Contents

1 引言 **7**

1.1 主要参考书 8
1.2 为什么要学习数学物理方法? 8
1.3 数学物理的特点 8
1.4 该门课程的主要目标 9

2 一些数学基础 **11**

2.1 向量 12
2.2 R^3空间 13
2.2.1 两个实用的数学规则: 爱因斯坦求和与克罗内克符号 14
2.2.2 向量积与勒维-契维塔符号 15
2.3 三个场论记号 17
2.3.1 标量场的梯度 17
2.3.2 向量场的散度 18
2.3.3 向量场的旋度 18
2.4 曲线坐标系 19

3 复变函数 **23**

3.1 复数与复数运算 24
3.1.1 复数的基本概念 24
3.1.2 复数的运算 26
3.2 复变函数 29
3.2.1 复变函数的定义 29
3.2.2 区域的概念 29
3.2.3 一些复变函数的例子 30
3.2.4 复变函数的连续性 31

3.3 复变函数的导数 32
3.3.1 导数 32
3.3.2 柯西-黎曼条件 33
3.3.3 解析函数 34

4 复变函数的积分 37
4.1 复变函数的积分 38
4.2 柯西定理 40
4.3 不定积分 43
4.4 柯西公式 45

5 幂级数展开 49
5.1 复数项级数 50
5.2 幂级数 52
5.3 泰勒级数展开 54
5.4 解析延拓 56
5.5 洛朗级数展开 58
5.5.1 复变函数的零点 58
5.5.2 洛朗级数展开 58
5.6 孤立奇点的分类 62
5.6.1 可去奇点 62
5.6.2 极点 63
5.6.3 本性奇点 64

6 留数定理 65
6.1 留数定理 66
6.2 留数定理计算实变函数积分 71
6.2.1 类型一的积分 71
6.2.2 类型二的积分 72
6.2.3 类型三的积分 74
6.3 一些综合应用 78
6.3.1 统计物理中的松原频率求和 78
6.3.2 理论物理中的色散关系(Kramers-Kronig关系) 79

7 多值函数 83
7.1 多值函数 84
7.1.1 多值函数的支点 84

7.1.2 黎曼面 85
7.2 多值函数的奇点 87
7.3 留数定理求实函数积分 88
7.4 一个应用:对数函数的频率求和 90

8 积分变换与广义函数 93
8.1 傅里叶级数 94
8.1.1 周期函数的傅里叶展开 94
8.1.2 奇函数及偶函数的傅里叶展开 95
8.1.3 定义在有限区间上的函数的傅里叶展开 96
8.1.4 复数形式的傅里叶级数 96
8.2 傅里叶积分与变换 97
8.2.1 实数形式的傅里叶变换 97
8.2.2 复数形式的傅里叶积分 99
8.2.3 傅里叶变换的基本性质 100
8.2.4 多重傅里叶积分 102
8.3 拉普拉斯变换 104
8.3.1 拉普拉斯变换的定义 104
8.3.2 拉普拉斯变换的逆变换 104
8.3.3 用定义求几个典型函数的拉普拉斯变换像函数 104
8.3.4 拉普拉斯变换的基本性质 106
8.3.5 拉普拉斯变换的反演 106
8.3.6 拉普拉斯变换的应用 107
8.4 δ函数 109
8.4.1 δ函数的定义 109
8.4.2 δ函数的一些性质 109
8.4.3 δ函数是一种广义函数 110
8.4.4 δ函数的傅里叶变换 110
8.5 Γ函数 112
8.5.1 实变量的Γ函数 112
8.5.2 复变量的Γ函数 113
8.6 欧拉的B函数 117
8.7 黎曼ζ函数 118
8.7.1 黎曼猜想 119

9 数学物理定解问题 123
9.1 数学物理方程的导出 124
9.1.1 均匀弦的微小横振动 124
9.1.2 电磁波方程 126
9.1.3 扩散方程 127
9.1.4 热传导方程 129
9.1.5 稳定场方程 130
9.1.6 量子力学的Schödinger方程 131
9.2 定解条件 132
9.2.1 初始条件 132
9.3 边界条件 132
9.4 数学物理方程的分类 134
9.4.1 线性二阶偏微分方程 134
9.4.2 有两个自变量的方程分类 135
9.5 达朗贝尔公式 137
9.5.1 达朗贝尔公式 137

10 分离变量法 141
10.1 齐次方程的分离变量法 142
10.1.1 具有齐次边界条件的非齐次方程求解 144
10.1.2 具有非齐次边界条件的非齐次方程求解 146
10.2 分离变量法的其他例子 147
10.2.1 细杆导热问题 147
10.2.2 平面极坐标分离变量 148
10.2.3 稳定场 150

11 二阶常微分方程的级数解法 153
11.1 特殊函数的常微分方程 154
11.1.1 拉普拉斯方程$\Delta u = 0$ 154
11.1.2 波动方程 158
11.1.3 输运方程 158
11.1.4 亥姆霍茨方程 159
11.2 施图姆-刘维尔本征值问题 161
11.2.1 施图姆-刘维尔本征值问题 161
11.2.2 施图姆-刘维尔本征值问题的共性 162
11.2.3 复数的本征函数族 163

11.3 常点邻域上的级数解法 164
11.3.1 勒让德方程 164
11.4 正则奇点领域上的级数解法 168
11.4.1 正则奇点领域上的级数解 168
11.4.2 贝塞尔方程 169

12 球函数 173
12.1 轴对称球函数 174
12.1.1 勒让德多项式 174
12.1.2 应用举例 178
12.2 连带勒让德函数 182
12.3 一般球函数 185

13 柱函数 187
13.1 三类柱函数 188
13.1.1 三类柱函数 188
13.1.2 三类柱函数的渐进行为 189
13.1.3 柱函数的递推公式 193
13.2 贝塞尔函数与本征值问题 194
13.2.1 贝塞尔函数的正交关系 194
13.2.2 贝塞尔函数的模 194
13.2.3 傅里叶-贝塞尔级数 195
13.3 球贝塞尔方程 198
13.3.1 线性独立解 198
13.3.2 递推公式 198
13.3.3 初等函数表示 199
13.3.4 渐进行为 200
13.3.5 球形区域内的本征值问题 201

14 其他数学物理话题 203
14.1 积分方程简介 204
14.1.1 三类积分方程 204
14.1.2 积分方程的求解 205
14.1.3 迭代法求解实例 207
14.2 保角变换简介 208
14.2.1 准备 208

14.2.2 保角变换的基本性质 210
14.2.3 一些常见的保角变换 212
14.3 群论简介 216
14.3.1 群的基本性质 218
14.3.2 二维平面中的转动 220
14.3.3 $SO(3)$群与转动 222
14.3.4 Lie群与Lie代数 223
14.3.5 群的表示 224

Chapter 1

引言

主要参考书

1. 梁昆淼,刘法和缪国庆,数学物理方法(第四版),2010.
2. 杨孔庆,数学物理方法,2012.
3. 顾樵,数学物理方法,2012.
4. 吴崇试,高春媛,数学物理方法(第三版),2019.[1]
5. 王竹溪,郭敦仁,特殊函数概论,2010.
6. 姜颖,数学物理方法,2018,这本书有对应的课程视频.[2]
7. Mathematics for Physicist Introductory Concepts and Methods,2019.
8. McMahon,complex variables demystified,2008.
9. Krantz,differential equations demystified,2005.

为什么要学习数学物理方法?

- 理论物理研究的需要;
- 工程技术研究与实际应用的需要;
- 获得物理学学位的需要,[3]为后续课程,例如量子力学和电动力学做准备.[4]

数学物理的特点

数学物理是数学与物理学之间的一门交叉学科,与通常(实验驱动的)物理学研究不同,数学物理更倾向于研究物理学中基本方程的数学行为,或者是物理问题背后的数学结构,其侧重点是数学化的描述和阐述.比较典型的数学物理研究内容有量子与经典场论的数学结构,例如场的磁单极解,Chern-Simons 拓扑场理论,还有最为人所熟知的超弦理论.(图1.1)[5]当然,多体系统和统计物理模型的严格解等也是数学物理研究的重要内容.[6]

[1] *b*站搜索[北京大学公开课]数学物理方法就可以找到课程相关的视频

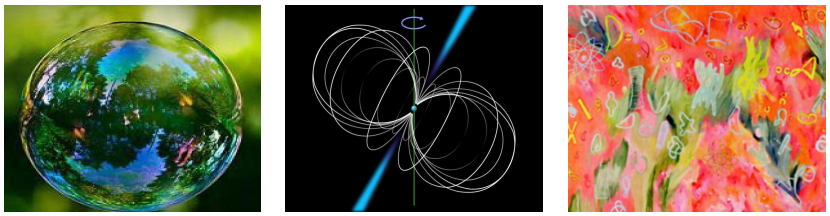
[2] 在*b*站搜索up主'上大老姜'即可

[3] 这个是最现实的需要

[4] 这里的准备主要是指分离变量法求解Schödinger方程和Maxwell方程.

[5] 量子引力,例如圈量子引力(loop quantum gravity)的研究通常也归类到数学物理的范畴

[6] 这一领域最具代表性的是EH Lieb,他的主要贡献在于很多统计物理和凝聚态模型的严格求解以及定理的证明(Lieb 定理,LSM 定理).



Chern-Simons理论 Dirac磁单极 超弦理论

Figure 1.1: 数学物理研究的典型内容:Chern-Simons拓扑场论，磁单极以及超弦理论。

一般而言,数学物理研究者很多都是半个数学家,不少人因为相关问题的研究而荣获数学方面的大奖.比如弦理论的教皇爱德华威腾(E.Witten)就获得了数学界最有名的菲尔茨奖.(数学界的诺贝尔奖)[7]

该门课程的主要目标

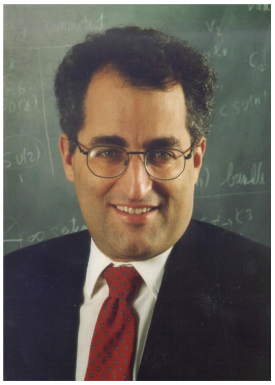
在这门课程的学习中,我们主要讨论复变函数理论和一些基本的数学物理方程的求解问题.

我们知道数学按照内容大体可以分为代数,拓扑与几何三块.我们这门课程主要讨论的复变函数论与数理方程(偏微分方程)属于代数学的范畴,至于拓扑与几何学的内容若有课时则会有简单的介绍.[8]当然,由于现代计算软件,例如Mathmatica 和Matlab 的普及和广泛使用,多数时候我们并不需要去手动积分复杂的函数或者求解复杂的偏微分,积分方程,但是掌握相关的,最基本的计算与求解方案还是必要的.

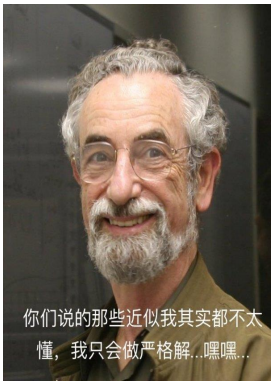
例如,简单复数的计算,复数的回路积分的意义以及简单函数留数的计算都是最基本的内容,需要掌握.傅里叶变换是必须掌握的一类积分变换,其广泛应用于理论物理和信号处理与通信领域.而在偏微分方程或者数学物理方程部分,主

[7]Witten在量子场论,拓扑场论以及弦论方面做出很多开创性贡献.

[8]从拓扑场论到弦论,从统计物理的二维涡旋到凝聚态物理中拓扑态的分类与表征,拓扑学的内容已经在现代物理学的研究中得到广泛应用.



E Witten



E H Lieb

Figure 1.2: 著名的数学物理学家:Witten与Lieb。

要是需要熟悉分离变量法求解的一般过程,以及对于几个特殊函数有一定的熟悉程度.

总体而言,这门课程是难度中等的课程,其主要涉及一些数学概念和公式以及少量的物理推理和建模.当然,课后习题会比较费时费力,尤其是数学物理方程部分,这反映了为物理问题建立模型并进行处理所需要付出的必要代价.

Chapter 2

一些数学基础

在开始复变函数理论的学习之前,作为准备,我们先介绍一些必要的数学基础.当然,由于这些内容绝大多数已在高等数学课程中学习过,我们这里只是快速的回忆这些内容.这里相对新的内容是几个数学规则,也就是所谓的爱因斯坦求,克罗内克符号以及勒维-契维塔符号.

向量

向量:空间中定义了大小和方向的量.[1]

- 较早书籍中也叫作矢量(vector);
- 物理学中很多量都用矢量描述,例如力$\vec{F}$,电场强度$\vec{E}$和磁感应强度$\vec{B}$;
- 更简单的量是标量,只有大小没有方向,例如质量m和电荷e;
- 更复杂的是张量,例如电磁场张量$F_{\mu\nu}$和广义相对论中的度规$g_{\mu\nu}$.[2]

根据定义,电磁场张量$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.这里$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \nabla)$是四维(明可夫斯基(Minkowski))空间的梯度,$x^\mu = (t, \vec{x})$是四维空间的坐标,其把空间坐标$\vec{x}$ 以及时间t 混合在了一起.[3]A_μ是四维空间中的矢量势,其由熟悉的标量电势ϕ以及矢量势$\vec{A}$构成$A_\mu = (\phi, -\vec{A})$.用$F_{\mu\nu}$可以很方便的表示Maxwell方程组,例如$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$. 度规$g_{\mu\nu}$由著名的Einstein的场方程决定:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}} \tag{2.1}$$

$R_{\mu\nu}, R$都依赖于$g_{\mu\nu}$以及它的导数.$T_{\mu\nu}$是能量-动量张量,其分量描述物质的能量和动量.注意到这里的场方程已经包括所谓的宇宙学常数项Λ,Λ通常代表真空的能量密度,[4]其可能与宇宙学中的暗能量密切相关.只要得到了度规$g_{\mu\nu}$, 那么时空中任意相邻两点x^μ 与$x^\mu + dx^\mu$的距离就是$ds^s = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. 在Einstein场方程的基础上,人们发展了现代宇宙学用以理解星体和宇宙的演化,这当中最有趣的发现就是黑洞(black hole),也就是连光也无法逃脱的具有巨大引力的系统.[5](图2.1)当然,关于广义相对论更详细的内容可以查询专门的教科书.[6]

现在让我们回到向量的讨论.通常,我们熟悉的向量一般定义在欧几里得空间,那么下面我们来看这个空间.

[1]更抽象的说,我们用一个量在坐标变换下的性质定义它是标量,矢量或者张量.
[2]可以构造更复杂的高阶张量,例如$T^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\ldots}$
[3]这里t实际上是ct,c代表真空中的光速,简单起见可以不明确写出c.
[4]简单来说,真空能就是无穷多个具有不同频率的量子力学谐振子基态能的总和.
[5]在量子意义上,黑洞具有温度并发射热辐射,这就是著名的霍金(Hawking)辐射.
[6]例如A.Zee(徐一鸿)的书《Einstein gravity in a nutshell》



黑洞:广义相对论预言并被实验证实的最极端物体

Figure 2.1: 黑洞是天空(宇宙)中最神秘莫测的天体,对其性质的研究激励了一代代理论物理学工作者.乐观者认为对黑洞微观性质的研究可能最终会引导我们找到正确的量子引力理论.中间这幅图描述的是人类首次拍摄到的黑洞照片.

R^3空间

R^3空间:三维欧几里得空间,即三维正交实向量空间,简称三维欧氏空间.简单而言,我们可以认为三维的平直时空就是一个典型的欧几里得空间,在这个空间中的几何学又被成为欧式几何学,与之相反,在非平直空间,也就是弯曲空间中的几何称为非欧几何.[7](图2.2)

- 原点和三个正交单位向量$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$构成三维欧氏空间
- 抽象的三维欧氏空间在实际计算时可引入笛卡尔坐标系,即我们最熟悉的三维直角坐标系

例如位置向量$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$,参数$x, y, z$是向量在三个轴上的投影,给定$x, y, z$就给定了向量$\vec{r}$.(图2.3)

R^3中向量的基本运算:

- 加法 $\vec{A} + \vec{B}$

[7]非欧几何一般指的是罗巴切夫斯基几何(双曲几何)和黎曼几何(椭圆几何.它们与欧氏几何最主要的区别在于公理体系中采用了不同的平行定理)

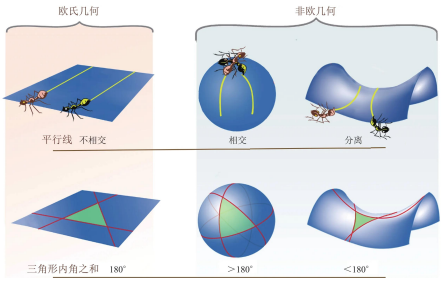


Figure 2.2: 欧氏几何与非欧几何的区别.

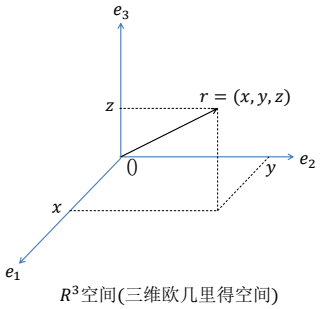


Figure 2.3: R^3空间,三维欧几里得空间.

- 数乘向量 $\alpha(\vec{A}+\vec{B})$
- 标量积 $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$,这里$\cos\theta$是矢量$\vec{A},\vec{B}$夹角$\theta$的余弦值
- 矢量积 $\vec{A}\times\vec{B}=|A||B|\sin\theta\vec{e}_\times$,这里$\sin\theta$是$\vec{A},\vec{B}$向量夹角$\theta$的正弦值而向量积的方向$\vec{e}_\times$由右手定则决定.

两个实用的数学规则: 爱因斯坦求和与克罗内克符号

向量$\vec{A}$在三维欧氏空间的完整表示为$\vec{A}=\sum_{i=1,2,3}A_i\vec{e}_i$,若采用爱因斯坦求和约定则简化为

$$\vec{A}=A_i\vec{e}_i \tag{2.2}$$

也就是把求和记号直接去掉.这样,对于两个向量标量积则有

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(\sum_i A_i\vec{e}_i\right)\cdot\left(\sum_j B_j\vec{e}_j\right)=(A_i\vec{e}_i)\cdot(B_j\vec{e}_j)=A_iB_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \tag{2.3}$$

既然单位向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$彼此正交,那么有

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=0 \tag{2.4}$$

而单位向量自身的标量积为1.这样,如果引入克罗内克符号δ_{ij},

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{2.5}$$

- 如果把δ_{ij}视为一个正方矩阵的矩阵元,那么相应的矩阵就是一个单位矩阵.

我们可以把单位向量的标量积简写成

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij} \tag{2.6}$$

因此,向量$\vec{A},\vec{B}$的标量积化为

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=A_iB_j\delta_{ij} \tag{2.7}$$

注意到上式已经使用Einstein求和规则进行表示,其实际形式是$\sum_i\sum_j A_iB_j\delta_{ij}$.由于只有$i=j$时$\delta_{ij}$才非零,那么我们可以消去一个求和,比如消去对$j$的求和,这样有

$$A_iB_j\delta_{ij}=\sum_i\sum_j A_iB_j\delta_{ij}=\sum_i A_iB_i=A_iB_i \tag{2.8}$$

上面的结果可以理解为,对于Einstein求和规则的情况$B_j\delta_{ij}$,我们有$B_j\delta_{ij}=B_i$.也就是说,当δ_{ij}与求和相结合时会挑选出$i=j$的项.因此,我们发现

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=A_i\overbrace{B_j\delta_{ij}}^{=B_i}=A_iB_i. \tag{2.9}$$

向量积与勒维-契维塔符号

现在,让我们考虑两个向量$\vec{A},\vec{B}$的向量积也就是所谓的叉乘,利用Einstein求和记号可得

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_i\vec{e}_i)\times(B_j\vec{e}_j)=A_iB_j\vec{e}_i\times\vec{e}_j \tag{2.10}$$

回忆向量积的定义$\vec{A}\times\vec{B}=|A||B|\sin\theta\vec{e}_{\times}$,这里$\sin\theta$是$\vec{A},\vec{B}$向量夹角$\theta$的正弦值而向量积的方向$\vec{e}_{\times}$由右手定则决定.注意到单位向量彼此正交,因此它们的夹角正弦值为$\sin\theta=1$,同时$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$恰好满足右手定则,因此它们的矢量积为

$$\begin{aligned}\vec{e}_1\times\vec{e}_2&=\vec{e}_3\\ \vec{e}_2\times\vec{e}_3&=\vec{e}_1\\ \vec{e}_3\times\vec{e}_1&=\vec{e}_2\\ \vec{e}_1\times\vec{e}_3&=-\vec{e}_2\\ \vec{e}_2\times\vec{e}_1&=-\vec{e}_3\\ \vec{e}_3\times\vec{e}_2&=-\vec{e}_1\end{aligned}\tag{2.11}$$

并且相同的单位向量的矢量积为零.($\sin\theta=\sin 0=0$)现在,让我们引进一个符号来简化这些向量积的结果.定义如下的勒维-契维塔(Levi-Civita)符号ε_{ijk}:

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{i=1,j=2,k=3;i=2,j=3,k=1;i=3,j=1,k=2;}\\ -1, & \text{i=1,j=3,k=2;i=2,j=1,k=3;i=3,j=2,k=1;}\\ 0, & \text{others.}\end{cases}\tag{2.12}$$

换句话说,如果三个指标i,j,k有任意两个相同,那么ε_{ijk}为零.而如果三个指标按照$1,2,3$的顺次排列则为1反之则是-1,这也可以看成交换相邻指标出现一个负号,即

$$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}.\tag{2.13}$$

这样,利用ε_{ijk}我们可以把任意两个单位向量的向量积写成如下形式:

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j=\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k\tag{2.14}$$

- 如果我们把ε_{ijk}当作张量来理解,那么一般称其为全反对称张量.[8]

  因此,$\vec{A},\vec{B}$向量的向量积的结果可以简写为

$$\vec{A}\times\vec{B}=A_iB_j\vec{e}_i\times\vec{e}_j=\varepsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k=\varepsilon_{ijk}A_jB_k\vec{e}_i\tag{2.15}$$

当然,我们也可以写出其具体形式,

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=(A_2B_3-A_3B_2)\vec{e}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\vec{e}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\vec{e}_3\\ &=\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.16}$$

[8]勒维-契维塔符号可以推广到任意大于1维的空间,例如二维空间就有ε_{ij},其中$\varepsilon_{12}=1,\varepsilon_{21}=-1,\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$.

这里我们把结果写成3 × 3矩阵的行列式的形式.

最后,对于向量的混合积,即$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$有

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} &= \varepsilon_{ijk}A_jB_k\vec{e}_i\cdot\vec{e}_mC_m\\ &= \varepsilon_{ijk}A_jB_k\delta_{im}C_m\\ &= \varepsilon_{ijk}A_jB_kC_i=\varepsilon_{ijk}C_iA_jB_k\end{aligned}\tag{2.17}$$

在结束这一节内容前,我们指出简单的数学规则或者记号也是一种生产力,就像用矢量表示的Maxwell方程组可以比分量形式更容易看出Lorentz不变性,拉格朗日形式的Maxwell理论也方便看出规范不变性和共形不变性.

三个场论记号

在物理学中,很多物理量在时空中是连续分布的,例如引力势$\phi(\vec{r})$,以及电场强度$\vec{E}(\vec{r})$.ϕ只有大小,没有方向,称为标量场,而$\vec{E}$既有大小也有方向,因此称为向量场.(图2.4)

- 场可以看作是一种特殊的机器,这个机器对其输入时空的位置就会输出在这个位置的一个或一组数;
- 场也可以看作是一个具有无穷多自由度的力学系统,这里的无穷多自由度源自空间由无穷多个点构成.

为了研究这些场在空间中的变化情况,需要引用所谓的哈密顿算子,(或者叫梯度算符)在三维欧氏空间中记为

$$\nabla=\vec{e}_i\partial_i=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\tag{2.18}$$

标量场的梯度

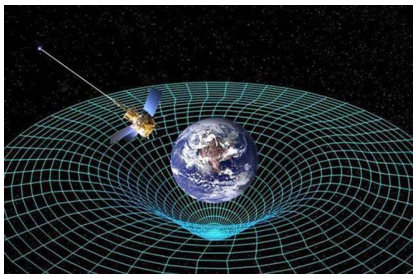
标量场梯度记为$\nabla\phi$,其在笛卡尔坐标系下的形式是

$$\nabla\phi=\vec{e}_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=\vec{e}_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\tag{2.19}$$

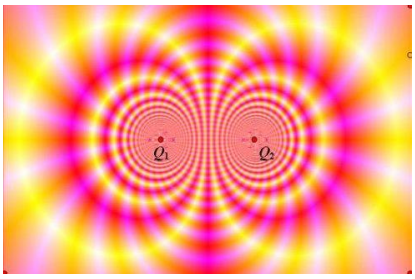
其物理意义是标量场沿空间方向的变化率.

- $\vec{r}$点的梯度$\nabla\phi(\vec{r})$的方向是该点导数最大值的方向.

例如电势$\phi(\vec{r})$的梯度直接与电场强度$\vec{E}(\vec{r})$相联系,即有$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\phi(\vec{r})$.电场强度的方向是电势变化最剧烈的方向.



地球附近的引力场



点电荷附近的电场

Figure 2.4: 地球附近的引力场与点电荷的电场.

向量场的散度

向量场梯度记为$\nabla \cdot \vec{A}$,其在笛卡尔坐标系下的形式是

$$\nabla \cdot \vec{A} = (\vec{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \vec{e}_j) = \partial_i A_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \partial_i A_j \delta_{ij} = \partial_i A_i = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.20)$$

其描述的是是否有产生向量场的源或者消灭它的汇.例如空间各点的电场散度为零,那么该空间中就没有电荷分布,及Maxwell方程组中的$\nabla \cdot \vec{E} = 0$.

向量场的旋度

向量场旋度记为$\nabla \times \vec{A}$,其在笛卡尔坐标系下的形式是

$$\nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\vec{e}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\vec{e}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\vec{e}_z \quad (2.21)$$

作为例子,让我们化简$\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$.首先有

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = (\varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j)(\nabla \times \vec{A})_k = (\varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j)(\varepsilon_{klm} \partial_l A_m) = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m$$

注意到三维空间中有[9]

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (2.22)$$

[9]这个结果可以代入具体的指标进行验证

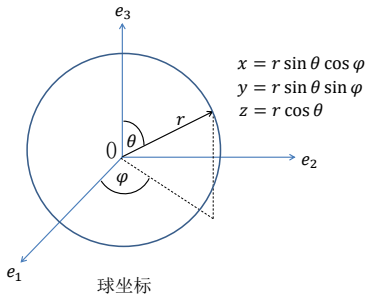


Figure 2.5: 三维欧几里得空间的球坐标.

这样

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) &= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{e}_i\partial_j\partial_l A_n \\ &= \vec{e}_i\partial_j\partial_i A_j-\vec{e}_i\partial_j\partial_j A_i \\ &= \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \end{aligned} \tag{2.23}$$

这个关系在推导电磁场的波动方程时会用到.在那里,如果我们考虑磁场$\vec{B}$,那么其在真空中满足波动方程$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{B}=0$.

- $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$又称为拉普拉斯算符,其广泛出现在各类物理系统的方程中.

拉普拉斯算符在三维直角坐标系中的具体形式是

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{2.24}$$

这样拉普拉斯算符作用于标量场ϕ便有

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\partial_j\partial_j\phi. \tag{2.25}$$

曲线坐标系

除了最常用的笛卡尔坐标系,物理学中常用的坐标系还有球坐标与柱坐标系,其中在研究二维问题时还会采用极坐标系.

直角坐标系与球坐标系具有如下换算关系:(图2.5)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \tag{2.26}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \tag{2.27}$$

$$z = r\cos\theta \tag{2.28}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2.29}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{2.30}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{z} \tag{2.31}$$

这里r,θ,φ是球坐标下坐标分量,分别代表球的半径(也表示矢量的大小),矢量与z轴的夹角以及矢量投影到xy平面后与x轴的夹角.

同时在球坐标系下,梯度算符表示为

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{2.32}$$

$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi$分别是(半)径向,角向的单位矢量且彼此正交归一.

则标量场ϕ的梯度是

$$\nabla\phi = \vec{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \tag{2.33}$$

向量场的散度和旋度分别是

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi r)\right] \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi}A_r\right]\vec{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\vec{e}_\varphi\end{aligned} \tag{2.35}$$

而直角坐标系与柱坐标系的换算关系是:(图2.6)

$$x = \rho\cos\varphi \tag{2.36}$$

$$y = \rho\sin\varphi \tag{2.37}$$

$$z = z \tag{2.38}$$

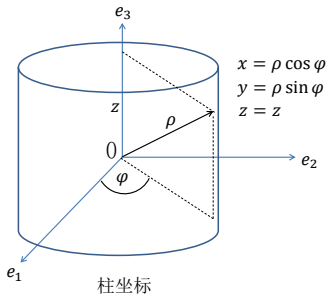


Figure 2.6: 三维欧几里得空间的柱坐标.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.39}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{z} \tag{2.40}$$

$$z = z \tag{2.41}$$

这里ρ, φ, z是柱坐标下的坐标分量,分别代表圆柱的半径,矢量投影到xy平面后与x轴的夹角以及在z轴的坐标.

标量场的梯度是

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z \tag{2.42}$$

$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$分别是径向,角向和$z$方向的单位矢量且正交归一.

向量场的梯度是

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(A_\rho\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial(A_z\rho)}{\partial z}\right] \tag{2.43}$$

向量场的旋度是

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi)\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_z \tag{2.44}$$

最后球坐标与柱坐标系中的拉普拉斯算符的表达式是

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right] \tag{2.45}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2\varphi}\right] \tag{2.46}$$

例 计算球坐标下$\ln u(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$的拉普拉斯,即$\nabla^2\ln u$.

首先,在球坐标表示下有$\ln u = \ln r^2 = 2\ln r$.由于$\ln r$不包含θ,φ,因此$\frac{\partial \ln u}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln u}{\partial \varphi}=0$,这样代入一般表达式$\nabla^2\phi$($\phi$换成$\ln u$)可得

$$\nabla^2\ln u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \ln u}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{2}{r}\right)=\frac{2}{r^2}. \tag{2.47}$$

Chapter 3

复变函数

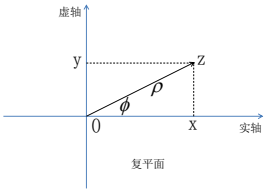


Figure 3.1: 复平面和复数的表示.

复数与复数运算

复数的基本概念

一个复数z可以表示为一个实数x和一个纯虚数iy的和,即:

$$\boxed{z = x + iy} \tag{3.1}$$

这称为复数的代数表示,x和y分别称为该复数的实部和虚部,都是实数,并记作$\mathrm{Re}z$和$\mathrm{Im}z$.i是虚数单位($i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$),

例1 $z = 1 + 2i$,那么$\mathrm{Re}z = 1, \mathrm{Im}z = 2$.

如果将x和y当作二维直角坐标系平面上点的坐标,那么复数z就和平面上的点一一对应.这个平面称为复数平面(简称复平面),两个坐标轴称为实轴和虚轴.

如果将x和y当作矢量在二维直角坐标系中的坐标分量,复数z可用复平面上的矢量来表示.

改用极坐标ρ和ϕ代替直角坐标x和y,即

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \end{aligned} \tag{3.2}$$

或者

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\phi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

这样,我们得到复数的三角函数表示

$$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{3.4}$$

或者指数表示

$$\boxed{z = \rho e^{i\phi}} \tag{3.5}$$

这里用到了复变函数论中极为重要的公式,即欧拉公式

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi} \tag{3.6}$$

欧拉公式的证明可采用泰勒展开,即[1]

$$e^{i\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\phi)^n \tag{3.7}$$

注意到$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$,那么上述求和可以拆分为偶数项和奇数项的求和,即

$$e^{i\phi} = \sum_{n=even}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\phi)^n + \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\phi)^n = \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + ...\right) + \left(i\phi - \frac{i\phi^3}{3!} + \frac{i\phi^5}{5!}\right) = \cos\phi + i\sin\phi \tag{3.8}$$

在指数表示中,ρ称为复数的模,记作$|z|$,ϕ称为复数的辐角(argument),记为Arg$z$.[2]注意到指数函数$e^{i\phi}$具有$2\pi i$的周期性,因此复数的辐角并不能唯一确定,通常约定在$[0, 2\pi)$范围内的辐角称为辐角的主值,记为arg$z$,这样

$$\phi = \mathrm{Arg}z = \mathrm{arg}z + 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z} \tag{3.9}$$

这里$k \in$ Z表示k可以取所有整数.

例2 $z = 2e^{i\frac{9\pi}{4}}$,那么$|z| = 2, \mathrm{arg}z = \frac{\pi}{4}$.

- 复数0的辐角没有明确意义;
- 模为无穷的复数,其辐角也没有明确意义.

复数z的共轭复数是$z^* = x - iy = \rho(\cos\phi - i\sin\phi) = \rho e^{-i\phi}$,(有时也写作$\bar{z}$)相当于把$z$对实轴作了镜像操作,此时$x$不变,$y \to -y$.

[1]客观的说,我们其实只会实数范围内的泰勒展开$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$,下面这个泰勒展开公式实际上假设我们可以把实数直接替换为复数,这种做法在复变函数理论中称为解析延拓.

[2]缩写Arg是辐角的英文单词argument的缩写

关于虚数

16世纪,意大利文艺复兴时期百科全书式的学者卡尔达诺发表的著作《大术》中第一次出现了平方为负数的数.他写下了$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$两个答案,且提出这两个答案的确满足问题的所有条件,但是他认为这只是技巧而已,意义不大.但卡尔达诺提出了一个重要的思想:只要承认虚数,那么一些原本没有答案的问题会找到答案.当然,虚数没有立刻被数学家所接受,比如笛卡尔认为不能用图形来表示负数的平方根,笛卡尔认为一切图形问题都可以转化为计算问题,负数的平方根不能用图形表示,故不能计算此类问题,将此数称为"虚构的数".19世纪西方传教士将此思想传到中国,我们便简称虚数.18世纪,瑞士大数学家欧拉开始研究虚数,并将-1平方根作为虚数的单位i(取imaginary首字母).欧拉揭示了虚数重要的性质,且得到了被称为数学最美的公式,即$e^{i\pi}+1=0$,这也被物理学家费曼称为"人类的法宝".[3]

复数的运算

复数作为一类数,其具有以下运算关系:

加法:复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的和是

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{3.10}$$

也就是两个复数相加所得的复数,其实部(虚部)等于两个复数实部(虚部)对应相加,在相加的过程中满足加法的交换律和结合律.

减法:复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的差是

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \tag{3.11}$$

两个复数相减所得的复数,其实部(虚部)等于两个复数实部(虚部)对应相减.

例3 $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}, w=3e^{i\pi}=-3$,那么$z+w=(\sqrt{2}-3)+i\sqrt{2}$.

乘法:复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的乘积是

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \tag{3.12}$$

这里满足乘法的交换律,结合律以及分配律.

- 有一类称为Grassman数的复数,其互相交换会多出额外的负号,$\eta_1\eta_2=-\eta_2\eta_1$,并且$\eta_1^2=0$.这类数通常用于费米子系统的(路径积分)场论描述.

[3]引自https://zhuanlan.zhihu.com/p/40342158

例4 $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}, w=-3+i$,那么$zw=-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$.

除法:复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的商是

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{3.13}$$

另一方面,在进行复数的乘法或者除法运算时,利用复数的指数表示更为简单

$$z_1z_2=\rho_1e^{i\phi_1}\rho_2e^{i\phi_2}=\rho_1\rho_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}, \tag{3.14}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1e^{i\phi_1}}{\rho_2e^{i\phi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)}. \tag{3.15}$$

此外,复数的幂次可以表示为

$$z^\alpha=(\rho e^{i\phi})^\alpha=\rho^\alpha e^{i\alpha\phi} \tag{3.16}$$

- 注意,在物理问题中幂次α可以不是整数,而是任意的实数.

对于$\alpha=\frac{1}{n}$,n为正整数的特殊情况,就是复数z的n次根式

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{in\phi}. \tag{3.17}$$

复数的扩展:四元数

作为复数概念最主要的扩展就是所谓的四元数.[4]四元数是数学家哈密顿在1843 年发现的,当时他正研究扩展复数到更高的维次(复数可视为平面上的点).他不能做到三维空间的例子,但四维则造出四元数.根据哈密顿记述,他于10月16日跟他的妻子在都柏林的皇家运河(Royal Canal)上散步时突然想到$i^2=j^2=k^2=-1$ 的方程解.之后哈密顿立刻将此方程刻在附近布鲁穆桥(Brougham Bridge,现称为金雀花桥Broom Bridge). 这个方程放弃了乘法的交换律,是当时一个极端的想法(那时还未发展出向量和矩阵).

不只如此,哈密顿还创造了向量的内外积.他亦把四元数描绘成一个有序的四重实数:一个纯量和向量的组合.若两个纯量部为零的四元数相乘,所得的纯量部便是原来的两个向量部的纯量积的负值,而向量部则为向量积的值,但它们的重要性仍有待发掘.哈密顿之后继续推广四元数,并出了几本书.最后一本《四元数的原理》(Elements of Quaternions)于他死后不久出版,长达八百多页.

一般而言,四元数有如下形式:

$$h=ai+bj+ck+d \tag{3.18}$$

[4]这一小节的内容主要参考了https://baike.baidu.com/item/四元数/5795379?fr=aladdin

这里a,b,c,d是实数,i,j,k满足如下关系:

$$i^2=j^2=k^2=-1,\quad ij=k,\quad ji=-k,\quad jk=i,\quad kj=-i,\quad ki=j,\quad ik=-j \tag{3.19}$$

上述关系表明i,j,k之间的乘法不满足乘法的交换律,而$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$就是四元数的模.

例 设有两个四元数$x=3+i,y=5i+j-2k$,计算$x+y$和xy.

考虑通常数的加法和乘法,那么有

$$x+y=3+i+5i+j-2k=3+6i+j-2k,$$

$$xy=(3+i)(5i+j-2k)=15i+3j-6k-5+k+2=15i+3j-6k-5+k+2j=15i+5j-5k-5.$$

我们也可以用矩阵表示四元数,例如$h=a+bi+cj+dk$可以用一个2×2矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} a-di & -b+ci \\ b+ci & a+di \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

这样四元数的加法和乘法就可以用矩阵的加法与乘法表示,同时四元数的模等于矩阵的行列式.

复变函数

复变函数的定义

若在复数平面上存在一个点集E(复数的集合),对于E的每个点,按照一定规律,有一个或者多个复数值w与之对应,则称w为复数z的函数,即复变函数.z称为w的宗量,定义域为E,记作

$$w = f(z), \quad z \in E. \tag{3.21}$$

- 更直观的来说,复变函数就是以复数为自变量且取值为复数的一类函数,它定义了从复数z到w的映射.

区域的概念

在我们研究的复变函数中,函数的定义域通常并不是任意的点集,而是满足一定条件的点集,称为区域,用B表示.

- 邻域:以复数z_0为圆心,任意小正实数ε为半径作一个圆,则圆内所有点的集合称为z_0的邻域;
- 内点:若z_0及其领域属于复变函数的定义域E,那么称z_0是E的内点;
- 外点:若z_0及其领域都不属于E,那么称z_0是E的外点;
- 若z_0及其领域内既有属于E又有不属于E的点,那么称z_0是E的边界点,边界点的全体称为边界线.

区域是指满足以下两个条件的点集:

1. 全由内点组成;
2. 具有连通性,即点集中任意两点都可以用一条折线连接起来,且折线上的点都属于该点集.

关于连通性,我们可以考虑一个简单的例子.例如复平面上的实轴在几何上是一条直线,直线上任意两个点都可以用折线连接起来,因此实轴是连通的.接下来,我们把原点去掉,这样实轴就被分为两个不连通的区域,即$x < 0$和$x > 0$的区域.进一步,我们可以讨论曲面的连通性.根据拓扑学的定义,如果一个曲面内任意闭合曲线都可以连续收缩为一个点,那么我们称这个曲面是单连通的.反之,如果曲面内有一些孔或者洞,那么包围这些孔或洞的闭合曲线就无法连续收缩为一个点了,此时我们称相应的曲面为多连通的.

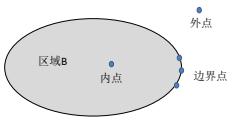


Figure 3.2: 复变函数的区域,内点,外点与边界点.

直观来看,区域就是复变函数宗量z在复数平面上的取值范围.区域B与其边界线所组成的点集称为闭区域,以$\bar{B}$表示.区域是各式各样的,例如不等式$|z-z_0|<r$表示以z_0为圆心,r为半径的圆形区域.$a<|z-z_0|<b$表示以z_0为环心,a,b为内外半径的环形区域.当把<换成≤时,不等式描述的便是相应的闭圆域和闭环域.

一些复变函数的例子

多项式函数

$$a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n,\quad n\in \mathrm{Z} \tag{3.22}$$

有理分式

$$\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+...+b_nz^m},\quad n,m\in \mathrm{Z} \tag{3.23}$$

根式

$$\sqrt[n]{z-a},\quad n\in \mathrm{Z} \tag{3.24}$$

这里所有系数$a_0,a_1,a_2,...,b_0,b_1,b_2,...,a$都是复常数.

指数函数

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{3.25}$$

三角函数

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) \tag{3.26}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \tag{3.27}$$

这两个函数是周期为2π的周期函数,$\sin(z+2\pi)=\sin z, \cos(z+2\pi)=\cos z$.

$$\sinh z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}) \tag{3.28}$$

$$\cosh z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}) \tag{3.29}$$

而$\sinh z, \cosh z$是以$2\pi i$为周期的周期函数.

对数函数

$$\boxed{\ln z=\ln(|z|e^{i\mathrm{Arg}z})=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z} \tag{3.30}$$

注意到辐角$\mathrm{Arg}z$可以任意添加2π的整数倍而不改变复数z,这说明对数函数$\ln z$实际上具有无穷多的取值.

- 我们把类似对数函数这样,一个自变量z对应不止一个函数值的函数称为多值函数.

在实数范围内,负数的对数没有意义的,但是在复数的情况下,我们可以发现如果z是负数,那么有

例5 $\ln z=\ln(-|z|)=\ln(|z|e^{i(2n+1)\pi})=\ln|z|+i(2n+1)\pi(n\in Z)$

- 可以明显地看到负数的对数函数是一个多值函数,其多值性来源于复数辐角的不确定性.

复变函数的连续性

对于复变函数$f(z)$,由于它本省就是复数(的集合),因此自然可以分解为实部$\mu(x,y)$与虚部$\nu(x,y)$,即

$$f(z)=\mu(x,y)+i\nu(x,y) \tag{3.31}$$

因此复变函数可以看作是一对二元实变函数(含有两个实数自变量的函数),这样实变函数的性质都可以移植到复变函数中.例如,复变函数在$z_0=x_0+iy_0$处连续的定义是

$$z\to z_0,\quad f(z)\to f(z_0) \tag{3.32}$$

这可以归结为二元实变函数$\mu(x,y),\nu(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续,即

$$x\to x_0, y\to y_0\quad \mu(x,y)\to\mu(x_0,y_0), \nu(x,y)\to\nu(x_0,y_0) \tag{3.33}$$

复变函数的导数

对于物理理论的学习和研究来说,数学中最有用的部分自然是微积分.我们通过高等数学(对有些人而言则是数学分析)课程的学习已经熟悉了实变函数的微积分理论,那么对于现在讨论的复变函数,我们也希望研究它的微积分,这对我们的实际应用是重要的.

导数

设复变函数$w = f(z)$是区域B上的单值函数,即对于给定的z有且只有一个w与之对应.若在B上的某点z,以下极限存在,且与$\Delta z \to 0$的方式无关,则称函数$w = f(z)$在z点可导,该极限称为函数在该点的导数,记作$f'(z)$或$\frac{df}{dz}$:

$$\boxed{\frac{df}{dz} \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}} \tag{3.34}$$

这里$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,注意到复变函数导数定义在形式上与实变函数导数定义相同,($f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$)因此实变函数中关于导数的规则和公式可应用于复变函数,例如:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}(w_1 \pm w_2) = \frac{dw_1}{dz} \pm \frac{dw_2}{dz} \\
&\frac{d}{dz}(w_1 w_2) = \frac{dw_1}{dz} w_2 + w_1 \frac{dw_2}{dz} \\
&\frac{d}{dz}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \frac{w_1' w_2 - w_1 w_2'}{w_2^2} \\
&\frac{d}{dz} F(w) = \frac{dF}{dw}\frac{dw}{dz} \\
&\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \\
&\frac{d}{dz} e^z = e^z \\
&\frac{d}{dz} \sin z = \cos z \\
&\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z \\
&\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

这里w_1, w_2, w是复变函数,$F(w)$是复合函数.虽然复变函数和实变函数的导数在形式上一样,但是实质不同.实变函数中Δx只能从实轴逼近零,($f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$)而在复变函数中,复变量$\Delta z$可以沿任意曲线逼近零,因此复变函数可导要比实变函数要求严格得多.

例6 $\frac{d}{dz}\ln\sin z=\frac{1}{\sin z}\cos z=\frac{1}{\tan z}$, $\frac{d}{dz}e^{-z^2}=e^{-z^2}(-2z)$.

柯西-黎曼条件

复变函数可导,那么其有何独特性质呢？这就是本节讨论的柯西-黎曼条件.

对于复变函数$f(z)=\mu(x,y)+i\nu(x,y)$,如果其在z处可导,那么函数的实部和虚部在z处满足以下方程,

$$\boxed{\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\nu(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial\nu(x,y)}{\partial x}} \tag{3.36}$$

- 这两个方程称为柯西-黎曼方程或者柯西-黎曼条件,这是我们学习复变函数理论所必须了解的内容之一.

柯西-黎曼条件的证明可以通过考察Δz沿实轴和虚轴分别趋于零得到.当Δz沿实轴趋于零时,我们有$\Delta y=0,\Delta x\to 0(\Delta z=\Delta x+i\Delta y=\Delta x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu(x+\Delta x,y)+i\nu(x+\Delta x,y)-\mu(x,y)-i\nu(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial\nu(x,y)}{\partial x} \tag{3.37}$$

同理可得,当Δz沿虚轴趋于零时,我们有$\Delta x=0,\Delta y\to 0(\Delta z=\Delta x+i\Delta y=i\Delta y)$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\mu(x,y+\Delta y)+i\nu(x,y+\Delta y)-\mu(x,y)-i\nu(x,y)}{i\Delta y}=-i\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial\nu(x,y)}{\partial y} \tag{3.38}$$

由于$f(z)$在z处可导,因此从任意方向趋近于z的极限都相等,因此Δz沿实轴和虚轴趋于零的极限必定相等,于是有

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial\nu(x,y)}{\partial x}=-i\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial\nu(x,y)}{\partial y} \tag{3.39}$$

方程左右两边实部与虚部对应相等就得到了柯西-黎曼条件.

- 柯西-黎曼条件是复变函数可导的必要条件,也就是说一个函数在某点可导,则在该点满足柯西-黎曼条件.但是在某一点满足柯西-黎曼条件并不意味着函数在该点可导,因为从其他方向趋近该点的极限可能并不存在,这导致函数并不可导.

- 可以证明,函数$f(z)$可导的充分必要条件是:函数$f(z)$的偏导数$\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial\nu}{\partial x}$, $\frac{\partial\nu}{\partial y}$存在且连续,并且满足柯西-黎曼条件.

下面简单证明这个充分必要条件.由于偏导数存在,可以把μ和ν的增量写作

$$\begin{aligned}\Delta\mu&=\frac{\partial\mu}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\mu}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\\ \Delta\nu&=\frac{\partial\nu}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\nu}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y\end{aligned} \tag{3.40}$$

这里$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$随$\Delta z\to 0$而趋于零.于是有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\mu+i\Delta\nu}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}\Delta x++\frac{\partial\mu}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+i\frac{\partial\nu}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial\nu}{\partial y}\Delta y+i\varepsilon_3\Delta x+i\varepsilon_4\Delta y}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\mu}{\partial y}\Delta y+i(\frac{\partial\nu}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\nu}{\partial y}\Delta y)}{\Delta z}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\end{aligned}\tag{3.41}$$

这里利用了$|\Delta x/\Delta z|\le 1,|\Delta y/\Delta z|\le 1$,这样$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$在$\Delta z\to 0$时等于零就可以把这一项消去.再利用柯西-黎曼条件可得

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+\frac{\partial\nu}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}+i\frac{\partial\nu}{\partial x}\tag{3.42}$$

显然这一极限是与$\Delta z\to 0$方式无关的有限值,因此函数可导.

例7 对于处处连续的函数$f(z)=\mathrm{Re}z=x,\frac{\partial\mu}{\partial x}=1,\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\nu}{\partial x}=\frac{\partial\nu}{\partial y}=0$,显然在任何点都不满足柯西-黎曼条件,这说明$f(z)$在复平面上处处不可导.

例 利用$z=\rho e^{i\varphi}$可以写出极坐标系中的柯西-黎曼条件$\frac{\partial\mu}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\varphi},\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\nu}{\partial\rho}$.这可以通过$\Delta z=e^{i\varphi}\Delta\rho+i\rho e^{i\varphi}\Delta\varphi$中分别考虑$\Delta\rho\to 0$和$\Delta\varphi\to 0$的导数相等来得到.当然,也可以利用极坐标和直角坐标的关系来得到.

解析函数

- 若函数$f(z)$在点z_0及其领域上处处可导,则称$f(z)$在z_0点解析.

可以看到,函数在某点解析与可导的差别在于前者要求点附近的区域内的点也是可导的,即强调范围性.

- 若函数$f(z)$在区域B上每一点都解析,则称$f(z)$是区域B上的解析函数,或者叫做全纯函数.

换句话说,对于一个解析函数,其定义域内的任意一点都是可导的,每一点都满足柯西-黎曼条件.

下面我们用一个例子来体会一个点可导与解析的差异.

例 对于处处连续的函数$f(z)=|z|^2$,判断其解析性.

所谓判断$f(z)$解析性指的是判断其在那些点可导或不可导.一般而言我们需要借助导数的定义进行判断,对于这里的例子,根据定义导数的定义有

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(z^*+\Delta z^*)-|z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(|z|^2+z^*\Delta z+z\Delta z^*+|\Delta z|^2)-|z|^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\left(z^*+\frac{z\Delta z^*}{\Delta z}+\Delta z^*\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\left(z^*+\frac{z\Delta z^*}{\Delta z}\right)=z^*+z\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z^*}{\Delta z} \end{aligned} \tag{3.43}$$

设$z=\rho e^{i\phi}$,那么有$\Delta z=e^{i\phi}\Delta\rho+i\rho e^{i\phi}\Delta\phi$,这样上式中$\Delta z^*/\Delta z$可以写成,

$$\frac{\Delta z^*}{\Delta z}=\frac{e^{-i\phi}\Delta\rho-i\rho e^{-i\phi}\Delta\phi}{e^{i\phi}\Delta\rho+i\rho e^{i\phi}\Delta\phi}=e^{-2i\phi}\frac{\Delta\rho-i\rho\Delta\phi}{\Delta\rho+i\rho\Delta\phi} \tag{3.44}$$

若$z\neq 0$,那么上式中先令$\Delta\rho\to 0$可得$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta z^*}{\Delta z}=-e^{-i2\phi}$.另一方面,若令$\Delta\phi\to 0$可得$\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\Delta z^*}{\Delta z}=e^{-i2\phi}$.显然,这两个极限并不相等,这说明$z\neq 0$时$f(z)=|z|^2$的导数不存在.

对于$z=0$,导数是

$$f'(z)=z^*+z\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z^*}{\Delta z}=z^* \tag{3.45}$$

这样$z=0$的导数存在不依赖于Δz趋于零的方式,因此在该点导数存在.综上所述,$f(z)=|z|^2$仅在$z=0$可导而其他点都不可导,因此根据解析性的定义,$z=0$也不解析.

此外,解析函数还有一些良好的性质:

1. 若$f(z)=\mu+i\nu$在B上解析,那么$\mu(x,y)=C_1,\nu(x,y)=C_2$($C_1,C_2$为常数)是$B$上的两组正交曲线族;
2. 若$f(z)=\mu+i\nu$在B上解析,那么μ,ν为B上的调和函数.

对于第一个性质,我们可以利用柯西-黎曼条件$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\nu}{\partial y}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{\partial\nu}{\partial x}$,具体而言就是把这两个方程左右两边对应相乘,则有

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{\partial\nu}{\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial x} \tag{3.46}$$

即有

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y}=0. \tag{3.47}$$

另一方面,$\nabla\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\mu}{\partial y}\vec{e}_y$, $\nabla\nu=\frac{\partial\nu}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\nu}{\partial y}\vec{e}_y$,这样两者相乘有

$$\nabla\mu\cdot\nabla\nu=\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y}=0. \tag{3.48}$$

这说明$\nabla\mu$和$\nabla\nu$所代表的矢量是正交的,当然考虑到$\nabla\mu$和$\nabla\nu$分别是曲线族$\mu=$常数和$\nu=$常数的法向矢量,这自然表明μ,ν为常数的曲线族是正交的.

对于第二个性质,由于解析函数实际上可以求任意次导数,这说明$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2},\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2},\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2},\frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2\nu}{\partial y^2}$存在且连续.对柯西-黎曼条件$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\nu}{\partial y},\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{\partial\nu}{\partial x}$中的两个方程分别对$x,y$求导,则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}&=-\frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

把上述两个式子相加可得

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=0\tag{3.50}$$

同理有$\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial y^2}=0$.这两个结果说明$\mu,\nu$都满足二维拉普拉斯方程$\nabla^2\phi=0$,也就是说它们是调和函数.

例 若函数$f(z)$是区域B上的解析函数,且$f(z)$为实函数($f^*(z)=f(z)$),则$f(z)$为常数.

由$f(z)=\mu(x,y)+i\nu(x,y)$以及$f^*(z)=f(z)$可得

$$\mu(x,y)+i\nu(x,y)=\mu(x,y)-i\nu(x,y)\Rightarrow\nu(x,y)=0,\tag{3.51}$$

这样有$f(z)=u(x,y)$.由于$f(z)$为解析函数,其必然满足柯西-黎曼条件$\partial\mu/\partial x=\partial\nu/\partial y,\partial\mu/\partial y=-\partial\nu/\partial x$,这样有

$$\partial\mu/\partial x=0,\quad \partial\mu/\partial y=0\Rightarrow du=\frac{\partial\mu}{\partial x}dx+\frac{\partial\mu}{\partial y}dy=0.\tag{3.52}$$

这说明$f(z)=\mu(x,y)$为常数.

例 若函数$f(z)$是区域B上的解析函数,则$\frac{\partial f(z)}{z^*}=0$.

由$z=x+iy$和$z^*=x-iy$可得$x=\frac{z+z^*}{2},y=\frac{z-z^*}{2i}$.这样就有

$$\frac{\partial f}{\partial z^*}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}=\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}+i\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}+i\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)\frac{-1}{2}\tag{3.53}$$

利用柯西-黎曼条件可得上式为零,即$\frac{\partial f}{\partial z^*}=0$.这说明解析函数$f(z)$不依赖于$z^*$,同样,若$f(z^*)$关于$z^*$解析,那么$f(z^*)$也不依赖于$z^*$,此时我们称$f(z^*)$为反全纯函数.

Chapter 4

复变函数的积分

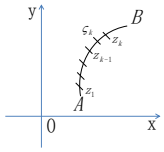


Figure 4.1: 复变函数的路积分.

复变函数的积分

在上一章,我们讨论了复变函数的导数以及解析函数的基本性质,在这一部分,我们将讨论复变函数的积分.

设在复平面的某分段光滑曲线l上定义了连续函数$f(z)$,在l上取一系列分点z_0(起点),$z_1, z_2, ..., z_n$(终点),将l分成n小段.在每一小段$[z_{k-1}, z_k]$上取一点ζ_k,作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{4.1}$$

当$n \to \infty$并且每一Δz_k都趋于零时,如果这个和的极限存在,而且其值与各个ζ_k的选取无关,则这个和的极限称为函数$f(z)$沿曲线l从A到B的路积分,记作$\int_l f(z)dz$,即

$$\int_l f(z)dz = \lim_{\max(|\Delta z_k|)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{4.2}$$

我们知道$z = x + iy, f(z) = \mu(x, y) + i\nu(x, y)$,那么有

$$\int_l f(z)dz = \int_l [\mu(x, y)dx - \nu(x, y)dy] + i\int_l [\nu(x, y)dx + \mu(x, y)dy] \tag{4.3}$$

这样复变函数的路积分可以归结为两个实变函数的线积分,它们分别是路积分的实部和虚部,因此实变函数线积分的许多性质也对路积分成立,例如:

1. 常数因子可以移到积分号之外;
2. 函数和的积分等于各个函数积分的和;
3. 反转积分路径,积分变号;

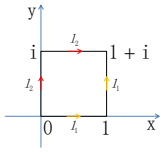


Figure 4.2: 不同积分路径对积分的影响.

4. 全路径上的积分等于各段积分之和;

5. $|\int_l f(z)dz| \leq \int_l |f(z)||dz|$;

6. $|\int_l f(z)dz| \leq ML$,其中M是$|f(z)|$在l上的最大值,L是l的全长.

例 在如图4.2 所示的不同路径下,积分$I_1 = \int_{l_1} \mathrm{Re}xdz = \int_0^1 xdx + i\int_0^1 dy = \frac{1}{2} + i,\ I_2 = \int_{l_2} \mathrm{Re}xdz = i\int_0^1 0dy + \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

以上例子说明两个积分,虽然被积函数相同,起点终点相同,但是由于积分路径不同,其结果并不相同.

- 一般而言,复变函数的积分值不仅依赖于积分的起点终点,也依赖于积分路径.

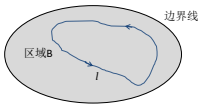


Figure 4.3: 单连通区域上的回路积分,即柯西定理.

柯西定理

在上一节的讨论中,我们知道,复变函数的积分值不仅依赖于积分的起点终点,也依赖于积分路径.那么在什么情况下积分不依赖于起始点与路径？可以想象如果积分的起始点相同,那么起始点依赖问题可以解决,那么路径依赖又如何解决？这就是本节需要回答的问题,即柯西定理所讨论的.

首先我们介绍单连通区域的概念.所谓的单连通区域指的是在其中作任何简单的闭合围线,围线内的点都属于该区域.简单来说,单连通区域就是没有洞的闭合图形.对于这样的单连通区域,有所谓的柯西定理:若函数$f(z)$在闭单连通区域$\bar{B}$上解析,则沿$\bar{B}$上任何一分段光滑曲线l有

$$\boxed{\oint_l f(z)dz = 0} \tag{4.4}$$

下面给出简单的证明.首先,注意到$dz = dx + idy$,$f(z) = \mu(x,y) + i\nu(x,y)$,那么有

$$\oint_l f(z)dz = \oint_l [\mu(x,y)dx - \nu(x,y)dy] + i\oint_l [\nu(x,y)dx + \mu(x,y)dy]. \tag{4.5}$$

由于函数在区域内解析,因此相应的导数$\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial\nu}{\partial x}$, $\frac{\partial\nu}{\partial y}$都连续.接下来利用Green公式

$$\oint_l Pdx + Qdy = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{4.6}$$

可以把线积分转换为面积分,对复变函数实部μ和虚部ν分别利用该公式可得

$$\oint_l f(z)dz = -\int\int_S \left[\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial\nu(x,y)}{\partial x}\right] dxdy + i\int\int_S \left[-\frac{\partial\nu(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}\right] dxdy \tag{4.7}$$

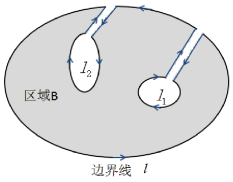


Figure 4.4: 复连通区域上的广义柯西定理,即把所有的奇点挖去,剩下部分都是解析的.

由于在区域内解析,因此必然满足柯西-黎曼条件,那么上式面积分中被积函数为零,因此有$\oint_l f(z)dz = 0$.

如果所研究的函数在区域上并非处处解析,而是存在一些点或者子区域不可导(或者不连续,没有定义),这些点称为奇点.为了将这些奇点排除在外,需要作一些适当的闭合曲线将这些奇点分离出去,也就是将奇点挖掉形成带孔或者洞的区域,这就是复连通区域(多连通区域).对于复连通区域,柯西定理推广为

$$\oint_l f(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} f(z)dz = 0 \tag{4.8}$$

l是区域的外边界线,l_i是区域的内边界线,积分都是沿边界线的正方向.通常,可以规定当观察者沿着这个方向前进时,区域总在观察者的左侧,那么就定义该方向为正方向.

如图4.4所示,存在若干个奇点,则我们可以添加上一些辅助路径,把这些奇点恰好挖去,剩下部分都是解析的.这样剩下部分就可以利用单连通区域的柯西定理来说明相应的积分等于零.注意这里添加的辅助路径贡献是互相抵消的,因为它们彼此无限接近.

- 最后,通过柯西定理可知,对于闭单连通或多连通区域上的解析函数,只要积分的起点和终点相同,那么函数的积分值必定相同,与积分路径无关.(必须是光滑的路径以避开奇异点)

这个推论可以简单理解如下.在闭连通区域内考虑解析函数$f(z)$,其积分起点和终点是z_1, z_2,那么连接起终点的任意光滑路径l_1, l_2对应的积分是

$$I_1 = \int_{l_1} f(z)dz, \quad I_2 = \int_{l_2} f(z)dz \tag{4.9}$$

显然,路径l_1与路径$-l_2$恰好构成一个封闭回路,那么由柯西定理可知

$$I=\int_{l_1}f(z)dz+\int_{-l_2}f(z)dz=0\Rightarrow I_1=I_2,\qquad I_2=\int_{l_2}f(z)dz=-\int_{-l_2}f(z)dz \tag{4.10}$$

由于所考虑的函数,积分起终点以及积分路径都是任意的,因此以上讨论对一般情况也是成立的.

例 判断以下函数积分是否和积分路径有关:$I_1=\int_l \mathrm{Re}z dz$, $I_2=\int_l \frac{1}{z-\alpha}dz$.

对于I_1,$f(z)=\mathrm{Re}z$并不是解析函数,因此积分与路径相关.I_2中$f(x)=\frac{1}{z-\alpha}$如果不同路径构成的积分回路包含奇点$z=\alpha$,那么积分与路径相关,因为此时挖去奇点引入的额外路径有有限贡献,这使得不同路径积分值不再相同.当然如果积分回路并不包含奇点,那么相应的积分值与路径无关.

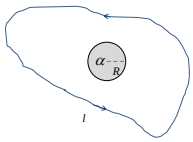


Figure 4.5: 回路积分的重要例子$I = \oint_l (z-\alpha)^n dz$.

不定积分

根据柯西定理,若函数$f(z)$在单连通区域B上解析,则沿B上任一路径l的积分$\int_l f(z)dz$的值只与起点和终点有关,而与路径无关.因此,当起点z_0固定时,这个不定积分就定义了一个单值函数,记作

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{4.11}$$

可以证明,$F(z)$在B上是解析的,且$F'(z) = f(z)$,即$F(z)$是$f(z)$的一个原函数.

现在,我们计算一个重要的积分

$$I = \oint_l (z-\alpha)^n dz, \quad n \in \mathcal{Z} \tag{4.12}$$

显然,如果回路l不包围α,被积函数$(z-\alpha)^n$是解析的,根据柯西定理该积分为零.当回路包围l时,如果$n \geq 0$,则被积函数在全平面解析,积分也是零.因此,剩下的情况是回路包围l并且$n < 0$,此时,我们可以令回路l为以α为中心,半径为R的圆周,这样有

$$z - \alpha = Re^{i\varphi}, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (Re^{i\varphi})^n Rde^{i\varphi} = R^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)} d\varphi \\ &= \begin{cases} R^{n+1} i \frac{e^{i\varphi(n+1)}|_0^{2\pi}}{i(n+1)} = 0, & n \neq -1; \\ i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.14}$$

总结来说

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l (z-\alpha)^n dz = 0, \quad n \neq -1, \tag{4.15}$$

而

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{1}{z-\alpha} dz = \begin{cases} 1, & \alpha \in l; \\ 0, & \alpha \notin l. \end{cases} \tag{4.16}$$

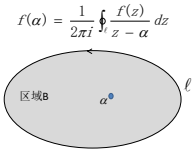


Figure 4.6: 柯西公式把解析函数区域中的函数值与相应边界上的回路积分联系在一起。

柯西公式

若$f(z)$在闭单连通区域$\bar{B}$上解析,l为$\bar{B}$的边界线,α是$\bar{B}$内任意点,则有柯西公式

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \tag{4.17}$$

下面给出简单的证明.首先,我们有

$$f(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{2\pi i}\oint_l \frac{1}{z-\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}dz \tag{4.18}$$

为了得到柯西公式,我们只需要证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = 0 \tag{4.19}$$

一般而言,$z=\alpha$是被积函数的奇点,因此以α为圆心,ε为半径作小圆C,($z=\alpha+\varepsilon e^{i\varphi}$)于是在$l$以及$C$所围的复连通区域上被积函数$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}$单值解析,按这样照柯西定理可以把$l$回路的积分转变为关于$C$回路的积分,即

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz. \tag{4.20}$$

对以上方程右边估计有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_C \left|\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\right||dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\max|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon}\oint_C |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\max|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\varepsilon d\varphi \\ &= \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi}\frac{\max|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

其中分子上的$2\pi\varepsilon$来自于小圆的周长.当$\varepsilon\to 0$时,由于$f(z)$的连续性,必然有$f(z)\to f(\alpha)$,因此

$$\max|f(z)-f(\alpha)|\to 0 \tag{4.22}$$

这样,当$\varepsilon\to 0$时,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi}\frac{\max|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon} = 0 \tag{4.23}$$

也就是说,我们证明了

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = 0, \tag{4.24}$$

因此,柯西公式得到了证明.

柯西公式将解析函数在任何一内点α的值$f(\alpha)$用沿边界线l的回路积分表示出来,这是因为解析函数在各点的值通过柯西黎曼条件互相联系.因为α是任意的,所以通常将α改记作z,积分变量改用ζ,于是柯西公式改写为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz. \tag{4.25}$$

- 若$f(z)$在l所围区域上存在奇点,可以考虑挖去奇点后的复连通区域,在复连通区域上$f(z)$解析,柯西公式成立.此时只需要将l理解为所有的边界线,并且其方向都取正方向.

柯西公式的另一个重要推论是解析函数可以求任意次导数.通过柯西公式,我们知道区域内任意一点的函数值都由相应的积分表示,因此对函数自变量z的求导,实际上转化为对$\frac{1}{\zeta-z}$的求导,显然对其求导可以无限求下去,也就是说解析函数可以求任意次导数,

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{4.26}$$

例 利用解析函数导数的积分形式,证明刘维尔定理,即若$f(z)$在全平面上解析,且有界$|f(z)|\leq N$,则$f(z)$ 必为常数.

首先函数解析,其一阶导数的积分形式是

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}dz. \tag{4.27}$$

然后,选取积分回路为以z为中心的半径为R的圆周,($\zeta=z+Re^{i\varphi}$)那么有

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} iRe^{i\varphi}d\varphi\frac{f(z+Re^{i\varphi})}{R^2e^{2i\varphi}}=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\varphi}f(z+Re^{-i\varphi}) \\ &\Rightarrow \quad |f'(z)|\le\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\varphi|e^{-i\varphi}||f(z+Re^{-i\varphi})|=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\varphi|f(z+Re^{-i\varphi})| \\ &\le \quad \frac{1}{2\pi R}\max|f(z+Re^{-i\varphi})|\int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \quad \frac{1}{2\pi R}N2\pi=\frac{N}{R} \end{aligned} \tag{4.28}$$

由于R是任意取的,我们可以令其趋于无穷大,则$|f'(z)|\to 0$,这样$f(z)$只能是常数.

Chapter 5

幂级数展开

复数项级数

我们在高等数学中已经了解了实变函数可以用无穷级数来表示,例如函数$f(x)$可以写成

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k \tag{5.1}$$

这里级数的每一项$a_k(x-x_0)^k$都是简单的多项式,这对于实际计算是很方便的.既然复变函数可以看成实变函数的推广,那么我们期待复变函数也应该有类似的级数展开形式,这就是本章所要讨论的主题.

让我们考虑无穷多复数组成的无穷级数,

$$\sum_{k=0}^{\infty}w_k=w_0+w_1+w_2+...+w_k+... \tag{5.2}$$

既然它的每一项都可以分为实部和虚部,

$$w_k=\mu_k+i\nu_k \tag{5.3}$$

那么前$n+1$项和可以写为

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}w_k=\sum_{k=0}^{n}\mu_k+i\sum_{k=0}^{n}\nu_k \tag{5.4}$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\mu_k+i\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\nu_k \tag{5.5}$$

这样复数项无穷级数的收敛性问题就归结为两个实数项级数的收敛性问题.于是,实数项级数的许多性质和规律可用于复数项级数.

对于无穷级数而言最重要的是这个级数是否收敛,只有收敛的级数表示才是真正有用的,那么我们如何判断级数的收敛性呢？这就需要用到所谓的柯西收敛判据.

柯西收敛判据

柯西收敛判据(级数收敛的充要条件)指的是,对于任意给定的小正数ε,必存在N,使得$n>N$时,

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon \tag{5.6}$$

式中p为任意正整数.设$p=1$,并考虑$n\to\infty$的极限就得到$\lim_{n\to\infty}|w_{n+1}|<\varepsilon$,换句话说,只有级数的高阶项的模很快趋于零才能使级数收敛,这在直觉上也是合

理的结果.若级数各项的模组成的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}|w_k|=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\mu_k^2+\nu_k^2} \tag{5.7}$$

收敛,则级数绝对收敛,绝对收敛的级数必是收敛的.对于绝对收敛的级数,有如下的性质:

- 绝对收敛的级数各项先后次序可以任意改变,其和不变;
- 考虑两个绝对收敛的级数,$A=\sum_{k=0}^{\infty}p_k, B=\sum_{k=0}^{\infty}q_k$.然后将它们逐项相乘,得到的级数也是绝对收敛的,而且它的和就是AB,即$\sum_{k=0}^{\infty}p_k\sum_{l=0}^{\infty}q_l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}p_kq_l=\sum_{n=0}^{\infty}c_n=AB$其中$c_n=\sum_{k=0}^{\infty}p_kq_{n-k}$.

函数项级数

现在讨论函数项级数,也就是级数的每一项都依赖于复变量z的级数,

$$\sum_{k=0}^{\infty}w_k(z)=w_0(z)+w_1(z)+w_2(z)+...+w_k(z)+... \tag{5.8}$$

它的各项都是z的函数,如果在某个区域B上所有点,级数都收敛,则称级数在B上收敛.这个级数对应的前$n+1$项和记为,

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}w_k(z). \tag{5.9}$$

现在让我们利用应用柯西收敛判据.根据柯西收敛判据,对于固定的z,对于任意给定的小正数ε,若存在N,使得当$n>N$时,

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|<\varepsilon \tag{5.10}$$

式中p为任意正整数.这说明这个函数项级数收敛.如果函数项级数对于区域B中所有点z都收敛,且N和z无关,则称级数在B上一致收敛.

- 对于函数项级数而言,收敛是指某个z时级数收敛,而一致收敛是对所有z都收敛.
- 一致收敛的级数每一项w_k都是B上的连续函数,则级数的和$w(z)$也是B上的连续函数.

幂级数

在这一节,让我们研究最简单的函数项级数,它的各项都是幂级数,其具体形式是

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ... \tag{5.11}$$

其中$a_0, a_1, a_2, ...$都是复常数.这样的级数称为以z_0为中心的幂级数.

考察各项的模所组成的正项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||(z-z_0)^k| = |a_0| + |a_1||(z-z_0)| + |a_2||(z-z_0)|^2 + ... + |a_k||z-z_0|^k + ... \tag{5.12}$$

应用正项级数的比值(达朗贝尔)判别法可知,如果

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|}{|a_k|} < 1 \tag{5.13}$$

则级数收敛.这可以理解为级数的高阶项中的前后项的模相比小于一则级数收敛.

让我们假设极限$\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k$存在,则可引入记号

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \tag{5.14}$$

这样我们发现

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}|z-z_0| = \frac{|z-z_0|}{R} \tag{5.15}$$

因此级数收敛就意味着$\frac{|z-z_0|}{R} < 1$,也就是$|z-z_0| < R$.根据绝对收敛的定义,(级数模所构成的级数收敛)我们称$|z-z_0| < R$时级数绝对收敛.我们把R叫做收敛半径,它实际上是以z_0为圆心的一个圆的半径.

与之相对,若$|z-z_0| > R$,则后项与前项的模之比的极限,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \frac{|z-z_0|}{R} > 1 \tag{5.16}$$

这表明级数后面的项的模越来越大,因而发散是必然的结果,即当$|z-z_0| > R$,级数发散.

我们可以把上面的结果总结为:

- 以z_0为圆心作一个半径为R的圆C_R,那么幂级数在圆内部绝对收敛,在圆外部发散.这个圆称为收敛圆,它的半径称为收敛半径,收敛半径由$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$给出.

对于正项级数,除了比值判别法,还可以应用根值(柯西)判别法.让我们考虑$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}$,如果

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}|z-z_0|<1 \tag{5.17}$$

则级数收敛,而当上式大于1时级数发散.设$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$存在,那么级数收敛等价于$|z-z_0|<R$,这样可以得到收敛半径的另一个公式

$$R=\lim_{k\to}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}. \tag{5.18}$$

例 $1+t+t^2+...+t^k+...$的收敛半径$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}=1$。

当然,我们知道上述级数就是一个几何级数,公比为t,这样它的前$n+1$项和为

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}t^k=1+t+...+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}. \tag{5.19}$$

现在,让我们取$n\to\infty$极限,显然,若$|t|\geq 1$那么级数中t^{n+1}因子的模的极限$\lim_{n\to\infty}|t|^{n+1}=\infty$,这样无穷级数自然是是发散的.与之相反,当$|t|<1$时$\lim_{n\to\infty}|t|^{n+1}=0$,因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}=\frac{1}{1-t},\qquad |t|<1. \tag{5.20}$$

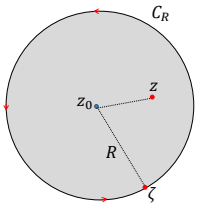


Figure 5.1: 复变函数$f(z)$在z_0处的泰勒展开.

泰勒级数展开

在高等数学中,我们知道,对于任意阶导数都存在的实变函数,其可以展开为泰勒级数(Taylor series),例如以x_0为中心展开的函数$f(x)$可以写成

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,\qquad a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{5.21}$$

这里$f^{(n)}(x_0)$表示$f(x)$在$x=x_0$处的k阶导数.

既然解析函数存在任意阶导数,那么类比于实变函数,其也可以展开为泰勒级数,这个结果就是下面给出的定理.

定理:设函数$f(z)$在以z_0为圆心(R为半径)的圆C_R内解析,则对圆内的任意z点,$f(z)$可展为幂级数

$$\boxed{f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k} \tag{5.22}$$

其中展开系数a_k满足

$$\boxed{a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}. \tag{5.23}$$

下面给出简单的证明.如图5.1所示,设函数$f(z)$在圆周C_R所包围区域都是解析,那么根据柯西公式可知区域内任意一点的函数值$f(z)$都可以通过圆周C_R上的回路积分表示,即

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{5.24}$$

考虑到展开中心为z_0,则有

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \tag{5.25}$$

根据图5.1所示的几何关系,我们知道$|\zeta - z_0| = R > |z - z_0|$,这样$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$中$|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| < 1$.

回忆几何级数的熟知结果,即对于实数变量$x(|x| < 1)$有$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$,我们期待当变量$x$替换为复数时依然成立,这样有

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \tag{5.26}$$

因此,结合因子$\frac{1}{\zeta - z_0}$,我们得到

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \tag{5.27}$$

把这个结果代回柯西公式可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R \tag{5.28}$$

而所有与$z - z_0$无关的部分定义到系数a_k中

$$a_k \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \tag{5.29}$$

注意到a_k恰好与解析函数的k阶导数$f^{(k)}(z_0)$相差一个系数$k!$,那么$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$,这样我们就证明了定理,也就是解析函数可以做泰勒展开.根据幂级数的一般情况,我们自然有泰勒展开的收敛半径$R = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$.

- 解析函数可以做泰勒展开,泰勒展开的系数用回路积分表示.

例 e^z在$z_0 = 0$的邻域展开有$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$,同时$R = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k \to \infty} (k + 1) \to \infty$,这说明函数的收敛半径无穷大.因此只要$z$是有限值,该级数就收敛.

解析延拓

已知给定区域b上的解析函数$f(z)$,是否能找出另一个函数$F(z)$,它在含有区域b,或与b有重叠部分的另一个区域B上是解析函数,而且在区域b上,或在与b 有重叠的部分上,等同于$f(z)$?这个问题叫作解析延拓.

- 简单来说,解析延拓就是解析函数定义域的扩大.

原则上,解析延拓可以利用泰勒级数进行.选取区域b的任意内点z_0,在z_0的邻域上将解析函数$f(z)$展开为泰勒级数.如果这个泰勒级数的收敛圆有一部分超出b之外,解析函数的定义域就扩大了一步.这样一步一步,定义域逐渐扩大.利用泰勒级数进行解析延拓虽然是一个普遍的方法,但具体计算很繁琐,所以通常总是尽量利用一些特殊方法来得到,这是因为解析延拓是唯一的.

- 复变函数的解析延拓具有唯一性.

关于解析延拓,有所谓的单值定理(Monodromy theorem),其给出了直接解析延拓存在的充分条件,

- 单值定理:设D是复数域中的开集,且f是区域D中的解析函数.若G是包含D的单连通区域,并从D中一些固定点出发,f沿着G中每一条路径都有解析延拓存在,那么f有到G的直接解析延拓.

  例如函数

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + ... \quad |z| < 1 \tag{5.30}$$

在一个较小的区域$|z| < 1$上是解析函数,另一个函数

$$F(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad z \neq \pm i \tag{5.31}$$

除了$z = \pm i$的一阶极点外,在全平面都是解析的,显然其包含$f(z)$的区域且两者在较小的区域上是相同的,因此$F(z)$可以看作$f(z)$在全平面的解析延拓.

- 物理上用到最多的解析延拓是已知一个实函数$f(x)$,然后把它解析延拓到复平面成为$f(z)$,或者是这个过程的相反过程.

  例如,统计物理中最常用的费米分布函数

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \tag{5.32}$$

自变量x在实数域上取值时函数没有奇点.现在作解析延拓,把函数定义域从实数域扩大到整个复平面,则有

$$f(z) = \frac{1}{e^z + 1} \tag{5.33}$$

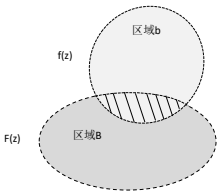


Figure 5.2: 解析延拓使得两个不同的复变函数$f(z)$和$F(z)$在重叠的区域中完全相同.

此时,$f(z)$的奇点是$z = i(2n+1)\pi, n \in \mathcal{Z}$.也就是说,解析延拓后,复平面上的费米分布函数具有无穷多个奇点,这些奇点等间距的分布在虚轴上.

另一个例子是假设我们知道虚时间的函数$\mathcal{G}(\tau), \tau \in [0, \beta]$,而通过解析延拓$\tau \to it$,原则上可以得到一个实时间的函数$G(t), t \in (-\infty, \infty)$.可以看到,$G(t)$的定义域是复平面上的实轴部分,而$G(\tau)$可以看作是定义在虚轴上的与$G$对应的一个函数.当$\mathcal{G}$有明确地解析形式时,解析延拓是直接的,然而若已知的仅仅是$\mathcal{G}$在某些点的数值,那么相应的解析延拓就是十分困难的.

洛朗级数展开

复变函数的零点

作为正式讨论洛朗展开前的热身,让我们先介绍关于零点的概念.所谓零点,就是使得函数值为零的点,也就是对于函数$f(z)$,如果$z = z_0$时$f(z_0) = 0$,那么z_0就是函数$f(z)$的零点.特别的,如果$\frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$是非零的解析函数(k为正整数), 那么z_0是k阶零点.

举例来说,$f(z) = z$的零点是$z = 0$而$f(z) = \frac{z-a}{z-b}(a \neq b)$的零点是$z = a$.物理上相关的一个例子是凝聚态物理中分数量子霍尔效应(fractional quantum Hall effect). 这个效应说的是对于一个二维平面上运动的电子,如果给它们施加垂直于平面的均匀磁场,那么这些电子由于之间存在的库伦相互作用会在电子密度为特定值且温度极低的情况下形成一类特殊的绝缘体,这个绝缘体的霍尔电导率可以用基本常数表示,即

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h} \tag{5.34}$$

这里e是电子的电荷,h是普朗克常数,当$\nu = 1/3, 1/5$等分数时相应的现象就称为分数量子霍尔效应.为了描述这个现象,Laughlin提出这个多电子系统的基态波函数可以是如下的形式:

$$\Psi(z_1, z_2 ... z_N) = \prod_{1 \leq i,j \leq N} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{k=1}^{N} \frac{|z_k|^2}{4l_B^2}} \tag{5.35}$$

这里$z_j = x_j + iy_j$是第j个电子的复数形式的坐标,$m = 1, 3, 5...$是奇整数,l_B是所谓的磁长度,由磁场强度B以及电子电荷e决定.可以看到这个函数的零点是$z_i = z_j$,(回忆量子力学的Pauli不相容原理以及$|\Psi|^2$的概率解释)物理上这说明两个电子不会在空间上占据同一个位置并且电子之间倾向于彼此远离.

当然,分数量子霍尔效应还有很多有趣的性质,比如系统存在携带分数电荷的粒子,这些粒子满足分数统计规则,另外它们中的某一种在理论上可以用来做量子计算机,也就是基于非阿贝尔任意子(nonabelian anyon)的拓扑量子计算(topological quantum computation).

洛朗级数展开

在先前的讨论中,我们已经知道解析函数可以做通常的泰勒展开,那么现在的问题是当所讨论的函数存在非解析点时,我们是否还可以在这一点附近做类似的展开.

通常,复变函数的非解析点又称为奇点,这说明在该点导数不存在或函数值无穷大.在这里,如果所讨论的区域中只有奇点本身不解析而附近其他点都

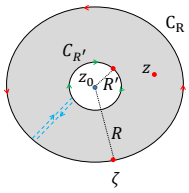


Figure 5.3: 复变函数的洛朗展开实际上对应于环形区域中的幂级数展开.

解析,那么就存在一类级数展开,也就是将要讨论的洛朗级数(Laurent series)展开,比如

$$f(z) = ...+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+... \quad (5.36)$$

- 当所研究的区域上存在奇点时,不能将函数展开为泰勒级数,而需要考虑去掉奇点的环域上的展开,这就是本节讨论的洛朗级数(Laurent series)展开.

可以看到$f(z)$既有正幂次(如$z-z_0, (z-z_0)^2$)也有负幂次(如$(z-z_0)^{-2}, (z-z_0)^{-1}$),这种有负幂次的级数展开称为洛朗展开.

定理:若函数$f(z)$在挖掉奇点z_0的环形区域$(0 < |z-z_0| < R)$上解析,则对区域内任意一点z,$f(z)$可展开为幂级数

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k} \quad (5.37)$$

其中

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta} \quad (5.38)$$

积分路径C是位于环域内按照逆时针方向绕圆心一周的任意闭合曲线.

下面给出简单的证明.设z_0是$f(z)$在$|z-z_0| < R$内唯一的奇点,同时考虑到我们唯一能够使用的工具就是柯西公式,这样如图5.3所示,我们可以挖掉z_0而形成一个环形区域$R' < |z-z_0| < R(R' \to 0)$.

在这个环形区域中$f(z)$是解析的,那么利用柯西公式就可以把任意一点z的函数值表示为回路积分,只不过此时的积分由大圆C_R以及小圆$C_{R'}$共同贡献:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dz \quad (5.39)$$

注意如果C_R的积分路径是逆时针方向,那么挖掉z_0而得到的辅助路径$C_{R'}$的积分方向是顺时针方向.显然,受到先前证明解析函数的泰勒展开的启发,我们要证明相应的级数展开形式,其要点在于把$\frac{1}{\zeta-z}$展开为合适的幂级数形式.

- 注意展开点z_0是圆环的中心,ζ是积分路径C_R或$C_{R'}$上的点,那么圆环内任一点z与环心的距离$|z-z_0|$与$|\zeta-z_0|$的相对关系取决于ζ是在C_R还是在$C_{R'}$上.当ζ是在回路C_R上时,根据几何关系可知$|\zeta-z_0|>|z-z_0|$,而当ζ是在回路$C_{R'}$ 上时,我们有$|\zeta-z_0|<|z-z_0|$.

对于在ζ在C_R上的情况,$|\zeta-z_0|>|z-z_0|$,可以按照先前的泰勒展开的处理方法,展开为正幂级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \tag{5.40}$$

而对于ζ在$C_{R'}$上的情形,考虑到$|z-z_0|>|\zeta-z_0|$,则有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^l}{(z-z_0)^l}=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^l}{(z-z_0)^{l+1}} \tag{5.41}$$

把以上两个展开分别代入相应的积分公式,可得

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}dz-\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^{-(l+1)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R'}}(\zeta-z_0)^l f(\zeta)dz \tag{5.42}$$

这里第一项是正幂次项.对于上式第二项,我们可以根据柯西定理将积分回路改为C_R并把前面的负号去掉(考虑到$C_{R'}$与C_R方向相反),这样第二项可以写成

$$\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^{-(l+1)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}(\zeta-z_0)^l f(\zeta)dz \tag{5.43}$$

再令$k=-(l+1)$代替l作为求和指标,得到

$$\sum_{k=-1}^{-\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}f(\zeta)dz \tag{5.44}$$

注意到此时这一项与正幂次项形式一样,差别在于求和上下限.这样把正负幂次加在一起就有

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{5.45}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta \tag{5.46}$$

C是环域内沿逆时针方向绕圆一周的任意闭回路.这里的展开称为洛朗展开,相应的级数称为洛朗级数.同泰勒展开一样,洛朗展开也是唯一的.

例 在$z_0=0$的邻域上展开$\frac{\sin z}{z}$.

注意到该函数在原点$z_0=0$没有定义,因此$z_0=0$是奇点.引用$\sin z$在原点附近邻域的展开式

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots \quad (|z|<\infty) \tag{5.47}$$

为了避开奇点,从复平面上挖去原点,在挖去原点的复平面上有

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots \quad (0<|z|<\infty) \tag{5.48}$$

注意到,如果我们定义$f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$,那么$f(z)$在整个平面上是解析的,因此

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots \quad (|z|<\infty) \tag{5.49}$$

就是函数在$z_0=0$展开的级数形式.

例 在$1<|z|<\infty$的环域上展开$f(z)=\frac{1}{z^2-1}$.

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\ldots \tag{5.50}$$

展开式中出现无穷多个负幂次项,但是展开中心$z_0=0$本身不是函数的奇点.

例 在$z_0=1$的邻域上展开$f(z)=\frac{1}{z^2-1}$.

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1} \tag{5.51}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{z-1}{2})^k \quad |z-1|<2 \tag{5.52}$$

因此,我们得到

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k \quad 0<|z-1|<2 \tag{5.53}$$

孤立奇点的分类

若函数$f(z)$在某点z_0不可导,而在z_0的任意小邻域内除z_0外出处可导,便称z_0为$f(z)$的孤立奇点.若在z_0的无论多小的邻域内总可以找到除z_0外的不可导点,则称z_0为$f(z)$的非孤立奇点.

- 也就是奇点可以分为孤立奇点和非孤立奇点。

例如$z=0$是$f(z)=\frac{1}{z}$的孤立奇点而$z=0$是$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$的非孤立奇点(因为$z=\frac{1}{n\pi}, n\to\infty$总是在$z=0$的任意小领域内).

我们先来讨论孤立奇点.在上一节已经证明,在挖去孤立奇点z_0而形成的环域上的解析函数$f(z)$可以展开为洛朗级数,

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{5.54}$$

其中洛朗级数的正幂部分称为解析部分,而负幂部分称为主要部分或者是无限部分.

在挖去孤立奇点z_0而形成的环域上的解析函数$f(z)$的洛朗级数展开如果没有负幂项,则称z_0 为可去奇点.如果含有有限个负幂项,则称z_0 为极点.当含有无限个负幂项时,称z_0为本性奇点.

- 因此,孤立奇点根据洛朗展开负幂项的多少,可以分为可去奇点,极点,本性奇点.

可去奇点

以奇点z_0为圆心而内半径为零的圆环区域$0<|z-z_0|<R$上的洛朗级数展开仅有正幂次的项,那么称z_0是函数$f(z)$的可去奇点,即有

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots \quad 0<|z-z_0|<R \tag{5.55}$$

显然有

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=a_0 \tag{5.56}$$

是有限的,即函数在可去奇点的邻域上是有界的.如果定义函数$g(z)$以代替$f(z)$

$$g(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq z_0; \\ a_0, & z=z_0. \end{cases} \tag{5.57}$$

那么有

$$g(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots \quad |z-z_0|<R \tag{5.58}$$

也就是说,对于$g(z)$而言,z_0已经不是函数的奇点,这正是可去奇点这一名词的来源.在今后可去奇点将不作为奇点对待.

例 判断$z=0$是否是函数$f(z)=\frac{\sin z}{z}$的可去奇点.

既然$z=0$是函数的孤立奇点,那么只要在$z=0$展开的洛朗级数没有负幂次项就可说明其是可去奇点.显然,我们可以把$\sin z$在$z=0$展开,这样有

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...\right)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k}\frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \tag{5.59}$$

可以看到,上述洛朗展开并不包含负幂次项,因此$z=0$是函数$f(z)=\frac{\sin z}{z}$的可去奇点.

极点

以奇点z_0为圆心而内半径为零的圆环区域$0<|z-z_0|<R$上的洛朗级数如果只包含有限个负幂次项,则称奇点z_0为函数$f(z)$的极点,即

$$f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+...+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+... \quad 0<|z-z_0|<R \tag{5.60}$$

这样我们得到

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty \tag{5.61}$$

而

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}\neq 0 \tag{5.62}$$

- 最高阶的负幂次项的阶数m称为极点的阶,一阶的极点也称为单极点.

例 判断函数$f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ 的奇点情况。

要判断函数奇点的情况,通常是找函数分母为零的点.对于$f(z)$而言$z=\pm i$是使分母为零的点,函数在该两点不解析,因此$z=\pm i$是奇点.显然这两个奇点并没有连接在一起,可进一步确定为孤立奇点.为了判断是哪种奇点,需要把$f(z)$在$\pm i$ 附近展开.对于$f(z)$ 有

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right) \tag{5.63}$$

对于奇点$z=i$,$\frac{1}{z-i}$就是相应的最高阶的负幂次项,而$\frac{1}{z+i}$ 是解析部分,因此$z=i$是函数的一阶极点.同理,$z=-i$也是一阶极点.

对于极点而言,物理上比较重要的例子是量子场论和凝聚态理论研究中的Green函数,其中一类简单的情况可以写成

$$G(k,\omega)=\frac{1}{\omega^2-k^2-m^2} \tag{5.64}$$

这里k是动量,ω是频率,m是质量.对于确定的k,m,我们发现极点是$\omega=\pm\sqrt{k^2+m^2}$,这对应于狭义相对论中的粒子的能量动量关系.

本性奇点

如果挖去奇点后所形成的环形区域内洛朗展开当含有无限个负幂项时,相应的奇点称为本性奇点,下面举一个具体的例子来说明.

例 判断$z_0=0$是否是$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点.

既然判断本性奇点需要作洛朗展开,但是由于指数中出现$1/z$的形式不便于直接展开,因此令$\xi=1/z$,那么在$|\xi|<1$的区域内可以展开函数$f(\xi)=e^{\xi}$

$$f(\xi)=1+\xi+\frac{1}{2!}\xi^2+\frac{1}{3!}\xi^3+...,\quad (|\xi|<1) \tag{5.65}$$

然后代回$z=1/\xi$可得

$$f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+...,\quad (|z|>1) \tag{5.66}$$

以上形式就是函数$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$的洛朗展开形式,显然可以看到展开式包含无穷多负幂次项,因此$z_0=0$就是该函数的本性奇点.

同理可知,$z_0=\infty$是$e^z,\sin z,\cos z$的本性奇点.

Chapter 6

留数定理

留数定理

柯西定理指出,如果被积函数$f(z)$在回路所围的闭区域上是解析的,则回路积分$\oint_l f(z)dz$等于零.现在考虑回路包含奇点的情况.

先设l只包围$f(z)$的一个孤立奇点z_0,则以z_0为圆心而内半径趋于零的圆环区域上可以将$f(z)$展开为洛朗级数,

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{6.1}$$

在洛朗级数的收敛环中任意取一个紧紧包围z_0的小回路l_0,按照柯西定理,函数在小回路的积分与原来回路的积分值相同,即

$$\oint_l f(z)dz=\oint_{l_0}f(z)dz \tag{6.2}$$

将洛朗展开代入右边可得

$$\oint_l f(z)dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\oint_{l_0}(z-z_0)^k dz \tag{6.3}$$

由于l_0包围奇点z_0,那么对于整数k而言,唯一非零的项是$k=-1$的项,其取值为$2\pi i$,那么我们得到

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i a_{-1} \tag{6.4}$$

因此我们发现洛朗级数的$(z-z_0)^{-1}$项的系数a_{-1}具有重要的地位,其有专门的名字,叫作函数$f(z)$在点z_0的留数,通常记作$\mathrm{Res}f(z_0)$, 即

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}f(z_0) \tag{6.5}$$

对于回路l包围$f(z)$的n个孤立奇点$b_1,b_2,b_3,...,b_n$的情况,作回路$l_1,l_2,l_3,...,l_n$分别包围$b_1,b_2,b_3,...,b_n$,并使得每个回路只包围一个奇点,按照柯西定理有

$$\oint_l f(z)dz=\oint_{l_1}f(z)dz+\oint_{l_2}f(z)dz+...+\oint_{l_n}f(z)dz \tag{6.6}$$

每一个回路积分等于相应极点的留数,那么有

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}f(b_1)+2\pi i\mathrm{Res}f(b_2)+...+2\pi i\mathrm{Res}f(b_n) \tag{6.7}$$

这样,我们得到留数定理:设函数$f(z)$在回路l所包围的区域B上除有限个孤立奇点$b_1,b_2,b_3,...,b_n$外解析,在闭区域$\bar{B}$上 $b_1,b_2,b_3,...,b_n$外连续,则

$$\boxed{\oint_l f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}f(b_j)} \tag{6.8}$$

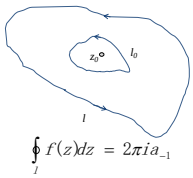


Figure 6.1: 复变函数包含单个孤立奇点的回路积分等于该奇点留数a_{-1}的$2\pi i$ 倍.

- 留数定理将回路积分归结为被积函数在回路所包围区域上各奇点的留数之和.

既然留数定理给出回路积分等于被积函数在回路所围各奇点的留数之和,那么问题归结于留数的计算.原则上说,只要以奇点为圆心的圆环区域上将函数展开为洛朗级数,取它的负一次幂项的系数就可以了.但是,对于极点,有更为简单的计算方法.

单极点的判断和留数

首先,让我们考虑一阶极点,也就是单极点的情况.设z_0是单极点,洛朗展开必然是

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... \tag{6.9}$$

用$z - z_0$乘遍各项可得

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + ... \tag{6.10}$$

对上式取$z \to z_0$的极限,右边是非零的有限值,即留数a_{-1},这样有

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \mathrm{Res} f(z_0)} \tag{6.11}$$

这个公式可以用来判断z_0是否是函数的单极点,也可以计算单极点z_0的留数值.

作为一个特例,设$f(z)$可以表示为$\frac{P(z)}{Q(z)}$的特殊形式,其中$P(z)$与$Q(z)$都在z_0点解析,z_0是$Q(z)$的零点而$P(z_0) \neq 0$. 这样在z_0附近可以把$f(z)$展开为

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0) + (z - z_0)P'(z_0) + ...}{Q(z_0) + (z - z_0)Q'(z_0) + ...} \tag{6.12}$$

由于z_0是$Q(z)$的零点,这说明$Q(z_0)=0$,这样上式就成为

$$f(z)=\frac{P(z_0)+(z-z_0)P'(z_0)+...}{(z-z_0)Q'(z_0)+...} \tag{6.13}$$

这样两边乘以$z-z_0$并取$z\to z_0$极限可得

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z_0)+(z-z_0)P'(z_0)+...}{Q'(z_0)+...}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{6.14}$$

这说明z_0是$f(z)$的一阶极点,则有

$$\mathrm{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{6.15}$$

m阶极点的判断和留数

再设z_0是$f(z)$是m阶极点,其洛朗展开是

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{z-z_0}+\frac{a_{-m+1}}{z-z_0}+...+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+... \tag{6.16}$$

用$(z-z_0)^m$乘遍各项可得

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+...+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+... \tag{6.17}$$

对上式取$z\to z_0$的极限,我们发现上式右边的取值为a_{-m},即

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]=finite \tag{6.18}$$

利用以上公式可以判断z_0是否是m阶极点.但是,其非零的有限值并不是$f(z)$在z_0的留数,因为根据定义函数的留数是a_{-1}.为了得到留数值,我们可以把$(z-z_0)^m f(z)$这个整体当作是一个函数,然后对这个函数展开的每一项都对z求$m-1$次导数,此时剩下的项是从a_0开始的正幂次项以及a_{-1}项,这样在$z\to z_0$的极限下正幂次项为零,我们自然会得到a_{-1},即有

$$\boxed{\mathrm{Res}f(z_0)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]} \tag{6.19}$$

最常用的二阶极点的留数就有如下公式:

$$\mathrm{Res}f(z_0)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2 f(z)]. \tag{6.20}$$

几个例子

例 求$f(z)=\frac{1}{z^n-1}$在$z_0=1$的留数.

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^n-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1)}=\frac{1}{n} \tag{6.21}$$

因此,$z_0=1$是函数的一阶极点,并且其留数值为$\frac{1}{n}$.

例 确定函数$f(z)=\frac{1}{\sin z}$的极点,求出函数在这些极点的留数.

$\sin z$出现在函数的分母上,因此其为零的点是函数的极点,即$z=n\pi$是函数的极点.

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z)=\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)}{\sin z} \tag{6.22}$$

应用洛必达法则确定上式的极限,即

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z)=\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)'}{(\sin z)'}=\lim_{z\to n\pi}\frac{1}{\cos z}=(-1)^n \tag{6.23}$$

因此,$z_0=n\pi$是$f(z)$的单极点,在该点的留数值为$(-1)^n$.

例 确定函数$f(z)=\frac{z+2i}{z^5+4z^3}$的极点,求出函数在这些极点的留数.

$$f(z)=\frac{z+2i}{z^3(z^2+4)}=\frac{z+2i}{z^3(z+2i)(z-2i)}=\frac{1}{z^3(z-2i)} \tag{6.24}$$

因此,可以看到,$z_0=0$和$z_0=2i$是函数的极点.

$$\lim_{z\to 0}z^3f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{-2i} \tag{6.25}$$

这样$z_0=0$是三阶极点,其留数为

$$\mathrm{Res}f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}[z^3f(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-2i)^3}=\frac{1}{8i} \tag{6.26}$$

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{z^3}=\frac{1}{-8i} \tag{6.27}$$

这样$z_0=2i$是一阶极点,其留数为$\frac{1}{-8i}$.

例 确定复数域中的费米分布函数$f(z)=\frac{1}{e^z+1}$的极点,求出函数在这些极点的留数.

首先,可以看到函数的极点是$z = i(2n+1)\pi, n \in \mathcal{Z}$.我们把这些极点记为$i\omega_n$.在理论物理中$i\omega_n$也称为费米子的虚频率.为了判断极点的阶数,我们有

$$\lim_{z\to i\omega_n}(z-i\omega_n)\frac{1}{e^z+1} = \lim_{z\to i\omega_n}(z-i\omega_n)\frac{1}{e^{z-i\omega}e^{i\omega_n}+1} = \lim_{z\to i\omega_n}(z-i\omega_n)\frac{1}{1-e^{z-i\omega}} \tag{6.28}$$

然后把e指数函数在$i\omega_n$处展开,只取最低阶的两项有

$$\lim_{z\to i\omega_n}(z-i\omega_n)\frac{1}{e^z+1} = \lim_{z\to i\omega_n}(z-i\omega_n)\frac{1}{1-(1+z-i\omega+\mathcal{O}(z-i\omega)^2)} = -1 \tag{6.29}$$

因此,$z = i\omega_n$是费米分布函数的一阶极点,且其留数为-1.

例 计算沿单位圆$|z|=1$的回路积分$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$, $0<\varepsilon<1$.

令被积函数的分母为零,得二次代数方程$\varepsilon z^2+2z+\varepsilon = 0$,它的两个根是$z = \frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$,这就是函数的两个单极点.注意到$z_- = \frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$的模大于一,因此其在回路积分以外,因此可以不用考虑.而另一个根$z_+ = \frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$在回路积分的区域内,其留数是

$$\mathrm{Res}f(z_+) = \lim_{z\to z_+}\frac{1}{\varepsilon}\frac{z-z_+}{(z-z_+)(z-z_-)} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{z_+-z_-} = \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{6.30}$$

应用留数定理

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon} = 2\pi i\mathrm{Res}f(z_+) = 2\pi i\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{6.31}$$

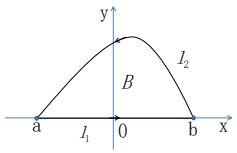


Figure 6.2: 添加积分路径l_2凑出回路积分以利用留数定理计算实函数积分.

留数定理计算实变函数积分

留数定理的一个重要应用是计算某些实变函数定积分,[1]为此,需要将实变函数定积分跟复变函数回路积分联系起来.

将实变定积分联系于复变函数回路积分的要点如下:

- 定积分$\int_a^b f(x)dx$的积分区间$[a,b]$可以看作是复平面上实轴上的一段l_1;(如图)利用自变量的变换把l_1变换为某个新的复数平面上的回路,这样就可以应用留数定理;
- 或者另外补上一段曲线l_2,使得l_1和l_2合成回路l,l包围区域B.将$f(x)$解析延拓到闭区域$\bar{B}$,并将它沿着l积分,

$$\oint_l f(z)dz = \oint_{l_1} f(z)dz + \oint_{l_2} f(z)dz \tag{6.32}$$

上式左边可以应用留数定理,右边第一个积分就是所求的定积分.如果右边第二个积分较容易算出或可用第一个积分表示出,问题就解决了.

下面介绍几种常见类型的实变函数定积分.

类型一的积分

类型一:$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$是被积函数是三角函数的有理式,积分区间是$[0, 2\pi]$.作自变量代换

$$z = e^{ix} \tag{6.33}$$

[1]客观的说,有了mathmatica这类计算软件后这个应用其实没那么重要了,毕竟正常情况下我们手算肯定不如软件.

当实变量x从0变到2π时,复变量z从$z=1$出发沿着单位圆$|z|=1$逆时针走一圈又回到$z=1$,实积分化为复变函数的回路积分,(相当于做共形变换把实轴上的一段变为单位圆)这样就可以应用留数定理.此外有

$$\cos x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(z-z^{-1}),\quad dx=\frac{1}{iz}dz \tag{6.34}$$

原积分化为

$$\boxed{I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{dz}{iz}} \tag{6.35}$$

例 计算$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon cosx}$, $0<\varepsilon<1$。

先利用变换$z=e^{ix}$把积分化为单位圆$|z|=1$回路积分,可得

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}=\frac{2}{1}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon} \tag{6.36}$$

上式右边的回路在上一节讨论中已经计算出来,其值是$\frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$,于是有$I=\frac{2}{1}\frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

例 计算$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}$, $0<\varepsilon<1$。

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1-\varepsilon(z+z^{-1})+\varepsilon^2}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{idz}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)} \tag{6.37}$$

这个回路积分的被积函数有两个单极点,$z_0=1/\varepsilon,\epsilon$.注意到前者$>1$,在积分回路以外,因此不必考虑.单极点$z_0=\varepsilon$在回路以内,计算其留数有

$$\lim_{z\to\varepsilon}\left[(z-\varepsilon)\frac{i}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}\right]=\lim_{z\to\varepsilon}\frac{i}{\varepsilon z-1}=\frac{i}{\varepsilon^2-1} \tag{6.38}$$

于是我们得到

$$I=2\pi i\frac{i}{\varepsilon^2-1}=\frac{2\pi}{1-\varepsilon^2} \tag{6.39}$$

类型二的积分

类型二:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \tag{6.40}$$

积分区间是$(-\infty,\infty)$,复变函数$f(z)$在实轴上没有奇点,在上半平面有有限个奇点,除此之外都是解析的.当$z\to\infty$时$zf(z)$趋于零.这一积分通常理解为下列极限,

$$I=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx \tag{6.41}$$

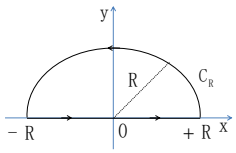


Figure 6.3: 类型二的半圆形回路l包含实轴以及无穷大半圆C_R。

若极限存在的话,这一极限称为$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$的主值,记作

$$\boxed{\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx} \tag{6.42}$$

考虑把函数解析延拓到实轴以外的上半平面,并且补充上以原点为圆心半径为R的在上半平面的半圆弧,则有

$$\oint_l f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz \tag{6.43}$$

根据留数定理,上式的值是等于l所围成的半圆内各奇点留数之和再乘以$2\pi i$.当$R\to\infty$时,上式左边趋于上半平面内所有奇点留数之和的贡献.

可以证明,右边第二个积分的贡献趋于零:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} zf(z)\frac{dz}{z}\right| \le \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}|zf(z)|\frac{|dz|}{|z|} \le \lim_{R\to\infty}\max|zf(z)|\frac{\pi R}{R} \tag{6.44}$$

注意到$R\to\infty$也就是$z\to\infty$时$zf(z)$趋于零,那么上式为零,也就是$\lim_{R\to\infty}|\int_{C_R} f(z)dz| = 0$或者$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$.这样有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = \oint_l f(z)dz = 2\pi i\sum_j \mathrm{Res}f(z_j) \tag{6.45}$$

上式右边表示对上半平面奇点$\{z_j\}$的留数$\mathrm{Res}f(z_j)$求和.

例 计算$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

首先$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$解析延拓后是$f(z)=\frac{1}{z^2+1}$.显然$zf(z)=z\frac{1}{1+z^2}$在$z\to\infty$时趋于零,这样无穷大半圆弧的积分为零,因此函数积分的计算转化为对上半平面内所有极点留数的求和.注意到$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$,它的单极点是$\pm i$,$i$这个极点在复平面的上半平面,因此有

$$\mathrm{Res}f(i)=\lim_{z\to i}[(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}]=\frac{1}{2i} \tag{6.46}$$

这样就有

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\mathrm{Res}f(i)=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi \tag{6.47}$$

当然,我们知道上述积分的原函数是$\arctan x$,代入$x=\pm\infty$自然有$I=\arctan(\infty)-\arctan(-\infty)=\pi$.

例 计算$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n},\ n\in\mathcal{Z}>0.$

$$f(z)=\frac{1}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n} \tag{6.48}$$

该函数在上半平面的奇点是$z=i$的n阶极点.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(i) &= \lim_{z\to i}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-i)^n f(z)]\right)\\ &= \lim_{z\to i}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n}\\ &= \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}i\end{aligned} \tag{6.49}$$

因此,我们得到

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=2\pi i\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}i=\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}. \tag{6.50}$$

类型三的积分

类型三:

$$I=\int_0^{\infty}F(x)\cos(mx)dx,\ I=\int_0^{\infty}G(x)\sin(mx)dx \tag{6.51}$$

这类积分用留数定理计算需要满足以下条件:

1. $F(x)$是偶函数,$G(x)$是奇函数;
2. $F(x),G(x)$在实轴上没有奇点,在上半平面除有限个奇点外是解析的

3. $z \to \infty$时,$F(z), G(z)$趋于零;

4. sin与cos函数的系数$m > 0$.

显然,比较好处理的积分上下限是$(-\infty, \infty)$而不是这里的$[0, \infty)$,因此我们先处理积分.首先,利用$cos(mx) = \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}$将所求积分变换为

$$\int_0^\infty F(x)\cos(mx)dx = \int_0^\infty F(x)\frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}dx = \int_0^\infty F(x)\frac{e^{imx}}{2}dx + \int_0^\infty F(x)\frac{e^{-imx}}{2}dx \tag{6.52}$$

在上式的第二个积分中令$x = -y$,并考虑$F(x)$为偶函数,得到

$$\int_0^\infty F(x)\cos(mx)dx = \int_0^\infty F(x)\frac{e^{imx}}{2}dx - \int_0^{-\infty} F(y)\frac{e^{imy}}{2}dy \tag{6.53}$$

在第二个积分中把y改为x,有

$$\int_0^\infty F(x)\cos(mx)dx = \int_0^\infty F(x)\frac{e^{imx}}{2}dx + \int_{-\infty}^0 F(x)\frac{e^{imx}}{2}dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty F(x)e^{imx}dx \tag{6.54}$$

同理有

$$\int_0^\infty G(x)\sin(mx)dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty G(x)e^{imx}dx \tag{6.55}$$

这样我们实际需要计算的是$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty F(x)e^{imx}dx$.注意到这个积分形式与类型二的相似性,我们自然也会添加一个上半平面的无穷大半圆弧来得到完整的闭合回路,即

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R dxF(x)e^{imz} + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz = \oint dzF(z)e^{imz} \tag{6.56}$$

显然等号右边是所有上半平面留数之和的$2\pi i$倍,这样问题就是无穷大半圆弧上的积分$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz$取值为何.为了计算这个积分,我们需要所谓的约当引理.

- 约当引理:如m为正数,C_R是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周,(图6.3)若$z \to \infty$时,$F(z)$趋于零,则有

$$\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz = 0} \tag{6.57}$$

下面给出简单的证明:(在半圆弧上$z = x + iy = R\cos\varphi + iR\sin\varphi$)

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right| &= \left|\int_{C_R} F(z)e^{imx-my}dz\right| \\ &= \left|\int_0^\pi F(Re^{i\varphi})e^{-mR\sin\varphi}e^{imR\cos\varphi}Re^{i\varphi}id\varphi\right| \\ &\le \int_0^\pi |F(Re^{i\varphi})|e^{-mR\sin\varphi}|e^{imR\cos\varphi}|R|e^{i\varphi}||id\varphi| \\ &= \int_0^\pi |F(Re^{i\varphi})|e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi \\ &\le \max|F(Re^{i\varphi})|\int_0^\pi e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi \qquad (6.58)\end{aligned}$$

在$0 \le \varphi \le \pi/2$范围内,$\sin\varphi \ge \frac{2\varphi}{\pi}$,[2]因此当$m > 0$ 时有

$$e^{-mR\sin\varphi} \le e^{-mR\frac{2\varphi}{\pi}} \qquad (6.59)$$

而如果$m < 0$,我们只能得到$e^{-mR\sin\varphi} \ge e^{-mR\frac{2\varphi}{\pi}}$,这实际上并不能用来判断积分$\int_0^\pi e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$取值是否趋于零,因此我们仅考虑$m > 0$的情况.这样有

$$\int_0^\pi e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi = 2\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2mR\varphi/\pi}Rd\varphi = \frac{\pi}{m}(1-e^{-mR}) \qquad (6.60)$$

当$R \to \infty$时,上式趋于有限值$\frac{\pi}{m}$,因此(利用$F(z \to \infty) = 0$)

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right| \le \max|F(Re^{i\varphi})|\int_0^\pi e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi = 0 \times \frac{\pi}{m} = 0 \qquad (6.61)$$

这样我们发现无穷大半圆弧上的积分为零,因此所需计算的积分就等于上半平面内留数和的$2\pi i$倍:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxF(x)e^{imx} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} dxF(x)e^{imz} = 2\pi i\sum_j \mathrm{Res}[F(z_j)e^{imz_j}] \qquad (6.62)$$

所以,在计算积分时,利用留数定理和约当引理,可得

$$\int_0^\infty F(x)\cos(mx) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dxF(x)e^{imx} = \pi i\sum_j \mathrm{Res}[F(z_j)e^{imz_j}] \qquad (6.63)$$

$$\int_0^\infty G(x)\sin(mx) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} dxG(x)e^{imx} = \pi\sum_j \mathrm{Res}[G(z_j)e^{imz_j}] \qquad (6.64)$$

这里的留数指的是上半平面内奇点的留数之和.

[2]画出函数$\sin x$, $\frac{2x}{\pi}$的图形就可以清楚的看到这一点

例 计算$I=\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+a^2}dx.(m>0,a>0).$

在这里,$F(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$是偶函数,在解析延拓后有$F(z)=\frac{1}{x^2+a^2}$,显然满足$z\to\infty$时趋于零的要求,同时$m>0$,这样约当引理成立,因此无穷大圆弧积分为零.注意到$F(z)e^{imz}=\frac{e^{imz}}{x^2+a^2}$有两个单极点$\pm ai$,只有$ai$在上半平面,在该点的留数是

$$\mathrm{Res}[F(z)e^{imz}]|_{z=ai}=\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\right]=\lim_{z\to ai}\left[\frac{e^{imz}}{z+ai}\right]=\frac{e^{-ma}}{2ai}. \quad (6.65)$$

因此有

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x^2+a^2}dx=(\pi i)\mathrm{Res}[F(z)e^{imz}]|_{z=ai}=(\pi i)\frac{e^{-ma}}{2ai}=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}. \quad (6.66)$$

例 计算$I=\int_0^\infty \frac{x\sin(mx)}{(x^2+a^2)^2}dx.$

这里$G(z)e^{imz}=\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}$有两个二阶极点$\pm ai$,其中$ai$在上半平面,在该点的留数是

$$\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[(z-ai)^2\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]=\frac{m}{4a}e^{-ma}. \quad (6.67)$$

因此

$$I=\pi\frac{m}{4a}e^{-ma}=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}. \quad (6.68)$$

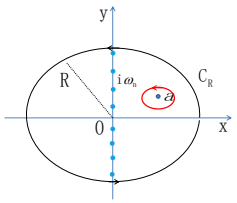


Figure 6.4: 虚频率求和所涉及的积分回路选取.

一些综合应用

统计物理中的松原频率求和

例 计算费米子的虚频率求和$I=\sum_{\omega_n}\frac{1}{i\omega_n-a},\omega_n=(2n+1)\pi$.

注意到求和是对所有分离的频率求和,那么自然会联想到通过构造适当函数的回路积分,其回路积分等于相应极点的留数之后,这些留数求和应是I.构造如下复变函数

$$f(z)=\frac{1}{e^z+1}\frac{1}{z-a} \tag{6.69}$$

这个函数的极点分别是a和$i\omega_n$.现在考虑该函数在复平面内以原点为中心的一个无穷大圆形的回路$\mathcal{C}$,

$$I_{\mathcal{C}}=\oint_{\mathcal{C}}\frac{1}{e^z+1}\frac{1}{z-a}dz \tag{6.70}$$

在这个无穷大圆回路上的积分可以估计为

$$|I_C|\leq|\oint_{\mathcal{C}}||\frac{1}{e^z+1}||\frac{1}{z-a}||dz|=\int_0^{2\pi}Rd\varphi\frac{1}{R}e^{-R}\to 0\quad(z=Re^{i\varphi},R\to\infty) \tag{6.71}$$

因此,我们得到回路积分$I_{\mathcal{C}}$值为零.

另一方面,由留数定理可知,$I_{\mathcal{C}}$的积分值等于所有极点留数之和的$2\pi i$倍,

$$I_{\mathcal{C}}=2\pi i\sum_i \mathrm{Res}f(z_i)=2\pi i\sum_{\omega_n}\mathrm{Res}f(i\omega_n)+2\pi i\mathrm{Res}f(a) \tag{6.72}$$

而

$$\mathrm{Res}f(i\omega_n)=\lim_{z\to i\omega_n}(z-i\omega_n)\frac{1}{e^z+1}\frac{1}{z-a}=(-1)\frac{1}{i\omega_n-a} \tag{6.73}$$

$$\mathrm{Res}f(a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{1}{e^z+1}\frac{1}{z-a}=\frac{1}{e^a+1} \tag{6.74}$$

这样我们得到

$$0=I_{\mathcal{C}}=2\pi i(\frac{1}{e^a+1}-\sum_{\omega_n}\frac{1}{i\omega_n-a}) \tag{6.75}$$

也就是

$$I=\sum_{\omega_n}\frac{1}{i\omega_n-a}=\frac{1}{e^a+1} \tag{6.76}$$

在实际的使用中,我们把虚频率定义为$\omega_n=(2n+1)\pi T$,T是系统的温度,这样相应的结果是

$$\boxed{T\sum_{\omega_n}\frac{1}{i\omega_n-a}=\frac{1}{e^{a/T}+1},\quad \Omega_n=(2n+1)\pi T} \tag{6.77}$$

此外,如果我们考虑玻色子的频率求和,采用完全相同的处理可以得到

$$\boxed{T\sum_{\Omega_n}\frac{1}{i\Omega_n-a}=-\frac{1}{e^{a/T}-1},\quad \Omega_n=2n\pi T}. \tag{6.78}$$

- 以上两个公式在量子多体物理研究有限温度平衡态性质时十分有用;
- 这些虚频率也称为松原(Matsubara)频率.

理论物理中的色散关系(Kramers-Kronig关系)

在具体讨论色散关系之前,我们先介绍实轴上有单极点时实函数积分的计算.

考虑积分$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$,被积函数$f(x)$在实轴上有单极点$z=\alpha$,除此之外满足类型二或者类型三的条件.由于存在这个奇点,我们以$z=\alpha$为圆心,以充分小的正数ε为半径作半圆弧绕过奇点α构成如图6.5所示的回路积分,则有

$$\oint_l f(z)dz=\int_{-R}^{\alpha-\varepsilon}f(x)dx+\int_{\alpha+\varepsilon}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz+\int_{C_\varepsilon}f(z)dz \tag{6.79}$$

取极限$R\to\infty,\varepsilon\to 0$,则上式左边的积分等于上半平面内极点留数和的$2\pi i$倍,而右边第一,第二项之和在$\varepsilon\to 0$时就是所求积分,或者严格地说是所求积分的主值,记为$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}(\int_{-R}^{\alpha-\varepsilon}+\int_{\alpha+\varepsilon}^{R})f(x)dx$.按照先前在类型二和三时的讨论,当$f(z\to\infty)$足够快得趋于零则第三项为零.对于第四项,可以将$f(z)$在$z=\alpha$的领域内展开为洛朗级数,由于$z=\alpha$ 是$f(z)$ 的单极点,则有

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-\alpha}+P(z-\alpha) \tag{6.80}$$

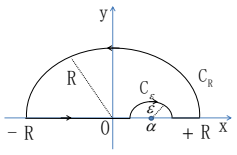


Figure 6.5: 实轴上有单极点的实函数积分路径选择.

这里实际上反向使用了单极点的定义,其中$P(z-\alpha)$代表级数的解析部分,其具体形式是正幂次的级数,即

$$P(z-\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \tag{6.81}$$

因此

$$\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}dz+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{C_\varepsilon}(z-\alpha)^n dz \tag{6.82}$$

对于第一个积分,我们有$(z=\alpha+\varepsilon e^{i\varphi})$

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}dz=\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}d(z-\alpha)=\int_{\pi}^{0}\frac{a_{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\varepsilon e^{i\varphi}id\varphi=-\pi i a_{-1}=-\pi i\mathrm{Res}f(\alpha) \tag{6.83}$$

而第二个积分给出

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{C_\varepsilon}(z-\alpha)^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{\pi}^{0}(\varepsilon e^{i\varphi})^n\varepsilon e^{i\varphi}id\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}a_n i\varepsilon^{n+1}\int_{\pi}^{0}e^{i(n+1)\varphi}d\varphi \tag{6.84}$$

当$\varepsilon\to 0$时,上式$\varepsilon^{n+1}\to 0$,因此第二个积分为零.

这样,我们得到当$R\to\infty,\varepsilon\to 0$时

$$2\pi i\sum_{z_j}\mathrm{Res}f(z_j)=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx-\pi i\mathrm{Res}f(\alpha) \tag{6.85}$$

即有

$$\boxed{\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{z_j}\mathrm{Res}f(z_j)+\pi i\mathrm{Res}f(\alpha)} \tag{6.86}$$

现在我们应用这个结果,即考虑上半平面解析的函数$f(z)$,如果当$z \to \infty$时,$f(z)$趋于零($0 \leq \mathrm{Arg}z \leq \pi$),$\alpha$为一个实数,则对于函数$F(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha}$运用上述结果可得

$$P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-\alpha} = \pi i \mathrm{Res}F(\alpha) = \pi i \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{f(z)}{z-\alpha} = \pi i f(\alpha) \tag{6.87}$$

既然$f(\alpha)$是复函数,那么其实部和虚部分别是

$$\mathrm{Re}f(\alpha) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\mathrm{Im}f(x)}{x-\alpha} \tag{6.88}$$

$$\mathrm{Im}f(\alpha) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\mathrm{Re}f(x)}{x-\alpha} \tag{6.89}$$

- 这一对关系在数学上称为希尔伯特变换,在物理上叫作色散关系或Kramers-Kronig关系.[3]

从上述的证明可以看到,只要函数$f(z)$是上半平面的解析函数且在无穷远处趋于零,那么它的实部与虚部就满足上述关系.一个实际的例子是量子场论和量子多体物理(凝聚态理论)研究中经常遇到的推迟Green函数,例如:

$$G^R_{AB}(t) = -i\theta(t)\langle[\hat{A}(t), \hat{B}]_{\pm}\rangle \tag{6.90}$$

这里$G^R_{AB}(t)$就是由$\hat{A}, \hat{B}$算符构成的推迟Green函数,上标R代表推迟(retarded),t代表时间,$\theta(t)$是阶跃函数,也就是当$t > 0$时为1,$t < 0$时函数值为零.$\langle ... \rangle$通常表示对某个量子力学态取平均或者对热力学平衡态取平均,$[,]_{\pm}$是对易关系或者反对易关系.$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}$是Heisenberg绘景中的算符的时间演化.

然后做关于t的傅里叶变换可得

$$G^R_{AB}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} G^R_{AB}(\omega) \tag{6.91}$$

而逆变换是

$$G^R_{AB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} G^R_{AB}(t) \tag{6.92}$$

代入$G^R_{AB}(t)$的具体形式可得

$$G^R_{AB}(\omega) = -i\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t}\langle \hat{A}(t)\hat{B} \pm \hat{B}\hat{A}(t)\rangle \tag{6.93}$$

[3]称作Kramers-Kronig关系更合适,因为这样可以避免与固体物理中电子的能量动量依赖关系(也叫做色散关系)区分开.

假设我们对系统的基态取平均$\langle ... \rangle = \langle g|...|g\rangle$并且插入$\hat{H}$的本征态的完备系$\sum_n |n\rangle\langle n|(\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle)$

$$\begin{aligned} G^R_{AB}(\omega) &= -i\int_0^\infty dt e^{i\omega t}\langle g|e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}\sum_n |n\rangle\langle n|\hat{B} \pm \sum_m \hat{B}|m\rangle\langle m|e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}|g\rangle \\ &= -i\sum_n \int_0^\infty dt e^{i\omega t}\left(e^{i(E_g-E_n)t}\langle g|\hat{A}|n\rangle\langle n|\hat{B}|g\rangle \pm e^{i(E_n-E_g)t}\langle g|\hat{B}|n\rangle\langle n|\hat{A}|g\rangle\right) \end{aligned}$$

显然,上述关于t的积分由于积分上限∞而出现bug,因此我们需要进行合适的处理,最简单的方案是给ω加一个无穷小的因子$i\delta(\delta \to 0^+)$,这样有

$$\int_0^\infty dt e^{i(\omega+i\delta+E_g-E_n)t} = \frac{1}{i(\omega+i\delta+E_g-E_n)}(e^{i(\omega+E_g-E_n)\infty}e^{-\delta\infty}-1) = \frac{-1}{i(\omega+i\delta+E_g-E_n)} \tag{6.94}$$

因此

$$G^R_{AB}(\omega) = \sum_n \left(\frac{\langle g|\hat{A}|n\rangle\langle n|\hat{B}|g\rangle}{\omega+i\delta+E_g-E_n} \pm \frac{\langle g|\hat{B}|n\rangle\langle n|\hat{A}|g\rangle}{\omega+i\delta+E_n-E_g}\right) \tag{6.95}$$

显然,$G^R_{AB}(\omega)$的奇点仅是复平面下半平面的单极点$\omega = -i\delta \pm (E_g - E_n)$而在上半平面和实轴上解析,因此满足色散关系成立的要求,这样我们就有

$$\mathrm{Re}G^R_{AB}(\omega) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathrm{Im}G^R_{AB}(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{6.96}$$

$$\mathrm{Im}G^R_{AB}(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathrm{Re}G^R_{AB}(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{6.97}$$

根据'线性响应理论',很多重要的物理量,例如电导率,磁导率,极化率,单电子Green函数等都可以表示为推迟Green函数,因此这些物理量的实部与虚部都满足上述关系.

Chapter 7

多値函数

多值函数

我们知道,典型的多值函数有对数函数$\ln z$和根式函数$\sqrt[n]{z}$.这里我们以$f(z)=\sqrt{z}$为例来讨论多值函数的一些不同于单值函数的特性.

首先将自变量z改写为指数形式,即$z=|z|e^{i\mathrm{Arg}z}=|z|e^{i\arg z+i2n\pi}$,代入函数可得

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{|z|e^{i\mathrm{Arg}z}}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}z}{2}} \tag{7.1}$$

将函数值w的模和辐角记为r和θ,即

$$r=\sqrt{|z|}\quad \theta=\frac{\mathrm{Arg}z}{2}=\frac{\arg z}{2}+n\pi \tag{7.2}$$

这样对于复数w而言,其主辐角$[0,2\pi)$有两个值,即

$$\theta_1=\frac{\arg z}{2}\in[0,\pi)\quad (n=0) \tag{7.3}$$

$$\theta_2=\frac{\arg z}{2}+\pi\in[\pi,2\pi)\quad (n=1) \tag{7.4}$$

对于这两个不同的辐角,$w=\sqrt{z}$有两个不同的取值,即

$$w_1=\sqrt{|z|}e^{i\theta_1}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}} \tag{7.5}$$

$$w_2=\sqrt{|z|}e^{i\theta_2}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}+i\pi}=-\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}} \tag{7.6}$$

这说明,对于同一个自变量z,函数$w=\sqrt{z}$有两类不同的取值,这称为多值函数$w=\sqrt{z}$的两个单值分支.

多值函数的支点

我们仍然以$w=\sqrt{z}$为例,进一步讨论多值函数单值分支的问题.假若我们考虑其中一个单值分支$w_1=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}$,并且设$z$从某个点$z_0$出发,沿着一条闭合路径绕行一周重新回到$z_0$,那么此时$z$辐角的变化有两种可能,即$2\pi$和0.当所考虑的闭合回路包围$z=0$时,辐角改变为$2\pi$,而如果没有包围改点则为零.对于前者,我们有

$$w_1=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}+i\pi} \tag{7.7}$$

而此时$w_1=w_2$,说明函数的演化从单值分支w_1进入w_2,这样两个单值分支之间并不是独立的.而如果辐角改变为零,那么我们仍会在单值分支w_1而不进入w_2.

因此,我们发现$z=0$点具有这样的特点,即当z绕该点一周回到原处时,对应的函数值不复原.

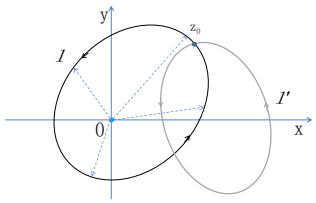


Figure 7.1: 多值函数$w=\sqrt{z}$在一阶支点$z=0$附近的演化.

- 对于多值函数$w=f(z)$,若z绕某点一周,函数值w不复原,而在该点各单值分支函数值相同,则称该点为多值函数$f(z)$的支点.
- 若z绕支点n周,函数值w复原,则该点称为多值函数的$n-1$阶支点.

对于函数$w=\sqrt{z}$,显然$z=0$是一阶支点,因为z绕$z=0$两周,w的值还原.当然,除了$z=0$之外,无穷远点也是该函数的一阶支点.可以令$z=\frac{1}{t}$,那么有

$$\sqrt{z}=\sqrt{\frac{1}{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-i\frac{1}{2}\arg t},\qquad \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-i\frac{1}{2}\arg t-i\pi} \tag{7.8}$$

当t绕$t=0$一周时,单值分支之间互相进入,函数值不复原,而绕两周之后,函数值复原,因此无穷远点也是该函数的一阶支点.

黎曼面

现在,我们尝试用更为形象化的方式来描述多值函数$w=\sqrt{z}$.首先,约定函数的两个单值分支,其自变量变化范围是$0\leqslant \mathrm{Arg}z<2\pi$(对于$w_1$) 和$2\pi\leqslant \mathrm{Arg}z<4\pi$(对于$w_2$).

然后考虑两个平行的无穷大复平面T_1和T_2.在平面T_1上,从$z=0$开始,沿正实轴方向至无穷远点将其割开,并且规定割线的上缘对应$\mathrm{Arg}z=0$, 下缘$\mathrm{Arg}z=2\pi$.这样,z在该平面上变化时,只要不跨过割线,那么其辐角便被限制在$0\leqslant \mathrm{Arg}z<2\pi$的范围内.相应的函数值$w_1$位于$w$所在复平面的上半平面.(因为相应$w_1$的辐角在$[0,\pi)$范围内.)在平面$T_2$上也作相应处理,但割线上缘对应$\mathrm{Arg}z=2\pi$,下缘对应$\mathrm{Arg}z=4\pi$,$z$在该平面上变化也不能越过割线.在$T_2$平面内$z$对应的$w_2$在$w$平面的下半平面.

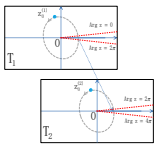


Figure 7.2: 多值函数$w=\sqrt{z}$的黎曼面以及自变量z的演化.

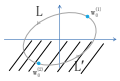


Figure 7.3: 多值函数$w=\sqrt{z}$在随z变化时w的变化情况.

显然,由于在分割开的两个平面T_1, T_2内,自变量z的变化不能越过割线,那么任何闭曲线都不包含支点$z=0$,因此函数值只能在相应的单值分支变化,不会出现单值分支之间的跳跃.

再把平面T_1, T_2作一下结合,即将T_1的割线上缘与T_2的下缘相连,T_1的下缘与T_2的上缘相连,这样构成了一个两叶的面,称为函数$w=\sqrt{z}$ 的黎曼面.

现在,我们考虑自变量z在这个双叶黎曼面上变化时,函数值w如何变化.设z从平面T_1 上某点$z_0^{(1)}$出发而连续变化.绕$z=0$一周,它的轨迹l将跨过割线$\mathrm{Arg}z=2\pi$而到达平面T_2上与$z_0^{(1)}$复数值完全相同的点$z_0^(2)$,相应的函数值从w_0^1沿与l相应的L路线到达w_0^2. 当z继续绕$z=0$一圈,它的轨迹l'将跨越连接起来的割线$\mathrm{Arg}z=0$和$\mathrm{Arg}z=4\pi$,相应的w值也从$w_0^{(2)}$沿相应路径L'从$w_0^{(2)}$回到$w_0^{(1)}$.这样,l与l'相接而构成黎曼面上的一条闭合路径,相应地,曲线L 与L'相接构成平面w上的的一条闭合路径.

因此,我们看到黎曼面上的点与w平面上的点一一对应,并且从黎曼面的结构看,两个单值分支互相衔接,可连续过渡.

多值函数的奇点

对于多值函数,除了单值函数的奇点之外,还需要考虑其本身所具有的支点.对于有限阶的支点,例如$m-1$阶支点,以多值函数$f(z)$的$m-1$阶支点z_0为圆心而内半径为零的圆环区域,在黎曼面上是m叶交错相连的圆环,函数在这些圆环上是解析的.引入新的自变量

$$\zeta = \sqrt[m]{z-z_0} = \sqrt[m]{|z-z_0|}e^{i\frac{1}{m}\mathrm{Arg}(z-z_0)} \tag{7.9}$$

由于ζ的辐角只是$z-z_0$的m分之一,因此其在黎曼面上是单叶圆环,没有多值性,那么$f(\zeta)$也就成为ζ的单值函数.在ζ平面上展开$f(z)$为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k \tag{7.10}$$

仿照单值函数极点的分类,我们有

- 洛朗级数如果没有负幂次项,则称z_0为$f(z)$的解析型支点;
- 洛朗级数包含有限个负幂次项,则称z_0为$f(z)$的极点型支点;
- 洛朗级数包含无限个负幂次项,则称z_0为$f(z)$的本性奇点型支点;

把z重新代回$f(z)$可得

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k/m} \tag{7.11}$$

这里幂指数k/m是分数,这是支点领域上展开的基本特点.

例 在$z_0=0$展开函数$f(z)=\frac{1}{4+\sqrt{z}}$.

注意到函数出现了$\sqrt{z}$,这说明函数的一阶支点是$z=0$,为了得到相应的洛朗展开形式,令$\zeta=\sqrt{z}$,则有

$$f(z) = \frac{1}{4+\zeta} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\zeta/4} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\zeta}{4}\right)^k, \quad (|\zeta|<4) \tag{7.12}$$

然后代回z可得

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k/2}}{4^{k+1}}, \quad (|z|<16) \tag{7.13}$$

这就是函数$f(z)=\frac{1}{4+\sqrt{z}}$在支点$z=0$附近领域的洛朗展开,可以看到关于$\zeta$的展开不包含任何负幂次项,因此$z=0$也是$f(z)$的解析型支点.

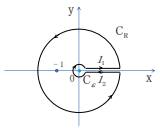


Figure 7.4: 计算定积分$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{1}{1+x}dx$ $(0<\alpha<1)$ 所取的积分路径.

留数定理求实函数积分

例 计算定积分$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{1}{1+x}dx$ $(0<\alpha<1)$..

把被积函数$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$从实轴解析延拓到复平面得到函数

$$f(z)=\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \tag{7.14}$$

显然,$z=-1$是函数的一阶极点.此外由于$0<\alpha<1$,因此x幂次不是整数,因而函数$f(z)$是多值函数,并且可以看到$z=0$和无穷远点是函数的支点(不是有限阶支点) 当z绕着支点一圈时,其辐角增加2π,相应的函数变为$\frac{z^{\alpha-1}e^{i2\pi(\alpha-1)}}{1+z}=\frac{z^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}}{1+z}=f(z)e^{i2\pi\alpha}$.

现在,从原点$z=0$沿着实轴至无穷远作切割,并考虑如图7.4的路径,则有

$$\oint_l f(z)dz=\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_\varepsilon^R\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_{C_R}f(z)dz+\int_R^\varepsilon\frac{e^{i2\pi\alpha}x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_{C_\varepsilon}f(z)dz\right] \tag{7.15}$$

首先,当$R\to\infty,\varepsilon\to0$时,等式左边按照留数定理等于所有有限远奇点的留数之和的$2\pi i$倍.注意到$f(z)$的奇点只有$z=-1$这个单极点,其留数为$\mathrm{Res}f(-1)=\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)=(-1)^{\alpha-1}$.

当$R\to\infty,\varepsilon\to0$时,等式右边第一项为所求的积分$I$,而通过逆向积分顺序可知第三项是$-e^{i2\pi\alpha}I$.这样有

$$2\pi i(-1)^{\alpha-1}=(1-e^{i2\pi\alpha})I+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}f(z)dz \tag{7.16}$$

而对于大圆上和小圆上的积分,我们可以有以下估计,

$$\lim_{R\to\infty}|\int_{C_R}f(z)dz|\leqslant\lim_{R\to\infty}\frac{R^{\alpha-1}}{1+R}2\pi R=\lim_{R\to\infty}2\pi\frac{1}{R^{1-\alpha}}=0 \tag{7.17}$$

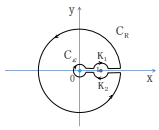


Figure 7.5: 计算定积分$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{1}{1-x}dx$ $(0<\alpha<1)$所取的积分路径.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\int_{C_\varepsilon} f(z)dz| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{1+\varepsilon}2\pi\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}2\pi\varepsilon^{\alpha}=0 \tag{7.18}$$

这里我们利用了条件$0<\alpha<1$.这样,在大圆和小圆上的积分都是零,因此,我们得到

$$I=\frac{2\pi i(-1)^{\alpha-1}}{1-e^{i2\pi\alpha}}=\frac{2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}}{1-e^{i2\pi\alpha}}=\frac{-2\pi i}{e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \tag{7.19}$$

为了得到最后的结果,我们已经把所有复数辐角限定于主值范围之内.

例 计算定积分$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{1}{1-x}dx$ $(0<\alpha<1)$.

与上一个例子类似,当把$f(x)=x^{\alpha-1}\frac{1}{1-x}$解析延拓至复平面时,可以发现$z=0$和无穷远点是函数的支点,并且奇点$z=1$在割线上.因此,在这里的计算中,割线需要绕过单极点$z=1$,其相应的积分路径如图7.5所示. 与先前的情况相同,大小圆上的积分都为零,而总路径l的回路积分并不包含任何奇点,因此也为零.则有

$$\oint_l f(z)dz=0=I-e^{i2\pi\alpha}I+\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{K_1}f(z)dz+\int_{K_2}f(z)dz\right) \tag{7.20}$$

上式右边第三项表示在单极点$z=1$附近的积分.直接计算可以发现,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{K_1}f(z)dz=\lim_{\delta\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{(1+\delta e^{i\varphi})^{\alpha-1}}{-\delta e^{i\varphi}}\delta i e^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^\pi d\varphi = i\pi \tag{7.21}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{K_2}f(z)dz=\lim_{\delta\to 0}e^{i2\pi(\alpha-1)}\int_{2\pi}^{\pi}\frac{(1+\delta e^{i\varphi})^{\alpha-1}}{-\delta e^{i\varphi}}\delta i e^{i\varphi}d\varphi = ie^{i2\pi\alpha}\int_\pi^{2\pi}d\varphi = i\pi e^{i2\pi\alpha} \tag{7.22}$$

注意到在计算K_2上的积分时,我们已经考虑了在割线下方所具有的额外因子$e^{i2\pi(\alpha-1)}$.因此,我们得到

$$I=\frac{e^{i2\pi\alpha}+1}{e^{i2\pi\alpha}-1}i\pi=\frac{e^{i2\pi\alpha}+e^{-i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}i\pi=\pi\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}=\pi\cot\pi\alpha \tag{7.23}$$

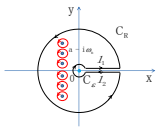


Figure 7.6: 计算费米子频率求和$F = -T\sum_n \ln(a - i\omega_n), \omega_n = (2n+1)\pi T$所取的积分路径.

一个应用:对数函数的频率求和

例 计算费米子频率求和$F = -T\sum_n \ln(a - i\omega_n), \omega_n = (2n+1)\pi T.$

首先,我们注意到这里涉及到对数函数$\ln z$,其是一个多值函数,支点是$z = 0$.因此在考虑此函数的积分时需要从实轴的0开始至$+\infty$作割线.然后当自变量z 绕过割线时,其辐角会增加2π,而相应的对数函数则增加$2\pi i$.($\ln z \to \ln z + 2\pi i$)

仿照先前处理频率求和的做法,我们设定义在复平面上的函数

$$f(z) = \frac{1}{e^{z/T}+1}\ln(a - z) \tag{7.24}$$

然后令$\zeta = a - z$,这样就有

$$f(\zeta) = \frac{1}{e^{(a-\zeta)/T}+1}\ln\zeta \tag{7.25}$$

对于$f(\zeta)$,可以看到其具有无穷多的单极点

$$\zeta = a - i\omega_n \tag{7.26}$$

以及$\zeta = 0$的支点.与先前的处理相同,我们构造一个大的回路积分包含所有单极点,(例如图7.6类型的回路)且绕开割线,则有

$$\begin{aligned}\oint_l f(\zeta)d\zeta &= \lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}[\int_{C_R} f(\zeta)d\zeta + \int_{C_\varepsilon} f(\zeta)d\zeta + \int_\varepsilon^R \frac{1}{e^{(a-\zeta)/T}+1}\ln\zeta d\zeta \\ &+ \int_R^\varepsilon \frac{1}{e^{(a-\zeta)/T}+1}(\ln\zeta + 2\pi i)d\zeta]\end{aligned} \tag{7.27}$$

对于左边的回路积分,根据留数定理可知其值等于所有极点留数和的$2\pi i$倍,即

$$\begin{aligned}\int_C f(\zeta)d\zeta &= 2\pi i\sum_n \mathrm{Res}f(\zeta=a-i\omega_n)\\ &= 2\pi i\sum_n \lim_{\zeta\to a-i\omega_n}\frac{\zeta-(a-i\omega_n)}{e^{(a-\zeta)/T}+1}\ln\zeta\\ &= 2\pi i\sum_n T\ln(a-i\omega_n) \qquad (7.28)\end{aligned}$$

对于右边的第一和第二项,与前面的情况相同,它们的贡献在$R\to\infty$以及$\epsilon\to 0$是都是零.然后第三项与第四项的第一部分互相抵消,因为其积分限恰好相反,这样剩下的就是由于穿过割线而导致的$2\pi i$因子部分的积分,即有

$$2\pi i\sum_n T\ln(a-i\omega_n)=2\pi i\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_R^{\varepsilon}\frac{1}{e^{(a-\zeta)/T}+1}d\zeta=-2\pi i\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{(a-\zeta)/T}+1}d\zeta \qquad (7.29)$$

最右边的积分可以积出

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{(a-\zeta)/T}+1}d\zeta=-T\ln(1+e^{-a/T}) \qquad (7.30)$$

这样我们得到

$$\boxed{\sum_n T\ln(a-i\omega_n)=T\ln(1+e^{-a/T})} \qquad (7.31)$$

因此,

$$F=-T\sum_n\ln(a-i\omega_n)=-T\ln(1+e^{-a/T}) \qquad (7.32)$$

注意到,这个F实际上就是一个单能级费米子系统$\hat{H}=a\hat{c}^{\dagger}\hat{c}$的自由能.

Chapter 8

积分变换与广义函数

傅里叶级数

在这一章,我们将讨论傅里叶级数(变换),拉普拉斯变换,Γ函数和δ函数.前两者主要适用于函数的展开而后两者是一些很特殊但在物理学研究中很常用的函数.

周期函数的傅里叶展开

若函数$f(x)$以$2l$为周期,即

$$f(x+2l)=f(x) \tag{8.1}$$

则可取三角函数族

$$1,\quad \cos\frac{\pi x}{l},\quad \cos\frac{2\pi x}{l},\ldots\cos\frac{k\pi x}{l},\ldots \tag{8.2}$$

$$\sin\frac{\pi x}{l},\quad \sin\frac{2\pi x}{l},\ldots\sin\frac{k\pi x}{l},\ldots \tag{8.3}$$

作为基本函数族来展开$f(x)$,

$$\boxed{f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)} \tag{8.4}$$

这个展开称为函数$f(x)$的傅里叶展开式,其中的系数a_k,b_k是傅里叶系数.

对于三角函数而言,它们彼此是正交的,也就是任意两个函数的乘积在一个周期内的积分为零,

$$\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=0\quad(k\neq 0)\\
&\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=0\\
&\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad(k\neq n)\\
&\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad(k\neq n)\\
&\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0
\end{aligned} \tag{8.5}$$

利用三角函数的正交性,可以求得展开的系数a_k,b_k分别为

$$\begin{aligned}
a_k&=\frac{1}{\delta_k l}\int_{-1}^{1}f(\zeta)\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta\\
b_k&=\frac{1}{l}\int_{-1}^{1}f(\zeta)\sin\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta
\end{aligned} \tag{8.6}$$

其中

$$\delta_k = \begin{cases} 2, & k = 0; \\ 1, & k \neq 0. \end{cases} \tag{8.7}$$

比如说,假设我们要计算系数a_0,那么最简单的方案就是对$f(x)$在$[-l, l]$做积分,这样有

$$\int_{-l}^{l} dx f(x) = a_0 2l + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \overbrace{\int_{-l}^{l} dx \cos \frac{k\pi x}{l}}^{=0} + b_k \overbrace{\int_{-l}^{l} dx \sin \frac{k\pi x}{l}}^{=0} \right) = 2l a_0 \tag{8.8}$$

我们发现$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} dx f(x)$,这说明$a_0$可以理解为函数$f(x)$在区间$[-l, l]$上的平均值.

那么,如何判断傅里叶级数的收敛性呢？狄里希利定理实际上给出了相应的判断依据.

- 狄里希利定理:若函数$f(x)$满足条件(1)处处连续,或是在每个周期中只有有限个第一类间断点;(2)在每个周期中只有有限个极值点,那么级数收敛且级数和等于$f(x)$(在连续点x)或者$(f(x+0) + f(x-0))/2$(在间断点x).

奇函数及偶函数的傅里叶展开

若周期函数$f(x)$是奇函数,则由傅里叶展开系数可知,a_0, a_k都等于零,则展开式简化为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{8.9}$$

这称为傅里叶正弦级数,由于对称性,其展开系数为

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\zeta) \sin \frac{k\pi \zeta}{l} d\zeta = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(\zeta) \sin \frac{k\pi \zeta}{l} d\zeta. \tag{8.10}$$

若周期函数为偶函数,那么所有的b_k都为零,展开式是

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \tag{8.11}$$

这个称为傅里叶余弦级数,展开系数是

$$a_k = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(\zeta) \cos \frac{k\pi \zeta}{l} d\zeta. \tag{8.12}$$

定义在有限区间上的函数的傅里叶展开

对于在有限区域上的函数$f(x)$,可以采用解析延拓的方法,使其成为某种周期函数$g(x)$.

复数形式的傅里叶级数

取一系列复指数函数,

$$...,e^{-i\frac{k\pi x}{l}},...,e^{-i\frac{2\pi x}{l}},e^{-i\frac{\pi x}{l}},1,e^{i\frac{\pi x}{l}},e^{i\frac{2\pi x}{l}},...,e^{i\frac{k\pi x}{l}},... \tag{8.13}$$

作为基本函数族,这些函数是正交的,满足

$$\int_{-l}^{l} e^{i\frac{k\pi x}{l}}[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* dx = 0 \quad (k \neq n) \tag{8.14}$$

这样,可以将周期函数$f(x)$展开为复数形式的傅里叶级数,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} \tag{8.15}$$

其展开系数是

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\zeta)[e^{i\frac{k\pi\zeta}{l}}]^* d\zeta \tag{8.16}$$

- 在实际应用中,我们往往遇到的情况是$f(x)$仅在一些分立的点x_j上有取值,(假设这些取值共有n个)此时我们仍然可以做傅里叶级数展开,即$f(x = x_j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}(j-1)}$以及其逆变换$c_k = \sum_{j=1}^{n} f(x = x_j)e^{-i\frac{2\pi(k-1)}{n}(j-1)}$.[1]

对于实函数,傅里叶系数满足$c_k = c_{-k}^*$.为了得到这个结果,我们对$f(x)$的傅里叶级数取复共轭,则有

$$f^*(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-i\frac{k\pi x}{l}} \tag{8.17}$$

对于实函数而言$f(x) = f^*(x)$,这样就有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-i\frac{k\pi x}{l}} \tag{8.18}$$

在上式右边令$k \to -k$,则有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* e^{i\frac{k\pi x}{l}} \tag{8.19}$$

因此我们发现$c_k = c_{-k}^*$.

[1]这两个展开可以在matlab中用$f = ifft(c)$和$c = fft(f)$分别实现,这里f, c 都是向量,用以表示傅里叶展开前后的函数.严格来说,$fft(), ifft()$实际上采用快速傅里叶变换算符来计算.

傅里叶积分与变换

实数形式的傅里叶变换

如果函数$f(x)$是定义在$(-\infty,\infty)$上的一般函数,不具有周期性,不能直接用傅里叶级数展开,但是我们可以把它看作是某个周期函数$g(x)$在周期$2l\to\infty$时的极限情况,这样,$g(x)$的傅里叶级数展开是

$$g(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{8.20}$$

在$l\to\infty$时的极限情形就是我们所要的非周期函数$f(x)$的傅里叶展开.

引入$\omega_k=\frac{k\pi}{l},k=0,1,2,...,\Delta\omega_k=\omega_k-\omega_{k-1}=\pi/l$,这样有

$$g(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\omega_k x+b_k\sin\omega_k x\right), \tag{8.21}$$

其中展开系数可以写成

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\delta_k l}\int_{-l}^{l}f(\zeta)\cos(\omega_k\zeta)d\zeta\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\zeta)\sin(\omega_k\zeta)d\zeta.\end{aligned} \tag{8.22}$$

然后,我们取$l\to\infty$的极限,此时若$\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}f(\zeta)d\zeta$有限,那么

$$\lim_{l\to\infty}a_0=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\zeta)d\zeta=0 \tag{8.23}$$

余弦部分为

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\zeta)\cos(\omega_k\zeta)d\zeta\right]\cos(\omega_k x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(\zeta)\cos(\omega_k\zeta)d\zeta\right]\cos(\omega_k x)\cdot\Delta\omega_k \tag{8.24}$$

当$l\to\infty,\Delta\omega_k=\frac{\pi}{l}\to d\omega$,不连续变量$\omega_k$成为连续变量,记为$\omega$,对$k$的求和变成对连续变量$\omega$的积分,因此有

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\zeta)\cos(\omega_k\zeta)d\zeta\right]\cos(\omega_k x)=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\cos(\omega\zeta)d\zeta\right]\cos(\omega x)d\omega \tag{8.25}$$

同理,正弦部分的极限是

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\zeta)\sin(\omega_k\zeta)d\zeta\right]\cos(\omega_k x)=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\sin(\omega\zeta)d\zeta\right]\cos(\omega x)d\omega \tag{8.26}$$

于是我们得到

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)d\omega+\int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)d\omega \tag{8.27}$$

这个称为函数$f(x)$的傅里叶积分形式,其中的系数$A(\omega),B(\omega)$满足所谓的傅里叶变换式

$$\begin{aligned}A(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\zeta)\cos(\omega\zeta)d\zeta\\ B(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\zeta)\sin(\omega\zeta)d\zeta\end{aligned} \tag{8.28}$$

当然,一个函数是否可以表示为傅里叶积分形式是需要满足一定的条件的,这个条件由傅里叶积分定理描述,即

- 若函数$f(x)$在区间$(-\infty,\infty)$上满足:(1)$f(x)$在任意有限区间上满足狄里希利条件;(2)$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上绝对可积(即$\int_{-\infty}^\infty dx|f(x)|$收敛),则$f(x)$可表示成傅里叶积分.

$\int_{-\infty}^\infty dx|f(x)|$收敛实际上意味着$f(x\to\pm\infty)=0$,这说明很多常见函数$(\sin x,\cos x,e^x,\ln x)$原则上不能展开为傅里叶积分.需要指出,我们在具体物理问题中总是假设傅里叶积分存在.

和傅里叶级数的情况一样,奇函数$f(x)$的傅里叶积分是傅里叶正弦积分

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)d\omega \tag{8.29}$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\zeta)\sin(\omega\zeta)d\zeta \tag{8.30}$$

而偶函数对应于傅里叶余弦积分

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)d\omega \tag{8.31}$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\zeta)\cos(\omega\zeta)d\zeta. \tag{8.32}$$

例 矩形函数$\mathrm{rect}(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{1}{2};\\ 0, & |x|>\frac{1}{2}.\end{cases}$.试着将矩形脉冲$f(t)=h\cdot\mathrm{rect}(\frac{t}{2T})$展开为傅里叶积分.

由于$f(t)$是偶函数,因此可以展开为傅里叶余弦积分的形式,即

$$f(t)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos(\omega t)d\omega \tag{8.33}$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_o^{\infty}h\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\zeta}{2T}\right)\cos(\omega\zeta)d\zeta=\frac{2}{\pi}\int_o^{T}h\cdot\cos(\omega\zeta)d\zeta=\frac{2h}{\pi}\frac{\sin(\omega T)}{\omega}. \tag{8.34}$$

例 由$2N$个正弦波组成的有限正弦波列$f(t)=\begin{cases}A\sin(\omega_0 t), & |t|<\frac{2N\pi}{\omega_0};\\ 0, & |t|>\frac{2N\pi}{\omega_0}.\end{cases}$.试着将其展开为傅里叶积分.

$f(t)$是奇函数,因此可以展开为傅里叶正弦积分

$$f(t)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin(\omega t)d\omega \tag{8.35}$$

$$B(\omega)=\frac{2A}{\pi}\int_o^{\frac{2N\pi}{\omega}}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)dt=-\frac{A}{\pi}\int_o^{\frac{2N\pi}{\omega}}[\cos(\omega+\omega_0)t+\cos(\omega-\omega_0)t]dt=\frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}2\pi N\right). \tag{8.36}$$

复数形式的傅里叶积分

除了实数形式的傅里叶积分,我们还可以用复数形式的傅里叶积分.由于

$$\cos\omega x=\frac{1}{2}(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}),\quad \sin\omega x=\frac{1}{2i}(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}) \tag{8.37}$$

那么有

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\left[A(\omega)-iB(\omega)\right]e^{i\omega x}d\omega+\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\left[A(\omega)+iB(\omega)\right]e^{-i\omega x}d\omega \tag{8.38}$$

在第二个积分中将ω换成$-\omega$,有

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\left[A(\omega)-iB(\omega)\right]e^{i\omega x}d\omega+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\left[A(|\omega|)+iB(|\omega|)\right]e^{i\omega x}d\omega \tag{8.39}$$

合并两个积分可得

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{8.40}$$

其中

$$F(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[A(\omega)-iB(\omega)\right], & (\omega\geq 0);\\ \frac{1}{2}\left[A(|\omega|)+iB(|\omega|)\right], & (\omega<0).\end{cases} \tag{8.41}$$

对于$\omega \geq 0$,有

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\omega x) - i\sin(\omega x)]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad (8.42)$$

对于$\omega < 0$,有

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(|\omega|x) + i\sin(|\omega|x)]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i|\omega|x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

因此,$\omega \geq 0$与$\omega < 0$都对应同样的$F(\omega)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad (8.43)$$

我们把$F(\omega)$称为$f(x)$的复数形式的傅里叶积分表示,并且还有更为对称的形式

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\ F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \end{aligned} \quad (8.44)$$

可以用符号简写

$$F(\omega) = \mathfrak{F}(f(x)) \quad f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(F(x)) \quad (8.45)$$

$f(x)$和$F(\omega)$分别称为傅里叶变换的原函数和像函数.

傅里叶变换的基本性质

(1)导数定理

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega) \quad (8.46)$$

也就是一个函数导数的傅里叶变换等于像函数乘以$i\omega$.这个结果证明如下:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f'(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{dx}(f(x)e^{-i\omega x}) - f(x)\frac{d}{dx}e^{-i\omega x}\right]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}(f(x)e^{-i\omega x})_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \end{aligned} \quad (8.47)$$

由于我们已经假定$f(\pm\infty) = 0$,因此上式第一项为零,而第二项就是$i\omega F(\omega)$,这样我们发现$\mathfrak{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega)$.

(2)积分定理

$$\mathfrak{F}\left[\int^{(x)} f(\zeta)d\zeta\right] = \frac{F(\omega)}{i\omega} \quad (8.48)$$

设$\int^{(x)} f(\zeta)d\zeta = \varphi(x)$,那么$\varphi'(x) = f(x)$.现在,让我们对$\varphi'(x)$利用导数定理,那么有

$$\mathfrak{F}[\varphi'(x)] = i\omega\mathfrak{F}[\varphi(x)] \Rightarrow \overbrace{\mathfrak{F}[f(x)]}^{=F(\omega)} = i\omega\mathfrak{F}\left[\int^{(x)} f(\zeta)d\zeta\right] \tag{8.49}$$

把$i\omega$除到左边就得到积分定理.

(3)相似性定理

$$\mathfrak{F}\left[f(ax)\right] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0 \tag{8.50}$$

由定义可知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[f(ax)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i\frac{\omega}{a}ax}\frac{d(ax)}{a} \\ &= \frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{\omega}{a}y}dy = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a}).\end{aligned} \tag{8.51}$$

(4)延迟定理

$$\mathfrak{F}\left[f(x-x_0)\right] = e^{-i\omega x_0}F(\omega) \tag{8.52}$$

由定义可知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[f(x-x_0)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x+x_0)}dx \\ &= e^{-i\omega x_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = e^{-i\omega x_0}F(\omega).\end{aligned} \tag{8.53}$$

(5)位移定理

$$\mathfrak{F}\left[e^{i\omega_0 x}f(x)\right] = F(\omega-\omega_0) \tag{8.54}$$

由定义可知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[e^{i\omega_0 x}f(x)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 x}f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\omega_0)x}dx \\ &= F(\omega-\omega_0).\end{aligned} \tag{8.55}$$

(6)卷积定理 设两个函数的傅里叶变换分别是$\mathfrak{F}[f_1(x)] = F_1(\omega), \mathfrak{F}[f_2(x)] = F_2(\omega)$,则

$$\mathfrak{F}[f_1(x) * f_2(x)] = 2\pi F_1(\omega)F_2(\omega). \tag{8.56}$$

其中我们定义

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\zeta)f_2(x-\zeta)d\zeta, \tag{8.57}$$

为函数f_1, f_2的卷积,这个卷积是x的函数.

根据定义,卷积的傅里叶变换是

$$\mathfrak{F}[f_1(x)*f_2(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta f_1(\zeta)f_2(x-\zeta) \tag{8.58}$$

然后我们添加因子$e^{i\omega\zeta}e^{-i\omega\zeta}=1$可得

$$\mathfrak{F}[f_1(x)*f_2(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta e^{-i\omega\zeta}f_1(\zeta)\left[\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-i\omega(x-\zeta)}f_2(x-\zeta)\right]. \tag{8.59}$$

令$y=x-\zeta$,那么有

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f_1(x)*f_2(x)] &= \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta e^{-i\omega\zeta}f_1(\zeta)}^{=F_1(\omega)}\overbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}dye^{-i\omega y}f_2(y)\right]}^{=2\pi F_2(\omega)}\\ &= 2\pi F_1(\zeta)F_2(\omega).\end{aligned} \tag{8.60}$$

多重傅里叶积分

函数的傅里叶积分可以不局限于一维,对于一般的空间维度,我们都可以作相应的傅里叶积分变换.对于三维空间中的函数$f(x,y,z)$,有

$$f(x,y,z)=\int\int\int_{-\infty}^{\infty}F(k_x,k_y,k_z)e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}dk_1dk_2dk_3 \tag{8.61}$$

$$F(k_x,k_y,k_z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)e^{-i(k_xx+k_yy+k_zz)}dxdydz \tag{8.62}$$

我们也可以引入矢量符号$\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z,\vec{k}=k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z$,那么有

$$f(\vec{r})=\int d^3\vec{k}F(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{8.63}$$

$$F(\vec{k})=\int d^3\vec{r}f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{8.64}$$

- 多重傅里叶积分的计算通常是困难的,因此我们往往采用数值计算来实现.当然最简单的方案是采用离散化思想,也就是把积分转换为求和.当然速度最快的方式是采用matlab内置的快速傅里叶变换函数$fftn(),ifftn()$来实现n维(离散的)傅里叶变换.

例 求汤川势$V(\vec{r})=\frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$的傅里叶积分.这里的汤川势是汤川秀树提出的,用于解释原子核中质子与中子相互作用力的理论模型.$\mu>0$相当于传递相互作用粒子的质量,这里可以认为是介子的质量.

根据傅里叶积分的定义,我们有

$$V(\vec{r}) = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} V(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \tag{8.65}$$

而傅里叶系数$V(\vec{k})$则有(采用球坐标)

$$\begin{aligned} V(\vec{k}) &= \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r^2 dr \frac{e^{-\mu r}}{r} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta e^{-ikr\cos\theta} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r^2 dr \frac{e^{-\mu r}}{r} \int_{-1}^{1} dx e^{-ikrx} = \frac{2\pi}{ik} \int_0^{\infty} dr (e^{(-\mu+ik)r} - e^{(-\mu-ik)r}) \\ &= \frac{2\pi}{ik} \left(\frac{e^{(-\mu+ik)\infty} - 1}{-\mu + ik} + \frac{e^{(-\mu-ik)\infty} - 1}{-\mu - ik} \right) = \frac{4\pi}{\mu^2 + k^2} = \frac{4\pi}{\mu^2 + \vec{k}^2} \end{aligned} \tag{8.66}$$

注意到上式中μ是大于零的有限值,因此$e^{-\mu\infty} = 0$,这样没有明确取值的$e^{iq\infty}$部分的贡献就可不用考虑.

拉普拉斯变换

拉普拉斯(Laplas,1749 – 1827年)是法国数学家与天文学家,主要研究天体力学和物理学.他认为数学只是一种解决问题的工具,但在运用数学时创造和发展了许多新的数学方法.1812年拉普拉斯在概率的分析理论中总结了当时整个概率论的研究,论述了概率在选举,审判调查,气象等方面的应用,并导入拉普拉斯变换.拉普拉斯变换导致了后来海维塞德(Heaviside)发现运算微积分在电工理论中的应用.

拉普拉斯变换是工程数学中常用的一种积分变换,又名拉氏变换.拉氏变换是一个线性变换,可将一个有参数实数$t \geqslant 0$的函数转换为一个参数为复数的函数.拉普拉斯变换在许多工程技术和科学研究领域中有着广泛的应用,特别是在力学系统,电学系统,自动控制系统,可靠性系统以及随机服务系统等系统科学中都起着重要作用.

拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换定义为如下的积分变换:

$$\boxed{F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt} \tag{8.67}$$

这里$p = s + i\sigma$是复数,(s, σ为实数)$f(t)$称为原函数,满足$t \geqslant 0$,$F(p)$是像函数.我们可以把$f(t)$与$F(p)$之间的拉普拉斯变换关系简记为

$$f(t) \fallingdotseq F(p), \qquad F(p) \risingdotseq f(t) \tag{8.68}$$

拉普拉斯变换的逆变换

拉普拉斯变换也存在逆变换,即黎曼-梅林反演公式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta+i\infty}^{\beta-i\infty} F(p)e^{pt}dp \tag{8.69}$$

其中β是一个巨大的正数,以保证积分收敛.

用定义求几个典型函数的拉普拉斯变换像函数

1. $f(t) = 1$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{-p}e^{-pt}|_0^\infty = \frac{1}{-p}(e^{-p\infty} - 1) \tag{8.70}$$

注意到$p=s+i\sigma$,则$e^{-p\infty}=e^{-s\infty}e^{i\sigma\infty}$,此时若$s>0$,即$\mathrm{Re}(p)>0$.那么$e^{-p\infty}\to 0$,此时我们得到 $F(p)=\frac{1}{p}$,即

$$1 \fallingdotseq \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}(p)>0 \tag{8.71}$$

2. $f(t)=t$

$$F(p)=\int_0^\infty te^{-pt}dt \tag{8.72}$$

注意到

$$d(te^{-pt})=e^{-pt}dt-pte^{-pt}dt \tag{8.73}$$

这样$te^{-pt}dt=\frac{1}{p}e^{-pt}dt-\frac{1}{p}d(te^{-pt})$，因此

$$F(p)=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt-\frac{1}{p}\int_0^\infty d(te^{-pt})=\frac{1}{p}\frac{1}{-p}e^{-pt}|_0^\infty-\frac{1}{p}(te^{-pt})|_0^\infty=\frac{1}{p^2}, \quad \mathrm{Re}(p)>0 \tag{8.74}$$

3. $f(t)=t^n$采用与2中相同的分部积分,我们发现

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^\infty t^n e^{-pt}dt=\frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-pt}dt=\frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-pt}dt \\ &= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}...\frac{2-1}{p}\int_0^\infty t^0e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}},\ \mathrm{Re}(p)>0 \end{aligned} \tag{8.75}$$

4. $f(t)=e^{\alpha t}$

$$F(p)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}dt=\frac{1}{p-\alpha}, \quad \mathrm{Re}(p-\alpha)>0 \tag{8.76}$$

5. $f(t)=t^\alpha$

$$F(p)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-pt}dt \tag{8.77}$$

令$\tau=pt$,则

$$F(p)=\int_0^\infty \frac{\tau^\alpha}{p^\alpha}e^{-\tau}\frac{d\tau}{p}=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^\infty \tau^\alpha e^{-\tau}d\tau=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \mathrm{Re}(\alpha)>-1,\mathrm{Re}(p)>0 \tag{8.78}$$

这里$\Gamma(x)$是Gamma函数,当$\alpha=-1/2$时有$F(p)=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$.

6. $f(t)=\sin\sqrt{t}$

$$F(p)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}e^{\frac{1}{4p}} \tag{8.79}$$

拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性定理:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \fallingdotseq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) \tag{8.80}$$

2. 延迟定理

$$f(t-\tau) \fallingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0 \tag{8.81}$$

3. 位移定理

$$e^{-\lambda t} f(t) \fallingdotseq F(p+\lambda) \tag{8.82}$$

4. 卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \fallingdotseq F_1(p) F_2(p) \tag{8.83}$$

其中卷积$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$,这说明卷积的拉普拉斯变换是各自函数拉普拉斯变换的乘积.

5. 微分定理

$$f'(t) \fallingdotseq pF(p) - f(0), \quad f''(t) \fallingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$f^n(t) \fallingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - pf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

6. 标度变换定理

$$f(\alpha t) \fallingdotseq \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha}), \quad \alpha > 0 \tag{8.84}$$

7.周期函数变换定理

$$f(t) \fallingdotseq \frac{\int_0^T f(\tau) e^{-p\tau} d\tau}{1 - e^{-pt}} \tag{8.85}$$

这里$f(t) = f(t+T)$是周期为T的函数.

上面这些性质的证明基本上可以仿照傅里叶变换性质的推导来进行,因此这里不再赘述.

拉普拉斯变换的反演

最一般性的反演求法是借助黎曼-梅林公式,但对更为简单的情形,可以把待求函数化为如下结果的形式:

$$1 \fallingdotseq \frac{1}{p}, \quad t \fallingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad t^n \fallingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad e^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{1}{p-\alpha}, \quad t^n e^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}} \tag{8.86}$$

$$\sin(\alpha t) \fallingdotseq \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \cos(\alpha t) \fallingdotseq \frac{p}{p^2+\alpha^2}, \quad \sinh(\alpha t) \fallingdotseq \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}, \quad \cosh(\alpha t) \fallingdotseq \frac{p}{p^2-\alpha^2},$$
$$t^\alpha e^{-\beta t} \fallingdotseq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+\beta)^{\alpha+1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

例 求$\frac{1}{p^3(p+\alpha)}$的反演.

令

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{A}{p^3} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} + \frac{D}{p+\alpha} \tag{8.87}$$

这里A, B, C, D是待定系数.通过两边乘p^3可得

$$\frac{1}{p+\alpha} = A + Bp + Cp^2 + D\frac{p^3}{p+\alpha} \tag{8.88}$$

令$p=0$,可得$A=\frac{1}{\alpha}$.在上式的基础上对p求导可得

$$-\frac{1}{(p+\alpha)^2} = B + 2Cp + D\frac{2p^3+3p^2\alpha}{(p+\alpha)^2} \tag{8.89}$$

令$p=0$可得$B=-\frac{1}{\alpha^2}$.在上式中再对p求导可得

$$\frac{2}{(p+\alpha)^3} = 2C + D\frac{6p^2+6p\alpha}{(p+\alpha)^2} - 2D\frac{2p^3+3p^2\alpha}{(p+\alpha)^3} \tag{8.90}$$

令$p=0$可得$C=\frac{1}{\alpha^3}$.最后,我们再对p求导并令$p=0$得到$D=-\frac{1}{\alpha^3}$.这样可得,

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha} \tag{8.91}$$

通过对每一项反演可得

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha}\frac{t^2}{2} - \frac{1}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3}e^{-\alpha t}. \tag{8.92}$$

拉普拉斯变换的应用

拉普拉斯变换的基本应用是求解某些常微分方程,这里需要强调的是,从拉普拉斯变换$F(p)$到原函数$f(t)$的反演并不唯一,但若假设$f(t)$为连续函数,则有唯一的$F(p)$与$f(t)$对应.

例 用拉普拉斯变换求解LR电路方程$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E, t > 0$.这里$L, R, E$为常数,$I(0) = 0$.

记$I(t) \rightleftharpoons I(p)$,则有

$$\frac{d}{dt}I(t) \rightleftharpoons pI(p) - I(0) = pI(p). \tag{8.93}$$

对LR电路方程两边作拉普拉斯变换可得

$$LpI(p) + RI(p) = \frac{E}{p} \tag{8.94}$$

即有

$$I(p)=\frac{E}{Lp+R}\frac{1}{P}=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{L}{Lp+R}\right). \tag{8.95}$$

对上式每一项作反演可得

$$I(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-(R/L)t}\right). \tag{8.96}$$

例 用拉普拉斯变换求解方程$y''(t)+y(t)=2,t>0,y(0)=0,y'(0)=1$.

记$y(t)\fallingdotseq Y(p)$,则有

$$y''(t)\fallingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-1 \tag{8.97}$$

对方程两边作拉普拉斯变换可得

$$p^2Y(p)-1+Y(p)=\frac{2}{p} \tag{8.98}$$

即有

$$Y(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2}{p}-\frac{2p}{p^2+1}. \tag{8.99}$$

对上式每一项作反演可得

$$y(t)=\sin(t)+2-2\cos(t). \tag{8.100}$$

例 用拉普拉斯变换求解方程$y''(t)-k^2y(t)=f(t),t>0,y(0)=c_0,y'(0)=c_1$.

记$y(t)\fallingdotseq Y(p),f(t)\fallingdotseq F(p)$,则有

$$y''(t)\fallingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0) \tag{8.101}$$

对原始方程两边都作拉普拉斯变换可得

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-k^2Y(p)=F(p) \tag{8.102}$$

即有

$$Y(p)=\frac{F(p)+py(0)+y'(0)}{p^2-k^2}=\frac{F(p)}{p^2-k^2}+\frac{pc_0}{p^2-k^2}+\frac{c_1}{p^2-k^2} \tag{8.103}$$

对上式每一项作反演可得

$$\frac{p}{p^2-k^2}\fallingdotseq\cosh(kt) \tag{8.104}$$

$$\frac{k}{p^2-k^2}\fallingdotseq\sinh(kt) \tag{8.105}$$

$$\frac{F(p)}{p^2-k^2}=\frac{1}{k}F(p)\frac{k}{p^2-k^2}\fallingdotseq\frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sinh k(t-\tau)d\tau \tag{8.106}$$

第三式用到了卷积定理.这样可得

$$y(t)=c_0\cosh(kt)+\frac{c_1}{k}\sinh(kt)+\frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sinh k(t-\tau)d\tau. \tag{8.107}$$

δ函数

由量子力学的开创者Dirac所引入的δ函数是一个很有用且性质奇妙的函数,它在经典物理,量子力学,固体物理以及量子场论中都有广泛的应用.这一节我们将讨论这个函数的性质.

δ函数的定义

δ函数定义为

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & (x\neq 0);\\ \infty, & (x=0).\end{cases} \tag{8.108}$$

这意味着δ函数的图像是无限高且无穷窄的.δ函数的积分为

$$\int_a^b \delta(x)dx=\begin{cases}0, & (ab>0);\\ 1, & (a<0<b).\end{cases} \tag{8.109}$$

这意味着

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)=1, \tag{8.110}$$

这说明δ函数的图形具有单位面积.

让我们进一步分析δ函数的物理含义.从定义来看,δ函数是一个点源函数,可以表示位于x_0点而质量为m的质点的线密度$m\delta(x-x_0)$,位于x_0点而电荷为q的点电荷的线密度$q\delta(x-x_0)$.

另一方面,δ函数实际上是有量纲的,其量纲就是$1/x$的量纲.

δ函数的一些性质

1.δ函数是偶函数,它的导数是奇函数,即有

$$\delta(x)=\delta(-x),\quad \delta'(x)=-\delta'(-x). \tag{8.111}$$

2.δ函数积分可以定义所谓的阶跃函数$H(x)$(也叫亥维赛单位函数)

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)dt=\begin{cases}0, & (x<0);\\ 1, & (x>0).\end{cases} \tag{8.112}$$

而该函数的导数就是δ函数，

$$\delta(x)=\frac{dH(x)}{dx} \tag{8.113}$$

3.δ函数具有选择性,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = f(t_0). \tag{8.114}$$

4.若$\varphi(x) = 0$的实根是x_k $(k = 1, 2, 3...)$,并且这些根都是单根,那么有

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|\varphi'(x_k)|}. \tag{8.115}$$

例 计算积分$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2\delta(x - x_0)$.利用$\delta$函数的特性可得 $I = x_0^2$

例 $\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a)}{2|a|} + \frac{\delta(x+a)}{2|a|} = \frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|a|} = \frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|x|}$

δ函数是一种广义函数

显然,δ函数不是正常的函数,因为其具有显著的奇异性(发散)特征.在实际使用中,我们可以把δ函数看作是某些函数的极限,例如

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(Kx)}{x},\\ \delta(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2},\end{aligned} \tag{8.116}$$

特别是第二种形式,在数值计算中是十分常用的,因此,我们来证明这个公式.设$a < 0 < b$,那么

$$\int_a^b dx \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi}\int_a^b dx \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi\varepsilon}\left[\arctan\frac{b}{\varepsilon} - \arctan\frac{a}{\varepsilon}\right] = 1$$

另一方面,

$$x = 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \infty, \tag{8.117}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = 0. \tag{8.118}$$

通过以上关系可知,$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$是$\delta$函数的一种等价表示形式.

δ函数的傅里叶变换

虽然δ函数在$x = 0$处有奇异性,但是由于$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1 < \infty$并且$\delta(\pm\infty) = 0$,这说明$\delta$函数可以做傅里叶变换.形式上,$\delta$函数可以写成

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{8.119}$$

其傅里叶变换系数可以直接计算:

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega\cdot 0}=\frac{1}{2\pi}. \tag{8.120}$$

这说明δ函数的傅里叶变换是最简单的常数.这样,我们发现δ函数的傅里叶积分是

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega. \tag{8.121}$$

此外,我们也可以定义高维的δ函数,例如

$$\delta(\vec{r})=\begin{cases}0, & (\vec{r}\neq 0);\\ \infty, & (\vec{r}=o).\end{cases} \tag{8.122}$$

$$\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\vec{r})d\vec{r}=1 \tag{8.123}$$

在直角坐标系中,三维δ函数$\delta(\vec{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

例 计算$\frac{1}{|\vec{r}|}\delta(|\vec{r}|-c)(c>0)$的傅里叶变换.

我们取以原点为球心的球坐标,那么$\frac{1}{|\vec{r}|}\delta(|\vec{r}|-c)=\frac{1}{r}\delta(r-c)$,这样根据傅里叶变换的定义则有

$$\begin{aligned}
F\left[\frac{1}{|\vec{r}|}\delta(|\vec{r}|-c)\right] &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{r}\frac{1}{|\vec{r}|}\delta(|\vec{r}|-c)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\infty}r^2dr\frac{1}{r}\delta(r-c)e^{-i|\vec{k}|r\cos\theta}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{1}d\cos\theta\int_0^{\infty}rdr\delta(r-c)e^{-i|\vec{k}|r\cos\theta}\\
&= \frac{c}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{1}d\cos\theta e^{-ic|\vec{k}|\cos\theta}=\frac{c}{(2\pi)^2}\frac{1}{-ic|\vec{k}|}(e^{-ic|\vec{k}|x})_{x=-1}^{x=1}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{e^{ic|\vec{k}|}-e^{-ic|\vec{k}|}}{i|\vec{k}|}.
\end{aligned} \tag{8.124}$$

Γ函数

Γ函数在理论物理学研究中常常遇到的一类重要函数,其广泛出现在量子场论,超弦理论,统计物理以及凝聚态理论的话题中.

实变量的Γ函数

$$\boxed{\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.\quad (x>0)} \tag{8.125}$$

上式定义了实变量的Γ函数,(Γ这个记号来自于勒让德(Legendre))由此可得

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}|_0^\infty=1$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt=\int_0^\infty e^{-t}2d(\sqrt{t})=2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{t})^2}d(\sqrt{t})=\sqrt{\pi}$$

此外,对$\Gamma(x+1)$分布积分可得递推公式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{8.126}$$

当x为正整数n时,

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)(n-2)...1=n! \tag{8.127}$$

因此自变量为正整数的Γ函数就是阶乘.

注意到Γ函数的递推公式是在$x>0$情况下推导得到,如果把Γ函数向$x<0$区域延拓,也就是假设递推公式$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$在$x<0$区域内也可以使用,即令在$(-1,0)$上有

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1) \tag{8.128}$$

等式右边的$x+1\in(0,1)$可以按照正数范围内的Γ函数来理解,其有明确定义.对于区间$(-2,-1)$,则有

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)=\frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2) \tag{8.129}$$

以此类推可得区间$(-n,-n+1)$有

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)=\frac{1}{x(x+1)...(x+n-1)}\Gamma(x+n) \tag{8.130}$$

显然,我们可以发现$\Gamma(x)=\frac{1}{0}\Gamma(1)=\infty$,并且$\Gamma(-1),\Gamma(-2),...$,也就是如果自变量是零或者是负整数,相应的函数值为无穷大.

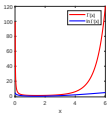


Figure 8.1: $\Gamma(x)$以及$\ln\Gamma(x)$在$(0,6)$区间上的取值。

复变量的Γ函数

复变量的Γ函数定义为

$$\boxed{\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\quad (\mathrm{Re}(z)>0)} \tag{8.131}$$

这个形式相当于把实数形式直接解析延拓至复平面.而从递推关系的角度出发,复数形式的递推关系则是

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{8.132}$$

在一般物理和工程应用中的常用形式是

$$\boxed{\int_0^\infty t^b e^{-at}dt=\frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}}} \tag{8.133}$$

例 用Γ函数表示积分$I=\int_0^\infty dte^{i\omega t}t^{1/2}$.由于$a=-i\omega, b=1/2$,那么有$I=\frac{\Gamma(3/2)}{(-i\omega)^{3/2}}=\frac{\sqrt{\pi}/2}{(-i\omega)^{3/2}}$.

Γ函数的极点

Γ函数也可以写成

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)...(z+n-1)}\Gamma(z+n),\quad (\mathrm{Re}(z+n)>0) \tag{8.134}$$

而根据这个形式,我们可以看到$\Gamma(z)$的极点是$z=0$以及所有负整数,并且是单极点.

$$\lim_{z\to -k}(z+k)\Gamma(z)=\lim_{z\to -k}\frac{(z+k)}{z(z+1)...(z+n-1)}\Gamma(z+n)\quad (\mathrm{Re}(z+n)>0) \tag{8.135}$$

当$k=0$,我们有

$$\lim_{z\to 0}z\Gamma(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{z}\Gamma(z+1)=\Gamma(1)=1 \tag{8.136}$$

这说明$z=0$是$\Gamma(z)$的一阶极点,且留数为1.而当$k=-1$时,

$$\lim_{z\to -1}(z+1)\Gamma(z)=\lim_{z\to -1}\frac{(z+1)}{z(z+1)}\Gamma(z+2)=-\Gamma(1)=-1 \tag{8.137}$$

这样$z=-1$也是$\Gamma(z)$的一阶极点,且留数为-1.当$k=-2$时,

$$\lim_{z\to -2}(z+2)\Gamma(z)=\lim_{z\to -2}\frac{(z+2)}{z(z+1)(z+2)}\Gamma(z+3)=\frac{1}{2}\Gamma(1)=\frac{1}{2} \tag{8.138}$$

因此$z=-2$是$\Gamma(z)$的一阶极点,留数为$\frac{1}{2}$.对于更一般的情况，

$$\lim_{z\to -k}(z+k)\Gamma(z)=\lim_{z\to -k}\frac{(z+k)}{z(z+1)...(z+k)}\Gamma(z+k+1)=(-1)^k\frac{1}{k!} \tag{8.139}$$

- 这样,我们发现$\Gamma(z)$的极点是$z=-k$的所有负整数和零,且为一阶极点,极点的留数是$(-1)^k\frac{1}{k!}$.在复平面上除去这些单极点之外,$\Gamma(z)$是处处解析的.
- $\Gamma(z)$不存在零点,因此$1/\Gamma(z)$是全纯函数(holomorphic function),即在复数域中处处可微,也就是解析函数.

  对于$\Gamma(z)$,有以下重要公式,这些公式在理论物理研究中很有用

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\quad z\neq \mathrm{Z} \tag{8.140}$$

这个公式把Γ函数与正弦函数联系在一起.

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{8.141}$$

这个公式把自变量的二倍与其值本身联系在一起.

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-C-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right) \tag{8.142}$$

这个公式说明Γ函数一阶导数的形式.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)...(z+n)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}n^{-z} \tag{8.143}$$

这个实际上是魏尔斯特拉斯(Weierstrass)关于Γ函数的一种定义方式.与之类似的是欧拉的定义,即

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^z}{1+\frac{z}{n}} \tag{8.144}$$

常数C代表欧拉常数,定义为以下的极限

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \tag{8.145}$$

其值约等于0.577216.

- 欧拉常数最先由瑞士数学家莱昂哈德-欧拉(Leonhard Euler)在1735年发表的文章De Progressionibus harmonicus observationes中定义.欧拉曾经使用C 作为它的符号,并计算出了它的前6位小数.1761年他又将该值计算到了16位小数.1790年,意大利数学家马歇罗尼(Lorenzo Mascheroni)引入了γ作为这个常数的符号,并将该常数计算到小数点后32位.但后来的计算显示他在第20位的时候出现了错误.

Γ函数对数的导数

Γ函数对数的导数$\psi(z) = \frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}$也是一个重要的函数,(读作digamma函数)其特点是

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z) \tag{8.146}$$

而

$$\psi(1) = -C \tag{8.147}$$

Γ函数的复共轭

如果记Γ函数的复共轭为$\overline{\Gamma(z)}$,那么根据定义有

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z}) \tag{8.148}$$

因此Γ函数与自身共轭变量函数的乘积必是实数

$$\Gamma(z)\Gamma(\overline{z}) \in \mathrm{R} \tag{8.149}$$

特别是如果令自变量$z=a+ib$,那么有

$$|\Gamma(a+ib)|^2=|\Gamma(a)|^2\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{b^2}{(a+k)^2}} \tag{8.150}$$

$$|\Gamma(bi)|^2=\frac{\pi}{b\sinh(\pi b)} \tag{8.151}$$

$$|\Gamma\left(\frac{1}{2}+bi\right)|^2=\frac{\pi}{\cosh(\pi b)} \tag{8.152}$$

Γ函数的渐进行为

对于$\Gamma(x)$,当自变量$x\to\infty$时,有以下渐进公式

$$\Gamma(x)\sim x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\sim(x/e)^x \tag{8.153}$$

$$\ln\Gamma(x)\sim\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi)\sim x(\ln x-1) \tag{8.154}$$

Γ函数的傅里叶级数展开

Γ函数的对数$\ln\Gamma(z)$在$0<z<1$上可以展开为以下级数形式,

$$\ln\Gamma(z)=\left(\frac{1}{2}-z\right)(C+\ln 2)+(1-z)\ln\pi-\frac{1}{2}\ln\sin(\pi z)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin(2\pi nz) \tag{8.155}$$

这个结果由Ernst Kummer(1847)和Carl Johan Malmsten(1842)分别独立得到。

Raabe公式

在1840年Raabe证明了以下结果,

$$\int_a^{a+1}\ln\Gamma(z)dz=\frac{1}{2}\ln 2\pi+a\ln a-a,\qquad a>0 \tag{8.156}$$

特别是当$a=0$，那么

$$\int_0^1\ln\Gamma(z)dz=\frac{1}{2}\ln 2\pi \tag{8.157}$$

欧拉的B函数

B函数,也称为第一类欧拉积分,其定义为

$$\boxed{B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\quad (\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0)} \tag{8.158}$$

注意B是希腊文β的大写而不是英文字母B.

注意到B函数定义,可以看到其关于自变量p,q是对称的,即

$$B(p,q)=B(q,p) \tag{8.159}$$

另一方面,利用Γ函数的积分定义,我们有

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy \tag{8.160}$$

然后把直角坐标(x,y)转换至极坐标(ρ,φ)可得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2p+2q-1}d\rho\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi=2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi \tag{8.161}$$

令$t=\cos^2\varphi$可得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\Gamma(p+q)B(p,q) \tag{8.162}$$

因此,

$$\boxed{B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \tag{8.163}$$

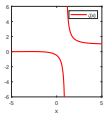


Figure 8.2: $\zeta(x)$在$(-5,5)$区间上的取值,注意$x=1$处的奇点.

黎曼ζ函数

黎曼ζ函数也称欧拉-黎曼ζ函数,其定义为如下的无穷级数和

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\qquad (\mathrm{Re}(s)>1) \tag{8.164}$$

同样,我们也可以用积分定义其形式

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx \tag{8.165}$$

这里$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}dte^{-t}t^{s-1}$是先前已经研究过的$\Gamma$函数.欧拉首先考虑了自变量$s$取正整数的情况,后来Chebyshev把函数定义域扩展至$\mathrm{Re}(s)>1$.

上述无穷求和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$当$\mathrm{Re}(s)>1$时绝对收敛至解析函数,而对于别的值$s$则是发散级数.Riemann证明在级数收敛半平面内定义的函数可以解析延拓到除$s=1$外的整个复平面,当$s=1$时级数是发散的调和级数,且极限

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=1 \tag{8.166}$$

这说明Riemannζ函数是整个复平面上的亚纯函数,(除分立奇点外都解析的复函数)其唯一奇点是留数为1的一阶极点$s=1$.这样，我们看到ζ 函数在除去单极点$s=1$后在整个复平面上是解析函数,这对于其物理上的应用至关重要.

下面给出以下特殊自变量s取值下ζ函数的取值.

$$\zeta(-1)=1+2+3+4+...=-\frac{1}{12}, \tag{8.167}$$

这个给出了发散级数一个有限的结果,这个结果在弦理论当中有所应用.

$$\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + 1 + ... = -\frac{1}{2}, \tag{8.168}$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612375 \tag{8.169}$$

这个结果出现在玻色凝聚体临界温度的计算以及磁体中自旋波的计算当中。

黎曼猜想

另外,ζ函数满足以下函数方程,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{8.170}$$

注意到右边sin函数的零点位置是s取所有偶整数,并且Γ函数的极点是零和所有负整数,这样ζ函数当s取负偶整数时为零,也就是ζ函数具有平凡的零点$s = -2n, n = 1, 2, 3, ...$那么ζ函数还有别的零点吗?

已经知道任何非平凡零点都在一个范围内,即$0 < \mathrm{Re}(s) < 1$,这称为临界带,以表示一个区域.而著名的黎曼猜想指出,所有非平凡零点都处于临界线上,即所有非平凡零点满足

$$\boxed{\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}}. \tag{8.171}$$

Bibliography

[1] ttps://baike.baidu.com/item/拉普拉斯变换/2382033?fr=aladdin

[2] https://baike.baidu.com/item/欧拉常数/5371177?fr=aladdin

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Gammafunction

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Betafunction

Chapter 9

数学物理定解问题

我们知道,物理规律通常用微分方程或者积分方程表达,这些描述物质运动规律的方程一般称为数学物理方程.典型的有: (1)描述宏观物体运动的牛顿方程;(2)描述电磁性质的Maxwell方程组;(3)描述微观粒子运动的Schödinger方程;(4)描述非阿贝尔规范场的Yang-Mills方程.

为了求解这些方程,一般需要明确给定方程所对应的边界条件和初始条件,边界条件和初始条件合称为定解条件.

- 在数学上,数学物理方程本身称为泛定方程;
- 在给定的定解条件下,求解数学物理方程,称为数学物理定解问题,简称定解问题.

通俗来说,当我们给定方程的明确形式并且已知方程的边界条件和初始条件,那么(原则上)就可以明确地求得方程的解.当然,我们还需要检验定解问题解是否具有唯一性和稳定性.唯一性自然指的是解是唯一确定的而不是同时有很多的解.至于稳定性指的是如果我们给解一个扰动,若扰动随着定解条件变化逐渐变大,那么我们说相应的解是不稳定的.

数学物理方程的导出

本节要导出典型的数学物理方程,导出的意思指的是用数学的语言把文字性的物理规律翻译成数学上可处理的方程的形式.数学物理方程是物理规律的数学表述,与定解条件无关,所以在导出过程中不用考虑定解条件.

数学物理方程导出的步骤:

1. 确定研究哪一个物理量u;
2. 从所研究的系统中划出一个小部分;
3. 根据物理规律分析邻近部分与这个小部分的相互作用;
4. 把相互作用在一个短时间段内对物理量u的影响用算式表达出来;
5. 整理化简可得数学物理方程.

均匀弦的微小横振动

演奏弦乐器的人用弓在弦上来回拉动,弓所接触的只是弦的很小一段,似乎只会引起这一小段的振动,但是实际上振动总是传播到整根弦,弦的各处都振动起来.

为了研究振动的传播,可以认为弦是柔软的,也就是说在放松的情况下,把弦弯曲成任意形状它都保持静止.而在紧绷之后,相邻小段之间有拉力,这种拉力叫作弦中的张力,张力沿着弦的切线方向.由于张力作用,一个小段的振动必定带动它的邻端,而邻端又带动它自己的邻端,这样,一个小段的振动必然传播到整根弦,这种振动传播的现象称为波.

弦乐器所用的弦往往很轻,它的重量只有张力的万分之一,因此与张力相比,弦的重量可以忽略不计.这样,真实的弦就抽象为没有重量的弦.

把没有重量的弦紧绷,它不振动时是一根直线,取这条直线作为x轴.把弦上格点的横向位移记作u.这样,横向位移u是x,t的函数,记作$u(x,t)$.我们要推导的就是u所遵从的方程.

弦的振动是机械运动,机械运动的基本规律是质点力学的$\vec{F}=m\vec{a}$.整根弦并不是质点,但是可以把它细分成许多极小的小段,每个小段可以抽象为质点,也就是说,整根弦由许多互相牵连的质点组成,对每个质点即每个小段可以应用$\vec{F}=m\vec{a}$.

把弦细分为许多极小的小段,我们以区间$(x,x+dx)$上的小段B为代表来研究.B既然没有重量而且是柔软的,它就只受到邻段A和C的拉力T_1和T_2.

弦的每小段都没有纵向(x方向)的运动,所以作用于B的纵向合力为零.

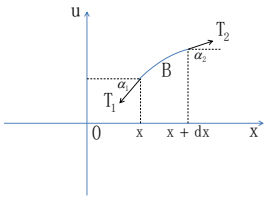


Figure 9.1: 弦的横向振动.

弦的横向加速度记为$u_{tt}(\partial^2 u/\partial t^2)$,按照$\vec{F}=m\vec{a}$,小段$B$的纵向和横向运动方程分别是

$$\begin{aligned} &T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \\ &T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = (\rho ds)u_{tt} \end{aligned} \tag{9.1}$$

这里ρ是弦的线密度,即单位长度的质量,ds是小段的弧长.

考虑小振动的情况,此时α_1,α_2都是小量,因而有

$$\begin{aligned} &\cos\alpha_1 \approx 1 \quad \cos\alpha_2 \approx 1 \\ &\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \tan\alpha_1 \quad \sin\alpha_2 \approx \alpha_2 \approx \tan\alpha_2 \\ &ds = \sqrt{(dx)^2+(du)^2} = \sqrt{1+(u_x)^2}dx \approx dx \end{aligned} \tag{9.2}$$

注意到根据夹角tan值与横向位移u的关系,可知$\tan\alpha_1 = u_x|_x$,$\tan\alpha_2 = u_x|_{x+dx}$,这样有

$$\begin{aligned} &T_2 - T_1 = 0 \\ &T_2 u_x|_{x+dx} - T_1 u_x|_x = \rho u_{tt}dx \end{aligned} \tag{9.3}$$

因此,$T_1 = T_2$,弦中的张力不随x变化,在整根弦中取同一数值.同时,振动过程中每个时刻都有长度$ds \approx dx$,那么作用于B段的张力也不随时间变化,因此张力是不随位置和时间变化的常数,记为T.这样有

$$T(u_x|_{x+dx} - u_x|_x) = \rho u_{tt}dx \tag{9.4}$$

由于dx很小,

$$u_x|_{x+dx} - u_x|_x \approx \frac{\partial u_x}{\partial x}dx = u_{xx}dx \quad (u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \tag{9.5}$$

这样我们得到B段的运动方程

$$\boxed{\rho u_{tt} - T u_{xx} = 0} \tag{9.6}$$

由于B段是任选的,因此以上方程适用于弦上的各处,是弦作微小横振动的运动方程,简称为弦振动方程.

对于均匀弦,ρ是常数,因此方程也可以改写为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{9.7}$$

这里$a^2 = T/\rho$,是振动在弦上传播的速度.

电磁波方程

在国际单位制下有,真空Maxwell方程(的微分形式)指的是如下四个矢量方程,

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ &\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ &\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.8}$$

μ_0是真空介电常数,ε_0是真空磁导率,$\vec{E}, \vec{B}$分别是真空电场强度和磁场强度. 现在,我们对第二个方程两边取旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \tag{9.9}$$

方程左边可以化为

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \tag{9.10}$$

而方程右边则可化为

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{9.11}$$

这样我们得到

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \tag{9.12}$$

也可简记为

$$\vec{E}_{tt} - a^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \tag{9.13}$$

同理可得

$$\vec{B}_{tt} - a^2\nabla^2\vec{B} = 0 \tag{9.14}$$

这两个方程就是真空电磁波方程.其中$a^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)$是真空中光速的平方.注意到$\vec{E}, \vec{B}$都是矢量,那么上述方程实际上可以改写为六个标量方程即

$$\begin{aligned} E_{tt,x} - a^2\nabla^2 E_x &= 0 \\ E_{tt,y} - a^2\nabla^2 E_y &= 0 \\ E_{tt,z} - a^2\nabla^2 E_z &= 0 \end{aligned} \tag{9.15}$$

$$\begin{aligned} B_{tt,x} - a^2\nabla^2 B_x &= 0 \\ B_{tt,y} - a^2\nabla^2 B_y &= 0 \\ B_{tt,z} - a^2\nabla^2 B_z &= 0 \end{aligned} \tag{9.16}$$

这里关于下标x, y, z仅代表相应分量,不表示求导.此外,在直角坐标系下$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.因此,如果只考虑某一维度的情况,相应的方程实际上与弦振动方程是相同的,这也说明电磁场也会有类似弦振动的波动行为.

扩散方程

- 由于浓度(单位体积中分子数或质量)的不均匀,物质从浓度大的地方向浓度小的地方转移,这种现象叫作扩散.

扩散现象广泛存在于气体,液体和固体中.

- 直观来说,扩散的根源是组成物质的微观粒子处于不停歇的无规热运动之中.

如果我们考虑一个物体由体积形状完全相同的A, B两部分组成,且A部分粒子数更多,B部分粒子数少.(就是A, B密度不均匀)那么,显而易见,由于每个粒子运动是随机的,因此对于任意一个粒子,其从A到B或从B到A的概率是一样的,那么从A到B的可能粒子数应该正比于A部分的粒子数,而从B到A的粒子数也正比于B部分的粒子数,这两者之差就是从A到B净转移的粒子数.当这类微观过程导致可观测的宏观现象时,相应的现象就是扩散.

- 扩散现象并不需要额外的超自然力或者其他的推动,只要密度不均匀存在,扩散就会自动发生.

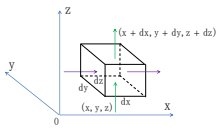


Figure 9.2: 扩散与热传导问题中的小平行六面体.

现在,我们仔细研究扩散过程.在扩散问题中我们研究的是浓度u在空间中分布以及在时间上变化的行为,可以用$u(x,y,z,t)$来表示.

扩散运动的起源是浓度不均匀,浓度的不均匀可用浓度梯度∇u来表示.扩散运动的强弱可用扩散流强度$\vec{j}$表示,其物理意义是单位时间内通过单位横截面积的粒子数.

实验表明,扩散现象遵循的定律是菲克定律,即[1]

$$\vec{j} = -D\nabla u \tag{9.17}$$

其分量形式是

$$j_x = -D\partial_x u, \quad j_y = -D\partial_y u, \quad j_z = -D\partial_z u, \tag{9.18}$$

这里的负号表示扩散的方向(浓度减小)与浓度梯度(浓度增大的方向)相反,比例系数D是扩散系数(假设D是空间均匀的,与位置无关).对于不同的物质,扩散系数各不相同,同一物质在不同温度下也是不同的.

现在,我们取空间中一个小平行六面体加以研究,该六面体由x到$x+dx$,y到$y+dy$以及z到$z+dz$构成.显然,这个六面体的浓度变化取决于穿过其表面的扩散流.以x方向为例,单位时间内从x方向流入的粒子必然从x处横截面流入,流入的粒子数是$j_x dydz$,而单位时间内流出的粒子则从$x+dx$处横截面流出,流出的粒子数为$j_{x+dx}dydz$.这样,单位时间内从x方向净流入小平行六面体的粒子数为

$$j_x dydz - j_{x+dx}dydz = -(j_{x+dx} - j_x)dydz \simeq -\partial_x j_x dxdydz = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdydz \tag{9.19}$$

同理可得y,z方向净流入小六面体的粒子数为$D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdydz$ 和$D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz$.

同时,根据粒子数守恒定律,如果平行六面体中没有源或者汇(其他物质转化为这种物质的粒子源称为源,这种粒子转化为其他物质称为汇),那么平行六面体

[1]在平衡态附近可以用线性响应理论直接推导出这个结果

中单位时间粒子数的增加等于单位时间内净流入的粒子数,即

$$\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdydz + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdydz + D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz = D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]dxdydz \tag{9.20}$$

注意上述讨论对空间中任意区域都成立,因此我们得到三维空间中的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \tag{9.21}$$

或

$$\boxed{u_t - a^2\nabla^2 u = 0 \quad (a^2 = D)} \tag{9.22}$$

如果只在x方向有扩散,那么就有一维扩散方程

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0. \tag{9.23}$$

热传导方程

与扩散现象类似,当扩散所涉及的粒子携带无规热运动的能量时,伴随着粒子的扩散,系统的热能会发生转移,这就是热传导.热传导起源于系统温度的不均匀,热量在温度不均匀的情况下会自发地从高温处向低温处转移.在热传导问题中研究的是温度在空间和时间上的变化,由$u(x,y,z,t)$表示.

既然热传导起源于温度分布不均匀,那么温度不均匀的程度可用温度梯度∇u表示,而其传导的强弱由热流强度$\vec{j}_q$表示,即单位时间通过单位横截面积的热量.

根据实验结果,热传导现象遵循傅里叶定律,即

$$\vec{j}_q = -\kappa\nabla u \tag{9.24}$$

比例系数κ是热传导系数(也叫热导率),不同物质的热传导系数是不同的.

- 我们已经引入了扩散系数D和热传导系数κ,那么这些系数到底和哪些因素有关呢？与物质本身的特性有关.或者说,要理解其来源,就需要从微观角度出发,得到这些输运系数与微观物质系统参数的联系,这通常是非平衡态统计物理的研究范畴.

仿照扩散问题,应用热传导定律和能量守恒定律,可得没有热源和热汇时一维和三维热传导方程

$$\begin{aligned} &c\rho u_t - \partial_x(\kappa u_x) = 0 \\ &c\rho u_t - \partial_x(\kappa u_x) - \partial_z(\kappa u_y) - \partial_z(\kappa u_z) = 0, \end{aligned} \tag{9.25}$$

其中c是比热容,ρ是密度,对于均匀物体,κ, c, ρ是常数,上式成为(定义$a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$)

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= 0 \\ u_t - a^2 \nabla^2 u &= 0 \end{aligned} \tag{9.26}$$

可以看到,热传导方程与前面的扩散方程在形式上是一样的,这体现了微观过程的相似性,即物质或者能量的输运(或者说同一个物质粒子携带热量).

稳定场方程

在以上讨论过的方程中,我们总是假设所考虑的物理量u在时间上有变化,因此会涉及时间的一阶或者二阶导数.但是,当系统趋于稳定是,物理量将不会有时间上的变化,此时关于时间的导数必定为零,则可以忽略时间部分,即设$u = u(x, y, z)$.那么对应的波动,扩散或者热传导方程变为

$$\boxed{\nabla^2 u = 0} \tag{9.27}$$

这也叫作拉普拉斯方程.如果方程中还要包括源或者汇的效应,那么方程可以修改为

$$\boxed{\nabla^2 u = -F(x, y, z)} \tag{9.28}$$

这个方程称为泊松方程.

对于静电场,我们知道

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9.29}$$

另外静电场是无旋的,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{9.30}$$

对于无旋的矢量场,可以引入相应的标量势ϕ,也就是静电学中的电势函数

$$\vec{E} = -\nabla \phi \tag{9.31}$$

那么有

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{9.32}$$

这就是静电场的电势函数ϕ满足的静电场方程,其形式是泊松方程的形式.当然,如果所求区域没有电荷,那么方程自动化为拉普拉斯方程

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0.} \tag{9.33}$$

量子力学的Schödinger方程

当我们需要理解微观世界粒子的行为时,Schödinger方程是一个描述低速运动量子粒子的线性方程,其形式如下

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U\psi} \tag{9.34}$$

这里i是虚数因子,$\hbar$是约化普朗克常数,ψ是所谓的波函数,描述微观粒子所处于的状态.右边第一项描述粒子的动能,第二项描述粒子在外势场U存在下的势能.

定解条件

初始条件

对于随时间发展变化的问题,必须考虑研究对象的特定历史,也就是说,追溯到早先某个所谓的初始时刻的状态,即初始条件.

对于只包含时间一阶导数的输运问题(例如扩散和热传导),初始状态指的是所研究的物理量u的初始分布(初始时刻粒子浓度和温度的分布),因此,初始条件是

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \tag{9.35}$$

这里$\varphi(x,y,z)$是已知函数.

对于包含时间二阶导数的振动问题(例如声波和电磁波),不仅需要给出初始位移

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \tag{9.36}$$

还需要给出初始速度

$$u_t(x,y,z,t)|_{t=0} = \psi(x,y,z). \tag{9.37}$$

- 初始条件应当给出整个系统的初始状态而不仅仅是系统中个别地点的初始状态;
- 有些问题并不存在初始条件,例如自由输运,自由振动和稳定场问题.

边界条件

研究具体物理系统,还需要考虑研究对象所处的特定环境,而周围环境的影响常体现在边界上的物理状况,即边界条件.

常见的边界条件,在数学上可以分为三类,即

1. 第一类边界条件,直接规定了所研究物理量在边界上的数值:$u(r,t)|_\Sigma = f(M,t)$;
2. 第二类边界条件,规定了所研究物理量在边界外法线方向上方向导数的数值:$\frac{\partial u(r,t)}{\partial n}|_\Sigma = f(M,t)$;
3. 第三类边界条件,规定了所研究物理量及其外法线方向导数的线性组合在边界上的数值:$(u(r,t) + H\frac{\partial u(r,t)}{\partial n})|_\Sigma = f(M,t)$.

这里Σ代表边界,M代表区域边界Σ上点的坐标,f是已知函数,H是常数系数.

第一类边界条件

例如弦的两端点$x=0, x=l$固定,那么边界条件自然是$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$.

第二类边界条件

在细杆热传导问题中,若杆的某个端点$x=a$处有热流$f(t)$沿着端点外法线方向流出,则根据傅里叶定律有$-\kappa u_n|_{x=a}=f(t)$,而如果相应的热流是流入的,那么有$-\kappa u_n|_{x=a}=-f(t)$.而如果端点是绝热的,那么有 $-\kappa u_n|_{x=a}=0$.

- 边界条件只要确切说明边界上的物理状况就行,不需要过度考虑;
- 若边界条件中$f=0$,那么相应的边界条件称为齐次边界条件.

数学物理方程的分类

线性二阶偏微分方程

把所有自变量以此记作$x_1, x_2, ..., x_n$,如果二阶偏微分方程可以表示为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \tag{9.38}$$

那么就称为线性的方程,这里a_{ij}, b_i, c, f只是$x_1, x_2, ..., x_n$的函数.若$f = 0$,则方程是齐次的,否则称为非齐次的.

注意到上述线性方程仅包含未知函数u的一次和零次项,不包括任何u的平方项u^2和更高次幂项(u^3, u^4...).因此,如下两个方程都是非线性,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u \tag{9.39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{9.40}$$

第一个方程具有$\sin u$,它可以看成有无穷多u幂次($\sin u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}$),一般把这个方程叫做sine-Gordon方程,常用于描述孤子(soliton).第二个方程出现$u\partial u$,也是非线性方程,它称为冲击波方程.

非线性方程与线性方程的区别在于线性方程服从叠加原理.为了解释叠加原理,我们考虑引入算符的概念.简单来说,算符就是运算符号,例如

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{9.41}$$

是微分算符,

$$\int dx, \quad \int dxdy, \quad \int d\vec{r} \tag{9.42}$$

是积分算符,另外$\sqrt{}, \ln, \sin$也是算符.让我们用$\hat{L}$代表算符,若算符$\hat{L}$满足

$$\hat{L}(au_1 + bu_2) = a\hat{L}(u_1) + b\hat{L}(u_2) \tag{9.43}$$

那么我们说$\hat{L}$为线性算符.(a, b为常数,u_1, u_2为函数)这样,我们可以把波动方程,热传导方程和拉普拉斯方程统一表示为$\hat{L}u = 0$,这里算符分别是$\hat{L} = \partial_{tt} - a^2\nabla^2$,$\hat{L} = \partial_t - a^2\nabla^2$,$\hat{L} = \nabla^2$.更一般的,一般二阶线性偏微分方程可以表示为

$$\hat{L}u = 0, \quad \hat{L} = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F. \tag{9.44}$$

现在,设$u_1, u_2...u_i...$是$\hat{L}u = 0$的解($\hat{L}$是二阶偏微分方程的算符),即$\hat{L}u_i = 0$成立,那么若级数$u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ 收敛,并且能够逐项微分两次,则这个级数解也是方程的解.这就是叠加原理.

更简单的说,我们运用叠加叠加原理时,如果方程和定解条件都是线性的,可以把定解问题的解看作几个部分的线性叠加,只要这些部分各自所满足的方程和定解条件的相应的线性叠加正好是原来的方程和定解条件就行.我们将将经常使用叠加原理来求解偏微分方程.

有两个自变量的方程分类

先研究两个自变量x和y的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \tag{9.45}$$

这里$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$只是$x$和$y$的函数.在以下讨论中我们假设其都是实数.

作自变量代换

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \tag{9.46}$$

那么有

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x \\ u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \end{aligned} \tag{9.47}$$

把以上这些量代入方程可得

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + Cu + F = 0 \tag{9.48}$$

其中的系数分别是

$$A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \tag{9.49}$$

$$A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \tag{9.50}$$

$$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \tag{9.51}$$

$$B_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y \tag{9.52}$$

$$B_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y \tag{9.53}$$

$$C = c \quad F = f \tag{9.54}$$

可以看到,如果取一阶偏微分方程$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$的一个特解,那么把它代入$A_{11}(A_{22})$,可以看到此时 $A_{11} = 0(A_{22} = 0)$.对于这个一阶偏微分方程,我们可以把它改写为

$$a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{9.55}$$

如果把$z(x,y) =$常数当作定义隐函数$y(x)$的方程,那么$dy/dx = -z_x/z_y$,从而有

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0 \tag{9.56}$$

这个方程叫作二阶线性偏微分方程的特征方程,特征方程的一般积分$\xi(x,y) =$常数和$\eta(x,y) =$常数叫作特征线.

既然特征方程形式上是一个一元二次方程,那么它的两个解就是

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.\end{aligned} \tag{9.57}$$

然后,我们根据根号下的符号划分偏微分方程的类型:

- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,这对应双曲型偏微分方程($\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = ...$或$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ...$);
- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,这对应抛物型偏微分方程($\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ...$或$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ...$);
- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,这对应椭圆型偏微分方程($\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ...$).

达朗贝尔公式

对于常微分方程,例如$\frac{dy}{dx}=y$,我们可以先不考虑任何附加条件,从方程本身求出通解,通解中含有任意常数,然后利用附加条件确定这些常数.现在,对于偏微分方程是否也可以有类似的求解方式呢?

答案是对某些一维方程确实存在想要的求解方式,其结果就是达朗贝尔公式.

达朗贝尔公式

均匀弦振动的方程是

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \tag{9.58}$$

写成更为明确地形式是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=0 \tag{9.59}$$

即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{9.60}$$

注意到这个方程的形式,我们可以作以下代换

$$x=a(\xi+\eta),\quad t=\xi-\eta \tag{9.61}$$

那么有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}&=\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial\eta}&=\frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x}=-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{9.62}$$

这样我们得到

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u=0. \tag{9.63}$$

为了后面处理的方便,我们把变量代换改写为

$$\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(\xi+\eta)\\ t&=\frac{1}{2a}(\xi-\eta)\end{aligned} \tag{9.64}$$

对η积分可得

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=f(\xi) \tag{9.65}$$

这里$f(\xi)$是任意函数.再对ξ积分可得通解

$$u=\int f(\xi)d\xi+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)=f_1(x+at)+f_2(x-at) \tag{9.66}$$

f_1,f_2是任意函数.与常微分方程不同,偏微分方程通解中出现的不是任意常数,而是任意函数.

通解中的f_1,f_2可以用定解条件定出.例如我们考虑无限长的弦,那么就可以不用涉及边界条件,进一步,假设初始条件是

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)\quad(-\infty<x<\infty) \tag{9.67}$$

把初始条件代入通解有

$$\begin{aligned} f_1(x)+f_2(x)&=\varphi(x)\\ af_1'(x)-af_2'(x)&=\psi(x)\end{aligned} \tag{9.68}$$

由第二个方程可得

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+f_1(x_0)-f_2(x_0) \tag{9.69}$$

这样我们得到方程的解

$$\begin{aligned} f_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)]\\ f_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)]\end{aligned} \tag{9.70}$$

最后利用$u=f_1(x+at)+f_2(x-at)$可得最终的特解形式为

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi} \tag{9.71}$$

这个公式称为达朗贝尔公式.

例 设$\varphi(x)=e^{-x^2},\psi(x)=\omega e^{-x^2}$求相应的特解.

把$\varphi(x)$和$\psi(x)$的具体形式代入达朗贝尔公式可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(x+at)^2}+e^{-(x-at)^2}\right]+\frac{\omega}{2a}\int_{x-at}^{x+at}e^{-\xi^2}d\xi \tag{9.72}$$

如图9.3所示,初始时刻系统的波形是一个局域在$x=0$的高斯型波包.(取$a=\omega=1$)随着时间的演化,中心处的波包开始分裂为两个高斯波包并向两端传播.

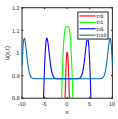


Figure 9.3: 利用达朗贝尔公式得到的解$u(x,t)$.

Chapter 10

分离变量法

齐次方程的分离变量法

我们将以两端固定均匀弦的自由振动问题来介绍分离变量法的一般想法.通过之前的讨论,我们知道其方程是

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l) \tag{10.1}$$

相应的边界条件是

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{10.2}$$

而初始条件是

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{10.3}$$

首先,我们看到方程中关于时间和空间的导数是分离的,这提示我们考虑如下分离变量形式的解,

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{10.4}$$

把这个解带入原方程以及边界条件可得

$$\begin{aligned} &XT'' - a^2 X''T = 0 \\ &X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0 \end{aligned} \tag{10.5}$$

显然,这个边界条件实际上要求$X(0) = X(l) = 0$.

然后,在简化的方程两边都除以a^2XT可得

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{10.6}$$

方程左边是时间t的函数与坐标x无关,右边是坐标的函数与时间无关,因此方程两边实际上等于同一个常数,记为$-\lambda$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \tag{10.7}$$

这样,我们发现原始的偏方程方程可以分离为两个独立的常微分方程,

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \tag{10.8}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \tag{10.9}$$

对于实数的λ,我们可以分三种情况进行讨论.

(1)$\lambda < 0$,此时

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{10.10}$$

这里的系数C_1, C_2由边界条件$X(0) = X(l) = 0$定出,即

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 0 \\ &C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{aligned} \tag{10.11}$$

这样我们发现$C_1 = C_2 = 0$,而$u = XT = 0$,这就是零解,本身没有意义,因此可以排除$\lambda < 0$的情况.

(2)$\lambda = 0$,此时

$$X(x) = C_1 x + C_2 \tag{10.12}$$

利用边界条件可得

$$\begin{aligned} &C_2 = 0 \\ &C_1 l + C_2 = 0 \end{aligned} \tag{10.13}$$

这样得到的依然是零解,因此$\lambda = 0$也不予考虑.

(3)$\lambda > 0$,此时

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \tag{10.14}$$

利用边界条件可得

$$\begin{aligned} &C_1 = 0 \\ &C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{aligned} \tag{10.15}$$

这样非零解实际上要求$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$,也就是

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{10.16}$$

当λ取这些数值时,

$$X(x) = C_2 \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10.17}$$

- 分离变量过程中所引入的λ不能取负值或零,也不能是任意的正数,它必须取特定的取值,才能使得相应的方程有意义.常数λ的这种特定数值称为本征值,相应的解称为本征函数,而相应的方程和边界条件一起构成本征值问题.

回忆线性代数学习中学过的关于矩阵本征值和本征向量的形式有,

$$Ax = \lambda x \tag{10.18}$$

这里A是矩阵,x是列向量,λ是常数.在线性代数理论中,我们把λ称为矩阵的本征值,其对应的本征向量是x.对于我们当前的问题,例如考虑关于x 的方程,可以改写为

$$\frac{d^2}{dx^2}X = -\lambda X \tag{10.19}$$

对比矩阵本征值和本征向量,可以看到如果我们把对x的二阶导数看作一类操作(即算符),那么上述方程的意义就是对X操作后得到一个数$-\lambda$乘以X本身,因而可以把λ解释为本征值,而相应的X就是本征向量或者本征函数.

再看T的方程,利用λ的本征值的取值,我们有

$$T'' + \frac{n^2\pi^2}{l^2}a^2T = 0 \tag{10.20}$$

这个方程的解是

$$T(t) = A\cos\frac{n\pi at}{l} + B\sin\frac{n\pi at}{l} \tag{10.21}$$

A, B是积分常数.这样我们就得到了$X(x)$与$T(t)$的明确形式,因而把所有可能的解叠加在一起就是$u(x,t)$的一般解,(由于是线性方程而满足叠加原理)即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10.22}$$

当我们考虑初始条件时,可以把上述形式解代入可得

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x) \end{cases} \tag{10.23}$$

显然,可以看到上述方程左边实际上是傅里叶正弦级数,这提示我们对右边的函数作傅里叶展开,其系数分别是φ_n, ψ_n,比较两边系数可得

$$\begin{cases} A_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\zeta)\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta, \\ B_n = \frac{1}{n\pi a}\psi_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\zeta)\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta. \end{cases} \tag{10.24}$$

具有齐次边界条件的非齐次方程求解

考虑如下具有齐次边界条件的非齐次方程的定解问题,(方程齐次而边界条件非齐次)即

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t) \quad (0 < x < l) \tag{10.25}$$

边界条件是

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{10.26}$$

初始条件是

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{10.27}$$

这里$f(x,t)$是给定的函数,该项的出现导致方程称为非齐次方程.注意到此方程与齐次方程基本相同,因此可以借用齐次方程的解来构造该方程的解.具体而言,齐次边界条件直接定出了x部分的解是$\sin\frac{n\pi x}{l}$,因此我们可以设上述方程的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{10.28}$$

这里$T_n(t)$是时间依赖的待定系数.另一方面,$f(x,t)$也有类似的展开形式(就是奇函数的傅里叶级数展开)

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10.29}$$

展开系数$f_n(t)$满足

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l dx f(x,t) \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{10.30}$$

现在,把$u(x,t)$与$f(x,t)$的展开形式代入方程可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n'' + \omega_n^2 T_n)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10.31}$$

这里$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$,而边界条件由于$\sin\frac{n\pi x}{l}$部分而自动满足,因此剩下的初始条件给出

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10.32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10.33}$$

这里的展开系数φ_n, ψ_n满足

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10.34}$$

为使得以上方程恒成立,这要求基函数$\sin\frac{n\pi x}{l}$前面的系数相等,即有

$$T_n'' + \omega_n^2 T_n = f_n \tag{10.35}$$

$$T_n(0) = \varphi_n \tag{10.36}$$

$$T_n(0)' = \psi_n \tag{10.37}$$

对于给定的$f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$,通过求解上述二阶常微分方程就可得系数$T_n$,这样整个方程的解即可求得.

具有非齐次边界条件的非齐次方程求解

现在,让我们考虑更困难的问题,也就是方程和边界条件都是非齐次的,即

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad (0 < x < l) \tag{10.38}$$

边界条件是

$$\begin{cases} u|_{x=0} = g_1(t) \\ u|_{x=l} = g_2(t) \end{cases} \tag{10.39}$$

初始条件是

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{10.40}$$

这里$f(x,t), g_1(t), g_2(t)$是给定的函数.面对这类具有非齐次边界条件的非齐次方程,我们首先可以把非齐次边界条件齐次化,即把方程的解写成两部分

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{10.41}$$

同时我们要求$v(x,t)$部分完全体现边界条件的影响,即设

$$v|_{x=0} = g_1(t), \quad v|_{x=l} = g_2(t) \tag{10.42}$$

这样,对于$w(x,t)$而言,边界条件已经成为齐次,即

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \tag{10.43}$$

而相应的方程变为

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t) - v_{tt} + a^2 v_{xx} \tag{10.44}$$

同时,初始条件是

$$w|_{t=0} = \varphi(x) - v(x,0), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t(x,0). \tag{10.45}$$

现在的问题是如何得到一个合适的函数$v(x,t)$以满足边界条件,一个简单的选择是

$$v(x,t) = \frac{l-x}{l} g_1(t) + \frac{x}{l} g_2(t). \tag{10.46}$$

这样一个非齐次边界条件的问题就转化为齐次边界条件的问题(w满足齐次边界条件和非齐次方程),剩下的可以参考先前处理非齐次方程的方案进行求解.

分离变量法的其他例子

细杆导热问题

设初始时刻细杆一端温度为零,另一端温度为u_0,杆上温度梯度均匀.零度的一端温度始终不变,而另一端与外界绝热.试求细杆上的温度变化.

首先系统对应的泛定方程是一维热传导方程

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}) \tag{10.47}$$

根据零度的一端温度不变($x = 0$),另一端与外界绝热($x = l$),[1]因此边界条件是

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0 \tag{10.48}$$

最后,根据细杆一端温度为零,另一端温度为u_0,杆上温度梯度均匀,那么初始条件是

$$u|_{t=0} = \frac{u_0 x}{l} \quad (0 < x < l). \tag{10.49}$$

现在,我们假定方程的解具有分离变量形式

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{10.50}$$

把这个形式代入方程和边界条件可得

$$\begin{aligned} &X''(x) + \lambda X = 0 \\ &X(0) = 0, \quad X'(l) = 0; \\ &T'(t) + \lambda a^2 T = 0. \end{aligned} \tag{10.51}$$

对于X的方程,有意义的解仅当$\lambda > 0$时存在,此时

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \tag{10.52}$$

由边界条件$X(0) = 0, X'(l) = 0$可知,

$$C_1 = 0, \quad C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \tag{10.53}$$

因此,有意义的解是$\cos\sqrt{\lambda}l = 0$,即

$$\sqrt{\lambda}l = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k = 0, 1, 2, ...) \tag{10.54}$$

[1]绝热意味着没有热量传递或者说相应的热流$j = -\kappa\partial_x u$为零.

也可写为

$$\lambda = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2} = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2} \quad (k=0,1,2,...) \tag{10.55}$$

这就是函数的本征值,相应的本征函数是

$$X_k(x) = C_2 \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x \quad (k=0,1,2,...) \tag{10.56}$$

接下来,对于$T(t)$,代入λ的具体形式可得

$$T' + \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}a^2T = 0 \tag{10.57}$$

这个一阶微分方程的解是

$$T_k(t) = Ce^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t} \quad (k=0,1,2,...) \tag{10.58}$$

利用$X_k(x), T_k(x)$可得一般解为

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t} \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x \tag{10.59}$$

为了求相应的特解,我们代入初始条件可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x = \frac{u_0 x}{l} \quad (0<x<l) \tag{10.60}$$

既然左边是以$\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$为基的傅里叶展开,那么把右边也用同样的基展开并比较系数可得

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l d\xi \frac{u_0\xi}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi\xi}{2l} = (-1)^k\frac{2u_0 l}{(2k+1)^2\pi^2} \tag{10.61}$$

因此,

$$u(x,t) = \frac{2u_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x. \tag{10.62}$$

平面极坐标分离变量

为简单起见,我们仅考虑拉普拉斯方程的平面极坐标形式,即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{10.63}$$

现在,我们假设其具有分离变量的形式

$$u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \tag{10.64}$$

把这个形式代入方程可得

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=-\frac{\Phi''}{\Phi}\equiv\lambda \tag{10.65}$$

这样可得两个方程

$$\begin{aligned}&\Phi''+\lambda\Phi=0\\&\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0\end{aligned} \tag{10.66}$$

在物理上,我们知道极角φ和$\varphi+2\pi$应该代表相同的物理,这说明

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi) \tag{10.67}$$

即$\Phi(\varphi)$具有2π周期性,这一般称为自然周期条件,主要出现在涉及角度的问题.根据先前的讨论,我们知道

$$\begin{aligned}&\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi \quad &(\lambda>0)\\&\Phi(\varphi)=A+B\varphi &(\lambda=0)\\&\Phi(\varphi)=Ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi} &(\lambda<0)\end{aligned} \tag{10.68}$$

代入$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$可知$\lambda\geqslant 0$的解才有意义,因此可设$\lambda=m^2,m=0,1,2,...$

$$\begin{aligned}&\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi \quad &(m\neq 0)\\&\Phi(\varphi)=A &(m=0)\end{aligned} \tag{10.69}$$

然后把$\lambda=m^2$代入关于$R(\rho)$的方程可得

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-m^2R=0 \tag{10.70}$$

这在数学上称为欧拉型常微分方程,为了简化求解,可以令$\rho=e^t$,那么有

$$\frac{d^2R}{dt^2}-m^2R=0 \tag{10.71}$$

相应的解是

$$\begin{aligned}&R(\rho)=Ce^{mt}+De^{-mt}=C\rho^m+D\rho^{-m} \quad &(m\neq 0)\\&R(\rho)=C+Dt=C+D\ln\rho \quad &(m=0)\end{aligned} \tag{10.72}$$

这样,分离变量形式的本征解是

$$u_0(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho \tag{10.73}$$

$$u_m(\rho,\varphi)=\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)+\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)\quad(m\neq 0) \tag{10.74}$$

那么一般形式的解是

$$u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)+\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)\right] \tag{10.75}$$

这就是平面极坐标下拉普拉斯方程分离变量后的一般解.

稳定场

考虑如下定解问题,即在矩形区域$x\in[0,a],b\in[0,b]$求解拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{10.76}$$

其边界条件是

$$\begin{aligned} &u|_{x=0}=u_0, \quad u|_{x=a}=u_0 \quad (0<y<b)\\ &u|_{y=0}=u_0, \quad u|_{y=b}=U \quad (0<x<a)\end{aligned}$$

这里是二维拉普拉斯方程方程的第一类边界值问题.由于不含初始条件,拉普拉斯方程边界条件不可能全是齐次的,因为这种条件下的解只能是零解.但是,尽可能把一些边界条件齐次化会带来方便.常用的方法是把$u(x,y)$分解为

$$u(x,y)=\nu(x,y)+w(x,y) \tag{10.77}$$

并且使得ν,w分别满足拉普拉斯方程且各有一组齐次边界条件,即

$$\begin{aligned} &\nu_{xx}+\nu_{yy}=0\\ &\nu|_{x=0}=u_0, \quad \nu|_{x=a}=u_0\\ &\nu|_{y=0}=0, \quad \nu|_{y=b}=0\end{aligned} \tag{10.78}$$

$$\begin{aligned} &w_{xx}+w_{yy}=0\\ &w|_{x=0}=u_0, \quad w|_{x=a}=u_0\\ &w|_{y=0}=u_0, \quad w|_{y=b}=U\end{aligned} \tag{10.79}$$

然后可以分别求解两个方程,并把解作线性叠加就得到u的解.当然,对于当前的问题,可以令

$$u(x,y)=u_0+\nu(x,y) \tag{10.80}$$

这相当于把u作了平移,这样得到的新定解问题是

$$\begin{aligned}
&\nu_{xx}+\nu_{yy}=0\\
&\nu|_{x=0}=0,\quad \nu|_{x=a}=0\\
&\nu|_{y=0}=0,\quad \nu|_{y=b}=U-u_0
\end{aligned}\tag{10.81}$$

作分离变量操作$\nu(x,y)=X(x)Y(y)$代入方程和边界条件可得

$$\begin{aligned}
&X''+\lambda X=0\\
&X(0)=X(a)=0\\
&Y''-\lambda Y=0
\end{aligned}\tag{10.82}$$

关于x的方程,其解是熟悉的形式

$$X(x)=C\sin\frac{n\pi}{a}x,\quad \lambda=\frac{n^2\pi^2}{a^2},\quad n=0,1,2,...\tag{10.83}$$

然后把本征值λ代入关于y的方程可得解为

$$Y(y)=Ae^{\frac{n\pi}{a}y}+Be^{-\frac{n\pi}{a}y}.\tag{10.84}$$

这样分离变量形式的解是

$$\nu(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x\tag{10.85}$$

最后利用非齐次边界条件$\nu|_{y=0}=0,\nu|_{y=b}=U-u_0$可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi}{a}x=0\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi}{a}b}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}b}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=U-u_0
\end{aligned}\tag{10.86}$$

对上述方程右边作正弦傅里叶级数展开并且比较系数可得

$$\begin{aligned}
&A_n+B_n=0\\
&A_ne^{\frac{n\pi}{a}b}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}b}=\frac{1-(-1)^n}{2}\frac{a(U-u_0)}{n\pi}
\end{aligned}\tag{10.87}$$

这样可以得到

$$A_n=-B_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\frac{a(U-u_0)}{n\pi}(e^{\frac{n\pi b}{a}}-e^{-\frac{n\pi b}{a}})\tag{10.88}$$

也就是当n为偶数时,所有的系数都为零,而当n为奇数时是$A_n = -B_n = \frac{a(U-u_0)}{n\pi}(e^{\frac{n\pi b}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}})$. 因此,最后的结果是

$$u(x,y) = u_0 + \frac{a(U-u_0)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi y}{a}}{\sinh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x. \qquad (10.89)$$

Chapter 11

二阶常微分方程的级数解法

特殊函数的常微分方程

在先前的讨论中,我们看到对于直角坐标系中的分离变量,其解是简单的指数或者正余弦函数.在这一部分,我们将讨论另外两个常用坐标系,即球坐标以及柱坐标系下的分离变量.在这两个坐标系下的分离变量将导致相应的常微分方程,这些方程的级数解是一些特殊函数,例如勒让德函数,贝塞尔函数等.

拉普拉斯方程$\Delta u = 0$

球坐标系

在球坐标系下,拉普拉斯算符$\Delta = \nabla^2$作用于函数$u(r,\theta,\varphi)$的结果是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{11.1}$$

首先,把表示距离的变量r与表示方向的变量θ,φ分离,即设

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi) \tag{11.2}$$

这里$Y(\theta,\varphi)$称为球函数.把分离变量形式代入球坐标下的拉普拉斯方程可得

$$\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0 \tag{11.3}$$

用$\frac{r^2}{RY}$遍乘各项可得

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} \tag{11.4}$$

注意到左边只包含r变量,与θ,φ无关,右边则与r无关,因此令左右两边等于一个常数,记为$l(l+1)$,则有

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l(l+1) \tag{11.5}$$

这样我们得到两个独立的常微分方程

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-l(l+1)R=0\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0\end{aligned} \tag{11.6}$$

可以发现,第一个方程是欧拉型常微分方程,它的解是

$$R(r)=Cr^l+D\frac{1}{r^{l+1}} \tag{11.7}$$

而第二个方程称为球函数方程.对第二个方程再作一次分离变量

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{11.8}$$

代入球函数方程可得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+l(l+1)\Theta\Phi=0 \tag{11.9}$$

用$\frac{\sin^2\theta}{\Theta\Phi}$遍除各项可得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \tag{11.10}$$

显然方程左边不含φ而方程右边不含θ,设方程左右两边等于λ,则有

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=\lambda \tag{11.11}$$

这样我们得到两个独立的方程

$$\begin{aligned}&\Phi''+\lambda\Phi=0\\&\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+[l(l+1)\sin^2\theta-\lambda]\Theta=0\end{aligned} \tag{11.12}$$

对于第一个方程,我们注意到平面内的角度变量φ具有周期性,即

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \tag{11.13}$$

这样,相应方程的本征值是

$$\lambda=m^2\quad(m=0,1,2,3,...) \tag{11.14}$$

本征函数是

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin\varphi \tag{11.15}$$

另一方面,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{11.16}$$

令$\theta=\arccos x$,则有

$$\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d\Theta}{dx} \tag{11.17}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=\frac{1}{\sin\theta}\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] \tag{11.18}$$

这样,关于Θ的方程化为

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \tag{11.19}$$

也就是

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0} \tag{11.20}$$

这个方程称为l阶连带勒让德方程,其$m=0$的特例是

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0} \tag{11.21}$$

称为l阶勒让德方程.这样,我们发现,拉普拉斯方程在球坐标系下,径向部分的方程是欧拉方程,其解为$r^l,\frac{1}{r^{l+1}}$,角度部分的方程是球函数方程,相应的解是球函数$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$.进一步分离变量可得$\Phi(\varphi)\sim\cos m\varphi,\sin m\varphi$,剩下的$\Theta(\theta)$满足连带勒让德方程,其有两个参数$l,m$.

柱坐标系

拉普拉斯方程在柱坐标系中的形式是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0 \tag{11.22}$$

设分离变量的形式

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{11.23}$$

代入以上方程可得

$$\Phi Z\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\frac{RZ}{\rho^2}\Phi''+R\Phi Z''=0 \tag{11.24}$$

用$\frac{\rho^2}{R\Phi Z}$遍乘各项可得

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda \tag{11.25}$$

这里与先前分离变量处理相同,假设了待定常数λ.

这样,方程可以分解为两个方程,

$$\begin{aligned}&\Phi''+\lambda\Phi=0\\&\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=\lambda\end{aligned} \tag{11.26}$$

对于第一个方程,其本身有周期边界条件$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$,那么有

$$\begin{aligned}&\lambda=m^2\quad(m=0,1,2,3,...)\\&\Phi(\varphi)=A\cos(m\varphi)+B\sin(m\varphi)\end{aligned}\tag{11.27}$$

对于第二个方程,用$\frac{1}{\rho^2}$遍乘各项可得

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{R\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z}=-\mu\tag{11.28}$$

这里引入新的待定参数μ.这样可以进一步分解为两个常微分方程,

$$\begin{aligned}&Z''-\mu Z=0\\&\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0\end{aligned}\tag{11.29}$$

考虑μ为实数的情况. (1)$\mu=0$,此时方程的解是

$$\begin{aligned}&Z(z)=C+Dz\\&R(\rho)=\begin{cases}E+F\ln\rho, & (m=0);\\ E\rho^m+\frac{F}{\rho^m}, & (m=1,2,3,...).\end{cases}\end{aligned}\tag{11.30}$$

(2)$\mu>0$,此时令$x=\sqrt{\mu}\rho$,那么有

$$\frac{dR}{d\rho}=\frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho}=\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}\tag{11.31}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}\right)\frac{dx}{d\rho}=\mu\frac{d^2R}{dx^2}\tag{11.32}$$

方程化为

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0\tag{11.33}$$

即

$$\boxed{x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+\left(x^2-m^2\right)R=0}\tag{11.34}$$

这个方程称为m阶贝塞尔方程.另一方面,我们有

$$Z(z)=Ce^{\sqrt{\mu}z}+De^{-\sqrt{\mu}z}\tag{11.35}$$

(3)$\mu<0$,记$\nu^2=-\mu>0$,那么有$Z''+\nu^2Z=0$,其解为

$$Z(z)=C\cos(\nu z)+D\sin(\nu z)\tag{11.36}$$

令$x=\nu\rho$,则有

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-\left(1+\frac{m^2}{x^2}\right)R=0 \tag{11.37}$$

即

$$\boxed{x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-\left(x^2+m^2\right)R=0} \tag{11.38}$$

这个方程称为虚宗量贝塞尔方程.

波动方程

考虑三维波动方程,

$$u_{tt}-a^2\Delta u=0 \tag{11.39}$$

分离时间t和空间坐标$\vec{r}$

$$u(\vec{r},t)=T(t)v(\vec{r}) \tag{11.40}$$

可得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}=-k^2 \tag{11.41}$$

这样就得到两个独立的常微分方程

$$\begin{aligned} &T''+k^2a^2T=0\\ &\Delta v+k^2v=0 \end{aligned} \tag{11.42}$$

对于第一个方程,容易得到方程的解是

$$T(t)=\begin{cases} C\cos(kat)+D\sin(kat), & (k\neq 0);\\ C+Dt, & (k=0). \end{cases} \tag{11.43}$$

而第二个方程称为亥姆霍茨方程.

输运方程

考虑三维输运方程

$$u_t-a^2\Delta u=0 \tag{11.44}$$

分离时间t和空间坐标$\vec{r}$

$$u(\vec{r},t)=T(t)v(\vec{r}) \tag{11.45}$$

可得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}=-k^2 \tag{11.46}$$

这样就得到两个独立的常微分方程

$$\begin{aligned} T' + k^2 a^2 T &= 0 \\ \Delta v + k^2 v &= 0 \end{aligned} \tag{11.47}$$

对于第一个方程,容易得到方程的解是

$$T(t) = Ce^{-k^2 a^2 t} \tag{11.48}$$

而第二个方程就是波动方程一节中已经知道的亥姆霍茨方程.

亥姆霍茨方程

在球坐标系下,可以写出亥姆霍茨方程的明确形式,即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + k^2 v = 0 \tag{11.49}$$

令$v(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$,可得

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2 r^2 = \frac{-1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = l(l+1) \tag{11.50}$$

这样可分解为两个方程

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y = 0 \\ &\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[k^2 r^2 - l(l+1)\right]R = 0 \end{aligned} \tag{11.51}$$

第一个方程就是球函数方程,而第二个方程是l阶球贝塞尔函数.对于$k>0$,令$x = kr, R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$,则第二个方程变为

$$\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + [x^2 - (l+1/2)^2]y = 0} \tag{11.52}$$

这就是所谓的$l+1/2$阶贝塞尔方程.注意到这个方程形式上与柱坐标分离变量拉普拉斯方程得到的m阶贝塞尔方程完全一致,因此$l+1/2$阶贝塞尔方程的解相当于把m阶方程里面的参数m换成$l+1/2$.而当$k=0$时,方程就是欧拉方程,解是熟悉的$R(r) = Cr^l + Dr^{l+1}$.

在柱坐标系下,利用拉普拉斯算符的表达式可得柱坐标系亥姆霍茨方程的表达式是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = 0 \tag{11.53}$$

设分离变量形式的解

$$v(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{11.54}$$

然后和之前的操作完全类似.引进两个常数λ,ν^2,可以得到三个方程

$$\Phi''+\lambda\Phi=0 \tag{11.55}$$

$$Z''+\nu^2 Z=0 \tag{11.56}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-\nu^2-\frac{\lambda}{\rho^2}\right)R=0 \tag{11.57}$$

对于第一个方程,自然周期边界条件给出

$$\lambda=m^2 \quad (m=0,1,2,...) \tag{11.58}$$

而相应的解是

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi. \tag{11.59}$$

记常数$\mu'=k^2-\nu^2$,则有$k^2=\mu'+\nu^2$.这样第三个方程可以改写为

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\mu'-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{11.60}$$

如果令$x=\sqrt{\mu'}\rho$,那么方程化为

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0 \tag{11.61}$$

这就是m阶贝塞尔方程.

施图姆-刘维尔本征值问题

在先前的讨论中,我们看到从典型的数学物理方程利用分离变量得到的常微分方程,往往附有边界条件,边界条件既有明确地也有自然边界条件这样不明确的.除非方程的参数取某些特定值,不然满足边界条件的非零解不存在,这些特定值称为本征值,相应的非零解称为本征函数.求解本征值和本征函数的问题就叫作本征值问题.

常见的本征值问题都可以归结于所谓的施图姆-刘维尔本征值问题.

施图姆-刘维尔本征值问题

如果二阶常微分方程具有如下形式,那么相应的方程称为施图姆-刘维尔型方程,

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{11.62}$$

对于一般的二阶常微分方程$y''+a(x)y'+b(x)y+\lambda c(x)y=0$,乘上适当的函数$e^{\int a(x)dx}$就可以化成施图姆-刘维尔型方程.

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int a(x)dx}\frac{dy}{dx}\right]+\left[b(x)e^{\int a(x)dx}\right]y+\lambda[c(x)e^{\int a(x)dx}]y=0 \tag{11.63}$$

施图姆-刘维尔型方程附加上各类边界条件,就构成施图姆-刘维尔本征值问题.例如

(1)$a=0,b=l$,$k(x)=$常数,$q(x)=0$,$\rho(x)=$常数.本征值问题为

$$y''+\lambda y=0 \quad y(0)=0, \quad y(l)=0. \tag{11.64}$$

对应的本征值是$\lambda=n^2\pi^2/l^2$,本征函数是$y=C\sin(n\pi x/l)$.

(2)$a=-1,b=l$,$k(x)=1-x^2$,$q(x)=0$,$\rho(x)=1$.(或者$a=0,b=\pi$,$k(\theta)=\sin\theta$,$q(\theta)=0$,$\rho(\theta)=\sin\theta$)这就是勒让德方程的本征值问题

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0 \tag{11.65}$$

同时,我们还要求$y(\pm1)$是有限的.由于$x=\cos\theta$,那么上述方程可以化为

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\lambda\sin\theta\Theta=0 \tag{11.66}$$

且$\Theta(0),\Theta(\pi)$是有限的.

施图姆-刘维尔本征值问题的共性

注意到先前例子中$k(x), q(x), \rho(x)$都是非负的,在这种情况下具有如下性质。

(1)如$k(x), k'(x), q(x)$连续或最多以$x = a, x = b$为一阶极点,则存在无穷多本征值

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant ... \tag{11.67}$$

相应的有无穷多本征函数

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x)... \tag{11.68}$$

这些本征函数的排列次序恰好使得节点个数依次增多.

(2)所有本征值$\lambda_n \geqslant 0$.

(3)相应于不同本征值λ_m, λ_n的本征函数$y_m(x), y_n(x)$在区间$[a, b]$上带权重$\rho(x)$正交,即

$$\int_a^b dx y_m(x) y_n(x) \rho(x) = 0 \quad (m \neq n). \tag{11.69}$$

(4)本征函数族$y_1(x), y_2(x), y_3(x), ...$是完备的.这个意思是说,如果函数$f(x)$具有连续一阶导数和分段连续的二阶导数,且满足本征函数所满足的边界条件,就可以展开为绝对且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x) \tag{11.70}$$

这个级数有叫作广义傅里叶级数,f_n是广义傅里叶系数.函数族$\{y_n\}$是级数展开的基.用$y_m(x)\rho(x)$遍乘上式各项并且逐项积分可得

$$\int_a^b f(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_a^b y_n(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n,m} f_m \int_a^b y_m^2(\xi) \rho(\xi) d\xi = f_m \int_a^b y_m^2(\xi) \rho(\xi) d\xi \tag{11.71}$$

记

$$N_m^2 = \int_a^b y_m^2(\xi) \rho(\xi) d\xi \tag{11.72}$$

而N_m就是$y_m(x)$的模.这样有

$$f_m = \frac{1}{N_m^2} \int_a^b f(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) d\xi. \tag{11.73}$$

复数的本征函数族

如果本征函数是复函数,那么我们可以把模定义为

$$N_m^2 = \int_a^b y_m(\xi) y_m^*(\xi) \rho(\xi) d\xi \tag{11.74}$$

$y_m^*(\xi)$是$y_m(\xi)$的共轭复数.正交关系也改为

$$\int_a^b y_m(\xi) y_n^*(\xi) \rho(\xi) d\xi = 0 \quad (n \neq m) \tag{11.75}$$

那么广义傅里叶系数是

$$f_m = \frac{1}{N_m^2} \int_a^b f(\xi) y_m^*(\xi) \rho(\xi) d\xi. \tag{11.76}$$

常点邻域上的级数解法

我们已经看到,在球坐标和柱坐标系下对拉普拉斯方程,波动方程以及输运方程分离变量后出现了连带勒让德方程,勒让德方程,贝塞尔方程,球贝塞尔方程等特殊函数方程.注意到它们都是二阶线性常微分方程,这说明我们需要研究带初始条件的线性二阶常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \quad y(x_0)=C_0, y'(x_0)=C_1 \tag{11.77}$$

对于这些方程,一般并不能用常规的方法求解,但是却可以用级数解法解出.

- 所谓级数解法,就是在选定某个点x_0的邻域上把待求的解表示为系数待定的级数,然后再把级数代入方程逐个确定系数.

  考虑一般的二阶常微分方程

$$\begin{aligned} &\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0 \\ &w(z_0)=C_0, \quad w'(z_0)=C_1 \end{aligned} \tag{11.78}$$

如果$p(z),q(z)$在点z_0的邻域中是解析的,则点z_0是方程的常点,而$p(z),q(z)$在点z_0不解析,则称其为方程的奇点.

- 定理,如果$p(z),q(z)$是点z_0邻域$|z-z_0|<R$内的解析函数,那么方程在圆区域中存在唯一解析解$w(z)$满足$w(z_0)=C_0, w'(z_0)=C_1$。 因此,在常点z_0邻域上有泰勒级数展开

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{11.79}$$

其中展开系数a_k待定,可以通过把级数形式代入方程,合并同幂项,令各项系数为零而得到系数之间的递推关系,最后结合初值C_0,C_1定出a_k.下面以l 阶勒让德方程为例,说明求解的具体步骤.

勒让德方程

在$x_0=0$的邻域上求解l阶勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \tag{11.80}$$

该方程可以改写为

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0 \tag{11.81}$$

因此

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2} \tag{11.82}$$

显然这两个函数在$x_0 = 0$处是解析的,因而x_0是方程的常点.把待求函数y展开为x的泰勒级数

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_k x^k + ... \tag{11.83}$$

那么有

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + k a_k x^{k-1} + (k+1)a_{k+1} x^k ... \tag{11.84}$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + ... + k\cdot(k-1)a_k x^{k-2} + ... + (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k ... \tag{11.85}$$

将它们代入方程有

$$(1-x^2)(2a_2+3\cdot 2a_3 x+4\cdot 3a_4 x^2+...)-2x(a_1+2a_2 x+...)+l(l+1)(a_0+a_1 x+a_2 x^2+...) = 0. \tag{11.86}$$

把关于x的同幂次项收集在一起,

$$l(l+1)a_0+2a_2+[l(l+1)a_1 - 2a_1 + 3\cdot 2a_3]\,x+[l(l+1)a_2 - 6a_2 + 4\cdot 3a_4]\,x^2+... = 0. \tag{11.87}$$

比较同幂次的系数可得

$$\begin{aligned}
&2\cdot 1a_2 + l(l+1)a_0 = 0\\
&3\cdot 2a_3 + (l^2+1-2)a_1 = 0\\
&4\cdot 3a_4 + (l^2+1-6)a_2 = 0\\
&5\cdot 4a_5 + (l^2+1-12)a_3 = 0\\
&.....\\
&(k+2)(k+1)a_{k+2} + (l^2+l-k^2-k)a_k = 0
\end{aligned} \tag{11.88}$$

这样可以得到系数的递推公式

$$a_{k+2} = \frac{k^2+k-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k = \frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \tag{11.89}$$

因此我们可以发现奇数与偶数次项的系数是

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-1-l)(2k-3-l)...(1-l)(l+2)(l+4)...(l+2k)}{(2k+1)!}a_1 \tag{11.90}$$

$$a_{2k} = \frac{(2k-2-l)(2k-4-l)...(2-l)(-l)(l+1)(l+3)...(l+2k-1)}{(2k)!}a_0 \tag{11.91}$$

这样我们就得到了l阶勒让德方程的级数解

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x). \tag{11.92}$$

这里y_0, y_1分别是偶数幂次的级数和奇数幂次的级数,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 + \frac{(-l)(l+1)}{2!}x^2 + \frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!}x^4 + ... \\ &+ \frac{(2k-2-l)(2k-4-l)...(2-l)(-l)(l+1)(l+3)...(l+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x + \frac{(1-l)(l+2)}{3!}x^3 + \frac{(3-l)(1-l)(l+2)(l+4)}{5!}x^5 + ... \\ &+ \frac{(2k-1-l)(2k-3-l)...(1-l)(l+2)(l+4)...(l+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

注意到$y_0(x)$仅包含x的偶数次幂,因此是一个偶函数,而$y_1(x)$只包含奇数次幂,所以是奇函数.对于一个级数,我们需要确定其是否收敛或者说在什么范围内收敛,对于$y_0(x)$和$y_1(x)$,利用幂级数的收敛半径公式可得

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+2}|} = \frac{|(n+2)(n+1)|}{|(n-l)(n+l+1)|} = 1 \tag{11.93}$$

因此,级数解$y_0(x)$和$y_1(x)$在$|x|<1$内收敛,在其外发散.(特别是$x=\pm 1$处也发散)

回忆先前关于l阶勒让德方程的讨论,在那里我们有$x=\cos\theta$,其绝对值显然小于等于一,因此尽管$y_0(x), y_1(x)$在$|x|>1$时发散,但只有$x=\pm 1$时发散确是一个问题.$x=\pm 1$把$x=1$($x=-1$也类似处理)代入级数解可得

$$y_0(x=1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}, \tag{11.94}$$

$$y_1(x=1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}, \tag{11.95}$$

如果

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right| < 1, \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}\right| < 1 \tag{11.96}$$

成立,那么相应的级数是收敛的,否则级数发散,显然,我们知道相邻两项的系数的比值在$k\to\infty$时是收敛半径$R=1$的倒数,即

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}\right| = \frac{1}{R} = 1 \tag{11.97}$$

这说明级数解$y_0(x), y_1(x)$在$x=1$处发散.因此,要解决发散问题实际上就需要让级数并不是无穷多项,而是在某一阶截断,即退化为有限项的多项式. 观察系

数a_{2k}, a_{2k+1}会发现,对于a_{2k},如果l取某个正的偶数,那么相应的系数就为零,级数解就会被截断为有限项的多项式.同理,对于a_{2k+1},l取某个正的奇数也会使得级数解截断为多项式.这类多项式就是l阶勒让德多项式.换句话说,只要l取为非负整数,那么无穷级数会成为有限项的多项式,这样在$x = \pm 1$处也会收敛.

正则奇点领域上的级数解法

在上一节的讨论中,我们在非奇点的邻域上展开函数w,那么如果展开点本身是奇点又该如何操作呢？显然,根据我们已经学过的洛朗展开的内容,可以猜测相应的展开应该是包含负幂次的洛朗级数展开.

一般的,有以下定理

- 若点z_0是方程的奇点,则在点z_0的邻域$0<|z-z_0|<R$上,方程可以存在两个线性独立的解,第一个是

$$w_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s_1+k} \tag{11.98}$$

第二个是

$$w_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k} \tag{11.99}$$

或

$$w_2(z)=Aw_1(z-z_0)\ln(z-z_0)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k} \tag{11.100}$$

其中s_1,s_2,A,a_k,b_k $(k=0,\pm1,\pm2,...)$是常数.

正则奇点领域上的级数解

- 若方程奇点z_0的邻域$0<|z-z_0|<R$上方程两个线性无关解w_1,w_2只有有限个负幂次项,则z_0称为正则奇点.

如果z_0是系数$p(z)$的不高于一阶的极点,是$q(z)$不高于二阶的极点,即有

$$p(z)=\sum_{k=-1}^{\infty}p_k(z-z_0)^k \quad q(z)=\sum_{k=-2}^{\infty}q_k(z-z_0)^k \tag{11.101}$$

那么z_0就是方程的正则奇点.换句话说,我们有

$$\boxed{w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s_1+k}} \tag{11.102}$$

$$\boxed{w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}} \tag{11.103}$$

或

$$\boxed{w_2(z) = Aw_1(z-z_0)\ln(z-z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k}} \tag{11.104}$$

这里的s_1, s_2是所谓判定方程$s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$的两个根,且s_2为较小的那个根.

- 注意第一个w_2适用于$s_1 - s_2$不等于整数的情况,而第二个包含对数的w_2则适用于$s_1 - s_2$等于整数的情况.

贝塞尔方程

ν阶贝塞尔方程

在点$z_0 = 0$的邻域上求解ν阶贝塞尔方程,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{11.105}$$

这里阶数$\nu \neq$整数或半整数.把方程左右同除以x^2可以化成标准形式,

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{11.106}$$

这样$p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$.显然,$x_0 = 0$是$p(x)$的一阶极点,是$q(x)$的二阶极点,因此$x_0 = 0$是方程的正则奇点.因此,系数$p_{-1} = 1, q_{-2} = -\nu^2$,相应的判定方程是(判定方程是$s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$)

$$s(s-1) + s - \nu^2 = 0 \tag{11.107}$$

两个根是$s_1 = \nu, s_2 = -\nu$,两根之差为2ν不等于零或整数.那么,两个线性无关的解是

$$w_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^{\nu+k} \tag{11.108}$$

$$w_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{-\nu+k} \tag{11.109}$$

现在,我们设级数解为

$$y(x) = a_0x^s + a_1x^{s+1} + a_2x^{s+2} + ... + a_kx^{s+k} + ..., \quad (a_0 \neq 0) \tag{11.110}$$

这里$s = \nu$或$-\nu$.那么,

$$y' = sa_0x^{s-1} + (s+1)a_1x^s + (s+2)a_2x^{s+1} + ... + (s+k)a_kx^{s+k-1} + ..., \quad (a_0 \neq 0) \tag{11.111}$$

$$y'' = s(s-1)a_0x^{s-2}+(s+1)sa_1x^{s-1}+(s+2)(s+1)a_2x^s+...+(s+k)(s+k-1)a_kx^{s+k-2}+..., \quad (a_0 \neq 0) \tag{11.112}$$

把这个形式代入方程有

$$\left[s(s-1)a_0 + sa_0 - \nu^2 a_0\right] x^s + \left[(s+1)sa_1 + (s+1)a_1 - \nu^2 a_1\right] x^{s+1} + ... = 0 \tag{11.113}$$

并且比较x的系数可知

$$\begin{aligned} &[s^2-\nu^2]a_0 = 0 \\ &[(s+1)^2-\nu^2]a_1 = 0 \\ &[(s+2)^2-\nu^2]a_2 + a_0 = 0 \\ &..... \\ &[(s+k)^2-\nu^2]a_k + a_{k-2} = 0 \\ &..... \end{aligned} \tag{11.114}$$

由于已经假定$a_0 \neq 0$,那么第一个方程就是判定方程,其根是$s = \pm\nu$,把它们代入第二个方程可得$a_1 = 0$.对于后面的各项进行系数的递推可得,

$$a_k = \frac{-1}{(s+k)^2-\nu^2}a_{k-2} = \frac{-1}{(s+k+\nu)(s+k-\nu)}a_{k-2} \tag{11.115}$$

取$s = \nu$,那么有$a_k = -a_{k-2}/k(2\nu+k)$.则

$$a_2 = \frac{-1}{2(2\nu+2)}a_0 = -\frac{1}{1!(\nu+1)}\frac{1}{2^2}a_0 \tag{11.116}$$

$$a_3 = \frac{-1}{3(2\nu+3)}a_0 = 0 \tag{11.117}$$

$$a_4 = \frac{-1}{4(2\nu+4)}a_2 = \frac{-1}{2(2\nu+2)}\frac{1}{2^2}a_2 = \frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)}\frac{1}{2^4}a_0 \tag{11.118}$$

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{1}{k!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)}\frac{1}{2^{2k}}a_0 \tag{11.119}$$

而

$$a_{2k+1} = 0 \tag{11.120}$$

这样我们就得到了ν阶贝塞尔方程的一个特解，

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0x^\nu[1 - \frac{1}{1!(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - ... \\ &+ (-1)^k\frac{1}{k!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + ...] \end{aligned} \tag{11.121}$$

可以看到,这个级数的收敛半径$R = \lim_{k\to\infty}|a_{k-2}/a_k| = \lim_{k\to\infty} k(2\nu+k) = \infty$,这说明只要$x$取有限值,那么级数就是收敛的.通常取$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$,并且我们把这个解叫作$\nu$阶贝塞尔函数,记作

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{11.122}$$

再取$s=-\nu$,可以得到另一个解

$$\begin{aligned} y_2(x) &= b_0 x^{-\nu}[1 - \frac{1}{1!(-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(-\nu+1)(-\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - ... \\ &+ (-1)^k \frac{1}{k!(-\nu+1)(-\nu+2)...(-\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + ...] \end{aligned} \tag{11.123}$$

其收敛半径也是无穷大.通常记$b_0 = 1/(2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1))$,这个解称为$-\nu$阶贝塞尔函数,记为

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \tag{11.124}$$

因此,ν阶贝塞尔方程的通解就是

$$\boxed{y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)} \tag{11.125}$$

这里ν不是整数或者半整数.

有时候也取$C_1 = \cot\nu\pi, C_2 = -\csc\nu\pi$,以此作为贝塞尔方程的第二个特解,称为$\nu$阶诺依曼函数,记为

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{11.126}$$

这样,ν阶贝塞尔方程的通解也可写为

$$\boxed{y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)} \tag{11.127}$$

半奇数$l+1/2$阶贝塞尔方程

在$x_0=0$的邻域上求解$l+1/2$阶贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + [x^2 - (l+1/2)^2]y = 0 \tag{11.128}$$

显然,该方程与ν阶贝塞尔方程形式是一样的,并且判定方程的两个根是$l+1/2, -l-1/2$.两根之差为正整数,因此第一个解为

$$J_{l+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(l+1/2+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{l+1/2+2k} \tag{11.129}$$

也就是把ν阶贝塞尔方程解中的ν换成$l+1/2$.而另一个解选为包含对数的那个解,即

$$y_2(x) = AJ_{l+1/2}(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-l-1/2+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-l-1/2+2k} \tag{11.130}$$

把这个结果代入方程可知$A=0$,因此$l+1/2$阶贝塞尔方程的通解是

$$\boxed{y(x) = C_1 J_{l+1/2}(x) + C_2 J_{-l-1/2}(x)} \tag{11.131}$$

整数m阶贝塞尔方程

在$x_0=0$的邻域上求解整数m阶贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + [x^2 - m^2]y = 0 \tag{11.132}$$

利用相同的方式,可以得到其通解为

$$\boxed{y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x)} \tag{11.133}$$

这里的$N_m(x)$是m阶诺依曼函数,其定义为ν阶诺依曼函数当$\nu \to m$的极限,即

$$N_m(x) = \lim_{\nu\to m} N_m(x) = \lim_{\nu\to m} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{11.134}$$

Chapter 12

球函数

轴对称球函数

勒让德多项式

回忆先前提到的球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{12.1}$$

方程的解$Y(\theta,\varphi)$是所谓的球函数,而进一步分离变量后则有[1]

$$Y(\theta,\varphi)=(A\cos(m\varphi)+B\sin(m\varphi))\Theta(\theta) \tag{12.2}$$

其中$\Theta(\theta)$满足连带勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \tag{12.3}$$

这里$x=\cos\theta$.

接下来研究$m=0$,此时连带勒让德方程简化为勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0 \tag{12.4}$$

而在上一章我们已经求出了勒让德方程的级数解,同时为了满足$x=\pm1$时解是有限的,l取值必须是一系列整数$l=0,1,2,3,...$,这样级数解简化为多项式,即所谓的勒让德多项式$P_l(x)$.通常约定,用适当的常数乘以方程解,以使得最高次项的系数为

$$a_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \tag{12.5}$$

利用系数之间的递推公式,则有

$$a_k=\frac{(k+2)(k+1)}{(k-l)(k+l+1)}a_{k+2} \tag{12.6}$$

反复利用该公式可以发现泰勒展开系数的明确形式是

$$a_{l-2n}=(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{n!2^l(l-n)!(l-2n)!} \tag{12.7}$$

把n换成k,那么l阶勒让德多项式的具体表达式是

$$\boxed{P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{k!2^l(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}} \tag{12.8}$$

[1] 也可以写成$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$

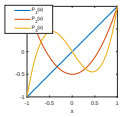


Figure 12.1: 前几个勒让德多项式$P_1(x), P_2(x), P_3(x)$在$[-1,1]$区间上的值.

这里$[l/2]$表示取不超过$l/2$的最大正整数,即有$[l/2] = l/2$(l为偶数)或$[l/2] = (l-1)/2$(l为奇数).由此,我们可以得到

$$\begin{aligned} P_l(-x) &= \sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!2^l(l-k)!(l-2k)!}(-1)^{l-2k}x^{l-2k} \\ &= (-1)^l \sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{-k} \frac{(2l-2k)!}{k!2^l(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \\ &= (-1)^l \sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{k} \frac{(2l-2k)!}{k!2^l(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \\ &= (-1)^l P_l(x). \end{aligned} \tag{12.9}$$

一般物理问题中常用的是前几个勒让德多项式,

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, \\ &P_1(x) = x = \cos\theta, \\ &P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1), \\ &P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta). \end{aligned} \tag{12.10}$$

勒让德多项式的微分表示

勒让德多项式有微分表达式,即

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l, \tag{12.11}$$

这也称作罗德里格斯公式.为了证明罗德里格斯公式,我们可以把$(x^2-1)^l$用二项式定理展开,即

$$(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{(l-k)!k!}(x^2)^{l-k}(-1)^k \tag{12.12}$$

这样

$$\frac{1}{2^l l!}(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k}{2^l(l-k)!k!}x^{2l-2k}. \tag{12.13}$$

现在,对上式求l次导数,由于$2l-2k$的幂次小于l的项在求导后为零,因而我们只需要考虑$2l-2k \geq l$的项,即$k \leq l/2$的项,这样有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^k(2l-2k)(2l-2k-1)...(l-2k+1)}{2^l(l-k)!k!}x^{l-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^k(2l-2k)!}{2^l(l-k)!k!(l-2k)!}x^{l-2k} = P_l(x). \end{aligned}\tag{12.14}$$

勒让德多项式的积分表示

同时,利用柯西公式把解析函数$f(x) = \frac{1}{2^l l!}(x^2-1)^l$的取值用回路积分表示,即

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-x}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^l/(2^l l!)}{z-x}dz, \tag{12.15}$$

这里C表示围绕$z=x$点的任意闭合回路.然后上式对x求l次导数可得,

$$\frac{d^l}{dx^l}f(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_c \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz, \tag{12.16}$$

注意到$\frac{d^l}{dx^l}f(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = P_l(x)$,这样我们就得到勒让德多项式的积分表示:

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_c \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz, \tag{12.17}$$

,这个积分也称为施列夫利积分.

进一步,我们可以把回路积分化为定积分.首先,我们设C为一个圆周,其圆心在x,半径为$\sqrt{x^2-1}$,这样C上的点可以表示为$z = x + \sqrt{x^2-1}e^{i\psi}$,而$dz = i\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}d\psi$.这样,回路积分化为:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[(x+\sqrt{x^2-1}e^{i\psi})^2-1]^l}{(\sqrt{x^2-1})^{l-1}(e^{i\psi})^{l+1}}[i\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}]d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}+(x^2-1)e^{i\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}}\right]^l d\psi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+\sqrt{x^2-1}\frac{e^{i\psi}+e^{-i\psi}}{2}]^l d\psi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+i\sqrt{1-x^2}\cos\psi]^l d\psi. \end{aligned} \tag{12.18}$$

这个积分就叫做拉普拉斯积分.根据拉普拉斯积分,我们有

$$P_l(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\psi = 1, \tag{12.19}$$

$$P_l(-1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)^l d\psi = (-1)^l. \tag{12.20}$$

最后,我们可以代入$x = \cos\theta$,那么有

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\right]^l d\psi. \tag{12.21}$$

这样有

$$\begin{aligned} |P_l(\cos\theta)| &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\right|^l d\psi \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\psi\right]^{l/2} d\psi \\ \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]^{l/2} d\psi &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\psi = 1, \end{aligned} \tag{12.22}$$

我们发现$|P_l(x)| \le 1.(-1 \le x \le 1)$

勒让德多项式的一些性质

不同阶的勒让德多项式之间具有以下的正交性关系,

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)dx = 0 \quad (k \ne l), \tag{12.23}$$

如果用原来的变量θ,那么就等价于

$$\int_0^\pi P_k(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 0 \quad (k \neq l). \tag{12.24}$$

对于勒让德多项式,利用微分表示并经过一些代数计算可得它的模是,

$$N_l^2 = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}, \tag{12.25}$$

则模$N_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$.

勒让德多项式$P_l(x), l = 0, 1, 2, 3, ...$是完备的,可以把定义在$[-1, 1]$上的函数$f(x)$用其来展开,(也可以是定义在$[0, \pi]$)的函数$f(\theta)$即

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{l=0}^\infty f_l P_l(x) \\ f_l &= \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx, \end{aligned} \tag{12.26}$$

或者是

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{l=0}^\infty f_l P_l(\cos\theta) \\ f_l &= \frac{2l+1}{2}\int_0^\pi f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \end{aligned} \tag{12.27}$$

最后,不同阶的勒让德多项式之间具有所谓的递推关系,

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0 \quad (k \geq 1). \tag{12.28}$$

例 利用递推关系计算积分$\int_{-1}^1 dx x P_k(x)P_l(x)$.

由$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x) = 0$可得$xP_k(x) = \frac{(k+1)}{2k+1}P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)$,那么有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx x P_k(x)P_l(x) &= \frac{(k+1)}{2k+1}\int_{-1}^1 dx P_{k+1}(x)P_l(x) + \frac{k}{2k+1}\int_{-1}^1 dx P_{k-1}(x)P_l(x) \\ &= \frac{(k+1)}{2k+1}\delta_{k+1,l}N_l^2 + \frac{k}{2k+1}\delta_{k-1,l}N_l^2. \end{aligned} \tag{12.29}$$

应用举例

例 以勒让德多项式为基,在区间$[-1, 1]$上展开$f(x) = 2x^3 + 3x + 4$.

注意到$f(x)$是x的三次多项式,可以表示为$P_0(x), p_1(x), P_2(x), P_3(x)$的线性组合,那么有

$$\begin{aligned} 4+3x+2x^3 &= f_0p_0(x)+f_1p_1(x)+f_2p_2(x)+f_3P_3(x) \\ &= f_0+f_1x+f_2\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)+f_3\left(\frac{5x^3}{2}-\frac{3x}{2}\right) \\ &= f_0-\frac{1}{2}f_2+(f_1-\frac{3}{2}f_3)x+\frac{3}{2}f_2x^2+\frac{5}{2}f_3x^3 \end{aligned} \tag{12.30}$$

比较两边关于x幂次的系数,我们得到

$$f_0-\frac{1}{2}f_2=4, \quad f_1-\frac{3}{2}f_3=3, \quad \frac{3}{2}f_2=0, \quad \frac{5}{2}f_3=2 \tag{12.31}$$

求解以上方程可得

$$f_0=4, \quad f_1=\frac{21}{5}, \quad f_2=0, \quad f_3=\frac{4}{5} \tag{12.32}$$

因此,$f(x)$的勒让德多项式展开是

$$f(x)=4P_0(x)+\frac{21}{5}P_1(x)+\frac{4}{5}P_3(x). \tag{12.33}$$

例 在半径为$r=r_0$的球内求解拉普拉斯方程$\nabla^2u=0$且满足边界条件$u|_{r=r_0}=\cos^2\theta$.

在先前的球坐标系分离变量拉普拉斯方程的讨论中,我们知道方程的解可以写成三部分,即

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{12.34}$$

其中径向部分$R(r)$是

$$R(r)=Cr^l+D\frac{1}{r^{l+1}} \tag{12.35}$$

考虑到这里的问题具有球对称,也就是说边界条件与极角φ无关,因此只需要考虑$\Theta(\theta)$所对应的$m=0$的解,即勒让德多项式$\{P_l(\theta)\}$.因此,方程的解可以假设为

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_lr^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta). \tag{12.36}$$

此外对于物理上有意义的解,在$r\to0$也就是接近球心时u应该是有限的而不是发散的,所以$\frac{1}{r^{l+1}}$类型的负幂次项需要舍弃,这样方程解可设为

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^lP_l(\theta). \tag{12.37}$$

然后代入边界条件可得

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r_0^l P_l(\theta) = \cos^2\theta = \frac{1}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{2}{3}P_2(\cos\theta) \tag{12.38}$$

比较两边系数可知除了$l=0$和$l=2$以外的所有$C_l=0$,并且

$$C_0 = \frac{1}{3}, \quad C_2 r_0^2 = \frac{2}{3}. \tag{12.39}$$

这样我们得到解为

$$u(r,\theta) = C_0 P_0(\cos\theta) + C_2 r^2 P_2(\cos\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2r^2}{3r_0^2}P_2(\cos\theta). \tag{12.40}$$

例 求$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$在$r<1$ 的球内部以及$r>1$的球外部的勒让得多项式展开.

我们可以看到,$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$实际上是位于单位球北极点$(0,0,1)$处的带电量为$4\pi\varepsilon_0$正电荷在球内任何一点的静电势,其显然满足拉普拉斯方程,因此其必然可以用$R(r)$和勒让德多项式展开,那么有

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{12.41}$$

这里已经考虑了球心处电势应该有限的要求.令两边的角度$\theta=0$可得

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_1 = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l \tag{12.42}$$

注意到$\frac{1}{1-r}$在$r=0$邻域可以展开为级数

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots \quad (r<1) \tag{12.43}$$

因此所有系数$C_l=1$,于是我们得到

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos\theta) \quad (r<1)} \tag{12.44}$$

如果考虑球外的电势,显然其展开只包含r的负幂次的展开,正幂次的展开在$r\to\infty$发散而被舍去.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (r>1) \tag{12.45}$$

令$\theta = 0$并考虑到在球外时$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \frac{1}{r-1}$,则有

$$\frac{1}{r-1} = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \frac{1}{r^{l+1}} \tag{12.46}$$

在球外,

$$\frac{1}{r-1} = \frac{1}{r}\frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + ...\right) \quad (r > 1) \tag{12.47}$$

通过比较两类展开的系数可知$D_l = 1$,则球外的展开形式是

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (r > 1)} \tag{12.48}$$

因为$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$具有如上所示的勒让德多项式展开,我们说它是勒让德多项式的母函数.如果我们把半径改为R,那么相应的展开是

$$\frac{1}{\sqrt{R-2Rr\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (r < R), \tag{12.49}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R-2Rr\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad (r > R). \tag{12.50}$$

连带勒让德函数

这一节将要讨论连带勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \tag{12.51}$$

这里$m=0,\pm1,\pm2...$注意到$x_0=0$是上述方程的常点,因此原则上可以直接用泰勒展开方法来求解.当然,我们实际上并不需要真的采用级数解法.

为了简化讨论,令

$$\Theta=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y(x) \tag{12.52}$$

这样有

$$\frac{d\Theta}{dx}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xy \tag{12.53}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y''-2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xy'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}+m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}x^2y \tag{12.54}$$

因而,我们得到

$$(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[l(l+1)-m(m+1)]y=0 \tag{12.55}$$

事实上,当$m>0$时,上述方程就是勒让德方程逐项求导m次得到的方程,因而该方程的解应当是勒让德方程解的m阶导数,即有

$$y(x)=P_l^{[m]}(x) \tag{12.56}$$

这里$[m]$表示对x求m次导数.下面我们证明这个结果.

首先我们知道勒让德方程是$(1-x^2)P_l''-2xP_l'+l(l+1)P_l=0$,这里$P_l$是方程的解即勒让德多项式.然后我们让这个方程对$x$求$m$次导数,即

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)\frac{d^2P_l}{dx^2}\right]-\frac{d^m}{dx^m}\left[2x\frac{dP_l}{dx}\right]+l(l+1)\frac{d^m}{dx^m}P_l=0. \tag{12.57}$$

接下来,利用莱布尼茨公式,

$$(\mu\nu)^{[n]}=\mu\nu^{[n]}+n\mu'\nu^{[n-1]}+\frac{n(n-1)}{2}\mu''\nu^{[n-2]}+...+\mu^{[n]}\nu \tag{12.58}$$

我们发现,

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^mP_l}{dx^m}\right]-2x(m+1)\frac{d}{dx}\left[\frac{d^mP_l}{dx^m}\right]+[l(l+1)-m(m+1)]\frac{d^m}{dx^m}P_l=0. \tag{12.59}$$

把这个结果与$(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[l(l+1)-m(m+1)]y=0$对比可知$y=\frac{d^mP_l}{dx^m}=P_l^{[m]}(x)$.

把这个解代回到Θ可得

$$\Theta=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x) \tag{12.60}$$

通常我们把上述解记为P_l^m,

$$P_l^m=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x) \tag{12.61}$$

称为连带勒让德函数.既然$P_l(x)$是l次多项式,那么它最多只能求l次导数,超过l就会是零,这样$l(l+1)$中的整数$l\geq m$,对于确定的m有

$$l=m,m+1,m+2,... \tag{12.62}$$

或者说对于确定的l有

$$m=0,1,2,...,l \tag{12.63}$$

当$m=0$时,$P_l^0=P_l(x)$,当$l>0$时,我们有

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sin\theta \tag{12.64}$$

$$P_2^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(3x)=\frac{3}{2}\sin(2\theta) \tag{12.65}$$

$$P_2^2(x)=3(1-x^2)=3\sin^2\theta \tag{12.66}$$

- 连带勒让德函数是勒让德多项式的导数,(对$m\geq 0$)这是其最基本的特征.

由勒让德多项式的微分表达式$P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$可以得到连带勒让德函数的微分表示,

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^ll!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \quad m>0 \tag{12.67}$$

当$m<0$时,我们可以令$m\to -m$,这样有

$$P_l^{-m}(x)=\frac{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^ll!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l \quad m>0. \tag{12.68}$$

这样我们发现连带勒让德函数的指标m取$0,\pm1,\pm2...\pm l$都有定义,这说明指标m的定义范围就是

$$m=0,\pm1,\pm2...\pm l. \tag{12.69}$$

- 在量子物理中,我们将会看到本征值l对应轨道角动量的量子数,而m对应轨道角动量在z方向的投影,又称为磁量子数.这里的条件$m=0,\pm1,\pm2,...\pm l$则成为磁量子数的取值范围.

进一步,我们可以证明P_l^{-m}与P_l^m之间满足如下关系:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad m > 0 \tag{12.70}$$

由此可得

$$P_1^{-1}(\cos\theta) = -\frac{1}{2}\sin\theta, \quad P_2^{-1}(\cos\theta) = -\frac{1}{4}\sin(2\theta), \quad P_2^{-2}(\cos\theta) = -\frac{1}{8}\sin^2\theta. \tag{12.71}$$

利用连带勒让德函数的微分表示并结合柯西公式就可以得到其积分表示

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l} \frac{1}{2\pi i} \frac{(l+m)!}{l!} \oint_C \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1+m}} dz \tag{12.72}$$

C代表包围$z = x$得任意闭合回路.

连带勒让德函数还具有正交关系,

$$\int_{-1}^{1} P_k^m(x) P_l^m(x) dx = 0 \quad (k \neq l) \tag{12.73}$$

如果用原来的变量θ,那么就等价于

$$\int_0^{\pi} P_k^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 0 \quad (k \neq l) \tag{12.74}$$

连带勒让德多项式的模是,

$$N_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!2}{(l-m)!(2l+1)}}, \quad \int_{-1}^{1} dx [P_l^m(x)]^2 = (N_l^m)^2. \tag{12.75}$$

可以把定义在$[-1,1]$上的函数$f(x)$用其来展开,(也可以是定义在$[0,\pi]$)的函数$f(\theta)$即

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l^m(x) \\ f_l &= \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_l^m(x) dx \end{aligned} \tag{12.76}$$

或者是

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l^m(\cos\theta) \\ f_l &= \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \end{aligned} \tag{12.77}$$

最后,不同阶的勒让德多项式之间具有所谓的递推关系,

$$(2k+1)xP_k^m(x) = (k+m)P_{k-1}^m(x) + (k-m+1)P_{k+1}^m(x) \quad (k \geq 1). \tag{12.78}$$

一般球函数

拉普拉斯方程在球坐标系下分离变量得到如下球方程,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{12.79}$$

球方程的解$Y=Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$是球函数,其描述了角度部分的变化.

对于角度φ,其本征函数是$\Phi(\varphi)\sim e^{im\varphi}$,由自然边界条件$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$可知$m$为整数.

对于角度θ,其本征函数是$\Theta(\theta)\sim P_l^m(\cos\theta)$,由$\Theta(\theta)$有限要求级数解退化为多项式,这给出$l$为非负的整数,进一步,求导次数不能大于$l$可得$m=0,\pm1,\pm2...\pm l$.

综合上述讨论,我们知道所求解的本征值问题是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0\\&|\Theta(\theta)|<\infty,\quad 0\le\theta\le\pi\\&\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi),\quad 0\le\varphi\le 2\pi.\end{aligned} \tag{12.80}$$

本征值为$l(l+1)(l=0,1,2...)$,对应每个l有$2l+1$个本征值$m(m=0,\pm1,\pm2...\pm l)$,相应的本征函数写成

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)\sim P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{12.81}$$

由于P_l^m的正交性和$e^{im\varphi}$的正交性,因此$Y_{l,m}$也具有正交性,这样正交归一的球函数可以写成

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{12.82}$$

这里$Y_{l,m}$称作l阶球函数.注意到这里系数的选取实际上是连带勒让德函数的模$N_l^m=\sqrt{\frac{(l+m)!2}{(l-m)!(2l+1)}}$的倒数与$e^{im\varphi}$的归一化因子$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$的乘积,这样选取是归一化的要求.

对于$m>0$,我们知道$P_l^{-m}=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m$,因此

$$\begin{aligned}Y_{l,-m}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}}P_l^{-m}(\cos\theta)e^{-im\varphi}=(-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}\\&= (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}.\end{aligned} \tag{12.83}$$

另一方面,我们可以对$Y_{l,m}$求复共轭,即有

$$Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P^m_l(\cos\theta)e^{-im\varphi}=(-1)^mY_{l,-m}(\theta,\varphi).\quad(m>0)\tag{12.84}$$

利用$Y^*_{l,m}$就可以得到球函数的正交归一性:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)Y_{l',m'}(\theta,\varphi)=\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}.\quad(m,m'>0)\tag{12.85}$$

当然,为了避免把m,m'限定为正数,我们也可以定义如下归一化球函数:

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P^{|m|}_l(\cos\theta)e^{im\varphi}\tag{12.86}$$

此时,$l=0,1,2...,m=0,\pm1,\pm2...\pm l$.这样$Y_{l,m}$的共轭$Y^*_{l,m}=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P^{|m|}_l(\cos\theta)e^{-im\varphi}$.

对于定义在球面上的函数$f(\theta,\varphi)$,我们可以用球函数进行展开,即有

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}f_{l,m}Y_{l,m}(\theta,\varphi),$$
$$f_{l,m}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta f(\theta,\varphi)Y^*_{l,m}(\theta,\varphi).$$

下面我们列出几个常用的球函数:(1)$l=m=0$,

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\tag{12.87}$$

(2)$l=1,m=0,\pm1$,

$$Y_{1,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r},$$
$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x\pm iy}{r}.\tag{12.88}$$

(3)$l=2,m=0,\pm1,\pm2$,

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2},$$
$$Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{z(x\pm iy)}{r^2}$$
$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{x\pm iy}{r^2}.\tag{12.89}$$

Chapter 13

柱函数

三类柱函数

在柱坐标系下对拉普拉斯方程分离变量可得贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0,\quad (x=\sqrt{\mu}\rho) \tag{13.1}$$

或者虚宗量贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0,\quad (x=\nu\rho) \tag{13.2}$$

对于亥姆霍茨方程,柱坐标系下分离变量也会得到贝塞尔方程.而在球坐标系下对亥姆霍茨方程分离变量得到的是球贝塞尔方程

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2x\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-l(l+1))R=0 \tag{13.3}$$

一点说明,现在ν指一般的阶,m指整数,$l+1/2$是半奇数阶.

三类柱函数

我们已经知道ν阶贝塞尔方程的通解是

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x) \tag{13.4}$$

或者

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x) \tag{13.5}$$

其中$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$是$\nu$阶贝塞尔函数,$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$是$\nu$阶诺依曼函数.

对于整数阶,其中一个解是$J_m(x)=J_{\nu\to m}(x)$,可以写出具体形式为

$$J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \tag{13.6}$$

注意到

$$J_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k} \tag{13.7}$$

由于当$k<m$是Γ函数在零和负整数取值是都为无穷大,因此上述求和仅需要从$k=m$开始,即有

$$\begin{aligned}J_{-m}(x) &= \sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{1}{(n+m)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\end{aligned} \tag{13.8}$$

再利用$\Gamma(n+1)=n!$,$(n+m)!=\Gamma(n+m+1)$可知

$$J_{-m}(x)=(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\Gamma(m+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}=(-1)^mJ_m(x). \quad (13.9)$$

因此$J_{-m}(x)$不是一个线性独立解,所以需要用诺依曼函数$N_m(x)=\lim_{\nu\to m}N_\nu(x)$作为独立的解.

通常也取线性独立的解

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(x)&=J_\nu(x)+iN_\nu(x)\\ H_\nu^{(2)}(x)&=J_\nu(x)-iN_\nu(x)\end{aligned} \quad (13.10)$$

称为第一和第二类汉克尔函数.于是,贝塞尔方程通解又可以表示为

$$y(x)=C_1H_\nu^{(1)}(x)+C_2H_\nu^{(2)}(x) \quad (13.11)$$

这个解也是用整数阶贝塞尔方程.

- 贝塞尔函数称为第一类柱函数;
- 诺依曼函数称为第二类柱函数;
- 汉克尔函数称为第三类柱函数.

三类柱函数的渐进行为

由柱函数的级数形式分析可得,当$x\to 0$时,有

$$\begin{aligned}&J_0(x)\to 0,\quad J_\nu(x)\to 0,\quad J_{-\nu}(x)\to\infty\\ &N_0(x)\to-\infty,\quad N_\nu(x)\to\pm\infty.\quad(\nu\neq 0)\end{aligned} \quad (13.12)$$

这样,在研究圆柱内部问题时,解在圆柱轴上$(\rho=0,x=0)$应为有限这个要求就成为自然边界条件,这样需要舍弃诺依曼函数和负阶汉克尔函数.

当$x\to\infty$时有

$$\begin{aligned}J_\nu(x)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\nu\pi/2-\pi/4)\\ N_\nu(x)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\nu\pi/2-\pi/4)\\ H_\nu^{(1)}(x)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\nu\pi-\pi/4)}\\ H_\nu^{(2)}(x)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x-\nu\pi-\pi/4)}.\end{aligned} \quad (13.13)$$

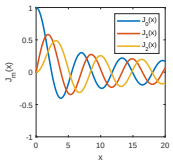


Figure 13.1: 前几个贝塞尔函数$J_0(x), J_1(x), J_2(x)$.

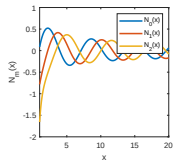


Figure 13.2: 前几个诺依曼函数$N_0(x), N_1(x), N_2(x)$.

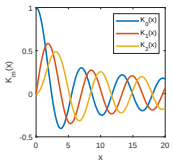


Figure 13.3: 前几个汉克尔函数$H_0(x), H_1(x), H_2(x)$.

柱函数的递推公式

由贝塞尔函数的级数表达可知

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]=\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2k}x^{2k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2k}x^{2k-1} \tag{13.14}$$

令$k=l+1$有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}2(l+1)}{(l+1)!\Gamma(\nu+l+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2l+2}x^{2l+1}\\ &= -\frac{1}{x^\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!\Gamma(\nu+1+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2l}=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{13.15}$$

同理可得

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{13.16}$$

由于诺依曼函数以及汉克尔函数都是贝塞尔函数的线性组合,因此它们也满足相同的关系.所以,我们可以用$Z_\nu(x)$统一表示三类柱函数,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{Z_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{Z_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \tag{13.17}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu Z_\nu(x)\right]=x^\nu Z_{\nu-1}(x) \tag{13.18}$$

把上述两个公式左边展开可得

$$\begin{aligned}&Z'_\nu(x)-\nu Z_\nu(x)/x=-Z_{\nu+1}(x)\\ &Z'_\nu(x)+\nu Z_\nu(x)/x=Z_{\nu-1}(x),\end{aligned} \tag{13.19}$$

然后消去$Z_\nu(x)$或$Z'_\nu(x)$可得

$$\begin{aligned}&Z_{\nu-1}(x)-\nu Z_{\nu+1}(x)=2Z'_\nu(x)\\ &Z_{\nu+1}(x)-2\nu Z_\nu(x)/x+Z_{\nu-1}(x)=0\end{aligned} \tag{13.20}$$

这样我们就得到了不同阶柱函数之间的递推公式.

贝塞尔函数与本征值问题

对于拉普拉斯方程,当$\mu \geqslant 0$时,$R(\rho)$满足整数m阶贝塞尔方程,

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0 \quad (x=\sqrt{\mu}\rho) \tag{13.21}$$

由于圆柱轴上的自然边界条件($\rho=0$时R是有限的),那么相应的解是

$$R(\rho)=J_m(x)=J_m(\sqrt{\mu}\rho) \quad m\geqslant 0 \tag{13.22}$$

而圆柱边界上的边界条件决定μ值的可能值,这就是方程的本征值.

对于第一类齐次边界条件$R(\rho_0)=0$,ρ_0是圆柱的半径.那么有

$$J_m(\sqrt{\mu}\rho_0)=0 \tag{13.23}$$

因此,μ的取值实际上依赖于$J_m(x)$的正零点$x_n^{(m)}$.m表示m阶贝塞尔函数,n代表第n个正根.

对于第二类齐次边界条件$R'(\rho_0)=0$,即

$$J'_m(\sqrt{\mu}\rho_0)=0 \tag{13.24}$$

μ的取值依赖于$J'_m(x)$的正零点$x_n^{(m,2)}$.

对于第三类齐次边界条件$R(\rho)+HR'(\rho_0)=0$,即

$$J_m(\sqrt{\mu}\rho_0)+HJ'_m(\sqrt{\mu}\rho_0)=0 \tag{13.25}$$

μ的取值可由上述方程的正零点得到.

贝塞尔函数的正交关系

作为施图姆-刘维尔本征值问题正交关系的特例,对应于不同本征值的同阶贝塞尔函数在区间$[0,\rho_0]$ 上带权重正交,

$$\int_0^{\rho_0}J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)J_m(\sqrt{\mu_l}\rho)\rho d\rho=0. \tag{13.26}$$

贝塞尔函数的模

$$[N_n^{(m)}]^2=\int_0^{\rho_0}\left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\right]^2\rho d\rho=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)\left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)\right]^2+\frac{1}{2}\rho_0^2\left[J'_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)\right]^2$$

代入第一类齐次边界条件有

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}\rho_0^2\left[J_{m+1}(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)\right]^2$$

代入第二类齐次边界条件有

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)\left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)\right]^2$$

代入第三类齐次边界条件有

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} + \frac{\rho_0^2}{\mu_n^{(m)}H}\right)\left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)\right]^2.$$

傅里叶-贝塞尔级数

根据施图姆-刘维尔本征值问题的性质,本征函数族$J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$是完备的,可以展开为广义傅里叶级数.在$[0,\rho_0]$的区间上,我们有

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho) \tag{13.27}$$

$$f_n = \frac{1}{[N_n^{(m)}]^2}\int_0^{\rho_0} f(\rho)J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\rho d\rho \tag{13.28}$$

如果$\rho_0 \to \infty$,则有傅里叶-贝塞尔积分

$$f(\rho) = \int_0^{\infty} F(\omega)J_m(\omega\rho)\omega d\omega \tag{13.29}$$

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(\rho)J_m(\omega\rho)\rho d\rho \tag{13.30}$$

例 考虑一个均匀的圆柱,半径为ρ_0,高为l,柱侧绝热,上下底面温度分布保持为$f_2(\rho)$和$f_1(\rho)$,求解圆柱内的稳定温度分布.

采用柱坐标,极点在下底中心,z轴沿着圆柱的轴.定解问题可以表示为

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial \rho}|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad u|_{\rho=0} = \text{finite}\\
&u|_{z=0} = f_1(\rho), \quad u|_{z=l} = f_1(\rho)
\end{aligned} \tag{13.31}$$

注意边界条件是第二类齐次边界条件,那么相应的本征值$\mu \geqslant 0$.考虑到圆柱轴上的自然边界条件,可得一般解为($\mu > 0$)

$$J_m(\sqrt{\mu}\rho)\left\{\begin{array}{c} e^{\sqrt{\mu}z} \\ e^{-\sqrt{\mu}z} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array}\right\} \tag{13.32}$$

注意到边界条件与角度φ无关,那么$m = 0$,因此相应的解简化为

$$J_0(\sqrt{\mu}\rho)\left\{\begin{array}{c} e^{\sqrt{\mu}z} \\ e^{-\sqrt{\mu}z} \end{array}\right\} \tag{13.33}$$

由第二类齐次边界条件$u_\rho(\rho_0) = 0$得到本征值$\mu_n^{(0)} = \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}$,$x_n^{(0)}$是$J_0'(x)$的第$n$个正根.

当$\mu = 0$时,相应的解是$R_0(\rho) = J_0(0) = 1$,此时$Z(z) = A + Bz$.把这些特解加起来就得到了通解

$$u(\rho, z) = A_0 + B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{x_n^{(0)}z/\rho_0} + B_n e^{-x_n^{(0)}z/\rho_0})J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \tag{13.34}$$

为了定出所有的叠加系数,把这个解代入边界条件可得

$$\begin{aligned} &A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) = f_1(\rho) \\ &A_0 + B_0 l + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{x_n^{(0)}l/\rho_0} + B_n e^{-x_n^{(0)}l/\rho_0})J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) = f_2(\rho) \end{aligned} \tag{13.35}$$

把右边的$f_1(\rho), f_2(\rho)$展开为傅里叶-贝塞尔级数并与左边比较系数可得

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\rho_0^2}\int_0^{\rho_0} f_1(\rho)d\rho = f_{10} \\ A_0 + B_0 l &= \frac{2}{\rho_0^2}\int_0^{\rho_0} f_2(\rho)d\rho = f_{20}. \end{aligned} \tag{13.36}$$

$$\begin{aligned} A_n + B_n l &= \frac{2}{\rho_0^2[J_0(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{\rho_0} f_1(\rho)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)d\rho = f_{1n} \\ A_n e^{x_n^{(0)}l/\rho_0} + B_n e^{-x_n^{(0)}l/\rho_0} &= \frac{2}{\rho_0^2[J_0(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{\rho_0} f_2(\rho)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)d\rho = f_{2n} \end{aligned}$$

即有

$$
\begin{aligned}
A_0 &= f_{10} \\
B_0 &= (f_{20} - f_{10})/l \\
A_n &= \frac{f_{1n} e^{-x_n^{(0)} l/\rho_0} - f_{2n}}{e^{-x_n^{(0)} l/\rho_0} - e^{x_n^{(0)} l/\rho_0}} \\
B_n &= \frac{f_{1n} e^{x_n^{(0)} l/\rho_0} - f_{2n}}{e^{x_n^{(0)} l/\rho_0} - e^{-x_n^{(0)} l/\rho_0}}.
\end{aligned}
$$

球贝塞尔方程

在球坐标系对亥姆霍茨方程分离变量可得球贝塞尔方程,

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0 \tag{13.37}$$

令$x=kr, R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$,可得$l+1/2$阶贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left[x^2-(l+1/2)^2\right]y=0 \tag{13.38}$$

若$k=0$,则方程简化为

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-(l+1/2)^2R=0 \tag{13.39}$$

此时方程的解是r^l和$r^{-(l+1)}$,因此下面我们仅考虑$k\neq 0$的情况.

线性独立解

$l+1/2$阶贝塞尔方程有如下几种解,

$$J_{l+1/2}(x),\quad J_{-l-1/2}(x),\quad N_{l+1/2}(x),\quad H^{(1)}_{l+1/2}(x),\quad H^{(2)}_{l+1/2}(x) \tag{13.40}$$

其中任取两个都可以构成方程的线性独立解.这样,球贝塞尔方程的解就是球贝塞尔函数

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x),\quad j_{-l}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-l-1/2}(x) \tag{13.41}$$

球诺依曼函数

$$n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x) \tag{13.42}$$

和球汉克尔函数

$$h^{(1)}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{l+1/2}(x),\quad h^{(2)}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{l+1/2}(x). \tag{13.43}$$

递推公式

用$z_l(x)$代表这几类球函数,即

$$z_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{l+1/2}(x) \tag{13.44}$$

由先前的递推关系可得

$$Z_{l+3/2}(x) - (2l+1)Z_{l+1/2}(x)/x + Z_{l-1/2}(x) = 0 \tag{13.45}$$

将Z改用z表出有

$$z_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{x} z_l - z_{l-1} \tag{13.46}$$

初等函数表示

由柱函数的级数表示可得

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{13.47}$$

我们以$J_{1/2}(x)$为例来说明如何得到上述结果.首先,根据贝塞尔函数的级数定义有,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1/2+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2k}. \tag{13.48}$$

接下来,根据Γ函数的性质$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$,这样就有

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \pi^{1/2}\Gamma(2z) \tag{13.49}$$

令$z = k+1$有$2^{2k+1}\Gamma(k+1)\Gamma(1/2+k+1) = \pi^{1/2}\Gamma(2k+2)$,即有

$$\Gamma(1/2+k+1) = \frac{\pi^{1/2}}{2^{2k+1}\Gamma(k+1)}\Gamma(2k+2) = \pi^{1/2}2^{-2k-1}\frac{(2k+1)!}{k!}, \tag{13.50}$$

那么

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\pi^{1/2}2^{-2k-1}\frac{(2k+1)!}{k!}} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2k} = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \sin x. \tag{13.51}$$

因此,根据$z_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{l+1/2}(x)$可知$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{1/2}(x)$,那么有

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \tag{13.52}$$

同理可得$j_{-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-1/2}(x) = \frac{\cos x}{x}$.

至于半奇数阶诺依曼函数,有

$$N_{l+1/2}(x) = \frac{J_{l+1/2}(x)\cos(l+1/2)\pi - J_{-l-1/2}(x)}{\sin(l+1/2)\pi} = (-1)^{l+1} J_{-1-1/2}(x) \tag{13.53}$$

改用球诺依曼和贝塞尔函数表示则有

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(x) \tag{13.54}$$

我们依次取$l = 0$和$l = -1$可得

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad n_{-1}(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{13.55}$$

反复利用递推公式可得如下的常用结果,

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{1}{x}\sin x \\ j_1(x) &= \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x) \\ j_2(x) &= \frac{1}{x^3}[3(\sin x - x\cos x) - x^2 \sin x] \end{aligned} \tag{13.56}$$

$$\begin{aligned} n_0(x) &= -\frac{1}{x}\cos x \\ n_1(x) &= -\frac{1}{x^2}(\cos x + x\sin x) \\ n_2(x) &= -\frac{1}{x^3}[3(\cos x + x\sin x) - x^2 \cos x] \end{aligned} \tag{13.57}$$

对于球汉克尔函数,有$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x),\ h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x)$

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(x) &= -\frac{1}{x}e^{ix} \\ h_1^{(1)}(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{ix} \\ h_2^{(1)}(x) &= \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{ix} \end{aligned} \tag{13.58}$$

$$\begin{aligned} h_0^{(2)}(x) &= -\frac{1}{x}e^{-ix} \\ h_1^{(2)}(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-ix} \\ h_2^{(2)}(x) &= \left(-\frac{3i}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{i}{x}\right)e^{-ix} \end{aligned} \tag{13.59}$$

渐进行为

当$x \to \infty$时,

$$\begin{aligned} j_l(x) &\sim \frac{1}{x}\cos(x - \frac{l+1}{2}\pi), \quad n_l(x) \sim \frac{1}{x}\sin(x - \frac{l+1}{2}\pi) \\ h_l^{(1)}(x) &\sim \frac{1}{x}e^{ix}(-i)^{l+1}, \quad h_l^{(2)}(x) \sim \frac{1}{x}e^{-ix}(i)^{l+1} \end{aligned} \tag{13.60}$$

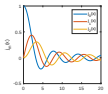


Figure 13.4: 前几个球贝塞尔函数$j_0(x), j_1(x), j_2(x)$.

球形区域内的本征值问题

我们可以把球贝塞尔方程改写为施图姆-刘维尔型

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - l(l+1)R + k^2r^2R = 0 \tag{13.61}$$

这里k就是本征值,r^2是权重函数.

这里方程在$r = 0$有自然边界条件,应该取$j_l(kr)$而舍弃$n_l(kr)$.而$j_l(kr)$还应满足球面上的第一,第二或第三类齐次边界条件,这决定了本征值k_m.而决定本征值的边界条件可以转化为对$J_{l+1/2}(kr)$的条件来求.

对于不同本征值的本征函数在区间$[0, r_0]$上带权重r^2正交,

$$\int_0^{r_0} j_l(k_m r) j_l(k_n r) r^2 dr = 0 \quad (k_m \neq k_n) \tag{13.62}$$

本征函数族$\{j_l(k_m r)\}$是完备的,可以作为广义傅里叶级数展开的基,

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m j_l(k_m r) \tag{13.63}$$

$$f_m = \frac{1}{[N_m]^2}\int_0^{r_0} f(r) j_l(k_m r) r^2 dr \tag{13.64}$$

而N_m是本征函数$j_l(k_m r)$的模,

$$[N_m]^2 = \int_0^{r_0} [j_l(k_m r)]^2 r^2 dr = \frac{\pi}{2k_m}\int_0^{r_0} [J_{l+1/2}(k_m r)]^2 r^2 dr \tag{13.65}$$

例 把平面波$v = e^{ikz}$展开为球面波的叠加.

显然,$v=e^{ikz}$满足亥姆霍茨方程$(\nabla^2+k^2)v=0$,并且可以改写为

$$v=e^{ikr\cos\theta} \tag{13.66}$$

我们知道在球坐标系中亥姆霍茨方程的分离变量结果是($r=0$是有限的)

$$j_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\} \tag{13.67}$$

注意到v与角度无关,因此可以取$m=0$,即有展开

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{13.68}$$

应用系数公式可得

$$A_l j_l(kr)=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}e^{ikrx}P_l(x)dx \tag{13.69}$$

当$r\to\infty$时,上述方程左边的渐进行为是

$$A_l j_l(kr)=A_l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+1/2}(kr)\sim A_l\frac{1}{kr}\cos(kr-\frac{(l+1)\pi}{2})=\frac{A_l}{2ikr}(e^{ikr-i\frac{l}{2}\pi}-e^{-ikr+i\frac{l}{2}\pi}) \tag{13.70}$$

当$r\to\infty$时,方程右边的渐进行为是

$$\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}e^{ikrx}P_l(x)dx=\frac{2l+1}{2ikr}\int_{-1}^{1}P_l(x)de^{ikrx}=\frac{2l+1}{2ikr}[P_l(x)e^{ikrx}]_{-1}^{1}-\frac{2l+1}{2ikr}\int_{-1}^{1}e^{ikrx}P_l'(x)dx \tag{13.71}$$

上式的主要部分是第一部分,贡献为$1/r$量级,而第二部分贡献为$1/r^2$量级,在$r\to\infty$ 极限下可忽略第二部分,这样有

$$\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}e^{ikrx}P_l(x)dx\sim\frac{2l+1}{2ikr}[P_l(1)e^{ikr}-P_l(-1)e^{-ikr}]=\frac{2l+1}{2ikr}e^{i\frac{l}{2}\pi}(e^{ikr-i\frac{l}{2}\pi}-e^{-ikr+i\frac{l}{2}\pi}) \tag{13.72}$$

因此,比较两边的结果可以发现

$$A_l=(2l+1)e^{i\frac{l}{2}\pi}=(2l+1)i^l \tag{13.73}$$

这样平面波的球面波展开式是

$$\boxed{e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)} \tag{13.74}$$

Chapter 14

其他数学物理话题

积分方程简介

- 在数学中，积分号中包含未知函数的方程称为积分方程(integral equation)。

积分方程理论的发展，始终与数学物理问题的研究紧密相联，它在工程、力学等方面有着极其广泛的应用。通常认为，最早自觉应用积分方程并求出解的是阿贝尔(Abel)，他在1823年研究质点力学问题时引出阿贝尔方程。此前，拉普拉斯(Laplace)于1782年在数学物理中研究拉普拉斯变换的逆变换以及傅里叶(Fourier) 于1811年研究傅里叶变换的反演问题实际上都是解第一类积分方程。随着计算技术的发展，作为工程计算的重要基础之一，积分方程进一步得到了广泛而有效地应用。如今，'物理问题变得越来越复杂，积分方程变得越来越有用'。

三类积分方程

最基本的积分方程是第一类Fredholm方程，其形式如下

$$\boxed{f(x)=\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt} \tag{14.1}$$

这里$f(x),K(x,t)$是已知函数，a,b是已知常数，$\varphi(t)$是待求的未知函数。在积分方程理论中，通常把$K(x,t)$叫作核函数(kernel function)。让我们举一个简单的例子，即

$$f(x)=\int_0^\infty \theta(x-t)\varphi(t)dt,\quad (f(0)=0) \tag{14.2}$$

这里$\theta(x-t)$就是阶跃函数，其自变量大于零时函数值为一，否则为零。由于阶跃函数的特性，因此可以看到如果$x<0$，那么积分贡献为零，这与方程左边的$f(x)$并不匹配，所以我们只考虑$x>0$的情况，此时有

$$f(x)=\int_0^x \varphi(t)dt \tag{14.3}$$

这意味着待求函数φ就是已知函数f的一阶导数，即$\varphi(x)=\frac{df(x)}{dx},(x>0)$。(这里已经利用了条件$f(0)=0$)

现在，如果我们在积分号外面也加上未知函数$\varphi(x)$，那么相应的方程就是第二类Fredholm方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{14.4}$$

这里还引入了未知因子λ，其作用类似于线性代数中的本征值。

当我们把积分上下限中的某一个换成变量x时，上述方程自动成为第一和第二类Volterra方程，即

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{14.5}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{14.6}$$

在这些积分方程中，如果已知函数$f(x) = 0$，那么相应的方程称为均匀积分方程，否则称为非均匀积分方程。

最后，我们介绍Wiener – Hopf积分方程，其形式如下

$$\boxed{f(x) = \lambda\varphi(x) + \int_0^\infty K(x-t)\varphi(t)dt,} \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{14.7}$$

其可以看成是一类特殊的第二类Fredholm方程，在数学物理研究中十分重要。

- 当积分号中出现未知函数的非线性形式时，相应的方程称为非线性积分方程，例如

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\frac{1}{1+\varphi^2(t)}dt \tag{14.8}$$

就是所谓的非线性Volterra方程，积分号中出现的是$\frac{1}{1+\varphi^2(t)}$。显然，相比于线性方程，非线性方程是更为困难的问题。

积分方程的求解

对于一般形式的积分方程，通常并不存在解析形式的解，我们只能数值求解。比较直接且实用的方法就是所谓的迭代法，也就是先猜测一个解，然后把这个解代入方程，经过计算可得一个新的解，然后不断重复此过程直到解的精度达到预设的要求。而对于简单的线性积分方程，我们也可以采用解代数方程组的方式来求解。下面我们以第一类Fredholm方程为例来介绍解方程组求解的思路。

首先假定我们在区域$x \in [c,d]$上求解第一类Fredholm方程，注意到积分上下限是a,b，因此我们要求求解区域应包含a,b。然后，我们把求解区域里的点x离散化，即

$$x_i = c + \frac{(i-1)}{N-1}(d-c), \quad i = 1,2,...N \tag{14.9}$$

这里我们把区域$[c,d]$离散成N个等间距的点构成的集合，每一个点记为x_i。同理t 也作同样的离散化操作，只不过对于在$[a,b]$以外的点t_i，其函数值$\varphi(t_i)$ 可

以看作是零。最后，积分变成对于每个点的求和，而dt成为$\frac{d-c}{N-1}$。这样，我们得到

$$f(x_i) = \frac{d-c}{N-1}\sum_{j=1}^{N} K(x_i,t_j)\varphi(t_j) \tag{14.10}$$

这实际上是由N个代数方程组成的方程组。进一步，我们可以把f, K, φ看成是以x_i, t_j为指标的列向量或者矩阵，那么就有

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \frac{d-c}{N-1} \begin{pmatrix} K(x_1,t_1) & K(x_1,t_2) & . & . & . & K(x_1,t_N) \\ K(x_2,t_1) & K(x_2,t_2) & . & . & . & K(x_2,t_N) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ K(x_N,t_1) & K(x_N,t_2) & . & . & . & K(x_N,t_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t_1) \\ \varphi(t_2) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi(t_N) \end{pmatrix} \tag{14.11}$$

写成紧凑的表示是

$$f_i = \frac{d-c}{N-1} K_{ij}\varphi_j. \tag{14.12}$$

显然，上述方程就是简单的常系数矩阵方程，求解φ只需两边乘上K的逆矩阵即可，即

$$\varphi_j = \frac{N-1}{d-c} K^{-1}_{ij} f_i \tag{14.13}$$

这就是求解积分方程的一种简单方式，适用于求解线性积分方程。

下面，我们再以非线性Fredholm方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(t,\varphi(t))dt \tag{14.14}$$

为例，简要讨论迭代法求解积分方程的步骤。这里F是关于未知函数φ的一般函数。和先前一样，我们对x, t在区间$[c,d]$离散化，并把积分换成求和，那么积分方程就转化为如下的代数方程，

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \frac{d-c}{N-1} K(x_i,t_j)F(t_j,\varphi(t_j)) \tag{14.15}$$

现在，我们假设φ具有一个确定的初始值，也就是说取定每一个$\varphi(t_j)$。然后对于每一个x_j，把这些值完全给定的φ代入方程右边，这样可以容易得到一个新的$\varphi(x_i)$，不断重复这种过程就是所谓的迭代法。当然，上述形式作迭代法计算容易出现迭代不收敛或者不稳定的情况，因此，实际使用时都采用所谓的松弛迭代，也就是添加一个可调因子$w \in [0,1]$，

$$\varphi(x_i) = w \cdot \varphi(x_i) + (1-w) \cdot \left[f(x_i) + \lambda \frac{d-c}{N-1} K(x_i,t_j)F(t_j,\varphi(t_j)) \right]. \tag{14.16}$$

这里方程右边出现的$\varphi(x_i)$都是上一次迭代时得到的量。一般w的取值依赖于具体问题，其取值会影响迭代过程的收敛性和快慢程度。当然，只要是迭代法求解问题就会出现迭代到局域极小值的问题，此时得到的φ并不是方程的解。因此，为了尽量避免这个问题，通常会随机地选取φ的初始值，如果随机初值都迭代到同一个结果，那么相应的φ应是真正的方程解。

迭代法求解实例

求解以下方程组成的积分方程组，这里$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, n = 0, \pm1, \pm2...$

$$\begin{aligned}
\Sigma(\tau) &= J^3 G^3(\tau) \\
\Sigma(\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Sigma(\tau) \\
G(\omega_n) &= \frac{1}{i\omega_n - \Sigma(\omega_n)} \\
G(\tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} G(\omega_n).
\end{aligned}$$

在J很小时有二阶微扰解

$$G(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-i\omega_n + J/2} + \frac{1}{-i\omega_n - J/2} \right) \tag{14.17}$$

而在J很大时有

$$G(\tau) = \frac{1}{\sqrt[4]{4J^2\pi}} \frac{1}{|\tau|} \mathrm{sgn}(\tau) \tag{14.18}$$

而在用迭代法求解时，我们先假设初始$G(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\tau)$，然后把它代入求得$\Sigma(\tau)$。再通过傅里叶变换求得$\Sigma(\omega_n)$ 并由此得到$G(\omega_n)$。通过逆傅里叶变换得到第一次迭代的$G(\tau)$。重复以上过程，最终可得收敛的$G(\tau)$，即最后的解。图14.1 给出了典型的例子，可以看到当τ比较小时，微扰解近似是合理的，而当τ较大时，强耦合解更符合长时下的行为。

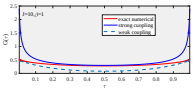


Figure 14.1: 积分方程的数值解与解析解的比较。

保角变换简介

在先前的分离变量法中，我们仅讨论了最简单的齐次边界条件下的求解。但是对于一般的数学物理问题，其边界条件往往是非常复杂的。这里，我们讨论一种可以把复杂边界条件化为简单边界条件的方法，即所谓的保角变换法。通常，我们也把保角变换称为共形变换(conformal transformation)，这个称呼在理论物理的研究中是广泛使用的。

准备

我们已经在前面讨论了复变函数中最重要的一类函数，就是解析函数。解析函数在物理中有一些重要的应用，其与解析函数的几个性质紧密相关。

- 若函数$f(z)=u+iv$在区域B上解析，那么$u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$是B上的两组正交曲线族。这里C_1, C_2是常数。

利用柯西–黎曼条件$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，把这两个方程两边分别相乘可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{14.19}$$

即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{14.20}$$

写成更为明确的表示是

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_y\right)=0 \tag{14.21}$$

也就是$\nabla u \cdot \nabla v = 0$，这说明$u, v$的梯度彼此正交。而$u = C_1$和$v = C_2$ 分别对应一类曲线族，注意到梯度是相应曲线族的法向矢量，因此两类曲线族互相正交。这样，解析函数实部和虚部等于常数所对应的曲线是互相正交的。

- 若函数$f(z) = u + iv$在区域B上解析，那么$u, v(x, y)$是B上的调和函数，也就是说两者在B上有二阶连续导数且满足拉普拉斯方程。

现在，我们对柯西–黎曼条件的两个方程分别对x和y求导可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{14.22}$$

把上述两式相加可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{14.23}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{14.24}$$

也就是有

$$\nabla^2 u = 0, \qquad \nabla^2 v = 0. \tag{14.25}$$

这说明，解析函数的实部和虚部分别满足拉普拉斯方程。这样，当已知某个调和函数时，可将其看作某解析函数的实部或者虚部，然后利用柯西–黎曼条件求出相应的虚部或实部，这样也同时确定了解析函数自身。为了后面的应用，我们可以用$z = x + iy, z^* = x - iy$来改写拉普拉斯方程。以$\nabla^2 u = 0$为例，

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = (\partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y) \cdot (u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y) \tag{14.26}$$

而

$$\partial_x = \partial_z \frac{\partial z}{\partial x} + \partial_{z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = \partial_z + \partial_{z^*} \tag{14.27}$$

$$\partial_y = \partial_z \frac{\partial z}{\partial y} + \partial_{z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y} = i\partial_z - i\partial_{z^*} \tag{14.28}$$

$$u_x = u_z \frac{\partial z}{\partial x} + u_{z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = u_z + u_{z^*} \tag{14.29}$$

$$u_y = u_z \frac{\partial z}{\partial y} + u_{z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y} = iu_z - iu_{z^*} \tag{14.30}$$

这样我们发现

$$\nabla^2 u = u_{zz} + u_{zz^*} + u_{z^*z} + u_{z^*z^*} - (u_{zz} - u_{zz^*} - u_{z^*z} + u_{z^*z^*}) = 2u_{zz^*} + 2u_{z^*z} = 4u_{zz^*} \tag{14.31}$$

那么拉普拉斯方程变为

$$u_{zz^*} = 0 \tag{14.32}$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} = 0 \tag{14.33}$$

在实际应用中，例如二维平面静电场问题，在没有电荷的区域，静电场的电势满足拉二维普拉斯方程，这样，我们可以认为某解析函数$f(z) = u + iv$的实部或者虚部描述该区域静电场的电势，我们称该解析函数为平面静电场的复势。

为明确期间，我们假设u是电势，那么曲线族u =常数就是等势线，而由于u的曲线族与v 的曲线族正交，因此v =常数描述的就是电场线。

保角变换的基本性质

一般的,我们把解析函数变换称为保角变换或者共形变换.在一般的空间维度,(d维欧氏空间)共形变换是对空间坐标的变换,由以下四个变换构成:

1. 平移变换:$x \to x' = x + a$,a为实常数;
2. 旋转变换:$x \to x' = Rx = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & ... \\ c & ... & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \end{pmatrix}$,$R$为$d \times d$的正交矩阵代表对坐标的旋转;
3. 标度/缩放变换:$x \to x' = \lambda x$,λ是非零的实数代表坐标放大或缩小的倍数;
4. 特殊共形变换:$x \to x' = \frac{x+bx^2}{1+2bx+b^2x^2}$.

那我们为什么要学习或研究共形变换呢？这是因为其在理论物理的很多问题中都有重要应用,例如

- 弦论中的玻色/费米弦的动力学;
- 一维无能隙量子流体的低能描述(Luttinger液体);
- 分数量子霍尔效应中多体波函数的构造(Laughlin,Moore-Read);
- 近藤杂质问题的边界共形场计算;
- 经典统计模型的临界性质(二维Ising模型,Potts模型,三维$O(N)$模型);
- 超对称共形规范理论和规范/引力对偶(Ads/CFT).

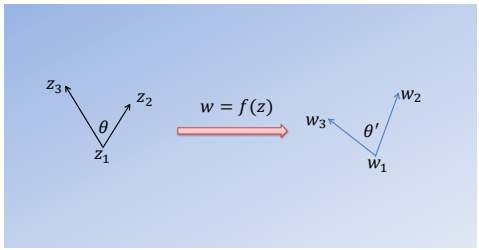


Figure 14.2: 保角变换$w = f(z)$,$\theta = \theta'$.

当然,上述应用直接相关的是基于共形变换的一类被称为共形场论(conformal field theory)的量子场论,进一步参考是Ginsparg的讲义以及大黄书. [1]

下面我们以$d = 2$空间的例子说明共形变换的基本意义.

首先,让我们定义在z复平面上的点z,以及以z为变量的解析函数$w = f(z)$.

因此,在z平面上每给定一点,w平面必有一点$w = f(z)$和它对应.现在,让我们考虑z平面上的三个点z_1, z_2, z_3,这样矢量$\overrightarrow{z_1 z_3}$与$\overrightarrow{z_1 z_2}$形成的夹角是

$$\theta = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \tag{14.34}$$

上是右边可以代入复数的指数形式直接验证.注意到在$w = f(z)$下,z映射至w,因此z_1, z_2, z_3分别与w平面上的w_1, w_2, w_3对应,这样w平面上的矢量$\overrightarrow{w_1 w_3}$与$\overrightarrow{w_1 w_2}$形成的夹角是(图14.2)

$$\theta' = \arg(w_3 - w_1) - \arg(w_2 - w_1) = \arg\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} \tag{14.35}$$

当z_1接近z_2, z_3时有

$$w_3 - w_1 = f(z_3) - f(z_1) = f(z_1) + (z_3 - z_1)f'(z_1) - f(z_1) = (z_3 - z_1)f'(z_1)$$
$$w_2 - w_1 = f(z_2) - f(z_1) = f(z_1) + (z_2 - z_1)f'(z_1) - f(z_1) = (z_2 - z_1)f'(z_1)$$

这样

$$\theta' = \arg\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \theta \tag{14.36}$$

[1] Applied Conformal Field Theory,arXiv:9108028;Di Francesco,Mathieu,Senechal,《Conformal Field Theory》.

即$\theta' = \theta$,这说明相交于z_1的无穷小曲线z_1z_2与z_1z_3的夹角与共形变换$w = f(z)$后相交的无穷小曲线w_1w_2,w_1w_3的夹角相同.也就是保持相对角度不变,这就是保角变换这个名称的来源.

如果我们进一步考察$w = f(z)$这个函数,那么在z平面上每给定一根曲线,w平面上必有一根对应的曲线.在相应的两曲线上各截取相应的一小段$(z, z + dz)$及$(w, w + dw)$,则由导数定义可知

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta \zeta|}{|\Delta z|} e^{i(\arg w - \arg z)} \tag{14.37}$$

这样,我们发现上述导数的模表示经过该变换后,无穷小线元dz变成w平面上的无穷小线元dw时其长度的伸缩比或者说放大倍数.而导数的辐角代表dw相对于dz逆时针方向转过的角度。

因此,如果在z平面上有两根曲线相较于z点,那么在w平面上也有两条相应的曲线交于相应的w点.从z平面到w平面,两曲线逆时针旋转$\arg f'(z)$角度,而两曲线交角不变.

- 以z为自变量的解析函数$w = f(z)$定义了保角变换。
- $f'(z) = 0$时辐角失去意义,保角性无定义。
- 可以证明,任意一个单连通区域必可通过某个保角变换变为另一个任意给定的单连通区域，这称为黎曼定理。

简单来看,我们可以说,导数处处不为零的解析函数定义了保角变换.

一些常见的保角变换

线性变换

$$w = f(z) = az + b \tag{14.38}$$

这里a, b是复常数,其导数为

$$f'(z) = a \tag{14.39}$$

是常数,这说明长度放大倍数是常数,图形的各个部分按照同样的比例放大而形状不变.

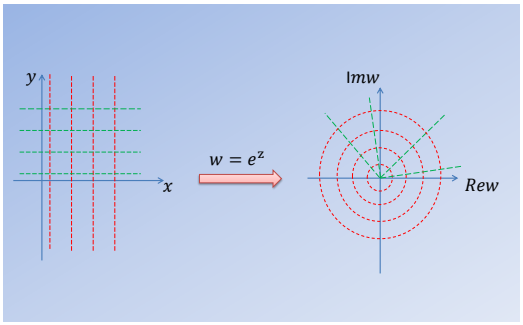


Figure 14.3: 保角变换$w = e^z = e^x e^{iy}$.

幂函数变换

幂函数

$$w = f(z) = z^n \tag{14.40}$$

的导数是

$$f'(z) = nz^{n-1} = n|z|e^{i(n-1)\arg(z)} \tag{14.41}$$

注意在原点处$f'(z = 0) = 0$,因此,除了原点以外,图形整体放大倍数依赖于具体的位置$(n|z|)$,且距离原点越远,放大程度越高.而相对于z平面的角度则依赖于各点原本的位置$((n-1)\arg z)$.

指数和对数函数变换

指数函数

$$w = f(z) = e^z = e^x e^{iy} \tag{14.42}$$

其中$|w| = e^x, \mathrm{Arg}w = y$,因此,$z$平面上平行于实轴的直线$y$ =常数变为w平面上$\mathrm{Arg}w$ =常数,即通过原点的射线.z平面上平行于虚轴的直线x =常数变成w平面上$|w|$ =常数,即以原点为圆心,w =常数为半径的圆.14.3

同时,指数函数具有纯虚数周期$2\pi i$,则z平面上x相同而y相差2π的整数倍数的点变成w平面上同一个点.z平面上任何一个平行于实轴而宽度为2π的带状区域变成w的全平面.带区域上的直角坐标网变成w平面上的极坐标.

对数函数

$$w = f(z) = \ln z = \ln(|z|e^{i\mathrm{Arg}z}) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z \tag{14.43}$$

是指数函数的逆变换,这样,z平面上以原点为圆心的圆$|z|$ =常数变成w平面上Rew =常数,即平行于虚轴的直线.同理,z平面上过原点的射线变成w平面上平行于实轴的直线.

反演变换

$$w = f(z) = \frac{R^2}{z} \tag{14.44}$$

称为反演变换,其中R是实常数.注意$z = 0$是极点,因此该函数在除了$z = 0$以外的点是解析的,即具有保角性质.

分式线性变换

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad - bc \neq 0) \tag{14.45}$$

的分子分母都是线性的,因此称为分式线性变换.条件$ad - bc \neq 0$是必要的,否则$a/c - b/d$,这样$\zeta = a/c = b/d$是常数,于是z平面上所有点都变成同一个点.我们也可以把该变换分解为三个相继的变换,即

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{(bc - ad)/c^2}{z_1}, \quad w = z_2 + \frac{a}{c}, \tag{14.46}$$

这说明分式线性变换可以由两个线性变换以及一个反演变换构成.此外,分式线性变换的一个重要特点是把圆保持为圆.对于两个线性变换,其只是起整体平移的效果,因此圆保持为圆没有问题.对于其中的反演变换,可以用下述方式证明.设任意给定的圆,

$$A(x_1^2 + y_1^2) + 2Bx_1 + 2Cy_1 + D = 0 \tag{14.47}$$

这是一个圆心在$(-B/A, -C/A)$,半径为$\sqrt{B^2 + C^2 - AD}/A$的圆.当用复数$z_1 = x_1 + iy_1$改写后有

$$Az_1z_1^* + (B + iC)x_1^* + (B - iC)z_1 + D = 0 \tag{14.48}$$

记$B + iC = E$,则有

$$Az_1z_1^* + Ex_1^* + E^*z_1 + D = 0 \tag{14.49}$$

现在由$z_2 = f/z_1, f = (bc - ad)/c^2$可得

$$A\frac{f}{z_2}\frac{f^*}{z_2^*} + E\frac{f^*}{x_2^*} + E^*\frac{f}{z_2} + D = 0 \tag{14.50}$$

最后对上述方程两边乘以$z_2 z_2^*$可得

$$Aff^* + Ef^* z_2 + E^* f z_2^* + D z_2 z_2^* = 0 \tag{14.51}$$

显然,这与变换前的方程形式相同,因此圆变换后还是圆,并且圆心是$(-\mathrm{Re}(E^* f)/D, -\mathrm{Im}(E^* f)/D)$,半径是$|f|\sqrt{|E|^2 - AD}/D$.

- 注意到若把分式线性变换的四个系数写成矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,则所有可能取值$a, b, c, d$构成一个群,称为modular群,该群在高能物理和凝聚态物理中有不少应用.

特殊共形变换

在共形场理论研究中,

$$x'^{\mu} = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2} \tag{14.52}$$

称为特殊共形变换,其由两个反演和一个平移变换构成.首先我们做反演变换

$$x^\mu \to \frac{1}{x^\mu} = \frac{1}{x^\mu}\frac{x^\mu}{x^\mu} = \frac{x^\mu}{x^2} \tag{14.53}$$

接下来在做一个平移变换

$$\frac{x^\mu}{x^2} \to \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu \tag{14.54}$$

最后做第二个反演变换可得

$$\frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu \to \frac{1}{\frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu} = \frac{\frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu}{(\frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu)^2} = \frac{\frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu}{\frac{1}{x^2} + b^2 - \frac{2b^\mu x^\mu}{x^2}} = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2} \tag{14.55}$$

群论简介

作为一类特殊的数学结构,群(group)的观念在物理学研究中发挥着重要的作用,特别是对量子力学诞生后的现代物理,例如粒子物理标准模型的理论构建.尽管物理学中对称性考虑总是重要的,然而群论直到量子力学创立之后才变得不可替代.Eugene Wigner在1963年所获得的诺贝尔奖主要归功于他在物理学中群论的使用.需要指出,包括Einstein,Schödinger在内的老一辈物理学家当时很抵触群论的使用,而Wigner的小伙伴von Neumann则支持他的工作.不过考虑到那是人们觉得量子力学的数学形式已经很古怪了,那么群论这个更古怪的东西被大家抵触也就正常了.

数学上,群定义为满足一些规则的元素的集合体,若群G的元素为g_α,那么有$G = \{g_\alpha\}$.群中的任意两个元素g_α, g_β的复合或者说乘积记为$g_\alpha \cdot g_\beta$,其也是G中的元素,即$g_\gamma = g_\alpha \cdot g_\beta$.群的乘法满足所谓的结合律,

$$(g_\alpha \cdot g_\beta) \cdot g_\gamma = g_\alpha \cdot (g_\beta \cdot g_\gamma), \tag{14.56}$$

此外存在单位元素I(有时也写成g_0),也就是任意群元与它相乘不变,

$$I \cdot g_\alpha = g_\alpha \cdot I = g_\alpha. \tag{14.57}$$

最后,对于任意一个群元g_α,存在逆元g_α^{-1}使得

$$g_\alpha \cdot g_\alpha^{-1} = g_\alpha^{-1} \cdot g_\alpha = I. \tag{14.58}$$

需要指出,

- 一般而言$g_\alpha \cdot g_\beta \neq g_\beta \cdot g_\alpha$,这时的群叫做非阿贝尔群(non-abelian group).如果$g_\alpha \cdot g_\beta = g_\beta \cdot g_\alpha$,这时候群元彼此对易(量子力学的说法),这时我们称这类群为阿贝尔群(abelian group);
- 群元数目有限的群称为有限群(finite group),反之,有无穷多群元素的群就是无限群(infinite group);
- 如果群元g_α中的参数α可以连续变化(比如三维空间中的角度),那么这个群就是所谓连续群(continuous group).与之相对,α只能取分立的取值的群就是分立群(discrete group).

下面我们列举一些典型的例子.

- 三维(欧几里得)空间中的转动.($SO(3)$群)

如果设空间的单位向量是

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14.59}$$

那么三维空间中的转动可以看作是对这些单位向量或者说基矢的转动,数学上可以用3×3的正交矩阵(矩阵元为实数,且矩阵的转置与逆相同)描述(并且它们的行列式为1).这些转动操作在数学上构成的群称为$SO(3)$群.

- 二维(欧几里得)空间中的转动.($SO(2)$群)

二维空间中的转动指的是绕着垂直于二维平面的轴的转动,假设转动角度为$\phi\phi$的转动操作用$R(\phi)$表示,它们形成的群是$SO(2)$群.物理上我们发现,$R(\phi_1)R(\phi_2) = R(\phi_1 + \phi_2) = R(\phi_2)R(\phi_1)$,这说明$SO(2)$群是阿贝尔群.

- 置换群S_4.

置换群S_4指的是把任意四个对象做置换操作所形成的群.这四个对象可以写成A, B, C, D或者$1, 2, 3, 4$.一个典型的置换操作是$1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 2, 4 \to 1$.显然,1, 2, 3, 4四个数的排列方式有4!种,这说明置换群S_4的群元有4!个.一般而言,n阶置换群S_n有$n!$个群元.

- 两个元素形成的群称为Z_2群,记为$Z_2 = \{1, -1\}$.

类似的,$1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$形成所谓的$Z_3$群.更一般的$Z_N$群是$Z_N = \{1, e^{i2\pi/N}, e^{i4\pi/N}...e^{i2\pi j/N}...e^{i2\pi(N-1)/N}\}$.

- 所有模为1的复数$e^{i\phi}$构成$U(1)$群.

$U(1)$群乘法是这些复数的相乘$e^{i\phi_1}e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1+\phi_2)}$,这是一类阿贝尔群.既然$e^{i(\phi+2\pi)} = e^{i\phi}$,这说明我们可以把$\phi$限制到$[0, 2\pi]$范围内,这是我们称之为紧致群(compact group).此外,$U(1)$群可以看作是Z_N群在$N \to \infty$的极限,此时$e^{i2\pi j/N} \to e^{i\phi}$.

- 所有行列式为1的$n \times n$矩阵组成的$SL(n)$群.

$SL(n)$群的乘法就是矩阵的乘法.如果矩阵都是实数矩阵,那么相应的群记为$SL(n, R)$,若为矩阵元为复数,则对应$SL(n, C)$群.

- 二面体群(dihedral group),记为D_n.

保持规则n边形多面体不变的群就是二面体群.这个群的元素有相对多面体中心转动$2\pi/n$角度的转动R以及镜面反射r.显然,$R^n = I, r^2 = I, rRr = R^{-1}$.这样$D_n$就有$2n$个元素$\{I, R, R^2, ..., R^{n-1}, r, Rr, R^2r, ..., R^{n-1}r\}$.

群的基本性质

子群

当然,一些群之间实际上有所属关系,例如子群(subgroup)关系.若$G = \{g_\alpha\}$,而G中的一些元素$\{h_\beta\}$也形成一个群,记为H,那么我们说H是G的子群,记为$H \subset G$.比较直接的例子是$SO(2) \subset SO(3), Z_2 \subset Z_4, SO(3) \subset SL(3,R)$.对于$SO(2) \subset SO(3)$,我们可以理解为在三维空间转动中仅仅做平面内转动.通过观察$Z_2 = \{1, -1\}, Z_4 = \{1, e^{i\pi/2}, -1, e^{i3\pi/2}\}$自然有$Z_2 \subset Z_4$,类似的我们发现$Z_2$并不是$Z_5$的子群,因为后者不包含$-1$这个群元.

一类特殊的子群是所谓的循环子群(cyclic subgroup),这可以通过任选(有限)群G中的元素g然后让g不断自乘实现,即有$\{g, g^2, g^3...\}$.如果这些元素构成一个群,那么必有$g^k = I$,此时我们可以把这个子群写成$\{I, g, g^2...g^{k-1}\}$,这实际上就是Z_k群.

- 此外,Lagrange定理表明若G有n个群元而其子群H有m个群元,那么必有n/m为整数.

根据这个定理,我们可以容易的判断既然Z_5有5个元素,Z_2有2个元素,那么5/2不为整数,这说明Z_2必定不是Z_5的子群.

群的直乘

当然,对一个物理系统而言,我们所施加的操作可以是不同类型的,这些不同类型的操作所形成的群最简单的就是所谓的群的直乘(direct product).让我们考虑两个群F和G,群元分别为f和g.我们定义新的群$H \equiv F \otimes G$,$\otimes$称为群的直乘,而群H的元素是$h = (f, g)$.这样H中两个元素的乘积为$(f, g)(f', g') = (ff', gg')$.显然,$H$的单位元是$(I, I)$,逆元是$(f^{-1}, g^{-1})$.若$F, G$群元分别有$m, n$个,则$H$有$m \times n$个元素.

让我们考虑群直乘的例子,即$Z_2 \otimes Z_2$,这可以看作是最简单的群直乘.既然每一个Z_2群包含元素$1, -1$,那么$Z_2 \otimes Z_2$群的四个元素可以写成

$$I = (1,1), \quad A = (-1,1), \quad B = (1,-1), \quad C = (-1,-1). \tag{14.60}$$

当然,我们需要指出虽然群元(a, b)中a, b的取值为± 1,但其含义可以完全不同,例如a取± 1是通常的整数,而b中的1代表$d \times d$单位矩阵I_d,-1代表-1乘以单位矩阵.因此在这种情况下我们可以把这个直乘群写成$\{1, -1\} \otimes \{I_d, -I_d\}$.

现在,让我们计算直乘群元素的相乘,根据直乘群元相乘的一般规则有$AB = (-1,1)(1,-1) = (-1 \times 1, 1 \times -1) = (-1,-1) = C$.另外,我们可以看到$Z_2 \otimes I = \{I, A\}, I \otimes Z_2 = \{I, B\}$都是$Z_2 \otimes Z_2$的子群.

群的同态和同构

若设群G和G'之间存在映射关系$f: G \to G'$,那么G中的元素g_1, g_2在G'中对应的元素是$f(g_1), f(g_2)$.现在如果G中的乘法结构$g_1 g_2$在G'中体现为$f(g_1)f(g_2)$,那么我们说G和G'同态(homomorphism).若映射是一一对应的,那么这个同态关系又称为同构(isomorphism).

最简单的同构关系是$SO(2)$与$U(1)$群,两者间的映射是$f(R(\phi)) = e^{i\phi}$,此时$SO(2)$中的元素$R(\phi_1), R(\phi_2)$对应$U(1)$元素$e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}$,这样$R(\phi_1)R(\phi_2)$对应于$f(R(\phi_1))f(R(\phi_2)) = e^{i\phi_1}e^{i\phi_2}$.

另一个例子是$Z_2 \otimes Z_2$与Z_4同构,前者的四个元素A, B, C, D可以一一对应于后者的四个元素$1, i, -1, -i$.更一般的是,Z_p与Z_q群的直乘$Z_p \otimes Z_q$与Z_{pq}同构.

不变子群

设$H = \{h_\beta\}$是$G = \{g_\alpha\}$的子群,取任意非H的元素g,然后用g^{-1}, g乘遍H的每一个元素,那么如果此时所得的群仍然是H本身,我们称H是G的不变子群(invariant subgroup,即$g^{-1}Hg = H$),记为$H \triangleleft G$或$G \triangleright H$.

显然,若$G = E \otimes F$,那么$E \otimes I$和$I \otimes F$分别是G的不变子群.对于$E \otimes I$而言,其任意元素是(e, I),然后我们从G中选取任意元素(I, f),则有

$$(I,f)^{-1}(e,I)(I,f) = (I,f^{-1})(e,I)(I,f) = (e,f^{-1})(I,f) = (e,f^{-1}f) = (e,I). \tag{14.61}$$

这说明$E \otimes I$确实是不变子群,类似的$I \otimes F$也是不变子群.换句话说,群直乘中的群必然不变子群.

此外,我们容易看到$Z_2 = \{1, -1\}$群是$Z_4 = \{1, i, -1, -i\}$群的不变子群,这是因为直接计算发现

$$-i\{1,-1\}i = 1,-1, \quad i\{1,-1\}(-1) = \{1,-1\}. \tag{14.62}$$

此外我们知道$Z_2 \otimes Z_2 = Z_4$,根据直乘群的构成群必然是不变子群的结构,Z_2是Z_4的不变子群.

陪集和商群

利用不变子群,我们可以定义所谓的陪集(coset).具体而言,任意取G中的元素g,让g乘遍不变子群H的每一个元素,此时我们得到集合$gh_1, gh_2...$,记为gH.如果我们取遍G中所有的元素g,那么就得到一些列集合,

$$g_1H = g_1h_1, g_1h_2..., \quad g_2H = g_2h_1, g_2h_2..., \quad g_3H = g_3h_1, g_3h_2..... \tag{14.63}$$

这些集合就构成了陪集.可以证明陪集也是群.比如说,我们可以任取陪集中的两个元素$g_\alpha h_\beta, g_\gamma h_\delta$,它们的乘积是

$$g_\alpha h_\beta g_\gamma h_\delta = g_\alpha (g_\gamma g_\gamma^{-1}) h_\beta g_\gamma h_\delta = g_\alpha g_\gamma (g_\gamma^{-1} h_\beta g_\gamma) h_\delta = g_\alpha g_\gamma h_\eta h_\delta = g_\alpha g_\gamma h_\theta \tag{14.64}$$

这说明陪集满足乘法规则$(g_\alpha H)(g_\gamma H) = g_\alpha g_\gamma H$而单位元是$IH = H$,也就是说不变子群$H$是陪集的单位元.另外$gH$的逆元是$g^{-1}H((g_\alpha H)(g_\alpha^{-1}H) = g_\alpha g_\alpha^{-1} H = IH = H$).由此,我们看到陪集实际上是以群作为群元素的一类群.

另一方面,由G的不变子群H,我们可以定义商群(quotient group),即$Q = G/H$.如果G有$N(G)$个元素,H有$N(H)$个元素,那么商群Q的元素个数是$N(G)/N(H)$.举例来说,我们知道$Z_2 = \{1, -1\}$群是$Z_4 = \{1, i, -1, -i\}$群的不变子群.这样我们可以找到4个陪集,即

$$A = \{1, -1\}, \quad B = i\{1, -1\} = \{i, -i\}, \quad C = -1\{1, -1\} = \{1, -1\}, \quad D = -i\{1, -1\} = \{i, -i\}. \tag{14.65}$$

当然,注意到$A = C, B = D$,这样陪集数实际上是2.然后由A, B作为群元所构成的群就是Z_4/Z_2的商群,即$\{A, B\} = Z_4/Z_2$.由于$\{A, B\}$是一个Z_2 群,[2]因此有$Z_2 = Z_4/Z_2$.当然,我们也知道Z_4与$Z_2 \otimes Z_2$同构,因此把商群的写法逆过来就是$Z_4 = Z_2 \otimes Z_2$.

二维平面中的转动

现在,让我们考虑二维平面(欧氏空间)中的转动,这可以看成是把二维空间中的直角坐标系以坐标原点为中心绕着垂直平面的z轴做转动,例如逆时针旋转θ角度.这样在转动前某点(记作P)的坐标若为(x, y),那么这一点在转动后坐标系中的坐标记为(x', y'),由几何关系可得$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$,写成矩阵形式则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{14.66}$$

这个结果也可以简写为$\vec{r}' = R(\theta)\vec{r}$,$R(\theta)$就是$2 \times 2$的转动矩阵.显然,$P$相对于原点的距离分别可以表示为$\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x'^2 + y'^2}$.物理上既然只是坐标轴的转动,那么这个距离无论在转动前后都是一样的,也就是$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$,直接代入上述矩阵变换关系可以说明这个结果确实正确.

[2]这个群的乘法是把群元的元素都以数的乘法乘在一起,例如$AA = \{1, -1\}\{1, -1\} = \{1, -1\} = A$.

可以发现,所有不同角度θ所对应的旋转矩阵$\{R(\theta)\}$构成一个群,就是$SO(2)$群.群的乘法规则就是矩阵的乘法.这里O是英文orthogonal的缩写,说明R 矩阵是正交矩阵,即$R^TR = I$,而S是英文special的缩写,意思是特殊,也就是说R的行列式为1($\det(R) = 1$).这样满足$SO(2)$群要求的R矩阵就是行列式为1 的正交矩阵,它们的矩阵元都是实数.

更一般的,如果我们不要求行列式为1,那么满足正交条件$O^TO = I$的所有2×2的O矩阵构成$O(2)$群.对于这个群,如果计算行列式会发现

$$\det(O^TO) = \det(O^T)\det(O) = \det(O)\det(O) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(O) = \pm 1. \tag{14.67}$$

这说明$O(2)$群里面的矩阵可以按照行列式取值分为两类,即$\det(O) = 1$和$\det(O) = -1$.前一类就是我们已经讨论的$SO(2)$群,那么后一类是什么呢?

我们知道如果让y轴变成$-y$轴,我们就可以得到(相对于$x = 0$的镜面)反射操作,这可以用矩阵$P_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$实现.显然$P_y$是正交矩阵但其行列式为$-1$,因此$P$并不是$SO(2)$群的元素而$O(2)$群的元素.类似的,对于$y$轴镜面反射由下面的矩阵描述: $P_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.当然,$P_x = P_yR(\pi)$.因此,我们发现完整的$O(2)$群可以用转动$R$,反射$P_y$以及两者的结合$P_yR$组成,即$O(3) = \{R, P_y, P_yR(\theta)\}$.这样$SO(2) = \{R\}$自然是$O(2)$的子群.

此外,如果用2×2单位矩阵I_2和P_y就可以构造一个$Z_2 = \{I_2, P_x\}$群.由这个Z_2群与$SO(2)$群就可以得到所有的$O(2)$群(的矩阵),这说明$SO(2) \otimes Z_2$的直乘群同构于$O(2)$(记为$O(2) = SO(2) \otimes Z_2$),或者或者说$O(2)$与Z_2的商群是$SO(2) = O(2)/Z_2$.

另一方面,我们可以用更加理论化的方式得到转动矩阵$R(\theta)$的具体形式.这种方式是构造转动群的一般方式.我们知道当不进行转动操作时,也就是$\theta = 0$时必有$R(\theta = 0) = I$(单位矩阵).现在让我们假设转动的角度θ足够小,这样就可以对$R(\theta)$做泰勒展开:[3]

$$R(\theta) = I + \theta\mathcal{J} + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{14.68}$$

这里$\mathcal{J}$是某个明确的矩阵.然后把上述关系代入正交矩阵的定义$R^TR = I$,可得

$$(I + \theta\mathcal{J}^T)(I + \theta\mathcal{J}) = I + \theta\mathcal{J}^T + \theta\mathcal{J} + \mathcal{O}(\theta^2) = I \tag{14.69}$$

[3]虽然$R(\theta)$是关于θ的矩阵函数,但对于做物理的人而言这无法阻挡我们做泰勒展开!

这说明$\mathcal{J}^T = -\mathcal{J}$,也就是说$\mathcal{J}$是反对称矩阵.既然我们考虑的是2维空间的转动,那么$\mathcal{J}$可以选为

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14.70}$$

因此转动角度很小时的转动矩阵可以写成

$$R(\theta) = I + \theta\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2). \tag{14.71}$$

我们通常把$\mathcal{J}$称作转动的生成元(generator),因为可以用它实现转动操作.当θ为有限大小时,我们可以认为的把它写分为N等分,即有$\theta = N\delta\theta(\delta\theta = \theta/N)$.这样尽管每一个转动小角度$\delta\theta$,但转动$N$次以后等价于我们直接旋转$\theta$角度:

$$R(\theta) = \lim_{N\to\infty}(R(\delta\theta))^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\theta}{N}\mathcal{J}\right)^N = \lim_{N\to\infty}(e^{\frac{\theta}{N}\mathcal{J}})^N = e^{\theta\mathcal{J}}. \tag{14.72}$$

接下来,让我们对$e^{\theta\mathcal{J}}$做泰勒展开:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= e^{\theta\mathcal{J}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}\mathcal{J}^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\mathcal{J}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathcal{J}^{2k+1} \\ &= I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{J}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= I\cos\theta + \mathcal{J}\sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14.73}$$

这样我重新得到了二维空间转动的具体形式.

$SO(3)$群与转动

对于三维欧式空间,我们也可以定义相应的转动,这类操作实际上保持矢量内积的不变性,即$\vec{\phi}\cdot\vec{\eta} = \sum_j \phi_j\eta_j$在转动下变为$\vec{\phi}'\cdot\vec{\eta}' = \sum_j \phi'_j\eta'_j = \sum_{i,k,j} R^T_{ki}R_{ji}\phi_k\eta_i = \sum_i \phi_i\eta_i$.这样转动矩阵$R$满足正交条件$R^TR = I$.与二维空间转动相比,此时的转动描述需要三个角度,一般来说是x, y, z轴转动的角度$(\theta_x, \theta_y, \theta_z) \equiv \vec{\theta}$. 对于这三个转动,对应的生成元$\vec{\mathcal{J}} = (\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y, \mathcal{J}_z)$(都是反对称

矩阵):

$$\mathcal{J}_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad \mathcal{J}_y=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathcal{J}_z=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{14.74}$$

这样任意的转动可以表示为$R(\vec{\theta})=e^{\theta_x\mathcal{J}_x+\theta_y\mathcal{J}_y+\theta_z\mathcal{J}_z}=e^{\vec{\theta}\cdot\vec{\mathcal{J}}}$.所有$R(\vec{\theta})$矩阵构成$SO(3)$群,群的乘法就是矩阵的乘法.当然,在量子力学中我们知道空间旋转与轨道角动量$\vec{J}$(算符)直接相关,因此我们可以定义$\vec{J}=-i\vec{\mathcal{J}}$,这样有$R(\vec{\theta})=e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}}$.同时,通过$\mathcal{J}_{x,y,z}$的具体形式,我们可以得到对易关系$[J_i,J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k$,($\varepsilon_{ijk}$是全反对称张量)这就是量子力学中角动量的对易关系.此外,角动量的平方$J^2=J_x^2+J_2^y+J_z^2$称为$SO(3)$代数Casimir不变量.

Lie群与Lie代数

假设一个群的元素用$g(\vec{\theta})=g(\theta_1,\theta_2...)$表示,而$\vec{\theta}$是连续变化的参数,并且$g(0,0...0)=I$(单位元),那么由$g(\vec{\theta})$构成的群称为Lie群.例如前面讨论的$SO(3)$群就是典型的Lie群,此时参数是三个角度$\theta_x,\theta_y,\theta_z$.

对于Lie群,我们首先把群元在单位元附近展开,即$g=I+A$.然后把A写成生成元T_a的线性叠加,$A=i\sum_a\theta_aT_a$.接下来,任选两个群元$g_1=I+A,g_2=I+B$,这样有$g_1g_2g_1^{-1}\simeq I+B+[A,I+B]=I+B+[A,B]$.这样对易关系$[A,B]$就抓住了群元在接近单位元时的基本性质. 最后代入$B=\sum_b\theta_b'T_b$,并且注意到$g_1g_2g_1^{-1}\simeq I$,这样可以得到$[T_a,T_b]=if_{abc}T_c$.这个对易关系又称为Lie代数(Lie algebra),而因子f_{abc}叫做Lie代数的结构常数(structure constants).这些结构常数决定了Lie代数进而决定了整个Lie群.

$SO(4)$Lie代数

现在,让我们考虑$SO(4)$,类似于$SO(3)$群的讨论,体系总计有$3\times4/2=6$个生成元J_{ab},一般记作$J_{12},J_{23},J_{31},J_{14},J_{24},J_{34}$.这里的指标$ab$指的是在$ab$平面内的转动.显然,$J_{12},J_{23},J_{31}$可以看作是四维欧式空间中三维空间里面相对于$x,y,z$轴的转动,也把它们写成$J_3=J_{12},J_1=J_{23},J_2=J_{31}$.对与涉及第四个维度的旋转$J_{14},J_{24},J_{34}$,我们也把它们记为$K_1=J_{14},K_2=J_{24},K_3=J_{34}$.这些生成元满足如下的对易关系:

$$\begin{aligned}[J_i,J_j]&=i\varepsilon_{ijk}J_k\\[J_i,K_j]&=i\varepsilon_{ijk}K_k\\[K_i,K_j]&=i\varepsilon_{ijk}J_k.\end{aligned} \tag{14.75}$$

这就是$SO(4)$群的Lie代数,可以看到这个代数的结构常数就是熟悉的全反对称张量.注意到$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$是$SO(3)$群的Lie代数,这自然说明$SO(3)$代数是$SO(4)$Lie代数的子代数.

此外,注意到在$J_i \to J_i, K_i \to -K_i$变换下$SO(4)$代数是不变的,这相当于我们对第四个坐标轴做反射变换$x_4 \to x_4$而其他轴保持不变.(也可以让前三个坐标轴做反射变换而第四个轴不变)

如果定义$J_{\pm,i} = \frac{1}{2}(J_i \pm K_i)(i = 1, 2, 3)$,那么就有$[J_{+,i}, J_{-,j}] = 0$,这说明$SO(4)$代数实际上可以拆分为两个独立的$SO(3)$子代数,

$$[J_{+,i}, J_{+,j}] = i\varepsilon_{ijk}J_{+,k}, \quad [J_{-,i}, J_{-,j}] = i\varepsilon_{ijk}J_{-,k}. \tag{14.76}$$

在分立变换$J_i \to J_i, K_i \to -K_i$下$J_{+,i}, J_{-,i}$彼此交换.

最后,我们一般会说$SO(4)$群局域同构与$SO(3) \otimes SO(3)$,这实际上是指这两个群在单位元附近是相同的.

群的表示

根据群的定义,群元实际上都是抽象的对象.但是在实际使用,特别是计算中,我们会把群元用矩阵来表示,这就叫做群的矩阵表示,简称群表示(representation of group). 具体而言,设群$G = \{g_\alpha\}$的任意群元g_α对应的矩阵是$D(g_\alpha)$,矩阵D的维度都是$d \times d$,如果

$$D(g_\alpha)D(g_\beta) = D(g_\alpha g_\beta) \tag{14.77}$$

对任意g_α, g_β都成立,我们就得到了一个群的矩阵表示.(g_α的逆g_α^{-1}对应的矩阵是$D(g_\alpha^{-1}) = D(g_\alpha)^{-1}$)这里矩阵维度$d$叫做群表示的维度,$D_d(g)$可以理解为群元$G$的$d$维表示.这个关系实际上说明群元素相乘已经转化为相应的矩阵相乘,这样我们就可以通过研究矩阵的性质反过来得到群的性质.例如,之前已经讨论过的$SO(2), SO(3)$群实际上就是分别用2×2和3×3的正交矩阵表示.

现在我们知道了群表示的含义,那么我们自然会问一些问题,例如:

1. 群都有矩阵表示吗?
2. 一个群有多少个表示,有限还是无限?
3. 群表示的一般性质是什么?
4. 如何表征和区分不同的群表示?

对于第一个问题,我们通常认为物理研究中涉及的群都有矩阵表示,这自然是十分合理的想法.对于第二个问题,很明显的,如果我们让群的每个元素都用单位矩

阵来表示,那么这个表示自然是成立的,只不过太过于普通,这一般叫做群的平凡表示(trivial representation).如果每个群元素都和相应的矩阵一一对应,这种表示就叫做faithful表示,这实际上就是群同构的意思,也就是一个抽象的群和矩阵所组成的群有一一对应关系.

既然一个群有不同的表示,那么就可以把表示矩阵写成$D^(r)(g)$,这个意思是群元g在r这个表示下的矩阵是$D^{(r)}(g)$.对于$D^(r)(g)$,我们可以计算它的迹:

$$\chi^{(r)}(g) \equiv \mathrm{Tr}D^{(r)}(g) \tag{14.78}$$

这里$\chi^{(r)}(g)$称为群的特征标(character).字面上来说,特征标既依赖于群元g也依赖于表示r.但是,如果群元g_1, g_2之间满足$g_1 = f^{-1}g_2 f$,(这里f是群G中的某个元素)我们说g_1, g_2之间是等价的,所有等价的群元就组成了所谓的等价类(equivalence class).这样,我们发现,

$$\begin{aligned}\chi^{(r)}(g_1) &= \mathrm{Tr}D^{(r)}(g_1) = \mathrm{Tr}D^{(r)}(f^{-1}g_2 f) = \mathrm{Tr}D^{(r)}(f^{-1})D^{(r)}(g_2)D^{(r)}(f)\\ &= \mathrm{Tr}D^{(r)}(f)D^{(r)}(f^{-1})D^{(r)}(g_2) = \mathrm{Tr}D^{(r)}(f)(D^{(r)}(f))^{-1}D^{(r)}(g_2)\\ &= \mathrm{Tr}D^{(r)}(g_2) = \chi^{(r)}(g_2).\end{aligned} \tag{14.79}$$

这说明等价群元的特征标相同,因此我们发现同一个等价类实际上有相同的特征标,这可以写成$\chi^{(r)}(c) = \mathrm{Tr}D^{(r)}(g), g \in c$($c$表示等价类).这样我们可以说特征标是等价类的函数.

接下来,让我们考虑两个表示$D(g)$和$D'(g)$.由于$D(g), D'(g)$都是矩阵,那么线性代数课程告诉我们如果存在一个矩阵S使得$D'(g) = S^{-1}D(g)S$,那么$D(g)$和$D'(g)$是等价的.如果对于任意g这个结果都成立,那么我们会说这两个表示实际上是等价的.

当然,更简单判断两个表示是否等价的方式是考虑它们的特征标.假设$D'(g) = S^{-1}D(g)S$,直接计算有

$$\chi'(c) = \mathrm{Tr}D'(g) = \mathrm{Tr}S^{-1}D(g)S = \mathrm{Tr}D(g) = \chi(c). \tag{14.80}$$

这说明如果同一个等价类c的两个表示的特征标不同,那么相应的表示是不等价的.反之,如果对于所有的等价类,两个表示的特征标都相等,那么我们说这两个表示确实是等价的.因此,考查等价类在不同表示下的特征标是判断不同表示的重要依据.

可约与不可约表示

对于$SO(3)$群,我们知道它存在平凡表示$D^{(1)}(g) = 1$,同时我们也用3×3正交矩阵表示它们,这也叫做$SO(3)$群的基本表示(fundamental representation),记

为$D^{(3)}(g)$.利用这两个表示,如果我们把它们堆叠在一起就可以给$SO(3)$群构造出一个8维表示(这样构造表示的方式称为堆叠表示(stacking representation)):

$$D^{(8)}(g)=\begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)}(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{(3)}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(3)}(g) \end{pmatrix}. \tag{14.81}$$

注意到这个表示矩阵写成了分块对角的形式,我们把这种表示称为可约表示.反之如果表示矩阵无论如何也无法写成分块对角形式,我们便把相应的表示叫做不可约表示.我们通常把这里可约的8维表示写成直和的形式,即$D^{(8)}(g)=D^{(1)}(g)\oplus D^{(1)}(g)\oplus D^{(3)}(g)\oplus D^{(3)}(g)$.因此这里的堆叠表示又叫做直和表示(direct sum representation).显然,从这个例子可以看到我们可以构造无穷多的可约表示,因此真正重要的应该是研究不可约表示.对于群表示理论而言,其中一个重要的目标是找到如何判断一个给定的表示是否可约的判据并且得到所有可能的不可约表示.

- 群表示理论中一个重要的结果是,对于有限群(群元素有限)的表示是幺正表示,也就是说我们总可以用幺正矩阵($D^{\dagger}(g)D(g)=I$)来表示群元.换句话说,通过检验表示矩阵是否幺正就可以判断是一些表示是否是可靠的表示.

除了直和表示,我们也可以把两个表示利用矩阵的直乘乘在一起,这就是直乘表示.具体而言,给定两个维度分别为d_r和d_s的表示,其表示矩阵是$D^{(r)}(g)$和$D^{(s)}(g)$,我们用矩阵的直乘定义直乘表示:

$$D(g)=D^{(r)}(g)\otimes D^{(s)}(g) \tag{14.82}$$

这样矩阵$D(g)$的维度是$d_rd_s\times d_rd_s$,写成矩阵元的话则有

$$D(g)_{a\alpha,b\beta}=D^{(r)}(g)_{ab}D^{(s)}(g)_{\alpha\beta}. \tag{14.83}$$

这里$a,b=1,2...d_r$,$\alpha,\beta=1,2...d_s$.这样直乘表示下的两个矩阵相乘就是

$$\begin{aligned} D(g)D(g') &= (D^{(r)}(g)\otimes D^{(s)}(g))(D^{(r)}(g')\otimes D^{(s)}(g')) \\ &= (D^{(r)}(g)D^{(r)}(g'))\otimes (D^{(s)}(g)D^{(s)}(g')) \\ &= D^{(r)}(gg')\otimes D^{(s)}(gg')=D(gg'). \end{aligned} \tag{14.84}$$

如果我们要计算$D(g)$的特征标,那么我们只需要在$D(g)$的矩阵元中令$\alpha=\beta,a=b$并对a,α求和即可:

$$\chi(c)=\mathrm{Tr}D(g)=\sum_{a,\alpha}D(g)_{a\alpha,a\alpha}=\left(\sum_a D^{(r)}(g)_{aa}\right)\left(\sum_\alpha D^{(s)}(g)_{\alpha\alpha}\right)=\chi^{(r)}(c)\chi^{(s)}(c) \tag{14.85}$$

这说明直乘表示下的特征标是构成这个表示的两个表示特征标的乘积.(如果算直和表示会发现结果是特征标的求和)

- Schur引理:若$D(g)$是有限群G的不可约表示,如果存在矩阵A使得$AD(g) = D(g)A$对所有g都成立,那么A只能是单位矩阵的倍数,也就是$A = \lambda I$.

换句话说,Schur引理告诉我们对于不可约表示而言不存在与所有表示矩阵都对易的非平凡矩阵.因此若一个表示可以找到与所有矩阵都对易的非平凡矩阵,那说明这个表示必定是可约的.

伟大正交定理

在群表示理论中,最核心的一个定理是伟大正交定理(great orthogonality theorem).这个定理是说,对于有限群G的d维不可约表示$D(g)$存在以下关系:

$$\sum_g D^\dagger(g)_{ij} D(g)_{kl} = \frac{N(G)}{d}\delta_{il}\delta_{kj} \tag{14.86}$$

这里$N(G)$是群G的群元个数.这个结果的重要推论是,

$$\sum_g (D^{(r)}(g))^\dagger_{ij} D^{(s)}(g)_{kl} = \frac{N(G)}{d_r}\delta_{rs}\delta_{il}\delta_{kj} \tag{14.87}$$

这说明有限群的不等价表示乘积在对所有群元求和后为零.在这个结果的基础上,如果我们令$i = j, k = l$并对i, k求和就得到

$$\sum_g \sum_i (D^{(r)}(g))^\dagger_{ii} \sum_k D^{(s)}(g)_{kk} = \sum_g (\chi^{(r)}(g))^* \chi^{(s)}(g) = \sum_c n_c (\chi^{(r)}(c))^* \chi^{(s)}(c) = \frac{N(G)}{d_r}\delta_{rs} \sum_i \sum_k \delta_{ik} = N(G)\delta_{rs}. \tag{14.88}$$

也就是$\sum_c n_c(\chi^{(r)}(c))^*\chi^{(s)}(c) = N(G)\delta_{rs}$.($n_c$是每一个等价类$c$包含的群元数目)

进一步,可以发现如下两个结果:

$$N(C) = N(R), \quad \sum_r d_r^2 = N(G). \tag{14.89}$$

第一个结果说明有限群中等价类的数目($N(C)$)等于这个群不可约表示的数目($N(R)$).第二个结果则告诉我们所有不可约表示维度平方(d_r^2)的求和等于群元的数目.这样,我们说知道群的结构等价于知道群元分为等价类的情况,特别是等价类的数目$N(C)$.通过$N(C) = N(R)$我们就知道了不可约表示的数目$N(R)$,有了这个这个你就知道求和$\sum_r$中需要求几项.当$N(G)$比较小时,我们可以直接写出所有可能的结果.例如,对于所谓的A_4群,它有4个等价类,12个群元,这样有d_0, d_1, d_2, d_3,这分别代表四个不可约表示的维数,其中$d_0 = 1$表示平

凡表示的维数.代入$\sum_r d_r^2 = N(G)$则有$1^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 12$.这个关系的解是$d_1, d_2, d_3$中有两个等于1,另一个等于3.这说明$A_4$群有三个不等价的一维不可约表示以及一个3维不可约表示.

$SU(N)$和表示

我们首先回顾特殊正交群$SO(N)$.$SO(N)$群指的是N维空间中的转动可以用所有$N \times N$实矩阵O表示,这些矩阵满足正交性条件 $O^T O = I$并且行列式为$\det(O) = 1$.前一个条件确保N维矢量v的长度平方$v^T v$在$v \to v' = Ov$的变换下保持不变.通过把转动展开为$R = I + A$.然后一阶近似下可得$A^T - A = 0$,这样最一般性的A可以写成$N(N-1)/2$个反兑成矩阵的线性叠加.

经典物理中我们采用实数,但在量子力学出现后,复数形式变得重要.例如量子力学中的波函数就需要用复数表示.因此,我们希望推广$SO(N)$群来描述涉及复数的广义转动.设复的矢量$\psi = \psi^j, j = 1, ..., N$由$N$个复数表示.我们要求线性变换$\psi \to \psi' = U\psi$使得 $\psi^\dagger \psi = \sum_j (\psi^j)^* \psi^j$保持不变.对于任意两个复矢量$\zeta, \psi$,它们的乘积$\zeta^\dagger \psi$以及$\psi^\dagger \zeta$在$\zeta \to \zeta' = U\zeta, \psi \Rightarrow \psi' = U\psi$不变.这意味着$U^\dagger U = I$,也就是说$U$是幺正矩阵.

- 满足$U^\dagger U = I$的所有$N \times N$矩阵构成了$U(N)$群.

对于正交矩阵,通过$\det(O^T O) = (\det(O))^2 = 1$,我们知道$\det O = \pm 1$.选择$\det O = 1$排除了所有的反射变换.对于幺正矩阵,类似操作可得

$$\det(U^\dagger U) = \det(U^\dagger)\det(U) = (\det(U))^* \det(U) = |\det(U)|^2 \tag{14.90}$$

这样我们就有$|\det(U)|^2 = 1$,这说明$\det U = e^{i\alpha} (0 \le \alpha < 2\pi)$.这说明幺正矩阵的行列式是模为1的复数.此时如果施加条件$\det(U) = 1$就消去了所有行列式为复数的贡献.我们把满足$U^\dagger U = I, \det(U) = 1$的所有$N \times N$复矩阵构成的群称为$SU(N)$群,自然$SU(N) \subset U(N)$.

注意到$U(N)$群包含$e^{i\alpha} I$这样的元素,它是$U(N)$群的子群,而$SU(N)$群也是$U(N)$群的元素.接下来,让我们在单位元附近展开$U = I + iH$.把这个结果代入$U^\dagger U = I$可得$H^\dagger = H$,这说明H是厄密矩阵.类似于$SO(2), SO(3)$的情况,我们有$U = e^{iH}$.另一方面,我们可以计算$\det(U) = \det(e^{iH}) = e^{i\mathrm{Tr}H}$,由$\det(U) = 1$得到$\mathrm{Tr}H = 0$,这说明我们需要考虑$N \times N$厄密且无迹的矩阵.

在$N = 2$时,我们可以设矩阵的一般形式是

$$H = \begin{pmatrix} u & w \\ z & v \end{pmatrix}. \tag{14.91}$$

这样由厄密性可知

$$H^\dagger = H \Rightarrow \begin{pmatrix} u^* & z^* \\ w^* & v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & w \\ z & v \end{pmatrix}, \tag{14.92}$$

这样u, v为实数,z, w互为共轭.由$\mathrm{Tr}H = 0$发现$v = -u$,这样我们可以把H写成

$$H = \begin{pmatrix} u & z^* \\ z & -u \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\theta_1\sigma_1+\theta_2\sigma_2+\theta_3\sigma_3) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\theta_a\sigma_a. \tag{14.93}$$

这里$\theta_1, \theta_2, \theta_3$是三个实参数,$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$是熟悉的三个Pauli矩阵.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{14.94}$$

因此$SU(2)$群的任意群元可以写成$U = e^{i\theta_a\sigma_a/2}$.此外Pauli矩阵满足如下关系:

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}I + i\varepsilon_{abc}\sigma_c, \quad \mathrm{Tr}\sigma_a\sigma_b = 2\delta_{ab}, \quad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}, \quad [\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c. \tag{14.95}$$

对于$N = 3$的情况,我们发现H由8个Gell-Mann矩阵构成,即$H = \theta_a\lambda_a/2$,因此群元是$U = e^{i\theta_a\lambda_a/2}$.这里Gell-Mann矩阵定义为

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

这里σ_a, λ_a称为$SU(2), SU(3)$群的生成元,($\mathrm{Tr}\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$)分别有3和8个.对于一般的$SU(N)$群,其生成元个数是$N^2 - 1$, 因而其群元表示为$U = e^{\sum_{a=1}^{N^2-1}\theta_a\lambda_a/2}$.

$SU(2)$与$SO(3)$局域同构

现在,让我们来考查$SU(2)$群与$SO(3)$群的关系.根据前面的讨论,我们知道任意2×2厄密且迹为零的矩阵都可以表示成三个Pauli矩阵的线性叠加,即$X = \sum_{a=1}^{3}x_a\sigma_a = \vec{x}\cdot\vec{\sigma}$.这里$x_1, x_2, x_3$是三个实参数,但是它们也可以看作是矢量$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$的三个分量.直接计算$X$行列式则有$\det(X) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^3) = -\vec{x}^2$.这自然说明$X$的行列式是矢量$\vec{x}$长度平方.

接下来,让我们任取$SU(2)$的群元U,这样可以构造$X' = U^\dagger XU$.容易发现X'也是厄密和无迹的($(X')^\dagger = (U^\dagger XU)^\dagger = U^\dagger X^\dagger U = U^\dagger XU = X'$,$\mathrm{Tr}X' =$

$\mathrm{Tr}U^\dagger XU = \mathrm{Tr}UU^\dagger X = \mathrm{Tr}X = 0$).这样我们也可以把$X'$写成$X' = \vec{x}' \cdot \vec{\sigma}$,这里引入了矢量$x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$.由此我们发现

$$X' = U^\dagger XU \Rightarrow \vec{x}' \cdot \vec{\sigma} = U^\dagger \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U, \tag{14.96}$$

这说明x', x之间存在线性关系.注意到

$$(X')^2 = (\vec{x}' \cdot \vec{\sigma})(\vec{x}' \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{x}')^2 I \tag{14.97}$$

$$(X')^2 = (U^\dagger \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U)(U^\dagger \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U) = U^\dagger \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \vec{x} \cdot \vec{\sigma} U = (\vec{x})^2 U^\dagger U = (\vec{x})^2 I, \tag{14.98}$$

这说明$(\vec{x}')^2 = (\vec{x})^2$,也就是说在$U$变换下,三维矢量$\vec{x}$变为$\vec{x}'$但保证矢量平方不变,这说明$SU(2)$群中$U$的作用与$SO(3)$中的$R$相同,因此我们期待$SU(2)$与$SO(3)$同构.但是,注意到$-U$也同样使得矢量平方不变,这说明$SU(2)$与$SO(3)$之间并不是一一对应而是二对一,即$(U, -U)$对应一个$R$. 因此$SU(2)$与$SO(3)$并不同构.如果我们只关心单位元附近的转动,那么$-U$并不能用$U = I + A$表示,这说明此时$-U$是无关的,在这种情况下$U$与$R$可以一一对应,我们把这种在单位元附近两个群元一一对应的情况叫做局域同构.因此,我们称$SU(2)$与$SO(3)$局域同构.类似的,$SO(4)$局域同构于$SU(2 \otimes SU(2))$.

$U(N)$与$SU(N)$的关系

我们已经知道$U(N)$群包含两类元素,第一类是$e^{i\alpha}I$,这构成了$U(1)$群,第二类则是行列式为1的$N \times N$幺正矩阵所组成的$SU(N)$群.看起来,$U(N)$应该是$SU(N)$与$U(1)$的直乘群.但是,这个感觉是不正确的.

实际上,$SU(N)$与$U(1)$群的元素有重叠.注意到$U(1)$群中有元素$e^{i2\pi k/N}I(k = 1, ..., N)$,这些元素组成了$Z_N$群并且行列式为1,因此这些元素实际上存在于$SU(N)$中,如果我们要用$SU(2), U(1)$构造$U(N)$就必须排斥它们的影响,最简单的就是考虑商群$SU(N)/Z_N$.这个商群与$U(1)$群不再有重叠,因此我们可以得到直乘群表示$(SU(N)/Z_N) \otimes U(1) = U(N)$.

在这里,商群$SU(N)/Z_N$的元素是$e^{i2\pi k/N}U(k = 1, ..., N$,$U$为行列式为1的幺正矩阵).当$N = 2$时,其元素为$U, -U$,而我们知道这其实对应$SU(2)/Z_2 = SO(3)$.

辛群

让我们考虑如下$2n \times 2n$反对称矩阵,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{14.99}$$

这里I是$n\times n$的单位矩阵.如矩阵R满足$R^TJR=J$,那么所有这些R矩阵构成所谓的辛群(symplectic group),记为$Sp(2n,R)$.注意到这里R并不代表转动,而是表示实矩阵.很明显,R矩阵并不是正交矩阵,但是$\det R=1$.由$\det R=1$可知矩阵R共有$n(2n+1)$个独立的实参数.

进一步,如果复矩阵C满足$C^TJC=J$,那么C矩阵组成复辛群,记为$Sp(2n,C)$.与$Sp(2n,R)$类似,$Sp(2n,C)$会有$n(2n+1)$个独立的复参数,也就是有$2n(2n+1)$个实参数.

有一类辛群叫做$USp(2n)$,它指的是幺正矩阵U同时满足幺正条件和$U^TJU=J$.如果我们把U写成$U=I+iH$,(H为厄密矩阵)那么$U^TJU=J$给出

$$(I+iH^T)J(I+iH)=J\Rightarrow H^TJ+JH=0\Rightarrow H^T=JHJ. \tag{14.100}$$

这里用到了$J^2=-I$.这样,我们可以把矩阵H写成如下一般形式:

$$H=\begin{pmatrix} P & W^* \\ W & -P^T \end{pmatrix} \tag{14.101}$$

P都是$n\times n$的厄密矩阵,W是$n\times n$的对称复矩阵.前者有n^2个实参数,后者有n^2+n个实参数,因此H共有$2n^2+n$个实参数.

在量子场论中,如果我们考虑$2n$个分量组成的实费米子场,也就是Majorana费米场$\Psi=(\chi,\xi)^T$,(χ,ξ都是n分量的实场)那么可以构造

$$\Psi^TJ\Psi=\begin{pmatrix} \chi^T & \xi^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\xi^T & \chi^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}=\chi^T\xi-\xi^T\chi. \tag{14.102}$$

如果我们做变换$\Psi\to\Psi'=U\Psi$,($U\subset USp(2n)$)那么我们发现$\Psi'^TJ\Psi'=\Psi^TJ\Psi$.这实际上告诉我们可以选择适当的辛群矩阵让包含双线性Majorana费米场的体系(哈密顿量)对角化.

最后,让我们考虑辛群$USp(2n)$的Lie代数.首先,反对称的J矩阵可以用矩阵直乘写成$J=I\otimes i\sigma_2$.(I是$n\times n$的单位矩阵)接下来考虑如下四个$2n\times 2n$厄密无迹矩阵:

$$iA\otimes I_2=\begin{pmatrix} iA & 0 \\ 0 & iA \end{pmatrix},\quad S_1\otimes\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & S_1 \\ S_1 & 0 \end{pmatrix},\quad S_2\otimes\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -iS_2 \\ iS_2 & 0 \end{pmatrix},\quad S_3\otimes\sigma_3=\begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & -S_3 \end{pmatrix}. \tag{14.103}$$

这里A是$n\times n$的实反对称矩阵,S_1,S_2,S_3是$n\times n$的实对称矩阵.这些矩阵就是$USp(2n)$的Lie代数.可以验证,由这四个矩阵组合出的$H=iA\otimes I_2+S_1\otimes\sigma_1+S_2\otimes\sigma_2+S_3\otimes\sigma_3$满足$H^T=JHJ$.这样$U=e^{iU}$表明这些矩阵是$USp(2n)$的生成元.

Lie代数的分类

E.Cartan的研究表明,对于紧致Lie群,其相应的Lie代数可以分为四类以及所谓的例外代数(exceptional algebra),数学上把它们记为A, B, C, D, E, F, G.前四个对应的是幺正,正交和辛群的Lie代数,具体而言是

$$A_n : SU(n+1)$$
$$B_n : SO(2n+1)$$
$$C_n : Sp(2n)$$
$$D_n : SO(2n)$$

E_6, E_7, E_8, F_4, G_2是例外代数.

Bibliography

[1] https://baike.baidu.com/item/积分方程/7436516?fr=aladdin

[2] https://en.wikipedia.org/Integralequation