\int_{|z-a|=\rho_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \int_{|z-a|=\rho_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

若 $z \in V$, 在 V 內取 $\gamma_1 = \partial D(a; r_1)$, $\gamma_2 = \partial D(a; r_2)$, $r_1 < r_2$, 且 z 在圓環 $r_1 < |z-a| < r_2$ 之內, 由 Cauchy 積分公式, 我們有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.4}$$



當 $\zeta \in \gamma_1$ 時,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z-a)(1 - \frac{\zeta - a}{z-a})} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n},$$

這是因爲 $\left|\dfrac{\zeta - a}{z-a}\right| < 1$, 上式右手邊的級數是在 γ_1 上一致收斂的; 當 $\zeta = \gamma_2$ 時,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta - a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

這是因爲 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta - a}\right| < 1$, 上式右手邊的級數是在 γ_2 上一致收斂的, 將這兩個式子代入 (3.4), 我們便得到 (3.2) 與 (3.3)。

最後我們來證明唯一性, 設 $f(z)$ 在 U 上還有另一個 Laurent 級數展開式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n(z-a)^n, \quad r<|z-a|<R. \tag{3.5}$$

(3.5) 式右手邊的級數在 $|z-a|=\rho$, $r<\rho<R$ 上一致收斂到 $f(z)$, 以 $(z-a)^{-(m+1)}$ 乘 (3.5) 式的兩邊, 然後在 $|z-a|=\rho$ 上積分, 由一致收斂性有

$$\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^{n-m-1}dz=2\pi c'_m,$$

這是因爲

$$\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^k dz=\begin{cases}2\pi i, & \text{若 } k=-1;\\ 0, & \text{若 } k\neq -1.\end{cases}$$

於是 $c'_m=c_m$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, 這便證明了級數的唯一性, 定理 3.2因而證畢。

3.2. 孤立奇異點 (Isolated singularity)

若函數 $f(z)$ 在點 a 的鄰域 $D(a;R)\setminus\{a\}$ 上全純, 則稱 a 點爲 $f(z)$ 的一個孤立奇異點, 若 a 爲 $f(z)$ 的一個孤立奇異點, 由定理 3.2得知, $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 上可展開成 Laurent 級數

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

而

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad 0<\rho<R, \quad n\in\mathbb{Z}$$

如前面所講, $f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$, 這裡

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{3.6}$$

在 $|z-a|<R$ 上全純, 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的全純部分, 而

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{3.7}$$

在 $0<|z-a|<\infty$ 上全純, 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的主要部份。

下面我們討論 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 的情形, 有三種可能。

(1) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在且有限, 由第二講中的 Riemann 定理, $f(z)$ 可以解析延拓到 $D(a;R)$, 因此, (3.7) 中的 c_{-n} 全爲零。反之, 如果 (3.7) 中的 c_{-n} 全爲零, 則 $f(z)=\varphi(z)$, 而 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\varphi(a)$, 故 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在且有限, 若且唯若 c_{-n} 全爲零, 這時稱 a 爲可去奇異點 (Removable singularity)。

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在且無限, 則充要條件爲: (3.7) 中 c_{-n} 只有有限個不爲零, 即

$$\psi(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m},\quad c_{-m}\neq 0.$$

而

$$\begin{aligned} f(z)&=\varphi(z)+\psi(z)\\ &=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+c_0+c_1(z-a)+\cdots\\ &=\frac{g(z)}{(z-a)^m}, \end{aligned}$$

其中

$$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots,\quad c_{-m}=g(a)\neq 0,$$

這時稱 a 爲一個 m 級極點 (pole of order m)。$m=1$ 時, 稱爲簡單極點 (simple pole)。

證明: 充分性是顯而易見的, 只需證明必要性。

因爲 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, 故存在 $\delta>0$, 使得在 $0<|z-a|<\delta$ 內, $f(z)\neq 0$, 於是在 $0<|z-a|<\delta$ 內, $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 全純, 且不爲零及 $\lim\limits_{z\to a} F(z)=0$。由 (1) 知, a 爲 $F(z)$ 的可去奇異點, 且爲 $F(z)$ 的一個零點, 設 a 爲 $F(z)$ 的一個 m 階零點, 則 $F(z)=(z-a)^m h(z)$, 這裡 $h(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 上全純, 且可取 a的一個鄰域, 使 $h(z)$ 在此鄰域內不爲零, 不妨假設此鄰域爲 $|z-a|<\delta$, 因此 $\dfrac{1}{h(z)}$ 在 $|z-a|<\delta$ 上全純且不爲零, 其 Taylor 展開式爲

$$\frac{1}{h(z)}=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+c_{-m+2}(z-a)^2+\cdots,\quad c_{-m}\neq 0,\ |z-a|<\delta,$$

於是

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{(z-a)^m h(z)}\\ &=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots. \end{aligned}$$

由 Laurent 展開式的唯一性, 得證 (2)。

從 (1), (2) 立即得到

(3) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在, 其充要條件爲 (3.7) 的係數 c_{-n} 有無窮多個不爲零, 這時稱 a 爲 $f(z)$ 的本性奇異點 (Essential singularity)。

例如: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z=0$ 爲其本性奇異點, 因爲

$$\lim_{z=x\to 0^+} e^{\frac{1}{z}}=+\infty \quad \text{而} \quad \lim_{z=x\to 0^-} e^{\frac{1}{z}}=0,$$

故 $\lim\limits_{z\to z} f(z)$ 不存在。

對於本性奇異點, 我們有如下重要的定理。

定理 3.3. (Weierstrass **奇異點定理**): 若 a 爲 $f(z)$ 的本性奇異點, 任給 $\delta>0$, 則對任意有限複數 α 及正數 $\varepsilon>0$, 在 $0<|z-a|<\delta$ 內有一點 z, 使得 $|f(z)-\alpha|<\varepsilon$ 成立, 即 $f(z)$ 在本性奇異點的鄰域內的取值在 $\mathbb{C}$ 上是稠密的。

證明: 假設定理的結論不眞, 則存在有限複數 α 及 $\varepsilon>0$ 使得在 $0<|z-a|<\delta$ 內, $|f(z)-\alpha|>\varepsilon$, 於是

$$F(z)=\frac{f(z)-\alpha}{z-a}$$

在 $0<|z-a|<\delta$ 上全純, 而當 $z\to a$ 時, $F(z)\to\infty$, 故 a 爲 $F(z)$ 的極點, 由 (2) 得知,

$$F(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots$$

所以,

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z-a}+(\alpha+c_{-1})+c_0(z-a)+\cdots,$$

因而 a 或是 $f(z)$ 的 $m-1$ 階極點 (當 $m>1$) 或是 $f(z)$ 的可去奇異點 (當 $m=1$), 這與定理的條件相矛盾, 定理因而證畢。

Weierstrass 奇異點定理十分深入地刻劃了 $f(z)$ 在一個本性奇異點附近的值分佈性質, 但 1879年, Picard 證明了更爲廣泛, 更爲深刻的 Picard 定理: 全純函數在一個本性奇異點的鄰域內無窮多次地取到每一個有限複值, 至多除去一個例外。關於 Picard 定理我們將在第五講再作討論。

以上討論的孤立奇異點是有限複數的情形, 現在我們討論孤立奇異點是無窮遠點的情形。

若函數 $f(z)$ 在圓環 V: $R<|z|<\infty$ $(R>0)$ 上全純, $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的一個孤立奇異點, 這個時候, 考慮變換 $w=\dfrac{1}{z}$, 將 $z=\infty$ 的鄰域變爲 $w=0$ 的鄰域, 於是

$$g(w)=f(z)=f\Big(\frac{1}{w}\Big)$$

在 $0<|w|<\dfrac{1}{R}$ 上全純, 且可展開成 Laurent 級數

$$g(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{-n}w^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}w^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_nw^{-n}=\varphi(w)+\psi(w),$$

$\varphi(w)$ 爲 $g(w)$ 的 Laurent 展開式的全純部分, 而 $\psi(w)$ 爲 $g(w)$ 的 Laurent 展開式的主要部分, 於是

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n=\varphi_0(z)+\psi_0(z),$$

其中 $\varphi_0(z)$ 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的全純部分, $\psi_0(z)$ 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的主要部分, 所以

(1) 當 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點時,

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots;$$

(2) 當 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的 m 階極點時,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m,\quad c_m\neq0;$$

(3) 當 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的本質性奇異點時,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n.$$

3.3. 整函數與亞純函數 (Entrice function and meromorphic function)

若函數 $f(z)$ 除了無窮遠點外, 在 $\mathbb{C}$ 上是全純的, 則稱 $f(z)$ 爲一整函數 (entire function)。於是, $f(z)$ 的 Taylor 展開式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{3.8}$$

在複平面上成立, $z=\infty$ 是孤立奇異點, 由 Laurent 展開式的唯一性, (3.8) 也是 $f(z)$ 在無窮遠點的鄰域的 Laurent 展開式。於是有三種可能:

(1) $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點, 則由 Liouville 定理得知, $f(z)$ 爲常數函數;

(2) $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的一個 m 階極點, 則 $c_n=0$, 當 $n>m$, 即 $f(z)$ 爲一個 m 階多項式

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m,\quad c_m\neq 0.$$

(3) $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的一個本性奇異點, 則

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

其中 c_n $(n\geq 1)$ 有無窮多個不爲零, 這時稱 $f(z)$ 爲超越整函數 (transcendental entire function), 例如: e^z, $\cos z$, $\sin z$ 等等。

若函數 $f(z)$ 除了無窮遠點外, 在複平面上只有極點 (極點的數目可爲有限, 亦可爲無限), 則稱 $f(z)$ 爲一亞純函數 (meromorphic function)。整函數是亞純函數; 有理函數 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 也是亞純函數, 其中 $P_n(z)$, $Q_m(z)$ 爲兩個互質多項式, 即

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\quad a_n\neq 0,$$
$$Q_m(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m,\quad b_m\neq 0.$$

且 $(P_n(z),Q_m(z))=1$, $Q_m(z)$ 的零點是 $f(z)$ 的極點, 由於

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{1}{z^{m-n}}\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{z}+\cdots+\frac{b_0}{z^m}},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & \text{若}\ \ m=n;\\ \infty, & \text{若}\ \ n>m;\\ 0, & \text{若}\ \ n<m.\end{cases}$$

即 $z=\infty$ 或是 $f(z)$ 的可去奇異點, 或是 $(n-m)$ 階極點。

反過來, 我們有如下定理。

定理 3.4. 若 $z=\infty$ 爲亞純函數 $f(z)$ 的可去奇異點或極點, 則 $f(z)$ 必爲有理函數。

證明: 由於 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇異點或極點, 故存在 $R>0$, 使得 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 上全純, 假設 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的鄰域內的 Laurent 展開式的主要部分爲 $\mathcal{P}(z)$, 當 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點時, $\mathcal{P}(z)\equiv 0$; 當 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的極點時, $\mathcal{P}(z)$ 是一多項式。

在圓 $|z| \le R$ 上, $f(z)$ 只能有有限個極點, 否則, 若 $f(z)$ 有無限多個極點, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 這無窮多個極點必有一個極限點 z_0, 且 z_0 在 $|z| \le R$ 上, 這便告訴我們 z_0 是 $f(z)$ 的一個非孤立奇異點, 但這是不可能的, 因爲 $f(z)$ 是一個亞純函數, 假設 $z_1, z_2, \ldots, z_k$ 是 $f(z)$ 的極點, 在 z_j, $(j = 1, \ldots, k)$ 的鄰域內, $f(z)$ 的 Laurent 展開式的主要部分爲

$$\psi_j(z) = \frac{c_{-1}^{(j)}}{z - z_j} + \cdots + \frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z - z_j)^{m_j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

全純部分爲 $\varphi_j(z)$, 於是函數

$$F(z) = f(z) - \mathcal{P}(z) - \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z)$$

除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ∞ 外在 $\mathbb{C}$ 上全純, 而這些點是 $F(z)$ 的可去奇異點。事實上, 當 $z \to z_j$ 時,

$$\lim_{z \to z_j} (f(z) - \psi_j(z)) = \varphi_j(z_j),$$

而 $\sum_{m \ne j} \psi_m(z) - \mathcal{P}(z)$ 在 z_j 是全純的, 故 $\lim_{z \to z_j} F(z)$ 存在且有限。在 $z = \infty$, $f(z) - \mathcal{P}(z)$ 是 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的鄰域的 Laruent 展開式的全純部分, 故 $\lim_{z \to \infty} (f(z) - \mathcal{P}(z))$ 存在且有限, 而

$$\lim_{z \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z) = 0.$$

於是 $\lim_{z \to \infty} F(z)$ 有限, 故 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全純。由 Liouville 定理 $F(z)$ 爲一常數 c, 因此

$$f(z) = c + \mathcal{P}(z) + \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z).$$

即爲有理函數, 定理因而證畢。

除去有理函數外的亞純函數, 稱爲超越亞純函數。超越亞純函數或以 $z = \infty$ 爲本性奇異點, 或以 $z = \infty$ 爲它的極點的極限點。在第二講中我們已經討論過單位圓盤的全純自同構群, 現在我們可以進一步定義出複平面 $\mathbb{C}$ 及擴充複平面 $\mathbb{C}^*$, 即 $\mathbb{C}$ 加上無窮遠點 ∞, 也即 Riemann 面 $\mathbb{S}^2$ 的自同構群。

3.3.1. 複平面 $\mathbb{C}$ 的全純自同構群 $Aut(\mathbb{C})$

若 $\alpha(z) \in Aut(\mathbb{C})$, 則 $\alpha(z)$ 一定將 ∞ 點映爲 ∞ 點。由於映射是自同構, 故爲一對一的, 因此, $\alpha(z)$ 在 ∞ 點有一單極點, 根據前面討論的結果, $\alpha(z)$ 一定是一個一次多項式, 即

$\alpha(z) = az+b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$。反過來, 若 $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, 則淺顯易見 $az+b \in Aut(\mathbb{C})$, 故 $Aut(\mathbb{C})$ 是由所有的線性變換

$$\{az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

所組成, 即 $Aut(\mathbb{C})$ 是由平移 (translation) $a(z) = z + b$ 及伸縮 (dilation) $d(z) = az$ 的複合所組成。

3.3.2. 擴充複平面的亞純自同構群 $Aut(\mathbb{C}^*)$

若 $\alpha(z) \in Aut(\mathbb{C}^*)$, 且 $\alpha(\infty) = \infty$, 由於自同構是一對一的, 故 $\alpha(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上是屬於 $Aut(\mathbb{C})$ 的, 因此, $\alpha(z) = cz + d$, 這裡 $c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$。我們也很容易證明

$$\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in Aut(\mathbb{C}^*),$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, 且 $ad - bc \neq 0$。

若 $\alpha(z) \in Aut(\mathbb{C}^*)$ 且 $\alpha(\infty) \neq \infty$, 則

$$\beta(z) = \frac{1}{\alpha(z) - \alpha(\infty)} \in Aut(\mathbb{C}^*),$$

且 $\beta(\infty) = \infty$, 所以 $\beta(z) = cz + d$, 這裡 $c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, 於是

$$cz + d = \frac{1}{\alpha(z) - \alpha(\infty)},$$

由此可解出 $\alpha(z)$, 得到 $\alpha(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, 這裡 $a = \alpha(\infty)c$, $b = d\alpha(\infty) + 1$, 故 $Aut(\mathbb{C}^*)$ 是由所有分式線性變換

$$\left\{\frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1\right\}$$

所組成, 即 $Aut(\mathbb{C}^*)$ 是由平移 $\alpha(z) = z+b$, 伸縮 $\alpha(z) = az$ 以及反演 (Inversion) $\alpha(z) = \dfrac{1}{z}$ 的複合所組成。如果令 $\dfrac{az+b}{cz+d}$ 與二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 一一對應, 則 $Aut(\mathbb{C}^*)$ 與所有的二階方陣

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1\right\}$$

所組成的群相同構, 這個群稱爲二階特殊線性群, 記作 $SL(2, \mathbb{C})$, 這裡 $detA$ 爲矩陣 A 的行列式。

在複分析中有下面一個非常重要的定理。

定理 3.5. **單值化定理** (Uniformization theorem)

任意單連通的 Riemann 曲面一定一對一地全純等價於下面三個區域之一: 單位圓盤, 複平面 $\mathbb{C}$, 擴充複平面 $\mathbb{C}^*$, 即 Riemann 球面 S^2。

Riemann 曲面的意義將在下一講中詳細介紹。由上述的定理 3.5 及第二講中所提到的單位圓盤上的全純自同構群, 我們可以得出定理 3.5 中所敍述三種區域的自同構群, 即定義出了所有單連通 Riemann 曲面上一對一全純等價的區域的自同構群。在下一講中我們還將要證明在複變函數論中非常重要的 Riemann 映射定理 (Riemann mapping theorem): 任意邊界點至少有兩點的單連通區域一定一對一地全純等價於單位圓盤。所以在一對一全純等價的意義之下, 單連通區域只有三個。至於這個區域上的幾何性質, 我們將在第五講中作進一步地討論。

3.4. Weierstrass 因式分解定理、Mittag-Leffler 定理與插值定理 (Interpolation theorem)

在這一節中, 我們將討論三個構造性的定理。對於整函數 f 而言, 除了無窮遠點之外, 函數是全純的, 所以我們可以用第二講中的 Taylor 展開式來表達之: $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$。由上一節的討論中, 我們也知道若 $z = \infty$ 是整函數 f 的極點, 則 $f(z)$ 是一個多項式, 因此, 我們可以將整函數看成是多項式的自然推廣, 即 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ 是一個無窮多次階的多項式。

對於多項式, 一個明確的表示便是用它的零點來表達, 若 $a_1, \ldots, a_n$ 爲 n 次多項式 $P_n(z)$ 的零點, 則

$$P_n(z) = A(z - a_1) \cdots (z - a_n),$$

這裡 A 是一個複常數, 這個表示式稱爲 $P_n(z)$ 的因式分解 (factorzation)。對於超越整函數, 是否也可以因式分解: 即如果 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 爲整函數的無窮多個零點, 是否可將此函數表示爲

$$A(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) \cdots = A \prod_{j=1}^{\infty} (z - a_j)?$$

由於上式中的乘積是無窮乘積, 這就牽涉到收斂的問題。而這個問題的答案正是 Weierstrass 因式分解定理 (Weierstrass factorization theorem)。爲了證明這個定理, 我們先簡單地討論一下無窮乘積。

對複數序列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 作乘積

$$\mathcal{P}_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k),$$

若 $1+a_k \neq 0$, $k=1,2,\ldots$, 則

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n = \mathcal{P} \neq 0,$$

且 $\mathcal{P}$ 爲有限, 則稱無窮乘積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{3.9}$$

是收斂的, 且收斂到 $\mathcal{P}$, 記作 $\mathcal{P}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, 否則稱 (3.9) 是發散的。

由於當 $x \geq 0$ 時, $1+x \leq e^x$, 故

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| \leq (1+|a_1|)(1+|a_2|)\cdots(1+|a_n|) \leq e^{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}$$

因此, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 與 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 同時收斂或同時發散。若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 則稱 (3.9) 絕對收斂。於是有: 絕對收斂的無窮乘積一定收斂, 且絕對收斂的無窮乘積可以改變因子的順序而不影響無窮乘積的值。有關這個敍述, 讀者可以自行證之。

現在我們來討論整函數的因式分解。

如整函數 $f(z)$ 沒有零點, 則顯然 $f(z)$ 可以表爲 $f(z)=e^{\phi(z)}$, 這裡 $\phi(z)$ 是一整函數。事實上, 只要首先注意到函數 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在整個平面上解析, 它是一個整函數 $\phi(z)$ 的導數。從這一個事實經過計算就可以推知 $f(z)e^{-\phi(z)}$ 的導數爲零, 所以 $f(z)$ 是 $e^{\phi(z)}$ 的常數倍, 這一常數可以併在 $\phi(z)$ 之內。若 $f(z)$ 是一個只有有限個零點的整函數, 若 $0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_j \neq 0$, $j=1,\ldots,n$) 是 $f(z)$ 的零點, 其階分別爲 $m, m_1, \ldots, m_n$。令

$$p(z) = z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n},$$

則 $h(z)=\dfrac{f(z)}{p(z)}$ 是以 $z=0$, a_j, $j=1,\ldots,n$, 爲可去奇異點, 故 $h(z)$ 爲沒有零點的整函數, 於是 $h(z)=e^{\psi(z)}$, $\psi(z)$ 爲整函數。因此, $f(z)$ 可表爲

$$f(z) = z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}e^{\psi(z)},$$

即 $f(z)$ 可表爲一個多項式及一個沒有零點的整函數的乘積, 而此多項式是以 $f(z)$ 的零點爲零點, 且其階數相同。

若整函數 $f(z)$ 有無限多個零點且不恆等於零, 由於 $f(z)$ 的零點爲可數個, 所以我們可將 $f(z)$ 的零點按模的大小排列成一序列 ($z=0$ 除外, 將另作處理) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}|, \qquad \lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty. \tag{3.10}$$

由於 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, 故對任意的正數 R, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{R}{|a_n|}\Big)^n$ 是收斂的。考慮無窮乘積

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^{n-1}\right\}. \tag{3.11}$$

令

$$\begin{aligned}
P_n(z)&=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^{n-1},\\
Q_n(z)&=\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z),\\
E_n(z)&=\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)e^{P_n(z)}=e^{Q_n(z)},
\end{aligned}$$

則 (3.11) 即爲 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}E_n(z)$。

對任意固定正數 R, 取正整數 N, 使得 $n\ge N$ 時, $|a_n|\ge 2R$, 考慮無窮乘積 $\prod\limits_{n=N}^{\infty}E_n(z)$, 當 $|z|\le R$, $n\ge N$ 時, $\left|\dfrac{z}{a_n}\right|\le\dfrac{1}{2}$, 故

$$\begin{aligned}
|Q_n(z)|&\le\frac{1}{n}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^n+\frac{1}{n+1}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{n+1}+\cdots\\
&\le\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^n\frac{1}{1-\frac{|z|}{|a_n|}}\le 2\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n.
\end{aligned}$$

由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{R}{|a_n|}\Big)^n$ 收斂, 故 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}Q_n(z)$ 在 $|z|\le R$ 上絕對且一致收斂, 故

$$\prod_{n=N}^{\infty}E_n(z)=\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}Q_n(z)\right),$$

在 $|z|\le R$ 上一致收斂。由 Weierstrass 奇異點定理 (定理 3.1) 知, 這個無窮乘積表示一個在 $|z|<R$ 上的全純函數, 且函數不爲零, 而

$$\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{N-1}E_n(z)$$

的零點爲 a_n $(n=1,\ldots,N-1)$, 而這些點都在 $|z|\le 2R$ 之中。因此, 在 $|z|<R$ 中的那些 a_n $(n=1,2,\ldots)$ 是 $\left(1-\dfrac{z}{a_1}\right)\prod\limits_{n=2}^{N-1}E_n(z)$ 的零點, 且在 $|z|<R$ 中只有這些零點。

當 $|z| < R$, n 充分大時, 可使 $|Q_n(z)| < 1$, 不難證明 $|e^z - 1| \le \frac{7}{4}|z|$, 當 $|z| < 1$ 時成立。所以

$$|E_n(z) - 1| = |e^{Q_n(z)} - 1| \le \frac{7}{4}|Q_n(z)| \le \frac{7}{2}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n,$$

所以, $\prod_{n=N}^{\infty} E_n(z)$ 當 N 充分大時, 在 $|z| \le R$ 上絕對收斂。

於是對於已給的複數序列 (3.10), 存在一個以 a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ 爲其零點的整函數

$$h(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \prod_{n=2}^{\infty} E_n(z),$$

這個無窮乘積對 z 絕對收斂, 且

$$P_N(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \prod_{n=2}^{N} E_n(z)$$

在任意圓盤 $|z| < R$ 上一致收斂到 $h(z)$, 於是我們得到下面定理。

定理 3.6. Weierstrass **因式分解定理**

若 $f(z)$ 爲一整函數, $z = 0$ 爲 $f(z)$ 的 m 階零點 (m 也可以爲零), 其餘零點爲 $a_1, a_2, \ldots$ 滿足 $0 < |a_n| \le |a_{n+1}|$, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, 則 $f(z)$ 可表示爲

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left\{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right\}. \quad (3.12)$$

其中 $g(z)$ 爲一整函數。

證明: 如前面討論, 可以作出整函數 $h(z)$, 以 a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ 爲其零點, 於是 $z^m h(z)$ 與 $f(z)$ 有相同零點及相同階數。所以 0, a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ 爲

$$H(z) = \frac{f(z)}{z^m h(z)}$$

的可去奇異點, 且沒有零點, 故 $H(z) = e^{g(z)}$, 這裡 $g(z)$ 爲整函數, 定理因而證畢。

由於 $g(z)$ 不唯一, 故 $f(z)$ 的表示式也不唯一。

對於亞純函數, 我們可以期待怎樣的表示式呢? 首先從 Weierstrass 因式分解定理的證明中可得到: 任意亞純函數可以表爲兩個整函數的商。

證明: 若 $f(z)$ 爲一亞純函數, 於是存在整函數 $f_1(z)$, 它以 $f(z)$ 的極點爲其零點。令 $f_2(z) = f(z)f_1(z)$, 在 $f(z)$ 的極點 a 處定義

$$f_2(a) = \lim_{z\to a} f_2(z),$$

則 $f_2(z)$ 也是一個整函數。故 $f(z)=\dfrac{f_2(z)}{f_1(z)}$。

由於任意亞純函數可以表示成兩個整函數之商, 而由 Weierstrass 因式分解定理, 每個整函數可以表示成 (3.12) 的形式, 故每個亞純函數可表示爲兩個形如 (3.12) 式子的商。這時, 這個亞純函數可以用它的零點及極點明確地表示出來。

此外, 在上一節中討論過, 如果一個亞純函數 $f(z)$ 只有有限多個極點 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 且 $z=\infty$ 是它的極點或可去奇異點, 則 $f(z)$ 爲有理函數, 並且有

$$f(z)=c+P(z)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z),$$

這裡 c 爲一常數, $P(z)$ 爲多項式, $\psi_j(z)$ 爲極點 $z=a_j$ 的主要部分。

對於一個超越亞純函數 $f(z)$, $z=\infty$ 或是它的本性奇異點, 或是它的極點的極限點。若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇異點, 則 $f(z)$ 的極點爲有限多個, 故

$$U(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)$$

是一個超越整函數, 因此

$$f(z)=U(z)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z).$$

若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的極點的極限點, 這些極點是 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 按模的大小排列起來, $|a_n|\le|a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$。在 a_j 點, 其主要部分爲 $\psi_j(z)$ 也是已給的。是否存在亞純函數 $f(z)$, 以 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 爲其極點, 而以 $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n,\ldots$ 爲相應的主要部分, 於是我們有

定理 3.7. (Mittag - Leffler **定理**)

存在這樣的亞純函數, 以 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 爲其極點, 且滿足 $|a_n|\le|a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$。而以 $\psi_1(z),\psi_2(z),\ldots,\psi_n(z),\ldots$ 爲相應的主要部分。

證明: 在 a_j 點取小的鄰域 U_j, $j=1,2,\ldots$, 使得 $U_j\cap U_k=\emptyset$, 當 $j\ne k$, 取 C^∞ 函數 ψ_j, 使得 $\psi_j=1$ 在 a_j 的一個小鄰域 $V_j\subset U_j$, $\psi_j=0$ 在 U_j, $j=1,2,\ldots$ 的餘集合上, 於是在 $\mathbb{C}\setminus\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 上定義 $u=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_j\psi_j$, 則 u 在 $\mathbb{C}\setminus\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 上爲 C^∞ 且在 $V_j\setminus\{a_j\}$ 上的值爲 ψ_j, 即在 a_j 附近有我們所要求的主要部分。但 u 不是亞純的。令

$$\Psi=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\overline{z}}, & \text{當}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{a_j\}_{j=1}^{\infty}\\ 0, & \text{當}\quad z=a_j,\quad j=1,2,\ldots.\end{cases}$$

由於在 $V_j \setminus \{a_j\}$ 上, $u = \psi_j$, 故當 $z \neq a_j$ 時, $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} = 0$, 即在 $V_j \setminus \{a_j\}$ 上, $\Psi = 0$, 而由 Ψ 的定義, 當 $z = a_i$ 時, $\Psi = 0$, 故 Ψ 爲連續函數。同理可證 Ψ 爲 C^∞ 的函數。於是由一維的 $\overline{\partial}$ - 問題的解 (定理 2.4), $\overline{\partial}$ - 問題

$$\frac{\partial V}{\partial \overline{z}} = \Psi$$

在 $\mathbb{C}$ 上有 C^∞ 的解 v, 這可表示爲第二講定理 2.4 中的 (1.4) 之形式

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

於是 $f = u - v$ 即爲所求的亞純函數。顯然, 當 $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 時, $\dfrac{\partial (u - v)}{\partial \overline{z}} = 0$, 即 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, 故當 $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 時, f 是全純的。由於 $v \in C^\infty(\mathbb{C})$, 由 u 的定義, 當 z 取 a_j 附近的值時, f 有主要部分 $\psi_j(z)$。定理因而證畢。

用 $\overline{\partial}$ - 問題的解來證明 Mittag - Leffler 定理, 乾淨俐落。但如果用古典複分析的方法來證明, 可以將所得的亞純函數寫得更清楚。

定理 3.7′. (Mittag - Leffler **定理**) 假設 $f(z)$ 爲一亞純函數, a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ 爲 $f(z)$ 的極點, 且滿足 $|a_n| \leq |a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = \infty$, 則 $f(z)$ 可以寫成

$$f(z) = U(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\Psi_n(z) - P_n(z)\},$$

這裡 $\Psi_n(z)$ 爲 $f(z)$ 在極點 $z = a_n$ 處的主要部分, $P_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 爲多項式, $U(z)$ 爲整函數。

證明: 取正數 $\varepsilon_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$。若 $a_1 = 0$, 則取 $P_1(z) = 0$, 對 a_n $(\neq 0)$, $\Psi_n(z)$ 是 $(z - a_n)^{-1}$ 的多項式, 故在 $|z| < a_n$ 內全純, 因此可展成 Taylor 級數

$$\Psi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

當 $|z| < |a_n|$ 時成立。這個級數在 $|z| < \dfrac{1}{2}|a_n|$ 內一致收斂到 $\Psi_n(z)$, 故存在 λ_n, 使得

$$\left| \Psi_n(z) - \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| < \varepsilon_n.$$

記 $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{\lambda_n}\dfrac{\Psi_n^{(k)}}{k!}z^k$。設 R 爲任意正數, 取正整數 $N=N(R)$, 使得 $n>N$ 時, $|a_n|>2R$; $n\le N$ 時, $|a_n|\le 2R$, 於是, 當 $n>N$, $|z|<R$ $\left(|z|<\dfrac{1}{2}|a_n|\right)$ 時,

$$\Big|\Psi_n(z)-P_n(z)\Big|<\varepsilon_n.$$

由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty$, 故 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上一致收斂。當 $n>N$ 時, $\Psi_n(z)$ 的極點 $z=a_n$ 不在 $|z|<R$ 內, 故由 Weierstrass 奇異點定理 $\Phi_n(z)=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上全純, 於是

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{N}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}+\Phi_N(z)$$

在 $|z|<R$ 內, 以滿足 $|a_n|<R$ 的那些 a_n $(n=1,2,\ldots)$ 的點爲極點, 其主要部分是 $\Psi_n(z)$。由於 R 是任意的, 故 $\varphi(z)$ 即爲以 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 爲極點, 以 $\Psi_1(z),\Psi_2(z),\ldots,\Psi_n(z),\ldots$ 爲其相應主要部分的亞純函數。定義 $U(z)=f(z)-\varphi(z)$,

$$U(a_n)=\lim_{z\to a_n}\{f(z)-\varphi(z)\},$$

則 $U(z)$ 爲一整函數, 定理因而證畢。

若已給 m 個點 $z_1,\ldots,z_m$ 及 m 個複數值 $a_1,a_2,\ldots,a_m$, 一定可以找到一個多項式 $p(z)$, 使得

$$p(z_j)=a_j,\quad j=1,2,\ldots,m.$$

這只要從 m 個方程式 $p(z_j)=a_j$, $(j=1,2,\ldots,m)$ 中解出 $p(z)$ 的係數即可。同樣, 若已給 m 個點 $z_1,z_2,\ldots,z_m$ 及複數值 $a_{j,k}$ $(j=1,\ldots m,\ 0\le k\le n_j-1)$, 這裡 n_j 爲 ≥ 1 的整數, 則可以找到多項式 $p(z)$, 使得

$$\frac{p^{(k)}(z_j)}{k!}=a_{j,k}$$

也就是可以找到多項式 $p(z)$, 使得 $p(z)$ 在 z_j 的 Taylor 展開式的開始 n_j 項是所給定的多項式。下面我們將證明一個十分一般的插值 (interpolation) 定理。

定理 3.8. (**插值定理**)

若 $z_1,z_2,\ldots$ 爲 $\mathbb{C}$ 中的一個離散點集合, $n_1,n_2,\ldots$, 爲一個正整數序列, $a_{j,k}$ $(j\ge 1,\ 0\le k\le n_j-1)$ 爲一複數序列, 則存在一個整函數 $g(z)$ 使得

$$g^{(k)}(z_j)=k!a_{j,k}\qquad (j\ge 1,\ 0\le k\le n_j-1)$$

成立。即如果預先給定一個點序列 $\{z_j\}$ 及每一點 z_j 上的 Taylor 展開式的開始 n_j 項, 則一定存在一個整函數, 在這些點上, 有這樣的 Taylor 展開式。

證明: 由 Weierstrass 因子分解定理, 可以找到整函數 $f(z)$, 使得 $f(z)$ 在 $z = z_j$ 處爲 n_j 重零點。由於 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ 爲一離散序列, 故可以找到正數序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ 使得以 z_j 爲中心, $2\varepsilon_j$ 爲半徑的圓盤 $D(z_j; 2\varepsilon_j)$ 相互之間互不相交。作

$$P_j(z) = \sum_{0 \le k \le n_j - 1} a_{j,k}(z - z_j)^k, \quad j \ge 1.$$

對每個 j, 作 $\varphi_j \in C^\infty$, 使得 φ_j 的支集合在 $D(z_j; 2\varepsilon_j)$ 之中, 且 $0 \le \varphi_j \le 1$, 而在 $\overline{D}(z_j; \varepsilon_j)$ 上 $\varphi_j \equiv 1$, $j = 1, 2, \ldots$。

令 $\psi(z) \in C^\infty$, 作函數

$$g(z) = \sum_{j \ge 1} P_j(z)\varphi_j(z) - f(z)\psi(z). \tag{3.13}$$

由於 φ_j 的支集在 $\mathbb{C}$ 上互不相交, 故對每一點 $z \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{j=1} P_j(z)\varphi_j(z)$ 中最多只有一項不爲零, 所以這個式子是有意義的。我們要求出 ψ, 使得 $g(z)$ 是一個整函數, 即要求 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}} = 0$。當 $z \in \mathbb{C}$ 時, 此即

$$\sum_{j \ge 1} P_j(z) \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}} = f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(z).$$

令

$$h(z) = \sum_{j \ge 1} P_j(z) \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \overline{z}},$$

則在 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \overline{D}(z_j; \varepsilon_j)$ 上, $h(z) \equiv 0$。在 $z = z_j$ 處, 取 $\dfrac{h(z)}{f(z)} = 0$, 則 $\dfrac{h(z)}{f(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上是 C^∞ 的。h 有互不相交的緊緻支隻合, 故由 $\overline{\partial}$ - 問題知 $\dfrac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} = \dfrac{h}{f}$ 有一個光滑的解 ψ。取這樣的 ψ, 則 (3.13) 定義了一個整函數, 在 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \overline{D}(z_j; \varepsilon_j)$ 上, $\dfrac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} = 0$, 故 ψ 在 z_j 的附近是全純的。由於 $f(z)$ 在 $z = z_j$ 處有 n_j 重零點, 故由 (3.13) 所定義的 $g(z)$, 可以直接計算驗證: 當 $0 \le k \le n_j - 1$ 時,

$$g^{(k)}(z_j) = P_j^{(k)}(z_j) = k! a_{j,k}$$

成立, 定理因而證畢。

3.5. 留數定理 (Residue Theorem)

若函數 $f(x)$ 在 $D(a;r)\setminus\{a\}$ 上全純 $(r>0)$, a 爲 $f(z)$ 的孤立奇異點, $f(z)$ 在 a 的留數 (residue) 定義爲

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz,$$

這裡 $0<\rho<r$。由於 $f(z)$ 在 $D(a;r)\setminus\{a\}$ 可展開成 Laurent 級數 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, 所以 $\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}$。

若 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的孤立奇異點, $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 內全純, 定義 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留數爲

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} f(z)dz,$$

這裡 $R<\rho<\infty$。由於 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的鄰域可展開成 Laurent 級數 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, 故 $\operatorname{Res}(f,\infty)=-c_{-1}$。

若 a $(\neq\infty)$ 爲 $f(z)$ 的 m $(m\geq 1)$ 階極點, 於是 $f(z)$ 在 a 的鄰域內可寫成

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\,g(z),$$

而 $g(z)$ 在 $z=a$ 處全純, 且 $g(a)\neq 0$, 故

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

因此,

$$\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\,g^{(m-1)}(a).$$

而

$$g^{(m-1)}(a)=\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big\{(z-a)^m f(z)\Big\},$$

故

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big\{(z-a)^m f(z)\Big\}.$$

特別當 $m=1$ 時,

$$\operatorname{Res}(f,a)=g(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

我們有如下的定理。

定理 3.9. (**留數定理**)

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 之外是全純的, 且 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 之外是連續的。假設 $\partial\Omega$ 爲可求長的簡單封閉曲線, 則

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k).$$

定理 3.9′. (**留數定理**)

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \infty$ 外是全純的, $z_1, z_2, \ldots, z_n, \infty$ 爲 $f(z)$ 的孤立奇異點, 則 $f(z)$ 在所有這些孤立奇異點的留數之和爲零, 即

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k) + \mathrm{Res}\,(f, \infty) = 0.$$

這兩個定理的證明是明顯的, 我們只要用 Cauchy 積分定理便立即可得到結論。所以證明在此從略。留數定理本身是十分簡單的, 重要的是可以用它來計算一些定積分的值。而這些定積分的被積函數的反導數函數往往是求不出來的。用留數定理求定積分有種種技巧, 如函數 $f(z)$ 的選取, 積分路線的選取等等。在這裡我們只舉幾個簡單的例子來說明。

例 1. 計算積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$。

解: 取 $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$, 則 $f(z)$ 在上半平面有唯一孤立奇異點 $z = i$, 它爲 $f(z)$ 的 $n+1$ 階極點。取 Ω 爲上半圓盤 $|z| < R$, $I_m(z) > 0$。於是

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f, i) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right\}\Bigg|_{z=i} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right\}\Bigg|_{z=i} \\ &= \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2i)^{n+1}} = \frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f, i) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}, \quad (3.14)\end{aligned}$$

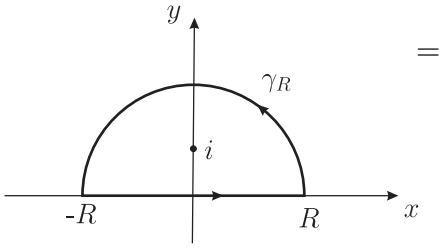


圖 A

這裡 γ_R 爲上半圓周 (見圖 A): $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$。但

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}},$$

當 $R\to\infty$ 時, 顯然這個積分 $\to 0$。因此, 在 (3.14) 中令 $R\to\infty$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=2\pi i Res(f,i)=\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}。$$

例 2. 計算 Dirichlet 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$。

解: 顯然 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, 因爲 $\dfrac{\sin x}{x}$ 爲偶函數。考慮 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$。取 Ω 爲上半平面的半圓環 (見圖 B), 其邊界爲:

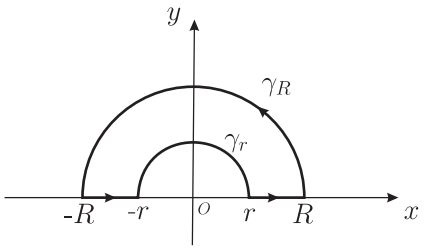


圖 B

$$-R<z<-r;\qquad r<z<R;$$
$$\gamma_r: z=re^{i\theta},\qquad 0\le\theta\le\pi;$$
$$\gamma_R: z=Re^{i\theta},\qquad 0\le\theta\le\pi.$$

由於 $f(z)$ 在這個半圓環中全純, 由 Cauchy 積分定理,

$$\int_r^R f(x)dx+\int_{-R}^{-r}f(x)dx+\int_{\gamma_R}f(z)dz+\int_{\gamma_r}f(z)dz=0.$$

而

$$\int_{\gamma_R}f(z)dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta=i\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta+iR\cos\theta}d\theta,$$

故

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)dz\right|\le\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi/2}e^{-R\sin\theta}d\theta.$$

但當 $0\le\theta\le\pi/2$ 時, $\dfrac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta$, 故

$$\int_0^{\pi/2}e^{-R\sin\theta}d\theta\le\int_0^{\pi/2}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta=\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}),$$

當 $R\to\infty$ 時, 這是 $\to 0$ 的。因此, 當 $R\to 0$ 時, $\int_{\gamma_R}f(z)dz\to 0$。另一方面,

$$\int_{\gamma_r}f(z)dz=i\int_{\pi}^{0}e^{-r\sin\theta+ir\cos\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}(1+O(r))d\theta=-\pi i+O(r),$$

故當 $r\to 0$ 時, $\int_{\gamma_r}f(z)dz\to-\pi i$。而

$$\int_{-R}^{-r}f(x)dx=\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_r^R\frac{e^{-ix}}{x}dx,$$

於是在 $\displaystyle\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_R} f(z)dz+\int_{\gamma_r} f(z)dz=0$ 中令 $r\to 0$, $R\to\infty$ 得

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}。$$

例 3. 計算 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ 及 $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$。

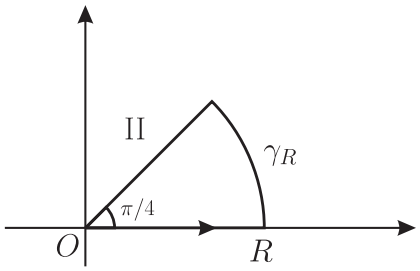


圖 C

解: 取 $f(z)=e^{iz^2}$ 及 Ω 爲由 $\mathrm{I}: 0\le z\le R$; $\mathrm{II}: re^{i\frac{\pi}{4}}$, $0\le r\le R$ 及 $\gamma_R=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$ 所圍成的扇形區域 (見圖 C)。於是由 Cauchy 積分定理

$$\int_{\mathrm{I}} f(z)dz+\int_{\mathrm{II}} f(z)dz+\int_{\gamma_R} f(z)dz=0.$$

而

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta,$$

故

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right|\le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}d\theta\le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}d\theta=\frac{\pi}{4R}\Big(1-e^{-R^2}\Big).$$

當 $R\to\infty$ 時, 上式 $\to 0$, 故

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f(z)dz+\int_{\mathrm{II}} f(z)dz\right)=0,$$

即

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx-\int_0^\infty e^{ix^2}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}dx=0.$$

這就有

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx=e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

但由微積分我們已知 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 因此

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

於是

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

3.6. 解析延拓

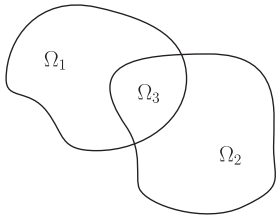


圖 D

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, 如果存在一個包含 Ω 的區域 U, 並且有函數 $F(z)$ 在 U 上全純, 且在 Ω 上 $F(z) = f(z)$, 則稱 $f(z)$ 可解析延拓 (或全純延拓) 到 $U \setminus \Omega$。由全純函數的唯一性定理, 如果在 U 內 F 存在, 則是唯一的。同樣, 如果 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 分別在區域 Ω_1, Ω_2 上全純且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_3 \neq \emptyset$, 而在 Ω_3 上 $f_1 = f_2$, 則在 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (圖 D) 上定義

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \Omega_1; \\ f_2(z), & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

於是 f 在 Ω 上全純, 稱 f_1, f_2 互爲解析延拓。

最自然, 最重要的解析延拓的方法是用冪級數來進行。由 Abel 定理, 一個冪級數

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{3.15}$$

存在一個收斂半徑 R, 在 $|z| < R$ 內級數絕對收斂且在其內任一緊緻子集合上一致收斂, 所以這個冪級數在 $|z| < R$ 是一個全純函數, 記作 $f(z)$。如果 $z_0 \in D(0;R)$, 則 $f(z)$ 可以在 $z = z_0$ 處展開成 Taylor 級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

若其收斂半徑爲 ρ, 則 $\rho \geq R - |z_0|$。

如果 $\rho > R - |z_0|$, 則 $D(z_0;\rho)$ 有一部分在 $D(0;R)$ 之外, 於是 $f(z)$ 可以解析延拓到 $D(z_0;\rho) \setminus D(0;R)$ 上去。若 $\rho = R - |z_0|$, 則 $D(z_0;\rho)$ 與 $D(0;R)$ 相切, 設其切點爲 ξ_0。這表明 $f(z)$ 不能在 ξ_0 這個點解析延拓出去, 我們稱 ξ_0 爲 $f(z)$ 的一個奇異

點。顯然, 如果 R 是 (3.15) 的收斂半徑, 則 (3.15) 一定在 $|z| = R$ 上至少有 $f(z)$ 的一個奇異點。否則的話, 則 $f(z)$ 可以在 $|z| = R$ 上任一點解析延拓出去, 即對於 $|z| = R$ 上任一點 ξ, 都有 $D(\xi, r_\xi)$ 及 $g_\xi(z)$, 而 $g_\xi(z)$ 在 $D(\xi; r_\xi)$ 上全純, 且 $g_\xi(z) = f(z)$ 當 $z \in D(0; R) \cap D(\xi; r_\xi)$。由於 $|z| = R$ 是緊緻集合, 故由 Heine-Borel 定理, 在 $\{D(\xi; r_\xi)\}$ 上可以選取有限個 $D(\xi_1; r_{\xi_1}), D(\xi_2; r_{\xi_2}), \ldots, D(\xi_m; r_{\xi_m})$ 覆蓋 $|z| = R$。令

$$G = \bigcup_{k=1}^{m} D(\xi_k; r_{\xi_k}),$$

ρ 爲 $|z| = R$ 到 ∂G 的距離, 顯然 $\rho > 0$。於是

$$\{R - \rho < |z| < R + \rho\} \subset G.$$

在 G 內定義 $\Phi(z) = g_{\xi_k}(z)$ 當 $z \in D(\xi_k; r_{\xi_k})$, $(k = 1, \ldots, m)$, 則 $\Phi(z)$ 爲 G上的單值全純函數。如 $D(\xi_k; r_{\xi_k}) \cap D(\xi_j; r_{\xi_j}) \neq \emptyset$, $k \neq j$, 則

$$\Big(D(\xi_k; r_{\xi_k}) \cap D(\xi_j; r_{\xi_j})\Big) \cap D(0; R) \neq \emptyset,$$

在這部分, $g_{\xi_k}(z) = g_{\xi_j}(z) = f(z)$ 。由全純函數的唯一性定理, 在 $D(\xi_k; r_{\xi_k}) \cap D(\xi_j; r_{\xi_j})$ 上, $g_{\xi_k}(z) = g_{\xi_j}(z)$ 。在 $G \cap D(0; R)$ 上, $\Phi(z) = f(z)$, 故 $f(z)$ 可解析延拓到 $G \cup D$ 。而這包有 $D(0; R + \rho)$, 這與 R 爲 (3.15) 的收斂半徑的定義相互矛盾。

因此, 在收斂圓周上, (3.15) 一定有奇異點, 例如 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $z = 1$ 處爲它的奇異點。下面這個著名的例子說明有這樣的冪級數, 它的收斂圓周上每一點都是奇異點。

例.

$$f(z) = z^{1!} + z^{2!} + \cdots + z^{n!} + \cdots . \tag{3.16}$$

解. 由於

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = k!; \\ 0, & \text{若 } n \neq k!. \end{cases}$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

因此, (3.16) 的收斂半徑爲 $R = 1$, 即 $f(z)$ 在 $D(0; 1)$ 上全純。若 $z_0 \in D(0; 1)$, $|z_0| = \dfrac{1}{2}$, $f(z)$ 在 z_0 處有 Taylor 展開式

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

延長線段 $\overline{Oz_0}$ 與 $|z|=1$ 的交點爲 ξ_0, 如能證明 $g(z)$ 的收斂半徑爲 $\dfrac{1}{2}$, 則表明 $f(z)$ 不能在 ξ_0 處解析延拓。如果不然, 即若 $g(z)$ 的收斂半徑 $\rho > \dfrac{1}{2}$, 則 $D(\xi_0;\rho)\cap D(0;1)\neq\emptyset$, 於是在 $D(\xi_0;\rho)$ 中有 $|z|=1$ 的一段圓弧 σ, $\xi_0\in\sigma$ 。由於形如 $\exp\left\{\dfrac{2\pi ip}{q}\right\}$ (p, q 爲整數, $\dfrac{p}{q}$ 爲既約分數) 的點在 $|z|=1$ 上處處稠密, 故在 σ 上一定有點 $\xi_1=\exp\left\{\dfrac{2\pi ip}{q}\right\}$, 而 $\lim\limits_{r\to1}g(r\xi_1)=g(\xi_1)$ $(0<r<1)$ 。但當 $z\in D(0;1)$ 時, $g(z)=f(z)$, 故 $\lim\limits_{r\to1}f(r\xi_1)=g(\xi_1)$。由於

$$f(r\xi_1)=\sum_{n=1}^{q-1}r^{n!}\xi_1^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}r^{n!},$$

顯然

$$\sum_{n=q}^{\infty}r^{n!}>\sum_{n=q}^{N}r^{n!}>(N-q)r^{N!}.$$

於是當 $r\to1$ 時, $\sum\limits_{n=q}^{\infty}r^{n!}$ 可以大於任何正整數, 所以

$$\lim_{r\to1}|f(r\xi_1)|=\infty,$$

這與 $\lim\limits_{r\to1}f(r\xi_1)=f(\xi_1)$ 相互矛盾, 故 ξ_0 爲 $f(z)$ 的奇異點。

一個函數稱爲在一點 z_0 附近是解析 (或全純) 的, 如果這個函數在這點附近可以展開成收斂冪級數, 這是函數局部解析 (或局部全純) 的定義。這個定義與第一講中的定義是相符合的。有了解析延拓的概念, 可以定義整體解析 (或整體全純) 函數。

從一個局部全純函數 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 出發, 如其收斂半徑爲 R, 若 $a_1\in D(a;R)$, 則得另一個冪級數

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n,$$

其收斂半徑爲 $R_1\geq R-|a-a_1|>0$, 稱全純函數 $f(z)$, $f_1(z)$ 爲解析元素, 而 $f_1(z)$ 爲 $f(z)$ 的解析延拓。如有 m 個解析元素

$$f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-a_k)^n,\qquad k=1,2,\ldots,m,$$

f_k 是 f_{k-1} 的解析延拓, 則 f_m 也是 f 的解析延拓。將所有的由 $f(z)$ 出發的解析延拓得到的解析元素的全體組成一個集合, 這個集合稱爲整體解析 (整體全純) 函數 (global analytic function) 。

完全解析 (完全全純) 函數 (complete analytic function) 是一個整體解析函數包含有其中任何一個解析元素的所有解析延拓。一般來說, 這是一個多值函數。所有解析延拓所對應的收斂圓之和稱爲完全解析函數的存在域。這當然不能再延拓出去, 因此存在域的邊界點都是完全解析函數的奇異點。

—本文作者龔昇任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—

更正啓事

本刊第 34 卷第 3 期 (135號) 第 20 頁第 3 行到第 4 行 "學校幾何課程的重整 — 爲何教和如何教演繹幾何?" 一文中提及項武義及蘇式冬兩位教授的描述「當時 (1970年代) 項武義返回中國大陸參與數學實驗教材的編訂, 而幾何組的組長就是蘇式冬。」作者張家麟、黃毅英、林智中先生們轉其友人意見, 提出以下兩點更正。特此刊登, 並謝謝作者們的來信告知。

(一) 1978年項武義教授返回中國大陸時, 提出了一個《關於中學數學實驗教材的設想》, 並沒有參與具體的教材編訂工作。

(二) 蘇式冬教授當時只是教育部負責組織教材的編寫和實驗研究工作的人, 不是幾何組長。詳情可見教材前言。

數學傳播 35卷1期, pp. 54-76

複分析五講 第四講

Riemann 映射定理

龔 昇・張德健

4.1. 共形映射

複變函數論中另一個重要組成部分是 Riemann 共映射理論, 這個理論的基本觀點是將全純函數 $w = f(z)$ 看作爲將 z 平面上的區域到 w 平面上的區域的映射。也就是說, 從幾何觀點來看待與處理全純函數。在第一講中我們已經提過, 若 $f'(z) \neq 0$, 則 $w = f(z)$ 看作一個映射是有共形性, 故稱之爲共形映射, 或全純映射。

首先觀察下面這個事實: 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲一個區域, 經過全純映射 $w = f(z)$ 後得到 $f(\Omega)$, 則 $f(\Omega)$ 仍是一個區域。

我們只要證明 $f(\Omega)$ 爲連通開集合。若 w_1, w_2 爲 $f(\Omega)$ 中任意兩點, 在 Ω 內有 z_1, z_2 使得 $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$。因爲 Ω 爲連通區域, 故在 Ω 中有 $r(t)$ 連接 z_1 及 z_2, 而顯然 $f(r(t)) \subset f(\Omega)$ 連接 w_1, w_2, 故 $f(\Omega)$ 爲連通集合。

設 w_0 是 $f(\Omega)$ 中任一點, 由第二講中的定理2.15, 對於充分小的 $\rho > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $D(w_0; \delta)$ 內任一點 w, 在 $D(z_0; \rho)$ 內存在一點 z, 使得 $f(z) = w_0$ 即 $D(w_0; \delta) \subset f(\Omega)$, 故 $f(\Omega)$ 爲開集合。上述的結果也稱爲開映射 (open mapping) 定理: f 將開集合映爲開集合。

在第一講中我們已經定義過在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上定義的函數 $f(z)$ 稱爲單葉 (univalent), 如果 $f(z_1) = f(z_2)$ 若且唯若 $z_1 = z_2$。於是可以有如下的結果。

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上單葉且全純, 則任一點 $z \in \Omega$, 有 $f'(z) \neq 0$。反之, 若在點 $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$, 則在點 z_0 的一個鄰域內 $f(z)$ 是單葉的。

對這個結果的證明並不困難, 我們現在略述如下。若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上單葉且全純, 但是有 $z_0 \in \Omega$, 使得 $f'(z_0) = 0$ 於是 z_0 是函數 $f(z) - f(z_0)$ 的 m 階零點, 而 $m \geq 2$。由第二講中的定理2.15, 對於 $w_0 = f(z_0)$ 的鄰域內的 w, $f(z) - w$ 在 z_0 的鄰域內恰有 m 個零點。這與 $f(z)$ 在 Ω 上單葉的假設相矛盾。反之, 若 $f'(z_0) \neq 0$, 則 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的

簡單零點, 由第二講中的定理2.15 知道, 對充分小的 ρ, 存在 $\delta > 0$, 使得 $D(f(z_0); \delta)$ 中任一點 w, $f(z) - w$ 在 $D(z_0; \rho)$ 中只有一個零點, 即只有一個 z 使得 $f(z) = w$。取 $\rho_1 < \rho$, 使得 $f(D(z_0; \rho_1)) \subset D(w_0; \delta)$。故 $f(z)$ 在 $D(z_0; \rho_1)$ 上是單葉的。

此外我們也很容易證明下面的結果: 若 $w = f(z)$ 在 Ω 上單葉全純, 將 Ω 映爲 U 則反函數 $z = g(w)$ 在 U 上單葉全純, 將 U 映爲 Ω, 因此, 單葉全純映射也稱爲 雙全純映射 (biholomorphic mapping)。

下面的事實是直觀的, 但它的證明卻是十分複雜, 故述而不證。

Jordan 定理: 一條簡單封閉曲線 γ 把複平面分成兩個區域, 其中一個是有界的, 稱爲 γ 的內部, 另一個是無界的, 稱爲 γ 的外部, γ 是兩個區域的共同邊界。

現在我們來證明下面定理。

定理 4.1: 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲一區域, γ 爲 Ω 內可求長簡單封閉曲線。其內部 $U \subseteq \Omega$。若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 把 γ 雙方單值地映爲簡單封閉曲線 Γ, 則 $w = f(z)$ 在 U 上單葉, 將 U 映爲 Γ 的內部 V。

證明: 若 w_0 不在 Γ 上, 由幅角原理函數知道 $f(z) - w_0$ 在 γ 內的零點個數 N 等於

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}dz = \pm\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dw}{w - w_0}.$$

當 w_0 在 Γ 的外部時,

$$\oint_\Gamma \frac{dw}{w - w_0} = 0,$$

所以 $N = 0$, 即 $f(z) - w_0$ 在 U 內無零點。當 w_0 在 Γ 的內部時, 則

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dw}{w - w_0} = 1,$$

所以 $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz = \pm 1$。因爲 N 爲非負整數, 故 $N = 1$ 即 $f(z) - w_0$ 在 U 內只有一個零點。當 z 沿 γ 正方向繞一圈時, $w = f(z)$ 沿 Γ 正方向繞一圈。當 w_0 在 Γ 上時, 則 $f(z) - w_0$ 在 U 內無零點。如果不是這樣, 那我們可以找到 $z_0 \in U$ 使得 $f(z_0) = w_0$ 於是有 $D(w_0; \delta) \subset f(U)$。對於 $D(w_0; \delta)$ 中每一點 w_1, $f(z) - w_1$ 在 U 內有零點。取 $w_1 \in D(w_0; \delta)$ 且位於 Γ 之外, 則與 $f(z) - w_1$ 在 U 內無零點相互矛盾, 定理之證明因而完畢。

下面我們舉一些最簡單的雙全純映射的例子。

例 4.1: 在第二講中我們已證明, 將單位圓盤 $D(0; 1)$ 映爲自己的單葉全純映射有而且只有

$$w = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}; \qquad a \in D(0; 1), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

例 4.2: 將上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映爲單位圓盤 $D(0;1)$ 的單葉全純映射有而且只有

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \qquad \mathrm{Im}(a) > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

很明顯的, 這個變換將 $\mathrm{Im}(z) = 0$ 映爲 $|w| = 1$。(4.2) 也可以表示爲

$$z = \frac{\bar{a}w - e^{i\theta}a}{w - e^{i\theta}},$$

將 $|w| = 1$ 映爲 $\mathrm{Im}(z) = 0$。由定理 4.1 知道, 此映射將 $D(0;1)$ 單葉全純地映爲 $\mathrm{Im}(z) > 0$。反之, 如有 $w = f(z)$ 將 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 單葉地映爲 $D(0;1)$。已知 (4.2) 將 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 單葉全純地映爲 $D(0;1)$, 記此映射爲 $\psi(z)$, 則 $f \circ \psi^{-1}$ 將單位圓盤映爲單位圓盤。由例 4.1 知道, $f \circ \psi^{-1}$ 必爲 (4.1) 的形式, 記作 ϕ, 即 $f\psi^{-1} = \phi$。故 $f = \phi \circ \psi$, 而此仍爲 (4.2) 的形式。

同樣可以證明:

例 4.3: 將上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映爲上半平面 $\mathrm{Im}(w) > 0$ 的單葉全純映射有而且只有

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 而且 $ad - bc > 0$。

在第三講中我們提到, 所有分式線性變換

$$\left\{ w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

所組成的群是擴充複平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 的亞純自同構群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$。這個群與二階特殊線性群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 在

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{對應下相互一一對應}$$

假設 $z = \frac{aw+b}{cw+d}$ 爲任意分式線性變換, 如將直線看成是半徑爲 ∞ 的圓, 則對於分式變換, 有如下的性質: 分式線性變換將圓變爲圓。這可證明如下:

若 $z = x + iy$, 則任意圓可以寫成

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

且可取 α, β, γ, δ 均爲實數。這方程式也可寫成

$$\alpha z\bar{z} + \frac{1}{2}\beta(z + \bar{z}) + \frac{1}{2i}\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0,$$

或可寫成

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \tag{4.3}$$

這裡 $A = \alpha$, $C = \delta$ 爲實數, $B = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2i}\gamma$ 爲複數。若 $\alpha = 0$, 即 $A = 0$, 則 (4.3) 表示一條直線, 否則 (4.3) 表示一個圓。而任一分式線性變換 $z = \frac{aw+b}{cw+d}$ 是由平移 $z = w + b$, 伸縮 $z = aw$ 及 $z = \frac{1}{w}$ 等三種變換所組成, 而這三種變換都是將圓變爲圓的, 這只要一一驗證便可得知。若將 $z = w + b$ 代入 (4.3) 中, 我們便得到

$$Aw\bar{w} + (A\bar{b} + B)w + (Ab + \bar{B})\bar{w} + Ab\bar{b} + Bb + \bar{B}\bar{b} + C = 0,$$

這仍是 (4.3) 的形式。若將 $z = aw$ 代入 (4.3) 式中, 得

$$Aa\bar{a}w\bar{w} + Baw + \bar{B}\bar{a}\bar{w} + C = 0,$$

這也是 (4.3) 的形式。最後若將 $z = \frac{1}{w}$ 代入 (4.3) 式中, 得

$$Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0,$$

這仍是 (4.3) 的形式, 故分式線性變換將圓映爲圓。

若 z_1, z_2, z_3, z_4 爲 $\mathbb{C}^*$ 中的四個點, 至少有三個點是不相同的, 我們稱

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

爲這四個點的 交比 (cross ratio) 。若這四個點中有任一點爲 ∞, 則用極限來定義交比。例如

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)}$$

於是可以證明, 在分式線性變換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$下, 將 z_1, z_2, z_3, z_4 變爲 w_1, w_2, w_3, w_4, 則

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

即交比在分式線性變換下是不變的, 也就是: 交比在分式線性變換群下是個不變量。這個證明是容易的, 只要將 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 直接代入 (w_1, w_2, w_3, w_4), 經過計算便可得出結果。

反過來, 如果有一個函數 $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 在分式線性變換群下是個不變量, 則 f 只是交比的一個函數。即在這種意義下在分式線性變換群下的不變量本質上只有交比。這可證明如下, 若 T 表示分式線性變換, 由假設

$$f(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = f(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

對任意 T 都成立。取 $T_1 = z - z_4$, 則

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(z_1 - z_4, , z_2 - z_4, z_3 - z_4, 0);$$

取 $T_2 = \frac{1}{z}$ 則

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(\frac{1}{z_1 - z_4}, \frac{1}{z_2 - z_4}, \frac{1}{z_3 - z_4}, \infty);$$

取 $T_3 = z - \frac{1}{z_3 - z_4}$ 則

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = f\Big(\frac{z_3 - z_1}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_4)}, \frac{z_3 - z_2}{(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)}, 0, \infty\Big);$$

取 $T_4 = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_4)}{(z_3 - z_2)} z$ 則

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = f\Big(\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}, 1, 0, \infty\Big) = f((z_1, z_2, z_3, z_4), 1, 0, \infty)$$

這便完成了證明。

4.2. 正規族 (Normal Family)

在 Riemann 共形映射理論中, 最重要也是最深刻的定理便是 Riemann 映射定理, 我們現在就來討論這個定理。

定理 4.2(Riemann 映射定理): 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲單連通區域, 其邊界點多於一點, z_0 爲 Ω 中任意一點, 則在 Ω 上存在唯一的單葉全純函數 $f(z)$, 將 Ω 映到單位圓盤 $D(0; 1)$ 上, 且 $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$。

在這個定理中要求邊界點多於一點是十分自然的。如果 Ω 的邊界點只有一點, 我們不妨假設這個點是 ∞, 若 $f(z)$ 將它映到單位圓盤, 則由 Liouville 定理知道, 這個函數是常數。

由 Riemann 映射定理我們立即得到 : 在 $\mathbb{C}$ 中任意兩個邊界多於一點的單連通區域都有單葉全純函數將一個映爲另一個。

若 Ω_1, Ω_2 爲 $\mathbb{C}$ 中的兩個區域, 且存在一個單葉全純函數, 將 Ω_1 映到 Ω_2 上, 則稱 Ω_1, Ω_2 是 全純等價 (holomorphic equivalent) 的。於是 Riemann 映射定理表明 : 任意邊界點多於一點的單連通域都是全純等價的。任意單連通區域是相互拓樸等價的, 即可以經過連續變換將一個區域變到另一個區域, 這是顯然的。而 Riemann 映射定理告訴我們: 拓樸等價導出全純等價, 這當然是十分深入的定理。在下一講中我們還可以看到這個定理在高維情形是不成立的 (Poincaré 定理), 這就更突出這個定理在單複變函數論中的特殊地位。

這個定理的證明要依賴全純函數的正規族 (normal family) 的概念。正規族的概念是函數論中的一個基本概念在某種意義上與集合論中的緊緻 (compact) 集合相當。在下一講中我們將作進一步討論。

定義 4.1: 在區域 Ω 上的函數族 $\mathscr{F}$ 稱爲正規的, 如果 $\mathscr{F}$ 中任一序列中一定有子序列在 Ω 的任一緊緻部分集合上一致收斂, 即在 Ω 上內閉一致收斂。

定理 4.3(Montel 定理): 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲一區域, $\mathscr{F}$ 爲 Ω 上的全純函數族, 若存在正的常數 M 使得

$$|f(z)| \leq M$$

對所有的 $z \in \Omega$, $f \in \mathscr{F}$ 都成立, 則 $\mathscr{F}$ 是一個正規族。

爲了要證明 Montel 定理, 我們要先證明定理 4.4 (Arzelà-Ascoli 定理), 這是一個有廣泛應用的定理, 在第五講中我們仍會用到。

定義 4.2: 若 $\mathscr{F} = \{f\}$ 爲區域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函數族, 若對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得對滿足 $|z - w| < \delta$ 的任意兩點 $z, w \in V$, 及任意 $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$$

成立, 則稱 $\mathscr{F}$ 爲 等度連續 (equicontinuous)。

定義 4.3: 若 $\mathscr{F} = \{f\}$ 爲區域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函數族, 若存在一個正數 $M > 0$, 使得任意 $z \in V$, $f \in \mathscr{F}$

$$|f(z)| \leq M$$

成立, 則稱 $\mathscr{F}$ 爲 一致有界 (uniformly bounded)。

定理 4.4(Arzelà-Ascoli 定理) : 設 K 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的緊緻集合。若函數族 $\mathscr{F} = \{f_\nu\}$ 是等度連續及一致有界的則 $\mathscr{F}$ 中有子序列在 K 上一致收斂。換句話說, 在緊緻集合上等度連續及一致有界可導出一致收斂。

證明 : 在 K 上存在一個到處稠密的序列 $\{\xi_k\}$, 例如取具有有理座標的點的全體集合。由於 $\mathscr{F}$ 在 K 上一致有界, 故對 ξ_1, 在 $\{f_\nu(\xi_1)\}$ 中可以找到一個收斂的子序列 $\{f_{\nu_{1k}}(\xi_1)\}$。然後在 $\{f_{\nu_{1k}}(\xi_2)\}$ 中可以找到一個收斂的子序列 $\{f_{\nu_{2k}}(\xi_2)\}$, ..., 這樣一直進行下去, 就得到陣列

$$\begin{aligned}
&\nu_{11} < \nu_{12} < \cdots < \nu_{1j} < \cdots, \\
&\nu_{21} < \nu_{22} < \cdots < \nu_{2j} < \cdots, \\
&\quad \vdots \\
&\nu_{k1} < \nu_{k2} < \cdots < \nu_{kj} < \cdots, \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{4.4}$$

這裡每一行是前一行的子序列, 且 $\lim_{j\to\infty} f_{\nu_{kj}}(\xi_k)$ 對所有的 k 都存在。顯然 ν_{jj} 是嚴格遞增序列, 也是 (4.4) 中每一行的子序列。因此 $\{f_{\nu_{jj}}\}$ 是 $\{f_\nu\}$ 的一個子序列, 在所有的點 ξ_k 上收斂, 爲簡單起見, 記 ν_{jj} 爲 ν_j。

由於 $\mathscr{F}$ 在 K 上等度連續, 故給定 $\varepsilon > 0$, 可取到 $\delta > 0$, 使得對任意兩個點 ξ, $\xi' \in K$ 及 $f \in \mathscr{F}$, 只要 $|\xi - \xi'| < \delta$, 即可導出

$$|f(\xi) - f(\xi')| < \varepsilon/3.$$

由於 K 爲緊緻集合, 故可以用有限個半徑爲 $\delta/2$ 的鄰域來覆蓋 K。在每一個這樣的鄰域中取一點 ξ_k, 於是存在一個 N, 使得當 $\ell, j > N$ 時

$$|f_{\nu_\ell}(\xi_k) - f_{\nu_j}(\xi_k)| < \varepsilon/3$$

成立, 對於每一點 $\xi \in K$, 一定可以找到一個點 ξ_k, 使得 $|\xi_k - \xi| < \delta$。於是

$$\begin{aligned} &|f_{\nu_\ell}(\xi) - f_{\nu_\ell}(\xi_k)| < \varepsilon/3 \\ \text{及} \quad &|f_{\nu_j}(\xi) - f_{\nu_j}(\xi_k)| < \varepsilon/3 \end{aligned}$$

成立。因此當 $\ell, j > N$ 時

$$\begin{aligned} |f_{\nu_\ell}(\xi) - f_{\nu_j}(\xi)| &\le |f_{\nu_\ell}(\xi) - f_{\nu_\ell}(\xi_k)| + |f_{\nu_\ell}(\xi_k) - f_{\nu_j}(\xi_k)| + |f_{\nu_j}(\xi_k) - f_{\nu_j}(\xi)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

成立。由於 K 爲緊緻集合, 故 $\{f_{\nu_j}\}$ 在 K 上一致收斂, 定理之證明完畢。

在這裡我們還要注意兩點：

(1) 定理 4.4 中的條件, 等度連續及一致有界不僅僅是一致收斂的充分條件, 而且也是必要條件, 讀者不妨自行證之。

(2) 定義 4.2 及定理 4.4 中的等度連續的概念, 用的是歐氏空間度量, 如果改用其他的度量, 這個定理依然成立。這在第五講中會用到, 我們在此不再重證此定理。

現在我們用 Arzelà-Ascoli 定理來證明 Montel 定理。

定理 4.3 的證明：對於 $z_0 \in U$, 一定存在 $R > 0$ 使得 $\bar{D}(z_0; R) \subset U$。由於 U 爲一開集合, 故其餘集 U^C 爲閉集合。由於 $\bar{D}(z_0; R) \cap U^C = \emptyset$, 故在這兩個集合之間有一正的距離, 即存

在 $\rho > 0$, 當 $z \in \bar{D}(z_0; R)$, $w \in U^C$ 時, $|z - w| > \rho$。對任意 $z \in \bar{D}(z_0; R)$, 任意 $f \in \mathscr{F}$, 在圓盤 $\bar{D}(z; \delta)$, 上用 Cauchy 不等式, 得到

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\rho}$$

記 $\frac{M}{\rho} = C$ 於是對任意 z, $z' \in \bar{D}(z_0; R)$, 我們有

$$|f(z) - f(z')| \leq C|z - z'|$$

這表明 $\mathscr{F}$ 在 $\bar{D}(z_0; R)$ 上是等速連續的。事實上, 任給 $\varepsilon > 0$, 只要取 $\delta = \varepsilon/C$ 即可!

若 K 爲 U 上任意一個緊緻部分集合, 我們可以用有限個 $\bar{D}(z_0; R)$ 來覆蓋它, 故 $\mathscr{F}$ 在 K 上也是等速連續的。由 Arzelà-Ascoli 定理, $\mathscr{F}$ 中任意序列 $\{f_\nu\}$, 可以找到一個子序列 $\{f_{\nu_k}\}$ 在 K 上一致收斂, 所以可以用證明定理 4.4 中已用過的對角線方法證明在 $\{f_\nu\}$ 中存在這樣的子序列 $\{f_{\nu_k}\}$, 在 U 中所有的緊緻部分集合上一致收斂。定理的證明因而完畢。

4.3. Riemann 映射定理

現在我們將應用 Montel 定理來證明 Riemann 映射定理。

定理 4.2 的證明：不妨假設 U 爲一有界區域。固定一點 $z_0 \in U$, 記 $\mathscr{F} = \{\sigma(z)\}$ 爲單葉全純函數族, 這裡 $\sigma(z)$ 爲單葉全純函數將 U 映入 $D(0; 1)$ 之中, 且 $\sigma(z_0) = 0$。這樣的函數族 $\mathscr{F}$ 是非空的, 這是因爲 U 是有界的, 故存在 $R > 0$, 使得 $U \subseteq D(0; R)$。函數 $\sigma(z) = \frac{1}{2R}(z - z_0)$ 將 z_0 映爲 0, 全純且單葉, 且滿足 $|\sigma(z)| < \frac{1}{2R}(R + R) = 1$, 故 $\sigma \in \mathscr{F}$ 由此得出 $\mathscr{F} \neq \emptyset$。由於 $\mathscr{F}$ 中的函數爲全純且有界 (上界爲 1), 故由 Montel 定理, $\mathscr{F}$ 爲正規族。定義

$$M = \sup\{|\sigma'(z_0)| : \sigma \in \mathscr{F}\}$$

若 $\bar{D}(z_0; r)$ 爲一個能夠包含在 U 中的以 z_0 爲中心, r 爲半徑的閉圓盤, 於是由 Cauchy 不等式 $|\sigma'(z_0)| \leq \frac{1}{r}$。故 $M \leq \frac{1}{r}$, 現在我們要證明在 $\mathscr{F}$ 中存在 σ_0 使得 $\sigma_0'(z_0) = M$。由 M 的定義, 知道在 $\mathscr{F}$ 中存在一個序列 σ_j, 使得 $|\sigma_j'(z_0)| \to M$。由於 $\mathscr{F}$ 爲正規族, 故序列 $\{\sigma_j\}$ 中有子序列 $\{\sigma_{j_k}\}$ 在 U 中任一個緊緻集合上一致收斂到 σ_0。由於 $|\sigma_j'(z_0)| \to M$, 故 $|\sigma_0'(z_0)| = M$。將 σ_0 乘以模爲 1 的複數, 得到一個新的 σ_0 使得 $|\sigma_0'(z_0)| = M$。

現在我們來證明：σ_0 在 U 上爲單葉的。這裡我們要應用到幅角原理。若 Q, R 爲 U 中兩個不同的點, 且 $0 < S < |Q - R|$。在 $\bar{D}(R; S)$ 上, 考慮函數 $\psi_k(z) = \sigma_{j_k}(z) - \sigma_{j_k}(Q)$。由於 σ_j 爲單葉的, ψ_k 在 $\bar{D}(R; S)$ 上不等於零, 由 Hurwitz 定理, 其極限函數 $\sigma_0(z) - \sigma_0(Q)$ 或是恆等於零, 或是在 $\bar{D}(R; S)$ 上恆不等於零。由於 $\sigma_0'(z_0) = M > 0$, 故 σ_0 不可能恆等於

零。因此, 對所有 $z \in \bar{D}(R;S)$ 有 $\sigma_0(z) \neq \sigma_0(Q)$, 特別有 $\sigma_0(R) \neq \sigma_0(Q)$。由於 R, Q 爲在 U 上任意選取的兩個點, 故 σ_0 爲單葉的。

最後我們要證明 σ_0 將 U 映到 $D(0;1)$ 爲一映成函數。由於 U 爲單連通區域, 如果 F 爲 U 上不等於零的全純函數, 則可在 U 上定義 $\log F$ 爲

$$\log F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} d\xi + \log F(z_0),$$

這裡 γ_z 爲從 z_0 到 z 的逐段 C^1 曲線。由於 U 是單連通的, 故這樣定義的 $\log F(z)$ 是不依賴於路徑 γ_z 的選取! 定義了 $\log F(z)$, 就可以定義 $F(z)$ 的 α 次方。

$$F^\alpha(z) = \exp(\alpha \log F(z)), \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

如果 σ_0 不是將 U 映成 $D(0;1)$, 則存在點 $\beta \in D(0;1) \backslash \sigma_0(U)$。令

$$\varphi_\beta(\xi) = \frac{\xi - \beta}{1 - \bar{\beta}\xi},$$

於是 $\mu(\xi) = (\varphi_\beta \circ \sigma_0(\xi))^{1/2}$ 是在 U 上定義的全純函數。若 $\tau = \mu(z_0)$, 令

$$\varphi_\tau(\xi) = \frac{\xi - \tau}{1 - \bar{\tau}\xi}$$

及

$$\nu(\xi) = \frac{|\mu'(z_0)|}{\mu'(z_0)} (\varphi_\tau \circ \mu(\xi)),$$

於是 $\nu \in \mathscr{F}$。但是 $\nu(z_0) = 0$ 及

$$|\nu'(z_0)| = \frac{1 + |\beta|}{2|\beta|^{1/2}} M > M,$$

這與 σ_0 的定義相互矛盾。故 σ_0 必須是映成函數。這樣的 σ_0 就是 Riemann 映射定理中所需的 f。如果還存在另外一個單葉函數 $g(z)$ 也有這個性質, 則 $F(z) = f(g^{-1}(z))$ 是單位圓盤上的一個自同構, 且 $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$。由第二講中的定理 2.18 單位圓盤上的全純自同構群定理知道 $F(z) = z$! 故 $f(z) = g(z)$。如果 U 是一個無限區域, 則可用變換將 U 變成有界區域, 定理因而證畢。

由 Riemann 映射定理我們知道: 存在單葉全純函數將單連通區域 U 內的點與單位圓盤內的點一一對應。現在問題是： 邊界上有沒有相對應的關係? 事實上, 單連通區域可以有十分複雜的邊界, 這裡我們只敍述一個最簡單的情形而不予證明。

若 U 爲由一條 Jordan 曲線 Γ 所圍成的區域, 若 $w = f(z)$ 爲 U 上的單葉全純函數, 將 U 映成到單位圓盤 $D(0;1)$, 則 $f(z)$ 可以擴充到 Γ 上, 使得 $f(z)$ 在 $\bar{U}$ 上連續, 並且在 Γ 上的點與單位圓週 $|w| = 1$ 上的點之間有一一對應關係。

4.4. 對稱原理 (Symmetric Principle)

定理 4.5 : (Painlevé 定理)若 U_1, U_2 是兩個區域, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $\partial U_1 \cap \partial U_2 = \gamma$, 這裡 γ 爲一段可求長的曲線 (端點不在內)。若 f_1, f_2 分別在 U_1, U_2 上全純, 在 $U_1 \cup \gamma$ 及 $U_2 \cup \gamma$ 上連續, 且在 γ 上 $f_1(z) = f_2(z)$, 則函數

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in U_1 \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \gamma \\ f_2(z), & z \in U_2 \end{cases}$$

在 $U_1 \cup U_2 \cup \gamma$ 上全純, f_1 與 f_2 稱爲越過邊界 γ 互爲解析延拓。

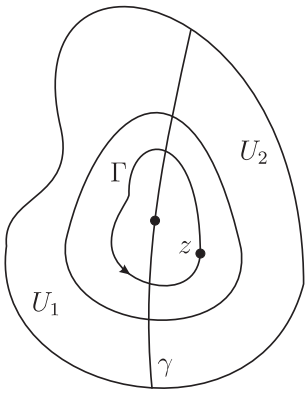


圖1

證明 : 由已知的條件知道 : f 在 $U_1 \cup U_2 \cup \gamma$ 上連續, 在 U_1 及 U_2 上全純, 所以我們只要證明 f 在 γ 上全純。設 $z_0 \in \gamma$, 取 r 使得 $D(z_0; r) \subset U = U_1 \cup U_2 \cup \gamma$。設 Γ 是 $D(z_0; r)$ 內任一可求長的簡單封閉曲線。若 Γ 在 $U_1 \cup \gamma$ 之內, 則由 Cauchy 積分定理知道

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma f_1(z)dz = 0.$$

同理, 若 Γ 在 $U_2 \cup \gamma$ 之內, 則

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma f_2(z)dz = 0.$$

若 Γ 同時屬於 U_1 及 U_2, 令 Γ_1 爲屬於 U_1 的部分, Γ_2 爲屬於 U_2 的部分, 而 γ 在 Γ 的內部的部分記作 Γ_0, 則

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1+\Gamma_0} f_1(z)dz + \int_{\Gamma_2-\Gamma_0} f_2(z)dz = 0.$$

故由 Morera 定理, $f(z)$ 在 $D(z_0;r)$ 上全純, 特別在 $z = z_0$ 處全純, 而 z_0 爲 γ 上任一點, 故 $f(z)$ 在 U 上全純。定理的證明因而完畢。

由 Painlevé 定理, 可推導出下面定理。

定理 4.6：對稱原理 (Symmetric Principle)設區域 U 位於實數軸的同一側, 其邊界包含有實數軸上的線段 γ (端點不在內)。若 $f(z)$ 在 U 上全純, 在 $U \cup \gamma$ 上連續, 且 $f(z)$ 在 γ 上取實值, 則一定存在一個函數 $F(z)$, 在 $U \cup U' \cup \gamma$ 上全純, 且在 U 內 $F(z) = f(z)$, 這裡 U' 爲 U 關於實數軸的對稱區域, 且 $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$。

證明：在 $U \cup U' \cup \gamma$ 上定義函數

$$F(z) = \begin{cases} f(z), \ z \in U \cup \gamma; \\ \overline{f(\bar{z})} \ \ z \in U'. \end{cases}$$

這樣的函數滿足 $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$。現在要證明 $F(z)$ 在 $U \cup U' \cup \gamma$ 上全純, 先證 $F(z)$ 在 U' 上全純。若 $z_0 \in U'$, z 是 z_0 的鄰域內的一點, 則

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0}\right)}$$

故

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \overline{f'(\bar{z}_0)}.$$

又由於 $f(z)$ 在 γ 上取實值, 即 $\overline{f(x_0)} = f(x_0)$, 當 $x_0 \in \gamma$。故當 $z \in U'$ 時,

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ z \in U'}} F(z) = \lim_{\substack{z \to x_0 \\ z \in U'}} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\lim_{\substack{z \to x_0 \\ z \in U'}} f(\bar{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0)$$

故 $F(z)$ 在 $U' \circ \gamma$ 上連續。由 Painlevé 定理, $F(z)$ 在 $U \cup U' \cup \gamma$ 上全純。定理 4.6 的證明因而完畢。

定理 4.6 還可敍述成更爲一般的形式。

定理 4.6′：(對稱原理) 設 U 位於直線 l 的同一側, 其邊界包含 l 上一線段 γ (端點不在內)。若 $f(z)$ 在 U 上全純, 在 $U \cup \gamma$ 上連續, 且 $f(z)$ 在 γ 上的值位於直線 L 上, 則存在 $F(z)$

在 $U \cup U' \cup \gamma$ 上全純, 在 U 內 $F(z) = f(z)$, 這裡 U' 爲 U 關於 l 對稱的區域。若 z_1, z_2 爲 $U \cup U' \cup \gamma$ 內關於 l 對稱的兩點, 則 $F(z_1)$, $F(z_2)$ 是關於 L 對稱的兩點。

證明：用變換 $Z = az + b$ 將 l 變換成實數軸, $W = cw + d$ 將 L 變成實數軸, 然後再變換回到 z, w 即可!

對稱原理還可以推廣成, 將定理 4.6 中的 γ 改成一段圓弧, 同樣可以解析延拓。

4.5. Riemann 曲面 (Riemann surfaces) 的一些例子

在 Riemann 映射定理中指出, 任意兩個邊界多於一點的單連通域是全純等價的, 即存在雙方單值 (即單葉) 的全純映射, 將一個映爲另一個。如果全純映射不是雙方單值 (即單葉) 的, 如多值函數或無窮多值函數, 則如何建立起映射的一一對應呢? 這就要有 Riemann 曲面的概念。Riemann 曲面是複分析中極爲重要的概念, 可以用很長的篇幅來討論, 例如讀者可參考 L.V. Ahlfors and L. Sario [1] 或 J. B. Conway [2] 的書籍。但作爲通俗的介紹, 我們只能用舉例的方法來描述一下什麼是 Riemann 曲面。

在第一講中討論初等函數時, 我們已經看到, 對於冪函數 $w = z^\alpha$, $\alpha = a + ib$, 當 $b \neq 0$ 時, $w = z^\alpha$ 是無窮多值函數; 當 $b = 0$ 而 $a = n$ 爲整數時, $w = z^n$ 爲單值函數, 但其反函數不是單值函數。當 z 在角形區域 $\frac{(k-1)2\pi}{n} < \arg(z) < \frac{k2\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ 中變動時, $w = z^n$ 將任一這樣區域映爲整個 w 平面除去正實軸。這個映射是一對一的, 也是全純的。每個這樣的角形區域就像在正實數軸上有一"切割" (cut)。於是這 n 個角形區域對應到 n 張 w 複平面加上切割。將這 n 張平面按 $k = 1, 2, \ldots, n$ 進行排列, 然後將前一張的切割的下邊與後一張的切割的上邊黏起來, 而第 n 張切割的下邊與第一張的切割的上邊黏起來 (這樣做看起來似乎不可能, 除非這些張自己相交, 但這裡是指讓第 n 張的切割的下邊與第一張的切割的上邊相等同)。於是這樣就構成了一個 Riemann 曲面。稱每一張平面爲 Riemann 曲面的一葉 (sheet) 或稱爲 Riemann 曲面的一個分支 (branch) 。明顯地看出, 當點 z 在 z 平面上變動時, 相應的點 w 在 Riemann 曲面上變動, 並且 z 平面與 Riemann 曲面之間的點是相互一一對應的。

可以用任意從 0 到 ∞ 的射線取代正實數軸作爲切割。這樣得到的 Riemann 曲面與原來得到的 Riemann 曲面是等同的, 但在對 Riemann 曲面進行討論之前須說明是如何切割的。

點 $w = 0$ 有特殊位置, 它聯繫著所有的分支, 一條曲線圍繞 $w = 0$ 旋轉必須轉 n 圈後才能封閉, 這樣的點稱爲支點 (branch point)。如果將 $z = \infty$ 也考慮在內, 則 ∞ 點也是一個支點。一般來說, 一個支點不必聯繫所有的分支, 如果它聯繫 m 個分支, 則稱此爲 $m - 1$ 階 (order) 的支點。

同樣我們可以討論 $w = e^z = e^{x+iy}$ 的 Riemann 曲面。這函數將帶狀區域 $(k-1)2\pi < y < k2\pi$ 映爲 w 平面的一個分支, 而切割爲正實數軸。有無窮多分支互相黏接, 而 $w = 0$ 不在 Riemann 曲面上, 因 e^z 永不爲零。

反過來, 若函數爲 $w = z^{\frac{1}{n}}$, 而 n 爲大於 1 的正整數, 則這函數將 n 個分支的 Riemann 曲面映爲 w 平面, 而且相互一一對應。同樣 $w = \log z$ 將無窮多分支的 Riemann 曲面映爲 w 平面, 而且相互一一對應的。

因此, 在討論 Riemann 曲面與複平面之間的對應時, 往往必須指明, 這個討論是在 Riemann 曲面的那一個分支上進行。

4.6. Schwarz − Christoffel 公式

Riemann 映射定理是一個存在定理, 至於如何具體寫出這個映射來, 卻不是件簡單的事。在 4.1 節中只是舉了幾個最簡單的例子。下面我們要給出一個多邊形映射到上述平面的具體公式, 這個公式稱爲 Schwarz − Christoffel 公式。

若 $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < +\infty$, 爲 n 個實數, 取 $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$。若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 爲 n 個實數, 滿足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + 1 < n$, 且令

$$\beta(t) = (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (t - a_n)^{\alpha_n - 1}, \tag{4.5}$$

則顯然有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(t)| dt < \infty.$$

當 $t < a_k$ 時, 取

$$(t - a_k)^{\alpha_k - 1} = \exp\Big((\alpha_k - 1)\log(t - a_k)\Big)$$

這樣的一個分支, 使其幅角爲 $\pi(\alpha_k - 1)$。於是當 $t < a_1$ 時,

$$\arg \beta(t) = \pi\Big[[\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) - n\Big];$$

當 t 在 (a_{k-1}, a_k) 這線段上時

$$\arg \beta(t) = \pi\Big[[\alpha_k + \cdots + \alpha_n) - (n - k + 1)\Big], \quad 2 \le k \le n;$$

當 t 在 $(a_n, +\infty)$ 這線段上時,

$$\arg \beta(t) = 0.$$

於是定義了 $n + 2$ 個複數

$$w_k = c \int_0^{a_k} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt, \quad 0 \le k \le n + 1, \tag{4.6}$$

這裡 c 爲一個正的實數, 在上半平面 $\bar{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z\geq 0\}$ 定義函數

$$f(z)=c\int_0^z\beta(t)dt, \tag{4.7}$$

這函數顯然在 $H=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z>0\}$ 上是全純的。而在實數軸上有: 當 $x\in(a_{k-1},a_k)$ 時 $(1\leq k\leq n+1)$,

$$\begin{aligned}f(x)&=w_{k-1}+c\int_{a_{k-1}}^x\beta(t)dt\\&=w_{k-1}+ce^{i[(\alpha_k-1)\pi+\cdots+(\alpha_n-1)\pi]}\int_{a_{k-1}}^x|\beta(t)|dt.\end{aligned}$$

於是 $f(x)-w_{k-1}$ 在區間 (a_{k-1},a_k) 上有相同的幅角 $[(\alpha_k-1)\pi+\cdots+(\alpha_n-1)\pi]$, 而其絕對值由 0 增長到

$$l_k=c\int_{a_{k-1}}^{a_k}|\beta(t)|dt. \tag{4.8}$$

故 x 在區間 $[a_{k-1},a_k]$ 中變動時, 則 f 在區間 $\delta_{k-1}=[w_{k-1},w_k]$ 中變動。δ_{k-1} 的幅角爲 $(\alpha_k-1)\pi+\cdots+(\alpha_n-1)\pi$, 長度爲 l_k。

要證明 $w_0=w_{n+1}$, 我們只要證明: 對任給 $\varepsilon>0$, 存在 $R>0$, 使得當 $z\in\bar{H}$ 及 $|z|\geq R$ 時, $|w_0-f(z)|\leq\varepsilon$ 成立即可。因爲這表明

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=w_{n+1}=w_0$$

這可證明如下：由於

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\beta(t)|dt<+\infty,$$

故任給 $\varepsilon>0$, 存在 $R_1>0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{-R_1}|\beta(t)|dt\leq\varepsilon/2,$$

於是當 $-\infty<x<-R_1$ 時, 有

$$\left|w_0-c\int_0^x\beta(t)dt\right|\leq\int_{-\infty}^{-R_1}|\beta(t)|dt\leq\varepsilon/2$$

當然可以選取 $R_1\geq\max\{|a_1|,\ldots,|a_n|\}$。取 $z_0=\rho_0e^{i\theta_0}$, 而 $\rho_0\geq R_1$, $0\leq\theta_0\leq\pi$, 於是

$$\begin{aligned}|f(z_0)-f(\rho_0)|&=c\left|\int_0^{\theta_0}(\rho_0e^{i\theta}-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(\rho_0e^{i\theta}-a_n)^{\alpha_n-1}\rho_0e^{i\theta}d\theta\right|\\&\leq c\rho_0(\rho_0-R_1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n-n}.\end{aligned}$$

由於 $\alpha_1+\cdots\alpha_n<n-1$, 故當 $\rho_0\to\infty$ 時, 上式 $\to 0$。故有 $R\geq R_1$, 使得當 $\rho_0=|z_0|\geq R$ 時, $|f(z_0)-f(\rho_0)|\leq\varepsilon/2$。因此, 當 $|z|\geq R$, $\mathrm{Im}z\geq 0$ 時, $|f(z)-w_0|\leq\varepsilon$。這就證明了 $w_0=w_{n+1}$。, 於是 f 將 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 映到閉 $(n+1)$ 邊形 $\triangle$, 其邊爲 $\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_n$, 其頂點爲 $w_0,w_1,\ldots,w_n=w_0$。

若假設 $0<\alpha_k<2$, 則可證這個多邊形在頂點 w_k 處, 其內角爲 $\alpha_k\pi$。這可證明如下：

由於 $\beta(t)$ 可寫成 $\beta_k(t)(t-a_k)^{\alpha_k-1}$, 這裡 $\beta_k(t)=\prod\limits_{j\neq k}(t-a_j)^{\alpha_j}$。顯然 $\beta_k(t)$ 在 a_k 點的一個鄰域 U 中是全純的, 故可展開成 Taylor 級數

$$\beta_k(t)=a_{0,k}+a_{1,k}(t-a_k)+\cdots,\quad a_{0,k}\neq 0.$$

於是當 $z\in U\cap\bar{H}$ 時, 有

$$\begin{aligned}f(z)&=w_k+c\int_{a_k}^{z}(a_{0,k}+a_{1,k}(t-a_k)+\cdots)(t-a_k)^{\alpha_k-1}dt\\&=w_k+c\frac{a_{0,k}}{\alpha_k}(z-a_k)^{\alpha_k}\Big[1+\frac{\alpha_k}{\alpha_k+1}\cdot\frac{a_{1,k}}{a_{0,k}}(z-a_k)+\cdots\Big].\end{aligned}$$

當 z 沿著傾角 θ 的直線趨於 a_k 時 $(0\leq\theta\leq\pi)$, $f(z)$ 沿著一條曲線趨於 w_k, 而在 w_k 點處, 其切線的傾角爲 $\arg(a_{0,k})+\alpha_k\theta$, 這是因爲 $c>0$ 及 $\alpha_k>0$。在 $\bar{H}$ 中作一個以 a_k 爲中心的小半圓, 使之全包含在 $U\cap\bar{H}$ 之中。讓 z 在這個小半圓的週邊上變動, 從 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$, 這樣 $f(z)$ 在一條 Jordan 曲線上變動從 δ_{k-1} 上的點變到 δ_k 上的點, 而 $f(z)$ 的幅角也由 $\arg(a_{0,k})$ 變到 $\arg(a_{0,k})+\alpha_k\pi$。故在頂點 w_k 處的內角爲 $\alpha_k\pi$。而在頂點 $w_0=w_{n+1}$ 處的內角爲 $((n-1)-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n))\pi>0$, 這是因爲 $n+1$ 邊形的內角和爲 $(n-1)\pi$, 特別當 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=n-2$ 時, 則頂點 w_0 處的內角爲 π, 即此爲 n 邊形。

公式 (4.7) 就叫做 Schwarz $-$ Christoffel 公式, 這裡 $\beta(t)$ 由公式 (4.5) 所定義, 而 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n<n-1$。公式 (4.7) 將上半平面映爲 $n+1$ 邊形, 其頂點分別爲 $w_0,w_1,\ldots,w_n$, $w_{n+1}=w_0$, $w_j(j=0,1,\ldots,n+1)$ 由公式 (4.6) 所定義。多邊形的邊爲 $[w_{k-1},w_k]$, $(k=1,\ldots,n+1)$, 其長度爲 l_k, 由公式 (4.8) 所給出。若 $0<\alpha_j<2$ $(j=1,\ldots,n)$, 則在頂點 w_k 處的內角爲 $\alpha_k\pi(k=1,\ldots,n)$。在 $w_0=w_{n+1}$ 處的內角爲 $[(n-1)-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)]\pi$。

當然, 如果把公式 (4.6) 寫成更一般的形式

$$w_k=c\int_0^{a_k}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt+c',\qquad 0\leq k\leq n+1,$$

則公式 (4.7) 還可以寫成更一般的形式

$$f(z)=c\int_0^z\beta(t)dt+c',\tag{4.9}$$

這裡 c, c' 爲兩個正的常數。公式(4.9) 也是 Schwarz $-$ Christoffel 公式。

附錄 A. Poincaré 定理

在本講中提到了一個十分深刻的 Riemann 映射定理, 大致上講這個定理告訴我們兩個區域若拓樸等價一定導出全純等價。但 Poincaré 定理卻說, 不存在雙全純映射將 $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ 中的單位球映爲多圓柱。這裡 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, 單位球定義爲 $B(0;1) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 < 1\}$, 多圓柱定義爲 $D^n(0;1) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$。我們在此給出 Poincaré 定理的一個證明, 目的就是要指出單複變與多複變函數論之間存在一些本質性的差異!

爲了簡化符號, 我們只討論 $\mathbb{C}^2$ 的情形。有興趣的讀者可參考其它相關文獻, 如 R. E. Greene and S. G. Krantz [3] 及 S. G. Krantz [K]。一個映射 $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ 稱爲在區域 (連通開集合) $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 上全純, 若 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 爲區域 Ω 上的全純函數。函數 $g(z) = g(z_1, z_2)$ 稱爲在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 上全純, 若固定任意的變數 z_1 或 z_2, $g(z)$ 是餘下兩個變數的全純函數。全純映射稱爲是雙全純 (biholomorphic), 如果映射是一對一, 映成, 且 f^{-1} 也是全純的。

要證明 Poincaré 定理, 我們要先討論在 Ω 上的全純自同構群。現在先看一下 $\mathbb{C}^2$ 中單位球及雙圓柱上的全純自同構群。回顧在定出單位圓盤上的全純自同構群時, 主要是用了 Schwarz 引理, 在多複變的情形, 我們要應用推廣了的 Schwarz 引理, 這便是 Cartan 的兩個定理。

定理 A.1 (Cartan 定理) : 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 爲有界區域, $p \in \Omega$, 若 $f = (f_1, f_2)$ 爲全純映射, 將 Ω 映入到 Ω, 且 $f(p) = P$, $J_f(p) = I$, 則 $f(z) \equiv z$, 這裡 $J_f(z)$ 爲 f 在 z 點的 Jacobi 矩陣, 即

$$J_f(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}.$$

I 爲單位 2×2 方陣。

證明 : 不妨假設 $p = 0$。我們可用反證法, 如果定理不成立, 則 $f(z)$ 在 0 點可以展開成 Taylor 級數

$$f(z_1, z_2) = z + A_m(z) + \cdots,$$

這裡 $A_m(z) = (A_m^{(1)}(z), A_m^{(2)})$ 爲第一個出現不爲 0 的項, 這裡 $A_m^{(1)}(z)$, $A_m^{(2)}(z)$ 爲 m 次齊次多項式 $(m \geq 2)$。

記 $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f, \ldots, f^j = f^{j-1} \circ f$ $(j \geq 2)$, 於是

$$\begin{aligned} f^1(z) &= z + A_m(z) + \cdots, \\ f^2(z) &= f(z) + A_m(f(z)) + \cdots, \\ &= z + A_m(z) + A_m(z) + \cdots, \\ &= z + 2A_m(z) + \cdots, \\ &\vdots \\ f^j(z) &= z + jA_m(z) + \cdots. \end{aligned} \tag{A.1}$$

由於 Ω 是有界區域, f 將 Ω 映入到 Ω, 故由 Montel 定理知 $\{f^j\}$ 爲正規族, 即有子序列 $\{f^{j_k}\}$ 當 $j_k \to \infty$ 時, $f^{j_k} \to F$。再由 Weierstrass 定理知, f^{j_k} 的 m 階導數在 0 點的值收斂到 F 的 m 階導數在 0 點的值。由 (A.1), f^{j_k} 的 m 階導數在 0 點的值當 $j_k \to \infty$ 時是趨於 $+\infty$ 的。另一方面, F 的 m 階導數在 0 點的值不可能爲 $+\infty$, 由此得到矛盾, 故 $A_m(z) \equiv 0$ 必須在 Ω 上成立, 即 $f(z) \equiv z$。定理因而證畢。

定理 A.1 在單複變的情形 Ω 爲單位圓盤 D 時成爲：若全純函數 $f(z)$ 將 D 映入到 D, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 則 $f(z) \equiv z$, 即 Schwarz 引理等號成立的那個部分。

下面我們來證明 Cartan 的另一個定理。

若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 爲一個區域, 假設任一點 $(z_1, z_2) \in \Omega$, 任一實數 $\theta \in \mathbb{R}$, 有 $(e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2) \in \Omega$, 則稱 Ω 爲一圓形區域 (Circular Domain)。

定理 A.2 (Cartan 定理)：若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 爲有界圓形區域, f 爲將 Ω 映到 Ω 自身的雙全純映射, 且 $f(0) = 0$, 則 f 爲線性映射, 即 $f(z) = Az$, 其中 A 爲一常數 2×2方陣。

證明：令 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho_\theta(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$, 考慮映射

$$g = \rho_{-\theta} \circ f^{-1} \circ \rho_\theta \circ f,$$

則

$$J_g(0) = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} J_f^{-1}(0) \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} J_f(0) = I.$$

由於 $g(z)$ 將 Ω 映入到 Ω, 且 $g(0) = 0$, $J_g(0) = I$, 故由定理 A.1 知道 $g(z) \equiv z$, 此即

$$f \circ \rho_\theta = \rho_\theta \circ f. \tag{A.2}$$

將 f 在 0 點附近展開成收斂冪級數

$$f(z)=\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}z_1^jz_2^k=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}z_1^jz_2^k\Big)$$

於是

$$\rho_\theta\circ f=(e^{i\theta}f_1,e^{i\theta}f_2)=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}e^{i\theta}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}e^{i\theta}z_1^jz_2^k\Big)$$

而

$$\begin{aligned}f\circ\rho_\theta&=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}(e^{i\theta}z_1)^j(e^{i\theta}z_2)^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}(e^{i\theta}z_1)^j(e^{i\theta}z_2)^k\Big)\\&=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}e^{i(j+k)\theta}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}e^{i(j+k)\theta}z_1^jz_2^k\Big).\end{aligned}$$

由 (A.2), 比較係數即得所有 $a_{jk}=0$ 除去 $j+k=0$ 及 $j+k=1$, 即得 $f(z)$ 在 0 點附近爲線性的, 故由全純函數的唯一性, 我們便知 $f(z)$ 在整個 Ω 上爲線性的。定理因而證畢。

這個 Cartan 定理, 在單複變的情形, 若 Ω 爲單位圓盤 D 時: 若全純單位函數 $f(z)$ 將 D 映到 D 本身且 $f(0)=0$, 則 $f(z)=e^{i\theta}z$。

有了定理 A.1 及 A.2, 我們現在便可計算出 $\mathbb{C}^2$ 中單位球及雙圓柱上的全純自同構群。若 Ω 爲 $\mathbb{C}^2$ 中的區域, 如果存在將 Ω 映爲自身的雙全純映射 $f(z)$, 則稱此映射爲 Ω 上的全純自同構 (holomorphic automorphism) 或 雙全純自同構 (biholomorphic automorphism)。Ω 上所有的全純自同構的全體組成一個群, 這個群稱爲 Ω上全純自同構群 (group of holomorphic automorphisms), 記作 $Aut(\Omega)$。

定理 A.3: $Aut(D^2(0;1))$ 是由雙全純映射

$$w=\Big(e^{i\theta_1}\frac{z_1-a_1}{1-\bar{a}_1z_1},e^{i\theta_2}\frac{z_2-a_2}{1-\bar{a}_2z_2}\Big)\tag{A.3}$$

及

$$w=\Big(e^{i\theta_2}\frac{z_2-a_1}{1-\bar{a}_1z_2},e^{i\theta_1}\frac{z_1-a_2}{1-\bar{a}_2z_1}\Big)\tag{A.4}$$

的全體所組成, 這裡 $z=(z_1,z_2)\in D^2(0;1)$, $a_1,a_2\in D(0;1)$, $\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$。

證明：若 $\phi(z)\in Aut(D^2(0;1))$, 且 $\phi(0)=\xi=(\xi_1,\xi_2)$, 定義

$$\psi(z)=\Big(\frac{z_1-\xi_1}{1-\bar{\xi}_1z_1},\frac{z_2-\xi_2}{1-\bar{\xi}_2z_2}\Big),$$

則 $g \equiv \psi \circ \phi \in Aut(D^2(0;1))$, 且 $g(0) = 0$。由定理 A.2,

$$g(z) = Az = (z_1, z_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11}z_1 + a_{21}z_2, a_{12}z_1 + a_{22}z_2).$$

由於 $g \in Aut(D^2(0;1))$, 故

$$|a_{11}z_1 + a_{21}z_2| < 1, \qquad |a_{12}z_1 + a_{22}z_2| < 1.$$

對任意 $(z_1, z_2) \in D^2(0;1)$ 都成立, 這立即導出 $|a_{ij}| < 1$ $(i, j = 1, 2)$。取

$$z^{1,k} = \Big((1 - \frac{1}{k})\frac{\bar{a}_{11}}{|a_{11}|}, (1 - \frac{1}{k})\frac{\bar{a}_{21}}{|a_{21}|}\Big) \in D^2(0;1),$$
$$z^{2,k} = \Big((1 - \frac{1}{k})\frac{\bar{a}_{12}}{|a_{12}|}, (1 - \frac{1}{k})\frac{\bar{a}_{22}}{|a_{22}|}\Big) \in D^2(0;1),$$

則

$$g(z^{1,k}) = \Big((1 - \frac{1}{k})(|a_{11}| + a_{21}|), (1 - \frac{1}{k})\Big(\frac{\bar{a}_{11}a_{12}}{|a_{11}|} + \frac{\bar{a}_{21}a_{22}}{|a_{21}|}\Big)\Big) \in D^2(0;1),$$
$$g(z^{2,k}) = \Big((1 - \frac{1}{k})\Big(\frac{a_{11}\bar{a}_{12}}{|a_{12}|} + \frac{a_{21}\bar{a}_{22}}{|a_{22}|}\Big), (1 - \frac{1}{k})(|a_{12}| + a_{22}|)\Big) \in D^2(0;1),$$

於是

$$(1 - \frac{1}{k})(|a_{11}| + |a_{21}|) < 1, \qquad (1 - \frac{1}{k})(|a_{12}| + |a_{22}|) < 1.$$

讓 $k \to \infty$, 即得

$$|a_{11}| + |a_{21}| \le 1 \qquad |a_{12}| + |a_{22}| \le 1. \tag{A.5}$$

另一方面,

$$(1 - \frac{1}{k}, 0) \in D^2(0;1), (0, 1 - \frac{1}{k}) \in D^2(0;1),$$
$$g(1 - \frac{1}{k}, 0) = \Big((1 - \frac{1}{k})a_{11}, (1 - \frac{1}{k})a_{12}\Big) \in D^2(0;1),$$
$$g(0, 1 - \frac{1}{k}) = \Big((1 - \frac{1}{k})a_{21}, (1 - \frac{1}{k})a_{22}\Big) \in D^2(0;1),$$

當 $k \to \infty$ 時, $(1 - \frac{1}{k}, 0)$ 及 $(0, 1 - \frac{1}{k})$ 趨於 $\partial D^2(0;1)$, 所以

$$(a_{11}, a_{12}) \in \partial D^2(0;1) \quad \text{及} \quad (a_{21}, a_{22}) \in \partial D^2(0;1)$$

於是

$$\max\{|a_{11}|, |a_{12}|\} = 1 \qquad \max\{|a_{21}|, |a_{22}|\} = 1. \tag{A.6}$$

要 (A.5), (A.6) 同時成立, 只有下列兩種情形:

(1) $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{21}=0$, $|a_{22}|=1$,

(2) $a_{12}=1$, $a_{11}=0$, $a_{22}=0$, $|a_{21}|=1$,

也就是 A 只有下列兩種情形:

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}; \qquad\qquad (2)\quad A=\begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

於是得到

$$(1)\quad \psi\circ\phi(z)=z\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}=(z_1e^{i\theta_1},z_2e^{i\theta_2}),$$

或

$$(2)\quad \psi\circ\phi(z)=z\begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{bmatrix}=(z_2e^{i\theta_2},z_1e^{i\theta_1}),$$

若 $\phi=(\phi_1,\phi_2)$, 則 (1) 即是

$$\Big(\frac{\phi_1-\xi_1}{1-\bar\xi_1\phi_1},\frac{\phi_2-\xi_2}{1-\bar\xi_2\phi_2}\Big)=(z_1e^{i\theta_1},z_2e^{i\theta_2}),$$

即

$$\frac{\phi_1-\xi_1}{1-\bar\xi_1\phi_1}=z_1e^{i\theta_1},\qquad \frac{\phi_2-\xi_2}{1-\bar\xi_2\phi_2}=z_2e^{i\theta_2}.$$

從而得到

$$\phi=(\phi_1,\phi_2)=\Big(e^{i\theta_1}\frac{\xi_1e^{-i\theta_1}+z_1}{1+\bar\xi_1e^{i\theta_1}z_1},e^{i\theta_2}\frac{\xi_2e^{-i\theta_2}+z_2}{1+\bar\xi_2e^{i\theta_2}z_2}\Big),$$

而此即爲 (A.3) 的形式。同樣在 (2) 的情形, ϕ 爲 (A.4) 的形式, 定理因而證畢。

現在我們要計算單位球上的全純自同構群。首先, 當 $a\in\mathbb{C}$, $|a|<1$, 直接計算可以得到

$$\phi_a(z_1,z_2)=\Big(\frac{z_1-a}{1-\bar az_1},\frac{(1-|a|^2)^{1/2}z_2}{1-\bar az_1}\Big)\in Aut(B(0;1)). \tag{A.7}$$

由於

$$\Big|\frac{z_1-a}{1-\bar az_1}\Big|^2+\Big|\frac{(1-|a|^2)^{1/2}z_2}{1-\bar az_1}\Big|^2=\frac{|z_1|^2-2Re(\bar az_1)+|a|^2+(1-|a|^2)|z_2|^2}{|1-\bar az_1|^2}$$

上式的右邊小於或等於

$$\frac{1-|a|^2-2Re(\bar az_1)+|a|^2+|a|^2|z_1|^2}{|1-\bar az_1|^2}=1$$

若且唯若 $(z_1, z_2) \in B(0;1)$, 故 (A.7) 成立。顯然, $(\phi_a)^{-1} = \phi_{-a}$。一個 2×2 的方陣 U 稱爲 酉方陣 (unitary matrix), 若 $U\bar{U}^t = I$, 這裡 $\bar{U}^t$ 爲 U 共軛轉置。而映射 $w = U(z)$ 稱爲 酉旋轉 (unitary rotation)。

定理 A.4: 若 $g \in Aut(B(0;1))$, 且 $g(0) = 0$, 則 g 爲酉旋轉, 即 $g(z) = zA$, 而 A 爲一酉方陣。

證明：由於 $B(0;1)$ 爲圓形區域, 故由定理 A.2 知, $g(z) = zA$, 而 g 將單位向量映到單位向量。若

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

(α, β) 爲一單位向量, 則 $(\alpha, \beta)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (\gamma, \delta)$ 也是單位向量, 而 $\gamma = a_{11}\alpha + a_{21}\beta$, $\delta = a_{12}\alpha + a_{22}\beta$。於是

$$|a_{11}\alpha + a_{21}\beta|^2 + |a_{12}\alpha + a_{22}\beta|^2 = 1 \tag{A.8}$$

取 $\alpha = 1$, $\beta = 0$ 及 $\alpha = 0$, $\beta = 1$, 則得到

$$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 = 1 \quad 及 \quad |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = 1. \tag{A.9}$$

將 (A.9) 代入 (A.8) 中, 我們得到

$$Re\Big((a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22})\alpha\bar{\beta}\Big) = 0.$$

取 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 則得到

$$Re\Big(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22}\Big) = 0,$$
$$\mathrm{Im}\Big(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22}\Big) = 0,$$

所以

$$a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} = 0. \tag{A.10}$$

由 (A.9) 及 (A.10), 我們便得到 A 爲一酉方陣。

定理 A.5: $Aut(B(0;1))$ 中每一元素均可表爲最多兩個酉旋轉及一個 ϕ_a 的複合, 即 $Aut(B(0;1))$ 是由酉旋轉及 ϕ_a 及其複合所組成。

證明：若 $f \in Aut(B(0;1))$, $f(0) = \alpha$, 則有酉方陣 U 使得 $\alpha U = (|\alpha|, 0)$。作 $g(z) = \phi_{|\alpha|} \circ U \circ f(z)$, 這裡 $\phi_{|\alpha|}$ 是由公式 (A.7) 所定義, 將 $(|\alpha|, 0)$ 映爲 0 點。於是 $g(z) \in Aut(B(0;1))$, 且

$$g(0) = \phi_{|\alpha|} \circ U \circ f(0) = \phi_{|\alpha|} \circ U \circ \alpha = 0.$$

由定理 A.4 得知

$$g(z) = zV = V(z)$$

其中 V 爲酉方陣, 於是

$$f(z) = U^{-1} \circ \varphi_{-|\alpha|} \circ V(z)$$

這便證明了定理 A.5。

現在我們終於可以證明 Poincaré 定理了。

定理 A.6: (Poincaré 定理)不存在雙全純映射 Φ 將 $D^2(0;1)$ 映到 $B(0;1)$ 上。

證明：我們用反證法。假設存在這樣的雙全純映射 ϕ 將 $D^2(0;1)$ 映爲 $B(0;1)$, 且 $\phi(0) = \alpha$, 則 $\Phi = \phi_\alpha \circ \phi$ 也是一個雙全純映射, 將 $D^2(0;1)$ 映成 $B(0;1)$, 且 $\Phi(0) = \phi_\alpha \circ \phi(0) = 0$, 這裡 ϕ_α 是由公式 (A.7) 所定義。若 $\Lambda \in Aut(D^2(0;1))$, 則

$$\Lambda \mapsto \Phi \circ \Lambda \circ \Phi^{-1} \in Aut(B(0;1)) \tag{A.11}$$

建立起這兩個群之間的同構。現考慮在 $Aut(D^2(0;1))$ 及 $Aut(B(0;1))$ 令原點不動的子群, 分別記作 $Aut_0(D^2(0;1))$ 及 $Aut_0(B(0;1))$, 則 (A.11) 建立起這兩個子群的同構。

由定理 A.3 $Aut_0(D^2(0;1))$ 是由所有的雙全純映射

$$w = \left(e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2\right) = (z_1, z_2) \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

組成, 也就是這個群由所有的 $\left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$ 組成。

由定理 A.5 $Aut_0(B(0;1))$ 由所有的雙全純映射

$$w = zVU^{-1}$$

組成, 這裡 U, V 爲酉方陣。由於酉方陣之逆及乘積仍爲酉方陣, 故 $Aut_0(B(0;1))$ 由所有的 $w = zX$ 組成, 這裡 X 爲酉方陣, 也就是這個群由所有的酉方陣所組成, 即爲酉群 (unitary group) $SU(2)$。

如果存在雙全純映射將 $D^2(0;1)$ 映到 $B(0;1)$, 則由 (A.11) 建立起 $Aut_0(D^2(0;1))$ 到 $Aut_0(B(0;1))$ 的群同構, 即 $\left\{\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\}$ 與 $SU(2)$同構, 但這是不可能的, 因爲群 $\left\{\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\}$ 爲 Abel 群, 而 $SU(2)$ 不是 Abel 群, 於是得到矛盾。故這樣的雙全純映射 Φ 是不存在的, 這便證明了 Poincaré 定理。

總結來說, Poincaré 定理指出 Riemann 映射定理在 $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 時是不對的, 即兩個區域是拓樸等價的未必是全純等價。於是就引出了 $\mathbb{C}^n$ 中區域的分類問題, 即如果兩個區域拓樸等價, 什麼時候全純等價呢? 這個問題距離解決還很遙遠, 希望更多的年輕人投入這個方向的研究!

參考文獻

1. L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1960.
2. J. B. Conway, *Function of One Complex Variable*, Springer-Verlay, 1986.
3. R. E. Greene and S. G. Krantz, *Biholomorphic self-maps of domains*, Lecture Notes #1276, Springer-Verlag, 136-207.
4. S. G. Krantz, *Theory of Several Complex Variables*, 2nd edition, Wadsworth & Brooks / Cole, 1992.
5. S. Gong and Y. Gong, *Concise Complex Analysis*, revised edition, World Scientific, 2007.
6. 龔昇與張德健, 微積分五講, 第一講,「數學傳播」, 第30卷, 第1期, 25-35; 第二講,「數學傳播」, 第30卷, 第2期, 12-27; 第三講,「數學傳播」, 第30卷, 第3期, 31-41; 第四講,「數學傳播」, 第30卷, 第4期, 20-31; 第五講,「數學傳播」, 第31卷, 第1期, 17-29。

—本文作者龔昇(1930∼2011) 逝世前任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—

數學傳播 35卷2期, pp. 66-90

複分析五講 第五講

微分幾何與 Picard 定理

龔 昇・張德健

5.1. 度量與曲率 (metric and curvature)

在這一講中, 我們將介紹一些複幾何的基礎知識並用之來處理複分析中的一些定理, 例如 Picard 定理。Picard 定理也許是複變函數論尤其是值分佈理論中最經典的定理之一, 原來的證明非常的繁複, 但如果用微分幾何的角度來討論, 就顯得簡單得多了。

若 Ω 爲 $\mathbb{C}$ 中的一個區域, 在 Ω 上定義一個非負的 C^2 函數 ρ, 稱之爲度量 (metric), 即 $ds_\rho^2 = \rho^2|dz|^2$。由此得到距離函數 d, 在兩點 $z_1, z_2 \in \Omega$ 之的距離定義爲

$$d(z_1, z_2) = \inf \int_\gamma \rho(z)|dz|, \tag{5.1}$$

這裡 inf 是所連接 z_1, z_2 兩點且各點全在 Ω 中的曲線 γ 上取的。

對度量 ρ, 可以定義曲率 (curvature) 如下:

$$K(z, \rho) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho^2(z)}, \tag{5.2}$$

這裡 Δ 爲 Laplace 算子, 即

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

其中 $z = x + iy = re^{i\theta}$。我們可以證明這樣定義的曲率與一般在微分幾何中定義的 Gauss 曲率是一致的。

在複幾何中常用的度量有如下三種。

(1) **歐氏度量** (Euclidean metric)

若 $\Omega = \mathbb{C}$, 在 $\mathbb{C}$ 中取度量 $\rho(z) \equiv 1$, 對所有 $z \in \mathbb{C}$, 即 $ds^2 = |dz|^2$, 這個度量稱爲歐氏度量 (Euclidean metric) 或拋物度量 (parabolic metric), 兩點 z_1, z_2 之間的距離稱爲歐

氏距離, 而

$$d(z_1,z_2)=\inf\int_\gamma |dz| = |z_1-z_2| = \text{連接}z_1,z_2\text{兩點的直線段之長度},$$

由變換 $\{w=e^{i\theta}z+a,\ \theta\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{C}\}$ 所組成的群, 即由旋轉 $w=e^{i\theta}$ 及平移 $w=z+a$ 的複合所組成的群稱爲歐氏運動群, 或剛體運動群 (Group of rigid motions), 這是 $Aut(\mathbb{C})$ 中的一個子群, 顯然, 歐氏度量是在歐氏運動群下的不變度量。而由定義 (5.2), 這時候 $K(z,\rho)=0$ 對任意的 $z\in\mathbb{C}$ 都成立, 所以稱這個度量爲拋物度量。

(2) Poincaré **度量**

若 Ω 爲單位圓盤 $D(0;1)=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$, 在 $D(0;1)$ 上取度量

$$\lambda(z)=\frac{2}{1-|z|^2},$$

即 $ds^2_\lambda=\dfrac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$。

這個度量稱爲 Poincaré 度量 (Poincaré metric) 或雙曲度量 (hyperbolic metric)。在第二講中我們已證明: $D(0;1)$ 的全純自同構群 $Aut(D(0;1))$ 由變換

$$\left\{w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\ \theta\in\mathbb{R},\ a\in D(0;1)\right\}$$

所組成, 即群由旋轉及 Möbius 變換所組成。在第二講中也證明: Poincaré度量是在 $Aut(D(0;1))$ 下的不變量。

現在我們來計算 $D(0;1)$ 中兩點 z_1,z_2 的 Poincaré 距離。先考慮 $D(0;1)$ 中兩點 $z_1=0$ 及 $z_2=R+i0$ $(R<1)$ 之間的 Poincaré 距離。這時候連接這兩個點的曲線 γ 可以寫成

$$\begin{aligned} &z(t)=u(t)+iv(t), \qquad 0\le t\le 1,\\ &v(0)=u(0)=v(1)=0, \qquad u(1)=R, \end{aligned}$$

而 $u^2(t)+v^2(t)<1$, u,v 爲 t 的 C^1 實值函數, 於是

$$\begin{aligned}\int_\gamma ds &= \int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = 2\int_0^1 \frac{(u'(t)^2+v'(t)^2)^{\frac12}dt}{1-u^2(t)-v^2(t)}\\ &\ge \int_0^1 \frac{2|u'(t)|dt}{1-u^2(t)} \ge \Big|\int_0^R \frac{2du}{1-u^2}\Big| = \log\frac{1+R}{1-R},\end{aligned}$$

而等號成立若且唯若 $v(t)=0$, $0\le t\le 1$。所以得到

$$d(0,R+i0)=\inf_\gamma\int_\gamma\frac{2|dz|}{1-|z|^2}=\log\frac{1+R}{1-R},$$

而對積分取 inf 的 γ 爲連接 0 及 $R+i0$ 的直線段。

由於 $w=e^{i\theta}z$ 是 $Aut(D(0;1))$ 中的一個元素, 故 $D(0;1)$ 中任意兩點的 Poincaré 距離經 $w=e^{i\theta}z$ 作用後是不變的。因此, 我們得到

$$D(0;e^{i\theta}R)=\log\frac{1+R}{1-R}$$

對任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 都成立。

若 z_1,z_2 爲 $D(0;1)$ 中任意兩點, 則

$$\phi(z)=\frac{z-z_1}{1-\overline{z}_1z}$$

爲 $Aut(D(0;1))$ 中的一個元素, 將 z_1 映爲 0, z_2 映爲

$$\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}.$$

於是

$$d(z_1,z_2)=d\Big(0,\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}\Big)=\log\frac{1+\Big|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}\Big|}{1-\Big|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}\Big|}. \tag{5.3}$$

這就是 $D(0;1)$ 中任意兩點 z_1,z_2 之間的 Poincaré 距離或雙曲距離。在這個時候

$$d(z_1,z_2)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

其中取 inf 的 γ 爲曲線

$$z=\frac{z_1+\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}t}{1+\overline{z}_1\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}t},\qquad 0\le t\le 1,$$

即

$$z=\frac{(1-t)z_1+(t-z_1\overline{z}_1)z_2}{1-tz_1\overline{z}_1-(1-t)\overline{z}_1z_2},\qquad 0\le t\le 1.$$

從 (5.3) 式中可以看出, 當 $z_2\to z_1$ 時, $d(z_1,z_2)=0$; 當 z_1 或 z_2 趨於 $D(0;1)$ 的界點時, $d(z_1,z_2)\to+\infty$。

在第二講中我們證明了 Schwarz-Pick 引理: 若 $w=f(z)$ 爲 $D(0;1)$ 中的全純函數, 將 $D(0;1)$ 映入到 $D(0;1)$, 且 $w_1=f(z_1)$, $w_2=f(z_2)$, 則有

$$\Big|\frac{w_1-w_2}{1-\overline{w}_1w_2}\Big|\leqq\Big|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}\Big|, \tag{5.4}$$

而等號成立的充要條件爲 $f \in Aut(D(0;1))$。

由 (5.3), 可將 (5.4) 改寫成

$$d(w_1, w_2) \le d(z_1, z_2).$$

於是 Schwarz-Pick 引理有明確的幾何意義: 若 $w = f(z)$ 爲 $D(0;1)$ 中的全純函數, 將 $D(0;1)$ 映入到 $D(0;1)$, 則 $D(0;1)$ 中任意兩點之間的 Poincaré 距離經過映射後是不會增加的, 距離相等的充要條件爲 $f \in Aut(D(0;1))$。

由於 $\Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$, 故

$$-\Delta \log \lambda(z) = 2\Delta \log(1 - |z|^2) = \frac{-4}{(1-|z|^2)^2},$$

故雙曲度量 $\lambda(z)$ 的曲率 $K(z, \lambda) = -1$ 對所 $z \in D(0;1)$ 都成立, 所以稱這個度量爲雙曲度量。

(3) **球度量**

若 $\Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 在 $\mathbb{C}^*$ 上取度量 $\sigma(z) = \dfrac{2}{1+|z|^2}$, 即

$$ds_\sigma^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2},$$

稱這個度量爲球度量 (spherical metric) 或橢圓度量 (elliptic metric)。在第一講中我們曾介紹過球面投影 (stereographic projections), 這個投影建立了 Riemann 球面 $\mathbb{S}^2$ 上的點與 $\mathbb{C}^*$ 中的點之間的一一對應。若 $z \in \mathbb{C}^*$, 則在 $\mathbb{S}^2$ 上對應的點的座標爲

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right). \tag{5.5}$$

若 $p = (x_1, x_2, x_3)$ 及 $p' = (x_1', x_2', x_3')$ 爲 $\mathbb{S}^2$ 上的兩點, 則這兩點之間在 $\mathbb{S}^2$ 上的最短距離爲過 p 及 p' 的大圓上的弧 $\overset{\frown}{pp'}$ 的弧長。這個弧長等於

$$2\tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - x_1x_1' - x_2x_2' - x_3x_3'}{1 + x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'}}.$$

由 (5.5), 這等於 $2\tan^{-1}\left|\dfrac{z-z'}{1+z\overline{z'}}\right|$。將這個距離作爲 $\mathbb{C}^*$ 中的一種度量, 得到 z, z' 之間的距離爲

$$d(z, z') = 2\tan^{-1}\left|\frac{z-z'}{1+z\overline{z'}}\right|.$$

顯然, 相對應的度量爲

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}.$$

這只要對 d 求微分即可得到, 也就是

$$ds^2 = \sigma(z)^2|dz|^2, \qquad \sigma(z) = \frac{2}{1+|z|^2}.$$

於是度量 $\sigma(z)$ 有十分明確的幾何意義。用度量 $\sigma(z)$ 來計算 $\mathbb{C}^*$ 中兩點的距離等於在 $\mathbb{S}^2$ 上對應的兩點之間的最短距離, 即球面距離。也就是說, 用 $\mathbb{S}^2$ 上對應兩點的球面距離爲 $\mathbb{C}^*$ 中兩點之間的距離, 於是有

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \sigma(z)|dz|,$$

這裡 γ 爲連接 z_1, z_2 的任意曲線。

若 z_1, z_2 在 $\mathbb{S}^2$ 上的對應的點爲 p_1, p_2, 連接 p_1p_2 的大圓上的弧 $\widehat{p_1p_2}$, 將 $\widehat{p_1p_2}$ 經過球面投影到 $\mathbb{C}^*$ 中連接 z_1 與 z_2 的曲線 γ_0, 這 γ_0 就是使上式積分取 inf 的曲線。這是爲什麼稱度量 $\sigma(z)$ 爲球度量的原因。

不難計算得到球度量 $\sigma(z)$ 的曲率在每一點 $z \in \mathbb{C}^*$ 爲 $+1$, 所以稱這個度量爲橢圓度量。

在第三講中已經敍述過單值化定理: 任意單連通的 Riemann 曲面一定一對一地全純等價於下列三個區域之一: $\mathbb{C}$; $D(0;1)$ 以及 $\mathbb{C}^*$。這就是爲什麼要在這三個區域上來定義並討論幾何性質的原因。

若 Ω_1 及 Ω_2 爲 $\mathbb{C}$ 中的兩個區域, f 爲 Ω_1 上的全純函數, 將 Ω_1 映爲 Ω_2。若 ρ 爲 Ω_2 上的一個度量, 且 $f' \neq 0$, 則

$$f^*\rho = (\rho \circ f)|f'| \tag{5.6}$$

定義了在 Ω_1 上的一個度量。這個度量稱之爲由度量 ρ 通過 $f(z)$ 拉回來 (pull back) 到 Ω_1 上的度量。要證明的是:

$$K(z, f^*\rho) = K(f(z), \rho).$$

由於

$$\Delta \log |f'(z)| = 0$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta \log(\rho_0 f(z)) &= 4\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z} \log(\rho \circ f(z)) \\ &= 4\overline{\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial f}\frac{\partial}{\partial \overline{f}} \log(\rho \circ f)\Big)\end{aligned}$$

$$= |f'(z)|^2(\Delta_f \log\rho)\circ f(z),$$

所以

$$K(z, f^*\rho) = -\frac{|f'(z)|^2(\Delta_f \log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2|f'(z)|^2}$$
$$= -\frac{(\Delta_f \log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2} = K(f(z), \rho).$$

5.2. Ahlfors - Schwarz 引理

第二講中的定理 2.17給出了經典的 Schwarz 引理的解析形式。而第二講中的定理 2.19給出了 Schwarz-Pick 引理, 這是經典的 Schwarz 引理的推廣。在上一節中, 我們給出了 Schwarz-Pick 引理的微分幾何的意義, 這是用 Poincaré 度量來刻劃的。在這一節中, 我們將討論 Schwarz 引理的另一種形式之推廣, 即 Ahlfors-Schwarz 引理, 這是用曲率來刻劃的, 而且是 Schwarz-Pick 引理的推廣。這個引理是在 1938年由 Ahlfors 所證明的 (見 [1, 2, 3]), 這個結果可以說是微分幾何進入複變函數論的開始, 也是用微分幾何的觀點來處理複分析問題的開始。

定理 5.1: (Ahlfors-Schwarz 引理) 設 $f(z)$ 爲 $D(0;1)$ 上的全純函數, f 將 $D(0;1)$ 映爲 Ω, 如果在 Ω 可以引進一個度量 ρ, 即 $ds^2_\rho = \rho^2(z)|dz|^2$, 使得曲率在 Ω 上任一點都 ≤ -1, 則

$$f^*\rho(z) \leqq \lambda(z), \tag{5.7}$$

其中 $\lambda(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$, 即 $ds^2_\rho \le ds^2_\lambda$。

換句話說, 經過映射之後, 度量不增加。

證明: 任意固定 $r \in (0,1)$, 在以原點爲中心, r 爲半徑的圓盤 $D(0;r)$ 上定義度量

$$\lambda_r(z) = \frac{2r}{r^2 - z^2},$$

顯然, 在 $D(0;r)$ 中任一點 z 上, 其曲率均爲 -1。定義函數

$$v(z) = \frac{f^*\rho(z)}{\lambda_r(z)},$$

則在 $D(0;r)$ 上, v 是非負的連續函數。由 (5.6) 知, $f^*\rho(z) = \rho(f(z))|f'(z)|$ 在 $\overline{D(0;r)}$ 上是有界的, 且當 $|z| \to r$ 時, $\dfrac{1}{\lambda_r} \to 0$。所以當 $|z| \to 0$ 時, $v(z) \to 0$。因此 v 只能在 $D(0;r)$

中的某點 $\mathfrak{r}$ 處取到極大值 M, 如能證明: $M \leq 1$, 則在 $D(0;r)$ 上, $v \leq 1$ 成立。令 $r \to 1^-$, 即得 (5.7)。

若 $f^*\rho(\mathfrak{r}) = 0$, 則 $v \equiv 0$, 已無需再證。所以不妨假設 $f^*\rho(\mathfrak{r}) > 0$, 這時 $K(\mathfrak{r}, f^*\rho)$ 是有意義的。因此, 由假設我們得到 $K(\mathfrak{r}, f^*\rho) \leq -1$。由於 $\log v$ 在 $\mathfrak{r}$ 點處取極大值, 故有

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta \log v(\mathfrak{r}) &= \Delta \log f^*\rho(\mathfrak{r}) - \Delta \log \lambda_r(\mathfrak{r}) \\ &= -K(\mathfrak{r}, f^*\rho) \cdot (f^*\rho(\mathfrak{r}))^2 + K(\mathfrak{r}, \lambda_r)(\lambda_r(\mathfrak{r}))^2 \\ &\geq (f^*\rho(\mathfrak{r}))^2 - (\lambda_r(\mathfrak{r}))^2, \end{aligned}$$

即得

$$\frac{f^*\rho(\mathfrak{r})}{\lambda_r(\mathfrak{r})} \leq 1,$$

故 $M \leq 1$, 引理因而證畢。

若在 Ahlfors-Schwarz 引理中, $\Omega \subseteq D(0;1)$, 則可取 $\rho = \lambda$, 這樣就得到 Schwarz-Pick 引理。所以 Ahlfors-Schwarz 引理爲 Schwarz-Pick 引理的推廣。

我們還可以將 Ahlfors-Schwarz 引理寫成爲更一般的形式。

在 $D(0;1)$ 上定義度量 $(R > 0)$

$$\lambda_R^\alpha(z) = \frac{2R}{\sqrt{\alpha}(R^2 - |z|^2)}, \tag{5.8}$$

這裡 $\alpha > 0$, 則這個度量在 $D(0;R)$ 中任一點, 其曲率均爲 $-\alpha$。

定理 5.2: (一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理) 假設 $f(z)$ 爲 $D(0;R)$ 上的全純函數, 將 $D(0;R)$ 映爲 Ω, 如在 Ω 上可以引入一個度量 ρ, 即 $ds_\rho^2 = \rho^2(z)|dz|^2$, 使其曲率在 Ω 上任一點都小於等於 $-\beta$, 則

$$f^*\rho(z) \leqq \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\lambda_R^\alpha(z),$$

對每個 $z \in D(0;R)$ 都成立, 這裡 β 爲一正的常數。

定理 5.2 的證明與定理 5.1 的證明幾乎相同, 讀者可自行證明。Ahlfors-Schwarz 引理也是微分幾何中比較定理的開始之一。應用這個引理可以得到很多重要的結果, 例如: 推廣的 Liouville 定理。

5.3. Liouville 定理的推廣及值分布

第二講的定理2.8爲重要的 Liouville 定理: 任意有界整函數必爲常數。現在應用 Ahlforz-Schwarz 引理, 可以用曲率來刻劃與推廣 Liouville 定理。

定理 5.3: (推廣的 Liouville 定理) 若整函數 $f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到 Ω, 如在 Ω 上可以引進一個度量 $\rho(z)$, 使得對任意 $z \in \Omega$, 其曲率 $K(z,\rho)$ 滿足

$$K(z,\rho) \le -\beta < 0,$$

這裡 β 爲一正的常數, 則 $f(z)$ 爲必常數。

證明: 對任意 $R > 0$, $f(z)$ 將 $D(0;R)$ 映到 Ω 之內, 由假設, 可在其上定義度量 ρ, 使得其曲率 $K(z,\rho) \le -\beta < 0$。故由定理 5.2

$$f^*\rho(z) \le \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\lambda_R^\alpha(z).$$

由 (5.8) 知, 當 $R \to \infty$, $\lambda_R^\alpha(z) \to 0$, 故得 $f^*\rho(z) \le 0$。所以 $f^*\rho(z) = 0$。由於 $f(z)$ 爲全純函數, 因此, f 必爲常數, 定理因而證畢。

由定理 5.3 可以導出古典的 Liouville 定理。

若 $f(z)$ 爲有界的整函數, 所以存在一個正常數 M, 使得 $|f(z)| \le M$ 對所有 $z \in \mathbb{C}$ 都成立。於是全純函數 $\dfrac{1}{M}f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映射到 $D(0;1)$ 之內。而在 $D(0;1)$ 上, 顯然可以取度量 λ, 其曲率爲 -1, 故在定理 5.3 中取 $\beta = 1$, 即得 $\dfrac{1}{M}f(z)$ 必爲常數, 因而 $f(z)$ 必爲常數, 這便證明 Liouville 定理。由此可見, 定理 5.3 是 Liouville 定理的微分幾何形式之推廣。

由 Liouville 定理知道: 若整函數 $w = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到有界區域, 則 $f(z)$ 必爲常數。若整函數 $w = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到無界的區域 Ω, 如果 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 的面積 > 0, 那麼我們仍可證明 $f(z)$ 必爲常數。這可以證明如下: 若 $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, 且爲內點。作變換 $w_1 = w - w_0$, 則 $w_1 = 0$ 位於 $f(\mathbb{C}) - w_0$ 的餘集合之中。作變換 $w_2 = \dfrac{1}{w - w_0}$, 則 w_2 將 $\mathbb{C}$ 映到有界區域, 於是 w_2 爲常數 c。由 $c = \dfrac{1}{w - w_0}$, 即得 w 也是一個常數。

現在我們可以進一步的問, 若整函數 $w = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到無界區域 Ω, 而 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 的面積爲零, 即 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 是由一個曲線組成, 這時候 $f(z)$ 是否仍爲常數呢?

我們來看一看下面的例子。

若整函數 $w = u + iv = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映爲 $\mathbb{C} \setminus \{u + i0 \mid 0 \le u \le 1\}$。作變換

$$w_1 = u_1 + iv_1 = \phi(w) = \frac{w}{w - 1},$$

將 $\mathbb{C}$ 映爲 $\mathbb{C} \setminus \{u_1 + i0 : u_1 \le 0\}$。作變換 $w_2 = r(w_1) = \sqrt{w_1}$, 這裡開方取主要分支 (principal branch), 則 w_2 將 $\mathbb{C}$ 映爲右半平面。再作 Cayley 變換

$$w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1} = s(w_2),$$

將右半平面映爲單位圓盤 $D(0;1)$, 於是由 Liouville 定理知道, w_3 是常數, 這便導出 w_2, w_1 及 w 均爲常數。

由此可見, 整函數 $w=f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到無界區域 Ω, 即使 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 是一個線段, 這個整函數仍可能爲常數, 不但如此, 顯然可見, 我們可以取這個線段的長度爲任意小的正數, 這時 $f(z)$ 仍爲常數。

接下來的問題便是: $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 是多小時, $f(z)$ 才不是常數呢? 我們先考慮另一個極端的例子。整函數 $f(z)=e^z$ 將 $\mathbb{C}$ 映到 $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 所以如果 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 爲一點的話, 就有例子存在, 使得 $f(z)$ 不是常數。那麼如果 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 爲兩個點的話, $f(z)$ 是不是常數呢? 其答案便是 Picard 小定理了!

5.4. Picard 小定理 (Picard Little Theorem)

定理 5.4: (Picard 小定理) 若整函數 $w=f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映爲 Ω, 而 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 至少包含兩點, 則 $f(z)$ 必爲常數。換句話說: 非常數的整函數取到 $\mathbb{C}$ 中所有的值除了一個可能的例外點。

爲了證 Picard 小定理, 我們先證明下面的定理。

定理 5.5: 若 Ω 爲 $\mathbb{C}$ 中的開集合, $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 至少包含有兩點, 則在 Ω 上可以引進一個度量 μ, 使得曲率 $K(z,\mu)$ 在 Ω 的每一點都滿足

$$K(z,\mu)\le-\beta<0,$$

這裡 β 爲正的常數。

由定理 5.5 我們立即推出定理 5.4。這是因爲: 若 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 至少包含有兩個點, 則由定理 5.5 知道存在一個度量 μ, 使得其曲率在 Ω 上每一個點都滿足 $K(z,\mu)\le-\beta<0$, 而 β 爲正的常數, 再由推廣的 Liouville 定理知, $f(z)$ 必爲一常數函數。

定理 5.5 的證明:

在 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 中取兩點, 並用線性變換將這兩點變爲 0 與 1。記 $\mathbb{C}_{0,1}=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上作度量

$$\mu(z)=\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\cdot\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}},$$

則 $\mu(z)$ 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上爲正的, 光滑的函數。現在來計算 μ 的曲率, 且證明其值爲負的。

首先看到

$$\Delta(\log|z|^{5/6})=\frac{5}{12}\Delta(\log|z|^2)=0,$$

所以

$$\Delta \log \frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} = \frac{1}{2}\Delta\Big(\log(1+|z|^{1/3})\Big)$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left[\log\Big(1+(z\cdot\overline{z})^{1/6}\Big)\right] = \frac{1}{18|z|^{5/3}(1+|z|^{1/3})^2},$$

同樣可以得到

$$\Delta \log\left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right] = \frac{1}{18|z-1|^{5/3}(1+|z-1|^{1/3})^2}.$$

於是曲率

$$K(z,\mu) = -\frac{1}{18}\left[\frac{|z-1|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})} + \frac{|z|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})(1+|z-1|^{1/3})^3}\right],$$

可以看出

(a) $K(z,\mu) < 0, \forall\ z \in \mathbb{C}_{0,1}$;

(b) $\lim\limits_{z\to 0} K(z,\mu) = -\dfrac{1}{36}$;

(c) $\lim\limits_{z\to 1} K(z,\mu) = -\dfrac{1}{36}$;

(d) $\lim\limits_{z\to\infty} K(z,\mu) = -\infty$;

故 $K(z,\mu)$ 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上有一個負常數 $-\beta$ 作爲其上界, 這就證明了定理 5.5。

以下我們還要證明更爲深刻的 Picard 大定理 (Picard Large Theorem), 這就是 Picard 小定理的深化。爲了證明 Picard 大定理, 我們先要推廣正規族的概念。

5.5. 正規族的推廣

在第四講中我們曾提到了正規族的概念, 並用此來證明 Riemann 映射定理。現在來推廣這個概念。

定義 5.1. 若 $\{g_n\}$ 爲區域 Ω 上的複值函數序列 (函數未必全純), 若對任給的 $\varepsilon > 0$ 及 Ω 中任一緊緻集合 K, 一定存在一個只依賴於 ε 及 K 的正整數 N, 使得 $n > N$ 時

$$|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon \qquad \forall\ z \in K$$

都成立, 則稱 $\{g_n\}$ 在 Ω 上正規收斂 (normally convergent)。

若對 Ω 中的任一緊緻集合 K, 及 $\mathbb{C}$ 中的任一緊緻集合 V, 一定存在一個只依賴於 K 及 V 的正整數 N, 使得 $n > N$ 時, $g_n(z) \notin V$ 對任意的 $z \in K$ 都成立, 則稱 $\{g_n\}$ 在 Ω 上爲緊緻發散 (compactly divergent)。

即若 $\{g_n\}$ 在 Ω 上任一緊緻集合上一致發散到 ∞, 則稱 $\{g_n\}$ 爲緊緻發散。

定義 5.2. 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上複值函數族, 如果 $\mathfrak{F}$ 中任一序列或是有子序列正規收斂, 或是有子序列緊緻發散, 則稱 $\mathfrak{F}$ 爲正規族 (normal family)。

定義 5.2 是第四講中定義 4.1 的推廣。

例 5.1. $\mathfrak{F} = \{f_n\}$, $f_n = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$.

(a) $\mathfrak{F}$ 在 $D(0;1)$ 上是正規族, 因任一子序列正規族收斂於零。

(b) $\mathfrak{F}$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ 上是正規族, 因任一子序列緊緻發散。

(c) $\mathfrak{F}$ 在任一包含有單位圓周 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上任一點作爲內點的區域上不是正規族, 因爲任一子序列在圓內的點收斂於零, 在圓外的點上發散。

由定義 5.2, 我們可得到下面的結果:

定理 5.6: (Montel 定理)

若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上的全純函數族, 若對 Ω 中任一緊緻集合 K, 存在常數 M_K, 使得

$$|f(z)| \leq M_K, \tag{5.9}$$

對每個 $z \in K$, 每個 $f \in \mathfrak{F}$ 都成立, 則 $\mathfrak{F}$ 爲正規族。如果

$$|f(z)| \leq M,$$

對所有 $z \in \Omega$, 每個 $f \in \mathfrak{F}$ 都成立, 則 $\mathfrak{F}$ 爲正規族。

由於 $\mathfrak{F}$ 爲全純函數族且滿足條件 (5.9), 故不可能有緊緻發散的情形, 所以由第四講中定理 4.3 的 Montel 定理知, 定理 5.6 成立。

爲了推廣正規族的概念到亞純函數族, 我們用 $\mathbb{S}^2$ 上的球距離來替代 $\mathbb{C}$ 上的歐氏距離, 這時候 $\mathbb{C}^*$ 上的亞純函數是正規族可定義如下:

定義 5.3. 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ 上的亞純函數族, 如果 $\mathfrak{F}$ 的任一序列一定存在一個子序列, 在 Ω 上在球距離的意義下是正規收斂的, 則稱 $\mathfrak{F}$ 爲正規族。

這個定義的形式與第四講中正規族的定義 (定義 4.1) 是一致的, 只是在定義 5.3 中我們用球距離替代了歐氏距離。不難看出, 定義 5.2 相容於定義 5.3, 這也只要用球距離來替代歐氏距離。與 Montel 定理相仿, 對亞純函數族我們有如下的 Marty 定理。

定理 5.7: (Marty 定理) 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上的亞純函數族, 則 $\mathfrak{F}$ 爲正規族的充要條件爲

$$\{f^*\sigma : f \in \mathfrak{F}\}. \tag{5.10}$$

在 Ω 的任一緊緻集合上一致有界, 這裡 σ 爲球度量, 即對 Ω 中任一緊緻集合 K, 存在常數 M_K, 使得

$$\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \le M_K, \tag{5.11}$$

對任意 $z \in K$, 任意 $f \in \mathfrak{F}$ 都一致成立。

證明: (5.10) 在 Ω 上的任一緊緻集合上一致有界與 (5.11) 式爲等價是顯然的。假設 (5.11) 成立, 則

$$\begin{aligned} d\Big(f(z_1), f(z_2)\Big) &= \inf \int_\gamma ds = \inf \int_{\gamma'} \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz| \\ &= \int_{\gamma_0} \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz| \leqq M_K \cdot |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

這裡 γ 是連接 $f(z_1)$ 與 $f(z_2)$ 且全在 K 中的曲線, γ' 爲 $f^{-1}(\gamma)$, γ_0 爲從 z_1 到 z_2 的直線段。故在球距離的意義下, f 是等度連續的, 而 $f(z)$ 是一致有界的, 故由 Arzela-Ascoli 定理 (第四講的定理 4.4), $\mathfrak{F}$ 爲一正規族。

反之, 如 $\mathfrak{F}$ 爲正規族, 我們要導出 (5.11) 式成立。我們用反證法, 如果 (5.11) 不成立, 則在 Ω 中存在緊緻集合 E 及 $\mathfrak{F}$ 中的序列 $\{f_n\}$, 使得 $\max\limits_{z\in E} f_n^*\sigma(z)$ 無界。由於 $\mathfrak{F}$ 爲正規族, 故在 $\{f_n\}$ 中存在子序列 $\{f_{n_j}\}$ 使得當 $n_j \to \infty$ 時, $f_{n_j} \to f$ 在 E 上一致成立。在 E 的每一點, 可以有一閉圓盤 $\overline{D}$, $\overline{D} \subset \Omega$, 在 $\overline{D}$ 中或者 f 是全純或者 $\dfrac{1}{f}$ 是全純。若 f 爲全純, 則在 $\overline{D}$ 上有界, 由於 $\{f_{n_j}\}$ 是在球距離意義下收斂, 所以當 n_j 充分大時, $\{f_{n_j}\}$ 在 $\overline{D}$ 內沒有極點。由第三講中的 Weierstrass 定理知, $f_{n_j}^*\sigma$ 在此 $\overline{D}$ 小一點的圓盤上一致收斂到 $f^*\sigma$。由於 $f^*\sigma$ 是連續函數, 故 $f_{n_j}^*\sigma$ 在小一點的圓盤上是有界的。同樣, 若 $\dfrac{1}{f}$ 是全純的情形, 用同樣的方法可證 $\left(\dfrac{1}{f_{n_j}}\right)^*\sigma$ 在小一點的圓盤上是有界的。但是 $\left(\dfrac{1}{f_{n_j}}\right)^*\sigma = f_{n_j}^*\sigma$ 故可以推得 $f_{n_j}^*\sigma$ 在小一點的圓盤上是有界的。由於 E 爲緊緻集合, 故可以用有限個這樣的小圓盤來覆蓋它, 這樣我們便可得到: $f_{n_j}^*\sigma$ 在 E 上是有界的, 這與假設矛盾, 定理的證明因而完畢。

由 Marty 定理, 可以導出如下的 Montel 定理。

定理 5.8: (Montel 定理) 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上的亞純函數族, P, Q, R 爲三個不同的點, 如果 $\mathfrak{F}$ 中的任一函數取值於 $\mathbb{C}^* \setminus \{P, Q, R\}$, 則 $\mathfrak{F}$ 爲正規族。

證明: 用分式線性變換將 P, Q, R 三點變爲 $P=0$, $Q=1$ 及 $R=\infty$, 於是只要證明: 全純函數族中任一函數如不取 $P=0$, $Q=1$, 則此函數族爲正規族。即在 $\mathbb{C}_{0,1}=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 上取值的全純函數族成爲正規族。這只要證明: 對 Ω 中任一圓盤 $D(z_0;R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<R\}\subseteq\Omega$ 中, $\mathfrak{F}$ 成爲正規族即可。我們不妨假設 $z_0=0$, 在上一節中我們已構造了度量 μ, 將 μ 乘以常數 c (仍記作 μ), 使得其曲率的上界爲 -1。由一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理得到: 對任一 $f\in\mathfrak{F}$ 我們有

$$f^*\mu(z)\le\lambda_R^\alpha(z),$$

即

$$\mu(f(z))\Big|\frac{df}{dz}\Big|\le\frac{2R}{\sqrt{\alpha}(R^2-|z|^2)},\tag{5.12}$$

對每個 $z\in D(0;R)$ 都成立。

將球度量 $\sigma(w)$ 與 $\mu(w)$ 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 中作比較, 顯然, 當 $w\to0$, 或是 $w\to1$, 或是 $w\to\infty$ 時,

$$\frac{\sigma(w)}{\mu(w)}=\frac{2/(1+|w|^2)}{c(1+|w|^{1/3})^{1/2}(1+|w-1|^{1/3})^{1/2}/[|w|^{5/6}|w-1|^{5/6}]}\to0.$$

故存在正的常數 M, 使得 $\sigma(w)\le M\mu(w)$, 於是由 (5.12) 知, 當 $z\in D(0;R)$ 時,

$$\begin{aligned}f^*\sigma(z)=\sigma(f(z))\Big|\frac{df}{dz}\Big|&\le M\mu(f(z))\Big|\frac{df}{dz}\Big|\\&=Mf^*\mu(z)\le M\lambda_R^\alpha(z)=\frac{2RM}{\sqrt{\alpha}(R^2-|z|^2)}\end{aligned}$$

成立。故 $f^*\sigma$ 在 $D(0;R)$ 的緊緻集合上有界, 且界不依賴於 $f\in\mathfrak{F}$。由 Marty 定理得知, $\mathfrak{F}$ 爲一正規族。定理因而證畢。

在證明定理 5.8 的過程中, 我們還證明了下面的結果。

定理 5.9: (Montel 定理) 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上的全純函數族, 對 $\mathfrak{F}$ 中的每一個函數, 如均不取相同的兩個複數, 則稱爲正規族。

5.6. Picard 大定理 (Picard Large Theorem)

回顧在第三講所證明的 Weierstrass 定理: 若 $f(z)$ 在 $D'(0;r)=D(0;r)\setminus\{0\}$ 中全純, 而 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的本性奇異點, 則 $f(z)$ 在 $D'(0;r)$ 中能取到的值在 $\mathbb{C}$ 中是稠密的。

Picard 大定理將進一步刻劃函數在本性奇異點附近的值分佈。

定理 5.10: (Picard 大定理) 若 $f(z)$ 在 $D'(0;r)$ 中全純, 而 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的本性奇異點, 則 $f(z)$ 在 $z=0$ 點的任意鄰域中可取到 $\mathbb{C}$ 中任意值最多除去一個例外點。當然, 以任一點 z 來代替 $z=0$, 其結論依然成立。

顯然, Picard 大定理是 Weierstrass 定理的深化, 也是 Picard 小定理的推廣。在第三講中已經討論過, 若 $f(z)$ 爲整函數, 且 $f(z)$ 在無窮遠點爲極點, 則 $f(z)$ 爲多項式。由代數基本定理 (第二講定理 2.10), $f(z)$ 可以取 $\mathbb{C}$ 中任何值。若 $f(z)$ 在無窮遠處爲可去奇異點, 則 $f(z)$ 爲有界整函數, 由 Liouville 定理, $f(z)$ 必爲常數函數。若 $f(z)$ 在無窮遠處爲本性奇異點, 則由 Picard 大定理, $f(z)$ 在無窮遠點附近可以取 $\mathbb{C}$ 的任何值, 最多除去一個例外點。這就導出了 Picard 小定理。因此, Picard 小定理是 Picard 大定理的推論。現在我們應用 5.5 節中的結果來證明定理 5.10。

Picard 大定理的證明: 我們利用反證法。若 Picard 大定理不成立, 不妨假設 $f(z)$ 在 $D'(0;1)$ 上全純, f 將 $D'(0;1)$ 映到的區域不取 0, 1 兩點來證明: $z=0$ 必爲 $f(z)$ 的可去奇異點或極點, 這樣便得到矛盾!

定義 $f_n(z)=f\Big(\dfrac{z}{n}\Big)$, $0<|z|<1$, 作全純函數族 $\mathfrak{F}=\{f_n\}$, $\mathfrak{F}$ 取值於 $\mathbb{C}_{0,1}$。由定理 5.9 (Montel 定理) 知, $\mathfrak{F}$ 爲一正規族。因此, 在 $\{f_n\}$ 中存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 或是正規收斂, 或是緊緻發散。若 $\{f_{n_k}\}$ 是正規收斂, 則 $\{f_{n_k}\}$ 在 $D'(0;1)$ 的任一緊緻集合上一致收斂, 所以是有界的。特別在 $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=\dfrac{1}{2}\right\}$ 上有界 M, 此即 $f(z)$ 在 $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=\dfrac{1}{2N_k}\right\}$ 上有界 M。由最大模原理, f 在 $0<|z|<\dfrac{1}{2}$ 上有界 M, 故 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點。

若 $\{f_{n_k}\}$ 爲緊緻發散, 則用同樣的方法可證, $\dfrac{1}{f}\to 0$, 當 $z\to 0$, 即 $f\to\infty$, 當 $z\to 0$, 所以 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的極點, 這便證明了 Picard 大定理。

儘管 Picard 大定理與 Picard 小定理是複變函數論中, 尤其是值分佈理論中最重要的結果之一, 但一般大學基礎教材中並不講這兩個定理, 原因是這些定理的證明涉及橢圓函數比較困難。自從 Picard 證明了這兩個定理之後, 有不少簡化的證明出現, 在本講中我們是選用了微分幾何的方法來證明。這是 L. V. Ahlfors [2] 於 1938 年建立起極爲重要的 Ahlfors-Schwarz 引理, 1939 年 R. M. Robinson [10] 就沿著這個想法, 用微分幾何的方法, 而不用橢圓函數來證明 Picard 定理。在此之後, 有不少進展, 如 H. Grauert 及 H. Reckziegel [5]; Z. Kobayashi [6]; L. Zalcman [11]; D. Minda 及 G. Schober [9] 與 S. G. Krantz [7, 8] 等人的工作。本講就是參考了上述的文獻, 尤其是 Minda 及 Schober 與 Krantz 的工作所寫成的。這樣寫法的優點不僅是化簡了 Picard 定理的證明, 也開始了用微分幾何的方法來處理複分析的問題; 不但如此, 這裡所用來證明 Picard 大小定理的方法, 還可以用來證明複分析中其它的重要結果, 例如 Bloch 定理, Landau 定理及 Schottky 定理, 我們在此只陳述這三個定理而不給予證明, 有興趣的讀者可以參閱上述的文獻以及 L. V. Ahlfors [3], J. B. Conway [4] 與 Gong-Gong [19] 的著作。

Bloch 定理: 若 $f(z)$ 在單位圓盤 $D(0;1)$ 上全純, 且 $f'(0)=1$, 則 $f(D)$ 一定包有一個以 δ 爲半徑的圓盤, 這裡 δ 是一個不依賴於 f 的正常數。

Landau 定理: 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$ $(a_1\neq 0)$ 爲 $D(0;r)$ 上的全純函數, f 不取 0, 1 兩點, 則 $r\leq R(a_0,a_1)$, 這裡 $R(a_0,a_1)$ 爲只依賴於 a_0, a_1 的常數。

Schottky 定理: 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$ 爲 $D(0;r)$ 中的全純函數, f 不取 0, 1 兩點, 則對每個 $0<\theta<1$, 存在只依賴於 a_0 及 θ 的常數 $M(a_0,\theta)$, 使得 $|f(z)|\leq M(a_0,\theta)$ 對所有 $|z|\leq\theta r$ 都成立。

在證明 Picard 大小定理的過程中, 我們在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上構造了度量 μ, 這是證明過程中很關鍵的一步。對每個度量要求其曲率有負的上界, 且存在正的常數 M, 使得 $\sigma\leq M\mu$ 成立。(這裡 $\sigma(z)=\dfrac{2}{1+|z|^2}$ 爲 $\mathbb{C}^*$ 上的球度量) 滿足這樣性質的度量當然不只本講中所給出的

$$\mu(z)=\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\cdot\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}.$$

我們還可構造出其他度量也可滿足上述的要求, 有興趣的讀者可以參考 R. M Robinson [10] 的文獻。

附錄 B

在第二講定理 2.2 我們證明了在單複變中非常重要的 Cauchy 積分公式, 即 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲 Ω 的 C' 邊界, $f(z)$ 爲 Ω 上的全純函數, 且 $f(z)\in C'(\overline{\Omega})$, 則

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

這個積分公式在複變函數論中的重要性已毋庸多說, 它不但有著函數論本身的重要意義, 而且是研究奇異積分, 邊界值問題等不可缺乏的工具。現在我們試著將這個公式推廣到高維去, 從而討論一下多複變函數論與單複變函數論在本質上有何差異。如同其他數學理論, 從一維推廣到高維, 其中一部分是可以沒有多大困難平行推過去的。爲簡單起見, 這裡只討論兩個複變數的情形, 即在 $\mathbb{C}^2=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 中討論。下面這個定理, 我們只敍述其結果而不給予證明, 讀者只要應用兩次單複變全純函數的 Cauchy 積分公式即可證明其結果。

定理 B.1 (Cauchy 積分公式) 設 $w=(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2$, $r>0$.

$D^2(w;r)=\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1-w_1|<r,|z_2-w_2|<r\}$ 爲以 w 爲中心, 以 r 爲半徑的雙圓柱 (bidisk), 若 $f(z)$ 在 $\overline{D^2(w;r)}$ 上全純, 則

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(w_1;r)}\int_{\partial D(w_2;r)}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}d\zeta_1\zeta_2$$

對任意的 $z \in D^2(w;r)$ 都成立。

但如果我們將 $D^2(w;r)$ 換成一般的區域, 情形便不是那麼簡單! 我們現在從外微分形式的觀點來看一下單複變中的 Cauchy 核: $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{\zeta - z}d\zeta$. 由於當 $z \neq \zeta$ 時,

$$d\Big(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z}d\zeta\Big) = 0,$$

這裡 d 是對 ζ 作用, 所以應用 Stokes 定理, 立即可以得到 Cauchy 積分公式。

於是從外微分形式的觀點, 問題便變成: 對於 $\mathbb{C}^2$ 中的區域 Ω, 可否找到一個外微分形式滿足下列四個條件:

(1) 對在 Ω 中全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續的函數 $f(z)$, 具有再生性質 (reproducing property):

$$f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z \in \Omega \tag{B.1}$$

這裡 $d\sigma_w$ 爲 $\partial\Omega$ 上的 Lebesgue 面積元素。

(2) 式 (B.1) 當 $z \in \Omega$ 時 不是奇異積分, 而 $z \in \partial\Omega$ 時爲奇異積分。

(3) 當 $z \in \overline{\Omega}$, $w \in \partial\Omega$, $w \neq z$ 時, $H(z,w) \in C^\infty$, 對每個 $w \in \partial\Omega$, $H(z,w)$ 在 $z \in \overline{\Omega}\backslash\{w\}$ 中全純。

(4) 可以應用 Stokes 定理在這個核上。

這方面最重要的核是 Cauchy-Fantappiè 核。設 Ω 爲 $\mathbb{C}^n$ 中任意開集合, $z \in \mathbb{C}^n$ 爲固定參數, $g_1(z,w), \ldots, g_n(z,w)$ 是在 $w \in \Omega$ 上的光滑的 w 複值函數。Cauchy-Fantappiè 形式 (簡稱爲 C-F form C-F 形式) 爲

$$K(z,w) \equiv \frac{c_n}{g_n}\omega dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n, \tag{B.2}$$

此處

$$\omega = g_1\overline{\partial}g_2 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}g_n - g_2\overline{\partial}g_1 \wedge \overline{\partial}g_3 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}g_n + \cdots + (-1)^n g_n\overline{\partial}g_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}g_{n-1}$$

$$C_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!(2\pi i)^{-n}.$$

$K(z,w)$ 爲 w 的 $(n, n-1)$ 形式, 以 z 爲參數, 在使 $g(z,w) \neq 0$ 的 Ω 的部分集合上定義。我們可以證明 (參看 Koppelman [15]):

若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 爲有界, 光滑的區域, 當 $z \in \Omega$, w 在 $\partial\Omega$ 的鄰域時, $K(z,w)$ 爲一 Cauchy-Fantappié 形式。若 f 在 Ω 中全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則

$$f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} K(z,w)f(w).$$

我們還可以證明 (參看 Norguet [17]), Cauchy-Fantappiè 形式 (B.2) 中的分子可以寫成

$$c_n\omega \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n = \frac{1}{(2\pi i)^n} G \wedge (\overline{\partial} G)^{n-1},$$

這裡 G 爲 $(1,0)$ 形式

$$G = \sum_{j=1}^{n} g_j(z,w) dw_j,$$

而 ∂ 是對 w 作用的, 指數 $n-1$ 表示 $n-1$ 次外乘積。

對於 $\mathbb{C}^n$ 中的單位球 $|z|^2 < 1$, 我們可以選取 $g_j(z,w) = \overline{w}_j$, 於是當 $z \in \Omega$, $w \in \partial\Omega$ 時, 則

$$g = \sum_{j=1}^{n} (w_j - z_j) g_j = \sum_{j=1}^{n} (w_j - z_j)\overline{w}_j = 1 - z \cdot \overline{w} \neq 0.$$

此時

$$G = \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j dw_j = \partial\phi, \qquad \phi = |w|^2.$$

於是 (B.2) 的分子成爲

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \partial\phi \wedge (\overline{\partial}\partial\phi)^{n-1} = C d\sigma_w.$$

由於

$$\int_{|w|^2=1} \frac{C d\sigma_w}{(1 - z \cdot \overline{w})^n} = 1,$$

我們可以直接算出 $C = w_{n-1}^{-1}$, 這裡 w_{n-1} 是 $|w|^2 = 1$ 的表面積。

現在我們從另外一個角度來討論 Cauchy 核, 也就是用泛函分析的角度來討 Cauchy 核。考慮 $\mathbb{C}$ 中單位圓盤 $|z| < 1$, 邊界爲 $w = e^{i\theta}$, 則 Cauchy 核可以寫成

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{1 - ze^{-i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-ik\theta} d\theta.$$

顯然, $\left\{ \frac{z^k}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $|z| < 1$ 中全純函數族的完備正交系; 而 $\left\{ \frac{w^k}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=0}^{\infty}$ 是在 $|w| = 1$ 上的連續函數族的就範正交系。這樣我們便可得到: 在 $|z| \leq 1$ 上連續, 在 $|z| < 1$ 中全純的函數, 可以用 Cauchy 積分表示出來, 即 Cauchy 核對這類函數有再生性質, 從這種觀點下得到的核, 我們稱之爲 Szegö 核。我們不要把 Cauchy 核與 Szegö 核的觀念混淆; 當 $\mathbb{C}$ 中的區域不是單位圓盤時, 所得到的 Szegö 核就不再是 $\frac{1}{2\pi i} \frac{dw}{w - z}$。Szegö 核的再生性質是從泛函分析 (Hilbert 空間) 的角度來考慮, 而 Cauchy 核則以 Stokes 定理作爲出發點!

想把單複變的 Szegö 核推廣到高維度的複數空間 $\mathbb{C}^n$ 中的區域上去, 只要找到 $\mathbb{C}^n$ 中的一組函數 $\{\phi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\phi_k(z)\}$ 對 Ω 中的全純函數而言是完備正交系, 在 Ω 的邊界 $\partial\Omega$ 上 (或其中一部分, 如特徵流形 Characteristic manifold 上), $\{\phi_k(z)\}$ 是就範正交的, 加上

$$\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(z)\overline{\phi_k(w)}, \qquad z\in\Omega, \quad w\in\partial\Omega,$$

是一致收斂的條件, 我們便得到想要的 Szegö 核。

我們可以證明 (參看華羅庚的著作 [12]) 下面定理:

若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 是圓型, 有界, 單連通區域且包含原點, 而且對原點而言, Ω是星狀的。假設 Ω 的特徵流形是 $\mathcal{L}$, 且 $\mathcal{L}$ 也是圓型, 緊緻的, 則 Ω 的 Szegö 核是存在的!

在華羅庚的文章中並給出 $\phi_k(z)$ 的具體構造方法。這時 $\phi_k(z)$ 均爲 z 的齊次多項式, 從而可以得到 Szegö 核。例如, $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $w=(w_1,\ldots,w_n)$, 且 $|z|<1$, $|w|=1$, 則其 Szegö 核爲

$$\omega_{n-1}^{-1}(1-z\cdot\overline{w})^{-n}d\sigma_w.$$

$\omega_{n-1}=2\pi^n/\Gamma(n)$ 爲 $|w|=1$ 的表面積, 而 $d\sigma_w$ 爲 $|w|^2=1$ 的體積元素 (Volume element)。$\mathbb{C}^n$ 中單位球的 Szegö 核是如此簡潔, 但對這樣一個重要不可約區域, 直到華羅庚在 1958 年出版他的名著時才正式將之寫下來。

綜合以上的討論, 在 $\mathbb{C}^n$ 中的單位球面上的 Szegö 核與 Cauchy-Fantappiè 核是一樣的, 而且這個核滿足我們想要的 (1)−(4) 之條件。但對一般的區域而言, 這兩個核是不相同的, 事實上 Kerzman 與 Stein 證明在 Ω 上的 Szegö 核與 Cauchy-Fantappiè 核相等, 若且唯若 Ω 是單位球面。不但如此, 如果 Ω 是任意區域, 或是 $g_j(z,w)$ 任意選取, 這樣得到的 Cauchy-Fantappiè 核未必滿足所要求的條件 (1)−(4), 尤其是條件 (3): 對每個 $w\in\partial\Omega$, $K(z,w)$ 在 $z\in\overline{\Omega}\setminus\{w\}$ 中爲全純, 例如: Ω 爲 $\mathbb{C}^n$ 中有界光滑的區域, 取

$$g_j(z,w)=\overline{w}_j-\overline{z}_j,$$

這樣得到的 Cauchy-Fantappiè 核爲

$$\begin{aligned}K(z,w)=C\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\partial}{\partial w_k}\frac{1}{[r(w-z)]^{2n-2}}dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n\\ \wedge d\overline{w}_1\wedge\cdots\wedge d\overline{w}_{k-1}\wedge d\overline{w}_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\overline{w}_k\end{aligned}\tag{B.3}$$

$w\in\partial\Omega$, $z\in\Omega$, 這裡 $r(w-z)$ 表示 z 與 w 兩點的歐氏距離。

(B.3) 即爲著名的 Bochner-Martinelli 核。這個核雖然有簡潔的形式, 再生性質等, 但當 $z \in \overline{\Omega} \setminus \{w\}$ 時, 它不是 z 的全純函數!

現在問題是: 對於怎樣的區域, 我們才可以找到滿足條件 (1)−(4) 的 Cauchy-Fantappiè 核? 分別在 1969 年, Henkin [12] 及 1970 年 Ramirez [13] 及在之後的 1978 年, Kerzman 與 Stein [16] 在這個問題上有了突破性的貢獻。他們對於強擬凸域 (strongly pseudoconvex domain) 分別用 $\overline{\partial}$ 問題的解及層論的方法, 給出了滿足上面提到的 (1)−(4) 條件的 Cauchy-Fantappiè 核, 現在通稱爲 Henkin-Ramirez 核及 Kerzman-Stein 核。由於這些方法不可能在此作詳細討論, 我們只作一個概括性的介紹, 有興趣的讀者可以參閱他們原來的著作。

我們先來介紹一下什麼叫強擬凸域。

定義 B.1 若 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 爲一有界, 光滑的區域。這區域由函數 ρ 所定義, ρ 爲實值函數, 且在 $\overline{\Omega}$ 上爲光滑, $\rho(z) < 0$, 若 $z \in \Omega$; $\rho(z) = 0$, 若 $z \in \partial\Omega$; $\rho(z) > 0$, 若 $z \notin \overline{\Omega}$; $\nabla\rho(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial\Omega$, 以及

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k \geq C|w|^2, \tag{B.4}$$

對任意的 $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ 都成立, 其中 C 爲一與 $z \in \overline{\Omega}$ 無關的常數, 則 Ω 稱爲一強擬凸域。

條件 (B.4) 表示對於每個由 w 決定的複方向, ρ 爲次調和函數 (subharmonic function)。

現在我們來看一下 Henkin-Ramirez 核的構造過程。

(a) 局部的預備工作。

對 $z \in \Omega$, $w \in \partial\Omega$ 而且 z "靠近" w, 令

$$g_j(z,w) = \frac{\partial\rho}{\partial w_j}(w) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial w_j \partial \overline{w}_k}(w)(z_j - w_j),$$

所以在 (B.2) 式中關鍵的部分 $g(z,w) \neq 0$, 這是因爲當我們考慮 ρ 在 W 的 Tayler 展開式

$$\rho(z) = \rho(w) + 2Re\left[\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_\ell}(w)(z_\ell - w_\ell) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial w_j \partial w_k}(w)(z_j - w_j)(z_k - w_k)\right]$$
$$+ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial w_j \partial \overline{w}_k}(w)(z_j - w_j)\overline{(z_k - w_k)} + 3\text{階餘項},$$

將上式與 (B.2) 式的 $g(z,w)$ 比較, 我們便得到

$$\rho(z) = \rho(w) - 2Re\, g(w,z) + L(z,w).$$

因爲 (B.4) 式, 我們知道

$$L(z,w) \geq C|w \cdot z|^2.$$

由於 $\rho(z) < 0$ 及 $\rho(w) = 0$, 這便得到

$$Re\, g(z,w) \geq C|w-z|^2 > 0.$$

因此, $g(w,z) \neq 0$, 顯然, $g_j(z,w)$ 爲 z 的全純函數且整個構造的過程是光滑地依賴著 $w \in \partial\Omega$。

(b) 將局部函數擴展到整體。

我們將步驟 (a) 所構造的函數記作 $g_j^L(z,w)$ 及 $g^L(z,w)$, 現在要將它們 "擴展" 到一個新的整體函數 $g_j(z,w)$ 及 $g(z,w)$ 上去。這個函數 $g(z,w)$ 當 $z \in \overline{\Omega}$ 時爲全純的, 當 $z \in \overline{\Omega} \setminus \{w\}$ 時, $g(z,w) \neq 0$。"擴展" 的意思爲: 當 z 靠近 w 時,

$$g(z,w) = g^L(z,w)\phi(z,w),$$

這裡 $\phi(z,w)$ 爲局部定義的函數 (當 z 靠近 w 時), 且爲 z 的全純函數, 而且 $\phi(w,w) \neq 0$, 於是 $g(z,w)$ 與 $g^L(z,w)$ 當 z 靠近 w 時有相同的零點, 這樣得到了 $g(z,w)$ 之後, 我們可以用解除法問題 (division problem)

$$g(z,w) = \sum_{j=1}^{n} g_j(z,w)(z_j - w_j),$$

來求得 $g_j(w,z)$, 這樣求得的 $g_j(z,w)$ 是 z 的全純函數。這便是 Henkin-Ramirez 核構造的大致情形。

至於 Kerzman - Stein 核的構造過程, 我們也略述如下: 構造局部函數 $g_j^L(z,w)$ 與 Henkin-Ramirez 核的過程是一樣的, 但其將 $g_j^L(z,w)$ 直接 "擴展", 即當 z 靠近 w 時

$$g_j(z,w) = g_j^L(z,w), \qquad z \in \Omega, \quad w \in \partial\Omega,$$

這樣得到的 Cauchy-Fantappiè 形式記作 $E(z,w)$ (essential part), 而這個 $E(z,w)$ 當 z 靠近 w 時是 z 的全純函數。然後我們要加上一個 "修正" 部分 $C(z,w)$ (corrected part) 使得

$$H(z,w) = E(z,w) + C(z,w),$$

在整體是 z 的全純函數, 而且

$$C(z,w) \in C^\infty\Big(U(\overline{\Omega}) \times V(\partial\Omega)\Big),$$

其中 $U(\overline{\Omega})$ 及 $V(\partial\Omega)$ 分別爲 $\overline{\Omega}$ 及 $\partial\Omega$ 的鄰域, 即在對角線上 (i.e., $z=w$) 時, $C(z,w)$ 仍然爲光滑的。這個函數 $C(z,w)$ 由解一 $\overline{\partial}$ 問題而得到。在構造 $C(z,w)$ 過程中, 我們並不需要應用 division problem, 但另一方面, $C(z,w)$ 並不是一個 Cauchy-Fantappiè 形式, 所以我們要花些功夫去證明 $E(z,w)+C(z,w)$ 具備有對全純函數的再生性質, 這可以應用 Stokes 定理與 Cauchy-Fantappiè 形式的某些特性來完成。

由於 $E(z,w)$ 可以明確地表達出來, 一切非構造性的東西併入 $C(z,w)$ 中去, 而 $C(z,w)$ 又是一個 C^∞ 的核, 所以在應用上不會構成問題!

最後我們來討論一下 Szegö 核與 Kerzman-Stein 核的關聯。首先定義什麼叫 Szegö 核, 對 $\mathbb{C}^n$ 中任一個有界光滑的區域 Ω (不一定是擬凸域), 考慮 Hilbert 空間 $L^2(\partial\Omega)$ 的閉子空間 $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 是所有 Ω 上全純函數的邊界值且

$$\int_{\partial\Omega}|f(z)|^2 d\sigma_z < +\infty.$$

則對任何 $u\in\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, 我們有

$$u(z)=\int_{w\in\partial\Omega} S(z,w)u(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega,$$

這裡 $u(w)$ 是 $u(z)$ 的邊界值。不難看出 $S(z,w)$ 是 $z\in\Omega$ 的全純函數, 而且對任一 $z\in\Omega$, $\overline{S}(z,w)\in\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 是一 w 的函數。

由 $u\mapsto u(z)$, $z\in\Omega$ 是在 $\mathcal{H}^2$ 上有界及 Riesz 表示定理 (Riesz's representation theorem) 知 $S(z,w)$ 這個核是存在的! 但一般而言, 在絕大多數情況下, $S(z,w)$ 沒有辦法很明確地寫出來。我們甚至不知道當 $z\in\Omega$ 固定 $S(z,w)$ 對 $w\in\partial\Omega$ 是否光滑!

但當 Ω 是強擬凸時, C. Fefferman [14] 及 Boutet de Monvel-Sjöstrand [18] 證明了下面這個漂亮的結果。

定理 B.2 假設 Ω 爲一光滑有界的強擬凸區域, 則 $S(z,w)$ 對 $z\in\overline{\Omega}$ 及 $w\in\partial\Omega$, $w\neq z$ 爲光滑函數, 且

$$S(z,w)=F(z,w)\psi^{-n}(z,w)+G(z,w)\log\psi(z,w),$$

其中 $F,G,\psi\in C^\infty(\overline{\Omega}\times\partial\Omega)$。函數 $\psi(z,w)$ 可以明確地被構造, 且當 $z\neq w$ 時, $Re(\psi(z,w))>0$; 函數 F 及 G 並不明確, 不過 $F(w,w)\neq 0$ 對 $w\in\partial\Omega$ 成立!

在 [14] 一文中, C. Feffesman 非常巧妙地運用複值 phase function 的 Fourier 積分算子來證明定理 B.2, 因此, $S(z,w)$ 在 $z=w$ 的奇異點能準確地被刻劃。一般而言, $G(z,w)\neq 0$, 至於說什麼樣的區域, 對數項不會出現 (即 $G(z,w)\equiv 0$), 到現在仍是一個沒有被解決的問題!

函數 $\psi(z,w)$ 與 Henkin-Ramirez 核或 Kerzman-Stein 核中的函數 $g(z,w)$ 有密切關係, 且其奇異點相同。Szegö 核與 Kerzman-Stein 核的關係, 在 [16] 文中有詳細討論。我們現在概略地討論如下:

Szegö 核定義了由 $L^2(\partial\Omega)$ 到 $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 上的一個正交投影:

$$\mathbb{S}f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} S(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega.$$

證明: 將 f 分解成 $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \mathcal{H}^2$, $f_2 \perp \mathcal{H}^2$。利用 $S(z,w) = \overline{S}(w,z)$ 的性質便可證出 $\mathbb{S} : L^2(\partial\Omega) \to \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 爲一正交投影算子。

另一方面, Kerzman-Stein 核也定義了一個 (非正交) 的投影算子

$$\boldsymbol{H}f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega.$$

在 [16] 一文中, 他們證明了下面的定理。

定理 B.3 :假設 $\Omega \subset C\mathbb{C}^n$ 是一個有界且光滑的強擬凸域。若 $f \in L^2(\partial\Omega)$ 並設

$$\boldsymbol{H}f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega.$$

則 $\boldsymbol{H}f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 且其邊界值 (也記作 $\boldsymbol{H}f$) 爲

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}f(z) &= \frac{1}{2}f(z) + P.V.\int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w \\ &= \frac{1}{2}f(z) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{w\in\partial\Omega\setminus B(z;\varepsilon)} H(z,w)f(w)d\sigma_w.\end{aligned}$$

這裡 $B(z,w) = \{w\in\partial\Omega : |g(z,w)| < \varepsilon\}$。

由奇異積分的理論, 我們知算子 $\boldsymbol{H} : L^2(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ 爲有界, 而且

$$\boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{H}. \tag{B.5}$$

它的對偶算子 $\boldsymbol{H}^* : L^2(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ 是

$$\boldsymbol{H}^*f(w) = \frac{1}{2}f(w) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{z\in\partial\Omega\setminus B(w;\varepsilon)} \overline{H}(w,z)f(z)d\sigma_z.$$

證明: 由 $H(z,w)$ 的再生性, 我們知道 (B.5) 成立。關鍵的步驟是要證明 $\boldsymbol{H}f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$。我們可用奇異積分的結果來看這性質或用直接的證明:

$$\|\boldsymbol{H}f\|^2 = <\boldsymbol{H}f, \boldsymbol{H}f> = <f, (\boldsymbol{H}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{H}f>$$

$$\leqq \|f\|\Big(\|\boldsymbol{H}^2 f\| + \|\boldsymbol{A}\|_{op}\cdot\|\boldsymbol{H}f\|\Big) = \|f\|\cdot\|\boldsymbol{H}f\|\cdot(1+\|\boldsymbol{A}\|_{op}),$$

所以, $\boldsymbol{H}$ 是在 $L^2(\partial\Omega)$ 上有界且 $\|\boldsymbol{H}\|_{op} \leqq 1+\|\boldsymbol{A}\|_{op}$。至於 $\|\boldsymbol{A}\|_{op} < \infty$ 是因爲 $\boldsymbol{A}$ 是一個由核 $A(z,w)$ 所定義的算子, 其核爲

$$A(z,w) = \overline{H}(w,z) - H(z,w)$$

我們可以證出

$$\int_{w\in\partial\Omega} |A(z,w)|d\sigma_w < \alpha(\Omega) < +\infty, \quad z\in\Omega,$$

及

$$\int_{z\in\partial\Omega} |A(z,w)|d\sigma_z < \alpha(\Omega) < +\infty, \quad w\in\Omega.$$

因此 $\boldsymbol{A}: L^2(\partial\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$ 爲有界, 詳細討論請參看 [16] 一文。

現在我們要將 Szegö 算子 $\mathbb{S}$ 用 $\boldsymbol{H}$ 算子表示出來, 因爲 $S(z,w)$ 及 $H(z,w)$ 對全純函數都有再生性質, 因而得出

$$\boldsymbol{H}\mathbb{S} = \mathbb{S}, \qquad \mathbb{S}\boldsymbol{H}^* = \mathbb{S},$$

及

$$\mathbb{S}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{H}^*\mathbb{S} = \boldsymbol{H}^*,$$

是 $L^2(\partial\Omega)$ 上的有界算子。(這裡我們用到 $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}$ 是正交投影算子的性質)。因此

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{H}^* - \boldsymbol{H}) = \mathbb{S} - \boldsymbol{H} \Rightarrow \mathbb{S}\boldsymbol{A} = \mathbb{S} - \boldsymbol{H}.$$

算子 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}^* - \boldsymbol{H}$ 不但在 $L^2(\partial\Omega)$ 上有界, 而且它是一個具有 "光滑" (Smoothing) 性質的算子, 因此可以疊代的方法得到

$$\mathbb{S} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^k + \mathbb{S}\boldsymbol{A}^{k+1}, \tag{B.6}$$

或

$$\mathbb{S} = \boldsymbol{H}(I-\boldsymbol{A})^{-1}.$$

(算子 $(I-\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在是因爲 $\sqrt{-1}\boldsymbol{A}$ 爲對稱且緊緻在 $L^2(\partial\Omega)$ 上)。

(B.6) 式子告訴我們 $\mathbb{S}$ 算子的主要部分爲 $\boldsymbol{H}$, 而且有一逼近的級數, 當 k 愈來愈大其餘項 $\mathbb{S}\boldsymbol{A}^{k+1}$ 會愈來愈光滑! 我們因此有如下定理:

定理 B.4 假設 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一個光滑的強擬凸區域, 令 $E(z,w)$, $z \in \Omega$, $w \in \partial\Omega$ 爲 Ω 上的積分核 (Henkin-Ramirez 核或 Kerzman-Stein 核), 設 $K(z,w) = E(z,w) - \overline{E}(w,z)$, $z \in \partial\Omega$, $w \in \partial\Omega$, $z \neq w$, 則 Ω 上的 Szegö 核可寫成

$$S(z,w) = E(z,w) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j(E \circ K^{(j)})(z,w) + R_{k+1}(z,w), \quad z \in \Omega, \quad w \in \Omega,$$

其中餘項 $R_{kH}(z,w)$ 對每一固定 $w \in \partial\Omega$ 而言是 z 的 $C^\beta(\overline{\Omega})$ 函數且 $\beta = \beta(k) \to \infty$ 當 $k \to \infty$。而合成核 $E \circ K^{(j)}$ 定義爲

$$E \circ K^{(j)}(z,w) = \int_{u_1 \in \partial\Omega} \cdots \int_{u_j \in \partial\Omega} E(z,u_1)K(u_1,u_2)\cdots K(u_{j-1},u_j)K(u_j,w) \times d\sigma(u_1)\cdots d\sigma(u_j).$$

詳細的討論可參看 Kerzman 的文章 [15] 及 Kerzman-Stein 的原文 [16], 我們在此只作概略性的介紹!

參考文獻

1. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1979.
2. L. V. Ahlfors, *An extension of Schwarz's Lemma*, Tran. Amer. Math. Soc., 43(1938), 359-364.
3. L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, 1973.
4. J. B. Conway, *Function of One Complex Variable*, Springer-Verlay, 1986.
5. H. Grauert and H. Reckziegel, *Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen*, Math. Z., 89(1956), 108-125.
6. S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomerphic Mapings*, Marrel Dekker, 1970.
7. S. G. Krantz, *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*, MAA, 1990.
8. S. G. Krantz, *Theory of Several Complex Variables*, 2nd ed., John Wiley and Sons.
9. D. Minda and G. Schober, *Another elementary approach to the theorems of Landau, Montel, Picard and Schottky*, Complex Variables, 2(1983), 157-164.
10. R. M. Robinson, *A geveralization of Picard's and related theorems*, Duke Math. J., 5(1939), 118-132.
11. L. Zaleman, *A heuristic princeple in complex function theory*, Amer. Math. Soc. Monthly, 82(1975), 813-817.
12. G. Henkin, *Integral representation of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains*, Soviet Math. Dolk., 14(1973), 858-862.
13. E. Ramirez de Arellano, *Ein Divisions problem and Randintegralclasstellungen in der komplexeu analysis*, Math. Amm., 184(1970), 172-187.

14. C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomurphic mappings of strictly pseudo convex domains*, Inventiones Math., 26(1974), 1-66.
15. N. Kerzman, *Singular Integrals in complex analysis*, Proc. Symp. Pure Math., 35(1979), 3-41.
16. N. Kerzman and E. M. Stein, *The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappiè kernels*, Duke Math. J., 45(1978), 197-224.
17. F. Norguet, *Sur les domains d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes*, Bull. Soc. Math. France, 82 (1954), 137-159.
18. L. Boutet de Monvel, *Comportement d'un opérateur pseudo-differentiel sur une variété à bord*, I, II, J. Analyse Math. 17(1966), 241-304.
19. S. Gong and Y. Gong, Concise Complex Analysis, (Revised Version), World Scientific, 2007.

—本文作者龔昇(1930∼2011) 逝世前任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—