兰州大学110周年校庆纪念文库

物理学核心课程习题精讲系列

数学物理方法学习指导

杨孔庆 黄 亮 赵 佩 /编著

科学出版社

兰州大学110周年校庆纪念文库
物理学核心课程习题精讲系列

数学物理方法学习指导

杨孔庆　黄　亮　赵　佩　编著

常州大学图书馆
藏书章

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是杨孔庆编写的《数学物理方法》(高等教育出版社，2012 年出版)的配套教辅，对“数学物理方法”课程中的线性空间及线性算符、复变函数、积分变换与δ函数、数学物理方程、变分法初步这五大部分内容的每一章给出了内容提要，并且对杨孔庆编写的《数学物理方法》教材中的习题做了详细的解答.

本书作为“数学物理方法”课程的辅助学习教材，可作为物理学和应用物理学专业的教师和学生的参考书，以期提高该课程的教学质量及学生对该课程的知识点的理解和掌握，亦可供其他专业的教师和学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法学习指导/杨孔庆，黄亮，赵佩编著. —北京：科学出版社，2019.8

（兰州大学 110 周年校庆纪念文库）

ISBN 978-7-03-062193-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杨… ②黄…③赵… Ⅲ. ①数学物理方法-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 181870 号

责任编辑：昌 盛 陈曰德 罗 吉 / 责任校对：杨聪敏

责任印制：张 伟 / 封面设计：黄华斌

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2019 年 9 月第二次印刷 印张：27 1/2

字数：554 000

定价：69.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《兰州大学110周年校庆纪念文库》编委会

主　任　袁占亭　严纯华

副主任　吴国生　徐生诚

委　员　李玉民　沙勇忠　许鹏飞

石兆俊　安　娴

序

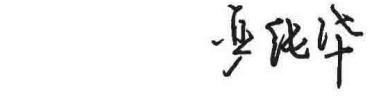
萃英立根本，昆仑写精神.2019年9月17日，兰州大学将迎来110周年校庆.百十年来，一代代兰大人与国家、民族同呼吸、共命运，屹立西部大地，蕴育时代精英，为世界、为祖国培养了一大批活跃在各行各业的优秀人才，有力地支持了国家特别是祖国西部地区的建设发展.

长期以来，兰州大学始终坚持正确办学方向，落实立德树人根本任务，立足地域特色，发挥科研优势，深度融入参与国家发展战略，主动对接服务地方经济社会发展，“将论文写在中国大地上”，赢得了国内外的广泛认可；熔铸成以“自强不息，独树一帜”为核心的兰大精神，形成了“勤奋，求实，创新”的良好学风，探索走出了一条在西部地区创办高水平大学的成功之路，为中国高校扎根祖国大地创办世界一流大学提供了重要借鉴.

值110周年校庆之际，我校策划组织出版《兰州大学110周年校庆纪念文库》，旨在展现奋战在教学科研一线的兰大人的家国情怀、理论思考和学术积累.丛书作者中有致力于教书育人的教学名师，也有在科研一线硕果累累的科学大家，更有长期坚守在教学科研一线、受学生爱戴的“普通”教师.丛书内容丰富，涵盖理、工、农、医、人文、社科等诸多学科，其中观点颇多见解.恕我才识单调，难以一一点评.在此，谨付梓以供学界参考指正.

新时代新起点，所有兰大人将汇聚成推动兰州大学事业蓬勃发展的强大合力.面向未来，全体兰大人将继续坚守奋斗，以矢志不渝的信念、时不我待的精神、担当奉献的情怀投身中国特色世界一流大学建设，为实现中华民族伟大复兴贡献兰大力量！

是为序.



中国科学院院士、兰州大学校长

2019年3月26日

前　言

值此兰州大学建校 110 周年之际，兰州大学组织出版《兰州大学 110 周年校庆纪念文库》，本书荣幸获列于此文库中，作者以此向兰州大学建校 110 周年献礼.

兰州大学以重视本科基础教学著称，“数学物理方法”课程是物理专业及其相关专业的重要主干课，是后续专业课程的数学基石. 本书是作者之一杨孔庆编著的《数学物理方法》(高等教育出版社，2012 年出版)的配套教辅，可作为“数学物理方法”课程教师的参考图书，作者期望本书的出版能为提高该课程的教学质量并加深学生对该课程的数学物理知识点的理解和掌握做出一定的贡献.

本书与主教材对应，共有五篇二十二章. 第一篇是线性空间及线性算符(共三章)：主要介绍三维欧氏空间中的向量分析及希尔伯特空间中一些物理上常用的算符及其性质. 第二篇是复变函数(共五章)：介绍解析函数的性质及其复积分；复变函数的级数展开；留数定理及其在实积分中的应用. 第三篇是积分变换与δ函数(共四章)：介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换以及它们的基本性质；δ函数及其基本性质；小波变换. 第四篇是数学物理方程(共八章)：介绍三类方程(波动方程、输运方程、泊松方程)的数学建模及其定解问题；施图姆-刘维尔本征值问题及三类方程在笛卡儿坐标系下的分离变量解法；三类方程在球坐标系和柱坐标系下的分离变量解法；二阶线性变系数常微分方程的级数解法；球函数和柱函数及它们的性质；三类方程的格林函数解法、行波解法、“冲量定理”解法和积分变换解法；非线性方程及其“齐次平衡法”解法简介. 第五篇是变分法初步(共两章)：介绍泛函变分的基本概念；变分原理——拉格朗日变分原理、哈密顿原理、诺德定理.

本书对应于杨孔庆编著的教材《数学物理方法》的每一章，分别给出内容提要和习题详解两个部分. 内容提要主要是简要地回顾教材中主要的知识点，方便读者们查找翻阅. 习题详解部分对教材的课后习题(除第十二章“小波变换初步”和第二十章“非线性数学物理方程初步”作为阅读材料没有习题，及有少部分涉及作图解答的习题外)给出了详细的参考解答，并且对部分习题给出了几种不同的解答方式，希望读者对这些题目有一个较为完整的数学图像，对得到的数学结果尽可能给出较合理的物理解释，从而进一步加深对课程内容的理解.

原教材中的题目部分来自于教材中所列的参考书目(在此不一一列举)，部分来自于作者对该课程中一些内容的思考. 其中有一些题目看似比较简单，实际上需要综合考虑多种因素并通过某些计算技巧才能解答出来. 对这些题目的选择主

要用于考察并锻炼学生对物理概念、物理图像的理解及培养正确的数学建模能力，以及课程学习过程中需要掌握的计算技巧的熟练运用. 同时在数学物理方程这一部分，虽然讲授的是经典波动方程，但在习题中给出了关于量子力学薛定谔方程的问题. 这时并不是要求学生对量子力学有深入的理解，而是单纯从数学物理方程的角度出发，介绍如何进行分离变量，如何求得本征模式和本征频率(能量)，让学生去把握不同物理问题中数学物理方程的共性，从而做到举一反三.

杨孔庆编著的《数学物理方法》已被多所高校作为教材使用，也有部分高校作为该课程的参考书，很多使用并关心该教材的老师们提出了宝贵意见和建议，其中的部分意见和建议已融入本书的内容，在此向各位老师表示衷心的感谢.

本书部分题目的解答得益于作者们在讲授“数学物理方法”课程中师生们的反馈和讨论，在此对兰州大学、西北大学、陕西师范大学的师生们表示感谢. 同时对使用本教材的西北师范大学、中国科学院大学、集美大学等学校的老师对习题解答的有益讨论和意见反馈表示感谢.

出版前期作者曾多次与科学出版社昌盛和陈曰德编辑沟通出版事宜，对他们的热情和细心工作表示感谢，感谢科学出版社的支持. 作者之一杨孔庆教授近几年在兰州大学萃英学院讲授“数学物理方法”课程，深感萃英学院学生的聪慧和勤奋好学，真正做到教学相长，在此表示感谢.

感谢萃英学院在本书出版经费上给予的资助.

衷心祝愿百年兰大，再创辉煌!

作　者

2019 年 4 月

目　录

第一篇　线性空间及线性算符

第一章　R^3 空间的向量分析 …… 3
内容提要 …… 3
习题详解 …… 6
第二章　R^3 空间曲线坐标系中的向量分析 …… 16
内容提要 …… 16
习题详解 …… 19
第三章　线性空间 …… 27
内容提要 …… 27
习题详解 …… 29

第二篇　复 变 函 数

第四章　复变函数的概念 …… 43
内容提要 …… 43
习题详解 …… 47
第五章　解析函数 …… 61
内容提要 …… 61
习题详解 …… 64
第六章　复变函数积分 …… 79
内容提要 …… 79
习题详解 …… 81
第七章　复变函数的级数展开 …… 83
内容提要 …… 83
习题详解 …… 87
第八章　留数定理及其在实积分中的应用 …… 108
内容提要 …… 108
习题详解 …… 113

第三篇　积分变换与δ函数

第九章　傅里叶变换 …… 151
内容提要 …… 151
习题详解 …… 154
第十章　拉普拉斯变换 …… 166
内容提要 …… 166
习题详解 …… 169
第十一章　δ函数 …… 185
内容提要 …… 185
习题详解 …… 188
***第十二章　小波变换初步** …… 193
内容提要 …… 193

第四篇　数学物理方程

第十三章　波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题 …… 197
内容提要 …… 197
习题详解 …… 201
第十四章　分离变量法 …… 214
内容提要 …… 214
习题详解 …… 218
第十五章　曲线坐标系下方程的分离变量和二阶变系数常微分方程的级数解法 …… 242
内容提要 …… 242
习题详解 …… 246
第十六章　球函数 …… 275
内容提要 …… 275
习题详解 …… 281
第十七章　柱函数 …… 314
内容提要 …… 314
习题详解 …… 322
第十八章　格林函数法 …… 353
内容提要 …… 353
习题详解 …… 357

第十九章　其他求解方法及方程 …… 376
内容提要 …… 376
习题详解 …… 378
*第二十章　非线性数学物理方程初步 …… 408
内容提要 …… 408

第五篇　变分法初步

第二十一章　泛函的变分 …… 411
内容提要 …… 411
第二十二章　变分原理 …… 412
内容提要 …… 412
习题详解 …… 415

第一篇　线性空间及线性算符

第一章　$\mathbf{R}^3$ 空间的向量分析

内 容 提 要

一、$\mathbf{R}^3$ 中向量的代数运算

定义在 $\mathbf{R}^3$ 空间中的向量的集合 $\{\mathbf{0},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots\}$，定义了集合中元素的合成法则："加法""数乘""标量积"和"向量积"，构成了 $\mathbf{R}^3$ 中向量的代数运算.

二、一个求和约定和两个运算符号

1. 爱因斯坦(Einstein)求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标(只许两个重复指标，多于两个重复指标，此约定失效)就自动进行求和，如果特别指出该重复指标不求和，此约定失效. 例如

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{3}A_i\boldsymbol{e}_i$$

并称求和指标"i"为"哑标"，即可用其他字母代替此求和指标，例如

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}_i=A_j\boldsymbol{e}_j=A_k\boldsymbol{e}_k$$

2. 克罗内克(Kronecker)δ 符号：δ_{ij}

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

例如，$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$.

3. 三阶单位全反对称张量(或称为三阶列维-齐维塔(Levi-Civita)符号)

$$\varepsilon_{ijk},\quad i,j,k=1,2,3$$

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & ijk=123,231,312,\cdots.\text{即相邻两指标经过偶次对换}\\ -1, & ijk=213,321,132,\cdots.\text{即相邻两指标经过奇次对换}\\ 0, & ijk\text{中有两个指标相同}\end{cases}$$

例如，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i A_j B_k$.

4. 一个常用的运算规则

由于ε_{ijk}是全反对称张量，有$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}$，即对于$i,j$指标是反对称的；而$\delta_{ij}=\delta_{ji}$对于$i,j$指标是对称的，则有

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{ij}=0$$

对于一般的两个量(张量)，一个有两个反对称指标，如$A_{ij}=-A_{ji}$，而另一个有两个对称指标，如$S_{ij}=S_{ji}$，对i,j指标求和，必定为零，即

$$A_{ij}S_{ij}=0$$

这个规则很容易证明，且在我们的运算中经常用到.

三、在直角坐标系下，$\mathbf{R}^3$中的向量分析的工具——哈密顿(Hamilton)算符

哈密顿算符∇作用在空间的几何客体上，表示几何客体在空间的变化率，它是不依赖于坐标系选择的微分算符. 在不同的坐标系中，哈密顿算符∇有不同的形式，如果它直接作用在标量函数上，则描述该函数沿坐标轴的变化率.

在直角坐标系下，哈密顿算符的形式为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_i\partial_i=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

四、$\mathbf{R}^3$中的标量场和向量场

1. 标量场(标量函数)

定义在$\mathbf{R}^3$中的函数(无方向性).

例如，$\varphi(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^3$.

2. 向量场(向量函数)

定义在$\mathbf{R}^3$中的有方向的向量函数.

例如，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=A_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_i=A_1(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_1+A_2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_2+A_3(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^3$，其中，$A_i(\boldsymbol{r})$是$\mathbf{R}^3$中的标量函数.

五、标量场$\varphi(\boldsymbol{r})$的梯度场

$$\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_i\partial_i\varphi=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$$

其中，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$是$\mathbf{R}^3$中的标量函数.

该梯度场是一个向量场. 对于$\mathbf{R}^3$中的一个确定的点，其对应的是一个确定的向量，就是标量场$\varphi(\boldsymbol{r})$在该点的梯度.

六、向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的散度场

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\partial_i A_i=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

其中，$\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$是$\mathbf{R}^3$中的标量函数.

该散度场是一个标量场. 对于$\mathbf{R}^3$中的一个确定的点，其对应的是一个确定的数值，就是向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$在该点的散度，如果该点的散度不为零，就表示在该点有产生此散度场的点源(散度的值为正)或是此散度场的点汇(散度的值为负)，简称为“源”或“汇”. 数值的大小表示“源”或“汇”的大小.

七、向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的旋度场

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k=(\partial_2A_3-\partial_3A_2)\boldsymbol{e}_1+(\partial_3A_1-\partial_1A_3)\boldsymbol{e}_2+(\partial_1A_2-\partial_2A_1)\boldsymbol{e}_3$$

其中，$\partial_iA_j-\partial_jA_i$是$\mathbf{R}^3$中的标量函数.

该旋度场(也称为旋量场)是一个向量场. 对于$\mathbf{R}^3$中的一个确定的点，对应的一个确定的向量就是向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$在该点的旋度. 如果此向量不为零，就表示该点有产生此旋量场的线源，此向量是线源在该点的切向量.

八、拉普拉斯(Laplace)算符∇^2

拉普拉斯算符的定义

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$$

直角坐标系下拉普拉斯算符的表达式

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=(\boldsymbol{e}_i\partial_i)\cdot(\boldsymbol{e}_j\partial_j)=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\partial_i\partial_j=\delta_{ij}\partial_i\partial_j=\partial_i\partial_i$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

九、两个重要的等式

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

这两个式子在任何坐标系中皆成立，它们是普遍的几何规律，也是描述很多物理规律的数学表达式.

第一个式子说明，对一个纯标量势场，其梯度场是个无旋场，即其梯度场的旋度为零；第二个式子说明，对一个纯旋量场，其散度场为零，即纯旋量场是个无散度的场.

例如，如果 φ 表示静电场的电势，$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 表示静电场，则 $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$ 说明静电场是无旋场，是保守场.

如果 $\boldsymbol{A}$ 表示磁向量势，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 是静磁场，则 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$ 表示静磁场不是点磁荷产生的，即不存在点磁荷(磁单极).

习 题 详 解

1.1　$\boldsymbol{C}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 空间的已知向量，若有向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，求 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 向量.

解　由已知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，两式相加可得 $2\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$. 即可得 $\boldsymbol{B}=0$，即 $\boldsymbol{B}$ 为零向量.

1.2　$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 空间的已知向量，若有向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$，求 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 向量.

如果在笛卡儿(Cartesian)坐标系中 $\boldsymbol{C}=c_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{D}=d_i\boldsymbol{e}_i\,(i=1,2,3)$，请写出 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 向量的具体表达式.

解　由已知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$，两式相加可得 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})$，两式相减可得 $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})$.

在笛卡儿坐标系下，设 $\boldsymbol{A}=a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{B}=b_i\boldsymbol{e}_i$，则有

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(c_i+d_i)\boldsymbol{e}_i,\ \text{可得}\ a_i=\frac{1}{2}(c_i+d_i)$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(c_i-d_i)\boldsymbol{e}_i,\ \text{可得}\ b_i=\frac{1}{2}(c_i-d_i)$$

1.3　有向量 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 如题 1.3 图所示，请证明余弦定理

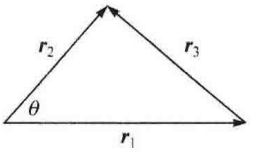
$$r_3^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta$$

其中，$|\boldsymbol{r}_1|=r_1$，$|\boldsymbol{r}_2|=r_2$.

证　由于 $\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，则有

$$r_3^2=|\boldsymbol{r}_3|^2=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$
$$=\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1-2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta$$

得证.



题 1.3 图

1.4　请用向量运算(不用坐标系)直接证明

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

请用笛卡儿坐标系再证明一遍上述结论.

证　在不考虑坐标系的情况下

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$$
$$=A^2-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}-B^2$$
$$=A^2-B^2$$

其中，$A=|\boldsymbol{A}|$，$B=|\boldsymbol{B}|$.

在笛卡儿坐标系中：设 $\boldsymbol{A}=a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{B}=b_i\boldsymbol{e}_i$，有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(a_i+b_i)\boldsymbol{e}_i\cdot(a_j-b_j)\boldsymbol{e}_j$$
$$=(a_i+b_i)(a_j-b_j)\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$$
$$=(a_ia_j-a_ib_j+b_ia_j-b_ib_j)\delta_{ij}$$
$$=a_ia_i-a_ib_i+b_ia_i-b_ib_i$$
$$=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

得证.

1.5　在 $\mathbf{R}^3$ 空间中，在空间转动 $\boldsymbol{A}$ 的变换下(即直角坐标系的转动变换)，向量 $\boldsymbol{X}$ 变为 $\boldsymbol{X}'$，有

$$\boldsymbol{X}'=A\boldsymbol{X}$$

且满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{I}$ 为单位阵，请证明：两个向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的标量积 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$ 在此转动变换下为不变量.

证　设 $\boldsymbol{X}=x_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{X}'=A\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}=y_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{Y}'=A\boldsymbol{Y}$，有

$$\boldsymbol{X}'\cdot\boldsymbol{Y}'=(A\boldsymbol{X})\cdot(A\boldsymbol{Y})=(A\boldsymbol{X})_i(A\boldsymbol{Y})_i=\left(A_{ij}x_j\right)^{\mathrm{T}}\left(A_{ik}y_k\right)$$
$$=x_jA_{ji}A_{ik}y_k=x_j\left(A^{\mathrm{T}}A\right)_{jk}y_k=x_j\delta_{jk}y_k=x_jy_j=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$$

故 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的内积在空间转动 $\boldsymbol{A}$ 的变换下为不变量.

1.6　请证明：在 $\mathbf{R}^3$ 空间中向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$$

证　法一

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i\\&=\varepsilon_{ijk}A_jB_k\varepsilon_{ilm}A_lB_m=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}A_jB_kA_lB_m\\&=(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})A_jB_kA_lB_m=A_jA_jB_kB_k-A_jB_jA_lB_l\\&=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2\end{aligned}$$

法二

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|^2=|AB\sin\theta|^2=A^2B^2\sin^2\theta\\&=A^2B^2(1-\cos^2\theta)=A^2B^2-(AB\cos\theta)^2\\&=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2\end{aligned}$$

得证.

1.7　在 $\mathbf{R}^3$ 空间中证明：

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$；

(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$；

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$；

(4) $\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$.

证　在笛卡儿坐标系中

(1)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{e}_i\partial_i)\cdot(x_j\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\partial_ix_j=\delta_{ij}\partial_ix_j=\partial_ix_i=1+1+1=3$$

(2)

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_jx_k=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ikk}=0$$

其中，用到 $\partial_jx_k=\delta_{jk}$.

(3)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\partial_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_i=\partial_ia_i+\partial_ib_i=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{A}=a_i\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{B}=b_i\boldsymbol{e}_i$.

(4)

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_k=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(a_k+b_k)\\&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_ja_k+\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_jb_k=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

1.8　请证明：静电场是一个无旋场，静磁场是一个无源(点源)场.

证　由于静电场 $\boldsymbol{E}$ 是有势场，电势为 φ，$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，则

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\times(\nabla\varphi)=-\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(\nabla\varphi)_k=-\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=0$$

其中，ε_{ijk}中的j,k指标是反对称的，而$\partial_j\partial_k$的j,k指标是对称的，j,k都是求和指标，因此这两项相乘为零.

由上式可知，静电场为无旋场.

附　$\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=0$的证明，由$\varepsilon_{ijk}$指标的反对称性，$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$，即

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=-\varepsilon_{ikj}\partial_j\partial_k\varphi=-\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\varphi=-\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi$$

其中，$\partial_j\partial_k=\partial_k\partial_j$，由于求和指标为“哑标”，在最后等式的右端，把$k$都换成$j$，把$j$都换成$k$，即得.

一个量等于自己的“$-$”值，此量一定为“0”，故得证.

下面证明静磁场$\boldsymbol{B}$是旋量场，有磁矢势$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B}&=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\partial_i(\nabla\times\boldsymbol{A})_i=\partial_i\left(\varepsilon_{ijk}\partial_j a_k\right)\\&=\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k\\&=0\end{aligned}$$

其中，由于ε_{ijk}的指标i,j是反对称的，而$\partial_i\partial_j$的指标i,j是对称的，故这对求和指标相乘为零.

此式说明静磁场的散度为零，即静磁场是个无点源的场，也就是无点磁荷的场，简称为无源场.

1.9　若$\varphi(\boldsymbol{r})$为$\mathbf{R}^3$空间中的标量函数，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$和$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$为此空间中的向量函数，请证明：

(1) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$；

(2) $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times(\nabla\varphi)$；

(3) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$；

(4) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\nabla\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{B}$.

证　$\varphi(\boldsymbol{r})$为标量函数，$\boldsymbol{A}=a_i\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{B}=b_i\boldsymbol{e}_i$为向量函数.

(1)

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\partial_i(\varphi\boldsymbol{A})_i=\partial_i(\varphi a_i)=a_i\partial_i\varphi+\varphi\partial_i a_i=\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(\varphi\boldsymbol{A})_k=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(\varphi a_k)\\&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}(\partial_j\varphi)a_k+\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\varphi\partial_j a_k=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}(\nabla\varphi)_j a_k+\varphi\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j a_k\\&=(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{A}+\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}=\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times(\nabla\varphi)\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\\
&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_k=\boldsymbol{e}\varepsilon_{ijki}\partial_j(\varepsilon_{kmn}a_mb_n)\\
&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j(a_mb_n)=\boldsymbol{e}_i(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\partial_j(a_mb_n)\\
&=\boldsymbol{e}_i\delta_{im}\delta_{jn}(\partial_ja_m)b_n-\boldsymbol{e}_i\delta_{in}\delta_{jm}(\partial_ja_m)b_n+\boldsymbol{e}_i\delta_{im}\delta_{jn}a_m(\partial_jb_n)-\boldsymbol{e}_i\delta_{in}\delta_{jm}a_m(\partial_jb_n)\\
&=\boldsymbol{e}_ib_j(\partial_ja_i)-\boldsymbol{e}_i(\partial_ja_j)b_i+\boldsymbol{e}_ia_i(\partial_jb_j)-\boldsymbol{e}_ia_j(\partial_jb_i)\\
&=(b_j\partial_j)a_i\boldsymbol{e}_i-(\partial_ja_j)b_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_ia_i(\partial_jb_j)-(a_j\partial_j)b_i\boldsymbol{e}_i\\
&=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

(4) 由等式右边往左边证较为简单，等式右边为

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\nabla\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{B}\\
&=(b_i\partial_i)\boldsymbol{A}+(a_i\partial_i)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}b_j(\nabla\times\boldsymbol{A})_k+\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}a_j(\nabla\times\boldsymbol{B})_k\\
&=b_i\partial_i\boldsymbol{A}+a_i\partial_i\boldsymbol{B}+\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}b_j\partial_la_m+\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_j\partial_lb_m\\
&=b_i\partial_i\boldsymbol{A}+a_i\partial_i\boldsymbol{B}+\boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})b_j\partial_la_m+\boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_j\partial_lb_m\\
&=b_i\partial_ia_j\boldsymbol{e}_j+a_i\partial_ib_j\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_ib_j\partial_ia_j-\boldsymbol{e}_ib_j\partial_ja_i+\boldsymbol{e}_ia_j\partial_ib_j-\boldsymbol{e}_ia_j\partial_jb_i\\
&=\boldsymbol{e}_ib_j\partial_ia_j+\boldsymbol{e}_ia_j\partial_ib_j\\
&=b_j\nabla a_j+a_j\nabla b_j\\
&=\nabla(a_jb_j)\\
&=\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})
\end{aligned}
$$

1.10　请计算 $\nabla^2\dfrac{1}{r}$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

解　在笛卡儿坐标系下，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，当 $r\neq0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\frac{1}{r}&=\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-\frac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{-\frac{1}{2}\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{-\frac{1}{2}\dfrac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}\\
&=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$=-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-x\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-y\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-z\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$$=-\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}-3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$

$=0$

当$r=0$时，在一般分析中$\frac{1}{r}$是没有意义的，故本题不能运算. 但在第二篇中，引入广义函数后，本题是有意义的(见第二篇中的δ函数).

注：考察函数$\frac{1}{r}$，它是以坐标原点为球对称的(它是点源的库仑势或引力势的形式)，在第二章中取球坐标系，进行运算将变得很简单

$$\nabla^2\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{-1}{r^2}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}=0,\quad r\neq 0$$

1.11　在$\mathbf{R}^3$空间中，对于定义在单连通区域Ω上的向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，若$\boldsymbol{A}$在$\Omega$的边界$\partial\Omega$上的法向值完全确定，且$\boldsymbol{A}$在$\Omega$上的散度和旋度存在

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=q$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}$$

请证明：在Ω上这样的向量场$\boldsymbol{A}$是唯一的. 这一结论被称为亥姆霍兹(Helmholtz)定理. (**提示**：设另一个与$\boldsymbol{A}$完全满足相同条件的向量场$\boldsymbol{B}$，证明$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.)

证　设$\boldsymbol{B}$满足$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=q$，$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}$，且$\boldsymbol{B}$在$\partial\Omega$上法向取值完全与$\boldsymbol{A}$相同. 又设$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{W}=q-q=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{W}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}=0$$

则可定义势函数$\varphi(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{W}=-\nabla\varphi$，此$\varphi(\boldsymbol{r})$满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})=0$$

由格林(Green)公式

$$\int_{\partial\Omega}u\nabla v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\Omega}u\nabla^2v\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\Omega$$

取$u=v=\varphi$，由于$\boldsymbol{W}=-\nabla\varphi$，且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$在$\partial\Omega$上法向的值相同，故$\boldsymbol{W}$在$\partial\Omega$上法向

向的值为零，即 $\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0$，有

$$\int_{\partial\Omega}\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\Omega}\varphi\nabla^2\varphi\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}\Omega$$

由上面的分析，此式左边和右边第一项都为零，可得

$$\int_{\Omega}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}|\boldsymbol{W}|^2\,\mathrm{d}\Omega=0$$

故在 Ω 上 $\boldsymbol{W}=0$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

1.12　若刚体以定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，有一粒子固定于刚体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，求证

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$$

(提示：由 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，取质心 c 为参考点，建立坐标系，在此坐标系中 $\boldsymbol{v}_c=0$，进行运算.)

证　取质心 c 为参考点，建立坐标系，则在此坐标系中 $\boldsymbol{v}_c=0$，有

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v}&=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})_k\\&=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j(\omega_l x_m)\\&=\boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\left[(\partial_j\omega_l)x_m+\omega_l\partial_j x_m\right]\\&=\boldsymbol{e}_i(\omega_i\partial_j x_j-\omega_j\partial_j x_i)\\&=\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{e}_i\omega_j\delta_{ij}=3\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}\\&=2\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

其中，ω_l 为常数，故 $\partial_j\omega_l=0$，并用到 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$.

1.13　由安培(Ampère)定律

$$\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\partial S}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其中，$\boldsymbol{J}$ 为穿过空间曲面 S 的电流密度向量；$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 为 S 的有向面元，其法向正向由右手定则确定；$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度向量；$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 S 的边界 ∂S 的线元，其方向由右手定则确定，它与 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的定向自洽.

请证明：$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$.

[**提示：**应用斯托克斯(Stokes)公式证明.]

证　由安培定律

$$\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\partial S}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

再由斯托克斯公式

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\partial S}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

上两式相减，可得

$$\int_S (\boldsymbol{J}-\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0$$

由于S为任取的，$\boldsymbol{J}$在S上不为零，即可得

$$\boldsymbol{J}-\nabla\times\boldsymbol{H}=0\text{，即}\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}$$

1.14　有一物理体系，它由三个向量场$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{A}$和一个实标量场$V$来描述，并且$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{A}$和$V$满足如下关系：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\mu^2 V$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla V$$

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu^2\boldsymbol{A}$$

其中，μ为正的常数. 求证：

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$；

(2) $\nabla^2\cdot V-\mu^2 V+\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$；

(3) 当我们考虑在区域Ω中，V与时间无关，且在Ω的边界$\partial\Omega$上有$V\big|_{\partial\Omega}=0$时，则在$\Omega$中$V=0$.

证　(1) 对已知的关系第4式$\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu^2\boldsymbol{A}$两边求散度，有

$$0=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu^2\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

由于$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\mu^2 V$，有

$$\mu^2\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\partial \nabla\cdot\boldsymbol{E}}{\partial t}=-\mu^2\frac{\partial V}{\partial t}$$

故有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

(2) 对已知关系式$\boldsymbol{E}=\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla V$两边求散度，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla\cdot\nabla V$$

由 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\mu^2V$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$，即可得

$$\nabla^2V-\mu^2V+\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=0$$

(3) 由于 V 与 t 无关，$\dfrac{\partial}{\partial t}V=0$. 由(2)的结果，有 $\nabla^2V=\mu^2V$，且已知 $V|_{\partial\Omega}=0$. 运用格林公式

$$\int_\Omega\left(\psi\nabla^2\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}\psi\frac{\partial}{\partial n}\varphi\mathrm{d}\sigma$$

令 $\psi=\varphi=V$，有

$$\int_\Omega\left(V\nabla^2V+(\nabla V)^2\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}V\frac{\partial}{\partial n}V\mathrm{d}\sigma$$

由于 $V|_{\partial\Omega}=0$，故上式右边为零，即

$$\int_\Omega\left(V\nabla^2V+(\nabla V)^2\right)\mathrm{d}\Omega=0$$

由 $\nabla^2V=\mu^2V$，等式变为

$$\int_\Omega\left(\mu^2V^2+(\nabla V)^2\right)\mathrm{d}\Omega=0$$

由于 $\mu^2>0,\quad V^2\geqslant0,\quad (\nabla V)^2\geqslant0$，要使上式成立，只能 $V=0$. 证毕.

1.15 若定义算符 $\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$，$\hat{\boldsymbol{B}}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，其中 i 为虚数单位，$\hbar$ 为常数，$\boldsymbol{A}$ 为向量场. 请证明

$$(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\times(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})=\mathrm{i}e\hbar\hat{\boldsymbol{B}}$$

其中，e 为粒子电荷，是一常数.

证　这是要证明算符的等式，左边是两个完全相同的向量算符的向量积，如果按向量自身的向量积为零去做，将会得出错误的结论. 向量算符与向量有本质的区别，向量算符是要作用到所定义的函数(包括向量函数)上，才体现出其意义(具体在第三章论述). 要证明上面的等式，也是要等式两边的算符作用在所定义的任一相同的函数中，等式仍然成立，才能证明这两个算符相等.

设 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 为算符所作用的空间中的任一函数，则

$$\begin{aligned}(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\times(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{r})&=(-\mathrm{i}\hbar\nabla-e\boldsymbol{A})\times(-\mathrm{i}\hbar\nabla-e\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{r})\\&=\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{jlk}(-\mathrm{i}\hbar\nabla-e\boldsymbol{A})_l\left[(-\mathrm{i}\hbar\nabla-e\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{r})\right]_k\\&=\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{jlk}(-\mathrm{i}\hbar\partial_l-eA_l)(-\mathrm{i}\hbar\partial_k\varphi-eA_k\varphi)\\&=\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{jlk}\left[-\hbar^2\partial_l\partial_k\varphi+\mathrm{i}\hbar e\partial_l(A_k\varphi)+\mathrm{i}\hbar eA_l\partial_k\varphi+e^2A_lA_k\varphi\right]\\&=\mathrm{i}e\hbar\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{jlk}\partial_l(A_k\varphi)+\mathrm{i}e\hbar\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{jlk}A_l\partial_k\varphi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i}e\hbar \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{jlk} (\partial_l A_k)\varphi + \mathrm{i}e\hbar \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{jlk} A_k \partial_l \varphi + \mathrm{i}e\hbar \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{jlk} A_l \partial_k \varphi \\
&= \mathrm{i}e\hbar \nabla \times \boldsymbol{A}\varphi \\
&= \mathrm{i}e\hbar \boldsymbol{B}\varphi(\boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

上面证明式中的第 4 行到第 5 行，由于考虑到指标 l,k 的对称性和反对称性，有 $\varepsilon_{jlk}\partial_l\partial_k\varphi = 0$ 和 $\varepsilon_{jlk}A_lA_k\varphi = 0$. 而第 6 行中的第二项和第三项是相消的，因为求和指标 l,k 是“哑标”，故在第二项中把 l 写成 k，把 k 写 l，则变为 $\mathrm{i}e\hbar \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{jkl} A_l \partial_k \varphi$. 再由 $\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{jlk}$，有 $\mathrm{i}e\hbar \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{jkl} A_l \partial_k \varphi = -\mathrm{i}e\hbar \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{jlk} A_l \partial_k \varphi$，故为第三项的“－”号，与它相消. 而第一项就是第 7 行的结果. 故算符等式得证.

第二章　$\mathbf{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

内 容 提 要

一、$\mathbf{R}^3$ 空间中的曲线坐标系

1. $\mathbf{R}^3$ 空间中的曲线坐标系定义

由三个独立坐标参数(u_1,u_2,u_3)来描述 $\mathbf{R}^3$ 空间点，且坐标参数(u_1,u_2,u_3)与笛卡儿坐标系的坐标参数(x_1,x_2,x_3)存在单值的函数变换关系，则坐标参数(u_1,u_2,u_3)构成 $\mathbf{R}^3$ 空间中的曲线坐标系.

2. $\mathbf{R}^3$ 空间中的正交曲线坐标系

如果我们选取的曲线坐标系(u_1,u_2,u_3)在 $\mathbf{R}^3$ 空间中的每一点，都有过此点的三条坐标曲线的切向量相互正交，则称此曲线坐标系为正交曲线坐标系.

在本书中，我们用的皆为正交曲线坐标系，且仅介绍柱坐标系(ρ,φ,z)和球坐标系(r,θ,φ).

二、$\mathbf{R}^3$ 空间中曲线坐标系的度量

1. $\mathbf{R}^3$ 空间中的线元

用分析的方法研究定义在 $\mathbf{R}^3$ 空间中的物理场量(即变量函数、向量函数及以后涉及的张量函数)随空间距离的变化行为，首先就要给出空间相邻两点距离的定义，由于“距离”不是位移向量，它是大于或等于零的标量，因此我们用空间点的无穷小位移的平方来定义“距离”，即空间中的线元，通常用 $\mathrm{d}s^2$ 或 $\mathrm{d}r^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 来表示.

2. $\mathbf{R}^3$ 空间中直角坐标系下的线元

在笛卡儿坐标系中，由于各个坐标分量的距离已有自然的表示，因此空间中的线元有自然的表示

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$$

3. $\mathbf{R}^3$ 空间中曲线坐标系下的线元

在曲线坐标系中，坐标参数 u_i 并非是表示空间距离的，例如，球坐标系中的 θ、φ 是表示角度的，因此要把坐标参数 u_i 转化为描述空间距离的量，就必须用坐标曲线的度量系数 h_i 乘以 $\mathrm{d}u_i$ 来描述，直观地说，度量系数就是把曲线坐标系中非表示距离的坐标参数转换成表示沿此坐标参数变化时空间距离变化的一种几何量.

一般正交曲线坐标系中的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}u_1^{\,2} + g_{22}\mathrm{d}u_2^{\,2} + g_{33}\mathrm{d}u_3^{\,2}$$

$$h_1 = \sqrt{g_{11}},\ h_2 = \sqrt{g_{22}},\ h_3 = \sqrt{g_{33}}$$

其中，g_{ij} 称为空间线元的度量系数，h_i 称为坐标曲线的度量系数，都简称为“度量”.

则我们可以给出沿坐标参数 u_i 的坐标曲线的微弧长

$$\mathrm{d}s_i = h_i\mathrm{d}u_i \text{ (此处 } i \text{ 不求和)}$$

从而可以给出正交曲线坐标系中的坐标曲线的弧(线)元、面元和体积元的表达式.

4. 柱坐标系 (ρ,φ,z) 下的坐标曲线的线元、面元和体积元的表达式

1) 线元的表达式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$$

$$g_{\rho\rho} = 1,\ g_{\varphi\varphi} = \rho^2,\ g_{zz} = 1$$

$$h_\rho = 1,\ h_\varphi = \rho,\ h_z = 1$$

2) 坐标曲线的线元

$$\mathrm{d}s_\rho = \mathrm{d}\rho,\ \mathrm{d}s_\varphi = \rho\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}s_z = \mathrm{d}z$$

3) 面元的表达式

$$\mathrm{d}\sigma_{\rho\varphi} = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_{\rho z} = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}\sigma_{\varphi z} = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

4) 体积元的表达式

$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

5. 球坐标系 (r,θ,φ) 下的坐标曲线的线元、面元和体积元的表达式

1) 线元的表达式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

$$g_{rr} = 1,\ g_{\theta\theta} = r^2,\ g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$$

$$h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\varphi = r\sin\theta$$

2) 坐标曲线的线元

$$\mathrm{d}s_r=\mathrm{d}r,\ \mathrm{d}s_\theta=r\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}s_\varphi=r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$$

3) 面元的表达式

$$\mathrm{d}\sigma_{r\theta}=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}\sigma_{r\varphi}=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_{\theta\varphi}=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

4) 体积元的表达式

$$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

三、柱坐标系下的向量分析

1. 柱坐标系下的哈密顿算符

$$\nabla=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

2. 标量场 $\psi(\rho,\varphi,z)$ 的梯度

$$\nabla\psi(\rho,\varphi,z)=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

3. 向量场 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=A_\rho\boldsymbol{e}_\rho+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+A_z\boldsymbol{e}_z$ 的散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}A_\rho+\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

4. 向量场 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)$ 的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_\rho+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z$$

5. 拉普拉斯算符 ∇^2 的表达式

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

四、球坐标系下的向量分析

1. 球坐标系下的哈密顿算符

$$\nabla=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

2. 标量场$\psi(r,\theta,\varphi)$的梯度

$$\nabla\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

3. 向量场$\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$的散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r r^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta r\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi r\right)\right]$$

4. 向量场$\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)$的旋度

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=&\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(r\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r\\&+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(r\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

5. 拉普拉斯算符∇^2的表达式

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

或写成

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

习 题 详 解

2.1　在柱坐标(ρ,φ,z)下，试计算其坐标基$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$(可称为空间中的标架场)的散度和旋度，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\rho,\ \nabla\cdot\boldsymbol{e}_\varphi,\ \nabla\cdot\boldsymbol{e}_z\text{和}\nabla\times\boldsymbol{e}_\rho,\ \nabla\times\boldsymbol{e}_\varphi,\ \nabla\times\boldsymbol{e}_z$$

并说明所得的计算结果的物理意义.

解　在柱坐标系中，向量场的散度和旋度的表达式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}A_\rho+\frac{\partial}{\partial\rho}A_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_z-\rho\frac{\partial}{\partial z}A_\varphi\right]\boldsymbol{e}_\rho+\left[\frac{\partial}{\partial z}A_\rho-\frac{\partial}{\partial\rho}A_z\right]\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\rho\right]\boldsymbol{e}_z$$

而 $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ 是三种特殊的向量场(每一个单独的场只有一个分量)，$\boldsymbol{e}_\rho=(1,0,0)$，即 $A_\rho=1$，其他分量为零；$\boldsymbol{e}_\varphi=(0,1,0)$，$A_\varphi=1$，其他分量为零；$\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$，$A_z=1$，其他分量为零.

分别将这三种特殊的向量场代入柱坐标系中散度、旋度的表达式，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\rho=\frac{1}{\rho}$$

这表明在空间中每一点 (ρ,φ,z) 处，都有一个强度为 $\frac{1}{\rho}$ 的点源，其产生的向量场为 $\boldsymbol{e}_\rho$，实际上物理上并不存在这样的场.

同时，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\varphi=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{e}_z=0$$

表明这两种场的散度为零，是无点源的场.

由旋量的计算，有 $\nabla\times\boldsymbol{e}_\rho=0$, $\nabla\times\boldsymbol{e}_z=0$，表明它们是无旋场.

而

$$\nabla\times\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot1)\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z$$

这表明在空间中每一点 (ρ,φ,z) 处，都有一个由 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 向量场构成的旋量，其强度为 $\frac{1}{\rho}$，方向平行于 z 轴正向. 在整个空间中形成这样的旋量场，也就是说，在空间中的每一点有沿 z 轴方向(与 z 轴平行)的线源，其强度为 $\frac{1}{\rho}$，而空间中布满了这种源. 物理上还没有这样的实际的旋量场. 如果我们考虑由磁矢量势 $\boldsymbol{A}$ 构成的 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的磁场，在此点存在产生 $\boldsymbol{A}$ 的源 $\boldsymbol{B}$，其强度为 $\frac{1}{\rho}$，这样的磁向量势 $\boldsymbol{A}$ 是否存在，可深入讨论. 而同一个 $\boldsymbol{B}$ 可对应无穷多个矢量势，只要满足 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi$，而 ψ 为任意的标量函数，这又是一个有趣的问题.

我们得到的结论是柱坐标中的标架场只是一种数学的描述，标架的每一个分量在空间中构成的场是没有物理意义的.

2.2　在球坐标 (r,θ,φ) 下，试计算其坐标基 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi$ 所构成的标架场的散度和旋度，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r,\ \nabla\cdot\boldsymbol{e}_\theta,\ \nabla\cdot\boldsymbol{e}_\varphi \text{ 和 } \nabla\times\boldsymbol{e}_r,\ \nabla\times\boldsymbol{e}_\theta,\ \nabla\times\boldsymbol{e}_\varphi$$

所得的计算结果能否用物理学中的某些场量给予恰当的解释?

解　由球坐标系中，一向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的散度和旋度的表达式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r r^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta r\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi r\right)\right]$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_r$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

将$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$代入球坐标系中散度、旋度的表达式，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(1\cdot r^2\sin\theta\right)}{\partial r}=\frac{2}{r}$$

这表明在空间每一点(r,θ,φ)处都有一个强度为$\frac{2}{r}$的点源，它产生只沿径向$\boldsymbol{r}$的单位强度的向量场，因此在物理上没有这种场.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\theta=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(1\cdot r\sin\theta\right)}{\partial\theta}=\frac{1}{r}\cot\theta$$

这表明在空间每一点(r,θ,φ)处都有一个强度为$\frac{1}{r}\cot\theta$的点源，它产生只沿$\boldsymbol{e}_\theta$方向的单位强度的向量场，因此在物理上没有这种场.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(1\cdot r\right)}{\partial\varphi}=0$$

即$\boldsymbol{e}_\varphi$为无源场，即无点源的场.

下面讨论标架场的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{e}_r=0$$

即$\boldsymbol{e}_r$为无旋场.

$$\nabla\times\boldsymbol{e}_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\left(1\cdot r\right)}{\partial r}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

在物理上没有这种场.

$$\nabla\times\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(1\cdot r\sin\theta\right)}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(1\cdot r\sin\theta\right)}{\partial r}\boldsymbol{e}_\theta=\frac{1}{r\tan\theta}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta$$

在物理上没有这种场.

我们得到的结论是球坐标中的标架场只是一种数学的描述，标架的每一个分量在空间中构成的场是没有物理意义的.

2.3　若有一个力场在直角坐标系下的表达式为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_x+\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_y$$

(1) 请用柱坐标系把此力场表示出来；

(2) 在柱坐标系下计算此力场的散度和旋度；

(3) 若有一物体在此力场中沿 $\boldsymbol{e}_\rho$ 方向运动一单位长度，求此力场 $\boldsymbol{F}$ 所做的功；

(4) 若有一物体在此力场的作用下，沿 x-y 平面的一单位圆顺时针运动一圈，求此力场 $\boldsymbol{F}$ 所做的功，并分析此功与力场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度的关系.

解　(1) 由于此力场与 z 无关，柱坐标退化为极坐标 (ρ,φ).

$$\boldsymbol{F}=-\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_x+\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_y=-\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\boldsymbol{e}_x+\frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\boldsymbol{e}_y$$

$$=-\frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_x+\frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_y$$

由坐标架关系知

$$\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_\rho\cos\varphi-\boldsymbol{e}_\varphi\sin\varphi,\quad \boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_\rho\sin\varphi+\boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi$$

可得

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\sin\varphi}{\rho}\left(\boldsymbol{e}_\rho\cos\varphi-\boldsymbol{e}_\varphi\sin\varphi\right)+\frac{\cos\varphi}{\rho}\left(\boldsymbol{e}_\rho\sin\varphi+\boldsymbol{e}_\varphi\cos\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi$$

(2) 在极坐标系下

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\rho\right]\boldsymbol{e}_z$$

则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{1}{\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\boldsymbol{e}_z=0$$

(3) 因为此力场只沿 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向，而 $\boldsymbol{e}_\varphi\perp\boldsymbol{e}_\rho$，故此力场对沿径向移动的物体不做功.

(4) 力场所做的功为

$$w=\oint_c \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_c \frac{1}{\rho}\rho \mathrm{d}\varphi=\int_{2\pi}^{0}\mathrm{d}\varphi=-2\pi$$

由此说明绕原点的不同环路积分为一定值(即积分与积分路径的选取无关)，即此力场的旋度为零.

2.4　证明：

(1) $\nabla r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$；

(2) $\nabla^2 r^n=n(n+1)r^{n-2}$；

其中，$r=|\boldsymbol{r}|$. (**提示**：由于题目中的标量场r^n只与r有关，故用球坐标系比较方便.)

证　(1) 在球坐标系中

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

令$\psi=r^n$代入，得

$$\nabla r^n=\frac{\partial r^n}{\partial r}\boldsymbol{e}_r=nr^{n-1}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$$

(2) 在球坐标系中

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

令$\psi=r^n$代入，得

$$\nabla^2 r^n=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial r^n}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 nr^{n-1}\right)=n\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^{n+1}=n(n+1)r^{n-2}$$

2.5　假设点电荷q的势为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{r^{1+\varepsilon}},\quad 0<\varepsilon<1$$

在球坐标系下，计算此势(在$r\neq 0$处)的场强$\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$)并计算：

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$；

(2) $\nabla\times\boldsymbol{E}$；

(3) 对半径为R的球形区域，推导类似高斯(Gauss)定理的结果，对于此结果，检验当$\varepsilon\to 0$时的极限情况，并同点电荷的库仑(Coulomb)势$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{r}$作比较，说明这一电势的改变所引起的物理结果的变化.

解　在球坐标系中，电势φ只有径向的分量.

(1) 由

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

有

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{r^{1+\varepsilon}}\right)=(1+\varepsilon)\frac{q}{r^{2+\varepsilon}}\boldsymbol{e}_r$$

即电场 $\boldsymbol{E}$ 只有径向的分量，由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r r^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta r\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi r\right)\right]$$

有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=(1+\varepsilon)\frac{q}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^\varepsilon}\sin\theta\right)=\varepsilon(1+\varepsilon)qr^{-(3+\varepsilon)}$$

(2) 由

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_r$$
$$+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_r\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

将 $\boldsymbol{E}$ 的表达式(只有径向分量，且只是 r 的函数)代入，可得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

(3) 电学中的高斯定理，是数学中的高斯公式在静电学中的具体应用，它是对点电荷的场的具体形式所得的结果.

由数学上的高斯公式

$$\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

对电学上的高斯定理的推导：把点电荷设为坐标原点，Ω 为以原点为圆心、R 为半径的球体，当点电荷的电势为库仑势 $\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{r}$ 时，电场 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$，这里取 $\varepsilon_0=1$，则有

$$\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\Omega=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=4\pi q$$

而对于 $\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{r^{1+\varepsilon}}$，则有

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\Omega=4\pi(1+\varepsilon)\frac{q}{R^\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}4\pi q$$

在不包含点电荷的任一空间体积 Ω 中，对于库仑势，有

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\Omega=0$$

但对于 $\varphi(\boldsymbol{r})=\dfrac{q}{r^{1+\varepsilon}}$ 的电势，则

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\Omega=\varepsilon(1+\varepsilon))q\int_{\Omega}r^{-(3+\varepsilon)}\mathrm{d}\Omega\neq0$$

这说明对于这种电势的电场，穿过不包含电荷的空间区域 Ω 时，进出其边界 $\partial\Omega$ 的电场线的总通量不为零. 而电场线只能从正电荷出发，终止于负电荷，这又说明在 Ω 内一定有电荷存在. 因此不可能有这种 $\varphi(\boldsymbol{r})=\dfrac{q}{r^{1+\varepsilon}}$ 的电势存在.

2.6　在球坐标系下，已知向量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

求此向量场 $\boldsymbol{A}$. 所得的场 $\boldsymbol{A}$ 是唯一的吗？如果不唯一，请说明理由.

解

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial r\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial rA_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial r\sin\theta A_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

由已知，可得

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_\theta\right)=\sin\theta \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}A_r=0 \tag{3}$$

最简单的试探法：

令 $A_r=0$，$A_\theta=0$，则上面(1)～(3)式变为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)=\sin\theta \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)=0 \tag{5}$$

即可看出满足(4)和(5)式的 A_φ 为

$$A_\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

故可得此向量场的一个解

$$\boldsymbol{A}=-\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_{\varphi}$$

如果在上述条件中，改变为 $A_r=0$，$A_\theta\neq 0$，即在(1)和(3)式中再要求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)=0\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)=0\end{cases}$$

可看出满足上述方程的 A_θ 为

$$A_\theta=\frac{1}{r}f(\theta)$$

其中，$f(\theta)$ 为 θ 的任意函数. 即可得此向量场的另一形式的解为

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}f(\theta)\boldsymbol{e}_\theta-\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_{\varphi}$$

故此向量场的解是不唯一的，由于 $f(\theta)$ 的任意性，解是无穷多的(如果令 $A_r=0$，$A_\varphi=0$，则可得 $\boldsymbol{A}=-\dfrac{\varphi}{r}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$ 等多种形式的解).

另外一种重要的构造新解的方法是：当我们得到一个解 $\boldsymbol{A}$ 时，即 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

由于任一光滑的标量函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的梯度的旋度为零，即

$$\nabla\times(\nabla\psi)=0$$

这一结果是不依赖于坐标系的，以前我们是用直角坐标系来证明此式的，但它对球坐标系等其他正交曲线坐标系仍然成立，因此我们可构造一种新的解 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi(\boldsymbol{r})$$

则

$$\nabla\times\boldsymbol{A}'=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times(\nabla\psi)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

也就是说，$\boldsymbol{A}'$ 也一定是问题的解，由于 $\psi(\boldsymbol{r})$ 是任一光滑的标量函数，这样所构造的解也是无穷多的.

第三章　线 性 空 间

内 容 提 要

一、线性空间

1. 线性空间的概念

线性空间 L 是 $\mathbf{R}^3$ 空间的推广，其定义见教材第 33 页[①]. 线性空间可以是 n 维的向量空间，也可以是无穷维的向量空间. 线性空间 L 中的元素也称为线性空间中的向量.

线性空间 L 中最大的线性无关的向量的数目 n，称为线性空间 L 的维数，记为 $\dim L = n$.

2. 线性空间的内积

线性空间 L 中两个元素的内积是 $\mathbf{R}^3$ 空间中两个向量的内积的推广.

***注：**“内积”是线性空间中才具有的概念.

1) 线性空间 L 中两个元素的内积的定义

$$\langle \varphi, \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in L$$

在 $\mathbf{R}^3$ 空间中，两个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的内积可写为 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$.

2) 两个元素 φ, ψ 的正交的定义

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0, \quad \forall \varphi, \psi \in L$$

3) 元素 φ 的模 $|\varphi|$(即长度)的定义

$$|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in L$$

4) 施密特(Schmidt)正交化规则

对 n 维的线性空间 L 中的任意 n 个线性无关的向量，可用此规则构造 n 个正交归一化的向量，这组 n 个正交归一化的向量可作为描述 n 维的线性空间 L 的基向量.

---

① 正文中出现“教材”是指杨孔庆编著的《数学物理方法》一书.

3. 一般物理学中用的线性空间

(1) 线性空间 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$ 或复数 C，是通常描述物理体系自变量的线性空间.

(2) 由定义在 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$ 或复数 C 上的函数(实函数或复函数)所构成的线性空间，此线性空间是由定义在 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$ 或复数 C 上的一族线性无关且相互正交的函数作为基向量(或称为基函数)所张成的空间，空间中的任意一个函数(即线性空间中的元素，或称为向量)是基函数的线性组合.

4. 希尔伯特(Hilbert)空间 H

(1) 定义：完备的内积空间称为希尔伯特空间，记为 H.

希尔伯特空间 H 是线性空间中的一种特殊的空间，它是描述量子物理的数学基础.

(2) 希尔伯特空间中的内积：设 $\varphi(x)$、$\chi(x)\in H(x\in\Omega)$ 两个元素内积的定义是

$$\langle\varphi,\chi\rangle=\int_{\Omega}\varphi^{*}\chi\mathrm{d}x,\quad \varphi,\chi\in H;\quad x\in\Omega$$

Ω 为 φ,χ 函数的定义域. Ω 可以属于 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$ 或复数 C，而 $x\in\Omega$ 中的 x 是一种浓缩记法，它表示 Ω 中的元素，积分的维数依 Ω 而定.

(3) 希尔伯特空间是平方可积的空间，即 $\varphi(x)$ 的模为有限值

$$\langle\varphi,\varphi\rangle=\int_{\Omega}\varphi^{*}\varphi\mathrm{d}x<\infty,\quad \forall\varphi\in H$$

注：以上的 φ^{*} 是 φ 的复共轭，是对复函数空间而言，如果是实函数空间，$\varphi^{*}=\varphi$，这样就不必分开写，以下相同.

二、作用在线性空间上的几种重要的线性算符

(1) 坐标变换 A，$\dim L=n$，A 为 $n\times n$ 的方阵，有

$$\chi=A\varphi,\quad \chi,\varphi\in L$$

(2) 微分算符 D，∇ 或 ∇^2. 例如

$$D_x\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\quad D_x\varphi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x),\quad \varphi(x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi\in L$$

(3) 对称算符(对称矩阵)和反对称算符(反对称矩阵).

(4) 厄米(Hermitian)算符：$A^{+}=A$.

(5) 幺正算符：$U^{+}U=I$.

三、线性算符的本征值和本征向量

(1) 线性算符 A 的本征值为 λ，满足

$$\det(A-\lambda I)=0$$

则对应于本征值为 λ 的本征向量 φ，有

$$A\varphi=\lambda\varphi$$

(2) 厄米算符的本征值为实数.

厄米算符 A 的本征值为 λ，其相应的本征向量为 φ，则有

$$A\varphi=\lambda\varphi,\quad \lambda \text{ 为实数}$$

在量子物理中，物理量对应的算符都是厄米算符，我们所测量得到的物理量的值都是此物理算符的本征值.

(3) 厄米算符的不同本征值的本征向量正交.

习 题 详 解

3.1 设 A,B 都为 n 维空间中的坐标变换的矩阵，即都为 $n\times n$ 的非奇异 ($\det A\neq 0$，$\det B\neq 0$)方阵，求证

$$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$$

证 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则两矩阵的秩都可写为如下的形式：

$$\det A=\varepsilon_{ijk\cdots}a_{1i}a_{2j}a_{3k}\cdots \tag{1}$$

此式可写成更一般的形式

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\cdots}\det A=\varepsilon_{ijk\cdots}a_{\alpha i}a_{\beta j}a_{\gamma k}\cdots \tag{2}$$

我们来看这一表达式的正确性：

当 $\alpha\beta\gamma\cdots=123\cdots$ 时，(2)式就变成(1)式.

当 $\alpha\beta\gamma\cdots$ 中的任意两个指标进行交换(这种交换总可以用 P 次相邻两个指标的交换来实现)时，就会出现 $(-1)^P$. 例如，在(2)式中交换 α 和 β 这两个指标，则(2)式为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma\cdots}\det A&=\varepsilon_{ijk\cdots}a_{\beta j}a_{\alpha i}a_{\gamma k}\cdots\\&=(-1)\varepsilon_{jik\cdots}a_{\beta j}a_{\alpha i}a_{\gamma k}\cdots\\&=(-1)\varepsilon_{ijk\cdots}a_{\beta i}a_{\alpha j}a_{\gamma k}\cdots\end{aligned}$$

这相当于在(1)式中交换了一次指标，出现了一个“$-$”号.

同理，如果 $\alpha\beta\gamma\cdots$ 中的任意两个指标进行交换，任意相邻两个指标交换了 P

次，就相当于在(1)式中交换了 P 次指标，出现了 $(-1)^P$.

如果 $\alpha\beta\gamma\cdots$ 中有两个指标相等，(2)式为零，如 $\alpha=\beta=1$，就相当于(1)式中的

$$\begin{aligned}\det A &= \varepsilon_{ijk\cdots}a_{1i}a_{1j}a_{3k}\cdots = -\varepsilon_{jik\cdots}a_{1i}a_{1j}a_{3k}\cdots = -\varepsilon_{jik\cdots}a_{1j}a_{1i}a_{3k}\cdots \\ &= -\varepsilon_{ijk\cdots}a_{1i}a_{1j}a_{3k}\cdots = -\det A\end{aligned}$$

其中第 4 步用到 i,j 是哑标，可把 i 写成 j，把 j 写成 i. 因此在 $\alpha=\beta=1$ 的情况，可得 $\det A=-\det A\Rightarrow \det A=0$. 这一结论可推广到 $\alpha\beta\gamma\cdots$ 中有两个指标相等的情况.

因此我们看到(1)和(2)式是两个等价的表示方法，(1)和(2)式是以“行”的元素求和的形式，则可以把它写成以“列”的元素求和的形式，即

$$\det A = \varepsilon_{ijk\cdots}a_{i1}a_{j2}a_{k3}\cdots \tag{3}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\cdots}\det A = \varepsilon_{ijk\cdots}a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{k\gamma}\cdots \tag{4}$$

由(3)式，有

$$\det B = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\cdots}b_{\alpha1}b_{\beta2}b_{\gamma3}\cdots$$

可得

$$\begin{aligned}(\det A)(\det B) &= (\det A)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\cdots}b_{\alpha1}b_{\beta2}b_{\gamma3}\cdots \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\cdots}(\det A)b_{\alpha1}b_{\beta2}b_{\gamma3}\cdots \\ &= \varepsilon_{ijk\cdots}a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{k\gamma}\cdots b_{\alpha1}b_{\beta2}b_{\gamma3}\cdots \\ &= \varepsilon_{ijk\cdots}(a_{i\alpha}b_{\alpha1})(a_{j\beta}b_{\beta2})(a_{k\gamma}b_{\gamma3})\cdots \\ &= \varepsilon_{ijk\cdots}(A\cdot B)_{i1}(A\cdot B)_{j2}(A\cdot B)_{k3}\cdots \\ &= \det(A\cdot B)\end{aligned}$$

其中第 3 步用到(2)式，故命题得证.

3.2　试证明，若 A 为实内积空间的一个自伴算符，则当且仅当对此空间内所有的向量 X，有 $\langle X,AX\rangle=0$ 时，$A=0$. 其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 为内积.

证　由于 A 为实的自伴算符，即 $A^{\mathrm{T}}=A$，对于 $\forall X\in H$（H 为此内积空间），依题意有

$$\langle X,AX\rangle = \langle A^{\mathrm{T}}X,X\rangle = \langle AX,X\rangle = 0$$

设此内积空间 H 的基向量为 $\{\varphi_i\}$，则

$$X = x_i|\varphi_i\rangle$$

可得

$$\langle X,AX\rangle = \sum_i x_i^2\langle\varphi_i,A\varphi_i\rangle = 0$$

因为 X 为任意给定的向量，故 $x_i^2 \geqslant 0$，且不能全为零.

同样可得

$$\langle AX, X\rangle = \sum_i x_i^2 \langle A\varphi_i, \varphi_i\rangle = 0$$

不失普遍性，以算符 A^2 的作用做内积，考虑到上两式，有

$$\begin{aligned}\left\langle X, A^2X\right\rangle &= \langle X, A\cdot AX\rangle = \langle AX, AX\rangle \\ &= \sum_i x_i^2 \langle A\varphi_i, A\varphi_i\rangle \\ &= \sum_i x_i^2 \langle A\varphi_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|A\varphi_i\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

其中在第 3 行中用到在内积中插入 $\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = I$ (基的完备性).

由上式可得

$$\sum_i x_i^2 \langle A\varphi_i, A\varphi_i\rangle = \sum_i x_i^2 \left\| A\varphi_i\right\rangle\Big|^2 = 0$$

由于 $x_i^2 \geqslant 0$ 且不能全为零，上式告诉我们，对于所有的 φ_i，有

$$\left\| A\varphi_i\right\rangle\Big|^2 = 0$$

故可得 $A = 0$. 证毕.

3.3　若 A 为 n 维空间中的反对称算符(即 $n\times n$ 的反对称矩阵)，请证明

$$\mathrm{tr}A = 0 \quad (\mathrm{tr}A \text{ 为方阵 } A \text{ 的迹})$$

证　设 $A = (A_{ij})$，由于 A 为反对称算符，即 $A_{ij} = -A_{ji}$，考虑每一个对角元有

$$A_{ii} = -A_{ii} \quad (i \text{ 不求和})$$

可得所有的对角元 $A_{ii} = 0$，故所有对角元的求和即为此算符的迹为零，即 $\mathrm{tr}A = 0$.

3.4　若算符 A 为 3×3 的方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

求 A 的伴随算符 A^+ 和逆算符 A^-.

解　设 $A = (a_{ij})$，其逆为 $B = (b_{ij})$，即 $A\cdot B = I$，$B = A^{-1}$，则

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A} A_{ji}$$

其中，A_{ji} 为 a_{ji} 的代数余子式. 对于

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad \det A=2$$

可计算

$$b_{11}=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}}{2}=1,\quad b_{21}=\frac{-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}}{2}=-\frac{3}{2},\quad b_{31}=\frac{\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}}{2}=1$$

$$b_{12}=3,\ b_{22}=-3,\ b_{32}=1,\ b_{13}=-2,\ b_{23}=\frac{5}{2},\ b_{33}=-1$$

即

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

由于 A 为实矩阵，A 的伴随算符为 A^{T}，即

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&4\\3&1&3\end{pmatrix}$$

3.5　求下列矩阵的本征值及相应的本征向量：

(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；　(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$；

(3) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$；　(4) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

解　本题由 A 的本征方程 $|A-\lambda I|=0$ 求出 A 的本征值 λ，再由 $AX=\lambda X$ 求出相应于 λ 的本征向量 X.

(1) 由于

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = 0$$

可得

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = -1$$

对于 $\lambda_1 = 0$，有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

可得 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$，相应的本征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}$，其中 c_3 为任意常数，一般取 $c_3 = 1$.

对于 $\lambda_2 = 1$，有

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$，相应的本征向量为 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 c_1 为任意常数，一般我们取 $c_1 = 1$.

对于 $\lambda_3 = -1$，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，相应的本征向量为 $\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 c_1 为任意常数，一般取 $c_1 = 1$.

(2) 由于

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

可得 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，其中 λ_1,λ_2 为重根.

由 $\lambda_1=\lambda_2=1$，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=x_1 \\ x_3=x_2 \\ x_2=x_3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x_1=c_1 \\ x_2=c_2 \\ x_3=c_2 \end{matrix}$$

当取 $c_1=1$，$c_2=0$ 时，得 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的本征向量 $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

当取 $c_1=0$，$c_2=1$ 时，得 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的本征向量 $X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

由 $\lambda_3=-1$，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x_1=0 \\ x_3=-x_2 \\ x_2=-x_3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=c_2 \\ x_3=-c_2 \end{matrix}$$

当取 $c_2=1$ 时，得 $\lambda_3=-1$ 的本征向量 $X_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) 由于

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)^2=0$$

得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=2$（λ_2,λ_3 为重根）.

对于 $\lambda_1=0$，有

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=0\\x_3+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}x_1=0\\x_2=c_2\\x_3=-c_2\end{matrix}$$

当取 $c_2=1$ 时，得 $\lambda_1=0$ 的本征向量 $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，有

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}0x_1=0\\-x_2+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}x_1=c_1\\x_2=c_2\\x_3=c_2\end{matrix}$$

取 $c_1=0$，$c_2=1$，得 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的本征向量 $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

取 $c_1=1$，$c_2=1$，得 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的本征向量 $X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(4) 由于

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda^2=\lambda^2(3-\lambda)=0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$（λ_1,λ_2 为重根）.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，有

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad x_1+x_2+x_3=0$$

令 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，则 $x_3=-(c_1+c_2)$.

取 $c_1=1$，$c_2=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的本征向量 $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

取 $c_1=0$，$c_2=1$，得 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的本征向量 $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=3$，有

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\\x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_1=x_2=x_3=c_1$$

取 $c_1=1$，得 $\lambda_3=3$ 的本征向量 $X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3.6　已知方阵 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A 的本征值和相应的本征向量. 若此方阵可对角化，求出使 A 对角化的相似变换 MAM^{-1} 的满秩方阵 M.

解　由于

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda&-2&-2\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)(1-\lambda)^2=0$$

可得 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$（λ_2,λ_3 为重根）.

对于 $\lambda_1=-1$，有

$$\begin{pmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}0\cdot x_1-x_2+x_3=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}x_1=c_1\\x_2=0\\x_3=0\end{matrix}$$

取 $x_1=c_1=1$，得 $\lambda_1=-1$ 的本征向量 $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，有

$$\begin{pmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x_1=c_3-c_2\\x_2=c_2\\x_3=c_3\end{matrix}$$

取 $c_2=0$，$c_3=1$，得 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的本征向量 $X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

取 $c_2=1$，$c_3=1$，得 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的本征向量 $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

可由三个本征向量排列构成矩阵 M

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

有

$$\det M=-1,\quad M^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

则可得

$$\begin{aligned}M^{-1}AM&=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

即可通过 M 对 A 进行相似变换，把 A 对角化，对角线上的元素为 A 的本征值.

3.7　求泡利(Pauli)矩阵

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

的本征值及其相应的本征向量，其中 i 为虚数单位.

解　泡利矩阵在量子物理中经常用到.

对于

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0$$

可得本征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$.

对于 $\lambda_1=1$，有

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_2=x_1\\ x_1=x_2\end{cases}$$

取 $x_1=1\Rightarrow x_2=1$，得本征值为 $\lambda_1=1$ 的本征向量 $\chi_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=-1$，有

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_2=-x_1\\ x_1=-x_2\end{cases}$$

取 $x_1=1\Rightarrow x_2=-1$，得本征值为 $\lambda_2=-1$ 的本征向量 $\chi_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

对于

$$\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0$$

可得本征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$.

对于 $\lambda_1=1$，有

$$\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\mathrm{i}x_2=x_1\\ \mathrm{i}x_1=x_2\end{cases}$$

取 $x_1=1\Rightarrow x_2=\mathrm{i}$，得本征值为 $\lambda_1=1$ 的本征向量 $\chi_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$；或取 $x_1=\mathrm{i}\Rightarrow x_2=-1$，得本征值为 $\lambda_1=1$ 的本征向量 $\chi_1=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ -1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=-1$，有

$$\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\mathrm{i}x_2=x_1\\ \mathrm{i}x_1=-x_2\end{cases}$$

取 $x_1=1\Rightarrow x_2=-\mathrm{i}$，得本征值为 $\lambda_2=-1$ 的本征向量 $\chi_2=\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$；或取 $x_1=\mathrm{i}\Rightarrow x_2=1$，得本征值为 $\lambda_2=-1$ 的本征向量 $\chi_2=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}$.

对于

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

其本征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)(1+\lambda)=0$$

可得本征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$.

对于 $\lambda_1=1$，有

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=x_1\\ -x_2=x_2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}x_1=c_1\\ x_2=0\end{matrix}$$

取 $x_1=1$，得本征值为 $\lambda_1=1$ 的本征向量 $\chi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=-1$，有

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-x_1\\ x_2=x_2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}x_1=0\\ x_2=c_2\end{matrix}$$

取 $x_2=1$，得本征值为 $\lambda_2=-1$ 的本征向量 $\chi_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

第二篇　复变函数

第四章　复变函数的概念

内 容 提 要

一、复数

1. 复数的定义

$$z=x+\mathrm{i}y,\quad x,y\in\mathbf{R};\quad \mathrm{i}^2=-1,\quad \mathrm{i}\text{称为虚数的单位}$$

称 x 为复数 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}\,z=x$；称 y 为复数 z 的虚部，记为 $\mathrm{Im}\,z=y$.

2. 复数的模

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$$

3. 复数 z 的共轭复数

$$z^*=(x+\mathrm{i}y)^*=x-\mathrm{i}y$$

有

$$|z^*|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$$

4. 复数的加法、乘法和除法的运算(略)

5. 复数的几何表示

以 x 为实轴、$\mathrm{i}y$ 为虚轴，构成了复平面 C. 复平面 C 上的任意一点 z 表示一个复数，则所有复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 中的有序实数对 (x,y) 与复平面上所有的点 $(x,\mathrm{i}y)$ 构成一一对应的关系. 由原点 O 到 z 点构成复平面上的一个向量. 当 $z\neq 0$ 时，此向量与 x 轴的夹角 θ 称为复数 z 的辐角；向量的模为 r，$r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$. 则复数 z 的几何表示为

$$z=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

6. 复数 z 的辐角的多值性

对一个复数 z，当其辐角增加(或减少) 2π 的整数倍时，仍然表示同一个复数，即

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r\cos(\theta + 2k\pi) + \mathrm{i}r\sin(\theta + 2k\pi)$$

其中，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$.

$\arg z = \theta$，　$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，称为辐角的主值

$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi$，或写成 $\mathrm{Arg}z = \theta + 2k\pi$，称为一般辐角

7. 复数的指数表达式

(1) 欧拉(Euler)公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

(2) 由欧拉公式，复数的指数表达式为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

同时有

$$z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta + 2k\pi)}, \quad n \text{ 为整数}$$

$$z^a = r^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(\theta + 2k\pi)}, \quad a \text{ 为分数}$$

注意： 以上两式，当 $n < 0$，$a < 0$ 时，$r \neq 0$.

(3) 用复数的指数表达式进行复数的乘法和除法运算，显得简单明了.

设两个复数为 $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则有

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)}, \quad r_2 \neq 0$$

(4) 复数的开方运算

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$= \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

8. 复数球面的概念(见教材第 51 页)

二、复变函数

由于映射是一对一或者多对一的，而复平面上的复数的辐角的多值性导致某些类型的映射(如复数的非整数幂次或对数的映射)呈现出多值性，因此我们只能

选取其自变量的单值分支的区域[即黎曼(Riemann)面 C^{R}]，以保证该自变量区域到复平面的映射是单值的，即在此映射下，自变量区域上的点只有值域的复平面上唯一的点与之对应.

1. 复变函数的定义

复变函数是从黎曼面到复平面的映射

$$f(z):\ C^{\mathrm{R}} \to C,\quad z \in C^{\mathrm{R}}$$

如果此映射不存在多值性问题，则黎曼面就是复平面 C .

如果不涉及黎曼面的概念，则复变函数的定义如下：

复变函数 $f(z)$ 是定义在复数域上的函数，对定义域上的每一点，$f(z)$ 在值域上都有唯一确定的值.

注意：对多值问题，要把复数域分出其单值分支作为定义域.

2. 区域的概念

点集 D 中的每一个点都是内点并且其中任意两点可用一条由该点集 D 的点构成的折线连接起来，则此点集 D 称为区域. 包含边界的区域称为闭区域，不包含边界的区域称为开区域.

在课程中常用的区域可用不等式表示. 例如，圆形开区域可用不等式 $|z-z_0|<r$ 来表示，环形开区域可用 $a<|z-z_0|<b$ 来表示；若将其中的 $<$ 换成 $\leqslant$，则这两个式子分别表示闭圆域和闭环域.

3. 对复变函数多值问题的处理

具有多值性的函数的定义域具有支点，要构造单值的定义域，就必须构造黎曼面.

(1) 支点：对具有多值性的函数，总存在这样的特殊点(一般是函数的零点或无穷远点)，在复平面上，当 z 绕该点一周回到原处时，函数值 w 并不还原，这种点就称为多值函数的**支点**. 当 z 绕该点 n 周后，函数值还原，则称该点为多值函数的 $n-1$ 阶支点.

(2) 黎曼面：把多值函数每两个相邻单值分支的 z 平面在割线处连接起来构成的一个“多叶平面”，就是黎曼面. 函数在每一叶的黎曼面上就构成一个单值分支，均为单值函数. 这就把具有多值性问题的函数变为在黎曼面上的单值函数，就可在黎曼面上研究此函数的解析性质.

4. 复变函数的一般表达式

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

如果写成

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

则值域的复平面即记为 w 平面，w 平面的实轴为 u，虚轴为 $\mathrm{i}v$.

如果用 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示，则

$$w=f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$$

5. 几种常用的复变函数

1) 有理函数

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m},\quad b_0\neq 0;a_i,b_j\in C$$

2) 指数函数

$$f(z)=\mathrm{e}^z$$

其特有性质如下：

(1) e^z 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期；

(2) 在复数域，e^z 可小于零，如 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$；

(3) 极限 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在，即 e^{∞} 无意义.

3) 对数函数

$$f(z)=\ln z$$

这个函数有多值性问题，可写成

$$f(z)=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2k\pi),\quad \theta=\arg z,k\text{ 为整数}$$

如果 z 取主值的单值分支，即 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 或 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ (视割线的做法而定)，则

$$f(z)=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\theta=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$$

为单值函数.

4) 幂函数

$$f(z)=z^a$$

当 a 为整数时，即为整数幂函数，是单值函数，但如果 a 是负整数，其定义域要求 $z\neq 0$.

当 a 为分数时，此幂函数具有多值性，要根据分数的具体情况构造单值分支.

5) 三角函数

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

注意：三角函数仍然是以2π为周期的函数，且$|\sin z|$和$|\cos z|$可以大于1.

6) 双曲函数

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \mathrm{ch}z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{th}z=\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}},\quad \mathrm{cth}z=\frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z}=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}$$

与三角函数的关系为

$$\mathrm{sh}z=-i\sin(iz),\ \mathrm{ch}z=\cos(iz),\ \mathrm{th}z=-i\tan(iz)$$

其特有性质：双曲正、余弦和双曲正、余割的周期为$2\pi i$，双曲正、余切的周期为πi，并且有

$$w=\mathrm{Arcsin}z=-i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^{2}}\right)$$

$$w=\mathrm{Arccos}z=-i\ln\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right)$$

$$w=\mathrm{Arctan}z=-\frac{i}{2}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

习 题 详 解

4.1　写出下列复数的实部、虚部、模和辐角：

(1) $1-i\sqrt{3}$；　(2) $\ln i$；

(3) $(1+i)^{1-i}$；　(4) $\sqrt[i]{i}$；

(5) $\sin(a+ib),\quad a,b\in\mathbf{R}$；　(6) $\sqrt{a+ib},\quad a,b\in\mathbf{R}$.

解　(1)

$$z=1-i\sqrt{3}$$

$$\mathrm{Re}z=1,\quad \mathrm{Im}z=-\sqrt{3}$$

$$|z|=\sqrt{1+3}=2,\quad \arg z=-\frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{Arg}z=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(2)

$$z=\ln \mathrm{i}=\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg \mathrm{i}+2k\pi)=\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$\operatorname{Re} z=\ln|\mathrm{i}|=0,\quad \operatorname{Im} z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

$$|z|=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

$$\arg z=\frac{\pi}{2},\quad k=0,1,2,\cdots;\quad \arg z=-\frac{\pi}{2},\quad k=-1,-2,\cdots$$

$$\operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad k=0,1,2,\cdots;\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

$$\operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad k=-1,-2,\cdots;\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

辐角问题：由于 $\ln \mathrm{i}$ 只有虚部，有无穷多个黎曼面. 在不同的黎曼面上，其虚部的值不同，当只考虑主值黎曼面时$(n=0)$，如果虚部在上半虚轴，则 $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$；如果虚部在下半虚轴，则 $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $z=(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$，关于复变函数的幂函数，其幂次并没有复幂次的定义，我们把它扩展到复幂次，就按教材中的对数函数和指数函数的定义进行运算. 在考虑 $\ln(1+\mathrm{i})$ 的主值黎曼面时，有

$$z=\mathrm{e}^{\ln(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}}$$

先计算指数上的部分

$$\ln(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}=(1-\mathrm{i})\ln(1+\mathrm{i})=(1-\mathrm{i})\left[\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

则可得

$$z=\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\frac{1}{2}\ln 2\right)},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

故

$$\operatorname{Re} z=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$\operatorname{Im} z=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}+2k\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$|z|=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}+2k\pi}$$

$$\operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-\frac{1}{2}\ln 2$$

(4) 由于 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$，故有

$$z=\sqrt[\mathrm{i}]{\mathrm{i}}=\mathrm{i}^{\frac{1}{\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

所以

$$\operatorname{Re} z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi},\quad \operatorname{Im} z=0,\quad |z|=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$
$$\operatorname{Arg} z=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(5)

$$z=\sin(a+\mathrm{i}b)=\frac{\mathrm{e}^{-b+\mathrm{i}a}-\mathrm{e}^{b-\mathrm{i}a}}{2\mathrm{i}}=\frac{\left(\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{b}\right)\cos a+\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^{b}\right)\sin a}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^{b}\right)\sin a+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{-b}\right)\cos a$$

$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^{b}\right)\sin a,\quad \operatorname{Im} z=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{-b}\right)\cos a$$

$$|z|=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^{-2b}+\mathrm{e}^{2b}-2\cos 2a},\quad \arg z=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{-b}}{\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^{b}}\cot a\right)$$

(6) 由 $z=\sqrt{a+\mathrm{i}b}$，这是一个二值问题.

讨论一　先考虑 $a\neq 0, b\neq 0$ 的情况，取割线为正实轴.

若 $0<\arctan\dfrac{b}{a}<2\pi$，则 $0<\arg z<\pi$，这为第一分支；

若 $2\pi<\arctan\dfrac{b}{a}<4\pi$，则 $\pi<\arg z<2\pi$，这为第二分支.

我们选取第一分支进行计算，令 $\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$，则有

$$z=\sqrt{a+\mathrm{i}b}=\sqrt[4]{a^2+b^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$$

有

$$\mathrm{Re}\,z=\sqrt[4]{a^2+b^2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}$$

$$\mathrm{Im}\,z=\sqrt[4]{a^2+b^2}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}$$

$$|z|=\sqrt[4]{a^2+b^2}$$

$$\arg z=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}$$

若取第二分支进行类似的计算，差别只是虚部符号的变化和辐角要加上 π .

讨论二　当 $b=0$，$a\neq 0$ 时(如果 $a=0$，则 $z=0$ 为奇异点，不必讨论)：

若 $a>0$，即 z 在正实轴上，此时作割线为负实轴.

第一分支为 $-\pi<\arg a<\pi$；第二分支为 $\pi<\arg a<3\pi$.

取第一分支时，有

$$\mathrm{Re}\,z=\sqrt{a},\ \mathrm{Im}\,z=0,\ |z|=\sqrt{a},\ \arg z=0$$

取第二分支时，有

$$\mathrm{Re}\,z=\sqrt{a},\ \mathrm{Im}\,z=0,\ |z|=\sqrt{a},\ \arg z=2\pi$$

若 $a<0$，即 z 在负实轴上，此时作割线为正实轴.

第一分支为 $0<\arg a<2\pi$，第二分支为 $2\pi<\arg a<4\pi$.

取第一分支时，有

$$\mathrm{Re}\,z=0,\ \mathrm{Im}\,z=\sqrt{-a},\ |z|=\sqrt{-a},\ \arg z=\frac{\pi}{2}$$

取第二分支时，有

$$\mathrm{Re}\,z=0,\ \mathrm{Im}\,z=-\sqrt{-a},\ |z|=\sqrt{-a},\ \arg z=\frac{3\pi}{2}$$

讨论三　当 $a=0$，　$b\neq 0$ 时，仍然是个二值问题，有

$$z=\sqrt{\mathrm{i}b}=\left(b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$$

若 $b>0$，即 $\mathrm{i}b$ 在正虚轴上，我们在正实轴上作割线，第一个分支取 $0<\arg(\mathrm{i}b)<2\pi$，第二个分支取 $2\pi<\arg(\mathrm{i}b)<4\pi$.

取第一分支时，有

$$\mathrm{Re}z=\frac{\sqrt{2b}}{2},\ \mathrm{Im}z=\frac{\sqrt{2b}}{2},\ |z|=\sqrt{b},\ \arg z=\frac{\pi}{4}$$

取第二分支时，有

$$\mathrm{Re}z=-\frac{\sqrt{2b}}{2},\ \mathrm{Im}z=-\frac{\sqrt{2b}}{2},\ |z|=\sqrt{b},\ \arg z=\frac{3\pi}{4}$$

若 $b<0$，即 $\mathrm{i}b=-\mathrm{i}(-b)$ 在负虚轴上，我们在正实轴上作割线.

第一个分支取 $0<\arg(\mathrm{i}b)<2\pi$，第二个分支取 $2\pi<\arg(\mathrm{i}b)<4\pi$.

取第一分支时，有

$$\mathrm{Re}z=-\frac{\sqrt{-2b}}{2},\ \mathrm{Im}z=\frac{\sqrt{-2b}}{2},\ |z|=\sqrt{-b},\ \arg z=\frac{3\pi}{4}$$

取第二分支时，有

$$\mathrm{Re}z=\frac{\sqrt{-2b}}{2},\ \mathrm{Im}z=-\frac{\sqrt{-2b}}{2},\ |z|=\sqrt{-b},\ \arg z=\frac{7\pi}{4}$$

4.2　写出下列复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$、虚部 $v(x,y)$、模 $|f(z)|$ 和辐角 $\arg f(z)$.

(1) e^z；　(2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$；　(3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin x}$，$x\in\mathbf{R}$；

(4) z^3；　(5) $\sqrt{\mathrm{i}+\mathrm{i}2x\sqrt{x^2-1}}$，$x\in\mathbf{R}$.

解　(1)

$$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

$$\mathrm{Re}w=\mathrm{e}^x\cos y,\quad \mathrm{Im}w=\mathrm{e}^x\sin y$$

$$|w|=\mathrm{e}^x,\quad \arg w=y$$

(2)

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y}=\mathrm{e}^{-y}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$$

$$\mathrm{Re}w=\mathrm{e}^{-y}\cos x,\quad \mathrm{Im}w=\mathrm{e}^{-y}\sin x$$

$$|w|=\mathrm{e}^{-y},\quad \arg w=x$$

(3)

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin x}=\cos(\sin x)+\mathrm{i}\sin(\sin x)$$

$$\mathrm{Re}w=\cos(\sin x),\quad \mathrm{Im}w=\sin(\sin x)$$

$$|w|=1,\quad \arg w=\sin x$$

(4)

$$w=z^3=(x+\mathrm{i}y)^3=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$$

$$\mathrm{Re}w=x^3-3xy^2,\quad \mathrm{Im}w=3x^2y-y^3$$

$$|w|=|z|^3=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

或

$$|w|=[(x^3-3xy^2)^2+(3x^2y-y^3)^2]^{\frac{1}{2}}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\arg w=3\arctan\frac{y}{x}$$

或

$$\arg w=\arctan\frac{3x^2y-y^3}{x^3-3xy^2}$$

(5)

$$w=\sqrt{\mathrm{i}+\mathrm{i}2x\sqrt{x^2-1}}$$

有

$$w=\sqrt{\mathrm{i}}\cdot\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}$$

讨论一　当$|x|=1$或$x=0$时，有

$$w=\sqrt{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\quad k=0,1$$

这是二值问题，有

$$w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{Re}\,w_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{Im}\,w_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ |w_1|=1,\ \arg w_1=\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Re}\,w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{Im}\,w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ |w_2|=1,\ \arg w_2=\frac{5\pi}{4}$$

讨论二　当$x>1$时，由上面的讨论，有

$$w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\mathrm{Re}\,w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}},\quad \mathrm{Im}\,w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$|w_1|=\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}},\quad \arg w_1=\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Re} w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}},\quad \operatorname{Im} w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$|w_2|=\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}},\quad \arg w_2=\frac{5\pi}{4}$$

讨论三　当 $x<-1$ 时，有

$$w=\sqrt{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{i}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1},\quad k=0,1$$

则

$$w_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1}$$

$$w_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1}$$

$$\operatorname{Re} w_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1},\quad \operatorname{Im} w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1}$$

$$|w_1|=\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1},\quad \arg w_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{Re} w_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1},\quad \operatorname{Im} w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1}$$

$$|w_2|=\sqrt{-2x\sqrt{x^2-1}-1},\quad \arg w_2=\frac{7\pi}{4}$$

讨论四　当 $0<x<1$ 时，有

$$w=\sqrt{\mathrm{i}+\mathrm{i}2x\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\mathrm{i}-2x\sqrt{1-x^2}}$$

令 $f=-2x\sqrt{1-x^2}+\mathrm{i}$，有

$$f=-2x\sqrt{1-x^2}+\mathrm{i}=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg f+2k\pi)}$$

$$=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)+2k\pi\right)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

可得

$$w=\sqrt{f}=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)+k\pi\right)},\quad k=0,1$$

则

$$w_1=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

$$w_2=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi\right)}$$

$$\mathrm{Re}\,w_1=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$\mathrm{Im}\,w_1=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$|w_1|=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}},\ \arg w_1=\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\mathrm{Re}\,w_2=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi\right)$$

$$=-\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$\mathrm{Im}\,w_2=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi\right)$$

$$=-\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$|w_2|=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}},\quad \arg w_2=\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi$$

讨论五　当$-1<x<0$时，有

$$w=\sqrt{\mathrm{i}+\mathrm{i}2x\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\mathrm{i}+2|x|\sqrt{1-x^2}}$$

令$f=2|x|\sqrt{1-x^2}+\mathrm{i}$，有

$$w=\sqrt{f}=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)+k\pi\right)},\quad k=0,1$$

则

$$w_1=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

$$w_2=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi\right)}$$

$$\operatorname{Re} w_1=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$\operatorname{Im} w_1=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$|w_1|=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\arg w_1=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\operatorname{Re} w_2=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi\right)$$

$$=-\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$\operatorname{Im} w_2=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}+\pi\right)$$

$$=-\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{-1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$|w_2|=\left[4x^2\left(1-x^2\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\arg w_2=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-x^2}}\right)+\pi$$

4.3　求下列方程的解，并把解在复平面上用图形表示出来，说明它们的几何意义.

(1) $|z|=1$；　(2) $|z|<1$；

(3) $|z|\geqslant 1$；　(4) $1<|z|<2$；

(5) $|z+\mathrm{i}|\leqslant|z-\mathrm{i}|$；　(6) $|z-a|=|z-b|$，a, b 为复平面上的点；

(7) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$；　　(8) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{2}$；

(9) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$；

(10) $\sin z=0$；　　(11) $\cos z=0$；

(12) $\mathrm{sh}z=0$；　　(13) $\mathrm{ch}z=0$.

解　(作图略)

(1)

$$|z|=1，\text{单位圆周上}$$

(2)

$$|z|<1，\text{单位圆内的区域(不包括圆周)}$$

(3)

$$|z|\geqslant 1，\text{单位圆外的区域(包括圆周)}$$

(4)

$1<|z|<2$，半径分别为 1 和 2 的圆周所围成的圆环内部(不包括两圆周)

(5)

$$|z+\mathrm{i}|\leqslant|z-\mathrm{i}|$$

其意义为 z 到 $-\mathrm{i}$ 的距离小于等于 z 到 i 的距离，即含实轴的下半复平面，具体解如下.

由 $z=x+\mathrm{i}y$，有

$$|z+\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+(y+1)^2},\quad |z-\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

则

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}\leqslant\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

即可得

$$2y\leqslant -2y \quad\Rightarrow\quad y\leqslant 0$$

(6)

$$|z-a|=|z-b|$$

表示 z 与 a,b 两点的距离相同，即此式为 a 点到 b 点连接线段 ab 的中垂线.

(7)

$$0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$$

表示以 $z=1$ 为顶点、辐角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的射线与从 $z=1$ 点作平行于 x 轴的正向射线所夹的

扇形部分(不包含两条射线).

(8) 由于$\frac{1}{z}=\frac{z^*}{zz^*}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$，故$\mathrm{Re}\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}$，据题意$\mathrm{Re}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$，有

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad(x-1)^2+y^2=1$$

表示以实轴上$x=1$点为圆心，以1为半径的圆周.

(9)

法一　设$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\&=2\left(x_1^2+y_1^2\right)+2\left(x_2^2+y_2^2\right)\\&=2|z_1|^2+2|z_2|^2\end{aligned}$$

法二

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\left(z_1^*+z_2^*\right)=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1^*z_2+z_2^*z_1$$

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\left(z_1^*-z_2^*\right)=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1^*z_2-z_2^*z_1$$

两式相加，得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

若将z_1和z_2用复平面上的两个矢量表示，则$|z_1+z_2|$和$|z_1-z_2|$分别表示由z_1和z_2两个矢量构成的平行四边形的两条对角线. 上式表示平行四边形对角线的平方和等于四边平方的和.

这也是用复变函数证明平面几何定理的基本方法之一.

(10)

$$\begin{aligned}\sin z&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}\right)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-y}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)-\mathrm{e}^{y}(\cos x-\mathrm{i}\sin x)\right]\end{aligned}$$

据题意$\sin z=0$，由上式可知，要求$y=0$，否则无解. 即可得

$$\sin x=0$$

即

$$x=k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其图像是在实轴上$x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$的点.

(11)

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}\right)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-y}\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)+\mathrm{e}^{y}\left(\cos x-\mathrm{i}\sin x\right)\right]$$

据题意 $\cos z=0$，由上式可知，要求 $y=0$，即可得

$$\cos x=0$$

即

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其图像是在实轴上 $x=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi,\cdots$ 的点.

(12)

$$\mathrm{shz}=\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x}\left(\cos y+\mathrm{i}\sin y\right)-\mathrm{e}^{-x}\left(\cos y-\mathrm{i}\sin y\right)\right]$$

据题意 $\mathrm{shz}=0$，由上式可知，要求 $x=0$，否则无解. 即可得

$$\sin y=0$$

即

$$y=k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其图像为在虚轴上 $y=0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$ 的点.

注： 此题也可以利用关系 $\mathrm{shz}=-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$，由(10)题的结果直接得到.

(13)

$$\mathrm{chz}=\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x}\left(\cos y+\mathrm{i}\sin y\right)+\mathrm{e}^{-x}\left(\cos y-\mathrm{i}\sin y\right)\right]$$

据题意 $\mathrm{ch}z=0$，由上式可知，要求 $x=0$，否则无解. 即可得

$$\cos y=0$$

即

$$y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其图像为在虚轴上 $y=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2},\cdots$ 的点.

注： 此题也可以利用关系 $\cosh z=\cos\mathrm{i}z$，由(11)题的结果直接得到.

4.4 试证明：

(1) $|\sin z|\geqslant\sin x$；　　(2) $|\cos z|\geqslant\cos x$.

证　(1)

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\sin x-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}\right)\cos x$$

由复变函数 $w=u+\mathrm{i}v$，$|w|=\sqrt{|u|^2+|v|^2}$，有 $|w|\geqslant|u|$，$|w|\geqslant|v|$，等号仅在 $v=0$ 或 $u=0$ 时成立. 则有

$$|\sin z|\geqslant\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\sin x\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\right|\cdot|\sin x|$$

由于

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y}\right)^2\geqslant 0\Rightarrow\mathrm{e}^{-y}-2+\mathrm{e}^{y}\geqslant 0\Rightarrow\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\geqslant 2$$

故 $\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\right|\geqslant 1$，等号仅在 $y=0$ 时成立.

故 $|\sin z|\geqslant|\sin x|\geqslant\sin x$，命题得证.

(2) 与(1)题类似，由

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\cos x+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}\right)\sin x$$

有

$$|\cos z|\geqslant\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\cos x\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\right|\cdot|\cos x|$$

由 $\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}\right)\right|\geqslant 1$，等号仅在 $y=0$ 时成立.

故 $|\cos z|\geqslant|\cos z|\geqslant\cos x$，命题得证.

4.5　对于在实变量 x 中成立的关系式

$$\sin\left(x_1+x_2\right)=\sin x_1\cos x_2+\sin x_2\cos x_1$$

请证明这一关系式在复变量的情况下也成立，即

$$\sin\left(z_1+z_2\right)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$$

证　由定义

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\quad\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

有

$$\sin z_1 \cdot \cos z_2 = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} + \frac{e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)}}{4i}$$

$$\sin z_2 \cdot \cos z_1 = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} + \frac{e^{i(z_2-z_1)} - e^{i(z_1-z_2)}}{4i}$$

而

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$

可得

$$\sin z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_2 \cdot \cos z_1 = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1+z_2)$$

4.6　对下列复变函数作出黎曼面的示意图，并指出函数的枝点及其阶数，同时说明你所作的黎曼面的割线的取法.

(1) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$；　　(2) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$；

(3) $\ln(z-a)$；　　(4) $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$.

其中，a,b,c 为互不相等的复常数.

解　略(要作图).

第五章　解 析 函 数

内 容 提 要

一、复变函数的导数

1. 复变函数的连续性

复变函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域内有定义，当自变量 z 以任何路径趋于点 z_0 时，有

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在点 z_0 连续. 如果 $f(z)$ 在区域 Ω 内所有的点都连续，则称 $f(z)$ 在区域 Ω 内连续.

注： 点 z_0 的邻域是指在复平面上以点 z_0 为圆心、以 δ 为半径的一个开圆.

*连续性的定义以及导数的概念可以用“ε-δ”语言来表述(从略).

2. 复变函数的导数

1) 导数的定义

设 z_0 是复变函数 $f(z)$ 的定义域 Ω 内的一点，当 z 以任意路径趋于 z_0，即 $\Delta z=z-z_0$ 以任意方式趋于零时，若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在点 z_0 可导. $f(z)$ 在点 z_0 的导数记为 $f'(z_0)$，有

$$f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

2) 复变函数在定义域内某一点可导的柯西-黎曼(Cauchy-Riemann，简称 C-R)条件

若复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在某一点 z 可导，则在点 z 必须满足 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件只是 $f(z)$ 在某一点 z 可导的必要条件，非充分条件.

若 $f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$，则 C-R 条件的极坐标形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases}$$

二、复变函数的解析性

1. 复变函数解析性的定义

如果复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内的每一点都可导，我们称 $f(z)$ 在点 z_0 解析.

如果复变函数 $f(z)$ 在其定义域 Ω 内的每一点都可导，我们称 $f(z)$ 在 Ω 内解析，也称 $f(z)$ 在 Ω 内为全纯的.

2. C-R 条件

如果 $f(z)$ 在 Ω 内解析，则在 Ω 内 $f(z)$ 满足 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

这只是 $f(z)$ 在 Ω 内解析的必要条件，非充分条件.

从 C-R 条件可以看出，一个解析函数的实部和虚部并非独立的，它们以 C-R 条件相互依存.

注意： 对于解析函数 $f=u+\mathrm{i}v$，由于 C-R 条件对于 u 和 v 是不对称的，对于同样的 u 和 v，则在一般情况下 $f_1=v+\mathrm{i}u$ 就不是解析函数，只有 $f_2=v-\mathrm{i}u$ 或 $f_3=-v+\mathrm{i}u$ 才是解析函数.

3. 复变函数 $f(z)$ 在 Ω 内解析的充分且必要的条件

(1) 在 Ω 内 $f(z)$ 满足 C-R 条件.

(2) 在 Ω 内 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可微.

4. 解析函数实部或虚部判据

解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部 u 和虚部 v 分别满足拉普拉斯方程，都是调和函数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

此性质可作为对一个二元实函数 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$ 能否构成解析函数的实部或虚部的判据.

5. 复势

在数学上把满足拉普拉斯方程的函数称为势场. 对于解析函数 $f=u+\mathrm{i}v$，其实部 u 和虚部 v 都满足拉普拉斯方程，而且以 C-R 条件相互关联. 同时由 C-R 条件可得出，由 $u(x,y)=C_1$（C_1 为常数）得到的曲线族与由 $v(x,y)=C_2$（C_2 为常数）得到的曲线族是两组正交的曲线族. 类比于平面静电场，等电场通量的曲线族与等电势的曲线族是相互正交的两组曲线族. 把电场通量函数作为 u，把电势函数作为 v，则 $f=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数. 因此我们把解析函数称为复势.

如果我们只知道一个解析函数的实部 $u(x,y)$（或者虚部 $v(x,y)$），就可以由 C-R 条件求出该解析函数的虚部 $v(x,y)$（或者实部 $u(x,y)$），就能够求出该解析函数，即求出复势，至多相差一个复常数. 如果已知条件中给出该复势在某点的值，那么就能定出复常数的值，从而完全确定该复势，即该解析函数.

6. 解析函数变换(亦称为共形变换或保角变换)

解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=w$，是把复平面 C 中 f 的定义域 Ω 映射到值域的复平面 W 的值域的区域 D 中，即

$$f(z):z\to w,\quad z\in\Omega\subset C,\quad w\in D\subset W$$

$$f(z):z_0\mapsto w_0,\quad z_0\in\Omega,\quad w_0\in D$$

这种映射 f 可以看成把复平面 C 的 Ω 区域中的几何图形映射到另一个复平面 W 的区域 D 中的几何图形，因此我们可以称解析函数 $f(z)$ 为几何图形的变换.

(1) 两种几何图形的解析变换.

① 过 C 平面内的点 z_0（$z_0\in\Omega$）的任意两条相交的曲线 l_1 和 l_2 在点 z_0 的切线的辐角分别是 $\arg l_1$ 和 $\arg l_2$，曲线 l_1 和 l_2 的夹角为 $\arg l_1-\arg l_2$；通过解析函数 $f(z)$ 的映射，$f:z_0\mapsto f(z_0)$，$f(z_0)\in D\subset W$，并且把 l_1 和 l_2 映射到 W 平面中的 D 区域内的两条过 $f(z_0)$ 的曲线 c_1 和 c_2，曲线 c_1 和 c_2 的夹角为 $\arg c_1-\arg c_2$，则有

$$\arg l_1-\arg l_2=\arg c_1-\arg c_2$$

即在解析变换下，两条相交的曲线的夹角保持不变，故把解析函数变换称为保角变换.

② 在 C 平面区域 Ω 内过点 z_0 的任意一个小增量 Δz，其模长为 $|\Delta z|$，在解析变换下，$f(z):\Delta z\to\Delta w$，$\Delta w\in D\subset W$，Δw 过点 $f(z_0)$，模长为 $|\Delta w|$，则有

$$|\Delta w|=|f'(z_0)|\cdot|\Delta z|$$

即模长的变换总是乘以定值 $|f'(z_0)|$，故称共形变换.

(2) C 平面和 W 平面中的拉普拉斯算符 ∇^2，在解析函数变换下有

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left|f'(z)\right|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),\quad \left|f'(z)\right|\neq 0$$

即在 C 平面上的拉普拉斯方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(x,y)=0$$

在解析函数变换下，仍然为 W 平面中的拉普拉斯方程

$$\left|f'(z)\right|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\varphi\left[x(u,v),y(u,v)\right]=0,\quad \left|f'(z)\right|\neq 0$$

习 题 详 解

5.1 请说明下面复变函数在复平面上的哪些点或区域上可导，在复平面上的哪些区域上解析.

(1) $f(z)=\mathrm{Re}\,z$；　　(2) $f(z)=z^*$；

(3) $f(z)=|z|$；　　(4) $f(z)=\mathrm{e}^z$；

(5) $f(z)=z^2$；　　(6) $f(z)=\left(x^2-y^2-x\right)+\mathrm{i}\left(2xy-y^2\right)$；

(7) $f(z)=x^3-y^3-\mathrm{i}2x^2y$.

解　(1) 由 $z=x+\mathrm{i}y$，有 $f(z)=\mathrm{Re}z=x$.

由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

即 $f(z)=\mathrm{Re}z$ 不满足 C-R 条件，此函数在复平面上既不可导也不解析.

(2) $f(z)=z^*=x-\mathrm{i}y$，由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(-y)}{\partial y}=-1$$

即 $f(z)=z^*$ 不满足 C-R 条件，此函数在复平面上既不可导也不解析.

(3) **法一**

$$f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

当 $z\neq 0$ 时，由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

此函数不满足 C-R 条件，故此函数在 $z\neq 0$ 时，既不可导也不解析.

当 $z=0$ 时，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

考虑沿 x 轴的两边趋于 $z=0$ 点，此时 $\Delta y=0$，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases}$$

即此极限不唯一，函数 $f(z)=|z|$ 在 $z=0$ 点既不可导也不解析.

故函数 $f(z)=|z|$ 在复平面上不解析.

法二　对任何 $z\neq 0$，有

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{|z+\Delta z|-|z|}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\cdot(z+\Delta z)^*-z\cdot z^*}{\Delta z\cdot(|z+\Delta z|+|z|)}$$

令 $\Delta z=\Delta\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\varphi}\to 0\,(\Delta\rho\to 0,-\pi<\varphi\leqslant\pi)$，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{z^*+z\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Delta\varphi}+\Delta\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\left|z+\Delta\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right|+|z|}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{z^*+z\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Delta\varphi}}{2|z|}$$

此值随角度 φ 的不同而异，故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ 不存在，即函数 $f(z)=|z|$ 在复平面上既不可导也不解析.

(4)

$$f(z)=\mathrm{e}^{\bar{z}}=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$$

由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

此函数的实部和虚部都是可微函数，且满足 C-R 条件，故它在复平面上解析.

(5)

$$f(z)=z^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy$$

由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

此函数的实部和虚部都是可微函数，且满足 C-R 条件，故它在复平面上解析.

(6)

$$f(z)=\left(x^2-y^2-x\right)+\mathrm{i}\left(2xy-y^2\right)$$

由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x-2y$$

要求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，故有 $y=\dfrac{1}{2}$.

再看 C-R 条件的另一个方程

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=-2y\text{，满足}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即此函数仅在 $y=\dfrac{1}{2}$ 的直线(平行于 x 轴的直线)上可导，但此函数在复平面上处处不解析.

(7)

$$f(z)=x^3-y^3-\mathrm{i}2x^2y$$

由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2x^2\text{，要求}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\text{，有 }x=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2,\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=4xy\text{，要求}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\text{，有 }y=0$$

即此函数仅在 $z=0$ 点可导，在复平面上处处不解析.

5.2　若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 和 $f^*(z)=u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)$ 都为解析函数，请说明 $f(z)$ 的函数形式.

解　由 C-R 条件，对于 $f(z)$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

对于 $f^*(z)$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

综上两式，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}$$

即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

故 u,v 为常数，即 $f(z)$ 为常数，$f(z)=c$.

5.3　若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数，请证明 $f^*\left(z^*\right)$ 也是解析函数.

解　因为 $z=x+\mathrm{i}y, z^*=x-\mathrm{i}y$，有

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y),\quad f\left(z^*\right)=u(x,-y)+\mathrm{i}v(x,-y)$$

由于 $f(z)$ 为解析函数，则 u_x,u_y,v_x,v_y 连续且满足 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

而

$$f^*(z^*)=u(x,-y)-\mathrm{i}v(x,-y)$$

由 C-R 条件有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial(-y)}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial(-y)}\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

故函数 $f^*\left(z^*\right)$ 与解析函数 $f(z)$ 满足相同的 C-R 条件，并且其实部及虚部的偏导数满足相同的连续性条件，即 $f^*\left(z^*\right)$ 为解析函数.

5.4　请推导极坐标 $f(\rho,\varphi)$ 中解析函数

$$f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$$

所满足的 C-R 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases}$$

证　法一　由 $f(z)$ 为解析函数，这一解析性质与坐标系的选择是无关的，其在直角坐标系下的表达式和在极坐标系下的表达式应该是等价的. 我们可从直角坐标系的 C-R 条件来导出极坐标系的 C-R 条件.

由直角坐标系与极坐标系的关系

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

有

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial \rho}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{y\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

因此，由直角坐标系下的 C-R 条件，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}\tag{1}$$

同理

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}=-\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}\tag{2}$$

由 $(1)\times\cos\varphi-(2)\times\sin\varphi$，可得

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\tag{3}$$

由 $(1)\times\sin\varphi-(2)\times\cos\varphi$，可得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}\tag{4}$$

(3)、(4)两式正是极坐标系下的 C-R 条件，证毕.

法二　因为

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \varphi}&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}(-\rho\sin\varphi)+\frac{\partial v}{\partial y}(\rho\cos\varphi)\\&=\frac{\partial u}{\partial y}\rho\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\varphi\end{aligned} \tag{6}$$

其中用到C-R 条件$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 比较(5)、(6)式得

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

同理可得

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \varphi}&=-\rho\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}\\&=-\rho\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial y}-\rho\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned} \tag{8}$$

比较(7)、(8)式得

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

证毕.

5.5　已知解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部$u(x,y)$或虚部$v(x,y)$，求此解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$.

(1) $v(x,y)=xy$;　　(2) $v(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

(3) $u(x,y)=\mathrm{e}^{-y}\sin x$;　　(4) $u(x,y)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$.

解　(1) 由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=x\quad\Rightarrow\quad u=\int x\mathrm{d}x+\varphi(y)=\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}=-y\quad\Rightarrow\quad\varphi(y)=-\int y\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}y^2+c$$

故

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)+c$$

则

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)+\mathrm{i}xy+c=\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}y)^2+c=\frac{1}{2}z^2+c$$

(2) **法一**　由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2\right)-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

有

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}+c\right)$$

即

$$u(x,y)=\frac{-x}{x^2+y^2}+c$$

故可得此解析函数为

$$f(z)=\frac{-x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}+c=\frac{-(x-\mathrm{i}y)}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}+c=-\frac{1}{z}+c$$

法二　由极坐标的 C-R 条件

$$v=\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\rho}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{1}{\rho^2}\cos\varphi,\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho^2}\sin\varphi$$

有

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\rho^2}\cos\varphi\mathrm{d}\rho+\frac{1}{\rho^2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\left(\frac{-\cos\varphi}{\rho}+c\right)$$

即

$$u=\frac{-\cos\varphi}{\rho}+c$$

故可得此解析函数为

$$f(z)=\frac{-\cos\varphi}{\rho}+\mathrm{i}\frac{1}{\rho}\sin\varphi+c=\frac{-x}{\rho^2}+\mathrm{i}\frac{y}{\rho^2}+c=\frac{-x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}+c=-\frac{1}{z}+c$$

(3) 由 C-R 条件

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{-y}\cos x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{-y}\sin x$$

有

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-y}\sin x\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-y}\cos x\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-y}\cos x+c\right)$$

即

$$v(x,y)=-\mathrm{e}^{-y}\cos x+c$$

故可得此解析函数为

$$f(z)=\mathrm{e}^{-y}\sin x-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-y}\cos x+\mathrm{i}c=-\mathrm{e}^{-y}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-y}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\mathrm{i}c$$

$$=-\mathrm{e}^{-y}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]+\mathrm{i}c=-\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}+\mathrm{i}c=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{i}c$$

$$=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}+\mathrm{i}c=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{i}c$$

(4) 由 C-R 条件

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{ch}\,y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\cos x\,\mathrm{sh}\,y$$

有

$$\mathrm{d}v=-\cos x\,\mathrm{sh}\,y\mathrm{d}x-\sin x\,\mathrm{ch}\,y\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(-\sin x\,\mathrm{sh}\,y+c\right)$$

即

$$v(x,y)=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y+c$$

故有

$$f(z)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}\,y+\mathrm{i}c$$

将下列函数关系：

$$\sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right),\quad \cos x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right),$$

$$\mathrm{sh}\,x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right),\quad \mathrm{ch}\,x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)$$

代入 $f(z)$，故可得此解析函数为

$$f(z)=\cos x\cos(\mathrm{i}y)-\sin x\sin(\mathrm{i}y)+\mathrm{i}c=\cos(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}c=\cos z+\mathrm{i}c$$

5.6　在平面极坐标系($z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$)中，已知解析函数$f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$的实部$u(\rho,\varphi)=\varphi$，且$f(1)=0$，求此解析函数.

解　由极坐标系中的C-R方程

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial\rho}$$

有

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{1}{\rho}$$

则

$$\mathrm{d}v=-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho=\mathrm{d}(-\ln\rho+c)\quad\Rightarrow\quad v=-\ln\rho+c$$

可得

$$f(z)=\varphi-\mathrm{i}\ln\rho+\mathrm{i}c=-\mathrm{i}(\ln\rho+\mathrm{i}\varphi)+\mathrm{i}c=-\mathrm{i}\ln z+\mathrm{i}c$$

由$f(1)=0$，即$f(\rho=1,\varphi=0)=0$，可得上式的$c=0$.

故可得此解析函数为

$$f(z)=-\mathrm{i}\ln z$$

5.7　在直角坐标系中，已知解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部和虚部之和为$u(x,y)+v(x,y)=-(x+y)\left(x^2-4xy+y^2\right)$，求此解析函数.

解　**法一**　已知函数为$h(x,y)$，且$u(x,y)+v(x,y)=h(x,y)$，则

$$u(x,y)=h(x,y)-v(x,y)$$

由C-R条件，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial x}\tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad-\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial y}\tag{2}$$

由(1) + (2)和(1) − (2)有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\right),\quad\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

则

$$\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\tag{3}$$

就可求出$v(x,y)$，进而可得$u(x,y)$.

此题中

$$h(x,y)=-(x+y)\left(x^2-4xy+y^2\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-3x^2+6xy+3y^2,\quad \frac{\partial h}{\partial y}=3x^2+6xy-3y^2$$

得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=6xy,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-3x^2+3y^2 \tag{4}$$

所以由(4)式的第一式，可得

$$v=\int 6xy\mathrm{d}y+\varphi(x)=3xy^2+\varphi(x)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=3y^2+\varphi'(x)$$

再由(4)式的第二式，可得

$$\varphi'(x)=-3x^2\quad\Rightarrow\quad\varphi(x)=-x^3+c$$

所以有

$$v(x,y)=-x^3+3xy^2+c \tag{5}$$

$$\begin{aligned}u(x,y)&=-(x+y)\left(x^2-4xy+y^2\right)-\left(-x^3+3xy^2\right)\\&=3x^2y-y^3\end{aligned} \tag{6}$$

最后得此解析函数为

$$f(z)=\left(3x^2y-y^3\right)-\mathrm{i}\left(x^3-3xy^2\right)+\mathrm{i}c=-\mathrm{i}z^3+\mathrm{i}c \tag{7}$$

法二　由已知条件，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}&=-3x^2+6xy+3y^2\\\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}&=3x^2+6xy-3y^2\end{aligned} \tag{8}$$

由 C-R 条件$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=-3x^2+6xy+3y^2\\\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}&=3x^2+6xy-3y^2\end{aligned} \tag{9}$$

由(9)式中的两式相加和相减，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2 \tag{10}$$

由 C-R 条件有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=6xy,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-3x^2+3y^2 \tag{11}$$

所以有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=6xy\mathrm{d}x+\left(3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}\left(3x^2y-y^3+c_1\right)\end{aligned} \tag{12}$$

可得

$$u(x,y)=3x^2y-y^3+c_1 \tag{13}$$

同理，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v&=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(-3x^2+3y^2\right)\mathrm{d}x+6xy\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}\left(-x^3+3xy^2+c_2\right)\end{aligned} \tag{14}$$

可得

$$v(x,y)=-x^3+3xy^2+c_2 \tag{15}$$

故得此解析函数为

$$f(z)=3x^2y-y^3+\mathrm{i}\left(-x^3+3xy^2\right)+c=-\mathrm{i}z^3+c,\quad c=c_1+\mathrm{i}c_2 \tag{16}$$

5.8　有两条平行相距为 $2a$ 且均匀带电的细金属线，每单位长度所带的电荷分别是 $+q$ 和 $-q$，求与此两金属线垂直的平面静电场的复势、电力场线和等势线.

解　设导线的方向为 z 轴的方向，所有垂直于 z 轴的平面上的电场分布都相同. 可任选一个垂直于 z 轴的 x-y 平面，其 x-y 平面构成一个复平面. 设金属线与复平面交点在 x 轴上，分别为带电密度 $+q$ 线在 $(a,0)$ 点、带电密度 $-q$ 线在 $(-a,0)$ 点. 则复平面上任一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 与 $(a,0)$ 点的距离为 $r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$，与 $(-a,0)$ 点的距离为 $r_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$.

复平面上的复势为 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其中，$v(x,y)$ 为电场 $\boldsymbol{E}$ 的电势，$u(x,y)$ 为电场 $\boldsymbol{E}$ 的电场线函数. 取无穷远点为电势零点，由对称性和电势的叠加原理可知，在坐标原点 $(0,0)$ 处的电势 $v(0,0)=0$.

由静电学，可知 z 点的电势为

$$v(x,y)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r_1}+\frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r_2}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[(x+a)^2+y^2\right]-\ln\left[(x-a)^2+y^2\right]\right\} \tag{1}$$

由 C-R 条件，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2y}{(x-a)^2+y^2}-\frac{2y}{(x+a)^2+y^2}\right] \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2}-\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right] \tag{3}$$

得

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2y}{(x-a)^2+y^2}-\frac{2y}{(x+a)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2}-\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y \tag{4}$$

由于对 $\mathrm{d}u$ 的积分与路径无关，我们选取特殊的(容易积分的)路径：$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$，注意到$(0,0)$点对(4)式中的函数是非奇异的，因此有

$$u(x,y)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(0,0)}^{(x,0)}\left[\frac{2y}{(x-a)^2+y^2}-\frac{2y}{(x+a)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x$$
$$+\left[\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2}-\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$$
$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(x,0)}^{(x,y)}\left[\frac{2y}{(x-a)^2+y^2}-\frac{2y}{(x+a)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x \tag{5}$$
$$+\left[\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2}-\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$$

因为在$(0,0)\to(x,0)$的积分中，$y=0$，$\mathrm{d}y=0$，故(5)式第一个积分为零.

在$(x,0)\to(x,y)$的积分中$\mathrm{d}x=0$，故

$$u(x,y)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^y\left[\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2}-\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\arctan\frac{y}{x+a}-\arctan\frac{y}{x-a}\right)+c \tag{6}$$

设

$$\alpha=\arctan\frac{y}{x+a},\quad \tan\alpha=\frac{y}{x+a};\quad \beta=\arctan\frac{y}{x-a},\quad \tan\beta=\frac{y}{x-a}$$

由

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{y}{x+a}-\dfrac{y}{x-a}}{1+\dfrac{y}{x+a}\cdot\dfrac{y}{x-a}}=\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

有

$$\alpha-\beta=\arctan\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

所以(6)式可化为

$$u(x,y)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\arctan\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}+c \tag{7}$$

故由(1)和(7)式可得此电场的复势为

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\\&=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\arctan\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}+\mathrm{i}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}+c\end{aligned} \tag{8}$$

由于原点电势为零，可得$c=0$，故此电场的复势为

$$f(z)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\arctan\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}+\mathrm{i}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \tag{9}$$

由(1)式，此电场的电势为

$$v(x,y)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \tag{10}$$

故电场强度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-\nabla v=-\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{e}_x-\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{e}_y\\&=\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_x-\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_y=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y\end{aligned} \tag{11}$$

所以，由(2)、(3)式可得电场$\boldsymbol{E}$在x轴和y轴的分量分别为

$$E_x=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}-\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right] \tag{12}$$

$$E_y=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{(x+a)^2+y^2}-\frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right] \tag{13}$$

注：此题的电场线和等势线的作图，请读者用计算机作图给出.

***5.9**　试分析以下几种常见的解析函数变换.

(1) 线性变换：$W=f(z)=az+b,\quad a,b\in\mathbf{C},\quad a\neq 0$；

(2) 幂函数变换：$W=f(z)=z^n,\quad n\in\mathbf{Z}$；

(3) 根式变换：$W=f(z)=z^{\frac{1}{n}},\quad n\in\mathbf{Z}$；

(4) 对数变换：$W=f(z)=\ln z$；

(5) 指数变换：$W=f(z)=\mathrm{e}^z$；

(6) 分式变换：$W=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbf{R},\quad ad-bc\neq 0$.

解　(1) 线性变换 $f(z)=az+b$，把整个 Z 平面映射到整个 W 平面；把 Z 平面上的区域作相似变换到 W 平面上，即两个平面上的区域形状为相似形，但区域图形的尺寸大小会发生变换，它们距离原点的位置会有转动加上平移.

(2) 幂函数变换 $f(z)=z^n$，把 Z 平面上的顶点在原点、起始为 x 轴正向、张角为 $\theta\left(\theta<\dfrac{2\pi}{n}\right)$ 的扇形区域映射到 W 平面上的顶点在原点、起始为 u 轴正向、张角为 $n\theta$ 的扇形区域.

(3) 根式变换 $f(z)=z^{\frac{1}{n}}$ 要取其主值分支的黎曼面，根式变换是幂函数变换的逆变换，它把 Z 平面上的顶点在原点、起始为 x 轴正向、张角为 $n\theta(n\theta<2\pi)$ 的扇形区域映射到 W 平面上的顶点在原点、起始为 u 轴正向、张角为 θ 的扇形区域.

(4) 对数变换 $f(z)=\ln z$ 取其主值分支的黎曼面：支点为原点，沿 x 轴的正向作割线. 对数变换把 Z 平面上辐角为 $0\to 2\pi$ 的整个区域映射到 W 平面 $v=0$ (即 u 轴)和 $v=2\pi$ (即与 u 轴平行且距离 u 轴为 2π)的直线所围成的长条区域；对数变换把 Z 平面上辐角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的射线映射到 W 平面上平行于 u 轴且距离 u 轴为 θ 的直线.

(5) 指数变换 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 是对数变换的逆变换，它把 Z 平面上 x 轴与 $y=2\pi$ 的直线围成的长条区域映射到 W 平面上辐角为 $0\to 2\pi$ 的整个区域；指数变换把 Z 平面上与 x 轴平行的直线($y=\theta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$)映射到 W 平面上辐角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的射线.

(6) 分式变换 $W=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 比较复杂，要分解成线性变换和倒数变换，

线性变换在(1)式中已说明，下面研究倒数变换：

$$W=f(z)=\frac{1}{z}$$

有

$$W=f(z)=\frac{1}{z}=\frac{z^*}{zz^*}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}=u+\mathrm{i}v$$

当$|z|=R$(R为常数)时，表示以原点为圆心、以R为半径的圆周. 我们现在计算倒数变换把Z平面上的圆周映射到W平面上的图形

$$|W|^2=WW^*=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{R^2}$$

可以看出倒数变换把Z平面上以原点为圆心、以R为半径的圆周映射到W平面上以原点为圆心、以$\frac{1}{R}$为半径的圆周，即通俗说圆周变换成圆周. 同时很容易证明，在Z平面上以原点为圆心、以R为半径的圆周的一对共轭对称点(即o,a,b三点共线，a在圆周内，b在圆周外，且有$|oa|\cdot|ob|=R^2$，则称a,b两点为共轭对称点，简称共轭点)，通过倒数变换，映射到W平面上以原点为圆心、以$\frac{1}{R}$为半径的圆周的一对共轭点.

因此分式变换$W=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，可看成线性变换$az+b$和$\frac{1}{cz+d}$的倒数变换(其中分母上也是先进行一次线性变换)的连续变换.

综上所述，分式变换是把在Z平面上圆周及其共轭点对，映射到W平面上圆周及其共轭点对. 具体的圆周的圆心的位置及圆周的半径由常数a,b,c,d给出，由

$$W=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}}$$

设$\frac{d}{c}=-z_0,\frac{b}{c}=z_1,\frac{a}{c}=w_0,c\neq 0$，上式变为

$$W=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{w_0z+z_1}{z-z_0}=\frac{w_0(z-z_0)+w_0z_0+z_1}{z-z_0}=w_0+\frac{\alpha}{z-z_0}$$

其中，$\alpha=w_0z_0+z_1$. 设$\alpha=|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，即$\alpha$模和辐角都由参数$a,b,c,d$定.

故分式变换是在Z平面上圆心在z_0点的圆周映射到W平面上的圆周且圆心平移了w_0，圆周的图形逆时针转过了φ角，圆周的半径缩放了$|\alpha|$倍.

第六章　复变函数积分

内 容 提 要

一、复变函数的积分

1. 复变函数的积分定义及表达式

复变函数 $f(z)$ 在其定义域中，沿某一有向曲线 c，由 $a\to b$ 作黎曼和，就定义为 $f(z)$ 由 $a\to b$ 沿 c 的复积分，记为

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{n\to\infty\\ |z_j-z_{j-1}|\to 0}}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j-z_{j-1})$$

其中，$\xi_j\in(z_j-z_{j-1})$，等式右边的极限存在且与 ξ_j 的选取无关，此极限值即黎曼和的值，即为 $f(z)$ 由 $a\to b$ 沿 c 的复积分.

由 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，复变函数 $f(z)$ 沿 c 的积分可写成

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_c(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_c(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x)$$

如果积分路线 c 的参数方程为 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，其中，$t_A\leqslant t\leqslant t_B$，则

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_{t_A}^{t_B} f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

2. 复变函数积分的基本性质

(1) $\int_c[f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z=\int_c f(z)\mathrm{d}z\pm\int_c g(z)\mathrm{d}z$.

(2) $\int_c f(z)\mathrm{d}z=-\int_{c^-} f(z)\mathrm{d}z$，其中 c^- 为 c 的反向路径.

(3) 如果 $c=c_1+c_2$，即 c_1、c_2 顺路径方向头尾连接构成路径 c，则有

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_{c_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{c_2} f(z)\mathrm{d}z$$

(4) 积分的模不大于被积表达式模的积分，即

$$\left|\int_c f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_c|f(z)||\mathrm{d}z|$$

二、柯西积分定理

1. 单连通区域的柯西积分定理

在单连通区域 Ω 上的解析函数 $f(z)$，当积分路径 c 为 Ω 内的任意一条闭合曲线时，有

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0$$

单连通区域的柯西积分定理告诉我们，在解析函数 $f(z)$ 的解析区域内，任意两点间对函数 $f(z)$ 的复积分与路径无关.

2. 多连通区域的柯西积分定理

复变函数 $f(z)$ 在具有 k 个内边界 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 的回路 c 的多连通区域上(包含内、外边界)解析，则有

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = \oint_{c_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{c_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{c_k} f(z)\mathrm{d}z$$

注意： 所有的积分回路都是逆时针方向.

三、柯西积分公式

复变函数 $f(z)$ 在闭合回路 c 所包围的闭区域 $\overline{\Omega}$ 上解析，则区域内的任意一点 z_0 的函数值可由如下的柯西积分公式给出：

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

注： 对于多连通区域的单值解析函数 $f(z)$，只要将积分路线 c 理解为该区域的复边界线的正方向，则柯西积分公式仍然成立. 这称为多连通区域柯西积分公式.

柯西积分公式告诉我们：

(1) 解析函数在解析区域内任意一点的值，可以由柯西积分公式的回路积分给出.

(2) 在回路积分中如果被积函数为 $\dfrac{1}{z - z_0}$ 这种奇异的函数，可用复连通区域的柯西积分定理计算以 z_0 为圆心、以 δ 为半径的小圆周的内边界的积分，并给出具体的积分结果. 因此有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_c \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} 1, & z_0 \text{在} c \text{内} \\ 0, & z_0 \text{在} c \text{外} \end{cases}$$

(3) 由柯西积分公式，可得出一个重要的积分公式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z=\delta_{n1}$$

其中，c 为包含 z_0 的任意一条闭曲线.

四、解析函数导数的积分表达式

由柯西积分公式，我们得到解析函数导数的积分表达式：

若复变函数 $f(z)$ 在闭合回路 c 所包围的闭区域 $\overline{\Omega}$ (或者 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析、$\overline{\Omega}$ 上连续)上解析，则 $f(z)$ 在 Ω 内任意阶导数 $f^{(n)}(z)$ 均存在，并且在 $\overline{\Omega}$ 的内点 z 的 n 阶导数为

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}\mathrm{d}\varsigma$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^{n+1}}\mathrm{d}\varsigma$$

上面两个公式对于多连通区域的单值解析函数 $f(z)$ 同样成立. 只要将积分路线 c 理解为该多连通区域的复边界线(即包含内外边界)的正方向(沿此正方向走，区域总在自己的左手边)即可.

解析函数导数的积分表达式告诉我们，在回路积分中如果被积函数存在 $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 这种奇异性，其回路积分仍然存在.

习 题 详 解

6.1　请计算 $f(z)=z^*$ 的回路积分

$$\oint_{|z|=1} z^*\mathrm{d}z$$

所得的结果说明了什么问题?

解　依题意作此积分时，被积的函数值都在单位圆周上，即 $|z|=1$，所以 $z^*=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z=\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$，有

$$\int_{|z|=1} z^*\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}2\pi$$

由柯西积分定理，如果被积函数在积分回路包围的区域内解析，则此回路积

分必定为零. 此积分不为零，这说明 $f(z)=z^*$ 这个函数在 $|z|=1$ 内不是解析函数. 事实上，由解析函数的定义不难看出，函数 $f(z)=z^*$ 在整个复平面上都不解析，即绕任何一个闭合回路对 $f(z)=z^*$ 的积分都不为零.

6.2　请计算 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 的如下回路积分：

(1) $\oint_{c_1}\dfrac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z$，$c_1:|z|=\rho<1$ 的以原点为圆心的圆周.

(2) $\oint_{c_2}\dfrac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z$，$c_2:|z|=\rho>1$ 的以原点为圆心的圆周.

这两个积分的结果说明了什么问题?

解　由于被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)}$ 有两个奇点 $z=1$，$z=-1$，设

$$f(z)=\frac{h(z)}{z^2-1},\quad h(z)=1$$

(1) 在 c_1 内，$f(z)$ 没有奇点，为解析函数，由柯西积分定理可知

$$\oint_{c_1}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=0$$

(2) 在 c_2 内，$f(z)$ 有两个奇点：$z=1,z=-1$，由被积函数的分解，有

$$\oint_{c_2}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\oint_{c_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\oint_{c_2}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$$

由柯西积分公式，由于 $h(z)=1$ 为解析函数，则

$$\oint_{c_2}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i},\quad \oint_{c_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}$$

因此，

$$\oint_{c_2}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\oint_{c_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\oint_{c_2}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}=0$$

此题说明，不能由回路积分是否为零来判断被积函数在回路所包围的区域内是否解析. 这里，还必须要增加条件，即如果被积函数在此区域中连续，并且沿区域内任一回路的积分为零，则此函数必为解析函数；如果被积函数在此区域中不连续，存在奇点，虽然回路积分为零，但此函数在此区域中不是解析函数.

第七章　复变函数的级数展开

内 容 提 要

一、解析函数的泰勒(Taylor)展开

1. 泰勒定理

设函数 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，$z_0 \in \Omega$，以 z_0 为圆心的圆周 c 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可在 c 内展成**泰勒级数**

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

并且此展开式是唯一的. 泰勒级数的展开系数为

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

当 $z_0=0$ 时，$f(z)$ 的泰勒级数又称为麦克劳林(Maclaurin)级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

2. 泰勒级数**收敛半径** R

1) 比值法[达朗贝尔(d'Alembert)判别法]

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

2) 根值法(柯西判别法)

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

3) 奇点法

收敛半径 R 等于展开中心 z_0 到最近一个奇点 z_1 的距离，即 $R=|z_1-z_0|$. 这种

方法在函数的泰勒级数展开时常常使用.

注：在 R 内(不包含以 z_0 为圆心、以 R 为半径的圆周)，解析函数 $f(z)$ 可以展开成泰勒级数.

3. 几个基本的泰勒级数

(1) 对于 $f(z)=\dfrac{1}{1-(z-z_0)}$，当 $|z-z_0|<1$ 时，$f(z)$ 在 z_0 点展开的泰勒级数为

$$f(z)=\frac{1}{1-(z-z_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$$

其收敛半径 $R=1$.

对于 $f(z)=\dfrac{1}{1+(z-z_0)}$，当 $|z-z_0|<1$ 时，$f(z)$ 在 z_0 点的展开式为

$$f(z)=\frac{1}{1+(z-z_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-z_0)^n$$

其收敛半径 $R=1$.

(2) $f(z)=\mathrm{e}^{z-z_0}$ 在除 ∞ 点外的复平面上解析，$f(z)$ 在 z_0 点展开的泰勒级数为

$$f(z)=\mathrm{e}^{z-z_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-z_0)^n$$

其收敛半径 $R=\infty$.

(3) $f(z)=\ln z$ 在 $z_0=1$ 点展开的泰勒级数：

由于函数 $f(z)=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$ 具有多值性问题，$z=0$ 是支点. 由于在 $z_0=1$ 点展开，$z=0$ 是支点，我们取主值的复平面，$-\pi\leqslant\arg z\leqslant\pi$，并从 $z=0$ 沿负实轴至 $-\infty$ 作割线，故在 $|z-1|<1$ 的区域内，$f(z)$ 在 $z_0=1$ 点展开的泰勒级数为

$$f(z)=\ln z=\ln\left[1+(z-1)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

其收敛半径 $R=1$.

4. 泰勒展开的一般求法

(1) 由泰勒展开定义中求系数的积分公式或微分公式直接计算展开系数.

(2) 如果 $f(z)$ 为有理式，可用代数方法，把有理式化为可以直接利用已知的基本泰勒展开式的函数的代数式，将每一个代数项先进行展开，再进行合并计算.

(3) 如果 $f(z)$ 不能直接借用已知的基本泰勒展开式，但可以表示为 $f(z)=$

$C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z)$，或是$f(z)=C\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}g(z)$，或是$g(z)$的更高阶的微商(其中$C$为常数或者是$C(z-z_0)^n$)，且$g(z)$可以借用已知的基本泰勒展开式给出，再通过利用泰勒级数的性质，先进行求导运算再进行求和运算，最后，对级数进行逐项微商即可得到$f(z)$的泰勒展开式.

(4) 如果$f(z)$不能直接借用已知的基本泰勒展开式，但可以表示为$f(z)=C\int_0^z g(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma$(其中$C$为常数或者是$C(z-z_0)^n$)，且$g(\varsigma)$可以借用已知的基本泰勒展开式给出，则可以先把$g(\varsigma)$做级数展开，然后把积分运算拿到求和号里，对级数进行逐项积分而得到$f(z)$的泰勒展开式.

5. 泰勒展开的理论应用

1) 最大模定理

任何解析函数$f(z)$的模$|f(z)|$的最大值 $\max|f(z)|$只能在其解析区域的边界上达到，除非此解析函数$f(z)$为常数.

2) 刘维尔(Liouville)定理

在全复平面(包括∞点)内解析且有界的函数为常数.

6. 泰勒展开在计算中的应用

(1) 泰勒展开在近似计算中通常用来做函数在某点的数量级的估计(对函数的模的数量级的估计).

(2) 基本的泰勒展开式可用来求解其他的级数展开式，例如，求解析函数的**洛朗(Laurent)展开**.

二、解析函数的洛朗展开

1. 复变函数奇点的分类

1) **孤立奇点**和非孤立奇点

若z_0为函数$f(z)$的奇点，而在z_0点的任意小的邻域($0<|z-z_0|<\varepsilon$)内$f(z)$解析，则z_0为函数$f(z)$的孤立奇点.

若z_0为函数$f(z)$的奇点，而在z_0点的任意小的邻域($0<|z-z_0|<\varepsilon$)内还存在除z_0外$f(z)$的其他奇点，则z_0为函数$f(z)$的非孤立奇点.

在本课程内只讨论孤立奇点，而不讨论非孤立奇点.

2) 孤立奇点的分类

极点：z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在正整数 $k(k<\infty)$，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的 k 阶极点.

本性奇点：z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，若不存在正整数 $k(k<\infty)$，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的本性奇点. 即若 z_0 为函数 $f(z)$ 的本性奇点，则 $f(z)$ 具有 $(z-z_0)$ 的无穷负幂次项.

可去奇点：z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 点无定义或无确定的值，我们可重新定义 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，使得 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域中解析，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的可去奇点.

2. 解析函数的洛朗展开

函数 $f(z)$ 在以孤立奇点 z_0 为圆心、内外半径分别为 R_1 和 R_2 的两个圆周 c_1 和 c_2 所包围的环形区域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成**洛朗级数**

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

并且此展开式是唯一的. 展开系数 a_n 为

$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

其中，积分路径 c 是环形区域内任意一条包围 c_1 在内的闭曲线.

(1) 洛朗级数的正幂次 $(n\geqslant 0)$ 部分，称为洛朗级数的**正则部分**.

(2) 洛朗级数的负幂次 $(n<0)$ 部分，称为洛朗级数的**主部**.

(3) 如果在 $|z-z_0|<R_1$ 内，只有 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，且 z_0 是 c_1 的圆心，则洛朗级数的主部反映了 $f(z)$ 在 z_0 点的奇异性，即 z_0 是 $f(z)$ 的 k 阶极点或者本性奇点. 因此我们可以选取 z_0 点的无限小邻域(在此邻域内不包含其他奇点)的洛朗展开来研究 $f(z)$ 在 z_0 点的奇异性.

(4) 如果 z_0 不是 c_1 的圆心；或如果在 $|z-z_0|<R_1$ 内，除 z_0 外还包含了 $f(z)$ 的其他孤立奇点，则洛朗级数就显示出复杂性，它不代表 z_0 点的奇异性.

3. 求解析函数的洛朗展开的一般方法

(1) 由洛朗展开系数 a_n 的积分表达式直接计算.

(2) 利用代换法并借用已知的泰勒展开式展开，这是常用的方法.

(3) 如果 $f(z)$ 不能直接借用已知的基本泰勒展开式，但可以表示为 $f(z)=C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z)$，或是 $f(z)=C\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}g(z)$，或是 $g(z)$ 的更高阶的微商(其中 C 为常数或者是 $C(z-z_0)^n$)，且 $g(z)$ 可以借用已知的基本泰勒展开式给出，再利用级数的性质，先进行求导运算再作求和运算，最后对级数进行逐项微商即可得到 $f(z)$ 的洛朗展开式.

(4) 如果 $f(z)$ 不能直接借用已知的基本泰勒展开式，但可以表示为 $f(z)=C\int_0^z g(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ (其中 C 为常数或者是 $C(z-z_0)^n$)，且 $g(\zeta)$ 可以借用已知的基本泰勒展开式给出，则可以先把 $g(\zeta)$ 作级数展开，然后把积分运算拿到求和号里，对级数进行逐项积分即可得到 $f(z)$ 的洛朗展开式.

4. 解析函数的洛朗展开的一般应用

(1) 解析函数的洛朗展开是留数定理及相关的理论定理的证明的基础.

(2) 研究解析函数在孤立奇点的奇异性的行为(可确定其极点的阶数).

习 题 详 解

7.1 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{k}\right)^k$；　(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k!\left(\dfrac{z}{k}\right)^k$；　(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^kz^k$；

(4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\ln k}z^k$；　(5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^{\ln k}}{k!}z^k$.

解　(1) **法一**　由**达朗贝尔判别法**(又称**比值判别法**)，收敛半径 $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$，系数 $a_k=\dfrac{1}{k^k}$，有

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^{k+1}+(k+1)k^k+\cdots}{k^k}\right|\to\infty$$

即 $R=\infty$，此级数在复平面上收敛.

法二　由柯西判别法，收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$，系数 $a_k=\dfrac{1}{k^k}$，有

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to\infty}k=\infty$$

即此级数在复平面上收敛.

注： 柯西判别法，当

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|w_k|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\left(\frac{z}{k}\right)^k\right|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|z|^k}{k^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{|z|}{k}<1$$

时，级数收敛.

(2) 此级数的系数 $a_k=\dfrac{k!}{k^k}$，则

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^{k+1}\cdot k!}{k^k\cdot(k+1)!}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^k}{k^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right|=\mathrm{e}$$

即收敛半径 $R=\mathrm{e}$.

(3) 由于 $a_k=k^k$，则

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^k}{k^{k+1}+(k+1)k^k+\cdots}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+(k+1)+\cdots}\right|=0$$

即收敛半径 $R=0$，此级数在复平面上不收敛，是发散的.

本题也可以用柯西判别法，即

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$$

此级数在复平面上发散.

(4) 由**达朗贝尔判别法**，系数 $a_k=k^{\ln k}$，有

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln(k+1)}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln k}}\cdot\frac{(k+1)^{\ln k}}{(k+1)^{\ln(k+1)}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\ln k}(k+1)^{\ln\frac{k}{k+1}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k\frac{\ln k}{k}}(k+1)^{\frac{1}{k+1}(k+1)\ln\frac{k}{k+1}}$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

由洛必达(L'Hospital)法则，有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}=0$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k\frac{\ln k}{k}}=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^0=1$$

又

$$\lim_{k\to\infty}(k+1)^{\frac{1}{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{k+1}\ln(k+1)}=\mathrm{e}^0=1$$

$$\lim_{k\to\infty}(k+1)\ln\frac{k}{k+1}=\lim_{k\to\infty}\ln\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)^{k+1}=\lim_{k\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}=\ln\mathrm{e}^{-1}=-1$$

有

$$(k+1)^{\frac{1}{k+1}(k+1)\ln\frac{k}{k+1}}=1^{-1}=1$$

故得

$$R=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^0(1)^{-1}=1$$

此级数的收敛半径 $R=1$.

(5) 由**达朗贝尔判别法**，系数 $a_k=\dfrac{k^{\ln k}}{k!}$，有

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln(k+1)}}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln(k+1)}}(k+1)$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln(k+1)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln k\left(1+\frac{1}{k}\right)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln k+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{\ln k}}{(k+1)^{\ln k}}\cdot\frac{1}{(k+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\ln k}} \cdot \frac{1}{(k+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\ln k} (k+1)^{-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\left(-\frac{1}{k}\ln k\right)} (k+1)^{-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{-0} (k+1)^{-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

$$\lim_{k\to\infty} (k+1)^{-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\ln(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{\ln(k+1)}}} = \mathrm{e}^{-0} = 1$$

此式第三步的指数上的极限由多次用洛必达法则即可得.

故

$$R = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$$

此级数在复平面上都收敛.

7.2　已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b，求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) z^k$；　　(2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} z^k$，　$b_k \neq 0$.

解　(1) 从收敛区间和收敛半径的关系可直接得到：

当 $R_a \geqslant R_b$ 时，级数的收敛半径 $R = R_b$；

当 $R_a \leqslant R_b$ 时，级数的收敛半径 $R = R_a$.

(2) 由**达朗贝尔判别法**，有

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{a_k}{b_k}}{\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{a_k}{a_{k+1}}}{\frac{b_k}{b_{k+1}}} \right| = \frac{R_a}{R_b}$$

此级数的收敛半径为 $R = \frac{R_a}{R_b}$.

7.3　在 $z=0$ 点，将下列函数展成泰勒级数，并求出其收敛半径.

(1) $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{1-z}$；　　(2) $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$；　　(3) $f(z) = \arctan z$；

(4) $f(z) = \int_0^z \mathrm{e}^{z^2} \mathrm{d}z$；　　(5) $f(z) = \int_0^z \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$.

解　(1) **法一**　由

$$f(z)=\frac{e^z}{1-z},\quad f(0)=1$$

$$f'(z)=\frac{e^z(1-z)-e^z(-1)}{(1-z)^2}=\frac{e^z(2-z)}{(1-z)^2},\quad f'(0)=2$$

$$f''(z)=\frac{\left[e^z(2-z)+e^z(-1)\right](1-z)^2-e^z(2-z)\cdot 2(1-z)(-1)}{(1-z)^4}$$

$$=\frac{e^z\left(5-4z+z^2\right)}{(1-z)^3}$$

$$f''(0)=5$$

$$f'''(z)=\frac{\left[e^z\left(5-4z+z^2\right)+e^z(-4+2z)\right](1-z)^3-e^z\left(5-4z+z^2\right)3(1-z)^2(-1)}{(1-z)^6}$$

$$=\frac{e^z\left[(1-z)^3+\left(15-12z+3z^2\right)\right]}{(1-z)^4}$$

$$=\frac{e^z\left(16-15z+6z^2-z^3\right)}{(1-z)^4}$$

$$f'''(0)=16$$

……

另一种求导数值的方法：用递推的方法求展开系数的导数值，由

$$f'(z)=\frac{e^z(1-z)-e^z(-1)}{(1-z)^2}=\frac{e^z(2-z)}{(1-z)^2}=f(z)\frac{2-z}{1-z}$$

可得关系

$$(1-z)f'(z)-f(z)(2-z)=0\text{，有 }f'(0)=2f(0)=2$$

由上式，再对z求导，得

$$(1-z)f''(z)-(3-z)f'(z)+f(z)=0$$

有

$$f''(0)-3f'(0)+f(0)=0\text{，即 }f''(0)=5$$

……

由泰勒展开式的定义，有

$$f(z)=\frac{e^z}{1-z}=1+2z+\frac{5}{2!}z^2+\frac{16}{3!}z^3+\cdots$$

法二　由两个函数分别展开再相乘，即

$$\begin{aligned} f(z)&=\mathrm{e}^{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}z^{m}\\ &=\left(1+z+\frac{1}{2!}z^{2}+\frac{1}{3!}z^{3}+\cdots\right)\left(1+z+z^{2}+z^{3}+\cdots\right)\\ &=1+2z+\frac{5}{2!}z^{2}+\frac{16}{3!}z^{3}+\cdots \end{aligned}$$

级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{k!}$ 的收敛半径 $R=\infty$，级数 $\sum_{m=0}^{\infty}z^{m}$ 的收敛半径 $R=1$. 故两级数相乘构成的级数的收敛半径取小的，即 $R=1$.

(2) **法一**　由

$$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}，\text{有 } f(0)=\mathrm{e}^{-1}$$

$$f'(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}\frac{-1}{(z-1)^{2}}=\frac{-f(z)}{(z-1)^{2}},\quad f'(0)=-\mathrm{e}^{-1}$$

用递推方法求高阶导数，将上式改写成

$$(z-1)^{2}f'(z)+f(z)=0$$

可得

$$(2z-1)f'(z)+(z-1)^{2}f''(z)=0\quad\Rightarrow\quad f''(0)=-\mathrm{e}^{-1}$$

由上式，再对 z 求导，有

$$2f'(z)+(2z-1)f''(z)+2(z-1)f''(z)+(z-1)^{2}f'''(z)0$$

即

$$2f'(z)+(4z-3)f''(z)+(z-1)^{2}f'''(z)=0\quad\Rightarrow\quad f'''(0)=-\mathrm{e}^{-1}$$

由上式，再对 z 求导，有

$$2f''(z)+4f''(z)+(4z-3)f'''(z)+2(z-1)f'''(z)+(z-1)^{2}f^{(4)}(z)=0$$

得

$$f^{(4)}(0)=\mathrm{e}^{-1}$$

……

可得此函数的泰勒展开式为

$$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}=\mathrm{e}^{-1}\left(1-z-\frac{1}{2!}z^{2}-\frac{1}{3!}z^{3}+\frac{1}{4!}z^{4}+\cdots\right)$$

由于$\dfrac{1}{z-1}$的奇点为$z=1$，在$z=0$点展开，故收敛半径$R=1$.

法二　因$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-z}}$在$|z|<1$内解析，故由泰勒级数，可以在单位圆内展开. 由

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$$

有

$$f(z)=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-z}\cdot\mathrm{e}^{-z^2}\cdots=\prod_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^k}$$

故有

$$\begin{aligned}f(z)&=\mathrm{e}^{-1}\left(1-z+\frac{1}{2!}z^2-\cdots\right)\left(1-z^2+\frac{1}{2!}z^4-\cdots\right)\cdot\cdots\\&=\mathrm{e}^{-1}\left(1-z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)\end{aligned}$$

此级数展开式只写出前几项，难以给出系数的通项表达式.

(3) **法一**　由三角函数的定义，有反三角函数

$$\arcsin z=-\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\arccos z=-\mathrm{i}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\arctan z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$$

由于反正弦和反余弦函数的单值分支比较复杂，它涉及对数运算和开根运算的黎曼面的构造和粘接. 而反正切函数的单值分支只涉及对数运算的单值分支的构造，奇点在$z=\pm\mathrm{i}$，由$z=\mathrm{i}$向虚轴正向作割线，由$z=-\mathrm{i}$向虚轴负向作割线. 而在$|z|<1$的区域内，$\arctan z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\ln\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$解析. 而$\arctan 0=m\pi,\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$，当取主值$\arctan 0=0$时，即取主值分支上的$|z|<1$区域对此函数作展开.

由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arctan z&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)'\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}\cdot\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}z)-(1+\mathrm{i}z)(-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i}z)^2}=\frac{1}{1+z^2}\end{aligned}$$

则

$$\arctan z=\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}\mathrm{d}\zeta=\int_0^z \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\zeta^{2k}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}z^{2k+1}$$

如果不先取定 $\arctan 0=0$，则

$$\arctan z=\arctan 0+\int_0^z\frac{1}{1+\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\arctan 0+\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\zeta^{2k}\mathrm{d}\zeta$$

$$=m\pi+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}z^{2k+1}$$

当取 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 中的某一值时，就表示在选定的某一单值分支上展开.

法二　可由泰勒展开式直接求 $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\arctan z\Big|_{z=0}$，求出的结果是一致的.

此泰勒展开式的收敛半径可用收敛半径的定义直接求，有 $R^2=1$，可得收敛半径 $R=\sqrt{1}=1$.

注意： 这里级数的第 $k+1$ 项和第 k 项的模的比出现的是 $|z|^2$，故得到的是收敛半径的平方，即 R^2.

(4) 由

$$\mathrm{e}^{z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{2k}$$

则

$$f(z)=\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\zeta^{2k}\mathrm{d}\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(2k+1)}z^{2k+1}$$

由级数收敛的定义，当

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{z^{2k+3}}{(k+1)!(2k+3)}}{\dfrac{z^{2k+1}}{k!(2k+1)}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!(2k+1)}{(k+1)!(2k+3)}\right|\cdot|z|^2<1$$

时，级数收敛.

当上式的右端等于1时，求出的 $|z|^2$ 就是 R^2，故有

$$R^2=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!(2k+3)}{k!(2k+1)}=\lim_{k\to\infty}(k+1)\to\infty$$

即

$$R=\lim_{k\to\infty}\sqrt{k}\to\infty$$

故收敛半径 $R=\infty$，此级数在除无穷远点外的复平面上收敛.

(5) 由

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

则

$$\frac{\sin z}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}$$

有

$$f(z)=\int_0^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^{2k}\mathrm{d}\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k+1}$$

求收敛半径的方法与上题一样. 有

$$R^2=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{-(2k+2)!}{(2k)!}\right|=\lim_{k\to\infty}(2k+1)(2k+2)\to\infty$$

即

$$R=\lim_{k\to\infty}2k\to\infty$$

此级数的收敛半径 $R=\infty$，此级数在除无穷远点外的复平面上收敛.

7.4　求函数 $f(z)=\sin^3 z$ 在 $z=0$ 点的展开式.

解

$$\begin{aligned}\sin^3 z&=\sin z\left(1-\cos^2 z\right)=\sin z-\sin z\cos z\cos z\\&=\sin z-\frac{1}{2}\sin 2z\cos z=\sin z-\frac{1}{4}\sin 3z-\frac{1}{4}\sin z\\&=\frac{3}{4}\sin z-\frac{1}{4}\sin 3z\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{4}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}(-1)^k\frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!}z^{2k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{3}{4}-\frac{3^{2k+1}}{4}\right)z^{2k+1}\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{4}\cdot\frac{(-1)^{k+1}\left(3^{2k}-1\right)}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

7.5　把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-b}$ 展成幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$ 的形式，并给出可以作此展开的条件，其中 a,b 为不相等的复常数.

解　由于

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{z-a-b+a}=-\frac{1}{b-a-(z-a)}$$

因此，只有当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$，即在以 a 为圆心的圆域 $|z-a|<|b-a|$ 内时，

$$f(z)=\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(b-a)^{k+1}}$$

才能展开成题目所要求的形式. 收敛半径 $R=|b-a|$.

如果 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|>1$，则会有 $(z-a)$ 的负幂次出现，以后另行讨论.

7.6　请指出下列函数的奇点，并说明属于什么类型的奇点，对于极点请说明极点的阶数.

(1) $\dfrac{z-1}{z\left(z^2+1\right)^2}$；　(2) $\dfrac{1}{\left(z^2+\mathrm{i}\right)^2}$；　(3) $\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^m}$，$m$ 为整数；

(4) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1}$；　(5) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$；　(6) $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$；

(7) $\dfrac{1}{\sin z}$；　(8) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$；　(9) $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$；

(10) $\cos\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$.

解　(1) $z=0$ 为一阶极点；$z=\mathrm{i},z=-\mathrm{i}$ 为二阶极点；$z=\infty$ 为可去奇点.

注：对 $z=\infty$ 奇点性质的判断，只需作变换 $t=\dfrac{1}{z}$，考虑 $t=0$ 点的性质.

(2) 由于

$$z^2+\mathrm{i}=0,\quad z^2=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\quad z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)},\quad k=0,1$$

故

$$z_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}),\quad z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})$$

为二阶极点. $z=\infty$ 为可去奇点.

(3) 当 $m\leqslant 0$ 时，$z=0$ 不是奇点.

当 $m=1$ 时，$z=0$ 为奇点，由于 $z\to 0$ 时，此式的极限存在

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}=1$$

故此时 $z=0$ 为可去奇点.

当 $m\geqslant 2$ 时，因为当 $z\to 0$ 时，由洛必达法则有

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^m}=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z}{mz^{m-1}}$$

故 $z=0$ 为 $m-1$ 阶极点. $z=\infty$ 为本性奇点.

(4) 由于 $\mathrm{e}^z-1=0$，即 $\mathrm{e}^z=1$，则

$$z=\mathrm{i}2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

为一阶极点. $z=\infty$ 为非孤立奇点.

(5) $z=0$ 是奇点，由洛必达法则有

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\frac{1}{2}$$

故 $z=0$ 为可去奇点. $z=\infty$ 为本性奇点.

(6) $z=0$ 是奇点，由洛必达法则有

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{3z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{6z}=\infty$$

而

$$\lim_{z\to 0}z\frac{1-\cos z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2}=\frac{1}{2}$$

故 $z=0$ 为一阶极点. $z=\infty$ 为本性奇点.

(7) 即求 $\sin z=0$ 的点，得

$$z_k=k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

为一阶极点. $z=\infty$ 为非孤立奇点.

(8) 要求 $\sin z+\cos z=0$ 的点，可以有

$$(\sin z+\cos z)^2=0$$

即

$$\sin^2 z+2\sin z\cos z+\cos^2 z=\sin 2z+1=0$$

则

$$\sin 2z=-1, \quad \Rightarrow \quad 2z=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

得

$$z_k=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

为一阶极点. $z=\infty$ 为非孤立奇点.

注意：由于在求解过程中进行了“平方”，要检验是否存在增根. 本问题没有增根.

(9) 由

$$f(z)=\frac{\tan(z-1)}{z-1}=\frac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)}=\frac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\frac{1}{\cos(z-1)}$$

可知此函数由两个函数相乘，可分别研究这两个函数的行为.

$z=1$ 是函数 $\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}$ 的奇点，而且是可去奇点，但它不是函数 $\dfrac{1}{\cos(z-1)}$ 的奇点. 故 $z=1$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

当 $z\neq1$ 时，只需研究函数 $\dfrac{1}{\cos(z-1)}$ 的奇点，要求 $\cos(z-1)=0$，即

$$z_k=1+\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

为一阶极点. $z=\infty$ 为非孤立奇点.

(10) 对于函数 $\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$，

$$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

是函数 $\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$ 的奇点，而且是一阶极点.

但是对于函数 $\cos\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$，当

$$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

时，函数 $\cos\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}$ 没有定义，则为本性奇点，$z=\infty$ 为可去奇点.

7.7　把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 在下列区域中展成洛朗级数：

(1) $0<|z|<1$；　(2) $1<|z|<2$；　(3) $2<|z|<\infty$；

(4) $0<|z-1|<1$；　(5) $1<|z-1|<\infty$；　(6) $0<|z-2|<1$；

(7) $1<|z-2|<\infty$.

解　$f(z)$的奇点为$z=1,z=2$.

(1) 对$0<|z|<1$，要求在以$z=0$点的去心环形域上展开，由于$z=0$不是奇点，其实是在$|z|<1$的区域作泰勒展开. 由

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}$$

可得

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)z^k$$

(2) 对$1<|z|<2$，展开中心为$z=0$. 注意到此环形区域内虽然包围了奇点$z=1$，但$z=1$不是展开的中心. 由

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

有

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}z^k-\sum_{k=0}^{\infty}z^{-(k+1)}=-\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}z^k$$

此展开式说明，虽然奇点$z=1$是个一阶极点，但它不在展开的中心点，它对整个展开式的影响却类似于本性奇点的影响，导致展开式出现了无穷的负幂次项.

(3) 对$2<|z|<\infty$，仍在$z=0$点展开，此环形区域包围了奇点$z=1$和$z=2$. 由

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}2^kz^{-(k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}z^{-(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^k-1\right)z^{-(k+1)}$$

令$n=-(k+1),k=-(n+1)$，则

$$k=0\Rightarrow n=-1,\quad k=\infty\Rightarrow n=-\infty$$

故

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(2^{-(n+1)}-1\right)z^n$$

此展开式说明的问题与(2)类似.

(4) 展开中心为 $z=1$ 的环形区域 $0<|z-1|<1$ 是奇点 $z=1$ 的去心解析环域，函数的洛朗展开可以研究奇点 $z=1$ 的奇异性质. 由

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}$$

有

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k-\frac{1}{z-1}=-\sum_{k=-1}^{\infty}(z-1)^k$$

此展开式说明了 $z=1$ 点是函数 $f(z)$ 的一阶极点.

(5) 对 $1<|z-1|<\infty$，环形区域包围了奇点 $z=1$ 和 $z=2$，由

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}-\frac{1}{z-1}$$

有

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{-k}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}\sum_{k=1}^{\infty}(z-1)^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}(z-1)^{-(k+1)}$$

故可写成

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-2}(z-1)^k$$

(6) $0<|z-2|<1$ 是 $z=2$ 点的去心解析环域，奇点为 $z=2$，此展开式可以显示奇点 $z=2$ 的奇异性. 由

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^k=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^k$$

展开式说明 $z=2$ 点是函数 $f(z)$ 的一阶极点.

(7) 对 $1<|z-2|<\infty$，仍是在 $z=2$ 点展开，此环形区域包围了奇点 $z=1$ 和 $z=2$，由

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}$$

有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^{-k}=\frac{1}{z-2}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^{-k}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^{-(k+1)}$$

可写成

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-2}(-1)^k(z-2)^k$$

7.8　请将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-\mathrm{i})}$ 分别在 $z=1$，$z=0$，$z=\mathrm{i}$ 点进行洛朗展开，写出对每个展开点所有可能的环形区域上的洛朗展开式.

解　$f(z)$ 的奇点为 $z=0,z=\mathrm{i}$.

(1) 在 $z=1$ 点展开.

在 $|z-1|<1$ 的区域内，$f(z)$ 解析，则展开式为泰勒级数

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}}{z}-\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{1+(z-1)}-\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}+(z-1)}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{1+(z-1)}-\frac{1}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{1+\dfrac{z-1}{1-\mathrm{i}}}$$

则

$$f(z)=\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k-\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1-\mathrm{i})^k}(z-1)^k$$

$$=\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(1-\frac{1}{(1-\mathrm{i})^{k+1}}\right)(z-1)^k$$

在 $1<|z-1|<\sqrt{2}$ 的环形区域内，包围有奇点 $z=0$.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}}{z}-\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{1+(z-1)}-\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}+(z-1)}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}-\frac{1}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{1+\dfrac{z-1}{1-\mathrm{i}}}$$

则

$$f(z)=\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^{-(k+1)}-\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1-\mathrm{i})^{k+1}}(z-1)^k$$

$$=\mathrm{i}\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}(z-1)^{k}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{i}-1)^{-(k+1)}(z-1)^{k}$$

在 $\sqrt{2}<|z-1|<\infty$ 的环形区域内，包围有奇点 $z=0, z=\mathrm{i}$.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}}{z}-\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{1+(z-1)}-\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}+(z-1)}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}-\frac{\mathrm{i}}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1-\mathrm{i}}{z-1}}$$

则

$$f(z)=\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(z-1)^{-(k+1)}-\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(1-\mathrm{i})^{k}(z-1)^{-(k+1)}$$

$$=\mathrm{i}\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}(z-1)^{k}-\mathrm{i}\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}(1-\mathrm{i})^{-(k+1)}(z-1)^{k}$$

$$=\mathrm{i}\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}\left[1-(1-\mathrm{i})^{-(k+1)}\right](z-1)^{k}$$

(2) 在 $z=0$ 点展开.

在以 $z=0$ 为圆心的去心环域 $0<|z|<1$ 内作洛朗展开，即

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^{-k}z^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^{-(k-1)}z^{k-1}=\sum_{k=-1}^{\infty}\mathrm{i}^{-k}z^{k}$$

$$=\sum_{k=-1}^{\infty}(-\mathrm{i})^{k}z^{k}$$

在 $1<|z|<\infty$ 的环形区域作洛朗展开，内圆包围有奇点 $z=0, z=\mathrm{i}$，故

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{z^{2}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{i}}{z}}$$

$$=\frac{1}{z^{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^{k}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^{k}z^{-(k+2)}=\sum_{k=-\infty}^{-2}\mathrm{i}^{-(k+2)}z^{k}$$

$$=-\sum_{k=-\infty}^{-2}(-\mathrm{i})^{k}z^{k}$$

(3) 在 $z=\mathrm{i}$ 点展开.

在以奇点 $z=\mathrm{i}$ 为圆心的去心环域 $0<|z-\mathrm{i}|<1$ 内作洛朗展开，即

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}+z-\mathrm{i}}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{i}^{-k}(z-\mathrm{i})^k=-\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{i}^{k+1}(z-\mathrm{i})^{k-1}$$

$$=\sum_{k=-1}^{\infty}\mathrm{i}^k(z-\mathrm{i})^k$$

在$1<|z-\mathrm{i}|<\infty$的环形区域作洛朗展开，内圆包围有奇点$z=0,z=\mathrm{i}$，故

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}+z-\mathrm{i}}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{i}^k(z-\mathrm{i})^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^k(z-\mathrm{i})^{-(k+2)}$$

$$=-\sum_{k=-\infty}^{-2}(\mathrm{i})^k(z-\mathrm{i})^k$$

7.9　请将函数$f(z)=\dfrac{1}{z^4(z^2-1)^2}$在以$z=0$点为展开中心的所有环形区域上展成洛朗级数.

解　$f(z)$有$z=0,z=1,z=-1$三个奇点.

(1) 在$0<|z|<1$的环形区域作洛朗展开，则

$$f(z)=\frac{1}{z^4(z^2-1)^2}=\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{(1-z^2)^2}=\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{2z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2z^5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k}=\frac{1}{2z^5}\sum_{k=0}^{\infty}2kz^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}kz^{2(k-3)}$$

$$=\sum_{k=-2}^{\infty}(k+3)z^{2k}$$

(2) 在$1<|z|<\infty$的环形区域内作洛朗展开，考虑到$|z|>1$，故有

$$f(z)=\frac{1}{z^4(z^2-1)^2}=\frac{1}{z^8}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)^2}=\frac{1}{z^8}\left(\frac{-z^3}{2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{z^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2z^5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-2k}=-\frac{1}{2z^5}\sum_{k=0}^{\infty}(-2k)z^{-2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}kz^{-2(k+3)}$$

$$=-\sum_{k=-\infty}^{-4}(k+3)z^{2k}$$

7.10　请将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 分别在以 $z=0$，$z=1$ 和 $z=2$ 为展开中心的所有可能的环形区域上展成洛朗级数.

解　$f(z)$ 的奇点为 $z=1, z=2$.

(1) 在 $z=0$ 点展开.

在 $|z|<1$ 的区域内 $f(z)$ 解析，则 $f(z)$ 展开式为泰勒级数

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{-1}{1-z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}z^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}z^k+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}z^k$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-(k+1)}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(k+1)}kz^{k-1}$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-(k+1)}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-(k+2)}(k+1)z^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[-1+2^{-(k+2)}(k+3)\right]z^k$$

在 $1<|z|<2$ 的环形区域内，包围有奇点 $z=1$，则 $f(z)$ 展开成洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-(k+1)}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}z^k+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}z^k$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-(k+2)}(k+3)z^k$$

在 $2<|z|<\infty$ 的环形区域内，包围有奇点 $z=1, z=2$，则 $f(z)$ 展开成洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{-k}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{-k}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k-\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{-(k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}2^{k-1}kz^{-(k+1)}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k-\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+1)}z^k-\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+2)}(k+1)z^k\\
&=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[1-2^{-(k+2)}(k+3)\right]z^k
\end{aligned}
$$

(2) 在 $z=1$ 点展开.

在 $0<|z-1|<1$ 的环形区域内作洛朗展开，有

$$
f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\left[1-(z-1)\right]^2}=\frac{1}{z-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{1-(z-1)}\right]
$$

$$
f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k=\sum_{k=0}^{\infty}k(z-1)^{k-2}=\sum_{k=-1}^{\infty}(k+2)(k-1)^k
$$

在 $1<|z-1|<\infty$ 的环形区域内作洛朗展开，考虑到 $|z-1|>1$，故有

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\left[1-(z-1)\right]^2}=\frac{1}{(z-1)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z-1}\right)^2}\\
&=-\frac{1}{z-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}\right]=-\frac{1}{z-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}k(z-1)^{-(k+2)}\\
&=-\sum_{k=-\infty}^{-3}(k+2)(z-1)^k
\end{aligned}
$$

(3) 在 $z=2$ 点展开.

在 $0<|z-2|<1$ 的环形区域内作洛朗展开，有

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^{k-2}=\sum_{k=-2}^{\infty}(-1)^k(z-2)^k
\end{aligned}
$$

在 $1<|z-2|<\infty$ 的环形区域内作洛朗展开，考虑到 $|z-2|>1$，故有

$$
f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{(z-2)^3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}
$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^{-(k+3)}=\sum_{k=-\infty}^{-3}(-1)^{k+1}(z-2)^k$$

7.11　请将函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z|<1$ 和 $|z|>1$ 的区域中展成级数.

解　$z=1$ 为此函数的孤立奇点.

在 $|z|<1$ 的区域，指数上的函数可展开为泰勒级数，由

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k=1+z+z^2+\cdots$$

则

$$\begin{aligned}f(z)&=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}=\mathrm{e}^{(1+z+z^2\cdots)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{z}\cdot\mathrm{e}^{z^2}\cdot\cdots\\&=\mathrm{e}\cdot\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{z^{k_1}}{k_1!}\right)\cdot\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{z^{2k_2}}{k_2!}\right)\cdot\left(\sum_{k_3=0}^{\infty}\frac{z^{3k_3}}{k_3!}\right)\cdot\cdots\\&=\mathrm{e}\cdot\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)\left(1+z^2+\frac{1}{2}z^4+\cdots\right)\left(1+z^3+\frac{1}{2}z^6+\cdots\right)\cdot\cdots\\&=\mathrm{e}\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots\right)\end{aligned}$$

在 $|z|>1$ 的环形区域内作洛朗展开，有

$$\begin{aligned}f(z)&=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)}\\&=\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!}\left(-\frac{1}{z}\right)^{k_1}\right]\cdot\left[\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{1}{k_2!}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^{k_2}\right]\cdot\left[\sum_{k_3=0}^{\infty}\frac{1}{k_3!}\left(-\frac{1}{z^3}\right)^{k_3}\right]\cdot\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^4}-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^6}-\cdots\right)\cdot\cdots\\&=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots\end{aligned}$$

另一种解法是：作函数变换，令 $t=\dfrac{1}{1-z}$，则 $f(z)\to f(t)=\mathrm{e}^t$，直接对 t 作泰勒展开. 注意：$t=0\Leftrightarrow|z|\to\infty$，而 $z=1\Leftrightarrow t\to\infty$. 在 $|z|<1$ 的区域内，对 $t=\dfrac{1}{1-z}$ 作泰勒展开；在 $|z|>1$ 的区域内，对 $t=\dfrac{1}{1-z}$ 作洛朗展开.

7.12　请将函数 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ 在 $|z|>0$ 的区域中展成洛朗级数.

解　由于$z=0$是$\dfrac{1}{z}$的孤立奇点，除∞点外再无奇点，故在$0<|z|<\infty$的区域中，有

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{-(2k+1)}=\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(-2k-1)!}z^{2k+1}$$

第八章　留数定理及其在实积分中的应用

内 容 提 要

一、留数定理

1. 留数的定义

在以 z_0 $(\neq\infty)$ 为圆心的去心邻域内解析的函数 $f(z)$ 的洛朗展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

在此去心邻域内作一个把 z_0 包含在内的闭合回路 c，则沿 c 逆时针的回路(以下如果无特地标明，皆为逆时针方向)积分

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}a_{-1}$$

我们把 $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展开式中的 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} 定义为 $f(z)$ 在 z_0 点的留数，记为

$$\mathrm{Res}f(z_0)=a_{-1}$$

注： 在柯西积分公式 $\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(z_0)$ 中，$f(z_0)$ 就是被积函数 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 的留数.

2. 留数定理

若 $f(z)$ 在回路 c 所包围的区域 Ω 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 外解析，在闭区域 $\overline{\Omega}=\Omega+c$ 上除 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 外连续，则 $f(z)$ 沿回路 c 的积分值等于 $f(z)$ 在孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 的留数之和乘以 $2\pi\mathrm{i}$，即

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}f(z_j)$$

应用留数定理能够计算复变函数 $f(z)$ 沿简单闭曲线的积分，是一个有效的方法.

二、留数的一般求法

(1) 直接求出函数 $f(z)$ 在 z_0 点邻域内洛朗展开式中负一次幂的系数 a_{-1}.

(2) 直接由留数定义计算积分 $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c f(z)\mathrm{d}z$.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\left[(z-z_0)f(z)\right]_{z=z_0}$$

(4) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\Big|_{z=z_0}$$

(5) 如果 z_0 为 $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$ 的一阶极点，即 $h(z_0)\neq 0$，$g(z_0)=0$，$g'(z_0)\neq 0$，且 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点及其邻域内解析，则

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

三、解析函数在无穷远点的留数

(1) 解析函数在无穷远点的留数的定义

$$\operatorname{Res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c f(z)\mathrm{d}z$$

其中，积分回路 c 是在 $f(z)$ 的 ∞ 点的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内，绕 ∞ 点正方向(即顺时针方向)的简单闭曲线，$f(z)$ 在 c 内除无穷远点外解析.

(2) 若函数 $f(z)$ 在包含无穷远点的全复平面上只有有限个孤立奇点，则 $f(z)$ 在全复平面上的留数之和为零，即

$$\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res} f(z_j)+\operatorname{Res} f(\infty)=0$$

(3) 无限远孤立奇点的留数的计算方法.

① 通过求积分或者把函数 $f(z)$ 在 ∞ 点的去心邻域内展开为洛朗级数来计算留数；

② 利用留数之和定理；

③ 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，则

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-\lim_{z\to\infty}\left[zf(z)\right]$$

④ 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)\neq 0$，则

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right]_{z=0}$$

四、留数定理在实积分中的应用

1. 奇异积分的柯西主值

对奇异的实积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，若被积函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 奇异，但积分 $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$ 存在，则称此积分为奇异积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记为

$$P\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

2. 用留数定理计算无穷限的奇异积分

积分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 的被积函数函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(x-\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(x-\alpha_k)}$ 在 x 轴上有 k 个一阶极点$(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$，且在这些极点上积分的柯西主值存在. 当 $F(x)\to F(z)$ 时，$F(z)$ 满足：

(1) $F(z)$ 在上半复平面上除有限个孤立奇点$(z_1,\cdots,z_m)$外解析；

(2) 对 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$，当 $|z|\to\infty$ 时，有 $zF(z)$ 一致趋于零；

(3) 在实轴上只有有限个单极点.

则

$$P\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Res}F(z_i)+\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}F(\alpha_j)$$

注一： 对于上述条件(1)、(2)满足，而在实轴上没有奇点，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Res}F(z_i)$$

注二： 对于上述条件(2)满足，在实轴上没奇点，但 $F(z)$ 在上半复平面有无穷多孤立奇点，在这种情况下，要具体分析孤立奇点的分布(对称性)的积分是否存在，如果积分存在，要做好回路(回路的形状要便于计算)的选取，以及如何计算 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x$.

3. 利用约当(Jordan)引理计算一类带有三角函数的实积分

1) 约当引理

函数 $f(z)$ 在上半复平面上除有有限个孤立奇点和在实轴上有有限个单极点外解析，并且当 $|z|\to\infty$ 时，有 $|f(z)|\leqslant M(R)\to 0$．作以原点为圆心、以 R 为半径的上半圆周 C_R，则有

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z\to 0,\quad m>0$$

2) 对于满足约当引理条件的函数 $f(z)$

(1) $f(z)$ 在上半复平面有 n 个孤立奇点，在实轴上有 k 个一阶极点，则有

$$P\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}\right]+\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\left[f(z_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_j}\right]$$

即有

$$P\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=-2\pi\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Im}\,\mathrm{Res}\left[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}\right]-\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Im}\,\mathrm{Res}\left[f(z_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_j}\right]$$

$$P\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin mx\mathrm{d}x=2\pi\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\,\mathrm{Res}\left[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}\right]+\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Re}\,\mathrm{Res}\left[f(z_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_j}\right]$$

(2) $f(z)$ 在上半复平面有 n 个孤立奇点、在实轴上没有奇点，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}\right]$$

即有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=-2\pi\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Im}\,\mathrm{Res}\left[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin mx\mathrm{d}x=2\pi\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\,\mathrm{Res}\left[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}\right]$$

4. 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中，$R(\cos\theta,\sin\theta)$ 为不包含孤立奇点的 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的有理函数.

令 $|z|=1$，则有

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\quad \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}$$

这样，我们把有理三角函数式的实积分化为复平面上以原点为中心的单位圆上的复积分，则由留数定理得

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\,[f(z_k)]$$

其中，$f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2},\dfrac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$，$z_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 为 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的孤立奇点.

5. 计算一类被积函数存在支点和割线的积分

此类积分主要是涉及被积函数有非整数幂的幂函数或含有对数函数，这里存在支点和割线需要把自变量的区域变为黎曼面(即单值函数的定义域，一般情况下取主值区域的定义域)，不同类型的问题很多，不同的情况要具体问题具体分析.

(1) 梅林(Mellin)变换型的积分

$$I=\int_0^{\infty} x^a f(x)\mathrm{d}x,\quad 0<a<1$$

要求当 $f(x)\to f(z)$ 时，$f(z)$ 满足：

① $f(z)$ 为有理函数，在复平面上有有限个(k 个)孤立奇点 $\left(z_j, j=1,\cdots,k\right)$，此时复平面只是黎曼面一叶的一部分；

② $f(z)$ 在正实轴上无奇点，在 $z=0$ 点至多为一阶极点；

③ 当 $|z|\to\infty$ 时，$|z|^2|f(z)|$ 有界.

则有

$$P\int_0^{\infty} x^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\left[z_j^a f\left(z_j\right)\right]$$

(2) 含有 $\ln x$ 的积分，因为此类积分类型很多，这里只简单介绍一种类型的积分(作为一种方法的示范)

$$\int_0^{\infty} f(x)\ln x\mathrm{d}x$$

① $f(x)$ 为实轴上无奇点的有理函数，且为偶函数；

② 当 $f(x)\to f(z)$ 时，$f(z)$ 在上半复平面上有有限个(k 个)孤立奇点，且 $\left|z^2\right|\left|f(z)\right|\xrightarrow{|z|\to\infty}$ 有限，则

$$P\int_0^{\infty} f(x)\ln x\mathrm{d}x=\mathrm{i}\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\left[f\left(z_j\right)\ln z_j\right]-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

这里我们选取 $\ln z$ 的主值面，从支点 0 沿 x 轴的正向(此类型中也可以取负向)至无穷，在避开原点(从 $-\delta$ 以顺时针方向在上半平面作一个小圆周 c_δ 到 δ)的逆时针方向的闭合回路

$$c=(\delta\to R)+C_R+(-R\to-\delta)+c_\delta,\quad R\to\infty$$

作回路积分，即可得到上面的结果.

对含有 $\ln x$ 的积分，对支点和割线的作法，以及对积分回路的选取要根据被积函数的形式而具体确定.

五、希尔伯特变换

对定义在实轴上的复函数

$$f(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x),\quad \mathrm{Re}\,f(x)=u(x),\quad \mathrm{Im}\,f(x)=v(x)$$

则有希尔伯特变换(或称为色散关系)

$$\mathrm{Re}\,f(x_0)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,f(x_0)}{x-x_0}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Im}\,f(x_0)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,f(x_0)}{x-x_0}\mathrm{d}x$$

习 题 详 解

8.1　求下列函数在孤立奇点的留数(其中，n,m 为自然数)，并求出函数孤立奇点的留数之和.

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$;　(2) $f(z)=z^n\sin\dfrac{1}{z}$;

(3) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^5}$;　(4) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z^2}}{(z-1)^2}$;

(5) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}$;　(6) $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$;

(7) $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$;　(8) $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$;

(9) $f(z)=\dfrac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)^m}$;　(10) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^{2m}}$，m 为正整数;

(11) $f(z)=\dfrac{z^{2m}}{1+z^m}$，$m$ 为正整数;　(12) $f(z)=\dfrac{\tan z}{1-\mathrm{e}^z}$.

解　(1) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在复平面上只有两个奇点：$z=0$ 为一阶极点，$z=1$ 为二阶极点.

因为 $\lim\limits_{z\to 0} z\dfrac{1}{z(z-1)^2}=1$ 为非零的有限值，所以 $z=0$ 为一阶极点，其留数为

$$\operatorname{Res} f(0)=\lim_{z\to 0}\left[z\frac{1}{z(z-1)^2}\right]=1$$

同理，$z=1$ 为二阶极点，其留数为

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{1}{z(z-1)^2}\right]=-1$$

$f(z)$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 这两个奇点的留数之和为 $1-1=0$.

(2) $f(z)=z^n\sin\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点为 $z_1=0$，$z_2=\infty$.

由于 $z_1=0$ 是 $\sin\dfrac{1}{z}$ 的本性奇点，所以也是 $f(z)$ 的本性奇点；由 $\varsigma=\dfrac{1}{z}$ 可知 $z_2=\infty$ 是 $f(z)$ 的 $(n-1)$ 阶极点.

本题直接用定义求 $f(z)$ 洛朗展开式的 z^{-1} 的系数 a_{-1}：

在 $0<|z|<\infty$ 区域，对 $f(z)$ 作洛朗展开

$$f(z)=z^n\sin\frac{1}{z}=z^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}z^{n-(2k+1)}$$

当 n 为奇数时，设 $n=2m+1, m=0,1,2,\cdots$，则

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}z^{2(m-k)}$$

故此级数没有 z 的奇次幂项，z^{-1} 的系数 a_{-1} 为零，即对应的留数为零. 则有

$$\operatorname{Res} f(0)=0$$

由无穷远点留数的定义，有

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-\operatorname{Res} f(0)=0$$

则当 n 为奇数时

$$\operatorname{Res} f(0)+\operatorname{Res} f(\infty)=0$$

当 n 为偶数时，设 $n=2m, m=0,1,2,\cdots$，则

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}z^{2(m-k)-1}$$

可以看出，当$k=m$时，对应为此级数的z^{-1}项，其系数

$$a_{-1}=(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}$$

考虑到$2m=n$，有

$$\operatorname{Res}f(0)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$$

由无穷远点留数的定义，有

$$\operatorname{Res}f(\infty)=-\operatorname{Res}f(0)=-\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$$

则当n为偶数时

$$\operatorname{Res}f(0)+\operatorname{Res}f(\infty)=0$$

(3) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^5}$的奇点为$z=0,z=\infty$.

由$\mathrm{e}^z-1=z+\dfrac{1}{2!}z^2+\dfrac{1}{3!}z^3+\cdots$，有

$$f(z)=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}z+\cdots$$

容易判断$z=0$为$f(z)$的4阶极点，并且不难看出

$$\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

可得

$$\operatorname{Res}f(\infty)=-\frac{1}{24}$$

则

$$\operatorname{Res}f(0)+\operatorname{Res}f(\infty)=0$$

另一种做法：$z=0$为$f(z)$的4阶极点，则有

$$\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left(z^4\cdot\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^5}\right)=\frac{1}{6}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left(\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left(\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{4!}z^3+\cdots\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{4!}=\frac{1}{24}$$

注：对于$z=\infty$点，如果作变换$z=\dfrac{1}{\varsigma}$，则

$$f(\varsigma)=\varsigma^5\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\varsigma}}-1\right)=\varsigma^4+\frac{1}{2!}\varsigma^3+\frac{1}{3!}\varsigma^2+\frac{1}{4!}\varsigma+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\varsigma^{-1}+\cdots+\frac{1}{k!}\varsigma^{-(k-5)}+\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-k)!}\varsigma^{k+5}$$

即对$\varsigma=0$的洛朗展开有无穷多的负幂次项，则对应的$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点. 此时的留数对应的是此展开式中的$-a_1$，即ς的一次方项的系数加上负号. 所以，应该有

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-a_1=-\frac{1}{4!}=-\frac{1}{24}$$

(4) 对$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z^2}}{(z-1)^2}$，与上题的做法类似，易判断函数的孤立奇点有：$z_1=1$为二阶极点，$z_2=\infty$为本性奇点. 则可得

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{\mathrm{e}^{z^2}}{(z-1)^2}\right]=\lim_{z\to 1}2z\mathrm{e}^{z^2}=2\mathrm{e}$$

根据函数在无穷远点留数的定义，可得

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-\operatorname{Res} f(1)=-2\mathrm{e}$$

则

$$\operatorname{Res} f(1)+\operatorname{Res} f(\infty)=0$$

(5) 对$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z}}{(z-1)^2}$，与上题的做法类似，易判断函数的孤立奇点有：$z_1=1$为二阶极点，$z_2=\infty$为本性奇点. 则可得

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{\mathrm{e}^{z}}{(z-1)^2}\right]=\mathrm{e}$$

根据函数在无穷远点留数的定义，可得

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-\operatorname{Res} f(1)=-\mathrm{e}$$

则

$$\operatorname{Res} f(1)+\operatorname{Res} f(\infty)=0$$

(6) $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$有一个奇点：$z_0=1$.

在$0<|z-1|<\infty$环形区域内作该函数的洛朗展开

$$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z-1)^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}(z-1)^{k}$$

此展开式有无穷多个负幂次项，故孤立奇点 $z_0=1$ 为函数的本性奇点. 同时，我们得到该洛朗展开式的负一次幂的系数为 $a_{-1}=1$，则

$$\operatorname{Res} f(1)=1$$

(7) $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$，令 $\cos z-1=0$，解得 $z_n=2n\pi$ 为孤立奇点，其中 n 为整数.

当 $n=0$ 时，由洛必达法则可得 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{\cos z-1}=-2$，该极限有限且存在，故 $z=0$ 为可去奇点.

当 $n\neq 0$ 时，$f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$ 的分子不为零，而分母为零，但我们不知道 $z_n=2n\pi$ 是 $f(z)$ 的几阶极点，用试探的方法，如果是一阶极点，则 $\lim\limits_{z\to 2n\pi}(z-2n\pi)\dfrac{z^2}{\cos z-1}$ 将是非零的有限值，但由洛必达法则，得

$$\lim_{z\to 2n\pi}(z-2n\pi)\frac{z^2}{\cos z-1}=\infty$$

我们再试探是否为二阶极点，再一次用洛必达法则，得

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2n\pi}(z-2n\pi)^2\frac{z^2}{\cos z-1}&=\lim_{z\to 2n\pi}\frac{2(z-2n\pi)z^2+2(z-2n\pi)^2 z}{-\sin z}\\&=\lim_{z\to 2n\pi}\left(-2z^2\right)=-2(2n\pi)^2,\quad n\neq 0\end{aligned}$$

其中用到 $\lim\limits_{z\to 2n\pi}\dfrac{z-2n\pi}{\sin z}=1$，该极限有限且是不为零的确定值，故 $z_n=2n\pi$ 为函数 $f(z)$ 的二阶极点.

由二阶极点求留数的方法，则有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(2n\pi)&=\lim_{z\to 2n\pi}\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2n\pi)^2\frac{z^2}{\cos z-1}\right]\\&=\lim_{z\to 2n\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-2z^2\right)=-8n\pi\end{aligned}$$

其中我们对求导的方括号里的函数用洛必达法则先求极限，即用了判断二阶极点得到的结果.

而对 $z=\infty$ 点这个奇点性质的判断，令 $z=\dfrac{1}{\varsigma}$，则

$$f(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma^2\left(\cos\dfrac{1}{\varsigma}-1\right)}$$

可知 $\varsigma=0$ 为 $f(\varsigma)$ 的非孤立奇点，故 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的非孤立奇点.

注： 由于包含非孤立奇点，无法计算留数之和.

(8) 函数 $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$ 有两个奇点：$z=2, z=\infty$. 对 $f(z)$ 在 $z=2$ 的去心环域上作洛朗展开

$$\begin{aligned}f(z)&=z^3\cos\frac{1}{z-2}=(z-2+2)^3\cos\frac{1}{z-2}\\&=\left[(z-2)^3+6(z-2)^2+12(z-2)+8\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}(z-2)^{3-2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6}{(2k)!}(z-2)^{2-2k}\\&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{(2k)!}(z-2)^{1-2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{(2k)!}(z-2)^{-2k}\end{aligned}$$

由此式可以判断 $z=2$ 为本性奇点. 上式级数 $(z-2)^{-1}$ 的系数为

$$a_{-1}=\frac{1}{4!}+\frac{12}{2!}=\frac{1}{24}+6=\frac{145}{24}$$

其中展开式中的第二和第四个求和中没有奇次幂的项. 即可得

$$\operatorname{Res}f(2)=\frac{145}{24}$$

根据无穷远点留数的定义，有

$$\operatorname{Res}f(\infty)=-\frac{145}{24}$$

则有

$$\operatorname{Res}f(2)+\operatorname{Res}f(\infty)=0$$

注： 由于 $\lim\limits_{z\to\infty}\cos\dfrac{1}{z-2}=1$，则 $\lim\limits_{z\to\infty}z^3\cos\dfrac{1}{z-2}=\lim\limits_{z\to\infty}z^3$，即可以判断 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 3 阶极点.

(9) $f(z)=\dfrac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)^m}$，可判断 $z=\alpha$ 为函数的单极点，$z=\beta$ 为函数的 m

阶极点. 所以有

$$\operatorname{Res} f(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)=\frac{1}{(\alpha-\beta)^m}$$

由于 $z=\beta$ 为函数的 m 阶极点，极点阶数较高，用求导法计算较繁琐，采用洛朗展开的方法，把函数在环域 $0<|z-\beta|<|\alpha-\beta|$ 中展开，即

$$f(z)=\frac{1}{(z-\beta)^m}\frac{-1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-\beta}{\alpha-\beta}}=\frac{1}{(z-\beta)^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{(\alpha-\beta)^{k+1}}(z-\beta)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{(\alpha-\beta)^{k+1}}(z-\beta)^{k-m}$$

故

$$\operatorname{Res} f(\beta)=c_{-1}=\frac{-1}{(\alpha-\beta)^m}$$

则有

$$\operatorname{Res} f(\alpha)+\operatorname{Res} f(\beta)=0$$

(10) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^{2m}}$，先求 $f(z)$ 的奇点：令 $1+z^{2m}=0$，可得 $z_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{2m}}$，其中 $n=0,1,2,\cdots,2m-1$. 很容易判断这 $2m$ 个奇点为单极点，由

$$\operatorname{Res} f(z_n)=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1+z^{2m}\right)\Big|_{z=z_n}}$$

有

$$\operatorname{Res} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{2m}}\right)=\frac{1}{2m\mathrm{e}^{(2m-1)\left(\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{2m}\right)}}=\frac{1}{2m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2m-1)(2n+1)\pi}{2m}}}$$

$$=\frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(2m-1)(2n+1)\pi}{2m}}$$

$$=\frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2m-1}{2m}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(2-\frac{1}{m}\right)n\pi},\quad n=0,1,2,\cdots,2m-1$$

从而

$$\sum_{n=0}^{2m-1}\operatorname{Res} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{2m}}\right)=\frac{1}{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2m-1}{2m}\pi}\sum_{n=0}^{2m-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(2-\frac{1}{m}\right)n\pi}=0$$

注意： 求和号内是在单位圆周上从 $\theta_0=0(n=0)$ 开始，圆周角相隔 $\frac{\pi}{m}$ 分布的 $2m$ 个模等于 1 的复数，由对称性分析可知，这 $2m$ 个模等于 1 的复数的和为零，故上式的求和为零.

(11) 函数 $f(z)=\dfrac{z^{2m}}{1+z^m}$，先求 $f(z)$ 的奇点：令 $1+z^m=0$，可得

$$z_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{m}},\quad n=0,1,2,\cdots,m-1$$

很容易判断这 m 个奇点 $z_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{m}}$ 为单极点. 求留数的方法与上题同.

当 $m\neq 1$ 时，有

$$\operatorname{Res} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{m}}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2m\frac{(2n+1)\pi}{m}}}{m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)\left(\frac{(2n+1)\pi}{m}\right)}}=\frac{1}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\left(\frac{(2n+1)\pi}{m}\right)}=\frac{1}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m+1}{m}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\frac{2n}{m}\pi}$$

对 $z=\infty$，作变换 $\varsigma=\dfrac{1}{z}$，有 $\lim\limits_{\varsigma\to 0}f(\varsigma)=\dfrac{1}{\varsigma^m}$，是 m 阶极点，这是函数 $f(\varsigma)$ 在 $\varsigma=0$ 的洛朗展开式，故可知

$$\operatorname{Res} f(\infty)=0$$

有

$$\sum_{n=0}^{m-1}\operatorname{Res} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{m}}\right)=\frac{1}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m+1}{m}\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\frac{2n}{m}\pi}=0$$

当 $m=1$ 时，有

$$\operatorname{Res} f(z_0)=-\frac{1}{m}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(2n+1)}{m}\pi}\Bigg|_{n=0,m=1}=1,\quad \operatorname{Res} f(\infty)=-1$$

故有

$$\operatorname{Res} f(z_0)+\operatorname{Res} f(\infty)=0$$

(12) $f(z)=\dfrac{\tan z}{1-\mathrm{e}^z}=\dfrac{\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)\cos z}$，先求 $f(z)$ 的奇点：

令 $1-\mathrm{e}^z=0$，可得 $z_n=\mathrm{i}2n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

令 $\cos z=0$，可得 $z_m=m\pi+\dfrac{\pi}{2},\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

① 当 $n=0,z=0$ 时，极限

$$\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{1-\mathrm{e}^{z}}=\lim_{z\to 0}\frac{1/\cos^2 z}{-\mathrm{e}^{z}}=-1$$

此极限值为一有限值(可以等于 0)，所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

$$\operatorname{Res} f(0)=0$$

② 当 $n\neq 0$ 时，该函数的奇点 z_n 是单极点.

对于极点 $z_n=\mathrm{i}2n\pi,\ n\neq 0$，$\dfrac{\sin z}{\cos z}$ 是解析的，故

$$\operatorname{Res} f(2n\pi\mathrm{i})=\frac{\sin z_n}{\cos z_n}\cdot\frac{1}{\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1-\mathrm{e}^{z}\right)\right|_{z=z_n}}$$

$$=\frac{\sin 2n\pi\mathrm{i}}{\cos 2n\pi\mathrm{i}}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}}}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}-\mathrm{e}^{2n\pi}}{\mathrm{e}^{-2n\pi}+\mathrm{e}^{2n\pi}}\mathrm{i}$$

③ 不难判断，函数的奇点 $z_m=m\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 是单极点，注意到此种情况下，$\dfrac{\sin z}{1-\mathrm{e}^{z}}$ 是解析的，故

$$\operatorname{Res} f\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin z_n}{1-\mathrm{e}^{z_n}}\cdot\frac{1}{\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z\right|_{z=z_n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{m\pi+\frac{\pi}{2}}-1}$$

8.2　计算下列回路积分：

(1) $\oint_c\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$c:|z-1|=1$；

(2) $\oint_c\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$c:|z-\mathrm{i}|=1$；

(3) $\oint_c\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$c:|z|=2$；

(4) $\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{(z-3)\left(z^4-1\right)}\mathrm{d}z$；

(5) $\oint_{|z|=3}\cot^3 z\mathrm{d}z$；

(6) $\oint_{|z|=1}\dfrac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^{z}\right)^3}\mathrm{d}z$；

(7) $\oint_{|z|=1}z^n\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$.

解　(1) 在积分回路$|z-1|=1$内，被积函数$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$的奇点有：$z=1$，为二阶极点，其留数为

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\right]=-\frac{1}{2}$$

根据留数定理可得积分为

$$I=\oint_c\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi\mathrm{i}$$

(2) 在积分回路$|z-\mathrm{i}|=1$内，被积函数$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$的奇点为：$z=\mathrm{i}$，为单极点，其留数为

$$\operatorname{Res} f(\mathrm{i})=\lim_{z\to \mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}=\frac{1}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})(\mathrm{i}-1)^2}=\frac{1}{4}$$

根据留数定理可得积分为

$$I=\oint_c\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

(3) 在积分回路$|z|=2$内，被积函数$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$的奇点有：$z=\mathrm{i}$，$z=-\mathrm{i}, z=1$，这三个奇点的留数为

$$\operatorname{Res} f(\mathrm{i})=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(-\mathrm{i})=\lim_{z\to -\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}=\frac{1}{(-\mathrm{i}-\mathrm{i})(-\mathrm{i}-1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\right]=-\frac{1}{2}$$

根据留数定理可得

$$I=\oint_c\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res} f(\mathrm{i})+\operatorname{Res} f(-\mathrm{i})+\operatorname{Res} f(1)\right]=0$$

(4) 被积函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z^4-1)}$的奇点有五个：$z=3, z=1, z=-1, z=\mathrm{i}$,

$z=-\mathrm{i}$，并且都为单极点，其中，在积分回路$|z|=2$内有$1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$四个奇点，考虑到

$$\operatorname{Res} f(3)=\lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{1}{(z-3)\left(z^4-1\right)}\right]=\frac{1}{3^4-1}=\frac{1}{80}$$

又因为在$3<|z|<\infty$内，有

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\dfrac{3}{z}}\right)\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{z^4}}\right)=\frac{1}{z^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{4n}}$$

所以

$$\operatorname{Res} f(\infty)=0$$

根据全复平面(包含无穷远点)留数之和定理，有

$$\operatorname{Res} f(\mathrm{i})+\operatorname{Res} f(-\mathrm{i})+\operatorname{Res} f(1)+\operatorname{Res} f(-1)=-\left[\operatorname{Res} f(3)+\operatorname{Res} f(\infty)\right]$$

根据留数定理，积分

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)\left(z^4-1\right)}\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res} f(3)+\operatorname{Res} f(\infty)\right]=-2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{80}+0\right)=-\frac{\pi\mathrm{i}}{40}$$

(5) 被积函数$f(z)=\cot^3 z=\left(\dfrac{\cos z}{\sin z}\right)^3$，其奇点为：$z_n=n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，都为3阶极点.

在积分回路$|z|=3$内，只有奇点$z_0=0$，有

$$\operatorname{Res} f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(z^3\frac{\cos^3 z}{\sin^3 z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\cos^3 z=-\frac{3}{2}$$

其中用到$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^3}{\sin^3 z}=1$.

由留数定理可得

$$I=\oint_{|z|=3}\cot^3 z\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(0)=-3\pi\mathrm{i}$$

(6) 先看被积函数$f(z)=\dfrac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3}$分母为零的点，这些点是奇点(也可能是可去奇点).

令$1-\mathrm{e}^z=0$，可得奇点

$$z_n = \mathrm{i}2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

容易判断这些奇点除 $n=0$ 外均为 3 阶极点. 在积分回路 $|z|=1$ 内，只有奇点 $z_0=0$.

现在分析 $z_0=0$ 这个奇点的阶数.

被积函数的分子

$$z \cdot \sin z \xrightarrow{z\to 0} z^2$$

被积函数的分母：由 $1-\mathrm{e}^z = -z - \dfrac{1}{2!}z^2 - \dfrac{1}{3!}z^3 - \cdots$，考虑 $z\to 0$ 时，该式右边的领头项为 $-z$，其他各项都为高阶无穷小量，可略去，即

$$\lim_{z\to 0}\left(1-\mathrm{e}^z\right) \sim \lim_{z\to 0}(-z)$$

故在 $z\to 0$ 时，被积函数为

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{-z}$$

因此，由极点阶数的判断法则，有

$$\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3} = -1$$

故 $z_0=0$ 是 $f(z)=\dfrac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3}$ 的一阶极点，则其留数为

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0}\left[(z-0)\frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3}\right] = -1$$

根据留数定理可得

$$I = \oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(0) = -2\pi\mathrm{i}$$

另一种极点的判断方法

$$f(z) = \frac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3} = \frac{z\left(z-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5-\cdots\right)}{\left(-z-\dfrac{1}{2!}z^2-\dfrac{1}{3!}z^3-\cdots\right)^3} = \frac{z^2\left(1-\dfrac{1}{3!}z^2+\dfrac{1}{5!}z^4-\cdots\right)}{z^3\left(-1-\dfrac{1}{2!}z-\dfrac{1}{3!}z^2-\cdots\right)^3} = \frac{1}{z}f_1(z)$$

其中，$f_1(z)$ 在 $z_0=0$ 不为零，故 $z_0=0$ 是 $f(z)=\dfrac{z\sin z}{\left(1-\mathrm{e}^z\right)^3}$ 的一阶极点.

(7) 被积函数 $f(z)=z^n\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 中 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的奇点为 $z=0$，由 $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 点的去心邻域中洛朗展开式可知，$z=0$ 为本性奇点.

被积函数在 $z=0$ 点的去心邻域中洛朗级数为

$$f(z)=z^n\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{n-k}$$

可以看出，当 $k=n+1$ 时，为展开式的 z^{-1} 项，其展开系数为

$$a_{-1}=\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{(n+1)!}$$

由留数定理可得

$$I=\oint_{|z|=1}z^n\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}f(0)=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n+1)!}$$

8.3 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$；　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$；

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}$；　(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$，$p>0$.

解　(1) 作变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，使原积分化为单位圆内的回路积分

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}}{2+\dfrac{z+z^{-1}}{2}}=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+4z+1}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z+2-\sqrt{3}\right)\left(z+2+\sqrt{3}\right)}$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{\left(z+2-\sqrt{3}\right)\left(z+2+\sqrt{3}\right)}$ 有 $z_1=-2+\sqrt{3}$ 和 $z_2=-2-\sqrt{3}$ 两个一阶极点，但只有 z_1 在积分回路内.

$$\operatorname{Res}f\left(-2+\sqrt{3}\right)=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

可得

$$I=\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}f\left(-2+\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

不难证明，此题可以延伸为

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}},\quad a>1$$

(2) 对积分变量作变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有 $\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，$\cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2}=\dfrac{z^2+1}{2z}$，则原积分化为单位圆周的回路积分

$$I=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=\frac{1}{2^{2n}\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z$$

$z=0$ 为被积函数的 $(2n+1)$ 阶极点，则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}f(0)&=\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}\left(z^2+1\right)^{2n}\\&=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}\frac{(2n)!z^{2n}}{(2n-n)!n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\end{aligned}$$

故可得积分为

$$I=\frac{1}{2^{2n}\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{2^{2n}\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}=2\pi\frac{(2n-1)!!}{2n!!}$$

其中用到 $(2n)!=2^n n!(2n-1)!!$ 和 $2^n n!=(2n)!!$.

(3) **法一**　作积分变量变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有 $\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，则

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\cos^2\theta=\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2=\frac{z^4+2z^2+1}{4z^2}$$

$$1+\cos^2\theta=\frac{z^4+6z^2+1}{4z^2}=\frac{\left(z^2+3+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+3-2\sqrt{2}\right)}{4z^2}$$

原积分化为单位圆周的回路积分

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}=\frac{4}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{\left(z^2+3+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+3-2\sqrt{2}\right)}\\&=\frac{4}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{\left(z+\mathrm{i}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\left(z-\mathrm{i}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\left(z+\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)\left(z-\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)}\end{aligned}$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2+3+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+3-2\sqrt{2}\right)}$ 有 4 个一阶极点：$z_1=-\mathrm{i}\sqrt{3+2\sqrt{2}}$，

$z_2=\mathrm{i}\sqrt{3+2\sqrt{2}}$，$z_3=-\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}$，$z_4=\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

只有 z_3，z_4 在单位圆周内，可计算这两个极点的留数

$$\operatorname{Res}f(z_3)=\lim_{z\to-\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\frac{-\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\left(-3+2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}\right)\left(-\mathrm{i}2\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{Res}f(z_4)=\lim_{z\to\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\frac{\mathrm{i}\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\left(-3+2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}2\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

由留数定理可得

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{4}{\mathrm{i}}\left[\operatorname{Res}f(z_3)+\operatorname{Res}f(z_4)\right]=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$$

法二

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{2\mathrm{d}\theta}{3+\cos 2\theta}=\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}(2\theta)}{3+\cos 2\theta}$$

$$\xrightarrow{\varphi=2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{3+\cos\varphi}+\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{3+\cos\varphi}=2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{3+\cos\varphi}$$

由上题结果

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}},\quad a>1$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}=2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{3+\cos\varphi}=2\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3^2-1}}=\sqrt{2}\pi$$

(4) 作积分变量变换，令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$，$\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，故有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\oint_{|z|=1}\frac{\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}}{1-2p\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}z}{pz^2-\left(p^2+1\right)z+p}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}z}{(pz-1)(z-p)}$$

被积函数的奇点有

$$z_1=p,\quad z_2=\frac{1}{p}$$

当 $0<p<1$ 时，只有奇点 $z_1=p$ 在单位圆内，可求得其留数为

$$\operatorname{Res} f(z_1)=\mathrm{i}\frac{1}{p^2-1}$$

由留数定理，可得积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(z_1)=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\frac{1}{p^2-1}=\frac{2\pi}{1-p^2}$$

当 $p>1$ 时，只有奇点 $z_2=\dfrac{1}{p}$ 在单位圆内，可求得其留数为

$$\operatorname{Res} f(z_2)=\mathrm{i}\frac{1}{1-p^2}$$

由留数定理，可得积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(z_2)=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\frac{1}{1-p^2}=\frac{2\pi}{p^2-1}$$

当 $p=1$ 时

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\mathrm{i}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2}$$

奇点在积分回路(单位圆周)上，并且为二阶极点，在此不予以讨论. 有兴趣的读者可自己试做.

8.4　计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x,\quad a>0,\ b\in\mathbf{R}$；　　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(\cos 2x)^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^4+4\right)}\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2x+2\right)}\mathrm{d}x$；　　(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,\ 0<a<1$.

(**注**：本章中的积分符号 $\displaystyle\int_0^{\infty}\equiv\int_0^{+\infty}$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}$.)

解　(1) 由于被积函数为偶函数，故

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

作以原点为圆心的上半平面的圆周和实轴构成的逆时针闭合回路(并让上半圆周的半径趋于无穷大)，把变量 $x\to z$，则把实轴上的积分变为回路积分，被积函数为

$$f(z)=\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{\left(z^2-\mathrm{i}\right)\left(z^2+\mathrm{i}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right]}$$

它具有四个一阶极点：$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$，$z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$，$z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$，$z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$，实轴上没奇点. 其中只有 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$ 在上半平面内，它们的留数分别为

$$\operatorname{Res}f(z_1)=\frac{1}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\sqrt{2}\mathrm{i}\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}$$

$$\operatorname{Res}f(z_4)=\frac{1}{-\sqrt{2}(1-\mathrm{i})\sqrt{2}\mathrm{i}\left(-\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}$$

故可得

$$I=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res}f(z_1)+\operatorname{Res}f(z_4)\right]=\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}+\frac{1}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

注： 由于被积函数 $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$，z_1，z_4 都是一阶极点，且分子是常数，则求留数也可以用另一种方法

$$\operatorname{Res}f(z_1)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})}\frac{1}{\left(z^4+1\right)'}=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}$$

$$\operatorname{Res}f(z_4)=\lim_{z\to-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})}\frac{1}{\left(z^4+1\right)'}=\lim_{z\to-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}$$

(2) 此积分中的被积函数为偶函数，积分变为

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x+\mathrm{i}a)^2(x-\mathrm{i}a)^2}\mathrm{d}x$$

不失一般性，可令 $a>0$ (若 $a<0$，作变换 $a=-\alpha$，此时 $\alpha>0$，积分不变)，作以原点为圆心的上半平面上的大圆周和实轴构成的逆时针闭合回路(并让上半圆周的半径趋于无穷大)，把变量 $x\to z$，则把实轴上的积分变为回路积分，被积函数变为

$$f(z)=\frac{z^2}{(z+\mathrm{i}a)^2(z-\mathrm{i}a)^2}$$

函数 $f(z)$ 在上半平面内有一个二阶极点 $z_1=a\mathrm{i}$. 其留数为

$$\operatorname{Res} f(z_1)=\lim_{z\to \mathrm{i}a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{i}a)^2 f(z)\right]=\lim_{z\to \mathrm{i}a}\frac{2z(z+\mathrm{i}a)-2z^2}{(z+\mathrm{i}a)^3}=\frac{1}{4\mathrm{i}a}$$

根据留数定理，可得积分

$$I=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(z_1)=\pi\mathrm{i}\frac{1}{4a\mathrm{i}}=\frac{\pi}{4a}$$

(3) 详细解答见教材第 103 页，例 8.4.6[计算泊松(Poisson)积分].

(4) 被积函数为偶函数，故积分变为

$$I=\int_0^{\infty}\frac{(\cos 2x)^2}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos 2x)^2}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos 4x}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4x}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x$$

令

$$I_1=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x,\quad I_2=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4x}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x$$

则 $I=I_1+I_2$.

对于 I_1，作以原点为圆心的上半平面上的大圆周和实轴构成的逆时针闭合回路(并让上半圆周的半径趋于无穷大)，把变量 $x\to z$，实轴上的积分变为回路积分，则被积函数变为

$$f_1(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2(z^4+4)}$$

其奇点有：$z_1=\mathrm{i}, z_2=-\mathrm{i}$ 为二阶极点；$z_3=1+\mathrm{i}$，$z_4=1-\mathrm{i}$，$z_5=-1+\mathrm{i}$，$z_6=-1-\mathrm{i}$ 为单极点；在上半平面上的奇点有 z_1, z_3, z_5.

求这三个奇点的留数，计算可得

$$\operatorname{Res} f_1(\mathrm{i})=-\mathrm{i}\frac{9}{100}$$

$$\operatorname{Res} f_1(1+\mathrm{i})=-\frac{1}{400}+\mathrm{i}\frac{7}{400}$$

$$\operatorname{Res} f_1(-1+\mathrm{i})=\frac{1}{400}+\mathrm{i}\frac{7}{400}$$

由留数定理可得

$$I_1=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^4+4\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res}f_1(\mathrm{i})+\operatorname{Res}f_1(1+\mathrm{i})+\operatorname{Res}f_1(-1+\mathrm{i})\right]=\frac{11\pi}{400}$$

对于

$$I_2=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4x}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^4+4\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^4+4\right)}\mathrm{d}x$$

其做法与 I_1 相同，由约当引理，作相同的回路积分，其被积函数为

$$f_2(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}4z}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+4\right)}$$

其奇点与 $f_1(z)$ 的奇点完全相同，在上半平面上的奇点有 z_1，z_3，z_5．求这三个奇点的留数，计算可得

$$\operatorname{Res}f_2(\mathrm{i})=-\mathrm{i}\frac{9}{100}\mathrm{e}^{-4}$$

$$\operatorname{Res}f_2(1+\mathrm{i})=\left(-\frac{1}{400}+\mathrm{i}\frac{7}{400}\right)\mathrm{e}^{-4(1+\mathrm{i})}$$

$$\operatorname{Res}f_2(-1+\mathrm{i})=\left(\frac{1}{400}+\mathrm{i}\frac{7}{400}\right)\mathrm{e}^{-4(1+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-4}\left(\frac{1}{400}+\mathrm{i}\frac{7}{400}\right)(\cos 4-\mathrm{i}\sin 4)$$

$$=\mathrm{e}^{-4}\left(\frac{\cos 4+7\sin 4}{400}+\mathrm{i}\frac{7\cos 4-\sin 4}{400}\right)$$

由留数定理，可得

$$I_2=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4x}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^4+4\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res}f_2(\mathrm{i})+\operatorname{Res}f_2(1+\mathrm{i})+\operatorname{Res}f_2(-1+\mathrm{i})\right]$$

$$=\frac{\pi\mathrm{e}^{-4}}{400}(18+\sin 4-7\cos 4)$$

则有原积分为

$$I=I_1+I_2=\frac{11\pi}{400}+\frac{\pi\mathrm{e}^{-4}}{400}(18+\sin 4-7\cos 4)$$

(5) 把积分变量 $x\to z$，作以原点为圆心的上半平面上的大圆周和实轴构成的逆时针闭合回路(并让上半圆周的半径趋于无穷大)，则实轴上的积分变为回路积分，被积函数为

$$f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}=\frac{z^2}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})\left[z+(1-\mathrm{i})\right]\left[z+(1+\mathrm{i})\right]}$$

$f(z)$ 的奇点为：$z_1=\mathrm{i}, z_2=-\mathrm{i}$ 为二阶极点；$z_3=-1+\mathrm{i}, z_4=-1-\mathrm{i}$ 为单极点．z_1，z_3 在上半复平面上，求这两个奇点的留数

$$\operatorname{Res} f(\mathrm{i})=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^2}{(z+\mathrm{i})^2\left(z^2+2z+2\right)}\right)=-\frac{3}{25}+\mathrm{i}\frac{9}{100}$$

$$\operatorname{Res} f(-1+\mathrm{i})=\lim_{z\to-1+\mathrm{i}}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left[z+(1+\mathrm{i})\right]}=\frac{3}{25}-\mathrm{i}\frac{4}{25}$$

故积分为

$$I=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res} f(\mathrm{i})+\operatorname{Res} f(-1+\mathrm{i})\right]=2\pi\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\frac{7}{100}\right)=\frac{7\pi}{50}$$

(6)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x,\quad 0<a<1$$

解见教材第 98 页，例 8.4.3.

8.5　计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^4}\mathrm{d}x,\ m>0$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,\ a>0$；

(3) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)}\mathrm{d}x,\ a>0, m$ 为正整数；

(6) $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$．

解　(1) 由于被积函数为偶函数，原积分变为

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

把积分变量 $x\to z$，作以原点为圆心的上半平面上的半圆周和实轴构成的逆时针闭合回路(并让上半圆周的半径趋于无穷大，由约当引理，此上半圆周上的积分为零)，实轴上的积分变为回路积分，则被积函数为

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{1+z^4}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right]}$$

此被积函数具有 4 个一阶极点

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}),\ z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}),\ z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),\ z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i})$$

在上半复平面有两个单极点

$$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}),\quad z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$$

它们的留数分别为

$$\operatorname{Res}f(z_2)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})\right](z^2-\mathrm{i})}\right]=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})}}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}m}\frac{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m-\mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m}{2\sqrt{2}(1+i)}$$

$$\operatorname{Res}f(z_3)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{(z^2+\mathrm{i})\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right]}\right]=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})}}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}m}\frac{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m+\mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}$$

由留数定理可得原积分为

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}m}\left[\frac{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m-\mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}+\frac{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m+\mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}\right]$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{-4\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}m}\left[\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m-\mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)(-1+\mathrm{i})+\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m+\mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)(1+\mathrm{i})\right]$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{-4\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}m}\left[\mathrm{i}2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m+\mathrm{i}2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}m}\left[\sin\frac{\sqrt{2}}{2}m+\cos\frac{\sqrt{2}}{2}m\right]$$

(2) 考虑到函数 $\varphi(x)=\dfrac{x\cos x}{x^2+a^2}$ 为奇函数，有

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x+\mathrm{i}x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

把积分变量 $x\to z$，作以原点为圆心的上半平面上的半圆周和实轴构成的逆时针闭合回路(并让上半圆周的半径趋于无穷)，积分变为回路积分. 由约当引理，在上半平面上的大圆周上的积分值为零. 被积函数为

$$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}$$

该函数有两个奇点：$z_1=\mathrm{i}a, z_2=-\mathrm{i}a$，只有 z_1 在上半复平面上，其留数为

$$\operatorname{Res}f(z_1)=\lim_{z\to\mathrm{i}a}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}a}=\frac{\mathrm{i}a\mathrm{e}^{-a}}{2\mathrm{i}a}=\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2}$$

则该积分为

$$I=2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{i})\operatorname{Res}f(z_1)=2\pi\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2}=\pi\mathrm{e}^{-a}$$

(3) 该积分的被积函数为偶函数，有

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$

由于 $x=0$ 为可去奇点，有

$$I=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\sin x\sin x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\sin x+\mathrm{i}\sin x\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$$

其中加上一项被积函数为奇函数的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos x\sin x}{x^2}\mathrm{d}x=0$.

把积分变量 $x\to z$，取被积函数为

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}$$

此函数只有一个奇点 $z=0$. 以此被积函数作积分

$$\oint_c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z$$

其中，闭合回路 c 为：以原点为圆心、R 为半径的上半平面逆时针方向的半圆周 C_R，

并在 x 轴上从 $-R$ 到 $-\varepsilon$；然后以原点为圆心、ε 为半径的在上半平面的顺时针方向的小半圆周 C_ε；最后在 x 轴上从 ε 到 R，其中 ε 为一无限小量，$R\to\infty$. 由于在积分回路 c 内，被积函数是解析的，故

$$\oint_c \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=0$$

同时此积分可以写为

$$\oint_c \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z+\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z$$

上式右边第一个积分，根据约当引理，当 $R\to\infty$ 时为

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=0$$

利用 $\sin z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$，考虑积分

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}-1}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\mathrm{i})^k}{k!}z^{k-2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\left\{2\mathrm{i}\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\mathrm{i})^{n+2}}{(n+2)!}z^n\right\}\mathrm{d}z,\quad n=k-2\\&=\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^{n+2}}{(n+2)!}z^n\mathrm{d}z\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，$z=\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$，则

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\mathrm{i})^{n+2}}{(n+2)!}z^n\mathrm{d}z&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\mathrm{i})^{n+2}\varepsilon^{n+1}}{(n+2)!}\int_{\pi}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\mathrm{i})^{n+2}\varepsilon^{n+1}}{(n+2)!}\left[1-(-1)^{n+1}\right]=0\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{0}\frac{\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta=-\mathrm{i}\pi$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\pi$$

当 $\varepsilon\to0$，$R\to\infty$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\R\to+\infty}}\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$$

且有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x}{x^2}\mathrm{d}x\right\}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=\pi$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\pi$$

故有

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

并且可以推导出

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^m x}{x^m}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{(m-1)}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^k C_m^k\left(\frac{m-2k}{2}\right)^{m-1},\quad m\geqslant 2$$

式中

$$C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!},\quad \left[\frac{m}{2}\right]=\begin{cases}n, & m=2n\\ n, & m=2n+1\end{cases},\quad n=0,1,2,\cdots$$

(4) 对于 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$，把变量 $x\to z$ 时，取被积函数为

$$f(z)=\frac{z\cos z}{z^2-2z+10}$$

考察函数

$$F(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-2z+10}=\frac{z\cos z}{z^2-2z+10}+\mathrm{i}\frac{z\sin z}{z^2-2z+10}$$

该函数的奇点为两个一阶极点：$z_1=1+\mathrm{i}3, z_2=1-\mathrm{i}3$，在上半复平面上的奇点只有 $z_1=1+\mathrm{i}3$，在实轴上无奇点. 作回路积分

$$\oint_c F(z)\mathrm{d}z=\oint_c\frac{z\cos z}{z^2-2z+10}\mathrm{d}z+\mathrm{i}\oint_c\frac{z\sin z}{z^2-2z+10}$$

其中，积分回路 c 为：以原点为圆心、R 为半径的上半平面逆时针方向的半圆周 C_R，以及在 x 轴上从 $-R$ 到 R 所构成的闭合回路.

由留数定理可知

$$\oint_c F(z)\mathrm{d}z=\oint_c \frac{z\cos z}{z^2-2z+10}\mathrm{d}z+\mathrm{i}\oint_c \frac{z\sin z}{z^2-2z+10}$$
$$=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} F(z_1)$$

则可得

$$\oint_c \frac{z\cos z}{z^2-2z+10}\mathrm{d}z=-2\pi\operatorname{Im}\operatorname{Res} F(z_1)$$

由约当引理可知

$$\int_{C_R} F(z)\mathrm{d}z=0$$

故有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=-2\pi\operatorname{Im}\operatorname{Res} F(z_1)$$

只需计算 $\operatorname{Res} F(z_1)$

$$\operatorname{Res} F(z_1)=\lim_{z\to 1+\mathrm{i}3} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+(1+\mathrm{i}3)}=\frac{\mathrm{e}^{-3}\cos 1}{2}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-3}\sin 1}{2}$$

即

$$\operatorname{Im}\operatorname{Res} F(z_1)=\frac{\mathrm{e}^{-3}\sin 1}{2}$$

故该积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{\mathrm{e}^{-3}\sin 1}{2}=-\pi\mathrm{e}^{-3}\sin 1$$

(5) 由于被积函数为偶函数，有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)}\mathrm{d}x-\mathrm{i}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x\left(x^2+a^2\right)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x\left(x^2+a^2\right)}\mathrm{d}x$$

其中，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x\left(x^2+a^2\right)}\mathrm{d}x=0$，因为被积函数为奇函数.

把积分变量 $x\to z$ 时，取被积函数为

$$F(z)=\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}$$

其奇点为：$z_1=0, z_2=ia, z_3=-ia$．其中 $z_1=0$ 是在实轴上的一阶极点，$z_2=ia$ 是在上半复平面上的一阶极点.

以此被积函数作回路积分

$$I=\oint_c \frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz$$

其中，闭合回路 c 为：以原点为圆心、R 为半径的上半平面的逆时针方向的半圆周 C_R，在 x 轴上从 $-R$ 到 $-\varepsilon$；然后以原点为圆心、ε 为半径的在上半平面的顺时针方向的小半圆周 C_ε；最后在 x 轴上从 ε 到 R，其中 ε 为一无限小量，且 $R\to\infty$．则

$$I=\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz+\int_{-R}^{\varepsilon}\frac{e^{imx}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx+\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{imx}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

由约当引理可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=0$$

计算

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{0}\frac{i}{a^2}d\theta=-i\pi\frac{1}{a^2}$$

$$\operatorname{Res}F(z_2)=\lim_{z\to ia}\frac{e^{imz}}{z\left(z+ia\right)}=-\frac{e^{-ma}}{2a^2}$$

由留数定理可知

$$I=2\pi i\operatorname{Res}F(z_2)=\frac{i\pi e^{-ma}}{a^2}$$

由于 $z_1=0$ 为 $F(z)$ 的可去奇点，故

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)}dx&=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx\\&=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\frac{1}{2i}\left\{\int_{-R}^{\varepsilon}\frac{e^{imx}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{imx}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx\right\}\\&=\frac{1}{2i}\left\{2\pi i\operatorname{Res}F(z_2)-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz\right\}\end{aligned}$$

$$=-\frac{\pi e^{-ma}}{2a^2}+\frac{\pi}{2a^2}=\frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-ma}\right)$$

(6) 由于被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ 没有奇偶对称性，且在 x 轴上只有 $x=-1$ 这个奇点. 把变量 $x\to z$ 时，考虑积分

$$I=\oint_c \frac{1}{z^3+1}\mathrm{d}z$$

其中，积分回路 c 如下.

c_1：从原点沿正 x 轴至 R，并令 $R\to\infty$；

C_R：沿半径为 R 逆时针转到幅角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的上半平面的圆弧；

c_2：再沿射线 $\arg z=\dfrac{2\pi}{3}$ 回到原点.

选择射线 c_2：$\arg z=\dfrac{2\pi}{3}$ 的原因是 $\arg\left(z^3\right)=2\pi$，同时我们可以避开 $x=-1$ 这个原积分被积函数的奇点.

此时被积函数为

$$F(z)=\frac{1}{z^3+1}$$

求此被积函数的奇点

$$z^3=-1=e^{i(\pi+2k\pi)}\quad\Rightarrow\quad z=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}，\ k\text{ 为整数}$$

可求出奇点为

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2=e^{i\pi}=-1,\ z_3=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

则在积分回路 c 内，只有奇点 $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，其留数为

$$\operatorname{Res}F\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(z+1)\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

由留数定理有

$$I=\oint_c \frac{1}{z^3+1}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\left[-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)\right]=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}-i\right)$$

由于

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^3+1}\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{R^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}+1}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=0$$

沿射线 c_2 的积分

$$\int_{c_2}\frac{1}{z^3+1}\mathrm{d}z=\int_{\infty}^{0}\frac{1}{r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\cdot 3}+1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\mathrm{d}r=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\int_{\infty}^{0}\frac{1}{r^3+1}\mathrm{d}r$$

$$=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

所以

$$I=\oint_c\frac{1}{z^3+1}\mathrm{d}z=\int_{c_1}\frac{1}{z^3+1}\mathrm{d}z+\int_{c_2}\frac{1}{z^3+1}\mathrm{d}z$$

$$=\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)$$

可得

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}\cdot\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

8.6　计算下列积分：

(1) $P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x$；　　(2) $P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-1}{x^2}\mathrm{d}x,\quad k>0$；

(3) $P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x$；　　(4) $P\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 把积分变量 $x\to z$ 时，考虑回路积分

$$I=\oint_c\frac{1}{z^3-1}\mathrm{d}z$$

积分回路 c 为：以原点为圆心、R 为半径的在上半平面的逆时针方向的半圆周 C_R，在 x 轴上从 $-R$ 到 $1-\varepsilon$；然后以 1 为圆心、ε 为半径的在上半平面的顺时针方向的小半圆周 C_ε；最后在 x 轴上从 $1+\varepsilon$ 到 R，其中 ε 为一无限小量.

在此积分中，被积函数为

$$f(z)=\frac{1}{z^3-1}=\frac{1}{(z-1)\left(z^2+z+1\right)}$$

$f(z)$的奇点有：$z_1=1, z_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$，都是单极点.

在实轴上有奇点$z_1=1$，在上半平面上有奇点$z_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. 计算这两个极点的留数

$$\operatorname{Res} f(z_1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2+z+1}=\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Res} f(z_2)=\lim_{z\to -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{1}{6}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$$

由于

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^3-1}\mathrm{d}z=0$$

故积分

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(z_2)+\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(z_1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

(2) 把积分变量$x\to z$时，被积函数变为

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-1}{z^2}$$

由$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$的泰勒展开式可知

$$f(z)=\frac{\mathrm{i}k}{z}-\frac{k^2}{2}+\frac{(\mathrm{i}k)^3}{3!}z+\cdots$$

因此，可以判断只有$z=0$为函数$f(z)$的单极点，且其留数为

$$\operatorname{Res} f(0)=\lim_{z\to 0}z\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-1}{z^2}=\mathrm{i}k$$

作回路积分

$$I=\oint_c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-1}{z^2}\mathrm{d}z$$

积分回路c为：以原点为圆心、R为半径的在上半平面的逆时针方向的半圆周C_R，在x轴上从$-R$到$-\varepsilon$；然后以原点为圆心、ε为半径的在上半平面的顺时针方向的小半圆周c_ε；最后在x轴上从ε到R，其中ε为一无限小量，且$R\to\infty$，则

$$I=\oint_c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-1}{z^2}\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-1}{z^2}\mathrm{d}z+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-1}{z^2}\mathrm{d}z+P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-1}{x^2}\mathrm{d}x$$

对于

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-1}{z^2}\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{z^2}\mathrm{d}z-\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0$$

其中，由约当引理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{z^2}\mathrm{d}z=0$$

由 $\lim\limits_{|z|\to\infty}z\cdot\dfrac{1}{z^2}=0$，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0$$

故积分

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-1}{x^2}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,f(0)=\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}k=-k\pi$$

(3) 把积分变量 $x\to z$ 时，被积函数变为

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

被积函数只在实轴上有 3 个单极点

$$z_1=0,\quad z_2=1,\quad z_3=2$$

这三个单极点的留数为

$$\mathrm{Res}\,f(0)=\frac{1}{2},\ \mathrm{Res}\,f(1)=-1,\ \mathrm{Res}\,f(2)=\frac{1}{2}$$

由于被积函数在上半复平面没有奇点，且满足

$$\lim_{|z|\to\infty}zf(z)=0$$

故积分

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}\,f(0)+\mathrm{Res}\,f(1)+\mathrm{Res}\,f(2)\right]$$

$$=\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)=0$$

注：我们作回路积分所取的回路是在实轴上从上面绕过三个奇点的小半圆周和以原点为圆心在上半复平面上的大半圆周. 由于上半复平面上没有奇点，留数为零，故回路积分为零. 而被积函数所满足的条件使得积分 $\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$，因此在实轴上三个奇点的小圆周积分(留数的贡献)总和也必定为零.

(4) 对于被积函数

$$f(x)=\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}=\frac{\cos 2a-\cos 2x}{x^2-a^2}$$

把变量 $x\to z$，考虑复变函数

$$f(z)=\frac{\cos 2a-\cos 2z}{z^2-a^2}$$

此函数为偶函数，且有两个一阶极点：$z_1=a, z_2=-a$，不失普遍性，设 $a>0,\ a\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}P\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2a}{x^2-a^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\cos 2a}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

分别考虑上述两个主值积分，把变量 $x\to z$ 时，考虑两个回路积分

$$I_1=\oint_c\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z,\quad I_2=\oint_c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}\mathrm{d}z$$

其中，两个积分回路都为 c：以原点为圆心、R 为半径沿逆时针方向的上半圆周 C_R，再从 x 轴的 $-R$ 沿 x 轴的正方向到 $-a-\varepsilon$；然后以顺时针方向绕以 $-a$ 为圆心、ε 为半径的上半小圆周 c_ε^2 到达 x 轴上的 $-a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正向由 $-a+\varepsilon$ 到 $a-\varepsilon$；最后以顺时针方向绕以 a 为圆心、ε 为半径的上半小圆周 c_ε^1 到达 x 轴上的 $a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正方向由 $a+\varepsilon$ 到 R 所构成的闭合回路. 令 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$，则两个回路积分的被积函数分别为

$$F_1(z)=\frac{1}{z^2-a^2},\quad F_2(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}$$

这两个被积函数的奇点都在实轴上，都为一阶极点 $z_1=a, z_2=-a$，它们的留数分别为

$$\operatorname{Res}F_1(z_1)=\frac{1}{2a},\quad \operatorname{Res}F_1(z_2)=-\frac{1}{2a}$$

$$\operatorname{Res}F_2(z_1)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2a}}{2a},\quad \operatorname{Res}F_2(z_2)=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2a}}{2a}$$

由于这两个回路积分的被积函数的奇点都不在回路 c 内，由留数定理可知

$$I_1=\oint_c\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=0,\quad I_2=\oint_c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=0$$

对于

$$\begin{aligned}I_1&=\oint_c\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z\\&=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon^1}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon^2}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{|z|\to\infty}zF_1(z)=0$，故 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=0$．则

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\pi\left[\operatorname{Res}F_1(z_1)+\operatorname{Res}F_1(z_2)\right]=\mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}\right)=0$$

对于

$$\begin{aligned}I_2&=\oint_c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}\mathrm{d}z\\&=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon^1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由约当引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=0$$

则

$$\begin{aligned}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{x^2-a^2}\mathrm{d}x&=\mathrm{i}\pi\left[\operatorname{Res}F_2(z_1)+\operatorname{Res}F_2(z_2)\right]\\&=\mathrm{i}\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2a}}{2a}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2a}}{2a}\right)=-\pi\frac{\sin2a}{a}\end{aligned}$$

由于

$$P\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{\cos2a}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$$

可得

$$P\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\pi\frac{\sin2a}{2a}$$

8.7　在下列情况下，计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$，$a>0$．

(1) 让 $a\to a+\mathrm{i}\varepsilon$，$\varepsilon\to0$，$\varepsilon>0$；

(2) 让 $a\to a-\mathrm{i}\varepsilon,\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0$；

(3) 直接计算该积分的柯西主值积分.

解　本题是给出处理瑕积分的另一种方法. 被积函数在 $x=a$ 和 $x=-a$ 点是奇异的，当我们把变量 $x\to z$ 时，积分延拓到复平面的上半平面作回路积分，前面用的是柯西主值积分的方法. 如果我们把奇点移离 x 轴 $\mathrm{i}\varepsilon$ 的距离，此积分变成在实轴上没有奇点的积分，是可以作通常的积分的. 取 $\varepsilon\to 0$，使得离开实轴的点逼近奇点，由此可看到这样的处理方法与柯西主值积分方法的联系. 这也是物理学中常用的一种处理此类积分的方法.

(1) 当 $a\to a+\mathrm{i}\varepsilon,\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0$ 时，有 $-a\to -a-\mathrm{i}\varepsilon,\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0$，考虑回路积分

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_c \frac{1}{(z-a-\mathrm{i}\varepsilon)(z+a+\mathrm{i}\varepsilon)}\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_c \frac{1}{\left[z-(a+\mathrm{i}\varepsilon)\right]\left[z+(a+\mathrm{i}\varepsilon)\right]}\mathrm{d}z$$

积分回路 c 为：实轴与以原点为圆心、半径为无穷大的上半圆周组成的逆时针的闭合回路. 则在积分回路内只有一阶极点 $z=a+\mathrm{i}\varepsilon$，其留数为

$$\operatorname{Res} f(a+\mathrm{i}\varepsilon)=\frac{1}{2a+\mathrm{i}2\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2a}$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{\left[z-(a+\mathrm{i}\varepsilon)\right]\left[z+(a+\mathrm{i}\varepsilon)\right]}$ 满足 $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z)=0$，故在上半平面上的大圆周的积分为零. 由留数定理，则有

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_c\frac{1}{(z-a+\mathrm{i}\varepsilon)(z+a-\mathrm{i}\varepsilon)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2a}=\mathrm{i}\frac{\pi}{a}$$

(2) 当 $a\to a-\mathrm{i}\varepsilon,\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0$ 时，有 $-a\to -a+\mathrm{i}\varepsilon,\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0$，考虑回路积分

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_c\frac{1}{(z-a+\mathrm{i}\varepsilon)(z+a-\mathrm{i}\varepsilon)}\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_c\frac{1}{\left[z-(a-\mathrm{i}\varepsilon)\right]\left[z-(-a+\mathrm{i}\varepsilon)\right]}\mathrm{d}z$$

取的积分回路 c 与(1)同，则在积分回路内只有一阶极点 $z=-a+\mathrm{i}\varepsilon$，其留数为

$$\operatorname{Res} f(-a+\mathrm{i}\varepsilon)=\frac{1}{-2a+\mathrm{i}2\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2a}$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{\left[z-(a-\mathrm{i}\varepsilon)\right]\left[z-(-a+\mathrm{i}\varepsilon)\right]}$ 满足 $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z)=0$，故在上半平面上的大圆周的积分为零. 由留数定理，则有

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_c\frac{1}{(z-a+\mathrm{i}\varepsilon)(z+a-\mathrm{i}\varepsilon)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-1}{2a}=-\mathrm{i}\frac{\pi}{a}$$

(3) 直接计算柯西主值积分，考虑回路积分

$$I=\oint_c\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=\oint_c\frac{1}{(z-a)(z+a)}\mathrm{d}z$$

积分回路为 c：以原点为圆心、R 为半径沿逆时针方向的上半圆周 C_R，再从 x 轴的 $-R$ 沿 x 轴的正方向到 $-a-\varepsilon$；然后以顺时针方向绕以 $-a$ 为圆心、ε 为半径的上半小圆周 c_ε^2 到达 x 轴上的 $-a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正向由 $-a+\varepsilon$ 到 $a-\varepsilon$；最后以顺时针方向绕以 a 为圆心、ε 为半径的上半小圆周 c_ε^1 到达 x 轴上的 $a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正方向由 $a+\varepsilon$ 到 R 所构成的闭合回路. 再令 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$.

被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-a^2}$ 有两个一阶极点：$z=a,z=-a$，留数分别为

$$\mathrm{Res}\,f(a)=\frac{1}{2a},\quad \mathrm{Res}\,f(-a)=\frac{-1}{2a}$$

由于两个奇点都不在回路 c 内，由留数定理可知

$$I=\oint_c\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=0$$

则可得

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\cdot\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}\right)=0$$

讨论：

(a) 如积分回路取另一种路径，即 c：从 x 轴的 $-R$ 开始，沿 x 轴的正方向由 $-R\to-a-\varepsilon$；以逆时针方向绕以 $-a$ 为圆心、ε 为半径的下半小圆周 c_ε^2 到达 x 轴上的 $-a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正向由 $-a+\varepsilon\to a-\varepsilon$；以顺时针方向绕以 a 为圆心、ε 为半径的上半小圆周 c_ε^1 到达 x 轴上的 $a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正方向由 $a+\varepsilon\to R$；以逆时针方向沿以原点为圆心、R 为半径的上半圆周 C_R 到达 x 轴的 $-R$ 点. 令 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$.

这样被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-a^2}$ 有两个奇点：$z_1=a,z_2=-a$，它们的留数为

$$\mathrm{Res}\,f(z_1)=\frac{1}{2a},\quad \mathrm{Res}\,f(z_2)=\frac{-1}{2a}$$

在 c 内有一个一阶极点 $z_2=-a$，由留数定理有

$$I=\oint_c \frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{-1}{2a}=-\mathrm{i}\frac{\pi}{a}$$

考虑到 $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z)=0$，有 $\int_{C_R}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=0$．因此

$$\begin{aligned}&\oint_c \frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z\\&=\int_{C_R}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x+\int_{c_\varepsilon^2}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z+\int_{c_\varepsilon^1}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\frac{\pi}{a}\end{aligned}$$

由于半圆周 c_ε^2 的积分为

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon^2}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c_\varepsilon^2}\frac{1}{(z-a)(z+a)}\mathrm{d}(z+a)\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{2\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\left(\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-2a\right)\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\frac{\pi}{2a}\end{aligned}$$

故可得

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{i}\pi}{a}-\frac{\mathrm{i}\pi}{2a}+\frac{\mathrm{i}\pi}{2a}=-\frac{\mathrm{i}\pi}{a}$$

这个结果与(2)的结果相同，说明这种积分回路的取法与把极点 $-a$ 上移到 $-a+\mathrm{i}\varepsilon$ 的方法等价.

(b) 如果我们取回路 c：从 x 轴的 $-R$ 开始，沿 x 轴的正方向由 $-R\to-a-\varepsilon$；以顺时针方向绕以 $-a$ 为圆心、ε 为半径的上半小圆周 c_ε^2 到达 x 轴上的 $-a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正向由 $-a+\varepsilon\to a-\varepsilon$；以逆时针方向绕以 a 为圆心、ε 为半径的下半小圆周 c_ε^1 到达 x 轴上的 $a+\varepsilon$ 点，再沿 x 轴的正方向由 $a+\varepsilon\to R$；以逆时针方向沿以原点为圆心、R 为半径的上半圆周 C_R 到达 x 轴的 $-R$ 点．令 $R\to\infty,\varepsilon\to0$．

这样被积函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-a^2}$ 有两个奇点：$z_1=a,z_2=-a$，它们的留数为

$$\mathrm{Res}f(z_1)=\frac{1}{2a},\quad \mathrm{Res}f(z_2)=\frac{-1}{2a}$$

在 c 内有一个一阶极点 $z_1=a$，由留数定理有

$$I=\oint_c \frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2a}=\mathrm{i}\frac{\pi}{a}$$

而半小圆周 c_ε^1 ($z-a=\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$)的积分为

$$\int_{c_\varepsilon^1}\frac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c_\varepsilon^1}\frac{1}{(z-a)(z+a)}\mathrm{d}(z-a)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\left(\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+2a\right)\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta=-\mathrm{i}\frac{\pi}{2a}$$

与(a)的做法相同，可得

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\frac{\pi}{a}+\frac{\mathrm{i}\pi}{2a}+\mathrm{i}\pi\left(-\frac{1}{2a}\right)=\frac{\mathrm{i}\pi}{a}$$

这个结果与(1)的结果相同，说明这种积分回路的取法与把极点 a 上移到 $a+\mathrm{i}\varepsilon$ 的方法等价.

在物理上，我们往往采用(1)或(a)、(2)或(b)的方法去做，具体用哪种方法，就要根据具体物理问题的要求，做出符合物理问题的结论.

第三篇　积分变换与δ函数

第九章　傅里叶变换

内 容 提 要

一、傅里叶级数

1. 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开的傅里叶(Fourier)级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\quad b_0=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

2. 以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上展开的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x,\quad b_0=0$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

3. 在函数系 $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 中，以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

其中

$$C_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

此展开式可写成

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

4. 以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上也可以展成复数形式的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}x}$$

$$C_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}x}\mathrm{d}x$$

或写成

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}x}$$

二、傅里叶变换

1. 一维傅里叶变换的定义

定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的实函数 $f(x)$，在任何有限的区间上满足狄利克雷(Dirichlet)条件，且满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $f(x)$ 的傅里叶变换为

$$F\left[f(x)\right]\equiv C(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

其傅里叶逆变换为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

其中，$F\left[f(x)\right]\equiv C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换的像函数，$f(x)$ 称为 $F\left[f(x)\right]\equiv C(k)$ 的原函数.

注：此积分变换的变换核为指数函数，则在指数上的函数必须是无量纲的量，即 $\mathrm{i}kx$ 是无量纲的，$[x]=L,[k]=L^{-1}$，k 的物理意义为单位长度的波数，即波矢(如果变量不是用 k，而是用 ω，其量纲和物理意义仍然与 k 相同). 如果指数上的两个变量都具有明确的物理意义且两个量的乘积不为无量纲的量，则在指数上需要再乘上一个平衡量纲的常数，使得指数上的量为无量纲的量.

2. 三维空间中傅里叶变换的定义

三维空间中的傅里叶变换

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}C(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

$$C(\boldsymbol{k})=\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

3. 傅里叶变换的基本性质

1) 线性定理

$$F\left[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)\right]=\alpha_1 F\left[f_1(x)\right]+\alpha_2 F\left[f_2(x)\right]$$

2) 延迟定理

$$F\left[f(x-x_0)\right]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}F\left[f(x)\right]$$

3) 位移定理

$$F\left[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\right]=C(k-k_0)$$

4) 标度变换定理

当变量 $x\to x'=ax, a\neq 0$ 时，有

$$F\left[f(ax)\right]=\frac{1}{|a|}C\left(\frac{k}{a}\right)$$

5) 微分定理

当函数 $f(x)$ 具有性质：$f^{(n-1)}(x)\xrightarrow{|x|\to\infty}0, n=1,2,\cdots$ 时，有

$$F\left[f'(x)\right]=\mathrm{i}kF\left[f(x)\right]$$

$$F\left[f^{(n)}(x)\right]=(\mathrm{i}k)^n F\left[f(x)\right]$$

6) 积分定理

$$F\left[\int_{x_0}^{x}f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}k}F\left[f(x)\right]$$

7) 卷积定理

$$F\left[f_1(x)*f_2(x)\right]=F\left[f_1(x)\right]F\left[f_2(x)\right]$$

其中

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-\xi)f_2(\xi)\mathrm{d}\xi$$

称为函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积.

$$F\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=F\left[f_1(x)\right]*F\left[f_2(x)\right]$$

其中

$$F\left[f_1(x)\right]*F\left[f_2(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}C_1(p)C_2(k-p)\mathrm{d}p$$

注：在频率分析中，往往得到的是一段函数(信号)，我们要根据问题的要求，对此函数进行延拓：

(1) 把函数进行奇延拓或偶延拓(或其他延拓)，使其成为周期函数，再作傅里叶级数展开；

(2) 把函数进行奇延拓或偶延拓(或其他延拓)，使其成为全空间域(或全时间域)上的非周期函数，再作傅里叶积分变换.

习 题 详 解

9.1　如果 $f(x)$ 是实函数，即 $f(x)=f^*(x)$，当 $f(x)$ 展成如下形式的傅里叶级数时：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

请求解系数 c_n 要满足什么条件.

解　由 $f(x)=f^*(x)$，有

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=f*(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n{}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$$

可得 $c_n{}^*=c_{-n}$ 或 $c_n=c_{-n}{}^*$，若 c_n 为实数，则有 $c_n=c_{-n}$.

9.2　请证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\frac{x}{2}$$

证　对函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上以 2π 为周期展开

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

由于 $f(x)$ 为奇函数，故傅里叶级数展开中的系数 $a_0=0, a_n=0$，并且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\cdot\sin nx\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-\frac{x}{n}\cdot\mathrm{d}\cos nx$$

$$=-\frac{x}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{n}(-1)^n=\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}=\frac{x}{2}$$

9.3　将如下函数展成傅里叶级数：

(1) $f(x)=x, x\in[0,2l]$ 展成以 $2l$ 为周期的傅里叶级数；

(2) $f(x)=x, x\in[0,l]$ 展成以 $2l$ 为周期的傅里叶级数；

(3) $f(x)=|x|, x\in[-l,l]$ 展成以 $2l$ 为周期的傅里叶级数.

解　(1) 由

$$f(x)=x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

计算展开系数

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_0^{2l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2l}\int_0^{2l}x\mathrm{d}x=l$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^{2l}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{2l}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{2l}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2l}{n\pi}$$

故有

$$x=l-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n\pi}\sin nx$$

(2) 题目只给出半个周期的函数形式，有如下三种方式进行延拓：

① 对 $f(x)=x$ 在 $[-l,l]$ 作奇延拓，$f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上为奇函数，只能展开成正弦的傅里叶级数，则有

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}$$

故有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}x$$

② 对 $f(x)=x$ 在 $[-l,l]$ 上作偶延拓，即

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant l\\ -x, & -l\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

则 $f(x)$ 只能展开成余弦的傅里叶级数，求其展开系数，有

$$b_n=0$$

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{0}(-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2l}\int_{0}^{l}x\mathrm{d}x=\frac{l}{2}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x-\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l-\frac{2}{n\pi}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\end{aligned}$$

可得

$$f(x)=\frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{n\pi x}{l}$$

③ 重新定义周期函数 $f(x),x\in[0,2l]$

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant l\\ 0, & l<x\leqslant 2l\end{cases}$$

这样定义的函数没有奇偶性，则

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_0^{2l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2l}\int_0^l x\mathrm{d}x=\frac{l}{4}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l-\frac{1}{n\pi}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{l}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=\frac{l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l+\frac{1}{n\pi}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{l}{n\pi}(-1)^n=\frac{l}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

故得

$$f(x)=\frac{l}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{l}{n\pi}(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$$

(3) $f(x)=|x|, x\in[-l,l]$是偶函数，只能展开成余弦的级数，其结果与(2)中的②对$f(x)$的偶延拓是相同的函数，展开结果相同. 即

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|x|\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^l x\mathrm{d}x=\frac{l}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|x|\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l-\frac{2}{n\pi}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

则

$$f(x)=\frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{n\pi x}{l}$$

9.4　电压模式为$E(t)=E_0\sin\omega t$（E_0为常数)的交流电.

(1) 经过半波整流后，其电压的模式为

$$E(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[-\dfrac{\pi}{\omega},0\right]\\ E_0\sin\omega t, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{\omega}\right]\end{cases}$$

(2) 经过全波整流后，其电压模式为

$$E(t)=E_0|\sin\omega t|$$

试把以上这两种整流后的电压模式展成傅里叶级数，并对这两种展开的结果，从直流成分、基波成分及高次谐波部分等几方面进行比较.

解　(1) 先计算半波整流$E(t)$的傅里叶级数的展开系数

$$E(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega t+b_n\sin\omega t)$$

$$a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\mathrm{d}t=-\frac{E_0}{2\pi}\left[\cos\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{E_0}{\pi}$$

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\cos n\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(1+n)\omega t\mathrm{d}t+\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(1-n)\omega t\mathrm{d}t$$

当 $n=1$ 时，

$$a_1=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega t\mathrm{d}t=-\frac{E_0}{4\pi}\cos 2\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=0$$

当 $n\neq 1$ 时，

$$a_n=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(n+1)\omega t\mathrm{d}t-\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(n-1)\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\omega t+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

当 n 为奇数，即 $n=2k+1,k=1,2,3,\cdots$ 时，

$$a_{2k+1}=0$$

当 n 为偶数，即 $n=2k,k=1,2,3,\cdots$ 时，

$$a_{2k}=\frac{E_0}{2\pi}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{2}{2k-1}\right)=-\frac{2E_0}{\pi\left(4k^2-1\right)}$$

下面计算 b_n：

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\sin n\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\cos(n-1)\omega t\mathrm{d}t-\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\cos(n+1)\omega t\mathrm{d}t$$

当 $n=1$ 时，

$$b_1=\frac{E_0}{2}-\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\cos 2\omega t\mathrm{d}t=\frac{E_0}{2}$$

当 $n\neq 1$ 时，

$$b_n=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\cos(n-1)\omega t\mathrm{d}t-\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\cos(n+1)\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\omega t-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\omega t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=0$$

故对于半波整流而言

$$E(t)=\frac{E_0}{\pi}+\frac{E_0}{2}\sin\omega t-\frac{2E_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2k\omega t$$

(2) 由于全波整流，$E(t)=E_0|\sin\omega t|$，$t\in\left[-\frac{\pi}{\omega},\ \frac{\pi}{\omega}\right]$，是偶函数，则

$$E(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega t+b_n\sin\omega t)$$

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{2E_0}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\cos n\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E_0\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(1+n)\omega t\mathrm{d}t+\frac{E_0\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(1-n)\omega t\mathrm{d}t$$

当$n=1$时，

$$a_1=\frac{E_0\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega t\mathrm{d}t=-\frac{E_0}{2\pi}\cos 2\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=0$$

当$n\neq 1$时，

$$a_n=\frac{E_0\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(1+n)\omega t\mathrm{d}t-\frac{E_0\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(n-1)\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\omega t+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

当n为奇数，即$n=2k+1,k=1,2,3,\cdots$时，

$$a_{2k+1}=0$$

当n为偶数，即$n=2k,k=1,2,3,\cdots$时，

$$a_{2k}=\frac{E_0}{\pi}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{2}{2k-1}\right)=-\frac{4E_0}{\pi\left(4k^2-1\right)}$$

下面计算 b_n：

$$b_1=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{\omega E_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}t=E_0$$

当 $n\neq 1$ 时，在积分区间内，由于 $E(t)=E_0|\sin\omega t|$ 为偶函数，而 $\sin n\omega t$ 为奇函数，有

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0|\sin\omega t|\sin n\omega t\mathrm{d}t=0,\quad n\neq 1$$

注：由三角函数的正交性，在一个周期内的积分，对被积函数而言，$\sin\omega t$ 和 $\sin n\omega t, n\neq 1$ 的积分也为零.

故对全波整流而言，

$$E(t)=\frac{2E_0}{\pi}+E_0\sin\omega t-\frac{4E_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2k\omega t$$

全波整流与半波整流比较，其直流成分 $\frac{2E_0}{\pi}$ 比半波整流的大一倍，其基波的振幅及高次谐波的振幅都比半波整流的大一倍，故全波整流的效率要高.

9.5　把振幅按双曲线衰减的振动

$$f(t)=\frac{1}{t}\sin\omega_0 t$$

展成傅里叶积分，并作出原函数与像函数的简单示意图.

解

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\begin{aligned}C(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\sin\omega_0 t\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\sin\omega_0 t\cos\omega t\mathrm{d}t-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\sin\omega_0 t\sin\omega t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\left[\sin(\omega_0+\omega)t-\sin(\omega-\omega_0)t\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中，由于被积函数为奇函数，$\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\sin\omega_0 t\sin\omega t\mathrm{d}t=0$.

不失一般性，设 $\omega_0>0$. 当 $\omega-\omega_0>0$ 时，

$$C(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\left[\sin(\omega_0+\omega)t-\sin(\omega-\omega_0)t\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega_0+\omega)t}{(\omega_0+\omega)t}\mathrm{d}(\omega_0+\omega)t-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega-\omega_0)t}{(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}(\omega-\omega_0)t$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

其中用到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=\begin{cases}\pi, & a>0\\ -\pi, & a<0\end{cases}$$

当$\omega-\omega_0<0$时，

$$C(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\left[\sin(\omega_0+\omega)t-\sin(\omega-\omega_0)t\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\left[\sin(\omega_0+\omega)t+\sin(\omega_0-\omega)t\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

当$\omega-\omega_0=0$时，

$$C(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\left[\sin(\omega_0+\omega)t-\sin(\omega-\omega_0)t\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\sin 2\omega_0 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

故可得

$$C(\omega)=\pi\left[1-H(\omega-\omega_0)\right],\quad \omega\neq\omega_0$$
$$C(\omega)=\frac{\pi}{2},\quad \omega=\omega_0$$

所以$f(t)$的傅里叶变换为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-H(\omega-\omega_0)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, & \omega\neq\omega_0\\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, & \omega=\omega_0\end{cases}$$

9.6　把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=\mathrm{e}^{-\alpha x}$，$a>0$在边界为$f(0)=0$的条件下展成傅里叶积分.

解　把函数$f(x)$作奇延拓

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-ax}, & x>0\\ 0, & x=0\\ -\mathrm{e}^{ax}, & x<0\end{cases},\qquad a>0$$

则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$\begin{aligned}C(k)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\&=-\int_{-\infty}^{0^-}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x+\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\&=-\int_{-\infty}^{0^-}\mathrm{e}^{ax}\cos kx\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{0^-}\mathrm{e}^{ax}\sin kx\mathrm{d}x+\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\mathrm{d}x\\&=\int_{\infty}^{0^+}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{\infty}^{0^+}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\mathrm{d}x+\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\mathrm{d}x\\&=-2\mathrm{i}\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\mathrm{d}x\\&=\frac{2\mathrm{i}}{a}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\Big|_{0^+}^{\infty}-\frac{2k\mathrm{i}}{a}\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\mathrm{d}x\\&=\frac{2k\mathrm{i}}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\cos kx\Big|_{0^+}^{\infty}+\frac{2k^2\mathrm{i}}{a^2}\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\mathrm{d}x=-\frac{2k\mathrm{i}}{a^2}+\frac{2k^2\mathrm{i}}{a^2}\int_{0^+}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin kx\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由等式的第五行和第七行，可得

$$C(k)=\frac{-\mathrm{i}2k}{k^2+a^2}$$

由此式可知，$C(k)$为k的奇函数. 故$f(x)$的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}2k}{k^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{k^2+a^2}(\cos kx+\mathrm{i}\sin kx)\mathrm{d}k\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k}{k^2+a^2}\sin kx\mathrm{d}k\end{aligned}$$

9.7　把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=1-H(x-a)$，$a>0$在边界为$f'(0)=0$的条件下展成傅里叶积分.

解　在边界条件为$f'(0)=0$下，$f(x)$作偶延拓，即

$$f(x)=1-H(x-a)=\begin{cases}0, & x<-a,\quad x>a\\ 1, & -a<x<a\end{cases}$$

则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$C(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{a}\cos kx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\sin ka}{k}$$

可知$C(k)$为k的偶函数. 则$f(x)$的傅里叶变换为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ka}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ka}{k}\cos kx\mathrm{d}k$$

9.8　试用傅里叶变换求解有阻尼的谐振子方程

$$\ddot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=f(t),\qquad \beta>0$$

解　设$F\left[x(t)\right]=C(\omega),F\left[f(t)\right]=g(\omega)$，$g(\omega)$为已知可求，由傅里叶变换的线性定理与微分定理及原方程得

$$-\omega^2C(\omega)+\mathrm{i}\omega\beta C(\omega)+\omega_0^2C(\omega)=g(\omega)$$

可得

$$C(\omega)=\frac{g(\omega)}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\omega\beta}=\frac{g(\omega)}{-\left(\omega-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\right)^2+\omega_0^2-\frac{\beta^2}{4}}=g(\omega)\cdot\frac{-1}{\left(\omega-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\omega_0^2-\frac{\beta^2}{4}\right)}$$

令$\omega'^2=\omega_0^2-\dfrac{\beta^2}{4}$，则

$$C(\omega)=g(\omega)\cdot\frac{-1}{\left(\omega-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\right)^2-\omega'^2}$$

令$F\left[h(t)\right]=\dfrac{-1}{\left(\omega-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\right)^2-\omega'^2}$，则

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\left(\omega-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\right)^2-\omega'^2}\mathrm{d}\omega=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\right)t}}{\left(\omega-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}\right)^2-\omega'^2}\mathrm{d}\omega$$

令$\zeta=\omega-\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}$，则

$$h(t)=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\int_{-\infty-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}^{\infty-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta t}}{\zeta^2-\omega'^2}\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\int_{-\infty-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}^{\infty-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta t}}{(\zeta-\omega')(\zeta+\omega')}\mathrm{d}\zeta$$

对 ζ 作回路积分，积分回路 c：平行于 x 轴、从 $-\infty-\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}\to\infty-\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}$ 的直线和以原点为圆心、$R(R\to\infty)$ 为半径、从 $R-\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}$ 开始沿逆时针方向到 $-R-\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}$ 的圆弧 C_R 所构成的闭合积分回路. 由约当引理可知，在 C_R 上的积分为零. 在积分回路 c 内只有两个一阶极点：$\zeta=\pm\omega'$，被积函数的留数分别为

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}}{2\omega'},\quad -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}}{2\omega'}$$

由留数定理可得

$$h(t)=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}}{2\omega'}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}}{2\omega'}\right)=\frac{1}{\omega'}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\sin\omega' t$$

由卷积定理有

$$\begin{aligned}x(t)&=f(t)*h(t)\\&=\frac{1}{\omega'}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\tau}\sin\omega'\tau\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

讨论：

(1) 当 $\omega_0>\dfrac{\beta}{2}$ 时，

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\dfrac{\beta^2}{4}}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\tau}\sin\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{\beta^2}{4}}\tau\mathrm{d}\tau$$

此解一般为有阻尼的衰减的振动，要看 $f(t)$ 的形式来确定.

(2) 当 $\omega_0<\dfrac{\beta}{2}$ 时，$\omega'=\pm\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}$，有 $|\omega'|<\dfrac{\beta}{2}$，

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\tau}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}\tau}-\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}\tau}}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\tau}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}\tau}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}\tau}}{2}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\tau}\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\omega_0^2}\,\tau\right)\mathrm{d}\tau$$

此解一般为过阻尼的情况，要看 $f(t)$ 的形式来确定.

(3) 当 $\omega_0=\dfrac{\beta}{2}$ 时，

$$C(\omega)=g(\omega)\cdot\frac{-1}{\left(\omega-\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}\right)^2}$$

此时 $C(k)$ 在积分的虚轴上出现 $\omega=\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}$ 的二阶极点，先求 $h(t)$.

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\left(\omega-\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}\right)^2}\mathrm{d}\omega$$

对 ω 作回路积分，积分回路 c：以实轴 ω 轴，和以原点为圆心、$R(R\to\infty)$ 为半径、从 R 沿逆时针方向到 $-R$ 的半圆 C_R 所构成的闭合积分回路. 在 C_R 上的积分为零，在积分回路 c 内只有一个二阶极点：$\omega=\mathrm{i}\dfrac{\beta}{2}$，被积函数的留数为

$$\lim_{\omega\to\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)=-\mathrm{i}t\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}$$

故

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}t\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\right)=t\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}$$

由卷积定理，有

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\tau\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\tau}\mathrm{d}\tau$$

注：本题中方程的非齐次项 $f(t)$ 要满足傅里叶变换的条件，方可用傅里叶变换的方法解此方程. 例如，$f(t)=A\sin\Omega t$ 的形式，其不满足傅里叶变换的条件，因此不能用傅里叶变换的方法来解此方程.

第十章　拉普拉斯变换

内 容 提 要

一、拉普拉斯变换

1. 拉普拉斯变换的定义

设 $f(t)$ 为定义在 $[0,\infty)$ 上的实函数，t 为实变数，而 p 为复数，若积分

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

存在，则定义 $F(p)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为

$$L\left[f(t)\right]\equiv F(p)\text{ 或简为 }f(t)\fallingdotseq F(p)$$

其中，$p=s+\mathrm{i}\sigma$，$s\geqslant 0$．$F(p)$ 称为 $f(t)$ 拉普拉斯变换的像函数，$f(t)$ 为拉普拉斯变换的原函数.

在拉普拉斯变换中，对变换核中 p 的实部 s 是有严格要求的，即要求存在某个 $s_0\geqslant 0$，当 $s>s_0$ 时，使得

$$\int_0^{\infty}\left|f(t)\mathrm{e}^{-st}\right|\mathrm{d}t$$

收敛. 我们称 s_0 为此拉普拉斯变换的收敛横坐标.

2. 拉普拉斯变换的基本性质

1) 线性定理

$$\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\fallingdotseq \alpha_1 F_1(p)+\alpha_2 F_2(p)$$

2) 延迟定理

$$f(t-\tau)\fallingdotseq \mathrm{e}^{-p\tau}F(p),\quad \tau>0$$

3) 位移定理

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\fallingdotseq F(p+\lambda)$$

或

$$\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)\fallingdotseq F(p-\lambda),\quad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\lambda,\lambda\text{ 为任意复常数}$$

4) 标度变换定理

$$f(at)\fallingdotseq\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\quad a>0$$

5) 微分定理

$$f'(t)\fallingdotseq pF(p)-f(0)$$

$$f''(t)\fallingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$$

$$f^{(n)}(t)\fallingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

6) 卷积定理

$$f_1(t)*f_2(t)\fallingdotseq F_1(p)F_2(p)$$

其中，$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

或写成

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

7) 周期函数变换定理

对以T为周期的周期函数，$f(t)=f(t+T)$，则

$$f(t)\fallingdotseq\frac{\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

3. 基本的拉普拉斯变换

(1) $1\fallingdotseq\dfrac{1}{p}$;

(2) $t\fallingdotseq\dfrac{1}{p^2},t^n\fallingdotseq\dfrac{n!}{p^{n+1}}=\dfrac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$;

(3) $t^\alpha\fallingdotseq\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\alpha>-1$;

(4) $\mathrm{e}^{\lambda t}\fallingdotseq\dfrac{1}{p-\lambda}$;

(5) $\sin\omega t\fallingdotseq\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

(6) $\cos\omega t\fallingdotseq\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$;

(7) $\mathrm{sh}\lambda t \fallingdotseq \dfrac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$;

(8) $\mathrm{ch}\lambda t \fallingdotseq \dfrac{p}{p^2-\lambda^2}$;

(9) $t^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta t} \fallingdotseq \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+\beta)^{\alpha+1}}$;

(10) $\sqrt{\pi t} \fallingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

二、$\Gamma(z)$ 函数的定义及其基本性质

1. $\Gamma(z)$ 函数的定义

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}\,z>0$$

其中被积函数一般来说是多值函数，约定在正实轴上 $\arg t=0$.

2. $\Gamma(z)$ 函数的基本性质

(1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

(2) $\Gamma(1)=1,\Gamma(1+1)=1,\Gamma(2+1)=2!,\cdots,\Gamma(n+1)=n!$.

(3) 互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}, \quad z\neq \text{整数}$$

当 $z=x=\dfrac{1}{2}$ 时，有 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

(4) 倍乘公式[又称勒让德(Legendre)公式]

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma=(z+1/2), \quad z\neq 0,-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},\cdots$$

3. $\Gamma(z)$ 函数的解析性

(1) $\Gamma(z)$ 函数是虚轴右边区域的解析函数；

(2) 在全平面上，除了 $z=0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots$ 为其一阶极点外，$\Gamma(z)$ 函数处处解析.

4. $\Gamma(z)$ 函数在各一阶极点处的留数

$$\mathrm{Res}\,\Gamma(-n)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots$$

三、拉普拉斯变换的反演

1. 利用基本的拉普拉斯变换和拉普拉斯变换的基本性质，对所得的像函数进行反演

2. 利用像函数的求导公式，已知 $F(p)\doteq f(t)$，则

$$F^{(n)}(p)\doteq(-1)^n t^n f(t)$$

3. 利用像函数的积分公式，已知 $F(p)\doteq f(t)$，则

$$\int_p^{\infty} F(p)\mathrm{d}p\doteq\frac{f(t)}{t}$$

4. 拉普拉斯变换的反演的一般公式

当像函数 $F(p)=F(s+\mathrm{i}\sigma)$ 在 $s>s_0$ 的区域上满足：

(1) $F(p)$ 解析；

(2) $|p|\to\infty$ 时，$F(p)$ 一致地趋于零；

(3) 在 $s>s_0$ 的区域上，沿平行于虚轴的直线：$s-\mathrm{i}\infty\to s+\mathrm{i}\infty$ 的积分

$$\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}\left|F(p)\right|\mathrm{d}\sigma$$

收敛，则有 $F(p)$ 的反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

四、拉普拉斯变换的应用

一般我们经常利用拉普拉斯变换求解线性常微分方程的定解问题和线性偏微分方程的定解问题. 结合微分方程定解问题的初始条件，把微分方程的求解变为关于像函数的代数方程或常微分方程的求解. 最后把求得的像函数进行拉普拉斯变换的反演，求得原微分方程定解问题的解.

这部分内容参看习题 10.6 和 10.7 的解答.

习 题 详 解

10.1　求下列函数的拉普拉斯变换的像函数：

(1) $\mathrm{sh}\omega t$；　　(2) $\mathrm{ch}\omega t$；

(3) $\cos(\omega t+\alpha)$;　　(4) $\cos^2\omega t$;

(5) $\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t,\ \alpha>0$;　　(6) $\dfrac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$, $a^2\neq b^2$.

解　(1) **法一**　由拉普拉斯变换的定义，有

$$\operatorname{sh}\omega t\doteqdot\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\omega t}-\mathrm{e}^{-\omega t}}{2}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-(p-\omega)t}-\mathrm{e}^{-(p+\omega)t}}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+\omega}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

法二　由像函数的位移定理 $\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\doteqdot F(p+\lambda)$ 和 $1\doteqdot\dfrac{1}{p}$，有

$$\operatorname{sh}\omega t=\frac{\mathrm{e}^{\omega t}-\mathrm{e}^{-\omega t}}{2}\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

(2) 由拉普拉斯变换的定义，有

$$\operatorname{ch}\omega t\doteqdot\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\omega t}+\mathrm{e}^{-\omega t}}{2}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-(p-\omega)t}+\mathrm{e}^{-(p+\omega)t}}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+\omega}=\frac{p}{p^2-\omega^2}$$

(3) 由拉普拉斯变换的定义，有

$$\sin\omega t\doteqdot\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-(p-\mathrm{i}\omega)t}-\mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}\omega)t}}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\cos\omega t\doteqdot\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-(p-\mathrm{i}\omega)t}+\mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}\omega)t}}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

故有

$$\cos(\omega t+\alpha)=\cos\omega t\cdot\cos\alpha-\sin\omega t\cdot\sin\alpha$$
$$\doteqdot\frac{p\cos\alpha}{p^2+\omega^2}-\frac{\omega\sin\alpha}{p^2+\omega^2}$$

(4)

$$\cos^2\omega t=\frac{\cos(2\omega t)+1}{2}\doteqdot\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4\omega^2}+\frac{1}{2p}=\frac{p}{2p^2+8\omega^2}+\frac{1}{2p}$$

(5) 法一

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \fallingdotseq \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}e^{-pt}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(p+\alpha-i\omega)t}-e^{-(p+\alpha+i\omega)t}}{2i}dt$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{1}{p+\alpha-i\omega} - \frac{1}{2i}\frac{1}{p+\alpha+i\omega} = \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$$

法二　由像函数的位移定理：$e^{-\lambda t}f(t) \fallingdotseq F(p+\lambda)$ 和 $\sin\omega t \fallingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$，其中，$f(t) \fallingdotseq F(p)$，则

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \fallingdotseq \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$$

(6) 由解(3)的计算，可直接得

$$\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2} \fallingdotseq \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}\right) = \frac{p}{\left(p^2+b^2\right)\left(p^2+a^2\right)}$$

10.2　若一函数 $f(t)$，其拉普拉斯的像函数为 $F(p)$，请证明

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

证　由于 $f(t) \fallingdotseq \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F(p)$ 存在，即要求

$$|F(p)| \leqslant \int_0^\infty \left|f(t)e^{-pt}\right|dt, \quad \mathrm{Re}\,p = s > s_0$$

$$= \int_0^\infty \left|f(t)e^{-s_0 t}\right|e^{-(s-s_0)t}dt$$

$$\leqslant M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0} \xrightarrow{\mathrm{Re}\,p\to\infty} 0$$

其中，$\left|f(t)e^{-s_0 t}\right| \leqslant M$，$M$ 为正实数.

由拉普拉斯变换的微分定理

$$f'(t) \fallingdotseq pF(p) - f(0) = F_1(p)$$

同理，此拉普拉斯变换存在

$$f'(t) \fallingdotseq \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = F_1(p)$$

其收敛横坐标为 s_0'，要求

$$|F_1(p)| \leqslant \int_0^\infty \left|f'(t)e^{-pt}\right|dt, \quad \mathrm{Re}\,p = s > s_0'$$

$$=\int_0^{\infty}\left|f'(t)\mathrm{e}^{-s_0't}\right|\mathrm{e}^{-(s-s_0')t}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant N\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s-s_0')t}\mathrm{d}t=\frac{N}{s-s_0'}\xrightarrow{\mathrm{Re}\,p\to\infty}0$$

其中，$\left|f'(t)\mathrm{e}^{-s_0't}\right|\leqslant N$，$N$ 为正实数. 有

$$pF(p)-f(0)\xrightarrow{\mathrm{Re}\,p\to\infty}0$$

即

$$\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{\mathrm{Re}\,p\to\infty}pF(p)$$

注： 这里要求 $\mathrm{Re}\,p\to\infty$ 与 $p\to\infty$ 在实的拉普拉斯变换中是一致的，而在复的拉普拉斯变换中，沿平行于虚轴趋向无穷与 $\mathrm{Re}\,p\to\infty$ 是有区别的，但在证明或做反演时，总是要做复平面的右半平面中的大圆弧，圆弧的半径是趋于无穷的，此时 $p\to\infty$ 与 $\mathrm{Re}\,p\to\infty$ 是一致的，因此我们通常写成 $p\to\infty$.

10.3 已知下列拉普拉斯变换的像函数 $F(p)$，求原函数 $f(t)$：

(1) $F(p)=\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$，　$a\neq b$；

(2) $F(p)=\dfrac{3p}{p^2-1}$；

(3) $F(p)=\dfrac{E}{Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}}$，$E$，$L$，$R$，$C$ 都为大于零的实常数；

(4) $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)}$，$a^2\neq b^2$；

(5) $F(p)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha p}}{p^2}$，　$\alpha>0$；

(6) $F(p)=\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha p}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha p}}$，　$\alpha>0$.

解　(1) 由于

$$F(p)=\frac{1}{(p+a)(p+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}\right)$$

$$\mathrm{e}^{-at}\doteqdot\frac{1}{p+a},\quad \mathrm{e}^{-bt}\doteqdot\frac{1}{p+b}$$

故有

$$f(t)=\frac{\mathrm{e}^{-at}}{b-a}-\frac{\mathrm{e}^{-bt}}{b-a}=\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{b-a}$$

(2) 由于

$$F(p)=\frac{3p}{p^2-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p-1}\right)$$

$$\mathrm{e}^{-t}\fallingdotseq\frac{1}{p+1},\quad \mathrm{e}^{t}\fallingdotseq\frac{1}{p-1}$$

故有

$$f(t)=\frac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}\right)$$

(3) 由于

$$F(p)=\frac{E}{Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}}=\frac{1}{L}\cdot\frac{E}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2+\dfrac{1}{CL}-\dfrac{R^2}{4L^2}}$$

$$=\frac{E}{\sqrt{\dfrac{L}{C}-\dfrac{R^2}{4}}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{1}{CL}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{1}{CL}-\dfrac{R^2}{4L^2}}\right)^2}$$

当$4L-CR^2>0$时，由$\sin\alpha t\fallingdotseq\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$和像函数的位移定理$\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\fallingdotseq F(p+\lambda)$，可得

$$f(t)=\frac{E}{\sqrt{\dfrac{L}{C}-\dfrac{R^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}\cdot t\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

当$4L-CR^2<0$时，

$$F(p)=\frac{E}{\sqrt{\dfrac{R^2}{4}-\dfrac{L}{C}}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{CL}}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2-\left(\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{CL}}\right)^2}$$

由于$\mathrm{sh}\alpha t\fallingdotseq\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$和位移定理$\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\fallingdotseq F(p+\lambda)$，可得

$$f(t)=\frac{E}{\sqrt{\frac{R^2}{4}-\frac{L}{C}}}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}\cdot t\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

(4) 由于

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)}=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{p^2+a^2}-\frac{1}{p^2+b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(b^2-a^2\right)}\frac{a}{p^2+a^2}-\frac{1}{b\left(b^2-a^2\right)}\frac{b}{p^2+b^2}$$

$$\sin\alpha t \fallingdotseq \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$$

可得

$$f(t)=\frac{1}{a\left(b^2-a^2\right)}\sin at-\frac{1}{b\left(b^2-a^2\right)}\sin bt$$

(5) 由于

$$F(p)=\frac{\mathrm{e}^{-ap}}{p^2}=\mathrm{e}^{-ap}\frac{1}{p^2},\quad a>0$$

$$t \fallingdotseq \frac{1}{p^2} \quad 和 \quad \delta(t-a)\fallingdotseq \mathrm{e}^{-ap}$$

由卷积定理，有

$$f(t)=\int_0^t \delta(\tau-a)\cdot(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}t-a, & 0<a<t\\ 0, & a>t\end{cases}$$

(6) 由于

$$F(p)=\frac{1}{p}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\alpha p}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha p}},\quad \alpha>0$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\alpha p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-n\alpha p}$$

$$1\fallingdotseq\frac{1}{p},\quad \delta(t-\beta)\fallingdotseq\mathrm{e}^{-\beta p}$$

由卷积定理，有

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t 1\cdot\delta(t-\tau-n\alpha)\mathrm{d}\tau=\sum_{n=1}^{\infty}H(t-n\alpha)$$

10.4　已知误差函数的定义为

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$$

试求 $\mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)$ 的像函数.

解　法一　由拉普拉斯变换的定义

$$\mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\doteqdot\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

对求像函数的积分，令 $x=\sqrt{t}$，则积分变为

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-px^2}x\mathrm{d}x$$

此积分是二重积分，先对 τ 积分，从 $0\to x$；再对 x 积分，从 $0\to\infty$.

由于两个被积函数都没有奇异性，属于光滑函数，可变换积分顺序，即先对 x 积分，再对 τ 积分. 我们可从积分参数 τ-x 平面上看两种不同的积分顺序，前一种是由 $\tau=0$ 到 $\tau=x$ 的第一象限的角平分线上，然后再由角平分线积到无穷；而后一种积分顺序，就要从角平分线的 $x=\tau$ 开始，先积到无穷，然后再对 τ 积分，从 $0\to\infty$，即

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-px^2}x\mathrm{d}x=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{e}^{-px^2}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$$

上式右边的积分中

$$\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{e}^{-px^2}x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2p}\mathrm{e}^{-px^2}\Big|_{\tau}^{\infty}=\frac{1}{2p}\mathrm{e}^{-p\tau^2}$$

则

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{e}^{-px^2}x\mathrm{d}x\right)\cdot\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau=\frac{2}{p\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+1)\tau^2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$$

其中用到高斯积分

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

故可得

$$\mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\doteqdot\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$$

法二　由

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau,\quad \operatorname{erf}'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$$

令 $\sqrt{t}=x$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{t}=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

由 $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\fallingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{p}}$，再由位移定理 $\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\fallingdotseq F(p+1)$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{p+1}}$$

记 $f'(x)$ 的像函数为 $L\left[f'(x)\right]$，则

$$L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{p+1}}$$

由微分定理 $f'(t)\fallingdotseq pF(p)-f(0)$，并注意到 $\operatorname{erf}(0)=0$，故有

$$F(p)=\frac{1}{p}L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right]$$

即

$$\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)\fallingdotseq\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$$

10.5　用拉普拉斯变换求下列积分：

(1) $f(t)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$；

(2) $f(t)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　(1)

$$f(t)=\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x\fallingdotseq\int_0^\infty\mathrm{d}t\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\infty\mathrm{d}x\frac{1}{x}\int_0^\infty\sin xt\cdot\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

先计算

$$\int_0^{\infty}\sin xt\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}\cos xt\cdot \mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{\infty}-\frac{p}{x}\int_0^{\infty}\cos xt\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{p}{x^2}\sin xt\cdot \mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{\infty}-\frac{p^2}{x^2}\int_0^{\infty}\sin xt\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

可得

$$\int_0^{\infty}\sin xt\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{x}{x^2+p^2}$$

故

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x\doteqdot\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x^2+p^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{p}\right)^2+1}\mathrm{d}\frac{x}{p}$$

$$=\arctan\frac{x}{p}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2p}$$

而

$$\frac{\pi}{2}\doteqdot\frac{\pi}{2p}$$

故

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

注：此题用数学分析中的方法也得到同样的结果

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{tx}\mathrm{d}(tx)$$

令 $\xi=tx$，则

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{\pi}{2},\quad t>0$$

(2)

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x\doteqdot\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\int_0^{\infty}\sin xt\cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+p^2\right)\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{p^2-1}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+p^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{p^2-1}\left(\arctan x\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{p}\arctan\frac{x}{p}\Big|_0^{\infty}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2p(p+1)}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)$$

由于$1\fallingdotseq\frac{1}{p}$, $\mathrm{e}^{-t}\fallingdotseq\frac{1}{p+1}$，有

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\fallingdotseq\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)$$

可得

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)$$

(3) 先求$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x$中$\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}$的拉普拉斯变换

$$\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\fallingdotseq\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{p+\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x\fallingdotseq\int_0^{\infty}\frac{1}{p+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{p+\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

此积分发散，因此不能用拉普拉斯变换的方法求出$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x$的像函数后做反演，然后令$t=1$，再求原来的积分值. 而本积分直接可积出

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x}=-2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x}=2$$

10.6 用拉普拉斯变换求解下列常微分方程，其中$y=y(t)$，$z=z(t)$.

(1) $\begin{cases}y''-4y=0\\ y(0)=-1,y'(0)=1\end{cases}$;　　(2) $\begin{cases}y'''-y''+4y'-4y=t\\ y(0)=0,y'(0)=0,y''(0)=1\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}y'''+3y''+3y'+y=6\mathrm{e}^{-t}\\ y(0)=0,y'(0)=0,y''(0)=0\end{cases}$;　　(4) $\begin{cases}y'+y+2z'+2z=\mathrm{e}^{-t}\\ 3y'-y+4z'+z=0\\ y(0)=-1\\ z(0)=0\end{cases}$.

解 (1) 对方程的两边做拉普拉斯变换，令

$$y(t)\fallingdotseq F(p)$$

方程变为

$$p^2F(p)-py(0)-y'(0)-4F(p)=p^2F(p)+p-1-4F(p)=0$$

得

$$F(p)=\frac{1-p}{p^2-4}=-\frac{1}{p^2-4}-\frac{1}{p+2}$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t\fallingdotseq-\frac{1}{p^2-4},\quad -\mathrm{e}^{-2t}\fallingdotseq-\frac{1}{p+2}$$

可得方程的解为

$$y=-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t-\mathrm{e}^{-2t}=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}$$

另一种求反演的方法

$$F(p)=\frac{1-p}{p^2-4}=\frac{1}{p^2-4}-\frac{p}{p^2-4}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t\fallingdotseq\frac{1}{p^2-4},\quad -\mathrm{ch}\,2t\fallingdotseq-\frac{p}{p^2-4}$$

同样可得方程的解为

$$y=\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t-\mathrm{ch}\,2t=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}$$

(2) 对方程的两边做拉普拉斯变换，令 $y(t)\fallingdotseq F(p)$，并有 $t\fallingdotseq\frac{1}{p^2}$，由方程和初始条件，有

$$p^3F(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)-p^2F(p)+py(0)+y'(0)$$
$$+4pF(p)-4y(0)-4F(p)=\frac{1}{p^2}$$

即

$$p^3F(p)-1-p^2F(p)+4pF(p)-4F(p)=\frac{1}{p^2}$$

$$\left(p^2+4\right)(p-1)F(p)=\frac{1}{p^2}+1$$

得到

$$F(p)=\frac{1+p^2}{p^2\left(p^2+4\right)(p-1)}$$

化简等式右边的函数，令

$$\frac{1+p^2}{p^2\left(p^2+4\right)(p-1)}=\frac{ap+b}{p^2}+\frac{cp+d}{p^2+4}+\frac{e}{p-1}$$

可解得

$$a=-\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{4},\quad c=-\frac{3}{20},\quad d=-\frac{3}{20},\quad e=\frac{2}{5}$$

即可得

$$\begin{aligned}F(p)&=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{p+1}{p^2}-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+1}{p^2+4}\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{3}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{p^2+4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

由拉普拉斯变换的反演

$$\frac{2}{5}\cdot\mathrm{e}^{t}\fallingdotseq\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-1},\quad -\frac{3}{20}\cos 2t\fallingdotseq-\frac{3}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4}$$

$$-\frac{3}{40}\sin 2t\fallingdotseq-\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{p^2+4},\quad -\frac{t}{4}\fallingdotseq-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2},\quad -\frac{1}{4}\fallingdotseq-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}$$

故可得方程的解为

$$y(t)=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{t}-\frac{3}{20}\cos 2t-\frac{3}{40}\sin 2t-\frac{t}{4}-\frac{1}{4}$$

(3) 对方程的两边做拉普拉斯变换，令 $y(t)\fallingdotseq F(p)$，由方程和初始条件，并由 $6\mathrm{e}^{-t}\fallingdotseq 6\cdot\dfrac{1}{p+1}$，可得

$$\begin{aligned}&p^3F(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)+3p^2F(p)-3py(0)-3y'(0)\\&+3pF(p)-3y(0)+F(p)=6\cdot\frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

有

$$\left(p^3+3p^2+3p+1\right)F(p)=(p+1)^3F(p)=6\cdot\frac{1}{p+1}$$

可得

$$F(p)=\frac{6}{(p+1)^4}$$

由拉普拉斯变换的反演公式

$$\frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\fallingdotseq\frac{1}{(p+a)^n},\quad n=1,2,3,\cdots$$

可得方程的解为

$$y(t)=t^3\mathrm{e}^{-t}$$

(4) 对方程的两边做拉普拉斯变换，$y(t)\fallingdotseq F(p)$，$z(t)\fallingdotseq G(p)$，并有 $\mathrm{e}^{-t}\fallingdotseq\dfrac{1}{p+1}$，微分方程组变为像函数的代数方程组

$$\begin{cases} pF(p)-y(0)+F(p)+2pG(p)-2z(0)+2G(p)=\dfrac{1}{p+1} \\ 3pF(p)-3y(0)-F(p)+4pG(p)-4z(0)+G(p)=0 \end{cases}$$

由初始条件，有

$$\begin{cases} pF(p)+1+F(p)+2pG(p)+2G(p)=\dfrac{1}{p+1} \\ 3pF(p)+3-F(p)+4pG(p)+G(p)=0 \end{cases}$$

方程组变为

$$\begin{cases} (p+1)F(p)+2(p+1)G(p)=\dfrac{-p}{p+1} \\ (3p-1)F(p)+(4p+1)G(p)=-3 \end{cases}$$

由第一个方程可得

$$F(p)+2G(p)=\frac{-p}{(p+1)^2}$$

即

$$F(p)=\frac{-p}{(p+1)^2}-2G(p)$$

代入第二方程，可得

$$G(p)=\frac{7p+3}{(p+1)^2(2p-3)}$$

则

$$F(p)=\frac{-2p^2-11p-6}{(p+1)^2(2p-3)}$$

化简 $F(p)$ 和 $G(p)$，令

$$F(p)=\frac{a_1}{p+1}+\frac{a_2}{(p+1)^2}+\frac{a_3}{2p-3},\quad G(p)=\frac{b_1}{p+1}+\frac{b_2}{(p+1)^2}+\frac{b_3}{2p-3}$$

可得

$$F(p)=\frac{a_1(p+1)(2p-3)+a_2(2p-3)+a_3(p+1)^2}{(p+1)^2(2p-3)}$$

可得到系数 a_1, a_2, a_3 满足

$$\begin{cases}2a_1+a_3=-2\\-a_1+2a_2+2a_3=-11\\-3a_1-3a_2+a_3=-6\end{cases}$$

解得

$$a_1=\frac{29}{25},\quad a_2=-\frac{3}{5},\quad a_3=-\frac{108}{25}$$

故

$$F(p)=\frac{29}{25}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{54}{25}\cdot\frac{1}{p-\frac{3}{2}}$$

同样，

$$G(p)=\frac{b_1(p+1)(2p-3)+b_2(2p-3)+b_3(p+1)^2}{(p+1)^2(2p-3)}$$

系数满足

$$\begin{cases}2b_1+b_3=0\\-b_1+2b_2+2b_3=7\\-3b_1-3b_2+b_3=3\end{cases}$$

可解得

$$b_1=-\frac{27}{25},\quad b_2=\frac{4}{5},\quad b_3=\frac{54}{25}$$

故

$$G(p)=-\frac{27}{25}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{27}{25}\cdot\frac{1}{p-\frac{3}{2}}$$

由拉普拉斯变换的基本性质和反演公式，即得原方程组的解

$$y(t)=\frac{29}{25}\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{5}t\mathrm{e}^{-t}-\frac{54}{25}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t}$$

$$z(t)=-\frac{27}{25}\mathrm{e}^{-t}+\frac{4}{5}t\mathrm{e}^{-t}+\frac{27}{25}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t}$$

10.7　用拉普拉斯变换求解 $T(t)$ 的方程.

(1) $\begin{cases} T''+\dfrac{\pi^2a^2}{l^2}T=A\sin\omega t \\ T(0)=0,\quad T'(0)=0 \end{cases}$，其中 a,A,ω 均为正的常数.

(2) $\begin{cases} T'+\omega^2a^2T=g(t) \\ T(0)=0 \end{cases}$，其中 $g(t)$ 为已知函数，ω，a 为正的常数.

解　(1) 这是个受迫振动的方程，设 $\dfrac{\pi a}{l}=\omega_0$，令 $T(t)\fallingdotseq F(p)$，并有

$$\sin\omega t\fallingdotseq\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

由方程和初始条件，有

$$p^2F(p)-pT(0)-T'(0)+\omega_0{}^2F(p)=p^2F(p)+\omega_0{}^2F(p)=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}$$

可得

$$F(p)=\frac{A\omega}{\omega^2-\omega_0{}^2}\cdot\left(\frac{1}{p^2+\omega_0{}^2}-\frac{1}{p^2+\omega^2}\right)$$

由拉普拉斯的反演公式，得方程的解为

$$\begin{aligned} T(t)&=\frac{A\omega}{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)\omega_0}\sin\omega_0t-\frac{A}{\omega^2-\omega_0{}^2}\sin\omega t\quad(\omega\neq\omega_0)\\ &=\frac{A}{\left(\omega^2-\omega_0{}^2\right)\omega_0}\left(\omega\sin\omega_0t-\omega_0\sin\omega t\right)\\ &=\frac{A}{\left(\omega+\omega_0\right)\omega_0}\frac{\omega\sin\omega_0t-\omega_0\sin\omega t}{\omega-\omega_0} \end{aligned}$$

当 $\omega\to\omega_0$ 时，由洛必达法则(ω 为变量)可得

$$\begin{aligned} T(t)&=\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{A}{\left(\omega+\omega_0\right)\omega_0}\cdot\frac{\omega\sin\omega_0t-\omega_0\sin\omega t}{\omega-\omega_0}\\ &=\frac{A}{2\omega_0{}^2}\sin\omega_0t-\frac{At}{2\omega_0}\cos\omega_0t \end{aligned}$$

注：$\dfrac{\pi a}{l}=\omega_0$ 是系统的固有频率，而 ω 是外力的频率. 此解表明，当外力的频率趋于系统的固有频率时，此解的第二项 $\dfrac{At}{2\omega_0}\cos\omega_0t$ 的振幅 $\dfrac{At}{2\omega_0}$ 是随时间的增加而变大的(由于振幅是取模的，与前面的负号无关)，当 $t\to\infty$ 时，系统的振幅也趋

于无穷，这就是共振现象. 实际上，当时间加大，振幅增大到一定程度时，超过系统的承载能力，系统就崩溃了.

(2) 对方程的两边做拉普拉斯变换，令$T(t)\fallingdotseq F(p)$，由于$g(t)$为已知函数，其拉普拉斯变换也是已知的，设$g(t)\fallingdotseq G(p)$.

设$k=a\omega$，令$T(t)\fallingdotseq F(p)$，由方程和初始条件，得到像函数的代数方程

$$pF(p)-T(0)+k^2F(p)=pF(p)+k^2F(p)=G(p)$$

可解得

$$F(p)=G(p)\cdot\frac{1}{p+k^2}$$

由$\mathrm{e}^{-k^2t}\fallingdotseq\dfrac{1}{p+k^2}$和卷积定理，可得方程的解为

$$T(t)=\int_0^t g(\tau)\mathrm{e}^{-k^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\int_0^t g(\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

令$\xi=t-\tau$，则

$$T(t)=\int_0^t g(t-\xi)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2\xi}\mathrm{d}\xi$$

再令$\xi=\tau$，则

$$T(t)=\int_0^t g(t-\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2\tau}\mathrm{d}\tau$$

第十一章 δ 函 数

内 容 提 要

一、δ 函数的定义

1. 一维 δ 函数的定义

一维 δ 函数是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的一种广义函数，并满足

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & x\neq x_0\\ \infty, & x=x_0\end{cases},\quad x_0\in(-\infty,\infty)$$

且

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & x_0\in(a,b)\\ 0, & x_0\notin(a,b)\end{cases}$$

2. 三维 δ 函数的定义

三维 δ 函数是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的广义函数，并满足

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}0, & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0\\ \infty, & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\end{cases},\quad \boldsymbol{r}_0\in\mathbf{R}^3$$

且

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\begin{cases}1, & \boldsymbol{r}_0\in V\\ 0, & \boldsymbol{r}_0\notin V\end{cases}$$

二、经常用到的两种 δ 函数的表达式

1. $$H'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)=\delta(x)$$

其中 $H(x)$ 为阶跃函数.

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

2. $$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon=\delta(x)$$

其中 δ_ε 为

$$\delta_\varepsilon=\begin{cases}0, & x<0, x>\varepsilon\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant x\leqslant\varepsilon\end{cases}$$

三、带参数的连续函数的极限的 δ 函数

作为广义函数的 δ 函数，通常是以带参数的连续函数的极限形式出现的，这是研究 δ 函数的行为和性质的主要方法，它可以用来定义 δ 函数的导数.

1. 两种带参数的连续函数的极限的 δ 函数

(1)　$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to0}\delta(x,\alpha)=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha k}\cos(kx)\mathrm{d}k=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

可验证，此表达式满足 δ 函数的定义.

(2)　$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^n\cos kx\mathrm{d}k=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}$$

此表达式并不满足 δ 函数定义的全部条件，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}=\begin{cases}\infty, & x=0\\ \neq0, & x\neq0\end{cases}$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}\mathrm{d}x=1\quad\text{(详见习题解答 11.3)}$$

我们仍称之为 δ 函数，即放宽了 $\delta(x)$ 定义的条件，只要满足

$$\delta(x)=\infty,\quad x=0$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$

就称为 δ 函数.

在技术应用中，δ 函数通常称为脉冲函数. 在实际应用中，通常用的脉冲函数，只要在 $x=0$ 或 $t=0$，脉冲值很大，但总的积分值有限，这样的脉冲函数都当成 δ 函数来处理了.

2. δ 函数导数的定义

对于上面给出的

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to0}\delta(x,\alpha)=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

定义 δ 函数导数为

$$\delta'(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x,\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}-\frac{2}{\pi}\frac{\alpha x}{\left(\alpha^2+x^2\right)^2}$$

它仍然是个广义函数，当 $x=0$ 时，$\delta'(x)\to\infty$，虽然积分也是奇异的，但已经不是 δ 函数了. 在广义函数的运算中，可以作为导数的运算来使用.

四、一维 δ 函数的主要性质

一维 δ 函数的主要性质有四，如下：

(1) 对连续函数 $f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$$

(2) $f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$，

$$x\delta(x)=0,\quad (x-x_0)\delta(x-x_0)=0$$

(3) δ 函数为偶函数，即

$$\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x),\quad \delta(-x)=\delta(x)$$

(4) 对于连续函数 $\varphi(x)$，当 $\varphi(x)=0$ 时，只有单根 $x_i, i=1,2,\cdots,k$，且函数 $\varphi(x)$ 在 x_i 点的导数 $\varphi'(x_i)$ 存在，则

$$\delta(\varphi(x))=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{|\varphi'(x_i)|}\delta(x-x_i)$$

五、三维 δ 函数的表达式

在不同坐标系和泊松方程中，三维 δ 函数有不同的表达式.

(1) 三维 δ 函数在直角坐标系下的表达式为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

(2) 三维 δ 函数在柱坐标系下的表达式为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

(3) 三维 δ 函数在球坐标系下的表达式为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

(4) 三维 δ 函数在泊松方程中的表达式为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

六、δ 函数的傅里叶变换和广义傅里叶级数展开

1. δ 函数的傅里叶变换及其像函数

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$F\left[\delta(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k0}=1$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k$$

$$F\left[\delta(x-x_0)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}$$

最后一个式子是傅里叶变换的延迟定理的结果.

2. δ 函数的广义傅里叶级数展开

设 $\{\varphi_i(x)\}$ 是希尔伯特空间中的一组正交归一的函数基，则

$$\delta(x-x')=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\varphi_i^*(x')\varphi(x)$$

为 δ 函数在函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 上的广义傅里叶级数展开.

(1) 在正交函数系 $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\right\}$ 上展开

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}(x-x')}$$

(2) 在正交函数系 $\left\{\cos\frac{k\pi x}{l}\right\}$ 上展开

$$\delta(x-x')=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x'}{l}$$

(3) 在正交函数系 $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$ 上展开

$$\delta(x-x')=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x'}{l}$$

习 题 详 解

11.1　若函数 $\delta_\varepsilon(x)$ 的定义为

$$\delta_\varepsilon=\begin{cases}0, & x>\varepsilon, x<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant x\leqslant\varepsilon\end{cases}$$

请证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon(x)=\delta(x)$$

证 由 δ_ε 的定义可知

$$\lim_{\varepsilon\to0}\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

并且有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon=1$$

由 δ 函数的定义可知，有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon(x)=\delta(x)$$

11.2 请证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}=\delta(x)$$

证 (1) 当 $x=0$ 时，由洛必达法则可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}=\infty$$

(2) 当 $x\neq0$ 时，由洛必达法则可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^{nx^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}{x^2\mathrm{e}^{nx^2}}=0$$

(3) 考虑到积分：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{n}x\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{n}x\right)=1$$

故由 δ 函数的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}=\delta(x)$$

11.3 请证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^n\cos kx\mathrm{d}k=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}=\delta(x)$$

证　由于在 $x\to 0$ 时，有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\x\to 0}}\frac{1}{\pi}\int_0^n \cos kx\mathrm{d}k=\lim_{\substack{n\to\infty\\x\to 0}}\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x}\bigg|_0^n=\lim_{\substack{n\to\infty\\x\to 0}}\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}=\lim_{\substack{n\to\infty\\x\to 0}}\frac{n\cos nx}{\pi}=\infty$$

最后第二步，对变量 x 用洛必达法则.

对于 δ 函数作为带连续参数函数的极限，可以放宽在 $x\neq 0$ 时的条件，不必严格限制为零，只要是小于有限值即可

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^n \cos kx\mathrm{d}k=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}\leqslant\left|\frac{1}{\pi x}\right|,\quad x\neq 0$$

并且由 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^n \cos kx\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{nx}\mathrm{d}(nx)=1$$

由 δ 函数的定义即可证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^n \cos kx\mathrm{d}k=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}=\delta(x)$$

注：从本题中可以看出，δ 函数的最重要的特征是以下两条.

$$\lim_{x\to x_0}\delta(x-x_0)=\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1$$

这两条也可以作为一个函数是否为 δ 函数的判据.

11.4　设函数 $f(t)=\cos xt$ 的拉普拉斯变换为 $F(p)$，$F(p)\doteq\cos xt$，请证明

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi}F(p)=\delta(x)$$

证　由于

$$F(p)=\frac{p}{p^2+x^2}$$

故有

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi}F(p)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

同时有

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p}{p^2+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{p}\right),\quad t=\frac{x}{p}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\arctan t\Big|_{-\infty}^{\infty}=1$$

由 δ 函数的定义即可证明

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi}F(p)=\delta(x)$$

11.5 对赫维赛德(Heaviside)函数

$$H(t-\tau)=\begin{cases}1, & t\geqslant\tau\\ 0, & t<\tau\end{cases}$$

请证明

$$H'(t-\tau)=\delta(t-\tau)$$

并以此求 $\delta(t-\tau)$ 的拉普拉斯变换的像函数.

证 法一 由赫维赛德函数求导可知

$$H'(t-\tau)=\begin{cases}0, & t\neq\tau\\ \infty, & t=\tau\end{cases}\tag{1}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}H'(t-\tau)\mathrm{d}t=H(t-\tau)\Big|_{-\infty}^{\infty}=1\tag{2}$$

由(1)和(2)式及 δ 函数的定义可知，$H'(t-\tau)$ 即为 δ 函数.

我们以此结果来求 $\delta(t-\tau)$ 的拉普拉斯变换的像函数.

设 $H(t-\tau)\fallingdotseq F(p)$，其中 $\tau>0$，则

$$F(p)=\int_0^{\infty}H(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}H(t-\tau)\mathrm{e}^{-p(t-\tau)}\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}(t-\tau),\qquad k=t-\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-p\tau}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pk}\mathrm{d}k=\frac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p}$$

注意： 当 $\tau=0$ 时，有 $H(t)\fallingdotseq\frac{1}{p}$.

由拉普拉斯变换的微分定理可以验算

$$\delta(t-\tau)=H'(t-\tau)\fallingdotseq pF(p)-H(0-\tau)=p\frac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p}-0=\mathrm{e}^{-p\tau}$$

法二

$$\delta(t-\tau)=\int_0^\infty H'(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-p\tau}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-p(t-\tau)}\mathrm{d}H(t-\tau)$$

$$=\mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathrm{e}^{-p(t-\tau)}H(t-\tau)\Big|_0^\infty-\mathrm{e}^{-p\tau}\int_0^\infty H(t-\tau)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-p(t-\tau)}$$

$$=\mathrm{e}^{-pt}\cdot H(t-\tau)\Big|_0^\infty-\mathrm{e}^{-p\tau}\int_\tau^\infty \mathrm{d}\mathrm{e}^{-p(t-\tau)}$$

$$=0+0-\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{e}^{-p(t-\tau)}\Big|_\tau^\infty=\mathrm{e}^{-p\tau}$$

11.6　已知某一频谱为

$$f(\omega)=\frac{2A\omega_0}{\pi\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}2\pi N\right)$$

请证明

$$\lim_{N\to\infty}f(\omega)=A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0)$$

其中 A，ω_0 为正的常数，N 为正整数.

证　由

$$f(\omega)=\frac{2A\omega_0}{\pi\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}2\pi N\right)=\frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0}-\frac{1}{\omega+\omega_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi N}{\omega_0}\omega\right)$$

$$=\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega-\omega_0}\sin\frac{2\pi N(\omega-\omega_0)}{\omega_0}-\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega+\omega_0}\sin\frac{2\pi N(\omega+\omega_0)}{\omega_0}$$

由本章习题 11.3 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(nx)}{\pi x}=\delta(x)$，故在上面 $f(\omega)$ 的等式右端，令 $n=\dfrac{2\pi N}{\omega_0}$，$N\to\infty\Leftrightarrow n\to\infty$，有

$$\lim_{N\to\infty}f(\omega)=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega-\omega_0}\sin\frac{2\pi N(\omega-\omega_0)}{\omega_0}-\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega+\omega_0}\sin\frac{2\pi N(\omega+\omega_0)}{\omega_0}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[A\cdot\frac{\sin n(\omega-\omega_0)}{\pi(\omega-\omega_0)}-A\cdot\frac{\sin n(\omega+\omega_0)}{\pi(\omega+\omega_0)}\right]$$

$$=A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0)$$

*第十二章　小波变换初步

内 容 提 要

作为阅读和知识扩充的内容，本章介绍了在傅里叶变换基础上的加博(Gabor)变换(即“窗口”傅里叶变换，或在时-频域中称为“短时”傅里叶变换)；进一步介绍了小波变换，同时给出了小波变换中的海森伯(Heisenberg)不确定性关系，说明了海森伯不确定性关系不是量子系统所特有的，这种不确定性关系存在于对偶的动力学量的统计测量中.

本章无习题.

第四篇　数学物理方程

第十三章　波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题

内 容 提 要

一、波动方程的建立

1. 波动方程的标准形式

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t)$$

2. 一维波动方程

用数学建模的方法，由理想的弦的横振动和细杆的纵振动等物理模型，可推导出一维的波动方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t)$$

波动方程在物理学中描绘了各向同性的弹性体中的波动过程. 要理解方程中每个数学符号的物理意义及每一项的物理意义；掌握用“隔离法”进行数学建模的思想；明确所采用的近似的物理条件和数学条件；明确所采用的物理定律.

3. 真空中电、磁波动方程

真空中电、磁波动方程的建立与上述波动方程的建立的数学方法不同，它是在微分形式的麦克斯韦(Maxwell)方程组的基础上，采用向量的微分运算规则直接得到

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0$$

二、输运方程的建立

1. 输运方程的标准形式

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t)$$

输运方程在物理学中表示理想的输运过程的规律所遵从的方程. 如表示热传导过程即称为热传导方程，表示物质扩散的过程即称为扩散方程.

2. 三维空间中，各向同性均匀介质的热传导方程

在三维空间中，对各向同性的均匀介质，基于傅里叶热传导定律和热量守恒定律，可推导出三维空间的热传导方程. 要理解方程中每个数学符号的物理意义及每一项的物理意义，要注意数学建模过程中每一项的“+”“-”号的物理意义.

三、泊松方程的建立

1. 泊松方程的标准形式

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})$$

方程中的场量$u(\boldsymbol{r})$和源项$f(\boldsymbol{r})$均不含时间t，它描述了不随时间变化的稳定的物理场$u(\boldsymbol{r})$的分布情况.

任何物理场都是由源产生的，如果我们考察的区域不包含产生此物理场的源，那么该区域中的稳定场的分布就由拉普拉斯方程来描述，即

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=0$$

2. 静电学中的泊松方程

由静电学中的库仑定律的微分形式，直接推导出泊松方程.

四、三类方程的定解条件

线性偏微分方程的定解问题：微分方程+(适定的)定解条件.

定解条件：包括初始条件和边界条件.

注：当某些定解条件给定时，相应的定解问题不一定有解，或是解并不是唯一的、稳定的. 也就是说，对于一个定解问题要得到唯一的、稳定的解，对定解条件是有要求的，即定解条件的“适定性”问题，这是数学上讨论的范畴. 对物理学中存在的物理现象，如果数学建模正确，则其定解问题的解都是存在的、唯一的且稳定的. 具备解的存在性、唯一性和稳定性的定解条件，我们称为“适定性”

条件. 在此课程中，我们所讨论的定解条件都是适定的定解条件，简称为定解条件.

1. 初始条件

(1) 波动方程：必须有两个初始条件，即

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r})$$

它描述了场量的初始位置的空间分布，和

$$u_t(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=v(\boldsymbol{r})$$

它描述了场量的初始速度的空间分布.

(2) 输运方程：只需一个初始条件，即

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r})$$

它描述了初始时刻场量(如温度、扩散物质等)的空间分布，或

$$u_t(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=v(\boldsymbol{r})$$

它描述了初始时刻场量(如温度、扩散物质等)随时间的变化率的空间分布.

(3) 泊松方程：无初始条件.

2. 边界条件

它是描述物理系统的场量在系统边界上的行为，是外界环境通过边界与系统的相互作用的表现形式.

在数学上抽象为三类边界条件. 设系统所在的区域为 Ω，其边界为 $\partial\Omega$. 三类方程的边界条件的形式是相同的，但对于泊松方程，场量 $u(\boldsymbol{r},t)\to u(\boldsymbol{r})$，而边界上的已知函数 $g(\partial\Omega,t)\to g(\partial\Omega)$.

(1) 第一类边界条件

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)$$

已知函数 $g(\partial\Omega,t)$ 给出了场量在边界上的分布及其随时间的变化关系.

如果场量在边界上恒为零，即 $g(\partial\Omega,t)=0$，则此情况为第一类齐次边界条件

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{\partial\Omega}=0$$

要理解此类边界条件在具体的物理系统中的物理意义.

(2) 第二类边界条件

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 的外法向的单位向量.

已知函数 $g(\partial\Omega,t)$ 给出了场量在边界上沿外法向的方向导数的分布及其随时间的变化关系，如果此方向导数在边界上恒为零，即 $g(\partial\Omega,t)=0$，则此情况为第二类齐次边界条件

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=0$$

要理解此齐次边界条件在具体的物理定解问题中的物理意义.

注意： 在泊松方程中，如果在 Ω 内有净的不为 0 的源，则第二类齐次边界条件为不适定的定解条件，将导致定解问题无解，即泊松方程不存在第二类齐次边界条件的定解问题.

(3) 第三类边界条件(亦称为混合边界条件)

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\right|_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)$$

已知函数 $g(\partial\Omega,t)$ 给出了场量**与其沿外法向的方向导数间的线性组合在边界上**的分布及其随时间的变化关系，其中 α 和 β 为**非零的常数系数**.

当 $g(\partial\Omega,t)=0$ 时，对应的条件为第三类齐次边界条件

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\right|_{\partial\Omega}=0$$

(4) 这三类边界条件可以统一写成

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\right|_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)$$

当 $\beta=0$，$\alpha\neq 0$ 时为第一类边界条件；当 $\alpha=0$，$\beta\neq 0$ 时为第二类边界条件；当 α 和 β 都不为零时为第三类边界条件.

五、其他类型的边界条件

1. 无穷边界问题

当 Ω 为整个空间 $\left(R,\ R^2,\ R^3\right)$，即涉及无界问题时，没有上文中所提的三类边界条件.

2. 自然边界条件

由于物理问题的要求，物理上的场量在我们所考察的空间区域中(不单是 $|\boldsymbol{r}|\to\infty$ 的区域，也可存在于有界区域内)是有限的，即要求

$$|u(\boldsymbol{r},t)|<\infty,\quad \boldsymbol{r}\in\Omega$$

这个条件对方程的解有很强的约束作用，通常把这个条件称为**自然边界条件**.

3. 周期性边界条件

如果物理系统具有某种对称性，即当场函数$u(\boldsymbol{r},t)$的空间自变量中有某个自变量使场函数$u(\boldsymbol{r},t)$具有周期性时，由于描述物理系统的场函数要求具有单值性，则此自变量就具有**周期性边界条件.**

常用到的是在球坐标系(或柱坐标系)中的自变量φ，由于物理量的单值性，要求$u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta,\varphi+2\pi)$，即圆周角参数$\varphi$的周期为$2\pi$，对应$\varphi$的函数具有周期性边界条件，或是在晶体中物理场量具有晶格的对称性.

4. 衔接条件

当Ω内是由不同的介质组成，不同的介质间具有分界面，方程在界面上失效，要确定物理的场函数在界面两边的边值关系，这个关系称为界面的**衔接条件.** 但是，衔接条件是一个体系中突变面(或线)上的条件，不属于一般意义下的边界条件，系统还是作为一个整体问题来研究.

注： 界面法向的规定，当Ω为三维空间中的有限区域时，其边界$\partial\Omega$为二维的封闭曲面，此时的$\boldsymbol{n}$为曲面的外法向；当Ω为二维空间中的有限区域时，其边界$\partial\Omega$为一维的封闭曲线，此时的$\boldsymbol{n}$为曲线的外法向；当Ω为一维空间中的有限区域，即线段时，其边界$\partial\Omega$为零维的两个点，即线段的两个端点，此时的$\boldsymbol{n}$为端点的外法向.

习 题 详 解

13.1　一均匀材质做成的细长弹性圆杆，长为l，截面积为S，静止放置在水平x轴上，在t=0时刻，给杆一个沿杆的纵向扰动，使杆产生纵向的微小位移，试推导杆的自由纵向振动方程.

如果在$t=0$时刻，该扰动使杆的纵振动各点离开平衡位置的分布为$u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l}$，$A$为常数，且$u_t(x,0)=0$，分别对如下四种边界状况写出相应的杆的振动问题的定解问题.

(1) 杆的两个端点$x=0$和$x=l$的刚性固定；

(2) $x=0$点固定，$x=l$点为自由端；

(3) 在$x=0$点按$A\sin\omega t$运动，在$x=l$点按$-A\sin\omega t$运动，A，ω为常数；

(4) 两个端点为弹性固定，端点受到了与位移成正比(比例系数为 k)但与位移方向相反的纵向作用力.

解　先推导杆的振动方程.

设杆上各点离开平衡位置的位移分布为 $u(x,t)$，取 $x \to x+\mathrm{d}x$ 的一段微元，则这段杆两端点 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 离开平衡位置的位移为 $u(x,t)$ 和 $u(x+\mathrm{d}x,t)$. 设杆的杨氏模量为 Y，杆的密度为 ρ，则在两端点 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 的受力为 $-YSu'|_x$ 和 $YSu'|_{x+\mathrm{d}x}$，其中 $u'=\dfrac{\partial u}{\partial x}$. 在 x 点处，杆受到的相邻小块的作用力是沿 x 轴的“负”方向，因此出现“$-$”号. 因此这段杆的受力为 $YSu'|_{x+\mathrm{d}x}-YSu'|_x=YS\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x$，加速度为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，由牛顿第二定律，我们很容易写出这段杆的运动方程

$$YS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x=\rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

由于 $Y>0,\rho>0$，令 $a^2=\dfrac{Y}{\rho}$，且由于 $x \to x+\mathrm{d}x$ 代表杆上的任意一段微元，因此杆的运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad \text{或} \quad u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

其中，a 为振动在杆中的传播速度. 这是杆(指杆的内部)在不受外力作用时的运动方程，如果设单位长度的杆所受外力为 $f(x,t)$，请给出此时杆的运动方程.

题目中四种定解问题为

(1)
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l} \\ u_t(x,0)=0 \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l} \\ u_t(x,0)=0 \\ u|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0 \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l} \\ u_t(x,0)=0 \\ u\big|_{x=0}=A\sin\omega t,\ u\big|_{x=l}=-A\sin\omega t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l} \\ u_t(x,0)=0 \\ u_x\big|_{x=0}=\dfrac{k}{YS}u(0,t),\ u_x\big|_{x=l}=-\dfrac{k}{YS}u(l,t) \end{cases}$

13.2　一根长为 l 的匀质弦放置于介质中，当弦振动时受到介质的阻尼力，请对阻尼力建立一个合理的模型，并推导弦在此介质中有阻尼的弦的振动方程.

请给出恰当的初始条件，写出相应的四种不同的弦(任给出四种不同的边界条件)的阻尼振动的定解问题.

解　如同教材第 161 页推导弦的振动方程一样(如教材中图 13.2.2)，在 $x\to x+\mathrm{d}x$ 这段弦中，只需加上阻尼力 f_{r}. 设弦的振动速度不大，则 f_{r} 与该点的速度 $u_t(x,t)$ 的大小成正比而与 $u_t(x,t)$ 的方向相反，设阻尼系数为 β，则这段弦受到的阻尼力为

$$f_{\mathrm{r}}=-\beta u_t\mathrm{d}x$$

由牛顿第二定律可写出这段弦的动力学方程为

$$T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right)-\beta u_t(x,t)\mathrm{d}x+f_0(x,t)\mathrm{d}x=\rho\mathrm{d}x\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

由 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}-\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}=u_{xx}\mathrm{d}x$，令 $a^2=\dfrac{T}{\rho},\ f=\dfrac{f_0}{\rho},\ \gamma=\dfrac{\beta}{\rho}$，其中 γ 为单位密度的弦阻尼系数，则有阻尼力的弦的波动方程为

$$u_{tt}+\gamma u_t-a^2u_{xx}=f$$

下面我们任意写出四个定解问题(供参考)：

(1) $\begin{cases} u_{tt}+\gamma u_t-a^2u_{xx}=f \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} u_{tt}+\gamma u_t-a^2u_{xx}=f \\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} u_{tt}+\gamma u_t-a^2u_{xx}=f \\ (u-\alpha u_x)\big|_{x=0}=(u+\alpha u_x)\big|_{x=l}=0,\quad \alpha\neq 0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$;

(4) $\begin{cases} u_{tt}+\gamma u_t-a^2u_{xx}=f \\ u(0,t)=u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$.

13.3　用匀质材料做成的细圆锥杆(指圆锥角很小，即锥体的长度很长而底部的圆形截面半径很小)，试推导此圆锥杆的纵振动方程.

把所得的方程与 13.1 题的细长圆杆的纵振动方程进行比较，说明两个方程之间的差异.

解　此问题与 13.1 题相似，所不同的是圆锥形细杆.

设此圆锥形细杆的对称轴为 x 轴，锥顶为原点 $(x=0)$，x 轴的正向是由锥顶指向锥底，并设圆锥角为 θ，杆的杨氏模量为 Y，杆的密度为 ρ.

任取杆中的一段 $x\to x+\mathrm{d}x$，这是一段圆锥台，其上、底半径为

$$r_x=x\tan\theta,\quad r_{x+\mathrm{d}x}=(x+\mathrm{d}x)\tan\theta\doteq x\tan\theta$$

其中由于 θ 很小，$\tan\theta$ 也很小，$\mathrm{d}x$ 是小量，故上面第二式中略去高阶小量，所以把这段圆台近似看成圆柱，其圆截面面积为 $\pi(x\tan\theta)^2$，其体积为 $\pi(x\tan\theta)^2\,\mathrm{d}x$.

这段杆两边的受力分析与 13.1 题相同，故这段杆的受力为

$$Y\pi(x+\mathrm{d}x)^2(\tan\theta)^2u_x\big|_{x+\mathrm{d}x}-Y\pi(x\tan\theta)^2u_x\big|_x=Y\pi(\tan\theta)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2u_x\right)\mathrm{d}x$$

由牛顿第二定律，有

$$Y\pi(\tan\theta)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2u_x\right)\mathrm{d}x=\rho\pi x^2(\tan\theta)^2\,\mathrm{d}x\cdot u_{tt}$$

可得

$$\rho x^2u_{tt}-Y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2u_x\right)=0$$

令 $a^2=\dfrac{Y}{\rho}$，则方程可写为

$$x^2u_{tt}-2a^2xu_x-a^2x^2u_{xx}=0$$

当我们考虑 $x\neq 0$ (因为 $x=0$ 是圆锥杆的顶点，是杆的边界点)时，方程变为

$$u_{tt}-2a^2\frac{1}{x}u_x-a^2u_{xx}=0$$

这就是圆锥杆的振动方程，比均匀杆的振动方程要复杂得多.

此方程与杆的振动方程相比较，多了第二项，此时，方程为变系数的偏微分方程.

13.4　一电阻率为 γ，截面为 S 的匀质导线，通有电流密度为 j 的均匀分布的直流电，设该材质的导热系数为 κ，比热为 C，密度为 ρ，导线的侧面均为绝热的，试推导该导线上的热传导方程.

解　由题目可知，这一匀质导线中有与坐标无关的热源强度 $f=j^2\gamma$，设导线的一端为 $x=0$，x 轴沿导线为正向. 设导线的温度分布为 $u(x,t)$，考虑 $x\to x+\mathrm{d}x$ 这一小段导线在 $\mathrm{d}t$ 时间内的热传导问题：

(1) 流入的热量为 $-\kappa S\mathrm{d}t\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$，负号表示流入方向与截面法向相反；

(2) 流出的热量为 $\kappa S\mathrm{d}t\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x}$；

(3) 考虑这一段圆柱体的热源的热量 $j^2\gamma S\mathrm{d}x\mathrm{d}t$.

故由热量守恒定律可知，这段导线热量的增加等于在 $\mathrm{d}t$ 时间内温度的变化，即

$$\kappa S\mathrm{d}t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right)+j^2\gamma S\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\left[u(x,t+\mathrm{d}t)-u(x,t)\right]C\rho S\mathrm{d}x$$

可得方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\kappa}{C\rho}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{C\rho}j^2\gamma$$

令 $a^2=\dfrac{\kappa}{C\rho}$，则方程变为

$$u_t-a^2u_{xx}=\frac{a^2}{\kappa}j^2\gamma$$

13.5　设一匀质金属球，其半径为 a，以球心为坐标原点，请写出球坐标系下的热传导方程(设导热系数为 κ).

若把球的表面涂黑置于阳光下，设球面附近阳光的热流强度为 M (设阳光为平行光，在垂直于阳光的单位面积上、单位时间内流经的热量为 M)，而球外环境的温度为零，金属球表面同时按牛顿冷却定律散热. 设在 $t=0$ 时刻，金属球的温度为 T_0，试给出该定解问题.

解　在球坐标系下，设金属球内的温度分布为 $u(r,\theta,\varphi,t)$.

设球内 $\boldsymbol{r}$ 点处有一小体积元 $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，其面元为

$$\mathrm{d}\sigma_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}\sigma_\theta=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}\sigma_\varphi=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

在 $\boldsymbol{r}$ 点处的热流强度为 $\boldsymbol{q}$，由傅里叶热传导定律，有

$$\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla u=-\kappa\left(\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

则

$$q_r=-\kappa\frac{\partial u}{\partial r},\quad q_\theta=-\kappa\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta},\quad q_\varphi=-\kappa\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

由 $\mathrm{d}V$ 中的热量守恒关系，单位时间内的热量的变化等于 $\boldsymbol{q}$ 流入 $\mathrm{d}V$ 的边界和流出之差.

在 $\boldsymbol{e}_r$ 方向上

$$\begin{aligned}-q_r\mathrm{d}\sigma_r+q_{r+\mathrm{d}r}\mathrm{d}\sigma_{r+\mathrm{d}r}&=\kappa r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial r}-\kappa(r+\mathrm{d}r)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r+\mathrm{d}r,\theta,\varphi)}{\partial r}\\&=-\kappa\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\\&=-\kappa\mathrm{d}V\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向上

$$\begin{aligned}-q_\theta\mathrm{d}\sigma_\theta+q_{\theta+\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma_{\theta+\mathrm{d}\theta}&=\kappa\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\kappa\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r,\theta+\mathrm{d}\theta,\varphi)}{\partial\theta}\\&=-\kappa\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\\&=-\kappa\mathrm{d}V\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向上

$$\begin{aligned}-q_\varphi\mathrm{d}\sigma_\varphi+q_{\varphi+\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\sigma_{\varphi+\mathrm{d}\varphi}&=\kappa\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}-\kappa\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\frac{\partial u(r,\theta,\varphi+\mathrm{d}\varphi)}{\partial\varphi}\\&=-\kappa\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\\&=-\kappa\mathrm{d}V\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

由于我们取的是 $\mathrm{d}V$ 外法向，因此以上三个法向计算的是流出 $\mathrm{d}V$ 的热流，则

由热量守恒关系，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u(r,\theta,\varphi;t)c\rho \mathrm{d}V\right]=\kappa \mathrm{d}V\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$$

其中，c、ρ 为金属球的比热和密度，均为常数，即可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

其中，$a^2=\dfrac{\kappa}{c\rho}$，或写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=0$$

其中，

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

下面我们考虑把球的表面涂黑置于阳光下，取 z 轴与太阳光平行，正向指向太阳. 这样的选取就使得我们的定解问题与 φ 角无关，即以 z 轴为对称轴，球体的温度分布为 $u(r,\theta,t)$. 由于在边界(球面)上，取边界的外法向为正向，傅里叶热传导定律为

$$-q_n\big|_{\partial\Omega}=\kappa\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\big|_{\partial\Omega}$$

本题中 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同向，令牛顿冷却系数为 H，则边界条件为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{H}{\kappa}u\right)\Big|_{r=a}=\begin{cases}M\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

故本题的定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]=0\\ \left|u(r,\theta,t)\right|_{r=0}<\infty\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{H}{\kappa}u\right)\Big|_{r=a}=\begin{cases}M\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}\\ u(r,\theta,t)\big|_{t=0}=T_0\end{cases}$$

13.6　在铀块中，除了中子的扩散运动(扩散系数为 D)外，还存在中子的吸收和增殖反应过程. 设在单位时间内、单位体积中吸收和增殖的中子数之和正比于该时刻、该处中子的浓度 $u(\boldsymbol{r},t)$，即 $\beta u(\boldsymbol{r},t)$，$\beta$ 为比例常数(或称为中子的净增殖系数). 若我们选取的铀块是匀质的球状铀块，铀块的半径为 a. 试在球坐标系下导出中子浓度 $u(\boldsymbol{r},t)$ 扩散所满足的方程.

若球状铀块的表面边界满足如下几种不同的条件，请写出相应条件下的定解问题(对初始条件做合理的假设).

(1) 铀块表面的中子浓度为零；

(2) 设有中子从铀块表面逸出(或是从铀块表面逸出的中子数目与回到铀块表面的中子数目相等)；

(3) 铀块表面的中子浓度不随时间变化.

解　本题与上题类似，由于物质的扩散是由浓度高向浓度低的方向进行扩散. 设中子的扩散流强度为 $\boldsymbol{q}$，则由扩散定律

$$\boldsymbol{q}=-D\nabla u$$

与上题类似，设球内在 $\boldsymbol{r}$ 点处有一小体积元 $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，其面元为 $\mathrm{d}\sigma_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_\theta=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_\varphi=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

由扩散定律，有

$$\boldsymbol{q}=-D\nabla u=-D\left(\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

则

$$q_r=-D\frac{\partial u}{\partial r},\quad q_\theta=-D\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta},\quad q_\varphi=-D\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

由于 $\mathrm{d}V$ 中还有中子的增殖反应，相当于有中子源为 $\beta u(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V$.

由中子数守恒关系，先看单位时间在 $\mathrm{d}V$ 内由于 $\boldsymbol{q}$ 流入 $\mathrm{d}V$ 的边界和流出之差的中子数的变化.

在 $\boldsymbol{e}_r$ 方向上

$$\begin{aligned}-q_r\mathrm{d}\sigma_r+q_{r+\mathrm{d}r}\mathrm{d}\sigma_{r+\mathrm{d}r}&=Dr^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\\&\quad-D(r+\mathrm{d}r)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r+\mathrm{d}r,\theta,\varphi)}{\partial r}\\&=-D\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\\&=-D\mathrm{d}V\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向上

$$\begin{aligned}-q_\theta \mathrm{d}\sigma_\theta + q_{\theta+\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma_{\theta+\mathrm{d}\theta} &= D\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta} - D\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\frac{\partial u(r,\theta+\mathrm{d}\theta,\varphi)}{\partial\theta}\\ &= -D\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\\ &= -D\mathrm{d}V\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向上

$$\begin{aligned}-q_\varphi \mathrm{d}\sigma_\varphi + q_{\varphi+\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\sigma_{\varphi+\mathrm{d}\varphi} &= D\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} - D\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\frac{\partial u(r,\theta,\varphi+\mathrm{d}\varphi)}{\partial\varphi}\\ &= -D\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\ &= -D\mathrm{d}V\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

由于我们取的是 $\mathrm{d}V$ 的外法向，因此以上三个法向计算的是流出 $\mathrm{d}V$ 的中子数，则由中子数守恒关系，单位时间内在 $\mathrm{d}V$ 体积内中子数的变化等于流入 $\mathrm{d}V$ 内的中子数和增殖反应产生的中子数之和，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(r,\theta,\varphi,t)\mathrm{d}V = D\mathrm{d}V&\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\\ &+\beta u\mathrm{d}V\end{aligned}$$

即可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\beta u - a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

其中 $a^2=D$，或写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\beta u - a^2\nabla^2 u = 0$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

对初始条件的设置：由于这个铀块没有达到临界体积(如达到临界体积，这个铀块就不存在了)，而其内的中子数很少(铀的半衰期很长)，故可设初始条件为

$$u\big|_{t=0}=0$$

或是

$$u\big|_{t=0}=u_0<<1$$

在几种边界条件下的定解问题：

(1) 铀块表面的中子浓度为零，则为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta u-a^2\nabla^2 u=0, & r<a\\ u\big|_{r=a}=0\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

(2) 没有中子从铀块表面逸出，则为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta u-a^2\nabla^2 u=0, & r<a\\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=a}=0\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

(3) 铀块表面的中子浓度不随时间变化

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\beta u-a^2\nabla^2 u=0, & r<a\\ u\big|_{r=a}=c\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

其中，c 为常数，由于球对称性，可认为球表面的中子浓度为某一恒定值，不随时间和空间的变化而变化.

13.7　写出静电场中电介质表面静电场的衔接条件.

解　已知静电场 $\boldsymbol{E}$ 与电势 u 的关系为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla u$$

且电势场满足泊松方程

$$\nabla^2 u=-f$$

当电场穿过两种相连接的介质时，在两种介质的界面上电场具有奇异性，泊松方程在界面上已不再适用. 在界面上要用衔接条件把不同介质中的电场量连接起来.

设一种介质的区域为 Ω_1，介电常数为 ε_1；另一种介质的区域为 Ω_2，介电常数为 ε_2. 假定 Ω_1 和 Ω_2 有公共边界 Σ，即两种介质的边界，(设 Σ^- 在 Ω_1 一侧，Σ^+ 在 Ω_2 一侧，一般不必考虑这一区别，就把边界看成是一个二维的几何面，面上的点属于两边共有，我们考虑这个面上物理量的性质). 在 Ω_1 中的电势为 u_1，电场为

$\boldsymbol{E}_1$，电位移向量为 $\boldsymbol{D}_1$，对于各向同性的电介质，有 $\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1$；在 Ω_2 中的电势为 u_2，电场为 $\boldsymbol{E}_2$，电位移向量为 $\boldsymbol{D}_2$，有 $\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2$.

由电学可知，电势 u 是标量，因而在不同介质的界面上电势 u 是连续的，则可得第一个连接条件

$$u_1\big|_{\Sigma}=u_2\big|_{\Sigma}$$

由电学还可知，电位移向量在界面的法向分量连续，可得第二个连接条件

$$(\boldsymbol{D}_1)_n\big|_{\Sigma}=(\boldsymbol{D}_2)_n\big|_{\Sigma}$$

其中，$(\boldsymbol{D}_1)_n$ 表示 $\boldsymbol{D}_1$ 在界面 Σ 的法向上的分量，$(\boldsymbol{D}_2)_n$ 表示 $\boldsymbol{D}_2$ 在界面 Σ 的法向上的分量. 这一连接条件也可直接写成

$$\varepsilon_1(\nabla u_1)_n\big|_{\Sigma}=\varepsilon_2(\nabla u_2)_n\big|_{\Sigma}$$

最简单的情况是在三维空间中，以 y-z 平面为界面，Ω_1 为 $x<0$ 的区域，Ω_2 为 $x>0$ 的区域，电场 $\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴的正向，此问题可化为一维问题，则连接条件可写成

$$u_1\big|_{x=0}=u_2\big|_{x=0}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}=\varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

13.8　一根导热杆由两段 l_1 与 l_2 相衔接构成，两段的导热系数、比热和密度分别为 κ_1，c_1，ρ_1 和 κ_2，c_2，ρ_2. 设杆的初始温度为 u_0，保持杆的两个端点的温度为零. 试写出该导热杆的热传导的定解问题(假定导热杆的侧面均为绝热).

解　此问题可视为一维的热传导问题.

取坐标 x 轴，两根杆的位置为 $0\to l_1, l_1\to l_2$，两根杆的温度分布分别为 u^{I} 和 u^{II}，则定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial t}-\dfrac{\kappa_1}{c_1\rho_1}\dfrac{\partial^2 u^{\mathrm{I}}}{\partial x^2}=0, & 0<x<l_1\\ u^{\mathrm{I}}\big|_{x=0}=0\\ u^{\mathrm{I}}\big|_{t=0}=u_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial t}-\dfrac{\kappa_2}{c_2\rho_2}\dfrac{\partial^2 u^{\mathrm{II}}}{\partial x^2}=0, & l_1<x<l_2\\ u^{\mathrm{II}}\big|_{x=l_1+l_2}=0\\ u^{\mathrm{II}}\big|_{t=0}=u_0\end{cases}$$

衔接条件为

$$\begin{cases} u^{\mathrm{I}}\big|_{x=l_1}=u^{\mathrm{II}}\big|_{x=l_1} \\ \kappa_1\dfrac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x}\Big|_{x=l_1}=\kappa_2\dfrac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial x}\Big|_{x=l_1} \end{cases}$$

注： 衔接条件第一式的给出，是由于温度的分布是标量场，是单值函数，在两杆连接的界面点 $x=l_1$ 只能是一个值，这是数学模型理想化的结果. 而实际的物理系统的界面问题是十分复杂的边界层问题，一般来讲是个非线性的问题，而不是理想的数学模型. 边界条件第二式是由傅里叶热传导定律给出，界面两边的热流量应该相等.

13.9　在均匀介质区域 Ω 内，稳定的热源分布 $f(\boldsymbol{r})$ 产生的温度场 $u(\boldsymbol{r})$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})$$

其中 $f(\boldsymbol{r})=\dfrac{F(\boldsymbol{r})}{\kappa}$，$\kappa$ 为导热系数，$F(\boldsymbol{r})$ 是热流密度.

(1) 试说明第一、第二、第三类边界条件在此问题中的物理意义；

(2) 试说明第二类边界条件存在的必要条件.

解　由于稳定的热流分布是与时间无关的，温度分布也与时间无关，故满足泊松方程.

(1) 第一类边界条件：说明了介质区域边界 $\partial\Omega$ 上的温度分布，而且这一温度分布是直接影响并和热源共同作用形成 Ω 内的稳定温度分布.

第二类边界条件：说明了介质区域边界 $\partial\Omega$ 上的热流分布，也就是边界与环境的稳定的温度梯度分布，而且这个边界的热流分布是直接影响并和热源共同作用形成了 Ω 内的稳定温度分布. 如果整个边界上的热流为零(第二类齐次边界条件)，即边界是绝热的，但 Ω 内有热源存在，此时这种边界条件对于温度场分布的泊松方程是不存在的，因为这种情况下不可能再保持温度的稳定分布，即 $f(\boldsymbol{r})\neq 0$ 与第二类齐次边界条件是不自洽的.

第三类边界条件:说明了介质区域边界 $\partial\Omega$ 上的温度分布与外界环境的温差(当温差不大时)的存在，形成了由边界的热流引起的冷却作用，它由牛顿冷却定律来描述.

(2) 第二类边界条件存在的条件为 Ω 内单位时间热源产生的热量等于单位时间内由边界 $\partial\Omega$ 流出的热量，此时稳定场方程才可能有解，否则无解. 说明不满足这个条件时，第二类边界条件是不存在的. 最典型的例子是，当 Ω 内有热源存在时，第二类齐次边界条件(即绝热条件)是不存在的.

13.10　在真空区域 Ω 内，有稳定的电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$，则在 Ω 中存在稳定的电

势分布，电势$u(\boldsymbol{r})$满足泊松方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

其中，ε_0为真空介电常数. 若Ω的边界$\partial\Omega$是一导体壳，当

(1) 导体壳接地；

(2) 导体壳不接地.

分别对这两种情况说明第一类和第二类边界条件的物理意义.

解　(1) 对于第一类边界条件：导体壳接地，导体壳电势为零，是第一类齐次边界条件. 导体壳的内表面带有与Ω内分布的等量的反号电荷，而导体壳的外表面不带电荷.

对于第二类边界条件：导体壳接地，导体壳外表面电势梯度的法向分量为零，即电场强度法向分量为零，即整个导体壳外的邻域内电场为零，是第二类齐次边界条件. 而在无穷远处的电势为零，导体壳外表面的电势因接地也为零，故球内的电场被屏蔽，导体壳外部的电场为零.

(2) 第一类边界条件：导体壳不接地，导体壳的内表面带有与Ω内分布的等量的反号电荷，而导体壳的外表面带有与Ω内分布的等量的电荷，导体球壳的电势为一常数，即$u|_{\partial\Omega}=c$，其值由解的积分常数和无穷远点为电势零点确定.

第二类边界条件：由于导体壳不接地，导体壳的内表面带有与Ω内分布的等量的反号电荷，而导体壳的外表面带有与Ω内分布的等量的电荷，形成导体壳外表面电势梯度的法向分量有一定的分布，即电场强度法向分量的分布是确定的.

但如果是第二类齐次边界条件，它表明了导体壳外表面电势梯度的法向分量为零，即电场强度法向分量为零，而这种情况是不存在的，第二类齐次边界条件与$f(\boldsymbol{r})\neq 0$的泊松方程是不自洽的.

第十四章　分离变量法

内 容 提 要

分离变量法是解偏微分方程及其定解问题时最基本和最常用的方法. 其基本思想是：把所要求解的场量(多元函数)通过变量分离分解成仅依赖于单一自变量的函数的乘积，把偏微分方程化为多个可求出通解的常微分方程；同时对边界条件也进行变量分离，得到相应的常微分方程的定解条件，由此给出相应的常微分方程的定解问题；求解所有常微分方程的定解问题，由线性方程解的叠加原理即可得到偏微分方程定解问题的解.

本章只讲述直角坐标系下的分离变量法.

一、施图姆-刘维尔(Sturm-Liouville, S-L)本征值问题

1. S-L 方程的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)y'(x)\right]-q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0$$

或写成

$$y''(x)+p_0(x)y'(x)-q_0(x)y(x)+\lambda\rho_0(x)y(x)=0$$

S-L 方程是带本征参数 λ 的变系数(系数也可以为常数)的线性齐次常微分方程，系数 $\rho(x)$ 或 $\rho_0(x)$ 称为权重函数.

2. S-L 本征值问题

S-L 方程加上适定的边界条件(三类齐次边界条件、周期边界条件或自然边界条件)，就构成 S-L 方程的本征值问题，可得到此 S-L 本征值问题的本征解：

(1) 可求得本征参数 λ 取一系列非负的离散的确定的值，即 $0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_i<\cdots$，这无穷多个 $\lambda_i, i=1,2,3,\cdots$，称为此 S-L 方程的本征值问题的本征值；

(2) 对应每一个本征值 λ_i，得到的此 S-L 方程的本征值问题的本征解 $y_i(x)$，称为此 S-L 方程的本征值问题的本征函数；

(3) 本征函数族 $\{y_i(x), i=1,2,3,\cdots\}$ 为正交的、完备的函数族，可构成希尔伯特空间的基向量(通常要把此本征函数族归一化，构成希尔伯特空间的单位基向量).

3. 三种常见的 S-L 本征值问题

(1) 由 S-L 方程和三类齐次边界条件构成的 S-L 本征值问题

$$\begin{cases} y''(x)+p_0(x)y'(x)-q_0(x)y(x)+\lambda\rho_0(x)y(x)=0, \quad x\in[a,b] \\ \left[\alpha y-\beta\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}=0, \qquad \left[\alpha y+\beta\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=b}=0 \end{cases}$$

应用此类 S-L 本征值问题的条件是：要求边界点 $x=a$ 和 $x=b$ 是 S-L 方程中的 $p_0(x)$、$q_0(x)$、$\rho_0(x)$ 的正常点.

当 $\alpha\neq 0,\beta=0$ 时，为第一类边界条件；当 $\alpha=0,\beta\neq 0$ 时，为第二类边界条件；当 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$ 时，为第三类边界条件.

(2) 由 S-L 方程和自然边界条件构成的 S-L 本征值问题

$$\begin{cases} y''(x)+p_0(x)y'(x)-q_0(x)y(x)+\lambda\rho_0(x)y(x)=0 \\ |y(x)|<\infty \end{cases}$$

应用此类 S-L 本征值问题的条件是：要求边界点 $x=a$ 和 $x=b$ 对 S-L 方程中的 $p_0(x)$, $q_0(x)$, $\rho_0(x)$ 至少有一个是奇异的，但在边界点的奇异性只能是这些系数函数的正则奇点.

注：“正常点”和“正则奇点”的概念可参看第十五章的相关内容.

(3) 由 S-L 方程和周期性边界条件构成的 S-L 本征值问题：

$$\begin{cases} y''(x)+p_0(x)y'(x)-q_0(x)y(x)+\lambda\rho_0(x)y(x)=0 \\ y(a)=y(b), \quad y'(a)=y'(b) \end{cases}$$

应用此类 S-L 本征值问题的条件是：要求边界点 $x=a$ 和 $x=b$ 对 S-L 方程中的 $p_0(x)$, $q_0(x)$, $\rho_0(x)$ 也具有同样的周期性.

4. 用分离变量法求解偏微分方程定解问题中本征参数的数目

对泊松方程或拉普拉斯方程的定解问题，对于具有 n 个自变量(即 n 维，其中包括时间变量 t)的偏微分方程的定解问题，则有 $n-1$ 个本征参数，即需要求解 $n-1$ 个 S-L 本征值问题. 此结论对任何坐标系都成立.

对含有时间变量的偏微分方程的定解问题,空间的维数就是本征参数的数目，即有空间的维数数目的 S-L 本征值问题.

对于不含时间变量的偏微分方程(如拉普拉斯方程)的定解问题，三维空间具有两个本征参数，有两个 S-L 本征值问题；二维空间具有一个本征参数，有一个 S-L 本征值问题.

二、齐次方程、齐次边界条件下定解问题的分离变量法

齐次方程、齐次边界条件下定解问题的分离变量法是分离变量法解线性偏微分方程的基础.

1. 含有时间变量的波动方程和输运方程

(1) 首先把场函数中的时间变量和空间变量进行分离，即 $u(\boldsymbol{r},t)=U(\boldsymbol{r})T(t)$ (对于空间变量是一维的，$u(x,t)=X(x)T(t)$)，由齐次方程得到时间变量的场函数 $T(t)$ 和空间变量的场函数 $U(\boldsymbol{r})$ 各自满足的带参数的方程；如果空间变量是二、三维的，需对空间变量再进一步进行分离变量，如 $U(x,y)=X(x)Y(y)$，或者 $U(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$，得到各个空间变量的场函数 $X(x)$，$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 各自满足的方程，这些空间变量的场函数满足的常微分方程都带有本征参数，是 S-L 型方程.

(2) 对齐次边界条件进行分离变量，得到各个空间变量的场函数 $X(x)$，$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 所满足的齐次边界条件，或自然边界条件，或周期边界条件.

(3) 对各个空间变量的场函数 $X(x)$，$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 所满足的 S-L 本征值问题进行求解，得到相应的本征值和本征函数.

(4) 把所求得的本征值代入时间变量的场函数 $T(t)$ 的常微分方程中，求解每个本征值对应的 $T(t)$ 的分量所满足的常微分方程，得到对应的带积分常数的 $T(t)$ 的分量解的形式. 如果 $T(t)$ 的常微分方程是二阶的，解中带有两个积分常数；如果常微分方程是一阶的，解中只带有一个积分常数.

(5) 由线性方程的解的叠加原理，对同一本征值对应的本征函数及相应的 $T(t)$ 直接相乘，并对所有的本征值求和，得到了齐次方程、齐次边界条件下定解问题的带积分常数的形式解 $u(\boldsymbol{r},t)$.

(6) 利用 S-L 本征值问题本征函数的正交性，由定解问题中的初始条件定出形式解 $u(\boldsymbol{r},t)$ 中的积分常数，最终得到定解问题的解.

2. 与时间无关的拉普拉斯方程

由于拉普拉斯方程中的变量均为空间变量，如果定解问题的边界条件都为齐次边界条件，则此定解问题只能得到平凡解，即零解. 因此在这类定解问题中，边界条件不能全部为齐次边界条件，必须有一个变量的边界条件是非齐次的，其余的边界条件必为齐次的. 这个非齐次边界条件的地位就相当于波动方程或输运方程中的初始条件，则此定解问题的分离变量解法类似于上面问题 1 中的步骤，不再重复.

三、非齐次方程、齐次边界条件下定解问题的分离变量法

非齐次方程由于有非齐次项(通常称为源项)，不能直接使用分离变量法，因此对此类问题求解的步骤如下：

(1) 我们先要把此非齐次方程所对应的齐次方程和齐次边界条件构成齐次方程、齐次边界条件下定解问题，按照“二”中所叙述的步骤，求出 S-L 本征值问题的本征函数. 空间每一维(每个自变量)的 S-L 本征函数族(我们都取归一化的函数族)都构成相应希尔伯特空间的基向量.

(2) 把方程中的非齐次项按相应的本征函数族展开，利用本征函数的正交关系求得展开系数，一般情况下展开系数为时间变量 t 的函数.

(3) 由广义傅里叶级数展开可得到关于时间变量 $T(t)$ 的非齐次线性常微分方程的初值问题.

解此初值问题，得到了对应于每一个本征值的关于时间变量 $T(t)$ 的形式解，在这些解中均带有待定的积分常数. 积分常数的个数在“二”中已说明.

(4) 由线性方程解的线性叠加原理，对每一个本征值对应的本征函数及相应的 $T(t)$ 的非齐次方程形式解直接相乘，并对所有的本征值求和，得到了非齐次方程、齐次边界条件下定解问题的带积分常数的形式解 $u(\boldsymbol{r},t)$.

(5) 利用 S-L 本征值问题本征函数的正交性，由定解问题中的初始条件，定出解的形式 $u(\boldsymbol{r},t)$ 中的积分常数，最终得到了此定解问题唯一确定的解.

(6) 对于与时间无关的拉普拉斯方程，其解法仍然按照上面的步骤进行，其解法的思路与上面“二”中的问题 2 类似.

四、非齐次边界条件下定解问题的分离变量法

分离变量法的理论基础是 S-L 本征值问题，它要求边界条件一定是齐次的，否则是无法求解的.

对非齐次边界条件的处理，不能简单地用相应的齐次边界条件进行求解. 因为非齐次边界条件的非齐次项是定义在边界上的函数，它与 S-L 本征值问题求得的本征函数的定义域不同，不能在求得的本征函数上展开. 解此类问题首先要通过函数变换 $u(\boldsymbol{r},t)\to w(\boldsymbol{r},t)$，即构造一个新的函数 $w(\boldsymbol{r},t)$，使得函数 $w(\boldsymbol{r},t)$ 满足齐次边界条件，同时方程也要变成函数 $w(\boldsymbol{r},t)$ 所满足的方程(一般情况下是非齐次方程)，初始条件也变成函数 $w(\boldsymbol{r},t)$ 满足的初始条件，即通过引入一个新的未知函数，把原来场函数的定解问题变成新的未知函数 $w(\boldsymbol{r},t)$ 所满足的非齐次方程、齐次边界条件下定解问题. 由“三”即可解得唯一的解 $w(\boldsymbol{r},t)$，再通过原来的函数变换式的逆变换 $w(\boldsymbol{r},t)\to u(\boldsymbol{r},t)$，得到原非齐次边界条件下定解问题的解.

五、对于自然边界条件和周期性边界条件的 S-L 本征值问题的求解

要根据自然边界条件的约束或周期性边界条件的约束，直接由 S-L 本征参数方程确定本征值和本征函数. 这类问题在曲线坐标系下分离变量的定解问题中会经常出现.

习 题 详 解

14.1　长为 l 的弦，两端固定，弦中的张力为 T，在距弦的一端 $x=0$ 的 l_0 处 $(l_0<l)$,以力 F_0 把弦拉开，使 l_0 点离开平衡位置有一小的位移，并使弦处于稳定状态. 在 $t=0$ 时刻突然撤销这一力 F_0，求解弦的振动.

解　这一问题属于第一类齐次边界条件的定解问题，可以直接用分离变量法求解.

首先求出初始位移分布，设在 l_0 点的小位移为 h，由受力平衡可推得

$$F_0=T\frac{h}{l_0}+T\frac{h}{l-l_0}$$

得

$$h=\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l_0(l-l_0)}{l}$$

故初始位移分布为

$$u(x,0)=\frac{h}{l_0}x=\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l-l_0}{l}x,\quad 0<x<l_0$$

$$u(x,0)=\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l_0}{l}(l-x),\quad l_0<x<l$$

此题的定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l \qquad (1)\\ u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=l}=0 \qquad (2)\\ u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{T}\cdot\dfrac{l-l_0}{l}x, & 0<x<l_0\\ \dfrac{F_0}{T}\cdot\dfrac{l_0}{l}(l-x), & l_0<x<l\end{cases} \qquad (3)\\ u_t(x,0)=0 \qquad (4)\end{cases}$$

用分离变量法解此定解问题，令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，由方程(1)可得

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}=-\lambda,\quad \lambda>0$$

可得 $X(x)$ 和 $T(t)$ 满足的方程，并结合边界条件有

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & 0<x<l \\ X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases} \tag{5}$$

和

$$T''+\lambda a^2T=0 \tag{6}$$

边值问题(5)为 S-L 本征值问题，可得本征值

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{7}$$

相应于本征值 λ_n 的本征函数为

$$X_n(x)=C_n\sin\sqrt{\lambda_n}x=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{8}$$

把 λ_n 代入方程(6)中，可得 $T(t)$ 解

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t \tag{9}$$

则可得方程(1)相应于本征值 λ_n 的一系列特解为

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{10}$$

其中(8)式中的系数 C_n 吸收到 A_n, B_n 中，则定解问题(1)～(4)的解的一般形式为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11}$$

式中待定系数 A_n，B_n 由初始条件(3)和(4)来定.

由(4)式，容易得

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

可得 $B_n=0$，则(11)式变为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{12}$$

由(3)式确定 A_n，即

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\begin{cases}\dfrac{F_0}{T}\cdot\dfrac{l-l_0}{l}x, & 0<x<l_0\\ \dfrac{F_0}{T}\cdot\dfrac{l_0}{l}(l-x), & l_0<x<l\end{cases}\tag{13}$$

则

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{2}{l}\int_0^{l_0}\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l-l_0}{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{l_0}^{l}\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l_0}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l-l_0}{l^2}\int_0^{l_0}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l_0}{l^2}\int_{l_0}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l-l_0}{n\pi l}\left[-x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l_0}+\int_0^{l_0}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]\\&\quad+2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l_0}{n\pi l}\left[-(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l_0}^{l}-\int_{l_0}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]\\&=-2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{(l-l_0)l_0}{n\pi l}\cos\frac{n\pi l_0}{l}+2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l-l_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l_0}\\&\quad+2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{(l-l_0)l_0}{n\pi l}\cos\frac{n\pi l_0}{l}-2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l_0}^{l}\\&=2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l-l_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi l_0}{l}+2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi l_0}{l}\\&=2\frac{F_0}{T}\cdot\frac{l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi l_0}{l}\end{aligned}$$

故得此定解问题的解为

$$u(x,t)=2\frac{F_0}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi l_0}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\tag{14}$$

14.2　长为 l 的弦，两端固定，在弦的 x_0 处($0<x_0<l$)施于谐变外力 $\rho f(t)=\rho A\sin\omega t$ (ρ 为弦的线密度，其中 ρ，A 和 ω 都为常数)，求解弦的振动. (**提示**：外力线密度可表示为 $\rho f(x,t)=\rho A\delta(x-x_0)\sin\omega t$.)

解　这是在第一类齐次边界条件下的弦的振动，并且是在作用于 x_0 点的外力线密度为 $f(x,t)=A\delta(x-x_0)\sin\omega t$ 的持续作用下的振动. 因此，定解问题可表示为

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=A\delta(x-x_0)\sin\omega t, & 0<x<l,\ -\infty<t<\infty\\ u(0,t)=0\\ u(l,t)=0\end{cases}\tag{1}$$

从物理上对于源函数的分析可知，由于弦在持续的周期性外力策动下的运动，经过长时间的运动后，弦的$T(t)$分量最终以$\sin\omega t$的形式做周期运动，故可直接令

$$u(x,t)=X(x)\sin\omega t \tag{2}$$

代入定解问题(1)，得

$$\begin{cases} X''(x)+\dfrac{\omega^2}{a^2}X(x)=-\dfrac{A}{a^2}\delta(x-x_0) \\ X(0)=0,\quad X(l)=0 \end{cases} \tag{3}$$

考虑到上述相应的齐次方程的定解问题：$X(x)$在$0\leqslant x\leqslant l$上的S-L本征值问题的本征函数族为$\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$，故$X(x)$的傅里叶展开为

$$X(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4}$$

系数c_n待定. 为定出c_n，注意到$\delta(x-x_0)$的傅里叶展开为

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{5}$$

由(3)～(5)式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{\omega^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{l}=-\frac{A}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\frac{n^2\pi^2}{l^2}-c_n\frac{\omega^2}{a^2}+\frac{2A}{a^2l}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}-c_n\omega^2+\frac{2A}{l}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=0 \tag{7}$$

令$\omega_n^2=\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}$，上式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\left(\omega_n^2-\omega^2\right)+\frac{2A}{l}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0 \tag{8}$$

当$\omega\neq\omega_n$时，可得系数

$$c_n=\frac{2A}{l\left(\omega^2-\omega_n^{\,2}\right)}\sin\frac{n\pi x_0}{l} \tag{9}$$

故

$$X(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{l\left(\omega^2-\omega_n{}^2\right)}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10}$$

则原定解问题的解为

$$u(x,t)=X(x)\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{l\left(\omega^2-\omega_n{}^2\right)}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\omega t \tag{11}$$

当$\omega=\omega_n$时，参看教材上第 197-198 页所讨论的共振问题，只是把教材上的外力中的$A(x)\to\delta(x-x_0)$，把$A(x)$的傅里叶展开系数α_n变成$\delta(x-x_0)$的展开系数$\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi x_0}{l}$，其他一切运算都相同，由于篇幅较长，在此不再重复.

14.3　求解习题 13.1 中的情况(2)下杆的振动.

解　对于 13.1 题中的(2)求解如下：杆左端固定，右端为自由端时，定解问题为

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u\big|_{x=0}=0,\quad u_x\big|_{x=l}=0\\ u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l},\quad u_t(x,0)=0\end{cases} \tag{1}$$

边界条件均为齐次，故可直接对$u(x,t)$进行分离变量，设$u(x,t)=T(t)\cdot X(x)$，则定解问题(1)中的$X(x)$构成了 S-L 本征值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=0,\quad X'(l)=0\end{cases} \tag{2}$$

以及$T(t)$满足的方程为

$$T''+\lambda a^2T=0 \tag{3}$$

S-L 本征值问题(2)的通解为

$$X(x)=C\sin\sqrt{\lambda}x+D\cos\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件$X(0)=0$可得$D=0$；由边界条件$X'(l)=0$，即$C\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=0$，可得$\sqrt{\lambda}l=\frac{(2n+1)\pi}{2}$，即得该 S-L 本征值问题的本征值为

$$\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2,\quad n=0,1,2,3,\cdots \tag{4}$$

对应于本征值λ_n的本征函数为

$$X_n = C_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \tag{5}$$

把 λ_n 代入方程(3)，可得方程的通解为

$$T_n(t) = A_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}at + B_n \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}at \tag{6}$$

则对应于 λ_n 有

$$u_n(x,t) = \left[A_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}at + B_n \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}at \right] \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \tag{7}$$

其中(5)式中的系数 C_n 吸收到系数 A_n, B_n 中.

由此，我们得到定解问题(1)中方程的通解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}at + B_n \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}at \right] \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \tag{8}$$

由(1)式中的初始条件确定系数 A_n, B_n：由 $u_t(x,0)=0$ 可得 $A_n = 0$，则有

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}at \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \tag{9}$$

再由 $u(x,0) = A\sin\dfrac{\pi x}{l}$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x = A\sin\frac{\pi x}{l} \tag{10}$$

可得

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2A}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n+1}\frac{8A}{[4n(1+n)-3]\pi} \end{aligned} \tag{11}$$

故得解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{8A}{[4n(1+n)-3]\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}at \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \tag{12}$$

14.4　导热系数为 κ 的均匀物质构成的立方体，$0 \leqslant x \leqslant l_1, 0 \leqslant y \leqslant l_2, 0 \leqslant z \leqslant l_3$，其初始温度为 T_0，如果其表面温度保持 0℃，求此立方体内温度的变化，并写出此立方体中心点，即 $\left(\dfrac{l_1}{2}, \dfrac{l_2}{2}, \dfrac{l_3}{2}\right)$ 处温度随时间的变化关系. 求当时间 $t \to \infty$ 时该立方体的温度表达式，并从物理上解释其合理性.

(思考：如果边界条件改为该立方体置于 0℃的环境中，其边界以牛顿冷却定

律与环境进行热交换，其解的形式又是如何变化的，并与上面的结果进行比较，分析这两种边界条件的物理图像上的差异).

解　设该物质的密度为 ρ，比热为 c，立方体中的温度分布为 $u(x,y,z,t)$，该定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2\nabla^2 u = 0, \quad a^2 = \dfrac{\kappa}{\rho c}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \quad t > 0 \\ u(0,y,z,t) = u(l_1,y,z,t) = 0, \quad u(x,0,z,t) = u(x,l_2,z,t) = 0, \\ u(x,y,0,t) = u(x,y,l_3,t) = 0 \\ u(x,y,z,0) = T_0 \end{cases} \tag{1}$$

先把空间变量和时间变量分离，设 $u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t)$，则方程变为

$$UT' - a^2 T\nabla^2 U = 0 \tag{2}$$

令

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 U}{U} = -\lambda, \quad \lambda > 0 \tag{3}$$

则 $T(t)$ 满足的方程为

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \tag{4}$$

$U(x,y,z)$ 满足的方程为

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0 \tag{5}$$

对 $U(x,y,z)$ 进一步分离变量，令 $U(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$，可得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0 \tag{6}$$

令

$$\frac{X''}{X} = -\alpha, \quad \frac{Y''}{Y} = -\beta, \quad \frac{Z''}{Z} = -\gamma, \quad \alpha,\beta,\gamma > 0 \tag{7}$$

有

$$\alpha + \beta + \gamma = \lambda \tag{8}$$

由(1)式中的边界条件分离变量，并结合(7)式，有

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0 \\ X(0) = X(l_1) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} Y'' + \beta Y = 0 \\ Y(0) = Y(l_2) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} Z''+\gamma Z=0 \\ Z(0)=Z(l_3)=0 \end{cases} \tag{11}$$

由(9)式～(11)式所构成的 S-L 本征值问题，分别可解得

$$\alpha_n=\left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{12}$$

$$\beta_m=\left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2,\quad m=1,2,3,\cdots \tag{13}$$

$$\gamma_k=\left(\frac{k\pi}{l_3}\right)^2,\quad k=1,2,3,\cdots \tag{14}$$

并有

$$\lambda_{nmk}=\alpha_n+\beta_m+\gamma_k=\left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{l_3}\right)^2 \tag{15}$$

由(9)式，对应于本征值 α_n 有本征函数

$$X_n(x)=A'_n\sin\frac{n\pi x}{l_1} \tag{16}$$

由(10)式，对应于本征值 β_m 有本征函数

$$Y_m(y)=B'_m\sin\frac{m\pi y}{l_2} \tag{17}$$

由(11)式，对应于本征值 γ_k 有本征函数

$$Z_k(z)=C'_k\sin\frac{k\pi z}{l_3} \tag{18}$$

可得对应于本征值 λ_{nmk} 的本征函数为

$$U_{nmk}=A_{nmk}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\cdot\sin\frac{m\pi y}{l_2}\cdot\sin\frac{k\pi z}{l_3} \tag{19}$$

其中

$$A_{nmk}=A'_nB'_mC'_k$$

将本征值 λ_{nmk} 代入 $T(t)$ 的方程(4)中，有

$$T'_{nmk}+\lambda_{nmk}a^2T=0 \tag{20}$$

此方程的解为

$$T_{nmk}(t)=B_{nmk}\mathrm{e}^{-\lambda_{nmk}a^2t} \tag{21}$$

则对应于本征值 λ_{nmk}，有

$$\begin{aligned} u_{nmk}(x,y,z,t) &= B_{nmk}T_{nmk}(t)U_{nmk}(x,y,z) \\ &= C_{nmk}\mathrm{e}^{-\lambda_{nmk}a^2t}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{k\pi z}{l_3} \end{aligned} \tag{22}$$

其中，$C_{nmk}=A_{nmk}B_{nmk}$.

则定解问题的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_{nmk}(x,y,z,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{nmk}\mathrm{e}^{-\lambda_{nmk}a^2t}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{k\pi z}{l_3} \end{aligned} \tag{23}$$

系数 C_{nmk} 由初始条件定. 由 $u(x,y,z,0)=T_0$ 可得

$$\begin{aligned} C_{nmk} &= T_0\int_0^{l_1}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\mathrm{d}x\int_0^{l_2}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\mathrm{d}y\int_0^{l_3}\sin\frac{k\pi z}{l_3}\mathrm{d}z \\ &= T_0\frac{l_1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\frac{l_2}{m\pi}\left[1-(-1)^m\right]\frac{l_3}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] \\ &= T_0\frac{2l_1}{(2n-1)\pi}\cdot\frac{2l_2}{(2m-1)\pi}\cdot\frac{2l_3}{(2k-1)\pi} \end{aligned} \tag{24}$$

所以，原定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \frac{8l_1l_2l_3T_0}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{(2m-1)}\cdot\frac{1}{(2k-1)}\mathrm{e}^{-\lambda_{nmk}a^2t} \\ &\quad\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l_1}\sin\frac{(2m-1)\pi y}{l_2}\sin\frac{(2k-1)\pi z}{l_3} \end{aligned} \tag{25}$$

式中

$$\lambda_{nmk}=\left[\frac{(2n-1)\pi}{l_1}\right]^2+\left[\frac{(2m-1)\pi}{l_2}\right]^2+\left[\frac{(2k-1)\pi}{l_3}\right]^2 \tag{26}$$

在立方体的中心点 $\left(\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2},\frac{l_3}{2}\right)$ 处，解为

$$\begin{aligned} u\left(\frac{l_1}{2},\frac{l_1}{2},\frac{l_1}{2},t\right) &= \frac{8l_1l_2l_3T_0}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{(2m-1)}\cdot\frac{1}{(2k-1)} \\ &\quad\cdot\mathrm{e}^{-\left\{\left[\frac{(2n-1)\pi}{l_1}\right]^2+\left[\frac{(2m-1)\pi}{l_2}\right]^2+\left[\frac{(2k-1)\pi}{l_3}\right]^2\right\}a^2t} \\ &\quad\cdot\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(m\pi-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

我们分析，由于定解问题的解随时间变化的项为指数形式，故当$n=m=k=1$时，u随t的衰减最小，是主导项，记为

$$u_{1,1,1}=\frac{8l_1l_2l_3T_0}{\pi^3}\cdot \mathrm{e}^{-\left\{\left[\frac{\pi}{l_1}\right]^2+\left[\frac{\pi}{l_2}\right]^2+\left[\frac{\pi}{l_3}\right]^2\right\}a^2t} \tag{28}$$

当$n=m=k=2$时，

$$u_{2,2,2}=-\frac{8l_1l_2l_3T_0}{27\pi^3}\cdot \mathrm{e}^{-\left\{\left[\frac{3\pi}{l_1}\right]^2+\left[\frac{3\pi}{l_2}\right]^2+\left[\frac{3\pi}{l_3}\right]^2\right\}a^2t}=-\frac{8l_1l_2l_3T_0}{27\pi^3}\cdot \mathrm{e}^{-9\left\{\left[\frac{\pi}{l_1}\right]^2+\left[\frac{\pi}{l_2}\right]^2+\left[\frac{\pi}{l_3}\right]^2\right\}a^2t} \tag{29}$$

此时的解是$n=m=k=1$时的 9 次方，且初始时的温度$(t=0)$是前者的$\frac{1}{27}$，即$\left|-\frac{8l_1l_2l_3T_0}{27\pi^3}\right|=\frac{1}{27}\left|\frac{8l_1l_2l_3T_0}{\pi^3}\right|$. n,m,k越大，解的模式的初始温度越小，且随时间衰减越快，即对解的影响越小，因此对中心点温度的变化可用(28)式来估计.

当t很大时，可看成$t\to\infty$，由解(25)可看出

$$\mathrm{e}^{-\lambda_{nmk}a^2t}\to 0$$

即$u=0$，此时立方体的温度与边界的温度相同，均为零度. 这与物理上的图像是一致的.

我们给出整个解的领头项的分析，并非本题的必要. 但给出上面的分析是由于这种对解的分析方法是很重要的，可定性估算解的行为. 而本题由解的表达式(27)中有一个对时间t的很强的衰减因子$\mathrm{e}^{-\left\{\left[\frac{(2n-1)\pi}{l_1}\right]^2+\left[\frac{(2m-1)\pi}{l_2}\right]^2+\left[\frac{(2k-1)\pi}{l_3}\right]^2\right\}a^2t}$，当$t\to\infty$时，此因子趋于零，因此有

$$u(x,t)\xrightarrow{t\to\infty}0$$

同时，也可以看出，当某一边很小时，如$l_3\ll 1$，z轴方向上的(与z轴垂直)两个边界上的散热就起主导作用，而与x、y轴垂直的四个边界面的散热作用就很小了，这相当于一个薄片的散热问题.

14.5　侧面绝热的均匀细杆，$0\leqslant x\leqslant l$，其导热系数为κ，初始温度为T_0，其两端保持不变的温度$u(0,t)=T_1$，$u(l,t)=T_2$，T_1,T_2均为常数. 求杆上各点的温度分布随时间的变化关系. 当$t\to\infty$时，给出杆上的温度分布的表达式，并解释这一结果在物理上的合理性及其满足的物理定律.

解　侧面绝热的均匀细杆的热传导问题可视为一维问题，其定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) = T_2 \\ u(x,0) = T_0 \end{cases} \tag{1}$$

这是关于齐次方程、非齐次边界条件的定解问题，所以，首先要把边界条件齐次化，设

$$u(x,t) = k(x,t) + w(x,t) \tag{2}$$

可设 $k(x,t)$ 具有形式为

$$k(x,t) = A(t)x + B(t) \tag{3}$$

要满足

$$\begin{cases} k(0,t) = B(t) = T_1 \\ k(l,t) = A(t)l + B(t) = T_2 \end{cases} \tag{4}$$

可得

$$k(x,t) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1 \tag{5}$$

则有

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0 \tag{6}$$

由于 $k(x,t)$ 的形式与 t 无关，由定解问题 (1)，可得 $w(x,t)$ 的定解问题

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = T_0 - \dfrac{T_2 - T_1}{l} x - T_1 \end{cases} \tag{7}$$

此定解问题可直接用分离变量法求解，令

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{8}$$

可得 $X(x)$ 的定解问题为

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

而 $T(t)$ 满足的方程为

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \tag{10}$$

由于定解问题(9)为 S-L 本征值问题，可解得本征值 λ 为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{11}$$

其相应的本征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{12}$$

对应于λ_n，方程(10)的解为

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \tag{13}$$

可得

$$w_n=X_n(x)T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{14}$$

则定解问题(7)的形式解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

由(7)式中的初始条件

$$w(x,0)=T_0-T_1-\frac{T_2-T_1}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

确定系数C_n

$$\begin{aligned}
C_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\left(T_0-T_1-\frac{T_2-T_1}{l}x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{-2}{n\pi}(T_0-T_1)\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l-\frac{2(T_2-T_1)}{l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2(T_0-T_1)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{2(T_2-T_1)}{n\pi l}x\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l-\frac{2(T_2-T_1)}{n\pi l}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2(T_0-T_1)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{2(T_2-T_1)}{n\pi}(-1)^n\\
&=\frac{2(T_0-T_1)}{n\pi}-\frac{2(T_0-T_2)}{n\pi}(-1)^n=\frac{2}{n\pi}\left[(T_0-T_1)-(-1)^n(T_0-T_2)\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

由(2)、(5)、(15)和(16)式，可得原定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{T_2-T_1}{l}x+T_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(T_0-T_1)-(-1)^n(T_0-T_2)\right]\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{17}$$

从这一解的表达式可看出，当时间$t\to\infty$时，等式右边最后一项为零，即整

个求和号内均为零，杆的初始温度 T_0 已不起作用，此时杆内的温度分布为

$$u(x,t)=\frac{T_2-T_1}{l}x+T_1 \tag{18}$$

即当时间 $t\to\infty$ 时，杆内的温度分布只取决于杆两端的温度 T_1 和 T_2，并且呈线性分布.

14.6　铀块中中子的扩散、吸收的增殖反应如习题 13.6 所述. 试求一维的细铀杆的临界长度. 临界长度是指当铀杆超过这一长度时，杆中的中子浓度随时间而增长致使铀杆产生爆炸. 这里忽略杆的过中心轴剖面的对角线长度与杆的长度之差.

解　假设中子不从细杆侧面逸出，而只从两端逸出，并假设细杆两端中子浓度为 0，杆中中子的浓度分布为 $u(x,t)$，初始时刻杆中中子浓度分布为 $\varphi(x)$，则本题的定解问题为

$$\begin{cases} u_t-Du_{xx}=\beta u,\quad D>0,\quad \beta>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases} \tag{1}$$

由于方程和边界条件均为齐次，则可用分离变量法直接求解. 令

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

则

$$\frac{T'}{DT}-\frac{X''}{X}=\frac{\beta}{D} \tag{2}$$

设

$$\frac{T'}{DT}-\frac{\beta}{D}=\frac{X''}{X}=-\lambda,\quad \lambda>0 \tag{3}$$

故可得关于 $X(x)$ 的 S-L 本征值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \tag{4}$$

解得本征值

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{5}$$

相应的本征函数为

$$X_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

同时，得到$T(t)$的方程

$$T_n' - \left[\beta - D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]T_n = 0 \tag{7}$$

此方程的解为

$$T_n = B_n \mathrm{e}^{\left[\beta - D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]t} \tag{8}$$

则原定解问题的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{\left[\beta - D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

对此解的行为进行讨论：

当$\beta - D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 > 0$时，$u(x,t)$随着$t$的增加而增大，将导致爆炸；

当$\beta - D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 < 0$时，$u(x,t)$随着$t$的增加而减小，将导致核的连锁反应停止；

当$\beta - D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = 0$时，$u(x,t)$不随$t$而改变，即

$$l = n\pi\sqrt{\frac{D}{\beta}} \tag{10}$$

而我们所求的临界长度应取l的最小值，即$n=1$，所以铀棒的临界长度为

$$l = \pi\sqrt{\frac{D}{\beta}} \tag{11}$$

注：本题对边界条件的考虑可以有多种.

例如，假设铀棒两端都有中子逸出，由于对称性考虑，铀棒两端中子的浓度相等，即

$$u(0,t) = u(l,t)$$

可得

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = \beta u, \quad D>0, \quad \beta>0, \\ u(0,t) = u(l,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{12}$$

由物理知识可知，在临界长度时，中子的浓度是不随时间变化的，即$u_t = 0$，故可得方程及约束条件

$$\begin{cases} u_{xx}+\dfrac{\beta}{D}u=0 \\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l} \end{cases} \tag{13}$$

由于此问题与 t 无关，可直接把中子浓度写成 $u(x)$，则方程的解为

$$u(x)=A\sin\sqrt{\frac{\beta}{D}}x+B\cos\sqrt{\frac{\beta}{D}}x \tag{14}$$

由约束条件即(13)式中的边界条件，有

$$B=A\sin\sqrt{\frac{\beta}{D}}l+B\cos\sqrt{\frac{\beta}{D}}l \tag{15}$$

即

$$B\left(1-\cos\sqrt{\frac{\beta}{D}}l\right)=A\sin\sqrt{\frac{\beta}{D}}l \tag{16}$$

要使此式成立，可选取 $B=0, A\neq 0$，则有

$$\sqrt{\frac{\beta}{D}}l=n\pi \tag{17}$$

取 $n=1$ 时，得临界长度为

$$l=\pi\sqrt{\frac{D}{\beta}} \tag{18}$$

若选取 $A\neq 0, B\neq 0$，或是 $B\neq 0, A=0$，要使(16)式成立，可得

$$\sqrt{\frac{\beta}{D}}l=2n\pi$$

取 $n=1$ 时，得临界长度为

$$l=2\pi\sqrt{\frac{D}{\beta}}$$

这是(17)式中 $n=2$ 的情况，显然不是我们所要的临界长度.

综合考虑，临界长度只能是(18)式.

14.7　一厚度为 l 的单晶硅片置于充满杂质的环境中，杂质从硅片的两表面向里扩散，假设硅片两表面杂质浓度保持恒定的 N_0，杂质在硅片中的扩散系数为 D，求解此扩散问题，并说明扩散的时间与扩散系数 D 及厚度 l 的关系. 当 t 较大时，化简所得的结果.

解　此扩散问题属于垂直于硅片表面的一维问题. 设下表面为坐标原点，上表面为 $x=l$，则定解问题为

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = N_0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

这属于非齐次边界条件问题. 首先要把边界条件齐次化，令

$$u(x,t) = k(x,t) + w(x,t) \tag{2}$$

设

$$k(x,t) = A(t)x + B(t) \tag{3}$$

同时满足

$$k(0,t) = k(l,t) = N_0 \tag{4}$$

可得

$$B(t) = N_0, \quad A(t) = 0$$

即

$$k(x,t) = N_0 \tag{5}$$

故 $w(x,t)$ 满足第一类齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases} w_t - Dw_{xx} = 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = -N_0 \end{cases} \tag{6}$$

令

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{7}$$

则 $X(x)$ 满足 S-L 本征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

可解得本征值为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{9}$$

相应的本征函数为

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10}$$

相应的 $T(t)$ 满足的方程为

$$T_n' + D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0 \tag{11}$$

其解为

$$T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \tag{12}$$

因此定解问题(6)的形式解为

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{13}$$

由初始条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = -N_0 \tag{14}$$

定系数C_n，有

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l (-N_0)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2N_0}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l \\ &= -\frac{2N_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \end{aligned} \tag{15}$$

则定解问题(6)的解为

$$w(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2N_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\mathrm{e}^{-D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{16}$$

由此，我们得到定解问题(1)的解为

$$u(x,t) = N_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2N_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\mathrm{e}^{-D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{17}$$

当时间较长时，对于相同的时间t，上式右边第二项中$n=2$的项的衰减是$n=1$项的 4 次方，且初始时刻的浓度仅为第一项的一半，而$n=3,4,\cdots$项的衰减更厉害，因此只要考虑$n=1$的主导项的扩散行为

$$u(x,t) = N_0 - \frac{4N_0}{n\pi}\mathrm{e}^{-D\lambda_1 t}\sin\frac{\pi x}{l} \tag{18}$$

此式可以看出硅片中杂质浓度的分布，在$x=\dfrac{l}{2}$处杂质的浓度最小. 当$t\to\infty$时，$u=N_0$.

14.8　在矩形区域$0<x<a, 0<y<b$上求解拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(x,y) = 0$$

使其满足边界条件

$$\begin{cases} u(0,y)=Ay(b-y), & u(a,y)=0 \\ u(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a}, & u(x,b)=0 \end{cases}$$

其中 A, B 为常数.

解　本题的定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u=0 \\ u(0,y)=Ay(b-y), & u(a,y)=0 \\ u(x,0)=B\sin\dfrac{\pi}{a}x, & u(x,b)=0 \end{cases} \tag{1}$$

式中，$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

这是二维的拉普拉斯方程的定解问题，对 x 和 y 的边界都有非齐次的条件，我们采取和以前所用的不同方法. 思路是构造两个函数 $v(x,y)$ 和 $w(x,y)$，使它们分离变量后分别满足 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 的 S-L 本征值问题. 并且要求

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y) \tag{2}$$

而 v, w 两组边界条件相加为(1)式中的边界条件，即

$$\begin{cases} \nabla^2 v+\nabla^2 w=0 \\ v(0,y)+w(0,y)=Ay(b-y), & v(a,y)+w(a,y)=0 \\ v(x,0)+w(x,0)=B\sin\dfrac{\pi}{a}x, & v(x,b)+w(x,b)=0 \end{cases} \tag{3}$$

容易看出，如果 $v(x,y)$ 满足以下定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 v(x,y)=0 \\ v(0,y)=0, \quad v(a,y)=0 \\ v(x,0)=B\sin\dfrac{\pi}{a}x, \quad v(x,b)=0 \end{cases} \tag{4}$$

则 $w(x,y)$ 必满足以下的定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 w(x,y)=0 \\ w(x,0)=0, \quad w(x,b)=0 \\ w(0,y)=Ay(b-y), \quad w(a,y)=0 \end{cases} \tag{5}$$

至此我们把二维非齐次边界条件的定解问题化为两个二维带有齐次边界条件的定

解问题.

对于定解问题(4)，没有初始条件，有两个边界条件，只有一个 S-L 本征值问题. 设

$$v(x,y)=X(x)Y(y) \tag{6}$$

我们选择具有齐次边界的 $X(x)$ 为 S-L 本征值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0,\ \ X(a)=0 \end{cases} \tag{7}$$

其本征值为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{8}$$

相应的本征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{9}$$

$Y(y)$ 满足方程

$$Y''-\lambda Y=0 \tag{10}$$

结合(8)式，对应于每个 λ_n 此方程的通解形式为

$$Y_n(y)=C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi y}{a}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{a}} \tag{11}$$

则有

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}X_nY_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi y}{a}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{12}$$

由定解问题(4)中的定解条件，可定出(12)式中的系数 C_n, D_n，即

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n+D_n\right)\sin\frac{n\pi x}{a}=B\sin\frac{\pi}{a}x \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi b}{a}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}=0 \end{cases} \tag{13}$$

由第一式可得

$$C_1+D_1=B\Rightarrow C_1=B-D_1,\ C_n=D_n=0, n=2,3,4,\cdots \tag{14}$$

再由第二式可得

$$\left(B-D_1\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}+D_1\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}=0$$

即

$$D_1=\frac{B\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}} \tag{15}$$

可得

$$C_1=\frac{(B-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-B\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}} \tag{16}$$

故得到定解问题(4)的解为

$$\begin{aligned} v(x,y)&=\left(C_1\mathrm{e}^{\frac{\pi y}{a}}+D_1\mathrm{e}^{-\frac{\pi y}{a}}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\\ &=\left[\frac{(B-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-B\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}}\mathrm{e}^{\frac{\pi y}{a}}+\frac{B\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi y}{a}}\right]\sin\frac{\pi x}{a} \end{aligned} \tag{17}$$

用同样的方法可以解得 $w(x,y)$ 所满足的定解问题(5). 设

$$w(x,y)=X(x)Y(y) \tag{18}$$

求解关于 $Y(y)$ 的 S-L 本征值问题和关于 $X(x)$ 的方程，完全重复本题(7)式～(11)式的过程，可得

$$Y_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{19}$$

$$X_n(x)=C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi x}{b}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi x}{b}} \tag{20}$$

得到 $w(x,y)$ 的形式为

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n=\sum_{n=1}^{\infty}X_nY_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi x}{b}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi x}{b}}\right)\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{21}$$

再由定解问题(5)中的定解条件，定出(21)式中的系数 C_n, D_n，有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(C_n+D_n)\sin\frac{n\pi y}{b}=Ay(b-y)\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}=0\end{cases} \tag{22}$$

由第一式有

$$
\begin{aligned}
C_n + D_n &= \frac{2}{b}\int_0^b Ay(b-y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2A}{b}\int_0^b by\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y - \frac{2A}{b}\int_0^b y^2\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y \\
&= \frac{-2Ab}{n\pi}y\cos\frac{n\pi y}{b}\bigg|_0^b + \frac{2A}{n\pi}y^2\cos\frac{n\pi y}{b}\bigg|_0^b - \frac{4A}{n\pi}\int_0^b y\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y \\
&= \frac{-2Ab^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{2Ab^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4Ab}{(n\pi)^2}\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y \\
&= \frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

有

$$
C_n = \frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right] - D_n \tag{24}
$$

由第二式可得

$$
\left\{\frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right] - D_n\right\}\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}} + D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}} = 0
$$

可解得系数 D_n 为

$$
D_n = \frac{\dfrac{4Ab^2}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]}{\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}}} \tag{25}
$$

则有

$$
C_n = \frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}}}\right) \tag{26}
$$

将 C_n, D_n 的值代入(21)式，即可得到定解问题(5)的解 $w(x,y)$

$$
w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]\left[\frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}}}\right)\mathrm{e}^{\frac{n\pi x}{b}} + \frac{\dfrac{4Ab^2}{(n\pi)^3}}{\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}}}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi x}{b}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{27}
$$

这样，我们解得(17)式 $v(x,y)$ 和(27)式 $w(x,y)$，它们之和就是原定解问题的解

$u(x,y)$

$$u(x,y)=\left[\frac{(B-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-B\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}}\mathrm{e}^{\frac{\pi y}{a}}+\frac{B\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi b}{a}}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi y}{a}}\right]\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]\left[\frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}}}\right)\mathrm{e}^{\frac{n\pi x}{b}}+\frac{\frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}}{\mathrm{e}^{\frac{n\pi a}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{n\pi a}{b}}}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi x}{b}}\right]\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(28)

14.9　在量子物理学中，空间中自由粒子可视为德布罗意(de Broglie)波，被称为物质波，用$\psi(\boldsymbol{r},t)$来描述，它满足如下薛定谔(Schrödinger)方程(量子波动方程)：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)$$

其中，$\hbar$为普朗克(Planck)常量，m为粒子质量. 我们把粒子看成在一个三维的长度为L的正立方体$\left(-\frac{L}{2}\leqslant x\leqslant\frac{L}{2},\ -\frac{L}{2}\leqslant y\leqslant\frac{L}{2},\ -\frac{L}{2}\leqslant z\leqslant\frac{L}{2}\right)$中的三维波动，且这一波动满足周期性边界条件，试求解这一波动.

解　由薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)\tag{1}$$

可以认为在正立方体中粒子的能量是恒定的，由此对波函数$\psi(\boldsymbol{r},t)$进行分离变量，设

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=T(t)\varphi(\boldsymbol{r})\tag{2}$$

可得

$$\mathrm{i}\hbar\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial t}T(t)=-\frac{\hbar^2}{2m}T(t)\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})$$

令

$$\mathrm{i}\hbar\frac{T'(t)}{T(t)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})}{\varphi(\boldsymbol{r})}=E,\quad E>0\tag{3}$$

可得关于$T(t)$的方程

$$T'(t)+\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}T(t)=0\tag{4}$$

其解为

$$T(t)=D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t} \tag{5}$$

其中 D 为常数.

关于 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 的方程为

$$\frac{\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})}{\varphi(\boldsymbol{r})}=-\frac{2m}{\hbar^2}E \tag{6}$$

对 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 进一步分离变量，设

$$\varphi(\boldsymbol{r})=X(x)Y(y)Z(z) \tag{7}$$

方程(6)变为

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=-\frac{2m}{\hbar^2}E \tag{8}$$

令

$$\frac{X''}{X}=-\alpha^2,\quad \frac{Y''}{Y}=-\beta^2,\quad \frac{Z''}{Z}=-\gamma^2,\quad \alpha,\beta,\gamma>0 \tag{9}$$

则有

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{2m}{\hbar^2}E \tag{10}$$

对 $X(x)$ 的方程

$$X''+\alpha^2X=0 \tag{11}$$

其解的形式为

$$X(x)=A_1\sin\alpha x+A_2\cos\alpha x$$

由周期性边界条件：$X\left(\frac{L}{2}\right)=X\left(-\frac{L}{2}\right)$，有

$$A_1\sin\frac{\alpha L}{2}+A_2\cos\frac{\alpha L}{2}=-A_1\sin\frac{\alpha L}{2}+A_2\cos\frac{\alpha L}{2}$$

即要求 $\sin\frac{\alpha L}{2}=0$，可得本征值

$$\alpha_n=\frac{2n\pi}{L},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{12}$$

相应于本征值 α_n 的本征函数为

$$X_n(x)=A_{1n}\sin\frac{2n\pi x}{L}+A_{2n}\cos\frac{2n\pi x}{L} \tag{13}$$

或写成

$$X_n(x)=A'_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}+\theta_{1n}\right) \tag{14}$$

同理，可得关于$Y(y)$的本征值和相应的本征函数

$$\beta_m=\frac{2m\pi}{L},\quad m=1,2,3,\cdots \tag{15}$$

$$Y_m(y)=B_{1m}\sin\frac{2m\pi y}{L}+B_{2m}\cos\frac{2m\pi y}{L} \tag{16}$$

或写成

$$Y_m(y)=B'_m\sin\left(\frac{2m\pi y}{L}+\theta_{2m}\right) \tag{17}$$

同样，可得关于$Z(z)$的本征值和相应的本征函数

$$\gamma_k=\frac{2k\pi}{L},\quad k=1,2,3,\cdots \tag{18}$$

$$Z_k(z)=C_{1k}\sin\frac{2k\pi z}{L}+C_{2k}\cos\frac{2k\pi z}{L} \tag{19}$$

或写成

$$Z_k(z)=C'_k\sin\left(\frac{2k\pi z}{L}+\theta_{3k}\right) \tag{20}$$

把$\alpha_n,\beta_m,\gamma_k$的值解出后，由(10)式，有

$$\alpha_n{}^2+\beta_m{}^2+\gamma_k{}^2=\frac{2m}{\hbar^2}E_{nmk} \tag{21}$$

即

$$E_{nmk}=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{2k\pi}{L}\right)^2\right] \tag{22}$$

把此关系式代入(5)式中指数上的E，并把系数A'_n,B'_m,C'_k吸收到(5)式的系数D_{nmk}中，因此得到薛定谔方程在此周期边界条件下的解

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\substack{n=1\\m=1\\k=1}}^{\infty}D_{nmk}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}\left[\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{2k\pi}{L}\right)^2\right]t}\\ \cdot\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}+\theta_{1n}\right)\sin\left(\frac{2m\pi y}{L}+\theta_{2m}\right)\sin\left(\frac{2k\pi z}{L}+\theta_{3k}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

第十五章　曲线坐标系下方程的分离变量和二阶变系数常微分方程的级数解法

内 容 提 要

本章只讨论在球坐标系和柱坐标系下三类方程的分离变量.

一、三类方程在球坐标系下的分离变量

1. **拉普拉斯方程**在球坐标系下的分离变量

$$\nabla^2 u(r,\theta,\varphi)=0$$

令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，得

(1) **径向方程**

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0$$

(2) 角度部分 $Y(\theta,\varphi)$ 满足的方程，称为**球函数方程**

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0$$

对球函数方程进一步分离变量，令

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

① 得 $\Phi(\varphi)$ 的方程

$$\Phi''+\nu\Phi=0$$

在周期性边界条件 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ 下，方程可写成

$$\Phi''+m^2\Phi=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

则构成 S-L 本征值问题，本征值为 m^2.

注： m 的取值依赖于解函数的选取. 如果解函数为 $\sin m\varphi,\cos m\varphi$，则 $m=0,1,2,\cdots$. 如果解函数取 $e^{im\varphi}$，则 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

② 对于 $\Theta(\theta)$ 满足的方程，令 $x=\cos\theta$，$y(x)=\Theta(\theta)$，得关于 $\Theta(\theta)$ 的连带勒让德方程

$$\left(1-x^2\right)y''-2x\cdot y'+\left[l(l+1)-\frac{\nu}{1-x^2}\right]y=0$$

当m取正整数时，连带勒让德方程为

$$\left(1-x^2\right)y''-2x\cdot y'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

当$m=0$时，即讨论的问题关于z轴对称时，解与φ变量无关. 此时，连带勒让德方程就退化为**勒让德方程**

$$\left(1-x^2\right)y''-2x\cdot y'+l(l+1)y=0$$

2. **亥姆霍兹方程**在球坐标系下的分离变量

对波动方程$U_{tt}-a^2\nabla^2U=0$和输运方程$U_t-a^2\nabla^2U=0$分离变量，令$U(\boldsymbol{r},t)=u(\boldsymbol{r})T(t)$，可得空间变量部分$u(\boldsymbol{r})$，满足**亥姆霍兹方程**

$$\nabla^2u+k^2u=0$$

再对**亥姆霍兹方程**在球坐标系下分离变量，即令

$$u(\boldsymbol{r})=R(r)Y(\theta,\varphi)$$

得

(1) 径向函数$R(r)$满足球贝塞尔方程

$$R''+\frac{2}{r}R'+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

(2) 角度部分函数$Y(\theta,\varphi)$满足**球函数方程**

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0$$

对球函数方程进一步分离变量，令$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，讨论和结论均与上面**拉普拉斯方程**讨论中的(2)相同，不予重复.

二、三类方程在柱坐标系下的分离变量

1. **拉普拉斯方程**在柱坐标系下的分离变量

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)=0$$

令$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$，得

1) 关于$\Phi(\varphi)$的方程

$$\Phi''+\nu^2\Phi=0$$

在周期性边界条件 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ 下，$\Phi(\varphi)$ 的方程为

$$\Phi''+m^2\Phi=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2) 关于 $Z(z)$ 的方程

$$Z''-\lambda Z=0,\quad \lambda>0$$

$$Z''+\lambda Z=0,\quad -\lambda>0$$

3) 径向 $R(\rho)$ 的方程

对于 $\lambda>0$，令 $x=\sqrt{\lambda}\rho,\quad y(x)=R(\rho)$，得 ν 阶贝塞尔方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

对于 $\lambda>0$，$\nu=m$ 为整数时，令 $x=\sqrt{\lambda}\rho,\quad y(x)=R(\rho)$，得整数阶 m 阶贝塞尔方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$$

对于 $-\lambda>0$，令 $x=\mathrm{i}\sqrt{-\lambda}\rho,\quad y(x)=R(\rho)$，得 ν 阶虚宗量贝塞尔方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

对于 $-\lambda>0$，$\nu=m$ 为整数. 令 $x=\mathrm{i}\sqrt{-\lambda}\rho, y(x)=R(\rho)$，得整数阶 m 阶虚宗量贝塞尔方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$$

2. **亥姆霍兹方程**在柱坐标系下的分离变量

对输运方程和波动方程，对空间变量和时间变量的分离，与球坐标系下的分离变量一样，时间部分满足的方程相同，空间部分也同样满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2u+k^2u=0$$

在柱坐标系下，对亥姆霍兹方程进行分离变量，令

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

1) 关于 $\Phi(\varphi)$ 的方程

$$\Phi''+\nu^2\Phi=0$$

在周期性边界条件 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ 下，$\Phi(\varphi)$ 的方程

$$\Phi''+m^2\Phi=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2) 关于$Z(z)$的方程

$$Z''-\lambda Z=0,\quad \lambda>0$$

$$Z''+\lambda Z=0,\quad -\lambda>0$$

3) 径向$R(\rho)$的方程

令$x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho$，$y(x)=R(\rho)$，得ν阶贝塞尔方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

当m为整数时，得整数阶m阶贝塞尔方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$$

***注：**由于$x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho$，无论$\lambda>0$或是$\lambda\leqslant 0$，我们总可以选取k，使得$k^2+\lambda\geqslant 0$，因此不会出现虚宗量贝塞尔方程.

三、二阶线性变系数常微分方程的级数解法

二阶线性变系数常微分方程的一般形式为

$$u''(z)+p(z)u'(z)+q(z)u(z)=0$$

***注：**由于这类方程的解与系数$p(z)$和$q(z)$的解析性密切相关，故用复变量的方程进行讨论. 对于实变量的方程

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=0$$

可看成复变量z的虚部为零，一切讨论的结果依然成立.

(1) 如果z_0为方程的正常点(简称“常点”)，即$p(z)$和$q(z)$在z_0点解析，则在z_0点的解析邻域内方程有两个线性无关的解析解，它们的形式为

$$u_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$u_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

(2) 如果z_0为方程的正则奇点，即z_0至多为$p(z)$的一阶极点，至多为$q(z)$的二阶极点，则在z_0点的去心解析邻域内，方程有两个线性解析解，它们的形式为

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$u_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

① 当 $\rho_1-\rho_2\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，上式两个解是线性无关的解.

② 当 $\rho_1-\rho_2=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，两个线性无关的解为

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$u_2(z)=Au_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

其中 a_0，b_0 不为零. 而 $\ln(z-z_0)$ 有多值问题，我们取主值面.

(3) 如果 z_0 为方程的非正则奇点，则在 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都解析的环形区域 $0<|z-z_0|<R$ 内，方程的两个线性无关解是

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$u_2(z)=Au_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

其中，ρ_1,ρ_2 和 A 都是常数.

显然，如果 ρ_1 或 ρ_2 不是整数，或 $A\neq 0$，方程的解均为多值函数，z_0 点是支点. 此时，方程的解析解可能不存在.

在本课程中，我们只涉及 1 和 2 类型的方程.

习 题 详 解

15.1　试用平面极坐标 (ρ,φ)，把二维波动方程分离变量.

解　波动方程为

$$u_{tt}-a^2\nabla^2u=0 \tag{1}$$

二维平面极坐标 (ρ,φ) 的拉普拉斯算符为

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2}$$

分离变量，设

$$u(\rho,\varphi,t)=T(t)U(\rho,\varphi) \tag{3}$$

则方程(1)变为

$$UT''-a^2T\nabla^2U=0 \tag{4}$$

有

$$\frac{T''(t)}{a^2T}=\frac{\nabla^2U(\rho,\varphi)}{U}=-k^2 \tag{5}$$

方程(4)变为

$$T''+a^2k^2T=0 \tag{6}$$

$$\nabla^2U+k^2U=0 \tag{7}$$

将$U(\rho,\varphi)$在柱坐标系下分离变量

$$U=R(\rho)\Phi(\varphi) \tag{8}$$

方程(7)变为

$$\frac{\Phi}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{R}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2R\Phi=0 \tag{9}$$

令

$$\frac{\rho}{R}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}^2R}{\partial\rho^2}\right)+k^2\rho^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=m^2 \tag{10}$$

可得关于$\Phi(\varphi)$的方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+m^2\Phi=0 \tag{11}$$

和关于$R(\rho)$的方程

$$\frac{\partial^2R}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho}+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{12}$$

这是m阶贝塞尔方程.

15.2　在量子物理学中氢原子满足定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2u(\boldsymbol{r})-\frac{e^2}{r}u(\boldsymbol{r})=Eu(\boldsymbol{r})$$

其中，$\hbar$，m，e，E都为常数，试用球坐标将此方程分离变量(不如把m换成μ).

解　在球坐标系下，定态薛定谔方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{2me^2}{r\hbar^2}u(\boldsymbol{r})=-\frac{2mE}{\hbar^2}u(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

对方程(1)进行分离变量，设

$$u(\boldsymbol{r})=u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi) \tag{2}$$

并在方程(1)两边同乘$\dfrac{r^2}{RY}$，则方程化为

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+\frac{2me^2r}{\hbar^2}=-\frac{2mEr^2}{\hbar^2} \tag{3}$$

先给出角度部分的波函数 $Y(\theta,\varphi)$ 满足的方程，并令

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-l(l+1)$$

可写成

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{4}$$

此方程为球函数方程. 对 $Y(\theta,\varphi)$ 再进一步分离变量，令

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{5}$$

由方程(4)得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=m^2 \tag{6}$$

可得关于 $\Phi(\varphi)$ 的方程

$$\Phi''+m^2\Phi=0 \tag{7}$$

和关于 $\Theta(\theta)$ 的方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{8}$$

此方程为连带勒让德方程.

由方程(3)，可得径向波函数 $R(r)$ 的方程

$$R''+\frac{2}{r}R'+\left[\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2\mu e^2}{\hbar^2 r}+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right]R=0 \tag{9}$$

其中的 μ 为质量.

15.3　在 $x=0$ 的邻域内求下列方程的两个独立的级数解，并对这两个方程的级数解进行比较.

(1) $y''-xy'=0$

(2) $y''-x^2y'=0$

解　(1) 设方程

$$y''-xy'=0 \tag{1}$$

的解为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \tag{2}$$

则

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1},\quad y''=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k \tag{3}$$

代入方程(1)有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k=0$$

即

$$2a_2+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k=2a_2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2}-ka_k\right]x^k=0$$

由于等式左边的各幂次项的系数要为零，可得 $a_2=0$，且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2}-ka_k\right]x^k=0 \tag{4}$$

可得系数的递推关系

$$a_{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}a_k \tag{5}$$

由此关系，有

$$a_3=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}a_1,\ a_5=\frac{1\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}a_1,\ a_7=\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}a_1,\cdots$$

即

$$a_{2k+1}=\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)!}a_1 \tag{6}$$

可得方程的第一个级数解为

$$y_1(x)=a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)!}a_1x^{2k+1} \tag{7}$$

由于 $a_2=0$，由递推关系(5)式可得 x 的偶次幂的系数，当 $k\geqslant2$ 时都为零，即

$$a_2=a_4=a_6=a_8=\cdots=0 \tag{8}$$

故得方程的另一个特解为一常数，即

$$y_2(x)=a_0 \tag{9}$$

故得方程的通解为

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)=a_0+a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)!}a_1x^{2k+1} \tag{10}$$

(2) 设方程

$$y''-x^2y'=0 \tag{1}$$

的解为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \tag{2}$$

可计算

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^{k-1}$$

$$x^2y'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}ka_k x^{k+1}=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\,a_{k-1}x^k$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\,a_k x^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k$$

代入方程(1)得

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)\,a_{k-1}x^k=0$$

即

$$2a_2+6a_3x+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2}-(k-1)a_{k-1}\right]x^k=0 \tag{3}$$

由于等式左边的各幂次项的系数要为零，可得 $a_2=a_3=0$，且

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2}-(k-1)a_{k-1}\right]x^k=0 \tag{4}$$

由此可得系数的递推关系

$$(k+1)(k+2)a_{k+2}-(k-1)a_{k-1}=0$$

有

$$a_{k+2}=\frac{(k-1)}{(k+1)(k+2)}a_{k-1},\quad k\geqslant 2$$

即

$$a_{k+3}=\frac{k}{(k+2)(k+3)}a_k,\quad k\geqslant 1 \tag{5}$$

当 $k=1,4,7,\cdots$ 时，有

$$a_4=\frac{1}{3\cdot 4}a_1,\ a_7=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}a_1=\frac{1}{3\cdot 6\cdot 7}a_1,\ a_{10}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}a_1=\frac{1}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 10}a_1$$

我们可把这一系数的递推关系写成

$$a_{3k+1}=\frac{1}{3^k\,k!(3k+1)}a_1,\quad k=1,2,3,\cdots \tag{6}$$

因此得到方程的一个级数解为

$$y_1 = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k!(3k+1)} x^{3k+1}$$

由 $a_2 = a_3 = 0$ 和系数的递推关系(5)式可得

$$a_2 = a_5 = a_8 = \cdots = 0, \quad a_3 = a_6 = a_9 = \cdots = 0 \tag{7}$$

即可得另外两个级数解为

$$y_2 = 0 \tag{8}$$

$$y_3 = a_0 \tag{9}$$

故可得方程的解为

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = a_0 + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k!(3k+1)} x^{3k+1} \tag{10}$$

15.4　在 $x = 0$ 的邻域内，用级数展开法求解欧拉-柯西(Euler-Cauchy)方程

$$\left(1 - x^2\right) y'' - xy' - y = 0$$

的两个独立的级数解.

解　对于欧拉-柯西方程，为了分析方程的奇异性，把方程写为

$$y'' + \frac{x}{x^2 - 1} y' - \frac{1}{x^2 - 1} y = 0 \tag{1}$$

可知 $x = 0$ 为方程的常点，方程的奇点为 $x = \pm 1$. 方程可写成

$$\left(x^2 - 1\right) y'' + xy' - y = 0 \tag{2}$$

当 $|x| < 1$ 时，设方程(2)的解为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{3}$$

计算：

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k$$

$$x^2 y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad xy' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$$

代入方程(2)，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[k(k-1)+k-1\right]a_k-(k+1)(k+2)a_{k+2}\right\}x^k=0 \tag{4}$$

可得系数的递推关系

$$(k+1)(k-1)a_k=(k+1)(k+2)a_{k+2}$$

即

$$a_{k+2}=\frac{k-1}{k+2}a_k \tag{5}$$

因此，可得 x 的偶次幂系数

$$a_2=-\frac{1}{1\cdot 2}a_0,$$

$$a_4=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}a_0,$$

$$a_6=-\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}a_0,\quad \cdots$$

$$a_{2k}=-\frac{(2k-3)!!}{2^k\cdot k!}a_0,\quad k=1,2,3,\cdots \tag{6}$$

得方程的第一个级数解为

$$y_0=a_0-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}a_0x^{2k} \tag{7}$$

由递推关系(5)式，可得 x 的奇次幂系数

$$a_1\neq 0,\quad a_3=a_5=\cdots=0$$

得方程的第二个级数解为

$$y_1=a_1x \tag{8}$$

故得方程的解为

$$y=y_0+y_1=a_0+a_1x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}a_0x^{2k} \tag{9}$$

15.5　在 $x=0$ 的邻域内求切比雪夫(Chebyshev)方程

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+n^2y=0\quad (n\text{为正整数})$$

的级数解.

解　由方程可知，$x=0$ 为方程的常点，$x=\pm 1$ 是方程的奇点. 在 $|x|<1$ 的区间内，设切比雪夫方程

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+n^2y=0 \tag{1}$$

的解为

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{2}$$

计算

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}k\left(k-1\right)a_kx^{k-2}=\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)a_kx^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+1\right)\left(k+2\right)a_{k+2}x^k$$

$$x^2y''=\sum_{k=0}^{\infty}k\left(k-1\right)a_kx^k$$

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^{k-1},\quad xy'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k$$

代入方程(1)可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+1\right)\left(k+2\right)a_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}k\left(k-1\right)a_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k+n^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(k+1\right)\left(k+2\right)a_{k+2}-\left[k\left(k-1\right)+k-n^2\right]a_k\right\}x^k=0 \tag{3}$$

可得系数的递推关系

$$\left(k+1\right)\left(k+2\right)a_{k+2}=\left(k+n\right)\left(k-n\right)a_k$$

$$a_{k+2}=\frac{\left(k+n\right)\left(k-n\right)}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}a_k \tag{4}$$

当n为偶数，$k=n$时，$a_{k+2}=0$．令

$$k=2k',\quad k'=1,2,\cdots,\frac{n}{2} \tag{5}$$

可得

$$a_{2k'}=\frac{\left(-1\right)^{k'}\left(2k'-2+n\right)!!n}{\left(n-2k'-1\right)!!\left(2k'\right)!}a_0 \tag{6}$$

$$a_{2k'+1}=\frac{\left(-1\right)^{k'}\left(2k'-1+n\right)!!}{\left(n-1-2k'\right)!!\left(2k'\right)!}a_1,\quad 2k'+1<n \tag{7}$$

$$a_{2k'+1}=\frac{\left(-1\right)^{\frac{n}{2}}\left(2k'-1+n\right)!!\left(2k'-1-n\right)!!}{\left(2k'\right)!}a_1,\quad 2k'+1>n \tag{8}$$

因此，可得切比雪夫方程的解为(把 k' 仍记为 k)

$$y_0 = a_0 + a_0 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k (2k-2+n)!!n}{(n-2k-1)!!(2k)!} x^{2k} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} y_1 = a_1 x + a_1 & \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (2k-1+n)!!}{(n-1-2k)!!(2k)!} x^{2k+1} \\ & + a_1 \sum_{k=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1+n)!!(2k-1-n)!!}{(2k)!} x^{2k+1} \end{aligned} \tag{10}$$

当 n 为奇数时，令

$$2k'+1 = n, \quad k' = 0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2} \tag{11}$$

$$a_{2k'+1} = \frac{(-1)^{k'} (2k'-1+n)!!}{(n-1-2k')!!(2k')!} a_1, \quad a_{2k'+3} = a_{2k'+5} = \cdots = 0 \tag{12}$$

$$a_{2k'} = \frac{(-1)^{k'} (2k'-2+n)!!n}{(n-2k'-1)!!(2k')!} a_0, \quad 2k' < n \tag{13}$$

$$a_{2k'} = \frac{(-1)^{\frac{(n+1)}{2}} (2k'-2+n)!!(2k'-2-n)!!}{(2k')!} a_0, \quad 2k' > n \tag{14}$$

可得切比雪夫方程的解为(把 k' 仍记为 k)

$$y_1 = a_1 x + a_1 \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^k (2k-1+n)!!}{(n-1-2k)!!(2k)!} x^{2k+1} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} y_2 = a_0 + a_0 & \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2k-2+n)!!}{(n-2k-1)!!(2k)!} x^{2k} \\ & + a_0 \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(n+1)}{2}} (2k-2+n)!!(2k-2-n)!!}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned} \tag{16}$$

注： 当 n 为偶数时，在解(9)、(10)中取 $a_1 = 0$ ，即(10)式中的 $y_1 = 0$ ，解就退化为多项式(9)；当 n 为奇数时，在解(15)、(16)中取 $a_0 = 0$ ，即(16)式中的 $y_2 = 0$ ，解就退化为多项式(15). 此时(9)式和(15)式就构成切比雪夫方程的多项式解，就称为切比雪夫多项式.

15.6　在 $x=0$ 的邻域内，用级数展开法求欧拉-柯西方程

$$x^2y''+2xy'=0$$

解　对方程

$$x^2y''+2xy'=0 \tag{1}$$

$x=0$ 为方程的正则奇点，由教材中定理 15.3.1，设方程的解为

$$y(x)=x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho} \tag{2}$$

代入方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho}+2\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)x^{k+\rho}=0 \tag{3}$$

方程左边取最低幂次 $k=0$ 的 x^{ρ} 次项的系数为零，得指数方程

$$\rho(\rho-1)+2\rho=0 \tag{4}$$

得

$$\rho_1=0,\quad \rho_2=-1 \tag{5}$$

对于 $\rho_2=-1$，方程解的形式为

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k-1} \tag{6}$$

代入方程(1)，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)a_kx^{k-1}+2\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)a_kx^{k-1}=0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-1}=0 \tag{7}$$

要使等式成立，只能是 $a_k\neq 0,\quad k=0,1$，而当 $k\geqslant 3$ 时 $a_k=0$，故得到的解为

$$y_2=a_0x^{-1}+a_1 \tag{8}$$

由教材中定理 15.3.1，由于 $\rho_1-\rho_2$ 为整数，可设方程的另一个解的形式为

$$y_1=Ay_2\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=A\left(a_0x^{-1}+a_1\right)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k \tag{9}$$

计算：

$$y_1'=A\left(-a_0x^{-2}\right)\ln x+A\left(a_0x^{-1}+a_1\right)x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}kb_kx^{k-1}$$

$$= Aa_0x^{-2}(1-\ln x) + Aa_1x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} kb_kx^{k-1}$$

$$2xy_1' = 2Aa_0x^{-1}(1-\ln x) + 2Aa_1x + \sum_{k=0}^{\infty} 2kb_kx^k$$

$$y_1'' = -2Aa_0x^{-3}(1-\ln x) - Aa_0x^{-3} - Aa_1x^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)b_kx^{k-2}$$

$$= -Aa_0x^{-3}(3-2\ln x) - Aa_1x^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)b_kx^{k-2}$$

$$x^2y_1'' = -Aa_0x^{-1}(3-2\ln x) - Aa_1 + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)b_kx^k$$

代入方程得

$$-Aa_0x^{-1}(3-2\ln x) - Aa_1 + 2Aa_0x^{-1}(1-\ln x) + 2Aa_1x + \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)b_kx^k = 0 \quad (10)$$

结合方程的解(7)中 y_2 的形式，要使得上式成立，要求

$$A=0,\quad k=0,\quad b_k=0 \quad (k>0)$$

因此，由(9)式可得

$$y_1 = b_0 \quad (11)$$

故得方程的解为

$$y = y_1 + y_2 = a_0x^{-1} + c,\quad c = a_1 + b_0 \quad (12)$$

其中，a_0，c 为任意常数.

注： 以解 $y = a_0x^{-1} + c$ 代入原方程(1)，等式成立.

15.7　在 $x=0$ 的邻域内求方程

$$xy'' - xy' + y = 0$$

的两个独立的级数解.

解　方程可变为

$$y'' - y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad (1)$$

$x=0$ 为方程的正则奇点，解法与上题相同，设方程的解为

$$y(x) = x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{k+\rho} \quad (2)$$

由方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\rho)x^{k+\rho-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{k+\rho-1} = 0 \quad (3)$$

当 $k=0$ 时，最低幂次为 $x^{\rho-2}$，由其系数为零，可得指数方程

$$\rho(\rho-1)=0 \tag{4}$$

可得

$$\rho_1=1,\quad \rho_2=0$$

取 $\rho_2=0$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k k(k-1)x^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_k kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k-1}=0 \tag{5}$$

对各项进行指标变换，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+1)(k+2)x^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}(k+1)x^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^{k}=0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2}-ka_{k+1}\right]x^{k}=0 \tag{6}$$

可得系数递推关系

$$a_{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}a_{k+1} \tag{7}$$

由(6)式、(7)式可知，$a_0=0$；当 $k=0$ 时，得 $a_2=0$；且当 $k\geqslant 2$ 时，$a_k=0$. 因此，得到方程的一个特解

$$y_1=a_1x \tag{8}$$

由于 $\rho_1-\rho_2=1$，由教材中定理 15.3.1，设方程的另一个解为

$$y_2=Ay_1\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{k}=Ax\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{k} \tag{9}$$

这里，把常数 a_1 吸收到 A 中.

先计算

$$y_2'=A\ln x+A+\sum_{k=1}^{\infty}b_k kx^{k-1}$$

$$y_2''=\frac{A}{x}+\sum_{k=2}^{\infty}b_k k(k-1)x^{k-2}$$

代入方程(1)，有

$$\frac{A}{x}+\sum_{k=2}^{\infty}b_k k(k-1)x^{k-2}-A\ln x-A-\sum_{k=1}^{\infty}b_k kx^{k-1}+A\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{k-1}=0$$

即

$$\frac{A}{x}-A+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)b_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_{k+1}x^k+\sum_{k=-1}^{\infty}b_{k+1}x^k=0$$

即

$$\frac{A+b_0}{x}-A+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)b_{k+2}-kb_{k+1}\right]x^k=0 \tag{10}$$

要求各幂次项的系数为零，即要求

x^{-1}：$A+b_0=0$；

x^0：$2b_2-A=0$，b_1 为任意常数.

由于 A 为任意常数，可得：$b_0=-A$；$b_2=\dfrac{A}{2}$.

同时由(10)式可得系数的递推关系

$$b_{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}b_{k+1},\quad k\geqslant 1$$

此式可写成递推关系式

$$b_{k+1}=\frac{k-1}{k(k+1)}b_k,\quad k\geqslant 2 \tag{11}$$

由于 $b_2=\dfrac{A}{2}$，可得

$$b_k=\frac{1}{(k-1)k!}A,\quad k\geqslant 2 \tag{12}$$

因此，得到方程的另一个解

$$y_2=Ax\ln x-A+b_1x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k!}Ax^k \tag{13}$$

故方程(1)的解为

$$\begin{aligned}y&=y_1+y_2=a_1x+Ax\ln x-A+b_1x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k!}Ax^k\\&=(a_1+b_1)x+A\left[x\ln x-1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k!}x^k\right]\end{aligned} \tag{14}$$

15.8　在 $z=0$ 的邻域内，求下列方程的两个独立级数解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+\dfrac{2}{z}\dfrac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}+m^2u(z)=0$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}-m^2u(z)=0$.

解　(1) 由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+\frac{2}{z}\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}+m^2u(z)=0 \tag{1}$$

可知 $z=0$ 为方程的正则奇点，可设方程的解为

$$u(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^{k+\rho} \tag{2}$$

代入方程，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}+2\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)z^{k+\rho-2}+m^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^{k+\rho}=0 \tag{3}$$

由最低幂次 $k=0$ 的 $z^{\rho-2}$ 项的系数为零，可得其指数方程为

$$\rho(\rho+1)=0 \tag{4}$$

得

$$\rho_1=0,\quad \rho_2=-1$$

由教材中定理 15.3.1，取 $\rho_1=0$，设

$$u_1=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k \tag{5}$$

由方程(1)，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kz^{k-2}+2\sum_{k=0}^{\infty}ka_kz^{k-2}+m^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}z^k+2\sum_{k=-1}^{\infty}(k+2)a_{k+2}z^k+m^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=0 \tag{6}$$

由上面方程左边第二项，要求 $k=-1$，z^{-1} 项的系数为零，得

$$a_1=0 \tag{7}$$

这样，方程(6)变为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+3)a_{k+2}+m^2a_k\right]z^k=0 \tag{8}$$

由此方程可得系数递推关系

$$a_{k+2}=-\frac{m^2}{(k+2)(k+3)}a_k \tag{9}$$

有

$$a_2=-\frac{m^2}{1\cdot 2\cdot 3}a_0,$$

$$a_4=\frac{m^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a_0,\quad \cdots$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{m^{2k}}{(2k+1)!}a_0$$

因此得到方程的一个解为 z 的偶次幂级数解，并可以写为

$$\begin{aligned}u_1&=a_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{2k}}{(2k+1)!}z^{2k}=\frac{a_0}{mz}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}(mz)^{2k+1}\\&=\frac{a_0}{mz}\sin(mz)\end{aligned}\tag{10}$$

取 $\rho_2=-1$，另一个解的形式为

$$u_2=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^{k-1}\tag{11}$$

代入方程(1)，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k(k-1)(k-2)z^{k-3}+2\sum_{k=0}^{\infty}b_k(k-1)z^{k-3}+m^2\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^{k-1}=0$$

即

$$\sum_{k=-3}^{\infty}b_{k+3}(k+1)(k+2)z^k+2\sum_{k=-3}^{\infty}b_{k+3}(k+2)z^k+m^2\sum_{k=-1}^{\infty}b_{k+1}z^k=0\tag{12}$$

当 $k=-3$ 时，可得 $2b_0-2b_0=0$，即 b_0 为任意常数；

当 $k=-2$ 时，可得 b_1 为任意常数；

当 $k=-1$ 时，可得 $2b_2+m^2b_0=0$，即 $b_2=-\dfrac{m^2}{2}b_0$；

当 $k\geqslant 0$ 时，由(12)式，可得系数递推关系

$$b_{k+3}=-\frac{m^2}{(k+2)(k+3)}b_{k+1}\tag{13}$$

可得系数 b_{2k+1} 的表达式

$$b_3=-\frac{m^2}{1\cdot 2\cdot 3}b_1,$$

$$b_5=\frac{m^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}b_1,\quad \cdots$$

$$b_{2k+1}=(-1)^k\frac{m^{2k}}{(2k+1)!}b_1$$

由(11)式可知，此奇次幂项的解为

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{2k}}{(2k+1)!}b_1 z^{2k+1} \\ &= \frac{b_1}{mz}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{2k+1}}{(2k+1)!}z^{2k+1} \\ &= \frac{b_1}{mz}\sin(mz) \end{aligned} \tag{14}$$

注意： 由于 a_0 与 b_1 都是任意常数，故此解 $u_2^{(1)}$ 与(10)式的解 u_1 是同一个解.

同样，由递推关系式和 $b_2=-\dfrac{m^2}{2}b_0$，可得偶次项的系数

$$b_4=-\frac{m^2}{3\cdot 4}b_2=\frac{m^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b_0$$

……

$$b_{2k}=(-1)^k\frac{m^{2k}}{(2k)!}b_0$$

由(11)式可知，此偶次幂项的解为

$$\begin{aligned} u_2^{(2)} &= z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{2k}}{(2k)!}b_0 z^{2k} \\ &= \frac{b_0}{z}\cos(mz) \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $u_2^{(1)}$ 与 u_1 是同一个解，我们在 u_2 中必须把 $u_2^{(1)}$ 去除. 因此，在 $u_2^{(1)}$ 中取 $b_1=0$，则 $u_2=u_2^{(1)}+u_2^{(2)}=u_2^{(2)}$，即

$$u_2=\frac{b_0}{z}\cos(mz) \tag{16}$$

故可得方程(1)的解为

$$u(z)=\frac{a_0}{mz}\sin(mz)+\frac{b_0}{z}\cos(mz) \tag{17}$$

(2) 由方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}-m^2u(z)=0 \tag{1}$$

可知 $z=0$ 为方程的正则奇点，可设方程的解为

$$u(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+\rho} \tag{2}$$

代入方程，有

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)(k+\rho-1) z^{k+\rho-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho) z^{k+\rho-2} - m^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+\rho} = 0 \tag{3}$$

由最低幂次 $k=0$ 的 $z^{\rho-2}$ 项，可得其指数方程为

$$\rho^2 = 0 \tag{4}$$

得 $\rho=0$ 为重根.

由教材中定理 15.3.1，取 $\rho=0$，设

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{5}$$

代入方程(1)，有

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-2} - m^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} z^k + \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2) a_{k+2} z^k - m^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0 \tag{6}$$

由于第二项中 $k=-1$，z^{-1} 的系数为零，则有

$$a_1 = 0 \tag{7}$$

并可得系数递推关系

$$a_{k+2} = \frac{m^2}{(k+2)^2} a_k, \quad k \geqslant 0 \tag{8}$$

由此递推关系，有

$$\begin{aligned} &a_1 = 0, a_3 = 0, \cdots, a_{2k+1} = 0, \cdots \\ &a_2 = \frac{m^2}{2^2} a_0, a_4 = \frac{m^4}{2^2 \cdot 4^2} a_0, \cdots \\ &a_{2k} = \frac{m^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} a_0 \end{aligned} \tag{9}$$

可得方程的一个解为

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} z^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{mz}{2} \right)^{2k} \\ &= a_0 \mathrm{I}_0 (mz) \end{aligned} \tag{10}$$

注： $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{mz}{2}\right)^{2k}=\mathrm{I}_0(mz)$ 称为零阶第一类虚宗量贝塞尔函数(详细定义见教材 P278).

由教材中定理 15.3.1，方程(1)的另一个解的形式为

$$u_2=Au_1\ln z+\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k \tag{11}$$

代入方程(1)，有

$$Au_1''\ln z+2Au_1'\frac{1}{z}-Au_1\frac{1}{z^2}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kk(k-1)z^{k-2}+A\frac{1}{z}u_1'\ln z+Au_1\frac{1}{z^2}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}b_kkz^{k-2}-m^2Au_1\ln z-m^2\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k=0$$

对于此方程，有 $\ln z$ 项，其系数为

$$Au_1''\ln z+A\frac{1}{z}u_1'\ln z-m^2Au_1\ln z=A\left(u_1''+\frac{1}{z}u_1'-m^2u_1\right)\ln z=0 \tag{12}$$

其中，括号内正是方程(1)的左端，故等于零.

所以在解的形式(11)下，结合(12)式，方程(1)变为

$$2Au_1'\frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kk(k-1)z^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kkz^{k-2}-m^2\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k=0 \tag{13}$$

对(10)式中 u_1 解的形式求微商，并把 $2A$，a_0 等常数都吸收到 A 中，上式变为

$$A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}z^{2k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kk(k-1)z^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kkz^{k-2}-m^2\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k=0$$

即

$$A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(k+1)}{(k+1)!^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+2}z^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kk(k-1)z^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kkz^{k-2}-m^2\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k=0 \tag{14}$$

对 z^{-1} 项系数：得 $b_1=0$；

对 z^0 项系数：得 $b_0=A$；

对 z^1 项系数：得 $b_3=0$；

对 z^2 项系数：得 $A\frac{m^4}{8}+16b_4-b_2m^2=0$；

对 z 的奇次幂项，即 z^{2k+1} 项的系数递推关系

$$b_{2k+3}=\frac{m^2}{(2k+3)^2}b_{2k+1} \tag{15}$$

由于 $b_1=0$，得 $b_{2k+1}=0, k=0,1,2,\cdots$.

对 z 的偶次幂项，即 z^{2k} 项的系数递推关系有

$$A\frac{4(k+1)}{(k+1)!^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+2}+b_{2k+2}(2k+2)^2-m^2b_{2k}=0$$

并注意到 $b_0=A$，即

$$b_{2k+2}=\frac{m^2}{2^2(k+1)^2}b_{2k}-\frac{b_0}{(k+1)(k+1)!^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+2}$$

即

$$b_{2k}=\frac{b_{2k-2}}{k^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2-\frac{b_0}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k},\quad k\geqslant 1 \tag{16}$$

则有

$$\begin{aligned}
b_{2k}&=\frac{b_{2k-2}}{k^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2-\frac{b_0}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\\
&=\frac{1}{k^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2\left[\frac{1}{(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2 b_{2(k-2)}-\frac{b_0}{(k-1)(k-1)!^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2(k-1)}\right]-\frac{b_0}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\\
&=\frac{1}{k^2(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2\cdot 2} b_{2(k-2)}-\frac{b_0}{k^2(k-1)(k-1)!^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}-\frac{b_0}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\\
&=\frac{1}{k^2(k-2)^2(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2\cdot 3} b_{2(k-3)}-\frac{b_0}{k^2(k-1)^2(k-2)(k-2)!^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\\
&\quad-\frac{b_0}{k^2(k-1)(k-1)!^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}-\frac{b_0}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\\
&=\frac{1}{k^2(k-2)^2(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2\cdot 3} b_{2(k-3)}-\frac{b_0}{(k-2)(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}-\frac{b_0}{(k-1)(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\\
&\quad-\frac{b_0}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\\
&=\cdots\\
&=\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2(k-1)} b_2-\frac{b_0}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)
\end{aligned}$$

由(16)式，$k=1$ 时可得

$$b_2 = b_0\left(\frac{m}{2}\right)^2 - b_0\left(\frac{m}{2}\right)^2 = 0$$

故有

$$b_{2k} = -\frac{b_0}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right) \tag{17}$$

可得方程的另一个解为

$$u_2(z) = b_0 u_1 \ln z - b_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{mz}{2}\right)^{2k} \tag{18}$$

或写成

$$u_2(z) = b_0 \mathrm{I}_0(mz)\ln z - b_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{mz}{2}\right)^{2k} \tag{19}$$

或记为

$$u_2 = b_0 \mathrm{K}_0(mz) \tag{20}$$

注：此解为零阶第二类虚宗量贝塞尔函数，亦称为零阶 MacDonald 函数，记为 $u_2 = b_0\mathrm{K}_0(mz)$. 因此称方程(1)为零阶虚宗量贝塞尔方程.

附注：本题的两个方程仅在方程第二项的系数上常数(1 和 2)的差别，和第三项的“正”、“负”号的不同，就导致了指数方程的解很不相同，因此得到的两个方程的解截然不同.

15.9　对于二阶齐次常微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

设 y_1 和 y_2 是它的两个线性独立的解，并可定义朗斯基行列式 $W(x)$ 为

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

(1) 试证明 $W(x)$ 满足

$$W'(x) = -p(x)W(x)$$

(2) $W(x)$ 可写为

$$W(x) = y_1^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

由此试证明：两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 有如下关系：

$$y_2(x) = Cy_1(x)\int_b^x \frac{\mathrm{e}^{-\int_a^{x'}p(x'')\mathrm{d}x''}}{\left[y_1(x')\right]^2}\mathrm{d}x'$$

其中，a，b 为任意常数，C 为积分常量，它与 a，b 的选取有关. 上式表明，对于本题所给定的二阶齐次常微分方程的形式，当已知一个解 $y_1(x)$ 时，可通过上式求出另一个线性独立的解 $y_2(x)$.

证　(1) 由 $W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2$，有

$$\begin{aligned} W' &= y_1y_2''+y_1'y_2'-y_1'y_2'-y_1''y_2 \\ &= y_1y_2''-y_1''y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

由于 y_1 和 y_2 满足方程，有

$$y_1''+py_1'+qy_1=0,\quad y_2''+py_2'+qy_2=0 \tag{2}$$

故

$$\begin{aligned} W'(x)+P(x)W(x) &= y_1y_2''-y_1''y_2+p(y_1y_2'-y_1'y_2)+y_1y_2-y_2y_1 \\ &= y_1(y_2''+Py_2'+y_2)-y_2(y_1''+Py_1'+y_1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

即

$$W'(x)=-p(x)W(x) \tag{4}$$

注：(3)式中，等式的第一步加上最后两项的和为零，使得第二步中的两个括号内均为满足方程的解，即括号内的式子为零.

(2) 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{y_2'y_1-y_1'y_2}{y_1^{\,2}}=\frac{W(x)}{y_1^{\,2}} \tag{1}$$

故有

$$W(x)=y_1^{\,2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

由(1)式，可得两个线性独立的解 y_1 和 y_2 之间有

$$\frac{y_2}{y_1}=\int_b^x\frac{W(x')}{y_1^{\,2}}\mathrm{d}x' \tag{2}$$

由上题可知 $W'(x)=-P(x)W(x)$，有

$$W(x')=C\mathrm{e}^{-\int_a^{x'}P(x'')\mathrm{d}x''} \tag{3}$$

代入(2)式中，可得

$$\frac{y_2}{y_1}=C\int_b^x\frac{\mathrm{e}^{-\int_a^{x'}P(x'')\mathrm{d}x''}}{y_1^2}\mathrm{d}x' \tag{4}$$

故如果已知 y_1 为方程的解，则另一个线性独立的解 y_2 可用 y_1 表示为

$$y_2 = Cy_1\int_b^x \frac{\mathrm{e}^{-\int_a^{x'} P(x'')\mathrm{d}x''}}{y_1^2}\mathrm{d}x' \tag{5}$$

或直接将 y_2 表达式代入原方程亦可得证.

15.10　利用 15.9 题的结果，已知下列方程的一个解，求出另一个线性独立的解.

(1) 已知方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=0$$

的一个解 $y_1=\sin x$，求另一个解 y_2.

(2) 已知方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}-\frac{m^2}{r^2}R(r)=0$$

的一个解为 $R_1(r)=r^m$，求另一个解 $R_2(r)$.

解　(1) 此方程的 $P(x)=0$，由上题的结果，有

$$\begin{aligned} y_2 &= Cy_1(x)\int_b^x \frac{\mathrm{e}^{-\int_a^{x'} 0\cdot\mathrm{d}x''}}{y_1^2}\mathrm{d}x' = C\sin x\int_b^x \frac{1}{\sin^2 x'}\mathrm{d}x' \\ &= C\sin x(-\cot x+\cot b) \end{aligned} \tag{1}$$

由于 b 为任选的常数，为方便起见，取 $b=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cot b=0$，则方程的另一个线性独立的解为

$$y_2 = C\cos x \tag{2}$$

其中“−”号吸收到常数 C 中.

(2) 方程的 $P(x)=\dfrac{1}{r}$，先计算

$$\mathrm{e}^{-\int_a^{r'} P(r'')\mathrm{d}r''} = \mathrm{e}^{-\int_a^{r'} \frac{1}{r''}\mathrm{d}r''} = \mathrm{e}^{-\ln r'+\ln a} = \frac{a}{r'} \tag{1}$$

则可得另一个线性独立的解为

$$R_2(r) = Cr^m\int_0^a \frac{a}{r'^{2m+1}}\mathrm{d}r' = -2maCr^m r^{-2m} = Cr^{-m} \tag{2}$$

最后将所有的常数 $(-2ma)$ 都包含在常数 C 中.

15.11　考虑施图姆-刘维尔本征值的问题，对于方程

$$\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[w(x)a(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[c(x)-\lambda\right]u(x)=0,\quad x\in[a,b]$$

其中函数 $w(x)$、$a(x)$ 和 $c(x)$ 满足如下条件.

$$a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[w(x)a(x)\right]=b_0+b_1x$$

$$c(x)=c_0$$

$$\left[w(x)a(x)\right]_{x=a}=\left[w(x)a(x)\right]_{x=b}=0$$

且 $\left[w(x)a(x)\right]$ 在区间 (a,b) 内不为零. a_0，a_1，a_2，b_0，b_1，c_0 均为实数. 请证明：对于给定的本征值 $\{\lambda_n\}$

$$\lambda_n=n(n-1)a_2+nb_1+c_0,\quad n=1,2,3,\cdots$$

(1) 总存在非平凡的多项式解

$$u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}x^k$$

其中，$a_k^{(n)}$ 为 n 次多项式的展开系数.

(2) 这些多项式具有正交性

$$\int_a^b u_m^*(x)u_n(x)w(x)\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n$$

证　(1) 由方程及满足的条件，原方程可变为

$$\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\left(b_0+b_1x\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left(c_0-\lambda\right)u=0 \tag{1}$$

对于给定的本征值 $\{\lambda_n\}$

$$\lambda_n=n(n-1)a_2+nb_1+c_0,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

代入(1)式，有

$$\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)u_n''+\left(b_0+b_1x\right)u_n'-\left[n(n-1)a_2+nb_1\right]u_n=0 \tag{3}$$

其中，设 u_n 是相应于本征值 λ_n 的方程的解.

讨论： 当 $a_0\neq0$ 时，$x=0$ 为方程的常点 $(a<0<b)$，由教材中定理 15.3.1 可知，方程在 $x=0$ 的领域内存在两个线性无关的解析解，即

$$u_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \tag{4}$$

代入方程有

$$\begin{aligned} &a_0\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}x^k+a_1\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)c_{k+1}x^k+a_2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k\\ &+b_0\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k+b_1\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^k-\left[n(n-1)a_2+nb_1\right]\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0 \end{aligned} \tag{5}$$

当 $k=0$ 时，有

$$2a_0c_2+b_0c_1-\left[n(n-1)a_2+nb_1\right]c_0=0$$

对于 x^k 幂次项的系数有

$$\begin{aligned} &\left\{a_2\left[k(k-1)-n(n-1)\right]+b_1(k-n)\right\}c_k+(a_1k+b_0)(k+1)c_{k+1}\\ &+a_0(k+1)(k+2)c_{k+2}=0 \end{aligned} \tag{6}$$

可以看出，当 $k=n$ 时，c_k 项的系数为零，即在 $k\geqslant n$ 时，有系数的递推关系

$$c_{k+2}=-\frac{a_1k+b_0}{a_0(k+2)}c_{k+1} \tag{7}$$

从另一方面，在(6)式中，如果设 $c_{k+2}=0$，则由(6)式可得

$$c_{k+1}=-\frac{a_2\left[k(k-1)-n(n-1)\right]+b_1(k-n)}{(k+1)(a_1k+b_0)}c_k \tag{8}$$

则当 $k=n$ 时，$c_{k+1}=c_{n+1}=0$，由递推关系可知后面的系数皆为零，这与假设的 $c_{k+2}=0$ 自洽，即级数解总是截断为最高幂次为 n 的 n 次多项式，其形式为

$$u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k \tag{9}$$

或写成

$$u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}x^k \tag{10}$$

(2) 由于 u_n 是满足问题(1)的 n 次多项式解，同时可设 u_m 是满足问题(1)的 m 次多项式解，因此它们分别满足方程

$$a(x)u_n''(x)+(b_0+b_1x)u_n'-(c_0-\lambda_n)u_n=0 \tag{1}$$

$$a(x)u_m''(x)+(b_0+b_1x)u_m'-(c_0-\lambda_m)u_m=0 \tag{2}$$

由 $u_m\times(1)-u_n\times(2)=0$，得

$$a(x)(u_n''u_m-u_m''u_n)+(b_0+b_1x)\left(u_n'u_m-u_m'u_n\right)+(\lambda_n-\lambda_m)u_nu_m=0$$

由于 $\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[w(x)a(x)\right]=b_0+b_1x$，上式变为

$$\begin{aligned}&a(x)w(x)(u_n''u_m-u_m''u_n)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[w(x)a(x)\right](u_n'u_m-u_m'u_n)\\&+(\lambda_n-\lambda_m)w(x)u_nu_m=0\end{aligned}\tag{3}$$

对此方程从 $a\to b$ 对 x 进行积分，考虑到上式第二项的积分为

$$\begin{aligned}&\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[w(x)a(x)\right](u_n'u_m-u_m'u_n)\mathrm{d}x=\int_a^b(u_n'u_m-u_m'u_n)\,\mathrm{d}\left[w(x)a(x)\right]\\&=\left[w(x)a(x)\right](u_n'u_m-u_m'u_n)\Big|_a^b-\int_a^b w(x)\,a(x)(u_n''u_m-u_m''u_n)\mathrm{d}x\\&=-\int_a^b w(x)a(x)(u_n''u_m-u_m''u_n)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

与第一项的积分正好相消，因此由(3)式得到

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b w(x)u_n(x)u_m(x)\mathrm{d}x=0\tag{4}$$

当 $n\neq m$，即 $\lambda_n\neq\lambda_m$ 时，有

$$\int_a^b u_n(x)u_m(x)w(x)\mathrm{d}x=0,\quad n\neq m\tag{5}$$

正交性得证. 其中 $w(x)$ 称为正交的权重函数.

注： 我们用的是实函数 $u(x)$，如果 $u(x)$ 是复函数，则正交关系为

$$\int_a^b u_n^*(x)u_m(x)w(x)\mathrm{d}x=0,\quad n\neq m$$

15.12　在 $x=0$ 的邻域内，求拉盖尔(Laguerre)方程

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$$

的级数解. 当 λ 取什么值时，可使级数退化为多项式？这些多项式乘以适当的常数使最高幂次项成为 $(-x)^n$ 的形式，此时多项式称为拉盖尔多项式. 记为 $L_n(x)$，写出 $L_n(x)$ 的前三项.

解　由方程

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0\tag{1}$$

可知，$x=0$ 为方程的正则奇点. 设方程解的形式为

$$y=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho}\tag{2}$$

代入方程(1)，有

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)x^{k+\rho-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)x^{k+\rho} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} = 0 \tag{3}$$

由 $k=0$ 时 x 的最低幂次 $x^{\rho-1}$ 的系数为零，可得指数方程

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \quad \Rightarrow \quad \rho=0 \tag{4}$$

为重根. 故解的形式为

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{5}$$

代入方程(1)，得

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} k(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \tag{6}$$

对 x^k 幂次项的系数，可得系数的递推关系

$$a_{k+1}=\frac{k-\lambda}{(k+1)^2}a_k \tag{7}$$

可以看出，当本征值 λ 为正整数 n 时，即 $\lambda_n=n, n=0,1,2,3,\cdots$，当 $k=n$ 即 $k=\lambda_n$ 时，有

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$$

此时，方程的解(5)式就截断为有限的多项式

$$y=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{8}$$

其系数的递推关系为

$$a_{k+1}=\frac{k-n}{(k+1)^2}a_k \tag{9}$$

即

$$a_k=\frac{(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2}a_0 \tag{10}$$

故拉盖尔方程的解为拉盖尔多项式，记为

$$L_n(x)=a_0\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2}x^k,\quad |x|<\infty \tag{11}$$

前三项的系数为

$$a_1=-na_0$$

$$a_2=\frac{n(n-1)}{4}a_0$$

$$a_3=\frac{-n(n-1)(n-2)}{36}a_0$$

故 $L_n(x)$ 的前三项为

$$L_n(x)=a_0-a_0nx+a_0\frac{n(n-1)}{4}x^2-a_0\frac{n(n-1)(n-2)}{36}x^3+\cdots+a_0\frac{(-1)^n}{n!}x^n \tag{12}$$

当 $n=0$ 时，$L_0(x)=a_0$，$L_0(x)=1$，$a_0=1$；

当 $n=1$ 时，$L_1(x)=a_0(1-x)=1-x$，$a_0=1$；

当 $n=2$ 时，$L_2(x)=1-2x+\frac{1}{2}x^2$，$a_0=1$；

当 $n=3$ 时，$L_3(x)=1-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$，$a_0=1$.

15.13　在 $x=0$ 点的邻域内，求解高斯方程(超几何级数方程)

$$x(x-1)y''+\left[(1+\alpha+\beta)x-\gamma\right]y'+\alpha\beta y=0$$

的级数解.

解　由方程

$$x(x-1)y''+\left[(1+\alpha+\beta)x-\gamma\right]y'+\alpha\beta y=0 \tag{1}$$

可知，$x=0$，$x=1$ 都为方程的正则奇点.

在 $x=0$ 的邻域内，$|x|<1$，设解的形式为

$$y=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho},\quad a_0\neq 0 \tag{2}$$

代入方程，有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho}-\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-1}\\&+(1+\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)x^{k+\rho}-\gamma\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)x^{k+\rho-1}+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho}=0\end{aligned} \tag{3}$$

由最低幂次 $x^{\rho-1}$ 项的系数为零可得指数方程

$$\rho(\rho-1+\gamma)=0 \tag{4}$$

可得

$$\rho_1=0,\quad \rho_2=1-\gamma \tag{5}$$

(1) 取 $\rho=\rho_1=0$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k k(k-1)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_k k(k-1)x^{k-1}+(1+\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}a_k kx^k$$
$$-\gamma\sum_{k=0}^{\infty}a_k kx^{k-1}+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=0$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k k(k-1)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}k(k+1)x^k+(1+\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}a_k kx^k$$
$$-\gamma\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}(k+1)x^k+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=0 \tag{6}$$

当 $k=0$ 时，得

$$-\gamma a_1+\alpha\beta a_0=0\quad\Rightarrow\quad a_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma}a_0$$

当 $k=1$ 时，得

$$a_2=\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{2(1+\gamma)}a_1=\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{2(1+\gamma)}\cdot\frac{\alpha\beta}{\gamma}a_0$$

这里，不妨设 $\gamma>1$.

对 x^k 项的系数，得系数的递推关系

$$a_{k+1}=\frac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)}a_k,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{7}$$

可得

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{(k-1+\alpha)(k-1+\beta)}{k(k-1+\gamma)}a_{k-1}\\&=\frac{(k-1+\alpha)(k-2+\alpha)(k-1+\beta)(k-2+\beta)}{k(k-1)(k-1+\gamma)(k-2+\gamma)}a_{k-2}\\&=\frac{(k-1+\alpha)(k-2+\alpha)\cdots\alpha(k-1+\beta)(k-2+\beta)\cdots\beta}{k!(k-1+\gamma)(k-2+\gamma)\cdots\gamma}a_0\\&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(k+\beta)}{k!\Gamma(k+\gamma)}a_0\end{aligned} \tag{8}$$

因此得到方程(1)的一个解为

$$y_1(x)=a_0\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(k+\beta)}{k!\Gamma(k+\gamma)}x^k,\quad |x|<1 \tag{9}$$

此解称为超几何级数，记为

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(k+\beta)}{k!\Gamma(k+\gamma)}x^k \tag{10}$$

其中 $a_0=1$.

(2) 求另一个线性无关的解，取 $\rho=\rho_2=1-\gamma$，当 γ 不为整数时，可将解的形式

$$y=x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1-\gamma} \tag{11}$$

代入方程，求得另一个解.

我们现在用另一种方法(函数变换)来求解，这种函数变换的求解方法在积累解题的经验后往往是便捷有效的.

令

$$y_2=x^{1-\gamma}f(x) \tag{12}$$

代入方程(1)，得 $f(x)$ 满足的方程为

$$x(x-1)f''+\left[(3+\alpha+\beta-2\gamma)x-(2-\gamma)\right]f'+(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)f=0 \tag{13}$$

这是一个以 $\alpha'=\alpha-\gamma+1,\quad \beta'=\beta-\gamma+1,\quad \gamma'=2-\gamma$ 为参数的超几何方程，故直接可得方程(1)的另一个解为

$$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha',\beta',\gamma';x)=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;x) \tag{14}$$

注意： 由于此解中 γ 为非整数，故要对 $x^{1-\gamma}$ 进行讨论，令 $x\to z$ 时，该解是一个多值函数，它是以 $z=0$ 为支点的多值函数.

因此，超几何方程的解为

$$\begin{aligned}y(x)&=c_1y_1+c_2y_2\\&=c_1F(\alpha,\beta,\gamma;x)+c_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;x)\end{aligned} \tag{15}$$

其中，c_1，c_2 为任意常数.

第十六章　球　函　数

内 容 提 要

一、勒让德多项式

1. 勒让德方程的本征值问题

$x=\pm1$ (即 $\theta=0,\pi$)点是勒让德方程的正则奇点，因此勒让德方程在自然边界条件 $|y|<\infty$ 下，构成以下的 S-L 本征值问题：

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0\\ \left|y(x)\right|_{x=\pm1}<\infty\end{cases}$$

此 S-L 本征值问题的解为勒让德多项式

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$$

$$N=\begin{cases}\dfrac{l}{2}, & l\text{为偶数}\\ \dfrac{l-1}{2}, & l\text{为奇数}\end{cases}$$

与勒让德多项式所对应的本征值为 $l(l+1),l=0,1,2,\cdots$.

2. 勒让德多项式的几个特殊情况

$$\mathrm{P}_0(x)=1,\quad \mathrm{P}_1(x)=x,\quad \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\quad \mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

$$\mathrm{P}_l(-x)=(-1)^l\,\mathrm{P}_l(x)$$

$$\mathrm{P}_l(1)=1,\mathrm{P}_l(0)=0,\quad l\text{为奇数}$$

$$\left|\mathrm{P}_l(x)\right|\leqslant1,\quad -1\leqslant x\leqslant1$$

3. 勒让德多项式的几种常见的表达式

1) 微分表达式(罗德里格斯(Rodriguez)公式)

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

2) 积分表达式(施列夫利(Schlafli)积分公式)

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l 2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z$$

其中，C 为 z 平面上包围 $z=x$ 的任一闭合回路.

3) 勒让德多项式的定积分表达式(拉普拉斯积分公式)

$$\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\varphi)^l\mathrm{d}\varphi$$

4. 勒让德多项式的生成函数

$$f(r)=\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty}r^l\mathrm{P}_l(x), & r\leqslant 1\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}1/r^{l+1}\cdot\mathrm{P}_l(x), & r>1\end{cases},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

二、勒让德多项式的主要性质

1. 勒让德多项式的递推公式

1) 基本的递推关系式

$$x(1+2l)\mathrm{P}_l(x)-(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)-l\mathrm{P}_{l-1}(x)=0$$

$$\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)+\mathrm{P}'_{l-1}(x)-2x\mathrm{P}'_l(x)$$

2) 常用的递推关系式

$$(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)$$

$$(l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-x\mathrm{P}'_l(x)$$

$$l\mathrm{P}_l(x)=x\mathrm{P}'_l(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)$$

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{P}'_l(x)=xl\mathrm{P}_l(x)-l\mathrm{P}_{l-1}(x)$$

2. 勒让德多项式的正交归一性

1) 勒让德多项式的正交归一性

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

通过变换 $x=\cos\theta$，从变量 x 变回到变量 θ，有

$$\int_0^{\pi} \mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

其中

$$\delta_{kl}=\begin{cases}0, & k\neq l\\ 1, & k=l\end{cases}$$

2) 广义傅里叶级数展开

根据 S-L 本征值问题，可以把定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)$，或者定义在区间 $[0,\pi]$ 的函数 $g(\theta)$ 展开为广义傅里叶级数，即

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty} f_l\mathrm{P}_l(x)$$

其中

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

或者

$$f(\cos\theta)=g(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty} g_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

其中

$$g_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} g(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

三、连带勒让德函数

1. 连带勒让德方程和自然边界条件所组成的 S-L 本征值问题

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\dfrac{m^2}{\left(1-x^2\right)}\right]y=0, \quad |x|\leqslant 1\\ \left|y(x)\right|_{x=\pm1}<\infty\end{cases}$$

此 S-L 本征值问题的解为连带勒让德多项式

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l, \quad m>0$$

$\mathrm{P}_l^m(x)$ 仍然是一个 l 次多项式，所以将 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 称为 m 阶 l 次连带勒让德多项式. 与此本征函数所对应的本征值为 $l(l+1)(l=0,1,2,\cdots)$.

并且由此表达式可以看出，对 m 的取值有如下的限制：$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$.

当 $m \to -m$ 时，有

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}\left(x^2-1\right)^l,\quad m>0$$

亦满足连带勒让德方程，且有

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x),\quad m>0$$

因此，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 是线性相关的.

2. 连带勒让德多项式 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的正交关系

对于同一 m 阶，连带勒让德多项式 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的正交关系为

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'},\quad m>0$$

对于同一个 m，函数系 $\left\{\sqrt{\frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\mathrm{P}_l^m(x),\ l=0,1,2,\cdots\right\}$ 构成希尔伯特空间的正交归一的基向量. $\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}$ 为 m 阶 l 次连带勒让德多项式的归一化因子.

通常在球坐标系下，连带勒让德函数 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 的正交关系为

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'},\quad m>0$$

其中

$$\delta_{lk}=\begin{cases}0, & k\neq l\\ 1, & k=l\end{cases}$$

3. 广义傅里叶级数展开

根据 S-L 本征值问题，可以把定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)$，或者定义在区间 $[0,\pi]$ 的函数 $g(\theta)$ 展开为广义傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\mathrm{P}_l^m(x)$$

其中

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l^{\,m}(x)\mathrm{d}x$$

或者

$$g(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\mathrm{P}_l^{\,m}(\cos\theta)$$

其中

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{0}^{\pi}g(\theta)\mathrm{P}_l^{\,m}(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

四、勒让德多项式和连带勒让德多项式在求解拉普拉斯方程中的应用

1. 拉普拉斯方程的轴对称定解问题

如果拉普拉斯方程的定解问题具有对称轴，并且取此对称轴为球坐标的极轴，则问题的解与 φ 无关，即 $m=0$．定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2u=0\\ u(r,\theta)_{r=a}=f(\theta)\end{cases}$$

定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[C_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)+D_lr^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\right]$$

这里系数 C_l 和 D_l 由 $r=0$，$r=a$ 或 $r\to\infty$ 的边界条件及 $r=a$ 的衔接条件确定.

对球内问题，则定解问题要求 $u(\boldsymbol{r})\big|_{r=0}<\infty$，定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0, & r<a\\ u(r,\theta)_{r=a}=f(\theta)\end{cases}$$

的解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

系数 C_l 由 $r=a$ 的边界条件确定.

对球外区域问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0, & r>a\\ u(r,\theta)_{r=a}=g(\theta)\end{cases}$$

其解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}D_lr^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

系数 D_l 由 $r=a$ 的边界条件确定.

2. 拉普拉斯方程的非轴对称定解问题

如果拉普拉斯方程的定解问题不具有轴对称性，此时 $m\neq 0$，则该定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta,\varphi)=0, & 0\leqslant\theta<\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ u(r,\theta,\varphi)_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

定解问题的解为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} r^l[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} r^{-(l+1)}[C_l^m\cos m\varphi+D_l^m\sin m\varphi]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$$

其中，$A_l^m, B_l^m, C_l^m, D_l^m\,(l=0,1,2,\cdots, m\leqslant l)$ 都是常数，由定解问题的边界条件确定.

五、球函数

1. 球函数方程与周期性、有限的边界条件构成的本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0\\ \mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\mathrm{Y}(\theta,\varphi+2\pi), \qquad \left|\mathrm{Y}(\theta,\varphi)\right|_{\theta=0,\pi}<\infty\end{cases}$$

其本征值是：$l(l+1), l=0,1,2,\cdots$ 和 m^2，其中 $m=0,\pm1,\cdots,\pm l$.

相应的本征函数是 l 阶球函数

$$\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\cdot P_l^m(\cos\theta)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

球函数有另一种等价的定义，即

$$\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\cdot \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

其复共轭为

$$\mathrm{Y}_{l,m}^*(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}$$

2. 球函数的正交关系

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{Y}^*{}_{l,m}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l',m'}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

3. 广义傅里叶级数展开

以球函数系 $\{Y_{l,m}(\theta,\varphi)|l=0,1,2,\cdots,m=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为基向量张成一个无穷维的希尔伯特空间. 对应每一个 l，有 $2l+1$ 个 m：$m=0,\pm1,\cdots,\pm l$，$2l+1$ 个 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 构成这个希尔伯特空间的子空间.

在区域 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$ 中定义的连续函数 $f(\theta,\varphi)$，则可按球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 展开成

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}f_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

其中

$$f_{lm}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y^*{}_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

注：这个希尔伯特空间在球对称的物理系统的数学描述中，特别是量子物理系统中，有着广泛的应用.

习 题 详 解

16.1 试证明勒让德多项式的生成函数

$$f(r)=\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}$$

在 $r=0$ 点的泰勒展开式为

$$f(r)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)r^l$$

其中

$$r=|\boldsymbol{r}|<1,\quad x=\cos\theta,\quad |x|\leqslant1$$

证 由 $f(r)$ 的泰勒展开式的定义，直接由

$$f(r)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}f^{(l)}(0)r^l$$

计算 $f^{(n)}(0)$，比较困难.

我们采用另一种方法，先假设有一个函数的展开式为

$$f(r,x)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)r^l \tag{1}$$

再由 $P_l(x)$ 的积分表达式

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{2^l}\oint_c\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z \tag{2}$$

其中积分回路 c 是以 x 为圆心的任一闭合回路，在此我们选择 c 为：$|z-x|=1$. 将此表达式代入(1)式进行计算，最后得到的 $f(r,x)$ 就是勒让德多项式的生成函数. 具体计算如下：

由

$$\begin{aligned}f(r,x)&=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)r^l\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{2^l}\oint_c r^l\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{\mathrm{d}z}{z-x}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(z^2-1\right)^l r^l}{2^l(z-x)^l}\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{\mathrm{d}z}{z-x}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\left(z^2-1\right)r}{2(z-x)}}\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{\mathrm{d}z}{z-x-\dfrac{1}{2}\left(z^2-1\right)r}\end{aligned} \tag{3}$$

求被积函数的奇点，由

$$z-x-\frac{1}{2}z^2r+\frac{1}{2}r=0 \tag{4}$$

可得奇点为

$$z_{\pm}=\frac{1}{r}\left(1\pm\sqrt{1-2xr+r^2}\right) \tag{5}$$

只有 z_- 在 c 内，且 z_- 为一阶极点，分子在此极点的值不为零. 由留数的求法，对被积函数的分母的函数进行求导后把 z_- 的值代入，可求得此留数，然后由留数定理，可得此回路积分的值，即

$$\begin{aligned}f(r,x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{\mathrm{d}z}{z-x-\dfrac{1}{2}\left(z^2-1\right)r}\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot2\pi\mathrm{i}\frac{1}{1-zr}\Big|_{z=z_-}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2xr}}\end{aligned} \tag{6}$$

故命题得证.

注：$\mathrm{P}_l(x)$ 的积分表达式的导出，见 16.3 的第 1 题的证明中的(1)、(2)两式.

附注：关于(3)式中第三个等号到第四个等号的证明

$$\text{因为}\ |z-x|=1,\quad |x|\leqslant 1,\quad \text{所以}\ |z|\leqslant 2;$$

$$\text{因为}\ \left|z^2-1\right|\leqslant |z-1||z+1|\leqslant |z-x||z+1|\leqslant 2|z-x|;$$

$$\text{因为}\ r<1\Rightarrow \frac{\left|z^2-1\right|r}{2|z-x|}<1$$

故第三个等号中积分号内的级数可收敛为第四个等号中积分号内的函数.

16.2 试证明勒让德多项式的递推公式：

(1) $(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)$；

(2) $(l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-x\mathrm{P}'_l(x)$；

(3) $l\mathrm{P}_l(x)=x\mathrm{P}'_l(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)$；

(4) $\left(x^2-1\right)\mathrm{P}'_l(x)=xl\mathrm{P}_l(x)-l\mathrm{P}_{l-1}(x)$.

证 (1) 由勒让德多项式基本递推关系式

$$x(2l+1)\mathrm{P}_l-(l+1)\mathrm{P}_{l+1}-l\mathrm{P}_{l-1}=0 \tag{1}$$

$$\mathrm{P}_l=\mathrm{P}'_{l+1}+\mathrm{P}'_{l-1}-2x\mathrm{P}'_l \tag{2}$$

由(1)式对 x 求导得

$$(2l+1)\mathrm{P}_l+x(2l+1)\mathrm{P}'_l-(l+1)\mathrm{P}'_{l+1}-l\mathrm{P}'_{l-1}=0$$

代入(2)式有

$$(2l+1)\mathrm{P}_l+x\mathrm{P}'_l-\mathrm{P}'_{l+1}-l\mathrm{P}_l=0$$

再次用(2)式，有

$$(l+1)\mathrm{P}_l+\frac{1}{2}(\mathrm{P}'_{l+1}+\mathrm{P}'_{l-1}-\mathrm{P}_l)-\mathrm{P}'_{l+1}=0$$

即得

$$(2l+1)\mathrm{P}_l=\mathrm{P}'_{l+1}-\mathrm{P}'_{l-1} \tag{3}$$

故命题得证.

(2) 由(2)式+(3)式，得

$$(2l+2)\mathrm{P}_l=2\mathrm{P}'_{l+1}-2x\mathrm{P}'_l$$

即

$$(l+1)\mathrm{P}_l=\mathrm{P}'_{l+1}-x\mathrm{P}'_l \tag{4}$$

命题得证.

(3) 由(3)式 – (4)式，得

$$l\mathrm{P}_l = x\mathrm{P}'_l - \mathrm{P}'_{l-1} \tag{5}$$

命题得证.

(4) 由 $x\times$(5) 式，得

$$x^2\mathrm{P}'_l = xl\mathrm{P}_l + x\mathrm{P}'_{l-1} \tag{6}$$

将(4)式下标 l 换为 $l-1$，即为

$$l\mathrm{P}_{l-1} = \mathrm{P}'_l - x\mathrm{P}'_{l-1} \tag{7}$$

(6)和(7)两式相加，有

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{P}'_l = xl\mathrm{P}_l - l\mathrm{P}_{l-1} \tag{8}$$

命题得证.

16.3 试证明：

(1) $\mathrm{P}_l(1)=1$；

(2) $\mathrm{P}_l(-1)=(-1)^l$；

(3) $\mathrm{P}_l(0)=\begin{cases}0, & l=2n+1,\ n=0,1,2,\cdots\\ 1, & l=2n=0\\ (-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, & l=2n,\ n=1,2,3,\cdots\end{cases}$；

(4) $\mathrm{P}'_l(1)=\dfrac{l(l+1)}{2}$；

(5) $\mathrm{P}'_l(-1)=(-1)^{l+1}\dfrac{l(l+1)}{2}$；

(6) $\mathrm{P}'_l(0)=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!}, & l=2n+1, n=0,1,2,\cdots\\ 0, & l=2n, n=0,1,2,\cdots\end{cases}$

证 (1) 由勒让德多项式的微分表达式

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \tag{1}$$

利用解析函数高阶导数的积分公式，有勒让德多项式积分表达式

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l\cdot 2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z \tag{2}$$

其中，c 为取圆心在 $z_0=x$，半径为 $\sqrt{|x^2-1|}$ 的圆周，则在 c 上，有 $z-x=\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \mathrm{d}z=\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$，原式可写成

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_l(x)&=\frac{1}{2^l 2\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2-1\right]^l}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{l+1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{l+1}}\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left[x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}\right]^l}{\left(2\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^l}\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}+x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right]^l\cdot\mathrm{d}\varphi \qquad (3)\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)\right]^l\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right]^l\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

令 $x=\cos\theta$, 则上式为

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\theta+\sin\theta\cos\varphi\right]^l\mathrm{d}\varphi \qquad (4)$$

当 $\cos\theta=1$，即 $x=1$ 时，$\sin\theta=0$，可得

$$\mathrm{P}_l(1)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[1+0]^l\,\mathrm{d}\varphi=1 \qquad (5)$$

命题得证.

(2) 由勒让德多项式表达式

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n} \qquad (6)$$

可知

$$\mathrm{P}_l(-x)=(-1)^l\mathrm{P}_l(x) \qquad (7)$$

又由(5)式知 $\mathrm{P}_l(1)=1$，故有

$$P_l(-1)=(-1)^l \qquad (8)$$

命题得证.

(3) 由勒让德多项式表达式(6)可以看出，$\mathrm{P}_l(0)$ 中只有 x^0 项才不为 0，所以 l 为

奇数时，$l=2n+1$，则 $P_l(0)=0$. 当 l 为偶数时，取 $l=2n$，x^0 项的系数为

$$(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!0!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} \tag{9}$$

故有

$$\mathrm{P}_l(0)=\begin{cases}0, & l=2n+1,\ n=0,1,2,\cdots\\ 1, & l=2n=0\\ (-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, & l=2n,\ n=1,2,3,\cdots\end{cases} \tag{10}$$

命题得证.

(4) 由于勒让德多项式满足勒让德方程

$$\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l''(x)-2x\mathrm{P}_l'(x)+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)=0 \tag{11}$$

当取 $x=1$ 时，即可得

$$-2\mathrm{P}_l'(1)+l(l+1)\mathrm{P}_l(1)=0$$

又有 $\mathrm{P}_l(1)=1$，即

$$\mathrm{P}_l'(1)=\frac{l(l+1)}{2} \tag{12}$$

命题得证.

(5) 由于勒让德多项式满足勒让德方程，则

$$\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l''(x)-2x\mathrm{P}_l'(x)+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)=0$$

当取 $x=-1$ 时，即可得

$$2\mathrm{P}_l'(-1)+l(l+1)\mathrm{P}_l(-1)=0$$

又由于 $\mathrm{P}_l(-1)=(-1)^l$，即有

$$\mathrm{P}_l'(-1)=(-1)^{l+1}\frac{l(l+1)}{2} \tag{13}$$

命题得证.

(6) 由 16.2 题第(3)小题，$l\mathrm{P}_l=x\mathrm{P}_l'-\mathrm{P}_{l-1}'$ 取 $x=0$，有

$$l\mathrm{P}_l(0)=-\mathrm{P}_{l-1}'(0) \tag{14}$$

把 l 变为 $l+1$，就得

$$\mathrm{P}_l'(0)=-(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(0) \tag{15}$$

并由(10)式，把 l 变为 $l+1$，有

$$P_{l+1}(0)=\begin{cases}0, & l=2n,n=0,1,2,\cdots\\ \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{(2n+2)!!}, & l=2n+1,n=0,1,2,\cdots\end{cases}\tag{16}$$

则有

$$\begin{aligned}P_l'(0)&=\begin{cases}0, & l=2n\\ -(2n+2)\dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{(2n+2)!!}, & l=2n+1\end{cases}\\ &=\begin{cases}0, & l=2n,n=0,1,2,\cdots\\ (-1)^n\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!}, & l=2n+1,n=0,1,2,\cdots\end{cases}\end{aligned}\tag{17}$$

命题得证.

16.4　计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1}P_l(x)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-1}^{1}x^2P_l(x)P_{l+2}(x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\left[P_l'(x)\right]^2\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{-1}^{1}xP_l(x)P_{l+1}(x)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{0}^{1}P_l(x)\mathrm{d}x$；　(6) $\int_{0}^{1}P_k(x)P_l(x)\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)\mathrm{d}x$，分别讨论 $k\geqslant l$ 和 $k<l$ 的情况.

解　(1) 由 $P_0(x)=1$ 和勒让德多项式的正交性可知 $l=0$ 时，有

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}P_l(x)P_0(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2, & l=0\\ 0, & l\neq 0\end{cases}\tag{1}$$

(2) 由勒让德多项式的基本递推关系

$$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_l(x)\tag{2}$$

有

$$xP_l=\frac{1}{2l+1}\left[(l+1)P_{l+1}+lP_{l-1}\right]\tag{3}$$

$$xP_{l+2}=\frac{1}{2(l+2)+1}\left[(l+3)P_{l+3}+(l+2)P_{l+1}\right]\tag{4}$$

把(3)、(4)两式代入积分式，并利用勒让德多项式的正交性和 $\int_{-1}^{1}P_l(x)P_l(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{2l+1}$，可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l+2}(x)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{1}x\mathrm{P}_l(x)x\mathrm{P}_{l+2}(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(2l+1)(2l+5)}\int_{-1}^{1}\left[(l+1)\mathrm{P}_{l+1}+l\mathrm{P}_{l-1}\right]\\&\quad\left[(l+3)\mathrm{P}_{l+3}+(l+2)\mathrm{P}_{l+1}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+5)}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_{l+1}^2(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+5)}\cdot\frac{2}{2(l+1)+1}\\&=\frac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)}\end{aligned}\tag{5}$$

(3) 原积分为

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\left[\mathrm{P}_l'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}\mathrm{P}_l(x)\\&=\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_l(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\right]\\&=2\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)x\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l''(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6}$$

由于勒让德多项式满足勒让德方程

$$\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l''(x)-2x\mathrm{P}_l'(x)+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)=0$$

故

$$\begin{aligned}I&=2\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)x\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left\{2\mathrm{P}_l(x)x\mathrm{P}_1'(x)-l(l+1)\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{1}l(l+1)\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=l(l+1)\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=l(l+1)\frac{2}{2l+1}=\frac{2l(l+1)}{2l+1}\end{aligned}\tag{7}$$

(4) 由勒让德多项式的基本递推关系，有

$$x\mathrm{P}_l=\frac{1}{2l+1}\left[(l+1)\mathrm{P}_{l+1}+l\mathrm{P}_{l-1}\right]\tag{8}$$

原积分变为

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l+1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2l+1}\int_{-1}^{1}\left[(l+1)\mathrm{P}_{l+1}+l\mathrm{P}_{l-1}\right]\mathrm{P}_{l+1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{l+1}{2l+1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_{l+1}(x)\mathrm{P}_{l+1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{l+1}{2l+1}\cdot\frac{2}{2(l+1)+1} \\
&= \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

(5) 首先讨论当$l=0$时，原积分为

$$
I = \int_0^1 \mathrm{P}_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1 \tag{10}
$$

当$l\neq 0$时，由题 16.2 第(3)小题的结果，有递推关系

$$
\mathrm{P}_l = \frac{1}{l}\left(x\mathrm{P}_l' - \mathrm{P}_{l-1}'\right) \tag{11}
$$

代入原积分

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_0^1\left(x\mathrm{P}_l' - \mathrm{P}_{l-1}'\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{P}_l - \frac{1}{l}\int_0^1 \mathrm{d}\mathrm{P}_{l-1} \\
&= \frac{1}{l}x\mathrm{P}_l\Big|_0^1 - \frac{1}{l}\int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{l}\mathrm{P}_{l-1}\Big|_0^1
\end{aligned}
\tag{12}
$$

由$\mathrm{P}_l(1)=1$，并注意到等式右边第二项的积分就是原积分，要移到等式的左边，可得

$$
I = \frac{l}{l+1}\left[\frac{1}{l} - 0 - \frac{1}{l} + \frac{1}{l}\mathrm{P}_{l-1}(0)\right] = \frac{1}{l+1}\mathrm{P}_{l-1}(0) \tag{13}
$$

由题 16.3 的第(3)小题的结果

$$
\mathrm{P}_l(0) = \begin{cases} 0, & l = 2n+1, n = 0,1,2,\cdots \\ 1, & l = 2n = 0 \\ (-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, & l = 2n, n = 1,2,3,\cdots \end{cases}
$$

把$l\to l-1$，并考虑到$l\neq 0$，有

$$
\mathrm{P}_{l-1}(0) = \begin{cases} 0, & l = 2n, n = 1,2,3,\cdots \\ 1, & l = 2n-1,\quad n = 1 \\ (-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, & l = 2n-1, n = 2,3,4,\cdots \end{cases} \tag{14}
$$

有

$$I=\int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{l+1}\mathrm{P}_{l-1}(0)$$
$$=\begin{cases}0, & l=2n, n=1,2,3,\cdots\\ \dfrac{1}{2}, & l=2n-1, n=1\\ (-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, & l=2n-1, n=2,3,4,\cdots\end{cases} \tag{15}$$

(6) 由勒让德多项式的性质

$$\mathrm{P}_l(-x)=(-1)^l\mathrm{P}_l(x)$$

可知，当l为偶数时，$\mathrm{P}_l(x)$为偶函数；当l为奇数时，$\mathrm{P}_l(x)$为奇函数.

因此，当l，k都为偶数或都为奇数时，即$l+k$为偶数时，有

$$\int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2l+1}\delta_{kl} \tag{16}$$

当$k+l$为奇数时，计算$\int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x$.

由勒让德多项式满足勒让德方程，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\right]+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)=0 \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_k'(x)\right]+k(k+1)\mathrm{P}_k(x)=0 \tag{18}$$

以$\mathrm{P}_k(x)\times$(17)式、$\mathrm{P}_l(x)\times$(18)式，可得

$$\mathrm{P}_k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\right]+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)=0$$

$$\mathrm{P}_l(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_k'(x)\right]+k(k+1)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)=0$$

上两式可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k(x)\right]-\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k'(x)+l(l+1)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)=0 \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k'(x)\right]-\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k'(x)+k(k+1)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)=0 \tag{20}$$

以(20)式减(19)式，有

$$\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k'(x)-\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k(x)}{l(l+1)-k(k+1)}\right] \tag{21}$$

此式两边对 $0\to1$ 积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x&=\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k'(x)-\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k(x)}{l(l+1)-k(k+1)}\right]_0^1\\&=\frac{\mathrm{P}_l(0)\mathrm{P}_k'(0)-\mathrm{P}_l'(0)\mathrm{P}_k(0)}{k(k+1)-l(l+1)}\end{aligned}\tag{22}$$

不失普遍性，设

$$l=2n,\quad n=0,1,2,\cdots,k=2m+1,m=0,1,2,\cdots\tag{23}$$

由 16.3 题第(3)和(6)题的结果，有：

当 $l=0$ 即 $n=0$ 时，

$$\int_0^1 \mathrm{P}_0(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=(-1)^m\frac{(2m+1)!!}{(2m+1)(2m+2)!!}$$

可写成

$$\int_0^1 \mathrm{P}_0(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & m=0\\(-1)^m\dfrac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}, & m=1,2,3,\cdots\end{cases}\tag{24}$$

当 $l\neq0$，即 $n=1,2,3,\cdots$ 时，注意到 $l=2n$，$k=2m+1$ 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x&=\frac{(-1)^{n+m}\dfrac{(2n-1)!!(2m+1)!!}{(2n)!!(2m)!!}}{(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)}\\&=(-1)^{n+m}\frac{(2n-1)!!(2m+1)!!}{\left[(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)\right](2n)!!(2m)!!}\end{aligned}\tag{25}$$

其中，$n=1,2,3,\cdots,m=0,1,2,\cdots$.

(7) 由教材中第 228 页，命题 16.2.1 可知

$$I=\int_{-1}^1 x^k\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=0,\qquad k<l\tag{26}$$

当 $k\geqslant l$ 时，我们先分析被积函数，由于 $\mathrm{P}_l(x)$ 的奇偶性，当 $k-l=2n+1$ 时(n 为自然数)，被积函数为奇函数，故

$$I=\int_{-1}^1 x^k\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=0,\qquad k-l=2n+1,n=0,1,2,\cdots\tag{27}$$

当 $k=l+2n,n=0,1,2,\cdots$ 时，

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l\right] \end{aligned} \tag{28}$$

进行 l 次分部积分后有

$$I = \frac{(-1)^l (l+2n)!}{2^l l!(2n)!}\int_{-1}^{1} x^{2n}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x \tag{29}$$

令 $I_1 = \int_{-1}^{1} x^{2n}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x$，有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{2n-1}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}\left(x^2-1\right) \\ &= (-1)^1\frac{2n-1}{2(l+1)}\int_{-1}^{1} x^{2(n-1)}\left(x^2-1\right)^{l+1}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

这样做了 n 次分部积分，可得

$$I_1 = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n(l+1)\cdots(l+n)}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^{l+n}\mathrm{d}x \tag{30}$$

由教材第 229 页的计算，有

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x = \frac{(-1)^l (l!)^2 2^{2l+1}}{(2l+1)(2l)!}$$

故有

$$I_1 = (-1)^{l+2n}\frac{(2n-1)!!}{2^n(l+1)\cdots(l+n)}\cdot\frac{\left[(l+n)!\right]^2 2^{2l+2n+1}}{(2l+2n+1)!} \tag{31}$$

可得

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{2l+2n}\frac{(l+2n)!}{2^l l!(2n)!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(l+1)\cdots(l+n)}\cdot\frac{\left[(l+n)!\right]^2 2^{2l+n+1}}{(2l+2n+1)!} \\ &= \frac{(l+2n)!}{2^l 2^n n!(2n-1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(l+n)!}\cdot\frac{\left[(l+n)!\right]^2 2^{2l+n+1}}{(2l+2n+1)!} \\ &= \frac{2^{l+1}(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!} \end{aligned} \tag{32}$$

16.5　在以勒让德多项式为基 $\{P_l(x), l=0,1,2\cdots\}$ 的函数空间中，将下列函数展开.

(1) $f(x)=|x|$；　　(2) $f(x)=1+x+x^2+x^3$.

解　(1) $f(x)$的一般展开式为

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\mathrm{P}_l(x) \tag{1}$$

展开系数a_l满足

$$a_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

由于函数$f(x)=|x|$是偶函数，考虑到$\mathrm{P}_l(x)$的奇偶性，有

$$\begin{aligned}a_l&=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}0, & l=2n+1,n=0,1,2,\cdots\\(2l+1)\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x, & l=2n,n=0,1,2,\cdots\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

当$n=0$，即$l=0$时，$\mathrm{P}_0(x)=1$，有

$$a_0=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2} \tag{4}$$

当$n=0,1,2,\cdots$时，由题 16.4 中的第(6)题的(22)式和(25)式的结果，并注意到$x=\mathrm{P}_1(x)$，有

$$\int_0^1\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=(-1)^{n+m}\frac{(2n-1)!!(2m+1)!!}{\big[(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)\big](2n)!!(2m)!!}$$

其中，$l=2n$，　$k=2m+1$；　$n=1,2,3,\cdots$，　$m=0,1,2,\cdots$.

我们在积分中取$k=1$，　$m=0$，　$l=2n$，　$n=1,2,3,\cdots$，

$$\begin{aligned}a_{2n}&=(4n+1)(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{\big[2-2n(2n+1)\big](2n)!!}=(4n+1)(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{2\big[n(2n+1)-1\big](2n)!!}\\&=(-1)^{n+1}(4n+1)\frac{(2n)!}{2\big[n(2n+1)-1\big]\big[(2n)!!\big]^2}=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n)!}{2^{2n}2(2n-1)(n+1)\big[(n)!\big]^2}\\&=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!}\end{aligned} \tag{5}$$

故可得$|x|$在$\{P_l(x),\ l=0,1,2,\cdots\}$为基的广义傅里叶展开式为

$$\begin{aligned}|x| &= \frac{1}{2}\mathrm{P}_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!}\mathrm{P}_{2n}(x)\\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!}\mathrm{P}_{2n}(x)\end{aligned} \tag{6}$$

(2) 对于 $f(x)=1+x+x^2+x^3$，本身是简单的多项式，由

$$\mathrm{P}_0(x)=1,\ \ \mathrm{P}_1(x)=x,\ \ \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\ \ \mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right) \tag{7}$$

由于 $f(x)$ 的最高幂次为 x^3，故可设

$$f(x)=a_0\mathrm{P}_0(x)+a_1\mathrm{P}_1(x)+a_2\mathrm{P}_2(x)+a_3\mathrm{P}_3(x)=1+x+x^2+x^3 \tag{8}$$

把(7)式中的各项代入(8)式，可直接解得 a_0,a_1,a_2,a_3．由此可得 $f(x)$ 的广义傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{4}{3}\mathrm{P}_0(x)+\frac{8}{5}\mathrm{P}_1(x)+\frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x)+\frac{2}{5}\mathrm{P}_3(x) \tag{9}$$

16.6　在点电荷 $4\pi\varepsilon_0 q$ 的电场中放置一半径为 a 的导体球壳，球心距点电荷的距离为 b，且 $b>a$，求这个体系所形成的电场.

解　以球壳中心为坐标原点，建立球坐标，球心与点电荷连线为 z 轴，由对称性分析可知，这一体系的静电势是以 z 轴为对称轴，与 φ 角无关.

由物理上的分析可知，导体球壳有感应电荷分布，该感应电荷在空间中产生的电势为 $u_i(r,\theta)$，而点电荷 $4\pi\varepsilon_0 q$ 在空间中产生电势为 $u_q(r,\theta)$，则整个空间中的电势为

$$u(r,\theta)=u_i(r,\theta)+u_q(r,\theta) \tag{1}$$

为了计算方便，令导体球壳接地，则导体球壳内的电势为零，即选取了原点为电势的零点. 因此有

$$u(r,\theta)=0,\quad r\leqslant a \tag{2}$$

以下讨论的是空间点 $r>a$ 的情况.

设空间点 r 到点电荷的距离为 d，$d=\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}$，则

$$u_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 q}{d}=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} \tag{3}$$

当 $r<b$ 时，即考虑点电荷在以原点为圆心，以 b 为半径的区域内产生的电势，它包含了导体球壳附近的 $u_q(r,\theta)$，有

$$u_q=\frac{q}{b}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{r^2}{b^2}-2\dfrac{r}{b}\cos\theta}} \tag{4}$$

由勒让德多项式的生成函数可知

$$u_q=\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{5}$$

再考虑u_i，在$r>a$的区域中，u_i满足拉普拉斯方程，定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 u_i=0, & r>a\\ |u_i|<\infty\end{cases} \tag{6}$$

方程的通解为

$$u_i=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{7}$$

考虑到自然边界条件$|u_i|<\infty$，取$A_l=0$，去掉$r\to\infty$时的发散项，故有

$$u_i=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{8}$$

因此在$r<b$的区域内，定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=u_i(r,\theta)+u_q(r,\theta)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)+\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)\end{aligned} \tag{9}$$

由边界条件$u(a,\theta)=0$，可定出B_l，有

$$\sum_{l=0}^{\infty}B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)+\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0 \tag{10}$$

即

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[B_l a^{-(l+1)}+\frac{qa^l}{b^{l+1}}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

可得

$$B_l=-\frac{qa^{2l+1}}{b^{l+1}} \tag{11}$$

最后得

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty}\left[-\frac{qa^{2l+1}}{b^{l+1}}r^{-(l+1)}+\frac{qr^{l}}{b^{l+1}}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{q}{b^{l+1}}\left[r^{l}-a^{2l+1}r^{-(l+1)}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{12}$$

或用勒让德生成函数，把上式写成

$$u(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}-\frac{a}{b}\cdot\frac{q}{\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{b}\right)^2-2r\frac{a^2}{b}\cos\theta}} \tag{13}$$

由此看出，在 $r<b$ 内的电势 u 由两部分组成，第一项是点电荷产生的电势，即(3)式；第二项是导体球壳上的感应电荷分布产生的电势，它相当于一个带电量为 $-4\pi\varepsilon_0\left(\frac{aq}{b}\right)$ 的等效电荷，在极轴的 $z_0=\frac{a^2}{b}$ 处所产生的电势，这一电荷正是点电荷通过球面在球内产生的镜像.

现在考虑在 $r>b$ 的空间点的电势.

对于 u_i 的解是不变的，即

$$u_i=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}-\frac{qa^{2l+1}}{b^{l+1}}r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{14}$$

而由于 $r>b$，u_q 为

$$\begin{aligned} u_q &= \frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}=\frac{q}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{r}\right)^2-2\frac{b}{r}\cos\theta}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{qb^{l}}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{15}$$

注意： 此式当 $r=b,\theta=0$ 时，$u_q\to\infty$，即点电荷所在点的电势是发散的，故此时要求 $\theta\neq 0$.

可得

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[-\frac{qa^{2l+1}}{b^{l+1}}r^{-(l+1)}+\frac{qb^{l}}{r^{l+1}}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16}$$

注意： 当 $r=b$ 时，(16)式与(12)式是相等的，即这两式是表述了整个空间的静电场的电势.

注： 此题解的过程中可不设导体球壳接地，而取无穷远点为电势零点，则由于导体球壳是等势体，在解拉普拉斯方程定解问题时，$r=a$ 的边界条件是非齐次

的，是非零的常数，照样可解，要先把非齐次边界条件齐次化后再解.

16.7　半径为 a 的匀质半球，其半球面的温度保持恒定为 T_0，其底面温度保持 0℃，求球内温度的稳定分布.

解　取球心为坐标原点，z 轴为球心到上半球北极的连线方向，由对称性，此问题温度分布与 φ 角无关;此问题等价于半径为 a 的匀质球,球上半球面保持 T_0，下半球面保持 $-T_0$ 的稳定温度分布，此时上下半球的平分平面(即上半球的底面)必有 $u(r,\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$. 则定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta)=0, \quad r<a, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \left|u(r,\theta)\right|_{r=0}<\infty\\ u(r,\theta)\big|_{r=a}=T_0\\ u(r,\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0\end{cases}\tag{1}$$

将 θ 延拓到 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上，则定解问题变为

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta)=0, \quad r<a\\ \left|u(r,\theta)\right|_{r=0}<\infty\\ u(r,\theta)\big|_{r=a}=\begin{cases}T_0, & 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ -T_0, & \dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\end{cases}\end{cases}\tag{2}$$

由方程得到解的形式为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\tag{3}$$

由自然边界条件，取 $B_l=0$，则有

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)\tag{4}$$

由 $r=a$ 的边界条件，

$$u(a,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\begin{cases}T_0, & 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ -T_0, & \dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\end{cases}\tag{5}$$

令 $x=\cos\theta$，两边乘 $\mathrm{P}_l(x)$ 并对 x 从 $-1\to1$ 积分，可得

$$\begin{aligned}A_l&=\frac{2l+1}{2a^l}\left[\int_{-1}^{0}-T_0\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 T_0\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\right]\\&=-T_0\frac{2l+1}{2a^l}\int_{-1}^{0}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x+T_0\frac{2l+1}{2a^l}\int_0^1\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6}$$

由于

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\int_1^0\mathrm{P}_l(-x)\mathrm{d}(-x)=(-1)^l\int_0^1\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\tag{7}$$

因此

$$A_l=T_0\frac{2l+1}{2a^l}\left[1-(-1)^l\right]\int_0^1\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\tag{8}$$

当 $l=2n, n=0,1,2,\cdots$ 时，

$$A_{2n}=0,\quad n=0,1,2,\cdots\tag{9}$$

当 $l=2n+1, n=0,1,2,\cdots$ 时，

$$A_{2n+1}=T_0\frac{4n+3}{a^{2n+1}}\int_0^1 P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x\tag{10}$$

先计算等式右边的积分，由递推关系

$$l\mathrm{P}_l(x)=x\mathrm{P}_l'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)$$

有

$$(2n+1)\mathrm{P}_{2n+1}(x)=x\mathrm{P}_{2n+1}'(x)-\mathrm{P}_{2n}'(x)$$

可得

$$\begin{aligned}(2n+1)\int_0^1\mathrm{P}_{2n+1}(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 x\mathrm{P}_{2n+1}'(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{P}_{2n}'(x)\mathrm{d}x\\&=x\mathrm{P}_{2n+1}(x)\big|_0^1-\int_0^1\mathrm{P}_{2n+1}(x)\mathrm{d}x-\mathrm{P}_{2n}(x)\big|_0^1\\&=1-\int_0^1\mathrm{P}_{2n+1}(x)\mathrm{d}x-1+\mathrm{P}_{2n}(0)\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1\mathrm{P}_{2n+1}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+2}\mathrm{P}_{2n}(0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & n=0\\(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}, & n=1,2,3,\cdots\end{cases}\tag{11}$$

故

$$A_1=\frac{3T_0}{2a} \tag{12}$$

$$A_{2n+1}=(-1)^n T_0\frac{4n+3}{a^{2n+1}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{13}$$

最后得到原定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{3T_0 r}{2a}\cos\theta+T_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}}\cdot\frac{(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\mathrm{P}_{2n+1}(\cos\theta) \tag{14}$$

16.8　求以下两种均匀带电体在空间形成的稳定的电场分布.

(1) 均匀带电的薄圆盘，圆盘的半径为 a，总电量为 $4\pi\varepsilon_0 q$；

(2) 均匀带电的细圆环，环的半径为 a，总电量为 $4\pi\varepsilon_0 q$.

解　(1) 此题不考虑圆盘的厚度，圆盘带电密度为

$$\rho=4\pi\varepsilon_0\frac{q}{\pi a^2}=\frac{4\varepsilon_0 q}{a^2} \tag{1}$$

以圆盘中心为原点，垂直于圆盘向上的方向为 z 轴，由对称性分析可知，空间电势的分布以 z 轴对称，与 φ 角无关，则空间在电势分布为 $u(r,\theta)$，除带电圆盘外，$u(r,\theta)$ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(r,\theta)=0 \tag{2}$$

其解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{3}$$

如何来确定系数 A_l, B_l？除了自然边界条件

$$|u(r,\theta)|<\infty \tag{4}$$

我们还可以利用容易计算的 z 轴上的电势来定系数.

设 R 为圆盘上到原点的距离，则在 z 轴上(即 $\theta=0,\cos\theta=1$)的 z 点的电势为

$$\begin{aligned}u(z)&=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\mathrm{d}R=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}\right)\Big|_0^a\\&=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2}-|z|\right)\\&=\frac{2q}{a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-|z|\right)\end{aligned} \tag{5}$$

由于自然边界条件(有限性)的考虑，对于方程(2)，我们分 $r<a$ 和 $r>a$ 两个区域.

当 $r>a$ 时，(3)式中取 $A_l=0$，则以 a 为半径的球的外部的解 $u_e(r,\theta)$ 为

$$u_e(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{6}$$

系数 B_l 由圆盘在 z 轴上产生的电势的值来定.

取 $r=|z|,|z|>a,\theta=0$ 时，结合(5)式，有

$$\begin{aligned}
u_e(z,0)&=\sum_{l=0}^{\infty}B_l z^{-(l+1)}=\frac{2q}{a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-|z|\right)\\
&=\frac{2q|z|}{a^2}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}-1\right)\\
&=-\frac{2q|z|}{a^2}+\frac{2q|z|}{a^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}-\frac{1}{2\cdot4}\frac{a^4}{z^4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\frac{a^6}{z^6}-\cdots\right)\\
&=\frac{2q|z|}{a^2}\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}-\frac{1}{2\cdot4}\frac{a^4}{z^4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\frac{a^6}{z^6}-\cdots\right)\\
&=2q\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}a^{2(k-1)}z^{-(2k-1)},\quad z>0\\
&=2q\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}a^{2k}z^{-(2k+1)}
\end{aligned} \tag{7}$$

注： 为书写方便，以上的式中当 $k=0$ 时出现的 $(-1)!!$，我们定义为 $(-1)!!=1$，如不做此定义，把 $k=0$ 项先单独写出，则求和号从 $k=1$ 开始也可以(以下同)，其结果是一样的.

在 $z>0$ 时，$r=z$，比较(6)、(7)两式的系数，可得

$$\begin{cases}
B_{2k+1}=0,\quad k\geqslant0\\
B_{2k}=(-1)^k qa^{2k}\dfrac{2(2k-1)!!}{(2k+2)!!},\quad k\geqslant0
\end{cases} \tag{8}$$

故可得解为

$$\begin{aligned}
u_e(r,\theta)&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k qa^{2k}\frac{2(2k-1)!!}{(2k+2)!!}r^{-(2k+1)}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)\\
&=\frac{q}{r}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta),\quad r\geqslant a
\end{aligned} \tag{9}$$

下面考虑当 $r<a$ 时的整个球内的情况. 由于在圆盘上有电荷存在，故拉普拉斯方程在此区域中失效. 因此，在 $r<a$ 的区域内，要避开这个圆盘上带电的问题. 我们把圆盘划成两部分，一部分是以原点为圆心，以 r 为半径的圆盘，只计算它在 $r\leqslant r'\leqslant a$ 的球壳中产生的电势 $u_1(r',\theta),r\leqslant r'\leqslant a$，即此圆盘在半径为 r 和半径

为a的球壳之间产生的电势，而暂不考虑圆盘的另一部分，即半径为$r\to a$的圆盘上的环形区域带电的问题，这样我们就可以在$r\leqslant r'\leqslant a$的球壳空间中用拉普拉斯方程来求解；圆盘的另一部分，即半径为$r\to a$的圆盘环形带电区域，考虑它在$r''\leqslant r$的球内区域产生的电势为$u_2(r'',\theta)$，此时也不考虑以r为半径的圆盘带电的问题，这样我们也可以在半径小于r的球内空间运用拉普拉斯方程来求解，而对于r，实际上是径向的变量.

因此，对球内的空间点r，其电势为

$$u_i(r,\theta)=u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta),\quad u_1:r'=r,\quad u_2:r''=r \tag{10}$$

为书写方便和后面的计算式的符号统一，由于$u_1(r',\theta)$和$u_2(r'',\theta)$是分开独立计算的，我们在上式中把$u_1(r',\theta)$写成$u_1(r,\theta)$，把$u_2(r'',\theta)$写成$u_2(r,\theta)$.

注意：最后的结果的解的表达式中，在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即在盘上是失效的.

对于$u_1(r,\theta)$，直接用$u_e(r,\theta)$得到的(9)式的结果，把a改成r，即

$$u_1(r,\theta)=\frac{2q}{r}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta) \tag{11}$$

考虑$u_2(r'',\theta)$满足定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u_2(r'',\theta)=0,\quad r''\leqslant r\\ \left|u_2(r'',\theta)\right|<\infty\end{cases} \tag{12}$$

则$u_2(r'',\theta)$的解为

$$u_2(r'',\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l(r'')^l\,\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{13}$$

其系数A_l由圆环在$r''=z$即轴上产生的电势来定.

由(5)式，可计算盘$r<R<a$时，在z轴上$|z|<r$的电势，

$$\begin{aligned}u_2(z)&=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_r^a\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\mathrm{d}R=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}\right)\Big|_r^a\\&=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2}-\sqrt{z^2+r^2}\right)\\&=\frac{2q}{a^2}\sqrt{z^2+a^2}-\frac{2q}{a^2}\sqrt{z^2+r^2},\quad z\leqslant r<a\end{aligned} \tag{14}$$

计算

$$\frac{2q}{a^2}\sqrt{z^2+a^2}=\frac{2q}{a}\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2q}{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{z^2}{a^2}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{z^4}{a^4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^6}{a^6}-\cdots\right)$$

$$=\frac{2q}{a}+\frac{2q}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}z^{2k}a^{-2k}$$

$$\frac{2q}{a^2}\sqrt{z^2+r^2}=\frac{2qr}{a^2}\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}$$

$$=\frac{2qr}{a^2}+\frac{2qr}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}z^{2k}r^{-2k}$$

所以

$$u_2(z)=\frac{2q}{a}+\frac{2q}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}z^{2k}a^{-(2k-1)}$$

$$-\frac{2qr}{a^2}-\frac{2q}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}z^{2k}r^{-(2k-1)} \tag{15}$$

$$=\frac{2q}{a^2}(a-r)+\frac{2q}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}z^{2k}\left(a^{-(2k-1)}-r^{-(2k-1)}\right)$$

由(13)式，$r''=z,\theta=0$，有

$$u_2(z,0)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l z^l \mathrm{P}_l(1) \tag{16}$$

比较(15)、(16)两式，在(15)式中，只有 z^{2k} 项，故

$$A_{2k+1}=0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{17}$$

由于 $\mathrm{P}_l(1)=1$，可得

$$A_0=\frac{2q}{a^2}(a-r) \tag{18}$$

$$A_{2k}=\frac{2q}{a^2}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(a^{-(2k-1)}-r^{-(2k-1)}\right),\quad k=1,2,3,\cdots \tag{19}$$

故

$$u_2(r'',\theta)=\frac{2q}{a^2}(a-r)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2q}{a^2}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(a^{-(2k-1)}-r^{-(2k-1)}\right)(r'')^{2k}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)$$

(20)

当$r''=r$时，有

$$u_2(r,\theta)=\frac{2q}{a^2}(a-r)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2q}{a^2}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(a^{-(2k-1)}-r^{-(2k-1)}\right)r^{2k}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)$$

$$=\frac{2q}{a^2}(a-r)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2q}{a}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta) \tag{21}$$

$$+\frac{2qr}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)$$

由(10)式、(11)式和(21)式可得

$$u_i(r,\theta)=u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta)$$

$$=\frac{2q}{r}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)$$

$$+\frac{2q}{a^2}(a-r)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2q}{a}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta) \tag{22}$$

$$+\frac{2qr}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta),\quad r<a,\theta\neq\frac{\pi}{2}$$

所以由(9)式和(22)式，可得到原定解问题的解为

$$u(r,\theta)=u_e(r,\theta)+u_i(r,\theta) \tag{23}$$

(2) 设均匀带电细圆环产生的电势为$u(r,\theta,\varphi)$，我们选取以圆环的圆心为原点，并由原点取垂直于圆环平面向上为z轴方向. 由对称性可知，解与φ角无关，即电势$u=u(r,\theta)$. 因此，除圆环外，$u(r,\theta)$满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2u(r,\theta)=0 \tag{24}$$

则方程的解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+B_lr^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{25}$$

由自然边界条件：

在$r>a$的区域，(25)式的解$u_e(r,\theta)$为

$$u_e(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_lr^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{26}$$

在$r<a$的区域，(25)式的解$u_i(r,\theta)$为

$$u_i(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{27}$$

上面两式中的系数由圆环在 z 轴中产生的电势的数值来定.

在 z 轴上的电势为

$$u(z)=\frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}} \tag{28}$$

当 $z>a$ 时,

$$\begin{aligned} u_e(z)&=\frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{q}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}} \\ &=\frac{q}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\frac{a}{z}\right)^{2k} \\ &=\frac{q}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}a^{2k+1}z^{-(2k+1)} \end{aligned} \tag{29}$$

此式与(26)式中 $r=z$ 比较，可得：当 l 为奇数时，

$$B_l=0 \tag{30}$$

当 l 为偶数时，即 $l=2k,k=0,1,2,\cdots$，并注意到 $\mathrm{P}_{2k}(1)=1$，有

$$B_{2k}=q(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}a^{2k},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{31}$$

可得

$$u_e(r,\theta)=\frac{q}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{-(2k+1)}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{32}$$

当 $z<a$ 时,

$$\begin{aligned} u_e(z)&=\frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{q}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}} \\ &=\frac{q}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\frac{z}{a}\right)^{2k} \\ &=\frac{q}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}a^{-2k}z^{2k} \end{aligned} \tag{33}$$

此式与(27)式中 $r=z$ 比较，可得：当 l 为奇数时

$$A_l=0 \tag{34}$$

当 l 为偶数时，即 $l=2k,k=0,1,2,\cdots$，并注意到 $\mathrm{P}_{2k}(1)=1$，有

$$A_{2k}=\frac{q}{a}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}a^{-2k},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{35}$$

可得

$$u_i(r,\theta)=\frac{q}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{36}$$

故得到带电圆环的电势分布：当$r>a$时为(32)式的u_e，当$r<a$时为(36)的u_i，则原定解问题的解为

$$u(r,\theta)=u_e(r,\theta)+u_i(r,\theta) \tag{37}$$

注意：在$r=a$时，$u_e=u_i$，此时在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$处，即圆环所在的位置，(32)和(36)两式失效.

注：为书写方便，以上的式中当$k=0$时出现的$(-1)!!$，我们定义为$(-1)!!=1$，如不做此定义，把$k=0$项先单独写出，则求和号从$k=1$开始也可以，结果是一样的.

16.9　求解半径为a的空心球壳内的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0, & r<a\\ u\big|_{r=a}=\cos^2\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

解　此问题是以z轴为对称的定解问题，u与φ无关，$u=u(r,\theta)$. 由于自然边界条件要求$|u|<\infty$，故空心球壳内解的形式为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{1}$$

由边界条件$u\big|_{r=a}=\cos^2\theta$，有

$$u(a,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_la^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\cos^2\theta \tag{2}$$

由$\mathrm{P}_0(\cos\theta)=1,\mathrm{P}_2(\cos\theta)=\dfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)$，比较(2)式两边系数，$\cos\theta$的奇次幂的系数及$l>2$的偶次幂的系数都为零，有

$$c_0+\frac{1}{2}c_2a^2\left(3\cos^2\theta-1\right)=\cos^2\theta \tag{3}$$

可得

$$\begin{cases} c_0 - \dfrac{1}{2}c_2 a^2 = 0 \\ \dfrac{3}{2}c_2 a^2 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

即

$$c_2 = \frac{2}{3a^2}, \quad c_0 = \frac{1}{3} \tag{5}$$

故原定解问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3}\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \frac{2r^2}{3a^2}\mathrm{P}_2(\cos\theta) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{r^2}{a^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \tag{6}$$

16.10　试证明 $\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-1)^m \dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x), m>0$.

解　由连带勒让德函数多项式的导数表达式

$$\mathrm{P}_l^m(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l \cdot l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l, \quad m>0 \tag{1}$$

和

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}}{2^l \cdot l!}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}\left(x^2-1\right)^l, \quad m>0 \tag{2}$$

由于 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 和 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 都是同一个连带勒让德方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \tag{3}$$

的解，$\mathrm{P}_l^m(x)$ 是此方程在自然边界条件下的本征函数解，而 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 和 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 是线性相关的

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = C\mathrm{P}_l^m(x) \tag{4}$$

即

$$C = \frac{\mathrm{P}_l^{-m}(x)}{\mathrm{P}_l^m(x)} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}\left(x^2-1\right)^l}{\left(1-x^2\right)^m \dfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l} \tag{5}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}\left(x^2-1\right)^l$ 最高次幂为 x^{l+m}，其系数为

$$2l(2l-1)\cdots(2l-l+m+1)=\frac{(2l)!}{(l+m)!} \tag{6}$$

而$\left(1-x^2\right)^m\dfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l$最高次幂为$x^{l+m}$，其系数为

$$(-1)^m\cdot 2l\cdot(2l-1)\cdots(2l-l-m+1)=(-1)^m\frac{(2l)!}{(l-m)!} \tag{7}$$

故可证得

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x),\quad m>0 \tag{8}$$

16.11　试证明

$$\mathrm{P}_l^m(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{l+m}{2}}\cdot\dfrac{(l+m-1)!!}{(l-m)!!}, & l+m\text{为偶数}\\ 0, & l+m\text{为奇数}\end{cases}$$

证　由连带勒让德多项式的导数表达式

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l\cdot l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l,\quad m>0 \tag{1}$$

由于$\left(x^2-1\right)^l$用二项式展开后都为x的偶幂次项

$$\left(x^2-1\right)^l=x^{2l}-x^{2(l-1)}+\cdots+(-1)^m C_l^m x^{2(l-m)}+\cdots+(-1)^l \tag{2}$$

其中

$$C_l^m=\frac{l!}{m!(l-m)!} \tag{3}$$

当$l+m$为奇数时，对$\left(x^2-1\right)^l$求导$l+m$次后，皆为x的奇幂次项，取$x=0$时，有

$$\mathrm{P}_l^m(0)=0,\quad l+m\text{为奇数} \tag{4}$$

当$l+m$为偶数时，设$l+m=2k$，对$\left(x^2-1\right)^l$求导$l+m$次后，其$x^{2k}=x^{l+m}$项为常数项，其值代入(1)式中取$x=0$的值，并注意到，对$\left(x^2-1\right)^l$中的$x^{2k}=x^{l+m}$项求导$l+m$次后，其系数为$(l+m)!$，就可得$\mathrm{P}_l^m(0)$.

由二项式展开公式$\left(x^2-1\right)^k$中x^{2k}项即x^{l+m}项的系数为

$$(-1)^k C_l^k = (-1)^k \frac{l!}{k!(l-k)!} = (-1)^{\frac{l+m}{2}} \frac{l!}{\left(\frac{l+m}{2}\right)!\left(\frac{l-m}{2}\right)!} \tag{5}$$

可得当$l+m$为偶数时，有

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_l^m(0) &= \frac{(-1)^{\frac{l+m}{2}}(l+m)!}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{l!}{\left(\frac{l+m}{2}\right)!\left(\frac{l-m}{2}\right)!} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{l+m}{2}}(l+m)!}{2^{\frac{l+m}{2}} \cdot 2^{\frac{l-m}{2}}\left(\frac{l+m}{2}\right)!\left(\frac{l-m}{2}\right)!} \\ &= (-1)^{\frac{l+m}{2}} \frac{(l+m)!}{(l+m)!!(l-m)!!} \\ &= (-1)^{\frac{l+m}{2}} \frac{(l+m-1)!!}{(l-m)!!} \end{aligned} \tag{6}$$

故命题得证.

16.12　试证明

$$\mathrm{P}_l^l(x) = (2l-1)!!\sin^l\theta, \quad l = 0,1,2,\cdots$$

证　由连带勒让德多项式$\mathrm{P}_l^m(x)$的导数表达式

$$\mathrm{P}_l^l(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{l}{2}}}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{2l}}{\mathrm{d}x^{2l}}\left(x^2-1\right)^l \tag{1}$$

考虑到$x = \cos\theta$，有

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_l^l(x) &= \mathrm{P}_l^l(\cos\theta) \\ &= \frac{\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{l}{2}}}{2^l \cdot l!}(2l)! = \frac{\sin^l\theta}{2^l \cdot l!}(2l)! \\ &= \frac{\sin^l\theta}{(2l)!!}(2l)! = (2l-1)!!\sin^l\theta \end{aligned} \tag{2}$$

16.13　在以球函数为基$\left\{\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi); l = 0,1,2,\cdots; m = 0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l\right\}$的函数空间中，将下列函数展开：

(1) $\sin^2\theta\cos^2\varphi$；　　(2) $(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$；

(3) $\frac{1}{r^2}\left(x^2+2z^2+3xy+4xz\right)$.

解　对于一般的函数 $f(\theta,\varphi)$，我们可采用在球函数中展开的方法，求展开系数

$$\begin{cases} f(\theta,\varphi)=\sum\limits_{l,m} f_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) \\ f_{lm}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{cases} \tag{1}$$

但对本题中的函数，由于已知函数的自变量幂次较低，可直接采用已知的球函数

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_{1,0}=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\dfrac{z}{r}, \quad \mathrm{Y}_{1,\pm1}=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\dfrac{x\pm\mathrm{i}y}{r} \\ \mathrm{Y}_{2,0}=\sqrt{\dfrac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)=\sqrt{\dfrac{5}{16\pi}}\dfrac{2z^2-x^2-y^2}{r^2} \\ \mathrm{Y}_{2,\pm1}=\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}=\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\dfrac{z(x\pm\mathrm{i}y)}{r^2} \\ \mathrm{Y}_{2,\pm2}=\sqrt{\dfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\varphi}=\sqrt{\dfrac{15}{32\pi}}\dfrac{x\pm\mathrm{i}y}{r^2} \end{cases} \tag{2}$$

直接展开，比较系数而得到展开式.

(1) 已知函数的表达式可化为

$$\begin{aligned} \sin^2\theta\cos^2\varphi&=\frac{1}{2}\sin^2\theta(1+\cos2\varphi)=\frac{1}{2}\left(1-\cos^2\theta\right)+\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos2\varphi \\ &=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos2\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

不难看出，上式是由 $\mathrm{Y}_{0,0}$, $\mathrm{Y}_{2,0}$, $\mathrm{Y}_{2,2}+\mathrm{Y}_{2,-2}$ 组成(由于等式右边最后一项没有 $\mathrm{i}\sin2\varphi$ 项，一定是由 $\mathrm{Y}_{2,2}+\mathrm{Y}_{2,-2}$ 组成)，比较系数得

$$\sin^2\theta\cos^2\varphi=\frac{\sqrt{4\pi}}{3}\mathrm{Y}_{0,0}-\frac{2\sqrt{5\pi}}{15}\mathrm{Y}_{2,0}+\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left(\mathrm{Y}_{2,2}+\mathrm{Y}_{2,-2}\right) \tag{4}$$

(2) 与上题类似，已知函数的表达式可化为

$$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi=\sin\theta\cos\varphi+3\cos\theta\sin\theta\cos\varphi \tag{5}$$

可看出上式由 $\mathrm{Y}_{1,1}+\mathrm{Y}_{1,-1}$, $\mathrm{Y}_{2,1}+\mathrm{Y}_{2,-1}$ 组成，比较系数得

$$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cdot\cos\varphi=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(\mathrm{Y}_{1,1}+\mathrm{Y}_{1,-1}\right)+\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\left(\mathrm{Y}_{2,1}+\mathrm{Y}_{2,-1}\right) \tag{6}$$

(3) 由 $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$，已知函数为

$$\frac{1}{r^2}\left(x^2+2z^2+3xy+4xz\right)$$

$$\begin{aligned}&=\sin^2\theta\cos^2\varphi+2\cos^2\varphi+\frac{3}{2}\sin^2\theta\cos 2\varphi+4\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\varphi\\&=1+\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)+4\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin^2\theta\cos 2\varphi\end{aligned}\tag{7}$$

不难看出，上式由 $\mathrm{Y}_{0,0}$, $\mathrm{Y}_{2,0}$, $\mathrm{Y}_{2,1}+\mathrm{Y}_{2,-1}$, $\mathrm{Y}_{2,2}+\mathrm{Y}_{2,-2}$ 组成，比较系数得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\left(x^2+2z^2+3xy+4xz\right)\\&=\sqrt{4\pi}\mathrm{Y}_{0,0}+\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\mathrm{Y}_{2,0}+\frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}}\left(\mathrm{Y}_{2,1}+\mathrm{Y}_{2,-1}\right)+\frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}}\left(\mathrm{Y}_{2,2}+\mathrm{Y}_{2,-2}\right)\end{aligned}\tag{8}$$

16.14　在半径为 a 的球壳内外，分别求解下列定解问题的球外区域和球内区域的解.

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0\\ u\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\\ u\big|_{r=0}<\infty,\quad u\big|_{r\to\infty}<\infty\end{cases}$$

并分别对以下两种 $f(\theta,\varphi)$ 的形式给出解的具体形式：

(1) $f(\theta,\varphi)=\cos\theta$；

(2) $f(\theta,\varphi)=P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$.

解　对拉普拉斯方程进行分离变量 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$，角度部分 $\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$ 满足球函数方程(球谐方程)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0\tag{1}$$

此方程在自然边界条件 $|u|<\infty$ 下，在本征值为 $l(l+1)$ 和 m^2，并且 $l=0,1,2,\cdots$, $m=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm l$ 时，解为 $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$，或记为 $\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)$.

而径向部分满足径向方程

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R=0\tag{2}$$

其解为

$$R(r)=C_{l,m}r^l+D_{l,m}r^{-(l+1)}\tag{3}$$

此解要求满足自然边界条件 $|u|<\infty$，故当 $r<a$ 时，有

$$R(r)=C_{l,m}r^l\tag{4}$$

此时拉普拉斯方程的解为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}r^l\mathrm{Y}_{l,m}\tag{5}$$

当$r>a$时，有

$$R(r)=D_{l,m}r^{-(l+1)} \tag{6}$$

此时拉普拉斯方程的解为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}D_{l,m}r^{-(l+1)}\mathrm{Y}_{l,m} \tag{7}$$

由$u\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi)$，当$r<a$时，有

$$\begin{aligned}C_{l,m}a^{l}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}u(a,\theta,\varphi)\mathrm{Y}^{*}_{l,m}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{Y}^{*}_{l,m}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{8}$$

当$r>a$时，有

$$\begin{aligned}D_{l,m}a^{-(l+1)}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}u(a,\theta,\varphi)\mathrm{Y}^{*}_{l,m}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{Y}^{*}_{l,m}\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{9}$$

对于题中给出的$f(\theta,\varphi)$：

(1) 当$f(\theta,\varphi)=\cos\theta$时，在$r<a$区域内，由边界条件$u\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi)$，有

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}a^{l}\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)=\cos\theta \tag{10}$$

则由(8)式可知

$$C_{l,m}a^{l}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\cos\theta\mathrm{Y}^{*}_{l,m}\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

注意到，$\mathrm{Y}_{1,0}=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta$，即$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}}\mathrm{Y}_{1,0}$，则由球函数的正交性，可得

$$C_{1,0}=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{1}{a},C_{l,m}=0\quad(l\neq1,m\neq0) \tag{12}$$

由(5)式可得

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\varphi)&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}r^{l}\mathrm{Y}_{l,m}\\&=C_{1,0}r\mathrm{Y}_{1,0}=\frac{r}{a}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\\&=\frac{r}{a}\cos\theta\end{aligned} \tag{13}$$

同理，在$r>a$的区域，由(9)式，有

$$D_{l,m}a^{-(l+1)}=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{Y}_{1,0}\mathrm{Y}_{l,m}^{*}\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{14}$$

可得

$$D_{1,0}=a^2,\ D_{l,m}=0,\quad l\neq 1,\ m\neq 0 \tag{15}$$

由(7)式可得

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{a^2}{r^2}\cos\theta \tag{16}$$

(13)式与(16)式在$r=a$处是相等的，即为$r=a$处的边界条件$u(a,\theta,\varphi)=\cos\theta$.

(2) 当$f(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$时，由

$$\mathrm{P}_1^1(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_1(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

即

$$\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)=\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{18}$$

所以

$$f(\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\varphi \tag{19}$$

由$\mathrm{Y}_{1,\pm1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}$，有

$$f(\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\varphi=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(\mathrm{Y}_{1,1}+\mathrm{Y}_{1,-1}\right) \tag{20}$$

在$r<a$区域内，由边界条件$u\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi)$，由(7)、(8)两式有

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}a^l\mathrm{Y}_{l,m}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(\mathrm{Y}_{1,1}+\mathrm{Y}_{1,-1}\right) \tag{21}$$

则有

$$C_{l,m}a^l=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\left(\mathrm{Y}_{1,1}+\mathrm{Y}_{1,-1}\right)\mathrm{Y}_{l,m}^{*}\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{22}$$

由球函数的正交性，可得

$$C_{1,1}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{a},\ C_{1,-1}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{a},\ C_{l,m}=0,\quad l\neq 1,\ m\neq\pm1 \tag{23}$$

即在$r<a$区域内，解为

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi)&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}r^{l}\mathrm{Y}_{l,m}\\
&=C_{1,1}r\mathrm{Y}_{1,1}+C_{1,-1}r\mathrm{Y}_{1,-1}\\
&=\frac{r}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\sin\theta\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\theta\sin\varphi)\\
&\quad+\frac{r}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\sin\theta\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\theta\sin\varphi)\\
&=\frac{r}{a}\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned}
\tag{24}
$$

同理，在$r>a$的区域，由(9)式，有

$$
D_{l,m}a^{-(l+1)}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(\mathrm{Y}_{1,1}+\mathrm{Y}_{1,-1})\mathrm{Y}_{l,m}^{*}\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{25}
$$

则由球函数的正交性，可得

$$
D_{1,1}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}a^2,\ D_{1,-1}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}a^2,\ D_{l,m}=0,\quad l\neq 1,\ m\neq\pm 1 \tag{26}
$$

可得在$r>a$的区域，解为

$$
u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}D_{l,m}r^{-(l+1)}\mathrm{Y}_{l,m}=\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\cos\varphi \tag{27}
$$

解(24)和(27)在$r=a$处是相等的，并与$r=a$处的边界条件自洽.

第十七章　柱　函　数

内 容 提 要

一、贝塞尔函数

在柱坐标系下，亥姆霍兹方程的径向方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2+\lambda-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0$$

称为ν阶贝塞尔方程. ν阶贝塞尔方程的标准形式为

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

其中，$x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho, y(x)=R(\rho)$.

1. ν阶贝塞尔方程的解为ν阶贝塞尔函数

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},\quad -\infty<x<\infty$$

当ν不为整数时，ν阶贝塞尔方程的另一个线性无关的解为

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

$\mathrm{J}_\nu(x)$也称为第一类贝塞尔函数.

诺伊曼函数$\mathrm{N}_\nu(x)$

$$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\cos(\nu\pi)\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

也是ν阶贝塞尔方程的解，它是与$\mathrm{J}_\nu(x)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$线性无关的，称为第二类贝塞尔函数.

2. 整数阶贝塞尔函数

当$\nu=m$，m为整数时，m阶贝塞尔方程的解为m阶贝塞尔函数：

$$\mathrm{J}_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m},\quad m=0,1,2,\cdots$$

而

$$\mathrm{J}_{-m}(x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x),\quad m>0$$

即 $\mathrm{J}_{-m}(x)$ 与 $\mathrm{J}_m(x)$ 是线性相关的.

m 阶贝塞尔方程的另一个线性无关的解为 m 阶诺伊曼函数

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_m(x)&=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{J}_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=m}-(-1)^m\left(\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=m}\right]\\&=\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_m(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}\\&\quad-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{1}{k!(m+k)!}\left[\Phi(m+k+1)+\Phi(k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m},\quad m=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

同样有

$$\mathrm{N}_{-m}(x)=(-1)^m\mathrm{N}_m(x),\quad m>0$$

即 $\mathrm{N}_{-m}(x)$ 与 $\mathrm{N}_m(x)$ 是线性相关的.

3. 整数阶贝塞尔函数的基本性质

(1) $\mathrm{J}_m(-x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x)$, $\mathrm{N}_{-m}(x)=(-1)^m\mathrm{N}_m(x)$;

(2) $\mathrm{J}_0(0)=1$, $\mathrm{J}_m(0)=0$, $m\neq 0$;

(3) $\mathrm{N}_m(0)$ 是奇异的、发散的.

二、贝塞尔函数的递推关系

1. 贝塞尔函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的基本微商关系式

(1) $\left(x^\nu\mathrm{J}_\nu\right)'=x^\nu\mathrm{J}_{\nu-1}$, $\left(x^\nu\mathrm{J}_\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}\mathrm{J}_\nu+x^\nu\mathrm{J}'_\nu$;

(2) $\left(x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu\right)'=-x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}$, $\left(x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu\right)'=-\nu x^{-\nu-1}\mathrm{J}_\nu+x^{-\nu}\mathrm{J}'_\nu$;

(3) $\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m\left(x^\nu\mathrm{J}_\nu\right)=x^{\nu-m}\mathrm{J}_{\nu-m}$, $\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m\left(x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu\right)=(-1)^m x^{-\nu-m}\mathrm{J}_{\nu+m}$.

2. 贝塞尔函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的基本递推关系式

(1) $\mathrm{J}_{\nu-1}+\mathrm{J}_{\nu+1}=\dfrac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu$，$\mathrm{J}_{\nu-1}-\mathrm{J}_{\nu+1}=2\mathrm{J}'_\nu$；

(2) $\mathrm{N}_{\nu-1}+\mathrm{N}_{\nu+1}=\dfrac{2\nu}{x}\mathrm{N}_\nu$，$\mathrm{N}_{\nu-1}-\mathrm{N}_{\nu+1}=2\mathrm{N}'_\nu$.

三、半整数阶贝塞尔函数

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

由贝塞尔函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的基本微商关系式中的(3)式，可得

$$\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\mathrm{J}_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

其中，$n=0,1,2,\cdots$.

$\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ 与 $\mathrm{J}_{-n-\frac{1}{2}}(x)$ 是线性独立的.

四、柱函数的定义

如果函数 $y_\nu(x)$ 满足以下的递推关系：

$$y_{\nu-1}+y_{\nu+1}=\frac{2\nu}{x}y_\nu$$

$$y_{\nu-1}-y_{\nu+1}=2y'_\nu$$

或满足与上面两式等价的关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu y_\nu\right)=x^\nu y_{\nu-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\nu}y_\nu\right)=-x^{-\nu}y_{\nu+1}$$

则称函数 $y_\nu(x)$ 为柱函数.

注： 柱函数一定满足贝塞尔方程，但满足贝塞尔方程的函数不一定是柱函数.

例如，$\mathrm{J}_\nu(x)$，$\mathrm{N}_\nu(x)$ 满足贝塞尔方程，并且都是柱函数，而它们的线性组

合 $y_\nu(x)=\mathrm{J}_\nu(x)+\nu\mathrm{N}_\nu(x)$ 虽然满足贝塞尔方程，但不满足上面定义的柱函数的递推关系，因此它不是柱函数.

五、整数阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的生成函数

整数阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的生成函数为：$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$，$x\in\mathbf{R}$，$|z|<\infty$，有

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)z^m$$

(1) $\mathrm{J}_m(x)$ 的积分表达式为

① $$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{z^{m+1}}\mathrm{d}z$$

c 为绕 $z=0$ 点的任意一个逆时针方向的闭合回路.

② $$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-m\theta)\mathrm{d}\theta$$

(2) 由整数阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的生成函数，可得 $\mathrm{J}_m(x)$ 的加法公式

$$\mathrm{J}_m(x_1+x_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_k(x_1)\mathrm{J}_{m-k}(x_2)$$

六、贝塞尔函数的本征值问题

贝塞尔函数的本征值是由径向方程和柱面边界上的三类边界条件所构成的 S-L 本征值问题决定的.

在柱坐标系下对亥姆霍兹方程进行分离变量，其径向函数为 $R\left(\sqrt{k^2+\lambda}\rho\right)$；在柱坐标系下对拉普拉斯方程进行分离变量，其径向函数为 $R\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)$. 虽然它们的径向函数 R 都满足贝塞尔方程，但自变量有所不同，因而对本征值问题的讨论有所不同，需要分别讨论.

1. 对拉普拉斯方程

三个空间自变量参数 (ρ,φ,z) 中，必有两个参数的方程与边界条件构成 S-L 本征值问题，另一个参数方程及边界条件作为定积分常数的条件.

1) 对区域为三维的有限柱体

如果 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$，即 $\Phi(\varphi)$ 的方程和周期性边界条件，构成 S-L 本征值

问题. 贝塞尔方程为 m 阶贝塞尔方程，可分三种情况讨论.

(1) m 阶贝塞尔方程和三类边界条件构成 S-L 本征值问题. 对第一类边界条件

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R=0, \quad \lambda>0,\ m=0,1,2,\cdots \\ R(\rho)\big|_{\rho=b}=0 \\ \big|R(\rho)\big|_{\rho=0}<\infty\end{cases}$$

此 S-L 本征值问题的本征函数为

$$R_n^{(m)}(\rho)=\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)$$

其中，$x_n^{(m)}$ 为 m 阶贝塞尔函数的第 n 个正零点.

如果是轴对称问题，$m=0$，S-L 本征值问题的本征函数为

$$R_n^{(0)}(\rho)=\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)$$

其中，$x_n^{(0)}$ 为 J_0 的第 n 个正零点.

此种情况下，$Z(z)$ 满足的方程及其边界条件不构成 S-L 本征值问题，则上、下底的边界条件作为定出 $Z(z)$ 方程中的积分参数的条件.

对第二类齐次边界条件：$R'(\rho)\big|_{\rho=b}=0$，利用整数阶贝塞尔函数的递推关系

$$2\mathrm{J}'_m(x)=\mathrm{J}_{m-1}(x)-\mathrm{J}_{m+1}(x)$$

可求得本征值和相应的本征函数.

当 $m=0$ 时，有 $\mathrm{J}'_0(x)=-\mathrm{J}_1(x)$，可求得本征值和相应的本征函数.

对第三类齐次边界条件: 综上方法，求出本征值和本征函数.

(2) 如果方程 $Z''+\lambda Z=0(\lambda>0)$ 和上、下底边的三类齐次边界条件构成 S-L 本征值问题，可求出本征值 λ_i 和相应的本征函数，则径向方程为 m 阶虚宗量贝塞尔方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(-\lambda-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0, \quad \lambda>0,\ m=0,1,2,\cdots$$

此方程的解为虚宗量贝塞尔函数，它不构成 S-L 本征值问题，此时柱面的边界条件用来确定积分常数的值.

(3) 对于不包含 z 轴的中空的柱体，此 S-L 本征值问题解的形式为

$$R(\rho)=C_m\mathrm{J}_m(\rho)+D_m\mathrm{N}_m(\rho)$$

由内、外柱壁的边界条件构成的方程组进行求解，此方程通常为超越方程，可求得其本征值和本征函数(一般用数值的方法求解).

2) 对于由 $\varphi=\varphi_1$ 和 $\varphi=\varphi_2$ 围成的有限高的扇形柱体

对于 $R(\rho)$，$\Phi(\varphi)$ 和 $Z(z)$ 这三个方程，由解题的方便恰当选择两个方程及其对应的边界条件构成 S-L 本征值问题，余下的一个方程和边界条件在最后的解中确定积分常数.

注意：当选取 $\Phi(\varphi)$ 和 $Z(z)$ 这两个方程及其边界条件构成 S-L 本征值问题时，$R(\rho)$ 的方程是虚宗量贝塞尔方程，其边界条件用来确定积分常数.

3) 对于无穷长的柱体，且稳定场的分布与 z 无关

该问题变成二维的圆上的问题. 如果 $\Phi(\varphi)$ 要满足周期性边界条件，与方程构成 S-L 本征值问题；$R(\rho)$ 的方程和圆周上的边界条件不构成 S-L 本征值问题. 此时 $R(\rho)$ 的方程为欧拉型方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}R=0$$

注意：由于当 $\rho\to0$ 时，ρ 的负幂次解是发散的，因此在自然边界条件下，要去掉 ρ 的负幂次解，则该方程的解的积分常数由圆周上的边界条件确定.

2. 对亥姆霍兹方程

与空间区域所对应的边界条件，均构成三个 S-L 本征值问题. 此类问题不会出现虚宗量贝塞尔方程，因为径向方程中的径向函数 $R\left(\sqrt{k^2-\lambda}\rho\right)$ 的变量为 $\sqrt{k^2-\lambda}\rho$，其本征值总可以选取 $k^2-\lambda>0$，即可选取 $k^2>\lambda$，因此其变量 $\sqrt{k^2-\lambda}\rho$ 不会出现虚数.

注：以上的讨论是贝塞尔方程及其边界条件构成的贝塞尔函数的本征值问题. 对于中空的柱体，即没有 $\rho=0$ 时的发散问题，此时贝塞尔方程的解是贝塞尔函数 J_m 和诺伊曼函数 N_m 的线性组合. 我们必须考虑柱面的内外边界条件构成的 S-L 本征值问题，要解超越方程得到相应的本征值和本征函数.

七、球贝塞尔函数

对亥姆霍兹方程在球坐标系下进行分离变量时，径向函数 $R(r)$ 满足球贝塞尔方程

$$R''+\frac{2}{r}R'-\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

$r=0$ 是方程的正则奇点.

(1) 球贝塞尔方程的两个线性无关的解为 l 阶球贝塞尔函数

$$\mathrm{j}_l(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

和 l 阶球诺伊曼函数

$$\mathrm{n}_l(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

其中，$\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ 为 $l+\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔函数，$\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ 为 $l+\frac{1}{2}$ 阶诺伊曼函数. l 阶球诺伊曼函数在 $r=0$ 是发散的.

(2) 球贝塞尔函数和球诺伊曼函数的递推关系.

令 $x=kr$，则有递推关系如下：

$$\frac{1}{x^l}\mathrm{j}_l=\left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\mathrm{j}_0(x)$$

$$\frac{1}{x^l}\mathrm{n}_l=-\left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\mathrm{n}_0(x)$$

(3) 球贝塞尔函数和球诺伊曼函数的初等函数表达式为

$$\mathrm{j}_0(x)=\frac{\sin x}{x},\quad \mathrm{j}_0(kr)=\frac{\sin kr}{kr}$$

$$\mathrm{n}_0(x)=-\frac{\cos x}{x},\quad \mathrm{n}_0(kr)=-\frac{\cos kr}{kr}$$

由上面的递推关系，可以写出 j_l 和 n_l 的初等函数表达式.

(4) 平面波按球面波展开公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

(5) 球贝塞尔方程的 S-L 本征值问题

考虑半径为 a 的球内问题，球贝塞尔方程的 S-L 本征值问题为

$$\begin{cases}R''(r)+\dfrac{2}{r}R'(r)-\left[k^2-\dfrac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0\\ \left[\alpha R(r)+\beta R'(r)\right]_{r=a}=0\\ |R|_{r=0}<\infty\end{cases}$$

其中，$\alpha\neq 0,\beta=0$ 时，为第一类边界条件；$\alpha=0,\beta\neq 0$ 时，为第二类边界条件；

$a,\beta\neq 0$时，为第三类边界条件.

由自然边界条件$|R|_{r=0}<\infty$，舍去n_l，则球贝塞尔方程的解为

$$R(r)\sim \mathrm{j}_l(kr)$$

由齐次边界条件，可解得l阶球贝塞尔函数的本征值

$$k_n^{(l)},\quad n=1,2,3,\cdots$$

及相应的本征函数

$$\mathrm{j}_l\left(k_n^{(l)}r\right),\quad n=1,2,3,\cdots$$

这一族本征函数是以权重r^2正交的

$$\frac{1}{\left[\mathrm{N}_n^{(l)}\right]^2}\int_0^a \mathrm{j}_l\left(k_n^{(l)}r\right)\mathrm{j}_l\left(k_m^{(l)}r\right)r^2\mathrm{d}r=\delta_{nm}$$

其中正交归一化常数$\mathrm{N}_n^{(l)}$(即本征函数$\mathrm{j}_l\left(k_n^{(l)}r\right)$的模)为

$$\left[\mathrm{N}_n^{(l)}\right]^2=\int_0^a\left[\mathrm{j}_l\left(k_n^{(l)}r\right)\right]^2r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2k_n^{(l)}}\int_0^a\left[\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}\left(k_n^{(l)}r\right)\right]^2r\mathrm{d}r$$

归一化的本征函数系$\left\{\frac{1}{\mathrm{N}_n^{(l)}}\mathrm{j}_l\left(k_n^{(l)}r\right),\ n=1,2,3,\cdots\right\}$可张成一个希尔伯特空间.

注： 对于球外问题，没有自然边界条件$|R|_{r=0}<\infty$的限制，此时球贝塞尔方程的解为$\mathrm{j}_l(kr)$和$\mathrm{n}_l(kr)$的线性组合

$$R(r)=A_l\mathrm{j}_l(kr)+B_l\mathrm{n}_l(kr)$$

考虑$r=a$的边界条件和$r\to\infty$的渐近行为，一般由数值解法解出本征值$k_n^{(l)}$，$n=1,2,3,\cdots$.

(6) 在l阶球贝塞尔函数的本征函数系所张成的希尔伯特空间中，对该空间中的元素$f(r)(0\leqslant r<a)$，可作广义傅里叶展开.

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\mathrm{j}_l\left(k_n^{(l)}r\right)$$

其中

$$f_n=\frac{1}{\left[\mathrm{N}_n^{(l)}\right]^2}\int_0^a f(r)\mathrm{j}_l\left(k_n^{(l)}r\right)r^2\mathrm{d}r$$

习 题 详 解

17.1　试证明

$$\cos x = \mathrm{J}_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m}(x)$$

$$\sin x = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m+1}(x)$$

证　由整数阶贝塞尔函数的生成函数

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_m(x) z^m \tag{1}$$

取 $z=\mathrm{i}$，再考虑到 $\mathrm{J}_{-m}=(-1)^m \mathrm{J}_m$，(1)式变为

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_m(x)\mathrm{i}^m \\ &= \mathrm{J}_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{J}_m(x)\mathrm{i}^m + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_m(x)\mathrm{i}^{-m} \end{aligned} \tag{2}$$

由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，且令 $m=2k$，$\mathrm{i}^{2k}=(-1)^k$ 和 $m=2k+1$，$\mathrm{i}^{2k+1}=(-1)^k\mathrm{i}$，有

$$\begin{aligned} \cos x+\mathrm{i}\sin x &= \mathrm{J}_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathrm{J}_{2k}(x) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathrm{J}_{2k+1}(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathrm{J}_{2k}(x) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathrm{J}_{2k+1}(x) \\ &= \mathrm{J}_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m}(x) + \mathrm{i}2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m+1}(x) \end{aligned} \tag{3}$$

故有

$$\begin{aligned} \cos x &= \mathrm{J}_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m}(x) \\ \sin x &= 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \mathrm{J}_{2m+1}(x) \end{aligned} \tag{4}$$

17.2　试证明

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos m\theta \,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \mathrm{J}_m(x), & m\text{为偶数} \\ 0, & m\text{为奇数} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin m\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & m\text{为偶数}\\ \mathrm{J}_m(x), & m\text{为奇数}\end{cases}$$

并进一步证明

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(m\theta-x\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\quad m=0,1,2,\cdots$$

证　对整数阶贝塞尔函数的生成函数

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)z^m \tag{1}$$

取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，并考虑到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\mathrm{i}\sin\theta$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)(\cos m\theta+\mathrm{i}\sin m\theta)\\&=\mathrm{J}_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)\cos m\theta+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathrm{J}_m(x)\cos m\theta\\&\quad+\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)\sin m\theta+\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\mathrm{J}_m(x)\sin m\theta\\&=\mathrm{J}_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\left[1+(-1)^m\right]\mathrm{J}_m(x)\cos m\theta\\&\quad+\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}\left[1+(-1)^{m+1}\right]\mathrm{J}_m(x)\sin m\theta\end{aligned} \tag{2}$$

分别取实部与虚部，有

$$\begin{aligned}\cos(x\sin\theta)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)\cos m\theta\\&=\mathrm{J}_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\left[1+(-1)^m\right]\mathrm{J}_m(x)\cos m\theta\\&=\begin{cases}\mathrm{J}_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2k}(x)\cos 2k\theta, & m=2k\\ 0, & m=2k+1\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\sin(x\sin\theta)=\begin{cases}2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\theta, & m=2k+1\\ 0, & m=2k\end{cases} \tag{4}$$

由三角函数的正交性，由(3)式可得

$$\mathrm{J}_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

$$\mathrm{J}_{2m}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta\mathrm{d}\theta \tag{6}$$

由(4)式可得

$$\begin{aligned}2\mathrm{J}_{2m+1}(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(2m+1)\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(2m+1)\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{J}_{2m+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(2m+1)\theta\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

故命题第一部分得证，即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos m\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\mathrm{J}_m(x), & m\text{为偶数}\\0, & m\text{为奇数}\end{cases} \tag{8}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin m\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & m\text{为偶数}\\\mathrm{J}_m(x), & m\text{为奇数}\end{cases} \tag{9}$$

由(8)、(9)两式相加，有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(x\sin\theta)\cos m\theta+\sin(x\sin\theta)\sin m\theta\right]\mathrm{d}\theta=\mathrm{J}_m(x)$$

即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-m\theta)\mathrm{d}\theta=\mathrm{J}_m(x) \tag{10}$$

由于被积函数是偶函数，即

$$\cos\left[x\sin(-\theta)-m(-\theta)\right]=\cos\left[-(x\sin\theta-m\theta)\right]=\cos(x\sin\theta-m\theta)$$

故(10)式可写成整数阶贝塞尔函数的另一个积分形式

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-m\theta)\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

17.3　试证明

$$1=\left[\mathrm{J}_0(x)\right]^2+2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathrm{J}_m(x)\right]^2$$

因此有结论：$\left|\mathrm{J}_0(x)\right|\leqslant 1,\ \left|\mathrm{J}_m(x)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.

证　由整数阶贝塞尔函数的生成函数

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)z^m \tag{1}$$

有

$$1=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x\left(-z-\frac{1}{-z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)z^m\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_k(x)(-z)^k \tag{2}$$

由于等式右边求和号相乘要为 1，故等式右边与变量 z 无关，所以两级数相乘中只能保留有 z 的 0 次幂项，即 $k=-m$ 或 $k=m=0$，即

$$\begin{aligned}1&=\left[\mathrm{J}_0(x)\right]^2+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathrm{J}_m(x)\mathrm{J}_{-m}(x)\\&=\left[\mathrm{J}_0(x)\right]^2+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathrm{J}_m(x)(-1)^m\mathrm{J}_m(x)\\&=\left[\mathrm{J}_0(x)\right]^2+2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathrm{J}_m(x)\right]^2\end{aligned} \tag{3}$$

由于 $\mathrm{J}_0(0)=1,\ \mathrm{J}_m(0)=0,\ m\neq 0$，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathrm{J}_m(x)\right]^2\geqslant 0 \tag{4}$$

故有

$$\left[\mathrm{J}_0(x)\right]^2\leqslant 1\quad\Rightarrow\quad\left|\mathrm{J}_0(x)\right|\leqslant 1 \tag{5}$$

并有

$$2\left[\mathrm{J}_m(x)\right]^2\leqslant 1\quad\Rightarrow\quad\left|\mathrm{J}_m(x)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

17.4 用整数阶贝塞尔函数的生成函数证明

$$\mathrm{J}_m(x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(-x)$$

这表明了整数阶贝塞尔函数的对称性，当 m 为奇数时为奇对称，当 m 为偶函数时为偶对称(此对称性为函数的坐标变量对坐标原点反演时所具有的对称性). 注意：此关系由 $\mathrm{J}_m(x)$ 的级数表达式可直接得到.

证 利用整数阶贝塞尔函数的生成函数，有

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-x)\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(-x)z^m \tag{1}$$

且

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x\left(-z-\frac{1}{-z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)(-z)^m=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\mathrm{J}_m(x)z^m \tag{2}$$

由于(1)、(2)两式的左边是相等的，故右边两级数的系数应相等，有

$$\mathrm{J}_m(-x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x) \tag{3}$$

即

$$\mathrm{J}_m(x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(-x) \tag{4}$$

17.5 计算下列积分：

(1) $\int_0^b \mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^b \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^b x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^b x^3\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^b x^4\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x$；　(6) $\int_0^b \mathrm{J}_3(x)\mathrm{d}x$.

解　(1) 由贝塞尔函数的递推关系

$$\mathrm{J}_{\nu-1}-\mathrm{J}_{\nu+1}=2\mathrm{J}_\nu{}'$$

即

$$\mathrm{J}_{\nu-1}=2\mathrm{J}_\nu{}'+\mathrm{J}_{\nu+1} \tag{1}$$

取 $\nu=1$，有

$$\mathrm{J}_0(x)=2\mathrm{J}_1'(x)+\mathrm{J}_2(x)$$

对 $\mathrm{J}_2(x)$，再用递推关系(1)，有

$$\mathrm{J}_0(x)=2\mathrm{J}_1'(x)+2\mathrm{J}_3'(x)+\mathrm{J}_4(x)$$

反复利用递推关系(1)，可得

$$\mathrm{J}_0(x)=2\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{J}'_{2k+1}(x) \tag{2}$$

对此等式两边取积分，有

$$\int_0^b \mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^b \mathrm{J}'_{2k+1}(x)\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2k+1}(x)\Big|_0^b \tag{3}$$

考虑到 $\mathrm{J}_{2k+1}(0)=0$，$k=0,1,2,\cdots$，有

$$\int_0^b \mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2k+1}(b) \tag{4}$$

(2) 由贝塞尔函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu\right)=-x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1} \tag{5}$$

取 $\nu=0$，即

$$\mathrm{J}_1(x)=-\mathrm{J}_0'(x) \tag{6}$$

则有

$$\begin{aligned}\int_0^b \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x&=-\int_0^b \mathrm{d}\left(\mathrm{J}_0(x)\right)=\mathrm{J}_0(0)-\mathrm{J}_0(b)\\&=1-\mathrm{J}_0(b)\end{aligned} \tag{7}$$

(3) 由贝塞尔函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(x) \tag{8}$$

取$\nu=1$，有

$$x\mathrm{J}_0(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{J}_1(x)\right] \tag{9}$$

则

$$\int_0^b x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^b \mathrm{d}\left[x\mathrm{J}_1(x)\right]=b\mathrm{J}_1(b) \tag{10}$$

(4) 由贝塞尔函数的递推关系

$$\begin{aligned}x\mathrm{J}_0(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{J}_1(x)\right]\\x^2\mathrm{J}_1(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\mathrm{J}_2(x)\right]\end{aligned} \tag{11}$$

原积分为

$$\begin{aligned}\int_0^b x^3\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x&=\int_0^b x^2\mathrm{d}\left[x\mathrm{J}_1(x)\right]\\&=b^3\mathrm{J}_1(b)-2\int_0^b x^2\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x\\&=b^3\mathrm{J}_1(b)-2\int_0^b \mathrm{d}\left[x^2\mathrm{J}_2(x)\right]\\&=b^3\mathrm{J}_1(b)-2b^2\mathrm{J}_2(b)\end{aligned} \tag{12}$$

(5) 由贝塞尔函数的递推关系

$$\begin{aligned}x^2\mathrm{J}_1(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\mathrm{J}_2(x)\right]\\x^3\mathrm{J}_2(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^3\mathrm{J}_3(x)\right]\end{aligned} \tag{13}$$

原积分为

$$\int_0^b x^4\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^b x^2\mathrm{d}\left[x^2\mathrm{J}_2(x)\right]$$

$$\begin{aligned}&=b^4\mathrm{J}_2(b)-2\int_0^b x^3\mathrm{J}_2(x)\mathrm{d}x\\&=b^4\mathrm{J}_2(b)-2b^3\mathrm{J}_3(b)\end{aligned}\tag{14}$$

(6) 由贝塞尔函数的递推关系

$$\mathrm{J}_{\nu-1}+\mathrm{J}_{\nu+1}=\frac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu\tag{15}$$

取$\nu=2$，有

$$\mathrm{J}_3(x)=\frac{4}{x}\mathrm{J}_2(x)-\mathrm{J}_1(x)\tag{16}$$

原积分为

$$\int_0^b\mathrm{J}_3(x)\mathrm{d}x=\int_0^b\frac{4}{x}\mathrm{J}_2(x)\mathrm{d}x-\int_0^b\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x\tag{17}$$

由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu\right)=-x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}$$

取$\nu=1$，有

$$\frac{1}{x}\mathrm{J}_2=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\mathrm{J}_1\right)\tag{18}$$

并利用题(2)的结果，有

$$\begin{aligned}\int_0^b\mathrm{J}_3(x)\mathrm{d}x&=\mathrm{J}_0(b)-1-4\int_0^b\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{J}_1(x)}{x}\right]\\&=\mathrm{J}_0(b)-1-4\frac{\mathrm{J}_1(b)}{b}+4\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{J}_1(x)}{x}\end{aligned}\tag{19}$$

由$\mathrm{J}_1(x)$的表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!2^{2k+1}}x^{2k+1}\\&=\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!2^{2k+1}}x^{2k+1}\end{aligned}\tag{20}$$

当$k=0$时，J_1为$\frac{x}{2}$；当$k>0$时，级数的x幂次都大于3，故有

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{J}_1(x)}{x}=\frac{1}{2}\tag{21}$$

则此积分为

$$\int_0^b \mathrm{J}_3(x)\mathrm{d}x = 1+\mathrm{J}_0(b)-4\frac{\mathrm{J}_1(b)}{b} \tag{22}$$

17.6　在$\rho\in(0,b)$的区间上，在第一类齐次边界条件下，由零阶贝塞尔函数所构成的本征函数空间中(该空间的基矢为$\left\{\mathrm{J}_0\left[\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right],n=1,2,\cdots\right\}$，$x_n^{(0)}$为$\mathrm{J}_0$的第$n$个零点)，把函数$f(\rho)=1$展开.

解　函数$f(\rho)=1$在此基上的展开式为

$$1=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) \tag{1}$$

展开系数f_n满足

$$f_n=\frac{1}{\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2}\int_0^b \mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \tag{2}$$

其中

$$\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2=\frac{b^2}{2}\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^0\right)\right]^2 \tag{3}$$

由递推关系

$$x\mathrm{J}_0(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{J}_1(x)\right] \tag{4}$$

有

$$\begin{aligned} f_n&=\frac{1}{\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2}\int_0^b \mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \\ &=\frac{1}{\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2}\frac{b^2}{\left(x_n^{(0)}\right)^2}\int_0^{x_n^{(0)}} \mathrm{J}_0(x)x\mathrm{d}x \\ &=\frac{2}{b^2\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\frac{b^2}{\left(x_n^{(0)}\right)^2}\left[x\mathrm{J}_1(x)\right]\Big|_0^{x_n^{(0)}} \\ &=\frac{2}{\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)x_n^{(0)}} \end{aligned} \tag{5}$$

将此关系式代入(1)式中，有

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)x_n^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) \tag{6}$$

17.7　在高为 h，半径为 b 的柱体内，取坐标的原点在下底的圆心，对于边界条件为

$$\begin{cases}Z(z)\big|_{z=0}=Z(z)\big|_{z=h}=0\\ R(\rho)\big|_{\rho=b}=0\end{cases}$$

(1) 求解稳定场 $u(\rho,\varphi,z)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)=f(\rho,\varphi,z)$$

的场的分布，并对解的结果说明其物理图像.

(2) 求解输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2u=f(\rho,\varphi,z,t)$$

且初始条件为：$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r})$，并对解的结果说明其物理图像.

解　(1) 本题泊松方程

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)=f(\rho,\varphi,z) \tag{1}$$

在柱坐标的分离变量下，由于满足的边界条件为

$$\begin{cases}Z(z)\big|_{z=0}=Z(z)\big|_{z=h}=0\\ R(\rho)\big|_{\rho=b}=0\end{cases} \tag{2}$$

还有一个自然边界条件，即 $\Phi(\varphi)$ 要满足周期性边界条件

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2m\pi),\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3}$$

泊松方程对应的齐次方程为拉普拉斯方程

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)=0 \tag{4}$$

在柱坐标的分离变量 $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 下，得三个方程

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\left(\lambda-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{5}$$

$$\Phi''+m^2\Phi=0 \tag{6}$$

$$Z''-\lambda Z=0 \tag{7}$$

这三个方程中，只有两个可与边界条件构成本征值问题，剩下的一个边界条件是用来确定解的展开系数的. 其中方程(6)与周期边界条件构成本征值问题，

$m=0,1,2,\cdots$，相应的本征函数为

$$\Phi^{(m)}(\varphi)\sim\cos m\varphi,\sin m\varphi,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{8}$$

对于(5)、(7)两个方程，由于都是齐次边界条件，可先选一个作为本征值问题.

方案一　由于方程(5)是 m 阶贝塞尔方程，则

$$\begin{cases} R''+\dfrac{1}{\rho}R'+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \\ R(\rho)\big|_{\rho=b}=0,\quad |R(0)|<\infty \end{cases} \tag{9}$$

构成 m 阶贝塞尔函数的本征值问题，此时 $\lambda>0$.

m 阶贝塞尔方程的解为

$$R(\rho)=A\mathrm{J}_m\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)+B\mathrm{N}_m\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) \tag{10}$$

由于是柱内问题，要去掉在 $\rho=0$ 点发散的 $\mathrm{N}_m(\sqrt{\lambda}\rho)$，故取 $B=0$.

对应于 $\Phi(\varphi)$ 的解的每一个 m，方程的解为 m 阶贝塞尔函数，满足定解问题，(9)的本征值为

$$\lambda_n^{(m)}=\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

其中 $x_n^{(m)}$ 为 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个零点.

本征值 $\lambda_n^{(m)}$ 相应的本征函数为

$$R_n^{(m)}(\rho)=\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right),\quad n=1,2,3,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

将方程(1)中的非齐次项 $f(\rho,\varphi,z)$ 在本征函数 $\Phi^{(m)}(\varphi)$ 和 $R_n^{(m)}(\rho)$ 上展开

$$f(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(m)}(z)\left[\cos m\varphi+\sin m\varphi\right]\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right) \tag{13}$$

可求得展开系数 $f_n^{(m)}(z)$

$$f_n^{(m)}(z)=\frac{1}{\pi\mathrm{N}_n^{(m)}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^b f(\rho,\varphi,z)\left[\cos m\varphi+\sin m\varphi\right]\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \tag{14}$$

其中 $\mathrm{N}_n^{(m)}$ 为 $\mathrm{J}_m\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)$ 的归一化常数. 可得解的形式为

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Z_n^{(m)}(z)\left[\cos m\varphi+\sin m\varphi\right]\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right) \tag{15}$$

再由方程(1)可得

$$Z_n^{(m)\prime\prime}-\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\right)^2 Z_n^{(m)}=f_n^{(m)}(z) \tag{16}$$

其相应的齐次方程的通解为

$$Z_n^{(m)}(z)_0=C_n^{(m)}\mathrm{e}^{\frac{x_n^{(m)}}{b}z}+D_n^{(m)}\mathrm{e}^{-\frac{x_n^{(m)}}{b}z},\quad n=1,2,3,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots \tag{17}$$

根据 $f_n^{(m)}(z)$ 的具体形式给出方程(16)的一个特解 $Z_n^{(m)}(\rho)_1$，则可得

$$Z_n^{(m)}(z)=Z_n^{(m)}(z)_0+Z_n^{(m)}(z)_1,\quad n=1,2,3,\cdots,\ m=0,1,2,\cdots \tag{18}$$

由(2)中 $Z(z)$ 的边界条件，定出上式中含有的待定常数 $C_n^{(m)}$ 和 $D_n^{(m)}$.

可得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi,z)&=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Z_n^{(m)}(z)\left[\cos m\varphi+\sin m\varphi\right]\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)\end{aligned} \tag{19}$$

方案二　在方程分离变量中，λ 取负值，令 $\lambda=-\alpha$，$\alpha>0$，则方程(5)变为

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\left(-\alpha-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{20}$$

这是 m 阶虚宗量贝塞尔方程，其解为 m 阶虚宗量贝塞尔函数 $\mathrm{I}_m\left(\mathrm{i}\sqrt{\alpha}\rho\right)$，由于是柱内问题，去掉在 $\rho=0$ 发散的 $K_m\left(\mathrm{i}\sqrt{\alpha}\rho\right)$，方程(7)变为

$$Z''+\alpha Z=0 \tag{21}$$

它与边界条件构成本征值问题

$$\begin{cases}Z''+\alpha Z=0\\Z(0)=0,Z(h)=0\end{cases} \tag{22}$$

本征值为

$$\alpha_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{23}$$

相应的本征函数为

$$Z_n(z)=\sin\frac{n\pi z}{h},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{24}$$

泊松方程的非齐次项 $f(\rho,\varphi,z)$ 在本征函数 $\Phi^{(m)}(\varphi)$ 和 $Z_n(z)$ 上展开

$$f(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(m)}(\rho)\left[\cos m\varphi+\sin m\varphi\right]\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{25}$$

可求得展开系数 $f_n^{(m)}(\rho)$

$$f_n^{(m)}(\rho)=\frac{1}{\pi \mathrm{N}_n^{(m)}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h f(\rho,\varphi,z)\left[\cos m\varphi+\sin m\varphi\right]\sin\frac{n\pi z}{h}\mathrm{d}z \tag{26}$$

我们可得解的形式为

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}R_n^{(m)}(\rho)[\cos m\varphi+\sin m\varphi]\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{27}$$

则由方程(1)可得关于 $R_n^{(m)}(\rho)$ 的方程

$$R_n^{(m)\prime\prime}+\frac{1}{\rho}R_n^{(m)\prime}+\left(-\alpha-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R_n^{(m)}=f_n^{(m)} \tag{28}$$

此方程相应的齐次方程的通解为

$$R_{n0}^{(m)}=C_n^{(m)}\mathrm{I}_m\left(\mathrm{i}\sqrt{\alpha_n}\rho\right) \tag{29}$$

再由方程(28)中 $f_n^{(m)}$ 的具体形式给出方程的一个特解 $R_{n1}^{(m)}$，则方程(28)的解为

$$R_n^{(m)}=R_{n0}^{(m)}+R_{n1}^{(m)} \tag{30}$$

再由边界条件 $R(\rho)\big|_{\rho=b}=0$ 定出

$$R(\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}R_n^{(m)} \tag{31}$$

中的系数 $C_n^{(m)}$.

这样，可得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi,z)&=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}R_n^{(m)}(\rho)\left[\cos m\varphi+\sin m\varphi\right]\sin\frac{n\pi z}{h}\end{aligned} \tag{32}$$

从以上两个方案看，所取的 S-L 本征值问题不同，得到的解的形式也不同，但由微分方程关于定解问题解的存在唯一性可知，方程的解(19)式和(32)式是等价的.

如果方程非齐次端的源项只分布在 z 轴上，则此解与 φ 无关，此时取 $m=0$ 的解，则由(32)式可知，解的分布在 z 轴上是一系列驻波的叠加，其振幅是与零阶虚宗量贝塞尔函数相联系的.

(2) 对输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=f(\rho,\varphi,z,t) \tag{33}$$

相应的齐次方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=0 \tag{34}$$

对此方程进行分离变量 $u(\boldsymbol{r},t)=v(\boldsymbol{r})T(t)$，可得分别满足空间变量和时间变量的两个方程

$$\nabla^2 v+k^2 v=0 \tag{35}$$

$$T'+a^2k^2T=0 \tag{36}$$

在柱坐标系下对方程(35)再进行分离变量，令

$$v(\boldsymbol{r})=R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{37}$$

可分别得到三个方程

$$\Phi''+m^2\Phi=0 \tag{38}$$

$$Z''+\lambda Z=0,\quad \lambda>0 \tag{39}$$

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\left(k^2-\lambda-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0,\quad k^2>\lambda \tag{40}$$

这三个方程中，方程(38)与周期边界条件构成本征值问题，$m=0,1,2,\cdots$ 为本征值，相应的本征函数为

$$\Phi^{(m)}(\varphi)\sim\cos m\varphi,\sin m\varphi,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{41}$$

关于 $Z(z)$ 的本征值问题为

$$\begin{cases}Z''+\lambda Z=0, & \lambda>0\\ Z(0)=0, & Z(h)=0\end{cases} \tag{42}$$

其本征值为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots \tag{43}$$

相应的本征函数为

$$Z_n=\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{44}$$

关于 $R(\rho)$ 的本征值问题为

$$\begin{cases} R''+\dfrac{1}{\rho}R'+\left(k^2-\lambda_n-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R=0, & k^2>\lambda_n \\ R(b)=0, & |R(0)|<\infty \end{cases} \tag{45}$$

方程为 m 阶贝塞尔方程，其解为

$$R(\rho)=\mathrm{J}_m\left(\sqrt{k^2-\lambda_n}\rho\right) \tag{46}$$

由边界条件可得本征值为

$$k_l^2-\lambda_l=\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\right)^2,\quad l=1,2,3,\cdots \tag{47}$$

结合(43)式，有

$$k_l^2=\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2,\quad l=1,2,3,\cdots \tag{48}$$

或写成

$$k_l=\sqrt{\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2},\quad l=1,2,3,\cdots \tag{49}$$

其中 $x_l^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 l 个零点，则相应的本征函数为

$$R_l^{(m)}=\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right) \tag{50}$$

故对应于本征值 m,λ_n,k_l^2，相应的本征函数为

$$v_{nl}^{(m)}=\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right)(\cos m\varphi+\sin m\varphi)\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{51}$$

因此，原定解问题的解的形式为

$$u(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T_{nl}^{(m)}(t)\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right)(\cos m\varphi+\sin m\varphi)\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{52}$$

把 $f(\rho,\varphi,z,t)$ 在三个本征函数系上展开

$$f(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nl}^{(m)}(t)\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right)(\cos m\varphi+\sin m\varphi)\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{53}$$

展开系数 $f_{nl}^{(m)}(t)$ 为

$$f_{nl}^{(m)}(t)=\frac{2}{\pi h \mathrm{N}_l^{(m)}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^b f(\rho,\varphi,z,t)\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right)\times(\cos m\varphi+\sin m\varphi)\sin\frac{n\pi z}{h}\rho\mathrm{d}\rho \tag{54}$$

代入输运方程，可得

$$T_{nl}^{(m)\prime}+a^2k_l^2T_{nl}^{(m)}=f_{nl}^{(m)}(t) \tag{55}$$

同时由初始条件

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}) \tag{56}$$

将$\psi(\boldsymbol{r})$在三个本征函数系上展开

$$\psi(\rho,\varphi,z)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{nl}^{(m)}\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right)(\cos m\varphi+\sin m\varphi)\sin\frac{n\pi z}{h} \tag{57}$$

展开系数$\psi_{nl}^{(m)}$为

$$\psi_{nl}^{(m)}=\frac{2}{\pi h \mathrm{N}_l^{(m)}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^b\psi(\rho,\varphi,z)\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right)\times(\cos m\varphi+\sin m\varphi)\sin\frac{n\pi z}{h}\rho\mathrm{d}\rho \tag{58}$$

由(52)、(56)、(57)和(58)式，可得初始条件为

$$T_{nl}^{(m)}(t)\big|_{t=0}=\psi_{nl}^{(m)} \tag{59}$$

由(55)和(59)两式构成常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}T_{nl}^{(m)\prime}+a^2k_l^2T_{nl}^{(m)}=f_{nl}^{(m)}(t)\\ T_{nl}^{(m)}(0)=\psi_{nl}^{(m)}\end{cases} \tag{60}$$

这一问题可用拉普拉斯变换求解，或是先求出方程(55)相应的齐次方程的通解，再用常数变易法，由$f_{nl}^{(m)}(t)$的形式求出方程(55)的一个特解，然后再由初始条件定出通解中的待定系数，就求得解$T_{nl}^{(m)}(t)$的具体形式.

再把此解$T_{nl}^{(m)}(t)$代入(51)式中，就得到原定解问题的解.

值得注意的是，在输运方程中，三个空间变量的方程与边界条件(包括周期性边界条件)都构成本征值问题，方程解中的待定系数由时间变量的柯西问题给定，即由关于时间的方程和初始条件定出.

从物理上看，此解的结构是很复杂的，如果圆柱内的空间非均匀，没有很好的对称性(这可以由柱中的介质的非均匀性所导致)，或是源的分布没有对称性，

都可以导致解的复杂性.

如果柱内的空间是均匀的，且源项也具有对称性，则解的形式将大大简化；如果源项与 φ 角无关，则取 $m=0$，解中只有 J_0 项，也要减少对 m 的求和，以及对 φ 角的积分.

如果是无源的问题，则方程(55)变为齐次方程，其解的形式为 $\mathrm{e}^{-k_l^2 a^2 t}$，这是一个随时间指数衰减的函数，当 $t\to\infty$ 时，整个解变为零. 这是与边界条件相吻合的，说明了边界对系统的作用.

17.8　边缘固定半径为 R 的圆形膜，初始形状为旋转抛物面

$$u\big|_{t=0}=\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)H\ ,\quad H\text{ 为常数}$$

且初速度为 0，求此膜的振动.

解　由初始条件可知此问题与角度 φ 无关，只依赖于空间坐标 ρ 和时间 t，且遵循波动方程，故定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\nabla^2 u=0 \\ u\big|_{\rho=R}=0 \\ u\big|_{t=0}=\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)H \\ u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u=u(\rho,t)$.

对 $u=u(\rho,t)$ 进行分离变量，设

$$u(\rho,t)=U(\rho)T(t) \tag{2}$$

可得 $U(\rho)$ 满足零阶贝塞尔方程及第一类齐次边界条件

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\rho}+\lambda U=0 \tag{3}$$

$$U(R)=0 \tag{4}$$

(3)、(4)两式构成 S-L 本征值问题. (3)式的解为零阶贝塞尔函数

$$U(\rho)=C\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) \tag{5}$$

由边界条件(4)可得本征值 λ_n 为

$$\sqrt{\lambda_n}R=x_n^{(0)},\quad \lambda_n=\frac{\left(x_n^{(0)}\right)^2}{R^2},\ n=1,2,3,\cdots \tag{6}$$

其中 $x_n^{(0)}$ 为零阶贝塞尔函数的第 n 个零点. 相应的本征函数为

$$U_n(\rho)=C_n\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right) \tag{7}$$

由(2)式可得 T_n 的方程

$$T_n''+\lambda_n a^2T_n=0 \tag{8}$$

即

$$T_n''+\left(\frac{x_n^{(0)}a}{R}\right)^2T_n=0 \tag{9}$$

其解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}+B_n\sin\frac{x_n^{(0)}at}{R} \tag{10}$$

则有(把(7)式中的待定常数 C_n 吸收到上式的 A_n， B_n 中)

$$u_n(\rho,t)=\left(A_n\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}+B_n\sin\frac{x_n^{(0)}at}{R}\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right) \tag{11}$$

定解问题的解的形式为

$$\begin{aligned}u(\rho,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}+B_n\sin\frac{x_n^{(0)}at}{R}\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\end{aligned} \tag{12}$$

由初始条件 $u_t\big|_{t=0}=0$，有 $B_n=0$，则

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right) \tag{13}$$

由初始条件

$$u\big|_{t=0}=\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)H \tag{14}$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)H \tag{15}$$

由 $\left\{\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right),\ n=1,2,3,\cdots\right\}$ 的正交性，有

$$A_n=\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-2}\int_0^R\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)\mathrm{H}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \tag{16}$$

其中

$$\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-2}=\frac{2}{R^2\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2} \tag{17}$$

故(16)式为

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{2H}{R^2\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^R\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho\\&-\frac{2H}{R^4\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^R\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho^3\mathrm{d}\rho\end{aligned} \tag{18}$$

由 17.5 题的第(3)、(4)题的结果

$$\int_0^b\mathrm{J}_0(x)x\mathrm{d}x=b\mathrm{J}_1(b)$$

$$\int_0^b\mathrm{J}_0(x)x^3\mathrm{d}x=b^3\mathrm{J}_1(b)-2b^2\mathrm{J}_2(b)$$

有

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{2H}{\left[x_n^{(0)}\right]^2\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^R\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\mathrm{d}\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\\&-\frac{2H}{\left[x_n^{(0)}\right]^4\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^R\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\right)^3\rho^3\mathrm{d}\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\\=&\frac{2H}{\left[x_n^{(0)}\right]^2\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}x_n^{(0)}\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)-\frac{2H}{\left[x_n^{(0)}\right]^4\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\left[x_n^{(0)}\right]^3\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\\&+\frac{4H}{\left[x_n^{(0)}\right]^4\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\left[x_n^{(0)}\right]^2\mathrm{J}_2\left(x_n^{(0)}\right)\\=&\frac{4H}{\left[x_n^{(0)}\right]^2\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\mathrm{J}_2\left(x_n^{(0)}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

把求得的 A_n 代入(14)式，即可得定解问题的解为

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4HJ_2\left(x_n^{(0)}\right)}{\left[x_n^{(0)}\right]^2\left[J_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right) \tag{20}$$

17.9　高为 h，半径为 b，导热系数为 k 的圆柱体，其下底面保持零度，上底面的温度为 ρ 的函数 $f(\rho)$，其侧面在零度的环境中自由冷却(满足牛顿冷却定律)，冷却系数为 H，求柱内温度场的稳定分布.

解　温度场 u 稳定时，满足 $\nabla^2u=0$，定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2u=0\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{H}{k}u\right)\Big|_{\rho=b}=0\\ u|_{z=0}=0,\quad u|_{z=h}=f(\rho)\end{cases} \tag{1}$$

由于边界条件和初始条件都与角度 φ 无关，故定解问题与角度 φ 无关，设

$$u=u(\rho,z)=R(\rho)Z(z) \tag{2}$$

在柱坐标系下，方程为

$$Z\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+R\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0 \tag{3}$$

即

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2R}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial\rho}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2Z}{\partial z^2}=0 \tag{4}$$

设

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2R}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial\rho}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2Z}{\partial z^2}=-\lambda,\quad \lambda>0 \tag{5}$$

则径向部分的方程为

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\lambda R=0 \tag{6}$$

此方程为零阶贝塞尔方程，其解为零阶贝塞尔函数

$$R(\rho)=CJ_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) \tag{7}$$

对第三类齐次边界条件分离变量，得

$$\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}+\frac{H}{k}R\right)\Big|_{\rho=b}=0 \tag{8}$$

把(7)式代入(8)式中，有

$$\sqrt{\lambda}\mathrm{J}_0'\left(\sqrt{\lambda}b\right)+\frac{H}{k}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda}b\right)=0 \tag{9}$$

可解得满足此方程的解，即本征值

$$\lambda_n,\quad \lambda_n>0,\ n=1,2,3,\cdots \tag{10}$$

注： 在此省略了零阶贝塞尔函数的记号，即 $\lambda_n=\lambda_n^{(0)}$.

与本征值 λ_n 对应的正交归一的本征函数为

$$R_n^{(0)}(\rho)=\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{11}$$

其中归一化常数 $\mathrm{N}_n^{(0)}$ 为

$$\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2=\int_0^b \mathrm{J}_0{}^2\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \tag{12}$$

由(5)和(10)式可得到关于变量 z 的方程

$$Z_n''-\lambda_n Z_n=0 \tag{13}$$

此方程的解为

$$Z_n(z)=C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z} \tag{14}$$

故可得

$$\begin{aligned}u_n(\rho,z)&=R_n^{(0)}(\rho)\left(C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\\&=\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\left(C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

定解问题解的形式为

$$\begin{aligned}u(\rho,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\rho,z)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\left(C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

代入边界条件 $u(\rho,0)=0$，可得

$$C_n+D_n=0\quad\Rightarrow\quad C_n=-D_n \tag{17}$$

有

$$\begin{aligned}u(\rho,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)C_n\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)C_n 2\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}z\end{aligned} \tag{18}$$

由 $Z(z)$ 的边界条件 $u(\rho,h)=f(\rho)$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)C_n 2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}h=f(\rho) \tag{19}$$

把 $f(\rho)$ 在本征函数 $R_n^{(0)}(\rho)=\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)$ 上展开

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right) \tag{20}$$

其中

$$f_n=\int_0^b\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \tag{21}$$

对比(19)和(20)式，可得

$$C_n=\frac{1}{2}\frac{f_n}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}h} \tag{22}$$

将其代入(18)式，可得原定解问题的解为

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}f_n\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}z}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}h} \tag{23}$$

17.10　半径为 b、介电常数为 ε 的长直均质介质圆柱，放入均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，圆柱的轴线与 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直，求解柱体内外的电场分布.

解　由分析可知，在介质柱内分子被外电场极化，柱内的电荷为零，只在柱面有束缚电荷. 由对称性可知，此问题为垂直于 z 轴的任一截面的二维问题，取平面极坐标，原点在 z 轴上，极轴的方向为外电场的方向. 在截面内分成 $\rho<b$，$\rho>b$ 的两个区域，在 $\rho<b$ 的区域内，电势为 $u^{\mathrm{i}}(\rho,\varphi)$；在 $\rho>b$ 的区域内，电势为 $u^{\mathrm{e}}(\rho,\varphi)$. 由于这两个区域内都没有电荷，它们分别满足二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2u^{\mathrm{i}}(\rho,\varphi)=0,\quad \nabla^2u^{\mathrm{e}}(\rho,\varphi)=0 \tag{1}$$

其中 $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

在柱面的截面圆周上电势连续，即

$$u^{\mathrm{i}}\Big|_{\rho=b}=u^{\mathrm{e}}\Big|_{\rho=b} \tag{2}$$

并有电位移 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 法向分量连续，则有

$$\varepsilon\frac{\partial u^{\mathrm{i}}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=b}=\frac{\partial u^{\mathrm{e}}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=b} \tag{3}$$

取电势零点为 $u^{\mathrm{i}}\big|_{\rho=0}=0$，则电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电势的贡献为

$$u_0=-\rho E_0\cos\varphi \tag{4}$$

先考虑 $\rho<b$ 的区域：

设 $u^{\mathrm{i}}=R^{\mathrm{i}}(r)\Phi^{\mathrm{i}}(\varphi)$，代入拉普拉斯方程(1)，并由周期性边界条件，可得本征值为 m 的 Φ^{i} 的本征方程

$$\Phi^{\mathrm{i}\prime\prime}+m^2\Phi^{\mathrm{i}}=0,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

和 R^{i} 满足的方程

$$\frac{\partial^2R^{\mathrm{i}}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial R^{\mathrm{i}}}{\partial\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}R^{\mathrm{i}}=0 \tag{6}$$

由(5)式得解为

$$\Phi_m^{\mathrm{i}}(\varphi)=A_m^{\mathrm{i}}\cos m\varphi+B_m^{\mathrm{i}}\sin m\varphi \tag{7}$$

(6)式的解为

$$R_m^{\mathrm{i}}(\rho)=C_m^{\mathrm{i}}\rho^m+D_m^{\mathrm{i}}\rho^{-m} \tag{8}$$

考虑到 $\rho\to0$ 时 $\left|R^{\mathrm{i}}\right|<\infty$，取 $D_m^{\mathrm{i}}=0$，故有

$$R_m^{\mathrm{i}}(\rho)=C_m^{\mathrm{i}}\rho^m \tag{9}$$

又考虑到取原点为势能零点，故当 $m=0$ 时，$C_0^{\mathrm{i}}=0$，即

$$R_m^{\mathrm{i}}(\rho)=C_m^{\mathrm{i}}\rho^m,\quad m=1,2,3,\cdots \tag{10}$$

故

$$u^{\mathrm{i}}(\rho,\varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\left[A_m^{\mathrm{i}}\cos m\varphi+B_m^{\mathrm{i}}\sin m\varphi\right] \tag{11}$$

其中 C_m^{i} 吸收到 A_m^{i}，B_m^{i} 中.

对于 $\rho>b$ 的区域：

设 $u^{\mathrm{e}}=R^{\mathrm{e}}(\rho)\Phi^{\mathrm{e}}(\varphi)$，代入拉普拉斯方程(1)，并由周期性边界条件，可得本征值为 m^2 的 Φ^{e} 的本征方程

$$\Phi^{\mathrm{e}\prime\prime}+m^2\Phi^{\mathrm{e}}=0,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

和 R^{e} 满足的方程

$$\frac{\partial^2R^{\mathrm{e}}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial R^{\mathrm{e}}}{\partial\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}R^{\mathrm{e}}=0 \tag{13}$$

此两方程的解为

$$\Phi_m^{\mathrm{e}}(\varphi)=A_m^{\mathrm{e}}\cos m\varphi+B_m^{\mathrm{e}}\sin m\varphi \tag{14}$$

$$R_m^{\mathrm{e}}(\rho)=C_m^{\mathrm{e}}\rho^m+D_m^{\mathrm{e}}\rho^{-m} \tag{15}$$

可得定解问题解的形式为

$$u^{\mathrm{e}}(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(C_m^{\mathrm{e}}\rho^m+D_m^{\mathrm{e}}\rho^{-m}\right)\left(A_m^{\mathrm{e}}\cos m\varphi+B_m^{\mathrm{e}}\sin m\varphi\right) \tag{16}$$

考虑到 $\rho\to\infty$ 时，柱面束缚电荷产生的电势为零，只有外场的电势，即

$$u^{\mathrm{e}}\xrightarrow{\rho\to\infty}u_0=-\rho E_0\cos\varphi \tag{17}$$

可定出 $B_m^{\mathrm{e}}=0, C_0^{\mathrm{e}}=0, C_1^{\mathrm{e}}=E_0, C_m^{\mathrm{e}}=0(m\geqslant 2), A_1^{\mathrm{e}}=1$，有

$$u^{\mathrm{e}}(\rho,\varphi)=-\rho E_0\cos\varphi+\sum_{m=0}^{\infty}D_m^{\mathrm{e}}\rho^{-m}\cos m\varphi \tag{18}$$

其中，系数 A_m^{e} 吸收到 D_m^{e} 中.

柱内区和柱外区的解(11)和(18)式中的系数，由衔接条件(2)和(3)来确定. 由(2)式，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}b^m\left[A_m^{\mathrm{i}}\cos m\varphi+B_m^{\mathrm{i}}\sin m\varphi\right]=-bE_0\cos\varphi+\sum_{m=0}^{\infty}D_m^{\mathrm{e}}b^{-m}\cos m\varphi \tag{19}$$

得

$$B_m^{\mathrm{i}}=0,\quad D_0^{\mathrm{e}}=0$$

$$D_1^{\mathrm{e}}=b^2\left(A_1^{\mathrm{i}}+E_0\right)$$

$$D_m^{\mathrm{e}}=b^{2m}A_m^{\mathrm{i}},\quad m\geqslant 2$$

即得

$$u^{\mathrm{i}}(\rho,\varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m A_m^{\mathrm{i}}\cos m\varphi \tag{20}$$

$$\begin{aligned}u^{\mathrm{e}}(\rho,\varphi)=&-\rho E_0\cos\varphi+b^2\left(A_1^{\mathrm{i}}+E_0\right)\rho^{-1}\cos\varphi\\&+\sum_{m=2}^{\infty}A_m^{\mathrm{i}}b^{-2m}\rho^{-m}\cos m\varphi\end{aligned} \tag{21}$$

由衔接条件(3)，有

$$\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}mb^{m-1}A_m^{\mathrm{i}}=-E_0-\left(A_1^{\mathrm{i}}+E_0\right)-\sum_{m=2}^{\infty}A_m^{\mathrm{i}}b^{-3m-1} \tag{22}$$

得 $A_1^{\mathrm{i}}=-\dfrac{2E_0}{1+\varepsilon}, A_m^{\mathrm{i}}=0,\ m\geqslant 2$.

因此，得到原定解问题的解，在柱内区域

$$u^{\mathrm{i}}(\rho,\varphi)=-\frac{2E_0}{1+\varepsilon}\rho\cos\varphi \tag{23}$$

在柱外区域

$$u^{\mathrm{e}}(\rho,\varphi)=-\rho E_0\cos\varphi+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}b^2E_0\rho^{-1}\cos\varphi \tag{24}$$

17.11　在由圆弧 $\rho=a$ 和 $\rho=b(b>a)$，和矢径的角度 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\alpha$ 围成的扇形区域内，求解拉普拉斯方程

$$\nabla^2u=0$$

使场 $u(\rho,\varphi)$ 的分布满足边界条件

$$\begin{cases}u\big|_{\rho=a}=0,\quad u\big|_{\rho=b}=u_0\\ u\big|_{\varphi=0}=u\big|_{\varphi=\alpha}=0\end{cases}$$

解　这是二维拉普拉斯方程的定解问题. 采用极坐标 (ρ,φ)，并设 $u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$，则拉普拉斯方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{1}$$

变为

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} \tag{2}$$

设方程两边等于常数 ν^2，则有

$$\Phi''+\nu^2\Phi=0 \tag{3}$$

通解为

$$\Phi(\varphi)=A\cos\nu\varphi+B\sin\nu\varphi \tag{4}$$

由边界条件 $u\big|_{\varphi=0}=u\big|_{\varphi=\alpha}=0$，即

$$\Phi(0)=\Phi(\alpha)=0 \tag{5}$$

(3)式和(5)式构成 S-L 本征值问题，可得(4)式解中的系数 $A=0$，且

$$\sin\nu\alpha=0 \tag{6}$$

即可定出 ν 为

$$\nu_n=\frac{n\pi}{\alpha},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{7}$$

其相应的本征函数为

$$\Phi_n = B_n \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} \tag{8}$$

由(2)式和(7)式可得对应于 ν_n 的关于 $R(\rho)$ 的方程

$$\rho^2 R_n'' + \rho R_n' - \nu_n^2 R_n = 0 \tag{9}$$

此方程的解为

$$R_n(\rho) = C_n\rho^{\nu_n} + D_n\rho^{-\nu_n} = C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \tag{10}$$

则定解问题解的形式为

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} \tag{11}$$

其中 B_n 吸收到 C_n， D_n 中.

由边界条件 $u\big|_{\rho=a} = 0, u\big|_{\rho=b} = u_0$，可确定系数 C_n 和 D_n. 由 $\rho = a$ 的边界条件有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} = 0 \tag{12}$$

可得

$$D_n = -C_n a^{\frac{2n\pi}{\alpha}} \tag{13}$$

故(11)式变为

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} \tag{14}$$

再由 $\rho = b$ 的边界条件，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(b^{\frac{n\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} = u_0 \tag{15}$$

可求出

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2u_0}{\alpha}\left(b^{\frac{n\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)^{-1}\int_0^a \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{2u_0}{\alpha}\left(b^{\frac{n\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)^{-1}\frac{\alpha}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \\ &= -\frac{2u_0}{n\pi}\left(b^{\frac{n\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)^{-1}\left[(-1)^n - 1\right] \end{aligned} \tag{16}$$

当$n=2k,k=1,2,3,\cdots$时，$C_{2k}=0$；当$n=2k-1,k=1,2,3,\cdots$时，

$$C_{2k-1}=\frac{4u_0}{(2k-1)\pi}b^{\frac{(2k-1)\pi}{\alpha}}\left(b^{\frac{2(2k-1)\pi}{\alpha}}-a^{\frac{2(2k-1)\pi}{\alpha}}\right)^{-1},\quad k=1,2,3,\cdots \tag{17}$$

故可得原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}&\frac{4u_0b^{\frac{(2k-1)\pi}{\alpha}}}{(2k-1)\pi}\left(b^{\frac{2(2k-1)\pi}{\alpha}}-a^{\frac{2(2k-1)\pi}{\alpha}}\right)^{-1}\\&\times\left(\rho^{\frac{(2k-1)\pi}{\alpha}}-a^{\frac{2(2k-1)\pi}{\alpha}}\rho^{-\frac{(2k-1)\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi\varphi}{\alpha}\end{aligned} \tag{18}$$

17.12 半径为r_0的均质球，球面始终保持零度，初始时刻球内温度分布为

(1) $u|_{t=0}=f(r)$；

(2) $u|_{t=0}=f(r)\cos\theta$.

分别求解这两种初始条件下球内温度分布的变化，当$t\to\infty$时，对这两种情况的解的结果进行比较，说明其物理图像.

解 此问题是球内无热源热传导问题，采用球坐标系(r,θ,φ)，原点为球心. 并注意到球坐标系下

$$\nabla^2u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]$$

(1) 此条件下的定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2u=0,\quad r<r_0,\ t>0\\ u|_{r=r_0}=0\\ |u|<\infty\\ u|_{t=0}=f(r)\end{cases} \tag{1}$$

由边界条件和初始条件的分析可知，温度u与θ和φ无关，即$u=u(r,t)$. 由分离变量法，设

$$u(r,t)=R(r)T(t) \tag{2}$$

代入方程，有

$$R\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}-a^2T\left(\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{3}$$

令

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{1}{R}\left(R''+\frac{2}{r}R'\right)=-\lambda,\quad \lambda>0 \tag{4}$$

可得$T(t)$的方程

$$T'+\lambda a^2T=0 \tag{5}$$

和$R(r)$的方程

$$R''+\frac{2}{r}R'+\lambda R=0 \tag{6}$$

此方程为零阶球贝塞尔方程，其解为零阶球贝塞尔函数$\mathrm{j}_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$和零阶球诺伊曼函数$\mathrm{n}_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$，由于自然边界条件要求$u$在$r=0$处有限，故去掉$\mathrm{n}_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$. 因此方程(6)的解的形式为

$$R(r)=\mathrm{j}_0\left(\sqrt{\lambda}r\right) \tag{7}$$

方程(6)和(1)中的边界条件$u(r_0,t)=0\Leftrightarrow R(r_0)=0$，构成 S-L 本征值问题.

由于

$$\mathrm{j}_0(x)=\frac{\sin x}{x} \tag{8}$$

则由边界条件$R(r_0)=0$，有

$$\mathrm{j}_0\left(\sqrt{\lambda}r_0\right)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}r_0\right)}{\left(\sqrt{\lambda}r_0\right)}=0 \tag{9}$$

可得本征值λ为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{10}$$

其相应的本征函数为

$$\begin{aligned}R_n(r)&=\mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right)\\&=\frac{\sin\dfrac{n\pi r}{r_0}}{\dfrac{n\pi r}{r_0}}=\frac{r_0}{n\pi r}\sin\frac{n\pi r}{r_0}\end{aligned} \tag{11}$$

把(10)式中的本征值λ_n代入$T(t)$的方程(5)中，得到解

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{r_0}\right)^2t} \tag{12}$$

则有

$$\begin{aligned} u_n(r,t) &= C_n \mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{r_0}\right)^2 t} \\ &= C_n \frac{r_0}{n\pi r}\sin\frac{n\pi r}{r_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{r_0}\right)^2 t} \end{aligned} \tag{13}$$

原定解问题解的形式为

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{r_0}{n\pi r}\sin\frac{n\pi r}{r_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{r_0}\right)^2 t} \tag{14}$$

由定解问题(1)中的初始条件，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{r_0}{n\pi r}\sin\frac{n\pi r}{r_0}=f(r) \tag{15}$$

将 $f(r)$ 在正交函数系 $\left\{\mathrm{j}_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right),\ n=1,2,3,\cdots\right\}$ 上展开，

$$\begin{aligned} f(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{j}_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{r_0}{n\pi r}\sin\frac{n\pi r}{r_0} \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$f_n=\frac{1}{\left[\mathrm{N}_n^0\right]^2}\int_0^{r_0} f(r)\mathrm{j}_0\left(\frac{n\pi}{r_0}r\right)r^2\mathrm{d}r \tag{17}$$

归一化常数

$$\left[\mathrm{N}_n^0\right]^2=\int_0^{r_0}\mathrm{j}_0^2\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right)r^2\mathrm{d}r=\frac{r_0^2}{n^2\pi^2}\int_0^{r_0}\left(\sin\frac{n\pi r}{r_0}\right)^2\mathrm{d}r \tag{18}$$

令 $x=\dfrac{n\pi r}{r_0}$，有

$$\begin{aligned} \left[\mathrm{N}_n^0\right]^2 &= \frac{r_0^3}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x \\ &= \frac{r_0^3}{n^3\pi^3}\frac{1}{2}\int_0^{n\pi}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{r_0^3}{2n^2\pi^2} \end{aligned}$$

由(15)、(16)式可得

$$C_n = f_n \tag{19}$$

故得到原定解问题的解为

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{r_0}{n\pi r}\sin\frac{n\pi r}{r_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{r_0}\right)^2 t} \tag{20}$$

其中 f_n 由(17)、(18)式给出.

由上式可以看出，当 $t\to\infty$ 时，$u(r,t)\to 0$，即最终的温度与边界的温度相同. 初始的温度分布 $f(r)$ 只在开始后的一段时间内起作用.

(2) 依题意分析，温度分布与 φ 无关，$u=u(r,\theta,t)$. 定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=0, \quad r<r_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ t>0 \\ u\big|_{r=r_0}=0 \\ |u|<\infty \\ u\big|_{t=0}=f(r)\cos\theta \end{cases} \tag{21}$$

方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]=0 \tag{22}$$

先把空间变量和时间变量分离，设 $u(r,\theta,t)=U(r,\theta)T(t)$，由方程有

$$\frac{1}{a^2T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{U}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]=-\lambda, \quad \lambda>0 \tag{23}$$

得 $T(t)$ 的方程

$$T'+\lambda a^2 T=0 \tag{24}$$

其解的形式为

$$T(t)=C\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}a^2 t} \tag{25}$$

空间部分的方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\lambda U=0 \tag{26}$$

进一步分离变量，令 $U(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，有

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda r^2=-\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=l(l+1) \tag{27}$$

其中 $l=0,1,2,3,\cdots$.

由上式可得 $\Theta(\theta)$ 的方程为勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\Theta=0 \tag{28}$$

此方程与自然边界条件构成 S-L 本征值问题，其解为

$$\Theta_l(\theta)=\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad l=0,1,2,\cdots \tag{29}$$

同时得 $R(r)$ 的方程为球贝塞尔方程

$$R_l''+\frac{2}{r}R_l'+\left[\lambda-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l=0 \tag{30}$$

其解为 l 阶球贝塞尔函数，由自然边界条件 $|R|<\infty$ 的要求，舍弃球内发散的 $\mathrm{n}_l\left(\sqrt{\lambda}r\right)$，故有

$$R_l(r)=\mathrm{j}_l\left(\sqrt{\lambda}r\right) \tag{31}$$

故 $u(r,\theta,t)$ 的形式为

$$u(r,\theta,t)=\sum_{l=0}^{\infty}C\mathrm{P}_l(\cos\theta)\mathrm{j}_l\left(\sqrt{\lambda}r\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t} \tag{32}$$

考虑到初始条件的形式 $u\big|_{t=0}=f(r)\cos\theta$，$\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 只能取 $l=1$，即

$$u(r,\theta,t)=C\cos\theta\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t} \tag{33}$$

即(31)式只能是一阶球贝塞尔函数

$$R_1(r)=\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda}r\right) \tag{34}$$

由边界条件 $R(r_0)=0$ 定本征值 λ，由于

$$\mathrm{j}_1(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\frac{3}{2}}(x)$$

故可得

$$\lambda_n^{(1)}=\left[\frac{x_n^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{r_0}\right]^2,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{35}$$

其中 $x_n^{\left(\frac{3}{2}\right)}$ 是 $\mathrm{J}_{\frac{3}{2}}(x)$ 的第 n 个零点.

所以有

$$R_n(r)=\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right) \tag{36}$$

故原定解问题解 $u(r,\theta,t)$ 的形式为

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\theta\,\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n^{(1)}}t} \tag{37}$$

由初始条件定系数 C_n，与题(1)相仿，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\theta\,\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right)=f(r)\cos\theta$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right)=f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right) \tag{38}$$

可得

$$C_n=f_n=\frac{1}{\left[\mathrm{N}_n^{(1)}\right]^2}\int_0^{r_0}f(r)\,\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right)r^2\mathrm{d}r \tag{39}$$

其中

$$\left[\mathrm{N}_n^{(1)}\right]^2=\int_0^{r_0}\left[\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right)\right]^2r^2\mathrm{d}r \tag{40}$$

故原定解问题的解为

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cos\theta\,\mathrm{j}_1\left(\sqrt{\lambda_n^{(1)}}r\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n^{(1)}}t} \tag{41}$$

$\lambda_n^{(1)}$ 的值由(35)式给出.

从上式可以看出，当 $t\to\infty$ 时，$u\to 0$，即与边界的温度相同. 从这两题可知，如果边界是一个恒定的温度，最终球的温度分布与边界的温度相同. 如果球的边界是一种给定的温度分布，球的温度分布会形成较复杂的，与边界温度分布相关的一种稳定分布. 当然，如果球内的初始温度部分与边界温度的差很大，就不能用线性热传导方程来描述，而且可能会有非线性的热传导现象发生，那是另一类的物理问题.

注： $\mathrm{j}_1(x)$ 可以表示为

$$\mathrm{j}_1(x)=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x)$$

和题(1)相仿，可将此形式代入，但作级数展开和积分都较复杂，有兴趣的读者可参照题(1)的方法进行练习.

第十八章　格林函数法

内 容 提 要

一、二阶线性常系数微分算符的基本解和格林函数的定义

1. 二阶线性常系数微分算符的基本解

对于二阶线性常系数偏微分方程

$$Lu(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^{n+1},\ n\leqslant 3$$

其中 L 为二阶微分算符，其形式为

$$L=a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}+b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c,\quad i,j=0,1,2,3$$

算符 L 的基本解 G_0 满足的方程为

$$LG_0(x;x')=\delta(x-x')$$

则方程解的形式为

$$u(x)=u_0(x)+\int f(x')G_0(x;x')\mathrm{d}x'$$

其中 $u_0(x)$ 是相应的齐次方程的解，即

$$Lu_0(x)=0$$

2. 具体边界条件下格林函数的定义

函数 $G(x;x')$ 满足具体边界条件 *B.C.* 的点源方程

$$\begin{cases}LG(x;x')=\delta(x-x')\\ B.C.\end{cases}$$

则称 $G(x;x')$ 为在边界条件 *B.C.* 下，算符 L 的**格林函数**. 一般情况下 *B.C.* 为第一、二、三类边界条件.

注：算符的基本解在物理学中通常也称为格林函数，是无界空间的格林函数. 而我们这里所说的格林函数，是指满足一定边界条件的格林函数.

二、拉普拉斯算符的基本解

不同维数下拉普拉斯算符的基本解如下.

(1) 三维拉普拉斯算符的基本解 $G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 为

$$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

其满足方程

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

(2) 二维拉普拉斯算符的基本解 $G_0(x,y;x',y')$ 为

$$G_0(x,y;x',y')=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

其满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G_0(x,y;x',y')=\delta(x-x')\delta(y-y')$$

(3) 一维拉普拉斯算符的基本解 $G_0(x;x')$ 为

$$G_0(x;x')=\frac{1}{2}|x-x'|$$

其满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_0(x;x')=\delta(x-x')$$

三、拉普拉斯算符的格林函数

1. $\mathbf{R}^3$ 空间 Ω 区域上的拉普拉斯算符的格林函数

满足定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ \left(G+\beta\dfrac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=0\end{cases},\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$$

的解 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 称为 Ω 上的拉普拉斯算符的格林函数. Ω 及 $\partial\Omega$ 为格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 所定义的区域，n 为 $\partial\Omega$ 的外法向.

对于 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$ 空间 Ω 区域上的格林函数的定义与以上的定义类似.

注意： 边界条件为第一类($\beta=0$)和第三类齐次边界条件，第二类边界条件格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 不存在.

为解得此格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$，必须构造满足下面定解条件的光滑函数 $g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$：

$$\begin{cases}\nabla^2 g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=0 \\ \left(g+\beta\dfrac{\partial g}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=-\left(G_0+\beta\dfrac{\partial G_0}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}\end{cases},\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in\Omega\subset\mathbf{R}^3$$

G_0是已知的拉普拉斯算符的基本解，由此可解得函数$g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$，则

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

为我们所求的拉普拉斯算符的格林函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$.

2. 对第一类非齐次边界条件的泊松方程的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in\Omega\subset\mathbf{R}^3 \\ u(\boldsymbol{r})\big|_{\partial\Omega}=\varphi(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0\in\partial\Omega\end{cases}$$

解的表达式为

$$u(\boldsymbol{r})=-\int_\Omega G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'-\int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\sigma'$$

3. 对第三类非齐次边界条件的泊松方程的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in\Omega\subset\mathbf{R}^3 \\ \left(u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=\varphi(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0\in\partial\Omega\end{cases}$$

解的表达式为

$$u(\boldsymbol{r})=-\int_\Omega G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'+\frac{1}{\beta}\int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\sigma'$$

四、拉普拉斯算符的镜像格林函数法

此方法用于求解点源分布具有几何对称性的边界问题下的格林函数.

常见的用镜像格林函数法来求解的边界为：

(1) 二维系统的边界为直线或圆周；

(2) 三维系统的边界为平面或球面.

五、亥姆霍兹算符的基本解

三维空间亥姆霍兹算符的基本解$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$满足的方程为

$$\left(\nabla^2+k^2\right)G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

基本解$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$有三种不同的解

$$G_0^+(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$G_0^-(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$G_0^0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{\cos\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

对这三种解，具体取哪一种解的形式，要看问题的物理意义而定.

六、输运算符的基本解

输运算符的基本解 $G_0(x,t;x',t')$，$x\in\mathbf{R}^n, n\leqslant 3, t>0$，满足

$$\begin{cases}\left(\partial_t-a^2\nabla^2\right)G_0(x,t;x',t')=\delta(x-x')\delta(t-t')\\ G_0\big|_{t=0}=0\end{cases},\quad x\in\mathbf{R}^n,\ n\leqslant 3,\ t>0$$

(1) 一维输运算符的基本解 $G_0(x,t;x',t')$

$$G_0(x,t;x',t')=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t')$$

(2) 二维输运算符的基本解 $G_0(x,y,t;x',y',t')$

$$G_0(x,y,t;x',y',t')=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t')$$

(3) 三维输运算符的基本解 $G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$

$$G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\right)^3\mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t')$$

注： 对非齐次输运方程的定解问题，用输运算符的格林函数进行求解，视具体的边界条件而定.

七、波动算符的基本解

三维空间中波动算符的基本解 $G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 满足

$$\left(\partial_t^2-a^2\nabla^2\right)G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$$

基本解 $G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 有两种解：

(1) 物理上称为超前格林函数的 $G_0^+(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$

$$G_0^+(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\delta\left(t-t'+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)$$

(2) 物理上称为推迟格林函数的 $G_0^-(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$

$$G_0^-(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)$$

注：对非齐次波动方程的定解问题，用波动算符的格林函数进行求解，视具体的边界条件而定；而对无穷边界的问题，在基本解的基础上，由定解问题的物理条件去选择上述两种解中的一种，进行求解.

习 题 详 解

18.1　两个相距为 a 、均接地的理想导体平面，两平行导体的平面间放置一带电为 q 的点电荷，电荷距离下平面为 b ，$b<a$ ，求导体间的电势分布(**提示**：用镜像法求解).

解　取直角坐标系，$z=0$ 和 $z=a$ 的平面为理想导体平面且均接地，点电荷 q 置于 z 轴上 $z=b\,(0<b<a)$ 处，即 q 的坐标为 $(0,0,b)$ ，此点电荷产生的电势 $u(x,y,z)$ 满足的定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2u(x,y,z)=q\delta(x)\delta(y)\delta(z-b)\\ u(x,y,0)=0\\ u(x,y,a)=0\end{cases}\tag{1}$$

在两平板间的观察点 $P(x,y,z)$ 的电势由点电荷的格林函数描述

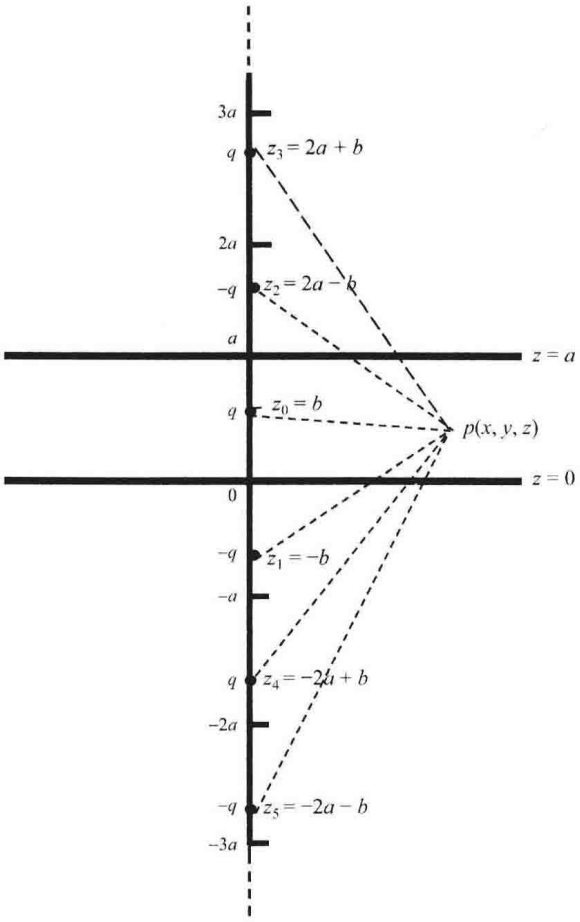
$$\begin{cases}\nabla^2G(x,y,z;0,0,b)=q\delta(x)\delta(y)\delta(z-b)\\ G(x,y,z;0,0,0)=0\\ G(x,y,z;0,0,a)=0\end{cases}\tag{2}$$

要直接解出满足此边界条件的格林函数是比较困难的，我们采取镜像法解.

如题 18.1 图，$z=0$ 和 $z=a$ 是两个镜面，在 $z_0=b$ 处的点电荷 q 在 $0<z<a$ 间任一点 $P(x,y,z)$ 所产生的电势为

$$u_0=\frac{-q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\tag{3}$$

以 $z=0$ 为镜面，由对称性构造镜像电荷，即在 $z_1=-b$ 处放置一个电荷 $-q$ ，则此点电荷在 $P(x,y,z)$ 点产生的电势为



题 18.1 图

$$u_1 = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}} \tag{4}$$

这两个点电荷产生的电势满足边界条件 $u(x,y,0)=0$，但不满足边界条件 $u(x,y,a)=0$. 为了满足边界条件 $u(x,y,a)=0$，我们以 $z=a$ 为镜面，构造 z_0，z_1 的镜像电荷，即在 $z_2=2a-b$ 处放置点电荷 $-q$，在 $z_3=2a+b$ 处放置点电荷 q，它们在 P 点产生的电势为

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2a-b)\right]^2}} \\ u_3 &= \frac{-q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2a+b)\right]^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

则有

$$u=u_0+u_1+u_2+u_3$$

可知其满足边界条件$u(x,y,a)=0$.

重复以上镜像电荷的构造过程直至无穷，我们可得到满足两个边界条件的P点电势为

$$u(x,y,z)=\frac{-q}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na+b)\right]^2}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na-b)\right]^2}}\right\} \tag{6}$$

对于每一个n，(6)式括号中的两项分别代表一对镜像电荷产生的电势.

首先说明这个级数是收敛的. 先从物理上分析，除$n=0$中的(1)式的u_0在$z=b$点是奇点(这是由于点电荷的物理模型所产生的奇异性，而这个奇异性用δ函数来表述)，对于其他镜像电荷，在$0\leqslant z\leqslant a$的区域中是不存在奇异性的.

因此可以看出(6)式的级数中镜像电荷的各项，对于同一个n的一对镜像电荷，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na+b)\right]^2}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na-b)\right]^2}}\right|\\&\leqslant\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na+b)\right]^2}}\right|+\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na-b)\right]^2}}\right|\end{aligned} \tag{7}$$

由于

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na+b)\right]^2}}\right|\leqslant\frac{1}{(2n-1)a} \tag{8}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na-b)\right]^2}}\right|\leqslant\frac{1}{2(n-1)a},\quad n>1 \tag{9}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na+b)\right]^2}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+y^2+\left[z-(2na-b)\right]^2}}\right|\\&\leqslant\frac{1}{(2n-1)a}+\frac{1}{2(n-1)a}\leqslant\frac{1}{(2n-1)a}\end{aligned} \tag{10}$$

因此，(6)式中为交错项级数，在$n>1$后，级数是收敛的.

我们通过以 $z=0$ 和 $z=a$ 为镜面的无穷多次的镜像映射后得到了在边界条件 $u(x,y,0)=0,\ u(x,y,a)=0$ 下的原定解问题的解为(6)式.

18.2　一半径为 a 的导体球壳接地，在球外距球心为 b 处 $(b>a)$ 放置一点电荷 q，试用镜像法求电场的分布，并求出导体球壳表面感应电荷的分布，进而证明此电荷分布等价于球内的镜像电荷.

解　连接球心 O 和 b 点，并以此为极轴. 由题意可知此问题的电荷分布是以此极轴为对称的，电势的分布与 φ 角无关. 任何过极轴的平面与球面截得的二维问题即为以 a 为半径的圆周上电势为零的圆上的泊松问题(见教材第 308 页的例 18.4.2). 我们很容易求得球内在极轴上的 b 点的共轭点 c (到球心的距离为 c)

$$cb=a^2 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{a^2}{b} \tag{1}$$

并可求得在 c 的电荷 q'

$$\frac{q'}{a-c}+\frac{q}{b-a}=0 \tag{2}$$

即

$$q'=-\frac{a}{b}q \tag{3}$$

因此，可求得球内的镜像电荷为 $q'=-\dfrac{a}{b}q$，其位置在极轴上距离球心为 $c=\dfrac{a^2}{b}$ 处.

对球外任一点 $\boldsymbol{r}(r>a)$ 的电势为

$$u(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\theta}}$$

即

$$u(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}-\frac{a}{b}\frac{q}{\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\theta}} \tag{4}$$

则电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=-\nabla u=&-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}-\frac{q}{\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{a^2}r^2-2br\cos\theta}}\right)\boldsymbol{e}_r\\&-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}-\frac{q}{\sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{a^2}r^2-2br\cos\theta}}\right)\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned} \tag{5}$$

在导体球表面 $r=a$ 处，电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=&-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}-\frac{q}{\sqrt{a^2+\frac{b^2}{a^2}r^2-2br\cos\theta}}\right)_{r=a}\boldsymbol{e}_r\\&-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}-\frac{q}{\sqrt{a^2+\frac{b^2}{a^2}r^2-2br\cos\theta}}\right)_{r=a}\boldsymbol{e}_\theta\\=&q\left[\frac{a-b\cos\theta}{\left(b^2+a^2-2ba\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\frac{b^2}{a}-b\cos\theta}{\left(b^2+a^2-2ba\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\boldsymbol{e}_r\\=&-\frac{q}{a}\frac{b^2-a^2}{\left(b^2+a^2-2ba\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_r\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的分量为零，这符合电场垂直导体表面的物理规律.

由静电学可知，取介电常数 $\varepsilon_0=1$，在导体球表面的面电荷密度为

$$\begin{aligned}\sigma_q(\theta,\varphi)=E=&-\frac{q}{a}\frac{b^2-a^2}{\left(b^2+a^2-2ba\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\\=&-\frac{q}{b^3a}\frac{b^2-a^2}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{7}$$

则球面的总电荷为

$$\begin{aligned}Q=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sigma_q(\theta,\varphi)a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\=&-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{q}{a}\frac{b^2-a^2}{\left(b^2+a^2-2ba\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\=&-\frac{qa}{2}\left(b^2-a^2\right)\int_0^{\pi}\frac{-1}{\left(b^2+a^2-2ba\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\cos\theta\end{aligned}$$

令 $x=\cos\theta$，有

$$
\begin{aligned}
Q &= -\frac{qa}{2}\left(b^2-a^2\right)\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(b^2+a^2-2bax\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{qa}{2}\left(b^2-a^2\right)\frac{1}{ab}\left\{\left[\frac{1}{\left(b^2+a^2-2bax\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=1}-\left[\frac{1}{\left(b^2+a^2-2bax\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=-1}\right\} \\
&= -\frac{qa}{2}\left(b^2-a^2\right)\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{b-a}-\frac{1}{b+a}\right) \\
&= -\frac{qa}{b}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

故整个球面的面电荷与 c 点的点电荷是相同的.

下面需要证明球面的电荷与 c 点的点电荷在球外的空间产生的电势是等价的. 设球外空间任一点 P，原点到 P 点的距离为 $\overline{OP}(r_0,\theta_0,\varphi_0)=|\boldsymbol{r}_0|=r_0$，由于 c 点在 z 轴上，则 c 点的电荷在 P 点产生的电势为

$$
\begin{aligned}
u(r_0,\theta_0,\varphi_0) &= -\frac{qa}{b}\frac{1}{\sqrt{c^2+r_0^2-2cr_0\cos\theta_0}} \\
&= -\frac{qa}{br_0}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{c}{r_0}\right)^2-2\dfrac{c}{r_0}\cos\theta_0}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

由于 $c=\dfrac{a^2}{b}$，代入上式，有

$$
\begin{aligned}
u(r_0,\theta_0,\varphi_0) &= -\frac{qa}{br_0}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a^2}{br_0}\right)^2-2\dfrac{a^2}{br_0}\cos\theta_0}} \\
&= -\frac{qa}{br_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{br_0}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta_0)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

另一方面，要证明球面上的电荷分布在 $\boldsymbol{r}_0$ 点产生的电势与(10)式等价. 对球面上的任一点 $Q(a,\theta,\varphi)$，其面元为 $\mathrm{d}\sigma=a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，该面元的面电荷密度 $\sigma_q(\theta,\varphi)$ 由(7)式给出. 该点 Q 与 $P(r_0,\theta_0,\varphi_0)$ 点的距离为 $d=\overline{QP}$，设 $\overline{OQ}$ 与 $\overline{OP}$ 的夹角为 γ，则

$$
d=\left(r_0^2+a^2-2r_0a\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}
$$

故Q点的面元在P点产生的电势为

$$u_Q=\frac{\sigma_q(\theta,\varphi)\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{r_0^2+a^2-2r_0a\cos\gamma}}=\frac{1}{r_0}\frac{\sigma_q(\theta,\varphi)\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{r_0^2}-2\dfrac{a}{r_0}\cos\gamma}}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r_0^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\gamma)\sigma_q(\theta,\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{12}$$

由加法公式，有

$$\mathrm{P}_l(\cos\gamma)=\mathrm{P}_l(\cos\theta_0)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$
$$+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta_0)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos\left[m(\varphi-\varphi_0)\right] \tag{13}$$

考虑到由于(7)式的$\sigma_q(\theta,\varphi)$与φ无关，故由(12)式对整个球面进行积分时，(13)式右边第二项的积分中对φ的积分有

$$\int_0^{2\pi}\cos\left[m(\varphi-\varphi_0)\right]\mathrm{d}\varphi=0 \tag{14}$$

故此项积分为零.

将(13)、(14)式代入(12)式，并对整个球面积分，有

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r_0^{l+1}}\int_{\Sigma}\mathrm{P}_l(\cos\theta_0)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sigma_q(\theta,\varphi)\mathrm{d}\sigma \tag{15}$$

其中Σ表示半径为a的球面.

把$\sigma_q(\theta,\varphi)$的表达式代入(15)式中

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r_0^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta_0)$$
$$\times 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\frac{q}{b^3a}\frac{\left(b^2-a^2\right)}{\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}-2\dfrac{a}{b}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=-\frac{qa\left(b^2-a^2\right)}{2b^3}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r_0^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta_0) \tag{16}$$
$$\times\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\frac{1}{\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}-2\dfrac{a}{b}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

先计算等式右边的积分，有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \\
&= -\int_0^{\pi} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\cos\theta \\
&= \frac{-b}{a}\int_0^{\pi} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \mathrm{d}\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-b}{a}\int_0^{\pi} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \mathrm{d}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{b^k}\mathrm{P}_k(\cos\theta)\right) \\
&= \frac{-b}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{b^k}\int_0^{\pi} \mathrm{P}_l(\cos\theta)\mathrm{P}_k'(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)
\end{aligned} \tag{17}
$$

令 $x=\cos\theta$

$$
I = \frac{b}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{b^k}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{d}x \tag{18}
$$

由于 $\mathrm{P}_k'(x)$ 是 x 的 $k-1$ 次多项式，对(18)式中的积分而言，当 $k \leqslant l$ 时，有

$$
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{19}
$$

当 $k>l$ 时，

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\Big|_{-1}^{1} = 1-(-1)^{k+l}
\end{aligned} \tag{20}
$$

其中此等式右边第二项积分为零的理由与(19)式同. 因此(20)式可写成

$$
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2, & k=l+2n+1, \quad n=0,1,2,\cdots \\ 0, & k\neq l+2n+1, \quad n=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{21}
$$

故(18)式为

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{2b}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{l+2n+1}}{b^{l+2n+1}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{l+2n}}{b^{l+2n}} = \frac{2a^l}{b^l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{b^{2n}} \\
&= \frac{2a^l}{b^l}\frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2a^l}{b^l}\frac{b^2}{b^2-a^2}, \quad 0<\frac{a}{b}<1
\end{aligned} \tag{22}
$$

则(16)式变为

$$\begin{aligned} u(r_0,\theta_0,\varphi_0) &= -\frac{qa\left(b^2-a^2\right)}{2b^3}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r_0^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta_0)\frac{2a^l}{b^l}\frac{b^2}{b^2-a^2} \\ &= -\frac{qa}{br_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l}}{b^l r_0^l}\mathrm{P}_l(\cos\theta_0) \end{aligned} \tag{23}$$

这与镜像电荷在 P 点产生的电势的表达式(10)相同. 因此说明了导体球壳表面感应电荷的分布等价于球内的镜像电荷.

18.3　用格林函数法求解第一类边值问题的球内拉普拉斯方程的解

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & r < a \\ u\big|_{r=a} = \cos\theta \end{cases}$$

解　本题是典型的用球坐标系下分离变量法求解的题型. 本题如果用格林函数法解，就显得比较烦琐，但格林函数法是我们要掌握的方法之一，特别是在一些较复杂的边界条件中尤为重要.

从物理上分析，在球内没有电荷，且球面不是等势面，说明是介质球面(非导体球面)，球面上的电势是由球外的电荷产生的，且与 φ 角无关. 最简单的方法是取定极轴，设在极轴 $b(b>a)$ 处有一电量为 q 的点电荷(或是存在与 φ 角无关的外场)，其在球面上的势与 φ 角无关，至于能否产生 $u\big|_{r=a}=\cos\theta$ 这种形式的势，只能通过求解给定的定解问题，看是否有解再定.

对于给定的定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & r < a \\ u\big|_{r=a} = \cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

注意：我们要求解的问题是拉普拉斯方程的球内区域的问题.

一般用格林函数方法求解带有源项的非齐次方程，例如，三维空间中求解泊松方程.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in\Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

我们可以由拉普拉斯算符的基本解，构造满足齐次边界条件的格林函数

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), & \boldsymbol{r}\in\Omega \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

求得此格林函数，则泊松方程(2)的解可表示为

$$u(\boldsymbol{r}) = -\int_{\Omega} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}\sigma' \tag{4}$$

详见教材(18.3.28)式.

对于本题所求解的球内拉普拉斯方程的问题，由于 $f(\boldsymbol{r})=0$，故上式右边的第一项积分为零，其解只有第二项的表达式. 构造满足齐次边界条件的格林函数

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), & r<a\\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a}=0\end{cases} \tag{5}$$

可直接利用上题的方法和结果，但注意是球内问题，即在球内 c 点：$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'(r',\theta',\varphi')$ $(r'<a)$ 点放置一个单位电荷 $q(q=1)$，则由球面镜像对称，在其球外的共轭点 b (在 $\boldsymbol{r}'$ 的延长线上)有电荷 q'，有

$$b=\frac{a^2}{r'}=\frac{a^2}{c},\quad q'=-\frac{a}{r'}q=-\frac{a}{c}q$$

则由几何图形可知，b、c 两个点的(都用 r' 表示)电荷，对球内任一点 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ $(r<a)$ 产生的势场(取介电常数 $\varepsilon_0=1$)满足(5)式的格林函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}-\frac{a}{r'}\frac{1}{\sqrt{r^2+\dfrac{a^4}{r'^2}-2\dfrac{a^2}{r'}r\cos\gamma}}\right) \tag{6}$$

其中 γ 为 $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角，并有如下关系(仅给出此关系，解题中没用到此关系)：

$$\begin{aligned}\cos\gamma&=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{rr'}\\&=\frac{\left(r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x+r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y+r\cos\theta\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(r'\sin\theta'\cos\varphi'\boldsymbol{e}_x+r'\sin\theta'\sin\varphi'\boldsymbol{e}_y+r'\cos\theta'\boldsymbol{e}_z\right)}{rr'}\\&=\sin\theta\cos\varphi\sin\theta'\cos\varphi'+\sin\theta\sin\varphi\sin\theta'\sin\varphi'+\cos\theta\cos\theta'\\&=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\end{aligned} \tag{7}$$

由于格林函数中 r 与 r' 的对称性，由上式也可看出

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}-\frac{a}{r}\frac{1}{\sqrt{r'^2+\dfrac{a^4}{r^2}-2\dfrac{a^2}{r}r'\cos\gamma}}\right) \tag{8}$$

故有

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}=\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r'}$$

$$=\frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}-\frac{a}{r}\frac{1}{\sqrt{r'^2+\dfrac{a^4}{r^2}-2\dfrac{a^2}{r}r'\cos\gamma}}\right)$$

$$=\frac{-q}{4\pi}\left[\frac{r'-r\cos\gamma}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\dfrac{ar'}{r}-\dfrac{a^3}{r^2}\cos\gamma}{\left(r'^2+\dfrac{a^4}{r^2}-2\dfrac{a^2}{r}r'\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{9}$$

有

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r'}\right|_{r'=a}=\frac{-q}{4\pi}\left[\frac{a-r\cos\gamma}{\left(r^2+a^2-2ar'\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\dfrac{r^2}{a}-r\cos\gamma}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{-q\left(a^2-r^2\right)}{4\pi a}\cdot\frac{1}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

则利用(4)式，即可得拉普拉斯方程(1)的解

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{q\left(a^2-r^2\right)}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\frac{\cos\theta'}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}a^2\sin\theta' \tag{11}$$

首先考虑对$\dfrac{a^2-r^2}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}$的计算，由于$r<a$，有

$$\frac{1}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\gamma) \tag{12}$$

由(12)式，对r求导，有

$$\frac{-r+a\cos\gamma}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}l\frac{r^{l-1}}{a^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\gamma) \tag{13}$$

由(12)式，对a求导，有

$$\frac{-a+r\cos\gamma}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}=-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{r^l}{a^{l+2}}\mathrm{P}_l(\cos\gamma) \tag{14}$$

由 $r\times(13)-a\times(14)$，可得

$$\frac{a^2-r^2}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{r^l}{a^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\gamma) \tag{15}$$

把(15)式代入(11)式，可得

$$u(\boldsymbol{r})=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^l}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\cos\theta'\frac{2l+1}{4\pi}\mathrm{P}_l(\cos\gamma) \tag{16}$$

由加法公式

$$\mathrm{P}_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{l,m}^{*}(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{17}$$

考虑到

$$\cos\theta'=\mathrm{P}_1(\cos\theta')=\mathrm{Y}_{1,0}(\theta',\varphi') \tag{18}$$

(16)式变为

$$u(\boldsymbol{r})=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^l}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\mathrm{Y}_{l,m}^{*}(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{1,0}(\theta,\varphi) \tag{19}$$

由球函数的正交关系

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\mathrm{Y}_{l,m}^{*}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l',m'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{20}$$

由(19)式得到由格林函数法求解定解问题(1)的解为

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r})&=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^l}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)\delta_{1l}\delta_{0m}\\&=q\frac{r}{a}\mathrm{Y}_{1,0}(\theta,\varphi)\\&=\frac{r}{a}\cos\theta\end{aligned} \tag{21}$$

其中，$q=1,\ \mathrm{Y}_{1,0}(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_1(\cos\theta)=\cos\theta$.

由此可见，(21)式与直接用分离变量法得到的解是一致的.

注： 此题也可以不必用到球函数，在(16)式后直接用

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_l(\cos\gamma)=&\mathrm{P}_l(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta')\\&+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\cos\left[m(\varphi-\varphi')\right]\end{aligned} \tag{22}$$

利用(22)式，在(16)式中，考虑到对 φ' 的积分，在 $m\neq0$ 时积分为零[参见 18.2

题第(13)、(14)式]，而当 $m=0$ 时 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'=2\pi$，有

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r})&=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^l}\frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\cos\theta'\mathrm{P}_l(\cos\gamma)\\&=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^l}\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\cos\theta'\mathrm{P}_l(\cos\theta')\end{aligned}\tag{23}$$

然后利用勒让德多项式的正交关系

$$\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\mathrm{P}_k(\cos\theta')\mathrm{P}_l(\cos\theta')=\delta_{kl}\tag{24}$$

且 $\cos\theta'=\mathrm{P}_1(\cos\theta')$，我们可得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r})&=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^l}\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin\theta'\mathrm{P}_1(\cos\theta')\mathrm{P}_l(\cos\theta')\\&=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^l}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\delta_{1l}\\&=\frac{r}{a}\cos\theta,\quad q=1\end{aligned}\tag{25}$$

得到相同的结果.

附注：球上的泊松公式如下.

半径为 a 的球内的标量场 $u(\boldsymbol{r})$，满足定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u(\boldsymbol{r})=0\\u(\boldsymbol{r})\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}\tag{26}$$

则

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{a\left(a^2-r^2\right)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\frac{f(\theta',\varphi')}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\tag{27}$$

或写成

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{\left(a^2-r^2\right)}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\frac{f(\theta',\varphi')}{\left(1+\dfrac{r^2}{a^2}-2\dfrac{r}{a}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\tag{28}$$

此解称为**球上的泊松公式**. 其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$，而球面上的点为 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'(r',\theta',\varphi')$，$\gamma$ 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角.

此公式的推导由本题解中的(2)式～(11)式可得，只是本题中 $f(\theta',\varphi')=\cos\theta'$.

18.4　半径为 b 的无穷长均匀圆柱体，初始温度为 U_0，外界空间的温度为零，用格林函数法求解 t 时刻柱内空间的温度 $u(\rho,t)$.

解　依题意，取柱坐标系，问题与 z 无关，又由于初始温度分布的对称性，问题又与 φ 无关，即温度分布为 $u(\rho,t)$，可得定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right)=0, \quad \rho<b,\ t>0\\ u(b,t)=0\\ u(\rho,0)=U_0, \quad \rho<b\end{cases} \tag{1}$$

此问题是一维的热传导问题，我们可以把 $t=0$ 时刻的柱内 $\rho<b$ 的点都看作一个温度为 U_0 的瞬时热源.

令格林函数满足

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-a^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right)\right]G(\rho,t;\rho',t')=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(t-t') \tag{2}$$

此格林函数表示在 t' 时刻、在 ρ' 处有一瞬时源，在 t 时刻对柱内 ρ 处的影响.

由于问题与 φ 无关，对径向部分，在第一类齐次边界条件下，取本征函数系 $\left\{\mathrm{J}_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right),\ n=1,2,3,\cdots\right\}$，其归一化系数为 $\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2=\dfrac{b^2}{2}\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2$，其中 $x_n^{(0)}$ 为 $\mathrm{J}_0(x)$ 的零点.

将格林函数在此函数系中展开

$$G(\rho,t;\rho',t')=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t,t')\frac{2}{b^2\mathrm{J}_1^2\left(x_n^{(0)}\right)}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho'\right) \tag{3}$$

且考虑到

$$\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{b^2\mathrm{J}_1^2\left(x_n^{(0)}\right)}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho'\right) \tag{4}$$

将(3)、(4)两式代入方程，令 $x=\dfrac{x_n^{(0)}}{b}\rho$，$k_n=\dfrac{x_n^{(0)}}{b}$，并计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\mathrm{J}_0(x)&=\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_0(x)\quad\left(\mathrm{J}_{m-1}-\mathrm{J}_{m+1}=2\mathrm{J}_m'\right)\\&=k_n^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{J}_{-1}(x)-\mathrm{J}_1(x)\right)\right]\quad\left(\mathrm{J}_{-1}=-\mathrm{J}_1\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-k_n^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_1(x)\\
&=-k_n^2\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_0(x)-\mathrm{J}_2(x)\right]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\mathrm{J}_0(x)&=\frac{1}{\rho}\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_0(x)\\
&=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\right)\mathrm{J}_1(x)\\
&=-k_n^2\frac{1}{x}\mathrm{J}_1(x)\quad\left(\mathrm{J}_0+\mathrm{J}_2=\frac{2}{x}\mathrm{J}_1\right)\\
&=-k_n^2\frac{1}{2}\left(\mathrm{J}_0(x)+\mathrm{J}_2(x)\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(5)式加(6)式为$-k_n^2\mathrm{J}_0(x)$.

可得格林展开式的系数$g_n(t,t')$的方程为

$$g_n'(t,t')+a^2k_n^2g_n(t,t')=\delta(t-t') \tag{7}$$

方程两边乘上$\mathrm{e}^{a^2k_n^2t}$，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{e}^{a^2k_n^2t}g_n(t,t')\right]=\mathrm{e}^{a^2k_n^2t}\delta(t-t') \tag{8}$$

由$\mathrm{e}^{a^2k_n^2t}\delta(t-t')=\mathrm{e}^{a^2k_n^2t'}\delta(t-t')$，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{e}^{a^2k_n^2t}g_n(t,t')\right]=\mathrm{e}^{a^2k_n^2t'}\delta(t-t') \tag{9}$$

此方程的特解为

$$\mathrm{e}^{a^2k_n^2t}g_n(t,t')=\mathrm{e}^{a^2k_n^2t'}H(t-t')$$

即

$$g_n(t,t')=\mathrm{e}^{-a^2k_n^2(t-t')}H(t-t') \tag{10}$$

由上式，可看出柱内的瞬时源只在$t'=0$时存在，故上式为

$$g_n(t)=\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t}H(t)=g_n(t)=\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t},\quad t>0 \tag{11}$$

可得格林函数

$$G(\rho,t;\rho',0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{b^2\mathrm{J}_1^2\left(x_n^{(0)}\right)}\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho'\right) \tag{12}$$

此式表示在初始时刻柱内ρ'处的点源，在t时刻对柱内ρ处的温度的影响.

由于此定解问题的初始条件为$u(\rho,0)=U_0$，故解为

$$
\begin{aligned}
u(\rho,t)&=\int_0^b G(\rho,t;\rho',0)U_0\rho'\mathrm{d}\rho'\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{b^2\mathrm{J}_1^2\left(x_n^{(0)}\right)}\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\int_0^b\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho'\right)\rho'\mathrm{d}\rho'\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{b^2\mathrm{J}_1^2\left(x_n^{(0)}\right)}\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\frac{b^2}{x_n^{(0)}}\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{x_n^{(0)}\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)}\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

上式的积分计算见教材第 275 页.

注： 此题可用分离变量法求解.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\right)=0,\quad 0\leqslant\rho<b\\
u(b,t)=0\\
u(\rho,0)=U_0,\quad \rho<b
\end{cases}
\tag{1}
$$

令 $u(\rho,t)=T(t)R(\rho)$，由方程可得

$$
\frac{T'}{a^2T}=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho}+\frac{\partial^2R}{\partial\rho^2}\right)=-k^2,\quad k>0 \tag{2}
$$

故可得到两个常微分方程

$$
T'+k^2a^2T=0 \tag{3}
$$

$$
\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho}+\frac{\partial^2R}{\partial\rho^2}+k^2R=0 \tag{4}
$$

方程(4)为 0 阶贝塞尔方程，在第一类齐次边界条件及有界条件下，其解为 $\mathrm{J}_0(k\rho)$.

由定解问题(1)的边界条件有

$$
R(kb)=0 \tag{5}
$$

则有 $k_nb=x_n^{(0)}$，其中 $x_n^{(0)},n=1,2,3,\cdots$ 为 $\mathrm{J}_0(x)$ 的零点. 可得本征值为

$$
k_n=\frac{x_n^{(0)}}{b} \tag{6}
$$

其相应的归一化的本征函数为

$$
R_n(\rho)=\frac{1}{\mathrm{N}_n^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) \tag{7}
$$

其中 $\mathrm{N}_n^{(0)}$ 为归一化常数，其值为 $\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2=\dfrac{b^2}{2}\left[\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2$.

方程(3)变为

$$T_n'+k_n^2a^2T_n=0 \tag{8}$$

其解为

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-k_n^2a^2t} \tag{9}$$

则有

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)R_n(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-k_n^2a^2t}\frac{1}{\mathrm{N}_n^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) \tag{10}$$

由 $u(\rho,0)=U_0$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{1}{\mathrm{N}_n^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)=U_0 \tag{11}$$

有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_0^b\frac{1}{\mathrm{N}_n^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\frac{1}{\mathrm{N}_m^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_m^{(0)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho\\&=U_0\int_0^b\frac{1}{\mathrm{N}_m^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_m^{(0)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned} \tag{12}$$

由

$$\int_0^b\frac{1}{\mathrm{N}_n^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\frac{1}{\mathrm{N}_m^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_m^{(0)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho=\delta_{nm} \tag{13}$$

$$\int_0^b\frac{1}{\mathrm{N}_m^{(0)}}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_m^{(0)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{b^2}{x_m^{(0)}\mathrm{N}_m^{(0)}}\mathrm{J}_1\left(x_m^{(0)}\right) \tag{14}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\delta_{nm}=\frac{U_0b^2}{x_m^{(0)}\mathrm{N}_m^{(0)}}\mathrm{J}_1\left(x_m^{(0)}\right)$$

即

$$C_n=\frac{U_0b^2}{x_n^{(0)}\mathrm{N}_n^{(0)}}\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right) \tag{15}$$

故得解为

$$\begin{aligned} u(\rho,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_0b^2\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)}{x_n^{(0)}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2}\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{x_n^{(0)}\mathrm{J}_1\left(x_n^{(0)}\right)}\mathrm{e}^{-a^2k_n^2t}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\end{aligned}\tag{16}$$

18.5　侧面为绝热的无穷长细杆，初始温度为零，在$t=0$时刻，在$x=x_0$点有一瞬时热源Q，试构造该一维问题的格林函数.

解　这是一维无界空间的热传导问题. 定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0\\ u(x,0)=0,\quad x\neq x_0\\ u(x_0,0)=\dfrac{q}{c\rho\sigma}\delta(x-x_0)\end{cases}\tag{1}$$

其中，$q=\dfrac{Q}{v}$(v为点热源所占的体积)，c比热，ρ为密度，σ为细杆的截面积，注意到$\delta(x-x_0)$的量纲是长度量纲的负一次方.

因此，格林函数满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(x,t;x_0,t_0)=\delta(t-t_0)\delta(x-x_0)\tag{2}$$

对$G(x,t;x_0,t_0)$和$\delta(x-x_0)$作傅里叶变换，有

$$G(x,t;x_0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}T(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k\tag{3}$$

和

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k\tag{4}$$

由方程(2)可得

$$T'(t)+k^2a^2T(t)=\delta(t)\tag{5}$$

两边同乘$\mathrm{e}^{k^2a^2t}$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{k^2a^2t}T(t)\right)=\mathrm{e}^{k^2a^2t}\delta(t)\tag{6}$$

两边积分

$$\int_0^{t+\varepsilon} \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{k^2a^2t}T\right)=\int_0^{t+\varepsilon} \mathrm{e}^{k^2a^2t}\delta(t)\mathrm{d}t$$

可得

$$T(t)=\mathrm{e}^{-k^2a^2t} \tag{7}$$

由(3)式有

$$\begin{aligned} G(x,t;x_0,0)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(ka\sqrt{t}-\mathrm{i}\frac{x-x_0}{a\sqrt{t}}\right)^2-\frac{(x-x_0)^2}{a^2t}}\mathrm{d}k \\ &=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a\sqrt{t}\left(k-\mathrm{i}\frac{x-x_0}{a^2t}\right)^2}\mathrm{d}k \\ &=\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2t}} \end{aligned} \tag{8}$$

故可得原定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{q}{c\rho\sigma}G(x,t;x_0,0) \\ &=\frac{q}{c\rho\sigma}\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2t}} \end{aligned} \tag{9}$$

可检验，当$t\to 0, x\neq x_0$时，由洛必达法则可知

$$u(x,0)=0,\quad x\neq x_0 \tag{10}$$

与定解问题的初始条件自洽.

第十九章　其他求解方法及方程

内 容 提 要

一、积分变换法

1. 积分变换法的基本思想

把偏微分方程定解问题中的场量和源项都作积分变换，从而把场量所满足的偏微分方程的定解问题变为像函数所满足的微分方程(自变量的维数减少一维)的定解问题，可解得像函数；再由像函数反演，求得原偏微分方程的定解问题的解.

本章主要介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换求解偏微分方程的定解问题.

2. 用积分变换法解定解问题的步骤

(1) 把偏微分方程的定解问题化为关于像函数的常微分方程的定解问题；

(2) 求解关于像函数的常微分方程的定解问题或代数方程，得到像函数；

(3) 对像函数作积分逆变换，得到原定解问题的解.

注意：作像函数的反演时，要用到积分变换的有关性质、积分公式表、留数定理等；特别是遇到两个像函数相乘时的反演时需要用卷积定理求原函数；如果像函数的形式比较复杂，不能直接给出像函数的原函数时，则需要用一般像函数的反演公式.

二、行波法

此方法常用于波动方程和输运方程的定解问题中.

基本思想：对波动方程和输运方程的定解问题，用试探解的方法，假设方程中的自变量(x,t)存在行波关系，即空间变量和时间不再独立，并令$\xi=x+at$和$\eta=x-at$，则试探解的形式为$f_1(\xi)$和$f_2(\eta)$，代入方程，把偏微分变为关于ξ和η的行波方程进行求解. 如果这些行波解存在，即是我们所求的定解问题的行波解.

三、冲量定理法

冲量定理法主要用于含时间的非齐次的波动方程和输运方程的定解问题中.

基本思想：对一个初始时刻静止的系统，在某一时刻受到瞬时源的作用. 对这样的定解问题，利用牛顿定律中的冲量定理的数学表达式，把瞬时源的作用(源的大小)变为这一时刻的初始条件中的初速度，但方程变为齐次方程，这样的定解问题求解可能比较简单(视不同的问题而定).

在此基础上，一般含时的非齐次方程的定解问题，方程中的非齐次项即源项，都可以化为瞬时源的问题来处理，最后再对时间进行积分；特别对求解某些格林函数时，会用到这个方法.

四、埃尔米特方程和埃尔米特多项式

埃尔米特方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x)-2x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+2ny(x)=0$$

埃尔米特方程的解为埃尔米特多项式

$$\mathrm{H}_n=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j n!}{j!(n-2j)!}(2x)^{n-2j},\quad N=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{n-1}{2}, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

埃尔米特多项式的生成函数为

$$\mathrm{e}^{-z^2+2xz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_n(x)}{n!}z^n$$

当取 $z=1$ 时，有

$$\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{H}_n(x)$$

埃尔米特多项式的微分表达式为

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$$

埃尔米特多项式的积分表达式为

$$\mathrm{H}_n(x)=\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x+\mathrm{i}z)^n\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$$

埃尔米特多项式的正交关系为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

埃尔米特多项式的递推关系为

$$\mathrm{H}_n' = 2n\mathrm{H}_{n-1}$$
$$\mathrm{H}_{n+1} = 2x\mathrm{H}_n - 2n\mathrm{H}_{n-1}$$
$$n\mathrm{H}_n = -n\mathrm{H}_{n-1}' + x\mathrm{H}_n'$$
$$\mathrm{H}_n = 2x\mathrm{H}_{n-1} - \mathrm{H}_{n-1}'$$

习 题 详 解

19.1　分别用傅里叶变换法和拉普拉斯变换法求解下面一维无界空间中的输运问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

解　(1) 用傅里叶变换法解. 对定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{1}$$

令 $u(x,t)$ 的傅里叶变换为 $U(\omega,t) = F\left[u(x,t)\right]$，有

$$U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{3}$$

注意： 这里的 ω 只是个参数，它不表示频率，从物理上看，它的量纲是 $[\mathrm{L}]^{-1}$.

将(3)式代入(1)式中的方程，得

$$U_t + a^2\omega^2 U = 0 \tag{4}$$

可得解为

$$U(\omega,t) = C(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t} \tag{5}$$

由(1)式中的定解条件，$\varphi(x)$ 为已知函数，有 $\Phi(\omega) = F\left[\varphi(x)\right]$，即

$$\begin{cases} \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\ \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \end{cases} \tag{6}$$

由初始条件和(2)、(5)两式，可得

$$C(\omega) = \Phi(\omega) \tag{7}$$

即(5)式的解为

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t} \tag{8}$$

可以把$U(\omega,t)$看作是两个傅里叶的像函数的乘积. 由于

$$\begin{aligned}F^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\right]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t+\mathrm{i}\omega x+\frac{x^2}{4a^2t}-\frac{x^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(a\omega\sqrt{t}-\mathrm{i}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\end{aligned} \tag{9}$$

其中最后一步积分为高斯积分，我们求出了$\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}$的原函数.

由卷积定理，可得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi(x)*\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right)\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{10}$$

(2) 用拉普拉斯变换求解：

对定解问题(1)，设$u(x,t)$的拉普拉斯变换为

$$U(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}\,p>0$$

即

$$u(x,t)\doteqdot U(x,p) \tag{11}$$

而$\varphi(x)$不含t，不进行拉普拉斯变换. 将上述变换代入方程，得

$$pU(x,p)-\varphi(x)-a^2\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}=0 \tag{12}$$

可写成

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}-\frac{p}{a^2}U(x,p)=-\frac{1}{a^2}\varphi(x) \tag{13}$$

此方程可看成$U(x,p)$对x的非齐次常微分方程，而p只是一个参数. 方程(13)的解为其对应的齐次方程的通解加非齐次方程的特解.

其对应的齐次方程的两个线性无关的解的形式为

$$U(x,p)\sim \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} \text{ 和 } U(x,p)\sim \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

则通解为

$$U(x,p)=C_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{14}$$

由于自然边界条件要求

$$\left|U(x,p)\right|<\infty,\quad x\to\pm\infty \tag{15}$$

故 $C_1=C_2=0$.

现在要求出方程(13)的特解，一般用常数变易法，即把通解中的常数变为函数代入非齐次方程求出此函数.

在(14)式中，令方程的特解为

$$U(x,p)=C_1(x,p)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_2(x,p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{16}$$

为计算方便，我们记

$$U'(x,p)=\frac{\partial}{\partial x}U(x,p),\quad U''(x,p)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,p),\quad C_1'(x,p)=\frac{\partial}{\partial x}C_1(x,p)$$

$$C_1''(x,p)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}C_1(x,p),\quad C_2'(x,p)=\frac{\partial}{\partial x}C_2(x,p),\quad C_2''(x,p)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}C_2(x,p)$$

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{e}^{\sqrt{p}x},\quad \left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=\frac{p}{a^2}\mathrm{e}^{\sqrt{p}x} \tag{17}$$

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=-\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x},\quad \left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=\frac{p}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

且

$$U'(x,p)=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}C_1'(x,p)+C_1(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}C_2'(x,p)+C_2(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)' \tag{18}$$

令

$$\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}C_1'(x,p)+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}C_2'(x,p)=0 \tag{19}$$

有

$$U''(x,p)=C_1'(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+C_1(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''+C_2'(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+C_2(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''$$

代入(13)式，有

$$\begin{aligned}&C_1'(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+C_1(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''+C_2'(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'\\&+C_2(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''-\frac{p}{a^2}\left[C_1(x,p)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_2(x,p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=-\frac{1}{a^2}\varphi(x)\end{aligned}\tag{20}$$

即

$$\begin{aligned}&C_1'(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+C_2'(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+C_1(x,p)\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''-\frac{p}{a^2}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]\\&+C_2(x,p)\left[\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''-\frac{p}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=-\frac{1}{a^2}\varphi(x)\end{aligned}\tag{21}$$

考虑到$U(x,p)\sim\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$和$U(x,p)\sim\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$是方程(13)对应的齐次方程的解，故上式中两个方括号都为零，即(21)式变为

$$C_1'(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+C_2'(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'=-\frac{1}{a^2}\varphi(x)$$

即

$$\frac{\sqrt{p}}{a}C_1'(x,p)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}-\frac{\sqrt{p}}{a}C_2'(x,p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}=-\frac{1}{a^2}\varphi(x)\tag{22}$$

由(19)式和(22)式就构成求解$C_1(x,p)$和$C_2(x,p)$的方程组

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}C_1'(x,p)+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}C_2'(x,p)=0\\C_1'(x,p)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}-C_2'(x,p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}=-\dfrac{1}{a\sqrt{p}}\varphi(x)\end{cases}\tag{23}$$

两方程相加，很容易得到

$$C_1'(x,p)=-\frac{1}{2a\sqrt{p}}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\tag{24}$$

可得

$$C_1(x,p)=-\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_{\infty}^{x}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_{x}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\xi}\mathrm{d}\xi \tag{25}$$

同时两方程相减得到

$$C_2'(x,p)=\frac{1}{a\sqrt{p}}\varphi(x)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{26}$$

可得

$$C_2(x,p)=\frac{1}{a\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{x}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}\xi}\mathrm{d}\xi \tag{27}$$

故方程的特解(16)式为

$$U(x,p)=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_{x}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(\xi-x)}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{x}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x-\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{28}$$

由拉普拉斯变换表可查得

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}\doteq\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}} \tag{29}$$

故可得定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{x}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{30}$$

由此得到了与用傅里叶变换解法相同的解.

19.2　用傅里叶变换法求解一维无界弦的受迫振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\ t>0\\u\big|_{t=0}=\varphi(x)\\u_t\big|_{t=0}=v(x)\end{cases}$$

解　对定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\ t>0\\u\big|_{t=0}=\varphi(x)\\u_t\big|_{t=0}=v(x)\end{cases} \tag{1}$$

令 $u(x,t)$ 的傅里叶变换为 $U(w,t)=F[u(x,t)]$，有

$$U(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{3}$$

令 $f(x,t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega,t)=F\left[f(x,t)\right]$，有

$$F(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{5}$$

令 $\varphi(x)$ 的傅里叶变换为 $\Phi(\omega)=F\left[\varphi(x)\right]$，有

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{7}$$

令 $v(x)$ 的傅里叶变换为 $V(\omega)=F\left[v(x)\right]$，有

$$V(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}v(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$v(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

将(3)、(5)两式代入(1)的方程中，得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\omega,t)+a^2\omega^2U(\omega,t)=F(\omega,t) \tag{10}$$

其相应的齐次方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\omega,t)+a^2\omega^2U(\omega,t)=0 \tag{11}$$

此方程的通解为

$$U(\omega,t)=A(\omega)\cos a\omega t+B(\omega)\sin a\omega t \tag{12}$$

由(1)式中的初始条件和(6)、(8)两式，可得

$$A(\omega)=\Phi(\omega),\quad B(\omega)=\frac{V(\omega)}{a\omega} \tag{13}$$

代入(12)式，得

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\cos a\omega t+\frac{V(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t \tag{14}$$

因此，方程(10)的解是(14)式加上方程(10)的特解. 求方程(10)的特解的方法仍然是用常数变异法，与上题相似，由(12)式，写成复数形式，令特解形式为

$$U(\omega,t)=A(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+B(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t} \tag{15}$$

记$U'(\omega,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}U(\omega,t)$，　$U''(\omega,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U(\omega,t)$，对其他函数也类似，则

$$U'(\omega,t)=A'(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+\mathrm{i}a\omega A(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+B'(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{i}a\omega B(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t} \tag{16}$$

令

$$A'(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+B'(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}=0 \tag{17}$$

则有

$$\begin{aligned}U'(\omega,t)&=\mathrm{i}a\omega A(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{i}a\omega B(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\\ U''(\omega,t)&=\mathrm{i}a\omega A'(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-a^2\omega^2A(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}\\ &\quad-\mathrm{i}a\omega B'(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}-a^2\omega^2B(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\end{aligned} \tag{18}$$

把(18)式代入(10)式，有

$$\mathrm{i}a\omega A'(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{i}a\omega B'(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}=F(\omega,t) \tag{19}$$

由(17)、(19)两式解出 $A(\omega,t)$，$B(\omega,t)$，

$$\begin{cases}A'(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+B'(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}=0\\ \mathrm{i}a\omega A'(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{i}a\omega B'(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}=F(\omega,t)\end{cases} \tag{20}$$

可解出

$$A'(\omega,t)=\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}F(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t} \tag{21}$$

$$A(\omega,t)=\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{22}$$

$$B'(\omega,t)=-\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}F(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t} \tag{23}$$

$$B(\omega,t)=-\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

即可得$U(\omega,t)$的特解为

$$\begin{aligned}U(\omega,t)&=\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega\tau}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{1}{a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{25}$$

故可得方程(10)的解为

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\mathrm{i}2a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\Phi(\omega)\cos a\omega t+\frac{V(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t \tag{26}$$

或写成

$$U(\omega,t)=\frac{1}{a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\Phi(\omega)\cos a\omega t+\frac{V(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t \tag{27}$$

对上式的反演，由(26)式中的各项，用傅里叶变换的性质，由教材中命题 9.3.1 和定理 9.3.2(延迟定理)，(26)式中的第一、第二项的被积函数的反演为

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega(t-\tau)}\right]=\int_{-\infty}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi \tag{28}$$

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega(t-\tau)}\right]=\int_{-\infty}^{x-a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi \tag{29}$$

注意：上两个等式左边 F^{-1} 是傅里叶变换的逆变换，而方括号内的 $F(\omega,\tau)$ 是 $f(x,t)$ 对 x 的傅里叶变换的像函数. 并要注意到傅里叶变换的共轭变量 $x\leftrightarrow\omega$，在等式右边 x 是在积分限上，故对 x 的延迟表现在积分限上.

由

$$\cos a\omega t=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right)$$

再由延迟定理，第三项为

$$F^{-1}\left[\Phi(\omega)\cos a\omega t\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] \tag{30}$$

由

$$\sin a\omega t=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right)$$

与第一、第二项的被积函数的反演做法相同，第四项的反演为

$$F^{-1}\left[\frac{V(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t\right]=\frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x+at}v(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{-\infty}^{x-at}v(\xi)\mathrm{d}\xi\right] \tag{31}$$

把(28)～(31)代入(26)式的反演中，再把相同被积函数的积分限合并，就得到用傅里叶变换求解定解问题(1)的解

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{32}$$

19.3　设有两根匀质同质的半无界杆，侧面均绝热，温度分别为0和u_0，在$t=0$时刻，将两杆的端点相接，求$t>0$时杆中各点的温度分布.

解　本题由于有一杆的温度为非零的常数，其收敛性不满足傅里叶变换的条件，不能用傅里叶变换来解，只能用拉普拉斯变换进行求解. 由于两杆由同一均匀材质(有相同的热传导系数)制成，则定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0\\ u(x,0)=\begin{cases}u_0, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}\end{cases}\tag{1}$$

对$u(x,t)$中的时间变量t作拉普拉斯变换

$$U(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,\quad p>0\tag{2}$$

由初始条件，设

$$u(x,t)=\begin{cases}u_1(x,t), & x<0\\ u_2(x,t), & x>0\end{cases}\tag{3}$$

初始条件就变为

$$u(x,0)=\begin{cases}u_1(x,0)=u_0, & x<0\\ u_2(x,0)=0, & x>0\end{cases}\tag{4}$$

对于$t>0$，在$x=0$处，由能量守恒而得到热流相等，则衔接条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}u_1(0,t)=\frac{\partial}{\partial x}u_2(0,t),\quad t>0\tag{5}$$

注意：在$x=0$处，左右两端是有温度差的，在热传导的过程中，在$x=0$处的温度是不连续的.

因此在拉普拉斯变换中，令

$$U(x,p)=U_1(x,p)+U_2(x,p)\tag{6}$$

其中

$$U_1(x,p)=\int_0^{\infty}u_1(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\tag{7}$$

$$U_2(x,p)=\int_0^{\infty}u_2(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\tag{8}$$

对定解问题(1)的方程作拉普拉斯变换，并将(7)、(8)两式代入得

$$pU_1(x,p)-u_0-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x,p)=0,\quad x<0\tag{9}$$

$$pU_2(x,p)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x,p)=0,\quad x>0 \tag{10}$$

方程(9)可写为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x,p)-\frac{p}{a^2}U_1(x,p)=-\frac{1}{a^2}u_0,\quad x<0 \tag{11}$$

此方程相应的齐次方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{10}(x,p)-\frac{p}{a^2}U_{10}(x,p)=0,\quad x<0 \tag{12}$$

其通解的形式为

$$U_{10}(x,p)=A_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+A_2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{13}$$

考虑到自然边界条件：$\left|U_{10}(x,p)\right|<\infty$，取 $A_2=0$，则方程(12)的通解为

$$U_{10}(x,p)=A_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{14}$$

用常数变易法求方程(11)的特解，令特解为

$$U_{11}(x,p)=A_1(x,p)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+A_2(x,p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{15}$$

为计算方便，记

$$U'_{11}(x,p)=\frac{\partial}{\partial x}U_{11}(x,p),\quad U''_{11}(x,p)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{11}(x,p),\quad A'_1(x,p)=\frac{\partial}{\partial x}A_1(x,p)$$

$$A''_1(x,p)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_1(x,p),\quad A'_2(x,p)=\frac{\partial}{\partial x}A_2(x,p),\quad A''_2(x,p)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_2(x,p)$$

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{e}^{\sqrt{p}x},\quad \left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=\frac{p}{a^2}\mathrm{e}^{\sqrt{p}x}$$

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=-\frac{\sqrt{p}}{a}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x},\quad \left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=\frac{p}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由(15)式，有

$$\begin{aligned}U'_{11}(x,p)=&\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}A'_1(x,p)+A_1(x,p)\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'\\&+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}A'_2(x,p)+A_2(x,p)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'\end{aligned} \tag{16}$$

令

$$e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_1'(x,p)+e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_2'(x,p)=0 \tag{17}$$

由(16)、(17)两式，可得

$$U_{11}''(x,p)=A_1'(x,p)\left(e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+A_1(x,p)\left(e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''+A_2'(x,p)\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+A_2(x,p)\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''$$

代入(11)式，有

$$\begin{aligned}&A_1'(x,p)\left(e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+A_1(x,p)\left(e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''+A_2'(x,p)\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+A_2(x,p)\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''\\&-\frac{p}{a^2}\left[A_1(x,p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+A_2(x,p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=-\frac{1}{a^2}u_0\end{aligned} \tag{18}$$

即

$$\begin{aligned}&A_1'(x,p)\left(e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+A_2'(x,p)\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+A_1(x,p)\left[\left(e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''-\frac{p}{a^2}e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]\\&+A_2(x,p)\left[\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)''-\frac{p}{a^2}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=-\frac{1}{a^2}u_0\end{aligned} \tag{19}$$

考虑到$U_1(x,p)\sim e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$和$U_1(x,p)\sim e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$是方程(12)的解，故上式中两个方括号都为零，即(19)式变为

$$A_1'(x,p)\left(e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'+A_2'(x,p)\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)'=-\frac{u_0}{a^2}$$

即

$$\frac{\sqrt{p}}{a}e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_1'(x,p)-\frac{\sqrt{p}}{a}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_2'(x,p)=-\frac{u_0}{a^2} \tag{20}$$

联合(17)式和(20)式

$$\begin{cases}e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_1'(x,p)+e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_2'(x,p)=0\\\dfrac{\sqrt{p}}{a}e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_1'(x,p)-\dfrac{\sqrt{p}}{a}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}A_2'(x,p)=-\dfrac{u_0}{a^2}\end{cases}$$

可解得

$$A_1'(x,p)=-\frac{1}{2a\sqrt{p}}u_0\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{21}$$

$$A_2'(x,p)=\frac{1}{2a\sqrt{p}}u_0\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{22}$$

因此可得

$$A_1(x,p)=-\frac{u_0}{2a\sqrt{p}}\int_{\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{u_0}{2p}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{23}$$

$$A_2(x,p)=\frac{u_0}{2a\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{u_0}{2p}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{24}$$

故可得(15)式的解为

$$U_{11}(x,p)=A_1(x,p)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+A_2(x,p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}=\frac{u_0}{p} \tag{25}$$

实际上这个特解的形式直接由方程(11)可以猜得.

由(14)式和(25)式，可得方程(12)的解为

$$U_1(x,p)=U_{10}+U_{11}=A_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+\frac{u_0}{p},\quad x<0 \tag{26}$$

我们再解$U_2(x,p)$满足的方程(10)，即

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x,p)-\frac{p}{a^2}U_2(x,p)=0,\quad x>0 \tag{27}$$

此方程的解为

$$U_2(x,p)=B_1\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+B_2\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由于$\left|U_2(x,p)\right|<\infty$的要求，取$B_2=0$，即方程(27)的解为

$$U_2(x,p)=B_1\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{28}$$

由衔接条件(5)及$u_1(x,t)$、$u_2(x,t)$的拉普拉斯变换式，可得

$$\frac{\partial}{\partial x}U_1(x,p)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}u_1(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,\quad \frac{\partial}{\partial x}U_2(x,p)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}u_2(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

即

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}U_1(x,p)\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial}{\partial x}U_2(x,p)\right|_{x=0} \tag{29}$$

由(26)式、(28)式和(29)式，可得

$$A_1\frac{\sqrt{p}}{a}=-B_1\frac{\sqrt{p}}{a}\quad\Rightarrow\quad A_1=-B_1 \tag{30}$$

取 $B_1=1, A_1=-1$，则

$$U_1(x,p)=-\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+\frac{u_0}{p},\quad x<0 \tag{31}$$

$$U_2(x,p)=\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{32}$$

由拉普拉斯反演表可查出(也可由教材上的反演公式(10.3.3)计算)

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\left(\sqrt{t}\right)^3}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}\fallingdotseq\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}},\quad 1\fallingdotseq\frac{1}{p} \tag{33}$$

由(31)、(32)式，得

$$u_1(x,t)=u_0-\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\left(\sqrt{t}\right)^3}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}},\quad x<0 \tag{34}$$

$$u_2(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\left(\sqrt{t}\right)^3}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}},\quad x>0 \tag{35}$$

讨论：从解的结果看，当 $t\to 0$ 时，与初始条件吻合；当 $t\to\infty$ 时，$u_1=u_0$，$u_2=0$ 与初始值一样，而对于有限的时间 t，则可具体算出 u_1 和 u_2 随时间的分布，这样的结果不符合常理. 这样问题的出现，是由于我们假设了“棒”是无穷长，“无穷”实际上是个变量，是无边界的，它意味着类似于两端有两个大的 u_0 和 0 的热库，致使我们得到这样的解. 如果不是无穷长而是有限长的棒，问题的解就不是这个结果. 有兴趣的读者可以把题目改为两边都为 l 长的棒，重新做一下，其结果会与我们的物理直觉相吻合.

本题只是提供对使用拉普拉斯变换解给出的一种数学的练习.

附注：由教材中反演公式(10.3.3)计算(33)式.

对于 $p=s+\mathrm{i}\sigma$，是在复平面上作积分，反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \tag{36}$$

其中 $\mathrm{Re}\,p>s_0$，s_0 为收敛横坐标，积分路线 $\beta-\mathrm{i}\sigma\to\beta+\mathrm{i}\sigma$ 是右半平面中平行于虚轴的任一条直线，$\beta=\mathrm{Re}\,p=s(\beta>s_0)$. 要求 $F(p)$ 满足：

(1) $F(p)$ 在 $\mathrm{Re}\,p>s_0$ 的区域上解析；

(2) $F(p)$在$\mathrm{Re}\,p>s_0$的区域上，当$|p|\to\infty$时一致趋于零；

(3) 积分$\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{d}p$绝对收敛.

在(33)式中，由于像函数$\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}$的双值性，我们取辐角$-\pi\to\pi$，原点为支点，沿实轴的负向作割线至无穷，构造黎曼面，像函数在此黎曼面上除原点(支点)外解析且满足上述三个条件. 积分回路为右半平面中平行于虚轴的直线$\beta-\mathrm{i}\sigma\to\beta+\mathrm{i}\sigma$，由$\beta+\mathrm{i}\sigma$沿左上半平面的大圆周$C_{R^+}$至割线上沿，沿负实轴从$-R\to-\delta(R\to\infty,\delta\to0)$，绕小圆周$C_\delta$，再沿割线的下沿，由$-\delta\to-\infty$，然后沿左下半平面的大圆周$C_{R^-}$到$\beta-\mathrm{i}\sigma$，则

$$\begin{aligned}&\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{C_{R^+}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{-R}^{-\delta}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\\&+\int_{C_\delta}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{-\delta}^{-R}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{C_{R^-}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0\end{aligned}\tag{37}$$

可证明

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_{R^+}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{C_{R^-}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\right)=0\tag{38}$$

设$|\beta+\mathrm{i}\sigma|=R(R\to\infty)$点的辐角为$\gamma$，有$|\beta-\mathrm{i}\sigma|=R(R\to\infty)$点的辐角为$-\gamma$. 由$p=s+\mathrm{i}\sigma=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_{R^+}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{C_{R^-}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\right|&\leqslant2\int_\gamma^{\frac{\pi}{2}}\left|\mathrm{e}^{-\sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{e}^{tR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\right|R\mathrm{d}\theta\\&=2\int_\gamma^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{tR\cos\theta}R\mathrm{d}\theta\\&\leqslant2R\mathrm{e}^{-\sqrt{R}\cos\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\beta t}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\end{aligned}$$

其中用到：当$0\leqslant\gamma\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，$\cos\dfrac{\theta}{2}\geqslant\cos\dfrac{\pi}{4}$和$tR\cos\theta\leqslant tR\cos\gamma=t\beta$.

因此，有

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_{R^+}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{C_{R^-}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\right)\leqslant\lim_{R\to\infty}2R\mathrm{e}^{-\sqrt{R}\cos\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\beta t}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=0$$

同样，可证明：

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0\tag{39}$$

在C_δ上，$p=\delta e^{i\theta}$，有

$$\left|\int_{C_\delta} e^{-a\sqrt{p}}e^{pt}dp\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{-\sqrt{\delta}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}e^{t\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|\delta d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\sqrt{\delta}\cos\frac{\theta}{2}}e^{t\delta\cos\theta}\delta d\theta$$

因此，有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} e^{-a\sqrt{p}}e^{pt}dp \leqslant \lim_{\delta\to 0}\delta\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\sqrt{\delta}\cos\frac{\theta}{2}}e^{t\delta\cos\theta}d\theta = 0$$

由(37)式～(39)式，当$R\to\infty$，$\delta\to 0$时，可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{-a\sqrt{p}}e^{pt}dp \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} e^{-a\sqrt{p}}e^{pt}dp + \frac{-1}{2\pi i}\int_{0}^{-\infty} e^{-a\sqrt{p}}e^{pt}dp \end{aligned} \tag{40}$$

由于$p=s+i\sigma=\rho e^{i\theta}$，在第一个积分中：$\theta=\pi$，$p=\rho e^{i\pi}$，$dp=e^{i\pi}d\rho$，$p:-\infty\to 0$，$\rho:\infty\to 0$．在第二个积分中：$\theta=-\pi$，$p=\rho e^{-i\pi}$，$dp=e^{-i\pi}d\rho$，$p:0\to-\infty$，$\rho:0\to\infty$，则上式变为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0} e^{-ia\sqrt{\rho}}e^{-\rho t}e^{i\pi}d\rho - \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} e^{ia\sqrt{\rho}}e^{-\rho t}e^{-i\pi}d\rho \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} e^{-ia\sqrt{\rho}}e^{-\rho t}d\rho + \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} e^{ia\sqrt{\rho}}e^{-\rho t}d\rho \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\rho t}\sin\left(a\sqrt{\rho}\right)d\rho \end{aligned} \tag{41}$$

令$u=a\sqrt{\rho}$，上式变为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{a^2}u^2t}\sin u\cdot 2\frac{u}{a^2}du = -\frac{1}{\pi t}\int_{0}^{\infty}\sin u de^{-\frac{1}{a^2}u^2t} \\ &= \frac{1}{\pi t}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{a^2}u^2t}\cos u du \end{aligned} \tag{42}$$

由教材上例 8.4.6 的泊松积分

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad a>0,\ b\in\mathbf{R} \tag{43}$$

可得

$$f(t)=\frac{1}{\pi t}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}=\frac{a}{2\sqrt{\pi}(t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}} \tag{44}$$

即计算得到反演公式

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\left(\sqrt{t}\right)^3}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}\doteqdot\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}$$

19.4　无界静止弦在$t=0$时刻，在$x=x_0$处受到冲量为I的冲击作用，试求解弦的振动. [提示：由$t=0^-$到$t=0$时刻动量的变化等于冲量，可得$u_t\big|_{t=0}=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)$，并可由达朗贝尔公式求解.]

解　由牛顿定律，考虑在$t=0^-$到$t=0$的时间间隔内，在$x=x_0$的单位长度的弦，所受到的冲量为

$$I=mu_t\big|_{t=0}-mu_t\big|_{t=0^-}=mu_t\big|_{t=0},\quad u_t\big|_{t=0^-}=0 \tag{1}$$

其中m为这段弦的质量. 考虑到$\delta(x-x_0)$的量纲为$[\mathrm{L}]^{-1}$，即

$$m\delta(x-x_0)=\rho \tag{2}$$

ρ为弦的密度，其量纲为$[\mathrm{M}][\mathrm{L}]^{-1}$. 因此有

$$u_t\big|_{t=0}=\frac{I}{m}=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0) \tag{3}$$

此式的量纲是速度的量纲，即$[\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-1}$(时间的量纲记为$[\mathrm{T}]$). 我们回到波动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \tag{4}$$

方程左边的量纲为加速度量纲：$[\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}$，方程的右边$f(x,t)$为外力的力密度，是单位长度弦上单位密度的弦所受的外力，其量纲也是加速度的量纲.

因此在本题的定解问题中，由题意和(3)式，以及$\left[\delta(t)\right]=\left[\mathrm{T}\right]^{-1}$，我们可知

$$f(x,t)=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)\delta(t-0) \tag{5}$$

定解问题为

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=\dfrac{I}{\rho}\delta(x-x_0)\delta(t-0), & -\infty<x<\infty\\ u(x,0)=0\\ u_t(x,0)=0\end{cases} \tag{6}$$

由冲量定理法，该定解问题化为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=0 \\ u_t\left(x,0^+\right)=\dfrac{I}{\rho}\delta(x-x_0) \end{cases} \tag{7}$$

对这个定解问题中的泛定方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad -\infty<x<\infty \tag{8}$$

考虑到波动算符可分解为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

可把定解问题中的泛定方程写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=0 \tag{9}$$

采用行波法，作变量代换，令

$$\begin{cases} \xi=x+at \\ \eta=x-at \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x=\xi+\eta \\ 2at=\xi-\eta \end{cases} \tag{10}$$

有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}+a\dfrac{\partial}{\partial x}=2a\dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}-a\dfrac{\partial}{\partial x}=-2a\dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{cases} \tag{11}$$

则(9)式变为

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u\left[x(\xi,\eta),t(\xi,\eta)\right]=0 \tag{12}$$

通过对 η 和 ξ 的积分，可得方程的行波解为

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at) \tag{13}$$

其中 f_1 和 f_2 的函数形式由两个初始条件确定. $f_1(x+at)$ 为由 x_0 处向 x 轴负方向传播的行波，$f_2(x-at)$ 为由 x_0 处向 x 轴正方向传播的行波. 由(13)式和定解问题(7)的初始条件：$u(x,0)=0$，可得

$$f_1(x)+f_2(x)=0 \tag{14}$$

由 $u_t\left(x,0^+\right)=\dfrac{I}{\rho}\delta(x-x_0)$，可得

$$
\begin{aligned}
u_t(x,0)&=\left[\frac{\partial f_1}{\partial(x+at)}\frac{\partial(x+at)}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial(x-at)}\frac{\partial(x-at)}{\partial t}\right]_{t=0}\\
&=a\frac{\partial f_1}{\partial x}-a\frac{\partial f_2}{\partial x}\\
&=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

由以上两式，有

$$
f_1(x,0)=\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\frac{I}{\rho}\delta(x'-x_0)\mathrm{d}x' \tag{16}
$$

$$
f_2(x,0)=-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\frac{I}{\rho}\delta(x'-x_0)\mathrm{d}x' \tag{17}
$$

故有

$$
f_1(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\frac{I}{\rho}\delta(x'-x_0)\mathrm{d}x' \tag{18}
$$

$$
f_2(x,t)=-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\frac{I}{\rho}\delta(x'-x_0)\mathrm{d}x' \tag{19}
$$

可得原定解问题的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{I}{2a\rho}\int_{x-at}^{x+at}\delta(x'-x_0)\,\mathrm{d}x'\\
&=\frac{I}{2a\rho}\int_{x-at}^{x+at}\frac{\mathrm{d}H(x'-x_0)}{\mathrm{d}x'}\,\mathrm{d}x'\\
&=\frac{I}{2a\rho}H(x'-x_0)\Big|_{x-at}^{x+at}\\
&=\frac{I}{2a\rho}H(x-x_0+at)-\frac{I}{2a\rho}H(x-x_0-at)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中 $H(x)$ 为阶跃函数

$$
H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{21}
$$

这是一个以 x_0 为中心，以高度为 $-\dfrac{I}{2a\rho}$，以速度为 a 向 x 轴正方向传播和以高度为 $\dfrac{I}{2a\rho}$，以速度为 a 向 x 轴反方向传播的图像.

19.5　场量 $u(x,t)$ 满足下列方程，可设方程有行波解 $u(\xi)$，其中 $\xi=x-at$，试把下列方程化为行波变量 ξ 的常微分方程：

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$；

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$；

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\gamma u(1-u)=0$；

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u^2=0$；

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\beta\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0$.

解　(1) 在$u(x,t)$满足的非线性偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1}$$

设方程有行波解$u(\xi)$，其中$\xi=x-at$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t}=-a\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\end{cases} \tag{2}$$

并且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} \tag{3}$$

则方程(1)可变为

$$-a\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{\mathrm{d}\xi}+u(\xi)\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{\mathrm{d}\xi}+\beta\frac{\mathrm{d}^3 u(\xi)}{\mathrm{d}\xi^3}=0$$

即

$$\left(1-\frac{u}{a}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-\frac{\beta}{a}\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3}=0 \tag{4}$$

这样，非线性偏微分方程(1)变为具有行波变量ξ的非线性常微分方程(4).

(2) 对$u(x,t)$满足的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \tag{5}$$

设方程有行波解$u(\xi)$，其中$\xi=x-at$，如同第(1)题的计算，并利用(2)、(3)式，且有

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=\frac{\mathrm{d}^4 u(\xi)}{\mathrm{d}\xi^4} \tag{6}$$

则方程(5)可变为具有行波变量ξ的非线性常微分方程

$$\left(1-\frac{1}{a}u\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-\frac{\alpha}{a}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\beta}{a}\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3}-\frac{\gamma}{a}\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}\xi^4}=0 \tag{7}$$

(3) 对$u(x,t)$满足的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\gamma u(1-u)=0 \tag{8}$$

设方程有行波解$u(\xi)$，其中$\xi=x-at$，如同第(1)题的计算，并利用(2)、(3)式，则方程变为具有行波变量ξ的非线性常微分方程

$$-a\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{\mathrm{d}\xi}-\alpha\frac{\mathrm{d}^2 u(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}-\gamma u(1-u)=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{a}{\alpha}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\gamma}{\alpha}u(1-u)=0 \tag{9}$$

(4) 对$u(x,t)$满足的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u^2=0 \tag{10}$$

设方程有行波解$u(\xi)$，其中$\xi=x-kt$，如同第(1)题的计算，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}=-k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}$$

则方程变为具有行波变量ξ的非线性常微分方程

$$\left(k^2-a^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}+\alpha u^2=0 \tag{11}$$

(5) 对$u(x,t)$满足的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\beta\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0 \tag{12}$$

设方程有行波解$u(\xi)$，其中$\xi=x-kt$，如同上题的计算，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}\xi^4}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+2u\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}$$

则方程变为具有行波变量ξ的非线性常微分方程

$$k^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-a^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-\alpha\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}-2\beta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2-2\beta u\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=0$$

即

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}+\left(a^2-k^2\right)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+2\beta u\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+2\beta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=0 \tag{13}$$

19.6　(1) 请把x^{2k}，$k=0,1,2,\cdots$，展成埃尔米特多项式的偶次项级数

$$x^{2k}=\frac{(2k)!}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(k-n)!}$$

(2) 请把x^{2k+1}，$k=0,1,2,\cdots$，展成埃尔米特多项式的奇次项级数

$$x^{2k+1}=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sum_{n=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(k-n)!}$$

解　(1) 要证明展开式为

$$x^{2k}=\frac{(2k)!}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(k-n)!} \tag{1}$$

用数学归纳法证明：

当$k=0$时，等式两边都为1，等式成立. 当$k=1$时，有

$$\begin{aligned}\frac{(2)!}{2^2}\sum_{n=0}^{1}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(1-n)!}&=\frac{1}{2}\mathrm{H}_0(x)+\frac{1}{4}\mathrm{H}_2(x)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(4x^2-2\right)=x^2\end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\mathrm{H}_0(x)=1$，$\mathrm{H}_2(x)=4x^2-2$，故等式成立.

设当$k=2,3,4,\cdots$时，(1)式成立. 当$k\to k+1$时，(1)式变为

$$\begin{aligned}x^{2(k+1)}&=\frac{\left[2(k+1)\right]!}{2^{2(k+1)}}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(k+1-n)!}\qquad(k\geqslant 1)\\&=\frac{\left[2(k+1)\right]!}{2^{2(k+1)}(k+1)!}+\frac{\left[2(k+1)\right]!}{2^{2(k+1)}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(k+1-n)!}\end{aligned} \tag{3}$$

上式的两边对x求导，得

$$x^{2k+1}=\frac{(2k+1)!}{2^{2(k+1)}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}'_{2n}(x)}{(2n)!(k+1-n)!} \tag{4}$$

由递推关系

$$\mathrm{H}_n'=2n\mathrm{H}_{n-1} \tag{5}$$

则(4)式变为

$$\begin{aligned} x^{2k+1}&=\frac{(2k+1)!}{2^{2(k+1)}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{2\times 2n\mathrm{H}_{2n-1}(x)}{(2n)!(k+1-n)!}\\ &=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n-1}(x)}{(2n-1)!(k+1-n)!}\end{aligned} \tag{6}$$

上式的两边再对 x 求导，并利用递推关系(5)，得到

$$\begin{aligned} x^{2k}&=\frac{(2k)!}{2^{2k+1}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n-1}'(x)}{(2n-1)!(k+1-n)!}\\ &=\frac{(2k)!}{2^{2k}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2(n-1)}(x)}{\left[2(n-1)\right]!(k+1-n)!}\end{aligned} \tag{7}$$

令 $n'=n-1$，有 $\sum\limits_{n=1}^{k+1}\to\sum\limits_{n'=0}^{k}$，上式变为

$$x^{2k}=\frac{(2k)!}{2^{2k}}\sum_{n'=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n'}(x)}{(2n')!(k-n')!} \tag{8}$$

记 n' 为 n，则(8)式为

$$x^{2k}=\frac{(2k)!}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(k-n)!} \tag{9}$$

此式即为(1)式，所以(3)式也成立，故命题(1)得证.

(2) 要证明展开式为

$$x^{2k+1}=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sum_{n=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(k-n)!} \tag{10}$$

如上题，仍然用数学归纳法证明：

当 $k=0$ 时，有 $\frac{1}{2}\mathrm{H}_1(x)=x$ $\left(\mathrm{H}_1(x)=2x\right)$，即上式成立. 当 $k=1$ 时，(10)式右边为

$$\begin{aligned} &\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sum_{n=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(k-n)!}\Bigg|_{k=1}\\ &=\frac{3!}{2^3}\left[\mathrm{H}_1(x)+\frac{1}{3!}\mathrm{H}_3(x)\right]=\frac{3!}{2^3}\left[2x+\frac{1}{3!}\left(8x^3-12x\right)\right]=x^3\end{aligned}$$

故(10)式成立.

设当 $k=2,3,4,\cdots$ 时，(10)式成立. 当 $k\to k+1$ 时，(10)式变为

$$x^{2k+3}=\frac{(2k+3)!}{2^{2k+3}}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(k+1-n)!},\quad k\geqslant 1 \tag{11}$$

上式的两边对 x 求导，得

$$x^{2k+2}=\frac{(2k+2)!}{2^{2k+3}}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{\mathrm{H}'_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(k+1-n)!} \tag{12}$$

由递推关系

$$\mathrm{H}'_n=2n\mathrm{H}_{n-1} \tag{13}$$

(12)式变为

$$\begin{aligned}x^{2k+2}&=\frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(k+1-n)!},\quad k\geqslant 1\\&=\frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!}+\frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n}(x)}{(2n)!(k+1-n)!}\end{aligned} \tag{14}$$

上式的两边再对 x 求导，并利用递推关系(13)，得到

$$\begin{aligned}x^{2k+1}&=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+2}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}'_{2n}(x)}{(2n)!(k+1-n)!}\\&=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{\mathrm{H}_{2n-1}(x)}{(2n-1)!(k+1-n)!}\end{aligned} \tag{15}$$

令 $n'=n-1$，有 $\sum_{n=1}^{k+1}\to\sum_{n'=0}^{k}$，上式变为

$$x^{2k+1}=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sum_{n'=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n'+1}(x)}{(2n'+1)!(k-n')!} \tag{16}$$

即

$$x^{2k+1}=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}}\sum_{n=0}^{k}\frac{\mathrm{H}_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(k-n)!} \tag{17}$$

此式即为(10)式，故命题(2)得证.

注： 本题也可以用下面的方法直接展开.

由埃尔米特多项式 $\mathrm{H}_n(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 的正交性

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\delta_{mn} \tag{18}$$

此式的归一化系数为 $\left(\sqrt{\pi}2^n n!\right)^{-\frac{1}{2}}$，带权重 e^{-x^2} 的 $\mathrm{H}_n(x)$ 的正交关系，因此 $\left\{\left(\sqrt{\pi}2^n n!\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_n(x),n=0,1,2,\cdots\right\}$ 为一个完备的正交归一函数系，可构成一个希尔

伯特空间的基. 对于定义在$-\infty<x<\infty$上的好函数$f(x)$，即在此希尔伯特空间的元素，可以在这组基上展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{\left(\sqrt{\pi}2^n n!\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{H}_n(x) \tag{19}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\left(\sqrt{\pi}2^n n!\right)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{20}$$

则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!}\mathrm{H}_n(x)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{21}$$

对(20)式积分的计算，可根据$f(x)$的形式，先作分部积分，并利用埃尔米特多项式的递推关系，然后用埃尔米特多项式$\mathrm{H}_n(x)$的微分表达式

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{22}$$

进行积分的运算，最后得到展开系数a_n.

这种计算方法比较繁琐，有兴趣的读者可自己练习.

19.7　请证明：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2\pi}n!}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{\sqrt{2\pi}(n+1)!}{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!}, & n\text{为奇数}\end{cases}$

证　(1) 要证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2\pi}n!}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases} \tag{1}$$

把(1)式写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_{2k}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}(2k)!}{(k)!}, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 0, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{3}$$

仍然用数学归纳法证明. 由

$$\mathrm{H}_0 = 1,\ \mathrm{H}_1 = 2x,\ \mathrm{H}_2 = 4x^2-2,\ \mathrm{H}_3 = 8x^3-12x \tag{4}$$

当$k=0$时，并利用高斯积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a>0 \tag{5}$$

由(2)式，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

由(3)式，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

这说明当$k=0$时，(2)、(3)式皆满足，即(1)式成立.

当$k=1$时，由(2)式，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(4x^2-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = -2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x + 4\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -2\sqrt{2\pi} - 4\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = -2\sqrt{2\pi} - 4x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -2\sqrt{2\pi} + 4\sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi}$$

由(3)式，注意到奇函数在对称区间积分为零，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(8x^3-12x\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = -12\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x + 8\int_{-\infty}^{\infty}x^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 0 - 8x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 16\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 0$$

这说明当$k=1$时，(2)、(3)式皆满足，即(1)式成立.

假设，当$k=2,3,4,\cdots$时，(2)、(3)式成立. 在(2)式中，当$k\to k+1$时，(2)式

的左边为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_{2(k+1)}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left[2x\mathrm{H}_{2k+1}(x)-2(2k+1)\mathrm{H}_{2k}(x)\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \tag{6}$$

其中用到递推关系

$$\mathrm{H}_{n+1}(x)-2x\mathrm{H}_n(x)+2n\mathrm{H}_{n-1}(x)=0 \tag{7}$$

计算(6)式中等式右边的第一个积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 2x\mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x &= -2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\\ &= -2\mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}'_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \qquad (8)\\ &= 0+4(2k+1)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{2k}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中用到递推关系

$$\mathrm{H}'_n(x)=2n\mathrm{H}_{n-1}(x) \tag{9}$$

注意到(6)式中的第二个积分与(8)式中的积分的结果仅积分前面的系数不同，故(6)式变为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{2(k+1)}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x &= 2(2k+1)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{2k}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\\ &= 2(2k+1)\frac{\sqrt{2\pi}(2k)!}{(k)!} = \frac{2(2k+1)(2k+2)}{2k+2}\frac{\sqrt{2\pi}(2k)!}{(k)!} \qquad (10)\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\left[2(k+1)\right]!}{(k+1)!}\end{aligned}$$

即当$k\to k+1$时，(2)式的关系仍然成立.

对于(3)式，当取k取$k+1$时，并用递推关系(7)，等式的左边为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{2k+3}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left[2x\mathrm{H}_{2k+2}(x)-2(2k+2)\mathrm{H}_{2k+1}(x)\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \tag{11}$$

计算(11)式中等式右边的第一个积分，并用递推关系(9)式，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}2x\mathrm{H}_{2k+2}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x &= -2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{2k+2}(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\\ &= -2\mathrm{H}_{2k+2}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}'_{2k+2}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \qquad (12)\\ &= 0+4(2k+2)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

此积分的结果与(11)式右边的第二个积分仅系数不同，考虑到假设(3)式成立，即可得(11)式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_{2k+3}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 2(2k+2)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 0 \tag{13}$$

则当 $k \to k+1$ 时，(3)式仍然成立，故(3)式得证.

因此(1)式得证.

(2) 要证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n\text{为偶数} \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}(n+1)!}{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!}, & n\text{为奇数} \end{cases} \tag{14}$$

将上式写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_{2k}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0,1,2,3,\cdots \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}\left[2(k+1)\right]!}{(k+1)!}, \quad k = 0,1,2,3,\cdots \tag{16}$$

用数学归纳法证明：

先证(15)式，当 $k=0$ 时，考虑到奇函数的积分，(15)式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_0(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 0 \tag{17}$$

当 $k=1$ 时，同样考虑到奇函数的积分，(15)式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_2(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(4x^2-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 0$$

即在 $k=0,1$ 时，(15)式成立.

设当 $k=2,3,4,\cdots$ 时，(15)式成立.

当 $k \to k+1$ 时，有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_{2(k+1)}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_{2(k+1)}(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= -\mathrm{H}_{2(k+1)}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}'_{2(k+1)}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\ &= 0 + 2(k+1)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}_{2k+1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

其中用到递推关系(9)式，并用到(3)式的结果，故(15)式得证.

再证明(16)式：

当$k=0$时，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xH_1(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx &= 2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -2\int_{-\infty}^{\infty} x de^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= -2xe^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2\sqrt{2\pi}\end{aligned} \tag{19}$$

即(16)式成立.

当$k=1$时，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} xH_3(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(8x^3-12x\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \tag{20}$$

分别计算上式等式右边的两个积分，可直接利用(19)式的结果，

$$\int_{-\infty}^{\infty} 8x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -8\int_{-\infty}^{\infty} x^3 de^{-\frac{1}{2}x^2} = 24\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 24\sqrt{2\pi}$$

$$-12\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -12\sqrt{2\pi}$$

故(20)式的结果为

$$\int_{-\infty}^{\infty} xH_3(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 12\sqrt{2\pi} \tag{21}$$

满足(16)式.

设当$k=2,3,4,\cdots$时，(16)式成立.

当$k\to k+1$时，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xH_{2(k+1)+1}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} xH_{2k+3}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\ &= -H_{2k+3}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} H'_{2k+3}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\end{aligned}$$

由递推关系(9)式，上式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} xH_{2(k+1)+1}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2(2k+3)\int_{-\infty}^{\infty} H_{2(k+1)}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

由(2)式有

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{2(k+1)}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}\left[2(k+1)\right]!}{(k+1)!}$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} xH_{2(k+1)+1}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2(2k+3)\frac{\sqrt{2\pi}\left[2(k+1)\right]!}{(k+1)!}$$
$$= \frac{2(2k+3)(2k+4)\sqrt{2\pi}\left[2(k+1)\right]!}{(2k+4)(k+1)!} = \frac{\sqrt{2\pi}\left[2(k+2)\right]!}{(k+2)!} \tag{22}$$

即满足(16)式的关系，故(16)式得证.

因此(14)式命题得证.

注： 命题(2)的另一种证法，是直接由命题(1)证明. 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} xH_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = -H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$
$$= 0 + 2n\int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \tag{23}$$

其中用到递推关系(9)式.

在上式右边，令 $n'=n-1$，上式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} xH_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2(n'+1)\int_{-\infty}^{\infty} H_{n'}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \tag{24}$$

利用题(1)的结果，有

$$2(n'+1)\int_{-\infty}^{\infty} H_{n'}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2(n'+1)\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2\pi}n'!}{\left(\dfrac{n'}{2}\right)!}, & n'\text{为偶数}\\ 0, & n'\text{为奇数}\end{cases} \tag{25}$$

令 $n'=2k$，$k=0,1,2,3,\cdots$ 为偶数时，即 $n=n'+1$ 为奇数，上式为

$$2(n'+1)\int_{-\infty}^{\infty} H_{n'}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2(2k+1)\frac{\sqrt{2\pi}(2k)!}{(k)!}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}\left[2(k+1)\right]!}{(k+1)!} = \frac{\sqrt{2\pi}(n'+2)!}{\left(\dfrac{n'+2}{2}\right)!} = \frac{\sqrt{2\pi}(n+1)!}{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!} \tag{26}$$

其中 $n'=2k$，$n=n'+1=2k+1$，$n+1=2k+2=n'+2$.

由(26)式可知，当 n' 为偶数时，即 n 为奇数时，(24)、(25)两式成立. 当 n' 为奇数，即 n 为偶数时，(24)式也成立，故命题(2)得证.

19.8 请证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}H_n(x)H_n(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

证 要证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

计算上式左边的积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= -\frac{1}{2}x\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\right]'\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= 0+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &\quad +\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_n'(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2}$$

上式第一个积分是$\mathrm{H}_n(x)$的模，即可得

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}2^n n! \tag{3}$$

计算上式第二个积分，由递推关系

$$\mathrm{H}_n'(x) = 2n\mathrm{H}_{n-1} \tag{4}$$

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) - 2x\mathrm{H}_n(x) + 2n\mathrm{H}_{n-1}(x) = 0 \tag{5}$$

有

$$\begin{aligned}x\mathrm{H}_n'(x)\mathrm{H}_n(x) &= 2nx\mathrm{H}_{n-1}(x)\mathrm{H}_n(x) \\ &= n\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x) + 2n^2\mathrm{H}_{n-2}(x)\mathrm{H}_n(x)\end{aligned} \tag{6}$$

故(2)式中的第二个积分为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{H}_n'(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + 2n^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n-2}(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= n\sqrt{\pi}2^n n!\end{aligned} \tag{7}$$

此式的第二个积分，由正交关系可知为零.

由(3)式和(7)式，可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}2^n n! + n\sqrt{\pi}2^n n! \\ &= \sqrt{\pi}2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

故命题得证.

*第二十章　非线性数学物理方程初步

内 容 提 要

本章作为扩大读者知识面的阅读材料，介绍非线性数学物理方程(不涉及非线性动力学问题)的一些基本知识.

(1) 介绍惠更斯等时摆问题的数学建模，给出等时摆所满足的非线性常微分方程，并给出此非线性常微分方程的解，分析了解的物理意义.

(2) 介绍 KdV 方程和孤立波，给出了 KdV 方程的一种孤立波解.

(3) 较详细地介绍了用“齐次平衡法”求解一类非线性发展方程的具体方法. 读者可以练习用“齐次平衡法”去求解一些非线性发展方程的孤立波解，作为小论文的习作.

本章没有习题.

第五篇　变分法初步

第二十一章　泛函的变分

内 容 提 要

一、泛函的概念

泛函是“函数”的推广，函数的自变量是坐标参数，而泛函的“自变量”为函数，实泛函记为

$$F\left[y(x)\right]: y(x) \mapsto a, \quad a \in \mathbf{R}$$

$F\left[y(x)\right]$称为函数$y(x)$的泛函，函数$y(x)$称为泛函F的宗量.

二、泛函的变分

$$\delta F\left[y(x)\right]=\frac{\partial F\left[y(x)\right]}{\partial y}\delta y$$

本章的习题与第二十二章合并.

第二十二章　变 分 原 理

内 容 提 要

一、泛函取得极值的条件

如果具有变分的泛函 $F\left[y(x)\right]$ 在 $y=y_0$ 时达到极值(极大值或极小值)，则在 $y(x)=y_0(x)$ 上有

$$\delta F\left[y_0(x)\right]=0$$

二、变分原理和欧拉-拉格朗日方程

当泛函取极值时，由泛函的变分为零导出泛函的宗量函数所满足的方程，这一原理称为变分原理.

对泛函

$$I\left[y(x)\right]=\int_{x_A}^{x_B} f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

由 $\delta I=0$，可导出 $y(x)$ 满足的方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

此方程称为欧拉-拉格朗日方程.

对于多个一元函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 为宗量的泛函

$$I=\int_{x_A}^{x_B} f(x,y_1,y_2,\cdots,y_n;y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

由 $\delta I=0$，可导出函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 满足的欧拉-拉格朗日方程组

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)=0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

三、哈密顿原理

一个力学体系由广义坐标 $q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t)$ 和广义速度 $\dot{q}_1(t),\dot{q}_2(t),\cdots,$

$\dot{q}_n(t)$ 描述，其中 $\dot{q}_i(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i(t)$．这一体系的动能为 $T(q_i,\dot{q}_i)$，势能为 $V(q_i,t)$，此体系的拉氏量定义为

$$L(q_i,\dot{q}_i,t)=T(q_i,\dot{q}_i)-V(q_i,t),\quad i=1,2,\cdots,n$$

则这个力学体系的作用量(体系的泛函)为

$$I=\int_{t_A}^{t_B}L(q_i,\dot{q}_i,t)\mathrm{d}t$$

当体系的作用量 I 取极值时，即 $\delta I=0$，我们得到该体系运动所遵从的方程——欧拉-拉格朗日方程组

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

对这个力学体系的这种逻辑的描述和结论，我们称为哈密顿原理，通常也称为最小作用量原理.

由哈密顿原理，当体系的拉氏量 L 不显含时间 t，即 $L=L(q_i,\dot{q}_i)$，也就是体系的势能 $V=V(q_i)$ 不随时间变化而只依赖于坐标时，则该体系具有守恒量 E，即

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=E,\quad i=1\to n\text{ 求和}$$

注意：这里用爱因斯坦求和规则，重复指标都求和，以下皆相同.

四、力学体系的哈密顿量和哈密顿正则方程

1. 广义动量

由力学体系的拉氏量 L，定义对应于广义坐标 $q_i(t)$ 的广义动量

$$p_i(t)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}$$

2. 体系的哈密顿量(或称哈密顿泛函)

$$H=p_i\dot{q}_i-L$$

它是定义在相空间 (p_i,q_i) 上的泛函 $H(p_i,q_i)$.

3. 哈密顿正则方程

当体系的哈密顿量 $H(p_i,q_i)$ 给定时，由哈密顿量 H 的变分 δH，导出哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{p}_i\end{cases}$$

这是描述该力学体系的运动方程.

五、带约束条件的泛函变分

用拉格朗日乘子法求解带约束条件的泛函的极值：

考虑泛函 $I[y]$ 及约束条件 $J[y]$，泛函

$$I[y]=\int_{x_A}^{x_B}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

其约束条件为

$$J[y]=\int_{x_A}^{x_B}G(x,y,y')\mathrm{d}x=C$$

其中 $y(x_A)=y_A$，$y(x_B)=y_B$ 为定值.

引入拉格朗日乘子 λ，构造辅助泛函

$$E[y]=I[y]+J[y]=\int_{x_A}^{x_B}\left[F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')\right]\mathrm{d}x$$

由变分原理，当 $\delta E=0$ 时，可得欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'}=0$$

解此方程，$y(x)$ 中的积分常数和拉格朗日乘子 λ 由边界条件 $y(x_A)=y_A$，$y(x_B)=y_B$ 及约束条件 $J[y]=C$ 定出.

六、诺特定理

若一个物理体系的作用量 I 的泛函形式为

$$I=\int_{x_A}^{x_B}L(x,y_1,y_2,\cdots,y_n;y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

当此泛函的宗量 $y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 的自变量 x 作无穷小变换 $x\to\bar{x}$

$$\bar{x}=x+\varepsilon\xi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n;y_1',y_2',\cdots,y_n'),\quad \varepsilon\ll 1$$

时，宗量 $y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 产生的无穷小变换为

$$\bar{y}_i(x)=y_i(x)+\varepsilon\eta_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n;y_1',y_2',\cdots,y_n')$$

在此无穷小变换下，体系的作用量变为

$$\bar{I}(\varepsilon)=\int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_B}L(\bar{x},\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n;\bar{y}_1',\bar{y}_2',\cdots,\bar{y}_n')\mathrm{d}\bar{x}$$

若 $\delta I=\bar{I}(\varepsilon)-I=0$，则该体系存在与这个无穷小变换相关的守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial y_i'}\eta_i+\left(L-y_i'\frac{\partial L}{\partial y_i'}\right)\xi=C$$

C 为常数. 注意上式中对重复指标 i 求和，从 $1\to n$.

此结论称为诺特定理.

诺特定理在物理学中有着重要的应用，它是研究物理体系的对称性和与这种对称性相联系的守恒量的重要数学工具，特别在微观领域中，是研究物理体系守恒量的重要手段.

对于定义在时空中的物理体系，当空间变量 (x,y,z)，分别对 x，y 和 z 作无穷小平移变换时，若体系的作用量保持不变，即 $\delta I=0$，我们分别得到了体系在 x、y 和 z 方向上的动量守恒.

当我们对体系的空间坐标 $\boldsymbol{r}$ 绕原点作无穷小转动变换时，若体系的作用量保持不变，即 $\delta I=0$，我们得到了体系的角动量守恒.

当我们对体系的时间坐标 t 作无穷小平移变换时，若体系的作用量保持不变，即 $\delta I=0$，我们得到了体系的能量守恒.

注意： 以上的结论，都是对“无穷小变换”而言的，是诺特定理的结果，“无穷小变换”是描述空间或时间的某种“均匀”的对称性. 如果对自变量的参量作“有限的变换”，则没有以上的结论，“有限的变换”不描述这种空间或时间的“均匀”的对称性.

习 题 详 解

22.1　对于 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\neq 0$，请证明以下两种形式的欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

是等阶的. (欧拉-拉格朗日方程具有多种形式.)

证　要证明

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \tag{1}$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \tag{2}$$

这两个方程等价，只需进行下面的运算.

由于 $f=f\left[y'(x),y(x),x\right]$，由(2)式的左边，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)&=\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y''+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}-y''\frac{\partial f}{\partial y'}-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y'\\&=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y'\end{aligned} \tag{3}$$

由于 $y'\neq 0$，因此由(3)式，可以看出，如果(1)式成立，可得(2)式成立；而如果(2)式成立，也可得(1)式成立，故(1)式与(2)式等价.

22.2　对常参数 α 的泛函

$$I(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}f\left[y(x,\alpha),y_x(x,\alpha),x\right]\mathrm{d}x$$

把被积函数 f 在 $\alpha=0$ 点展成参数 α 的泰勒级数，由泛函取极值的条件 $\dfrac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha}=0$，请导出欧拉-拉格朗日方程.

解　由于 $f=f\left[y(x,\alpha),y_x(x,\alpha),x\right]$，其在 $\alpha=0$ 点的泰勒级数为

$$f=f\big|_{\alpha=0}+\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha+\left.\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha^2+\left.\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha^3+\cdots \tag{1}$$

代入泛函

$$I(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}f\left[y(x,\alpha),y_x(x,\alpha),x\right]\mathrm{d}x \tag{2}$$

有

$$I(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left(f\big|_{\alpha=0}+\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha+\left.\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha^2+\left.\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha^3+\cdots\right)\mathrm{d}x \tag{3}$$

由泛函取极值的条件，由(3)式两边对 α 求导，并令 $\alpha=0$，可得

$$\left.\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x=0 \tag{4}$$

计算上式的积分

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x&=\int_{x_0}^{x_1}\left.\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0}^{x_1}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_1}\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{5}$$

考虑上式第二个积分，由于 $y(x,\alpha)\big|_{\alpha=0}=y(x)$，且 $y(x_0,\alpha)=y(x_0)$，$y(x_1,\alpha)=y(x_1)$，即在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 两点，$y(x,\alpha)$ 与参数 α 无关，为常数，即在这两点，$y(x,\alpha)$ 对 α 的导数为零. 并考虑到 $y(x,\alpha)$ 对 α 和对 x 的求导顺序可对换，有

$$\left.\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\tag{6}$$

故有

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x&=\int_{x_0}^{x_1}\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0}^{x_1}\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\\&=\left[\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{\alpha=0}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x\\&=0-\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{7}$$

因此，由(4)、(5)、(7)式可得

$$\int_{x_0}^{x_1}\left.\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\mathrm{d}x=0\tag{8}$$

即当 $\alpha=0$ 时，可以导出欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0\tag{9}$$

22.3　求下列泛函取极值的欧拉-拉格朗日方程，并对方程进行求解.

(1) $I=\int_{x_0}^{x_1}\frac{x}{x+y'}\mathrm{d}x$；

(2) $I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$.

解　先分析上面两个泛函的被积函数 f，它们都不显含 y，即 $f=f(x,y')$，

有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. 因此，这类泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \tag{1}$$

等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \tag{2}$$

即可得到等价的方程

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=c \tag{3}$$

其中 c 为常数.

下面具体解这两个问题：

解　(1) 在此泛函中

$$f=\frac{x}{x+y'} \tag{4}$$

计算

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=-\frac{x}{\left(x+y'\right)^2}$$

其中，$x+y'\neq 0$，则欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\left(x+y'\right)^2}\right)=0 \tag{5}$$

可得

$$\frac{x}{\left(x+y'\right)^2}=c \tag{6}$$

c 为常数. 由此方程可得

$$\left(x+y'\right)^2=\frac{x}{c} \tag{7}$$

此式要求 x 与 c 同号，取 $x>0$，$c>0$，有

$$x+y'=\pm\sqrt{\frac{x}{c}}$$

令 $c=\dfrac{1}{a^2}$，$a\neq 0$，方程右边的 $\pm$ 号可吸收到 a 中，上式变为

$$y' = a\sqrt{x} - x \tag{8}$$

即得欧拉-拉格朗日方程(3)的解为

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}} + b \tag{9}$$

其中 a 为不等于零的常数，b 为任意常数.

(2) 在泛函中

$$f = \sqrt{1+x}\sqrt{1+y'^2} \tag{10}$$

计算

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+y'^2}}$$

其欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \tag{11}$$

解此方程，有

$$\frac{y'\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

c 为常数，可得

$$y'\sqrt{1+x} = c\sqrt{1+y'^2} \tag{12}$$

$$y'^2(1+x) = c^2\left(1+y'^2\right) \Rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{x+1-c^2} \tag{13}$$

在此运算中，对(12)式两边平方，可能产生增根，是否有增根，最后要进行验算. 同时此式要求：$x+1-c^2>0$，在开方时±号吸收到 c 中，由方程(13)，我们得

$$y' = \frac{c}{\sqrt{x+1-c^2}} \tag{14}$$

可得解为

$$y = 2c\sqrt{x+1-c^2} + b \tag{15}$$

其中 c，b 为任意常数，且要求 $x+1-c^2>0$.

验算：为简单起见，取两个代表性的 $c=\pm 1$，进行验算.

取 $c=1$ 时，要求 $x>0$，此时 $y=2\sqrt{x}+b$ 满足(12)式，也满足欧拉-拉格朗日

方程(11).

取 $c=-1$ 时，要求 $x>0$，此时 $y=-2\sqrt{x}+b$ 也满足(12)式，同时也满足欧拉-拉格朗日方程(11).

因此(15)式为最后得到的欧拉-拉格朗日方程(11)的解.

22.4　求下列不显含 x 的泛函取极值时的欧拉-拉格朗日方程，并对方程进行求解.

(1) $I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y^2y'^2}\,\mathrm{d}x$；

(2) $I=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+y'^2\right)\mathrm{d}x$.

解　分析本题中两个泛函中的被积函数 f，它们都不显含 x，即 $f=f(y,y')$，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$. 考察函数 $y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}-f$，并以此函数对 x 求导，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)&=y''\frac{\partial f}{\partial y'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}y'-\frac{\partial f}{\partial y'}y''\\&=-y'\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]=0\end{aligned}$$

其中，等式右端方括号内为欧拉-拉格朗日方程的左端，故等式为零.

因此，当泛函中的被积函数 f 不显含 x 时，欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \tag{1}$$

等价于方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)=0 \tag{2}$$

也即等价于方程

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=c \tag{3}$$

其中 c 为常数.

因此在本题中只需用方程(3)计算.

(1) 在泛函中 $f=\sqrt{1+y^2y'^2}$，计算

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=y'\frac{y^2y'}{\sqrt{1+y^2y'^2}}-\sqrt{1+y^2y'^2}=\frac{-1}{\sqrt{1+y^2y'^2}}$$

故有欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2y'^2}}=\frac{-1}{c},\quad c>0 \tag{4}$$

即

$$\sqrt{1+y^2y'^2}=c\Rightarrow y^2y'^2=c^2-1,\quad c>1 \tag{5}$$

令 $c^2-1=a^2$，上式变为

$$y^2y'^2=a^2 \tag{6}$$

即

$$\left[\left(y^2\right)'\right]^2=4a^2\Rightarrow\left(y^2\right)'=\pm 2a,\quad a>0 \tag{7}$$

故得解

$$y^2=\pm 2ax+b=\begin{cases}2ax+b, & x\geqslant 0,\ b\geqslant 0\\ -2ax+b, & x\leqslant 0,\ b\geqslant 0\end{cases} \tag{8}$$

(2) 在泛函中 $f=y^2+y'^2$，此函数形式比较简单，就可直接用欧拉-拉格朗日方程(1)，有

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=2y-2y''=0$$

即欧拉-拉格朗日方程为

$$y''-y=0 \tag{9}$$

这个方程的解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{-x} \tag{10}$$

其中 c_1，c_2 为常数.

注：此问题如果硬套用(3)式，方程反而变得复杂难解.

22.5　请写出粒子做自由落体运动的哈密顿量，并给出这一系统的正则方程，说明这一正则方程与牛顿力学中自由落体运动方程的等价性.

解　设 g 为常数，粒子的质量为 m. 以地面为势能零点，并以地面为零点，垂直向上为 x 轴的正向，粒子的位置坐标为 $x(t)$，则粒子的速度为 $\dot{x}$，$\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$，其方向为 x 轴的“负”向；动量为 $p=m\dot{x}$，其方向也为 x 轴的“负”向；动能为 $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$，势能为 mgx. 不难写出粒子的哈密顿量 $H(p,x)$ 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+mgx \tag{1}$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dot{x}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dot{p}\end{cases} \tag{2}$$

可得第一个式子为 $\dot{x}=\dot{x}$，是恒等式；第二个式子为

$$\ddot{x}=-g \tag{3}$$

这正是牛顿第二定律在自由落体中的具体表达式，“－”号表示加速度沿我们取的 x 轴的负方向. (3)式的解为

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0 \tag{4}$$

其中 v_0 和 x_0 都为积分常数，v_0 为 $t=0$ 时的初始速度，x_0 为 $t=0$ 时的初始位移.

22.6　请写出线性谐振子的哈密顿量，并求出这一系统的哈密顿正则方程. 进一步说明这一正则方程与牛顿力学中得到的线性谐振子的运动方程的等价性.

解　设线性谐振子的平衡位置为 x 轴的零点，振子的质量为 m，则谐振子的动量为 $p=m\dot{x}$，$\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$；动能为 $\dfrac{p^2}{2m}$；势能为 $\dfrac{1}{2}kx^2$，k 为弹性系数(或恢复系数)，则线性谐振子的哈密顿量 $H(p,x)$ 为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2 \tag{1}$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dot{x}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dot{p}\end{cases} \tag{2}$$

可得：第一个式子为 $\dot{x}=\dot{x}$，是恒等式；第二个式子为

$$kx=-m\ddot{x} \tag{3}$$

即

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\quad \omega^2=\frac{k}{m},\ k>0 \tag{4}$$

这正是线性谐振子的运动方程.

22.7　对于广义动能

$$T=\alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad \alpha_{ij}=\alpha_{ji}$$

请证明

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T$$

证　由于$\dfrac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}=\delta_{ij}$，故

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i&=\frac{\partial\left(\alpha_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\right)}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\alpha_{jk}\delta_{ij}\dot{q}_k\dot{q}_i+\alpha_{jk}\dot{q}_j\delta_{ik}\dot{q}_i\\&=\alpha_{jk}\dot{q}_k\dot{q}_j+\alpha_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\\&=2T\end{aligned}$$

22.8　试构造一个简单的物理系统的作用量，当该系统对时间t进行无穷小平移变换时，若系统的作用量保持不变，请证明这一系统的能量是个守恒量. 这是经典物理中诺特定理给出的一个很重要的对称性的结论.

证　我们构造一个简单的单粒子系统，设粒子在势场$V(x)$中运动，粒子的位移由$x(t)$描述，粒子的质量为m，速度为$\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，粒子的动能为$T=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$，粒子的势能为$V(x)$，故粒子的总能量为

$$E=T+V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)\tag{1}$$

由于系统的拉格朗日量不显含t，故系统的拉格朗日量为

$$L(x,\dot{x})=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)\tag{2}$$

对任意给定的$t_0<t_1$，系统的作用量为

$$I=\int_{t_0}^{t_1}L(x,\dot{x})\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)\right)\mathrm{d}t,\quad t_0<t_1\tag{3}$$

在时间t的无穷小平移变换下

$$\bar{t}=t+\varepsilon,\quad \varepsilon\ll 1\tag{4}$$

系统的作用量变为

$$\bar{I}=\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1}\bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})\mathrm{d}\bar{t}=\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2-V(\bar{x})\right)\mathrm{d}\bar{t}\tag{5}$$

要求此系统在时间t的无穷小平移变换下，作用量的变分为零，即

$$\delta I=\bar{I}-I=0\tag{6}$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \bar{I} - I \\
&= \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{L}\left(\bar{x},\dot{\bar{x}}\right)\mathrm{d}\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} L\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{L}\left(\bar{x},\dot{\bar{x}}\right)\mathrm{d}\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} L\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0+\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \bar{L}\left(\bar{x},\dot{\bar{x}}\right)\mathrm{d}\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \left(\bar{L}\left(x,\dot{x}\right) - L\left(x,\dot{x}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0+\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \bar{L}\left(\bar{x},\dot{\bar{x}}\right)\mathrm{d}\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta L\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{7}
$$

计算上式积分，考虑到积分与积分变量的形式无关，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0+\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \bar{L}\left(\bar{x},\dot{\bar{x}}\right)\mathrm{d}\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0+\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中两个积分的积分限中的 $\int_{t_0+\varepsilon}^{t_1}$ 的积分相消.

在(7)、(8)两式中

$$
\bar{L}\left(x,\dot{x}\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\left(t+\varepsilon\right)\right)^2 - V\left(x\left(t+\varepsilon\right)\right) \tag{9}
$$

由积分中值定理，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \bar{L}\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t \\
&= \varepsilon\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V\left(x\right)\right]_{t=t_1} - \varepsilon\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V\left(x\right)\right]_{t=t_0}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \delta L\left(x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right)\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t=t_0}^{t=t_1} = \left[m\dot{x}\cdot\delta x\right]_{t=t_0}^{t=t_1}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

下面，我们来具体分析和计算一下 δx：

在时间平移$\bar{t}=t+\varepsilon$下，函数$x(t)\to\bar{x}(t)$，即对应同一个自变量t，函数的形式发生了变化，即

$$\delta x=\bar{x}(t)-x(t) \tag{12}$$

而另一方面，物理规律在坐标变换下的不变性告诉我们，位移$x(t)$在时间的平移变换下，有

$$\bar{x}(\bar{t})=x(t) \tag{13}$$

即

$$\begin{aligned}0=\bar{x}(\bar{t})-x(t)&=\bar{x}(\bar{t})-x(\bar{t})+x(\bar{t})-x(t)\\&=\delta x(\bar{t})+x(t+\varepsilon)-x(t)\end{aligned} \tag{14}$$

在忽略了ε^2项后(下面的计算均忽略了ε^2项)，由于

$$\begin{aligned}\delta x(\bar{t})&=\delta x(t+\varepsilon)=\delta\left(x(t)+\dot{x}(t)\varepsilon\right)=\delta x(t)+\varepsilon\delta\dot{x}(t)\\&=\delta x(t)\end{aligned} \tag{15}$$

其中$\delta\dot{x}(t)\sim\varepsilon$，$\varepsilon\delta\dot{x}(t)\sim\varepsilon^2$，且由泰勒展开，有$x(t+\varepsilon)=x(t)+\dot{x}(t)\varepsilon$.

因此(14)式变为

$$\delta x(t)+\varepsilon\dot{x}(t)=0$$

即

$$\delta x(t)=-\varepsilon\dot{x}(t) \tag{16}$$

由(6)、(7)、(10)、(11)和(16)式，可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)\right]_{t=t_1}-\varepsilon\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)\right]_{t=t_0}-\varepsilon\left[m\dot{x}\cdot\dot{x}\right]_{t=t_0}^{t=t_1}\\&=-\varepsilon\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)\right]_{t=t_1}+\varepsilon\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)\right]_{t=t_0}\\&=0\end{aligned} \tag{17}$$

即

$$\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)\right]_{t=t_1}=\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)\right]_{t=t_0} \tag{18}$$

因此我们得到，在任意给定t_0和t_1的情况下，对时间的无穷小平移变换，该力学系统的能量都守恒，即

$$E(t_0)=E(t_1) \tag{19}$$

科学出版社

教师教学服务指南

为了更好服务于广大教师的教学工作，科学出版社打造了“科学 EDU”教学服务公众号，教师可通过**扫描下方二维码，享受样书、课件、会议信息**等服务.

样书、电子课件仅为任课教师获得，并保证只能用于教学，不得复制传播用于商业用途. 否则，科学出版社保留诉诸法律的权利.

关注微信公众号“科学EDU” → 点击“教学服务”-“样书、课件申请” → 审核（1个工作日） → 样书7工作日寄出、课件3工作日发送！

科学EDU

关注科学EDU，获取教学样书、课件资源
面向高校教师，提供优质教学、会议信息
分享行业动态，关注最新教育、科研资讯

学生学习服务指南

为了更好服务于广大学生的学习，科学出版社打造了“学子参考”公众号，学生可通过扫描下方二维码，了解海量**经典教材、教辅、考研**信息，轻松面对考试.

学子参考

面向高校学子，提供优秀教材、教辅信息
分享热点资讯，解读专业前景、学科现状
为大家提供海量学习指导，轻松面对考试

教师咨询：010-64033787　QQ：2405112526　yuyuanchun@mail.sciencep.com
学生咨询：010-64014701　QQ：2862000482　zhangjianpeng@mail.sciencep.com

(O-7803.31)

物理学核心课程习题精讲系列

- 电磁学千题解（第二版）
- 电动力学题解（第三版）
- 理论力学学习指导与习题解析（理科用）（第二版）
- 数学物理方法学习指导

……

科学出版社互联网入口
高教数理出版分社：(010)64015178　销售：(010)64031535
E-mail：mph@mail.sciencep.com
销售分类建议：物理教辅

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-062193-1

定 价：69.00元