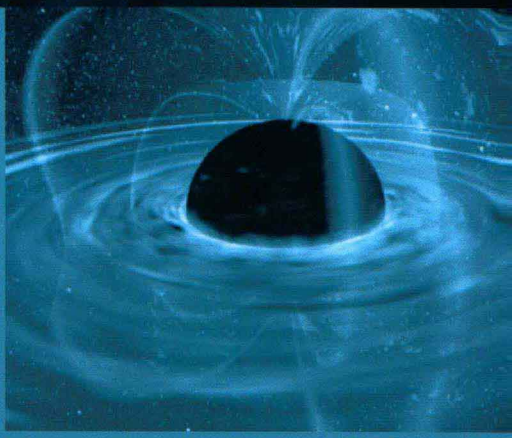
数学物理方法

■ 杨孔庆　编著



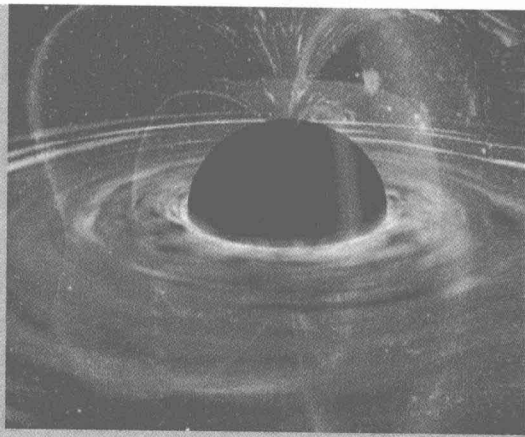
Mathods of Mathematica Physics

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学物理方法

Shuxue Wuli Fangfa

■ 杨孔庆　编著



Mathods of Mathematical Physics

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是在兰州大学“数学物理方法”课程所用讲义基础上编纂而成。本书紧密结合物理教学实际，阐述简明、条理清晰，主要涉及线性空间、复变函数及数学物理方程等内容。本书在兼顾基本知识点的基础上，力图更加详尽地阐述基本概念，尽力做到与物理学应用相关的数学方法均给予介绍，并给出这些数学工具必备的数学基础。

本书可作为高等学校物理类专业数学物理方法课程的教材，也可供有关专业的研究生、教师和科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法 / 杨孔庆编著. --北京 : 高等教育出版社, 2012.12

ISBN 978-7-04-036403-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学物理方法－高等学校－教材 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 262601 号

策划编辑 忻 蓓　　责任编辑 忻 蓓　　封面设计 张 志　　版式设计 杜微言

责任校对 王 雨　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 国防工业出版社印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 25.75
字　　数 480 千字
购书热线 010－58581118

咨询电话 400－810－0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　http://www.landraco.com.cn
版　　次 2012 年 12 月第 1 版
印　　次 2012 年 12 月第 1 次印刷
定　　价 40.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 36403－00

前　言

本书是在笔者在兰州大学多年讲授“数学物理方法”所使用的讲义的基础上改编而成的。在编写中，主要针对物理系的学生的数学基础及物理类本科专业后续课程所需的数学工具，来安排重点内容，例如针对多数学生对数学分析中“场论”这部分知识的不足及这部分内容对物理学的重要性，专门安排了一篇“线性空间与线性算子”的内容。这部分内容在写法上，首先阐明了几何学的分析原理与物理学的规律都具有不依赖于坐标选择的共同本性，因此用几何学分析的方法来描述物理规律，是数学物理中必然的途径之一，在这方面伟大的物理学家爱因斯坦(A. Einstein)给我们做出了光辉的示范。在这一思想的指导下，从几何学的角度讲述了三维欧氏空间的向量代数与向量分析及其与物理学的联系。着重讲了物理学中常用到的标量场的梯度、向量场的散度与旋度的几何意义与物理涵义，并从几何学中“度量”的角度出发，导出了这些几何量在一般曲线坐标系下的表达式，具体给出了它们在柱坐标系及球坐标系下的数学表达。在这一篇中还给出了学习量子物理学中的所需要的线性空间和线性算子的一些基本性质及基本运算的数学基础。本篇的内容对后续物理课程(特别是电动力学和量子力学课程)所需的线性空间和线性算子的数学基础，给出了一个较有系统的简洁实用的基础知识体系，免去了后续课程中讲授时对不足的数学知识做较为零碎的补课。除第一篇外，按国内传统的数学物理方法教程的基本内容，分成了第二篇复变函数；第三篇积分变换与 δ 函数；第四篇数学物理方程和第五篇变分法初步。

本书在基本的知识点上，力图讲清基本概念，尽量做到凡与物理学应用相关的数学方法均给予介绍，并给出这些数学工具必备的数学基础。为了便于学生阅读，在基本概念的论述和基本运算上给出了较详尽的说明和详细的推导步骤。

本书较少涉及以上五篇内容的数学理论，更多的是给出相应内容的运算微积。这可能从数学的角度看来会损失数学的严密性，但从物理上的应用来看，可使学物理的学生在了解这些数学知识点框架的基础上，学会其在物理上的应用，并且在此基础上能有进一步学习新的知识及其应用的能力，而不求全于纯数学定理的证明。当然在全书的内容上，涉及近代发展起来的与科技应用密切结合的某些本科生可接受的内容上，如非线性方程和小波变换等，也做了简单的介绍。

在复变函数这一篇中,首先从映射的角度来定义复变函数。由于用映射的概念来定义函数,这种映射只能是一对一或是多对一的映射,否则无法引入分析的运算。而由于复平面幅角的多值性,不能把复变函数定义为从复平面讲复平面的映射。所以给出复变函数的定义是:从 Riemann(黎曼)面到复平面的映射。因此从内容的讲授上,是在复平面的基础上先介绍了简单 Riemann 面的构造。当然一个复平面是最简单的 Riemann 面。由于 Riemann 面的构造非常复杂,在通常的情况下并没有整体的结构,我们对这部分的内容没有进行深入的讨论,只介绍了几种简单的具有整体结构的 Riemann 面。复变函数的内容是数学上一个大的分支,这里我们没有涉及其数学结构和复分析的理论,只是着重让学生掌握复变函数的解析运算与积分运算,复变函数的级数展开,以及如何用复积分来计算难以求积的一些类型的实积分。

在第三篇中,第一部分介绍了两种主要的积分变换:Fourier(傅里叶)变换和 Laplace(拉普拉斯)变换。在这部分的内容上,采用对比的方法,给出了这两种变换的性质与具体的运算以及它们在解方程中的运用,同时给出了这两种变换的联系。必须说明一点的是,我们把 Γ 函数和解析延拓的概念,放在 Laplace 变换这一节的附录中,并不是它们不重要,相反,这是必需讲授的内容,因为这是物理学中常要遇到的数学知识,用 Γ 函数为例来讲解析延拓,在图像上更为直观,而在讲 Laplace 变换时就遇到了 Γ 函数,如果放到后面作为特殊函数来讲 Γ 函数,在内容的编排上又不好处理,只好把 Γ 函数作为附录放在这一位置上,鉴于 Γ 函数在物理应用上的重要性,这一附录必须纳入课堂教学中。

这一篇中的另一部分内容是介绍 δ 函数,我们并没有从广义函数的角度出发来介绍 δ 函数,而是从物理的直观直接引入。我们对 δ 函数的性质,给出了物理上应用所需的相对完整的介绍,并给出了物理上常遇到的 δ 函数的形式。

本篇的最后一章,介绍了近半个世纪以来发展很快的并与现代频谱分析密切相关的小波变换的基本概念。特地给出了小波变换中的 Heisenberg(海森堡)不确定性关系,这说明了 Heisenberg 不确定性关系并非量子物理所特有的,在宏观波动的统计测量中,也存在这一不确定性关系,这对我们从物理上加深理解 Heisenberg 不确定性关系的实质是十分有益的。

在第四篇数学物理方程中,由物理学中的例子导出波动方程,输运方程和 Poisson(泊松)方程这三类主要方程,再给出这三类方程的定解条件。详细地介绍了这三类方程最主要的解法——分离变量法,并按坐标系的分类,分别给出直角坐标系下的分离变量及柱坐标系和球坐标系下的分离变量解法。

在直角坐标系下的分离变量解法中,引入 Strum – Liouville(斯特姆 – 刘维尔)本征值问题。在曲线坐标系下的分离变量解法中,引入二阶线性常微分方

程的级数解法。

在曲线坐标系的分离变量解法中，只介绍柱坐标系下和球坐标系下的分离变量，给出这两种坐标系下三类方程的分离变量解法所得到的球函数和柱函数等特殊函数的解，并讨论了这些特殊函数的性质。

在 Green（格林）函数法解数学物理方程这一章中，分析了二阶微分算子的基本解和 Green 函数的物理意义，指出了用 Green 函数法解三类方程的特点所在，给出了物理上常用的几种算子的基本解和某些数学物理方程在一定的边界条件下的 Green 函数解法。

本篇除了详细讲授分离变量解法和 Green 函数解法外，还介绍了数学物理方程的积分变换解法和行波法这两种常用的方法。这两种解法通常用在无界和半无界空间的定解问题中。积分变换在理论物理和频谱分析中常被用到，而行波法在现代非线性方程求试探行波解中被广泛应用。

本篇的最后一章即第二十章，用历史发展的事例给出了非线性问题的概念，并介绍了非线性数学物理方程的基本知识，着重介绍了一类非线性方程的齐次平衡解法，这是对一类非线性方程进行求解的较为普适的一种方法，对扩展学生在数学物理方法学习中的视野是有益的。

本书的最后一篇是变分法初步。在介绍泛函概念的基础上，对比函数微分的定义，由函数“接近度”的概念引出了泛函变分的定义，并给出了泛函变分的运算与函数微商运算的关系。在此基础上介绍了物理学中常用到的变分原理和 Euler - Lagrange（欧拉 - 拉格朗日）方程。同时介绍了 Hamilton（哈密顿）力学中的 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程。最后还介绍了与变分运算相关的 Noether（诺德）定理，使学生了解为什么一个物理体系的对称性与这一物理体系的守恒量是密切相关的。

作为前言，在介绍本书的基本内容后，想就如何使用本教材说几点看法。

一、本教材内容在兰州大学对物理系基地班学生的授课学时是 90 学时（每学时为 50 分钟），而同样的学时，对物理系普通班讲授采用本教材时却删去了部分内容，例如 Green 函数的大部分内容和变分法初步整篇。

本教材可作为 72 ~ 90 学时的数学物理方法课程的讲授教材。作为 72 学时的教材使用时，建议把带“*”号的篇、章、节的内容略去，而且可根据任课老师的理解仅保留最基本的知识点（本书不带“*”号的内容并不等于最基本的知识点），而略去更多的章节的内容。相反，本书中把 Green 函数打上“*”号，但教师认为需要时仍可讲授最基本的概念和内容。

我们并不给出本教材各部分内容相应的建议学时，因为我们认为，各位教师对各个知识点的理解和讲授的看法是不一样的，并且也要因学生的理解能力的差异而定。

对于教师也应有这方面的能力。一本书可由厚教到薄,再由薄教到厚,你总能根据学时(可能是10学时,36学时,54学时,72学时,90学时,120学时等等)挑选相应的知识点串成一个体系来讲授,或是扩充更多的知识教给学生,这也要求老师对知识点和教材有深入的剖析和总结,同时还要求教师具有所使用的教材以外更多的知识储备。

教师的授课是一种创造性的劳动,课堂讲授主要是把自己对知识点的理解展示给学生,为学生做个示范,让学生读懂这些知识,使学生学会思考问题的方法,这样才能培养学生有进一步学习新知识的能力。对数学物理方法这门课程而言,数学的定义、定理、逻辑推理及运算方法是一种客观存在的内容,但教师对这些内容的理解是各有千秋的,如果按书本死搬教条,并按所谓教学进度而死规定每节课要完成多少教学内容(而不管学生的接受程度如何)*来进行讲课,这是下策。

教师对课程知识点的理解及深入分析所做的示范,是在我今生的学习和教学生涯中所得到的体会,并将努力去践行。我想,要把这种体会贯穿在本书的编写中。但由于本人水平有限,不一定能做好。

本书在内容的选取上,由于增加了线性空间和线性算子这部分内容,因考虑篇幅关系,本书在例题的选取上偏少,希望用此教材的教师在教学的过程中可根据众多的数学物理方法教材挑选认为合适的例题进行选讲。

二、关于本书所选用的习题。除了第十二章小波变换简介和第二十章非线性数学物理方程初步这两章没选配习题外,其他各章都选配了适量的习题。这些习题的选取,大部分是加深对本章教学内容的理解与运算技能的训练,还选取了部分与物理结合较紧的练习,以加深对数学物理方法的理解。本书的习题量不大,希望同学在做这些练习时,对每道题都能进行深入思考,把自己的思维理清,看看这道题用到哪些基本知识和运算技能,这样以后碰到新问题时能举一反三,不要停在对答案的程序上。为鼓励学生独立完成作业,并增强对自己解答的信心。因此本书的习题后面暂不附解答。

三、我们建议在本课程的讲授过程中多采用板书进行教学。课堂教学是教师与学生进行交流的重要手段,学生如能把教师在黑板上的数学演绎、推导及对内容的分析体会用笔记的形式记录下来,不但能使学生注意听讲,同时从生理学的角度看,手脑并用能加深对内容的记忆,并对课堂上不理解的内容记录下来打上问号,以便课后复习时着重思考。如果过分依赖PPT,学生对讲授的内容记忆不深,对后续物理课程的听课和理解会受影响。更重要的是学生在大学阶段要学会如何做笔记,这是一种学习能力的体现,是提高学生综合素质的一种手段。

四、关于学习总结。学生在学完每一章后,根据老师的讲解和自己的体会,学会总结本章的内容,这也是另一种重要的学习能力的培养。一本书由厚到薄,

再由薄到厚，这是许多科学巨匠教给我们的学习方法，学会总结正是这种学习方法的一部分。陆全康教授、姚瑞正教授、胡嗣柱教授等诸多教授的教材和学习指导书，在这一方面给我们做了示范。

笔者感谢黄亮教授用本书书稿在兰州大学讲授“数学物理方法”这门课程，并提出很好的建议；感谢李明哲教授详细阅读了书稿并提出很好的建议；感谢林琼桂、张胜利、李幼铭、刘洪、高静怀、李广良、张志鹏等教授对书稿的讨论和建议；感谢黄子罡、张勇、龚白华博士的有益建议；感谢兰州大学计算物理与复杂系统研究所的研究生们对书稿计算机输入所付出的辛勤劳动。

最后，在这里我要感谢听过我讲授这门课的兰州大学的莘莘学子，是他们在我授课后经常向我提出问题和讨论问题，是他们在学习后续物理课程时，给我反馈意见，使我不断地修订内容改进教学；是他们在国内外继续更高阶段的学习和工作中，告诉我哪些基本方法和思想对他们有深远的影响；是他们的不断鼓励激励我前行。

作　者

2012 年 8 月

目　　录

第一篇　线性空间及线性算子

第一章　$\mathbf{R}^3$空间的向量分析 …… 1

§1.1　向量的概念 …… 1

§1.2　$\mathbf{R}^3$空间的向量代数 …… 3

§1.3　$\mathbf{R}^3$空间的向量分析 …… 8

§1.4　$\mathbf{R}^3$空间中向量分析的一些重要公式 …… 13

第一章习题 …… 15

第二章　$\mathbf{R}^3$空间曲线坐标系中的向量分析 …… 18

§2.1　$\mathbf{R}^3$空间中的曲线坐标系 …… 18

§2.2　曲线坐标系中的度量 …… 20

§2.3　曲线坐标系中标量场梯度的表达式 …… 24

§2.4　曲线坐标系中向量场散度的表达式 …… 25

§2.5　曲线坐标系中向量场旋度的表达式 …… 27

§2.6　曲线坐标系中 Laplace(拉普拉斯)算符 ∇^2 的表达式 …… 29

第二章习题 …… 31

第三章　线性空间 …… 33

§3.1　线性空间的定义 …… 33

§3.2　线性空间的内积 …… 34

§3.3　Hilbert(希尔伯特)空间 …… 37

§3.4　线性算符 …… 39

§3.5　线性算符的本征值和本征向量 …… 44

第三章习题 …… 46

第二篇　复变函数

第四章　复变函数的概念 …… 47

§4.1　映射 …… 47

§4.2　复数 …… 48

§4.3　复变函数 …… 52

第四章习题 …… 56
第五章 解析函数 …… 58
§5.1 复变函数的导数 …… 58
§5.2 复变函数的解析性 …… 60
§5.3 复势 …… 62
*§5.4 解析函数变换 …… 64
第五章习题 …… 68
第六章 复变函数积分 …… 69
§6.1 复变函数的积分 …… 69
§6.2 Cauchy(柯西)积分定理 …… 70
§6.3 Cauchy(柯西)积分公式 …… 72
§6.4 解析函数高阶导数的积分表达式 …… 73
第六章习题 …… 74
第七章 复变函数的级数展开 …… 76
§7.1 复变函数项级数 …… 76
§7.2 解析函数的 Taylor(泰勒)展开 …… 77
*§7.3 Taylor 展开的理论应用 …… 80
§7.4 解析函数的 Laurent(洛朗)展开 …… 82
第七章习题 …… 86
第八章 留数定理及其在实积分中的应用 …… 88
§8.1 留数定理 …… 88
§8.2 留数的一般求法 …… 91
*§8.3 解析函数在无穷远点的留数 …… 93
§8.4 留数定理在实积分中的应用 …… 95
*§8.5 Hilbert(希尔伯特)变换 …… 107
第八章习题 …… 109

第三篇 积分变换与 δ 函数

第九章 Fourier(傅里叶)变换 …… 112
§9.1 Fourier 级数 …… 112
§9.2 Fourier 变换 …… 114
§9.3 Fourier 变换的基本性质 …… 117
第九章习题 …… 121
第十章 Laplace(拉普拉斯)变换 …… 122
§10.1 Laplace(拉普拉斯)变换 …… 122

§10.2　Laplace 变换的基本性质 …… 127
§10.3　Laplace 变换的反演 …… 130
§10.4　Laplace 变换的应用 …… 132
第十章习题 …… 135
第十一章　δ函数 …… 137
§11.1　δ函数的定义 …… 137
§11.2　δ函数的性质 …… 139
*§11.3　δ函数的导数 …… 142
§11.4　三维δ函数 …… 143
§11.5　δ函数的 Fourier 变换及 Fourier 级数展开 …… 144
第十一章习题 …… 147
***第十二章　小波变换初步** …… 149
§12.1　Gabor(伽博)变换 …… 150
§12.2　小波变换 …… 153
§12.3　小波变换中的 Heisenberg(海森堡)不确定性关系 …… 155

第四篇　数学物理方程

第十三章　波动方程、输运方程、Poisson(泊松)方程及其定解问题 …… 159
§13.1　二阶线性偏微分方程的普遍形式 …… 159
§13.2　波动方程及其定解条件 …… 161
§13.3　输运方程及其定解条件 …… 166
§13.4　Poisson 方程及其定解条件 …… 171
*§13.5　Laplace 方程和调和函数 …… 173
§13.6　三类方程定解问题小结 …… 175
第十三章习题 …… 178
第十四章　分离变量法 …… 180
§14.1　齐次方程齐次边界条件下的分离变量法 …… 181
§14.2　Sturm－Liouville(斯特姆－刘维尔)本征值问题 …… 185
§14.3　非齐次方程齐次边界条件下的分离变量法 …… 195
§14.4　非齐次边界条件下的分离变量法 …… 199
§14.5　分离变量法小结 …… 201
第十四章习题 …… 202
第十五章　曲线坐标系下方程的分离变量 …… 204
§15.1　球坐标系下方程的分离变量 …… 204
§15.2　柱坐标系下方程的分离变量 …… 208

§15.3 二阶线性常微分方程的级数解法 …… 210
第十五章习题 …… 216
第十六章 球函数 …… 219
§16.1 Legendre(勒让德)多项式 …… 219
§16.2 Legendre 多项式的主要性质 …… 226
§16.3 具有轴对称的 Laplace 方程的求解 …… 230
§16.4 连带 Legendre 函数 …… 239
§16.5 球函数 …… 244
*附录：球函数的加法公式 …… 248
第十六章习题 …… 252
第十七章 柱函数 …… 255
§17.1 Bessel(贝塞尔)函数 …… 255
§17.2 Bessel 函数的递推关系 …… 260
§17.3 柱函数的定义 …… 262
§17.4 整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的生成函数 …… 263
§17.5 Bessel 方程的本征值问题 …… 265
*§17.6 虚宗量 Bessel 函数 …… 277
*§17.7 Hankel(汉克尔)函数 …… 284
§17.8 球 Bessel 函数 …… 285
第十七章习题 …… 292
***第十八章 Green(格林)函数法** …… 295
§18.1 微分算子的基本解和 Green 函数的定义 …… 295
§18.2 Laplace 算子的基本解 …… 299
§18.3 Laplace 算子的 Green 函数 …… 302
§18.4 Laplace 算子的镜像 Green 函数法 …… 306
§18.5 Helmholtz 算子的基本解 …… 310
§18.6 输运算子的 Green 函数 …… 313
§18.7 波动算子的基本解 …… 319
第十八章习题 …… 322
第十九章 其他求解方法及方程 …… 323
§19.1 积分变换法 …… 323
§19.2 行波法 …… 329
§19.3 冲量定理法 …… 335
*§19.4 Schrödinger(薛定谔)方程、谐振子势 …… 336
*附录：Hermite 多项式的性质 …… 340

第十九章习题 …… 342
*第二十章　非线性数学物理方程初步 …… 344
§20.1　Huygens(惠更斯)等时摆问题 …… 345
§20.2　KdV 方程和孤立波 …… 349
§20.3　一类非线性方程的齐次平衡解法 …… 352

*第五篇　变分法初步

第二十一章　泛函的变分 …… 361
§21.1　泛函的概念 …… 361
§21.2　泛函的变分 …… 362
第二十二章　变分原理 …… 366
§22.1　泛函的极值 …… 366
§22.2　变分原理、Euler－Lagrange(欧拉－拉格朗日)方程 …… 367
§22.3　Hamilton(哈密顿)原理 …… 371
§22.4　Hamilton 泛函和正则方程 …… 374
§22.5　带约束条件的泛函变分 …… 376
§22.6　Noether(诺德)定理 …… 381
第二十一、二十二章习题 …… 388

附录：分离变量法 …… 389
主要参考文献 …… 394

第一篇　线性空间及线性算子

物理学的规律是一种客观存在，它不依赖我们所采用的不同数学描述手段或采用的不同坐标系而改变. 选取恰当的数学方法来描述物理体系，对我们深入了解和掌握物理学的规律是十分重要的.

在经典物理学中，对一个物理体系的运动学及动力学的研究就是把物理系统进行理想化、线性化. 在一般情况下，对已线性化的物理体系的研究，已能满足人们分析该系统行为规律的要求. 因此线性空间及其上的分析是用来描述这一大类物理体系的强有力的手段，它是经典物理学中数学方法的基础. 只有掌握了线性空间的分析方法，才能进一步去学习研究更为复杂的非线性物理系统的数学描述，进而去探索更为复杂的物理世界.

第一章　R^3 空间的向量分析

§1.1　向量的概念

回顾经典力学中所熟悉的向量的概念，即在二维平面上或三维欧氏空间中，我们定义了有方向和大小（即长度，这需要在空间中引入度量）的一种量，称为向量，记为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 等，其长度记为 $|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|,|\boldsymbol{C}|,\cdots$ 称为向量的模. 同时引入了向量的加法运算规则，即三角形法则，或称为平行四边形法则，如图 1.1.1 和图 1.1.2 所示.

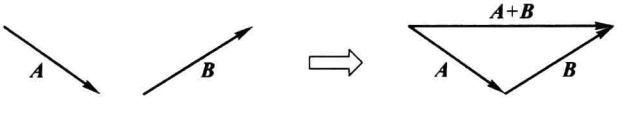


图 1.1.1

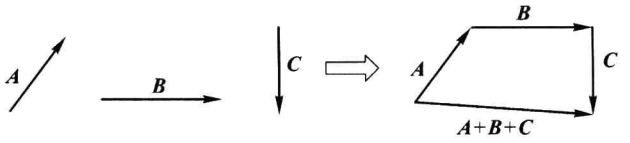


图 1.1.2

由几何作图易验证：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$. 同时我们可以定义向量 $\boldsymbol{A}$ 的逆向量 $-\boldsymbol{A}$，它与向量 $\boldsymbol{A}$ 的长度相等即 $|-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|$，但方向相反. 因此有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

我们还可以进一步定义任意两个向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的标量积即“·”乘和向量积即“×”乘：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{1.1.1}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{1.1.2}$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，$\boldsymbol{e}$ 为单位向量，它垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所在的平面，方向由 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 以右手螺旋法则而定.

从上面的向量的定义及运算，我们可以看出：不需要引入任何坐标系，就可以对向量进行我们所定义的运算. 例如，我们并不需要引入坐标系，即可证明 Schwarz 不等式

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2\leqslant|\boldsymbol{A}|^2\cdot|\boldsymbol{B}|^2 \tag{1.1.3}$$

证：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\\&=|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\cos^2\theta\\&\leqslant|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\end{aligned}$$

因此向量是几何空间中客观存在的量，它是不依赖于坐标系而客观存在的，正如我们物理世界中的物理规律也是不依赖于坐标系选取的. 正是这种“不依赖坐标系选择”的共同特征，使得我们用向量空间及其上的分析来描述物理学的规律成为可能，这也是我们学习向量分析的重要性所在.

当我们用向量分析的方法来定量地研究物理系统的变化规律时，例如向量的大小和方向随时间和空间是如何变化时，我们必须在空间中引入坐标系（度量已自然包含在引入的坐标系中，时间可作为空间中的一个参数引入）. 由于引入的坐标系不同，对向量的描述也不一样，但对于同一个向量，由于它是空间中客观存在的量，在不同的坐标系下的描述是等价的.

§1.2　$\mathbf{R}^3$ 空间的向量代数

$\mathbf{R}^3$ 空间就是三维 Euclidean(欧基里德)空间,即三维正交实向量空间,简称三维欧氏空间.我们研究物理规律往往是在这一空间中研究物理客体位形的变化及其动力学问题.当我们用分析的手段来研究时,首先我们在这 $\mathbf{R}^3$ 空间中给定一个单位长度的度量,其次要选定一个原点和通过该原点按右手螺旋法则给出的三个正交的固定的单位向量 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$.并以单位向量为坐标轴的方向建立起三个正交的无穷长的刚性坐标轴,这就在 $\mathbf{R}^3$ 空间中引入了 Descartes(笛卡儿)坐标系,或称为 Cartesian 坐标系.因此 $\mathbf{R}^3$ 空间中的每一点都是位置向量,用 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 来表征,其中 $x,y,z\in\mathbf{R}$,为 $\boldsymbol{r}$ 在三个轴上的投影,如图 1.2.1 所示.

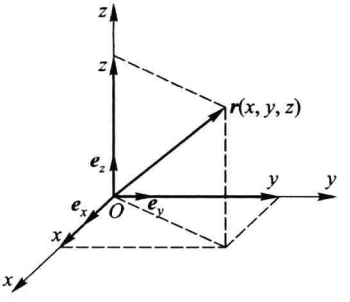


图 1.2.1

$\boldsymbol{r}$ 也可以用这三个投影参数来表示,即 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.因此 $\mathbf{R}^3$ 空间也就是所有 $\boldsymbol{r}$ 向量的集合,其中包含了特殊的原点向量 $\mathbf{0}=0\boldsymbol{e}_x+0\boldsymbol{e}_y+0\boldsymbol{e}_z$,它是个无方向性无长度的特殊向量,是个奇异向量.

代数——就是指代数系统,所谓代数系统是指在元素间定义了合成法则的元素的集合.下面我们将给出 $\mathbf{R}^3$ 空间的向量代数——即给出 $\mathbf{R}^3$ 中向量间的合成法则,并在 Descartes(笛卡儿)坐标系下给出向量代数的具体运算①.

我们对 $\mathbf{R}^3$ 中的向量可定义如下的合成法则:

1. 加法

对于 $\mathbf{R}^3$ 中的任意的两个向量 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{e}_1+B_2\boldsymbol{e}_2+B_3\boldsymbol{e}_3$ 其中 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_z$ 是 x、y、z 三个坐标轴上的单位向量(以下皆同).则其

① 向量代数的结合运算,正如上节所定义的向量的"+","·","×"运算,是不需要引入坐标系的.但要得到具体的数值结果,就需要引入坐标系.

加法定义为：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_1+B_1)\boldsymbol{e}_1+(A_2+B_2)\boldsymbol{e}_2+(A_3+B_3)\boldsymbol{e}_3 \tag{1.2.1}$$

由定义可以看出：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1.2.2}$$

作为特殊向量 $\mathbf{0}$，它与任何向量相加都等于该向量本身. 即

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \tag{1.2.3}$$

同时有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}=0$，一般 $\mathbf{0}$ 记为 0 即可. 并可得

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(A_1-B_1)\boldsymbol{e}_1+(A_2-B_2)\boldsymbol{e}_2+(A_3-B_3)\boldsymbol{e}_3 \tag{1.2.4}$$

2. 数乘向量

对于任何一个实数 $\alpha\in\mathbf{R}$，有

$$\alpha\boldsymbol{A}=\alpha A_1\boldsymbol{e}_1+\alpha A_2\boldsymbol{e}_2+\alpha A_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.2.5}$$

即 α 把 $\boldsymbol{A}$ 的模 $|\boldsymbol{A}|$ 扩大了 $|\alpha|$ 倍，即 $|\alpha\cdot\boldsymbol{A}|=|\alpha||\boldsymbol{A}|$，这一结论很容易从 Descartes（笛卡儿）坐标系中向量 $\boldsymbol{A}$ 的模为 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$ 的运算得证.

由上面加法和数乘的定义，我们很容易证明 $\mathbf{R}^3$ 中的元素即向量满足以下的分配律：

$$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B} \tag{1.2.6}$$

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A} \tag{1.2.7}$$

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{A}=\alpha(\beta\boldsymbol{A}) \tag{1.2.8}$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. 一般来讲，定义了加法和数乘运算且满足以上分配律的元素的集合称为向量空间（或称为线性空间），后面我们将对一般线性空间（作为 $\mathbf{R}^3$ 空间的推广）给出严格的定义.

3. 向量的标量积

由(1.1.1)式所定义的向量的标量积可知，当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 两向量垂直时，其标量积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，因此对 Descartes（笛卡儿）坐标系中的三个正交坐标轴的单位向量即坐标基向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 间的标量积均为零，而 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的标量积为标量，其数值为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(B_1\boldsymbol{e}_1+B_2\boldsymbol{e}_2+B_3\boldsymbol{e}_3)\\&=A_1B_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+A_1B_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+A_1B_3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3+\\&\quad A_2B_1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+A_2B_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+A_2B_3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3+\\&\quad A_3B_1\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1+A_3B_2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2+A_3B_3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

$$= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_iB_i \tag{1.2.9}$$

为了方便复杂的运算，我们先介绍两种运算规则符号：

(1) Einstein(爱因斯坦)求和约定：

对于一个向量 $\boldsymbol{A}$ 记为

$$\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}_i \qquad (i = 1,2,3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.2.10}$$

此约定为：在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和，(除非特别指出该重复指标不求和)，我们称求和指标“i”为“哑标”，因为对一个 $\boldsymbol{A}$，它可表示为 $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}_i$ 也可表示为 $\boldsymbol{A} = A_j\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3} A_j\boldsymbol{e}_j$，即 $A_i\boldsymbol{e}_i = A_j\boldsymbol{e}_j$ 与求和指标的具体字母 i,j 无关，故称“哑标”.

对求和指标有严格的规定：即任一代数项中同一求和指标不能超过 2 个，例如

$$A_iB_jC_iD_j = \sum_{i=1}^{3} A_iC_i \sum_{j=1}^{3} B_jD_j$$

而 $A_iB_iC_iD_j$ 则是一种错误的求和表示，这一项中出现三个相同的 i 指标，它无法在 Einstein(爱因斯坦)求和约定规则中进行运算.

(2) Kronecher delta(克罗内克 δ)符号 δ_{ij}，定义

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{1.2.11}$$

这一符号很方便地表示向量内积的正交性，并在很复杂的 Einstein(爱因斯坦)求和规则中起着“挑选”指标简化运算的作用.

例 1.2.1：对于坐标系基向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3$$

例 1.2.2：

$$A_i\delta_{ij} = A_1\delta_{1j} + A_2\delta_{2j} + A_3\delta_{3j} = A_j$$

因为只有 A_i 的指标为 j 时才不为零.

例 1.2.3：则两向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的标量积可简化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(B_j\boldsymbol{e}_j)\\ &= A_iB_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\\ &= A_iB_j\delta_{ij}\\ &= A_iB_i\end{aligned}$$

可看出,两个向量的标量积是可对易的,即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

同时可以证明

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.2.12}$$

4. 向量的向量积

由向量的向量积的定义(1.1.2)式可知

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1.2.13}$$

及

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = 0 \tag{1.2.14}$$

且在 Descartes(笛卡儿)坐标系中,三个坐标基向量(图 1.2.2)的向量积为

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3 = 0$$

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

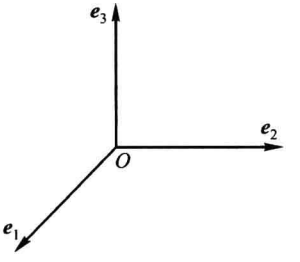


图 1.2.2

即向量积的方向遵从右手螺旋法则.

在 Descartes(笛卡儿)坐标系中,$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的具体计算为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3)\times(B_1\boldsymbol{e}_1+B_2\boldsymbol{e}_2+B_3\boldsymbol{e}_3)\\ &= (A_2B_3-A_3B_2)\boldsymbol{e}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\boldsymbol{e}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\boldsymbol{e}_3\\ &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

为了计算方便我们引入三阶单位全反对称张量或称为三阶 Levi-Civita(勒维-契维塔)符号 ε_{ijk},　$i,j,k=1,2,3$

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & i,j,k=1,2,3;2,3,1;3,1,2 \quad \text{即相邻两指标经过偶次对换}\\ -1 & i,j,k=2,1,3;1,3,2;3,2,1 \quad \text{即相邻两指标经过奇次对换}\\ 0 & i,j,k \text{ 中有两个指标相同}\end{cases} \tag{1.2.16}$$

引入此符号，任何一个三阶行列式都可以用它简单的表示出来

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k \tag{1.2.17}$$

这一表示 $\Delta=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$ 给复杂的运算带来方便，且只需指标的运算，不必展开中间求和的过程，要提醒初学者注意，对 ε_{ijk} 指标及后面各个元素的重复指标的求和顺序不能改变，而与 i,j,k 具体的顺序无关（因为求和指标是哑标），即

$$\Delta=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k=\varepsilon_{jik}a_jb_ic_k=\varepsilon_{kji}a_kb_jc_i=\varepsilon_{ikj}a_ib_kc_j \text{ 等等.}$$

为了让读者了解求和运算过程，我们把求和过程详细展开，以验证（1.2.17）式的正确性.

$$\begin{aligned}\Delta&=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k\\ &=\sum_{j,k=1}^{3}\{\varepsilon_{1jk}a_1b_jc_k+\varepsilon_{2jk}a_2b_jc_k+\varepsilon_{3jk}a_3b_jc_k\}\\ &=\sum_{k=1}^{3}\left\{\begin{matrix}\varepsilon_{11k}a_1b_1c_k+\varepsilon_{12k}a_1b_2c_k+\varepsilon_{13k}a_1b_3c_k+\\ \varepsilon_{21k}a_2b_1c_k+\varepsilon_{22k}a_2b_2c_k+\varepsilon_{23k}a_2b_3c_k+\\ \varepsilon_{31k}a_3b_1c_k+\varepsilon_{32k}a_3b_2c_k+\varepsilon_{33k}a_3b_3c_k\end{matrix}\right\}\\ &=\varepsilon_{123}a_1b_2c_3+\varepsilon_{132}a_1b_3c_2+\varepsilon_{213}a_2b_1c_3+\\ &\quad\varepsilon_{231}a_2b_3c_1+\varepsilon_{312}a_3b_1c_2+\varepsilon_{321}a_3b_2c_1\\ &=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1\end{aligned}$$

即得验证，其中 $\varepsilon_{11k}=0,\varepsilon_{22k}=0,\varepsilon_{33k}=0$ 和后面的 $\varepsilon_{121}=\varepsilon_{122}=0$ 等项没再表出.

注：单位全反对称张量符号可推广到 n 维线性空间中，记为 n 阶单位全反对称张量 $\varepsilon_{i,j,\cdots,k}\quad i,j,\cdots,k=1,2,\cdots,n.$

用符号 ε_{ijk}，$\mathbf{R}^3$ 中的向量积可写成

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}A_jB_k \tag{1.2.18}$$

或写成分量的表示形式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k \tag{1.2.19}$$

容易看出各分量为

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_1 = A_2B_3 - A_3B_2,$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_2 = A_3B_1 - A_1B_3,$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_3 = A_1B_2 - A_2B_1,$$

本节所介绍的 $\mathbf{R}^3$ 中元素的四种结合运算连同 $\mathbf{R}^3$ 空间的所有元素构成了物理学中常用的 $\mathbf{R}^3$ 中的一种向量代数.

§1.3 $\mathbf{R}^3$ 空间的向量分析

在物理学中,对于我们所研究的物理系统的物理量,例如温度、电势、电场强度等,通常用定义在 $\mathbf{R}^3$ 空间中(或 $\mathbf{R}^3$ 的某一区域 Ω 中)的标量场(标量函数) $\varphi(\boldsymbol{x})$ 或向量场(向量函数) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 来描述,其中 $\boldsymbol{x}$ 即为 $\boldsymbol{r}$(更为复杂的物理量可用二阶或二阶以上的张量场描述). 为研究这些场的空间分布即这些标量函数和向量函数如何随空间点的变化而改变的规律,我们必须引入空间的分析运算,即引入空间的微分算子. 在物理学中一个最基本的最重要的微分算子是"∇"——称为 del 算子,或称 Hamilton(哈密顿)算子,也称为向量算子.

在 Descartes(笛卡儿)坐标系中,∇ 算子可表示为:

$$\nabla = \boldsymbol{e}_i\partial_i \tag{1.3.1}$$

其中 $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

可以看出此算子像向量,但不是向量,其分量不是数(即算子本身没有模长),而是微商算符,它只有对标量函数或向量函数进行运算才显出自身的意义.

一、标量场的梯度

标量场的梯度是描述一个标量场沿空间方向的变化率问题,标量场在空间某点的梯度的方向是在该点方向导数最大的方向. 标量场(即标量函数) $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的梯度 grad φ 是一个向量场.

定义 1.3.1: 标量场的梯度

在我们考察点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域中有任一空间方向的位移向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,标量场 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在该点的梯度 grad φ 满足下式

$$\mathrm{grad}\ \varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}\varphi \tag{1.3.2}$$

其中 $\mathrm{d}\varphi$ 为 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在空间移动了 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的微分变化. 因此

$$\mathrm{d}\varphi = |\mathrm{grad}\ \varphi| \cdot |\mathrm{d}\boldsymbol{S}| \cos\theta \tag{1.3.3}$$

θ 为 grad φ 与 d$\boldsymbol{S}$ 的夹角. 可以看出当 $\theta=0$ 时,即我们所取的 d$\boldsymbol{S}$ 的方向与 grad φ 的方向一致时,此时的 dφ 达到最大. 该定义给出了 grad φ 明确的意义: 标量场 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在某一空间点邻域内的梯度为该点的一向量,其方向为 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 场的改变率最大的方向,即$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$为最大的方向,其数值就是这一方向上的改变率$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$.

在笛卡儿坐标系中,位移 d$\boldsymbol{S}$ 可以表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}s_1+\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}s_2+\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}s_3 \tag{1.3.4}$$

$\mathrm{d}s_1,\mathrm{d}s_2,\mathrm{d}s_3$ 为 d$\boldsymbol{S}$ 在三个轴上的投影. 由 grad φ 的定义我们有

$$(\operatorname{grad}\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}\varphi \tag{1.3.5}$$

当考虑 d$\boldsymbol{S}$ 只沿 $\boldsymbol{e}_1$ 方向变化而其他轴上无变化时: $\mathrm{d}s_1=\mathrm{d}x_1$,有$(\operatorname{grad}\varphi)_i\cdot\mathrm{d}s_1=(\operatorname{grad}\varphi)_1\cdot\mathrm{d}x_1=\mathrm{d}\varphi$, 即 $(\operatorname{grad}\varphi)_1=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\partial_1\varphi$, 同样有 $(\operatorname{grad}\varphi)_2=\partial_2\varphi$,$(\operatorname{grad}\varphi)_3=\partial_3\varphi$,即在笛卡儿坐标系下

$$\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\boldsymbol{e}_i\partial_i\varphi \tag{1.3.6}$$

在第 i 轴上的分量为$\partial_i\varphi$.

由微分算子在笛卡儿坐标系中的表达式$\nabla=\boldsymbol{e}_i\partial_i$ 可知,标量场 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的梯度可表示为

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi \tag{1.3.7}$$

$\nabla\varphi$ 是一个不依赖于坐标系的几何空间场量,它就是表示标量场 φ 的梯度场,故以后 φ 的梯度就一般写成$\nabla\varphi$,它是不依赖于坐标系的向量场. 而在 Descartes (笛卡儿)坐标系中有其明确的坐标表达式$\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_i\partial_i\varphi$.

对于所考察的整个空间,φ 的梯度$\nabla\varphi$ 是一个梯度场,而 φ 在某点的梯度是 φ 场在某一空间点邻域内那一点的梯度,我们通常讲 φ 的梯度是指 φ 的梯度场.

对于标量场的梯度场,物理上有许多实例,如一个静电场,某点 p 的电势 φ_p 的梯度为该点的电场强度 $\boldsymbol{E}_p$,而对于我们考察的区域中,电势场 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的梯度为该区域中的电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$,有 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\nabla\varphi(\boldsymbol{x})$,其中"$-$"号是因为场强增加的方向是电势场减小的方向.

二、向量场的散度

向量场的散度是研究在所考察的区域 Ω 内,是否存在产生(或汇集)此向量场的源(或阱)这一类奇点的问题. 为了便于数学上的描述,我们引入通量 Φ 的概念: 在向量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$(即向量函数)所定义的区域 Ω 内,我们任取一截面 S,则向量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 通过此截面 S 的通量 Φ 定义为:

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.3.8}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 为 S 上的面元，其方向为截面 S 的法向 $\boldsymbol{n}$，因为 S 的法向有两个，因此 $\boldsymbol{n}$ 的方向在 S 取定时做了规定.

我们取向量场 $\boldsymbol{A}$ 所定义的空间 Ω 中的一点 p，p 点的小邻域的体积为 V，V 包含在 Ω 内，表示为 $V \subset \Omega$，V 的边界 ∂V 为闭合曲面. 取 ∂V 的外法向为正向，则我们可定义向量场 $\boldsymbol{A}$ 在此点的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ 为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.3.9}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 为 ∂V 的面元. 此定义的物理意义很明确，即流经包围考察点 p 的单位体积的闭合边界的通量定义为该点的向量场的散度. 显然，当流进该边界的通量与流出该边界的通量相等时，即流经该闭合边界的通量为零，即该点 p 的向量场的散度为零，也就是说在 p 的邻域 V 内没有源（或阱）这类奇点. 当流经 ∂V 的通量不为零则说明 V 中有源（或阱），当 $V \to 0$ 时即为 p 点，由 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ 的定义式可看出，右边的积分是个标量，它是 p 点的源（或阱）数量的大小，因此 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ 是标量.

由散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ 的定义式可得笛卡儿坐标系中向量场散度的表达式

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \partial_i A_i \tag{1.3.10}$$

在笛卡儿坐标系中，$\nabla = \boldsymbol{e}_i \partial_i$，$\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i$，故容易计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \partial_i A_j \\ &= \delta_{ij} \partial_i A_j \\ &= \partial_i A_i \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

而 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 是一个不依赖于坐标的表达式，因此我们将在曲线坐标系中导出标量场的梯度，向量场的散度和旋度的一般表达式，在直角坐标系中的表达式只是他们的特例，就不予推导了. 我们常把**向量场的散度**就记为 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$，即 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{A}$.

由向量场的散度的定义，我们很容易导出数学上的 Gauss（高斯）公式①，当我们有一个有限的区域 V 及其边界 ∂V，我们把 V 分成无穷多个任意小的区域 ΔV，每个 ΔV，其边界为 $\Delta \Sigma$，则由向量场的散度定义，在每个小体积元 ΔV 中，有

① 数学中的 Gauss 公式是对空间中任何向量场都成立的，而在物理学中静电学的高斯公式仅对静电场和电荷成立，且电荷产生的电场满足距离平方反比定律.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta \Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.3.12}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 为 $\Delta \boldsymbol{\Sigma}$ 的面元，取 $\Delta \boldsymbol{\Sigma}$ 的外法向为正向，则我们可得

$$\lim_{\Delta V \to 0} (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \Delta V = \int_{\Delta \Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.3.13}$$

当我们对每一点的 $\boldsymbol{A}$ 的散度在 V 中求积分时，同时考虑到每相邻的两个小体积元的公共边界上，$\boldsymbol{A}$ 穿过此公共边界的通量之和为零，则我们即可得到数学上的 Gauss 公式

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.3.14}$$

此公式给出了 V 中向量场的散度与其边界上的通量的关系，即可用 V 的边界上的通量来研究 V 中的源（或阱）的整体性质.

例 1.3.1：Gauss 公式的应用：电荷守恒方程的微分形式.

在空间一体积 V 中有电荷流动，电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{x},t)$，以速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 运动，则电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$，体积 V 中的电荷量为 $\int_V \rho(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，它对时间的改变率为 $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V$（即单位时间流入 V 内的电荷量），而单位时间内从 V 的边界 ∂V 中流出的电荷量为 $\int_{\partial V} \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 为 ∂V 的面积元，以 ∂V 的外法线为正向，则由电荷守恒有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V + \int_{\partial V} \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{1.3.15}$$

由 Gauss 公式

$$\int_{\partial V} \rho\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{J}\mathrm{d}V$$

即可得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{J}\mathrm{d}V = 0$$

即对空间某点的邻域有电荷守恒方程的微分形式——电荷连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{1.3.16}$$

例 1.3.2：由 Gauss 公式导出 Green（格林）公式.

对于定义在体积 V 及其边界 ∂V 上的两个标量场 $\psi(x)$，$\varphi(x)$，有 Green 公式，它是 Gauss 公式的直接结果，即

$$\int_{\partial V}\psi\,\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int_V\nabla\cdot(\psi\,\nabla\varphi)\,dV$$

$$=\int_V(\psi\,\nabla^2\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)\,dV \qquad (1.3.17)$$

若 $\boldsymbol{n}$ 为 $d\boldsymbol{\sigma}$ 上的单位法向量,则

$$\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{n}d\sigma\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$$

Green 公式可表为:

$$\int_{\partial V}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma=\int_V(\psi\,\nabla^2\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)\,dV \qquad (1.3.18)$$

Green 公式的另一种表述为

$$\int_{\partial V}(\psi\,\nabla\varphi-\varphi\,\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int_V(\psi\,\nabla^2\varphi-\varphi\,\nabla^2\psi)\,dV \qquad (1.3.19)$$

上式亦很容易由 Gauss 公式得到.

由向量场的散度运算得到的 Gauss 公式和 Green 公式在物理学中都有着广泛的应用.

三、向量场的旋度

与向量场的散度所研究的向量场空间是否存在奇异点不同,向量场的旋度是研究我们考察的空间中是否存在产生向量场的线源(或线汇)的这一类奇异线的问题. 一个很简单的例子,一稳恒电流会产生磁场,这一磁场就是有旋场,稳恒电流就是此有旋场的线源.

我们用向量场的旋度来描述这一类有旋场空间的性质:向量场 $\boldsymbol{A}$ 在其所定义的空间 Ω 中的某一点 P 的小邻域内,考虑一包含 P 点的小曲面 σ,$\sigma\subset\Omega$,σ 的边界 $\partial\sigma$ 为一闭合曲线. 则向量场 $\boldsymbol{A}$ 在此观察点 P 的旋度 Curl $\boldsymbol{A}$ 定义为

$$(\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}=\lim_{\sigma\to0}\frac{1}{\sigma}\oint_{\partial\sigma}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (1.3.20)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 σ 的单位法向量,其方向是对 $\partial\sigma$ 积分路线用右手法则而定,即沿 $\partial\sigma$ 走时使 σ 的区域保持在自己的左侧,此时的路线用右手螺旋法则定出的方向为正向,即 $\boldsymbol{n}$ 的方向. $d\boldsymbol{l}$ 为 $\partial\sigma$ 上的线元. 其方向为 $\partial\sigma$ 上的点的切向,与 $\boldsymbol{n}$ 的方向按右手螺旋法则自洽.

当 $\sigma\to0$ 时,我们可把此曲面近似看成一平面,因此 $\boldsymbol{n}$ 与 σ 平面垂直,由 Curl $\boldsymbol{A}$ 的定义式我们还可以看出,右边的积分为一标量,故 Curl $\boldsymbol{A}$ 必是个向量.

Curl $\boldsymbol{A}$ 的定义可在笛卡儿坐标系下直接计算得到

$$\text{Curl}\,\boldsymbol{A} = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\partial_j A_k \tag{1.3.21}$$

而由 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在笛卡儿坐标系下的表达式为

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\partial_j A_k$$

故可得：

$$\text{Curl}\,\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.3.22}$$

这是一个不依赖于坐标的算符表达式，在任何坐标系中皆成立. 因此一般**向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度**就直接写成 $\nabla\times\boldsymbol{A}$. 若向量场 $\boldsymbol{A}$ 在 P 点的无穷小邻域内有 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 不为零，说明在 P 点存在产生有旋度的向量场 $\boldsymbol{A}$ 的线源（或线汇）穿过.

由 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的定义式可得

$$\lim_{\sigma\to 0}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\sigma = \oint_{\partial\sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

把这一关系应用到有限面积的曲面 Σ 的积分中，只要把 Σ 分割成无穷多的无穷小区域 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$. 考虑到相邻两个子曲面的边界上的回路积分在重复的边界上积分相抵消，最后只剩下 Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 的回路积分，即可得有限面积曲面 Σ 中的 Stokes（斯托克斯）积分公式

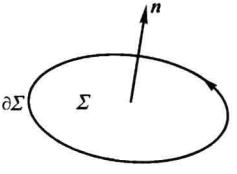


图 1.3.1

$$\int_{\Sigma}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.3.23}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 $\partial\Sigma$ 上的线元，其方向为与 Σ 上的法向 $\boldsymbol{n}$ 自洽的右手法则确定（图 1.3.1）.

§1.4　$\mathbf{R}^3$ 空间中向量分析的一些重要公式

$\mathbf{R}^3$ 空间的向量分析中关于梯度、散度和旋度的运算，在物理学中有着非常广泛的应用.

例如我们所熟悉的 Maxwell 方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_0 + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_0\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

是一组与坐标无关的方程，它描述了电磁学中各物理量之间的关系.

下面我们介绍在物理学中经常用到的 $\mathbf{R}^3$ 空间中的一些分析的公式：

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$　　(1.4.1)

(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$　　(1.4.2)

$$(3)\ \nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi \tag{1.4.3}$$

$$(4)\ \nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi \tag{1.4.4}$$

$$(5)\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.4.5}$$

$$(6)\ \nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{1.4.6}$$

$$(7)\ \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.4.7}$$

$$(8)\ \nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}+\varphi\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.4.8}$$

$$(9)\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{1.4.9}$$

$$(10)\ \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.4.10}$$

$$(11)\ \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\nabla\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{1.4.11}$$

$$(12)\ \nabla\times\nabla\varphi=0 \tag{1.4.12}$$

$$(13)\ \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{1.4.13}$$

$$(14)\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{1.4.14}$$

作为例子，我们在笛卡儿坐标系中证明上面的(1.4.9)式与(1.4.14)式，其他公式的证明留作自证.

例 1.4.1：(1.4.9)式的证明：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &=\partial_i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i\\ &=\partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k)\\ &=\varepsilon_{ijk}[(\partial_iA_j)B_k+A_j(\partial_iB_k)]\\ &=B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j-A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k\\ &=B_k(\nabla\times\boldsymbol{A})_k-A_j(\nabla\times\boldsymbol{B})_j\\ &=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

例 1.4.2：(1.4.14)式的证明：

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) &=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\partial_j(\nabla\times\boldsymbol{A})_k\\ &=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m\\ &=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_lA_m\\ &=\boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_lA_m\\ &=\boldsymbol{e}_i\partial_i\partial_jA_j-\boldsymbol{e}_i\partial_j\partial_jA_i\\ &=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

∇^2 为 Laplace 算子 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i$

在证明过程中用到的一个常用公式：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{1.4.15}$$

此公式为 $\mathbf{R}^3$ 空间中单位全反对称张量的一个乘积公式，读者可以自行从下面的普通的公式中得证

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{1.4.16}$$

(1.4.15)式和(1.4.16)式皆只是在 $\mathbf{R}^3$ 中的笛卡儿坐标系下的公式.

第一章习题

1.1 $\boldsymbol{C}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 空间的已知向量，若有向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，求 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 向量.

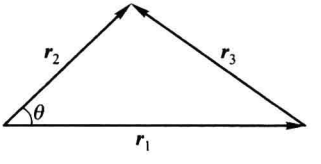
1.2 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 空间的已知向量，若有向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$，求 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 向量.

如果在笛卡儿坐标系中 $\boldsymbol{C}=c_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{D}=d_i\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,3)$，请写出 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 向量的具体表达式.

1.3 有向量 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 如习题 1.3 图所示，请证明余弦定理

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta$$

其中 $|\boldsymbol{r}_1| = r_1$，$|\boldsymbol{r}_2| = r_2$，$|\boldsymbol{r}_3| = r_3$.



习题 1.3 图

1.4 请用向量运算(不用坐标系)直接证明

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = A^2 - B^2$$

请用 Cartesian 坐标系再证明一遍上述结论.

1.5 在 $\mathbf{R}^3$ 空间中，在空间转动 $\boldsymbol{A}$ 的变换下(即直角坐标系的转动变换)，向量 $\boldsymbol{X}$ 变为 $\boldsymbol{X}'$

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

且满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，请证明：两个向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的标量积 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$ 在此转动变换下为不变量.

1.6 请证明，在 $\mathbf{R}^3$ 空间中向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$$

1.7 在 $\mathbf{R}^3$ 空间中证明

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$；

(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$；

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$；

(4) $\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$.

1.8　请证明：静电场是一个无旋场，静磁场是一个无源（点源）场.

1.9　若 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 为 $\mathbf{R}^3$ 空间中的标量函数，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 为此空间中的向量函数，请证明：

（1）$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{A}$；

（2）$\nabla \times (\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times (\nabla \varphi)$；

（3）$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})$；

（4）$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \nabla \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times \nabla \times \boldsymbol{B}$.

1.10　请计算：

$$\nabla^2 \frac{1}{r}$$

其中 $r = |\boldsymbol{r}|$.

1.11　在 $\mathbf{R}^3$ 空间中，对于定义在单连通区域 Ω 上的向量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，若 $\boldsymbol{A}$ 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的法向值完全确定，且 $\boldsymbol{A}$ 在 Ω 上的散度和旋度存在

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = q$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}$$

请证明，在 Ω 上这样的向量场 $\boldsymbol{A}$ 是唯一的. 这一结论被称为 Helmholtz 定理.（提示：设另一个与 $\boldsymbol{A}$ 完全满足相同条件的向量场 $\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$）

1.12　若刚体以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，有一粒子固定于刚体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，求证

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

（提示：由 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$，取质心 C 为参考点，建立坐标系，在此坐标系中 $\boldsymbol{v}_C = 0$，进行运算.）

1.13　由 Ampere（安培）定律

$$\int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial S} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为穿过空间曲面 S 的电流密度向量，$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 为 S 的有向面元，其法向正向由右手定则确定，$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度向量，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 S 的边界 ∂S 的线元，其方向由右手定则确定，它与 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的定向自洽.

请证明：$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$

（提示：应用 Stokes 公式证明.）

1.14　有一物理体系，它由三个向量场 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}$ 和一个实标量场 V 来描述，并且 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}$ 和 V 满足如下关系：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\mu^2 V$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla V$$

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu^2 \boldsymbol{A}$$

其中 μ 为正的常数.

求证：

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$;

(2) $\nabla^2 \cdot V - \mu^2 V + \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$;

(3) 当我们考虑在区域 Ω 中,V 与时间无关,且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上有 $V\big|_{\partial\Omega} = 0$ 时,请证明:在 Ω 中 $V = 0$.

1.15 若定义算符 $\hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$,$\hat{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \boldsymbol{A}$,其中 i 为虚数单位,$\hbar$ 为常数,$\boldsymbol{A}$ 为向量场. 请证明:

$$(\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A}) \times (\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A}) = \mathrm{i}e\hbar\hat{\boldsymbol{B}}$$

其中 e 为常数.

第二章　$\mathbf{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

上一章中我们引入的 $\mathbf{R}^3$ 空间中的向量分析是不依赖于坐标系的选择的，即与坐标的选择无关. 但是我们要解决具体问题时，却要根据物理问题所具有的对称性、边界的形状等因素选取适当的坐标系进行运算，以求得具体的结果. 例如点电荷的电势是球对称的，如果我们选取笛卡儿坐标系，解起来会非常繁琐，我们应该选取球坐标系. 通常物理学中用的坐标系，除笛卡儿坐标系外，还有柱坐标系和球坐标系. 在本章中我们除给出一般曲线坐标系的表达式外，也具体地给出柱坐标系和球坐标系的表达式.

§2.1　$\mathbf{R}^3$ 空间中的曲线坐标系

在 $\mathbf{R}^3$ 空间中，当我们选定坐标原点并建立笛卡儿坐标系 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 时，空间中的任意一点可用 $\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3\equiv\boldsymbol{r}(x_1,x_2,x_3)$ 来描述，即可用笛卡儿坐标 (x_1,x_2,x_3) 为参数来描述点的位置. 对选定坐标原点后的任意点 $\boldsymbol{r}$，我们亦可用其他三个参数 (u_1,u_2,u_3) 来描述，即 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2,u_3)$，所选取的参数 (u_1,u_2,u_3) 与笛卡儿坐标系中的参数 (x_1,x_2,x_3) 要求存在单值的变换函数，即变换函数为

$$\begin{aligned} u_1 &= u^1(x_1,x_2,x_3)\\ u_2 &= u^2(x_1,x_2,x_3)\\ u_3 &= u^3(x_1,x_2,x_3) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

及其逆变换为

$$\begin{aligned} x_1 &= x^1(u_1,u_2,u_3)\\ x_2 &= x^2(u_1,u_2,u_3)\\ x_3 &= x^3(u_1,u_2,u_3) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

都为单值函数①. 不同的函数关系 u^1,u^2,u^3，所对应的坐标参数 (u_1,u_2,u_3) 就形成不同的坐标系.

在(2.1.1)式中当等式左边的 u_1,u_2,u_3 分别为常数时，就得到用 (x_1,x_2,x_3) 表示的三个曲面，称为**坐标曲面**，这三个坐标曲面由方程

$$\begin{aligned} u^1(x_1,x_2,x_3) &= c_1 \\ u^2(x_1,x_2,x_3) &= c_2 \\ u^3(x_1,x_2,x_3) &= c_3 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

描述，其中 c_1,c_2,c_3 为常数.

每两个坐标曲面相交成的曲线称为**坐标曲线**. 过空间中的每一点都有三条坐标曲线，因此空间中的点可用这三个参数 (u_1,u_2,u_3) 来描述，这样的坐标系称为曲线坐标系，而参数 u_1,u_2,u_3 称为曲线坐标. 如果我们选取的参数 (u_1,u_2,u_3) 使得空间中的每一点的三条坐标曲线相互正交，则称此曲线坐标系为**正交曲线坐标系**. 我们在本课程中讨论的曲线坐标系皆为正交曲线坐标系.

例如球坐标系 (r,θ,φ)，三种坐标曲面为：$r=c_1$，表示以笛卡儿坐标系 (x,y,z) 的原点为圆心，半径为 c_1 的球面；$\theta=c_2$，表示顶点在原点，矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 z 轴的夹角 θ 的值为 c_2 的锥面；$\varphi=c_3$，表示以 z 轴为边，垂直于 $x-y$ 平面且 φ 角的值为 c_3 的半平面.

坐标曲线如图 2.1.1 所示，过空间点 P 的三条坐标曲线为由 $\begin{cases}\theta=c_2\\ \varphi=c_3\end{cases}$ 决定的坐标曲线是描述 r 变化的，它是以 o 点出发过 P 点的一条射线. 由 $\begin{cases}r=c_1\\ \varphi=c_3\end{cases}$ 决定的坐标曲线是描述 θ 变化的，它是过 P 点终止于球面南北极的半大圆周. 由 $\begin{cases}r=c_1\\ \theta=c_2\end{cases}$ 决定的坐标曲线是描述 φ 变化的，它是过 P 点的一个小圆的圆周，圆所在的平面与 z 轴垂直. 过 P 点的这三条曲线的单位长度切向量 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi$ 构成了球坐标系在 P 点的

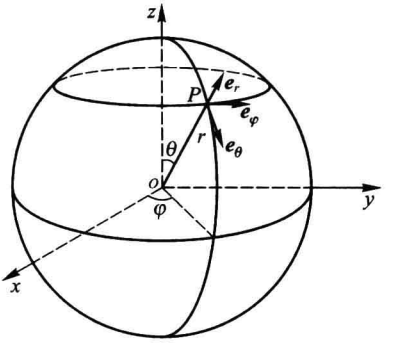


图 2.1.1

① $u_i,x_i,i=(1,2,3)$ 代表坐标参数，而 u^i,x^i 表示函数关系，此处的 u_i,u^i 和 x_i,x^i 不表示几何学中的不同空间的协变和逆变坐标，在本章所讨论的坐标参数及其微分皆用下指标表示.

正交坐标基矢$(\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi)$,这种坐标系不同于笛卡儿坐标系对空间的描述,它在空间各点的坐标向量$(\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi)$的方向是变化的,它形成了一个流动的标架,这种数学的结构在物理学的数学分析描述中是常见的.

§2.2 曲线坐标系中的度量

在$\mathbf{R}^3$空间中的线元,即邻近两点的线段长度的平方,在笛卡儿坐标系下表示为

$$\mathrm{d}r^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 \tag{2.2.1}$$

其中$(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$.

用另一种等价的表述方式可写成

$$\mathrm{d}r^2 = \boldsymbol{\delta}_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{2.2.2}$$

其中$\boldsymbol{\delta}_{ij}$称为$\mathbf{R}^3$中的**度量分量**,其矩阵表示形式为$(\boldsymbol{\delta}_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$具体可用矩阵运算表示

$$\mathrm{d}r^2 = (\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\\mathrm{d}x_2\\\mathrm{d}x_3\end{pmatrix} = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$$

通常我们把**线元** $\mathrm{d}r^2$ 记为 $\mathrm{d}S^2$,即位移的平方,以后这两个符号是通用的.

由笛卡儿坐标系表示的空间线元的表达式,如果用曲线坐标系来描述同一线元该如何表述呢? 由(2.1.2)式 $x_i=x^i(u_1,u_2,u_3)$ 可知

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x^i}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j \tag{2.2.3}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r^2 &= \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i\\ &= \frac{\partial x^i}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j\frac{\partial x^i}{\partial u_k}\mathrm{d}u_k\\ &= \frac{\partial x^i}{\partial u_j}\frac{\partial x^i}{\partial u_k}\mathrm{d}u_j\mathrm{d}u_k\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

定义 2.2.1: 曲线坐标系中的**度量系数** g_{ij}

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial u_i}\frac{\partial x^k}{\partial u_j} \tag{2.2.5}$$

则 $\mathbf{R}^3$ 空间中的线元用曲线坐标系描述的表达式为

$$\mathrm{d}r^2 = g_{ij}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j \tag{2.2.6}$$

对正交曲线坐标系有：

$$g_{ij} = \begin{cases} g_{ii} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.2.7}$$

则线元可表示为

$$\mathrm{d}r^2 = g_{11}(\mathrm{d}u_1)^2 + g_{22}(\mathrm{d}u_2)^2 + g_{33}(\mathrm{d}u_3)^2 \tag{2.2.8}$$

下面我们看一下度量系数的几何意义：在曲线坐标系中，对空间点位置矢量的描述为 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2,u_3)$，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i,$$

即有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j\end{aligned}$$

此时，记 $\boldsymbol{a}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}$，则 $\boldsymbol{a}_i$ 表示 $\boldsymbol{r}(u_1,u_2,u_3)$ 对第 i 个坐标参数的变化率，其方向正是沿 u_i 坐标曲线的切线方向，一般情况下

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j\end{aligned}$$

可定义

$$g_{ij} = \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j},$$

此定义与(2.2.6)式的定义是等价的，这一表达式是直接由 $\boldsymbol{r}$ 用曲线坐标系的描述得到的，而(2.2.6)式是由笛卡儿坐标系与曲线坐标系的坐标变换关系来定义的.

对于正交曲线坐标系，三个 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,3)$ 是相互正交的，即

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = \begin{cases} |\boldsymbol{a}_i|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

因此对 g_{ij} 而言，交叉项为 0，即 $g_{ij}=0, i\neq j$.

在正交曲线坐标系 (u_1,u_2,u_3) 的线元表达式(2.2.6)中，当线元只沿 u_1 参数变化时(即 $\mathrm{d}u_2=\mathrm{d}u_3=0$)，即为沿 u_1 曲线的微小弧长，记为 $\mathrm{d}s_1$，即

$$\mathrm{d}s_1 = \sqrt{g_{11}}\mathrm{d}u_1 \equiv h_1\mathrm{d}u_1$$

同样有

$$\mathrm{d}s_2 = \sqrt{g_{22}}\mathrm{d}u_2 \equiv h_2\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}s_3 = \sqrt{g_{33}}\mathrm{d}u_3 \equiv h_3\mathrm{d}u_3$$

其中 $h_i\equiv\sqrt{g_{ii}}$(i 不求和)，也称为**坐标曲线的度量分量**，一般简称为度量分量，

$$\mathrm{d}s_i \equiv h_i\mathrm{d}u_i \quad (i\text{ 不求和}) \tag{2.2.9}$$

在笛卡儿坐标系中 $h_i=1$，而在曲线坐标系中，h_i 在通常情况下是坐标参数的函数，即用曲线坐标系对空间点进行度量时，“尺子”的单位随空间点的变化而变化.

因此由 $\mathrm{d}s_i$ 和 $\mathrm{d}s_j(i\neq j)$ 构成曲线坐标系下的面元 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$，

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \mathrm{d}s_i\mathrm{d}s_j = h_ih_j\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j \quad (i,j\text{ 不求和}) \tag{2.2.10}$$

曲线坐标系下的体积元 $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 = h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \tag{2.2.11}$$

综上所述，我们很容易求得在物理学中常用的柱坐标系和球坐标系中的度量系数，从而给出这两种坐标系中的面积元和体积元.

对于柱坐标系 $\boldsymbol{r}(\rho,\varphi,z)$，如图 2.2.1：

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad u_1=\rho,\quad u_2=\varphi,\quad u_3=z$$

有

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi=\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases} \tag{2.2.12}$$

其中 $0\leqslant\rho<+\infty$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$，$-\infty<z<+\infty$，由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=0$ 可得柱坐标系下的线元

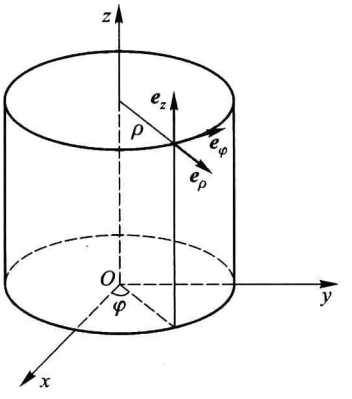


图 2.2.1

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \frac{\partial x^i}{\partial u^j}\mathrm{d}u^j \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\mathrm{d}u^k \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi\right) + \\ &\quad \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi\right) + \frac{\partial z}{\partial z}\mathrm{d}z \cdot \frac{\partial z}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

柱坐标系的度量系数：

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2, \quad g_{zz} = 1 \tag{2.2.14}$$

其他分量为零. 同时可得

$$\mathrm{d}s_\rho = \mathrm{d}\rho, \quad \mathrm{d}s_\varphi = \rho\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}s_z = \mathrm{d}z \tag{2.2.15}$$

则坐标曲线的度量分量为

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1 \tag{2.2.16}$$

柱坐标系中的面元，由 $\mathrm{d}\sigma_{ij} = \mathrm{d}s_i \cdot \mathrm{d}s_j$ 可得

$$\mathrm{d}\sigma_{\rho\varphi} = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}\sigma_{\rho z} = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}\sigma_{\varphi z} = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{2.2.17}$$

柱坐标系中的体积元，由 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_\rho\mathrm{d}s_\varphi\mathrm{d}s_z$ 可得

$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{2.2.18}$$

对于球坐标系 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$，如图 2.2.2，$x_1 = x$，$x_2 = y$，$x_3 = z$，$u_1 = r$，$u_2 = \theta$，$u_3 = \varphi$，有

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{2.2.19}$$

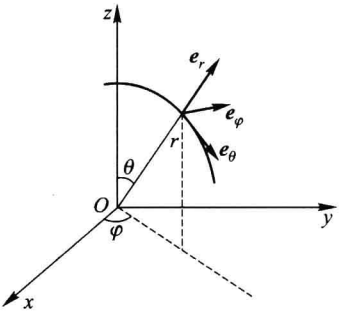


图 2.2.2

其中 $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

类似柱坐标系的运算,可得球坐标系下的线元

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 \tag{2.2.20}$$

球坐标系下的度量系数

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta \tag{2.2.21}$$

其他分量为零. 同时可得

$$\mathrm{d}s_r = \mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}s_\theta = r\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}s_\varphi = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi \tag{2.2.22}$$

则坐标曲线的度量分量为

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta \tag{2.2.23}$$

球坐标系中的面元

$$\mathrm{d}\sigma_{r\theta} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}\sigma_{r\varphi} = r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}\sigma_{\theta\varphi} = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{2.2.24}$$

球坐标系中的体积元: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_r\mathrm{d}s_\theta\mathrm{d}s_\varphi$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{2.2.25}$$

§2.3　曲线坐标系中标量场梯度的表达式

定义在 $\mathbf{R}^3$ 空间中的标量场函数 ψ,其梯度为不依赖于坐标的算符表达式为 $\nabla\psi$,由 $\nabla\psi$ 的定义可知

$$(\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}\psi \quad \text{即} (\nabla\psi)_i\mathrm{d}s_i = \mathrm{d}\psi \tag{2.3.1}$$

在曲线坐标系中,$\mathrm{d}s_i = h_i\mathrm{d}u_i$($i$ 不求和),$\psi = \psi(u_1, u_2, u_3)$,$\mathrm{d}\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i$, 即可得 $\nabla\psi$ 的第 i 个分量表达式为

$$(\nabla\psi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial u_i} \quad (i \text{ 不求和}) \tag{2.3.2}$$

因此在曲线坐标系中，标量场 ψ 的梯度表达式为

$$\nabla \psi = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\psi\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\psi\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_3}\psi\right)\boldsymbol{e}_3 \tag{2.3.3}$$

梯度算符的表达式为

$$\nabla = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\boldsymbol{e}_i \tag{2.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 为曲线坐标 u_i 的坐标基向量. 当我们选取 ψ 为某个坐标函数 u_j 时，由 $\dfrac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij}$ 可得

$$\nabla u_j = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_j}\boldsymbol{e}_j \quad (j\text{ 不求和})$$

即得坐标基的具体表达式

$$\boldsymbol{e}_j = h_j \nabla u_j \quad (j\text{ 不求和}) \tag{2.3.5}$$

由曲线坐标系中的梯度算符的表达式，我们可得到柱坐标系和球坐标系中的标量场梯度的表达式.

在柱坐标系中

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{2.3.6}$$

梯度算符的表达式为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.3.7}$$

在球坐标系中

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.3.8}$$

梯度算符的表达式为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2.3.9}$$

§2.4　曲线坐标系中向量场散度的表达式

下面我们由散度的定义直接求出向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 在曲线坐标系

(u_1,u_2,u_3) 中的表达式.

在空间中取一小体积元 $\mathrm{d}V$,$\mathrm{d}V$ 的边是坐标曲线构成一个曲边六面体,$\mathrm{d}V$ 的八个顶点以 $ABCDA'B'C'D'$ 表征,如图 2.4.1,其坐标如下,$A(u_1,u_2,u_3)$,$A'(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)$,$B(u_1,u_2+\mathrm{d}u_2,u_3)$,$D(u_1,u_2,u_3+\mathrm{d}u_3)$,其他点的坐标亦可一一写出,$AA'$ 沿 u_1 坐标曲线,其长度记为 $AA'=\mathrm{d}s_1=h_1\mathrm{d}u_1$,$AB$ 沿 u_2 坐标曲线,$AB=\mathrm{d}s_2=h_2\mathrm{d}u_2$,$AD$ 沿 u_3 坐标曲线,$AD=\mathrm{d}s_3=h_3\mathrm{d}u_3$.

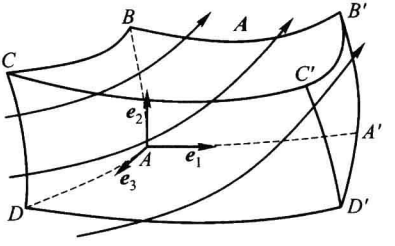


图 2.4.1

这一曲边六面体的六个曲面都是某一坐标的等值曲面,曲面 Σ_{ABCD} 是 u_1 的等值面,记 $\Sigma_{ABCD}=\mathrm{d}\sigma_1$,$\Sigma_{AA'D'D}$ 是 u_2 的等值面,记 $\Sigma_{AA'D'D}=\mathrm{d}\sigma_2$,$\Sigma_{AA'B'B}$ 是 u_3 的等值面,记 $\Sigma_{AA'B'B}=\mathrm{d}\sigma_3$,同理记 $\Sigma_{A'B'C'D'}=\mathrm{d}\sigma'_1$,是 $u_1+\mathrm{d}u_1$ 的等值面,$\Sigma_{BB'C'C}=\mathrm{d}\sigma'_2$,$\Sigma_{DD'C'C}=\mathrm{d}\sigma'_3$,则这些面元的表达式为

$$\mathrm{d}\sigma_1=\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=h_2(u_1,u_2,u_3)h_3(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

$$\mathrm{d}\sigma'_1=h_2(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)h_3(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

同理可以写出其他面元的表达式.

$\mathrm{d}V$ 体积元的表达式为 $\mathrm{d}V=h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$(无特殊标明时,$h_i=h_i(u_1,u_2,u_3)$,$i=1,2,3$,不再说明).

由向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 的定义

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\tag{2.4.1}$$

其中 Σ 为小体积 ΔV 的边界,而 Σ 上的面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的正向为外法向. 我们取的 ΔV 为上述的体积元 $\mathrm{d}V$,$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 上的分量分别为 A_1,A_2,A_3,我们把等式右边的积分化为直接计算,计算 A_i 分量在 $\mathrm{d}\sigma_i$ 和 $\mathrm{d}\sigma'_i$ 上的通量. 考虑到取外法向为正向,设 $\boldsymbol{A}$ 沿 u_1 的分量 A_1 流入 $\mathrm{d}\sigma_1$ 而流出 $\mathrm{d}\sigma'_1$,则在 $\mathrm{d}\sigma_1$ 上的通量为

$$-A_1(u_1,u_2,u_3)h_2(u_1,u_2,u_3)h_3(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

在 $\mathrm{d}\sigma'_1$ 上的通量为

$$A_1(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)h_2(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)h_3(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

A_2,A_3 对此通量则无贡献,故 $\boldsymbol{A}$ 流经 $\mathrm{d}\sigma_1$ 和 $\mathrm{d}\sigma'_1$ 的通量差为

$$A_1(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)h_2(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)h_3(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3-$$

$$A_1(u_1,u_2,u_3)h_2(u_1,u_2,u_3)h_3(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

同理 $\boldsymbol{A}$ 流经 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 两个方向上的界面的通量差分别为

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_3 h_1)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

故可得向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在曲线坐标系中的表达式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2)\right] \tag{2.4.2}$$

当 $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ 时，曲线坐标系退化成笛卡儿坐标系，上式就变成了笛卡儿坐标系中的表达式.

对柱坐标系，$\boldsymbol{A} = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + A_z \boldsymbol{e}_z$，且 $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$. 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在柱坐标系中的表达式为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(A_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}(A_z \rho)\right] \\ &= \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{\partial}{\partial \rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}A_z\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

在球坐标系中，$\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{e}_r + A_\theta \boldsymbol{e}_\theta + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$，且 $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r\sin\theta$. 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在球坐标系中的表达式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2 \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi r)\right] \tag{2.4.4}$$

§2.5　曲线坐标系中向量场旋度的表达式

由于向量场的旋度是描述有旋场 $\boldsymbol{A}$ 的空间性质，$\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 的定义式是

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{\Delta\sigma \to 0}\frac{1}{\Delta\sigma}\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是小面元 $\Delta\sigma$ 的单位法向量，其方向由(1.3.20)式的说明所规定，l 为 $\Delta\sigma$ 的边界为一闭合曲线，即沿 l 的正向走时，使 $\Delta\sigma$ 的区域保持在自己的左边，此 l 的方向和由右手螺旋法则定出 $\boldsymbol{n}$ 的正向自洽.

$\nabla \times \boldsymbol{A}$ 是一个向量，我们要求写出其在曲线坐标系 (u_1, u_2, u_3) 中的表达式，就要先算出其在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 方向上的投影分量. 我们仍取图 2.4.1，对于空间点 A 的坐标基向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，我们只取其局部如图 2.5.1.

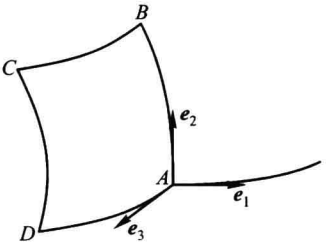


图 2.5.1

对于 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 的定义式(2.5.1)式的左边，当我们取 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{e}_1$ 时，则 $(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_1 = (\nabla \times \boldsymbol{A})_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的旋度在 $\boldsymbol{e}_1$ 上的投影即为坐标 u_1 上的分量，此时我们对等式右边的 $\Delta\sigma$ 取为 $\Sigma_{ABCD} = \mathrm{d}\sigma_1$，而(2.5.1)式右边的积分式变为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathrm{d}\sigma_1$ 的边界 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ 上的投影环流值之和. 注意当取 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{e}_1$ 时，边界的方向按右手螺旋法则定，即其正向为 $A \to B \to C \to D \to A$，由此 A, B, C, D 坐标为：$A(u_1, u_2, u_3)$，$B(u_1, u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3)$，$C(u_1, u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3 + \mathrm{d}u_3)$，$D(u_1, u_2, u_3 + \mathrm{d}u_3)$，同时向量 $\boldsymbol{A}$ 也取其在三个坐标方向上的投影值，由于 $\mathrm{d}\sigma_1$ 是 u_1 的等值面，为书写方便，我们把各点的 u_1 的坐标省略掉，$\mathrm{d}\sigma_1 = h_2(u_2, u_3) h_3(u_2, u_3) \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3$. 对于

$$\overline{AB} \equiv \mathrm{d}s_2 = h_2(u_2, u_3)\mathrm{d}u_2,$$

其中线长的度量取 $\mathrm{d}s_2$ 的正向起点 A 点的度量值. 同理 $\overline{BC} \equiv \mathrm{d}s_3' = h_3(u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3)\mathrm{d}u_3$，以 B 点的 h_3 的值；$\overline{CD} \equiv -\mathrm{d}s_2' = -h_2(u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3 + \mathrm{d}u_3)\mathrm{d}u_2$，以 D 点的 h_2 的值；$\overline{DA} \equiv -\mathrm{d}s_3 = -h_3(u_2, u_3)\mathrm{d}u_3$，以 A 点的 h_3 的值. 式中的“+”，“-”号是依环路的方向与 $\mathrm{d}s_i$ 的正方向是相同或相反而定.

对向量 $\boldsymbol{A}$ 在各段边界曲线上的取值原则与各段曲线上度量 h 的取值原则相同，因此我们得到

$$\begin{aligned}(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 = &\frac{1}{h_2(u_2, u_3) h_3(u_2, u_3)\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3}\big[A_2(u_2, u_3) h_2(u_2, u_3)\mathrm{d}u_2 + \\ &A_3(u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3) h_3(u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3)\mathrm{d}u_3 - \\ &A_2(u_2, u_3 + \mathrm{d}u_3) h_2(u_2, u_3 + \mathrm{d}u_3)\mathrm{d}u_2 - \\ &A_3(u_2, u_3) h_3(u_2, u_3)\mathrm{d}u_3\big] \\ = &\frac{1}{h_2 h_3 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\right]\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\end{aligned}$$

因此，可得到 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 上的投影分量为

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\right]$$

同理

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_2 = \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3)\right]$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\right]$$

因此,向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度在曲线坐标系中的表达式为

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} = &\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\right]\boldsymbol{e}_1 + \\ &\frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3)\right]\boldsymbol{e}_2 + \\ &\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\right]\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

当 $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ 时,曲线坐标系 (u_1, u_2, u_3) 是化成笛卡儿坐标系 (x_1, x_2, x_3),则 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 的表达式就退化成 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$.

对特殊的曲线坐标系 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 的表达式如下:

对柱坐标系 (ρ, φ, z):

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} = &\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}A_z - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\rho + \left[\frac{\partial}{\partial z}A_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho}A_z\right]\boldsymbol{e}_\varphi + \\ &\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}A_\rho\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

对球坐标系 (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} = &\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(rA_\theta)\right]\boldsymbol{e}_r + \\ &\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \\ &\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}A_r\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

§2.6 曲线坐标系中 Laplace(拉普拉斯)算符 ∇^2 的表达式

由拉普拉斯算符的定义 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$,算符作用在标量函数 ψ 上有

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{2.6.1}$$

作用的结果仍然是个标量,可看作 ψ 的梯度这一向量的散度.

在柱坐标系中

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] \tag{2.6.2}$$

在球坐标系中

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right] \tag{2.6.3}$$

或写成

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2.6.4}$$

拉普拉斯算子 ∇^2 作用在向量函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 上,其结果仍然是个向量函数,由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=A_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的每个分量 A_i 仍是个标量函数,因此 ∇^2 作用在 A_i 上满足(2.6.1)式

$$\nabla^2A_i = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial A_i}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial A_i}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial A_i}{\partial u_3}\right)\right] \tag{2.6.5}$$

则有

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = (\nabla^2A_i)\boldsymbol{e}_i \tag{2.6.6}$$

拉普拉斯算符在物理学中具有十分重要的地位,物理学中很多物理量(场)的运动变化都是由包含有 ∇^2 的微分方程来描述的,如

拉普拉斯方程:

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{2.6.7}$$

泊松(Poisson)方程:

$$\nabla^2\psi = \rho \tag{2.6.8}$$

输运方程:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-a^2\nabla^2\psi = f \tag{2.6.9}$$

波动方程:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \psi = f \tag{2.6.10}$$

亥姆赫兹(Helmholtz)方程：

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \tag{2.6.11}$$

在量子物理学中，有薛定谔(Schrodinger)方程：

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \tag{2.6.12}$$

这是把 ∇^2 算符与微观物理体系的动能联系在一起.

以上所列举的物理学中常遇到的方程，在各种坐标系中，加上其边界条件和初始条件，形成了对缤纷物理世界的数学描述，是本课程的重要内容.

第二章习题

2.1　在柱坐标(ρ,φ,z)下，试计算其坐标基 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$(可称为空间中的标架场)的散度和旋度，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e}_\rho,\quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_\varphi,\quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_z \text{ 和} \nabla \times \boldsymbol{e}_\rho,\quad \nabla \times \boldsymbol{e}_\varphi,\quad \nabla \times \boldsymbol{e}_z$$

所得的计算结果，能否说明它们的物理意义？

2.2　在球坐标(r,θ,φ)下，试计算其坐标基矢 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi$ 所构成的标架场的散度和旋度，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e}_r,\quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_\theta,\quad \nabla \cdot \boldsymbol{e}_\varphi \text{ 和} \nabla \times \boldsymbol{e}_r,\quad \nabla \times \boldsymbol{e}_\theta,\quad \nabla \times \boldsymbol{e}_\varphi$$

所得的计算结果能否用物理学中的某些场量给予恰当的解释？

2.3　若有一个力场在直角坐标系下的表达式为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_y$$

(1) 请用柱坐标系把此力场表示出来；

(2) 在柱坐标系下计算此力场的散度和旋度；

(3) 若有一物体在此力场中沿 $\boldsymbol{e}_\rho$ 方向运动一单位长度时，求此力场 $\boldsymbol{F}$ 所做的功；

(4) 若有一物体在此力场的作用下，沿 $x-y$ 平面的一单位圆顺时针运动一圈，求此力场 $\boldsymbol{F}$ 所做的功，并分析此功与力场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度的关系.

2.4　请证明

(1) $\nabla r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$；

(2) $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$，

其中 $r = |\boldsymbol{r}|$.

2.5　假设点电荷 q 的势为

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{r^{1+\varepsilon}},\quad 0 < \varepsilon < 1$$

在球坐标系下,计算此势(在 $r\neq 0$ 处)的场强 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}=-\nabla\psi)$ 并计算:

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$; (2) $\nabla\times\boldsymbol{E}$;

(3) 对半径为 R 的球形区域,推导类似 Gauss 定律的结果,对于此结果,检验当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限情况,并同点电荷的 Coulomb 势 $\psi(\boldsymbol{r})=\dfrac{q}{r}$ 做比较,说明这一电势的改变所引起的物理结果的变化.

2.6 在球坐标系下,已知向量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

求此向量场 $\boldsymbol{A}$. 所得的场 $\boldsymbol{A}$ 是唯一的吗? 如果不唯一,请说明理由.

第三章　线性空间

前面介绍的 $\mathbf{R}^3$ 空间上的向量分析，是经典物理学中的基本数学工具. 当我们研究更复杂的物理现象时，仅有 $\mathbf{R}^3$ 上的分析就不够了，要把 $\mathbf{R}^3$ 空间推广到更一般的高维的线性空间，在物理学中通常要用一种特殊的线性空间——希尔伯特(Hilbert)空间来描述. 因此这一章中介绍的线性空间及作用在其上的线性算符，是我们处理物理学问题时常要用到的数学工具.

§3.1　线性空间的定义

线性空间是 $\mathbf{R}^3$ 空间的推广，线性空间亦称为向量空间或线性流形(linear manifold). 其定义如下：

对于元素的集合 $L=\{\psi_i\}$，$\forall \psi_i,\psi_j \in L$，则有唯一的 $\psi_i+\psi_j \in L$，即在 L 中定义了“加法”，对于数域 K(在物理学中我们常用的是实数域 $\mathbf{R}$ 和复数域 $\mathbf{C}$)，$\forall a \in K$，有唯一的 $a\psi_i \in L$，即定义了 a 与 ψ_i 的“数乘”，对于 L 及定义在其上的“加法”与“数乘”这两种运算，如果满足以下的条件，则称 L 为域 K 上的线性空间：

(1) $\forall \psi_i,\psi_j,\psi_k \in L$，有 $(\psi_i+\psi_j)+\psi_k=\psi_i+(\psi_j+\psi_k)$　结合律　(3.1.1)

(2) 存在零元 $0 \in L$，　$\forall \psi_i \in L$，有 $\psi_i+0=0+\psi_i=\psi_i$　(3.1.2)

(3) $\forall \psi_i \in L$，　$\exists -\psi_i \in L$，使 $\psi_i+(-\psi_i)=0$　逆元　(3.1.3)

(4) $\forall \psi_i,\psi_j \in L$，　$\exists \psi_i+\psi_j=\psi_j+\psi_i$　交换律　(3.1.4)

(5) $\forall a \in K$，　$\psi_i,\psi_j \in L$，　$\exists a(\psi_i+\psi_j)=a\psi_j+a\psi_i$　分配律　(3.1.5)

(6) $\forall a,b \in K$，　$\psi_i \in L$，　$\exists (ab)\psi_i=a(b\psi_i)$　乘法结合律　(3.1.6)

(7) $\forall a,b \in K,\psi_i \in L$，$\exists (a+b)\psi_i=a\psi_i+b\psi_i$　分配律　(3.1.7)

(8) $\exists 1 \in K$，使得 $1\psi_i=\psi_i$　单位元　(3.1.8)

对于线性空间 L，L 中的元素称为向量. K 称为线性空间中的系数域，K 的元素称为标量. 当 K 为实数域时，L 称为实线性空间或实向量空间；当 K 为复数域 $\mathbf{C}$ 时，L 称为复线性空间或复向量空间.

向量的相关性： 在线性空间 L 中，存在 k 个向量 ψ_i，$i=1,2,\cdots,k$，当且仅当

$$a_i\psi_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad a_i \in K \tag{3.1.9}$$

对所有的 a_i 都成立时，我们称这 k 个 ψ_i 是线性无关的，即满足 $a_i\psi_i$ 求和为零的 k 个系数 a_i 皆要为零才能成立. 反之，若存在一组 k 个不全为零的系数 a_i，使得 $a_i\psi_i = 0$，则称此 k 个向量 ψ_i 为线性相关的.

线性空间的维数：线性空间 L 中最大的线性无关向量的个数 n，称为 L 的维数，即称 L 为 n 维的向量空间，n 可以是无穷.

§3.2 线性空间的内积

线性空间中两个向量的内积即标量积是 $\mathbf{R}^3$ 空间中的两个三维向量点积的直接推广. 我们记 $\mathbf{R}^3$ 空间中两个向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积为

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i B_i \quad i = 1,2,3 \tag{3.2.1}$$

我们希望把点积运算推广到一般的 n 维线性空间 L 中，并称其为内积. 为此，我们先给出一套内积的形式化的定义. 由于在物理学中，我们用的不仅是实线性空间，特别在量子物理中，我们更多的是用复线性空间描述. 所以在下面的定义中，我们将一般考虑复线性空间.

定义 3.2.1：线性空间的内积

对于数域 K（实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$）和线性空间 L，**内积**为一个映射，

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \to K,$$

满足

（1）共轭对称：对于任意 $\psi, \chi \in L$，有

$$\langle \psi, \chi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle^* \tag{3.2.2}$$

其中 $*$ 表示复共轭.

（2）对第二个元素是线性的，即对于任意 $a \in K, \psi, \chi \in L$，

$$\langle \psi, a\chi \rangle = a\langle \psi, \chi \rangle \tag{3.2.3}$$

可推得

$$\langle a\psi, \chi \rangle = a^* \langle \psi, \chi \rangle \tag{3.2.4}$$

且对于任意 $\psi, \chi, \varphi \in L$，

$$\langle \psi, \chi + \varphi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle \tag{3.2.5}$$

（3）非负性：对于任意 $\psi \in L$，

$$\langle \psi, \psi \rangle \geqslant 0 \tag{3.2.6}$$

等号“ = ”当且仅当 $\psi = 0$ 时成立.

不难验证,$\mathbf{R}^3$ 空间中的两个向量的点积(3.2.1 式)满足上述内积的性质,可以作为 $\mathbf{R}^3$ 空间中的两个向量的内积.

定义 3.2.2:线性空间向量的模

在内积定义的基础上,我们可以定义 L 中向量 ψ 的**模即“长度”**,记为 $|\psi|$:

$$|\psi| = \langle \psi, \psi \rangle^{\frac{1}{2}} \tag{3.2.7}$$

有 $|\psi| \geqslant 0$,当 $|\psi| = 0$ 时 ψ 为零向量.

定义 3.2.3:线性空间中向量的正交

在定义了内积的基础上,我们还可定义 L 空间中的两向量的正交. 对于 $\psi, \chi \in L$,若

$$\langle \psi, \chi \rangle = 0 \tag{3.2.8}$$

则称 ψ 与 χ 正交. 显然零向量与所有向量正交.

定义 3.2.4:向量的归一化

如果一个非零向量 ψ 被它的模除,$\dfrac{\psi}{|\psi|}$ 即成了一个单位向量,亦称此单位向量是归一的.

施密特正交化规则

有了长度和正交的概念,即可在 n 维线性空间 L 中由 n 个线性无关的向量,通过施密特正交化规则构造出一组正交归一基. 设 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\} \equiv \{\varphi_i\}$ 为一组线性无关的 n 个向量,通过下述施密特正交化过程可以构造出一组正交归一基 $\{\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2, \cdots, \widetilde{\varphi}_n\} \equiv \{\widetilde{\varphi}_i\}$.

$\widetilde{\varphi}_1$:$\widetilde{\varphi}_1 = \dfrac{\varphi_1}{|\varphi_1|}$ 是归一的.

$\widetilde{\varphi}_2$:$\langle \widetilde{\varphi}_1, \varphi_2 \rangle = c_1$,则 $\varphi_2 - c_1\widetilde{\varphi}_1$ 与 $\widetilde{\varphi}_1$ 正交,即 $\widetilde{\varphi}_2 = \dfrac{\varphi_2 - c_1\widetilde{\varphi}_1}{|\varphi_2 - c_1\widetilde{\varphi}_1|}$ 与 $\widetilde{\varphi}_1$ 正交且归一.

$\widetilde{\varphi}_3$:$\langle \widetilde{\varphi}_1, \varphi_3 \rangle = c_1$,$\langle \widetilde{\varphi}_2, \varphi_3 \rangle = c_2$,则 $\widetilde{\varphi}_3 = \dfrac{\varphi_3 - c_1\widetilde{\varphi}_1 - c_2\widetilde{\varphi}_2}{|\varphi_3 - c_1\widetilde{\varphi}_1 - c_2\widetilde{\varphi}_2|}$ 与 $\widetilde{\varphi}_1$ 和 $\widetilde{\varphi}_2$ 正交且归一.

⋮

⋮

$\widetilde{\varphi}_i$:$\langle \widetilde{\varphi}_1, \varphi_i \rangle = c_1$,$\langle \widetilde{\varphi}_2, \varphi_i \rangle = c_2$,$\cdots$,$\langle \widetilde{\varphi}_{i-1}, \varphi_i \rangle = c_{i-1}$.

则

$\tilde{\varphi}_i = \dfrac{\varphi_i - c_1\tilde{\varphi}_1 - c_2\tilde{\varphi}_2 - \cdots - c_{i-1}\tilde{\varphi}_{i-1}}{|\varphi_i - c_1\tilde{\varphi}_1 - c_2\tilde{\varphi}_2 - \cdots - c_{i-1}\tilde{\varphi}_{i-1}|}$ 与前面 $\tilde{\varphi}_1$ 到 $\tilde{\varphi}_{i-1}$ 均正交且归一.

⋮

⋮

依此类推可以把 n 个正交归一的基矢 $\{\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_n\}$ 构造出来.

由于任给 n 个线性无关的向量都可以构造 n 个正交归一的基矢,为了方便起见,后面我们将直接假设 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\} = \{\varphi_i\}$ 为 n 维空间 L 的正交归一基. 因此我们在 n 维线性空间中总是取一组 n 个正交归一的向量 $\{\varphi_i\}$ 为基. 我们下面讨论 n 维线性空间时一般都认定其基向量是正交归一的.

对于相互正交归一的向量系 $\{\varphi_i\}$, $\forall \varphi_i,\varphi_j \in \{\varphi_i\}$,有:

$$\langle \varphi_i,\varphi_j\rangle = \delta_{ij} \tag{3.2.9}$$

定理 3.2.1: 在 n 维线性空间中,n 个正交归一的向量是线性无关的.

证: 设 $\{\varphi_i\}$ 是 n 个正交归一的向量,若有一组系数 $\alpha_i, i = 1,2,\cdots,n$,使得 $\alpha_i\varphi_i = 0$ 成立,则我们任取 $\varphi_j \in \{\varphi_i\}$, φ_j 与零向量 $\alpha_i\varphi_i$ 做内积必为零,即

$$\langle \varphi_j,\alpha_i\varphi_i\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i\langle \varphi_j,\varphi_i\rangle = \alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j = 0$$

当 φ_j 取遍 $j = 1,2,\cdots,n$ 时,即所有的 $\alpha_i = 0$,即要使 $\alpha_i\varphi_i = 0$ 只能是 $\alpha_i = 0, i = 1,2,\cdots,n$,故 $\{\varphi_i\}$ 为 n 个线性无关的单位向量. 证毕.

正交归一基的完备性

对于线性空间 L 上的正交归一基 $\{\varphi_i\}$,如果有 L 上的向量 ψ 对所有的基向量 φ_i 都有 $\langle \psi,\varphi_i\rangle = 0$,满足此关系的 ψ 当且仅当 $\psi = 0$ 才成立,则我们称这一正交归一基 $\{\varphi_i\}$ 是完备的.

下面我们所涉及的正交归一基 $\{\varphi_i\}$ 都是完备的.

向量在正交归一基上的展开:

设有 L 中的正交归一基 $\{\varphi_i\}$,则 L 中的任意元素 ψ 都可以表示成基向量 $\{\varphi_i\}$ 的线性组合,即 ψ 可以在 $\{\varphi_i\}$ 中展开 后者在前者上的投影.

$$\psi = \xi_i\varphi_i, \quad \xi_i = \langle \varphi_i,\psi\rangle \in K \tag{3.2.10}$$

ξ_i 称为向量 ψ 在基 φ_i 上的分量,一般情况下,ψ 亦可由其分量表示

$$\psi = \{\xi_1,\cdots,\xi_i,\cdots,\xi_n\} \tag{3.2.11}$$

基向量 $\{\varphi_i\}$ 的选取是多种多样的,一般选择便于我们描述物理问题的基向量.

当我们在 L 中选取正交归一基为 $\{\varphi_i\}$ 时,对于任意两个向量

$$\psi,\chi \in L, \quad \psi = \xi_i\varphi_i, \quad \chi = \eta_i\varphi_i$$

即 $\psi = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $\chi = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,此两个向量的内积为

$$\langle \psi,\chi\rangle = \langle \xi_i\varphi_i,\eta_j\varphi_j\rangle = \xi_i^*\eta_j\langle \varphi_i,\varphi_j\rangle = \xi_i^*\eta_j\delta_{ij} = \xi_i^*\eta_i \quad (3.2.12)$$

其中我们采用了爱因斯坦求和符号，ξ_i^* 为 ξ_i 的复共轭.

由此内积定义，我们可以定义复线性空间 L 中向量 ψ 的模 $|\psi|$：

$$|\psi| = \langle \psi,\psi\rangle^{\frac{1}{2}} = (\xi_i^*\xi_i)^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.13)$$

其中 $|\xi_i|^2 = \xi_i^*\xi_i$，i 不求和.

若 $\xi_i = a + ib$，$a,b \in \mathbf{R}$ 则

$$|\xi_i| = (\xi_i^*\xi_i)^{\frac{1}{2}} = [(a+ib)(a-ib)]^{\frac{1}{2}} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

可以看出 $|\psi|$ 仍为实数且 $|\psi| \geqslant 0$，对于 $|\psi| = 0$，即 ψ 为零向量.

内积的性质

由内积的定义，我们还可得如下性质：

$$\langle \varphi,\alpha\psi + \beta\chi\rangle = \alpha\langle \varphi,\psi\rangle + \beta\langle \varphi,\chi\rangle$$
$$\langle \alpha\psi + \beta\chi,\varphi\rangle = \alpha^*\langle \psi,\varphi\rangle + \beta^*\langle \chi,\varphi\rangle \quad (3.2.14)$$

$$|\alpha\psi| = |\alpha|\cdot|\psi| \quad (3.2.15)$$

这些性质对实线性空间仍然具有，只是所有的复共轭量等于其自身.

我们称具有内积的线性空间为**内积空间**. 具有内积的实线性空间即实内积空间称为欧几里得(Euclidean)空间，简称**欧氏空间**. 具有内积的复线性空间即复内积空间称为**酉空间**(Unitary Space).

§3.3　Hilbert(希尔伯特)空间

下面介绍物理学中非常重要的空间——Hilbert(希尔伯特)空间.

定义 3.3.1：完备的内积空间称为 Hilbert 空间，一般记为 H. 若 $H = \mathbf{R}$，则称为实 Hilbert 空间，若 $H = \mathbf{C}$，则称为复 Hilbert 空间.

一般的量子理论都建立在复 Hilbert 空间上.

对空间"完备性"的理解，我们可先从有限维向量空间开始，在有限维向量空间中，如果能找出一个正交归一基不含于任何更大的一般性的正交归一基中，则该正交归一基是完备的①.

---

① 更准确的完备性定义(包含无穷维的线性空间)是由度量空间中点列的柯西(Cauchy)收敛性来定义的.

完备度量空间：在度量空间中，可用距离 d 来定义点列收敛概念：$x_n \to x_0$，即 $d(x_n,x_0)\to 0$. 点列 x_n 是 Cauchy 收敛的，被称为 Cauchy 点列. 对 Cauchy 点列的要求是点列 x_n，对 $\forall \varepsilon > 0$，当 $m,n \geqslant N$ 时，有 $d(x_m,x_n) < \varepsilon$，则称此点列为 Canchy 点列. 其中 $d(x_m,x_n)$ 表示 x_m 和 x_n 两点的距离.

我们可对线性空间 L 的完备性给出定义：对任意定义在 L 中的一个序列向量 $\{x_n\}$，如果此序列为 Cauchy 收敛的，即存在一个极限向量在此空间中，则此空间 L 称为完备的.

从前面我们给出的正交归一基的完备性，我们也可以理解空间的完备性.

希尔伯特空间是有限维欧氏空间的推广，我们希望它能够保持欧氏空间中的一些好的性质，比如连续性、微积分性等. 而完备性的要求就使得微积分中的大部分概念都可以无障碍地推广到希尔伯特空间中来.

我们所熟悉的 $\mathbf{R},\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 空间都是 Hilbert 空间. 我们经常用到的 Hilbert 空间是函数空间，例如定义在 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的集合构成的函数空间是一个 Hilbert 空间：$\{f(x),x\in[0,2\pi]\}$，其中 $f(x)$ 要满足 Dirichlet（狄利赫里）条件. 这一 Hilbert 空间的基向量为 $(1,\sin nx,\cos nx;n=1,2,\cdots)$. 在数学分析中所学的一个周期函数可展成三角级数即 Fourier（傅里叶）级数，就是该 Hilbert 空间的元素在基向量 $\{1,\sin nx,\cos nx;n=1,2,\cdots\}$ 上的展开，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{3.3.1}$$

其中 $\frac{a_0}{2},a_n,b_n$ 为 $f(x)$ 在相应基上的投影，即相应的分量.

. 以基 $(1,\cos nx,\sin nx,\ n=1,2,3,\cdots)$ 张成的空间为所有满足条件的以 2π 为周期的函数集合构成的 Hilbert 空间.

一般 Hilbert 空间的内积，因为其元素是可积的函数，我们定义复 Hilbert 空间中元素的内积如下：

对于定义在 $\mathbf{R}^3$ 上某一定义域 $\Omega(\Omega\subset\mathbf{R}^3)$ 上的复函数 $\varphi(\boldsymbol{x}):\Omega\to\mathbf{C}$

$$\varphi(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x})+\mathrm{i}v(\boldsymbol{x}),\quad \varphi\in H \tag{3.3.2}$$

其中 $u(\boldsymbol{x}),v(\boldsymbol{x})$ 都为实函数，$\boldsymbol{x}\in\Omega$.

对于任意 $\varphi(\boldsymbol{x}),\chi(\boldsymbol{x})\in H$，$\varphi$ 与 χ 的内积为

$$\langle\varphi,\chi\rangle=\int_{\Omega}\varphi^*(\boldsymbol{x})\chi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.3.3}$$

H 空间中向量 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的模为

$$|\varphi|=\langle\varphi,\varphi\rangle^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{\Omega}\varphi^*\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty \tag{3.3.4}$$

通常称 Hilbert 空间是平方可积的空间，记为 L_2 空间.

当我们在 H 中选定正交归一的基 $\{\varphi_i,i=1,2,\cdots,n\}$，$n$ 可以是 ∞，即无穷维的线性空间，对任何一个 $\varphi\in H$，可以在 $\{\varphi_i\}$ 上展开 $\varphi=\xi_i\varphi_i$，引入符号 $|\varphi(x)\rangle$ 代表 H 中的向量，在 $\{\varphi_i\}$ 中表示

$$|\varphi(x)\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

是 n 维空间中的列向量.

记$\langle\varphi(x)| \equiv (|\varphi(x)\rangle)^+$,即$|\varphi(x)\rangle$的复共轭加上转置,称为$|\varphi(x)\rangle$的Hermite(厄米)共轭,是 n 维空间中的行向量.

$$\langle\varphi(x)| = (\xi_1^*, \xi_2^*, \cdots, \xi_n^*) \tag{3.3.6}$$

可得向量$|\varphi(x)\rangle$的模长为

$$|\varphi| = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \xi_i\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.7}$$

对归一化的基向量$|\varphi_i\rangle$,此基向量的完备性可由下式表示

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = 1 \tag{3.3.8}$$

等式左边为 n 个 $n \times n$ 的矩阵之和,右边为该 n 维 Hilbert 空间中的单位矩阵,基的这一完备性表达式在量子理论中经常被用到.

§3.4　线性算符

我们所熟悉的 $\mathbf{R}^3$ 中的坐标变换:

$$\boldsymbol{A}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{X}', \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^3 \tag{3.4.1}$$

其中

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det \boldsymbol{A} \neq 0$$

$\boldsymbol{A}$ 满足线性性:

$$\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}) = a\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}, \quad a, b \in R, \quad \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^3 \tag{3.4.2}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} \tag{3.4.3}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}) \tag{3.4.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同为 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换，称为 $\mathbf{R}^3$ 上的**线性算符**.

我们把这一概念推广到线性空间 L 中，在 L 中引入其他算符，如微分算符等.

定义 3.4.1：L 上的线性算符.

若算符 A,B，对于 $\varphi,\chi\in L,a,b\in K$

$$A,B:\ \varphi\in L\to A\varphi\in L,\quad B\varphi\in L \tag{3.4.5}$$

并且满足：

$$A(a\varphi+b\chi)=aA\varphi+bA\chi \tag{3.4.6}$$

$$(A+B)\varphi=A\varphi+B\varphi \tag{3.4.7}$$

$$(A\cdot B)\varphi=A\cdot(B\varphi) \tag{3.4.8}$$

则称算符 A,B 为 L 上的线性算符.

下面介绍几种常用的线性算符：

一、L 空间中的坐标变换 A（或看成空间中的向量的转动）

$$A:\ \varphi\to\chi\quad \varphi,\chi\in L,\quad L\text{ 为 }n\text{ 维线性空间}$$

即

$$\chi=A\varphi \tag{3.4.9}$$

若

$$\varphi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\quad \chi=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵，则上式变换的分量形式为

$$\eta_i=a_{ij}\xi_j \tag{3.4.10}$$

如果 A 为零算符 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，即为 n 维空间中的零矩阵，则

$$\forall\varphi\in L,\quad \text{有}\ \boldsymbol{0}\cdot\varphi=0 \tag{3.4.11}$$

这是一个奇异算符，它把任何向量缩为一点，失去了方向性和长度.

如果 A 为恒等算符 $A=I$，即 n 维空间中的单位矩阵，则

$$\forall\varphi\in L,\quad \text{有}\ I\cdot\varphi=\varphi \tag{3.4.12}$$

恒等算符不改变任何向量.

二、L 上的线性微分算符 D、数乘算符及对易运算

设 L 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数空间 $\{\varphi(x)\}$，则线性微分算符 D 定义为

$$D_x\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\quad D_x\varphi(x)\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x) \tag{3.4.13}$$

即 $D_x:\varphi(x)\in L\rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(X)\in L$

L 上的线性数乘算符 X(或称坐标算符),其定义为

$$X\varphi(x)\equiv x\varphi(x) \tag{3.4.14}$$

由线性算符 D_x 与 X 的乘积作用在 $\varphi(x)$ 上,

$$\begin{aligned}(D_x\cdot X)\varphi(x)&=D_x(X\varphi(x))\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\varphi(x))\\&=\varphi(x)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

$$\begin{aligned}X\cdot D_x\varphi(x)&=X(Dx\varphi(x))\\&=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

可知:

$$D_x\cdot X\neq X\cdot D_x \tag{3.4.17}$$

即一般情况下,两个线性算符的乘积的顺序是不可交换的,即顺序交换后的两个算符的乘积是不相等的,我们称这两个线性算符是非对易的.

我们引入算符的对易括号的运算,对算符 A,B 我们定义:

$$[A,B]\equiv A\cdot B-B\cdot A \tag{3.4.18}$$

即[·,·]为算符的对易括号或称为 Lie(李)括号.

则

$$[D_x,X]\varphi(x)\equiv(D_x\cdot X-X\cdot D_x)\varphi(x)=\varphi(x)$$

或写成

$$[D_x,X]=I \tag{3.4.19}$$

即 D_x 与 X 的 Lie 括号运算为一恒等算符而不为零,即 D_x 与 X 是非对易的.

如果 $[A,B]=0$,说明 $A\cdot B=B\cdot A$,即 A 与 B 可对易.

对易括号运算在量子物理中起着非常重要的作用,在量子物理中,一阶微分算符与粒子的动量联系在一起,二阶微分算符与粒子的动能相联系,而 X 数乘算子与粒子的空间位置相对应,量子物理中算符的对易关系是区别量子体系与经典物理体系最重要的特征之一.

三、L 上的对称算符和反对称算符

设 B 为 L 上的线性算符,$\widetilde{B}$ 为 B 的转置,若 $\widetilde{B}=B$,则此算符称为对称算符,

若 $\widetilde{B} = -B$，则此算符称为反对称算符，若算符为一矩阵，则对称算符为对称矩阵，反对称算符为反对称矩阵.

对 L 中的任何一个线性算符 B，都可构成一个对称算符 S 和反对称算符 A，（读者自证）

$$S = \frac{1}{2}(B + \widetilde{B}) \tag{3.4.20}$$

$$A = \frac{1}{2}(B - \widetilde{B}) \tag{3.4.21}$$

由此我们可以看出，任何一个线性算符 B，可分解为对称算符 S 和反对称算符 A 之和

$$B = S + A \tag{3.4.22}$$

反对称算符 A 有一个很重要的性质：反对称算符必是无迹的，即

$$\mathrm{tr}\, A = 0$$

（读者自证）

四、L 上的 Hermite（厄米）算符

设算符 A，其矩阵表示 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，定义 A 的复共轭 A^*，$\boldsymbol{A}^* = (a_{ij}^*)$. 定义 A 的**伴随算符** $A^+ \equiv \widetilde{A}^*$，其矩阵形式为 $\boldsymbol{A}^+ = (a_{ji}^*)$.

由内积的定义可得伴随算符满足

$$\langle A\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\chi}\rangle = \langle \boldsymbol{\varphi}, A^+\boldsymbol{\chi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi},\ \boldsymbol{\chi} \in L \tag{3.4.23}$$

此关系式亦可以作为伴随算符的定义式，即满足该关系式的算符 A^+ 为算符 A 的伴随算符.

由伴随算符的定义式容易证明伴随算符满足如下关系式：

$$(A + B)^+ = A^+ + B^+ \tag{3.4.24}$$

$$(AB)^+ = B^+ A^+ \tag{3.4.25}$$

$$(\alpha A)^+ = \alpha^* A^+ \quad \alpha \in C \tag{3.4.26}$$

$$(A^+)^+ = A \tag{3.4.27}$$

命题 3.4.1：线性算符 A 的伴随算符 A^+ 为线性算符.

证：$\forall \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in L$

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\varphi}, A^+(\alpha\boldsymbol{\chi} + \beta\boldsymbol{\psi})\rangle &= \langle A\boldsymbol{\varphi}, \alpha\boldsymbol{\chi} + \beta\boldsymbol{\psi}\rangle \\ &= \langle A\boldsymbol{\varphi}, \alpha\boldsymbol{\psi}\rangle + \langle A\boldsymbol{\varphi}, \beta\boldsymbol{\psi}\rangle\end{aligned}$$

$$= \alpha\langle \varphi, A^+ \chi\rangle + \beta\langle \varphi, A^+ \psi\rangle$$

故有

$$\langle \varphi, A^+ (\alpha\chi + \beta\psi)\rangle - \langle \varphi, \alpha A^+ \chi\rangle - \langle \varphi, \beta A^+ \psi\rangle = 0$$

即

$$\langle \varphi, A^+ (\alpha\chi + \beta\psi) - \alpha A^+ \chi - \beta A^+ \psi\rangle = 0$$

由于 $\forall \chi, \varphi, \psi \in L$,故有

$$A^+ (\alpha\chi + \beta\psi) = \alpha A^+ \chi + \beta A^+ \psi$$

即 A^+ 为一线性算符.

定义 3.4.2：Hermite(厄米)算符的定义：

若 $A^+ = A$,则 A 称为 Hermite 算符,或称为自伴随算符.

命题 3.4.2　设 A, B 为 Hermite 算符,则 $[A, B] = 0$ 的充分且必要条件是 $(AB)^+ = AB$,即算符 $A \cdot B$ 亦是 Hermite 算符.

证：若 $[A, B] = 0$

则 $AB^+ = B^+ A^+ = BA = AB$ 即 $A \cdot B$ 为 Hermitian 算符.

若 $(A \cdot B)$ 为 Hermitian,则

$$AB = (AB)^+ = B^+ A^+ = BA$$

即可得 $[A, B] = 0$.

命题得证.

命题 3.4.3：复内积空间中的线性算符 A 为 Hermite 算符的充分且必要的条件是：

$$\forall \varphi \in L, \quad \langle \varphi, A\varphi\rangle \in R \tag{3.4.28}$$

证：若 $A^+ = A$

$$\langle \varphi, A\varphi\rangle = \langle A^+ \varphi, \varphi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle = \langle \varphi, A\varphi\rangle^*$$

故 $\langle \varphi, A\varphi\rangle \in R$ 为实数.

若 $\langle \varphi, A\varphi\rangle \in R$,

则　　$\langle \varphi, A\varphi\rangle = \langle \varphi, A\varphi\rangle^* = \langle A\varphi, \varphi\rangle = \langle \varphi, A^+ \varphi\rangle$

即可得 $A = A^+$,

故命题得证.

五、幺正算符 U

在复线性空间 L 中的线性算符 U,若 $U^+ U = I$,即 $U^+ = U^{-1}$,我们称 U 为幺正算符. 当 L 为实线性空间,U 就退化为实空间中的正交算符.

命题 3.4.4：若 U 为幺正算符，则 $\forall \varphi, \chi \in L$ 有

$$\langle U\varphi, U\chi \rangle = \langle \varphi, \chi \rangle$$

且

$$|U\varphi| = |\varphi|.$$

证： $\langle U\varphi, U\chi \rangle = \langle \varphi, U^{+}U\chi \rangle = \langle \varphi, I\chi \rangle = \langle \varphi, \chi \rangle$

当 $\chi = \varphi$ 时，即有

$$|U\varphi| = |\varphi|$$

命题得证.

幺正算符在量子理论的表象变换中出现，是量子理论中常用到的算符.

§3.5 线性算符的本征值和本征向量

若线性算符 A 满足方程

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad \lambda \in K, \quad \varphi \in L \tag{3.5.1}$$

则此方程称为算符 A 的本征方程，称 λ 为算符 A 的本征值，φ 称为算符 A 的本征值为 λ 的本征向量.

若 L 为实线性空间，则 $\lambda \in R$，即当 $\lambda > 0$ 时，A 作用在向量 φ 上，不改变 φ 的方向，只改变了 φ 的长度，使 φ 变为原向量的 λ 倍；如果 $\lambda < 0$ 时，A 作用后使 φ 完全反向，而长度为原来的 $|\lambda|$ 倍.

对于给定的线性算符 A，其本征值及相应的本征函数的求法：

从本征方程(3.5.1)式出发，本征方程可写成

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\varphi = 0 \tag{3.5.2}$$

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，这是一矩阵方程，要使 φ 有非零解的条件是

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{3.5.3}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

这一方程为算符 A 的本征值方程，亦称为久期方程，它是一个 λ 的 n 次方程，共有 n 个解 $\lambda_i, i = 1, \cdots, n$，这 n 个 $\{\lambda_i\}$ 称为算符 A 的本征谱.

多项式 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$ 称为算符 A 的本征多项式，如果 A 的本征方程的解 $\{\lambda_i\}$ 无重根时，称 A 的本征谱 $\{\lambda_i\}$ 是非简并的；若 λ_i 有重根时，则称谱 $\{\lambda_i\}$ 为简并的，设 λ_i 为 k 重的重根，则称本征值 λ_i 为 k 重简并的，或称 λ_i 的简并度为 k.

当我们求出 A 的本征值 λ_i 后，把每个 λ_i 代入 A 的本征方程，即可求得该本征值的本征向量.

对于 Hermite 算符，其本征值具有两个很重要的性质：

命题 3.5.1：Hermite 算符的本征值是实数.

证：设 A 为 Hermite 算符，$A^+=A$，φ 为 A 的本征值为 λ 的本征向量，$\lambda=\{\lambda_i\}$ 由

$$A\varphi=\lambda\varphi,$$

则

$$\langle\varphi,A\varphi\rangle=\langle\varphi,\lambda\varphi\rangle=\lambda\langle\varphi,\varphi\rangle$$

又

$$\begin{aligned}\langle\varphi,A\varphi\rangle&=\langle A^+\varphi,\varphi\rangle=\langle A\varphi,\varphi\rangle\\&=\langle\varphi,A\varphi\rangle^*=\lambda^*\langle\varphi,\varphi\rangle^*\\&=\lambda^*\langle\varphi,\varphi\rangle\end{aligned}$$

其中用到 $\langle\varphi,\varphi\rangle^*=\langle\varphi,\varphi\rangle$

由于 $\varphi\neq0$，即 $\langle\varphi,\varphi\rangle\neq0$，故得 $\lambda=\lambda^*$，即 λ 为实数.

命题 3.5.2：属于 Hermite 算符 A 的不同本征值的本征向量是正交的.

证：设 Hermite 算符的本征值为 λ_1 的本征向量为 χ_1，本征值为 λ_2 的本征向量为 χ_2，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，

则　　$\langle\chi_2,A\chi_1\rangle=\langle\chi_2,\lambda_1\chi_1\rangle=\lambda_1\langle\chi_2,\chi_1\rangle$

又　　$\langle\chi_2,A\chi_1\rangle=\langle A^+\chi_2,\chi_1\rangle=\langle A\chi_2,\chi_1\rangle$

$$=\langle\chi_1,A\chi_2\rangle^*=\lambda_2^*\langle\chi_1,\chi_2\rangle^*=\lambda_2\langle\chi_1,\chi_2\rangle$$

其中用到 $\langle\chi_1,\chi_2\rangle^*=\langle\chi_2,\chi_1\rangle$ 和 λ_2 为实数的性质，由以上两式可得：

$$(\lambda_1-\lambda_2)\langle\chi_2,\chi_1\rangle=0$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故有

$$\langle\chi_2,\chi_1\rangle=0,$$

即 χ_1,χ_2 正交.

由于 Hermite 算符的这两个重要性质，它在物理学的数学描述中显得尤为重要. 因为量子物理学中的基本假设：量子体系的状态是由 Hilbert 空间的向量

来描述，而物理量的测量值为实数，因此表示物理量的算符必为 Hermite 算符.

第三章习题

3.1 设 A,B 都为 n 维空间中的坐标变换的矩阵，即都为 $n\times n$ 的非奇异（$\det A\neq 0$，$\det B\neq 0$）方阵，求证

$$\det(A\cdot B)=\det A\det B$$

3.2 试证明，若 A 为实内积空间的一个自伴算子，则当且仅当对此空间内所有的向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\langle \boldsymbol{X},A\boldsymbol{X}\rangle=0$ 时，$A=0$，其中 $\langle\ ,\rangle$ 为内积.

3.3 若 A 为 n 维空间中的反对称算子，（即 $n\times n$ 的反对称矩阵），请证明

$$\operatorname{tr}A=0$$

（$\operatorname{tr}A$ 为矩阵 A 的迹.）

3.4 若算子 A 为 3×3 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$$

求 A 的伴随算子 A^{+} 和逆算子 A^{-}.

3.5 求下列矩阵的本征值及相应的本征向量

（1）$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　（2）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

（3）$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$　　（4）$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3.6 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A 的本征值和相应的本征向量.

若此方阵可对角化，求出使 A 对角化的相似变换 MAM^{-1} 的满秩矩阵 M.

3.7 求 Pauli（泡利）矩阵

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

的本征值及相应的本征向量. 其中 i 为虚数单位.

第二篇　复变函数

第四章　复变函数的概念

§4.1　映　　射

设 X 和 Y 是两个集合，映射 f 是这两个集合之间的一种对应关系，在 f 的作用下，使 X 中的每一个元素对应 Y 中的唯一的一个元素，我们称 f 是一个从 X 到 Y 的映射，记为

$$f: X \to Y \tag{4.1.1}$$

或记为，$\forall x \in X$，有

$$f: x \mapsto y, \quad y \in Y \tag{4.1.2}$$

我们称 y 为在 f 映射下 x 的像，亦可写为 $f(x) = y$.

从映射的定义可以看出，两个集合间的映射，只能是“一对一”或是“多对一”的映射，而不能是“一对多”的映射.

“函数”关系是映射的一种，映射比函数关系更广泛，它可以表示一种变换，一种算子的运算、泛函等等的映射关系，我们也可把这一切映射关系看做一种广义的“函数”关系，因此在通常情况下，“函数”将作为映射的一个同义词来使用.

对于映射 $f: X \to Y$，集合 X 称为 f 的定义域，集合 Y 称为 f 的值域，对于 $\forall x \in X$，有 $f: x \mapsto y, y \in Y$，每个 x 有一个唯一的 y，即不同的 x 可以对应相同的 y，但不能对给定的一个 x，有多个 y 与之对应，这是因为我们通常所说的函数关系，要从分析学的角度来研究函数的连续性及解析性（即可微的性质）. 例如，如图 4.1.1 中的实函数 $y = f(x)$.

如果一个 x 对应两个 y 的值，如图 4.1.1，$f(x_0) = y_1$，$f(x_0) = y_2$，则由分析

学中函数连续性的定义，这类“多值”函数的连续性无法定义，更无法去定义这类“多值”函数的可微性. 因此所谓的“多值”函数，它不是通常分析学意义下的函数，除非把它的值域或定义域做分区处理，使其变成单值的函数. 在上面的例子中，要把值域分区. 这方面的例子，读者可以自己例举很多.

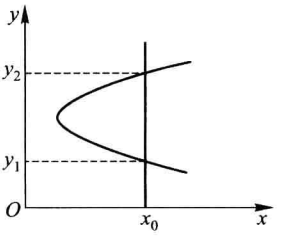


图 4.1.1

当然，要定义变量为复数域的函数，就要研究复数域及映射的特性，否则一般地定义复变函数是复数域到复数域的映射是不严格的.

§4.2　复　　数

当我们对实数域加以扩充，定义了虚数单位 i，即 $i^2 = -1$，我们对一个有序的实数对 (x,y)，$x,y \in \mathbf{R}$，定义了复数 $z = x + iy$. 所有的复数 z 构成复数域，记为 **C**. 我们称 x 为复数 z 的实部，记为 $x = \mathrm{Re}\, z$，称 y 为复数 z 的虚部，记为 $y = \mathrm{Im}\, z$.

由定义可知，$z = 0$，当且仅当 $x = 0, y = 0$.

我们可定义复数 z 的共轭复数 z^*：$z^* = x - iy$，或称 z^* 为 z 的复共轭，显然有 $(z^*)^* = z$.（复数 z 的共轭复数，也可记为 $\bar{z}$.）

在定义了 z 与 z^* 后，我们可定义复数 z 的模 $|z|$；

$$|z|^2 = z \cdot z^* = x^2 + y^2 \in \mathbf{R} \text{ 且 } |z|^2 \geqslant 0 \tag{4.2.1}$$

或写成 $|z| = (z \cdot z^*)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$.

注意 $|z|^2$ 与 z^2 是不同的，其意义全然不同.

由复数域 **C** 构成的复数空间是个线性空间，可定义复数的代数运算，设

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

1. 加法

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{4.2.2}$$

容易证明，加法满足交换律与结合律：

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

2. 乘法

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{4.2.3}$$

容易证明，乘法满足交换律与结合律：

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

3. 除法

当 $z_2 \neq 0$ 时有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{\mathrm{i}(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{4.2.4}$$

对于复数的乘法和加法，满足分配律：

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

由于复数的定义 $z = x + \mathrm{i}y$，且 (x, y) 为有序的实数对，因此复数域 **C** 可用复平面来表示（如图 4.2.1）.

复平面是在平面上做一直角坐标系，原点为 O，取横坐标为实轴即 x 轴，取纵坐标为虚轴即 $\mathrm{i}y$ 轴，其单位为 i，y 为实数，则所有的复数 z 都与复平面上的点相对应. 对于点 $z = x + \mathrm{i}y$，可用从 O 点到该点的连线作一向量来表示，如图 4.2.1，该向量与 x 轴的夹角为 θ，称为复数 z 的幅角，记为 $\theta = \mathrm{Arg}\, z$，半径 r 为复数 z 的模，即该向量的长度，$r = |z|$.

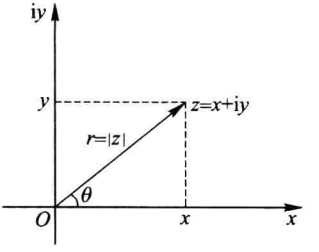


图 4.2.1

在复平面上，所有的复数都可以用 (r, θ) 来表示：

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{4.2.5}$$

由复平面上的点表示的复数，只能看出点（或向量）的几何位置，不能比较两个复数的大小，因而不能对复数大小进行排序，只有两个复数的模才能比较大小.

从复数的这种几何表示法可看出复数的另一个重要性质，即幅角的多值性. 一般对幅角 θ 而言，$\theta = \arg z$ 是指 θ 在主值范围 $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ 或 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 内取值，但由于 θ 的周期性，它是以 2π 为周期的，由（4.2.5）式亦可看出. 对于 $\theta' = \theta + 2k\pi$，k 为整数时，都表示同一个复数 z. 即

$$z = x + \mathrm{i}y = r[\cos(\theta + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta + 2k\pi)] \tag{4.2.6}$$

k 就表示幅角绕原点的圈数,不管 k 为任何整数值,总是表示同一个复数 z.

对于一般幅角的表示为

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \theta + 2k\pi, k \text{ 为整数}.$$

与实平面 $\mathbf{R}^2$ 不同,复平面中 x 轴是实轴,而 y 轴是虚轴,其单位为 i,这两轴的性质是不同的,这就决定了复平面中点的表示是不一样的,其运算也不同.

Euler(欧拉)公式:

对 $\theta \in R$,我们有:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

由

$$e^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$$

可得

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

即

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.2.7}$$

此关系式称为 Euler 公式.

由 Euler 公式,我们可以把复数 z 表成

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \tag{4.2.8}$$

Euler 公式在复数的运算中具有十分重要的地位. 由 Euler 公式,我们很容易得到如下的运算公式:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{4.2.9}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \tag{4.2.10}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}\theta} \tag{4.2.11}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{4.2.12}$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{4.2.13}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{4.2.14}$$

*** 复数球面的概念：**

在 $x-\mathrm{i}y$ 复平面 **C** 上，以原点 O 为南极，以 N 为北极作一直径为 1 的球面（如图 4.2.2）.

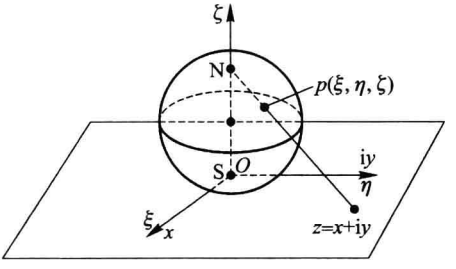


图 4.2.2

在直角坐标系(ξ,η,ζ)中，ξ 轴与 x 轴重合，η 轴与 $\mathrm{i}y$ 轴重合，$O\zeta$ 垂直于 $\xi-\eta$ 平面，在(ξ,η,ζ)坐标中，球面的球心坐标为$\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，我们确定如下的法则使球面上的点与 **C** 平面上的点构成一一对应关系：即取 **C** 平面上的点 $z=x+\mathrm{i}y$ 点与球面的北极 **N** 以直线相连，交于球面的 P 点，则 **C** 平面上的每一点都与球面上唯一的一点 P 相对应. 如果把球面的北极 N 点挖掉，则没有北极 N 点的开球面与 **C** 平面完全同构，即可用此开球面上的点来描述复平面上的点. 这两组坐标有如下的对应关系：

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{z+z^*}{1+zz^*},\quad \eta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{z-z^*}{1+zz^*},\quad \zeta = \frac{zz^*}{1+zz^*} \tag{4.2.15}$$

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta},\quad y = \frac{\eta}{1-\zeta} \tag{4.2.16}$$

从上面的对应关系也可看出，N 点的坐标$(0,0,1)$，即当 $\zeta=1$ 时，则有 $|z|^2 = z\cdot z^* \to \infty$，我们从几何上来理解此关系：当 z 点从 **C** 平面的原点 O 出发沿着任一条 **C** 平面上的射线趋于 ∞ 时，即球面上的点 P 将沿着一条经线趋于北极 N 点，因此我们把在复平面 **C** 任何 $|z|\to\infty$ 的点与球面的 N 点对应，我们也称 N 点为球面所对应的复平面 **C** 的无穷远点，通常我们把这一球面称为复数球面.

注：复数球面与复平面有着完全不同的拓扑结构，其差异就在球面的北极 N 点上，因此把 N 点看成是复平面上沿各方向趋于模为无穷大的点，这只是对复平面上无穷大点的一种理解.

§4.3 复变函数

如果我们把复变函数定义为复平面 $\mathbf{C}$ 到复平面 $\mathbf{C}$ 的映射 f, f: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, f 具有一般的形式为

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \tag{4.3.1}$$

其中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是 x,y 的实函数,即 u,v: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$,这就要求 f 把定义域 $\mathbf{C}$(以 x 和 $\mathrm{i}y$ 为轴的复平面)上的点映射到值域 $\mathbf{C}$(以 u 和 $\mathrm{i}v$ 为轴的复平面)上唯一的点上,这才是具有分析意义上的函数,但作为定义域的复数,由于幅角的多值性,使得一些函数的映射关系不能满足单值性要求,因此不能把复变函数简单地定义为复平面到复平面的映射.

例如,$f(z)=\sqrt{z}$, 这是一个开方运算的映射,由于 $z=re^{\mathrm{i}\theta}=re^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}$, $k\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ 为整数的集合当 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,取 $k=0$,有

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$$

当数 $k=1$ 时,$z=re^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)}$,

有

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)},$$

因此 $f(z)=\sqrt{z}$ 把同一 z 点映射到值域 $\mathbf{C}$ 平面上的两个不同的像点 $\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ 和 $\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$(如图 4.3.1),

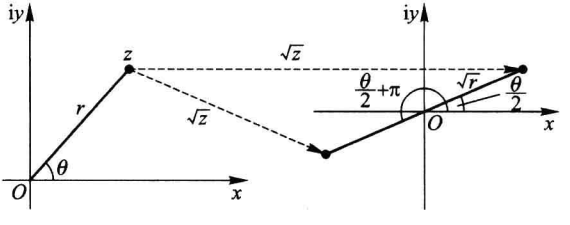


图 4.3.1

因此 $f(z)=\sqrt{z}$,就不是 $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 的映射,而是一个所谓的"多值函数",当然我们通常遇到的"多值"性的问题,除自变量的分数幂运算外,还有自变量的对数运算 $\ln z$ 等,要定义这一类映射,必须把自变量 z 的复平面重新构造,把幅角所构成的多值性定义域分开,使得每个定义域都构成一个单值映射的区域,这里我们引入 Riemann(黎曼)面的概念.

我们以 $f(z)=\sqrt{z}$ 的映射为例来构造 Riemann 面,由于 $z=re^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}$,我们把 z

的定义域分成两个可够成单值映射的区域 C_1 和 C_2，即

$$C_1: k = 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad z = re^{i\theta}$$

$$C_2: k = 1, \quad 2\pi \leqslant \theta + 2\pi < 4\pi, \quad z = re^{i(\theta+2\pi)}$$

则 $f(z)$ 的映射变成定义域的两个单值分支到值域 $\mathbf{C}$ 的映射：

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}: C_1 \to \mathbf{C} \text{ 的上半平面}$$

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}: C_2 \to \mathbf{C} \text{ 的下半平面}$$

如图 4.3.2 所示.

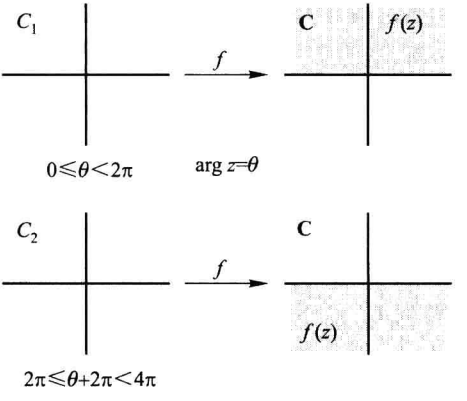


图 4.3.2

如何把定义域的两个单值分支粘起来构成一个新的自变量的单值映射的定义域呢？Riemann 构造了这样一个总的自变量 z 的单值区域——称为 Riemann 面，我们记为 C^R，使得 $C^R = C_1 \cup C_2$（此符号为 C_1 与 C_2 的开集），对于这样的 C^R，则有 $f(z) = \sqrt{z}: C^R \to \mathbf{C}$ 为单值映射.

下面介绍如何构造 Riemann 面. 首先要研究 $f(z)$ 在定义域 $\mathbf{C}$ 中出现“多值性”的某些点的性质. 对于 $f(z)$ 的定义域 $\mathbf{C}$，若存在 $z_0 \in \mathbf{C}$，当自变量 z 绕 z_0 转一圈回到原来位置时，$f(z)$ 的值不还原，则称 z_0 为 $f(z)$ 的枝点，当 z 绕 z_0 转 n 圈（最少的圈数）后，$f(z)$ 的值还原了，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 $n-1$ 阶枝点.

那么什么样的点是 $f(z)$ 的枝点呢？一般说来，使 $f(z) = 0$ 的点或使 $f(z) = \infty$ 的点可能是 $f(z)$ 的枝点，而且枝点是成对出现的，即枝点的个数为偶数.

具体对于 $f(z) = \sqrt{z}$，取 $z_0 = 0$ 点时，当 z 绕其转一圈时，$f(z) = \sqrt{z}$ 的值不还原，而绕两圈时，$f(z)$ 的值还原了，则 $z_0 = 0$ 点是 $f(z) = \sqrt{z}$ 的一阶枝点. 同时，我们可以看出，除 $z_0 = 0$ 点外，其他的 $\mathbf{C}$ 上的有限远点都不是 $f(z) = \sqrt{z}$ 的枝点，因为 z 绕这些点一圈后 $f(z)$ 的值还原了. 我们再考虑 z 为 ∞ 的点，此时我们作一变量代

换，令 $\zeta=\dfrac{1}{z}$，则 $\zeta_0=0$ 时，$z=\infty$，对 $f(z)=\sqrt{z}=\dfrac{1}{\sqrt{\zeta}}$，当 ζ 绕 $\zeta_0=0$ 一圈时 f 的数值不还原，而绕两圈时 f 的值还原了，因此可看出，$\zeta_0=0$ 亦是 $f(z)=\sqrt{z}$ 的一个一阶枝点，因此 $f(z)=\sqrt{z}$，在 $\mathbf{C}$ 上有两个一阶枝点，即 $z_0=0,\infty$.

确定了一个 $f(z)$ 的枝点后，如何构造 Riemamn 面呢？我们把两个枝点之间用一条直线或曲线连起来（一般情况下尽可能取直线），自变量 z 不能通过（越过）此线作连续变化，即把原来自变量的定义域用线割开了. 我们把这种连接两个枝点间的联线称为**割线**. 用割线割开的自变量定义域就变成了一个单值分支的定义域 C_i，如果我们把这些单值分支的定义域的割线的上下沿互相粘接起来，就构成了 **Riemann** 面，记为 C^R.

对于 $f(z)=\sqrt{z}$ 的两个一阶枝点，$z_0=0,\infty$，我们一般取 x 轴从 $0\to\infty$（或沿负 x 轴到无穷远点）为割线. 这样自变量就分成了 $C_1:\arg z:0\to 2\pi$，$C_2:\operatorname{Arg} z:2\pi\to 4\pi$. 把 C_1 的割线下沿 $\arg z=2\pi$ 与 C_2 的上沿 $\operatorname{Arg} z=2\pi$ 粘接（注意这种粘接不是物理意义上的粘接，而是有如“崂山道士穿墙术”的数学构造意义上的粘接）. 当 z 从 C_1 的上沿一点开始绕 $z_0=0$ 转时，到 $\mathbf{C}$ 的下沿时就顺利的转到 C_2 的上沿，再继续绕 $z_0=0$ 点转到 C_2 的下沿时，顺利地回到 C_1 的上沿的起始点，这样粘接而成的 Riemann 面（图 4.3.3），就是 $f(z)=\sqrt{z}$ 的单值映射的定义域了①.

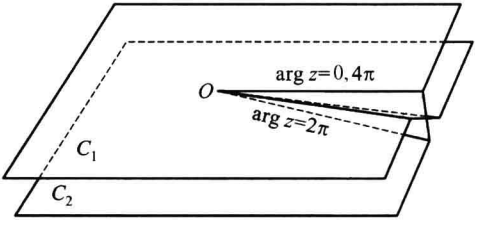


图 4.3.3

在本课程中，所涉及的 Riemann 面的构造即简单开方型的函数（如 $f(z)=\sqrt{z-a}$，$f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$，并含非整数幂型）、简单对数函数（即 $\ln z$）等的 Riemann 面.

对一般无多值性问题的函数，其 Riemann 面即复平面 $\mathbf{C}$ 本身. 在完成了对 Riemann 面的构成的讨论后，我们可以给复变函数一个严格的定义：

---

① 关于 Riemann 面构造的问题，是一个很复杂的问题，像我们例子 $f(z)=\sqrt{z}$ 的 Riemann 面，它有整体的结构，即如果我们把 ∞ 点看成一点时，此时如图 4.3.3 的 Riemann 面就与一个二维环面 T^2（游泳圈面）同胚，有整体的空间结构，但复杂的 Riemann 面一般没有整体的结构，只可能分析局域的结构性质.

复变函数是 Riemann 面到复平面上的映射，即：

$$f(z):C^R \to \mathbf{C}$$

下面给出几种简单常见的复变函数：

1. 有理函数

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}, \quad a_i, b_i \in C, m, n \in Z \tag{4.3.2}$$

2. 指数函数

$$f(z) = \mathrm{e}^z \tag{4.3.3}$$

它有如下性质：$\mathrm{e}^z \neq 0, \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1 + z_2}$

3. 对数函数

$$f(z) = \ln z \tag{4.3.4}$$

由 $f(z) = \ln z = u + \mathrm{i}v$，有

$$\mathrm{e}^{f(z)} = \mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = z = |z| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)} \quad \text{两边取对数，可得}$$

$$\ln z = \ln |z| + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi) \tag{4.3.5}$$

即 $u = \ln |z|, v = \theta + 2k\pi$

对数函数的特点是其虚部随自变量幅角的变化而变化，呈现出典型的多值性（无穷多值）问题.

4. 幂函数

$$f(z) = z^a \tag{4.3.6}$$

当 a 取整数时，即为整数幂函数，是单值函数. 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，即我们前面介绍的 $\sqrt{z}$，当 a 取其他分数时或是取为复数时可能出现很复杂得多值情况.

5. 三角函数

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \tag{4.3.7}$$

三角函数具有如下的性质：

（1）$\cos z$ 为偶函数 $\cos(-z) = \cos z$

　　$\sin z$ 为奇函数 $\sin(-z) = -\sin z$

（2）它们的周期为 2π

（3）满足关系式 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(4) 它们的模 $|\cos z|$ 和 $|\sin z|$ 可大于 1,这是与实三角函数的最大区别.

6. 双曲函数

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \tag{4.3.8}$$

很容易得到它们与三角函数的关系为

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz \tag{4.3.9}$$

同时可得双曲函数的性质:

$$\operatorname{sh}(z + i2\pi) = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(z + i2\pi) = \operatorname{ch} z \tag{4.3.10}$$

$$\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z \tag{4.3.11}$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \tag{4.3.12}$$

第四章习题

4.1 写出下列复数的实部、虚部、模和幅角.

(1) $1 - i\sqrt{3}$ (2) $\ln i$ (3) $(1+i)^{1-i}$ (4) $\sqrt[i]{i}$

(5) $\sin(a+ib)$, $a,b \in R$ (6) $\sqrt{a+ib}$, $a,b \in R$

4.2 写出下列复变函数 $W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$、虚部 $v(x,y)$、模 $|f(z)|$ 和幅角 $\arg f(z)$.

(1) e^z (2) e^{iz} (3) $e^{i\sin x}, x \in R$

(4) z^3 (5) $\sqrt{i + i2x\sqrt{x^2-1}}$, $x \in R$

4.3 求下列方程的解,并把解在复平面上用图形表示出来,说明它们的几何意义.

(1) $|z| = 1$ (2) $|z| < 1$

(3) $|z| \geqslant 1$ (4) $1 < |z| < 2$

(5) $|z+i| \leqslant |z-i|$ (6) $|z-a| = |z-b|$ a、b 为复平面上的点

(7) $0 < \arg(z-1) < \dfrac{\pi}{4}$ (8) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2}$

(9) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

(10) $\sin z = 0$ (11) $\cos z = 0$

(12) $\operatorname{sh} z = 0$ (13) $\operatorname{ch} z = 0$

4.4 试证明:

(1) $|\sin z| \geqslant \sin x$ (2) $|\cos z| \geqslant |\cos x|$

4.5 对于在实变量 x 中成立的关系式

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1$$

请证明这一关系式在复变量的情况下也成立，即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

4.6　对下列复变函数作出 Riemann 面的示意图，并指出函数的枝点及其阶数，同时说明你所作的 Riemann 面的割线的取法.

(1) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$　　(2) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$　　(3) $\ln(z-a)$

(4) $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$

其中 a,b,c 为互不相等的复常数.

第五章　解析函数

§5.1　复变函数的导数

一、复变函数的连续性

复变函数$f(z)$在z_0点及其邻域内有定义，当自变量z以**任何路径**趋于z_0时，有

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{5.1.1}$$

则称$f(z)$在z_0点连续. 如果$f(z)$在区域Ω内的所有点都连续，则称$f(z)$在Ω内连续.

复变函数$f(z)$的连续性的定义等价于$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的表达式中$u(x,y)$和$v(x,y)$这两个二元函数为连续函数.

说明：

z点的邻域：是指以z为圆心，以ε为半径的开圆.

区域：是指连通的，不包含边界的点的集合，即指开的区域.

闭区域：是指包含边界的区域.

二、复变函数的导数

对于z_0为复变函数$f(z)$的定义域Ω内的一点，当z以任何路径趋于z_0时，即$\Delta z=z-z_0$以任何方式趋于零时，若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{5.1.2}$$

存在且唯一，则称$f(z)$在z_0点**可导**. $f(z)$在z_0的导数记为$f'(z_0)$，

$$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{5.1.3}$$

三、Cauchy－Riemann（柯西－黎曼）条件

这是复变函数$f(z)$在定义域中某一点可导必须满足的条件. 由于函数$f(z)$

可表示成 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，且 $z=x+\mathrm{i}y$，$\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$，则 $\Delta f(z)$ 可表示为 $\Delta f=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v$，其中

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y),\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y),$$

故 $f(z)$ 在 z 点的导数可写成：

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y} \tag{5.1.4}$$

当 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$ 趋于零的方式取两种特殊的路径时（见图 5.1.1）：

（1）取平行于 x 轴的路径趋于零，即 $\mathrm{i}\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$，有

$$f'(z)_1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.1.5}$$

（2）取平行于 y 轴的路径趋于零，即 $\Delta x=0$，$\mathrm{i}\Delta y\to 0$，有

$$f'(z)_2=\lim_{\mathrm{i}\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{5.1.6}$$

因为 $f(z)$ 在 z 点可导，则这两种路径的极限存在且相等，即要求

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.1.7}$$

这一组方程就称为 Cauchy－Riemann 条件，或称为 Cauchy－Riemann 方程，简写为 C－R 条件. C－R 条件是 $f(z)$ 在 z 点可导的**必要条件**，但不是充分条件.

例如，$f(z)=\sqrt{\mathrm{Re}\,z\cdot\mathrm{Im}\,z}$，在 $z=0$ 满足 C－R 条件，但在 $z=0$ 点不可导，因为 $z=x+\mathrm{i}y$，$f(z)=\sqrt{xy}$ 即 $u=\sqrt{xy}$，$v=0$，容易验证 $f(z)$ 在 $z=0$ 点满足 C－R 条件.

但当 Δz 沿一条射线趋于零，即 $\Delta\rho\to 0$ 时，如图 5.1.2，此时有 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，$\Delta z=\Delta\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\to 0\Leftrightarrow\Delta\rho\to 0$，$\varphi$ 不变，而 $f=\sqrt{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}=\rho\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$，当 Δz 以射线趋于零时，$\Delta f=\Delta\rho\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$ 则

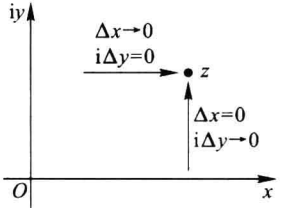


图 5.1.1

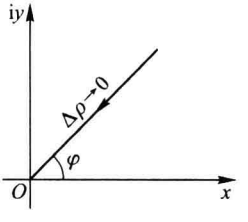


图 5.1.2

$$f'(z=0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta\rho\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}{\Delta\rho e^{i\varphi}}$$

$$=\frac{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}{e^{i\varphi}}$$

显然，当 Δz 沿不同射线趋于零，即 φ 值不同时，$f'(z=0)$ 的极限值也不同，即 $f(z=0)$ 的极限值不唯一，故 $f(z)=\sqrt{\mathrm{Re}\,z\cdot\mathrm{Im}\,z}$ 在 $z=0$ 点不可导.

§5.2 复变函数的解析性

如果复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，并在 z_0 点的邻域内每一点都可导，则我们称 $f(z)$ 在 z_0 点是**解析**的. 由此可以看出复变函数的解析性比可导要严格得多.

如果复变函数 $f(z)$ 在其定义域 Ω 内每一点都是可导的，则称 $f(z)$ 在其定义域 Ω 内是**解析**的，或称为**全纯**的.

定理 5.2.1：复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 Ω 内为解析函数的**充分且必要的条件**是在与复平面区域 Ω 相应的实平面区域内 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 可微，并且 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 满足 C－R 条件.

证：必要性：前面(5.1.7)式的证明中已给出.

充分性：由于 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 可微，有

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

且当 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时，$\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ (5.2.1)

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y$$

且当 $\Delta x,\Delta y\to 0$，$\varepsilon_3,\varepsilon_4\to 0$ (5.2.2)

因此有

$$\Delta f=\Delta u+i\Delta v=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+i\left(-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+$$

$$(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$$

由 C－R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，代入上式得

$$\Delta f=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y$$

当 Δz 以任何方式趋于零时，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\lim_{\Delta z\to 0}\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right]$$

由于 $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|\leqslant 1$，$\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\leqslant 1$，故当 $\Delta z\to 0$ 时，上式最后一项的极限为零，即有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\tag{5.2.3}$$

上式表明 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ 的极限存在且与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关，即 $f(z)$ 的导数存在，且只取决于上式右边 u 和 v 对 x 的偏导数，故 $f(z)$ 在其定义域内解析，证毕.

附注： 该定理满足的条件可放宽：对于区域 Ω 上的连续函数 $f(z)$，其为解析的充要条件就是 C－R 条件①.

命题 5.2.1： 若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，且 $f(z)$ 为实函数，即 $f(z)=f^*(z)$，则 $f(z)$ 为常数.

证： 由 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，且 $f(z)=f^*(z)$，故

$$f(z)=u(x,y),\quad v(x,y)=0$$

由于 $f(z)$ 为解析函数，满足 C－R 条件，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

可得

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=0,$$

即 $u(x,y)$ 为常数.

命题 5.2.2： 若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，则在 Ω 上有 $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z^*}=0$，即 $f(z)$ 不依赖 z^*.

证： 由 $z=x+\mathrm{i}y$，$z^*=x-\mathrm{i}y$，$x=\dfrac{z+z^*}{2}$，$y=\dfrac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$

对于 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，且满足 C－R 条件，有

$$\frac{\partial f}{\partial z^*}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z^*}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z^*}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)$$

① 胡嗣柱，倪光炯. 数学物理方法（第二版）. 北京：高等教育出版社，2002

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\mathrm{i}}{2}=0$$

证毕.

此命题告知我们一个重要的性质：解析函数 $f(z)$ 不依赖 z^*. 同样，如果 $f(z^*)$ 对于 z^* 是解析的，则 $f(z^*)$ 亦不依赖 z，称 $f(z^*)$ 为反解析函数或称为反全纯函数. 全纯与反全纯函数的性质是对称的，因此只要研究全纯函数的性质也就了解反全纯函数的性质. 对于一般的复变函数，若以 z 和 z^* 为变量，应写成 $f(z,z^*)$，但连最简单的显含 z^* 的函数形式 $f(z,z^*)=z^*$，或 $f(z,z^*)=|z|=\sqrt{z\cdot z^*}$ 对于变量 z 都不是解析函数.

命题 5.2.3：在复平面区域 Ω 内解析的函数，$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都为 (x,y) 平面区域 Ω 内的调和函数（即满足二维 Laplace 方程的函数）.

证：由 $f(z)$ 在 Ω 内解析，故在 Ω 内满足 C－R 条件，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$$

上两式分别对 x,y 求导，即可容易得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{5.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{5.2.5}$$

故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 为调和函数.

§5.3 复　　势

复势的概念是与解析函数的实部和虚部密切相关的.

命题 5.3.1：解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部与虚部所构成的两个曲线族 $u(x,y)=u_0$（u_0 为常数）和 $v(x,y)=v_0$（v_0 为常数），是两族相互正交的曲线族.

证：由 C－R 条件我们有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 此两式两边分别相乘可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5.3.1}$$

此式即为

$$\nabla u \cdot \nabla v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{e}_y\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.3.2}$$

由于∇u是函数$u(x,y)$的梯度，即$u(x,y)=u_0$所描述的是平面曲线的法向量；∇v是$v(x,y)$的梯度，即$v(x,y)=v_0$曲线的法向量. 上式给出的$\nabla u \cdot \nabla v = 0$说明了两曲线的法向量是正交的，当$u_0, v_0$取不同值时所构成的两曲线族是相互正交的，故命题得证.

此命题说明了解析函数实部和虚部相互依存的关系，给出了实部和虚部所构成的两曲线族相互正交的几何特征.

由 C－R 条件相联系的解析函数的实部和虚部都为满足 Laplace 方程的调和函数. 在物理学中一个势函数在不包含源的区域中是满足 Laplace 方程的. 在二维问题中，如果我们把$u(x,y)$看作一个势场函数（如二维电势场），而$u(x,y)=u_0$的曲线为等势线，则把$v(x,y)$看作通量函数（如电通量）$v(x,y)=v_0$的曲线为等通量线（如电场线）. 由电学中我们知道等电势线与电场线是相互正交的. 由于$u(x,y)$和$v(x,y)$为相互依存的调和函数，故我们就称解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$为复势，它是描述势场的复函数.

例 5.3.1：已知电势场$v(x,y)=2xy$，且$f(z)\big|_{z=0}=0$，求复势.

解：本例题是典型的利用 C－R 条件，对给出的解析函数的实部（或虚部）求出其虚部（或实部）的例题，再由给出的数值条件定出求解过程中的积分常数，最后给出解的物理解释.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

故
$$u(x,y) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \phi(y) = \int_0^x 2x\mathrm{d}x + \phi(y) = x^2 + \phi(y)$$

积分函数$\phi(y)$由$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$定，即

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2 + \phi(y)] = -2y$$

可得$\phi(y) = -y^2 + C$，故得$u(x,y) = x^2 - y^2 + C$，积分常数C由$f(z)\big|_{z=0}=0$确定，可得$C=0$即得到复势为

$$f(z) = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}2xy = z^2 \tag{5.3.3}$$

此结果表明该复势的等电势线及电力线如图 5.3.1 所示，它是正截面如 $x-y$ 轴的“十”字型的无穷大带电金属面板，且面板接地所形成的电场，图 5.3.1 显示了电场的截面，等势线为 $2xy=v_0$ 所形成的实曲线族，可看出在 $x=0$ 或 $y=0$ 时 $v=0$ 即电势在板上都为零，而电力线为 $u=x^2-y^2=u_0$ 所形成的曲线族，都由面板上至无穷远处，电力线的方向依带电板的电荷的“+”、“-”而定.

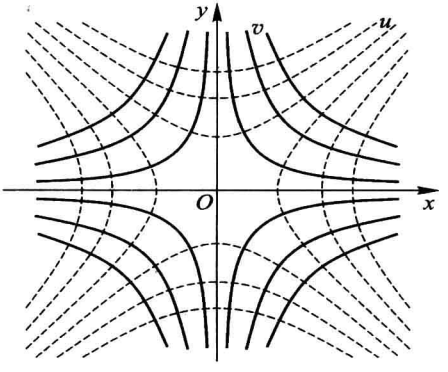


图 5.3.1

*§5.4　解析函数变换

解析函数变换通常称为**保角变换**或称为**共形变换**. 解析函数变换在诸多领域（如理论物理中的场论、通讯中的信息分析、流体力学中的流线分析等）都有广泛的应用.

对于定义在复平面 $\mathbf{C}$ 某一区域 Ω 中的一个解析函数 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$，它是把复平面 Ω 中的元素映射到复函数 W 平面的某一区域 D 的一种映射.

$$f:\Omega\to D$$

$\Omega\in\mathbf{C}$ 平面，$D\in W$ 平面

即　　$f:(x,\mathrm{i}y)\to(u,\mathrm{i}v)$，　$(x,\mathrm{i}y)\in\Omega$　$(u,\mathrm{i}v)\in D$

其中 $(x,\mathrm{i}y)$ 为 $\mathbf{C}$ 平面上的坐标，$(u,\mathrm{i}v)$ 为 W 平面的坐标.

考虑 Ω 中的一点 z_0 的一个小增量 Δz，且 $z_0+\Delta z\in\Omega$，通过 $f(z)$ 变换（即映射）到 W 平面的 D 中的 w_0 及 $w_0+\Delta w$，如图 5.4.1 所示.

由于 $f(z)$ 为解析函数，则 $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$，对于 $f'(z_0)\neq 0$（如果 $f'(z_0)=0$，即 $\Delta w=0$，则 $\arg\Delta w$ 无意义），

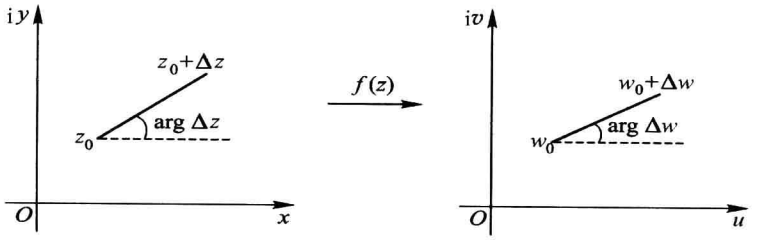


图 5.4.1

$$\arg f'(z_0) = \arg \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}(\arg \Delta w - \arg \Delta z) \qquad (5.4.1)$$

由于$f'(z_0)$存在且唯一，故 $\arg f'(z_0)$为定值，上式说明当 $\Delta z\to 0$ 时，不管 Δz 取什么路径趋于 z_0，其辐角 $\arg \Delta z$ 在经过解析函数$f(z)$映射到 w_0 点时 Δw 的辐角总是增加一个定值 $\arg f'(z_0)$，即 $\arg \Delta w = \arg \Delta z + \arg f'(z_0)$.

同时可以看出：Δz 在$f(z)$的映射下，其模长 $|\Delta z|$ 变到 W 平面中 Δw 的模长 $|\Delta w| = |\Delta z| \cdot |f'(z_0)|$，即总是乘上一个定值 $|f'(z_0)|$，而与 Δz 趋于 z_0 的路径无关.

由上面的讨论可以看出解析函数的变换，把 **C** 平面上过 z_0 点的两条相交的曲线 l_1, l_2，映射到 W 平面上过 w_0 点的两条相交的曲线 C_1, C_2，且保持两曲线的夹角不变，如图 5.4.2，记 l_1 过 z_0 点切线的辐角为 $\arg l_1(z_0)$，记 l_2 过 z_0 点切线的辐角为 $\arg l_2(z_0)$，l_1 与 l_2 的夹角为 $\arg l_2(z_0) - \arg l_1(z_0)$，同样 C_1 与 C_2 过 w_0 的切线的夹角为 $\arg C_2(w_0) - \arg C_1(w_0)$. 由(5.4.1)式我们有

$$\arg l_1(z_0) + \arg f'(z_0) = \arg C_1(w_0)$$

$$\arg l_2(z_0) + \arg f'(z_0) = \arg C_2(w_0)$$

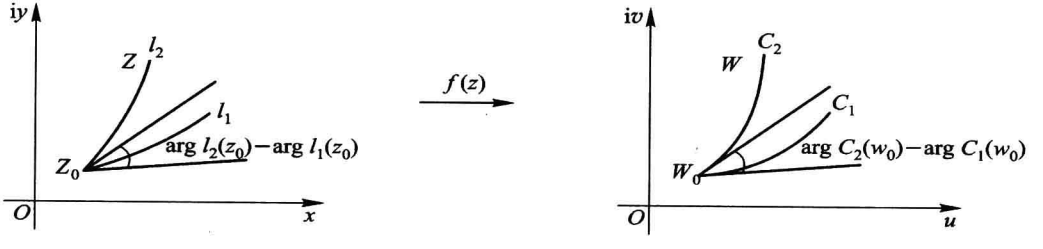


图 5.4.2

则有

$$\arg l_2(z_0) - \arg l_1(z_0) = \arc C_2(w_0) - \arg C_1(w_0) \qquad (5.4.2)$$

即通过解析变换的两曲线的夹角保持不变，因此我们通常称解析变换为保角变换. 如果再考虑到变换后模长的性质，即 $|\Delta w| = |\Delta z| \cdot |f'(z_0)|$，故称解析变换为共形变换.

例 5.4.1：考虑上节例中给出的 $w = f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}2xy$ 这一解析函数所表示的解析函数变换的图像，仅考虑在 **C** 平面中第一象限内的图像，如图 5.4.3，$f(z) = z^2$ 把 **C** 平面中的 $u = u_0, v = v_0$ 的正交曲线族映射到 W 平面的上半平面的正交曲线族.

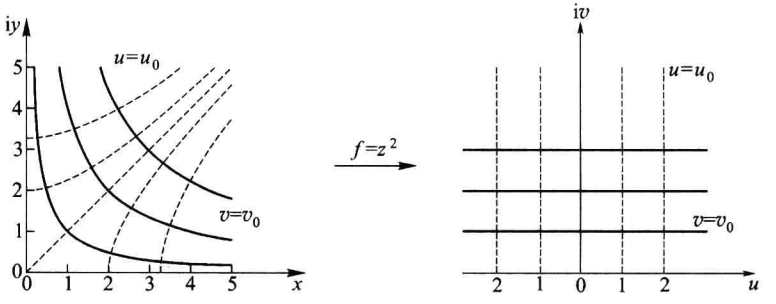


图 5.4.3

从静电学的角度看，$f(z) = z^2$ 这一解析变换是把截面为直角状的无穷大带电接地的金属板构成的电场的等势线族与电力线族，变换到 W 平面上半平面所构成的新的平面静电场的等势线族与电场线族，这两曲线族仍保持处处正交，但区域的边界在保角变换下发生了变化，由直角形变为平面，等势线与电场线的形状亦发生变化.

故通过解析函数可以把原来具有较复杂的边界的物理问题变成较简单边界的物理问题.

几种常用的解析函数变换留给读者在习题中练习.

下面我们看一下物理学中常用的二维 Laplace 算子在解析函数变换下的变换形式.

在 (x,y) 平面上的 Laplace 算符 $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 在解析函数

$$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

的变换下，变成 (u,v) 平面上的 Laplace 算符的形式，即以 u,v 为变量的算符. 由

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial u}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial v}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}$$

则有

$$\begin{aligned}\nabla^2&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\&=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\\&\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\end{aligned}$$

由于 u,v 满足 C－R 条件，u,v 为调和函数，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

且对于 $f'(z)$ 计算时，取 $\Delta y=0$ 的路径有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

最后可得

$$\begin{aligned}\nabla^2&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\&=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\end{aligned}\tag{5.4.3}$$

这一结果说明在 (x,y) 平面上的 Laplace 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(x,y)=0$$

在解析函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的变换下，在 W 平面即 (u,v) 平面中，对于 $f'(z)\neq 0$ 的区域中仍保持为二维的 Laplace 方程

$$|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\varphi[x(u,v),y(u,v)]=0\tag{5.4.4}$$

第五章习题

5.1 请说明下面复变函数在复平面上的哪些点或区域上可导，在复平面上的哪些区域上解析.

(1) $f(z)=\mathrm{Re}\,z$　(2) $f(z)=z^*$　(3) $f(z)=|z|$

(4) $f(z)=\mathrm{e}^z$　(5) $f(z)=z^2$

(6) $f(z)=(x^2-y^2-x)+\mathrm{i}(2xy-y^2)$　(7) $f(z)=x^3-y^3-\mathrm{i}2x^2y$

5.2 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 和 $f^*(z)=u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)$ 都为解析函数，请说明 $f(z)$ 的函数形式.

5.3 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数，请证明 $f^*(z^*)$ 也是解析函数.

5.4 请证明：柱坐标系下的解析函数

$$f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$$

满足的 Cauchy－Riemann 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases}$$

5.5 已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$ 或虚部 $v(x,y)$，求此解析函数.

(1) $v(x,y)=xy$　(2) $v(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

(3) $u(x,y)=\mathrm{e}^{-y}\sin x$　(4) $u(x,y)=\cos x\cosh y$

5.6 在平面极坐标系($z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$)中，已知解析函数 $f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$ 的实部 $u(\rho,\varphi)=\varphi$，且 $f(1)=0$，求此解析函数.

5.7 在直角坐标系中，已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部和虚部之和为 $u(x,y)+v(x,y)=-(x+y)(x^2-4xy+y^2)$，求此解析函数.

5.8 有两条平行相距为 $2a$ 且均匀带电的细金属线，每单位长度所带的电荷量分别是 $+q$ 和 $-q$，求与此两金属线垂直的平面静电场的复势，电场线和等势线.

***5.9** 试分析以下几种常见的解析函数变换.

(1) 线性变换：$W=f(z)=az+b, a,b\in R$，且 $a\neq 0$；

(2) 幂函数变换：$W=f(z)=z^n, n\in \mathbf{Z}$；

(3) 根式变换：$W=f(z)=z^{\frac{1}{n}}, n\in \mathbf{Z}$；

(4) 对数变换：$W=f(z)=\ln z$；

(5) 指数变换：$W=f(z)=\mathrm{e}^z$；

(6) 根式变换：$W=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d\in R$ 且 $ad-bc\neq 0$.

第六章　复变函数积分

§6.1　复变函数的积分

复变函数的积分是指复变函数 $f(z)$ 在其有定义的区域 Ω 中，沿某一曲线 C 的有向的线积分，记为 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，其定义为

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |z_j - z_{j-1}|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}) \tag{6.1.1}$$

其中 C 是由 $a\to b$ 的一条曲线（如图 6.1.1），把 C 分成 n 段，a 点为 z_0，b 点为 z_n，当 $n\to\infty$ 时每一段的长度 $|z_j - z_{j-1}|\to 0$，ξ_j 是第 j 段 $(z_j - z_{j-1})$ 中的某一点.

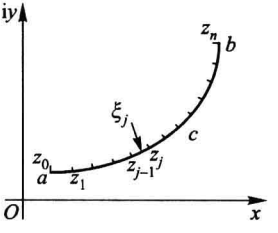


图 6.1.1

注意在这一定义中，积分沿曲线 C 是有方向性的，沿曲线 C：从 $a\to b$ 和从 $b\to a$ 其积分值是反号的. 由 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 有

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C [u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)]\,\mathrm{d}(x + \mathrm{i}y) \\ &= \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x)\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

即复变函数 $f(z)$ 的积分与两个实函数的线积分等价. 一般说来 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 与积分的起点和终点位置有关，也与路线 C 的选取有关.

由复变函数积分的定义可以得到如下几个主要的性质：

$$(1)\ \int_C (f(z) \pm g(z))\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\,\mathrm{d}z \tag{6.1.3}$$

$$(2)\ \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{6.1.4}$$

其中 $-C$ 为 C 的反向路径.

$$(3)\ \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{6.1.5}$$

其中 $C = C_1 + C_2$ 是指 C_1 和 C_2 顺路径的方向头尾连接构成了总的路径 C，其方向与 C_1、C_2 相同.

(4) $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$ (6.1.6)

这些主要性质在复变函数积分的理论和计算中经常用到.

§6.2 Cauchy(柯西)积分定理

一、单连通区域的 Cauchy(柯西)积分定理

Cauchy(柯西)积分定理：在单连通区域 Ω 上解析的函数 $f(z)$，当积分路径为 Ω 内的任一闭合曲线 C 时，有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{6.2.1}$$

(注：其中闭合回路 C 沿顺时针或逆时针方向均有此结论.)

证：由于 Ω 为单连通区域，则其内的任一闭合曲线 C 所包围的点都在 Ω 内，即 $f(z)$ 在 C 所包围的区域内是解析的，由

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint_C (u\mathrm{d}y + v\mathrm{d}x) = 0 \tag{6.2.2}$$

由二维实积分中的 Green 公式：

$$\oint_C [P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = \int_\Sigma \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{6.2.3}$$

其中 Σ 为闭合曲线 C 所包围的面积，即 $C = \partial\Sigma$，$\mathrm{d}\sigma$ 为 Σ 的面元，(6.2.2)式可变为

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Sigma \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}\sigma + \mathrm{i}\int_\Sigma \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{6.2.4}$$

由 C－R 条件可以看出等式右边两个被积函数都为零，即得 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，证毕.①

Cauchy 积分定理的一个等价的表述：在单连通的区域上解析函数的积分与路径无关，只与路径的起点和终点有关. 解析函数积分的这一性质是一个整体性

① 注：1. 我们采用的是 Riemann 的证明方法，要求 u，v 的偏导数连续.

2. 定义域可扩展到闭区域 $\overline{\Omega}$，只要 $f(z)$ 在闭区域的边界上连续，对边界的回路积分，此定理仍然成立.

质，区域内各点之间的关系由 C－R 条件联系着，区域内任意两点之间连线的复积分是与路径无关的，因此我们可选取一条对积分简单的路径来计算.

二、多连通区域的 Cauchy 积分定理

我们利用单连通区域的 Cauchy 积分定理计算多连通区域上的解析函数的积分，主要是把多连通区域中的回路重新构造成一个单连通区域的回路，使得在这一新的单连通回路中被积函数解析，再利用 Cauchy 定理进行计算. 设 $f(z)$ 在具有 k 个内边界 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k$ 的回路 C 内的复连通区域内解析，如图 6.2.1. 我们要计算积分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

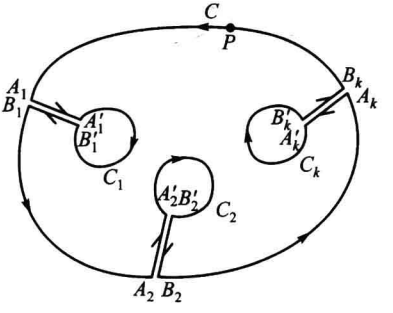


图 6.2.1

设回路 C 的方向为逆时针方向（如设顺时针方向也可同样进行分析），对于每一个内边界 $C_1, C_2, \cdots, C_k$，在各内边界上任选一点与回路 C 上的点连接作割线，如图所示 C 与 C_1 间的割线上沿为 $A_1A'_1$，下沿为 $B_1B'_1$……C 与 C_k 间的割线上沿为 $A_kA'_k$，下沿为 $B_kB'_k$. 这样新构成一个闭合回路. 从 C 上的 P 点开始沿逆时针方向走到 A_1 点顺 $A_1A'_1$ 再顺时针绕 C_1 后沿 B'_1B_1 到 C 上，再沿 C 上的 B_1A_2 段……同样的方法绕完各个内边界后再回到 P 点，构成了包含内边界与割线在内的新的闭合回路 l，

$$l = PA_1 + A_1A'_1 + C_1 + B'_1B_1 + B_1A_2 + A_2A'_2 + C_2 +$$

$$B'_2B_2 + \cdots + A_kA'_k + C_k + B'_kB_k + B_kP$$

则 $f(z)$ 在新的 l 回路所包围的区域中解析. 应注意到

$$\int_{A_1}^{A'_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{B'_1}^{B_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \int_{A_2}^{A'_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{B'_2}^{B_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\cdots, \quad \int_{A_k}^{A'_k} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{B'_k}^{B_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

且 $PA_1 + B_1A_2 + \cdots + B_kP = C$，故在 l 所包围的区域中应用 Cauchy 定理：

$$\oint_l f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{6.2.5}$$

再由上面的分析可得：

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_k} f(z) = 0 \tag{6.2.6}$$

注意到此时 C 为逆时针方向，而 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 为顺时针方向，由复积分与路径方向相关的性质，可得

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (6.2.7)$$

此时回路 $C, C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的方向都为逆时针方向，这就是复连通区域的 Cauchy 积分定理.

它说明在此类区域中的回路积分的值等于该回路中所包含的内边界积分值之和，也说明内边界的积分对整个回路积分的影响.

§6.3　Cauchy（柯西）积分公式

如果 $f(z)$ 在闭合回路 C 所包围的区域上解析，z_0 是此区域中的一点，则

$$\oint_C \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi \mathrm{i} f(z_0) \qquad (6.3.1)$$

此式称为 Cauchy（柯西）积分公式.

证：被积函数 $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ 在 C 内的区域上不解析，在 z_0 点奇异，我们要构造一个新的回路，把奇异的 z_0 点排除在外，使被积函数在新回路所包围的区域中解析，再应用 Cauchy 定理，要注意所构造的新回路要便于计算.

我们做以 z_0 为圆心，以 r 为半径的一个小圆周 C'，在 C' 与 C 之间作一割线，如图 6.3.1 所示.

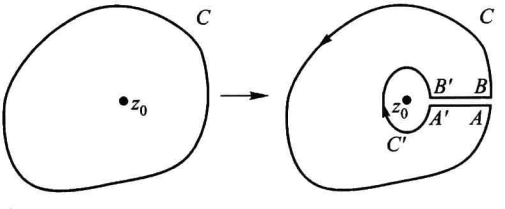


图 6.3.1

新的回路 l 为 $l = C + AA' + C' + B'B$，则在 l 所包围的区域中 $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ 解析，同时考虑到

$$\int_A^{A'} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z + \int_{B'}^{B} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 0,$$

由 Cauchy 定理可得

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z + \oint_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 0 \tag{6.3.2}$$

其中 C' 为顺时针方向，当取 C' 为逆时针方向时有

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{6.3.3}$$

下面计算等式右边 C' 回路积分，对 C' 上的点 z：

有 $|z-z_0| = r$，则回路 C' 上的点为 $z-z_0 = re^{i\theta}$，即 $z = z_0 + re^{i\theta}$，$\mathrm{d}z = \mathrm{i}re^{i\theta}\mathrm{d}\theta$，故

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}(\mathrm{i}re^{i\theta}\mathrm{d}\theta)$$

$$= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

此积分与 r 无关，故当取 $r\to 0$ 时，有 $\lim\limits_{r\to 0} f(z_0 + re^{i\theta}) = f(z_0)$，故可得

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(z_0)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}2\pi f(z_0)$$

即可得 Cauchy 积分公式.

作为 Cauchy 积分公式的特例，当 $f(z) = 1$ 时，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} 1, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 内} \\ 0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 外} \end{cases} \tag{6.3.4}$$

Cauchy 积分公式给出了存在有 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 奇异性的被积函数的回路积分的计算，给出了函数的回路积分与奇异点的性质的关系. 更重要的是说明了解析区域中任一点 z_0 的值 $f(z_0)$ 可由边界 C 上对 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 的积分给出.

§6.4　解析函数高阶导数的积分表达式

设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，C 为 Ω 内的任一闭合回路，对于 C 所包围的区域内的任一点 z，由 Cauchy 积分公式 $f(z)$ 可表成

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \tag{6.4.1}$$

其中 ζ 在回路 C 上.

在这一表达式的基础上,解析函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 可以写成

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}[f(z+\Delta z)-f(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\oint_C \frac{f(\zeta)\Delta z}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

这一表达式与解析函数用 Cauchy 积分公式的表达式直接在积分号下求导等价:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}\right]\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

依此类推有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}f(z) \\ &= \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

因此我们可以得到解析函数的一个很重要的性质:解析函数存在任意阶导数,且任意阶导数都为解析函数.复变函数中的解析函数与实变函数中的可微性有很大的区别,存在一阶导数的实变函数是不能保证其高阶导数的存在的.

另一方面我们也看到,被积函数存在有 $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 的奇异性时,其回路积分的存在,它等于 $\dfrac{2\pi \mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0)$.

第六章习题

6.1 请计算 $f(z)=z^*$ 的回路积分

$$\oint_{|z|=1} z^*\,\mathrm{d}z$$

所得的结果说明了什么问题.

6.2 请计算 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 的如下回路积分：

(1) $\oint_{C_1}\dfrac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z$　C_1 为 $|z|<1$ 的以原点为圆心的圆周；

(2) $\oint_{C_2}\dfrac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z$　C_2 为 $|z|>1$ 的以原点为圆心的圆周；

这两个积分的结果说明了什么问题.

第七章　复变函数的级数展开

§7.1　复变函数项级数

一个复变函数项的无穷级数(简称级数)可表示为

$$w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_k(z) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z) \equiv S(z) \qquad (7.1.1)$$

在这里我们感兴趣的是级数的收敛问题和收敛的区域.

对级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 的部分和

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k(z) \qquad (7.1.2)$$

在其定义域内某点 z,若极限 $\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ 存在,则称级数在 z 点收敛,反之级数在 z 点发散.

级数在 z 点收敛的必要条件是

$$\lim_{k\to\infty} w_k(z) = 0 \qquad (7.1.3)$$

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 的所有收敛点的集合 Ω 称为级数的收敛区间.

若级数每一项的模 $|w_k(z)|$ 构成的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k(z)|$ 在 z 点(或在 Ω 上)收敛,则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在 z 点(或在 Ω 上)绝对收敛.

设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 的收敛区间为 Ω,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在与 $z(z \in \Omega)$ 无关的正整数 N,使得当 $n > N$ 时,级数的部分和满足

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon \qquad (7.1.4)$$

则称级数在 Ω 上一致收敛.

级数的绝对收敛与一致收敛是两个不同的概念,绝对收敛不一定一致收敛,

一致收敛不一定绝对收敛.

关于复变函数项级数的收敛性讨论,由于绝对收敛的级数必定收敛,有许多判定绝对收敛的方法与实变函数级数相类似,下面介绍两个常用的判别法:

1. d'Alembert(达朗贝尔)判别法

对级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$,当 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = p < 1$($p$ 为常数)时,级数绝对收敛.

此方法通常称为比值判别法.

2. Cauchy(柯西)判别法

对级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$,若 $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|w_k|} = p < 1$($p$ 为常数),级数绝对收敛. 此方法通常称为根式判别法.

在一致收敛的判定中通常采用 Weierstrass(魏尔斯特拉斯)判别法:在级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 的收敛区域 Ω 内,若存在与 z 无关的 a_k,有 $|w_k(z)| < a_k$,且 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛,则级数在 Ω 内绝对且一致收敛.

一个级数是否在 Ω 上一致收敛的问题是很重要的,它说明一个级数能否一致地(或称均匀地)收敛到一个定义在 Ω 上的函数 $f(z)$,而且如果级数项函数 $w_k(z)$ 是解析的,则 $f(z)$ 在 Ω 内解析,这也是研究一个解析函数在 Ω 上能否表示为一个级数的问题.

§7.2　解析函数的 Taylor(泰勒)展开

定理 7.2.1:设 z_0 为 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点,以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内,则 $f(z)$ 可以在 C 内展成 **Taylor 级数**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{7.2.1}$$

其中展开系数 a_n 为

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{7.2.2}$$

证:由 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \tag{7.2.3}$$

其中 ζ 为积分回路 C 上的点，令 $|\zeta - z_0| = R$，则 $|z - z_0| < R$，如图 7.2.1，令 $t = \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}$，则 $|t| < 1$，而 $1 - t = \dfrac{\zeta - z}{\zeta - z_0}$，故 $\dfrac{1}{1 - t} = \dfrac{\zeta - z_0}{\zeta - z}$，当 $|t| < 1$，有几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1 - t} \tag{7.2.4}$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \dfrac{\zeta - z_0}{\zeta - z}$，可得

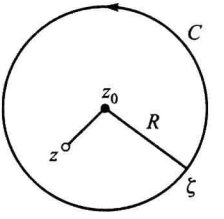


图 7.2.1

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \tag{7.2.5}$$

将此关系式带入 Cauchy 积分公式(7.2.3)式，得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

这就是 $f(z)$ 的 Taylor 展开，定理得证.

当 $z_0 = 0$ 时的 Taylor 展开式称为 **Maclaurin(麦克劳林)级数**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{7.2.6}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{7.2.7}$$

C 为 $f(z)$ 解析区域内以 $z_0 = 0$ 为圆心的圆周.

Taylor 级数收敛半径 R 的定义：

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{7.2.8}$$

它说明了解析函数在某点能作 Taylor 展开的最大区域，是以该点为圆心，以 R 为

半径的开圆.

例 7.2.1：把 $f(z)=e^z$ 在 $z=1$ 点展成 Taylor 级数.

解：$f(z)=e^z$ 在整个复平面(除 ∞ 远点外)解析,因此有 e^z 的 n 阶导数 $(e^z)^{(n)}=e^z$,由 Taylor 展开定理可得

$$\begin{aligned} e^z &= e+\frac{e}{1!}(z-1)+\frac{e}{2!}(z-1)^2+\cdots+\frac{e}{n!}(z-1)^n+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^n \end{aligned}$$

其收敛半径 $R=\infty$.

例 7.2.2：把 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z_0=i$ 点展成 Taylor 级数,并求其收敛半径.

解法一：由 $f(z)=(1-z)^{-1}$, $f'(z)=(1-z)^{-2}$, $\cdots$, $f^{(n)}(z)=n!\,(1-z)^{-(n+1)}$,则可得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n \end{aligned}$$

由于 $a_n=\dfrac{1}{(1-i)^{n+1}}$ 故收敛半径 R 为

$$R=\lim_{R\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=|1-i|=\sqrt{2}$$

解法二：利用已有的展开式 $\dfrac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\ (|t|<1)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-i-(z-i)} \\ &= \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-i}{1-i}} \qquad \text{要求}\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1 \\ &= \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \end{aligned}$$

这里要求 $|z-i|<|1-i|=\sqrt{2}$，即收敛半径为$\sqrt{2}$.

复变函数是 Riemann 面到复平面的映射，上面所例举的函数是定义在 Riemann 面在复平面上的函数，如果要研究的函数其 Riemann 面较复杂，在复平面上有枝点和割线时，此时要研究此函数的展开就较复杂一些，要选定该函数所定义的 Riemann 面的一叶（或称为一片，即定义域中的一个单值分支），展开点应在此叶上，割线的构造应避开以指定展开点为圆心，以展开点和枝点的距离为半径的圆. 在这样构造的 Riemann 面上对函数进行展开.

例 7.2.3：把 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 点展成 Taylor 级数，规定 $\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$.

解：$\ln(1+z)$ 的枝点为 $z=-1$，作割线如图 7.2.2，从 $x=-1$ 沿 x 轴的负方向直至无穷远. 在这一叶 Riemann 面上，在以 $z=0$ 为圆心，以 $|z|=1$ 为半径的圆内展开，有

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=\int_0^z\frac{1}{1+z}\mathrm{d}z=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\mathrm{d}z\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n\end{aligned}$$

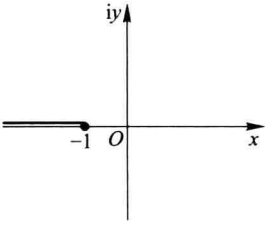


图 7.2.2

注意此方法在构造的 Riemann 面上作展开，其收敛半径 $R=1$，为最大. 如果割线的作法是沿其他方向穿过以 $z=0$ 为圆心的半径为 1 的圆，则收敛半径就小于 1，要视割线的作法而定.

例 7.2.4：把 $f(z)=\sqrt{z}$ 在 $z=0$ 点展成 Taylor 级数.

解：因为 $z=0$ 是 $f(z)$ 的枝点，故 $f(z)$ 无法在枝点展成 Taylor 级数.

*§7.3 Taylor 展开的理论应用

定理 7.3.1：最大模定理：

任何解析函数 $f(z)$ 的模 $|f(z)|$ 的最大值 $\max|f(z)|$ 只能在其解析区域的边界上达到. 除非 $f(z)$ 为常数，否则在解析区域内不可能达到 $\max|f(z)|$.

证：用反证法. 设在 $f(z)$ 的解析区域 Ω 内一点 z_0，在此点上 $|f(z_0)|=\max|f(z)|$，则在 z_0 的邻域内，作一个以 z_0 为圆心，以 r 为半径的圆周（r 小于收

敛半径),使整个圆周在 Ω 内. 我们可在 $z=z_0$ 点作 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{7.3.1}$$

令 $z-z_0 = re^{i\theta}$,即 $z = z_0 + re^{i\theta}$, $f(z_0) = a_0$

由假设 $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$,我们有

$$\begin{aligned}
|a_0|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 \mathrm{d}\theta \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cdot f^*(z)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m^* (z-z_0)^{*m}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty} a_n a_m^* r^{m+n}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty} a_n a_m^* r^{m+n} 2\pi\delta_{m,n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}
\end{aligned}$$

其中用到 $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta = \delta_{n,m}$

因此我们有关系式

$$|a_0|^2 \geqslant |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \tag{7.3.2}$$

它说明除非 $a_n = 0(n=1,2,3,\cdots)$,即 $f(z)$ 为常数 a_0,否则上式不成立. 这与 $f(z)$ 的 Taylor 展式相矛盾,除非 $f(z)$ 为常数. 故在 Ω 内除 $f(z)$ 为常数这一情况外, $\max|f(z)|$ 不能在 Ω 内,只能在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上达到.

定理 7.3.2: Liouville(刘维尔)定理:

在全平面(包括 ∞ 点)内解析且非奇异(有界)的函数是常数函数.

证: $f(z)$ 在全平面解析且非奇异,即 $f(z)$ 有界,

$$|f(z)| \leqslant M(M \text{ 为常数})$$

我们在 $z=0$ 点把 $f(z)$ 展成 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

其中 $a_n=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$C$ 为以原点 $z=0$ 为圆心，半径为 r 的任意圆周，圆周上的点 z 为 $z=re^{i\theta}$，则有 $n>0$ 时，

$$
\begin{aligned}
|a_n| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right||\mathrm{d}z| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{M}{z^{n+1}}|\mathrm{d}z| \\
&=\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^n}\mathrm{d}\theta \\
&=\frac{M}{r^n}
\end{aligned}
$$

当 r 为无穷大时，$a_n=0, n=1,2,\cdots$

故 $f(z)=f(0)$ 为常数.

§7.4　解析函数的 Laurent（洛朗）展开

上面研究的是解析函数在其解析区域内的点展成 Taylor 级数的问题. 如果函数在某一点 z_0 是奇异的（非正则的），而在 z_0 点的邻域内仍是解析的，那么这一函数能否在 z_0 点的解析邻域内作级数展开呢？这就导致解析函数的 Laurent（洛朗）展开问题.

一、在讨论 Laurent 展开之前，先介绍复变函数的零点及奇点

函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点，有 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的零点. 若 $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^k}$（其中 k 为正整数）是非零的解析函数，则称 z_0 点为函数 $f(z)$ 的 k 阶零点.

二、奇点：函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点设定义域在 z_0 点 $f(z)$ 的导数不存在或导数不唯一，则 z_0 点称为函数 $f(z)$ 的奇点

函数的奇点可分为孤立奇点与非孤立奇点两大类：

1. 孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，即在 $0<|z-z_0|<\varepsilon$（ε 为任意小的正数）区域内，函数 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

2. 非孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点的任意小的邻域内，除 z_0 点外存在 $f(z)$ 的其他奇点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点.

例 7.4.1：$f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$，

$z=\dfrac{1}{n\pi}$，　$n=1,2,\cdots$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点. $z=0$ 点是 $f(z)$ 的非孤立奇点，在 $z=0$ 的任意小的邻域内都存在 $f(z)$ 的无穷多个奇点.

3. 孤立奇点的分类

在本课程中，我们只讨论函数的孤立奇点问题. 孤立奇点又分为极点（或称非本性奇点）、本性奇点和可去奇点三种：

极点：z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在一个正整数 $k(k<\infty)$，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点. 即 $f(z)$ 具有 $(z-z_0)$ 的最高负幂次项为 $(z-z_0)^{-k}$.

本性奇点：z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，若不存在一个正整数 $k(k<\infty)$，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点. 即 $f(z)$ 具有 $(z-z_0)$ 的无穷负幂次项.

可去奇点：z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 设定义域没有确定的值，但 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内（除 z_0 外）解析，此时可重新定义 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ 使 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

三、解析函数的 Laurent 展开

定理 7.4.1：解析函数的 Laurent 展开定理

函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心半径为 R_1 和 R_2 的两个圆周 C_1 和 C_2 所包围的环形区域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad (7.4.1)$$

其中 $a_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$ 　　(7.4.2)

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线（如图 7.4.1）.

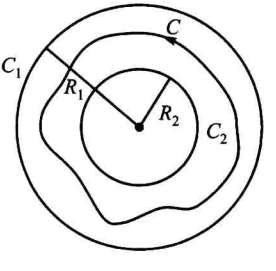


图 7.4.1

证：由于 $f(z)$ 在环形区域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 上解析，由 Cauchy 积分公式，对环形区域内的任意一

点 z 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{7.4.3}$$

(此式的证明只要在 C_1 和 C_2 间连接一条割线,即可把环形复连通区域构造成由 C_1 和 C_2 及割线所围成的单连通区域,由 Cauchy 公式即可得上式).

对于 C_1 积分,有 $\zeta \in C_1$, $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$,

则有 Taylor 展开

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

对于 C_2 积分:有 $\zeta \in C_2$, $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

故(7.4.3)式可写成

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta +$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$$

由 Cauchy 积分定理可知 $\oint_{C1} = \oint_C$, $\oint_{C2} = \oint_C$

故上式可统一写成

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z - z_0)^n$$

其中 $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C(\zeta - z_0)^{-(n+1)}f(\zeta)d\zeta$

故定理得证.

对一个函数 $f(z)$ 的 Laurent 展开,其 $n \geqslant 0$ 的幂级数部分在 z_0 点的邻域内(此邻域内没有其他奇点)称为 Laurent 展式的**正则部分**(它说明如果 $f(z)$ 在 z_0

点解析时，我们对 $f(z)$ 作 Laurent 展开时，只能得到正幂次部分，没有负幂次部分）；对 Laurent 展式中的 $n<0$ 的幂级数部分正反映 $f(z)$ 在 z_0 点的奇异性，我们称这一部分为 Laurent 展式的**主部**. 如果展式的最高负幂次为 $(z-z_0)^{-k}$ 时，即 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点. 如果 $n=-\infty$ 时，则 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的邻域内的 Laurent 展开式没有主部，只有正则部分，则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，通常把可去奇点看成解析点.

例 7.4.2：函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$，讨论该函数的 Laurent 展开.

解：由于该函数具有 $z_0=0$ 和 $z_0=1$ 两个奇点，因此有多种环形解析区域的展开，其结果是不一样的.

讨论 1：在 $z_0=0$ 点把函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 的环形区域中展开.

由于 $|z|<1$，则 $\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z_0=0$ 点解析，它的 Taylor 展式为

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

即可得

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=-2}^{\infty}z^n$$

可看出 $z_0=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点，是当 $z\to 0$ 时所表现出来的 $f(z)$ 的奇异性.

讨论 2：在 $z_0=0$ 点把函数 $f(z)$ 在 $1<|z|<\infty$ 的区域中展开.

由于 $|z|>1$，故

$$f(z)=\frac{-1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\frac{-1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+3}}$$

这一展开式具有 $n=\infty$ 的负幂次项，由于在 $1<|z|<\infty$ 的解析区域包围了 $f(z)$ 的两个奇点，这一展式已不再是一般意义下某一孤立奇点环形邻域中的 Laurent 展开式. 包含两个孤立奇点在内的展开式表现了更加复杂的奇异性. 这种复杂的奇异性来自 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1-z}$ 中的 $\dfrac{1}{1-z}$，或许我们把 $f(z)$ 写成

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$$

就会发现在 $z_0=0$ 点展开时，对$\dfrac{1}{1-z}$这一函数 $z_0=0$ 并非奇异，但在 $z=1$ 时是奇异的，这就导致在 $z_0=0$ 点展开时$\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{-1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}(|z|>1)$存在无穷多个负幂次项，这也是一个在 $z=1$ 点奇异的函数却在 $z_0=0$ 点展开所呈现出的奇异性.

讨论 3：在 $z_0=1$ 点把函数 $f(z)$ 在 $0<|z-1|<1$ 的环形区域中展开.

把 $f(z)$ 写成 $f(z)=\dfrac{-1}{z-1}\dfrac{1}{[1-(1-z)]^2}$，令 $t=1-z$，则 $|t|<1$，利用

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{1-t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$$

故在 $0<|z-1|<1$ 时，有

$$f(z)=\frac{-1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}n(1-z)^{n-1}=\frac{-1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}n(z-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-2}$$

令 $k=n-2$，可得

$$f(z)=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^k(k+2)(z-1)^k$$

因此我们可看出 $z_0=1$ 点是 $f(z)$ 的一阶极点.

讨论 4：在 $z_0=1$ 点把 $f(z)$ 在 $1<|z-1|<\infty$ 的区域中展开.

此问题与讨论 2 相类似，留给读者自己讨论.

第七章习题

7.1　求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{k}\right)^k$　　(2) $\sum_{k=1}^{\infty}k!\left(\dfrac{z}{k}\right)^k$　　(3) $\sum_{k=1}^{\infty}k^k z^k$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{\ln k}z^k$　　(5) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^{\ln k}}{k!}z^k$

7.2　已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b，求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$　　(2) $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{a_k}{b_k}z^k,(b_k\neq 0)$

7.3　在 $z=0$ 点，将下列函数展成 Taylor 级数，并求出其收敛半径.

(1) $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$　　(2) $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$　　(3) $f(z)=\arctan z$

(4) $f(z)=\int_0^z e^{z^2}dz$　　(5) $f(z)=\int_0^z \dfrac{\sin z}{z}dz$

7.4　求函数 $f(z)=\sin^3 z$ 在 $z=0$ 点的展开式.

7.5　把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-b}$ 展成幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$ 的形式，并给出可以作此展开的条件，其中 a,b 为不相等的复常数.

7.6　请指出下列函数的奇点，并说明属于什么类型的奇点，对于极点请说明极点的阶数.

(1) $\dfrac{z-1}{z(z^2+1)^2}$　　(2) $\dfrac{1}{(z^2+i)^2}$　　(3) $\dfrac{e^z-1}{z^m}$　m 为正整数

(4) $\dfrac{e^z}{e^z-1}$　　(5) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$　　(6) $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$

(7) $\dfrac{1}{\sin z}$　　(8) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$　　(9) $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$

(10) $\cos\dfrac{1}{z+i}$

7.7　把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 在下列区域中展成 Laurent 级数

(1) $0<|z|<1$　　(2) $1<|z|<2$　　(3) $2<|z|<\infty$

(4) $0<|z-1|<1$　　(5) $1<|z-1|<\infty$　　(6) $0<|z-2|<1$

(7) $1<|z-2|<\infty$

7.8　请将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)}$ 分别在 $z=1,z=0,z=i$ 点进行 Laurent 展开，把对每个展开点所有可能的环形区域上的 Laurent 展开式写出.

7.9　请将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4(z^2-1)^2}$ 在 $z=0$ 点的所有环形区域上展成 Laurent 级数.

7.10　请将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 分别在 $z=0,z=1$ 和 $z=2$ 点的所有环形区域上展成 Laurent 级数.

7.11　请将函数 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z|<1$ 和 $|z|>1$ 的区域中展成级数.

7.12　请将函数 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$ 在 $|z|>1$ 的区域中展成级数.

第八章　留数定理及其在实积分中的应用

§8.1　留数定理

留数定理在解析函数的理论研究中具有十分重要的地位，它是解析函数理论中最基本的定理之一. 另一方面，当时 Cauchy 等数学家研究留数理论的另一个重要原因，是解决实积分中一类奇异积分的问题，给实积分以一种有效的计算方法. 在本章中只给出留数定理及其在实积分中的应用.

对于在函数 $f(z)$ 的解析区域中的积分问题已由 Cauchy 定理给出，而 Cauchy 积分公式解决了被积函数在积分回路所包围的区域中存在一个一阶极点的问题. 如果积分回路内包含被积函数的有限个孤立奇点，计算此类积分就要用到留数定理，同时留数定理在实变函数定积分的计算中也有广泛的应用.

一、留数的定义

定义 8.1.1：留数的定义

考虑函数 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 附近的环形区域中作 Laurent 展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{8.1.1}$$

当我们作一个以 z_0 为圆心以 r 为半径的圆周 C（在 C 内只有 z_0 这一孤立奇点），作积分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 时，有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C (z - z_0)^n \mathrm{d}z \tag{8.1.2}$$

由 $z - z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$，故有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \mathrm{i}r^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{i}r^{n+1} 2\pi\delta_{n,-1}$$

$$= 2\pi i a_{-1} \tag{8.1.3}$$

其中用到 $\int_0^{2\pi} e^{i(n+m)\theta} d\theta = 2\pi\delta_{n,-m}$.

故 $f(z)$ 在包含有单一孤立奇点 z_0 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 z_0 点的 Laurent 展开的 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} 乘以 $2\pi i$.

我们定义 **$f(z)$ 在 z_0 点的留数为 a_{-1}**，记为

$$\operatorname{Res} f(z_0) = a_{-1} \tag{8.1.4}$$

故有

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_0) \tag{8.1.5}$$

由留数的定义可知，对积分有贡献的只是被积函数 Laurent 展开式中单极点项的系数.

二、留数定理

定理 8.1.1：留数定理

如果 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 的留数之和乘以 $2\pi i$，即

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res} f(z_j) \tag{8.1.6}$$

证：由留数的定义已经给出了对单一孤立奇点的情况. 对有限 k 个孤立奇点的情况（如图 8.1.1），我们由复连通区域的 Cauchy 积分定理

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \oint_{C_j} f(z)\,dz \tag{8.1.7}$$

其中 C_j 为只包含孤立奇点 z_j 的绕 z_j 点的回路，所有的回路方向都为逆时针方向，并由留数的定义，可得

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_j), j = 1, 2, \cdots, k \tag{8.1.8}$$

故

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res} f(z_j)$$

定理得证.

例 8.1.1：求积分 $\oint_C \frac{1}{z^2} dz$，其中 C 为包围 $z_0 = 0$ 点的任一回路.

解：如图 8.1.2，在 C 内作一个以 $z_0 = 0$ 为圆心，r 为半径的小圆 C_r，则由

Cauchy 积分定理可知

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z &= \oint_{C_r} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

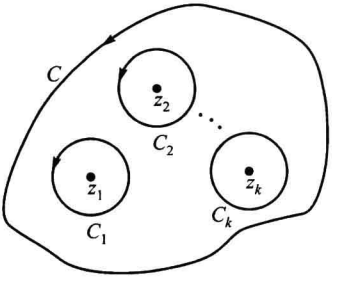


图 8.1.1

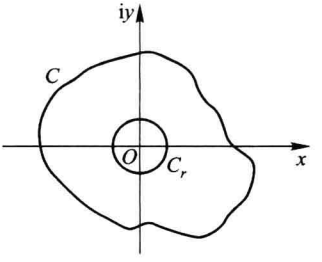


图 8.1.2

这正是留数定理的结果,因为被积函数$\frac{1}{z^2}$就是在 $z_0=0$ 点的 Laurent 展式,且 $a_{-1}=0$,直接应用留数定理即可得 $\oint_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = 0$. 虽然在回路积分中被积函数$\frac{1}{z^2}$在 $z_0=0$ 点奇异,但由于幅角的积分使其为零,这是复积分非常重要的特性,即被积函数具有 Laurent 展式的奇点奇异性时,对积分有贡献的只是单奇点项的系数.

因此我们不能以回路积分为零来判断被积函数在回路中是否有奇点,即不能判定被积函数的解析性问题.

回过来看 Cauchy 积分公式:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

其中 $f(z)$ 在 C 内解析,可在 z_0 点展成 Taylor 级数:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

故被积函数可写成

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f(z_0)}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1}$$

这正是被积函数的 Laurent 展式，$a_{-1}=f(z_0)$，Cauchy 积分公式正是留数定理的结果.

§8.2　留数的一般求法

(1) 直接把函数 $f(z)$ 在 z_0 点作 Laurent 展开，给出 a_{-1}.

例 8.2.1：求函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$ 在其奇点的留数.

解：$z_0=0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 $0<|z|$ 区域内作 Laurent 展开，有

$$e^{\frac{1}{z^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^{2k}}$$

由于没有奇幂次项，故 $a_{-1}=0$，同时可知 $z_0=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

(2) 如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的一阶极点，则 $f(z)$ 在 z_0 点的 Laurent 展开为：

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{8.2.1}$$

可知 $f(z)$ 在 z_0 点的留数为：

$$\operatorname{Res}f(z_0)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=[(z-z_0)f(z)]_{z=z_0} \tag{8.2.2}$$

由于物理学中遇到大量的一阶极点的问题，因此用留数定理作积分时，求这一类被积函数的留数就经常要用此方法.

例 8.2.2：求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+p^2}(p\neq 0)$ 的奇点处的留数.

解：把 $f(z)$ 写成 $f(z)=\dfrac{1}{(z+ip)(z-ip)}$ 可看出 $z=ip$ 和 $z=-ip$ 都为 $f(z)$ 的一阶极点，故

$$\operatorname{Res}f(ip)=(z-ip)\frac{1}{(z+ip)(z-ip)}\bigg|_{z=ip}=\frac{-1}{2ip}=-\frac{i}{2p}$$

$$\operatorname{Res}f(-ip)=(z+ip)\frac{1}{(z+ip)(z-ip)}\bigg|_{z=-ip}=-\frac{1}{2ip}=\frac{i}{2p}$$

(3) 当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 $f(z)$ 有 Laurent 展开

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_{-m}\neq 0 \tag{8.2.3}$$

我们可得

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \cdots$$

将等式两边作 $m-1$ 次微商

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + \frac{m!}{1!}a_0(z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2!}a_1(z-z_0)^2 + \cdots \tag{8.2.4}$$

即可求得 z_0 点的留数 a_{-1} 为

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] \tag{8.2.5}$$

例 8.2.3：求 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2-p^2)^2}$ 在 $z_0=p$ 点的留数.

解：$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+p)^2(z-p)^2}$，$z_0=p$ 为 $f(z)$ 的二阶极点，故

$$\operatorname{Res} f(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-p)^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+p)^2(z-p)^2}\right]\Bigg|_{z=p}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+p)^2}\right]_{z=p}$$

$$= \frac{(\mathrm{i}p-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}}{4p^3}$$

(4) 如果函数 $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$，z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，即 $g(z_0)=0$，且 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点及其邻域内解析，则 $f(z)$ 在 z_0 点的留数可表示为

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \tag{8.2.6}$$

证：由于 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，即 $g(z_0)=0$，则有

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{h(z)}{g(z)}\right] = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z)}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

例 8.2.4：求 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}$ 在 $z_0=\mathrm{i}\pi$ 点的留数. $(0<a<1)$

解：$\operatorname{Res} f(z) = \left.\dfrac{\mathrm{e}^{az}}{(1+\mathrm{e}^{z})'}\right|_{z=i\pi} = \dfrac{\mathrm{e}^{ia\pi}}{\mathrm{e}^{i\pi}} = -\mathrm{e}^{ia\pi}$

*§8.3　解析函数在无穷远点的留数

定义 8.3.1：函数 $f(z)$ 在无穷远点的邻域中解析，则 $f(z)$ 在无穷远点的留数 $\operatorname{Res} f(\infty)$ 定义为：

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{8.3.1}$$

其中 C 为绕无穷远点的任一回路，其方向为顺时针方向，在 C 内除无穷远点外 $f(z)$ 解析.

对这一定义可作如下的理解：我们把 $f(z)$ 在 $z_0 = \infty$ 点展开成 Laurent 级数 $(R < |z| < \infty)$，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \tag{8.3.2}$$

则按 $\operatorname{Res} f(\infty)$ 的定义有：

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(\infty) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_n C_n \oint z^n \mathrm{d}z \\ &= \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{\infty} C_n \oint z^n \mathrm{d}z \quad (\text{此时 } C \text{ 为逆时针方向}) \\ &= -\sum_{-\infty} C_n \delta_{n,-1} = -C_{-1} \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

其中用到 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint z^n \mathrm{d}z = \delta_{n,-1}$

例 8.3.1：$f(z) = \mathrm{e}^{z}$，求 $\operatorname{Res} f(\infty)$.

解：e^{z} 的唯一的奇点为 $z_0 = \infty$ 点，$f(z) = \mathrm{e}^{z}$ 在 $|z| < \infty$ 区域上展开也可看成在 $z_0^{-1} = 0$ 点的 Taylor 展开，即 $f(z) = \mathrm{e}^{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} z^n$，可知 $C_{-1} = 0$，即 $\operatorname{Res} f(\infty) = -C_{-1} = 0$

例 8.3.2：$f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{z}}{z}$，求 $\operatorname{Res} f(\infty)$.

解：$f(z)$ 的奇点为 $z_0 = 0$ 和 $z_0 = \infty$，$z_0 = 0$ 为一阶极点，在区域 $0 < |z| < \infty$ 上展开时

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1}$$

故 $C_{-1}=1$, $\operatorname{Res} f(\infty)=-C_{-1}=-1$

定理 8.3.1：若函数 $f(z)$ 在包含无穷远点的全复平面上只有有限个孤立奇点，则全复平面内的留数之和为零.

证：在复平面上构造一个足够大的回路 C，C 把 $f(z)$ 的除无穷远点外的所有有限个孤立奇点都包围在内，由 $f(z)$ 在无穷远点留数的定义，我们有：

$$\operatorname{Res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{8.3.4}$$

其中回路 C 为顺时针方向.

由留数定理，有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res} f(z_j) \tag{8.3.5}$$

其中回路 C 为逆时针方向，$z_j(j=1,\cdots,k)$ 为 $f(z)$ 除无穷远点外的有限个孤立奇点.

注意到上面两式的积分回路 C 的方向相反，故有

$$\operatorname{Res} f(\infty)+\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res} f(z_j)=0 \tag{8.3.6}$$

即定理得证.

例 8.3.3：计算 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+p^2}$ 的所有留数，验证 $f(z)$ 在全复平面的留数之和为零.

解：$f(z)$ 的两个一阶极点为 $z=\pm \mathrm{i}p$，由上一节例 8.2.2 可知，

$$\operatorname{Res} f(\mathrm{i}p)=-\frac{\mathrm{i}}{2p},\quad \operatorname{Res} f(-\mathrm{i}p)=\frac{\mathrm{i}}{2p},$$

考虑 $f(z)$ 在 z 趋于无穷时，$f(z)\xrightarrow{z\to\infty}\dfrac{1}{z^2}$，即展式的 $C_{-1}=0$. 即

$$\operatorname{Res} f(\infty)=0.$$

因此可验证得 $\operatorname{Res} f(\infty)+\operatorname{Res} f(-\mathrm{i}p)+\operatorname{Res} f(\mathrm{i}p)=0.$

从另一个角度看：$\operatorname{Res} f(-\mathrm{i}p)+\operatorname{Res} f(\mathrm{i}p)=0$，也可以从定理直接推断 $\operatorname{Res} f(\infty)=0$.

从上面的例子，我们再一次得到一个很重要的结论：$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$ 时 $f(z)$ 并不一定在 C 所包围的区域中解析. 我们只要选取一个回路 C，把 $z=\pm \mathrm{i}p$ 都包含了，由留数定理可知，此时的积分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$，但 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+p^2}$ 在 C 内并

不解析，它有两个一阶极点，除这两点外是解析的.

§8.4　留数定理在实积分中的应用

一、奇异积分的 Cauchy 主值问题

在实积分的计算中，往往碰到一类奇异积分，被积函数在积分区间内的某一点奇异，例$\int_a^b \frac{1}{x-x_0}\mathrm{d}x, x_0 \in (a,b)$，这一积分在通常积分的意义下在$x = x_0$点是奇异的，有毛病的，我们称之为瑕积分，因此我们要重新定义这一类积分，使之在某种意义下具有确定的值. 这里我们介绍的是 Cauchy 所定义的这类积分. 这类积分通常与积分限为无穷的积分结合在一起.

定义 8.4.1：设积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的被积函数$f(x)$在$x_0 \in (a,b)$奇异，若积分$\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$存在，则称此积分为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的 Cauchy 主值，记为：

$$P\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right) \tag{8.4.1}$$

例 8.4.1：积分$\int_a^b \frac{1}{x-x_0}\mathrm{d}x$，$x_0 \in (a,b)$其积分的 Cauchy 主值为

$$P\int_a^b \frac{1}{x-x_0}\mathrm{d}x = \ln\frac{b-x_0}{x_0-a} \quad x_0 \in (a,b)$$

二、用留数定理来计算无穷限的奇异积分的 Cauchy 主值

1. 我们先考虑最简单的情况即实轴上具有一个一阶极点

设函数$f(z)$在上半平面（包括x轴）上解析，且当$|z|\to\infty$时$|f(z)|\to 0$，（注意：$f(z)$不是在全平面解析，否则由最大模定理可知$f(z)$为零）. 考虑积分$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z, \alpha$在实轴上，积分回路$C$如图 8.4.1 所示，由半圆$C_R$、$[-R, \alpha-\delta]$、半圆$C_\delta$、$[\alpha+\delta, R]$组成.

由于被积函数$\frac{f(z)}{z-\alpha}$在C所围成的区域上解析，故

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z = 0 \tag{8.4.2}$$

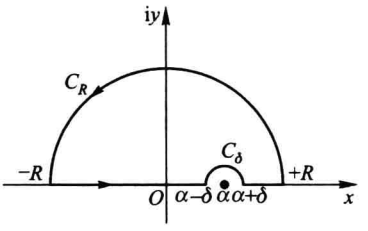


图 8.4.1

积分回路 C 为逆时针方向，而

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z = \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z + \int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z + \int_{\alpha+\delta}^{R} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x \tag{8.4.3}$$

可得

$$\int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x + \int_{\alpha+\delta}^{R} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x = -\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z - \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z \tag{8.4.4}$$

考虑 $R\to\infty$，$\delta\to 0$ 的情况，由 Cauchy 主值的定义

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x + \int_{\alpha+\delta}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x\right) \tag{8.4.5}$$

则有：

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x = -\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z - \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z \tag{8.4.6}$$

下面计算等式右边的两个积分：

对 $\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z$，如图 8.4.2，$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，由余弦定理可知：

$$\begin{aligned} |z-\alpha| &= |R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\alpha| = (R^2+\alpha^2-2R\alpha\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \\ &\geqslant (R^2+\alpha^2-2R\alpha)^{\frac{1}{2}} = |R-\alpha| \end{aligned} \tag{8.4.7}$$

所以

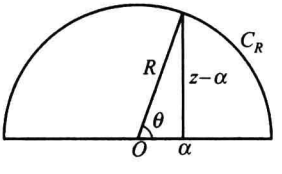


图 8.4.2

$$\left|\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{R}{|R-\alpha|_0}\int_0^{\pi}|f(z)|\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

由于 $\lim\limits_{R\to\infty}|f(z)|\to 0, \lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{R}{|R-\alpha|}\to 1$

故 $\lim\limits_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\dfrac{f(z)}{z-\alpha}\right| = 0$

考虑积分 $-\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\dfrac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z$，由于 $f(z)$ 在 α 点解析，故

$$\lim_{\delta\to 0}|f(z)-f(\alpha)| < \varepsilon\to 0,$$

而

$$-\int_{C_\delta}\frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z = -\int_{\pi}^{0}\frac{\mathrm{i}\delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\pi$$

故

$$\begin{aligned}-\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z &= -\lim_{\delta\to 0}f(\alpha)\int_{C_\delta}\frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z - \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\mathrm{d}z\\ &= \mathrm{i}\pi f(\alpha)\end{aligned}$$

其中用到

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\int_{C_\delta}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\mathrm{d}z\right| \leqslant \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{|f(z)-f(\alpha)|}{z-\alpha}\mathrm{d}z < \frac{\varepsilon}{\delta}(\pi\delta)\to 0$$

故可得

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\alpha}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi f(\alpha) = \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}\,F(\alpha) \tag{8.4.8}$$

其中 $F(z)=\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$.

2. 对于被积函数 $F(x)$ 在实轴上有有限的 k 个单极点的情况

设 $F(x)$ 具有形式为 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)}$，且 $f(x)$ 具有前面要求的性质，在上半平面解析且 $|f(z)|\xrightarrow[|z|\to\infty]{}0$，同样方法可计算得：

$$\begin{aligned}P\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{i}\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\,F(\alpha_j)\\ &= \mathrm{i}\pi\sum_{j=1}^{k}\frac{f(\alpha_j)}{(\alpha_j-\alpha_1)\cdots(\alpha_j-\alpha_{j-1})(\alpha_j-\alpha_{j+1})\cdots(\alpha_j-\alpha_k)}\end{aligned} \tag{8.4.9}$$

3. 对于此类积分，我们把被积函数 $F(x)$ 的条件可再放宽，对 $\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 的

被积函数 $F(x)$，当我们把 $F(x)$ 变为 $F(z)$，要求 $F(z)$ 满足：

(1) $F(z)$ 在上半复平面上除有限个孤立奇点外解析.

(2) 当 $|z|\to\infty$ 时，对 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$，有 $zF(z)$ 一致趋于零.

(3) $F(z)$ 在实轴上只有有限个单极点.

则

$$P\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\pi\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Res}F(z_i)+\mathrm{i}\pi\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}F(\alpha_j)\qquad(8.4.10)$$

其中，$z_i,i=1,\cdots,m$ 为 $F(z)$ 在上半复平面的 m 个孤立奇点，$\alpha_j,j=1,\cdots,k$ 为 $F(z)$ 在实轴上的 k 个单极点.

该问题的计算方法，回路 C 的取法与图 8.4.1 相同，只是在上半平面增加 m 个孤立奇点，及实轴上有 k 个单极点. 应用留数定理及 k 个实轴单极点的计算，在 C_R 的积分中注意条件(2)的要求即可得到结果式(8.4.10).

例 8.4.2：计算积分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解：$F(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$，$F(z)$ 在上半平面只有一个单极点 $z=\mathrm{i}$，满足上述三个条件(在实轴上没极点). 计算可得

$$\operatorname{Res}F(\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}},$$

故

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}F(\mathrm{i})=\pi$$

此例题在实积分中可直接作，$I=\arctan x\,\big|_{-\infty}^{\infty}=\pi$.

对此实无穷限的积分一定要注意 $F(z)$ 满足的条件，若与条件有差异，可能要取特殊的回路进行积分.

例 8.4.3：计算积分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x,0<a<1$

解：对于 $F(z)=\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}$，在上半平面有无穷多奇点 $z_k=\mathrm{i}(2k+1)\pi$，其中 $k=0,1,2,\cdots$，奇点都在虚轴上.

作积分 $\oint_C\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}\mathrm{d}z$，其中回路 C 如图 8.4.3，$C=C_1+C_2+C_3+C_4$ 为矩形回路，C 中包含奇点 $\mathrm{i}\pi$，由留数定理可得

$$\oint_C\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[F(\mathrm{i}\pi)]$$

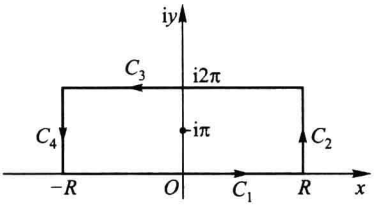


图 8.4.3

即

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx+\int_{C_2}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz+\int_{C_3}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz+\int_{C_4}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz=2\pi\mathrm{Res}F(i\pi)$$

由于

$$\mathrm{Res}\ F(i\pi)=\frac{e^{az}}{(1+e^{z})'}\bigg|_{z=i\pi}=-e^{i\alpha\pi},$$

考虑 $R\to\infty$ 时，C_2 路径的积分为

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_2}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz\right|\leqslant\lim_{R\to\infty}\int_{R}^{R+i2\pi}\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right||dz|\leqslant\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|1+e^{R+iy}|}dy$$

$$\leqslant\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|e^{R+iy}-1|}dy\leqslant\lim_{R\to\infty}e^{aR}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{|e^{R+iy}-1|}dy$$

$$\leqslant\lim_{R\to\infty}\frac{e^{aR}}{e^{R}-1}\cdot 2\pi=0$$

同理 $\displaystyle\int_{C_4}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz\xrightarrow{R\to\infty}0.$

而 $\displaystyle\int_{C_3}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz=\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(x+i2\pi)}}{1+e^{x+i2\pi}}dx=-e^{i2\pi a}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx$

因此对矩形回路 C 的积分可得，当 $R\to\infty$ 时

$$(1-e^{i2\pi a})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx=-2\pi ie^{i\alpha\pi}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx=-\frac{2\pi ie^{i\alpha\pi}}{1-e^{i2\pi a}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

三、利用 Jordan(约当)引理计算一类带有三角函数的实积分问题

引理 8.4.1：Jordan(约当)引理：

函数$f(z)$除在上半复平面上有有限个孤立奇点和在实轴上有有限个单极点外解析,并且当$|z|\to\infty$,有$|f(z)|\leqslant M(R)\to 0$,$C_R$为以原点为圆心,以$R$为半径的半圆周(图 8.4.4).

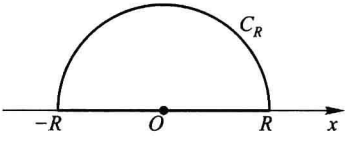


图 8.4.4

所有上半复平面的孤立奇点都包含在C_R与实轴围成的区域内,则

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z\to 0,\quad m>0 \tag{8.4.11}$$

证:由$z\in C_R$,$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

$$J=\int_0^{\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \tag{8.4.12}$$

有

$$\begin{aligned}|J|&\leqslant\int_0^{\pi}|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\,\mathrm{d}\theta\\&\leqslant M(R)\cdot R\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{8.4.13}$$

而

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-2mR\frac{\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta \tag{8.4.14}$$

其中用到

$$\frac{\pi}{2}\sin\theta\geqslant\theta,\quad\text{即}\ \sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{8.4.15}$$

关于此不等式,由$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$区间中的$y=\sin\theta$的曲线与$y=\frac{2}{\pi}\theta$的直线比较即可得(8.4.15)式.故

$$|J|\leqslant 2M(R)\cdot R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-2mR\frac{\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi M(R)}{m}(1-\mathrm{e}^{-mR}) \tag{8.4.16}$$

故当$R\to\infty$,$M(R)\to 0$,可得$|J|\to 0$,引理得证.

用 Jordan 引理,可以计算$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x(m>0)$的实积分,此实积分可以写

成$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\mathrm{d}x$ 的形式，其中$f(x)$ 满足的条件与 Jordan 引理中对$f(z)$ 的要求相同.

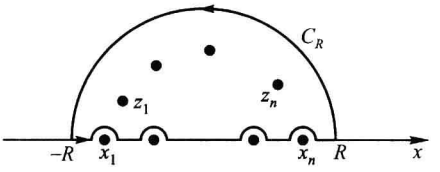


图 8.4.5

令 $F(z)=f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}$，取回路 C 如图 8.4.5，它是由 $-R$ 沿实轴到 $+R$ 和 C_R 所组成，C_R 的作法与 Jordan 引理的 C_R 相同. 则由留数定理，

$$\oint_C F(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res} F(z_i) \tag{8.4.17}$$

又 $$\oint_C F(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty} P\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x - \pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res} F(z_j) \tag{8.4.18}$$

由 Jordan 引理$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z = 0$

故可得

$$P\int f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}] + \pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}[f(x_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_j}] \tag{8.4.19}$$

这就是实积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$ 的计算结果. 其中实轴上每个绕单极点的回路 C_δ 的积分贡献$\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(x_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_j}]$.

我们可把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}=\cos mx+\mathrm{i}\sin mx$ 代入被积函数，积分即可得

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\mathrm{d}x = -2\pi\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Im}\operatorname{Res}[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}] - \pi\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Im}\operatorname{Res}[f(x_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_j}] \tag{8.4.20}$$

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}\operatorname{Res}[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}] + \pi\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Re}\operatorname{Res}[f(x_j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_j}] \tag{8.4.21}$$

对 $F(x)$ 在实轴上无奇点的情况，对$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$ 不是主值积分，而是通常

意义下的无穷限的积分，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\mathrm{d}x = -2\pi\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Im}\operatorname{Res}[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}] \tag{8.4.22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Re}\operatorname{Res}[f(z_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_i}] \tag{8.4.23}$$

例 8.4.4：计算 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$，$a,b>0$

解：被积函数中

$f(z)=\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$满足 Jordan 引理的条件，在上半平面的奇点为 $\mathrm{i}a$，$\mathrm{i}b$，计算可得：

$$\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}]\big|_{z=\mathrm{i}a}=\frac{(z-\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i}a)(z-\mathrm{i}a)(z^2+b^2)}\bigg|_{z=\mathrm{i}a}=\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2\mathrm{i}a(b^2-a^2)}$$

$$\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}]\big|_{z=\mathrm{i}b}=\frac{\mathrm{e}^{-b}}{2\mathrm{i}b(a^2-b^2)}$$

由于 $f(z)$ 在实轴上无奇点，则

$$\begin{aligned}I&=2\pi\mathrm{i}(\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}]\big|_{z=\mathrm{i}a}+\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}]\big|_{z=\mathrm{i}b})\\&=2\pi\left(\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2a(b^2-a^2)}+\frac{\mathrm{e}^{-b}}{2b(a^2-b^2)}\right)\\&=\frac{\pi}{(a^2-b^2)}\left(\frac{\mathrm{e}^{-b}}{b}-\frac{\mathrm{e}^{-a}}{a}\right)\end{aligned}$$

例 8.4.5：求 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

解：$f(z)=\frac{1}{z}$在 x 轴上有一阶极点为 $z=0$，$f(z)$ 在上半平面解析，计算 $z=0$ 点的留数

$$\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big|_{z=0}]=\frac{z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\bigg|_{z=0}=1$$

由(8.4.21)式可得

$$I=\pi\operatorname{Re}\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big|_{z=0}]=\pi$$

注：此积分本应写成 $P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，但由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，即 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $x=0$ 的积分存在，此积分不是瑕积分，故其主值积分与通常意义下的积分是一致的.

由于$\frac{\sin x}{x}$是偶函数，故有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

下面我们将举例说明有些积分似乎可用 Jordan 引理来作，但实际上是不属于应用该引理的积分类型.

例 8.4.6：计算 Poisson（泊松）积分

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx \mathrm{d}x$$，其中 $a > 0$ 的实数，b 为任意实数.

解：分析此积分，由于被积函数为偶函数，一般可把积分写成

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx \mathrm{d}x,$$

被积函数在实轴上无奇点，在上半平面解析，即给出了 $I=0$ 的错误结论. 把该积分稍加变换即可看出

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \frac{\mathrm{e}^{ibx} + \mathrm{e}^{-ibx}}{2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{e}^{-ibx} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\left(\frac{b^2}{4a}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(x+\frac{ib}{2a}\right)^2} \mathrm{d}x$$

此积分是类似 Gauss（高斯）型积分，但变量上出现虚数，考虑积分 $\oint_C \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z$. 其中积分回路 C 如图 8.4.6，$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$，由 e^{-az^2} 的解析性可知 $\oint_C \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z = 0$，而

$$\oint_C \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x + \int_{C_2} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z + \int_{R+i\frac{b}{2a}}^{-R+i\frac{b}{2a}} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z + \int_{C_4} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z$$

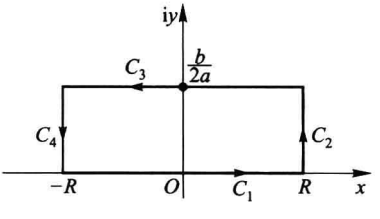


图 8.4.6

由于

$$\left|\int_{C_2} e^{-az^2}dz\right| = \left|\int_0^{\frac{b}{2a}} e^{-a(R+iy)^2} i dy\right| \leqslant \int_0^{\frac{b}{2a}} \left| e^{-a(R+iy)^2}\right| dy$$

$$= \int_0^{\frac{b}{2a}} e^{-aR^2} e^{ay^2} dy = e^{-aR^2}\int_0^{\frac{b}{2a}} e^{ay^2} dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

同理 $\left|\int_{C_4} e^{-az^2}dz\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$

由此可得：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = -\int_{C_3} e^{-az^2}dz = \int_{-\infty+\frac{ib}{2a}}^{\infty+\frac{ib}{2a}} e^{-az^2}dz$

由 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

有 $-\int_{C_3} e^{-az^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

故

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+i\frac{b}{2a}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{C_3} e^{-az^2}dz = \frac{1}{2}e^{\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

即 Poisson 积分为

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{8.4.24}$$

或写成

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}x^2}e^{ibx}dx = e^{\frac{-b^2}{2}} \tag{8.4.25}$$

四、计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta,$$

其中 $f(\cos\theta, \sin\theta)$ 为不包含有孤立奇点的 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的有理函数.

计算此类积分，我们要利用 Euler 公式作变换，把实积分变成单位圆上的复积分，然后用留数定理计算此积分.

当 $|z| = 1$ 时，由 Euler 公式有，$z = e^{i\theta}$，有

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \tag{8.4.26}$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{8.4.27}$$

则

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz \tag{8.4.28}$$

其中 C 为以原点为圆心的单位圆周，即 $C: |z| = 1$.

例 8.4.7：计算积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}d\theta, 0 < \varepsilon < 1$，

解：由上面给出的变换可得

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i\varepsilon^2}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(z^2+\frac{2z}{\varepsilon}+1\right)^2}$$

被积函数有两个二阶极点：

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

此两极点都在实轴上，由韦达定理有 $z_1z_2 = 1$，且 $|z_2| = \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} > 1$，故 $|z_1| < 1$，即 z_1 在单位圆内，z_2 在单位圆外. 故只要计算 z_1 的留数.

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2\frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]$$

$$= \frac{(z-z_2)-2z}{(z-z_2)^3}\bigg|_{z=z_1} = \frac{\varepsilon^2}{4(\sqrt{1-\varepsilon^2})^3}$$

故

$$I = \frac{4}{i\varepsilon^2}2\pi i\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

五、计算一类被积函数存在枝点和割线的积分

此类积分比较复杂，此类积分只能选取 Riemamn 面的一叶，在此叶中选取积分回路后再计算积分.

这里我们只给出 Mellin（梅林）变换型的积分

$$I = \int_0^{\infty} x^a f(x)dx, \quad 0 < a < 1 \tag{8.4.29}$$

当把变量 x 变成 z，$f(x)\to f(z)$ 时，要求 $f(z)$ 满足：

(1) $f(z)$为有理函数,在复平面上有有限个孤立奇点 $z_j, j=1,2,\cdots,k$,此时复平面只是 Riemann 面的一叶的一部分.

(2) $f(z)$在正实轴上无极点,在 $z=0$ 点至多为一阶极点.

(3) 当 $|z|\to\infty$ 时 $|z|^2|f(z)|$ 有界.

分析: 由于 $0<a<1$,被积函数中 z^a 出现 $z=0$ 的枝点,我们由 $z=0$ 沿正实轴作割线,如图 8.4.7.

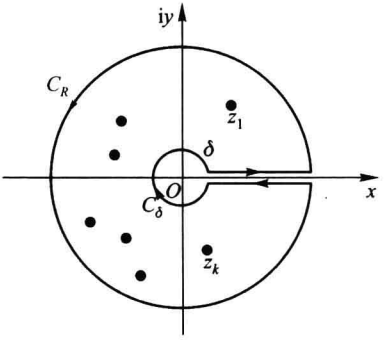


图 8.4.7

当 z 绕大圆周一圈由割线的上沿到割线的下沿时,$z^a\to z^a\cdot e^{i2\pi a}$, 即幅角增加 $2\pi a$,我们限制 $0\leqslant \arg z\leqslant 2\pi$,被积函数在 Riemann 面的一个叶上,为单值函数,我们取积分回路如图 8.4.7,由留数定理有

$$\oint_C z^a f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left[z_j^a f(z_j)\right] \tag{8.4.30}$$

即

$$\int_{C_R} z^a f(z)\,dz + \int_R^\delta x^a e^{i\pi a} f(x)\,dx + \int_{C_\delta} z^a f(z)\,dz + \int_\delta^R x^a f(x)\,dx$$

$$= 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left[z_j^a f(z_j)\right]$$

可得

$$(1-e^{i2\pi a})\int_\delta^R x^a f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left[z_j^a f(z_j)\right] - \int_{C_R} z^a f(z)\,dz - \int_{C_\delta} z^a f(z)\,dz \tag{8.4.31}$$

由于 $|z|\to\infty$ 时,有 $|z^2 f(z)|<M$(有界),故

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} z^a f(z)\,dz\right| \leqslant \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{|z|^{2-a}}\left|z^2 f(z)\right||dz| \leqslant \lim_{R\to\infty}\frac{M}{R^{2-a}}\int_{C_R}|dz|$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi M}{R^{1-a}} \to 0$$

再看 $\int_{C_\delta} z^a f(z)\,\mathrm{d}z$ 当 $\delta \to 0$ 时做估计，由于 $f(z)$ 在 $z=0$ 至多有一阶极点，故 $zf(z)$ 为有限值，即 $\lim\limits_{\delta\to 0} |zf(z)| < N$，则

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta} |z^a f(z)\,\mathrm{d}z| \leqslant \lim_{\delta\to 0} \int_C \frac{|zf(z)|}{z^{1-a}} |\mathrm{d}z| \leqslant \lim_{\delta\to 0} \frac{N}{\delta^{1-a}} \int_{C_\delta} |\mathrm{d}z|$$

$$= \lim_{\delta\to 0} 2\pi N\delta^a \to 0$$

故可得

$$\int_0^\infty x^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left[z_j^a f(z_j)\right] \tag{8.4.32}$$

例 8.4.8：计算积分 $I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x$，$0 < a < 1$

解：$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$，$z=0$ 和 $z=-1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点，只要计算

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=-1} = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{z^a}{z(z+1)}\right] = \left(\frac{z^a}{z}\right)_{z=-1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}}{-1} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}$$

可得

$$I = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

*§8.5　Hilbert（希尔伯特）变换

在数学物理中，常常遇到一类定义在实轴上（实参数）的复变函数：$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$，且当 $x \to z$ 时，$f(z)$ 在包括实轴的上半复平面上解析，且有 $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) \to 0$. 要问函数 $f(x)$ 在实轴上某点 x_0 的函数值，其实部（或虚部）如何由 $f(z)$ 的虚部（或实部）表示的，这就导致 Hilbert 变换，或称为色散关系. Hilbert 变换在物理学的理论研究中会经常涉及，在频率分析及波的传输分析中也经常用到.

对上面所考虑的函数 $f(z)$，考虑积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$，其中 $z_0 = x_0$ 为实轴上的一点，回路 C 如图 8.5.1 所示. 由留数定理有

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 0 \tag{8.5.1}$$

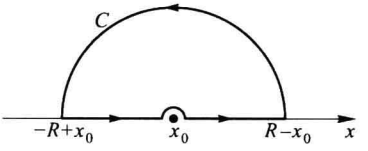


图 8.5.1

由

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{-R+x_0}^{x_0-\delta} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{R+x_0} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{0} \frac{f(z_0+\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} \frac{f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta \tag{8.5.2}$$

等式右边第四项积分由于 $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) \to 0$，故 $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta \to 0$，

等式右边第三项积分，由于 $f(z)$ 在 z_0 点解析，有

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{f(z_0+\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi f(x_0),$$

且

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0}} \left[\int_{R+x_0}^{x_0-\delta} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{R+x_0} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x \right] = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x$$

故得

$$\mathrm{i}f(x_0) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x \tag{8.5.3}$$

可得

$$-v(x_0) + \mathrm{i}u(x_0) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)+\mathrm{i}v(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \tag{8.5.4}$$

即

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \tag{8.5.5}$$

$$v(x_0) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \tag{8.5.6}$$

通常写成

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x \tag{8.5.7}$$

$$\operatorname{Im} f(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x \tag{8.5.8}$$

这就是 Hilbert 变换，或称为色散关系.

色散关系给出复函数 $f(x)$ 在 x_0 点的值的实部（或虚部）分别由 $f(x)$ 的虚部（或实部）的积分表达.

Hilbert 变换亦可放宽到 $f(z)$ 在上半平面有有限个孤立极点的情况，作法与上面讨论相类似，有兴趣的读者可自行推出.

第八章习题

8.1　求下列函数在孤立奇点的留数（其中 n、m 为自然数），并求出函数孤立奇点的留数之和.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$

(2) $f(z) = z^n \sin \dfrac{1}{z}$

(3) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^5}$

(4) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{z^2}}{(z-1)^2}$

(5) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}$

(6) $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$

(7) $f(z) = \dfrac{z^2}{\cos z - 1}$

(8) $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$

(9) $f(z) = \dfrac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)^m}$

(10) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^{2m}}$

(11) $f(z) = \dfrac{z^{2m}}{1+z^m}$

(12) $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{1-\mathrm{e}^z}$

8.2　计算下列回路积分

(1) $\oint_C \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} \mathrm{d}z$　　C：$|z-1| = 1$

(2) $\oint_C \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} \mathrm{d}z$　　C：$|z-\mathrm{i}| = 1$

(3) $\oint_C \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} \mathrm{d}z$　　C：$|z| = 2$

(4) $\oint_{|z|=2} \dfrac{1}{(z-3)(z^4-1)} \mathrm{d}z$

(5) $\oint_{|z|=3} \cot^3 z \mathrm{d}z$

(6) $\oint_{|z|=1} \dfrac{z \sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3} \mathrm{d}z$

(7) $\oint_{|z|=1} z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \mathrm{d}z$

8.3 计算下列积分

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$

(2) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \mathrm{d}\theta$

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$

(4) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta, \quad p>0$

8.4 计算下列积分

(1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x, \quad a>0, b\in R$

(4) $\int_0^{\infty} \frac{(\cos 2x)^2}{(x^2+1)^2(x^4+4)}\mathrm{d}x$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x$

(6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, \ 0<a<1$

8.5 计算下列积分

(1) $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^4}\mathrm{d}x, \quad m>0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \quad a>0$

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\mathrm{d}x, \quad a>0, m$ 为正整数

(6) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$

8.6 计算下列积分

(1) $P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x$

(2) $P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ikx}-1}{x^2}\mathrm{d}x, \quad k>0$

(3) $P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x$

(4) $P\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$

8.7 在下列情况下计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x, \quad a>0$

(1) 让 $a\to a+\mathrm{i}\varepsilon, \varepsilon\to 0, \varepsilon>0$.

(2) 让 $a\to a-\mathrm{i}\varepsilon, \varepsilon\to 0, \varepsilon>0$.

(3) 直接计算该积分的 Cauchy 主值积分.

第三篇　积分变换与δ函数

在物理学的数学描述中,我们常遇到如下的积分形式

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)k(\alpha,x)\mathrm{d}x \tag{9.0.1}$$

函数 $F(\alpha)$ 称为由变换核 $k(\alpha,x)$ 产生的函数 $f(x)$ 的积分变换,$k(\alpha,x)$ 称为 $f(x)$ 的积分变换核.

一般我们常遇到的积分变换有如下几种

(1) Fourier(傅里叶)变换

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x \tag{9.0.2}$$

$$K(\alpha,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}$$

(2) Laplace(拉普拉斯)变换

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x \tag{9.0.3}$$

$$K(\alpha,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$$

(3) Mellin(梅林)变换

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)x^{\alpha-1}\mathrm{d}x \tag{9.0.4}$$

$$K(\alpha,x) = x^{\alpha-1}$$

(4) Fourier - Bessel(傅里叶 - 贝塞尔)变换

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)xJ_n(\alpha x)\mathrm{d}x \tag{9.0.5}$$

$$K(\alpha,x) = xJ_n(\alpha x)$$

其中 $J_n(\alpha x)$ 称为第 n 阶 Bessel(贝塞尔)函数

在本课程中只讲 Fourier 变换和 Laplace 变换.

第九章　Fourier(傅里叶)变换

§9.1　Fourier 级数

我们知道

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x = \delta_{n,m},\ n,m = 0,1,2,\cdots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x = 0,\ n,m = 0,1,2,\cdots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x = \delta_{n,m},\ n,m = 0,1,2,\cdots \tag{9.1.1}$$

三角函数族$\{\sin nx,\cos nx,n=0,1,2,\cdots\}$是一个完备的正交函数族,它们可作为基向量张成一个向量空间,此向量空间为一 Hilbert 空间,空间中的元素是以2π为周期的实函数.

任一个以2π为周期的实函数$f(x)$且满足 Dirichlet(狄利赫莱)条件:即在$[-\pi,\pi]$区间内允许有有限个第一类间断点(即当x从左边和右边趋于此间断点时,$f(x)$的左极限和右极限存在),而且可将此区间分为有限个部分,在每一部分上$f(x)$单调地变化,则此$f(x)$为这一 Hilbert 空间中的一个元素,它可以在这一组基中展开为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{9.1.2}$$

其展开系数为

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\quad b_0 = 0,\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x \tag{9.1.3}$$

$f(x)$展开式(9.1.2)称为 Fourier 级数.

显然,当$f(x)$为奇函数时,

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

当$f(x)$为偶函数时,

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x$$

如果$f(x)$是以$2l$为周期的函数,则 Fourier 级数展式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{9.1.4}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x, \quad b_0 = 0, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{9.1.5}$$

由 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} = \cos mx + \mathrm{i}\sin mx, \quad m \in Z,$$

且有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x}\mathrm{d}x = \delta_{m,n} \tag{9.1.6}$$

故函数系$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}, m \in Z\}$,亦可作为 Hilbert 空间的一组基,以$2\pi$为周期的函数$f(x)$在这组基上的展开式为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{9.1.7}$$

展开系数

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{9.1.8}$$

故此展开式亦可写成

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{9.1.9}$$

这种展开形式在物理学的量子理论中和信号分析的研究中应用很多. 这些展开形式通称为 Fourier 展开.

在很多物理问题中,某物理量$f(x)$是定义在区间$[0,l]$上的,它并非周期函数. 我们常用延拓的方法把$f(x)$进行延拓后再做 Fourier 展开. 常用的延拓方法

有两种，一是奇延拓，一是偶延拓.

当函数$f(x)$是定义在$[0,l]$上，且满足$f(0)=0$时，我们可以作奇延拓，定义在$[-l,l]$上的奇函数$F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant l \\ -f(-x), & -l\leqslant x\leqslant 0 \end{cases} \tag{9.1.10}$$

当定义在$[0,l]$上的函数$f(x)$满足$f'(0)=0$时，我们可作偶延拓，定义在$[-l,l]$上的偶函数$F(x)$

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant l \\ f(-x), & -l<x<0, \end{cases} \tag{9.1.11}$$

延拓后的函数$F(x)$是周期为$2l$的函数，我们把它展开成Fourier级数.

当$F(x)$为奇延拓时，可得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{9.1.12}$$

其中

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{9.1.13}$$

当$F(x)$为偶延拓时，可得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \tag{9.1.14}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,\quad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{9.1.15}$$

§9.2　Fourier变换

上面介绍的是把一个周期函数$f(x)$展成离散的频谱空间的分量进行研究. 但对非周期函数我们用什么方法研究其在对偶空间中的形式和性质呢？这导致Fourier变换.

我们先看周期为$2l$的函数$f(x)$在$[-l,l]$上的Fourier展式

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m\pi}{l}x} \tag{9.2.1}$$

其中

$$C_m = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m\pi}{l}x}\mathrm{d}x \tag{9.2.2}$$

可写成

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m\pi}{l}\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m\pi}{l}x} \tag{9.2.3}$$

令 $k=\dfrac{m\pi}{l}$，由于 m 为整数，对于 $\Delta m=1$，即相邻两个 k 的差为 $\Delta k=\dfrac{\pi}{l}$，上式可写成

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-l}^{l} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Delta k \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

当 $l\to\infty$ 时，$\Delta k\to 0$，则上式的求和式变成积分式，即

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{9.2.5}$$

而

$$C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi \tag{9.2.6}$$

这积分表达式就是周期为∞(即非周期)的函数 $f(x)$ 的 Fourier 积分表示式，也称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换公式. $C(k)$ 称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换，或称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换的像函数，记为 $C(k)\equiv F[f(x)]$. 而 $f(x)$ 是 $C(k)$ 的 Fourier 逆变换，或称 $f(x)$ 为 $C(k)$ 的 Fourier 变换的原函数，记为 $f(x)\equiv F^{-1}[C(k)]$.

什么样的函数才能进行 Fourier 变换？它要求函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛. 这条件还是很严格的. 一般情况下，物理学所研究的函数，多满足上述条件，因此可进行 Fourier 变换.

注意：由 Euler 公式，我们可以把(9.2.5)式和(9.2.6)式写成 $\cos kx$ 和 $\sin kx$ 的积分形式.

Fourier 变换是把定义在 x 空间中的物理量 $f(x)$ 变到其对偶空间即 k 空间(可以是波矢空间或者动量空间，或是谱空间)中的函数 $C(k)$ 来研究，分析其在对偶空间中的性质，这在物理学中有广泛应用.

把一维的 Fourier 变换推广到三维空间，得到三维空间中的 Fourier 变换.

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} C(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{9.2.7}$$

$$C(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.2.8}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 为三维 Cartesian 空间(即 $\boldsymbol{k}$ 空间也是一个三维的欧氏空间)的矢量,

$$\boldsymbol{k} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{k} = \mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3 \tag{9.2.9}$$

上两式同样也可写成

$$C(\boldsymbol{k}) = F[f(\boldsymbol{r})], \quad f(\boldsymbol{r}) = F^{-1}[C(\boldsymbol{k})] \tag{9.2.10}$$

对于半无界空间的问题,经常遇到的是定义在时间轴 t(实轴)上的问题. 从计时为零开始记录就成了半无界空间上的问题,其思想仍与前面 Fourier 级数展开的奇延拓和偶延拓的情况相同. 下面我们以例子来说明半无界空间延拓后求其 Fourier 变换.

例 9.2.1: 设 $f(t)$ 是定义在半无界空间 $t \in [0,\infty]$ 上的函数, 如图 9.2.1,

$$f(t) = \begin{cases} h, & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

在(1) 边界条件为 $f'(0) = 0$;

(2) 边界条件为 $f(0) = 0$.

的情况下,把 $f(t)$ 展开为 Fourier 积分(或称为求 $f(t)$ 的 Fourier 变换).

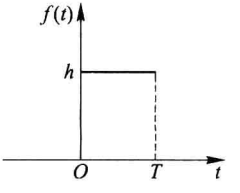


图 9.2.1

解: 对边界条件(1),$f(t)$ 要延拓为偶函数,其展开为 $\cos\omega t$ 的积分形式,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{0}^{T} h\cos\omega t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2h}{\omega}\sin\omega T$$

可得

$$f(t) = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega T\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

对条件(2),$f(t)$要延拓为奇函数,其展式为 $\sin\omega t$ 的积分形式,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{T}h\sin\omega t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2h}{\omega}(-\cos\omega t)\Big|_0^{T}$$

$$= \frac{2h}{\omega}(1-\cos\omega T)$$

可得

$$f(t) = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\omega T)}{\omega}\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

§9.3 Fourier 变换的基本性质

一、定理 9.3.1:线性定理

设 α_1,α_2 为任意常数,有

$$F[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1 F[f_1(x)]+\alpha_2 F[f_2(x)] \qquad (9.3.1)$$

证: $F[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty}[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$

$$= \alpha_1\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x+\alpha_2\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$= \alpha_1 F[f_1(x)]+\alpha_2 F[f_2(x)]$$

二、定理 9.3.2：延迟定理

$$F[f(x-x_0)] = e^{-ikx_0}F[f(x)] \tag{9.3.2}$$

证：

$$\begin{aligned} &F[f(x-x_0)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{ikx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-ik(x-x_0)}e^{-ikx_0}dx \\ &= e^{-ikx_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}d\xi \\ &= e^{-ikx_0}F[f(x)] \end{aligned}$$

其中 $\xi = x - x_0$.

三、定理 9.3.3：位移定理

$$F[f(x)e^{ikx_0}] = c(k-k_0) \tag{9.3.3}$$

证：

$$\begin{aligned} F[f(x)e^{ikx_0}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-k_0)x}dx \\ &= c(k-k_0) \end{aligned}$$

四、定理 9.3.4：标度变换定理

当变量 $x \to x' = ax$，$a \neq 0$ 时，则有

$$F[f(ax)] = \frac{1}{|a|}c\left(\frac{k}{a}\right) \tag{9.3.4}$$

证： 当 $a > 0$ 时，

$$\begin{aligned} F[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-i\frac{k}{a}x'}dx' \\ &= \frac{1}{a}c\left(\frac{k}{a}\right) \end{aligned}$$

当 $a < 0$ 时，

$$F[f(ax)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{a}x'}\mathrm{d}x'$$

$$= \frac{1}{-a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{a}x'}\mathrm{d}x'$$

$$= \frac{1}{|a|}c\left(\frac{k}{a}\right)$$

五、定理 9.3.5：微分定理

当函数$f(x)$具有性质：$|x|\to\infty$时，$f(x)\to 0$，则有，

$$F[f'(x)] = \mathrm{i}kF[f(x)] \tag{9.3.5}$$

$$F[f^{(n)}(x)] = (\mathrm{i}k)^n F[f(x)] \tag{9.3.6}$$

证：
$$F[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$= f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \mathrm{i}k\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{i}kF[f(x)]$$

由 $F[f''(x)] = \mathrm{i}kF[f'(x)] = (\mathrm{i}k)^2F[f(x)]$

故可得

$$F[f^{(n)}(x)] = (\mathrm{i}k)^n F[f(x)] \quad \text{证毕.}$$

命题 9.3.1：作为微分定理的应用，Fourier 变换有另一重要性质

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}k}F[f(x)] \tag{9.3.7}$$

证：令 $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi$，由于 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$，

则有，$g'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = f(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} = f(x)$

故有

$$F[(f(x)] = F[g'(x)] = \mathrm{i}kF[g(x)]$$

即 $F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \dfrac{1}{\mathrm{i}k}F[f(x)]$.

命题 9.3.2：同理可证：

$$F\left[\int_x^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] = \frac{\mathrm{i}}{k}F[f(x)] \tag{9.3.8}$$

六、定理 9.3.6：卷积定理

$$F[f_1(x) * f_2(x)] = F[f_1(x)]F[f_2(x)] \tag{9.3.9}$$

其中

$$f_1(x) * f_2(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{9.3.10}$$

称为函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积，它是 x 的函数.

证：

$$\begin{aligned} & F[f_1(x) * f_2(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi f_2(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi f_2(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-\xi)}\,\mathrm{d}x \\ &= F[f_1(x)]F[f_2(x)] \end{aligned}$$

证毕.

命题 9.3.3：两个函数 f_1 和 f_2 的卷积具有对 f_1 和 f_2 的对称性：

$$\begin{aligned} & f_1(x) * f_2(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= f_2(x) * f_1(x) \end{aligned} \tag{9.3.11}$$

该等式的证明只要作变换 $\eta = x - \xi$ 即可得证.

关于 Fourier 变换在求解微分方程中的应用将由后面的章节中给. 在求解微分方程中通常把 Fourier 变换式(9.2.5)，式(9.2.6)，式(9.2.7)，式(9.2.8)写成更为对称的形式，后面将会用到这种形式

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} c(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k & (9.3.12) \\ c(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x & (9.3.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} c(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} & (9.3.14) \\ c(\boldsymbol{k}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} & (9.3.15) \end{cases}$$

第九章习题

9.1 如果$f(x)$是实函数,即$f(x)=f^*(x)$,当$f(x)$展成如下形式的 Fourier 级数时

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

系数c_n要满足什么条件,请证明.

9.2 请证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2}$$

9.3 将如下函数展成 Fourier 级数

(1) $f(x)=x$, $x\in[0,2l]$展成以$2l$为周期的 Fourier 级数.

(2) $f(x)=x$, $x\in[0,l]$展成以$2l$为周期的 Fourier 级数.

(3) $f(x)=|x|$, $x\in[-l,l]$展成以$2l$为周期的 Fourier 级数.

9.4 电压模式为$E(t)=E_0\sin\omega t$(E_0为常数)的交流电.

(1) 经过半波整流后,其电压的模式为:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t\in\left[-\dfrac{\pi}{\omega},0\right] \\ E_0\sin\omega t & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{\omega}\right] \end{cases}$$

(2) 经过全波整流后,其电压模式为

$$E(t) = E_0\left|\sin\omega t\right|$$

试把以上这两种整流后的电压模式,展成 Fourier 级数,并对这两种展开的结果,从直流成分、基波成分及高次谐波部分等几方面进行比较.

9.5 把振幅按双曲线衰减的振动

$$f(t) = \frac{1}{t}\sin\omega t$$

展成 Fourier 积分,并作出原函数与像函数的简单示意图.

9.6 把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$, $(a>0)$,在边界为$f(0)=0$的条件下,展成 Fourier 积分.

9.7 把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=1-H(x-a)$,$(a>0)$,在边界为$f'(0)=0$的条件下,展成 Fourier 积分.

9.8 试用 Fourier 变换,求解有阻尼的谐振子方程

$$\ddot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t) = f(t)$$

第十章　Laplace(拉普拉斯)变换

对于 Fourier 变换,其变换核是 e^{-ikx},此积分变换核是个振荡因子,因此对函数 $f(x)$ 的要求比较严格,要满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ 收敛. 但在很多问题中,被积函数 $f(x)$ 是不具备这一性质的. 如果我们的积分变换核是个很强的收敛因子 e^{-pt},($\mathrm{Re}p > 0$). 则 $f(x)$ 对收敛条件的要求可放宽很多,这就是下面要介绍的 Laplace 变换.

§10.1　Laplace(拉普拉斯)变换

对于定义在实变数 $t \in [0, \infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$,定义 $f(t)$ 的 Laplace变换为

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \tag{10.1.1}$$

其中 p 为复数,$p = s + i\sigma$,e^{-pt}称为 Laplace 变换核. $f(t)$称为 Laplace 变换的原函数,$F(p)$称为 Laplace 变换的像函数,记为

$$F(p) \doteqdot f(t) \text{ 或 } f(t) \fallingdotseq F(p) \tag{10.1.2}$$

下面我们分析 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系并分析 Laplace 变换的收敛性问题.

我们把上面定义的 Laplace 变换式改写为

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} e^{-i\sigma t} dt \tag{10.1.3}$$

定义函数 $g(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) e^{-st} & 0 \leqslant t \leqslant \infty \\ 0 & -\infty \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \tag{10.1.4}$$

则 $g(t)$的 Fourier 变换式为

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\sigma t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} e^{-i\sigma t} dt$$

$$= F(p) \tag{10.1.5}$$

即为 $f(t)$ 的 Laplace 变换式.

要使 $g(t)$ 的 Fourier 变换存在,除要求函数 $g(t)$ 满足 Drichlet 条件外,还要求 $\int_0^{\infty} |g(t)| dt$ 收敛. 由 $g(t)$ 的定义可知,在 $0 \leqslant t < \infty$ 时,当 $|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}$ 时,其中 M, s_0 为正实数,只要当 $s > s_0$ 时,就有 $\int_0^{\infty} |g(t)| dt$ 收敛. 在这一条件下 $F[g(t)]$ 存在,也就是 $f(t)$ 的 Laplace 变换存在. 我们称 s_0 为收敛横坐标.

下面举例说明如何由定义求一般常用函数的 Laplace 变换的像函数.

例 10.1.1: 函数 $f(t) = 1$,其像函数为

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \tag{10.1.6}$$

即 $1 \fallingdotseq \frac{1}{p}$,收敛横坐标为 $s_0 = 0$,即 $\mathrm{Re}\, p > 0$

例 10.1.2: 函数 $f(t) = t$, 其像函数为

$$F(p) = \int_0^{\infty} te^{-pt} dt = -\frac{1}{p} te^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2} \tag{10.1.7}$$

即 $t \fallingdotseq \frac{1}{p^2}$, 收敛横坐标为 $s_0 = 0$.

例 10.1.3: 同理可计算函数 $f(t) = t^n$, n 为正整数, 反复作分部积分,

$$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \tag{10.1.8}$$

即 $t^n \fallingdotseq \frac{n!}{p^{n-1}}$,收敛横坐标为 $s_0 = 0$,即 $\mathrm{Re}\, p > 0$

例 10.1.4: $f(t) = e^{\alpha t}$,其像函数为

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{p-\alpha} \tag{10.1.9}$$

即 $e^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$,收敛横坐标为 $s_0 = \mathrm{Re}\, \alpha$,即 $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, \alpha$

例 10.1.5: 函数 $f(t) = t^{\alpha}$,$\mathrm{Re}\, \alpha > -1$, 其像函数为

$$F(p) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt} dt$$

收敛横坐标为 $s_0=0$,即 $\mathrm{Re}\,p>0$.

求此积分时,作变量代换,令$\tau=pt$, 故有

$$\begin{aligned}F(p)&=\int_0^{\infty}\frac{\tau^{\alpha}}{p^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\tau}\,\frac{1}{p}\mathrm{d}\,\tau\\&=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}\tau^{\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\,\tau\\&=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}\end{aligned}\tag{10.1.10}$$

即 $t^{\alpha}\fallingdotseq\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ $(\mathrm{Re}\,\alpha>-1,\mathrm{Re}\,p>0)$

当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$时,有

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\fallingdotseq\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\tag{10.1.11}$$

(注:关于Γ函数的简介见本节附录.)

例 10.1.6:$f(t)=\sin\sqrt{t}$,求其像函数 $F(p)$.

按定义直接求积分较难,把$f(t)$作级数展开:

$$\sin\sqrt{t}=\sum_{n=0}^{n}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{\frac{2n+1}{2}}$$

由上一例的结果

$$t^{n+\frac{1}{2}}\fallingdotseq\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right)}{p^{n+\frac{1}{2}+1}}=\frac{\sqrt{n}(2n+1)!!}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{p^{n+\frac{3}{2}}}\tag{10.1.12}$$

其中

$$(2n+1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)=\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$$

$$\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!!}{2^{n+1}}$$

故

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!!}{2^{n+1}\cdot p^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^n p^n}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{4^n p^n}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}}$$

即

$$\sin\sqrt{t}\fallingdotseq\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{1}{4p}} \tag{10.1.13}$$

本节附录：Γ 函数及其解析延拓

Γ 函数通常是用积分形式来定义的函数，而最早对 Γ 函数的定义是 Euler(欧拉)所给出的无穷乘积的表达式

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times 2\times\cdots\times n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}n^z \tag{10.1.14}$$

可以看出，在复平面上，除 $z=0,-1,-2,\cdots$，是 $\Gamma(z)$ 的一阶极点外，没有其他的奇异性.

通常 $\Gamma(z)$ 的积分定义式为

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt\quad t\in R \tag{10.1.15}$$

z 定义在以正 x 轴(实轴)为 $\arg z=0$ 且 $\arg z$ 从 $0\to 2\pi$ 的 Rieman 面上，即通常的复平面上.

对于参数 $t\in[0,\infty)$ 的积分，$\Gamma(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 时是解析的.

该解析性的证明思路是：

把对 t 的积分分为 $\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt\quad t\in R$，对于此积分 $\mathrm{Re}\,z=x$，而 z 的虚部 iy 的贡献 $t^{iy}=e^{iy\ln t}$ 是个相位因子，对收敛性有影响的是 $\mathrm{Re}\,z=x$，可证明右边的第二个积分收敛. 而对右边第一个积分当 $z=0$ 时，积分下限 $t=0$ 是被积函数的一阶奇点，因此 $\Gamma(z)$ 在 $z=0$ 点不解析，但除 $z=0$ 点外，对 $\mathrm{Re}\,z>0$ 时可证明右边第一个积分收敛. 有兴趣的读者可自证.

下面以 $\Gamma(z)$ 函数为例，给出**复变函数的解析延拓**的概念.

对上面介绍的 $\Gamma(z)$ 函数，只在复平面的右半平面($\mathrm{Re}\, z>0$)上解析，而 $z=0$ 为 $\Gamma(z)$ 的一阶奇点. 我们要问，$\Gamma(z)$ 在复平面的左半边的解析性如何. 如果能把其在左半复平面的孤立奇点都找出来，而其在这部分再也没有奇异性，这样我们可以把 $\Gamma(z)$ 的解析区域从右半平面扩展到除孤立奇点外的左半边的区域中，即把 $\Gamma(z)$ 的解析区域延拓扩大.

由 $\Gamma(z)$ 得定义有

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^z \mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned} \tag{10.1.16}$$

对 $\Gamma(z)$，在 $\mathrm{Re}\, z>0$ 解析，可知在 $\mathrm{Re}\, z>0$ 的区域中 $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$ 为解析函数，由

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \tag{10.1.17}$$

可知，$z=0$ 为 $\Gamma(z)$ 的一阶极点.

则 $\Gamma(z+1)$ 在 $\mathrm{Re}(z+1)>0$ 即 $\mathrm{Re}\, z>-1$，且 $z\neq 0$ 上解析. 即把 $z=0$ 这一孤立奇点除外，可把 $\Gamma(z)$ 的解析区域扩展到 $\mathrm{Re}\, z>-1$ 的区域中.

同理，在 $\mathrm{Re}\, z>-1$ 且 $z\neq 0$ 的区域中，$\Gamma(z+1)$ 解析，且可得

$$\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) \tag{10.1.18}$$

在 $\mathrm{Re}\, z>-1$ 且 $z\neq 0$ 的区域上解析. 有

$$\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(z+2)}{z+1} \tag{10.1.19}$$

表明 $z+1=0$ 即 $z=-1$ 为 $\Gamma(z+1)$ 的一阶极点，则有

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \tag{10.1.20}$$

这就把 $\Gamma(z)$ 从解析区域延拓到 $\mathrm{Re}\, z>-2$ 且 $z\neq 0, z\neq -1$ 的区域中. 同理，可得 $\Gamma(z)$ 函数的一般的关系是

$$\Gamma(z+n+1) = z(z+1)\cdots(z+n)\Gamma(z) \tag{10.1.21}$$

即

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{10.1.22}$$

$z=0,-1,\cdots,-n$ 为 $\Gamma(z)$ 的一阶极点.

因此我们可以把 $\Gamma(z)$ 的解析区域由 $\mathrm{Re}\, z>0$ 的右半复平面延拓到除 $z=0$，

$-1,\cdots,-n,\cdots$单极点外的整个复平面,即$\Gamma(z)$除在实轴上$x=0,-1,\cdots,-n,\cdots$的单极点外的整个复平面上解析,这就是$\Gamma(z)$函数的解析延拓.

下面给出**复变函数解析延拓的定义**:

设复变函数$f_1(z)$在Ω_1内解析,$f_2(z)$在Ω_2内解析,在$\Omega_1\cap\Omega_2$内有$f_1(z)=f_2(z)$,则称$f_2(z)$为$f_1(z)$在Ω_2内的解析延拓.反之可称$f_1(z)$为$f_2(z)$在Ω_1内的解析延拓.

由$\Gamma(z)$函数的定义(10.1.15)式,当$z=1,2,3,\cdots$,利用分部积分可得$\Gamma(n)$的重要表达式:

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{10.1.23}$$

同时由$\Gamma(z)$的定义,可得到多个有用的表达式:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{10.1.24}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\sin\pi z} \tag{10.1.25}$$

当z退化成x时,上两式仍成立.

由(10.1.24)式可得到重要的表达式

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{10.1.26}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{10.1.27}$$

§10.2 Laplace变换的基本性质

一、定理10.2.1:线性定理

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2\fallingdotseq\alpha_1 F_1(p)+\alpha_2 F_2(p) \tag{10.2.1}$$

其中α_1,α_2为常数.由

$$\int_0^\infty[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)]e^{-pt}dt$$

$$=\alpha_1\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}dt+\alpha_2\int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}dt$$

即可得证.

二、定理 10.2.2：延迟定理

$$f(t-\tau) \fallingdotseq \mathrm{e}^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0 \tag{10.2.2}$$

证：

$$\int_0^{\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-p(t-\tau)}\mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathrm{d}t$$

令 $t-\tau=\xi$，则有

$$\int_0^{\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-p\tau}\int_0^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-p\xi}\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$$

此处要求 $\xi \geqslant 0$ 时 $f(t-\tau)$ 存在，当 $t<\tau$ 时，$f(t-\tau)=0$.

三、定理 10.2.3：位移定理

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t) \fallingdotseq F(p+\lambda) \tag{10.2.3}$$

由变换的定义即可得证.

四、定理 10.2.4：卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \fallingdotseq F_1(p)F_2(p) \tag{10.2.4}$$

其中 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 的定义域为 $[0,\infty)$，当 $t<0$ 时，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 为零.

卷积 $f_1(t) * f_2(t)$ 的定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10.2.5}$$

注：此处的积分限为 $\int_0^t$ 与 Fourier 变换中卷积定义的积分很不同，由于 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 的定义域，即有 $f_2(t-\tau)$ 的定义域为 $t-\tau \geqslant 0$，当 $t-\tau<0$ 时，$f_2(t-\tau)=0$，即 $\tau > t$ 时 $f_2=0$，故积分限写成 $\int_0^t$，如果出于书写对称性考虑，则此卷积仍可以写成

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10.2.6}$$

证：

$$\int_0^{\infty} f_1(t) * f_2(t) \cdot e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^{\infty} dt e^{-pt} \int_0^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} d\tau f_1(\tau) \cdot e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f_2(t-\tau) \cdot e^{-p(t-\tau)} dt$$

$$= F_1(p) \cdot F_2(p)$$

五、定理 10.2.5：微分定理

$$f'(t) \fallingdotseq pF(p) - f(0) \tag{10.2.7}$$

$$f''(t) \fallingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \tag{10.2.8}$$

$$f^{(n)}(t) \fallingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{10.2.9}$$

其中 $f'(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$，$f^{(n)}(t) = \dfrac{d^n}{dt^n} f(t)$

$f(0) = f(t)\big|_{t=0}$，$f'(0) = \left.\dfrac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$

$f^{(n)}(0) = \dfrac{d^n}{dt^n} f(t)\big|_{t=0}$

证：

$$f'(t) \fallingdotseq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt$$

$$= f(t) e^{-pt}\big|_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$= pF(p) - f(0)$$

式(10.2.8)、式(10.2.9)同样由多次分部积分可得证.

微分定理在求解微分方程时，是把初值问题都表示出来，这是 Laplace 变换在求解微分方程时显示出来的优越性.

六、定理 10.2.6：标度变换定理

$$f(at) \fallingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0 \tag{10.2.10}$$

由变换的定义容易得证.

七、定理 10.2.7：周期函数变换定理

若 $f(t)=f(t+T)$，T 为函数 $f(t)$ 的周期，则

$$f(t) \doteqdot \frac{\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}} \tag{10.2.11}$$

证：

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

令 $\tau=t-nT$，即 $t=\tau+nT$，有 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tau$，则

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{e}^{-npT}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-npT} \\ &= \frac{\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}} \end{aligned}$$

§ 10.3　Laplace 变换的反演

在利用 Laplace 变换求解微分方程时，由像函数所满足的代数方程解出像函数的表达式. 由像函数利用 Laplace 变换的基本性质和基本的 Laplace 变换，直接求出原函数. 如：

$$1 \doteqdot \frac{1}{p},\quad t \doteqdot \frac{1}{p^2},\quad t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\mathrm{e}^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha},\quad t^n\mathrm{e}^{\alpha t} \doteqdot \frac{n!}{(p-n)^{n+1}}$$

$$\sin \alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2},\quad \cos \alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2+\alpha^2}$$

$$\mathrm{sh}\ \alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},\quad \mathrm{ch}\ \alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

$$t^{\alpha}e^{-\beta t} \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+\beta)^{\alpha+1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p}}$$

此外,加上卷积定理,对简单的问题就能把原函数求出,得到微分方程的解.

如果得到的像函数为有理式,可化为像函数的乘积,用卷积求出原函数,但如果此有理式能化成简单的基本的像函数之和,我们可直接采取待定系数法求解.

例 10.3.1: 求像函数$\dfrac{1}{p^3(p+\alpha)}$的反演.

解: 令 $\dfrac{1}{p^3(p+\alpha)} = \dfrac{A}{p^3} + \dfrac{B}{p^2} + \dfrac{C}{p} + \dfrac{D}{p+\alpha}$

A,B,C,D 为待定系数.

以 p^3 乘等式两边再令 $p\to 0$,可得 $A = \dfrac{1}{\alpha}$.

以 p^3 乘等式两边再对 p 求导一次,令 $p\to 0$,可得 $B = -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

以 p^3 乘等式两边再对 p 求导两次,令 $p\to 0$,可得 $C = \dfrac{1}{\alpha^3}$.

以 p^3 乘等式两边再对 p 求导三次,令 $p\to 0$,可得 $D = -\dfrac{1}{\alpha^3}$.

(亦可从 D 是 $p=-\alpha$ 点的留数,而由函数$\dfrac{1}{p^3(p+\alpha)}$的分解表达式,其留数之和为零,直接得到 $D = -C = -\dfrac{1}{\alpha^3}$.)

因此得到 $\dfrac{1}{p^3(p+\alpha)} \doteqdot \dfrac{1}{2\alpha}t^2 - \dfrac{1}{\alpha^2}t + \dfrac{1}{\alpha^3} - \dfrac{1}{\alpha^3}e^{-\alpha t}$.

对复杂的像函数可结合像函数的求导公式,像函数的积分公式和直接由像函数求逆变换的定理把原函数求出.

1. 对像函数的求导公式

设 $F(p) \doteqdot f(t)$,则有

$$F^{(n)}(p) = \frac{d^n}{dp^n}\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty}(-1)^n t^n f(t)e^{-pt}dt$$

可得:
$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t) \tag{10.3.1}$$

2. 对像函数的积分公式

设 $F(p) \doteqdot f(t)$,则有

$$\int_p^{\infty} F(p)\,\mathrm{d}p \doteqdot \frac{f(t)}{t} \tag{10.3.2}$$

此公式应用的条件：积分路线在 $\mathrm{Re}(p) > s_0$ 的区域中，s_0 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换的收敛横坐标，该积分收敛，且当 $t \to 0$ 时 $\left|\dfrac{f(t)}{t}\right|$ 有界.

例 10.3.2：由

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$$

有

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} \frac{1}{p^2+1}\mathrm{d}p = \operatorname{arctg} p \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$$

3. 由像函数求逆变换的定理

定理 10.3.1：设 $f(t) \doteqdot F(p)$，当 $t>0$ 时，在 $f(t)$ 的每一个连续点处均有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \tag{10.3.3}$$

其中 $\mathrm{Re}\, p > s_0$，s_0 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换的收敛横坐标，积分路线为右半平面中任一条平行于虚轴的直线 $\mathrm{Re}\, p = \beta(\beta > s_0)$，如图 10.3.1.

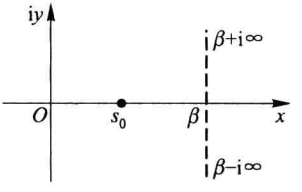


图 10.3.1

此定理在此不给出证明，但用此定理可以给出用复变函数的积分直接由像函数求原函数的方法.

§10.4　Laplace 变换的应用

Laplace 变换通常用来解具有初值问题的常微分方程和偏微分方程. 它把微分方程的求解问题，变成方程解的像函数的代数方程的求解问题. 由代数方程解出的像函数再通过 Laplace 变换的反演求得此像函数的原函数，即微分方程的解.

那么由像函数反演得到的原函数一定是微分方程的解吗？这是 Laplace 变

换反演的唯一性问题,即如果一个像函数 $F(p)$,是否存在两个不同的原函数 $f_1(t)$和$f_2(t)$,即$f_1(t)\fallingdotseq F(p)$,$f_2(t)\fallingdotseq F(p)$呢? 一般而言,Laplace 变换的反演不是唯一的,但如果原函数是连续函数的话,则其像函数是唯一的. 因此物理学中和工程中解微分方程时,都约定其解为连续函数,也就是说,在我们的问题中 Laplace 变换的反演是唯一的.

下面举例如何应用 Laplace 变换求解常微分方程.

例 10.4.1: 求解方程

$$\begin{cases} y''(t) - k^2 y(t) = f(t), & t > 0 \\ y(0) = c_0, y'(0) = c_1 \end{cases} \tag{10.4.1}$$

解: 对 $y(t)$和$f(t)$作 Laplace 变换

$$y(t) \fallingdotseq Y(p)$$

$$f(t) \fallingdotseq F(p)$$

因为$f(t)$为已知函数,则 $F(p)$为已知的.

由变换的性质可知

$$y''(t) \fallingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)$$

故原方程变为关于 $Y(p)$的代数方程

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) - k^2 Y(p) = F(p) \tag{10.4.2}$$

可得 $Y(p)$的解为

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 - k^2} + c_0 \frac{p}{p^2 - k^2} + \frac{c_1}{p^2 - k^2} \tag{10.4.3}$$

此等式右边各项皆为像函数. 一般可通过 Laplace 变换表求出原函数,由

$$\frac{p}{p^2 - k^2} \fallingdotseq \operatorname{ch} kt, \quad \frac{k}{p^2 - k^2} \fallingdotseq \operatorname{sh} kt$$

而$\dfrac{F(p)}{p^2 - k^2}$项可化为两个像函数之积,再利用卷积定理求出

$$\frac{F(p)}{P^2 - k^2} = \frac{1}{k} F(p) \cdot \frac{k}{P^2 - k^2}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{k} \int_0^t f(t) \cdot \operatorname{sh} k(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

故原方程的解为

$$y(t) = c_0 \operatorname{ch} kt + \frac{c_1}{k} \operatorname{sh} kt + \frac{1}{k} \int_0^t f(t) \operatorname{sh} k(t - \tau) \mathrm{d}\tau \tag{10.4.4}$$

例 10.4.2：一质量为 m 的物体，可视为一质点，与一弹性系数为常数 k 的弹簧连接. 同时物体受一外力 $f(t)$ 的作用和与瞬时速度成正比的阻力 $\mu(t)$ 的作用，如图 10.4.1 所示. 设 x 为质点 m 的坐标，当 $t=0$ 时质点静止且取其为 $x(t=0)=x_0=0$，求质点的运动.

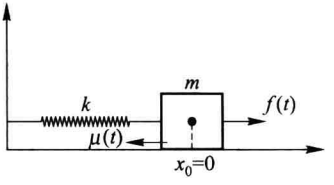


图 10.4.1

解：设质点受得阻力 $\mu=-\beta x'(t)$，则运动方程为

$$\begin{cases} mx''(t) = f(t) - \beta x'(t) - kx(t) \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{10.4.5}$$

对方程作 Laplace 变换，设 $x(t)\fallingdotseq X(p)$，$f(t)\fallingdotseq F(p)$，则像函数满足的方程为

$$m[p^2X(p) - pX(0) - X'(0)] + \beta[pX(p) - X(0)] + kX(p) = F(p) \tag{10.4.6}$$

可得

$$X(p) = \frac{F(p)}{mp^2 + \beta p + k} = \frac{F(p)}{m\left[\left(p + \dfrac{\beta}{2m}\right)^2 + R\right]} \tag{10.4.7}$$

其中

$$R = \frac{k}{m} - \frac{\beta}{4m^2} \tag{10.4.8}$$

由于像函数的形式决定反演后的原函数的形式，故对 R 要进行讨论，分三种情况：

(1) $R>0$，设 $R=\omega^2$，则

$$\frac{1}{\left[\left(p + \dfrac{\beta}{2m}\right)^2 + \omega^2\right]} \fallingdotseq \mathrm{e}^{\frac{-\beta t}{2m}} \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

由卷积定理可得

$$x(t) = \frac{1}{\omega m}\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2m}(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10.4.9}$$

此解为一般的阻尼运动.

(2) $R=0$,

$$\frac{1}{\left[\left(p+\frac{\beta}{2m}\right)^2\right]} \fallingdotseq t\mathrm{e}^{-\frac{\beta t}{2m}}$$

由卷积定理可得

$$x(t) = \frac{1}{m}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2m}(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \tag{10.4.10}$$

此解为临界阻尼运动.

(3) $R<0$,设 $R=-\alpha^2$,则

$$\frac{1}{\left(p+\frac{\beta}{2m}\right)^2-\alpha^2} \fallingdotseq \mathrm{e}^{\frac{-\beta t}{2m}}\frac{1}{\alpha}\mathrm{sh}\,\alpha t$$

由卷积定理可得

$$x(t) = \frac{1}{\alpha m}\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2m}(t-\tau)}\mathrm{sh}\alpha(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10.4.11}$$

此解为过阻尼运动.

当然当 $f(t)=0$ 时,由初始条件可知,质点停止在 $x=0$ 点,三种解与结果无矛盾. 对 R 的讨论只表明该系统的一种力学特性,与外力的形式无关.

第十章习题

10.1 求下列函数的 Laplace 变换的像函数.

(1) $\sinh\omega t$　　(2) $\cosh\omega t$

(3) $\cos(\omega t+\alpha)$　　(4) $\cos^2\omega t$

(5) $\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t, \alpha>0$　　(6) $\dfrac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}, a^2\neq b^2$

10.2 若一函数 $f(t)$,其 Laplace 的像函数为 $F(p)$,

请证明:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

10.3 已知下列 Laplace 变换的像函数 $F(p)$,求原函数 $f(t)$:

(1) $F(p)=\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}, a\neq b$　　(2) $F(p)=\dfrac{3p}{p^2-1}$

(3) $F(p)=\dfrac{E}{Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}}$，$E,L,R,C$ 都为大于零的实常数

(4) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$，$a^2\neq b^2$

(5) $F(p)=\dfrac{e^{-\alpha p}}{p^2},\alpha>0$　　(6) $F(p)=\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{e^{-\alpha p}}{1-e^{-\alpha p}}$，$\alpha>0$

10.4　已知误差函数的定义为：

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\tau^2}d\tau$$

试求 $\operatorname{erf}(\sqrt{t})$ 的像函数.

10.5　用 Laplace 变换求下列积分：

(1) $f(t)=\int_0^\infty \dfrac{\sin tx}{x}dx$　　(2) $f(t)=\int_0^\infty \dfrac{\sin tx}{x(x^2+1)}dx$

(3) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$

10.6　用 Laplace 变换求解下列常微分方程，其中 $y=y(t),z=z(t)$

(1) $\begin{cases}y''-4y=0\\ y(0)=-1,y'(0)=1\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}y'''-y''+4y'-4y=t\\ y(0)=0,y'(0)=0,y''(0)=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}y'''+3y''+3y'+y=6e^{-t}\\ y(0)=0,y'(0)=0,y''(0)=0\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}y'+y+2z'+2z=e^{-t}\\ 3y'-y+4z'+z=0\\ y(0)=-1\\ z(0)=0\end{cases}$

10.7　用 Laplace 变换求解 $T(t)$ 的方程

(1) $\begin{cases}T''+\dfrac{\pi^2a^2}{l^2}T=A\sin\omega t\\ T(0)=0,T'(0)=0\end{cases}$

其中 a,A,ω 均为正的常数.

(2) $\begin{cases}T'+\omega^2a^2T=g(t)\\ T(0)=0\end{cases}$

其中 $g(t)$ 为已知函数，ω、a 为正的常数.

第十一章 δ 函 数

在物理学中,我们用数学手段处理一些物理的理论模型时,经常要遇到如"点电荷","点质量"等所谓的"点源"问题. 对这些"点源"量,如果要保持"密度"的概念,就必须研究所出现的密度为无穷的量.

例如在电学中我们都熟悉的电荷量 $q = \int_V \rho \mathrm{d}V$,ρ 是电荷的密度分布. 如果电荷 q 只是一维的均匀分布在 Δx 区间上,则电荷密度为 $\rho = \frac{q}{\Delta x}$,而在 Δx 区间外的电荷密度处处为零. 当 Δx 越小时,ρ 越大,ρ 作为 Δx 的函数总是在 $(\Delta x)^{-1}$ 的数量级,当 $\Delta x \to 0$ 的极限情况下,就是我们通常所说的点电荷,此时的 $\rho \to \infty$,但它的电荷量却是有限的 q, 即 $q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \mathrm{d}x$. 因此点电荷的密度 $\rho(x)$ 与通常数学分析中的函数性质是截然不同的. 数学分析中,一个函数在某奇异点时(即其值为 ∞ 时),它的积分也是奇异的,即发散的. 因此物理上像点电荷密度这一类无穷大的量不可能是通常意义下的函数. 为了描述这一类物理量,Dirac(狄拉克)引入了 δ 函数,它不是通常意义下的函数,它是广义函数的一种.

§11.1 δ 函数的定义

定义 11.1.1: δ 函数是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 区间上的一个函数,对于某一点 x_0,有

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \tag{11.1.1}$$

且

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & x_0 \in (a,b) \\ 0 & x_0 \notin (a,b) \end{cases} \tag{11.1.2}$$

以上是一维空间中 δ 函数的定义,对于二维、三维空间的 δ 函数可把定义做维数的推广即可.

由上面δ函数的定义我们知道,对任何一个小量$\varepsilon>0$,都有

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1 \tag{11.1.3}$$

因此对一维点电荷的密度$\rho(x)$很容易用δ函数表示出来,在x_0点有点电荷q,则

$$\rho(x)=q\delta(x-x_0) \tag{11.1.4}$$

且有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}q\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=q \tag{11.1.5}$$

从数学上看,对一维阶跃函数(Heaviside函数)求微商,就得到δ函数.

考虑Heaviside函数

$$H(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{11.1.6}$$

对$H(x)$求导有

$$H'(x)=\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases} \tag{11.1.7}$$

对$a<0<b$,有

$$\int_a^b H'(x)\mathrm{d}x=H(x)\Big|_a^b=1 \tag{11.1.8}$$

因此由δ函数的定义可知$H'(x)=\delta(x)$.

从另一方面看,δ函数可作为带参数的连续函数的极限.考虑带参数α的连续函数

$$\delta(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha k}\cos(kx)\mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2} \tag{11.1.9}$$

当$\alpha\to 0$时,有

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases} \tag{11.1.10}$$

且当$a<0<b$时,有

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\int_a^b\delta(x,\alpha)\mathrm{d}x&=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x\\ &=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\right]_a^b=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &=1\end{aligned} \tag{11.1.11}$$

所以

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha) = \delta(x) \tag{11.1.12}$$

从数学上可构造各种形式不同的 δ 函数：

例 11.1.1：
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) \tag{11.1.13}$$

其中

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x<0,\ x>\varepsilon \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 0\leqslant x\leqslant\varepsilon \end{cases}$$

例 11.1.2：$\delta(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$ (11.1.14)

例 11.1.3：$\delta(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\int_0^n\cos(kx)\,dk = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(nx)}{\pi x}$ (11.1.15)

以上三个例子留给读者作为练习，自证.

§11.2 δ 函数的性质

(1) 对连续函数 $f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0) \tag{11.2.1}$$

证：设 ε 为任意小的一个正数，由 δ 函数的定义有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(x-x_0)\,dx$$

由积分中值定理，$\exists\xi\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$，有

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(\xi)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\,dx = f(\xi)$$

当 $\varepsilon\to 0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\xi\to x_0$，即可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

得证.

此性质是 δ 函数在应用中最重要的性质，它说明了用 $\delta(x-x_0)$ 乘上某个连续函数 $f(x)$ 并对所有的 x 进行积分的过程等于用 x_0 代替变量 x，即把 $f(x)\to f(x_0)$.

人们通常也把具有此积分性质的函数认定为δ函数，故此性质也可作为认定δ函数的判据.

例 11.2.1：对 Heaviside 函数

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

当 $a<0<b$ 时，对任一连续函数 $f(x)$，有

$$\int_a^b f(x)H'(x)\mathrm{d}x = f(x)H(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)H(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(b) - \int_0^b f'(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

故可知　$H'(x)=\delta(x)$.

(2) δ函数为偶函数，

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{11.2.2}$$

由 δ 函数的定义即可推出.

(3)
$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0) \tag{11.2.3}$$

由 δ 函数的定义即可得证.

(4)
$$x\delta(x) = 0 \tag{11.2.4}$$

证：设任一连续函数 $f(x)$，对 $f(x)x$ 可视为另一连续函数，由性质一，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)\mathrm{d}x = 0$$

即在积分中，被积函数中出现 $x\delta(x)$ 时，此时的 $x\delta(x)$ 与“0”等价.

(5)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_2)\delta(x-x_1)\mathrm{d}x = \delta(x_1-x_2) \tag{11.2.5}$$

这是性质一的推广，把 $\delta(x-x_2)$ 看作特殊的 $f(x)$ 即可得此关系.

(6)
$$\delta(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\varphi'(x_i)|}\delta(x-x_i) \tag{11.2.6}$$

其中 $x_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为 $\varphi(x)=0$ 的单根，$\varphi'(x_i)$ 为 $\varphi(x)$ 的导数在 x_i 的值.

证：由δ函数的定义

$$\delta(\varphi(x)) = \begin{cases} 0 & \varphi(x) \neq 0 \quad \text{即 } x \neq x_i \\ \infty & \varphi(x) = 0 \quad \text{即 } x = x_i \end{cases} \qquad i = 1,2,3,\cdots,k$$

可把 $\delta(\varphi(x))$ 写成如下的形式

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{k} C_i\delta(x-x_i)$$

为确定每个 $\delta(x-x_i)$ 的系数 C_i，我们设 x_i 的邻域 $[x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon]$，使得当 $x_j \neq x_i$ 时，$x_j \notin [x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon]$ 则有

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} C_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta(x-x_i)\,\mathrm{d}x = C_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta(x-x_i)\,\mathrm{d}x = C_i$$

由 $\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$，有 $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\varphi'(x)}$. 则可得

$$\int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta(\varphi(x)) \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\varphi'(x)} = C_i$$

由中值定理，令 $\xi \in [x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon]$，有

$$\int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta(\varphi(x)) \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{\varphi'(\xi)} \int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x)$$

由于 x_i 为 $\varphi(x)=0$ 的单根，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\varphi(x)$ 可视为在 $[x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon]$ 上的单调函数.

若 $\varphi'(x_i)>0$，则 $\varphi(x_i+\varepsilon)>\varphi(x_i-\varepsilon)$，有

$$\int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) = 1$$

若 $\varphi'(x_i)<0$，则 $\varphi(x_i+\varepsilon)<\varphi(x_i-\varepsilon)$，有

$$\int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) = -\int_{\varphi(x_i+\varepsilon)}^{\varphi(x_i-\varepsilon)} \delta(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) = -1$$

故可得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta(\varphi(x)) \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{|\varphi'(x_i)|} = C_i$$

证毕.

作为此性质的重要例子，有

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), a \text{ 为常数.} \tag{11.2.7}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x+a)+\delta(x-a)], a \text{ 为常数.} \tag{11.2.8}$$

*§11.3　δ函数的导数

由于δ函数是广义函数,故其导数不是在一般数学分析意义下的导数.δ函数的导数$\delta'(x)$是由δ函数作为带参数的连续函数极限表达式的求导引入的.

(1) 对于带参数的连续函数(11.1.9)式

$$\delta(x,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha k}\cos(kx)\,dk = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2} \tag{11.3.1}$$

有$\lim\limits_{\alpha\to 0}\delta(\alpha,x) = \delta(x)$,因此由(11.3.1)式对$x$求导有

$$\frac{\partial\delta(x,\alpha)}{\partial x} = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha k}k\sin(kx)\,dk = -\frac{2}{\pi}\frac{\alpha x}{(\alpha^2+x^2)^2} \tag{11.3.2}$$

则定义δ函数的导数$\delta'(x)$为

$$\delta'(x) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial\delta(x,\alpha)}{\partial x} = \lim_{\alpha\to 0} -\frac{2}{\pi}\frac{\alpha x}{(\alpha^2+x^2)^2} \tag{11.3.3}$$

由此定义式我们可以看出

$$\delta'(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \tag{11.3.4}$$

即$\delta'(x)$仍为广义函数.

(2) δ函数的导数$\delta'(x-x_0)$在积分运算中作为被积函数,可进行如下的运算

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\delta'(x-x_0)\,dx &= \int_a^b f(x)\,d\delta(x-x_0) \\ &= f(x)\delta(x-x_0)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\delta'(x-x_0)\,dx \quad (a < x_0 < b) \\ &= -f'(x_0)\end{aligned} \tag{11.3.5}$$

(3) 由δ函数导数的定义可知,$\delta'(x)$为奇函数

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \tag{11.3.6}$$

(4) 由δ函数导数的定义可推广到δ函数的n阶导数

$$\delta^{(n)}(x-x_0) = \frac{\partial}{\partial x}\delta^{(n-1)}(x-x_0) \tag{11.3.7}$$

并可得其在积分中的运算为连续分部积分,可得

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(x_0), \quad a < x_0 < b \tag{11.3.8}$$

§11.4 三维 δ 函数

定义 11.4.1：作为一维 δ 函数的推广，三维 δ 函数定义为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty, & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases} \tag{11.4.1}$$

且

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1, \quad \boldsymbol{r}_0 \in V \tag{11.4.2}$$

三维 δ 函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 在物理学中是经常出现的，在不同的坐标系中，$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 有不同的表示形式.

在三维 Cartesian(笛卡儿)坐标系 (x,y,z) 中

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{11.4.3}$$

在三维球坐标系 (r,θ,φ) 中，其坐标曲线的度量系数为：$h_r = 1$，$h_\theta = r$，$h_\varphi = r\sin\theta$，则 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) &= \frac{1}{h_r}\delta(r-r_0)\frac{1}{h_\theta}\delta(\theta-\theta_0)\frac{1}{h_\varphi}\delta(\varphi-\varphi_0) \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0) \end{aligned} \tag{11.4.4}$$

在三维柱坐标系 (ρ,φ,z) 中，其坐标曲线的度量系数为：$h_\rho = 1$，$h_\varphi = \rho$，$h_z = 1$，则 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) &= \frac{1}{h_\rho}\delta(\rho-\rho_0)\frac{1}{h_\varphi}\delta(\varphi-\varphi_0)\frac{1}{h_z}\delta(z-z_0) \\ &= \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0) \end{aligned} \tag{11.4.5}$$

* 对二维的 δ 函数的表达式，把三维表达式中去掉相应的一维及其相应的度量系数，即可得到相应二维的表达式，在此不一一列出，

命题 11.4.1：对三维 δ 函数有一重要的表达式

$$\delta(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r} \tag{11.4.6}$$

或

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{11.4.7}$$

证：取球坐标(r,θ,φ)，由向量分析中的计算

当$r\neq 0$时：$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

当$r=0$时：$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \infty$

取坐标原点为球心的一个球体V，其表面为球面∂V，∂V的面元为$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，作积分

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \int_V \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$= \int_{\partial V} \frac{-1}{r^2}\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{r^2}\int_{\partial V}\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{r^2}4\pi r^2 = -4\pi$$

即可得：

$$\int_V \frac{-1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = 1$$

由δ函数的判据可得表达式(11.4.6)，命题得证.

§11.5　δ函数的Fourier变换及Fourier级数展开

一、δ函数的Fourier变换

由函数$f(x)$的Fourier变换

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{11.5.1}$$

$$C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{11.5.2}$$

可得

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}\mathrm{d}x'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}x'$$

由 δ 函数的性质可知

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x - x')\,\mathrm{d}x'$$

两式相比较可得

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\,\mathrm{d}k \tag{11.5.3}$$

这一表达式就是 δ 函数的 Fourier 变换式.

我们很容易得到 δ 函数的 Fourier 变换的像函数

$$F[\delta(x - x')] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x'-x')} = 1 \tag{11.5.4}$$

对于三维的 δ 函数,其 Fourier 变换式为

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{11.5.5}$$

例 11.5.1: δ 函数的 Fourier 变换式在理论公式证明中的应用.

证明 Parseval(帕萨瓦)关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G^*(k)\,\mathrm{d}k \tag{11.5.6}$$

其中,$f(x)$的 Fourier 变换式为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \tag{11.5.7}$$

$g(x)$的 Fourier 变换式为

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \tag{11.5.8}$$

$g(x)$的复共轭 $g^*(x)$的 Fourier 变换式为

$$g^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \tag{11.5.9}$$

证:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G^*(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\,\mathrm{d}k'\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k' F(k)G^*(k')\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k F(k) \int_{-\infty}^{\infty} G^*(k')\delta(k-k')\mathrm{d}k'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\ G^*(k')\mathrm{d}k$$

关系式得证.

Parseval 关系式或称为 Parseval 公式在物理学的理论证明中和在频谱分析的应用中,特别在小波变换中经常用到.

二、δ 函数的 Fourier 级数展开式

设$\{\varphi_i(x)\}$是向量空间 L 中的一组正交归一的函数基,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^*(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij} \tag{11.5.10}$$

则任一函数$f(x) \in L$,可在这一组基上展开

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i\varphi_i(x) \tag{11.5.11}$$

展开系数 C_i 为

$$C_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_i^*(x)\mathrm{d}x \tag{11.5.12}$$

则可得

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\varphi_i^*(x')\mathrm{d}x'\right)\varphi_i(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i^*(x')\varphi_i(x)\right)\mathrm{d}x'$$

由 δ 函数的性质有

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x'$$

与上式比较可得

$$\delta(x-x') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i^*(x')\varphi_i(x) \tag{11.5.13}$$

这是 δ 函数在正交归一函数系$\{\varphi_i(x)\}$中的展开式,也称为 δ 函数的广义 Fourier 级数展式. 它把 δ 函数表示成离散的级数形式.

下面例举几个常用的 δ 函数的 Fourier 级数展开式.

例 11.5.2: 若 $x \in [0, l]$,对一个偶函数 $f(x)$,它可在正交函数系

$\left\{\cos\dfrac{k\pi x}{l}\right\}$中展开

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

因此

$$f(x) = \int_0^l f(x')\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x'}{l}\right)\mathrm{d}x'$$

即可得

$$\delta(x - x') = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x'}{l} \tag{11.5.14}$$

这就是 δ 函数在$\left\{\cos\dfrac{k\pi x}{l}\right\}$中的 Fourier 级数表达式.

例 11.5.3：用同样的方法可求得 δ 函数在正交函数系$\left\{\sin\dfrac{k\pi x}{l}\right\}$中的Fourier级数表达式

$$\delta(x - x') = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x'}{l} \tag{11.5.15}$$

例 11.5.4：同样，在正交函数系$\{e^{i\frac{k\pi x}{l}}\}$中，δ 函数的 Fourier 级数表达式为

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k\pi}{l}(x-x')} \tag{11.5.16}$$

δ 函数的 Fourier 变换及其广义 Fourier 级数展开式，在物理的理论与计算中是经常出现的，特别在现代频谱分析中有着十分广泛的应用.

第十一章习题

11.1 若函数 $\delta_\varepsilon(x)$的定义为

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} 0 & x > \varepsilon, x < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 \leqslant x < \varepsilon \end{cases}$$

请验证 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) = \delta(x)$

11.2　请验证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2} = \delta(x)$$

11.3　请验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^n \cos kx\mathrm{d}k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\pi}{\pi x}$$

$$= \delta(x)$$

11.4　设函数 $f(t) = \cos xt$ 的 Laplace 变换为 $F(p)$，即

$$F(p) \doteqdot \cos xt$$

请验证

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi}F(p) = \delta(x)$$

11.5　对 Heaviside 函数

$$H(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t \geqslant \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

请验证

$$H'(t-\tau) = \delta(t-\tau),$$

并以此求 $\delta(t-\tau)$ 的 Laplace 变换的像函数.

11.6　已知某一频谱为：

$$f(\omega) = \frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}2\pi N\right)$$

请验证

$$\lim_{N\to\infty} f(\omega) = A\delta(\omega-\omega_0) - A\delta(\omega+\omega_0)$$

其中 A、ω_0 为正的常数，N 为正整数.

*第十二章　小波变换初步

二百年来，Fourier 分析是频谱分析的重要数学手段. 前面给出的 Fourier 变换，是描述定义在一对共轭变量(x,k)上的函数$\{f(x),C(k)\}$上的积分变换

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{12.0.1}$$

$$C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{12.0.2}$$

(12.0.2)式中$C(k)=F[f(x)]$称为函数$f(x)$的 Fourier 变换，而(12.0.1)式称为其逆变换.

当(x,k)这对共轭变量是表示物理上的位形空间变量x和波数空间变量k时，此时的 Fourier 变换核是一个无量纲的函数$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$. 在量子物理学中常用到的 Fourier 变换是位形空间x与动量空间p的变换，此时的 Fourier 变换核为$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}$($\hbar$为 Planck(普朗克)常数)，亦是无量纲的函数.

在频谱分析中，对具体的问题，如果我们所求的是空间与频率关系的分析，采用了共轭变量为(x,ω)，如果还要求其 Fourier 变换核是无量纲的函数时，其变换核$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu x\omega}$，$\mu$为量纲平衡常数，$\mu$的量纲为速度的倒数的量纲，即$[L]^{-1}[T]$.

由于小波分析是现代常用的频谱分析，它通常是从时频分析的角度来谈小波变换的. 对时频分析中的共轭变量(t,ω)，信号记为$f(t)$，则其 Fourier 变换记为$\hat{f}(\omega)$，即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{12.0.3}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{12.0.4}$$

其变换核$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$是一无量纲的函数. 这一变换告诉我们，对任何一个复杂的信号$f(t)$在标准函数基$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\omega\in R\}$进行带权重的展开，其权重函数即为$f(t)$的 Fourier 变换$\hat{f}(\omega)$，对权重函数$\hat{f}(\omega)$的研究是 Fourier 时频分析的主要内容. Fourier 频谱分析反映了信号(或函数)$f(t)$的整体性质，即信号在其定义域$t\in(-\infty,\infty)$上的频率特征. 但对频谱特征$\hat{f}(\omega)$的研究，必须由全时间域的信号$f(t)$的全部信息来定，即任何时刻的$f(t)$都会影响到整个频谱. 反过来，在研究

反问题时,要知道全部频率 $\omega \in (-\infty, \infty)$ 的频谱才能决定信号波 $f(t)$ 的情况. 这是 Fourier 分析的很大的局限性.

在实际问题中,我们往往关心的是信号的局域特征,即在某一时间段内的信号及某一段频率域上的频谱的特征. 要研究我们感兴趣的频段上的各种频率信号的分辨率问题,这种把 Fourier 分析局域化的思想就导致小波变换.

§12.1 Gabor(伽博)变换

为了把 Fourier 分析局域化,1946 年 Gabor 首先提出了"窗口"Fourier 变换(在时-频分析中,也称为"短时"Fourier 变换),Gabor 引入了窗口函数 $g_a^b(t)$,它是一个权重函数,即对信号 $f(t)$ 在不同时间区域中给出权重函数 $g_a^b(t)$. 但它要求这一权重函数在反变换时在频率域上也要是个权重函数,有这样的对应关系才能满足研究局域频谱特征或是由频谱研究信号的局域特征的需求.

一、窗口函数的选取

Gabor 首先选用的窗口函数是归一的 Gauss 型函数

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{1}{4a}t^2}, \quad a > 0 \tag{12.1.1}$$

其 Fourier 变换为

$$\hat{g}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{1}{4a}t^2} e^{-i\omega t} dt = e^{-a\omega^2} \tag{12.1.2}$$

$g_a(t)$ 是一个窗口中心为 $t=0$ 的 Gauss 型函数,而频率 ω 的窗口中心亦为 $\omega=0$.

二、引入窗口中心参数的窗口函数

引入窗口中心参数 b,则窗口函数为

$$g_a^b(t-b) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{1}{4a}(t-b)^2} \tag{12.1.3}$$

则其 Fourier 变换为

$$\hat{g}_a^b(\omega) = e^{-a\omega^2} e^{-i\omega b} = e^{-a\left(\omega + i\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}} \tag{12.1.4}$$

三、Gabor 变换的定义

定义 12.1.1: 对一个定义在 $t \in (-\infty, \infty)$ 上的信号 $f(t)$ 的 Gabor 变换为

$$\hat{g}_f(a,b)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_a^b(t-b) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{1}{4a}(t-b)^2} e^{-i\omega t} dt \qquad (12.1.5)$$

这一变换给出信号 $f(t)$ 在 $t=b$ 附近的频谱的性质.

由 Gauss 函数的性质,我们有

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4a}(t-b)^2} db = 1 \qquad (12.1.6)$$

故有

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} db f(t) g_a^b(t-b) e^{-i\omega t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} db \hat{g}_f(a,b)(\omega) \qquad (12.1.7)$$

则可得 Gabor 变换的反演公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_f(a,b)(\omega) e^{i\omega t} db \qquad (12.1.8)$$

四、窗口的中心和窗口宽度

为了定量研究局域的频谱特征,我们必须给"窗口"一个定量化的定义.

定义 12.1.2: 窗口中心的定义:

对一信号 $f(t)$ 及其频谱(即其 Fourier 变换)$\hat{f}(\omega)$,信号 $f(t)$ 的中心为

$$t_f = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt \qquad (12.1.9)$$

其频谱 $\hat{f}(\omega)$ 的中心为

$$\omega_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \qquad (12.1.10)$$

其中

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \qquad (12.1.11)$$

$$\|\hat{f}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \qquad (12.1.12)$$

以上窗口中心的定义是以信号的模方 $|f(t)|^2$ 及其频谱的模方 $|\hat{f}(\omega)|^2$ 为权重给出的一种 t 和 ω 的平均值. 以同样的思想可定义信号 $f(t)$ 的窗口宽度.

定义 12.1.3：窗口宽度的定义：

信号$f(t)$的窗口宽度为$2\Delta_f$和频谱$\hat{f}(\omega)$的窗口宽度$2\Delta_{\hat{f}}$，则它们的半宽度为

$$\Delta_f = \left(\frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}(t-t_f)^2|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \tag{12.1.13}$$

$$\Delta_{\hat{f}} = \left(\frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_{\hat{f}})^2|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2} \tag{12.1.14}$$

则半宽度的意义是以信号的模方$|f(t)|^2$和以频谱的模方$|\hat{f}(\omega)|^2$为权重的信号$f(t)$所对应的时间t和上面所定义的信号中心t_f的方均根差，及在频率域ω上频谱$\hat{f}(\omega)$所对应的ω与$\omega_{\hat{f}}$的方均根差.

下面举例说明窗口的一个直观概念. 为简单起见，我们计算坐标原点即$t=0$、$b=0$的窗口，则窗口函数为

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4a}t^2},\quad a>0 \tag{12.1.15}$$

有

$$\hat{g}_a(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4a}t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-a\omega^2} \tag{12.1.16}$$

可计算得窗口的中心位置$(t_{g_a},\omega_{\hat{g}_a})$

$$t_{g_a} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4a}t^2}\mathrm{d}t = 0 \tag{12.1.17}$$

$$\omega_{\hat{g}_a} = \int_{-\infty}^{\infty}\omega\mathrm{e}^{-a\omega^2}\mathrm{d}\omega = 0 \tag{12.1.18}$$

而窗口的半宽度为

$$\Delta_{g_a} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4a}t^2}\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \sqrt{a} \tag{12.1.19}$$

$$\Delta_{\hat{g}_a} = \left(\frac{1}{\|\hat{g}_a(\omega)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\mathrm{e}^{-a\omega^2}\mathrm{d}\omega\right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \tag{12.1.20}$$

故窗口的面积为

$$2\Delta_{g_a}\times 2\Delta_{\hat{g}_a} = 2 \tag{12.1.21}$$

从上面的分析可以看出一个信号$f(t)$的 Gabor 变换，不仅包含了$f(t)$的全部信息，而且可以分析信号的局部特征. 窗口中心b可随我们的需要任意挑选，即此窗口参数b是窗口中心平移的参数.

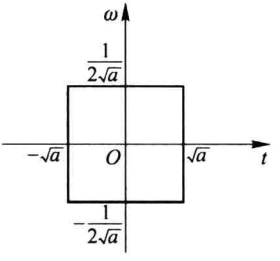


图 12.1.1

但 Gabor 变换存在很大的局限性，即它的窗口的宽度是由平均取值决定的，在整个时间域 $t \in (-\infty, \infty)$ 上是不变的，在整个频率域上也是不变的. 这不符合我们实际信号频谱分析中对信号分辨率的要求，我们希望频谱中频率愈高时其对应的窗口宽度愈窄，频谱中频率愈低的区域其对应的窗口宽度愈宽. 这一实际的需求就导致既能保证 Gabor 变换频谱分析局域化的基本性质，又能保证窗口宽度随频率的变化而变化的小波变换.

§12.2　小 波 变 换

定义 12.2.1：小波变换：

设信号 $f(t)$ 为平方可积函数，即 $f(t) \in L^2(R)$，则 $f(t)$ 的小波变换（或称积分小波变换）为

$$\begin{aligned} W_f(a,b) &= \langle \psi_{a,b}, f \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)^* f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a、b \in R \end{aligned} \tag{12.2.1}$$

其中 $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)^*$ 为 $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 的复共轭，而

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{12.2.2}$$

要求 $\psi(t) \in L^2(R)$ 并要求 $\psi(t)$ 的 Fourier 像 $\hat{\psi}(\omega)$ 满足

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} \mathrm{d}\omega < \infty \tag{12.2.3}$$

则我们称 $\psi(t)$ 为小波母函数或称为一个基本小波，而称 $\psi_{a,b}(t)$ 为母函数 $\psi(t)$ 生成的依赖于参数 a、b 的连续小波.

命题 12.2.1：对两个信号 $f(t),g(t)\in L^2(R)$，它们的小波变换 $W_f(a,b)$ 和 $W_g(a,b)$ 满足广义 Parseval 关系式(或称广义 Parseval 等式)：

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}bW_g^*(a,b)W_f(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}g^*(t)f(t)\mathrm{d}t \quad (12.2.4)$$

证：由小波变换函数的定义 $\psi_{a,b}(t)$，其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{a,b}(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega\left(\frac{t-b}{a}+\frac{b}{a}\right)}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)a\mathrm{d}\frac{t-b}{a}\\&=\sqrt{|a|}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega}\hat{\psi}(a\omega)\end{aligned}$$

则有

$$W_f(a,b)=\langle\psi_{a,b},f\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{\psi}_{a,b}(\omega),\hat{f}(\omega)\rangle$$

$$=\frac{\sqrt{|a|}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}^*(a\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}b\omega}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega$$

其中等式第二步用到 Fourier 变换的 Parseval 关系即 Parseval 等式. 因此有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}bW_g^*(a,b)W_f(a,b)\\&=\frac{1}{C_\psi}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|a|}{a^2}\mathrm{d}a\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}^*(a\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}b\omega}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}^*(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega'}\hat{\psi}(a\omega')\mathrm{d}\omega'\\&=\frac{1}{C_\psi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|}\mathrm{d}a\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega')\hat{\psi}^*(a\omega)\psi(a\omega')\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b(\omega-\omega')}\mathrm{d}b\\&=\frac{1}{C_\psi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|}\mathrm{d}a\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega)|\hat{\psi}(a\omega)|^2\\&=\frac{1}{C_\psi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(a\omega)|^2\frac{\mathrm{d}a}{|a|}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega)\mathrm{d}\omega\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

若令 $g(t)=f(t)$，则可得

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b\,|W_f(a,b)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{12.2.5}$$

利用小波变换的广义 Parseval 等式，令 $g(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-t_0)^2}{4a}}$ 并取 $a\to+0$，可得小波变换在信号函数 $f(t)$ 的连续点的反演公式

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}bW_f(a,b)\psi_{a,b}(t) \tag{12.2.6}$$

上面介绍了小波变换的基本知识，在实际的时－频分析中，通常要用到离散形式的正交小波基，给出信号的离散小波变换. 在这方面小波变换有着非常丰富的内容和广泛的应用，这方面有很多的专著论述. 本课程只给出小波变换最基本的介绍，因此对离散的小波变换不作介绍.

但有一点要提及，小波变换是因为要提高分析的分辨率才引入的，那么我们是否能对不同频率域开不同的窗口，而且对窗口的宽度的选取是否有限制，是否可以无限度地提高分辨率呢？下面对此问题给出一个窗口宽度选取的限制.

§12.3　小波变换中的 Heisenberg（海森堡）不确定性关系

在量子物理学中，Heisenberg 曾对量子物理学中力学量的测量给出表述：假如对任何一客体进行测量，以不确定量 Δp 测定其动量的 x 分量时，就不可能同时测定其位置比 $\Delta x=\frac{h}{\Delta p}$ 更准确. 其中 h 是自然界中给定的不变的数，它称为“Planck”（普朗克）常数.

这就是量子物理学中著名的 Heisenberg 不确定性关系或称为 Heisenberg 不确定性原理. 其数学表达式为

$$\Delta p\cdot\Delta x\geqslant h \tag{12.3.1}$$

这是量子物理学中的一个基本原理，它是指对任何客体进行测量时，在任何时刻同时测量这一客体的一对共轭物理量 p 和 x，它们的测量值各自与期望值的偏差 Δp 和 Δx，即测量精度是不可能同时达到无限高的精度，测量的精度是受到 Heisenberg 不确定性关系所支配.

在量子物理学中，一切客体都是以物质波的形式出现的，因此“不确定关系”不是量子物理所特有的，它亦存在于宏观的波动测量中，而测量中对期望值的偏差是个统计的概念. 因此“不确定关系”与统计有关.

我们在前面 Gabor 变换中曾导出时间 t 与频率 ω 这一对共轭变量间存在窗口面积的关系(12.1.21)式. 但 Gabor 变换中参数 a 与 ω 的改变并不改变窗口函数 $g_a(t)$ 的大小与形状,它窗口的宽度是由平均值决定的,在整个时间域 t 上是不变的,在整个频率域 ω 上也是不变的.

当我们选取小波变换时,对小波变换 $\psi_{a,b}(t)$ 及其 Fourier 变换 $\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$ 在时间域 t 与频率域 ω 能较好地进行局域分析,我们希望对 $\psi_{a,b}$ 与 $\hat{\psi}_{a,b}$ 的窗口函数的选取时,使窗口愈小愈好. 但这受到了 Heisenberg 不确定性关系的限制,即窗口的面积要大于等于某一常数. 即我们不可能无限度地提高我们对信号分析的精度. 下面我们介绍这一不确定性关系.

对于一般的信号函数 $f(t)$,我们可选取窗口函数 $g(t)$. 则 $g(t)$ 的 Fourier 变换为 $\hat{g}(\omega)$,我们要求 $g(t) \in L^2(R)$,且 $\hat{g}(\omega) \in L^2(R)$. 我们可定义窗口的中心 $(t_g, \omega_{\hat{g}})$:

$$t_g = \frac{1}{\| g \|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \, | g(t) |^2 \mathrm{d}t \tag{12.3.2}$$

其中

$$\| g \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | g(t) |^2 \mathrm{d}t$$

而

$$\omega_g = \frac{1}{\| \hat{g} \|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \, | \hat{g}(\omega) |^2 \mathrm{d}\omega \tag{12.3.3}$$

其中

$$\| \hat{g} \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | \hat{g}(\omega) |^2 \mathrm{d}\omega$$

同时可定义窗口的半宽度

$$\Delta_t = \left[\frac{1}{\| g \|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_g)^2 \, | g(t) |^2 \mathrm{d}t \right]^{1/2} \tag{12.3.4}$$

$$\Delta_\omega = \left[\frac{1}{\| \hat{g} \|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_{\hat{g}})^2 \, | \hat{g}(\omega) |^2 \mathrm{d}\omega \right]^{1/2} \tag{12.3.5}$$

在时 - 频分析的 $t - \omega$ 平面上,窗口的面积为 $2\Delta_t 2\Delta_\omega$,则我们有小波变换中时 - 频窗口变换的 Heisenberg 不确定性原理.

命题 12.3.1: 小波变换中时 - 频窗口变换的 Heisenberg 不确定性原理:

设小波变换的窗口函数为 $g(t)$,其 Fourier 变换为 $\hat{g}(\omega)$,且满足 $g(t)$、$tg(t) \in L^2(R)$,$\hat{g}(\omega)$、$\omega g(\omega) \in L^2(R)$,则窗口面积

$$2\Delta_t 2\Delta_\omega \geqslant 2$$

证：为简单起见，我们取 $t_g = \omega_{\hat{g}} = 0$，这不失一般普遍性，因为对任意的窗口中心 $(t_g, \omega_{\hat{g}})$ 总可通过平移变换使其变为 $(0,0)$，而不失窗口宽度的特性.

由窗口半宽度的定义并利用 Parseval 关系我们有

$$\begin{aligned}
(\Delta_t \cdot \Delta_\omega)^2 &= \frac{1}{\| g \|^2 \| \hat{g} \|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 | g(t) |^2 \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 | \hat{g}(\omega) |^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\| g \|^2 \| \hat{g} \|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 | g(t) |^2 \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} | \hat{g}'(\omega) |^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2 \| g \|^4} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 | g(t) |^2 \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} | g'(t) |^2 \mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{1}{\| g \|^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t g(t) g'(t) \mathrm{d}t \right]^2 \\
&= \frac{1}{\| g \|^4} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | g(t) |^2 \mathrm{d}t \right]^2 \\
&= \frac{1}{4 \| g \|^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} | g(t) |^2 \mathrm{d}t \right]^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

故可得

$$2\Delta_t \cdot 2\Delta_\omega \geqslant 2$$

以上我们证明了小波变换中的 Heisenberg 不确定性关系.

第四篇　数学物理方程

物理学研究的一个重要方面是研究物理体系的运动规律. 这种运动规律表现在描述物理体系状态的物理量随时空点而变化的规律上. 这种物理体系的变化规律与系统的动力学机制密切联系在一起. 人们长期以来由生活的经验及实验的发现总结出了许多规律:如宇宙间最基本的规律——能量守恒定律;如经典力学中的牛顿三定律及在一定条件下的物理系统的动能守恒、动量守恒、角动量守恒. 例如,在物理学基本规律的基础上,我们可研究质点的振动及振动在介质中的传播所形成的波动问题. 在物理学基本定律的基础上导出及研究物理体系运动的微分方程,是我们研究物理体系运动的最基本方法之一.

如何导出描述物理体系状态变化的微分方程,是我们这一部分内容首先要解决的问题. 大家知道,决定一个物理体系状态变化的因素是十分复杂的,首先我们要把实际的物理过程理想化,确定物理量(或参数),建立起一个理想的物理模型,然后再把物理模型定量化,得到具体的数学模型. 物理体系运动方程的导出基本上可以用以下两种方法:

一是物理模型建立后,根据各物理量描述的物理学基本定律,直接写出描述此体系的运动方程.

另一方法是由已建立的物理模型写出描述此物理系统的拉格朗日量(Lagrangian)或是哈密顿量(Hamiltonian),然后根据变分原理或是哈密顿原理,得到体系的运动方程.

后一种方法常见于分析力学和量子物理学中,在分析物理体系的动力学对称性及有这些对称性所得出的守恒量的研究中,常用这一方法.

前一种方法应用于广泛的实际复杂的物理系统中,特别是实验物理领域中. 我们在这一篇主要还是用这种方法导出描述物理系统变化的微分方程及方程所满足的定解条件,才能唯一确定该物理体系的实际变化过程,即才能得到方程的唯一解.

本课程中我们主要讨论的是线性二阶偏微分方程,即主要讨论双曲型方程即波动方程、抛物型方程即输运方程、椭圆型方程即 Poisson(泊松)方程这三类方程,它对应着物理学中物理系统场量的三类基本的运动形态即波动、输运及稳定分布. 这三类基本方程都是物理系统模型理想化线性化的结果,对这三类方程解的研究也是十分成熟的. 至于实际物理过程中的非线性效应,我们将在本篇最后一章予以简单介绍.

第十三章　波动方程、输运方程、Poisson(泊松)方程及其定解问题

§13.1　二阶线性偏微分方程的普遍形式

对于 n 维线性空间的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和一维时间以参数 x_0 表示，构成 $n+1$ 维空间，其二阶偏微分方程可写成

$$Lu(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n) = f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{13.1.1}$$

式中 $u(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 表示我们所要求解的物理场量，非齐次项 $f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 则表示使物理场量 u 产生变化的外界源的分布，L 为二阶线性偏微分算子，它具有普遍的形式

$$L = a_{ij}(x_0,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + b_i(x_0,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x_0,x_1,\cdots,x_n) \tag{13.1.2}$$

其中用 Einstein 求和法则，$i,j=0,1,\cdots,n$.

线性算子 L 具有如下的性质：若 L_1,L_2 为线性算子，则

$$\alpha(L_1+L_2) = \alpha L_1 + \alpha L_2,\quad (\alpha+\beta)L = \alpha L + \beta L$$

及

$$(\alpha\beta)L = \alpha(\beta L)$$

其中 $\alpha,\beta \in R$.

如果没有外源 f 的影响，则体系由相应的齐次方程来描述，即

$$Lu(x_0,x_1,\cdots,x_n) = 0 \tag{13.1.3}$$

如果 u_1,u_2 是这一齐次方程的解，$Lu_1=0$，$Lu_2=0$，

则 u_1,u_2 的线性组合 $u=c_1u_1+c_2u_2$　$c_1,c_2 \in R$ 亦为此齐次方程的解，即满足

$$Lu = c_1Lu_1 + c_2Lu_2 = 0 \tag{13.1.4}$$

这就是线性方程满足的解的线性叠加原理.

当我们研究的空间为三维欧氏空间和一维时间即 3 + 1 维时空的物理系统时:

(1) 若算子 L 中的 $a_{00}=1$ 时,$a_{11}=a_{22}=a_{33}=-a^2$,其他的 a_{ij} 为零,则

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 \tag{13.1.5}$$

此算子称为双曲算子,亦称为波动算子,则方程 $Lu=f$ 的形式为

$$u_{tt}-a^2\nabla^2 u=f \tag{13.1.6}$$

此方程就是双曲方程即波动方程的标准式,其中 $u=u(x,y,z,t)$,$f=f(x,y,z,t)$,$u_{tt}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,$a$ 为波速.

由于算子 L(13.1.5)式在时间和空间的反演变换:$t\to -t$,$\boldsymbol{x}\to -\boldsymbol{x}$ 下是不变的,因此齐次的波动方程在空间和时间上是可逆的. 即有向 $\boldsymbol{x}$ 方向传播的解,此波动向 $-\boldsymbol{x}$ 方向的传播亦是方程的解,$u(\boldsymbol{x},t)$,$u(-\boldsymbol{x},t)$ 都是方程的解. 对时间 t 也有同样的结论,即 $u(\boldsymbol{x},t)$,$u(\boldsymbol{x},-t)$ 也都是方程的解.

(2) 若算子 L 中的 $b_0=1$,$a_{11}=a_{22}=a_{33}=-a^2$,其他系数均为零,则

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\nabla^2 \tag{13.1.7}$$

此算子称为抛物算子,亦称为输运算子,则方程的形式为

$$u_t-a^2\nabla^2 u=f, \tag{13.1.8}$$

此方程为抛物方程即输运方程的标准形式,其中 $u=u(x,y,z,t)$,$f=f(x,y,z,t)$,$u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}$,$a$ 为输运系数.

由于抛物算子 L 在 $t=-t$ 下是不对称的,因此输运方程的解对时间是不可逆的,输运问题宏观的不可逆是有着深刻的统计物理学意义的,这也是数学与物理学高度相关和统一的一个范例.

(3) 若算子 L 的 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$,其他系数均为零,则

$$L=\nabla^2 \tag{13.1.9}$$

为 Laplace 算子,方程的形式为:

$$\nabla^2 u=f \tag{13.1.10}$$

其中 $u=u(x,y,z)$,$f=f(x,y,z)$.

此方程为椭圆方程,亦称为 Poisson 方程,它是描述稳定场分布的方程.

当 $f=0$ 时,方程退化为 Laplace (拉普拉斯)方程

$$\nabla^2 u = 0 \tag{13.1.11}$$

§13.2　波动方程及其定解条件

下面我们以弦的振动为例,从牛顿定律出发,导出弦的振动方程即振动传播的波动方程.

设一条长为 l 的柔软的均匀细弦,是线密度 ρ 不变的一维客体,拉紧时弦处于平衡位置,让它在垂直的外力作用下弦上各点离开平衡位置作微小振动. 设弦上各点的振动是发生在同一平面内,且各点的位移与弦的平衡位置垂直,并要求弦的振动的振幅很小.

取弦的平衡位置为 x 轴,弦的左端点为原点 O,右端点为 l, u 轴描述各点的位移,如图 13.2.1 所示,弦上任一 x 点在时间 t 的位移为 $u(x,t)$

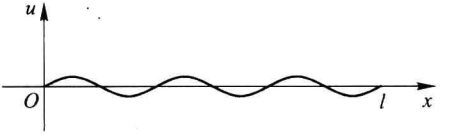


图 13.2.1

现在研究任意一小线段弦$(x,x+\mathrm{d}x)$的运动. 把这段长为 $\mathrm{d}x$ 的弦的受力情况表示出来,如图 13.2.2,这段弦单位长度受的外力为 $f_0(x,t)$,在 x 点受到左边弦对它的作用力,即为 x 点弦的张力 T_x,方向如图,在 x 点的切向上,与 x 轴的夹角为 α, 在 $x+\mathrm{d}x$ 点受右边弦作用力为 $T_{x+\mathrm{d}x}$,方向如图,在 $x+\mathrm{d}x$ 点的切向上,与 x 轴的夹角为 β.

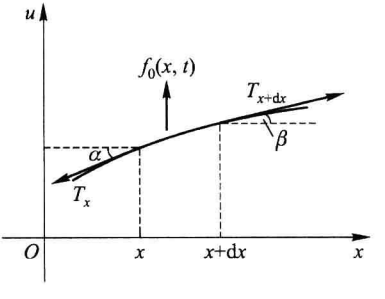


图 13.2.2

由于该段弦在 x 轴的方向上没有运动,故:

$$T_x\cos\alpha - T_{x+\mathrm{d}x}\cos\beta = 0 \tag{13.2.1}$$

由于弦的振动的振幅很小，我们可取近似 $\alpha,\beta\to 0$，故 $\cos\alpha\to 1$ 和 $\cos\beta\to 1$，由上式有

$$T_x \approx T_{x+\mathrm{d}x} \equiv T \tag{13.2.2}$$

当 $\mathrm{d}x$ 很小时，这段弦受到单位长度的外力可视为单位长度外力 $f_0(x,t)$ 作用在 x 点上，则由牛顿第二定律可写出 $(x,x+\mathrm{d}x)$ 这段弦的运动方程：

$$T_{x+\mathrm{d}x}\sin\beta - T_x\sin\alpha + f_0(x,t)\mathrm{d}x = \rho\mathrm{d}x u_{tt}$$

由(13.2.2)可得：

$$T\sin\beta - T\sin\alpha + f_0(x,t)\mathrm{d}x = \rho\mathrm{d}x u_{tt} \tag{13.2.3}$$

由于 $\alpha,\beta\to 0$，故有

$$\sin\alpha \simeq \tan\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \tag{13.2.4}$$

$$\sin\beta \simeq \tan\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} \tag{13.2.5}$$

方程变为

$$T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right) + f_0(x,t)\mathrm{d}x = \rho\mathrm{d}x u_{tt}$$

由

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

可得：

$$u_{tt} - \frac{T}{\rho}u_{xx} = \frac{1}{\rho}f_0(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0$$

方程可写成标准形式即一维的波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0 \tag{13.2.6}$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$，a 是振动在弦上传播的速度，$f(x,t)=\dfrac{f_0(x,t)}{\rho}$ 称为外力密度，是单位长度单位密度上所施加的外力，一般我们就称 $f(x,t)$ 为外力.

当外力 $f(x,t)$ 为零时，方程变为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\quad 0<x<l,\quad t>0 \tag{13.2.7}$$

这是一维齐次波动方程.

当它是描述无界弦的运动时，它是弦的自由振动的方程.

当用它研究边界为 $[0,l]$ 的有界弦的运动时，就要视其边界 0 和 l 与外界的相

互作用,而不是简单的自由振动(通常仍称为自由振动,或称为自由弦). 若边界点也不受外界作用时,就是描述有界弦的自由振动,其运动形态由初始状态决定.

上面得到的一维弦的振动方程,是描述弦的微小振动的一般规律,它是一维的波动方程,而对具体弦的特定的运动形态的描述,尚需此运动方程满足的**初始条件**和**边界条件**. 这些条件统称为**方程的定解条件**.

下面我们仍以边界为$[0,l]$的弦满足的一维波动方程(13.2.6)式为例,给出波动方程的定解条件,即给出我们所研究的弦的位移这一场量$u(x,t)$在初始时刻的特定状态及$u(x,t)$在弦的边界即两个端点的状态.

1. 初始条件

即给出在我们开始观察弦的$t=0$时刻(初始时刻),弦上各点的位移分布和速度分布:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{13.2.8}$$

$$u_t(x,0) = v(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{13.2.9}$$

$\varphi(x)$,$v(x)$为已知函数,即$t=0$时刻的位移(场量)和速度的特定分布状态.

之所以需要两个初始条件是由于方程中出现的场量u对时间t的微商是二阶的,即u_{tt},每阶微商将会出现一个待定函数,故需要两个初始条件来确定.

2. 边界条件

是考虑我们所观察的物理系统(即弦)以外的环境通过系统的边界(即弦的两个端点)对弦施加的作用,它表现在弦的边界点状态的变化上.

一般情况下边界条件分为三类:

第一类边界条件:已知弦两个端点的位移随时间的变化关系(即边界上场量随时间的变化关系),

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad t \geqslant 0 \tag{13.2.10}$$

$g_1(t)$,$g_2(t)$为已知函数.

当$g_1(t)=g_2(t)=0$时,称此弦具有固定端点,即外力将弦的两个端点固定,是外力对弦的一种作用方式. 即

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{13.2.11}$$

称为**第一类齐次边界条件**,这种齐次边界条件对我们求解方程具有特殊重要的意义,是最基本的边界条件.

第二类边界条件:已知弦的两个端点的位移u沿x轴的梯度$\dfrac{\partial u}{\partial x}$对时间的依赖关系(即场量沿边界的外法向的梯度对时间的依赖关系),即

$$\left.\begin{aligned} -T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} &= h_1(t) \\ T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} &= h_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (t>0) \tag{13.2.12}$$

$h_1(t)$，$h_2(t)$为作用在弦的两个端点垂直于弦线的已知外力. 而在 $x=0$ 点，张力 T 与$\dfrac{\partial u}{\partial x}$的正向相反，故出现负号.

当 $h_1(t)=h_2(t)=0$ 时，即弦的两个端点不受外力作用，此时的弦具有自由端，即

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}&=0\\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}&=0\end{aligned}\right\}\tag{13.2.13}$$

称为**第二类齐次边界条件**，它与第一类齐次边界条件具有同等重要的地位.

第三类边界条件：已知弦的两个端点的位移与所受到垂直于弦线的外力作用的线性组合

$$\left.\begin{aligned}-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}+a_1u(0,t)&=h_1(t)\\ T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}+a_2u(l,t)&=h_2(t)\end{aligned}\right\}\quad(t\geqslant 0)\tag{13.2.14}$$

其中 a_1，$a_2>0$，它表示弦的两个端点受的外界对弦的支撑弹性系数.

当 $h_1(t)=h_2(t)=0$ 时，得到**第三类齐次边界条件**

$$\left.\begin{aligned}-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}+a_1u(0,t)&=0\\ T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}+a_2u(l,t)&=0\end{aligned}\right\}\tag{13.2.15}$$

它与第一、二类齐次边界条件同等重要.

上面我们用一维弦的振动问题导出一维波动方程及其定解条件.

通常我们把物理体系的运动所遵从的偏微分方程（一般称为**泛定方程**）连同它相应的**定解条件**，称为偏微分方程的**定解问题**.

下面我们再举一例，由 Maxwell（麦克斯韦）方程组导出电磁波的波动方程，这是一种由已知方程导出新方程的方法.

由电磁场的变化规律满足 Maxwell 方程组

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\rho,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_c+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned}\right.\tag{13.2.16}$$

其中 ρ 是自由电荷密度，j_c 是传导电流密度，$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 为位移电流密度. 在各向同性的线性介质中磁感应强度为 $\boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H}$，电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}$，对均匀介质，$\mu,\varepsilon$ 为常数.

当我们考虑在均匀介质中或在真空中，$\rho=0, j_c=0$ 的情况：由

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{13.2.17}$$

又由方程(13.2.16)，我们有

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{13.2.18}$$

故可得

$$\boldsymbol{E}_{tt} - a^2 \nabla^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{13.2.19}$$

这是一个表示电场 $\boldsymbol{E}$ 在三维空间中的波动方程，式中 $a^2=\dfrac{1}{\varepsilon\mu}$，$a$ 表示波速.

同理，我们可得磁场在三维空间中的波动方程

$$\boldsymbol{B}_{tt} - a^2 \nabla^2 \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{13.2.20}$$

考虑电磁场满足的边界条件仍是三类边界条件. 以 $u(\boldsymbol{x})$ 表示场量(电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$)，则三类条件可表示如下：当考虑的区域为 Ω 时，其边界为 $\partial\Omega$，

第一类边界条件为

$$u(\boldsymbol{x})\big|_{\partial\Omega} = g(t) \tag{13.2.21}$$

第二类边界条件为

$$\nabla u(\boldsymbol{x})\big|_{\partial\Omega} = h(t) \tag{13.2.22}$$

第三类边界条件为

$$[\alpha u(\boldsymbol{x}) + \beta \nabla u(\boldsymbol{x})]_{\partial\Omega} = k(t) \tag{13.2.23}$$

由于边界条件的不同，就形成了形形色色的电磁场的传播，如光纤通信，波导等，在现代科学技术中有着广泛的应用，在电动力学的课程中将进一步深入研究讨论电磁场的具体定解问题.

对于物理系统满足的偏微分方程的定解问题，有时我们可以不通过求解方程而直接讨论物理系统的某些整体的性质.

例 13.2.1：满足弦的振动方程的弦，其振动的能量守恒问题.

设定义在$[0,l]$上的两端固定的弦满足弦的振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

弦的动能为

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2 \mathrm{d}x$$

势能为

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^l T u_x^2 \mathrm{d}x$$

其中 ρ 为弦的线密度为常数，T 是弦的张力为常数. 则弦的总能量为

$$\begin{aligned} E(t) &= K(t) + V(t) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l T u_x^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \rho\int_0^l u_t u_{tt}\mathrm{d}x + T\int_0^l u_x u_{xt}\mathrm{d}x \\ &= \rho\int_0^l u_t u_{tt}\mathrm{d}x + T[u_x u_t]_0^l - T\int_0^l u_t u_{xx}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由边界条件

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \text{可得} \quad u_t(0,t) = u_t(l,t) = 0,$$

故 $T[u_x u_t]_0^l = 0$，有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \rho\int_0^l u_t u_{tt}\mathrm{d}x - T\int_0^l u_t u_{xx}\mathrm{d}x \\ &= \rho\int_0^l u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中用到弦满足的运动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$.

故 $E(t)$ 与时间无关，弦振动的能量是守恒的.

同样的方法，我们可以讨论在自由边界下弦振动的能量守恒问题.

§13.3　输运方程及其定解条件

输运方程的标准形式

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f(x,y,z,t) \tag{13.3.1}$$

它是描述物理上的输运过程（如热传导，扩散等过程）的运动规律，其中 $u(x,y,z,t)$ 是表示被输运的物理场量，a 为输运系数（如热传导系数，扩散系数

等),$f(x,y,z,t)$为源项. 此方程对时间是不可逆的,它与物理上宏观输运过程的不可逆性是一致的. 从方程中可以看出它在 $t\to -t$ 时,是不具有对称性的,即在此变换下方程已改变.

在本节中我们介绍两种方程:热传导方程和扩散方程的建立及定解条件.

一、热传导方程的导出及其定解条件

在一个三维空间中的区域 Ω 内,有均匀的各向同性的介质,由于区域 Ω 内的温度场的不均匀,发生了热量从温度高的地方向温度低的地方输运的过程. 要定量的描述这一过程,我们首先定义热流强度 $\boldsymbol{q}(x,y,z,t)$ 这一物理量,它表示单位时间里通过单位横截面积的热量. 在 Ω 内温度场的分布为 $u(x,y,z,t)$,温度的不均匀程度可用 u 的梯度 ∇u 来表示.

在热传导实验中,Fourier 总结出热传导的 Fourier 定律,其数学表达式如下:

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla u \tag{13.3.2}$$

其中 k 为热传导系数,由于温度梯度 ∇u 的正向是由温度低向温度高的方向,故热流强度 $\boldsymbol{q}$ 的正向与 ∇u 的方向相反,故在 Fourier 定律中出现“ $-$ ”号. 如图 13.3.1 所示,在 Ω 内均匀介质的密度为 ρ,比热容为 c,设在 Ω 内有热源,由热量强度 $F(x,y,z,t)$ 表征,它表示 t 时刻在 Ω 中的 (x,y,z) 处,单位时间内,单位体积中产生的热量. 当 $F<0$ 时表示热汇,即吸热的源. 我们考虑热传导系数 k 为常数的情况. 由 Ω 中的热量守恒关系,在单位时间内我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho c u \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}F(x,y,z,t)\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{13.3.3}$$

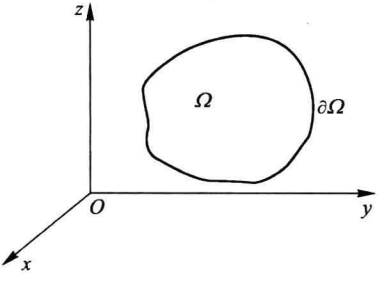


图 13.3.1

方程的左边 $\int_{\Omega}\rho c u\mathrm{d}\Omega$ 表示在 t 时刻 Ω 中的热量,而 $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho c u\mathrm{d}\Omega$ 表示这一热量在单位时间内的变化. 而方程右边的第一项表示 Ω 内单位时间内热源产生的热量,右边第二项 $-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$,表示 Ω 内通过边界 $\partial\Omega$ 与外界进行的热交换,其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 表

示 Ω 边界 $\partial\Omega$ 的面积元,其方向为外法向. 如果 $\boldsymbol{q}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 同向表示热量从 Ω 内流出,即 Ω 内的热量减少,故要有“-”号.

由 Fourier 热传导定律,我们可得

$$-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\partial\Omega}k\,\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{13.3.4}$$

由 Gauss 公式,我们有

$$\int_{\partial\Omega}k\,\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_{\Omega}k\,\nabla^2 u\cdot\mathrm{d}\Omega \tag{13.3.5}$$

因此 Ω 中的热量守恒关系变为

$$\int_{\Omega}\rho c\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\Omega-\int_{\partial\Omega}k\,\nabla^2 u\cdot\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}F(x,y,z,t)\,\mathrm{d}\Omega \tag{13.3.6}$$

即可得

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}-k\,\nabla^2 u=F(x,y,z,t)$$

令 $a^2=\dfrac{k}{\rho c}$,$f=\dfrac{F}{\rho c}$,即可得

$$u_t-a^2\,\nabla^2 u=f \tag{13.3.7}$$

这就是标准的热传导方程的形式.

若 ρ 不是均匀的,介质的热传导不是各向同性的,k 不是常数,介质物质的比热容 c 不是常数时,或在温度的改变量很大时,此时的 ρ、c、k 都不能看成常数而是 (x,y,z) 的函数时,我们将得到复杂介质中的输运方程,它的解可能十分复杂,可能不具有解析解,这类方程不属于本课程讨论范围.

要解具体的热传导问题,还需要有热传导方程的**定解条件**.

1. 初始条件

由于热传导方程中仅含有时间的一阶导数项,故初始条件只需一个,即只需给出在 $t=0$ 时刻 Ω 内的温度分布 $\varphi(x,y,z)$ 即可:

$$u(x,y,z,0)\big|_{\Omega}=\varphi(x,y,z) \tag{13.3.8}$$

或是给出初始时刻温度随时间变化状态的分布.

2. 边界条件

与波动方程的边界条件相似,有**三类边界条件**.

第一类边界条件:已知边界上温度分布随时间的变化关系 $g(\partial\Omega,t)$,即

$$u(x,y,z,t)\big|_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t) \tag{13.3.9}$$

当 $g=0$ 时,即

$$u(x,y,z,t)\big|_{\partial\Omega}=0 \tag{13.3.10}$$

是**第一类齐次边界条件**,其物理意义是保持边界上的温度为0 ℃. 这是环境通过边界对 Ω 中物理体系的作用. 这种齐次边界条件是我们解此类定解问题要用到的最重要的边界条件.

第二类边界条件: 已知通过边界上的热流强度的分布随时间的变化关系 $h(\partial\Omega,t)$. 由于热量的交换只有通过边界的法向才能进行,热流强度的切向分量是沿界面的切平面方向,不与界面进行热交换.

设 $\boldsymbol{n}$ 为界面 $\partial\Omega$ 的外法向,q_n 表示流出界面的热流强度,$-q_n$ 表示流入界面的热流强度. 由 Fourier 热传导定律,在界面上我们有

$$-q_n\big|_{\partial\Omega}=-\left(-k\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} \tag{13.3.11}$$

则第二类边界条件可表示为

$$-q_n\big|_{\partial\Omega}=h(\partial\Omega,t)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=\frac{1}{k}h(\partial\Omega,t) \tag{13.3.12}$$

此关系亦可表示为

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\big|_{\partial\Omega}=\frac{1}{k}h(\partial\Omega,t) \tag{13.3.13}$$

若 $h(\partial\Omega,t)=0$,即

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{13.3.14}$$

这是**第二类齐次边界条件**,在物理上表示 Ω 内的系统是一绝热系统. 这一类齐次边界条件在解题中的重要性与第一类齐次边界条件相同.

第三类边界条件: 这是第一、二类边界条件线性组合的一种混合边界条件,可由牛顿冷却定律描述. 当区域 Ω 内的物质系统通过界面自由冷却时,在系统边界与环境的温度相差不大时,通过界面与环境进行热交换,与边界的温度高低有关,由牛顿冷却定律(实验定律)描述,

$$q_n\big|_{\partial\Omega}=H(u\big|_{\partial\Omega}-u_0) \tag{13.3.15}$$

$H>0$ 为常数,称为冷却系数,u_0 为外界环境的温度. 上式可写成

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=H(u\big|_{\partial\Omega}-u_0)$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{H}{k}u\right)\Big|_{\partial\Omega}=\frac{H}{k}u_0 \tag{13.3.16}$$

此式为第三类边界条件的标准形式. 当外界温度为零，即 $u_0 = 0$，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{H}{k}u\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{13.3.17}$$

为**第三类齐次边界条件**，其重要性与第一、第二类齐次边界条件相同.

以上热传导问题的初值问题、边界条件和热传导方程，构成了热传导的定解问题，它形成了种类繁多的热传导现象.

二、扩散方程的导出及其定解条件

扩散现象是输运现象的一种，它亦同样具有输运方程的标准形式. 扩散在实际应用中是相当广泛的.

我们在此以半导体的工艺中掺杂单晶硅的过程，即杂质在单晶硅中的扩散来导出扩散方程. 扩散定律是物理学中的实验定律，其数学形式为

$$\boldsymbol{q} = -D\nabla u \tag{13.3.18}$$

其中 u 为扩散物质的浓度分布，$\boldsymbol{q}$ 为扩散强度即单位时间通过单位横截面积的扩散量，D 为扩散系数.

在半导体工艺中，在单晶硅片的表面涂敷所需要的杂质，杂质就沿着硅片表面 S 向垂直于表面的方向进行扩散，由于对称性，我们把这一扩散过程看做是一维的扩散问题，如图 13.3.2 所示.

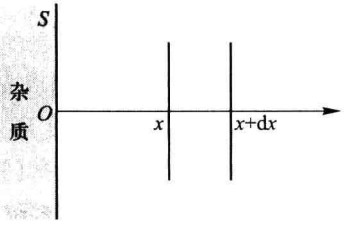


图 13.3.2

一维的扩散定律为

$$q = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \quad D > 0 \tag{13.3.19}$$

$u(x,t)$ 为杂质的浓度分布，考虑在 x 到 $x + \mathrm{d}x$ 这一层的单位面积上杂质的含量 $u(x,t)\mathrm{d}x$，则单位时间内这一层中杂质的变化量为 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$，这是在 x 处单位面积上进入此层的杂质与在 $x + \mathrm{d}x$ 处逸出此层单位面积上的杂质量之差，考虑到扩散由高浓度到低浓度，有

$$q(x,t) - q(x + \mathrm{d}x, t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x \tag{13.3.20}$$

由扩散定律可得

$$D\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$$

当 $\mathrm{d}x\to 0$ 时,即可得

$$D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ \text{令}\ a^2=D,\text{即}$$

$$u_t-a^2u_{xx}=0 \tag{13.3.21}$$

这是一维的齐次扩散方程,是假设单晶硅内无杂质源的情况.

当单晶硅内有杂质源 $f(x,t)$ 时,则扩散方程可变为

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) \tag{13.3.22}$$

对三维的扩散方程仍有形式

$$u_t-a^2\nabla u=f(x,y,z,t) \tag{13.3.23}$$

扩散方程的定解条件仍需一个初始条件和边界条件,边界条件有三类,与热传导方程相同,这里不再加以讨论.

§13.4　Poisson 方程及其定解条件

Poisson 方程也称为稳定场方程,它不含有对时间的微商项,场量不随时间变化. 其标准形式为

$$\nabla^2u(x,y,z)=f(x,y,z) \tag{13.4.1}$$

它的场量和源都不含有时间变量,它描述场在空间中的稳定分布. 当 $f(x,y,z)=0$ 时,Poisson 方程就退化成 Laplace 方程

$$\nabla^2u(x,y,z)=0 \tag{13.4.2}$$

下面我们用静电势所满足的方程来导出 Poisson 方程.

设具有体电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ 的电场 $\boldsymbol{E}$,其满足的方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon}\rho \tag{13.4.3}$$

而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可用电势 φ 来表示,

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{13.4.4}$$

因此我们可得到电势满足的方程为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{13.4.5}$$

这就是电势 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 满足的 Poisson 方程.

当 $\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 时,即在 $\boldsymbol{r}_0$ 处有一电荷量为 q 的点电荷,此时 Poisson 方程为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{13.4.6}$$

如果我们所研究的区域内没有点荷分布,即 $\rho=0$,则电势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{13.4.7}$$

Poisson 方程的**定解条件**:

由于 Poisson 方程是描述稳定场的,因此它不存在初始条件,只需要边界条件. 其边界条件与上面两类方程相似,但由于其稳定场的特性,对某些条件会加以限制,这是要特别注意的.

Poisson 方程的三类边界条件为:

第一类边界条件:在考虑的区域 Ω 中,已知稳定场 u 在边界 $\partial\Omega$ 上的值

$$u\big|_{\partial\Omega} = g(\partial\Omega) \tag{13.4.8}$$

这类问题通常称为 Dirichlet 问题.

第二类边界条件:已知稳定场 u 在边界法向上的导数的值

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g(\partial\Omega) \tag{13.4.9}$$

$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向. 这类问题通常称为 **Neumann(纽曼)问题.**

注意,第二类边界条件在我们观察区域 Ω 内如果有源时,第二类齐次边界条件是不存在的. 从物理上可以很好的得到理解:在热传导问题中第二类齐次边界条件是表示系统为绝热的边界条件. 如果里面有源,边界是绝热的,Ω 内的温度场就不可能为稳定分布. 此条件下的 Poisson 方程是无解的. 只有 Laplace 方程有解.

第三类边界条件:已知在边界 $\partial\Omega$ 上稳定场 u 和它的法向导数的某种线性组合.

$$\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = g(\partial\Omega) \tag{13.4.10}$$

这是混合边界问题.

* §13.5　Laplace 方程和调和函数

Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$ 的解 u 称为调和函数. 在物理上我们研究的一类在考察区域中无源的稳定场分布都满足 Laplace 方程,这一类场都属于调和函数. 由于调和函数有一些特殊的性质,其研究方法也比较成熟,是有一定代表性的.

我们前面已经介绍过,在复变函数中的解析函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$,其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 满足 Cauchy - Riemann 条件,很容易证明它们满足二维 Laplace 方程,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{13.5.1}$$

即 u,v 都是二维的调和函数.

例如,在原点上放一具有单位电荷量的点电荷,其产生的电势为 $\frac{1}{r}$,其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,如果我们考虑的区域 Ω 内不包含原点,则在 Ω 中有

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \qquad (r \neq 0) \tag{13.5.2}$$

因此,点电荷的势在不包含点电荷自身位置的区域内是调和函数.

在数学上在 $\mathbf{R}^3$ 空间中,有许多常见的函数,如常数 $C,x,y,z,x^2 - y^2,y^2 - z^2,z^2 - x^2$ 等都是调和函数.

调和函数的基本性质: 由 Green 公式

$$\begin{aligned}\int_\Omega (v\,\nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u)\,\mathrm{d}\Omega &= \int_{\partial\Omega} v\,\nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \\ &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{13.5.3}$$

和

$$\int_\Omega (v\,\nabla^2 u - u\,\nabla^2 v)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{13.5.4}$$

我们可以得到调和函数的两个基本性质.

性质 13.5.1: 在我们观察区域 Ω 中的调和函数 u,其在边界上的法向方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在整个边界上的积分为零,即

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma = 0 \tag{13.5.5}$$

证：由 Green 公式(13.5.3) 式，取 $v=1$，u 为在 Ω 上的调和函数(即包含 $\partial\Omega$ 在内的 u 都是调和函数)，则有

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega}\nabla^2 u\mathrm{d}\Omega = 0$$

故性质得证.

性质 13.5.2：调和函数的平均值定理.

设 $u(x,y,z)$ 是 Ω 上的调和函数，则 u 在 Ω 内的一点 $P:(x_0,y_0,z_0)$ 的值可表示为

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R} u\mathrm{d}\sigma \tag{13.5.6}$$

其中 S_R 为以 P 点为圆心，以 R 为半径的球面，且此球面完全包含在 Ω 中，如图 13.5.1 所示.

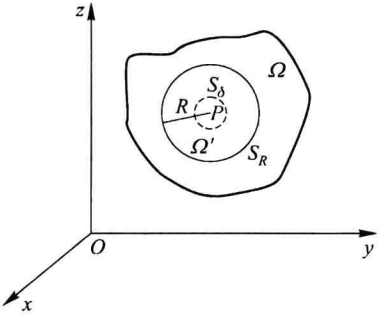


图 13.5.1

证：在 S_R 内作一个以 P 点为圆心，半径为 δ 的小球面 S_δ，令

$$v = \frac{1}{r},\quad r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \tag{13.5.7}$$

故函数 v 在大小球面 S_R 和 S_δ 所围成的体积 Ω' 内为调和函数. 而 u 为 Ω 内的另一调和函数，则在 Ω' 中有 $\nabla^2 u=0$，$\nabla^2 v=0$，由 Green 公式，有

$$\int_{S_R+S_\delta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega'}\left(\frac{1}{r}\nabla^2 u - u\,\nabla^2\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\Omega' = 0$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 在 S_R 球面是外法向，而在 δ, 球面上 $\boldsymbol{n}$ 是内法向，指向球心，即与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反. 故在 S_δ 面上

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{S_\delta} = -\left.\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}r}\right|_{S_\delta} = \left.\frac{1}{r^2}\right|_{S_\delta} = \frac{1}{\delta^2}$$

在 S_R 面上

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{S_R} = \left.\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}r}\right|_{S_R} = -\frac{1}{R^2}$$

由于 u 在 Ω 中为调和函数,故由性质 13.5.1,有 $\int_{S_R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}\sigma = 0$ 和 $\int_{S_\delta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}\sigma = 0$

故可得

$$-\int_{S_R} u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\mathrm{d}\sigma = \int_{S_\delta} u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$$

即

$$\frac{1}{R^2}\int_{S_R} u\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\delta^2}\int_{S_\delta} u\mathrm{d}\sigma$$

对 $\frac{1}{\delta^2}\int_{S_\delta} u\mathrm{d}\sigma$ 用中值定理

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta^2}\int_{S_\delta} u\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{\delta^2}u(x',y',z')\int_{S_\delta}\mathrm{d}\sigma\\ &= \frac{1}{\delta^2}u(x',y',z')\ 4\pi\delta^2\\ &= 4\pi u(x',y',z')\end{aligned}$$

其中 $u(x',y',z')$ 是 u 在 S_δ 上某一点的值.

当 $\delta\to 0$ 时,$u(x',y',z') = u(x_0,y_0,z_0)$,故可得

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R} u\mathrm{d}\sigma$$

此平均值定理得证.

§13.6　三类方程定解问题小结

上面我们对三种不同类型的物理系统导出了它们所遵从的运动方程:波动方程、输运方程及 Poisson 方程.由于物理系统运动变化的复杂性,要建立理想化的物理模型,定量地研究该物理系统的运动变化,要得到描述该系统运动变化的

微分方程是首要任务. 一般情况下,方程的导出可归结如下:

首先确定所研究的物理体系的自变量. 并按系统的对称性建立系统的坐标系,同时取定该系统中我们所要研究的物理量及其对自变量的函数关系.

其次明确此物理量所遵从的物理规律. 一般是从实验中总结出来的物理规律,并把物理体系分成小单元,对每个单元用"隔离法",应用物理定律研究该单元与相邻单元的相互作用的关系. 这里,可能关系非常复杂,但要找出主要的作用,忽略次要的因素,根据物理规律写出小单元中的物理量的变化关系. 若变化关系中出现非线性的量,在允许的近似下将其线性化. 例如,在弦的振动中把三角函数关系,在小振动下化为场量对坐标的微商关系的近似,将其线性化. 如果非线性量不能近似地线性化,这就成了非线性方程,它涉及另一类非线性方程的问题,在此不予讨论.

最后根据每个单元的物理量的变化关系,写出物理体系的物理量的变化关系并整理成微分方程的形式,如有可能,可进一步化为标准的三类方程的形式.

下面再说一下**三类方程的定解条件**:

(1) 初始条件: 从上面的讨论中可看出,三类方程的初始条件要求各不相同,波动方程需要两个初始条件,输运方程需要一个初始条件,Poisson 方程是一个静态分布的方程与时间无关,故不需要初始条件.

但有些情况,如波动方程和输运方程中的源项是时间的**周期函数**,当我们考虑**系统的变化时间远大于其周期时,我们可以不考虑初值的影响**,此时主要是周期的源的影响,故可以**不需要初始条件**.

(2) 边界条件: 这三类方程一般都共同存在三类不同的边界条件,而这三类不同的边界条件可以统一起来,写成

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega} = g(\partial\Omega, t) \tag{13.6.1}$$

α,β 为常数,但它们不能同时为零. 当 $\beta=0$ 时,为第一类边界条件,当 $\alpha=0$ 时为第二类边界条件,当 α,β 都不为零时为第三类边界条件.

我们可以简单地把三类方程的定解问题写成

1. 波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = f(\Omega, t) \\ u(\Omega, 0) = \varphi(\Omega) \\ u_t(\Omega, 0) = v(\Omega) \\ \left[\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega} = g(\partial\Omega, t) \end{cases} \tag{13.6.2}$$

2. 输运方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 \nabla^2 u = f(\Omega,t) \\ u(\Omega,0) = \varphi(\Omega) \\ \left[\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega} = g(\partial\Omega,t) \end{cases} \tag{13.6.3}$$

3. Poisson 方程

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(\Omega) \\ \left[\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega} = g(\partial\Omega) \end{cases} \tag{13.6.4}$$

这三类方程定解问题的边界条件到底属于哪一类,要根据具体问题给出的条件而定. 同一个方程,由于定解条件的不同,得到的解 $u(\Omega,t)$ 是不同的.

若同一方程在相同的定解条件下,由于解法的不同,得到不同形式的解 u,但由线性偏微分方程解的存在唯一性定理,我们知道这些不同形式的 u 是同一个解,它们之间可以用函数的变换相联系.

除了以上介绍的三类边界条件外,在许多物理问题中给出了一些特有的边界条件,物理上常遇到的有三类:

1. 自然边界条件,通常也称为**有界边界条件**

在物理问题中,我们所要求解的场量 u,在我们考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ (通常都是在无穷远的边界)上,都要求是有界的,不发散的,即

$$|u| < \infty$$

2. 周期性边界条件

通常用在晶格点阵中场函数具有周期性,或有空间几何规律的物理问题中,或是以某一轴(例如 z 轴)为对称轴具有某些对称性,而又要求场函数为单值函数的问题中.

3. 衔接条件

如果我们研究的区域 Ω,可分成几个性质不同的子区域,则在相邻子区域的边界上要求用特殊的衔接条件. 这种衔接条件要视具体问题而定.

例如在电动力学中,电场强度在介质的边界上,其切向分量连续,而电位移矢量在其界面上法向分量连续.

这种衔接条件引入的必要性在于我们观察的区域 Ω 内存在不同的子区域,这些子区域又具有不同的特性. 因此在子区域间的边界上导致场的性质有突变,方程在这些突变面(突变域、突变点)上失效. 因此只能在子区域求解方程,而在子区域间边界上用衔接条件连接,即找出子区域间边界上物理量的边值关系,最

后才能得到整个 Ω 上的解.

第十三章习题

13.1 一均匀材质做成的细长弹性圆杆,长为 l,截面积为 S,静止放置在水平 x 轴上,在 $t=0$ 时刻,给杆一个沿杆的纵向扰动,使杆产生了纵向的微小位移,试推导杆的纵向振动方程.

如果在 $t=0$ 时刻,该扰动使杆的纵振动各点离开平衡位置的分布为 $u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l}$,$A$ 为常数,且 $u_t(x,0)=0$,分别对如下四种边界状况,写出相应的杆的振动定解问题.

(1) 杆的两个端点 $x=0$ 和 $x=l$ 点刚性固定;

(2) $x=0$ 点固定,$x=l$ 点为自由端;

(3) 在 $x=0$ 点按 $A\sin\ \pi t$ 运动,在 $x=l$ 点按 $A\cos\ \pi t$ 运动,A,ω 均为常数;

(4) 两个端点为弹性固定,端点受到了与位移成正比(比例系数为 k)但与位移方向相反的纵向作用力.

13.2 一根长为 l 的匀质弦,放置于介质中,当弦振动时,受到介质的阻尼力,请对阻尼力建立一个合理的模型,并推导弦在此介质中有阻尼的弦的振动方程.

请你给出恰当的初始条件,写出相应的四种不同的弦(任给出四种不同的边界条件)的阻尼振动的定解问题.

13.3 用匀质材料做成的细圆锥杆(指圆锥角很小,即锥体的长度很长而底部的圆形截面半径很小),试推导此圆锥杆的纵振动方程.

把所得的方程与 13.1 题的细长圆杆的纵振动方程进行比较,说明两个方程之间的差异.

13.4 一电阻率为 γ,截面均为 S 的匀质导线,通有电流密度为 j 的均匀分布的直流电,设该材质的导热系数为 κ,比热容为 c,密度为 ρ,设导线的侧面均为绝热的,试推导该导线上的热传导方程.

13.5 设一匀质金属球,其半径为 a,以球心为坐标原点,请写出球坐标下的热传导方程(设导热系数为 κ).

若把球的表面涂黑,置于阳光下,设球面附近阳光的热流强度为 M(设阳光为平行光,在垂直于阳光的单位面积上,在单位时间内流经这一单位面积上的太阳光的热量为 M),而球外环境的温度为 0 ℃,金属球表面同时按牛顿冷却定律散热. 设在 $t=0$ 时刻,金属球的温度为 T_0,试给出该定解问题.

13.6 在铀块中,除了中子的扩散运动(扩散系数为 D)外,还存在中子的吸收和增殖反应过程. 设在单位时间内,单位体积中吸收和增殖的中子数正比于该时刻该处中子的浓度 $u(\boldsymbol{r},t)$,即 $\beta u(\boldsymbol{r},t)$,$\beta$ 为比例常数(或称为净增殖系数). 若我们选取的铀块是匀质的球状铀块,铀块的半径为 a. 试在球坐标下导出中子浓度 $u(\boldsymbol{r},t)$ 扩散所满足的方程.

若球状铀块的表面边界满足如下几种不同的条件,请写出相应条件下的定解问题.(初始条件请做个合理的假设.)

(1) 铀块表面的中子浓度为零;

(2) 没有中子从铀块表面逸出(或是从铀块表面逸出的中子数目与回到铀块表面的中子数目相等);

(3) 铀块表面的中子浓度不随时间变化.

13.7　写出静电场中电介质表面静电场的衔接条件.

13.8　一根导热杆由两段 l_1 与 l_2 相衔接构成,两端的导热系数,比热和密度分别为 κ_1、c_1、ρ_1 和 κ_2、c_2、ρ_2. 设杆的初始温度为 u_0,保持杆的两个端点的温度为 0 ℃. 试写出该导热杆的热传导的定解问题(假定导热杆的侧面均为绝热的).

13.9　在均匀介质区域 Ω 内,对在稳定的热流分布 $f(\boldsymbol{r})$ 产生的温度场 $u(\boldsymbol{r})$ 满足 Poisson 方程 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r})$

其中 $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{F(\boldsymbol{r})}{\kappa}$,$\kappa$ 为导热系数,$F(\boldsymbol{r})$ 是热流密度.

(1) 试说明第一,二,三类边界条件在此问题中的物理意义;

(2) 试说明第二类边界条件存在的必要条件.

13.10　在真空区域 Ω 内,有稳定的电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$,则在 Ω 中存在稳定的电势分布,电势 $u(\boldsymbol{r})$ 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

其中 ε_0 为真空介电常数. 若 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是一导体壳,当

(1) 导体壳接地;

(2) 导体壳不接地.

分别对这两种情况,说明第一类和第二类边界条件的物理意义.

第十四章　分离变量法

前面介绍了三类数学物理方程的定解问题，如何求解这些定解问题，方法有多种，分离变量法是常用的基本方法之一. 这一方法是由 D' Alembert（达朗贝尔）和 Euler（欧拉）等人在十八世纪中叶发展起来的一整套解偏微分方程定解问题的方法.

分离变量法的基本思路是把偏微分方程的定解问题化为常微分方程的定解问题. 首先要把偏微分方程通过分离变量化为常微分方程，同时要把边界条件也进行分离变量，使之与相应的常微分方程构成边值问题，对于齐次边界条件就会产生常微分方程的本征值和本征解即本征函数. 出现这样的解的构造，就使人们可以利用此性质进一步去解决复杂的方程和边界条件问题.

前面已经说过，坐标系的选取要依赖于我们所研究的物理系统的对称性，其中很重要的方面是取决于边界的几何形状的对称性，如果 Ω 是矩形或长方体的，则我们取直角坐标系；如果 Ω 是球形的，则我们取球坐标系；如果 Ω 为柱状的，我们取柱坐标系等. 分离变量是按坐标系的变量来分离的，在直角坐标系下，各个坐标的度量系数都为 1，故分离变量较简单，而球坐标和柱坐标（都属曲线坐标系）的各变量的度量系数一般不相同，分离变量后出现的方程及边界条件较复杂一些，其解形成各种特殊函数.

在本章中我们将在**直角坐标系下来进行分离变量**，而曲线坐标系下的分离变量在后面的章节中介绍.

下面我们先举一例介绍方程分离变量的基本思想和方法.

考察二维 Laplace 方程，

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{14.0.1}$$

我们假定方程的解 $u(x,y)$ 具有如下的形式

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{14.0.2}$$

即 $u(x,y)$ 是可分离变量的，它是 $X(x)$（只是变量 x 的函数）和 $Y(y)$（只是 y 的函数）的乘积. 把此形式的试探解代入原方程，得：

$$X''Y + XY'' = 0$$

即

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \tag{14.0.3}$$

其中 $X'' = \dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}, Y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}$. 可看出此方程的左端只是 x 的函数，而右端只是 y 的函数，两边要相等，$\dfrac{X''}{X}$ 和 $\dfrac{Y''}{Y}$ 只能等于与 x 和 y 都无关的常数，且满足(14.0.3)式. 令此常数为 λ，故得

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

这样我们就把二维的 Laplace 方程通过分离变量化为两个熟知的常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{14.0.4}$$

$$Y''(x) - \lambda Y(x) = 0 \tag{14.0.5}$$

当然也可以取 $\dfrac{X''}{X} = \lambda, \dfrac{Y''}{Y} = -\lambda$. 则方程为

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{14.0.6}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \tag{14.0.7}$$

对 λ 的选取，要看具体给定的边界条件而定，要考虑如何构成本征值问题. 这一问题下面具体介绍. 这就是对方程进行分离变量的基本思路.

§14.1　齐次方程齐次边界条件下的分离变量法

齐次方程齐次边界条件下的分离变量法，是整个分离变量法中最基本的问题，是一切用分离变量法解偏微分方程的基础.（当然，在曲线坐标系下的分离变量法有时用的是齐次方程，并以自然边界条件或周期性边界条件为基础，这在后面会介绍.）

我们将以有界弦的自由振动为例来介绍这一基本方法.

例 14.1.1：考虑长为 l 两端固定的弦的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \quad (14.1.1) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (t > 0) \quad (14.1.2) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (0 < x < l) \quad (14.1.3) \\ u_t(x,0) = \nu(x) & (0 < x < l) \quad (14.1.4) \end{cases}$$

用分离变量法,设 $u(x,t)$ 可表示为

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{14.1.5}$$

代入方程(14.1.1),即可得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} \tag{14.1.6}$$

此方程的左边为 t 的函数,右边为 x 的函数,它们在 $u(x,t)$ 的定义域($0<x<l$, $t>0$)上相等,只能等于常数,此常数记为 $-\lambda$,$\lambda \geqslant 0$ 即

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \tag{14.1.7}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{14.1.8}$$

注意: 若此常数改为 $+\lambda \geqslant 0$,即可得 $X'' - \lambda X = 0$,其解 $X = C_0 e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$ 满足不了两端为零的边界条件.

齐次边界条件(14.1.2)式在分离变量下变为

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0 \tag{14.1.9}$$

要求 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 有非平凡解,即非零解,则要求 $T(t) \neq 0 (t>0)$,故必有

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{14.1.10}$$

因此我们得到了 $X(x)$ 满足的常微分方程及其边界条件

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

方程(14.1.8)的通解是大家所熟悉的

$$X(x) = C\sin\sqrt{\lambda}x + D\cos\sqrt{\lambda}x \tag{14.1.11}$$

C, D 为积分常数.

由边界条件(14.1.10)可知:

当 $X(0) = 0$ 时,由于 $\cos 0 = 1$,要求 $D = 0$,即 $X(x) = C\sin\sqrt{\lambda}x$,

当 $X(l) = 0$ 时,要使 $X(x) = C\sin\sqrt{\lambda}x$ 有非零解,要求 $C \neq 0$,只能 $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$,即 λ 只能取特定的值,称为**本征值**,即 $\sqrt{\lambda}l = n\pi$,故可得本征值

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,\cdots \tag{14.1.12}$$

对每个 λ_n,其相应的解 $X_n(x)$ 称为**本征函数**

$$X_n(x) = C\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1,2,\cdots \tag{14.1.13}$$

由于 λ 必须取特定的值 λ_n 才能满足边界条件,故在 $T(t)$ 满足的方程(14.1.7)

中的 λ 也必须取(14.1.12)式中的 λ_n,而方程(14.1.7)的通解是

$$T = A\sin a\sqrt{\lambda}t + B\cos a\sqrt{\lambda}t$$

对于每一个 λ_n,有

$$T_n = A_n\sin a\frac{n\pi}{l}t + B_n\cos a\frac{n\pi}{l}t, \quad n = 1,2,\cdots \tag{14.1.14}$$

A_n, B_n 为积分常数. 若令 $\omega_n = \dfrac{an\pi}{l}$,称为**本征频率**. 则上式可写成

$$T_n = A_n\sin \omega_n t + B_n\cos \omega_n t, \quad n = 1,2,\cdots \tag{14.1.15}$$

故对每一个本征值 λ_n,有本征解 u_n,

$$u_n(x,t) = (A_n\sin \omega_n t + B_n\cos \omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1,2,\cdots \tag{14.1.16}$$

其中积分常数 C_n 吸收到 A_n 和 B_n 中.

这无穷多个 u_n 都是满足方程(14.1.1)及边界条件(14.1.2)的不同的解,由线性微分方程**解的线性叠加原理**,这一定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\sin \omega_n t + B_n\cos \omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{14.1.17}$$

而叠加系数 A_n 和 B_n 要由初始条件来定. 我们注意到 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{l}x, n = 1,2,3,\cdots\right\}$是个完备的正交函数系,(下面要利用到 $X(x)$ 满足的方程在边界条件下得到本征函数 $X_n(x)$ 的性质,即本征函数系 $\{X_n(x)\}$ 是一个完备的正交函数系. 这一点在后一节的内容中将给予介绍.)由于初始条件中的 $\varphi(x)$ 和 $\nu(x)$ 都是定义在 $[0,l]$ 上的函数,故可在完备的正交函数系 $\{X_n(x)\}$ 上作 Fourier 展开,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{14.1.18}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{14.1.19}$$

其展开系数为

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.1.20}$$

$$\nu_n = \frac{2}{l}\int_0^l \nu(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.1.21}$$

而由定解问题的初始条件 $u(x,0)=\varphi(x)$，$u_t(x,0)=\nu(x)$，可知

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{14.1.22}$$

$$\nu(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{14.1.23}$$

比较式(14.1.18)和式(14.1.22)，式(14.1.19)和式(14.1.23)再结合式(14.1.20)及式(14.1.21)，可得到

$$B_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.1.24}$$

$$A_n = \frac{l}{an\pi}\nu_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \nu(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.1.25}$$

把 A_n 和 B_n 的表达式代入解 $u(x,t)$ 的表达式式(14.1.17)，就得到了两端固定的长为 l 的有界弦的自由振动(即没有外力 f 的作用)定解问题的解.

下面我们讨论这一解的物理意义，对应每一本征值 λ_n 的本征解(14.1.16)式

$$u_n(x,t) = \left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t + B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

把它改写成

$$u_n(x,t) = C_n\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\sin(\omega_n t+\delta_n) \tag{14.1.26}$$

本征解 $u_n(x,t)$ 表示弦的第 n 个振动模式，其中

$$C_n = \sqrt{A_n^2+B_n^2},\quad \delta_n = \arctan\frac{B_n}{A_n},\quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l} \tag{14.1.27}$$

ω_n 称为这种第 n 个振动模式的频率，δ_n 为这一振动模式的初相位. 对于 $u_n(x,t)$ 中弦上的任一给定点 x，它作谐振动的振幅为

$$a_n(x) = \left|C_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right| \tag{14.1.28}$$

由此可看出振幅 $a_n(x)$ 与 x 点有关：

当 $x=0,\frac{l}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}l,l$ 时，振幅 $a_n=0$，即弦上的这些点是不产生振动的.

当 $x=\frac{l}{2n},\frac{3l}{n},\cdots,\frac{2n-1}{2n}l$ 时，振幅 $a_n=C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$，达到最大值，具体数值与 A_n,B_n 有关，它由初始条件确定，即由式(14.1.24)和式(14.1.25)确定. 不管 n 取何值，每个 λ_n 所对应的 $u_n(x,t)$ 都有以上的结果，即这一定解问题的解中的每一种振动模式 $u_n(x,t)$，都是以这种运动形式出现的，这是**驻波**的形式. 在 $a_n=0$ 点称为**波节**，在 $a_n=C_n$ 的点称为**波腹**.

当 $n=1$ 时，$u_1(x,t)$ 称为这种弦振动的基波，基波只有 $x=0,l$ 这两个端点的振幅 $a_1=0$，故基波没有波节，而波腹在 $x=\frac{l}{2}$ 处.

当 $n>1$ 时，解 $u_n(x,t)$ 叫做这种弦振动的 n 次谐波，由上面的分析可知，n 次谐波是有 $n-1$ 个波节，有 n 个波腹的驻波.

§14.2　Sturm－Liouville(斯特姆－刘维尔)本征值问题

从上一节的例子中我们看到，两端固定的弦的自由振动的定解问题，即对齐次方程和齐次边界条件下进行分离变量，在方程的分离变量中会得到带参数 λ 的常微分方程，并且与分离后的边界条件构成本征值问题，解得一系列本征值 λ_n 及其所对应的本征函数 X_n，这些本征函数构成一个本征函数系 $\{X_n\}$，而初始条件中，在弦的自变量的定义域上的函数 $\varphi(x),\nu(x)$ 都在这一本征函数系上进行展开，最后把这一定解问题解出.

那么对于波动方程、输运方程和 Poisson 方程(稳定场分布)相应的齐次方程和齐次边界条件的定解问题，是否可沿用同一思路同一模式来解决，其理论依据是什么？回答是肯定的，这就是 Sturm－Liouville 本征值问题.

一、Sturm－Liouville 本征值问题(简称 S－L 本征值问题)

Sturm－Liouville 本征值问题是一种特定的本征值问题，是含有参数 λ 的特定二阶常微分方程，即 Sturm－Liouville 方程在特定边界条件下所构成的本征值问题.

具有如下形式带参数 λ 的二阶常微分方程称为 **Sturm－Liouville 方程**(简写成 S－L 方程)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y'(x)]-q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0 \qquad (14.2.1)$$

而一般带参数 λ 的二阶常微分方程

$$y''(x) + P_0(x)y'(x) - q_0(x)y(x) + \lambda\rho_0(x)y(x) = 0 \quad (14.2.2)$$

都可以通过两边乘以函数 $k(x) = \exp[\int P_0(x)\mathrm{d}x]$ 将其写成 S－L 方程的形式.

在 S－L 方程中参数 λ 为**本征参数**(或称**本征值**),而函数 $\rho(x)$ 称为**权重函数**.

若我们把 S－L 方程写成算子形式,定义线性算子

$$L = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x) \quad (14.2.3)$$

则 S－L 方程可写成

$$Ly(x) = \lambda\rho(x)y(x) \quad (14.2.4)$$

此形式下,λ 和 $\rho(x)$ 的意义就一目了然了.

上一节中对弦的振动方程分离变量后得到的方程 $X'' + \lambda X = 0$,即是 $k(x) = 1, q(x) = 0, \rho(x) = 1$ 的 S－L 方程,其算子方程的形式为

$$LX(x) = \lambda X(x) \quad (14.2.5)$$

其中 $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. 我们求得的是算子 L 在边界条件 $X(0) = 0$ 和 $X(l) = 0$ 下的本征值 λ_n 及本征函数 $X_n(x)$.

在本节中,我们不能给出 S－L 本征值问题的严格证明,但就此问题的几个主要方面予以讨论.

对 S－L 方程及在一定的边界条件(B. C. 为边界条件的简写)下

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y'(x)] - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b \\ \text{B. C.} \quad (x = a, x = b) \end{cases} \quad (14.2.6)$$

构成的本征值问题,即要求出本征值 λ_n,及其对应的本征解 $y_n(x)$. B. C. $(x = a, x = b)$ 表示 $x = a$ 和 $x = b$ 的边界条件.

为了讨论方便,我们对方程进行限制,在 S－L 方程中,取 $k(x) \geqslant 0, q(x) \geqslant 0, \rho(x) > 0$,这些条件是我们所讨论的物理问题中三类方程分离变量后得到的二阶常微分方程所满足的. 讨论 S－L 本征值问题,主要要知道在什么样的边界条件下具有本征值,这些本征值和相应的本征函数又具有什么主要的性质. 对边界条件,限制在如下三种边界条件下:

(1) **三类齐次边界条件**,即在 $x = a, x = b$ 的边界点上,有

$$[\alpha_1 y - \beta_1 y']_{x=a} = 0 \quad (14.2.7)$$

$$[\alpha_2 y + \beta_2 y']_{x=b} = 0 \quad (14.2.8)$$

其中 $\alpha_{1,2},\beta_{1,2}\geqslant 0$，当 $\beta_{1,2}=0$ 为第一类齐次边界条件，当 $\alpha_{1,2}=0$ 为第二类齐次边界条件，当 α,β 都不为零为第三类齐次边界条件. (14.2.7) 式中 y' 项前的“－”号是由于在 $x=a$ 边界点的外法向 n 与 $\mathrm{d}x$ 的正向相反，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 当 $k(a)=k(b)=0$ 时，称为**自然边界条件**，它与 $y(a)\neq\infty$，$y(b)\neq\infty$ 等价.

(3) **周期性边界条件**：当 $k(a)=k(b)$ 且 $y(a)=y(b)$，$y'(a)=y'(b)$.

命题 14.2.1：本征函数的正交性：如上在 S－L 方程形式的限制下和三种边界条件下，S－L 方程存在本征解，即对应每一个本征值 λ_n，有本征函数 $y_n(x)$，则所有的本征解 $\{y_n(x)\}$ 构成一个正交的函数系.

证：设 S－L 本征值问题中，λ_n 和 λ_m 为不同的本征值，其对应的本征函数为 $y_n(x)$ 和 $y_m(x)$，分别满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky'_n]-qy_n+\lambda_n\rho y_n=0 \tag{14.2.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky'_m]-qy_m+\lambda_m\rho y_m=0 \tag{14.2.10}$$

由 $y_m\times$(14.2.9)式 $-y_n\times$(14.2.10)式可得

$$y_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky'_n]-y_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky'_m]+(\lambda_n-\lambda_m)\rho y_m y_n=0 \tag{14.2.11}$$

上式两边对 x 进行积分，积分限从 a 到 b，有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left\{y_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky'_n]-y_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky'_m]\right\}\mathrm{d}x+(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b\rho y_m y_n\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_m y'_n-ky_n y'_m]\mathrm{d}x+(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b\rho y_m y_n\mathrm{d}x\\
&=[ky_m y'_n-ky_n y'_m]_{x=b}-[ky_m y'_n-ky_n y'_m]_{x=a}+\\
&\quad(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b\rho y_m y_n\mathrm{d}x\\
&=0
\end{aligned} \tag{14.2.12}$$

从上式可看出，对第一、二类齐次边界条件，即 $y(x)\big|_{x=a,b}=0$，$y'(x)\big|_{x=a,b}=0$ 时，立即可得

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b\rho y_m y_n\mathrm{d}x=0$$

由于 $\lambda_n\neq\lambda_m$，故

$$\int_a^b \rho y_m y_n \mathrm{d}x = 0 \tag{14.2.13}$$

即 $y_n(x)$, $y_m(x)$ 是以权重 $\rho(x)$ 在 $[a,b]$ 区间中正交的.

对第三类齐次边界条件,我们把(14.2.12)式中第二个等号右边的第一、第二项稍加变形:

$$\begin{aligned}
&[ky_m y'_n - ky_n y'_m]_{x=b} \\
&= \left[\frac{k}{\alpha_2}(\alpha_2 y_m y'_n + \beta_2 y'_m y'_n - \beta_2 y'_m y'_n - \alpha_2 y_n y'_m)\right]_{x=b} \\
&= \left[\frac{k}{\alpha_2} y'_n(\alpha_2 y_m + \beta_2 y'_m) - \frac{k}{\alpha_2} y'_m(\alpha_2 y_n + \beta_2 y'_m)\right]_{x=b}
\end{aligned} \tag{14.2.14}$$

和

$$\begin{aligned}
&[ky_m y'_n - ky_n y'_m]_{x=a} \\
&= \left[\frac{k}{\alpha_1}(\alpha_1 y_m y'_n - \beta_1 y'_m y'_n + \beta_1 y'_m y'_n - \alpha_1 y_n y'_m)\right]_{x=a} \\
&= \left[\frac{k}{\alpha_1} y'_n(\alpha_1 y_m - \beta_1 y'_m) - \frac{k}{\alpha_1} y'_m(\alpha_1 y_n - \beta_1 y'_n)\right]_{x=a}
\end{aligned} \tag{14.2.15}$$

由上两式可以看出,在第三类齐次边界条件下,由(14.2.12)式仍可得到 y_m 与 y_n 正交的结论,即

$$\int_a^b \rho y_n y_m \mathrm{d}x = 0$$

当 $k(a) = k(b) = 0$ 为自然边界条件时,由(14.2.12)式即可得出

$$\int_a^b \rho y_n y_m \mathrm{d}x = 0$$

即 y_m 与 y_n 正交.

当边界条件满足周期性边界条件时,即 $k(a) = k(b)$, $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ 时,(14.2.12)式中左边的第一项与第二项完全抵消,同样可以得到

$$\int_a^b \rho y_n y_m \mathrm{d}x = 0$$

即 y_m 与 y_n 正交的结论成立.

由此我们得到了在三种边界条件下,S-L 问题有本征解,且本征函数构成正交函数系的结论.

命题 14.2.2: 在三类齐次边界条件式(14.2.7)、式(14.2.8)下,或在自然边界条件下,或在周期边界条件下,S-L 问题具有无穷多个非负的本征值,所有

本征值组成一个单调递增以无穷远点为凝聚点的序列.

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty \tag{14.2.16}$$

在这里我们只证明本征值的非负性.

证：设本征值 λ_n 所对应的本征函数为 $y_n(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_n'] - qy_n + \lambda_n\rho y_n = 0 \tag{14.2.17}$$

以 y_n^* 乘上式两边，并对 x 积分，有

$$\begin{aligned}\lambda_n\int_a^b\rho|y_n|^2\mathrm{d}x &= \int_a^b q|y_n|^2\mathrm{d}x - \int_a^b y_n^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_n']\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b q|y_n|^2\mathrm{d}x - [ky_n^*y_n']_{x=b} + \\ &\quad [ky_n^*y_n']_{x=a} + \int_a^b k|y_n'|^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{14.2.18}$$

由 $k(x)\geqslant 0, q(x)\geqslant 0, |y_n|^2\geqslant 0, |y_n'|^2\geqslant 0$，故可得

$$\lambda_n\int_a^b\rho|y_n|^2\mathrm{d}x \geqslant k(a)y_n^*(a)y_n'(a) - k(b)y_n^*(b)y_n'(b) \tag{14.2.19}$$

分几种情况讨论上式的右边：

第一种情况：在第一、二类齐次边界条件下等式右端显然为零，在第三类边界条件下，由(14.2.7)式、(14.2.8)式可解得：$y_n'(a) = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}y_n(a)$，$y_n'(b) = -\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}y_n(b)$，代入(14.2.19)式右边得

$$k(a)\frac{\alpha_1}{\beta_1}|y_n(a)|^2 + k(b)\frac{\alpha_2}{\beta_2}|y_n(b)|^2 \geqslant 0$$

故可得在一、二、三类齐次边界条件下，有

$$\lambda_n\int_a^b\rho|y_n|^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

即可推出 $\lambda_n\geqslant 0$.

第二种情况：在自然边界条件下，$k(a) = k(b) = 0$

亦可从(14.2.19)式得

$$\lambda_n\int_a^b\rho|y_n|^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

即 $\lambda_n\geqslant 0$.

第三种情况：在周期边界条件下，$k(a) = k(b)$，$y(a) = y(b)$，$y'(a) = y'(b)$，

同理可得 $\lambda_n \geqslant 0$.

证毕.

二、本征函数系上的广义 Fourier 展开

无穷多个本征值 λ_n 对应的无穷多个本征函数 $y_n(x)$ 构成一个完备的正交函数系 $\{y_n(x)\}$，任何一个定义在 $x \in [a,b]$ 上的满足 Direchlet 条件的函数 $f(x)$，都可以在函数系 $\{y_n(x)\}$ 上作广义的 Fourier 展开，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x) \tag{14.2.20}$$

展开系数为

$$C_n = \frac{1}{\int_a^b |y_n(x)|^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \int_a^b f(x)\rho(x)y_n^*(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.2.21}$$

此展开式为以 $\{y_n(x)\}$ 为基的广义 Fourier 级数.

S－L 本征值问题是整个二阶偏微分方程分离变量解法的理论基础. 从上一节两端固定弦的自由振动定解问题的解法中可清晰地看出这一重要性，有了 S－L本征值问题的结论，才能使我们把复杂的数学物理的定解问题，化为可求解的 S－L 问题来处理.

为了加深对 S－L 问题的理解，我们再举一个第三类边界条件的自由弦的振动的例子.

例 14.2.1：定义在 $x \in [0,l]$ 上的，长为 l 的，两端满足第三类齐次边界条件的自由弦的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l \\ u(0,t) - hu_x(0,t) = 0, & h > 0 \\ u(l,t) + hu_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \nu(x) \end{cases} \tag{14.2.22}$$

解：设 $u(x,t)$ 可分离变数 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入方程和边界条件可得

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \tag{14.2.23}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{14.2.24}$$

及

$$\begin{cases} X(0) - hX'(0) = 0 \\ X(l) + hX'(l) = 0 \end{cases} \tag{14.2.25}$$

方程(14.2.24)及边界条件(14.2.25)，当 $\lambda>0$ 时构成了 S－L 本征值问题.(如果假设 $\lambda<0$ 和 $\lambda=0$，由方程得到的解在此边界条件下没有非零解，读者可以自己做练习.)

方程(14.2.24)式的解为

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x \tag{14.2.26}$$

有

$$X'(x)=-\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}x \tag{14.2.27}$$

代入边界条件(14.2.25)式可得

$$\begin{cases}C_1-h\sqrt{\lambda}C_2=0\\(\cos\sqrt{\lambda}l-h\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l)C_1+(\sin\sqrt{\lambda}l+h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l)C_2=0\end{cases} \tag{14.2.28}$$

此为未知数是 C_1,C_2 的方程组，要 C_1,C_2 有非零解，$\Delta=0$，即

$$\begin{vmatrix}1 & -h\sqrt{\lambda}\\ \cos\sqrt{\lambda}l-h\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l+h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l\end{vmatrix}=0$$

可得

$$\cot\sqrt{\lambda}l=\frac{h^2\lambda-1}{2h\sqrt{\lambda}} \tag{14.2.29}$$

此方程式为确定本征值 λ_n 的方程，是个超越方程，它没有 λ_n 的解析表达式，一般用数值解或用作图解. 令

$$\begin{cases}\eta=\cot\mu, & \mu=\sqrt{\lambda}l\\ \eta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h\mu}{l}-\dfrac{l}{h\mu}\right)\end{cases} \tag{14.2.30}$$

用作图解法可看出在 $\eta-\mu$ 图上(图 14.2.1)$\cot\mu$ 与 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h\mu}{l}-\dfrac{l}{h\mu}\right)$ 的交点为 μ_1，μ_2，…，有无穷多个交点并以 ∞ 为凝聚点，即本征值 λ_n 为

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{1}{l}\mu_n$$

$$\lambda_n=\left(\frac{1}{l}\mu_n\right)^2 \tag{14.2.31}$$

λ_n 的具体数值由(14.2.31)式给出，μ_n 是由(14.2.30)式的数值解得到的. 这样

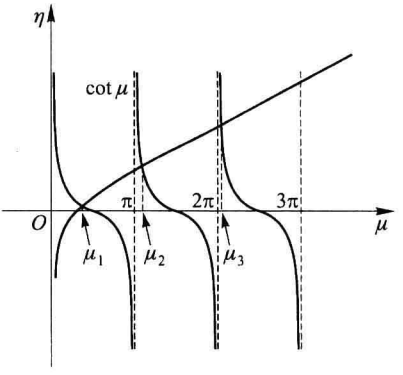


图 14.2.1

我们就得到了 λ_n 序列，它是个正数的本征值序列，这是 S－L 本征值问题的结果.

由(14.2.28)式可得

$$C_1 = h\sqrt{\lambda_n}C_2 \tag{14.2.32}$$

则可得对应本征值 λ_n 的本征函数为

$$X_n(x) = C_n(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x) \tag{14.2.33}$$

相应的 $T_n(t)$ 的解为

$$T_n(t) = A_n\cos\sqrt{\lambda_n}at + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}at \tag{14.2.34}$$

可得弦的第 n 个振动模式的解为

$$u_n(x,t) = (A_n\cos\sqrt{\lambda_n}at + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}at)(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x) \tag{14.2.35}$$

其中 A_n, B_n 为待定系数，它们将由初始条件确定，而(14.2.33)式的积分常数 C_n 吸收到待定系数 A_n, B_n 中. 方程解的形式可写成

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \tag{14.2.36}$$

由初始条件可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x) = \varphi(x),$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n = \varphi(x) \tag{14.2.37}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} a\left(\sin \sqrt{\lambda_n} x + h \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x\right) = \nu(x),$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} a X_n = \nu(x) \tag{14.2.38}$$

由于$\{X_n(x)\}$是一个正交完备的函数系，$\varphi(x)$和$\nu(x)$可在$\{X_n(x)\}$中展开

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \tag{14.2.39}$$

其中

$$\varphi_n = \frac{\int_0^l \varphi(\zeta)\left(\sin \sqrt{\lambda_n} \zeta + h \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \zeta\right) \mathrm{d}\zeta}{\int_0^l \left(\sin \sqrt{\lambda_n} \zeta + h \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \zeta\right) \mathrm{d}\zeta}$$

$$= \frac{1}{\frac{l}{2}\left(1 + h^2 \sqrt{\lambda_n}\right) + h} \int_0^l \varphi(\zeta)\left(\sin \sqrt{\lambda_n} \zeta + h \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \zeta\right) \mathrm{d}\zeta \tag{14.2.40}$$

和

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n X_n(x) \tag{14.2.41}$$

其中

$$\nu_n = \frac{1}{\frac{l}{2}\left(1 + h^2 \sqrt{\lambda_n}\right) + h} \int_0^l \nu(\zeta)\left(\sin \sqrt{\lambda_n} \zeta + h \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \zeta\right) \mathrm{d}\zeta \tag{14.2.42}$$

以上四式与(14.2.37)式及(14.2.38)式比较，有

$$\begin{cases} A_n = \varphi_n \\ B_n = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n} a} \nu_n \end{cases} \tag{14.2.43}$$

至此我们把所有的待定系数都求出，代入$u(x,t)$的表达式，即得到第三类齐次边界条件的弦的自由振动定解问题的解.

从上面可以看出，由于有S－L本征值问题的保证，即使我们不能求出λ_n的

解析表达式，而利用 S－L 本征值问题中的主要结论，我们可以放心去求解复杂的物理学中的定解问题.

下面我们再举一稍复杂的二维振动的例子看 S－L 本征值问题.

例 14.2.2：求解四边固定，边长分别为 l 和 d 的矩形薄膜的本征振动（即求本征振动频率和本征振动函数）.

解：由于求本征振动，不必给出初始条件，即满足的方程和边界条件如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 & (14.2.44) \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 & (14.2.45) \\ u\big|_{y=0} = u\big|_{y=d} = 0 & (14.2.46) \end{cases}$$

设 $u(x,y,t)$ 可分离变量，

$$u(x,y,t) = U(x,y)T(t) \tag{14.2.47}$$

代入方程(14.2.44)式可得

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{1}{U}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = -\lambda, \quad \lambda > 0$$

即可得

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \tag{14.2.48}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \lambda U = 0, \quad \lambda > 0 \tag{14.2.49}$$

且边界条件在分离变量下为

$$U(0,y) = U(l,y) = 0 \tag{14.2.50}$$

$$U(x,0) = U(x,d) = 0 \tag{14.2.51}$$

方程(14.2.49)式与边界条件(14.2.50)式、(14.2.51)式构成二维偏微分方程的本征值问题. 为解此本征值问题，尚需对 $U(x,y)$ 再次分离变量，使之化为 S－L 本征值问题来求解. 令

$$U(x,y) = X(x)Y(y) \tag{14.2.52}$$

则可得两个 S－L 本征值问题：

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0, \quad \alpha > 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{14.2.53}$$

$$\begin{cases} Y'' + \beta Y = 0, \quad \beta > 0 \\ Y(0) = Y(d) = 0 \end{cases} \tag{14.2.54}$$

其中：
$$\alpha + \beta = \lambda \tag{14.2.55}$$

可求得(14.2.53)式的本征值和本征函数为

$$\alpha_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad X_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1,2,\cdots \tag{14.2.56}$$

和(14.2.54)式的本征值和本征函数为

$$\beta_m = \frac{m^2\pi^2}{d^2}, \quad Y_m(y) = B_m \sin\frac{m\pi}{d}y, \quad m = 1,2,\cdots \tag{14.2.57}$$

故可得偏微分方程的本征问题的本征值为 λ_{nm}

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2, \quad n,m = 1,2,\cdots \tag{14.2.58}$$

相应的本征函数为

$$U_{nm} = A_{nm} \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\frac{m\pi}{d}y \tag{14.2.59}$$

其中
$$A_{nm} = A_n B_m$$

由 λ_{nm} 得到相应的 $T(t)$ 满足的方程

$$T''_{nm} + \lambda_{nm} a^2 T_{nm} = 0 \tag{14.2.60}$$

由此可以看出对于本征振动频率 ω_{nm} 为

$$\omega_{nm}^2 = \lambda_{nm} a^2 = \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2\right] a^2,$$

即

$$\omega_{nm} = a\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}, \quad n,m = 1,2\cdots \tag{14.2.61}$$

其相应的本征振动函数即为 U_{nm}.

§14.3　非齐次方程齐次边界条件下的分离变量法

非齐次方程齐次边界条件的定解问题，其复杂性就在于方程的非齐次项即源项上. 我们解此问题的思路是，仍要先解决非齐次方程所对应的齐次方程齐次边界条件的定解问题，求出其 S－L 本征值问题，再把方程的源项在求得的相应的本征函数系上进行展开，然后再求出相应的解.

我们以弦的受迫振动为例来详细分析.

例 14.3.1：设弦受到已知外力 $f(x,t)$ 的作用，其定解问题如下

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0 & (14.3.1) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (14.3.2) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (14.3.3) \\ u_t(x,0) = \nu(x) & (14.3.4) \end{cases}$$

其相应的齐次方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \nu(x) \end{cases}$$

的解是我们已求得的，其 S - L 本征值问题的本征函数系为 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x, n=1,2,\cdots\right\}$. 把 t 作为参数，$f(x,t)$ 在此函数系中作带参数的展开，

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{14.3.5}$$

展开系数 $f_n(t)$ 为

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.3.6}$$

而上述齐次方程齐次边界条件的解的形式为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{14.3.7}$$

把上两式代入方程(14.3.1)式和初始条件中，定解问题变为

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\left(T''_n + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x & (14.3.8) \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x & (14.3.9) \\ \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x = \nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_n\sin\frac{n\pi}{l}x & (14.3.10) \end{cases}$$

由于我们的本征函数是由边界条件(14.3.2)式得到的，故边界条件已用过，它不再出现在上述的定解问题的方程(14.3.8)式、(14.3.9)式、(14.3.10)式中.

上述的定解问题很容易化为：

$$\begin{cases} T_n'' + \omega_n'' T_n = f_n(t) & (14.3.11) \\ T_n(0) = \varphi_n & (14.3.12) \\ T_n'(0) = \nu_n & (14.3.13) \end{cases}$$

其中 ω_n 称为本征频率

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tag{14.3.14}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.3.15}$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.3.16}$$

$$\nu_n = \frac{2}{l}\int_0^l \nu(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{14.3.17}$$

因此在外力 $f(x,t)$ 作用下两端固定的弦的定解问题就化为 $T_n(t)$ 的非齐次的二阶常微分方程的定解问题了，这是一个可解的问题. $T_n(t)$ 的解依赖于 $f_n(t)$，φ_n 和 ν_n，也就是依赖于 $f(x,t)$ 及 $\varphi(x)$ 和 $\nu(x)$ 的形式.

下面我们看一个特殊的外力的形式，即

$$f(x,t) = A(x)\sin\omega t$$

且 $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ 的情况.

$$f(x,t) = A(x)\sin\omega t = \sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{14.3.18}$$

其中

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l A(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{14.3.19}$$

此时的 f_n 为

$$f_n = \alpha_n\sin\omega t \tag{14.3.20}$$

α_n 为常数，对 $A(x)$ 与本征函数的积分，对不同的 n，α_n 的值是不一样的. 定解问题化为

$$\begin{cases} T_n''(t) + \omega_n^2 T_n = \alpha_n\sin\omega t & (14.3.21) \\ T_n(0) = 0 & (14.3.22) \\ T_n'(0) = 0 & (14.3.23) \end{cases}$$

当 $\omega \neq \omega_n$ 时，可解得

$$T_n = \frac{\alpha_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)}(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \tag{14.3.24}$$

则弦的振动解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)}(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t)\sin \frac{n\pi x}{l} \tag{14.3.25}$$

当外力的频率 ω 趋于弦的某一个本征频率 ω_k 时，

$$\omega_k = \frac{ak\pi}{l}$$

由 L'Hospital(洛必达)法则可求得

$$\begin{aligned} T_k &= \lim_{\omega \to \omega_k} \frac{\alpha_k}{\omega_k(\omega^2 - \omega_k^2)}(\omega \sin \omega_k t - \omega_k \sin \omega t) \\ &= \frac{\alpha_k}{2\omega_k^2}\sin \omega_k t - \frac{\alpha_k}{2\omega_k} t\cos \omega_k t \end{aligned} \tag{14.3.26}$$

则当 $\omega = \omega_k$ 时，弦的振动解会出现两部分，即 $n \neq k$ 的求和项，其求和结果是有限的，同时出现 $n = k$ 的项，即共振项.

$$u(x,t) = \sum_{n \neq k} \frac{\alpha_n}{\omega_n(\omega_k^2 - \omega_n^2)}(\omega_k \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_k t)\sin \frac{n\pi}{l} + \left(\frac{\alpha_k}{2\omega_k^2}\sin \omega_k t - \frac{\alpha_k}{2\omega_k} t\cos \omega_k t\right)\sin \frac{k\pi}{l} x \tag{14.3.27}$$

此式右端的第二部分是 $n = k$ 对应的弦的 k 次谐波，我们看到这一部分的第一项是个有限的量，但第二项

$$-\frac{\alpha_k}{2\omega_k} t\cos \omega_k t \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{14.3.28}$$

其振幅是时间 t 的线性函数，且随时间 $t \to \infty$ 时振幅也无限增大，形成“共振”现象.

这是理想的两端固定弦振动的“共振”现象的理论计算的结果. 从这一结果去分析，由于弦的振动除基波外，有无穷多个高次谐波，有无穷多个本征频率，理论上当外力的频率趋近并等于任一个本征频率时，都有“共振”现象，即振幅趋于无穷大的现象产生. 但实际的现象中，共振现象往往只发生于当外力的频率趋于基波的本征频率 ω_1 时，而外力的频率趋于高次谐波的本征频率时，一般不容易出现共振现象. 其原因为：我们的弦振动方程式是由理想的物理模型模拟，并用了小振幅的近似得到的，其高次谐波的解具有较复杂的结构，是具有节点的驻

波，因此当振幅加大时，可能破坏其振动的驻波结构，产生某些非线性的效应，以致阻碍了振幅的无限增大，因而不能出现共振现象.

§14.4　非齐次边界条件下的分离变量法

S－L本征值问题是基于齐次方程和齐次边界条件的，而我们不能把非齐次边界条件的问题用相应的齐次边界条件去解，因为边界条件右边的非齐次项不是坐标的函数，其变量只是边界点和时间，与本征函数系的定义域不同，它不能在本征函数系上进行展开. 因此要把非齐次边界条件的问题变成齐次边界条件问题，然后再解相应的S－L本征值问题. 要达到这一目的，就要用数学上经常用的函数变换，即构造一个新的函数，使原来的非齐次边界条件变成新的函数的齐次边界条件，即通过函数变换把边界条件齐次化.

下面我们举例处理非齐次边界条件的弦的振动定解问题，来说明构造函数变换使边界条件齐次化的步骤，最终给出S－L本征值问题.

例 14.4.1：非齐次边界条件弦振动的定解问题如下：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (0 < x < l, t > 0) \quad (14.4.1) \\ u(0,t) = g_1(t), & t > 0 \quad (14.4.2) \\ u(l,t) = g_2(t), & t > 0 \quad (14.4.3) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (14.4.4) \\ u_t(x,0) = \nu(x) & (14.4.5) \end{cases}$$

解：由于波动方程是线性方程，其解 $u(x,t)$ 具有线性叠加性质，假设 $u(x,t)$ 由两部分 $w(x,t)$ 和 $k(x,t)$ 相加组成. 令其中一部分与边界条件的非齐次项相消，另一部分的边界条件就齐次化了，即令

$$u(x,t) = k(x,t) + w(x,t) \tag{14.4.6}$$

取

$$k(0,t) = g_1(t), \quad k(l,t) = g_2(t) \tag{14.4.7}$$

则可得

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0 \tag{14.4.8}$$

即 $w(x,t)$ 的边界条件已齐次化了. 再看 $w(x,t)$ 满足的方程，把(14.4.6)式代入方程(14.4.1)中，即可得 $w(x,t)$ 满足的方程

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = F(x,t) \tag{14.4.9}$$

其中

$$F(x,t) = f(x,t) - k_{tt} + a^2 k_{xx} \tag{14.4.10}$$

而初始条件变为

$$w(x,0) = \Phi(x), \quad \Phi(x) = \varphi(x) - k(x,0) \tag{14.4.11}$$

$$w_t(x,0) = V(x), \quad V(x) = \nu(x) - k_t(x,0) \tag{14.4.12}$$

整个定解问题的形式就给定了,关键是如何定出 $k(x,t)$,使其满足 $k(0,t) = g_1(t), k(l,t) = g_2(t)$. 只有定出 $k(x,t)$ 后,才能定出 $F(x,t), \Phi(x), V(x)$ 等函数,整个定解问题才能确定下来.

而 $k(x,t)$ 的选取并非唯一,这样 $F(x,t), \Phi(x), V(x)$ 随着 $k(x,t)$ 的不同选取会有所不同,但在原定解问题给定后,其解的存在唯一性定理已保证了解的唯一性,即不同形式的 $k(x,t)$ 可能得到的 $u(x,t)$ 的形式会有不同,但它们可以通过非奇异的函数变换得到,这些方程的解是等价的.

对 $k(x,t)$ 的选取我们用试探解的方法,设 $k(x,t)$ 具有最简单的形式,它是 x 的线性函数

$$k(x,t) = A(t)x + B(t) \tag{14.4.13}$$

这样的选取比较简单,$k_{xx} = 0$,使 F, Φ, ν 相对简单. 由边界条件 $k(0,t) = g_1(t)$, $k(l,t) = g_2(t)$ 很容易定出

$$B(t) = g_2(t), \quad A(t) = \frac{1}{l}[g_2(t) - g_1(t)] \tag{14.4.14}$$

即可得

$$\begin{aligned} k(x,t) &= \frac{1}{l}[g_2(t) - g_1(t)]x + g_1(t) \\ &= \frac{x}{l}g_2(t) + \frac{l-x}{l}g_1(t) \end{aligned} \tag{14.4.15}$$

则可得

$$F(x,t) = f(x,t) - \frac{x}{l}\frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2} - \frac{l-x}{l}\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} \tag{14.4.16}$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \frac{x}{l}g_2(0) - \frac{l-x}{l}g_1(0) \tag{14.4.17}$$

$$V(x) = \nu(x) - \frac{x}{l}\frac{\partial}{\partial t}g_2(0) - \frac{l-x}{l}\frac{\partial}{\partial t}g_1(0) \tag{14.4.18}$$

故在选取了 $k(x,t)$ 的函数形式后,整个定解问题就变成求 $w(x,t)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \Phi(x) \\ w_t(x,0) = V(x) \end{cases} \tag{14.4.19}$$

这是一个非齐次方程齐次边界条件的定解问题，我们可以先求出其相应的齐次方程齐次边界条件的 S－L 本征值问题，即可求得 $w(x,t)$，这一方法在上一节中已详细介绍，而后即可得到原定解问题的解 $u(x,t) = k(x,t) + w(x,t)$.

§14.5　分离变量法小结

分离变量法是解线性偏微分方程定解问题的最基本最常用的方法之一，其适用范围较广，特别是边界为规则边界（例如长方形边界，球面，柱面等）的边界条件，通常可实施分离变量法，分离变量法是把高维问题，即 $n+1$ 维（一维是时间，n 维是空间变量，n 可以是 1,2,3,…甚至更高维的特殊空间）的问题，通过变量的分离，最终化为带有边界条件的空间一维的常微分方程，同时必须把边界条件齐次化，或是利用自然边界条件和周期性边界条件，才能利用 S－L 本征值问题这一理论基础来求解这个带边界条件的常微分方程.

分离变量法的程序可分为如下三步：

第一步：对偏微分方程定解问题的解 $u(\boldsymbol{r},t)$（即物理上的场量）假设其空间变量的函数与时间变量的函数可进行分离，即具有形式

$$u(\boldsymbol{r},t) = U(\boldsymbol{r})T(t) \tag{14.5.1}$$

这一形式适合方程也适合边界条件，即方程可分离成空间部分和时间部分所分别满足的方程，边界条件则要求是齐次边界条件（三类齐次边界条件），自然边界条件，周期边界条件等.

如果原定解问题的边界条件是非齐次边界条件，则必须先通过函数变换把边界条件齐次化.

对 1＋1 维问题，令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，看其是否适合方程和边界条件（边界条件要求是齐次的边界条件，否则首先要把边界条件齐次化），即方程可分离成 $X(x)$ 和 $T(t)$ 各自满足的带参数的常微分方程，并且边界条件也可分离成 $X(x)$ 满足的边界条件，从而定出 $X(x)$ 所适合的 S－L 本征值问题.

在直角坐标系下，当 $n=2,3$ 时，空间变量函数要继续分离变量，如 $U(\boldsymbol{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$，以确定 $X(x)$、$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 满足的方程及边界条件，它将会出现多个 S－L 本征问题（见 §14.2 中的例 14.2.2）.

特别要提及的是,在直角坐标系下对只有空间变量的 Laplace 方程和Poisson 方程,在齐次边界条件下分离变量可能只有平凡解而没有非平凡解,在非齐次边界条件下就要采用某些技巧,把解先设为几部分的线性叠加,再对每一部分进行分离变量,这种问题将留作习题让读者做练习.

在曲线坐标系(本书只介绍球坐标系和柱坐标系)下的三类方程,其空间变量由分离变量法所得到的常微分方程,往往是一些特殊的方程,和边界条件一起所确定的 S-L 本征值问题所得到的本征函数是多种多样的特殊函数,这一类问题将在后面的章节中介绍.

第二步:求解由上一步得到的所有的 S-L 本征值问题,求得全部的本征值及本征函数系. 利用广义 Fourier 展开(本征函数展开法),求解所有的非 S-L 问题的常微分方程,求得相应于各本征值的常微分方程的解的表达式,并代入原偏微分方程定解问题中场量的分离变量的表达式,得到相应于多个特征值的场量的分量表达式 u_n 或 u_{nm} 等.

第三步:将所有的场量的分量形式(例如 u_n 和 u_{nm} 等)叠加起来,即对所有本征值的指标进行求和,得到原定解问题解的一般形式. 利用原定解问题的初始条件或边界条件,定出所有的待定系数,就得到了原偏微分方程定解问题的解.

以上是求解二次线性偏微分方程定解问题的一般步骤,是非常成熟的一种基本解法.

这里必须再强调一下,对于高维(空间维数大于一维)的情况,在方程分离时由于参数选取方式的不同致使分离出的常微分方程具有不同的形式,或是非齐次边界条件齐次化时选取方式的不同,导致最后解的形式不同,但由方程解的存在唯一性定理,保证了这些不同形式的解是等价的,都是原定解问题唯一的解.

第十四章习题

14.1 长为 l 的弦,两端固定,弦中的张力为 T,在距弦的一端 $x=0$ 的 l_0 处($l_0<l$),以力 F_0 把弦拉开,使 l_0 点离开平衡位置有一小位移,并使弦处于稳定状态. 在 $t=0$ 时刻突然撤销这一大小为 F_0 的力,求解弦的振动.

14.2 长为 l 的弦,两端固定,在弦的 x_0 处($0<x_0<l$)施予谐变外力 $\rho f(t)=\rho A\sin\omega t$,($\rho$ 为弦的线密度,A 为常数),求解弦的振动.

(提示:外力可表示为 $\rho f(x,t)=\rho A\delta(x-x_0)\sin\omega t$.)

14.3 求解习题 13.1 中的 <2>、<3> 两种情况下杆的振动.

14.4 导热系数为 κ 的均匀物质构成的立方体,$0\leqslant x\leqslant l_1$,$0\leqslant y\leqslant l_2$,$0\leqslant z\leqslant l_3$,其初始温度为 T_0,如果其表面温度保持在 0 ℃,求此立方体温度的变化. 并写出此立方体中心点,即

$\left(\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2},\frac{l_3}{2}\right)$ 处温度随时间的变化关系. 又问当时间 $t\to\infty$ 时,该立方体的温度表达式,并从物理上解释其合理性.

思考: 如果边界条件改为该立方体置于 0 ℃的环境中,其边界以牛顿冷却定律与环境进行热交换,其解的形式又是如何变化的,并与上面的结果进行比较,分析这两种边界条件的物理图像上的差异.

14.5 侧面绝热的均匀细杆,$0\leqslant x\leqslant l$,其导热系数为 κ,初始温度为 T_0,其两端保持不变的温度: $u(0,t)=T_1$, $u(l,t)=T_2$, T_1,T_2 均为常数. 求杆上的温度分布随时间的变化关系. 当 $t\to\infty$ 时,给出杆上的温度分布的表达式,并解释这一结果在物理上的合理性及其满足的物理定律.

14.6 铀块中中子的扩散、吸收的增殖反应如习题 13.4 所述. 试求一维细铀杆的临界长度. 临界长度是指当铀杆超过这一长度时,杆中的中子浓度随时间而增长致使铀块产生爆炸. 这里忽略杆的过中心轴剖面的对角线长度与杆的长度之差.

14.7 一厚度为 l 的单晶硅片置于充满杂质的环境中,杂质从硅片的两表面向里扩散,假设硅片两表面杂质浓度保持恒定的 N_0,杂质在硅片中的扩散系数为 D,求解此扩散问题. 并说明扩散的时间与扩散系数 D 及厚度 l 的关系. 当 t 较大时,化简所得的结果.

14.8 在矩形区域 $0<x<a$, $0<y<b$ 上求解 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(x,y)=0$$

使其满足边界条件:

$$\begin{cases} u(0,y)=Ay(b-y), & u(a,y)=0 \\ u(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a}, & u(x,b)=0 \end{cases}$$

其中 A,B 为常数.

14.9 在量子物理学中,空间中自由粒子可视为 deBroglie(德布罗意)波,被称为物质波,用 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 来描述,它满足如下 Schrödinger(薛定谔)方程(量子波动方程)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)$$

其中 $\hbar$ 为 Planck(普朗克)常数,m 为粒子质量. 我们把粒子看作在一个三边长为 L 的正立方体 $\left(-\frac{L}{2}\leqslant x\leqslant\frac{L}{2},-\frac{L}{2}\leqslant y\leqslant\frac{L}{2},-\frac{L}{2}\leqslant z\leqslant\frac{L}{2}\right)$ 中的三维波动,且这一波动满足周期性边界条件,试求解这一波动.

第十五章　曲线坐标系下方程的分离变量

上一章介绍了分离变量法的思想及实施的步骤，所举的例子都是在直角坐标系下的分离变量，相对比较简单，其原因是 Laplace 算子 ∇^2 在直角坐标系下的表达式是简单的，它对 x,y,z 坐标的二阶微商具有完全对称的形式. 因此三类方程在直角坐标系下进行分离变量后所构成的常微分方程具有简单的形式，方程的通解也是容易求的. 但我们的物理问题的边界往往不是长方体的表面，因此其他形状的边界用直角坐标系来描述就变得非常复杂了.

我们知道，建立物理问题的数学模型首先是要选取坐标系，当物理问题不再与直角对称性相关联时，而是具有其他对称性如中心对称或是轴对称时，我们往往要选取的是球坐标系或是柱坐标系等正交曲线坐标系，这些问题在物理学中大量存在，举不胜举. 而这些物理问题的界面也往往是球面或柱面. 因此，我们所建立的描述这些物理体系动力学的二阶线性偏微分方程中的 Laplace 算子 ∇^2，在曲线坐标系下的表达形式要复杂得多，因此在分离变量后所得到的常微分方程也比较复杂，是变系数的常微分方程，求解这些常微分方程要用常微分方程的级数解法. 在本章中我们主要介绍在球坐标系和柱坐标系下三类方程的分离变量及常微分方程的级数解法.

§15.1　球坐标系下方程的分离变量

本节是讨论三类方程在时间变量和空间变量分离后，空间变量的方程在球坐标下进行分离变量，以求得分别依赖于坐标 r、θ、φ 的常微分方程.

一、Laplace 方程在球坐标下的分离变量

Laplace 方程是纯空间变量的方程，在球坐标下

$$\nabla^2 u(r,\theta,\varphi) = 0 \tag{15.1.1}$$

由于 Laplace 算子在球坐标下的表达式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{15.1.2}$$

故 Laplace 方程在球坐标下的表达式为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{15.1.3}$$

设场函数 $u(r,\theta,\varphi)$ 可分离为径向部分 $R(r)$ 和角度部分 $\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi) \tag{15.1.4}$$

则方程(15.1.3)变为

$$\frac{\mathrm{Y}}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}=0$$

方程两边同乘$\dfrac{r^2}{R\mathrm{Y}}$得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2} \tag{15.1.5}$$

此等式左边为 r 的函数,右边为角度(θ,φ)的函数,令它们等于一个常数,记为 $l(l+1)$,即得

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=l(l+1)$$

可写成

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R(r)=0 \tag{15.1.6}$$

此方程称为**径向方程**,它是 Euler 型方程,是容易求解的.

同时得角度部分的方程:

$$\frac{1}{\mathrm{Y}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\mathrm{Y}\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}=-l(l+1),$$

可写成

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{15.1.7}$$

此方程称为**球函数方程**.

我们对球函数方程再进一步进行分离变量,令

$$\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

可得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+l(l+1)\Theta\Phi=0$$

两边同乘$\frac{\sin^2\theta}{\Theta\Phi}$得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} \tag{15.1.8}$$

等式左边为θ的函数,右边为φ的函数,故令两边都等于一常数λ,分别可得关于φ的方程和关于θ的方程,关于$\Phi(\varphi)$的方程为

$$\Phi''+\lambda\Phi=0 \tag{15.1.9}$$

这一方程是我们所熟悉的. 一般情况下,物理问题对场量$u(r,\theta,\varphi)$有单值性要求,即对$\Phi(\varphi)$的单值性要求表现为周期性条件$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$,也就是说当$\varphi$转一圈后,$u(r,\theta,\varphi)$与$u(r,\theta,\varphi+2\pi)$表示同一个场值. 这就是一种周期性边界条件,它与方程(15.1.9)式构成本征值问题,我们可立即定出本征值$\lambda=m^2$,$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 方程即可写成

$$\Phi''+m^2\Phi=0 \tag{15.1.10}$$

关于$\Theta(\theta)$的方程为

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2$$

即

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{15.1.11}$$

令$\cos\theta=x$,$\Theta(\theta)=y(x)$,$|x|\leqslant1$,则有$\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{15.1.12}$$

或写成

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{15.1.13}$$

这一方程称为**连带 Legendre(勒朗德)方程**.

当我们考虑的问题具有极轴对称性,场的分布是极轴对称的,即与φ角无关,此时$m=0$,$\Phi(\varphi)=1$,即$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)$,则连带 Legendre 方程就退化为 Legendre(勒朗德)方程.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0 \tag{15.1.14}$$

二、Helmhotz(赫姆霍兹)方程在球坐标下的分离变量

对波动方程

$$U_{tt}-a^2\nabla^2U=0 \tag{15.1.15}$$

将其场量的空间部分和时间部分进行分离变量,$U(\boldsymbol{r},t)=u(\boldsymbol{r})T(t)$,有

$$\frac{T''}{T}=\frac{a^2\nabla^2u}{u}=-\lambda,\quad \lambda>0 \tag{15.1.16}$$

即可得空间部分的方程为

$$\nabla^2u+k^2u=0,\quad k^2=\frac{\lambda}{a^2} \tag{15.1.17}$$

此方程称为 **Helmhotz 方程**.

对输运方程

$$U_t-a^2\nabla^2U=0 \tag{15.1.18}$$

令 $U(\boldsymbol{r},t)=u(\boldsymbol{r})T(t)$ 进行分离变量,同样可得空间部分的方程为 Helmhotz 方程(15.1.17)式.

下面我们对 Helmhotz 方程在球坐标下进行分离变量.

在球坐标系下,Helmhotz 方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0 \tag{15.1.19}$$

令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$,可得

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+k^2R\right]=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2} \tag{15.1.20}$$

此等式左边是径向部分,右端是角度部分,令左右两端都等于常数 $l(l+1)$,可得径向部分的方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

或写成

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \tag{15.1.21}$$

此方程称为**球 Bessel(贝塞尔)方程**.

而角度部分的方程为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \qquad (15.1.22)$$

此方程就是球函数方程. 将它进一步分离变量,分离成连带 Legendre 方程和 $\Phi(\varphi)$ 满足的方程,这一问题的分离变量与 Laplace 方程角度部分的分离变量完全相同,就不再重复,即得到关于 $\Phi(\varphi)$ 的方程(15.1.10)式为

$$\Phi''+m^2\Phi=0$$

和关于 $\Theta(\theta)$ 即为 $y(x)$ 的方程——连带 Legendre 方程(15.1.13)式.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

§15.2 柱坐标系下方程的分离变量

上一节中已介绍过,波动方程和输运方程把时间部分和空间部分进行分离变量后,空间部分就得到 Helmhotz 方程(15.1.17)式

$$\nabla^2u+k^2u=0,\quad k^2=\frac{\lambda}{a^2}$$

当 λ 为零即 $k=0$ 时,即方程的空间部分和时间部分分离变量后都为零,即(15.1.16)式的 $\lambda=0$,则 Helmhotz 方程就退化成 Laplace 方程,$\nabla^2u=0$. 因此在柱坐标下来讨论三类方程的空间部分的分离变量时,我们只要讨论 Helmhotz 方程在柱坐标下的分离变量,而 Laplace 方程的问题只看成 Helmhotz 方程中 $k=0$ 的特殊情况.

考虑 Helmhotz 方程

$$(\nabla^2+k^2)u=0 \qquad (15.2.1)$$

在柱坐标下,$u=u(\rho,\varphi,z)$,此方程的形式为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+k^2u=0 \qquad (15.2.2)$$

对此方程进行分离变量,设

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \qquad (15.2.3)$$

可得

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+\frac{RZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+R\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2R\Phi Z=0 \qquad (15.2.4)$$

方程两边同乘$\frac{\rho^2}{R\Phi Z}$，方程变为

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+\frac{\rho^2}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2\rho^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \qquad (15.2.5)$$

此方程左边为ρ,z的函数，右边为φ的函数，两边要相等，只能等于与(ρ,φ,z)都无关的常数，我们令此常数为ν^2（若考虑物理场量单值性的要求，$\Phi(\varphi)$满足周期边界条件，可令此常数为$m^2,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$，此问题在上一节已讨论）. 可得$\Phi(\varphi)$满足的方程为

$$\Phi''+\nu^2\Phi=0 \qquad (15.2.6)$$

同时可得$R(\rho)$和$Z(z)$满足的方程

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+\frac{\rho^2}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2\rho^2-\nu^2=0 \qquad (15.2.7)$$

两边同乘$\frac{1}{\rho^2}$，方程变为

$$\frac{1}{R\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+k^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \qquad (15.2.8)$$

令方程两边同等于一常数$-\lambda$，则可得$Z(z)$满足的方程

$$Z''-\lambda Z=0 \qquad (15.2.9)$$

和$R(\rho)$满足的方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+\left(k^2+\lambda-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0 \qquad (15.2.10)$$

对此方程进行变形，令$x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho\,(k^2+\lambda\neq0)$，函数$R(\rho)$就变为$y(x)$，即$R(\rho)=y(x)$，方程就变为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (15.2.11)$$

此方程称为**Bessel（贝塞尔）方程**，也称为ν阶 Bessel 方程：

由于 Bessel 方程的结构复杂一点，当$k^2=0$时，方程退化为 Laplace 方程在柱坐标下的分离变量，此时的$x=\sqrt{\lambda}\rho$，当λ的取号不同时，即$\lambda>0$或$\lambda<0$时，表示对$Z(z)$方程的不同的边界要求问题，此时的方程要分开讨论，这些将留在讨论 Bessel 函数时再详细说明.

§15.3 二阶线性常微分方程的级数解法

物理学中经常遇到二阶线性常微分方程,物理问题的偏微分方程描述,往往也要通过分离变量化为常微分方程来解. 我们在这里介绍二阶线性齐次常微分方程的级数解法,至于相应的非齐次方程的解可由两个线性无关的齐次方程的解及他们的 Wronske(朗斯基)行列式表示.

二阶线性齐次常微分方程的标准形式为

$$\frac{d^2u(z)}{dz^2}+p(z)\frac{du(z)}{dz}+q(z)u(z)=0 \tag{15.3.1}$$

这里采用复变量是便于讨论方程的解析性质,实变量 x 是复变量 z 的一种特殊情况,我们对该方程讨论的结论,对 x 依然成立.

在方程的标准形式中 $p(z)$ 或 $q(z)$ 是已知的复变函数. 我们要讨论的是在一定的复变量区域中满足一定初始条件和边界条件的方程的定解问题. 对于方程解的性质,完全由方程中的系数 $p(z)$,$q(z)$ 这两个函数的解析性质所决定,因此我们先不涉及定解条件,先对方程的解的一般性质及解的级数表达式进行讨论.

首先讨论方程的解析性质,设方程(15.3.1)式中系数函数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在我们所研究的区域中除了若干个孤立奇点外,其他点都是解析的,我们把所研究区域的点分为两类:

第一类:**方程的正常点**(或称正则点):如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在某点 z_0 及其邻域内是解析的,则 z_0 点称为方程的正常点.

第二类:**方程的奇点**:如果 z_0 点是 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的孤立奇点(极点或本性奇点),则称 z_0 为方程的奇点.

由于方程奇点的性质与方程的解的性质密切相关,我们再把方程的奇点分为两类:

(1) **正则奇点**:如果 z_0 为方程的奇点,而 $(z-z_0)p(z)$ 为解析函数,且 $(z-z_0)^2q(z)$ 亦为解析函数,则 z_0 称为方程的正则奇点. 也就是说,奇点 z_0 至多为 $p(z)$ 的一阶极点,同时至多为 $q(z)$ 的二阶极点.

(2) **非正则奇点**:如果 z_0 为方程的奇点,且不是正则奇点,我们称 z_0 为方程的非正则奇点.

例 15.3.1:Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0,\quad |x|\leqslant 1$$

$x=\pm 1$ 是方程的正则奇点，其他点是正常点.

例 15.3.2：Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

$x=0$ 是方程的正则奇点，其他点为正常点.

常微分方程级数解法的基本思想是：在微分方程所定义的区域中，在考察点 z_0 的邻域内把已知函数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 展成级数，再假设解 $u(z)$ 在此邻域内也可展成幂级数的形式代入方程，通过比较系数得到解 $u(z)$ 的级数的表达式，就得到 z_0 点邻域内微分方程的解的表达式.

我们主要研究的是方程奇点邻域的幂级数解是否存在，即是否能得到收敛的幂级数解，这一问题与方程中的 $p(z)$，$q(z)$ 的解析性密切相关.

下面我们介绍常微分方程级数解理论的一个定理（此定理在此不予证明）.

定理 15.3.1：对于二阶线性齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+q(z)u=0$$

其解 $u(z)$ 具有如下性质：

（1）对于方程的正常点，则在此正常点及其领域内，方程具有两个线性无关的解析解，它们的形式都为

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{15.3.2}$$

（2）对方程的正则奇点，则方程在此奇点的邻域内，存在两个线性无关的解析解，其形式为

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{15.3.3}$$

$$u_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k \tag{15.3.4}$$

或

$$u_2(z)=Au_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k \tag{15.3.5}$$

其中 a_0，b_0 不为 0.

（3）对于方程的非正则奇点，方程的解析解可能不存在，这类方程一般没有通用的解法. 对于这类非正则奇点邻域上的解，方程的两个线性无关的解可以形式上写成

$$u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{15.3.6}$$

$$u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^k + A u_1(z) \ln(z - z_0) \tag{15.3.7}$$

如果用级数解法求解系数 ρ_1, ρ_2, a_k, b_k 时，主要看 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 点的 Laurent 展开的性质. 若它们是有限负幂次项的 Laurent 展式，尚可用级数展开法求解系数，但系数是否有解要视具体问题而定. 而对具有无穷负幂次项的 Laurent 展式，方程就不可能用级数展开法求解了.

下面我们就该定理(1)和(2)的内容给予举例或说明，首先对(1)的内容以举例的方式说明.

例 15.3.3：求解方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0, \quad \omega \neq 0 \text{ 为常数} \tag{15.3.8}$$

解：这是属于定理中 $p(x), q(x)$ 都为常数，是在整个 x 轴上都解析的情况. 我们在方程的正常点 $x = 0$ 点的邻域解此方程.

令 $y(x)$ 具有级数展开形式

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0 \tag{15.3.9}$$

则

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \tag{15.3.10}$$

原方程化为

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \tag{15.3.11}$$

对于第一项，当 $k = 0, 1$ 时，都为零，故得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + \omega^2 a_k] x^k = 0 \tag{15.3.12}$$

这一等式要求级数每一项的系数都为零，故得系数的递推关系

$$a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+2)(k+1)} a_k \tag{15.3.13}$$

当 $k = 0$ 时，有 $a_0 \neq 0$ 可得

$$a_2 = -\frac{\omega^2}{2!} a_0, \quad a_4 = +\frac{\omega^4}{4!} a_0, \quad a_6 = -\frac{\omega^6}{6!} a_0, \cdots$$

可得 k 为偶数的一个级数解 $y_1(x)$，

$$y_1(x) = a_0\left[1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \cdots\right] = a_0\cos\omega x$$

当 $k=1$ 时，有奇次数幂系数的递推关系

$$a_3 = -\frac{\omega^2}{3!}a_1, \quad a_5 = +\frac{\omega^4}{5!}a_1, \quad a_7 = -\frac{\omega^6}{7!}a_1, \cdots,$$

可得 k 为奇数的另一个级数解 $y_2(x)$

$$y_2(x) = \frac{a_1}{\omega}\left[\omega x - \frac{(\omega x)^3}{3!} + \frac{(\omega x)^5}{5!} - \frac{(\omega x)^7}{7!} + \cdots\right] = \frac{a_1}{\omega}\sin\omega x$$

故可得原方程的解

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = a_0\cos\omega x + \frac{a_1}{\omega}\sin\omega x \tag{15.3.14}$$

这一解的形式就是我们所熟悉的方程(15.3.8)式的解.

关于定理(2)中的内容，我们进行如下的讨论，由于方程的奇点都为正则奇点，我们把方程写成

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} + \frac{f(z)}{(z-z_0)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \frac{g(z)}{(z-z_0)^2}u = 0 \tag{15.3.15}$$

其中 $p(z) = \dfrac{f(z)}{z-z_0}$，$q(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$，而 $f(z)$，$g(z)$ 在 z_0 点为解析函数，它们在 z_0 点的展式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n, \quad \alpha_0 \neq 0 \tag{15.3.16}$$

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\beta_m(z-z_0)^m, \quad \beta_0 \neq 0 \tag{15.3.17}$$

注意，这里设 α_0，β_0 不为零不是必要的条件，只是从一般正则奇点的定义出发，而 z_0 为正则奇点不一定要求 α_0、β_0 不为零，例如 $\alpha_0=0$，$\beta_0\neq0$，$\alpha_1\neq0$，也为正则奇点，但它不影响后面的讨论结果.

由定理可知，解 $u(z)$ 具有形式为

$$u(z) = (z-z_0)^\rho\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^{k+\rho} \tag{15.3.18}$$

把上面三个展开式(15.3.16)式，(15.3.17)式，(15.3.18)式都代入方程(15.3.15)式，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(k+\rho)(k+\rho-1)(z-z_0)^{k+\rho-2} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k+\rho)(z-z_0)^{k+\rho-1} + \tag{15.3.19}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m (z-z_0)^{m-2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^{k+\rho} = 0$$

由 $z-z_0$ 的最低幂次 $(z-z_0)^{\rho-2}$ 项，即 $k=0, n=0, m=0$ 时的项，要方程成立，$(z-z_0)^{\rho-2}$ 项的系数必为零（当然后面更高的幂次项的系数亦为零，但我们只利用此最低幂次项的系数为零，因为其最简单），我们可得

$$C_0\rho(\rho-1)(z-z_0)^{\rho-2} + \alpha_0(z-z_0)^{-1}C_0\rho(z-z_0)^{\rho-1} +$$

$$\beta_0(z-z_0)^{-2}\cdot C_0(z-z_0)^{\rho} = 0$$

即可得

$$\rho^2 + \rho(\alpha_0 - 1) + \beta_0 = 0 \tag{15.3.20}$$

此方程为指数 ρ 所满足的方程，故称为**指数方程**.

由指数方程可以求出 ρ 的两个根 ρ_1 和 ρ_2.

当这两个根之差 $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时，则方程(15.3.1)式在正则奇点 z_0 邻域内的解(15.3.3)式和(15.3.4)式表示的 $u_1(z)$ 和 $u_2(z)$ 为两个线性无关的解析解.

当 $\rho_1 - \rho_2 =$ 整数（包括 $\rho_1 - \rho_2 = 0$ 即指数方程的解为重根）时，此时方程只能得到一个级数解(15.3.3)式

$$u_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

而另一个线性无关的解为(15.3.5)式

$$u_2(z) = Au_1(z)\ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$$

其中常数 A, b_k 为待定系数，它可将此解的形式代入原方程而定出.

为了找出解(15.3.18)式中 $u(z)$ 级数展开系数的递推关系，我们把(15.3.19)式乘以 $(z-z_0)^{-\rho+2}$，得

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(k+\rho)(k+\rho-1)(z-z_0)^k + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k+\rho)(z-z_0)^k +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k = 0 \tag{15.3.21}$$

注意由于求和指标可更换，在(15.2.19)式第三项中把原来的 $\sum_m$ 替换为 $\sum_n$，是为了与第二项中一致以便于讨论 $(z-z_0)$ 项的同一幂次问题，在上式中取第 $(z-z_0)^k$ 项，可得

$$C_k(k+\rho)(k+\rho-1)(z-z_0)^k+\sum_{n=0}^{k}\alpha_n(z-z_0)^n C_{k-n}(k-n+\rho)(z-z_0)^{k-n}+$$

$$\sum_{n=0}^{k}\beta_n(z-z_0)^n C_{k-n}(z-z_0)^{k-n}=0 \tag{15.3.22}$$

即可得

$$\left[C_k(k+\rho)(k+\rho-1)+\sum_{n=0}^{k}\alpha_n C_{k-n}(k-n+\rho)+\sum_{n=0}^{k}\beta_n C_{k-n}\right](z-z_0)^k=0$$

当 $n=0$ 时出现 C_k 的 $\alpha_0(k+\rho)$ 和 β_0 要归到 C_k 项中，故可得系数的递推关系数为

$$[(k+\rho)(k+\rho-1)+\alpha_0(k+\rho)+\beta_0]C_k+$$

$$\sum_{n=1}^{k}[\alpha_n(k-n+\rho)+\beta_n]C_{k-n}=0 \tag{15.3.23}$$

利用这一公式，可以把解 $u(z)$ 的系数 $C_k(k=1,2,\cdots)$ 用 C_0，和 $C_1,\cdots,C_{k-1}$ 等表示出来，这样级数解 $u(z)$ 的具体形式就完全确定了.

以上是一般性讨论常微分方程的级数解的形式，而具体的物理问题往往要求方程要满足一定的边界条件. 当描述一个物理模型的偏微分方程在分离变量后，要分成几个关于不同坐标变量的常微分方程，同时也把边界条件进行了分离变量，有些常微分方程又有共同的参数 λ 等，当要求这些常微分方程(Sturm－Liouville 型方程)满足一定的边界条件时，就构成了 Sturm－Liouville 本征值问题.

$$\begin{cases}A(z)u''(z)+B(z)u'(z)+[C(z)+\lambda D(z)]u(z)=0\\ \text{B. C.}\end{cases} \tag{15.3.24}$$

其中 B. C. 为边界条件.

解这一本征值问题，可用上面讨论的级数解法，先求出方程的级数解的具体形式，然后再求出满足边界条件(B. C.)的本征值 λ_n，再求出 λ_n 相应的本征函数 u_n，即相应的级数解.

以前在直角坐标系下讨论 S－L 问题相对比较简单，但在曲线坐标系中，由于分离变量后的方程和边界条件都变得复杂，因此所得的本征值和本征函数也相对复杂一些，这些本征函数是一些特殊函数，对于这些特殊函数我们将在下面的章节中分别讨论.

第十五章习题

15.1 试用平面极坐标(ρ,φ),把二维波动方程分离变量.

15.2 在量子物理学中氢原子满足的定态 Schrödinger 方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\boldsymbol{r})-\frac{e^2}{r}u(\boldsymbol{r})=Eu(\boldsymbol{r})$$

其中$\hbar$、m、e、E都为常数,试用球坐标将此方程分离变量.

15.3 在$x=0$的邻域内求下列方程的两个独立的级数解,并对这两个方程的级数解进行比较

(1) $y''-xy'=0$;

(2) $y''-x^2y'=0$.

15.4 在$x=0$的邻域内求解方程

$$(x^2-1)y''+xy'-y=0$$

的两个独立的级数解.

15.5 在$x=0$的邻域内求 Chebyshev(切比雪夫)方程

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0 \quad (n\text{为正整数})$$

的级数解.

15.6 在$x=0$的邻域内,用级数展开法求解 Euler-Cauchy 方程

$$x^2y''+2xy'=0$$

15.7 在$x=0$的邻域内求方程

$$xy''-xy'+y=0$$

的两个独立的级数解.

15.8 在$z=0$的邻域内求解下列方程的两个独立级数解,并对这两个方程的级数解进行比较

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+\dfrac{2}{z}\dfrac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}+m^2u(z)=0$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}-m^2u(z)=0$.

15.9 对二阶齐次常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

设y_1和y_2是它的两个线性独立的解,并可定义 Wronske(朗斯基)行列式$W(x)$

$$W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}$$

(1) 试证明$W(x)$满足

$$W'(x)=-p(x)W(x)$$

(2) $W(x)$可写为

$$W(x) = y_1^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

试证明：两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 有如下关系

$$y_2(x) = Cy_1(x)\int_b^x \frac{\mathrm{e}^{-\int_a^{x'} p(x^*)\mathrm{d}x^*}}{[y_1(x')]^2}\mathrm{d}x'$$

其中 a,b 为任意常数，C 为积分常数，它与 a,b 的选取有关. 上式表明，对于本题所给定的二阶齐次常微分方程的形式，当已知一个解 $y_1(x)$ 时，可通过上式求出另一个线性独立的解 $y_2(x)$.

15.10　利用 15.9 题的结果，已知下列方程的一个解，求出另一个线性独立的解，

(1) 已知方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0 \text{ 的}$$

一个解 $y_1 = \sin x$，求另一个解 y_2.

(2) 已知方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} - \frac{m^2}{r^2}R(r) = 0$$

的一个解 $R_1(r) = r^m$，求另一个解 $R_2(r)$.

15.11　考虑 Sturm – Liouville 本征值的问题：对于方程

$$\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[w(x)a(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right] + [c(x) - \lambda]u(x) = 0, \quad x \in [a,b]$$

其中函数 $w(x)$，$a(x)$ 和 $c(x)$ 满足如下条件：

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[w(x)a(x)] = b_0 + b_1x$$

$$c(x) = c_0$$

$$[w(x)a(x)]_{x=a} = [w(x)a(x)]_{x=b} = 0$$

且 $w(x)a(x)$ 在区间 (a,b) 内不为零. a_0、a_1、a_2、b_0、b_1、c_0 均为实数.

请证明：对于给定的本征值 $\{\lambda_n\}$

$$\lambda_n = n(n-1)a_2 + nb_1 + c_0, \quad n = 0,1,2,3,\cdots$$

(1) 总存在非平凡的多项式解

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^k$$

其中 $\alpha_k^{(n)}$ 为 n 次多项式的展开系数.

(2) 这些多项式具有正交性

$$\int_a^b u_m^*(x)u_n(x)\,w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n$$

15.12 在 $x=0$ 点邻域内，求 Laguerre（拉盖尔）方程

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$$

的级数解. 当 λ 取什么值时，可使级数退化为多项式？这些多项式乘以适当的常数使最高幂次项成为 $(-x)^n$ 的形式，此时的多项式称为 Lagerre 多项式，记为 $L_n(x)$，写出 $L_n(x)$ 的前三项.

15.13 在 $x=0$ 点邻域内，求解 Gauss 方程（超几何级数方程）.

$$x(x-1)y''+[(1+\alpha+\beta)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0$$

的级数解.

第十六章　球　函　数

§16.1　Legendre(勒让德)多项式

上一章中 Laplace 方程在球坐标系下的分离变量. 其角度部分球函数 $Y(\theta,\varphi)$ 满足球函数方程,当这一稳定场的分布具有轴对称性时,即场 $Y(\theta,\varphi)$ 与 φ 角无关时,此时 $\Theta(\theta)$ 满足的连带 Legendre 方程退化成 Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0 \tag{16.1.1}$$

其中 $|x|\leqslant 1$.

我们考察 Legendre 方程的奇点,它有两个正则奇点 $x=\pm 1$. 当然,当定义域扩大到 $-\infty<x<\infty$ 时,$x=\pm\infty$ 也是该方程的正则奇点,但由于我们所研究的 Legendre 方程是从具体的物理问题得到的,它是由 Laplace 方程分离变量而得的,变量 $x=\cos\theta$,故有 $|x|\leqslant 1$,我们将在此定义域中讨论问题.

由于物理上的考虑,在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的一切方向上,我们所求的物理量的场的值均为有限值,即要求 $|y(x)|$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上为有限值,这种要求是一种自然的边界条件,它与 Legendre 方程一起构成了 S-L 本征值问题

$$\begin{cases}(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+l(l+1)y=0 & -1\leqslant x\leqslant 1\\ |y(x)|<\infty & -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{16.1.2}$$

由于方程的奇点为 $x=\pm 1$,问题可能出在 $x=\pm 1$ 点上,我们首先要求出 x 的正常点的解. 由上一章常微分方程级数解的定理可知,我们在方程的正常点 $x=0$ 的解有级数形式

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k \tag{16.1.3}$$

代入方程(16.1.2)式有

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)C_kx^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}kC_kx^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k=0$$

可写成

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)C_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} [k(k+1) - l(l+1)]C_k x^k = 0 \quad (16.1.4)$$

对此方程从 x 的零次幂项开始，各幂次项的系数都要为零. 对 x 的零次幂项，其系数为零，有

$$2C_2 + l(l+1)C_0 = 0$$

即

$$C_2 = -\frac{1}{2}l(l+1)C_0$$

由 x 的一次幂项的系数为零，有

$$6C_3 - [2 - l(l+1)]C_1 = 0$$

即

$$C_3 = \frac{1}{6}[2 - l(l+1)]C_1$$

由一般 x^k 项的系数为零，有

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} - [k(k+1) - l(l+1)]C_k = 0$$

即

$$C_{k+2} = -\frac{(l-k)(l+k+1)}{(k+2)(k+1)}C_k \quad (16.1.5)$$

这就是 Legendre 方程在 $x=0$ 点邻域内级数解的系数的递推关系. 由于 C_{k+2} 与 C_k 系数指标为 $k+2$ 和 k，相差为 2，故系数的递推关系可分为两组. 一组是以 C_0 为开始的偶次幂项的系数的递推关系，一组是以 C_1 为开始的奇次幂项的系数的递推关系.

当 k 为偶数时，设 $k=2n$，$n=0,1,2,\cdots$，有

$$C_{2n+2} = \frac{[2n(2n+1) - l(l+1)]}{(2n+2)(2n+1)}C_{2n} \quad (16.1.6)$$

则有

$$C_2 = -\frac{l(l+1)}{2!}C_0$$

$$C_4 = \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}C_0$$

$$\cdots$$

$$C_{2n}=\frac{(-1)^n l(l-2)(l-4)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}C_0,$$

$$n=1,2,3,\cdots \tag{16.1.7}$$

当 k 为奇数时，设 $k=2n+1$，$n=0,1,2,\cdots$，有

$$C_{2n+3}=\frac{[(2n+1)(2n+2)-l(l+1)]}{(2n+3)(2n+2)}C_{2n+1} \tag{16.1.8}$$

则有

$$C_3=-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}C_1$$

$$C_5=\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}C_1$$

$$\cdots$$

$$C_{2n}=\frac{(-1)^n(l-1)(l-3)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}C_1,$$

$$n=1,2,3,\cdots \tag{16.1.9}$$

由这些系数的递推关系，我们可以用 C_0 和 C_1 表示组成解 $y=\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$ 的所有系数 C_k，即分为偶幂次项的级数

$$y_0=C_0+C_2x^2+C_4x^4+\cdots$$

和奇幂次项的级数

$$y_1=C_1x^1+C_3x^3+C_5x^5+\cdots$$

即可写成

$$\begin{aligned}y(x)&=y_0(x)+y_1(x)\\&=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n l(l-2)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}+\\&\quad C_1x+C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(l-1)(l-3)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned} \tag{16.1.10}$$

由系数的逆推关系式(16.1.5)式，我们很容易得到级数解的收敛半径 R

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{C_k}{C_{k+2}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+2)(k+1)}{k(k+1)-l(l+1)}\right|=1 \tag{16.1.11}$$

即级数解在 $|x|<1$ 时收敛，而在 $x=\pm1$ 时级数解 $y=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(\pm1)^k$ 是发散的.

为了使级数解 $y=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k$ 满足方程的定解问题(16.1.2)式，即 $y(x)$ 在 $x=\pm1$ 时要有有限值，也就是要满足这一定解条件的 S－L 本征值问题. 我们要讨论：本征参数 l 在取何值时能满足方程的定解问题，这是求解本征值 $l\cdot(l+1)$ 的根本问题.

我们考察解的系数递推关系(16.1.5)式，可以看出，当本征参数 l 取零或正整数时，只要 $k=l$，有 $C_{k+2}=0$，由此递推关系所得的大于 $k+2$ 以后的项的系数均为零.

由(16.1.10)式可知，$y=y_0+y_1$，y_0 为偶次幂项的级数，y_1 为奇次幂项的级数. 若 l 为奇数，当 $k=l$ 时，$y_1(x)$ 就退化为最高次幂为 l 的奇次幂多项式，而 y_0 仍为发散的无穷级数. 此时我们应选取 $C_0=0$，即让偶次幂的级数为零，则解 $y(x)$ 就退化成 $y(x)=y_1(x)$ 的奇次幂项的多项式. 即我们得到的本征参数 l 为奇数时，相应的本征函数为最高幂次为 l 的奇次幂的多项式；同样的，若 l 为偶数，当 $k=l$ 时，$y_0(x)$ 退化为最高幂次为 l 的偶次幂项的多项式. 此时取 $C_1=0$，则整个级数解 $y(x)$ 就退化成 $y(x)=y_0(x)$ 的偶次幂项的多项式，即得到了相应于本征参数 l 为偶数的本征函数 $y_0(x)$.

因此我们得到满足边界条件 $|y(x)|<\infty$，$|x|\leqslant1$ 的 Laplace 方程的 S－L 本征值问题，当本征参数 $l=0,1,2,\cdots$ 时，本征值为 $l(l+1)$，其相应的本征函数是以 x^l 为最高幂次项的多项式 $y_l(x)$，

$$y_l(x)=\begin{cases}C_0+C_2x^2+\cdots+C_lx^l, & l=0,2,4,\cdots\\ C_1x+C_3x^3+\cdots+C_lx^l, & l=1,3,5,\cdots\end{cases}\tag{16.1.12}$$

为了求出 $y_l(x)$ 的具体表达式，我们把系数递推关系式(16.1.5)式写成

$$C_k=-\frac{(k+2)(k+1)}{(l-k)(l+k+1)}C_{k+2}\tag{16.1.13}$$

当 $k=l-2$ 时有

$$C_{l-2}=-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}C_l,$$

$$C_{l-4}=\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot4\cdot(2l-1)(2l-3)}C_l$$

当 $n=1,2,3,\cdots$，时有

$$C_{l-2n}=\frac{(-1)^nl(l-1)(l-2)\cdots(l-2n+1)}{2\cdot4\cdots2n(2l-1)\cdots(2l-2n+1)}C_l$$

$$= (-1)^n \frac{(l!)^2(2l-2n)!}{(2l)!n!(l-2n)!(l-n)!}C_l \tag{16.1.14}$$

其中用到

$$l(l-1)(l-2)\cdots(l-2n+1) = \frac{l!}{(l-2n)!} \tag{16.1.15}$$

$$2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n! \tag{16.1.16}$$

$$\begin{aligned}&(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2n+1)\\ &= \frac{2l(2l-1)(2l-2)(2l-3)\cdots(2l-2n+1)(2l-2n)!}{2l(2l-2)(2l-4)\cdots(2l-2n+2)(2l-2n)!}\\ &= \frac{(2l)!}{2^n\cdot l(l-1)\cdots(l-n+1)(2l-2n)!}\\ &= \frac{(2l)!(l-n)!}{2^n(2l-2n)!l!}\end{aligned} \tag{16.1.17}$$

到此，我们可以把相应于本征值 $l(l+1)$ 的本征函数 $y_l(x)$ 写成

$$y_l(x) = C_l\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(l!)^2(2l-2n)!}{(2l)!n!(l-2n)!(l-n)!}x^{l-2n} \tag{16.1.18}$$

其中

$$N = \begin{cases}\dfrac{l}{2}, & l\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{l-1}{2}, & l\text{ 为奇数}\end{cases}$$

若我们取 C_l 的值为

$$C_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \tag{16.1.19}$$

则相应的 $y_l(x)$ 记为 $\mathrm{P}_l(x)$，

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n} \tag{16.1.20}$$

其中

$$N = \begin{cases}\dfrac{l}{2}, & l\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{l-1}{2}, & l\text{ 为奇数}\end{cases}$$

$\mathrm{P}_l(x)$ 称为 Legendre 多项式（也称为 Legendre 函数，满足 Legendre 方程的解统称为 Legendre 函数），通常称为第一类 Legendre 多项式，它是 Legendre 方程在

$|x| \leqslant 1$ 时，在自然边界条件下对应于本征值为 $l(l+1)$（$l=0,1,2,\cdots$）的本征解.

由表达式(16.1.20)式可得到经常用到的 $P_l(x)$ 的前几项，特别是 $P_0(x)$ 和 $P_1(x)$，

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$\cdots$$

由 $P_l(x)$ 的表达式，我们可以给出 $P_l(x)$ 的图像，这里我们给出 $P_l(x)$，$l=0$，1,2,3,4,5 的图像（如图 16.1.1）. 同时由 $P_l(x)$ 的表达式（16.1.20）式，我们可得到 $P_l(x)$ 常用到的两个基本性质：

$$P_l(1) = 1 \tag{16.1.21}$$

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \tag{16.1.22}$$

这两个性质在 $P_l(x)$ 的图像（图 16.1.1）也表现得很清晰. 所有的 $P_l(x)$ 曲线都汇聚到(1,1)这一点，正是性质(16.1.21)式的体现，对 x 反演的奇偶性遵从性质(16.1.22)式.

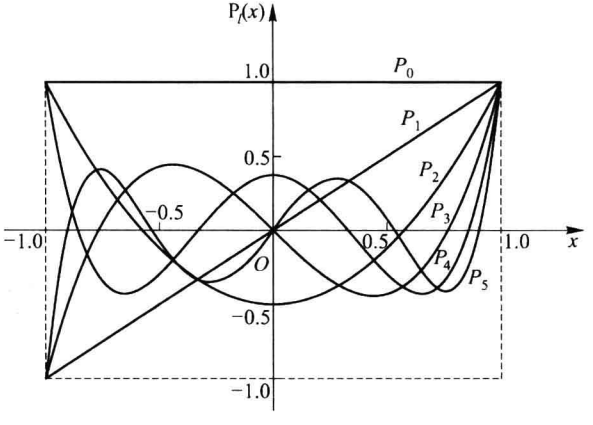


图 16.1.1

第一类 Legendre 多项式是我们对 Legendre 方程在自然边界条件下所构成的 S－L 本征值问题，用级数解法所求得的一个本征解.

从二阶线性常微分方程的理论可知，Legendre 方程还存在与 $P_l(x)$ 线性无关的另一个解.

对 Legendre 方程的级数解，由指数方程(15.3.20)式的求法可得 Legendre 方程在其正则奇点 $x=1$，或 $x=-1$ 的邻域内的级数解的指数方程为

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \tag{16.1.23}$$

即 $\rho=0$ 是重根.

我们可以求得 Legendre 方程与 $P_l(x)$ 线性无关的另一个解 $Q_l(x)$，$|x|>1$，称为第二类 Legendre 函数，$Q_l(x)$ 的具体表达式为

$$Q_l(x)=P_l(x)\int_x^{\infty}\frac{1}{(x^2-1)[P_l(x)]^2}\mathrm{d}x,\quad |x|>1 \tag{16.1.24}$$

由 $P_l(x)$ 的表达式代入，积分可得

$$Q_l(x)=\frac{2^l(l!)^2}{2l+1}x^{-l-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_k x^{-2k}\right]$$

其中 a_k 为待定系数，代入 Legendre 方程可求出 a_k，得

$$a_1=\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+3)}$$

$$a_k=\frac{(l+2k-1)(l+2k)}{2k(2l+2k-1)}a_{k-1}\quad k\geqslant 2 \tag{16.1.25}$$

由 $Q_l(x)$ 的积分表达式(16.1.24)式可得

$$Q_l(x)=\frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}x^{l-1-2k}\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{2k-2n+1}\cdot\frac{(2l-2n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!} \tag{16.1.26}$$

其中求和号中的 $l\geqslant 1$，而 $\left[\frac{l-1}{2}\right]$ 的记号为

$$\left[\frac{l-1}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{l-1}{2}, & l\text{ 为奇数}\\[2ex] \dfrac{l-2}{2}, & l\text{ 为偶数}\end{cases}$$

由于我们研究的物理问题所涉及的 Legendre 方程，是由球坐标分离变量而得的，其变量 $x=\cos\theta$，即 $|x|\leqslant 1$，这类问题得到的解，只是第一类 Legendre 多项式 $P_l(x)$，因此我们对第二类 Legendre 函数 $Q_l(x)$ 只作简单的介绍，不加以

研究.

后面我们所提及的 Legendre 多项式，都是指第一类 Legendre 多项式$P_l(x)$，就不再特别指出了.

§16.2　Legendre 多项式的主要性质

在本节中主要介绍 Legendre 多项式的递推关系及 Legendre 多项式的正交性. 在介绍这些性质之前，我们要先介绍 Legendre 多项式的微分表达式及其生成函数，这些表示式在 Legendre 多项式的计算和性质的证明中经常要用到.

一、Legendre 多项式的微分表达式

$P_l(x)$的微分表达式为

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \tag{16.2.1}$$

此表达式称为 **Rodriguez(罗德里格斯)公式**，其正确性可由等式右边直接进行微商而得到验证. 由二项式展开定理

$$(x^2-1)^l = \sum_{n=0}^{l}\frac{(-1)^n l!}{n!(l-n)!}x^{2l-2n} \tag{16.2.2}$$

对$(x^2-1)^l$进行 l 次求导后，凡是 $2l-2n<l$ 的项都为零，因此只剩下 $2l-2n\geqslant l$ 的项，即 $n\leqslant\frac{l}{2}$的项，因此我们可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \\
&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)\cdots(l-2n+1)}{2^l(l-n)!n!}x^{l-2n} \\
&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l(l-n)!n!(l-2n)!}x^{l-2n}
\end{aligned}$$

其中

$$N=\begin{cases}\dfrac{l}{2}, & l\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{l-1}{2}, & l\text{ 为奇数}\end{cases}$$

此表达式与 $P_l(x)$的表达式(16.1.20)式一致.

二、Legendre 多项式的生成函数

考虑函数 $f(r)$

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}}, \quad r < 1 \tag{16.2.3}$$

其中 $r = |\boldsymbol{r}|$, $x = \cos\theta$, $|x| \leqslant 1$

我们在 $r = 0$ 点对 $f(r)$ 进行 Taylor 展开,得到

$$\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l \tag{16.2.4}$$

即 $f(r)$ 的展开系数为 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$.

因此通常把函数 $f(r) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}}$ $(r < 1, |x| \leqslant 1)$ 称为 **Legendre 多项式的生成函数**(或称为母函数).

我们来看 Legendre 多项式生成函数的物理意义:它表示一个球心在原点的单位球的极轴上坐标为 1 的点(即单位球的北极点)上,放置一个电荷量为 $4\pi\varepsilon_0$ 的点电荷,则在单位球内任一点 $\boldsymbol{r} = (r, \theta, \varphi)$ $(r < 1)$,此点的电势就是 $f(r) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}}$. 这是一个处在北极上的电荷量为 $4\pi\varepsilon_0$ 的点电荷产生的静电场的稳定分布问题,可通过轴对称的 Laplace 方程来求解(在下一节中,我们将给出),这一稳定分布电场在球内 r 点的解正是(16.2.4)式的右端. 这一物理问题验证了 Legendre 多项式生成函数的正确性.

三、Legendre 多项式的递推公式

由 Legendre 多项式的生成函数(16.2.4)式,两边对变量 r 求微商,得

$$-\frac{r - x}{(1 + r^2 - 2rx)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} l\mathrm{P}_l(x) r^{l-1} \tag{16.2.5}$$

两边同乘 $(1 + r^2 - 2rx)$ 可得

$$(x - r) \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l = (1 + r^2 - 2rx) \sum_{l=0}^{\infty} l\mathrm{P}_l(x) r^{l-1}$$

即

$$\sum_{l=0}^{\infty} x\mathrm{P}_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} l\mathrm{P}_l(x) r^{l-1} + \sum_{l=0}^{\infty} l\mathrm{P}_l(x) r^{l+1} - \sum_{l=0}^{\infty} 2xl\mathrm{P}_l(x) r^l \tag{16.2.6}$$

比较两边的 r^l 项的系数,可得

$$xP_l(x) - P_{l-1}(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + (l-1)P_{l-1}(x) - 2xlP_l(x)$$

即

$$x(1+2l)P_l(x) - (l+1)P_{l+1}(x) - lP_{l-1}(x) = 0 \tag{16.2.7}$$

这就是 Legendre 多项式 $P_l(x)$ 的一个基本的递推关系式.

Legendre 多项式的另一个基本递推关系式,是对 $P_l(x)$ 的生成函数(16.2.4)式的两边,对变量 x 求微商而得到. 由(16.2.4)式两边对 x 求导,有

$$\frac{r}{(1+r^2-2rx)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)r^l \tag{16.2.8}$$

两边同乘$(1+r^2-2rx)$可得

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)r^l + \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)r^{l+2} - \sum_{l=0}^{\infty} 2xP'_l(x)r^{l+1} \tag{16.2.9}$$

两边比较第 r^{l+1} 项系数,得

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) + P'_{l-1}(x) - 2xP'_l(x) \tag{16.2.10}$$

这就是 Legendre 多项式 $P_l(x)$ 的另一个基本递推关系式.

由上面这两个基本递推关系式(16.2.7)式和(16.2.10)式,我们可得到 $P_l(x)$ 的几个常用的递推关系式.

$$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) \tag{16.2.11}$$

$$(l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - xP'_l(x) \tag{16.2.12}$$

$$lP_l(x) = xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) \tag{16.2.13}$$

$$(x^2-1)P'_l(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x) \tag{16.2.14}$$

以上四个递推关系式的推导留给读者作为练习.

四、Legendre 多项式 $P_l(x)$ 的正交性

为了得到 Legendre 多项式 $P_l(x)$ 的正交性,我们先证明一个命题.

命题 16.2.1: 设 $f_k(x)$ 为 x 的 k 次多项式,$P_l(x)$ 是 Legendre 多项式,当 $k<l$ 时,有

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)P_l(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{16.2.15}$$

证: 由 $P_l(x)$ 的微分表达式(16.2.1)式,有

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} f_k(x)\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\mathrm{d}x \tag{16.2.16}$$

对等式右边的积分进行 k 次分步积分,由于 $k<l$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^k}{2^l l!}\int_{-1}^{1} f_k^{(k)}(x)\frac{\mathrm{d}^{l-k}}{\mathrm{d}x^{l-k}}(x^2-1)^l\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^k}{2^l l!}f_k^{(k)}(x)\frac{\mathrm{d}^{l-k-1}}{\mathrm{d}x^{l-k-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{1} = 0\end{aligned} \tag{16.2.17}$$

其中用到 $f_k^{(k)}(x)$ 为常数 ,和

$$\frac{\mathrm{d}^{l-n}}{\mathrm{d}x^{l-n}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{1} = 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant l \tag{16.2.18}$$

即此微商所得的每一项都保留有 (x^2-1) 的因子,故当 $x=\pm 1$ 时,该因子都为零. 又 $k<l$,即 $1\leqslant k+1\leqslant l$,故可得(16.2.17)式的结果.

由此命题 16.2.1 式,我们令 $f_k(x)=\mathrm{P}_k(x)$,即可得当 $k\neq l$ 时,$\mathrm{P}_l(x)$ 的正交关系式

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0, \quad k\neq l \tag{16.2.19}$$

当 $k=l$ 时,我们计算 $[\mathrm{P}_l(x)]^2$ 的积分,由 $\mathrm{P}_l(x)$ 的微分表达式可得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^{(l)}(x)(x^2-1)^l\mathrm{d}x \tag{16.2.20}$$

由于 $\mathrm{P}_l^{(l)}(x)$ 为常数,先计算积分

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(x+1)^l(x-l)^l\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{l+1}(x-1)^l(x+1)^{l+1}\Big|_{-1}^{1} - \frac{l}{l+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{l-1}(x+1)^{l+1}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{l}{l+1}\Big[\frac{l}{l+2}(x-1)^{l-1}(x+1)^{l+2}\Big]\Big|_{-1}^{1} + \\ &\quad \frac{l(l-1)}{(l+1)(l+2)}\int_{-1}^{1}(x-1)^{l-2}(x+1)^{l+2}\mathrm{d}x \\ &\quad \cdots \\ &= (-1)^l\cdot\frac{l(l-1)\cdots 2\cdot 1}{(l+1)(l+2)\cdots 2l}\int_{-1}^{1}(x+1)^{2l}\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^l(l!)^2 2^{2l+1}}{(2l)!(2l+1)}\end{aligned} \tag{16.2.21}$$

由 $P_l(x)$ 的微分表达式可得

$$P_l^{(l)}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\cdot\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}[x^{2l}-\cdots] = \frac{(2l)!}{2^l l!} \tag{16.2.22}$$

因此由(16.2.20)式可得

$$\int_{-1}^{1}[P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1} \tag{16.2.23}$$

我们得到 $P_l(x)$ 的归一化系数为 $\sqrt{\frac{2l+1}{2}}$，即可以把归一化后的 Legendre 多项式的正交关系写成标准的形式

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2k+1}{2}}P_k(x)\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x)dx = \delta_{kl} \tag{16.2.24}$$

因此

$$\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x),\quad l=0,1,2,\cdots\right\} \tag{16.2.25}$$

构成了正交归一的函数系，这是 Legendre 方程的 Sturm - Liouville 本征值问题的本征解. 由 S - L 本征值问题的理论可知，(16.2.25)式中的正交归一的 Legendre多项式构成了正交归一的完备的函数系，这函数系可作为 Hilbert 空间的基向量，张成一个 Hilbert 空间.

在我们所求解的 Legendre 方程中，定义在[-1,1]区间中的函数，都可以在这组正交归一的完备基中展开，即广义 Fourier 展开. 这是我们在解这类物理问题中经常要用到的数学手段.

§16.3 具有轴对称的 Laplace 方程的求解

Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0 \tag{16.3.1}$$

是描述一个无源区域中的稳定场分布的方程，在球坐标下此方程的表达式为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{16.3.2}$$

对场函数 u 进行分离变量

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

可得方程(考虑对 φ 角具有周期边界条件时):

$$\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) = 0 \tag{16.3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{16.3.4}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0 \tag{16.3.5}$$

其中 $y(x) = \Theta(\theta)$, $x = \cos\theta$.

以上方程是径向方程(16.3.3)式,关于 φ 的方程(16.3.4)式和关于 θ 的方程即连带 Legendre 方程(16.3.5)式.

当我们的定解问题具有轴对称时,我们取对称轴为坐标系的 z 轴,此时的问题就变成与 φ 角无关的问题,因为具有 z 轴的对称性,对于任何 φ 角的 $u(r,\theta,\varphi)$ 都是同一个函数,故函数 u 只依赖于 (r,θ),即 $u(r,\theta)$,它表现在方程(16.3.4)式、(16.3.5)式中为 $m=0$,即 $\Phi(\varphi)$ 为常数,不失普遍性我们取 $\Phi(\varphi)=1$,这样轴对称问题的 Laplace 方程的求解,就变成求解径向方程和 Legendre 方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0 \tag{16.3.3}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0 \tag{16.3.6}$$

Legendre 方程在(16.3.6)式在自然边界条件 $|y(x)| < \infty$ 的要求下,得到的解为 Legendre 多项式 $y(x) = P_l(x)$, $l = 0,1,2,\cdots$.

我们知道径向方程(16.3.3)式为 Euler 型方程,对标准的 Euler 型方程

$$a_0x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} + a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_ny = 0 \tag{16.3.7}$$

其通常的解法可令 $x = \mathrm{e}^t$ 作变量变换解出.

径向方程(16.3.3)式只是二阶的 Euler 型方程,此方程的奇点为 $r=0,\infty$ 两点. 很容易判定 $r=0$ 为方程的正则奇点,当 $r\to\infty$ 时,作变量代换 $t=\dfrac{1}{r}$,则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} - \frac{l(l+1)}{t^2}R = 0$$

故 $r\to\infty$ 即 $t\to 0$ 也是方程的正则奇点(一般方程的 ∞ 点的奇异性都可通过作此变换加以判断).

分析了径向方程的奇异性,可用级数解的方法将此二阶的径向方程解出. 但如果我们认真观察此径向方程,可看出当 $R(r)$ 仅为 r 的某一幂次项(注意不是所有的幂次项之和),则方程中的各项都为同一幂次的,因此我们用简单的待定幂次法来求解此方程.

对径向方程(16.3.3)式

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0$$

令 $R(r)=r^k$,k 为一待定幂次,代入上述方程可得

$$k(k-1)r^{k-2} + 2kr^{k-2} - l(l+1)r^{k-2} = 0 \tag{16.3.8}$$

即可得系数方程:$k(k-1)+2k-l(l+1)=0$,即

$$k(k+1) - l(l+1) = 0 \tag{16.3.9}$$

此方程的解为 $k=l$,$k=-(l+1)$.

故径向方程的解为两个线性无关的解 $R(r)\sim r^l$ 和 $R(r)\sim r^{-(l+1)}$ 的线性组合,即

$$R(r) = C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \tag{16.3.10}$$

其中待定系数 C,D 由方程的定解条件确定.

因此,轴对称问题的 Laplace 方程在自然边界条件要求下的解的形式为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(C_l r^l + D_l r^{-(l+1)})\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.11}$$

由于求解轴对称的稳定场分布的问题广泛存在于物理问题中,下面我们举例说明此类问题的求解.

例 16.3.1:在单位球的北极上放置一电荷量为 $4\pi\varepsilon_0$ 的点电荷,求单位球内任一点 $\boldsymbol{r}$ 的电势,并用 Legendre 多项式表示.

解:以单位球的球心为坐标原点,北极 N 点为 z 轴上 $z=1$ 处,如图 16.3.1 所示. 单位球内任一点 $\boldsymbol{r}$,$|\boldsymbol{r}|=r$,$\boldsymbol{r}$ 点离北极 N 的距离为 $r'=|\boldsymbol{r}'|$,由几何关系知 $r'^2=1+r^2-2r\cos\theta$,即

$$r' = \sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}$$

由点电荷的电势表达式可知电势 $u(\boldsymbol{r})$ 为

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r'} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} \tag{16.3.12}$$

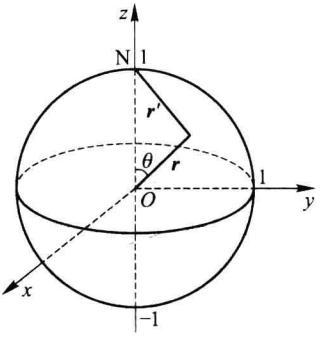


图 16.3.1

另一方面，点电荷在 N 点产生的电势是以 z 轴为对称轴的稳定场的分布问题，在除 N 点外的空间满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{16.3.13}$$

其解的形式为(16.3.11)式

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(C_l r^l + D_l r^{-(l+1)})\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.14}$$

由于我们限制在球内解，故 $r^{-(l+1)}$ 这一项在 $r\to 0$ 时发散，要去掉发散项，只能取 $D_l=0$，因此球内 Laplace 方程(16.3.13)式在单位球内解的形式为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad r<1 \tag{16.3.15}$$

以上这两种形式的解(16.3.12)式和(16.3.15)式是相等的，故有

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \mathrm{P}_l(\cos\theta) r^l \tag{16.3.16}$$

主要要定出系数 C_l，取 $\theta=0$，即 $\boldsymbol{r}$ 取在正 z 轴上，由于 $r<1$，$\cos\theta=1$，且利用 $\mathrm{P}_l(1)=1$，(16.3.16)式变为

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l \tag{16.3.17}$$

等式左边的 Taylor 展开式是大家所熟悉的.

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots, \quad r<1$$

故可得 $C_l=1$，　$l=0,1,2,\cdots$

因此有

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos\theta) r^l \tag{16.3.18}$$

等式两边都是电势 $u(\boldsymbol{r})$ 的表达式.

(16.3.18)式正是 Legendre 多项式的生成函数的表达式.

由于(16.3.12)式和(16.3.14)式是除北极点 N 以外整个空间都成立的关

系式，他们对 r 并无限制，因此在 $r>1$ 的区域中，利用这两个等式可得另一个有用的展式

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)r^{-(l+1)},\quad r>1 \tag{16.3.19}$$

这是 **Legendre 多项式生成函数的另一表达式**，此式的证明留给读者自己练习.

例 16.3.2：在均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中放一半径为 a 的接地导体球，求球外电场.

解：取球心 O 为坐标原点，取电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向为极轴 z 轴的正方向，如图 16.3.2 所示. 由于界面为球面，选取球坐标系.

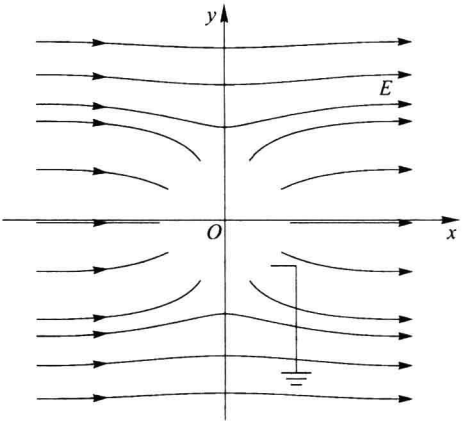


图 16.3.2

由于球外无电荷存在，故球外的电势 $u(r,\theta,\varphi)$ 满足 Laplace 方程，是个稳定场分布问题，

$$\nabla^2u(r,\theta,\varphi)=0 \tag{16.3.20}$$

此问题的边界条件是：

（1）在无穷远处，我们认为金属球感应电荷产生的势在 $r\to\infty$ 时可忽略，故只有原电场 $\boldsymbol{E}_0$，其方向为 z 轴的正向，即 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{r\to\infty}=-E_0$，（“$-$”号来自电势 u 的梯度与电场反向，即 $E=-\dfrac{\partial u}{\partial z}$），故有

$$u|_{r\to\infty}=-E_0z+u_0=-E_0r\cos\theta+u_0,$$

此处 u_0 为一常数，它表示在没放进导体球前在 O 点原来电势的取值. 若 $u_0=0$，即电势的零点取为 O 点，则放进导体球后，导体球接地后取接地为电势零点，则与此选择自洽.

(2) 导体球接地,球外区域的内界面为球面,即球面的电势为零,$u|_{r=a}=0$. 故球外区域电势的稳定分布的定解问题归结为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (16.3.20) \\ u|_{r=a} = 0 & (16.3.21) \\ u|_{r\to\infty} = -E_0 r\cos\theta + u_0 & (16.3.22) \end{cases}$$

由于此问题为轴对称的,故 $u(r,\theta,\varphi)$ 与 φ 变量无关,即 $u(r,\theta)$,由分离变量法,令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$,并令 $x=\cos\theta$,$y(x)=\Theta(\theta)$,则方程化为 Legendre 方程和径向方程.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)y=0, \quad |x|\leqslant 1 \tag{16.3.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R=0, \quad r>a \tag{16.3.24}$$

Legendre 方程必须满足自然边界条件,即在球外有限区域内 $|y|<\infty$ ($|x|\leqslant 1$). 即要求本征值 $l(l+1)$ 中的 l 必须为正整数,$l=0,1,2,\cdots$,其相应的本征解为 Legendre 多项式

$$y(x)=\mathrm{P}_l(x), \quad l=0,1,2,\cdots \tag{16.3.25}$$

径向方程的解为

$$R_l(r)=A_l r^l+B_l r^{-(l+1)} \tag{16.3.26}$$

A_l,B_l 由边界条件确定.

因此,相应于本征值 $l(l+1)$ 的本征解的形式为

$$u_l(r,\theta)=(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)})\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.27}$$

方程(16.3.18)式的通解的形式为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}]\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.28}$$

下一步由边界条件把待定系数 A_l,B_l 定出,首先考虑 $r\to\infty$ 的情况,当 $r\to\infty$ 时,$B_l r^{-(l+1)}\to 0$,此时解的形式为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.29}$$

与边界条件(16.3.22)式比较,并利用 $\mathrm{P}_0(\cos\theta)=1$,$\mathrm{P}_1(\cos\theta)=\cos\theta$,我们即可得

$$A_0=u_0, \quad A_1=-E_0, \quad A_2=A_3=\cdots=0 \tag{16.3.30}$$

至此,解的形式可写成

$$u(r,\theta) = u_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_0 r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.31}$$

再利用边界条件(16.3.21)式 $u\big|_{r=a}=0$ 可得

$$u_0 - E_0 a\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_0 a^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0 \tag{16.3.32}$$

即

$$(B_0 a^{-1} + u_0) P_0(\cos\theta) + (B_1 a^{-1} - E_0 a)\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

可得

$$B_0 a^{-1} + u_0 = 0, \quad B_1 a^{-2} - E_0 a = 0, \quad B_l = 0 (l \geqslant 2)$$

即

$$B_0 = -u_0 a, \quad B_1 = E_0 a^3, \quad B_l = 0 (l \geqslant 2) \tag{16.3.33}$$

我们得到整个定解问题的解即球外电势分布为

$$u(r,\theta) = u_0 - E_0 r\cos\theta - \frac{u_0 a}{r} + E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad r \geqslant a \tag{16.3.34}$$

当我们考虑到导体球是个等势体,其接地的电势取为零,即要求把原来坐标原点 O 的电势取为零,$u_0=0$,此时的解变为

$$u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad r \geqslant a \tag{16.3.35}$$

等式右边第一项为当原点 O 的电势取为零时,原来电场 E_0 的表达式,第二项为中心在坐标原点 O,在 z 轴上的一个偶极子产生的电势.

我们进一步分析电场的分布,由

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla u = -\left(\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right) \\ &= E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_r + E_0\sin\theta\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{16.3.36}$$

可看出,当 $r=a$ 时,

$$\boldsymbol{E}\big|_{r=a} = 3E_0\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r \tag{16.3.37}$$

即导体球表面的电场分布,电场的方向与球面垂直,电场分布是以 z 轴为对称轴的,导体球的"赤道"电场为零,而两极的电场最强,但方向相反. 由于导体表面的电场强度与电荷面密度成正比,因此感应出的轴对称的导体面电荷的分布,在

球外区的场，等效于一个中心在原点的电偶极子在球外产生的场.

例 16.3.3：在介电常数为 ε，半径为 a 的介质球外，距介质球球心 O 的距离为 b 处，放置一电荷量为 q 的点电荷，求介质球外的电势分布.

解：取以 O 点为原点的球坐标系，极轴 z 轴在 Oq 的连线方向上，如图 16.3.3. 此问题是以 z 轴为对称轴的轴对称问题，除了在点电荷 q 所在的点和介

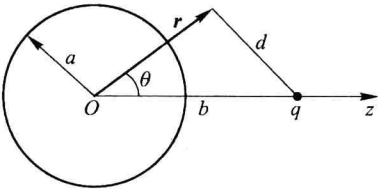


图 16.3.3

质球表面（有极化束缚电荷）外，整个空间满足 Laplace 方程. 由于介质球表面极化电荷的存在，应把球面当成一个界面处理，因此整个空间的电势分布应分成球内区的电势分布 u_i 和球外区的电势分布 u_e 来求解，而球面这一边界有衔接条件：球内外的电势在球面上连续，即

$$u_i\big|_{r=a} = u_e\big|_{r=a} \tag{16.3.38}$$

且球内外的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在球面的法向 $\boldsymbol{n}$ 的分量是连续的（这是由于球面上无自由电荷）

$$(D_i)_n\big|_{r=a} = (D_e)_n\big|_{r=a} \tag{16.3.39}$$

由于 $D_i = \varepsilon E_i$，ε 为介质的介电常数，ε_0 为外部空间的介电常数，$\varepsilon_0 = 1$，且 $(D_i)_n = \dfrac{\partial u_i}{\partial r}$，故这一条件可写为

$$\varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{\partial u_e}{\partial r}\bigg|_{r=a} \tag{16.3.40}$$

下面我们分球内外两区域来求解电势分布. 先看球内区域，由于球内区没有自由电荷，故 u_i 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u_i = 0, \quad r < a \tag{16.3.41}$$

其通解为

$$u_i(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.42}$$

由于 u_i 在球内有限，即 $|u_i| < \infty$，故要求 $B_l = 0$，即 u_i 具有形式

$$u_i(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.43}$$

对球外区域的电势 u_e，它并不是处处都满足 Laplace 方程的，在点电荷 q 处就不满足，因此我们可把 u_e 看成两部分组成

$$u_e = u_r + u_q \tag{16.3.44}$$

u_q 为点电荷 q 产生的势，u_r 为球面上极化电荷产生的势. 极化电荷产生的势 u_r 在 $r>a$ 的区域仍满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u_r = 0, \quad r > a \tag{16.3.45}$$

由于当 $r\to\infty$ 时 $u_r\to 0$，这一自然边界条件的要求，我们由 Laplace 方程的通解形式可知，u_r 具有如下的形式

$$u_r(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.46}$$

由图 16.3.3 可知，点电荷 q 在球外任一点 $\boldsymbol{r}$ 所产生的势为

$$u_q = \frac{q}{d} = \frac{q}{(r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta)^{1/2}} \tag{16.3.47}$$

d 为 $\boldsymbol{r}$ 点到点电荷 q 的距离，由 Legendre 多项式的生成函数可知，u_q 可表为

$$u_q = q\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{b^{l+1}} r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

故球外区的电势 u_e 具有形式

$$u_e = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) + q\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{b^{l+1}} r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.48}$$

由球面的衔接条件(16.3.38)式和(16.3.40)式定出 u_i 和 u_e 中的待定系数 A_l 和 B_l，

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[B_l a^{-(l+1)} + \frac{q}{b^{l+1}} a^l \right] \mathrm{P}_l(\cos\theta) & (16.3.49) \\ \varepsilon \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l l a^{l-1} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[-B_l(l+1) a^{-(l+2)} + \frac{q\cdot l}{b^{l+1}} a^{l-1} \right] \mathrm{P}_l(\cos\theta) & (16.3.50) \end{cases}$$

由此两式两边比较系数可得

$$\begin{cases} A_l a^l = B_l a^{-(l+1)} + \dfrac{q}{b^{l+1}} a^l \\ \varepsilon l A_l a^{l-1} = -B_l(l+1) a^{-(l+2)} + \dfrac{ql}{b^{l+1}} a^{l-1} \end{cases}$$

可得

$$A_l = q\frac{2l+1}{[(\varepsilon+1)l+1]b^{l+1}} \tag{16.3.51}$$

$$B_l = -q(\varepsilon-1)\frac{la^{2l+1}}{[(\varepsilon+1)l+1]b^{l+1}} \tag{16.3.52}$$

因此，我们得整个定解问题的解为

$$u_i(r,\theta) = \frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{(\varepsilon+1)l+1}\left(\frac{r}{b}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad r<a \tag{16.3.53}$$

$$u_e(r,\theta) = \frac{q}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{1/2}} - \frac{q(\varepsilon-1)}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{(\varepsilon+1)l+1}\left(\frac{a^2}{br}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{16.3.54}$$

§16.4　连带 Legendre 函数

当我们考虑的物理问题不具有极轴对称性时，而只是对角变量 φ 的函数 Φ 要求具有单值性时，即对分离变量后的 $\Phi(\varphi)$ 要求具有周期性边界条件：$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2n\pi)$，我们就必须求解连带 Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \tag{16.4.1}$$

其中 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

如同求解 Legendre 方程的本征值问题一样，连带 Legendre 方程也存在同样的本征值问题，

$$\begin{cases}(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \\ |y(x)| < \infty, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\end{cases} \tag{16.4.2}$$

对于连带 Legendre 方程，仍有三个正则奇点：$x=\pm1,\infty$. 如果采用先前的级数解法，对这一本征值问题的求解是较复杂和繁琐的.

由于连带 Legendre 方程与 Legendre 方程有着密切的联系，而且它们具有相同的自然边界条件，因此我们将借助原先已得到的 Legendre 方程本征值问题的本征解 $\mathrm{P}_l(x)$，寻求本征值问题(16.4.2)式的解与 $\mathrm{P}_l(x)$ 的关系.

从 Legendre 方程出发

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P_l(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x}+l(l+1)P_l(x)=0 \tag{16.4.3}$$

将其对 x 求 m 次微商

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P_l(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]-\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[2x\frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)=0 \tag{16.4.4}$$

对前两项应用 Leibnitz(莱布尼茨)公式

$$(uv)^{(n)}=uv^{(n)}+nu'v^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}u''v^{(n-2)}+\cdots+u^{(n)}v \tag{16.4.5}$$

可得

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]-2x(m+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]+$$

$$[l(l+1)-m(m+1)]\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)=0 \tag{16.4.6}$$

考察此方程与连带 Legendre 方程(16.4.1)式之间各项系数的关系,采用试探解的方法,我们选取 $y(x)$ 的形式为

$$y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x) \tag{16.4.7}$$

对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\cdot x\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]-2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\cdot x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]-$$

$$m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]+m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}x^2\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l$$

将它们代入连带 Legendre 方程(16.4.1)式中,可得

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]-2x(m+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right]+\right.$$

$$\left.[l(l+1)-m(m+1)]\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\right\}=0 \tag{16.4.8}$$

等式左边的大括号{ }中的式子正是方程(16.4.6)式中的左边,故等式(16.4.8)成立. 说明解 $y(x)$ 的形式为(16.4.7)式

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

满足连带 Legendre 方程,同时对于本征值 $l(l+1)$,$l=0,1,2,\cdots$,有 $y(x)$ 亦满足自然边界条件 $|y(x)| < \infty$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. 因此这 $y(x)$ 的形式(16.4.7)式就是我们所求的连带 Legendre 方程本征问题(16.4.2)式的本征解,记

$$y(x) \equiv P_l^m(x),$$

即

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \tag{16.4.9}$$

$P_l^m(x)$ 称为**连带 Legendre 函数**,亦称为 m 阶 l 次连带 Legendre 函数.

由于 $P_l(x)$ 为 x 的 l 次多项式,因此对 $P_l(x)$ 的求导高于 l 次时就为零. 因此由 $P_l^m(x)$ 的表达式可看出,本征值 m 有如下限制:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l \tag{16.4.10}$$

由于 $|m| \leqslant l$,我们下面看 m 取负值,即 $m = -1, -2, \cdots, -l$ 的意义.

由连带 Legendre 方程可看出,方程中只含有 m^2 项,故当 $m \to -m$ 时,方程(16.4.1)式是不变的,即 $P_l^{-m}(x)$ 亦是方程的解.

由 $P_l(x)$ 的微分表达式的 Rodrigues 公式,我们立即可写出 $P_l^m(x)$ 的 Rodrigues 公式

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad m > 0 \tag{16.4.11}$$

当 $m \to -m$ 时,有

$$P_l^{-m}(x) = \frac{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l, \quad m > 0 \tag{16.4.12}$$

很容易证明,$P_l^{-m}(x)$ 与 $P_l^m(x)$ 之间的关系为

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad m > 0 \tag{16.4.13}$$

它们之间相差的常数,可由微分运算 $\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$ 与 $\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l$ 的结果得到.

下面我们讨论 $P_l^m(x)$ 的正交关系.

由于 $P_l^m(x)$ 和 $P_{l'}^{m'}(x)$ 分别满足连带 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_l^m}{\mathrm{d}x}\right]-\frac{m^2}{1-x^2}P_l^m+l(l+1)P_l^m=0 \tag{16.4.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_{l'}^{m'}}{\mathrm{d}x}\right]-\frac{m'^2}{1-x^2}P_{l'}^{m'}+l'(l'+1)P_{l'}^{m'}=0 \tag{16.4.15}$$

以 $P_l^m(x)$ 乘以(16.4.15)式减去 $P_{l'}^{m'}(x)$ 乘以(16.4.14)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\left(\frac{\mathrm{d}P_{l'}^{m'}}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P_l^m}{\mathrm{d}x}\right)\right]-[l(l+1)-l'(l'+1)]P_l^mP_{l'}^{m'}+\frac{m^2-m'^2}{1-x^2}P_l^mP_{l'}^{m'}=0$$

两边取定积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x$，并注意到左边第一项定积分后含有 $(1-x^2)$ 的因子，故此项的积分为零. 因此可得：

$$[l(l+1)-l'(l'+1)]\int_{-1}^{1}P_l^mP_{l'}^{m'}\mathrm{d}x=(m^2-m'^2)\int_{-1}^{1}P_l^mP_{l'}^{m'}\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x \tag{16.4.16}$$

由此方程可看出：

当 $m'=m$ 且 $l'\neq l$ 时，有

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\mathrm{d}x=0\quad(l'\neq l) \tag{16.4.17}$$

当 $m'\neq m$ 且 $l'=l$ 时，有

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^{m'}(x)\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=0\quad(m'\neq m) \tag{16.4.18}$$

以上就是连带 Legendre 函数的正交关系.

可以证明对于同一个 m 的 $P_l^m(x)$，$\{P_l^m(x),|m|\leqslant l\}$ 构成一个完备的正交函数系(当 $l<m$ 时，由 $P_l^m(x)$ 的微分表达式可知，$P_l^m(x)$ 为零)，因此 $\{P_l^m(x),|m\leqslant l|\}$ 可构成 Hilbert 空间的基. 为了求得这一空间的完备正交归一的基，我们要计算 $P_l^m(x)$ 的模 N_l^m，考虑 $m>0$ 时，由 $P_l^m(x)$ 的微分表达式可得

$$\begin{aligned}(N_l^m)^2&=\int_{-1}^{1}[P_l^m(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l+m}(x^2-1)^l\right]^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $f(x)=(1-x^2)^m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l+m}(x^2-1)^l$，$f(x)$ 为 x 的 $l+m$ 次多项式，则上式可表为

$$(N_l^m)^2 = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1} f(x)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l+m}(x^2-1)^l\right]\mathrm{d}x$$

考虑到当 $k<m$ 时，$f^{(k)}(x)\big|_{-1}^{1}=0$，对上式进行 m 次分部积分可得

$$(N_l^m)^2 = \frac{(-1)^m}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1} f^{(m)}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l}(x^2-1)^l\right]\mathrm{d}x$$

再进行 l 次分部积分可得

$$(N_l^m)^2 = \frac{(-1)^{l+m}}{2^{2l}(l!)^2}f^{(m+l)}(x)\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\mathrm{d}x$$

计算可得

$$f^{(l+m)}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l+m}\left[(-1)^m\frac{(2l)!}{(l-m)!}x^{l+m}+\cdots\right] = (-1)^m\frac{(2l)!(l+m)!}{(l-m)!}$$

和

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\mathrm{d}x = \frac{(-1)^2(l!)^2}{(2l)!}\cdot\frac{2^{2l+1}}{2l+1}$$

故可得 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的模的平方 $(N_l^m)^2$ 为

$$(N_l^m)^2 = \int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l^m(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!},\quad m>0 \tag{16.4.19}$$

由 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的关系式

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x)\quad m>0$$

很容易得到 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 的模

$$(N_l^{-m})^2 = \int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l^{-m}(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!},\quad m>0 \tag{16.4.20}$$

可以看出，即把 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 模中 $m\to -m$，表达式是自洽的.

因此我们把 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的正交关系(16.4.17)式写成

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'},\quad m>0 \tag{16.4.21}$$

亦可写成正交归一化的 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的正交关系式

$$\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(x)\right]\cdot\left[\sqrt{\frac{2l'+1}{2}\cdot\frac{(l'-m)!}{(l'+m)!}}\mathrm{P}_{l'}^m(x)\right]\mathrm{d}x = \delta_{ll'},\quad m>0 \tag{16.4.22}$$

当我们把 $x=\cos\theta$ 变量还原成 θ 角时，$P_l^m(\cos\theta)$ 的正交关系式为

$$\int_0^{\pi} P_l^m(\cos\theta)P_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}, \quad m>0 \tag{16.4.23}$$

§16.5 球 函 数

球函数亦称为球谐函数或球面调和函数. 前面我们由 Laplace 方程在球坐标下分离变量，分别得到径向方程和描述角度部分的球函数 $Y(\theta,\varphi)$ 所满足的方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{16.5.1}$$

继而对球函数 $Y(\theta,\varphi)$ 进一步分离变量 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，并分别讨论了 $\Phi(\varphi)$ 和 $\Theta(\theta)$ 所满足的方程及它们在物理问题中所满足的自然边界条件周期性边界条件及本征值问题，分别得到关于函数 $\Phi(\varphi)$ 和 $\Theta(\theta)$ 的本征值及相应的本征函数.

$$\Phi(\varphi) \sim e^{im\varphi}$$

对应于周期边界条件，m 为整数.

$$\Theta(\theta) \sim P_l^m(\cos\theta)$$

对应于自然边界条件 $|\Theta(\theta)|<\infty$，则 $l=0,1,2,\cdots$，且 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$.

因此我们得到球函数 $Y(\theta,\varphi)$ 在分离变量后 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 所满足的 S-L 本征值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0\\ |\Theta(\theta)|<\infty \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi) \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\end{cases} \tag{16.5.2}$$

我们得到了本征值为 $l(l+1)$，$l=0,1,2,\cdots$，和对应每个 l 有本征值 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$ 的本征函数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的形式

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) \sim P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

由 P_l^m 的正交性及 $e^{im\varphi}$ 的正交性，我们可知 $Y_{l,m}$ 亦是一组正交的函数族，由于 $|e^{im\varphi}|=1$，由 P_l^m 的模，我们很容易得到正交归一的球函数

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{16.5.3}$$

其中 $l=0,1,2,\cdots,m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$,并称 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 为 **l 阶球函数**.

当 $m\to -m$ 时,由

$$P_l^{-m}(\cos\theta) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta), \quad m>0 \tag{16.5.4}$$

我们有

$$\begin{aligned} Y_{l,-m}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)[l-(-m)]!}{4\pi[l+(-m)]!}}P_l^{-m}(\cos\theta)e^{-im\varphi} \\ &= (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}, \quad m>0 \end{aligned} \tag{16.5.5}$$

因此,我们定义 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的复共轭

$$Y_{l,m}^*(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\varphi), \tag{16.5.6}$$

由此定义,我们得到了球函数的正交关系

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \quad m,m'>0 \tag{16.5.7}$$

注意,这里要求 $m>0$ 是与我们所定义的 P_l^m 的正交性和模长以及我们对球函数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的定义式(16.5.3)式的结果相一致. 否则当 $m<0$ 时,且 $m'=m$,我们所求出的 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的模长与我们由 P_l^m 的模的定义及 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的定义所得的结果相差一个常数.

因此对球函数有另一种等价的定义,正交归一的球函数定义为

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \\ l &= 0,1,2,\cdots, \quad m=0,\pm1,\cdots,\pm l \end{aligned} \tag{16.5.8}$$

则 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的共轭定义为

$$Y_{l,m}^*(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{-im\varphi} \tag{16.5.9}$$

在此定义下,球函数的正交关系为

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$$l = 0,1,2,\cdots,\quad m = 0,\pm 1,\cdots,\pm l \tag{16.5.10}$$

从以上两种等价的定义中，我们可看出球函数可以构成正交归一完备空间的基向量

$$\{Y_{lm}(\theta,\varphi),\quad l = 0,1,2,\cdots,\quad m = 0,\pm 1,\cdots,\pm l\}$$

这一组基向量张成了一个 Hilbert 空间，在这一 Hilbert 空间中，对于每个 l，有 $2l+1$ 个 m，即 $m = \pm 1,\pm 2,\cdots,\pm l$，则对应有 $2l+1$ 个基向量

$$Y_{l,-l},\ Y_{l,-l+1},\ \cdots,\ Y_{l,0},\ \cdots,\ Y_{l,l-1},\ Y_{l,l},$$

构成了一个 $2l+1$ 维的子空间.

由球函数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 为基向量所张成的 Hilbert 空间，是一个无穷维的函数空间，任何一个球面上的函数 $f(\theta,\varphi)$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，可在 $\{Y_{l,m}(\theta,\varphi)\}$ 上展开

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l,m} f_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{16.5.11}$$

其中 f_{lm} 为展开系数，有

$$f_{l,m} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi) \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{16.5.12}$$

以 $\{Y_{l,m}(\theta,\varphi)\}$ 构成的 Hilbert 空间，是物理学中很有用的数学描述的空间，它在电磁学、量子物理学和具有球对称的物理系统中都有广泛的应用. 特别在量子物理学中，它是具有球对称性量子系统的角动量的本征函数空间，它描述了量子系统中当不考虑自旋时，电子在球对称的 Coulomb（库仑）势中处于每一种角动量下电子的角度分布的图像.

下面给出 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的 $l=0,1,2$ 时的函数形式，并以 z 轴为极轴给出其在直角坐标系下的表达式，并给出 $l=0,1$ 的 $Y_{l,m}$ 的图像（图 16.5.1，图 16.5.2，图 16.5.3）.

当 $l=0,m=0$ 时

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

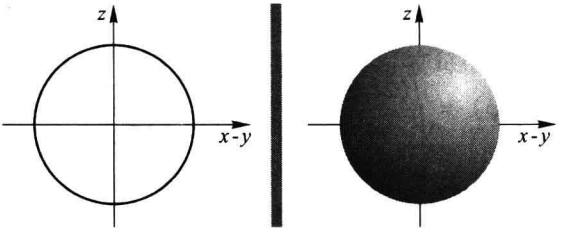


图 16.5.1

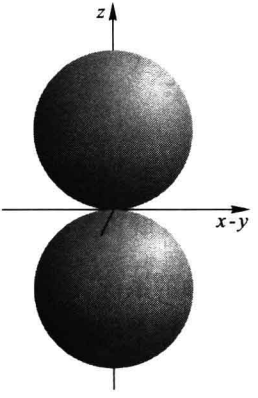


图 16.5.2

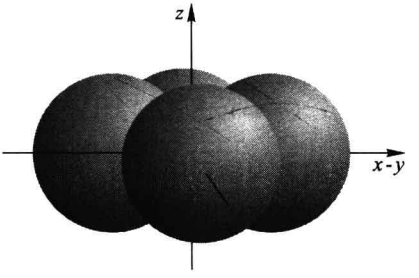


图 16.5.3

$Y_{0,0}$构成一个一维线性空间的基.

当 $l=1, m=0, \pm 1$ 时,

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}$$

$$Y_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x \pm iy}{r}$$

$Y_{1,0}, Y_{1,\pm 1}$构成一个三维线性空间的基.

当 $l=2, m=0, \pm 1, \pm 2$ 时

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}$$

$$Y_{2,\pm 1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{z(x \pm iy)}{r^2}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{x \pm iy}{r^2}$$

$Y_{2,0}, Y_{2,\pm 1}, Y_{2,\pm 2}$构成了一个五维线性空间的基.

对于球函数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$的表达式,由 Euler 公式 $e^{im\varphi} = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$,可以把球函数写成如下的表达式:

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}, \begin{pmatrix} m = 0,1,2,\cdots,l \\ l = 0,1,2,3,\cdots \end{pmatrix} \tag{16.5.13}$$

其中符号$\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}$表示任选 $\sin m\varphi$ 或是 $\cos m\varphi$ 皆可. 这一表达式是球函数的实数表达式.

*附录：球函数的加法公式

当我们处理物理问题时，时常遇到多于一个对称轴的系统，或是需要改变原来球坐标极轴方向的情况. 如何把新坐标系的解与原坐标系的解联系起来，这就导致加法公式.

如图 16.6.1 所示，当 z 轴转过(θ',φ')到 z'轴的位置，即 z'轴与 z 轴的夹角为 θ'，观测点 P，其矢量 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{r}$ 与 z'轴的夹角为 γ，有

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') \tag{16.6.1}$$

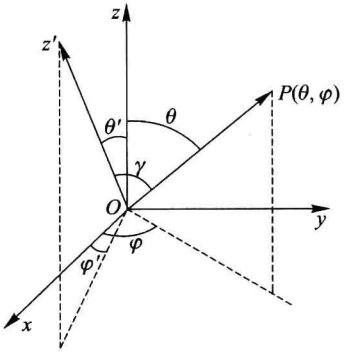


图 16.6.1

则有加法公式：

$$\mathrm{P}_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}^*_{l,m}(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{16.6.2}$$

或可表示为：

$$\mathrm{P}_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta')\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} \tag{16.6.3}$$

由

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')} = \cos m(\varphi-\varphi') + \mathrm{i}\sin m(\varphi-\varphi')$ 及 $\cos\gamma$ 为偶函数，加法公式可表示为：

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') + 2\sum_{m=l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi') \tag{16.6.4}$$

下面我们给出加法公式(16.6.2)式的证明:

由(16.6.1)式可知 $\cos\gamma$ 是$(\theta,\varphi,\theta',\varphi')$的函数,我们把 $P_l(\cos\gamma)$看为(θ,φ)的函数,而(θ',φ')看成参数,可在球函数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$上展开:

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m=-l'}^{l'}C_{l',m}(\theta',\varphi')Y_{l',m}(\theta,\varphi) \tag{16.6.5}$$

在图 16.6.1 中,我们用极轴 z 轴来标明坐标系,由于球面上的 Laplace 算子,在 z - 系中 $\nabla^2_{(\theta,\varphi)}$ 与 z' - 系中 $\nabla^2_{(\theta',\varphi')}$ 是相等的,即 $\nabla^2_{(\theta,\varphi)} = \nabla^2_{(\theta',\varphi')}$,且向量 $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{r}$ 在坐标系的变换下是不变量. $P_l(\cos\gamma)$在 z' - 系中,当 z'与 z 重合时,满足

$$\nabla^2_{(\theta',\varphi')}P_l(\cos\gamma) + \frac{l(l+1)}{r^2}P_l(\cos\gamma) = 0 \tag{16.6.6}$$

此方程为球函数满足的方程,也就是说 $P_l(\cos\gamma)$是 l 阶的球函数,它只是 l 阶球函数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$的线性组合,即

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}(\theta',\varphi')Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{16.6.7}$$

由 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$的正交关系,很容易得到系数 $C_{l,m}(\theta',\varphi')$的表达式:

$$C_{l,m}(\theta',\varphi') = \int Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)P_l(\cos\gamma)\mathrm{d}\Omega \tag{16.6.8}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

$\boldsymbol{OP}$ 在 z' - 系中的方位角为(γ,δ),故 z' - 系中,$(\theta,\varphi) = (\theta(\gamma,\delta),\varphi(\gamma,\delta))$,故 $Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)$可在 z' - 系中展开为:

$$Y^*_{l,m}(\theta,\varphi) = \sum_{m'=-l}^{l}B_{m'}P_l^{m'}(\cos\gamma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\delta} \tag{16.6.9}$$

故可得

$$C_{l,m}(\theta',\varphi') = \sum_{m'=-l}^{l}B_{m'}\int P_l^{m'}(\cos\gamma)P_l(\cos\gamma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\delta}\mathrm{d}\Omega \tag{16.6.10}$$

其中在 z' - 系中 $\mathrm{d}\Omega = \sin\gamma\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\delta$.

由积分 $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\delta}\mathrm{d}\delta$ 可知,只有 $m' = 0$ 时此积分才不为零. 因此我们即可得

$$C_{l,m}(\theta',\varphi') = B_0\cdot\frac{4\pi}{2l+1} \tag{16.6.11}$$

由(16.6.9)式可知

$$Y_{l,m}^{*}(\theta,\varphi) = B_0 P_l(\cos\gamma) \tag{16.6.12}$$

当 $\gamma=0$ 时,$\theta=\theta'$,$\varphi=\varphi'$,且由 $P_l(1)=1$ 可得

$$B_0 = Y_{l,m}^{*}(\theta',\varphi') \tag{16.6.13}$$

故

$$C_{l,m}(\theta',\varphi') = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l,m}^{*}(\theta',\varphi') \tag{16.6.14}$$

将其代入(16.6.7)式,加法公式得证.

证毕.

例 16.6.1:在空间某一球形区域内(球的半径为 R),分布有电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$,求这一电荷分布在球外区域产生的电势并用球函数的展开式表示,说明这一展开式的物理意义.

解:以半径为 R 的球的球心为坐标原点,建立坐标系,如图 16.6.2,球外区的电势满足 Laplace 方程,但本问题可采取更为简单的方法直接求解.

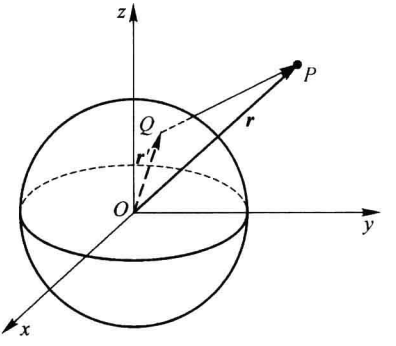


图 16.6.2

设球内区的坐标为 $\boldsymbol{r}'$,球内区以 Ω_R 表示,对球内一点 Q,$\boldsymbol{OQ}=\boldsymbol{r}'$,$Q$ 点邻域微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ 的电荷量为 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$,其在球外区观测点 P,$\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{r}$,产生的电势 U_q:

$$U_q = \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{16.6.15}$$

设 $\boldsymbol{r}'$ 与 z 轴的夹角为 α',$\boldsymbol{r}$ 与 z 轴的夹角为 α,$\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角为 γ,由于 α,上式改写为:

$$U_q = \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma}} \tag{16.6.16}$$

由 Legendre 函数的生成函数可得:

$$U_q = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{16.6.17}$$

由加法公式(16.6.2)式可得:

$$U_q = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{l,m}^{*}(\theta',\varphi') Y_{l,m}(\theta,\varphi)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{16.6.18}$$

因此整个 Ω_R 中电荷分布在空间任一 P 点产生的电势：

$$U(\boldsymbol{r}) = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\left[\int_{\Omega_R}Y_{l,m}^{*}(\theta',\varphi')r'^{l}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right]\frac{Y_{l,m}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}} \tag{16.6.19}$$

可写成

$$U(\boldsymbol{r}) = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}A_{l,m}\cdot\frac{Y_{l,m}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}} \tag{16.6.20}$$

其中

$$A_{l,m} = \int_{\Omega_R}Y_{l,m}^{*}(\theta',\varphi')r'^{l}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{16.6.21}$$

(16.6.20)式即是 Ω_R 内电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 产生的电势用球函数展开的表达式，这一表达式也称为多极子展开式. (16.6.21)式展开系数 $A_{l,m}$ 称为多极矩.

由电学中我们知道：

$$q = \int_{\Omega_R}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

当 q 为点电荷数，称为单极矩.

$$\boldsymbol{P} = \int_{\Omega_R}\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$\boldsymbol{P}$ 称为电偶极矩，$\boldsymbol{r}' = (r_1', r_2', r_3') = (x', y', z')$，$\boldsymbol{P} = (P_x, P_y, P_z)$.

$$Q_{i,j} = \int_{\Omega_R}(3r_i'r_j' - r'^{2}\delta_{i,j})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$Q_{i,j}$ 为零迹四极矩张量.

我们看 $A_{l,m}$ 的 $l=0,1,2$，这三阶的表达式

当 $l=0$ 时，

$$A_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{\Omega_R}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}q \tag{16.6.22}$$

其对电势 $U(\boldsymbol{r})$ 的贡献为 $\sim\frac{q}{r}$，这正是单极子的电势.

当 $l=1, m=-1,0,1$ 时，

$$A_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int_{\Omega_R}(x'-\mathrm{i}y')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(P_x - \mathrm{i}P_y) \tag{16.6.23}$$

$$A_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_{\Omega_R}z'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}P_z \tag{16.6.24}$$

$$A_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(P_x + iP_y) \tag{16.6.25}$$

以上三式表示偶极子各分量的线性组合，代入(15.6.20)式电势的表达式，其对势的贡献为 $\sim \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$，正是偶极子势.

当 $l=2, m=2,1,0,-1,-2$ 时，

$$A_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_{\Omega_R}(x'-iy')^2\rho(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}' = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{1,1}-2iQ_{1,2}-Q_{2,2}) \tag{16.6.26}$$

$$A_{2,1} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_{\Omega_R}z'(x'-iy')\rho(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}' = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{1,3}-iQ_{2,3}) \tag{16.6.27}$$

$$A_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\int_{\Omega_R}(3z'^2-r'^2)\rho(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}' = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}Q_{3,3} \tag{16.6.28}$$

$$A_{2,-1} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{1,3}+iQ_{2,3}) \tag{16.6.29}$$

$$A_{2,-2} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{1,1}+2iQ_{1,2}-Q_{2,2}) \tag{16.6.30}$$

以上五式正是四极矩张量分量的线性组合，代入(15.6.20)式电势的表达式，其对势的贡献为 $\sim \frac{1}{6}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{r_ir_j}{r^5}$，正是四极矩的势.

以上计算由 $Y^*_{l,m}$ 与 $Y^*_{l,-m}$ 的关系可知，对于 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 是实的电荷分布，则有，当 $m>0, A_{l,-m}=(-1)^mA^*_{l,m}$.

对于 $l>2$ 的更高多极子的系数，对应每一个 l 又有 $2l+1$ 个系数，都是相应 l 阶多极子的分量的线性组合，相应对势的贡献由势的总的表达式中相应的多极子势给出，其贡献的形式决定于 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 分布的形式.

第十六章习题

16.1 试证明 Legendre 多项式的生成函数

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}$$

在 $r=0$ 点的 Taylor 展开式为

$$f(r) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l$$

其中 $r = |\boldsymbol{r}| < 1$，$x = \cos\theta$，$|x| \leqslant 1$.

16.2 试证明 Legendre 多项式的递推公式：

(1) $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$

(2) $(l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - xP'_l(x)$

(3) $lP_l(x) = xP'_l(x) - P'_{l-1}(x)$

(4) $(x^2-1)P'_l(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x)$

16.3 试证明：

(1) $P_l(1) = 1$

(2) $P_l(-1) = (-1)^l$

(3) $P_l(0) = \begin{cases} 0 & l = 2n+1, n = 0,1,2,\cdots \\ (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2n!!} & l = 2n, n = 0,1,2,\cdots \end{cases}$

(4) $P'_l(1) = \dfrac{l(l+1)}{2}$

(5) $P'_l(-1) = (-1)^{l+1}\dfrac{l(l+1)}{2}$

(6) $P'_l(0) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{(2n+1)!}{(2n)!!}, & l = 2n+1,\ n = 0,1,2,\cdots \\ 0, & l = 2n, n = 0,1,2,\cdots \end{cases}$

16.4 计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1} P_l(x)\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-1}^{1} x^2 P_l(x) P_{l+2}(x)\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_{-1}^{1} (1-x^2)[P'_l(x)]^2\,\mathrm{d}x$　　(4) $\int_{-1}^{1} xP_l(x)P_{l+1}(x)\,\mathrm{d}x$

(5) $\int_{0}^{1} P_l(x)\,\mathrm{d}x$　　(6) $\int_{0}^{1} P_k(x)P_l(x)\,\mathrm{d}x$

(7) $\int_{-1}^{1} x^k P_l(x)\,\mathrm{d}x$，分别讨论 $k \geqslant l$ 和 $k < l$ 的情况.

16.5 在以 Legendre 多项式为基 $\{P_l(x),\ l = 0,1,2,\cdots\}$ 的函数空间中，将下列函数展开.

(1) $f(x) = |x|$，　　(2) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

16.6 在点电荷 $4\pi\varepsilon_0\rho$ 的电场中放置一半径为 a 的导体球壳，球心距点电荷的距离为 b，且 $b > a$，求这体系所形成的电场.

16.7 半径为 a 的匀质半球，其半球面的温度保持恒定为 T_0，其底面温度保持零度，求球内温度的稳定分布.

16.8 求以下两种均匀带电体在空间形成的稳定电场分布.

(1) 均匀带电的薄圆盘，圆盘的半径为 a，总电荷量为 $4\pi\varepsilon_0 q$.

(2) 均匀带电的细圆环,环的半径为 a,总电荷量为 $4\pi\varepsilon_0 q$.

16.9 求解半径为 a 的空心球壳内的定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & r < a \\ u\big|_{r=a} = \cos^2\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

16.10 试证明

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad m > 0$$

16.11 试证明

$$P_l^m(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(l-m)} \dfrac{(l+m-1)!!}{(l-m)!!}, & \text{当 } l+m \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{当 } l-m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

16.12 试证明

$$P_l^l(\cos\theta) = (2l-1)!!\sin^l\theta, l = 0,1,2,\cdots$$

16.13 在以球函数为基 $\left\{ Y_{l,m}(\theta,\varphi), \begin{matrix} l=0,1,2,\cdots \\ m=0,\pm1,\cdots,\pm l \end{matrix} \right\}$ 的函数空间中,将下列函数展开

(1) $\sin^2\theta\cos^2\varphi$ (2) $(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$

(3) $\dfrac{1}{r^2}(x^2+2z^2+3xy+4xy)$

其中 $r^2 = x^2+y^2+z^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

16.14 在半径为 a 的球壳内外,分别求解下面定解问题的球外区域和球内区域的解

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u\big|_{r=a} = f(\theta,\varphi) \\ u\big|_{r=0} < \infty, \quad u\big|_{r\to\infty} < \infty \end{cases}$$

并分别对以下两种 $f(\theta,\varphi)$ 的形式

(1) $f(\theta,\varphi) = \cos\theta$,

(2) $f(\theta,\varphi) = P_l^l(\cos\theta)\cos\varphi$,给出解的具体形式.

第十七章　柱　函　数

§17.1　Bessel(贝塞尔)函数

第十五章中我们已介绍过,在时间和空间的分离变量下,波动方程和输运方程的空间部分为 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{17.1.1}$$

当 $k=0$ 时,方程退化为 Laplace 方程.

Helmholtz 方程在柱坐标系(ρ,φ,z)下分离变量 $u(\boldsymbol{r})=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$,得到以下方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)+\left(k^2+\lambda-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{17.1.2}$$

$$\Phi''-\nu^2\Phi=0,\quad \nu\text{ 为实数} \tag{17.1.3}$$

$$Z''-\lambda Z=0,\quad \lambda\text{ 为实数} \tag{17.1.4}$$

把径向方程(17.1.2)式进行变量代换,令 $x=\sqrt{k^2+\lambda}\,\rho$ $(k^2+\lambda\neq0)$,此时把 $R(\rho)$记为 $y(x)$,就得到 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{17.1.5}$$

此方程称为 ν 阶 **Bessel 方程**.

一、Bessel 方程的解——Bessel 函数

观察 Bessel 方程(17.1.5)式可知,$x=0$ 是正则奇点,在 $x=0$ 的邻域 $|x|>0$ 的区域中,可设方程的解具有级数形式

$$y(x)=x^s\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,\quad a_0\neq0 \tag{17.1.6}$$

代入方程(17.1.5)式可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+s)(k+s-1)x^{k+s-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+s)x^{k+s-2} +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s-2} = 0$$

合并同类项,此式可写成

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k[(k+s)^2 - \nu^2]x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0 \tag{17.1.7}$$

比较 x 的各幂次项系数,由于 $a_0 \neq 0$,故由 x^0 项的系数可得指标方程

$$s^2 - \nu^2 = 0 \tag{17.1.8}$$

可得

$$s_1 = \nu, \quad s_2 = -\nu \tag{17.1.9}$$

对 x^1 项的系数,并考虑到(17.1.8)式的结果,可得

$$a_1(2s+1) = 0 \tag{17.1.10}$$

因此有

$$a_1 = 0 \quad \left(s \neq -\frac{1}{2}\right) \tag{17.1.11}$$

$$s = -\frac{1}{2}, \quad a_1 \text{ 取任意值(可取 } a_1 = 0) \tag{17.1.12}$$

一般情况下,由于 $s = \pm\nu$,而 ν 应适合方程(17.1.3)式的定解问题,因此我们总是取 $a_1 = 0$. 若 $s_2 = -\frac{1}{2}$ 时,$s_1 = \frac{1}{2}$,则有 $s_1 - s_2 = 1$ 为整数,由 §15.3 中常微分方程级数解的理论,当指数方程的两个根 $s_1 - s_2 =$ 整数时,只能得到一个级数解,另一个级数解的形式为(15.3.5)式. 为了讨论级数解的形式(17.1.6)式,在(17.1.12)式中我们取 $a_1 = 0$.

对 x^k 项的系数可得

$$a_k[(k+s)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0$$

考虑到(17.1.8)式,有

$$a_k \cdot k(2s+k) + a_{k-2} = 0 \tag{17.1.13}$$

即可得系数的递推关系式

$$a_k = -\frac{1}{k(k+2s)} a_{k-2} \tag{17.1.14}$$

反复利用递推关系式可得

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{k!(s+1)(s+2)\cdots(s+k)} \cdot \frac{1}{2^{2k}} a_0 \tag{17.1.15}$$

$$a_{2k+1} = 0 \quad (\because a_1 = 0) \tag{17.1.16}$$

由于 $s = \pm\nu$ 当我们取 $s_1 = \nu$ 时，并取 $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$，可得 Bessel 方程的级数解

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{17.1.17}$$

把 $y_1(x)$ 记为 $J_\nu(x)$，即

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{17.1.18}$$

$J_\nu(x)$ 称为 ν 阶 **Bessel 函数**，$\nu \neq$ 正整数.

当取 $s_2 = -\nu$ 时，并取 $a_0 = \dfrac{(-1)^k}{2^\nu \Gamma(-\nu+1)}$ 时，可得另一线性无关的级数解

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{17.1.19}$$

把 $y_2(x)$ 记为 $J_{-\nu}(x)$，即

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \tag{17.1.20}$$

$J_{-\nu}(x)$ 称为 $-\nu$ 阶 Bessel 函数.

对于 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$，用系数比值判别式容易求得此两级数解的收敛半径 $R = \infty$，即当 $|x| < \infty$ 时，此级数解总是存在且收敛的.

故在 ν 不为整数时，Bessel 方程的通解为

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \tag{17.1.21}$$

其中 C_1, C_2 是与 x 无关的任意常数.

二、整数阶 Bessel 函数

对于众多的物理问题，在 Helmholtz 方程进行柱坐标下的分离变量时，对 $\Phi(\varphi)$ 满足的方程(17.1.3)式要求具有自然周期性边界条件：$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$，此时 ν 的取值为整数 m，$m = 0, 1, 2, \cdots$，即 $\nu = m$，此时 Bessel 方程的解为

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \end{aligned} \tag{17.1.22}$$

$J_m(x)$称为 m 阶 Bessel 函数,它是整数阶 Bessel 函数. 在上式中用到$\Gamma(n+1)=n!$.

现在考察 $J_{-m}(x)$,由 Γ 函数的性质:

$$|\Gamma(0)| = |\Gamma(-1)| = |\Gamma(-n)| = \infty \quad (n \text{ 为正整数}),$$

我们有

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-m+k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$$

令 $-m+k=n$,并利用 $n\Gamma(n)=\Gamma(n+1)$这一性质, 有

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

$$= (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \qquad (17.1.23)$$

$$= (-1)^m J_m(x)$$

这一结果说明 $J_{-m}(x)$和 $J_m(x)$是线性相关的,因此整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$与 $J_{-m}(x)$不是线性独立的 Bessel 方程的解. 这样就必须寻求与 $J_m(x)$线性独立的另一个解.

我们知道当 ν 不是整数时,$J_\nu(x)$与 $J_{-\nu}(x)$是线性无关的. 可以找到由$J_\nu(x)$与 $J_{-\nu}(x)$的线性组合, 且对任何 ν 都与 $J_\nu(x)$、$J_{-\nu}(x)$线性无关的 Bessel 方程的解,此解称为 **Neumann(诺伊曼)函数** $N_\nu(x)$

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \qquad (17.1.24)$$

Neumann 函数通常也称为**第二类 Bessel 函数**,为区分于 Neumann 函数,$J_\nu(x)$也称为**第一类 Bessel 函数**.

对于 $N_\nu(x)$,当 $\nu \to m$ 时,它是$\frac{0}{0}$型的函数,由 L'Hospital(罗毕达)法则可得

$$N_m(x) = \lim_{\nu \to m} N_\nu(x)$$

$$= \lim_{\nu \to m} \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\cos \nu\pi - \pi \sin \nu\pi J_\nu - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}}{\pi \cos \nu\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=m} - (-1)^m\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=m}\right] \tag{17.1.25}$$

由 $J_\nu(x)$ 与 $J_{-\nu}(x)$ 的表达式计算可得

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi}J_m(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(m+k)!}[\Phi(m+k+1)+\Phi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \tag{17.1.26}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots$，并约定当 $m=0$ 时，右边第二项的求和式要从等式中去掉.

Φ 函数的定义是：$\Phi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$，则 $\Phi(k+1) = -\gamma+1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{k}$，其中 γ 为 Euler 常数，即 $\Phi(1) = -\gamma = -0.577\ 216$.

因此当 $m=0,1,2,\cdots$，时，Bessel 方程的两个线性独立的解为 $J_m(x)$ 和 $N_m(x)$.

三、整数阶 Bessel 函数的简单性质

由 m 阶 Bessel 函数的表达式(17.1.22)式可知

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x) \tag{17.1.27}$$

由此关系可看出，当 m 为偶数时，$J_m(x)$ 为偶函数；当 m 为奇数时，$J_m(x)$ 为奇函数.

由 $J_m(x)$ 的表达式可得 $J_m(x)$ 在 $x=0$ 点的性质

$$J_0(0) = 1, \quad J_m(0) = 0 (m \neq 0) \tag{17.1.28}$$

由 $N_m(x)$ 的表达式(17.1.26)式，给出了当 $x=0$ 时，$N_m(x)$ 是奇异的，其发散的行为

$$N_0(x=0) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}\bigg|_{x=0} \tag{17.1.29}$$

$$N_m(x=0) \sim \frac{-(m-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\bigg|_{x=0} \quad m=1,2,\cdots \tag{17.1.30}$$

同时由 $J_m(x)$ 与 $J_{-m}(x)$ 的关系式(17.1.23)式可得

$$N_{-m}(x) = (-1)^m N_m(x) \tag{17.1.31}$$

即 Neumann 函数 $N_m(x)$ 与 $N_{-m}(x)$ 是非线性独立的.

§17.2 Bessel 函数的递推关系

由 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 的表达式(17.1.18)式,当我们以 x^ν 乘上 $J_\nu(x)$,并对 x 求微商,可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(\nu+k)}\right] \\ &= 2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(\nu+k)-1} \\ &= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} \\ &= x^\nu J_{\nu-1}(x)\end{aligned} \tag{17.2.1}$$

其中用到 Γ 函数的性质 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

同样可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}J_\nu) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \tag{17.2.2}$$

另一方面,我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu) = \nu \cdot x^{\nu-1}J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) \tag{17.2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}J_\nu) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}J_\nu(x) + x^{-\nu}J'_\nu(x) \tag{17.2.4}$$

由(17.2.1)式和(17.2.3)式立即可得

$$\nu J_\nu + xJ'_\nu = xJ_{\nu-1} \tag{17.2.5}$$

由(17.2.2)式和(17.2.4)式可得

$$-\nu J_\nu + xJ'_\nu = -xJ_{\nu+1} \tag{17.2.6}$$

由上两式,分别消去 J'_ν 项和 J_ν 项可得

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x}J_\nu \tag{17.2.7}$$

$$J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu \tag{17.2.8}$$

这两式是 Bessel 函数的基本递推关系.

Bessel 函数的基本递推关系同样也适用于 Neumann 函数 $N_\nu(x)$,即

Neumann函数的基本递推关系式为

$$N_{\nu-1} + N_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x}N_{\nu} \tag{17.2.9}$$

$$N_{\nu-1} - N_{\nu+1} = 2N'_{\nu} \tag{17.2.10}$$

由(17.2.2)式,当 $\nu=0$ 时,可得

$$J'_0(x) = -J_1(x) \tag{17.2.11}$$

此关系式在后面整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的计算中经常用到,结合 Bessel 函数的递推关系,由此关系式可计算出所有整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的值. 当然 $J_m(x)$ 的值也可由 $J_m(x)$ 的表达式(17.1.22)式求出.

由(17.2.1)式和(17.2.2)式可以证明

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m (x^{\nu}J_{\nu}) = x^{\nu-m}J_{\nu-m} \tag{17.2.12}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m (x^{-\nu}J_{\nu}) = (-1)^m x^{-\nu-m}J_{\nu+m} \tag{17.2.13}$$

以上两关系式在 Bessel 函数的计算中也是经常用到的. 由此两关系式我们可证明半整数阶的 Bessel 函数,可由初等函数表示出.

对于 Bessel 函数 $J_{\nu}(x)$,当 n 为半整数时,即 $\nu = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}$,$J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ 称为半整数阶 Bessel 函数.

首先考察 $n=0$ 即 $\nu=\frac{1}{2}$ 的 $\frac{1}{2}$ 阶 Bessel 函数 $J_{\frac{1}{2}}(x)$. 由 $J_{\nu}(x)$ 的表达式可得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \tag{17.2.14}$$

由 Γ 函数的倍乘公式

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{17.2.15}$$

有

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)$$

令 $x=k+1$,可得

$$2^{2k+1}\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2k+2)$$

即

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2k+2)2^{-2k-1}\frac{1}{\Gamma(k+1)}=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2k+1)!2^{-2k-1}\frac{1}{k!}$$

将此式代入(17.2.14)式得

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{17.2.16}$$

对于 $J_{-\frac{1}{2}}(x)$,由 $J_{-\nu}$ 的表达式(17.1.20)式,由同样的方法可得

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{17.2.17}$$

由(17.2.12)式和(17.2.13)式即可得

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right) \tag{17.2.18}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right) \tag{17.2.19}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$.

从上两式可知,半整数阶 Bessel 函数可由初等函数表示出,且 $J_{n+\frac{1}{2}}$ 与 $J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 是线性独立的. 这也说明当 $n+\frac{1}{2}$ 与 $-\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 之差为整数时,应由(15.3.5)式给出另一线性无关的特解,但在 $J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 的情况下所求的(15.3.5)式中的 $A=0$.

§17.3 柱函数的定义

定义 17.3.1: 柱函数

如果函数 $y_\nu(x)$ 满足以下的递推关系

$$y_{\nu-1}+y_{\nu+1}=\frac{2\nu}{x}y_\nu \tag{17.3.1}$$

$$y_{\nu-1}-y_{\nu+1}=2y'_\nu \tag{17.3.2}$$

或满足与上两式等价的关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu y_\nu)=x^\nu y_{\nu-1} \tag{17.3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}y_\nu) = -x^{-\nu}y_{\nu+1} \tag{17.3.4}$$

则我们把这类函数统称为柱函数.

命题 17.3.1：柱函数必满足 Bessel 方程.

证：由(17.3.1)式和(17.3.2)式分别消去 $y_{\nu+1}$ 和 $y_{\nu-1}$ 可得

$$y'_\nu + \frac{\nu}{x}y_\nu = y_{\nu-1} \tag{17.3.5}$$

$$y_{\nu+1} = \frac{\nu}{x}y_\nu - y'_\nu \tag{17.3.6}$$

把(17.3.5)式中的 ν 换成 $\nu+1$,即

$$y'_{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x}y_{\nu+1} = y_\nu$$

并将此式代入(17.3.6)式,即得

$$y_{\nu+1} = \frac{\nu}{x}\left(y'_{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x}y_{\nu+1}\right) - \left(y''_{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x}y'_{\nu+1} - \frac{\nu+1}{x^2}y_{\nu+1}\right)$$

即

$$y''_{\nu+1} + \frac{1}{x}y'_{\nu+1} + \left(1 - \frac{(\nu+1)^2}{x^2}\right)y_{\nu+1} = 0 \tag{17.3.7}$$

此方程正是函数 $y_{\nu+1}$ 所满足的 Bessel 方程,命题得证.

注意：此命题的逆命题是不成立的,即满足 Bessel 方程的函数不一定是柱函数.

例如 J_ν 和 N_ν 都满足 Bessel 方程,它们的线性组合 $J_\nu + \nu N_\nu$ 亦满足 Bessel 方程,但 $J_\nu + \nu N_\nu$ 不满足递推关系(17.3.1)式和(17.3.2)式,故 $J_\nu + \nu N_\nu$ 不是柱函数.

§17.4 整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的生成函数

我们考虑函数 $e^{\frac{x}{2}\cdot\left(z-\frac{1}{z}\right)}$,其中 x 为实数,z 为复数.

我们在 $0<|z|<\infty$ 区间内,在 $z=0$ 点对此函数进行 Laurent 展开

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l\left(\frac{1}{z}\right)^l$$

令 $k-l=m$,$k=l+m$,$z^k \cdot z^{-l} = z^m$,则有

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^m\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l\cdot\frac{1}{(m+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{l+m}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^m\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(m+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+m}\right] \tag{17.4.1}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m$$

即我们得到此函数 Laurent 展开的系数为整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$，故称函数 $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ **为整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的生成函数.**

由 Laurent 展开式的系数公式，我们得到

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{z^{m+1}}dz \tag{17.4.2}$$

其中积分回路 c 为绕 $z=0$ 点沿逆时针方向的任一闭合回路.

若我们取 c 为复平面上的单位圆周，则 $z=e^{i\theta}$，$\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$，$z-\frac{1}{z}=2i\sin\theta$，此时 $J_m(x)$ 的生成函数可写成

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=e^{ix\sin\theta} \tag{17.4.3}$$

则生成函数的 Laurent 展开式(17.4.1)可写成

$$e^{ix\sin\theta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)e^{im\theta} \tag{17.4.4}$$

这一展开式为 Fourier 级数的表达式. 由 Fourier 级数的系数公式，$J_m(x)$ 表写为

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta}e^{-im\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\theta-m\theta)}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-m\theta)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x\sin\theta-m\theta)d\theta$$

此表达式右边第二项的被积函数对变量 θ 为奇函数，故积分为零，因此我们得到

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-m\theta)d\theta \tag{17.4.5}$$

这就是**整数阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的积分表达式.**

在物理学的波动(如光学和量子物理)的某些问题中会遇到上式右边的这种积分，它正是整数阶 Bessel 函数，其积分数值可由 Bessel 函数表直接查出.

命题 17.4.1：$J_m(x)$的加法公式

$$J_m(x_1 + x_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x_1) J_{m-k}(x_2) \tag{17.4.6}$$

证：由 $J_m(x)$的生成函数的表达式(17.4.1)式可得

$$e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x_1 + x_2) z^m \tag{17.4.7}$$

另一方面

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(z-\frac{1}{z}\right)} &= e^{\frac{1}{2}x_1\left(z-\frac{1}{z}\right)} \cdot e^{\frac{1}{2}x_2\left(z-\frac{1}{z}\right)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x_1) z^k \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(x_2) z^l \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x_1) J_{m-k}(x_2) \right] \end{aligned} \tag{17.4.8}$$

其中 $m = l + k$.

比较上面两式，即可得到 $J_m(x)$的加法公式.

§17.5 Bessel 方程的本征值问题

我们在讨论球函数中关于变量 θ 的 Legendre 方程本征值问题时，其本征值是由自然边界条件确定的，即要求 Legendre 方程的解是有限的，因此当本征值 $l(l+1)$中的 l 取零或正整数时，所求得的发散级数形式的解退化成有限项的多项式 $P_l(\cos\theta)$，因此得到了 Legendre 方程的本征值及相应的本征函数.

但 Bessel 方程的本征值问题与 Legendre 方程的本征值问题完全不同. Bessel 方程是 Helmholtz 方程或是 Laplace 方程在柱坐标下进行分离变量，其径向变量 ρ 所满足的方程. 其特征值问题是由 ρ 为特定值的柱面所满足的物理条件所决定的，而不是自然边界条件来决定. 当然，对柱内问题，当涉及 $\rho = 0$ 时仍要由自然边界条件，即在 $\rho = 0$ 处由解的有限这一条件来决定解的形式. 而 Bessel 函数是在 $\rho \to \infty$ 时，是不发散的，因此不必考虑 $\rho \to \infty$ 时的自然边界条件.

我们在这里考虑 Laplace 方程(对 Helmholtz 方程也可同样讨论，只是这里取 $k = 0$ 的情况)在柱坐标下进行分离变量后所得的 Bessel 方程的定解问题，讨论其本征值问题. 这里我们对方程(17.1.3)式要求 $\Phi(\varphi)$满足周期性边界条件，即 $\nu = m, m = 0, 1, 2, \cdots$，而对方程(17.1.4)式，考虑 $\lambda > 0$ 的情况，(而对 Helmholtz 方程，则只需考虑 $k^2 + \lambda > 0$ 的情况). 此时满足齐次边界条件的 Bessel 方程的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0, \quad (\rho<b) & (17.5.1) \\ \left[\alpha\dfrac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+\beta R(\rho)\right]_{\rho=b}=0 & (17.5.2) \\ |R(\rho)|_{\rho=0}<\infty & (17.5.3) \end{cases}$$

其中边界条件(17.5.2)式包括了第一、二、三类边界条件的情况，α,β 不能同时为零. b 为柱面半径，边界条件(17.5.3)式是考虑柱体内的物理问题时所给出的自然边界条件，当我们的问题只考虑柱外问题时，此条件不出现.

此定解问题构成了 Sturm－Liourille 本征值问题，故本征值 λ 为非负的值，我们前面已对 λ 做了要求，即 $\lambda>0$(对 $\lambda<0$ 的情况我们将在后面的内容中进行讨论，而 $\lambda=0$ 的情况不属于此本征值讨论范围，作为练习，读者自己解答).

由 §17.4 节的讨论我们知道，整数阶 Bessel 方程(17.5.1)式有两个线性无关的特解 $\mathrm{J}_m(\sqrt{\lambda}\rho)$ 和 $N_m(\sqrt{\lambda}\rho)$，即

$$R^{(m)}(\rho)=C_m\mathrm{J}_m(\sqrt{\lambda}\rho)+D_mN_m(\sqrt{\lambda}\rho),$$

C_m,D_m 为常数. 但由于 $N_m(\sqrt{\lambda}\rho)\xrightarrow{\rho\to0}\infty$，故对边界条件(17.5.3)式而言，$N_m(\sqrt{\lambda}\rho)$ 必须舍去. 方程(17.5.1)式的解为

$$R^{(m)}(\rho)=C_m\mathrm{J}_m(\sqrt{\lambda}\rho) \tag{17.5.4}$$

因此 Bessel 方程的特征值 λ 将由边界条件(17.5.2)式给出，即 $\rho=b$ 时，有

$$\alpha\sqrt{\lambda}\mathrm{J}'_m(\sqrt{\lambda}b)+\beta\mathrm{J}_m(\sqrt{\lambda}b)=0 \tag{17.5.5}$$

此方程为超越方程，解得(一般用数值解)此方程的根为 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\cdots$ (λ 值由小到大排列). 即求出 Bessel 方程此定解问题的本征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$其相应的本征函数

$$R_n^{(m)}(r)=\mathrm{J}_m(\sqrt{\lambda_n}\rho)\quad(n=0,1,\cdots) \tag{17.5.6}$$

下面我们考虑一种经常遇到的边界条件，为第一类齐次边界条件的情况，即在定解问题(17.5.2)式中 $\alpha=0$ 的情况，此时求解本征值的超越方程(17.5.5)式变为

$$\mathrm{J}_m(\sqrt{\lambda}b)=0 \tag{17.5.7}$$

这就把本征值的求解方程转为求解 Bessel 函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的零点问题.

这里我们先考察一下 Bessel 函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的零点的性质. 由 $\mathrm{J}_m(x)$ 的表达式：

$$\mathrm{J}_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k},\quad m=0,1,2,\cdots$$

可知，$J_m(x)$的零点有如下的性质：

(1) $J_0(0)=1$，$J_m(0)=0$ $(m\neq 0)$ (17.5.8)

(2) $J_m(x)$的零点在 x 轴上的分布是以原点为对称的. 这一性质由$J_m(-x)=(-1)^m J_m(x)$即可得到，即如果 x_n 为 $J_m(x)$的零点：$J_m(x_n)=0$，则 $J_m(-x_n)=0$.

(3) $J_m(x)$的零点有无穷多个. 当 x 很大时，$J_m(x)$是收敛的，它有渐进表达式

$$J_m(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-m\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{17.5.9}$$

由这一表达式即可看出 $J_m(x)$的零点有无穷多个.

(4) $J_m(x)$与 $J_{m+1}(x)$的零点是两两相间的，即 $J_m(x)$的相邻两个零点间必有而且只有一个 $J_{m+1}(x)$的零点，而 $J_{m+1}(x)$的相邻两个零点之间也必有且只有一个 $J_m(x)$的零点. 如图 17.5.1 所示. 此性质可由微分学的中值定理和 Bessel 函数的递推关系加以证明.

(5) $J_m(x)$的最小正零点小于 $J_{m+1}(x)$的最小正零点.

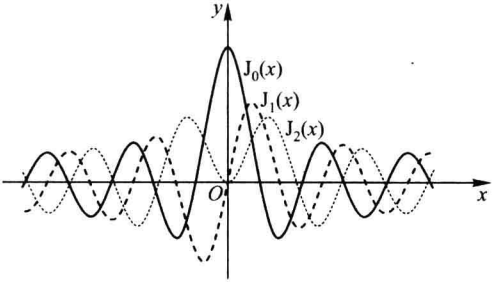


图 17.5.1

由于 Bessel 方程的本征值问题是 S－L 本征值问题，它的本征值都为正的，因此我们只考虑 $J_m(x)$的正零点. 则第一类齐次边界条件的 Bessel 方程的本征值满足的方程(17.5.7)式可写为

$$J_m(\sqrt{\lambda}b)=J_m(x_n^{(m)})=0 \tag{17.5.10}$$

其中 $x_n^{(m)}$ 表示 $J_m(x)$的第 n 个正零点，$n=1,2,\cdots$，即第 n 个本征值为

$$\lambda_n^{(m)}=\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots \tag{17.5.11}$$

其相应的本征函数为

$$R_n^{(m)}(\rho)=J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right),\quad n=1,2,\cdots \tag{17.5.12}$$

Bessel 函数的零点值在工程技术上有着广泛的应用，例如在波导中往往要找出最小的本征频率，它是与最小零点值相联系的，在应用中一般直接查 Bessel 函数表中的零点值.

同样对第二类齐次边界条件

$$R'(\rho)\big|_{\rho=b} = 0 \tag{17.5.13}$$

求解本征值的方程为

$$\mathrm{J}'_m(\sqrt{\lambda}b) = 0 \tag{17.5.14}$$

此方程不能直接从 Bessel 函数表中查出 $\mathrm{J}'_m(x)$ 的零点，但可由递推关系式

$$\mathrm{J}'_m(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{J}_{m-1}(x) - \mathrm{J}_{m+1}(x)]$$

由 $\mathrm{J}_{m-1}(x)$ 与 $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 曲线的交点得到. 得到 $\mathrm{J}'_m(x)\big|_{x=\sqrt{\lambda}b}$ 的零点 $x_n^{(m)}$ 即得到本征值

$$\lambda_n^{(m)} = \left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\right)^2, \quad n = 1,2,\cdots \tag{17.5.15}$$

及其相应的本征函数

$$R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad n = 1,2,\cdots \tag{17.5.16}$$

对于第三类边界条件，即可由解超越方程(17.5.5)式的数值解，得到本征值及相应的本征函数.

本征函数 $\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)$ 的正交关系：

由 S－L 本征值问题本征函数的正交性，Bessel 方程本征值问题的本征函数 $\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)$ 在区间[0,b]上以 ρ 为权重正交的，即

$$\int_0^b \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)\mathrm{J}_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho = 0, \quad n \neq l \tag{17.5.17}$$

由于 $\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)$ 不是归一化的，因此我们定义归一化的本征函数 $\mathscr{R}_n^{(m)}(\rho)$：

$$\mathscr{R}_n^{(m)}(\rho) = (N_n^{(m)})^{-1}\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right) \tag{17.5.18}$$

其中 $N_n^{(m)}$ 为对应于 $\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)$ 的归一化常数，其表达式为

$$[N_n^{(m)}]^2 = \int_0^b \mathrm{J}_m^2\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \tag{17.5.19}$$

则本征函数的正交关系可表示为

$$\int_0^b \mathscr{R}_n^{(m)}(\rho)\mathscr{R}_l^{(m)}(\rho)\rho\mathrm{d}\rho = \delta_{nl} \tag{17.5.20}$$

下面我们具体计算在三类齐次边界条件下归一化常数 $N_n^{(m)}$ 的值,为计算方便,我们令

$$x = \frac{x_n^{(m)}}{b}\rho \tag{17.5.21}$$

(17.5.19)式变为

$$[N_n^{(m)}]^2 = \left(\frac{b}{x_n^{(m)}}\right)^2 \int_0^{x_n^{(m)}} \mathrm{J}_m^2(x)x\mathrm{d}x \tag{17.5.22}$$

由于 $\mathrm{J}_m(x)$ 满足 Bessel 方程

$$x^2\mathrm{J}_m(x) = m^2\mathrm{J}_m(x) - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_m(x)\right] \tag{17.5.23}$$

由(17.5.22)式右边的积分利用(17.5.23)式可得

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{J}_m^2(x)x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \mathrm{J}_m^2(x)\mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2}[x^2\mathrm{J}_m^2(x) - \int 2x^2\mathrm{J}_m\mathrm{J}'_m\mathrm{d}x] \\
&= \frac{1}{2}[x^2\mathrm{J}_m^2] - \int\left[m^2\mathrm{J}_m - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\mathrm{J}'_m)\right]\mathrm{J}'_m\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}[x^2\mathrm{J}_m^2] - \int m^2\mathrm{J}_m\mathrm{d}\mathrm{J}_m + \int x\mathrm{J}'_m\mathrm{d}(x\mathrm{J}'_m) \\
&= \frac{1}{2}[x^2\mathrm{J}_m^2] - \frac{1}{2}m^2[\mathrm{J}_m^2] + \frac{1}{2}[x\mathrm{J}'_m]^2
\end{aligned}$$

即可得

$$\int_0^{x_n^{(m)}} \mathrm{J}_m^2(x)x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x^2\mathrm{J}_m^2 - m^2\mathrm{J}_m^2 + x\mathrm{J}'_m]_0^{x_n^{(m)}}$$

故

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{x_n^{(m)}}\right)^2[x^2\mathrm{J}_m^2 - m^2\mathrm{J}_m^2 + x\mathrm{J}'_m]_0^{x_n^{(m)}} \tag{17.5.24}$$

这是求归一化因子的基本表达式.

对于第一类齐次边界条件,考虑到 $J_0(0)=1$ 和 $J_m(0)=0$ $(m\neq 0)$,且 $x_n^{(m)}$ 为 $J_m(x)$ 的零点,有

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{b^2}{2}[J'_m(x_n^{(m)})]^2=\frac{b^2}{2}[J_{m+1}(x_n^{(m)})]^2 \tag{17.5.25}$$

其中用到(17.2.6)式的递推关系.

对于第二类齐次边界条件,由于 $J'_m(x_n^{(m)})=0$ 即 $x_n^{(m)}$ 为 $J'_m(x)$ 的零点,有

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{b^2}{2}\left[1-\left(\frac{m}{x_n^{(m)}}\right)^2\right][J_m(x_n^{(m)})]^2 \tag{17.5.26}$$

对于第三类齐次边条件,$x_n^{(m)}$ 为此边界条件的零点值,故有

$$J'_m(x_n^{(m)})=-\frac{\beta}{\alpha}J_m(x_n^{(m)})$$

有

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{b^2}{2}\left[1-\left(\frac{m}{x_n^{(m)}}\right)^2\right]+\frac{\alpha}{\beta}\left[\left(\frac{b}{x_n^{(m)}}\right)^2\right][J_m(x_n^{(m)})]^2 \tag{17.5.27}$$

由三类齐次边界条件所得到的 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的本征值 $\lambda_n^{(m)}=\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\right)^2$ 及由(17.5.18)式所定义的其相应的正交归一的本征函数系

$$\{\mathscr{R}_n^{(m)}(\rho),\quad n=1,2,\cdots\mid\rho\in[0,b]\}$$

以此函数系为基,可张成一个 Hilbert 空间,此空间中的元素,即定义在 $[0,b]$ 上的 ρ 的连续函数 $f(\rho)$(可放宽到有有限个第一类间断点),且在此区间上(或分段的区间上)$f(\rho)$ 有连续的导数,函数 $f(\rho)$ 可在函数系 $\{\mathscr{R}_n^{(m)}\}$ 上展开,即 $f(\rho)$ 的广义 Fourier 级数

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\mathscr{R}_n^{(m)}(\rho) \tag{17.5.28}$$

展开系数 f_n 为

$$f_n=\int_0^b f(\rho)\mathscr{R}_n^{(m)}(\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{17.5.29}$$

可等价的写成

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nJ_m(\sqrt{\lambda_n^{(m)}}\rho) \tag{17.5.30}$$

此时的展开系数 $f(n)$ 为

$$f_n = [N_n^{(m)}]^{-2}\int_0^b f(\rho)\mathrm{J}_m(\sqrt{\lambda_n^{(m)}}\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{17.5.31}$$

注意：$f(\rho)$的广义 Fourier 级数展开只能是在同一阶的 Bessel 本征函数系上展开. 由于 $\mathrm{J}_m(x), m=0,1,2,\cdots$不同阶即不同 m 的本征函数系$\{\mathscr{R}_n^{(m)}\}$是构成不同的 Hilbert 空间，只能根据所考虑的物理问题选定某一个 m 的本征函数系即在某一个 Hilbert 空间基上进行广义 Fourier 级数展开.

应用举例：

例 17.5.1：求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率(固有频率)及本征振动模式.

解：此问题是求解二维波动方程

$$u_{tt} - a^2\nabla_{(2)}^2 u = 0 \tag{17.5.32}$$

其中 $\nabla_{(2)}^2$ 是二维 Laplace 算子，a 是振动在此二维膜上的传播速度，它与膜的物理性质相关. 此问题不同于前面讨论的波动的定解问题，它没给出波动的源，也没给出波动的初始条件，只是研究膜本身在特定形状和特定边界条件下所固有的振动特性：即边缘固定的半径为 b 的圆形膜，在取以圆心为坐标原点的极坐标(ρ,φ)时，由膜的对称性考虑其振动模式. 在 φ 角具有周期性自然边界条件下，膜上可能按照哪些频率(即本征频率)进行振动及其振动模式. 此问题正是 Euler 在 18 世纪中叶，由于研究圆形鼓膜的振动在极坐标下进行分离变量得到了 Bessel 方程及 Bessel 函数，解决了圆形鼓膜的振动问题(此问题与鼓的声音的研究密切相关).

在上述的极坐标(ρ,φ)下，对二维波动方程(17.5.32)进行空间和时间变量的分离，很容易得到 $u(\rho,\varphi,t)$的形式为

$$u(\rho,\varphi,t) = U(\rho,\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{17.5.33}$$

我们研究的问题与 t 无关，定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+k^2U=0, \quad k=\dfrac{\omega}{a} & (17.5.34)\\ U(b,\varphi)=0, U(\rho,\varphi)\big|_{\rho=0}\text{有限} & (17.5.35)\\ U(\rho,\varphi)=U(\rho,\varphi+2\pi) & (17.5.36)\end{cases}$$

对 $U(\rho,\varphi)$进行分离变量，$U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$，可得 $\Phi(\varphi)$，$R(\rho)$分别要满足的 S－L 本征值问题. $\Phi(\varphi)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi(\varphi)=0 & (17.5.37)\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi) & (17.5.38)\end{cases}$$

可得本征值 $m^2, m=0,1,2,\cdots$，即相应的本征解

$$\Phi(\varphi) \sim e^{\pm im\varphi} \tag{17.5.39}$$

$R(\rho)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\left(k^2-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0 & (17.5.40) \\ R(b)=0, R(0) \text{ 有限} & (17.5.41) \end{cases}$$

这是 Bessel 方程的第一类边界条件的 S－L 本征值问题，我们要求出在边界条件(17.5.41)式下本征值 k^2 的 k 的值，再由 $\omega=ka$，即可得本征频率.

由本节中讨论的整数阶 Bessel 方程的解可知，方程式(17.5.40)解的形式为

$$R^{(m)}(\rho)=C_m J_m(k\rho)+D_m N_m(k\rho) \tag{17.5.42}$$

因为边界条件(17.5.41)式中要求 $R(0)$ 有限，故弃掉解 $N_m(k\rho)$，即取 $D_m=0$，则解变为

$$R^{(m)}(\rho)=c_m J_m(k\rho)$$

由边界条件 $R(b)=0$，即得

$$J_m(kb)=0 \tag{17.5.43}$$

这就是求 Bessel 函数零点问题. 设 $x=k\rho$，则对 m 阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的零点 $x_n^{(m)}, n=1,2,3,\cdots$ 由小到大排列，则 $x_n^{(m)}=k_n^{(m)}b$，即可得此定解问题的本征值

$$[k_n^{(m)}]^2=\left[\frac{x_n^{(m)}}{b}\right]^2, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{17.5.44}$$

即可由 $\omega=ka$，得到该圆形膜的本征频率为

$$\omega_n^{(m)}=k_n^{(m)}\cdot a=\frac{x_n^{(m)}}{b}\cdot a, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{17.5.45}$$

相应的本征振动模式为

$$R_n^{(m)}(\rho)=J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\cdot\rho\right), \quad n=1,2,3,\cdots \tag{17.5.46}$$

对于均匀膜完全轴对称的问题，$m=0$，其本征振动的基频为

$$\omega_1^{(0)}=\frac{x_1^{(0)}}{b}a$$

而基频相应的振动模式为

$$R_1^{(0)}(\rho)=J_0\left(\frac{x_1^{(0)}}{b}\cdot\rho\right)$$

例 17.5.2：由导体壁构成的中空的圆柱（图 17.5.2），高为 h，半径为 b，设上底面的电势为 $U(U\neq 0$ 为常数），上底面与侧柱面绝缘，侧柱面与下底面的电势为零，求柱体腔内部的电势.

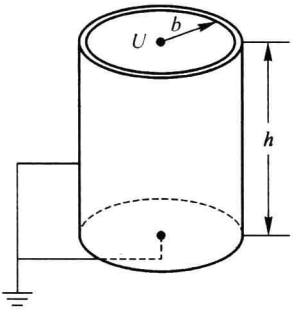


图 17.5.2

解：此问题为柱内电势 u 的稳定分布问题，取柱坐标系 (ρ,φ,z)，原点在下底面中心，z 轴沿圆柱的中轴，此问题中电势 u 完全为轴对称的，定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,\varphi,z) = 0, \quad \rho < b, 0 < z < h & (17.5.47) \\ u(\rho,\varphi,0) = 0, \quad u(\rho,\varphi,h) = U & (17.5.48) \\ u(b,\varphi,z), \quad u(0,\varphi,z) \text{ 有限} & (17.5.49) \end{cases}$$

用分离变量法解，设 $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$，可得关于 $R(\rho)$，$\Phi(\varphi)$ 和 $Z(z)$ 所满足的方程及相应的定解问题.

先看关于 $\Phi(\varphi)$ 的方程及定解问题

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \tag{17.5.50}$$

由于问题为轴对称的，与 φ 无关，而方程的解的形式 $\Phi(\varphi)\sim e^{\pm im\varphi}$，只能取 $m=0$，即取 $\Phi(\varphi)=1$. 故 $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)Z(z)$. 而 $R(\rho)$ 和 $Z(z)$ 满足的方程分别为

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho) + \lambda R(\rho) = 0 \tag{17.5.51}$$

$$Z''(z) - \lambda Z(\rho) = 0 \tag{17.5.52}$$

关于 $R(\rho)$ 的方程及其定解条件构成了 S－L 本征值问题

$$\begin{cases} R''(\rho) + \dfrac{1}{\rho}R'(\rho) + \lambda R(\rho) = 0 & (17.5.51) \\ R(b) = 0, \quad R(0) \text{ 有限} & (17.5.53) \end{cases}$$

本征值 $\lambda\geqslant 0$，而方程中 $m=0$，(17.5.51) 式为零阶 Bessel 方程，其解的形式为

$$R(\rho) = CJ_0(\sqrt{\lambda}\rho) + DN_0(\sqrt{\lambda}\rho) \tag{17.5.54}$$

由 $R(0)$ 有限，这一自然边界条件，必须弃掉 $N_0(\sqrt{\lambda}\rho)$ 的解，故取 $D=0$. 解 $R(\rho)$ 的形式变为

$$R(\rho) = CJ_0(\sqrt{\lambda}\rho) \tag{17.5.55}$$

由边界条件 $R(b)=0$ 可得

$$J_0(\sqrt{\lambda}b) = 0 \tag{17.5.56}$$

(**注意**：在解(17.5.55)式中，如果取 $\lambda=0$，由 $J_0(0)=1$，则只能取 $C=0$，导致整个问题的解为平庸解 $u(\rho,\varphi,z)=0$，将与边界条件 $u(\rho,\varphi,h)=U(U\neq 0)$ 相矛盾，故 $\lambda\neq 0$.)

因此由边界条件(17.5.56)式可得本征值 λ 为

$$\lambda_n = \left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\right)^2, \quad n=1,2,\cdots \tag{17.5.57}$$

其中 $x_n^{(0)}$ 为零阶 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的第 n 个零点. 其相应的本征函数为

$$R_n(\rho) = C_nJ_0(\sqrt{\lambda_n}\rho) = C_nJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) \tag{17.5.58}$$

关于 $Z(z)$ 的方程(17.5.52)式与柱面上下底面的边界条件并不构成 S－L 本征值问题，方程(17.5.52)式解的形式为

$$Z(z) = Ae^{\sqrt{\lambda}z} + Be^{-\sqrt{\lambda}z} \tag{17.5.59}$$

而 λ 已由 $R(\rho)$ 的 S－L 问题定出，对于(17.5.57)式给出的 λ_n，相应 $Z(z)$ 的解为

$$Z_n(z) = A_ne^{\sqrt{\lambda_n}z} + B_ne^{-\sqrt{\lambda_n}z} \tag{17.5.60}$$

因此对应每个 λ_n，柱内电势 u 有相应的一个分量解 u_n

$$u_n(\rho,z) = \left[A_ne^{\frac{x_n^{(0)}}{b}z} + B_ne^{-\frac{x_n^{(0)}}{b}z}\right]J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) \tag{17.5.61}$$

其中 $R_n(\rho)$ 中的系数 C_n 已归入 A_n 和 B_n 中，因此我们可以得到柱内电势 u 的形式为

$$\begin{aligned} u(\rho,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho,z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_ne^{\frac{x_n^{(0)}}{b}z} + B_ne^{-\frac{x_n^{(0)}}{b}z}\right]J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) \end{aligned} \tag{17.5.62}$$

系数 A_n 和 B_n 将由上下底的边界条件(17.5.48)式确定.

由 $z=0, u(\rho,0)=0$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}[A_n + B_n]J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right) = 0 \tag{17.5.63}$$

可得

$$A_n = -B_n \tag{17.5.64}$$

对 $z=h, u(\rho,h)=U$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{\frac{x_n^{(0)}}{b}h}+B_n e^{-\frac{x_n^{(0)}}{b}h}\right]J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)=U \tag{17.5.65}$$

把 $A_n=-B_n$ 代入此式,再由零阶 Bessel 函数的正交关系可得

$$A_n\left(e^{\frac{x_n^{(0)}}{b}h}-e^{-\frac{x_n^{(0)}}{b}h}\right)=\frac{U}{(N_n)^2}\int_a^b J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\rho d\rho \tag{17.5.66}$$

其中归一化常数 N_n 为

$$(N_n)^2=\frac{b^2}{2}[J_0'(x_n^{(0)})]^2=\frac{b^2}{2}[J_1(x_n^{(0)})]^2 \tag{17.5.67}$$

其中用到递推关系 $J_0'=-J_1$. 由递推关系

$$\frac{d}{xdx}(xJ_1)=x^0J_0=J_0,\quad 得\frac{d}{dx}(xJ_1)=xJ_0$$

两边积分得

$$\int xJ_0(x)dx=xJ_1(x)$$

计算(15.5.66)式右边的积分

$$\begin{aligned}\int_0^b J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\rho d\rho&=\left(\frac{b}{X_n^{(0)}}\right)^2\int_0^{x_n^{(0)}}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)d\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\\&=\left(\frac{b}{x_n^{(0)}}\right)^2\cdot\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)J_1\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\Bigg|_{\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho=0}^{\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho=x_n^{(0)}}\\&=\frac{b^2}{x_n^{(0)}}J_1(x_n^{(0)})\end{aligned}$$

将此计算结果及 N_n 的表达式代入(15.5.66)式,有

$$A_n(e^{\frac{x_n^{(0)}}{b}h}-e^{-\frac{x_n^{(0)}}{b}h})=\frac{2U}{b^2}[J_1(x_n^{(0)})]^{-2}\frac{b^2}{x_n^{(0)}}J_1(x_n^{(0)})$$

即可得

$$A_n=\frac{U}{x_n^{(0)}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}h\right)J_1(x_n^{(0)})} \tag{17.5.68}$$

因此整个定解问题的解为

$$u(\rho,z) = 2U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^{(0)}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}h\right)\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})}\mathrm{sh}\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right)$$

(17.5.69)

注：如果边界条件中 $U=0$，则只能选取 $\lambda=0$，则只能得到 $u(\rho,\varphi,z)=0$ 的平凡解，这一情况即为静电屏蔽的情况.

例 17.5.3：设有均匀的无穷长空心圆柱体，内外半径分别为 a 和 b，保持圆柱内外界面上的温度为零，柱体内初始温度为 $f(\rho)$，求柱体内各处的温度变化. 这是一个简单理想化的有内套壁和外套壁的系统同时进行冷却的物理模型.

解：此问题为柱内热传导问题，采用柱坐标 (ρ,φ,z) 轴极轴（z 轴）为圆柱的中心轴，由于 z 方向为无穷长，且边界条件和初始条件都与 φ,z 变量无关，是轴对称的问题，可化为与 z 轴垂直的圆环面上的问题. 故关于 $\Phi(\varphi)$ 方程的本征值为 $m=0$，柱内的温度分布函数只是 (ρ,t) 的函数 $u(\rho,t)$，在此坐标系下，定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\gamma^2\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0, \quad t>0, a<\rho<b & (17.5.70)\\ u(a,t)=u(b,t)=0 & (17.5.71)\\ u(\rho,0)=f(\rho), \quad a<\rho<b & (17.5.72)\end{cases}$$

其中 γ 为热传导系数.

用分离变量法求解，设 $u(\rho,t)=T(t)\cdot R(\rho)$，则可得

$$T'+\gamma^2k^2T=0, \quad t>0 \tag{17.5.73}$$

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+k^2R(\rho)=0, \quad a<\rho<b \tag{17.5.74}$$

故径向方程的定解问题为

$$\begin{cases}R''(\rho)+\dfrac{1}{\rho}R'(\rho)+k^2R(\rho)=0, \quad a<\rho<b & (17.5.74)\\ R(a)=R(b)=0 & (17.5.75)\end{cases}$$

此问题为零阶 Bessel 方程的 S－L 本征值问题，由于 $a<\rho<b$，不存在 $\rho=0$ 时的自然边界条件，方程的解的形式为

$$R(\rho)=A\mathrm{J}_0(k\rho)+BN_0(k\rho) \tag{17.5.76}$$

由边界条件(17.5.75)式可得

$$\begin{cases} AJ_0(ka) + BN_0(ka) = 0 & (17.5.77) \\ AJ_0(kb) + BN_0(kb) = 0 & (17.5.78) \end{cases}$$

上述方程组中未定常数 A、B 有非零解的条件为系数行列式不为零,即

$$J_0(ka)N_0(kb) - J_0(kb)N_0(ka) = 0 \qquad (17.5.79)$$

可由计算机进行数值计算或是查 Bessel 函数表的方法求出这一方程的根 k_n, $n=1,2,\cdots$,即定解问题(17.5.74)式,(17.5.75)式的本征值 k_n.

由方程组(17.5.77)式,(17.5.78)式可知,对于每一本征值 k_n,有

$$\frac{B_n}{A_n} = -\frac{J_0(k_n a)}{N_0(k_n a)} = -\frac{J_0(k_n b)}{N_0(k_n b)}$$

当我们取 $A_n=1$ 时,有

$$B_n = -\frac{J_0(k_n a)}{N_0(k_n a)} = -\frac{J_0(k_n b)}{N_0(k_n b)} \qquad (17.5.80)$$

其相应的本征函数为

$$R_n(\rho) = J_0(k_n\rho) - \frac{J_0(k_n a)}{N_0(k_n a)}N_0(k_n\rho) \qquad (17.5.81)$$

而对 $T(t)$ 所满足的方程(17.5.73)式,对于每一个 k_n,有解为

$$T_n(t) = C_n e^{-\gamma^2 k_n^2 t} \qquad (17.5.82)$$

因此整个定解问题的解的形式为

$$u(\rho,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[J_0(k_n\rho) - \frac{J_0(k_n a)}{N_0(k_n a)}N_0(k_n\rho)\right]e^{-\gamma^2 k_n^2 t} \qquad (17.5.83)$$

由初始条件(17.5.72)式和 $J_0(k_n\rho)$ 的正交关系及 $N_0(k_n\rho)$ 的正交关系,可求得系数 C_n

$$C_n = \frac{1}{N_n^2}\int_a^b f(\rho)\left[J_0(k_n\rho) - \frac{J_0(k_n a)}{N_0(k_n a)}N_0(k_n\rho)\right]\rho d\rho \qquad (17.5.84)$$

其中归一化系数 N_n 为

$$N_n^2 = \int_a^b\left[J_0(k_n\rho) - \frac{J_0(k_n a)}{N_0(k_n a)}N_0(k_n\rho)\right]^2\rho d\rho \qquad (17.5.85)$$

*§17.6 虚宗量 Bessel 函数

虚宗量 Bessel 函数亦称为**变形 Bessel 函数**,或称为**修正 Bessel 函数**.

一般来讲 Bessel 方程和 Bessel 函数可以是复的. 我们前面所介绍的一般物理问题中所遇到的都是实的 Bessel 方程和实的 Bessel 函数. 但我们在柱坐标下用分离变量法求解物理上的静场的分布,即求解 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$,在某些特定的边界条件的选取下,会出现纯虚数变量的 Bessel 方程,其解为纯虚数变量的 Bessel 函数,此时我们称它们为虚宗量 Bessel 方程和虚宗量 Bessel 函数.

(*注:"宗量"一词通常是指复数变量,复变量为纯虚数通常称为"虚宗量".)

一、虚宗量 Bessel 方程的求解

当我们讨论柱体内静态场的分布时,用分离变量法在柱坐标下求解 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\rho,\varphi,z) = 0 \tag{17.6.1}$$

令 $u(\rho,\varphi,z) = R(\rho)Z(z)\Phi(\varphi)$. 如果我们的物理问题要求 φ 角分量的 $\Phi(\varphi)$ 满足周期性自然边界条件时,则 $\Phi(\varphi)$ 的方程所构成的 S-L 本征值问题,其本征值为 $m^2, m = 0,1,2,\cdots$. 为了方便后面的讨论,在分离变量的过程中,把原先设定的 λ 写成 $-\lambda$ 的形式,不影响对方程的讨论. 这样在分离变量后关于 $Z(z)$ 和 $R(\rho)$ 的方程分别为

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 \tag{17.6.2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(-\lambda - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0 \tag{17.6.3}$$

先看 $Z(z)$ 满足的方程(17.6.2)式,当 $Z(z)$ 满足的边界条件为齐次边界条件时(或是非齐次边界条件通过函数变换化为齐次边界条件),此时 $Z(z)$ 的定解问题就构成了 S-L 本征值问题,具有本征值 $\lambda \geqslant 0$.

对于 $R(\rho)$ 所满足的方程(17.6.3)式,当我们令 $x = \sqrt{-\lambda}\rho = \mathrm{i}\sqrt{\lambda}\rho$,$x$ 就变成虚宗量,而 $R(\rho) = y(x)$ 就变成虚宗量函数,则方程(17.6.3)式变成

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) = 0 \tag{17.6.4}$$

此方程称为**整数阶虚宗量 Bessel 方程.**

虚宗量 Bessel 方程不能构成 S-L 本征值问题,其解就称为**整数阶虚宗量 Bessel 函数**,记为 $\mathrm{I}_m(x)$,有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_m(x) &= \mathrm{i}^{-m}\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x)\\ &= \mathrm{i}^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{\mathrm{i}x}{2}\right)^{m+2k}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \tag{17.6.5}$$

由此表达式可得

$$\mathrm{I}_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k} \quad (|\Gamma(0)| = |\Gamma(-1)| = \cdots = \infty)$$

令 $j = k - m$ 则

$$\mathrm{I}_{-m}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+j)!\Gamma(j+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\Gamma(m+j+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2j}$$

$$= \mathrm{I}_m(x) \tag{17.6.6}$$

即 $\mathrm{I}_{-m}(x)$ 与 $\mathrm{I}_m(x)$ 是同一个函数，$\mathrm{I}_m(x)$ 亦称为**第一类整数阶虚宗量 Bessel 函数**. 由 $\mathrm{I}_m(x)$ 得表达式很容易得到，

$$\mathrm{I}_0(0) = 1, \qquad \mathrm{I}_m(0) = 0 \quad (m = 1,2,\cdots) \tag{17.6.7}$$

与整数阶 Bessel 方程的解类似，整数阶虚宗量 Bessel 方程的另一个特解为**整数阶 Mocdonald(麦克唐纳)函数** $\mathrm{K}_m(x)$，其级数表达式为

$$\mathrm{K}_m(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} +$$

$$(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\left[\ln\frac{x}{2} - \psi(m+k+1) - \frac{1}{2}\psi(k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \tag{17.6.8}$$

其中 $m = 0,1,2,\cdots,\psi(k+1)$ 的意义与 $\mathrm{N}_m(x)$ 表达式中的一样，$\psi(1) = -\gamma$(γ 为 Euler 常数)，$\psi(k+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$.

整数阶 Mocdonald 函数 $\mathrm{K}_m(x)$ 亦称为**第二类整数阶虚宗量 Bessel 函数**.

对于一般的虚宗量 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(-1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) = 0 \tag{17.6.9}$$

其中 $x = \mathrm{i}\sqrt{\lambda}\rho, y(x) = R(\rho)$. 当 ν 为非整数时，它有两个线性无关的特解 $\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}x)$

与 $J_{-\nu}(ix)$，

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{17.6.10}$$

$$J_{-\nu}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{-\nu+2k} \tag{17.6.11}$$

二、虚宗量 Bessel 函数的定义

定义 17.6.1：虚宗量 Bessel 函数（亦称第一类虚宗量 Bessel 函数）$I_\nu(x)$ 和 $I_{-\nu}(x)$，

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) \tag{17.6.12}$$

$$I_{-\nu}(x) = i^{\nu}J_{-\nu}(ix) \tag{17.6.13}$$

定义 17.6.2： Mocdonald **函数**（亦称第二类虚宗量 Bessel 函数 $K_\nu(x)$）

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu} \tag{17.6.14}$$

则**整数阶 Mocdonald 函数** $K_m(x)$ 为

$$\begin{aligned} K_m(x) &= \lim_{\nu\to m} K_\nu(x) \\ &= \frac{(-1)^m}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial\nu} - \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=m} \end{aligned} \tag{17.6.15}$$

其级数表达式为(17.6.8)式.

三、虚宗量 Bessel 函数的渐近行为

下面我们看虚宗量 Bessel 函数 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 在 $x\to 0$ 和 $x\to\infty$ 时的渐近行为：由 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 的定义式，很容易看出当 $x\to 0$ 时对于 $\nu\geqslant 0$，$I_\nu(x)$ 是有限的，而 $K_\nu(x)$ 是发散的. 特别是当 ν 为整数 m 时，$I_m(0)$ 的行为已由(17.6.7)式给出

$$I_0(0) = 1, \qquad I_m(0) = 0, \qquad m = 1,2,\cdots$$

而 $K_m(x)$ 当 $x\to 0$ 的发散行为

$$\begin{cases} K_0(x) \sim -\ln\dfrac{x}{2} \\ K_m(x) \sim \dfrac{(m-1)!}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-m}, \qquad m = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{17.6.16}$$

当 $x\to\infty$ 时，$I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 的渐近行为

$$I_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^{x} \tag{17.6.17}$$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \tag{17.6.18}$$

四、虚宗量 Bessel 函数应用

例 17.6.1：一半径为 a，高为 h 的均匀圆柱体，其底边有均匀分布的热流垂直注入，热流强度为 q_0，上底保持恒温 u_1，侧面保持恒温 u_0，求柱内的温度分布.

解：这是一个求柱内稳定温度分布的问题，以下底面中心为坐标原点，以圆柱中心轴为 z 轴建立柱坐标系 (ρ,φ,z). 由边界条件可知，柱内温度分布与 φ 变量无关，定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,z) = 0, \quad \rho < a, 0 < z < h & (17.6.19)\\ u\big|_{\rho=a} = u_0 & (17.6.20)\\ u\big|_{z=h} = u_1 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = -\dfrac{q_0}{k} & (17.6.21) \end{cases}$$

其中 k 为热传导系数.

对此定解问题我们用两种方法求解.

解法一：作函数变换，将上下底边界条件齐次化，设

$$u(\rho,z) = u_1 + \frac{q_0}{k}(h-z) + w(\rho,z) \tag{17.6.22}$$

则 $w(\rho,z)$ 满足的定解条件为

$$\begin{cases} \nabla^2 w(\rho,z) = 0, \quad \rho < a, 0 < z < h & (17.6.23)\\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad w\big|_{z=h} = 0 & (17.6.24)\\ w\big|_{\rho=a} = u_0 - u_1 - \dfrac{q_0}{k}(h-z) & (17.6.25) \end{cases}$$

令 $w(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$，可得

$$\begin{cases} Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 & (17.6.26)\\ Z'(0) = 0, Z(h) = 0 & (17.6.27) \end{cases}$$

此问题为 S－L 本征值问题，可解得本征值

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right]^2, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{17.6.28}$$

相应的本征解

$$Z(z) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}z, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{17.6.29}$$

$R(\rho)$满足的方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) - \lambda R = 0 \tag{17.6.30}$$

这是零阶虚宗量 Bessel 方程,它不构成 S-L 本征值问题,其解为虚宗量 Bessel 函数 $\mathrm{I}_0(\sqrt{\lambda}\rho)$和 $\mathrm{K}_0(\sqrt{\lambda}\rho)$,在 $\rho=0$ 处由自然边界条件要求 $|w(\rho,z)|_{\rho=0}<\infty$,则需去掉 $\mathrm{K}_0(\sqrt{\lambda}\rho)$,可得解为

$$R(\rho) = \mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\rho\right), \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{17.6.31}$$

则此定解问题的解为

$$w(\rho,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}z\mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\rho\right) \tag{17.6.32}$$

由边界条件(17.6.25)式定出系数 A_n,当 $\rho=a$ 时,(17.6.32)式为

$$u_0 - u_1 - \frac{q_0}{k}(h-z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}z\mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi a\right) \tag{17.6.33}$$

由本征函数 $\cos\sqrt{\lambda_n}z$ 的正交性可得

$$A_n = \frac{4}{\pi I_0\dfrac{(2n+1)}{2h}\pi a}\left[\frac{(-1)^n(u_0-u_1)}{2n+1} - \frac{2hq_0}{\pi k(2n+1)^2}\right] \tag{17.6.34}$$

即可得柱内的温度分布为

$$u(\rho,z) = u_1 + \frac{q_0}{k}(h-z) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\mathrm{I}_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\rho\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}z \tag{17.6.35}$$

其中 A_n 的表达式由(17.6.34)式给出.

解法二:作函数变换使侧面边界条件齐次化,设

$$u = u_0 + w(\rho,z) \tag{17.6.36}$$

则定解问题变为

$$\begin{cases} \nabla^2 w(\rho,z) = 0 & (17.6.37) \\ w\big|_{\rho=a} = 0 & (17.6.38) \\ w\big|_{z=h} = u_1 - u_0, \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = -\dfrac{q_0}{k} & (17.6.39) \end{cases}$$

令 $w(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$,可得 $R(\rho)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \lambda R = 0 & (17.6.40) \\ R\big|_{\rho=a} = 0,\ R\big|_{\rho=0} \text{ 有限} & (17.6.41) \end{cases}$$

此为零阶 Bessel 函数满足的 S - L 本征值问题,其本征值为

$$\lambda_n = \left(\frac{x_n^{(0)}}{a}\right)^2, \qquad n = 1,2,\cdots \tag{17.6.42}$$

其中 $x_n^{(0)}$ 为 $\mathrm{J}_0(x)$ 的第 n 个零点,相应的本征函数为

$$R_n(\rho) = \mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho\right) \tag{17.6.43}$$

而 $Z(z)$ 满足的方程为

$$Z'' - \lambda Z = 0 \tag{17.6.44}$$

由于 $\lambda > 0$,$Z(z)$ 满足的方程不构成本征值问题,把(17.6.42)式中的 λ_n 代入,可得 $Z_n(z)$ 的形式为

$$Z_n(z) = A_n \mathrm{ch}\frac{x_n^{(0)}}{a}z + B_n \mathrm{sh}\frac{x_n^{(0)}}{a}z \tag{17.6.45}$$

解 $w(\rho,z)$ 的形式为

$$w(\rho,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \mathrm{ch}\frac{x_n^{(0)}}{a}z + B_n \mathrm{sh}\frac{x_n^{(0)}}{a}z\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho\right) \tag{17.6.46}$$

把上下底的边界条件(17.6.39)式代入

$$\begin{cases} -\dfrac{q_0}{k} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(0)}}{a}B_n\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho\right) \\ u_1 - u_0 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \mathrm{ch}\left(\frac{x_n^{(0)}}{a}h\right) + B_n \mathrm{sh}\left(\frac{x_n^{(0)}}{a}h\right)\right]\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho\right) \end{cases} \tag{17.6.47}$$

再由 $J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)$ 的正交性，两边积分，利用 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的递推关系，可得

$$\begin{cases} \dfrac{x_n^{(0)}}{a}B_n = -\dfrac{2q_0}{kx_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})} \\ A_n\mathrm{ch}\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{a}h\right) + B_n\mathrm{sh}\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{a}h\right) = \dfrac{2(u_1-u_0)}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})} \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{a}h\right)}\left[\dfrac{2(u_1-u_0)}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})} + \dfrac{2q_0a\mathrm{sh}\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{a}h\right)}{k(x_n^{(0)})^2J_1(x_n^{(0)})}\right] \\ B_n = -\dfrac{2aq_0}{k(x_n^{(0)})^2J_1(x_n^{(0)})} \end{cases} \tag{17.6.48}$$

最终得到柱内的温度分布为

$$u(\rho,z) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\mathrm{ch}\left(\frac{X_n^{(0)}}{a}h\right) + B_n\mathrm{sh}\left(\frac{X_n^{(0)}}{a}h\right)\right]J_0\left(\frac{X_n^{(0)}}{a}\rho\right) \tag{17.6.49}$$

其中 A_n，B_n 的值由(17.6.48)式给出.

由解法二可看出，采用柱面齐次边界条件所构成的 S－L 本征值问题，就可以不出现虚宗量 Bessel 函数解.

上面两种方法解的途径不一样，即边界条件齐次化的方案不一样，构成的 S－L本征值问题也不同，得到的解的形式也不同，但**由微分方程解的存在唯一性定理，这两种解就是原方程定解问题的唯一的解**，它是描述同一个柱内温度的稳定分布，只是表示形式不同而已.

*§ 17.7　Hankel(汉克尔)函数

前面讨论的多数是界面为圆柱形的柱内物理量的分布问题. 当我们讨论波动(例如电磁波、声波等)遇到柱面发生的散射问题时，即求波动在圆柱界外的问题，经常遇到的是 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 和 Neumann 函数 $N_\nu(x)$ 的线性组合，通常用到 **Hankel 函数**，其定义为

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \tag{17.7.1}$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \tag{17.7.2}$$

Hankel 函数亦称为**第三类 Bessel 函数**，它满足柱函数的递推关系，故此**第一、二、三类 Bessel 函数都是柱函数**.

当我们的观测点距离柱体很远，即观测点的距离远大于柱体的半径时，我们由 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 的渐近行为可知，当 $x \gg 1$ 时

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(x^{-\frac{3}{2}}) \tag{17.7.3}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(x^{-\frac{3}{2}}) \tag{17.7.4}$$

可知 Hankel 函数在 $x \gg 1$ 时的渐近行为

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + o(x^{-\frac{3}{2}}) \tag{17.7.5}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + o(x^{-\frac{3}{2}}) \tag{17.7.6}$$

通过描述这一类波动的数学形式，对比平面波 $e^{\pm ikx}$ 和球面波 $\frac{1}{r}e^{\pm k\cdot r}$，上两式表示平面波被柱面散射后在远处看到的一种波动，是一种柱面波的波动，在 $H_\nu(x)$ 中变量 $x = \sqrt{\lambda}\rho$ 是沿径向 ρ 的. 因此研究柱坐标下波的散射问题时，经常要用到 Hankel 函数.

当 ν 为整数 m 时，Hankel 函数在 $x = 0$ 点具有奇异性

$$H_0^{(1)} \sim i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, \quad H_0^{(2)} \sim -i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \tag{17.7.7}$$

$$H_m^{(1)} \sim -i\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, \quad H_m^{(2)} \sim i\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, m = 1,2,\cdots \tag{17.7.8}$$

因此一般用 Hankel 函数描述柱外物理场的行为.

§17.8 球 Bessel 函数

上面我们讨论的是柱坐标下三类方程用分离变量法解时，其径向方程解的问题.

前面我们对球坐标下三类方程用分离变量法解，讨论了其角度都分所满足的方程及其解的问题，研究了 Legendre 函数和球函数. 而在球坐标下的径向方

程我们仅讨论了 Laplace 方程的径向解的问题.

我们知道,对波动方程和输运方程,当我们对空间变量 $\boldsymbol{r}$ 和时间变量 t 进行分离变量后,空间变量部分 $u(\boldsymbol{r})$ 满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{17.8.1}$$

对 Helmholtz 方程在球坐标 (r,θ,φ) 下进行分离变量,令 $u(\boldsymbol{r}) = R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$,得径向方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 R(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} - \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0 \tag{17.8.2}$$

此方程称**球 Bessel 方程**,其中 $l(l+1)$ 为由球函数 $\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$ 所满足的方程的本征值问题所确定的本征值. 而我们现在讨论的球 Bessel 方程中 $k\neq 0$,因为 $k=0$ 的方程(17.8.1)式就退化为 Laplace 方程,是以前讨论过的情况,径向方程为 Euler 型方程,其解为 $R(r) \sim Cr^l + Dr^{-(l+1)}$.

对球 Bessel 方程(17.8.2)式,我们作变量代换. 令

$$x = kr, \qquad R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x) \tag{17.8.3}$$

则方程(17.8.2)式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \left[1 - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]y(x) = 0 \tag{17.8.4}$$

这正是 $l+\frac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程,其解为 $l+\frac{1}{2}$ 阶 Bessel 函数 $\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(x)$ 和 $l+\frac{1}{2}$ 阶 Neumann 函数 $\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(x)$. 与 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 一样,$\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(x)$ 在 $x=0$ 点是奇异的.

定义 17.8.1:球 Bessel 函数和球 Neumann 函数

$$\mathrm{j}_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad \mathrm{n}_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{17.8.5}$$

可以看出,$\mathrm{j}_l(x)$ 和 $\mathrm{n}_l(x)$ 满足球 Bessel 方程,它们是该方程的解,我们称为 $\mathrm{j}_l(x)$ 为 **l 阶球 Bessel 函数**(亦称**第一类球 Bessel 函数**),$\mathrm{n}_l(x)$ 为 **l 阶球 Neumann 函数**(亦称**第二类球 Bessel 函数**).

由 Bessel 函数的递推关系,我们可以得到球 Bessel 函数的递推关系

$$\frac{1}{x^{l+1}}\mathrm{j}_{l+\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{j}_l(x)}{x^l}\right) = \left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l+1}\mathrm{j}_0(x) \tag{17.8.6}$$

和

$$\frac{1}{x^{l+1}}n_{l+\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{n_l(x)}{x^l}\right) = \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{l+1}n_0(x) \qquad (17.8.7)$$

由半整数阶 Bessel 函数 $J_{l+\frac{1}{2}}$ 可由初等函数表示，并得到(17.2.16)式 $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$，我们可得

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad (17.8.8)$$

并由递推关系(17.8.6)式可得任意阶 $j_l(x)$ 的初等函数表达式.

由 $N_\nu(x)$ 的定义式(17.1.24)式容易得到

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \qquad (17.8.9)$$

同样由 n_l 的递推关系可得任意阶 $n_l(x)$ 的初等函数表达式.

由于球 Bessel 方程经常出现在球形边界的波的散射问题中，因此常常取与 Hankel 函数相关的球 Hankel 函数解.

定义 17.8.2：球 Hankel 函数(亦称第三类球 Bessel 函数)

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x) \qquad (17.8.10)$$

$$h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x) \qquad (17.8.11)$$

我们容易写出零阶球 Hankel 函数的表达式

$$h_0^{(1)}(x) = -i\frac{e^{ix}}{x} \qquad (17.8.12)$$

$$h_0^{(2)}(x) = i\frac{e^{-ix}}{x} \qquad (17.8.13)$$

这正是球面波的形式.

下面介绍物理学中平面波在球形界面中散射常用到的公式，它在量子物理学的散射问题中经常遇到，这就是平面波按球面波展开的公式.

一、平面波按球面波展开公式

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \qquad (17.8.14)$$

证：把 $e^{ikr\cos\theta}$ 在 $\{P_l(\cos\theta)\}$ 中展开

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{17.8.15}$$

令 $\cos\theta = x$,并由 $P_l(x)$ 正交性可得

$$\begin{aligned} a_l(kr) &= \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} e^{ikrx}P_l(x)\,dx \\ &= \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ikr)^n}{n!}\int_{-1}^{1}x^nP_l(x)\,dx \end{aligned} \tag{17.8.16}$$

由 $P_l(x)$ 的微分表达式并连续使用分部积分可知,当 $n<l$ 时,$\int_{-1}^{1}x^nP_l(x)\,dx=0$,当 $n\geqslant l$ 时,如果 $n-l$ 为奇数时,由于被积分函数为奇函数故积分 $\int_{-1}^{1}x^nP_l(x)\,dx=0$. 因此我们把 $n\to l+2n$,则(17.8.16)式变为

$$\begin{aligned} a_l(kr) &= \frac{2l+1}{2}\cdot i^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1}x^{l+2n}P_l(x)\,dx \\ &= \frac{2l+1}{2}\cdot i^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\cdot\frac{1}{2^ll!}\int_{-1}^{1}(-1)^l\frac{d^lx^{l+2n}}{dx^l}(x^2-1)^l\,dx \\ &= \frac{2l+1}{2}\cdot i^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\cdot\frac{1}{2^ll!}\cdot\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}x^{2n}(1-x^2)^l\,dx \\ &= (2l+1)\cdot i^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kr)^{l+2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2^ll!}\int_{0}^{1}x^{2n}(1-x^2)^l\,dx \\ &= (2l+1)\cdot i^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kr)^{l+2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2^{l+1}l!}\int_{0}^{1}(x^2)^{n-\frac{1}{2}}(1-x^2)^l\,dx^2 \\ &= (2l+1)\cdot i^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kr)^{l+2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2^{l+1}l!}\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \tag{17.8.17}$$

其中用到 $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,$\mathrm{Re}\,p>0$,$\mathrm{Re}\,q>0$.

由 $\Gamma(n+1)=n!$ 和 $\Gamma(2n)=(\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$,上式变为

$$a_l(kr) = (2l+1)\mathrm{i}^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kr)^{l+2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2^{l+1} l!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \cdot \frac{l!}{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= (2l+1)\mathrm{i}^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{n!\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n}$$

$$= (2l+1)\mathrm{i}^l \mathrm{j}_l(kr) \tag{17.8.18}$$

其中用到

$$\mathrm{j}_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{l+2n} \tag{17.8.19}$$

将(17.8.18)式结果代入原式(17.8.15)式,则平面波按球面波展开公式得证.

二、关于球 Bessel 方程的 S-L 本征值问题

考虑以原点为球心,半径为 a 的球面为界面的球内分布 $R(r)$ 的定解问题.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 R(r)}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} - \left[k^2 - \dfrac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0 & (17.8.20) \\ \left[\alpha R(r) + \beta \dfrac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]\Big|_{r=a} = 0, \quad \alpha,\beta \text{ 不同时为零} & (17.8.21) \\ |R(r)|_{n=0} < \infty, \quad \text{自然边界条件} & (17.8.22) \end{cases}$$

(17.8.21)式表示第一、二、三类齐次边界条件,方程(17.8.20)式有两个线性无关的特解 $\mathrm{j}_l(kr)$ 和 $\mathrm{n}_l(kr)$.

$$R(r) \sim C\mathrm{j}_l(kr) + D\mathrm{n}_l(kr)$$

由自然边界条件(17.8.22)式,只能取 $D=0$ 舍弃 $\mathrm{n}_l(kr)$,则

$$R(r) \sim \mathrm{j}_l(kr) \tag{17.8.23}$$

由边界条件(17.8.21)式可以解出方程(17.8.20)式的 S-L 本征值问题的本征值 $k_n^{(l)}$, $n=1,2,\cdots$,所对应的本征函数为 $\mathrm{j}_l(k_n^{(l)} r)$ 是以权重 r^2 正交的

$$\int_0^a \mathrm{j}_l(k_n^{(l)} r)\mathrm{j}_l(k_m^{(l)} r) r^2 \mathrm{d}r = 0, \quad n \neq m \tag{17.8.24}$$

可求出正交归一化函数 $\mathrm{N}_n^{(l)}$,即本征函数 $\mathrm{j}_l(k_n^{(l)} r)$ 的模

$$[\mathrm{N}_n^{(l)}]^2 = \int_0^a [\mathrm{j}_l(k_n^{(l)} r)]^2 r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2k_n^{(l)}} \int_0^a [\mathrm{J}_{l+\frac{1}{2}}(k_n^{(l)} r)]^2 r\mathrm{d}r \tag{17.8.25}$$

此积分可由 Bessel 函数的递推关系求出，或是直接查 Bessel 函数表计算.

若以本征函数系 $\{\mathrm{j}_l(k_n^{(l)} r), n = 1, 2, \cdots\}$ 为基构成 Hilbert 空间，则此空间中的任一元素 $f(r)$，即函数 $f(r)$ 定义在 $0 \leqslant r \leqslant a$ 上，并与 $\mathrm{j}_l(kr)$ 满足相同的边界条件，则 $f(r)$ 可在此函数系上进行广义 Fourier 展开

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{j}_l(k_n^{(l)} r) \tag{17.8.26}$$

其中

$$f_n = \frac{1}{[\mathrm{N}_n^{(l)}]^2} \int_0^a f(r) \mathrm{j}_l(k_n^{(l)} r) r^2 \mathrm{d}r \tag{17.8.27}$$

这一广义 Fourier 展开，在解具有球对称源的非齐次方程中经常用到.

三、球 Bessel 函数的应用

例 17.8.1：求球状铀块的临界半径.

解：在球型铀块中，取球心为坐标原点，建立球坐标系. 由于球对称性，在铀块中中子的浓度 u 只依赖于半径 r 和时间 t . 中子在铀块中的行为除了满足扩散方程外，还进行核反应产生中子，即存在中子的增殖过程. 以 β 表示增殖系数，增殖的规律是：单位时间内在单位体积中产生的中子数，以 β 倍正比于该处的中子浓度 u，即相当于在铀块中存在中子源 βu. 故 $u(r,t)$ 满足方程

$$u_t(r,t) - a^2 \nabla^2 u(r,t) = \beta u(r,t) \tag{17.8.28}$$

其中 a^2 为扩散系数.

在临界半径 r_c 的界面即球面上，中子的浓度为零（否则它将连续增值反应），这就给出了边界条件. 而且确定这一临界值 r_c 只能是解 $u(r,t)$ 中径向方程所得到的第一个零点解. 因此定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2 \nabla^2 u = \beta u, \quad 0 < r < r_c & (17.8.28) \\ u\big|_{r=r_c} = 0 & (17.8.29) \\ u\big|_{r=0} < \infty & (17.8.30) \end{cases}$$

分离变量：令 $u(r,t) = R(r)T(t)$，由方程(17.8.28)式可得 $T(t)$ 和 $R(r)$ 分别满足

$$T' - kT = 0 \tag{17.8.31}$$

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{1}{a^2}(\beta - k)R = 0 \tag{17.8.32}$$

方程(17.8.32)式为零阶球 Bessel 方程,由自然边界条件(17.8.30)式可知,要求 $R(r)\mid_{r=0}$有限,故方程在球内解的形式为

$$R(r) = \mathrm{j}_0\left(\frac{\sqrt{\beta - k}}{a}r\right) \tag{17.8.33}$$

由边界条件(17.8.29)式可知 $R(r)\mid_{r=r_c}=0$,即

$$\mathrm{j}_0\left(\frac{\sqrt{\beta - k}}{a}r\right)\Bigg|_{r=r_c} = 0 \tag{17.8.34}$$

即

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\beta - k}}{a}r\right)}{\frac{\sqrt{\beta - k}}{a}r}\right]\Bigg|_{r=r_c} = 0 \tag{17.8.35}$$

可得

$$\sqrt{\beta - k}\cdot\frac{r_c}{a} = n\pi, \quad n = 1,2,\cdots$$

即

$$k_n = \beta - \frac{1}{r_c^2}n^2\pi^2a^2 \tag{17.8.36}$$

对 r_c 来讲,只能取 $n=1$,即零阶 Bessel 函数的第一个零点

$$k_1 = \beta - \frac{1}{r_c^2}\pi^2a^2 \tag{17.8.37}$$

即

$$r_c = \frac{\pi a}{\sqrt{\beta - k_1}} \tag{17.8.38}$$

如何确定 k_1 呢? 由方程(17.8.31)式中 $T(t)$ 满足的方程可知,$T(t)$ 的形式为 $T(t)\sim \mathrm{e}^{k_1t}$,故有

$$\begin{aligned} u(r,t) &= R(r)\mathrm{e}^{k_1t} \\ &= \mathrm{j}_0\left(\frac{\sqrt{\beta - k_1}}{a}r\right)\mathrm{e}^{k_1t} \end{aligned} \tag{17.8.39}$$

这一形式说明 $u(r,t)$ 是随 t 而指数增加,而在临界半径内,增殖反应式不会随时间的增大而无限增大的,因此在临界半径内,要求

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = 0 \tag{17.8.40}$$

即可得 $k_1 = 0$.

故铀块的临界半径为

$$r_c = \frac{\pi a}{\sqrt{\beta}} \tag{17.8.41}$$

注意：由解的形式(17.8.39)式可知 k 不可能为负值，当 $k<0$ 时就没增殖反应了.

第十七章习题

17.1 试证明

$$\cos x = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(x)$$

$$\sin x = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}(x)$$

(提示：对整数阶 Bessel 函数的生成函数 $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 取 $z=\mathrm{i}$ 进行展开运算.)

17.2 试证明

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos m\theta \mathrm{d}\theta = \begin{cases} J_m(x), & m \text{ 为偶数} \\ 0, & m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin m\theta \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0, & m \text{ 为偶数} \\ J_m(x), & m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

并进一步证明

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(m\theta - x\sin\theta)\mathrm{d}\theta, \quad m = 0,1,2,\cdots$$

(提示：对整数阶 Bessel 函数的生成函数 $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 取 $z=e^{i\theta}$ 进行展开运算.)

17.3 试证明

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty}[J_m(x)]^2$$

因此有结论 $|J_0(x)|^2 \leqslant 1$, $|J_m(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

(提示：对整数阶 Bessel 函数的生成函数 $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 和 $e^{\frac{x}{2}\left[(-z)-\frac{1}{(-z)}\right]}$ 相乘可证.)

17.4 用整数阶 Bessel 函数的生成函数证明

$$J_m(x) = (-1)^m J_m(-x)$$

这说明整数阶 Bessel 函数的对称性，当 m 为奇数时为奇对称，当 m 为偶数时为偶对称. 注意：此关系式由 $J_m(x)$ 的级数表达式可直接得到.

17.5 计算下列积分

(1) $\int_0^b J_0(x)\,dx$　　(2) $\int_0^b J_1(x)\,dx$

(3) $\int_0^b xJ_0(x)\,dx$　　(4) $\int_0^b x^3 J_0(x)\,dx$

(5) $\int_0^b x^4 J_1(x)\,dx$　　(6) $\int_0^b J_3(x)\,dx$

17.6 在 $\rho \in (0,b)$ 的区间上，在第一类齐次边界条件下，在由零阶 Bessel 函数所构成的本征函数空间中（该空间的基向量为 $\left\{J_0\left[\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho\right], n=1,2,\cdots\right\}$，$x_n^{(0)}$ 为 J_0 的第 n 个零点），把函数 $f(\rho)=1$ 展开.

17.7 在高为 h，半径为 b 的柱体内，取柱坐标的原点在下底的圆心，对于边界条件为

$$\begin{cases} Z(z)\big|_{z=0} = Z(z)\big|_{z=h} = 0 \\ R(\rho)\big|_{\rho=b} = 0 \end{cases}$$

求解稳定场 $u(\rho,\varphi,z)$ 满足方程 $\nabla^2 u(\rho,\varphi,z) = f(\rho,\varphi,z)$ 的场的分布，并对解得结果说明其物理图像.

求解输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = f(\rho,\varphi,z)$$

并对解得结果说明其物理图像.

17.8 边缘固定半径为 R 的圆形膜，初始形状为旋转抛物面

$$u\big|_{t=0} = \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)H \quad (H \text{ 为常数})$$

且初速度为零，求此膜的振动.

17.9 高为 h，半径为 b，导热系数为 κ 的圆柱体，其下底面保持零度，上底面的温度为 ρ 的函数 $f(\rho)$，其侧面在零度的环境中自由冷却（满足牛顿冷却定律），冷却系数为 H，求柱内温度场的稳定分布.

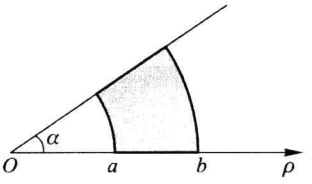
17.10 半径为 b 介电常数为 ε 的长直均质介质圆柱，放入均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，圆柱的轴线与 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直，求解柱体内外的电场.

17.11 由圆弧 $\rho=a$ 和 $\rho=b(b>a)$，和矢径角度 $\varphi=0$ 与 $\varphi=\alpha$ 围成的扇形区域内（如习题 17.11 图所示），求解 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0$$

使场 $u(\rho,\varphi)$ 的分布满足边界条件

$$\begin{cases} u\big|_{\rho=a} = 0, \quad u\big|_{\rho=b} = u_0 \\ u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases}$$



习题 17.11 图

分别以角度 φ 的方程的本征值问题和以径向 ρ 的方程的本征值问题进行求解，比较这两种解法的差异.

17.12 半径为 r_0 的均质球，球面始终保持零度，初始时刻球内温度分布为：

(1) $u\big|_{t=0}=f(r)$

(2) $u\big|_{t=0}=f(r)\cos\theta$

分别求解这两种初始条件下球内温度分布的变化，当 $t\to\infty$ 时，这两种情况解得的结果进行比较，说明其物理图像.

*第十八章　Green(格林)函数法

在物理学中我们常遇到的是带有源项的问题,用非齐次偏微分方程来描述,这里我们仍限制在讨论线性方程的范围.

大家所熟悉的点电荷产生的场,当空间中有一定的电荷分布时,由于电荷产生的电势场具有线性叠加性,因此我们可以把点电荷的场对电荷的分布进行叠加或用积分的方法,把这一分布的场进行积分,得到这一电荷分布产生的场.这种思想方法广泛的出现在非齐次线性微分方程解法中.

对于满足一定边界条件的非齐次线性微分方程,当其源项即非齐次项具有一定的分布时,我们首先研究在这一边界条件下,这非齐次方程的非齐次项为点源时的解.这一点源解,就称为方程左边的微分算子的 Green 函数,通常我们称 Green 函数为点源函数.而同一点源的非齐次方程,在不同的边界条件下,其点源函数即 Green 函数是不同的.对于无边界点源的非齐次方程的解,就称为这一方程的基本解,或称为方程左边的微分算子的基本解.

在物理学中,把微分算子的基本解和 Green 函数,习惯上统称为 Green 函数.但在本章中我们把它们区分开.这里我们仅介绍常用的三类方程,即三类算子的基本解与 Green 函数.

§18.1　微分算子的基本解和 Green 函数的定义

我们所研究的二阶偏微分方程的普遍形式为

$$Lu(x_0,x_1,x_2,x_3) = f(x_0,x_1,x_2,x_3) \tag{18.1.1}$$

其中 L 为二阶微分算子,其形式为

$$L = a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i y_j} + b_i\frac{\partial}{\partial x_i} + c, \quad i,j = 0,1,2,3 \tag{18.1.2}$$

a_{ij},b_i,c 都为(x_0,x_1,x_2,x_3)的函数,为了书写方便我们把时间参数 t 记为 x_0,上式采用 Einstein 求和规则.

当 a_{ij},b_i,c 为常数时,即算子 L 中的系数皆为常数时,方程(18.1.1)式为常系数二阶偏微分方程,我们目前所研究的三类方程,即波动方程、输运方程和

Laplace 方程,都是常系数二阶偏微分方程. 对于这三类方程的定解问题,我们将采用 Green 函数法来求解,即利用算子 L 的 Green 函数来求解,而算子 L 的 Green 函数又与定解条件中的边界条件(B. C)联系在一起.

首先我们考虑无边界条件(B. C)的情况,也就是在无穷空间中求解微分方程

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in R^{n+1}, \quad n \leqslant 3 \tag{18.1.3}$$

这里我们对自变量(x_0, x_1, x_2, x_3)用**压缩简记法**,即上述自变量统一记为 x,空间变量$(x_1, x_2, x_3) \in R^3$,而时间变量 $t = x_0 \in R^1$. 当我们讨论的物理问题空间为三维时,加上时间变量即 $x \in R^{3+1}$;当空间为二维时,加上时间变量,即 $x \in R^{2+1}$;当空间为一维时,加上时间变量,即 $x \in R^{1+1}$;若物理问题不随时间变化则对应三维、二维和一维空间,$x \in R^3$,$x \in R^2$ 和 $x \in R^1$. 这种压缩简记法,在我们抽象的讨论中书写方便,而对具体问题讨论时,我们将把具体的空间坐标写出.

注意:符号 $R^{3+1} = R^3 + R^1$,表示 R^3 空间与 R^1 的 Descartes(笛卡儿)积,读者只需了解其表示的时空坐标的维数关系即可.

定义 18.1.1:算子 L 的**基本解**

对方程 (18.1.3)式求解,我们首先定义函数 $G_0(x, x')$,它满足方程

$$LG_0(x, x') = \delta(x - x'), \quad x, x' \in R^{n+1}, \quad n \leqslant 3 \tag{18.1.4}$$

其中 $\delta(x - x')$表示在 $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ 的点源. 我们称 $G_0(x, x')$ 为算子 L 的**基本解**(在物理学中通常称 $G_0(x, x')$ 为算子 L 的无界空间的 Green 函数,亦简称为 Green 函数).

当 $x \in R^{1+1}$ 时:

$$G_0(x, x') = G_0(x, x'; t, t') \tag{18.1.5}$$

$$\delta(x - x') = \delta(x - x')\delta(t - t') \tag{18.1.6}$$

当 $x \in R^{2+1}$ 时:

$$G_0(x, x') = G_0(x, x', y, y'; t, t') \tag{18.1.7}$$

$$\delta(x - x') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t') \tag{18.1.8}$$

当 $x \in R^{3+1}$ 时:

$$G_0(x, x') = G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; t, t') \tag{18.1.9}$$

$$\delta(x - x') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(t - t') \tag{18.1.10}$$

以上给出了 G_0 在不同维数空时中的表现形式.

如果算子和点源都与时间无关,则把上面式子中的时间坐标及含时间的项去掉即可.

算子 L 的基本解 G_0 可以写成

$$G_0(x,x') = L^{-1}\delta(x-x') + u_0(x) \tag{18.1.11}$$

其中 $u_0(x)$ 是相应的齐次方程的解,即

$$Lu_0(x) = 0 \tag{18.1.12}$$

而 L^{-1} 是算子 L 的逆算子,其满足

$$L^{-1}\cdot L = I \tag{18.1.13}$$

I 为恒等算子,而 $L^{-1}\delta(x-x')$ 是方程(18.1.4)式的特解.

在通常情况下,我们主要是求出特解,

$$G_0(x,x') = L^{-1}\delta(x-x') \tag{18.1.14}$$

下面我们在特解的意义下,看 G_0 所具有的形式.

由 δ 函数的 Fourier 变换式

$$\delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int e^{ik_\alpha(x_\alpha-x'_\alpha)}\,dk, \quad n \leqslant 3 \tag{18.1.15}$$

其中 $dk = dk_0\cdot\cdots\cdot dk_n$,而 α 为重复指标求和:$\alpha_0,\alpha_1,L,\alpha_n$,由 L 算子的具体形式(18.1.2)式及算子 L 对指数函数上 x_α 的作用及其逆算子的形式可得

$$\begin{aligned} G_0(x,x') &= L^{-1}\delta(x-x') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int L^{-1}e^{ik_\alpha(x_\alpha-x'_\alpha)}\,dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int \frac{e^{ik_\alpha(x_\alpha-x'_\alpha)}\,dk}{c+ik_0b_0+\cdots+ik_nb_n+(ik_0)^2a_{00}+(ik_0)(ik_1)a_{01}+(ik_n)^2a_{nn}} \end{aligned} \tag{18.1.16}$$

具体 G_0 的计算应由 L 的具体形式,即其系数 a,b,c 的具体值代入上式,最后利用复变函数的积分,在无穷的 k-空间中把积分算出,后面我们将会对某些具体的算子给出此积分算法的例子.

为什么我们称 G_0 为算子 L 的基本解呢? 我们观察方程(18.1.1)式即

$$Lu(x) = f(x) \tag{18.1.17}$$

由于 $G_0(x,x')$ 为在 x' 点的点源函数解,则全空间的解 $u(x)$ 则可由对源的分布 $f(x)$ 的积分给出,即可写成解的形式

$$u(x) = u_0(x) + \int f(x')G_0(x,x')\,dx' \tag{18.1.18}$$

其中 $u_0(x)$ 为相应齐次方程的解即 $Lu_0(x)=0$.

我们很容易验证由基本解 G_0 所构成的解(18.1.18)式是满足方程(18.1.17)式的：以算子 L 作用于解(18.1.18)式的两边，由于 L 只对变量 x 作用，我们有

$$\begin{aligned} Lu(x) &= Lu_0(x) + L\int f(x')G_0(x,x')\mathrm{d}x' \\ &= \int f(x')LG_0(x,x')\mathrm{d}x' \\ &= \int f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x' \\ &= f(x) \end{aligned}$$

因此只要知道 $G_0(x,x')$ 的具体形式，则非齐次方程(18.1.17)式的解立即可以由(18.1.18)式得到. 当然(18.1.18)式的积分要算出可能是比较困难的，但(18.1.18)式就是解的形式，因此称 G_0 为方程(18.1.1)式的基本解. 如果在一些物理问题中，积分不能解析地求出，起码可由数值计算得到.

下面我们对 Green 函数给出的具体的定义.

定义 18.1.2：函数 $G(x,x')$ 满足如下在一定边界条件(B.C)下的点源方程

$$\begin{cases} LG(x,x') = \delta(x-x') \\ \text{B.C} \end{cases} \tag{18.1.19}$$

则称 $G(x,x')$ 为在边界条件 B.C 下，算子 L 的 **Green 函数**. 一般情况下B.C为第一、二、三类边界条件.

注意：当 B.C 为第二类齐次边界条件时，Laplace 算子的 Green 函数是不存在的，从物理上看我们很容易理解这一结果：

例如 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 代表一个在区域 Ω 内稳定分布的温度场，而在 Ω 内的 $\boldsymbol{r}'$ 处有一个点热源 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 其强度不随时间变化. 如果边界条件是第二类齐次边界条件，即 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big|_{\partial\Omega}=0$，($\boldsymbol{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 的外法向)，它表示边界是绝热的，此时 Ω 内的温度就会不断上升，它不可能是个稳定分布，因此这样的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是不可能存在的.

又例如 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 表示区域 Ω 内 $\boldsymbol{r}'$ 处有一个负的点电荷产生的电势，其满足

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{18.1.20}$$

则必定是有很多电力线终止于该 $\boldsymbol{r}'$ 点，电力线应该由边界 $\partial\Omega$ 上发出. 但如果是第二类边界条件 $\dfrac{\partial}{\partial n}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big|_{\partial\Omega}=0$，它表示 $\partial\Omega$ 上没有电荷，不可能有电力线从

边界上出发的,因此这样的势场在 Ω 内是不可能存在的,即这样的 Green 函数是不存在的.

§18.2 Laplace 算子的基本解

一、三维 Laplace 算子的基本解

三维 Laplace 算子的基本解 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足方程

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{18.2.1}$$

我们在第十一章中曾介绍了三维 δ - 函数的一个重要表达式

$$\delta(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r} \tag{18.2.2}$$

对比方程(18.2.1)式,立即可以得到 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的表达式

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18.2.3}$$

这一基本解当然可由上一节所介绍的,对 δ - 函数进行 Fourier 变换,再按求解方程的程序解得. 由于这一方程的解法后面我们会详细给出,这里不再重复.

方程(18.2.3)式中的 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是在三维无界空间中,在 $\boldsymbol{r}'$ 处有一单位强度的点源所产生的场.

例 18.2.1: 在三维无界真空中电荷密度分布为 $\rho(\boldsymbol{r})$,求在此空间中的电势分布 $u(\boldsymbol{r})$.

解: 在此空间中静电势 $u(\boldsymbol{r})$ 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \tag{18.2.4}$$

要解此方程,首先解在此空间中单位点电荷满足的方程

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{18.2.5}$$

这一方程的解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18.2.6}$$

这是单位源在 $\boldsymbol{r}'$ 处所观测得到的电势分布,既在 $\boldsymbol{r}$ 处可观测到电势场,因此对源 $\rho(\boldsymbol{r})$ 所在的区域进行积分,即把每个点源产生的场进行总的叠加,我们可

得方程的(18.2.4)式的解为

$$u(\boldsymbol{r}) = u_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{18.2.7}$$

这就得到在整个空间中任一观测点 $\boldsymbol{r}$ 的电势,即在整个空间中电势场的分布,其中 u_0 为我们对电势零点的选择.

二、二维 Laplace 算子的基本解

二维 Laplace 算子的基本解满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G_0(x,y,x',y') = \delta(x-x')\delta(y-y') \tag{18.2.8}$$

则

$$G_0(x,y;x',y') = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\pi}\ln\rho \tag{18.2.9}$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$.

这一基本解的求得,用前面介绍的 δ - 函数的 Fourier 变换的方程的求解程序是较为复杂的,因此我们采取验证的方法,即验证(18.2.9)式的 $G_0(x,y;x',y')$ 的形式满足方程(18.2.8)式.

验证:由于 G_0 在 $\rho=0$ 点有奇异性,故考虑不包含 $\rho=0$ 即 (x',y') 点的环形区域:以 (x',y') 点为圆心以 ε 为半径(ε 很小)的圆周 c_ε 为内边界,以 $\frac{1}{\varepsilon}$ 为半径的大圆周 $c_{\frac{1}{\varepsilon}}$ 为外边界所围成的环形 S. 则由方程(18.2.8)式可知 G_0 在区域 S 中为调和函数,即满足 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G_0(x,y;x',y')=0$. 考虑定义在 R^2 上的无穷可微的(即光滑的)函数 $u(x,y)$,则当 $\rho\to\infty$ 时,$u(x,y)\to 0$.

由 Green 公式

$$\int_S (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial S}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l \tag{18.2.10}$$

其中 ∇^2 为二维 Laplace 算子,∂S 为 S 的边界,由 c_ε 与 $c_{\frac{1}{\varepsilon}}$ 组成,边界的走向即 $\mathrm{d}l$ 的正方向按通常约定使积分区域在自己的左边为正方向,即 $c_{\frac{1}{\varepsilon}}$ 的正方向为逆时针方向,而 c_ε 的正方向为顺时针方向,式中的 $\boldsymbol{n}$ 为 S 区域的外法向,对 $c_{\frac{1}{\varepsilon}}$ 是 ρ 的正向,对 c_ε 是 $-\rho$ 方向.

对上式取 $v=G_0$,并考虑到在 S 中 $\nabla^2 G_0=0$,有

$$\int_S -G_0\nabla^2 u\,dxdy = \oint_{C_\varepsilon}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial\rho} - G_0\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)dl + \oint_{C_{\frac{1}{\varepsilon}}}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial\rho} - G_0\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)dl \tag{18.2.11}$$

其中等式右边第一项积分中$\frac{\partial}{\partial n}$和$\frac{\partial}{\partial\rho}$差一负号,故把对 c_ε 的环路积分由顺时针方向变为逆时针方向. 第二项积分,当 $\varepsilon\to 0$ 时,$\rho\to\infty$,即 $u\to 0$,且 u 为无穷可微,即有 $\rho\to\infty$ 时,$\frac{\partial u}{\partial\rho}\to 0$. 故第二项积分为零. 上式变为

$$-\int_S G_0\nabla^2 u\,dxdy = \oint_{C_\varepsilon}\left(G_0\frac{\partial u}{\partial\rho} - u\frac{\partial G_0}{\partial\rho}\right)dl \tag{18.2.12}$$

上式等式右边为两积分项,先看第一积分项:

由 $G_0(x,y;x',y') = \frac{1}{2\pi}\ln\rho$,且在 c_ε 上积分即为 $\rho=\varepsilon$,当 $\varepsilon\to 0$ 即 $\rho\to 0$ 时有

$$\left|\oint_{C_\varepsilon}\left(G_0\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)dl\right| \leqslant \oint_{C_\varepsilon}|G_0|\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|dl = \oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|dl$$

$$\leqslant \max|\nabla u|\,\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\to 0 \tag{18.2.13}$$

而当 $\varepsilon\to 0$ 时第二项积分为

$$-\oint_{C_\varepsilon} u\frac{\partial G_0}{\partial\rho}dl = -\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{\rho}u(x,y)\,dl = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon}u(x,y)\,dl\to -u(x',y') \tag{18.2.14}$$

故方程(18.2.12)式为

$$-\int_S G_0(x,y;x',y')\nabla^2 u(x,y)\,dxdy = u(x',y') \tag{18.2.15}$$

此关系式与 G_0 所满足的方程(18.2.8)式是等价的. 因为我们用 ∇'^2(∇'表示对(x',y')变量作用)作用上式两边,即可得

$$\int_S \nabla'^2 G_0(x,y;x',y')\nabla^2 u(x,y)\,dxdy = \nabla'^2 u(x',y') \tag{18.2.16}$$

此等式说明了 $\nabla'^2 G_0$ 的作用为二维 δ - 函数,即

$$\nabla'^2 G_0(x,y;x',y') = \delta(x-x')\delta(y-y') \tag{18.2.17}$$

这就验证了二维 Laplace 算子基本解的形式(18.2.9)式的正确性.

三、一维 Laplace 算子的基本解

一维 Laplace 算子的基本解满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_0(x;x') = \delta(x-x') \tag{18.2.18}$$

则基本解 G_0 的表达式为：

$$G_0(x;x') = \frac{1}{2}|x-x'| \tag{18.2.19}$$

证：由 $G_0(x,x')$ 的形式容易得

$$\frac{\partial}{\partial x}G_0(x,x') = \theta(x,x') = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x \geqslant x') \\ -\frac{1}{2} & (x < x') \end{cases}$$

即可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_0\{x,x'\} = \delta(x-x')$$

故得证.

四、基本解的对称性

首先介绍高维 Laplace 算子基本解的表达式. 当 $n \geqslant 3$ 时，R^n 中的 laplace 算子的基本解为

$$G_0(x,x') = \frac{1}{(n-2)S_n} \cdot \frac{1}{|x-x'|^{n-2}} \quad (x,x' \in R^n) \tag{18.2.20}$$

其中 $S_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$ 是 n 维单位球面的面积.

由一、二、三维及高维 Laplace 算子基本解的表达式可看出，x 和 x' 是对称的，即

$$G_0(x,x') = G_0(x',x), \quad x,x' \in R^n, \quad n = 1,2,3,\cdots,n \tag{18.2.21}$$

§18.3 Laplace 算子的 Green 函数

下面我们讨论 $R^n(n \leqslant 3)$ 中某一区域 Ω 上的 Laplace 算子的 Green 函数. 定义在 Ω 上满足齐次边界条件的 Laplace 算子的 Green 函数 $G(x,x')$ 为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(x,x') = \delta(x-x'), & x,x' \in \Omega \quad (18.3.1) \\ \left(G + \beta \dfrac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 & (18.3.2) \end{cases}$$

其中 n 为边界 $\partial\Omega$ 的外法向,而边界条件(18.3.2)式只表示一、三类齐次边界条件,因为我们知道第二类齐次边界条件下 G 是不存在的.

我们感兴趣的是如何由 Green 函数给出如下 Poisson 方程定解问题的解.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x) = f(x), & x' \in \Omega \in R^n \quad (18.3.3) \\ \left(u + \beta \dfrac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x_0), & x_0 \in \partial\Omega \quad (18.3.4) \end{cases}$$

注意:Green 函数定义中的 Ω 与 $\partial\Omega$ 均与定解问题一致.

下面我们以二维 Poisson 方程定解问题为例,给出用 Green 函数表示解的具体方法.

例 18.3.1:考虑二维 Poisson 方程的定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \in R^n \quad (18.3.5) \\ u(x,y)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x_0,y_0), & (x_0,y_0) \in \partial\Omega \quad (18.3.6) \end{cases}$$

解:设在 Ω 内的 (x',y') 点有一点源,则点源函数即基本解 $G_0(x,y;x',y')$ 满足

$$\nabla^2 G_0(x,y;x',y') = \delta(x-x')\delta(y-y')$$

取一个小正数 ε,以 (x',y') 为圆心,ε 为半径作圆周 C_ε,则在 $\partial\Omega$ 和 C_ε 围成的区域 S 中(如图 18.3.1),应用 Green 公式:

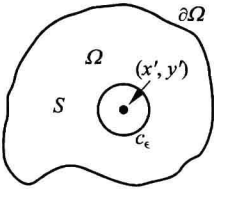


图 18.3.1

$$\begin{aligned} &\int_S (u\nabla^2 G_0 - G_0 \nabla^2 u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l + \oint_{C_\varepsilon}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l \end{aligned} \quad (18.3.7)$$

注意到 (x',y') 不在区域 S 中,故有

$$\int_S u(x,y)\nabla^2 G_0(x,y;x',y')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_S u(x,y)\delta(x-x')\delta(y-y')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

且在 C_ε 上,$\dfrac{\partial}{\partial n} = -\dfrac{\partial}{\partial \rho}$,则(18.3.7)式变为

$$-\int_S G_0 \nabla^2 u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l + \oint_{C_\varepsilon}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial \rho} - G_0\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)\mathrm{d}l \quad (18.3.8)$$

用上一节(18.2.13)式和(18.2.14)式的分析方法,可得上式中右边的第二项积分为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial \rho}-G_0\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)\mathrm{d}l = u(x',y')$$

并注意到$\nabla^2 u = f$这一关系,我们可得到解 u 用基本解 G_0 的表达式

$$u(x',y') = -\int_S G_0 f\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial n}-G_0\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l \tag{18.3.9}$$

但这一表达式中的右边仍有$\frac{\partial u}{\partial n}$这一未知项,因此我们仍未得到真正的解.

为解决这一问题我们必须构造一个 Green 函数 $G_0(x,y;x',y')$,使之可以用来表示 Poisson 方程的解 u.

我们先取一光滑函数 $g(x,y;x',y')$,它在 Ω 内关于变量(x,y)满足 Laplace 方程.

$$\nabla^2 g(x,y;x',y') = 0,\quad (x,y)\in\Omega \tag{18.3.10}$$

再次利用 Green 公式

$$\int_\Omega (u\nabla^2 g - g\nabla^2 u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l \tag{18.3.11}$$

则可得

$$\int_\Omega g(x,y;x',y')f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l = 0 \tag{18.3.12}$$

注意到当 $\varepsilon\to 0$ 时,Ω 与 S 为同一个区域,故把(18.3.9)式与(18.3.12)式相加,可得

$$u(x',y') = -\int_S (G_0-g)f\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G_0}{\partial n}-(G_0-g)\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l \tag{18.3.13}$$

定义:

$$G(x,y;x',y') = G_0(x,y;x',y') - g(x,y;x',y') \tag{18.3.14}$$

若选择 $g(x,y;x',y')$ 使之满足定解条件

$$\begin{cases} \nabla^2 g = 0 & (18.3.15)\\ g\big|_{\partial\Omega} = G_0\big|_{\partial\Omega} & (18.3.16)\end{cases}$$

由于 G_0 为已知可求的,即这一定解问题的解 g 是可求的,这样由(18.3.14)式定义的 G 也是可求出的,而且这样的 $G(x,y;x',y')$ 满足:

$$\begin{cases} \nabla^2 G(x,y;x',y') = \delta(x-x')\delta(y-y') & (18.3.17) \\ G\big|_{\partial\Omega} = 0 & (18.3.18) \end{cases}$$

这正是我们要求得的 Green 函数 $G(x,y;x',y')$. 因此(18.3.13)式变为:

$$u(x',y') = -\int_\Omega G(x,y;x',y') f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}l \tag{18.3.19}$$

考虑到(18.3.6)式和(18.3.18)式 $u(x,y)$ 和 $G(x,y;x',y')$ 在边界 $\partial\Omega$ 上的值,同时把变量记号变换,即 $(x',y')\leftrightarrow(x,y)$,即可得 Poisson 方程定解问题(18.3.3)式、(18.3.4)式的解的表达式

$$u(x,y) = -\int_\Omega G(x',y';x,y) f(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' - \oint_{\partial\Omega}\varphi(x',y')\frac{\partial G(x',y';x,y)}{\partial n}\mathrm{d}l' \tag{18.3.20}$$

这正是用 Green 函数表示 Poisson 方程定解问题的结果.

同样对三维 Poisson 方程的定解问题,仍考虑第一类边界条件

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r}\in\Omega\in R^n & (18.3.21) \\ u(\boldsymbol{r})\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{r}_0) \qquad \boldsymbol{r}_0\in\partial\Omega & (18.3.22) \end{cases}$$

同二维问题的方法相同,我们可以通过基本解 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,构造光滑函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{cases} \nabla^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 & (18.3.23) \\ g\big|_{\partial\Omega} = G_0\big|_{\partial\Omega} & (18.3.24) \end{cases}$$

求解这一方程后,再构造 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{18.3.25}$$

Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') & (18.3.26) \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{\partial\Omega} = 0 & (18.3.27) \end{cases}$$

即可得定解问题解的表达式

$$u(\boldsymbol{r}) = -\int_\Omega G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n}\mathrm{d}\sigma' \tag{18.3.28}$$

对于三维第三类边界条件下 Poisson 方程的定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r}\in\Omega & (18.3.29) \\ \left(G+\beta\frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 & (18.3.30) \end{cases}$$

此问题比第一类边界条件要复杂. 由于 $u\big|_{\partial\Omega}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}u\Big|_{\partial\Omega}$ 都不能确定,只是给出它们的线性组合,因此我们要构造的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,满足

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') & (18.3.31) \\ \left(G + \beta\dfrac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 & (18.3.32) \end{cases}$$

得到了表达式

$$u(\boldsymbol{r}') = -\int_\Omega G f \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{18.3.33}$$

再利用 G 和 u 满足的边界条件(18.3.22)式和(18.3.32)式,以 $G\times$(18.3.22)式与 $u\times$(18.3.32)式相减,得到

$$\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{\beta}G\varphi \tag{18.3.34}$$

代入(18.3.33)式,得到第三类边界条件下 Poisson 方程的定解问题的解的表达式

$$u(\boldsymbol{r}) = -\int_\Omega G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \frac{1}{\beta}\int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}\sigma' \tag{18.3.35}$$

§18.4 Laplace 算子的镜像 Green 函数法

在许多物理问题中,由于 Green 函数具有很明确的物理意义,即它是许多已知的物理点源产生的场,且这些场在物理上是已知的. 如果这些场的边界形状是具有特殊几何对称性的且满足一定的边界条件,则这类场可由物理上的考虑,利用边界的对称性直接写出 Green 函数. 最典型的方法就是镜像 Green 函数法,简称镜像法. 下面我们用例子直接介绍这种方法.

例 18.4.1: 在半空间 $z>0$ 内求解 Poisson 方程的第一类边值问题.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z), & z>0 & (18.4.1) \\ u(x,y,z)\big|_{z=0} = \varphi(x,y), & z=0 & (18.4.2) \end{cases}$$

解: 要求解此问题,我们要先求解满足

$$\begin{cases} \nabla^2 G(x,y,z;x',y',z') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), z>0 & (18.4.3) \\ G\big|_{z=0} = 0 & (18.4.4) \end{cases}$$

的 Green 函数 G.

这个满足在 $z=0$ 的平面上场为零的点源函数,我们不妨拿单位点电荷的电势场来模拟,相当于在 $P'(x',y',z')$ 点放置一个单位负电荷,而 $z=0$ 的平面是接地的导体,故电势场在 $z=0$ 平面为零. 由于导体表面有感应的正电荷,由对称性可知,被感应产生的正电荷所产生的场和在以 $z=0$ 的平面为镜面,P' 点的镜像 $P''(x',y',-z')$ 点上放一单位正电荷产生的电势场等效. 而在上半空间内任一观察点 $P(x,y,z)$ 的电势场就是 P' 和 P'' 点的点电荷产生的电势之和,而且由于对称性,这两个点电荷在 $z=0$ 平面上的电势之和一定为零. 因此满足(18.4.3)式、(18.4.4)式的 Green 函数就是这两个点电荷产生的势之和,即

$$G(x,y,z;x',y',z') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}} \tag{18.4.5}$$

这就是我们所要求出的、在 $z>0$ 的区域中满足(18.4.3)式和(18.4.4)式的 Green 函数.

由三维 Poisson 方程第一类边界条件的解(18.3.28)式

$$u(\boldsymbol{r}) = -\int_{\Omega} G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$$

由于在 $z=0$ 的平面上的法向 $\boldsymbol{n}$ 就是 $-\boldsymbol{z}$ 的方向

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{\partial G}{\partial z'}\bigg|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \tag{18.4.6}$$

则可得

$$u(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y'\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}z'\frac{f(x',y',z')}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right] - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y'\frac{z\varphi(x',y')}{2\pi}\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}} \tag{18.4.7}$$

这就是我们得到的定解问题(18.4.1)式、(18.4.2)式的解.

例 18.4.2：圆上的 Poisson 公式

这也是用镜像法构造 Green 函数的典型例子，其镜面不是平面，而是二维空间中的一维圆周. 从物理上讲，就是在我们可求解的区域外，利用边界的对称性，虚设一个点源，使得虚点源产生的场和我们可考虑的区域内的点源产生的场在区域边界面上叠加起来为零，用这样的思想来构造圆上的 Green 函数. 这一问题往往用在柱对称的问题上，即求柱内的场分布，要求这一物理问题对于 z 轴是对称的，z 轴无穷长，问题是与 z 轴无关，此时在 z 为常数的任一面上截得的圆形区域的二维问题.（注意，这一方法也同样可以用来求解柱外场的分布问题.）

考虑二维 Poisson 方程的定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y) = f(x,y), & x^2 + y^2 \leqslant a^2 \qquad (18.4.8) \\ u(x,y)\big|_c = \varphi(x_0,y_0), & (x_0,y_0) \in C, \quad C: x^2 + y^2 = a^2 \qquad (18.4.9) \end{cases}$$

此问题的求解化为求解圆上的 Green 函数问题，即

$$\begin{cases} \nabla^2 G(x,y;x',y') = \delta(x - x')\delta(y - y') & (18.4.10) \\ G\big|_c = 0 & (18.4.11) \end{cases}$$

如图 18.4.1 所示，$p'(x',y')$ 点为我们在圆 C 内的源点，我们假设在圆 C 外有一虚设源点为 $P''(x'',y'')$，且 P'，P'' 和圆心 O 点在一直线上.

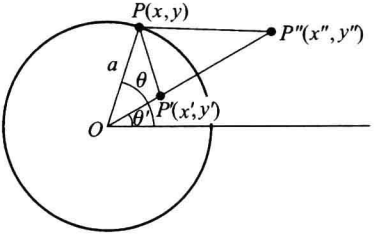


图 18.4.1

由二维算子 Laplace 基本解的形式，我们可以直接写出 $G(x,y;x',y')$ 的形式

$$G(x,y;x',y') = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{b}{\sqrt{(x-x'')^2 + (y-y'')^2}} \qquad (18.4.12)$$

其中等式右边第二项虚设点源 P'' 的位置由几何式确定，但虚源的荷与 P' 的源反号，其荷的大小即参数 b 的数值将由边界条件(18.4.11)式确定.

设 $P(x,y)$ 点为圆周 C 上的任一点，并设 $|OP'| = \rho'$，$|OP''| = \rho''$，而 $|OP| = a$

为圆周 C 的半径. 由于 P''为 P'的镜像点(即 P''和 P'为圆周 C 内外的共轭点或统称为反演点),在几何上它要满足

$$\rho' \cdot \rho'' = a^2 \tag{18.4.13}$$

由几何上可知$\triangle OPP' \backsim \triangle OP''P$,可得

$$\frac{|PP'|}{|PP''|} = \frac{|OP'|}{|OP|} = \frac{\rho'}{a}$$

即

$$|PP''| = |PP'| \frac{a}{\rho'} \tag{18.4.14}$$

则有

$$\begin{aligned} G(x,y;x',y')\big|_{P\in C} &= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|pp'|} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{b}{|PP''|} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP'|} + \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{|PP'|}\cdot\frac{\rho'}{a}\right) \end{aligned} \tag{18.4.15}$$

要满足 $G|_C = 0$,则可得 $b = \dfrac{a}{\rho'}$. 这样 Green 函数 $G(x,y;x',y')$可表成

$$G(x,y;x',y') = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP'|} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP''|} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho'} \tag{18.4.16}$$

其中 $\rho' = |OP''| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. 同时由几何关系可定出

$$\rho'' = |OP''| = \frac{a^2}{\rho'} \tag{18.4.17}$$

为表述方便,下面我们选用极坐标(ρ,θ),极轴为 x 轴,则 P'点的坐标为 P':(ρ',θ'),P''点的坐标为 P'':(ρ'',θ'). 对于我们考虑的区域 C 内的任一点 $P(x,y) = \boldsymbol{\rho} = (\rho,\theta)$,$(|\boldsymbol{\rho}| = \rho)$,则有

$$|PP'| = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta')} \tag{18.4.18}$$

$$\begin{aligned} |PP''| = |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}''| &= \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - 2\rho\rho''\cos(\theta - \theta')} \\ &= \sqrt{\rho^2 + \frac{a^4}{\rho'^2} - 2\frac{\rho a^2}{\rho'}\cos(\theta - \theta')} \end{aligned} \tag{18.4.19}$$

则 Green 函数可写成

$$G(\rho,\theta;\rho',\theta') = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{a^2[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\theta-\theta')]}{\rho^2\rho'^2+a^4-2\rho\rho'a^2\cos(\theta-\theta')} \tag{18.4.20}$$

回到圆上 Poisson 方程的定解问题,在极坐标下

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,\theta) = f(\rho,\theta), & \rho < a \qquad (18.4.21) \\ u\big|_C = \varphi(a,\theta) = \varphi(\theta) & \qquad (18.4.22) \end{cases}$$

由上一节二维 Poisson 方程第一类边界条件的定解问题的表达式,(18.3.29)式可得解为

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^a d\rho'\int_0^{2\pi} d\theta' \ln\frac{\rho^2\rho'^2+a^4-2\rho\rho'a^2\cos(\theta-\theta')}{a^2[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\theta-\theta')]} f(\rho,\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho'^2)\varphi(\theta')}{a^2+\rho^2-2\rho a\cos(\theta-\theta')}d\theta' \tag{18.4.23}$$

当 $f(\rho,\theta)=0$ 时,是圆的 Laplace 方程的第一类边界条件的定解问题,解为

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)\varphi(\theta')}{a^2+\rho^2-2\rho a\cos(\theta-\theta')}d\theta' \tag{18.4.24}$$

此解亦称为圆上 poisson 公式.

§18.5 Helmholtz 算子的基本解

Helmholtz 算子 $L=\nabla^2+k^2$(k 为常数),在前面介绍的输送方程和波动方程分离变量时,出现在空间部分满足的 Helmholtz 方程中

$$(\nabla^2+k^2)u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{18.5.1}$$

在量子物理中,Helmholtz 算子经常出现在形如

$$(\nabla^2+k^2)u(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) \tag{18.5.2}$$

的方程中,其中 $V(\boldsymbol{r})$ 为已知的势函数.

在本节中,我们只讨论物理学中经常碰到的三维空间中的 Helmholtz 算子的基本解的求法,这一求解的方法在物理学中经常用到.

三维空间中 Helmholtz 算子的基本解 G_0,满足

$$(\nabla^2+k^2)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{18.5.3}$$

则有

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = (\nabla^2+k^2)^{-1}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{18.5.4}$$

其中 $(\nabla^2+k^2)^{-1}$ 为算子 (∇^2+k^2) 的逆算子. 由 δ - 函数的 Fourier 变换可得

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int(\nabla^2 + k^2)^{-1}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}d\boldsymbol{q} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2 - q^2}d\boldsymbol{q} \tag{18.5.5}$$

其中积分号表示三维 $\boldsymbol{q}$ 空间中的无界积分,而 $q = |\boldsymbol{q}|$.

令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$,并选取它为 z 轴的方向,则 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的夹角为 θ,在 $\boldsymbol{q}$ 空间中取球坐标,积分元为

$$d\boldsymbol{q} = q^2\sin\theta d\theta d\varphi dq \tag{18.5.6}$$

(18.5.5)式变成

$$\begin{aligned}
G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dq\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\frac{e^{iqx\cos\theta}}{k^2 - q^2}q^2\sin\theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dq\frac{q^2}{k^2 - q^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta e^{iqx\cos\theta}\sin\theta \\
&= \frac{1}{4\pi^2 ix}\int_0^\infty dq\frac{q^2}{k^2 - q^2}[e^{iqx} - e^{-iqx}] \\
&= \frac{1}{4\pi^2 ix}\left(\int_0^\infty dq\frac{q^2}{k^2 - q^2}e^{iqx} + \int_{-\infty}^0 dq\frac{q^2}{k^2 - q^2}e^{iqx}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2 ix}\int_{-\infty}^\infty dq\frac{q^2}{k^2 - q^2}e^{iqx}
\end{aligned} \tag{18.5.7}$$

这是一个奇异积分,它在实轴上 $q = \pm k$ 是两个单极点,其 Cauchy 主值是存在的,可用求 Cauchy 主值作回路积分的方法去计算,取不同的回路计算的结果不同,即 G_0 的表达式也不同.

下面我们介绍一种常用的与前面计算 Cauchy 主值时用的回路积分等价的方法:为了避开奇点,我们采用把 k 变成 $k + i\varepsilon$(ε 为一小量)的做法,当 $\varepsilon\to 0$ 时,$k + i\varepsilon\to k$,因此把 q 变量延伸到复平面上半平面,如图 18.5.1 所示,同时把 $-k\to -k - i\varepsilon$,被积函数当 $q\to\infty$ 时为零. 取积分回路如图 18.5.1 所示,此回路积分利用留数定理进行计算,被积函数

$$\frac{q}{k^2 + q^2}e^{iqx} = \frac{-qe^{iqx}}{(q + k)(q - k)} = F(q) \tag{18.5.8}$$

在回路内 $k + i\varepsilon$ 点的留数为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Res}F(k + i\varepsilon) = -\frac{1}{2}e^{ikx} \tag{18.5.9}$$

计算可得

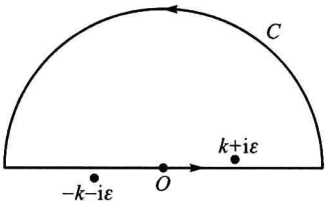


图 18.5.1

$$G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{e^{ikx}}{4\pi x} = -\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18.5.10}$$

若选取如图 18.5.2 所示的回路积分，则 $-k\rightarrow -k-i\varepsilon$，在 $-k-i\varepsilon$ 点的留数为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Res}F(-k+i\varepsilon) = -\frac{1}{2}e^{-ikx} \tag{18.5.11}$$

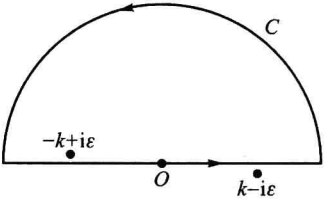


图 18.5.2

则计算可得

$$G_0^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{e^{-ikx}}{4\pi x} = -\frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18.5.12}$$

若选取如图 18.5.3 所示的回路，则计算可得

$$G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{\cos kx}{4\pi x} = -\frac{\cos k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18.5.13}$$

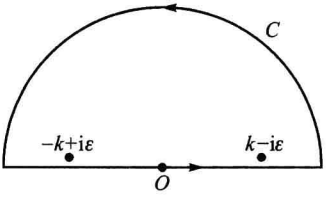


图 18.5.3

得到这三种基本解 G_0^+、G_0^- 和 G_0^0，在物理上皆称为 Green 函数，分别代表不同的物理意义：$G_0^-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 代表点源在 $\boldsymbol{r}'$ 点，并以此为中心向外发散的球面波的

模式;$G_0^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$代表点源在$\boldsymbol{r}'$点,并以此为中心向内汇聚的球面波的模式;$G_0^0$则是$G_0^+$、$G_0^-$的线性叠加,即$G_0^+ + G_0^- = G_0^0$的球面波模式.这三种不同的解可根据物理问题的要求来具体的选取.

对于 Helmholtz 算子满足边界条件的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in \Omega \tag{18.5.14}$$

$$\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{18.5.15}$$

在相应的非齐次方程中的应用,具体的程序与前面介绍的相似,在这里我们不再加以讨论.

§18.6 输运算子的 Green 函数

我们讨论输运算子 $L = \partial_t - a^2\nabla^2 (x \in R^n, n \leqslant 3, t > 0)$ 的 Green 函数,由于算子中只包含对 t 的一次偏微商 ∂_t,当 $t \to -t$ 时,算子是不对称的,我们不能把 t 延拓到 $-\infty < t < \infty$ 的区域中,这也是输运过程的不可逆性,故对 t 变量的 δ - 函数不能进行 Fourier 变换.因此当我们讨论输运算子的基本解时,要对基本解做特殊的要求,即要求它满足特定的初始条件.

输运算子 $L = \partial_t - a^2\nabla^2$ 的基本解:

定义 18.6.1:算子 $L = \partial_t - a^2\nabla^2$ 的基本解 $G_0(x,t;x',t')$,满足

$$\begin{cases} (\partial_t - a^2\nabla^2)G_0(x,t;x',t') = \delta(x - x')\delta(t - t'), \\ \qquad\qquad x \in R^n, n \leqslant 3, t > 0 & (18.6.1) \\ G_0|_{t=0} = 0 & (18.6.2) \end{cases}$$

从物理上看,相当于在 $t = t'$ 时刻在 $x = x'$ 处存在一点源,即上述方程等价于

$$\begin{cases} (\partial_t - a^2\nabla^2)G_0(x,t;x',t') = 0, \quad t > t' & (18.6.3) \\ G_0|_{t=t'} = \delta(x - x') & (18.6.4) \end{cases}$$

为简单起见,我们讨论一维的情况.

一、算子 $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ 的基本解 G_0,满足

$$\begin{cases} (\partial_t - a^2\nabla^2)G_0(x,t;x',t') = \delta(x - x')\delta(t - t'), \\ \qquad\qquad -\infty < x < \infty, t > 0 & (18.6.5) \\ G_0|_{t=0} = 0 & (18.6.6) \end{cases}$$

要求出满足上述方程的 G_0，我们把 t 作为参数，对 x 变量作 Fourier 变换，令

$$G_0(x,t;x',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g_0(k,t,t')e^{ik(x-x')}dk \tag{18.6.7}$$

$$\delta(x-x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk \tag{18.6.8}$$

代入方程(18.6.5)式，得 $g_0(k,t,t')$ 满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}g_0(k,t,t') + a^2k^2g_0(k,t,t') = \delta(t-t') \tag{18.6.9}$$

两边同乘 $e^{a^2k^2t}$，上式变为

$$\frac{\partial}{\partial t}[e^{a^2k^2t}g_0(k,t,t')] = e^{a^2k^2t}\delta(t-t') \tag{18.6.10}$$

由 δ - 函数的性质 $f(t)\delta(t-t') = f(t')\delta(t-t')$，上式变为

$$\frac{\partial}{\partial t}[e^{a^2k^2t}g_0(k,t,t')] = e^{a^2k^2t'}\delta(t-t') \tag{18.6.11}$$

此方程的特解为

$$e^{a^2k^2t}g_0(k,t,t') = e^{a^2k^2t'}H(t-t')$$

即

$$g_0(k,t,t') = e^{-a^2k^2(t-t')}H(t-t') \tag{18.6.12}$$

其中 $H(t-t')$ 是 Heaviside 函数.

求 $g_0(k;x',t')$ 的逆变换，得

$$G_0(x,t,x',t') = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t') \tag{18.6.13}$$

此基本解表示了在一维输运问题中，在 $t=t'$ 时刻，在 $x=x'$ 处的点源的场，在 $t>t'$ 以后的分布.

用同样的方法，我们可以求得二维和三维输运算子 $L=\partial_t - a^2\nabla^2$ 的基本解.

二、二维输运算子的基本解为

$$G_0(x,y,t,x',y',t') = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\right)^2 e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t') \tag{18.6.14}$$

三、三维输运算子的基本解为

$$G_0(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t') = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\right)^3 e^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4a^2(t-t')}} H(t-t') \quad (18.6.15)$$

用输运算子的 Green 函数解输运方程的定解问题,我们仍以一维输运方程的定解问题为例,说明如何求出具有特定边界问题的 Green 函数,然后再由 Green 函数给出输运方程定解问题的解

例 18.6.1: 以如下输运方程的定解问题为例,用 Green 函数法求解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 \leqslant x \leqslant l, t > 0 \quad (18.6.16) \\ u(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t), & 0 \leqslant t \quad (18.6.17) \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \quad (18.6.18) \end{cases}$$

首先我们求满足相应的齐次边界条件和初始条件的 Green 函数 $G(x,t;x',t')$,即 G 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t'), \\ \qquad\qquad 0 \leqslant x \leqslant l, t > 0 \quad (18.6.19) \\ G\big|_{x=0} = G\big|_{x=l} = 0 \qquad 0 \leqslant t \quad (18.6.20) \\ G\big|_{t=0} = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant l \quad (18.6.21) \end{cases}$$

我们应注意到,对于有限区间齐次边界条件的 Green 函数与基本解的形式是不同的,基本解是无界空间的,因此它是个连续函数的形式,而有限区间齐次边界条件的 Green 函数是与相应的 Sturm - Liouville 问题的本征函数的级数求和形式联系在一起的.

要求解 G 满足的方程(18.6.19)式—(18.6.21)式,首先要求出 G 满足的齐次方程齐次边界条件的方程的解,即

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G = 0 \quad (18.6.22) \\ G\big|_{x=0} = G\big|_{x=l} = 0 \quad (18.6.20) \end{cases}$$

采取分离变量法,设 $G(x,t,x',t') = X(x)T(t)$,则可得 $X(x)$ 满足的 S - L 本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (18.6.23)$$

即可解得

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n = 1,2\cdots \tag{18.6.24}$$

则 G 具有形式为

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \tag{18.6.25}$$

由

$$\delta(x - x') = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x'}{l} \tag{18.6.26}$$

由方程(18.6.19)式可得 $T_n(t)$ 满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_n(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 T_n(t) = X_n(x')\delta(t - t') \tag{18.6.27}$$

解得 $T_n(t)$ 为

$$T_n(t) = X_n(x')\mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-t')}\mathrm{H}(t - t') \tag{18.6.28}$$

即可得 Green 函数 G 为

$$G(x,t;x',t') = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x'\mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-t')}\mathrm{H}(t - t') \tag{18.6.29}$$

如何用所求得的齐次边界条件(18.6.19)式—(18.6.21)式的 Green 函数(18.6.29)式的 $G(x,t;x',t')$ 来表示一维输运方程定解问题(18.6.16)式—(18.6.18)式的解.

第一步：我们先用 Green 函数 $G(x,t;x',t')$ 的表达式表示出如下非齐次方程齐次边界条件的解.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{18.6.30}$$

此定解问题立即可用 Green 函数 G 写出，即

$$u(x,t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^l \mathrm{d}x' G(x,t;x',t')f(x',f') \tag{18.6.31}$$

很容易由 G 可满足的方程和定解条件验证此解满足定解问题(18.6.30)式.

第二步：对如下初始条件不为零的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (18.6.32) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (18.6.33) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (18.6.34) \end{cases}$$

则由 Green 函数表示此定解的题的解为

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,t;x',0)\varphi(x')\,dx' \qquad (18.6.35)$$

很容易验证此解满足上述定解问题. 即把解(18.6.3)式代入方程(18.6.32)式可得

$$\int_0^l \left(\frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \varphi(x')\,dx' = 0$$

即

$$\frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \qquad (18.6.36)$$

把解(18.6.35)式代入边界条件(18.6.33)式中,可得

$$\int_0^l G(0,t;x',0)\varphi(x')\,dx' = \int_0^l G(l,t;x',0)\varphi(x')\,dx' = 0$$

即

$$G(0,t;x',0) = G(l,t;x',0) = 0 \qquad (18.6.37)$$

把解(18.6.35)式代入初始条件(18.6.34)式中,可得

$$\int_0^l G(x,0;x',0)\varphi(x')\,dx = \varphi(x) = \int_0^l \delta(x-x')\varphi(x')\,dx$$

即

$$G(x,t;x',0) = \delta(x-x') \qquad (18.6.38)$$

因此由解(18.6.35)式的 $u(x,t)$ 的形式代入定解问题(18.6.32)式—(18.6.34)式中,可得到 Green 函数 G 可满足的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} - \alpha^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 & (18.6.36) \\ G(0,t;x',0) = G(l,t;x',0) = 0 & (18.6.37) \\ G(x,0;x',0) = \delta(x-x') & (18.6.38) \end{cases}$$

与前面给出的 $G(x,t;x',t)$ 可满足的定解问题(18.6.19)式—(18.6.21)式是等价的. 因此我们得到的解(18.6.35)式中 $u(x,t)$ 的表达式对定解问题(18.6.32)

式—(18.6.34)式与 Green 函数的定义是相容的,因此该解 $u(x,t)$ 的表达式(18.6.35)式是定解问题(18.6.32)式—(19.6.34)式的解就得到了验证.

第三步:对定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & (18.6.39) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (18.6.40) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (18.6.41) \end{cases}$$

其解,就是上面两个定解问题,即(18.6.30)式和(18.6.32)式—(18.6.34)式所得到的解的叠加,即得到了非齐次方程齐次边界条件的定解问题的解

$$u(x,t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^l \mathrm{d}x' G(x,t;x',t') f(x',t') + \int_0^l \mathrm{d}x' G(x,t;x',0)\varphi(x') \tag{18.6.42}$$

其中 Green 函数 $G(x,t;x',t')$ 的表达式为(18.6.29)式,而 $G(x,t;x',0)$ 为该表达式在 $t'=0$ 时的情况.

第四步:对非齐次方程非齐次边界条件的定解问题(18.6.16)式—(18.6.18)式,我们将根据非齐次边界条件 $u(0,t)=g_1(t)$ 和 $u(l,t)=g_2(t)$,引入函数变换

$$w(x,t) = u(x,t) - g(x,t) \tag{18.6.43}$$

其中

$$g(x,t) = g_1(t) + \frac{x}{l}[g_2(t) - g_1(t)] \tag{18.6.44}$$

这样对于 $u(x,t)$ 满足的非齐次边界条件化为 $w(x,t)$ 函数满足的齐次边界条件:$w(0,t)=w(l,t)=0$,再重复上述的步骤,最后得到定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^l \mathrm{d}x' G(x,t;x',t') f(x',t') + \int_0^l G(x,t;x',0)\varphi(x')\mathrm{d}x' + \\ & a^2 \int_0^t \left[\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'}\bigg|_{x'=0} g_1(t') - \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'}\bigg|_{x'=l} g_2(t') \right] \mathrm{d}t' \end{aligned} \tag{18.6.45}$$

其中 $G(x,t;x',t')$ 的表达式由(18.6.29)式给出. 这样我们就得到了最初给出的一维输运方程的定解问题,由相应齐次边界条件所定义的 Green 函数的解的表达式. 当然这一定解问题,完全可由一维的分离变量法求解,这一问题看似比用 Green 函数法求解要简单,但它毕竟给出了解此类方程的另一种途径,特别是到高维时,当分离变量法不能实施时,Green 函数法给出了解决此类问题的一种可

实施的方法.

§18.7 波动算子的基本解

本节主要讨论三维空间中波动算子 $L=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2$ 的基本解问题,这是个无穷边界的 Green 函数问题,应用基本解给出三维空间中非齐次波动方程解的表达式.

定义 18.7.1: 三维空间中波动算子 $L=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2$ 的基本解 $G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 满足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\right)G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{18.7.1}$$

由于波动算子对时间反演 $t\to -t$ 是对称的,因此我们可以将函数 $\delta(t-t')$ 在 $t:(-\infty,\infty)$ 区域中进行 Fourier 变换,同时我们对 G_0 的 t 分量也进行 Fourier 变换.

$$\delta(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}d\omega \tag{18.7.2}$$

$$G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')e^{i\omega t}d\omega \tag{18.7.3}$$

把它们代入方程(18.7.1)式中,得

$$(\nabla^2+k^2)g(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')e^{-i\omega t'} \tag{18.7.4}$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{a}$. 这是非齐次 Helmholtz 方程. 因此可由前面介绍的 Helmholtz 算子的基本解(18.5.10)式和(18.5.12)式给出

$$g_0^+=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18.7.5}$$

和

$$g_0^-=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18.7.6}$$

由于方程的非齐次项是 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 和与 $\boldsymbol{r}$ 无关的 $e^{-i\omega t'}$ 项,因此我们可以立即写出方程(18.7.4)式的两个线性无关的解

$$g^{+}(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot e^{-i\omega t'} = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot e^{-i\omega\left(t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)} \tag{18.7.7}$$

$$g^{-}(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}e^{-i\omega\left(t'+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)} \tag{18.7.8}$$

因此可由 G_0 的 Fourier 变换式(18.7.3)式得

$$\begin{aligned} G_0^{+}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g^{+}(\boldsymbol{r},\omega;\boldsymbol{r}',t')e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(t-t'+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)}d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\delta\left(t-t'+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right) \end{aligned} \tag{18.7.9}$$

和

$$G_0^{-}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right) \tag{18.7.10}$$

在物理上我们称基本解 G_0^{+} 为超前 Green 函数,它只有在 $t-t'=-\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$ (a 为波速)时才不为零,它表明如果在 t'时刻在 $\boldsymbol{r}'$处有一点源,则在 t'时刻之前的$\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$时刻,在 $\boldsymbol{r}$ 点处已感受到这个源的作用(一般这个源为汇聚源或为阱时就是这种情况). 而 G_0^{-} 称为推迟 Green 函数,它只有在 $t-t'=\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$时才不为零,它表明在 t'时刻在 $\boldsymbol{r}'$处有一点源,则在 t'时刻后的$\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$时刻在 $\boldsymbol{r}$ 处能感受到此源的作用.

现在我们考虑在无穷边界的三维空间中有源分布 $f(\boldsymbol{r},t)$ 的波动方程的解. 它没有边界条件,若假定在 $t=0$ 时刻之前不存在波动,从 $t=0^{+}$ 以后源 $f(\boldsymbol{r},t)$ 激发起波的传播. 这一方程的定解问题为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\right)u(\boldsymbol{r},t) = f(\boldsymbol{r},t) & (18.7.11) \\ u(\boldsymbol{r},0)=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (18.7.12) \\ f(\boldsymbol{r},t)\big|_{t\leqslant 0}=0 & (18.7.13) \end{cases}$$

这一定解问题的解,立即用推迟 Green 函数写出,即推迟解为

$$u^{-}(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t \mathrm{d}t'\int G_0^{-}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\,f(\boldsymbol{r}',t')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$=\int \frac{f\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{18.7.14}$$

这一解中,由于 f 满足(18.7.13)式的条件,故保证了推迟解 u^{-} 满足初始条件(18.7.12)式. 如果取超前 Green 函数的超前解 u^{+},它将不满足初始条件.

这一推迟解 $u^{-}(\boldsymbol{r},t)$ 在物理上通常称为推迟势. 它的意义是表明在 $t-\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$ 时刻的源决定 t 时刻的场,这表明这个源产生了向外的波 u^{-}.

如果我们考虑的定解问题是

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\right)u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t) & (18.7.15)\\ u(\boldsymbol{r},0)=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (18.7.16)\\ f(\boldsymbol{r},t)\big|_{t\geqslant 0}=0\end{cases}$$

它的解可以用超前 Green 函数写出

$$u^{+}(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t \mathrm{d}t\int G_0^{+}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\,f(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$=\int \frac{f\left(\boldsymbol{r},t+\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{18.7.17}$$

这一解被称为超前势,它表示在 $t=0$ 时刻以前存在着吸收波的汇聚源(或称为阱),而在 $t=0$ 以后,此汇聚源不再存在. 它表示 $t+\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$ 时刻的汇聚源,决定了 t 时刻的场.

本章讨论了以 Green 函数法求解数学物理方程的问题. 这一方法的优点在于:

第一,用 Green 函数即点源的场函数来给出非齐次偏微分方程的解,具有很直观明确的物理图像,表达式也简单明确.

第二,给出了空间点的场与源点的关系,用物理学的语言来讲,即给出了源点与空间点的关联问题(包括时—空的关联),Green 函数在某些场合下也称为关联函数.

第三,在很多边界条件下,数学物理方程是无法用分离变量法来求解的(因为边界的形状无法选取合适的坐标进行分离变量),但从数学上却能证明在这些边界条件下 Green 函数的存在,因此仍可以用 Green 函数法求解. 虽然在这些边界条件下很难用解析的方法具体求出 Green 函数的解析表达式,但毕竟给出了解此类数学物理方程的一条道路,特别在计算机普遍使用的今天,可以通过数值计算给出 Green 函数及数学物理方程的数值解,并可以给出数值拟合的解的图像,达到了我们求解的目的.

第十八章习题

18.1 两个相距为 a 均接地的理想导体平面,两平行导体平面间放置一电荷量为 q 的点电荷,电荷距离下平面为 b,$b<a$,求导体间的电势分布. (提示:用镜像法求解.)

18.2 一半径为 a 的导体球壳接地,在球外距球心为 b 处($b>a$)放置一点电荷 q,试用镜像法求电场的分布,并求出导体球壳表面感应电荷的分布,进而证明此电荷分布等价于球内的镜像电荷.

18.3 用 Green 函数法求解第一类边值问题的球内 Laplace 方程的解.

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & r < a\\ u\big|_{r=a} = \cos\theta\end{cases}$$

18.4 半径为 b 的无穷长均匀圆柱体,初始温度为 U_0,初始时刻外界空间的温度为零,用 Green 函数法求解 t 时刻柱外空间的温度 $u(\rho,t)$,$\rho>b$.

18.5 侧面为绝热的无穷长细杆,初始温度为零,在 $t=0$ 时刻在 $x=x_0$ 点有一瞬时热源 Q,试构造该一维问题的 Green 函数.

第十九章　其他求解方法及方程

前面我们讨论了数学物理方程的分离变量解法和 Green 函数解法. 在这一章中我们主要介绍数学物理方程中经常用到的另外两种解法：积分变换法和行波法. 此外我们还要介绍今后量子物理学中常遇到的 Schrödinger(薛定谔)方程并给出了在线性谐振子势下该方程的解.

§19.1　积分变换法

在解偏微分方程的定解问题中,把场量和方程的非齐次项即源项,同时进行积分变换,然后求解场量的积分变换的像函数所满足的方程. 把求得的像函数通过其逆变换和卷积,求出原方程的解. 这样的求解法一方面可使求解的方程"降维",变成较简单的方程(常微分方程)求解,另一方面方程的解可以直接由积分给出.

在数学物理方程的求解中,用的较多的是 Fourier 变换和 Laplace 变换. 在本节中我们主要讨论用这两种变换来求解方程.

如果一个场函数是定义在无界空间中(如果是半无界空间,它可延拓成无界空间的问题),其满足的偏微分方程的定解问题,由于没有边界条件,它不存在分立的本征值和相应的本征函数,因此场函数不是在离散的本征函数上展开,而是以 Fourier 积分形式出现,这就导致 Fourier 变换法.

我们仍以一维无界空间中的波动方程的定解问题为例,来讨论 Fourier 变换法.

例 19.1.1：一维无界空间中的波动方程的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, & (19.1.1) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (19.1.2) \\ u_t(x,0) = \nu(x) & (19.1.3) \end{cases}$$

解：我们把 t 作为参数,对场函数 $u(x,t)$ 的 x 变量作 Fourier 变换

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{19.1.4}$$

$$U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x. \tag{19.1.5}$$

将变换(19.1.4)式代入方程(19.1.1)式可得像函数 $U(\omega,t)$ 满足的常微分方程

$$U_{tt}(\omega,t) + a^2\omega^2 U(\omega,t) = 0 \tag{19.1.6}$$

对初始条件中的已知函数 $\varphi(x)$,$\nu(x)$ 作 Fourier 变换

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{19.1.7}$$

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{19.1.8}$$

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{19.1.9}$$

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{19.1.10}$$

因此偏微分方程的定解问题(19.1.1)式—(19.1.3)式,就化为如下像空间中的常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2U(\omega,t)}{\mathrm{d}t^2} + a^2\omega^2 U(\omega,t) = 0 & (19.1.6) \\ U(\omega,0) = \Phi(\omega) & (19.1.11) \\ U_t(\omega,0) = V(\omega) & (19.1.12) \end{cases}$$

方程(19.1.6)式的通解为

$$U(\omega,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t} \tag{19.1.13}$$

由初值条件(19.1.11)式和(19.1.12)式来定常数 A,B,有

$$U(\omega,0) = A + B = \Phi(\omega) \tag{19.1.14}$$

$$U_t(\omega,0) = \mathrm{i}a\omega(A - B) = V(\omega) \tag{19.1.15}$$

可得

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\left[\Phi(\omega) + \dfrac{1}{\mathrm{i}a\omega}V(\omega)\right] \\ B = \dfrac{1}{2}\left[\Phi(\omega) - \dfrac{1}{\mathrm{i}a\omega}V(\omega)\right] \end{cases} \tag{19.1.16}$$

代入(19.1.13)式,可得解 $U(\omega,t)$ 为

$$U(\omega,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}a\omega}V(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t} + \frac{1}{2}\left[\Phi(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}a\omega}V(\omega)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t} \tag{19.1.17}$$

由反演公式我们得到 $u(x,t)$ 为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x+at)}\mathrm{d}\omega + \frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}V(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x+at)}\mathrm{d}\omega + \\ &\quad \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-at)}\mathrm{d}\omega - \frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}V(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-at)}\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{19.1.18}$$

由 Fourier 变换的延迟定理可得上式右端第一项和第三项的积分为

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x+at)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\varphi(x+at) \tag{19.1.19}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-at)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\varphi(x-at) \tag{19.1.20}$$

由 Fourier 变换的微分定理可得(19.1.18)式右端第二项和第四项的积分为

$$\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}V(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x+at)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x+at}\nu(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{19.1.21}$$

$$\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}V(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-at)}\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at}\nu(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{-\infty}\nu(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{19.1.22}$$

则解(19.1.18)式可写成

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-ay}^{x+at}\nu(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{19.1.23}$$

由上式表示的这一定解问题的解亦称为 D'Alembert(达朗贝尔)公式.

对高维问题,如三维无界空间中的波动方程、输运方程的定解问题,一般采取场函数 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的空间变量进行 Fourier 变换

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}U(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{19.1.24}$$

$$U(\boldsymbol{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty}u(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{19.1.25}$$

同时对非齐次方程的非齐次项和初始条件同样进行同一类型的 Fourier 变换,这样把定解问题化为像函数 $U(\boldsymbol{k},t)$所满足的常微分方程的初值问题. 解出 $U(\boldsymbol{k},t)$,最后对像函数 $U(\boldsymbol{k},t)$进行逆变换得到原定解问题的解 $u(\boldsymbol{r},t)$. 这就是对无界空间定解问题采用的 Fourier 变换法的基本解法.

对于半无界空间的波动方程和输运方程的定解问题,可根据定解条件进行解析延拓,变成无界空间的定解问题,再按上面所介绍的求解的基本方法进行求解.

例 19.1.2: 求一维无界弦的振动的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < \infty, t > 0 & (19.1.26) \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty & (19.1.27) \\ u_t(x,0) = \nu(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty & (19.1.28) \\ u(0,t) = g(t) & (19.1.29) \end{cases}$$

最后一式为边界点 $x=0$ 的边界条件.

解: 首先我们讨论当 $g(t)=0$ 的情况,即 $u(0,t)=0$ 这一边界条件下,我们可以作奇延拓,因为对一个奇函数 $u(-x) = -u(x)$,必有 $u(0)=0$. 因此我们定义新的函数

$$\bar{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x \geqslant 0 \\ -u(-x,t), & x < 0 \end{cases} \tag{19.1.30}$$

$$\bar{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geqslant 0 \\ -f(-x,t), & x < 0 \end{cases} \tag{19.1.31}$$

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{19.1.32}$$

$$\bar{\nu}(x) = \begin{cases} \nu(x), & x \geqslant 0 \\ -\nu(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{19.1.33}$$

则场量为 $u(x,t)$的半无界空间的定解问题化为场量为 $\bar{u}(x,t)$的无界空间的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{u}(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 \bar{u}(x,t)}{\partial x^2} = \bar{f}(x,t), \quad -\infty < x < \infty & (19.1.34) \\ \bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x) & (19.1.35) \\ \bar{u}_t(x,0) = \bar{\nu}(x) & (19.1.36) \end{cases}$$

这是可用前面介绍的方法求解的.

对于 $g(t)\neq 0$ 的情况,我们作函数代换

$$u(x,t) = \omega(x,t) + g(t) \tag{19.1.37}$$

把定解问题变成在边界点 $x=0$ 的边界条件为 $\omega(0,t)=0$ 的、场量为 $\omega(x,t)$ 的半无界空间的波动方程的定解问题,再对 $\omega(x,t)$ 进行奇延拓,得到无界空间的定解问题,即可解决.

若一维半无界弦振动的定解问题(19.1.26)式—(19.1.29)式中左边界 $x=0$ 上的条件不是(19.1.29)式,而是

$$u_x(0,t) = g(t) \tag{19.1.38}$$

在这一条件下,我们首先讨论 $g(t)=0$ 时的情况,考虑一个偶函数 $u(-x)=u(x)$,在 $x=0$ 点连续时,则有 $u_x(0)=-u_x(0)$ 即 $u_x(0)=0$. 因此我们对场函数 $u(x,t)$ 作偶延拓到无界空间,同时也把 $f(x,t)$ 作偶延拓到无界空间,即把半无界空间的定解问题化为无界空间的定解问题进行求解.

若 $g(t)\neq 0$ 的情况,则作函数的代换

$$u(x,t) = x\cdot g(t) + \omega(x,t) \tag{19.1.39}$$

这就化为边界点 $x=0$ 上的

$$\omega_x(0,t) = 0 \tag{19.1.40}$$

的问题,这样的问题就可按前面所讨论的程序进行求解了.

对无界空间的定解问题,我们也可以用 Laplace 变换来求解.

下面我们仍以一维无界空间中波动方程的定解问题为例,用 Laplace 变换来求解.

例 19.1.3: 一维无界空间中波动方程的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t>0 & (19.1.1)\\ u(x,0) = \varphi(x) & (19.1.2)\\ u_t(x,0) = \nu(x) & (19.1.3) \end{cases}$$

解: 在该定解问题中,我们对场量 $u(x,t)$ 的时间变量 t 作 Laplace 变换

$$U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{19.1.41}$$

同样简记为

$$u(x,t) \fallingdotseq U(x,p) \tag{19.1.42}$$

由 Laplace 变换的微分定理可得

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \doteq p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(u,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \tag{19.1.43}$$

可得像函数 $u(x,p)$ 满足的方程

$$p^2 U(x,p) - a^2 \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} = p\varphi(x) + \nu(x) \tag{19.1.44}$$

这是个非齐次常微分方程. 在自然边界条件：当 $|x| \to \infty$，$U(x,p)$ 有限的要求下，上述方程的通解为

$$\begin{aligned} U(x,p) &= -\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{x} [p\varphi(x') + \nu(x')] \frac{1}{p} e^{-\frac{p}{a}(x'-x)} dx' + \\ &\quad \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x} [p\varphi(x') + \nu(x')] \frac{1}{p} e^{-\frac{p}{a}(x-x')} dx' \\ &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(x') + \frac{1}{p}\nu(x')\right] e^{-\frac{p}{a}|x-x'|} dx' \end{aligned} \tag{19.1.45}$$

由

$$e^{-\alpha p} \doteq \delta(t-\alpha), \quad \frac{1}{p} e^{-\alpha p} \doteq H(t-\alpha) \tag{19.1.46}$$

其中 $H(t-a)$ 为阶跃函数，即

$$H(t-\alpha) = \begin{cases} 1, & t > \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases} \tag{19.1.47}$$

则由像函数 $U(x,p)$ 的表达式(19.1.45)式可得定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\delta\left(t - \frac{|x-x'|}{a}\right) dx' + \\ &\quad \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \nu(x') H\left(t - \frac{|x-x'|}{a}\right) dx' \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\delta(at - |x-x'|) dx' + \\ &\quad \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \nu(x') H(at - |x-x'|) dx' \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \nu(x') dx' \end{aligned} \tag{19.1.48}$$

同样得到 D'Alembert 公式.

§19.2　行　波　法

我们仍以一维无界空间中波动方程定解问题为例,给出该问题的行波解法.

例 19.2.1: 一维无界空间中波动方程定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 & (19.2.1) \\ u(x,t) = \varphi(x) & (19.2.2) \\ u_t(x,0) = \nu(x) & (19.2.3) \end{cases}$$

对于波动算子$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$,由于算子$\dfrac{\partial}{\partial t}$与$a\dfrac{\partial}{\partial x}$可对易,即

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, a\frac{\partial}{\partial x}\right] = 0, \quad a > 0 \text{ 为常数} \tag{19.2.4}$$

波动算子可分解为下面形式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{19.2.5}$$

因此行波方程(19.2.1)式可改写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0 \tag{19.2.6}$$

这种二阶算子的分解方法在量子理论中我们也会遇到.

方程(19.2.6)式等价于下列两个一阶线性方程组

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = w(x,t) & (19.2.7) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + a\dfrac{\partial}{\partial x}\right)w(x,t) = 0 & (19.2.8) \end{cases}$$

此外我们可以看到另一个事实,如果$u(x,t)$满足方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0 \tag{19.2.9}$$

或

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0 \tag{19.2.10}$$

则 $u(x,t)$ 一定满足方程(19.2.6)式,即方程(19.2.9)式和(19.2.10)式也是另一种形式的波动方程,它们是一阶的波动方程.

我们回到方程(19.2.6)式的求解问题,我们可先求出该方程的通解形式,即得到二阶波动方程(19.2.1)式的通解形式,再由定解条件给出定解问题具体解的表达式.

作变量代换,令

$$\begin{cases}\xi = x + at \\ \eta = x - at\end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \dfrac{1}{2a}(\xi - \eta)\end{cases} \tag{19.2.11}$$

函数 $u(x,t)$ 变为变量 (ξ,η) 的函数,即 $u(x,t) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$. 则函数对变量 (ξ,η) 的偏微分为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial \xi} = \dfrac{\partial t}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + a\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} = \dfrac{\partial t}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x} = -\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\end{cases} \tag{19.2.12}$$

通过这样的函数变换,方程(19.2.6)式变为

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\cdot u = 0 \tag{19.2.13}$$

这一方程容易求解,先对 η 积分,可得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi) \tag{19.2.14}$$

其中 f 为 ξ 的任意函数,再对 ξ 积分,就得到 u 的通解形式

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\xi} f(\xi')\,\mathrm{d}\xi' + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ &= f_1(x + at) + f_2(x - at) \end{aligned} \tag{19.2.15}$$

这一通解的物理意义是:$f_2(x - at)$ 表示以速度 a 向 x 轴正方向行进的波,即 x 轴的正向行波。而 $f_1(x + at)$,表示以速度 a 向 x 轴负方向的行波.

我们对行波解的理解是:对一行波解 $f(x - at)$,当 $t = 0, x = 0$ 时其波形为 $f(0)$,则同样的波形要在 t' 时出现 $(t' > 0)$,则有 $f(x - at') = f(0)$,即 $x - at' = 0$,即 $t' = \dfrac{x}{a}(x > 0)$,也就是说经过了 $\dfrac{x}{a}$ 时刻在 x 处出现 $f(0)$ 的波形,故 $f(x - at)$ 表示在 x 轴正向的行波. 对于向 x 轴负方向的行波也有同样的理解.

对于解(19.2.15)式中的行波f_1,f_2的具体形式要由定解条件(19.2.2)式和(19.2.3)式确定. 由(19.2.2)式可得

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \tag{19.2.16}$$

由(19.2.3)有

$$u_t(x,0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial(x+at)} \cdot \frac{\partial(x+at)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x-at)} \cdot \frac{\partial(x-at)}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= a\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} - a\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = \nu(x)$$

即

$$a\frac{\partial}{\partial x}(f_1(x) - f_2(x)) = \nu(x) \tag{19.2.17}$$

由此式可得

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \nu(x')\mathrm{d}x' + f_1(x_0) - f_2(x_0) \tag{19.2.18}$$

由(19.2.16)式和(19.2.18)式可解得

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \nu(x')\mathrm{d}x' + \frac{1}{2}[f_1(x_0) - f_2(x_0)] \tag{19.2.19}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \nu(x')\mathrm{d}x' - \frac{1}{2}[f_1(x_0) - f_2(x_0)] \tag{19.2.20}$$

我们就得到了f_1和f_2的具体的函数形式. 由通解$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$,把(19.2.19)式中$f_1$的变量由$x \to x+at$,把(19.2.20)式中$f_2$的变量由$x \to x-at$,最后可得定解问题(19.2.1)式,(19.2.2)式的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \nu(x')\mathrm{d}x' \tag{19.2.21}$$

这就是 D'Alembert 公式,与我们前面方法得到的结果是完全一致的.

为了加深对行波解的物理图像的理解,下面我们给出例子说明.

例 19.2.2: 在张力为T的无界弦的$x=0$点处,悬挂一小质量为M的载荷(小质量是指其挂上后使悬线离开水平x轴的位移不大的理想情况). 如图19.2.1所示,有一行波$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$从$x<0$的区域向悬挂点行进. 试求此行波通过悬挂点时的反射波和透射波.

解: 以悬挂点$x=0$点为分界点. 由于载荷M的存在,行波在$x=0$的左右两边是不一样的,把$x<0$的左区域记为Ⅰ区,其内的行波u^1为原行波f和反射波

R. 把 $x>0$ 的左边区域记为Ⅱ区,其中的行波记为 $u^{\mathrm{Ⅱ}}$,只有透射波 $\Im$.

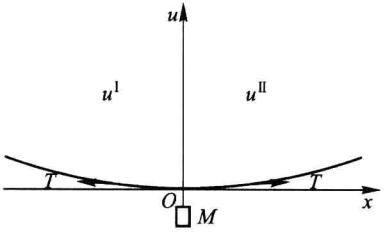


图 19.2.1

设波 f 传到 $x=0$ 点处的时刻为 $t=0$,我们可分别写下两个区域中的定解问题.

Ⅰ区,$x<0$:

$$\begin{cases} u_{tt}^{\mathrm{I}} - a^2 u_{xx}^{\mathrm{I}} = 0, & -\infty < x < 0 \qquad (19.2.22) \\ u^{\mathrm{I}} \big|_{t\leqslant 0} = f\left(t - \dfrac{x}{a}\right) & (19.2.23) \end{cases}$$

Ⅱ区,$x>0$:

$$\begin{cases} u_{tt}^{\mathrm{II}} - \alpha^2 u_{xx}^{\mathrm{II}} = 0, & 0 < x < \infty \qquad (19.2.24) \\ u^{\mathrm{II}} \big|_{t\leqslant 0} = 0 & (19.2.25) \\ u_t^{\mathrm{II}} \big|_{t\leqslant 0} = 0 & (19.2.26) \end{cases}$$

由前面的分析可知:

$$u^{\mathrm{I}}(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) + R\left(t + \frac{x}{a}\right) \qquad (19.2.27)$$

其中 $R\left(t+\dfrac{x}{a}\right)$ 是沿 x 轴的负方向的反射波.

$$u^{\mathrm{II}}(x,t) = \Im\left(t - \frac{x}{a}\right) \qquad (19.2.28)$$

是沿 x 轴正向的透射波.

由物理上的规律,我们可以给出 u^{I} 和 u^{II} 在 $x=0$ 点即分界点的衔接条件

$$\begin{cases} u^{\mathrm{I}} \big|_{x=0} = u^{\mathrm{II}} \big|_{x=0} = u \big|_{x=0} & (19.2.29) \\ u_t^{\mathrm{I}} \big|_{x=0} = u_t^{\mathrm{II}} \big|_{x=0} = u_t \big|_{x=0} & (19.2.30) \\ u_{tt}^{\mathrm{I}} \big|_{x=0} = u_{tt}^{\mathrm{II}} \big|_{x=0} = u_{tt} \big|_{x=0} & (19.2.31) \\ T(u_x^{\mathrm{II}} - u_x^{\mathrm{I}}) \big|_{x=0} - Mg = Mu_{tt} \big|_{x=0} & (19.2.32) \end{cases}$$

其中(19.2.29)式—(19.2.31)式给出同一 $x=0$ 点的位移及位移随时间变化的关系. 而 Tu_x^{II} 和 $-Tu_x^{\mathrm{I}}$ 是 $x=0$ 点两边弦的张力 T 在 u 轴上的投影，u_{tt} 为载荷 M 的加速度，方程(19.2.32)式是载荷运动所满足的牛顿第二定律.

由(19.2.29)式可得

$$f(t)+R(t)=\Im(t) \tag{19.2.33}$$

由(19.2.30)式可得

$$f'(t)+R'(t)=\Im'(t) \tag{19.2.34}$$

上式是由于

$$\begin{aligned} u_t^{\mathrm{I}}\Big|_{x=0} &= \frac{\mathrm{d}R\left(t+\frac{x}{\alpha}\right)}{\mathrm{d}\left(t+\frac{x}{\alpha}\right)}\cdot\frac{\partial\left(t+\frac{x}{\alpha}\right)}{\partial t}\Bigg|_{x=0}+\frac{\mathrm{d}f\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)}{\mathrm{d}\left(x-\frac{x}{\alpha}\right)}\cdot\frac{\partial\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)}{\partial t}\Bigg|_{x} \\ &= R'\left(t+\frac{x}{\alpha}\right)\Big|_{x=0}+f'\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)\Big|_{x=0} \\ &= R'(t)+f'(t) \end{aligned}$$

和 $u_t^{\mathrm{II}}\Big|_{x=0}=\Im'(t)$，得解.

同理，由(19.2.31)式可得

$$f''(t)+R''(t)=\Im''(t)=u_{tt}\Big|_{x=0} \tag{19.2.35}$$

由(19.2.32)式和上式 $u_{tt}\Big|_{x=0}=\Im''(t)$，可得

$$-\frac{1}{a}[\Im'(t)+R'(t)-f'(t)]-M\Im''(t)=Mg \tag{19.2.36}$$

再由(19.2.34)式可得：

$$\Im''(t)+\frac{2T}{Ma}\Im'(t)=\frac{2T}{Ma}f'(t)-g \tag{19.2.37}$$

上式对 t 进行积分 $\int_0^t \mathrm{d}t$，并利用初始条件(19.2.25)式和(19.2.26)式，即 $\Im'(t)\Big|_{t=0}=0$，$\Im(t)\Big|_{t=0}=0$，可得

$$\Im'(t)+\frac{2T}{Ma}\Im(t)=\frac{2T}{Ma}f(t)-gt-\frac{2T}{Ma}f(0) \tag{19.2.38}$$

而由衔接条件(19.2.29)式可知，当 $t=0$，有 $R(0)=0$，且 $f(0)=\Im(0)=0$. 故此微分方程的解为

$$\begin{aligned}\Im(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{2T}{Ma}t}\left[\frac{2T}{Ma}\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{\frac{2T}{Ma}\tau}\mathrm{d}\tau - g\int_0^t \tau\mathrm{e}^{\frac{2T}{Ma}\tau}\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \frac{2T}{Ma}\mathrm{e}^{-\frac{2T}{Ma}t}\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{\frac{2T}{Ma}\tau}\mathrm{d}\tau - \frac{Ma}{2T}gt + \\ &\quad \frac{M^2a^2}{4T^2}g\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{2T}{Ma}t}\right] \end{aligned} \tag{19.2.39}$$

因此可得透射波的表达式

$$\Im\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)=\begin{cases} 0, & t<\dfrac{x}{a},x>0 \\ \dfrac{2T}{Ma}\mathrm{e}^{-\frac{2T}{Ma}\left(t-\frac{x}{a}\right)}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(\tau)\mathrm{e}^{\frac{2T}{Ma}\tau}\mathrm{d}\tau - \frac{Ma}{2T}g\cdot\left(t-\frac{x}{a}\right)+ & \\ \dfrac{M^2a^2}{4T^2}g\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{2T}{Ma}\left(t-\frac{x}{a}\right)}\right], & x>0,t<\dfrac{x}{a} \end{cases} \tag{19.2.40}$$

由(19.2.33)式可知,$R(t)=\Im(t)-f(t)$,注意,此式只是在 $x=0$ 处所表示的三个衔接函数之间的关系,因此当考虑反射波时,自变量都应取沿 x 轴反向的行波变量,即

$$R\left(t+\frac{x}{a}\right)=\Im\left(t+\frac{x}{a}\right)-f\left(t+\frac{x}{a}\right)x,$$

故可得反射波的表达式

$$R\left(t+\frac{x}{a}\right)=\begin{cases} 0, & t+\dfrac{x}{a}<0,x<0 \\ \dfrac{2T}{Ma}\mathrm{e}^{-\frac{2T}{Ma}\left(t+\frac{x}{a}\right)}\displaystyle\int_0^{t+\frac{x}{a}} f(\tau)\mathrm{e}^{\frac{2T}{Ma}\tau}\mathrm{d}\tau - & \\ \dfrac{Ma}{2T}g\cdot\left(t+\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{M^2a^2}{4T^2}g\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{2T}{Ma}\left(t+\frac{x}{a}\right)}\right]- & \\ f\left(t+\dfrac{x}{a}\right), & x<0,t+\dfrac{x}{a}>0 \end{cases} \tag{19.2.41}$$

透射波和反射波的表达式,都说明在波到达 $x=0$ 点之前的区域中没有这两种波.

"行波法"在解一类线性偏微分方程中的应用,可得到方程的行波解.它的

好处在于把偏微分方程变为变量为 $\xi = x - at$ 或是 $\xi = x + at$ 的关于 ξ 的较为简单的微分方程进行求解. 此时它对空间变量和时间变量给了特定的约束关系. 在实际应用中,我们对偏微分方程经常给出这种约束关系的试探解,即令 $\xi = x - at$ 或 $\xi = x + at$ 的变量代换,把偏微分方程化为常微分方程来解出特解. 这种试探"行波解"的方法,在非线性偏微分方程的求解中,得到了广泛的应用.

§19.3　冲量定理法

在我们所研究的物理问题中,经常会遇到瞬时力或瞬时源的作用问题,此时我们可以把非齐次方程中的瞬时源项的定解问题变成相应的齐次方程的初值的定解问题来处理.

下面我们仍以一维的长为 l 两端固定的弦的振动问题为例.

例 19.3.1: 考虑 τ 时刻有一瞬时力 $f(x,t)$ 作用在长 l 的两端固定的弦上,且初始时刻弦完全静止. 此定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)\delta(t-\tau) & (19.3.1) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (19.3.2) \\ u(x,0) = 0 & (19.3.3) \\ u_t(x,0) = 0 & (19.3.4) \end{cases}$$

我们考虑对方程(19.3.1)式在 $\tau - \varepsilon$ 到 $\tau + \varepsilon$(ε 为正小量)的积分,有

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{\partial u_t}{\partial t} \mathrm{d}t = a^2 \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} u_{xx} \mathrm{d}t + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(x,t)\delta(t-\tau)\mathrm{d}t \qquad (19.3.5)$$

这一关系式是牛顿力学中的冲量定理的数学表达式,考虑到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{\partial u_t}{\partial t}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[u_t \Big|_{\tau+\varepsilon} - u_t \Big|_{\tau-\varepsilon} \right] = u_t \Big|_{t=\tau}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a^2 \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} u_{xx}\mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(x,t)\delta(t-\tau)\mathrm{d}t = f(x,\tau)$$

故可得,

$$u_t \Big|_{t=\tau} = f(x,\tau) \qquad (19.3.6)$$

考虑到瞬时源在 τ 时刻作用后就不再存在,因此上述定解问题等价于

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (19.3.7) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (19.3.8) \\ u(x,0) = 0 & (19.3.9) \\ u_t(x,\tau) = f(x,\tau) & (19.3.10) \end{cases}$$

这一定解问题是十分容易求解的,这里不再重复.

冲量定理法的思想在用 Green 函数解物理问题中经常用到. 实际上我们在第十八章中,§18.6 节求输运算子的基本解时,对 G_0 满足的表达式(18.6.1)式,(18.6.2)式等价于(18.6.3)式和(18.6.4)式,用的就是冲量定理法,只不过没有明确地提出而已.

当然对于非瞬时源问题,即方程(19.3.1)式中的源项为 $f(x,t)$ 的定解问题,我们可用在分离变量法中所介绍的一套完整的步骤进行求解. 但如果从冲量定理法的角度去考虑,我们从物理上很容易理解,这样的源 $f(x,t)$ 可以看成是在源作用的时间段内的众多瞬时源的叠加,而方程是线性方程. 其解也可以看成是瞬时源的定解问题所得到的解的线性叠加,当然这种叠加是时间的积分,这对我们求解问题又给出了另一条思路.

*§19.4 Schrödinger(薛定谔)方程、谐振子势

物理学的规律,在不同的空间尺度下,物理体系所遵从的物理规律是不一样的. 在宏观尺度中,不考虑相对论效应时,物理体系的运动满足 Newton 定律. 对原子尺度范围内的问题,Newton 定律已不适用,粒子的运动规律是由量子力学来描述的. 我们考虑最简单的非相对论粒子的一维量子系统的问题.

考虑一个质量为 m 的粒子在不随时间变化的一维势 $V(x)$ 的势场中运动. 粒子的运动状态是由波函数 $\Psi(x,t)$ 来描述,$\Psi(x,t)$ 并不像牛顿力学中是描述粒子确定的运动轨迹,而是一种几率波状态的描述,它是满足一种微观状态动力学的波动方程,即一维 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right]\psi(x,t) \qquad (19.4.1)$$

其中 $\hbar$ 为 Planck(普朗克)常数,它是表征量子尺度的一个重要常数. 由于势函数 $V(x)$ 不随时间变化,此一维量子系统的能量恒定,则波函数 $\psi(x,t)$ 具有如下的形式

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et} \qquad (19.4.2)$$

其中 E 为系统的能量，为常数. 此式说明波函数 $\Psi(x,t)$ 是可分离变量的，$\varphi(x)$ 为粒子在 x 轴上的分布模式，称为定态波函数，而时间函数部分只表明了波函数的位相的变化关系. 把解的分离变量形式(19.4.2)式代入方程(19.4.1)式，可得 $\varphi(x)$ 满足的方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\varphi(x)=E\varphi(x) \tag{19.4.3}$$

此方程称为一维定态 Schrödinger 方程，它是一维量子系统能量算子 $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$ 的本征方程，其本征值为 E.

我们以一维量子谐振子为例，给出 Schrödinger 方程的具体求解方法.

例 19.4.1：考虑粒子在谐振子势 $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$ 的势场中作一维的谐振动，此时方程(19.4.3)式可写成如下一维量子谐振子方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)\varphi(x)=0 \tag{19.4.4}$$

令

$$\xi=\alpha x,\quad \alpha^4=\frac{mk}{\hbar^2} \tag{19.4.5}$$

则有 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}=\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}$，方程(19.4.4)式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\varphi(\xi)+\frac{2m}{\alpha^2\hbar^2}\left(E-\frac{k\xi^2}{2\alpha^2}\right)\varphi(\xi)=0 \tag{19.4.6}$$

再令

$$\lambda=\frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{19.4.7}$$

方程(19.4.6)式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\varphi(\xi)+(\lambda-\xi^2)\varphi(\xi)=0 \tag{19.4.8}$$

此方程称为 Weber(韦伯)方程，它有两个奇点 $\xi=\pm\infty$，是本性奇点.

作函数变换

$$\varphi(\xi)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}y(\xi) \tag{19.4.9}$$

Weber 方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}y(\xi) - 2\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}y(\xi) + (\lambda - 1)y(\xi) = 0 \tag{19.4.10}$$

此方程为 Hermite(埃尔米特)方程,是 Sturm - Liouville 型方程,λ 为方程的本征参数. 如果我们把变量 ξ 写成 x,把本征值 λ 写成

$$\lambda = 2n + 1, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{19.4.11}$$

方程的形式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + 2ny(x) = 0 \tag{19.4.12}$$

此方程仍称为 Hermite 方程,在 $|x| < \infty$ 的区间内都是方程的正常点. 在 $x_0 = 0$ 点,方程的解具有级数解的形式

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0 \tag{19.4.13}$$

代入方程得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(k+2)a_{k+2} - 2ka_k + 2na_k]x^k = 0 \tag{19.4.14}$$

即可得到系数的递推公式

$$a_{k+2} = \frac{2(k-m)}{(k+1)(k+2)}a_k, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{19.4.15}$$

因此,所有的系数可由 a_0 和 a_1 表示出,由 a_0 表示出的 x 偶次幂级数和由 a_1 表示出的 x 的奇次幂级数的两个级数解,为两个线性独立的级数解. 这两个级数解的系数分别为

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2n}{2!}a_0, \quad a_4 = \frac{2^2n(n-2)}{4!}a_0,\cdots \\ a_{2j} &= \frac{(-2)^j n(n-2)\cdots(n-2j+2)}{(2j)!}a_0, \quad j = 1,2,3\cdots \end{aligned} \tag{19.4.16}$$

和

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{2(n-1)}{3!}a_1, \quad a_5 = \frac{2^2(n-1)(n-3)}{5!}a_1,\cdots \\ a_{2j+1} &= \frac{(-2)^j(n-1)(n-3)\cdots(n-2j+1)}{(2j+1)!}a_1, \quad j = 1,2,3\cdots \end{aligned} \tag{19.4.17}$$

这两个线性独立的级数解,记为

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j n(n-1)\cdots(n-2j+2)}{(2j)!}x^{2j}\right] \tag{19.4.18}$$

和

$$y_2(x) = a_1\left[x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j n(n-1)\cdots(n-2j+1)}{(2j+1)!}x^{2j+1}\right] \tag{19.4.19}$$

Hermite 方程(19.4.12)式的通解为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{19.4.20}$$

c_1, c_2 为任意常数. 我们注意到在 $|x| > 1$ 时,此无穷级数函数中是发散的. 而我们的物理问题要求解在 $|x| < \infty$ 的区域中满足 $|y(x)| < \infty$ 的自然边界条件,我们发现,对于(19.4.16)式中给定的 n,当 n 为偶数时,只要取 $n = 2(j+1)$ 时,$y_1(x)$ 就截断为一个最高次项为 $x^{2(j-1)}$ 的多项式,即满足 $|y_1(x)| < \infty$,但 $y_2(x)$ 在 $|x| > 1$ 的区域中仍为发散级数,因此我们取 $c_2 = 0$,即当 n 为偶数时,自然边界条件只允许我们取 $y_1(x)$ 的截断多项式为 Hermite 方程的解. 同理,当 n 为奇数时,我们取 $n = 2j - 1$,$y_2(x)$ 截取为最高次项为 x^{2j-1} 的多项式,我们取 $c_1 = 0$,即取 $y_2(x)$ 的截断多项式为 Hermite 方程的解.

我们利用系数的递推公式,我们把系数表成

$$a_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2}a_n$$

$$a_{n-2j} = \frac{(-1)^j n(n-1)\cdots(n-2j+1)}{2^j \cdot 2 \cdot 4\cdots 2j}a_n \tag{19.4.21}$$

并利用

$$n(n-1)\cdots(n-2j+1) = \frac{n!}{(n-2j)!}$$

和

$$2 \cdot 4\cdots(2j) = 2^j j!$$

我们把满足自然边界条件 $|y(x)| < \infty$ 所对应方程本征值 n 的解写成

$$y_n(x) = a_n \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j n!}{2^{2j} \cdot j!(n-2j)!}x^{n-2j} \tag{19.4.22}$$

其中

$$N = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{19.4.23}$$

若我们选特殊的 a_n，取 $a_n = 2^n$ 时，解 $y_n(x)$ 的形式记为 $y_n(x) = H_n(x)$.

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j n!}{j!(n-2j)!}(2x)^{n-2j} \tag{19.4.24}$$

$H_n(x)$ 称为 n 阶 Hermite 多项式.

由函数变换式(19.4.9)式及变量 ξ 的定义式(19.4.5)式，我们可得到方程(19.4.12)式所对应的每一个 n 的本征值 $\lambda_n = 2n+1$ 的原 Schrödinger 方程(19.4.4)式的本征函数解 $\varphi_n(x)$ 为

$$\varphi_n(x) = N_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) \tag{19.4.25}$$

其中 N_n 为归一化系数，N_n 的值为

$$N_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{19.4.26}$$

N_n 的计算详见本节附录.

由本征值 λ 的定义式(19.4.7)式可得

$$\lambda_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega} = 2n+1, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{19.4.27}$$

即

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{19.4.28}$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，$E_n$ 为相应于本征值 λ_n 的线性谐振子的本征能量.

特别要指出的是当 $n=0$ 时，$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$，是量子谐振子的基态能量，或称为零点能. 它是对具有线性谐振子势的 Schrödinger 方程的严格求解得到的，是量子谐振子系统所特有的基态能量，即这一基态能量不为零，与经典力学中的谐振子的能量的性质有着根本的区别，它没有经典力学的对应. 关于这方面的讨论，将在量子力学的学习中给出.

* 附录：Hermite 多项式的性质

(1) Hermite 多项式的生成函数为

$$e^{-z^2+2xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n \tag{19.5.1}$$

其证明可由生成函数 e^{-z^2+2xz} 在 $z=0$ 点作 Taylor 展开直接求证.

(2) Hermite 多项式的微分表达式——Rodriguez 公式.

由生成函数的表达式可知

$$H_n(x) = \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2+2xz}\Big|_{z=0} = e^{x^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-(z-x)^2}\Big|_{z=0}$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-(z-x)^2}\Big|_{z=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{19.5.2}$$

此式为 $H_n(x)$ 的微分表达式.

由此表达式,我们很容易得到

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2 = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^2 - 12x$, …

$H_n(x)$ 的最高次项为

$$(-1)^n e^{x^2} (-2x) e^{-x^2} = 2^n \cdot x^n \tag{19.5.3}$$

(3) Hermite 多项式的正交关系.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} n^2 n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \delta_{mn} \tag{19.5.4}$$

这是归一化系数为 $(\sqrt{\pi} 2n^2 n!)^{-\frac{1}{2}}$,带权重 e^{-x^2} 的 $H_n(x)$ 的正交关系.

证: 由 $H_n(x)$ 的生成函数可知

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) \frac{t^m}{m!} \tag{19.5.5}$$

$$e^{-z^2+2xz} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} \tag{19.5.6}$$

两式相乘

$$e^{-t^2+2xt-z^2-2xz} = \sum_{m,n=0}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \frac{1}{m!n!} t^m z^n \tag{19.5.7}$$

又

$$e^{-t^2+2xt-z^2-2xz} = e^{2tz+x^2-(z+t-x)^2} \tag{19.5.8}$$

对(19.4.36)式两边同乘 e^{-x^2},并对 x 积分,有

$$e^{2tz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+z-x)^2} dx = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m z^n}{m!n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \tag{19.5.9}$$

此等式左边的积分为

$$e^{2tz}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t+z-x)^2}dx = e^{2tz}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\sum_{n=0!}^{\infty}\frac{(2tz)^n}{n!} \tag{19.5.10}$$

因此可得

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n t^n z^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m z^n}{m!n!}\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx \tag{19.5.11}$$

比较此等式两端,可得正交关系(19.5.4)式,即归一化的 Hermite 多项式为

$$N_n H_n(x), \quad N_n = [\sqrt{\pi}2^n n!]^{-\frac{1}{2}} \tag{19.5.12}$$

其中 N_n 为归一化因子.

(4) Hermite 多项式的递推关系

由 Hermite 多项式的生成函数(19.5.1)式,两边对 z 进行求导就得到$H_n(x)$的基本递推关系

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n+1}(x) = 0 \tag{19.5.13}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{19.5.14}$$

第十九章习题

19.1 分别用 Fourier 变换法和 Laplace 变换法求解下面一维无界空间中的输运问题.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty$$

19.2 用 Fourier 变换法求解一维无界弦的受迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\big|_{t=0} = \nu(x) \end{cases}$$

19.3 设有两根匀质同质的半无界杆,侧面均绝热,温度分别为 0 和 u_0,在 $t=0$ 时刻,将两杆的端点相接,求 $t>0$ 时杆中各点的温度分布.

19.4 无界静止弦在 $t=0$ 时刻,在 $x=x_0$ 处受到冲量为 I 的冲击作用,试求解弦的振动.(提示:由 $t=0^-$ 到 $t=0$ 时刻动量的变化等于冲量,可得 $u_t\big|_{t=0} = \frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)$,并可由 D'Alembert公式求解.)

19.5 场量 $u(x,t)$满足下列方程,可设方程有行波解 $u(\xi)$,其中 $\xi = x - at$,试把下列方程化为行波变量 ξ 的常微分方程

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\gamma u(1-u)=0$

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u^2=0$

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\beta\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0$

19.6 (1) 请把 x^{2k}, $k=0,1,2,\cdots$, 展成 Hermite 多项式的偶次项级数

$$x^{2k}=\frac{(2k)!}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(k-n)!}$$

(2) 请把 x^{2k+1}, $k=0,1,2,\cdots$ 展成 Hermire 多项式的奇次项级数

$$x^{2k+1}=\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\sum_{n=0}^{k}\frac{H_{2n+1}(k)}{(2n+1)!(k-n)!}$$

19.7 请证明:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\begin{cases}\dfrac{2\pi n!}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!}, & n\text{ 为偶数}\\ 0, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xH_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{2\pi(n+1)!}{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

19.8 请证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}H_n(x)H_n(x)dx=\sqrt{\pi}2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

*第二十章　非线性数学物理方程初步

物理学发展至今，随着计算机的迅速发展，人们探索自然现象的手段已发展到用三大方法来研究物理规律. 即物理实验的方法、理论物理的方法和计算机计算模拟的方法. 但是三种方法都离不开数学物理方法，我们要用物理学的观点通过数学的方法，从理论上去研究自然界现象和物理实验中观测到的物理规律. 由于观测到的这些自然现象和实验结果成因的复杂性，从本质上讲都是非线性现象. 而我们前面介绍的线性空间和线性算子及线性数学物理方程，只是对这些现象和结果描述的一种线性近似. 因此我们学习了解物理学中的非线性问题，对我们深入了解物理学的内容是十分必要和有益的.

用非线性数学物理方程来描述非线性现象是一个非常大的领域. 至今人们还在不断地探索研究中. 而非线性数学物理方程涉及的面也非常广. 通常我们遇到的有非线性常微分方程，非线性偏微分方程，非线性差分方程（通常又被称为非线性映射或非线性迭代方程），非线性函数方程等等.

自然界中的非线性现象是十分丰富多彩的，用来描述这些现象的非线性数学物理方程的解也是复杂多样的. 由于非线性方程存在着非线性项，这种非线性项的自相互作用使得非线性方程的解变得十分复杂多样，求解非线性方程比求解线性方程要困难得多. 非线性方程再也不存在线性微分方程理论中解的存在唯一性定理，线性微分方程中解的叠加性原理在非线性方程中已不复存在.

举一个形式简单的非线性方程

$$u_t - au^2 = 0 \tag{20.0.1}$$

如果 u_1 和 u_2 都是该方程的解，即 u_1 和 u_2 都满足方程，则它们最简单的线性叠加 $u_1 + u_2$，就不满足方程. 容易验证，把 $u_1 + u_2$ 代入方程左边

$$\begin{aligned}&(u_1 + u_2)_t - a(u_1 + u_2)^2\\ &= (u_1)_t - a(u_1)^2 + (u_2)_t - a(u_2)^2 - 2au_1u_2\\ &= 2au_1u_2 \neq 0\end{aligned}$$

即 $u_1 + u_2$ 不是方程的解. 这正是非线性项 u^2 自相互作用的结果.

迄今为止，我们对非线性方程解空间的结构和性质仍知之甚少. 不能像线性方程那样用一种统一的方法来求解非线性方程. 而且在大多数情况下，非线性方程的解析解很难求得，很多只能依赖于计算机的数值求解.

半个世纪以来，由于科学技术的迅速发展，要求人们去探索出现的各种非线性现象逐渐增多，一大批科学工作者投入到非线性领域的研究中. 因此对非线性数学物理方程的研究有了很大的进展. 特别是用计算机来研究非线性差分迭代方程和对非线性发展方程（一类随时间演变的非线性偏微分方程）的研究，有了丰硕的成果. 在对非线性发展方程的研究中，找到了一些构造解析解的方法. 这些解析解能够去解释一些非线性的现象，大大地推进了人们对非线性现象物理机理的理解.

在本章中，主要给出简单的非线性问题的概念，并介绍较为简单的求解非线性发展方程的方法.

§20.1　Huygens（惠更斯）等时摆问题

大家所熟悉的重力摆，如图 20.1.1 所示，摆长为 l，摆锤质量为 m，摆运动轨迹 s 为圆周的一段弧，故此摆也称为圆周摆. 很容易由牛顿定律写出摆的运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial s} \tag{20.1.1}$$

其中势能 V 的形式为

$$V = mgy(s) \tag{20.1.2}$$

由于 $s = l\cdot\theta$，且 l 为一常数，故变量 s 可取为 θ，即

$$y(s) = y(\theta) = l(1-\cos\theta) \tag{20.1.3}$$

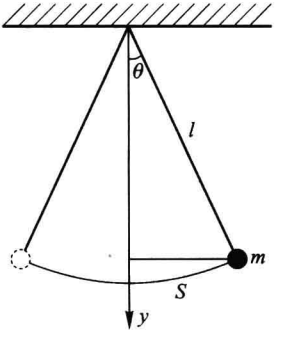


图 20.1.1

因此很容易得到以 θ 为 t 的函数 $\theta=\theta(t)$ 的运动方程——圆周摆方程

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\sin\theta = 0 \tag{20.1.4}$$

其中 $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$.

这是一个非线性方程，当我们把 $\sin\theta$ 在 $\theta=0$ 点展开时，方程可改写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right) = 0 \tag{20.1.4'}$$

如果摆的最大摆角 $\theta = \theta_0$，当 $\theta_0 \ll 1$ 时，$\sin\theta \sim \theta$，此时我们可以把这一非线性方程近似的线性化，方程变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \tag{20.1.5}$$

这就是人们所熟悉的线性单摆方程. 由此方程可得到单摆的周期

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{20.1.6}$$

这一单摆的周期 T 与 θ_0 的位置无关，它只是近似等时性的周期. 这种近似的误差将在后面的计算中给出.

现在我们来求非线性方程(20.1.4)式所表示的圆周摆准确的周期表达式.

由方程(20.1.4)式两边乘$\frac{d\theta}{dt}$，进行积分可得

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2\cos\theta + c \tag{20.1.7}$$

设方程(20.1.4)式的初始条件为

$$\theta(t)\big|_{t=0} = 0 \tag{20.1.8}$$

且达到最大摆角 θ_0 时

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\theta_0} = 0 \tag{20.1.9}$$

此条件相当于当 $t:0\to\frac{T}{4}$时，$\theta:0\to\theta_0$. 即在$\frac{1}{4}$周期时

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = 0 \tag{20.1.10}$$

因此由(20.1.9)式即可定出(20.1.7)式中的 c

$$c = -2\omega^2\cos\theta_0$$

即可得

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{20.1.11}$$

当 $t:0\to\frac{T}{4}$时，$\theta:0\to\theta_0$，$\theta_0 < \frac{\pi}{2}$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\omega\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{20.1.12}$$

积分可得

$$T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\mathrm{d}\theta \tag{20.1.13}$$

这是圆周摆周期的解析表达式. 可看出 T 是不等时的,它依赖于最大摆角 θ_0. 这个表达式可以化为第一类椭圆积分. T 的级数表达式为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \cdots\right) \tag{20.1.14}$$

展开式的第一项即为线性单摆方程所给出的周期,而对 θ_0 依赖关系的误差可由后面的展开项进行估计. 从上面圆周摆方程的严格解,我们得到了圆周摆不是等时摆的重要结论.

Huygens 在 1673 年提出了等时摆的问题:重力摆应走什么样的弧线轨迹,才能使重力摆是严格的等周期的. Huygens 本人解决了此问题,给出了严格的等时摆的轨线是旋轮线即摆线. 这是历史上第一个提出并完整解决的物理学的反问题.

考察线性圆周摆方程的形式,对重力摆方程(20.1.1)式中的势 V 的形式(20.1.2)式取

$$y(s) = \frac{s^2}{2l} \tag{20.1.15}$$

则可以得到重力摆的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}s = 0 \tag{20.1.16}$$

这是一个严格的关于 $s(t)$ 的等周期的振动方程,其周期 T 为严格等时的,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{20.1.17}$$

什么样的轨线 s 才能满足方程(20.1.15)式呢?

观察一个半径为 $\frac{l}{4}$ 的圆在 x 轴上作无滑动的纯滚动. φ 为圆心角,圆上一点(例如起始时刻与 x 轴相切的点)在 $x-y$ 平面上画出的轨迹,如图 20.1.2 所示,称为旋轮线,亦称摆线.

此旋轮线的轨线方程为

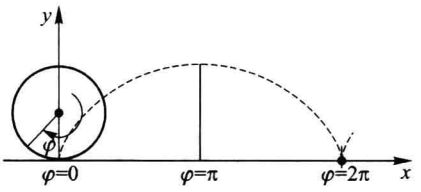


图 20.1.2

$$x = \frac{l}{4}(\varphi + \sin\varphi) \tag{20.1.18}$$

$$y = \frac{l}{4}(1 - \cos\varphi) \tag{20.1.19}$$

由

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \tag{20.1.20}$$

可得

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 (2 + 2\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi^2$$

即

$$\mathrm{d}s = \frac{l}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$$

积分可得

$$s = l\sin\frac{\varphi}{2} \tag{20.1.21}$$

由(20.1.18)式可得

$$y = \frac{l}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 \tag{20.1.22}$$

则即可得到

$$y(s) = \frac{s^2}{2l}$$

即与(20.1.14)式自洽. 故旋轮线是严格的重力等时摆的轨线.

对单摆问题的研究说明了真实的物理过程是非线性的,线性化的物理模型是真实物理过程的一种线性近似. 能够线性化的物理过程,其线性化模型反映了物理过程的主要性质. 由于对线性空间的性质我们了解比较透彻,给我们的研究带来了极大的方便.

§20.2　KdV 方程和孤立波

KdV 方程的孤立波解，是用非线性方程来描述自然界中非线性现象的典型范例.

1844 年，在英国科学促进协会的会议上，英国科学家、造船工程师 J. S. Russell（卢舍）提交了题为“Report on Waves”（波的报导）的报告. 讲述了他在 1834 年观察到的一个奇特的波动现象. 他观察到由马拉着的船在一条狭窄平静的运河中行驶，当船突然停止行驶时，船头所推出的巨大水波浪快速的滚滚向前，而且保持了轮廓分明的外形，以不变的形状和速度沿着运河向前运动. 他骑马一直跟踪观察该奇特的水波，在离产生水波处约 1 ~ 2 英里的运河拐弯处水波才消失. Russell 把这一奇特的波的运动形式称为孤立波. 这是第一次对孤立波的描述.

1895 年，瑞典的数学教授 Korteweg（科特伟）和他的博士生 deVries（德富里斯）通过对浅水波方程的研究，给出了浅水波单向传播的非线性方程即 KdV（Korteweg - deVries）方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{2}{3}\alpha u + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{20.2.1}$$

其中 $u = u(x,t)$ 为相对于静止水面的波峰的高度，h 是静水的深度，g 是重力加速度，α 和 σ 是与水的密度、表面张力等特性相关的常数. 由这一方程得到一维的孤立波的行波解. 这是第一个描写孤立波的数学模型.

我们作如下变换代入方程（20.2.1）式

$$u \to \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}\alpha, \quad x \to -\frac{x}{\sigma}, \quad t \to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\sigma}}t \tag{20.2.2}$$

就得到了现在大家熟悉的 KdV 方程的基本形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{20.2.3}$$

下面就讨论 KdV 方程（20.2.3）式的孤立波解.

解： 设方程具有行波解的形式

$$u(x,t) = w(\xi), \quad \xi = x - at \tag{20.2.4}$$

其中 a 为常数，且要求 $w(\xi)$ 具有边界性质：

当 $\xi \to \pm\infty$ 时，$w, \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}, \dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2}$ 均趋于零. 由

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -aw' \quad \left(w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = w'$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = w'''$$

则方程(20.2.3)式变为

$$-aw' + 6ww' + w''' = 0 \tag{20.2.5}$$

对此式进行积分,得

$$-aw + 3w^2 + w'' = c_1 \tag{20.2.6}$$

c_1 为一积分常数,由 w 的边界性质可知,$c_1 = 0$,故得

$$-aw + 3w^2 + w'' = 0 \tag{20.2.7}$$

将此方程两边乘以 w',再积分一次,可得

$$-\frac{a}{2}w^2 + w^3 + \frac{1}{2}w'^2 = c_2 \tag{20.2.8}$$

由 w 的边界性质,可定出 $c_2 = 0$,即得方程

$$-\frac{a}{2}w^2 + w^3 + \frac{1}{2}w'^2 = 0 \tag{20.2.9}$$

即

$$w'^2 = w^2(a - 2w) \tag{20.2.10}$$

由此方程可知,当 $w = \frac{a}{2}$ 时,$w' = 0$,即 $w = \frac{a}{2}$ 为极值. 同时将 $w = \frac{a}{2}$ 代入(20.2.7)式,可知

$$w'' = -\frac{a^2}{4} < 0 \tag{20.2.11}$$

故可知,$w = \frac{a}{2}$ 为 w 的极大值. 我们可定性的知道:当 ξ 由 $-\infty$ 变到 ∞ 时,$w(\xi)$ 由零开始变到极大值 $w = \frac{a}{2}$,之后又下降变到零,这是一个孤立波的图像.

由于 $w = \frac{a}{2}$ 为极大值,故

$$a - 2w \geqslant 0 \tag{20.2.12}$$

由(20.2.10)式可得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} = w\sqrt{a-2w} \tag{20.2.13}$$

即可求得

$$-\frac{2}{\sqrt{a}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{2w}{a}}\right) = \xi + c$$

即

$$\sqrt{1-\frac{2w}{a}} = \tanh\left[-\frac{\sqrt{a}}{2}(\xi + c)\right]$$

最后得

$$w(\xi) = \frac{a}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}(\xi + c)\right] \tag{20.2.14}$$

其中 c 为任意常数,取 $c = -\xi_0$,其图像如图 20.2.1 所示. ξ_0 为任一值时,就得到此图像,且 $w(\xi)$ 在 ξ_0 处有极大值为 $\frac{a}{2}$. 这就是孤立波解的图像. 这一解为 KdV 方程的行波解.

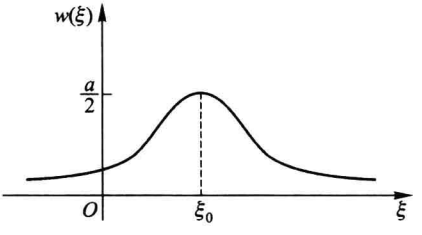


图 20.2.1

下面我们简单定性地从物理上分析孤立波的传播. 一个孤立波的波形(包括其他任何一个局域的波形)都可以通过 Fourier 分析变成多个不同频率的正弦波(或余弦波)的叠加. 这些不同频率的正弦波在介质中传播时,会发生频散(即色散),即不同频率的波在介质中是以不同速度传播的. 最终导致原来的波形的变化,KdV 方程中的频散项,即方程(20.2.3)式中的第三项,正是这一现象的体现. 但由于有非线性项的自相互作用,把这些色散的波聚拢起来. 从数学上看即非线性项的自相互作用抵消了色散项的作用,因此能够使孤立波的波形保持不变地向前传播. 如何使色散的波又聚拢起来,是至今仍在探讨的问题,也是人们对非线性现象继续深入研究的兴趣点之一.

§20.3 一类非线性方程的齐次平衡解法

由于描述非线性现象的非线性方程的领域太广. 方法繁多,我们仅以一维的非线性方程为例,做一些初步的介绍.

一、下面我们给出一部分物理学中常出现的一维非线性发展方程

1. KdV(korteweg – deVries)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{20.3.1}$$

这是描述有色散(也称频散)的流体力学的方程,$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$为色散项,$\beta$ 称为色散系数.

2. 广义热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial}{\partial x}\left(u^a\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{20.3.2}$$

其中 k 为导温系数,a 为一常数.

3. Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{20.3.3}$$

其中 $\alpha>0$ 为耗散系数,这是描述有耗散的非线性输运方程.

4. KdV – Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{20.3.4}$$

其中 α 为耗散系数,β 为色散系数. 这是描述既有耗散又有色散的非线性物理系统的方程.

5. KdV – Burgers – Kuramoto 方程(又称为 gKS 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \tag{20.3.5}$$

其中 α 为耗散系数,β 为色散系数,γ 为不稳定作用系数. 此方程用来描述带有耗散、色散和不稳定作用的系统,可用来描述化学反应扩散系统.

6. Fisher 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\gamma u(1-u)=0 \tag{20.3.6}$$

其中 α 为扩散系数、γ 为反应系数. 此方程又称为非线性反应扩散方程.

7. Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0 \tag{20.3.7}$$

其中 a^2、α、β 均为大于零的常数. 这是描述非线性波动的方程.

8. 激波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{20.3.8}$$

这一形式简单的方程,是描述带有奇异性的一维冲击波或有断线的系统的非线性方程.

9. 非线性 Schrödinger 方程(简称为 NLS 方程)

$$\mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0 \tag{20.3.9}$$

这是描述非线性量子系统的方程.

10. Ginzburg – Landau 方程

$$\mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^2 u + \gamma u = 0 \tag{20.3.10}$$

其中 α、β、γ 皆为复数,α、γ 由色散关系而定,β(Landau 系数)为自相互作用系数. 它是经常用来描述相变系统(如超导、起流系统)的非线性方程.

11. Sin – Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0 \tag{20.3.11}$$

此方程最早由研究微分几何的曲率给出. 它可用来研究具有周期性 $\sin u$ 的自相互作用的非线性波动.

12. Kadomtsev – Petviashvili(KP)方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{20.3.12}$$

这是二维的 KdV 方程. 它虽然不是一维的非线性发展方程,是个二维的非线性发展方程,但由于与 KdV 方程有密切的关系,因此在此给予介绍.

二、一类非线性发展方程的齐次平衡解法

求解非线性方程是十分困难的,人们在求解的过程中发展了多种方法和技巧. 大家常用的一种办法就是构造非线性函数变换进行求解. 如何构造非线性函

数变换对非线性方程进行试探性求解,也发展了许多方法. 在这里我们仅介绍一种对部分一维的非线性方程,用齐次平衡法来构造变换函数进行试探性求解.

以下是齐次平衡原则求解的具体做法.

1. 对特定的一类非线性方程

$$P(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx},\cdots)=0 \tag{20.3.13}$$

P 代表由括号内的函数或它们的乘积组成的多项式. 齐次平衡法只适用于这类方程,例如前面例举的(20.3.1)式—(20.3.10)式都属此类方程,而 Sin - Gordon 方程不属于这一类.

2. 设此类方程有解的形式为

$$u(x,t)=\sum_{m+n=1}^{N} a_{m+n}\frac{\partial^{(m+n)}}{\partial x^m\partial t^n}f(\varphi(x,t)) \tag{20.3.14}$$

其中 m,n 为非负整数,式中出现的 $\varphi(x,t)$ 的最高偏微商的幂次项为 $f^{(N)}(\varphi)\varphi_x^m\varphi_t^n, n+m=N$. $f(\varphi)$ 和 $\varphi(x,t)$ 为要通过齐次平衡原则来求解的待求函数,N 为通过齐次平衡原则待定的非负整数. a_{m+n} 为系数,为简单起见,通常取最高偏导数项 $f^{(N)}(\varphi)$ 的系数 $a_N=1$.

3. 齐次平衡原则

将假设的解 $u(x,t)$ 的形式(20.3.14)式代入方程(20.3.13)式中,要求方程中的非线性项与偏微商的最高阶项要达到部分平衡. 即取(20.3.14)式中 $\varphi(x,t)$ 的最高偏微商幂次项 $f^{(N)}(\varphi)\varphi_x^m\varphi_t^n$ 项进行运算,使非线性项中 φ_x 和 φ_t 的幂指数与 $u(x,t)$ 最高偏微商项中 φ_x 的幂指数和 φ_t 的幂指数分别相等,确定 m 和 n 的数值,从而确定 $N=m+n$ 的具体数值,这就是部分平衡的原则.

下面我们以 Burgers 方程为例来说明这一平衡原则. 对 Burgers 方程

$$u_t+uu_x-au_{xx}=0 \tag{20.3.15}$$

设解 $u(x,t)$ 的形式中最高阶微商的指标数为 $N=m+n$,取 $a_{m+n}=1$,则最高阶微商项为 $f^{(N)}(\varphi)\varphi_x^m\varphi_t^n$,将其代入方程进行运算,则方程中的非线性项

$$uu_x=f^{(N)}f^{(N+1)}\varphi_x^{2m+1}\varphi_t^{2n}+\cdots \tag{20.3.16}$$

方程中最高偏微商项为

$$u_{xx}=f^{(N+2)}\varphi_x^{m+2}\varphi_t^n+\cdots \tag{20.3.17}$$

由部分平衡原则要求,φ_x 的幂次要平衡,φ_t 的幂次也要平衡,即

$$2m+1=m+2,\quad 2n=n$$

可得 $m=1,n=0$,从而得 $N=m+n=1$,因此我们得到 Burgers 方程的解 $u(x,t)$ 由(20.3.14)式可表示的形式

$$u(x,t) = f'(\varphi)\varphi_x(x,t) \tag{20.3.18}$$

4. 由上面所确定的 N 可得到的解的形式(20.3.14)式,代入方程(20.3.13)式中,可得方程

$$F(f',f'',\cdots,f^{(N)},\varphi_t,\varphi_{tt},\cdots,\varphi_x,\varphi_{xx},\cdots,\varphi_{xt},\cdots) = 0 \tag{20.3.19}$$

F 为括号内的函数或它们的乘积所组成的多项式.

在此方程中,合并 $\varphi(x,t)$ 的偏导数的最高幂次项,并令该幂次项的系数为零,这就是要求 $\varphi(x,t)$ 的偏导数的最高幂次项达到平衡,得到 $f(\varphi)$ 所满足的常微分方程. 解此常微分方程可得到特解 $f(\varphi)$ 的具体函数形式. 对多数非线性发展方程来说,得到的 $f(\varphi)$ 为 φ 的对数函数类的形式. 同时导出 $f^{(i)}\cdot f^{(j)}$ 与 $f^{(i+j)}$ 关系.

我们仍以 Burgers 方程为例,将上一步得到的 $N=1$ 的解的形式(20.1.18)式代入 Burgers 方程(20.3.15)式中,可得方程

$$(f'\cdot f''-af''')\varphi_x^3+f'^2\varphi_x\varphi_{xx}-3af''\varphi_x\varphi_{xx}+f''\varphi_x\varphi_t+f'(\varphi_{xt}-a\varphi_{xxx})=0 \tag{20.3.20}$$

根据平衡原则,我们要求 φ_x 的最高幂次 ϕ_x^3 项要平衡,即令

$$f'\cdot f''-af'''=0 \tag{20.3.21}$$

解此方程,首先把此方程变为

$$\left(\frac{1}{2}f'^2-af''\right)'=0 \tag{20.3.22}$$

可得该非线性常微分方程的一个特解

$$f(\varphi) = -2a\ln\varphi \tag{20.3.23}$$

同时可得 $f(\varphi)$ 满足关系

$$f'^2 = 2af'' \tag{20.3.24}$$

5. 利用上面求得的 $f(\varphi)$ 的函数形式所导出的 $f^{(i)}\cdot f^{(j)}$ 与 $f^{(i+j)}$ 的关系,把方程(20.3.19)式中关于 $f(\varphi)$ 的导数组成非线性项化为 $f(\varphi)$ 的较高阶的导数项,即把 $f(\varphi)$ 的非线性项线性化. 分别合并 $f(\varphi)$ 的各阶导数项,并令 $f(\varphi)$ 的各阶导数项的系数为零,得到一组关于 $\varphi(x,t)$ 的偏微分方程组

$$H_i(\varphi_t,\varphi_{tt},\cdots,\varphi_x,\varphi_{xx},\cdots,\varphi_{tx},\cdots)=0,\quad i=1,\cdots,h \tag{20.3.25}$$

h 为在方程(20.3.19)式中扣除了 $\varphi(x,t)$ 偏微商最高幂次后,余下的方程中把关于 $f(\varphi)$ 的非线性项化为 $f(\varphi)$ 的高阶导数项后,所得的方程中关于 $f(\varphi)$ 的最高阶导数的阶数.

方程(20.3.25)式可能是我们已知可求解的线性偏微分方程组,对此情况

我们很容易求得解 $\varphi(x,t)$ 的形式. 但一般情况下方程(20.3.25)式仍是关于 $\varphi(x,t)$ 的超定的齐次型的偏微分方程组, 在这种情况下我们通常可设 $\varphi(x,t)$ 有如下试探解的形式

$$\varphi(x,t) = 1 + e^{\alpha x+\beta t+\gamma} \tag{20.3.26}$$

代入方程组(20.3.25)式,以确定系数 a_i 和 α,β,γ,其中 a_i 为(20.3.14)式中的系数 a_{m+n}.

对于解出的 $\varphi(x,t)$,结合前面求出的 $f(\varphi)$ 的形式,代入最先假设的解(20.3.14)式中,即可得到非线性方程(20.3.13)式的特解. 一般说来,对试探解(20.3.26)式,得到的是孤立波的行波解.

由于方程组(20.3.25)式是超定的,因此对于系数 $a_i,b,\alpha,\beta,\gamma$ 的不同选择,得到的是不同形式的孤立波解.

当然试探解 $\varphi(x,t)$(20.3.26)式和试探解 $u(x,t)$(20.3.14)式可以有不同的构造,即不限于这两种形式,可以得到多种类型的非线性方程的解,有兴趣的读者可以参考这一方面众多的专著,在这就不再一一介绍.

我们仍回到 Burgers 方程的解中,由上一步得到的方程(20.3.20)式,当扣除掉 φ_x^3 已平衡(即系数取零)的项后,可得方程

$$f'^2\varphi_x\varphi_{xx} + f''\varphi_x(\varphi_t - 3a\varphi_{xx}) + f'(\varphi_{tx} - a\varphi_{xxx}) = 0 \tag{20.3.27}$$

利用 f' 与 f'' 的关系式(20.3.24)式,可把第一项中的 f'^2 化为 $f'^2 = 2af''$,代入上式方程,则方程可变为

$$f''\varphi_x(\varphi_t - a\varphi_{xx}) + f'\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_t - a\varphi_{xx}) = 0 \tag{20.3.28}$$

由 f'' 和 f' 的系数为零,即可得 φ 满足的方程

$$\varphi_t - a\varphi_{xx} = 0 \tag{20.3.29}$$

由于 Burgers 方程中 a 为耗散系数,$a>0$,故方程(20.3.29)式是大家所熟悉的输运方程. 这一方程的解是为大家所熟知的,因此我们把求得的解 $\varphi(x,t)$ 代入到(20.3.23)式中

$$f(\varphi) = -2a\ln\varphi$$

再把 f 的形式代入(20.3.18)式,就得到 Burgers 方程的一个特解

$$u = -2a\frac{\varphi_x}{\varphi} \tag{20.3.30}$$

其中 $\varphi(x,t)$ 是方程(20.3.29)式的解. 这一解的形式

$$u(x,t) = -2a\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi(x,t) = -2a\frac{\varphi_x}{\varphi} \tag{20.3.31}$$

是著名的 Cole - Hopf 变换，这是 Hopf 在 1950 年和 Cole 在 1951 年研究 Burgers 方程时，提出的变换，即对 Burgers 方程的解 $u(x,t)$，进行 Cole - Hopf 变换（非线性函数变换），把对 Burgers 方程的求解化为对线性输运方程的求解，这一变换当时被广泛的用在一类非线性方程的求解中.

齐次平衡法中的函数变换，已经大大地扩展了，是一类非线性偏微分方程(20.3.13)式寻求特解的较为有效的方法. 但齐次平衡法并非对这类方程完全适用，例如激波方程(20.3.8)式用齐次平衡法解就失效.

下面我们再举一例，给出用齐次平衡法求解 KdV - Burgers 方程特解的过程.

例 20.3.1：求解 KdV - Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxx} = 0 \tag{20.3.32}$$

解：由于方程的非线性项 uu_x 和偏微分的最高阶项 u_{xxx} 都不含有对 t 的偏导数，因此我们设解的形式为

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(\varphi(x,t)) \tag{20.3.33}$$

由平衡原则取解的最高偏微分项 $f^{(N)}(\varphi)\varphi_x^N$ 进行运算.

$$u_x = f^{(N+1)}\varphi_x^{N+1}$$

$$u_{xxx} = f^{(N+3)}\varphi_x^{N+3}$$

有非线性项 $u \cdot u_x = f^{(N)} f^{(N+1)} \varphi_x^{2N+1}$ 与 u_{xxx} 进行平衡，要求 φ_x 项的幂次相等，有

$$2N + 1 = N + 3 \Rightarrow N = 2$$

因此假设解的形式为

$$u(x,t) = f_{xx} + af_x + b = f''(\varphi)\varphi_x^2 + f'\varphi_{xx} + af'\varphi_x + b \tag{20.3.34}$$

把这一假设的试探解代入 KdV - Burgers 方程(20.3.32)式，

$$u_t = f^{(3)}\varphi_x^2\varphi_t + f''(2\varphi_x\varphi_{xt} + \varphi_{xx}\varphi_t + a\varphi_x\varphi_t) + f'(\varphi_{xxt} + a\varphi_{xt}) \tag{20.3.35}$$

$$\begin{aligned} uu_x = {} & f''f^{(3)}\varphi_x^5 + f'^2(3\varphi_x^3\varphi_{xx} + a\varphi_x^4) + f'f^{(3)}(\varphi_x^3\varphi_{xx} + a\varphi_x^4) + \\ & bf^{(3)}\varphi_x^3 + f' \cdot f''(\varphi_x^2\varphi_{xxx} + 5a\varphi_x^2\varphi_{xx} + 3\varphi_x\varphi_{xx}^2 + a^2\varphi_x^3) + \\ & f''(3b\varphi_x\varphi_{xx} + ab\varphi_x^2) + f'^2(\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + a\varphi_{xx}^2 + a\varphi_x\varphi_{xxx} + a^2\varphi_x\varphi_{xx}) + \\ & f'(b\varphi_{xxx} + ab\varphi_{xx}) \end{aligned} \tag{20.3.36}$$

$$-\alpha u_{xx} = -\alpha[f^{(4)}\varphi_x^4 + f^{(3)}(6\varphi_x^2\varphi_{xx} + a\varphi_x^3) + f''(3\varphi_{xx}^2 + 4\varphi_x\varphi_{xxx} + 3a\varphi_x\varphi_{xx}) + f'(\varphi_{xxx} + a\varphi_{xxx})] \tag{20.3.37}$$

$$-\beta u_{xxx} = -\beta[f^{(5)}\varphi_x^5 + f^{(4)}(10\varphi_x^3\varphi_{xx} + a\varphi_x^4) + f^{(3)}(15\varphi_x\varphi_{xx}^2 + 10\varphi_x^2\varphi_{xxx} + 6a\varphi_x^2\varphi_{xx}) + f''(5\varphi_x\varphi_{xxxx} + 10\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 4a\varphi_x\varphi_{xxx} + 3a\varphi_{xx}^2) + f'(\varphi_{xxxxx} + a\varphi_{xxxx})] \tag{20.3.38}$$

观察以上方程(20.3.35)式—(20.3.38)式右边的各项,找出 φ_x 的最高幂 φ_x^5 项,进行合并得

$$(f''f^{(3)} - \beta f^{(5)})\varphi_x^5$$

再一次用平衡原则,即要求其系数为零,即得关于 f 的非线性常微分方程

$$f''f^{(3)} - \beta f^{(5)} = 0 \tag{20.3.39}$$

这一方程有一特解为

$$f = -12\beta\ln\varphi \tag{20.3.40}$$

再观察方程右边各项中所含有 f 导数的非线性项 $f''^2, f'f'', f'f^{(3)}, f'^2$,并由 f 的解(20.3.40)式可得

$$f''^2 = 2\beta f^{(4)},\quad f'f'' = 6\beta f^{(3)},\quad f'f^{(3)} = 4\beta f^{(4)},\quad f'^2 = 12\beta f'' \tag{20.3.41}$$

把这些关系代入(20.3.35)式—(20.3.38)式中,并扣除满足(20.3.39)式的 ϕ_x^5 项,KdV - Burgers 方程变为

$$f^{(4)}(-\alpha + 5\beta a)\varphi_x^4 + f^{(3)}[\varphi_x^2\varphi_t + (b - \alpha a + 6\beta a^2)\varphi_x^3 - 4\beta\varphi_x^2\varphi_{xxx} + (24\beta a - 6\alpha)\varphi_x^2\varphi_{xx} + 3\beta\varphi_x\varphi_{xx}^2] + f''[2\varphi_x\varphi_{xt} + \varphi_{xx}\varphi_t + a\varphi_x\varphi_t + (3b - 3\alpha a + 12\beta a^2)\varphi_x\varphi_{xxx} + ab\varphi_x^2 + 2\beta\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + (9\beta a - 3\alpha)\varphi_x + (8\beta a - 4\alpha)\varphi_x\varphi_{xxx} - 5\beta\varphi_x\varphi_{xxxx}] + f'[-\beta\varphi_{xxxxx} - (\alpha + \beta a)\varphi_{xxxx} + (b - \alpha a)\varphi_{xxx} + \varphi_{xxt} + ab\varphi_{xx} + a\varphi_{xt}] = 0 \tag{20.3.42}$$

令上式中 $f^{(4)}, f^{(3)}, f'', f'$ 各项系数为零. 首先在 $f^{(4)}$ 的系数中只要取

$$a = \frac{\alpha}{5\beta} \tag{20.3.43}$$

则该项为零. 由于 α、β 为 KdV - Burgers 方程中的系数. 这样我们已定出 a 的值. 将 a 的值代入方程(20.3.42)式中,并假设 $\varphi(x,t)$ 有如下试探解的形式

$$\varphi(x,t) = 1 + e^{kx+ct} \tag{20.3.44}$$

代入(20.3.42)式中,由 $f^{(3)}$、f''和 f'项的系数为零所得的三个方程,我们可以求得待定参数 b,k,c 即

$$\beta k^3 + \frac{6}{5}\alpha k^2 - \left(b + \frac{\alpha^2}{25\beta}\right)k - c = 0 \tag{20.3.45}$$

$$\beta k^4 + \frac{6}{5}\alpha k^3 - \left(b + \frac{\alpha^2}{25\beta}\right)k^2 - \left(\frac{\alpha b}{15\beta} + c\right)k - \frac{\alpha}{15\beta}c = 0 \tag{20.3.46}$$

$$\beta k^4 + \frac{6}{5}\alpha k^3 - \left(b + \frac{\alpha^2}{5\beta}\right)k^2 - \left(\frac{\alpha b}{5\beta} + c\right)k - \frac{\alpha}{5\beta}c = 0 \tag{20.3.47}$$

这三个方程并非独立,由这三个方程可化为

$$c + bk = \beta k^3 + \frac{6}{5}\alpha k^2 - \frac{\alpha^2}{25\beta}k \tag{20.3.48}$$

$$c + bk = \frac{6}{5}\alpha k^2 \tag{20.3.49}$$

由此两个方程可解得

$$k = \mp\frac{\alpha}{5\beta}, \quad c = \frac{6}{125}\cdot\frac{\alpha^3}{\beta^2} \pm \frac{\alpha}{5\beta}b \tag{20.3.50}$$

b 为任意常数.

将所求得的 k 和 c 代入(20.3.44)式,并将(20.3.44)式和 f 的形式(20.3.40)式代入解 $u(x,t)$(20.3.34)式中,可得到 KdV - Burgers 方程的两个精确的孤立波解

$$u(x,t) = -\frac{3\alpha^2}{25\beta}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{5\beta}x - \left(\frac{\alpha b}{5\beta} \pm \frac{6\alpha^3}{125\beta^2}\right)t\right] +$$

$$\frac{6\alpha^2}{25\beta}\tanh\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{5\beta}x - \left(\frac{\alpha b}{5\beta} \pm \frac{6\alpha^3}{125\beta^2}\right)t\right] \pm \frac{6\alpha^2}{25\beta} + b \tag{20.3.51}$$

本节只介绍了齐次平衡法解非线性发展方程的一般步骤. 对构造解的非线性函数变换,也只介绍了一种构造形式(20.3.14)式. 在此基础上,人们扩展了多种解的函数变换的形式,得到了这一类方程的多种多样的解. 同时齐次平衡原则也经常被用到非线性方程的双曲函数展开法和椭圆函数展开法中.

半个多世纪以来,人们通过各种方法求解非线性偏微分方程的精确解.除了上面介绍的构造特殊的函数变换来求解外,还有根据方程的某些对称性构造相似变换以求得方程的自相似解;还有利用量子力学中的散射反演方法来求解非线性方程,通常被称为反散射(或是逆散射)解法;还有通过不同方程之间的 Bäcklund 变换和同一方程不同解之间的 Bäcklund 变换,从方程的已知解中求得新解等等.由于非线性偏微分方程在自然界和物理学中有着广泛的应用,它在数学物理领域中形成了一个多彩多姿的重要分支.

*第五篇　变分法初步

我们在前一篇介绍数学物理方程时曾指出，一个物理系统的物理量或场量，其满足的方程不仅可由实验定律得到，还可以通过另一途径，即从理论中根据物理系统所必须满足的物理规则（如在相对论的系统中必须满足 Lorentz（洛伦兹）不变性，在有规范变换的系统中要求满足规范不变性等）构造系统的 Lagrange 量（拉格朗日量，或简称拉氏量）或系统的 Hamilton 量（哈密顿量），由变分原理导出物理系统满足的运动方程. 也可由此出发，根据系统的某些对称性，去研究与这些对称性相关的该物理系统的某些特性. 这种研究方法，在复杂的物理系统和量子理论的研究中尤为重要，它是物理理论研究最基本的方法之一. 在本篇中我们将介绍这一理论研究方法的数学基础——变分法.

第二十一章　泛函的变分

§21.1　泛函的概念

“泛函”这一概念是“函数”概念的推广. 我们知道函数（单变量函数）是指由数域 K（通常是实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$）到 K 上的映射. 泛函从较广的意义上可定义为从线性空间 L 到数域 K 上的映射，记为 $F[L]$.

$$F[L]:\quad L\to K \tag{21.1.1}$$

线性空间当然包含了 $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ 和定义在它们上面的函数空间，例如 Hilbert 空间.

在本课程中所介绍的泛函是狭义的泛函而且是实泛函，它是指实函数的集合到实数域上的映射. 设定义在 $\mathbf{R}^n$ 上 k 阶连续可微的实函数的集合记为 $\mathbf{C}^k(\mathbf{R}^n)$，则此映射记为

$$\mathbf{C}^k(\mathbf{R}^n) \to R \tag{21.1.2}$$

若 $x \in R^n$,(x 为浓缩写法. 即 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$), $y(x)$ 为定义在 n 维实空间中 k 阶连续可微的实函数,$y(x) \in C^k(R^n)$,则泛函 $F[y(x)]$ 为

$$F[y(x)]: y(x) \mapsto a, \quad a \in R \tag{21.1.3}$$

$y(x)$ 称为**泛函** $F[y(x)]$ **的宗量**,泛函的**定义域**称为**容许函数类**. 上式表示,对于容许函数类中的每一个确定的函数 $y(x)$,泛函 $F[y(x)]$ 有一确定的实数值 a. 我们在本课程介绍的实线性泛函只是泛函中较为简单的一类. 实际上泛函对我们并不陌生,我们在数学分析中所接触到的大量的定积分,就是泛函的例子,如一维空间中的函数 $y(x)$ 的定积分就是泛函 $F[y(x)]$:

$$F[y(x)] = \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x \tag{21.1.4}$$

对于不同的 $y(x)$,这一积分值不同,这一泛函 F 就是定积分这种映射,它把 $y(x)$ 具体地映射到一个实数值,即定积分值上.

通俗地讲,"泛函"就是以一类函数作为自变量的函数,或简单地说泛函就是函数的函数.

§21.2 泛函的变分

类似在数学分析中用函数的微分来表示一个函数增量的线性主部一样,我们在这里要引入泛函变分的概念.

首先,我们要对泛函 $F[y(x)]$ 的宗量(或称自变量)$y(x)$,引入"**接近度**"的概念. 设宗量 $y(x)$ 都是定义在区域 $\Omega \in R^n$ 上的函数,对于某一宗量 $y_0(x)$,若有另一个宗量 $y(x)$ 非常的接近它,即在它们定义域 Ω 内,对于一切 $x \in \Omega$,存在着一个大于零的小量 δ,使得 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 之差的模

$$|y(x) - y_0(x)| < \delta$$

我们称宗量 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 有**零阶的接近度**.

同样地,对于 $y(x)$ 和 $y_0(x)$ 的一阶微商,若

$$|y'(x) - y_0'(x)| < \delta$$

我们称宗量 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 有**一阶的接近度**.

若对 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 的 k 阶微商,有

$$|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta$$

我们称 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 有 $\boldsymbol{k}$ **阶的接近度**.

为什么要引入“接近度”的概念呢？回想数学分析中函数微分的概念，它要求一个定义在 R^n 上的函数 $f(x)$，$x \in \Omega \in R^n$，当 $f(x)$ 中的自变量 x 趋于 x_0 时，即 $|x-x_0|<\delta$（此处的 δ 是一个 n 维球的半径），只要自变量在这个小球内，就可对函数 $f(x)$ 进行分析. 但泛函 $F[y(x)]$ 比数学分析中的函数微分要复杂得多，它对泛函 F 的宗量 $y(x)$ 的要求严格得多. 根据泛函分析的需要，不但要求宗量的变化 $|y(x)-y_0(x)|<\delta$，即 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 的比较要落到 δ 的区间内，而且由于泛函的变分要涉及对 $y(x)$ 的微商（指对所有坐标 x 的偏微商），即要求 $y(x)$ 的“形状”也要与 $y_0(x)$ 的“形状”“差不多”，才有一阶的接近度，否则 $y'(x)$ 的变化很大，与 $y'_0(x)$ 之差就超过 δ. 因此在泛函分析中对宗量的 $y(x)$ 变化的要求是较高的. 如果在运算中涉及高阶微商，就需要有高阶的接近度.

下面我们以一维 x 的宗量函数 $y(x)$ 为例，从图形看接近度的概念：

图 21.2.1 表示 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 为零阶接近度，图 21.2.2 表示 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 有一阶接近度.

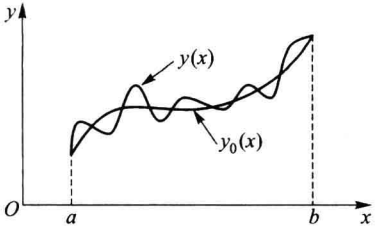


图 21.2.1

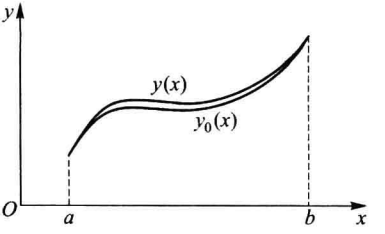


图 21.2.2

一般物理上对泛函变分宗量的要求只要有一阶或二阶接近度即可，当然有时也会涉及高阶接近度. 但通常物理函数作为宗量，都是很“光滑”的函数，而且在允许函数类（即宗量的定义域）内，也都可满足变分分析的要求，因此就不再强调宗量变化的接近度问题. 通常认为这些宗量的变分都存在，泛函对其宗量的连续偏微商也都存在.

下面我们将给出泛函的连续性，线性泛函和泛函变分的概念. 为讨论方便，下面我们仅讨论 $x \in R$（一维实空间）的宗量 $y(x)$ 的情况.

定义 21.2.1：如果对于一个任意给定的小正数 ε，可以找到这样的 δ，当

$$|y(x)-y_0(x)|<\delta$$

$$|y'(x)-y'_0(x)|<\delta$$

$$\cdots$$

$$|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\delta$$

时，有

$$|F[y(x)]-F[y_0(x)]|<\varepsilon,$$

我们称泛函 $F[y(x)]$ 在 $y(x)=y_0(x)$ 处是 **k 阶接近的连续泛函**. 其中 $y\in C^k(\Omega)$, $\Omega\in R$, 以下讨论全属于这一条件.

定义 21.2.2: 如果泛函 $F[y(x)]$ 满足

$$F[ay_1(x)+by_2(x)]=aF[y_1(x)]+bF[y_2(x)] \tag{21.2.1}$$

我们称泛函 $F[y(x)]$ 为**线性泛函**.

定义 21.2.3: 泛函 $F[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 的增量 $\Delta y(x)$ 是指两个函数之间的差

$$\Delta y=y(x)-y_0(x) \tag{21.2.2}$$

当 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 是零阶或 k 阶接近的, 则

$$\delta y=y(x)-y_0(x) \tag{21.2.3}$$

称为泛函 $F[y(x)]$ 的**宗量 $y(x)$ 的变分**, δy 仍为 x 的函数, 并且有

$$(\delta y)^{(k)}=y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}=\delta y^{(k)}(x),\quad k=1,2,\cdots \tag{21.2.4}$$

定义 21.2.4: **泛函的变分**.

若线性泛函 $F[y(x)]$,

$$\Delta F[y(x)]=F[y(x)+\Delta y]-F[y(x)] \tag{21.2.5}$$

称为**泛函的增量**.

若泛函的增量可表示为

$$\Delta F[y(x)]=L[y(x),\delta y]+\beta(y(x),\delta y)\cdot\max|\delta y| \tag{21.2.6}$$

其中 $L[y(x),\delta y]$ 对于 δy 是线性泛函, 且

$$\lim_{\max|\delta y|\to 0}\beta(y(x),\delta y)\to 0$$

则 $L[y(x),\delta y]$ 称为对于 δy 的泛函增量 ΔF 中的线性主部, 我们称 $L[y(x),\delta y]$ 为**泛函 $F[y(x)]$ 的变分**, 记为

$$\delta F[y(x)]=L[y(x),\delta y] \tag{21.2.7}$$

上面给出了泛函变分的定义, 但如何来计算泛函的变分, 就要考虑泛函的变分与函数微商之间的关系.

首先我们考虑数学分析中函数 $y(x)$ 的微分, 我们以单变量函数 $y(x)$ 为例, 当自变量 x 与其小增量 Δx 固定时, 我们引入参量 α. 考虑带参数 α 的函数 $y(x+\alpha\Delta x)$, 有

$$y(x+\alpha\Delta x)\big|_{\alpha=1}=y(x+\Delta x),\quad y(x+\alpha\Delta x)\big|_{\alpha=0}=y(x) \tag{21.2.8}$$

我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x+\alpha\Delta x)\big|_{\alpha=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[y'(x+\alpha\Delta x)\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(x+\alpha\Delta x)\right]_{\alpha=0}$$

$$= y'(x) \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \tag{21.2.9}$$

这说明函数 $y(x)$ 的微分可看成带参数 α 的函数 $y(x+\alpha\Delta x)$ 对 α 的微商在 $\alpha=0$ 点的值.

根据这一思路,我们可以把泛函 $F[y(x)]$ 的变分 δF 看成带参数 α 的泛函 $F[y(x)+\alpha\delta y]$ 对 α 的微商在 $\alpha=0$ 点的值,$\alpha\in[0,1]$,

$$\delta F[y(x)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}F[y(x)+\alpha\delta y]_{\alpha=0} \tag{21.2.10}$$

证:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}F[y(x)+\alpha\delta y]_{\alpha=0} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{F[y(x)+\alpha\delta y]-F[y(x)]}{\alpha}\\
&= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\{L[y(x),\alpha\delta y]+\beta(y(x),\alpha\delta y)\alpha\,|\delta y|\}\\
&= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\{\alpha L[y(x),\delta y]+\alpha\beta(y(x),\alpha\delta y)\,|\delta y|\}\\
&= L[y(x,\delta y)]\\
&= \delta F[y(x)]
\end{aligned}$$

其中用到线性泛函 $L[y(x),\alpha\delta y]=\alpha L[y(x),\delta y]$,且 $\lim\limits_{|\delta y|\to 0}\beta(y(x),\alpha\delta y)\to 0$ 等性质.

由偏微商的运算,(21.2.10)式的右端为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}F[y(x)+\alpha\delta y]_{\alpha=0} &= \frac{\partial F[y(x)+\alpha\delta y]}{\partial(y(x)+\alpha\delta y)}\cdot\frac{\partial(y(x)+\alpha\delta y)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\\
&= \frac{\partial F[y(x)]}{\partial y}\cdot\delta y
\end{aligned} \tag{21.2.11}$$

因此我们可得泛函的变分与微商运算的关系

$$\delta F[y(x)] = \frac{\partial F[y(x)]}{\partial y}\cdot\delta y(x) \tag{21.2.12}$$

这是泛函 $F[y(x)]$ 的小增量的线性主部 $L[y(x),\delta y]$ 的表达式,是**泛函变分最基本的运算法则**.

第二十二章　变分原理

§22.1　泛函的极值

定义 22.1.1：泛函的极值.

若泛函 $F[y(x)]$ 对与 $y=y_0(x)$ 接近的宗量 $y(x)$，都有

$$\Delta F = F[y(x)] - F[y_0(x)] \geqslant 0 \tag{22.1.1}$$

则称泛函 $F[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到极小值.

同样，若都有

$$\Delta F = F[y(x)] - F[y_0(x)] \leqslant 0 \tag{22.1.2}$$

则称泛函 $F[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到极大值.

定理 22.1.1：如果具有变分的泛函 $F[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 达到极值(极大值或极小值)，则在 $y=y_0(x)$ 上有

$$\delta F[y_0(x)] = 0 \tag{22.1.3}$$

证：取

$$\begin{aligned} y(x,\alpha) &= y_0(x) + \alpha\delta y(x) \\ &= y_0(x) + \alpha[y(x) - y_0(x)] \end{aligned} \tag{22.1.4}$$

即 $y(x,\alpha)$ 为由 $\alpha \in [0,1]$ 所确定的与 $y_0(x)$ 接近的一族函数. 且有

$$y(x,\alpha)\big|_{\alpha=0} = y_0(x), \quad y(x,\alpha)\big|_{\alpha=1} = y(x) \tag{22.1.5}$$

因此，可以把泛函 $F[y(x,\alpha)]$ 看成参数 α 的函数 $\varphi(\alpha)$，

$$\begin{aligned} F[y(x,\alpha)] &= F[y_0(x) + \alpha\delta y(x)] \\ &= \varphi(\alpha) \end{aligned} \tag{22.1,6}$$

对这一 α 的函数(即泛函 $F[y(x,\alpha)]$)要取极值，必须有 $\varphi'(\alpha)=0$，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F[y_0(x) + \alpha\delta y(x)] = 0 \tag{22.1.7}$$

由假定，泛函 $F[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到极值，即 $\alpha=0$ 时，$y(x,\alpha)=y_0$，故有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F[y_0(x)+\alpha\delta y(x)]\Big|_{\alpha=0}=0 \tag{22.1.8}$$

由(21.2.10)式可知，

$$\delta F[y_0(x)]=0$$

§22.2　变分原理、Euler－Lagrange（欧拉－拉格朗日）方程

在本节中，我们利用上节中的定理，来研究一类简单泛函的极值问题.

我们仅考虑如下以定积分形式出现的这一类简单泛函 $I[y(x)]$，

$$I[y(x)]=\int_{x_A}^{x_B}f(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{22.2.1}$$

其中 $f(x,y,y')$ 的函数形式为已知的，且 $f(x,y,y')$ 对其宗量 $x,y(x),y'(x)$ 具有二阶连续的偏导数，同时对 x_A,x_B，有 $y(x_A)=y_A$ 和 $y(x_B)=y_B$ 都是已知的，即在 $x-y$ 平面上 (x_A,y_A) 和 (x_B,y_B) 两点是固定的(图 22.2.1). 我们要研究，当泛函 $I[y]$ 取极值时，$y(x)$ 所必须满足的微分方程.

我们引入单参数比较函数族 $\bar{y}(x,\alpha)$，且 $\bar{y}(x,\alpha)$ 满足下列三个条件：

(1) $\bar{y}(x_A,\alpha)=y(x_A)=y_A$，

$\bar{y}(x_B,\alpha)=y(x_B)=y_B$，对所有 α 都成立.

(2) $\bar{y}(x,0)=y(x)$ 为所期望的极值函数.

(3) $\bar{y}(x,\alpha)$ 及其对 x,α 的一、二阶偏微商都是连续函数.

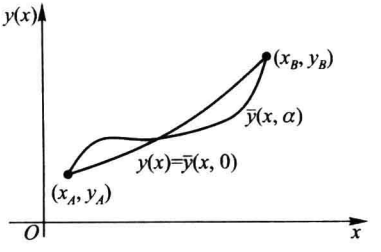


图 22.2.1

因此，由比较函数所构成的泛函

$$I[\alpha]=\int_{x_A}^{x_B}f[x,\bar{y}(x,\alpha),\frac{\partial}{\partial x}\bar{y}(x,\alpha)]\,\mathrm{d}x \tag{22.2.2}$$

由上节的定理可知，要使泛函 $I(\alpha)$ 在 $\bar{y}=y$ 时取极值的必要条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=0$$

这一条件便是对(22.2.1)式的泛函 $I[y(x)]$ 的变分为零,即 $\delta I[y(x)]=0$,亦可写成

$$\delta I[y(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=0 \tag{22.2.3}$$

在这一条件下我们将导出泛函 $I[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 满足的运动方程. 由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}&=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{y}'}{\mathrm{d}\alpha}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\right)\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{22.2.4}$$

对上式右端积分的第二项进行分部积分

$$\int_{x_A}^{x_B}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\right)\mathrm{d}x=\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{x_A}^{x_B}-\int_{x_A}^{x_B}\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right)\mathrm{d}x$$

由于 $\bar{y}(x_A,\alpha)=y_A$,$\bar{y}(x_B,\alpha)=y_B$,即在 $x=x_A$ 和 $x=x_B$ 处,$\bar{y}(x_A,\alpha)$ 对于 α 而言都是常数,故它们的微商为零,即 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{x_A}=\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{x_B}=0$,故上式右端的第一项为零. 因此可得

$$\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right)\right]\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x \tag{22.2.5}$$

由(22.2.3)式可知

$$\begin{aligned}\delta I[y(x)]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha)\Big|_{\alpha=0}\\&=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right)\right]_{\alpha=0}\left[\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{22.2.6}$$

由 $\bar{y}(x,\alpha)$ 所满足的条件可知,$\bar{y}(x,\alpha)\big|_{\alpha=0}=y(x)$,$\bar{y}'(x,\alpha)\big|_{\alpha=0}=y'(x)$,且令 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\eta(x)$,$\eta(x)$ 的性质由 $\bar{y}(x,\alpha)$ 满足的条件可知,其在 $x=x_A$ 和 $x=x_B$ 处为零外,在其自变量 x 区域中为 x 连续可微函数,是个不均为零的函数. 因此由(22.2.6)式可知当 $\delta I[y(x)]=0$ 时,即导出 $y(x)$ 所满足的方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \tag{22.2.7}$$

这一方程称为 **Euler - Lagrange 方程**，它是 Euler 在 1744 年首先导出的，一般情况下方程(22.2.7)式是一个二阶常微分方程.

通常我们把泛函取极值时，由泛函的变分为零可导出泛函宗量函数所满足的方程，这一原理称为**变分原理**.

通过解 Euler - Lagrange 方程，我们可得到具体的 $y(x)$ 的形式，它是(22.2.1)式的泛函 $I[y(x)]$ 取得极值时期望的 $y(x)$ 的具体函数形式.

例 22.2.1：对泛函极值问题的研究，一个著名的问题就是 1696 年 J. Bernoulli(伯努利)所提出的最速降线问题. 下面介绍此问题：

在垂直平面内给定两点 A 和 B，一质量为 m 的物体在重力作用下，由 A 沿轨道无摩擦地下滑至 B. 要求出由 A 滑至 B 所用时间最少的轨道.

解：如图 22.2.2，A 为坐标原点，取定 x 轴和 y 轴，假设物体 m 的初始速度为零，设所求的轨道为 $y=y(x)$，m 沿轨道的速率为 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}s$ 为轨道 $y(x)$ 的弧元.

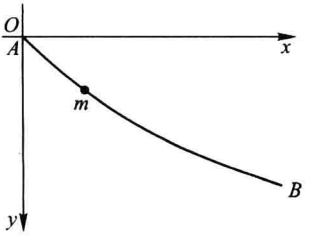


图 22.2.2

由几何的关系可得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + (\mathrm{d}y(x))^2 = (1+y'^2)\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad (22.2.8)$$

由牛顿力学可知

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$v = \sqrt{2gy} \qquad (22.2.9)$$

则可得物体 m 由 $A\to B$ 下滑的时间为

$$T = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_A=0}^{x_B}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,\mathrm{d}x \qquad (22.2.10)$$

这就变成求上式泛函 $T[y(x)]$ 的极小值问题.

用变分原理来求这一极值问题，由泛函(22.2.1)式的形式可知，此问题中的 $f(x,y,y')$ 为

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \qquad (22.2.11)$$

函数 f 中不显含 x. 对于不显含 x 的 f，我们可采取如下的方法，观察 $y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}-f$ 这

个量,对 x 求微商

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)\\&=y''\frac{\partial f}{\partial y'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}y'-\frac{\partial f}{\partial y'}y''\\&=-y'\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\end{aligned}\tag{22.2.12}$$

其中 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$,等式右端的方程括号内为 Euler – Lagrange 方程的左端,故为零.

因此由方程(22.2.12)式可看出,对于不显含 x 的函数 f,有方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)=0\tag{22.2.13}$$

与 Euler – Lagrange 方程等价. 可得

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=C,\quad C\text{ 为常数.}\tag{22.2.14}$$

这一方程对所有 f 不显含 x 的泛函(22.2.1)式的求极值问题都是满足的.

对最速降线问题,把 f 的形式(22.2.11)式代入方程(22.2.14)式,有

$$\frac{y'^2}{\sqrt{(1+y'^2)}}-\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}=C\tag{22.2.15}$$

令 $C^2=\dfrac{1}{2a}$,$a>0$,由上式方程可得

$$y'=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}\tag{22.2.16}$$

积分可得

$$x-x_0=\int\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\mathrm{d}y\tag{22.2.17}$$

其中 x_0 为积分常数. 取变量代换

$$y=a(1-\cos\theta)\tag{22.2.18}$$

则有

$$x-x_0=2a\int\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=a(\theta-\sin\theta),$$

即

$$x = a(\theta - \sin\theta) + x_0 \tag{22.2.19}$$

以参数 θ 表示的 y 和 x 的(22.2.18)式、(22.2.19)式，就是最速降线问题所满足的轨道，它是一个旋轮线(即摆线)的方程，是由半径为 a 的圆周上一固定点运动而生成的，该圆周在 x 轴的下方沿轴 x 作纯滚动. 只存在一条旋轮线通过原点即(x_A, y_A)点和另一固定点(x_B, y_B)点. 由这两点的值，即边值条件来定出常数 a 和 x_0，就可定出此摆线. 因此 Bernoulli 所提出的最速降线问题的轨道是一条旋轮线.

下面讨论具有多个一元函数的泛函的变分.

若泛函 $I[y]$ 具有如下的形式

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n; y_1', y_2', \cdots, y_n')\,\mathrm{d}x \tag{22.2.20}$$

泛函 $I[y]$ 依赖于 n 个函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 及其微商 $y_1'(x), y_2'(x), \cdots, y_n'(x)$.

我们要求当泛函 $I[y]$ 取得极值时，确定函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 的具体形式并要求它们满足

$$y_i(x_A) = y_{iA}, \quad y_i(x_B) = y_{iB}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{22.2.21}$$

这就是要对 $\delta I = 0$，并满足上述条件时，求出 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 所满足的方程.

可同样采取本节前面导出 Euler - Lagrange 方程的方法，引入 n 个比较函数 $\bar{y}_i(x, \alpha_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，然后先假设 $n-1$ 个 $y_j(x)$ 已给出了使泛函达到极值的形式，对 $n-1$ 个之外的第 $y_i(x)$ 的泛函，采取进行变分使泛函取极值的方法，得到 $y_i(x)$ 满足的 Euler - Lagrange 方程，按这样的程序进行，可得到一组 n 个的 Euler - Lagrange方程组

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{22.2.22}$$

即求得了泛函(22.2.20)式取极值时，$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 所满足的微分方程组.

这一方程组同样也称为 **Euler - Lagrange 方程**. Euler - Lagrange 方程(有时只称 Euler 方程，是整个分析力学的基础.

§ 22.3　Hamilton(哈密顿)原理

在分析力学(亦称 Lagrange 力学)中，一个经典力学体系，由广义坐标

$q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t)$来描述,这一系统具有动能 $T(q_i,\dot{q}_i)$ 和势能 $V(q_i,t)$,其中 $\dot{q}_i=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i(t),i=1,2,\cdots,n.$ 则这一体系的**拉氏量(Lagrangian)**定义为

$$L(q_i,\dot{q}_i,t)=T(q_i,\dot{q}_i)-V(q_i,t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{22.3.1}$$

考虑体系在任意的固定时间 t_A 和 $t_B(t_A<t_B)$这段时间内运动,当 $q_i(t_A)$和 $q_i(t_B),i=1,2,\cdots,n$ 给定,则可由体系的拉氏量构造该条件下力学体系的泛函,亦称为力学体系的作用量,记为 I

$$I=\int_{t_A}^{t_B}L(q_i,\dot{q}_i,t)\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{22.3.2}$$

Hamilton 原理指出:这一力学体系的运动应使得该力学体系的作用量(22.3.2)式取极值. 因此,在物理学中,通常把 Hamilton 原理称为最小作用量原理.

按照 Hamilton 原理,由上一节变分原理的讨论,力学体系的运动所满足的微分方程,应由(22.3.2)式的作用量变分为零给出,即由 $\delta I=0$,和(22.2.22)式,我们可得力学体系满足的运动方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{22.3.3}$$

这组运动方程称为 Lagrange 方程,它是 n 个联立的二阶微分方程组. 由它可得出具体的 $q_i(t),i=1,2,\cdots,n$,其中 $2n$ 个积分常数由所给定的 $q_i(t_A)$和 $q_i(t_B)$来确定. 这就给出了描述这一力学体系的 n 个广义坐标随时间的变化关系,就给出了整个力学体系的具体运动形式.

当力学体系的拉氏量 L 不显含 t 时,即(22.3.1)式中的 $V=V(q_i)$时,则由上一节中讨论的(22.2.14)式(由对应关系 $L\leftrightarrow f,q(t)\leftrightarrow y(x),t\leftrightarrow x$)可得

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L=E,\quad i\text{求和},\quad i:1\to n \tag{22.3.4}$$

E 为常数.

由于 $V=V(q_i)$与 t 无关,这是保守力场的条件,故对(22.3.1)式所定义的 L,有

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{22.3.5}$$

一般情况下,动能 $T(q_i,\dot{q}_i)$ 具有如下形式

$$T=\alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad \alpha_{ij}=\alpha_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n\text{ 求和}$$

α_{ij}为系数,即可得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T \tag{22.3.6}$$

因此，由(22.3.4)式和 $L = T - V$ 可得

$$2T - L = T + V = E \tag{22.3.7}$$

即当 L 不显含时间 t 时，常数 E 为这一力学体系的总能量，是一个守恒量，也就是在保守力场中力学体系的机械能是守恒的.

例 22.3.1：一质量为 m 的质点，在 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2\ (k>0)$ 的势场中运动，在 $t_A = 0$ 和 $t_B = t_1$ 这一时间段内运动，已知 $x_A = x(t_A) = x_0$，$x_B = x(t_1) = x_1$，求此质点的运动.

解：我们知道，这是一个典型的一维谐振子的运动，动能 T 和势能 V 如下

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}, \quad V = \frac{1}{2}kx^2 \tag{22.3.8}$$

这一体系的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{22.3.9}$$

在已知条件下的泛函为

$$I = \int_0^{t_1} L\mathrm{d}t = \int_0^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{x} - \frac{1}{2}kx\right)\mathrm{d}t \tag{22.3.10}$$

由 $\delta I = 0$，得到体系的运动方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

可得

$$-kx - m\ddot{x} = 0,$$

即

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{22.3.11}$$

这就是线性谐振子的运动方程，可得解

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{22.3.12}$$

其中 A 和 δ 为积分常数，由 $x(0) = x_0$ 和 $x(t_1) = x_1$ 而定. 把 x_0 和 x_1 这已知数值代入解(22.3.12)式中，有

$$x_0 = A\cos\delta \tag{22.3.13}$$

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \delta) = A(\cos \omega t_1 \cos \delta - \sin \omega t_1 \sin \delta) \tag{22.3.14}$$

两式相除，消去 A 可得

$$\frac{x_1}{x_0} = \cos \omega t_1 - \sin \omega t_1 \tan \delta$$

可得

$$\delta = \tan^{-1}\left(\cot \omega t_1 - \frac{1}{\sin \omega t_1} \cdot \frac{x_1}{x_0}\right) \tag{22.3.15}$$

$$A = \frac{x_0}{\cos \delta} = x_0 \cdot \frac{1}{\cos\left[\arctan\left(\cot \omega t_1 - \frac{1}{\sin \omega t_1} \cdot \frac{x_1}{x_0}\right)\right]} \tag{22.3.16}$$

同时可知，总能量 E 守恒，

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{22.3.17}$$

把 δ 和 A 的值代入 x 的表达式(22.3.12)和上式中即可得 E.

§22.4 Hamilton 泛函和正则方程

上一节的 Hamilton 原理，在分析力学中和量子物理中有着广泛的应用，在本课程只介绍基本原理，而不多涉及应用举例. 在本节中我们要介绍与由 Hamilton 原理所得的 Lagrange 方程并行的另一种力学体系的描述形式，即 Hamilton 力学的正则形式. 虽然它并不出于变分原理，但它与泛函的变分有密切的关系，同时它在量子物理学中也有广泛的应用. 因此我们在此简单介绍 Hamilton 力学中正则方程的导出.

上一节中我们定义了一个经典力学体系的拉氏量(22.3.1)、作用量(22.3.2)和由 Hamilton 原理所导出的运动方程(22.3.3)式. 由此我们可以定义与这一力学体系的广义坐标 $q_i(t)$ 相对应的广义动量 $p_i(t)$

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \tag{22.4.1}$$

则 $(p_i(t), q_i(t); i = 1, 2, \cdots, n)$ 可构成这一力学体系的广义相空间，在这个 $2n$ 维相空间上，我们可以定义这一体系的 Hamilton 泛函 H(通常称为力学体系的 Hamilton 函数，或简称 **Hamilton 量**)

$$H = p_i\dot{q}_i - L \tag{22.4.2}$$

其中 L 为(22.3.1)式所定义. 当我们对泛函 H 进行变分时

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta(p_i\dot{q}_i - L)\\ &= \delta p_i \cdot \dot{q}_i + p_i\delta\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta\dot{q}_i\\ &= \dot{q}_i\delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i \end{aligned} \tag{22.4.3}$$

其中用到(22.4.1)式(右边的第二项与第四项相消). 因此我们可以看出,对 H 的变分,只含有对 p_i 和 q_i 的变分,而不含有对 $\dot{q}_i$ 的变分,也就是说系统的 Hamilton 量 H 只是 p_i 和 q_i 的泛函,这也说明 Hamilton 泛函是定义在相空间(p_i,q_i)上的泛函

$$H = H(p_i,q_i) \tag{22.4.4}$$

故一般对 $H=H(p_i,q_i)$ 的变分应该为

$$\delta H(p_i,q_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i \tag{22.4.5}$$

比较(22.4.3)式和(22.4.5)式,我们可得

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{22.4.6}$$

而借助于方程(22.3.3)式,有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i = \dot{p}_i \tag{22.4.7}$$

故我们可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i\\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i\end{cases} \tag{22.4.8}$$

这就是 **Hamilton 正则方程**,它是一个力学体系运动的另一种描述形式.

注意,通常大家所接触到的力学问题,很多都能由 Lagrange 力学给出 Hamilton 的正则表述. 但在有约束的情况下,问题就复杂很多,由 H 的定义式

$$H = p_i\dot{q}_i - L(q_i,\dot{q}_i,t) = H(p_i,q_i)$$

我们必须由 Lagrange 方程中把 $\dot{q}_i$ 用(p_i,q_i) 表出,但在某些有约束的体系中,$\dot{q}_i$ 是不能用(p_i,q_i) 唯一确定的,即在 $2n$ 个变量的相空间(p_i,q_i)中由于约束的存在,力学体系真正的物理相空间的维数是小于 $2n$ 维的,即对 $2n$ 维的相空间来说

有了多余的非物理的自由度. 在这种情况下,要去掉多余的自由度,而得到真正描述体系运动的 Hamilton 正则方程要困难和复杂得多.

在有约束存在的情况下,用 Lagrange 力学的体系来处理,显得要简单一些和容易一些,因此一般都要用带约束的分析力学的方法来处理.

§22.5 带约束条件的泛函变分

为了更好地理解用 **Lagrange 乘子法**求带约束条件的泛函极值问题,我们首先回顾一下数学分析中多元函数带约束条件的求极值问题,即条件极值问题.

我们以定义在(x,y)平面上的二元函数

$$z = F(x,y) \tag{22.5.1}$$

为例,求其在定义域范围内的极值,如果没有约束,这是个无条件的极值问题,很容易求得. 但如果我们要求函数 $F(x,y)$ 在约束条件

$$G(x,y) = 0 \tag{22.5.2}$$

下来求得极值,也就是把原来函数的定义域约束到满足方程(22.5.2)式的区域中来求极值(一般来说,约束条件是把原来函数的变量约束在满足方程的原来函数定义域的超曲面——即比原定义域低一维的曲面上. 在此二维问题中,是由方程(22.5.2)式所定义的曲线上). 由隐函数存在性定理,约束方程(22.5.2)式可确定函数

$$y = g(x) \tag{22.5.3}$$

将其代入(22.5.1)式,可得在约束条件下的函数关系式

$$z = F(x,y = g(x)) \tag{22.5.4}$$

此式对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = F_x(x,y) + F_y(x,y)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \tag{22.5.5}$$

由隐函数求导规则,对(22.5.2)式求导,有

$$G_x(x,y) + G_y(x,y)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{22.5.6}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = F_x(x,y) - F_y(x,y)\frac{G_x(x,y)}{G_y(x,y)} \tag{22.5.7}$$

若假设(x_0,y_0)点为$z=F(x,y=g(x))$的极值点，必有$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$，可得

$$F_x(x_0,y_0)-F_y(x_0,y_0)\frac{G_x(x_0,y_0)}{G_y(x_0,y_0)}=0,$$

即

$$\frac{F_x(x_0,y_0)}{G_x(x_0,y_0)}=\frac{F_y(x_0,y_0)}{G_y(x_0,y_0)} \tag{22.5.8}$$

此式表明，在(x_0,y_0)点，$F(x,y)$的梯度$\nabla F(x_0,y_0)$与$G(x,y)$的梯度$\nabla G(x_0,y_0)$平行，它们可相差一个常数λ，即

$$\nabla F(x_0,y_0)=\lambda\nabla G(x_0,y_0) \tag{22.5.9}$$

这说明函数$F(x,y)$和$G(x,y)$在(x_0,y_0)点应满足如下方程组

$$\begin{cases} F_x(x_0,y_0)-\lambda G_x(x_0,y_0)=0 \\ F_y(x_0,y_0)-\lambda G_y(x_0,y_0)=0 \\ G(x_0,y_0)=0 \end{cases} \tag{22.5.10}$$

若构造一个带参数的辅助函数

$$E(x,y,\lambda)=F(x,y)-\lambda G(x,y) \tag{22.5.11}$$

则方程组

$$\begin{cases} E_x(x_0,y_0,\lambda)=0 \\ E_y(x_0,y_0,\lambda)=0 \\ E_\lambda(x_0,y_0,\lambda)=G(x,y)=0 \end{cases} \tag{22.5.12}$$

的解(x_0,y_0)（可以不必求出λ的具体值），满足方程组(22.5.10)式，就是函数$z=F(x,y)$在约束条件式(22.5.20)下的极值. 一般情况下，辅助函数的构造系数的形式为

$$E(x,y,\lambda)=F(x,y)+\lambda G(x,y) \tag{22.5.13}$$

它与(22.5.11)式的λ差一“负号”，这不影响对极值的求解，我们通常称“λ”为**Lagrange 不定乘子**，或简称为 **Lagrange 乘子**.

这种用 Lagrange 乘子“λ”乘以约束条件函数来构造辅助函数，并通过辅助函数求极值来求解条件极值问题的方法称为 **Lagrange 乘子法**.

对于一般n元函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在$r(r\leqslant n-1)$个约束条件

$$\begin{cases} G^1(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \\ G^2(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \\ \cdots \\ G^r(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \end{cases} \tag{22.5.14}$$

下求极值点的 Lagrange 乘子法,其基本解步骤如下:

第一,加入 r 个 Lagrange 乘子构造辅助函数

$$\begin{aligned} &E(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r) \\ &= F(x_1,x_2,\cdots,x_n) + \lambda_1 G^1 + \lambda_2 G^2 + \cdots + \lambda_r G^r \end{aligned} \tag{22.5.15}$$

第二,求出 E 的所有自变量和 r 个参数 λ 的一阶偏导数,并令其为零,(这是辅助函数 E 取得极值的必要条件),构成 $n+r$ 个方程的方程组

$$\begin{cases} E_{x_1} = F_{x_1} + \lambda_1 G^1_{x_1} + \lambda_2 G^2_{x_1} + \cdots + \lambda_r G^r_{x_1} = 0 \\ E_{x_2} = F_{x_2} + \lambda_1 G^1_{x_2} + \lambda_2 G^2_{x_2} + \cdots + \lambda_r G^r_{x_2} = 0 \\ \cdots \\ E_{x_n} = F_{x_n} + \lambda_1 G^1_{x_n} + \lambda_2 G^2_{x_n} + \cdots + \lambda_r G^r_{x_n} = 0 \\ E_{\lambda_1} = G^1(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \\ E_{\lambda_2} = G^2(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \\ \cdots \\ E_{\lambda_r} = G^r(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \end{cases} \tag{22.5.16}$$

第三,解此方程组,求得自变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的解(可不必求出 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 的具体数值),这组解为常 r 个约束条件的 n 元函数 F 的极值点.

以上介绍的是用 Lagrange 乘子法,求带约束条件的函数的极值问题. 我们把这一思想和方法直接推广到带约束条件的泛函变分的求泛函极值的问题中.

下面我们给出求解带约束条件的泛函极值的 Lagrange 乘子法. 考虑泛函

$$I(y) = \int_{x_A}^{x_B} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{22.5.17}$$

其中 $y(x_A)=y_A, y(x_B)=y_B$ 为定值. 求在约束条件

$$J[y] = \int_{x_A}^{x_B} G(x,y,y')\,\mathrm{d}x = C \tag{22.5.18}$$

(C 为常数)下,泛函 $I(y)$ 的极值问题.

我们仍然用变分原理来求泛函的极值. 引入 Lagrange 乘子 λ,构造辅助泛函

$$E[y] = I[y] + \lambda J[y]$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} [F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y')]\,dx \tag{22.5.19}$$

对辅助泛函用变分原理求其极值，由

$$\delta E = 0$$

可得 Enter 方程

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'} = 0 \tag{22.5.20}$$

解此方程，所得的 $y(x)$ 就是满足约束条件 $J[y]=0$ 的泛函 $I[y]$ 的极值. 对于所得的解 $y(x)$ 中的积分常数及不定乘子 λ，由边界条件 $y(x_A)=y_A, y(x_B)=y_B$ 及约束条件 $J[y]=C$ 确定. 这就是带约束条件的泛函求极值的 **Lagrange 乘子法**.

例 22.5.1：在平面上，对给定周长 l 的封闭曲线，求 l 为何种曲线时可围成的面积最大. 这就是著名的等周长问题，是典型的常用约束条件的泛函求极值问题.

解：如图 22.5.1 所示，封闭曲线 l 所围成的面积为 Ω，有

$$\Omega = \int_{\Omega} dx dy \tag{22.5.21}$$

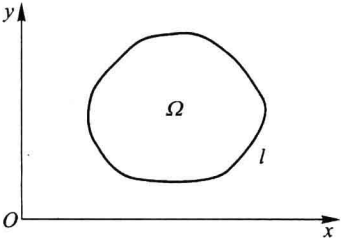


图 22.5.1

由二维平面上的 stokes 定理

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]dx dy = \oint_l p(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{22.5.22}$$

可知，当我们取 $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$ 时，上式左边的积分为 2Ω，故 l 可围的面积 Ω 的积分表达式为

$$\Omega = \frac{1}{2}\oint_l x dy - y dx \tag{22.5.23}$$

这是面积依赖于曲线 l 表达式的泛函.

为了便于计算，我们把封闭曲线 l 以参数 t 的形式给出

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_A \leqslant t \leqslant t_B \tag{22.5.24}$$

则面积 Ω 依赖于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的泛函形式为

$$\Omega[x,y] = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B}(x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}t \tag{22.5.25}$$

其中 $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

封闭曲线 l 的长度的表达式为

$$G[x,y] = \int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = l \tag{22.5.26}$$

l 为定值,这是一个约束泛函,是约束条件. (22.5.25)式及(22.5.26)式构成了带约束条件求泛函变分的极值问题,即在闭曲线长度为定值 l 的条件下,求当 $\delta\Omega = 0$ 时 Ω 达到最大值的曲线 l 所满足的方程,即可求出 l 的形状.

我们采用 Lagrange 乘子法,引入 Lagrange 乘子 λ,构造辅助泛函 E,

$$\begin{aligned} E[x,y,\lambda] &= \Omega[x,y] + \lambda G[x,y] \\ &= \int_{t_A}^{t_B}\left\{\frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right\}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{22.5.27}$$

对带 λ 的二元泛函 E 进行变分,并令 $\delta E = 0$,得 Euler - Lagrange 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dot{y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\dfrac{1}{2}y + \dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right] = 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dot{x} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right] = 0 \end{cases} \tag{22.5.28}$$

两式分别积分可得

$$\begin{cases} y - \dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1 \\ x + \dfrac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2 \end{cases} \tag{22.5.29}$$

c_1、c_2 为积分常数,由上式可得

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2 \tag{22.5.30}$$

这是以 (c_2, c_1) 为圆心,半径为 λ 的圆的方程. 圆心位置 (c_2, c_1) 由边界条件 $x(t_A)$, $x(t_B)$, $y(t_A)$ 和 $y(t_B)$ 定,而半径 λ 的值由约束条件 $2\pi\lambda = l$,即可得 $\lambda = \dfrac{l}{2\pi}$.

§22.6　Noether(诺德)定理

前面我们介绍的变分原理中,它要求比较函数要满足固定端点 $y(x_A)=y_A$, $y(x_B)=y_B$ 即固定边界值的情况,这是一种较简单的泛函类型. 但在许多物理问题中,并不满足这种固定端点的条件,因此我们必须考虑更为普遍的情形.

考虑一种变换

$$y(x)\to\bar{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x) \tag{22.6.1}$$

如果对两个端点 x_A,x_B,取消了对 $\bar{y}(x)$ 具有固定端点的限制,即取消了对 $\eta(x_A)=\eta(x_B)=0$ 的限制,例如一个经典粒子轨道的平移 $x(t)\to x(t)+\varepsilon$ 就属于这一类问题,则我们以前研究的固定端点的情况只是(22.6.1)式的特例,而实际的物理问题比变换(22.6.1)式更复杂,它要求比较函数的变换式具有更加复杂的泛函形式

$$y(x)\to\bar{y}(x,y,y')=y(x)+\varepsilon\eta(x,y,y') \tag{22.6.2}$$

它并不要求端点固定.

关于这类变端点的问题,在自由边界条件下,其泛函的变分与前面的讨论相类似,当泛函变分为零泛函取极值时,$y(x)$ 仍满足 Euler - Lagrange 方程. 本节不讨论这一问题. 我们要讨论的是这类系统的对称性与系统守恒量的关系.

考虑经典的力学系统,物理量依赖空间或时间自变量,为讨论简单起见,自变量取一维 x(对三维空间或 3+1 维时空问题可以以同样的方法进行讨论,只不过物理量对时空的偏微商复杂一点,最后的求和关系式复杂一些.),我们考虑空间坐标 x 的变换为

$$x\to\bar{x}=x+\varepsilon\xi(x,y,y') \tag{22.6.3}$$

即空间点的变换不仅取决于 x 点本身,而且还与泛函中的函数即物理量 $y(x)$ 和 y' 有关,而物理量 $y(x)$ 的变换满足(22.6.2)式. 而且我们考虑的这两个变换都是无穷小变换,即(22.6.2)式和(22.6.3)变换式中的 ε 为无穷小量. 在这种变换下我们对物理体系的作用量泛函进行变分时,如果要求此变分为零,即体系的作用量在此变换下保持不变,则我们能够获得关于这个物理体系守恒量的信息,即得到了这个物理体系的重要特征,或称为对称性.

我们现在对这一问题的讨论是 E. Noether 提出的 Noether 定理的一种特殊情况,我们仍称为 Noether 定理.

定理 22.6.1: Noether 定理:

若一个物理体系的作用量 I 的泛函形式为

$$I = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y_1, \cdots, y_n; y_1', \cdots, y_n')\,\mathrm{d}x \tag{22.6.4}$$

在由

$$\bar{x} = x + \varepsilon\xi(x, y_1, \cdots, y_n; y_1', \cdots, y_n') \tag{22.6.5}$$

和

$$\bar{y}_i(x) = y_i(x) + \varepsilon\eta_i(x, y_1, \cdots, y_n; y_1', \cdots, y_n'), \quad i = 1, \cdots, n \tag{22.6.6}$$

所产生的无穷小变换(即 ε 是小量)下,作用量 I 变为

$$\bar{I}(\varepsilon) = \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_B} l(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \cdots, \bar{y}_n(\bar{x}); \bar{y}_1'(\bar{x}), \cdots, \bar{y}_n'(\bar{x}))\,\mathrm{d}x \tag{22.6.7}$$

若

$$\delta I = \bar{I}(\varepsilon) - I = 0$$

即在无穷小变换(22.6.5)式和(22.6.6)式下,物理体系的作用量是不变的,则这一物理体系存在一个与这一变换相关的守恒量,它由下式给出

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial y_i'}\eta_i + \left(L - \sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial L}{\partial y_i'}\right)\xi = C \tag{22.6.8}$$

C 为常数.

证:为了方便,首先考虑单一函数为单变量的简单情况,即物理体系的作用量为

$$I = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{22.6.9}$$

在无穷小变换下

$$x \to \bar{x} = x + \varepsilon\xi(x, y, y') \tag{22.6.10}$$

$$y(x) \to \bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x, y, y') \tag{22.6.11}$$

泛函 I 变为

$$\bar{I}(\varepsilon) = \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_B} L(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{x}))\,\mathrm{d}\bar{x} \tag{22.6.12}$$

注意,由于 ε 为小量,我们关心 $\bar{I}(\varepsilon)$ 中关于 ε 的一阶量的计算,对 ε^2 项都可略去,因此在变换中的 $\varepsilon\eta$ 和 $\varepsilon\xi$ 项中的 $x \to \bar{x}$ 时只能取其零阶项,即在 $\varepsilon\eta$ 和 $\varepsilon\xi$ 项中的 x 与 $\bar{x}$ 等同.

为了便于计算,由(22.6.10)式,我们把(22.6.11)式写成

$$\bar{y}(x) = y[\bar{x} - \varepsilon\xi(\bar{x},y,y')] + \varepsilon\eta(\bar{x},y,y')$$

$$= y(\bar{x}) - \varepsilon\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\xi(\bar{x},y,y') + \varepsilon\eta(\bar{x},y,y')$$

即等式右边全依赖于 $\bar{x}$，故写成

$$\bar{y}(\bar{x}) = y(\bar{x}) + \varepsilon\rho(\bar{x},y,y') \tag{22.6.13}$$

其中

$$\rho(\bar{x},y,y') = \eta(\bar{x},y,y') - \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\xi(\bar{x},y,y') \tag{22.6.14}$$

同时可得

$$\bar{y}'(\bar{x}) = y'(\bar{x}) + \varepsilon\rho'(\bar{x},y,y') \tag{22.6.15}$$

其中

$$\rho'(\bar{x},y,y') = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\rho(\bar{x},y,y')$$

则泛函 $\bar{I}(\varepsilon)$ 可写为

$$\bar{I}(\varepsilon) = \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_B} L[\bar{x},y(\bar{x}) + \varepsilon\rho(\bar{x},y,y'),y'(\bar{x}) + \varepsilon\rho'(\bar{x},y,y')]\mathrm{d}\bar{x} \tag{22.6.16}$$

由变换(22.6.10)式，两个端点的变化为

$$\begin{cases} \bar{x}_A = x_A + \varepsilon\xi(x,y,y')\big|_{x=x_A} = x_A + \delta_A \\ \bar{x}_B = x_B + \varepsilon\xi(x,y,y')\big|_{x=x_B} = x_B + \delta_B \end{cases} \tag{22.6.17}$$

其中 $\delta_A = \varepsilon\xi(x,y,y')\big|_{x=x_A}$，$\delta_B = \varepsilon\xi(x,y,y')\big|_{x=x_B}$ 为小量.

由于泛函 $\bar{I}(\varepsilon)$ 的积分限的变化，对于 $\delta I = \bar{I}(\varepsilon) - I$，不能采用前面固定端点(固定积分限)的泛函变分的计算，而要直接先计算 $\bar{I}(\varepsilon)$，并考虑积分限变化的影响. 因此我们对 $\bar{I}(\varepsilon)$ 的表达式(22.6.16)式的积分限先做一个分析.

$$\int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_B} = \int_{x_A+\delta_A}^{x_B+\delta_B}$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} + \int_{x_B}^{x_B+\delta_B} - \int_{x_A}^{x_A+\delta_A} \tag{22.6.18}$$

对最后两项积分的积分限，由于 δ_A 和 δ_B 是关于 ε 的一阶小量，故可略去这两项积分被积函数中有关 ε 的项.

接下来计算 $\bar{I}(\varepsilon)$ 中的被积函数 L，展开至 ε 的一次项

$$L[\bar{x},y(\bar{x})+\varepsilon\rho(\bar{x},y,y'),y'(\bar{x})+\varepsilon\rho'(\bar{x},y,y')]$$

$$=L(\bar{x},y,y')+\varepsilon\rho(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y}L(\bar{x},y,y')+$$

$$\varepsilon\rho'(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y') \tag{22.6.19}$$

代入泛函 $\bar{I}(\varepsilon)$ 中，并略去 $o(\varepsilon^2)$ 项，得

$$\bar{I}(\varepsilon)=\int_{x_A}^{x_B}L(\bar{x},y(\bar{x}),y'(\bar{x}))\mathrm{d}\bar{x}+$$

$$\varepsilon\int_{x_A}^{x_B}\left[\rho(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y}L(\bar{x},y,y')+\rho'(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y')\right]\mathrm{d}\bar{x}+$$

$$\delta_B[L(\bar{x},y,y')]_{\bar{x}=x_B}-\delta_A[L(\bar{x},y,y')]_{\bar{x}=x_A} \tag{22.6.20}$$

最后两项是由积分的中值定理给出.

上式右边的第一项积分，把积分元由 $\bar{x}$ 换成 x，该积分即是(22.6.9)式的作用量 I. 上式右边第二积分为

$$\varepsilon\int_{x_A}^{x_B}\left[\rho(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y}L(\bar{x},y,y')+\rho'(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y')\right]\mathrm{d}\bar{x}$$

$$=\varepsilon\int_{x_A}^{x_B}\rho(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y}L(\bar{x},y,y')\mathrm{d}\bar{x}+\left[\rho'(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y')\right]_{x_B}^{x_A}-$$

$$\varepsilon\int_{x_A}^{x_B}\rho(\bar{x},y,y')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{x}}\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y')\mathrm{d}\bar{x}$$

$$=\varepsilon\left[\rho'(\bar{x},y,y')\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y')\right]_{x_B}^{x_A}+$$

$$\varepsilon\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y')-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{x}}\frac{\partial}{\partial y'}L(\bar{x},y,y')\right]\rho(\bar{x},y,\bar{y})\mathrm{d}\bar{x}$$

再由 $\delta_A=\varepsilon\xi(x,y,y')_{x=x_A}$，$\delta_B=\varepsilon\xi(x,y,y')_{x=x_B}$，有

$$\delta_B[L(x,y,y')]_{\bar{x}=x_B}-\delta_A[L(x,y,y')]_{\bar{x}=x_A}$$

$$=\varepsilon\rho(x,y,y')L(x,y,y)\Big|_{x_A}^{x_B}$$

考虑到(22.6.14)式 $\rho(\bar{x},y,y')=\eta(\bar{x},y,y')-y'\xi(\bar{x},y,y')$，同时把积分式中的变元 $\bar{x}$ 都换成变元 x(积分与积分变元的写法无关)，则泛函(22.6.20)式 $\bar{I}(\varepsilon)$ 可写为

$$\bar{I}(\varepsilon) = I + \varepsilon \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) [\eta(x,y,y') - y'\xi(\bar{x},y,y')] \mathrm{d}x +$$

$$\varepsilon \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(x,y,y') + \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \xi(\bar{x},y,y') \right] \Bigg|_{x_A}^{x_B} \tag{22.6.21}$$

由 Euler - Lagrange 方程可知，上式右边第二项的积分被积函数中第一个因子正是 Euler - Lagrange 方程的左端，故此项为零. 由定理给的条件，要求

$$\delta I = \bar{I}(\varepsilon) - I = 0$$

故可得(22.6.21)式中的最后一项为零，即

$$\left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(\bar{x},y,y') + \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \xi(x,y,y') \right]_{x_A}^{x_B} = 0$$

即

$$\left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(\bar{x},y,y') + \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \xi(x,y,y') \right] \Bigg|_{x_A}$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(\bar{x},y,y') + \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \xi(x,y,y') \right] \Bigg|_{x_B} \tag{22.6.22}$$

由于 x_A, x_B 为任意给定的，因此我们有

$$\frac{\partial L}{\partial y'} \eta(x,y,y') + \left(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \xi(x,y,y') = C \tag{22.6.23}$$

C 为常数. 至此我们证明了在简单情况下，即作用量为 $L = L(x,y,y')$ 这一形式时的 Noether 定理.

用同样的方法我们可以证明，当

$$L = L(x, y_1, \cdots, y_n; y'_1, \cdots, y'_n)$$

时，若在无穷小变换(22.6.5)式和(22.6.6)式下，要求

$$\delta I = \bar{I}(\varepsilon) - I = 0$$

则存在

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial y'_i} \eta_i(x, y_1, \cdots, y_n; y'_1, \cdots, y'_n) +$$

$$\left(L - \sum_{i=1}^{n} y'_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) \xi(x, y_1, \cdots, y_n; y'_1, \cdots, y'_n) = C \tag{22.6.24}$$

C 为常数. 这一式子表明，其左边的表达式即是这一物理系统(以 L 的形式表

征)在无穷小变换(22.6.5)式和(22.6.6)式下,经典力学中这一特殊情况下的Noether定理.

下面我们给出两个例子来加深对经典力学中的Noether定理的理解.

例22.6.1:两个点粒子组成的体系,体系的势能只由两个粒子间的距离决定.设第一粒子的质量为 m_1,其坐标为 $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$;第二粒子的质量为 m_2,其坐标为 $\boldsymbol{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$.体系的势能为 $V(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)$,则体系的拉氏量为

$$L=\frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+\frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)-V(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|) \tag{22.6.25}$$

其中 $\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.体系的作用量为

$$I=\int_{t_A}^{t_B}L\mathrm{d}t,\quad t_A<t_B \tag{22.6.26}$$

这一作用量在如下的无穷小平移变换下不变.

$$\begin{cases}\bar{t}=t+\varepsilon\xi,\\ \bar{x}_1=x_1+\varepsilon\eta_1^x,\bar{y}_1=y_1+\varepsilon\eta_1^y,\bar{z}_1=z_1+\varepsilon\eta_1^z,\\ \bar{x}_2=x_2+\varepsilon\eta_2^x,\bar{y}_2=y_2+\varepsilon\eta_2^y,\bar{z}_2=z_2+\varepsilon\eta_2^z,\end{cases} \tag{22.6.27}$$

其中 η_1^x 表示在 x_1 点在 x 轴上的位移量,其他的 η 都具有相应的意义.

我们考虑一种简单的情况,即体系只有在 x 轴方向上有一个整体的无穷小平移变换,即在上式的变换中取 $\eta_1^x=\eta_2^x=1$,而 $\xi=0,\eta_1^y=\eta_2^y=\eta_1^z=\eta_2^z=0$,则由Noether定理可得

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_2}=C,$$

即

$$m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2=C \tag{22.6.28}$$

这就是说,当系统的作用量对 x 轴的无穷小平移变换不变时,系统在 x 轴方向上的总动量是个守恒量.

同样,我们可以得到系统的作用量在 y 轴方向和 z 轴方向上对于相应的无穷小平移变换不变时,系统在 y 轴方向和 z 轴方向上的动量是守恒量.

因此我们看到一个物理系统的动量守恒是这个物理系统的作用量具有平移变换(无穷小平移变换)不变性的结果.这一平移不变性是由系统的作用量来定义的,这是物理上一个很重要的结论.

例22.6.2:考虑一质量为 m 的质点在中心势场(即球对称势场)中运动的

物理系统. 该体系的拉氏量为

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(r) \tag{22.6.29}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,体系的作用量为

$$I = \int_{t_A}^{t_B} L\mathrm{d}t, \quad t_A < t_B, \tag{22.6.30}$$

我们现在先考虑质点绕 z 轴的一个无穷小转动,这对应于如下变换

$$\begin{cases} \bar{t} = t, \\ \bar{x} = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \bar{y} = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \\ \bar{z} = z, \end{cases} \tag{22.6.31}$$

由于 ε 为小量,此变换可写成

$$\begin{cases} \bar{t} = t, \\ \bar{x} = x + \varepsilon y, \bar{y} = -\varepsilon x + y \\ \bar{z} = z, \end{cases} \tag{22.6.32}$$

即对应于 $\xi = 0, \eta_1 = y, \eta_2 = -x, \eta_3 = 0$.

若体系的作用量在此无穷小变换下不变,由 Noether 定理,我们可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\eta_2 = C,$$

即

$$x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C \tag{22.6.33}$$

由于

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = P_x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = P_y \tag{22.6.34}$$

故有

$$xP_y - yP_x = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_z = (\boldsymbol{L})_z = L_z = C \tag{22.6.35}$$

这说明,当系统的作用量对绕 z 轴转动的无穷小变换不变时,系统绕 z 轴的角动量 L_z 为守恒量. 同样也可证明,系统在绕 x 轴和 y 轴转动的无穷小变换下,若系统的作用量不变,则系统的 L_x 和 L_y 为守恒量. 也就是说,系统的势为球对称势时,粒子在此势下运动,则此系统的总角动量是守恒的. 这一守恒量是与系统作用量在空间无穷小转动下的不变性联系在一起的.

从这里我们可以看出，把守恒律与系统的对称性联系起来，这是用变分原理表述经典力学的优点之一，它也是人们对微观世界进行理论探讨的重要基石.

第二十一、二十二章习题

22.1 对于 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\neq 0$，请证明以下两种形式的 Euler－Lagrange 方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

是等价的.（Euler－Lagrange 方程具有多种形式.）

22.2 对常参数 α 的泛函

$$I(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} f[y(x,\alpha),y_x(x,\alpha),x]\mathrm{d}x$$

把被积函数 f 在 $\alpha=0$ 点展成参数 α 的 Taylor 级数，由泛函取极值的条件 $\dfrac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha}=0$，请导出 Euler－Lagrange 方程.

22.3 求下列泛函取极值的 Euler－Lagrange 方程，并对方程进行求解.

(1) $I=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\frac{x}{x+y'}\mathrm{d}x$　　(2) $I=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$

22.4 求下列不显含 x 的泛函取极值时的 Euler－Lagrange 方程，并对方程进行求解.

(1) $I=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y^2y'^2}\mathrm{d}x$　　(2) $I=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2)\mathrm{d}x$

22.5 请写出粒子作自由落体下落的 Hamieton 量，并给出这一系统的正则方程，说明这一正则方程与牛顿力学中自由落体运动方程的等价性.

22.6 请写出线性谐振子的 Hamilton 量，并求出这一系统的 Hamilton 正则方程. 进一步说明这一正则方程与牛顿力学中得到的线性谐振子的运动方程的等价性.

22.7 对于广义动能

$$T=\alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad \alpha_{ij}=\alpha_{ji},$$

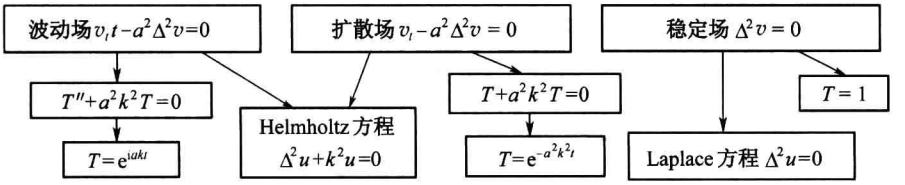
请证明：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T$$

22.8 试构造一个简单的物理系统的作用量，当该系统对时间 t 进行无穷小平移变换时，若系统的作用量保持不变，请证明这一系统的能量是个守恒量.

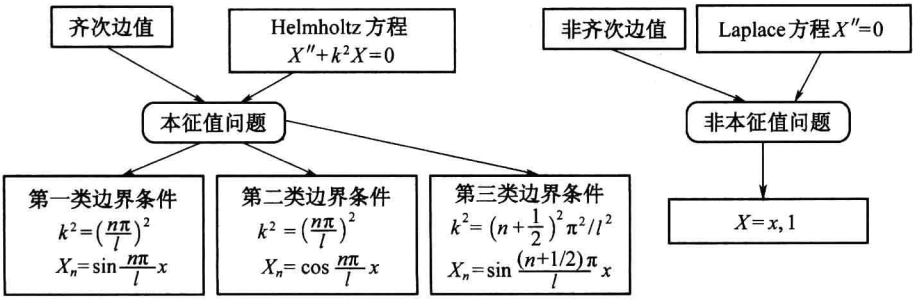
附录：分离变量法

一、三类场方程的分量 $v(t,\boldsymbol{r})=T(t)u(\boldsymbol{r})$

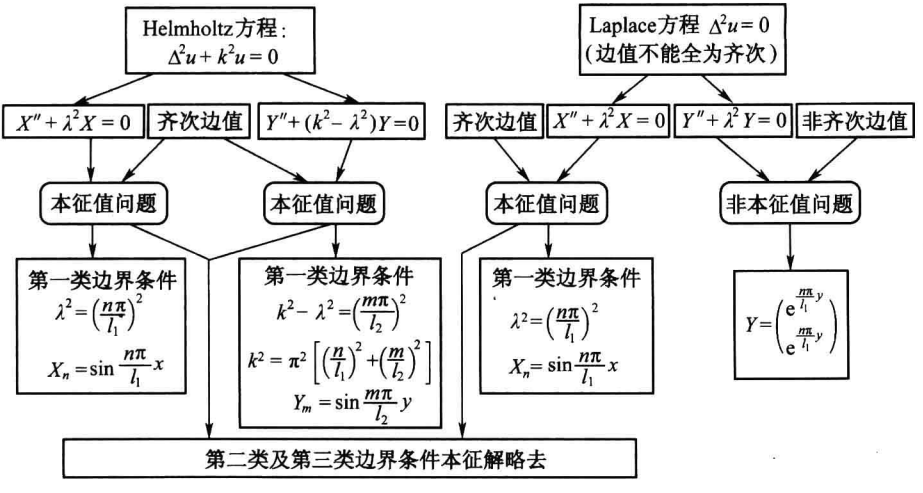


二、空间方程在直角坐标中的变量分离

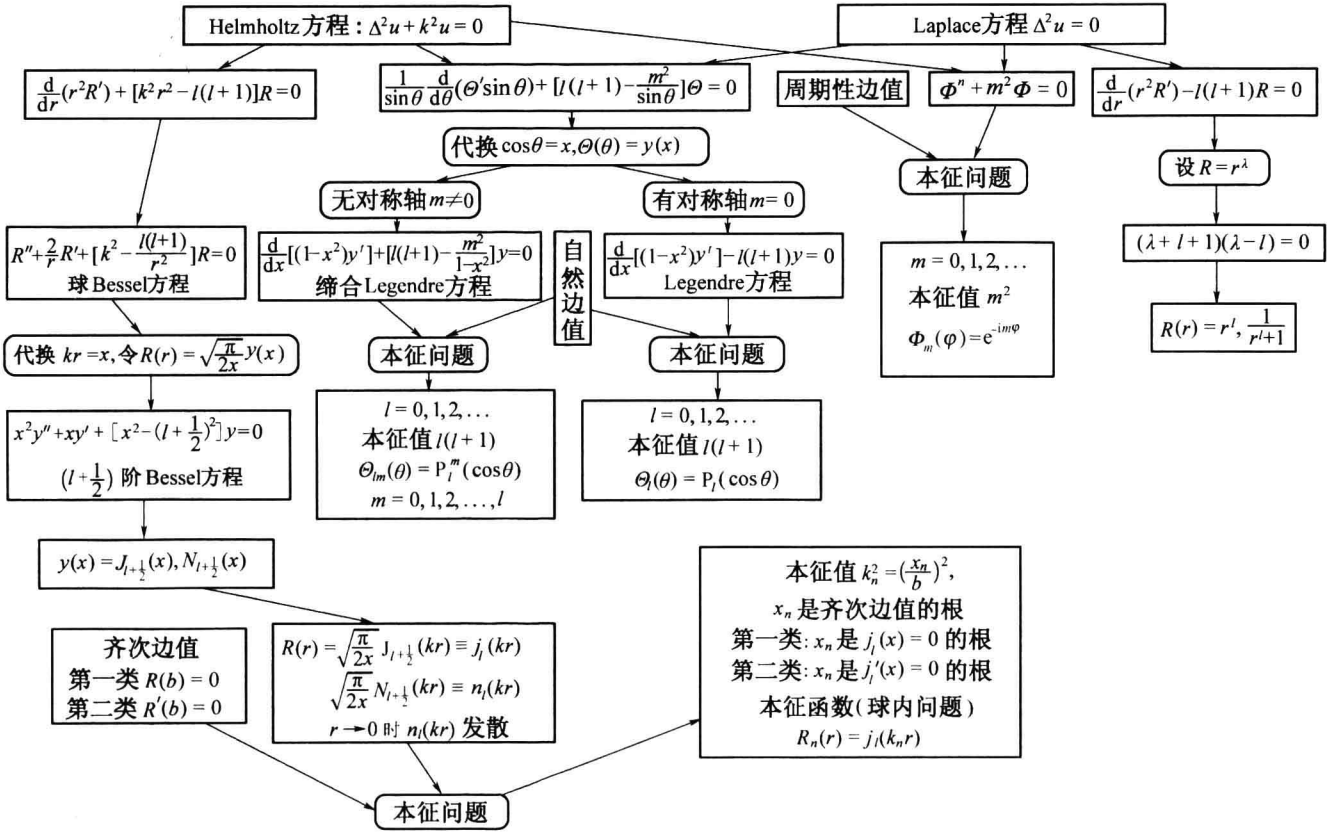
（1）一维空间问题 $u=X(x)$



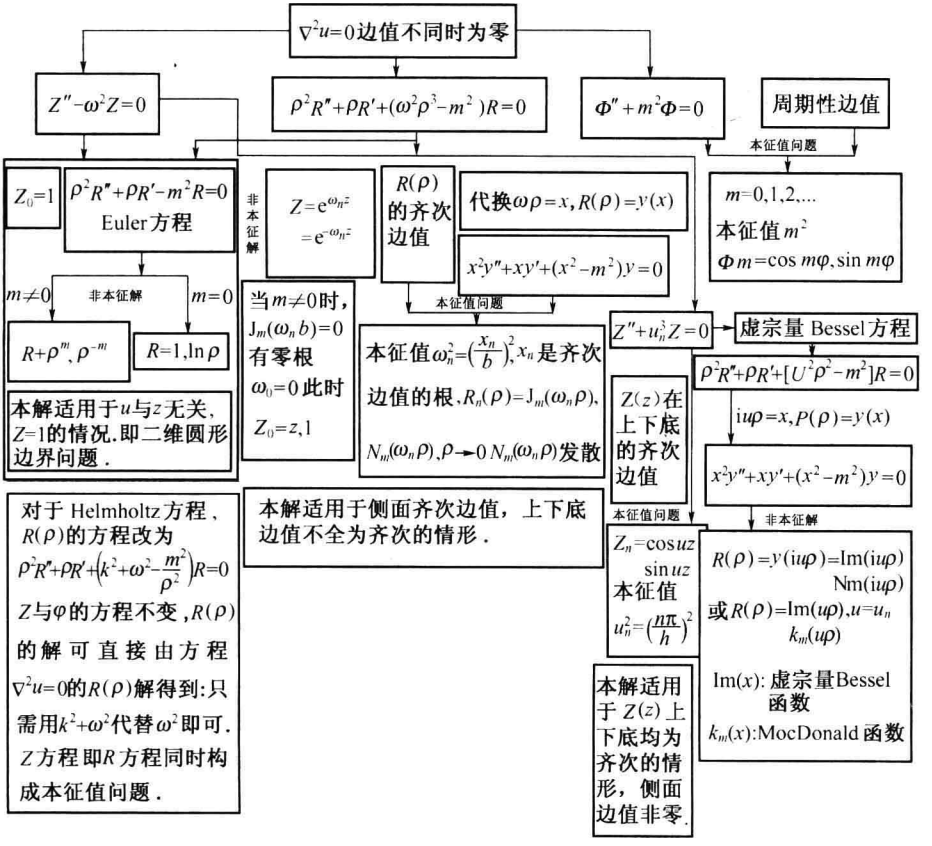
（2）二维空间问题 $u=X(x)Y(y)$



三、空间方程在球坐标系中的变量分离 $u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$



四、拉普拉斯方程在柱坐标系中的变量分离 $u=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$



五、各种本征函数族的正交性及模方

1. 直角坐标系中的本征函数$\left\{\cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$

正交性
$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x &= 0\\ \int_0^1 \cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x &= 0\end{aligned}\right\} n\neq k$$

$$\int_0^1 \cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0,\quad n=k \text{ 或 } n\neq k,$$

模方 $[Nn]^2 = \int_0^1 \left[\cos\frac{n\pi}{l}x\right]^2 \mathrm{d}x = \begin{cases} l, & n = 0 \\ \dfrac{l}{2}, & n \geqslant 1 \end{cases}$

$[Nn]^2 = \int_0^1 \left[\sin\frac{n\pi}{l}x\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{l}{2}, n \geqslant 1.$

2. 球坐标柱坐标系中 $\Phi(\varphi)$ 的本征函数 $\cos m\varphi, \sin m\varphi$

正交性 $\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin m\varphi \mathrm{d}\varphi = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos m\varphi \mathrm{d}\varphi = 0 \end{aligned}\right\} m \neq k$

$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \sin m\varphi \mathrm{d}\varphi = 0, m = k \text{ 或 } m \neq k,$

模方 $[Nm]^2 = \int_0^{2\pi} [\cos m\varphi]^2 \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 2\pi, & m = 0 \\ \pi, & m \geqslant 1 \end{cases}$

$[Nm]^2 = \int_0^{2\pi} [\sin m\varphi]^2 \mathrm{d}\varphi = \pi, m \geqslant 1.$

3. 球坐标中 $\Theta(\theta)$ 的本征函数 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$

正交性 $\int_{-1}^1 \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0, l \neq k, x = \cos\theta$

$\int_{-1}^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0, l \neq k, m = 0,$

模方 $[N_l^m]^2 = \int_{-1}^1 [\mathrm{P}_l^m(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$

$[N_l]^2 = \int_{-1}^1 [\mathrm{P}_l(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}.$

4. 柱坐标 $R(\rho)$ 的本征函数 $\mathrm{Im}(\omega\rho)$

正交性 $\int_0^b \mathrm{Im}(\omega_n\rho)\mathrm{Im}(\omega_k\rho)\rho\mathrm{d}\rho = 0, n \neq k$

模方 $[N_m^n]^2 = \int [\mathrm{J}_m(\omega_n\rho)]^2 \rho\mathrm{d}\rho = \frac{b^2}{2}[\mathrm{J}'\omega_n\rho]^2 + \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{m^2}{(\omega_n b)^2}\right)[\mathrm{J}_m(\omega_n b)]^2$

5. 球坐标系中 $R(r)$ 的本征函数 $j_l(K_m)$

正交性 $\int_0^b j_l(K_n r) j_l(K_m r) r^2 \mathrm{d}r = 0, n \neq m$

模方 $[N_l^m]^2 = \int_0^b [j_l(K_m r)]^2 r^2 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2K_m}\int_0^b [j_{l+\frac{1}{2}}(K_m r)]^2 r\mathrm{d}r$

六、分离变量法运用的条件

1. 方程中不出现交叉导数，如 u_{tt}, u_{xx} 之类，因而波动方程 $u_{tt} = a^2\nabla^2 u$，扩散

方程 $u_t = a^2 \nabla^2 u$，稳定场方程 $\nabla^2 u = 0$，Schrödinger 方程 $\mathrm{i}\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[-\frac{\left(\frac{h}{2\pi}\right)}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right]\varphi$，Helmhotz $\nabla^2 u + k^2 u = 0$.

均可以在直角坐标、球坐标、柱坐标中分离变量.

2. 边界条件也能分离变量，这就要求问题的边界面与一个或几个坐标面相合.

七、分离变量法的解的特点

1. 在有界空间，本征值取分立值，本征函数构成分立谱，通解是本征函数的线性叠加.

2. 在无界空间，本征值取连续值，本征函数构成连续谱，通解是本征函数的积分.

主要参考文献

[1] 梁昆淼. 数学物理方法. 2 版. 北京:高等教育出版社,1978.
梁昆淼,刘法,缪国庆. 数学物理方法. 4 版. 北京: 高等教育出版社,2010.

[2] 郭敦仁. 数学物理方法. 2 版. 北京: 高等教育出版社,1991.

[3] 吴崇试. 数学物理方法. 2 版. 北京: 北京大学出版社,2003.

[4] 陆全康,赵蕙芬. 数学物理方法. 2 版. 北京: 高等教育出版社,2003.

[5] 姚端正,梁家宝. 数学物理方法. 3 版. 北京: 科学出版社,2010.

[6] 胡嗣柱,倪光炯. 数学物理方法. 2 版. 北京: 高等教育出版社,2002.

[7] 刘连寿,王正青. 数学物理方法. 北京: 高等教育出版社,1990.

[8] G B Arfken, H J Weber. Mathematical Methods for Physicists. 6th ed. Singapore: Elsevier. Pte Ltd. 2006.

[9] H Jeffreys, B. Swirles. Methods of Mathematical Physics. 3rd ed. New York: Cambridge Univ Press, 1956.

[10] J T Cushing. Applied Analytical Mathematics for Physical Scientists. New York: John Wiley & Sons, 1975.

[11] C Harper. Introduction to Mathematical Physics. Prentice – Hall, 1976.

[12] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社,1979.

[13] 吉洪诺夫,萨马尔斯基. 数学物理方程. 黄克欧等译. 北京: 人民教育出版社,1961.

[14] 姜礼尚,陈亚浙. 数学物理方程讲义. 2 版. 北京: 高等教育出版社,1996.

[15] 刘式适,刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京: 北京大学出版社,2000.

[16] 王明亮. 非线性发展方程与孤立子. 兰州: 兰州大学出版社,1990.

[17] 李志斌. 非线性数学物理方程的行波解. 北京: 科学出版社,2007.

[18] C. K. Chui, An Introduction to Wavelets. Academic Press Inc. 1992.

[19] 李世雄,刘家琦. 小波变换和反演数学基础. 北京: 地质出版社,1994.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@ hep. com. cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

数学物理方法课程推荐教材

- 978-704028352-5 数学物理方法（第四版）
- 978-704010472-1 数学物理方法（第二版） 胡嗣柱
- 978-704011909-1 数学物理方法（第二版） 陆全康
- 978-704036403-3 数学物理方法 杨孔庆
- 978-704013984-6 数学物理方法（第三版） 刘连寿
- 978-704030667-4 数学物理方法（配盘） 李元杰

ISBN 978-7-04-036403-3
9 787040 364033 >
定价 40.00 元